ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΠΑΣΩΝ ΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ, ΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΥΠΟ

Κ. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΟΥ
Τέως Ἐπιθεωρητοῦ
τῆς Ἐμπορικῆς Ἐκπαιδεύσεως

καὶ

Κ. ΧΑΤΖΗΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Διευθυντοῦ
τῆς Ἐμπορ. Σχολῆς Βόλου

Τιμᾶται μετὰ τοῦ βιβλιοσήμου δρ. 12.—
(Ἀξία βιβλιοσήμου δρ. 2.40)
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 27967
Ἀριθμ. ἀδείας κυκλοφορίας 530, 15 Ἰουλίου 1922

ΠΡΑΚΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΠΑΣΩΝ ΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ, ΑΣΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΥΠΟ

Κ. ΠΑΠΑΖΑΧΑΡΙΟΥ
Τέως Ἐπιθεωρητοῦ
τῆς Ἐμπορικῆς Ἐκπαιδεύσεως

καὶ

Κ. ΧΑΤΖΗΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
Διευθυντοῦ
τῆς Ἐμπορ. Σχολῆς Βόλου

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΚΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ,,
44 - ΕΝ ΟΔΩι ΣΤΑΔΙΟΥ - 44
1922

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τῶν συγγραφέων καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

Ἐκ τοῦ τυπογραφείου Γ. Η. ΚΑΛΛΕΡΓΗ καὶ Σια Πανεπιστημίου 22.

...Η

1. Οἱ μαθηταὶ τάξεώς τινος ὁμοῦ λαμβανόμενοι ἀποτελοῦσιν ἓν πλῆθος καὶ ἐν γένει πολλὰ ὅμοια πράγματα ἢ ἀνόμοια, ὧν τὰς διαφορὰς παραβλέπομεν, ὁμοῦ λαμβανόμενα ἀποτελοῦσιν ἓν πλῆθος. Ἀλλὰ καὶ ἓν μόνον πρᾶγμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πλῆθος.

Τὸ πλῆθος καλεῖται ὡρισμένον, ἂν γνωρίζωμεν ἀπὸ πόσα πράγματα ἀποτελεῖται τοῦτο· ὡς π. χ. εἴκοσι μαθηταί, δέκα θρανία, ἓν μῆλον κλ. Τὰ εἴκοσι, δέκα, ἓν κτλ., διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζεται τὸ πλῆθος, καλοῦνται ἀριθμοί.

Εὑρίσκομεν δὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁρίζοντα πλῆθός τι, ἂν συγκρίνωμεν τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν θεωρουμένων πραγμάτων πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν· ἡ τοιαύτη σύγκρισις καλεῖται ***ἀρίθμησις*** καὶ τὸ ἓν πρᾶγμα, πρὸς τὸ ὁποῖον ἐγένετο ἡ σύγκρισις, ***μονάς.***

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν· ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν τάξεων σχολείου τινός, λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν μίαν τάξιν, ἤτοι σύνολον πολλῶν μαθητῶν· ὁμοίως κατὰ δωδεκάδας ἀριθμοῦμεν τὰ ῥινόμακτρα καὶ πολλὰ οἰκιακὰ σκεύη. Ὅθεν καὶ ὁλόκληρον πλῆθος, ὡς μία τάξις μαθητῶν, δωδεκὰς ῥινομάκτρων κτλ. λαμβάνεται ὡς μονάς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπονται οἱ ἑξῆς ὁρισμοί.

2. **«Μονὰς καλεῖται τὸ ἓν τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων ἢ τὸ σύνολον πολλῶν πραγμάτων ὁμοῦ λαμβανομένων».**

3. **«Ἀριθμὸς καλεῖται ἡ ἔννοια, ἡ ὁρίζουσα πλῆθός τι».**

4. **«Ἀριθμητικὴ καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν ἐν γένει.**

β') Ἀρίθμησις.

5. Ἀρίθμησις καλεῖται ἡ διδασκαλία περὶ τῆς ὀνομασίας καὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

Καὶ ἡ μὲν ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν καλεῖται προφορικὴ ἀρίθμησις, ἡ δὲ γραφὴ αὐτῶν γραπτὴ ἀρίθμησις.

α') Προφορικὴ ἀρίθμησις.

6. Ἡ μονὰς καλεῖται ἕν· ἐὰν εἰς ταύτην προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς δύο, ἂν εἰς τοῦτον προστεθῇ καὶ ἄλλη μονάς, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς τρία κ.ο.κ. λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τέσσαρα πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι παριστῶσι μονάδας πρώτης τάξεως.

ΣΗΜ.—Ἐὰν ἐξακολουθῶμεν εἰς ἕκαστον ἑπόμενον ἀριθμὸν νὰ δίδωμεν ἰδιαίτερον ὄνομα, θὰ ἀπῃτοῦντο ἀπειροπληθεῖς λέξεις διὰ τὴν ὀνομασίαν τῶν ἀριθμῶν καὶ ἡ ἀπομνημόνευσις τῶν λέξεων τούτων θὰ ἦτο δυσχερεστάτη ἢ μᾶλλον ἀδύνατος. Ἀλλὰ διὰ τοῦ τρόπου, ὃν παρέχει ἡμῖν τὸ μέρος τοῦτο τῆς ἀριθμητικῆς (τὸ περὶ ἀριθμήσεως), κατορθοῦμεν νὰ ἔχωμεν τὰς ὀνομασίας τῶν ἀπειροπληθῶν ἀριθμῶν δι' ὀλιγίστων πρωτοτύπων καί τινων παραγώγων λέξεων.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐννέα προστεθῇ μία μονάς, προκύπτει ἀριθμός, καλούμενος δέκα, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα δευτέρας τάξεως, καλουμένην δεκάδα. Ἐκ ταύτης διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζονται αἱ διάφοροι δεκάδες, αἵτινες ὀνομάζονται ὡς ἑξῆς· αἱ δύο δεκάδες εἴκοσιν, αἱ τρεῖς τριάκοντα κ.ο.κ., τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα.

Ὀνομάζομεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεκάδων, ὀνομάζοντες ὁμοῦ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας· π. χ. εἴκοσι-τρία, ὀγδοήκοντα-πέντε κτλ. Ὁ ἀριθμὸς δέκα-ἓν ὀνομάζεται ἕνδεκα καὶ ὁ δέκα-δύο δώδεκα.

Αἱ δέκα δεκάδες ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν ἑκατόν, ὅστις λαμβάνεται ὡς μονὰς τρίτης τάξεως καὶ καλεῖται ἑκατοντάς. Ἐκ ταύτης διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζονται αἱ διάφοροι ἑκατοντάδες, δύο ἑκατοντάδες ἢ διακόσια, τρεῖς ἑκατοντάδες ἢ τριακόσια, κ.ο.κ., τετρακόσια, πεντακόσια, ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννεακόσια.

Ὀνομάζομεν ἀριθμόν, περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἑκατοντάδων, ἑνώνοντες μὲ τὸ ὄνομα τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὸ ὄνομα ἑνὸς τῶν προηγουμένων ἐνενήκοντα ἐννέα ἀριθμῶν· π. χ. πεντακόσια-ἑβδομήκοντα-δύο, ὀκτακόσια-ἑπτὰ κτλ.

Ἡ μονάς, ἡ δεκὰς καὶ ἡ ἑκατοντὰς ἀποτελοῦσι τὴν πρώτην κλάσιν μονάδων ἢ τὴν κλάσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Αἱ δέκα ἑκατοντάδες ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν χίλια, ὅστις λαμβάνεται ὡς μονὰς τετάρτης τάξεως καὶ καλεῖται χιλιάς. Ἐκ ταύτης διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζονται δύο-χιλιάδες, τρεῖς-χιλιάδες κ.τ.λ. ἐννέα-χιλιάδες.

Αἱ δέκα χιλιάδες ἀποτελοῦσι μονάδα πέμπτης τάξεως, τὴν δεκάδα χιλιάδων. Ἐκ ταύτης γίνονται εἴκοσι χιλιάδες, τριάκοντα χιλιάδες κ.τ.λ. ἐνενήκοντα χιλιάδες.

Αἱ δέκα δεκάδες χιλ. ἀποτελοῦσι νέαν μονάδα ἕκτης τάξεως, τὴν ἑκατοντάδα χιλιάδων. Ἐκ ταύτης γίνονται διακόσιαι-χιλιάδες, τριακόσιαι-χιλιάδες κ.τ.λ. ἐννεακόσιαι χιλιάδες.

Ὀνομάζομεν ἀριθμόν, περιεχόμενον μεταξὺ δύο διαδοχικῶν χιλιάδων, ἑνώνοντες μὲ τὸ ὄνομα τῶν χιλιάδων καὶ τὸ ὄνομα ἑνὸς τῶν προηγουμένων ἐννεακοσίων-ἐνενήκοντα-ἐννέα ἀριθμῶν· π. χ. πέντε-χιλιάδες-ἑξακόσια-πεντήκοντα ἑπτά, ὀκτακόσιαι-πέντε-χιλιάδες-τριακόσια-ἑξήκοντα-ὀκτὼ κ.τ.λ.

Ἡ μονάς, δεκὰς καὶ ἑκατοντὰς χιλιάδων ἀποτελοῦσι τὴν δευτέραν κλάσιν μονάδων ἢ τὴν κλάσιν τῶν χιλιάδων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον αἱ δέκα ἑκατοντάδες χιλ. ἀποτελοῦσι τὴν μονάδα ἑκατομμυρίου, αἱ δέκα μονάδες ἑκατομμυρίου τὴν δεκάδα ἑκατομμυρίου καὶ δέκα τοιαῦται τὴν ἑκατοντάδα ἑκατομμυρίου, ἤτοι μονάδας ἑβδόμης, ὀγδόης καὶ ἐνάτης τάξεως. Αἱ μονάδες αὗται ἀποτελοῦσι τὴν τρίτην κλάσιν ἢ τὴν κλάσιν τῶν ἑκατομμυρίων.

Ὁμοίως σχηματίζομεν καὶ μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας δισεκατομμυρίων, ἤτοι τὴν κλάσιν τῶν δισεκατομμυρίων κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπονται τὰ ἑξῆς:

7. Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Χίλιαι δὲ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως εἴς τινα κλάσιν ἀποτελοῦσι μίαν ἀντίστοιχον μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας κλάσεως. Ἄρα πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων οὕτως, ὥστε νὰ μὴ περιέχῃ ἐξ ἑκάστης τάξεως περισσοτέρας τῶν ἐννέα.

β') Γραπτὴ ἀρίθμησις.

Παριστάνομεν τοὺς ἐννέα ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἑξῆς συμβόλων 1 (=ἕν), 2 (=δύο), 3 (=τρία), 4 (=τέσσαρα), 5 (=πέντε), 6 (=ἕξ), 7 (=ἑπτά), 8 (=ὀκτώ), 9 (=ἐννέα), τὰ ὁποῖα καλοῦμεν σημαντικὰ ψηφία. Δεχόμεθα δὲ καὶ δέκατον ψηφίον, τὸ 0, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν μηδὲν καὶ διὰ τοῦ ὁποίου παριστάνομεν τὴν ἔλλειψιν μονάδων.

Διὰ νὰ γράψωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ τῶν δέκα τούτων ψηφίων, θέτομεν τὴν ἑξῆς συνθήκην.

8. Πᾶν ψηφίον γραφόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι ἕκαστον ἐκ τῶν ἐννέα σημαντικῶν ψηφίων μόνον γεγραμμένον σημαίνει ἁπλᾶς μονάδας· ἂν γραφῇ πρὸ ἄλλου, θὰ σημαίνῃ δεκάδας, καὶ ἂν γραφῇ πρὸ τῶν δεκάδων, θὰ σημαίνῃ ἑκατοντάδας κ.ο.κ.

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 6 περιέχει ἓξ ἁπλᾶς μονάδας· ὁ 73 ἔχει ἑπτὰ δεκάδας καὶ τρεῖς μονάδας· ὁ 458 ἔχει τέσσαρας ἑκατοντάδας, πέντε δεκάδας καὶ ὀκτὼ μονάδας· ὁ 5307 ἔχει πέντε χιλιάδας, τρεῖς ἑκατοντάδας καὶ ἑπτὰ μονάδας· εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων, αἵτινες ἐλλείπουσι, γράφεται τὸ 0.

Ὅθεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων κατέχει τὴν πρώτην θέσιν ἐν τῷ ἀριθμῷ ἐκ δεξιῶν αὐτοῦ, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τὴν δευτέραν, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τὴν τρίτην, τὸ ψηφίον τῶν μονάδων χιλ. τὴν τετάρτην, τῶν δεκάδων χιλ. τὴν πέμπτην, τῶν ἑκατοντάδων χιλ. τὴν ἕκτην, τῶν μονάδων ἑκατομμυρίου τὴν ἑβδόμην κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

9. ***Γραφὴ ἀριθμῶν***. Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμόν τινα, θέτομεν τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὰ ψηφία, τὰ παριστῶντα πόσας μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας ἑκάστης κλάσεως ἔχει ὁ ἀριθμὸς (§ 7), γράφοντες μηδενικὰ εἰς τὰς θέσεις τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἐλλείπουσι.

Π. χ. διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμὸν ἔχοντα 5 μονάδας, 8 ἑκατοντάδας, 7 δεκάδας χιλ. καὶ 9 ἑκατοντάδας χιλ., γράφομεν ἐκ δεξιῶν ἀρχόμενοι πρῶτον τὸ 5, ἀριστερὰ τούτου 0, ἀριστερὰ τούτου τὸ 8, ἀριστερὰ τούτου 0, ἀριστερὰ δ' αὐτοῦ 7 καὶ τέλος ἀριστερὰ τούτου 9, ἤτοι 970805.

ΣΗΜ.—Οἱ μικρότεροι τοῦ δέκα ἀριθμοί, οἱ γραφόμενοι δι' ἑνὸς ψηφίου, καλοῦνται *μονοψήφιοι*· οἱ μεταξὺ δέκα μέχρι ἑκατὸν περιλαμβανόμενοι, ὡς γραφόμενοι διὰ δύο ψηφίων, καλοῦνται *διψήφιοι* ὡς 10, 12, 25 κτλ. Ὁμοίως οἱ διὰ τριῶν ψηφίων γραφόμενοι καλοῦνται *τριψήφιοι*, ὡς 528, 205 κτλ., οἱ διὰ τεσσάρων *τετραψήφιοι* κ. ο. κ. Ἐν γένει δὲ οἱ ἔχοντες περισσότερα τοῦ ἑνὸς ψηφία καλοῦνται *πολυψήφιοι*.

10. ***Ἀπαγγελία ἀριθμοῦ***. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν γεγραμμένον, ὅστις δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων ἢ ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς ἁπλᾶς μονάδας ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του.

Π. χ. 48 ἀπαγγέλλεται α′) τεσσαράκοντα-ὀκτὼ μονάδες, β′) 4 δεκάδες καὶ 8 μονάδες. Ὁμοίως ὁ 709 ἀπαγγέλλεται α′) ἑπτακόσιαι-ἐννέα μονάδες, β′) 7 ἑκατοντάδες καὶ 9 μονάδες.

Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν δὲ ἀριθμόν, ἔχοντα περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του ἢ χωρίζομεν αὐτὸν ἐκ δεξιῶν ἀρχόμενοι εἰς τριψήφια τμήματα, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς διαδοχικὰς κλάσεις μονάδων, ἀπαγγέλλοντες ἕκαστον τμῆμα χωριστὰ μὲ τὸ γενικὸν ὄνομα τῆς ἀντιστοίχου κλάσεως μονάδων· καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἐκ δεξιῶν τμῆμα εἶναι τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὸ δὲ δεύτερον τῶν χιλιάδων, τὸ τρίτον τῶν ἑκατομμυρίων, τὸ τέταρτον τῶν δισεκατομμυρίων κ.ο.κ.

Π. χ. ὁ 45807 ἀπαγγέλλεται α′) 4 δεκάδες χιλ., 5 μονάδες χιλ., 8 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες, β′) χωριζόμενος εἰς τριψήφια τμήματα 45,807 τεσσαράκοντα-πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσιαι-ἑπτὰ μονάδες. Ὁμοίως ὁ 9,705,480 ἀπαγγέλλεται α′) 9 μονάδες ἑκατομ., 7 ἑκατοντάδες χιλ., 5 μονάδες χιλ., 4 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες· β′) κατὰ τμήματα, ἤτοι ἐννέα ἑκατομμύρια, ἑπτακόσιαι-πέντε χιλιάδες καὶ τετρακόσιαι-ὀγδοήκοντα μονάδες.

Ἐκ τούτων ἐξάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας.

1ον) Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, δύναται ν' ἀπαγγελθῇ κατὰ δύο τρόπους· ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του ἢ ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς μονάδας, τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον, δηλαδὴ ὡς ἁπλᾶς μονάδας· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 48 ἀπαγγέλλεται ἢ τέσσαρες δεκάδες καὶ 8 μονάδες ἢ τεσσαράκοντα ὀκτὼ μονάδες. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 709 ἀπαγγέλλεται ἢ 7 ἑκατοντάδες 9 μονάδες ἢ ἑπτακόσιαι ἐννέα μονάδες.

2ον) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, ἀπαγγέλλεται κατὰ δύο τρόπους· ἢ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον αὐτοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του ἢ χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀρχόμενοι καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίου ἑκάστου τμήματος· ἑπομένως τὸ πρῶτον ἐκ δεξιῶν τριψήφιον τμῆμα εἶναι τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὸ δεύτερον τῶν χιλιάδων, τὸ τρίτον τῶν ἑκατομμυρίων, τὸ τέταρτον τῶν δισεκατομμυρίων κ.λ.π.

Π χ. ὁ ἀριθμὸς 45807 ἀπαγγέλλεται 4 δεκάδες χιλιάδων, 5 μονάδες χιλιάδων, 8 ἑκατοντάδες καὶ 7 μονάδες. Δύναται ὅμως ν' ἀπαγγελθῇ καὶ ἄλλως, ἀφ' οὗ χωρισθῇ εἰς τριψήφια τμήματα 45,807, ὡς ἑξῆς· τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδες καὶ ὀκτακόσιαι ἑπτὰ μονάδες. Ὁμοίως ὁ 9,705,480 ἀπαγγέλλεται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον 9 μονάδες ἑκατομμυρίων, 7 ἑκατοντάδες χιλιάδων, 5 μονάδες χιλιάδων, 4 ἑκατοντάδες, 8 δεκάδες ἢ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον ἐννέα ἑκατομμύρια, ἑπτακόσιαι πέντε χιλιάδες καὶ τετρακόσιαι ὀγδοήκοντα μονάδες.

ΣΗΜ. 1.—Τὰ τριψήφια τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁρίζονται διὰ τῶν ἑξῆς μονάδων, 1,1000, 1000000 κλ., ἑκάστη τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τῆς προηγουμένης χιλιάκις ἐπαναλαμβανομένης. Αἱ μονάδες αὗται καλοῦνται *κύριαι ἢ πρωτεύουσαι μονάδες.*

ΣΗΜ. 2.—Οἱ ἀριθμοί, οὓς ἐμάθομεν ἀνωτέρω, ὀνομάζονται *ἀκέραιοι* καὶ ἡ μονὰς 1, ἐξ ἧς γίνονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, λέγεται *ἀκεραία.*

Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί.

11. Οἱ ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς συγκεκριμένους καὶ ἀφῃρημένους. Καὶ συγκεκριμένοι μὲν λέγονται ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι σημαίνουσι πρᾶγμά τι, ὡς 8 μῆλα, 15 ἄνθρωποι, 9 οἰκίαι κτλ. Ἀφῃρημένοι δὲ ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι δὲν σημαίνουσι πρᾶγμά τι, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 8, 9, 15.

12. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ λέγονται ὁμοειδεῖς, ὅταν παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, ὡς 18 θρανία, 20 θρανία καὶ 25 θρανία· ἑτεροειδεῖς δέ, ὅταν παριστῶσι διάφορα πράγματα, π. χ. 4 οἰκίαι, 12 δένδρα, 7 θρανία κτλ.

Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

13. Δύο ἀριθμοὶ καλοῦνται ἴσοι, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν μονάδα τοῦ ἑτέρου, ἤτοι ὅταν ἀποτελῶνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος μονάδων· π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δακτύλων τῆς ἀριστερᾶς χειρός.

Τὸ σημεῖον, δι᾽ οὗ δηλοῦμεν τὴν ἰσότητα δύο ἀριθμῶν, εἶναι τὸ= (ἴσον), ὅπερ γράφεται μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν, ὡς 5=5 ἢ 8=8 κτλ.

14. Ἄνισοι εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι ἴσοι· ἐκ τούτων ὁ ἔχων τὰς περισσοτέρας μονάδας καλεῖται μεγαλύτερος, ὁ δὲ ἕτερος μικρότερος· π. χ. ὁ 8 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 ἢ ὁ 5 μικρότερος τοῦ 8.

Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος εἶναι $>$ καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν, ὧν ὁ μεγαλύτερος εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ συμβόλου, π. χ. $8>5$ ἢ ὁ 8 μεγαλύτερος τοῦ 5, $3<7$ ἢ ὁ 3 μικρότερος τοῦ 7.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς γραφῆς καὶ ἀπαγγελίας τῶν ἀριθμῶν.

1) Γράψατε εἰς μίαν κατακόρυφον στήλην καὶ κατὰ σειρὰν τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων ἀπὸ τῆς ἁπλῆς μονάδος μέχρι τοῦ *δισεκατομμυρίου*.

2) Ὁρίσατε τὴν τάξιν ἑκάστης τῶν μονάδων τούτων.

3) Ποίαν τάξιν κατέχει ἡ ἑκατοντάς, ποίαν ἡ δεκὰς χιλιάδων, ποίαν ἡ ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου κτλ.

4) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἑκατοντάδος, ποσάκις τῆς δεκάδος καὶ ποσάκις τῆς μονάδος;

5) Τὸ χιλιόδραχμον πόσα ἑκατοντάδραχμα ἔχει, πόσα δεκάδραχμα καὶ πόσα μονόδραχμα;

6) Ποσάκις ἡ χιλιὰς εἶναι μικροτέρα τῆς δεκάδος χιλιάδων, ποσάκις τῆς ἑκατοντάδος χιλιάδων καὶ ποσάκις τοῦ ἑκατομμυρίου;

7) Πόσα χιλιόδραχμα περιέχονται εἰς 10.000 δραχμάς, πόσα εἰς 100.000 δραχμὰς καὶ πόσα εἰς 1.000.000 δραχμάς.

8) Ποσάκις ἡ ἑκατοντὰς χιλιάδων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἁπλῆς δεκάδος;

9) Πόσα δεκάδραχμα περιέχονται εἰς 10.000 δραχ.;

10) Ποσάκις τὸ ἑκατομμύριον εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἁπλῆς μονάδος;

11) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α΄) ἀπὸ 10 μέχρι τοῦ 100, οἱ περιέχοντες μόνον δεκάδας· β΄) οἱ ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν ἀπὸ τοῦ 60 μέχρι τοῦ 70·

12) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ α΄) ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 1000, οἱ περιέχοντες μόνον ἑκατοντάδας· β΄) ἀπὸ τοῦ 400 μέχρι τοῦ 500, οἱ περιέχοντες ἑκατοντάδας καὶ δεκάδας· γ΄) οἱ περιεχόμενοι ἀπὸ τοῦ 480 μέχρι τοῦ 490 κατὰ σειράν.

13) Νὰ γραφῶσι α΄) ὁ ἀριθμός, ὁ περιέχων 8 ἑκατοντάδας καὶ 7

μονάδας. β') Ὁ ἀριθμὸς, ὁ περιέχων 8 δεκάδας χιλιάδων, 7 ἑκατοντάδας καὶ 3 δεκάδας. γ') Ὁ ἀριθμός, ὁ περιέχων 5 μονάδας ἑκατομμυρίου, 7 ἑκατοντάδας χιλιάδων, 8 μονάδας χιλιάδων, 2 δεκάδας ἁπλᾶς καὶ 5 μονάδας ἁπλᾶς.

14) Νὰ γραφῶσι α') Ὁ ἀριθμὸς τετρακόσια ἐννέα. β') Πεντακόσια ὀγδοήκοντα τρία. γ') Τρεῖς χιλιάδες ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα. δ') Χίλια πέντε. ε') Δέκα χιλιάδες ὀκτώ. ς') Ἑκατὸν χιλιάδες διακόσια τρία κλπ.

15) Νὰ ἀπαγγελθῶσι καὶ κατὰ τοὺς δύο τρόπους οἱ ἑξῆς ἀριθμοί· 508, 7008, 35802, 458324, 9508237, 500008, 17348250, 85023475.

16) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

17) Ἐν τῷ ἀριθμῷ 58204 α') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων καὶ πόσας ἑκατοντάδας ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος; β') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ πόσας δεκάδας ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος; γ') Ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων καὶ πόσας ἑκατοντάδας χιλιάδων ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος;

ΣΗΜ.– Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας μονάδας τάξεώς τινος ἔχει ἐν ὅλῳ ἀριθμός τις, χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τὸ τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ μέχρι τοῦ ψηφίου τοῦ παριστάνοντος μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· τὸ ὑπολειπόμενον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ παριστᾷ τὰς ζητουμένας μονάδας. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 58204 ἔχει ἐν ὅλῳ 582 ἑκατοντάδας.

18) Ὁ ἀριθμὸς 50837 ἀποτελεῖται ἐξ ἑπτὰ ἁπλῶν μονάδων, ἐκ τριῶν δεκάδων, αἵτινες περιέχουσι 30 ἁπλᾶς μονάδας, ἐξ 8 ἑκατοντάδων, αἵτινες περιέχουσιν 800 ἁπλᾶς μονάδας καὶ ἐκ 5 δεκάδων χιλιάδων, αἵτινες περιέχουσι 50000 ἁπλᾶς μονάδας, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἐκ τῶν

50000, 800, 30, 7.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ν' ἀναλυθῶσι καὶ οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ α') ὁ 588, β') ὁ 45089, γ') ὁ 340083, δ') ὁ 8450372 κ.ο.κ. εἰς τὰς δεκαδικὰς αὐτῶν μονάδας.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι γνωρίζομεν ὅτι ἐκ τῶν τριῶν τάξεων Ἑλληνικοῦ τινος σχολείου ἡ μὲν Α^{η} περιέχει 35 μαθητάς, ἡ δὲ Β^{α} 28 καὶ ἡ Γ^{η} 15 καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσους μαθητὰς ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ σχολεῖον τοῦτο.

Εἶναι ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν τινα, ὅστις νὰ περιέχῃ καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Αης, ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 35 καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Βας, ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 28, καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Γης, ἤτοι τὰς μονάδας τοῦ 15 καὶ μόνον ταύτας. Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας θὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, καλεῖται πρόσθεσις.

15. *Ὁρισμός*.—«Πρόσθεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχουσι δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί».

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καλοῦνται προσθετέοι, ὁ δὲ ἐξ αὐτῶν εὑρισκόμενος κεφάλαιον ἢ ἄθροισμα.

Τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ +, ὅπερ γράφεται μεταξὺ τῶν προσθετέων καὶ ἀπαγγέλλεται σὺν ἢ καί· π. χ. 4+8 σημαίνει νὰ προστεθῶσιν ὁ 4 καὶ ὁ 8 καὶ ἀπαγγέλλεται 4 σὺν 8 ἢ 4 καὶ 8.

ΣΗΜ.—Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀφῃρημένοι, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν γίνεται πάντοτε· οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ προστίθενται, μόνον ἐὰν εἶναι ὁμοειδεῖς· π. χ. δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν 5 οἰκίας καὶ 7 οἰκίας, δὲν εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ προσθέσωμεν ἑτεροειδεῖς ἀριθμούς ὡς 7 δένδρα καὶ 8 οἰκίας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοειδῶν ἀριθμῶν εἶναι καὶ τοῦτο ὁμοειδὲς πρὸς τοὺς προσθετέους.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

α΄) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν μονοψήφιον εἰς δοθέντα ἀριθμόν.

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν πολυψηφίους ἀριθμούς.

16. ***α΄ Περίπτωσις***.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν ἕτερον μονοψήφιον, ἀρκεῖ εἰς τὰς μονάδας τούτου νὰ προσθέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου ἀνὰ μίαν· π.χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 8+3, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τοῦ 3 καὶ προσθέτομεν ταύτην εἰς τὸ 8, ὅτε ἔχομεν 9+2· λαμβάνομεν πάλιν ἀπὸ τοῦ 2 μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὸ 9, ὅτε ἔχομεν 10+1· τέλος προσθέτομεν καὶ τὴν μείνασαν μονάδα, ἤτοι 10+1=11, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 8+3=11.

ΣΗΜ.—Τὸ ἄθροισμα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης καὶ εὐχερῶς, διότι καὶ πᾶσα πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀνάγεται εἰς τοιαύτην πρόσθεσιν.

17. Τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων, εἰς τοῦτο προστεθῇ ὁ τρίτος, εἰς τοῦτο ὁ τέταρτος κ.ο.κ. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ ἄθροισμα 8+7+5+9, προσθέτομεν πρῶτον 8+7=15, εἰς τοῦτο προσθέτομεν τὸ 5 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα 20 προσθέτομεν καὶ τὸ 9 καὶ ἔχομεν τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα 8+7+5+9=29.

18. *β' Περίπτωσις.*—Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται οὕτως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων, διότι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας αὐτῶν, χωριστὰ τὰς δεκάδας, χωριστὰ ἐν γένει τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως.

Ἔστω νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 2432+241+1316. Πρὸς εὐκολίαν τῆς πράξεως γράφομεν τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ὑπ' αὐτοὺς φέρομεν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 6+1+2=9 μον., τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν δεκάδων εἶναι 1+4+3=8 δεκάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα τῶν ἑκατοντάδων εἶναι 3+2+4=9 ἑκατοντάδες, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων, τέλος τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιάδων εἶναι 1+2=3 χιλιάδες· γράφομεν καὶ τὰς 3 χιλιάδας ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων καὶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 3989.

$$\begin{array}{r} 2432 \\ 241 \\ 1316 \\ \hline 3989 \end{array}$$

Ἔστω νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἄθροισμα 897+4789+348. Γράφομεν πάλιν τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως,ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν εὐθεῖαν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 24 καὶ περιέχει 2 δεκάδας καὶ 4 μονάδας. Γράφομεν ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τὰς 4 μονάδας, τὰς δὲ 2 δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 23 δεκάδες, ὅπερ περιέχει 2 ἑκατ. καὶ 3 δεκάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τὰς δὲ 2 ἑκατοντάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι 20, ὅπερ ἀποτελεῖ ἀκριβῶς 2 μονάδας χιλιάδων· γράφομεν ἤδη εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν 0 καὶ προσθέτομεν τὰς 2 χιλιάδας εἰς τὰς 4 χιλιάδας, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 6 γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα 6034.

$$\begin{array}{r} 897 \\ 4789 \\ 348 \\ \hline 6034 \end{array}$$

19. ***Κανών.***—«Διὰ νὰ προσθέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα κάτωθι τοῦ ἄλλου οὕτως,

ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης χωριστά· καί, ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφεται ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἂν δὲ περιέχῃ καὶ δεκάδας, τότε τὰς μὲν μονάδας αὐτοῦ γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν μετὰ τῶν ψηφίων τῆς ἑπομένης στήλης πρὸς τὰ ἀριστερά· προχωροῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ προστεθῶσι καὶ τὰ ψηφία τῆς τελευταίας πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

$$\begin{array}{r} 58347 \\ 7582 \\ 173478 \\ \hline 239407 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45832 \\ 794 \\ 6897 \\ 12475 \\ \hline 65998 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4008 \\ 348 \\ 10298 \\ \hline 14654 \end{array}$$

Πρόβλημα.—Πόσους μαθητὰς ἔχει Ἑλληνικὸν σχολεῖον, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν Αην τάξιν ἔχει 38 μαθητάς, εἰς τὴν Βαν 24 καὶ εἰς τὴν Γην 18;

Εἰς τοὺς 38 μαθητὰς τῆς Αης θὰ προσθέσωμεν τοὺς 24 τῆς Βας καὶ εὑρίσκομεν 38+24=62· εἰς τούτους θὰ προσθέσωμεν τοὺς 18 τῆς Γης, ἤτοι 62+18=80 μαθητὰς ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ σχολεῖον· εὑρίσκομεν δηλ. τὸ ἄθροισμα 38+24+18=80.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα εἰς τοὺς 18 μαθητὰς τῆς Γης νὰ προσθέσωμεν τοὺς 24 τῆς Βας τάξεως (18+24=42) καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ προσθέσωμεν καὶ τοὺς μαθητὰς τῆς Αης (42+38=80), ἤτοι τὸ αὐτὸ πλῆθος μαθητῶν εὑρίσκομεν καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς μαθητὰς τῶν τριῶν τάξεων τοῦ Ἑλληνικοῦ σχολείου. Ὅθεν ἔχομεν 38+24+18=18+24+38.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης:

20. «Τὸ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς».

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.

21. Δοκιμὴ μιᾶς πράξεως καλεῖται ἄλλη πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐξελέγχομεν, ἐὰν ἡ πρώτη πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

22. Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται πάλιν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἄνωθεν πρὸς τὰ κάτω· ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 20).

Νὰ δοκιμασθῶσιν αἱ προηγούμεναι προσθέσεις.

Ἀσκήσεις.

1. Πρόσθεσις ἀπὸ μνήμης.

α΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προθέσεις·

15+8=	5+4+7+2=	18+7+4+8=
23+5=	8+2+9+4=	23+5+7+9=
18+7=	17+5+9+3=	12+8+3+5=
45+8=	28+7+3+5=	7+8+5+2=

β΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

457+10=	1005+100=	2583+1000=
378+10=	2537+100=	18832+1000=
207+10=	13458+100=	34582+1000=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν 10, 100, 1000 κτλ. εἴς τινα ἀριθμόν, ἀρκεῖ ν' αὐξήσωμεν κατὰ 1 τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἢ τῶν ἑκατοντάδων ἢ τῶν χιλιάδων κλπ. ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ. Οὕτω 45+10=55 καὶ 35+100=135 καὶ 1258+1000=2258 κλπ.

γ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι προσθέσεις·

20+30=	380+700=	800+500+200=
150+70=	2500+800=	1200+300+700=
340+80=	3500+600=	2200+800+5000=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμούς, λήγοντας εἰς ἰσάριθμα μηδενικά, παραλείπομεν ταῦτα καὶ προσθέτομεν τὰ μένοντα μέρη καὶ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος γράφομεν τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει εἷς τῶν προσθετέων· π. χ. 50+30 εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς· 5+3=8, γράφομεν καὶ ἓν μηδενικόν, 80, ἤτοι 50+30=80.

δ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

78+31=	123+47=	583+55=
35+52=	248+30=	277+36=
78+45=	358+27=	1247+52=

ΣΗΜ. — Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀπὸ μνήμης δύο ἀριθμοὺς οἱουσδήποτε, ὅταν δὲν εἶναι οὗτοι μεγάλοι, χωρίζομεν αὐτοὺς εἰς δεκάδας καὶ μονάδας καὶ προσθέτομεν χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ χωριστὰ τὰς μονάδας καὶ ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ ἀθροίσματα· π. χ. 45+24· προσθέτομεν 40+20=60 καὶ 5+4=9· ὅθεν 45+24=69. Ὁμοίως 238+85· προσθέτομεν 230+80=310 καὶ 8+5=13· ὅθεν 238+85=323.

2. Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

α') 5835+24579+405087+ 35=
β') 758+25940+ 3587+947823+ 258=
γ') 5087+ 37+ 25830+ 458+ 173457=

Αἱ προσθέσεις αὗται νὰ ἐκτελεσθῶσι, πρῶτον, ἀφ' οὗ οἱ ἀριθμοὶ τεθῶσιν ὁ εἷς κατόπιν τοῦ ἄλλου κατακορύφως, καὶ δεύτερον, ὡς ἔχουσιν, ὁριζοντίως.

δ') 5834+745+50837+2578=
347+ 89+ 2753+ 805=
19757+890+ 3582+7087=
9457+ 35+17508+ 375=

Νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, πρῶτον, ἀνὰ τέσσαρες ὁριζοντίως, δεύτερον κατακορύφως καὶ τρίτον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τούτων ἀθροισμάτων καὶ κατακορύφως καὶ ὁριζοντίως.

ε')	45.607	132 783 ....
	198.082	19 548
	6.428	8.205
	75.935	102.604
	65 480	85.907 ....
	7.692	107.674
	4.526	75.908
	144	491.102
	2.183	187.065

Σημ. Θὰ προστεθῶσι: α') Πάντες οἱ προσθετέοι κατακορύφως· β') Οἱ 5 πρῶτοι μόνον, γραφομένου τοῦ ἀντιστοίχου ἀθροίσματος παραπλεύρως τοῦ τελευταίου ἐξ αὐτῶν· γ') Οἱ ἑπόμενοι 4 προσθετέοι ὁμοίως καὶ δ') τὰ δύο τελευταῖα μερικὰ ἀθροίσματα, ὧν τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ συμφωνῇ πρὸς τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα πάντων τῶν προσθετέων.

Προβλήματα προσθέσεως.

1) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1842 μ. Χ. Κατὰ ποῖον ἔτος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 85 ἐτῶν;

2) Ποῖον ἀριθμὸν δίδει ὁ 8547 αὐξανόμενος κατὰ τὸν 792;

3) Οἰκία τις ἐπωλήθη ἀντὶ 5087 δραχμῶν μὲ ζημίαν 4590. Πόσον ἠγοράσθη;

4) Εἶχέ τις 15408 δραχμὰς καὶ ἐκέρδησεν ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 2597. Πόσας δραχμὰς ἔχει;

5) Ἠγόρασέ τις τέσσαρα φορτία ἀνθράκων, ὧν τὸ πρῶτον ζυγίζει 248 ὀκάδας, τὸ δεύτερον 75 ὀκ., τὸ τρίτον 92 ὀκ. καὶ τὸ τέταρτον 69 ὀκάδας. Πόσας ὀκ. ἀνθράκων ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ;

6) Οἰκογενειάρχης τις ἐπλήρωσεν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς 48 δραχ. διὰ 115 ὀκάδας ἄρτου, εἰς τὸν κρεοπώλην 74 δραχ. διὰ 45 ὀκ. κρέατος, δι' ἐνοίκιον τοῦ μηνὸς 125 δραχ., εἰς τὸν ῥάπτην του 95 δραχ., εἰς ἀγορὰν λαχείων τοῦ Ἐθνικοῦ στόλου 10 δραχ., εἰς τὸν οἰνοπώλην 18 διὰ 20 ὀκάδας οἴνου. Πόσα ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ κατὰ τὸν μῆνα;

(Ἀπ. 370 δραχ.)

7) Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ 1896 ἡ μὲν Στερεὰ Ἑλλὰς εἶχε πληθυσμὸν 630262 κατοίκους, ἡ Πελοπόννησος 902185, αἱ νῆσοι τοῦ Αἰγαίου πελάγους 250269, αἱ Ἰόνιοι νῆσοι 252973 καὶ ἡ Θεσσαλία μετὰ τοῦ νομοῦ Ἄρτης 397459. Πόσος ἦτο ὁ πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1896;

8) Κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ Δεκεμβρίου 1920 ἡ μὲν Στερεὰ Ἑλλὰς εἶχε πληθυσμὸν 991501 κατοίκων, ἡ Πελοπόννησος 924204, αἱ νῆσοι τοῦ Αἰγαίου Πελάγους 528759, αἱ Ἰόνιοι νῆσοι 224141, ἡ Κρήτη 346584, ἡ Θεσσαλια 438403, ἡ Ἤπειρος 266633, ἡ Μακεδονία 1090417, ἡ Θρᾴκη 704208. Πόσος ἦτο ὁ πληθυσμὸς τῆς Νέας Ἑλλάδος κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην;

9) Κρεοπώλης ἐπώλησε πρὸς βυρσοδέψην

62	δέρματα	βοὸς	βάρους	1845	ὀκ.	ἀντὶ 1675	δραχ.
45	»	ἀγελάδος	»	973	»	» 750	»
173	»	μόσχου	»	1032	»	» 1345	»

Πόσα εἶναι τὰ πωληθέντα δέρματα, πόσον τὸ βάρος αὐτῶν καὶ πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

(Ἀπόκρ. 280 δέρματα, 3850 ὀκ., 3778 δραχ.)

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ἐὰν μαθητής τις ἔχῃ 23 πεντάλεπτα καὶ ἐξοδεύσῃ κατά τινα ἡμέραν τὰ 8, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα τῷ ὑπολείπονται ἀκόμη, πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὰς μονάδας τοῦ 23 κατὰ τὰς μονάδας τοῦ 8· ὁ οὕτω προκύψας ἀριθμὸς παριστᾷ τὰ μένοντα πεντάλεπτα. Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας τοῦτο εὑρίσκεται, καλεῖται Ἀφαίρεσις.

Ἡ πρᾶξις αὕτη ὁρίζεται ὡς ἑξῆς·

23. «Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττοῦμεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος τις ἀριθμός».

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐλαττωθῇ, καλεῖται μειωτέος, ὁ δὲ δεικνύων κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, καλεῖται ἀφαιρετέος· αἱ ὑπολειπόμεναι δὲ μονάδες ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον ἢ τὴν διαφοράν.

Τὸ ὑπόλοιπον ἑπομένως δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας εἶναι ὁ μειωτέος μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ὑπόλοιπον προστιθέμενον εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει τὸν μειωτέον. Διὰ τοῦτο ἡ ἀφαίρεσις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ τῆς προσθέσεως ὡς ἑξῆς·

24. «Ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν μικρότερον μᾶς δίδει τὸν μεγαλύτερον».

Τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι—, ὅπερ γράφεται μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἀπαγγέλλεται μεῖον ἢ πλὴν ἢ ἀπό· π. χ. 8—5 σημαίνει ἀφαίρεσιν τοῦ 5 ἀπὸ τοῦ 8 καὶ ἀπαγγέλλεται 8 μεῖον 5 ἢ 8 πλὴν 5 ἢ 5 ἀπὸ 8.

Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος ἰσοῦται τῷ μειωτέῳ, δὲν μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου, ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0, ὡς 7—7=0. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου, ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι δυνατή.

ΣΗΜ.—Ὅπως εἰς τὴν πρόσθεσιν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

α') Ὅταν ἔχωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον μονοψήφιον καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μονοψήφιον.

β') Ὅταν ἔχωμεν ν' ἀφαιρέσωμεν οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

25. α') ***Περίπτωσις.*** — Ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται, ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀνὰ μίαν πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου· π. χ. 11—3, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 11 μίαν μονάδα καὶ ἔχομεν

10, ἀπὸ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἄλλην μονάδα καὶ ἔχομεν 9, τέλος ἀφαιροῦμεν τὴν τρίτην μονάδα ἀκόμη καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 8, ἤτοι 11—3=8.

ΣΗΜ. Αἱ τοιαῦται ἀφαιρέσεις πρέπει νὰ γίνωνται ἀπὸ μνήμης καὶ εὐχερῶς, διότι εἰς ταύτας ἀνάγεται ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Πρόβλημα.—Πατήρ τις ἔχει δύο τέκνα· καὶ τὸ μὲν μεγαλύτερον εἶναι 13, τὸ δὲ μικρότερον 7 ἐτῶν· κατὰ πόσα ἔτη εἶναι μεγαλύτερον τὸ α′ ἀπὸ τὸ β′ ;

Θέλομεν νὰ εὕρωμεν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ τὴν διαφορὰν 13—7=6. Εἶναι φανερὸν ὅτι μετὰ 8 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ α′ θὰ εἶναι 13+8=21, ἡ δὲ τοῦ β′ 7+8=15, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο τέκνων θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ 21—15=6. Ἀλλὰ καὶ πρὸ 5 ἐτῶν, ὅτε ἡ ἡλικία τοῦ α′ ἦτο 13—5=8, ἡ δὲ τοῦ β′ 7—5=2, ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν ἦτο ἡ αὐτή, ἤτοι 8—2=6.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

26. «Ἐὰν προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται».

β′) ***Περίπτωσις.***—Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις 7458 — 2346. Ἐν πρώτοις γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ὑπ᾿ αὐτοὺς σύρομεν εὐθεῖαν ὁριζόντιον γραμμήν. Ἔπειτα δὲ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἑξῆς· Ἀφαιροῦμεν τὸ ψηφίον 6 τῶν μονάδων ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου 8 τοῦ μειωτέου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 8—6=2 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν 4 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 5 δεκάδας τοῦ μειωτέου καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5—4=1 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἀφαιροῦμεν κατόπιν τὰς 3 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 4 ἑκατοντάδας τοῦ μειωτέου, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 4—3=1 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τὰς 2 χιλιάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τῶν 7 χιλιάδων τοῦ μειωτέου καὶ τὸ ὑπόλοιπον 7—2=5 γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον 5112.

$$\begin{array}{r} 7458 \\ 2346 \\ \hline 5112 \end{array}$$

Ἔστω ἡ ἀφαίρεσις 96837—4785. Ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα·

$$\begin{array}{r} 96837 \\ 4785 \\ \hline 92052 \end{array}$$

Παρατηροῦμεν μόνον ὅτι αἱ 8 δεκάδες τοῦ ἀφαιρετέου δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῶν 3 δεκάδων τοῦ μειωτέου· διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο δυνατόν, προσθέτομεν εἰς τὰς 3 δεκάδας τοῦ μειωτέου 10 δεκάδας, ἤτοι 1 ἑκατοντάδα, καὶ ἀπὸ τοῦ 13 ἀφαιροῦμεν τὰς 8 δεκάδας τοῦ ἀφαιρετέου. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τώρα τὰς 7 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ μειωτέου, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ (§ 26), προσθέτομεν καὶ εἰς τὰς 7 ἑκατοντάδας τοῦ ἀφαιρετέου 1 ἑκατοντάδα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

27. ***Κανών***.—«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἐὰν δὲ τύχῃ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ μὲν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατὰ 10, τὸ δὲ προηγούμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν· ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις ὅτου ἀφαιρεθῶσι πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.

$$\begin{array}{r} 58034 \\ 37718 \\ \hline 20316 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150837 \\ 4592 \\ \hline 146245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 300827 \\ 20709 \\ \hline 280118 \end{array}$$

28. ***Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως***.—Αὕτη γίνεται διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου· ἂν ὡς ἄθροισμα τούτων εὕρωμεν τὸν μειωτέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 24).

Ἀσκήσεις.

1. Ἀφαίρεσις ἀπὸ μνήμης.

α΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

17—8=; 45—4=; 745—8=; 27—6=; 87—9=;
379—6=; 15—7=; 91—8=; 523—7=;
47—(8+5+4)=; 120—(8+5+7+10)=;

ΣΗΜ.—Ὅταν ὁλόκληρον ἄθροισμα ἀφαιρῆται ἀπό τινος ἄλλου ἀριθμοῦ, κλείομεν αὐτὸ ἐντὸς παρενθέσεως.

β΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

45—10=	897—100=	15857— 1000=
248—10=	1253—100=	35872— 10000=
3467—10=	8459—100=	750347—100000=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ. ἀπό τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν κατὰ 1 τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ δοθέντος· π.χ 378—10=368 κλπ.

γ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

48—9=	187—99=	1583—999=
157—9=	847—99=	8472—999=
243—9=	2583—99=	12573—999=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 9 ἢ 99 ἢ 999 κλπ. ἀπό τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν τὸν μειωτέον κατὰ 1 καὶ ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ., ὡς 45—9=46—10=36 (προσθέτομεν μίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, § 26)· ὁμοίως 235—99=236—100=136.

δ΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

35+9=	58+99=	39+999=
158+9=	175+99=	257+999=
245+9=	1253+99=	3458+909=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ προσθέσωμεν εἴς τινα ἀριθμὸν τὸ 9 ἢ 99 ἢ 999 κτλ., ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν 10, 100, 1000 κ.λ.π. καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἔπειτα 1· π. χ. 37+9=37+10—1=47—1=46. Ὁμοίως 2548+99= 2548+100—1=2647 κ.ο.κ.

ε΄) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·

70—50=	900—300=	5000—2000=
60—20=	1200—500=	17000—9000=
160—70=	1500—900=	25000—8000=

ΣΗΜ.—Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἀριθμούς, λήγοντας εἰς ἰσάριθμα μηδενικά, παραλείπομεν ταῦτα καὶ ἀφαιροῦμεν, δεξιὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου γράφομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ· π. χ. 1800—600 ἀφαιροῦμεν 18—6=12, γράφομεν δεξιὰ τοῦ 12 δύο μηδενικά, ἤτοι 1800—60=1200.

2. Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις.

5834— 245=	345083— 84773=
75835—2498=	1200834—783457=

Αἱ ἀφαιρέσεις αὗται νὰ ἐκτελεσθῶσι, πρῶτον, ἀφ' οὗ τεθῇ ὁ ἀφαιρετέος κάτωθεν τοῦ μειωτέου, καὶ δεύτερον, ὡς εἶναι γεγραμμένοι οἱ ἀριθμοὶ ὁριζοντίως.

3. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις·

457.178		4572...		....
85.060		851...		....
3.087		31...		....
954	—	10...	=	....
12.165		122...		....
....		....		....

ΣΗΜ.—Ἀπὸ ἑκάστου ἀριθμοῦ τῆς πρώτης στήλης ἀφαιροῦμεν τὸν ἀντίστοιχον τῆς δευτέρας καὶ τὸ ὑπόλοιπον γράφομεν παραπλεύρως εἰς τὴν τρίτην στήλην. Ἔπειτα προσθέτομεν κατακορύφως τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης στήλης. Τὸ ἄθροισμα τῆς γ' στήλης μετὰ τοῦ ὁμοίου τῆς β' πρέπει νὰ δίδῃ ὡς ἄθροισμα τὸ τῆς α'.

Προβλήματα ἀφαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν.

1) Εἶχέ τις 10000 δραχ. καὶ ἐζημιώθη ἔκ τινος ἐπιχειρήσεως 1923 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν ;

2) Ποῖον ἀριθμὸν δίδει ὁ 15783 ἐλαττούμενος κατὰ τὸν 3458 ;

3) Ἠγόρασέ τις κτῆμα ἀντὶ 12585 δραχ. καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ ἀντὶ 14500 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ;

4) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 4580 δραχ., ἅτινα ἐπώλησεν ἀντὶ 3857 δραχ. Πόσας δραχμὰς ἐζημιώθη ;

5) 18 δέρματα βοὸς κατειργασμένα ζυγίζουσιν ἐν ὅλῳ 195 ὀκ. Τὰ δέρματα ταῦτα ἀπέβαλον διὰ τῆς κατεργασίας 112 ὀκ. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζον πρὸ τῆς κατεργασίας ;

6) Σιδηροῦν βαρέλλιον πλῆρες οἰνοπνεύματος ζυγίζει 248 ὀκ., κενὸν δὲ 67 ὀκ. Πόσας ὀκ. οἰνοπνεύματος περιέχει τὸ βαρέλλιον τοῦτο ;

7) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη κατὰ τὸ ἔτος 1854 μ. Χ. καὶ ἀπέθανε τῷ 1902 μ. Χ. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ; (Ἀπ. 48 ἐτῶν).

8) Ἄνθρωπός τις εἶχε κατὰ τὸ ἔτος 1907 μ. Χ. ἡλικίαν 63 ἐτῶν. Κατὰ ποῖον ἔτος ἐγεννήθη ; (Ἀπ. τὸ 1844).

9) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κων)πόλεως μέχρι τοῦ 1ου ἔτους τῆς Ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως ; (Ἀπ. 368 ἔτη).

10) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Κων)πόλεως ; (Ἀπ. 1933 ἔτη).

11) Τρία κιβώτια περιέχουσι 1435 πορτοκάλλια. Τὸ α' περιέχει 458, τὸ β' 635. Πόσα πορτοκάλλια περιέχει τὸ τρίτον; ('Απ. 342).

12) Πόσας ὀκάδας ἄρτου δίδουσιν 100 ὀκ. ἀλεύρου, ἐὰν χρειάζωνται 58 ὀκ. ὕδατος, διὰ νὰ ζυμωθῇ τὸ ἄλευρον τοῦτο, καὶ ἂν κατὰ τὴν ὄπτησιν ἐξατμίζωνται 24 ὀκ. ὕδατος; ('Απ. ὀκάδ. 134).

13) Χρεωστεῖ τις εἴς τινα 58749 δρ. καὶ πληρώνει εἰς αὐτὸν κατά τινα ἐποχὴν 7459 δρ., κατά τινα ἄλλην 3478 δρ. καὶ κατ' ἄλλην 757 δραχμὰς καὶ τέλος 10405 δραχ. Πόσας δραχ. ὀφείλει ἀκόμη; ('Απ. 36650 δρ.).

14) Ἔμπορός τις εἶχεν 8750 δρ. καὶ χρεωστεῖ εἴς τινα 7840 δρ., εἰς ἄλλον 2879 δρ. καὶ εἰς τρίτον 3458 δρ. Πόσας δραχ. χρειάζεται ἀκόμη διὰ νὰ πληρώσῃ καὶ τοὺς τρεῖς; ('Απ. 5427 δραχ.).

15) Ἔμπορός τις εἶχε τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του 5672 δραχ. Εἰσέπραξε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας α') 2458 δραχ., β') 845 δραχ., γ') 157 δραχ. καὶ δ') 257 δραχ. Ἐπλήρωσε δὲ τὰ ἑξῆς ποσά· α') 783 δραχ. β') 1257 δραχ. γ') 349 δραχ. Πόσαι δραχμαὶ εὑρίσκονται ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του κατὰ τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας; ('Απ. 7000 δρ.).

16) Ἔμπορός τις ἠγόρασε ζάκχαριν ἀντὶ 12347 δρ. Τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς ἀνῆλθον εἰς 328 δρ., τὰ τῆς ἀποθηκεύσεως εἰς 295 δραχ., ἐπλήρωσε δὲ καὶ διὰ δασμὸν 9547 δραχ., ἐκ τῆς μεταπωλήσεως δὲ αὐτῆς εἰσέπραξε 25512 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐκ τοῦ ἐμπορεύματος τούτου; ('Απ. κέρδος 2995 δραχ.).

17) Ὑφασματοπώλης εἶχεν εἰς τὸ κατάστημά του 1961 πήχεις ὑφάσματος, οἵτινες τῷ στοιχίζουσι 19925 δρ. Ἐπώλησεν 842 πήχεις ἀντὶ 10567 δρ., ἔπειτα 702 πήχεις ἀντὶ 6318 δραχ. καὶ τέλος 243 πήχεις ἀντὶ 1822 δραχ., τοὺς δὲ ὑπολοίπους ἐπώλησεν ἀντὶ 3405 δραχ. Πόσους πήχεις ἐπώλησε τὴν τελευταίαν φορὰν καὶ πόσον ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ὑφάσματος τούτου;
('Απ. 174 πήχεις, ἐκέρδησε 2187 δραχ.).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας δραχμὰς ἀξίζουσιν αἱ 3 ὀκάδες πράγματός τινος, ὅταν ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 9 δρ., σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀφ' οὗ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 9 δρ., αἱ 2 ὀκ. θὰ τιμῶνται 2 φορὰς τὸ 9, ἤτοι $9+9=18$, καὶ αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται 3 φορὰς τὸ 9, ἤτοι $9+9+9=27$ δραχμάς.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ἐντεῦθεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τρία 9, ἤτοι νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ 9 τρεῖς φοράς. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται πολλαπλασιασμὸς καὶ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς·

29. «Πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπα-

ναλαμβάνομεν ἀριθμόν τινα τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος τις ἀριθμός».

Ὁ ἀριθμός, ὅστις πρόκειται νὰ ἐπαναληφθῇ, λέγεται πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ ἕτερος, ὁ δεικνύων πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πρῶτος, λέγεται πολλαπλασιαστής, καὶ τὸ προκῦπτον ἐξαγόμενον γινόμενον· ὁ δὲ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι $\times$ ἤ . γραφόμενον μεταξὺ τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ ἀπαγγέλλεται ἐπί· π. χ. 7×5 ἢ 7.5 σημαίνει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ 7 ἐπὶ τὸ 5 καὶ ἀπαγγέλλεται 7 ἐπὶ 5· καὶ ὁ μὲν 7 εἶναι πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ 5 πολλαπλασιαστής.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως ταύτης ἐκλήθη γινόμενον, διότι γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὃν τρόπον ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος. Π. χ. 7×5 σημαίνει ἀπὸ τὸν 7 νὰ γίνῃ ἄλλος ἀριθμός, ὡς ὁ 5 ἐγένετο ἐκ τῆς μονάδος, ἤτοι ἐπειδὴ $5=1+1+1+1+1$, διὰ τοῦτο καὶ $7\times5=7+7+7+7+7$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

30. «Πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ δεύτερος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος».

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμός, τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς ὁμοειδὴς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον. Ὁ πολλαπλασιαστὴς λαμβάνεται πάντοτε ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α΄) Πολλαπλασιασμὸν μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.
Β΄) Πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.
Γ΄) Πολλαπλασιασμὸν πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

Α΄ Περίπτωσις.

31. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων, πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής· π. χ. 8×3 σημαίνει νὰ προσθέσωμεν $8+8+8=24$· ἄρα $8\times3=24$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν εὑρίσκονται διὰ τῆς προσθέσεως, εἶναι ἀνάγκη ὅμως νὰ γνωρίζωμεν ταῦτα ἀπὸ μνήμης, καὶ πρὸς τοῦτο μᾶς χρησιμεύει ὁ ἑπόμενος πίναξ, ὅστις καλεῖται Πυθαγόρειος.

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφομεν τοὺς 9 μονοψηφίους ἀριθμούς, εἰς τὴν δευτέραν γράφομεν τὰ διπλάσια αὐτῶν, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	26
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ἂν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν ἑαυτόν του· εἰς τὴν τρίτην γράφομεν τὰ τριπλάσια προσθέτοντες εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς τοὺς ἀντιστοίχους τῆς πρώτης· ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν γράψωμεν τὰ ἐννεαπλάσια τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Ἐὰν ζητῶμεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν, ὡς 8×5, ἄγομεν νοερῶς ἀπὸ τοῦ 8 τῆς ὁριζοντίας σειρᾶς μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν καὶ ἀπὸ τοῦ 5 τῆς πρώτης στήλης μίαν ὁριζοντίαν· εἰς τὴν συνάντησιν τῶν δύο τούτων γραμμῶν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον γινόμενον, τὸ 40. Τὸ αὐτὸ γινόμενον εὑρίσκομεν καὶ ἂν σύρωμεν τὰς ἀνωτέρω γραμμὰς τὴν μὲν κατακόρυφον ἀπὸ τοῦ 5 τῆς ὁριζοντίας σειρᾶς, τὴν δὲ ὁριζοντίαν ἀπὸ τοῦ 8 τῆς πρώτης στήλης.

Τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης, διότι πᾶς πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰς τοιούτους πολλαπλασιασμούς.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἔχομεν ἀνάγκην νὰ γνωρίσωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πρόβλημα.—Εἴς τινα τάξιν εὑρίσκονται 5 θρανία καὶ εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κάθηνται 8 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἡ τάξις;

Εὑρίσκομεν τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως προσθέτοντες τοὺς μαθητὰς ἑκάστου θρανίου, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $8+8+8+8+8=8\times5=40$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο λαμβάνοντες ἐξ ἑκάστου θρανίου τὸν πρῶτον, ἤτοι 5 μαθητάς· ἔπειτα λαμβάνομεν τὸν δεύτερον, ἤτοι ἄλλους 5 κ.ο.κ. μέχρι τοῦ ὀγδόου, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $5+5+5+5+5+5+5+5=5\times8=40$.

Προφανῶς τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως εὑρίσκεται τὸ αὐτό, ἤτοι $8\times5=5\times8$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

32. «Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων μένει τὸ αὐτό, ἂν ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος».

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ἕπονται ἀμέσως τὰ ἑξῆς·

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ τὴν 1 εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός· π. χ. $6\times1=6$, διότι $6\times1=1\times6=1+1+1+1+1+1=6$.

Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 0 εἶναι 0· π. χ. $4\times0=0$, διότι $4\times0=0\times4=0+0+0+0=0$.

Πρόβλημα.—Ἐκ τριῶν ἐργατῶν ὁ α′ λαμβάνει ἡμερομίσθιον 5 δραχ., ὁ β′ 4 δραχ. καὶ ὁ γ′ 3 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσι καὶ οἱ 3 ὁμοῦ κατὰ τὰς 6 ἐργασίμους ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος;

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους.

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσας δραχμὰς λαμβάνουσι καὶ οἱ 3 ὁμοῦ καθ' ἡμέραν, $5+4+3=12$, καὶ τὸ ποσὸν τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 6 δίδει $12\times6=72$ ἢ $(5+4+3)\times6=72$.

Ἡ παρένθεσις δεικνύει ὅτι πρέπει πρῶτον νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις $5+4+3$ καὶ ἔπειτα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 6.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον καὶ ὡς ἑξῆς· Νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ὁ α′ ἐπὶ 6 ἡμ. $(5\times6=30)$, ἔπειτα ὁ β′ $(4\times6=24)$ καὶ ἔπειτα ὁ γ′ $(3\times6=18)$ καὶ τέλος νὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ταῦτα ποσὰ $30+24+18=72$ δραχμαί, ἤτοι·

$$(5\times6)+(4\times6)+(3\times6).$$

Ὅθεν ἔχομεν $(5+4+3)\times 6=(5\times 6)+(4\times 6)+(3\times 6)$.

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα·

33. «Ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα».

Ἐπειδὴ δὲ $(5+4+3)\times 6=6\times(5+4+3)=(6\times 5)+(6\times 4)+(6\times 3)$ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 32), ἕπεται καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

34. «Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἂν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα».

Β' Περίπτωσις.

Πρόβλημα.—Ἔμπορος ἐπώλησεν 8 βόας πρὸς 759 δραχμὰς ἕκαστον. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν;

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἀφοῦ ὁ εἷς βοῦς ἐπωλήθη ἀντὶ 759 δραχμῶν, οἱ δύο βόες θὰ πωληθῶσι 2 φορὰς τὰς 759 δραχμὰς καὶ οἱ 8 βόες θὰ πωληθῶσιν 8 φορὰς τὰς 759 δραχμάς. Θὰ πολλαπλασιάσωμεν λοιπὸν τὰς 759 δραχμὰς ἐπὶ 8.

Αἱ 759 δραχμαὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ 7 ἑκατοντάδραχμα, 5 δεκάδραχμα καὶ 9 δραχμὰς=7 ἑκατ.+5 δεκάδρ.+9 δραχ. Διὰ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ ποσὸν τοῦτο 8 φοράς, ἀρκεῖ νὰ ἐπαναλάβωμεν 8 φορὰς χωριστὰ τὰς 9 δραχμάς, τὰ 5 δεκάδραχμα καὶ τὰ 7 ἑκατοντάδραχμα, ἤτοι 9 δραχ.×8=72 δραχ., 5 δεκάδρ.×8=40 δεκάδρ. καὶ 7 ἑκατ.×8=56 ἑκατ., ἤτοι 5600 δρ., ἀλλὰ 72 δραχμαὶ περιέχουσιν 7 δεκάδραχμα καὶ 2 δραχμάς, ἑνώνομεν τὰ 7 δεκάδραχ. μετὰ τῶν 40 καὶ λαμβάνομεν 47 δεκάδραχμα, ἤτοι 470 δρ. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα περιέχουσι 4 ἑκατοντάδραχμα καὶ 7 δεκάδραχμα, ἑνώνομεν τὰ 4 ἑκατοντάδραχμα μετὰ τῶν 56 καὶ λαμβάνομεν 60 ἑκατοντάδραχμα. Ὅθεν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον εἰσέπραξεν οὗτος, εἶναι 60 ἑκατοντάδραχμα, 7 δεκάδραχμα καὶ 2 δραχμαί, ἤτοι 6072.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑπομένως τὸν πολυψήφιον ἀριθμὸν 759 ἐπὶ τὸν μονοψήφιον 8, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 759 \\ 8 \\ \hline 6072 \end{array}$$

Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 8059×4. Ἐπειδὴ 8059=8 χιλ. +5 δεκ.+9 μον., ἕπεται κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 34), ὅτι 8059×4=(8 χιλ.

$+5$ δεκ. $+9$ μον.)$\times 4 = (8$ χιλ. $\times 4) + (5$ δεκ. $\times 4) + (9$ μον. $\times 4)$, δηλ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ᾽ αὐτοὺς σύρομεν εὐθεῖαν ὁριζοντίαν.

$$\begin{array}{r} 8059 \\ 4 \\ \hline 32286 \end{array}$$

Μετὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων 9×4 καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 36· καὶ τὸ μὲν ψηφίον 6 τῶν μονάδων τοῦ γινομένου γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδ., τὰς δὲ 3 δεκάδας αὐτοῦ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων 5×4, ἤτοι εἰς τὰς 20 δεκάδας, καὶ εὑρίσκομεν 23 δεκάδας. Τοῦ ἐξαγομένου τούτου τὰς μὲν 3 δεκ. γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκ., τὰς δὲ 2 ἑκατοντάδ. προσθέτομεν εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον γινόμενον $0\times 4=0$ ἑκατοντ. καὶ εὑρίσκομεν 2 ἑκατοντάδ., τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατ. Τέλος πολλαπλασιάζομεν τὰς 8 χιλ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον 32 γράφομεν ὁλόκληρον ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὰς στήλας τῶν χιλ. καὶ τῶν δεκ. χιλ.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 32236.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

35. ***Κανών.*** — Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, γράφομεν τὸν μονοψήφιον κάτωθεν τοῦ πολυψηφίου καὶ ὑπ᾽ αὐτοὺς ἄγομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων· καὶ ἂν μὲν γινόμενόν τι εἶναι μονοψήφιον, γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην· ἂν δὲ εἶναι διψήφιον, τὰς μὲν μονάδας αὐτοῦ γράφομεν ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἀμέσως ἑπόμενον γινόμενον. Τὸ τελευταῖον γινόμενον γράφομεν ὁλόκληρον ὑπὸ τὴν εὐθεῖαν».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

$$\begin{array}{r} 34872 \\ 8 \\ \hline 278976 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23087 \\ 5 \\ \hline 115435 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 808307 \\ 9 \\ \hline 7202763 \end{array}$$

Γ' Περίπτωσις.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς πολλαπλασιασμοὺς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον. Διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο φανερόν, ἂς θεωρήσωμεν τὰς ἑξῆς μερικὰς περιπτώσεις·

α') Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν, ὡς τὸν 85, ἐπὶ 10. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει ὁ ἀριθμὸς 85 νὰ ἐπαναληφθῇ 10 φοράς· ἀλλ' ἑκάστη μονὰς δεκάκις ἐπαναλαμβανομένη γίνεται δεκάς, ἑπομένως αἱ 85 μονάδες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θὰ γίνωσιν 85 δεκάδες ἢ 850 μονάδες. Ἄρα τὸ γινόμενον 85×10 εὑρίσκεται συντόμως, ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ 85 γραφῇ ἓν μηδενικόν, ἤτοι 85×10=850.

β') Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα, ὡς τὸν 48, ἐπὶ 100, παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη μονὰς ἑκατοντάκις ἐπαναλαμβανομένη γίνεται ἑκατοντάς· ἄρα αἱ 48 μονάδες τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ θὰ γίνωσι 48 ἑκατον. ἢ 4800 μον. Ὥστε τὸ γινόμενον 48×100 εὑρίσκεται συντόμως, ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ 48 γραφῶσι δύο μηδενικά, ἤτοι 48×100=4800.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

36. «Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα 10, 100, 1000 κλ., ἤτοι ἐπὶ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐκ τῆς 1 παρακολουθουμένης ὑπὸ ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, ἂν γράψωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής».

π. χ. 845×1000=845000, 4583×10000=45830000.

α') Ἔστω νῦν 158×30.

Θὰ ἔχωμεν 158×30=158×3$^{\text{δεκ.}}$=3$^{\text{δεκ.}}$×158=474$^{\text{δεκ.}}$=4740 μονάδες.

β') Ὁμοίως 45×700=45×7$^{\text{ἑκατ.}}$=7$^{\text{ἑκατ.}}$×45=315$^{\text{ἑκατ.}}$=31500.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

37. «Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ ἄλλον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς σημαντικοῦ ψηφίου καὶ μηδενικῶν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ σημαντικὸν ψηφίον καὶ γράψωμεν δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ».

π. χ. 458×700=3206×100=320600.

Ἔστω τέλος πρὸς εὕρεσιν τὸ ἑξῆς γινόμενον 3587×754.

Ἐπειδὴ 754=700+50+4, ἔχομεν 3587×754=3587×(700+50+4)=(3587×700)+(3587×50)+(3587×4) (§ 34).

Ἀλλὰ 3587 × 700 = 2510900 καὶ 3587 × 50 = 179350 καὶ 3587×4=14348.

Ὅθεν 3587×754=2510900+179350+14348=2704598.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ σύρομεν ὑπ' αὐτοὺς γραμμὴν εὐθεῖαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ τρία μερικὰ γινόμενα, ἅτινα προστιθέμενα δίδουσι τὸ ὁλικὸν γινόμενον.

Ἀλλὰ τὰ εἰς τὸ τέλος τῶν μερικῶν γινομένων μηδενικὰ δύνανται νὰ παραλειφθῶσι.

$$\begin{array}{r} 3587 \\ 754 \\ \hline 14348 \\ 179350 \\ 2510900 \\ \hline 2704598 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{r} 3587 \\ 754 \\ \hline 14348 \\ 17935 \\ 25109 \\ \hline 2704598 \end{array}$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτελεῖται καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς 24583×805.

$$\begin{array}{r} 24583 \\ 805 \\ \hline 122915 \\ 196664 \\ \hline 19789315 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

38. ***Κανών.*** — «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο οἱουσδήποτε ἀριθμούς, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν κάτωθεν τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ὑπ᾿ αὐτοὺς σύρομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁριζοντίαν. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιαστέον χωριστὰ ἐφ᾿ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ γράφομεν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον ὑπὸ τὴν γραμμὴν οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον ψηφίον αὐτοῦ ἐκ δεξιῶν νὰ κεῖται κάτωθεν τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν· μετὰ τοῦτο ἄγομεν εὐθεῖαν ὁριζοντίαν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ ζητούμενον ὁλικὸν γινόμενον».

ΣΗΜ.— Ἐάν τινα τῶν ἐν τῷ μεταξὺ ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι μηδενικά, τὰ μερικὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι μηδενικὰ καὶ ἑπομένως παραλείπονται.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$$\begin{array}{r} 4583 \\ 805 \\ \hline 22915 \\ 36664 \\ \hline 3689315 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7504 \\ 3008 \\ \hline 60032 \\ 22512 \\ \hline 22572032 \end{array}$$

Παρατήρ. Ἐὰν ὁ εἷς τῶν παραγόντων ἢ ἀμφότεροι λήγωσιν εἰς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς παραλείποντες τὰ εἰς τὸ τέλος αὐτῶν μηδενικὰ καὶ ἔπειτα γράφομεν δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Παραδείγματα.

35800	130800
730	14
1074	5232
2506	1308
26134000	1831200

39. *Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*

Αὕτη γίνεται πάλιν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λαμβανομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ὡς πολλαπλασιαστοῦ καὶ τἀνάπαλιν· ἂν εὕρωμεν πάλιν τὸ αὐτὸ γινόμενον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 32).

Νὰ δοκιμασθῶσιν οἱ προηγούμενοι πολλαπλασιασμοί.

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 18 δραχ., πόσον τιμῶνται οἱ 8 πήχεις;

Λύσις.—Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται 18 δρ., εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ 2 πήχεις θὰ τιμῶνται 18+18, ἤτοι δύο φορὰς 18 δραχ. Ὁμοίως οἱ 3 πήχεις θὰ τιμῶνται 18+18+18 ἢ τρεῖς φορὰς 18 δραχ. καὶ τέλος οἱ 8 πήχεις θὰ τιμῶνται ὀκτὼ φορὰς 18 δρ., ἤτοι τὸ ὀκταπλάσιον τῶν 18 δραχμῶν, ὅθεν ἡ ζητουμένη τιμὴ θὰ εἶναι 18 δρ.×8=144 δραχ.

Παρατήρ.—Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος (ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται 18 δραχ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων (πόσον τιμῶνται οἱ 8 πήχεις). Ἡ ζητουμένη τιμὴ εὑρίσκεται, ὡς εἴδομεν, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

40. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἥτις εἶναι καὶ ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ πάλιν διὰ πολλαπλασιασμοῦ, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα αὐτοῦ δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

2) Εὑρεῖν τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 18.

Ὅθεν ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

41. «Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις καὶ ζητῆται τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον αὐτοῦ κτλ., κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

3) Αἱ 18 ὀκάδες πόσα δράμια περιέχουσι;

4) Αἱ 17 ἑβδομάδες πόσας ἡμέρας ἔχουσι;

5) Μία κρήνη παρέχει εἰς μίαν ὥραν 258 ὀκ. ὕδατος. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ δεξαμενή, ἥτις πληροῦται ὑπὸ τῆς κρήνης ταύτης εἰς 35 ὥρας; ('Απ. 9030 ὀκ.).

6) Ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου τιμᾶται 38 λεπτά. Πόσα λεπτὰ τιμῶνται αἱ 3586 ὀκ. σίτου; ('Απ. 136260 λεπ.).

7) Ποῖον ἀριθμὸν μᾶς δίδει τὸ 15πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 245 αὐξανόμενον κατὰ 145;

8) Ποῖον ἀριθμὸν μᾶς δίδει τὸ 27πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 583 ἐλαττωθὲν κατὰ τὸν 372; ('Απ. 15369).

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

Πρόβλημα.—Οἰκοδομή τις ἔχει 3 πατώματα· εἰς ἕκαστον πάτωμα ὑπάρχουσι 4 δωμάτια καὶ εἰς ἕκαστον δωμάτιον 6 παράθυρα καὶ εἰς ἕκαστον παράθυρον 8 ὑελοπίνακες. Πόσους ὑελοπίνακας ἔχει ἡ οἰκοδομή;

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ δωμάτια, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ τρία πατώματα ($3\times4=12$)· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὰ παράθυρα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰ 12 δωμάτια ($12\times6=72$), καὶ τέλος εὑρίσκομεν τοὺς ὑελοπίνακας, τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 72 παράθυρα, ἤτοι ἡ ὅλη οἰκοδομὴ $72\times8=576$).

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι γινόμενον $3\times4\times6\times8$, ἤτοι γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

42. Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν τρίτον κ.ο.κ., μέχρις οὗ λάβωμεν πάντας τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑελοπινάκων δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

Εὑρίσκομεν πρῶτον τοὺς ὑελοπίνακας, τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 6 παράθυρα τοῦ ἑνὸς δωματίου ($8\times6=48$)· ἔπειτα εὑρίσκομεν τοὺς ὑελοπίνακας, τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 4 δωμάτια τοῦ ἑνὸς πατώματος ($48\times4=192$), καὶ τέλος τοὺς ὑελοπίνακας, τοὺς ὁποίους ἔχουσι τὰ 3 πατώματα, ἤτοι ὁλόκληρος ἡ οἰκοδομὴ ($192\times3=576$), δηλ. θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον $8\times6\times4\times3$. Ὅθεν $3\times4\times6\times8=8\times6\times4\times3$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

43. «Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτούς».

Ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ.

α) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

$23\times4=$	$85\times7=$	$87\times7=$
$47\times5=$	$37\times6=$	$63\times8=$
$52\times8=$	$92\times3=$	$83\times8=$

ΣΗΜ.—Εὑρίσκομεν ἀπὸ μνήμης τὸ γινόμενον διψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ μονοψήφιον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα· π. χ. 32×4· πολλαπλασιάζομεν 30×4=120 καὶ 2×4=8 καὶ προσθέτομεν ταῦτα 120+8=128.

β′) 145×4= 307×8= 215×4=
203×4= 503×7= 333×3=
122×5= 809×4= 257×4=

γ′) Ἐπίσης νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

8×9×4= 30×40= 80×70× 30=
15×3×7= 50×70= 45× 500=
12×4×7= 80×90= 488× 20=
17×3×5= 38×60= 353×2000=

δ′) Ὁμοίως νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀπὸ μνήμης οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

480× 5×2= 547×50×2=
245×25×4= 43×15×2=
832×20×5= 87× 8×5=

ΣΗΜ.—Πολλάκις εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δύνανται δύο ἢ περισσότεροι παράγοντες νὰ δίδωσι γινόμενον ἀριθμόν, ἐπὶ τὸν ὁποῖον εὐκόλως πολλαπλασιάζομεν ἕτερον· π. χ. 379×5×2=379×10=3790 (§ 41).

ε′) Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 72×9. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 72 ἐπὶ 10 καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου 720 ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν 72 (διότι 9=10−1), ἤτοι 720−72=648, ὅθεν ἔχομεν 72×9=720−72=648.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον 458×99, ἤτοι 458×100 =45800 καὶ 45800−458=45342, ὅθεν 458×99=45800−458 =45342.

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

1. Ἀπὸ μνήμης.

17×9= 25×99=
32×9= 29×99=
450×9= 3400×99=
380×9= 230×99=

2. Γραπτῶς, ἀλλὰ συντόμως, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρω παραδείγματι·

4583×9= 1245×99= 456×999=
2745×9= 372×99= 7582×999=
17583×9= 8457×99= 5473×999=

ς′) Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 345×11.

Ἐπειδὴ τὸ 11=10+1, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345×10=

3450 καὶ εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ προσθέσωμεν τὸν 345, ἤτοι $3450 + 345 = 3795$.

Ὅθεν ἔχομεν $345 \times 11 = 3450 + 345 = 3795$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον 783×101, ἤτοι $783 \times 100 = 78300$ καὶ $78300 + 783 = 79083$, ὅθεν $783 \times 101 = 78300 + 783 = 79083$.

Νὰ εὑρεθῶσι καθ' ὅμοιον τρόπον τὰ ἑξῆς γινόμενα·

1. Ἀπὸ μνήμης.

$35 \times 11 =$	$37 \times 101 =$
$42 \times 11 =$	$83 \times 101 =$
$37 \times 11 =$	$4500 \times 101 =$
$2400 \times 11 =$	$830 \times 101 =$
$8 \times 7 \times 11 =$	$9 \times 4 \times 101 =$

ΣΗΜ. Ἐπειδὴ $32 \times 11 = 320 + 32 = 352$, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται εὐκόλως, ἂν μεταξὺ τῶν δύο ψηφίων 3 καὶ 2 γραφῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $3 + 2 = 5$. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $48 \times 11 = 480 + 48 = 528$, γράφομεν πάλιν μεταξὺ τῶν ψηφίων 4 καὶ 8 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτων $4 + 8 = 12$· ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο ὑπερβαίνει τὸ 9, γράφομεν μόνον τὰς μονάδας 2 τοῦ ἀθροίσματος τούτου καὶ αὐξάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 4 κατὰ μίαν μονάδα. Ὅθεν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον διψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ 11, ἂν μεταξὺ τῶν ψηφίων αὐτοῦ γράψωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν· ἂν δὲ τοῦτο ὑπερβαίνῃ τὸ 9, γράφομεν τὰς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος καὶ αὐξάνομεν κατὰ 1 τὸ πρῶτον ψηφίον ἐξ ἀριστερῶν.

$$85 \times 11 = 935$$

2. Γραπτῶς, ἀλλὰ συντόμως·

$3472 \times 11 =$	$12580 \times 101 =$	$2803 \times 1001 =$
$4580 \times 11 =$	$7258 \times 101 =$	$345 \times 1001 =$
$7523 \times 11 =$	$34527 \times 101 =$	$4587 \times 1001 =$

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ.

1) Μία ἀτμομηχανὴ ἀτμοπλοίου καίει ἐν ταξειδίῳ 415 ὀκ. ἀνθράκων καθ' ὥραν. Πόσας ὀκάδας ἀνθράκων θὰ χρειασθῇ τὸ ταξείδιον ἀπὸ Πειραιῶς μέχρι Κωνσταντινουπόλεως, ὅπερ διαρκεῖ 38 ὥρας;
(Ἀπ. 15770 ὀκ.)

2) Ἁμαξοστοιχία, ἔχουσα ταχύτητα 25 χιλιομέτρων καθ' ὥραν, διανύει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου διάστημα εἰς 11 ὥρας. Πόσων χιλιομέτρων εἶναι τὸ μῆκος τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς μεταξὺ τῶν δύο τούτων πόλεων; (Ἀπ. 275 χιλιόμ.).

3) Βιβλίον τι ἔχει 250 φύλλα, ἑκάστη σελὶς ἔχει 36 σειρὰς καὶ ἑκάστη σειρὰ 48 γράμματα. Πόσα γράμματα ἔχει ἐν ὅλῳ τὸ βιβλίον τοῦτο;
('Απ. 864000 γράμμ.).

4) Ἔμπορός τις ἐπώλησε 42 τεμάχια ὑφάσματος ἐκ 58 πήχεων ἕκαστον πρὸς 16 δραχμὰς τὸν πῆχυν. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξεν ἐκ τῆς πωλήσεως ταύτης; ('Απ. 38976 δραχ.).

5) Οἰνοπώλης ἐπλήρωσε 37 βαρέλλια, ἐξ ὧν ἕκαστον περιεῖχε 527 ὀκ. οἴνου, πρὸς 46 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσα λεπτὰ ἐπλήρωσεν;
('Απ. 896954 λεπτά).

6) Ἔμπορός τις ἐφόρτωσεν ἐπί τινος ἀτμοπλοίου 384 σάκκους ἀλεύρου, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἐζύγιζεν 70 ὀκάδας, καὶ συνεφώνησε διὰ ναῦλον 1 λεπτὸν τὴν ὀκᾶν. Πόσα λεπτὰ ἐπλήρωσεν; ('Απ. 26880 λ.).

7) Σταφιδέμπορος ἐπώλησε 451 χιλιόλιτρα (τὸ χιλιόλιτρον εἶναι ἴσον πρὸς 375 ὀκ.) πρὸς 127 δραχ. τὸ χιλιόλιτρον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε καὶ πόσας ὀκάδας σταφίδος ἐπώλησεν;
('Απ. 57277 δραχ. καὶ 169125 ὀκ.).

8) Ἠγόρασέ τις 452 πρόβατα πρὸς 14 δραχμὰς ἕκαστον καὶ μετεπώλησε ταῦτα πρὸς 23 δραχμὰς ἕκαστον, ἀφ' οὗ ἐδαπάνησε διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν καὶ τὴν διατροφὴν ἐπί τινας ἡμέρας 872 δρχ. ἐν ὅλῳ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη; ('Απ. ἐκέρδ. 3196 δρ.).

9) Λυχνία οἰνοπνεύματος καίει καθ' ὥραν οἰνόπνευμα ἀξίας 14 λεπτῶν. Ἐὰν αὕτη καίῃ καθ' ἑκάστην ἐπὶ 5 ὥρας, πόσον στοιχίζει τὸ οἰνόπνευμα, τὸ ὁποῖον θὰ καύσῃ ἐπὶ 25 ἑβδομάδας; ('Απ. 12250 λ.)

10) Πατήρ τις ἀφῆκε διὰ διαθήκης τὴν περιουσίαν του εἰς τοὺς 5 υἱούς του καὶ 3 θυγατέρας του καὶ ἕκαστος μὲν ἐκ τῶν υἱῶν ἔλαβε 5800 δραχ., ἑκάστη δὲ τῶν θυγατέρων 8400 δραχ. καὶ ἡ Κυβέρνησις ἔλαβεν ὡς φόρον 375 δραχμάς. Πόση ἦτο ὁλόκληρος ἡ περιουσία;
('Απ. 54575 δραχ.).

11) Ἀγοράζει τις 3458 ὀκ. σίτου πρὸς 35 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· πωλεῖ τὰς 1890 ὀκ. πρὸς 39 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ τὰς ὑπολοίπους πρὸς 32 λεπτ. Πόσον ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη; ('Απ. ἐκέρδ. 2856 λεπτ.).

12) Ἀτμόπλοιον, ταξειδεῦσαν ἐκ Πειραιῶς εἰς Βόλον καὶ τ' ἀνάπαλιν, μετέφερε κατὰ μὲν τὸ πρῶτον ταξείδιον ἐπιβάτας Αης θέσεως 15, Βας 28 καὶ Γης 64· κατὰ δὲ τὸ δεύτερον Αης θέσεως 24, Βας 58 καὶ Γης 95. Ἐὰν τὸ εἰσιτήριον τιμᾶται Αης μὲν θέσεως 18 δραχ.,

Βας δὲ 12 δραχ. καὶ Γης 6 δραχ., πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε κατὰ τὰ δύο ταῦτα ταξείδια ; (Ἀπ. εἰσέπραξε 2694 δραχ.).

13) Σιτέμπορός τις ἔχει ἔν τινι ἀποθήκῃ 93450 ὀκ. σίτου. Ἐπώλησε δὲ εἰς διαφόρους ἐποχὰς τὰ ἑξῆς· α') 127 σάκκους, ἐξ ὧν ἕκαστος περιεῖχε 50 ὀκ. σίτου· β') 245 σάκκους τῶν 44 ὀκ. καὶ γ') 78 σάκκους τῶν 65 ὀκ. Πόσας ὀκάδας σίτου ἔχει ἀκόμη ἐν τῇ ἀποθήκῃ του; (Ἀπ. 71250).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Πρόβλημα 1ον.—Νὰ μοιράσωμεν 20 πεντάλεπτα εἰς 5 μαθητάς. Πόσα πεντάλεπτα θὰ λάβῃ ἕκαστος μαθητής ;

Ἂν δώσωμεν εἰς ἕκαστον μαθητὴν ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον, εἰς τοὺς 5 θὰ δώσωμεν 5 πεντάλεπτα, καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὰ 20 θὰ μείνωσιν 20—5=15. Ἂν δώσωμεν ἀκόμη ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον εἰς ἕκαστον μαθητήν, θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ δύο πεντάλεπτα καὶ θὰ μείνωσι 15 - 5=10. Ἂν δώσωμεν πάλιν ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον εἰς ἕκαστον, θὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ 3 πεντάλεπτα καὶ θὰ μείνωσι 10—5=5. Ἂν τέλος δώσωμεν εἰς ἕκαστον ἀπὸ ἓν πεντάλεπτον, δὲν μένει οὐδὲν καὶ ἕκαστος μαθητὴς θὰ λάβῃ ἀπὸ 4 πεντάλεπτα. Ὥστε

$$20=4+4+4+4+4$$

ἤτοι διηρέθη ὁ 20 εἰς 5 ἴσα μερίδια, τόσα, ὅσοι εἶναι οἱ μαθηταί, ἕκαστον δὲ μερίδιον εἶναι 4 πεντάλεπτα.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρέθη τὸ μερίδιον τοῦτο, καλεῖται διαίρεσις καὶ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς.

44. «Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἀριθμόν τινα εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος τις ἀριθμός».

Ἡ διαίρεσις αὕτη καλεῖται καὶ μερισμός.

Πρόβλημα 2ον.—Πόσα τετράδια ἀγοράζει μαθητής τις μὲ 20 πεντάλεπτα, ὅταν ἕκαστον τετράδιον πωλῆται ἀντὶ 5 πενταλέπτων ;

Ἂν δώσωμεν 5 πεντάλεπτα, ἀγοράζομεν ἓν τετράδιον, μᾶς μένουσι δὲ 20—5=15 πεντάλεπτα. Ἂν δώσωμεν καὶ ἄλλα 5 πεντάλεπτα, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλο ἓν τετράδιον καὶ θὰ μᾶς μείνωσι 15—5=10 πεντάλεπτα. Ἂν δώσωμεν καὶ ἄλλα 5 πεντάλεπτα, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλο ἓν τετράδιον καὶ θὰ μείνωσι 10—5=5. Ἂν τέλος δώσωμεν καὶ τὰ ὑπόλοιπα 5 πεντάλεπτα, θὰ ἀγοράσωμεν ἀκόμη ἓν τετράδιον καὶ δὲν μένει οὐδὲν πεντάλεπτον. Ἄρα θὰ ἀγοράσωμεν 4 τετράδια, ἤτοι τόσα, ὅσας φορὰς δύναται ν' ἀφαιρεθῇ ὁ 5 ἀπὸ τοῦ 20.

Τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται καὶ ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ διὰ τῆς αὐτῆς πράξεως, ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ, ἤτοι διὰ τῆς διαιρέσεως, ἥτις δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

45. Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ εἷς εἰς τὸν ἕτερον.

Ἡ τοιαύτη διαίρεσις καλεῖται **μέτρησις**.

Ὁ ἀριθμὸς 20, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ μοιράσωμεν ἢ νὰ μετρήσωμεν, καλεῖται **διαιρετέος**, ὁ δὲ ἀριθμὸς 5, ὁ δεικνύων εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ διαιρετέος ἢ μὲ τὸν ὁποῖον μετροῦμεν τὸν διαιρετέον, καλεῖται **διαιρέτης**· τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως 4 καλεῖται **πηλίκον**.

Τὸ πηλίκον τοῦτο εἰς μὲν τὸν μερισμὸν καλεῖται **μερίδιον**, εἰς δὲ τὴν μέτρησιν **λόγος** τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην. Εἰς τὴν μέτρησιν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πρέπει νὰ γίνωνται πάντοτε ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Δυνατὸν πολλάκις ὁ διαιρετέος νὰ μὴ μοιράζεται ἀκριβῶς εἰς ἴσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ διαιρέτης· π. χ. ἂν μοιράσωμεν 20 δραχμὰς εἰς 6 ἀνθρώπους, θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 δραχ. καὶ θὰ περισσεύσωσι 2· αἱ 2 αὗται δραχμαὶ καλοῦνται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, εἶναι δὲ πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι :, ὅπερ γράφεται μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀπαγγέλλεται διά· π. χ. 21 : 3 σημαίνει νὰ διαιρεθῇ ὁ 21 διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ ἀπαγγέλλεται 21 διὰ 3.

Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν διαιρέτην, τὸ πηλίκον εἶναι 1· ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ 1, τὸ πηλίκον ἰσοῦται πρὸς τὸν διαιρετέον· καὶ ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, ἡ διαίρεσις διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀδύνατος.

Παραδείγματα τελείας διαιρέσεως.

63 : 9. 49 : 7. 120 : 12. 56 : 8.

Διαίρεσις τελεία.

46. Ἐὰν ὁ διαιρετέος μοιράζεται ἀκριβῶς εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ διαιρέτης, χωρὶς νὰ μείνῃ ὑπόλοιπόν τι, τότε λέγομεν ὅτι

ὁ διαιρετέος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου ἢ ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία· π. χ.

24 : 8=3· ὁ ἀριθμὸς 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 8 καὶ δίδει πηλίκον 3· ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία. Τὸ πηλίκον 3 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 8 δίδει τὸν διαιρετέον 24, ἤτοι 24=8×3.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

47. «Εἰς πᾶσαν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον».

Διαίρεσις ἀτελής.

48. Ἂν ἡ διαίρεσις ἀφίνῃ ὑπόλοιπόν τι, λέγεται ἀτελής· π.χ. 29 : 8 δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 5· ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀτελής. Εἰς ταύτην, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον 29, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην 8 ἐπὶ τὸ πηλίκον 3 καὶ εἰς τὸ γινόμενον νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5, ἤτοι 29=8×3+5.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

49. «Εἰς πᾶσαν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ».

Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.

Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος τοῦ πηλίκου, ὅπερ καὶ ἐν τῇ τελείᾳ καὶ ἐν τῇ ἀτελεῖ διαιρέσει παριστᾷ τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, ὅπερ χωρεῖ ὁ διαιρετέος, ἕπεται ὁ ἑξῆς γενικώτερος ὁρισμὸς τῆς διαιρέσεως.

50. «Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις παριστᾷ τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου, ὅπερ χωρεῖ ὁ διαιρετέος».

Μονοψήφιον καὶ πολυψήφιον πηλίκον.

51. Ἔστω ἡ διαίρεσις 2458 : 345. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι μονοψήφιον, διότι 345×10=3450 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 2458. Εἰς τὴν διαίρεσιν 7583 : 45 τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, διότι 45×10=450 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου 7583. Ἐν γένει, ἂν θέλωμεν νὰ γνωρίζωμεν, πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν

διαιρέτην ἐπὶ 10 γράφοντες εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 0· καὶ ἂν μὲν ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον, ἄλλως θὰ εἶναι πολυψήφιον.

Πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις.

Εἰς τὴν διαίρεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις·

α΄) Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

β΄) Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

Α΄ Περίπτωσις.

52. 1) Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, τὸ μονοψήφιον πηλίκον εὑρίσκεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ Πυθαγορείου πίνακος· π.χ. 68 : 7 δίδει πηλίκον 9, διότι ὁ διαιρέτης 7 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 δίδει γινόμενον 63, ὅπερ ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ 68 ἀφίνει ὑπόλοιπον 5.

2) Ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ἡ διαίρεσις 845 : 258. Ἵνα εὕρωμεν πόσας φορὰς χωρεῖ ὁ 258 εἰς τὸν 845, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν κατ᾽ ἀρχὰς πόσας φορὰς χωροῦσιν αἱ δύο ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου εἰς τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἄλλας τόσας φορὰς ἢ ὀλιγωτέρας, οὐδέποτε δὲ περισσοτέρας, θὰ χωρῇ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον. Τὸ πηλίκον τοῦ 8 διὰ τοῦ 2 εἶναι 4· καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 4, ἀλλὰ θὰ εἶναι ἢ 4 ἢ μικρότερον αὐτοῦ. Δοκιμάζομεν τὸ 4 πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 258, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον 258×4=1032 μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου· ἄρα τὸ 4 δὲν εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Δοκιμάζομεν τὸ κατὰ 1 μικρότερον ψηφίον, ἤτοι 3, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 258 δίδει γινόμενον 258×3=774, μικρότερον τοῦ διαιρετέου· ἄρα τὸ 3 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον. Ἀφαιροῦντες ἤδη τὸ 774 ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 845—774=71.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 845 & 258 \\ \cline{2-2} 774 & \quad 3 \\ 71 & \end{array}$$

Ὁμοίως ἔστω ἡ διαίρεσις 2547 : 578.

Λαμβάνομεν τὰς 25 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου καὶ διαιροῦμεν ταύτας διὰ τῶν 5 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου· τὸ πηλίκον 5, ὅπερ εὑρίσκομεν, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον $578 \times 5 = 2890$, μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου. Δοκιμάζομεν λοιπὸν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $578 \times 4 = 2312$ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $2547 - 2312 = 235$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον·

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ \cline{2-2} 2312 & 4 \\ \cline{1-1} 235 & \end{array}$$

Ἀντὶ νὰ γράψωμεν ὁλόκληρον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον κάτωθεν τοῦ διαιρετέου καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν, κάμνομεν ἀμέσως τὴν ἀφαίρεσιν.

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ \cline{2-2} 235 & 4 \end{array}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

53. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μονοψήφιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ, ἂν ὁ διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου. Δοκιμάζομεν, ἂν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην· ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τῷ διαιρετέῳ, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον· ἂν ὅμως ὑπερβαίνῃ τὸν διαιρετέον, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, μέχρις οὗ εὕρωμεν γινόμενον μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἀφαιροῦντες τοῦτο ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως».

Β' Περίπτωσις.

54. Τὸ πολυψήφιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς·

1) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἔστω π. χ. νὰ διαιρέσωμεν τὸν 5793 διὰ τοῦ 8 ἢ μᾶλλον νὰ μοιράσωμεν 5793 δραχμὰς εἰς 8 ἀνθρώπους. Λαμβάνομεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας χιλιάδων καὶ παρατηροῦμεν ὅτι αὗται δὲν μοιράζονται εἰς τοὺς ὀκτὼ ἀνθρώπους. Τρέπομεν ταύτας εἰς 50 ἑκατοντάδας καὶ λαμβάνομεν μετὰ τούτων καὶ τὰς 7 ἑκατοντάδας καὶ μοιράζομεν τὰς 57 ἑκατοντάδας δραχμῶν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 57 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ἄρα ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀπὸ 7 ἑκατοντάδας δραχμῶν. Ἡ 1 ἑκατοντάς, ἥτις περισσεύει, τρέπεται εἰς 10 δεκάδας, αἵτινες μετὰ τῶν 9 δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦσι τὸν 19 δεκάδας, τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 19 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 3· ἄρα ἕκαστος τῶν 8 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἀκόμη 2 δεκάδας δραχμῶν. Αἱ 3 δεκάδες, αἵτινες περισσεύουσι, τρέπονται εἰς 30 μονάδας αἵτινες μετὰ τῶν τριῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ δίδουσι 33 μονάδας, τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 33 διὰ τοῦ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 1· ἄρα ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀκόμη 4 δραχμὰς καὶ περισσεύει 1, ἥτις ἀποτελεῖ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

5793	8
5600	700
193	20
160	4
33	
32	
1	

Δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν τὴν διάταξιν τῆς πράξεως· καὶ πρῶτον μὲν τὸ πηλίκον δύναται νὰ γραφῇ 724, δηλ. ἕκαστον ψηφίον εἰς τοιαύτην θέσιν ἐν τῷ ἀριθμῷ, ὥστε νὰ σημαίνῃ πάλιν τῆς αὐτῆς τάξεως μονάδας. Ἔπειτα τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρισκόμενον ψηφίον τοῦ πηλίκου δυνάμεθα ν' ἀφαιρῶμεν ἀμέσως ἀπὸ τὸ χωριζόμενον τμῆμα τοῦ διαιρετέου, ὅπερ διαιροῦμεν, χωρὶς νὰ γράψωμεν τοῦτο κάτωθεν αὐτοῦ· καὶ τέλος δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ὑπολειπόμενα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἀλλ' ἕκαστον χωριστὰ κατὰ σειράν.

Κατὰ ταῦτα ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντομώτερον.

5′7′9′3′	8
19	724
33	
1	

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις 94834 : 4.

9′4′8′3′4′	4
14	23708
28	
034	
2	

Παρατ.—Ἂν τύχῃ μερικὴ τις διαίρεσις, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν ἓν ψηφίον ἀπὸ τὸν διαιρετέον, νὰ μὴ εἶναι δυνατή, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

2) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι πολυψήφιος, ἡ διαίρεσις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον·

Ἔστω ἡ διαίρεσις 85847:356 ἢ νὰ μοιράσωμεν 85847 δραχμὰς εἰς 356 ἀνθρώπους. Λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, ἵνα τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον· πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρέτου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν περισσότερον· χωρίζομεν ἐνταῦθα τὰς 858 ἑκατοντάδας καὶ ταύτας μοιράζομεν εἰς τοὺς 356 ἀνθρώπους, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 858 διὰ τοῦ 356 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2. Πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον τοῦτο ἐπὶ 356 καὶ ἀφαιροῦντες τὸ $356 \times 2 = 712$ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 146· ἕκαστος λοιπὸν ἄνθρωπος λαμβάνει 2 ἑκατοντάδας καὶ περισσεύουσιν 146 ἑκατοντάδες. Αὗται μετὰ τοῦ παραλειφθέντος μέρους τοῦ διαιρετέου δίδουσι νέον διαιρετέον 14647. Ἔχομεν λοιπὸν νέαν μερικὴν διαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν πάλιν λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ νέου διαιρετέου τόσα ψηφία, ὥστε τὸ πηλίκον νὰ εἶναι μονοψήφιον· λαμβάνομεν δηλ. 1464 δεκάδας καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ 356. Τὸ πηλίκον εἶναι 4 καὶ ἑπομένως ἕκαστος ἄνθρωπος λαμβάνει ἀκόμη 4 δεκάδας δραχμῶν καὶ ὑπολείπονται $1464 - 1424 = 40$ δεκάδες. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο μετὰ τοῦ παραλειφθέντος μέρους τοῦ νέου διαιρετέου ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν 407, τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ

356 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 51. Ἕκαστος λοιπὸν ἄνθρωπος θὰ λάβῃ ἀκόμη 1 δραχμὴν καὶ περισσεύουσι 51 δραχμαί, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνελύθη εἰς τὰς ἑξῆς μερικὰς διαιρέσεις·

858 ἑκατ.	356	1464 δεκ.	356	407 μον.	356
146	2 ἑκατ.	40	4 δεκ.	51	1 μον.

Δύνανται καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν νὰ γίνωσιν αἱ αὐταὶ συντομίαι, ὡς ἐν τῇ προηγουμένῃ διαιρέσει.

Κατὰ ταῦτα ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

858'4'7'	356
1464	241
407	
51	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

55. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πολυψήφιον πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, χωρίζομεν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται, ἵνα τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν περισσότερον)· διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ χωρισθὲν τμῆμα τοῦ διαιρετέου καὶ εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζομεν τὸ εὑρεθὲν ψηφίον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἀπὸ τοῦ χωρισθέντος τμήματος τοῦ διαιρετέου, δεξιᾷ δὲ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν λαμβάνομεν ὡς διαιρετέον καὶ ἔχομεν νέαν μερικὴν διαίρεσιν, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου· τὸ εὑρεθὲν τοῦτο ψηφίον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ νέου διαιρετέου καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἂν τύχῃ εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν ὁ διαιρετέος νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου, γράφομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἐκτελοῦνται αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

754′8′3′2′	245	2478′9′3	536
1983	3080	3349	462
232		1333	
		261	

Συντομίαι τῆς διαιρέσεως.

α′) Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ τοῦ 10, ἐπειδὴ τὸ 10 ἀποτελεῖ μίαν δεκάδα, θὰ χωρῇ τόσας φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον ὅσας δεκάδας θὰ ἔχῃ οὗτος, τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως· π. χ 458: 10 δίδει πηλίκον μὲν 45, ὑπόλοιπον δὲ 8.

Ὁμοίως, ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι' 100, ἐπειδὴ τὸ 100 ἀποτελεῖ μίαν ἑκατοντάδα, θὰ χωρῇ εἰς τὸν ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας ἑκατοντάδας ἔχει οὗτος ἐν συνόλῳ, καὶ θὰ μείνῃ ὡς ὑπόλοιπον ὁ ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀποτελούμενος ἀριθμός· π.χ. 7583: 100 δίδει πηλίκον 75 καὶ ὑπόλοιπον 83. (Πρβλ. σελ. 10 πρβλ. 17, Σημ.)

Γενικῶς ἐξάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

56. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 10, 100 1000 καὶ ἐν γένει δι' ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τῆς 1 παρακολουθουμένης ὑφ' ὁσωνδήποτε μηδενικῶν, χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ τὰ μὲν χωρισθέντα ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δὲ λοιπὰ τὸ πηλίκον».

Κατὰ ταῦτα 18438 : 1000 δίδει πηλίκον μὲν 18, ὑπόλοιπον δὲ 438.

β′) Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 75834 διὰ 2500·

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ἀποτελεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ 25 ἑκατοντάδας, δὲν δύνανται αὗται νὰ χωρῶσιν εἰς τὰς μονάδας καὶ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου, ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εὑρεθῇ, ἂν διαιρεθῶσι μόνον αἱ 758 ἑκατοντάδες τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν 25 ἑκατοντάδων τοῦ διαιρέτου, ἤτοι εἶναι τὸ 30· αἱ δὲ ὑπολειπόμεναι 8 ἑκατοντάδες ἢ 800 μονάδες ἀποτελοῦσι μὲ τὰς 34 παραλειφθείσας μονάδας τοῦ διαιρετέου τὸ ὑπόλοιπον 834 τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

758	34	25|00
8	34	30

Ἐντεῦθεν ἐξάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

57. «Ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα δι᾽ ἄλλου λήγοντος εἰς μηδενικά, ἀποκόπτομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου καὶ ἄλλα τόσα ψηφία ἐκ δεξιῶν τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν. Τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον εἶναι τὸ ζητούμενον, τὸ δὲ ἀληθὲς ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἂν δεξιᾷ τοῦ εὑρεθέντος καταβιβάσωμεν καὶ τὰ ἀποκοπέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου».

Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.

58. Ἡ δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως γίνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ· ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ· ἂν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους (§ 49).

Νὰ δοκιμασθῶσιν αἱ διαιρέσεις τοῦ ἐδ. (§ 55).

Ἀσκήσεις διαιρέσεως.

α΄) Ἀπὸ μνήμης νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν ἑξῆς διαιρέσεων·

45 : 9=	60 : 15=	110 : 25=
253 : 10=	100 : 25=	800 : 20=
72 : 8=	90 : 11=	805 : 49=
48 : 6=	108 : 12=	94 : 19=
1248 : 100=	75 : 20=	5400 : 1000=
37 : 5=	96 : 18=	668 : 15=

β΄) Δύναται πολλάκις ἡ διαίρεσις νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ ἄνευ τῆς συνήθους διατάξεως, ἀλλὰ συντομώτερον ὡς ἑξῆς. Ἔστω ἡ διαίρεσις 374:2.

διαιρετέος 374: 2 διαιρέτης

πηλίκον 187

ὑπόλοιπον 0

Εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου, χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, ἀλλ' ἀπομνημονεύοντες ταῦτα.

Ὁμοίως ἐκτελεῖται καὶ ἡ ἑξῆς διαίρεσις·

διαιρετέος 8425 : 4 διαιρέτης
πηλίκον 2106
ὑπόλοιπον 1

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς διατάξεως τῆς διαιρέσεως ἐφαρμόζεται συνήθως, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος.

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ἐκτελεσθῶσι καὶ αἱ ἑξῆς διαιρέσεις:

486 : 2	3545 : 5	4589 : 5	257 : 3
7584 : 4	8472 : 8	7583 : 6	378 : 8
4583 : 9	845 : 7	7834 : 7	583 : 4

γ') Νὰ ἐκτελεσθῶσι γραπτῶς καὶ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

358027 : 425	248872 : 458
1345083 : 12400	58234725 : 8943
7582345 : 2734	75834592 : 93743

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαιρέσεων τούτων νὰ γίνῃ ἡ δοκιμὴ αὐτῶν.

Προβλήματα διαιρέσεως.

1) Αἱ 5 ὀκάδες πράγματός τινος τιμῶνται 40 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ;

Λύσις.—Ἀφοῦ αἱ 5 ὀκάδες τιμῶνται 40 δραχ., ἐὰν μοιράσωμεν τὸν 40 εἰς 5 ἴσα μέρη, ἤτοι 40=8+8+8+8+8, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς μίαν τῶν 5 ὀκάδων, ἤτοι εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη 8 δραχ. εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 40 διὰ τοῦ 5 (§ 44).

Παρατήρ.—Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων (40 δραχ. τιμῶνται αἱ 5 ὀκ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ). Ὡς εἴδομεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται διὰ τῆς διαιρέσεως.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

59. **«Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν».**

Διαιρετέος μὲν εἶναι ἡ δεδομένη τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ εἶναι ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον πηλίκον, διαιρέτης δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν δοθεισῶν μονάδων, ἤτοι ἑτεροειδὴς πρὸς τὸν διαιρετέον.

Τὰ τοιαῦτα προβλήματα διαιρέσεως καλοῦνται προβλήματα μερισμοῦ.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Διὰ διαιρέσεως θὰ λυθῇ πάλιν τὸ πρόβλημα, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς.

2) Εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ πενταπλάσιον εἶναι ὁ 40.

Ὅθεν ὁ ἀνωτέρω κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

60. «Ὅταν δίδηται τὸ διπλάσιον, τὸ τριπλάσιον κλπ. ἀριθμοῦ τινος καὶ ζητῆται ὁ ἀριθμὸς οὗτος, κάμνομεν διαίρεσιν».

3) Ἐξοδεύει τις καθ' ἑκάστην 5 δραχ. Διὰ πόσας ἡμέρας θὰ τῷ ἐπαρκέσωσιν 60 δραχμαί;

Λύσις.—Ἐὰν ἐκ τῶν 60 δραχμῶν δαπανήσῃ τὰς 5, θὰ διέλθῃ 1 ἡμέραν· ἐὰν δὲ ἐκ τῶν ὑπολειπομένων δραχμῶν δαπανήσῃ ἄλλας 5, θὰ διέλθῃ ἄλλην μίαν ἡμέραν (τὴν δευτέραν) καὶ ἂν ἐκ τοῦ νέου ὑπολοίπου δαπανήσῃ ἄλλας 5, θὰ διέλθῃ τὴν τρίτην ἡμέραν κ.τ.λ., ἑπομένως αἱ 60 δραχμαὶ θὰ ἐπαρκέσωσι διὰ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 60 ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὅσας φορὰς ὁ 60 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5, δηλ. 12 ἡμέρας. Εὑρίσκεται δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διὰ διαιρέσεως τοῦ 60 διὰ τοῦ 5 (§ 45).

Παρατήρ. – Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ δίδεται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος (εἰς 1 ἡμέραν ἐξοδεύει 5 δραχμάς), ὡς καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων, καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτων (εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 60 δραχμάς).

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

61. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἀγνώστου πλήθους καὶ ζητεῖται τὸ πλῆθος τοῦτο, κάμνομεν διαίρεσιν».

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι ἀμφότεροι ὁμοειδεῖς, τὸ δὲ πηλίκον ἑτεροειδὲς πρὸς αὐτοὺς καὶ τὸ εἶδος αὐτοῦ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος.

Τα τοιαῦτα προβλήματα τῆς διαιρέσεως καλοῦνται προβλήματα μετρήσεως.

Ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι ἐθεωρήσαμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους. Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ πάλιν διὰ διαιρέσεως, ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς·

4) Πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5;

Ὅθεν ὁ προηγούμενος κανὼν δύναται νὰ γενικευθῇ ὡς ἑξῆς·

62. «Ὅταν ζητῆται νὰ εὕρωμεν ποσάκις ἀριθμός τις εἶναι μεγαλύτερος ἄλλου, κάμνομεν διαίρεσιν».

5) Λαμβάνει τις μισθὸν κατ' ἔτος 2400 δραχ. Πόσας λαμβάνει κατὰ μῆνα;

6) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου διάστημα ἐκ 352 χιλιομ. εἰς 11 ὥρας. Πόσον διανύει καθ' ὥραν; (Ἀπ. 32 χιλιόμ.)

7) 3600 λεπτὰ πόσας δραχμὰς κάμνουσι;

8) 5600 δράμια πόσας ὀκάδας ἀποτελοῦσι;

9) Τὸ 25πλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι ὁ 2875. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

10) Ποσάκις ὁ ἀριθμὸς 1950 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 150.

11) Ἐὰν εἰς ἕκαστον κιβώτιον δύνανται νὰ τοποθετηθῶσι 258 λεμόνια, πόσα κιβώτια χρειάζονται, διὰ νὰ τοποθετηθῶσι 5934 λεμόνια;

12) Αἱ 6 ὀκάδες ἐλαιῶν δίδουσι 1 ὀκᾶν ἐλαίου. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου θὰ μᾶς δώσουν 6732 ὀκάδες ἐλαιῶν;

13) Αἱ 7525 δραχμαὶ πόσα 25δραχμα κάμνουσι;

14) Ἁμαξοστοιχία τις διανύει 32 χιλιόμετρα καθ' ὥραν· εἰς πόσας ὥρας θὰ διανύσῃ 224 χιλιόμετρα; (Ἀπ. 7 ὥρ.).

15) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 158 πήχεις ὑφάσματος ἀντὶ 4860 δραχμῶν· ἐξώδευσε διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ὑφάσματος τούτου 24 δραχμ. καὶ διὰ δημοτικὸν φόρον 172 δραχμ. Πόσον στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου; (Ἀπ. 32 δραχ.).

16) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι ὁμοῦ ἐπὶ 25 ἡμέρας λαμβάνουσι 325 δραχμάς· ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν λαμβάνει ἡμερομίσθιον 5 δραχ. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἄλλου; (Ἀπ. 8 δραχ.).

17) Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας ἐπληρώθησαν εἰς ἡμερομίσθια 12480 δραχ. καὶ εἰργάσθησαν 48 ἐργάται λαμβάνοντες ἡμερομίσθιον 4 δραχ. Πόσας ἡμέρας διήρκεσεν ἡ οἰκοδομὴ τῆς οἰκίας ταύτης; (Ἀπ. 65 ἡμέρας).

18) Λαμβάνει τις κατ' ἔτος εἰσόδημα ἐκ τῆς οἰκίας του 2450 δραχ., ἐξοδεύει δὲ εἰς διαφόρους ἐπιδιορθώσεις κατ' ἔτος 215 δραχ. καὶ διὰ φόρους εἰς τὴν Κυβέρνησιν 135 δραχ. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν εἰσόδημα τῆς οἰκίας ταύτης κατὰ μῆνα; (Ἀπ. 175 δραχ.).

19) Ἀποθανών τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ διανεμηθῇ ἡ ἐξ 195640 δραχ. περιουσία του ἐξ ἴσου εἰς τοὺς 4 υἱούς του, ἀφ' οὗ πληρώσωσι πρῶτον οὗτοι τὸν φόρον τοῦ Δημοσίου ἀνερχόμενον εἰς 3450 δραχ. καὶ δωρήσωσι προσέτι εἰς μὲν τὸ νοσοκομεῖον 8450 δραχ., εἰς δὲ τὸ ταμεῖον τῆς Ἐθνικῆς Ἀμύνης 15400 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν υἱῶν του; (Ἀπ. 42085 δραχ.).

20) Ἀτμόμυλός τις ἀλέθει εἰς 12 ὥρας 18300 ὀκάδ., δεύτερος ἀτμόμυλος ἀλέθει εἰς 20 ὥρας 35680 ὀκ. καὶ τρίτος ἀλέθει εἰς 24 ὥρας 42600 ὀκ. Ποῖος ἐκ τῶν τριῶν ἀλέθει περισσότερον καθ' ὥραν; (Ἀπ. ὁ β').

21) Ἡ πρὸ τοῦ 1913 Ἑλλὰς ἐχρεώστει εἰς τοὺς δανειστάς της 813093680 δρ., ὁ δὲ πληθυσμός της ἀνήρχετο εἰς 2653700 κατοίκους. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι 5 ἄτομα ἀποτελοῦσι μίαν οἰκογένειαν, πόσαι δραχμαὶ ἐκ τοῦ χρέους τούτου ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην οἰκογένειαν; (Ἀπ. 1532 δρ.).

22) Ἡ Ἑλλὰς τοῦ 1921 περιλαμβάνουσα πληθυσμὸν 5.535.850 κατοίκων ἐχρεώστει εἰς τοὺς δανειστάς της περίπου δραχ. 5.685.317.950. Ζητοῦνται τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι (21). (Ἀπ. δρ. 5135).

23) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει κατὰ μῆνα μισθὸν 85 δραχ. καὶ ἐνοίκιον ἀπό τινα οἰκίαν του 48 δραχ. κατὰ μῆνα, ἐξοδεύει δὲ πρὸς συντήρησίν του 835 δραχ. κατ' ἔτος. Πόσα ἔτη πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ σχηματίσῃ κεφάλαιον 6088 δραχμῶν; (Ἀπ. 8 ἔτη).

24) Ἠγόρασέ τις 17 σάκκους ἀλεύρου, ἐξ ὧν ἕκαστος ἔχει βάρος 65 ὀκ., ἀντὶ 55250 λεπτῶν. Μεταπωλήσας τὸ ἄλευρον τοῦτο ἐζημιώθη 3315 λεπτά. Πρὸς πόσα λεπτὰ ἐπώλησεν ἑκάστην ὀκᾶν καὶ πόση εἶναι ἡ ζημία του κατ' ὀκᾶν;

(Ἀπ. ἐπώλησε 47 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐζημιώθη 3 λεπ. κατ' ὀκ.).

25) Πατήρ τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῇ ἡ ἐκ 2500 δραχ. περιουσία του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς· ὁ β' νὰ λάβῃ 500 δραχ. περισσοτέρας τοῦ α' καὶ ὁ γ' 300 δραχ. περισσοτέρας τοῦ β'. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

(Ἀπ. ὁ α' 400 δραχ., ὁ β' 900 δραχ. καὶ ὁ γ' 1200).

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ β' τάξει.

1) Κατάστημα φωταερίου εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του 1345 τόννους ἀνθράκων· ἠγόρασε κατὰ τὸ διάστημα τοῦ ἔτους α') 548 τόν. ἀνθράκων, β') 1647 τόν. καὶ γ') 1872 τόννους. Ἐὰν κατηνάλωσε καθ' ὅλον τὸ ἔτος 3452 τόννους, πόσοι τόννοι ὑπολείπονται ἐν τῇ ἀποθήκῃ του κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους; (Ἀπ. 1960 τόν.).

2) Ἔμπορός τις εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του τὴν 1ην 7)βρίου 85750 ὀκ. σίτου· ἠγόρασε δὲ κατὰ τὴν 10ην τοῦ αὐτοῦ μηνὸς 47850 ὀκ. Κατὰ τὴν 15ην 7)βρίου ἐπώλησε 58765 ὀκ., τὴν δὲ 20ὴν 43272 ὀκ. καὶ τὴν 30ὴν τοῦ ἰδίου μηνὸς 15793 ὀκάδ. Πόσας ὀκάδας σίτου ἔχει ἀκόμη ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ; (Ἀπ. 15770 ὀκάδ.).

3) Ἔμπορός τις ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος διάφορα ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα ἐστοίχισαν ἐν ὅλῳ 85670 δραχ., εἰσέπραξε δὲ ἐκ τῶν πωλήσεων ὁλοκλήρου τοῦ ἔτους 75140 δραχμάς. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους εἶχεν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του ἀπώλητα ἐμπορεύματα ἀξίας 18125 δραχμῶν. Πόσον τὸ κέρδος τοῦ ἐμπόρου τούτου ; (Ἀπ. 7595 δραχ.).

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἔρια 5 ποιοτήτων· ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος ἠγόρασεν 687 ὀκ., ἐκ τῆς βας καὶ δης ἀπὸ 845 ὀκ. καὶ ἐκ τῆς γης 145 ὀκ. περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας εἶχεν ἀγοράσει ἐκ τῆς αης ποιότητος, καὶ ἐκ τῆς εης 245 ὀκ. περισσοτέρας ἢ ὅσας εἶχεν ἀγοράσει ἀπὸ τὴν δην. Πόσας ὀκάδας ἐρίου ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστης ποιότητος καὶ πόσας ἐξ ὅλων τῶν ποιοτήτων ;

(Ἀπ. α' 687, β' 845, δ' 845, γ' 832, ε' 1090, ἐν ὅλῳ 4299 ὀκ.).

5) Χρεωστεῖ τις 18470 δραχμὰς εἴς τινα καὶ τῷ δίδει 83 ἑκατοντάδραχμα, 148 εἰκοσιπεντάδραχμα, 51 δεκάδραχμα, 43 πεντάδραχμα καὶ 147 μονόδραχμα. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη ; (Ἀπ. 5598 δραχμάς).

6) Εἰς δεξαμενήν, ἥτις δύναται νὰ περιλάβῃ 2808 ὀκάδας ὕδατος, εἰσρέουσιν ἔκ τινος κρουνοῦ 185 ὀκ. καθ' ὥραν· εἰς δὲ τὸν πυθμένα ταύτης ὑπάρχει στρόφιγξ, δι' ἧς ἐκρέουσιν 68 ὀκ. ὕδατος καθ' ὥραν. Ἐὰν ἀνοίξωμεν συγχρόνως τὸν κρουνὸν καὶ τὴν στρόφιγγα, εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενή ; (Ἀπ. εἰς 24 ὥρας).

7) Ἐργάτης τις ἐργασθεὶς ἐπί τινας ἡμέρας λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν 48 δραχμάς. Ἐὰν δὲ εἰργάζετο 15 ἡμέρας περισσότερον, θὰ ἐλάμβανεν 108 δραχμάς. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον καὶ πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ; (Ἀπ. ἡμερομίσθιον 4 δραχμ., ἡμέρ. 12).

8) Ἠγόρασέ τις φασόλια πρὸς 63 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ ἐπώλησεν αὐτὰ πρὸς 75 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐκέρδισεν δὲ ἐν ὅλῳ 30 δραχμάς. Πόσαι ὀκάδες ἦσαν τὰ φασόλια ταῦτα ; (Ἀπ. 250 ὀκάδ.).

9) Στρατός τις ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 μεραρχίας, ἑκάστη μεραρχία ἀπὸ 2 ταξιαρχίας, ἑκάστη ταξιαρχία ἐκ 5 συνταγμάτων, τὸ σύνταγμα ἀπὸ 3 τάγματα, τὸ τάγμα ἀπὸ 4 λόχους, ἕκαστος λόχος ἐκ 250 ἀνδρῶν. Ἐκ πόσων ἀνδρῶν ἀποτελεῖται ὁ στρατὸς οὗτος καὶ πόσας ὀκάδας ἄρτου

χρειάζονται, ἂν ἕκαστος στρατιώτης λαμβάνῃ 300 δράμια ἄρτου καθ' ἡμέραν ; ('Απ. 90000 ἄνδρας, 67500 ὀκ. ἄρτου).

10) Τρεῖς ἐφοπλισταὶ κατέβαλον προσωρινῶς πρὸς ἀγορὰν ἀτμοπλοίου ὁ μὲν α' 58700 δραχ., ὁ δὲ β' 3450 δραχ. περισσοτέρας τοῦ α' καὶ ὁ γ' 2520 δραχ. περισσοτέρας τοῦ β'. Ἡ ὁλικὴ τιμὴ τοῦ ἀτμοπλοίου ἦτο 204000 δραχ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ καταβάλῃ ἕκαστος ἀκόμη κατὰ τὴν πληρωμὴν τοῦ ὑπολοίπου, διὰ νὰ ἔχωσι καὶ οἱ τρεῖς ἴσον μερίδιον ; ('Απ. α' 9300 δραχ., β' 5850, γ' 3330).

11) Ἐργολάβος τις ἀνέλαβε τὴν οἰκοδομὴν οἰκίας ἀντὶ 40000 δρ Ἐξώδευσε δὲ διὰ λίθους 6850 δραχ., δι' ἄσβεστον 745 δραχ., δι' ἄμμον 572 δρ., διὰ ξυλείαν 7874 δραχ., διὰ κεράμους 862 δραχ., εἶχε δὲ προσέτι 35 κτίστας πρὸς 4 δρχ. ἡμερομίσθιον, ἐργασθέντας ἐπὶ 92 ἡμέρας. Πόσα ἐκέρδησεν ὁ ἐργολάβος ἐκ τῆς οἰκοδομῆς ταύτης ; ('Απ. 10217 δρχ.).

12) Προμηθευτής τις ἀνέλαβε νὰ προμηθεύσῃ φορβὴν δι' 800 ἵππους ἱππικοῦ τινος συντάγματος ἐπὶ ἓν ἔτος ἀντὶ 70000 δρ. Ἠγόρασε πρὸς τοῦτο α') 75350 ὀκ. κριθῆς πρὸς 18 λεπ. τὴν ὀκᾶν, β') 47800 ὀκ. πρὸς 21 λεπ., γ') 23500 ὀκ. πρὸς 19 λεπτ. καὶ δ') 458700 ὀκ. χόρτου πρὸς 6 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν, ἂν ἐκέρδησε καὶ πόσον ; ('Απ. 14412 δραχ.).

13) Γεωργός τις ἔσπειρε 45 κοιλὰ σίτου, ἅτινα εἶχεν ἀγοράσει πρὸς 9 δραχ. τὸ κοιλόν, καὶ 28 κοιλὰ κριθῆς πρὸς 4 δραχ. τὸ κοιλόν. Ἐξώδευσε δὲ διὰ τὴν σποράν, θερισμὸν καὶ λοιπὴν ἐν γένει ἐργασίαν μέχρι τῆς συγκομιδῆς 1295 δραχ. Ἔλαβε δὲ κατὰ τὴν συγκομιδὴν 365 κοιλὰ σίτου, πωληθέντα πρὸς 8 δραχ. τὸ κοιλόν, καὶ 292 κοιλὰ κριθῆς, πωληθέντα πρὸς 5 δραχ. τὸ κοιλόν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδησεν οὗτος ; ('Απ. 2568 δραχ.).

14) Καθεκλοποιὸς κατεσκεύασεν εἰς διάστημα 6 μηνῶν 1524 καθίσματα, ἐξώδευσε δὲ κατὰ τὴν κατασκευὴν αὐτῶν τὰ ἑξῆς· α') δι' ἀγορὰν ξυλείας 2370 δραχ., β') δι' ἐνοίκιον ἐπλήρωσε 60 δραχ. κατὰ μῆνα, γ') ἐπλήρωσεν εἰς δύο ἐργάτας του ἀπὸ 75 δραχ. κατὰ μῆνα, δ') διὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 1 δραχ. καθ' ἡμέραν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν, πόσον στοιχίζει ἑκάστη δωδεκὰς καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἑκάστην δωδεκάδα, διὰ νὰ κερδήσῃ 3 δραχ. εἰς ἑκάστην ; (ὁ μὴν λογίζεται μὲ 30 ἡμέρας). ('Απ. νὰ πωλῇ 33 δραχ. τὴν δωδεκάδα· τῷ στοιχίζει 30).

15) Ἔμπορός τις ἀλεύρων ἔχει ἐν τῇ ἀποθήκῃ του 854 σάκκους τῶν 70 ὀκάδ. ἀλεύρου Αης ποιότητος καὶ 1230 σάκκους τῶν 65 ὀκ. ἀλεύρων

Β^ας^ ποιότητος. Ἡ ὀκᾶ ἀλεύρου Α^ης^ ποιότητος τῷ στοιχίζει 56 λεπτὰ καὶ Β^ας^ ποιότητος 52 λεπτά. Ἐπώλησε δὲ κατὰ τὴν διάρκειαν ἑνὸς μηνὸς α') 345 σάκκους Α^ης^ ποιότητος πρὸς 58 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, β') 458 σάκκους ἀλεύρου τῆς αὐτῆς ποιότητος πρὸς 59 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, γ') 645 σάκκους ἀλεύρου Β^ας^ ποιότητος πρὸς 55 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν καὶ δ') 358 σάκκους ἀλεύρου τῆς αὐτῆς ποιότητος πρὸς 53 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν α') πόσαι ὀκάδες ἀλεύρου Α^ης^ καὶ Β^ας^ ποιότητος ἔμειναν ἀπώλητοι εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς καὶ β') πόσον ἐκέρδησεν ἐκ τῶν γενομένων πωλήσεων ;

(Ἀπ. Α^ης^ 3570 ὀκ., Β^ας^ 14755 ὀκ., ἐκέρδησε 293525 λεπτά).

16) Ἀλευρέμπορος ἔχει νὰ μετακομίσῃ ἐκ τῆς ἀποθήκης του εἰς τὴν παραλίαν 32400 σάκκους ἀλεύρου· θέλει δὲ νὰ γίνῃ ἡ μεταφορὰ ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας· ἐμίσθωσε πρὸς τοῦτο 40 φορτηγὰ ἁμάξια, ἐξ ὧν ἕκαστον δύναται νὰ περιλάβῃ 15 σάκκους Ζητεῖται α') πόσους δρόμους θὰ κάμῃ ἕκαστον ἁμάξιον ἐντὸς τῆς ἡμέρας, β') πόσα λεπτὰ θὰ πληρώσῃ ὁ ἔμπορος διὰ τὴν μεταφορὰν τῶν σάκκων τούτων, ἐὰν δι' ἕκαστον ἁμάξιον καὶ δι' ἕκαστον δρόμον πληρώνῃ 75 λεπτά, καὶ γ') πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ἕκαστος καρραγωγεύς ; (Ἀπ. δρόμους 54, θὰ πληρώσῃ 162000 λεπτά, ἕκαστος δὲ καρραγωγεὺς θὰ λάβῃ 4050 λεπτά).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Ἐπὶ τῶν πράξεων τῶν ἀκεραίων ἰσχύουσι γενικαί τινες ἀρχαί, αἵτινες καλοῦνται ἰδιότητες· τινὰς τούτων ἐγνωρίσαμεν ἐν τοῖς προηγουμένοις (§ § 20, 26, 32, 33, 34).

Ἐνταῦθα ἀναφέρομεν προσέτι καὶ τὰς ἑξῆς.

Ἰδιότητες προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Μαθητής τις ἔλαβε παρὰ τοῦ πατρός του 8 πεντάλεπτα, παρὰ τῆς μητρός του 5 καὶ παρὰ τοῦ ἀδελφοῦ του 3, ἑπομένως ἔχει ἐν ὅλῳ $8+5+3$ πεντάλεπτα· ἂν ὁ πατήρ του τῷ ἔδιδεν ἀκόμη 2 πεντάλεπτα, θὰ εἶχε $(8+5+3)+2=16+2=18$. Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκόμη, ἂν τὰ 2 πεντάλεπτα προστεθῶσιν εἰς τὰ 8, τὰ ὁποῖα τῷ ἔδωκεν ὁ πατήρ του, ἤτοι $(8+2)+5+3=10+5+3$.

Ὅθεν ἔχομεν $(8+5+3)+2=(8+2)+5+3$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

63. «Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἴς τινα τῶν προσθετέων».

ΣΗΜ. Ὅταν ὁλόκληρον ἄθροισμα ἢ διαφορὰ ἢ γινόμενον κτλ. λαμβάνηται ὡς εἷς ἀριθμὸς καὶ ἐπ' αὐτοῦ πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῇ ἄλλη τις πρᾶξις, κλείομεν τοῦτο ἐντὸς παρενθέσεων· π. χ. $(8+5+3)+2$ σημαίνει τὸ 2 νὰ προστεθῇ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἄθροισμα $(8+5+3)$.

Πρόβλημα. — Ἐκ δύο Ἑλληνικῶν σχολείων τὸ μὲν ἔχει εἰς τὴν Αην τάξιν 42 μαθητάς, εἰς τὴν Βην 35 καὶ εἰς τὴν Γην 24, τὸ δὲ ἔχει εἰς μὲν τὴν Αην 37 μαθητάς, εἰς δὲ τὴν Βην 28 καὶ εἰς τὴν Γην 17. Πόσους μαθητὰς ἔχουσι καὶ τὰ δύο ὁμοῦ;

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσους μαθητὰς ἔχει ἕκαστον σχολεῖον.

τὸ 1ον $42+35+24=101$

τὸ 2ον $37+28+17=82$

καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἀθροίσματα, ἤτοι

$$(42+35+24)+(37+28+17)=101+82=183.$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν ἀμέσως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 6 τάξεων τῶν δύο Ἑλλην. σχολείων, ἤτοι $42+35+24+37+28+17=183$.

Ὅθεν ἔχομεν

$$(42+35+24)+(37+28+17)=42+35+24+37+28+17.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

64. «Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους τῶν δύο ἀθροισμάτων».

Ἐὰν ἔχωμεν εἰς τὸ χρηματοφυλάκιόν μας ἓν 25δραχμον καὶ ἓν 5δραχμον καὶ πληρώσωμεν 3 δραχμάς, θὰ μᾶς μείνωσιν $(25+5)-3=30-3=27$ δραχ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ δώσωμεν τὰς 3 δραχ. ἀπὸ τὸ 5δραχμον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον θὰ μείνωσι 2 δραχμαί, ἤτοι

$$25+(5-3)=25+2=27.$$

Ὅθεν ἔχομεν $(25+5)-3=25+(5-3)$.

Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.

65. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα ἀπὸ ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων».

Ἂν ἔχωμεν ἓν 100δραχμον καὶ ὀφείλωμεν εἰς τὸν Α 15 δραχ. καὶ εἰς τὸν Β 22 δραχ., μετὰ τὴν πληρωμὴν τῶν χρεῶν θὰ μᾶς μείνωσιν

100—(15+22)=100-37=63 δραχ. Δυνάμεθα ὅμως νὰ πληρώσωμεν εἰς τὸν Α τὰς 15 δραχ. καὶ μένουσιν 100—15=85 καὶ ἔπειτα εἰς τὸν Β τὰς 22 δραχ. καὶ μένουσιν 85-22=63 δραχμαί.

Ὅθεν ἔχομεν 100-(15+22)=(100-15)—22.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*66. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος τὸ ἄθροισμα ἄλλων, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν πρῶτον προσθετέον, ἀπὸ τοῦ ὑπολοίπου τὸν δεύτερον προσθετέον, ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ἀφαιρέσωμεν καὶ τὸν τελευταῖον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος».

ΣΗΜ.—Αἱ μετ' ἀστερίσκου ἰδιότητες παραλείπονται κατὰ τὴν διδασκαλίαν ἐν τῇ Α' τάξει.

Πρόβλημα.—Ἐργάτης τις ἔχει οἰκονομίας ἀπὸ τὴν παρελθοῦσαν ἑβδομάδα 15 δρ. καὶ εἰσέπραξε κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην ἀπὸ ἡμερομίσθια 18 δρ., ἐξώδευσεν ὅμως ἕνεκα ἀσθενείας τοῦ τέκνου του 25 δραχ. Πόσας ἔχει ἤδη;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὰς 15 δραχ. θὰ ἀφαιρεθῶσιν αἱ 25—18 =7 δρχ., τὰς ὁποίας ἐξώδευσε περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας εἰσέπραξε κατὰ τὴν ἑβδομάδα ταύτην, ἤτοι θὰ ἔχωμεν 15—(25—18)=15—7=8 δρ.

Δυνάμεθα ὅμως εἰς τὰς 15 δρχ. νὰ προσθέσωμεν τὰς εἰσπραχθείσας 18 δρχ. καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος (15+18) ν' ἀφαιρέσωμεν τὰς δαπανηθείσας 25 δρχ., ἤτοι (15+18)—25.

Ὅθεν ἔχομεν 15-(25—18)=(15+18)—25.

Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*67. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἀπό τινος ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν μειωτέον».

ΣΗΜ.—Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης νὰ στηριχθῇ ἡ συντομία τῆς ἀφαιρέσεως ἀπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ 9, 99, 999 κτλ.

Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἀθροισμάτων καὶ διαφορῶν.

Πρόβλημα.—Δύο ἐργάται εἰργάσθησαν τὴν 1ην ἑβδομάδα ἐπὶ 5 ἡμ. καὶ τὴν 2αν ἐπὶ 6 ἡμ. Ὁ πρῶτος ἐλάμβανεν ἡμερομίσθιον 4 δρ., ὁ δὲ δεύτερος 3 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβον καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐν ὅλῳ;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ κατὰ δύο τρόπους.

α΄) *Τρόπος.*—Καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἐργάται εἰργάσθησαν κατὰ τὰς δύο ἑβδομάδας 5+6=11 ἡμ., ἐλάμβανον δὲ καθ' ἡμέραν 4+3=7 δρχ., ἄρα ἔλαβον ἐν ὅλῳ (4+3)×(6+5)=7×11=77 δρχ.

β΄) *Τρόπος.*—Ὁ α΄ ἐργάτης τὴν μὲν 1ην ἑβδομάδα ἐργασθεὶς ἐπὶ 5 ἡμ. ἔλαβε 4×5=20 δρχ., τὴν δὲ 2αν ἐπὶ 6 ἔλαβε 4×6=24 δρχ., ὁ δὲ β΄ ἐργάτης κατὰ τὴν 1ην ἑβδομάδα ἐργασθεὶς ἐπὶ 5 ἡμ. ἔλαβε 3×5=15 δρχ., κατὰ τὴν 2αν ἔλαβε 3×6=18 δρχ.

Ἄρα καὶ οἱ δύο ὁμοῦ ἔλαβον
(4×5)+(4×6)+(3×5)+(3×6)=20+24+15+18=77 δρ.

Ὅθεν ἔχομεν (4+3)×(5+6)=(4×5)+(4×6)+(3×5)+(3×6).

Τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα τοῦ 2ου μέλους εὑρίσκονται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος (4+3) ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος (5+6).

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*68. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων ἐφ' ἕτερον ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἐφ' ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα».

Πρόβλημα.—Οἰκογενειάρχης τις λαμβάνει τὴν ἡμέραν 5 δρχ. καὶ ἐξοδεύει 3 δρχ. πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του. Πόσας δραχμὰς θὰ ἐξοικονομήσῃ κατὰ τὰς 6 ἐργασίμους ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος;

Λύεται καὶ τοῦτο κατὰ δύο τρόπους.

α΄) *Τρόπος.* — Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 5 δρχ., τὰς ὁποίας λαμβάνει καθ' ἡμέραν, τὰς 3 δρχ., τὰς ὁποίας ἐξοδεύει, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6, ἤτοι (5—3)×6=2×6=12 δρχ.

β΄) *Τρόπος.*—Εὑρίσκομεν πόσας δραχμὰς ἔλαβε κατὰ τὰς 6 ἡμέρας (5×6=30 δρχ.) καὶ πόσας ἐδαπάνησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο (3×6 =18) καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

(5×6)—(3×6)=30—18=12 δρχ.

Ὅθεν ἔχομεν (5—3)×6=(5×6)—(3×6) (1)

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*69. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ μὲ αὐτὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ν' ἀφαιρέσωμεν τὸν δεύτερον».

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (32) ἡ ἰσότης (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

$$6\times(5-3)=(6\times5)-(6\times3)$$

Τοῦτο ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

*70. «Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ διαφοράν, ἂν πολλαπλασιασθῇ χωριστὰ ἐπὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον».

ΣΗΜ.—Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης νὰ στηριχθῇ ἡ συντομία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 9, 99, 999 κτλ.

Πρόβλημα.—3 γεωργοὶ συνέταιροι ἐπώλησαν τὰ προϊόντα καὶ εἰσέπραξαν ἀπὸ μὲν τὸν σῖτον 594 δρχ., ἀπὸ δὲ τὴν κριθὴν 396 δρχ. καὶ ἀπὸ τοὺς ἀμνοὺς 147 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Θὰ διαιρέσωμεν τὸ σύνολον τῶν εἰσπράξεων, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $594+396+147=1137$ δρχ. διὰ τοῦ 3 καὶ θὰ εὕρωμεν $1137:3=379$ δρχ., τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ ἕκαστος, ἤτοι

$$(594+396+147):3=1137:3=379 \text{ δρχ.}$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς τρεῖς γεωργοὺς χωριστὰ τὰς 594 δρχ., ἃς ἔλαβον ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ σίτου ($594:3=198$ δρχ.), ἔπειτα τὰς 396 δρχ. ($396:3=132$ δρχ.) καὶ ἔπειτα τὰς 147 δρχ. ($147:3=49$) καὶ τέλος νὰ προσθέσωμεν τὰ τρία ταῦτα πηλίκα.

$$198+132+49=379.$$

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $(594+396+147):3=(594:3)+(396:3)+(147:3)=198+132+49=379$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*71. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἂν οἱ προσθετέοι διαιρῶνται ἀκριβῶς) καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα».

Ἐκ ταύτης ἕπεται ἀμέσως καὶ ἡ ἑπομένη ἰδιότης.

*72. «Ἀριθμός, διαιρῶν ἀκριβῶς δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν».

Π. χ. ὁ 8, διαιρῶν τὸν 40, 64 καὶ 24 ἀκριβῶς, θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $40+64+24=128$

Πρόβλημα.—4 συνέταιροι ἐκέρδησαν 2456 δραχ. καὶ ἐζημιώθησαν 892 δραχ. Πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ κέρδους;

Ἀφαιροῦμεν τὴν ζημίαν ἀπὸ τοῦ κέρδους (2456—892=1564 δρ.) καὶ τὸ καθαρὸν κέρδος μοιράζομεν εἰς τοὺς 4 συνεταίρους (1564 : 4 =391) δρχ. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν εἰς τοὺς 4 συνεταίρους καὶ τὸ κέρδος (2456 : 4=614 δρ.) καὶ τὴν ζημίαν (892 : 4=223 δρ.) καὶ ἔπειτα ν' ἀφαιρέσωμεν (614—223=391 δρχ.), ἤτοι θὰ ἔχωμεν (2456—892) : 4=(2456 : 4)—(892 : 4)=614—223=391.

Ἐξ οὗ ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*73. «Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν διά τινος ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν (ἂν διαιρῶνται ἀκριβῶς) χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον».

Ἐκ ταύτης ἕπεται ἀκόμη καὶ ἡ ἑπομένη ἰδιότης.

*74. «Ἀριθμός, διαιρῶν ἀκριβῶς δύο ἄλλους, διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν».

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 7, διαιρῶν τὸν 42 καὶ τὸν 14, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 42—14=28.

Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως γινομένων.

Πρόβλημα.—Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωσιν 8 ἐργάται ἐργασθέντες ἐπὶ 12 ἡμ. μὲ ἡμερομίσθιον 3 δρχ.;

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ποσὸν τῶν δραχ., τὰς ὁποίας θὰ λάβωσιν οἱ ἐργάται οὗτοι, εἶναι τὸ γινόμενον 8×12×3. Ἐὰν οἱ ἐργάται διπλασιασθῶσιν, ἤτοι γίνωσι 16, βεβαίως τὸ ποσὸν 16×12×3 θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ προηγουμένου· ἤτοι τὸ γινόμενον 8×12×3 διπλασιάζεται, ὅταν διπλασιασθῇ ὁ παράγων 8. Ὁμοίως διπλάσιον ποσὸν χρημάτων λαμβάνουσιν οἱ 8 ἐργ. μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον, ἂν ἐργασθῶσι διπλασίας ἡμέρας, ἤτοι 24. Ὡσαύτως διπλάσιον ποσὸν χρημάτων θὰ λάβωσιν οἱ 8 ἐργάται εἰς 12 ἡμ., ἂν συμφωνήσωσι διπλάσιον ἡμερομίσθιον.

Ὅθεν ἔχομεν (8×12×3)×2=16×12×3
(8×12×3)×2= 8×24×3
(8×12×3)×2= 8×12×6

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

75. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν».

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 8×12×3 εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ 16×12×3 θὰ ἔχωμεν

$$(16 \times 12 \times 3) : 2 = 8 \times 12 \times 3$$

καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

*76.. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ».

Ἐκ ταύτης ἕπονται καὶ αἱ ἑξῆς δύο ἰδιότητες.

*77. «Ἀριθμός, διαιρῶν ἕνα ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν γινόμενον τούτου ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμόν»· π. χ. ὁ 6, διαιρῶν τὸν 30, θὰ διαιρῇ καὶ 30×2, 30×3 κτλ.

78. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον».

Π. χ. $(9 \times 7 \times 15) : 9 = (7 \times 15)$.

Πρόβλημα.—3 τεμάχια ὑφάσματος, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 πήχ., ἠγοράσθησαν ἀντὶ 240 δραχ. Πόσου τιμᾶται ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου;

Τὸ ὅλον ὕφασμα εἶναι 3×8=24 πήχεις· ἄρα ὁ πῆχυς τιμᾶται $240 : (3 \times 8) = 240 : 24 = 10$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον τιμᾶται τὸ 1 τεμάχιον (240 : 3=80 δραχ.) καὶ ἔπειτα πόσον τιμᾶται ὁ εἷς πῆχυς (80 : 8) =10, ἤτοι $(240 : 3) : 8 = 10$.

Ὅθεν ἔχομεν $240 : (3 \times 8) = (240 : 3) : 8$, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

*79. «Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου, ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος, τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ τρίτου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ διαιρέσωμεν καὶ διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος τοῦ γινομένου».

Ἔστω νὰ μοιράσωμεν 29 δραχ. εἰς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν τὸν 29 διὰ τοῦ 8· ἕκαστος τῶν 8 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ 3 δραχ., θὰ περισσεύσωσι δὲ καὶ 5 δραχ. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς 29 δραχ., συγχρόνως δὲ διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς 8 ἀνθρώπους, ἤτοι ἂν μοιράσωμεν 58 δραχ. εἰς 16 ἀνθρώπους, εἶναι φανερὸν ὅτι ἕκαστος τῶν 16 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ μερίδιον 3 δρχ., ἀλλὰ θὰ περισσεύσωσι τώρα 10 δρχ., ἤτοι διπλάσιαι ἢ πρότερον· δηλ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 58 : 16 εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῆς πρώτης διαιρέσεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 10 εἶναι διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου 5 ταύτης.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

80. «Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται (ἢ διαιρεῖται, ἐπὶ τὸν ἀριθμόν».

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι 0, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἡ διαίρεσις ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι τελεία. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης.

81. «Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τελείας διαιρέσεως πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἡ δὲ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία».

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν ἰδιοτήτων (§ § 63—81).

α) $(18+7+20)+13$ β) $(45+8+19)-17$
γ) $25+(8+75+12)$ δ) $(18+43)+(7+22)$

*2) Ὡσαύτως αἱ ἀκόλουθοι:

α) $128-(20+8+30)$ β) $386-(100-1)$
γ) $407-(200-3)$ δ) $(8+7)\times(4+6)$
ε) $(35+40)\times 2$ ϛ) $65\times(20-3)$

*3) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς:

α) $(28+42+35):7$ β) $(200-50):25$
γ) $(18\times 7\times 20):6$ δ) $3135:(3\times 5)$

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

82. *Ὁρισμοί.*—Ἀριθμός τις λέγεται ***διαιρετὸς*** δι' ἄλλου, ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος λέγεται ***διαιρέτης*** τοῦ πρώτου· π.χ. ὁ 20 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5, ὁ δὲ 5 διαιρέτης τοῦ 20. Ὁ ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς δι' ἄλ-

λου λέγεται καὶ ***πολλαπλάσιον*** αὐτοῦ, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης ***ὑποπολλαπλάσιον*** τοῦ πρώτου.

Π. χ. ὁ 30 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, διότι 6×5=30, ὁ δὲ 6 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 30.

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν διά τινας διαιρέτας διὰ τῶν ἑξῆς κανόνων.

83. «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 10, ἂν λήγῃ εἰς 0, διὰ τοῦ 100, ἂν λήγῃ εἰς δύο μηδενικά, διὰ τοῦ 1000, ἂν λήγῃ εἰς τρία μηδενικὰ κ.ο.κ.»

Διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 10 εἶναι τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον (§ 56). Ἑπομένως, ἂν τοῦτο εἶναι 0, ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ 10 γίνεται ἀκριβῶς.

Ὁμοίως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος δι' 100 εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ἀποτελούμενος ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων αὐτοῦ, ἐπομένως, ἂν ταῦτα εἶναι μηδενικά, ἡ διὰ τοῦ 100 διαίρεσις αὐτοῦ γίνεται ἀκριβῶς κ.ο.κ.

84. «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ἂν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2 ἢ 5».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 458· οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα 450+8. Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς 450 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10 καὶ ἐπομένως διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 ἢ 2 (§ 77), ὁ δὲ 8 διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, οὐχὶ ὅμως διὰ τοῦ 5· ἄρα τὸ ἄθροισμα 450+8, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμός, θὰ εἶναι διαιρετὸς μὲν διὰ τοῦ 2 (§ 72), οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 5.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 675 εἶναι ἄθροισμα 670+5, ἤτοι ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ τοῦ 5· οὐχὶ ὅμως διὰ τοῦ 2· ἄρα εἶναι διαιρετὸς μὲν διὰ τοῦ 5, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 2.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 2, πρέπει νὰ λήγῃ εἰς ἓν τῶν ἑπομένων ψηφίων, 0, 2, 4, 6, 8. Διὰ νὰ εἶναι δὲ διαιρετὸς διὰ 5, πρέπει νὰ λήγῃ εἰς 0 ἢ 5.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ διαιρούμενοι διὰ τοῦ 2, λέγονται **ἄρτιοι**, οἱ μὴ διαιρούμενοι λέγονται **περιττοί**.

ΣΗΜ.—Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἀριθμοῦ τινος δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τούτου διὰ 2 ἢ 5 θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5.

*85. «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ἂν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ 25».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3248· οὗτος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα 3200+48. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 3200 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 100 καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 ἢ 25 (§ 77), ὁ δὲ 48 εἶναι μὲν διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, οὐχὶ ὅμως καὶ διὰ τοῦ 25· ἄρα τὸ ἄθροισμα 3200 +48, ἤτοι ὁ δοθεὶς ἀριθμός, θὰ εἶναι διαιρετὸν μὲν διὰ τοῦ 4 (§ 72), οὐχὶ δὲ διὰ τοῦ 25.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 4850 εἶναι ἄθροισμα 4800+50, ὅπερ εἶναι διαιρετὸν μὲν διὰ τοῦ 25, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ 4.

Κατὰ ταῦτα διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ τοῦ 25, πρέπει νὰ λήγῃ ἢ εἰς 25 ἢ 50 ἢ 75 ἢ εἰς 00.

ΣΗΜ.—Ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἀριθμοῦ τινος ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ 4 ἢ 25, ἑπομένως ἀφίνωσιν ὑπόλοιπόν τι, τότε τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 4 ἢ 25.

86. «Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 3, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9 ἢ 3».

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 873, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 8+7+3=18 διαιρετὸν διὰ τοῦ 9· λέγω ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 3, διότι ἡ δεκὰς περιέχει τὸ 9 καὶ μίαν μονάδα, ἡ ἑκατοντὰς περιέχει τὸ 99, ὅπερ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9, ὡς καὶ τοῦ 3, καὶ μίαν μονάδα, ἡ χιλιὰς περιέχει τὸ 999, ἤτοι πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ μίαν μονάδα ἀκόμη κ. ο. κ. Ἑπομένως, ἂν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα 800+70+3, ὁ μὲν 800 περιέχει 8 φορὰς τὸ 99, ἤτοι πολλαπλάσιον τοῦ 9, καὶ 8 μονάδας ἀκόμη, ὁ δὲ 70 περιέχει 7 φορὰς τὸ 9, ἤτοι πολλαπλάσιον τοῦ 9, καὶ 7 μονάδας ἀκόμη. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 873 εἶναι ἄθροισμα πολλαπλασίων τινῶν τοῦ 9 ἢ 3, ἤτοι ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ τοῦ 9 ἢ 3, καὶ τῶν ψηφίων αὐτοῦ 8+7+3. Ἂν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα 8+7+3 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9 ἢ 3, εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι διαιρετὸς (§ 72) διὰ τοῦ 9 ἢ 3.

ΣΗΜ 1.—Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 9 ἢ 3, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τούτου διὰ 9 ἢ 3 εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 9 ἢ 3.

ΣΗΜ. 2.—Πρακτικῶς εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 9 ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 9, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι 0, ἂν δὲ μικρότερον τοῦ 9, τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν τέλος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9, ἐξακολουθοῦμεν προσθέτοντες τὰ ψηφία τούτου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον. Ὅ,τι εἴπομεν διὰ τὸ 9, λέγομεν καὶ διὰ τὸ 3.

87.«Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ἐὰν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 καὶ 3. Ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 12, ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ 4. Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 15, ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ 5.

Ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω σημ. 2 στηρίζεται ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ 9.

88. «Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τοῦ 9».

Αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμὸς 4583×347=1590301.

2	5
1	1

Πρὸς δοκιμὴν αὐτοῦ γράφομεν δύο εὐθείας γραμμὰς διασταυρουμένας καθέτως καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου 4+5+8+3=20 καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοῦτο, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἄθροισμα μονοψήφιον 2+0=2· γράφομεν τὸ 2 εἰς τὴν ἄνω πρὸς τὰ ἀριστερὰ γωνίαν. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3+4+7=14 καὶ 1+4=5 καὶ γράφομεν τὸ 5 εἰς τὴν ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ γωνίαν. Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία 2×5=10 καὶ προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 1+0=1 καὶ γράφομεν τὸ 1 εἰς τὴν κάτω πρὸς τὰ δεξιὰ γωνίαν. Προσθέτομεν τέλος καὶ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου 1+5+9+0+3+0+1=19 καὶ 1+9=10 καὶ 1+0=1 καὶ τὸ ψηφίον 1 γράφομεν εἰς τὴν κάτω πρὸς τὰ ἀριστερὰ γωνίαν. Ἐὰν τὰ δύο ψηφία τὰ γεγραμμένα εἰς τὰς κάτω γωνίας δὲν εἶναι τὰ αὐτά, ἐγένετο λάθος εἰς τὴν πρᾶξιν· ἐὰν δὲ εἶναι τὰ αὐτά, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

ΣΗΜ.—Ἡ δοκιμὴ δὲν εἶναι ἀσφαλής, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ ὅμως νὰ ἐγένετο λάθος· ἀλλὰ τότε τὸ λάθος θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

Προβλήματα.

1) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 248, 375, 1458, 7825, 9476, 10575, 5400, 8432, 17650, 536, 2850, 35000, 18745, 891, 1530 εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν, 2, 4, 5, 3, 9, 25, 10, 100, 1000;

2) Ποῖοι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 552, 840, 750, 1820, 852, 2490, 4542, 7164, 5832, 7410, 2835 εἶναι διαιρετοὶ δι' ἑνὸς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν, 6, 12, 15;

3) Εἶναι δυνατὸν ν' ἀποτελέσωμεν ποσὸν 2575 δραχ. μόνον ἐκ 5δράχμων ἢ ἐξ 25δράχμων ἢ ἐκ 10δράχμων ἢ ἐξ 100δράχμων;

4) Βαρέλλιόν τι περιέχει 3450 ὀκ. παλαιοῦ οἴνου. Εἶναι δυνατὸν νὰ μεταγγισθῇ οὗτος ἐξ ὁλοκλήρου εἰς φιάλας χωρητικότητος 2 ὀκ. τελείως πληρουμένας;

5) Ὁ αὐτὸς οἶνος εἶναι δυνατὸν νὰ μεταγγισθῇ εἰς φιάλας χωρητικότητος 5 ὀκ. ἢ εἰς φιάλας τῶν 3 ὀκ.;

6) 3252 ῥινόμακτρα δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς δωδεκάδας, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανέν;

7) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τριλέπτων γραμματοσήμων: α') τὸ ποσὸν τῶν 345 λεπτῶν, β') τὸ ποσὸν τῶν 845 λεπτῶν;

Ἀνάλυσις συνθέτων ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

89. «Ἀριθμός, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην εἰ μὴ τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν 1, λέγεται ***πρῶτος***».

Πρῶτοι π. χ. ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23 κτλ.

90. «Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται ***σύνθετος***».

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 40 εἶναι σύνθετος, ὁμοίως ὁ 25, 50 κτλ.

Γνωρίζομεν ἤδη (§ 89) ποίους ἀριθμοὺς καλοῦμεν πρώτους. Τοιοῦτοι εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος, ὡς 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23 κτλ.

91. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τοιούτων πρώτων ἀριθμῶν, οἵτινες καλοῦνται καὶ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ.

Ἡ ἀνάλυσις γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 420· διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 210, ἤτοι $420=210\times2$. Τὸ πηλίκον 210 διαιροῦμεν πάλιν διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 105, ἤτοι $210=2\times105$. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $420=2\times2\times105$.

Τὸ πηλίκον 105 δὲν διαιρεῖται διὰ 2, ἀλλὰ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 3 καὶ δίδει πηλίκον 35, ἤτοι $105=3\times35$ καὶ ἑπομένως $420=2\times2\times3\times35$. Τὸ πηλίκον 35 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, διαιρεῖται ὅμως διὰ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου πρώτου ἀριθμοῦ 5 καὶ δίδει πηλίκον τὸν πρῶτον ἀριθμὸν 7, ἤτοι $35=5\times7$ καὶ ἑπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς $420=2\times2\times3\times5\times7$, ἤτοι ἀνελύθη εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων 2, 2, 3, 5, 7.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

420	2	
210	2	
105	3	καὶ $420=2\times2\times3\times5\times7$
35	5	
7	7	
1		

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

92. «Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν σύνθετον ἀριθμὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ δύο (ἂν διαιρῆται)· τὸ εὑρισκόμενον πηλίκον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ 2 καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ 2. Τὸ τελευταῖον τοῦτο πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3 (ἂν διαιρῆται) καὶ τὸ νέον πηλίκον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ 3, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον μὴ διαιρούμενον διὰ τοῦ 3. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τοὺς ἀμέσως ἑπομένους πρώτους ἀριθμούς, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πηλίκον 1. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, διὰ τῶν ὁποίων διαδοχικῶς διῃρέσαμεν, λαμβανόμενοι ὡς παράγοντες τοσάκις, ὅσας φορὰς διῃρέσαμεν δι' ἑκάστου, ἀποτελοῦσι γινόμενον πολλῶν παραγόντων, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός».

Παραδείγματα

525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$525=3\times5\times5\times7$

660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$660=2\times2\times3\times5\times11$

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΟΥ Κ. ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

93. «***Κοινὸς διαιρέτης*** δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ διαιρῶν πάντας ἀκριβῶς».

Π. χ. ὁ 5 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 20, 25, 35, 50.

94. «Οἱ ἀριθμοί, οἱ μὴ ἔχοντες ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, εἰ μὴ τὴν 1, καλοῦνται ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους***».

Π. χ. 5, 14, 20 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

95. Ὁ μεγαλύτερος τῶν κ. διαιρετῶν δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*** αὐτῶν· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 24, 40 καὶ 16 ἔχουσι κ. διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 8. Ὁ 8 εἶναι ὁ Μ. Κ. Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ὁ Μ. Κ. Δ. δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς.

96. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. δύο δοθέντων ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· καὶ ἂν μὲν ἡ διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, τότε ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν θὰ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν. Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις ἀφήνῃ ὑπόλοιπόν τι, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸν μικρότερον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· καὶ ἂν ἡ νέα διαίρεσις γίνηται ἀκριβῶς, τὸ ὑπόλοιπον τῆς νέας διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος Μ.Κ. Δ., ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις αὕτη ἀφήνῃ ὑπόλοιπόν τι, διαιροῦμεν δι' αὐτοῦ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πρώτης διαιρέσεως· προχωροῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς διαίρεσιν, τῆς ὁποίας τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Παραδείγματα.—Ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 150 καὶ 50. Ἐπειδὴ ὁ 150 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 50, ἕπεται ὅτι ὁ 50 εἶναι ὁ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν· ὅτι ὁ 50 εἶναι κ. διαιρέτης αὐτῶν εἶναι προφανές· εἶναι δὲ καὶ μέγιστος, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 50 εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῇ τὸν 50 καὶ ἑπομένως νὰ εἶναι κ. διαιρέτης.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ 1800 καὶ 270.

Κατὰ τὸν κανόνα διαιροῦμεν τὸν 1800 διὰ 270 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 180. Διαιροῦμεν πάλιν τὸν 270 διὰ τοῦ 180 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 90. Τέλος διαιροῦμεν τὸν 180 διὰ τοῦ 90 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 0· ἄρα 90 εἶναι ὁ Μ. Κ. Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	6	1	2
1800	270	180	90
180	90	0	

Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν δύο, ὁ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

97. ***Κανὼν Α΄***.—«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ. Κ. Δ. πολλῶν ἀριθμῶν, διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν· καὶ ἂν μὲν πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέσαμεν, εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ., ἄλλως ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τὰ ὑπόλοιπα δὲν εἶναι 0, διὰ τῶν ὑπολοίπων τούτων. Τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέσαμεν, ἀποτελοῦσι νέαν σειρὰν ἀριθμῶν. Διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ μικροτέρου τούτων πάντας τοὺς ἄλλους· προχωροῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς σειρὰν ἀριθμῶν τοιούτων, ὥστε ὁ μικρότερος ἐξ αὐτῶν νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς ἄλλους. Ὁ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 1800, 560, 960, 1200. Διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν 560 καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτοὺς διὰ τῶν ἀντιστοίχων ὑπολοίπων λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς σειρὰν ἀριθμῶν. 120, 560, 400, 80.

Διαιροῦμεν πάλιν πάντας τοὺς ἄλλους διὰ τοῦ μικροτέρου ἐξ αὐτῶν, ἤτοι τοῦ 80, καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 40 καὶ 80. Ἐκ τούτων ὁ 40 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 80 καὶ ἑπομένως οὗτος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

1800	560	960	1200
120	560	400	80
40	0	0	80
40	0	0	0

Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

98. ***Κανὼν Β΄***.—«Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λαμβάνοντες ἕκαστον κοινὸν παράγοντα τοσάκις, ὅσας φορὰς οὗτος εὑρίσκεται ὡς κοινὸς παράγων εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Παράδειγμα.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 80, 280, 60. Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

$$80=2\times2\times2\times2\times5,$$
$$280=2\times2\times2\times5\times7,$$
$$60=2\times2\times3\times5.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς εὑρίσκονται ὡς κοινοὶ παράγοντες ὁ μὲν 2 δύο φοράς, ὁ δὲ 5 ἅπαξ· ἐπομένως τὸ γινόμενον $2\times2\times5=20$ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΣΗΜ.—Ἐὰν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

ΠΕΡΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ

Ὡρίσαμεν (§ 82) τί καλεῖται πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ τινος.

99. Κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾿ ἑκάστου αὐτῶν.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι Κ. Π. τῶν ἀριθμῶν 5, 12, 20 ὡς διαιρούμενος ἀκριβῶς δι᾿ ἑκάστου αὐτῶν. Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 60 θὰ εἶναι Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (§ 77). Ὅθεν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσιν ἄπειρα κοινὰ πολλαπλάσια.

100. Τὸ μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων δοθέντων ἀριθμῶν καλεῖται **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον** αὐτῶν, π. χ. τῶν 5, 7, 10 κοινὰ πολλαπλάσια εἶναι τὰ 70, 140, 210, 350 κτλ. Ἐκ τούτων τὸ μικρότερον πάντων εἶναι τὸ 70· τοῦτο καλεῖται ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 5, 7 καὶ 10.

Τὸ Ε. Κ. Π. πολλῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

101. ***Κανὼν Α΄***.—«Δοκιμάζομεν, ἂν ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾿ ἑκάστου τῶν λοιπῶν· καὶ ἂν μὲν τοῦτο συμβαίνῃ, τότε ὁ μεγαλύτερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. τούτου, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς πολλαπλάσιόν τι αὐτοῦ διαιρετὸν δι᾿ ἑκάστου τῶν λοιπῶν· τοῦτο θὰ εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Παραδείγματα.—Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 120, 20, 12, 8.

Ὁ 120 διαιρεῖται ἀκριβῶς δι᾿ ἑκάστου τῶν ἄλλων· ἄρα οὗτος εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. αὐτῶν. Καὶ ὅτι μὲν ὁ 120 εἶναι Κ. πολλαπλάσιον εἶναι προφανές, διότι εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ὅλων τῶν λοιπῶν. Εἶναι δὲ καὶ ἐλάχιστον, διότι οὐδεὶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 120 δύναται νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 120 καὶ ἐπομένως νὰ εἶναι Κ. πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 4, 15, 20, 12.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι οὔτε ὁ 20 οὔτε τὸ διπλάσιον αὐτοῦ (40) διαιροῦνται διὰ πάντων τῶν ἄλλων. Τὸ τριπλάσιον ὅμως τοῦ 20, ἤτοι τὸ 60, εἶναι διαιρετὸν διὰ πάντων τῶν ἄλλων καὶ ἐπομένως εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

102. ***Κανὼν Β'***.—«Ἵνα εὕρωμεν τὸ Ε. Κ. Π. δοθέντων ἀριθμῶν, ἀναλύομεν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας καὶ ἔπειτα σχηματίζομεν ἓν γινόμενον λαμβάνοντας τοὺς πρώτους παράγοντας, τοὺς ὁποίους περιέχουσιν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἕκαστον τοσάκις, ὅσας περισσοτέρας φορὰς περιέχεται οὗτος ὡς παράγων εἴς τινα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι τὸ Ε. Κ. Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν».

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 60, 80, 75.

Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας.

$$60=2\times2\times3\times5$$
$$80=2\times2\times2\times2\times5$$
$$75=3\times5\times5$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παράγων 2 περιέχεται περισσοτέρας φορὰς ὡς παράγων, ἤτοι τετράκις, εἰς τὸν 80, ὁ δὲ 3 ἅπαξ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 60 καὶ 75 καὶ ὁ 5 δὶς εἰς τὸν 75. Ἑπομένως τὸ Ε. Κ. Π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν θὰ εἶναι τὸ ἑξῆς γινόμενον·

$$2\times2\times2\times2\times3\times5\times5=1200.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ περιλαμβανόμενοι ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 50.

2) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: 360, 480, 840, 105, 420, 780, 973, 385, 2600, 30800.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ Μ. Κ. Δ. καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν.

α') 250, 150. β') 945, 345.
γ') 238, 75. δ') 3600, 480, 520.
ε') 4200, 1500, 720, 840.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε. Κ. Π. καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν.

α') 80, 40. β') 150, 90. γ') 270, 60 καὶ δ') 183, 17.

5) Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ὁλικὴ ἀξία τριλέπτων γραμματοσήμων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν ἀκριβῶς μὲ πεντάλεπτα κερμάτια ;

('Απ. 15 λεπτ. ἢ 5 γραμ.).

6) Ἕκαστον πορτοκάλλιον πωλεῖται πρὸς 12 λεπτά· ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀξία πορτοκαλλίων, ἅτινα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν μὲ δεκάλεπτα κερμάτια ;

('Απ. 60 λεπτ. ἢ 5 πορτοκ.).

7) Ἕκαστον ᾠὸν πωλεῖται πρὸς 16 λεπτά· ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀξία ᾠῶν, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ πληρώσωμεν ἀκριβῶς ἔχοντες μόνον εἰκοσάλεπτα ;

('Απ. 80 λεπτὰ ἢ 5 ᾠά)

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Β' τάξει.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν ἰδιοτήτων (§§ 63—81).

α') $(25+17+30)-(15+28)$
β') $(19+15+7)\ 14$
γ') $48-(7+8+12)$
δ') $(14+8+17)\times 9$
ε') $(15+9+17)\times(8+4)$
ϛ') $(85-15)\times 7$
ζ') $(85-15):7$
η') $(45\times 8\times 7):15$

2) Πῶς πρέπει να μεταβάλωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 3457, ὥστε νὰ κατασ̄ῇ οὗτος διαιρετὸς α') διὰ τοῦ 2, β') διὰ τοῦ 3, γ') διὰ τοῦ 4, δ') διὰ τοῦ 5, ε') διὰ τοῦ 9, ϛ') διὰ τοῦ 25 ;

3) Πῶς πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον ἢ τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 7583, ὥστε να καταστῇ οὗτος διαιρετὸς α') διὰ τοῦ 6, β') διὰ τοῦ 12, γ') δια τοῦ 15 ;

4) Να εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ τοῦ 500 καὶ 600.

α΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, β΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3,
γ΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 4, δ΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 5,
ε΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 6, ϛ΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 12,
ζ΄) Οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 15.

5) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ αὕτη, τῶν ἀριθμῶν

5873, 75847, 58342

α΄) διὰ τοῦ 2, β΄) διὰ τοῦ 3, γ΄) διὰ τοῦ 4, δ΄) διὰ τοῦ 5, ε΄) διὰ τοῦ 9 καὶ ϛ΄) διὰ τοῦ 25.

6) Λόχος τις ἀποτελεῖται ἀπὸ 240 ἄνδρας. Δύνανται οὗτοι νὰ καταταχθῶσι κατὰ τὰς στρατιωτικὰς ἀσκήσεις εἰς τετράδας ἀκριβῶς ἢ νὰ ἀποτελέσωσι διμοιρίας ἐξ 25 ἀνδρῶν, καὶ ἂν τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, πόσοι θὰ περισσεύσωσι;

7) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ περιλαμβανόμενοι ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 100.

8) Πόσας φορὰς ὁ ἀριθμὸς 2520 περιέχει ὡς παράγοντα α΄) τὸν 2, β΄) τὸν 3;

9) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας οἱ ἑξῆς ἀριθμοί·

7500, 3450, 1260, 5600.

10) Νὰ εὑρεθῇ, ἂν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ 860, 1200, 3600, 560 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ ἂν δὲν εἶναι, διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρεθῶσι, διὰ νὰ προκύψωσιν ὡς πηλίκα ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

11) Νὰ εὑρεθῇ τὸ Ε. Κ. Π. τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 480, 800, 150, 240 καὶ κατὰ τοὺς δύο κανόνας.

12) Ὀπωροπώλης τις πρόκειται ν' ἀποστείλῃ εἰς τρεῖς διαφόρους πόλεις λεμόνια· καὶ εἰς μὲν τὴν 1ην 2500, εἰς τὴν 2αν 3600 καὶ εἰς τὴν 3ην 4800. Ἀλλὰ θέλει νὰ τοποθετήσῃ ταῦτα εἰς κιβώτια ὅσον τὸ δυνατὸν ὀλιγαριθμότερα καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ δύνανται νὰ περιλαμβάνωσιν ἴσον ἀριθμὸν λεμονίων· πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ τοποθετήσῃ ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα λεμόνια εἰς ἕκαστον. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς λεμονίων, ἅτινα θὰ περιλάβῃ ἕκαστον κιβώτιον.

(Ἀπ. 100 λεμόνια).

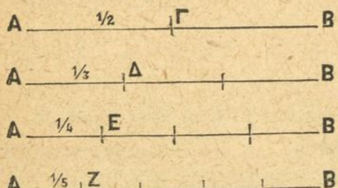
13) Τρία ἀτμόπλοια ἀναχωροῦσι συγχρόνως, ἤτοι τὴν 1ην Ἰανουαρίου, ἐκ Πειραιῶς διὰ Μασσαλίαν. Τὸ α΄ ἐξ αὐτῶν ἐπαναλαμβάνει τὸ ταξείδιον κατὰ 16 ἡμέρας, τὸ β΄) κατὰ 20 ἡμέρας καὶ τὸ γ΄) κατὰ 24

ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας ἀπὸ τῆς πρώτης Ἰανουαρίου θὰ συμβῇ ν' ἀναχωρήσουν ἐκ νέου συγχρόνως ἐκ Πειραιῶς διὰ Μασσαλίαν;
('Απ. 240 ἡμέρας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.—Ἓν μῆλον ὁλόκληρον παρίσταται διὰ τῆς μονάδος 1· ἐὰν κόψωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ***ἓν δεύτερον*** ἢ ***ἥμισυ*** τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{2}$· ἐὰν δὲ κόψωμεν αὐτὸ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καλεῖται ***ἓν τρίτον*** τοῦ μήλου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{1}{3}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον λαμβάνομεν καὶ τὸ ***ἓν τέταρτον*** $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ***ἓν πέμπτον*** $\frac{1}{5}$ κλπ. τοῦ μήλου.



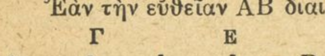
Ὡσαύτως, ἂν παραστήσωμεν διὰ τῆς 1 μίαν ὁλόκληρον εὐθεῖαν ΑΒ καὶ χωρίσωμεν ταύτην εἰς δύο ἢ τρία ἢ τέσσαρα κτλ. ἴσα μέρη, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ ($^1/_2$) ἢ τὸ ἓν τρίτον ($^1/_3$) ἢ τὸ ἓν τέταρτον ($^1/_4$) κτλ. τῆς γραμμῆς ταύτης.

103. Ἡ μονὰς 1, ἥτις παριστᾷ ὁλόκληρον τὸ μῆλον ἢ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, καλεῖται ***ἀκεραία μονάς***, τὰ δὲ $\frac{1}{2}$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$ κτλ., δι' ὧν παρίσταται ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὸ μῆλον ἢ την εὐθεῖαν, καλοῦνται ***κλασματικαὶ μονάδες***.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός·

104. «Κλασματικὴ μονὰς καλεῖται ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα».

Ἐὰν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ διαιρέσωμεν εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τὰ τρια, ἀποτελεῖται νέον μέρος ταύτης ΑΕ, ὅπερ καλεῖται τρία τέταρτα καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{3}{4}$.



Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ ἄλλα μέρη τῆς γραμμῆς, ὡς τέσσαρα πέμπτα $\left(\frac{4}{5}\right)$, δύο ἕβδομα $\left(\frac{2}{7}\right)$ κλπ. Τὰ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ κ. τ. λ.

καλοῦνται κλασματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ γίνονται, ὡς παρατηροῦμεν, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως μιᾶς κλασματικῆς μονάδος· ὡς π. χ. τὸ $\frac{3}{4}$ ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{4}$ ἐπαναλαμβανομένης τρὶς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

105.«Κλάσμα καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ προκύπτων ἐκ κλασματικῆς τινος μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως».

ΣΗΜ. 1.—Καὶ μία μόνη κλασμ. μονὰς ἀποτελεῖ κλάσμα ἢ κλασματ. ἀριθμόν.

ΣΗΜ. 2.—Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲ λέγεται, ὁ προκύπτων ἐκ τῆς ἀκερ. μονάδος 1 δι' ἐπαναλήψεως, ὡς ὁ 5, ὁ 9, ὁ 13 κτλ., περὶ ὧν ἐγένετο λόγος εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια.

106. Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, τοῦ ἑνὸς γραφομένου κάτωθεν τοῦ ἄλλου καὶ χωριζομένων δι' ὁριζοντίας εὐθείας. Καὶ ὁ μὲν ἄνωθεν τῆς γραμμῆς καλεῖται ***ἀριθμητὴς*** καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς ἀριθμητικὸν ἀπόλυτον, ὁ δὲ ἕτερος ***παρονομαστὴς*** καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς ἀριθμητικὸν τακτικόν· π. χ. $\frac{5}{8}$ ἀπαγγέλλεται πέντε ὄγδοα, καὶ ὁ μὲν 5 εἶναι ὁ ἀριθμητής, ὁ δὲ 8 ὁ παρονομαστής. Καὶ ὁ μὲν παρονομαστὴς δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη μοιράζομεν τὴν μονάδα, ὁ δὲ ἀριθμητὴς πόσα ἐκ τῶν μερῶν τούτων ἐλάβομεν· π. χ. $\frac{5}{8}$· ὁ παρονομαστὴς δεικνύει ὅτι ἐμοιράσαμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 8 ἴσα μέρη, ὁ δὲ ἀριθμητὴς σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν 8 τούτων μερῶν ἐλάβομεν τὰ 5.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομ. καλοῦνται ὁμοῦ ***ὅροι τοῦ κλάσματος.***

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

α') Ἀσκήσεις:

1) Νὰ γραφῶσι κατὰ σειρὰν αἱ κλασματικαὶ μονάδες, αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος διαιρουμένης: α') εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 6 ἢ 7 ἢ 8 ἢ 9 ἴσα μέρη, β') εἰς διπλάσια ἀντιστοίχως ἴσα μέρη, γ') εἰς 10 ἢ 100 ἢ 1000 ἢ 10.000 ἴσα μέρη.

2) Νὰ γραφῶσιν οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί, οἱ σχηματιζόμενοι ἐξ ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω κλασματικῶν μονάδων ἐπαναλαμβανομένης ἢ 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ἢ 8 ἢ 15 ἢ 38 φορὰς κ. ο. κ.

3) Πῶς σχηματίζονται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{17}{64}$, $\frac{82}{71}$, $\frac{138}{250}$, $\frac{600}{900}$, $\frac{1015}{3128}$ κλπ.

β′) Προβλήματα.

1) Τὸ 1λεπτον, τὸ 2λεπτον, τὸ 5λεπτον, τὸ 10λεπτον, τὸ 20λεπτον ποίας κλασματικὰς μονάδας τῆς δραχμῆς παριστῶσι ;

2) Ὁμοίως τὸ 5δραχμον τοῦ 10δράχμου ἢ τοῦ 25δράχμου ἢ τοῦ 100δράχμου ;

3) Ποίαν κλασματικὴν μονάδα ἀποτελεῖ : α′) ἡ ὥρα τοῦ ἡμερονυκτίου, β′) ἡ 1 ἡμέρα τῆς ὅλης ἑβδομάδος, γ′) ὁ μὴν τοῦ ὅλου ἔτους, δ′) τὸ ἔτος τῆς ὅλης δεκαετηρίδος.

4) Ποίαν κλασματ. μονάδα ἀποτελεῖ : α′) τὸ ἓν δράμιον τῆς ὅλης ὀκᾶς, β′) ἡ ὀκᾶ τοῦ ὅλου στατῆρος (1 στατὴρ=44 ὀκάδ.).

5) Ποίαν κλασματικὴν μονάδα ἀποτελεῖ τὸ ρούπιον τοῦ ἑνὸς πήχεως ; (1 πῆχ.=8 ρούπια).

6) Ποίαν κλασματικὴν μονάδα ἀποτελεῖ τὸ 1 α′) τοῦ ἀριθμοῦ 5, β′) τοῦ 8, γ′) τοῦ 10, δ′) τοῦ 48, ε′) τοῦ 125· ἢ ὁ 2 α′) τοῦ 4, β′) τοῦ 8, γ′) τοῦ 10, δ′) τοῦ 20, ε′) τοῦ 100 ;

7) Ἐὰν μοιράσωμεν ἓν μῆλον εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐκ τούτων τὰ 7, ποῖον κλάσμα τοῦ μήλου λαμβάνομεν ;

8) Ποῖα κλάσματα τῆς δραχμῆς ἀποτελοῦσι : α′) τὰ 27 μονόλεπτα, β′) τὰ 23 δίλεπτα, γ′) τὰ 4 πεντάλεπτα, δ′) τὰ δύο δεκάλεπτα, ε′) τὰ 3 εἰκοσάλεπτα ;

9) Ἐὰν τραπῶσιν αἱ 8 δραχμαὶ εἰς δεκάλεπτα, ποῖον κλάσμα τῆς δραχμῆς λαμβάνομεν, ποῖον, ἂν εἰς 5λεπτα, ποῖον, ἂν εἰς 20λεπτα ;

10) Ποῖα κλάσματα ἀποτελοῦσι : α′) τὰ 3 εἰκοσιπεντάδραχμα τοῦ ἑκατονταδράχμου, β′) τὰ 150 δράμια τῆς ὅλης ὀκᾶς, γ′) αἱ 18 ὀκάδ. τοῦ στατῆρος, δ′) τὰ 15 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὅλης ὥρας (1 ὥρ.=60 π. λ.), ε′) αἱ 8 ἡμέραι τοῦ μηνός, ϛ′) οἱ 5 μῆνες τοῦ ὅλου ἔτους, ζ′) τὰ 175 χιλιόμετρα μιᾶς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς τοῦ ὅλου αὐτῆς μήκους ἐκ 500 χιλιομέτρων ;

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{4}$. Τοῦτο σχηματίζεται, ὡς γνωστόν, ἂν διαιρεθῇ ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσι πάντα ταῦτα·

ἀλλ' οὕτω προφανῶς προκύπτει ὅλη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὅθεν $\frac{4}{4}=1$.

Ὁμοίως $\frac{5}{5}=1$ καὶ $\frac{10}{10}=1$ κ.ο.κ.

Ὅθεν ἕπεται·

107. «Πᾶν κλάσμα, ἔχον τοὺς δύο ὅρους ἴσους, εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα».

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$· τοῦτο σχηματίζεται, ἂν διαιρεθῇ ἡ ἀκεραία μονὰς εἰς 12 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν μόνον τὰ 7, ἤτοι ὀλιγώτερα ἐκείνων, ἅτινα περιέχει ἡ 1· ἄρα εἶναι μικρότερον τῆς 1, ἤτοι $\frac{7}{12}<1$.

Ὁμοίως καὶ $\frac{8}{15}<1$ καὶ $\frac{14}{19}<1$ κ.ο.κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

108. «Πᾶν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ παρονομαστοῦ, εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος».

Ἂς θεωρήσωμεν τέλος τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$. Τοῦτο σχηματίζεται, ἂν διαιρέσωμεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα λάβωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν 7 φοράς, ἀλλ' ἡ ἀκεραία μονὰς γίνεται καὶ αὕτη ἐκ τοῦ ἑνὸς μέρους $\left(\frac{1}{5}\right)$ ἐπαναλαμβανομένου πεντάκις· ὅθεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς 1, ἤτοι $\frac{7}{5}>1$. Ὁμοίως $\frac{18}{7}>1$ καὶ $\frac{17}{4}>1$ κ.τ.λ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

109. «Πᾶν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον τοῦ παρονομαστοῦ, εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος».

Τροπὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 8 εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς νὰ εἶναι ὁ 5. Γνωρίζομεν ὅτι ἂν ἔχωμεν 12 δρχ. καὶ θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὰς εἰς δέκατα (δεκάλεπτα), δηλ. εἰς κλάσμα, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ὁ 10, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς· μία δραχμὴ ἔχει 10 δεκάλεπτα, ἤτοι $\frac{10}{10}$ δρ., ἑπομένως αἱ 12 δραχμαὶ ἔχουσι 12 φορὰς 10 δεκάλεπτα, ἤτοι $\frac{120}{10}$ δρ.· ὁμοίως (§ 107) μία ἀκεραία μονὰς ἰσοῦται πρὸς $\frac{5}{5}$, ἑπομένως δύο ἀκέραιαι μονάδες θὰ ἔχωσι δύο φορὰς $\frac{5}{5}$ ἢ $\frac{10}{5}$ καὶ αἱ 8 ἀκέραιαι μονάδες θὰ ἔχωσιν ὀκτὼ φορὰς $\frac{5}{5}$, ἤτοι $\frac{40}{5}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

110. «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι δεδομένος, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ μὲν γινόμενον θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν δοθέντα».

Π. χ. ὁ 15 νὰ τραπῇ εἰς ὄγδοα· πολλαπλασιάζομεν $15\times8=120$ καὶ τὸ μὲν 120 θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, τὸν δὲ 8 ὡς παρονομαστήν, ἤτοι $15=\frac{15\times8}{8}=\frac{120}{8}$.

Ὁμοίως 48 εἰς δέκατα πέμπτα, θὰ ἔχωμεν

$$48=\frac{48\times15}{15}=\frac{720}{15}.$$

Ἀσκήσεις.

α') Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ τραπῶσι: α') ὁ ἀκέραιος 8 εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὸν 12, ἤτοι εἰς δωδέκατα, β') ὁ 15 εἰς τέταρτα, γ') ὁ 20 εἰς ὄγδοα, δ') ὁ 25 εἰς πέμπτα, ε') ὁ 32 εἰς ἔνατα.

β') γραπτῶς:

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί: α') 45 εἰς ὄγδοα, β') 158 εἰς δέκατα ἕβδομα, γ') 273 εἰς τεσσαρακοστὰ ὄγδοα, δ') 258 εἰς τριακοστὰ ἕβδομα, ε') 273 εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ϛ') 1358 εἰς δέκατα πέμπτα.

2) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί: α') 785 εἰς εἰκοστὰ ἕβδομα, β') 1423 εἰς τριακοστὰ τέταρτα, γ') 543 εἰς πεντηκοστὰ ὄγδοα, δ') ὁ 248 εἰς ἑκατοστὰ ἑξηκοστὰ πέμπτα, ε') ὁ 538 εἰς διακοσιοστὰ τεσσαρακοστά.

3) Νὰ τραπῶσιν εἰς εἰκοστὰ τέταρτα: α') ὁ 18, β') τὸ τριπλάσιον τοῦ 7, γ') τὸ τετραπλάσιον τοῦ 3 αὐξηθὲν κατὰ 2.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα.

111. ***Μικτὸς ἀριθμὸς*** καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ὡς π. χ. $8\frac{3}{4}$.

Πολλάκις εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $9\frac{4}{5}$· ἵνα τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 9 εἰς πέμπτα (§ 110), ἤτοι $9=\frac{45}{5}$· οὕτως ὁ μικτὸς $9\frac{4}{5}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ $\frac{45}{5}$ καὶ $\frac{4}{5}$, ἤτοι θὰ περιέχῃ ἐν ὅλῳ $\frac{49}{5}$, ἤτοι θὰ ἔχωμεν.

$$9\frac{4}{5}=\frac{9\times5+4}{5}=\frac{49}{5}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

112. «Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητήν, τὸν δὲ προκύπτοντα ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν τοῦ κλάσματος».

Π. χ. $18\frac{4}{7}$ νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον κλάσμα· $18\times7=126$ καὶ $126+4=130$. Ὅθεν $$18\frac{4}{7}=\frac{130}{7}.$$

Ἀσκήσεις.

α΄) Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα οἱ μικτοὶ $5\frac{3}{4}$ δραχμῆς, $1\frac{1}{2}$ μιᾶς περιουσίας, $10\frac{1}{8}$ πήχ., $12\frac{1}{4}$ ὥρ., $7\frac{5}{12}$ ἔτη, $20\frac{3}{10}$ αἰῶνες, $18\frac{3}{4}$ στατῆρες, $500\frac{180}{1000}$ χιλιόμετρα.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς: $7\frac{5}{8}$, $11\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{8}$, $7\frac{5}{6}$, $12\frac{1}{6}$, $18\frac{1}{4}$ $22\frac{1}{5}$, $12\frac{3}{7}$, $15\frac{11}{12}$, $8\frac{7}{13}$.

β') Γραπτῶς:

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα οἱ ἑξῆς μικτοί: $48\frac{3}{11}$ δραχ. $395\frac{7}{8}$ πήχ., $138\frac{8}{12}$ ἔτη, $871\frac{67}{400}$ ὀκάδ.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς: $17\frac{3}{4}$, $38\frac{4}{5}$, $24\frac{5}{12}$, $314\frac{4}{9}$, $145\frac{12}{23}$, $518\frac{15}{28}$, $1342\frac{4}{7}$.

3) Ὡσαύτως οἱ ἀκόλουθοι: $783\frac{4}{15}$, $583\frac{15}{26}$, $743\frac{18}{47}$, $2458\frac{7}{9}$, $3542\frac{5}{8}$, $1245\frac{35}{48}$, $452\frac{132}{785}$, $4573\frac{5}{12}$.

4) Νὰ τραπῶσιν εἰς δέκατα: α') ὁ $(4\times5-8)$, β') ὁ $3\times25+5$ καὶ εἰς κλάσματα: α') ὁ $125\frac{3}{4}$, β') $33\frac{1}{3}$, γ') $333\frac{1}{3}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων.

Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, θὰ περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας. Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς περιεχομένας τοιαύτας ἔν τινι κλάσματι ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{8}{8}=1$ (§ 107)· ἐὰν ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$ ἢ 1 ἀπὸ τὰ $\frac{29}{8}$, ὑπολείπονται $\frac{21}{8}$· ἐὰν πάλιν ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$ ἢ 1, ὑπολείπονται $\frac{13}{8}$ καὶ ἂν τέλος ἐκ τούτων ἐξαγάγωμεν $\frac{8}{8}$ ἢ 1, ὑπολείπονται $\frac{5}{8}$, ἅτινα δὲν περιέχουσι πλέον ἀκεραίαν μονάδα. Ἔχομεν λοιπὸν ἐξαγάγει τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσας φορὰς δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ παρονομαστὴς 8 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 29, τουτέστιν ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μένον κλάσμα ἀριθμητὴς εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

113. «Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματός τινος, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι αἱ ἀκέραιαι μονάδες τοῦ κλάσματος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ μένοντος κλάσματος, τοῦ ὁποίου παρονομαστὴς εἶναι ὁ αὐτός».

Π. χ. $\frac{48}{5}=9\frac{3}{5}$. Ὁμοίως $\frac{136}{14}=9\frac{10}{14}$.

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ὡς π. χ. $\frac{40}{8}=5$, $\frac{200}{5}=40$.

Ἀσκήσεις.

α) Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες, αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ ἑξῆς κλάσματα:

$\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{35}{10}$, $\frac{548}{100}$, $\frac{93}{12}$, $\frac{100}{3}$, $\frac{100}{4}$, $\frac{100}{8}$.

2) Ὁμοίως εἰς τὰ ἑξῆς:

$\frac{13}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{26}{9}$, $\frac{88}{12}$, $\frac{65}{12}$, $\frac{46}{13}$, $\frac{101}{88}$, $\frac{111}{25}$, $\frac{300}{75}$, $\frac{500}{250}$, $\frac{600}{400}$, $\frac{850}{700}$ κλ.

3) Ὁμοίως εἰς τὰ ἑξῆς: $\frac{65}{12}$ ἔτη, $\frac{1700}{400}$ ὀκάδ., $\frac{425}{100}$ δραχμῆς, $\frac{500}{240}$ ὧρ., $\frac{107}{44}$ στατ., $\frac{750}{8}$ πήχ. κλ.

β') γραπτῶς:

1) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ περιεχόμεναι ἀκέραιαι μονάδες εἰς τά: $\frac{288}{12}$ ἔτη, $\frac{1675}{12}$ ἔτη, $\frac{358675}{100}$ δραχ.

2) Ὁμοίως εἰς τὰ ἑξῆς: $\frac{17428}{400}$ ὀκάδ., $\frac{795}{44}$ στατ., $\frac{7127}{8}$ πήχ. $\frac{35428}{25}$ ἔτους.

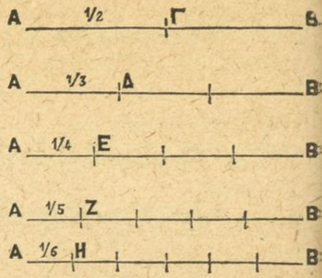
3) Ὡσαύτως αἱ περιεχόμεναι εἰς τὰ κλάσματα: $\frac{240}{20}$, $\frac{248}{29}$, $\frac{347}{15}$, $\frac{198}{18}$, $\frac{2458}{45}$, $\frac{2495}{97}$, $\frac{7458}{153}$, $\frac{2458}{115}$.

4) Ὁμοίως εἰς τὰ ἑξῆς: $\frac{245}{8}$, $\frac{378}{25}$, $\frac{1500}{125}$, $\frac{349}{48}$, $\frac{7834}{25}$, $\frac{58347}{153}$, $\frac{318691}{581}$.

Σύγκρισις τῶν κλασματικῶν μονάδων πρὸς ἀλλήλας.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἂς διαιρέσωμεν ταύτην εἰς δύο, τρία, τέσσαρα κτλ. ἴσα μέρη· οὕτω λαμβάνομεν τὰς κλασματικὰς μονάδας $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ κ. τ. λ.

Ἐὰν τώρα παραβάλωμεν πρὸς ἄλληλα τὰ μέρη ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ κ. τ. λ., ἤτοι τὰς κλασματικὰς μονάδας



$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ κ, τ. λ. παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{3}$· ὁμοίως βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{1}{4}$ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$, διότι τὸ $\frac{1}{2}$ ἀποτελεῖται ἐκ δύο μερῶν ἴσων πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$· ὡσαύτως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ $\frac{1}{6}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἐκ τούτων ἕπεται·

114. «Ἡ κλασματικὴ μονὰς γίνεται δίς, τρὶς κτλ. μικροτέρα, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ δίς, τρὶς κτλ. μεγαλύτερος καὶ τἀνάπαλιν».

Κλάσματα ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα.

115. Τὰ κλάσματα, ἅτινα γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος καὶ ἔχουσιν ἑπομένως τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καλοῦνται ***ὁμώνυμα***· τὰ δὲ ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων γινόμενα καὶ ἔχοντα ἑπομένως διαφόρους παρονομαστὰς καλοῦνται ***ἑτερώνυμα***· π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ εἶναι ὁμώνυμα, τὰ δὲ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Ἰδιότητες κλασμάτων.

Ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς δύο ὁμώνυμα κλάσματα, ὡς $\frac{5}{18}$ καὶ $\frac{7}{18}$. Ἐπειδὴ ταῦτα σχηματίζονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{18}$, ἕπεται ὅτι ἐκεῖνο ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μεγαλύτερον, ὅπερ ἔχει περισσοτέρας τοιαύτας μονάδας, δηλ. τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν, ἤτοι $\frac{5}{18} < \frac{7}{18}$, ἐὰν δὲ θεωρήσωμεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{10}{18}$, τοῦτο ὡς ἔχον δύο φορὰς περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ τὸ $\frac{5}{18}$ εἶναι δύο φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{18}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{5}{18}$ θὰ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{10}{18}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον βλέπομεν ὅτι τὸ $\frac{15}{18}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{18}$, ὡς περιέχον τρεῖς φορὰς περισσοτέρας κλασματικὰς μονάδας ἀπὸ τὸ $\frac{5}{18}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{5}{18}$ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρότερον τοῦ $\frac{15}{18}$ κτλ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

116. «Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερος ἢ μικρότερος, καὶ ὁλόκληρον τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερον ἢ μικρότερον».

Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα ἔχοντα ἴσους ἀριθμητάς· π. χ. $\frac{8}{5}$, $\frac{8}{7}$. Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα περιέχουσιν ἴσον πλῆθος κλασματικῶν μονάδων (ἤτοι 8), ἕπεται ὅτι ἐκεῖνο εἶναι μεγαλύτερον, τοῦ ὁποίου αἱ κλασματικαὶ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι, δηλ. τὸ ἔχον παρονομαστὴν μικρότερον· ἄρα $\frac{8}{5} > \frac{8}{7}$. Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$, ἐπειδὴ ἡ κλασματικὴ αὐτοῦ μονὰς $\frac{1}{10}$ εἶναι δὶς μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{5}$ (§ 114), ἕπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{5}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{8}{5}$ εἶναι δὶς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{8}{10}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\frac{8}{15}$ εἶναι τρὶς μικρότερον τοῦ $\frac{8}{5}$ καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{8}{5}$ εἶναι τρὶς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{8}{15}$ κ.ο.κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

117. «Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κλπ. μεγαλύτερος, τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κλπ. μικρότερον· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κλπ. μικρότερος, καὶ τὸ κλάσμα γίνεται δὶς ἢ τρὶς κλπ. μεγαλύτερον».

Ἄς θεωρήσωμεν τέλος ἓν κλάσμα οἱονδήποτε, τὸ $\frac{3}{4}$· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ 2, τὸ προκῦπτον κλάσμα $\frac{3\times2}{4}$ ἢ $\frac{6}{4}$ εἶναι δὶς μεγαλύτερον τοῦ δοθέντος (§ 116)· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{6}{4}$ ἐπὶ 2, τὸ προκῦπτον κλάσμα $\frac{3\times2}{4\times2}$ ἢ $\frac{6}{8}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{6}{4}$ (§ 117)· καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{3}{4}=\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2· καὶ τἀνάπαλιν τὸ $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{6}{8}$, ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἤτοι τοῦ 2). Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς ἰδιότης·

118. «Ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος».

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ καταταχθῶσι τὰ ἑπόμενα κλάσματα κατ᾽ αὔξουσαν σειρὰν μεγέθους· $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{27}{15}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα τὸ δὶς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{2}{15}$, τὸ τρὶς μεγαλύτερον αὐτοῦ, τὸ τετράκις μεγαλύτερον κλπ.

2) Ὁμοίως να καταταχθῶσι τὰ κλάσματα: $\frac{18}{7}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{18}{2}$, $\frac{18}{9}$, $\frac{18}{20}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{18}{15}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{18}{11}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{18}{2}$, τὸ τρὶς μικρότερον αὐτοῦ, τὸ τετράκις μικρότερον κλπ.

Ἁπλοποίησις.

119. ***Ἁπλοποίησις*** κλάσματος καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τοῦ δοθέντος ἕτερον ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ ὅρους μικροτέρους.

Ἡ ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος (§ 118) καὶ γίνεται δια τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ κ. διαιρέτου αὐτῶν, ἤτοι διὰ τοῦ 5, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἔχει ὅρους μικροτέρους, ἤτοι εἶναι ἁπλούστερον τοῦ δοθέντος.

120. Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν ἁπλοποιεῖται· τὰ τοιαῦτα κλάσματα καλοῦνται ἀνάγωγα, ὡς π. χ. $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$ κ.τ.λ.

Πᾶν κλάσμα ἁπλοποιούμενον δύναται νὰ καταστῇ ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν (§ 98 σημ.)·

Διὰ τὴν εὐχερῆ ἁπλοποίησιν τῶν κλασμάτων δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς χαρακτῆρας τῆς διαιρετότητος (§§ 83—87).

Παραδείγματα.—Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{135}{400}$ (διὰ τοῦ 5), $\frac{27}{30}$ (διὰ τοῦ 3), $\frac{3}{10}$ (ἀνάγωγον), $\frac{240}{800}$ (διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ὅρων αὐτοῦ), $\frac{7}{20}$ (ἀνάγωγον).

Ἀσκήσεις.

α) Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ ἑξῆς κλάσματα· $\frac{4}{8}$ πήχ., $\frac{25}{100}$ δραχ., $\frac{125}{1000}$ χιλιομέτρου, $\frac{6}{12}$ ἔτ., $\frac{18}{24}$ ὥρ., $\frac{15}{60}$ ὥρας, $\frac{50}{400}$ ὀκᾶς, $\frac{300}{400}$ ὀκ., $\frac{250}{400}$ ὀκ., $\frac{64}{44}$ στατῆρ., $\frac{3}{4}$ αἰῶνος.

2) Τὰ ἑξῆς: $\frac{10}{80}$, $\frac{200}{1700}$, $\frac{3000}{9000}$, $\frac{12000}{60000}$, $\frac{250}{700}$.

3) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς: $\frac{16}{32}$, $\frac{64}{16}$, $\frac{15}{150}$, $\frac{15}{75}$, $\frac{40}{80}$, $\frac{500}{750}$, $\frac{150}{375}$, $\frac{250}{1000}$, $\frac{360}{810}$, $\frac{1500}{4500}$, $\frac{63}{21}$.

β) Γραπτῶς:

1) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα:

$\frac{8}{12}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{56}{60}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{70}{110}$, $\frac{21}{30}$, $\frac{48}{72}$, $\frac{24}{400}$, $\frac{18}{81}$.

2) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς: $\frac{12}{40}$, $\frac{36}{84}$, $\frac{25}{275}$, $\frac{27}{360}$, $\frac{36}{42}$, $\frac{26}{39}$.

3) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἀνάγωγα κλάσματα διὰ μιᾶς μόνης ἁπλοποιήσεως (§ 98 σημ.) ἐκ τῶν ἑξῆς:

α) $\frac{16}{72}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{90}{315}$, $\frac{180}{900}$, $\frac{111}{189}$, $\frac{112}{196}$, $\frac{25}{300}$, $\frac{55}{70}$.

β) $\frac{40}{280}$, $\frac{91}{546}$, $\frac{248}{720}$, $\frac{144}{792}$, $\frac{49}{161}$, $\frac{65}{147}$, $\frac{272}{627}$, $\frac{209}{342}$.

4) Νὰ ἁπλοποιηθῶσι πρῶτον τὰ κλάσματα τῶν κάτωθι μικτῶν καὶ ἔπειτα νὰ τραπῶσιν οὗτοι εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα:

α) $15\frac{4}{8}$, β) $25\frac{6}{42}$, γ) $11\frac{51}{60}$ δ) $107\frac{63}{180}$, ε) $250\frac{4}{32}$

5) Νὰ ἐξαχθῶσιν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τῶν ἑξῆς κλασμάτων μετὰ τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις των: α) $\frac{2610}{240}$, β) $\frac{5428}{160}$, γ) $\frac{827100}{62010}$.

Τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὰς δύο ἑτερώνυμα (§ 115) κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3\times7}{4\times7}=\frac{21}{28}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$ (§ 118). Ἐὰν δὲ πολ)σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 4 τοῦ πρώτου, λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{5\times4}{7\times4}=\frac{20}{28}$, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\frac{5}{7}$. Οὕτως ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ ἐλάβομεν ἰσοδύναμα κλάσματα $\frac{21}{28}$, $\frac{20}{28}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη περισσότερα τῶν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τὰ ἑξῆς· $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$.

Πολ)ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $8\times5\times6=240$ καὶ εὑρίσκομεν κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό, τὸ $\frac{3\times240}{4\times240}$ ἢ $\frac{720}{960}$. Ὁμοίως πολ)ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $4\times5\times6=120$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα

$\frac{5\times120}{8\times120}$ ἢ $\frac{600}{960}$. Πολ/ζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $4\times8\times6=192$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{2\times192}{5\times192}$ ἢ $\frac{384}{960}$. Τέλος πολ/ζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ τελευταίου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν $4\times8\times5=160$ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{5\times160}{6\times160}$ ἢ $\frac{800}{960}$.

Οὕτω τὰ δοθέντα κλάσματα τρέπονται εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα·

$$\frac{720}{960},\ \frac{600}{960},\ \frac{384}{960},\ \frac{800}{960}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

121. «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν παρονομαστῶν».

Κοινὸς παρονομαστὴς ὅλων τῶν κλασμάτων θὰ εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

Παράδειγμα.—Ἔστωσαν τὰ ἑξῆς ἑτερώνυμα κλάσματα· $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$.
Τρέπομεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα ἐφαρμόζοντες τὸν ἀνωτέρω κανόνα,

$$\frac{5\times(7\times4)}{8\times(7\times4)},\qquad \frac{2\times(8\times4)}{7\times(8\times4)},\qquad \frac{3\times(8\times7)}{4\times(8\times7)},$$

ἤτοι προκύπτουσι τὰ ἑξῆς κλάσματα· $\frac{140}{224}$, $\frac{64}{224}$, $\frac{168}{224}$.

122. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ κ. παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἓν κ. πολλαπλάσιον αὐτῶν. Πολλάκις ὅμως τὸ Ε. Κ Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι πολὺ μικρότερον τοῦ γινομένου αὐτῶν· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα γίνεται εὐκολώτερον διὰ τοῦ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν ὡς ἑξῆς·

Ἔστωσαν π. χ. τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$. Οἱ παρονομασταὶ 5, 8, 10 ἔχουσιν Ε. Κ. Π. τὸ 40 (§§ 101, 102). Ἐὰν τώρα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ε. Κ. Π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 5, ἤτοι ἐπὶ 8, λαμβανομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{16}{40}$. Ὁμοίως ἐὰν πολ/σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον 40 : 8, ἤτοι ἐπὶ 5, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{15}{40}$. Ἐὰν τέλος πολ/σωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{10}$ ἐπὶ τὸ πηλίκον 40 : 10, ἤτοι ἐπὶ 4, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{28}{40}$.

Οὕτω τὰ δοθέντα κλάσματα τρέπονται εἰς τὰ ἑξῆς ὁμώνυμα·

$$\frac{16}{40} \quad \frac{15}{40} \quad \frac{28}{40}.$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς·

$$\overbrace{\frac{2}{5}}^{8}, \quad \overbrace{\frac{3}{8}}^{5}, \quad \overbrace{\frac{7}{10}}^{4}. \qquad 40 \text{ Ε. Κ. Π.}$$

$$\frac{16}{40}, \quad \frac{15}{40}, \quad \frac{28}{40}.$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

123. «Διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ Ε. Κ. Π. τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ε. Κ. Π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος».

Παράδειγμα.— $\overbrace{\frac{8}{15}}^{4}, \overbrace{\frac{3}{4}}^{15}, \overbrace{\frac{9}{20}}^{3}, \overbrace{\frac{7}{12}}^{5}$, ἤτοι $\frac{32}{60}, \frac{45}{60}, \frac{27}{60}, \frac{35}{60}$.

ΣΗΜ.—Πρὶν προβῶμεν εἰς τὴν τροπὴν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα, πρὸς εὐκολίαν καθιστῶμεν πρότερον διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τὰ δοθέντα κλάσματα ἀνάγωγα.

Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα.

α′) $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{5}{12}$. β′) $\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$. γ′) $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}$.

Ἀσκήσεις.

α′) Ἀπὸ μνήμης :

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α′) $\frac{1}{10}$ δρχ., $\frac{1}{100}$ δραχ. καὶ $\frac{1}{2}$ ὥρ., $\frac{1}{4}$ ὥρ., $\frac{1}{8}$ ὥρ.

β') $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{100}$ καὶ $\frac{15}{75}$, $\frac{8}{150}$, $\frac{7}{300}$.

2) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς·

$\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{16}$

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$ $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$

3) Εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$ δραχ. μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ δραχ.;

4) Ποῖον ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον ἐκ τῶν $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$ καὶ $\frac{7}{24}$;

5) Εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{27}{36}$ ἢ ἄνισον;

6) Εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα τὰ κλάσματα $\frac{1}{4}$ ὥρ. καὶ $\frac{15}{60}$ ὥρ.;

β') Γραπτῶς:

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα:

α') $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{5}$, β') $\frac{2}{31}$, $\frac{5}{42}$ γ') $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{7}$, δ') $\frac{13}{4}$, $\frac{11}{20}$, ε') $\frac{23}{16}$, $\frac{19}{32}$, ϛ') $\frac{31}{15}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{29}{30}$.

2) Νὰ καταταχθῶσι τὰ ἑξῆς κλάσματα κατ' αὔξουσαν σειρὰν μεγέθους:

α') $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{12}$. β') $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{7}$,

γ') $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{19}{60}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{10}$. δ') $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{6}$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

124. Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως (ἐδ. § 15) ἰσχύει καὶ ἐνταῦθα μὲ τὴν διαφορὰν μόνον ὅτι λέγοντες μονάδας ἐννοοῦμεν ὅπως τὰς ἀκεραίας οὕτω καὶ τὰς κλασματικάς.

'Ονομάζομεν καὶ ἐνταῦθα τοὺς πρὸς πρόσθεσιν δοθέντας ἀριθμοὺς προσθετέους, τὸ δ' ἐκ τῆς προσθέσεως προκῦπτον ἐξαγόμενον ἄθροισμα.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

Α΄) Ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι εἶναι κλάσματα.

Β΄) Ὅταν τινὲς ἐξ αὐτῶν ἢ πάντες εἶναι μικτοὶ ἢ ἀκέραιοι.

125. Α΄) Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν κατ' ἀρχὰς κλάσματα ὁμώνυμα τὰ ἑξῆς: $\frac{7}{10}^{\text{δρχ.}}$ (δεκάλεπτα), $\frac{3}{10}^{\text{δρχ.}}$, $\frac{5}{10}^{\text{δρχ.}}$, $\frac{8}{10}^{\text{δρχ.}}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι $7^{\text{δεκάλ.}} + 3^{\text{δεκάλ.}} + 5^{\text{δεκάλ.}} + 8^{\text{δεκ.}} = 23^{\text{δεκ.}}$

ἢ ὅπερ ταὐτὸ $\frac{7}{10}^{\text{δρχ.}} + \frac{3}{10}^{\text{δρχ.}} + \frac{5}{10}^{\text{δρχ.}} + \frac{8}{10}^{\text{δρχ.}} = \frac{23}{10}^{\text{δρχ.}}$. Ἐντεῦθεν ἕπεται·

126. «Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων.»

Ἔστωσαν πρὸς πρόσθεσιν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα· $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{4}$.

Ἐπειδὴ τὰ κλάσματα ταῦτα γίνονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν ταῦτα, ὡς ἔχουσιν, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν πρῶτον ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν, ἤτοι

$$\frac{3}{5}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\frac{3}{4}=\frac{24}{40}+\frac{35}{40}+\frac{36}{40}+\frac{30}{40}=\frac{125}{40}=3\,\frac{5}{40} \text{ ἢ } \frac{1}{8}.$$

127. Β΄) Κατὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τινες τῶν προσθετέων ἢ πάντες εἶναι μικτοί, δηλαδὴ ἀθροίσματα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἢ ἀκέραιοι, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.

Παραδείγματα.

$25+8\frac{4}{5}+7\,\frac{3}{4}+9\,\frac{4}{7}+18\frac{5}{8}+\frac{7}{20}$. Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι $25+8+7+9+18=67$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=$$

$$\frac{224}{280}+\frac{210}{280}+\frac{160}{280}+\frac{175}{280}+\frac{98}{280}=\frac{867}{280}=3\,\frac{27}{280}.$$

ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι

$$25+8\frac{4}{5}+7\ \frac{3}{4}+9\ \frac{4}{7}+18\frac{5}{8}+\frac{7}{20}=67+3\ \frac{27}{280}=70\frac{27}{280}.$$

ΣΗΜ.—Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς ἰσοδύναμα κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν. Ἐν τῇ πράξει ὅμως προτιμῶμεν ὡς εὐκολώτερον νὰ προσθέτωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα.

Ἀσκήσεις.

α΄) Ἀπὸ μνήμης:

$$\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{2}{8}+\frac{9}{8}\right)=;\qquad \left(\frac{11}{60}+\frac{17}{60}+\frac{31}{60}\right)=;$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=;\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}=;\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=;\quad 5+\ \frac{3}{4}=;$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{7}{20}=;\quad 15\frac{14}{19}+\frac{5}{19}=;\quad 7\ \frac{2}{3}+5+8\frac{5}{9}=;$$

β΄) Γραπτῶς: $\frac{14}{15}+\frac{5}{8}=;\quad \frac{7}{9}+\frac{11}{12}=;\quad \frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}=;$

$$\frac{2}{7}+\frac{8}{21}+\frac{17}{18}+2\ \frac{1}{2}=;\quad 3\frac{1}{5}+\frac{13}{72}+2\ \frac{1}{9}=;$$

$$\frac{5}{12}+4\ \frac{1}{2}+\frac{8}{9}+\frac{11}{16}=;\quad 6\ \frac{2}{3}+\frac{3}{4}+1\ \frac{7}{12}+\frac{17}{72}=;$$

$$\frac{5}{15}+\frac{1}{65}+2\ \frac{3}{4}+\ \frac{3}{20}=;\quad \frac{5}{12}+\frac{8}{9}+1\ \frac{1}{8}=;$$

$$\frac{11}{12}+\frac{5}{13}+\frac{7}{72}+3\ \frac{1}{3}+\frac{5}{6}=;\quad \frac{1}{10}+6\ \frac{4}{5}+\frac{76}{77}+3\ \frac{3}{70}=;$$

$$\frac{\quad}{\quad}+\frac{1}{16}+\frac{5}{6}+14\frac{1}{24}=;\ 1\ \frac{1}{2}+\frac{8}{15}+\frac{7}{20}+2\frac{1}{6}=;$$

Προβλήματα.

1) Ἐκ τριῶν κρουνῶν ὁ πρῶτος γεμίζει εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{5}$ δεξαμενῆς, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{12}$. Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς πληροῦσι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν;

(Ἀπ. $\frac{49}{120}$).

2) Ποῖον ἀριθμὸν θὰ ἀποτελέσῃ ὁ ἀριθμὸς 17 $\frac{3}{5}$, ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ τὸν $26\frac{4}{7}$; (Ἀπ. $44\frac{6}{35}$).

3) Ἠγόρασέ τις ἔπιπλον παλαιὸν ἀντὶ 158 $\frac{1}{5}$ δραχμῶν, ἐξώδευσε

δὲ πρὸς ἐπιδιόρθωσιν αὐτοῦ $24\frac{3}{10}$ δραχ. καὶ θέλει νὰ πωλήσῃ αὐτὸ καὶ νὰ κερδήσῃ $18\frac{1}{2}$ δραχ. Πόσας δρχ. θὰ πωλήσῃ τοῦτο;

('Απ. 201 δρ.).

4) Ἔχει τις $34\frac{4}{5}$ δρχ. καὶ ἔλαβεν ἐντὸς τῆς ἡμέρας: α) $8\frac{3}{4}$δρχ., β') $9\frac{1}{2}$δραχμ. Πόσας δραχ. ἔχει τὴν ἑσπέραν; ('Απ. $53\frac{1}{20}$δρχ.).

5) Πατὴρ τις ἐδώρησεν εἰς τὸν πρεσβύτερον υἱόν του $19\frac{3}{4}$δρχ., εἰς τὸν νεώτερον δὲ $5\frac{1}{2}$ δραχ. περισσότερον καὶ εἰς τὴν θυγατέρα του ὅσας ἔδωκε καὶ εἰς τοὺς δύο υἱούς του ὁμοῦ καὶ $3\frac{1}{8}$ δρχ. ἐπὶ πλέον. Πόσας δρχ. ἔλαβον καὶ τὰ τρία τέκνα ὁμοῦ; ('Απ. $93\frac{1}{8}$δρχ.).

6) Ἐπὶ μιᾶς ὁδοῦ κεῖνται κατὰ σειρὰν τρεῖς πόλεις Α, Β, Γ. Ἀπὸ τῆς πόλεως Α μέχρι τῆς Β τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ εἶναι $38\frac{1}{2}$ χιλιομέτρων καὶ ἀπὸ τῆς Β μέχρι τῆς Γ εἶναι $58\frac{1}{4}$ χιλιομέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς ὁδοῦ;

$$\underbrace{\text{Α} \quad 38\tfrac{1}{2}\,\text{χλμ.} \quad \text{Β} \qquad\qquad 58\tfrac{1}{4}\,\text{χλμ.} \quad \text{Γ}}_{96\frac{3}{4}\,\text{χλμ.}}$$

('Απ. $96\frac{3}{4}$χιλιομ.)

7) Ἐν τῷ αὐτῷ προβλήματι ἂς φαντασθῶμεν πέραν τοῦ Γ ἄλλην πόλιν Δ εἰς ἀπόστασιν 40 χιλιομ., πέραν ταύτης ἑτέραν Ε εἰς ἀπόστασιν $102\frac{1}{8}$χλμ., ἔπειτα ἄλλην Ζ ἀπέχουσαν $218\frac{1}{5}$ χιλιομ. Πόσον θὰ εἶναι τώρα α) τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς ὁδοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς πόλεως Α μέχρι τῆς τελικῆς Ζ, β) τὸ μεταξὺ Γ καὶ Ζ, γ) τὸ μεταξὺ Β καὶ Ε;

('Απ. $457\frac{3}{40}$, $360\frac{13}{40}$, $200\frac{3}{8}$).

8) Ἀτμόπλοιον, ἵνα μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς παραλίου πόλεως εἰς ἄλλην, προσήγγισεν εἰς πέντε μεσάζοντας λιμένας. Ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως μέχρι τῆς πρώτης προσεγγίσεως διέτρεξε $45\frac{3}{4}$μίλια, ἀπὸ ταύτης δὲ μέχρι τῆς δευτέρας $65\frac{1}{8}$μίλια, ἀπὸ ταύτης πάλιν μέχρι τῆς τρίτης $123\frac{7}{32}$μίλια ἀπὸ ταύτης μέχρι τῆς τετάρτης $39\frac{5}{16}$μίλια, ἀπὸ ταύτης μέχρι τῆς επο-

μένης 87 $\frac{3}{4}$ μίλια καὶ ἀπὸ ταύτης μέχρι τοῦ λιμένος τοῦ προορισμοῦ 107 $\frac{9}{64}$ μίλια. Πόσα ἐν ὅλῳ μίλια διέτρεξε τὸ ἀτμόπλοιον τοῦτο ;

('Απ. 468 $\frac{19}{64}$ μίλια).

Ἀφαίρεσις.

128. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως (ἔδ. § 23) ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι οἱοιδήποτε (ἀκέραιοι ἢ κλασματικοί).

Ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα τὸν ἀριθμόν, ὅστις θὰ ἐλαττωθῇ καὶ καλεῖται **μειωτέος**, τὸν ἀριθμὸν τὸν δεικνύοντα κατὰ πόσον θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, ὅστις καλεῖται **ἀφαιρετέος**, τὸ δ' ἐξαγόμενον τῆς πράξεως **ὑπόλοιπον** ἢ **διαφορά**.

Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Α') Ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἀμφότεροι κλάσματα.

Β') Ὅταν ἀμφότεροι εἶναι μικτοί.

Γ') Ὅταν εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί.

129. Α') Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\frac{12}{20}$ δραχ. (12 πενταλέπτων) τὰ $\frac{7}{20}$ δραχ., ἤτοι $\frac{12}{20}$ δρ. $-$ $\frac{7}{20}$ δραχ. Εἶναι φανερὸν ὅτι 12 πεντάλ.—7 πεντ.=5 πεντάλ. ἢ ὅπερ ταὐτὸ

$$\frac{12}{20}\text{ δρ.} - \frac{7}{20}\text{ δρ.} = \frac{5}{20}\text{ δρ.}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι·

130. «Ἡ διαφορὰ δύο ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου, παρονομαστὴν δὲ τὸν παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων»· π. χ. $\frac{15}{23}-\frac{8}{23}=\frac{15-8}{23}=\frac{7}{23}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ $\frac{5}{8}$ τὸ $\frac{2}{9}$.

Ἐπειδὴ ταῦτα σχηματίζονται ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, δὲν δυνάμεθα ν' ἀφαιρέσωμεν ταῦτα, ὡς ἔχουσιν, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ τρέψωμεν πρῶτον ταῦτα εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Οὕτως ἔχομεν $\frac{5}{8}-\frac{2}{9}=\frac{45}{72}-\frac{16}{72}=\frac{45-16}{72}=\frac{29}{72}$.

131. Β΄) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο ὑπόλοιπά. Ἔστω π. χ. $15\frac{4}{5}-7\frac{3}{8}$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῶν δύο ἀκεραίων εἶναι $15-7=8$.

Τῶν δὲ κλασμάτων $\frac{4}{5}-\frac{3}{8}=\frac{32}{40}-\frac{15}{40}=\frac{17}{40}$.

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

$$15\frac{4}{5}-7\frac{3}{8}=8\frac{17}{40}.$$

Παρατ.—Δυνατὸν νὰ συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου, δηλ. ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων νὰ μὴ εἶναι δυνατή.

Ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα· $8\frac{5}{9}-3\frac{3}{4}=8\frac{20}{36}-3\frac{27}{36}$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ προσθέτομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἢ $\frac{36}{36}$ εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔχομεν $8\frac{56}{37}$. Διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ὑπόλοιπον (§ 26), προσθέτομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ εἰς τὸν ἀκέραιον (3) τοῦ ἀφαιρετέου· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$8\frac{5}{9}-3\frac{3}{4}=8\frac{20}{36}-3\frac{27}{36}=8\frac{56}{36}-4\frac{27}{36}=4\frac{29}{36}.$$

132. Γ΄) Ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

1) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $18\frac{5}{8}-7$.

Ἀφαιροῦμεν μόνον τοὺς ἀκεραίους, τὸ δὲ κλάσμα μένει τὸ αὐτὸ (§ 65), ἤτοι $18\frac{5}{8}-7=11\frac{5}{8}$.

2) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $17\frac{5}{8}-\frac{3}{7}$.

Ἀφαιροῦμεν μόνον τὰ κλάσματα, ὁ δὲ ἀκέραιος μένει ὁ αὐτὸς (§ 65), ἤτοι $17\frac{5}{8}-\frac{3}{7}=17\frac{35}{56}-\frac{24}{56}=17\frac{11}{56}$.

Παρατ.—Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται, ὡς ὑπεδείξαμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μικτῶν. π. χ. $8\frac{4}{9}-\frac{5}{6}=8\frac{8}{18}-\frac{15}{18}=8\frac{26}{18}-1\frac{15}{18}=7\frac{11}{18}$.

3) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $7-5\frac{4}{15}$.

Γράφομεν τὸν ἀκέραιον 7 ὡς μικτὸν λαμβάνοντες ἐξ αὐτοῦ μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ τρέποντες αὐτὴν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $7-5\frac{4}{15}=6\frac{15}{15}-5\frac{4}{15}=1\frac{11}{15}$.

4) Ἔστω τέλος πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $15-8\frac{5}{9}$.

Καὶ ἐνταῦθα ἐργαζόμεθα, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν· $15-8\frac{5}{9}=14\frac{9}{9}-8\frac{5}{9}=6\frac{4}{9}$ (§ 131).

Ἀσκήσεις προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

α') Ἀπὸ μνήμης:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=;\quad 8\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+2=;$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=;4+3+7\frac{8}{13}=;$$

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{16}=;\quad 2\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=;\quad 4\frac{5}{6}-1\frac{5}{12}=;\quad \frac{13}{20}-\frac{3}{5}=;$$

$$9-\frac{2}{7}=;\quad 8-3\frac{4}{5}=;\quad 1\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=;\quad 10-\frac{11}{16}=;$$

β') Γραπτῶς:

$$\frac{10}{17}-\frac{3}{34}=;\quad \frac{7}{12}-\frac{5}{16}=;2-\frac{37}{60}=;\quad 7\frac{1}{2}-1\frac{1}{6}=;$$

$$7\frac{5}{16}-5\frac{11}{12}=;\quad \frac{31}{84}-\frac{7}{30}=;\quad \frac{37}{96}-\frac{5}{42}=;\quad \frac{61}{72}-\frac{5}{18}=;$$

$$1\frac{2}{15}-\frac{1}{3}=;1\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\right)=;\ 15\frac{3}{4}-\left(2\frac{5}{8}+\frac{1}{5}+7\frac{3}{10}\right)=;$$

Προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις ζάκχαριν καὶ καφὲ ἀξίας $8\frac{3}{4}$ δρ. καὶ ἔδωκε πρὸς πληρωμὴν αὐτοῦ ἓν 25δρχ. Ποῖον ὑπόλοιπον θὰ λάβῃ;

(Ἀπ. $16\frac{1}{4}$ δραχ.).

2) Εἶχέ τις $45\frac{3}{5}$ δραχ. καὶ ἐδαπάνησεν $8\frac{3}{4}$ δραχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν; (Ἀπ. $36\frac{17}{20}$ δραχ.).

3) Ἐργάτης τις ἀνέλαβε ν' ἀποπερατώσῃ ἐντὸς τριῶν ἡμερῶν ἔργον τι· καὶ κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἡμέραν ἐξετέλεσε τὰ $\frac{2}{15}$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ ἔργου θὰ ἐκτελέσῃ κατὰ τὴν τρίτην ἡμέραν; (Ἀπ. $\frac{59}{120}$).

4) Πατήρ τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ἡ σύζυγός του τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς περιουσίας του καὶ ἕκαστος τῶν 3 υἱῶν του τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς, τὰ δὲ λοιπὰ νὰ δωρηθῶσιν εἰς τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ στόλου. Πόσον μέρος τῆς περιουσίας του θὰ λάβῃ τὸ ταμεῖον τοῦ Ἐθνικοῦ στόλου ; (Ἀπ. $\frac{19}{56}$).

5) Τρεῖς κρουνοὶ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὸ $\frac{1}{8}$ δεξαμενῆς τινος, ἀλλ' ὁ α' ἐκ τούτων πληροῖ εἰς 1 ὥραν τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτῆς, ὁ δὲ β' τὸ $\frac{1}{15}$· Πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς πληροῖ ὁ γ' μόνος εἰς μίαν ὥραν; (Ἀπ. $\frac{1}{120}$).

6) Ἔμπορός τις εἶχε τεμάχιον τσόχας 65 $\frac{3}{8}$ πήχ. Κατὰ τὸ διάστημα μιᾶς ἑβδομάδος ἐπώλησε α') 8 $\frac{3}{16}$ πήχ. τοῦ ὑφάσματος τούτου, β') 12 $\frac{3}{4}$ πήχ., γ') 18 $\frac{1}{2}$ πήχ. Πόσους πήχεις ἔχει ἀκόμη εἰς τὸ κατάστημά του κατὰ τὸ τέλος τῆς ἑβδομάδος ; (Ἀπ. 25 $\frac{15}{16}$).

7) Εἶχέ τις 100 δραχ. καὶ ἠγόρασε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας διάφορα πράγματα, ἤτοι καφὲν ἀξίας 6 $\frac{3}{4}$ δραχ., βούτυρον ἀξίας 12 $\frac{4}{5}$, κρέας 3 $\frac{1}{2}$ δρ., ζάκχαριν 3 $\frac{2}{5}$ δρχ. καὶ τέλος ἄλλα διάφορα ἀξίας ἐν ὅλῳ 12 $\frac{3}{10}$ δρχ. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν ; (Ἀπ. 61 $\frac{1}{4}$ δρ.).

8) Ἀτμόπλοιόν τι ἀνεχώρησεν ἐκ Πειραιῶς τὴν 9 $\frac{1}{4}$ ὥρ. π.μ., ἕτερον δὲ ἀνεχώρησε τὴν 3 $\frac{3}{4}$ ὥραν μ. μ. Πόσας ὥρας βραδύτερον ἀνεχώρησε τὸ δεύτερον ; (Ἀπ. 6 $\frac{1}{2}$ ὥρ.).

9) Εἴς τι ἐργοστάσιον οἱ ἐργάται ἀρχίζουσι τὴν ἐργασίαν των τὴν 6 $\frac{1}{4}$ ὥραν π. μ., διακόπτουσι δὲ ταύτην τὴν 12ην τῆς μεσημβρίας χάριν γεύματος· ἐπαναλαμβάνουσι δὲ αὐτὴν κατὰ τὴν 1 $\frac{1}{2}$ ὥραν μ. μ. καὶ ἀποχωροῦσι τὴν 6ην ἑσπερινὴν ὥραν. Πόσας ὥρας ἐργάζονται οἱ ἐργάται οὗτοι καθ' ἑκάστην ; (Ἀπ. 10 $\frac{1}{4}$ ὥρ.).

10) Πόσαι ὧραι μεσολαβοῦσιν ἀπὸ τῆς 6 $\frac{1}{2}$ ὥρας ταύτης τῆς

πρωΐας μέχρι τῆς 9ης τῆς ἑπομένης πρωΐας, καὶ πόσαι μέχρι τῆς $10\frac{1}{4}$ τῆς ἑπομένης ἑσπέρας; ('Απ. α') $26\frac{1}{2}$ ὥρ., β') $39\frac{3}{4}$ ὥρ.,).

11) Ἠγοράσαμεν τρία τεμάχια ὑφάσματος, ἐξ ὧν τὸ α' εἶναι $25\frac{5}{8}$ πήχ., τὸ β' $3\frac{7}{10}$ πήχ. περισσότερον τοῦ α' καὶ τὸ γ' $1\frac{1}{2}$ πήχ. ὀλιγώτερον τοῦ α'. Ἐκ πόσων πήχεων ἀποτελεῖται ἕκαστον τεμάχιον καὶ ἐκ πόσων πήχεων ἀποτελοῦνται καὶ τὰ τρία ὁμοῦ;
('Απ. Α') Τὰ τρία: $79\frac{3}{40}$ πήχ., Β') τὸ β') $29\frac{13}{40}$ πήχ., τὸ γ') $24\frac{1}{8}$ πήχ.).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις·

Α') Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος. Β') Ὅταν ὁ πολλ)στὴς εἶναι κλάσμα. Γ') Ὅταν ὁ πολ)στὴς εἶναι μικτός.

Ὁμοίως εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν κλασμάτων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

Α') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα. Γ') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτός.

Πολλαπλασιασμός.

Περίπτωσις Α'.—Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἢ μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον.

Ἔστω πρῶτον ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον π. χ. $\frac{5}{8} \times 3$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολ)σμοῦ πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{5}{8}$ τρεῖς φοράς, ἤτοι $\frac{5}{8} \times 3 = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8}$.

Κατὰ ταῦτα τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν 5 τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 3 καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο θέσωμεν παρανομαστὴν τὸν αὐτὸν (ἤτοι 8).

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $\frac{5}{6} \times 3$ εἶναι $\frac{5 \times 3}{6}$ ἢ ἁπλούστερον $\frac{5}{2}$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{5}{6}$, ἂν ὁ παρανομαστὴς αὐτοῦ 6 διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀκεραίου 3.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών·

133. «Πολλαπλασιάζομεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, ἂν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον».

Ὁ κανὼν οὗτος ἕπεται ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν ἰδιοτήτων (§ § 116 καὶ 117).

Παραδείγματα. $\frac{5}{10} \times 3 = \frac{5 \times 3}{10} = \frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9} \times 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον· π.χ. $7\frac{4}{6} \times 6$. Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἀρκεῖ κατὰ τὴν ἰδιότητα (33) νὰ πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ δύο μέρη τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$7\frac{4}{5} \times 6 = 7 \times 6 + \frac{4}{5} \times 6 = 42 + \frac{24}{5} = 42 + 4\frac{4}{5} = 46\frac{4}{5}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

134. «Πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα».

ΣΗΜ.—Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Παραδείγματα. $8\frac{3}{5} \times 7 = 56 + \frac{21}{5} = 56 + 4\frac{1}{5} = 60\frac{1}{5}$,

$$\text{ἢ } 8\frac{3}{5} \times 7 = \frac{43}{5} \times 7 = \frac{301}{5} = 60\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως $12\frac{5}{8} \times 9 = 108 + \frac{45}{8} = 108 + 5\frac{5}{8} = 113\frac{5}{8}$.

ἢ $12\frac{5}{8} \times 9 = \frac{101}{8} \times 9 = \frac{909}{8} = 113\frac{5}{8}$.

Ἀσκήσεις.

$$\frac{5}{7} \times 4,\ \frac{7}{10} \times 5,\ 2\frac{3}{4} \times 5,\ 4\frac{5}{9} \times 8,\ 7\frac{5}{15} \times 4,\ 9\frac{3}{5} \times 12,$$

$$8\frac{4}{15} \times 5.$$

Προβλήματα.

1) Πατήρ τις ἐδώρησεν εἰς ἕκαστον τῶν 5 τέκνων του $\frac{1}{5}$ δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔδωκεν ἐν ὅλῳ; ('Απ. 1 δρ.).

2) Λυχνία τις καταναλίσκει καθ' ὥραν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς οἰνοπνεύματος. Ἐὰν αὕτη καίῃ ἐπὶ 7 ὥρας, πόσον οἰνόπνευμα θὰ καταναλώσῃ;

('Απ. $2\frac{5}{8}$ ὀκ.).

3) Ἁμαξοστοιχία τις διατρέχει $35\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα καθ' ὥραν. Πόσα θὰ διατρέξῃ αὕτη εἰς 12 ὥρας; ('Απ. 429 χλμ.).

4) Μία οἰκία ἔχει τρεῖς ὀρόφους ἴσου ὕψους. Ἐὰν τὸ ὕψος ἑκάστου εἶνε $4\frac{4}{5}$ μέτρων, πόσον θὰ εἶναι τὸ ὕψος ὁλοκλήρου τῆς οἰκοδομῆς ταύτης; ('Απ. $14\frac{2}{5}$).

5) Ἐργάτης τις λαμβάνει $1\frac{4}{5}$ δραχμὰς δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας. Πόσον θὰ λάβῃ οὗτος, ἐὰν ἐργασθῇ κατὰ τὰς ἓξ ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος ἐπὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν; ('Απ. $86\frac{2}{5}$ δραχ.).

6) Οἰκογενειάρχης τις ἀπολαμβάνει ἐκ τῆς ἐργασίας του καθ' ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν δραχ. $15\frac{1}{4}$ καὶ ἐκ τῆς περιουσίας του εἰσόδημα 380 δραχ. τὸν μῆνα. Δαπανᾷ δὲ οὗτος καθ' ἑκάστην διὰ τὴν διατροφὴν τῆς οἰκογενείας του δραχ. $14\frac{1}{2}$, δι' ἄλλας ἀνάγκας αὐτῆς $3\frac{1}{5}$ δραχ. καὶ διὰ διαφόρους ἄλλους λόγους δραχ. $4\frac{1}{4}$. Ζητεῖται ποῖον ὑπόλοιπον δραχμῶν περισσεύει εἰς αὐτὸν κατὰ μῆνα; (Ὁ μὴν λαμβάνεται μὲ 30 ἡμέρας, ἐξ ὧν 4 εἶναι ἑορταί). ('Απ. δρ. 118).

Διαίρεσις.

Περίπτωσις Α'.—Διαίρεσις ἀκεραίου δι' ἀκεραίου. Ἔστω π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 3 διὰ τοῦ 5 ἢ, ὅπερ ταὐτό, νὰ μοιράσωμεν 3 δραχμὰς εἰς 5 ἀνθρώπους. Ἐὰν μοιράσωμεν τὴν 1 δραχμὴν εἰς 5 ἴσα μέρη (20 λεπτά), ἕκαστος τῶν 5 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἓν ἐξ αὐτῶν, ἤτοι, $\frac{1}{5}$ (1 εἰκοσάλεπτον). Ὁμοίως ἐκ τῆς δευτέρας δραχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος πάλιν $\frac{1}{5}$ δραχ. καὶ ἐκ τῆς τρίτης ἀκόμη $\frac{1}{5}$ δραχ., ἄρα ἕκαστος τῶν 5 ἀνθρώπων θὰ λάβῃ ἐκ τῶν 3 δραχ. $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{3}{5}$ δραχ. ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3 : 5 εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, ἤτοι $3:5=\frac{3}{5}$, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 δίδει τὸν διαιρετέον, ἤτοι $\frac{3}{5}\times 5=\frac{15}{5}=3$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι διὰ τῶν κλασμάτων ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων καθίσταται πάντοτε δυνατὴ καὶ τελεία. Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικώτερον ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως.

135. «Διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τρίτον, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον».

Ὁ πρῶτος καλεῖται καὶ ἐνταῦθα διαιρετέος, ὁ δεύτερος διαιρέτης καὶ ὁ τρίτος πηλίκον. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐπίσης συνάγομεν ὅτι·

136. «Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην».

Καὶ ἀντιστρόφως.

137. «Πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον 8 τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου τινός, ὡς τοῦ 8 διὰ τοῦ 1, εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρέτην 8, πρέπει κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ θεωρῶμεν τὸ κλάσμα $\frac{8}{1}$ (ἤτοι 8 : 1) ὡς ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμητήν του, τὸν 8, ἤτοι $\frac{3}{1}=8$. Ὁμοίως $\frac{15}{1}=15$, $\frac{19}{1}=19$ κ.τ.λ. Ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι·

138. «Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀκέραιον τοῦτον, παρονομαστὴν δὲ τὴν 1».

Διαίρεσις κλάσματος δι᾿ ἀκεραίου.—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 8 δεκάλ. (ἤτοι $\frac{8}{10}$ δραχ.) εἰς 4 ἀνθρώπους· εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ ὡς μερίδιον 2 δεκάλ., ἤτοι $\frac{2}{10}$ δρχ. Ὅθεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{8}{10}$ δρχ. διὰ τοῦ 4 εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{10}$ δρχ., ἤτοι

$$\frac{8}{10}:4=\frac{8:4}{10}=\frac{2}{10}.$$

Καὶ τῳόντι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4, εὑρίσκομεν $\frac{8}{10}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

Ἔστω ἤδη νὰ μοιράσωμεν 7 δεκάλ. ἤτοι $\frac{7}{10}$ δρ., εἰς δύο ἀνθρώπους. Ἐπειδὴ τὰ 7 δεκάλ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 14 πεντάλεπτα, ἕπεται ὅτι ἕκαστος ἄνθρωπος θὰ λάβῃ 7 πεντάλεπτα, ἤτοι $\frac{7}{20}$ δρ. Ἄρα τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{10}$ διὰ τοῦ 2 εἶναι τὸ $\frac{7}{20}$, ἤτοι $\frac{7}{10}:2=\frac{7}{10\times2}=\frac{7}{20}$.

Καὶ τῳόντι τὸ ἐξαγόμενον $\frac{7}{20}$ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον. Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

139. «Κλάσμα διαιρεῖται δι' ἀκεραίου, ἂν μὲ αὐτὸν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς (ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς) ἢ πολλαπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής».

ΣΗΜ.—Ὁ κανὼν οὗτος συνάγεται καὶ ἀμέσως ἐκ τῶν ἰδιοτήτων (116, 117).

Διαίρεσις μικτοῦ δι' ἀκεραίου.—Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν $18\frac{4}{5}:7$.

140. Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν χωριστὰ τὰ δύο μέρη αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ δύο μερικὰ πηλίκα (§ 71).

Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $18\frac{4}{5}:7=\frac{18}{7}+\frac{4}{7\times5}=2\frac{4}{7}+\frac{4}{35}=2\frac{24}{35}$.

ΣΗΜ.—Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Παραδείγματα.

$$2\frac{3}{5}:8=\frac{2}{8}+\frac{3}{5\times8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{40}=\frac{13}{40} \text{ ἢ } 2\frac{3}{5}:8=\frac{13}{40}.$$

Ὁμοίως $18\frac{4}{7}:9=2+\frac{4}{63}=2\frac{4}{63}$ ἢ $18\frac{4}{7}:9=\frac{130}{7}:9=\frac{130}{63}=2\frac{4}{63}$.

Ἀσκήσεις.

5:8, 7 : 10, $\frac{3}{4}:3$, $\frac{5}{8}:6$, $\frac{8}{9}:4$, $\frac{7}{12}:5$, $\frac{10}{13}:5$, $\frac{5}{8}:3$, $\frac{7}{5}:3$,

$12\frac{8}{9}:4$, $5\frac{1}{4}:2$, $15\frac{2}{7}:6$.

Προβλήματα.

1) Εὑρεῖν τὰ ἑξῆς πηλίκα: α′) τοῦ 1 : 2, β′) τοῦ 1 : 10, γ′) τοῦ 3 : 1, δ′) τοῦ 3 : 3, ε′) τοῦ 3 : 5.

2) Πόσας φορὰς εἶναι ὁ 2 μικρότερος: α′) τοῦ 8, β′) τοῦ 24, γ′) τοῦ 7, δ′) τοῦ 31;

3) Ποσάκις εἶναι ὁ 100 μεγαλύτερος α′) τοῦ 10, β′) τοῦ 20, γ′) τοῦ 35, δ′) τοῦ 71;

4) Ὀκτὼ ἐργάται ἔλαβον ὁμοῦ δραχ. 100 δι᾽ ἐργασίαν μιᾶς ἡμέρας. Πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (Ἀπ. $12 \frac{1}{2}$ δραχ.).

5 Ὁ τροχὸς ἀτμομηχανῆς κάμνει 120 στροφὰς. εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρ. Πόσον μέρος τῆς ὥρας χρειάζεται οὗτος δι᾽ ἑκάστην στροφήν; (Ἀπ. $\frac{1}{480}$ ὥρ.).

6) Οἱ 75 πήχ. ὑφάσματός τινος ἠγοράσθησαν ἀντὶ δραχ. $158 \frac{3}{4}$. Πρὸς πόσον ἠγοράσθη: α′) ὁ 1 πῆχυς καὶ β′) τὸ 1 ρούπιον; (1 πῆχυς ἔχει 8 ρούπια). (Ἀπ. $2 \frac{7}{60}$ δρ., $\frac{127}{480}$ δραχ.).

7) Ἠγόρασέ τις 4 τόπια ὑφάσματος τῶν 75 πήχεων πρὸς $13 \frac{1}{4}$ δρ. τὸν πῆχυν. Ἐδαπάνησε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν καὶ φόρους ἐν ὅλῳ δρχ. $30 \frac{1}{2}$. Ἐπώλησε δὲ τὰ μὲν δύο τόπια πρὸς $4 \frac{3}{4}$ δραχ. τὸν πῆχυν καὶ τὰ λοιπὰ δύο πρὸς $5 \frac{1}{10}$ δραχ. Πόσας δραχ. ἐκέρδησεν ἢ ἔχασεν; (Ἀπ. ἐζημιώθη δρ. 2528).

Πολλαπλασιασμό

141. ***Περίπτωσις Β′.***— Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐδώκαμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν (§ 30), δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν εὐκόλως, πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν εἶναι ἀκέραιος, ἀλλ᾽ οἱοσδήποτε ἀριθμός, κλάσμα ἢ μικτός.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 ἐπὶ $\frac{1}{7}$. Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει ἐκ τοῦ πρώτου νὰ σχηματισθῇ τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος $\frac{1}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος· ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος διὰ τοῦ μερισμοῦ αὐτῆς εἰς 7 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν ἐλάβομεν τὸ ἕν· ἄρα καὶ τὸ 8 πρέπει νὰ διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη, ἐξ ὧν νὰ λάβωμεν τὸ ἕν, ἤτοι νὰ λάβωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 8 : 7, ὅπερ εἶναι $\frac{8}{7}$ (§ 136), ἤτοι $8\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$.

Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολ]σμὸς ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ κλασματικὴν μονάδα εἶναι διαίρεσις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ της.

Ἔστω ἤδη ὁ 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{5}{7}$· τοῦτο σημαίνει ἐκ τοῦ 8 νὰ σχηματισθῇ τρίτος, ὅπως ὁ δεύτερος $\frac{5}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς μονάδος. Ὁ $\frac{5}{7}$ ἐγένετο ἐκ τῆς 1, ἀφοῦ διῃρέθη αὕτη εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἐλήφθησαν τὰ 5· ἄρα καὶ ὁ τρίτος θὰ σχηματισθῇ ἐκ τοῦ πρώτου 8, ἀφ᾽ οὗ ὁ 8 διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ληφθῶσιν ἐξ αὐτῶν τὰ 5, ἤτοι θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}+\frac{8}{7}=\frac{8\times5}{7}$. Ὅθεν

$$8\times\frac{5}{7}=\frac{8\times5}{7}=\frac{40}{7}=5\frac{5}{7}.$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα, ὁ πολλαπλασιασμὸς σημαίνει ἐπανάληψιν μέρους ἀριθμοῦ πολλάκις. Ἐκ τούτων ἕπεται καὶ ὁ ἑπόμενος πρακτικὸς κανὼν πολλαπλασιασμοῦ ἀκεραίου ἐπὶ κλάσμα.

142. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

$$\text{π. χ. } 9\times\frac{4}{5}=\frac{9\times4}{5}=\frac{36}{5}=7\frac{1}{5}.$$

Παρατήρ. — Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 32) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον τὸ κλάσμα καὶ ὡς πολλαπλασιαστὴν τὸν ἀκέραιον καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 133)· π. χ.

$$18\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\times18=\frac{72}{5}=14\frac{2}{5}.$$

$$\text{Ὁμοίως } 8\times\frac{7}{24}=\frac{7}{24}\times8=\frac{7}{24:8}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολ]μεν δύο κλάσματα· π. χ. $\frac{5}{9}\times\frac{7}{8}$.

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον τοῦ $\frac{5}{9}$, ἤτοι $\frac{5}{9}:8=\frac{5}{9\times8}$ καὶ τοῦτο νὰ ἐπαναλάβωμεν ἑπτάκις, ἤτοι $\frac{5}{9\times8}\times7=\frac{5\times7}{9\times8}$. Ὅθεν $\frac{5}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{35}{72}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών.

143. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπ' ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὡς παρονομαστήν».

$$\text{π.χ. } \frac{4}{15}\times\frac{7}{9}=\frac{4\times7}{15\times9}=\frac{28}{135}.$$

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{8\times4}=\frac{15}{32}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ὡς λ. χ. $8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$. ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅτε θὰ ἔχωμεν $8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{44}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{44\times2}{5\times3}=\frac{88}{15}=5\frac{13}{15}$, ἢ κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 33) πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέρη τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα, ὅτε λαμβάνομεν

$$8\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=8\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}+\frac{8}{15}=5\frac{1}{3}+\frac{8}{15}=5\frac{14}{15}.$$

Ὅθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

144. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ κλάσμα, ἢ πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα ἢ τρέπομεν πρῶτον τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν».

$$\text{π.χ. } 4\frac{5}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{7}+\frac{15}{63}=1\frac{5}{7}+\frac{15}{63}=1\frac{60}{63}=1\frac{20}{21}.$$

$$\text{ἢ } 4\frac{5}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{41}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{123}{63}=1\frac{60}{63}=1\frac{20}{21}.$$

Ἀσκήσεις.

$$3\times\frac{1}{3},\quad 5\times\frac{1}{10},\quad 10\times\frac{1}{100},\quad 100\times\frac{1}{10}.$$

$$8\times\frac{4}{5}.\quad 15\times\frac{3}{5}.\quad 8\times\frac{7}{16}.\quad 9\times\frac{4}{7}.\quad \frac{7}{8}\times\frac{3}{4}.\quad \frac{4}{5}\times\frac{7}{9}.$$

$$\frac{5}{8}\times\frac{4}{10}.\quad \frac{8}{9}\times\frac{5}{7}.\quad 3\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}.\quad 7\frac{5}{8}\times\frac{2}{9}.\quad 4\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}.\quad 17\frac{5}{8}\times\frac{5}{9}.$$

Προβλήματα.

1) Ἡ μία ὀκᾶ κρέατος τιμᾶται 8 δραχ. Πόσον τιμᾶται: α΄) τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς, β΄) τὸ $\frac{1}{4}$, γ΄) τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ δ΄) $2\frac{3}{4}$ ὀκ.;

('Απ. 4· 2· 3· 22).

2) Μία ράβδος ἔχουσα μῆκος $1\frac{1}{8}$ πήχεως εἰσχωρεῖ 64 φορὰς εἰς τὴν ἐπὶ τῆς ὁδοῦ πλευρὰν ἑνὸς οἰκοπέδου. Πόσων πήχεων εἶναι ἡ πλευρὰ αὕτη; ('Απ. 72 πήχ.).

3) Ἐάν τις ἐξοικονομῇ $3\frac{1}{5}$ δραχ. καθ' ἑκάστην, πόσας θὰ ἐξοικονομήσῃ: α΄) εἰς μίαν ἑβδομάδα, β΄) εἰς 30 ἡμέρας καὶ γ΄) εἰς ἓν ἔτος (365 ἡμ.); ('Απ. $22\frac{2}{5}$, 96, 1168 δρ.).

4) Διὰ τὴν καλλιέργειαν μιᾶς ἀμπέλου εἰργάσθησαν τὴν πρώτην φορὰν 10 ἐργάται ἐπὶ 6 ἡμέρας, τὴν δευτέραν δὲ 12 ἐργάται ἐπὶ 4 ἡμέρας. Πόσον ἐστοίχισεν ἡ καλλιέργεια αὕτη, ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου ἐργάτου εἶχε συμφωνηθῇ τὴν πρώτην φορὰν πρὸς $8\frac{1}{2}$ δραχ., τὴν δὲ δευτέραν πρὸς $7\frac{3}{5}$ δραχμάς; ('Απ. δραχ. $874\frac{4}{5}$).

5) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 380.000 ὀκάδας σίτου πρὸς $98\frac{1}{2}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τούτων ἐπώλησεν 20,000 ὀκ. πρὸς $105\frac{1}{4}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, 56.428 ὀκ. πρὸς $102\frac{1}{5}$ λεπ., 110.000 ὀκ. πρὸς $101\frac{1}{8}$ λεπτ. καὶ τὰς ὑπολοίπους πρὸς $99\frac{1}{2}$ λεπτά. Πόσον ἐκέρδησεν οὗτος;

('Απ. $826.105\frac{3}{5}$ λεπ.).

Πολλαπλασιασμός.

Περίπτωσις Γ΄. —Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἢ κλάσμα ἐπὶ μικτὸν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 32), δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τοὺς κανόνας (§§ 132, 134).

Παραδείγματα. $8 \times 3\frac{4}{5} = 3\frac{4}{5} \times 8 = 24 + \frac{32}{5} = 30\frac{2}{5}$.

$$\frac{7}{10} \times 2\frac{3}{5} = 2\frac{3}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{13}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{91}{50} = 1\frac{41}{50}.$$

Ἔστω νῦν πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον δύο μικτῶν, π.χ. $8\frac{5}{9}\times 3\frac{4}{5}$.

Τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους.

Πρῶτον δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ κατόπιν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι

$$8\frac{5}{9}\times 3\frac{4}{5}=\frac{77}{9}\times\frac{19}{5}=\frac{1463}{45}=32\frac{23}{45}.$$

Δεύτερον δ' ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος (§ 68) δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ὅτε θὰ ἔχωμεν $8\frac{5}{9}\times 3\frac{4}{5}=8\times 3+\frac{5}{9}\times 3+8\times\frac{4}{5}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}=24+\frac{15}{9}+\frac{32}{5}+\frac{20}{45}=24+1\frac{6}{9}+6\frac{2}{5}+\frac{20}{45}=31\frac{30}{45}+\frac{18}{45}+\frac{20}{45}=31\frac{68}{45}=32\frac{23}{45}$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

145. «Πολλαπλασιάζομεν μικτὸν ἐπὶ μικτόν, ἂν τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμὸν ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ ἑνὸς μικτοῦ ἐφ' ἕκαστον μέρος τοῦ ἑτέρου καὶ προσθέσωμεν νὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα».

Παράδειγμα. $7\frac{5}{9}\times 3\frac{7}{10}=\frac{68}{9}\times\frac{37}{10}=\frac{2516}{90}=27\frac{86}{90}=27\frac{43}{45}$ ἢ $7\frac{5}{9}\times 3\frac{7}{10}=7\times 3+\frac{5}{9}\times 3+7\times\frac{7}{10}+\frac{5}{9}\times\frac{7}{10}=21+\frac{15}{9}+\frac{49}{10}+\frac{35}{90}=21+1\frac{6}{9}+4\frac{9}{10}+\frac{35}{90}=26\frac{60}{90}+\frac{81}{90}+\frac{35}{90}=26\frac{176}{90}=27\frac{86}{90}=27\frac{43}{45}$.

Παρατ.—Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὅσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος ἢ μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Ἀσκήσεις.

$75\times\frac{3}{8}$. $15\times 4\frac{5}{7}$. $\frac{5}{8}\times 3\frac{4}{7}$. $\frac{5}{9}\times 2\frac{3}{5}$. $\frac{7}{9}\times 4\frac{5}{12}$.

$7\frac{5}{8}\times 4\frac{3}{4}$. $8\frac{2}{7}\times 3\frac{5}{9}$. $\frac{4}{9}\times 7\frac{2}{5}$. $18\frac{4}{7}\times 7\frac{2}{7}$. $12\frac{3}{4}\times 7\frac{2}{5}$.

Προβλήματα.

1) Πόσα δράμια κάμνουσι: α') $5\frac{1}{4}$ ὀκ., β') $12\frac{1}{8}$ ὀκ., γ') 44 ὀκ., δ') $58\frac{1}{2}$ ὀκ.; ('Απ. 2100· 4850· 17600· 23400).

2) Πόσα λεπτὰ ἀμνουσι: α) $42\frac{1}{2}$ δραχ. β') $218\frac{3}{4}$ δραχ. γ') $538\frac{1}{16}$ δραχ.; ('Απ. 4250· 21875· $5386\frac{1}{4}$).

3) Ἀτμόπλοιόν τι ἔπλεε κατὰ τὰς ἀρχικὰς $5\frac{3}{4}$ ὥρ. τοῦ ταξειδίου του μὲ ὡριαίαν ταχύτητα $9\frac{3}{4}$ μιλίων, κατὰ τὰς ἀκολούθους $7\frac{1}{2}$ ὥρας μὲ ταχύτητα $8\frac{4}{5}$ -μιλ. καὶ κατὰ τὰς τελευταίας $5\frac{1}{4}$ ὥρ. μὲ ταχύτητα 8 μιλίων. Πόσα μίλια διέτρεξεν ἐν ὅλῳ; ('Απ. $164\frac{1}{16}$ μίλια).

4) Τράπεζά τις πληρώνει δραχ. $55\frac{3}{5}$ διὰ 3 ὥρας ἐκτάκτου ἑσπερινῆς ἐργασίας ὑπαλλήλου τινός. Ὁ ὑπάλληλος οὗτος εἰργάσθη ἐπὶ 4 ἑσπέρας καὶ ἀπὸ τῆς 8 $^1/_2$ μ. μ. μέχρι τῆς 11 $^3/_4$ μ. μ. ἑκάστης ἑσπέρας. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ οὗτος: α) δι' ἑκάστην ὥραν τῆς τοιαύτης ἐργασίας καὶ β) δι' ὁλόκληρον τὸν χρόνον τῆς ἐργασίας ταύτης;

('Απ. $18\frac{8}{15}$, $240\frac{14}{15}$).

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

146. Ἀφοῦ γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε παραγόντων, εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ὅσων δήποτε καὶ οἵων δήποτε παραγόντων.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν κατὰ σειρὰν πρῶτον τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τοῦτο ἐπὶ τὸν τέταρτον κ.ο.κ., μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ παράγοντες.

Παράδειγμα. $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{7}$.

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων εἶναι $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{4\times3}{5\times4}$ καὶ τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{7}{9}$ εἶναι $\frac{4\times3\times7}{5\times4\times9}$ καὶ τέλος τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἶναι $\frac{4\times3\times7\times2}{5\times4\times9\times7}$. Ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{4\times3\times7\times2}{5\times4\times9\times7}=\frac{3\times7\times2}{5\times9\times7}=\frac{3\times2}{5\times9}=\frac{2}{5\times3}=\frac{2}{15}.$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

147. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁσαδήποτε κλάσματα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν πάντας τοὺς ἀρι-

θμητάς, ἀφ' ἑτέρου δὲ πάντας τοὺς παρονομαστὰς καὶ νὰ θέσωμεν τὸ μὲν πρῶτον γινόμενον ὡς ἀριθμητήν, τὸ δὲ δεύτερον ὡς παρονομαστήν».

ΣΗΜ.—Πρὶν ἢ ἐκτελέσωμεν τοὺς ἀνωτέρω πολλαπλασιασμούς, δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 4 ἐξαλείφοντες τὸν παράγοντα 4 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν (ἰδιότης § 78). Ἔπειτα ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 7 κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Τέλος ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 3 ἀπαλείφοντες τὸν παράγοντα 3 ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διαιροῦντες τὸν παράγοντα 9 εἰς τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 3 (ἰδιότης § 76).

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, διότι τοὺς μὲν μικτοὺς δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς κλάσματα, τοὺς δὲ ἀκεραίους νὰ θεωρήσωμεν ὡς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα (§ 138)· π. χ. $8\times\frac{4}{5}\times 3\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{8}{1}\times\frac{4}{5}\times\frac{27}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{8\times4\times27\times3}{1\times5\times8\times4}=\frac{27\times3}{5}=\frac{81}{5}=16\frac{1}{5}$.

Ἀσκήσεις.

α) Ἀπὸ μνήμης :

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=;\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=;\ \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=;$$

$$\frac{1}{10}\times30\times\frac{1}{6}\times100=;$$

$$\frac{2}{3}\times5\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{8}=;\ 10\times\frac{1}{2}\times\frac{13}{5}\times9=;$$

β) Γραπτῶς:

$$3\frac{2}{5}\times\frac{8}{17}\times\frac{2}{9}=;$$

$$11\frac{2}{3}\times11\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=;$$

Προβλήματα.

1) Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $8\frac{1}{2}$ δραχ., πόσον τιμῶνται 3 τεμάχια, ἐξ ὧν ἕκαστον ἀποτελεῖται ἐκ $45\frac{3}{4}$ πήχεων ;

(Ἀπ. $1166\frac{5}{8}$ δραχ.).

2) Ἔν τινι ἐργοστασίῳ ἀπασχολοῦνται κατὰ μῆνα ἐπὶ 22 ἡμέρας καὶ

ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἑκάστην τρεῖς ὁμάδες ἐργατῶν. Ἡ πρώτη ὁμὰς περιλαμβάνει 25 ἄνδρας, ἡ δευτέρα 60 γυναῖκας καὶ ἡ τρίτη 40 παῖδας ἡλικίας 16 ἕως 18 ἐτῶν. Ἕκαστος ἀνὴρ λαμβάνει ὡς ἀμοιβὴν $1\frac{1}{2}$ δραχ. καθ' ὥραν ἐργασίας, ἑκάστη γυνὴ $\frac{9}{10}$ δραχ. καὶ ἕκαστον παιδίον $\frac{3}{4}$ δραχ. Ζητεῖται τὸ σύνολον τῶν ἡμερομισθίων ἑνὸς τριμήνου.

(Ἀπ. $68161\frac{1}{2}$ δρ.).

Διαίρεσις.

148. ***Περίπτωσις Β'.***—Πρὶν ἢ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, τοῦ διαιρετέου μένοντος τοῦ αὐτοῦ, ἂν ὁ διαιρέτης γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερος, τὸ πηλίκον γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερον, καὶ ἂν ὁ διαιρέτης γίνῃ δὶς ἢ τρὶς κτλ. μεγαλύτερος, τὸ πηλίκον γίνεται δὶς ἢ τρὶς κτλ. μικρότερον.

Ἐὰν π. χ. πρόκειται νὰ μοιράσωσιν 8 ἄνθρωποι 120 δραχμάς, ἕκαστος θὰ λάβῃ δραχμὰς 15 (πηλίκον τοῦ 120: 8). Ἐὰν ὅμως μοιράσωσι τὰς 120 δραχμὰς οὐχὶ 8, ἀλλὰ 4 ἄνθρωποι, ἕκαστος θὰ λάβῃ 30 δραχμὰς (πηλ. 120 : 4), ἤτοι διπλασίας τῶν 15.

Ἔστω πρῶτον ὁ ἀριθμὸς 15 νὰ διαιρεθῇ διὰ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{8}$. Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο ἡ 1, τὸ πηλίκον θὰ ἦτο 15. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρέτης εἶναι $\frac{1}{8}$, ἤτοι 8 φορὰς μικρότερος τῆς 1, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὀκτάκις μεγαλύτερον, ἤτοι 15×8. Ὅθεν $15:\frac{1}{8}=15\times8$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 15 διὰ τοῦ $\frac{7}{8}$· ἂν ὁ διαιρέτης ἦτο $\frac{1}{8}$, τὸ πηλίκον, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, θὰ ἦτο 15×8.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαιρέτης εἶναι $\frac{7}{8}$, ἤτοι ἑπτάκις μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{8}$, τὸ νέον πηλίκον θὰ εἶναι ἑπτάκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι $\frac{15\times8}{7}$. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν $15:\frac{7}{8}=\frac{15\times8}{7}=15\times\frac{8}{7}$.

Ἔστω νὰ διαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{18}$ διὰ τοῦ $\frac{4}{5}$.

Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο 1, τὸ πηλίκον θὰ ἦτο $\frac{7}{18}$· ἐὰν ὁ διαιρέτης ἦτο $\frac{1}{5}$, τὸ πηλίκον θὰ ἦτο 5 φορὰς μεγαλύτερον, ἤτοι $\frac{7\times5}{18}$· ἐὰν ὁ διαιρέτης γίνῃ $\frac{4}{5}$, ἤτοι τετράκις μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{5}$, τὸ πηλίκον θὰ γίνῃ τετράκις μικρότερον τοῦ προηγουμένου, ἤτοι $\frac{7\times5}{18\times4}$.

Ὅθεν $\frac{7}{18} : \frac{4}{5} = \frac{7\times5}{18\times4} = \frac{7}{18}\times\frac{5}{4}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

149. «Διαιροῦμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἂν ἀντιστρέψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάσωμεν».

Παραδείγματα. $7 : \frac{4}{5} = 7\times\frac{5}{4} = \frac{35}{4} = 8\ \frac{3}{4}$.

$\frac{7}{8} : \frac{4}{9} = \frac{7}{8}\times\frac{9}{4} = \frac{63}{32} = 1\ \frac{31}{32}$. $8\frac{2}{5} : \frac{7}{10} = 8\ \frac{2}{5}\times\frac{10}{7} = 12$.

Ἀσκήσεις.

$8 : \frac{5}{6}$. $15 : \frac{3}{4}$. $7 : \frac{5}{8}$. $\frac{4}{9} : \frac{8}{7}$. $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$.

$\frac{8}{11} : \frac{5}{9}$. $\frac{3}{8} : \frac{2}{3}$. $7\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$. $8\frac{5}{12} : \frac{3}{7}$. $2\frac{4}{9} : \frac{5}{12}$.

Διαίρεσις.

150. ***Περίπτωσις Γ'.***— Ἡ διαίρεσις διὰ μικτοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἄλλως, εἰ μὴ ἂν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα (§ 149).

π. χ. $5 : 7\frac{3}{4} = 5 : \frac{31}{4} = 5\times\frac{4}{31} = \frac{20}{31}$, $\frac{7}{8} : 2\frac{3}{5} = \frac{7}{8} : \frac{13}{5} = \frac{7}{8}\times\frac{5}{13} = \frac{35}{104}$, $7\frac{5}{9} : 2\frac{2}{3} = \frac{68}{9} : \frac{8}{3} = \frac{68}{9}\times\frac{3}{8} = 2\ \frac{5}{6}$.

Παρατ. — Ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου, ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν διαιρετέον, καὶ τέλος, ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου.

Ἀσκήσεις.

$8 : 3\frac{5}{7}$. $15 : 4\frac{2}{3}$. $142 : 25\frac{4}{9}$. $\frac{5}{8} : 1\frac{3}{4}$. $\frac{7}{12} : 2\frac{3}{4}$. $5\frac{4}{7} : 2\frac{2}{5}$.

$15\frac{3}{5} : 2\frac{3}{4}$. $18\frac{7}{12} : 4\frac{2}{14}$. $7\frac{5}{8} : 5\frac{2}{7}$.

Προβλήματα.

1) Διὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ. μαύρου χαβιαρίου πληρώνομεν δραχμὰς 45. Πρὸς πόσον πωλεῖται ἡ ὀκᾶ τούτου; ('Απ. 60).

2) Ποῖος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζων τὸν $\frac{3}{16}$ δίδει γινόμενον τὸν $\frac{5}{8}$;

(Ἀπ. $3\frac{1}{3}$).

3) Μὲ $13\frac{1}{2}$ δραχμὰς ἀγοράζει τις μίαν ὀκᾶν βουτύρου. Πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσῃ μὲ 100 δραχμάς; (Ἀπ. $7\frac{11}{27}$ὀκ.).

4) Ἀτμόπλοιόν τι διανύει 21 μίλια εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας, ἕτερον δὲ ἀτμόπλοιον $33\frac{1}{3}$ μίλια εἰς 3 ὥρας. Ποῖον ἐκ τῶν δύο εἶναι ταχύτερον καὶ κατὰ πόσα μίλια;

(Ἀπ. Τὸ δεύτερον εἶναι ταχύτερον κατὰ $1\frac{7}{9}$ μίλια).

5) Ἀτμάμαξα τρέχουσα $32\frac{1}{2}$ χιλιόμ. καθ' ὥραν χρειάζεται $10\frac{1}{4}$ ὥρας, ἵνα μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην. Ἐὰν πρόκειται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ταξείδιον τοῦτο ἐντὸς $7\frac{1}{2}$ ὡρῶν, πόσα χιλιόμ. πρέπει νὰ διατρέχῃ καθ' ὥραν; (Ἀπ. $44\frac{5}{12}$χιλιόμ.).

6) Ἠγόρασέ τις $5\frac{1}{2}$ὀκ. καφὲ ἀντὶ $38\frac{1}{5}$δραχμῶν καὶ $8\frac{1}{4}$ὀκ. ζακχάρεως ἀντὶ $42\frac{3}{5}$δραχ. Ποίου ἐκ τῶν δύο εἰδῶν ἡ ὀκᾶ στοιχίζει περισσότερον καὶ β') κατὰ πόσον;

(Ἀπ. Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ εἶναι ἀκριβοτέρα κατὰ δρ. $1\frac{43}{55}$).

Σύνθετα κλάσματα.

151. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ κλασματικῶς (§ 137)· π.χ. $7 : \frac{3}{5} = \frac{7}{\frac{3}{5}}$· ὁ μὲν διαιρετέος 7 εἶναι ἀριθμητής, ὁ δὲ διαιρέτης $\frac{3}{5}$ εἶναι παρονομαστής.

Ὁμοίως τὸ πηλίκον $\frac{3}{5} : \frac{7}{8}$ παρίσταται ὡς κλάσμα $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}$.

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ δύο ὅροι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, καλοῦνται ***σύνθετα κλάσματα.***

Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουσιν ὅλας τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἔχουσι καὶ τὰ ἁπλᾶ κλάσματα. Ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς ἰδιότητος (§ 118) δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς συνήθη τοιαῦτα, ἅτινα καλοῦνται καὶ ἁπλᾶ.

Ἔστω π. χ. τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{7}{\frac{2}{5}}$. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους, τὸν 7 καὶ τὸν $\frac{2}{5}$, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 5. $\frac{7}{\frac{2}{5}}=\frac{7\times5}{\frac{2}{5}\times5}=\frac{7\times5}{2}=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σύνθετον κλάσμα, ἤτοι·

$$\frac{7}{\frac{2}{5}}=7:\frac{2}{5}=7\times\frac{5}{2}=\frac{7\times5}{2}=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2}.$$

Ὁμοίως ἔστω τὸ σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}$.

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι 5×8, δηλ. ἐπὶ τὸ κ. πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ὅρων τοῦ συνθέτου κλάσματος, ὅτε λαμβάνομεν

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}=\frac{\frac{3}{5}\times5\times8}{\frac{7}{8}\times5\times8}=\frac{3\times8}{7\times5}=\frac{24}{35}.$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν, ἣν παριστᾷ τὸ σύνθετον κλασμα, ἤτοι $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{35}$.

Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα τρέπομεν αὐτὸ εἰς ἁπλοῦν. Ἐὰν δὲ ὁ εἷς τῶν ὅρων εἶναι ἀκέραιος, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

152. «Διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ»· π.χ.

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{8}\times8}{\frac{3}{4}\times8}=\frac{5}{3\times2}=\frac{5}{6}.$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω κανόνος αἱ πράξεις τῶν συνθέτων κλασμάτων ἀνάγονται εἰς πράξεις ἁπλῶν κλασμάτων· π.χ.

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}+\frac{4}{\frac{2}{5}}+\frac{8\frac{2}{5}}{3}=\frac{3\times7}{2\times5}+\frac{4\times5}{2}+\frac{42}{5\times3}=\frac{21}{10}+10+\frac{42}{15}=14\frac{9}{10}.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραπῶσιν εἰς ἁπλᾶ τὰ σύνθετα κλάσματα·

$$\frac{7}{\frac{3}{5}},\quad \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}},\quad \frac{3\frac{2}{5}}{\frac{7}{40}},\quad \frac{7\frac{2}{5}}{3\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{5}{8}}{3\frac{4}{5}}.$$

Ἀσκήσεις πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως κλασμάτων.

1) Ἀπὸ μνήμης: α') $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=;$ $1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{3}=;$ $\frac{11}{12}\times8=;$

$5\times\frac{1}{4}=;$ $\frac{5}{16}\times\frac{4}{9}=;$ $2\frac{1}{3}\times4\frac{1}{2}=;$ $\frac{5}{8}\times4=;$ $4\times\frac{2}{3}=;$ $\frac{5}{6}\times\frac{5}{8}=;$

β') $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=;$ $\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=;$ $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=;$ $6:\frac{3}{4}=;$ $5:\frac{5}{6}=;$ $12:\frac{2}{8}=;$

$\frac{5}{6}:6=;$ $\frac{2}{3}:12=;$ $\frac{5}{6}:11=;$ $3\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}=;$ $2:\frac{1}{3}=;$ $8:\frac{5}{12}=;$

2) Γραπτῶς· α') $\frac{7}{18}\times\frac{2}{3}=;$ $\frac{4}{7}\times\frac{21}{40}=;$ $\frac{2}{3}\times17=;$ $7\times\frac{3}{140}=;$

$11\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}=;$ $3\frac{1}{3}\times15\frac{2}{3}=;$ $1\frac{8}{9}\times11\frac{5}{8}=;$ $4\frac{1}{6}\times2\frac{1}{2}=;$

$3\frac{4}{5}\times12\frac{11}{12}=;$ $8\frac{3}{4}\times\frac{11}{12}=;$ $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=$

$8\times\frac{3}{5}\times2\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}=;$ $\frac{4}{5}\times5\frac{3}{4}\times7\times2\frac{2}{5}=;$

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}\times28=;$ $135\times\frac{18}{\frac{3}{7}}=;$ $\frac{17}{45}\times\frac{\frac{3}{8}}{22}=;$ $3\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{16}}\times\frac{8}{4\frac{2}{5}}\times\frac{7}{8}=;$

β') $\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=;$ $\frac{4}{7}:\frac{7}{8}=;$ $\frac{21}{40}:\frac{1}{3}=;$ $\frac{8}{25}:132=;$ $145:$ — $=;$

$18\frac{2}{3}:14\frac{3}{8}=;$ $83\frac{1}{2}:11\frac{5}{12}=;$ $9\frac{1}{8}:\frac{5}{6}=;$ $\left(2\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right):\frac{11}{24}=;$

$\frac{\frac{2}{3}}{8\frac{4}{5}}:5=;$ $\frac{3}{5}:\left(\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\right)=;$ $\left(8\times\frac{3}{5}\times2\frac{4}{7}\right):4=;$

$\left(2 \times \frac{15}{23} \times \frac{4}{9}\right) : 4 = ;$ $\qquad \frac{\frac{15\frac{3}{4}}{7}}{40} : \frac{28}{7} = ;$

3) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

45× 5=;	187× 5=;	240× 5=;
3482× 5=;	135× 50=;	247× 50=;
827× 50=;	1253× 50=;	386×500=;
4732×500=;	845×500=;	2452×500=;

ΣΗΜ.—Ἐπειδὴ ὁ $5=\frac{10}{2}$, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 5, ἤτοι ἐπὶ $\frac{10}{2}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 10 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 2.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι $50=\frac{100}{2}$ καὶ $500 = \frac{1000}{2}$.

4) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί.

148×15=;	4432×150=;	7424×150=;
1189×15=;	5067×150=;	1235×150=;
947×15=;	8254×150=;	

ΣΗΜ.—Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $15=10+5=10+\frac{10}{2}$. Ἄρα διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 15, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν πρῶτον ἐπὶ 10 καὶ δεύτερον νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τούτου καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.

Ὁμοίως τὸ $150 = 100 + \frac{100}{2}$.

5) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·

845× 25=;	237× 25=;	387× 25=;
1786× 25=;	2452× 25=;	7463× 25=;
383×125=;	187×125=;	2453×125=;
849×125=;	2373×125=;	8457×125=;

ΣΗΜ.—Ἐπειδὴ ὁ $25=\frac{100}{4}$, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ 25, ἤτοι ἐπὶ $\frac{100}{4}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 4.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι $125=\frac{1000}{8}$.

6) Νὰ εὑρεθῶσι συντόμως τὰ ἑξῆς γινόμενα· $40 \times \frac{3}{4} = ;$

$150\times\frac{2}{3}=;$ $750\times\frac{2}{3}=;$ $285\times\frac{5}{4}=;$ $180\times\frac{4}{5}=;$

$240\times\frac{5}{6}=;$ $480\times\frac{4}{3}=;$ $345\times 1\frac{1}{3}=;$ $793\times 1\frac{1}{2}=;$

ΣΗΜ.—Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ κλάσμα, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς λ. χ. ἐπὶ $\frac{3}{4}$, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ $\left(\text{διότι } \frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}\right)$. Ὁμοίως, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπὶ κλάσμα, οὗτινος ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κατὰ 1 μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, ὡς λ. χ. ἐπὶ $\frac{6}{5}$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμὸν τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ $\left(\text{διότι } \frac{6}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=1+\frac{1}{5}\right)$.

7) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς διαιρέσεις·

65 : 5=;	3125 : 25=;	15625 : 125= ;
170 : 5=;	6250 : 125=;	9845 : 25= ;
420 : 5=;	7340 : 25=;	145750 : 125= ;

ΣΗΜ.—Ἐπειδὴ ὁ $5=\frac{10}{2}$, ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα διὰ 5, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10. Ὁμοίως $25=\frac{100}{4}$ καὶ $125=\frac{1000}{8}$.

8) Νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς διαιρέσεις· $50:\frac{2}{3}=;$ $276:\frac{7}{4}=;$ $85:\frac{7}{8}=;$ $154:1\frac{1}{4}=;$ $232:\frac{5}{6}=;$ $848:\frac{4}{5}=;$ $135:\frac{5}{4}=;$ $224:1\frac{1}{3}=;$ $380:1\frac{1}{5}=;$ (Παράβ. ἄσκησιν 6).

Λύσεις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 12 δρ. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τὸ πρόβλημα, τὸ χρησιμεῦσαν διὰ τὴν γενίκευσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἕπεται.

1 ἢ $\frac{8}{8}$ πήχ. τιμῶνται 12 δρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » τιμᾶται $\frac{12}{8}$ »

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ » τιμῶνται $\frac{12\times5}{8}$ »

Ἡ τοιαύτη λύσις τῶν προβλημάτων καλεῖται λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Παρατ.—Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $\frac{12\times5}{8}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 12 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα καὶ ὅταν ἐκφράσωμεν τὰ δεδομένα δι' ἀφῃρημένων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς.

2) Εὑρεῖν τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 12.

Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 12.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » $\frac{12}{8}$.

τὰ $\frac{5}{8}$ » » » $\frac{12\times5}{8}$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $12 \times \frac{5}{8}$.

3) 1) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται $8\frac{4}{5}$ δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ $7\frac{2}{3}$ ὀκ.;

Λύσις.—Ἐν πρώτοις πρὸς εὐκολίαν τρέπομεν τοὺς μικτοὺς $8\frac{4}{5}$ δραχ. καὶ $7\frac{2}{3}$ ὀκ. εἰς τὰ κλάσματα $\frac{44}{5}$ δραχ. καὶ $\frac{23}{3}$ ὀκ., ἔπειτα λύομεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς.

Ἡ μία ὀκ. ἢ τὰ $\frac{3}{3}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{44}{5}$ δρ.

τὸ $\frac{1}{3}$ » » $\frac{44}{5\times3}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{23}{3}$ » » $\frac{44\times23}{5\times3}=67\frac{7}{15}$ δρχ.

Παρατήρ.—Παρατηροῦμεν καὶ ἐνταῦθα ὅτι τὸ ἐξαγόμενον $\frac{44\times23}{5\times3}$ εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $\frac{44}{5}$ δρ. ἐπὶ $\frac{23}{3}$ ὀκ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα.

4) Εὑρεῖν ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσι τὸ ἑπταπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ὁμοῦ λαμβανόμενα τοῦ ἀριθμοῦ $8\frac{4}{5}$.

Σκεπτόμενοι, ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{44\times23}{5\times3}=67\frac{7}{15}$, ὅστις δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ $8\frac{4}{5}$ ἐπὶ $7\frac{2}{3}$, ἤτοι

$$8\frac{4}{5}\times7\frac{2}{3}=\frac{44}{5}\times\frac{23}{3}=\frac{44\times23}{5\times3}.$$

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας, οἵτινες εἶναι γενικώτεροι τῶν §§ 42, 43.

153. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ πολλῶν δεδομένων μονάδων ἢ δεδομένου μέρους τῆς μονάδος, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς αἱ δεδομέναι μονάδες ἢ τὸ δεδόμενον μέρος αὐτῆς.

154. «Ὅταν δίδηται ἀριθμός τις καὶ ζητῆται ὡρισμένον πολλαπλάσιον ἢ ὡρισμένον μέρος αὐτοῦ, κάμνομεν πολλαπλασιασμόν».

5) Τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς πράγματός τινος τιμῶνται 9 δραχ. Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ;

Λύσις.—Ἀφοῦ τὰ $\frac{4}{5}$ ὀκ. τιμῶνται 9 δραχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ » τιμᾶται $9:4$ ἢ $\frac{9}{4}$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ ἢ ἡ 1 ὀκᾶ τιμῶνται $\frac{9\times5}{4}=11\frac{1}{4}$ δραχ.

Παρατ.— Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο $\frac{9\times5}{4}$ δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 9 διὰ τοῦ $\frac{4}{5}$, ἤτοι

$$9 : \frac{4}{5}=\times 9\frac{5}{4}=\frac{9\times5}{4}=11\frac{1}{4}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα·

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{5}$ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 9.

Λύσις. — Τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 9.

τὸ $\frac{1}{5}$ » » » $\frac{9}{4}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ » » » $\frac{9\times5}{4}=11\frac{1}{4}$.

7) Οἱ $8\frac{3}{4}$ πήχ. τιμῶνται $14\frac{3}{5}$ δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς ;

Λύσις.—Τρέπομεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλασματικοὺς καὶ λύομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀνωτέρω.

τὰ $\frac{35}{4}$ τοῦ πήχ. τιμῶνται $\frac{73}{5}$ δραχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » » τιμᾶται $\frac{73}{5}$: 35 ἢ $\frac{73}{5\times35}$ δραχ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ ἢ ὁ 1 πήχ. τιμᾶται $\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}$.

Παρατ.—Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς διαιρ. τοῦ $\frac{73}{5}$ διὰ τοῦ $\frac{35}{4}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{73}{5} : \frac{35}{4}=\frac{73}{5}\times\frac{4}{35}=\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}\right)$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα.

8) Τὸ 8πλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἀριθμοῦ τινος ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν $14\frac{3}{5}$· Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;

Σκεπτόμενοι, ὡς καὶ ἐν τῷ ἀμέσως προηγουμένῳ προβλήματι, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}$, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $14\frac{3}{5}$ διὰ τοῦ $8\frac{3}{4}$ ἤτοι

$$\left(14\frac{3}{5} : 8\frac{3}{4}=\frac{73}{5} : \frac{35}{4}=\frac{73}{5}\times\frac{4}{35}=\frac{73\times4}{5\times35}=1\frac{117}{175}\right).$$

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν τεσσάρων τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑξῆς πρακτικοὺς κανόνας γενικωτέρους τῶν §§ 59, 60.

155. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, κάμνομεν διαίρεσιν».

Διαιρετέος εἶναι ἡ διδομένη τιμὴ καὶ διαιρέτης αἱ πολλαὶ δεδομέναι μονάδες ἢ τὸ διδόμενον μέρος αὐτῆς.

156. «Ὅταν δίδηται ὡρισμένον πολλαπλάσιον ἀριθμοῦ ἢ ὡρισμένον πολλοστὸν αὐτοῦ καὶ ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, κάμνομεν διαίρεσιν».

9) Ἐργάτης τις τελειώνει τὰ $\frac{3}{14}$ ἔργου τινὸς εἰς 1 ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{8}$ αὐτοῦ;

Λύσις.—Ἀφ' οὗ τὰ $\frac{3}{14}$ τοῦ ἔργου τελειώνῃ εἰς 1 ὥραν,

τὸ $\frac{1}{14}$ » » θὰ τελειώνῃ εἰς $1:3=\frac{1}{3}$ ὥρ.

καὶ τὰ $\frac{14}{14}$ ἢ τὸ ὅλον ἔργον » » $\frac{1\times 14}{3}=\frac{14}{3}$ ὥρ.

τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου » » $\frac{14}{3}:8$ ἢ $\frac{14}{8\times 3}$ ὥρ.

καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ ἔργου θὰ τελειώσῃ εἰς $\frac{14\times 7}{8\times 3}=4\frac{1}{12}$ ὥρ.

Παρατ.—Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{14}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{7}{8}:\frac{3}{14}=\frac{7}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{7\times 14}{8\times 3}\right)$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικὸν πρόβλημα.

10) Ποσάκις ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{14}$ χωρεῖ εἰς τὸν $\frac{7}{8}$;

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰς αὐτὰς σκέψεις εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{14}$ χωρεῖ εἰς τὸν $\frac{7}{8}$ $\frac{14\times 7}{3\times 8}$ φοράς, ἤτοι ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\frac{7}{8}$ διὰ τοῦ $\frac{3}{14}$ $\left(\text{ἤτοι } \frac{7}{8}:\frac{3}{14}=\frac{7}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{7\times 14}{8\times 3}\right)$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων συνάγομεν τοὺς ἑπομένους κανόνας γενικωτέρους τῶν §§ 61, 62.

157. «Ὅταν δίδηται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος καὶ ἡ τιμὴ πολλῶν μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς (ἀγνώστου πλήθους), εὑρίσκομεν τὸ πλῆθος αὐτῶν διὰ τῆς διαιρέσεως».

Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἢ τῶν μερῶν μονάδος) καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

158. «Ἵνα εὕρωμεν, ποσάκις ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον, διαιροῦμεν τὸν δεύτερον διὰ τοῦ πρώτου».

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

α') Ἀπὸ μνήμης :

1) Εὑρεῖν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 40.

2) Εὑρεῖν τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60.

3) Εὑρεῖν πόσα λεπτὰ κάμνουσι α') τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, β') τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς, γ') τὰ $\frac{7}{10}$, δ') τὰ $\frac{13}{20}$.

4) Εὑρεῖν πόσα δράμια κάμνουσι α′) τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς, β′) τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτῆς. γ′) τὰ $\frac{5}{8}$, δ′) τὰ $\frac{3}{10}$, ε′) τὰ $\frac{7}{20}$, ϛ′) τὰ $\frac{13}{40}$ ὀκ.

5) Εὑρεῖν τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ὁμοῦ λαμβανόμενα τοῦ ἀριθμοῦ 40 ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσιν.

6) Ποσάκις χωρεῖ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς τὸν 100;

7) Ποῖον μέρος τοῦ 40 εἶναι ὁ 8;

8) Ποῖον μέρος τοῦ 100 εἶναι ὁ 40;

9) Ποῖον μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι α′) τὰ 50 λεπτά, β′) τὰ 25 λεπτά, γ′) τὰ 80 λεπτά;

10) Ποῖον μέρος τῆς ὀκᾶς ἀποτελοῦσι α′) τὰ 100 δράμια, β′) τὰ 50 δράμ., γ′) τὰ 80 δράμ.;

11) Εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 15.

12) Εὑρεῖν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 20.

13) Πόσον τιμᾶται ἡ 1 ὀκᾶ πράγματός τινος, οὗτινος τὰ $\frac{4}{5}$ ὀκάδ. τιμῶνται 60 λεπτά;

14) Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς πράγματός τινος, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχ. ἠγοράσαμεν 160 λεπτά;

β′) Γραπτῶς:

1) Εὑρεῖν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ 1500.

2) Τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς δεξαμενῆς χωροῦσιν 900 ὀκ. Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ὅλη ἡ δεξαμενή; ('Απ. 1200 ὀκ,).

3) Περιουσία τις ἀνέρχεται εἰς 48500 δρ. Πόσας δραχμὰς κάμνουσι α′) τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ β′) τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτῆς;

('Απ. α′) 29100 δρ., β′) 33950 δρχ.).

4) Ποῖον ἀριθμὸν ἀποτελοῦσι τὸ διπλάσιον καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀρ. 693;

5) Εὑρεῖν πόσον κάμνουσι τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{7}$ τοῦ ἀριθμοῦ 560.

('Απ. 200).

6) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται $2\frac{4}{5}$ δραχ., πόσον τιμῶνται οἱ $8\frac{6}{8}$ πήχ;

7) Μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν $1\frac{5}{8}$ πήχ. πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ $7\frac{9}{10}$ δραχ.;

8) Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{2}{7}$ ἔργου τινός. Εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον τὸ ἔργον; (Ἀπ. $3\frac{1}{2}$ ὥρ.).

9) Κατὰ τὴν διάλυσιν καταστήματός τινος πωλεῖ ὁ ἰδιοκτήτης τὰ ἐμπορεύματά του εἰς τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς των. Ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ἀξία μεταξωτοῦ τινος ὑφάσματος, ὅπερ πωλεῖται πρὸς $12\frac{3}{20}$ δραχ. τὸν πῆχυν; (Ἀπ. $16\frac{1}{5}$ δρχ.).

10) Τὰ $153\frac{1}{2}$ δράμια ποῖον μέρος τῆς ὀκᾶς ἀποτελοῦσιν;

(Ἀπ. $\frac{307}{800}$).

11) Τὸ τριπλάσιον ἀριθμοῦ τινος προσλαβὸν καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ ἀπετέλεσε τὸν ἀριθμὸν 1250. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

(Ἀπ. $340\frac{10}{11}$).

12) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $2\frac{4}{5}$ ὀκ., μὲ πόσας δραχ. ἀγοράζομεν $15\frac{5}{8}$ ὀκ.;

13) $5\frac{2}{5}$ ὀκ. τιμῶνται δρχ. $18\frac{3}{5}$. Πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ;

14) Μὲ $5\frac{3}{4}$ δραχμὰς ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν πράγματός τινος· πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $78\frac{1}{2}$ δρχ.;

15) Τεμάχιόν τι ὑφάσματος ἔχει μῆκος 200 πήχ. Ἐπωλήθησαν δὲ διαδοχικῶς τὰ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Πόσοι πήχεις ἔμειναν; (Ἀπ. 70 πήχ.).

16) Ῥάπτης τις ἔχει ἀγοράσει $85\frac{3}{4}$ πήχ. τσόχας καὶ ἐπώλησεν ἐξ αὐτῆς $16\frac{3}{4}$ πήχ., διὰ δὲ τοῦ ὑπολοίπου κατεσκεύασεν ἐνδυμασίας.

Ἐὰν δι' ἑκάστην ἐνδυμασίαν χρειάζωνται $5\frac{3}{4}$ πήχ., πόσαι εἶναι αἱ κατασκευασθεῖσαι ἐνδυμασίαι ; (Ἀπ. 12 ἐνδυμ.).

17) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμα, $145\frac{3}{8}$ πήχεις πρὸς 10 δραχ. τὸν πῆχυν, ἐπώλησε δ' ἐξ αὐτῶν τοὺς μὲν $38\frac{1}{2}$ πήχ. πρὸς 12 δραχ., τοὺς δὲ ὑπολοίπους πρὸς $10\frac{3}{4}$ δραχ. τὸν πῆχυν. Πόσας δραχ. ἐκέρδησεν;

(Ἀπ. $157\frac{5}{32}$ δραχ.).

18) Μία ἁμαξοστοιχία διατρέχει τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λαρίσης διάστημα εἰς $13\frac{1}{4}$ ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ αὕτη τὸ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Λεβαδείας διάστημα, ὅπερ ἀποτελεῖ τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ πρώτου διαστήματος ; (Ἀπ. $4\frac{51}{80}$ ὥρ.).

19) Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον πρὸς ἀγορὰν κτήματος 45000 δραχ. ἐν ὅλῳ. Ὁ μὲν α' κατέβαλε τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀξίας ταύτης, ὁ δὲ β' $\frac{14}{42}$ καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Πόσας δραχμὰς κατέβαλεν ἕκαστος ;

(Ἀπ. 15000).

20) Οἰκία τις τριώροφος ἔχει ἴσον ἀριθμὸν παραθύρων μετ' ἰσαρίθμων ὑελοπινάκων. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πρώτου πατώματος εἶχον 54 ὑελοπίνακας. Πόσους ὑελοπίνακας ἔχουσι πάντα τὰ παράθυρα καὶ πόσας δραχμὰς στοιχίζουσιν οὗτοι, ἐὰν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν πωλῆται $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς ; (Ἀπ. 216 ὑελοπ. $129\frac{3}{5}$ δρ.).

21) Πατὴρ τις ἐπέτρεψεν εἰς τὰ τέκνα του ν' ἀγοράσωσι χρυσοῦν ὡρολόγιον. Τὸ πρῶτον τέκνον ἐπλήρωσεν $25\frac{1}{2}$ δραχ., τὸ δεύτερον $17\frac{1}{4}$ δρ., τὸ γ' $10\frac{1}{2}$ δραχ. καὶ τὸ δ' ἔδωκε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ὅσων ἔδωκαν τὰ τρία ὁμοῦ. Πόσον ἀξίζει τὸ ὡρολόγιον ; (Ἀπ. $102\frac{25}{32}$ δρ.).

22) Ἄνθρωπός τις ὥρισεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ μετὰ τὸν

θάνατόν του ἡ περιουσία του ὡς ἑξῆς· Ὁ μὲν υἱός του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς, ἡ δὲ θυγάτηρ του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς καὶ τὸ ὑπόλοιπον νὰ λάβῃ ἡ σύζυγος. Ἡ σύζυγος ἔλαβε 3150 δραχ. Ποία ἦτο ἡ περιουσία καὶ πόσον ἔλαβεν ἕκαστον τῶν τέκνων του;

(Ἀπ. Ἡ περιουσία 14000, ὁ υἱὸς ἔλαβε 5600, ἡ δὲ θυγάτηρ 5250).

23) Ἐκ τῶν μήλων μηλέας τινὸς ἐσάπισε τὸ $\frac{1}{5}$, τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ ἐχρησιμοποίησεν ὁ κηπουρὸς καὶ ἐκ τῶν ἐπιλοίπων, πωληθέντων πρὸς $\frac{4}{5}$ δραχ. κατ' ὀκᾶν, εἰσέπραξεν οὗτος 160 δραχ. Πόσας ὀκάδας μήλων παρήγαγεν ἡ μηλέα αὕτη ; (Ἀπ. $470\frac{10}{17}$ ὀκ.).

24) Ἐκέρδησέ τις εἰς δίκην ποσόν τι καὶ τὰ μὲν $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ἐκράτησεν ὁ δικηγόρος διὰ δικαστικὰ ἔξοδα, ἀφοῦ δὲ ἐπλήρωσε τὸ χρέος του ἐξ 650 δρχ., εἶχε 3450 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ποσὸν ὁλόκληρον, ὅπερ ἐκέρδησεν ἐν τῇ δίκῃ ; (Ἀπ. $6833\frac{1}{3}$ δρ.).

25) Βαρέλλιον πλῆρες ἐλαίου ζυγίζει ἐν ὅλῳ $285\frac{1}{4}$ ὀκ., τὸ δὲ βάρος τοῦ βαρελλίου ἀποτελεῖ τὰ $\frac{2}{29}$ τοῦ ὅλου βάρους. α') Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐλαίου ; β') Πόσον ἀξίζει τοῦτο πρὸς $1\frac{1}{20}$ δρχ. κατ' ὀκᾶν ; (Ἀπ. α') $265\frac{67}{116}$ ὀκ. β' $278\frac{1987}{2320}$ δρ.).

26) Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ ἔργον τι εἰς $8\frac{3}{4}$ ὥρας· πόσον μέρος τοῦ ἔργου ἐκτελεῖ εἰς μίαν ὥραν καὶ πόσον εἰς $3\frac{2}{3}$ ὥρας;

(Ἀπ. $\frac{4}{35}$ τοῦ ἔργ., $\frac{44}{105}$ τοῦ ἔργ.).

27) Τρεῖς ἄνθρωποι διεμοίρασαν ἀγρόν τινα. Ὁ α' ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ, ὁ β') τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ γ') τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ ἦτο $15\frac{3}{4}$ στρέμ. Ἐκ πόσων στρεμμάτων ἀποτελεῖται ὁλόκληρος ὁ ἀγρὸς καὶ πόσον ἀξίζει ἕκαστον μερίδιον, ἐὰν τὸ στρέμμα ἐκτιμᾶται 35 δραχ.;

('Απ. 37 $\frac{4}{5}$ στρέμ. ὁ α' 12 $\frac{3}{5}$ στρέμ. ἀξίας 441 δραχ., ὁ β' 9 $\frac{9}{20}$ στρέμ. ἀξίας δρ. 330 $\frac{3}{4}$ καὶ τοῦ γ' ἀξίας 551 $\frac{1}{4}$ δρχ.).

28) Τρεῖς ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι· ὁ μὲν α' μόνος του εἰς 20 ὥρας, ὁ δὲ β' εἰς 25 ὥρας καὶ ὁ γ' εἰς 30 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον τοῦτο; ('Απ. 8 $\frac{4}{37}$ ὥρ.).

29) Δεξαμενή τις γεμίζεται ὑπὸ δύο κρουνῶν ὁμοῦ εἰς 25 ὥρας, ἐνῷ ὁ α' ἐξ αὐτῶν γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 40 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ὁ β' κρουνὸς τὴν δεξαμενὴν ταύτην; ('Απ. 66 $\frac{2}{3}$ ὥρ.).

30) Ἠγόρασέ τις δύο βόας ἀντὶ 1500 δραχ. Ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἀξίας τοῦ ἑτέρου. Πόσον ἀξίζει ἑκάτερος;

('Απ. 923 $\frac{1}{13}$ δραχ., 576 $\frac{12}{13}$ δραχ.).

31) Καλὸς σῖτος ἀποδίδει ἄλευρον τὰ $\frac{19}{25}$ τοῦ βάρους του. Πόσα κοιλὰ σίτου, ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 21 $\frac{3}{4}$ ὀκ., χρειάζονται διὰ νὰ λάβωμεν 178 ὀκ. ἀλεύρου; ('Απ. 10 $\frac{1270}{1653}$ κοιλά).

32) Μία ἁμαξοστοιχία ἀνεχώρησεν εἰς τὰς 8 $\frac{1}{4}$ π. μ. ἔκ τινος σταθμοῦ μὲ ταχύτητα 26 χιλιομ. καθ' ὥραν καὶ μετὰ 3 $\frac{3}{4}$ ὥρ. ἐκπέμπεται ἀτμάμαξα, ἥτις πρέπει νὰ φθάσῃ τὴν ἁμαξοστοιχίαν εἰς 4 $\frac{1}{2}$ ὥρας. Ποίαν ταχύτητα καθ' ὥραν πρέπει νὰ ἔχῃ αὕτη; ('Απ. 47 $\frac{2}{3}$ χιλ.).

33) Δύο ὑδρόμυλοι ἀλέθουσιν ὁ μὲν 8450 ὀκ. σίτου εἰς 14 ὥρας, ὁ δὲ 9475 ὀκ. εἰς 18 ὥρας. Πόσον σῖτον ἀλέθουσιν ὁμοῦ εἰς μίαν ὥραν, πόσον εἰς 4 $\frac{3}{4}$ ὥρας καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ ἀλέσωσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ 15400 ὀκ. σίτου.

('Απ. 1129 $\frac{121}{126}$ ὀκ. εἰς 1 ὥραν, 5367 $\frac{157}{504}$ εἰς 4 $\frac{3}{4}$ ὥρας, 13 $\frac{3581}{5695}$ ὥρ.).

Χρήσεις τύπων ἐν τῇ λύσει προβλημάτων, ἐν οἷς τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων.

159. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Εἶχέ τις 12 δρχ. καὶ ἐξώδευσεν ἐξ αὐτῶν $3\frac{2}{5}$ δραχ. πρὸς ἀγορὰν κρέατος καὶ $4\frac{1}{2}$ πρὸς ἀγορὰν ἄλλων εἰδῶν. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ (ὡς καὶ εἰς πᾶν ἄλλο) διακρίνομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ δεδομένα $\left(12 \text{ δραχ.}, 3\frac{2}{5} \text{δραχ.}, 4\frac{1}{2} \text{δραχ.}\right)$ καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ ζητούμενον (πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀρκεῖ προφανῶς νὰ προσθέσωμεν πρῶτον τὰς δαπανηθείσας δραχμὰς $3\frac{2}{5}\text{δρχ.}+4\frac{1}{2}=7\frac{9}{10}\text{δρχ.}$ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $7\frac{9}{10}$ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ 12 δρχ., ὅτε θὰ λάβωμεν :

$$12 \text{ δραχ.}-7\frac{9}{10}\text{δρχ.}=4\frac{1}{10}\text{δραχ.}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου ἐγένοντο διάφοροι συλλογισμοὶ καὶ διάφοροι πράξεις ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος.

Ἐν τῷ εὑρεθέντι ὅμως ἐξαγομένῳ $4\frac{1}{10}$δρχ. οὐδὲν ἴχνος τῶν γενομένων πράξεων διασῴζεται.

Ἐὰν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ μόνον οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ μεταβληθῶσι, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὰς αὐτὰς πράξεις. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τρόπον, δι' οὗ πάντα τὰ προβλήματα τοῦ αὐτοῦ εἴδους νὰ λύωνται συντόμως καὶ χωρὶς νὰ εὑρισκώμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς κατὰ τὴν λύσιν ἑκάστου τοιούτου προβλήματος.

Πρὸς τοῦτο παριστῶμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος διὰ τῶν γραμμμάτων α, β, γ, δ κτλ. Οὕτω π.χ. λέγοντες α δραχ. ἐννοοῦμεν ἀριθμόν τινα δραχμῶν, ὡς 5 δραχμὰς ἢ $7\frac{3}{4}$ δραχμὰς κτλ. Ὁμοίως λέγοντες β ὀκάδας ἐννοοῦμεν ἀριθμόν τινα ὀκάδων, ὡς 18 ὀκ. ἢ $219\frac{3}{4}$ὀκ. κτλ.

Τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων, καλοῦνται γενικὰ προβλήματα.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς γενικὸν πρόβλημα.

Πρόβλημα 1.—Εἶχέ τις α δραχμὰς καὶ ἐξώδευσε β δραχμὰς διὰ τὴν ἀγορὰν κρέατος, γ δραχ. διὰ τὴν ἀγορὰν ἄλλων εἰδῶν. Πόσαι δραχμαὶ τῷ ἔμειναν;

Λύσις.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν δαπανηθεισῶν δραχμῶν β καὶ γ. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ πρόσθεσις δὲν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ, ἐφ' ὅσον δὲν ὁρισθῶσιν οἱ ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους παριστῶσι τὰ γράμματα β καὶ γ, περιοριζόμεθα εἰς τὸ νὰ σημειώσωμεν τὴν πρᾶξιν καὶ τὸ ἐξαγόμενον αὐτῆς ὡς ἑξῆς (β+γ). Μετὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ α δραχ. μᾶς δίδει τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον, ὅπερ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς· α—(β+γ).

Ἐν τῷ ἐξαγομένῳ τούτῳ διατηροῦνται, ὡς βλέπομεν, πᾶσαι αἱ πράξεις, αἵτινες εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ προσδιορισθῇ τὸ ζητούμενον.

160. Ἡ τοιαύτη σημείωσις τῶν ἐκτελεστέων πράξεων ἀποτελεῖ παράστασιν ἢ τύπον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνομεν τὴν λύσιν παντὸς προβλήματος, ὁμοίου πρὸς τὸ θεωρηθέν, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς αὐτοὺς συλλογισμούς.

Οὕτω π. χ., ἐὰν εἰς τὸν τύπον α—(β+γ) ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν ἀντιστοίχων δεδομένων (α διὰ τοῦ 12 δρχ., τὸ β διὰ τοῦ $3\frac{2}{5}$ δρχ. καὶ τὸ γ διὰ τοῦ $4\frac{1}{2}$ δρχ.) τοῦ ἐν τῇ ἀρχῇ ἀπ' εὐθείας λυθέντος προβλήματος, θὰ ἔχωμεν.

$$12-\left(3\frac{2}{5}+4\frac{1}{2}\right)=12-7\frac{9}{10}=4\frac{1}{10} \text{ δρχ.}$$

Ὁμοίως λύεται καὶ τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Ἀπὸ τεμαχίου ὑφάσματος, ἔχοντος μῆκος $17\frac{3}{4}$ πήχεις, ἀπεκόπησαν τὸ πρῶτον μὲν $4\frac{1}{2}$ πήχεις, ἔπειτα $7\frac{11}{16}$ καὶ τελευταῖον $3\frac{1}{8}$ πήχ. Πόσοι πήχεις ἀπέμειναν ἐν αὐτῷ; (Ἀπ. $17\frac{3}{4}-\left(4\frac{1}{2}+7\frac{11}{16}+3\frac{1}{8}\right)$.

Πρόβλημα 2.—Ἐμπορός τις εἶχε τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας α δραχμὰς ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του. Εἰσέπραξε δὲ κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας β δρχ. ἀπό τινα χρεώστην, γ δρ. ἀπὸ ἄλλον καὶ δ δρχ. ἀπὸ τρίτον. Ἐπλήρωσε δὲ ε δραχ. εἴς τινα, ζ δραχ. εἰς ἄλλον καὶ η εἴς τρίτον τινά. Πόσα χρήματα ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας;

Λύσις.—Εἰς τὰς α δραχ., ἃς τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ, θὰ προσθέσωμεν τὰς εἰσπραχθείσας δραχμάς, ὅτε λαμβάνομεν ὡς ἄθροισμα τὸ (α+β+γ+δ).

Ἔπειτα ἀπὸ τούτου θὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλας τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἐπλήρωσε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας, ἤτοι τὸ ἄθροισμα $(\varepsilon+\zeta+\eta)$· οὕτω λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-(\varepsilon+\zeta+\eta)$.

Ἐφαρμογή.—Ὁ ἔμπορος οὗτος ἔχει ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ του τὴν πρωΐαν τῆς Δευτέρας $545\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ εἰσέπραξε κατὰ τὸ διάστημα τῆς ἡμέρας τὰ ἑξῆς ποσά· 1) $135\frac{1}{2}$ δραχ., 2) $83\frac{2}{5}$ καὶ 3) 19 δραχ., ἐπλήρωσε δὲ τὰ ἑξῆς· 1) $73\frac{1}{2}$ δραχ. 2) $185\frac{3}{5}$ καὶ 3) $237\frac{1}{4}$ δραχ. Πόσας δραχμὰς ἔχει τὴν ἑσπέραν τῆς Δευτέρας;

Κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον θὰ ἔχωμεν

$$\left(545\frac{3}{4}+135\frac{1}{2}+83\frac{2}{5}+19\right)-\left(73\frac{1}{2}+185\frac{3}{5}+237\frac{1}{4}\right)=$$

$$783\frac{13}{20}-496\frac{7}{20}=287\frac{6}{20}\text{ δραχ.}$$

Πρόβλημα 3.—Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται α δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ β ὀκάδες;

Λύσις.—Ἀφοῦ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δραχ., αἱ 2 ὀκ. θὰ τιμῶνται $2\times\alpha$ ἢ $2.\alpha$, αἱ 3 ὀκ. θὰ τιμῶνται $3\times\alpha$ ἢ $3.\alpha$ καὶ ἐν γένει αἱ β ὀκ. θὰ τιμῶνται $\beta\times\alpha$ ἢ $\beta.\alpha$ δραχμάς.

Ἐφαρμογή.—Ἡ 1 ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται $5\frac{3}{4}$ δρχ.· πόσον τιμῶνται αἱ $8\frac{1}{5}$ ὀκ. ;

Λύσις.—(Διὰ τοῦ τύπου α. β) $\alpha.\beta=5\frac{3}{4}\times 8\frac{1}{2}=48\frac{7}{8}$ δραχ.

ΣΗΜ.—Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§§ 153, 154).

Πρόβλημα 4.—Οἱ β πήχεις πράγματός τινος τιμῶνται α δραχ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις.—Ἐὰν ἠγοράζομεν 2 πήχεις μὲ α δραχ., ὁ 1 πῆχυς θὰ ἐτιμᾶτο προφανῶς α: 2 ἢ $\frac{\alpha}{2}$. Ὁμοίως, ἐὰν ἠγοράζομεν 3 πήχ., ὁ 1 τούτων θὰ ἐτιμᾶτο α: 3 ἢ $\frac{\alpha}{3}$ δραχ. καὶ ἐν γένει, ἐὰν ἀγοράσωμεν β πήχ. μὲ α δρ., ὁ 1 πῆχυς θὰ τιμᾶται α: β ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐφαρμογή.—Οἱ $7\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματός τινος ἐπωλήθησαν ἀντὶ $25\frac{3}{4}$ δραχ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ 1 πῆχ.;

Λύσις (διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{6}$) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{25\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2}}=\frac{103}{4}\times\frac{2}{15}=3\ \frac{13}{30}$.

ΣΗΜ. Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα μερισμοῦ, τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§§ 155, 156) (οἱ ἀριθμοὶ α καὶ 6 εἶναι ἑτεροειδεῖς, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι).

Πρόβλημα 5.—Ἐργάτης τις λαμβάνει β δραχ. ἡμερομίσθιον. Πόσας ἡμέρας πρέπει νὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ α δραχμάς;

Λύσις.—Ἐὰν τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο 2 δραχ., τότε ἔπρεπε νὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωροῦσιν αἱ 2 εἰς τὰς α δραχ., ἤτοι α:2 ἢ $\frac{\alpha}{2}$. τώρα λαμβάνει τὴν ἡμέραν β δραχ. ἐπομένως, διὰ νὰ λάβῃ τὰς α δραχ., θὰ ἐργασθῇ τόσας ἡμέρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ β εἰς τὸν α, ἤτοι α:β ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἡμ.

Ἐφαρμογή.—Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον $5\frac{1}{4}$ δραχ. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ, διὰ νὰ λάβῃ $52\frac{1}{2}$ δραχμάς;

Λύσις διὰ τοῦ τύπου $\frac{\alpha}{\beta}$.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{52\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}}=\frac{105}{2}\times\frac{4}{21}=\frac{210}{21}=10 \text{ ἡμέραι.}$$

ΣΗΜ.—Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύονται πάντα τὰ προβλήματα, τὰ ὁριζόμενα διὰ τῶν κανόνων (§§ 157, 158) (οἱ ἀριθμοὶ α καὶ 6 εἶναι ὁμοειδεῖς, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι).

Πρόβλημα 6.—Οἱ α πήχεις ὑφάσματός τινος τιμῶνται β δρχ., ἐδαπανήσαμεν διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν γ δρχ. καὶ ἐπληρώσαμεν διὰ δασμὸν δ δρχμ.· πόσον μᾶς στοιχίζει ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου;

Λύσις.—Οἱ α πήχεις στοιχίζουσι (β+γ+δ) δρχ.· ἐπομένως ὁ 1 πῆχυς στοιχίζει $\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}$.

Ἐφαρμογή.—Ἠγοράσαμεν $8\frac{2}{3}$ πήχεις ὑφάσματός τινος ἀντὶ

$45\frac{3}{4}$ δραχ. καὶ ἐδαπανήσαμεν διὰ τὴν μεταφορὰν $12\frac{1}{2}$ δραχ. καὶ ἐπληρώσαμεν διὰ δασμὸν $18\frac{2}{5}$ δραχ. Πόσον μᾶς στοιχίζει ὁ 1 πῆχυς;

Λύσις διὰ τοῦ τύπου $\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha}=\frac{45\frac{3}{4}+12\frac{1}{2}+18\frac{2}{5}}{8\frac{2}{3}}=8\frac{439}{520}\ \text{δρχ.}$$

Πρόβλημα 7.—Αἱ α ὀκ. σίτου ἀνταλλάσσονται πρὸς β ὀκ. κριθῆς, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει γ δραχ. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ σίτου;

Λύσις.—Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ κριθῆς ἀξίζει γ δρχ., αἱ β ὀκ. τιμῶνται γ. β δραχ.· αὕτη εἶναι καὶ ἡ τιμὴ τῶν α ὀκ. σίτου. Ἑπομένως ἡ μία ὀκᾶ σίτου ἀξίζει $\frac{\beta.\gamma}{\alpha}$.

Ἐφαρμογή.—Αἱ $15\frac{3}{5}$ ὀκ. σίτου ἀνταλλάσσονται μὲ $28\frac{1}{2}$ ὀκ. κριθῆς, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{1}{5}$ δρ. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ σίτου;

Λύσις. $\left(\text{διὰ τοῦ τύπου } \frac{\beta.\gamma}{\alpha}\right)\frac{\beta.\gamma}{\alpha}=\frac{28\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{57}{156}$ δραχ.

Πρόβλημα 8.—Ἠγοράσαμεν α ὀκ. οἴνου πρὸς β λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐχύθησαν γ ὀκ. Πόσον μᾶς στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείναντος οἴνου;

Λύσις.—Ἡ ἀξία τοῦ ὅλου οἴνου εἶναι α. β λεπτά, αἱ ὑπολειπόμεναι ὅμως ὀκάδες εἶναι α—γ. Ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ ἐκ τούτων θὰ στοιχίζῃ $\frac{\alpha\times\beta}{\alpha-\gamma}$.

Ἐφαρμογή.—Ἠγοράσαμεν $185\frac{1}{2}$ ὀκ. οἴνου πρὸς 42 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐχύθησαν $12\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείναντος οἴνου;

Λύσις $\left(\text{διὰ τοῦ τύπου } \frac{\alpha.\beta}{\alpha-\gamma}\right)\frac{\alpha.\beta}{\alpha\ \ \gamma}=\frac{185\frac{1}{2}\cdot 42}{185\frac{1}{2}-12\frac{3}{4}}=\frac{7791\times 4}{691}=45\frac{69}{691}$

ΣΗΜ. Νὰ σχηματισθῶσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν διάφορα προβλήματα ὅμοια πρὸς τὰ θεωρηθέντα λυόμενα διὰ τῶν ἀνωτέρω τύπων.

Προβλήματα κλασματικῶν ἀριθμῶν διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Β' τάξει.

1) Ποῖον μέρος τοῦ 10 ἀποτελοῦσι α') ὁ ἀριθμὸς $3\frac{1}{3}$· β') ὁ ἀριθμὸς $6\frac{2}{3}$;

2) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ προηγουμένου προβλήματος νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ πράξεις·

$183 \times 3\frac{1}{3} =;$ $489 \times 3\frac{1}{3} =;$ $754 \times 3\frac{1}{3} =;$

$2835 \times 6\frac{2}{3} =;$ $783 \times 6\frac{2}{3} =;$ $1783 \times 6\frac{2}{3} =;$

$47 : 3\frac{1}{3} =;$ $189 : 3\frac{1}{3} =$ $245 : 3\frac{1}{3} =;$

$176 : 6\frac{2}{3} =;$ $347 : 6\frac{2}{3} =;$ $135 : 6\frac{2}{3} =;$

3) Ποῖον μέρος τοῦ 100 ἀποτελοῦσι α') ὁ ἀριθμὸς $12\frac{1}{2}$, β') ὁ $16\frac{2}{3}$, γ') ὁ $33\frac{1}{3}$, δ') ὁ $66\frac{2}{3}$, ε') ὁ $11\frac{1}{9}$, ς') ὁ $8\frac{1}{3}$;

4) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος νὰ ἐκτελεσθῶσι συντόμως αἱ ἑξῆς πράξεις·

$132 \times 8\frac{1}{3} =;$ $487 \times 11\frac{1}{9} =;$ $752 \times 12\frac{1}{2} =;$

$247 \times 8\frac{1}{3} =;$ $847 \times 11\frac{1}{9} =;$ $1847 \times 12\frac{1}{2} =;$

$177 \times 16\frac{2}{3} =;$ $1027 \times 33\frac{1}{3} =;$ $586 \times 66\frac{2}{3} =;$

5) Τὸ ἓν δράμιον μετάξης τιμᾶται $5\frac{3}{4}$ λεπτά. Πόση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς, πόση ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς καὶ πόση ἡ τιμὴ τῶν $\frac{3}{4}$ αὐτῆς;

('Απ. 23 δρ. ἡ ὀκᾶ, $13\frac{4}{5}$ δρ. τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκ., $17\frac{1}{4}$ δρ. τὰ $\frac{3}{4}$ ὀκ.).

6) Ῥάβδος μήκους $\frac{3}{4}$ πήχ. κατακορύφως τοποθετημένη ἔρριπτε τὴν μεσημβρίαν σκιάν, ἥτις ἦτο ἴση πρὸς τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς σκιᾶς, τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἔρριπτε κωδωνοστάσιόν τι. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κωδωνοστασίου τούτου; ('Απ. $3\frac{3}{8}$ πήχ.)

7) Οἶκός τις πτωχεύσας πληρώνει εἰς τοὺς πιστωτάς, μεθ' ὧν συνεβιβάσθη, τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων χρεωστεῖ· εἰς πόσον ἀνέρχεται α) ἡ πίστωσις

ἑνὸς δανειστοῦ, ὅστις μετὰ τὸν συμβιβασμὸν λαμβάνει 15780 δραχ. καὶ β) πόσον εἶναι τὸ ὅλον χρέος τοῦ οἴκου, τὸ ὁποῖον ἀπεσβέσθη διὰ 75120 δραχ. ; ('Απ. 23670 δρ. 112680 δραχ.).

8) Ἡ ὀκᾶ κριθῆς τιμᾶται 19 λεπτὰ καὶ ἡ τοῦ ἀραβοσίτου $23\frac{1}{2}$ λεπτά. Πόσας ὀκ. κριθῆς θ' ἀνταλλάξῃ τις μὲ $8\frac{3}{4}$ ὀκάδας ἀραβοσίτου ;

('Απ. $10\frac{125}{152}$ ὀκ.).

9) Ἀτμάμαξα πρέπει νὰ διατρέξῃ 350 χιλιόμ. εἰς 8 ὥρας. Κατὰ τὰς $3\frac{1}{2}$ πρώτας ὥρας διέτρεξε τὰ $167\frac{3}{4}$ χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διατρέχῃ τώρα καθ' ὥραν ; ('Απ. $40\frac{1}{2}$ χιλιόμ.)

10) Ἔμπορός τις θέλει νὰ κερδήσῃ ἐξ ἑκάστου ἐμπορεύματος τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς τιμῆς, ἣν στοιχίζει τοῦτο· α΄) Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ καφὲ πωληθέντος πρὸς $3\frac{3}{5}$ δρχ. καὶ β΄) Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὴν ὀκᾶν ζακχάρεως στοιχίζουσαν $1\frac{11}{20}$ δρχ. ; ('Απ. $2\frac{7}{10}$ δρ., $2\frac{1}{15}$ δρ.).

11) Ἐργάτης τις ἐχρειάσθη $10\frac{1}{2}$ ὥρας, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{8}$ ἔργου τινός. Εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσῃ α΄) τὸ ὑπόλοιπον ἔργον καὶ β΄) ὁλόκληρον τὸ ἔργον; ('Απ. α΄ $17\frac{1}{2}$ ὥρ., β΄ 28 ὥρ.).

12) Πεζοπόρος τις, ἀφ' οὗ διέτρεξε τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὁδοῦ, ἐχρειάσθη διὰ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα $6\frac{1}{4}$ ὥρας. Ζητεῖται α΄) εἰς πόσας ὥρας διέτρεξε τὸ πρῶτον μέρος τῆς ὁδοῦ καὶ β΄) πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ ἐπὶ τῇ ὑποθέσει, ὅτι ὁ πεζοπόρος διανύει $5\frac{3}{4}$ χιλιόμ. καθ' ὥραν ;

('Απ. α΄ $12\frac{1}{2}$ ὥρ., β΄ $107\frac{13}{16}$ χιλιόμ.).

13) Τὸ τριπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ προσλαβόντα καὶ τὸν ἀριθμὸν 125 ἀπετέλεσαν τὸν 1625. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος :

('Απ. 400).

14) Τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ τινος καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ ὁμοῦ

λαμβανόμενα καὶ ἐλαττούμενα κατὰ τὸν ἀριθμὸν 240 δίδουσι τὸν 2450. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος; ('Απ. $978\frac{2}{11}$).

15) Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ μιᾶς περιουσίας ὁμοῦ λαμβανόμενα ὑπερβαίνουσι κατὰ 38000 τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς. Πόση εἶναι ἡ περιουσία αὕτη; ('Απ. 60000 δρχ.).

16) Εἶχέ τις ἀγοράσει $18\frac{1}{2}$ πήχ. ὑφάσματος, οὗτινος ὁ 1 πῆχυς ἐτιμᾶτο $3\frac{3}{4}$ δρχ., ἐπώλησε δὲ τὸ $\frac{1}{4}$ ἐξ αὐτοῦ πρὸς 4 δραχ. τὸν πῆχυν, τὸ $\frac{1}{3}$ πρὸς $4\frac{1}{5}$ δρχ. καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς $3\frac{4}{5}$ δρχ. Πόσον ἐκέρδησεν ἐκ τοῦ ὑφάσματος τούτου; ('Απ. $4\frac{19}{60}$ δρχ.)

17) Ἰδιοκτήτης τις νηματουργείου ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος 4170 δέματα (μπάλες) βάμβακος, ἐξ ὧν ἕκαστον ἐζύγιζεν 75 ὀκάδας. Κατὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ βάμβακος εἰς νῆμα συμβαίνει ἀπώλεια βάρους ἴση πρὸς τὰ $\frac{7}{64}$ τοῦ βάρους του. Ἐὰν τὸ νῆμα πωληθῇ πρὸς $3\frac{1}{5}$ δραχ. κατ' ὀκᾶν, πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ καθ' ὅλον τὸ ἔτος τῆς πωλήσεως τοῦ νήματος ὁ ἐργοστασιάρχης; ('Απ. $891337\frac{1}{2}$ δρχ.).

18) Δεξαμενή τις ἔχει εἰς τὸν πυθμένα της τρεῖς στρόφιγγας. Ἐὰν ἀνοιχθῶσιν αἱ δύο πρῶται στρόφιγγες, κενοῦται ἡ δεξαμενὴ εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας, ἐὰν δὲ ἀνοιχθῶσι καὶ αἱ τρεῖς, κενοῦται αὕτη εἰς 2 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας κενοῦται ἡ δεξαμενή, ἐὰν ἀνοίξωμεν μόνον τὴν τρίτην στρόφιγγα; ('Απ. εἰς 10 ὥρ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

161. *Ὁρισμοί.*—Αἱ κλασματικαὶ μονάδες, αἵτινες ἔχουσι παρονομαστὴν τὴν 1 παρακολουθουμένην ἀπὸ ὁσαδήποτε μηδενικά, ὡς $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ., καλοῦνται ***δεκαδικαὶ μονάδες***.

Καὶ τὸ μὲν $\frac{1}{10}$ καλεῖται δεκαδικὴ μονὰς πρώτης τάξεως, τὸ δὲ

$\frac{1}{100}$ δεκαδικὴ μονὰς δευτέρας τάξεως, τὸ $\frac{1}{1000}$ τρίτης κ. ο. κ. Ἐν γένει δὲ ἡ τάξις δεκαδικῆς τινος μονάδος ὁρίζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηδενικῶν, ἅτινα ἔχει ἐν τῷ παρονομαστῇ.

Οἱ ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν μονάδων τούτων προκύπτοντες ἀριθμοί, ὡς $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{2458}{1000}$ κ.τ.λ., καλοῦνται δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἢ δεκαδικὰ κλάσματα. Τὰ λοιπὰ κλάσματα καλοῦνται κοινά.

Δεκαδικὴ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

162. Ἐὰν γράψωμεν εἰς μίαν σειρὰν τὰς ἀκεραίας μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων, ὡς καὶ τὰς δεκαδικὰς κ. τ. λ., ἤτοι 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κ.τ.λ, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες εἶναι συνέχεια τῶν ἀκεραίων τοιούτων· καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν ἐν τῇ ἀνωτέρω σειρᾷ θεωρήσωμεν οἱανδήποτε μονάδα εἴτε ἀκεραιαν εἴτε δεκαδικήν, βλέπομεν ὅτι αὕτη γίνεται ἐκ τῆς ἑπομένης πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπαναλαμβανομένης δεκάκις· π. χ. ἡ δεκὰς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος ἐπαναλαμβανομένης δεκάκις, αὕτη πάλιν ἐκ τῆς μονάδος $\frac{1}{10}$ δεκάκις ἐπαναλαμβονομένης κ. ο. κ.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι πᾶν δεκαδικὸν κλάσμα δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς μονάδας ἀκεραίας ἢ δεκαδικὰς οὕτως, ὥστε ἐξ ἑκάστης τάξεως νὰ μὴ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν 9. Οὕτω π. χ. τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{4578}{1000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ ὡς ἑξῆς: $\frac{4578}{1000}=\frac{4000}{1000}+\frac{500}{1000}+\frac{70}{1000}+\frac{8}{1000}$ ἢ ἁπλούστερα $\frac{4578}{1000}=4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}$.

Ἕνεκα τούτου εἶναι εὔκολον νὰ γράψωμεν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ὑπὸ μορφὴν ὁμοίαν πρὸς τὴν τῶν ἀκεραίων· πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν καὶ ἐνταῦθα τὴν αὐτὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν ἐδέχθημεν καὶ κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀκεραίων, ἤτοι ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ἀριστερὰ ἄλλου τινὸς νὰ σημαίνῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· ἐπὶ πλέον νὰ χωρίζωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τῶν δεκάδων διὰ τοῦ σημείου ,), ὅπερ καλεῖται ὑποδιαστολή· ἐὰν τυχὸν ἐλλείπωσι μονάδες τάξεώς τινος, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0. Οὕτω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{4578}{1000}=4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{8}{1000}$ θὰ γραφῇ συντόμως ὡς ἑξῆς: 4,578.

Ἡ τοιαύτη γραφὴ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος καλεῖται δεκαδική. Τὸ πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς μέρος καλεῖται ἀκέραιον. τὸ δὲ μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν δεκαδικὸν καὶ τὰ ψηφία αὐτοῦ δεκαδικά. Ἐκ τῆς τοιαύτης γραφῆς παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων κατέχει τὴν πρώτην θέσιν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ τῶν ἑκατοστῶν τὴν δευτέραν, τὸ τῶν χιλιοστῶν τὴν τρίτην κ.ο.κ. Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{75083}{10000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ $\frac{75083}{10000}=7+\frac{5}{10}+\frac{0}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{3}{10000}$ καὶ ἑπομένως νὰ γραφῇ ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ὡς ἑξῆς 7,5083.

Ὁμοίως τὸ δεκαδικὸν κλάσμα $\frac{385}{10000}$ δύναται ν' ἀναλυθῇ ὡς ἑξῆς· $\frac{385}{10000}=0+\frac{0}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}$ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ γραφῇ 0,0385.

ΣΗΜ.—Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχῃ ἀκεραίας μονάδας, τότε γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου, ἤτοι ἀμέσως πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς.

163. «Διὰ νὰ γράψωμεν δεκαδικόν τι κλάσμα ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, λαμβάνομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀπὸ τοῦ τέλους αὐτοῦ χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής· ἐὰν δὲ δὲν ἐπαρκῶσι τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ, γράφομεν πρὸ αὐτοῦ μηδενικὰ τόσα, ὥστε νὰ χωρίσωμεν τὰ ἀπαιτούμενα δεκαδικὰ ψηφία καὶ νὰ μείνῃ ἓν μηδενικὸν διὰ τὸν ἀκέραιον.

Π.χ, $\frac{7384}{1000}=7,384$ $\qquad$ $\frac{245}{100000}=0,00245.$

Ἀπαγγελία δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

164. Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρεῖς τρόπους·

α΄) Ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ χωριστὰ μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ· π. χ. 3,058 ἀπαγγέλλεται 3 ἁπλαῖ μονάδες, 5 ἑκατοστὰ καὶ 8 χιλιοστά.

β΄) Ἀπαγγέλλομεν ὁλόκληρον τὸν ἀριθμὸν ὡς νὰ εἶναι ἀκέραιος μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου· π. χ. 3,47 ἀπαγγέλλεται τριακόσια—τεσσαράκοντα—ἑπτὰ ἑκατοστά.

γ΄) Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς ὅσα δήποτε τμήματα καὶ ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα χωριστὰ ὀνομάζοντες τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας παριστᾷ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ τμήματος· π.χ. ὁ ἀριθμὸς 45,305/709 ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· 45 ἀκέραια, 305 χιλιοστὰ καὶ 709 ἑκατομμυριοστὰ ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· 45 ἀκέραια, 30 ἑκατοστά, 57 δεκάκις χιλιοστά, 9 ἑκατομμυριοστά.

Συνήθως χωρίζομεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν· π.χ. 408,0396 ἀπαγγέλλεται 408 ἀκέραια καὶ 396 δεκάκις χιλιοστά.

165. Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον, γράφομεν ἕκαστον ψηφίον εἰς τοιαύτην θέσιν ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν, ὥστε νὰ σημαίνῃ μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5 ἀκέραιος, 8 ἑκατοστὰ καὶ 7 χιλιοστὰ γράφεται 5,087. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 6 δέκατα, 7 χιλιοστά, 8 ἑκατομμυριοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 0,607008.

Ἂν ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον, γράφομεν αὐτὸν ὁλόκληρον ὡς ἀκέραιον καὶ ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρχόμενοι χωρίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὥστε τὸ τελευταῖον νὰ σημαίνῃ τὰς μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται ὁ ἀριθμός· ἂν τυχὸν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων εἶναι ἀνεπαρκές, γράφομεν πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ μηδενικά· π. χ. ὁ ἀριθμὸς τετρακόσια—πεντήκοντα—ὀκτὼ ἑκατοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 4,58. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 27 χιλιοστὰ γράφεται 0,027.

Ἂν τέλος ὁ ἀριθμὸς ἀπαγγέλληται χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικόν, γράφομεν τὸ ἀκέραιον καὶ ἀμέσως δεξιᾷ τούτου τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ μετὰ ταύτην τὸ δεκαδικὸν μέρος γράφοντες ἐν ἀνάγκῃ πρὸ αὐτοῦ μηδενικά, ἵνα τὸ τελευταῖον ψηφίον σημαίνῃ μονάδας, μὲ τὸ ὄνομα τῶν ὁποίων ἀπαγγέλλεται τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ· π.χ. ὁ ἀριθμὸς τριάκοντα δύο ἀκέραιος καὶ πεντακόσια ὀκτὼ χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 32,508.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς ἑβδομήκοντα τρία ἀκέραια καὶ εἴκοσι πέντε ἑκατοντάκις χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς· 73,00025.

Γραφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς κοινοῦ κλάσματος.

166. «Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν, ἀπαλείφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονο-

μαστὴν δὲ τὴν 1 παρακολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ»· π. χ. 54,708 γράφεται ὡς κλάσμα $\frac{54708}{1000}$. Ὁμοίως 0,0045 γράφεται ὡς κλάσμα $\frac{45}{10000}$.

Ἰδιότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

167. «Ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἂν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικά».

Ἡ ἰδιότης αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ἰδιότητος (§ 118) τῶν κλασμάτων, ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν. Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,5, ὅστις ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν γράφεται $\frac{35}{10}$. ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δέκα τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου, ἡ ἀξία αὐτοῦ δὲν μεταβάλλεται καὶ λαμβάνομεν τὸ $\frac{350}{100}$, ὅπερ δεκαδικῶς γράφεται 3,50 καὶ εἶναι τῆς αὐτῆς ἀξίας πρὸς τὸ 3,5.

Ὁμοίως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{35}{10}$ ἐπὶ 1000, λαμβάνομεν $\frac{35000}{10000}$, ὅπερ δεκαδικῶς γράφεται 3,5000 καὶ εἶναι τῆς αὐτῆς ἀξίας πρὸς τὸ 3,5.

ΣΗΜ.—Καὶ μετά τινα ἀκέραιον ἀριθμὸν δυνάμεθα νὰ γράφωμεν μηδενικά, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ γράφωμεν κατόπιν αὐτοῦ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ἔπειτα τὰ μηδενικά.

Π. χ. ὁ ἀκέραιος 87 γράφεται ὡς ἑξῆς 87,000. Ὁμοίως ὁ 125 γράφεται καὶ οὕτως 125,00.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῶσι κατὰ σειρὰν πᾶσαι αἱ δεκαδικαὶ μονάδες ἀπὸ τῆς πρώτης τάξεως μέχρι τῆς ὀγδόης.

2) Ποσάκις εἶναι μεγαλείτερον τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ $\frac{1}{100}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{1000}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{10000}$ κ.τ.λ.

2) Ποσάκις τὸ $\frac{1}{1000}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10}$ καὶ ποσάκις τὸ $\frac{1}{100000}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$;

4) Νὰ γραφῶσιν ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὰ ἑξῆς δεκαδικὰ κλάσματα $\frac{35}{1000}$, $\frac{45832}{10000}$, $\frac{183}{1000000}$, $\frac{138234}{100}$ καὶ ν' ἀπαγγελθῶσιν ἔπειτα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

5) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἑξῆς δεκαδικοὶ ἀριθμοί·

α') Πέντε χιλιοστὰ καὶ ὀκτὼ ἑκατοντάκις χιλιοστά.

β') Τεσσαράκοντα πέντε χιλιοστά.

γ') Ἑκατὸν ὀγδοήκοντα ἀκέραια καὶ τριακόσια πεντήκοντα επτὰ ἑκατοντάκις χιλιοστά.

δ') Ὀκτὼ ἀκέραια καὶ ἑπτὰ ἑκατομμυριοστά.

6) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5854 | 0,0257 | 35,72 | 0,00008 ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

7) Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά, πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῶσιν ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τὰ ἑξῆς ποσά· α') 45 λεπτά, β') 18 δραχ. καὶ 75 λεπ., γ') 145 δραχ. καὶ 5 λεπτά;

8) Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν 5,83 | 2,5 | 3,5 | 12,04 | 18,4 εἰς ποίας θέσεις δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μηδενικά, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία αὐτῶν;

9) Ἐν τῷ ἀριθμῷ 2,45 α') ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων καὶ πόσα δέκατα ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος, β') ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν καὶ πόσα ἑκατοστὰ ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος καὶ γ') ποῖον εἶναι τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστῶν καὶ πόσα χιλιοστὰ ἔχει ἐν ὅλῳ οὗτος κτλ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

168. Ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως (§ 15) τῶν ἀκεραίων ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἐκτελεῖται δὲ ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπως καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων. Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 7,5+45,934+8,50782+38,00008.

Γράφομεν πρῶτον μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τῶν προσθετέων (§ 167) οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι πάντες ἴσον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν αὐτούς, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους ἀρχόμενοι τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ἕκαστος τῶν προσθετέων.

$$\begin{array}{r} 7,50000 \\ 45,93400 \\ 8,50782 \\ 38,00008 \\ \hline 99,94190 \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν, ἐὰν γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἄνευ τῶν μηδενικῶν, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν εἰς τὸ τέλος, προσέχοντες μόνον τὰ ψηφία, τὰ σημαίνοντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὡς λ. χ. αἱ ἁπλαῖ μονάδες ὑπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τὰ δέκατα ὑπὸ τὰ δέκατα κτλ. Ἐν τῷ ἀθροίσματι θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ 45,934 \\ 8,50782 \\ 38,00008 \\ \hline 99,94190 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

169. «Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γρά-

φομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὰ ψηφία, τὰ σημαίνοντα μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως (ἀκεραίας ἢ δεκαδικάς), νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ὑπ' αὐτοὺς σύρομεν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν. Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ψηφίων ἑκάστης στήλης, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Εἰς τὸ ἄθροισμα γράφομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην».

Παραδείγματα.

7,589	25,8934	5,92
3,79	7,45728	17,458234
45,87354	0,083457	0,9273
18	152,045	24,305534
75,25254	185,479137	

Ἀσκήσεις.

α') Ἀπὸ μνήμης: Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα·

0,75 + 0,12 =;	88,35 + 9 =;	120,40 + 12,60 =;
24,05 + 18 =;	8,70 + 58,75 =;	695,05 + 5,90 =;
700 + 58,60 =;	1,35 + 0,65 =;	645,25 + 11,45 =;
0,5 + 0,7 =;	158,30 + 10 =;	48,70 + 1,35 =;
25,55 + 7,30 =;	135,60 + 25,75 =;	25,75 + 7,75 =;

β') Γραπτῶς:

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑπόμενα ἀθροίσματα:

α') 0,75 + 0,323 + 0,09 + 0,928 + 0,009 + 0,05 + 0,7078 + 0,30645.

β') 13,125 + 4,6 + 0,5 + 8,429 + 17,542 + 11,194 + 7,9 + 8,643.

Προβλήματα.

1) Ὀφείλει τις εἴς τινα 85 δραχμάς, εἰς ἄλλον 65,45 δρχ., εἰς τρίτον 180,75 καὶ εἰς τέταρτον 250,15 δρ. Πόσα ὀφείλει ἐν ὅλῳ;

2) Ἐργοστασιάρχης ἔκαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς ἑβδομάδος τὰς ἑξῆς πληρωμάς· 9478,50 δρχ., 9275,40 δρχ., 807,10 δρχ., 560 δρχ., καὶ 3675,95 δρχ. Πόσα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ;

3) Ὁ ταμίας τραπέζης τινὸς εἰσέπραξε κατὰ τὴν 10ην Νοεμβρίου τὰ ἑξῆς ποσά· 185,75 δρχ., 705,50 δρχ., 1028,10 δρχ., 367,75 δρχ., 578,80 δραχ., 2038,05 δρ., 4015,65 δραχ., 806,90 δρχ., 567,40 δρχ., 478 δραχ., 179,85 δρχ. Πόσα εἰσέπραξε τὸ ὅλον;

4) Κεφαλαιοῦχος εἰσπράττει εἰσόδημα κατ' ἔτος ἔκ τινος μέρους τῆς περιουσίας του δραχ. 5670,15, ἐξ ἄλλου δὲ μέρους αὐτῆς δραχ. 1918,05,

ἐξ ἄλλου δραχ. 548, ἐξ ἄλλου δραχ. 178, 25 καὶ ἐκ τῶν τριῶν λοιπῶν μερῶν ἀντιστοίχως δραχ. 5608,95, δραχ. 409, δραχ. 15420,10.

Εἰς πόσον συμποσοῦται τὸ ἐτήσιον εἰσόδημά του; (Ἀπ. 29752,50).

5) Ἐργοστάσιον φωταερίου εἶχε τὴν πρώτην Ἰανουαρίου 18428 τόννους γαιανθράκων καὶ κατὰ τοὺς δώδεκα μῆνας τοῦ ἔτους παρέλαβεν ἀντιστοίχως τὰ ἑξῆς ποσὰ τοιούτων: τόν. 5067,750· τόν. 8940,015· τόν. 6218,008· τόν. 15100.—· τόν. 6048,250· τόν. 15004,025· τόν. 4080,048· τόν. 2064,150. τόν. 3000.—·τόν. 4007;900·τόν. 12008,002· τόν. 10500. Εἰς πόσον συμποσοῦται ἡ ἐτησία εἰσαγωγὴ τῆς καυσίμου ταύτης ὕλης; (Ἀπ. 110466,148).

6) Τὸ τελωνεῖον μιᾶς πόλεως εἰσέπραξε κατὰ τὸν Ἀπρίλιον ἐκ δασμῶν δραχ. 758145,10, κατὰ τὸν Μάϊον δὲ δραχ. 150607,30 περισσοτέρας ἀπὸ τὰς τοῦ Ἀπριλίου καὶ κατὰ τὸν Ἰούνιον τόσας, ὅσαι αἱ εἰσπράξεις τῶν δύο προηγουμένων μηνῶν καὶ ἀκόμη δραχ. 380000.—Εἰς πόσας δραχ. ἀνέρχονται ἐν ὅλῳ αἱ εἰσπράξεις τοῦ τριμήνου τούτου; (Ἀπ. 3713795).

7) Ἱππεύς τις ἐχρειάσθη 5 ἡμέρας, ἵνα μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην. Τὴν πρώτην ἡμέραν διέτρεξε 43,175 χιλιόμετρα, τὴν δευτέραν 2,250 χιλιόμ. περιπλέον, τὴν τρίτην 0,850 χιλιόμ. περισσότερα ἢ τὴν δευτέραν, τὴν τετάρτην, ὅσα καὶ τὴν δευτέραν, καὶ τὴν τελευταίαν 39,500 χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα ἐν ὅλῳ διήνυσεν οὗτος; (Ἀπ. 219,800).

Ἀφαίρεσις.

170. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται, ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων (§ 23), καὶ ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν 4,973 – 0,087343.

Ἐν πρώτοις γράφομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος τοῦ μειωτέου, ὥστε νὰ ἔχῃ οὗτος ἴσον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὲ τὸν ἀφαιρετέον, ἔπειτα δὲ ἀφαιροῦμεν, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τῆς εὑρεθείσης διαφορᾶς χωρίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἐκ δεξιῶν ἀρχόμενοι τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ἕκαστος αὐτῶν.

$$\begin{array}{r} 4{,}973000 \\ 0{,}087343 \\ \hline 4{,}885657 \end{array}$$

Δυνάμεθα ὅμως νὰ μὴ γράψωμεν εἰς τὸ τέλος μηδενικά, ἀλλὰ νὰ ὑπονοῶμεν ταῦτα κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν.

$$\begin{array}{r} 4{,}973 \\ 0{,}087343 \\ \hline 4{,}885657 \end{array}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

171. «Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε τὰ

ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, ὑπονοοῦντες μόνον μηδενικὰ εἰς τὰς κενὰς θέσεις. Εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην.

Παραδείγματα.

14,583	7,8234	15,8
9,7234	0,45	3,478924
4,8596	7,3734	12,321076

Ἀσκήσεις.

α) Ἀπὸ μνήμης νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἑξῆς διαφοραί.

1—0,65= ;	5—2,25= ;	18—6,70= ;
18,5—10,25= ;	27,60—10= ;	158,45—7,30= ;
58—15,60= ;	148,75—25=	900—200,5= ;
(45+65)—18,70=;	(100+250)—80,75=	(600+900)—50,30=

β) Γραπτῶς. Εὑρεῖν τὰς διαφοράς.

1) 6288,057—(1107,35+814,1+0,174)= ;

2) 75,812—(0,0741+1,56+3,6285+22,9)= ;

3) 146—(21,282+0,74182+12,5143+4,18976)= ;

Προβλήματα.

1) Ὠφειλέ τις 5675 δραχ. καὶ ἐπλήρωσε κατὰ διαφόρους ἐποχὰς ἐν ὅλῳ 3675,45 δρ. Πόσα ὀφείλει ἀκόμη;

2) Ἔμπορός τις κατεῖχε τὴν 1 Ἰανουαρίου ἐν. ἔτ. εἰς ἐμπορεύματα, μετρητά, ἔπιπλα κτλ. ἐν ὅλῳ 85795,45 δρχ., ὤφειλε δὲ εἰς τρίτους ἐν ὅλῳ 47167,95 δραχ. Πόσον κεφάλαιον καθαρὸν (περιουσίαν) εἶχε τὴν ἡμέραν ταύτην;

3) Ἔμπορός τις εἶχε τὴν 1 τοῦ ἔτους καθαρὸν κεφάλαιον 118675,40 δραχ. Κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους εἶχε κεφάλαιον καθαρὸν 125700 δραχ. Πόσον ἐκέρδησεν ἢ ἔχασε κατὰ τὸ λῆξαν ἔτος;

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασε καθ' ὅλον τὸ ἔτος ἐμπορεύματα ἀξίας ἐν ὅλῳ 75185,45 δραχ., εἰσέπραξε δὲ ἐκ τῶν πωληθέντων καθ' ὅλον τὸ ἔτος 73467,75 δρχ. καὶ τῷ ἀπέμειναν ἐν τῇ ἀποθήκῃ ἀπώλητα ἐμπορεύματα στοιχίζοντα εἰς αὐτὸν 8145,45 δρχ. Ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον;
(Ἀπ. κέρδ. 6427,75 δρχ.).

5) Εἶχεν ἀγοράσει τις ποσόν τι καφὲ ἀντὶ 8675,45., δραχ., ἐπώλησε δὲ κατ' ἀρχὰς ἓν μέρος αὐτοῦ ἀντὶ 3145,75 δρχ., ἓν ἕτερον ἀντὶ 2008,40 δρχ.

καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἀντὶ 4675,60 δραχ. Ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον ;
(Ἀπ. κέρδ. δρ. 1154,30).

6) Πιστωτὴς εἶχε νὰ λάβῃ παρά τινος χρεώστου 6675,45 δρ., ἔλαβε δὲ παρ᾽ αὐτοῦ πρῶτον 1815,45 δρ., ἔπειτα δὲ 962 δρ. καὶ τέλος 3297,75 δραχ. Δικαιοῦται νὰ λάβῃ ἀκόμη ὑπόλοιπόν τι καὶ πόσον;
(Ἀπ. θὰ λάβῃ ἀκόμη δρ. 600,25).

7) Ἐργολάβος τις ἀνέλαβε νὰ ἐκτελέσῃ ἔργον τι κατ᾽ ἀποκοπὴν ἀντὶ 56742 δραχ., ἐδαπάνησε δὲ πρὸς τοῦτο τὰ ἑξῆς· δι᾽ ὑλικὰ 35672,45 δρχ., δι᾽ ἡμερομίσθια 10728,75 δραχ. καὶ δι᾽ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα 4720,80 δραχ. Ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον; (Ἀπ. ἐκέρδησε δρ. 5620).

8) Εἶχέ τις 25145,55 δρχ. καὶ ἠγόρασεν ἀγρὸν ἀντὶ 4185,65 δρχ., ἔπειτα εἰσέπραξε παρά τινος χρεώστου 2180,85 δρχ. καὶ ἠγόρασε κατόπιν μίαν οἰκίαν ἀντὶ 7185,45 καὶ ἓν ἐλαιοτριβεῖον ἀντὶ 6135,75 δραχ. Ἐδαπάνησε δὲ εἰς χαρτόσημα καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα διὰ τὰς γενομένας ἀγορὰς 135,70. Πόσαι δραχ. τῷ ἀπέμειναν; (Ἀπ. δρ. 9683,85).

9) Ἔμπορός τις κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν τὴν 1ην Ἰανρυαρίου 15000 δρχ., τὴν 5ην τοῦ αὐτοῦ μηνὸς ἑτέρας 5615,40 δρχ., τὴν δὲ 10ην ἀπέσυρε δι᾽ ἀνάγκας τοῦ καταστήματός του 7826,65 δραχ., τὴν 15ην Ἰανουαρίου ἑτέρας 2875,90 δρχ., τὴν 20ὴν Ἰανουαρίου κατέθεσεν ἐκ νέου 3675,70 δρχ., τὴν 25ην Ἰανουαρίου ἀπέσυρε 5675,85 δρχ., καὶ τὴν 31ην Ἰανουαρίου 1875,15 δρχ. Ποῖον ὑπόλοιπον ἔμεινεν ἀκόμη ὑπὲρ αὐτοῦ τὴν 31ην Ἰανουαρίου; (Ἀπ. δρ. 6037,55).

Πολλαπλασιασμός.

172. Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἔστω π. χ. πρὸς εὕρεσιν τὸ γινόμενον 7,589×3,5.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ τὸν κανόνα (§ 143), $\frac{7589}{1000}\times\frac{35}{10}=\frac{7589\times35}{1000\times10}=\frac{265615}{10000}$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο γράφεται ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ὡς ἑξῆς· 26,5615. Ὅθεν ἔχομεν

$$7,589\times3,5=26,5615.$$

Τὸ ἐξαγόμενον ὅμως τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου χωρίσωμεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσι καὶ οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 7,589 \\ 3,5 \\ \hline 37945 \\ 22767 \\ \hline 26,5615 \end{array}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

173. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν οἱ δύο ὁμοῦ παράγοντες».

Παραδείγματα.

35,87	13,87	0,208
0,452	52	0,07
7174	2774	0,01456
17935	6935	
14348	721,24	
16,21324		

Παρατ.—Ἐν τῷ δευτέρῳ παραδείγματι ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι ἀκέραιος, ἑπομένως χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ γινομένου τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ εἷς τῶν παραγόντων. Ἐν τῷ τρίτῳ παραδείγματι γράφομεν πρὸ τοῦ γινομένου τόσα μηδενικά, ὥστε νὰ χωρίσωμεν τὰ ἀπαιτούμενα δεκαδικὰ ψηφία καὶ νὰ μείνῃ ἓν μηδενικὸν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ.

174. «Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ., μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κτλ. θέσεις, ἤτοι ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής».

Π χ. $3{,}57 \times 10 = 35{,}7$.

Τῷ ὄντι ὁ ἀριθμὸς 35,7 εἶναι δεκάκις μεγαλύτερος τοῦ 3,57· διότι ἕκαστον ψηφίον τοῦ πρώτου παριστᾷ μονάδας δεκάκις μεγαλυτέρας ἐκείνων, τὰς ὁποίας τὸ αὐτὸ ψηφίον παριστᾷ ἐν τῷ δευτέρῳ. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν $3{,}57 \times 100 = 357$.

Παρατήρ.—Ἂν δὲν ἐπαρκῶσι τὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἀναπληροῦμεν αὐτὰ διὰ μηδενικῶν γραφομένων εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ· π. χ. $3{,}57 \times 10000 = 35700$.

ΣΗΜ. —Καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. δύναται νὰ περιληφθῇ εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα, διότι καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὡς δεκαδικός.

Π. χ. $45 \times 100 = 45{,}00 \times 100 = 4500$.

175. «Διά νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ ἀκέραιον ἔχοντα εἰς τὸ τέλος ἓν ἢ περισσότερα μηδενικά, μεταφέρομεν εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξια, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτομεν, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν».

Π. χ. $58,347 \times 800 = 5834,7 \times 8 = 46677,6$.

Τῷ ὄντι ὁ πολλαπλασιαστὴς 800 εἶναι 100×8.

Ἑπομένως ἔχομεν $58,347 \times 800 = 58,347 \times 100 \times 8 = 5834,7 \times 8$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς γινόμενα·

$4,58 \times 100 =$;	$3,79 \times 0,1 =$;	$1,75 \times 20 =$;
$7,53 \times 10 =$;	$28 \times 0,5 =$;	$68 \times 0,50 =$;
$18,5 \times 11 =$;	$25,8 \times 2 \times 5 =$;	$18,3 \times 50 =$;
$7,5 \times 0,8 =$;	$58,5 \times 99 =$;	$2,34 \times 100 =$;
$8,4 \times 12,5 =$;	$64 \times 0,125 =$;	$8,3 \times 100 =$;
$37,8 \times 10000 =$;	$7,45 \times 4 \times 25 =$;	$145,8 \times 0,001 =$;
$134,5 \times 10000 =$;	$8,5 \times 0,8 =$;	$140 \times 0,05 =$;
$782,3 \times 0,01 =$;	$38,50 \times 0,33 =$;	$7,3 \times 40 =$;
$48 \times 0,25 =$;	$4,5 \times 3,33 =$;	$14,25 \times 25 =$;

Προβλήματα.

1) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 2,75. Πόσον τιμῶνται αἱ 28,2 ὀκ; (Ἀπ. 77,55 δρχ.).

2) Πόσον τιμῶνται α΄) 100 ᾠὰ πρὸς 7,5 λεπτὰ ἕκαστον· β΄) 10 ὀκάδες ζακχάρεως πρὸς 1,25 τὴν ὀκᾶν καὶ γ΄) 50 ὀκάδες ἀλεύρου πρὸς 56,5 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν;

3) Ἠγόρασέ τις 2 450 ὀκάδας ζακχάρου πρὸς 1,28 δραχ. τὴν ὀκᾶν, ἀλλ' ἕνεκα δυσμενῶν περιστάσεων ἠναγκάσθη νὰ πωλήσῃ αὐτὴν πρὸς 1,25 δραχ. Πόσον ἐζημιώθη; (Ἀπ.73,50 δραχ.).

4) Ἠγόρασέ τις 45450 πλίνθους ὀπτὰς (τοῦβλα) πρὸς 29,75 δραχ. τὴν χιλιάδα. Πόσας δραχ. ἐπλήρωσε;

(Ἀπ. 1352, 24 δρ. περ.).

1352 . 13750

5) Πατήρ τις δαπανᾷ καθ' ἡμέραν 2,75 δραχ. διὰ κρέας, 1 δρ. δι' ἄρτον, 50 λεπτὰ δι' οἶνον, 2,10 δραχ. δι' ἐνοίκιον καὶ 1, 45 δι' ἄλλα διάφορα ἔξοδα. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ μηνιαία δαπάνη; ('Απ. 234 δρχ.).

6) Πατήρ τις ἀποθανὼν κατέλιπε τὸ ποσὸν 65480 δραχ. Κατὰ τὴν διαθήκην ἔλαβον ἡ μὲν μήτηρ τὰ 0,15 τούτου, ἡ θυγατηρ τὰ 0,23, ἕκαστος δὲ τῶν τριῶν υἱῶν του τὰ 0,12 καὶ τὸ ὑπόλοιπον διάφορα φιλανθρωπικὰ καταστήματα. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστος;

('Απ. α') 9822, β') 15060, 40, γ') 7857,60 δ') 17024, 80).

7) Εἰς ἐργοστάσιόν τι ἐργάζονται 15 ἄνδρες, 12 γυναῖκες καὶ 25 κοράσια. 'Εργάζονται δὲ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν καὶ πληρώνονται οἱ μὲν ἄνδρες 0,75 δραχ. καθ' ὥραν, αἱ δὲ γυναῖκες 0,45 καθ' ὥραν καὶ τὰ κοράσια 0,14 δραχ. καθ' ὥραν. Πόσας δραχμὰς πληρώνει ὁ ἐργοστασιάρχης καθ' ἑβδομάδα εἰς ὅλους τοὺς ἐργάτας; 'Απ. 967,20).

8) Ἔμπορος ἠγόρασε 235 τόπια ὑφάσματός τινος, ἐξ ὧν ἕκαστον περιελάμβανε μέτρα 75,25, πρὸς δραχ. 18,65 τὸ μέτρον. 'Επλήρωσε δὲ διὰ τὴν μεταφοράν των δραχ. 2350, διὰ δασμὸν δραχ. 5627,90 καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα δραχ. 168,15. 'Εὰν μεταπωλήσῃ τὸ ἐμπόρευμα πρὸς δραχ. 21,75 τὸ μέτρον, α') πόσον ἀκαθάριστον κέρδος θὰ πραγματοποιήσῃ καὶ β') ποῖον θὰ εἶναι τὸ καθαρὸν κέρδος, ἐὰν ἕκαστον μέτρον ἐπιβαρυνθῇ μὲ 5 λεπτὰ λόγῳ γενικῶν ἐξόδων, ἅτινα ἐπιβάλλει ἡ λειτουργία τοῦ καταστήματος; ('Απ. α') δρ. 46673,575, β') δρ. 45791,3875).

Διαίρεσις.

176. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Α') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.

Α) ***Περίπτωσις.***—Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον 785,79:25. Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

```
785,79    | 25
 35       | 31,4316
 107
   79
    40
    150
      0
```

'Εκ τοῦ ἀκεραίου μέρους 785 τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν τὸ ἀκέραιον μέρος 31 τοῦ πηλίκου, δεξιᾷ τοῦ ὁποίου θέτομεν τὴν ὑποδιαστολήν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 10 τρέπομεν εἰς 100 δέκατα καὶ εἰς ταῦτα προσθέτομεν τὰ 7 δέκατα τοῦ διαιρετέου (ἤτοι 100 + 7 = 107 δέκατα). Διαιροῦντες τὰ 107 δέκατα διὰ τοῦ 25 εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον

4 δέκατα καὶ ὑπόλοιπον 7 δέκατα. Τρέπομεν πάλιν τὰ 7 δέκατα εἰς 70 ἑκατοστά, ἅτινα μετὰ τῶν 9 ἑκατοστῶν τοῦ διαιρετέου δίδουσιν 79 ἑκατοστά· διαιροῦντες τὰ 79 ἑκατοστὰ διὰ τοῦ 25 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 ἑκατοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστά. Τρέπομεν τὰ 4 ἑκατοστὰ εἰς 40 χιλιοστά, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 25 δίδουσι πηλίκον μὲν 1 χιλιοστόν, ὑπόλοιπον δὲ 15 χιλιοστά. Ταῦτα πάλιν τρέπονται εἰς 150 δεκάκις χιλιοστά, ἅτινα διαιρούμενα διὰ τοῦ 25 δίδουσι πηλίκον 6 δεκ. χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

177. «Διαιροῦμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προκύπτουσιν ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ πηλίκου, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικά».

Παραδείγματα.

75,83	8	0,0095	4	975,83	19
38	9,47875	15	0,002375	25	51,359 $\frac{9}{19}$
63		30		68	
70		20		113	
60		0		180	
40				9	
0					

Ἐν τῷ τελευταίῳ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τελειώσῃ ὅσον δήποτε καὶ ἂν προχωρήσωμεν, διότι οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ σταματήσωμεν εἴς τι ὑπόλοιπον καὶ νὰ συμπληρώσωμεν τὸ πηλίκον γράφοντες δεξιᾷ αὐτοῦ κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην. Ὅθεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι $51{,}35947\,\frac{7}{19}$, ἔνθα τὸ κλάσμα $\frac{1}{19}$ εἶναι μέρος τοῦ 0,00001.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ παραλείψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{19}$ καὶ νὰ δεχθῶμεν ὡς πηλίκον τὸ 51,35947.

Τὸ πηλίκον τοῦτο λέγεται κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ καὶ εἶναι μικρότερον του ἀκριβοῦς κατὰ $\frac{7}{19}$ (ἤτοι ὀλιγώτερον $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος ταύτης) τοῦ 0,00001.

Ἐὰν ὅμως σταματήσωμεν εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν ὡς ἀκριβὲς πηλίκον $51{,}3594\frac{14}{19}$. Παραλείποντες τὸ $\frac{14}{19}$ καὶ λαμβάνοντες ὡς πηλίκον τὰ 51,3594 κάμνομεν λάθος $\frac{14}{19}$ τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ (ἤτοι περισσότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος ταύτης). Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸ 51,3595, τοῦτο θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀκριβοῦς, τὸ δὲ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν, εἶναι τὰ $\frac{5}{19}$ τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ, ἤτοι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος ταύτης. Οὕτω δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὅσην δήποτε προσέγγισιν θέλομεν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων: α) 8336,25 : 45, β) 494,566 : 58 γ) 10,0875 : 269.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον 75,832 : 45 κατὰ προσέγγισιν 0,0001 καὶ τὸ 358,45 : 13 μὲ προσέγγισιν 0,00001.

3) Ἐὰν 18 ἀγγλικαὶ λίραι ἰσοδυναμῶσι μὲ δραχ. 453,90, τότε ἡ μία μὲ πόσας ἰσοδυναμεῖ; (Ἀπ. 25,22 δρχ.).

4) Ἐὰν ὁ τελωνιακὸς δασμὸς 678 ὀκάδων εἴδους τινὸς εἶναι δρχ. 94,92, τότε πόσος ἀναλογεῖ α) εἰς τὴν μίαν ὀκᾶν καὶ β) εἰς τὰς 44 ὀκ;. (Ἀπ. α) 0,14 δραχ. β) 6, 16).

5) Ἐὰν ἄνθρωπός τις δαπανᾷ διὰ τὴν συντήρησίν του δρχ. 594,50 εἰς 58 ἡμέρας, τότε πόση δαπάνη ἀναλογεῖ α) εἰς μίαν ἡμέραν; καὶ β) εἰς 365 ἡμέρας; (Ἀπ. α) 10,25 δρχ. β) 3,741,25).

6) Ἐὰν ὁ τροχὸς ἁμάξης ἔχῃ περιφέρειαν μήκους 4 μέτρων, πόσας περιστροφὰς θὰ ἐκτελέσῃ οὗτος, ἐὰν ἡ ἅμαξα διατρέξῃ δρόμον 5.678,75 μέτρων;
(Ἀπ. 1419,6875 στροφάς, ἤτοι 1419 πλήρεις καὶ μέρος στροφῆς 2,75 μέτρ).

Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

Ὅπως διαιροῦμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, οὕτως εὑρίσκομεν καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μὲ οἵαν δήποτε προσέγγισιν θέλομεν.

Ὁ διαιρετέος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμὸς (§ 167), τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι πάντα μηδενικά.

Π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ 7 : 8 εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

7,000 | 8
60 0,875
40
0

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ (§ 136), ἕπεται ὅτι $\frac{7}{8}=0{,}875$.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

178. «Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ, θεωρούμενον ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν, διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

Παραδείγματα.

α′) $\frac{13}{4}$

130 | 4
10 3,25
20
0

Ὅθεν $\frac{13}{4}=3{,}25$

β′) $\frac{5}{7}$

50 | 7
10 0,7142857...
30
20
60
40
50
1...

Ὅθεν $\frac{5}{7}=0{,}7142857\ldots$

γ′) $\frac{7}{12}$

70 | 12
100 0,5833...
40
40
4

Ὅθεν $\frac{7}{12}=0{,}5833\ldots$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{13}{4}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν· δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο ἄλλα κλάσματα· Τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ μᾶς δίδει δεκαδικόν, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία θὰ εἶναι ὁσαδήποτε θέλομεν, ἤτοι ἄπειρα, διότι ἡ διαίρεσις οὐδέποτε λαμβάνει πέρας· βλέπομεν δὲ προσέτι ὅτι εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ πηλίκου ψηφία τινὰ (714285) ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειρὰν ἐπ' ἄπειρον. Τὰ ψηφία ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν καλουμένην περίοδον καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ἐν τῷ ὁποίῳ συμβαίνει τοῦτο, καλεῖται περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

Ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 0,5833..., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος εἶναι τὸ ψηφίον 3.

Τὸ μὲν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,714285...., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, καλεῖται ἁπλοῦν περιοδικόν, τὸ δὲ 0,5833...., τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει οὐχὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου δεκαδικοῦ ψηφίου, καλεῖται μικτὸν περιοδικόν.

Β' Περίπτωσις. — Διαίρεσις διὰ δεκαδικοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 45,895 διὰ 0,37.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ 100, λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4589,5 καὶ 37, τῶν ὁποίων τὸ πηλίκον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν (§ 80). Οὕτως ἡ διαίρεσις διὰ δεκαδικοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν δι' ἀκεραίου καὶ ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα (§ 177) α' 45,895 : 0,37. β' 0,0823 : 0,18.

4589,5	37	8,23	18
88	124,04	103	0,4572...
149		130	
150		40	
2		4	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

179. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμόν τινα (ἀκέραιον ἢ δεκαδικὸν) διὰ δεκαδικοῦ, μεταθέτομεν πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρέτου εἰς τὸ τέλος καὶ ἄλλας τόσας θέσεις τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου, μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Παραδείγματα.

α') 456,9 : 0,378   β') 45,83 : 0,16.

458900	378	4583	16
809	1214,02...	138	286,4375
530		103	
1520		70	
800		60	
44		120	
		80	
		0	

Συντομίαι διαιρέσεως.

180. «Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, 100, 1000 κτλ., ἀρκεῖ νὰ μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου».

Π. χ. 45,8 : 10=4,58. Διότι ὁ 4,58 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 10 δίδει τὸν διαιρετέον 45,8, ἤτοι $4,58 \times 10 = 45,8$.

Ὁμοίως 245,8: 100=2,458. Διότι $2,458 \times 100 = 245,8$.

Παρατ. α') Ἂν πρὸ τῆς ὑποδιαστολῆς δὲν ὑπάρχωσιν ἐπαρκῆ ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφομεν πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ μηδενικά· π.χ. 34,78: 1000=0,03478.

Παρατ. β') Καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου διὰ 10, 100 κλπ. ἰσχύει ὁ αὐτὸς κανών, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἀκεραίου καὶ νὰ μεταθέσωμεν ταύτην πρὸς τὰ ἀριστερά· π.χ. 583: 100=5,83.

181. «Ὅταν ὁ διαιρέτης λήγῃ εἰς ὁσαδήποτε μηδενικά, ἀποκόπτομεν πρῶτον τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ καὶ μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ διαιρετέου τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα εἶναι τὰ ἀποκοπέντα μηδενικά, καὶ μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν».

Π. χ. ἡ διαίρεσις 45837 : 200 ἀνάγεται εἰς τὴν ἑξῆς 458,37 : 2= 229,185, διότι κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 80) δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ 100.

Ὁμοίως ἡ διαίρεσις 3583,7 : 500 ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν
35,837 : 5=7,1674.

Ἀσκήσεις.

1. Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα.

18 : 10=;	$8,5 : \frac{1}{4}=$;	17,4 : 0,1 = ;	$5,8 : 3\frac{1}{3}=$;
35,6 : 1000=;	3,6 : 9=;	8,7 : 200 = ;	5,32 : 0,001=;
$4,2 : \frac{1}{2}=$;	5,6 : 7=;	$12,6 : \frac{2}{3}=$;	$6,5 : \frac{5}{4}=$;
4,5 : 0,01=;	$8,7 : 3\frac{1}{2}=$;	4,8 : 60=;	4,40 : 300=;

2) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικὰ τὰ κοινὰ κλάσματα: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$.

3) Ὁμοίως τὰ $1\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{8}$, $18\frac{2}{5}$, $123\frac{3}{4}$.

4) » τὰ $\frac{68}{16}$, $\frac{31}{25}$, $\frac{7}{125}$, $\frac{94}{80}$.

5) » τὰ $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{215}{6}$, $\frac{72}{12}$, $\frac{168}{15}$, $\frac{197}{7}$, $\frac{121}{11}$.

6) Νὰ τραπῶσιν εἰς τὰ ἁπλούστατα ἀντίστοιχα κοινὰ κλάσματα οἱ δεκαδικοί: 0,5· 0,25· 0,75· 0,125· 0,375· 0,625.

7) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς· 4,015· 0,00875· 16,25· 3,08· 48,675.

8) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ πηλίκα: α') 5,60:5,6, β') 3,2:0,8, γ') 145:0,05, δ') 18,5:0,01, ε') 6,35:0,1, ϛ') 1:0,001, ζ') 10:0,02, η') 0,08:4, θ') 0,063:7

9) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς· α') 8:0,35, β') 14:0,9, γ') 5,06:1,8, δ') 7,25:025, ε') 649,038:14,5.

Προβλήματα.

1) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 4,25 δραχ. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ διὰ νὰ λάβῃ 55,25 δρχ.; ('Απ. 13 ἡμ.)

2) Πόσον στοιχίζει ἡ ὀκᾶ α') καφέ, ἐὰν δι' 100 ὀκ. ἐπληρώσαμεν 365 δρχ., β') βουτύρου, ἐὰν διὰ 10 ὀκ. ἐπληρώσαμεν 56,80 δρχ.;

3) Ἔμπορός τις ἔλαβεν ἐξ Ἰταλίας 15 σάκκους ὀρύζης βάρους καθαροῦ 65 ὀκ. ἕκαστον, ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον 3,25 δραχ. κατὰ σάκκον, δι' ἐκφόρτωσιν καὶ μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης του ἐν ὅλω 45,80 δρχ., διὰ δασμὸν 0,15 δραχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς συνεφωνήθη πρὸς 0,68 δραχ. κατ' ὀκᾶν α') πόσον θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο μετὰ τῶν ἐξόδων, β') πόσον ἡ ὀκᾶ;

('Απ. ἐν ὅλῳ 903,80, ἡ ὀκᾶ $0,926\frac{38}{39}$ ἢ 93 λεπτὰ περίπου).

4) Ζῳέμπορός τις ἠγόρασεν ἐκ Θεσσαλίας 258 ἀμνοὺς πρὸς 18,60 ἕκαστον, ἐδαπάνησε δὲ διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτῶν μέχρις Ἀθηνῶν, 1,65 δραχ. δι' ἕκαστον καὶ ἀπέθανον καθ' ὁδὸν 15 ἀμνοί. Πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἕκαστος τῶν ἐπιλοίπων καὶ πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ἕκαστον διὰ νὰ κερδίσῃ 425 δραχ. ἐν ὅλῳ;

('Απ. 21,50 δρχ. στοιχίζει ἕκαστος, 23,25 νὰ πωληθῇ ἕκαστος).

Πράξεις ἐπὶ κοινῶν κλασμάτων καὶ δεκαδικῶν.

182. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πρᾶξίν τινα ἐπὶ δεκαδικῶν καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν, πρὸ αὐτῆς συμφέρει ἄλλοτε μὲν νὰ τρέψωμεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἄλλοτε δὲ νὰ διατηρήσωμεν τοὺς

ἀριθμούς, ὡς εἶναι δεδομένοι, καὶ ἄλλοτε νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ὑπὸ κλασματικὴν μορφήν.

Παραδείγματα. α΄) Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἄθροισμα

$$385\frac{3}{4}+24{,}458+45\frac{2}{3}+48{,}9.$$

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν τοὺς κλασματικοὺς εἰς δεκαδικούς, ἤτοι $385\frac{3}{4}=385{,}75$ καὶ $45\frac{2}{3}=45{,}667$ (κατὰ προσέγγισιν 0,001) καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν $385{,}75+24{,}458+45{,}667+48{,}9+$ $504{,}775$.

β΄) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἀφαίρεσις $847{,}85-253\frac{5}{8}$. Τρέπομεν καὶ ἐνταῦθα τὸν ἀφαιρετέον εἰς δεκαδικόν, ἤτοι $253\frac{5}{8}=253{,}625$, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν $847{,}85-253{,}625=594{,}225$.

γ΄) Ἔστω πρὸς ἐκτέλεσιν ὁ πολλαπλασιασμὸς $3{,}45\times3\frac{2}{3}$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν διατηροῦντες τοὺς ἀριθμούς, ὡς ἐδόθησαν, λαμβάνομεν $3{,}45\times3\frac{2}{3}=\frac{37{,}95}{3}=12{,}65$ ἀκριβῶς. Ἐὰν ὅμως τρέψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς δεκαδικὸν κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, θὰ εὕρωμεν γινόμενον κατὰ προσέγγισιν, ἤτοι $3{,}45\times3\frac{2}{3}=3{,}45\times3{,}66=12{,}627$.

Ἔστω τέλος πρὸς ἐκτέλεσιν ἡ ἑξῆς διαίρεσις $8\frac{5}{7}:0{,}9$.

Εἶναι πρακτικώτερον καὶ ἐνταῦθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς δεκαδικὸν καὶ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν διὰ δεκαδικοῦ. Ἀλλ' οὕτω τὸ πηλίκον θὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς :

$$8\frac{5}{7}:\frac{9}{10}=\frac{61}{7}\times\frac{10}{9}=\frac{610}{63}=9\frac{43}{63}.$$

Παρατ. Ἐν γένει δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἐὰν δὲν ἐνδιαφερώμεθα περὶ τῆς ἀκριβείας τοῦ ἐξαγομένου, εἶναι προτιμότερον νὰ τρέπωμεν τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἐκτελῶμεν τὰς πράξεις.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς δεκαδικούς, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, τὰ ἑξῆς κλάσματα.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{400}$.

2) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα καὶ αἱ διαφοραί.

$1,5 + \frac{1}{2} =$; $8,25 - 3\frac{1}{4} =$; $15,6 - 7\frac{3}{5} =$;

$1,8 + 3\frac{2}{5} =$; $12,25 + 2\frac{1}{4} =$; $3,25 + 7\frac{3}{4} =$;

$5,80 + 2\frac{1}{2} =$; $7,85 + \frac{1}{20} =$; $17,85 + 25\frac{1}{5} =$;

$5,80 - 2\frac{1}{2} =$; $3,20 + 2\frac{1}{5} =$; $4,75 + 1\frac{1}{4} =$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ.—ΟΡΙΣΜΟΙ

183. ***Ποσά.—Μέτρησις αὐτῶν.***—Οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦσι πλῆθός τι, ὅπερ δύναται νὰ αὐξήσῃ, προστιθεμένων εἰς τὴν τάξιν νέων μαθητῶν, ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, ἀπερχομένων τινῶν. Ὁμοίως ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον διανύει ὁδοιπόρος τις κατά τι χρονικὸν διάστημα, δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος, καθόσον βαδίζει ταχύτερον ἢ βραδύτερον.

Τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν, ὁ δρόμος τοῦ ὁδοιπόρου καὶ πᾶν ἄλλο, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, καλεῖται ἐν γένει ποσόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

184. «Ποσὸν καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν».

Τὰ ποσά, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων κεχωρισμένων ἀπ' ἀλλήλων, ὡς εἶναι τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως, τὸ πλῆθος δένδρων κήπου τινὸς κ.τ.λ., δυνάμεθα νὰ καλέσωμεν ποσὰ ἀσυνεχῆ. Τὰ δὲ ποσά, οἷα ὁ δρόμος, ἡ γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια κ.τ.λ., ἅτινα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἓν ὅλον συνεχές, καλοῦμεν ποσὰ συνεχῆ.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦσιν ἀσυνεχὲς ποσόν, καλεῖται ἀρίθμησις καὶ ἐγένετο περὶ αὐτῆς λόγος ἐν τῇ εἰσαγωγῇ (§ 5). Πρόκειται νῦν νὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκεται ὁ ἀριθμός, ὁ παριστῶν συνεχές τι ποσόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμόν, τὸν παριστῶντα τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Πρὸς τοῦτο Α——————————————————Β

λαμβάνομεν Γ——————————Δ

ὁμοειδὲς ποσόν, ἤτοι μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, π. χ. τὴν ΓΔ, ὡς μονάδα καὶ πρὸς αὐτὴν συγκρίνομεν τὴν ΑΒ, ἤτοι εὑρίσκομεν ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν ΓΔ ὁλόκληρον ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ὡρισμένα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ΑΒ. Ἔστω δὲ ὅτι πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν ταύτην δὶς καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς τρίς. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ΓΔ διὰ τοῦ 1, ἡ ΑΒ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $2\frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, καλεῖται μέτρησις, τὸ δ' ἐξαγόμενον ταύτης παρίσταται δι' ἀριθμοῦ, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον ἡ εὐθεῖα ΑΒ γίνεται ἐκ τῆς ΓΔ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸν ἀριθμόν, τὸν παριστῶντα ἄλλο συνεχὲς ποσόν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

185. «Μέτρησις συνεχοῦς ποσοῦ δι' ἄλλου ὁμοειδοῦς καὶ ὡρισμένου, ὅπερ λαμβάνεται ὡς μονάς, καλεῖται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκομεν, πῶς τὸ πρῶτον ποσὸν δύναται νὰ σχηματισθῇ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ».

Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

186. Διὰ τὴν ἀρίθμησιν ποσοῦ τινος ἀσυνεχοῦς εἴδομεν, ὅτι λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ἓν ἐκ τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων. Εἶναι δὲ αὕτη φυσικὴ μονάς, τὴν ὁποίαν πανταχοῦ παρεδέχθησαν. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν συνεχῶν ποσῶν· διότι, ὡς εἴδομεν, πρὸς τοῦτο λαμβάνεται κατὰ βούλησιν ὡς ἀρχικὴ μονὰς ὁμοειδές τι καὶ ὡρισμένον ποσόν. Ἡ μονὰς αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἄλλας μικροτέρας μονάδας διὰ τὴν μέτρησιν ποσοῦ μικροτέρου τῆς ἀρχικῆς μονάδος· ἐπίσης λαμβάνονται καὶ ὡρισμένα πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὡς νέαι μονάδες πρὸς μέτρησιν πολὺ μεγάλων ποσῶν. Ἡ ἀρχικὴ μονάς, τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰ πολλοστὰ αὐτῆς διὰ ποσόν τι συνεχὲς ἓν

γένει δὲν εἶναι αἱ αὐταὶ παρ' ἅπασι τοῖς λαοῖς. Εἶναι λοιπὸν ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν τὰς μονάδας, τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν, τὰς ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν καὶ ἀλλαχοῦ καὶ αἵτινες εἶναι μᾶλλον συνήθεις καὶ χρήσιμοι εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.

Εἰς ἄλλας μὲν μονάδας ἡ ὑποδιαίρεσις εἶναι δεκαδική, δηλ. ἡ ἀρχικὴ μονὰς ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἢ 100 κτλ. ἴσα μέρη. Εἰς ἄλλας ὅμως μονάδας ἡ ὑποδιαίρεσις γίνεται εἰς οἱαδήποτε μέρη μὴ δεκαδικά. Ὅθεν διὰ τὰ διάφορα ποσὰ ἔχομεν μονάδας μὲ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις καὶ μονάδας ἄνευ τοιούτων ὑποδιαιρέσεων.

Μονάδες μήκους.

187. α') Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.—Τοιαύτη εἶναι τὸ γαλλικὸν μέτρον, ὅπερ εἰσαχθὲν εἰς τὴν Ἑλλάδα κατὰ τὸ 1836 ὡς ἐπίσημος μονὰς τοῦ Κράτους ἐκλήθη βασιλικὸς πῆχυς.

ΣΗΜ.—Εἰς νεώτερον διάταγμα τῆς 26ης Σεπτεμβρίου 1911 ὡς μονάδες μήκους ἐπιφανείας καὶ ὄγκου ὡρίσθησαν πάλιν τὸ μέτρον, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ τὸ κυβικὸν μέτρον. Ἡ ὀνομασία βασιλικὸς πῆχυς εἶναι ἀσυνήθης, μᾶλλον δὲ συνήθης εἶναι τὸ μέτρον.

Τὸ γαλλικὸν μέτρον εἶναι τὸ 0,0000001 τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

Ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται παλάμαι ἢ ὑποδεκάμετρα. Ἑκάστη παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἄλλα 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται δάκτυλος ἢ ὑφεκατόμετρον ἢ ἑκατοστόμετρον (κοιν. πόντος). Ἕκαστος δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται πάλιν εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων καλεῖται γραμμὴ ἢ χιλιοστόμετρον.

Αἱ σχέσεις τῶν μονάδων τούτων καταφαίνονται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι.

1 μέτρον	= 10 παλ.	=	100 δακτύλ.	=	1000 γραμ.
	1 παλ.	=	10 δακ.	=	100 γραμ.
			1 δακ.	=	10 γραμ.

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου καταφαίνεται ὅτι ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$ αὐτοῦ.

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου εἶναι τὰ ἑξῆς·

1) Τὸ δεκάμετρον, μήκους 10 μέτρων, 2) τὸ ἑκατόμμετρον, μήκους

00 μέτρων, 3) τὸ χιλιόμετρον ἢ στάδιον, μήκους 1000 μέτρων, καὶ 4) ὁ μυριάμερον (ἢ σχοινίς), μήκους 10.000 μέτρων.

β') Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Τοιαῦται εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς ἴσος πρὸς τὰ 0,75 ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

2) Ὁ μικρὸς πῆχυς τῆς Κων)πόλεως ἴσος πρὸς τὰ 0,65 (0,648) τοῦ μέτρου καὶ καλεῖται ἐνδεζέ. Ὁ μικρὸς πῆχυς λαμβάνεται ἐν τῷ ἐμπορίῳ ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου.

3) Ὁ μέγας πῆχυς τῆς Κων)πόλεως, ἴσος πρὸς τὰ 0,67 (0,669) τοῦ μέτρου καὶ καλεῖται ἀρσίν.

Οἱ δύο οὗτοι τελευταῖοι πήχεις διαιροῦνται εἰς 8 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται ῥούπια καὶ χρησιμεύουσι διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων· ἀλλ' ὁ μᾶλλον συνήθης παρ' ἡμῖν εἶναι ὁ ἐνδεζέ.

4) Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Ἀμερικῆς ὡς ἀρχικὴν μονάδα μήκους μεταχειρίζονται τὴν ὑάρδαν, ἴσην πρὸς 0,914 μέτρα, ἥτις διαιρεῖται εἰς 3 πόδας καὶ ὁ ποὺς εἰς 12 δακτύλους (ἴντσες).

Ἐν τῇ πράξει λογαριάζονται 12 ὑάρδαι=11 μέτρα.

5) Ἐν Ῥωσσίᾳ μονὰς μήκους ἐν χρήσει εἶναι ὁ ἀρσὶν ἴσος πρὸς 0,711 μέτρα. Μεταχειρίζονται ὅμως καὶ τὸν Ἀγγλικὸν πόδα, ἴσον πρὸς 0,305 μέτρα.

ΣΗΜ.—Παλαιὰ μονὰς μήκους ἦτο ἡ ὀργυιά, ἴση πρὸς 1,949 μ., ἐκλιποῦσα ἤδη ἐντελῶς. Ἄλλαι μονάδες εὔχρηστοι διὰ μεγάλας ἀποστάσεις εἶναι τὸ ναυτικὸν μίλιον, ἴσον πρὸς 1852,2 μέτρα, τὸ γερμανικὸν ἢ γεωγραφικὸν μίλιον ἴσον πρὸς 7420 μέτρα καὶ τὸ Ἀγγλικὸν μίλιον ἴσον πρὸς 1760 ὑάρδας. Ἐν Ῥωσσίᾳ εἶναι τὸ βέρστιον, ἴσον πρὸς 1067 μέτρα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 345,83 τεκτ. πήχεις νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα.

Λύσις. — Ἐπειδὴ ὁ 1 τεκτ. πῆχυς ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἕπεται ὅτι οἱ 345,83 τεκτ. πήχεις θὰ ἰσοδυναμῶσι πρὸς $345{,}83 \times \frac{3}{4}$ μέτρα.

2) Νὰ τραπῶσι 245 μέτρα εἰς μικροὺς πήχεις.

Λύσις.—Ἐπειδὴ τὰ 0,64 τοῦ μέτρου κάμνουν 1 πῆχυν μικρόν, ἕπεται ὅτι τὰ 245 μέτρα κάμνουσι $\frac{245}{0{,}64}$ μικροὺς πήχεις.

3) Νὰ τραπῶσι 518,35 μέτρα α') εἰς ὑάρδας, β') εἰς ἐνδεζέ, γ') εἰς ἀρσὶν (Ῥωσσίας).

4) 745 ὑάρδαι πόσα μέτρα κάμνουσι;

5) $1237\frac{1}{2}$ ὑάρδαι μὲ πόσους μικροὺς πήχεις (ἐνδεζὲ) ἰσοδυναμοῦσιν;

6) $372\frac{5}{8}$ μικροὶ πήχεις μὲ πόσας ὑάρδας ἰσοδυναμοῦσιν;

7) 872 ἀρσὶν (Ῥωσσίας) πόσα μέτρα κάμνουσιν;

8) Ἀπόστασις ἐξ 845 ναυτικῶν μιλίων πρὸς πόσα χιλιόμετρα ἰσοδυναμεῖ;

9) 843,540 χιλιόμετρα πόσα ναυτικὰ μίλια κάμνουσι;

10) 2458 Ἀγγλ. μίλια πόσα χιλιόμετρα κάμνουσι;

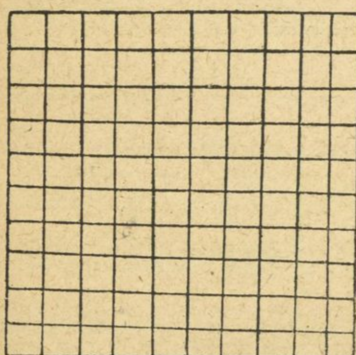
11) 3475 βέρστια πόσα χιλιόμετρα κάμνουσι;

12) 458 Ἀγγλ. μίλια πόσα βέρστια κάμνουσι;

Μονάδες ἐπιφανείας.

188. α') Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.—Τοιαύτη εἶναι ἡ λαμβανομένη ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ βασιλικοῦ πήχεως ἢ μέτρου.

Ἀρχικὴ μονὰς πρὸς μέτρησιν ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, ἤτοι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἓν μέτρον. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν παλάμην καὶ καλεῖται τετραγωνικὴ παλάμη ἢ τετραγωνικὸν ὑποδεκάμετρον. Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου γίνεται, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 1.



Σχῆμα 1.

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται ὁμοίως εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕνα δάκτυλον καὶ καλεῖται τετραγωνικὸς δάκτυλος ἢ τετραγωνικὸν ὑφεκατόμμετρον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ τετραγ. δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν γραμμὴν καὶ καλεῖται τετραγωνικὴ γραμμὴ ἢ τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον.

ΣΗΜ.—Δεξιᾷ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ παριστῶντος ἐπιφάνειαν μετρηθεῖσαν διά τινος μονάδος, γράφομεν καὶ ἓν μικρὸν τ. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον παρίσταται καὶ μ^2. π. χ. 7 μ^2 ἢ 7 τ. μ.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων καταφαίνεται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι.

1 τ.μ. = 100 τ. παλ.	= 10000 τ. δ.	= 1000000 τ. γραμ.	
1 τ. παλ.	= 100 τ. δ.	= 10000 τ. γραμ.	
	1 τ. δ.	= 100 τ. γραμ.	

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι 1 τ. π. εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετραγ. μέτρου καὶ 1 τ. δ. τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τετραγ. μέτρου καὶ 1 τ. γρ. τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τετραγ. μέτρου.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν ὡς μονὰς χρησιμεύει παρ' ἡμῖν α') τὸ βασιλικὸν στρέμμα, τὸ ὁποῖον ἔχει 1000 τ. μ. καὶ εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 31,62 μ. περίπου, καὶ β') τὸ παλαιὸν στρέμμα, ὅπερ εἶναι ἴσον πρὸς 1,27 βασ. στρέμ. ἢ 1270 τ. μ.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἔτι μεγαλυτέρων ἐπιφανειῶν, ὡς νομῶν, χωρῶν κτλ., χρησιμεύει τὸ τετραγ. χιλιόμετρον, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς 1000 μέτρα καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσον πρὸς 1.000.000 τ. μ. ἢ 1000 βασ. στρέμματα.

Εἰς τὰ κράτη τῆς Εὐρώπης, ἅτινα παρεδέχθησαν τὸ Γαλλικὸν μέτρον, διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἀγρῶν χρησιμεύει ὡς μονὰς τὸ ἄριον (are), ὅπερ εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 10 μ., ἤτοι ἴσον πρὸς 100 τ. μ., καὶ ἔτι συνηθέστερον τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ ἑκτάριον ἰσοδυναμοῦν μὲ 100 ἄρια. Ἑπομένως τὸ ἑκτάριον περιέχει 10000 τ. μ. ἢ 10 βασ. στρέμματα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ καὶ ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις χρησιμεύει τὸ ἄκρον, ἴσον πρὸς 40,5 ἄρια περίπου.

β') **Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.**— Τοιαύτη μονὰς εἶναι ὁ τετραγ. τεκτονικὸς πῆχυς, ἤτοι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν, ἤτοι ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου. Χρησιμεύει ἰδίως ἡ μονὰς αὕτη πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Προβλήματα.

1) Νὰ τραπῶσι 245,837 τ. μέτρα εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις.

2) Ἀγρός τις ἔχει ἔκτασιν 452,87 ἑκτάρια. Μὲ πόσα βασιλικὰ στρέμματα ἰσοδυναμεῖ ἡ ἔκτασις αὕτη;

3) 15,87 βασ. στρέμματα μὲ πόσα ἑκτάρια ἰσοδυναμοῦσι;

4) Ἡ ἔκτασις τῆς Π. Ἑλλάδος εἶναι 66811,8 τ.χιλιόμ.Πόσων βασιλικῶν στρεμμάτων εἶναι ἡ ἔκτασις αὕτη καὶ πόσων ἑκταρίων;

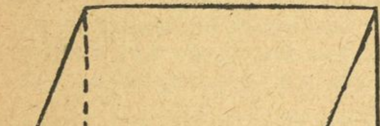
5) Ἡ ἔκτασις τῆς Ν. Ἑλλάδος μόνης εἶνε 55316,4 τ. χιλιόμ. καὶ τῆς Θράκης 28,628 τ. χιλιόμ. α) Πόση εἶνε ἡ ἔκτασις τῆς ὅλης Ἑλλάδος (1920); β) Πόσων στρεμμάτων βασιλικῶν εἶνε αὕτη;

6) Ἀγρὸς ἐκτάσεως 15,8 ἄκρων μὲ πόσα βασιλ. στρέμματα ἰσοδυναμεῖ;

7) Χωρικὸς καταμετρήσας ἄμπελον εὗρεν αὐτὴν 5 $\frac{3}{5}$ παλαιὰ στρέμματα. Ἐκ πόσων βασ. στρεμμάτων ἀποτελεῖται αὕτη;

Μονάδες ὄγκου καὶ χωρητικότητος.

189. α′) Μονάδες μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.— Ὡς ἀρχικὴ μονὰς ὄγκου λαμβάνεται τὸ κυβικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα εἶναι ἴση πρὸς 1 τ. μ. ἢ ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς 1 μ.



Σχῆμα 2.

Τὸ κυβικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ἴσους κύβους, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς μίαν παλάμην καὶ καλεῖται κυβικὴ παλάμη ἢ κυβικὸν ὑποδεκάμετρον.

Ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη γίνεται, ὡς δεικνύει τὸ παραπλεύρως σχῆμα 2. Ἡ κυβικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς 1000 κύβους, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς ἕνα δάκτυλον καὶ καλεῖται κυβικὸς δάκτυλος ἢ κυβικὸν ὑφεκατόμετρον.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων καταφαίνεται ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι·

(¹) 1 κ. μ.	=	1.000 κ. παλ.	=	1.000.000 κ. δάκ.
		1 κ. παλ.	=	1.000 κ. δάκ.

(¹) ΣΗΜ.—Τὸ κ. μ. παρίσταται καὶ οὕτω $μ^3$, ὡς λ. χ. 8 κ. μ. ἢ 8 $μ^3$.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ἡ 1 κ. πάλ. εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. μέτρου
αἱ ὁ 1 κ. δάκτ. τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κ. μέτρου.

ΣΗΜ.—Πρὸς μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου εἶναι ἀνάγκη, ὡς μᾶς διδάσκει ἡ Γεωμετρία, νὰ μετρήσωμεν εὐθείας τινὰς καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ εὕρωμεν πόσα τετρ. μέτρα ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ πόσα κ. μέτρα ἔχει τὸ στερεόν· εὑρίσκονται δὲ ταῦτα διὰ καταλλήλων ὑπολογισμῶν. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι αἱ ἀνωτέρω μονάδες ἐπιφανείας καὶ ὄγκου δὲν εἶναι πραγματικαί, ἀλλὰ χρησιμεύουσιν ὡς βάσεις τῶν ὑπολογισμῶν τῆς καταμετρήσεως καὶ διὰ τοῦτο καλοῦνται θεωρητικαί.

β') Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.—Τοιαύτη εἶναι ὁ κυβικὸς τεκτονικὸς πῆχυς, ὅστις εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς 1 τεκτονικὸν πῆχυν.

Ἡ μονὰς αὕτη χρησιμεύει πρὸς καταμέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν τοίχων τῶν οἰκοδομῶν ἢ τῶν πρὸς οἰκοδομὴν λίθων. Εἶναι δὲ οὗτος ἴσος πρὸς $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$ τοῦ κυβ. μέτρου.

190. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς χωρητικότητος λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ λίτρα, ἤτοι ὁ χῶρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης, καὶ χρησιμεύει κατ' ἐξοχὴν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

Ἡ χωρητικότης 100 κυβικῶν παλαμῶν ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον ἑκατόλλιτρον (μετρικὸν κοιλόν), ὅπερ χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν.

Παρ' ἡμῖν καὶ ἐν Τουρκίᾳ διὰ τοὺς δημητριακοὺς καρποὺς χρησιμεύει ὡς μονὰς τὸ κοιλὸν τῆς Κων)πόλεως (σταμπόλ), ἴσον πρὸς 35,37 λίτρας, διὰ δὲ τὰ ὑγρὰ ἡ μετρικὴ ὀκᾶ [1]. Ἐν Ἀγγλίᾳ μεταχειρίζονται διὰ τὰ σιτηρὰ τὸ αὐτοκρατορικὸν κουάρτερ, ἴσον πρὸς 2,91 ἑκατόλλιτρα, ὅπερ ὑποδιαιρεῖται εἰς 8 μπούσελ.

Εἰς δὲ τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μεταχειρίζονται τὸ μπούσελ, ἴσον πρὸς 35,23 λίτρας.

Ἐν Ῥωσσίᾳ τὴν ψάθαν (τσέτβερτ), ἴσην πρὸς 2,18 ἑκατόλλιτρα.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς χωρητικότητος τῶν πλοίων λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ τόννος τῶν πλοίων, ἴσος πρὸς 2,83 κ. μέτρα.

Προβλήματα.

1) 347,832 κυβ. μέτρα μὲ πόσους κυβ. πήχεις ἰσοδυναμοῦσι;
2) 845,3724 κυβ. μέτρα μὲ πόσους κυβ. τεκτ. πήχ. ἰσοδυναμοῦσι;

[1] Ἡ μετρικὴ ὀκᾶ εἶναι ἡ χωρητικότης δοχείου, ἐν τῷ ὁποίῳ χωρεῖ 1 ὀκᾶ βάρους ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ.

3) 1324,7 λίτραι σίτου α΄) μὲ πόσα Ἀγγλικὰ μποῦσελ; β΄) μὲ πόσα Ἀμερικανικὰ μποῦσελ; γ΄) μὲ πόσα κοιλὰ Κωνσταντινουπόλεως ἰσοδυναμοῦσι;

4) 2483,32 ἑκατόλλιτρα κριθῆς μὲ πόσα κουάρτερ ἰσοδυναμοῦσι;

5) Πλοῖόν τι μετέφερεν ἐκ Ταϊγανίου εἰς Πειραιᾶ 4583 ψάθας σίτου. Πόσων κοιλῶν Κωνσταντινουπόλεως εἶναι ὁ σῖτος οὗτος;

6) Ἐμπορικόν τι πλοῖον ἔχει χωρητικότητα 8452 τόννων. Μὲ πόσα κυβικὰ μέτρα ἰσοδυναμεῖ ἡ χωρητικότης αὕτη;

Μονάδες βάρους.

191. α΄) Μονάδες μετὰ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἶναι τὸ χιλιόγραμμον, ἤτοι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ ἐντὸς τῆς κυβικῆς παλάμης.

Τὸ χιλιόγραμμον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ἴσα μέρη, ἅτινα καλοῦνται γραμμάρια, διὰ τοῦτο ὀνομάζεται καὶ χιλιόγραμμον.

Τὸ γραμμάριον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κ, ὅπερ χωρεῖ εἰς τὸν κ. δάκτυλον. Πολλαπλάσιον τοῦ χιλιογράμμου σύνηθες ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ὁ μετρικὸς στατήρ, ἴσος πρὸς 100 χιλιόγραμμα, καὶ ὁ μετρικὸς τόννος, ἴσος πρὸς 1000 χιλιόγραμμα ἢ πρὸς 10 μετρικοὺς στατῆρας.

Ἰδοὺ ἡ μεταξὺ τῶν μονάδων τούτων σχέσις.

1 μ. τόν. = 10 μ. στατ. =	1000 χιλιογρ. =	1000000 γραμμάρια.
1 μ. στατ. =	100 χιλιογρ. =	100000 γραμμάρια.
	1 χιλιογρ. =	1000 γραμμάρια.

β΄) Μονάδες ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Τοιαύτη εἶναι ἐν μεγίστῃ χρήσει παρ᾽ ἡμῖν ἡ Τουρκικὴ μονάς, ἡ σταθμικὴ ὀκᾶ, ἥτις ὑποδιαιρεῖται εἰς 400 δράμια, καὶ πολλαπλάσιον αὐτῆς ὁ στατήρ, ἴσος πρὸς 44 ὀκ. Ἡ ὀκᾶ ἰσοῦται πρὸς 1280 γραμμάρια.

Ἐν τῇ φαρμακευτικῇ εἶναι ἐν χρήσει παρ᾽ ἡμῖν αἱ ἑξῆς μονάδες· ἡ φαρμακευτικὴ λίτρα, ἴση πρὸς 360 γραμ. ἢ 112 $\frac{1}{2}$ δράμια. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 οὐγγίας· αὕτη πάλιν εἰς 8 δραχμὰς καὶ ἡ δραχμὴ εἰς 3 γράμμα καὶ τέλος τὸ γράμμον εἰς 20 κόκκους.

ΣΗΜ. — Διὰ τὴν στάθμησιν τῆς σταφίδος ἐν Πελοποννήσῳ μεταχειρίζονται τὸ χιλιόλιτρον ἴσον πρὸς 1000 Ἐνετικὰς λίτρας, ἐξ ὧν ἑκάστη ἰσοδυναμεῖ πρὸς 150 δράμια ἢ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς περίπου.

Ἐν δὲ τῇ Ἑπτανήσῳ εἶναι ἐν χρήσει ἡ Ἀγγλικὴ λίτρα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς βάρους εἶναι ἡ λίτρα, ἴση πρὸς 453,6 γρμ. καὶ ἥτις ὑποδιαιρεῖται εἰς 16 οὐγγίας. Πολλαπλάσια δὲ αὐτῆς εἶναι ὁ Ἀγγλικὸς στατήρ, ἴσος πρὸς 112 Ἀγγλ. λίτρας. Αἱ αὐταὶ μονάδες εἶναι ἐν χρήσει καὶ εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας μὲ τὴν διαφορὰν μόνον, ὅτι ὁ Ἀμερικανικὸς στατὴρ ἔχει 100 Ἀγγλικὰς λίτρας.

Διὰ τοὺς ἀδάμαντας ὡς μονὰς βάρους λαμβάνεται τὸ καράτιον, ἰσοδυναμοῦν πρὸς 0,205 γραμμ. (1).

Προβλήματα.

1) 1 δράμ. μὲ πόσα γραμμάρια ἰσοδυναμεῖ;
2) Νὰ τραπῶσι 360 δράμια εἰς γραμμάρια.
3) 1 γραμμάριον ποῖον μέρος τοῦ δραμίου εἶναι;
4) 1 χιλιόγραμμον πόσα δράμια ἔχει;
5) Νὰ τραπῶσιν 850 γραμμάρια εἰς δράμια.
6) Νὰ τραπῶσιν 28 ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα.
7) Ὁ στατὴρ (44 ὀκ.) πόσα χιλιόγραμμα ἔχει;
8) Ὁ μετρικὸς στατὴρ πόσας ὀκάδας ἔχει;
9) Ὁ μετρικὸς τόννος πόσας ὀκάδας ἔχει;
10) Τὸ χιλιόλιτρον σταφίδος πόσας ὀκάδας ἔχει;
11) 4580 ὀκ. σταφίδος πόσα χιλιόγραμμα κάμνουσι; καὶ β΄ Πόσα χιλιόλιτρα Ἑν.;
12) 85 $\frac{7}{16}$ λίτραι Ἀγγλικαὶ πόσα χιλιόγραμμα κάμνουσι;
13) 45 $\frac{5}{8}$ λίτραι Ἀγγλικαὶ πόσας ὀκάδας κάμνουσι;
14) 8 $\frac{3}{8}$ ὀκ. νὰ τραπῶσιν εἰς Ἀγγλικὰς λίτρας.
15) Ὁ Ἀγγλικὸς στατὴρ πόσα χιλιόγραμμα ἢ πόσας ὀκάδας ἔχει;
16) Ὁ Ἀμερικανικὸς στατὴρ πόσα χιλιόγραμμα ἢ πόσας ὀκάδας ἔχει;
17) 13 $\frac{3}{4}$ στατῆρ. (Τουρκικοὶ) μὲ πόσους Ἀγγλικοὺς ἢ μὲ πόσους Ἀμερικανικοὺς στατῆρας ἰσοδυναμοῦσι;

1) Ἐν Γαλλίᾳ ὡρίσθη τῷ 1909 τὸ μετρικὸν καράτιον ἴσον πρὸς 0,20 γραμ.

18) Πόσα γραμμάρια ἔχει ἡ οὐγγία, πόσα ἡ δραχμή, πόσα τὸ γράμμον;

19) Ἓν γραμμάριον κινίνης πόσους κόκκους ἔχει;

20) 185 κόκκοι κινίνης πόσα γραμμάρια ἀποτελοῦσι;

Μονάδες νομισμάτων.

α΄) *Κράτη Λατινικῆς ἑνώσεως.*—Τὰ διάφορα κράτη ἔχουσι διαφόρους μονάδας νομισμάτων. Τὰ ἑξῆς ὅμως πέντε κράτη, ἡ Ἑλλάς, ἡ Ἑλβετία, ἡ Ἰταλία, ἡ Γαλλία καὶ τὸ Βέλγιον διὰ συμβάσεως καλουμένης Λατινικῆς νομισματικῆς ἑνώσεως, παρεδέχθησαν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ φράγκον, τὸ ὁποῖον ἐν Ἑλλάδι καλεῖται δραχμὴ καὶ ἐν Ἰταλίᾳ λίρα.

Τὸ φράγκον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη καὶ τὸ ἓν ἐκ τούτων ἐκλήθη παρ' ἡμῖν λεπτόν.Τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν μονάδα νομισμάτων ἔχουσι παραδεχθῆ καὶ ἄλλα κράτη, ὡς ἡ Ῥουμανία, ἡ Βουλγαρία, ἡ Σερβία καὶ ἡ Ἱσπανία. Τὸ φράγκον καλεῖται ἐν Ῥουμανίᾳ λέου, ἐν Βουλγαρίᾳ λέβα, ἐν Σερβίᾳ δηνάριον καὶ ἐν Ἱσπανίᾳ πεσέτα.

Τὰ νομίσματα κατασκευάζονται ἐκ διαφόρων μετάλλων, χρυσοῦ, ἀργύρου, χαλκοῦ καὶ νικελίου.Παρ' ἡμῖν εἶναι τὰ ἑξῆς μεταλλικὰ νομίσματα εἰς κυκλοφορίαν.

α΄) Χαλκᾶ. Τὸ μονόλεπτον, τὸ δίλεπτον, ὀβολὸς ἢ πεντάλεπτον, διόβολον ἢ δεκάλεπτον.

β΄) Νικέλινα. Τὸ πεντάλεπτον, δεκάλεπτον, εἰκοσάλεπτον.

γ΄) Ἀργυρᾶ.Τὸ εἰκοσάλεπτον, τὸ πεντηκοντάλεπτον, τὸ μονόδραχμον, δίδραχμον καὶ πεντάδραχμον ἢ τάλληρον.

δ΄) Χρυσᾶ. Τὸ πεντάδραχμον, δεκάδραχμον, εἰκοσάδραχμον ἢ εἰκοσάφραγκον, τεσσαρακοντάδραχμον καὶ ἑκατοντάδραχμον.

Παρατήρ.—Τὰ χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ νομίσματα δὲν κατασκευάζονται ἐκ καθαροῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου, ἀλλ' ἐκ κράματος τούτων μετὰ χαλκοῦ.

192. Τὸ ποσὸν τοῦ καθαροῦ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου, τὸ περιεχόμενον ἐν τῇ μονάδι τοῦ κράματος, καλεῖται τίτλος τοῦ κράματος ἢ βαθμὸς καθαρότητος καὶ ἐκφράζεται συνήθως εἰς χιλιοστά. Εἰς τὰ χρυσᾶ κοσμήματα ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἐκφράζεται εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ἅτινα καλοῦνται καράτια. Εἰς τὰ κράτη τῆς Λατινικῆς ἑνώσεως ὁ τίτλος τῶν

μὲν χρυσῶν νομισμάτων εἶναι 0,900, τῶν δὲ ἀργυρῶν 0,835 πλὴν τοῦ πενταδράχμου, ὅπερ ἔχει τίτλον κράματος 0,900.

Τὸ βάρος τοῦ χαλκίνου πενταλέπτου, ὡς καὶ τοῦ ἀργυροῦ φράγκου, εἶναι 5 γραμμάρια.

Πρὸς εὐκολίαν τὰ πεπολιτισμένα κράτη ἐδέχθησαν ἐκτὸς τῶν μεταλλικῶν νομισμάτων καὶ χάρτινα, ἅτινα καλοῦνται χαρτονομίσματα ἢ τραπεζογραμμάτια. Ἐν Ἑλλάδι κυκλοφοροῦσι τὰ ἑξῆς· $\frac{1}{2}$, 1, 2, 5, 10, 25, 100, 500, 1000, 5000 δραχμῶν.

ΣΗΜ. 1.—Τὸ χρυσοῦν ἢ ἀργυροῦν φράγκον ἔπρεπε νὰ λογαριάζεται πρὸς μίαν δραχμὴν χαρτίνην. Ἀλλ' ἕνεκα διαφόρων λόγων λογαριάζεται ἄλλοτε πρὸς 1,02 δραχ. ἢ 0,99 δραχ. χαρτίνας, ἄλλοτε περισσότερον καὶ ἄλλοτε ὀλιγώτερον.

ΣΗΜ. 2.—Τὰ νομίσματα τῆς Λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως κυκλοφοροῦσιν ἐλευθέρως εἰς τὰ 5 κράτη, ἅτινα μετέχουσι ταύτης. Πρὸ ὀλίγων ἐτῶν ἐν Ἰταλίᾳ ἐψηφίσθη νόμος, καθ' ὃν τὰ Ἰταλικὰ φράγκα καὶ δίφραγκα κυκλοφοροῦσι μόνον ἐντὸς τῆς Ἰταλίας, ἀπαγορευομένης τῆς ἐξαγωγῆς αὐτῶν. Ὅμοιος νόμος ἐψηφίσθη κατὰ τὸ 1908 καὶ ἐν Ἑλλάδι.

β') Ἄλλαι χῶραι.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ λίρα στερλίνα, ἴση πρὸς 25,22 φρ. περίπου, ὑποδιαιρεῖται εἰς 20 σελίνια καὶ τοῦτο εἰς 12 πέννας.

Ἐν Ῥωσσίᾳ εἶναι τὸ ῥούβλιον, ἀργυροῦν νόμισμα, ἔχον ἀξίαν 2,67 φράγκα καὶ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, καλούμενα καπίκια.

Ἐν Ὁλλανδίᾳ εἶναι τὸ φλωρίνιον, ἰσοδυναμοῦν πρὸς 2,12 φρ. περίπου καὶ διαιρεῖται εἰς ἑκατοστά.

Ἐν ταῖς Σκανδιναυϊκαῖς χώραις (Δανίᾳ, Σουηδίᾳ, Νορβηγίᾳ) εἶναι ἡ σκανδιναυϊκὴ κορώνα, ἴση πρὸς 1,39 φράγκ., καὶ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη καλούμενα αἶρε (öre).

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ

Α΄) Μέτρα καὶ σταθμά.

Κράτη, ἐν οἷς εἶναι ἐν χρήσει	*Μονάδες μήκους*	*Μονάδες ἐπιφανείας*
Γαλλία.	Μυριάμετρον. . . . . . =10000 μ.	Τετραγ. μυριάμετρον =100.000.000 τ. μ
Βέλγιον	Χιλιόμετρον . . . . . . = 1000 μ.	Τετραγ. χιλιόμετρον = 1.000 000 τ. μ
Ἑλβετία. . . .	Ἑκατόμμετρον . . . . = 100 μ.	Ἑκτάριον. . = 10.000 τ. μ
Γερμανία . . .	Δεκάμετρον . . . . . = 10 μ.	Ἄριον. . . . = 100 τ. μ
Αὐστρία	Μέτρον ἀρχικὴ μονὰς = 1 μ.	Τετραγ. μέτρ. = 1 τ. μ
Ἰσπανία. . . .	Ὑποδεκάμετρον . . . = $\frac{1}{10}$ μ.	Τετραγ. ὑποδεκάμετρον = $\frac{1}{100}$ τ. μ
Ῥουμανία. . .		
Βουλγαρία. . .	Ὑφεκατόμετρον. . . . = $\frac{1}{100}$ μ.	Τετραγ. ὑφεκατόμμετρον = $\frac{1}{10.000}$ τ. μ
Σερβία.		
Τουρκία. . . .	Χιλιόμετρον . . . . . . = $\frac{1}{1000}$ μ.	Τετραγ. χιλιοστόμετρον = $\frac{1}{1.000.000}$ τ. μ
Ἑλλάς.		

β) Ἄλλαι

Ἐν χρήσει εἰς τὴν Ἑλλάδα	Τεκτονικ. πῆχυς = $\frac{3}{4}$ μ. Πῆχυς ἐμπορικὸς = 0,64 μ. (ἐνδεζὲς) ῥούπιον . . . . . = $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ.	Τετραγ. τεκτον. πήχ. = $\frac{9}{16}$ τ. μ Βασιλ. στρέμμα. . . . =1000 τ. Παλαιὸν στρέμμα . . . =1270 τ.
Ἐν Ἀγγλίᾳ . .	Ἀγγλικὸν μίλιον =1760 ὑαρδ. Ὑάρδα (ἀρχικὴ μονὰς) = 1 ὑάρδ. Πούς. . . . . = $\frac{1}{3}$ ὑάρδ. Δάκτυλος . . . . . = $\frac{1}{36}$ ὑάρδ.	Ἄκρον (διὰ τοὺς ἀγρούς). . . . . . . =40.5 ἀρι Τετραγ. ὑάρδα . . . =1 τ. ὑάρ Σημ.– Ἐκ τῆς μονάδος μήκο προσδιορίζονται αἱ μονάδες ἐπι φανείας καὶ ὄγκου.
Ἐν Ῥωσσίᾳ .	Ἀρσὶν . . . . =0,711 μ. Ἀγγλικὸς πούς. . =0,305 μ. Βέρστιον . . . . . . =1500 ἀρσὶν	Τετραγωνικὸς πούς.

Β΄) Μονάδε

Κράτη ἔχοντα τὰς μονάδας τῆς Λατ. Νομ. Συμβ.	*Ἀγγλία*	*Γερμανία*	*Σκανδιναυϊκαὶ χῶραι*	*Ὀλλανδί*
Βέλγ. Γαλ. Ἑλβετία φράγ. Ἑλλάς: Δραχμή Ἰταλία: Λίρα Ῥουμανία: Λέου Βουλγαρία: Λέβα Σερβία: Δηνάριον Ἰσπανία: Πεσέτα	Λίρ. στερλ. = φρ. χρ. 1 £ =25,22 Σελίνιον = $\frac{1}{20}$ £ Πέννα = $\frac{1}{12}$ σελ.	φρ. Μάρκον 1 μάρκ. = 1,23 1 πφένιχ. = $\frac{1}{100}$ μάρκ.	Κορώνα = 1 κ. =1,39 φρ. Αἶρε = $\frac{1}{100}$ τῆς κρ.	φλωρίνιον = 1 φλ. =2,1 ὑποδιαιρεῖτ εἰς ἑκατοστ

α') Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

Μονάδες ὄγκου	*Μονάδες χωρητικότητος*	*Μονάδες βάρους*
Κυβικὸν χιλιόμετρ. = 1.000.000.000. κ. μ. Κυβικὸν μέτρον = 1 κ.μ. Κυβικὸν ὑποδεκάμετρον = $\frac{1}{1000}$ κ. μ. Κυβικὸν ὑφεκατόμετρον = $\frac{1}{1000000}$ κ.μ Κυβ. χιλιοστόμετρον = $\frac{1}{1000000000}$ κμ.	Ἑκατόλλιτρον ἢ μετρικὸν κοιλὸν διὰ τὰ σιτηρὰ = 100 λίτρ. Λίτρα = 1 λίτρ. Χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης.	Μετρικ. τόννος = 1000 χλγ. Μετρικ. στατὴρ = 100 χλγ. Χιλιόγραμμον = 1 χλγ. Γραμμάριον = $\frac{1}{1000}$ χλγ.

μονάδες.

Κυβ. τεκτ. πῆχυς = $\frac{27}{64}$ κ. μ.	Κοιλὸν Κων)πόλεως (σταμπόλι) = 35,37 λ.	Στατὴρ = 44 ὀκ. Ὀκᾶ (ἀρχικὴ μονάς) = 1 ὀκ. Δράμιον = $\frac{1}{400}$ ὀκ. Χιλιόλιτρον (διὰ τὴν σταφίδα) = 375 ὀκ. Ἀγγλ. λίτρ. ἐν Ἑπτανήσῳ) = 453,6 γμ.
Κυβικὴ ὑάρδα = 1 κ. ὑάρδα	Αὐτοκρ. κουάρτερ = 2,91 ἑκατόλ. Μποῦσελ = $\frac{1}{8}$ κουάρτερ Τόννος τῶν πλοίων = 2.83 κ. μ.	Ἀγγλικὸς στατὴρ = 112 λ. Ἀγγλικὴ λίτρα (ἀρχ. μον.) = 1 λ. = γρ. 453,6 Οὐγγία = $\frac{1}{16}$ λ.
Κυβικὸς ποῦς	Ψάθα = 2,18 ἑκατόλ.	

νομισμάτων

Πορτογαλλία	*Αὐστρία*	*Ῥωσσία*	*Τουρκία καὶ Αἴγυπτος*	*Ἡν. Πολιτεῖαι*
Μιλρέϊς = 1 μιλ. = 5,55 φρ. Ρέϊς = $\frac{1}{1000}$ τοῦ μίλρ.	Κορῶνα = 1 κ. = 1,05 φρ. Χέλλερ − $\frac{1}{100}$ κρ.	Ῥούβλιον = 1 ρούβλ. = 2,67 φ. Καπίκιον = $\frac{1}{100}$ ρούβλ.	τὸ γρόσιον = $\frac{1}{100}$ τῆς Τουρ. λίρ. 1 λ. = 22.80 φρ. Τὸ Αἰγυπτ. γρόσ. = $\frac{1}{100}$ τῆς Αἰγυπτ. λίρ. = 0,26 φ.	Δολλάριον = 1 Δ. = 5,18 φρ. τσὲνς = $\frac{1}{100}$ δλ.

Ἐν Πορτογαλλίᾳ εἶναι τὸ μιλρέϊς, ἴσον πρὸς 5,55 φράγκα καὶ διαιρεῖται εἰς 1000 ρέϊς.

Ἐν Γερμανίᾳ εἶναι τὸ μάρκον, ἴσον πρὸς 1,23 φράγκα περίπου, καὶ διαιρεῖται εἰς 100 πφένιχ.

Ἐν Αὐστρίᾳ εἶναι ἡ κορώνα, ἴση πρὸς 1,05 φρ., καὶ διαιρεῖται εἰς 100 χέλλερ ἢ καὶ τὸ διπλάσιον αὐτῆς τὸ φιορίνιον, διαιρούμενον εἰς 100 κρόϊτσερ. Ἐν Τουρκίᾳ καὶ ἐν Αἰγύπτῳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ γρόσιον, ὅπερ διαιρεῖται εἰς 40 παράδες. Νομίσματα εἰς κυκλοφορίαν ἐν Τουρκίᾳ εἶναι ἐκ χρυσοῦ μὲν ἡ Τουρκικὴ λίρα, ἴση πρὸς 22,80 φράγκ τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς, τὸ πεντόλιρον, ἐξ ἀργύρου δὲ τὸ μετζίτιον, ἴσον πρὸς 4,30 φράγκα περίπου, τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, τὸ δίγροσον καὶ τὸ γρόσιον. Ἡ Τουρκικὴ λίρα ἔχει 100 γρόσια χρυσᾶ, συνήθως ὅμως ὑπολογίζεται αὕτη πρὸς 103 γρόσια ἀργυρᾶ ἢ ἀγοραῖα ἢ 108 ἢ 109.

Ἐν Αἰγύπτῳ ἐπίσης κυκλοφοροῦν νόμισμα χρυσοῦν εἶναι ἡ Αἰγυπτιακὴ λίρα, ἴση πρὸς 26 φράγκα. Ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 γρόσια διατιμήσεως ἢ 200 γρόσια ἀγοραῖα.

Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις εἶναι τὸ δολλάριον, ἴσον πρὸς 5,18 φράγκα, καὶ διαιρεῖται εἰς 100 σέντς.

Προβλήματα.

1) 245,60 φράγκα μὲ πόσας δραχμὰς ἰσοδυναμοῦσιν, ὅταν 1 φρ.=0,99 δραχ.;

2) 1500 δρ. πόσα φράγκα κάμνουσιν, ὅταν 1 φρ.=$0{,}99\frac{3}{4}$ δρχ. ;

3) Πόσας δραχμὰς κάμνουσιν αἱ $845\frac{1}{4}$ Ἀγγλικαὶ λίραι, ὅταν 1 Ἀγγλ. λίρ. =25,27 δραχ.;

4) Πόσα φράγκα κάμνουσιν αἱ $1258\frac{3}{4}$ Ἀγγλ. λίρ.;

5) Πόσα φράγκα κάμνουσι τὰ 245,45 μάρκα ;

6) Πόσα φράγκα κάμνουσι τὰ 458,40 δολλάρια ;

7) Πόσα φράγκα κάμνουσι τὰ 1245,675 μιλρέϊς;

8) Πόσα φράγκα κάμνουσι τὰ 1458,35 ρούβλια ;

9) Πόσας Ἀγγλ. λίρας δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 12458,60 δραχ.; (1 λίρ.=25,10 δραχ.). (Ἀπ. λίρ. 496,358 περίπου).

10) Πόσας δραχμὰς κάμνουσιν 145,40 μάρκα; (1 φρ.=$0{,}99\frac{1}{2}$ δρχ.). (Ἀπ. 177,95 περ.).

11) Πόσας λίρας Τουρκίας θ' ἀγοράσωμεν μὲ 2458,40 δραχμάς; (1 λίρ. Τουρ.=22,75 δρ.). ('Απ. 108,06 περ.).

12) Πόσας δραχμὰς κάμνουσι 548,35 δολλάρια; (1 φρ. 0,99 $\frac{3}{8}$ δραχμάς). ('Απ. 2822,70 δραχ.).

13) 745 φιορίνια (Ὁλλανδικὰ) πόσας δραχμὰς κάμνουσι; (1 φρ.= 1,02 δραχ.). ('Απ. 1610,988 δραχ.).

14) 245,75 κορῶναι (Αὐστριακ.) πόσας δραχ. κάμνουσι; (1 φρ.= 0,99 δραχ.). ('Απ. 255,45 δραχ.).

15) 453,60 κορῶναι (Σκανδιναυϊκαὶ) πόσας δραχ. κάμνουσι; 1 φρ.= 0,99 δραχ.). ('Απ. 624,20 δρχ.).

16) 843,85 Ἰταλικαὶ λίραι πόσας δραχ. κάμνουσι; (1 φρ.=1,02 δραχμάς). ('Απ. δρχ. 860,727).

17) Μὲ τιμὴν τοῦ φράγκου 0,995 δραχ. πόσας δραχμὰς μᾶς κάμνουσι α') 448,40 λέϋ, β') 248,40, λέβι, γ') 752,80 δηνάρια, δ') 1245,875 μιλρέϊς, ε') 1583,40 πεσέται, ς') 3258,40 ρούβλια;

('Απ. 446,15· 247,15· 749,04· 6880,03· 1575,48· 8656,43).

18) Μὲ τιμὴν τοῦ φράγκου 1,03 δραχ. καὶ μὲ ποσὸν 12425,50 δραχ. α') πόσα λέϋ, β') πόσα ρούβλια, γ') πόσας πεσέτας, δ') πόσα δολλάρια ἀγοράζομεν; ('Απ. 12063,59· 4518,20· 12063,59· 2338,87).

19) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ Τουρκικὸν ἢ Αἰγυπτιακὸν γρόσιον (τὸ χρυσοῦν); ('Απ. 0,228 φρ., 0,26 φρ.).

20) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ ἀγοραῖον Αἰγυπτιακὸν γρόσιον; (1 λίρ. Αἰγ.=200 γρ. ἀγορ.). ('Απ. 0,13).

21) Πόσα ἑκατοστὰ τοῦ φράγκου ἔχει τὸ ἀγοραῖον γρόσιον Τουρκίας α') μὲ λίραν Τουρκ. 103 γροσίων, β') 108 γροσ., γ') 109 γροσίων;

('Απ. 0,22 $\frac{14}{103}$ φρ., 0,21 $\frac{1}{9}$ φρ., 0,20 $\frac{100}{109}$ φρ.).

Μονάδες χρόνου.

193. Ἀρχικὴ μονὰς χρόνου εἶναι τὸ ἡμερονύκτιον, ὅπερ ὑποδιαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἡ δὲ ὥρα εἰς 60 πρῶτα λεπτά, ἅτινα σημειώνονται 60′ ἢ κάλλιον 60 π., ἕκαστον δὲ πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 δεύτερα λεπτά, ἅτινα σημειώνονται 60″ ἢ 60 δ.

Ὅθεν ἡ ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας, τὸ 1π. τὸ $\frac{1}{1440}$ τῆς ἡμέρας, καὶ τὸ 1 δ. τὸ $\frac{1}{86400}$ τῆς ἡμέρας.

Πολλαπλάσια τῆς ἀρχικῆς μονάδος εἶναι ὁ μὴν καὶ τὸ ἔτος.

Τὸ ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας.

Κυρίως τὸ ἔτος ἀποτελεῖται ἐκ $365\frac{1}{4}$ ἡμερῶν περίπου, ἀλλ' ἵνα ἀποτελῆται ἐξ ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἡμερῶν, παραλείπομεν τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ἡμέρας, ὅπερ εἰς 4 ἔτη ἀποτελεῖ μίαν ἡμέραν, προστιθεμένην εἰς πᾶν τέταρτον· τὸ ἔτος τοῦτο ἔχον 366 ἡμέρ. καλεῖται **δίσεκτον** καὶ ἡ προστιθεμένη εἰς αὐτὸ ἡμέρα **ἐμβόλιμος**, τὰ δὲ λοιπὰ καλοῦνται **κοινά**.

Δίσεκτα ἔτη εἶναι τὰ διαιρετὰ διὰ τοῦ 4, ὡς τὸ 1908,1912,1920 κτλ.

Τὸ ἔτος ὑποδιαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, καὶ ἄλλοι μὲν τούτων ἔχουσι 31 ἡμέρας, ἄλλοι δὲ 30 ἡμ. καὶ ὁ Φεβρουάριος 28 κατὰ τὰ κοινὰ καὶ 29 κατὰ τὰ δίσεκτα, διότι εἰς αὐτὸν προστίθεται ἡ ἐμβόλιμος ἡμέρα.

Εὑρίσκομεν τίνες μῆνες ἔχουσι 31 ἡμ. καὶ τίνες 30 ὡς ἑξῆς:

Ἰούλιος	7	1	Ἰανουάριος, Αὔγουστος
Ἰούνιος	6	2	Φεβρουάριος, Σεπτέμβριος
Δεκέμβριος, Μάϊος	5	3	Μάρτιος, Ὀκτώβριος.
Νοέμβριος, Ἀπρίλιος	4		

Γράφομεν ἐν κύκλῳ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 7 καὶ σημειώνομεν παρ' αὐτοὺς τοὺς μῆνας κατὰ τὴν τάξιν των. Ὅσοι μὲν μῆνες γράφονται εἰς περιττοὺς ἀριθμοὺς ἔχουσι 31 ἡμ., οἱ δὲ λοιποὶ 30 ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου.

ΣΗΜ.—Παρὰ τοῖς ἐμπόροις ὁ μὴν λογαριάζεται πρὸς 30 ἡμέρας καὶ τὸ ἔτος πρὸς 360 ἡμέρας· τὸ τοιοῦτον ἔτος καλεῖται *ἐμπορικόν*.

Μονάδες κυκλικῶν τόξων.

194. Διὰ νὰ μετρήσωμεν κυκλικόν τι τόξον, λαμβάνομεν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τόξον τῆς αὐτῆς περιφερείας, ὅπερ εἶναι τὸ $\frac{1}{360}$ αὐτῆς καὶ καλεῖται μοῖρα.

Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη καλούμενα **πρῶτα λεπτὰ** καὶ ἕκαστον πρῶτον εἰς 60 **δεύτερα λεπτά**.

Ἡ μοῖρα παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου (^{0}), ὡς 45^0, ἤτοι 45 μοῖραι, τὸ πρῶτον ($'$), ὡς $50'$, ἤτοι 50 πρῶτα λεπτά, καὶ τὸ δεύτερον λεπτόν($''$), ὡς $25''$, ἤτοι 25 δεύτερα λεπτά.

Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

195. Ἐξ ὅλων τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν, ἐκεῖναι, αἵτινες ἔχουσι δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν καὶ αἵτινες, ὡς εἴδομεν, ἐλήφθησαν

ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ μέτρου, ἀποτελοῦσι τὸ καλούμενον Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει τὸ πλεονέκτημα, ὅτι αἱ μετρήσεις τῶν συνεχῶν ποσῶν διὰ τῶν μονάδων τούτων μᾶς δίδουσιν ὡς ἐξαγόμενα δεκαδικοὺς ἀριθμούς, ὧν αἱ πράξεις γίνονται εὐκόλως.

Οὕτω π. χ., ἂν ὕφασμά τι ἔχῃ μῆκος 8 μετ. 7 παλ. 9 δακ. καὶ 3 γραμ., τὸ μῆκος τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$8\text{ μ.} + \frac{7\text{ μ.}}{10} + \frac{9\text{ μ.}}{100} + \frac{3\text{μ.}}{1000} \text{ ἢ } 8{,}793 \text{ μέτρα.}$$

Ὁμοίως, ἂν ἐπιφάνειά τις ἔχῃ 18 τ μ., 9 τ.παλ., 19 τ.δακ. καὶ 7 τ.γρ., τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$18^{\text{τμ.}} + \frac{9\text{τ.μ.}}{100} + \frac{19\text{τ.μ.}}{10000} + \frac{7\text{ τ. μ.}}{1000000} \text{ ἢ } 18{,}091907^{\text{τ.μ.}}$$

Ἐπίσης, ἂν στερεόν τι περιέχῃ 7 κυβ.μ., 47 κ. παλ. καὶ 358 κ. δακτ., ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$7^{\text{κ.μ.}} + \frac{47\text{κ.μ.}}{1000} + \frac{358\text{ κ.μ.}}{1000000} \text{ ἢ } 7{,}047358 \text{ κ. μέτρα.}$$

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 35 λιτρ. 845 κ.γραμ. γράφεται ὡς ἑξῆς·

$$35^{\text{λ.}} + \frac{845\text{λ.}}{1000} \text{ ἢ } 35{,}845 \text{ λίτραι.}$$

Ὁ 8 χιλιόγ. 452 γραμ. γράφεται 8 χιλ. $+ \frac{452}{1000}$ χιλιόγραμ. ἢ 8,452 χιλιόγραμμα.

Ἡ μέτρησις τῶν συνεχῶν ποσῶν δι' ἄλλων μονάδων μᾶς παρέχει ἄλλους ἀριθμούς, περὶ τῶν ὁποίων πραγματευόμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῶσιν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί:

α') 18 μέτρ. 7 παλ. 6 δακ. 9 γραμ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. μέτρων.
β') 7 μέτρ. 6 παλ. — 3 γραμ. » » » παλαμ.
γ') » » » » » » δακτύλ.
δ') » » » » » » γραμμῶν.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:

α') 18 χιλμ. 65 μέτρ. 7 παλ. 3 γραμ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. χιλιομ.
β') ὁ αὐτὸς » » » μέτρων
γ') » » » » » μυριαμέτρ.

3) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:
α΄) 18 τ. μ. (1) 48 τ. π. 7 τ.δ. 15 τ. γρ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. τ. μ.
β΄) ὁ αὐτὸς » » » τ. ὑφεκατομ.
γ΄) » » » » » τετρ. ὑποδεκαμ.
δ΄) » » » » » τετρ. χιλιοστομ.
4) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:
α΄) 16 κ. μ. (2) 185 κ. π. 48 κ. δ. 7 κ. γ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. κ. μέτρων.
β΄) ὁ αὐτὸς » » » κ. παλ.
γ΄) » » » » » κυβ. ὑφεκμ.
δ΄) » » » » » κυβ. δεκαμ.
5) Ὡσαύτως οἱ ἑξῆς:
α΄) 18 τόν. 485 χιλιόγρ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. τόν.
β΄) 728 χιλιόγρ. 585 γραμ. εἰς » » χιλιογρ.
γ΄) 65 » 17 εἰς » » »
6) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:
α΄) 235 μετ. στατῆρ. 65 χιλιόγρ. 25 γραμ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. μ. στατ.
β΄) ὁ αὐτὸς » » » χιλιογρ.
7) Ὡσαύτως οἱ ἑξῆς:
α΄) 1018 ἑκατολ. 45 λίτρ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. ἑκατολ.
β΄) 5487 » 7 » » » » »
8) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:
α΄) 35 ἑκτάρια 18 ἄρια 25 τετρ. μ. εἰς δεκαδ. ἀριθ. ἑκταρ.
β΄) » » » » » ἀρίων.
γ΄) » » » » » τετρ. μετρ.
δ΄) » » » » » χιλιομ.
ε΄) » » » » » βασ. στρέμ.

Προβλήματα.

Α΄ ὁμάς.

1) Πόσας ὥρας ἔχουσιν 7 ἡμέραι (ἡμερονύκτια);

2) Πόσα πρῶτα λεπτὰ ὑπάρχουσιν εἰς τὰς 24 ὥρας;

3) Πόσα δευτερόλεπτα ὑπάρχουσιν εἰς τὰ 60 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας;

4) Πόσας ἡμέρας ἔχουσι : α) 10 ἔτη, β) 100 ἔτη, γ) 25 ἔτη, δ) 60 ἔτη καὶ ε) 70 ἔτη; (ἔτη κοινά).

5) Πόσας ἡμέρας ἔχουσιν οἱ πολιτικοὶ μῆνες α) Ἰούλιος καὶ Αὔγουστος, β) Δεκέμβριος καὶ Ἰανουάριος, 3) Ἀπρίλιος καὶ Μάϊος, δ) Ὀκτώβριος καὶ Νοέμβριος;

(1) Τὰ 18 τ.μ. γράφονται καὶ οὕτω 18 $μ.^2$ κ.ο.κ.
(2) » 16 κ.μ. » » » 16 $μ.^3$ » » »

6) Πόσας ἡμέρας ἔχει ὁ Φεβρουάριος κατὰ τὰ ἔτη α) 1920, β) 1922‘ γ) 1930, δ) 1932, ε) 2000;

7) Τόξον 15^0 πόσα λεπτὰ πρῶτα περιέχει καὶ πόσα δεύτερα. ;

('Απ. 900′ ἢ 54000′′).

8) 658′′ πόσα πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας κάμνουσι;

('Απ. 10′ καὶ 58′′).

9) Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου πόσας μοίρας ἔχει; β) Πόσα πρῶτα λεπτά, γ) πόσα δεύτερα λεπτά; ('Απ. 360^0 ἢ 21600′ ἢ 129600′′).

Β′ ὁ μ ά ς.

1) Τὸ μέτρον ὑφάσματός τινος τιμᾶται 2,45 δρχ. Πόσον τιμᾶται ὁ μικρὸς πῆχυς; ('Απ. 1,56 δρχ.).

2) Τὸ μέτρον ὑφάσματός τινος στοιχίζει 3.50 φρ. Πόσας δραχ. στοιχίζει ὁ μικρὸς πῆχυς αὐτοῦ; (1 φρ.=0,99 δρ.). ('Απ. 2,22 δρχ.).

3) Ἡ ὑάρδα ὑφάσματός τινος τιμᾶται $5\frac{1}{3}$ σελίνια. Πόσα φρ. τιμᾶται τὸ μέτρον καὶ πόσας δραχ. ὁ μικρὸς πῆχυς; (1 φρ.=$0,99\frac{1}{2}$ δραχ.).

('Απ. 7,35 φρ. τὸ μέτρον, 4,68 δρ. περίπου ὁ μικρὸς πῆχυς).

4) Οἰκόπεδόν τι πωλεῖται πρὸς 12,45 δραχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τετραγ. τεκτ. πήχεως αὐτοῦ;

('Απ. 7,00 δραχ.).

5) Οἰκόπεδόν τι εἶναι ἐκτάσεως 2483,45 τ. μ. Πόσον ἀξίζει τὸ οἰκόπεδον, ἐὰν πωλῆται πρὸς 7,25 τὸν τετραγ. τεκτ. πῆχυν;

('Απ. 32008,90 δρχ.).

6) 'Αγρός τις ἐπωλήθη πρὸς 158,40 δρχ. τὸ βασ. στρέμμα, ἕτερος δὲ πρὸς 1625 δραχ. τὸ ἑκτάριον. Ποῖος ἐπωλήθη ἀκριβότερον καὶ κατὰ πόσας δραχμὰς ἐπωλήθη ἀκριβότερον τὸ βασ. στρέμμα;

('Απ. ὁ β′ ἀγρὸς ἐπωλήθη ἀκριβότερον κατὰ 4,10 δρ. τὸ βασ. στρ.).

7) Ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογρ. βομβυκίων (κουκουλίων) ἐν Μασσαλίᾳ εἶναι 9,45 φράγ. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς δραχμὰς) τῆς ὀκᾶς τοῦ ἐμπορεύματος τούτου; (1 φρ.=1 δραχ.). ('Απ. 12,09 δραχ.).

8) Τὸ κοιλὸν τῆς Κων)πόλεως εἴδους τινὸς σίτου ζυγίζει $19\frac{3}{4}$ ὀκ. Πόσα κοιλὰ κάμνουσι 4583 ὀκ. καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν ἕκαστον κοιλόν, ἐὰν ἡ ὀκᾶ πωλῆται $42\frac{1}{2}$ λεπτά;

('Απ. $232\frac{4}{79}$ κοιλ. $8,39\frac{3}{8}$ δρχ.).

Προβλήματα δεκαδικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀλλαγῆς μονάδος διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Γ΄ τάξει.

1) Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς Ἀγγλικῆς λίτρας ἐλαίου ἐν Ἑπτανήσῳ εἶναι 0,45, ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ τιμὴ κατ' ὀκᾶν;

2) Ἐὰν τὸ χιλιόλιτρον σταφίδος τιμᾶται 145 δραχ., πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ αὐτῆς καὶ πόσον τὸ χιλιόγραμμον;

3) Τὸ μποῦσελ τοῦ σίτου ἐν Ἀγγλίᾳ πωλεῖται πρὸς $6\frac{1}{2}$ σελίνια. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς δραχμὰς) τοῦ κοιλοῦ Κων)πόλεως; (1 σελ.=1,26 δραχ.). ('Απ. 7,96 δραχ.).

4) Ὅταν τὸ ἑκατόλλιτρον σίτου πωλῆται ἐν Γαλλίᾳ πρὸς 18,25 φρ. ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ (εἰς σελίνια) τοῦ κουάρτερ ἐν Ἀγγλίᾳ; ('Απ. 2 λίρ., 2 σελ., 2 πέν. περίπου).

5) Τὸ χιλιόγραμμον τοῦ τείου στοιχίζει 13,75 δραχ. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 1585,40 δραχμάς; ('Απ. $90\frac{7}{88}$ ὀκ.).

6) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 745,68 τ. τεκτ. πήχεων πρὸς 5,65 τὸν τ. τεκτ. πῆχυν καὶ ἐπώλησε τοῦτον βραδύτερον πρὸς 10,25 δραχ. τὸ τ. μέτρον. Πόσον ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη; ('Απ. κέρδος δρ. 87,83 περ.).

7) Εἰς ἕκαστον ὄγκον ἀέρος τὰ 0,21 εἶναι ὀξυγόνον καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἄζωτον. Πόσος ὄγκος ὀξυγόνου καὶ ἀζώτου περιέχεται εἰς δωμάτιον χωρητικότητος 85,245 κυβ. μέτρων; ('Απ. 17,90145 κυβ. μέτρων ὀξυγόνου).

8) Ταξειδιώτης τις ἔχει δέμα, ὅπερ ζυγίζει 24,560 χιλιογρ., καὶ ἓν κιβώτιον βάρους $45\frac{1}{2}$ ὀκ. Ὁ σιδηρόδρομος παρέχει τὸ δικαίωμα εἰς ἕκαστον ἐπιβάτην νὰ φέρῃ μεθ' ἑαυτοῦ μέχρι 30 χιλιογρ. βάρος, χωρὶς νὰ πληρώνῃ ναῦλον· διὰ τὸ ἐπὶ πλέον βάρος πληρώνει $9\frac{1}{2}$ λεπτ. κατὰ χιλιόγραμμον. Πόσον ναῦλον θὰ πληρώσῃ οὗτος; ('Απ. 5,016 δρχ.).

9) Κτηματίας τις ἐπώλησε 14685 ὀκ. σταφίδος πρὸς 135 δραχ. τὸ χιλιόλιτρον. Πόσον εἰσέπραξεν ἐκ τοῦ προϊόντος τούτου καὶ πόσον κερδίζει, ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς ἐτησίας καλλιεργείας ἀνέρχωνται εἰς δραχμὰς 2560; ('Απ. Εἰσέπραξε 5286,60 δραχ., ἐκέρδησεν 2726,60 δρχ.).

10) Μία αὐλὴ ἔχει ἐπιφάνειαν 125,60 τ. μ. καὶ πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ πλακῶν, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει ἐπιφάνειαν 0,7835 τ. μ. α΄) Πόσαι τοιαῦται πλάκες θὰ χρειασθῶσι καὶ β΄) πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ πλακόστρωσις

τῆς αὐλῆς, ἐὰν συμφωνηθῇ πρὸς 4,35 δραχ. τὸ τετραγ. μέτρον;
('Απ. 160,30 πλάκες· θὰ στοιχίσῃ 546, 36 δραχ.).

11) Πρόκειται νὰ κτισθῇ τοῖχος 85,45 κυβ. μέτρων διὰ πλίνθων ὀπτῶν (τούβλων), ἐξ ὧν ἕκαστος ἔχει ὄγκον 85 κυβ. δακτύλων. α') Πόσαι πλίνθοι θὰ χρειασθῶσι καὶ β') πόση θὰ εἶναι ἡ ἀξία αὐτῶν πρὸς 28 δραχ. τὴν χιλιάδα; ('Απ. 1005,294 χιλ. 28148,23 δραχ.).

12) Ἁμαξοστοιχία διανύει τὴν ἀπόστασιν ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Κορίνθου εἰς 3 ὥρας μὲ ταχύτητα 32,45 χιλιομ. καθ' ὥραν, ἀπὸ Κορίνθου μέχρι Πατρῶν εἰς $4\frac{1}{2}$ ὥρας μὲ ταχύτητα 29,5 χιλιομ. καὶ ἀπὸ Πατρῶν μέχρι Πύργου εἰς 4 ὥρας μὲ ταχύτητα 33,4 χιλιομ. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πύργου; ('Απ. 356,325 χιλιόμ.).

13) Ἁμαξοστοιχία τις ἀποτελεῖται ἐκ 2 σιδηροδρ. ἁμαξῶν Αης θέσεως, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι 24 ἐπιβάται, ἐκ 5 ἁμαξῶν Βας θέσεως μὲ 30 ἐπιβάτας εἰς ἑκάστην, ἐξ 8 Γης θέσεως μὲ 35 ἐπιβάτας εἰς ἑκάστην καὶ ἐκ 2 φορτηγῶν μὲ ἐμπορεύματα βάρους 8 τόννων εἰς ἑκάστην. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξῃ ἡ ἁμαξοστοιχία αὕτη δι' ἀπόστασιν 164 χιλιομ., γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕκαστος ἐπιβάτης Αης θέσεως πληρώνει 0,11 δραχ. κατὰ χιλιόμ., τῆς Βας 0,0825 δραχ., τῆς Γης 0,0605 δραχ., τὰ δ' ἐμπορεύματα 0,16 δραχμ. κατὰ τόννον καὶ χιλιόμετρον; ('Απ. 6093,42 δραχ.).

14) Πόλις τις φωτίζεται διὰ 625 φανῶν φωταερίου. Ἕκαστος ἐξ αὐτῶν καταναλίσκει 140 λίτρ. φωταερίου καθ' ὥραν καὶ καίει ἐπὶ $6\frac{1}{2}$ ὥρας κατὰ μέσον ὅρον καθ' ἑκάστην νύκτα. α') Πόσα κυβικὰ μέτρα φωταερίου καταναλίσκονται ἐτησίως καὶ β') πόσον στοιχίζει ἕκαστον κυβικὸν μέτρον φωταερίου, ἐὰν ἡ πόλις πληρώνῃ κατ' ἔτος διὰ τὸν φωτισμὸν 85400 δραχμάς; (ἔτος 365 ἡμέρας).
('Απ. 207593,75 κυβ. μέτρα, στοιχίζει 41 λεπτὰ περίπου τὸ κυβ. μέτ.).

15) Ἓν χιλιόγραμμον χαβιάρι στοιχίζει ἐν Ῥωσσίᾳ 6 ῥούβλια. Ἐὰν ὁ δασμὸς εἶναι 435 δραχ. εἰς τὰς 100 ὀκάδ. καὶ τὰ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 1,15 δραχ. κατ' ὀκᾶν, πόσας δραχμὰς κερδίζει κατ' ὀκᾶν ὁ πωλῶν τὸ χαβιάρι πρὸς 35,60 δρχ. τὴν ὀκᾶν; (1 ῥούβ.=2,67 φρ.).
('Απ. Κερδίζει 9,60 δραχ. κατ' ὀκᾶν περίπου).

16) Σιτέμπορος ἠγόρασεν ἐξ Ἀμερικῆς σῖτον πρὸς 95 τσένς (0,95 δολ.) τὸ Ἀμερικανικὸν μποῦσελ, ἐδαπάνησε δὲ διὰ ναῦλον 2,3 λεπτὰ κατ' ὀκᾶν καὶ διὰ δασμὸν 6,11 λεπτὰ κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν τὸ μποῦσελ

τοῦ σίτου τούτου ζυγίζῃ 21 ὀκ., πόσα λεπτὰ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; (1 δολλάρ.=5,18 δραχ.). ('Απ. 31,84 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν).

17) Ἔμπορός τις ἀγοράσας ἔλαιον ἐξ Ἑλλάδος πρὸς 0,95 δραχ. κατ' ὀκᾶν ἀπέστειλε τοῦτο εἰς Ῥουμανίαν, ἔνθα ἐπωλήθη πρὸς 1,25 λέου κατὰ χιλιόγρ. Ἐὰν τὰ ἔξοδα τῆς μεταφορᾶς καὶ τοῦ δασμοῦ ἀνέρχωνται εἰς 0,10 λέου κατὰ χιλιόγραμμον, πόσας δραχμὰς κερδίζει ὁ ἔμπορος οὗτος κατ' ὀκᾶν; ('Απ. 0,52 δραχ. περίπου).

18) Καπνέμπορος ἀπέστειλεν εἰς Ἀλεξάνδρειαν 15458 ὀκ. καπνοῦ, ὅστις ἐπωλήθη πρὸς 13,5 γρόσια (διατιμήσεως) Αἰγυπτιακ. κατ' ὀκᾶν· ἐγένοντο δὲ καὶ ἔξοδα 36 λίρ. Αἰγυπτ. Πόσας δραχμ. θὰ εἰσπράξῃ οὗτος; (1 λίρ. Αἰγυπτ.=26 δραχ.). ('Απ. 53321,58 δραχ.).

19) Ὑφασματέμπορος ἠγόρασεν ἐξ Ἀγγλίας $145\frac{2}{3}$ ὑάρδ. τσόχας τινὸς πρὸς 5 σελ. τὴν ὑάρδαν, ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον $12\frac{1}{2}$ σελίνια καὶ διὰ δασμὸν 65,75 δραχ. Πρὸς πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὸν μικρὸν πῆχυν, ἵνα κερδίζῃ 0,45 δραχ. κατὰ πῆχυν; (1 σελ. =1,26 δραχ.). ('Απ. 5,25 δραχ.).

20) Ἠγόρασέ τις ἐξ Ἀγγλίας 185 στατ. Ἀγγ. γάδου (βακαλάου) πρὸς 48 $\frac{1}{2}$ σελίνια τὸν στατῆρα, ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον καὶ λοιπὰ 7 $\frac{1}{2}$ σελίνια κατὰ στατῆρα, διὰ δασμὸν 7 $\frac{1}{4}$ λεπτὰ κατ' ὀκᾶν καὶ δι' ἄλλα μικρὰ ἔξοδα 20,45 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; (1 σελ.=1,25 δραχ.). ('Απ. 1,84 δραχ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

196. Ἐὰν μετρήσωμεν τεμάχιόν τι ὑφάσματος διὰ μονάδος τινὸς μὴ ἐχούσης δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, ὡς π. χ. μὲ τὸν μικρὸν πῆχυν, καὶ εὕρωμεν ὅτι περιέχει 5 φορὰς τὸν πῆχυν καὶ ἀκόμη 6 φορὰς τὸ ῥούπιον αὐτοῦ, ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, θὰ εἶναι ὁ ἑξῆς· 5 πήχεις 6 ῥούπια.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος καλεῖται συμμιγής.

Ὁμοίως, ἂν χρονικόν τι διάστημα περιέχῃ 3 ἡμέρας ὁλοκλήρους καὶ 7 ὥρας καὶ ἀκόμη 20π., θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ 3 ἡμ. 7 ὥρ. 20π.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

197. «Συμμιγὴς ἀριθμὸς καλεῖται ὁ συγκείμενος ἐκ πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια ἀρχικῆς τινος μονάδος ἔχουσαι ἴδιον ὄνομα».

Ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐξάγεται, οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι.

ΣΗΜ.—Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελῆται καὶ ἀπὸ ἕνα μόνον ἀριθμόν, ὡς λ. χ. 45 στατ. ἢ 45 στ. 0 ὀκ. 0 δραμ.

198. «*Ἀριθμὸς ἀναγωγῆς* καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν οἱανδήποτε μονάδα ἀνωτέρας τάξεως».

Π. χ. ὁ 24 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τῆς ὥρας καὶ τῆς ἡμέρας (διότι 1 ἡμέρ.=24 ὥρας). Ὁμοίως ὁ 1440 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καὶ τῆς ἡμέρας (διότι 1 ἡμ.=24 ὥρ.$\times$60π.=1440π.).

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 60 εἶναι ἀριθμὸς ἀναγωγῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καὶ τῆς ὥρας (διότι 1 ὥρ.=60 π.).

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ἀναγωγῆς α′) μεταξὺ δραμίου καὶ στατῆρος, β′) μεταξὺ δακτύλου καὶ ὑάρδας, γ′) μεταξὺ δακτύλου καὶ ποδός, δ′) μεταξὺ δευτέρου λεπτοῦ καὶ ἡμέρας, ε′) μεταξὺ λίτρας Ἀγγλ. καὶ στατῆρος Ἀγγλ. κτλ.

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του.

Ἔστω ὁ συμμιγὴς 5ἡμ. 7 ὥρ. 38π. 25δ. νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, ἤτοι εἰς δεύτερα λεπτά.

Ἐπειδὴ 1 ἡμ.=24 ὥρ., ἔπεται ὅτι 5 ἡμ.= 5$\times$24=120 ὥρ.

Ἐὰν εἰς τὰς 120 ὥρας προσθέσωμεν καὶ τὰς 7 ὥρας, λαμβάνομεν 127 ὥρας.

Ἐπειδὴ 1 ὥρ.=60 π., θὰ εἶναι 127 ὥρ.= 60 π. $\times$127 ὥρ.=7620 π. Ἐὰν εἰς τὰ 7620 π. προσθέσωμεν καὶ τὰ 38 π., λαμβάνομεν 7658 π.

Ἐπειδὴ 1 π.=60 δ., ἔπεται ὅτι 7658 π. = 60 δ.$\times$7658=459480 δ. Ἐὰν εἰς ταῦτα προσθέσωμεν καὶ τὰ 25 δ., λαμβάνομεν 459505 δ.

Ὅθεν 5 ἡμ. 7 ὥρ. 38 π. 25δ.=459505 δ.

5 ἡμ. 7. ὥρ. 38 π. 25 δ.
24
120 ὥρ.
7
127 ὥρ.
60
7620 π.
38
7658 π.
60 δ.
459480 δ.
25
459505 δ.

Ὡς παρατηροῦμεν, ὁ δοθεὶς συμμιγὴς τραπεὶς εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του ἐγένετο ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

199. «Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του, προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Τρέπομεν τὰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως πολλαπλασιάζοντες ταύτας ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν ἀναγωγῆς καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ δοθέντος συμμιγοῦς. Τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν τρέπομεν πάλιν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως καὶ εἰς ταύτας προσθέτομεν καὶ τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ συμμιγοῦς· προχωροῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις οὗ προστεθῶσι καὶ αἱ μονάδες τῆς τελευταίας τάξεως τοῦ συμμιγοῦς. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος».

Ἀσκήσεις.

α΄) Ἀπὸ μνήμης.

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως: α) 5 ὀκ. 100 δράμ. β) 5 ὥρ. 40 λ. γ) 8 π. 40 δ. δ) 8 σελ. 4 πέν. ε΄) 7 πηχ. 6 ρούπ. ϛ) 7 λίρ. 8 σελ.

β΄) Γραπτῶς.

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως οἱ συμμιγεῖς: α) 5 λίρ. 18 σελ. 5 πέν. β) 8 ἡμ. 9 ὥρ. 10 π. 20 δ. γ) 145 πηχ. 7 ρουπ. δ) 5 στ. 38 ὀκ. 250 δραμ.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ.

Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἐκ μονάδων τάξεώς τινος, εἶναι δυνατὸν αἱ μονάδες αὗται νὰ εἶναι τοσαῦται, ὥστε νὰ περιέχωσι καὶ μονάδας ἀνωτέρων τάξεων.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς συμμιγῆ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω π. χ. 7852 πεν. Ἐπειδὴ 12 πεν. = 1 σελ., αἱ 7852 πεν. θὰ περιέχωσι τόσα σελίνια, ὅσον εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{7852}{12}$ ἢ 654 σελ. καὶ μένουσιν ὡς ὑπόλοιπον 4 πέν. Ὁμοίως, ἐπειδὴ 20 σελ. = 1 λίρ., τὰ 654 σελ. θὰ περιέχωσι $\frac{654}{20}$ λίρ., ἤτοι 32 λίρας, καὶ θὰ μείνωσι καὶ 14 σελ.

Ὅθεν ὁ δοθεὶς ἀριθ. 7852 πεν.=32 λίρ. 14 σελ. 4 πεν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

7852 πεν.	12	
65	654 σελ.	20
52	54	32 λιρ.
4 πεν.	14 σελ.	

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών.

200. «Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ἐκ μονάδων τάξεώς τινος, εἰς συμμιγῆ, προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς· τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς δοθείσης τάξεως. Τὸ δὲ πηλίκον θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Τοῦτο τρέπομεν καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ προχωροῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες νὰ μὴ περιέχωσι μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τούτων καὶ τὸ τελευταῖον πηλίκον ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον συμμιγῆ ἀριθμόν».

Ἀσκήσεις.

α΄) Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀκέραιοι: α) 48 ρούπ., β) 36 ρούπ., γ) 50 σελίνια, δ) 18 πέν., ε) 75 ἡμέραι, ϛ) 1200 δράμια, ζ) 18 μῆν., η) 27 δάκτυλ. Ἀγγλ.

β) Γραπτῶς:

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἀκέραιοι: α) 3675 πέν., β) 7673 ἡμ., γ) 25647 δευτερόλεπτα ὥρας, δ) 7138 ρούπ.

2) Ὁμοίως τὰ ἑξῆς: α) 37250 δράμια, β) 6725 βοῦσελ Ἀγγλ., γ) 13607 λίτρ. Ἀγγλ.

3) Ὁμοίως 73648΄΄ τόξου κυκλικοῦ.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς μονάδας τάξεώς τινος οὐχὶ τῆς τελευταίας.

Ἔστω ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 στατ. 28 ὀκ. 320 δράμ. νὰ τραπῇ εἰς στατῆρας. Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον θέλομεν νὰ παριστᾷ στατῆρας, τὸ πρῶτον μέρος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ἤτοι οἱ 5 στατ., θὰ μείνωσιν ἀμετάβλητοι. Τὸ δὲ ὑπολειπόμενον μέρος, αἱ 28 ὀκ. καὶ 320 δράμ., εἶναι ἀνάγκη νὰ τραπῇ εἰς κλάσμα στατῆρος· πρὸς τοῦτο τρέπομεν τὸ μέρος τοῦτο εἰς δράμια (§ 199) (28 ὀκ. 320 δρ. = 11520 δράμ.), εἶτα δὲ τρέπομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς στατῆρας διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς (1 στ.=17600 δράμ.), ἤτοι 28 ὀκάδες 320 δραμ.$=\frac{11520}{17600}=\frac{36}{55}$ στατ. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς 5 στατ. 28 ὀκ. 320 δραμ.$=5\frac{36}{55}$στατ.

Ἔστω νῦν ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5 ἡμ. 18 ὧραι 20 π. 40 δ. νὰ τραπῇ εἰς ὥρας.

Ἐν πρώτοις τὸ μέρος 5 ἡμ. 18 ὧρ. τρεπόμενον εἰς ὥρας δίδει 138 ὥρ., τὸ δὲ ὑπολειπόμενον μέρος 20 π. 40 δ. τρεπόμενον εἰς δεύτερα λεπτὰ δίδει 1240 δ. καὶ ταῦτα πάλιν τρεπόμενα εἰς ὥρας διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς (1 ὥρ.=3600 δ.) δίδουσι τὸ κλασμα $\frac{1240}{3600}$ ὥρ. ἢ ἁπλούστερον $\frac{31}{90}$ ὥρ.

Ὅθεν ἔχομεν 5 ἡμ. 18 ὧραι 20 π. 40 δ.$=138\,\frac{31}{90}$ ὥρ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

201. «Διὰ νὰ τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῆ εἰς μονάδας ὡρισμένης τάξεως (οὐχὶ τῆς τελευταίας), προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Τρέπομεν τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ὁρισθείσης (ἂν ὑπάρχωσι τοιαῦται), εἰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὰ δὲ μέρη, ὧν αἱ μονάδες εἶναι μικρότεραι, τρέπομεν πρῶτον εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως καὶ ταύτας ἔπειτα διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς εἰς κλάσμα τῆς ὁρισθείσης μονάδος. Ὁ ἀριθμός, εἰς τὸν ὁποῖον οὕτω τρέπεται ὁ δοθεὶς συμμιγής, εἶναι μικτὸς ἢ κλάσμα».

Παρατ.—Τὸ κλασματικὸν μέρος δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατὰ προσέγγισιν (§ 178) καὶ οὕτως ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς δεκαδικόν· π. χ. νὰ τραπῇ ὁ 8 λίρ. 7 σελ. 10 πεν. εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν λιρῶν. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ ἔχωμεν

8 λίρ. 7 σελ. 10 πέν.$=8\,\frac{47}{120}=8{,}391$ λίρ. (κατὰ προσέγγισιν 0,001).

Δυνάμεθα ὅμως νὰ κάμωμεν τὴν μετατροπὴν ταύτην καὶ συντομώτερον ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ 1 σελ.$=\frac{1}{20}$ λίρ.$=0,05$ λίρ. καὶ 1 πέν.$=\frac{1}{240}=0,004$ λίρ. περίπου, ἀρκεῖ τὸν μὲν ἀριθμὸν τῶν σελινίων νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5, ὅτε εὑρίσκομεν ἑκατοστὰ τῆς λίρας, τὸν δὲ ἀριθμὸν τῶν πενῶν ἐπὶ 4, ὅτε εὑρίσκομεν χιλιοστὰ τῆς λίρας, καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν, ἤτοι

8 λίρ.$=$8 λίρ.
7 σελ.$=0,35$ λίρ. $(7\times5=35)$
10 πέν.$=0,040$ λίρ. $(10\times4=40)$

Ἄρα 8 λίρ. 7 σελ. 10 πέν.$=8,390$ λίρ. περίπου.

Ἀσκήσεις.

α') Ἀπὸ μνήμης:

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς:

α) 5 πήχ. 3 ρούπ. εἰς μικτὸν ἀριθμὸν πήχεων.
β) 8 ὀκ. 250 δράμια εἰς μικτὸν ἀριθμὸν ὀκάδων.
γ) 7 λίρ. 15 σελ. εἰς δεκαδ. ἀριθμὸν λιρῶν.
δ) 3 ὀκ. 200 δράμ. » » » ὀκάδων.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:

α) 2 πήχ. 4 ῥούπ. » » » πήχεων.
β) 150 δράμια » » » ὀκάδων.
γ) 3 ῥούπια » » » πήχεων.
δ) 5 γρόσ. ἀγορ. 30 παράδ. εἰς δεκ. ἀριθ. γροσ. (Τουρκ.).
ε) 15 ὥρ. 40 λεπτ. εἰς συμ. ἀριθ. ὡρῶν.

β') Γραπτῶς:

1) Νὰ τραπῶσιν οἱ ἑπόμενοι συμμιγεῖς.

α) 15 λίρ. 8 σελ. 7 πέν. εἰς δεκαδ. ἀριθ. λιρῶν.
β) 6 ὑάρ. 1. π. 8 δακ. εἰς κλάσμα τῆς ὑάρδας.
γ) 8 στατ. Ἀγγλ. 85 λίτρ. εἰς κλάσμα τοῦ στατῆρος.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:

α) 7 στατ. 8 ὀκ. 250 δράμ. εἰς κλάσμα τοῦ στατῆρος.
β) 17 ἡμ. 15 ὥρ. 18π. 20δ » » τῶν ὡρῶν.

Τροπὴ κλάσματος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{48}{5}$ στατ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

Τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ προφανῶς ὡς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν 48 στατ. διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5. Ἐὰν λοιπὸν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, θὰ εὕρωμεν ὡς πηλίκον 9 στατ. καὶ ὡς ὑπόλοιπον 3 στατ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς ὀκάδας (3×44=132 ὀκ.) καὶ ταύτας διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5. Τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι 26 ὀκάδ., τὸ δὲ ὑπόλοιπον 2 ὀκάδας τρέπομεν εἰς δράμια (2×400=800 δράμ.), ἅτινα διαιροῦμεν διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 160 δράμια.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται οὕτω·

48 στ.	5
3 στ.	9 στ. 26 ὀκ. 160 δρ.
44 ὀκ.	
132 ὀκ.	
2	
400 δράμ.	
800 δραμ.	
0 δράμ.	

ΣΗΜ.—Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος, τὸ πρῶτον πηλίκον εἶναι 0. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τρέπεται καὶ ὁ μικτὸς εἰς συμμιγῆ, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ μόνον τὸ κλασματικὸν μέρος αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

202. «Διὰ νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συμμιγῆ, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον (ὅπερ δύναται νὰ εἶναι καὶ 0) παριστᾷ μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως. Τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως μὲ τὸν νέον διαιρετέον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ κ.ο.κ. προχωροῦμεν, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως».

ΣΗΜ. 1.—Ἂν τυχὸν κατὰ τὴν τελευταίαν διαίρεσιν μείνῃ ὑπόλοιπόν τι, γράφομεν τοῦτο ὡς κλάσμα τῆς μονάδος τῆς τελευταίας τάξεως.

ΣΗΜ. 2.—Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικός, γράφομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ τοῦτο τρέπομεν εἰς συμμιγῆ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Ἐὰν ὅμως πρόκειται περὶ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ Ἀγγλ. λιρ., ὡς λ. χ. 7,478 λίρ., ἡ τροπὴ εἰς συμμιγῆ ἀριθμὸν γίνεται καὶ εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ 0,05 λίρ.=1 σελ., ἕπεται ὅτι τὰ 0,47 λίρ. περιέχουσι σελίνια 0,47 : 0,05, ἤτοι 9 σελίνια καὶ ὑπολείπονται 0,02 ἢ 0,020, ἅτινα μετὰ τῶν 0,008 τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κάμνουσι 0,028 λίρ., τὰ 0,028 λίρ. διαιρούμενα διὰ τοῦ 0,004 δίδουσι πηλίκον 7 πέν. Ὅθεν 7,478 λίρ.=7 λίρ. 9 σελ. 7 πέν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς τροπῆς συμμιγῶν ἀριθμῶν.

1) Νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγεῖς οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί: α΄) $7\frac{3}{4}$ πήχ., β΄) $17\frac{2}{3}$ π.λ. (ὥρας), γ΄) $5\frac{3}{4}$ ὀκ., δ΄) $3\frac{2}{5}$ ὥρ., ε΄) 15,40 λίρ. Ἀγγλ.

2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς : α΄) 33,125 λίρ. Ἀγγλ., β΄) 8,25 ὀκ., γ΄) 17,375 πήχ., δ΄) $\frac{19}{8}$ ἡμ.

3) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς. α΄) $\frac{8}{5}$ στατ., β΄) $\frac{173}{8}$ πήχ.

4) Οἱ ἑξῆς· α΄) $\frac{135}{12}$ ἔτη, β΄) $\frac{11}{30}$ ἔτη, γ΄) 362,3422 ἡμέρ.

5) Νὰ τραπῇ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του :

α΄) ὁ 135 στατ. 8 ὀκ. 150 δραμ., β΄) 18 ἡμ. 9 ὥρ. 45 π., γ΄) ὁ 218 στατ. Ἀγγλ. 18 λίτρ., δ΄) 325 λίρ. 17 σελ. 11 πέν.

6) Οἱ αὐτοὶ εἰς μονάδας τῆς ἀνωτάτης τάξεώς των.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

203. Οἱ πρὸς πρόσθεσιν συμμιγεῖς ἀριθμοὶ πρέπει προφανῶς νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται περίπου ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων. Γράφομεν δηλ. τοὺς συμμιγεῖς προσθετέους τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ τῆς μονάδος τῆς αὐτῆς τάξεως γινόμενοι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως· ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν περιέχῃ καὶ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, γράφομεν αὐτὸ ὡς εὑρέθη· ἂν δὲ περιέχῃ τοιαύτας, ἐξάγομεν ταύτας διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ ἀναγωγῆς καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφομεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

῾Υποτεθείσθω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς·
5 ἡμ. 7 ὥρ. 45 π. + 8 ἡμ. 9 ὥρ. 25 δ. + 5 ὥρ. 30 π. 35 δ. + 10 ὥρ. 15 δ.

Γράφομεν αὐτοὺς ὡς ἑξῆς.

5 ἡμ.	7 ὥρ.	45 π.	
8 ἡμ.	9 ὥρ.	0 π.	25 δ.
	5 ὥρ.	30 π.	35 δ.
	10 ὥρ.	0 π.	15 δ.
14 ἡμ.	8 ὥρ.	16 π.	15 δ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων λεπτῶν εἶναι 75 καὶ περιέχει 1 π. καὶ ὑπολείπονται 15 δ., ἅτινα γράφομεν εἰς τὴν στήλην. ῾Ομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων λεπτῶν εἶναι 76 π. καὶ περιέχει 1 ὥραν καὶ ὑπολείπονται 16 π., ἅτινα γράφομεν εἰς τὴν στήλην αὐτῶν. Προσθέτομεν ἔπειτα τὰς ὥρας λαμβάνοντες ὁμοῦ καὶ τὴν 1 εὑρεθεῖσαν ὥραν καὶ εὑρίσκομεν ἄθροισμα 32 ὥρας, αἵτινες περιέχουσι 1 ἡμέραν καὶ ὑπολείπονται 8 ὧραι, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν στήλην των. Τέλος προσθέτομεν τὰς ἡμέρας λαμβάνοντες ὁμοῦ καὶ τὴν 1 εὑρεθεῖσαν ἡμέραν καὶ γράφομεν ὁλόκληρον τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα εἰς τὴν οἰκείαν στήλην.

᾿Ασκήσεις προσθέσεως συμμιγῶν.

Α') ᾿Από μνήμης·

α') 200 δράμ. + 300 δράμ. = ; β') 5 πήχ. 2 ῥούπ. + 7 πήχ. 4 ῥούπ. = ;
γ') 7 ὀκ. 300 δράμ. + $\frac{1}{2}$ ὀκᾶς = ; δ') 5 πήχ. 1 ῥούπ. + $\frac{3}{4}$ πήχ. = ;
ε') 1 ὀκ. 100 δράμ. + 2 ὀκ. 50 δράμ = ; ς') 8 πήχ. 7 ῥουπ. + 5 ῥούπ. = ;
ζ') 18 ὀκ. 250 δρ. + $\frac{3}{4}$ ὀκᾶς = ; η') 17 ὀκ. 250 δράμ. + $\frac{3}{5}$ ὀκᾶς = ;

Β') Γραπτῶς. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς προσθέσεις·

α') 7 στατ. 28 ὀκ. 350 δρ. + 5 ὀκ. 280 δρ. + 15 στατ. 30 ὀκ. 100 δρ. + $\frac{15}{8}$ στατ. = ;

β') 15 πήχ. 7 ῥούπ. + 25 πήχ. 6 ῥούπ. + $\frac{27}{4}$ πήχ. + 5,25 πήχ. = ;

γ') 17 λίρ. 8 σελ. 10 πέν. + 8,348 λίρ. + $\frac{15}{8}$ λίρ. = ;

Προβλήματα.

1) ῾Η ᾿Εθνικὴ Τράπεζα ἐξέδωκε κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς μηνὸς τὰς ἑξῆς τραπεζιτικὰς ἐπιταγὰς ἐπὶ Λονδίνου (πληρωτέας ἐν Λονδίνῳ)·

α') 317 λιρ. 12 σελ. β') 347 λιρ. 10 σελ. γ') 1005 λιρ. 3 σελ. 1 πέν. δ') 144 λίρ. 14 σελ. 9 πέν. ε') 400 λίρ. ς') 932 λίρ. 10 σελ. 4 πέν. Εἰς πόσον ἀνέρχονται ὁμοῦ αἱ ἐκδοθεῖσαι ἐπιταγαί;

2) Ἠγόρασέ τις ἐξ Ἀγγλίας τὰ ἑξῆς ποσὰ ἐμπορεύματος·

α') 8	στατ.	Ἀγγλ. 85	λίτρ.	ἀντὶ 13	λιρ. 7	σελ. 2	πέν.
β') 32	»	» 15	»	» 50	» 15	» —	»
γ') 20	»	» 100	»	» 35	» 18	» 7	»
δ') 18	»	» 59	»	» 28	» —	» 10	»

Πόσους στατ. καὶ λίτρας τοῖ ἐμπορεύματος τούτου ἠγόρασε, καὶ πόση ἡ ὁλικὴ ἀξία αὐτοῦ;

Ἀφαίρεσις.

204. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· γράφομεν δηλ. τὸν ἀφαιρετέον κάτωθεν τοῦ μειωτέου οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἐκ τῆς αὐτῆς μονάδος γινόμενοι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην καὶ κάτωθεν αὐτῶν σύρομεν εὐθεῖαν ὁριζοντίαν. Ἀρχίζομεν ἔπειτα τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἂν δὲ τύχῃ ὁ ἀριθμὸς τάξεώς τινος τοῦ ἀφαιρετέου νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου, προσθέτομεν εἰς τὸν τελευταῖον τόσας μονάδας τῆς τάξεώς του, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, οὕτω δὲ ἡ ἀφαίρεσις καθίσταται δυνατή· πρέπει ὅμως νὰ προσθέσωμεν 1 μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου (§ 26).

Ἔστω πρὸς ἐφαρμογὴν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Εἶχέ τις 8 λιρ. 7 σελ. καὶ 7 πεν. καὶ ἐδαπάνησε πρὸς ἀγορὰν διαφόρων πραγμάτων 3 λιρ. 12 σελ. καὶ 2 πεν. Πόσα τῷ ἀπέμειναν;

8 λιρ.	7 σελ.	9 πεν.
3 λιρ.	12 σελ.	2 πεν.
4 λιρ.	15 σελ.	7 πεν.

Ἐν πρώτοις ἀφαιροῦμεν τὰς 2 πέννας ἀπὸ τὰς 9 πέννας καὶ εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 7 πέν. Ἐπειδὴ τώρα τὰ 12 σελ. δὲν ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὰ 7 σελ., προσθέτομεν καὶ 20 σελ. (1 λίρ.=20 σελ.) καὶ ἀφαιροῦμεν τὰ 12 ἀπὸ 27 σελ. καὶ εὑρίσκομεν ὡς ὑπόλοιπον 15 σελ. Εἰς τὰς τρεῖς λίρας προσθέτομεν 1 λίρ. καὶ ἐκτελοῦμεν κατόπιν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν λιρῶν.

Ἀσκήσεις.

Α΄. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι ἀφαιρέσεις ἀπὸ μνήμης.
1 ὀκ. 100 δρ.—200 δρ.=; 15 στατ.—28 ὀκ.=;
15 λίρ. 18 σελ.—10 λίρ. 7 σελ.=; 15 πήχ. 7 ῥούπ.—8 πήχ. 2 ῥούπ.=;
5 ὥρ. 20 π.—2 ὥρ. 15 π.=; 3 ὀκ. 200 δράμ.—$\frac{1}{2}$ ὀκᾶς=;

Β΄. Γραπτῶς. Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς ἀφαιρέσεις·
α΄) 7 πήχ. 5 ῥούπ.—3 πήχ. 7 ῥούπ.=;
β΄) 15 στατ.—7 στατ. 35 ὀκ. 250 δρ.=;
γ΄) 5 λίρ. 12 σελ. 7 πέν.—3,248 λίρ.=;

Γ΄. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεταξὺ τῆς 17 Ἀπριλίου 1912 μέχρι τῆς 25 Μαρτίου 1921 χρόνος.

Λύσις.— Τρέπομεν τὰς δύο χρονολογίας εἰς ἰσοδυνάμους συμμιγεῖς καὶ ἔπειτα κάμνομεν ἀφαίρεσιν :

	α) τρόπος			β) τρόπος		
25 Μαρτίου 1921	1920ἔτ.	2μῆν.	25ἡμ.	1921ἔτ.	3μῆν.	25ἡμ.
17 Ἀπριλίου 1912	1911	3	17	1912	4	17
Ὁ μεταξὺ χρόνος	8ἔτ.	11μ.	8ἡμ.	8ἔτ.	11μ.	8ἡμ.

ΣΗΜ.—Ἡ συμφωνία τῶν δύο ἐξαγομένων στηρίζεται εἰς τὴν ἰδιότητα (§ 26) τῆς ἀφαιρέσεως.

Προβλήματα.

1) Τὸ μικτὸν βάρος (βάρος τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τοῦ περικαλύμματος) εἶναι 314 Ἀγγλ. στατ. 94 λίτρ., τὸ δὲ ἀπόβαρον (κ. τάρα) 9 στατ. 105 λίτ. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος;

2) Ἐγεννήθη τις τὴν 23 Ἰουλίου 1875. Ποίαν ἡλικίαν θὰ ἔχῃ τὴν 28 Αὐγούστου 1923;

3) Ἄνθρωπός τις κατὰ τὴν 20 Ἰανουαρίου 1912 εἶχεν ἡλικίαν 25 ἐτῶν, 10 μην. 20 ἡμ. Πότε ἐγεννήθη; β΄) Πότε οὗτος θὰ ἔχῃ ἡλικίαν 40 ἐτ. 8 μην. 10 ἡμ.;

4) Πόσαι ἡμέραι μεσολαβοῦσιν ἀπὸ 8 Σεπτεμβρίου ἑ. ἔ. μέχρι τῆς 31 Δεκεμ. ἰδ. ἔτους; β΄) Πόσαι μέχρι τῆς 10 Ἀπριλίου προσ. ἔτους; γ΄) Πόσαι μέχρι τῆς 8 Σεπτεμ. τοῦ ἰδ. προσ. ἔτους; (ἔτ. πολ.).

5) Πόσος χρόνος μεσολαβεῖ ἀπὸ τῆς 8 ὥρ. 15 π. λ. πρὸ μεσημβρίας τῆς σήμερον μέχρι: α΄) τῆς μεσημβρίας, β΄) τῆς 3 ὥρ. 20 π. λ. μ.μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας, γ΄) μέχρι τῆς 8 ὥρ. 15 π. λ. μ.μ. τῆς ἰδ. ἡμ. δ΄) μέχρι τῆς 2 ὥρ. 40 π. τῆς ἑπομένης πρωΐας;

6) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τὴν ἀγορὰν μιᾶς μερίδος βάμβακος 216 λίρ. 3 σελ. 2 πέν. καὶ εἰς ἔξοδα 13 λίρ. 17 σελ. 8 πέν., μετεπώλησε δὲ αὐτὴν ἀντὶ 302 λιρ. 12 σελ. 9 πεν. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος του;

7) Εἷς ἐμπορορράπτης εἶχε τεμάχιον ὑφάσματος 145 ὑαρδ. 1 ποδ. 10 δακ. καὶ ἐχρησιμοποίησεν ἐξ αὐτοῦ: α΄) 15 ὑάρδ. 2 πόδ. 3 δακ., β΄) 8 ὑάρ. 1 δάκ., γ΄) 25 ὑάρ. 1 πόδ. 7 δρκ., δ΄) 45 ὑάρδ. 2 πόδ. Πόσον ὕφασμα μένει ἀκόμη;

8) Μεγαλέμπορός τις ἠγόρασε τὰ ἑξῆς ποσὰ καφὲ κατὰ τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους.

α΄)	61	σάκ.	βάρους	ἐν	ὅλῳ	75	στατ.	28	ὀκ.	200	δραμ.
β΄)	673	»	»	»	»	783	»	32	»	300	»
γ΄)	458	»	»	»	»	502	»	20	»	100	»
δ΄)	32	»	»	»	»	38	»	20	»	—	

Πόσους σάκκους καὶ πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια καφὲ ἠγόρασεν οὗτος καθ' ὅλον τὸ ἔτος;

9) Ὁ αὐτὸς μεγαλέμπορος ἐπώλησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦ αὐτοῦ ἔτους:

α΄)	252	σάκ.	βάρους	ἐν	ὅλω	373	στατ.	28	ὀκ.	250	δραμ.
β΄)	132	«	»	»	»	142	»	20	»	—	»
γ΄)	372	»	»	»	»	392	»	—	»	100	»
δ΄)	145	»	»	»	»	154	»	25	»	150	»

Πόσοι σάκκοι καφὲ καὶ πόσων στατήρων, ὀκάδων καὶ δραμίων μένουσιν ἐν τῇ ἀποθήκῃ του;

Πολλαπλα)σμὸς καὶ διαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

205. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν συμμιγῶν διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

Α΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος. Β΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα ἢ μικτὸς ἢ δεκαδικός. Γ΄) Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.

206. ***Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.***— Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον,

πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ ἀθροίζομεν τὰ μερικὰ γινόμενα (§ 33).

Ἔστω π.χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 8 ἡμ. 14 ὥρ. 40 π. 25 δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 9.

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ κάτωθεν αὐτοῦ τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ σύρομεν εὐθεῖαν ὁριζοντίαν. Ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὰ 25 δ. Τὸ γινόμενον αὐτῶν 25 δ. ×9=225 δ. περιέχει καὶ πρῶτα λεπτά, ἅτινα ἐξάγομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ 60. Εὑρίσκομεν οὕτω 3 π. καὶ ὑπολείπονται 45 δ., ἅτινα γράφομεν κάτωθεν τῆς γραμμῆς εἰς τὴν στήλην τῶν δευτέρων λεπτῶν. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα 40 π. ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν 360 π. προσθέτομεν καὶ τὰ 3 π. Τὰ 363 π. περιέχουσιν 6 ὥρ. καὶ ἀκόμη 3 π., τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν πρώτων λεπτῶν. Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὰς 14 ὥρας ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 126 ὥρ. προσθέτομεν καὶ τὰς 6 ὥρ. Αἱ 132 ὥρ. περιέχουσι 5 ἡμ. καὶ ἀκόμη 12 ὥρ., τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ὡρῶν. Πολλαπλασιάζομεν τέλος τὰς 8 ἡμ. ἐπὶ 9 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 72 ἡμ. προσθέτομεν καὶ τὰς 5 ἡμ. καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 77 γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἡμερῶν. Οὕτω τὸ ζητούμενον γινόμενον, ὅπερ προφανῶς εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, εἶναι 77 ἡμέρ. 12 ὥρ. 3 π. 45 δ.

8 ἡμ.	14 ὥρ.	40 π.	21 δ.
			9
77 ἡμ.	12 ὥρ.	4 π.	45 δ.

207. ***Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.*** — Ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου ἐκτελεῖται, ἂν διαιρέσωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ πηλίκα (§ 71).

Π.χ. 6 ἐργάται ἐξετέλεσαν ἔργον τι, διὰ τὸ ὁποῖον ἔλαβον 15 λίρ. 18 σελ. καὶ 6 πέν. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀμοιβὴ ἑκάστου;

Ἀρχίζομεν δὲ τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς μονάδος τῆς ἀνωτάτης τάξεως, διότι, ἂν μείνῃ ὑπόλοιπόν τι, τρέπομεν τοῦτο εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως καὶ προσθέτομεν ταύτας εἰς τὰς μονάδας τῆς τάξεως ταύτης τοῦ συμμιγοῦς· οὕτω δ' ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Π. χ. διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις 15 λίρ. 18 σελ. 8 πέν.: 6, ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

15 λίρ. 18 σελ. 6 πέν.	6
3 λίρ.	2 λίρ. 13 σελ. 1 πέν.
20 σελ.	
60 σελ.	
18 σελ.	
78 σελ,	
0 σελ.	
6 σελ.	
6 πεν.	
0 πεν.	

Διαιροῦμεν πρῶτον τὰς 15 λίρας διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 2 λίρ., ὑπόλοιπον δὲ 3 λίρ., τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς 3×20 =60 σελ. Προσθέτομεν εἰς ταῦτα καὶ τὰ 18 σελ., τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ διαιρετέος, καὶ διαιροῦμεν τὰ 78 σελ. διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 13 σελ., ὑπόλοιπον δὲ 0. Λαμβάνομεν τώρα τὰς 6 πέννας τοῦ διαιρετέου, τὰς ὁποίας διαιροῦμεν διὰ τοῦ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον μὲν 1 πέν., ὑπόλοιπον δὲ 0. Ὅθεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ὅπερ προφανῶς θὰ εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον, εἶναι 2 λίραι 13 σελ. 1 πέν.

ΣΗΜ.—Ἐὰν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ 0, γράφομεν αὐτὸ κλασματικῶς.

208. **Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.**—Ἔστω τὸ ἑξῆς παράδειγμα· 5 ὀκ 240 δραμ.×160.

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 5 ὀκ. ἐπὶ 160 καὶ εὑρίσκομεν ὡς γινόμενον 800 ὀκ. Ἵνα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 240 δραμ. ἐπὶ 160, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον 1 ὀκ. ἢ 400 δράμ. ἐπὶ 160 θὰ εἶναι 160 ὀκ. Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν 200 δραμ. ἢ τοῦ $\frac{1}{2}$ ὀκ. ἐπὶ 160 θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 160 ὀκ., ἤτοι 80 ὀκ., τὸ δὲ γινόμενον τῶν 40 δραμ., ἅτινα ἀποτελοῦσι τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 200 δραμίων, ἐπὶ 160 θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ προηγουμένου γινομένου, ἤτοι 80 ὀκ.$\times\frac{1}{5}$=16 ὀκ.

Ἐὰν ἑνώσωμεν πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα

800 ὀκ.+80 ὀκ. + 16 ὀκ.

εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον 5 ὀκ. 200 δράμ.×160=896 ὀκ.
῾Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$240=\begin{cases} 200 \text{ δρ.}=\frac{1}{2} \\ 40 \text{ δρ.}=\frac{1}{5} \text{τῶν } 200 \text{ δρ.} \end{cases}$$

5 ὀκ.	240 δρ.
160	
800 ὀκ.	
80 ὀκ.	
16 ὀκ.	
896 ὀκ.	

῾Η μέθοδος αὕτη καλεῖται τῶν ἁπλῶν μερῶν, διότι τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς ἀναλύονται εἰς ἁπλᾶ μέρη, παριστανόμενα δηλ. ὑπὸ κλασματικῆς μονάδος, καὶ ἑπομένως τὰ μερικὰ γινόμενα εὑρίσκονται διὰ διαιρέσεως. Προτιμᾶται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ἀριθμὸς μέγας καὶ ἡ ἀνάλυσις τῶν μερῶν τοῦ συμμιγοῦς εἰς ἁπλᾶ μέρη εἶνε εὐχερής. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον 8 πήχ. 7 ρουπ.×150.

$$7 \text{ ρούπ.}=\begin{cases} 4 \text{ ρούπ.}=\frac{1}{2} \text{ πήχ.} \\ 2=\frac{1}{2} \text{τῶν } 4 \text{ ρουπ.} \\ 1=\frac{1}{2} \text{τῶν } 2 \text{ ρουπ.} \end{cases}$$

8 πήχ.	7 ρούπ.	
150		
1200 πήχ.		
75 πήχ.		
37 πήχ.	4 ρούπ.	
18 πήχ.	6 ρούπ.	
1331 πήχ.	2 ρούπ.	

209. ***Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα*** ἢ ***μικτὸν*** ἢ ***δεκαδικόν.***—῞Οταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (§ 142).

Ζητήματα πρὸς ἐφαρμογήν

α) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 5 στατ. 38 ὀκ. καὶ 250 δραμ., ἤτοι 5 στ. 38 ὀκ. 250 δρ: $\times\frac{3}{4}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

5 στ. 38 ὀκ. 250 δρ.
3
17 στ. 27 ὀκ. 350 δρ. | 4
4 στ. 17 ὀκ. 387 $\frac{2}{4}$ δρμ.

1 στ,
44 στ.
44 ὀκ.
27 ὀκ.
71 ὀκ.
3 ὀκ.
400 δραμ,
1200 δράμια
350 δράμια
1550 δράμια
2 δράμια

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι·

4 στ. 17 ὀκ. 387$\frac{1}{2}$δρ.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα καὶ ἑνώνομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα.

β') Ἐάν τις δαπανᾷ κατὰ μῆνα 10 λίρ. 12 σελ. καὶ 8 πέν., πόσα θὰ δαπανήσῃ εἰς 4 $\frac{3}{5}$ μῆνας;

10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν.$\times 4\frac{3}{5}$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς. 10 λίρ. 12 σελ. 8 πεν.
4
42 λίρ. 10 σελ. 8 πεν.

Τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 4 εἶναι 42 λίρ. 10 σελ. 8 πεν.

Τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ κλάσμα εἶναι τὸ ἑξῆς·

10 λίρ. 12 σελ. 8 πέν.
3
31 λίρ. 18 σελ. 0 πεν. | 5
6 λιρ. 7 σελ. 7$\frac{1}{5}$πεν.

1 λίρ.
20 σελ.
20 σελ.
18 σελ.
38 σελ.
3 σελ.
12 πεν.
36 πεν.
1 πεν.

Προσθέτομεν ἤδη τὰ δύο εὑρεθέντα γινόμενα.

Γινόμενον ἐπὶ 4	42 λιρ. 10 σελ. 8 πεν.
» » $\frac{3}{5}$	6 λιρ. 7 σελ. 7 $\frac{1}{5}$πεν.
» »$4\frac{3}{5}$	40 λιρ. 18 σελ. 3 $\frac{1}{5}$πέν.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ τρέψωμεν τὸν 4 $\frac{3}{5}$ εἰς κλάσμα $\frac{23}{5}$ καὶ ἔπειτα νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν 10 λίρ. 12 σελ. 8 πεν.$\times\frac{23}{5}$.

210. Ὅταν τέλος ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ δεκαδικόν, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἐκτελοῦμεν ἔπειτα τὴν πρᾶξιν.

Π.χ. 5 πήχ. 7 ῥούπ.$\times$0,3=5 πήχ. 7 ῥ.$\times\frac{3}{10}$=1 πῆχ. 6,1 ῥ.

211. ***Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ.*** Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν (§ 149).

Παράδειγμα,—$18^0\ 45'\ 20'' : \frac{5}{9} = 18^0\ 45'\ 20'' \times \frac{9}{5} = 33^0\ 45'36''$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν (§ 150).

Παράδειγμα 17 ὀκ. 150 δραμ: $2\frac{3}{5}$= 17 ὀκ. 150 δράμ: $\frac{13}{5}$=

17 ὀκ. 150 δραμ.$\times\frac{5}{13}$= 6 ὀκ 273 $\frac{1}{13}$δράμ·

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ δεκαδικοῦ, γράφομεν τὸν δεκαδικὸν ὑπὸ κλασματικὴν μορφὴν καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

Παραδείγματα. 5 πήχ. 4 ῥούπ.: 0,8=5 πήχ. 4 ῥούπ.: $\frac{8}{10}$=

5 πήχ. 4 ῥούπ.$\times\frac{10}{8}$= 6 πήχ. 7 ῥούπ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν οἱ ἑξῆς πολλαπλασιασμοί·
 α) 8 στατ. 18 ὀκ. 270 δράμ.$\times$12=;
 β) 10 λίρ. 7 σελ. 8 πέν.$\times$16=;
2) Ὁμοίως οἱ ἑξῆς:
 α) 8 ὥρ. 30 π.$\times$6=;
 β) 5 πήχ. 7 ῥούπ.$\times$260=;
 γ) 35 ὑάρ. 2 πόδ. 5 δάκ.$\times$45=;
3) Οἱ ἑξῆς α) 5 ἔτη 18 ἡμ.$\times$45=;
 β) 8 ἡμ. 15 ὥρ. 25 π. 40 δ.$\times$5=;

4) Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑξῆς πράξεις:

α΄) 19 ἡμ. 14 ὥρ. 45 δ. : 9=;

β΄) 18 πήχ. 6 ῥούπ. : 12=;

γ΄) 28 στατ. 37 ὀκ. 300 δράμ. : 25=;

5) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς: α΄) 8 λίρ. 7 σελ. 10 πέν. : 18=;

β΄) 485 Ἀγγλ. στατ. 22 λίτρ. : 15=;

6) Ὁμοίως αἱ ἑξῆς: α΄) 15 ὑάρ. 1 π. 8 δάκ. $\times \frac{5}{8} =$;

β΄) 23 πήχ. 7 ῥ. $\times \frac{7}{10} =$;

γ΄) $7^0\ 40'\ 25'' \times 2\frac{4}{5} =$;

7) Ὡσαύτως αἱ ἑξῆς;

α΄) 8 λίρ. 17 σελ. 6 πέν. : $\frac{8}{15} =$;

γ΄) 27 στ. Ἀγγλ. 25 λίτ. : 20,37=;

Προβλήματα.

1) Ἐργάτης τις ἐργάζεται 8 ὥρ. 30 π. καθ' ἑκάστην. Πόσας ὥρας καὶ λεπτὰ θὰ ἐργασθῇ εἰς 5 ἡμέρας; (Ἀπ. 42 ὥρ. 30 π.).

2) Ἔμπορός τις παρέλαβεν 180 σάκκους καφέ. Ἐὰν ἕκαστος σάκκος ἔχῃ βάρος 2 στατ. Ἀγγλ. 18 λίτρ., πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ καφέ; (Ἀπ. 388 στ. 104 λ.).

3) Ἐὰν τὸ ἀπόβαρον λογαριάζεται πρὸς 3 λίτρ. κατὰ σάκκον, πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν ἀπόβαρον τοῦ ἄνω φορτίου καὶ πόσον τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ καφέ; (Ἀπ. στ. 4—92· στ. 384—12).

4) Εἷς λόχος δαπανᾷ κατὰ μῆνα 100 στατ. 30 ὀκ. 200 δραμ. κρέατος, πόσον θὰ χρειασθῇ εἰς τὸ διάστημα τοῦ ἔτους; (Ἀπ. στατ. 36753—200 δραμ.).

5) Φορτίον τι βάρους 850 τόν. Ἀγγλ. 15 στατ. 10 λιτρῶν ὑπέστη βλάβην κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ ἐκ τῆς μεταφορᾶς. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ μείναντος ἀβλαβοῦς ἐμπορεύματος; (1 τόν.=20 στ.) (Ἀπ. τόν.680—12—8).

6) Ὁ ναῦλος φορτίου τινὸς καφὲ ἀπὸ Λιβερπούλης μέχρι Πειραιῶς ἀνῆλθεν εἰς 2635 λίρ. 18 σελ. 7 πέν. Ἐκ τούτου εἶχον ἤδη προκαταβληθῇ τὰ 0,30. Πόσων λιρ. σελ. καὶ πεννῶν εἶναι τὸ ὀφειλόμενον ὑπόλοιπον; (Ἀπ. λίρ. 1845—3 σελ. περίπ.).

1844 · 10 · 10,79

212. ***Πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής.***—Διὰ νὰ μάθωμεν πῶς ἐκτελεῖται ὁ πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ συμμιγῆ, λαμβάνομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός.

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ καφὲ τιμᾶται 3,60 δραχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 5 ὀκ. 350 δράμ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι πολλαπλασιασμοῦ (§ 153) καὶ πολλαπλασιαστέος εἶναι 3,60 δραχ. ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον γινόμενον, πολλαπλασιαστὴς δὲ ὁ συμμιγὴς 5 ὀκ. 350 δράμ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους.

Α' Τρόπος.—Ἐπειδὴ εἶναι δεδομένη ἡ τιμὴ τῆς 1 ὀκᾶς, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 5 ὀκ. 350 δράμ. εἰς ἀριθμὸν ὀκάδων, ἤτοι εἰς $5\frac{350}{400}$ ὀκ. ἢ $5\frac{7}{8}$ ὀκ. Μετὰ ταῦτα ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν ἑξῆς πολλαπλασιασμὸν $3,60 \times 5\frac{7}{8} = 21,15$ δραχ.

Κατὰ ταῦτα, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν τοῦτον εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πρόβλημα, καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Β' τρόπος διὰ τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Εὑρίσκομεν ἐν πρώτοις τὴν τιμὴν τῶν 5 ὀκ. ($3,60$ δραχ.$\times 5 = 18,00$ δραχ.). Διὰ νὰ εὕρωμεν ἔπειτα πόσον τιμῶνται τὰ 350 δράμ., ἀναλύομεν ταῦτα εἰς ἁπλᾶ μέρη, ἤτοι εἰς 200 δράμ. $=\frac{1}{2}$ ὀκ., εἰς 100 δράμ. $=\frac{1}{2}$ τῶν 200 δραμ. καὶ 50 δραμ. $=\frac{1}{2}$ τῶν 100 δραμ. καὶ τῶν μερῶν τούτων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ τιμᾶται 3,60 δραχ., τὰ 200 δράμ., ἤτοι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς, θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 3,60 δραχ., ἤτοι 1,80 δραχ., καὶ τὰ 100 δρμ. θὰ τιμῶνται $\frac{1}{2}$ τῶν 1,80 δρχ., ἤτοι 0.90 δρχ., καὶ τέλος τὰ 50 δράμ. θὰ τιμῶνται τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 0,90 δραχ., ἤτοι 0,45 δραχ., ὅθεν αἱ 5 ὀκ. 350 δράμ. τιμῶνται 18,00 δραχ.$+$1,80 δρχ.$+$0,90 δρχ.$+$0,45 δρχ. $=$21,15 δραχ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$350 \text{ δράμ.} = \begin{cases} 200 = \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \\ 100 = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 200 \text{ δρ.} \\ 50 = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 100 \text{ δρ.} \end{cases}$$

3,60 δραχ.
5 ὀκ. 350 δράμ.

18,00 δραχ.
1,80 »
0,90 »
0,45 »

21,15 δραχμ.

2) Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει κατ᾽ ἔτος 8 στ. 28 ὀκ. 200 δράμ. ἀλεύρου. Πόσον ἄλευρον ἐξοδεύει εἰς 9 μῆν. καὶ 20 ἡμ.;

Εἶναι πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ. Πολλαπλασιαστέος δὲ εἶναι ὁ 8 στ. 20 ὀκ. 200 δρ.

Καὶ ἐνταῦθα ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, κατὰ δύο τρόπους.

Α΄ τρόπος.—Τρέπομεν πρῶτον τὸν συμμιγῆ πολλαπλασιαστὴν 9 μ. 20 ἡμ. εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους (διότι τοῦ ἑνὸς ἔτους μᾶς δίδεται ἡ τιμή), ἤτοι εἰς $\frac{290}{360}$ ἢ $\frac{29}{36}$ ἔτ. καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅτε ἔχομεν 8 στατ. 28 ὀκάδες 200 δράμια $\times$ $\frac{29}{36}$ = 6 στατῆρ. 42 ὀκ. 205 $\frac{5}{9}$ δραμ.

Β΄ τρόπος διὰ τῶν ἁπλῶν μερῶν.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$9 \text{ μῆν.} = \begin{cases} 6 \text{ μῆν.} = \frac{1}{2} \text{ ἔτος} \\ 3 \text{ μῆν.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 6 \text{ μην.} \end{cases}$$

$$20 \text{ ἡμ.} = \begin{cases} 15 \text{ ἡμ.} = \frac{1}{6} \text{ τῶν } 3 \text{ μην.} \\ 5 \text{ ἡμ.} = \frac{1}{3} \text{ τῶν } 15 \text{ ἡμ.} \end{cases}$$

8 στ. 28 ὀκ. 200 δραμ.
9 μῆν. 20 ἡμ.

4 στ.	14 ὀκ.	100 δράμ.
2	7	50
0	15	341 $\frac{2}{3}$
0	5	113 $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}$

6 στ. 42 ὀκ. 205 $\frac{5}{9}$ δρ.

213. ***Διαίρεσις, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής.***—Ἵνα μάθωμεν, πῶς ἐκτελεῖται ἡ διαίρεσις κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἂς θεωρήσωμεν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα.

1) Μία οἰκογένεια ἐντὸς 3 μην. 25 ἡμ. κατηνάλωσεν 25 ὀκ. 300 δρ. ζαχάρεως. Πόσην ζάχαριν καταναλίσκει κατὰ μῆνα;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι μερισμοῦ (§ 155).

Διαιρετέος εἶναι ὁ 25 ὀκ. 300 δράμ. ὁμοειδὴς πρὸς τὸ ζητούμενον.

Ἐπειδὴ ζητεῖται τὸ ποσὸν τῆς ζαχάρεως, ὅπερ καταναλίσκει ἡ οἰκογένεια εἰς 1 μῆνα, ἀρκεῖ πρῶτον νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ διαιρέτην 3 μῆν. 25 ἡμ. εἰς ἀριθμὸν μηνῶν, ἤτοι $3\frac{25}{30}$ μην. ἢ $3\frac{5}{6}$ μην. καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μικτοῦ $3\frac{5}{6}$.

Ὅθεν ἔχομεν 25 ὀκ. 300 δραμ. : 3 μην. 25 ἡμέρ. = 25 ὀκ. 300 δρ. : $3\frac{5}{6}$ = 25 ὀκ. 300 δράμ. : $\frac{23}{6}$ = 25 ὀκ. 300 δράμ. $\times \frac{6}{23}$ = 6 ὀκ. 286 $\frac{22}{23}$ δράμ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

214. «Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς. Ὅταν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγής, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τοῦτον εἰς ἀριθμὸν τῆς μονάδος ἐκείνης, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ζητεῖται ἐν τῷ προβλήματι· οὕτω δὲ ἡ πρᾶξις ἀνάγεται εἰς διαίρεσιν δι' ἀκεραίου ἢ διὰ κλάσματος».

2) Ὁ στατὴρ πράγματός τινος τιμᾶται 5 σελ. 7 πέν. Πόσους στατῆρας ἀγοράζομεν μὲ 18 λίρ. 5 σελ.;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι μετρήσεως (§ 157).

Ἐνταῦθα διαιρετέος μὲν εἶναι ὁ 18 λίρ. 5 σελ., διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι 5 σελ. 7 πέν. Διὰ νὰ γίνῃ εὐκολώτερον ἡ διαίρεσις, τρέπομεν τοὺς δύο συμμιγεῖς, οἵτινες εἶναι ὁμοειδεῖς, εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως, ὅτε καταλήγομεν εἰς διαίρεσιν δύο ἀκεραίων. Καὶ ὁ μὲν διαιρετέος δίδει τὸν ἀκέραιον 4380 πέν., ὁ δὲ διαιρέτης τὸν 67 πέν. Ἄρα τὸ ζητούμενον πηλίκον θὰ εἶναι $\frac{4380}{67}$ στατ. Ἂν τρέψωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς συμμιγῆ, λαμβάνομεν $\frac{4380}{67}$ στατ. = 65 στατ. 16 ὀκ. 167 $\frac{11}{67}$ δραμ.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς·

215. «Εἰς τὰ προβλήματα μετρήσεως ὁ διαιρετέος και διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς, καὶ διαιρέτης εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶ

μονάδος. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο συμμιγεῖς, τρέπομεν ἀμφοτέρους εἰς μονάδας τῆς ἐν αὐτοῖς κατωτάτης τάξεως, ἤτοι εἰς ἀκεραίους. Τὸ πηλίκον τῶν δύο τούτων ἀκεραίων εἶναι κλάσμα τῆς μονάδος ἐκείνης, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι δεδομένη ἐν τῷ προβλήματι· τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπομεν εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν».

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α' Ἀπὸ μνήμης:

1) Ὅταν ἡ ὀκᾶ κρέατος πωλῆται 5,40 δραχ., πόσον ἀξίζουσι α') τὰ 300 δράμ., β') τὰ 250 δράμ., γ') τὰ 160 δράμ., δ') τὰ 120 δράμ., ε') αἱ 2 ὀκ. καὶ 100 δράμ. καὶ ϛ') αἱ 3 ὀκ. καὶ 50 δράμ. αὐτοῦ;

2) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος πωλεῖται 12 δραχ. Πόσον στοιχίζουσι α') τὰ 7 ῥούπ., β') τὰ 3 ρούπ., γ') 2 πήχ. καὶ 1 ῥούπ., δ') τὰ 5 ῥούπ. ε') 3 πήχ. 6 ῥούπ. αὐτοῦ;

3) Πόσας δραχ. στοιχίζει ἡ ὀκᾶ μετάξης, ὅταν τὸ δράμιον πωλῆται α') 1 λεπτ., β') 2 λεπτ., δ') 3 λεπτ., δ') $1\frac{1}{2}$ λεπτ., ε') $2\frac{3}{4}$ λεπτ., ϛ') $2\frac{5}{8}$ λεπτ., ζ') $4\frac{3}{8}$ λεπτ., η') $5\frac{1}{4}$ λεπτά;

4) Ἐὰν τὸ χαβιάρι πωλῆται κατ' ὀκᾶν 38 δραχ., πόσον στοιχίζουσι α') τὰ 200 δράμ. β') τὰ 100 δράμ., γ') τὰ 80 δραμ., δ') τὰ 50 δράμ., ε') τὰ 25 δράμ., ϛ') τὰ 125 δράμ., ζ') τὰ 240, η') τὰ 250 δράμ. αὐτοῦ;

5) Ἐὰν τὰ 5 ῥούπια ὑφάσματός τινος τιμῶνται 2,50 δραχ., πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς αὐτοῦ;

6) Ἐὰν τὰ 300 δράμ. πράγματός τινος πωλῶνται ἀντὶ 1,60 δραχ., πόσον τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ πράγματος τούτου;

7) Ἠγοράσαμεν 80 δράμ. χαβιάρι ἀντὶ 6,30 δραχ. Πόσον πωλεῖται ἡ ὀκᾶ αὐτοῦ;

8) Τὰ 150 δράμ. νήματος πωλοῦνται ἀντὶ 4,50 δραχ. Πόσον πωλεῖται ἡ ὀκᾶ τοῦ νήματος τούτου;

Β' Γραπτῶς:

9) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 8,40 δραχ. Πόσον τιμῶνται οἱ 18 πήχ. 6 ῥούπ.; (Ἀπ. 157,50 δραχ.).

10) Ἡ ὀκᾶ πράγματός τινος τιμᾶται 5,75 δραχ. Πόσον τιμῶνται 35 ὀκ. 320 δράμ. (Ἀπ. 205,85 δραχ.).

11) Ἠγόρασέ τις 15 βαρέλλια ἐλαίου μικτοῦ βάρους ἐν ὅλῳ 25 στ. ὀκ. Τὸ ἀπόβαρον δι' ἕκαστον βαρέλλιον εἶναι 18 ὀκ. 350 δράμ. Πό-

σον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐλαίου καὶ πόσον στοιχίζει τοῦτο πρὸς 1,14 δραχ. τὴν ὀκᾶν καὶ εἰς πόσον θ' ἀνέλθῃ ἡ τιμὴ αὕτη, ἂν ὑπελογίσθη καὶ ἡ τιμὴ ἑκάστου βαρελλίου πρὸς 8,50 δράχ.;

('Απ. α' 834 ὀκ. 350 δραμ., β' 951,75 δραχ., γ' 1079,25 δραχ.).

44=56,32

12) Πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουσι 344,780 χιλιόγρ;

('Απ. 6 στ. 5 ὀκ. 144 δρ. περίπου).

13) 8 στ. 35 ὀκ., 300 δρ. μὲ πόσα χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦσιν;

('Απ. 496,320 χιλιόγρ.).

14) Ὅταν ἡ λίρα στερλίνα ἰσοδυναμῇ πρὸς 25,12 δραχ., πόσας λίρας, σελίνια καὶ πέννας θ' ἀγοράσῃ τις μὲ 2458, 50 δρχ.;

('Απ. 97 λίρ. 17 σελ. 4 $\frac{134}{157}$ πέν.).

15) Μία λίρα στερλίνα ἰσοδυναμεῖ πρὸς 25,30 δραχ. Πόσας δραχμὰς κάμνουσι α') 18 λίρ. 10 σελ. 4 πέν., β') 12 σελ. 8 πέν., γ') 1340 πέννες.

('Απ. α' 468,47 δραχ., β' 16,02 δραχ., γ' 141,15 δραχ.)

16) Πόσους στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια κάμνουσιν οἱ 18 στατ. Ἀγγλ. καὶ 95 λίτρ.; ('Απ. 17 στ. 0 ὀκ. 34 δράμ. περίπου).

17) Πόσους στατ. Ἀγγλ. καὶ λίτρας κάμνουσι οἱ 15 στατ. 20 ὀκ. 200 δράμ.; ('Απ. 17 στ. Ἀγγλ. 16 λίτρ. περίπου).

18) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 240,80 δραχ. διὰ 5 μῆνας 20 ἡμ. Πόσον εἶναι τὸ μηνιαῖον ἐνοίκιον;('Απ. 42.50 δρ. περίπου).

19) 15 ὑάρδ. 2 πόδ. 7 δάκ. νὰ μετατραπῶσιν εἰς μέτρα.

('Απ. 14,497 μέτρα περίπου).

20) Ὕφασμα 1663 ὑαρδ. 1 ποδ. 5 δακ. ἠγοράσθη πρὸς 48 $\frac{3}{4}$ πέν. κατὰ ὑάρδαν. Πόσας λίρας στοιχίζει τοῦτο ἐν ὅλῳ;

('Απ. 337 λίρ. 17 σελ. 10 $\frac{27}{100}$ πέν.).

21) Ὁ ναῦλος ἐμπορεύματός τινος συνεφωνήθη πρὸς 11 σελ. 3 πέν. κατὰ μετρικὸν τόννον. Πόσος θὰ εἶναι ὁ ναῦλος, ἂν τὸ ἐμπόρευμα ζυγίζῃ 312 $\frac{1}{2}$ τόννους; ('Απ. 175 λίρ. 15 σελ. 7 $\frac{1}{2}$ πέν.).

22) Ὡρολόγιόν τι εἰς 8 ὥρας 25 π. ὑστερεῖ 18 π. 20 δ. Πόσον ὑστερεῖ καθ' ὥραν; ('Απ. 2 π. 10 δ. $\frac{70}{101}$).

23) Ἐὰν οἱ 5 στατ. 35 ὀκ. 250 δραμ. ἐμπορεύματός τινος στοιχίζωσι 1458,50 δραχ., πόσον στοιχίζει ὁ ὀκᾶ τούτου; ('Απ. 5,70 δρ.).

24) Ἐὰν οἱ 15 στ. Ἀγγλ. 85 λίτραι στοιχίζουσιν 25 λίρ. 10 σελ. 8 πέν., πόσον στοιχίζει ἡ λίτρα; (Ἀπ. $3\frac{833}{1765}$ πέν.).

25) Μὲ 5 σελ. 10 πέν. ἀγοράζομεν 1 ὑάρδ. ἔκ τινος ὑφάσματος. Πόσας ὑάρδ. ἀγοράζομεν μὲ 18 λίρ. 10 σελ. (Ἀπ. 63 ὑάρδ. 1 πόδ. $3\frac{3}{7}$ δ.).

Προβλήματα διὰ τὴν ἐπανάληψιν ἐν τῇ Γ΄ τάξει.

1) Πόσαι ἡμέραι περιλαμβάνονται α΄) ἀπὸ τῆς 15ης Φεβρουαρίου μέχρι τῆς 28ης Μαΐου τοῦ αὐτοῦ ἔτους, β΄) ἀπὸ 10ης Ἀπριλίου μέχρι 3ης Μαΐου τοῦ ἑπομένου ἔτους καὶ γ΄) ἀπὸ τῆς 18ης Ἰουνίου 1905 μέχρι 25 Φεβρουαρίου 1907;

2) Ἐργάτης τις ἐργοστασίου λαμβάνει 0,80 δραχ. δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας. Ἐὰν οὗτος ἐργάζηται καθ' ἑκάστην ἀπὸ της 6ης τῆς πρωΐας μέχρι τῆς 11ης ὥρ. 40π. π. μ. καὶ ἀπὸ τῆς 12 ὥρ. 20τ. μέχρι τῆς 6ης ὥρ. 40π. τῆς ἑσπέρας, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς τὸ διάστημα μιᾶς ἑβδομάδος;

(Ἀπ. εἰς 6 ἡμέρας θὰ λάβῃ δραχ. 57,60).

3) Ἐὰν μία λίρα Ἀγγλίας τιμᾶται 25,15 δραχ., πόσας δραχμὰς κάμνουσι α΄) 145 λίραι, 17 σελ., 8 πέν., β΄) 18 λίραι, 7 πέν., γ΄) 125 λίρ., 14 σελ., δ΄) 428 λίρ., 4 σελ., 5 πέν.;

(Ἀπ. α΄ 3668,95 δρ., β΄ 453,40 δρ., γ΄ 3161,35 δρ., δ΄ 10769,73 δρ.)

4) Παντοπώλης τις πωλεῖ τὴν μὲν ζάκχαριν πρὸς 1,35 δρ., τὸν δὲ καφὲ πρὸς 3,60 δραχ. τὴν ὀκᾶν, καὶ εἰσεπραξεν ἐν μιᾷ ἡμέρᾳ 245,80 δραχ. Ἐὰν ἐπώλησεν 108 ὀκ. 300 δρ. ζακχάρεως, πόσας ὀκάδας καφὲ ἐπώλησεν; (Ἀπ. 27 ὀκ. 200 δράμ.).

5) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν εἰς 8 ὥρ. 45π. ἀπόστασιν 75,8 μίλ., σιδηρόδρομος δὲ διήνυσεν εἰς 6 ὥρ. 20π. ἀπόστασιν 145,8 χιλιομέτρων. Κατὰ πόσα χιλιόμετρα καθ' ὥραν εἶναι ταχύτερος ὁ σιδηρόδρομος τοῦ ἀτμοπλοίου; (Ἀπ. 5,825 χιλ. μ.).

6) Ἡ γηγενὴς θερμότης ἀπό τινος βάθους καὶ ἐφεξῆς αὐξάνει κατὰ 1° Κ. ἀνὰ 33 μ. Ἐὰν εἰς βάθος 12 μέτρων ἐπικρατῇ ἔν τινι τόπῳ θερμοκρασία σταθερὰ ἴση πρὸς 16,4° Κ., πόση θερμοκρασία θὰ ἐπικρατῇ εἰς βάθος 175 ὑαρδ. 2 ποδ. ἐν τῷ αὐτῷ τόπῳ; (Ἀπ. 20,9° Κ.).

7) Ἀτμόπλοιόν τι καίει $\frac{3}{4}$ τόνν. ἀνθράκων καθ. ὥραν. Ἐὰν διανύῃ 21 μίλ. εἰς 2 ὥρ. 10π. καὶ πρόκειται νὰ διανύσῃ ἐν ὅλῳ 298 μίλια

περίπου α') πόσα μίλια θὰ διανύῃ τὴν ὥραν, β') πόσας ὥρας θὰ χρειασθῇ καὶ γ') πόσους τόννους ἀνθράκων θὰ καταναλώσῃ;

('Απ. α' $9\frac{9}{13}$ μίλια, β' 30 ὥρ. 44π. περίπου, γ' 23,059 τόννους).

8) Τόξον τι $15^0\ 20'\ 40''$ περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 3,75 μ. Πόσον μῆκος ἔχει τόξον 1^0 τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ πόσον ὁλόκληρος αὕτη ἡ περιφέρεια; ('Απ. α' 0,244 μ. β' 87,979 μ.).

9) 'Εὰν ὁ 'Αγγλ. στατὴρ ἐμπορεύματός τινος τιμᾶται 2 λίρ. 5 σέλ., 7 πέν., ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ τουρκικοῦ στατῆρος (στατὴρ=44 ὀκ.) τοῦ αὐτοῦ πράγματος μὲ τιμὴν τῆς λίρας 925,20 δρ.;

('Απ. 63,67 δραχ. περίπου).

10) Μία λίτρα ἐλαίου ζυγίζει 912 γραμ. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου χωρεῖ βαρέλλιον χωρητικότητος 915,40 λιτρῶν;

('Απ. 652 ὀκάδ. 89 δράμ. περίπου).

11) Βαρέλλιόν τι περιέχει 5 στ. 25 ὀκ. 300 δράμ. οἰνοπνεύματος. Πόσων λιτρῶν εἶναι τὸ οἰνόπνευμα τοῦτο, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ λίτρα οἰνοπνεύματος ζυγίζει 850 γραμμάρια; ('Απ. 370,07 λίτρ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΠΕΡΙ ΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

216. «Λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ πρώτου ποσοῦ διὰ τοῦ δευτέρου, λαμβανομένου ὡς μονάδος».

Κατὰ τοῦτο ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως τὸ πρῶτον ποσὸν γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ (§ 184). Π. χ. ὁ λόγος τῆς εὐθείας γραμμῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3· διότι ἡ πρώτη

Α ————————|————————|———————— Β

Γ ———————— Δ γίνεται ἐκ τῆς δευτέρας ἐπαναλαμβανομένης τρίς, καὶ τἀνάπαλιν ὁ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{3}$.

Κατ' ἀναλογίαν ἕπεται καὶ ὁ ἑξῆς ὁρισμός.

217. «Λόγος δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις γίνεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὅπως ὁ πρῶτος

ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ, τουτέστι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου».

Π. χ. Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 45 πρὸς τὸν 9 εἶναι $\frac{45}{9}$ ἢ 45 : 9. Ὁμοίως ὁ λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 8 εἶναι $\frac{5}{8}$ ἢ 5 : 8. Ὡσαύτως ὁ λόγος τοῦ $\frac{5}{7}$ πρὸς τὸν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}}$ ἢ $\frac{5}{7}$: $\frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{20}{21}$. Καὶ ἐν γένει ὁ λόγος ἀριθμοῦ τινος α πρὸς ἄλλον β εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α : β.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τοῦ λόγου· καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἡγούμενος, ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος.

218. Ἀντίστροφοι λόγοι καλοῦνται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται πρὸς τὸ 1.

Π. χ. $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι, διότι $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

219. «Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσιν αὐτά, ὅταν μετρηθῶσι διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος».

Π. χ. ὁ λόγος 3 τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι τὰ μήκη αὐτῶν μετρηθεισῶν διὰ τοῦ μέτρου.

Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ μέτρον χωρῇ εἰς τὴν ΓΔ πέντε φοράς, τότε εἰς τὴν τριπλασίαν εὐθεῖαν ΑΒ θὰ χωρῇ 3×5, ἤτοι 15 φοράς· ἑπομένως ὁ λόγος τῶν μηκῶν εἶναι ὁ αὐτός, ἤτοι $\frac{15}{5} = 3$.

ΣΗΜ.—Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι κλάσμα, ὅπερ ἔχει ὡς ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον, ὡς παρονομαστὴν δὲ τὸν δεύτερον, εἶναι φανερόν, ὅτι οὗτος ἔχει πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων. Οὕτω

220. «Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ».

Κατὰ ταῦτα ὁ λόγος τοῦ 8 πρὸς τὸν 20 εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ 16 πρὸς τὸν 40 ἢ τοῦ 4 πρὸς τὸν 10 κ. τ. λ.

221. Ἀναλογίαι. «Ἀναλογία καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων».

Π. χ. οἱ δύο ἴσοι λόγοι $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{10}{16}$ ἀποτελοῦσι μίαν ἀναλογίαν, ἥτις σημειοῦται οὕτω $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ ἢ 5 : 8 = 10 : 16.

Ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς ἀναλογίας εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\alpha:\beta=\gamma:\delta$.

Οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν, καλοῦνται ὅροι αὐτῆς. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ τελευταῖος (α καὶ δ) καλοῦνται ἄκροι, οἱ δὲ λοιποὶ (β καὶ γ) μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας.

Αἱ ἀναλογίαι ἔχουσι πολλὰς ἰδιότητας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ σπουδαιοτέρα εἶναι ἡ ἑξῆς·

222. Ἰδιότης. «Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων».

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$.

Δυνάμεθα προφανῶς, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τῶν λόγων, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου ἐπὶ 20, τοῦ δὲ δευτέρου ἐπὶ 5 (§ 220)· οὕτως ἡ ἀναλογία γίνεται $\frac{3\times20}{5\times20}=\frac{12\times5}{20\times5}$.

Ἐπειδὴ οἱ ἑπόμενοι ὅροι τῶν δύο ἴσων λόγων εἶναι ἴσοι (5×20), ἕπεται ὅτι καὶ οἱ ἡγούμενοι ὅροι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι $3\times20=12\times5$.

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς προκειμένης ἰδιότητος. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν τέταρτον ὅρον μιᾶς ἀναλογίας, δοθέντων τῶν τριῶν ἄλλων.

Π.χ. εὑρεῖν ἕνα τῶν ἄκρων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας οἱ τρεῖς ἄλλοι εἶναι α, β, γ.

Ἔστω χ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας, ἤτοι $\alpha:\beta=\gamma:\chi$

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα ἔχομεν $\chi\cdot\alpha=\beta\cdot\gamma$

καὶ $\chi=\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha}$

διότι, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἰσότητος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει νέα ἰσότης.

Ὅθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών·

223. «Πρὸς εὕρεσιν ἑνὸς ἄκρου ὅρου ἀναλογίας, τῆς ὁποίας εἶναι δεδομένοι οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο δοθέντας μέσους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου».

Δυνατὸν νὰ ζητῆται εἷς ἐκ τῶν μέσων ὅρων, ἤτοι νὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\alpha : \beta = \chi : \gamma$

Ὅθεν $\beta \cdot \chi = \alpha \cdot \gamma$ καὶ $\chi = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}$

ἐξ οὗ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

224. «Διὰ νὰ εὕρωμεν ἕνα τῶν μέσων ὅρων ἀναλογίας, τῆς ὁποίας εἶναι δεδομένοι οἱ τρεῖς ἄλλοι ὅροι, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο δοθέντας ἄκρους καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου».

ΠΕΡΙ ΜΕΘΟΔΩΝ

Ποσὰ εὐθέως καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Πολλάκις τὰ διάφορα ποσὰ συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ διαφόρων σχέσεων οὕτως, ὥστε ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑνὸς νὰ ἐπιφέρῃ μεταβολὴν εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἄλλα.

Π. χ. τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδὸς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἡλικίας, τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἀγοράζομεν ὕφασμά τι, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων τούτου κτλ. Ἐκ τῶν διαφόρων τούτων σχέσεων αἱ ἁπλούστεραι εἶναι αἱ δύο ἑπόμεναι.

225. «Δύο ποσὰ καλοῦνται εὐθέως ἀνάλογα, ὅταν ἔχωσι τοιαύτην σχέσιν πρὸς ἄλληλα, ὥστε πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ ἑνὸς μὲ ἀριθμόν τινα νὰ πολλαπλασιάζηται ἢ διαιρῆται καὶ τὸ ἕτερον μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν».

Π.χ. ἐὰν αἱ 8 ὀκάδες τυροῦ τιμῶνται 12 δραχ., διπλάσιαι αὐτοῦ ὀκάδες, ἤτοι 16, θὰ τιμῶνται διπλάσια, ἤτοι 24 δραχμάς, καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν 8 ὀκάδων, ἤτοι 4 ὀκ., θὰ τιμῶνται τὸ ἥμισυ, ἤτοι 6 δραχμὰς κ.ο.κ.

Ὅθεν τὸ ποσὸν τοῦ τυροῦ καὶ ἡ ὁλικὴ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, ὃν λόγον ἔχουσιν αἱ 8 ὀκ. πρὸς 16 ὀκ., τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ 12 δραχμαὶ πρὸς 24 δραχ. τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει εἰς πάντα τὰ ποσά, ἅτινα εἶναι εὐθέως ἀνάλογα.

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι·

«Εἰς τὰ εὐθέως ἀνάλογα ποσά, ὃν λόγον ἔχουσι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Ὁμοίως τὸ ποσὸν τοῦ ὕδατος, ὅπερ παρέχει κρήνη τις, καὶ ὁ χρόνος καθ' ὃν εἶναι ἀνοικτὴ ἡ κρήνη, εἶναι ποσὰ εὐθέως ἀνάλογα κ.τ.λ.

226. «Ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα καλοῦνται ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα συνδέονται οὕτως, ὥστε διπλασιαζομένου ἢ τριπλασιαζομένου κ.τ.λ. καὶ ἐν γένει πολαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἕτερον ὑποδιπλασιάζεται, ὑποτριπλασιάζεται καὶ ἐν γένει διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ τἀνάπαλιν».

Τὸ ποσὸν τῶν ἐργατῶν καὶ τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν, κατὰ τὰς ὁποίας οἱ ἐργάται τελειώνουσιν ἔργον τι, εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι, ἂν οἱ 10 ἐργάται τελειώνουσιν ἔργον τι εἰς 30 ἡμέρας, οἱ 20 ἐργάται θὰ τελειώνωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν, ἤτοι εἰς 15 ἡμέρας, καὶ οἱ 5 ἐργάται θὰ τελειώσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς διπλασίας ἡμέρας, ἤτοι εἰς 60 ἡμέρας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὃν λόγον ἔχουσιν αἱ δύο τιμαὶ 10 ἐργ. πρὸς 20 ἐργ. τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν ἀντίστροφον λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ 30 ἡμ. πρὸς 15 ἡμέρας τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει εἰς πάντα τὰ ποσά, ἅτινα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὅθεν συνάγομεν ὅτι·

«Εἰς τὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσά, ὃν λόγον ἔχουσι δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, τὸν ἀντίστροφον λόγον ἔχουσιν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ».

Παρατ.—Ὅταν τὰ συνδεόμενα ποσὰ εἶναι περισσότερα τῶν δύο, τότε πάλιν συγκρίνομεν ταῦτα ἀνὰ δύο ὡς ἑξῆς ἀφίνοντες τὰ λοιπὰ ἀμετάβλητα.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι 4 ὑφανταὶ ὑφαίνουσιν εἰς 6 ἡμέρας 45 μέτρα ὑφάσματός τινος. Ἐνταῦθα ἔχομεν τρία ποσά, ἤτοι τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος. Ἐὰν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ δύο πρῶτα ποσὰ πρὸς ἄλληλα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Ἀφοῦ οἱ 4 ὑφανταὶ εἰς 6 ἡμ. ὑφαίνουσι 45 μέτρα ὑφάσματος, διπλάσιοι (ἤτοι 8) ὑφανταὶ θὰ ὑφάνωσι τὸ αὐτὸ μῆκος ὑφάσματος (ἤτοι 45μ.) εἰς δύο φορὰς ὀλιγώτερον χρόνον (ἤτοι εἰς 3 ἡμέρας). Ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα. Ὁμοίως, ἂν θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ποσόν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Ἀφοῦ οἱ 4 ὑφανταὶ εἰς 6 ἡμέρας ὑφαίνουσι 45 μέτρα ὑφάσματος, διπλάσιοι (ἤτοι 8 ὑφανται) εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον (ἤτοι 6 ἡμ.) θὰ ὑφάνωσι διπλάσιον μῆκος (ἤτοι 90 μ. ὑφάσματος).

Ὅθεν τὸ πλῆθος τῶν ὑφαντῶν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα ποσὰ κ.ο.κ.

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νὰ νοῶμεν συμμεταβαλλόμενα μόνον τὰ δύο συγκρινόμενα ποσά, τὰ δὲ λοιπὰ ὡς ἀμετάβλητα.

Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Μέθοδος καλεῖται γενικῶς τις τρόπος, καθ' ὃν λύονται τὰ προβλήματα εἴδους τινός. Ἡ ἁπλουστέρα ἐξ ὅλων τῶν μεθόδων, εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζονται καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαί, εἶναι ἡ ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν.

Εἰς τὴν μέθοδον ταύτην ὑπάγονται προβλήματα, οἷα τὰ ἑξῆς·

1) Αἱ 5 ὀκάδες πράγματός τινος τιμῶνται 28 δραχμῶν. Πόσον τιμῶνται αἱ 8 ὀκάδες αὐτοῦ;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ γίνεται λόγος περὶ δύο ποσῶν εὐθέως ἀναλόγων, τοῦ βάρους πράγματός τινος καὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ. Τῶν ποσῶν τούτων γνωρίζομεν δύο ἀντιστοιχούσας τιμὰς (ἤτοι 5 ὀκ. τιμῶνται 28 δραχμ.)· ἐπίσης γνωρίζομεν καὶ μίαν ἄλλην τιμὴν τοῦ πρώτου ποσοῦ (ἤτοι 8 ὀκ.) καὶ ζητοῦμεν τὴν εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ ἑτέρου ποσοῦ (ἤτοι πόσας δραχμὰς στοιχίζουσιν αἱ 8 ὀκάδες).

2) Ἐργάται τινὲς ἔσκαψαν εἰς 8 ἡμέρας 12 στρέμματα ἀγροῦ. Πόσα στρέμματα θὰ σκάψωσιν οἱ αὐτοὶ ἐργάται εἰς 12 ἡμέρας;

3) 16 ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 27 ἡμέρας, 12 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο προφανῶς εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι τὰ δύο ποσά, περὶ ὧν γίνεται λόγος (ἤτοι ἐργάται καὶ χρόνος ἐκτελέσεως τῆς ἐργασίας), εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

227. Κατὰ ταῦτα. «Εἰς τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν ὑπάγονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ δύο ποσῶν εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων καὶ ζητεῖται εἰς νέαν δεδομένην τιμὴν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ποία τιμὴ τοῦ ἑτέρου ἀντιστοιχεῖ».

Ἡ μέθοδος αὕτη καλεῖται τῶν τριῶν, διότι ἐκ τριῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον.

Ἂς ἴδωμεν νῦν, πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν τοιούτων προβλημάτων καὶ ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα.

Λύσις τοῦ 1ου προβλήματος.—Ἀφοῦ αἱ 5 ὀκ. τιμῶνται 28
1848 δρχ., ἡ 1 ὀκᾶ θὰ τιμᾶται $\frac{28}{5}$ δραχ., ἑπομένως αἱ 8 ὀκ. θὰ τιμῶνται $\frac{2\times88}{\quad}$ δραχ.

Εὑρέθη τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοῦτο καὶ διὰ τῆς ἀναλογίας ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ τοῦ προβλήματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{5}{8}$ τῶν δύο δεδομένων τιμῶν τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς δεδομένης τιμῆς 28 δραχ. τοῦ ἑτέρου ποσοῦ πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν αὐτοῦ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ, ἤτοι $\frac{5}{8}=\frac{28}{\chi}$ ἢ $5:8=28:\chi$. Ὅθεν (§ 223) $\chi=\frac{28.8}{5}$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ πρακτικῶς ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον χ οὕτως, ὥστε αἱ μὲν ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, αἱ δὲ τιμαὶ ἑκατέρου τῶν ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην χωριζόμεναι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς, ὥστε νὰ σχηματίζηται κλάσμα ἢ λόγος τῶν τιμῶν ἑκατέρου τῶν ποσῶν.

$$\frac{5 \text{ ὀκ.}}{8 \text{ ὀκ.}} \quad \frac{28 \text{ δραχ.}}{\chi \text{ δραχ.}}$$

Ἡ τοιαύτη διάταξις καλεῖται κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ χ εὑρισκόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον $\left(\frac{5}{8}\right)$ τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν ἀντεστραμμένον·

$$\text{ἤτοι } \chi=28\times\frac{8}{5}=44\frac{4}{5} \text{ δραχ.}$$

Λύσις τοῦ 3ου προβλήματος.—Ἀφοῦ οἱ 16 ἐργάται ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον εἰς 27 ἡμέρ., ὁ 1 ἐργάτης θὰ ἐκτελέσῃ τὸ αὐτὸ εἰς 27×16 ἡμ., ἑπομένως οἱ 12 ἐργάται θὰ ἐκτελέσωσιν αὐτὸ εἰς $\frac{27\times16}{12}$ ἡμ.

Εὑρέθη τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Δυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τοῦτο καὶ δι' ἀναλογίας ὡς ἑξῆς·

Ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ τοῦ προβλήματος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος $\left(\frac{16}{12}\right)$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῆς δεδομένης τιμῆς (27 ἡμέρ.) τοῦ ἑτέρου ποσοῦ πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν αὐτοῦ, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ, ἤτοι $\frac{16}{12}=\frac{\chi}{27}$ ἢ 16 : 12=χ : 27, ἐξ ἧς ἕπεται (§ 224) καὶ $\chi=\frac{16.27}{12}$.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν πρακτικῶς ὡς ἑξῆς·

Καταστρώνομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἤτοι ὡς ἑξῆς· $\frac{16 \text{ ἐρ.}}{12 \text{ ἐρ.}}\ \frac{27 \text{ ἡμ.}}{\chi \text{ ἡμ.}}$.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ χ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, ὡς ἔχει, ἤτοι $\chi=27\times\frac{16}{12}=36$ ἡμ. Ὁμοίως λύεται καὶ τὸ ἑξῆς :

Ἀτμόπλοιον, ἔχον ταχύτητα 9 μιλίων, ἐκτελεῖ τὸν μεταξὺ Πειραιῶς καὶ Σύρου πλοῦν εἰς 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕτερον ἀτμόπλοιον, ἔχον ταχύτητα 15 μιλίων, θὰ ἐκτελέσῃ τὸν αὐτὸν πλοῦν;

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα·

228. «Μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων ἀριθμῶν, ἀντεστραμμένον μέν, ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, ὅπως ἔχει δέ, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα».

Παραδείγματα.

1) Οἱ 3 πήχ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 5,60 δρχ., πόσον τιμῶνται τὰ 6 ρούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Τρέπομεν κατ' ἀρχὰς τοὺς τρεῖς πήχεις εἰς 24 ρούπια καὶ εἶτα καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα.

$$\frac{24 \text{ ρ.}}{6 \text{ ρ.}}\ \frac{5.60 \text{ δρχ.}}{\chi \text{ δρχ.}} \text{ καὶ } \chi=5,60\times\frac{6}{24}=1,40 \text{ δρ.}$$

2) Ὁ πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται 3,80· πόσον τιμῶνται 2 πήχ. καὶ 3 ῥούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος; Ὁ 1 πήχ.=8 ρούπ. καὶ οἱ 2 πήχ. καὶ 3 ῥούπ.=19 ῥούπ. Ὅθεν ἕπεται·

$$\frac{8 \text{ ρ.}}{19 \text{ ρ.}}\ \frac{3,80 \text{ δρχ.}}{\chi \text{ δρχ.}} \text{ καὶ } \chi=3,80\times\frac{19}{8}=9,025 \text{ δρχ.}$$

3) Τὰ 8,250 χιλιόγρ. ἐμπορεύματός τινος ἐστοίχισαν 25,60 δραχ., πόσας δραχμὰς στοιχίζει ἡ ὀκᾶ; Ἐπειδὴ ἡ 1 ὀκ.=1280 γραμμάρια καὶ 8,250 χιλιόγρ.=8,250 γραμ., θὰ ἔχωμεν $\frac{8250 \text{ γραμ.}}{1280 \text{ γραμ.}}\ \frac{25,60}{\chi}$ δρχ.

$$\chi = 25,60 \times \frac{1280}{8250} = 3,97 \text{ δραχμάς.}$$

4) Μὲ 8 σελ. 10 πέν. ἀγοράζομεν 1 ὑάρ. ὑφάσματός τινος. Πόσας ὑάρδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 5 λίρ. 15 σελ.;

Ἐπειδὴ 8 σελ. 10 πέν.=0,44 λίρ. καὶ 5 λ. 15 σελ.=5,75 λ., θὰ ἔχωμεν $\frac{0,44 \text{ λίρ.}}{5,75 \text{ λίρ.}} = \frac{1 \text{ ὑάρδ.}}{\chi}$ καὶ $\chi = 1$ ὑάρδ. $\times \frac{5,75}{0,44} = \frac{575}{44} = 13\frac{3}{44}$ ὑάρδ.

Καὶ γενικῶς πάντα τὰ προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν δύνανται νὰ λυθῶσι διὰ τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὰ 250 δραμ. μετάξης τιμῶνται 16.60 δρχ. Πόσον τιμῶνται αἱ 2 ὀκ. καὶ 80 δράμ.; (Ἀπ. 58,43 δραχ.).

2) Πόσα φράγκα κάμνουσιν 632 Ὁλλανδικὰ φλωρίνια, ὅταν 189 φλωρίνια κάμνωσι 400 φράγκα; (Ἀπ. 1337,56 φράγκα).

3) Πόσα μάρκα τιμῶνται 278 χιλιόγραμμα μολύβδου ἐν Ἁμβούργῳ πρὸς 12,70 μάρκα τὰ 50 χιλιόγραμμα; (Ἀπ. 70,612 μάρκα).

4) Πόσα μάρκα τιμῶνται 172 κιβώτια σταφίδος ἐν Γερμανίᾳ πρὸς 244 μάρκα τὰ 44 κιβώτια; (Ἀπ. 953,82 μάρκα).

5 Ἐπὶ 997 ὀκ. καὶ 200 δραμ. ἐμπορεύματός τινος ὁ τελωνιακὸς δασμὸς ἀνέρχεται εἰς 102 δραχ. Εἰς πόσον θ' ἀνέλθῃ οὗτος ἐπὶ 1928 ὀκάδων; (Ἀπ. 197,15 δραχμ.).

6) Πόσος εἶναι ὁ ναῦλος ἐπὶ 2451 ἑκατολλίτρων σίτου πρὸς 42,50 κορώνας αὐστριακὰς τὰ 50 ἑκατόλλιτρα; (Ἀπ. 2083,35 κορῶναι).

7) 35 γρόσια Τουρκίας μὲ πόσας δρχ. ἰσοδυναμοῦσιν, ὅταν ἡ λίρα τιμωμένη 22,90 δρχ. λογαριάζηται πρὸς 108 γρόσια; (Ἀπ. 7,42 δρχ.).

8) Πόσα γρόσια κάμνουσιν 8,50 δρ., ὅταν ἡ λίρα τιμωμένη 22,75 δρχ. λογαριάζηται πρὸς 103 γρόσια καὶ πόσα, ὅταν ἡ λίρα λογαριάζηται πρὸς 100 γρόσια; (Ἀπ. α' 38 γρ. 19 παρ., β' 37 γρ. 14 παρ.).

9) Κωδωνοστάσιόν τι ρίπτει σκιὰν 18,45 μέτρων. Ράβδος τις κατακορύφως τοποθετουμένη καὶ μήκους 1,15 μ. ρίπτει κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν σκιὰν 1,45. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κωδωνοστασίου;

(Ἀπ. 14,632 μέτρα).

10) Ἐργάτης τις ἐργαζόμενος 8 ὥρας καθ' ἡμέραν τελειώνει ἔργον τι εἰς 18 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργάζηται 5 ὥρ. καὶ 20 π. καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσῃ τὸ αὐτὸ ἔργον; (Ἀπ. εἰς 27 ἡμ.).

11) 10 βήματα ὁδοιπόρου κάμνουσιν 7 $\frac{1}{2}$ μέτρα. Πόσα βήματα θὰ κάμῃ οὗτος, διὰ νὰ διατρέξῃ διάστημα 8,250 χιλιομ.;

('Απ. 11000 βήματα).

12) Ἐξ 60 ὀκ. ἐλαιῶν ἐξάγομεν 11 ὀκ. 300 δράμ. ἐλαίου· ἐκ 1540 ὀκάδων ἐλαιῶν πόσας ὀκάδ. ἐλαίου θὰ ἐξαγάγωμεν;

('Απ. 301 ὀκάδας 233 $\frac{1}{3}$ δράμια).

13) Τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως τιμῶνται 5,45 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται οἱ 12 πήχεις;

('Απ. 74,74 δραχμάς).

14) Ταξειδιώτης τις ἐπλήρωσε δι' εἰσιτήριον β^{ας} θέσεως καὶ δι' ἀπόστασιν 175 χιλιομ. δραχμὰς 18,25. Πόσον θὰ ἐπλήρωνε δι' ἀπόστασιν 185 χιλιόμ.;

('Απ. 19,30 δραχμάς).

15) 112 ὑάρδ. καὶ 2 πόδ. ὑφάσματός τινος τιμῶνται 18 λίρ. καὶ 12 σελ. Πόσον τιμῶνται 18 ὑάρδ. 1 ποὺς καὶ 6 δάκτ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

('Απ. 14 λίρ. 8 σελ. 10 πέν. $\frac{146}{169}$).

16) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τοῦ πατώματος μιᾶς αἰθούσης ἐχρησιμοποιήθησαν 5 τάπητες πλάτους 1,75. μ. Πόσοι τάπητες πλάτους 1,25 μ. χρειάζονται πρὸς τοῦτο;

('Απ. 7 τάπητες).

17) Ἐὰν ἐργάτης τις ἐξοδεύῃ 2,45 δραχ. καθ' ἑκάστην πρὸς συντήρησιν τῆς οἰκογενείας του, ἐπαρκεῖ εἰς αὐτὸν ποσόν τι δρχ. ἐπὶ 25 ἡμέρας. Ἐὰν ὅμως ἐξοδεύῃ 3,20 δρχ. καθ' ἡμέραν, διὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἐπαρκέσῃ τὸ αὐτὸ χρηματικὸν ποσόν;

('Απ. 19 $\frac{9}{64}$ ἡμ. ἢ διὰ τὴν 20ὴν ἡμ. ἔχει 0,45 δρ.).

18) 2 ὀκ. καὶ 300 δράμ. κὸκ ἔχουσι θερμαντικὴν δύναμιν, ὅσην 6 ὀκ. ξυλάνθρακος. Μὲ πόσας ὀκάδας τοῦ τελευταίου ἰσοδυναμοῦσι 15 στατ. καὶ 10 ὀκ. κόκ;

('Απ. 1461 $\frac{9}{11}$ ὀκ.).

19) Ὑφαντὴς ὑφαίνει 50 πήχεις ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, εἰς χρόνον τινά. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι $\frac{5}{8}$;

('Απ. 70 πήχ).

20) Ἐὰν διά τινα ἐνδυμασίαν χρειάζωνται 7 πήχ. καὶ 5 ρούπ. ὑφά-

σματός τινος πλάτ. 7 ρουπ., πόσοι πήχεις θὰ χρειασθῶσιν ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, ἔχοντος πλάτος μεγαλύτερον κατὰ $1\frac{1}{2}$ ρούπ.

('Απ. 6 πήχ. $2\frac{4}{17}$ ρούπ.)

21) Μὲ ποσόν τι σύρματος δύναται νὰ πλεχθῇ κιγκλίδωμα μήκους 40 μέτρων καὶ ὕψους $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου. 'Εὰν τὸ ὕψος γίνῃ $1\frac{1}{4}$ τοῦ μέτρου, διὰ πόσον μῆκος τοῦ κιγκλιδώματος θὰ ἐπαρκέσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο τοῦ σύρματος; ('Απ. 24 μέτρ.)·

22) Διὰ τὴν πλακόστρωσιν μιᾶς αὐλῆς χρειάζονται 85 πλάκες, ἐξ ὧν ἑκάστη ἔχει ἐπιφάνειαν 0,75 τ. μ. Πόσαι πλάκες ἐπιφανείας $0{,}66\frac{2}{3}$ τ. μ. ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν αὐλήν; ('Απ. $95\frac{5}{8}$ πλάκες).

23) Μὲ ράκη βάρους 55 ὀκ. κατασκευάζομεν 40 ὀκ. χάρτου ἐπιστολῶν. Πόσαι ὀκάδες ῥακῶν ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κατασκευὴν 34 δεσμίδων χάρτου τοιούτου, ἐὰν ἑκάστη δεσμὶς ζυγίζῃ 180 δράμια;

('Απ. 21 ὀκ. 15 δράμ.).

24) 15 ἐργάται δύνανται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι εἰς 18 ἡμ. 'Αφοῦ ὅμως εἰργάσθησαν ἐπὶ 4 ἡμέρας, προσέλαβον καὶ 7 ἐργ. ἀκόμη. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἀποπερατώσωσιν ἤδη τὸ ἔργον; ('Απ. $9\frac{6}{11}$ ἡμ.).

25) 'Αγρός τις στρεμμάτων 245,8 ἐπωλήθη ἀντὶ 8758,60 δραχ., δεύτερος δὲ ἀγρὸς στρεμμάτων 183,45 ἀντὶ 5840,35. Ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι ἀκριβότερος; ('Απ. ὁ α').

26) Δύο δοχεῖα οἴνου περιέχουσι τὸ μὲν α') 227,46 λίτρας οἴνου, τὰ δὲ β') 1,785 ἑκατόλλιτρα τοῦ αὐτοῦ οἴνου. 'Εὰν τὸ πρῶτον ἐπωλήθη ἀντὶ 135,40 δραχ., πόσον θὰ πωληθῇ τὸ δεύτερον;

('Απ. 106,28 δραχ.).

27) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσιν 829 ἄνδρες καὶ ἔχουσι τροφὰς διὰ $5\frac{1}{2}$ μῆνας. Πόσον θὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ αὐταὶ τροφαί, ἐὰν ἔλθωσιν ἀκόμη 175 ἄνδρες; ('Απ. 4 μῆν. 16 ἡμ. περίπου).

Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

229. Εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν ὑπάγονται τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται ἡ τιμὴ ἑνὸς ποσοῦ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα

εἰς δεδομένας τιμὰς δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων ποσῶν εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀναλόγων πρὸς αὐτό, καὶ ζητεῖται ἡ νέα τιμὴ τοῦ ποσοῦ τούτου, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἄλλας δεδομένας τιμὰς τῶν ἄλλων ποσῶν.

Ὀνομάζεται δὲ σύνθετος, διότι πᾶν πρόβλημα τῆς μεθόδου ταύτης δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἑπομένου προβλήματος.

1) Ἐργάτης ἐργαζόμενος 8 ὥρ. καθ' ἡμέραν ἐπὶ 20 ἡμ. σκάπτει 12 στρέμματα ἀμπέλου τινός· ὁ αὐτὸς ἐργάτης ἐργαζόμενος 10 ὥρ. καθ' ἡμέραν εἰς πόσας ἡμέρας δύναται νὰ σκάψῃ 18 στρέμματα τῆς αὐτῆς ἀμπέλου ;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ, ὡς βλέπομεν, γίνεται λόγος περὶ τριῶν ποσῶν, τῶν ὡρῶν, ἡμερῶν καὶ στρεμμάτων. Δίδεται ἡ τιμὴ 20 ἡμ. τοῦ δευτέρου ποσοῦ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς τιμὰς 8 ὥρ. καὶ 12 στρεμμάτων δύο ἄλλων ποσῶν· ζητεῖται δὲ νὰ εὕρωμεν τὴν νέαν τιμὴν τοῦ ποσοῦ τῶν ἡμερῶν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς νέας τιμὰς 10 ὥρ. καὶ 18 στρεμ. τῶν δύο ἄλλων ποσῶν.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου καταστρώνομεν ἐν πρώτοις τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν ποσῶν καὶ τὴν ἄγνωστον τιμήν, ἣν παριστῶμεν διὰ τοῦ χ, ὡς ἑξῆς·

$$\frac{8\text{ ὥρ.}}{10\text{ ὥρ.}} \qquad \frac{20\text{ ἡμ.}}{\chi} \qquad \frac{12\text{ στρέμ.}}{18\text{ στρέμ.}} \qquad (1)$$

οὕτως, ὥστε αἱ μὲν ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῶν διαφόρων ποσῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, αἱ δὲ δύο τιμαὶ ἑκάστου εἰς τὴν αὐτὴν στήλην χωριζόμεναι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς, ὥστε νὰ σχηματίζηται κλάσμα ἢ λόγος τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ.

Μετὰ ταῦτα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν κατ' ἀρχὰς εἰς πόσας ἡμέρας ὁ ἐργάτης θὰ σκάψῃ τὰ 12 στρέμ., ἐὰν ἀντὶ 8 ὥρ. ἐργάζηται 10 ὥρ. καθ' ἡμέραν, ἤτοι καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

$$\frac{8\text{ ὥρ.}}{10\text{ ὥρ.}} \qquad \frac{20\text{ ἡμ.}}{\chi} \qquad \left(\frac{12\text{ στρέμ.}}{12\text{ στρέμ.}}\right)$$

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν ὡρῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 228) $\chi = 20 \times \frac{8}{10}$.

Ἀφοῦ εὕρωμεν ὅτι ὁ ἐργάτης ἐργαζόμενος 10 ὥρας καθ' ἡμέραν σκάπτει τὰ 12 στρέμ. εἰς $20 \times \frac{8}{10}$ ἡμ., ζητοῦμεν τώρα νὰ εὕρωμεν εἰς πόσας ἡμέρας οὗτος ἐργαζόμενος τὰς αὐτὰς ὥρας καθ' ἡμέραν θὰ σκάψῃ τὰ 18 στρέμ. τῆς αὐτῆς ἀμπέλου, ἤτοι καταστρώνομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

$$\left(\frac{10 \text{ ὥρ.}}{10 \text{ ὥρ.}}\right) \quad \frac{20\times\frac{8}{10}\text{ ἡμ.}}{\chi} \quad \frac{12 \text{ στρέμ.}}{18 \text{ στρέμ.}}$$

Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ τῶν ἡμερῶν καὶ τῶν στρεμμάτων εἶναι εὐθέως ἀνάλογα, θὰ ἔχωμεν $\chi=20\times\frac{8}{10}\times\frac{18}{12}$ἡμ. Τοῦτο εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ταχύτερον καὶ ὡς ἑξῆς·

Μετὰ τὴν κατάστρωσιν (1) τοῦ προβλήματος πρὸς εὕρεσιν τῆς ζητουμένης τιμῆς (χ) πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν αὐτῆς ἀριθμὸν πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{8}{10}$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν ὡρῶν, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν, ἔπειτα δὲ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον λόγον $\left(\frac{18}{12}\right)$ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ποσοῦ τῶν στρεμμάτων, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθέως ἀνάλογον τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν, ἤτοι

$$\chi=20\times\frac{8}{10}\times\frac{18}{12}=\frac{20\times8\times18}{10\times12}=\frac{1\times8\times3}{1}=24 \text{ ἡμ.}$$

2) Πρὸς καλλιέργειαν ἀμπελῶνος προσελήφθησαν 18 ἐργάται, οἵτινες ἐκαλλιέργησαν εἰς 8 ἡμέρας τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀμπελῶνος, ὁπότε ἀπεχώρησαν οἱ 8 ἐργάται. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ ὑπολειπόμενοι ἐργάται θὰ περατώσωσι τὴν καλλιέργειαν τοῦ ἀμπελῶνος;

Λύσις ὁμοία.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών.

230. «Μετὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον (χ), πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν αὐτοῦ ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσιν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ, ὡς ἔχει μέν, ἐὰν τὸ ποσὸν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου, ἀντεστραμμένον δέ, ἂν τὸ ποσὸν εἶναι ἀνάλογον πρὸς αὐτό».

Παραδείγματα.

1) Τάπης τις, ὅστις ἔχει μῆκος 8 πήχ. καὶ πλάτος 5 πήχ., τιμᾶται 850,60 δραχ. Ἕτερος τάπης τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους μὲν 10 πήχ.,

πλάτους δὲ 6 πήχ. πόσον τιμᾶται; Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα·

8 πήχ. μήκ.	5 πήχ. πλάτ.	850,60 δραχ.
10 πήχ. μήκ.	6 πήχ. πλάτ.	χ

Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἄνωθεν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 850,60 δρ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{10}$ ἀντεστραμμένον, διότι τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν αὐτοῦ, καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ ἀντεστραμμένον ἐπίσης, διότι καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος εἶναι εὐθέως ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀξίαν αὐτοῦ. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν

$$\chi=850{,}60\times\frac{10}{8}\times\frac{6}{5}.$$

Μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀξίαν τοῦ τάπητος, ἤτοι χ=1275,90 δραχ.

2) Διὰ νὰ ἐνδυθῶσιν 25 στρατιῶται, χρειάζονται 78 πήχ. ὑφάσματός τινος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1 πήχ. 2 ῥούπ. Διὰ νὰ ἐνδυθῶσι 35 στρατιῶται, πόσοι πήχεις χρειάζονται ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 6 ῥούπ.; Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα.

25 στρατ.	78 πήχ.	1 πήχ. 2 ῥούπ. πλάτ.
35	χ	6 ῥούπ.

Πρὶν ἐφαρμόσωμεν τὸν πρακτικὸν κανόνα, ἀνάγομεν τοὺς ἀριθμοὺς ἑκάστης στήλης (ἐὰν εἶναι συμμιγεῖς) εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα.

Οὕτω φθάνομεν εἰς τὴν ἑπομένην κατάστρωσιν.

25 στρατ.	78 πήχ.	10 ῥουπ. πλάτ.
35	χ	6 ῥουπ.

ἐξ οὗ προκύπτει $\chi=78\times\frac{35}{25}\times\frac{10}{6}=182$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τεμάχιον ὑφάσματος 180 πήχ. μήκους καὶ 1 πήχ. καὶ 3 ῥουπ. πλάτους ἐπωλήθη ἀντὶ 650 δραχ.· ἕτερον τεμάχιον ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος μήκους 240 πήχ. 5 ῥουπ. καὶ πλάτους 7 ῥουπ. πόσας δραχμὰς θὰ ἀξίζῃ; ('Απ. 552,95 δραχ.).

2) Σιδηρᾶ τις πλὰξ ἔχουσα μῆκος 1,80 μέτρ., πλάτος 0,45 μ. καὶ πάχος 0,15 μετ. ζυγίζει 185 ὀκ. 300 δραμ. Ἄλλη τις σιδηρᾶ πλὰξ ἔχουσα μῆκος 1,20 μ., πλάτος 0,80 μ. καὶ πάχος 0,22 μ. πόσον θὰ ζυγίζῃ;

('Απ. 322 ὀκ. $353\frac{47}{81}$ δραμ.)·

3) Πληρώνει τις 284,32 δραχ. διὰ ναῦλον 9 τόν. 25 χ.λ.γ. δι' ἓν

διάστημα 148,5 χιλιομ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ μεταφορὰ 4 τόν. καὶ 5 χ.λ.γ. εἰς ἀπόστασιν 172 χιλιομ.; ('Απ. 146,13 δραχ. περίπου).

4) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι 30000 ὀκ. ἀλεύρου, αἵτινες ἐπαρκοῦσι διὰ τὴν τροφὴν 1500 ἀνδρῶν ἐπὶ 85 ἡμέρ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ προμήθεια τῶν ἀλεύρων, ἐὰν προστεθῶσιν εἰς τούτους 900 ἄλλοι καὶ πρόκειται νὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ διὰ 234 ἡμέρας;

('Απ. 102141 $\frac{3}{17}$ ὀκάδ.).

5) Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς θόλου ἐχρειάζοντο 276 πλίνθοι μήκους 22 δακτ., πλάτους 12 δακτ. καὶ πάχους 8 $\frac{3}{4}$ δακτ. (1 δάκ.=0,01 μέτ.). Πόσοι πλίνθοι θὰ ἐπήρκουν πρὸς τοῦτο μήκους 21 δακτ., πλάτους 14 δακτ. καὶ πάχους 8 $\frac{2}{5}$ δακτ.; ('Απ. 258 $\frac{8}{49}$ πλίνθοι).

6) Εἴς τι φρούριον ὑπάρχουσι ζωοτροφίαι διὰ 1520 ἄνδρας ἐπὶ 5 μῆνας. Ἐὰν ἡ φρουρὰ αὐξηθῇ κατὰ 100 ἄνδρας καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ διαμείνωσιν 1 $\frac{5}{6}$ μηνὸς ἐπὶ πλέον, ποῖον σιτηρέσιον πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος; ('Απ. $\frac{760}{1107}$ σιτηρ.).

7) Ὁδοιπόρος τις, ὁδοιπορῶν 10 ὥρ. 20 π. καθ' ἑκάστην, διανύει εἰς 4 ἡμέρ. 150 χιλιόμ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διανύσῃ 200 χιλιόμ., ἐὰν ὁδοιπορῇ 8 ὥρ. 40 π. καθ' ἑκάστην;

('Απ. 4$\frac{16}{27}$ἡμ. τὴν πέμπτην θὰ ὁδοιπορήσῃ 5 ὥρ. 8 π. 8$\frac{8}{9}$δ.).

8) Διὰ τὴν ἐπίστρωσιν ἐπιφανείας τινὸς ἐχρειάσθησαν 4 τάπητες μήκους 6 πήχ. καὶ πλάτους 1$\frac{3}{8}$τοῦ πήχ. Πόσοι τάπητες μήκους 7 πήχεων καὶ 1$\frac{1}{4}$πήχ. πλάτους ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐπίστρωσιν τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας; ('Απ. 3 $\frac{27}{35}$ τάπ.).

9) 18 ἐργάται ἐργαζόμενοι καθ' ἡμέραν 9 ὥρας ἐξετέλεσαν τὰ $\frac{4}{9}$ ἔργου τινὸς εἰς 12 ἡμ. Ἐὰν προσληφθῶσι καὶ ἕτεροι 10 ἐργάται καὶ ἐργάζωνται ὅλοι 8 ὥρ. καθ' ἑκάστην, εἰς πόσας ἡμέρας θ' ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον;

('Απ.10$\frac{95}{112}$ἡμ. ἢ τὴν 11ην ἡμ. θὰ ἐργασθῶσιν 6 ὥρ. 47 π.).

10) 86 δέματα (μπάλες) βάμβακος, ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 150

χιλιόγ., ἀξίζουσι 28380 δρχ. Πόσον θὰ ἀξίζωσιν 104 δέματα, ἐξ ὧν ἕκαστον ζυγίζει 140 χιλιόγρ., ὅταν ἡ ποιότης τοῦ βάμβακος τῶν πρώτων δεμάτων ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν τῶν δευτέρων ὡς ὁ 11 πρὸς τὸν 14; ('Απ. 40768 δραχ.).

11) Ἐὰν 72 ὑφανταὶ εἰς 12 ἡμέρας ἐπὶ 9 ὥρας καθ' ἑκάστην ἐργαζόμενοι κατασκευάζωσι 225 τεμάχια ὑφάσματός τινος μήκους 30 πήχ. καὶ πλάτους 7 ρουπ., πόσα τεμάχια κατασκευάζουσιν 60 ὑφανταὶ εἰς 14 ἡμέρας ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ ὥρας καθ' ἑκάστην ἐργαζόμενοι, ὅταν ἕκαστον τεμάχιον ἔχῃ μῆκος μὲν 35 πήχεων καὶ πλάτους 1 πήχ.; ('Απ. 155 τεμάχια περίπου).

12) Ἀγρός τις μήκους 452 μέτρ. καὶ πλάτους 135,6 μ. ἐπωλήθη ἀντὶ 5186,30 δραχ. Ἐὰν ἕτερος ἀγρὸς ἄλλης γονιμότητος μήκους 67,8 μ. καὶ πλάτους 178,25 μ. πωλῆται ἀντὶ 1200 δραχ., ποῖον λόγον ἔχει ἡ ἀξία τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου.

('Απ. ὡς ὁ 87 πρὸς τὸν 10 περίπου).

13) Ἐργοστασιάρχης τις ἐπλήρωσε κατὰ τὸ διάστημα 4 ἑβδομάδων 4838,40 δραχ. δι' ἡμερομίσθια εἰς 96 ἐργάτας ἐργασθέντας ἐπὶ 6 ἡμ. καθ' ἑβδομάδα καὶ ἐπὶ ὥρας 12 καθ' ἑκάστην, θέλει δὲ νὰ περιορίσῃ τὴν βιομηχανικὴν ἐργασίαν καὶ ἐλαττώνει τὸν χρόνον τῆς ἐργασίας εἰς 5 ἡμ. καθ' ἑβδομάδα καὶ εἰς 10 ὥρας καθ' ἑκάστην. Ζητεῖται α') πόσους ἐργάτας δύναται τώρα νὰ ἀπασχολήσῃ, ἐὰν θέλῃ νὰ πληρώνῃ δι' ἡμερομίσθια 860 δραχ. καθ' ἑβδομάδα· β') πόσας δραχμὰς θὰ πληρώνῃ καθ' ἑβδομάδα δι' ἡμερομίσθια, ἐὰν κρατήσῃ μόνον 60 ἐργάτας;

('Απ. 98 ἐργ. 525 δραχ.).

Προβλήματα ὑπολογισμοῦ ποσοστῶν.

231. Τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ὅμως ὁ εἷς τῶν τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. Διὰ τοῦτο αἱ πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων ἀπαιτούμεναι πράξεις ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ταχέως. Ἐντεῦθεν ἐξηγεῖται διατί ἐν τῷ ἐμπορίῳ ἐπικρατεῖ συνήθεια νὰ προσδιορίζωσιν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ τοῦ 1000 κ.λ.π. διάφορα ποσά, ὡς λόγου χάριν τὰ κέρδη καὶ τὰς ζημίας, τὰς ἀμοιβὰς τὰς παρεχομένας εἰς μεσολαβοῦντα πρόσωπα δι' ἐμπορικὰς πράξεις, μεσιτείας (προμηθείας), διαφόρους ἐκπτώσεις εἴτε ἐπὶ τοῦ βάρους (ἀπόβαρον, κοινῶς τάρα) εἴτε ἐπὶ τῶν τιμῶν (ἔκπτωσις, κοινῶς σκόντο) ἐμπορεύματός τινος, τὰ πλη-

ρωνόμενα ἀσφάλιστρα εἰς ἀσφαλιστικὰς ἑταιρείας καὶ ἄλλα πολλά.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι παραγγελιόδόχος τις ἠγόρασε διὰ λογαριασμόν μας ἐμπορεύματα ἀξίας 4000 δραχ. Εἰς τοῦτον συμφωνοῦμεν νὰ δώσωμεν ἀμοιβήν τινα, τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν πρὸς 3 δραχμὰς π. χ. δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα δραχμῶν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος.

Ἡ ἀμοιβὴ αὕτη, καλουμένη προμήθεια, παρίσταται συμβολικῶς 3%, καὶ ἀπαγγέλλεται τρία τοῖς ἑκατόν.

Ὁμοίως, ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀσφαλίζομεν τὴν οἰκίαν μας $1\frac{1}{2}$ ἐπὶ τοῖς χιλίοις, ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ πᾶσαν χιλιάδα τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας καταβάλλομεν $1\frac{1}{2}$ δραχ., παρίσταται δὲ τοῦτο συμβολικῶς $1\frac{1}{2}$‰.

Τὸ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. καταβαλλόμενον ποσὸν καλεῖται ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς 100 ἢ τοῖς 1000 κ.τ.λ.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Παραγγελιοδόχος τις ἠγόρασε διὰ λογαριασμὸν τρίτου ἐμπορεύματα ἀξίας 5800 δρχ. Πόση εἶναι ἡ προμήθειά του πρὸς 2% ;

$$\frac{100 \text{ δραχ. ἐμπ.}}{5800 \text{ δρ.}} \qquad \frac{2 \text{ δρ. προμήθ.}}{x} \qquad x=2\times\frac{5800}{100}=2\times58=116 \text{ δραχ.}$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκεται ταχύτερον, ἂν διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν 5800 τῶν ἐμπορευμάτων δι' 100, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{5800}{100}$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ δεδομένον ποσοστὸν (2%), ἤτοι προμήθεια πρὸς (2%) ἐπὶ 5800 δραχ.$=58\times2=116$ δραχ.

2) Ἠσφαλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀξίας 30000 δραχμῶν πρὸς $1\frac{1}{2}$‰. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ ἐτησίως ;

Λύσις.

$$\frac{\text{ἀξία οἰκίας } 1000 \text{ δραχ.}}{30000 \text{ δραχ.}} \qquad \frac{\text{ἀσφάλιστρα } 1^1/_2 \text{ δρχ.}}{x}$$

$$x=1\frac{1}{2}\times\frac{30000}{1000}=1\frac{1}{2}\times30=45 \text{ δραχμάς.}$$

Καὶ ἐνταῦθα τὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκεται συντόμως, ἐὰν τὸ ἀσφαλιζόμενον ποσὸν (30000) δρχ. διαιρέσωμεν διὰ 1000, τὸ δὲ πηλίκον $\frac{30000}{1000}$ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ δεδόμενον ποσοστὸν $1\frac{1}{2}$‰.

ἤτοι ἀσφάλιστρα πρὸς $1\frac{1}{2}$‰ ἐπὶ 30000 δραχ.$=30\times1\frac{1}{2}=45$ δρχ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

232. «Ὅταν δίδηται τὸ ποσοστὸν τῶν 100 ἢ τῶν 1000 καὶ ζητῆται τὸ ἀντίστοιχον ποσοστὸν ἑτέρου ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν τοῦτον διὰ τοῦ 100 ἢ 1000, τὸ δὲ πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ δεδομένον ποσοστόν».

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὴν μεσιτείαν πρὸς $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ ποσοῦ 7600 δραχμῶν.

Λύσις. Μεσιτεία 1 % ἐπὶ 7600 δραχ. 76 δραχ.

»	$\frac{1}{2}$ % » »	»	38 »
Μεσιτεία	$1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ 7600 δρχ.		114 δραχ.

ΣΗΜ. *Αἱ πράξεις αὗται ἐκτελοῦνται εὐκόλως καὶ ἀπὸ μνήμης.*

2) Πόσον στοιχίζουσιν 7000 ὀκ. καφὲ πρὸς 260 δρ. τὰς 100 ὀκ.

3) Πόση εἶναι ἡ προμήθεια πρὸς $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ 4800 δραχ.;

4) Ἐάν τις πωλῇ ἐμπόρευμά τι ἀξίας 3801 μὲ κέρδος 9% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, πόσον κερδίζει ἐν ὅλῳ;

Παρατ. — Πάντα ἐν γένει τὰ προβλήματα ποσοστῶν ἀνάγονται εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ λύονται κατὰ τοὺς πρακτικοὺς κανόνας ἐκείνων.

Ἔστωσαν ἤδη τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 1850 δραχ. μὲ κέρδος 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόσον εἶναι τὸ κέρδος;

Ἐὰν ἐπώλει τὰ ἐμπορεύματα 108 δραχ., θὰ τὰ εἶχεν ἀγοράσει 100. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

τιμὴ πωλήσεως	τιμὴ ἀγορᾶς
108 δραχ.	100 δραχ.
1850 δραχ.	χ

$$χ = 100 \times \frac{1850}{108} = 1850 \times \frac{100}{108} = 1712{,}96 \text{ δρχ.}$$ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς.

Ἑπομένως τὸ κέρδος εἶναι 1850—1712,96=137,04 δρχ.

Τὸ κέρδος εὑρίσκεται καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς·

τιμὴ πωλήσεως	κέρδος
108 δραχ.	8 δραχ.
1850	χ

$$χ=8\times\frac{1850}{108}=1850\times\frac{8}{108}=137{,}04$$ δρχ. κέρδος.

2) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 1920 δρχ. μὲ ζημίαν 9% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τὰ εἶχεν ἀγοράσει καὶ πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ζημία;

Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τῶν ἐμπορευμάτων εἶναι 100 δρχ., τότε, διὰ νὰ ζημιωθῇ 9%, πρέπει ταῦτα νὰ πωληθῶσιν ἀντὶ 100—9=91 δραχμῶν.

Ὅθεν ἕπεται ἡ ἑξῆς κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

91 δραχ. τιμὴ πωλ.	100 δραχ. τιμὴ ἀγορ.
1920 δραχ.	χ

$$χ=100\times\frac{1920}{91}=2109{,}90$$ δρχ. ἀξία ἀγορᾶς περίπου.

Ἑπομένως ἡ ζημία εἶναι 2109,90 – 1920=189,90 δρχ.

Ἡ ζημία δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς·

91 δρχ τιμὴ πωλ.	9 δρχ. ζημία
1920 δραχ.	χ

$$χ=9\times\frac{1920}{91}=189{,}90$$ δραχ.

3) Ἡ ὀκᾶ ὀρύζης στοιχίζει 0,95 δρχ. καὶ πωλεῖται 1,10 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ὁ ἔμπορος ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ταύτης; Ἀφοῦ ἐξ ἑκάστης ὀκᾶς κερδίζει 1,10—0,95=0,15 δραχ., ἕπεται ἡ ἑξῆς κατάστρωσις.

0,95 δρχ. τιμὴ ἀγορ.	0,15 δρχ. κέρδος
100 δραχ.	χ

$$χ=0{,}15\times\frac{100}{0{,}95}=15\frac{15}{19}\,\%.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄) Ἀπὸ μνήμης.

1) Εὑρεῖν τὸ 1 % α΄) ἐπὶ 9 δραχ., β΄) ἐπὶ 4000 δρχ., γ΄) ἐπὶ 1852 δρχ., δ) ἐπὶ $103\frac{1}{3}$ δραχ., ε΄) ἐπὶ $87\frac{1}{2}$ δραχ.

2) Εὑρεῖν τὸ 10% α΄) ἐπὶ 915 λιτρῶν, β΄) ἐπὶ 1615 δραχ.

3) Εὑρεῖν τὸ 20% α΄) ἐπὶ 1000 δρ., β΄) ἐπὶ 4000 δρ., γ΄) ἐπὶ 800 δραχ., δ΄) ἐπὶ 932 δολλαρ., ε΄) ἐπὶ 875 χιλιογρ.

4) Εὑρεῖν τὸ 25 % α΄) ἐπὶ 840 λιρῶν στερλινῶν, β΄) ἐπὶ 870 ἑκατολλίτρων, γ΄) ἐπὶ 1000 στρεμμάτων.

5) Εὑρεῖν τὸ $\frac{1}{2}$ % α΄) ἐπὶ 120 δραχ., β΄) ἐπὶ 70 δραχ., γ΄) ἐπὶ 810 δραχ.

6) Εὑρεῖν τὸ $\frac{1}{3}$ % α΄) ἐπὶ 720 δραχ., β΄) ἐπὶ 960 λιρῶν στερλινῶν.

7) Εὑρεῖν τὸ $3\frac{1}{3}$ % α΄) ἐπὶ 420 ὀκ., β΄) ἐπὶ 37 δραχ. ($3\frac{1}{3}$ = πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ 10).

8) Εὑρεῖν τὸ $12\frac{1}{2}$ % α΄) ἐπὶ 1200 μ., β΄) ἐπὶ 720 ὀκ. ($12\frac{1}{2}$ = πρὸς τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ 100).

9) Πόσον εἶναι τὸ 1 ‰ ἢ 5 ‰ ἢ $2\frac{1}{2}$ ‰ ἢ 10 ‰ ἢ $\frac{1}{2}$ ‰ ἢ $\frac{1}{3}$ ‰ ἐπὶ 1340 δραχμῶν;

10) Προμήθεια πρὸς 5 % ἀνέρχεται εἰς 25 δρ. Πόσον εἶναι τὸ ποσόν, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐγένετο αὕτη;

11) Ἐπὶ τίνος ποσοῦ τὸ 20% ἀνέρχεται εἰς 48 λίρας στερλίνας;

12) Εἰς πόσον θὰ ἀνέλθῃ κεφάλαιον 2000 δραχ., ἐὰν εἰς τοῦτο προστεθῇ καὶ κέρδος 15 %;

Β΄) Γραπτῶς.

1) Πόσον πίτυρον δίδουσι 2485 ὀκάδες σίτου, ὅστις παρέχει 8 % πίτυρον; (Ἀπ. 198 ὀκ. 320 δράμ. πίτυρον)

2) Ἀσφαλίζει τις τὴν οἰκίαν του ἀξίας 33660 δρ. πρὸς $1\frac{7}{9}$ ‰. Πόσα ἀσφάλιστρα πληρώνει κατ' ἔτος; (Ἀπ. 59,84).

3) Ποία εἶναι ἡ προμήθεια πρὸς 2 % ἐπὶ δρ. 7588,15; (Ἀπ. 151,663 δρ.).

4) Τὸ ἀπόβαρον πρὸς $7\frac{1}{2}$ % ἐμπορεύματός τινος ἀνέρχεται εἰς 140,500 χιλιόγραμμα. Πόσον εἶναι τὸ ἀκαθάριστον βάρος αὐτοῦ; (Ἀπ. 1873,333 χιλγ.)

5) Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τις κατ' ὀκᾶν καφὲν ἀξίας $3\frac{1}{2}$ δρ., ἵνα κερδήσῃ 20 %; (Ἀπ. 4,20).

6) Τὸ καθαρὸν κεφάλαιον ἐμπόρου τινὸς κατὰ τὴν ἀπογραφὴν τῆς 1ης Ἰανουαρίου ἀνήρχετο εἰς 65740 δραχ., κατὰ δὲ τὴν ἀπογραφὴν

τῆς 31ης Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἀνῆλθεν εἰς 78172,85 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδησεν οὗτος; ('Απ. 18,91 %).

7) Τὸ ἀκαθάριστον βάρος ἑνὸς ἐμπορεύματος εἶναι 2135 ὀκ., τὸ δὲ ἀπόβαρον αὐτοῦ λογαριάζεται πρὸς $6\frac{1}{2}$ %. α') Πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν βάρος τοῦ ἐμπορεύματος καὶ β') πόση ἡ τιμὴ αὐτοῦ πρὸς 135,20 δρ. τὰς 100 ὀκ.; ('Απ. α') 1996 ὀκ. 90 δραμ., β') 2698,89 δρχ.).

8) Πόσον πρέπει νὰ πληρώσωμεν τὴν δωδεκάδα πορτοκαλλίων, διὰ νὰ κερδήσωμεν 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἐὰν 3720 πορτοκάλλια στοιχίζωσι 108,50 δρ. ('Απ. $36\frac{3}{4}$ λεπτά).

9) Ποία εἶναι ἡ μεσιτεία πρὸς $1\frac{1}{8}$ % ἐπὶ 15 λιρ. 6 σελ. 3 πεν.;

('Απ. 3 σελ. 5 $^1/_2$ πεν.).

10) Ἐὰν πωλήσῃ τις σῖτον ἀξίας 34 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν ἀντὶ $35\frac{1}{2}$ λ., πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει; ('Απ. 4,41% ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς).

11) Ἔμπορος διαλύων τὸ κατάστημά του πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ ἔκπτωσιν 40 % ἐπὶ τῆς ἀξίας των. Εἰσέπραξε δὲ ἐκ τούτων 15845 δρχμ. Πόση εἶναι ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων; ('Απ. 26408,33 δρχμ.).

12) Ὕφασμά τι στοιχίζει 7,80 δραχ. τὸ μέτρον. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τις τὸν μικρὸν πῆχυν, ἂν θέλῃ νὰ κερδήσῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας; ('Απ. 5,74 δρχμ. περίπου).

13) Ἡ ἀξία ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων πρὸς $12\frac{1}{2}$ % ἀνέρχεται εἰς 496 δρ. Εἰς πόσον ἀνέρχονται τὰ ἔξοδα; ('Απ. 55,11 δρχ.)-

14) Τὸ καθαρὸν βάρος ἐμπορεύματός τινος ἀνήρχετο εἰς 3446,5 χιλιόγρ. μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀποβάρου πρὸς 3 %. Πόσον εἶναι τὸ ἀπόβαρον; ('Απ. 106,592 χιλιόγρ.).

15) Τὸ κέρδος ἔκ τινος ἐμπορεύματος εἶναι 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως;

('Απ. 7,40 % δραχ.).

16) Τὸ κέρδος ἔκ τινος ἐμπορεύματος εἶναι $12\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως. Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς; ('Απ. 14,285 δρχ. %).

17) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον, τὸ ὁποῖον ἐπώλησε 15 λεπτὰ ἀκριβότερον τὴν ὀκᾶν ἢ ὅσον τὸ ἠγόρασε· τὸ κέρδος εἶναι 18 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν; ('Απ. $83\frac{1}{3}$ λεπτά).

18) Ἀτμόπλοιόν τι ἠσφαλίσθη διὰ 90000 λίρ. πρὸς 15 σελ. 3 πεν. τὰς 100 λίρας. Εἰς πόσον ἀνέρχονται τὰ ἀσφάλιστρα;
(Ἀπ. 686 λίρ. 5 σελ.).

19) Γεωργός τις ἀσφαλίζει πρὸς $1\frac{1}{4}$ ‰ τὴν οἰκίαν του μετὰ τῶν παραρτημάτων ἀξίας 4580 δραχ. καὶ τὰ προϊόντα του, ἤτοι 180 κοιλὰ σίτου ἀξίας πρὸς 8,40 δραχ. τὸ κοιλόν, 204 στατ. ἀχύρου ἀξίας πρὸς 2,80 δρχ. τὸν στατῆρα καὶ 185 στατ. χόρτου ἀξίας πρὸς 4,60 δρχ. τὸν στατῆρα. Πόσα ἀσφάλιστρα θὰ πληρώσῃ; (Ἀπ. 9,40 δρχ. περίπου).

20) Μεσίτης χρηματιστηρίου ἐπώλησε διὰ λογαριασμὸν τρίτου 5 μετοχὰς τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 3982,75 δρ. ἑκάστην καὶ 8 μετοχὰς τοῦ σιδηροδρόμου Ἀθηνῶν-Πειραιῶς πρὸς 458 δρχ. ἑκάστην. Εἰς πόσον ἀνέρχεται ἡ μεσιτεία αὐτοῦ ὑπολογιζομένη πρὸς $\frac{1}{5}$ %;
(Ἀπ. 47,15 δρχ.).

21) Ἡ ἀξία τῶν μηχανῶν ἑνὸς ἐργοστασίου ἀνέρχεται εἰς 65700 δραχ., ἡ δὲ τῶν ἐπίπλων εἰς 8400 δραχ. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους λογαριάζεται ἔκπτωσις ἕνεκα τῆς φθορᾶς ἐκ τῆς χρήσεως 20 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν μηχανῶν καὶ 10 % ἐπὶ τῆς τῶν ἐπίπλων. Εἰς πόσον ἀνέρχονται αἱ ἐκπτώσεις αὗται ἐν ὅλῳ; (Ἀπ. 13980 δραχμάς).

22) Τεμάχιον ὑφάσματος ἠγοράσθη πρὸς 8,25 φράγκα τὸ μέτρον. Ἐγένοντο ὅμως δι᾽ αὐτὸ τὰ ἑξῆς ἔξοδα: μεσιτεία $\frac{3}{4}$ %, ἀσφάλιστρα 4 ‰, προμήθεια 2 % καὶ τελωνιακὸς δασμὸς 3 % (ἅπαντα ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς). Πόσον μᾶς στοιχίζει τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος τούτου; (Ἀπ. 8,76 φράγκα περίπ.).

23) Μία μερὶς καφὲ ἠγοράσθη πρὸς 385 δραχμὰς τὰς 100 ὀκ. καὶ ἐγένοντο ἔξοδα ἐπ᾽ αὐτῆς μέχρι τῆς ἀποθήκης $8\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Ἐὰν ἐπιβαρύνωμεν τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο μὲ 10 % διὰ γενικὰ ἔξοδα τοῦ καταστήματος καὶ θέλωμεν νὰ κερδήσωμεν καὶ 15 % ἐπὶ τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν μᾶς στοιχίζει, πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν τὴν ὀκᾶν; (Ἀπ. 5,25 δραχ.).

24) Ἔμπορός τις Δ. Α. ἐξ Ἀθηνῶν ἐπώλησεν εἴς τινα ἔμπορον Β.Γ. ἐκ Πατρῶν 10 σάκκους καφὲ μικτοῦ βάρους 750 ὀκ. πρὸς 3,50 δρχ. τὴν ὀκᾶν τοῖς μετρητοῖς καὶ μὲ ἔκπτωσιν 2 %. Λογαριάζει δὲ ἀπόβαρον 1,5 % ἐπὶ τοῦ μικτοῦ βάρους καὶ δι᾽ ἔξοδα συσκευασίας 0,80 δρ.

κατὰ σάκκον. Ζητεῖται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράξῃ ὁ πρῶτος παρὰ τοῦ δευτέρου.

ΣΗΜ.—Ὁ ὑπολογισμὸς διατάσσεται συνήθως ἐπὶ εἰδικῶν ἐντύπων φύλλων, καλουμένων *τιμολυγίων*, ὡς ἑξῆς :

Δ Α
ΑΘΗΝΑΙ

Ἐν Ἀθήναις τῇ 1ῃ Νοεμβρίου 1922

ὁ κ. Β. Γ. ἐκ Πατρῶν

ΔΟΥΝΑΙ

Σήματος ἀριθμοί	Ἀριθμὸς δεμάτων					
Β. Γ. 25—34	10	Σάκκους καφὲ μικτοῦ βάρους=750 ὀκ.				
		Ἀπόβαρον 1 $^1/_2$ $^0/_0$ 11 ὀκ. 100 δρ.				
		Καθαρὸν βάρος 738 ὀκ. 300 δράμ.				
		πρὸς 3,50 δραχ.	2585	60		
		Ἔκπτωσις 2$^0/_0$	51	50	2535	90
		Συσκευὴ σάκκων 0,80 δρ. κατὰ σάκκον			8	
		Ἀξία τοῖς μετρητοῖς			2541	90

25) Παραγγελιοδόχος τις ἐν Βόλῳ ἠγόρασε διὰ λογαριασμὸν ἐμπόρου τινὸς ἐξ Ἀθηνῶν 2450 ὀκ. καπνοῦ Θεσσαλίας πρὸς 3,45 δραχ. τὴν ὀκᾶν μὲ 2 $^0/_0$ ἔκπτωσιν· λογαριάζει δὲ καὶ τὰ ἑξῆς ἔξοδα : μεσιτείαν ἀγορᾶς $\frac{7}{8}$ $^0/_0$, δι' ἀσφάλιστρα 145,15 δραχ. καὶ διάφορα ἄλλα ἔξοδα 45,50 δραχ. καὶ τέλος προμήθειάν του 2 $^0/_0$ (ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων). Πόση εἶναι ἡ προμήθεια καὶ πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ ἐμπόρευμα τοῦτο ;

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω :

2450 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 3,45 δραχ.		8452,50
ἔκπτωσις 2 $^0/_0$		169,05
		8283,45
μεσιτεία πρὸς $\frac{7}{8}$ $^0/_0$ (ἐπὶ 8283,45 δραχ.)=72,50 δραχ.		
ἀσφάλιστρα	=145,15	
διάφορα ἄλλα ἔξοδα=	45,50	263,15
		8546,60
Προμήθεια πρὸς 2 $^0/_0$ (ἐπὶ 8546,60		170,93
Ὁλικὴ ἀξία δραχ.		8717,53

ΣΗΜ.—Ὁ τοιοῦτος λογαριασμὸς καλεῖται «*λογαριασμὸς ἀγορᾶς*», συντάσσεται δὲ ὑπὸ τοῦ παραγγελιοδόχου καὶ ἀποστέλλεται εἰς τὸν ἐντολέα, διὰ λογαριασμὸν τοῦ ὁποίου ἐγένετο ἡ ἀγορά.

26) Παραγγελιοδόχος τις ἐν Βόλῳ ἐπώλησε διὰ λ)σμὸν κτηματίου τινὸς ἐκ Λαρίσης 12500 ὀκ. σίτου πρὸς $43\frac{1}{2}$ λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, λογαριάζει δὲ δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 12,50 δραχ., δι' ἀσφάλιστρα $1\frac{1}{4}$ ‰ ἐπ' ἀξίας σίτου 6000 δραχ., μεσιτείαν πωλήσεως $\frac{7}{8}$% καὶ προμήθειαν 2%. Ποῖον εἶναι τὸ καθαρὸν προϊόν, ὅπερ δικαιοῦται νὰ λάβῃ ὁ κτηματίας;

Αἱ πράξεις διατάσσονται οὕτω:

12500 ὀκ. σίτου πρὸς $43\frac{1}{2}$ λεπτὰ κατ' ὀκᾶν δρχ.			5437,50
Ἔξοδα.			
Ἐνοίκιον ἀποθήκης	δραχ.	12,50	
Ἀσφάλιστρα πρὸς $1\frac{1}{4}$ ‰ (ἐπὶ 6000 δρ.)	»	7,50	
Μεσιτεία πωλήσ. πρὸς $\frac{7}{8}$% (ἐπὶ 5437,50 δρ.)	»	47,60	
Προμήθεια πρὸς 2% (ἐπὶ 5437, 50 δρ.).	»	108,75	176.35
			5261,15

ΣΗΜ.—Οἱ τοιοῦτοι λογαριασμοὶ καλοῦνται «*λογαριασμοὶ πωλήσεως*», συντάσσονται δὲ ὑπὸ τοῦ παραγγελιοδόχου καὶ ἀποστέλλονται εἰς τὸν ἐντολέα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

233. Καθ' ὃν χρόνον μισθώνοντες μίαν οἰκίαν μας λαμβάνομεν διὰ τὴν προσωρινὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς ἀποζημίωσίν τινα, ἥτις καλεῖται ἐνοίκιον, οὕτω καὶ ὅταν δανείζωμεν ποσόν τι χρημάτων, π. χ. 30000 δραχμάς, εἴς τινα ἄλλον διὰ νὰ χρησιμοποιήσῃ τοῦτο ἐπὶ ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα, λαμβάνομεν παρ' αὐτοῦ ἀποζημίωσίν τινα, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐνοίκιον τοῦ ἐν λόγῳ χρηματικοῦ ποσοῦ.

Τὸ χρηματικὸν ποσόν, ὅπερ δανείζομεν, καλεῖται **κεφάλαιον**, τὸ δὲ ἐνοίκιον τούτου **τόκος**, ἡ δὲ διάρκεια τοῦ δανείου καλεῖται **χρόνος** καὶ μετρεῖται μὲ τὰς συνήθεις μονάδας τοῦ χρόνου, ἤτοι ἔτη, μῆνας καὶ ἡμέρας. Διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὑπολογισμῶν οἱ ἔμποροι καθιέρωσαν ὡς μονάδα χρόνου τὸ ἐμπορικὸν ἔτος (§ 193, σημ.).

Ὁ τόκος δι' ἑκάστην ἑκατοντάδα τοῦ κεφαλαίου εἰς ἓν ἔτος καλεῖται **ἐπιτόκιον**.

Τὸ ἐπιτόκιον παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου %· π. χ. 6% σημαίνει ὅτι 100 δραχ. κεφάλαιον εἰς 1 ἔτος ἀποφέρει τόκον 6 δραχμάς. Ἐνίοτε διὰ τὸ ἐπιτόκιον λαμβάνεται ὡς χρονικὴ μονὰς τὸ ἑξάμηνον ἢ ὁ μήν.

Ὁ τόκος καλεῖται ἁπλοῦς, ὅταν οὗτος εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος δὲν προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὥστε νὰ φέρῃ καὶ οὗτος τόκον. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καλεῖται σύνθετος. Ἐνταῦθα θὰ γίνῃ λόγος περὶ προβλημάτων ἁπλοῦ τόκου.

Ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον πρόβλημα τόκου θεωροῦμεν τέσσαρα ποσά, κεφάλαιον, τόκον, χρόνον καὶ ἐπιτόκιον, ἐξ ὧν θὰ εἶναι δεδομένα τὰ τρία καὶ θὰ ζητῆται τὸ τέταρτον, διὰ τοῦτο διακρίνομεν τέσσαρα εἴδη προβλημάτων τόκου.

Α') Προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται ὁ τόκος.

1) Πόσον τόκον φέρουσι 585 δραχ. πρὸς 8% τοκιζόμεναι ἐπὶ 3 ἔτη;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ καταστρωθῇ ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{585 \text{ δραχ.}} \quad \text{εἰς} \quad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{3 \text{ ἔτ.}} \text{ φέρουσι } \frac{8 \text{ δραχ. τόκ.}}{\chi}$$

Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα· διότι διπλάσιον κεφάλαιον, ἤτοι 200 δραχ., κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον (1 ἔτος) φέρει τόκον διπλάσιον, ἤτοι 16 δραχ. Ὡσαύτως ὁ χρόνος καὶ ὁ τόκος εἶναι ποσὰ ἀνάλογα· διότι τὸ αὐτὸ κεφάλαιον (100 δραχ.) εἰς διπλάσιον χρόνον, ἤτοι εἰς 2 ἔτη, φέρει τόκον διπλάσιον, ἤτοι 16 δραχ. Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα (§ 230) θὰ ἔχωμεν·

$$\chi = 8 \times \frac{585}{100} \times \frac{3}{1} = \frac{8 \times 585 \times 3}{100} = 140{,}40 \text{ δραχ.}$$

Κατὰ ταῦτα ὁ τόκος εὑρίσκεται συντόμως, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον (585 δραχ.) ἐπὶ τὸν χρόνον (ἔτη 3) καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον (8) καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100.

2) Πόσον τόκον φέρουσι 375 δρχ. εἰς 5 μῆνας πρὸς 9% τοκιζόμεναι;

Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα:

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{375 \text{ δραχ.}} \quad \frac{12 \text{ μην.}}{5 \text{ μην.}} \quad \frac{9}{\chi} \qquad \chi = 9 \times \frac{375}{100} \times \frac{5}{12} = \frac{9 \times 375 \times 5}{100 \times 12}$$

$=14{,}06$ δραχ., ἤτοι πολλαπλασιάζομεν καὶ ἐνταῦθα τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100×12 ἢ 1200.

3) Πόσον τόκον φέρουσιν 780 δραχ. εἰς 260 ἡμέρας πρὸς 10% τοκιζόμεναι;

Κατάστρωσις.

100 δραχ.	360 ἡμ.	10 δρ.
780 δραχ.	260	χ

$\chi = 10 \times \frac{780}{100} \times \frac{260}{360} = \frac{10 \times 780 \times 260}{100 \times 360}$ $=56{,}33$, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100×360 ἢ 36000·

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος Κ τὸ κεφάλαιον, διὰ τοῦ Π τὸ ἐπιτόκιον, διὰ τοῦ Τ τὸν τόκον καὶ τὸν χρόνον διὰ τοῦ Ε μὲν εἰς ἔτη, διὰ τοῦ Μ δὲ εἰς μῆνας καὶ διὰ τοῦ Η εἰς ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου τοὺς ἑξῆς τύπους·

$T = \frac{K.\Pi.E.}{100}$, $T = \frac{K.\Pi.M.}{1200}$, $T = \frac{K.\Pi.H.}{36000}$, ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου, ὅταν εἶναι ἄγνωστος, ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

234. «Εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον τόκον, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία δεδομένα, κεφάλαιον, χρόνον καὶ ἐπιτόκιον, καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100 ἢ τοῦ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη, εἰς μῆνας ἢ εἰς ἡμέρας»,

ΣΗΜ. Ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας μιᾶς τάξεως καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὸν ἄνω κανόνα.

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν τόκον 1575 δραχ. πρὸς 8% α') εἰς 5 ἔτη, β' εἰς 7 μῆνας καὶ γ') εἰς 75 ἡμέρας.

Ὁ τόκος διὰ 5 ἔτη εἶναι $T = \frac{1575 \times 8 \times 5}{100} = 630$ δραχ.

» » » 7 μῆν. » $T = \frac{1575 \times 8 \times 7}{1200} = 73{,}50$ δραχ.

» » » 75 ἡμ. » $T = \frac{1575 \times 8 \times 75}{36000} = 26{,}25$ δρχ.

Ὑπολογισμὸς τοῦ τόκου διὰ τῶν τοκαρίθμων καὶ τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἡμέρας, δυνάμεθα καὶ ἁπλούστερον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν τόκον. Ὡς γνωστόν, ὁ τόκος ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δίδεται διὰ τοῦ ἑξῆς τύπου· $T = \frac{K.\Pi.H.}{36000}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἐπιτοκίου Π, λαμβάνομεν τὸν ἑπόμενον τύπον· $T = \frac{K.H}{\Delta}$, ἔνθα $\Delta = \frac{36000}{\Pi}$. Τὸ γινόμενον Κ.Η, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὰς ἡμέρας, καλεῖται τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου, τὸ δὲ Δ, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 36000 διὰ τοῦ ἐπιτοκίου, καλεῖται σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

235. «Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου κεφαλαίου τινὸς δι' ἀριθμόν τινα ἡμερῶν διαιροῦμεν τὸν τοκάριθμον τοῦ κεφαλαίου διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ ἐπιτοκίου».

Πίναξ σταθερῶν διαιρετῶν.

%	Σταθεροὶ διαιρέται	%	Σταθεροὶ διαιρέται
3	12000	7	5143
4	9000	7,5	4800
4,5	8000	8	4500
5	7200	9	4000
6	6000	10	3600

Παραδείγματα.

1) Εὑρεῖν τὸν τόκον τῶν 500 δραχ. πρὸς 9% ἀπὸ τῆς 7ης Σεπτεμβρίου μέχρι 15 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους.

Λύσις.—Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς 7ης Σεπτεμβρίου μέχρι τῆς 15ης Δεκεμβρίου εἶναι 98 ἡμέραι, ὁ τοκάριθμος θὰ εἶναι $500 \times 98 = 49000$, διαιρούμενος δὲ οὗτος διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου 4000 τοῦ ἐπιτοκίου 9% $\left(\frac{36000}{9} = 4000\right)$ μᾶς δίδει τὸν ζητούμενον τόκον.

$$T = 49000 : 4000 = 12,25 \text{ δραχ.}$$

2) Εὑρεῖν τὸν ὁλικὸν τόκον πρὸς 8% τῶν ἑξῆς κεφαλαίων· α') 4800 δρχ. διὰ 75 ἡμέρ., β') 5600 δρχ. διὰ 62 ἡμ. καὶ γ') 8400 δραχ. διὰ 35 ἡμέρας.

Λύσις. — Ὁ τόκος τοῦ α' κεφαλαίου θὰ εἶναι $\frac{4800 \times 75}{4500}$, τοῦ δὲ β' $\frac{5600 \times 62}{4500}$ καὶ τοῦ γ' $\frac{8400 \times 35}{4500}$. Ἄρα ὁ ζητούμενος τόκος θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τούτων, ἤτοι $T = \frac{4800 \times 75}{4500} + \frac{5600 \times 62}{4500} + \frac{8400 \times 35}{4500}$ ἢ $T = \frac{360000 + 347200 + 294000}{4500}$, ἐξ οὗ συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα·

236. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον πολλῶν κεφαλαίων πρὸς

τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον ἐπὶ οἱαδήποτε χρονικὰ διαστήματα (εἰς ἡμέρας), προσθέτομεν τοὺς τοκαρίθμους αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ δεδομένου ἐπιτοκίου».

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς.

Κεφάλαια		ἡμέραι		τοκάριθμοι
4800	×	75	=	360.000
5600	×	62	=	347.200
8400	×	35	=	294.000
				10.012)00 | 45)00
				222,488 δραχ.

Ὅθεν ὁ ὁλικὸς τόκος εἶναι Τ=222,50 δρ. περίπου.

Β΄) Προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

1) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 9% τοκιζόμενον εἰς τρία ἔτη φέρει τόκον 250,40 δρχ.;

Τὸ πρόβλημα τοῦτο καταστρώνεται ὡς ἑξῆς·

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \qquad \frac{1 \text{ ἔτος}}{3 \text{ ἔτη}} \qquad \frac{9 \text{ δραχ.}}{250.40 \text{ δραχ.}}$$

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα, διότι, ἂν αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος φέρωσι τόκον 9 δραχ., διὰ νὰ λάβωμεν τὸν αὐτὸν τόκον εἰς διπλάσιον χρόνον, ἤτοι εἰς δύο ἔτη, πρέπει να ἔχωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, ἤτοι 50 δραχ. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν.

$$\chi=100\times\frac{1}{3}\times\frac{250,40}{9}=\frac{100\times250,40}{3\times9}=927,40 \text{ δρχ.}$$

2) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 10% τοκιζόμενον εἰς 28 μῆνας φέρει τόκον 240 δραχ.;

Καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα οὕτως:

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \quad \frac{12 \text{ μῆν.}}{28 \text{ μῆν.}} \quad \frac{10 \text{ δραχ.}}{240 \text{ δραχ.}} \quad \chi=100\times\frac{12}{28}\times\frac{240}{10}=\frac{100\times12\times240}{28\times10}=$$

1028,57 δραχμάς.

3) Ποῖον κεφάλαιον πρὸς 8% τοκιζόμενον εἰς 85 ἡμέρας φέρει τόκον 56 δραχμάς;

Καταστρώνοντες τὸ πρόβλημα ἔχομεν

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{\chi} \quad \frac{360 \text{ ἡμ.}}{85 \text{ ἡμ.}} \quad \frac{8 \text{ δραχ.}}{56 \text{ δραχ.}} \quad \text{εὑρίσκομεν}$$

$$\chi=100\times\frac{360}{85}\times\frac{56}{8}=\frac{100\times360\times56}{85\times8}=2964,70 \text{ δραχ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα·

237. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ᾽ ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας, καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου»· ἤτοι ἔχομεν τοὺς ἑξῆς τύπους·

$$K=\frac{T\times 100}{\Pi.E} \text{ ἢ } K=\frac{T\times 1200}{\Pi.M} \text{ ἢ } K=\frac{T\times 36000}{\Pi.H.}$$

Γ´) Προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται ὁ χρόνος.

1) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1450 δραχ. πρὸς 9 % τοκιζόμενον φέρει τόκον 205 δραχ.;

Κατάστρωσις τοῦ προβλήματος.

$$\frac{100 \text{ δραχ.}}{1450} \qquad \frac{1 \text{ ἔτ.}}{x} \qquad \frac{9 \text{ δρ.}}{205}$$

$$x=1\times\frac{100}{1450}\times\frac{205}{9}\times\frac{100\times 205}{1450\times 9}=\frac{410}{261}=1 \text{ ἔτ. } 6 \text{ μην. } 25 \text{ ἡμ.}$$

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

238. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον ἐκπεφρασμένον εἰς ἔτη, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων, τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου»· ἤτοι ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον

$$E=\frac{T\times 100}{K.\Pi.}.$$

Δ´) Προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον.

1) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκιζόμεναι 2480 δραχ. φέρουσιν εἰς 5 ἔτη 1350 δραχ. τόκον;

Κατάστρωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{2480 \text{ δραχ.}}{100 \text{ δραχ}} \quad \frac{5 \text{ ἔτ.}}{1} \quad \frac{1350 \text{δρ.}}{x} \qquad x=1350\times\frac{100}{2480}\times\frac{1}{5}=\frac{1350\times 100}{2480\times 5}=10,88$$

%, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸ ἐπιτόκιον, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι θὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν τόκον ἐπὶ 1200 ἢ 36000.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τον ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα·

239. «Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν

τὸν δεδομένον τόκον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἐκπεφρασμένος εἰς ἔτη ἢ μῆνας ἢ ἡμέρας καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων».

Ἤτοι θὰ ἔχωμεν γενικῶς $\Pi=\frac{T\times 100}{K.E}$ ἢ $\Pi=\frac{T\times 1200}{K.M}$ ἢ $\Pi=\frac{T\times 36000}{K.H}$ X

Γενικὸς κανών.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τόκου καὶ τῶν τεσσάρων εἰδῶν συνάγομεν τὸν ἑπόμενον πρακτικὸν κανόνα.

240. «Ἂν μὲν εἶναι ἄγνωστος ὁ τόκος, πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα ποσὰ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 100 ἢ 1200 ἢ 36000. Ἂν δέ, τοῦ τόκου ὄντος γνωστοῦ, ζητῆται ἓν ἐκ τῶν τριῶν ἄλλων ποσῶν, πολλαπλασιάζομεν τοῦτον ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000 καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν».

Πολλάκις ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ παρουσιάζονται προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον ἢ ὁ τόκος, δεδομένων τοῦ ἀθροίσματος τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου, τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.

241. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, ὅπερ πρὸς 8 % τοκισθὲν ἐπὶ 3 ἔτη ἐγένετο μετὰ τοῦ τόκου του 7250 δραχ. ;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 3 ἔτη, ἤτοι 24 δραχ. Ὅθεν γνωρίζομεν ὅτι αἱ 100 δραχ. μετὰ 3 ἔτη γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των 124 δραχ.

Καταστρώνομεν ἤδη ὡς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Κεφάλ.		ἄθρ. κεφ. καὶ τόκου
100 δραχμ.	δίδουσι	124 δραχ.
χ	»	7250 δραχ.

$$\chi=100\times\frac{7250}{124}=5846,77.$$

Ὁ ἐμπεριεχόμενος τόκος εἶναι 7250—5846,77=1403,23. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον καταστρώνοντες τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

Τόκ.		ἄθρ. κεφ. καὶ τόκου
24 δραχ.	ἐμπεριέχεται εἰς	124 δραχ.
χ	»	7250

$$\chi=24\times\frac{7250}{124}=1403,23.$$

Παρατ. Δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα καταστρώνοντες τοῦτο ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, δηλ. ὡς ἑξῆς :

			κεφ. σὺν τῷ τόκῳ
100 δραχ. κεφ.		εἰς 1 ἔτ. δίδει	108 δραχ.
χ	»	εἰς 3 » δίδουσι	7250 δραχ.

καὶ τοῦτο, διότι μεταξὺ χρόνου καὶ ἀθροίσματος κεφαλαίου καὶ τόκου δὲν ὑπάρχει σχέσις οὔτε εὐθέως οὔτε ἀντιστρόφως ἀνάλογος. Αἱ 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των 108 δραχ., ἀλλ᾽ αἱ αὐταὶ 100 δραχ. εἰς 2 ἔτη δὲν γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των διπλάσιαι τῶν 108 δραχ., ἤτοι 216 δραχ. Δὲν δύναται δὲ νὰ καταστρωθῇ πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν, ἂν τὰ ποσά, μὲ τὰ ὁποῖα καταστρώνεται τοῦτο, δὲν εἶναι πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο εὐθέως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

Α΄) Ἀπὸ μνήμης·

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου τινὸς ἀπὸ μνήμης εἰς ἓν ἔτος, λαμβάνομεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.

1) Πόσος εἶναι ὁ τόκος 2000 δραχ. εἰς 1 ἔτος πρὸς $4\frac{1}{2}\,\%$;

2) » » » 1200 φραγ. » 2 ἔτη » 6%;

3) » » » 1500 μάρκ. » 4 ἔτη » $3\frac{1}{2}\,\%$;

4) » » » 875 λ. Ἀγλ. » $\frac{1}{3}$ ἔτη » 3%;

5) » » » 1333,3 ῥούβλ. » 2 ἔτη » 5% ;

6) » » » 1000 φ. Ὁλλ. » $2\frac{1}{2}$ » $4\frac{1}{2}\,\%$;

7) » » » 640 Ἰταλ. λ. » 9 μην. » 4%;

8) » » » 2500 δολλ. » 3 μην. » $3\frac{1}{3}\,\%$;

9) » » » 720 πεσετ. » 8 μην. » 5%;

10) Ἐάν τις λαμβάνῃ κατὰ μῆνα τόκον 1 λεπτὸν δι᾽ ἑκάστην δραχμὴν κεφαλαίου, πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ᾽ ἔτος τοκίζει τὰ χρήματά του ;

Β΄) Γραπτῶς.

1) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 8458,60 δραχ. εἰς 8 μῆνας πρὸς $7\frac{3}{4}\,\%$ ἐτησίως; (Ἀπ. 437,02 δραχ.).

2) Πόσον τόκον φέρουσιν αἱ 12475,20 δραχ. εἰς 75 ἡμέρας πρὸς 8%; ('Απ. 207,92 δραχ.).

3) Ποῖον κεφάλαιον εἰς 185 ἡμ. πρὸς $8\frac{1}{2}\%$ τοκιζόμενον φέρει τόκον 245,60 δραχ. ('Απ. 5622,64 περίπ. δραχ.).

4) Εἰς πόσον χρόνον 850 δραχ. πρὸς $7\frac{1}{2}\%$ φέρουσι τόκον 119,50 δραχ.; ('Απ. εἰς 1 ἔτ. 10 μην. 15 ἡμ. περ.).

5) Κεφάλαιον 1627 δραχ. ἔφερε τόκον 120,48 δραχ. ἀπὸ τῆς 31ης Δεκεμβρίου ἐν. ἔτ. μέχρι τῆς 30ῆς 7)βρίου ἐπ. ἔτ. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; ('Απ. 9,87%).

6) Πόσον τόκον φέρουσιν 617 λίρ. 10 σελ. 4 πενν. ἀπὸ τῆς 2 'Ιανουαρίου μέχρι τῆς 15ης 'Ιουνίου συμπεριλαμβανομένων τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς $3\frac{1}{5}\%$· α') μὲ ἐμπορικὸν ἔτος καὶ β') μὲ πολιτικὸν ἔτος;
('Απ. α' 9 λίρ. 7 σελ. 6 περίπ. πενν., β' 9 λίρ. 6 σελ. 1 πέν.)·

7) Μία μερὶς τεΐου ἀγορασθεῖσα τὴν 18ην 'Ιουλίου ἐν. ἔτ. ἀντὶ 3650 δραχ. μετεπωλήθη τὴν 15ην 'Ιανουαρίου ἐπ. ἔτ. ἀντὶ 3945 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει κατ' ἔτος ὁ ἔμπορος οὗτος; ('Απ. 16,43%).

8) 'Εδανείσαμεν κεφάλαιον 12060 δραχ. πρὸς 5% κατ' ἔτος· εἰς διάστημα 1 ἔτ. 4 μην. ἐλάβομεν ἀπέναντι τῶν τόκων 519,40 δραχ. Πόσον τόκον ἔχομεν νὰ λάβωμεν ἀκόμη; ('Απ. 284,60 δραχ.)·

9) Πότε μᾶς ἀπεδόθη κεφάλαιόν τι 2217,03 δραχ., ὅπερ ἐδανείσαμεν τὴν 27 'Ιουλίου ἐν. ἔτους, ἐὰν ὁ εἰσπραχθεὶς τόκος πρὸς 8% εἶναι 30,41 δρ.; 10 ('Απ. μετὰ 62 ἡμ. περίπου, ἤτοι τὴν 29 Σ)βρίου ἐ. ἔτ.).

10) 'Εδανείσαμεν 14076 δρ. πρὸς 6%. Τί μένει ἀπὸ τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου τούτου ἐπὶ 25 ἡμέρας, ἐὰν πληρώσωμεν μίαν ἐνδυμασίαν 85,40 δρ. καὶ ἓν ζεῦγος ὑποδημάτων ἀξίας 28,30 δρ.;
('Απ. μᾶς ἔλειψαν 35,50 δρ.).

11) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον πρὸς 8% τοκιζόμενον ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ διπλασιάζεται; ('Απ. $12\frac{1}{2}$ ἔτη).

12) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ ἐπὶ 15 ἔτη διπλασιάζεται; ('Απ. $6\frac{2}{3}\%$)

13) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιον 18270 δρ. τοκιζόμενον ἀνέρχεται μετὰ 133 ἡμέρας εἰς 18737,50 δρ.; ('Απ. 6,92%).

14) 'Ιδιοκτήτης τις λαμβάνει κατὰ μῆνα ἐκ τῆς οἰκίας του 125 δραχ.,

ἐξοδεύει δὲ κατ' ἔτος δι' ἐπισκευὰς 115,80 δραχ. καὶ διὰ φόρον 7, 4%, ἐπὶ τοῦ ἀκαθαρίστου ἐτησίου εἰσοδήματος. Ποῖον κεφάλαιον ἀντιπροσωπεύει ἡ οἰκία αὕτη, τοῦ τόκου ὑπολογιζομένου πρὸς 5%; (Ἀπ. 25464).

15) Οἱ ἐτήσιοι τόκοι δημοσίου τινὸς δανείου 10.500.000 ἀνέρχονται εἰς 367500 δρ. Πόσον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον; (Ἀπ. 3,50%).

16) Μία μετοχὴ τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης ἀξίας 8000 δραχ. δίδει καθ' ἑξαμηνίαν μέρισμα 170 δραχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος λαμβάνει τόκον ὁ κάτοχος αὐτῆς; (Ἀπ. 4,25 % ἢ $4\frac{1}{4}$ % περίπου).

17) Ἐργοστασιάρχης τις ἠγόρασε 52 δέματα (μπάλες) ἐρίου. Ἕκαστον δέμα ζυγίζει 145 ὀκ. καὶ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 2,85 δραχ. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἐδανείσθη πρὸς 8% καὶ δὲν ἐπλήρωσε τόκον ἐπὶ 3 ἔτη. Πόσον ποσὸν χρεωστεῖ ἤδη;

(Ἀπ. 26646,36 δραχ. κεφάλ. καὶ τόκους ὁμοῦ).

18) Γεωργός τις ἐπώλησεν 72 πρόβατα, τῶν ὁποίων τὴν ἀξίαν μετὰ τῶν τόκων αὐτῆς ἐπληρώθη μετὰ $2\frac{1}{2}$ ἔτη. Οἱ τόκοι, οὓς ἔλαβε κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον πρὸς $4\frac{3}{4}$ %, ἀνέρχονται εἰς 213,75 δρ. Ζητεῖται πόσον ἐπώλησεν ἕκαστον πρόβατον; (Ἀπ. 25 δρχ.)

19 Ἔμπορός τις ἐπώλησε 30 βαρέλλια ἐλαίου φαλαίνης χωρητικότητος ἕκαστον 750 λιτρῶν. Πωλεῖ τὸ ἔλαιον τοῦτο πρὸς 110 δραχ. τὸ ἑκατόλλιτρον καὶ δανείζει τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρὸς $4\frac{1}{2}$ %. Ἐκ τοῦ κεφαλαίου τούτου ἔλαβε μετά τινα χρόνον τόκους ἐν ὅλῳ 9750 δραχ. Ἐπὶ πόσον χρόνον εἶχε τοκίσει τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

(Ἀπ. 8 ἔτη καὶ 9 μῆνας περίπου).

20) Ἡ ὑπηρεσία ἑνὸς δημοσίου δανείου ἀπαιτεῖ κατ' ἔτος 1.500.000 δρχ. διὰ τόκους. Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν τόκων προέρχονται ἐκ κεφαλαίου πρὸς 4% τὸ δὲ $\frac{1}{3}$ αὐτῶν πρὸς 5%. Εἰς πόσον ἀνέρχεται τὸ χρέος τοῦτο;

(Ἀπ. 35.000.000 δρχ.).

21) Εἰς πόσον ἀνέρχεται μία περιουσία, ἥτις φέρει κατὰ μῆνα τόκους 108 δραχ., ἐξ ὧν τὸ $\frac{1}{2}$ προέρχεται ἐξ ἑνὸς κεφαλαίου πρὸς 4%, τὸ δὲ ἕτερον ἥμισυ ἐξ ἑτέρου κεφαλαίου πρὸς $4\frac{1}{2}$ %;

(Ἀπ. 30600 δρχ.).

22) Ἡ οἰκοδομὴ οἰκίας τινὸς ἀπήτησεν 85500 δρ.· ἡ οἰκία αὕτη εἶναι βεβαρημένη μὲ χρέος 24000 δρ. πρὸς $7\frac{1}{2}\%$, ὁ ἐτήσιος φόρος ἀνέρχεται εἰς 452,25 δρχ., δι' ἐπισκευὰς δὲ καὶ λοιπὰ ἀπαιτοῦνται ἐτησίως 378,75 δρ. Ἐὰν τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα ἀνέρχηται εἰς 5400 δραχ., πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκίζεται τὸ καθαρὸν κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ἡ οἰκία; ('Απ. 4,50%).

23) Πόσος εἶναι ὁ τόκος δανείου πρὸς 6 %, ὅπερ μετὰ 2 ἔτη καὶ 3 μῆνας ἀνῆλθε μετὰ τῶν τόκων εἰς 8450 δρχ.;

('Απ. 1005,06 δρχ.).

24) Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκισθὲν πρὸς 8% ἀνῆλθε μετὰ τῶν τόκων του εἰς 2595,90 δρ. μετὰ παρέλευσιν 5 μηνῶν;

('Απ. 2512,16 δρ.).

25) Συνετάχθη συμβόλαιον δι' ἓν δάνειον δοθὲν τὴν 12 Ἰανουαρίου ἐ. ἔ. καὶ λῆγον τὴν 27 Ἰουλίου ἰδ. ἔτους μὲ ποσὸν 1583 δρχ., εἰς τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται καὶ ὁ τόκος 8%. Εἰς πόσον ἀνέρχεται τὸ δάνειον ἄ. ευ τόκου; ('Απ. 1517,25 δρ.).

26) Πόσον τόκον θὰ πληρώσῃ τις πρὸς 7,5% κατ' ἔτος διὰ τὰ ἑξῆς ποσά.

α') Διὰ 7500 δραχ. ἀπὸ 15ης Μαρτίου μέχρι τέλους Ἰουνίου ἐν. ἔτους
β') » 6200 » » 20ῆς » » » » » »
γ') » 3185,50 » » 17ης Ἀπριλίου » » » » »
δ') » 2300 » » 15ης Μαΐου » » » » »

(Μῆν. ἐμπορ.). ('Απ. 363,24 δρ.).

27) Ὀφείλει τις τόκους 8% κατ' ἔτος διὰ τὰ ἑξῆς ποσά.

α') 5140 δραχ. ἀπὸ 8ης 7)βρίου μέχρι τέλους Δεκεμβρίου ἐν. ἔτους
β') 4715 » » 10ης 9)βρίου » » » »
γ') 8453 » » 1ης Δ)βρίου » » » »

Δικαιοῦται δὲ νὰ λάβῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τοὺς τόκους τῶν ἑξῆς ποσῶν.

α') 3547 δραχ. ἀπὸ 10ης Αὐγούστου μέχρι τέλους Δεκεμβρίου ἐν. ἔτους
β') 2140 » » 15ης 7)βρίου » » » »
γ') 5732 » » 28ης 8)βρίου » » » »

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῶν τόκων, τοὺς ὁποίους οὗτος ὀφείλει νὰ καταβάλῃ ἢ δικαιοῦται νὰ εἰσπράξῃ τὴν 31 Δεκεμβρίου, ὡς καὶ τῶν κεφαλαίων. Ὁ λογαριασμὸς οὗτος, καλούμενος ἀλληλόχρεος τοκοφόρος λογαριασμός, διατάσσεται ὡς ἑξῆς: (Μῆν. πολιτ. ἔτος ἐμπορ.).

Ἀλληλόχρεος τοκοφόρος λογ)σμὸς πρὸς 8⁰/₀ μέχρι τῆς 31 Δεκεμβρίου 192....

Κεφάλαια		Ἡμερομ.		Ἡμέραι	Τοκάριθμοι		Κεφάλαια		Ἡμερομην.		Ἡμέραι	Τοκάριθμοι	
5140	—	8	7/βρίου	114	5859	60	3547	—	10	Αὐγούστ.	143	5072	21
4715	—	10	9/βρίου	51	2404	65	2140	—	15	7/βρίου	107	2289	80
8453	—	1	10/βρίου	30	2535	90	5732	—	28	8/βρίου	64	3668	48
			ἐξίσωσις τοκαρίθμων		230	34	5	10		τόκοι μὲ 8⁰/₀ κεφάλαιον πρὸς ἐξίσωσιν.			
							6883	90					
18308	—				11030	49	18308	—				11030	49

ΣΗΜ.—Τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ἄθροισμα τῶν τοκαρίθμων ὑπερβαίνει τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοιοῦτον κατὰ 230,34, ὅπερ ἐγράφη εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην τῶν τοκαρίθμων πρὸς ἐξίσωσιν. Τὴν διαφορὰν ταύτην τῶν τοκαρίθμων διαιροῦντες διὰ τοῦ $\frac{1}{100}$ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου 4500 (διότι καὶ τῶν τοκαρίθμων ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{100}$) εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει νὰ λάβῃ 5,10 δρ. περίπου εἰς τόκους. Τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων καὶ τῶν τόκων τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ στήλης κατὰ 6883,90 δραχ., ὅπερ εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ὀφείλει καὶ ὅπερ γράφεται εἰς τὴν στήλην ταύτην τῶν κεφαλαίων πρὸς ἐξίσωσιν.

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.—Ὅταν τις παραχωρῇ εἰς ἄλλον ποσόν τι χρηματικὸν ἢ ἐμπορευμάτων ὑπὸ τὸν ὅρον ὁ δεύτερος νὰ ἐπιστρέψῃ τὰ χρήματα ἢ νὰ καταβάλῃ τὸ ἀντίτιμον τῶν ἐμπορευμάτων εἰς τὸν πρῶτον εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν, λέγομεν ὅτι ὁ πρῶτος εἶναι πιστωτής, ὁ δὲ δεύτερος χρεώστης. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὁ πιστωτὴς πρὸς ἀσφάλειάν του λαμβάνει παρὰ τοῦ χρεώστου ἓν ἔγγραφον φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ χρεώστου καὶ διὰ τοῦ ὁποίου οὗτος ἀναγνωρίζει ὅτι ἔλαβε παρὰ τοῦ πιστωτοῦ τὸ ποσόν, ὅπερ ὑπόσχεται νὰ ἀποδώσῃ εἰς αὐτὸν εἰς ὡρισμένην προθεσμίαν.

242. Τὸ ἔγγραφον τοῦτο καλεῖται γραμμάτιον· τὸ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενον ποσὸν ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ δὲ ἐποχή, καθ' ἣν θὰ καταβληθῇ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, καλεῖται λῆξις τοῦ γραμματίου.

Τὸ γραμμάτιον συντάσσεται ἐπὶ χαρτοσήμου, οὗτινος ἡ ἀξία καθορίζεται ὑπὸ εἰδικοῦ νόμου. Ἐκ τῶν διαφόρων εἰδῶν γραμματίων συνηθέστερον εἶναι τὸ καλούμενον εἰς διαταγήν.

Παραθέτομεν ὑπόδειγμα τοιούτου γραμματίου.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Νοεμβρίου 1922. Διὰ δρ. 300

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Δ. Παυλίδου τὸ ἄνω ποσὸν τῶν δραχ. τριακοσίων, ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς ἐμπορεύματα (ἢ μετρητοῖς).

Κ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ

Ὁ πιστωτὴς Δ. Παυλίδης ὀνομάζεται καὶ κομιστὴς τοῦ γραμματίου· ὁ δὲ Κ. Ἰωαννίδης ἐκδότης ἢ ὑπογραφεὺς ἢ χρεώστης τοῦ γραμματίου· τὸ γραμμάτιον καλεῖται εἰσπρακτέον μὲν ὡς πρὸς τὸν κομιστήν, πληρωτέον δὲ ὡς πρὸς τὸν ἐκδότην.

Ἕτερον ἔγγραφον πιστωτικὸν σύνηθες ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ἡ συναλλαγματική.

Συναλλαγματικὴ καλεῖται τὸ ἔγγραφον, διὰ τοῦ ὁποίου πιστωτής τις διατάσσει τὸν ἐν ἄλλῃ ἢ ἐν τῇ αὐτῇ πόλει διαμένοντα χρεώστην του νὰ πληρώσῃ εἰς ἐποχὴν ὡρισμένην καὶ εἰς διαταγὴν προσώπου ὡρισμένου τὸ σημειούμενον ἐν αὐτῷ ποσόν.

Παραθέτομεν ὑπόδειγμα συναλλαγματικῆς [1].

Ἐν Πειραιεῖ τῇ 20ῇ Νοεμβρίου 1922. Διὰ Δραχ. 1200

Μετὰ δύο μῆνας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε διὰ ταύτης τῆς μόνης μου συναλλαγματικῆς εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. Δ. Γεωργιάδου τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν χιλίων διακοσίων ἀξίαν ληφθεῖσαν εἰς μετρητά, καὶ ἐγγράψατε αὐτὴν εἰς λογαριασμόν μου, ὡς εἰδοποιεῖσθε.

Τῷ κ. Χρηστίδῃ

Εἰς Πάτρας

Α. ΠΕΤΡΙΔΗΣ

243. ***Ὑφαίρεσις.*** — Ὅταν ὁ κομιστὴς γραμματίου (ἢ συναλλαγματικῆς) θελήσῃ νὰ εἰσπράξῃ τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου πρὸ τῆς λήξεώς του, παραχωρεῖ αὐτὸ εἴς τινα τραπεζίτην, ὅστις καταβάλλει εἰς αὐτὸν

1) Ἡ ἀξία τοῦ χαρτοσήμου τῆς συναλλαγματικῆς καθορίζεται ὡς καὶ ἐν τῷ γραμματίῳ.

τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν ἠλαττωμένην κατὰ συμπεφωνημένον τι ποσόν, τὸ ὁποῖον καλεῖται ὑφαίρεσις (κ. σκόντο).

Ὁ κομιστὴς τοῦ γραμματίου λέγομεν διαπραγματεύεται (ἤτοι πωλεῖ) αὐτό, ὁ δὲ τραπεζίτης ὅτι προεξοφλεῖ (ἤτοι ἀγοράζει) τὸ γραμμάτιον.

Ἔχομεν δύο εἰδῶν ὑφαίρεσιν, τὴν ἐσωτερικὴν καὶ τὴν ἐξωτερικήν.

Ἡ συνηθεστέρα ἐν τῷ ἐμπορίῳ εἶναι ἡ ἐξωτερική, ἥτις καλεῖται καὶ ἐμπορική, ὁρίζεται δὲ αὕτη ὡς ἑξῆς·

244. Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καλεῖται ὁ τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου (ἢ συναλλαγματικῆς) διὰ τὰς ἡμέρας, αἵτινες μεσολαβοῦσιν ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἐπὶ ὡρισμένῳ ἐπιτοκίῳ.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν, εὑρίσκομεν τὴν λεγομένην παροῦσαν ἢ καθαρὰν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ ὁ διαπραγματευόμενος τὸ γραμμάτιον.

Ἔστωσαν ἤδη πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Γραμμάτιον 1580 δραχ. προεξοφλεῖται 45 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9%. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ πόση ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ;

Λύσις.—Ὁ τοκάριθμος τοῦ κεφαλαίου εἶναι $1580 \times 45 = 71100$, ὁ δὲ σταθερὸς διαιρέτης τοῦ ἐπιτοκίου 9% εἶναι $\frac{36000}{9} = 4000$. Ἐπομένως ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις θὰ εἶναι $71100 : 4000 = 17,77$ δραχ. ἢ 17,80 περίπου δραχ. καὶ ἡ παροῦσα ἀξία $1580 - 17,80 = 1562,20$ δρ. Ὁ ὑπολογισμὸς συντάσσεται ὡς ἑξῆς.

Γραμμάτιον λήξεως 45 ἡμ. δραχ.	1580
Ὑφαίρεσις πρὸς 9% διὰ 45 ἡμ.	17,80
Καθαρὰ ἀξία γραμματίου	1562,20

2) Τὴν 20ὴν Σεπτεμβρίου ἐ. ἔ. ἔμπορός τις ἐν Ἀθήναις παρουσιάζει εἰς τὴν Τράπεζαν Ἀθηνῶν πρὸς προεξόφλησιν μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 8% τὰ ἑπόμενα γραμμάτια·

α') Γραμμάτιον ἐπὶ Πατρῶν ἀξίας 2000 δραχ. λήξεως 20 10βρίου.

β') Γραμμάτιον ἐπὶ Κορίνθου 1500 δραχ. λήξεως 18 Νοεμβρίου καὶ γ') Γραμμάτιον ἐπὶ Χαλκίδος ἀξίας 800 δραχ. καὶ λήξεως 10 8)βρίου.

Ζητεῖται ἡ καθαρὰ ἀξία τούτων (μῆν. καὶ ἔτ. ἐμπορ.)

Ὁ ὑπολογισμὸς διατάσσεται ὡς ἑξῆς (§ 236).

Ἐν Ἀθήναις 20 Σεπτεμβρίου 192...

Ποσὰ	Λήξεις	Ἡμέραι	Τοκάριθμοι	
2000	20 Δεκεμβρίου	90	180000	
1500	18 Νοεμβρίου	58	87000	
800	10 Ὀκτωβρίου	20	16000	
4300			2830]00	45]00
				62,90
62,90	ὑφαίρεσις πρὸς $8^0/_0$			
4237,10	ἀξία τοῖς μετρητοῖς			

Ὡς παρατηροῦμεν, προσδιορίζομεν πρῶτον τὰς ἡμέρας ἀπὸ τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως ἑκάστου γραμματίου, ὑπολογίζομεν ἔπειτα τοὺς τοκαρίθμους καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ σταθεροῦ διαιρέτου τοῦ $8^0/_0$. Τὸ οὕτως εὑρισκόμενον πηλίκον

$$\left(\frac{283000}{4500}=\frac{2830}{45}=62{,}90 \text{ περίπου}\right)$$

εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις, τὴν ὁποίαν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ποσῶν τῶν γραμματίων. Τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀξία, τὴν ὁποίαν θὰ καταβάλῃ ἡ τράπεζα εἰς τὸν κάτοχον τῶν γραμματίων.

3) Γραμμάτιόν τι λῆγον μετὰ 75 ἡμ. καὶ προεξοφληθὲν πρὸς $9^0/_0$ ἀπέφερε παροῦσαν ἀξίαν 1520 δραχ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ πόση ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δρ. πρὸς $9^0/_0$ εἰς 75 ἡμ., ὅστις εἶναι $\frac{100\times75}{4000}=1{,}875$ δραχ. καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 100 δραχ., ἡ παροῦσα θὰ εἶναι 100—1,875 ἢ 98,125 δραχ., ποία ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, τοῦ ὁποίου ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 1520 δραχ.; ἤτοι $\frac{98{,}125}{1520}$ δραχ. παρ. ἀξία $\frac{100}{x}$ δρχ. ὀνομαστ. ἀξία

$$x=100\times\frac{1520}{98{,}125}=1549 \text{ δραχ. περίπου.}$$

Ἑπομένως ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 1549,05—1520 ἢ 29,05.
Ἀλλ' ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως, ἂν καταστρωθῇ τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς.

$$\frac{98{,}125 \text{ δραχ. παροῦσα ἀξία}}{1520} \qquad \frac{1{,}875 \text{ δραχ. ἐξωτερ. ὑφαίρεσις}}{\chi}$$

$$\chi = 1{,}875 \times \frac{1520}{98{,}125} = 29{,}05.$$

Παρατ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν δύναται νὰ καταστρωθῇ ὡς πρόβλημα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν δι' οὓς λόγους ἀνεπτύξαμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τοῦ προβλήματος (§ 241).

ΣΗΜ.—Τὰ προβλήματα ὑφαιρέσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον, εἶναι προβλήματα τόκου καὶ λύονται κατὰ τοὺς κανόνας (§§ 238 239).

Πρόβλημα.—Γραμμάτιον 1840 δραχ. προεξοφλεῖται σήμερον πρὸς 8% ἐξωτερικῶς ἀντὶ 1750 δραχ. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ σήμερον λήγει τὸ γραμμάτιον τοῦτο;

Αἱ 1840 δραχ. πρὸς 8% φέρουσι τόκον 1840—1750=90 δραχ. Εἶναι ἑπομένως πρόβλημα τόκου, εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ χρόνος.

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 238) θὰ ἔχωμεν $E = \frac{90 \times 100}{1840 \times 8} = 7$ μῆν. 10 ἡμέρ.

Πρόβλημα.—Γραμμάτιον 2400 δραχ. προεξοφλεῖται 8 μῆνας πρὸ της λήξεως ἐξωτερικῶς ἀντὶ 2256 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

Αἱ 2400 δραχ. εἰς 8 μῆνας φέρουσι τόκον 2400—2256=144 δραχ. Ὅθεν ζητεῖται τὸ ἐπιτόκιον καὶ κατὰ τὸν κανόνα (§ 239) θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = \frac{144 \times 1200}{2400 \times 8} = 9\%.$$

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ἄδικος, διότι εἶναι ὁ τόκος τοῦ ποσοῦ, ὅπερ ἀναγράφεται ἐν τῷ γραμματίῳ καὶ οὐχὶ ὁ τόκος τοῦ πληρωτέου ποσοῦ κατὰ τὴν προεξόφλησιν ὑπὸ τοῦ ἐνεργοῦντος ταύτην. Προφανῶς ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι τὸ ἄθροισμα κεφαλαίου καὶ τόκου καὶ ἑπομένως, ἂν χωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα ποσά, τὸ μὲν πρῶτον εἶναι πράγματι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, τὸ δὲ δεύτερον ὁ τόκος αὐτῆς, ὅστις καὶ καλεῖται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις.

Τὰ προβλήματα τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως λύονται, ὅπως τὸ πρόβλημα (§ 241).

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πρόβλημα.—Γραμμάτιον 2800 δρχ. προεξοφλεῖται 8 μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9°/₀ ἐτησίως. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις καὶ ποία ἡ παροῦσα ἀξία;

Τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς 8 μῆν. εἶναι 6 δρχ.

Ὅθεν ἔχομεν.

Ὀνομ. ἀξ.		Ἐσωτ. ὑφ.
106 δρχ.	ἔχει	6 δρχ.
2800		χ

$$χ=6\times\frac{2800}{106}=158{,}49 \text{ δραχ.}$$

Ἄρα ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι

$$2800-158{,}49=2641{,}51 \text{ δρχ.}$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἐσωτερικῶς καὶ ἀπ' εὐθείας ὡς ἑξῆς·

Ὀνομ. ἀξία	Παρ. ἀξία
106 δρχ.	100
2800 »	χ

$$χ=100\times\frac{2800}{106}=2641{,}51 \text{ δραχ.}$$

Προβλήματα κοινῆς λήξεως πολλῶν γραμματίων.

Πολλάκις ἀντικαθιστῶμεν πολλὰ γραμμάτια λήγοντα εἰς διαφόρους προθεσμίας δι' ἑνὸς ἔχοντος ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοιαύτην, ὥστε διὰ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως νὰ μὴ προκύπτῃ οὔτε κέρδος οὔτε ζημία. Ἡ λῆξις τοῦ κοινοῦ τούτου γραμματίου καλεῖται κοινὴ λῆξις τῶν πολλῶν γραμματίων.

Δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι δύο εἰδῶν προβλήματα κοινῆς λήξεως.

α') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα, διδομένης τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ κοινοῦ γραμματίου, ζητεῖται ἡ κοινὴ λῆξις καὶ

β') Ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα, διδομένης τῆς κοινῆς λήξεως τῶν γραμματίων, ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου.

Πρόβλημα α') Ἀντικαθιστῶμεν διὰ γραμματίου ἀξίας 8400 δρχ. τὰ ἑξῆς γραμμάτια. α') γραμ. 2450 δραχ. λήξεως μετὰ 65 ἡμ. ἀπὸ σήμερον, β') γραμ. 3200 δρχ. λήξεως μετὰ 80 ἡμ. καὶ γραμ. 2740 δραχ.λήξεως μετὰ 90 ἡμ. Ποία εἶναι ἡ κοινὴ λῆξις, τοῦ ἐπιτοκίου τῆς προεξοφλήσεως λογιζομένου πρὸς 8 ο)ο ἐτησίως;

Εὑρίσκομεν τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν ἐν συνόλῳ τῶν γραμματίων, ἅτινα θὰ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ κοινοῦ γραμματίου. Κατὰ τὸν κανόνα (§ 236) θὰ ἔχωμεν.

$$2450\times 65=159250$$
$$3200\times 80=256000$$
$$2740\times 90=246600$$
$$6618)50|45)00$$
$$147{,}05 \text{ δρχ. περίπου}$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ παροῦσα ἀξία τῶν γραμματίων εἶναι

$(2450+3200+2740)-147{,}05=8390-147{,}05=8242{,}95$ δρχ.

καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμ. κοινῆς λήξεως θὰ εἶναι 8242,95 ἡ δὲ ὀνομαστικὴ 8400. Ἄρα ἔχομεν πρόβλημα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἐν τῷ ὁποίῳ ζητεῖται ὁ χρόνος, ἤτοι θὰ ἔχωμεν.

$$E=\frac{T\times 100}{K.\Pi}=\frac{147{,}05\times 100}{8400\times 8}=84 \text{ ἡμ.} \quad T=8400-8242{,}95=157{,}05$$
$$K=8400$$
$$\Pi=8\%$$

Κατὰ ταῦτα ἡ κοινὴ λῆξις εἶναι 84 ἡμ. ἀπὸ σήμερον.

Πρόβλημα β') Πρόκειται ν' ἀντικαταστήσωμεν τὰ ἑξῆς γραμμάτια· α') 1800 δρχ. λήξεως μετὰ 40 ἡμ., β') 1240 δρχ. λήξ. μετὰ 65 ἡμ., γ') 2500 δρχ. λήξ. μετὰ 115 ἡμ. καὶ δ') 560 δρχ. λήξ. μετὰ 50 ἡμ. δι' ἑνὸς γραμματίου λήξ. μετὰ 90 ἡμ. Ποία θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου, τοῦ ἐπιτοκίου λογιζομένου 9% ἐτησίως;

Εὑρίσκομεν ἐν συνόλῳ τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν τῶν τεσσάρων γραμματίων, ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι.

$$1800\times 40=72000$$
$$1240\times 65=80600$$
$$2500\times 115=287500$$
$$560\times 50=28000$$
$$468)100|4)000$$
$$117 \text{ δρ.}$$

Ἡ ὁλικὴ παροῦσα ἀξία τῶν γραμματίων, ἥτις θὰ εἶναι καὶ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου τῆς κοινῆς λήξεως, εἶναι

$(1800+1240+2500+560)-117=6100-117=5983$ δρχ.

Ζητοῦμεν ἤδη νὰ εὕρωμεν τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου. Τὸ πρόβλημα καταντᾷ πλέον ἐξωτ. ὑφαιρ. (§ 244, πρόβλ. 3).

Τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς 90 ἡμ. πρὸς 9 % 2,25 δρ.

παρ. ἀξία	ὀνομ. ἀξία
97,75 δρχ.	100 δραχ.
5983	χ

$χ=100 \times \frac{5983}{97,75}=6120,70$ δραχ. εἶναι ἡ ἀξία, ἥτις θὰ ἀναγραφῇ εἰς τὸ γραμμάτιον τῆς κοινῆς λήξεως.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν (1).

1) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας 1545,60 δρχ. προεξοφλεῖται 65 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 8%. Ποία εἶναι ἡ ὑφαίρεσις; ('Απ. 22, 325 δρ.).

2) Γραμμάτιον εἰς διαταγὴν ἐκ 1560 δρχ. λῆγον τὴν 25ην Νοεμβρίου ἐ. ἔ. προεξωφλήθη τὴν 3ην Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους πρὸς $6\frac{3}{4}$ %. Ποία εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία αὐτοῦ; ('Απ. 1536,016 περ. δρχ.)

3) Ἐπὶ συναλλαγματικῆς τινος προεξοφληθείσης 340 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς 9 % ὑπελογίσθη ὑφαίρεσις 106,60 δρ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία; ('Απ. 1254,12 δραχ.).

4) Γραμμάτιον 5600 δρχ. λῆγον τὴν 12ην Δεκεμβρίου προεξωφλήθη τὴν 8ην Σεπτεμβρίου καὶ ἀπέδωκε καθαρὰν ἀξίαν 5445,50 δρχ. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν κατ' ἔτος ὑπελογίσθη ἡ ὑφαίρεσις; ('Απ. 10,56 %).

5) Γραμμάτιόν τι 3560 δρχ. προεξοφληθὲν τὴν 10ην Μαΐου πρὸς 8 % κατ' ἔτος ἀπέφερε καθαρὰν ἀξίαν 3478,50 δραχ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον τοῦτο; ('Απ. τὴν 23 Αὐγούστου).

6) Συναλλαγματικὴ προεξοφλουμένη $2\frac{1}{2}$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς της πρὸς $8\frac{1}{2}$ % κατ' ἔτος ἐπέφερε καθαρὰν ἀξίαν 4580 δρχ. Πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία ταύτης; ('Απ. 4662,52 δρχ.)

7) Κέρδος τι λαχείου 28000 δρχ. εἶναι καταβλητέον μετὰ 6 μῆνας ἀπὸ σήμερον· ποῖον ποσὸν δύναται νὰ εἰσπράξῃ ὁ κερδήσας σήμερον, ἐὰν παραχωρήσῃ αὐτὸ εἴς τινα τραπεζίτην μὲ ὑφαίρεσιν $4\frac{1}{2}$ %; ('Απ. 27370 δρχ.)

8) Μία τράπεζα πληρώνει εἴς τινα ἰδιοκτήτην μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν

1) Ἐν τοῖς προβλήμασι τούτοις πρόκειται περὶ ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως καὶ ἔτους ἐμπορικοῦ. Ὁ διδάσκων ὅμως δύναται νὰ ὁρίζῃ τὰ αὐτὰ προβλήματα καὶ ὑπὸ ἐσωτ. ὑφαίρεσιν χάριν ἀσκήσεως.

προκαταβολικῶς τοῦ τόκου πρὸς $4^1/_2\%$ δι' ἓν ἔτος 13345 δρχ. Πόσος ἦτο ὁ ἀφαιρεθεὶς τόκος; ('Απ. 628,82 δρχ.).

9) Κεφαλαιοῦχός τις δανείζει εἴς τινα ἐργολάβον ποσόν τι καὶ ἀφαιρεῖ προκαταβολικῶς τὸν τόκον τοῦ ποσοῦ τούτου πρὸς $6\,^1/_2\%$ δι' $1\frac{1}{2}$ ἔτος. 'Εὰν ὁ ἐργολάβος λάβῃ ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου μετρητὰ 83250 δρχ., ποῖον εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ δανείου; ('Απ. 92243,75 δρχ. περ.).

10 'Ο φειλέτης τις ὑπεχρεώθη διὰ δικαστικῆς ἀποφάσεως νὰ πληρώσῃ μετὰ 66 ἡμέρας ἀπὸ σήμερον 7090,60 δρχ., ἀλλ' ἐξοφλεῖ τὸ χρέος τοῦτο σήμερον δι' 7032,50 δραχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὑπελογίσθη ὁ τόκος; ('Απ. 4,50 % περίπου).

11) 'Εὰν γραμματίου τινός, λήγοντος τὴν 30ὴν 'Ιουνίου καὶ προεξοφληθέντος πρὸς $9\,^3/_4\%$ τὴν 1ην 'Απριλίου, ἐγένετο ὑφαίρεσις 32,60 δρχ., πόση εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ; ('Απ. 1337,43 δρχ.).

12) Κομιστὴς γραμματίου τινὸς 5800 δραχ. λήξεως 15ης 'Ιουλίου ἐν. ἔτ. διαπραγματεύεται τοῦτο εἴς τινα τραπεζίτην τὴν 1ην 'Ιουνίου μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 8% κατ' ἔτος, ἀλλὰ συμφωνεῖ νὰ πληρώσῃ καὶ προμήθειαν $^1/_2\%$ ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου. Πόσην καθαρὰν ἀξίαν θὰ εἰσπράξῃ παρὰ τοῦ τραπεζίτου; ('Απ. 5713 δρχ.).

ΣΗΜ. 'Αφοῦ ὑπολογισθῇ ἡ ὑφαίρεσις, προστίθεται εἰς αὐτὴν καὶ ἡ προμήθεια ἐπὶ 5800 δρ. (ἤτοι 29 δρχ.) καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.

13) Διὰ νὰ κάμωμεν πληρωμήν τινα σήμερον, δανειζόμεθα τὸ ἀπαιτούμενον ποσὸν ὑπογράφοντες γραμμάτιον 2600 δρχ. λῆγον μετὰ 4 μῆνας ἀπὸ σήμερον. 'Ο πιστωτής, ἀφοῦ ἀφαιρέσῃ ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου τὸν τόκον αὐτοῦ πρὸς $7^1/_2\%$ καὶ $^1/_2\%$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ διὰ προμήθειαν καὶ 1 δραχμὴν διὰ χαρτόσημον, μᾶς δίδει τὸ ὑπόλοιπον. Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν ἐπιτόκιον διὰ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν σήμερον; ('Απ. 9,11 %).

Λύσις.— 'Η διαφορὰ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ λαμβάνομεν σήμερον ἀπὸ τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν 2600 δραχ. τοῦ γραμματίου, εἶναι ὁ τόκος τοῦ πρώτου ποσοῦ. 'Επομένως τοῦτο θέλει ληφθῇ καὶ ὡς κεφάλαιον.

14) Παρουσίασέ τις τὴν 8ην Αὐγούστου εἴς τινα τραπεζίτην 'Αθηνῶν πρὸς προεξόφλησιν τὰ ἑξῆς γραμμάτια·

α') 2500 δρ. ἐπὶ Πατρῶν λήξεως 18ης 7βρίου,
β') 3600 » » Ναυπλίου » 10ης 8βρίου,
γ') 4250 » » Βόλου » 20ῆς 8βρίου

ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους: ὑφαίρεσις 9 % κατ' ἔτος καὶ προμήθεια $^1/_4$ % ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τῶν γραμματίων. Πόση εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία τῶν γραμματίων, τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ; ('Απ. 10166,825 δρχ.).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

245. Ὁ ρ ι σ μ ό ς.—Ἐὰν ἔχωμεν μίαν σειρὰν ἴσων λόγων, ὡς π. χ. $\frac{50}{5}=\frac{200}{20}=\frac{180}{18}=\frac{240}{24}$ κτλ., οἱ ἡγούμενοι ὅροι 50, 200, 180, 240 καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἑπομένους 5, 20, 18, 24, διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 10, καὶ τἀνάπαλιν οἱ ἑπόμενοι 5, 20, 18, 24 καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἡγουμένους 50, 200, 180, 240, διότι προκύπτουσιν ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{10}$. Ἐν γένει ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσοπληθεῖς, ἐὰν ἕκαστος τῶν πρώτων προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου τῶν δευτέρων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

246. Ἰ δ ι ό τ η ς.—Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης τῶν λόγων τούτων δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι πάντες οἱ παρονομασταὶ ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, συνάγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 50, 200, 180, 240, οἱ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς 5, 20, 18, 24, θὰ εἶναι ἀνάλογοι καὶ πρὸς τοὺς 5×K, 20×K, 18×K, 24×K, ἔνθα ὁ K εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ κλασματικός.

247. Παρουσιάζονται πολλάκις προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα δεδομένον εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς. Πρόκειται νῦν νὰ μάθωμεν πρακτικὸν κανόνα πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Πρόβλημα.—Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 250 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 25, τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ ἦσαν προφανῶς 7, 8, 10, διότι καὶ ἄθροισμα ἔχουσιν 25 καὶ ἀνάλογα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 7, 8, 10 εἶναι. Ἐὰν δὲ ὁ μεριστέος ἀριθμὸς ἦτο 1, ἤτοι ἀριθμὸς 25άκις μικρότερος τοῦ 25, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ ἦσαν 25άκις μικρότερα, ἤτοι τὰ ἑξῆς· $\frac{7}{25}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{10}{25}$, ἅτινα καὶ ἄθροισμα ἔχουσιν 1 καὶ ἀνάλογα εἶναι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10, ἐξ ὧν γίνονται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{1}{25}$.

Τέλος, ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς γίνῃ 250, ἤτοι 250 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 1, καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ θὰ γίνωσι 250 φορὰς μεγαλύτερα, ἤτοι $\frac{7}{25}\times250, \frac{8}{25}\times250, \frac{10}{25}\times250$ ἢ $7\times\frac{250}{25}=70 \cdot 8\times\frac{250}{25}=80 \cdot 10\times\frac{250}{25}=100$.

Τὰ μέρη ταῦτα ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 250 καὶ ἀνάλογα εἶνα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 8, 10, ἐξ ὧν προκύπτουσι διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $\frac{250}{25}$, ἤτοι ἐπὶ 10.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς πρακτικὸς κανών.

248. «Διὰ νὰ μοιράσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα πολλῶν ἄλλων δεδομένων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον ἐξ αὐτῶν καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν».

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τούτου ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1250 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 10, 15, 25. Κατὰ τὴν ἰδιότητα (§ 246) δυνάμεθα πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 10, 15, 25 διὰ τοῦ Μ. Κ. Δ. αὐτῶν (5) καὶ ν' ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς διὰ τῶν πηλίκων 2, 3, 5. Μετὰ ταῦτα διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς·

2	1250 μεριστέος	$\frac{1250\times2}{10}=250$
3		$\frac{1250\times3}{10}=375$
5		$\frac{1250\times5}{10}=625$
10		1250

Παρ. Φαίνεται εὐκόλως ὅτι τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα μοιράζομεν τὸν 1250, τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, τοὺς προκύψαντας ἐκ τῶν δοθέντων 10, 15, 25 δι' ἁπλοποιήσεως, δὲν βλάπτονται. Διότι τὰ μέρη τοῦ 1250 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς 10, 15, 25 εἶναι κατὰ τὸν κανόνα (§ 248)

$$\frac{1250\times10}{50} \qquad \frac{1250\times15}{50} \qquad \frac{1250\times25}{50}$$

καὶ ἁπλοποιούμενα διὰ τοῦ 5 καὶ τὰ τρία δίδουσι

$$\frac{1250\times2}{10} \qquad \frac{1250\times3}{10} \qquad \frac{4250\times5}{10}$$

ἤτοι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

ΣΗΜ.—Πρὸς ταχυτέραν εὕρεσιν τῶν ἐξαγομένων τούτων δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πρῶτον τὴν διαίρεσιν 1250 : 10=125 καὶ ἔπειτα τοὺς πολλαπλασιασμούς, ἤτοι $125\times2=250$, $125\times3=375$, $125\times5=625$. Ἂν τὸ πηλίκον δὲν εὑρίσκεται ἀκριβῶς, εὑρίσκομεν αὐτὸ μὲ ἐπαρκῆ προσέγγισιν, ὅτε καὶ τὰ ἐξαγόμενα εὑρίσκονται κατὰ προσέγγισιν.

2) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 850 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα (246) ἀντικαθιστῶμεν πρῶτον τὰ κλάσματα διὰ τῶν ἀκεραίων, οὓς εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ταῦτα ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. 20 τῶν παρονομαστῶν, καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα (§ 248).

$$\frac{1}{2}\times20=\frac{10}{20}\times20=10 \quad 850 \text{ μεριστέος} \quad \frac{850\times10}{33}=257\frac{19}{33}$$

$$\frac{2}{5}\times20=\frac{8}{20}\times20=8 \qquad \frac{850\times8}{33}=206\frac{2}{33}$$

$$\frac{3}{4}\times20=\frac{15}{20}\times20=\underline{15} \qquad \frac{850\times15}{33}=\underline{386\frac{12}{33}}$$

$$33 \qquad\qquad 850$$

Παρατ.—Καὶ ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μέρη τοῦ 850 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 10, 8, 15 εἶναι τὰ αὐτὰ πρὸς τὰ μέρη τοῦ 850 τὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{10}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{15}{20}$. Διότι ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα (§ 248) ἔχομεν

$$\frac{850\times\frac{10}{20}}{\frac{33}{20}} \qquad \frac{850\times\frac{8}{20}}{\frac{33}{20}} \qquad \frac{850\times\frac{15}{20}}{\frac{33}{20}}$$

καὶ τρέποντες τὰ σύνθετα κλάσματα εἰς ἁπλᾶ, πολλαπλασιάζοντες καὶ τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 20 λαμβάνομεν $\frac{850\times10}{33}$, $\frac{850\times8}{33}$, $\frac{850\times15}{33}$, ἤτοι τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

3) Τὸ κέρδος λήξαντος ἔτους ἀνερχόμενον εἰς δραχ. 2850 πρόκειται νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ τῶν τριῶν συνεταίρων ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἅτινα οὗτοι κατέβαλον· καὶ ὁ μὲν α΄ κατέβαλε 5800 δρχ., ὁ δὲ β΄ 4960 δρχ. καὶ ὁ γ΄ 6800 δρχ. Πόσας δραχ. ἐκ τοῦ κέρδους θὰ λάβῃ ἕκαστος;

ΣΗΜ.—Τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ἐν οἷς πρόκειται νὰ μοιρασθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μεταξὺ τῶν συνεταίρων, καλοῦνται καὶ προβλήματα *ἑταιρείας*, λύονται δὲ καὶ ταῦτα κατὰ τὸν κανόνα (§ 248).

Ἐνταῦθα ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι τὸ κέρδος 2850 δρ., οἱ δὲ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τοῦτο, εἶναι οἱ 5800, 4960, 6800, τοὺς ὁποίους ἀντικαθιστῶμεν διὰ τῶν 145, 124, 170.

Μετὰ ταῦτα διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν·

5800 : 10=580 ἢ 580 : 4=145 2850 μεριστέος.

4960 : 10=496 ἢ 496 : 4=124

6800 : 10=680 ἢ 680 : 4=170

439

Ἄρα ὁ α′ θὰ λάβῃ $2850\times\frac{145}{439}=941{,}34$ δρχ.

» ὁ β′ » » $2850\times\frac{124}{439}=805{,}02$ »

» ὁ γ′ » » $2850\times\frac{170}{439}=1103{,}64$ »

2850 δρ.

Παρατ.—Εἰς τὰ προβλήματα μερισμοῦ, ἅτινα ἐλύσαμεν ἀνωτέρω, οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μοιράζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμόν, εἶναι ἀπ᾿ εὐθείας δεδομένοι. Τὰ τοιαῦτα προβλήματα καλοῦμεν ἁπλᾶ. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ προβλήματα μερισμοῦ σύνθετα, εἰς τὰ ὁποῖα οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, δίδονται ἐμμέσως καὶ εἶναι ἀνάγκη διὰ βοηθητικῶν ὑπολογισμῶν νὰ ὁρίσωμεν τούτους.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) Νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8.

Τοῦτο σημαίνει νὰ μοιρασθῇ ὁ ἀριθμὸς 1200 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν τῶν 3, 5, 8. Οἱ ἀντίστροφοι δὲ τούτων εἶναι $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$. Ὅθεν ἔχομεν $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$

$$\frac{40}{120}, \frac{24}{120}, \frac{15}{120}$$

40 24 15

ἄρα τὰ μερίδια

α′) $\frac{1200\times40}{79}=607\frac{47}{79}$, β′) $\frac{1200\times24}{79}=364\frac{44}{79}$, γ′) $\frac{1200\times15}{79}$ $=227\frac{67}{79}$.

2) Ἔργον τι ἀνέλαβον νὰ ἐκτελέσωσιν 94 ἐργάται διῃρημένοι εἰς 3 ὁμάδας ἀντὶ 2532 δραχ., εἰργάσθησαν δὲ ἡ μὲν α′ ὁμὰς ἐξ 24 ἐργατῶν ἐπὶ 14 ἡμέρας, ἡ δὲ β′ ἐκ 40 ἐργατῶν ἐπὶ 12 ἡμέρας καὶ ἡ γ′ ἐκ 30 ἐργατῶν ἐπὶ 15 ἡμέρας. Πόσας δραχ. ἔλαβεν ἑκάστη ὁμὰς ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ποσοῦ;

Ἐνταῦθα πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμὸς τῶν 2532 δραχ. ἀναλόγως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν ἑκάστης ὁμάδος 24, 40, 30 καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν ἐργασίας 14, 12, 15.

Ἵνα τὸ σύνθετον τοῦτο πρόβλημα καταστήσωμεν ἁπλοῦν, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς·

Εἶναι φανερὸν ὅτι, σην ἐργασίαν ἐκτελοῦσιν 24 ἐργάται εἰς 14 ἡμέρας, τόσην ἐργασίαν ἐκτελεῖ καὶ 1 μόνον ἐργάτης εἰς 24×14 ἢ 336 ἡμέρας. Ὁμοίως τὴν ἐργασίαν, ἣν ἐκτελεῖ ἡ β′ ὁμὰς εἰς 12 ἡμέρας, θέλει ἐκτελέσει 1 μόνον ἐργάτης εἰς 12×40 ἢ 480 ἡμέρας. Τέλος τὴν ἐργασίαν, ἣν ἐκτελεῖ ἡ γ′ ὁμὰς εἰς 15 ἡμέρας, θέλει ἐκτελέσει 1 μόνον ἐργάτης εἰς 15×30 ἡμέρας ἢ 450 ἡμέρας. Ὅθεν ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2532 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 336, 480, 450. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν·

14 ἡμ. × 24 ἐρ.	= 336 ἡμ.	ἢ 56		
12 » × 40 »	= 480 »	» 80	2532 μεριστέος.	
15 » × 30 »	= 450 »	» 75		
		211		

Τὸ μερίδιον τοῦ α′ θὰ εἶναι $2532 \times \frac{56}{211} = 672$ δραχ.

» » » β′ » » $2532 \times \frac{80}{211} = 960$ »

» » » γ′ » » $2532 \times \frac{75}{211} = 900$ »

$\overline{2532}$ »

3) Πρόκειται ν' ἀλεσθῶσι 159000 ὀκ. σίτου εἰς 4 μύλους· ὁ α′ μύλος ἀλέθει 2000 ὀκ. εἰς 4 ὥρας, ὁ β′ 3600 ὀκ. εἰς 6 ὥρ., ὁ γ′ 4000 ὀκ. εἰς 5 ὥρας καὶ ὁ δ′ 6000 ὀκ. εἰς 8 ὥρας. Πόσας ὀκάδας σίτου ἐκ τοῦ ἄνω ποσοῦ πρέπει νὰ δώσωμεν πρὸς ἄλεσιν εἰς ἕκαστον τῶν 4 μύλων, ἵνα ἡ ἄλεσις γίνῃ συγχρόνως;

Τὸ μεριστέον ποσὸν ἐνταῦθα εἶναι 159000 ὀκ. σίτου, οἱ δὲ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιράσωμεν τοῦτο, εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς·

Εἰς 1 ὥραν ὁ α′ μύλος θ' ἀλέσῃ $\frac{2000}{4}$ ἢ 500 ὀκ. σίτου, ὁ β′ $\frac{3600}{6}$ ἢ 600 ὀκ., ὁ γ′ $\frac{4000}{5}$ ἢ 800 ὀκ. καὶ ὁ δ′ $\frac{6000}{8}$ ἢ 750 ὀκ., ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι 500, 600, 800, 750.

Οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς ἁπλοῦν καὶ λύεται ὡς ἑξῆς·

2000 ὀκ.:	4 ὥρ.	= 500 ὀκ.	ἢ	10	
3600 »:	6 »	= 600 »	»	12	159000 μεριστέος.
4000 »:	5 »	= 800 »	»	16	
6000 »:	8 »	= 750 »	»	15	
				53	

Ὁ α′ μύλος θὰ ἀλέσῃ $159000 \times \frac{10}{53} = 30000$ ὀκ. σίτου.

» β′ » » » $159000 \times \frac{12}{53} = 36000$ » »

» γ′ » » » $159000 \times \frac{16}{53} = 48000$ » »

» δ′ » » » $159000 \times \frac{15}{53} = 45000$ » »

159000 » »

4) Ἔμπορός τις ἤρχισε μίαν ἐπιχείρησιν καταβαλὼν 8000 δραχ. Μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 12000 δραχμάς, καὶ 6 μῆνας βραδύτερον προσέλαβον τρίτον συνέταιρον, ὅστις κατέβαλε 15000 δραχ. Ἡ ἐργασία διήρκεσε 18 μῆνας καὶ προῆλθεν ἐκ ταύτης κέρδος 7500 δραχ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ κέρδους τούτου;

Τὸ κεφάλαιον τοῦ 1ου ἐξ 8000 δρχ. ἔμεινεν εἰς τὴν ἐργασίαν ἐπὶ 18 μῆνας, τὸ τοῦ 2ου ἐκ 12000 δρχ. ἐπὶ 14 μῆνας καὶ τὸ τοῦ 3ου ἐκ 15000 δραχμῶν ἐπὶ 8 μῆνας. Ὁ 1ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος, ἂν εἰργάζετο ἐπὶ 1 μῆνα καταβαλὼν κεφάλαιον 8000×18, ὁ 2ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος ἐπὶ 1 μῆνα, ἂν κατέβαλλε κεφάλαιον 12000×14, καὶ ὁ 3ος θὰ ἐλάμβανε τὸ αὐτὸ κέρδος ἐπὶ 1 μῆνα, ἂν κατέβαλλε κεφάλαιον 15000×8.

Ὅθεν αἱ 7500 δραχ. θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

8000×18	ἢ	8×18	ἢ	2×18	ἢ	2×6	ἢ	$1 \times 6 = 6$
12000×14		12×14		3×14		1×14		$1 \times 7 = 7$
15000×8		15×8		15×2		5×2		$5 \times 1 = 5$
								18

Ὅθεν τὰ τρία μερίδια θὰ εἶναι:

$$\alpha') \ \frac{7500\times 6}{18}=\frac{7500}{3}=2500,\ \beta') \ \frac{7500\times 7}{18}=\frac{52500}{18}=2916{,}67,$$

$$\gamma') \ \frac{7500\times 5}{18}=\frac{37500}{18}=2083{,}33.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τέσσαρα χωρία πρόκειται νὰ πληρώσωσι φόρον 78540 δραχ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κατοίκων. Τὸ α′ ἔχει 350 κατ., τὸ β′ 240, τὸ γ′ 540 καὶ τὸ δ′ 640 κατ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ἕκαστον χωρίον ἐκ τοῦ φόρου τούτου;
(Ἀπ. α′ 15530,50 δρ., β′ 10649,49 δρ., γ′ 23961,36 δρ., δ′ 28398,65 δρ.).

2) Ἄνθρωπός τις ἀποθανὼν ἀφῆκε 3600 δραχ. νὰ διανεμηθῶσιν εἰς 3 οἰκογενείας ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τέκνων ἑκάστης. Ἡ α′ οἰκογένεια ἔχει 9 τέκνα, ἡ β′ 7 καὶ ἡ γ′ 4. Πόσας δραχμὰς ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια;
(Ἀπ. α′ 1620 δραχ., β′ 1260 δραχ., γ′ 720 δρχ.).

3) Ἐμπορικός τις οἶκος πτωχεύσας ἔχει ἐνεργητικὸν 25116 δραχ., χρεωστεῖ δὲ εἰς μὲν τὸν Α′ 9216,50 δραχ., εἰς τὸν Β′ 20000 δραχ., εἰς τὸν Γ′ 813,60 δραχ. καὶ εἰς τὸν Δ′ 5600 δραχ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ ἐνεργητικοῦ ἕκαστος τῶν 4 πιστωτῶν;
(Ἀπ. Α′ 6496,80 δραχ., Β′ 14098,20, Γ′ 573,50 καὶ Δ′ 3947,50 δραχ.).

4) Τέσσαρες κτηματίαι συνεφώνησαν νὰ καταβάλωσι διὰ τὴν κατασκευὴν μιᾶς ὁδοῦ ἐν ὅλῳ 25000 δραχ. ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως τῶν πρὸς τὴν ὁδὸν ταύτην συνορευόντων κτημάτων των. Καὶ τὸ μὲν κτῆμα τοῦ Α′ εἶναι ἐκτάσεως 450 στρεμ., τοῦ Β′ 8175 στρεμ., τοῦ Γ′ 825 στρεμ. καὶ τοῦ Δ′ 1100 στρεμ. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ ἕκαστος;
(Ἀπ. α′ 1056, 34 δρ., β′ 19190,14 δραχ., γ′ 1936,62 καὶ δ′ 2816,90 δρ.).

5) Τὸ βρεττανικὸν μέταλλον περιέχει 72 μέρη κασσιτέρου, 4 μέρη χαλκοῦ καὶ 24 μέρη ἀντιμονίου. Ἐὰν πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ τοιοῦτον μέταλλον 152 ὀκάδ. 320 δραμ., πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω μετάλλων πρέπει νὰ συντακῶσιν;

(Ἀπ. 110 ὀκ. 6 $\frac{2}{5}$ δραμ. κασσιτέρου, 6 ὀκ. 44 $\frac{1}{5}$ δραμ. χαλκοῦ, 36 ὀκ. 268 $\frac{4}{5}$ δραμ. ἀντιμονίου).

6) Ἐπλήρωσέ τις ναῦλον 877,62 δραχ. διὰ τὴν μεταφορὰν τεσσάρων διαφόρων ἐμπορευμάτων. Πόσος ναῦλος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ἐμπό-

ρευμα, ἐὰν τὸ μὲν α΄ ζυγίζῃ 4107 ὀκ., τὸ β΄ 1067 ὀκ. 200 δράμ., τὸ γ΄ 2153 ὀκ. καὶ τὸ δ΄ 3962 ὀκ. 200 δράμ.;

('Απ. α΄ 319,25, β΄ 82,98, γ΄ 167,37 καὶ τὸ δ΄ 308,02 δραχ.).

7) Διὰ τρία ὑφάσματα ὁμοῦ παρεχωρήθη ἔκπτωσις ἀνερχομένη εἰς 1053,37 δραχ. Πόσον μέρος τῆς ἐκπτώσεως ταύτης ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον ὕφασμα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ μὲν α΄ ἐτιμᾶτο 3564,50 δραχ., τὸ β΄ 4127,80 δραχ. καὶ τὸ γ΄ 813,90 δραχ.;

('Απ. α΄ 441,41 δρχ., β΄ 511,17 δρχ. καὶ τὸ γ΄ 100,79 δρχ.).

8) Πόσας δραχμὰς κατέθεσεν ἕκαστος τῶν 4 συνεταίρων μιᾶς ἐμπορικῆς ἑταιρείας, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον ἦτο 126300 δραχ., ἐὰν ἔκ τινος ἐπελθούσης ζημίας ἔλαχον εἰς μὲν τὸν α΄ 532,50 δραχ., εἰς τὸν β΄ 1016,50, εἰς τὸν γ΄ 591 καὶ εἰς τὸν δ΄ 4100 δραχμαί;

('Απ. α΄ 10778 δρχ., β΄ 20574,35, γ΄ 11962,05 καὶ δ΄ 82985,60 δρχ.).

9) Πρόκειται νὰ διανεμηθῇ τὸ ποσὸν 5000 δραχ. μεταξὺ 5 προσώπων οὕτως, ὥστε ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ λαμβάνῃ 100 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ ἀμέσως προηγουμένου. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστον;

('Απ. ὁ α΄ 800, ὁ β΄ 900, ὁ γ΄ 1000, ὁ δ΄ 1100, ὁ ε΄ 1200 δρχ.).

10) Τέσσαρα βαρέλλια ἴσης χωρητικότητος περιέχουσιν ὁμοῦ 1150 ὀκ. οἴνου, ἀλλὰ τὸ μὲν α΄ εἶναι πλῆρες μόνον κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ β΄ κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$, τὸ γ΄ κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ δ΄ ὁλόκληρον. Πόσας ὀκάδας οἴνου περιέχει ἕκαστον βαρέλλιον;

('Απ. α΄ 237 $\frac{27}{29}$ ὀκ., β΄ 317 $\frac{7}{29}$ ὀκ., γ΄ 118 $\frac{28}{29}$ ὀκ. καὶ δ΄ 475 $\frac{25}{29}$ ὀκ.).

11) Διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς πλοίου ἐν Ῥοττερδάμῃ ὑπὸ 4 ἐφοπλιστῶν κατέβαλον ὁ μὲν α΄ 8100 φλωρ. Ὁλλανδ., ὁ δὲ β΄ 9000 φλωρ., ὁ γ΄ 9600 φλωρ. καὶ ὁ δ΄ 6300 φλωρ. Ζητεῖται α΄) πόσον μέρος τοῦ πλοίου ἐξουσιάζει ἕκαστος καὶ β΄) πόσα φλωρίνια θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ καθαροῦ κέρδους 4176 φλωρ., τὰ ὁποῖα ἀπέφερε τὸ πλοῖον τοῦτο κατά τινα χρόνον.

('Απ. ὁ α΄ $\frac{27}{110}$ τοῦ πλοίου, 1025,01 φλωρ., β΄ $\frac{30}{110}$ τοῦ πλοίου 1138,91 φλωρ., ὁ γ΄ $\frac{32}{110}$ τοῦ πλοίου 1214,84 φλωρ., καὶ ὁ δ΄ $\frac{21}{110}$ τοῦ πλοίου 797,24 φλωρ.).

12) Νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν 158000 δραχμῶν μεταξὺ τεσσάρων προσώπων οὕτως, ὥστε ὁ β΄ νὰ λάβῃ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α΄, ὁ γ΄ τὸ

$\frac{1}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου καὶ ὁ δ' τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ τρίτου. Πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις.—Οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν 158000 δρχ., εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς·

Τὸ μερίδιον τοῦ α' εἶναι 1, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ β' εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδ. τοῦ α'· τὸ μερίδιον τοῦ γ' εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μεριδ. τοῦ β', ἤτοι $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α', καὶ τὸ μερίδιον τοῦ δ' εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μεριδίου τοῦ γ', ἤτοι $\frac{2}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{8}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α'.

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{8}$, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν 158000 δραχ.

(Ἀπ. α') 76606,06 δρχ., β') 57454,55, γ') 14363,64, δ') 9575,75).

13) Τρεῖς ἔμποροι ἀποικιακῶν ἠγόρασαν διὰ κοινῆς παραγγελίας καφὲ Ἀραβίας βάρους 50 στατ., 22 ὀκ., 100 δραμ. καὶ ἀξίας κατὰ τὸ τιμολόγιον 7580 δραχμῶν. Καὶ ὁ μὲν α' ἀναλαμβάνει 22 στατ., 11 ὀκ. 200 δράμ., ὁ β' 16 στατ., 1 ὀκ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον μέρος ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ τιμολογίου ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

(Ἀπ. α' 3341,03 δραχ., β' 2404,72 καὶ γ' 1834,25 δρχ.).

14) Τέσσαρες κεφαλαιοῦχοι συνεφώνησαν νὰ ἐκτελέσωσι μίαν ἐπιχείρησιν· καὶ ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 27500 δολλάρια ἐπὶ 1 ἔτ., 6 μῆν., ὁ δὲ β' 80135 δολλάρ. ἐπὶ $23\frac{1}{2}$ μῆν., ὁ γ' 29150 δολ. ἐπὶ 1 ἔτ., 5 μῆν. καὶ ὁ δ' 45205 δολ. ἐπὶ $17\frac{1}{2}$ μῆνας. Πόσα δολλάρια ἐκ τοῦ κέρδους 16218,50 δολ. θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. α) 2190,61 δολ., β') 8333,92 δολ., γ' 2193,04 δολ. καὶ δ') 3500,93 δολλάρια περίπου).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ ΚΑΙ ΜΕΙΞΕΩΣ

249. ***Ὁρισμοί.***— «Μέσος ὅρος ἢ **ἀριθμητικὸν μέσον** δεδομένων ἀριθμῶν καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ πλῆθος αὐτῶν».

Π. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 8, 7, 12, 5 εἶναι τὸ πηλίκον

$$\frac{8+7+12+5}{4}=8.$$

Πρόβλημα.

Μετρήσας τις τὸ ὕψος ὄρους τετράκις εὗρε κατὰ μὲν τὴν πρώτην μέτρησιν 850 μ. ὕψους, κατὰ τὴν δευτέραν 854, κατὰ τὴν τρίτην 847 καὶ κατὰ τὴν τετάρτην 851. Ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος, ἤτοι τὸ μᾶλλον πρὸς τὸ πραγματικὸν ὕψος προσεγγίζον ἐξαγόμενον τῶν μετρήσεων.

Οὗτος εἶναι: $\frac{850+854+847+851}{4}=850\frac{1}{2}$ μ.

250. Δυνατὸν ἀντὶ νὰ λαμβάνηται ἅπαξ ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν, ὧν ζητεῖται ὁ μέσος ὅρος, νὰ λαμβάνηται δὶς ἢ τρὶς καὶ ἐν γένει νὰ πολλαπλασιάζηται ἐπὶ ἀντίστοιχόν τινα ἀριθμόν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει προσθέτομεν τὰ γινόμενα ταῦτα καὶ τὸ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πολλαπλασιαστῶν, ὅπερ ἄθροισμα δεικνύει πάλιν τὸ πλῆθος τῶν λαμβανομένων ἀριθμῶν διὰ τὸν μέσον ὅρον.

Π. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 5, 8, 10, 14, ἐξ ὧν ὁ α′ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2, ὁ β′ ἐπὶ 4, ὁ γ′ ἐπὶ 7 καὶ ὁ δ′ ἐπὶ 3, εἶναι.

$$\begin{array}{r} 5\times2=10 \\ 8\times4=32 \\ 10\times7=70 \\ 14\times3=42 \\ \hline 16\quad 154 \end{array}$$ τὸ πηλίκον $154:16=9\frac{5}{8}$.

251. ***Μείγματα καὶ κράματα.***— Πολλάκις ἐν τῷ πρακτικῷ βίῳ παρίσταται ἀνάγκη ν' ἀναμείξωμεν διαφόρους οὐσίας πρὸς σχηματισμὸν χρησίμων μειγμάτων. Ἐὰν π. χ. ἀναμείξωμεν ἄνυδρον οἰνόπνευμα μεθ' ὕδατος, λαμβάνομεν ἓν οἰνοπνευματοῦχον κρᾶμα. Ὁμοίως ἀναμειγνύοντες διαφόρους ποιότητας σίτου λαμβάνομεν ἕτερον μεῖγμα σίτου· Ὡσαύτως συντήκοντες διάφορα μέταλλα, ὡς λ. χ. χρυσὸν μετὰ χαλκοῦ, λαμβάνομεν μεῖγμα, ὅπερ καλεῖται κρᾶμα.

Ὡρίσαμεν ἀλλαχοῦ (§ 192) τί καλοῦμεν τίτλον κράματος· βαθμὸς δὲ οἰνοπνευματούχου ὑγροῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ δεικνύων πόσον ἐπὶ τοῖς 100 καθαρὸν οἰνόπνευμα περιέχεται ἐν τῷ ὑγρῷ τούτῳ· λέγοντες π. χ. ὅτι οἰνόπνευμά τι εἶναι βαθμοῦ 85° ἐννοοῦμεν ὅτι ἐξ 100 ἴσων ὄγκων τοῦ ὑγροῦ τούτου οἱ 85 εἶναι ἄνυδρον οἰνόπνευμα.

Τὰ προβλήματα, τὰ ἀναφερόμενα εἰς τοιαύτας ἀναμείξεις, καλοῦνται προβλήματα μείξεως, κατατάσσονται δὲ εἰς δύο κατηγορίας.

Προβλήματα μείξεως Α′ κατηγορίας.

252. «Προβλήματα μείξεως τῆς Αης κατηγορίας εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι δεδομέναι αἱ διάφοροι πρὸς ἀνάμει-

ξιν ποσότητες διαφόρων εἰδῶν καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου εἴδους καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος».

ΣΗΜ.—Ὡς τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος θεωροῦμεν προσέτι καὶ τὸν τίτλον τοῦ κράματος καὶ τὸν βαθμὸν τοῦ οἰνοπνεύματος.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἔχει τις τέσσαρα εἴδη καφὲ τῶν 4,20 δρχ., τῶν 3,80 δρ., 3,50 δρχ. καὶ τῶν 3,20 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν λάβῃ 500 ὀκ. ἐξ ἑκάστου εἴδους καὶ σχηματίσῃ μεῖγμα, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος;

Λύσις.—Ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ μίαν ὀκᾶν ἐξ ἑκάστου εἴδους, σχηματίζεται μεῖγμα 4 ὀκ., ὅπερ στοιχίζει $4,20+3,80+3,50+3,20$ δραχ., ἑπομένως, ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ 500 ὀκ. ἐξ ἑκάστου εἴδους, θὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα 4×500 ὀκ., ὅπερ θὰ ἔχῃ προφανῶς ἀξίαν $(4,20+3,80+3,50+3,20)\times500$ ὀκάδας· ὅθεν ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος τούτου θὰ τιμᾶται

$$\frac{(4,20+3,80+3,50+3,20)\times500}{4\times500}$$

ἢ ἁπλούστερον $\frac{4,20+3,80+3,50+3,20}{4}=3,675$ δρχ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι, ὁσάκις τὰ ἀναμειγνυόμενα ποσὰ εἶναι ἴσα, ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος εἶναι ὁ μέσος ὅρος (§ 249) τῶν δοθεισῶν τιμῶν.

2) Ἐὰν ἀναμείξῃ τις 2850 ὀκ. σίτου τῶν 40 λεπτῶν κατ' ὀκᾶν καὶ 3,400 ὀκ. τῶν 38 λεπτῶν καὶ 2400 ὀκ. τῶν 32 λεπτ., ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος;

Λύσις.	2,850 ὀκ.	πρὸς 40 λ.	τιμῶνται	$2850\times40=114000$λ.
	3400 »	» 38 »	»	$3400\times38=129200$λ.
	2400 »	» 32 »	»	$2400\times32=76800$λ.
ἄρα αἱ	8650 ὀκ.	μείγματος	τιμῶνται	320000

ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μείγματος τιμᾶται $\frac{320000}{8650}=36\frac{172}{173}$ λεπτά.

Παρατ.—Βλέπομεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος εἶναι ὁ μέσος ὅρος (§ 250) τῶν δοθεισῶν τιμῶν 40 λ., 38 λ., 32 λ., πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα ποσὰ 2850 ὀκ., 3400 ὀκ. 2400 ὀκ.

3) Ἐὰν συντακῶσι 250 δράμ. χρυσοῦ τίτλου 0,830 καὶ 180 δράμ. τίτλου 0,900 καὶ 320 δράμ. τίτλου 0,875, ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος χρυσοῦ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν;

Λύσις.

250 δρμ.	χρυσ.	0,830 τίτλ.	περιέχουσι	$250 \times 0{,}830 = 207{,}5$	καθ.	χρ.
180 »	»	0,900 »	»	$180 \times 0{,}900 = 162$	»	»
320 »	»	0,875 »	»	$320 \times 0{,}875 = 280$	»	»
750 δρμ.	χρυσ. περιέχουσι καθ. χρυσὸν			649,5 δρμ.		

1 » » περιέχει $\frac{649{,}5}{750} = 0{,}866$.

Ὅθεν ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι ὁ 0,866.

Εἰς τὴν αὐτὴν κατηγορίαν κατατάσσομεν καὶ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα διαφέρουσι τῶν προηγουμένων μόνον κατὰ τοῦτο, ὅτι ἀντὶ νὰ ζητῆται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μείγματος, εἶναι δεδομένη αὕτη, ζητεῖται δ' ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑνὸς οἱουδήποτε ἐκ τῶν ἀναμειγνυομένων εἰδῶν.

Ἔστω τοιοῦτο πρόβλημα τὸ ἑξῆς·

4) Διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα οἰνοπνεύματος βαθμοῦ 80°, ἀναμειγνύομεν 12 λίτρ. οἰνοπνεύματος βαθμοῦ 75°, 16,5 λίτρ. βαθμοῦ 60°, 32 λίτρ. βαθμοῦ 95° καὶ 9 λιτρ. ἀγνώστου βαθμοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ τελευταίου εἴδους;

Λύσις.	λίτρ.	βαθ.		λίτρ. ἀνύδρου οἰνοπνεύμ.
	12	75°	περιέχουσι	$12 \times 0{,}75 = 9$
	16,5	60°	»	$16{,}5 \times 0{,}60 = 9{,}90$
	32	95°	»	$32 \times 0{,}95 = 30{,}40$
ἑπομένως	60,5			49,30

Ἀλλὰ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν ὁλικὸν μεῖγμα $60{,}5 + 9 = 69{,}5$ λίτ. βαθμοῦ 80°, ἤτοι περιέχον ἄνυδρον οἰνόπνευμα $69{,}5 \times 0{,}80 = 55{,}60$ λίτρας. Ἑπομένως αἱ ὑπόλοιποι λίτραι 9 θὰ περιέχωσιν ἄνυδρον οἰνόπνευμα $55{,}60 - 49{,}30 = 6{,}30$ λ. καὶ 1 λίτρα θὰ περιέχῃ $\frac{6{,}30}{9} = 0{,}70$.

Ἄρα ὁ ζητούμενος βαθμὸς εἶναι 70°.

5) Ἀναμειγνύομεν 2400 ὀκ. οἴνου τῶν 60 λ. μετὰ 1800 ὀκ. οἴνου τῶν 40 λ. καὶ μετὰ 300 ὀκ. ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ κράματος ἄνευ κέρδους καὶ ποία μετὰ κέρδους 12% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὅλου μείγματος;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ὕδατος εἶναι 0. Κατὰ τὰ λοιπὰ ἐργαζόμεθα, ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα.

$$\begin{array}{r} 2400 \text{ όκ.} \times 60 \text{ λ.} = 144000 \text{ λ.} \\ 1800 \text{ όκ.} \times 40 \text{ λ.} = \ 72000 \text{ λ.} \\ 300 \text{ όκ.} \times \ 0 \text{ λ.} = \quad - \quad \text{ λ.} \\ \hline 4500 \qquad\qquad 216000 \mid 4500 \\ 48 \text{ λ.} \end{array}$$

Ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος ἄνευ κέρδους εἶναι 48 λ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεύτερον ζητούμενον, αὐξάνομεν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν τοῦ μείγματος (216000 λ.) κατὰ 12 % καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ποσοῦ 4500 ὀκ. τοῦ μείγματος ἢ εὐκολώτερον πράττομεν τοῦτο ἐπὶ τῆς τιμῆς 48 λ.

$$\begin{array}{cc} 100 & 112 \\ 48 & \chi \\ \hline \end{array}$$

$$\chi = 112 \times \frac{48}{100} = 53{,}76 \text{ λ. περίπου.}$$

Προβλήματα μείξεως Β' κατηγορίας.

253. Προβλήματα μείξεως Βας κατηγορίας εἶναι ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πρὸς ἀνάμειξιν ποσῶν καὶ ζητεῖται κατὰ ποίαν ἀναλογίαν θ' ἀναμειχθῶσι ταῦτα, διὰ νὰ προκύψῃ μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς νὰ ἔχῃ μέσην τινὰ τιμὴν δεδομένην.

Ἔστωσαν πρὸς λύσιν τοιαῦτα προβλήματα τὰ ἑξῆς.

1) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει ν' ἀναμείξωμεν οἶνον, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 60 λ., μὲ οἶνον, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 40 λ., διὰ νὰ σχηματίσωμεν μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 55 λ.;

Λύσις.—Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α' εἴδους εἰσαγομένη εἰς τὸ κρᾶμα καὶ πωλουμένη 55 λ. φέρει ζημίαν 60—55=5 λ.· ἑκάστη δ' ὀκᾶ τοῦ β' εἴδους εἰσαγομένη εἰς τὸ κρᾶμα καὶ πωλουμένη 55 λ. φέρει κέρδος 55—40=15. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν πρὸς ἀνάμειξιν ἐκ μὲν τοῦ α' εἴδους 15 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β' 5 ὀκ., θὰ ἔχωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν ζημίαν 5 λ.×15 ὀκ.=75 λ., ἀφ' ἑτέρου δὲ κέρδος 15×5 ὀκ.=75 λ.· ὥστε βλέπομεν ὅτι μὲ τοιαύτην ἀνάμειξιν τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἐξισοῦνται καὶ ἑπομένως τὸ προκῦπτον μεῖγμα θὰ στοιχίσῃ ἐν ὅλῳ ὅσον καὶ τὰ ἀναμειγνύμενα ποσά.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς·

α΄ εἶδος ἡ ὀκᾶ 60 — 15 ὀκ. ἢ 3 ὀκ. (ἁπλοποιοῦμεν διὰ τοῦ 5)

μέση τιμὴ 55

β΄ εἶδος ἡ ὀκᾶ 40 λ. — 5 ὀκ. ἢ 1 ὀκ.

Ἡ ἀνάμειξις λοιπὸν τῶν δύο εἰδῶν βλέπομεν ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 5 ἢ ἁπλούστερον 3 καὶ 1, τουτέστιν ὅσας φορὰς λάβωμεν 3 ὀκ. ἐκ τοῦ α΄, τόσας φορὰς πρέπει νὰ λάβωμεν 1 ὀκ. ἐκ τοῦ β΄. Κατὰ ταῦτα ἡ λαμβανομένη ποσότης ἐκ τοῦ α΄ εἴδους θ᾽ ἀποτελῇ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὅλου μίγματος καὶ ἡ ἐκ τοῦ β΄ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ.

Δοκιμή. α΄ εἶδος 3 ὀκ.×60 λ.=180 λ.
β΄ » 1 ὀκ.×40 λ.= 40 λ.
μεῖγμα 4 ὀκ.×55 λ.=220 λ.

2) Συντήκομεν δύο κράματα χρυσοῦ, τὸ μὲν τίτλου 0,835, τὸ δὲ 0,900. Πόσα δράμια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου τούτων, ἵνα ἀποτελέσωμεν νέον κρᾶμα 340 δραμίων τίτλου 0,875;

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς προηγουμένως.

α΄ κρᾶμα 0,835 τίτλ. — 25 δρ. ἢ 5 (ἁπλοποίησις διὰ 5)

μέσος τίτλ. 0,875

β΄ κρᾶμα 0,900 — 40 δρ. ἢ 8

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι ἡ ἀνάμειξις δέον νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 8, ἤτοι ἐκ μὲν τοῦ α΄ κράματος νὰ λάβωμεν $\frac{5}{13}$ τοῦ ὅλου μείγματος τῶν 340$\left(\text{ἢ } 340 \times \frac{5}{13} = 130\frac{10}{13}\right)$, ἐκ δὲ τοῦ β΄ τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν 340 δραμ $\left(\text{ἢ } 340 \times \frac{8}{13} = 209\frac{3}{13}\right)$.

3) Θέλει τις ν᾽ ἀναμείξῃ καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,70 δρχ., μὲ 180 ὀκ. ἄλλης ποιότητος καφέ, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,20 δρχ. Πό-

σας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος, διὰ νὰ κάμῃ μεῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ πωλῆται πρὸς 3,50 δρχ.;

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀνωτέρω.

α΄ εἶδος ἡ ὀκᾶ 3,70 30 ὀκ. ἢ 3 ὀκ.

μέση τιμὴ 350

β΄ εἶδος ἡ ὀκᾶ 3,20 20 ὀκ. ἢ 2 ὀκ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνάμειξις δέον νὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 2. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ποσότης (χ) τοῦ α΄ εἴδους θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς 180 ὀκ. τοῦ β΄ εἴδους, ὃν λόγον ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 2, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\chi : 180 = 3 : 2$ καὶ $\chi = \frac{180 \times 3}{2} = 270$ ὀκ.

4) Πόσα γραμμάρια κράματος χρυσοῦ τίτλου 0,835 χρειάζονται νὰ συντήξωμεν μετὰ 120 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ, διὰ νὰ λάβωμεν κρᾶμα τίτλου 0,900;

Δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι ὁ καθαρὸς χρυσὸς ἔχει τίτλον 1 ἢ 1,000

Ἡ λύσις κατὰ τὰ λοιπὰ γίνεται, ὡς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα.

0,835 100 ἢ 20

0,900

1,1000 65 ἢ 13

$\chi : 120 = 20 : 13$ καὶ $\chi = \frac{120 \times 20}{13} = 184 \frac{8}{13}$ γραμ.

ΣΗΜ.— Ἂν κρᾶμα χρυσοῦ ἀναμείξωμεν μετὰ χαλκοῦ, δέον νὰ λάβωμεν ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι ὁ χαλκὸς ἔχει τίτλον .

5) Ἔμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας ἐλαίου· τῆς μὲν α' ποιότητος ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 1,30 δρχ., τῆς δὲ β' 1,10 δρχ. Θέλει νὰ κάμῃ κρᾶμα 2800 ὀκ., ὅπερ νὰ πωλήσῃ πρὸς 1,28 δρ. καὶ νὰ κερδήσῃ 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρας ποιότητος;

Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον θὰ ἐπωλεῖτο ἡ ὀκᾶ ἑκατέρας ποιότητος μετὰ τοῦ κέρδους 10 %.

ἀξ ἀγ.	ἀξ. πωλ.	ἀξ. ἀγ.	ἀξ. πωλ.
100	110	100	110
1,30	χ	1,10	χ

$$χ=110\times\frac{1,30}{100}=1,43 \qquad χ=110\times\frac{1,10}{100}=1,21$$

Καταστρώνομεν ἤδη τὸ πρόβλημα, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα.

α' 1,43 δρχ. 7

1,28 δρ.

β') 1,21 δραχ. 15

$$α')\ \frac{2800\times7}{22}=890\frac{10}{11}\text{ ὀκ.} \qquad β')\ \frac{2800\times15}{22}=1909\frac{1}{11}\text{ ὀκ.}$$

ΣΗΜ.—Δύναται τὸ πρόβλημα τοῦτο νὰ λυθῇ καὶ ἄλλως. Ἡ τιμὴ 1,28 δραχ., εἰς τὴν ὁποίαν θὰ πωλήσῃ τὸ ἔλαιον, εἶναι ἄθροισμα τῆς ἀξίας τοῦ ἐλαίου καὶ τοῦ κέρδους 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας ταύτης. Εὑρίσκομεν τὴν τιμήν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐπωλεῖτο τὸ μεῖγμα τοῦτο ἄνευ κέρδους.

110 ἀξ. πωλ.	ἀξ. ἀγ. 100
1,28	χ

$$χ=100\times\frac{1,28}{110}=1,16\frac{4}{11}$$

Ἤδη καταστρώνομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

α') 1,30 δραχ. $6\frac{4}{11}$ ἢ $\frac{70}{11}$ ἢ 70 ἢ 7

$1,16\frac{4}{11}$

β' 1,10 δραχ. $13\frac{7}{11}$ ἢ $\frac{150}{11}$ ἢ 150 ἢ 15

ἤτοι φθάνομεν εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐργάτης τις ἐργασθεὶς κατὰ τὰς 6 ἡμέρας τῆς ἑβδομάδος ἔλαβε τὴν μὲν 1ην ἡμέραν 3 δραχ., τὴν δὲ 2αν 2,75 δραχ., τὴν 3ην 4,50 δρχ., τὴν 4ην 5 δρχ., τὴν 5ην 4,75 δρ. καὶ τὴν 6ην 4,90 δρχ. Ποῖον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον κατὰ μέσον ὅρον; ('Απ. 4,15 δρχ.).

2) Τέσσαρα βαρέλλια καφὲ ζυγίζουσι τὸ μὲν α' 10 στ.—3 ὀκ.—50 δραμ., τὸ δὲ β' 9 στ.—30 ὀκ.—200 δράμια, τὸ γ' 11 στ.—20 ὀκ. 130 δραμ., τὸ δὲ δ' 9 στ.—10 ὀκ.—200 δρμ. Πόσον ζυγίζει κατὰ μέσον ὅρον ἕκαστον βαρέλλιον; ('Απ. 10 στ.—5 ὀκ.—45 δρμ.).

3) Ἁμαξοστοιχία τις διήνυσεν ἐπὶ $8\frac{1}{2}$ ὥρα 32 χιλμ. καθ' ὥραν, κατὰ τὰς 5 ἑπομένας ὥρας 45,4 χιλμ. καθ' ὥραν καὶ κατὰ τὰς τελευταίας $6\frac{1}{2}$ ὥρ. 36,500 χιλμ. καθ' ὥραν. Ποία εἶναι ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν; ('Απ. 36,8125 χλμ.).

4) Μαθητής τις ἔλαβεν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ ὁλικὸν βαθμὸν 7, εἰς δὲ τὰ Μαθηματικὰ 8, εἰς τὰ Ἱερὰ 9, εἰς τὴν Γυμναστικὴν 6, εἰς τὰ Γαλλικὰ 5, εἰς τὴν Φυσικὴν 8, εἰς τὴν Ἱστορίαν 6 καὶ εἰς τὴν Γεωγραφίαν 7. Ὁ βαθμὸς τῶν Ἑλληνικῶν, Μαθηματικῶν καὶ τῆς Γυμναστικῆς ἔχει συντελεστὴν (πολλαπλασιάζεται) τὸν 2 καὶ τῶν ὑπολειπόμενων τὸν 1. Τίς εἶναι ὁ γενικὸς βαθμὸς τοῦ μαθητοῦ τούτου; ('Απ. 7).

5) Οἱ ἐργάται ἑνὸς κτήματος ἐργάζονται κατὰ τὰς 120 ἡμ. ἀνὰ 9 ὥρας καθ' ἡμέραν, κατὰ τὰς 135 ἡμ. ἀνὰ 12 ὥρας καὶ κατὰ τὰς 45 ἡμ. ἀνὰ 13 ὥρας. Ποία εἶναι ἡ μέση διάρκεια τῆς ἡμερησίας ἐργασίας καθ' ὅλον τὸ ἔτος; ('Απ. 10 ὥρ. 57 π.λ).

6) Ἔν τινι διώρυγι ἔσκαψαν 9 ἐργ. ἐπὶ 5 ἡμ. ἓν μέρος $56\frac{1}{2}$ μ., 8 ἄλλοι ἐπὶ 11 ἡμ. ἕτερον μέρος 118 μ. καὶ 12 ἄλλοι ἐπὶ 7 μέρος $\frac{1}{2}$ μ. Πόσα μέτρα ἔσκαψεν ἕκαστος ἐργάτης τὴν ἡμέραν κατὰ μέσον ὅρον;
('Απ. 1,19 μ. περ.).

7) Ἠγόρασέ τις α΄ 20 τεμάχια (τόπια) τῶν 35 μ. πρὸς 6,25 δρ. τὸ μέτρον β΄ 12 τεμάχια τῶν 30 μ. πρὸς 7,35 δρχ. τὸ μέτρον, γ΄) 15 τεμάχια τῶν 40 μέτρων πρὸς 8,15 τὸ μέτρον. Πόση εἶναι κατὰ μέσον ὅρον ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου τῶν ὑφασμάτων τούτων; ('Απ. 7,422 δρχ.).

8) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 2458 ὀκ. σίτου πρὸς 44 λ. τὴν ὀκ., 4580 ὀκ. ἄλλης ποιότητος πρὸς $45\frac{3}{4}$ λ. τὴν ὀκᾶν. Ποία ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ ὅλου σίτου; ('Απ. $45\frac{977}{7038}$ λ.)

9) Ἀνέμειξέ τις 625 λίτρ. οἰνοπνεύματος 80° καὶ 550 λ. τῶν 60° καὶ 105 λ. ὕδατος. Πόσος θὰ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος; ('Απ. 65° περ.)

10) Διὰ τὴν κατασκευὴν δοχείου τινὸς συντήκει τις $4\frac{1}{2}$ χλγ. ἀργύρου τίτλου 0,900 καὶ $1\frac{1}{4}$ χλγ. ἀργύρου τίτλου 0,600 καὶ 250 γρμ. χαλκοῦ. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος, ἐξ οὗ κατεσκευάσθη τὸ δοχεῖον; ('Απ. 0,800).

11) Ἔμπορός τις ἔχει δύο ποιότητας ὀρύζης τῶν 0,85 δρχ. καὶ 0,92 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Ἐὰν ἀναμείξῃ δύο ποσὰ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ποιοτήτων ἔχοντα λόγον πρὸς ἄλληλα, ὡς ὁ 5 πρὸς 2, ποία θὰ εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος; ('Απ. 0,87 δρχ.).

12) Συντήκομεν κρᾶμα χρυσοῦ 285 γραμ. τίτλου 0,835 μετ' ἄλλου κράματος χρυσοῦ 325 γρμ. καὶ τίτλου 0,910 καὶ μετὰ καθαροῦ χρυσοῦ 152 γρμ. Πόσος θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος;
('Απ. 0,899 περ.).

13) Ἔμπορός τις θέλει νὰ λάβῃ μῖγμα 840 ὀκ. 300 δρμ. ἐλαίου, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ στοιχίζῃ 1,15 δρχ. Πρὸς τοῦτο ἀναμειγνύει δύο ποιότητας ἐλαίου· καὶ τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ στοιχίζει 1,25 δρχ., τῆς β΄ 1,02 δρχ. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

(Απ. α΄ 475 ὀκ., $82\frac{14}{23}$ δρμ. β΄ 365 ὀκ. $217\frac{9}{23}$ δρμ.).

14) Πόσον ἄργυρον τίτλου $0,766\frac{2}{3}$ πρέπει ν' ἀναμείξῃ τις μὲ 72 ὀκ.

ἀργύρου τίτλου $0{,}910\frac{1}{2}$, ἵνα λάβῃ κρᾶμα βαθμοῦ καθαρότητος 0,800;

('Απ. 238 ὀκ. 272 δρμ.).

15) Χρειάζεταί τις οἰνόπνευμα 70^0 καὶ ἔχει τοιοῦτον τῶν 90^0 καὶ $62\frac{1}{2}^0$. Ζητεῖται α΄ κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμειξις, β΄ πόσας μετρικὰς ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἵνα λάβῃ μεῖγμα 800 ὀκ.;

('Απ. α΄) ὡς 3 πρὸς 8, β΄) 218 ὀκ. $72\frac{8}{11}$δράμ., 581 ὀκ. $327\frac{3}{11}$δρμ.).

16) Πόσον ἄργυρον καὶ πόσον χαλκὸν πρέπει νὰ συντήξῃ τις, διὰ νὰ κόψῃ 400 ἀργυρᾶ πεντάδραχμα, ὧν ὁ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ τὸ βάρος ἑκάστου 25 γραμ.;

('Απ. 9 χ.λ γ. ἀργ. καὶ 1 χ.λ.γ. χαλκοῦ).

17) Πόσον χρυσὸν καὶ χαλκὸν πρέπει τις ν' ἀναμείξῃ διὰ νὰ κατασκευάσῃ 500 χρυσᾶ εἰκοσάφραγκα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕκαστον εἰκοσάφραγκον ἔχει βάρος 6,4516 γραμ. καὶ τίτλον 0,900;

('Απ. χρ. 2,90322 χ.λ.γ., χαλκοῦ 0,32258 χ.λ.γ.)

18) Ἔχει τις κρᾶμα 21 χλγ. χρυσοῦ τίτλου 0,850. Πόσα χ.λ.γ. χαλκοῦ πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτό, ἵνα καταβιβασθῇ ὁ τίτλος αὐτοῦ εἰς 0,800;

('Απ. 1,3125 χ.λ.γ. χαλκοῦ).

19) Ἠγόρασέ τις ποσόν τι ζακχάρεως τριῶν ποιοτήτων μὲ τὰς ἑξῆς τιμάς· πρὸς 1,15 δρχ., πρὸς 1,28 δρ. καὶ πρὸς 1,30 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ἐκ τοῦ β΄ εἴδους ἠγόρασε ποσὸν τριπλάσιον ἢ ἐκ τοῦ α΄ καὶ ἐκ τοῦ γ΄ ποσόν, ὅσον ἐκ τοῦ α΄ καὶ β΄ ὁμοῦ. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τῆς ὀκᾶς;

('Απ. 1,27δρχ.).

20) Οἰνοπώλης ἀναμειγνύει 158 ὀκ. οἴνου τῶν 60 λ. καὶ 245 ὀκ. οἴνου τῶν 50 λ. καὶ 83 ὀκ. ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ μέση τιμὴ τοῦ μείγματος;

('Απ. 0,447 δρχ.).

21) Ἔχει τις 36 λίτ. οἰνοπνεύματος τῶν 80^0. Πόσας λίτρας ὕδατος πρέπει νὰ προσθέσῃ εἰς αὐτό, ἵνα λάβῃ οἰνόπνευμα $68\frac{1}{4}^0$;

('Απ. $6\frac{18}{91}$λίτρ.).

22) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει 3450 ὀκ. σίτου τῶν 40 λ. καὶ 2420 ὀκ. τῶν $42\frac{1}{2}$λ. καὶ 4560 ὀκ. τῶν 45 λ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος, ἵνα κερδίζῃ $12\frac{1}{2}$% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος;

('Απ. 0,481 δρχ.).

23) Καπνέμπορος ἀνέμειξε τρία εἴδη καπνοῦ· ἐκ μὲν τοῦ α′ εἴδους τῶν 2,85 δρχ. ἔλαβεν 845 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β′ τῶν 3,20 δρχ. 585 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ γ′ τῶν 3,65 δρχ. 450 ὀκ. Ἐὰν ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τοῦ μείγματος πρὸς 3,40 δρχ., ἐκέρδησεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον τοῖς ἑκατόν;

(Ἀπ. ἐκέρδησεν 7,93% περίπου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η′

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

254. Τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες ἀριθμόν τινα ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, καλεῖται τετράγωνον ἢ δευτέρα δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Π. χ. $3 \times 3 = 9$ λέγεται τετράγωνον τοῦ 3· ὁμοίως $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$ λέγεται τετράγωνον τοῦ $\frac{4}{5}$· ὡσαύτως $3,5 \times 3,5 = 12,25$ εἶναι τετράγωνον τοῦ 3,5.

Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἴσων παραγόντων καλεῖται κύβος ἢ τρίτη δύναμις τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· π.χ. $4 \times 4 \times 4 = 64$ λέγεται κύβος τοῦ 4. Ὁμοίως $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ λέγεται κύβος τοῦ $\frac{2}{3}$.

Ἐν γένει τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων καλεῖται δύναμις τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· καὶ ἂν οἱ παράγοντες εἶναι τέσσαρες, ἡ δύναμις καλεῖται τετάρτη, ἂν πέντε, πέμπτη κ. ο. κ. Π. χ. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ εἶναι ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ 5.

Παράστασις τῶν δυνάμεων.—Τὸ τετράγωνον ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, ὡς τοῦ 3, παριστῶμεν συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου 3^2, ἤτοι $3^2 = 3 \times 3$. Καὶ γενικῶς τὸ τετράγωνον οἱουδήποτε ἀριθμοῦ (α) παριστῶμεν $α^2 = α \times α$.

Ἐν τῇ παραστάσει ταύτῃ ὁ μὲν ἀριθμὸς α λέγεται βάσις τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ ἄνω καὶ δεξιᾷ τούτου γεγραμμένος ἀριθμὸς 2 καλεῖται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως. Ὁμοίως ὁ κύβος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ $α^3$, ἤτοι $α^3 = α \times α \times α$. Ὁμοίως ἡ τετάρτη δύναμις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ α παρίσταται $α^4 = α \times α \times α \times α$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων 1 ἕως 25.

2) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ τετράγωνα τῶν $34\frac{1}{}$, $8\frac{3}{4}$, 1025, 3400, 8500, 9040, 13065, 14295.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1 ἕως 12.

4) Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ κύβοι τῶν: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{15}$, $7\frac{1}{4}$, 8,25, 47,135, 0,0175, 1,3456, 750, 1200, 1435, 7865.

5) Νὰ ὑπολογισθῶσιν αἱ ἑξῆς δυνάμεις $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $(1{,}4)^5$, $(0{,}001)^6$, $\left(\frac{1}{4}\right)^7$.

6) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα·

α′) $3{,}25^2+1{,}7^3+\left(\frac{7{,}35}{2}\right)^2$. β′ $\dfrac{48.\left(\frac{59}{10}\right)^2-8.\,(4{,}125)^2}{67.\,(0{,}18)^2+(4{,}25)^3.\,7}$.

Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

255. Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ τινος καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 64 εἶναι ὁ 8, διότι $8^2=64$.

Ἡ τετραγ. ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 64 παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς· $\sqrt{64}$, ἤτοι $\sqrt{64}=8$. Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ καλεῖται ῥιζικόν, ὁ δ' ὑπ' αὐτὸ γεγραμμένος ἀριθμὸς ὑπόρριζος ποσότης.

Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 81 εἶναι ὁ 9, διότι $9^2=81$.

Ἐὰν ὅμως ζητῶμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 75, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, ἀλλ' ὅτι περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων 8 καὶ 9, ἤτοι μεταξὺ τῶν 64 καὶ 81. Ἐν τῇ περιστάσει ταύτῃ ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ 75 θεωροῦμεν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, ἤτοι τὸν 8, καὶ λέγομεν τότε ὅτι ὁ 8 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 75 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ὁμοίως τοῦ ἀριθμοῦ 60 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 7, διότι ὁ 60 περιλαμβάνεται μεταξὺ 7^2 καὶ 8^2.

Ἐὰν ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι θεωρήσωμεν ἀντὶ τῶν δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8 τοὺς ἑπομένους ἀριθμοὺς

7, 7,1 7,2 7,3 . . . 7,9 8

καὶ ὑψώσωμεν αὐτοὺς εἰς τὸ τετράγωνον, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 60 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν τετραγώνων τῶν 7,7 καὶ 7,8· διότι $7{,}7^2=59{,}29$ καὶ $7{,}8^2=60{,}64$.

Ὁ μικρότερος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ἤτοι ὁ 7,7, θεωρεῖται ὡς τετραγ. ῥίζα τοῦ 60 κατὰ προσέγγισιν 0,1. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὴν τετραγ. ῥίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01,0,001 κτλ.

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Α') Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

256. ***Πρακτικὸς κανών.***—«Χωρίζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς διψήφια τμήματα ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· τὸ πρῶτον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα θὰ ἔχῃ δύο ἢ καὶ ἓν ψηφίον. Τοῦ τμήματος τούτου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ῥίζης. Τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τούτου ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου τμήματος τοῦ ἀριθμοῦ καὶ δεξιᾷ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα.

Τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ.ο.κ., μέχρις οὗ εὕρωμεν ψηφίον, οὗτινος τὸ γινόμενον ν' ἀφαιρῆται.

Δεξιᾷ τοῦ εὑρισκομένου ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ἀριθμοῦ διαιροῦμεν τὰς δεκάδας διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ῥίζης, καὶ γράφομεν τὸ πηλίκον δεξιᾷ τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ τὰς δεκάδας διῃρέσαμεν, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θὰ εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον κ.ο.κ. Προχωροῦμεν δ' οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν πάντα τὰ διψήφια τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν τοῦτο εἶναι 0, ἡ εὑρεθεῖσα τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι ἡ ἀκριβής, ἄλλως εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος».

Σημ.—Ἂν τύχῃ μία τῶν διαιρέσεων νὰ δίδῃ πηλίκον 0, γράφομεν εἰς τὴν ῥίζαν ὡς ψηφίον τὸ 0 καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

Παραδείγματα.—Νὰ ἐξαχθῇ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ 170458. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$\sqrt{17.04.58}$	412	
16	81	822
104	1	2
81	81	1644
2358		
1644		
714		

Ὁμοίως νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τοῦ ἀριθμοῦ 9258348.

$\sqrt{9.25.83.48}$	3042	
9	6 604	6082
025	4	2
2583	2416	12164
2416		
16748		
42164		
4584		

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ παραδείγματι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 412 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 714, ὅπερ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ῥίζης 412, ἤτοι τὸ 824.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ οὐχὶ μικροτέρου τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν μόνον τοῦ ἀκεραίου μέρους. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 783,45 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 783. Ὁμοίως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $145\frac{3}{4}$ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 145.

Β') Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος.

257. ***Πρακτικὸς κανών.*** «Ἵνα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ., πολλαπλασιάζομεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 10^2 ἢ 100^2 ἢ 1000^2 κ.τ.λ. καὶ τοῦ οὕτω προκύπτοντος ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ.».

Παραδείγματα.—Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν α') τοῦ 845 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ καὶ β') τοῦ 3,458 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$.

α') $845 \times 100^2 = 845 \times 10000 = 8450000$

$\sqrt{8.45.00.00}$	2906
4.45	49 5806
4.41	9 6
400	441 34836
40000	
34836	
5164	

$\frac{2906}{100} = 29{,}06$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

β') $3{,}458 \times 1000^2 = 3{,}458 \times 1000000 = 3458000$

$\sqrt{3.45.80.00}$	1859
245	28 365 3709
224	8 5
2180	224 1825 33381
1825	
35500	
33381	
2119	

$\frac{1859}{1000} = 1{,}859$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Παρατήρησις.—Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κλάσματός τινος κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς μονάδος, τρέπομεν πρῶτον τοῦτο εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα.

Π. χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7}{8}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.

$\frac{7}{8} = 0{,}875$ καὶ $0{,}875 \times 100^2 = 0{,}875 \times 10000 = 8750$.

$\sqrt{87\ 50}$	93
6 50	183
5 49	3
1 01	549

$\sqrt{\frac{7}{8}} = 0{,}93$

Ἀσκήσεις.

1) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν α') τοῦ 64, β') τοῦ 81, γ') τοῦ 36, δ') τοῦ 100, ε') τοῦ 121, ς') τοῦ 144, ζ') τοῦ 400, η') τοῦ 10000, θ') τοῦ 2500, ι') τοῦ 6400, ια') τοῦ 8100.

2) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τῶν ἑξῆς: α') 72,652, β') 30625, γ') 1457878, δ') 25004765.

3) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τῶν ἑξῆς: α) 845, β') 15,745, γ') $8\frac{3}{4}$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα: α') $\sqrt{11{,}9225} - (0{,}837)^2$

β') $\frac{(2{,}45)^2 - \sqrt{2{,}25}}{2^2}$ γ') $\frac{5\,(2{,}4)^2 - 3\sqrt{6{,}16}}{7\sqrt{20{,}25}}$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην α′) πρὸς 8 μ., β′) πρὸς 12 μ., γ′) πρὸς 10,75 μ., δ′) πρὸς 23, 60 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ οἰκοπέδου, οὗτινος ἡ διάμετρος εἶναι ἴση α′) πρὸς 18,45 μ., β′) πρὸς 25,50 μ., γ′) πρὸς 38,75 μ.

ΣΗΜ.—Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα (α) μέτρων δίδεται, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὑπὸ τοῦ τύπου $πα^2$, ἔνθα $π=3,14159$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν ἴσην α′) πρὸς 4 μ., β′) πρὸς 8 μ., γ) πρὸς 9,25 μ., δ′) πρὸς 12,75 μ.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑνὸς κύβου ἐκ μαρμάρου μὲ πλευρὰν α′) 1 μ β′) 2 μ., γ′) 3,45 μ., δ′) 4,65 μ. (εἰδ. βάρος μαρμάρου 2,65 περίπου).

5) Ἐπώλησέ τις οἰκόπεδον ὀρθογώνιον ἔχον μῆκος 17,25 μ. καὶ πλάτος 7,25, ἓν ἕτερον τετραγωνικοῦ σχήματος μὲ πλευρὰν 8,45 μ. κα τέλος ἓν κυκλικὸν μὲ διάμετρον 38,45 μ., ἅπαντα πρὸς 8,75 δρχ. τὸ τετραγ. μέτρον. Πόσον εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ;

6) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς ἓν βασιλικὸν στρέμμα (εἰς μέτρα μὲ προσέγγισιν 0,01).

7) Τὸ παλαιὸν στρέμμα ἔχει ἔκτασιν 3025 τετραγ. μικρῶν πήχεων· Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ α′) εἰς μικροὺς πήχ., β′) εἰς μέτρα τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ παλαιὸν στρέμμα; (προσέγ. 0,01).

8) Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἁλωνίου εἶναι 85,40 τ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ πόση ἡ περιφέρεια;

ΣΗΜ.—Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $2πα$.

9) Ἡ περιφέρεια κυκλικοῦ τινος οἰκοπέδου ἰσοῦται πρὸς 195,60 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

10) Οἰκόπεδόν τι ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, ἔχοντος μῆκος 45,75 μ. καὶ πλάτος 28,30 μ. Πόσων μέτρων πλευρὰν θὰ ἔχῃ τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρῶτον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ′

ΑΝΑΜΕΙΚΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Ὀδοντωτὸς τροχὸς ἔχει 144 ὀδόντας· οἱ ὀδόντες αὐτοῦ ἐμπλέκονται μετὰ τῶν ὀδόντων δευτέρου τροχοῦ, ἔχοντος 96 ὀδόντας· τούτου πάλιν οἱ ὀδόντες ἐμπλέκονται μετὰ τῶν ὀδόντων τρίτου τροχοῦ, ἔχοντος

48 ὀδόντας. Ἐὰν ὁ α΄ κάμνῃ 150 στροφὰς κατὰ 1 πρῶτον λεπτόν, πόσας στροφὰς κάμνει ὁ β΄ καὶ πόσας ὁ γ΄ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ;

(Ἀπ. ὁ β΄ 225 στρ. ὁ γ΄ 450 στρ.).

2) Ἐν Λονδίνῳ μία λίτρα Ἀγγλικὴ λευκῶν πτερῶν στρουθοκαμήλου στοιχίζει 12 λ. 10 σελ. 6 π. Ποία εἶναι εἰς δραχμὰς (ἄνευ τῶν ἐξόδων) ἡ τιμὴ μιᾶς ὀκᾶς τούτων ἐν Ἀθήναις; (λίρ.=25,15 δραχμάς).

(Ἀπ. 888,90 δρ.).

3) Τρεῖς ἐργάται δύνανται νὰ ἐκτελέσωσιν ἔργον τι ὁμοῦ εἰς $4\frac{1}{2}$ ἡμ. Ὁ α΄ ἐξ αὐτῶν ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς $8\frac{2}{5}$ ἡμ. καὶ ὁ β΄ εἰς $12\frac{2}{3}$ ἡμέρ. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ γ΄ ἐργάτης μόνος του δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τοῦτο;

(Ἀπ. $41\frac{8}{29}$ ἡμ.).

4) Ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐπὶ ἑνὸς τετραγ. δακτύλου εἶναι 1033,6 γρμ. Πόση εἶναι ἡ πίεσις εἰς ὀκάδας, ἣν ὑφίσταται τὸ ἀνθρώπινον σῶμα, ἂν ἔχῃ ἐπιφάνειαν 1,45 τ.μ.; (Απ. 11708 ὀκ. 300 δρ.)·

5) Δεξαμενή τις χωρεῖ 820 ὀκ. ὕδατος. Ἔκ τινος κρήνης ῥέουσιν εἰς αὐτὴν εἰς $\frac{2}{5}$ λεπτοῦ $2\frac{2}{3}$ ὀκ. ὕδατος, εἰς δὲ τὸν πυθμένα αὐτῆς ὑπάρχει στρόφιγξ, ἐξ ἧς ἀνοιγομένης ἐκρέουσιν εἰς $\frac{3}{4}$ λεπτοῦ $2\frac{1}{9}$ ὀκ. ὕδατος. Ἐὰν ἡ δεξαμενὴ εἶναι κενὴ καὶ ἀνοιχθῶσι συγχρόνως ἡ κρήνη καὶ ἡ στρόφιγξ, εἰς πόσα πρῶτα λεπτὰ θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

(Ἀπ. 3 ὥρ. 32 π. 53 δ. περίπου)·

6) Πατήρ της διένειμε ποσόν τι χρημάτων εἰς τὰ 3 τέκνα του ὡς ἑξῆς. Εἰς μὲν τὸν πρεσβύτερον υἱόν του ἔδωκε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὅλου ποσοῦ καὶ ἀκόμη 150 δρχ., εἰς τὸν νεώτερον τὸ $\frac{1}{2}$ ἐξ ὅσων ἔδωκεν εἰς τὸν α΄ καὶ ἀκόμη 250 δρχ. Τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἀνερχόμενον εἰς 200 δρχ. ἔδωκεν εἰς τὴν θυγατέρα του. Ποῖον εἶναι τὸ διανεμηθὲν ποσὸν καὶ πόσας δρχ. θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;

(Ἀπ. τὸ ποσὸν 1890 δρ., ὁ α΄ 960 δρχ., ὁ β΄ 730 δρχ.).

7) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσε μὲ ταχύτητα $8\frac{1}{2}$ μιλ. καθ' ὥραν εἰς $5\frac{3}{4}$ ὥρ. τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὅλου διαστήματος, ὅπερ ὀφείλει νὰ διατρέξῃ. Ἕνεκα βλάβης τῆς μηχανῆς του ἠναγκάσθη νὰ διανύσῃ τὸ ὑπόλοιπον διάστημα

μὲ ταχύτητα κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ μικροτέραν τῆς πρώτης αὐτοῦ ταχύτητος. Ζητεῖται α΄) πόσων μιλίων εἶναι τὸ διάστημα, ὅπερ διέτρεξε μὲ τὴν πρώτην ταχύτητα· β΄) πόσον εἶναι τὸ διάστημα, ὅπερ διέτρεξε μὲ τὴν δευτέραν ταχύτητα· γ΄) εἰς πόσας ὥρ. διήνυσε τὸ β΄ μέρος τοῦ διαστήματος;

('Απ. α΄ 48$\frac{7}{8}$ μιλ., β΄ 32 $\frac{7}{12}$ μιλ., γ΄ 5 ὥρ. 6$\frac{34}{51}$ π.).

8) Ἀτμόπλοιόν τι εἰσέπραξε διὰ ταξείδιον ἀπὸ Πειραιῶς μέχρι Σύρου 794 δρ. ἐξ 60 ἐπιβατῶν Αης καὶ Βας θέσεως. Ἕκαστος ἐπιβάτης τῆς Αης θέσεως πληρώνει 15,60 δρ., τῆς Βας 8,50 δρ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐπιβάται τῆς Αης θέσεως καὶ πόσοι τῆς Βας; ('Απ. 40 Αης, 20 Βας).

Λύσις.—Ἐὰν οἱ ἐπιβάται ἦσαν ὅλοι τῆς Αης θέσεως, θὰ ἐπλήρωναν 15,60×60=936 δρχ., ἤτοι ἐπὶ πλέον 142 δραχ., ἕκαστος ἐπιβάτης τῆς Βας θέσεως πληρώνει 8,50 δρχ., ἤτοι ὀλιγώτερον κατὰ 7,10 δραχ. Ἄρα οἱ ἐπιβάται τῆς Βας θέσεως εἶναι $\frac{142}{7,1}=20$.

9) Ἀσφαλίσας τις φορτίον τι πρὸς 5$\frac{1}{4}$ ‰ ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα 625,50 δρχ. Διὰ πόσας δρχ. ἔχει ἀσφαλισθῆ τὸ φορτίον τοῦτο καὶ ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τούτου, ἂν εἰς τὴν ἀσφαλισθεῖσαν ἀξίαν περιλαμβάνηται καὶ κέρδος φανταστικὸν 10% ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ ἐμπορεύματος; ('Απ. 119142, 85 δρχ., πραγμ. ἀξία 108311,68 δρχ.).

10) Ἐδανείσθη τις ἕν ποσὸν πρὸς 8% καὶ μετὰ 7 μῆνας καὶ 15 ἡμ. ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 12415 δραχ. κεφάλαιον μετὰ τοῦ τόκου. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐδανείσθη; ('Απ. 11823, 80 δρχ.).

11) Τέσσαρες ἔμποροι ἀνέλαβον μίαν ἐπιχείρησιν, τῆς ὁποίας τὰ κέρδη διενεμήθησαν, καὶ ὁ μὲν α΄ ἔλαβε 450 δρχ., ὁ δὲ β΄ 240 δρχ., ὁ γ΄ 380 δρχ., καὶ ὁ δ΄ 730 δραχ. Ἐὰν ὁ πρῶτος κατέβαλε κεφάλαιον 8500 δραχ., πόσας δραχμὰς κατέβαλεν ἕκαστος τῶν ἄλλων;

('Απ. ὁ β΄ 4533,33 δρχ., γ΄ 7177,77 δρχ.· δ΄ 13788,88 δρχ.).

12) Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8%, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 9% κατ' ἔτος, λαμβάνει δὲ ἐτήσιον τόκον 2450 δρχ. α΄) πόσα ἦσαν ὅλα τὰ χρήματα καὶ β΄) πόσα χρήματα ἐτόκισε πρὸς 8% καὶ πόσα πρὸς 9%;

('Απ. α΄ 28488,37 δρχ. β΄ 11395,35 δρχ. γ΄ 17093,02 δρχ.)

13) Εἴς τινα ἑταιρείαν ὁ Α κατέθεσε δραχ. 65000, ὁ Β δραχ.

105000 καὶ ὁ Γ δραχ. 125000· ἐκ τοῦ καθαροῦ κέρδους ὁ Α καὶ ὁ Β ἀφαιροῦσιν εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους 25 % ὡς ἀμοιβὴν των διὰ τὴν διοίκησιν τῆς ἑταιρείας, ἤτοι $12\frac{1}{2}$ % ἕκαστος αὐτῶν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τοῦ κέρδους διανέμεται μεταξὺ τῶν 3 συνεταίρων ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων, ἅτινα κατέθεσαν. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐτήσιον κέρδος εἶναι 27365 δραχ., πόσον μερίδιον θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. α′ 4942,80 δρχ., β′ 10725,69 δρχ., γ′ 8696,50 δρχ.).

14) Γραμμάτιόν τι ἔληξε τὴν 8ην Δεκεμβρίου ἐν. ἔτ., ἀλλ' ἐπληρώθη τὴν 20ὴν Φεβρουαρίου ἐπ. ἔτ.· ἕνεκα τούτου ὁ χρεώστης ἐπλήρωσε διὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα τόκον 37,50 δραχ. πρὸς 8 % κατ' ἔτος. Ποία ἦτο ἡ ἀξία τοῦ γραμματίου; (Ἀπ. 2343,75 δραχ.).

15) Τέσσαρες ἀδελφοὶ κληρονομοῦσι παρὰ τοῦ πατρός των 165000 δρχ. Ἐκ τούτων ὁ μὲν β′ θὰ λάβῃ $1\frac{3}{4}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α′, ὁ δὲ γ′ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μεριδίου τοῦ α′ καὶ τοῦ β′ ὁμοῦ καὶ ὁ δ′ ὅσον καὶ ὁ α′. Πρέπει δὲ πρὸ τῆς διανομῆς νὰ πληρωθῇ ὁ φόρος τοῦ δημοσίου πρὸς $4\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τούτου. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(Ἀπ. φόρος 7425 δρχ., ὁ α′ 30746,34 δρχ., ὁ β′ 53806,10 δρχ. ὁ γ′ 42276,22 δρχ., ὁ δ′ 30746,34 δρχ.).

16) Θέλει τις ἐκ δύο ποιοτήτων σίτου, τοῦ μὲν Αης ποιότητος 45 λ. τὴν ὀκᾶν, τοῦ δὲ Βας 40 λ., νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 8450 ὀκ., οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ πωλῆται πρὸς 44 λ., καὶ νὰ κερδίζῃ ἐκ τῆς ἀναμείξεως ταύτης 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μείγματος. Πόσας ὀκάδας θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους; (Ἀπ. Αης 1251 ὀκ. 340 δραμ. Βας 7198 ὀκ. 60 δρ.).

17 Ἐργοστασιάρχης τις καλλιεργεῖ 1200 στρέμ. ἀγροῦ, ἐξ οὗ ἀπολαμβάνει 1250 ὀκ. τεύτλων κατὰ στρέμμα. Τὰ τεῦτλα ἀποδίδουσι ζάκχαριν ἴσην πρὸς 5 % τοῦ βάρους αὐτῶν. Τὰ ἔξοδα τῆς καλλιεργείας τοῦ ἀγροῦ καὶ τῆς κατασκευῆς τῆς ζακχάρεως ἀνέρχονται εἰς 109,50 δραχ. ἐπὶ τῶν 100 ὀκ. ζακχάρεως. Ἐὰν ἡ παραγομένη ζάκχαρις πωλῆται πρὸς 1,25 δρχ. κατ' ὀκᾶν, πόσον εἶναι τὸ ὁλικὸν κέρδος τοῦ ἐργοστασιάρχου;

(Ἀπ. 11625 δρχ.).

18) Ἐκ 3 ἐργατῶν ὁ α′ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ μόνος του ἔργον τι εἰς 15 ὥρ., ὁ β′ εἰς 20 ὥρ. καὶ ὁ γ′ εἰς 18 ὥρ. Εἰργάσθησαν καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ καὶ ἐπληρώθησαν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλου τοῦ ἔργου 85,60 δραχ.

Ζητεῖται· α') πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τῆς ἀμοιβῆς ταύτης, β') εἰς πόσας ὥρας θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον;

('Απ. Α') ὁ α' 33,14 δραχ., ὁ β' 24,85 δρχ., ὁ γ' 27,61 δρ. Β') εἰς 5 ὥρ. $48\frac{12}{31}$ π.).

19) Βιομήχανός τις ἠγόρασεν 645 ψάθας σίτου Ταϊγανίου πρὸς 7,5 ρούβλια τὴν ψάθαν· ἐπλήρωσε δὲ διὰ ναῦλον $10\frac{1}{}$ σελ. κατὰ μετρικὸν τόννον, διὰ δασμὸν 8,11 δρχ. εἰς τὰς 100 ὀκ., δι' ἐκφόρτωσιν καὶ μεταφορὰν μέχρι τῆς ἀποθήκης 637,50 δρχ. (εἶναι γνωστὸν ὅτι μία ψάθα τοῦ σίτου τούτου ἔχει βάρος 168,4 χ.λ.γ.). Πόσον στοιχίζει ὁλόκληρον τὸ φορτίον μέχρι τῆς ἀποθήκης καὶ πόσον ἡ μία ὀκᾶ; (1 ρούβλ.=2,68 δραχ., 1 σελ.=1,26 δρχ.

('Απ. τὸ ὅλον φορτ. 21921 δρ., ἡ ὀκ. 26 λ. περίπου, βάρ. 84858 ὀκ.).

20) Ὁ αὐτὸς βιομήχανος ἐδαπάνησε διὰ τὴν ἄλεσιν τοῦ ἄνω σίτου 3 λ. κατ' ὀκ. καὶ ἔλαβε πίτυρα 18 %, σεμιγδάλια 12 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς ἄλευρα. Μετεπώλησε τὰ μὲν πίτυρα πρὸς 14 λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δὲ σεμιγδάλιον πρὸς 57 λ. καὶ τὸ ἄλευρον πρὸς 54 λ. Πόσας δραχ. ἐκέρδησεν ἐκ τοῦ σίτου τούτου; ('Απ. 15552,25 δρχ.).

21) Καπνέμπορος συνεφώνησε μετὰ τοῦ Αὐστριακοῦ μονοπωλίου νὰ παραδώσῃ ἐντὸς τεταγμένης διορίας 125000 χ.λ.γ. καπνοῦ θεσσαλικοῦ ὡρισμένης ποιότητος πρὸς 225 κορώνας τὸν μετρ. στατῆρα παραδοτέον ἀνεξόδως εἰς Τεργέστην. Ὁ ἔμπορος οὗτος ἠγόρασεν 8000 ὀκ. καπνοῦ πρὸς 2,10 δρχ. κατ' ὀκᾶν καὶ τὰς ὑπολοίπους πρὸς 2,15 δρχ. Ἐδαπάνησε δὲ διὰ μεταφορὰν τοῦ καπνοῦ μέχρι Τεργέστης διὰ ναῦλον, ἀσφάλειαν καὶ λοιπὰ 0,10 δρχ. κατὰ χιλιόγ. α') Πόσον ἐκέρδησεν ἐν ὅλῳ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης καὶ β') πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ κέρδος ἐπὶ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον ἀπησχόλησε διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην;

('Απ. α' 56051,55 δρ. τὸ ὁλικὸν κέρδος, β' 23,42 % περίπου τὸ κέρδος).

22) Κτηματίας δαπανᾷ διὰ τὴν καλλιέργειαν μιᾶς σταφιδαμπέλου ἐξ 120 στρεμ. τὰ ἑξῆς ποσά: α') διὰ τὴν λίπανσιν 3,25 δραχ. κατὰ στρέμμα, β') διὰ σκάψιμον ἀπασχολεῖ 15 ἐργάτας ἐπὶ 24 ἡμ., εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων πληρώνει πρὸς 3,25 δραχ. καθ' ἑκάστην, γ') διὰ τὸ κλάδευμα ἀπασχολεῖ 3 ἐργ. ἐπὶ 10 ἡμ. πληρώνων εἰς ἕκαστον 4 δραχ. καθ' ἑκάστην, δ') διὰ τὸ σκάλισμα, τρυγητὸν κτλ. ἐξοδεύει 48,25 δραχ.

κατὰ στρέμμα. Τὸ κτῆμα τοῦτο ἀπέδωκεν εἰς αὐτὸν $78\frac{3}{4}$ χιλιολ. σταφίδος, ἅτινα ἐπώλησε πρὸς 122,50 δραχ. ἕκαστον. Ζητεῖται α') πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ κτηματίου καὶ ποῖον κεφάλαιον ἀντιπροσωπεύει ἡ σταφιδάμπελος πρὸς 7 $^0/_0$ κατ' ἔτος;

('Απ. 2176,85 δρ. κέρδ. κεφ. 31097,85 δρχ.).

23) Τὴν 1ην Ὀκτωβρίου ἐν. ἔτ. διεπραγματεύθη ἔμπορός τις Κ εἴς τινα τραπεζίτην Δ. τὰ ἀκόλουθα γραμμάτια: 4500 δραχ. ἐπὶ Πειραιῶς λήξεως 31 Ὀκτωβρίου, 3100 δρχ. ἐπὶ Ἀδριανουπόλεως λήξεως 15 Νοεμβρίου, 2400 δρ. ἐπὶ Σμύρνης λήξεως 25 Νοεμβρίου καὶ 2150 δρχ· ἐπὶ Καβάλλας λήξεως 7 Δεκεμβρίου ὑπὸ τοὺς ἑξῆς ὅρους: ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν πρὸς 9 $^0/_0$ κατ' ἔτος καὶ προμήθειαν $\frac{1}{8}$ $^0/_0$ ἐπὶ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τῶν γραμματίων. Πόση εἶναι ἡ καθαρὰ ἀξία, τὴν ὁποίαν θὰ εἰσπράξῃ ὁ ἔμπορος Κ. (μῆν. ἔτ. ἐμπ.); ('Απ. 11997,15 δρ.)·

24) Ἔμπορός τις Π. ἐκ Πειραιῶς ὀφείλει εἴς τινα τραπεζίτην τοὺς τόκους πρὸς 8 $^0/_0$ τῶν ἑξῆς κεφαλαίων: 7100.45 δρ. ἀπὸ 8ης Ἰανουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου, 5200 δρ. ἀπὸ 20ῆς Ἀπριλίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου καὶ 3145,45 δρ. ἀπὸ 18ης Μαΐου μέχρι τέλους Ἰουνίου. Ἀφ' ἑτέρου ὅμως δικαιοῦται νὰ λάβῃ τοὺς τόκους ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιτοκίῳ τῶν ἑξῆς ποσῶν: 2135,45 δρ. ἀπὸ 1ης Ἰανουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου, 1547,65 δρ. ἀπὸ 5ης Φεβρουαρίου μέχρι 30ῆς Ἰουνίου καὶ 4670 δρχ· ἀπὸ 10 Μαρτίου μέχρι τέλους Ἰουνίου. Ποῖον κεφάλαιον καὶ πόσους τόκους ὀφείλει κατὰ τὴν 30ὴν Ἰουνίου εἰς τὸν τραπεζίτην του; (τοκοφόρος λογαριασμός· μῆν. ἔτ. ἐμπ.).

('Απ. ὀφείλει 7092,80 δρ. κεφ. καὶ 132,20 δρ. τόκ.).

25) Ὁ ἐν Καλάμαις παραγγελιοδόχος Δ. Ἰωαννίδης ἔλαβε παρὰ τοῦ κ. Πετρίδου, μεγαλεμπόρου ἐκ Πειραιῶς, 100 σάκκους ὀρύζης 7800 ὀκ. μὲ τὸν ὅρον νὰ πωλήσῃ αὐτοὺς διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἀποστολέως πρὸς 0,95 δρ. τὴν ὀκᾶν τοὐλάχιστον. Μετά τινα χρόνον ὁ παραγγελιοδόχος οὗτος συντάσσει καὶ ἀποστέλλει εἰς τὸν ἐντολέα τὸν λογαριασμὸν τῶν γενομένων πωλήσεων. Τὴν 30ὴν Σεπτεμβρίου ἐπώλησεν 25 σάκκους τῶν 78 ὀκ. πρὸς 0,98 δρ. κατ' ὀκᾶν καὶ μὲ ἔκπτωσιν 2 $^0/_0$. Τὴν 2αν Ὀκτωβρίου ἐπώλησεν ἄλλους 30 σάκκους τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,97 δρ. καὶ μὲ ἔκπτωσιν $1\frac{1}{2}$ $^0/_0$. Τὴν 4ην Ὀκτωβρίου ἐπώλησεν ἀκόμη 40 σάκ. τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,95 δρχ. καὶ τὴν 6ην Ὀκτωβρίου τοὺς

ὑπολοίπους 5 σάκ. τοῦ αὐτοῦ βάρους πρὸς 0,97 καὶ μὲ ἔκπτωσιν 2%· Διὰ ναῦλον καὶ παραλαβὴν τοῦ ἐμπορεύματος ἐδαπάνησε 296,40 δραχ., δι' ἐνοίκιον ἀποθήκης 6 λεπτ. κατὰ σάκκον, ἀσφάλιστρα 1‰ (ἐπὶ 8000 δραχ.) καὶ $1\frac{1}{2}$% προμήθειαν (ἐπὶ τοῦ ποσοῦ τῶν πωλήσεων μετὰ τῶν ἐξόδων). Πόσας δραχμὰς δικαιοῦται νὰ λάβῃ ὁ ἀποστολεὺς Κ. Πετρίδης παρὰ τοῦ Δ. Ἰωαννίδου (λογαριασμὸς πωλήσεως πρβλ. εἰς τὸ πρβλ. 26 σελ. 217).

('Απ. 7016,60 δρχ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΛΟΓΡΑΦΙΚΗΣ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ

Α' Σκοπὸς καὶ συστήματα τῆς Λογιστικῆς.

25[?]. ***Σκοπὸς τῆς Λογιστικῆς.***—Ἡ Λογιστικὴ εἶναι κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, ὅστις διδάσκει νὰ ἐγγράφωμεν μεθοδικῶς τὰς ἐργασίας οἴκου τινὸς (ἐμπορικοῦ, τραπεζιτικοῦ, βιομηχανικοῦ κτλ.) οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν καθ' οἱανδήποτε στιγμὴν τὸ ἀποτέλεσμα αὐτῶν.

Διὰ τῆς Λογιστικῆς πᾶς ἐπιχειρηματίας δύναται νὰ γνωρίζῃ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τί κατέχει, τί ὀφείλει εἰς τρίτους, τί τρίτοι ὀφείλουσιν αὐτῷ καὶ τέλος κατὰ πόσον ἠλαττώθη ἢ ηὐξήθη ἡ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν ἀπησχολημένη περιουσία αὐτοῦ μετά τινα περίοδον ἐργασιῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσι τί ἐζημιώθη ἢ ἐκέρδησεν ἐκ τῶν ἐργασιῶν αὐτοῦ.

259. ***Συστήματα Λογιστικῆς.***—Διακρίνομεν δύο τοιαῦτα· α') τὴν Ἁπλογραφικὴν λογιστικὴν καὶ β') τὴν Διπλογραφικήν.

Ἡ πρώτη εἶναι ἁπλῆ μὲν καὶ εὔκολος, ἀλλ' ἀτελὴς ὡς μὴ παρέχουσα πᾶσαν ἐπιθυμητὴν πληροφορίαν μηδὲ πλήρη τῶν ἐγγραφῶν ἔλεγχον. Διὰ τοῦτο βλέπομεν αὐτὴν ἐφαρμοζομένην ἐν ἐπιχειρήσεσι μικρᾶς σπουδαιότητος.

Ἡ δευτέρα εἶναι συστηματικὴ καὶ ἀρτία παρέχουσα πᾶσαν ἐπιθυμητὴν πληροφορίαν καὶ μέσα πλήρους τῶν ἐγγραφῶν ἐλέγχου· δι' ὃ βλέπομεν αὐτὴν ἐφαρμοζομένην ἐν πάσῃ σπουδαίᾳ καὶ καλῶς ὠργανωμένῃ ἐπιχειρήσει.

Τὰ ὄργανα ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων εἶναι οἱ λεγόμενοι Λογαριασμοὶ ἢ Μερίδες καὶ τὰ Λογιστικὰ βιβλία.

ΣΗΜ.—Ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωροῦμεν τὸ πρῶτον σύστη

Β΄ Λογαριασμός, Δοῦναι, Λαβεῖν, Χρέωσις, Πίστωσις.

260. ***Γένεσις καὶ σκοπὸς τοῦ Λογαριασμοῦ.***—Πᾶς ἐπιχειρηματίας ἐπὶ τῇ διεξαγωγῇ τῆς ἐπιχειρήσεώς του ἀναγκάζεται οὐχὶ σπανίως νὰ ἔλθῃ εἰς οἰκονομικὰς σχέσεις μετὰ διαφόρων προσώπων ἐνεργῶν μεθ᾿ ἑκάστου τούτων δοσοληψίας ὑπὸ συμφωνουμένους ὅρους.

Ἐὰν ἐπιχειρηματίας τις ἐπιθυμῇ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ γνωρίζῃ τὴν οἰκονομικὴν θέσιν του ἀπέναντι προσώπου τινός, μεθ᾿ οὗ ἐνεργεῖ δοσοληψίας, δὲν εἶναι φρόνιμον νὰ ἐμπιστεύηται αὐτὰς μόνον εἰς τὴν μνήμην του, ἀλλὰ πρέπει καὶ νὰ τηρῇ λεπτομερῆ, ἀκριβῆ καὶ μεθοδικὴν σημείωσιν αὐτῶν. Μία τοιαύτη σημείωσις ὀνομάζεται Λογαριασμὸς ἢ Μερὶς τοῦ θεωρουμένου προσώπου ἐν τοῖς βιβλίοις τοῦ ἐπιχειρηματίου (ἢ συντομώτερον παρὰ τῷ ἐπιχειρηματίᾳ.

261. ***Διάταξις τοῦ Λογαριασμοῦ.***—Ἡ εἰς τὸν λογαριασμὸν διδομένη τάξις δύναται νὰ εἶναι οἱαδήποτε, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἐπιτυγχάνηται ὁ δι᾿ αὐτοῦ ἐπιδιωκόμενος σκοπός. Οὕτω λ.χ. τὰς δοσοληψίας, τὰς ὁποίας διεξάγομεν μετὰ τοῦ τραπεζίτου μας Δ. Πετρίδου, δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ἔν τινι ἰδιαιτέρῳ φύλλῳ (λ.χ. ἔν τινι σελίδι εἰδικοῦ βιβλίου) ὡς ἑξῆς·

Λογαριασμὸς Δ. Πετρίδου.

192..	Ἰανουαρίου	5.	Κατεθέσαμεν παρ᾿ αὐτῷ μετρητὰς δρχ	10000.—
»	»	14.	Ὁ Κ. Ἰωαννίδης κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμόν μας κατέθηκε παρ᾿ αὐτῷ........................ δρχ.	4857.50
			ἤτοι ἔχομεν ἐν ὅλῳ παρ᾿ αὐτῷ δρχ.	14857,50
»	Φεβρουαρ.	20	Ἀπεσύραμεν παρ᾿ αὐτοῦ δι᾿ ἀνάγκας τοῦ καταστήματός μας..........δρχ.	3000.—
			Οὕτω μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον δρχ.	11857,50
»	Μαρτίου	4.	Ἐπλήρωσε διὰ λογαριασμόν μας εἰς τὸν πρυμηθευτήν μας Π.Νικολάου δρχ.	3940,10
			Οὕτω μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον δρχ.	7917,40
»	»	10.	Ἠγόρασε διὰ λογαριασμόν μας 1 μετοχὴν τῆς Ἐθν. Τραπ. στοιχίσασαν δρχ.	4018,60
			Οὕτω τὴν 10 Μαρτίου μένει ὑπὲρ ἡμῶν ὑπόλοιπον.................δρχ.	3898.80

᾿Αντὶ ὅμως τῆς ἀρχαϊκῆς πως διατάξεως ταύτης προτιμᾶται ἄλλη τις μεθοδικωτέρα, καθ᾽ ἣν αἱ γενόμεναι πράξεις κατατάσσονται οὐ μόνον κατὰ χρονολογικὴν σειράν, ἀλλὰ καὶ ἀναλόγως τῆς φύσεως αὐτῶν. Ἰδοὺ αὕτη :

Λογαριασμὸς Δ. Πετρίδου.

Κατάλογος τῶν πραγμάτων, ἅτινα οὗτος ἔλαβε παρ' ἡμῶν ἢ καὶ παρ' ἄλλων διὰ λογαριασμόν μας, ὅπερ εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ.		Κατάλογος τῶν πραγμάτων, ἅτινα οὗτος ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἢ καὶ εἰς ἄλλους διὰ λογαριασμόν μας, ὅπερ εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ	
192.. Ἰανουαρίου 5. Κατάθεσίς μας	10000.—	192.. Φεβρουαρίου 20. Ἀπεσύραμεν μετρητὰ δρ.	3000.—
» » 14. Καταθέσεις Ἰωαννίδου διὰ λογαριασμόν μας δρ.	4857.50	» Μαρτίου 4. Πληρωμή του εἰς Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας. . . . . »	3940.10
		» Μαρτίου 10. Ἀγορὰ 1 μετοχῆς τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης διὰ λογαριασμόν μας »	4018.60
Ἐν ὅλῳ.............. δραχ.	14857.50	Ἐν ὅλῳ δρχ.	10958.70

Περίληψις.

Ὁ Δ. Πετρίδης ἔλαβε παρ᾽ ἡμῶν ἐν ὅλῳ δραχ.	14857,50
» ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἐν ὅλῳ δραχ.	10958,70
Μένει ὑπόλοιπον ὑπὲρ ἡμῶν τὴν 10ην Μαρτίου ἐκ δρχ.	3898,80

᾿*Επεξήγησις τῆς διατάξεως*.—Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην αἱ μεταξὺ ἡμῶν καὶ τοῦ Δ. Πετρίδου γενόμεναι πράξεις εἶναι συστηματικώτερον διατεταγμέναι.

Οὕτω λ. χ. πᾶσαι αἱ πράξεις, καθ' ἃς ἔτυχεν ὁ Δ. Πετρίδης νὰ λάβῃ παρ' ἡμῶν ἀμέσως ἢ ἐμμέσως (δηλ. παρὰ τρίτου διὰ λογαριασμόν μας) πρᾶγμα τι, εὑρίσκονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ λογαριασμοῦ, τὸ ἀριστερόν. Ἑκάστη τῶν πράξεων τούτων ἐκτίθεται συντόμως καὶ σαφῶς,συνοδεύεται δ' ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ τῆς χρονολογίας, καθ' ἣν αὕτη συνέβη, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ ὑπὸ τοῦ ποσοῦ, τοῦ δηλοῦντος τὴν συμφωνηθεῖσαν ἀξίαν τοῦ πράγματος. Ἐπειδὴ δ' ὁ Δ. Πετρίδης λαμβάνει ἑκάστοτε πρᾶγμά τι οὐχὶ ὡς δωρεάν, ἀλλ᾽ ὑπὸ τὸν ὅρον ν'ἀποδώσῃ ἡμῖν θᾶττον ἢ βραδύτερον τὸ ἀντίτιμον αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὰ ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει ἀναγραφόμενα ποσὰ καὶ ὡς χρέη τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς, ἤτοι ὡς ποσά, ἅτινα ὀφείλει οὗτος νὰ δώσῃ (=δοῦναι) πρὸς ἡμᾶς κατὰ τοὺς συμπεφωνημένους ὅρους. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ καλῶμεν τὸ ἀριστερὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρος ἐπὶ τὸ συντομώτερον «Δοῦναι».

Ἀφ' ἑτέρου πᾶσαι αἱ πράξεις, καθ' ἅς ὁ Δ. Πετρίδης ἔτυχε νὰ δώσῃ ἡμῖν ἀμέσως ἢ ἐμμέσως πρᾶγμά τι, εὑρίσκονται εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ λογαριασμοῦ, τὸ δεξιόν. Ἑκάστη δὲ τούτων ἐκτίθεται, καθ' ὃν τρόπον γίνεται τοῦτο καὶ ἐν τῷ ἀριστερῷ μέρει. Τὰ ἐν τῷ δεξιῷ μέρει ἀναγραφόμενα ποσὰ δηλοῦσι τὰς ἀξίας τῶν εἰς ἡμᾶς δοθέντων παρὰ τοῦ Δ. Πετρίδου πραγμάτων. Ἐπαναλαμβάνοντες ὅμως τὰς αὐτὰς σκέψεις, ἅς ἐκάμαμεν προηγουμένως ὡς πρὸς τὰ ποσὰ τοῦ ἀριστεροῦ μέρους, πειθόμεθα εὐκόλως ὅτι τὰ τοῦ δεξιοῦ μέρους ποσὰ δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ὡς χρέη ἡμῶν πρὸς τὸν Δ. Πετρίδην ἤ, ὅπερ ταὐτό, ὡς ἀπαιτήσεις τούτου παρ' ἡμῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὡς ποσά, ἅτινα οὗτος δικαιοῦται παρ' ἡμῶν νὰ λάβῃ (=Λαβεῖν). Δυνάμεθα ὅθεν νὰ καλῶμεν τὸ δεξιὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρος ἐπὶ τὸ συντομώτερον «Λαβεῖν».

Κατὰ ταῦτα τὸ ἀριστερὸν τοῦ λογαριασμοῦ μέρος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς κατάλογον τὸν πρὸς ἡμᾶς χρεῶν τοῦ Δ. Πετρίδου, τοῦ τιτλούχου τοῦ λογαριασμοῦ, τὸ δεξιὸν ὡς κατάλογον τῶν πρὸς αὐτὸν χρεῶν ἡμῶν ἤ, ὅπερ ταὐτό, τῶν ἀπαιτήσεων αὐτοῦ παρ' ἡμῶν.

262. ***Σύντομος διάταξις τοῦ λογαριασμοῦ.***— Τούτων τεθέντων, ὁ λογαριασμὸς τοῦ Δ. Πετρίδου ἁπλουστεύεται οὕτω·

Δοῦναι *Δ. Πετρίδης* *Λαβεῖν*

Χρονολογία 192..		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχ.	Λ.	Χρονολογία 192..		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχ.	Λ.
Ἰαν.	5	Κατάθεσίς μας παρ' αὐτῷ	10000	—	Φεβρ.	20	Ἀπεσύραμεν παρ' αὐτοῦ	3000	—
»	14	Κατάθεσις Ἰωαννίδου διὰ λογαριασμόν μας.	4857	50	Μαρτ.	4	Πληρωμή του εἰς Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας	3940	10
					»	10	Ἀγορὰ 1 μετοχῆς διὰ λ)μόν μας	4018	60
		Ἐν ὅλῳ	14857	50			Ἐν ὅλῳ	10958	70

Περίληψις.

Ὁ Δ. Πετρίδης ὀφείλει «Δοῦναι» ἡμῖν ἐν ὅλῳ δρχ.	14857,50
» δικαιοῦται «Λαβεῖν» παρ' ἡμῶν »	10958,70
Ἄρα τὴν 10ην Μαρτ. ὀφείλει οὗτος «Δοῦναι» ἡμῖν ὑπόλ. δρ.	3898,80

Παρατ. 1.—Πρὸς βαθυτέραν κατανόησιν τῶν τοῦ λογαριασμοῦ θεωροῦμεν καλόν, ὅπως ὁ μαθητὴς ἀσκῆται εἰς τὸ ν' ἀναγινώσκῃ τὰς ἐγγραφὰς τοῦ λογαριασμοῦ ὡς ἑξῆς·

Ὡς πρὸς τὸ ἀριστερὸν μέρος θὰ λέγῃ. Ὁ Δ. Πετρίδης (ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) ὀφείλει νὰ δώσῃ ἡμῖν (=δοῦναι) τὰ ἑξῆς· α') 10000 δρχ., διότι τὴν 5 Ἰανουαρίου ἔλαβε παρ' ἡμῶν ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς· β') δρ. 4857,50, διότι ἔλαβε τὴν 14ην Ἰανουαρίου παρ' ἡμῶν ἐμμέσως (διὰ τοῦ κ. Ἰωαννίδου) ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς κ.ο.κ.

Ὡς πρὸς τὸ δεξιὸν μέρος θὰ λέγῃ. Ὁ Δ. Πετρίδης δικαιοῦται λαβεῖν (=νὰ λάβῃ) παρ' ἡμῶν: α') δρ. 3000, διότι τὴν 20ὴν Φεβρουαρίου 192.. ἔδωκεν ἡμῖν ἴσον ποσὸν τοῖς μετρητοῖς· β') δρχ. 3940,10, διότι τὴν 4ην Μαρτίου ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἐμμέσως (ἤτοι εἰς τὸν Νικολάου διὰ λογαριασμόν μας) ἴσον ποσὸν εἰς μετρητά· γ') δρχ. 4018,60, διότι τὴν 10ην Μαρτίου ἔδωκεν εἰς ἡμᾶς ἴσον ποσὸν εἰς τίτλους, ἤτοι εἰς μίαν μετοχὴν τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης τῆς Ἑλλάδος κ.ο.κ.

Παρατ. 2.—Εἶναι ἀνάγκη νὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ ἑξῆς.

Χρέος τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς δύναται καὶ ἄλλως νὰ προκύψῃ. Ἐὰν π. χ. συνεφωνήθη τὰ παρ' αὐτῷ κεφάλαιά μας ν' ἀποφέρωσι τόκον ὑπὲρ ἡμῶν καί, ὑπολογισμοῦ γενομένου, προέκυψε τὴν 10ην Μαρτίου ποσὸν τόκου δρχ. 48,50 ὑπὲρ ἡμῶν, τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ εἶναι προφανῶς χρέος τοῦ Δ. Πετρίδου πρὸς ἡμᾶς. Προκειμένου νὰ σημειωθῇ τὸ ποσὸν τοῦτο εἰς τὸν λογαριασμὸν τοῦ Δ. Πετρίδου, ἀνάγκη νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ «Δοῦναι» τοῦ λογαριασμοῦ, ὅπου εὑρίσκονται καὶ τὰ λοιπὰ τοῦ Δ. Πετρίδου χρέη πρὸς ἡμᾶς. Τὸ χρέος τῶν 48,50 δραχ., ἐπειδὴ δὲν καλύπτει ἴσην ἀξίαν πράγματός τινος, δοθέντος τῷ Πετρίδῃ παρ'ἡμῶν, συνεπάγεται ἐλάττωσιν ἴσην τῆς ὅλης περιουσίας τοῦ Δ. Πετρίδου, ἤτοι ζημίαν τοῦ Δ. Πετρίδου, αὔξησιν δὲ ἴσην τῆς ὅλης περιουσίας ἡμῶν, ἤτοι ὠφέλειαν ἡμῶν. Ὡσαύτως, ἐὰν συνεφωνήθη ὁ Δ. Πετρίδης νὰ λογαριάσῃ ὑπὲρ ἑαυτοῦ δραχ. 5 ὡς προμήθειαν, ἤτοι ὡς ἀμοιβήν του διὰ τὴν μεσολάβησίν του πρὸς ἀγορὰν τῆς 1 μετοχῆς τῆς

Ἐθν. Τραπέζης τὴν 10ην Μαρτίου διὰ λογαριασμόν μας, τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ παριστᾷ ἀπαίτησιν τοῦ Δ. Πετρίδου παρ' ἡμῶν. Ἡ ἀπαίτησις αὕτη, προκειμένου νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν λογαριασμόν, θὰ σημειωθῇ ἐν τῷ «Λαβεῖν», ὅπου εὑρίσκονται καὶ αἱ λοιπαὶ ἀπαιτήσεις τοῦ Δ. Πετρίδου. Τὸ ποσὸν τῆς ἐν λόγῳ προμηθείας εἶναι προφανῶς ὠφέλεια μὲν διὰ τὸν Δ. Πετρίδην, ζημία δὲ δι' ἡμᾶς.

263. Ἐκ πάντων τῶν εἰρημένων ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν.

«***Λογαριασμὸς ἢ Μερίς***» προσώπου τινὸς καλεῖται πίναξ τις (ἤτοι φύλλον χάρτου), τιτλοφορούμενος μὲ τὸ ὄνομα τοῦ προσώπου τούτου *καὶ* διῃρημένος διὰ καθέτου γραμμῆς εἰς δύο μέρη. Καὶ εἰς μὲν τὸ ἀριστερόν, τὸ φέρον τὸν τίτλον «***Δοῦναι***», ἐγγράφονται πάντα τὰ πράγματα, ἅτινα ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ ἔλαβε, καὶ πᾶσαι αἱ ζημίαι, ἃς ὀφείλει νὰ ὑποστῇ δυνάμει συμφωνιῶν, ἐν ἄλλαις λέξεσι πάντα τὰ χρέη τοῦ τιτλούχου. Εἰς δὲ τὸ δεξιὸν μέρος, τὸ φέρον τὸν τίτλον «***Λαβεῖν***», ἐγγράφονται πάντα τὰ πράγματα, ἅτινα ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ ἔδωκε, καὶ πᾶσαι αἱ ὠφέλειαι, ἃς δυνάμει συμφωνιῶν δικαιοῦται νὰ καρπωθῇ, ἐν ἄλλαις λέξεσι πᾶσαι αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ τιτλούχου.

264. ***Χρέωσις τοῦ λογαριασμοῦ.***—Ὅταν ἐγγράφωμεν ποσόν τι εἰς τὸ «Δοῦναι» λογαριασμοῦ τινος μετὰ συντόμου ἐκθέσεως τῆς εἰς ἣν ἀναφέρεται πράξεως καὶ τῆς σχετικῆς χρονολογίας, τότε λέγομεν, ὅτι «Χρεοῦμεν» τὸν λογαριασμὸν τοῦτον μὲ τὸ ἐν λόγῳ ποσόν.

ΣΗΜ.—Ἡ σύντομος ἔκθεσις τῆς σχετικῆς πράξεως καλεῖται αἰτιολογία τῆς χρεώσεως.

265. ***Πίστωσις τοῦ λογαριασμοῦ.***—Ὅταν ἐγγράφωμεν ποσόν τι εἰς τὸ «Λαβεῖν» λογαριασμοῦ τινος μετὰ συντόμου ἐκθέσεως τῆς εἰς ἣν ἀναφέρεται πράξεως καὶ τῆς σχετικῆς χρονολογίας, τότε λέγομεν ὅτι «Πιστοῦμεν» τὸν λογαριασμὸν τοῦτον μὲ τὸ ἐν λόγῳ ποσόν.

ΣΗΜ. 1.—Ἡ σύντομος ἔκθεσις τῆς πράξεως καλεῖται αἰτιολογία τῆς πιστώσεως.

ΣΗΜ. 2.—Ἁπλογραφία ἐκλήθη, διότι κατ' αὐτὴν τὰ διάφορα ποσὰ ἐγγράφονται συνήθως ἅπαξ ἢ εἰς τὴν χρέωσιν ἢ εἰς τὴν πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος. Ἐνῷ ἐν τῇ διπλογραφίᾳ ποσόν τι ἐγγράφεται πάντοτε δίς, ἤτοι εἰς τὴν χρέωσιν λογαριασμοῦ τινος καὶ εἰς τὴν πίστωσιν ἄλλου λογαριασμοῦ.

266. Πρὸς ὀρθὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰς ἑπομένας θεμελιώδεις τῆς λογιστικῆς ἀρχάς, ὧν ἡ ἀλήθεια ἐξάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (§ 263).

α΄) Πᾶς λογαριασμὸς (ἤτοι ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) λαμβάνων πρᾶγμά τι χρεοῦται μὲ τὴν ἀξίαν τούτου· ἐπίσης χρεοῦται καὶ μὲ πᾶσαν ζημίαν, ἣν ὀφείλει νὰ ὑποστῇ.

β΄) Πᾶς λογαριασμὸς (ἤτοι ὁ τιτλοῦχος τοῦ λογαριασμοῦ) δίδων πρᾶγμά τι «πιστοῦται» μὲ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ· ἐπίσης «πιστοῦται» καὶ μὲ πᾶσαν ὠφέλειαν, ἥτις τῷ ἀνήκει.

Παραδείγματα.—1) Καταθέτω σήμερον δρχ. 8000 παρὰ τῇ Τραπέζῃ Ἀθηνῶν. Ἐγὼ μὲν θὰ χρεώσω τὸν παρ᾽ ἐμοὶ (=ἐν τοῖς βιβλίοις μου) λογαριασμὸν τῆς «Τραπέζης Ἀθηνῶν» μὲ δραχ. 8000 ὡς λαβόντα ἴσον ποσόν, τὸ παρ᾽ αὐτῇ κατατεθὲν (§ 266 α΄), ἡ δὲ «Τράπεζα Ἀθηνῶν» θὰ πιστώσῃ μὲ δραχ. 8000 τὸν παρ᾽ αὐτῇ λογαριασμόν μου ὡς δώσαντα αὐτῇ ἴσον ποσόν, τὸ κατατεθὲν (266 β΄).

2) Ἄλλην τινὰ ἡμέραν βραδύτερον ἀποσύρω ἀπὸ τῆς αὐτῆς Τραπέζης δραχ. 3600. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐγὼ μὲν θὰ πιστώσω τὸν παρ᾽ ἐμοὶ λογαριασμὸν τῆς «Τραπέζης Ἀθηνῶν» μὲ 3600 δραχ. ὡς δώσαντα ἴσον ποσὸν (266 β΄), ἡ δὲ «Τράπεζα Ἀθηνῶν» θὰ χρεώσῃ μὲ 3600 δραχ. τὸν παρ᾽ αὐτῇ λογαριασμόν μου, ὡς λαβόντα ἴσον ποσόν, τὸ ἀποσυρθὲν (266 α΄).

3) Μετά τινα χρόνον ἡ αὐτὴ Τράπεζα μὲ εἰδοποιεῖ ὅτι τῇ ὀφείλομεν προμήθειαν δραχ. 5,45 καὶ ὅτι δικαιούμεθα νὰ λάβωμεν παρ᾽ αὐτῆς τόκον διὰ χρονικόν τι διάστημα δραχ. 25,65. Ἐγὼ μὲν θὰ πιστώσω τὸν παρ᾽ ἐμοὶ λογαριασμὸν τῆς «Τραπέζης Ἀθηνῶν» μὲ δραχ. 5,45 ὡς ποσὸν ὠφελείας ὑπὲρ αὐτοῦ (266 β΄) καὶ θὰ χρεώσω αὐτὸν μὲ δραχ. 25,65 ὡς ποσὸν ζημίας αὐτοῦ (266 α΄), ἡ δὲ «Τράπεζα Ἀθηνῶν» θὰ ἐκτελέσῃ ἀντιθέτους ἐγγραφὰς εἰς τὸν παρ᾽ αὐτῇ λογαριασμόν μου.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὴν 5ην Μαΐου ἐ. ἔ. παραλαμβάνει ὁ ἐν Καλάμαις ἔμπορος Δ. Ἰωαννίδης μετὰ προηγουμένην παραγγελίαν ποσόν τι ἐμπορευμάτων παρὰ τοῦ ἐν Πειραιεῖ προμηθευτοῦ του Κ. Γρηγορίου, ὧν ἡ ἀξία κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιον (Ἀσκήσεις ποσοστῶν προβλ. 24) ἀνέρχεται εἰς δραχ. 5.400, πληρωτέας μετὰ δύο μῆνας. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελέσῃ ἕκαστος τῶν ἐνδιαφερομένων;

ΣΗΜ.— Ὁ διδάσκων μετὰ κατάλληλον ἐξήγησιν καὶ ὁδηγίαν δύναται νὰ ἐπιβάλῃ τοῖς μαθηταῖς καὶ τὴν σύνταξιν τοῦ σχετικοῦ τιμολογίου καὶ τῶν συναφῶν πρὸς τὴν θεωρουμένην πρᾶξιν ἐπιστολῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἑπομένας ἀσκήσεις.

2) Τὴν 7ην Μαΐου ἐ. ἔ. ὁ ἐν Καλάμαις Δ. Ἰωαννίδης (ἄσκ. 1) ἀποστέλλει τῷ κ. Κ. Γρηγορίῳ εἰς Πειραιᾶ γραμμάτιον εἰς διαταγὴν τούτου ἀξίας ὀνομαστικῆς 2500 δραχ. καὶ λήξεως 5 Ἰουλίου ἐ. ἔ. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ κάμῃ ἑκάτερος τῶν ἐνδιαφερομένων;

3) Ὁ ἐν Βόλῳ Κ. Μενελάου ἐπλήρωσε τὴν 15ην Μαρτίου ἐ. ἔ. εἰς τὸν Μ. Δημητρίου τῆς αὐτῆς πόλεως δραχ. 1000 κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐν Λαρίσῃ Τ. Λαμπρίδου. Τίνας χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελέσῃ ἕκαστος;

4) Ὁ ἐν Πειραιεῖ παραγγελιοδόχος Δ. Χρηστίδης ἠγόρασε κατὰ διαταγὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐν Πάτραις Δ. Παυλίδου καὶ ἐξαπέστειλεν εἰς αὐτὸν τὴν 10ην Ἀπριλίου ἐ. ἔ. τὰ ἑξῆς· 100 σάκκους καφὲ Βραζιλίας ὁλικοῦ καθαροῦ βάρους ὀκ. 5000 πρὸς δραχ. 4,25 κατ' ὀκᾶν. Ὁ παραγγελιοδόχος λογαριάζει διὰ ναῦλον καὶ ἄλλα μικρὰ ἔξοδα ἀγορᾶς δραχ. 245, 25 καὶ ἀπαιτεῖ διὰ τὴν μεσολάβησίν του ὡς ἀμοιβὴν προμήθειαν πρὸς 1 % ἐπὶ τῆς ὁλικῆς ἀξίας τοῦ ἐμπορεύματος μετὰ τῶν ἐξόδων. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τελικὴ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος καὶ νὰ γίνωσιν αἱ σχετικαὶ χρεώσεις ἢ πιστώσεις παρ' ἑκατέρῳ τῶν ἐνδιαφερομένων.

5) Τὴν 20ὴν Ἀπριλίου ἐ. ἔ. λαμβάνει ὁ αὐτὸς παραγγελιοδόχος Δ. Χρηστίδης παρὰ τοῦ ἐν Πάτραις Δ. Παυλίδου ἐπιταγὴν ἐκ δραχ. 20000 ἐπὶ τῆς Ἐθν. Τραπέζης καὶ μίαν συναλλαγματικὴν (§ 242) ἐπὶ Ἀθηνῶν λήξεως 30ῆς Ἀπριλίου καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας δραχ. 1710,20. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ γίνωσι παρ' ἑκατέρῳ;

6) Ὁ ἐν Πειραιεῖ παραγγελιοδόχος Κ. Ἰωάννου ἐπώλησε τὴν 20ὴν Φεβρουαρίου ἐ. ἔ. 8000 ὀκ. ἐλαίου πρὸς δραχ. 1,05 τὴν ὀκᾶν. Τὸ ἔλαιον τοῦτο εἶχε προαποστείλει πρὸς τοῦτο εἰς αὐτὸν ὁ ἐν Γυθείῳ Γ. Νικολάου. Ὁ Κ. Ἰωάννου λογαριάζει διάφορα ἔξοδα συμποσούμενα εἰς δραχ. 345,75 καὶ προμήθειάν του πρὸς $1\frac{1}{2}$ % ἐπὶ τῆς ἀκαθαρίστου τιμῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου (τῆς πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως οἱουδήποτε ἐξόδου). Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ καθαρὰ ἀξία τοῦ ἐλαίου (ἡ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν πάντων τῶν συναφῶν ἐξόδων πωλήσεως) καὶ νὰ γίνωσιν αἱ σχετικαὶ χρεώσεις ἢ πιστώσεις παρ' ἑκατέρῳ.

7) Τὴν 1ην Μαρτίου ἐ. ἔ. ὁ αὐτὸς Κ. Ἰωάννου καταθέτει εἰς τὴν ἐν Ἀθήναις Τράπεζαν Π. Γεωργίου διὰ λογαριασμὸν τοῦ ἐκ Γυθείου Γ. Νικολάου τὸ καθαρὸν προϊὸν τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου (ἄσκ. 6).

Ζητεῖται νὰ γίνωσιν αἱ δέουσαι ἐγγραφαὶ παρ' ἑκάστῳ τῶν τριῶν μνημονευομένων.

8) Ὁ ἐν Δεδεαγὰτς ἔμπορος Κ. Λαμπρίδης πρὸς κάλυψιν ἀπαιτήσεώς του ἐκ δρχ. 2102,45 σύρει τὴν 7ην Φεβρουαρίου ἐ. ἔ. συναλλαγματικὴν 90 ἡμερῶν ἴσου ποσοῦ ἐπὶ τοῦ ἐν Ἀνδριανουπόλει χρεώστου Θ. Σταυρίδου, ἣν καὶ ἀποδέχεται ὁ τελευταῖος. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ ἐκτελεσθῶσι παρ' ἑκατέρῳ;

9) Ὁ ἐν Λαμίᾳ Κ. Ὁμηρίδης πρὸς κάλυψιν τῆς ἀξίας τιμολογίου ὑπογράφει τὴν 20ὴν Μαΐου ἐ. ἔ. γραμμάτιον εἰς διαταγὴν τοῦ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως προμηθευτοῦ του Γ. Ἀστεριάδου ἀξίας δραχ. 1355,45 καὶ λήξεως 31 Αὐγούστου ἐ. ἔ. Τίνες χρεώσεις ἢ πιστώσεις θὰ γίνωσι παρ' ἑκατέρῳ;

Γ' Ἄνοιγμα. Περάτωσις. Μεταφορὰ λογαριασμοῦ.

267. ***Ἄνοιγμα λογαριασμοῦ.*** — Ἅμα τῇ ἐνάρξει δοσοληψιῶν μεταξὺ ἡμῶν καὶ τρίτου τινὸς ἀφιεροῦμεν πρὸς ἐγγραφὴν αὐτῶν μίαν σελίδα (ἢ καὶ μέρος αὐτῆς) τοῦ ἡμετέρου Καθολικοῦ, ἤτοι τοῦ βιβλίου τοῦ περιλαμβάνοντος πάντας τοὺς παρ' ἡμῖν λογαριασμοὺς τῶν τρίτων. Ἡ πρᾶξις αὕτη, καλουμένη «Ἄνοιγμα λογαριασμοῦ», γίνεται ὡς ἑξῆς·

Γράφομεν μὲ μεγάλα στρογγύλα γράμματα 1) τὸ ὀνοματεπώνυμον τοῦ θεωρουμένου προσώπου ἐπὶ κεφαλῆς καὶ ἐν μέσῳ τῆς ἀφιερουμένης σελίδος συνοδευόμενον καὶ ὑπὸ τῆς κατοικίας αὐτοῦ· 2) τὰς λέξεις «Δοῦναι» καὶ «Λαβεῖν» ἑκατέρωθεν τοῦ ὀνοματεπωνύμου καὶ εἰς τὰς δύο ἀνωτέρας τῆς σελίδος γωνίας.

Ὑπόδειγμα.

Ι. ΦΙΛΙΠΠΟΥ ἐκ Καλαμῶν

Δοῦναι ***Λαβεῖν***

ΣΗΜ. — Συνήθως οἱ τίτλοι τοῦ «Δοῦναι» καὶ «Λαβεῖν» εἶναι ἐκ τῶν προτέρων τετυπωμένοι ἐν ἑκάστῃ τοῦ Καθολικοῦ σελίδι. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀρκεῖ ἡ ἐγγραφὴ τοῦ ὀνοματεπωνύμου μετὰ τῆς κατοικίας.

268. ***Περάτωσις ἢ κλείσιμον λογαριασμοῦ.*** — Καλεῖται οὕτως ἡ πρᾶξις, δι' ἧς προσδιορίζομεν τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ παρουσιάζει κατά τινα ἐποχὴν δεδομένην λογαριασμός τις εἴτε ὑπὲρ εἴτε κατὰ τοῦ τιτλούχου του. Γίνεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς·

Προσδιορίζομεν ἐπὶ προχείρου φύλλου χάρτου ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι» τοῦ θεωρουμένου λογαριασμοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ τῶν ποσῶν τοῦ «Λαβεῖν» καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ μικρότερον ἄθροισμα ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου (262 Περίληψις). Οὕτω τὸ προκῦπτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι κατὰ τοῦ τιτλούχου, ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦ «Δοῦναι», ἤτοι τὸ σύνολον τῶν χρεῶν τοῦ τιτλούχου (261 ἐπεξήγησις), εἶναι μεῖζον τοῦ «Λαβεῖν», ἤτοι τοῦ συνόλου τῶν ἀπαιτήσεων αὐτοῦ· τοὐναντίον δὲ τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι ὑπὲρ τοῦ τιτλούχου, ἐὰν τὸ τοῦ «Λαβεῖν» ἄθροισμα εἶναι μεγαλύτερον.

Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ ὑπόλοιπον ὀνομάζεται «χρεωστικὸν ὑπόλοιπον» ἢ «χρεωστικὴ ἐξίσωσις», ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ «πιστωτικὸν ὑπόλοιπον» ἢ «πιστωτικὴ ἐξίσωσις».

Πρὸς ἐξέλεγξιν τοῦ οὕτως εὑρισκομένου ὑπολοίπου σημειοῦμεν αὐτὸ ἐν τῷ λογαριασμῷ μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ αἰτιολογίας (264, 265 Σημ.), ἂν μὲν εἶναι χρεωστικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Λαβεῖν», ἂν δὲ πιστωτικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι», καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν πάντα τὰ ποσὰ ἐν ἑκατέρᾳ στήλῃ. Τὰ δύο οὕτω προκύψαντα ἀθροίσματα θὰ εἶναι ἴσα ἀλλήλοις (§ 28), ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ ὀρθῶς εἶχεν ὑπολογισθῇ.

Ὑφ' ἑκάτερον τῶν ἴσων τούτων ἀθροισμάτων, γραφομένων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἄγομεν μικρὰν διπλῆν ὁριζοντίαν γραμμήν, δι' ἧς δηλοῦται ὅτι ταῦτα δὲν πρέπει νὰ συγχωνευθῶσι βραδύτερον μετ' ἄλλων νεωτέρων ποσῶν, τυχὸν γραφησομένων ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμήν.

Τέλος τὸ ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ ἐγγράφεται μετὰ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ αἰτιολογίας ὑπὸ τὴν διπλῆν γραμμήν, ἐν τῇ φυσικῇ τοῦ λογαριασμοῦ στήλῃ, ἤτοι, ἂν μὲν εἶναι χρεωστικόν, ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι», ἂν δὲ πιστωτικόν, ἐν τῇ τοῦ «Λαβεῖν», ἵνα οὕτως ἐγκαινιασθῇ ἡ σειρὰ τῶν χρεώσεων (264) καὶ πιστώσεων (265) τοῦ λογαριασμοῦ κατὰ τὴν ἀρχομένην νέαν περίοδον δοσοληψιῶν. Ἀφ' οὗ δὲ πάντα ταῦτα γίνωσι, τότε λέγομεν ὅτι ἡ περάτωσις τοῦ λογαριασμοῦ εἶναι συντετελεσμένη.

Παρ. 1.— Ἐὰν ἐν τῷ πρὸς περάτωσιν λογαριασμῷ συμβῇ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν τοῦ «Δοῦναι» ἴσον πρὸς τὸ τῶν ποσῶν τοῦ «Λαβεῖν», τότε προφανῶς οὐδὲν ὑπόλοιπον προκύπτει εἴτε ὑπὲρ εἴτε κατὰ τοῦ τιτλούχου. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ λέγομεν, ὅτι ὁ λογαριασμὸς εἶναι ἐν ἰσοζυγίῳ. Ἡ περάτωσις τοῦ τοιούτου λογαριασμοῦ γίνεται ἁπλῶς, γραφομένων τῶν δύο ἴσων ἀθροισμάτων εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ἐν ταῖς σχετικαῖς τῶν ποσῶν στήλαις καὶ ἀγομένης ὑφ' ἑκάτερον διπλῆς ὁριζοντίας γραμμῆς.

Ὑποδείγματα.

1. Λογαριασμοῦ περατωθέντος μεθ' ὑπολοίπου (τὴν 31 Ἰουλίου 192..)

Κ. Ἰωαννίδης ἐκ Τριπόλεως

Δοῦναι ***Λαβεῖν***

Χρονολογία 192.		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχμ.	Ποσὰ Λ.	Χρονολογία 192.		Ἔκθεσις πράξεως	Ποσὰ Δραχμ.	Ποσὰ Λ.
Ἀπριλ.	18	Τιμολόγιόν μας	340	65	Ἀπρ.	30	Πληρωμή του	280	—
Μαΐου	25	» »	485	10	Μαΐου	31	» »	500	—
Ἰουν.	28	» »	542	80	Ἰουλ.	10	» »	100	—
					»	10	εἰς διαταγήν μας Γραμματιόν του	425	50
					»	31	Ὑπόλ. χρεωστ.	64	05
			1368	55				1368	5.
Αὐγ.	1	Ὑπόλοιπ. εἰς νέον	63	05					

2. Λογαριασμοῦ περατωθέντος ἄνευ ὑπολοίπου (ἐν ἰσοζυγίῳ).

35 ***Δοῦναι*** Κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ἐκ Βόλου ***Λαβεῖν*** 35

192..			Δραχμ.	Λ.	192..			Δραχμ.	Λ.
Ἀπρ.	8	Πληρωμή μας	615	80	Μαρτ.	15	Τιμολόγιόν του	845	70
»	30	» »	718	20	Μαΐου	20	» »	1118	—
Μαΐου	20	Γραμμάτιόν μας εἰς διαταγήν του	629	70					
			1963	70				1963	70

Παρατήρ. 2.—Πολλάκις ἀπαντῶμεν καὶ ἄλλας διατάξεις λογαριασμῶν, οἷαι αἱ ἀκόλουθοι :

α) Κ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ ἐκ Τριπόλεως

Χρονολογ.		Αἰτιολογία	Δοῦναι		Λαβεῖν	
192..			Δραχ.	Λ.	Δραχ.	Λ.
Ἀπριλ.	18	Τιμολόγιόν μας ὑπ' ἀριθ. 102	340	65		
»	30	Πληρωμή του			280	—
Μαΐου	25	Τιμολόγιόν μας ὑπ' ἀριθ. 211	485	10		
»	31	Πληρωμή του			500	—
Ἰουν.	28	Τιμολόγιόν μας ὑπ. ἀριθ. 315	542	80		
Ἰουλ.	10	Πληρωμή του			100	—
»	10	Γραμμάτιόν του εἰς διαταγήν μας 2 μηνῶν			425	50
»	31	Ὑπόλοιπον χρεωστ.			63	05
			1368	55	1368	55
Αὐγ.	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	63	05		

β') Κ. ΜΕΝΕΛΑΟΥ ἐκ Πατρῶν Σελὶς 30

Χρονολογία		Αἰτιολογία	Δοῦναι		Λαβεῖν		Ὑπόλοιπα		
192..			Δραχμ.	Λ.	Δραχμὰς	Λ.		Δραχμ.	Λ.
Ἀπριλίου	18	Τιμολόγιόν μας	340	65			Χ	340	65
»	30	Πληρωμή του			280	—	Χ	60	65
Μαΐου	25	Τιμολόγιόν μας	485	10			Χ	545	75
Ἰουνίου	10	Γραμμάτιόν του 3 μηνῶν			750	10	Π	204	35
»	30	Τιμολόγιόν μας	605	20			Χ	400	85
Ἰουλίου	15	Πληρωμή του			350	85	Χ	50	—
»	31	Ὑπόλοιπον χρεωστικὸν			50	—			
			1430	95	1430	95			—
Αὐγούστου	1	Ὑπόλοιπον εἰς νέον	50				Χ	50	

Ἐπεξήγησις.—Κατὰ τὴν τελευταίαν διάταξιν προσδιορίζομεν μεθ' ἑκάστην χρέωσιν ἢ πίστωσιν τὸ προσωρινὸν ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ καὶ σημειοῦμεν αὐτὸ ἐν τῇ εἰδικῇ στήλῃ μετὰ τοῦ γράμματος Χ ἢ Π, καθόσον εἶναι χρεωστικὸν ἢ πιστωτικόν.

ΣΗΜ.—Ἡ περάτωσις τῶν λογαριασμῶν γίνεται συνήθως περιοδικῶς, εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τριμήνου ἢ ἑξαμήνου ἢ ἔτους κλπ. Δύναται ὅμως δι' ἐκτάκτους λόγους νὰ γίνῃ περάτωσις λογαριασμῶν καὶ ἐν πάσῃ ἐνδιαμέσῳ ἐποχῇ.

269. ***Μεταφορὰ λογαριασμοῦ.*** Ὅταν αἱ ἐγγραφαὶ (χρεώσεις ἢ πιστώσεις) λογαριασμοῦ τινος πολλαπλασιαζόμεναι βαθμηδὸν κατα**λά-**

βωσιν ὅλον σχεδὸν τὸν χῶρον εἴτε τοῦ «Δοῦναι» εἴτε τοῦ «Λαβεῖν» εἴτε καὶ ἀμφοτέρων οὕτως, ὥστε νὰ μὴ μένῃ πλέον τοιοῦτος διὰ νέαν τινὰ ἐγγραφήν, τότε πρ βαίνομεν εἰς τὰ: ἀκολούθους πράξεις.

α΄) Προσθέτομεν πρῶτον μὲν πάντα τὰ ἤδη ἐγγεγραμμένα ποσὰ τοῦ «Δοῦναι», δεύτερον δὲ τὰ τοῦ «Λαβεῖν» καὶ γράφομεν τὰ προκύπτοντα δύο ἀθροίσματα ἐν τῇ τελευταίᾳ σειρᾷ σημειοῦντες πρὸ ἑκατέρου τὴν φράσιν «Εἰς μεταφοράν».

β΄) Ἀκυροῦμεν τὸν τυχὸν μένοντα ἐλεύθερον χῶρον ἐν τῷ «Δοῦναι» ἢ ἐν τῷ «Λαβεῖν» διὰ τεθλασμένης γραμμῆς.

γ΄) Ἀνοίγομεν (267) ἐν ἐλευθέρᾳ τοῦ Καθολικοῦ σελίδι νέον τοῦ τιτλούχου λογαριασμόν, ἐν ᾧ ἐγγράφομεν ἀντιστοίχως τὰ δύο ῥηθέντα ἀθροίσματα (269 α΄) τοῦ παλαιοῦ λογαριασμοῦ, ἕκαστον μετὰ τῆς φράσεως «Ἐκ μεταφορᾶς» καὶ ὑπ' αὐτὰ πᾶσαν τυχὸν νέαν χρέωσιν ἢ πίστωσιν τοῦ θεωρουμένου λογαριασμοῦ.

Τὸ σύνολον τῶν πράξεων τούτων καλεῖται «μεταφορὰ λογαριασμοῦ».

Παράδειγμα.—Ἔστω ὁ λογαριασμός.

14 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ἐκ Σύρου 14

Δοῦναι ***Λαβεῖν***

			Δραχμ.	Λ.				Δραχμ.	Λ.
192.					192.				
Ἀπριλίου	15	Τιμολόγιόν μας	845	60	Ἀπριλίου	30	Πληρωμή του	950	60
»	24	» »	918	40	»	30	Γραμμάτιον εἰς διαταγήν μας	1140	10
Μαΐου	14	» »	758	10					
		Εἰς μεταφ. (σ. 71)	2522	10			Εἰς μετ. (σ. 71)	2090	70

Ἐκ τούτου γίνεται τὴν 20ὴν Μαΐου μεταφορὰ εἰς τὸν ἀκόλουθον λογαριασμὸν τοῦ ἰδίου ἀνοιχθέντα ἐν νέᾳ σελίδι 71.

71 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ἐκ Σύρου 71

Δοῦναι ***Λαβεῖν***

			Δραχμ.	Λ.				Δραχμ	Λ.
192.									
		Ἐκ μεταφ. (σ. 14)	2522	10			Ἐκ μεταφ. (σ. 14)	2090	70
Μαΐου	20	Τιμολόγιόν μας	510	20					

ΣΗΜ.—Ἡ μεταφορὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ ἄλλως. Περατοῦμεν (268) τὸν πρῶτον λογαριασμὸν (σελ. 14) τὴν 20ὴν Μαΐου καὶ μὲ τὸ προκῦπτον ὑπόλοιπον ἐγκαινιάζομεν τὰς ἐγγραφὰς τοῦ νέου λογαριασμοῦ (σελ. 71). Οὕτω δὲ οἱ ἄνω λογαριασμοὶ θὰ εἶχον τὴν ἀκόλουθον ὄψιν.

14 Κ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ἐκ Σύρου 14

Δοῦναι *Λαβεῖν*

192..			Δραχ.	Δ.	192..			Δρχ.	Δ.
Ἀπρ.	15	Τιμολόγιόν μας	845	60	Ἀπρ.	30	Πληρωμή του	950	60
»	24	» »	918	10	»	30	Γρ)ον εἰς δι)ὴν μας	1140	10
Μαΐου	14	» »	758	40			Ὑπόλ. πρὸς ἐξίσ.	431	40
			2522	10				2522	10
Μαΐου	20	Ὑπόλοιπον εἰς νέον σελ. 71	431	40					

71 Π. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ἐκ Σύρου 71

Δοῦναι *Λαβεῖν*

192..			Δραχμ.	Δ.					
Μαΐου	20	Ὑπόλ. παλαιοῦ λογ)σμοῦ (σελ. 14)	431	40					
»	20	Τιμολόγιόν μας	510	20					

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Κατὰ τοὺς μῆνας Μάρτιον καὶ Ἀπρίλιον 192.. ἐγένοντο μεταξὺ τοῦ ἐν Πειραιεῖ Δ. Μενελάου καὶ τοῦ ἐν Χαλκίδι Κ. Πετρίδου αἱ κάτωθι πράξεις:

192.. Μαρτίου	1.	Ὁ Δ. Μενελάου ἐδικαιοῦτο νὰ λάβῃ ἐξ ὑπολοίπου παλαιοῦ λογαριασμοῦ	δραχμ.	185,10
» »	10.	Ὁ Κ. Πετρίδης ἔλαβε παρὰ τοῦ Δ. Μενελάου ἐμπορεύματα ἀξίας	δραχμ.	675,40
» »	20.	Ὁ Κ. Πετρίδης ἀποστέλλει εἰς τὸν Δ. Μενελάου α΄) γραμμάτιον εἰς διαταγὴν αὐτοῦ λήξεως 10ης Μαΐου	δραχμ.	540,—
		β΄) μετρητὰς	δραχμ.	200,—
192.. Ἀπριλίου	10.	Ὁ Κ. Πετρίδης λαμβάνει παρὰ τοῦ Δ. Μενελάου νέα ἐμπορεύματα ἀξίας	δρχ.	1808,75
» »	16.	Ὁ Δ. Μενελάου σύρει συναλλαγματικὴν ἐπὶ τοῦ Κ. Πετρίδου λήξεως 10ης Ἰουνίου ἀξίας	δραχμ.	1860,50

192.. Ἀπριλίου	20.	Ὁ Δ. Μενελάου ἀποστέλλει τῷ κ. Πετρίδη ἐμπορεύματα ἀξίας δραχ.	675,40
» »	28.	Ὁ Κ. Πετρίδης καταθέτει διὰ λογαριασμὸν τοῦ Δ. Μενελάου εἰς τὸ ἐν Χαλκίδι ὑποκατάστημα τῆς Ἐθν. Τραπέζης δρχ.	900,—

Ζητεῖται α′) νὰ ἐγγραφῶσιν αὗται ἀφ᾽ ἑνὸς ἐν τῷ λογαριασμῷ «Κ. Πετρίδης ἐκ Χαλκίδος» καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ἐν τῷ λογαριασμῷ «Δ. Μενελάου ἐκ Πειραιῶς», ἔχοντι τὴν ἐν § 268 (Παρατ. 2) ἐμφαινομένην πρώτην διάταξιν· β′) νὰ γίνῃ μεταφορὰ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ λογαριασμῷ τὴν 31ην Μαρτίου, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τὴν 15ην Ἀπριλίου καὶ γ′ νὰ γίνῃ περάτωσις ἀμφοτέρων τῶν λογαριασμῶν τὴν 30ὴν Ἀπριλίου.

Δ′. Ἐνεργητικόν, παθητικόν.

Κεφάλαιον, *Κέρδος, Ζημία.*

270. Ἐνεργητικὸν ἐπιχειρηματίου τινὸς κατά τινα δεδομένην ἐποχὴν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων, ἅτινα κατέχει οὗτος κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην, ὡς μετρητῶν, τίτλων, ἐμπορευμάτων, ἐργαλείων, ἐπίπλων, γραμματίων εἰσπρακτέων κ.τ.λ., ὡς καὶ τῶν χρεωστικῶν ὑπολοίπων, τῶν παρ᾽ αὐτῷ προσωπικῶν λογαριασμῶν (268), ἤτοι τῶν ὑπολοίπων, ἅτινα τρίτοι ὀφείλουσιν αὐτῷ κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχήν.

Τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ ἐνεργητικοῦ ὀνομάζονται «ἐνεργητικαὶ ἀξίαι».

ΣΗΜ.—Τὸ ἐνεργητικὸν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς τὴν ἀκαθάριστον περιουσίαν τοῦ ἐπιχειρηματίου, ἥτις κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν εὑρίσκεται ἀπησχολημένη εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Παράδειγμα.—Ἔμπορός τις Ἀθανασίου κατεῖχε τὴν 31ην 10)βρίου 1922 τὰ ἑξῆς·

Μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ	Δρχ.	10000
Ἐμπορεύματα διάφορα ἐν τῇ ἀποθήκῃ ὁλικῆς ἀξίας	»	25485,75
Ἔπιπλα διάφορα ὁλικῆς ἀξίας	»	2158,10
Γραμμάτια εἰσπρακτέα ὁλικῆς ἀξία	»	4285,20
Χρεῶσται διάφοροι, σύνολον χρεωστικῶν ὑπολοίπων	»	7138,45
Ἄρα τὸ ἐνεργητικόν του τῆς 31ης Δεκεμβρίου συνεποσοῦτο εἰς	Δρχ.	49067,50

271. Παθητικὸν δὲ τοῦ ἐπιχειρηματίου κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ποσῶν, ἅτινα κατὰ τὴν ἐποχὴν ταύτην ὀφείλει οὗτος ὑφ' οἱανδήποτε μορφὴν πρὸς τρίτους· τὰ συστατικὰ μέρη τοῦ παθητικοῦ καλοῦνται «Παθητικαὶ ἀξίαι». Τοιαῦτα εἶναι λ. χ. τὰ πιστωτικὰ ὑπόλοιπα τῶν παρὰ τῷ ἐπιχειρηματίᾳ λογαριασμῶν τῶν τρίτων, τὰ πληρωτέα γραμμάτια κ.τ.λ.

Παραδείγματα.—Ὁ αὐτὸς ἔμπορος Ἀθανασίου ὤφειλε τὴν 31ην Δ)βρίου 1922 τὰ ἑξῆς·

Γραμμάτια πληρωτέα ἐν κυκλοφορίᾳ ὁλικῆς ἀξίας	Δρχ.	5940,25
Ἐνοίκιον καθυστερούμενον 1ης τριμηνίας	»	600,—
Πιστωταὶ διάφοροι, σύνολον πιστωτικῶν ὑπολοίπων	»	5000,—
Ἄρα τὸ παθητικὸν αὐτοῦ συνεποσοῦτο τὴν 31ην Δεκεμβρίου εἰς	»	11540,25

272. Κεφάλαιον ἐπιχειρηματίου τινὸς κατά τινα ἐποχὴν καλεῖται τὸ μένον ὑπόλοιπον, ἀφ' οὗ ἀπὸ τοῦ ἐνεργητικοῦ τῆς ἐποχῆς ταύτης ἀφαιρεθῇ τὸ παθητικὸν τῆς αὐτῆς ἐποχῆς· ἄρα τοῦτο παριστᾷ τὴν καθαρὰν περιουσίαν τοῦ ἐπιχειρηματίου, ἥτις κατὰ τὴν θεωρουμένην ἐποχὴν εὑρίσκεται ἀπησχολημένη εἰς τὴν ἐπιχείρησιν.

Παράδειγμα.—Τὸ κεφάλαιον τοῦ αὐτοῦ ἐμπόρου Ἀθανασίου κατὰ τὴν 31ην Δ)βρίου 1922 ἀνήρχετο εἰς δραχ. 49067,50—11540,25= 37527,25.

Παρατ.—Ἐὰν τὸ ἐνεργητικὸν οἴκου τινὸς κατά τινα ἐποχὴν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ παθητικόν, τότε οὐδὲν κεφάλαιον μένει ὑπὲρ τοῦ οἴκου. Ἐὰν δὲ τὸ ἐνεργητικὸν εἶναι μικρότερον τοῦ παθητικοῦ, τότ οὐ μόνον οὐδὲν κεφάλαιον ὑπὲρ τοῦ οἴκου ὑπολείπεται, ἀλλὰ καὶ μένει οὗτος χρεώστης (ἢ κοινῶς ἀνοικτὸς) πρὸς τρίτους διὰ τὸ περισσεῦον μέρος τοῦ παθητικοῦ.

Παραδείγματα.

1) Τὴν 30ὴν Ἰουνίου 1922 ἡ οἰκονομικὴ κατάστασις ἐμπόρου τινὸς Γεωργίου ἦτο τοιαύτη·

Ἐνεργητικὸν	Δραχ.	45675,10
Παθητικὸν	»	45675,10
Ἄρα τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ ἦτο	»	0

2) Ἡ δὲ κατάστασις ἄλλου τινὸς ἐμπόρου Ἀντωνίου ἦτο·

Παθητικὸν	δραχ.	85640,25
Ἐνεργητικὸν	»	67138,45
Ἄρα μένει χρεώστης διὰ	»	18501,80

273. ***Κέρδος, ζημία.*** — Κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα σύγκρισιν τῶν κεφαλαίων, ἅτινα οἶκός τις κατεῖχεν εἰς δύο διαφόρους ἐποχάς, τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι, καθόσον τὸ τῆς προγενεστέρας ἐποχῆς κεφάλαιον εἶναι μικρότερον ἢ μεῖζον ἢ ἴσον πρὸς τὸ τῆς μεταγενεστέρας. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον ὑπέστη συνεπείᾳ τῶν ἐργασιῶν τῆς μεταξὺ τῶν δύο ἐποχῶν περιόδου «Αὔξησιν» ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων· ἡ αὔξησις αὕτη καλεῖται «Κέρδος» τοῦ οἴκου (262, παρ. 2).

Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει συνάγομεν ὅτι αἱ ἐργασίαι τῆς εἰρημένης περιόδου ἐπήνεγκον ἐλάττωσιν τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο κεφαλαίων· ἡ ἐλάττωσις αὕτη καλεῖται «Ζημία» τοῦ οἴκου (262, παρ. 2). Κατὰ τὴν τρίτην τέλος περίπτωσιν συμπεραίνομεν ὅτι οὐδεμία αὔξησις ἢ ἐλάττωσις κεφαλαίου ἐν συνόλῳ προῆλθεν ἐκ τῶν ἐργασιῶν τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν μνησθεῖσαν περίοδον.

Παραδείγματα.— Τὸ κεφάλαιον οἴκου τινὸς ἀνήρχετο τὴν 1ην Ἰανουαρίου 1922 εἰς δρχ. 105600, τὴν δὲ 30ὴν Ἰουνίου 1922 εἰς δραχμὰς 110400,65. Ὁ οἶκος οὗτος ἐκέρδησεν ἑπομένως ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ πρώτου ἑξαμήνου τοῦ 1922 δρχ. 110400, 65—105600=4800,65.

Παράδ. 2) Τὸ κεφάλαιον οἴκου τινὸς ἦτο τὴν μὲν 1ην Ὀκτωβρίου 1922 δρχ. 90000, τὴν δὲ 1ην Ἀπριλίου 1923 δρχ. 87200· ἄρα ὁ οἶκος οὗτος ὑπέστη ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ μεσολαβήσαντος ἑξαμήνου ζημίαν ἴσην πρὸς δρχ. 90000—87200=2800.

Παράδ. 3) Οἶκός τις κατεῖχε τὴν 30ὴν Ἰουνίου 1922 κεφάλαιον δαχ. 65000 καὶ τὴν 31 10βρίου 1922 κεφάλαιον δραχ. 65000· ἄρα ἐν συνόλῳ οὐδὲν κέρδος ἢ ζημίαν καθαρὰν ὑπέστη ὁ οἶκος οὗτος κατὰ τὸ ἐνδιάμεσον ἑξάμηνον.

Ε' Ἀπογραφή, Ἰσολογισμός.

274. Ἀπογραφὴ λέγεται ἡ ἐργασία ἐκείνη, δι' ἧς προσδιορίζομεν τὸ κεφάλαιον, ὅπερ οἶκός τις κατέχει κατά τινα δεδομένην ἐποχήν. Συνίσταται δ' αὕτη εἰς τὴν λεπτομερῆ καὶ ἀκριβῆ καταγραφὴν α')

πασῶν τῶν ἐνεργητικῶν ἀξιῶν τοῦ οἴκου, ἐκτετιμημένων μὲ τὴν πραγματικὴν τιμήν των, ἐξ ὧν θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον ἐνεργητικὸν (§ 270) τοῦ οἴκου, καὶ β΄) πασῶν τῶν παθητικῶν ἀξιῶν αὐτοῦ ἐκτετιμημένων ὁμοίως, ἐξ ὧν θὰ προκύψῃ τὸ ὅλον παθητικὸν (§ 271). Ἡ διαφορὰ τοῦ παθητικοῦ ἀπὸ τοῦ ἐνεργητικοῦ δίδει ἀκολούθως τὸ ζητούμενον κεφάλαιον (§ 272).

Ἡ ἀπογραφὴ ἔχει ὑψίστην σημασίαν διὰ πάντα ἐπιχειρηματίαν. Δι' αὐτῆς μανθάνει οὗτος οὐ μόνον τὸ μέγεθος τοῦ Κεφαλαίου, ὅπερ κατέχει κατά τινα ἐποχὴν δεδομένην, ἀλλὰ καὶ τὸν τρόπον τῆς συγκροτήσεως αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου διὰ τῆς συγκρίσεως δύο διαδοχικῶν ἀπογραφῶν μανθάνει οὗτος, ἂν αἱ ἐργασίαι τῆς μεσολαβησάσης χρονικῆς περιόδου ἐπέφεραν μεταβολήν τινα (αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν) κεφαλαίου ἢ μὴ (§ 273). Διὰ τοῦτο ὁ Ἐμπορικὸς κῶδιξ ἐπιβάλλει εἰς τὸν ἔμπορον νὰ συντάσσῃ ἀπογραφήν· α΄) ἅμα τῇ ἱδρύσει τοῦ καταστήματος, β΄) κατὰ τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους καὶ γ΄) εἰς ἄλλας ἐκτάκτους περιστάσεις, ὡς λ.χ. κατὰ τὴν πώλησιν ἢ διάλυσιν ἢ πτώχευσιν τοῦ οἴκου κτλ.

275. ***Ἰσολογισμός.***—Ἐπειδὴ ἡ ἀπογραφὴ καταλαμβάνει συνήθως πολλὰς σελίδας, διὰ τοῦτο ἐπικρατεῖ συνήθεια νὰ συντάσσηται μεθοδικὴ αὐτῆς περίληψις· ἡ περίληψις αὕτη καλεῖται «ἰσολογισμός».

Διάταξις ἰσολογισμοῦ. — Ὁ ἰσολογισμὸς ἀποτελεῖ πίνακα (φύλλον χάρτου) διῃρημένον διὰ καθέτου γραμμῆς εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ ἀριστερόν, τὸ φέρον τὸν τίτλον «Ἐνεργητικὸν», ἐγγράφομεν εἰς ὀλίγα ὁλικὰ ποσὰ τὰς διαφόρους τοῦ θεωρουμένου οἴκου ἐνεργητικὰς ἀξίας. Εἰς δὲ τὸ δεξιόν, ὑπὸ τὸν τίτλον «Παθητικόν», ἐγγράφομεν ὁμοίως τὰς διαφόρους τοῦ οἴκου παθητικὰς ἀξίας.

Πρὸς ἐξέλεγξιν τοῦ προκύπτοντος κεφαλαίου σημειοῦμεν αὐτὸ ὑπὸ τὰς παθητικὰς ἀξίας καὶ ἐκτελοῦμεν προσθέσεις εἰς ἀμφότερα τὰ μέρη καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος· τὰ δύο ὁλικὰ ἀθροίσματα ὀφείλουσι νὰ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα (§ 29).

Τέλος ὑφ' ἕκαστον ἐκ τῶν τελευταίων ἀθροισμάτων ἄγεται διπλῆ ὁριζοντία γραμμὴ καὶ ἀκυροῦται διὰ τεθλασμένης γραμμῆς ὁ τυχὸν ἀπομένων κενὸς χῶρος τοῦ πίνακος.

ΣΗΜ. 1) Ἡ ἀπογραφὴ καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἰσολογισμὸς συντασσόμενοι κατ' ἀρχὰς προχείρως ἀναγράφονται ἀκολούθως μεθοδικῶς καὶ ἐπισταμένως ἐν εἰδικῷ βιβλίῳ, ὅπερ καλεῖται «Βιβλίον ἀπογραφῶν καὶ ἰσολογισμῶν».

ΣΗΜ.2.—Ὁ ἐπιχειρηματίας ὀφείλει νὰ χρονολογῇ τὴν ἀπογραφὴν καὶ τὸν ἰσολογισμὸν καὶ κυρώνῃ ταῦτα διὰ τῆς ὑπογραφῆς του.

276. Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ κάτωθι ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ τοῦ ἐν Πειραιεῖ οἴκου Δ. Ἰωαννίδου τῆς 31 Δεκεμβρίου 192..

Ἀπογραφὴ τῆς 31)12)192..

α΄ *Ἐνεργητικὸν*

	Δραχμ	Λ.	Δραχμ	Λ.
Ταμεῖον, μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ			7148	25
Ἀποθήκη, 100 σάκκοι καφὲ Βραζιλίας ὁλικοῦ καθαροῦ βάρους ὀκ. 5000 πρὸς 3.20 τὴν ὀκᾶν	16000			
80 κιβώτια ζακχάρεως ὁλικοῦ καθαροῦ βάρους ὀκ. 4800 πρὸς 1,28 δραχ. τὴν ὀκᾶν.	6144	—		
120 σάκκοι ὀρύζης καρολίνας ὁλικοῦ καθαροῦ βάρους ὀκ. 7440 πρὸς 0,95 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν	7068	—	29212	—
Ἔπιπλα, σημερινὴ ἀξία τούτων (χάριν συντομίας παραλείπεται ἡ λεπτομερὴς τούτων ἀναγραφή)			2138	40
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν τοῦ σήμερον ἀρχομένου ἑξαμήνου.			900	—
Χρεῶσται : Α. Ἀργυρίου ἐνταῦθα, σημερινὸν χρεωστικὸν ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ του.	6540	15		
Κ. Γρηγορίου ἐκ Πατρῶν, σημερινὸν χρεωστικὸν ὑπόλοιπον λογαριασμοῦ του.	7675	20	14215	35
			53614	—

β΄) *Παθητικὸν*

	Δραχμ	Λ.	Δραχμ.	Λ.
Φόρος καθυστερούμενος 6΄ ἑξαμηνίας 192			125	75
Πιστωταί :				
Κ. Ἀντωνίου ἐνταῦθα, σημ. πιστωτ. ὑπόλ. λογ)σμοῦ του.	7148	60		
Δ. Ἰωάννου ἐξ Ἀθηνῶν » » » » »	5000		12148	60
Ἐν ὅλῳ.....			12274	35
Κεφάλαιον σημερινὸν			41339	65
			53614	—

Ἰσολογισμός.

Ἐνεργητικὸν	Ποσὰ		Παθητικὸν	Ποσὰ	
	Δραχμ.	Λ.		Δραχμ.	Λ
Ταμεῖον	7148	25	Φόρος καθυστερούμενος	125	75
Ἀποθήκη	29212	—	Πιστωταὶ διάφοροι	12148	60
Ἔπιπλα	2138	40	Κεφάλαιον σημερινὸν	41339	65
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν	900	—			
Χρεῶσται διάφοροι	14215	35			
	53614	—		53614	—

Βεβαιῶ ὅτι ἡ ἄνω ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ συνετάχθη εὐσυνειδήτως καὶ συμφώνως πρὸς τὰ λογιστικά μου βιβλία.

Ἐν Πειραιεῖ τῇ 31 Δεκεμβρίου 192...

Δ. ΙΩΑΝΝΙΔΗΣ

ΣΤ' Λογιστικὰ βιβλία.

277. Λογιστικὰ βιβλία καλοῦνται ἐκεῖνα, ἐν οἷς ὁ ἐπιχειρηματίας ἐγγράφει μεθοδικῶς τὰς ἐν τῷ οἴκῳ αὐτοῦ γινομένας καθ' ἑκάστην οἰκονομικὰς πράξεις καὶ διὰ τῶν ὁποίων δύναται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ μανθάνῃ τὴν οἰκονομικὴν θέσιν τοῦ οἴκου του.

Ἐκ τῶν ἐν χρήσει βιβλίων ἄλλα μὲν ἐπιβάλλονται ὑπὸ τοῦ νόμου, ὡς τὸ «Ἡμερολόγιον», τὸ «Βιβλίον τῶν ἀπογραφῶν καὶ ἰσολογισμῶν» καὶ τὸ τῆς «Ἀντιγραφῆς τῶν Ἐπιστολῶν», ἄλλα δὲ εἶναι προαιρετικά, ὡς τὸ «Πρόχειρον», τὸ «Καθολικόν», τὸ τοῦ «Ταμείου» καὶ ἄλλα.

ΣΗΜ. 1.—Ὁ νόμος ἀπαιτεῖ, ὅπως ὁ ἔμπορος φυλάττῃ ἐπὶ 10 τοὐλάχιστον ἔτη ἅπαντα τὰ λογιστικὰ βιβλία, ὡς καὶ τὰς λαμβανομένας ἐπιστολὰς ταξιθετῶν αὐτὰς καταλλήλως ἐντὸς φακέλων.

ΣΗΜ. 2.—Ὡς πρὸς τὸν τύπον τῶν ὑποχρεωτικῶν βιβλίων ὁ νόμος ὁρίζει τὰ ἑξῆς:

Ταῦτα πρέπει νὰ εἶναι α΄) πρὸ τῆς χρήσεως βιβλιοδετημένα, β΄) νὰ εἶναι ἠριθμημένα καὶ μονογραφημένα παρὰ τῆς ἁρμοδίου ἀρχῆς (τὸ τῆς ἀντιγραφῆς τῶν ἐπιστολῶν δὲν ὑπόκειται εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην), γ΄) νὰ γράφωνται εἰς τὴν ἐγχώριον γλῶσσαν κατα χρονολογικὴν σειρὰν ἄνευ προσθήκης καὶ ἀφαιρέσεως φύλλων, ἄνευ διορθώσεως ἢ ὑπεργραφῶν ἢ παρεγγραφῶν λέξεων ἢ κενῶν διαστημάτων· ἐὰν συμβῇ λάθος, τοῦτο διορθοῦται διὰ νέας καταλλήλου ἐγγραφῆς, γινομένης κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς ἀνακαλύψεως, καὶ δ΄) νὰ εἶναι νομίμως χαρτοσημασμένα.

278. ***Πρόχειρον***.—Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος πρὸς βοήθειαν τῆς μνήμης ἐγγράφει προχείρως τὰς ἐν τῷ καταστήματί του καθ' ἑκάστην διεξαγομένας πράξεις, καθ' ἣν χρονολογικὴν σειρὰν γίνονται.

Διὰ τῆς χρήσεως τοῦ προχείρου κατορθοῖ ὁ ἔμπορος εὐκολώτερον νὰ τηρῇ καθαρὰ καὶ συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ νόμου (§ 277 σημ. 2) τὰ ὑποχρεωτικὰ βιβλία.

Ἡ διάταξις τοῦ προχείρου ποικίλλει παρὰ τοῖς διαφόροις οἴκοις. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον δ' ἐπικρατεῖ ἡ κάτωθι ὑποδεικνυομένη.

Ὑπόδειγμα.—Πρόχειρον τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου.

Μὴν Σεπτέμβριος 192..

Αὔξων ἀριθμός	Ἔκθεσις πράξεως	Ποσά	
		Δραχ.	Λ.
35	10η		
	Καταθέσαμεν παρὰ τῇ ἐνταῦθα Τραπέζῃ 'Αθηνῶν μετρη	2500	—
36	10η		
	Αἱ σημεριναὶ λιανικαὶ πωλήσεις τοῖς μετρητοῖς ἀπέδωκαν...	540	—
37	11η		
	Ἐπωλήσαμεν τῷ ἐνταῦθα Δ. Παυλίδῃ ἐμπορεύματα ὁλικῆς ἀξίας κατὰ τὸ ὑπ' ἀριθ. 180 σχετικὸν τιμολόγιόν μας πληρωτέας τμηματικῶς	250	—
38	11η		
	Αἱ λιανικαὶ πωλήσεις τοῖς μετρητοῖς ἀπέδωκαν . . .	495	75
39	12η		
	Ἀπεσύραμεν παρὰ τῆς ἐνταῦθα «Τραπέζης Ἀθηνῶν» μετρητά.	500	—
40	12η		
	Εἰσεπράξαμεν παρὰ τοῦ ἐνταῦθα Δ. Παυλίδου ἔναντι λογαριασμοῦ του μετρητὰ	150	—
	κ.ο.κ.		

Ἐπεξήγησις.—Κατὰ τὴν διάταξιν ταύτην πᾶσα ἐγγραφομένη πρᾶξις φέρει πρὸς διάκρισιν αὔξοντα ἀριθμὸν καὶ συνοδεύεται ὑπὸ τῆς ἡμερομηνίας, καθ' ἣν ἐγένετο, τὸ δὲ ἀντίστοιχον αὐτῇ ποσὸν σημειοῦται ἐν τῇ τελευταίᾳ πρὸς τὰ δεξιὰ εἰδικῇ στήλῃ.

ΣΗΜ.—Ἐν τοῖς σπουδαιοτέροις οἴκοις τὸ πρόχειρον ἀντικαθίσταται ὑπὸ σειρᾶς ὅλης εἰδικῶν βιβλίων, ὧν ἕκαστον περιλαμβάνει ὡρισμένην κατηγορίαν πράξεων.

279. *Ἡμερολόγιον*. —Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος ὀφείλει κατα τὸν νόμον νὰ ἐγγράφῃ «πάσας τὰς ἐργασίας του, ἐμπορικὰς ἢ μή, ἐπὶ πιστώσει ἢ τοῖς μετρητοῖς, εἴτε δι' ἴδιον λογαριασμὸν γινομένας εἴτε μή, ὡς καὶ τὰς μηνιαίας οἰκιακὰς καὶ τοῦ καταστήματος δαπάνας». Αἱ πράξεις αὗται, σημειούμεναι τὸ πρῶτον προχείρως ἐν τῷ Προχείρῳ, μεταφέρονται ἀκολούθως εἰς τὸ Ἡμερολόγιον ἐν ἡσυχίᾳ καὶ ἐπισταμένως.

Ἡ διάταξις τοῦ Ἡμερολογίου τηρουμένου ἁπλογραφικῶς διαφέρει παρὰ τοῖς διαφόροις οἴκοις.

Ἰδοὺ αἱ συνηθέστεραι·

Ἡμερολόγιον τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου (Α' διάταξις).

Μὴν Σεπτέμβριος 192..

Αὔξων ἀριθμός	Παραπομπή	Ἔκθεσις πράξεων	Ποσά	
			Δραχ.	Λ.
		Ἐκ μεταφορᾶς	38645	25
		10η		
35	Καθολ. 4 Ταμεῖον 3	*Τράπεζα Ἀθηνῶν*, ἐνταῦθα *Δοῦναι* Διὰ τὴν σημερινὴν κατάθεσίν μας παρ' αὐτῇ	2500	—
		10η		
36	Ταμεῖον 3	Αἱ σημερινα λιανικαὶ πωλήσεις ἀπέδωκαν	540	—
		11η		
37	Καθολ. 20	*Δ. Παυλίδης*, ἐνταῦθα. *Δοῦναι* Δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου μας ὑπ' ἀριθ. 180	250	—
		11η		
38	Ταμεῖον 3	Αἱ λιαν. πωλ. τοῖς μετρητοῖς ἀνῆλθον σήμερον εἰς	495	75
		12η		
39	Καθολ. 1 Ταμεῖον 3	*Τράπεζα Ἀθηνῶν*, ἐνταῦθα *Λαβεῖν* Δι' ὅσα ἀπεσύραμεν σήμερον παρ' αὐτῆς	500	—
		12η		
40	Καθολ. 20 Ταμεῖον 3	*Δ. Παυλίδης*, ἐνταῦθα *Λαβεῖν* Δι' ὅσα μᾶς ἐμέτρησε σήμερον διὰ λογαριασμόν του	150	—

κ.ο.κ.

Ἐπεξήγησις. — Ἡ διάταξις τοῦ ἄνω Ἡμερολογίου, εἰς ὃ ἔχουσι μεταφερθῇ αἱ ἐν τῷ προηγουμένῳ Προχείρῳ (§ 278, ὑποδ.) ἀναγραφόμεναι πράξεις, εἶναι σχεδὸν ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ Προχείρου τούτου. Καὶ ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ, ὡς βλέπομεν, πᾶσα πρᾶξις, μὴ ἀπαιτοῦσα τὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν προσωπικοῦ τινος λογαριασμοῦ, ἐγγράφεται ὁμοίως, ὡς καὶ ἐν τῷ Προχείρῳ. Ἐν ἐναντίᾳ ὅμως περιπτώσει ἡ ἐγγραφὴ τῆς πράξεως ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ γίνεται ὡς ἑξῆς.

1) Σημειοῦμεν τὴν ἀντίστοιχον ἡμέραν τοῦ μηνὸς (ὡς καὶ ἐν τῷ Προχείρῳ), 2) ἐν τῇ ἀκολούθῳ σειρᾷ φέρομεν μὲ μεγάλα στρογγύλα γράμματα ἀριστερὰ μὲν τὸ ὄνομα τοῦ πρὸς χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ, δεξιὰ δὲ τὴν λέξιν «Δοῦναι» ἢ «Λαβεῖν», καθόσον πρόκειται περὶ χρεώσεως ἢ πιστώσεως, καὶ μετ' αὐτὴν ἐν τῇ στήλῃ τῶν ποσῶν τὸ τῆς χρεώσεως ἢ πιστώσεως ποσὸν καὶ 3) ἐν ταῖς ἑπομέναις σειραῖς αἰτιολογοῦμεν τὴν χρέωσιν ἢ πίστωσιν ἐγγράφοντες συντόμως καὶ σαφῶς τὴν σχετικὴν πρᾶξιν, ἐξ ἧς αὕτη προέρχεται

Β' Διάταξις τοῦ αὐτοῦ (Ἡμερολογίου).

Μὴν Σεπτέμβριος 192 .

Αὔξων ἀριθμός	Παραπομπή	Ἔκθεσις τῶν πράξεων	Ποσά		*Δοῦναι*		*Λαβεῖν*	
			Δραχ	Λ	Δραχ.	Λ.	Δραχ.	Λ
35		Ἐκ μεταφορᾶς	18138	40	11138	10	9360	75
		10η						
	Καθολ. 20	*Τράπεζα Ἀθηνῶν* ἐνταῦθα			2500	—		
36	Ταμεῖον	Διὰ τὴν σημερινὴν κατάθεσίν μας						
		10η						
	Ταμεῖον 3	Ὁλικὸν προϊὸν σημ. λιαν. πωλ. μετρ.	540	—				
37		11η						
	Καθολ. 20	*Δ Παυλίδης*, ἐνταῦθα			250	—		
		Δι' ἀξίαν τιμολογίου μας ὑπ' ἀριθ 180						
38		11η						
	Ταμεῖον 3	Ολικὸν προϊὸν σημ. πωλ. μετρητοῖς	495	75				
39		12η						
	Καθολ. 1	*Τράπεζα Ἀθηνῶν*, ἐνταῦθα					500	
	Ταμεῖον 3	Δι' ὅσα ἀπεσύραμεν σήμερον						
40		12η						
	Καθολ. 20	*Δ. Παυλίδης*, ἐνταῦθα,					150	—
	Ταμεῖον 3	Διὰ σημερινὴν πληρωμήν του						

κ. ο. χ.

Ἐπεξήγησις.—Ἡ νέα αὕτη διάταξις διαφέρει τῆς προηγουμένης κατὰ τοῦτο, ὅτι ἀντὶ μιᾶς ἔχει τρεῖς στήλας ποσῶν, ἤτοι α') μίαν διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, αἵτινες δὲν ἐπιβάλλουσι χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος, β') ἑτέραν ὑπὸ τὸν τίτλον «Δοῦναι» διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, τῶν ἐπιβαλλουσῶν χρέωσιν λογαριασμοῦ τινος καὶ γ') τρίτην ὑπὸ τὸν τίτλον «Λαβεῖν» διὰ τὰ ποσὰ τῶν πράξεων, τῶν ἐπιβαλλουσῶν πίστωσιν λογαριασμοῦ τινος.

Καὶ κατὰ τὴν νέαν διάταξιν αἱ ἐγγραφαὶ τῶν πράξεων γίνονται σχεδὸν ὁμοίως, ὡς καὶ κατὰ τὴν πρώτην. Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι, ὅτι δεξιᾷ τοῦ ὀνόματος τοῦ πρὸς χρέωσιν ἢ πίστωσιν λογαριασμοῦ δὲν σημειοῦται πλέον ἡ λέξις «Δοῦναι ἢ «Λαβεῖν» ὡς ἐγγεγραμμένη ἤδη ἐπὶ κεφαλῆς τῆς οἰκείας στήλης τῶν ποσῶν.

ΣΗΜ.—Τὸν σκοπὸν τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Παραπομπῆς» στήλης τοῦ Ἡμερολογίου θὰ μάθωμεν κατωτέρω.

280. ***Καθολικόν.***— Οὕτω καλεῖται τὸ βιβλίον, ἐν ᾧ ὁ ἔμπορος ἀνοίγει (§ 267) τοὺς λογαριασμοὺς (§ 263) τῶν διαφόρων προσώπων (τραπεζιτῶν, προμηθευτῶν, πελατῶν κτλ.), μεθ' ὧν ἐνεργεῖ δοσοληψίας.

Ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου μεταφέρονται τὰ διάφορα ποσὰ χρεώσεων ἢ πιστώσεων εἰς τὰ ἀντίστοιχα μέρη (Δοῦναι ἢ Λαβεῖν) τῶν ἐν τῷ Καθολικῷ λογαριασμῶν, οὓς ἀποβλέπουσι κατὰ τὰ ἐδάφια (§ 264, 265 καὶ 266).

ΣΗΜ.—Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς μεταφορᾶς ταύτης γίνεται πολλάκις χρῆσις καὶ «Εὑρετηρίου», ἤτοι ἑνὸς βιβλιαρίου περιέχοντος κατ' ἀλφαβητικὴν τάξιν τὰ ὀνόματα τῶν τιτλούχων τῶν διαφόρων λογαριασμῶν, ἑκάστου μετὰ τῆς σελίδος, ἣν ἐν τῷ Καθολικῷ κατέχει. Αἱ σελίδες αὗται σημειοῦνται καὶ ἐν τῇ στήλῃ «Παραπομπῆς» (279, σημ.) τοῦ Ἡμερολογίου, καθ' ὅσον ἐνεργοῦνται αἱ τῶν ποσῶν μεταφοραὶ ἐξ αὐτοῦ εἰς τὸ Καθολικόν.

Παραλλήλως δὲ σημειοῦνται ἐν τῇ ἀναλόγῳ στήλῃ «Παραπομπῆς» τῶν ἐν τῷ Καθολικῷ λογαριασμῶν καὶ αἱ σχετικαὶ σελίδες τοῦ Ἡμερολογίου, ἐν αἷς εὑρίσκονται τὰ μεταφερόμενα ποσά.

281. ***Παράδειγμα.*** — Κατωτέρω παραθέτομεν λογαριασμούς τινας Καθολικοῦ, εἰς οὓς ἔχουσι μεταφερθῆ τὰ τῶν χρεώσεων καὶ πιστώσεων ποσὰ ἐκ τοῦ Ἡμερολογίου (§ 279, ὑποδ. Α').

Σελ. 1 ΤΡΑΠΕΖΑ ΑΘΗΝΩΝ Σελ. 1

Δοῦναι ***Λαβεῖν***

Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσά		Χρονολ.		Αἰτιολογία	Παραπομπή	Ποσά	
192.. Σεπτ.	10	Κατάθεσίς μας	Ἡμ. 10	δραχ. 2500.	λ. —	192.. Σεπτ.	12	Δι' ὅσα ἀπεσύραμεν.	Ημ. 10	δρχχ. 500	λ. —

Σελ. 20 Δ. ΠΑΥΛΙΔΗΣ ἐν Πάτραις Σελ. 20

Δοῦναι *Λαβεῖν*

Χρονολογ.		Αἰτιολογία	Παρα-πομπή	Ποσά		Χρονολογ.		Αἰτιολογία	Παρα-πομπή	Ποσά	
			Ἡμ.	Δραχμ.	Λ.				Ἡμ.	Δραχμ.	Λ
192 . Σεπτ.	11	Τιμολόγιόν μας ἀριθ. 180	10	250	—	192.. Σεπτ.	12	Πληρωμή του	10	150	-

ΣΗΜ.—Πολλάκις ἐν τοῖς καταστήμασι λιανικῆς ἰδίᾳ πωλήσεως τὸ Καθολικὸν ἀντικαθίσταται ὑπὸ τοῦ συνόλου τῶν λεγομένων «Βιβλιαρίων καταναλώσεως», ἐξ ὧν ἕκαστον ἀναφέρεται εἰς ὡρισμένον καταναλωτὴν (ἢ πελάτην) καὶ παριστᾷ τὸν λογαριασμὸν τούτου.

282. ***Βιβλίον ταμείου.***—Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο ἐγγράφει μεθοδικῶς ὁ ἔμπορος ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰ ἑκάστοτε εἰσερχόμενα εἰς τὸ κατάστημα ποσὰ μετρητῶν (ἤτοι τὰς εἰσπράξεις του), ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ ἑκάστοτε ἐξερχόμενα τοιαῦτα (ἤτοι τὰς πληρωμάς του).

Τῇ βοηθείᾳ τούτου δύναται ὁ ἔμπορος νὰ γνωρίζῃ ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν τὸ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ ἐναπομένον ὑπόλοιπον μετρητῶν.

Ἡ διάταξις τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ προσωπικοῦ λογαριασμοῦ.

Ὡς ὑπόδειγμα παραθέτομεν μίαν σελίδα τοῦ βιβλίου τούτου, τὴν περιέχουσαν τὰς ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ (§ 279, ὑπόδ. Α') ἀναφερομένας εἰσπράξεις καὶ πληρωμὰς (τοῦ ἐν Πάτραις οἴκου Π. Κωνσταντινίδου).

Σελ. 3 ΤΑΜΕΙΟΝ Σελ. 3

Εἰσπράξεις (ἢ ***Δοῦναι***) Πληρωμαὶ (ἢ ***Λαβεῖν***)

Χρονολ.		Ἔκθεσις πράξεως	Παρα-πομπή	Ποσά		Χρονολ.		Ἔκθεσις πράξεως	Παρα-πομπή	Ποσά	
			Ἡμ.	Δραχμ.	Λ.	192.			Ἡμ.	Δραχ.	Λ.
192. Σεπτ.		Ἐκ μεταφορᾶς		15600	40			Ἐκ μεταφορᾶς		1248	25
	10	Προϊὸν σημερ. πωλήσεων	10	540	—	Σεπτ.	10	Κατάθεσίς μας	10	2500	
»	11	Προϊὸν σημερ. πωλήσεων	10	495	75						
»	12	Παρὰ «Τραπ. Ἀθηνῶν» ἐνταῦθα	10	500	—						
»	12	Παρὰ Δ Παυλίδου ἐνταῦθα	10	150	-						

Ἐπεξήγησις.—Εἰς τὸ ἀριστερὸν τῆς σελίδος μέρος, τὸ φέρον τὸν τίτλον «Εἰσπράξεις» (ἢ Δοῦναι), ἐγγράφει ὁ ἔμπορος τὰ ἑκάστοτε εἰσπραττόμενα χρηματικὰ ποσά, ἕκαστον συνοδευόμενον ὑπὸ τῆς σχετικῆς χρονολογίας καὶ συντόμου ἐκθέσεως τῆς ἀντιστοίχου πράξεως. Εἰς δὲ τὸ δεξιόν, τὸ ὑπὸ τὸν τίτλον «Πληρωμαὶ» (ἢ «Λαβεῖν»), ἐγγράφει ὁμοίως τὰ ποσά, ἅτινα ἑκάστοτε πληρώνει.

Ἐὰν κατά τινα στιγμὴν ὁ ἔμπορος ἀθροίσῃ πρῶτον τὰ ποσὰ τοῦ ἀριστεροῦ μέρους, δεύτερον τὰ τοῦ δεξιοῦ καὶ εἶτα ἀφαιρέσῃ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος (ὅπερ οὐδέποτε εἶναι τὸ μικρότερον) τὸ δεύτερον, θὰ εὕρῃ ὑπόλοιπόν τι, ὅπερ θὰ δεικνύῃ τὸ κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν ἐναπομένον ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ ποσὸν μετρητῶν ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἀνελλιπῶς καὶ ὀρθῶς ἔχουσι σημειωθῆ πάντα τὰ μέχρι τῆς στιγμῆς ταύτης εἰσπραχθέντα ἢ πληρωθέντα ποσά.

ΣΗΜ.—Ὁ προορισμὸς τῆς ὑπὸ τὸν τίτλον «Παραπομπὴ» στήλης τοῦ ἐν λόγῳ βιβλίου εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν τῆς ἀντιστοίχου στήλης τῶν λογαριασμῶν τοῦ Καθολικοῦ (§ 280 σημ.).

283. «Διάφορα ἀνάλογα (πρὸς τὸ τοῦ Ταμείου) βιβλία».

Διὰ τοῦ βιβλίου τοῦ ταμείου δύναται, ὡς εἴδομεν, ὁ ἔμπορος νὰ ἐξελέγχῃ τὴν κίνησιν τῶν μετρητῶν (εἰσαγωγήν, ἐξαγωγὴν καὶ ὑπόλοιπον αὐτῶν). Δι' ἀναλόγων βιβλίων δύναται οὗτος, ἂν ἐπιθυμῇ τοῦτο, νὰ ἐξελέγχῃ τὴν κίνησιν (εἰσαγωγήν, ἐξαγωγὴν καὶ ὑπόλοιπον) καὶ πάσης ἄλλης ἐκ τῶν ἀξιῶν, ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ, ὡς λ. χ. τῶν ἐμπορευμάτων, τῶν ἐπίπλων, τῶν τίτλων, τῶν γραμματίων (εἰσπρακτέων ἢ πληρωτέων), τῶν ἐργαλείων, τῶν πρώτων ὑλῶν κ.τ.λ.

Τὰ βιβλία ταῦτα ἔχοντα ὁμοίαν περίπου διάταξιν καὶ ἀναλόγως τηρούμενα φέρουσιν ἀνάλογα ὀνόματα, ὡς λ. χ. «βιβλίον ἀποθήκης», «βιβλίον ἐπίπλων» κ.τ.λ.

284. «Βιβλίον ἀπογραφῶν καὶ ἰσολογισμῶν». —Οὕτω καλεῖται ἐκεῖνο, ὅπερ δέχεται τὰς ἐγγραφὰς τῶν ἑκάστοτε ἐνεργουμένων ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου ἀπογραφῶν (274) καὶ ἰσολογισμῶν (275). Τοῦ βιβλίου τούτου ὑπόδειγμα παρέχει τὸ παράδειγμα (276).

285. «Βιβλίον ἀντιγραφῆς ἐπιστολῶν».—Ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ ἐπιβαλλομένῳ ὑπὸ τοῦ νόμου (§ 277), λαμβάνει ὁ ἔμπορος τῇ βοηθείᾳ εἰδικοῦ πιεστηρίου πιστὸν ἀντίγραφον πάσης ἐπιστολῆς (ἢ τηλεγραφήματος), ἣν ἀπευθύνει πρὸς τρίτον, μεθ' οὗ ἔχει ἐμπορικὰς σχέσεις. Πρὸς τοῦτο δὲ γράφεται προηγουμένως ἡ ἐπιστολὴ δι' εἰδικῆς μελάνης (μελάνης τῆς ἀντιγραφῆς) εἴτε διὰ γραφίδος εἴτε διὰ γραφομηχανῆς.

Ζ' Λογιστικαὶ ἀσκήσεις.

Ἐγγραφὴ τῶν κατὰ Ὀκτώβριον τοῦ 192.. ἐργασιῶν τοῦ ἐν Πειραιεῖ οἴκου Γ. Δημητρίου.

α') Ἐν τῷ Προχείρῳ.

Μὴν Ὀκτώβριος 192..

		Δραχμ.	Λ.
1	1 Πρὸς ἔναρξιν τῶν ἐργασιῶν μας κατεθέσαμεν σήμερον μετρητὰ	10000	—
2	2 Ἐπληρ. εἰς τὸν ἰδιοκ. Π.Σ. δι'ἐνοίκιον 6 μην. ἀπὸ 1ης τρ. δρ. 1200 » » » Δ. Κ. δι' ἀξίαν ἀγορασθέντων ἐπίπλων κατὰ τὸ τιμολόγιόν του δραχμὰς 1150	2350	—
3	5 Ἠγοράσαμεν παρὰ τοῦ Δ. Ἀντωνιάδου ἐνταῦθα διάφ. ἐμπ)τα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιόν του ἀξίας εἰς λ)σμὸν(δηλ. ἐπὶ πιστ δ.	2920	—
4	6 Ἠγοράσαμεν παρὰ τοῦ Π. Δημητριάδου, ἐνταῦθα, διάφορα ἐμπ(τα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιόν του ἀξίας εἰς λο)σμὸν δραχμῶν	1400	—
5	7 (1) Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων τοῖς μετρητοῖς ἀπὸ 1ης τρέχοντος ἀνῆλθον εἰς.	1400	—
6	9 Ἐπληρώσαμεν διὰ διαφόρους προμηθείας τοῦ γραφείου μας δρ.	45	—
7	9 Ἐπληρώσαμεν εἰς Δ. Ἀντωνιάδην ἐνταῦθα ἔναντι λο)σμοῦ δρχ.	1900	—
8	9 (2) Ὑπεγράψαμεν γραμ)ον εἰς δ)γὴν τοῦ ἐνταῦθα προμηθευτοῦ μας Π. Δημητριάδου λήξεως 5 Νοεμ. ἐ.ἔ. καὶ ἀξίας ὀνομαστ. δρ.	500	—
9	9 Ἐπωλήσαμεν εἰς Ι. Πετρίδην ἐνταῦθα ἐμπορεύματα κατὰ τὸ τιμολόγιόν μας εἰς ἀξίας λογαριασμόν.	125	75
10	10 Ἐπωλήσαμεν εἰς Δ. Μιχαὴλ ἐνταῦθα διάφορα ἐμπ)τα κατὰ τὸ τιμολόγιόν μας ἀξίας εἰς λογαριασμόν	214	70
11	10 Ἠγοράσαμεν τοῖς μετρητοῖς παρὰ τῆς ἑταιρείας τῶν μονοπωλείων διάφορα εἴδη ἀξίας	875	40
12	12 Ὁ Ι. Πετρίδης τῆς πόλεώς μας ἐμέτρ. εἰς ἡμᾶς διὰ λ)σμόν του δρ.	75	50
13	14 Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν ἀπὸ 8—14 τρέχ. ἀνῆλθον εἰς δρ.	695	—
14	15 (3) Ὁ Δ. Μιχαὴλ ἐνταῦθα ὑπέγραψε γραμ)ον εἰς διαταγήν μας ἔναντι λ)σμοῦ λήξ. 30 Νοεμ. ἐ. ἔ. καὶ ὀνομαστικῆς ἀξίας.	200	—
15	21 Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 15—21 τρέχοντος ἀνῆλθον εἰς δραχμὰς	845	70
16	31 (4) Αἱ εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 22—31 τρέχοντος ἀνῆλθον εἰς δραχμὰς	2915	60
17	31 Ἐπληρώσαμεν εἰς τοὺς ὑπαλλήλους μας διὰ μισθοὺς λήξαντος μηνὸς δραχμὰς . . . . 100 (5) Αἱ μικραὶ δαπάναι τοῦ καταστήματος κατὰ τὸν λήξαντα μῆνα Ὀκτώβριον ἀνῆλθον εἰς δραχμὰς 38.75	138	75
18	31 Κατὰ τὸν λήξαντα μῆνα ἀπεσύραμεν διὰ τὴν οἰκογένειάν μας μετρητὰς δραχμὰς 150 καὶ διάφορα ἐμπορεύματα κατὰ τὸ σχετικὸν βιβλιάριον καταναλώσεως ἀξίας δραχμὰς 100. . .	250	—
		56881	40

1—2—3—4—5. Ὅρα σχόλια ἐν τῇ παρακειμένῃ σελίδι.

1) Χάριν συντομίας ἐγγράφομεν τὰς εἰσπράξεις ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων περιληπτικῶς εἰς τὸ τέλος ἑκάστης ἑβδομάδος, ἐν ᾧ ἐν τῇ πράξει γίνεται τοῦτο καθ' ἑκάστην ἑσπέραν.

2) Τὰ πληρ/α γραμ)ά μας σημειοῦμεν μὲ τὴν λῆξιν των κλπ. εἰς τὸ λεγόμενον «*Βιβλιάριον λήξεων*».

3) Τὰ εἰσ)α γραμ)ά μας σημειοῦμεν μὲ τὴν λῆξίν των κλπ. εἰς τὸ λεγόμενον «*Βιβλιάριον λήξεων*».

4) Τὸ ποσὸν τῶν εἰσπράξεων τούτων εἶναι πολὺ μεγαλύτερον τῶν προηγουμένων, διότι περιλαμβάνει καὶ τὰ ποσὰ τῶν ἐπὶ πιστώσει λιανικῶν τοῦ μηνὸς πωλήσεων, ἅτινα εἰσπράττομεν εἰς τὸ τέλος τοῦ μηνὸς ἐπὶ τῇ βάσει τῶν σχετικῶν βιβλιαρίων καταναλώσεως (281 σημ.).

5) Διὰ τὰς καθημερινὰς μικρὰς δαπάνας τοῦ καταστήματος τηροῦμεν ἰδιαίτερον βιβλιάριον, «*Βιβλιάριον τοῦ μικροῦ Ταμείου*». Ἐντεῦθεν κατὰ μῆνα μεταφέρεται τὸ σύνολον αὐτῶν εἰς τὸ Πρόχειρον καὶ ἀκολούθως εἰς τὰ λοιπὰ βιβλία.

β') Ἐν τῷ Ἡμερολογίῳ.

Μὴν Ὀκτώβριος 192..

				Δραχμ.	Λ.
1			1		
	Ταμεῖον	1	Πρὸς ἔναρξιν τῶν ἐμπορικῶν μας ἐργασιῶν κατεθέσαμεν μετρητά	40000	—
2			2		
	»	»	Ἐπληρώσαμεν εἰς τὸν Π. Σ. δι' ἐνοίκιον καταστήματος ἓξ μηνῶν ἀπὸ 1ης τρέχοντος κατὰ τὴν σχετικὴν ἀπόδειξίν του. . . . . Δρχ. 1200		
	»	»	Ὁμοίως εἰς Δ. Κ. δι' ἀγορασθέντα ἔπιπλα πρὸς χρῆσιν τοῦ καταστήματος . . . . δρχ. 1150	2350	—
3			6		
	Καθολ.	1	*Δ. Ἀντωνιάδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν* Δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου του ἐκ δραχμῶν 2920	2920	—
4			7		
	»	2	*Δ. Δημητριάδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν* Δι' ἀξίαν σημερινοῦ τιμολογίου του ἐκ δραχμῶν 1400	1400	—
5			7		
	Ταμεῖον	1	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 1—7 τρέχοντος δραχμάς	1400	—
6			8		
	»	»	Ἐπληρώσαμεν διὰ διαφόρους προμηθείας τοῦ γραφείου μας δραχμάς.	45	—
7			9		
	Καθολ.	1	*Δ. Ἀντωνιάδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι*	1900	—
	Ταμεῖον	1	Δι' ὅσα ἐμετρήσαμεν αὐτῷ ἔναντι λογαριασμοῦ		
8			9		
	Καθολ.	2	(1) *Π. Δημητριάδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι* Διὰ τὸ εἰς διαταγήν του γραμμάτιόν μας λήξαντος 5 Νοεμβρίου ἀξίας δραχμῶν 500	500	—
9			9		
	Καθολ.	3	*Ι. Πετρίδης*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι* Διὰ τὰ πωληθέντα αὐτῷ ἐμπορεύματα κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιόν μας	125	75
10			10		
	Καθολ.	4	*Δ. Μιχαήλ*, ἐνταῦθα, *Δοῦναι* Δι' ἀξίαν τῶν εἰς αὐτὸν πωληθέντων κατὰ τὸ σχετικὸν τιμολόγιόν μας	214	70
			Εἰς μεταφορὰν	50855	5

1) Τὴν αὐτὴν χρέωσιν θὰ ἐκάμνομεν, ἂν ὁ Π. Δημητριάδης ἔσυρε συν/κὴν ἐφ' ἡμῶν λήξεως 5 Νοεμβρίου καὶ ἀξίας 500 δρ. καὶ ἡμεῖς ἀπεδεχόμεθα αὐτήν.

				Δραχμ.	Λ.
			Ἐκ μεταφορᾶς	50855	15
11			10		
	Ταμεῖον	1	Ἐπληρώσαμεν εἰς τὴν Ἑταιρείαν τῶν Μονοπωλείων διάφορα εἴδη, ἅτινα παρ' αὐτῆς ἠγοράσαμεν δραχ.	875	40
12			11		
	Καθολ.	3	*Δ. Πετρίδης*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν*	75	50
	Ταμεῖον	1	Δι' ὅσα μᾶς ἐμέτρησεν ἔναντι λογαριασμοῦ του		
13			14		
	»	»	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 8—14 τρέχοντος δραχμάς	695	—
14			15		
	Καθολ.	4	*Δ. Μιχαήλ*, ἐνταῦθα, *Λαβεῖν*	200	—
			Διὰ τὸ γραμμάτιον του εἰς διαταγήν μας λήξαντος 30 Νοεμβρίου ἐ. ἔ. ἐκ δραχμῶν 200		
15			21		
	Ταμεῖον	1	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 15—21 τρ.	845	70
			31		
	»	»	Εἰσεπράξαμεν ἐκ τῶν λιανικῶν πωλήσεων ἀπὸ 22-31 τρ.	2945	60
16			31		
	»	»	Ἐπληρώσαμεν εἰς τοὺς ὑπαλλήλους μας διὰ μισθοὺς λήξαντος μηνὸς δραχμὰς . . . . 100.—		
17	»	»	Αἱ δὲ μικραὶ δαπάναι τοῦ καταστήματος κατὰ τὸ σχετικὸν βιβλιάριον ἀνῆλθον κατὰ τὸν λήγοντα μῆνα εἰς δραχμάς 38,75	8	75
18			31		
	Ταμεῖον	1	Ἀπεσύραμεν χάριν τῆς οἰκογενείας μας κατὰ τὸν λήξαντα μῆνα τὰ ἑξῆς: Μετρητὰ δρ. 150 Ἐμπορ)τα κατὰ τὸ σχετικ. βιβλιάρ. ὁλικ. ἀξίας δ. 100	250	—
			Ἐν ὅλῳ	56381	40

γ') Ἐν τῷ Καθολικῷ.

Σελ. 1 — Δ. ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ — Σελ. 1

Δοῦναι — ***Λαβεῖν***

				Δραχμ	Λ.					Δραχμ.	Λ.
192..						192..					
Ὀκτ.	9	Πληρωμή μας	1	1900	—	Ὀκτ.	6	Τιμολόγιόν του	1	2920	
»	31	Ἐξίσωσις πιστ.		1020	—						
				2920	—					2920	—
						Νοεμ.	1	ὑπόλοιπον εἰς νέον		1020	—

Σελ. 2 — ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ, ἐνταῦθα — Σελ. 2

Δοῦναι — ***Λαβεῖν***

				Δραχμ.	Λ.					Δραχμ.	Λ.
192..						192..					
Ὀκτ	9	Γραμ)όν μας εἰς	1			Ὀκτ.	7	Τιμολόγιόν του	1	1400	—
»		δ)γήν του λ 5)11		500	—						
	31	Ἐξισ. πιστωτική		900	—						
				1400	-					1400	—
						Νοεμ.	1	ὑπόλοιπον εἰς νέον		900	—

Σελ. 3 Ι. ΠΕΤΡΙΔΗΣ Σελ. 3

Δοῦναι *Λαβεῖν*

192..				Δραχμ.	Λ.	192..				Δραχμ.	Λ.
Ὀκτ.	9	Τιμολόγιόν μας	1	125	75	Ὀκτ.	11	Πληρωμή του..	1	75	50
						»	31	ὑπόλ. χρεωστικὸν		50	25
				125	75					125	75
Νοεμ.	1	ὑπόλοιπ. εἰς νέον		50	25						

Σελ. 4 Δ. ΜΙΧΑΗΛ, ἐνταῦθα Σελ. 4

Δοῦναι *Λαβεῖν*

192..				Δραχμ.	Λ	192..				Δραχμ.	Λ.
Ὀκτ.	10	Τιμολόγιόν μας	1	214	70	Ὀκτ.	11	Γαμ)όν του εἰς δ)γήνμαςλ. 30)11	1	200	—
						»	31	ἐξίσωσις χρεωστ		14	70
				214	70					214	70
Νοεμ.	1	ὑπόλοιπ. εἰς νέον		14	70						

δ΄) Ἐν τῷ βιβλίῳ Ταμείου.

Σελ. 1. ΤΑΜΕΙΟΝ Σελ. 1

Εἰσπράξεις **Πληρωμαὶ**

192..				Δραχμ.	Λ.	192..				Δραχ.	Λ.
Ὀκτ.	1	Κατάθεσις ἀρχικοῦ Κεφαλαίου. .	1	40000	—	Ὀκτ.	2	Εἰς Π. Σ. δι' ἐνοίκιον 6 μηνῶν . .	1	1200	—
»	7	Λιανικαὶ πωλήσεις ἀπὸ 1-7 τρέχ.	1	1400	—	»	2	Εἰς Β.Κ. διὰ διάφορα ἔπιπλα. .	1	1150	—
»	11	Παρὰ Δ. Πετρίδου ἐνταῦθα ἔναντι λογαριασμοῦ . .	2	75	50	»	8	Δι' ἀγορὰν εἰδῶν γραφείου μας . .	1	45	—
»	14	Λιανικαὶ πωλήσ. ἀπὸ 8-14 τρέχ.	2	695	—	»	9	Εἰς Δ. Ἀντωνιάδην, ἐνταῦθα . .		1900	—
»	21	Λιανικ. πωλήσεις ἀπὸ 15-21 τρέχ.	2	845	70	»	10	Εἰς ἑταιρ. Μονοπ δι' ἀγορὰν διαφόρων εἰδῶν. . .		875	40
»	31	Λιανικαὶ πώλήσ. ἀπὸ 22-31 τρέχ	2	2945	60	»	31	Εἰς ὑπαλλήλους διὰ μισθοὺς Ὀκτωβρίου	2	100	—
						»	31	Διάφορα μικρὰ ἔξοδα καταστήματος κατὰ τὸν μῆνα Ὀκτώβριον. .	2	38	75
						»	31	Δι' ἔξοδα οἰκογεν. κατὰ Ὀκτώβριον	2	150	—
							31	Ὑπόλ. μετρητ. ἐν τῷ χρηματοκιβ.		40502	65
				45961	80					45961	80
Νοεμ.	1	Ὑπόλ. μετρητ. ἐκ τοῦ προηγ. μηνὸς		40502	65						

ε΄) Ἐν τῷ βιβλίῳ τῶν Ἀπογραφῶν καὶ Ἰσολογισμῶν.

Σελ. 1.

	Δραχ	Λ.
Α΄ Ἀπογραφὴ τῆς 1ης Ὀκτωβρίου 192..		
Κεφάλαιον ἀρχικὸν κατατεθὲν ἐξ ὁλοκλήρου τοῖς μετρητοῖς	40000	—
Β΄. Ἀπογραφὴ τῆς 31ης Ὀκτωβρίου 192..		
α΄) Ἐνεργητικὸν		
Ταμεῖον [1]) μετρητὰ ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ	40502	65
Ἔπιπλα [2])ἀξία τούτων σημερινὴ (ἕπεται λεπτ. σημείωσις τούτων)	1035	—
Ἐμπορεύματα. [3]) ἀξία τῶν ἐν τῇ ἀποθήκῃ τοιούτων (ἕπεται λεπτομερὴς σημείωσις τούτων)	961	20
Ἐνοίκιον προπληρωθέν, τὸ ἀναλογοῦν εἰς 5 μῆνας Νοέμ.-Μάρτιον	1000	—
Γραμμάτια εἰσπρακτέα [4] γραμ)ον Δ. Μιχαὴλ λήξ. 30)11 δρ. 200.	200	—
Χρεῶσται [5]) Ι. Πετρίδης ἐνταῦθα, ὑπόλοιπον χρεωστ. δραχ. 50.25..		
. . . . Δ. Μιχαὴλ » » « » 14.70...	64	95
Ἐν ὅλῳ	43763	80
β΄) Παθητικὸν		
Γραμμάτια [6]) *πληρωτέα*, γραμμάτιόν μας εἰς διαταγὴν Π. Δημητριάδου λήξ. 5)11 ἀξίας 500 δραχμῶν.	500	—
Πιστωταὶ [5]) Π. Δημητριάδης, ἐνταῦθα,ὑπόλ. πιστωτικὸν δραχ. 900		
Δ. Ἀντωνιάδης » » » » 1020	1920	—
Κεφάλαιον σημερινὸν (τῆς 31 Ὀκτωβρίου 192..)	51343	80
Ἐν ὅλῳ	53763	80

1) Τὸ ὑπόλοιπον τῶν μετρητῶν δίδεται ὑπὸ τοῦ βιβλίου τοῦ Ταμείου καὶ ἐξελέγχεται διὰ τῆς μετρήσεως τῶν ἐν τῷ χρηματοκιβωτίῳ χρημάτων.

2) Τὰ ἔπιπλα ἐστοίχιζον ἀρχικῶς δρ. 1150, ἀλλ' ἕνεκα τῆς χρήσεως ὑφίστανται ὑποτίμησιν, ἣν ἐνταῦθα ὑπελογίσαμεν πρὸς 20 ο)ο ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ἀξίας. Οὕτως ἡ σημερινὴ ἀξία τούτων εἶναι δραχ. 1150—115=1035 δραχ.

3) Τὰ ἐμπορεύματα ἐξελέγχονται κατὰ ποσότητα ἐν τῇ ἀποθήκῃ καὶ ἐκτιμῶνται ἐν γένει μὲ τὴν τιμήν, ἣν ἐστοίχισαν μέχρι τῆς εἰσόδου των εἰς τὴν ἀποθήκην. Ἐὰν ὅμως ἕνεκα λόγου τινός, ὡς τῆς παρελεύσεως τῆς ἐποχῆς τοῦ συρμοῦ ἢ βλάβης ποιότητος κλπ., ἐμπόρευμά τι ἔχῃ σήμερον πραγματικὴν τιμὴν κατωτέραν τῆς ἀρχικῆς, τότε ἐκτιμῶμεν αὐτὸ μὲ τὴν κατωτέραν αὐτὴν τιμήν.

Ἡ ἀπογραφὴ τῶν ἐμπορευμάτων εἶναι καὶ μέσον ἐξελέγξεως τοῦ «*βιβλίου Ἀποθήκης*», ὁσάκις τηρεῖται τοιοῦτον.

4) Ταῦτα εὑρίσκονται ἐν τῷ χαρτοφυλακίῳ μας καὶ συγχρόνως δεικνύονται ὑπὸ τοῦ ἀντιστοίχου «*Βιβλιαρίου λήξεων*».

5) Ταῦτα δεικνύονται ὑπὸ τῶν λ)σμῶν τοῦ *Καθολικοῦ*.

6) Ταῦτα δεικνύονται ὑπὸ τοῦ σχετικοῦ «*Βιβλιαρίου λήξεων*».

Ἰσολογισμός

Ἐνεργητικὸν	Δραχμ.	Λ	Παθητικὸν	Δραχμ.	Λ.
Ταμεῖον	40502	65	*Γραμμάτια πληρωτέα.* .	500	—
Ἔπιπλα.	1035	—	*Πιστωταὶ διάφροι.* . . .	1920	—
Ἐμπορεύματα	961	20	*Κεφάλαιον σημερινόν.* .	41343	80
Ἐνοίκιον προπληρωθὲν	1000	—			
Γραμμάτια εἰσπρακτέα .	200	—			
Χρεῶσται διαφοροι . . .	64	95			
	43763	80		43763	80

Ὑπολογισμὸς παρελθόντος ἀποτελέσματος (κέρδους ἢ ζημίας).

Κεφάλαιον τῆς 31ης Ὀκτωβρίου 192..	Δραχ.	41343,80
» » 1ης » » (τὸ ἀρχικὸν)	»	40000,—
Καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν ἐργασιῶν τοῦ μηνὸς Ὀκτωβρίου	»	1343,80

Βεβαιῶ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπογραφὴ μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου ἰσολογισμοῦ συνετάχθη εἰλικρινῶς καὶ συμφώνως πρὸς τὰ ἐμπορικά μου (λογιστικὰ) βιβλία.

Ἐν Πειραιεῖ τῇ 31 Ὀκτωβρίου 192..

Γ. Δημητρίου ὑπογραφή).

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε′

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ

Ἐν σελίδι	στίχῳ	ἀντὶ	νὰ γραφῇ:
19	18	τρῦ	τοῦ
28	15	τινα 10	τινα ἐπὶ 10
44	16	πράξις	πρᾶξις
93	27	παρανομαστὴν	παρονομαστὴν
98	20	Πολλαπλασιασμὸ	Πολλαπλασιασμὸς
101	24	§ 132	§ 133
103	1	άμνουσι	κάμνουσι
103	2	$5386\frac{1}{4}$	$53806\frac{1}{4}$
109	18	145:—	$145{:}\frac{15}{28}$
112	14	1 Ἠ ὀκᾶ	Ἡ 1 ὀκᾶ
113	6	§§ 42, 43	§ § 40, 41
113	22	$\times 9\frac{5}{4}$	$9\times\frac{5}{4}$
118	22	γ′. $10\frac{1}{2}$δραχ.	γ′ $20\ \frac{1}{2}$ δραχμ.
125	22	$\left\{\dfrac{28\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}}{\frac{5}{5}}\right.$	$\left\{\dfrac{28\frac{1}{2.}\ \frac{1}{5}}{15\frac{3}{5}}\right.$
125	22	$\frac{\alpha\ 6}{\alpha\ \gamma}$	$\frac{\alpha\ \beta}{\alpha\text{-}\gamma}$
126	1	ἀποτελῦοσι	ἀποτελοῦσι
135	8	τόν. 4007;900	τόν. 4007,900
142	14	δραχ. 453,90	δραχ. 453,96
147	7	48,9+	48,9=
158	12	τὸ ἒν	τὸ ἓν
165	15	845 κ.γραμ.	845 κ.ὑφεκατόμ.
175	18	Ωἷ	Οἷ
180	14	μεταξῦ	μεταξὺ
183	24	Ἕστω	Ἔστω
190	31	κα	καὶ ὁ
190	32	μιᾶ	μιᾶς
191	16	δ′) 3λεπτ.	γ′) 3λεπτ.
193	12	20τ	20π
»	13	40τ	40π

Ἐν σελ.	στίχῳ	ἀντὶ	νὰ γραφῇ
194	9	925,20 δρ.	25,20 δρ.
200	5	$\frac{2\times 88}{}$δραχ.	$\frac{2\times 88}{5}$δραχ.
201	32	8,250χιλιόγ.=8,250γρμ.	8,250χλγ.=8250γρ.
204	21	227,46 λίτρας	227,40 λίτρας
211	15	ἀξίας 3801	ἀξίας 3800
214	4	$6\frac{1}{2}$ %	$6\frac{1}{2}$ %
»	23	3 %	3 %
216	13	Ἔκπτωσις...51,50	Ἔκπτωσις...51,70
217	7	οὖτω	οὕτω
»	17	Καθ' ὃν χρόνον	Καθ' ὃν τρόπον
225	8	Ποιῖον	Ποῖον
234	12	(....).147,05	(....)—147,05
»	16	147,05×100	157,05×100
241	26	200 ὀκ.	2000 ὀκ.
247	20	3,400 »	3400 »
»	22	2,850 »	2850 »
251	5	μέση τιμὴ 350	μέση τιμὴ 3,50
»	18	1,1000	1,000
»	21	τίτλον	τίτλον 0.
254	1	μέρος $56\frac{1}{}$ μ.	μέρος $56\frac{1}{2}$ μ.
»	2	» $\frac{1}{2}$	» $83\frac{1}{2}$ »
»	4	20 τεμάχια	10 τεμάχια
282	24	τότ	τότε
284	29	§ 29	§ 28
285	28	413 9,65	41339,65
287	18	Καταθέσαμεν	Κατεθέσαμεν