ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἤτοι

Λύσεις τῶν ἐν τῇ Στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ αὐτοῦ περιεχομένων Ἀσκήσεων.

Πρὸς χρῆσιν

Τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολάς.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α′.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & Σιας
81 ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81
1928

1017

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ
Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἤτοι

Λύσεις τῶν ἐν τῇ Στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ αὐτοῦ περιεχομένων Ἀσκήσεων.

Πρὸς χρῆσιν

Τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων, Πρακτικῶν Λυκείων καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολάς.

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & Σ$^{\text{ΙΑΣ}}$
81 ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 81
1928

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΤΥΠΟΙΣ "ΑΥΓΗΣ" ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐπιθυμοῦντες νὰ διευκολύνωμεν τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων ὡς καὶ τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὸ Πολυτεχνεῖον καὶ τὰς λοιπὰς ἀνωτάτας σχολὰς εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐν τῇ Στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ μου περιεχομένων 840 ποικίλων ἀσκήσεων ἔγνωμεν νὰ ἐκδόσωμεν τὰς λύσεις αὐτῶν. Πολυετὴς διδασκαλία ἐν κλασσικοῖς Γυμνασίοις, Πρακτικοῖς Λυκείοις καὶ ***φροντιστηριακὴ*** τοιαύτη πρὸς παρασκευὴν μαθητῶν διὰ τὰς ἀνωτάτας τοῦ κράτους σχολὰς μὲ ἔπεισαν ὅτι οἱ μαθηταὶ ταχύτερον προάγονται καὶ προσαρμόζονται εἰς τὰς μαθηματικὰς μεθόδους, ἂν πολλὰς καὶ ποικίλας λύωσιν ἀσκήσεις, ἔστω καὶ βοηθούμενοί πως. Ἡ μικρὰ αὕτη βοήθεια εἶναι ἀπαραίτητος κατ' ἐξοχὴν διὰ τὰς γεωμετρικὰς ἀσκήσεις, ὧν τὸ πλῆθος καὶ ἡ ποικιλία εἶναι μεγάλη, πολλῶν δὲ τούτων ἡ δυσκολία τοιαύτη, ὥστε, ἂν οἱ μαθηταὶ ἀφίνωνται ἀβοήθητοι, οἱ πλεῖστοι τούτων, ἂν μὴ ὅλοι, ἐπικινδύνως θὰ προσέκρουον. Ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ βοήθεια δὲν πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ μὴ ἀφίνῃ στάδιον ἐργασίας διὰ τὸν μαθητήν, ὅστις οὕτω θὰ ἐκινδύνευε νὰ παρασυρθῇ εἰς μηχανικὴν ἀπομνημόνευσιν τῶν λύσεων ἄνευ οὐδεμιᾶς οὐσιαστικῆς ὠφελείας. Διὰ τοῦτο ἐν τῷ παρόντι ἔργῳ κατὰ τὸ πλεῖστον ὑποδεικνύομεν ἐν γενικαῖς γραμμαῖς τὴν πορείαν, ἣν πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ ὁ μαθητὴς πρὸς λύσιν ἑκάστης ἀσκήσεως, ἀφίνομεν δὲ πολλὰς πολλαχοῦ λεπτομερείας διὰ τὴν αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν, εἰς οὓς καὶ διὰ καταλλήλων παραπομπῶν εἰς τὴν γεωμετρίαν μου ὑποδεικνύομεν τὰς ἑκάστοτε ἀναγκαιούσας γνώσεις. Ἵνα δὲ μὴ τὸ βιβλίον καταστῇ ὑπερμέτρως ὀγκῶδες, ἀναγράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς μόνον τῶν ἀσκήσεων, πλὴν ἐλαχίστων, ὧν ἡ διατύπωσις ἀναγράφεται ἐσφαλμένως ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ δι' αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν παραλείπονται καὶ τὰ σχήματα, ὧν ἡ κατασκευὴ δὲν παρουσιάζει δυσκολίας, καθὼς καὶ ὅσα περιέχονται εἰς τὴν Γεωμετρίαν μου, εἰς ἣν γίνονται αἱ σχετικαὶ παραπομπαί.

Ὁ συγγραφεύς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1.— Ἐὰν Δ (Σχ. 48 β′) εἶναι τυχὸν σημεῖον τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι (§ 24) ΑΒ+ΑΓ> ΔΒ+ΔΓ, ΑΓ+ΓΒ> ΔΑ+ΔΒ, ΑΒ+ΒΓ> ΔΑ+ΔΓ, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν 2(ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ)> 2(ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ), ἄρα ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ> ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ,

2.— Κατὰ τὸ γνωστὸν (§ 10 γ′) ἀξίωμα εἶναι ΔΑ+ΔΒ> ΑΒ, ΔΒ+ΔΓ>ΒΓ καὶ ΔΑ+ΔΓ> ΑΓ (Σχ. 48 β′), Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη καὶ εἶτα διὰ διαιρέσεως διὰ 2 εὑρίσκομεν ὅτι

ΔΑ+ΔΒ+ΔΓ> (ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ) : 2.

3.— Α′, Ἂν Ε εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύ-ΑΒΓΔ (Σχ. 12), εἶναι ΕΑ+ΕΔ> ΑΔ, ΕΑ+ΕΒ> ΑΒ, ΕΒ+ΕΓ> ΒΓ, ΕΓ+ΕΔ> ΔΓ (§ 10 γ′), ὅθεν 2 (ΑΓ+ΒΔ)> ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ΑΓ+ ΒΔ> (ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ) : 2.

Β′. Ἐπειδὴ ΑΒ + ΒΓ> ΑΓ, ΒΓ + ΓΔ> ΒΔ, ΓΔ + ΑΔ> ΑΓ καὶ ΑΔ+ΑΒ> ΔΒ, ἕπεται ὅτι ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ> ΑΓ+ΒΔ.

4.— Διότι αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκ. γωνίαι εἶναι ἴσαι (§ 32).

5.— Αἱ ὑπὸ τῶν διαμέτρων τούτων σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι (§ 32 Πόρ.) πᾶσαι ἴσαι. Ἄρα (§ 34 ἀντ.) καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα εἶναι ἴσα.

6.— Ἡ μὲν συμπληρωματικὴ αὐτῆς εἶναι $\left(1-\frac{2}{5}\right)$ ὀρθ, $=\frac{3}{5}$ ὀρθ. ἡ δὲ παραπληρωματικὴ εἶναι $\left(2-\frac{2}{5}\right)$ ὀρθ. $= 1\frac{3}{5}$ ὀρθ.

7.— Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα καὶ ἡ χ εἶναι (§ 43) παραπληρωματικαί, ἕπεται ὅτι $\chi = \left(2-\frac{1}{2}\right)$ ὀρθ. $=1\frac{1}{2}$ ὀρθ.

8.— Σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi=\left(2-1\frac{4}{7}\right)$ ὀρθ. $=\frac{3}{7}$ ὀρθῆς.

9.— Ἐπειδὴ (§ 43 Πόρ. Ι) πᾶσαι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθ. αἱ δύο ἴσαι ἔχουσιν ἄθροισμα $\left(2-\frac{2}{5}\right)$ ὀρθ. $=\frac{8}{5}$ ὀρθ. Ἑκάστη ἄρα εἶναι $\frac{8}{5}$ ὀρθ. $: 2 =\frac{4}{5}$ ὀρθῆς.

10.— Ἑκάστη τούτων εἶναι (§ 43 Πόρ. ΙΙ) ἴση πρὸς (4 : 3) ὀρθ. $=\frac{4}{3}$ ὀρθῆς.

β'.) Ἐὰν ΒΓ' εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ΒΓ (Σχ. 25), θὰ εἶναι (§ 43) ΔΒΓ' $=\frac{2}{3}$ ὀρθ. ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς ΔΒΑ.

11.— Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο γωνίαι εὐθ. σχήματος καὶ α, β αἱ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἔχουσαι ἐξωτερικαὶ γωνίαι, θὰ εἶναι (§ 43) $Α+α=2$ ὀρθ. καὶ $Β+β=2$ ὀρθ. ὅθεν $Α+α=Β+β$· ἐπειδὴ δὲ $α=β$, ἔπεται ὅτι καὶ $Α=Β$.

12.— Ἂν ΒΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ (Σχ. 28) καὶ ΒΗ ἡ διχοτόμος τῆς ΓΒΔ καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2 τὰ μέλη τῆς (§ 43) ἰσότητος $ΑΒΓ+ΓΒΔ=2$ ὀρθ. εὑρίσκομεν ὅτι $ΖΒΓ+ΓΒΗ=1$ ὀρθ. ἢ $ΖΒΗ=1$ ὀρθ.

13. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ διχοτόμοι ΒΖ, ΒΗ, ΒΘ (Σχ. 18) τῶν γωνιῶν ΑΒΔ, ΔΒΓ καὶ ΑΒΕ, θὰ εἶναι (ἄσκ. 12) ἡ ΒΖ κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ΒΗ καὶ ΒΘ. Ἄρα αὗται ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν (§ 37).

14.— Ἂν Α καὶ Β (Σχ. 31) εἶναι τὰ δοθέντα σημεῖα, πᾶσα περιφέρεια ἔχουσα κέντρον τυχὸν σημεῖον Η τῆς ΓΔ, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ΗΑ, διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ Β (§ 51).

15.— Ἐπειδὴ $ΓΗ>ΓΕ$ (Σχ. 30) ἔπεται (§ 49 γ') ὅτι $ΔΗ>ΔΕ$ καὶ τὸ Ε κεῖται μεταξὺ Δ καὶ Η, ἡ δὲ ΓΕ διὰ τοῦτο ἐντὸς τῆς γωνίας ΗΓΔ· ἄρα $ΗΓΔ>ΕΓΔ$. Ἂν αἱ πλάγιαι ΓΗ καὶ ΓΖ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου, λαμβάνοντες $ΔΕ=ΔΖ$ καὶ ἄγοντες τὴν ΔΕ ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

16.— Ἂν ἀχθῇ ἡ ΔΓ, ἐπειδὴ $ΑΒ<ΑΓ$, ἔπεται (§ 48) ὅτι $ΔΒ<ΔΓ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΔ<ΑΕ$ θὰ εἶναι $ΓΔ<ΓΕ$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $ΔΒ<ΓΔ$ ἔπεται ὅτι $ΔΒ<ΓΕ$.

17.— Εὑρίσκομεν (§ 55) τὸ μέσον Δ τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 32) καὶ γράφομεν μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΑ περιφέρειαν.

18.— Διαιροῦμεν (§ 55) αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον ἥμισυ εἰς δύο ἄλλα ἴσα.

19.— Τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ θὰ κεῖται (§ 53) ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν τῶν δοθέντων σημείων Γ καὶ Δ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ (§ 55) ἡ κάθετος αὕτη καὶ νὰ ὁρισθῇ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ, ἂν ὑπάρχῃ τοιοῦτον.

20.— Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς δοθείσης χορδῆς. Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

21.— Ἂν ΓΕ καὶ ΓΖ (Σχ. 30) εἶναι τοιαῦται πλάγιαι, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ εἶναι (§ 61. Πόρ. I) ἴσα, ἄρα $ΓΕ=ΓΖ$.

22.— Ἔστω ΕΖ (Σχ. 30) κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΓΔ τῆς γωνίας ΕΓΖ. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΕΓΔ καὶ ΓΔΖ εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι $ΓΕ=ΓΖ$.

23.— Ἔστω ἡ διχοτόμος ΑΔ (Σχ. 43) κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσα (§ 61 Πόρ. I), ἔπεται ὅτι $ΑΒ=ΑΓ$.

24.— Ἂν Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τὰ τρίγωνα ΑΒΔ,ΑΔΓ εἶναι (§ 62) ἴσα, ἄρα ΔΒ=ΔΓ.

25.— Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' εἶναι (§ 62) ἴσα, ἄρα ΒΓ=Β'Γ'

26.— Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΔΕ εἶναι (§ 62) ἴσα, ἄρα ΑΒ=ΓΕ καὶ γων. ΒΑΕ=γων. ΑΕΓ.

27.— Ἂν ΑΔ. (Σχ. 43) εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι (§ 62 Πόρ. Ι) ἴσα, ἄρα ΑΒ=ΑΓ.

28.— Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β' εἶναι (§ 62) ἴσα, ἄρα ΑΒ=Α'Β'· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ΒΓ=Β'Γ' καὶ ΑΓ=Α'Γ'. Ἄρα (§ 63) τὰ ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα,

29.— Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 43) λάβωμεν ΑΕ=ΑΖ, θὰ εἶναι καὶ ΕΒ=ΖΓ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ Β=Γ, τὰ τρίγωνα ΕΒΔ καὶ ΖΔΓ εἶναι ἴσα· ἄρα ΕΔ=ΖΔ.

30.—. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ 36), τὰ τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΔΕ, ΓΕΖ εἶναι ἴσα (§ 66 Πόρ. Ι καὶ § 62). Ἄρα εἶναι ΔΕ=ΕΖ=ΖΔ.

31.— Ἂν Δ καὶ Ε εἶναι τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΓΕ εἶναι ἴσα (§ 62). Ἄρα ΒΕ=ΓΔ.

32.— Αἱ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἔχουσαι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι (ἄσκ. 11), ἄρα (§ 67) τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

33.— Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ (§ 58 Α') ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευράν.

34.— Ἐπειδὴ ΓΕ=ΓΖ (Σχ. 30), τὸ τρίγωνον ΓΕΖ εἶναι ἰσοσκελές· ἄρα (§ 68) ἡ ΓΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΕΓΖ.

35.— Ἂν ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι αἱ ἴσαι βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, Η δὲ καὶ Θ τὰ μέσα αὐτῶν, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΔΘΖ εἶναι (§ 62 Πόρ. Ι) ἴσα, ἄρα ΑΓ=ΔΖ καὶ ἑπομένως ΑΒ=ΔΕ. Εἶναι ἄρα (§ 63) τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἴσα.

Σημ. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως καὶ δι' ἐπιθέσεως.

36.— Ἔστω ΑΔ (Σχ. 43) ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εἶναι (§ 62) ἴσα, ἕπεται ὅτι ΔΒ=ΔΓ, ὅθεν ΑΔ διάμεσος καὶ γων. ΑΔΒ=γων. ΑΔΓ, ὅθεν (§ 32 Πόρ. Ι) ἕπεται ὅτι ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

37.—Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Α (Σχ. 43) ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Δ τῆς βάσεως ΒΓ, οὐδεμία δὲ ἄλλη ἄγεται διὰ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (§ 68).

38—. Διαιρεῖται (§ 69, 70) ἕκαστον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἕκαστον τούτων πάλιν εἰς δύο ἴσα μέρη.

39.— Κατασκευάζομεν (§ 56) ὀρθὴν γωνίαν καὶ διχοτομοῦμεν (§ 70) αὐτήν.

40.— Κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν λαμβάνομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τμήματα ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα κτλ.

41.— Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα διὰ δύο καθέτων διαμέτρων καὶ διχοτομοῦμεν (§ 69) ἕκαστον τούτων.

42.— Διότι κεῖται ἀπέναντι μαγαλυτέρας γωνίας (§ 74 ἀντ.)

43.— Προφανῶς γων. ΔΒΓ<Β, ἄρα γων. ΔΒΓ<Γ καὶ ἑπομένως (§ 74 ἀντ.) ΔΓ<ΔΒ.

44.— Ἐὰν διάμεσόν τινα ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ προεκτείνωμεν κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Δ φορὰν καὶ λάβωμεν ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΔ, θὰ εἶναι ΓΕ=ΑΒ (ἄσκ. 26). Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΕΓ προκύπτει (§ 71) ὅτι ΑΓ—ΓΕ<ΑΕ< ΑΓ+ΓΕ, ὅθεν ΑΓ—ΑΒ< 2. ΑΔ< ΑΓ+ΑΒ· ἄρα
(ΑΓ—ΑΒ) : 2 <ΑΔ< (ΑΓ+ΑΒ) : 2.

45.—Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, ἀποδεικνύομεν ὅτι ΑΒ=ΓΕ καὶ γων. ΒΑΔ=γων. ΑΕΓ. Ἐὰν δὲ ΑΓ>ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ΑΓ>ΓΕ, ἄρα (§ 74) καὶ γων. ΕΑΓ<γων. ΑΕΓ, ἢ γων. ΔΑΓ<γων. ΒΑΔ.

46.—Ἂν ΑΓ>ΑΒ καὶ ΑΔ εἶναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχοντα ΑΔ κοινήν, ΒΔ=ΓΔ καὶ ΑΒ<ΑΓ θὰ ἔχωσι (§ 76) καὶ γων. ΑΔΒ< γων. ΑΔΓ, ὅθεν ΑΔΒ+ΑΔΓ< 2. ΑΔΓ ἢ 2 ὀρθ. <2. ΑΔΓ καὶ 1 ὀρθ. <ΑΔΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν 1 ὀρθ. >ΑΔΒ

47.—Ἂν Γ εἶναι τὸ μέσον εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ ΑΔ, ΒΕ κάθετοι ἐπὶ ἐπὶ τυχοῦσαν διὰ τοῦ Γ διερχομένην εὐθεῖαν, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΕ εἶναι (§ 78) ἴσα. Ἄρα ΑΔ=ΒΕ.

48.—Ἂν ΑΔ εἶναι διχοτόμος γωνίας Α καὶ ΔΒ, ΔΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ εἶναι (§ 78) ἴσα. Ἄρα ΑΒ=ΑΓ.

49.—Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἰσοσ. τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΕΗ, ΖΘ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΕΒΗ, ΖΓΘ εἶναι ἴσα (§ 66, 78). ἄρα ΕΗ=ΖΘ.

50.—Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΔΕ, ΔΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΒΕΔ, ΔΖΓ εἶναι (§ 66, 78) ἴσα, ἄρα ΔΕ=ΔΖ.

51.—Ἂν ΔΕ, ΔΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ μέσου Δ τοῦ τόξου ΒΔΓ (Σχ. 46) ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ΑΒ καὶ ΑΓ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΕΔ, ΑΖΔ εἶναι (§ 34, 78) ἴσα. Ἄρα ΔΕ=ΔΖ. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ὅταν τὸ Δ εἶναι μέσον χορδῆς.

52.—Ἔστω ΑΒΓ ἰσοσκελ. τρίγωνον καὶ ΒΕ, ΓΖ τὰ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ ὕψη. Τὸ ὀρθ. τρίγωνα ΒΕΓ, ΓΖΒ ἔχοντα τὴν ΒΓ κοινὴν καὶ Γ=Β εἶναι ἴσα· ἄρα ΒΕ=ΓΖ.

53.—Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ, ἕπεται (ἄσκ. 52) ὅτι ΓΖ=ΒΕ· ὁμοιως εἶναι ΑΔ=ΒΕ, ἄρα ΑΔ =ΒΕ=ΓΖ.

54.—Ἐὰν τὰ ὕψη ΒΕ, ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσα, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΒΕΓ, ΓΖΒ εἶναι (§ 79) ἴσα, ἄρα Β=Γ καὶ (§ 66) κατ' ἀκολουθίαν ΑΓ=ΑΒ.

55.—Ἂν Ζ+Ε=2 ὀρθ. (Σχ. 55), ἐπειδὴ καὶ δ+Ε=2 ὀρθ. (§ 43), ἕπεται ὅτι δ=Ζ. Ἄρα (83 α') αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

56.—Ἂν (Σχ. 55) εἶναι Ζ=β, ἐπειδὴ Ζ=α, ἕπεται α=β. Ἄρα (§ 83 α') αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι.

57.—Ἂν α+Ε=2 ὀρθ. ἐπειδὴ Ε+δ=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι α=δ. Ἄρα (§ 83 β') αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

58.— Θέλομεν νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Γ (Σχ. 66) εὐθεῖαν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΔ γωνίαν φ (Σχ. 65). Μὲ κορυφὴν Δ καὶ πλευρὰν ΔΒ σχηματίζομεν γωνίαν ΒΔΕ ἴσην πρὸς φ καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν εὐθεῖαν ΓΑ παράλληλον τῇ ΔΕ. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι (§ 88 α') Α=ΒΔΕ=φ. Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

Σημ. Ἡ ἄσκησις αὕτη νοηθήτω μετὰ τὴν § 88, ἤτοι εἰς τὴν αὐτὴν μετὰ τῆς 59 θέσιν.

59.— α') Ἐπειδὴ (Σχ 55) εἶναι Ζ=δ (§ 88 α') καὶ δ+Ε=2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι Ζ+Ε=2 ὀρθ· β') Ἐκ τῶν Ζ=α, α=β ἕπεται Ζ=β. γ') Ἐκ τῶν α+γ=2 ὀρθ. καὶ γ=Ε ἕπεται α+Ε=2 ὀρ.

60.— Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ διχοτόμοι ΕΗ καὶ ΖΚ τῶν γωνιῶν α καὶ γ (Σχ. 59), αἱ γωνίαι ΖΕΗ, ΕΖΚ εἶναι ἴσαι ὡς ἡμίση τῶν ἴσων α καὶ γ. Ἄρα (§ 83 β') αἱ ΕΗ, ΖΚ εἶνα παράλληλοι.

61.— Αἱ διχοτόμοι τῶν γ καὶ δ (Σχ 55) εἶναι κάθετοι (ἄσκ. 12)· αἱ διχοτόμοι τῶν α καὶ δ εἶναι παράλληλοι (ἄσκ. 60). Ἄρα (§ 88 Πόρ. Ι) ἡ διχοτόμος τῆς γ κάθετος ἐπὶ τὴν τῆς α.

62.— Ἡ ἐκ σημείου Β τῆς πλευρᾶς ΑΒ γωνίας ΒΑΓ παράλληλος τῇ διχοτόμῳ ΑΔ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ε. Ἐπειδὴ Ε=ΔΑΓ καὶ Β=ΒΑΔ, ἕπεται ὅτι Ε=Β, ὅθεν ΑΒ=ΑΕ (§ 67).

63.— Ἔστω ΑΓ' εἶναι ἡ προέκτασις τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΑΓ. α') Ἐπειδὴ ΑΒ=ΒΔ, ἕπεται Δ=ΒΑΔ ἐπειδὴ δὲ καὶ Δ=ΔΑΓ (§ 88), ἕπεται ΒΑΔ=ΔΑΓ. β') Ἐπειδὴ ΑΒ=ΒΔ, εἶναι Δ=ΔΑΒ· ἐπειδὴ δὲ καὶ Δ=ΔΑΓ', ἕπεται ὅτι ΔΑΒ=ΔΑΓ'.

64.— Ἐπειδὴ (Σχ. 48 β') Β+Γ <2 ὀρθ. (§ 73), ἕπεται ὅτι

$$\frac{\text{Β}}{2} + \frac{\text{Γ}}{2} < 2 \text{ ὀρθ.}$$

καὶ (§ 88 Πόρ ΙΙ) αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ κείμενον ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ. Ἐὰν δὲ ΔΖ, ΔΗ, ΔΘ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Δ ἀπὸ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, θὰ εἶναι (§ 78

Πόρ.) ΔΖ=ΔΘ καὶ ΔΖ=ΔΗ, ὅθεν ΔΘ=ΔΗ. Ἄρα (§ 79 Πόρ. ΙΙ) τὸ Δ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν Α.

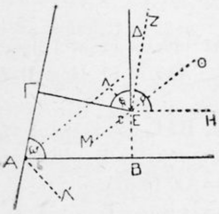
65.— Ἔστω Δ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων καὶ ΕΔΖ εὐθεῖα παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΒΓ. Ἐπειδὴ γων. ΕΒΔ= γων. ΔΒΓ= καὶ γων. ΕΔΒ= γων. ΔΒΓ, ἔπεται ὅτι γων. ΕΒΔ= γων. ΕΔΒ καὶ ΕΒ=ΕΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ΖΓ=ΔΖ. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι ΕΒ+ΖΓ=ΕΖ.

66.— Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ. Αἱ κάθετοι εἰς τὰ Δ καὶ Ε ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΑΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΕ σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα μικρότερον 2 ὀρθῶν, διότι ἑκατέρα εἶναι μέρος ὀρθῆς. Αἱ ῥηθεῖσαι ἄρα κάθετοι τέμνονται εἴς τι σημεῖον Η. Ἐπειδὴ δὲ (§ 51) εἶναι ΗΒ=ΗΓ καὶ ΗΓ=ΗΑ, ἔπεται ὅτι ΗΒ=ΗΑ· κεῖται ἄρα τὸ Η καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

67.—Ἔστω ΑΗ ἡ διχοτόμος τῆς ω καὶ ΕΚ ἡ διχοτόμος τῆς φ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Λ (Σχ. 61). Ἐπειδὴ ω=φ, θὰ εἶναι καὶ ΗΑΓ=ΚΕΔ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ΚΛΓ=ΚΕΔ, ἔπεται ὅτι ΗΑΓ=ΚΛΓ καὶ ἑπομένως (§ 83 α') αἱ ΑΗ καὶ ΕΛΚ εἶναι παράλληλοι. Ἂν πρόκειται περὶ τῶν ω καὶ τ, παρατηροῦμεν (ἄσκ. 13) ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς τ ἀποτελεῖ μίαν εὐθεῖαν μετὰ τῆς ΕΚ.

68.— Ἡ διχοτόμος τῆς σ (Σχ. 61) ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς φ (ἄσκ. 12) εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της διχοτόμον τῆς ω

69.— Ἔστωσαν ω καὶ φ τοιαῦται γωνίαι. Ἡ διχοτόμος ΑΛ τῆς ω καὶ ἡ ΕΘ τῆς ρ εἶναι παράλληλοι (ἄσκ. 67). Ἐπειδὴ δὲ φ=ω=ρ, ἔπεται ὅτι ΓΕΛ=ΖΕΘ, ἡ δὲ ἰσότης ΓΕΖ=1 ὀρθ ἢ ΓΕΛ+ΛΕΔ+ΔΕΖ=1 ὀρθ. γίνεται ΛΕΔ+ΔΕΖ+ΖΕΘ= 1 ὀρθ. ἢ ΛΕΘ= 1 ὀρθ. Εἶναι λοιπὸν ἡ ΕΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΛ. Ἂν πρόκειται περὶ τῶν διχοτόμων ΑΛ', ΕΜ τῶν υ καὶ τ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΑΛ' ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΛ εἶναι παράλληλος τῇ ΕΛ' ἡ δὲ ΕΜ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΛ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΛ'.



(Ἄσκ. 69)

70.—Αἱ διχοτόμοι ΑΛ' καὶ ΕΛ τῶν υ καὶ φ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΛ εἶναι παράλληλοι.

71.— Αὗται εἶναι ἴσαι καὶ συμπληρωματικαί· ἄρα ἑκατέρα ἥμισυ ὀρθῆς ἢ 45°.

72.— Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων γωνιῶν εἶναι $\left(2 - \frac{2}{5}\right)$ ὀρθ. $= \frac{8}{5}$ ὀρθ. Ἄρα ἑκατέρα $\frac{4}{5}$ ὀρθῆς.

73.— Τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων εἶναι $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἡ μικροτέρα τούτων θὰ εἶναι $\frac{5}{4}:3=$ $\frac{5}{12}$ ὀρθ. καὶ ἡ ἄλλη $\frac{10}{12}$ ὀρθῆς.

74.— Κατὰ τὸ Θ. (§ 92) τὸ ζητούμενον εἶναι $2\times 10-4=16$ ὀρθ.

75.— Προφανῶς 2 ὀρθ. : $3=\frac{2}{3}$ ὀρθ. ἢ $180^\circ : 3=60^\circ$.

76.— Ἂν ΒΔ καὶ ΓΔ (Σχ. 48 β′) διχοτομοῦσι τὰς Β καὶ Γ, θὰ εἶναι $\omega+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=2$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $A+B+\Gamma=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $\omega+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=A+B+\Gamma$, ὅθεν $\omega=A+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{A}{2}+\frac{A+B+\Gamma}{2}$

ἢ $\omega=\frac{A}{2}+1$ ὀρθ.

77.—Ἑκατέρα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ (Σχ. 48 β′) εἶναι μικροτέρα 2 ὀρθ. Τὰ ἡμίση ἄρα αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον 2 ὀρθῶν καὶ (§ 88 Πόρ. II) αἱ διχοτόμοι ΒΖ, ΓΖ αὐτῶν τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ζ. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 12) αἱ γωνίαι ΔΒΖ καὶ ΔΓΖ εἶναι ὀρθαί, ἕπεται ὅτι (§ 92) $\Delta+Z=2$ ὀρθ. ἢ 1 ὀρθ. $+\frac{A}{2}+Z=2$ ὀρθ.

ὅθεν $Z=1$ ὀρθ.$-\frac{A}{2}$.

78.— Καλοῦντες Α′, Β′, Γ′, Δ′, Ε′ τὰς οὕτω σχηματιζομένας ἐξωτερικὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 64), βλέπομεν ὅτι $A+A'=2$ ὀρθ., $B+B'=2$ ὀρθ....,..$E+E'=2$ ὀρθ. Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $(A+B+.....+E)+(A'+B'+....+E')=10$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 92) εἶναι $(A+B+.....+E)=6$ ὀρθάς, ἕπεται ὅτι $(A'+B'+.....+E')=4$ ὀρθ.

79. Ἐὰν ἡ διχοτόμος ΒΖ τῆς ΓΒΔ (Σχ. 48) εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ, θὰ εἶναι Γ=ΓΒΖ καὶ Α=ΖΒΔ, ἄρα Γ=Α καὶ ΑΒ=ΒΓ. Ἀντιστρόφως. Ἂν ΑΒ=ΒΓ, θὰ εἶναι Γ=Α· ἐπειδὴ δὲ ΓΒΔ=Α+Γ (§ 91 Πόρ. II), ἕπεται 2.ΓΒΖ=2Γ, ὅθεν ΓΒΖ=Γ καὶ ἑπομένως (§ 83) αἱ ΑΓ καὶ ΒΖ εἶναι παράλληλοι.

80.—Μὲ πλευρὰν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΒΓ (Σχ. 65) καὶ κορυφὰς Β καὶ Γ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ γωνίας Γ καὶ Β, ἴσας τῇ δοθείσῃ ω (§ 64). Ἡ γωνία Α τῶν μὴ κοινῶν πλευρῶν αὐτῶν εἶναι ἡ ζητουμένη.

81.—Διχοτομοῦμεν τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης.

82.— Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α (Σχ. 37) καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὁρίζομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς τὸ δοθέν. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν ΑΒ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς Α γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν (ἢ πρὸς τὴν συμπληρωματικήν της). Οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

83.— Κατασκευάζομεν (ἄσκ. 81) τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας αὐτοῦ καὶ εἶτα ἐργαζόμεθα κατὰ τὸ πρόβλημα (§ 94).

84.— Κατασκευάζομεν δύο εὐθείας καθέτους καὶ ἔστω Δ ἡ τομὴ αὐτῶν. Ἐπὶ τῆς μιᾶς ὁρίζομεν τμῆμα ΑΔ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος· εἶτα μὲ κορυφὴν σημεῖον Ζ τῆς ἄλλης καὶ πλευρὰν ΔΖ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΖΕ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς ΔΑ. Ἄγομεν ἔπειτα ΑΒ παράλληλον τῇ ΕΖ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΒ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΓ=ΔΒ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΓ. Τὸ ΒΑΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, Διατί;

85.—Κατασκευάζομεν, ὡς προηγουμένως, δύο εὐθείας ΔΑ,ΔΒ καθέτους καὶ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΑ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος. Ἔπειτα μὲ κορυφὴν Α καὶ πλευρὰν ΑΔ κατασκευάζομεν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης, ἐπὶ τῆς ΔΒ ὁρίζομεν τμῆμα ΔΓ ἴσον πρὸς ΔΒ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Διατί;

86.— Ἡ ἀπέναντι τῆς δοθείσης εἶναι (§ 98) 12 μ, αἱ δὲ ἄλλαι ἔχουσιν ἄθροισμα 40—24=16 μ. Ἄρα (§ 98) ἑκατέρα εἶναι 16 : 2=8 μ.

87.— Ἡ ἀπέναντι τῆς δοθείσης εἶναι (§ 98 β′) $\frac{2}{3}$ — ὀρθῆς, αἱ δὲ ἄλλαι ἔχουσιν ἄθροισμα $4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ ὀρθ. καὶ ἑκατέρα εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς

88.—Ἐὰν Δ εἶναι σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΔΕ,ΔΖ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ,ΑΒ, τὸ σχῆμα ΑΕΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ΔΖ=ΑΕ.Ἐπειδὴ δὲ Β=Γ καὶ ΕΔΒ =Γ,ἕπεται Β=ΕΔΒ καὶ ΕΔ=ΕΒ. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς ΔΖ=ΑΕ προκύπτει ὅτι ΔΖ+ΕΔ=ΑΕ+ΕΒ =ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΖ+ΑΕ=ΔΕ+ΔΖ, ἕπεται ὅτι ΔΖ+ΕΔ+ΑΖ+ΑΕ= 2. ΑΒ, ὅπερ σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ Δ.

89.—Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, ΑΕ διχοτόμος τῆς Α τέμνουσα τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ε καὶ ΓΖ διχοτόμος τῆς Γ τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ ΔΓΖ=ΖΓΒ καὶ ΔΓΖ = ΓΖΒ ἕπεται ὅτι ΖΓΒ=ΓΖΒ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΕΑΒ=ΖΓΒ ὡς ἡμίση ἴσων γωνιῶν, ἕπεται ὅτι ΕΑΒ=ΓΖΒ, ἄρα (§ 83) ΑΕ καὶ ΓΖ παράλληλοι.

90.— Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ε, διότι ἐκ τῆς ἰσότητος Α+Β=2 ὀρθ. (88 γ′) ἕπεται ὅτι $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=1$ ὀρθ.<2 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $E+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=2$ ὀρθ. καὶ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=1$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι Ε= 1 ὀρθ. καὶ ΑΕ, ΒΕ εἶναι κάθετοι.

91.—Θέτοντες τὸ ΑΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ ὥστε ἡ κορυφὴ Α νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Ε καὶ ἡ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΕΖ ἀποδεικνύομεν ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουσιν.

92.— Κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ὁρίζομεν τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ δοθείσας πλευράς. Εἶτα ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκατέρου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸ ἄλλο.

93.— Ἐὰν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἄρα ΑΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ΕΖ=ΑΔ.

94.—Ὡς διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΖΔ (ἄσκ. 93).

95.— Ἂν κληθῶσι Ζ,Η,Θ,Κ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΕ, ΒΕ, ΓΕ, ΔΕ (Σχ. 70), θὰ εἶναι ΖΕ=ΕΘ καὶ ΗΕ=ΕΚ ὡς ἡμίση ἴσων τμημάτων. Τοῦ ΖΗΘΚ ἄρα αἱ διαγώνιοι τέμνονται δίχα· εἶναι ἄρα (§ 102) τοῦτο παραλληλόγραμμον.

96.—Κατασκευάζομεν (ἄσκ. 39) γωνίαν ἴσην πρὸς ἥμισυ ὀρθῆς, προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς κορυφῆς καὶ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς ἐπὶ τῆς μιᾶς τμήματα ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ μιᾶς τῶν διαγωνίων καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου. Ἄγοντες τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν τμημάτων ὁριζόμενα σχηματίζομεν τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον. Διατί ;

97.— Ἐὰν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ἐπειδὴ (§ 105 Θ. Ι) ΑΓ=ΒΔ καὶ Ε μέσον αὐτῶν, θὰ εἶναι ΑΕ=ΒΕ καὶ ΕΑΒ=ΕΒΑ,

98.— Ἐὰν (ἄσκ. 97) εἶναι ΕΑΒ=$\frac{2}{7}$ ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ ΕΒΑ=$\frac{\ }{7}$ ὀρθ. Ἄρα ΑΕΒ=$2-\frac{4}{7}=\frac{10}{7}$ ὀρθ. καὶ ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς $\frac{4}{7}$ ὀρθῆς.

99.— Αἱ διάμετροι τέμνονται δίχα, ἄρα τὸ τετράπλευρον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι τοῦτο εἶναι (§ 105 Θ. Ι. ἀντ.) ὀρθογώνιον.

100.— Τέμνομεν τὴν διαγώνιον δίχα καὶ καθέτως καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ὁρίζομεν ἀπὸ τῆς τομῆς καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τμήματα ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου. Τὰ ἄκρα τῶν οὕτως ὁρισθέντων καθέτων τμημάτων εἶναι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διατί ;

101.— Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως ὁρίζομεν τμήματα ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας διαγωνίους καὶ καθέτως διχοτομούμενα. Τὰ ἄκρα αὐτῶν εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου ῥόμβου. Διατί;

102.— Ἂν ἐκ τοῦ Ι ἀχθῇ ΙΠ κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΜ (Σχ. 71) καὶ ἡ ΛΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΙ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΙΠΜ, ΛΡΜ εἶναι (§ 78) ἴσα. Ἄρα ΙΠ=ΛΡ.

103.— Ἂν κληθῶσιν Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ (Σχ. 69), ἑκατέρα τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Εἶναι ἄρα ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τὸ ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμον.

104.— Ὡς διαγώνιοι παραλληλογράμμου (ἄσκ. 103).

105.— Ἂν εἶναι Ο, Π, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ (Σχ. 71), τὸ ΟΠΡΣ εἶναι (ἄσκ. 103) παραλληλόγραμμον, οὗ $ΟΠ=\frac{ΕΗ}{2}$ καὶ $ΠΡ=\frac{ΘΖ}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ΕΗ=ΘΖ, θὰ εἶναι καὶ ΟΠ=ΠΡ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ ΟΠΡΣ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι τοῦ ΟΠΡΣ εἶναι ἴσαι (§ 89) πρὸς τὰς γωνίας τῶν καθέτων ΕΗ καὶ ΘΖ, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ΟΠΡΣ εἶναι ὀρθαί, ἄρα τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

106.— Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

107.— Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, Θ δὲ καὶ Η δύο σημεῖα τῶν ΒΓ, ΑΔ καὶ Κ ἡ τομὴ τῶν ΕΖ, ΗΘ. Ἐπειδὴ ΕΖ εἶναι (§ 100) παράλληλος πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, εἶναι δὲ ΑΕ=ΕΒ, θὰ εἶναι (§ 106) καὶ ΗΚ=ΚΘ.

108.— Ἔστω ΕΖ ἡ διάμεσος τραπεζίου ΑΒΓΔ· ἐὰν ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Η (§ 106 Πόρ. Ι) καὶ τὴν ΓΒ εἰς τὸ μέσον Ζ ἕνεκα τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. Συμπίπτει ἄρα ἡ παράλληλος αὕτη μὲ τὴν διάμεσον. Ἐπειδὴ δὲ

$$ΕΗ=\frac{ΓΔ}{2} \text{ καὶ } ΗΖ=\frac{ΑΒ}{2} \text{ (§ 106 Π. ΙΙ), ἕπεται ὅτι } ΕΖ=\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}.$$

109.— Ἡ διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ, ΔΓ περιεχόμενα τμήματα τῆς ΑΔ εἶναι ἴσα καὶ τὰ μεταξὺ αὐτῶν τμήματα τυχόντος εὐθ. τμήματος εἶναι ἴσα (§ 106).

110.—Ἂν Η καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ διάμεσος αὐτοῦ, ἡ ΕΗ εἶναι (§ 106 Πόρ. ΙΙ) παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις, ἄρα συμπίπτει μὲ τὴν διάμεσον. Ἐκ δὲ τῶν

$$ΕΘ=\frac{ΑΒ}{2},\ ΕΗ=\frac{ΔΓ}{2} \text{ ἕπεται ὅτι } ΗΘ=\frac{ΑΒ-ΔΓ}{2}.$$

111.— Διότι (Σχ. 74) ΑΔ=ΔΒ=ΔΓ (§ 106. Πόρ. ΙΙ)

112.—Ἂν εἶναι ΓΔ=ΒΕ (Σχ. 76), θὰ εἶναι καὶ ΓΘ=ΒΘ, ΘΔ=ΘΕ (§ 103), τὰ δὲ τρίγωνα ΒΘΔ καὶ ΓΘΕ θὰ εἶναι ἴσα· ἄρα ΒΔ=ΓΕ καὶ ἑπομένως ΑΒ=ΑΓ.

113.—Διαιροῦμεν (§107) τὸ δοθὲν τμῆμα εἰς 3ἢ4 ἴσα μέρη καὶ κατασκευάζομεν τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἔχον πλευρὰς ἴσας πρὸς ἓν τῶν μερῶν τούτων.

114.—Ἔστωσν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη τριγώνου ΑΒΓ. Ἄγομεν δι' ἑκάστης κορυφῆς εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν· οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' (Α' ἀπέναντι Α κ.τ.λ.). Ἕνεκα τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΒ', ΑΓΒΓ' εἶναι Γ'Α=ΒΓ=ΑΒ', ἤτοι τὸ ὕψος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν πλευρὰν Γ' Β', εἶναι δὲ καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν (§ 88 Πόρ. Ι). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ΒΕ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν Α'Γ' καὶ τὸ ΓΖ τὴν Α'Β'. Ἄρα (ἄσκ. 66) τὰ ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

115.—Ἐὰν ἡ ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος ΒΕ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η, τὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΗΕ εἶναι (§ 61 Πόρ. Ι) ἴσα· ἄρα ΑΒ=ΑΗ καὶ ΒΕ=

ΕΗ. Εἶναι λοιπὸν τὸ Ε μέσον τῆς ΒΗ, ἡ δὲ ΕΖ (§ 106 Πόρ. II) εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἴση πρὸς $\frac{\text{ΗΓ}}{2}$ ἢ $\frac{\text{ΑΓ}-\text{ΑΗ}}{2}=\frac{\text{ΑΓ}-\text{ΑΒ}}{2}$.

116.— Ἔστω Ε τὸ δοθὲν κοινὸν σημεῖον καὶ Ο τὸ ἀπρόσιτον σημεῖον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἄγομεν ἐκ τοῦ Ε κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνουσαν τὴν ΓΔ εἰς τὸ Θ. Ἐπειδὴ αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΟΗΘ, ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΕΟ εἶναι (ἄσκ. 114) τὸ τρίτον ὕψος καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΗΘ κάθετος.

117.—Ἂν Α′, Β′ (Σχ. 77) εἶναι τὰ πρὸς κέντρον Ο συμμετρικὰ τῶν Α, Β, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, Α′ΟΒ′ εἶναι προφανῶς ἴσα, ἄρα ΟΒΑ=ΟΒ′Α′ καὶ αἱ ΑΒ, Α′Β′ εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν δὲ Θ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΘΟ τέμνει τὴν Α′Β′ εἰς τὸ Θ′, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΒΘ, ΟΒ′Θ′ εἶναι (§ 61) ἴσα, ἕπεται ὅτι ΟΘ=ΟΘ′, ἤτοι Θ′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Θ. Ὥστε τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ΑΒ κεῖνται ἐπὶ τῆς Α′Β′, ἥτις εἶναι διὰ τοῦτο συμμετρικὴ τῆς ΑΒ.

118.—Τῆς πλευρᾶς ΟΑ (Σχ. 77) συμμετρικὸν εἶναι ἡ ΟΑ′, τῆς ΟΒ ἡ ΟΒ′, ἄρα τῆς ΑΟΒ ἡ Α′ΟΒ′.

119.—α′) Ὁρίζομεν τὰ πρὸς κέντρον Α συμμετρικὰ Β′, Γ′ τῶν κορυφῶν Β, Γ καὶ ἄγομεν τὴν Β′Γ′. β′) Ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἄγομεν τὰς Α′Β, Α′Γ. Τὸ τρίγωνον Α′ΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Διατί;

120.— α′.) Ὁρίζομεν τὰ πρὸς κέντρον Α συμμετρικὰ Β′, Γ′ τῶν ἄκρων Β, Γ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἄγομεν τὴν Β′Γ′. Τὸ ΑΒ′Γ′ εἶναι τὸ ζητούμενον. β′) Ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τῆς κορυφῆς Α καὶ ἄγομεν τὰς Α′Β, Α′Γ. Το Α′ΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Διατί;

121.— Ἐὰν (Σχ. 76) ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέσου ΑΙ λάβωμεν τμῆμα ΙΑ′ ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΑΙ, θὰ εἶναι (§ 108) ΘΑ′=ΑΘ, ὁμοίως Β′Θ=ΒΘ, Γ′Θ=ΓΘ. Εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ συμμετρικὰ πρὸς Θ καὶ ἑπομένως (§ 110) ἴσα.

122.— Ἐὰν Ζ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ (Σχ. 70), ἡ δὲ ΖΕ τέμνῃ τὴν ΔΓ εἰς τὸ Η, θὰ εἶναι ΕΖ=ΕΗ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΑΕΖ, ΓΕΗ. Πᾶν ἄρα σημεῖον τῆς περιμέτρου ἔχει τὸ συμμετρικόν του πρὸς Ε ἐπ᾽ αὐτῆς. Εἶναι λοιπὸν τὸ Ε κέντρον συμμετρίας τῆς περιμέτρου. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ δι᾽ ὅλον τὸ παραλληλόγραμμον.

123.— Ἐὰν ΑΒ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι xy, Α′, Β′ τὰ συμμετρικὰ τῶν Α, Β καὶ α, ϐ οἱ πόδες τῶν καθέτων ΑΑ′, ΒΒ′, θὰ εἶναι Αα= Βϐ· ἐπειδὴ δὲ Αα = αΑ′ καὶ Βϐ = ϐΒ′, ἕπεται ὅτι αΑ′=ϐΒ′ καὶ τὸ αΑ′Β′ϐ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ Α′Β′ παράλληλος τῷ xy καὶ τῇ ΑΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ συμμετρικὸν Μ′ σημείου Μ τῆς ΑΒ κεῖτα ἐπὶ τῆς Α′Β′. Εἶναι ἄρα ἡ Α′Β′ συμμετρικὴ τῆς ΑΒ.

124.— Ἐὰν εὐθεῖα ΑΒ τέμνῃ τὸν ἄξονα xy εἰς τὸ Γ, τοῦτο ὡς συμμετρικὸν ἑαυτοῦ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς της Α'Β'. Εἶναι δὲ αἱ γωνίαι ΒΓy, Β'Γy ἴσαι ὡς συμμετρικαὶ πρὸς ἄξονα.

125.—Ἐὰν ἐκ σημείου Β (Σχ. 43) τῆς μιᾶς πλευρᾶς γωνίας Α ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμιον ΑΔ τέμνουσα ταύτην εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ, θὰ εἶναι ΒΔ=ΔΓ, ἄρα Β καὶ Γ συμμετρικὰ πρὸς ΑΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ πρὸς ΑΔ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τῆς γωνίας Α εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς γωνίας. Εἶναι ἄρα ἡ ΑΔ ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας.

126.—Ἀπόδειξις ὁμοία πρὸς τὴν προηγουμένην.

127.—Ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον,

128.—Διότι τὸ κέντρον ἀπέχει τῆς βάσεως ἴσον τῇ ἀκτῖνι (§ 114).

129.— Τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΚΓ (Σχ. 91) αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ Β+Γ=2ὀρθ. ἕπεται ὅτι Α+Κ=2ὀρθ.

130.— Διότι τὸ κέντρον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τούτων (§ 79 Π. Ι).

131.— «*Ἐὰν χορδή ...... τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς χορδῆς.....*». Ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ καταλήγουσα ἀκτὶς ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ χορδὴν ΑΒ. Ἄρα διχοτομεῖ τὸ τόξ. ΑΓΒ.

132. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς Κ (Σχ. 84) εἰς τὸ Α ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΛΑ· εἶναι ἄρα (§ 118) ἐφαπτομένη καὶ τῆς Λ.

133.—Αἱ κοιναὶ χορδαὶ περιφερείας Λ καὶ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν Κ εἶναι ἀμφότεραι (§ 122 Πόρ. ΙΙ) κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΛ, ἄρα εἶναι αὗται παράλληλοι.

134.—Ἡ εἰς τὸ σημεῖον Α περιφερείας Κ ἐφαπτομένη ταύτης περιφέρεια ἔχει τὸ κέντρον Λ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΚ εἰς ἀπόστασιν ΑΛ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΚΑ κατὰ τὴν ἐκ τοῦ Κ πρὸς τὸ Α φοράν, ἂν ἡ ἐπαφὴ εἶναι ἐξωτερική, πρὸς τὸ ἕτερον δὲ μέρος, ἂν αὕτη εἶναι ἐσωτερική.

135.—Ἂν ΒΑΓ εἶναι κοινὴ τέμνουσα τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς αὐτῶν Α, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΑΓ ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, ἄρα αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΛΓ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εἰς τὸ Β ἐφαπτομένη τῆς Κ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΛΓ, ἄρα παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ τῆς Λ εἰς τὸ Γ.

136.— Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τῆς βάσεως καὶ ἀκτῖνα τὴν ἄλλην πλευρὰν γράφομεν περιφερείας, ἄγομεν δὲ τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν εἰς ἓν κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Πότε τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ;

137.— Κατασκευάζομεν (§ 131) τρίγωνον ἔχον μίαν πλευρὰν ΒΕ τὴν δοθεῖσαν καὶ ΒΔ, ΕΔ τὰ ἡμίση τῆς δοθείσης διαγωνίου (Σχ, 100). Λαμβάνομεν εἶτα ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τούτων τμήματα ΔΑ, ΔΓ ἴσα πρὸς ΔΒ καὶ ἄγομεν τὰς ΒΓ, ΑΓ, ΑΕ, (§ 102, 105 Ι).

138.— Κατασκευὴ ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην.

139. — Ἡ ἐπὶ τεταρτημορίου βαίνουσα ἐπίκ. γωνία εἶναι ὀρθή· ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη εἶναι 45°.

140.— Ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι χορδαί, ἀχθῇ δὲ ἡ ΓΒ ἔχουσα αὐτὰς ἑκατέρωθεν, θὰ εἶναι $B = \Gamma$, ἄρα (§ 133 Πόρ. Ι ἀντ.) καὶ τόξ. ΑΓ $=$τόξ. ΒΔ.

141.— Ἐὰν ΑΒ εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ καὶ ΑΚΓ, ΑΛΔ αἱ ἐκ τοῦ Α διάμετροι αὐτῶν, αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι ὀρθαί· ἄρα (§ 44) αἱ ΓΒ καὶ ΒΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

142.— Ἔστωσαν ΒΑΓ, ΔΑΕ τέμνουσαι διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α ἀγόμεναι. Ἂν ΖΑΗ εἶναι ἡ εἰς τὸ Α (ἄσκ. 132) κοινὴ ἐφαπτομένη, θὰ εἶναι $Z A \Gamma = E$, $B A H = \Delta$ (§ 134) καὶ $Z A \Gamma = B A H$, ἄρα $E = \Delta$ καὶ ἑπομένως (§ 83 β') αἱ ΓΕ καὶ ΒΔ παράλληλοι.

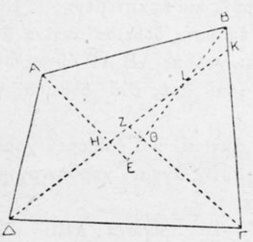
143.— Ἐὰν ΑΒ εἶναι διάμετρος καὶ ΑΔ, ΒΓ χορδαὶ παράλληλοι, θὰ εἶναι τόξ. ΑΔ$+$τόξ. ΔΒ$=$τόξ. ΑΓ$+$τόξ. ΓΒ καὶ τόξ. ΔΒ$=$τόξ. ΑΓ (ἄσκ. 140), ἄρα τόξ. ΑΔ$=$τόξ. ΒΓ καὶ (§ 62 Πόρτ. ΙΙ) χορδὴ ΑΔ $=$ χορδ. ΓΒ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ$+$ΔΒ$=$ἡμιπερ. ἕπεται ὅτι καὶ ΑΔ$+$ΑΓ$=$ἡμιπερ. ἄρα ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι διάμετρος.

144.— Ἀγομένης τῆς ΑΔ (Σχ. 97) ἡ ω καθίσταται ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΕΔ· ἄρα εἶναι $\omega = E\Delta A + EA\Delta$.

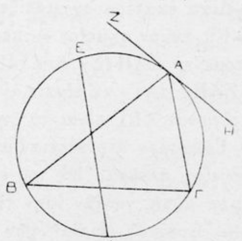
145.— Ἐπειδὴ (Σχ. 149 β') $\omega = A + AEB$, ἕπεται ὅτι $A = \omega - AEB$.

146.— Διότι αἱ μὴ παράλληλοι χορδαὶ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων (ἄσκ. 140) τόξων.

147.— Ἔστω ΑΒΓΔ τραπέζιον ἔχον ΒΓ$=$ΑΔ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλ-



Ἄσκ. 148



Ἄσκ. 149

ληλος τῇ ΔΑ, θὰ εἶναι ΑΔ$=$ΕΓ$=$ΒΓ καὶ $A = \Gamma E B = B$. Ἐπειδὴ δὲ $A + \Delta = 2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $B + \Delta = 2$ ὀρθ. καὶ (§ 139) τὸ τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον.

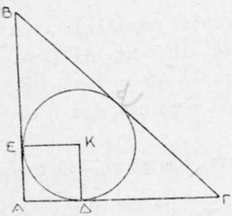
148.—Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΓΖΔ ἕπεται ὅτι $E + \frac{A+B}{2} = 2$ ὀρθ. καὶ $Z + \frac{\Delta+\Gamma}{2} = 2$ ὀρθ. ὅθεν $E + Z = 4$ὀρθ. — $\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{2} = 2$ ὀρθ. Ἄρα (§ 139) τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον.

149.—Ἂν Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ, θὰ εἶναι τόξ. ΒΔ=τόξ. ΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 140) τόξ ΑΕ=τόξ. ΓΔ, ἕπεται
τόξ. ΑΕ + τόξ. ΕΒ = τόξ. ΒΔ + τόξ. ΕΒ ἢ τόξ. ΑΕΒ = τόξ. ΕΒΔ, ἄρα ΑΒ=ΔΕ.

150.—Γράφομεν χορδὴν ΒΓ ἴσην τῇ βάσει καὶ ἄγομεν διάμετρον ΑΑ΄ κάθετον ἐπ' αὐτήν. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ εἶναι τὰ ζητούμενα. Πότε ὑπάρχει μία ἢ οὐδεμία λύσις;

151.—Τέμνομεν δι' εὐθειῶν δίχα καὶ καθέτως δύο πλευρὰς καὶ μὲ κέντρον τὴν τομὴν αὐτῶν καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τινος κορυφῆς γράφομεν περιφέρειαν.

152.—Τὸ τετράπλευρον ΑΕΚΔ εἶναι τετράγωνον, ἄρα ΑΕ+ΑΔ=2ρ ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτίς. Ἐπειδὴ δὲ ΒΕ=ΒΖ καὶ ΓΔ=ΓΖ, ἕπεται ΒΓ=ΒΕ+ΓΔ καὶ ἐπομένως (ΑΒ+ΑΓ)—ΒΓ=ΑΕ+ΑΔ= 2 ρ.



Ἀσκ. 152

153.—Ἂν Ε, Ζ,Η, Θ εἶναι σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ (Σχ. 94), θὰ εἶναι (§ 134 Πόρ.) ΑΕ = ΑΘ, ΒΕ = ΒΖ, ΓΗ=ΓΖ, ΔΗ = ΔΘ, ἐξ ὧν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ΑΒ+ΓΔ=ΒΓ+ΑΔ.

154.—Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ἡ προηγουμένως ἀποδειχθεῖσα ἰσότης γίνεται 2. ΑΒ=2.ΒΓ, ὅθεν ΑΒ=ΑΓ· ἄρα (§ 98 Πόρ. ΙΙ) ἔχει ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας.

155.—Διότι ἑκατέρα σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης (§ 134).

156.—Εἰς τυχὸν σημεῖον Α περιφερείας ἐχούσης δοθεῖσαν ἀκτῖνα ἄγομεν ἐφαπτομένην ΖΑΗ (Σχ.ἀσκ.149) καὶ ἄγομεν χορδὰς ΑΒ,ΑΓ οὕτως ὥστε αἱ γωνίαι ΖΑΒ, ΗΑΓ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο δοθείσας γωνίας. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

157.—Γράφομεν περιφέρειαν μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ὁρίζομεν χορδὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ. Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς ἄγομεν χορδὴν σχηματίζουσαν μετ' αὐτῆς γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κ. τ. λ.

158. — Ἔστω Δ ἡ τιμὴ τῶν ΒΓ΄, ΓΒ΄. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ΄, ΑΓΒ΄ εἶναι (§ 62) ἴσα· ἄρα Γ=Γ΄ καὶ ΑΒΓ΄=ΑΒ΄Γ καὶ ἐπομένως γ.ΓΒΓ΄=γ.ΓΒ΄Γ΄. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΑΓ—ΑΒ=ΑΓ΄—ΑΒ΄ ἢ ΒΓ=Β΄Γ΄, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, Β΄Γ΄Δ εἶναι (§ 61) ἴσα καὶ ἐπομένως ΓΔ=Γ΄Δ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓ΄Δ εἶναι (§ 63) ἴσα καὶ διὰ τοῦτο γεν. ΓΑΔ=γεν. Γ΄ΑΔ.

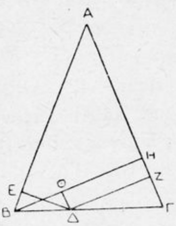
159.—Ἂν ἡ γωνία Ζ (Σχ. 30) εἶναι διπλασία τῆς ΔΓΖ καὶ στραφῇ τὸ τρίγωνον ΔΓΖ περὶ τὴν ΓΔ, μέχρις οὗ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΓΕΔ θὰ εἶναι Ζ=Ε=ΕΓΖ· ἄρα ΕΖ=ΕΓ=ΓΖ ἢ 2. ΔΖ=ΓΖ.

160.—Ἂν ΓΖ=2. ΔΖ (Σχ 30), θὰ εἶναι ΕΖ=ΓΖ=ΕΓ, ἄρα ΕΓΖ= Ζ. ὅθεν 2. ΔΓΖ=Ζ.

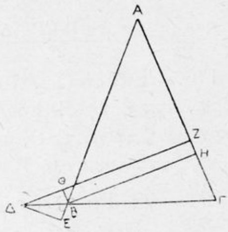
161.—Ἂν ἀχθῇ ἡ $\Delta\Theta$ παράλληλος τῇ $A\Gamma$, θὰ εἶναι $\Delta Z = \Theta H$. Ἐκ δὲ τῶν ἴσων τριγώνων $BE\Delta$, $B\Theta\Delta$ ἕπεται ὅτι $\Delta E = B\Theta$, ἄρα

$$\Delta Z + \Delta E = B\Theta + \Theta H = BH.$$

162.—Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος BH καὶ ἡ $B\Theta$ παράλληλος τῇ $A\Gamma$, θὰ εἶναι $\Theta Z = BH$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα $\Delta B\Theta$, ΔBE εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι $\Delta\Theta = \Delta E$. Ἄρα $\Delta Z - \Delta E = \Delta Z - \Delta\Theta = \Theta Z = BH$.

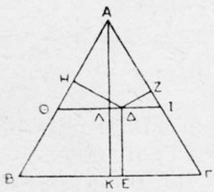


Ἄσκ. 161



Ἄσκ. 162

163.—Ἂν ἀχθῇ ἡ $\Theta\Delta I$ παράλληλος τῇ $B\Gamma$, τὸ τρίγωνον $A\Theta I$ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τὰ ὕψη αὐτοῦ εἶναι ὅλα ἴσα (ἄσκ. 53).



Ἄσκ. 163

Ἄρα εἶναι (ἄσκ. 161) $\Delta H + \Delta Z = A\Lambda$ ἐπειδὴ δὲ καὶ $\Delta E = \Lambda K$, ἕπεται ὅτι

$$\Delta H + \Delta Z + \Delta E = A\Lambda + \Lambda K = AK$$

164.—Ἔστωσαν E, Z τὰ μέσα τῶν $\Gamma\Delta$, AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ καὶ H, Θ αἱ τομαὶ τῆς $A\Gamma$ ὑπὸ τῶν ΔZ, BE. Ἐπειδὴ (§ 100) ΔZBE εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ ΔZ, BE εἶναι παράλληλοι· ἐπειδὴ δὲ Z εἶναι μέσον τῆς AB, ἕπεται (§ 106 Πόρ.I) $AH = H\Theta$. Ὁμοίως εἶναι $\Gamma\Theta = H\Theta$.

165.—Ἔστω E ἡ τομὴ τῆς μικροτέρας βάσεως $\Delta\Gamma$ καὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν A τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ $\Delta AE = EAB = \Delta EA$, ἕπεται $A\Delta = \Delta E$· ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Delta E + E\Gamma = A\Delta + B\Gamma$, ἕπεται $\Gamma E = \Gamma B$ καὶ $\Gamma EB = \Gamma BE$· ἐπειδὴ δὲ $\Gamma EB = EBA$, ἕπεται $\Gamma BE = EBA$, ἤτοι ἡ BE διχοτομεῖ τὴν B.

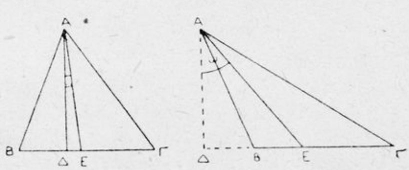
166. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $AB = 2.\ B\Gamma$, $AB = 2.\ E\Gamma$ ἕπεται ὅτι $B\Gamma = E\Gamma$ καὶ $\Gamma BE = \Gamma EB = EBA$, ἤτοι BE εἶναι διχοτόμος τῆς B ὁμοίως AE διχοτόμος τῆς A. Ἐπειδὴ δὲ $A + B = 2$ ὀρθ. ἕπεται

$$EAB + EBA = 1 \text{ ὀρθ.}$$

καὶ ἀκολουθίαν $AEB = 1$ ὀρθ.

167.—Προφανῶς

$$\omega = 1 \text{ ὀρθ.} - \left(\frac{A}{2} + \Gamma\right).$$



Ἄσκ. 167.

Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀρθ. $=$

$\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{\Gamma}{2}$, ἕπεται ὅτι $\omega = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} + \dfrac{\Gamma}{2} - \dfrac{A}{2} - \Gamma$ ἢ $\omega = \dfrac{B-\Gamma}{2}$.

168.—Προφανῶς (Σχ. ἀσκ.148) εἶναι $Ε=2ὀρθ.-\left(\frac{Α}{2}+\frac{Β}{2}\right)=$ $\frac{Α}{2}+\frac{Β}{2}+\frac{Γ}{2}+\frac{Δ}{2}-\frac{Α}{2}-\frac{Β}{2}=\frac{Γ+Δ}{2}$.

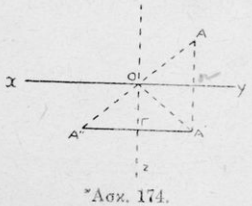
169.—Προφανῶς (Σχ.ἀσκ. 148) εἶναι $ΒΙΚ=2ὀρθ.-\left(\frac{Β}{2}+ΙΚΒ\right)=$ $\frac{Α+Β+Γ+Δ}{2}-\frac{Β}{2}-\frac{Δ}{2}-Γ=\frac{Α-Γ}{2}$.

170.—Ἐπειδὴ (Σχ. 76) εἶναι $ΑΓ>ΑΒ$, θὰ εἶναι (ἄσκ. 46) $ΑΙΓ>$ 1 ὀρθ., ἄρα ἡ τὴν ΓΒ δίχα καὶ καθέτως τέμνουσα εὐθεῖα ἐντὸς τοῦ ΑΙΓ εἰσερχομένη ἀφίνει τὸ Θ, πρὸς ὃ μέρος καὶ τὸ Β. Εἶναι ἄρα (§ 52) $ΘΒ<ΘΓ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 108) καὶ $ΒΕ<ΓΔ$.

171.—α') Γνωρίζομεν (ἄσκ. 44) ὅτι $ΙΑ<\frac{ΑΒ+ΑΓ}{2}$, $ΒΕ<\frac{ΑΒ+ΒΓ}{2}$ καὶ $ΓΔ<\frac{ΑΓ+ΒΓ}{2}$,.(Σχ, 76) ἐξ ὧν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι : $ΑΙ+ΒΕ+ΓΔ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$.—. β') Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΙΓ, ΑΙΒ ἕπεται $ΑΙ>ΑΓ-ΙΓ$, $ΑΙ>ΑΒ-ΒΙ$, ὅθεν $2ΑΙ>ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ$ καὶ $ΑΙ>\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2}$. Ὁμοίως εἶναι $ΒΕ>\frac{ΑΒ+ΒΓ-ΑΓ}{2}$ καὶ $ΓΔ>\frac{ΑΓ+ΓΒ-ΑΒ}{2}$. ἐκ τούτων προκύπτει $ΑΙ+ΒΕ+ΓΔ>\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ}{2}$.

172.—Ἔστωσαν Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ Κ, Λ, τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΔΓ. Ἐπειδὴ ΕΖΗΘ εἶναι (ἄσκ. 103) παραλληλόγραμμον, τὰ τμήματα ΕΗ, ΘΖ διχοτομοῦνται· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ΘΚΖΛ ἔχον ΘΚ, ΛΖ ἴσας καὶ παραλλήλους (§ 106 Π. ΙΙ) εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ ΘΖ καὶ ΚΛ διχοτομοῦνται, ἤτοι διὰ τοῦ μέσου τῆς ΘΖ διέρχονται καὶ αἱ ΕΗ, ΚΛ, διχοτομεῖ δὲ καὶ ταύτας τὸ μέσον τοῦτο.

173.—Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον, αἱ ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' τέμνονται ὑπὸ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ, ἅτινα εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τούτων (§ 68 Πόρ. ΙΙ) καὶ τῶν ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'. Ἄρα ΔΕ εἶναι ἥμισυ ΑΒ καὶ τῆς Α'Β', ὅθεν ΑΒ=Α'Β'· ὁμοίως εἶναι ΑΓ=Α'Γ' καὶ ΒΓ=Β'Γ'. Εἶναι λοιπὸν (§ 63) τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ἴσα.

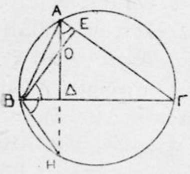


Ἄσκ. 174.

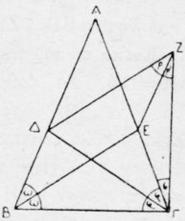
174.—Τὰ συμμετρικὰ Α' καὶ Α'' σημείου Α πρὸς ἄξονα xy καὶ τὸ Ο εἶναι ἐξ ὑποθέσεως σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ δὲ Ο καὶ α εἶναι μέσα τῶν ΑΑ'', ΑΑ', ἡ Α'Α'' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν προφανῶν ἰσοτήτων ΟΑ=ΟΑ', ΟΑ=ΟΑ'' προκύπτει ΟΑ'=ΟΑ'', ἕπεται ὅτι ἡ κάθετος ΟΖ ἐπὶ τὸν xy διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς Α'Α''. Εἶναι ἄρα τὰ σημεῖα Α', Α'' τοῦ σχήματος συμμετρικὰ πρὸς ΟΖ.

175.— Ἐπειδή οἱ ἄξονες x y καὶ ΟΖ (Σχ. ἀσκ. 174) τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰ ΑΑ′, Α′Α″, ἕπεται ὅτι ΟΑ=ΟΑ′=ΟΑ″. Εἶναι ἄρα τὰ Α′, Α″ συμμετρικὰ πρὸς Ο.

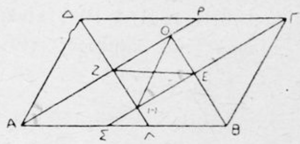
176.—Ἐπειδὴ ΓΒΗ=ΔΑΓ (§ 133 Πόρ. Ι) καὶ ΕΒΓ=ΔΑΓ ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς Γ, ἕπεται ὅτι ΓΒΗ=ΕΒΓ καὶ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΟΒΔ, ΔΒΗ εἶναι ἴσα, ἄρα ἡ ΟΗ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΒΔ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Ο,Η εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ΒΓ.



Ἄσκ. 176.



Ἄσκ. 177

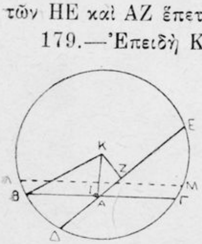


Ἄσκ. 178

177.— Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι ΓΔ, ΒΕ εἶναι ἴσαι, Β=2ω, Γ=2φ καὶ Β>Γ, ὅτε ω>φ. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ΔΖ παράλληλος τῇ ΒΕ καὶ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ, θὰ εἶναι ρ=ω καὶ ΔΖ=ΒΕ=ΓΔ, ὅτε ρ+ρ′=φ+σ. Ἐπειδὴ δὲ ρ=ω>φ, ἕπεται ρ′<σ καὶ ΓΕ<ΕΖ. Ἀλλ᾿ ἀφ᾿ ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΒΓΕ, ΒΓΔ ἔχουσι ΒΓ κοινήν, ΓΔ=ΒΕ καὶ ω > φ, θὰ εἶναι ΓΕ>ΔΒ=ΕΖ, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν ΓΕ<ΕΖ. Ἄρα Β=Γ, ὅθεν ΑΓ=ΑΒ.

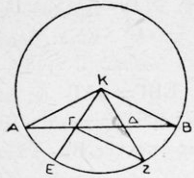
178.—Αἱ διχοτόμοι ΑΡ, ΓΣ εἶναι (ἄσκ. 89) παράλληλοι· ὁμοίως αἱ ἐπ᾿ αὐτὰς κάθετοι (ἄσκ. 90) ΔΗ, ΒΘ. Τὸ σχῆμα ΖΗΕΘ εἶναι λοιπὸν ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ $Ρ=\frac{Α}{2}$, τὸ τρίγωνον ΑΔΡ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ Ζ εἶναι μέσον τῆς ΑΡ· ὁμοίως Ε εἶναι μέσον τῆς ΓΣ καὶ ἑπομένως ΑΖ καὶ ΣΕ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὅθεν ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ΖΕ=ΑΣ=ΑΒ–ΣΒ=ΑΒ–ΒΓ. Εἶναι δὲ καὶ ΗΘ=ΖΕ (§ 105 Θ. Ι) καὶ ΘΗΕ=ΖΕΗ=ΖΑΣ=ΔΑΖ· ὅθεν λαμβανομένης ὑπ᾿ ὄψιν τῆς παραλληλίας τῶν ΗΕ καὶ ΑΖ ἕπεται ἡ παραλληλία τῶν ΑΔ καὶ ΗΘ.

179.—Ἐπειδὴ ΚΖ<ΚΑ, ἂν ληφθῇ ΚΙ=ΚΖ, τὸ Ι θὰ κεῖται μεταξὺ Κ καὶ Α, ἡ δὲ χορδὴ ΛΙΜ εἶναι ἴση τῇ ΔΕ (§ 79 Πόρ. Ι), Ἐπειδὴ δὲ τόξ. ΛΒΜ>τόξ. ΒΔΓ. ἕπεται ΛΜ>ΒΓ καὶ ἄρα ΔΕ>ΒΓ.



Ἄσκ. 179

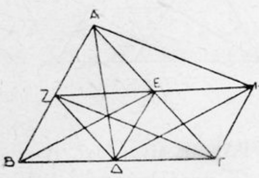
180. Ἂν Α εἶναι κοινὸν σημεῖον τεμνομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ, ΒΑΓ δὲ τέμνουσα αὐτῶν παράλληλος τῇ ΚΛ καὶ ΚΔ, ΛΕ κάθετοι ἐπ᾿ αὐτήν, θὰ εἶναι ΔΕ=ΚΛ καὶ ΒΑ=2.ΔΑ,ΑΓ=2.ΑΕ. Ἄρα ΒΓ=2 (ΔΑ+ΑΕ)=2 (ΔΕ)=2 (ΚΛ).



Ἄσκ. 181

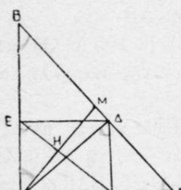
181.—Τὰ τρίγωνα ΑΚΓ, ΒΚΔ, ἔχοντα ΚΑ=ΚΒ ΑΓ = ΔΒ, Α=Β εἶναι ἴσα, ἄρα ΚΓ = ΚΔ, καὶ ΑΚΓ=ΔΚΒ, ὅθεν ΑΕ=ΖΒ. Τοῦ τριγώνου δὲ ΚΓΔ ὄντος ἰσοσκελοῦς ἡ γωνία ΓΔΚ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ ΓΔΖ ἀμβλεῖα, ἄρα ΓΖ > ΓΔ = ΑΓ. Συγκρίνοντες ἤδη τὰ τρίγωνα ΑΚΓ, ΚΓΖ (§ 76) συνάγομεν ὅτι ΑΚΓ < ΓΚΖ, ὅθεν ΑΕ < ΕΖ.

182.—Ἂν προεκταθῇ ἡ ΖΕ καὶ ληφθῇ ΕΗ=ΖΕ, τὸ ΑΖΓΗ εἶναι (§102) παραλληλόγραμμον καὶ ΑΗ=ΓΖ. Ἕνεκα δὲ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΔΗΕ (§ 106 Πόρ. II, § 100) εἶναι ΔΗ=ΒΕ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΗ ἔχει πλευρὰς τὰς διαμέσους τοῦ ΑΒΓ. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων ΑΖΔΕ, ΒΖΕΔ, ΓΕΖΔ φαίνεται εὐκόλως (§ 97) ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΕΔ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ΑΒΓ. Τὸ δὲ τρίγωνον ΕΔΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ΒΔΕ (§ 97) καὶ τοῦτο ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΔΕ, διότι ἀμφότερα εἶναι ἡμίση τοῦ ΒΖΕΔ· ἄρα ΔΕΗ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΔΕ ἤτοι πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ΑΒΓ. Ὁμοίως τὸ ΑΔΕ ὡς ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ΑΒΓ καὶ τὸ ΑΕΗ ὡς ἴσον πρὸς ΖΕΓ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΖΔΕ. Ἀποτελεῖται λοιπὸν τὸ ΑΔΗ ἐκ τριῶν τετάρτων τοῦ ΑΒΓ.



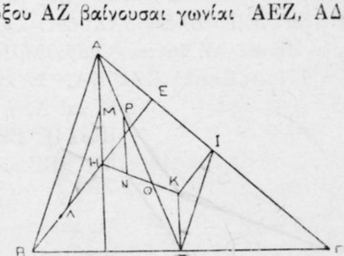
Ἄσκ. 182.

183.—Ἐπειδὴ ΒΓ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων, ἡ δὲ διάμεσος ΕΖ (ἄσκ. 108) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς, θὰ εἶναι ΖΕ ἀπόστασις τοῦ Ζ ἀπὸ τῆς ΑΔ καὶ ἴση πρὸς ΖΓ=ΖΒ. Ἄρα (§ 114) ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Ζ καὶ ἀκτῖνα ΖΕ.



Ἄσκ. 184.

184.—Τὸ ΑΕΔΖ εἶναι ὀρθογώνιον, ἄρα ΑΔ=ΕΖ καὶ διχοτομοῦνται· ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΕΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον, αἱ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΖ βαίνουσαι γωνίαι ΑΕΖ, ΑΔΖ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' εἶναι καὶ ΒΑΜ =Β (§ 106 Πόρ. III) καὶ ΑΔΖ=Γ (§ 90), ἄρα ΒΑΜ+ ΑΕΖ = Β+Γ=1 ὀρθ καὶ ἑπομένως ΑΗΕ=1 ὀρθ.

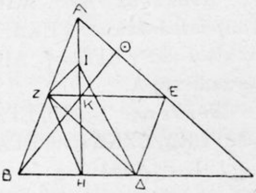


Ἄσκ. 185.

185. — Ἐὰν Λ καὶ Μ εἶναι μέσα τῶν ΒΗ, ΑΗ, τὰ ΛΜ, ΖΙ εἶναι

ἴσα καὶ παράλληλα, ὡς ἀμφότερα παράλληλα τῇ ΑΒ καὶ ἴσα τῷ ἡμίσει αὐτῆς. Τὰ δὲ τρίγωνα ΛΜΗ, ΖΚΙ ἔχοντα καὶ γων. ΛΜΗ=γων. ΚΖΙ, γων. ΜΛΗ=γων. ΚΙΖ (§ 89) εἶναι ἴσα, ἄρα ΖΚ=ΗΜ. Ἐὰν δὲ Ν,Ρ εἶναι μέσα τῶν ΗΘ, ΑΘ, τὸ ΝΡ ἴσον καὶ παράλληλον τῷ ΗΜ θὰ εἶναι καὶ τῷ ΖΚ ἴσον καὶ παράλληλον. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΘΡΝ,ΘΚΖεἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ΘΖ=ΘΡ=ΑΡ,ΚΘ=ΘΝ=ΝΗ.Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι α΄) ΑΘ εἶναι δύο τρίτα τῆς διαμέσου ΑΖ καὶ συνεπῶς Θ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων καὶ β΄) ΗΘ=2.ΘΚ.

186.— Τὸ τμῆμα ΖΗ ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΗΒ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἄρα καὶ πρὸς ΔΕ. Τὸ τραπέζιον ἄρα ΗΔΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα ἐγγράψιμον. Διὰ τοῦτο τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ περιγεγραμμένης περιφερείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τοὺς πόδας τῶν ἄλλων ὑψῶν.—. Ἂν Ι εἶναι μέσον τοῦ ΑΚ, ἡ ΖΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΘ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ΖΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ, θὰ εἶναι γων ΙΖΔ=γων.ΒΘΓ=1 ὀρθ. εἶναι δὲ καὶ ΑΗΔ=1 ὀρθ. Ἄρα ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει διάμετρον ΙΔ διέρχεται διὰ τῶν Ζ καὶ Η, ἤτοι εἶναι ἡ προηγουμένη· ἤτοι αὕτη διέρχεται διὰ τῶν Ζ,Δ,Ε,Η,Ι. ὁμοίως ἀποδεικνύεται αὐτὸ καὶ διὰ τὰ μέσα τῶν ΒΚ καὶ ΓΚ.



Ἄσκ. 186.

187.—Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα περιφερείας Κ καὶ τῆς εὐθείας ΑΚ, ἔνθα Α σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, πρὸς ὃ μέρος τοῦ Κ κεῖται καὶ τὸ Β καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀνάλυσις α΄) Ἂν ΑΒ<ΑΔ, θὰ εἶναι καὶ ΑΒ+ΒΚ<ΑΔ+ΚΔ ἢ ΑΚ<ΑΔ+ΚΔ, ἥτις προφανῶς ἀληθεύει.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ ΑΚ<ΑΔ+ΚΔ (§ 71), ἕπεται εὐκόλως ὅτι ΑΒ<ΑΔ.

β΄). Ἂν ΑΓ>ΑΔ ἢ ΑΚ+ΚΓ>ΑΔ, θὰ εἶναι καὶ ΑΚ+ΚΔ>ΑΔ, ἥτις προφανής. Ἡ σύνθεσις ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν τὸ Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

188.—Ἔστωσαν Α,Ε τὰ κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν, ΒΑΓ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα καὶ ω ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ Β καὶ Γ.

Ἀνάλυσις. Ἂν ω εἶναι σταθερά, θὰ εἶναι καὶ Β+Γ σταθερὸν (§ 91), ἄρα καὶ τὸ ἴσον (§ 134) αὐτῷ ΒΕΑ+ΑΕΓ ἢ ΒΕΓ σταθερά. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ ἄθροισμα ΓΒΕ+ΒΓΕ θὰ εἶναι σταθερόν· τοῦτο ὅμως συμβαίνει, διότι ἑκάτερος τῶν προσθετέων αὐτοῦ εἶναι γωνία ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς ὡρισμένον βαίνουσα τόξον.

Σύνθεσις. Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΑΒΕ, ΑΓΕ εἶναι σταθερά, ἄρα ΑΒΕ+ΒΓΕ σταθερὸν καὶ ἑπομένως ΒΕΓ=ΒΕΑ+ΑΕΓ σταθερόν. Καὶ τὸ ἄθροισμα ἄρα Β+Γ ὡς ἴσον πρὸς τὸ προηγούμενον εἶναι σταθερὸν καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ ω εἶναι σταθερά.

189.—Ἔστωσαν ΓΑΔ, ΕΒΖ τέμνουσαι ἀγόμεναι διὰ τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Β δύο περιφερειῶν.

Ἀνάλυσις. Ἂν ΓΕ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι $Γ+Δ=2$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $Γ+ABE=2$ ὀρθ. καὶ $Δ+ABZ=2$ ὀρθ. (§ 138), θὰ εἶναι καὶ $Γ+Δ+ABE+ABZ=4$ ὀρθ., ἄρα καὶ $ABE+ABZ=2$ ὀρθ., ἥτις προφανῶς ἀληθεύει.

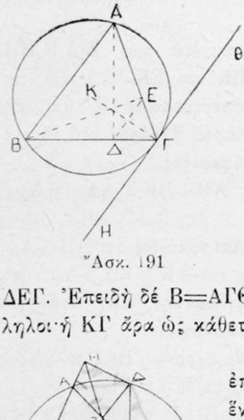
Σύνθεσις. Ἐπειδὴ $Γ+ABE=2$ ὀρθ. $Δ+ABZ=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $Γ+Δ+ABE+ABZ=4$ ὀρθ. Ἐπειδὴ $ABE+ABZ=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $Γ+Δ=2$ ὀρθ., ἄρα ΓΕ καὶ ΔΖ παράλληλοι.

190.—Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ ὕψη τριγώνου ΑΒΓ καὶ Κ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον.

Ἀνάλυσις. Ἂν γ. ΑΔΕ=γ. ΑΔΖ, ἐπειδὴ ἕνεκα τῶν ἐγγραψίμων (§ 139) τετραπλεύρων ΓΕΚΔ, ΒΖΚΔ εἶναι γ.ΑΔΕ=γ.ΕΓΖ, γ. ΑΔΖ=γ.ΑΒΕ, θὰ εἶναι καὶ γ.ΕΓΖ=γ. ΑΒΕ. Ἀλλ' αὗται εἶναι ὄντως ἴσαι ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς Α.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ ΕΓΖ=ΑΒΕ, καὶ ἕνεκα τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΓΕΚΔ, ΒΖΚΔ εἶναι ΕΓΖ=ΑΔΕ καὶ ΑΒΕ=ΑΔΖ ἕπεται ὅτι ΑΔΕ=ΑΔΖ.

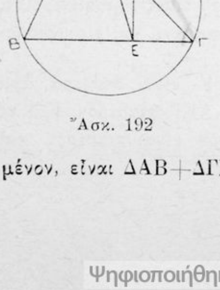
191.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΚΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ, αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΗΓΘ ἐφαπτομένῃ εἰς τὸ Γ, ἄρα ΑΓΘ=ΔΕΓ ἐπειδὴ δὲ καὶ Β=ΑΓΘ ἕπεται ὅτι Β=ΔΕΓ. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $ΔΕΓ+ΔΕΑ=2$ὀρθ. προκύπτει ὅτι θὰ εἶναι $Β+ΔΕΑ=2$ ὀρθ. ἤτοι τὸ ΑΒΔΕ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὅπερ ἀληθές, διότι ἐκ τῶν Δ καὶ Ε ἡ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.



Ἀσκ. 191

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΔΕ εἶναι ἐγγράψιμον, εἶναι $Β+ΔΕΑ=2$ὀρθ. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $ΔΕΑ+ΔΕΓ=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι Β=ΔΕΓ. Ἐπειδὴ δέ Β=ΑΓΘ, ἕπεται ΔΕΓ=ΑΓΘ, ὅθεν ΔΕ καὶ ΗΓΘ παράλληλοι· ἡ ΚΓ ἄρα ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΓΔ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ.

192.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν οἱ πόδες Ε,Ζ,Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας, θὰ εἶναι γ. ΕΖΓ=γ. ΑΖΗ. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΓΔΖΕ,ΑΖΔΗ εἶναι γ. ΕΖΓ=γ. ΕΔΓ καὶ γ· ΑΖΗ=γ. ΑΔΗ, ἕπεται ὅτι καί γ. ΕΔΓ=γ. ΑΔΗ· καὶ αἱ συμπληρωματικαὶ ἄρα αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΔΓΒ= ΔΑΗ. Ἐπειδὴ δὲ $ΔΑΗ+ΔΑΒ=2$ὀρθ. θὰ εἶναι καὶ $ΔΓΒ+ΔΑΒ=2$ὀρθ. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον,ὅπερ προφανές.



Ἀσκ. 192

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον, εἶναι $ΔΑΒ+ΔΓΒ=2$ὀρθ. ἐπειδὴ δὲ καὶ $ΔΑΒ+ΗΑΔ=2$ὀρθ. ἕπεται

ΔΓΒ=ΗΑΔ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΕΔΓ=ΑΔΗ. 'Αλλ' ἕνεκα τῶν ΔΖΕΓ, ΑΖΔΗ εἶναι ΕΔΓ=ΕΖΓ καὶ ΑΔΗ=ΑΖΗ. ἄρα ΕΖΓ=ΑΖΗ,ὅθεν προκύπτει ὅτι ΕΖ καὶ ΖΗ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

193.—**'Ανάλυσις**. "Αν τὸ ΔΖΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον, θὰ εἶναι Δ+Η=2 ὀρθ. 'Επειδὴ δὲ (ἄσκ. 144) εἶναι Η=ΕΒΑ+ΒΑΓ=ΕΒΑ+ΑΒΓ=ΕΒΓ, ἕπεται ὅτι Δ+ΕΒΓ=2ὀρθ, ὅθεν ΔΓΒΕ ἐγγράψιμον, ὅπερ προφανές.

Σύνθεσις. 'Επειδὴ τὸ ΔΓΒΕ εἶναι ἐγγεγραμμένον,εἶναι Δ+ΕΒΓ=2ὀρθ. 'Επειδὴ δὲΕΒΓ=ΕΒΑ+ΒΑΓ=Η, ἕπεται ὅτι Δ+Η=2 ὀρθ. τὸ δὲ ΔΖΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον.

194. α'. **'Ανάλυσις**. "Αν ΑΕ=ΕΖ, καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ ΓΖΔ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η, θὰ εἶναι (§ 106 ΙΙ. Ι) καὶ ΑΗ=ΗΓ.

ʽ εσις· 'Ορίζομεν τὸ μέσον τοῦ Η τοῦ ΑΓ καὶ ἄγομεν ΗΕ παράλληλον τῇ ΓΔ. 'Η ΑΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη. Τῷ ὄντι· ὡς γνωστὸν (§ 106 ΙΙ. Ι) ἡ ΗΕ τέμνει τὴν ΑΖ εἰς τὸ μέσον, ἤτοι ΑΕ=ΕΖ.

β'. **'Ανάλυσις**. "Αν ΑΕ. 2=ΕΖ καὶ Η μέσον τοῦ ΕΖ, θὰ εἶνα ΑΕ=ΕΗ=ΗΖ."Αν δὲ ἀχθῶσιν ἐκ τῶν Η καὶ Ζ παράλληλοι τῇ ΓΒ τέμνουσαι τὴν ΑΓ εἰς τὰ Θ καὶ Ι, θὰ ΑΓ=ΓΘ=ΘΙ.

Σύνθεσις. 'Επὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν τμήματα ΓΘ, ΘΙ ἴσα τῇ ΑΓ κα κ τοῦ Ι φέρομεν παράλληλον τῇ ΓΒ τέμνουσαν τῇ ΓΔ εἴς τι σημεῖον Ζ. 'Η ΑΖ εἶναι ἡ ζητουμένη. Τῷ ὄντι· ἀγομένης καὶ τῆς ΘΗ παραλλήλου τῇ ΓΒ, εἶναι (§ 106) ΑΕ=ΕΗ=ΗΖ, ὅθεν ΑΕ.2=ΕΖ.

195. **'Ανάλυσις**. "Αν ΓΒΔ εἶναι εὐθ. τμῆμα ἐντὸς γωνίας ΓΑΔ τοιοῦτον ὥστε ΓΒ=ΒΔ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Β παράλληλος τῇ ΑΔ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, θὰ εἶναι ΓΕ=ΕΑ.

Σύνθεσις. "Αγομεν ΒΕ παράλληλον τῇ ΑΔ καὶ ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΕΓ ἴσον τῷ ΑΕ. 'Η εὐθεῖα ΓΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

196. **'Ανάλυσις**. "Αν ΑΒΓ (Σχ. 100) εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς ΒΓ,ΑΒ καὶ τὴν διάμεσον ΓΔ, τοῦ ΓΒΔ γνωρίζομεν πάσας τὰς πλευράς.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΒΓΔ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν ΒΓ, τὴν ΓΔ ἴσην τῇ δοθείσῃ διαμέσῳ καὶ τὴν ΒΔ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Προεκτείνοντες εἶτα τὴν ΒΔ λαμβάνομεν ΔΑ ἴσον καὶ ΒΔ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΓ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις. 'Η κατασκευὴ τοῦ ΑΒΓ εἶναι δυνατή, ἐφ' ὅσον καὶ ἡ τοῦ ΒΓΔ εἶναι δυνατή. Πότε συμβαίνει τοῦτο ;

197. α. **'Ανάλυσις**. "Αν ΑΒΓ (Σχ. 76) εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ γνωρίζωμεν ΒΓ,ΒΕ,ΓΔ, τοῦ τριγώνου ΒΘΓ εἶναι ὅλαι αἱ πλευραὶ γνωσταὶ (§ 108).

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΒΘΓ ἔχον πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν ΒΓ,ΒΘ καὶ ΘΓ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰ δύο τρίτα τῶν ΒΕ,ΓΔ. Εἶτα ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΘ λαμβάνομεν ΘΕ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΘ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ τμῆμα ΑΕ ἴσον πρὸς ΓΕ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι· τοῦτο ἔχει πλευρὰν ΒΓ, διάμεσον ΒΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἡ δὲ ΓΘΔ εἶναι, ὡς διὰ τοῦ Θ διερχομένη ἡ ἄλλη διάμεσος ἰσουμένη τῇ δοθείσῃ, διότι ΓΘ ἐλήφθη ἴσον πρὸς δύο τρίτα αὐτῆς.

Β΄. Ἀνάλυσις. Ἂν ΒΓ εἶναι ἡ δοθεῖσα πλευρὰ καὶ ΑΙ, ΒΕ αἱ δοθεῖσαι διάμεσοι, τοῦ ΒΘΙ εἶναι γνωσταὶ καὶ αἱ τρεῖς πλευραί, ἄρα κατασκευάζεται.

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

198.— Τῶν διαμέσων ΑΙ, ΒΕ, ΓΔ (Σχ. 76) οὐσῶν γνωστῶν τὸ τρίγωνον ΒΘΓ κατασκευάζεται (§ 145). Ἡ σύνθεσις ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

199. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, προεκτείνοντες ἑκατέρωθεν τὴν βάσιν ΒΓ λαμβάνομεν ΒΔ = ΑΒ καὶ ΓΕ = ΑΓ καὶ σχηματίζομεν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ καὶ ΑΔΕ, οὗ ΔΕ = ΔΒ + ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = δ, ἤτοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν περίμετρον, ὕψος δὲ αὐτοῦ τὸ τοῦ ΑΒΓ ὕψος ΑΖ. Κεῖνται δὲ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἐπὶ τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΔ, ΑΕ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΔΕ ἔχουν βάσιν ΔΕ = δ καὶ ὕψος τὸ δοθὲν ΑΖ καὶ ἄγομεν τὰς ΗΒ, ΘΓ, αἵτινες τέμνουσιν ἀντιστοίχως τὰς ΑΔ καὶ ΑΕ δίχα εἰς τὰ Η, Θ καὶ καθέτως. Ἐὰν Β καὶ Γ εἶναι αἱ τομαὶ αὐτῶν ἀντιστοίχως μετὰ τῶν ΔΖ, ΖΕ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι· εἶναι ΒΔ = ΒΑ, ΓΕ = ΓΑ καὶ ἐπομένως

$$\mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Gamma} = \Delta\mathrm{B} + \mathrm{B\Gamma} + \Gamma\mathrm{E} = \delta.$$

Ἐπειδὴ δὲ Δ = Ε καὶ Β = 2Δ, Γ = 2Ε, ἕπεται ὅτι τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἔχον ὕψος προφανῶς τὸ δοθέν.

Διερεύνησις. Ἵνα ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΔ κάθετος ΗΒ τέμνῃ τὸ ΔΖ, ἡ δὲ ΘΓ τὸ ΖΕ πρέπει αἱ κάθετοι ΗΒ καὶ ΘΓ νὰ τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΑΕ, ἤτοι (§ 146) ἡ γωνία ΔΑΕ νὰ εἶναι ἀμβλεῖα, ὅπερ συμβαίνει, ἂν $\Delta + \mathrm{E} < 1$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ Δ = Ε πρέπει ἑκατέρα νὰ εἶναι μικροτέρα ἡμισείας ὀρθῆς καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΔΑΖ μεγαλυτέρα τῆς Δ, ἄρα $\mathrm{AZ} < \Delta\mathrm{Z}$ ἢ $2.\ \mathrm{AZ} < \delta$.

200. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΗΔ (Σχ. 99) εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν τὰς γωνίας καὶ τὸ ΑΗ + ΗΔ = δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΗ λάβωμεν ΗΖ′ = ΗΔ, θὰ εἶναι $\mathrm{AZ}' = \delta$ καὶ $\mathrm{Z}' = \frac{\mathrm{H}}{2}$, τὸ δὲ Η κεῖται ἐπὶ τῆς τὴν ΔΖ′ δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν (§ 94) τρίγωνον Ζ′ΑΔ ἔχον ΑΖ′ = δ, Α ἴσην μιᾷ τῶν δοθεισῶν καὶ Ζ′ ἥμισυ ἑτέρας τῶν δοθεισῶν γωνιῶν καὶ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ′ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἂν αὕτη τέμνῃ τὴν ΑΖ′ εἰς τὸ Η, τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

201. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΗΔ (Σχ. 99) εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζο-

μεν ΑΔ, Α καὶ ΑΗ+ΗΔ=δ, καὶ λάβωμεν ΗΖ′=ΗΔ, θὰ εἶναι ΑΖ′=δ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖ′Δ κατασκευάζονται (§ 65). Ἡ σύνθεσις ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου.

β′. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν ΑΒ, Α καὶ ΑΓ—ΓΒ=δ, καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῆς ΓΑ τμῆμα ΓΔ=ΓΒ, θὰ εἶναι ΑΔ=δ καὶ τὸ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ΒΔ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΒΔ ἔχουν ΑΔ=δ, ΑΒ δοθεῖσαν καὶ Α δοθεῖσαν· ὑψοῦμεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ΔΒ δίχα καὶ καθέτως καὶ ἔστω Γ ἡ τομὴ αὐτῆς καὶ τῆς ΑΔ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι· ἔχει τὰ δεδομένα ΑΒκαὶΑ· ἐπειδὴ δὲ ΓΔ=ΓΒ (§51), εἶναι ΑΓ—ΓΒ=ΑΓ—ΓΔ=δ.

Διερεύνησις. Προφανῶς τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ὅταν ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἀμβλεῖα, διότι ὀφείλει ἡ παραπληρωματική της νὰ εἶναι ὀξεῖα (§ 73 Πόρ. II).

Σημ. Ἂν δίδηται ἡ Β, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΓΒ τμῆμα ΓΖ=ΑΓ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΖ.

Τοῦ τριγώνου ΑΒΖ γνωρίζομεν ΑΒ, ΒΖ=δ καὶ ΑΒΖ ὡς παραπληρωματικὴν τῆς Β.

202. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ (Σχ. 112) εἶναι τὸ ζητούμενον, ἐπειδὴ τὸ ΒΖΚΔ εἶναι ἐγγράψιμον, ἡ γωνία ΖΚΔ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης Β· ὁμοίως ἡ ΔΚΕ παραπληρωματικὴ τῆς Γ καὶ ΕΚΖ τῆς Α.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν διαδοχικὰς γωνίας ἀντιστοίχως παραπληρωματικὰς τῶν δοθεισῶν καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῶν Κ καὶ δοθεῖσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν· ἄγομεν δὲ εἶτα ἐφαπτομένας εἰς τὰς τομὰς ταύτης καὶ τῶν πλευρῶν τῶν γωνιῶν.

203. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΓΕ ἴσον πρὸς ΓΒ, θὰ εἶναι ΑΕ=δ. Ἐπειδὴ δὲ γων. ΒΕΓ=γων. ΑΕΗ, γων. ΓΒΕ=γων. ΑΗΕ, γων. ΓΕΒ=γων. ΓΒΕ, ἕπεται ὅτι γων. ΑΕΗ=γων, ΑΗΕ,ἄρα ΑΗ=ΑΕ=δ.Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΗΑΕ εἶναι ἥμισυ ὀρθῆς (§ 105 Πόρ. I) τὸ τρίγωνον ΑΗΕ κατασκευάζεται καὶ ἀρχικῶς. Ἐντεῦθεν ἡ σύνθεσις ἥτις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προβλήματος (§ 147),

204.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον, Ε μέσον τῆς ΓΒ, ΕΖ ἡ δοθεῖσα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀπόστασις τοῦ Ε καὶ Η ἡ τομὴ τῆς ΕΖ καὶ ΔΓ, θὰ εἶναι ΕΗ=2. ΕΖ καὶ ΒΔ=2. ΕΗ=4. ΕΖ. Εἶναι ἄρα γνωστὴ ἡ διαγώνιος (ἄσκ. 100).

205.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ (Σχ. 49) εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ ληφθῇ ΑΔ=ΑΒ, θὰ εἶναι ΔΓ=δ. Ἐπειδὴ δὲ γ. ΒΔΓ=γ.ΑΒΔ+Α, 2. ΑΒΔ+Α= 2 ὀρθ., ὅθεν ΑΒΔ=1ὀρθ.— $\frac{Α}{2}$, ἕπεται ὅτι ΒΔΓ = 1 ὀρθ.+ $\frac{Α}{2}$

Τὸ τρίγωνον ἄρα ΔΒΓ κατασκευάζεται ἀρχικῶς, ἡ δὲ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει τὴν ΒΔ δίχα καὶ καθέτως. Ἡ σύνθεσις ἀνάλογος πρὸς τὰς τῶν ἀσκ. 200 καὶ 201.

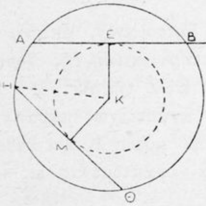
206.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΑΒ εἶναι κ. ἐξ. ἐφαπτομένη τῶν ἴσων περιφερειῶν Κ καὶ Λ, αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ εἶναι παράλληλοι, ἴσαι καὶ ὁμόρροποι. Τὸ τετράπλευρον ἄρα ΑΚΒΛ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ αἱ ΚΑ, ΛΒ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΛ. Ἐντεῦθεν δ' εὐκόλως ἕπεται ἡ σύνθεσις.

207.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΑΒ εἶναι κ. ἐσ. ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Ἂν δὲ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Λ εὐθεῖα ΛΓ παράλληλος τῇ ΑΒ, τὸ ΑΒΛΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ δὲ ΛΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα

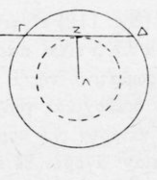
$$ΚΓ=ΚΑ+ΛΒ.$$

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, ἄγομεν ἐφαπτομένην ταύτης ΛΓ καὶ ἀκτῖνα ΛΒ παράλληλον καὶ ἀντίρροπον τῆς ΚΓ· ἐὰν ἡ ΚΓ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Α, ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἡ ἀπόδειξις καὶ διερεύνησις ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ § 148.

208.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα, αἱ ἀποστάσεις ΚΕ, ΛΖ εἶναι γνωσταί. Ἐπειδὴ δὲ αἱ περιφέρειαι αἱ ἔχουσαι κέντρα Κ, Λ καὶ ἀκτῖνας ΚΕ, ΛΖ ἔχουσι κοινὴν ἐφαπτομένην τὴν ΑΔ συνάγομεν εὐκόλως τὴν σύνθεσιν (§ 148, ἄσκ. 207). Πόσας λύσεις ἔχει ;



Ἄσκ.208



Ἄσκ. 209

209. ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒ=δ, ΓΔ=δ'. τὰ ΕΒ, ΖΔ εἶναι ἀντιστοίχως ἡμίση τοῦ δ καὶ δ'. Τὰ δὲ τρίγωνα ΚΕΒ, ΛΖΔ κατασκευάζονται καὶ ὁρίζονται αἱ ἀποστάσεις ΚΕ, ΛΖ. Οὕτως ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

210.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΓΒΑ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα τὴν Κ εἰς τὰ Β, Α (Σχ. ἄσκ. 208), γραφῇ δὲ περιφέρεια μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν κάθετον ΚΕ, πᾶσα χορδὴ ΗΘ ἐφαπτομένη ταύτης θὰ εἶναι (§ 79 Πόρ. Ι.) ἴση τῇ δοθείσῃ ΑΒ.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν χορδὴν ΗΘ ἴσην τῇ δοθείσῃ καὶ γράφομεν περιφέρειαν ὁμόκεντρον καὶ ἐφαπτομένην τῆς χορδῆς ταύτης. Ἡ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Γ ἐφαπτομένη ταύτης εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Διερεύνησις. Προφανῶς τὸ πρόβλημα ἔχει λύσεις ἰσαρίθμους πρὸς τὰς ἐκ τοῦ Γ ἐφαπτομένας τῆς νέας περιφερείας. Πότε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ;

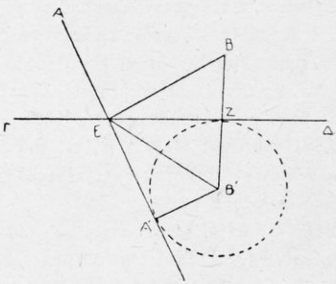
211.—Ἂν Θ εἶναι σημεῖον τῆς ΑΒ θὰ εἶναι (§ 51) ΘΓ=ΘΖ, ἄρα

$\Theta\Gamma+\Delta\Theta=\Theta Z+\Theta\Delta$. Ἐπειδὴ $\Theta Z+\Theta\Delta>ZE+E\Delta$ καὶ $ZE=E\Gamma$, ἕπεται $\Theta\Gamma+\Theta\Delta>\Gamma E+E\Delta$.

212.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ἀχθῇ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ τέμνουσα τὴν ΒΕ εἰς τὸ Α', θὰ εἶναι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΖΕ, Α'ΖΕ ἴσα (§ 61 Πόρ. I) καὶ ἑπομένως ΑΖ=ΖΑ'· τὸ Α' εἶναι ἄρα συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς ΓΔ. Ἡ σύνθεσις ὁμοία πρὸς τὴν τοῦ § 149.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ἂν Α'Β τέμνῃ τὴν ΓΔ. Δὲν ἔχει δὲ λύσιν, ἂν ἡ Α' Β εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ, ὅτε Α' καὶ Β ἀπέχουσιν ἴσον τῆς ΓΔ, ἑπομένως Α καὶ Β ὁμοίως. Ἂν Β καὶ Α' συμπίπτωσιν, τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἤτοι πᾶν σημεῖον τῆς ΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

213.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν Ε εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἐπειδὴ ΓΕΑ=ΔΕΑ', θὰ εἶναι καὶ ΔΕΑ'=2.ΒΕΔ. Ἂν δὲ ΕΒ' διχοτομῇ τὴν ΔΕΑ' καὶ ἀχθῇ ἡ ΒΖΒ' κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ.τριγώνων ΒΕΖ, ΖΕΒ' εἶναι τὸ Β' συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς ΓΔ. Ἐπειδὴ Β' ἀπέχει ἴσην τῶν ΓΔ καὶ ΑΑ', ἡ ΑΑ' ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Β' καὶ ἀκτῖνα Β'Ζ.



Ἄσκ. 213

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν τὸ Β' συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς ΓΔ, γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Β' καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΓΔ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένην ταύτης ἔχουσαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τὴν περιφέρειαν καὶ τὸ Δ. Ἡ τομὴ Ε τῆς ΓΔ καὶ τῆς ἐφαπτομένης ταύτης εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

214.— Ἂν Α εἶναι τυχὸν σημεῖον ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου Κ καὶ Μ μέσον χορδῆς διερχομένης διὰ τοῦ Α, ἡ ΚΜ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν, τὸ δὲ ΚΑ φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν· κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΚΑ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι μέσον χορδῆς διερχομένης διὰ τοῦ Α (ὅρα καὶ § 151). Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος εἶναι πᾶσα ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια.

215.— Ἂν Α εἶναι τὸ δοθὲν σημεῖον, Κ τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι ΑΜΚ=1 ὀρθ, τὸ δὲ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΚ. Ἐὰν δὲ Μ εἶναι τυχὸν τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον, ἐπειδὴ ΑΜΚ=1 ὀρθ. (§ 133 Πόρ. II), ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ καὶ τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὸν τόπον. Ἄρα ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΚ εἶναι ὁ ζ. τόπος.

Σημ. Τὰς ἀκτῖνας νοοῦμεν προεκτεινομένας καὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

216.— Ἂν ΗΘ εἶναι χορδὴ κύκλου Κ (Σχ· ἀσκ. 208) ἴση πρὸς δοθὲν τμῆμα δ, τὸ μέσον Μ αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΚΗΜ κατασκευάζεται, ἡ πλευρὰ ΚΜ ὁρίζεται τελείως καὶ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΜ. Τυχὸν δὲ σημεῖον Ε τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι ἡ εἰς αὐτὸ ἐφαπτομένη χορδὴ ΑΒ ἰσοῦται πρὸς ΗΘ ἄρα καὶ πρὸς δ (§ 79 Πόρ Ι). τὸ δὲ Ε εἶναι μέσον τῆς ΑΒ. Ὁ ζ. τόπος εἶναι λοιπὸν πᾶσα ἡ ὁμόκεντρος τῇ δοθείσῃ περιφέρεια, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΚΜ.

217.— Ἔστω Κ τὸ κέντρον καὶ ρ ἡ ἀκτὶς δοθείσης περιφερείας. Κατασκευάζοντες δύο καθέτους ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΓ καὶ ἄγοντες εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν ἐφαπτομένας ΒΑ, ΓΑ ὁρίζομεν ἓν σημεῖον Α τοῦ ζ. τόπου. Ἐπειδὴ τὸ ΚΒΑΓ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς ρ, ἡ διαγώνιος ΚΑ εἶναι σταθερά. Κεῖται ἄρα τὸ Α ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου ἀκτῖνος ἴσης τῇ διαγωνίῳ τετραγώνου πλευρᾶς ρ. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον, ΜΔ, ΜΕ ἐφαπτόμεναι τῆς δοθείσης περιφερείας, τὰ τρίγωνα ΜΚΔ, ΑΒΚ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως γ. ΚΜΔ=γων. ΒΑΚ=ἥμισυ ὀρθῆς. Ἄρα ΕΜΔ=1 ὀρθ. καὶ τὸ Μ σημεῖον τοῦ ζ. τόπου. Ὁ ζ. τόπος εἶναι λοιπὸν πᾶσα ἡ περιφέρεια, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν διαγώνιον τετραγώνου πλευρᾶς ρ.

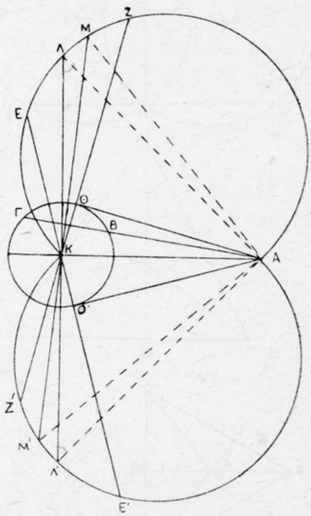
218.— Ἂν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου, αἱ εἰς τὰς ἴσας περιφερείας Κ, Λ ἐφαπτόμεναι ΜΑ, ΜΒ εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ἄρα ΜΑΚ, ΜΒΛ εἶναι ἴσα καὶ ΜΚ=ΜΛ. Ὁ ζ. τόπος εἶναι (§ 150, 2ον) ἄρα ἡ τὴν ΚΛ δίχα καὶ καθέτως τέμνουσα εὐθεῖα.

219.— Ἐὰν φέρωμεν ἀκτῖνας καθέτους ΚΑ (τῆς ἐσωτερικῆς), ΚΒ (τῆς ἐξωτ.) καὶ ἐφαπτομένας ΑΜ, ΒΜ ὁρίζεται τὸ Μ, ὅπερ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΚΑΜΒ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι ΜΒ=ΚΑ καὶ τὸ τρίγωνον ΜΚΒ ἔχον καθέτους πλευρὰς τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἶναι τελείως ὡρισμένον, ἡ ὑποτείνουσα ἄρα αὐτοῦ σταθερά. Ὥστε τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ῥηθέντος τριγώνου. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον Ν τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι σημεῖον τοῦ ζ. τόπου, ἤτοι κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, ἧς αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, μία πρὸς μίαν. Ἄρα πᾶσα ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζ. τόπος.

220.— Τὸ Α′ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς εὐθεῖαν ΒΓ διερχομένην διὰ δοθέντος σημείου Β εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ δὲ ΒΑ=ΒΑ′, τὸ Α′ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΒΑ. Πᾶν δὲ σημεῖον Μ ταύτης εἶναι συμμετρικόν τοῦ Α πρὸς τὴν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΑΜ· εἶναι ἄρα σημεῖον τοῦ τόπου. Πᾶσα ἄρα ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζ. τόπος.

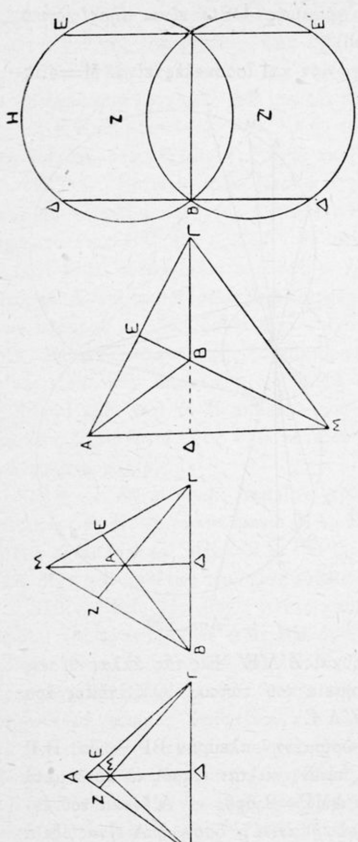
221.— Ἐργαζόμενοι ὡς ἐν § 153 εὑρίσκομεν ὅτι πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ζ. τόπου κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τόξων τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχονται γωνίαν 45°. Ἂν ἀχθῇ εἰς τὸ Α ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰ ῥηθέντα τόξα εἰς τὰ Ο καὶ Ο′, ἡ γραμμὴ ΟΑΟ′ δὲν ἀποτελεῖ μέρος τοῦ τόπου. Πᾶν δὲ σημεῖον τῆς γραμμῆς ΟΒΟ′ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως (§ 153).

222.— Ἐπειδὴ τὸ ΑΔΜ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς εἶναι Μ=45°· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΜΔ διέρχεται διὰ τοῦ Κ, τὸ ΑΚ φαίνεται ἐκ τοῦ Μ ὑπὸ γωνίαν 45°. Κεῖται ἄρα πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα των κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΑΚ καὶ ἑκάτερον δέχεται γωνίαν 45°. Παρατηροῦντες ὅτι, ἂν ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Κ ἐπὶ τὴν ΑΚ καθέτου λάβωμεν ΚΛ=ΚΛ′=ΑΚ, ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΚΛΑ, ΚΛ′Α εἶναι 45°, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ Λ καὶ Λ′ εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ἑπομένως ΑΛ, ΑΛ′ εἶναι διάμετροι τῶν περιφερειῶν, εἰς ἃς ἀνήκουσι τὰ τόξα. Ἂν ἡ τέμνουσα ΑΒΓ γείνῃ ἐφαπτομένη ΑΘ, ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ τόπου εἶναι τὰ Ζ, Ζ′, εἰς ἃ ἡ ΚΘ τέμνει τὰ ῥηθέντα τόξα. Ἂν ἡ ΑΘ στραφῇ περὶ τὸ Α οὕτως ὥστε νὰ τέμνῃ τὸν κύκλον Κ, μέχρις οὗ γείνῃ ἐκ νέου ἐφαπτομένη εἰς τὴν θέσιν ΑΘ′, τὰ σημεῖα τοῦ τόπου γράφουσι τὰ τόξα ΖΛΕ καὶ Ζ′Λ′Ε′. Εἰς τὰς ἄλλας θέσεις τῆς ΑΒΓ δὲν ἀντιστοιχοῦσι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου. Ὁ ζ. τόπος ἄρα ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο τόξα ΖΛΕ καὶ Ζ′Λ′Ε′.



Ἀσκ. 222

223.—Ἂν ἀμφότεραι αἱ παρὰ τὴν ὡρισμένην πλευρὰν ΒΓ γωνίαι Β,Γ εἶναι ὀξεῖαι, τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν ὑψῶν, κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς κορυφῆς Α μέρος τῆς ΒΓ. Εἶναι δὲ ΑΜΓ=2 ὀρθ. — Α ἕνεκα τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΑΖΜΕ Κατ' ἀκολουθίαν, ἐφ' ὅσον ἡ Α εἶναι ὀξεῖα ἡ ΒΜΓ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ τανάπαλιν· κεῖται δὲ τὸ Μ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν κυκλ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΒΓ καὶ ὧν ἑκάτερον δέχεται γωνίαν παραπληρωματικὴν τῆς Α. Ἂν ἡ μία τῶν Β, Γ εἶναι ἀμβλεῖα, τὰ Μ καὶ Α κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ΒΓ, εἶναι δὲ ἡ ΒΜΓ ἴση τῇ Α, διότι ἀμφότεραι αὗται εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἔχουσι καθέτους πλευράς. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΒΓ καὶ ὧν ἑκάτερον δέχεται γωνίαν Α. Πρὸς ἀκριβῆ ἤδη καθορισμὸν τοῦ τόπου ἐξετάζομεν χωριστὰ τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις. α′) Ἐὰν ἡ Α εἶναι ὀξεῖα, ἡ ΒΜΓ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ἡ μὲν κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΒΗΓΗ′Β, ἡ δὲ Μ ἐπὶ τῆς ΒΖ′ΓΖΒ. Ἐὰν αἱ εἰς τὰ Β καὶ Γ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶναι ΔΔ′, ΕΕ′, ἐφ᾽ ὅσον ἡ κορυφὴ Α διαγράφει τὸ ΔΗΕ, Δ′Η′Ε′, ΔΒ,ΒΔ′,ΕΓ,Ε′Γ, τὸ Μ θὰ διαγράφῃ ἀντιστοίχως τὰ ΒΖ′Γ, ΒΖΓ, Δ′Β, ΔΒ, Ε′Γ, ΕΓ· ὁ ζ. τόπος εἶναι κατ᾽ ἀκολουθίαν τὰ τόξα Δ′ΖΓΕ′,ΔΒΖ′ΓΕ. β′) Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ ΒΜΓ θὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ μὲν κορυφὴ Α δύναται νὰ κεῖται ἐπὶ γραμμῆς οἵα ἡ ΒΖΓΖ′Β, ἡ δὲ Μ ἐπὶ τῆς ΒΗΓΗ′Β. Καὶ ὅταν τὸ Α γράφῃ τὸ τόξον ΒΖΓ, τὸ Μ γράφει τὸ ΔΗΕ, ὅταν δὲ τὸ Α γράφῃ τὸ ΒΖ′Γ, τὸ Μ γράφει τὸ Δ′Η′Ε′. Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τόξα ΔΗΕ,Δ′Η′Ε γ′) Ἂν ἡ Α ὀρθή, τὸ Μ καὶ Α συμπίπτουσι καὶ τόπος τῶν Μ εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου γραφομένη περιφέρεια.



Ἀσκ. 223

224.—Τὸ κέντρον εἶναι τομὴ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῆς δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης τὴν ἀπόστασιν τῶν δοθέντων σημείων.

225.—Τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ καθέτου εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπαφῆς Γ δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς τεμνούσης δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν ΓΔ, ἂν Δ τὸ ἕτερον δοθὲν σημεῖον.

226.—Τὸ κέντρον εἶναι τομὴ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ ἐκείνης, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

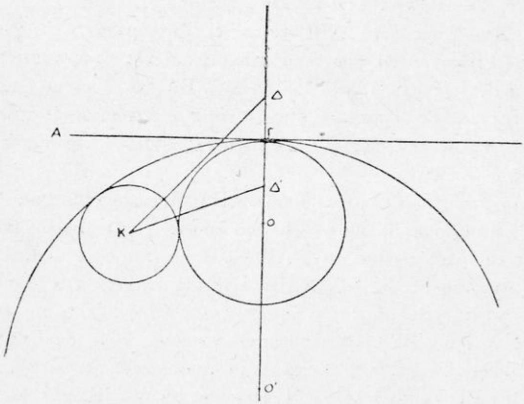
227.—Τὸ κέντρον κεῖται α′) ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν ρ. β′) ἐπὶ παραλλήλου τῇ δοθείσῃ ἐφαπτομένῃ καὶ ἀπεχούσῃ ἀπόστασιν ρ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης. Τὸ πρόβλημα ἔχει τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν τόπων τούτων.

228.—Προφανῶς αὕτη θὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν παραλλήλων καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Α ὀφείλει νὰ κεῖται μεταξὺ αὐτῶν. Ἂν δὲ Β,Γ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ Κ τὸ κέντρον, αἱ ΚΓ, ΚΒ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἑπομένως ΚΒ εἶναι ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν παραλλήλων. Κεῖται ἄρα τὸ Κ α') ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ἴσον ἀπ' αὐτῶν ἀπεχούσης εὐθείας καὶ β') ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τῶν παραλλήλων.

229.—Ἂν Α εἶναι τὸ δοθὲν σημεῖον, ρ ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς καὶ Κ τὸ κέντρον τῆς δοθείσης περιφερείας ἀκτῖνος α, τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (Α, ρ) καὶ τῆς (Κ, α+ρ) ἢ (Κ, α—ρ ἢ ρ—α), καθ' ὅσον ἡ ἐπαφὴ εἶναι ἐξωτερικὴ ἢ ἐσωτερική.

230.—Τὸ κέντρον εἶναι τομὴ τῆς διχοτομούσης καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὴν πλευράν, ἐφ' ἧς τοῦτο κεῖται.

231.—Ἔστω (Κ, ρ) δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κείμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ. Τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ καθέτου



Ἀσκ. 231

πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ ἀπέχῃ δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ Γ ἀπόστασιν χ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ἀπόστασιν χ+ρ (ἐξ. ἐπαφή). Ἂν ἄρα ληφθῇ ΓΔ=ρ, τὸ κέντρον θὰ ἀπέχῃ χ+ρ ἀπό τε τοῦ Κ καὶ ἀπὸ τοῦ Δ· εἶναι ἄρα ἡ τομὴ Ο τῆς ΓΔ καὶ τῆς τὴν ΚΔ δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης. Ἂν ληφθῇ ΓΔ'=ρ, πρὸς ὃ μέρος τῆς ΑΒ κεῖται τὸ Κ, τὸ ζ. κέντρον θὰ ἀπέχῃ τοῦ Δ' ἀπόστασιν χ—ρ, ὅσην καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ἐπαφήν. Εἶναι ἄρα τότε ἡ τομὴ Ο' τῆς ΓΔ' καὶ τῆς τὴν ΚΔ' δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης.

232.—Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπαφῆς κείμενον ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ καὶ ΒΓ ἡ δοθεῖσα ἐφαπτομένη. Τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΑ. Ἂν δὲ ἀχθῇ εἰς τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς Κ, αὕτη θὰ εἶναι (ἄσκ.132) καὶ τῆς ζητουμένης ἐφαπτομένη, τὸ δὲ κέντρον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ταύτης καὶ τῆς ΒΓ. Ἄρα, ἂν μὲν αὗται τέμνωνται θὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας των (δύο λύσεις), ἂν δὲ εἶναι παράλληλοι, ἡ ΚΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Δ καὶ τὸ τμῆμα ΑΔ εἶναι διάμετρος τῆς ζητουμένης περιφερείας.

233.—*Ἀνάλυσις*. Ἂν ΑΒΓ (Σχ. 38) εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὸ ὕψος ΑΔ καὶ διάμεσον ΑΜ, τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΜΔ κατασκευάζεται. Ἡ σύνθεσις λίαν εὔκολος οὖσα παραλείπεται.

234.—*Ἀνάλυσις*. Ἂν ΑΒΓ (Σχ. 38) εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν ΑΒ, ΒΓ, ΑΔ, τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΔ κατασκευάζεται. Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

235.—*Ἀνάλυσις*. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν τὴν Α καὶ τὰ ὕψη ΒΔ, ΓΕ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ κατασκευάζεται (§ 95)· ἡ δὲ ἄγνωστος τότε κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΔ· ὡς ἀπέχουσα δὲ τῆς ΑΒ γνωστὴν ἀπόστασιν ΓΕ κεῖται ἐπὶ παραλλήλου τῇ ΑΒ καὶ ἀπεχούσης αὐτῆς ἀπόστασιν ΓΕ. Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

236. — *Ἀνάλυσις*. Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν ΑΒ=γ, ΑΓ+ΓΒ=δ καὶ Γ=ω, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ τμῆμα ΓΔ=ΓΒ, ὁρίζομεν ΑΔ=δ· ἂν ἀχθῇ ἡ ΒΔ, θὰ εἶναι Δ ἥμισυ ω. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΒ κατασκευάζεται (§ 158)· ἡ ἄγνωστος δὲ τότε κορυφὴ Γ εἶναι τομὴ τῆς ΑΔ καὶ τῆς τὴν ΒΔ δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

Σημ. Ἂν ὑπάρχωσι δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ἀντιστοιχοῦσι καὶ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ἤτοι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν γνωρίζωμεν ΑΓ—ΓΒ=δ (παράβ. καὶ ἄσκ. 201).

237.—*Ἀνάλυσις*. Ἂν ΒΓ, Α, ΒΔ εἶναι τὰ δοθέντα στοιχεῖα τριγώνου ΑΒΓ, ἀχθείσης τῆς ΒΓ μένει ἄγνωστος ἡ κορυφὴ Α. Ἐπειδὴ ἐκ ταύτης φαίνεται τὸ τμῆμα ΒΓ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν, αὕτη ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν κυκλ. τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι χορδὴν ΒΓ καὶ ἑκάτερον δέχεται γωνίαν Α. Ἐπειδὴ δὲ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἀπέχει τοῦ Β ἀπόστασιν ΒΔ γνωστήν, ἡ ΑΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Β, ΒΔ)· γνωστοῦ δὲ ὄντος τοῦ Γ κατασκευάζεται ἡ ἐφαπτομένη αὕτη. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ συνθετικὴ κατασκευή.

238.—Τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου μιᾷ πλευρᾷ καὶ ἀπεχούσης ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ δοθείσῃ ἀκτῖνι.

239.—*Ἀνάλυσις*. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν τὴν ΑΒ, τὴν Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Κ. Ὁ κύκλος Κ εἶναι καὶ εἰς τὴν Α ἐγγεγραμμένος, ἄρα ταύτης κατασκευασθείσης καὶ οὗτος (ἄσκ. 238) κατασκευάζεται. Ἡ τρίτη δὲ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ὁρίζεται, διότι εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ Κ ἐξ ὡρισμένου σημείου Β ἀγομένη. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

Σημ. Ἂν ἡ πρὸς τὴν ΑΓ παράλληλος ἐφαπτομένη τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ, πρέπει νὰ εἶναι ΑΒ>ΑΖ, ἵνα ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν.

240.—***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. ἄσκ. 152) τὸ ζητούμενον, οὗ γνωρίζομεν τὴν Γ καὶ ΚΔ. Ὁ Κ ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν Γ κατασκευάζεται (ἄσκ. 238) μετ' αὐτήν. Ἡ τρίτη δὲ πλευρὰ ΑΒ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ ἄκρον διαμέτρου παραλλήλου τῇ ΑΓ ἀφίνουσα κύκλον καὶ Γ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

241.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΓΒΔ σταθερά, καὶ Γ+Δ θὰ εἶναι σταθερόν. Τοῦτο ὅμως ἀληθές, διότι ἑκατέρα τῶν Γ καὶ Δ ἐπὶ ὡρισμένου τόξου βαίνουσα εἶναι σταθερά. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ συνθετικὴ ἀπόδειξις.

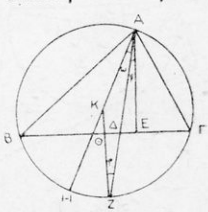
242.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν τοῦτο συμβαίνῃ, ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΚΒΚ', ΚΓΚ' (Σχ. 112) ὀφείλει νὰ εἶναι ὀρθή, ὅπερ ἀληθὲς (ἄσκ. 12). Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ συνθετικὴ ἀπόδειξις.

243.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν Ζ=Β—Γ, ἐπειδὴ (§ 106 Πόρ. ΙΙΙ) ΕΔΓ=Γ, θὰ εἶναι Ζ=Β—ΕΔΓ=Β—ΒΔΖ, ὅθεν Β=Ζ+ΒΔΓ, ὅπερ ἀληθὲς (§ 91 Πόρ. ΙΙ). Ἡ συνθετικὴ ἀπόδειξις εὔκολος.

244.—α') Ἂν ΑΔ<ΒΔ, ἕπεται Β<ΒΑΔ καὶ Γ<ΔΑΓ, ὅθεν Β+Γ<Α· ἄρα Α+Β+Γ<2 Α, ὅθεν 1 ὀρθ.<Α. β') Ἂν ΑΔ>ΒΔ, θὰ εἶναι Β+Γ>Α, ὅθεν ὁμοίως 1 ὀρθ. > Α. γ') Ἂν ΑΔ=ΒΔ, θὰ εἶναι Β + Γ = Α, ὅθεν 1 ὀρθ.=Α. Τὰ ἀντίστροφα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς εὐκόλως.

245. ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΖ ἡ διχοτόμος τῆς Α. Ἐπειδὴ Ζ εἶναι μέσον τοῦ ΒΓ ἡ ΚΖ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΓ καὶ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἄρα ρ=φ. Ἂν δὲ εἶναι καὶ ω=φ, θὰ εἶναι ω=ρ, ὅθεν ΚΖ=ΚΑ, ἥτις ἀληθεύει.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ ΚΖ=ΚΑ, εἶναι καὶ ρ=ω· ἐπειδὴ δὲ τῶν ΚΖ καὶ ΑΕ οὐσῶν παραλλήλων εἶναι ρ=φ, ἕπεται ω=φ.

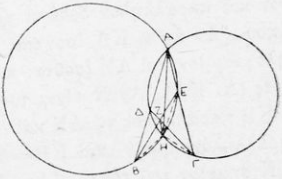


Ἄσκ. 245

246.—Ἔστωσαν ΑΒ, ΑΓ, ΒΕ, ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι καὶ Η τὸ ἕτερον τῶν περὶ τὰ ΑΒΕ, ΑΓΔ περιγεγραμμένων περιφερειῶν κοινῶν σημείων.

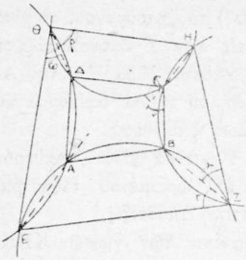
Ἀνάλυσις. Ἂν ἡ περὶ τὸ ΖΕΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ Η, τὸ ΕΖΗΓ θὰ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ΖΕΗ=ΖΓΗ, ἥτις ἀληθεύει, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν τούτων ἰσοῦται πρὸς τὴν ΒΑΗ.

Σύνθεσις. Ἐπειδὴ ΒΑΗ = ΖΕΗ καὶ ΒΑΗ=ΖΓΗ ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ ΒΗ αἱ μέν, ἐπὶ τοῦ ΔΗ αἱ δέ, ἕπεται ὅτι ΖΕΗ=ΖΓΗ· ἄρα ΖΕΓΗ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ τὸ Η ἐπὶ τῆς περὶ τὸ ΖΕΓ περιγεγραμμένης περιφερείας.



Ἄσκ. 246

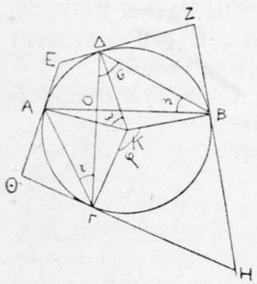
247.—Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον τετράπλευρον. Ἐπειδὴ ΘΔΑΕ εἶναι ἐγγεγραμμένον, εἶναι $\omega+\Delta AE=2$ ὀρθ., ὅθεν $\omega=\varphi$· ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\rho=\sigma$, $\tau=\upsilon$, $\lambda=\nu$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\omega+\rho+\tau+\lambda=\varphi+\sigma+\upsilon+\nu$ ἢ $\Theta+Z=A+\Gamma$. Ἐπειδὴ δὲ $A+\Gamma=2$ ὀρθ., ἕπεται καὶ $\Theta+Z=2$ ὀρθ.



Ἀσκ. 247

248.—Ἔστωσαν Z καὶ H τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν, αἵτινες διέρχονται ἡ μὲν διὰ τῆς κορυφῆς A, ἡ δὲ διὰ τῆς Γ, τοῦ Z ἐπὶ τῆς AΓ. Ἔστω δὲ Δ ἡ τομὴ τῆς AB καὶ τῆς α΄ τούτων καὶ E ἡ τομὴ τῆς BΓ καὶ τῆς β΄. Ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα AΔHZ, ΓZHE εἶναι ἐγγεγραμμένα, εἶναι $A+\Delta HZ=2$ ὀρθ., $\Gamma+EHZ=2$ ὀρθ., ὅθεν $A+\Gamma+\Delta HZ+EHZ=4$ ὀρθ. $=\Delta HZ+EHZ+\Delta HE$ καὶ $A+\Gamma=\Delta HE$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $A+\Gamma+B=\Delta HE+B$ ἢ 2ὀρθ. $=\Delta HE+B$. Τὸ BΔHE εἶναι λοιπὸν ἐγγράψιμον, ἤτοι καὶ ἡ γ΄ περιφέρεια, ἣν ὁρίζουσι τὰ B, Δ, E, διέρχεται διὰ τοῦ H.

249. Ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα AKΔE, BKΓH, εἶναι προφανῶς ἐγγράψιμα εἶναι $E+\omega+\varphi+H=4$ ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ $\omega=2\,\eta$, $\varphi=2\,\sigma$, ἕπεται ὅτι $\omega+\varphi=2\,(\eta+\sigma)=2$ ὀρθ. Ἄρα $E+H=2$ ὀρθ., καὶ τὸ EZHΘ εἶναι ἐγγράψιμον.



Ἀσκ. 249

250. Ἂν $AZ=AE=\chi$, $BZ=B\Delta=y$, $\Gamma\Delta=\Gamma E=\omega$ (Σχ. 112), θὰ εἶναι προφανῶς $AB+B\Gamma+A\Gamma=2\,(\chi+y+\omega)$ ἢ $\alpha+\beta+\gamma=2\,(\chi+\psi+\omega)$, ὅθεν $\chi+y+\omega=\tau$ καὶ ἐκ ταύτης $\chi=\tau-(y+\omega)=\tau-\alpha$, $y=\tau-(\chi+\omega)=\tau-\beta$ καὶ $\omega=\tau-\gamma$. Ἐπειδὴ $A\Theta=AM$, $A\Theta=AB+B\Theta=AB+BP$, $AM=A\Gamma+\Gamma P$, ἕπεται ὅτι $2\,A\Theta=AB+A\Gamma+B\Gamma=2\,\tau$, ὅθεν $A\Theta=AM=\tau$. Ἐκ δὲ τῆς $AB+B\Theta=A\Theta=\tau$, ἕπεται $B\Theta=\tau-\gamma$. ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma M=\tau-\beta$.

251.—Ἔστω K δοθεῖσα περιφέρεια, A σημεῖον αὐτῆς καὶ AM τμῆμα ἴσον καὶ παράλληλον δοθέντι τμήματι τ· προφανῶς τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἂν ἀχθῇ KΛ ἴσον καὶ παράλληλον τῷ τ, τὸ AKΛM εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ΛM ἰσοῦται πρὸς KA. Κεῖται ἄρα τὸ M ἐπὶ τῆς περιφερείας (Λ, KA). Ἂν N εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης, ἀχθῇ δὲ KB παράλληλος τῇ ΛN καὶ NB παράλληλος τῇ KΛ, τὸ KBNΛ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ $KB=\Lambda N=KA$· ἄρα τὸ B κεῖται ἐπὶ τῆς K καὶ τὸ N σημεῖον τοῦ τόπου. Ἄρα ὅλη ἡ περιφέρεια Λ ἀποτελεῖ τὸν ζητούμενον τόπον.

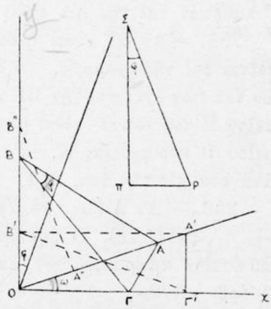
252.—Ἔστω M κέντρον περιφερείας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα δοθεῖσαν δ (Σχ.

106) καὶ τέμνει δοθεῖσαν Κ δίχα κατὰ διάμετρον ΑΚΑ′. Ἐπειδὴ δ=ΜΑ=ΜΑ′ καὶ Κ μέσον τῆς ΑΑ′, ἡ ΜΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΑ′, τὸ δὲ ὀρθ. τρίγωνον ΜΚΑ ἔχον ΜΑ=δ, ΚΑ=ρ δοθεῖσαν ἔχει σταθερὰν ὑποτείνουσαν ΚΜ. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ῥηθεῖσαν ὑποτείνουσαν. Ἐὰν δὲ Ν εἶναι τυχὸν τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον καὶ ἀχθῇ διάμετρος ΔΚΔ′ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΝΔΚ, ΝΚΑ εἶναι ἴσα καὶ ΝΔ=ΜΑ=δ· ἄρα ἡ περιφέρεια (Ν, δ) τέμνει τὴν δοθεῖσαν κατὰ διάμετρον ΔΚΔ′, ἤτοι τὸ Ν σημεῖον τοῦ τόπου. Ὅλη λοιπὸν ἡ περιφέρεια (Κ, ΚΜ) ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

253.—Ἂν Μ εἶναι τὸ κέντρον τοιούτου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, τὸ ὕψος ΖΜΕ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Μ, ἤτοι ΜΖ=ΜΕ. Τὸν ζ. τόπον ἀποτελοῦσι λοιπὸν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ δοθείσῃ βάσει ΑΒ καὶ ἀπέχουσαι ταύτης τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ὕψους.

254.—Ἔστωσαν $x'x$, $y'y$ δύο εὐθεῖαι εἰς τὸ Ο τεμνόμεναι καὶ ΑΒ τμῆμα ἴσον δοθέντι τ καὶ ἔχον Α ἐπὶ τῆς $\chi'\chi$, καὶ τὸ Β ἐπὶ τῆς $y'y$. Τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ (§ 106 Πόρ. ΙΙΙ) $ΟΜ=\frac{τ}{2}$ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας $\left(Ο, \frac{τ}{2}\right)$. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν ταύτης σημεῖον καὶ ἀχθῇ εὐθεῖα ΜΑ ἴση τῇ ΟΜ καὶ προεκβληθῇ μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν $y'y$ εἴς τι σημεῖον Β, θὰ εἶναι πάλιν ΜΑ = ΜΒ = ΟΜ, ἄρα $ΑΒ= \frac{τ}{2}.2=τ$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὥστε ὁ ζ. τόπος εἶναι πᾶσα ἡ περιφέρεια $\left(Ο, \frac{τ}{2}\right)$.

255.—Ἔστω ΣΠΡ δοθὲν ὀρθ. τρίγωνον καὶ ΑΒΓ θέσις αὐτοῦ, εἰς ἣν ἡ ὑποτείνουσα στηρίζεται ἐπὶ τῶν καθέτων εὐθειῶν Οχ. Οy. Ἐπειδὴ τὸ τετετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι ἐγγράψιμον, εἶναι ω=φ. Ἡ κορυφὴ ἄρα Α κεῖται ἐπ᾽ εὐθείας ΟΖ, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς Οχ γωνίαν φ. Ἵνα δὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ΟΖ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, πρέπει ἡ περιφέρεια (Α, ΠΣ) νὰ τέμνῃ τὴν Οy καὶ ἡ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος νὰ τέμνῃ τὴν Οχ. Ἵνα ὁ πρῶτος ὅρος πληροῦται, δὲν πρέπει τὸ Α νὰ ἀπέχῃ τῆς Οy περισσότερον τῆς ΠΣ, ἤτοι ἀπωτέρα θέσις αὐτοῦ εἶναι τὸ Α′, ἐξ οὗ ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὰς Οy, Οχ, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ΠΣ, ΠΡ. Ἵνα δὲ ἐκπληροῦται ὁ β′ ὅρος δὲν πρέπει τὸ Α νὰ κεῖται ἐγγύτερον τοῦ Α″, εἰς ὃ κεῖται ἡ κορυφὴ Π, ὅταν ἡ πλευρὰ ΠΡ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ΟΖ. Ὥστε τὰ σημεῖα τοῦ Α″Α′ εἶναι

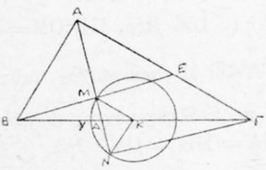


Ἄσκ. 255

ὅλα σημεῖα τοῦ τόπου. Ἂν τὸ τρίγωνον τεθῇ οὕτως ὥστε τὸ Ρ νὰ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς Oy εὑρίσκομεν ἕτερον τοιοῦτον τμῆμα κείμενον ἐπὶ ΟΖ′, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς Oy γωνίαν φ. Εὐνόητον ὅτι τοιαῦτα τμήματα δύνανται νὰ ὁρισθῶσι καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν τῶν Οχ, Oy καὶ ἑπομένως ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ 8 τοιαῦτα τμήματα.

256.—Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, Β τυχὸν σημεῖον δοθείσης περιφερείας Κ καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ ΑΒ. Ἐὰν φέρωμεν ΜΓ παράλληλον τῇ ΚΒ, τὸ Γ εἶναι μέσον τοῦ ΑΚ καὶ ΓΜ ἴσον πρὸς ἥμισυ ΚΒ$=\frac{\rho}{2}$. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ περιφερείας $\left(\Gamma, \frac{\rho}{2}\right)$. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον, ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Κ παράλληλος τῇ ΓΜ τέμνουσα τὴν ΑΜ εἰς τὸ Β, θὰ εἶναι ΚΒ$=2.$ΓΜ$=\rho$, ἤτοι τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς Κ καὶ Μ μέσον τοῦ ΑΒ. Πᾶσα ἄρα ἡ περιφέρεια Γ εἶναι ὁ ζ. τόπος.

257.—Ἔστω ΑΒΓ τοιοῦτον τρίγωνον, ΑΔ διχοτόμος τῆς Α καὶ ΒΜΕ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν. Ἐπειδὴ ΑΜ εἶναι διχοτόμος καὶ ὕψος τοῦ ΑΒΕ, εἶναι ΑΒ=ΑΕ καὶ ἑπομένως ΕΓ=ΑΓ—ΑΕ=ΑΓ—ΑΒ=δ καὶ Μ μέσον τῆς ΒΕ. Ἐὰν ἄρα ἀχθῇ ΜΚ παράλληλος τῇ ΑΓ, θὰ εἶναι Κ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΚΜ=δ/2. Κεῖται λοιπὸν τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Κ, δ/2). Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον ταύτης ἀχθῇ, δὲ ἡ ΒΜ ἐφ᾽ ἧς προεκτεινομένης λάβωμεν ΜΕ=ΒΜ καὶ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ τέμνουσα τὴν ΓΕ εἰς τι σημεῖον Α, θὰ εἶναι ΑΕ=ΑΒ, ἡ ΑΔ διχοτόμος τῆς ΒΑΓ καὶ ΑΓ—ΑΒ=ΑΓ—ΑΕ=ΕΓ=2. ΚΜ=δ. Εἶναι ἄρα τὸ Μ σημεῖον τοῦ τόπου. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τόπος τῶν ποδῶν Ν, τῶν ἐκ τοῦ Γ καθέτων ἐπὶ τὴν ΑΔ εἶναι ἡ περιφέρεια (Κ, δ/2).



Ἀσκ. 257

258.—Ἂν ΒΓ εἶναι ἡ δοθεῖσα θέσει καὶ μεγέθει βάσις, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἣν ἀποτελοῦσι τὰ τόξα τῶν κυκλικῶν τμημάτων, ὧν ἕκαστον ἔχει χορδὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν Α. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου εἶναι μέσον χορδῆς ΒΑ διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου Β περιφερείας Κ, ἐφ᾽ ἧς κεῖται ἓν τῶν ῥηθέντων τόξων, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἄσκ. 214.

259.—Ἂν Δ (Σχ. 48 β′) εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι ω=1 ὀρθ. $+$ Α/$_2$ (ἄσκ. 76). Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος εἶναι ἡ γραμμὴ τῶν τόξων τῶν κυκλικῶν τμημάτων, ὧν ἑκάτερον ἔχει χορδὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν 1 ὀρθ.$+$Α/2.

260.—Ἂν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, αἱ ΑΜ, ΟΜ εἶναι διάμεσοι ὀρθ. τριγώνων ΑΒΓ, ΟΒΓ καὶ ἑκατέρα ἴση πρὸς ΒΓ/2, ἄρα ΑΜ=ΟΜ. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ τμῆμα ΟΑ.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐντὸς τῆς γωνίας Ο τμήματος αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Τὸ τμῆμα ἄρα τοῦτο αὐτῆς εἶναι ὁ ζ. τόπος.

261.—Ἂν ἀχθῇ ΓΟΔ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ΑΟΒ, τὰ τρίγωνα ΟΓΝ, ΟΜΕ ἔχοντα ΟΓ=ΟΜ, ΟΝ=ΜΕ καὶ γων. ΓΟΝ=γων. ΟΜΕ εἶναι ἴσα, ἄρα ΓΝΟ=1 ὀρθ. Κεῖται ἄρα τὸ Ν ἐπὶ περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΟΓ. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ὑπάρχουσι σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΟΔ. Καὶ πᾶν δὲ σημεῖον τούτων εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται. Ἄρα αἱ δύο αὗται περιφέρειαι ἀποτελοῦσι τὸν ζ. τόπον.

262. - Τὸ ἄγνωστον κέντρον κεῖται α΄) ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ δοθείσῃ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην τῇ δοθείσῃ ἀκτῖνι ρ καὶ β΄) ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀκτίνων.

263.—Ἂν ρ εἶναι ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς καὶ (Κ, α), (Λ, α΄) αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι, τὸ ἄγνωστον κέντρον θὰ κεῖται α΄). Ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν Κ καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα α+ρ ἢ α - ρ ἢ ρ—α καὶ β΄) Ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου τῇ Λ καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα α΄+ρ ἢ α΄—ρ ἢ ρ - α΄.

264 —Ἔστω (Κ, α) ἡ δοθεῖσα περιφέρεια, Α τὸ δοθὲν αὐτῆς σημεῖον καὶ (Λ, α΄) ἡ ἑτέρα δοθεῖσα περιφέρεια. ἔστω δὲ α>α΄. Τὸ ἄγνωστον κέντρον Μ τῆς ζητουμένης περιφερείας (Μ, χ) ἀπέχει τοῦ μὲν Κ ἀπόστασιν α+χ τοῦ δὲ Λ ἀπόστασιν α΄+χ (ἐξ. ἐπαφαί), θὰ κεῖται δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΚΑ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΚ λάβωμεν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Κ τμῆμα ΑΟ=α΄ θὰ εἶναι ΜΟ=ΜΛ, ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ τμῆμα ΟΛ. Εἶναι λοιπὸν τομὴ ταύτης καὶ τῆς ΚΑ.— Ὁμοίως πραγματευόμεθα τὸ ζήτημα καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις.

265.—Ἔστωσαν Α,Β τὰ δοθέντα σημεῖα, χy ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια. Τὸ ἄγνωστον κέντρον Ο ὀφείλει νὰ κεῖται α΄) ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, β΄) ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Κ καθέτου ἐπὶ τὴν χ y, διότι ἡ Ο Κ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν χορδὴν ΓΔ θὰ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν χ y κάθετος.

266.— Α΄ περίπτωσις. Ἔστω Α ἡ δοθεῖσα γωνία καὶ ΑΔ, ΒΕ αἱ δοθεῖσαι διάμεσοι. Χαραχθείσης τῆς ΒΕ ὁρίζεται τὸ Θ, διότι ΒΘ $=^2/_3$ ΒΕ. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι τότε τομὴ τῆς περιφερείας (Θ, $^2/_3$ ΑΔ) καὶ τῆς γραμμῆς, ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς ὁποίας φαίνεται ἡ ΒΕ ὑπὸ τὴν δοθεισαν γωνίαν Α. Ὁρισθείσης τῆς κορυφῆς Α ἄγεται ΑΕ καὶ λαμβάνεται ἐπ' αὐτῆς ΕΓ=ΑΕ. Οὕτω κατασκευάζεται τὸ ΑΒΓ.

Β΄ περίπτωσις. Ἂν Γ ἡ δοθεῖσα γωνία, ἡ κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς ὁποίας φαίνεται ἡ ΒΕ ὑπὸ γωνίαν Γ. Ἂν δὲ Κ εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς τῶν τόξων τῆς γραμμῆς ταύτης, τὸ Δ κεῖται (ἄσκ. 214) ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΒΚ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Θ,ΑΔ/$_3$). Ὁρισθέντος τοῦ Δ ἄγεται ἡ ΒΔ μέχρι οὗ τμήσῃ τὸν α΄. τόπον εἰς τὸ Γ, ἄγεται ἡ ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ὁρίζεται τμῆμα ΕΑ=ΕΓ. Τὸ ΑΒΓ οὕτω κατασκευάζεται.

267.—***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. ἀσκ. 245) τὸ ζ. τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν τὸ ὕψος ΑΕ, τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Τῆς ΑΔΖ διχοτομούσης τὴν Α τὸ Ζ εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΒΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΚΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἄρα ρ=φ· ἐπειδὴ δὲ ΚΖ=ΖΑ καὶ ρ=ω ἕπεται ὅτι καὶ ω=φ. Εἶναι δὲ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΕΔ ἀρχικῶς κατασκευάσιμον.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΕΔ ἐκ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΑΕ καὶ τῆς ὑποτεινούσης ΑΔ· εἶται γωνίαν ω ἴσην τῇ φ ἔχουσαν κορυφὴν Α καὶ πλευρὰν ΑΔ, ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ΑΗ αὐτῆς ὁρίζομεν τμῆμα ΑΚ ἴσον τῇ δοθείσῃ ἀκτῖνι. Γράφοντες μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ περιφέρειαν ὁρίζομεν τὰς τομὰς Β,Γ αὐτῆς μετὰ τῆς ΔΕ. Οὕτω δὲ ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον.

268, Κατασκευασθέντος τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΕ ὁρίζεται, ὡς προηγουμένως ἡ ΑΗ. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν διάμεσον ΑΘ γραφῇ περιφέρεια, ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ΔΕ τὸ Θ, ἐξ οὗ ὑψοῦντες κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ΑΗ ὁρίζομεν τὸ κέντρον Κ. Εἶτα μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΕ εἰς τὰς ἄλλας κορυφὰ Β καὶ Γ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

269.—***Α΄ περίπτωσις.*** Ἔστω ΒΓ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ καὶ ΑΔ τὸ εἰς αὐτὴν δοθὲν ὕψος. Ἐὰν ἐπὶ περιφερείας μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ὁρίσωμεν χορδὴν ΒΓ ἴσην τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ἡ τρίτη κορυφὴ Α εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ἐπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ΑΔ—.

Β΄ περίπτωσις. Ἂν δοθεῖσα πλευρὰ εἶναι ἡ ΑΓ, ὁρισθείσης ἐπὶ περιφερείας μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα χορδῆς ΑΓ ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΒΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Α, ΑΔ) καὶ κατασκευάζεται εὐκόλως· οὕτω δὲ ὁρίζεται καὶ ἡ κορυφὴ Β.

270.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 112) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν ΒΓ, Α καὶ ΚΔ=ρ. Γνωρίζομεν (ἄσκ. 250) ὅτι ΒΘ=ΓΔ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ΒΖ=ΒΔ, ἕπεται ὅτι ΖΘ=ΒΓ.

Σύνθεσις. Εἰς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α ἐγγράφομεν περιφέρειαν (Κ, ρ) καὶ ἐπὶ τῆς ΑΖ ὁρίζομεν τμῆμα ΖΘ=ΒΓ,ἐκ δὲ τοῦ Θ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΘ τέμνουσαν τὴν ΑΚ εἴς τι σημεῖον Κ΄. Γράφομεν εἶτα περιφέρειαν (Κ΄, Κ΄Θ) καὶ ἄγομεν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ταύτης καὶ τῆς Κ.

271. — Ἐπειδὴ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ὑποτείνουσα, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

272.— Ἐπειδὴ (ἄσκ. 152) ΑΒ+ΑΓ—ΒΓ=2ρ, ἕπεται ΒΓ=(ΑΒ+ΑΓ)—2ρ καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ προηγούμενον.

273.— Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον, τοῦ ὀρθ. τριγώνου

ΑΒΓ γνωρίζομεν ΑΒ+ΒΓ καὶ τὴν ΑΓ· κατασκευάζεται ἄρα (ἄσκ.236) τοῦτο, μεθ' ὃ εὐκόλως καὶ τὸ ζ. ὀρθογώνιον.

274.— Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζ. ὀρθογώνιον, οὗ αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ε σχηματίζουσι δοθεῖσαν γωνίαν ΑΕΒ=ω καὶ ΑΒ—ΑΔ=δ. Ἂν ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίσωμεν ΑΖ=ΑΔ, θὰ εἶναι ΖΒ=δ,

$\Delta ZB = 90^o + A\Delta Z = 90^o + 45^o = 135^o$ καὶ $\Delta BZ = 90^o - \frac{\omega}{2}$ ὡς ἐκ τοῦ ΑΕΒ εὐκόλως προκύπτει. Τὸ τρίγωνον ἄρα ΔΖΒ κατασκευάζεται, ἐξ αὐτοῦ δὲ καὶ τὸ ΑΒΓΔ.

275.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζ. τραπέζιον ἔχον δεδομένα στοιχεῖα τὰς βάσεις ΑΒ, ΓΔ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἡ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ΚΕ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος, ἡ δὲ ἀπόστασις ΚΖ τοῦ Κ ἀπ' αὐτῆς ἰσοῦται τῇ ἀποστάσει τοῦ Κ ἀπὸ πάσης χορδῆς ἴσης τῇ ΓΔ.

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν (Κ, ρ), ὁρίζομεν χορδὴν ΑΒ ἴσην τῇ μεγαλυτέρᾳ βάσει καὶ ἑτέραν ΗΘ ἴσην τῇ μικροτέρᾳ βάσει. Εἶτα γράφομεν μὲ κέντρον Κ περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῇ ΗΘ καὶ φέρομεν παράλληλον τῇ ΑΒ ἐφαπτομένην ΓΔ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ μικροτέρα βάσις τοῦ ΑΒΓΔ.

276.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΒΑΓ εἶναι ἡ ζ. τέμνουσα διερχομένη διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν κοινῶν σημείων Α περιφερειῶν Κ, Λ καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΚΔ, ΛΕ, θὰ εἶναι ΑΒ=2. ΑΔ, ΑΓ=2. ΑΕ, ὅθεν ΒΑΓ=2ΔΑΕ καὶ ἡ ΔΑΕ ἥμισυ τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος. Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Λ ἀχθῇ ΛΖ παράλληλος τῇ ΒΑΓ τέμνουσα τὴν ΚΔ εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι ΛΖ=ΔΕ, τοῦ δὲ ὀρθ. τριγώνου ΚΛΖ εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραὶ ἡ ΚΛ καὶ ΛΖ, ἄρα τοῦτο κατασκευάζεται ἀρχικῶς.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΚΛΖ ἔχον ὑποτείνουσαν ΚΛ καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ΛΖ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος. Ἄγομεν εἶτα ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΛΖ τὴν ΒΑΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

277. — ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΔΕΖ εἶναι τρίγωνον περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν ΑΒΓ καὶ ἴσον πρὸς ἕτερον δοθὲν Δ'Ε'Ζ', ἡ κορυφὴ Δ κεῖται ἐπὶ τόξου τμήματος, ὅπερ ἔχει χορδὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν Δ', ἡ δὲ Ε ἐπὶ τόξου τμήματος ἔχοντος χορδὴν ΑΓ καὶ δεχομένου γωνίαν Ε'. Εἶναι δὲ καὶ ἡ κοινὴ τῶν περιφερειῶν τούτων τέμνουσα ΔΑΕ ἴση τῇ Δ'Ε'.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὰς περιφερείας, εἰς ἃς ἀνήκουσι τὰ ῥηθέντα τόξα καὶ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτῶν σημείου Α ἄγομεν τέμνουσαν ΔΑΕ ἴσην τῇ Δ'Ε'· εἶτα δὲ ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΒ, ΕΓ, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Ζ καὶ ὁρίζεται οὕτω τὸ ζ. τρίγωνον ΔΕΖ.

278.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓ εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ δοθέντος σημείου Α καὶ τέμνουσα δοθείσας παραλλήλους εὐθείας Ε, Ε' οὕτως ὥστε τὸ μεταξὺ αὐτῶν τμῆμα ΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς τ. Ἂν ἐκ τοῦ σημείου Δ τῆς Ε ἀχθῇ ΔΖ παράλληλος τῇ ΑΒΓ, θὰ εἶναι ΔΖ=ΒΓ=τ.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα τ γράφομεν περιφέρειαν, ἔστω δὲ Ζ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τῆς Ε΄. Ἄγομεν παράλληλον τῇ ΔΖ τὴν ΑΒΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἡ ἀπόδειξις καὶ διερεύνησις γίνονται εὐκόλως.

279.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ εἶναι ἡ τέμνουσα περιφερείας Κ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α τοιαύτη ὥστε ΑΒ=ΒΓ, ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΚΓ τέμνουσα τὴν ΑΚ εἰς τὸ Ο, θὰ εἶναι Ο μέσον ΑΚ καὶ ΟΒ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ Κ. Κεῖται ἄρα τὸ Β ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, ρ/2). Ἐντεῦθεν ἡ σύνθεσις εὐκόλως.

280.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ὁ κύκλος Ο ἐφάπτηται τοῦ μὲν τόξου ΑΒ κυκλ. τομέως ΚΑΒ εἰς τὸ Γ, τῶν δὲ ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε, Δ, ἡ ΚΟ διέρχεται διὰ τοῦ Γ (§ 122 Πόρ. I)· ἕνεκα δὲ τῆς ἰσότητος ΟΕ=ΟΔ ἡ ΚΟΓ διχοτομεῖ τὴν Κ καὶ τὸ τόξον ΑΒ. Ἂν εἰς τὸ Γ ἀχθῇ κοινὴ τῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰς εὐθείας ΚΑ, ΚΒ εἰς τὰ Ζ, Η, ἐπειδὴ ΟΕ=ΟΓ, ἡ ΖΟ διχοτομεῖ τὴν ΚΖΗ.

Σύνθεσις. Ἄγομεν εἰς τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου ΑΒ ἐφαπτομένην καὶ διχοτομοῦμεν τὴν ὑπ᾽ αὐτῆς καὶ τῆς ΚΑ σχηματιζομένην γωνίαν Ζ. Ἡ τομὴ Ο τῆς διχοτόμου ταύτης καὶ τῆς ΚΓ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζ. περιφερείας, ἀκτὶς δὲ ἡ ΟΓ.

281.—α΄) Ὁρίζομεν τρία τόξα διαδοχικά, ὁμόρροπα καὶ ἴσα πρὸς τὸ ληφθέν β΄) Ὁρίζομεν 5 τόξα ὁμόρροπα, διαδοχικὰ καὶ τὰ μὲν τρία πρῶτα ἴσα πρὸς τὸ ληφθὲν ἀρχικῶς, τὸ τέταρτον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτοῦ καὶ τὸ τελευταῖον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀρχικοῦ.

282—. Κατασκευάζομεν τρεῖς διαδοχικὰς γωνίας, ὧν ἡ πρώτη καὶ δευτέρα ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἡ δὲ τρίτη πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

283.—Διαιροῦμεν τὸ δοθὲν σχῆμα εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν τὸ ὑπὸ τριῶν διαδοχικῶν μερῶν ἀποτελούμενον σχῆμα (εὐθ. τμῆμα, τόξον ἢ γωνία).

284.—α΄) Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ἡμιπεριφερείας ἐπὶ 2 ἰσοῦται τῇ περιφερείᾳ, ὁ ζ. λόγος εἶναι 2. β΄) Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ὁ λόγος περιφερείας πρὸς τὸ τέταρτον αὐτῆς εἶναι 4.

285.— Ἂν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ΑΔΖΕ, ΔΒΖΕ, ΔΖΓΕ εἶναι (§ 106 πόρ. II) παραλληλόγραμμα κατ᾽ ἀκολουθίαν (§ 97) τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς ἕκαστον τῶν ΑΔΖ, ΒΔΕ, ΓΖΕ, ἄρα ΑΒΓ=4. ΔΕΖ, ἄρα ΑΒΓ : ΔΕΖ=4.

286.—Προφανῶς (§ 172) εἶναι Ε= 6, 25×2,30=14,375 τ. μ.

287,—Αἱ προσκείμεναι τῇ βάσει πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 150,75—45,50×2=59,75 μ. Τὸ ὕψος ἄρα εἶναι 59,75: 2=29,875 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν 45, 50×29, 875=1359,3125 τ. μ.

288.— Προφανῶς (§ 172 πορ.) εἶναι $E=3,45\times3,45=11,9025$ τ.μ.

289.— Ἡ πλευρὰ εἶναι 60, 24 : 4=15,06 μ, ἄρα $E=15,06^2$ $=226,8036$ τ. μ.

290.—Ἐπειδὴ 450=30. υ, ἕπεται ὅτι υ= 450: 30=15 μ.

291.—Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς, θὰ εἶναι $\alpha^2=14,0625$· ἄρα $\alpha=\sqrt{14,0625}=3,75$ μ (ὅρα Θ. Ἀριθμητικήν μου § 204).

292.—Ἂν κληθῇ β ἡ ζ. βάσις, θὰ εἶναι $20\,\beta=32^2$, ὅθεν $\beta=32^2:20$ $=51,2$ μ.

293.—Ἐπειδὴ 154, 35 : 3= 51, 45, ἕπεται Ε=154, 35. 51, 45= 7341, 3075 τ. μ.

294.—Ἡ βάσις εἶναι 249,20 : 4=62,30· ἄρα Ε=62, 30. 41,10= 2560, 53 τ. μ.

295.—Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΓΔ καὶ α′ τὴν τῶν ἄλλων πλευρῶν ΒΓ, ΑΔ ῥόμβου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι (§ 174) (ΑΒΓΔ)= (ΑΒ).α, (ΑΒΓΔ)=(ΒΓ) α′, ὅθεν (ΑΒ).α=(ΒΓ).α′. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒ)=(ΒΓ) ἕπεται ὅτι α=α′.

296 — Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθέν, ΑΒΓ′Δ′ ἕτερον ἰσοδύναμον αὐτῷ καὶ κοινὴν ἔχον βάσιν ΑΒ. Ἐὰν ΓΕ, Γ′Ε′ εἶναι τὰ ὕψη αὐτῶν, ἐκ τῶν (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ). (ΓΕ), (ΑΒΓ′Δ′)=(ΑΒ) (Γ′Ε′) καὶ τῆς ἐξ ὑποθέσεως ἀληθοῦς (ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ′Δ′) ἕπεται ὅτι (ΓΕ)=(Γ′Ε′). Ἀπέχει λοιπὸν τὸ τυχὸν σημεῖον Γ′ τοῦ τόπου ἀπὸ τῆς ΑΒ δοθεῖσαν ἀπόστασιν. Ἄρα (§ 150, 7ον) κεῖται ἐπὶ παραλλήλων τῇ ΑΒ εὐθειῶν καὶ ἀπεχουσῶν ἀπ᾽ αὐτῆς ἀπόστασιν ΓΕ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τῶν παραλλήλων τούτων ἀνήκουσιν εἰς τὸν τόπον. Αἱ παράλληλοι ἄρα αὗται ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον τόπον.

297.— Προφανῶς (§ 175) εἶναι Ε=345. 20 : 2=3450 τ μ.

298.— Ἐὰν κληθῇ χ τὸ ζητούμενον μῆκος, θὰ εἶναι 150χ : 2=3000, ὅθεν χ=40 μ.

299.— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οἰκοπέδου εἶναι 45,60. 23,20 : 2=528,96 τ μ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $^9/_{16}$ τ. μ. τιμῶνται 65 δραχ, τὸ ἓν τ. μέτρον τιμᾶται $\frac{65.16}{9}$ δραχμάς, τὸ δὲ ὅλον οἰκόπεδον τιμᾶται $\frac{65.16}{9}.528,96=61124,26...$ δρ.

300·— Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΜΓ (Σχ. 130) ἔχουσιν ἴσας βάσεις ΒΜ, ΜΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΔ. Εἶναι ἄρα (§ 175 Πόρ. Ι) ἰσοδύναμα.

301.—Ἐὰν (ΑΒΔ)=(ΑΔΕ)=(ΑΕΓ) καὶ κληθῇ υ τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ ΑΒΓ, θὰ εἶναι προφανῶς $\frac{1}{2}$ (ΒΔ). υ = $\frac{1}{2}$ (ΔΕ). υ = $\frac{1}{2}$ (ΕΓ) υ, ὅθεν ΒΔ=ΔΕ= ΕΓ. Ἀρκεῖ ἄρα νὰ τριχοτομηθῇ ἡ ΒΓ καὶ νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.

302.— Διαιροῦμεν, ὡς προηγουμένως, τὸ ΑΒΓ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη ΑΒΔ, ΑΔΕ, ΑΕΓ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Δ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῇ ΑΓ, ἔστω δὲ Ζ ἡ τομὴ αὐτῶν, ἥτις εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον. Τῷ ὄντι· τὰ τρίγωνα ΑΒΔ. ΑΖΒ ἔχοντα κοινὴν βάσιν ΑΒ καὶ ἴσα ὕψη, διότι ΔΖ παράλληλος τῇ ΑΒ, εἶναι ἰσοδύναμα· εἶναι ἄρα τὸ ΑΒΖ τρίτον τοῦ ΑΒΓ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ΑΖΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ΒΖΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΑΒΓ.

Β'. τρόπος. Ὑποθέτοντες Ζ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ καλοῦντες ΖΗ τὸ ὕψος τοῦ ΒΖΓ, ΑΘ δὲ τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ, βλέπομεν ὅτι $(ΒΖΓ) = \frac{1}{2}(ΒΓ)$ $(ΖΗ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΑΘ)$, ὅθεν $(ΖΗ) = \frac{ΑΘ}{3}$, ἤτοι τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ΑΘ. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι Ζ κεῖται ἀπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἴσην πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἐπ' αὐτὴν ὕψους ΓΚ. Εἶναι ἄρα τὸ Ζ τομὴ τῶν παραλλήλων τούτων.—Ἤδη εὐκόλως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Ζ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τοῦ ΑΒΓ.

303.— Ἐπειδὴ (§ 176) εἶναι $\frac{(ΔΕΖ}{(ΑΒΓ)} = \frac{(ΔΕ)(ΔΖ)}{(ΑΒ)ΑΓ)}$, $(ΔΕΖ) = (ΑΒΓ)$, $(ΔΕ)=(ΔΖ)$ κτλ. ἕπεται ὅτι $(ΔΕ)^2=36$, ἄρα $ΔΕ=6$ μ.

304. — Ἂν ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ ΑΒΓ τὸ δοθέν, θὰ εἶναι $(ΔΕΖ):(ΑΒΓ)=(ΔΕ)^2:16$, ὅθεν $(ΔΕ)^2=16$ καὶ $(ΔΕ)=4$ μ. Ἡ κατασκευὴ ἤδη εἶναι εὔκολος.

305. —Ἐπειδὴ $Α=Α'$, εἶναι $(ΑΒΓ):(Α'Β'Γ'):=(ΑΒ)(ΑΓ):(Α'Β').(Α'Γ')$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $Β+Β'=2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι : $(ΑΒΓ):(Α'Β'Γ')=$ $(ΑΒ)(ΒΓ):(Α'Β')(Β'Γ')$, ὅθεν εὐκόλως $ΒΓ:Β'Γ'=ΑΓ:Α'Γ'$.

306.— Προφανῶς (§ 177) εἶναι $Ε=\frac{100+60}{2}.30=2400$ τ. μ.

307.—Ἐὰν β εἶναι τὸ ζητούμενον, θὰ εἶναι $\frac{75,60+β}{2}.10=500$, ὅθεν $β=24,40$ μ.

308.—Κατὰ τὸ Πόρ. (§ 176) εἶναι $Ε=94,60 \; 27,50=2601,50$ τ. μ.

309.—Ἔστω ΑΒΓΔ τραπέζιον, Ε τὸ μέσον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΕΖ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἄλλης ΑΔ. Ἄγοντες ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῇ ΑΔ τέμνουσαν τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς τὰ Θ καὶ Η, σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΘΗΔ, ὅπερ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ, διότι τὸ μὲν ΑΘΕΓΔ εἶναι κοινόν, τὰ δὲ τρίγωνα ΘΕΒ, ΓΕΗ εἶναι ἴσα ἄρα $(ΑΒΓΔ)=(ΑΘΗΔ)=(ΑΔ).(ΕΖ)$.

310.— Ἕκαστον τῶν ἓξ τριγώνων, ἐξ ὧν τὸ ἑξάγωνον ἀποτελεῖται, ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}α.\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$. Ἄρα τὸ τοῦ ἑξαγώνου εἶναι

$$\frac{α^2\sqrt{3}}{4}.6=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}.$$

311.—Εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαφόρων αὐτοῦ μερῶν καὶ προσθέτομεν ταῦτα. Οὕτως

$(AB H) = \frac{1}{2}(AH).(BH) = \frac{1}{2}. 2.4 = 4$ τ. μ., $(BH\Gamma K) = \frac{BH+\Gamma K}{2}.(HK) = \frac{4+5}{2}. 7 = 31,5$ τ. μ, $(\Gamma K\Delta) = \frac{1}{2}(K\Delta)(\Gamma K) = \frac{1}{2}. 4. 5 = 10$ τ. μ. $(E\Lambda\Delta) = \frac{1}{2}(\Lambda\Delta)(E\Lambda) = \frac{1}{2}. 8. 2,5 = 10$ τ.μ., $(\Theta\Lambda EZ) = \frac{\Theta Z+E\Lambda}{2}.(\Theta\Lambda) = \frac{2+2,5}{2}. 1 = 2,25$ τ. μ. καὶ $(A\Theta Z) = \frac{1}{2}(A\Theta)(\Theta Z) = \frac{1}{2}.4.2 = 4$ τ.μ.

Τὸ ζητούμενον ἄρα ἐμβαδὸν εἶναι 61,75 τ. μ.

312.—Ἔστω ΑΒΓΔ τυχὸν τραπεζοειδές, ΑΓ μία διαγώνιος αὐτοῦ καὶ ΒΕ, ΔΖ αἱ ἀπ' αὐτῆς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Β. Δ. Ἐπειδὴ

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(BE), (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(A\Gamma)(\Delta Z)$, ἕπεται ὅτι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(A\Gamma)[(BE)+(\Delta Z)] = (A\Gamma).\frac{(BE)+(\Delta Z)}{2}.$$

313. —Ἂν (Σχ.127) εἶναι $AB = 18^{\mu}$, θὰ εἶναι $18^2 = 30.(BH)$ ὅθεν$(BH) = 10,8^{\mu}$ καὶ $(H\Gamma) = 30-10,8 = 19,2^{\mu}$.

314. — Ἂν $(BH) = 18^{\mu}$, θὰ εἶναι $(AB)^2 = 18.50$, $(A\Gamma)^2 = 32.50$, ὅθεν $(AB) = 30^{\mu}$ καὶ $(A\Gamma) = 40^{\mu}$.

315.—Ἔστω ΑΒ διάμετρος, ΑΓ, ΑΔ, δύο χορδαὶ καὶ ΑΓ′, ΑΔ′ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ εἶναι ὀρθογώνια, εἶναι (§ 180) $(A\Gamma)^2 = (AB)(A\Gamma')$, $(A\Delta)^2 = (AB)(A\Delta')$ ἄρα $(A\Gamma)^2 : (A\Delta)^2 = (A\Gamma') : (A\Delta')$.

316.— Γνωρίζομεν (Σχ. 127) ὅτι $(A\Gamma)^2 : (AB)^2 = (H\Gamma) : (BH)$. Ἐὰν δὲ $(A\Gamma) = 2(AB)$, ἕπεται ὅτι $(A\Gamma)^2 : (AB)^2 = 4(A\Gamma)^2 : (AB)^2 = 4$, ἄρα καὶ $(H\Gamma) : (HB) = 4$

317.—Προφανῶς (§ 181) εἶναι $\chi^2 = 12^2+16^2 = 400$, ὅθεν $\chi = 20^{\mu}$.

318.—Προφανῶς (§ 181 πόρ. I) εἶναι $\chi^2 = 45^2-36^2 = 729$, ὅθεν $\chi = 27^{\mu}$. Τὸ $E = 18.27 = 486$ τ. μ.

319.—Ἂν εἶναι χ ἡ ὑποτείνουσα, θὰ εἶναι $\chi^2 = 21^2+28^2$, ὅθεν $\chi = 35^{\mu}$. ὥστε (Σχ. 127) $21^2 = 35(BH)$, ὅθεν $(BH) = 12,60^{\mu}$ καὶ $(H\Gamma) = 35-12,60 = 22,40^{\mu}$.

320.—Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, οὗ $A = 45^o$, $(AB) = 80^{\mu}$, $(A\Delta) = 32^{\mu}$. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος ΔΕ θὰ εἶναι ΔΕ=ΑΕ καὶ $32^2 = 2(\Delta E)^2$, ὅθεν $(\Delta E) = 16\sqrt{2}$. Ἄρα $E = 80.16\sqrt{2} = 1280\sqrt{2}$ τ. μ.

321.—Προφανῶς (Σχ. 43) εἶναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(B\Gamma)(A\Delta.)$ Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι $(A\Delta)^2 = (AB)^2-(B\Delta)^2 = 8^2-6^2 = 28^{\mu}$, ὅθεν $(A\Delta) = 2\sqrt{7}$ καὶ $(AB\Gamma) = \frac{}{2}. 12. 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$ τ. μ.

322.—Προφανῶς (Σχ. 131) εἶναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2}(\Gamma Z)$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῇ ΑΔ, θὰ εἶναι $\Gamma E = A\Delta = 15^{\mu}$, $AE = \Delta\Gamma = 40^{\mu}$, ἄρα $(EB) = 20^{\mu}$ καὶ $(EZ) = (ZB) = 10^{\mu}$. Ἐκ δὲ τοῦ ΓΖΒ εὑρίσκομεν $(\Gamma Z)^2 = 15^2 -$

10^2, ὅθεν $(\Gamma Z)=5\sqrt{5}$ καὶ $AB\Gamma\Delta=\frac{60+40}{2}.\ 5\sqrt{5}=250\sqrt{5}$ τ. μ.

323.—Ἂν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι $(AB\Gamma)=\frac{\alpha}{2}.\ (A\Delta)$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὅτι $(A\Delta)^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{3\alpha^2}{2}$, ὅθεν $(A\Delta)=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$ καὶ $(AB\Gamma)=$ $\frac{\alpha}{2}.\ \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

324.—Ἂν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἕνεκα τῶν ὀρθ. τριγώνων ΒΔΕ, ΕΔΓ εἶναι $(BE)^2=(B\Delta)^2-(\Delta E)^2$, $(E\Gamma)^2=(\Delta\Gamma)^2-(\Delta E)^2$ ὅθεν $(BE)^2-(E\Gamma)^2=(B\Delta)^2-(\Delta\Gamma)^2=(B\Delta)^2-(A\Delta)^2=(AB)^2$,

325.—Ἂν Κ (Σχ 106) εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον καὶ ΜΑΜ΄ χορδὴ τῆς ἐξωτερικῆς ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἐσωτερικήν, ἡ ΚΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΑΜ΄, ἄρα τὸ Α εἶναι μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΜ εἶναι $(AM)^2=A^2-\alpha^2$, ὅθεν $(AM)=\sqrt{A^2-\alpha^2}$, ἕπεται ὅτι $(MAM')=2\sqrt{A^2-\alpha^2}$.

326. Ἂν ΛΓ (Σχ. 103) εἶναι παράλληλος τῇ κοινῇ ἐξωτερικῇ ἐφαπτομένῃ ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΚΛΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἄρα $(\Lambda\Gamma)^2=\delta^2-(A-\alpha)^2$, ὅθεν $(\Lambda\Gamma)=(AB)=\sqrt{\delta^2-(A-\alpha)^2}$.

327. Ἐπειδὴ διάμετροι τῶν περιφερειῶν τούτων εἶναι αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ, ἕπεται ὅτι $(B\Gamma)=2A$, $(AB)=2\alpha$, $(A\Gamma)=2\alpha'$. Ἡ ἰσότης ἄρα $(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$ γίνεται $4A^2=4\alpha^2+4\alpha'^2$, ὅθεν $A^2=\alpha^2+\alpha'^2$.

328.—Ἂν (Σχ. 128) $(AB)=3^{\mu}$, $(A\Gamma)=4^{\mu}$, θὰ εἶναι $(B\Gamma)^2=3^2+4^2$, ὅθεν $(B\Gamma)=5^{\mu}$. Κατὰ δὲ τὸ Θ (§ 180) εἶναι $3^2=5\ (B\Delta)$, ὅθεν $B\Delta=1\frac{4}{5}^{\mu}$ καὶ $(\Delta\Gamma)=5-1\frac{4}{5}=3\frac{1}{5}{}^{\mu}$. Κατ' ἀκολουθίαν (§ 182) εἶναι $(A\Delta)^2=\frac{9}{5}.\ \frac{16}{5}$, ὅθεν $(A\Delta)=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}{}^{\mu}$.

β΄) τρόπος. Ὡς γνωστὸν εἶναι $(AB\Gamma)=\frac{4.3}{2}=6$ τ.μ. καὶ

$$(AB\Gamma)=\frac{5(A\Delta)}{2},\ \text{ἄρα}\ \frac{5(A\Delta)}{2}=6,\ \text{ὅθεν}\ (A\Delta)=\frac{12}{5}.$$

329.—Προφανῶς (Σχ. 128) εἶναι $(B\Gamma)=2+8=10^{\mu}$. Κατὰ δὲ τὸ Θ (§ 182) εἶναι $(A\Delta)^2=2.8$, ὅθεν $(A\Delta)=4^{\mu}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(AB\Gamma)={}^1/_2.\ 10.4=20$ τ. μ.

330.—Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $(AB)^2=(B\Gamma)(B\Delta)$, $(A\Gamma)^2=(B\Gamma)(\Delta\Gamma)$ ἕπεται ὅτι $\frac{1}{(AB)^2}+\frac{1}{(A\Gamma)^2}=\frac{1}{B\Gamma}\left(\frac{1}{B\Delta}+\frac{1}{\Delta\Gamma}\right)=\frac{1}{B\Gamma}.\ \frac{B\Gamma}{(B\Delta)(\Delta\Gamma)}=\frac{1}{(B\Delta)(\Delta\Gamma)}$. Ἐπειδὴ δὲ $(B\Delta)(\Delta\Gamma)=(A\Delta)^2$, αὕτη γίνεται $\frac{1}{(AB)^2}+\frac{1}{(A\Gamma)^2}=\frac{1}{(A\Delta)^2}$.

331.—Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον, εἶναι $(\Gamma E)^2=(A\Gamma)\ (\Gamma B)=2.4$, ὅθεν $(\Gamma E)=2\sqrt{2}$ μ.

332.—Ἐπειδὴ $3^2+4^2=9+16=25$ ἢ $3^2+4^2=5^2$, ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 5 κεῖται ὀρθὴ γωνία (§ 184 Πόρ.).

333.—α΄) Ἐπειδὴ $6^2=36$, $4^2+5^2=41$, ἕπεται $6^2<5^2+4^2$· ἡ μεγαλυτέρα ἄρα γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ὀξεῖα.

β΄) Ἐπειδὴ $12^2=144$ καὶ $7^2+9^2=130$, ἕπεται $12^2>7^2+9^2$ ἄρα ἀπέναντι τῆς 12 κεῖται ἀμβλεῖα γωνία.

334.—Ἐκ τῆς $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ προκύπτει $\lambda^2\alpha^2=\lambda^2\beta^2+\lambda^2\gamma^2$ ἢ $(\lambda\alpha)^2=(\lambda\beta)^2+(\lambda\gamma)^2$· ἄρα ἀπέναντι τῆς $\lambda\alpha$ κεῖται ὀρθὴ γωνία.

335.—Ἐπειδὴ $15^2>8^2+10^2$ ἀπέναντι τῆς 15 κεῖται ἀμβλεῖα γωνία. Ἂν δὲ κληθῇ χ ἡ ζ. προβολή, θὰ εἶναι $15^2=8^2+10^2+2.\ 8\ \chi.$, ὅθεν

$$\chi=\frac{61}{16}=3\ \frac{13}{16}\mu.$$

336.— Τῆς γωνίας Γ οὔσης ὀξείας (§ 73 Πόρ. ΙΙ), ἂν ἀχθῶσιν κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν αἱ ΕΖ,ΔΗ, θὰ εἶναι $(ΒΕ)^2=(ΒΓ)^2+(ΕΓ)^2-2\ (ΒΓ)(ΓΖ)=(ΕΓ)^2+(ΒΓ)\ [(ΒΓ)-2(ΓΖ)]$. Ἐπειδὴ δὲ ΓΖ=ΒΗ, ἕπεται ὅτι $(ΒΓ)-2.\ (ΓΖ)=(ΗΖ)=ΔΕ$ καὶ $(ΒΕ)^2=(ΕΓ)^2+(ΒΓ)(ΔΕ)$.

337.—Ἂν (Σχ. 130β΄) εἶναι $(ΑΒ)=8^{\mu}$, $(ΒΓ)=10^{\mu}$, $(ΑΓ)=12^{\mu}$, θὰ εἶναι (§ 185) $8^2+12^2=2(ΑΜ)^2+2.25$, ὅθεν $(ΑΜ)^2=\frac{158}{2}=79$ καὶ ἑπομένως $(ΑΜ)=\sqrt{79}$. Οὕτως ὑπολογίζονται καὶ αἱ ἄλλαι διάμεσοι αὐτοῦ.

338.—Τῆς ΑΓ ὑποτιθεμένης μεγαλυτέρας τῆς ΑΒ (Σχ. 130β΄) εἶναι $\omega>\varphi$ καὶ ἑπομένως $\omega>1$ ὀρθ. καὶ $\varphi<1$ ὀρθ. Ἐκ τοῦ ΑΜΓ (§ 184) ἕπεται ὅτι: $(ΑΓ)^2=(ΑΜ)^2+(ΜΓ)^2+2(ΜΓ)(ΜΔ)$, ἐκ δὲ τοῦ ΑΜΒ (§ 183) ἕπεται ὅτι:

$(ΑΒ)^2=(ΑΜ)^2+(ΜΒ)^2-2(ΜΒ)(ΜΔ)$. Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι:

$$(ΑΓ)^2-(ΑΒ)^2=4(ΜΒ)(ΜΔ)=2(ΒΓ)(ΜΔ).$$

339.—Ἔστωσαν Ζ,Ε τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ ΑΖ, ΓΖ εἶναι διάμεσοι τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΓΒΔ, ἕπεται (§ 185) ὅτι:

$(ΑΒ)^2+(ΑΔ)^2=2\ (ΑΖ)^2+2\ (ΒΖ)^2$, $(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2=2\ (ΓΖ)^2+2\ (ΒΖ)^2$, ὅθεν

$$(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=2\ (ΑΖ)^2+(ΓΖ)^2+4\ (ΒΖ)^2. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΖΕ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΖΕ, ἕπεται $(ΑΖ)^2+(ΖΒ)^2=2\ (ΖΕ)^2+2\ (ΑΕ)^2$, ὅθεν $2(ΑΖ)^2+2(ΖΓ)^2=4\ (ΖΕ)^2+4(ΑΕ)^2$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$$(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=4(ΑΕ)^2+4(ΒΖ)^2+4(ΖΕ)^2,$$

ἐξ ἧς λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $2(ΑΕ)=(ΑΓ)$ καὶ $2(ΒΖ)=(ΒΔ)$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι: $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2+4(ΖΕ)^2$.

340. Ἐπειδὴ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου συμπίπτουσιν, ΕΖ=0 καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2.$$

341. Ἂν Κ εἶναι τὸ κοινὸν κέντρον, ΑΒ διάμετρος τῆς μιᾶς καὶ Γ

τυχὸν σημεῖον τῆς ἄλλης ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ΓΚ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(ΓΑ)^2+(ΓΒ)^2=2(ΓΚ)^2+2(ΑΚ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ β' μέλος ταύτης εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ α' εἶναι σταθερόν.

342. Ἔστω ΒΓ χορδὴ παράλληλος τῇ ἀκτῖνι ΚΑ καὶ ΚΔ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓ, εἶναι

$(ΑΒ)^2+ΑΓ)^2=2(ΑΔ)^2+2(ΒΔ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΔ)^2=(ΚΔ)^2+(ΑΚ)^2$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΚΔ)^2+2(ΑΚ)^2+2(ΒΔ)^2=$ $=2[(ΑΚ)^2+(ΚΔ)^2+(ΒΔ)^2]=2[(ΚΑ)^2+(ΚΒ)^2]=4(ΚΑ)^2=[2(ΚΑ)]^2$.

343.—Ἐπειδὴ $2τ=4+5+7=16$, $τ=8$, $τ-α=4$, $τ-β=3$, $τ-γ=1$, ἕπεται (§ 186) ὅτι $Υα=\frac{2}{4}\sqrt{8.4.3.1}=2\sqrt{6}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα ὕψη. Τὸ δὲ $Ε=\sqrt{8.4.3}=4\sqrt{6}$.

344.—Ἐπειδὴ $2τ=51+68+85=204$, $τ=102$, $τ-α=51$, $τ-β=34$, $τ-γ=17$, ἕπεται ὅτι $Ε=\sqrt{102.61.34.17}=\sqrt{17^4.6.3.2}=17^2.6=1734$ τ.μ.

345. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ὑποτεθῇ ἡ Γ ὀξεῖα, θὰ εἶναι (§ 183) $γ^2=β^2+α^2-2α\,(ΓΔ)$, ὅθεν $(ΓΔ)=\frac{β^2+α^2-γ^2}{2α}$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΕ)=β-ΓΕ$ $=β-ΓΔ$, ἕπεται ὅτι $(ΑΕ)=β-\frac{β^2+α^2-γ^2}{2α}=\frac{γ^2-(β-α)^2}{2α}=\frac{2(τ-α)\,(τ-β)}{α}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ (ΑΕ'). Κατ' ἀνάλογον δὲ τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν ἡ Γ εἶναι ἀμβλεῖα.

346.—Ἐπειδὴ $2\,κ=50+28+24=102$, ἕπεται ὅτι $κ=51$, $κ-α=1$, $κ-β=23$, $κ-γ-β=11$, $κ-β-δ=11$. Ἄρα $Ε=\frac{50+28}{50-28}\sqrt{1.23.11.11}=$ $\frac{78}{22}.11\sqrt{23}=39\sqrt{23}$ τ. μ.

347.—Ἄγομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαγωνίῳ ΒΔ τραπεζοειδοῦς ΑΒΓΔ τέμνουσαν τὴν προέκτασιν τῆς ΓΔ εἰς τὸ Ε. Τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΒΔ ἔχοντα κοινὴν βάσιν ΒΔ καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα, τὸ δὲ ΒΓΔ εἶναι κοινόν.

348.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, θὰ εἶναι (ΑΒΖΕ)= (ΕΖΓΔ). Μετασχηματίζοντες τὸ ΑΒΖΕ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΕΒΗ καὶ τὸ ΕΖΓΔ εἰς τὸ ΖΕΘ συμπεραίνομεν ὅτι (ΕΗΖ)=(ΖΕΘ), ἄρα ΓΖ=ΗΘ.

Σύνθεσις. Ἄγομεν ΕΒ, ΕΓ καὶ ἐκ τῶν Α, Δ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς αὐτὰς τεμνούσας τὴν ΒΓ εἰς τὰ Η, καὶ Θ. Ὁρίζομεν τὸ μέσον Ζ τοῦ ΗΘ καὶ ἄγομεν τὴν ΕΖ, ἥτις εὐκόλως ἀπαδεικνύεται ὅτι εἶναι ἡ ζητουμένη.

349.—Κατασκευάζομεν (§ 190) τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ δοθέν.

350.—Ἂν τεθῇ $y^2=α^2+β^2$, θὰ εἶναι y ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου ἔχοντος καθέτους πλευρὰς α, β. Ἀλλὰ τότε εἶναι $χ^2=y^2+γ^2$, ὅθεν ἕπεται ὅτι

χ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθ. τριγώνου, οὗ y καὶ γ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραί. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἕπεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου εὐθ. τμήματος.

351.—Ἐκ ταύτης προκύπτει $y^2=(\alpha)^2+(\beta)^2-(\gamma)^2$· ἂν δὲ $\chi^2=\alpha^2+\beta^2$, ἕπεται ὅτι $y^2=\chi^2-\gamma^2$, ἤτοι y εἶναι μία πλευρὰ κάθετος τοῦ ὀρθ. τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν χ καὶ ἑτέραν κάθετον πλευρὰν γ.

352.—α΄) Ἂν τεθῇ $\chi=\alpha\sqrt{2}$ ἕπεται $\chi^2=2\alpha^2$ καὶ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὸ 349.

β΄) Ἂν $y=\alpha\sqrt{3}$, ἕπεται $y^2=3\alpha^2=\chi^2+\alpha^2$, ἤτοι τὸ y εἶναι ὑποτείνουσα τριγώνου κ.τ.λ.

353.—Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τραπεζοειδές, εἶτα ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τρίγωνον τοῦτο καὶ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο (§ 192).

354.—α΄) Κατασκευάζομεν τετράγωνα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ὀρθογώνια (§ 192) καὶ εἶτα (§ 190) τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. β΄) Κατασκευάζομεν ὀρθογώνια ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα τρίγωνα καὶ συνεχίζομεν ὡς κατὰ τὴν α΄. περίπτωσιν.

355.— Κατασκευάζομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σχῆμα (ὀρθογώνιον ἢ τρίγωνον) καὶ ἔπειτα ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ (ἄσκ. 349).

356.—Ἂν κληθῇ χ τὸ ζητούμενον, ἐκ τῆς $\alpha:\chi=\chi:\beta$ ἕπεται $\chi^2=\alpha\beta$. Ἀρκεῖ ἄρα νὰ κατασκευασθῇ (§ 192) ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν α, β.

357.—Ἂν ἡ ἐκ τοῦ Θ (Σχ. 76) πρὸς τὴν ΒΓ παράλληλος τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Μ, θὰ εἶναι (§ 202 Πόρ.) ΑΘ : ΑΜ=ΘΙ:ΜΓ, ὅθεν ΑΘ : ΘΙ = ΑΜ:ΜΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΘ:ΘΙ=2 (§ 108), ἕπεται ΑΜ:ΜΓ=2.

358. — Ἂν νοηθῇ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΡΖΗ, θὰ εἶναι (§ 202) ΑΗ:ΔΡ=ΑΒ:ΒΔ, ΑΖ:ΔΡ=ΓΑ:ΓΔ, ἐξ ὧν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ΑΗ:ΑΖ=ΑΒ:ΑΓ.

359.—Ἂν Ι, Θ, Λ, Κ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΓΕΔ, ΔΕΑ, θὰ εἶναι ΒΙ : ΙΗ=2, ΒΘ : ΘΖ=2, ΔΛ : ΛΖ=2, ΔΚ : ΚΗ=2, ὅθεν ΒΙ : ΙΗ = ΒΘ : ΘΖ, ΔΛ:ΛΖ=ΔΚ:ΚΗ· ἄρα (§ 202 Πόρ. ΙΙΙ) ΙΘ, ΚΛ, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΗΖ, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ πρὸς ἀλλήλας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ΘΛ, ΙΚ εἶναι παράλληλοι.

Ἄσκ. 359

360.—Ἔστωσαν Ζ,Η αἱ τομαὶ τῆς ΑΓ ὑπὸ τῆς ΒΕ καὶ τῆς ΔΗ παραλλήλου τῇ ΒΕ. Ἐπειδὴ προφανῶς ΑΖ:ΖΗ=ΑΕ:ΕΔ=1, ἕπεται ΑΖ=ΖΗ. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλογίας ΖΗ : ΗΓ=ΒΔ : ΔΓ=1, ἕπεται ΖΗ=ΗΓ. Ἄρα ΑΖ=ΖΗ=ΗΓ, ΖΓ=2 (ΑΖ) καὶ ΑΖ : ΖΓ=1 : 2.

361.—Ἐὰν εἶναι χ, y τὰ ζητούμενα εἶναι (§ 203)

$\frac{\chi}{8}=\frac{y}{12}$, ὅθεν $\frac{\chi}{8}=\frac{y}{12}=\frac{\chi+y}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, ἄρα $\chi=4$, $y=6$.

362. = Ἂν χ καὶ y εἶναι τὰ ζητούμενα μέρη τῆς γ, θὰ εἶναι

$\frac{\chi}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, ὅθεν $\chi=\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$, $y=\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$. Ὁμοίως ὑπολογίζονται καὶ τὰ μέρη τῶν ἄλλων πλευρῶν.

363. Προφανῶς εἶναι $\frac{\chi}{\beta}=\frac{y}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{2}$, ὅθεν $\chi=\frac{\beta}{2}$, $y=\frac{\gamma}{2}$.

364.—Προφανῶς (§ 203) εἶναι ΑΕ:ΕΒ=ΑΔ:ΔΒ καὶ ΑΖ:ΖΓ=ΑΔ:ΔΓ. Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τούτων εἶναι ἴσα, ἕπεται ΑΕ : ΕΒ=ΑΖ : ΖΓ καὶ (§ 202 Πόρ. ΙΙΙ) ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

365.—.Ἂν κληθῶσι χ καὶ y $(\chi>y)$ αὗται, θὰ εἶναι (§ 204)

$\frac{\chi}{12}=\frac{y}{8}$, ὅθεν $\frac{\chi}{12}=\frac{y}{8}=\frac{10}{4}$. ὅθεν $\chi=30$ μ., $y=20$ μ,

366.—Ἂν (ΒΓ)=12^{μ} (ΑΒ)=8^{μ}, (ΑΓ)=10^{μ}, Ε καὶ Δ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ τῶν διχοτομουσῶν τὴν ἐξωτερικὴν καὶ ἐσωτερικὴν γωνίαν Α, εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως ὅτι (ΕΒ)=48^{μ} καὶ (ΒΔ)=$5\frac{1}{3}^{\mu}$.

Ἄρα (ΕΔ)=(ΕΒ)+(ΒΔ)=$53\ \frac{1}{3}$μ.

367. — Ὁρίζομεν εὐθ. τμῆμα α καὶ δύο ἄλλα μ καὶ ν, ὧν $\mu=\alpha.2$ καὶ $\nu=\alpha.3$. Ἐπειδὴ $\mu:\nu=2:3$, τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ δοθέντος εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μ καὶ ν (§ 205).

368.—Ἂν αἱ ΑΔ, ΑΕ διαιρῶσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι

$\frac{ΑΒΔ}{2}=\frac{ΑΔΕ}{3}=\frac{ΑΕΓ}{4}$ καὶ κληθῇ υ τὸ κοινὸν ὕψος αὐτῶν θὰ εἶναι

$\frac{1}{2}\ \frac{(ΒΔ)\upsilon}{2}=\frac{1}{2}\ \frac{(ΔΕ)\upsilon}{3}=\frac{1}{2}\ \frac{(ΕΓ)\upsilon}{4}$, ὅθεν $\frac{ΒΔ}{2}=\frac{ΔΕ}{3}=\frac{ΕΓ}{4}$, ἤτοι τὰ Δ,Ε διαιροῦσι τὴν βάσιν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 2, 3, 4 (§ 367). Ὁ ὁρισμὸς αὐτῶν εἶναι ἤδη εὔκολος (ἄσκ. 367).

369.—*Ἀνάλυσις*. Ἂν ΑΖΒ (Σχ. 136 β') εἶναι τὸ ζητούμενον, θὰ εἶναι ΑΒ ἴση πρὸς δεδομένον τμῆμα τ, ἡ κορυφὴ Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου τ καὶ ΑΕ : ΕΒ=3 : 5.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν τμῆμα ΑΒ=τ καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ διάμετρον τ. Εἶτα διαιροῦμεν τὸ ΑΒ εἰς μέρη ΑΕ, ΕΒ ἔχοντα λόγον 3 : 5 καὶ ὑψοῦμεν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὸ ΖΑΒ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

370.—Ἂν τ εἶναι τὸ δοθέν, πρέπει $\frac{Α}{2}=\frac{Β}{3}=\frac{Γ}{5}=\frac{\tau}{10}$,

ὅθεν Α=$\frac{2}{10}\ \tau$, Β=$\frac{3}{10}\ \tau$, Γ=$\frac{5}{10}\ \tau$. Ἀρκεῖ ἄρα νὰ διαιρεθῇ τὸ τ εἰς 10 ἴσα μέρη κ. τ. λ.

Σημ. Ὁρίζοντες αὐθαιρέτως εὐθ. τμῆμα θ καὶ κατασκευάζοντες τὰ τμήματα $2\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta$ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς ταῦτα.

371.—Ἐπειδὴ αὕτη γράφεται καὶ οὕτω $\frac{Α}{Γ}=\frac{Β}{χ}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν Α, Γ, Β (§ 206).

372.—Ἂν κληθῇ Β ἡ βάσις καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου, β ἡ δοθεῖσα βάσις καὶ χ τὸ ὕψος τοῦ ζητουμένου, θὰ εἶναι $βχ = Βυ$, ὅθεν $\frac{β}{Β}=\frac{υ}{χ}$. Τὸ ὕψος ἄρα χ κατασκευάζεται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 206).

373.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΑΒΓ, αδγ εἶναι τὰ δοθέντα (ΑΒΓ$>$αδγ), Δ δοθὲν σημεῖον τῆς ΑΓ καὶ ΔΖ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, θὰ εἶναι (ΔΖΓ)=(αδγ) ἢ $^1/_2$ (ΖΓ) (ΔΕ) $= \frac{1}{2}$ (βγ) (αδ), ὅθεν $\frac{ΔΕ}{αδ}=\frac{βγ}{ΖΓ}$. Εἶναι ἄρα τὸ ΖΓ τετάρτης ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθ. τμημάτων ΔΕ, αδ, βγ. Ἡ σύνθεσις εὔκολος.

374.—Διότι ἔχουσι καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας (§ 208 Πόρ.).

375.—Ἔστωσαν ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) καὶ ΔΕΖ (ΔΕ=ΔΖ) δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἂν Α=Δ, ἐπειδὴ εἶναι Α+2Β=Δ+2Ε, ἕπεται ὅτι Β=Ε καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Ἂν Β=Ε, θὰ εἶναι καὶ Γ=Ζ, καὶ τὰ τρίγωνα ὅμοια. Ἂν ὅμως Α=Ε, δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι Β=Δ, ὅτε τὰ τρίγωνα δὲν θὰ εἶναι ὅμοια. Διὰ νὰ εἶναι ὅμοια εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νὰ εἶναι ἰσόπλευρα.

376.—Ἐπειδὴ τὰ ΑΔΖ, ΑΒΓ εἶναι (§ 208) ὅμοια, ἕπεται ὅτι:
ΑΖ : ΑΓ=ΔΖ : ΒΓ=ΑΔ : ΑΒ=1 : 3, ὅθεν $ΑΖ=\frac{ΑΓ}{3}$, $ΔΖ = \frac{ΒΓ}{3}$.

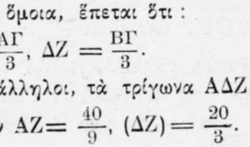
377.—Ἂν ΔΖ, ΕΗ εἶναι αἱ ἀχθεῖσαι παράλληλοι, τὰ τρίγωνα ΑΔΖ, ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ἄρα εἶναι $\frac{ΑΖ}{10} = \frac{ΔΖ}{15}=\frac{4}{9}$, ὅθεν $ΑΖ= \frac{40}{9}$, $(ΔΖ) = \frac{20}{3}$.
Ὁμοίως ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΗ, ΑΒΓ εὑρίσκομεν $\frac{ΑΗ}{10}=\frac{ΕΗ}{15}=\frac{7}{9}$, ὅθεν$(ΑΗ)=\frac{70}{9}$, $(ΕΗ)=\frac{35}{3}$.

378.—Ἐπειδὴ Β=Ε τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, ἄρα $\frac{ΖΕ}{ΒΓ}=\frac{6}{3}=2$, ὅθεν (ΖΕ)=2 (ΒΓ). Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΓ)^2=3^2+4^2=25$ καὶ (ΒΓ)=5, ἕπεται ὅτι (ΖΕ)=10 μ.

379.—Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ, τὰ τρίγωνα ΑΕΒ, ΔΕΓ εἶναι (§ 208) ὅμοια. Ἄρα $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΕΒ}{ΔΕ}=\frac{ΑΒ}{ΔΓ}$.

380.—Ἂν ΑΗ, ΔΘ εἶναι ὁμόλογα ὕψη τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ (Σχ. 145), τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΗ, ΔΕΘ εἶναι ὅμοια, διότι Β=Ε· ὁμοίως καὶ τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ. Ἄρα καὶ $\frac{ΑΗ}{ΔΘ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$.

381.—Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΕΖ, ΒΑΔ ἕπεται ὅτι $\frac{ΕΖ}{ΑΔ}=\frac{ΒΕ}{ΒΑ}$, ἐκ δὲ τῶν ΓΗΘ, ΓΑΔ



Ἄσκ. 381

προκύπτει ὅτι $\frac{Η\Theta}{ΑΔ}=\frac{Γ\Theta}{ΓΔ}$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 202) $\frac{ΒΕ}{ΒΑ}=\frac{Γ\Theta}{ΓΔ}$, ἕπεται ὅτι $\frac{ΕΖ}{ΑΔ}=\frac{Η\Theta}{ΑΔ}$, ὅθεν $ΕΖ=Η\Theta$, ἐξ ἧς $ΕΖ+ΖΗ=ΖΗ+Η\Theta$ ἢ $ΕΗ=Ζ\Theta$.

382 —Διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ὡς ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση (§ 106 Πόρ. II) τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς αὐτάς.

383.—Ἂν $υ, υ', υ''$ εἶναι τὰ ὕψη τριγώνου ΑΒΓ καὶ $η$, $η'$, $η''$ τὰ ὕψη τοῦ ΔΕΖ, θὰ εἶναι προφανῶς $2(ΑΒΓ)=αυ=βυ'=γυ''$, $2(ΔΕΖ)=α'η=β'η'=γ'η''$. Ὅθεν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη ἕπεται $\frac{α}{α'}\cdot\frac{υ}{η}=\frac{β}{β'}\cdot\frac{υ'}{η'}=\frac{γ}{γ'}\cdot\frac{υ''}{η''}$. Ἐὰν δὲ $\frac{υ}{η}=\frac{υ'}{η'}=\frac{υ''}{η''}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{α}{α'}=\frac{β}{β'}=\frac{γ}{γ'}$, ἤτοι (§ 209) τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Ἀντιστρόφως· ἂν ταῦτα εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $\frac{α}{α'}=\frac{β}{β'}=\frac{γ}{γ'}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ $\frac{υ}{η}=\frac{υ'}{η'}=\frac{υ''}{η''}$.

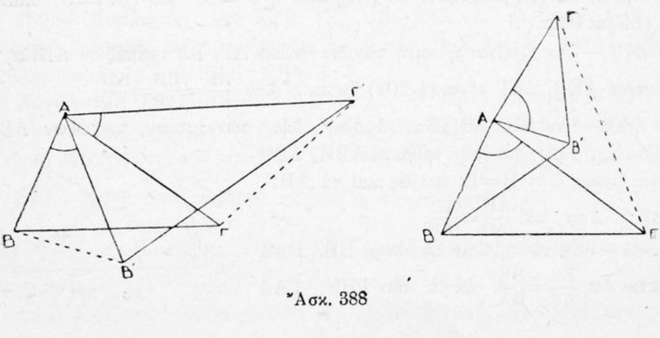
384.—Ἐκ τῶν $\frac{β}{β'}=\frac{γ}{γ'}=\frac{α}{α'}=λ$, προκύπτει ὅτι $β=β'λ$, $γ=γ'λ$, $α=α'λ$, ἐξ ὧν $ββ'=λβ'^2$, $γγ'=λγ'^2$ καὶ $ββ'+γγ'=λ(β'^2+γ'^2)=λα'^2=αα'$.

385.—Διότι ἔχουσι καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας (§ 210).

386.—Ἂν ΑΔ, Α'Δ' εἶναι ὁμόλογοι διάμεσοι τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ', θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΒΓ/_2}{Β'Γ'/_2}=\frac{ΒΔ}{Β'Δ'}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $Β=Β'$ ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ΑΒΔ, Α'Β'Δ' εἶναι (§ 210) ὅμοια. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ὁμοιότης τῶν ΑΔΓ, Α'Δ'Γ'.

387.—Ἐκ τῶν (§ 180) ἰσοτήτων $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)(ΑΕ)$, $(ΑΔ^2)=(ΑΓ)(ΑΖ)$ ἕπεται $(ΑΒ)(ΑΕ)=(ΑΓ)(ΑΖ)$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΑΖ}=\frac{ΑΓ}{ΑΕ}$. Εἶναι λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τοῦ ΑΒΓ ἀνάλογοι πρὸς τὰς ΑΖ, ΑΕ τοῦ ΑΕΖ· ἐπειδὴ δὲ ταῦτα ἔχουσι καὶ τὴν Α κοινήν, εἶναι (§ 210) ὅμοια.

388.—Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒ'Γ' εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΒ'}{ΑΓ'}$.



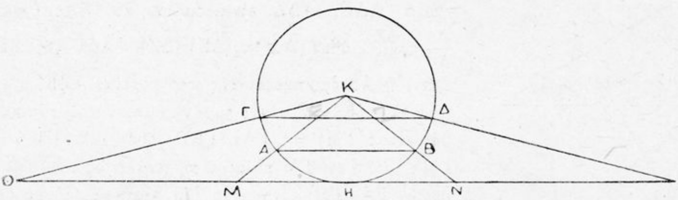
Ἄσκ. 388

Ἐπειδὴ δὲ ΒΑΓ=Β′ΑΓ′ προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες τὴν γωνίαν Β′ΑΓ εὑρίσκομεν ΒΑΒ′=ΓΑΓ′. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΒΑΒ′, ΓΑΓ′ εἶναι (§ 210) ὅμοια.

389.—Ἔστω ΔΕ παράλληλος τῇ πλευρᾷ ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσα ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ Δ,Ε καὶ Μ τὸ μέσον αὐτῆς, ἡ δὲ ΑΜ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ (§ 212) εἶναι : ΒΖ : ΖΓ=ΔΜ : ΜΕ καὶ ΔΜ : ΜΕ=1, ἕπεται ὅτι ΒΖ=ΖΓ, ἤτοι ΑΖ εἶναι διάμεσος. Ἀντιστρόφως· ἂν ΒΖ : ΖΓ=1, θὰ εἶναι καὶ ΔΜ=ΜΕ, ἤτοι Μ σημεῖον τοῦ τόπου. Ὁ ζ. τόπος εἶναι λοιπὸν ἡ διάμεσος ΑΖ.

390.—Ἂν Η, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἐκ τῶν ΑΗ : ΗΒ=1, ΔΖ : ΖΓ=1, ἕπεται ΑΗ : ΗΒ=ΔΖ : ΖΓ ἢ ΑΗ : ΔΖ= ΗΒ : ΖΓ. Ἄρα (§ 212 ἀντ.) αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΗΖ, ΒΓ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. β′) Ἐπειδὴ ΑΒ : ΒΗ=2, ΓΔ : ΔΖ=2, ἕπεται ὅτι ΑΒ : ΓΔ= ΒΗ : ΔΖ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΔ, ΗΖ διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

391.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΓΔ εἶναι ἡ ζ. χορδὴ καὶ ΚΑ, ΚΒ αἱ δοθεῖσαι



Ἀσκ. 391

ἀκτῖνες θὰ εἶναι ΓΕ=ΕΖ=ΖΔ. Ἂν δὲ ἐκ τοῦ μέσου Η τοῦ τόξου ΑΒ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΘΛ, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma E}{\Theta M}=\frac{EZ}{MN}=\frac{Z\Delta}{N\Lambda}$, ὅθεν ΘΜ=ΜΝ=ΝΛ.

Σύνθεσις. Ἄγομεν εἰς τὸ Η ἐφαπτομένην, ἐφ᾽ ἧς ὁρίζεται τὸ ΜΝ· εἶτα λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ΘΜ=ΜΝ=ΝΛ καὶ ἄγομεν τὰς ΚΓΘ, ΚΔΛ. Ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζ. χορδή, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

392.—Ἂν κληθῇ τὸ χ τὸ ἄλλο μέρος θὰ εἶναι $4\chi=2{,}20^2$, ὅθεν χ=1,21μ. Ἄρα ἡ χορδὴ ἔχει μῆκος 5,21 μ.

393.—Ἔστω Γ τὸ μέσον τόξου ΑΒ, Δ τὸ μέσον τῆς χορδῆς αὐτοῦ καὶ Ε ἡ ἑτέρα τομὴ τῆς περιφερείας ὑπὸ τῆς ΚΓ. Ἐπειδὴ (§ 213) εἶναι (ΑΔ) (ΔΒ) = (ΔΓ) × (ΔΕ) καὶ ΔΕ =10 — ΔΓ, ΑΔ = ΔΒ=4, ἕπεται ὅτι (ΓΔ) (10 — ΔΓ) = 16, ὅθεν ΓΔ=8 ἢ ΓΔ=2. Ἐκ τούτων ἡ μὲν β′ τιμὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας τόξον ΑΓΒ, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὸ ΑΕΒ, ἤτοι ΕΔ=8.

394.—Ἐὰν ἡ ΑΚ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Δ,Ε θὰ εἶναι(ΑΔ)(ΑΕ)= (ΑΒ) (ΑΓ) ἢ (10—3), (10+3)= 8 (ΑΓ) ὅθεν (ΑΓ) = 11,375. Ἄρα ΒΓ= 3,375 μ.

395.— Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΕΓ, ΒΔΓ εἶναι ὀρθαί, ἡ περιφέρεια. ἥτις ἔχει διάμετρον ΒΓ, διέρχεται διὰ τῶν Ε,Δ ἄρα (§ 213) εἶναι

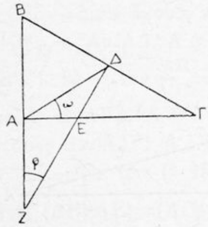
$$(ΑΒ)\ (ΑΕ)=(ΑΓ)\ (ΑΔ).$$

396.—Ἐὰν Δ, Ε εἶναι αἱ τομαὶ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ΚΑ, θὰ εἶναι $(ΑΒ)\ (ΑΓ) = (ΔΑ)\ (ΑΕ)$ ἢ $(ΑΒ)\ (ΑΓ) = (ρ + ΚΑ)(ρ - ΚΑ)$, ὅθεν εὐκόλως $(ΑΒ)\ (ΑΓ)+(ΚΑ^2)=ρ^2$,

397.—Τὰ σημεῖα Α,Β,Δ,Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΑΒ· ἄρα $(ΗΑ)\ (ΗΔ) = (ΗΒ)\ (ΗΕ)$. Ὁμοίως τὰ σημεῖα Ζ, Β, Γ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΒΓ· ἄρα $(ΗΒ)\ (ΗΕ) = (ΗΓ)\ (ΗΖ)$. Ὅθεν $(ΗΑ)\ (ΗΔ)=(ΗΒ)\ (ΗΕ)=(ΗΓ)\ (ΗΖ)$.

398. — Ἔστω ΑΒ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Β περιφερείας Κ ἀκτῖνος $6^μ$, $(ΑΚ)=12^μ$ καὶ Γ, Δ αἱ τομαὶ τῆς περιφερείας ὑπὸ τῆς ΑΚ. Γνωρίζομεν ὅτι $(ΑΒ^2)=(ΑΓ)\ (ΑΔ)=(12-6)\ (12+6)=108$, $(ΑΒ)=6\sqrt{3}$.

399.—Ἐπειδὴ (§ 106 Πόρ. ΙΙΙ) ΑΔ=ΔΓ, ἕπεται ω=Γ· ἐπειδὴ Ζ=Γ ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς Β, εἶναι ω=Ζ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΔΖ εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως $\frac{ΑΔ}{ΔΕ}=\frac{ΔΖ}{ΑΔ}$, ὅθεν $(ΑΔ^2)=(ΔΕ)\ (ΔΖ)$. Ἄρα (§ 214 ἀντ.) ἡ ΑΔ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ΑΖΕ.



Ἄσκ. 399

400.—Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι $(ΓΜ)^2 = (ΓΑ)\ (ΓΒ)$, ὅθεν ΓΑ : ΓΜ = ΓΜ : ΓΒ, ἤτοι ΓΜ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν σταθερῶν ΓΑ, ΓΒ· εἶναι ἄρα ΓΜ σταθερά, τὸ δὲ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Γ,ΓΜ). Ἐὰν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἐκτὸς τῆς ΑΒΓ, ἐπειδὴ $(ΓΜ^2)=(ΓΑ)\ (ΓΒ)$ ἐκ κατασκευῆς, ἡ ΓΜ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας ΑΒΜ, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

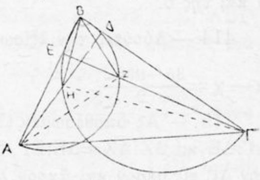
Σημ. Αἱ τομαὶ Δ, Δ′ τῆς ΑΒΓ ὑπὸ τῆς περιφερείας (Γ,ΓΜ) κείμεναι μετὰ τῶν Α,Β ἐπ᾽ εὐθείας δὲν ὁρίζουσιν ἀντιστοίχους περιφερείας. Παρατηροῦντες ὅμως ὅτι τοῦ Μ πλησιάζοντος πρὸς τὸ Δ ἢ Δ′ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ΑΒΜ ἀπομακρύνεται καὶ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ὅταν Μ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ ἢ Δ′, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒΔΔ′ ὡς περιφέρειαν, ἧς κέντρον εἶναι τὸ ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας, ἥτις τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὸ ΑΒ. Κατὰ ταῦτα ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας (Γ,ΓΜ) ἀνήκουσιν εἰς τὸν ζ. τόπον.

401.—Ἐὰν Γ,Δ εἶναι αἱ τομαὶ τῆς περιφερείας Κ καὶ τῆς εὐθείας ΒΚ, θὰ εἶναι $(ΑΒ)^2=(ΒΓ)\ (ΒΔ)$, ὅθεν $9ρ^2 = (ΒΓ)\ (ΒΓ+2ρ)$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $(ΒΓ)=-ρ+ρ\sqrt{10}$, ἄρα $ΒΔ=ρ+ρ\sqrt{10}$.

402.—Ἐπειδὴ τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ (Σχ. 151) εἶναι ὅμοια, ἕπεται ΓΒ:ΑΓ= ΑΓ : ΓΔ, ὅθεν $(ΑΓ^2) = (ΒΓ)\ (ΓΔ)$. Ὁμοίως ἐκ τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ εὑρίσκομεν $(ΑΒ^2)=(ΒΓ)\ (ΒΔ)$. β′) Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας εὑρίσκομεν $(\mathrm{A\Gamma^2})+(\mathrm{AB^2})=(\mathrm{B\Gamma})\,[(\Gamma\Delta)+(\Delta\mathrm{B})]=(\mathrm{B\Gamma^2})$. γ΄) Ἐκ τῶν ὁμοίων τρι- ΑΒΔ, ΑΓΔ ἕπεται $\mathrm{B}\Delta : \mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Delta : \Delta\Gamma$, ὅθεν $(\mathrm{A}\Delta)^2=(\mathrm{B}\Delta)\,(\Delta\Gamma)$.

403. Ἐπειδὴ Γ=Η ὡς συμπληρωματικαὶ τῆς Β, τὰ τρίγωνα ΒΗΔ, ΖΔΓ εἶναι ὅμοια· ἄρα $\frac{\Delta\mathrm{H}}{\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{B}\Delta}{\Delta\mathrm{Z}}$, ὅθεν $(\mathrm{B}\Delta)(\Delta\Gamma)=(\Delta\mathrm{Z})(\Delta\mathrm{H})$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 182) εἶναι $(\mathrm{B}\Delta)\,(\Delta\Gamma)=(\Delta\mathrm{E}^2)$ ἕπεται $(\Delta\mathrm{E}^2)=(\Delta\mathrm{Z})\,(\Delta\mathrm{H})$.

404.—Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ, ΓΒΕ, ἔχοντα τὴν Β κοινὴν εἶναι ὅμοια ἄρα $\mathrm{BE} : \mathrm{B}\Delta = \mathrm{B\Gamma} : \mathrm{AB}$, ὅθεν $(\mathrm{AB})(\mathrm{BE})=(\mathrm{B}\Delta)\,(\mathrm{B\Gamma})$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὀρθ· τριγώνων ΑΒΖ, ΓΗΒ προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες $(\mathrm{BZ^2})=(\mathrm{AB})\,(\mathrm{BE})$, $(\mathrm{BH^2})=(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{B}\Delta)$, ἕπεται ὅτι $(\mathrm{BZ^2})=(\mathrm{BH^2})$, ὅθεν $(\mathrm{BZ})=(\mathrm{BH})$.



Ἄσκ. 404

405. — Τὸ δοθὲν ἔχει περίμετρον $18+10^{\mu}=28^{\mu}$, τὸ δὲ ἄλλο 28.4. Ἂν δὲ κληθῶσι χ καὶ y αἱ πρὸς τὰς 9 καὶ 5 ὁμόλογοι πλευραί, θὰ εἶναι (§ 216) $\frac{\chi}{9}=\frac{y}{5}=\frac{28.4}{28}=4$, ὅθεν $\chi=36^{\mu}$ $y=20^{\mu}$

406. — Προφανῶς $\frac{\chi}{3}=\frac{y}{5}=\frac{\omega}{7}=\frac{45}{15}=3$, ὅθεν $\chi=9$, $y=15$, $\omega=21$.

407. — Ἂν α, α΄ εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραί, θὰ εἶναι $\mathrm{E} : \mathrm{E}'=\frac{1}{2}$ καὶ $\mathrm{E} : \mathrm{E}'=\alpha^2 : \alpha'^2$, ὅθεν $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2=\frac{1}{2}$. Ἄρα $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

408.—Προφανῶς εἶναι $\mathrm{E}'=9\mathrm{E}$ καὶ $\mathrm{E}':\mathrm{E}=\alpha'^2:\alpha^2=9$. Ἄρα $\alpha'=3\alpha$.

409.—Τὸ δοθὲν ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 12.8=96 τ. μ. Ἂν δὲ ΕΖΗ εἶναι ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνουσα τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι

$$\frac{(\mathrm{AEH})}{96}=\frac{(\mathrm{AE})^2}{(\mathrm{AB})^2}=\frac{(\mathrm{AZ})^2}{(\mathrm{A}\Delta)^2}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16},$$

ὅθεν $(\mathrm{AEH})=54$ τ.μ. καὶ ἑπομένως $(\mathrm{BEH\Gamma})=96-54=42$ τ.μ.

410.—Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι $\frac{(\mathrm{EAB})}{24}=\frac{(\mathrm{AB})^2}{(\Delta\Gamma)^2}=\frac{(2\Delta\Gamma)^2}{(\Gamma\Delta)^2}=4$, ὅθεν $(\mathrm{EAB})=96$ τ.μ. καὶ $(\mathrm{AB\Gamma}\Delta)=96-24=72$ τ.μ.

411. Ἔστω (Σχ. 146) $(\mathrm{AB})=27^{\mu}$ καὶ Η τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἐπειδὴ $(\mathrm{AH\Theta}) : (\mathrm{AB\Gamma})=1 : 4$ καὶ ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΑΗΘ εἶναι $(\mathrm{AH\Theta}):(\mathrm{AB\Gamma})=(\mathrm{AH})^2:27^2$, ἕπεται ὅτι $(\mathrm{AH})^2 : 27^2=1:4$, ὅθεν

$$(\mathrm{AH})=\frac{27}{2}=13{,}5^{\mu}.$$

412.—Ἔστω Ε ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ Ζ, Η, Θ, Ι τὰ μέσα τῶν ΑΕ, ΒΕ, ΓΕ, ΔΕ. Τὸ σχῆμα ΖΗΘΙ εἶναι (ἄσκ. 95) παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ΑΒΓΔ, ΖΗΘΙ σύγκεινται ἐκ τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, εἶναι ὅμοιαι καὶ $\mathrm{AB\Gamma\Delta}:\mathrm{ZH\Theta I}=\mathrm{AB^2}:\mathrm{ZH^2}=4.(\mathrm{ZH})^2:\mathrm{ZH^2}=4$.

413.—***Ἀνάλυσις***. Ἐπειδὴ θὰ εἶναι $\alpha:\gamma=\gamma:\beta$, ἔπεται $\gamma^2=\alpha\beta$, ὅθεν ἡ ἰσότης $\alpha^2-\beta^2=\gamma^2$ γίνεται $\alpha^2-\beta^2=\alpha\beta$, ὅθεν $\alpha(\alpha-\beta)=\beta^2$. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι $\alpha-(\alpha-\beta)=\beta$ συμπεραίνομεν ὅτι α καὶ $(\alpha-\beta)$ εἶναι διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς β^2 καὶ διαφέρουσαι κατὰ β.

Σύνθεσις. Ὁρίζομεν (§ 220) τὰς διαστάσεις α καὶ $\alpha-\beta$ τοῦ ῥηθέντος ὀρθογωνίου καὶ κατασκευάζομεν ἔπειτα ὀρθ. τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης α καὶ τῆς β.

414.—Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha-\chi}$ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{-\alpha+\alpha\sqrt{5}}{2}$, ἄρα $\alpha-\chi=\frac{3\alpha-\alpha\sqrt{5}}{2}$.

415.—Ἂς ὑποθέσωμεν (Σχ. 158) ὅτι ΑΔ:ΔΖ=ΔΖ:ΑΖ. Ἐπειδὴ ΑΔ:ΔΖ=ΔΓ:ΔΕ καὶ ΔΖ:ΑΖ=ΔΕ:ΕΓ, ἔπεται ὅτι ΔΓ:ΔΕ=ΔΕ:ΕΓ, ἤτοι τὸ Ε διαιρεῖ τὴν ΔΓ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

416.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ἡ ΕΗ παράλληλος τῇ ΓΔ τέμνῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η, ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι ΑΖ:ΑΕ=ΑΕ:ΕΖ, θὰ εἶναι (ἄσκ. 415) καὶ ΑΓ:ΑΗ=ΑΗ:ΗΓ.

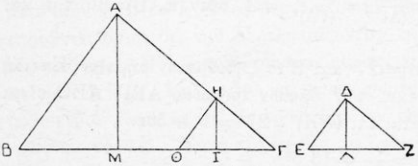
Σύνθεσις.—Διαιροῦμεν τὸ ΑΓ κατὰ τὸ Η εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ ἄγομεν τὴν ΗΕ παράλληλον τῇ ΓΔ τέμνουσαν τὴν ΓΒ εἰς τὸ Ε. Ἄγομεν τέλος τὴν ζητουμένην ΑΕΖ.

417—Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος καὶ χ ἡ τοῦ ζητουμένου, θὰ εἶναι $\chi^2=3\alpha^2$, ὅθεν $\chi^2:\alpha^2=3:1$. Τὸ ζήτημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ (§ 223).

418. Ἐπειδὴ $\chi^2=3/4\ \alpha^2$, ἔπεται $\chi^2:\alpha^2=3:4$ καὶ ἡ κατασκευὴ ὡς εἰς τὸ (§ 223).

419—Κατασκευάζομεν τετράγωνον πλευρᾶς α ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον. Τότε $\chi^2=2\alpha^2$ καὶ $\chi^2:\alpha^2=2:1$, ἡ δὲ κατασκευὴ κατὰ τὸ (§ 223.)

420.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΗΘ εἶναι ἡ ζητουμένη, θὰ εἶναι (ΘΗΓ)=(ΕΔΓ) καὶ $\frac{(\Theta H\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{(\Gamma\Theta)^2}{(B\Gamma)^2}$. Ἂν δὲ $(E\Delta Z)=\alpha^2$ καὶ $(AB\Gamma)=\beta^2$, αὕτη γίνεται $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{(\Gamma\Theta)^2}{(B\Gamma)^2}$, ὅθεν $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{B\Gamma}{\Gamma\Theta}$.



Ἄσκ. 420

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΕΔΖ καὶ εἶτα τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν πλευρῶν β, α τῶν τετραγώνων τούτων καὶ τῆς ΒΓ. Οὕτως ὁρίζομεν τὸ ΓΘ καὶ εὐκόλως εἶτα τὴν ΘΗ.

421.—***Ἀνάλυσις***. Ἔστω χ ἡ πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΚΛΜ, ΑΒΓ τὸ δοθὲν καὶ ΔΕΖ ἕτερον ἰσόπλευρον τρίγωνον αὐθαιρέτως κατασκευασθὲν καὶ ἔχον πλευρὰν α. Ἐπειδὴ τὸ ΚΛΜ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, ἕπεται $\frac{(ΚΛΜ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{χ^2}{α^2}$. ἐπειδὴ δὲ (ΚΛΜ)=(ΑΒΓ), αὕτη γίνεται $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)}=\frac{χ^2}{α^2}$. Καὶ ἂν (ΑΒΓ)=$β^2$, (ΔΕΖ)=$γ^2$, ἕπεται ὅτι $\frac{β^2}{γ^2}=\frac{χ^2}{α^2}$, ὅθεν $γ:β=α:χ$.

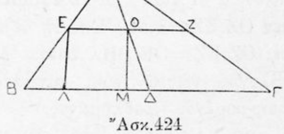
Σύνθεσις, Κατασκευάζομεν τετράγωνα ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ΔΕΖ, ΑΒΓ καὶ εἶτα τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν πλευρῶν αὐτῶν καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ΔΕΖ. Αὕτη εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

β΄.) Τρόπος Ἂν ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ ΑΒΓ, θὰ εἶναι $\frac{(ΒΓ)(ΑΔ)}{2}=\frac{χ^2\sqrt{3}}{4}$, ὅθεν $χ^2=\left(\frac{2}{3}ΒΓ\right)(ΑΔ\sqrt{3})$. Εἶναι ἄρα χ ἡ μέση ἀνάλογος τῶν $\frac{2}{3}$ (ΒΓ) καὶ $ΑΔ\sqrt{3}$, ὧν ἡ κατασκευὴ γνωστή.

422. —***Ἀνάλυσις***. Ἔστωσαν Π καὶ Ρ τὰ δοθέντα, Α δὲ καὶ α δύο ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραί. Ἐὰν Σ εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ χ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁμόλογος πρὸς τὰς Α, α θὰ εἶναι $\frac{Π}{Α^2}=\frac{Ρ}{α^2}=\frac{Σ}{χ^2}$, ὅθεν $\frac{Π+Ρ}{Α^2\pm α^2}=\frac{Σ}{χ^2}$. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν $Π\pm Ρ=Σ$, ἕπεται ὅτι $χ^2=Α^2\pm α^2$, Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ συνθετικὴ κατασκευὴ τῆς χ. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον κατασκευάζονται καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ τοῦ Σ, ὅτε τοῦτο εὐκόλως κατασκευάζεται, διότι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ Π.

423.—Ἡ πλευρὰ χ παρέχεται (§ 225) ὑπὸ τοῦ τύπου $χ=\frac{αυ}{α+υ}$. Ἐπειδὴ δὲ $υ=\frac{α\sqrt{3}}{2}$, αὕτη γίνεται $χ=\frac{α\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ καὶ $χ^2=\frac{3α^2}{7+4\sqrt{3}}=3α^2(7-4\sqrt{3})$.

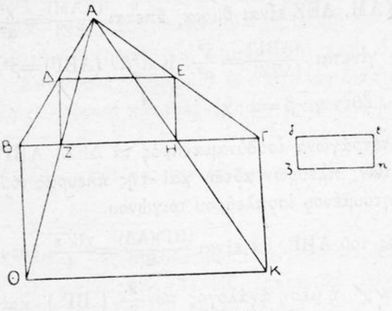
424.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη, θὰ εἶναι ΕΖ=2.ΕΛ· ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ διάμεσος ΑΔ, θὰ εἶναι ΕΖ=2.ΕΘ, ἄρα ΕΛ=ΕΘ, τὸ δὲ ΕΛΜΘ εἶναι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ. Ἐντεῦθεν (§ 225) εὐκόλως ἡ συνθετικὴ κατασκευὴ τῆς ΕΘΖ.



Ἀσκ.424

425.— ***Ἀνάλυσις***. Ἂν δεζη εἶναι τὸ δοθὲν καὶ ΔΕΖΗ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον, θὰ εἶναι ΔΖ : ΖΗ = δζ : ζη. Ἂν δὲ ἀχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΑΗ τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν καθέτων ΒΘ, ΚΓ, ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὰ Θ καὶ Κ, θὰ εἶναι τὰ ΑΔΖ, ΑΒΘ ὅμοια, ὡς καὶ τὰ ΑΕΗ, ΑΓΚ. Ἄρα ΑΔ : ΑΒ = ΔΖ : ΒΘ = ΑΖ:ΑΘ, ΑΕ:ΑΓ=ΗΕ:ΓΚ=ΑΗ:ΑΚ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ:ΑΒ=ΑΕ:ΑΓ ἕπεται ὅτι καὶ ΑΖ:ΑΘ=ΑΗ:ΑΚ, ἄρα ΖΗ καὶ ΘΚ εἶναι παράλληλοι, τὸ δὲ ΒΘΚΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὰ ΑΖΗ, ΑΘΚ εἶναι ὅμοια· ὥστε ΖΗ:ΘΚ=ΑΖ:ΑΘ=

ΔΖ:ΒΘ. Ἄρα ΖΔ:ΗΖ=ΘΒ:ΚΘ. Ἐπειδὴ δὲ ἀρχικῶς ὑπετέθη ΖΔ : ΖΗ= δζ:ζη. ἕπεται ὅτι καὶ ΘΒ:ΚΘ= δζ:ζη, ἤτοι τὰ ὀρθογώνια ΒΘΚΓ, δ ζ η ε εἶναι ὅμοια.

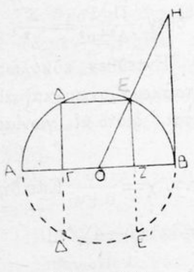


Ἄσκ. 425

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ΒΘΚΓ ὅμοιον τῷ δεηζ, ἄγομεν τὰς ΑΘ,ΑΚ. Τὰ κοινὰ αὐτῶν καὶ τῆς ΒΓ σημεῖα Ζ καὶ Η ὁρίζουσι τὴν πλευρὰν ΖΗ τοῦ ζ. ὀρθογωνίου· ὑψοῦντες εἶτα καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ τὰς ΖΔ,ΗΕ ὁρίζομεν καὶ τὰς ἄλλας κορυφὰς Δ καὶ Ε αὐτοῦ, [ἤτοι] τὸ ΔΖΗΕ εἶναι τὸ ζ. ὀρθογώνιον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

426.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον, θὰ εἶναι ΕΖ=ΔΓ ἄρα καὶ ΕΕ′=ΔΔ′ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΟΖ=ΟΓ. Εἶναι ἄρα ΕΖ: ΟΖ=2· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΒΗ,ΟΖΕ προκύπτει ὅτι ΒΗ:ΟΒ= ΕΖ:ΟΕ, ἕπεται ὅτι ΒΗ:ΟΒ=2, ὅθεν

ΒΗ=2.ΟΒ=ΑΒ.



(Ἄσκ. 426).

Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Β ἐφαπτομένης λαμβάνομεν ΒΗ=ΑΒ· ἄγομεν τὴν ΟΗ τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ε καὶ ἄγομεν ΕΔ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ΔΓ, ΕΖ καθέτους ἐπ' αὐτήν. Τὸ ΔΕΖΓ εἶναι τὸ ζ. τετράγωνον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

427.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ζ. ὀρθογώνιον, α δὲ καὶ β αἱ διαστάσεις τοῦ δοθέντος, θὰ εἶναι ΓΖ:ΕΖ=α:β, ὅθεν ΟΖ:ΕΖ=α:2β. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΖΕ,ΟΒΗ προκύπτει ΟΖ:ΕΖ=ΟΒ:ΒΗ,, ἕπεται ὅτι α:2β=ΟΒ:ΒΗ, ἤτοι ΒΗ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος γνωστῶν εὐθ. τμημάτων.—Ἡ σύνθεσις ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

428.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν ΖΗ (Σχ.160) εἶναι ἡ ζητουμένη, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΑΒ, ΕΖΗ, ΕΓΔ προκύπτει ὅτι

$$\frac{ΕΑΒ}{Β^2}=\frac{ΕΖΗ}{χ^2}=\frac{ΕΔΓ}{β^2}=\text{ὅθεν } \frac{ΕΑΒ-ΕΖΗ}{Β^2-χ^2}=\frac{ΕΖΗ-ΕΔΓ}{χ^2-β^2} \text{ ἢ}$$

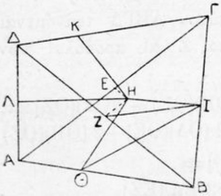
$\frac{ΑΒΖΗ}{Β^2-χ^2}=\frac{ΔΖΗΓ}{χ^2-β^2}$, ὅθεν $\frac{ΑΒΗΖ}{ΔΖΗΓ}=\frac{Β^2-χ^2}{χ^2-β^2}$. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒΗΖ:ΔΖΗΓ=Β:β, ἕπεται ὅτι $Β:β=(Β^2-χ^2):(χ^2-β^2)$. ὅθεν $χ^2=Ββ$. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

429.—Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν $(Β^2-χ^2):(χ^2-β^2)=$

2, ὅθεν $3\chi^2=B^2+2\beta^2$ καὶ $\chi^2=\left(\frac{B\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{2\beta}{3}\cdot\beta$. Ἂν δὲ θέσωμεν $y^2=\frac{2\beta}{3}\cdot\beta$, αὕτη γίνεται $\chi^2=\left(\frac{B\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2$, ἐξ ὧν καθίσταται φανερὸς ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς τῆς χ.

430.—Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ (Σχ. ἀσκ. 381) ἔχοντα ΑΔ κοινὴν καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμα, ἤτοι (ΑΒΔ)=(ΑΓΔ)· ἄρα (ΑΒΔ)—(ΑΚΔ)=(ΑΓΔ)—ΑΚΔ) ἢ (ΑΒΚ)=(ΓΚΔ).

431.—Ἔστω Ε σημεῖον ἐντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ΖΕΗ κάθετος ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΑΒ. Ἐπειδὴ (ΑΕΒ)=$\frac{1}{2}$ (ΑΒ)(ΕΗ) καὶ (ΔΕΓ)= $\frac{1}{2}$ (ΔΓ)(ΖΕ), ἕπεται ὅτι (ΑΕΒ)+(ΔΕΓ)=$\frac{1}{2}$ (ΑΒ)(ΖΗ)==$\frac{1}{2}$ (ΑΒΓΔ) ἄρα καὶ(ΑΕΔ)+(ΓΕΒ)=$\frac{1}{2}$ (ΑΒΓΔ), ἤτοι (ΑΕΒ)+(ΔΕΓ)=(ΑΕΔ)+(ΓΕΒ).



Ἀσκ. 432.

432.—Ἐὰν Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ καὶ ΕΗ, ΖΗ αἱ πρὸς αὐτὰς παράλληλοι, τὰ τρίγωνα ΖΘΙ, ΗΘΙ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα ΘΙ κοινὴν καὶ τὰς κορυφὰς Ζ, Η ἐπὶ εὐθείας ΖΗ παραλλήλου τῇ ΘΙ, ἤτοι (ΖΘΙ)=(ΗΘΙ)· ἄρα (ΖΘΒΙ)=(ΗΘΒΙ). Ἐπειδὴ δὲ (ΖΘΒΙ)=(ΖΘΒ)+(ΖΒΙ)=$\frac{1}{4}$(ΑΒΔ)+$\frac{1}{4}$(ΒΔΓ)=$\frac{1}{4}$(ΑΔΓΒ), ἕπεται (ΗΘΒΙ)=$\frac{1}{4}$ (ΑΒΓΔ). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἄλλων τετραπλεύρων.

433.—Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α′ΒΓ′ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΑΒΓ, ἕπεται (§ 176) ὅτι $\frac{(\text{Α}'\text{ΒΓ}')}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{(\text{Α}'\text{Β})(\text{ΒΓ}')}{(\text{ΒΓ})(\text{ΑΒ})}=\frac{(\text{Α}'\text{Β})}{(\text{ΒΓ})}=\frac{2\,(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΓ})}=2$, ὅθεν (Α′ΒΓ′)=2(ΑΒΓ). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι (Α′ΓΒ′)=2(ΑΒΓ), (Β′ΑΓ′)=2(ΑΒΓ), ὅθεν (Α′Β′Γ′)= 7(ΑΒΓ).

434.—Γνωρίζομεν ὅτι (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}$ ρ (α+β+γ) καὶ (ἀσκ. 152) β+γ= α+2ρ· ἄρα (ΑΒΓ)=$\frac{1}{2}$ρ (2α+2ρ)=ρ (α+ρ). Ἀφ᾽ ἑτέρου (Σχ. ἀσκ. 152) (ΒΖ)(ΖΓ)=(ΒΕ)(ΓΔ)=(γ—ρ)(β—ρ)=βγ—ρ(β+γ—ρ)=2(ΑΒΓ)—ρ(α+ρ)= (ΑΒΓ).

435.—Ἐπειδὴ Δ, Ε εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, εἶναι ΑΔ=ΓΕ καὶ ἑπομένως (§ 175 Πόρ.) (ΒΑΔ)=(ΒΓΕ). Ἐπειδὴ δὲ καὶ (ΒΑΔ)=(ΖΑΒ), ἕπεται (ΒΓΕ)=(ΖΑΒ), ὅθεν δι᾽ἀφαιρέσεως τοῦ (ΒΗΖ) προκύπτει (ΓΖΗΕ)=(ΑΒΗ).

436.—Ἔστωσαν ΟΓ, ΟΔ κάθετοι ἀκτῖνες καὶ ΟΕ, ΟΖ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τινα διάμετρον ΑΒ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΕ ἕπεται ὅτι $(\text{ΟΕ})^2+(\text{ΕΓ})^2=(\text{ΟΓ})^2$. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΓΕ, ΟΔΖ εἶναι ἴσα, εἶναι ΕΓ= ΟΖ καὶ ἑπομένως $(\text{ΟΕ})^2+(\text{ΟΖ})^2=(\text{ΟΓ})^2$.

437.—Ἂν αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ τέμνωνται καθέτως εἰς τὸ Ε, ἕνεκα τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΕΓ, ΒΕΔ, θὰ εἶναι $(\text{ΑΕ})^2+(\text{ΕΓ})^2+(\text{ΔΕ})^2+(\text{ΕΒ})^2=$ $(\text{ΑΓ})^2+\text{ΒΔ})^2$. Ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΒΖ καὶ ἡ χορδὴ ΑΖ, ἐπειδὴ ΖΑΒ=

1ὀρθ, ἡ ΑΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ καὶ ΑΓ=ΖΔ· ἡ ἀνωτέρω ἄρα ἰσότης γίνεται $(ΑΕ)^2+(ΕΓ)^2+(ΔΕ)^2+(ΕΒ)^2=(ΖΔ)^2+(ΒΔ)^2=(ΒΖ)^2$.

438.—Ἂν Γ=2Β, θὰ εἶναι ΒΓ=2 (ΑΓ). Ἂν δὲ ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ, θὰ εἶναι Γ = 2ΔΑΓ καὶ ΑΓ=2ΔΓ, ἄρα ΒΓ=4(ΔΓ) καὶ (ΒΔ)=3 (ΔΓ), ὅθεν ΒΔ:ΔΓ=3, ἄρα καὶ $(ΑΒ)^2:(ΑΓ)^2=3$.

439.— Γνωρίζομεν ὅτι ΑΜ οὔσης διαμέσου εἶναι $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΒΜ)^2+2(ΑΜ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ΑΓ=ΔΓ±ΑΔ, αὕτη γίνεται $(ΒΔ)^2+2(ΑΔ)^2+(ΔΓ)^2\pm 2(ΑΔ)(ΔΓ)=2(ΑΜ)^2+2(ΒΜ)^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $(ΒΔ)^2+(ΔΓ)^2=(ΒΓ^2)=4(ΒΜ)^2$, ἕπεται ὅτι $2(ΒΜ)^2\pm 2(ΑΔ)(ΔΓ)+2(ΑΔ)^2=2(ΑΜ)^2$, ὅθεν $(ΑΜ)^2=(ΒΜ)^2\pm(ΑΔ)(ΑΓ)$.

Σημ.—Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη Α ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα, ὅταν τῆς Α οὔσης ὀξείας ἡ Β εἶναι ἀμβλεῖα.

440.—Ἔστωσαν ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τεμνόμεναι πλαγίως εἰς τὸ Ο καὶ ἔστω ὀξεῖα ἡ ΑΟΒ, Ε δὲ καὶ Ζ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Α καὶ Γ ἐπὶ τὴν ΒΔ. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$(ΑΒ)^2+(ΓΔ)^2=(ΑΟ)^2+(ΒΟ)^2+(ΟΔ)^2+(ΟΓ)^2-2(ΟΒ)(ΟΕ)-2(ΟΔ)(ΟΖ)$ καὶ

$(ΑΔ)^2+(ΒΓ)^2=(ΑΟ)^2+(ΟΔ)^2+(ΟΒ)^2+(ΟΓ)^2+2(ΟΔ)(ΟΕ)+2(ΟΒ)(ΟΖ)$

ἕπεται ὅτι
$$[(ΑΔ)^2+(ΒΓ)^2]-[(ΑΒ)^2+(ΓΔ)^2]=$$
$$2(ΟΕ)(ΟΒ+ΟΔ)+2(ΟΖ)(ΟΒ+ΟΔ)=2(ΒΔ)(ΕΖ).$$

Σημ. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τέμνωνται καθέτως, ΕΖ=0 καὶ ἡ ῥηθεῖσα διαφορὰ εἶναι μηδέν, ὡς εὐκόλως καὶ ἀπ' εὐθείας ἀποδεικνύεται.

441.—Ἂν Ι, Κ εἶναι τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, γνωρίζομεν (ἄσκ. 339) ὅτι $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2+4(ΙΚ)^2$. Ἂν δὲ Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, θὰ εἶναι $ΕΘ=ΑΓ/_2$, $ΘΗ=ΒΔ/_2$, ὅθεν $(ΑΓ)^2=4(ΕΘ)^2$, $(ΔΒ)^2=4(ΘΗ)^2$, ἡ δὲ ἀνωτέρω ἰσότης γίνεται $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=4(ΕΘ)^2+4(ΘΗ)^2+4(ΙΚ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἕπεται (ἄσκ. 340) ὅτι $2(ΕΘ)^2+2(ΘΗ)^2=(ΘΖ)^2+(ΕΗ)^2$, ἄρα $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΑΔ)^2=2[(ΘΖ)^2+(ΕΗ)^2]+4(ΙΚ)^2$.

442.—Κατὰ τὸ Θ. τῶν διαμέσων (§ 185) εἶναι $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2=2(ΑΔ)^2+\frac{(ΒΓ)^2}{2}$ (1), $(ΒΓ)^2+(ΑΒ)^2=2(ΒΕ)^2+\frac{(ΑΓ)^2}{2}$, $(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2=2(ΓΖ)^2+\frac{(ΑΒ)^2}{2}$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΒΓ)^2=2(ΒΕ^2+ΓΖ^2)+\frac{(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2}{2}$, ὅθεν λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ὑποθέσεως $2(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$ προκύπτει ὅτι $3(ΒΓ)^2=2(ΒΕ^2+ΓΖ^2)$, ὅθεν $^3/_2(ΒΓ)^2=(ΒΕ)^2+(ΓΖ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $^3/_2(ΒΓ)^2=2(ΑΔ)^2$, αὕτη γίνεται $2(ΑΔ)^2=(ΒΕ)^2+(ΓΖ)^2$.

443.—Ἔστωσαν Α, Β τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, ὧν ἀκτῖνες Α, α (Α>α) καὶ Ο ἡ τομὴ τῶν ΑΒ, ΚΛ. Ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΚΑ, ΟΛΒ εἶναι ΟΚ:Α=

ΟΛ:α=(ΟΚ—ΟΛ):(Α—α)=(ΚΛ): (Α—α), ὅθεν (ΟΚ)=(ΚΛ).$\frac{Α}{Α-α}$, ὅθεν (ΟΚ) σταθερὰ ποσότης καὶ Ο ἔχει ὡρισμένην ἐπὶ ΚΛ θέσιν.

444.—Ἂν ΚΑ′, ΛΒ′ εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι ἀκτῖνες τῶν Κ,Λ καὶ Ο′ ἡ τομὴ τῶν Α′Β′,ΚΛ, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι ΚΟ′:Α=Ο′Λ:α= (ΚΟ′+Ο′Λ):(Α+α)=ΚΛ:(Α+α), ὅθεν (ΚΟ′)=(ΚΛ).$\frac{Α}{Α+α}$ κ.τ.λ.

445.—Τῶν τριγώνων ΑΒΓ,Α′Β′Γ′ ὄντων ὁμοίων καὶ τὰ ΑΒΔ,Α′Β′Δ′ εἶναι ὅμοια· ἄρα $\delta':\delta=\beta':\beta=\gamma':\gamma=\lambda$, ὅθεν $\delta'=\lambda\delta, \beta'=\lambda\beta, \gamma'=\lambda\gamma, \beta\beta'=\lambda\beta^2, \gamma\gamma'=\lambda\gamma^2$ καὶ $\frac{1}{\beta\beta'}+\frac{1}{\gamma\gamma'}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)=\frac{\delta}{\delta'}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2\gamma^2}=\frac{\delta}{\delta'}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2\delta^2}=\frac{1}{\delta\delta'}$.

446.—Ἐὰν Ο εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου ΑΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ,ΘΟΗ κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΓΔ,ΑΒ καὶ ΕΟΖ κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΔ,ΒΓ,αἱ περιφέρειαι διαμέτρων ΟΓ,ΟΑ διέρχονται ἡ μὲν διὰ τῶν Ο,Ζ,Γ,Θ, ἡ δὲ διὰ τῶν Α,Ε,Ο,Η. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου των, αὗται ἐφάπτονται ἀλλήλων, αἱ δὲ ΘΟΗ, ΕΟΖ εἶναι κοιναὶ τέμνουσαι διὰ τῆς ἀφῆς διερχόμεναι· εἶναι ἄρα (ἄσκ. 142) αἱ ΘΖ, ΕΗ εἶναι παράλληλοι καὶ τὰ τρίγωνα ΘΟΖ, ΕΟΗ ὅμοια· ὅθεν ΟΗ : ΟΘ = ΟΕ : ΟΖ, ὅθεν (ΟΖ) (ΟΗ)=(ΟΘ) (ΟΕ).

447.—Ἐὰν Κ,Λ εἶναι τὰ κέντρα τῶν περὶ τὰ ΑΒΔ, ΑΓΔ περιγεγραμμένων περιφερειῶν καὶ Ε,Ζ αἱ τομαὶ τῆς ΚΛ καὶ τῶν περιφερειῶν Κ, Λ, ἐπειδὴ ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΔ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΚΛ, θὰ εἶναι τόξ. ΑΕ = τόξ. ΕΔ καὶ τόξ. ΑΖ=τόξ. ΖΔ. Ἄρα γ. ΑΚΛ=γ. ΑΒΓ καὶ γ. ΑΛΚ=γ. ΑΓΒ. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΚΛ,ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ ΑΚ:ΑΛ= ΑΒ:ΑΓ σταθερός.

448.—Ἂν ΑΔ εἶναι διχοτόμος γωνίας Α καὶ ΔΕ, ΔΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, θὰ εἶναι 2(ΑΒΓ)=(ΔΕ)(ΑΒ+ΑΓ). Καὶ ἂν Α=1 ὀρθ. θὰ εἶναι 2 (ΑΒΓ)=(ΑΒ) (ΑΓ) καὶ ἑπομένως (ΑΒ) (ΑΓ) = (ΔΕ)(ΑΒ+ΑΓ),ὅθεν $\frac{1}{ΔΕ}=\frac{1}{ΑΒ}+\frac{1}{ΑΓ}$. Ἂν δὲ ἡ Α εἶναι διάφορος ὀρθῆς καὶ ἀχθῇ τὸ ὕψος ΓΗ, θὰ εἶναι 2 (ΑΒΓ) = (ΑΒ) ΓΗ), ἄρα (ΑΒ) (ΓΗ)= (ΔΕ)(ΑΒ+ΑΓ), ὅθεν διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ (ΑΒ)(ΑΓ)(ΔΕ) εὑρίσκομεν $\frac{1}{ΔΕ}\cdot\frac{ΓΗ}{ΑΓ}=\frac{1}{ΑΒ}+\frac{1}{ΑΓ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{ΔΕ}$ εἶναι διὰ τὸ ὡρισμένον σημεῖον Δ σταθερὸν καὶ $\frac{ΓΗ}{ΑΓ}$ σταθερὸς διὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν Α, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ β′ μέλος εἶναι σταθερόν.

449. — Ἐπειδὴ γ. ΒΑΔ=γ. ΕΑΓ, ἕπεται $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΕ)}=\frac{(ΑΒ)(ΑΔ)}{(ΑΓ)(ΑΕ)}=\frac{(ΒΔ)}{(ΕΓ)}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ γ. ΒΑΕ = γ.ΔΑΓ, ἕπεται $\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΓ)}=\frac{(ΑΒ)(ΑΕ)}{(ΑΔ)(ΑΓ)}=\frac{(ΒΕ)}{(ΔΓ)}$. Πολλαπλασιάζοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2}=\frac{(ΒΔ)(ΒΕ)}{(ΕΓ)(ΔΓ)}$.

450.—"Αν ΑΕ εἶναι διάμεσος, θὰ εἶναι ΒΕ = ΕΓ, ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2}=\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$.

451.—Α' Ἔστωσαν Κ,Λ τὰ κέντρα τῶν περὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ περιγεγραμμένων περιφερειῶν καὶ ΚΔ,Λδ κάθετοι ἐπὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΒΓ,βγ. Ἐπειδὴ ΒΚΔ=Α, βΛδ=α, ἕπεται γ.ΒΚΔ=γ.βΛδ καὶ τὰ τρίγωνα ΒΚΔ,βΛδ ὅμοια· ἄρα ΚΒ:Λβ=ΒΔ:βδ=2 (ΒΔ):2(βδ)=ΒΓ:βγ.

Β'. Ἐὰν Κ,Λ εἶναι τὰ κέντρα τῶν εἰς ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ,αβγ ἐγγεγραμμένων περιφερειῶν, Ε δὲ καὶ ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΓ,βγ, τὰ τρίγωνα ΒΚΕ, βκε, εἶναι ὅμοια, ὡς καὶ τὰ ΒΚΓ,βκγ. Ἄρα ΚΕ:Λε=ΚΒ:Λβ=ΒΓ:βγ.

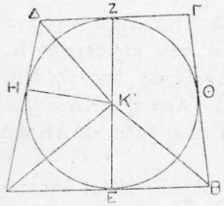
452.—Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΓ, ΑΕΖ ἕπεται ὅτι ΔΕ : ΕΖ = ΕΓ:ΑΕ· ἐκ δὲ τῶν ΑΔΕ, ΓΕΗ ὅτι ΕΓ;ΑΕ=ΕΗ:ΔΕ. Ἄρα ΔΕ:ΕΖ=ΕΗ:ΔΕ, ὅθεν $(\Delta E)^2=(EZ)\ (EH)$.

453.—Ἐκ τῶν $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'=\lambda$ ἕπεται ὅτι $\alpha^2:\alpha'^2=\beta^2:\beta'^2=(\alpha^2-\beta^2):(\alpha'^2-\beta'^2)=\lambda^2$, ὅθεν $\gamma^2:\gamma'^2=\lambda^2$ καὶ $\gamma:\gamma'=\lambda$· Ἄρα $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'=\gamma:\gamma'$.

Σημ. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καὶ κατὰ τὴν τοῦ Θ. (§ 210).

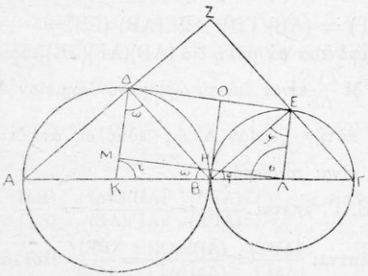
454.—Ἐπειδὴ $A+\Delta=2$ ὀρθ., ἕπεται $\frac{A+\Delta}{2}=1$ ὀρθ. καὶ ΔΚΑ=1 ὀρθ. Ἄρα $(KH)^2=(\Delta H)(AH)=(\Delta Z)(AE)$. Ἀλλ' ἕνεκα τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι Α=Β καὶ τὸ τρίγωνον ΑΚΒ ἰσοσκελές, ἄρα καὶ ΑΕ = ΕΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ΔΖ=ΖΓ, ἡ δὲ προηγουμένη γίνεται

$(KH^2)=\frac{\Delta\Gamma}{2}\cdot\frac{AB}{2}$, ὅθεν $4(KH)^2=(\Delta\Gamma)(AB)$ ἢ $(ZE)^2=(\Delta\Gamma)(AB)$.



Ἄσκ. 454

455,—Προφανῶς (§ 203) εἶναι ΑΖ:ΖΕ= ΑΒ:ΒΕ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ:ΒΕ=ΒΓ:ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΑΖ:ΖΕ = ΒΓ:ΑΒ = ΔΓ:ΑΔ.



Ἄσκ. 457

456.—Ἐὰν κληθῇ Η ὁ πούς τῆς ἐπὶ τὴν ΟΒ καθέτου ΓΗΔ καὶ Ε τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ΒΟΕ, τὰ τρίγωνα ΔΗΒ, ΑΒΕ εἶναι ὅμοια· ἄρα ΒΗ:ΑΒ= ΒΔ:ΒΕ, ὅθεν (ΑΒ) (ΒΔ) = $(BH)(BE)=(\Gamma B)^2$.

457.—Ἐπειδὴ ΚΔ, ΛΕ εἶναι παράλληλοι, $\tau+\sigma=2$ ὀρθ ἄρα $2\omega+2\varphi=2$ ὀρθ. καὶ $\omega+\varphi=1$ ὀρθ., ὅθεν ΔΒΕ = 1 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ ΖΔΒ+ΑΔΒ=

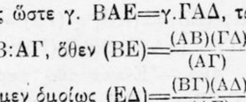
2 ὀρθ. καὶ $\Alpha\Delta\Beta = 1$ ὀρθ. ἔπεται $\Zeta\Delta\Beta = 1$ ὀρθ.· ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι $\Beta\Epsilon\Zeta = 1$ ὀρθ. καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\Zeta = 1$ὀρθ. Εἶναι ἄρα τὸ ΔΒΕΖ ὀρθογώνιον. Εἶναι δὲ $(\Delta\Beta\Epsilon\Zeta) = 2.\,(\Delta\Beta\Epsilon) = (\Delta\Epsilon).\,(\Beta\Theta)$. Καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ ΛΜ παράλληλος τῇ ΔΕ, θὰ εἶναι $(\Delta\Epsilon) = (\Lambda\Mu) = \sqrt{(\Alpha+\alpha)^2-(\Alpha-\alpha)^2} = 2\sqrt{\Alpha\alpha}$ Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΛΒΗ,ΛΚΜ εὑρίσκομεν $\Beta\Eta:\Kappa\Mu = \alpha:\Alpha+\alpha$, ὅθεν $(\Beta\Eta) = \frac{\alpha(\Alpha-\alpha)}{\Alpha+\alpha}$ καὶ $\Beta\Theta = \frac{\alpha(\Alpha-\alpha)}{\Alpha+\alpha} + \alpha = \frac{2\Alpha\alpha}{\Alpha+\alpha}$ Ἄρα $(\Delta\Beta\Epsilon\Zeta) = \frac{4\Alpha\alpha\sqrt{\Alpha\alpha}}{\Alpha+\alpha}$.

458.—Ἔστω Ο περιγεγραμμένη περὶ τὸ ΑΒΓ περιφέρεια, Ε τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΟΔ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Θ, Η, ὧν τὸ Θ πρὸς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ Ζ μέρος ἐν σχέσει πρὸς τὸ Ε. Ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΒΓ, εἶναι $\beta^2+\gamma^2 = 2(\Alpha\Epsilon)^2 + 2.\frac{\alpha^2}{4} = 2(\Alpha\Epsilon)^2 + 2(\Beta\Epsilon)(\Epsilon\Gamma) = 2(\Alpha\Epsilon)^2 + 2(\Theta\Epsilon)(\Eta\Epsilon)$. Ἐπειδὴ δὲ $\Theta\Epsilon = \Theta\Zeta + \Zeta\Epsilon = \Eta\Zeta + \Zeta\Epsilon$ καὶ $\Eta\Epsilon = \Eta\Zeta - \Zeta\Epsilon$ ἔπεται ὅτι $(\Theta\Epsilon)(\Eta\Epsilon) = (\Eta\Zeta)^2 - (\Zeta\Epsilon)^2$· ἄρα $\beta^2+\gamma^2 = 2(\Alpha\Epsilon)^2 + 2(\Zeta\Eta)^2 - 2(\Zeta\Epsilon)^2 = 2(\Alpha\Zeta)^2 + 2(\Zeta\Eta)^2 = 2(\Alpha\Zeta)^2 + 2(\Zeta\Eta)(\Zeta\Theta) = 2(\Alpha\Zeta)^2 + 2(\Alpha\Zeta)(\Zeta\Delta) = 2(\Alpha\Zeta)(\Alpha\Delta)$.

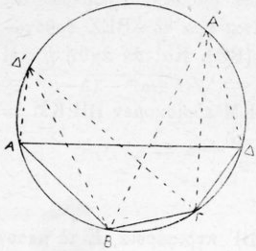
459.—Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον καὶ φέρωμεν ΑΕ τέμνουσαν εἰς τὸ Ε τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ οὕτως ὥστε γ. ΒΑΕ=γ.ΓΑΔ, τὰ τρίγωνα ΑΒΕ,ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, ἄρα $\Beta\Epsilon:\Gamma\Delta = \Alpha\Beta:\Alpha\Gamma$, ὅθεν $(\Beta\Epsilon) = \frac{(\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta)}{(\Alpha\Gamma)}$.
Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΕΔ,ΑΒΓ εὑρίσκομεν ὁμοίως $(\Epsilon\Delta) = \frac{(\Beta\Gamma)(\Alpha\Delta)}{(\Alpha\Gamma)}$.
Ἐκ τούτων διὰ προσθέσεως κατὰ τὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\Beta\Delta) = \frac{(\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta)+(\Beta\Gamma)(\Alpha\Delta)}{(\Alpha\Gamma)},$$ ὅθεν $(\Alpha\Gamma)(\Beta\Delta) = (\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta) + (\Beta\Gamma)(\Alpha\Delta)$.

460.—Ἂν ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἐγγράψιμον, ἡ κορυφὴ Δ δὲν διέρχεται διὰ τῆς περιφερείας ΑΒΓ, ἄρα αἱ γωνίαι ΑΔΒ,ΑΓΒ εἶναι ἄνισοι. Ἂν ἤδη φέρωμεν ΒΕ οὕτως ὥστε γ. ΕΒΓ=γ.ΑΒΔ καὶ ΓΕ οὕτως ὥστε γ. ΒΓΕ=γ. ΑΔΒ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΕΒΓ εὑρίσκομεν $\Alpha\Delta:\Epsilon\Gamma = \Beta\Delta:\Beta\Gamma$ καὶ $\Alpha\Beta:\Beta\Epsilon = \Beta\Delta:\Beta\Gamma$. Ἐκ τῆς α'. τούτων ἔπεται ὅτι $(\Alpha\Delta)(\Beta\Gamma) = (\Beta\Delta)(\Epsilon\Gamma)$ (1) Ἐκ δὲ τῆς β' ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι γ. ΑΒΕ= γ. ΔΒΓ συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΔΒΓ εἶναι ὅμοια, ἄρα $\Alpha\Beta:\Beta\Delta = \Alpha\Epsilon:\Gamma\Delta$, ὅθεν $(\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta) = (\Beta\Delta)(\Alpha\Epsilon)$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη ταύτην καὶ τὴν (1) εὑρίσκομεν $(\Alpha\Delta)(\Beta\Gamma) + (\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta) = (\Beta\Delta)(\Alpha\Epsilon+\Epsilon\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΒΓΕ ὡς ἴση τῇ ΑΔΒ εἶναι διάφορος τῆς ΑΓΒ, τὸ Ε κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΓ, ἄρα $\Alpha\Epsilon + \Epsilon\Gamma > \Alpha\Gamma$, ἡ δὲ προηγουμένη σχέσις γίνεται $(\Alpha\Delta)(\Beta\Gamma) + (\Alpha\Beta)(\Gamma\Delta) > (\Beta\Delta)(\Alpha\Gamma$.



Ἀσκ. 460.



Άσκ. 461.

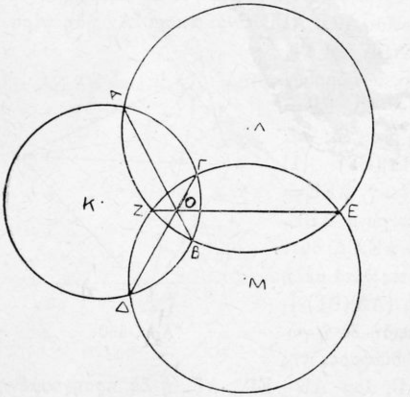
461.—Ὁρίζομεν τόξ. ΑΔ΄=τόξ. ΓΔ καὶ τόξ. ΔΑ΄=τόξ. ΑΒ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ (Θ. 459) εἰς τὰ τετράπλευρα ΓΒΑΔ΄,ΒΓΔΑ΄ εὑρίσκομεν $(ΑΓ)(ΒΔ')=(ΑΒ)(ΓΔ')+(ΒΓ)(ΑΔ')$, $(ΒΔ)(ΓΑ')=(ΒΑ')(ΓΔ)+(ΒΓ)(ΔΑ')$, ἐξ ὧν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $ΒΔ'=Α'Γ, ΓΔ'=ΑΔ, ΑΔ'=ΓΔ, ΒΑ'=ΑΔ, Α'Δ=ΑΒ$ εὑρίσκομεν

$$\frac{(ΑΓ)}{(ΒΔ)}=\frac{(ΑΒ)(ΑΔ)+(ΓΒ)(ΓΔ)}{(ΑΔ)(ΓΔ)+(ΑΒ)(ΒΓ)}$$

462.—Ἂν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ $(ΑΓ)=2(ΕΖ)$, $(ΒΔ)=2(ΕΘ)$, ἄρα $(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2=4(ΕΖ^2+ΕΘ^2)=2(ΕΖ^2+ΕΘ^2+ΖΗ^2+ΗΘ^2)$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκ. 340 εὑρίσκομεν ὅτι : $(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2=2(ΕΗ^2+ΖΘ^2)$.

463.—Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον καὶ Ε,Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ,ΒΔ αὐτοῦ, γνωρίζομεν (ἄσκ. 339) ὅτι $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΔΑ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2+4(ΕΖ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 110) εἶναι $(ΕΖ)=\frac{(ΑΒ)-(ΓΔ)}{2}$,ἔπεδτι $4(ΕΖ)^2=(ΑΒ)^2+(ΓΔ)^2-2(ΑΒ)(ΓΔ)$. ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΒΓ)^2+(ΔΑ)^2+2(ΑΒ)(ΓΔ)=(ΑΓ)^2+ΒΔ)^2$.

464.—Ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΝ εἶναι $ΒΝ : ΑΒ = ΒΜ : ΒΔ$, $ΑΓ:ΓΡ=ΓΔ:ΓΜ$, ὅθεν διὰ πολλαπλα]σμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι $\frac{ΒΝ}{ΑΒ}\cdot\frac{ΑΓ}{ΓΡ}=\frac{ΔΓ}{ΒΔ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{ΔΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$, αὕτη γίνεται $\frac{ΒΝ}{ΓΡ}=1$, ὅθεν$ΒΝ=ΓΡ$. Ἐπειδὴ δὲ $ΒΝ:ΒΜ=ΑΒ:ΒΔ=ΑΓ:ΔΓ=(ΑΒ+ΑΓ):ΒΓ$, ἕπεται ὅτι $2(ΒΝ)=ΑΒ+ΑΓ$ καὶ $(ΒΝ)=(ΑΒ+ΑΓ):2$.



Άσκ. 465.

465.—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ καὶ ΕΖ τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ ὅτι ἡ ΓΟ τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Δ΄ τὴν δὲ Μ εἰς τὸ Δ΄΄. Γνωρίζομεν (§ 213) ὅτι $(ΟΓ)(ΟΔ')=(ΟΑ)(ΟΒ)$, $(ΟΓ)(ΟΔ'')=(ΟΕ)(ΟΖ)$ καὶ $(ΟΑ)(ΟΒ)=(ΟΕ)(ΟΖ)$. ἄρα $(ΟΓ)(ΟΔ')=(ΟΓ)(ΟΔ'')$, ὅθεν $(ΟΔ)=(ΟΔ'')$. Ἡ ΟΓ ἄρα τέμνει τὰςπεριφερείας Κ καὶ Μ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ ὀφείλει νὰ εἶναι τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Δ. Ἄρα ἡ ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

Σημ. Ἂν αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΕΖ, ΓΔ εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Ο ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

466.—Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο, ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ ΑΟΕ διάμετρος τοῦ κύκλου, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ, εἶναι ὅμοια· ἄρα (ΑΒ):(ΑΕ)=(ΑΔ):(ΑΓ), ὅθεν (ΑΒ) (ΑΓ)=(ΑΔ) (ΑΕ).

467.—Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $\beta\gamma = 2\mathrm{P}.\upsilon$, ὅθεν $\alpha\beta\gamma = 2\mathrm{P}\alpha\upsilon$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\upsilon = 2\mathrm{E}$, ἕπεται ὅτι $\alpha\beta\gamma = 4\mathrm{PE}$.

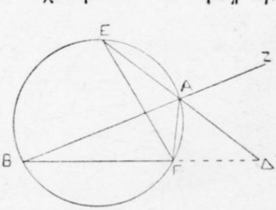
468.—Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΕ, ΑΔΓ ἕπεται ΑΕ:ΑΓ=ΒΕ:ΔΓ. Ἐκ δὲ τῶν ΒΔΕ, ΑΔΓ ὅτι ΔΕ:ΔΓ=ΒΕ:ΑΓ. Ἐκ τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη κ.τ.λ. προκύπτει $(\mathrm{BE})^2 = (\mathrm{AE})(\Delta\mathrm{E})$.

469.—Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Ε, τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΓ εἶναι ὅμοια· ἄρα ΑΒ : ΑΔ = ΑΕ : ΑΓ, ὅθεν $(\mathrm{AB})(\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{A\Delta})(\mathrm{A\Delta} + \Delta\mathrm{E}) = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{A\Delta})(\Delta\mathrm{E}) = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\mathrm{B\Delta})(\Delta\Gamma)$.

470.—Ἐκ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης ἰσότητος ἕπεται ὅτι $(\mathrm{A\Delta})^2 = \beta\gamma - (\mathrm{B\Delta})(\Delta\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 362) εἶναι $(\mathrm{B\Delta}) = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$, $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, αὕτη γίνεται $\mathrm{A\Delta}^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}[(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2] = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)$

$$= \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}.\ 2\tau.\ 2(\tau-\alpha),\ \text{ὅθεν}\ (\mathrm{A\Delta}) = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}.$$

471.—Ἂν ἡ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΖΑΓ διχοτομοῦσα ΑΔ τέμνῃ τὴν περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Ε, τὰ ΕΑΓ, ΒΑΔ εἶναι ὅμοια· ἄρα ΑΒ : ΑΕ= ΑΔ:ΑΓ, ὅθεν $(\mathrm{AB})(\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{AE})(\mathrm{A\Delta}) = (\mathrm{A\Delta})(\mathrm{E\Delta} - \mathrm{A\Delta}) = (\mathrm{A\Delta})(\mathrm{E\Delta}) - (\mathrm{A\Delta})^2$. Ἄρα $(\mathrm{A\Delta}^2) = (\Delta\mathrm{B})(\Delta\Gamma) - (\mathrm{AB})(\mathrm{A\Gamma})$,

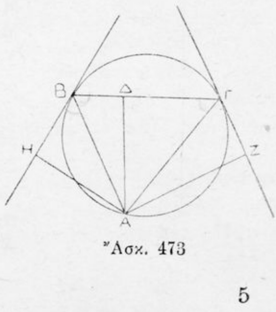


Ἄσκ. 471.

472.—Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος $(\mathrm{A\Delta})^2 = (\Delta\mathrm{B})(\Delta\Gamma) - \beta\gamma$, ἂν ληφθῇ ὑπ᾿ ὄψιν (§ 204) ὅτι $\Delta\mathrm{B} : \gamma = \Delta\Gamma : \beta = \alpha : \gamma - \beta$ καὶ $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\gamma-\beta}$, $\Delta\mathrm{B} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma-\beta}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκλεσιν μετασχηματισμῶν ἀναλόγων πρὸς τοὺς ἐν ἄσκ. 470 ὅτι

$$(\mathrm{A\Delta}) = \frac{2}{\gamma-\beta}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

473. — Ἔστωσαν ΑΔ, ΑΗ, ΑΖ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Α ἀπὸ τῆς χορδῆς ΒΓ καὶ τῶν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἐφαπτομένων. Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθ. τριγώνων ΑΒΗ, ΑΔΓ ἕπεται ΑΔ:ΑΗ=ΑΓ:ΑΒ· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων ΑΒΔ, ΑΓΖ ὅτι ΑΔ:ΑΖ= ΑΒ=ΑΓ, Ἐκ τούτων ἕπεται $(\mathrm{A\Delta})^2 : (\mathrm{AH})(\mathrm{AZ}) = 1$ καὶ $(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{AH})(\mathrm{AZ})$.

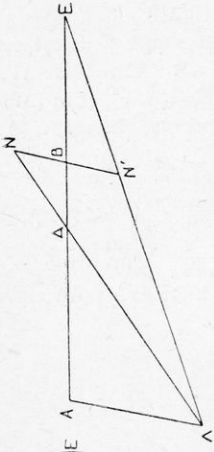


Ἄσκ. 473

474.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ἀχθῇ εἰς τὸ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς ΒΔ=Κ, θὰ εἶναι $(ΓΔ)^2 - (ΓΒ)^2 = Κ^2$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $(ΑΓ)^2-(ΓΒ)^2=Κ^2$, ἕπεται ὅτι ΑΓ=ΓΔ. Κεῖται ἄρα τὸ Γ ἐπὶ τῆς τὸ ΑΔ δίχα καὶ καθέτως τεμνούσης. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

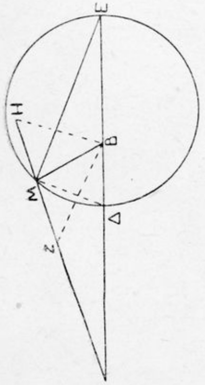
475.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ δοθὲν ΑΔΕ τὸ ζ. ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον μὲ τὸ ΑΒΓ κοινὴν τὴν γωνίαν Α, θὰ εἶναι (§ 176) (ΑΒΓ):(ΑΔΕ)=(ΑΒ) (ΑΓ):(ΑΔ) (ΑΕ) ἢ $1=(ΑΒ)(ΑΓ):(ΑΔ)^2$, ὅθεν $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)(ΑΓ)$. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

476.—***Ἀνάλυσις***. Ἔστω χy ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ΔΕ ἡ ζητουμένη τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΑΒΓ ἔχουσι κοινὴν τὴν γωνίαν Γ, ἄρα (ΓΔΕ) : (ΑΒΓ) = (ΓΔ) ΓΕ):(ΑΓ) (ΓΒ), ὅθεν $\frac{1}{2} = \frac{ΓΔ}{ΑΓ} \frac{ΓΕ}{ΓΒ}$. Ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ ΑΖ παράλληλος τῇ χy, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΔΕ, ΓΑΖ ἕπεται ὅτι ΓΔ:ΓΑ=ΓΕ:ΓΖ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{1}{2}=\frac{(ΓΕ)^2}{(ΓΒ)(ΓΖ)}$, ὅθεν $(ΓΕ)^2=\frac{(ΓΒ)}{2}.(ΓΖ)$, ἤτοι ΓΕ εἶναι μέσον ἀνάλογον γνωστῶν τμημάτων. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.



477.—***Ἀνάλυσις***. Ἂν ΕΖ εἶναι ἡ ζ. εὐθεῖα, θὰ εἶναι $\frac{ΑΕΖ}{3}=\frac{ΒΕΖΓ}{7}=\frac{ΑΒΓ}{10}$, ὅθεν $\frac{ΑΕΖ}{ΑΒΓ}=\frac{3}{10}$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ΑΕΖ : ΑΒΓ = $(ΑΕ)^2$: (ΑΒ) (ΑΔ)· ἄρα 3:10=$(ΑΕ)^2$: 60.40 καὶ (ΑΕ)=$\sqrt{720}$=$12\sqrt{5}$. Ἐντεῦθεν εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

478.—Ἂν Α, Β εἶναι τὰ δοθέντα σημεῖα, Μ δὲ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι ΜΑ : ΜΒ = μ : ν. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ διχοτόμοι ΜΔ, ΜΕ τῶν ΑΜΒ, ΒΜΗ, θὰ εἶναι ΑΔ:ΔΒ=ΜΑ:ΜΒ=μ : ν καὶ ΕΑ:ΕΒ=ΜΑ:ΜΒ=μ : ν. Τὰ σημεῖα ἄρα Δ καὶ Ε ὁρίζονται. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΔΜΕ=1 ὀρθ. (ἄσκ. 12) συμπεραίνομεν ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον ΔΕ. Ἀντιστρόφως· ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης, ἀχθῶσι δὲ αἱ ΒΖ, ΒΗ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΜΕ, ΜΔ, θὰ εἶναι μ:ν= ΑΔ : ΔΒ = ΑΜ:ΜΗ, μ:ν =ΕΑ:ΕΒ=ΑΜ:ΜΖ,



Ἄσκ. 478

ὅθεν $MH=MZ$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΖΒΗ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ διάμεσος $MB=MH$, κατ' ἀκολουθίαν ἡ α' τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων γίνεται $\mu : \nu = MA:MB$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζ. τόπου, ὅστις διὰ τοῦτο εἶναι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΔΕ.

Κατασκευὴ τοῦ τόπου. Ἀρκεῖ νὰ ὁρισθῶσι τὰ Δ καὶ Ε. Πρὸς τοῦτο ἄγομεν παραλλήλους ΑΛ, ΒΝ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῶν τμήματα $AΛ=\mu$, $BN=\nu$, $BN'=\nu$ καὶ ἄγομεν ΛΝ καὶ ΛΝ'. Αἱ τομαὶ αὐτῶν καὶ τῆς ΑΒ εἶναι τὰ ζ. σημεῖα Δ,Ε, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

Σημ. Τὸ Δ ὁρίζεται καὶ κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 205) τρόπον.

479.—Α' τρόπος. Ἐπειδὴ $MA:MB=\mu:\nu$, τὸ ζητούμενον σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἣν κατασκευάζομεν, ὡς προηγουμένως ἐμάθομεν· κεῖται δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ δοθέντος τόξου. Ὁρίζεται ἄρα ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων τόπων.

Β' τρόπος. Ἂν φέρωμεν τὴν ΜΔΕ διχοτόμον τῆς ΑΜΒ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὸ μὲν ἕτερον τόξον ΑΒ εἰς τὸ μέσον Ε, τὴν δὲ χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, οὕτως ὥστε $\mu : \nu = AΔ : ΔB$. Ὁρίζονται ἄρα ἀμφότερα καὶ ἡ ΕΔ, ἄρα καὶ τὸ Μ.

480 —Ἂν ΑΒ,ΒΓ εἶναι τὰ δοθέντα διαδοχικὰ τμήματα καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι γ. ΑΜΒ=γ. ΜΒΓ, ἤτοι ἡ ΜΒ διχοτομεῖ τὴν ΑΜΓ· ἄρα $MA:MΓ=AB:BΓ$. Ὁ ζ. τόπος ἄρα συμπίπτει μὲ τὸν τῆς ἀσκ.478.

481.—Ὁρισθείσης τῆς βάσεως ΒΓ ἡ τρίτη κορυφὴ Α κεῖται α') ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ταύτης ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος. β') Ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις εἶναι τόπος τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Β καὶ Γ ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον. Ὁρίζεται ἄρα ὡς τομὴ τῶν τόπων τούτων.

482 — Ὁρισθείσης τῆς βάσεως ΒΓ ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις εἶναι τόπος τῶν σημείων, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ ἔχουσι τὸν δοθέντα λόγον. Ἐὰν αὕτη τέμνῃ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ Δ, θὰ εἶναι $AB:AΓ=BΔ:ΔΓ$, ἄρα ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α· κεῖται ἄρα τὸ Α καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν διχοτόμον.

483.—***Ἀνάλυσις.***—Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ ζ. τρίγωνον, $AB=\gamma$, $AΓ=\beta$, $AΔ=\delta$ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Β ἡ ΒΕ παράλληλος τῇ ΑΔ τέμνουσα τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ε, θὰ εἶναι Ε=γ. ΔΑΓ=γ. ΔΑΒ=γ. ΑΒΕ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $AE=AB=\gamma$. Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΔ,ΓΕΒ ἕπεται ὅτι $ΓA:ΓE=AΔ:BE$ ἢ $\beta:(\beta+\gamma)=\delta:BE$· ἡ πλευρὰ ἄρα ΒΕ κατασκευάζεται (§ 206) κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ τὸ ΑΒΓ, ἐξ οὗ εὐκόλως καὶ τὸ ΑΒΓ.

484. ***Ἀνάλυσις.***—Ἂν ΒΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα τῶν περιφερειῶν Κ,Λ διερχομένη διὰ τῆς τομῆς Α αὐτῶν, θὰ εἶναι $AB:AΓ=\mu:\nu$. Ἂν δὲ ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν αἱ κάθετοι ΚΔ,ΛΕ θὰ εἶναι $(AB)=2(AΔ)$, $(AΓ)=2(AE)$

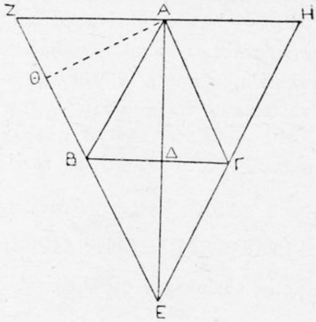
καὶ ἑπομένως ΑΒ:ΑΓ=ΑΔ:ΑΕ, ἄρα καὶ ΑΔ:ΑΓ=μ:ν. Ἂν δὲ ἀχθῇ εἰς τὸ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΑΓ τέμνουσα τὴν ΚΛ εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι ΚΖ:ΖΛ=ΑΔ:ΑΕ=μ:ν. Τὸ Ζ ἄρα ὁρίζεται, ἐξ αὐτοῦ ἡ ΖΑ καὶ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ΒΑΓ.

485.—***Ἀνάλυσις.***— Ἂν ἡ ΗΘ (Σχ. 146) εἶναι τοιαύτη ὥστε (ΑΗΘ): (ΒΗΘΓ)=μ:ν, θὰ εἶναι (ΑΗΘ):μ=(ΒΗΘΓ):ν=(ΑΒΓ):(μ+ν), ἄρα (ΑΗΘ): (ΑΒΓ)=μ:(μ+ν). Ἀφ' ἑτέρου ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΗΘ,ΑΒΓ ἕπεται ὅτι (ΑΗΘ):(ΑΒΓ)=$(ΑΗ)^2$:$(ΑΒ)^2$· ἄρα εἶναι $(ΑΗ)^2$:$(ΑΒ)^2$=μ:μ+ν. Κατασκευάζεται λοιπὸν τὸ ΑΗ κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 223) τρόπον.—Ἂν θέλωμεν νὰ εἶναι (ΑΗΘ)=(ΒΗΘΓ), θὰ εἶναι μ=ν, ἡ δὲ τελευταία ἰσότης γίνεται $(ΑΗ)^2$:$(ΑΒ)^2$=1:2. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ΑΗ κατασκευάζεται καὶ ἄλλως διότι ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι (ΑΗ)=(ΑΒ)$\sqrt{2}$:2· ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ ὀρθ. ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας τῇ ΑΒ, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι (ΑΒ)$\sqrt{2}$, τὸ ἥμισυ δὲ αὐτῆς θὰ ἰσοῦται πρὸς ΑΗ.

486.—Α' περίπτωσις.—Ἔστω ὅτι ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΒΓ διαιρεῖ τὸ ΑΒΓ οὕτως ὥστε εἶναι
(ΑΒΓ):(ΒΔΕΓ): = (ΒΔΕΓ):(ΑΔΕ) ἢ (ΑΒΓ):(ΑΒΓ—ΑΔΕ)=(ΑΒΓ—ΑΔΕ): (ΑΔΕ). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ,ΑΔΕ ἕπεται ὅτι (ΑΒΓ):$γ^2$=(ΑΔΕ):$(ΑΔ)^2$ =(ΑΒΓ—ΑΔΕ):$γ^2$—$(ΑΔ)^2$, ὅθεν (ΑΒΓ):(ΑΒΓ—ΑΔΕ)=$γ^2$:($γ^2$—$ΑΔ^2$) καὶ (ΑΒΓ—ΑΔΕ):(ΑΔΕ)=($γ^2$—$ΑΔ^2$):$(ΑΔ)^2$. Ἄρα ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἀληθεύουσα ἰσότης γίνεται $γ^2$: ($γ^2$—$ΑΔ^2$)=($γ^2$—ΑΔ)^2: $(ΑΔ)^2$, ὅθεν ($γ^2$—$ΑΔ^2$)^2=$γ^2$ $(ΑΔ)^2$ καὶ $γ^2$—$(ΑΔ)^2$=±γ(ΑΔ). Ἡ α' τούτων δίδει (ΑΔ)=$\frac{γ}{2}$ (—1±$\sqrt{5}$), ὧν δεκτὴ μόνον ἡ θετικὴ $\frac{γ}{2}$ (—1+$\sqrt{5}$). Ἐκ ταύτης φαίνεται ὅτι ΑΔ εἶναι τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς γ διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον· κατασκευάζεται ἄρα εὐκόλως (§ 221) καὶ ὁρίζεται τὸ Δ, εἶτα δὲ καὶ ἡ ΔΕ. Ἡ ἄλλη ἐξίσωσις δίδει (ΑΔ)=$\frac{γ}{2}$(1±$\sqrt{5}$), ὧν ἡ μὲν ἀρνητική, ἡ δὲ μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ καὶ ἑπομένως ἀμφότεραι ἀπορρίπτονται.

Β' περίπτωσις. Ἔστω ΖΗ παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ τοιαύτη ὥστε (ΑΒΓ): (ΑΖΗ)=(ΑΖΗ:[(ΑΒΓ)—(ΑΖΗ)]. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΑΖΗ εἶναι ὅμοια ἕπεται ὅτι (ΑΒΓ):$γ^2$=(ΑΖΗ):$(ΑΖ)^2$, ὅθεν (ΑΒΓ):(ΑΖΗ)=$γ^2$:$(ΑΖ)^2$ καὶ $γ^2$:(ΑΒΓ)=$(ΑΖ)^2$:(ΑΖΗ)=[$γ^2$—$(ΑΖ)^2$]:[(ΑΒΓ)— (ΑΖΗ)], ἄρα (ΑΖΗ) : [(ΑΒΓ)—(ΑΖΗ)]= $(ΑΖ)^2$:[$γ^2$—$(ΑΖ)^2$]. Ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἄρα ἀληθεύουσα ἰσότης γίνεται $γ^2$:$(ΑΖ)^2$=$(ΑΖ)^2$:[$γ^2$—$(ΑΖ)^2$], ὅθεν $(ΑΖ)^4$+$γ^2(ΑΖ)^2$—$γ^4$=0. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $(ΑΖ)^2$=γω, αὕτη γίνεται $γ^2ω^2$+$γ^3ω$—$γ^4$=0 ἢ $ω^2$+γω—$γ^2$=0, ὅθεν ω=$\frac{γ}{2}$ (— 1 + $\sqrt{5}$) = (ΑΔ). Ἄρα $(ΑΖ)^2$=γ(ΑΔ), ἤτοι (ΑΖ) κατασκευάζεται (ἄσκ. 356).

487.—***Ἀνάλυσις.***—Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, οὗ γνωρίζομεν ΑΒ=ΑΓ=β καὶ ΑΔ+ΒΓ=δ. Ἂν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους λάβωμεν $ΔΕ=ΒΓ$, φέρωμεν δὲ τὰς $ΕΒ, ΕΓ$ καὶ τὴν $ΖΑΗ$ παράλληλον τῇ $ΒΓ$, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΕΒΓ, ΕΖΗ$ εὑρίσκομεν $ΖΗ:ΑΕ=ΒΓ:ΔΕ=1$, ἄρα $ΖΗ=ΑΕ$. Εἶναι δὲ καὶ $ΖΑ=ΑΗ$, διότι τὸ $ΕΖΗ$ ἰσοσκελές.



Ἄσκ. 487.

Σύνθεσις. — Ὁρισθέντος τμήματος $ΑΕ=δ$ φέρομεν εἰς τὸ $Α$ κάθετον ἐπ' αὐτό, ἐφ' ἧς ὁρίζομεν τμήματα $ΑΖ=ΑΗ=δ/_2$ καὶ ἄγομεν τὰς $ΕΖ, ΕΗ$. Ἡ μὲ κέντρον $Α$ καὶ ἀκτῖνα $ϐ$ γραφομένη περιφέρεια ὁρίζει ἐπὶ τούτων τὰς κορυφὰς $Β, Γ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Τῷ ὄντι· τοῦτο ἔχει ἐκ κατασκευῆς $ΑΒ=ΑΓ=ϐ$, ἐκ δε τῶν $ΕΖΗ, ΕΒΓ$ εἶναι $ΒΓ:ΔΕ=ΖΗ:ΑΕ=1$, ὅθεν $ΒΓ=ΔΕ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $ΑΔ+ΒΓ=ΑΔ+ΔΕ=δ$.

Διερεύνησις. Προφανῶς πρέπει $ϐ<ΑΔ+ΔΒ$, κατὰ μείζονα ἄρα λόγον πρέπει $ϐ<δ$. Τοῦ περιορισμοῦ τούτου ἐκπληρουμένου πρέπει ἡ περιφέρεια $(Α, ϐ)$ νὰ τέμνῃ τὴν $ΕΖ$ μεταξὺ $Ε$ καὶ $Ζ$. Ἂν $ϐ=\frac{δ}{2}$, ἓν τῶν κοινῶν σημείων εἶναι τὸ $Ζ$, τὸ δὲ ἄλλο κεῖται μεταξὺ $Ζ$ καὶ $Ε$, ἔχει δηλ. τὸ πρόβλημα μίαν λύσιν. Ἂν δὲ $δ>ϐ>\frac{δ}{2}$, τὸ ἓν τῶν κοινῶν σημείων κεῖται πέραν τοῦ $Ζ$, τὸ δὲ ἄλλο μεταξὺ $Ε$ καὶ $Ζ$, ἤτοι ὑπάρχει μία λύσις. Τέλος ἂν $β<\frac{δ}{2}$, ἡ περιφέρεια ἔχει μετὰ τῆς πλευρᾶς $ΕΖ$ ἕν, οὐδὲν ἢ δύο κοινὰ σημεῖα, καθ' ὅσον ἡ ἀπόστασις $ΑΘ$ εἶναι ἴση, μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος $β$. Ἔχει ἄρα τότε τὸ πρόβλημα μίαν, οὐδεμίαν ἢ δύο λύσεις.

488.— Ἐπειδὴ (Σχ. 158) τὰ τρίγωνα $ΔΑΓ$, $ΔΖΕ$ εἶναι ὅμοια, ἕπεται $\frac{ΔΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΗ}{ΖΕ}=\frac{ΗΒ}{Β-β}$, ὅθεν $(ΔΒ)=\frac{Βυ}{Β-β}$ καὶ $(ΔΗ)=\frac{βυ}{Β-β}$ (ἔνθα $υ=ΗΒ$). Ἄρα $(ΔΑΓ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{Β^2υ}{Β-β}$ καὶ $(ΔΖΕ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{β^2υ}{Β-β}$. Ἀφαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $(ΑΖΕΓ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{υ}{Β-β}(Β^2-β^2)=\frac{Β+β}{2}\cdot υ$.

489.—***Ἀνάλυσις.*** Ἂν $ΕΖ$ εἶναι παράλληλος τῇ διαγωνίῳ $ΑΓ$ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ καὶ τοιαύτη ὥστε $ΒΕΖ$ νὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τετραγώνου ἤτοι $(ΕΒΖ)=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(ΑΒΓ)$, θὰ εἶναι $(ΕΒΖ):(ΑΒΓ)=2:3$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΒΕΖ$, $ΑΒΓ$ εἶναι $(ΕΒΖ):(ΑΒΓ)=(ΒΖ)^2:(ΒΓ)^2$, ἕπεται ὅτι $(BZ)^2:(B\Gamma)^2=2:3$ καὶ τὸ ΒΖ κατασκευάζεται κατὰ τὸ γνωστὸν (§ 223) τρόπον. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ἡ πρὸς ΑΓ συμμετρικὴ ΗΘ τῆς ΕΖ.

490.— Ἂν x, y εἶναι αἱ διαστάσεις, α^2 τὸ ἐμβαδὸν καὶ $\mu:\nu$ ὁ λόγος τῶν διαστάσεων, ἐκ τῶν $xy=\alpha^2$, $x:y=\mu:\nu$ προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη $x^2=\alpha^2\mu:\nu$, ὅθεν $x^2:\alpha^2=\mu:\nu$. Ἄρα κατασκευάζεται (§ 223) ἡ x καὶ εἶτα ἐκ τῆς $x:y=\mu:\nu$ ἢ $\mu:\nu=x:y$ κατασκευάζεται καὶ ἡ y (§ 206).

491.— Ἔστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ ΔΕ, ΔΖ αἱ ζ. εὐθεῖαι τέμνουσαι ἡ μὲν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε ἡ δὲ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ $(A\Delta E)=\frac{1}{3}\cdot 2.(A\Delta B)$, ἕπεται $(A\Delta E):(A\Delta B)=2:3$. Ἀλλὰ (§ 175 Πόρ ΙΙ) εἶναι καὶ $(A\Delta E):(A\Delta B)=(AE):(AB)$, ἄρα $(AE):(AB)=2:3$, ὅθεν $(AE)=\frac{2}{3}AB$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\Gamma Z)=\frac{2}{3}(B\Gamma)$. Ἐντεῦθεν ἕπεται εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

492.— Α΄. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, θὰ εἶναι (§ 185) $(MA)^2+(MB)^2=2(MO)^2+2(AO)^2$, ὅθεν $K^2-2(AO)^2=2(MO)^2$ καὶ $(MO)^2=\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right)^2-(AO)^2=\left(\frac{K\sqrt{2}}{2}\right)^2-(AO)^2$.
Εἶναι ἄρα ΜΟ σταθερὸν καὶ τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἑτέραν κάθετον πλευρὰν ὀρθ. τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν $\frac{K\sqrt{2}}{2}$ (ἄσκ. 485) καὶ κάθετον πλευρὰν ΑΟ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια αὕτη ἀποτελεῖ τὸν τόπον.

Β΄. Ἂν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου καὶ Γ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι (ἄσκ. 338) $(MA)^2-(MB)^2=2(AB)(O\Gamma)$, ὅθεν $K^2=2(AB)(O\Gamma)$ καὶ $2(AB):K=K:O\Gamma$. Τὸ τμῆμα ΟΓ ἄρα εἶναι τελείως ὡρισμένον κατὰ μέγεθος καὶ κατασκευάζεται (§ 206). Ἐπειδὴ δὲ $MA>MB$ ἕπεται (§ 79) ὅτι ΜΟΑ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ΟΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ΟΒ· εἶναι ἄρα ἡ θέσις τοῦ Γ τελείως ὡρισμένη. Ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τοῦ τόπου προβάλλονται εἰς ὡρισμένον σημεῖον Γ τῆς ΑΒ καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Γ ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλη ἡ κάθετος αὕτη ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

493.—Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, Α,Β,Γ τὰ δοθέντα σημεῖα, Ο ἡ τομὴ τῶν διαμέσων ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Θ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΟ. Ἐπειδὴ ΜΘ εἶναι διάμεσος τοῦ ΑΜΟ εἶναι $(MA)^2+(MO)^2=2(M\Theta)^2+\frac{(AO)^2}{2}$· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $(M\Theta)^2+(M\Delta)^2=2(MO)^2+\frac{(AO)^2}{2}$, ὅθεν $2(M\Theta)^2+2(M\Delta)^2=4(MO)^2+(AO)^2$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς α΄ εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη κ.τ.λ. $(MA)^2+2(M\Delta)^2=3(MO)^2+\frac{3(AO)^2}{2}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(MB)^2+2(ME)^2=3(MO)^2+\frac{3(BO)^2}{2}$, $(M\Gamma)^2+2(MZ)^2=$

$3(MO)^2+\frac{3(\Gamma O)^2}{2}$, ἐξ ὧν ἕπεται $(MA)^2+(MB)^2+(M\Gamma)^2+2[(M\Delta)^2+(ME)^2+(MZ)^2]=9(MO)^2+\frac{3}{2}(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)$. (1)

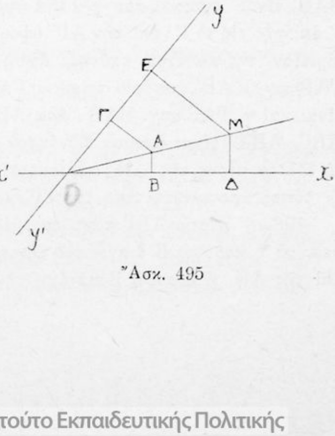
Ἀλλὰ $(MA)^2+(MB)^2=2(MZ)^2+\frac{(AB)^2}{2}$, $(MB)^2+(M\Gamma)^2=2(M\Delta)^2+\frac{(B\Gamma)^2}{2}$, $(MA)^2+(M\Gamma)^2=2(ME)^2+\frac{(A\Gamma)^2}{2}$, ὅθεν $2(MA^2+MB^2+M\Gamma^2)=2(MZ^2+M\Delta^2+ME^2)+\frac{(AB)^2+(B\Gamma)^2+(A\Gamma)^2}{2}$, ἡ δὲ ἰσότης (1) γίνεται

$$3(MA^2+MB^2+M\Gamma^2)=9(MO)^2+\frac{3}{2}(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)+\frac{(AB)^2+(B\Gamma)^2+(A\Gamma)^2}{2} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ $(AB)^2+(A\Gamma)^2=2(A\Delta)^2+\frac{(B\Gamma)^2}{2}=\frac{9}{2}(AO)^2+\frac{(B\Gamma)^2}{2}$, $(B\Gamma)^2+(BA)^2=\frac{9}{2}(BO)^2+\frac{(A\Gamma)^2}{2}$, $(A\Gamma)^2+(B\Gamma)^2=\frac{9}{2}(\Gamma O)^2+\frac{(AB)^2}{2}$, ἕπεται $2(AB^2+B\Gamma^2+A\Gamma^2)=\frac{(AB)^2+(B\Gamma)^2+(A\Gamma)^2}{2}+\frac{9}{2}(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)$, ὅθεν $\frac{3}{2}(AB^2+B\Gamma^2+A\Gamma^2)=\frac{9}{2}(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)$ ἢ $\frac{1}{2}(AB^2+B\Gamma^2+A\Gamma^2)=\frac{3}{2}(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)$, ἡ δὲ (2) γίνεται $3(MA^2+MB^2+M\Gamma^2)=9(MO)^2+3(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)$, ἄρα $(MA)^2+(MB)^2+(M\Gamma)^2=3(MO)^2+(AO)^2+(BO)^2+(\Gamma O)^2$, ὅθεν ἕπεται ὅτι $K^2=3(MO)^2+(AO)^2+(BO)^2+(\Gamma O)^2$ καὶ $(MO)^2=\frac{K^2-(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)}{3}$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι MO εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον O καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\frac{K^2-(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)}{3}}$

Ἐὰν δὲ σημεῖόν τι M κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης, ἐκ τῶν ἰσοτήτων $(MO)^2=\frac{K^2-(AO^2+BO^2+\Gamma O^2)}{3}$ καὶ $(MA)^2+(MB)^2+(M\Gamma)^2=3(MO)^2+(AO)^2+(BO)^2+(\Gamma O)^2$, ἕπεται ὅτι $(MA)^2+(MB)^2+(M\Gamma)^2=K^2$, ἤτοι τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ ζ. τόπου.

494.—Ἔστωσαν (K, A), (Λ, α) οἱ δοθέντες κύκλοι καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Ἂν MA, MB εἶναι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τούτων, θὰ εἶναι γ. AMK = γ. BMΛ, τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα AMK, BMΛ εἶναι ὅμοια· ἄρα MK:MΛ=A:α. Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος συμπίπτει μὲ τὸν τῆς ἀσκ. 478.

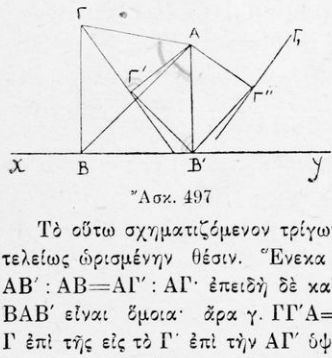


Ἀσκ. 495

495.—Ἄγοντες εὐθεῖαν παράλληλον τῇ Oχ εἰς ἀπόστασιν μ καὶ ἄλλην παράλληλον τῇ Oy εἰς ἀπόστασιν ν ὁρίζομεν τὸ σημεῖον A τοῦ τόπου. Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν ἄλλο σημεῖον τοῦ τόπου ἐντὸς τῆς χOy, θὰ εἶναι ΑΒ : ΑΓ = ΜΔ : ΜΕ, διότι ἑκάτερος εἶναι μ : ν. Ἐπειδὴ δὲ γ. ΒΑΓ = γ. ΔΜΕ, τὰ τρίγωνα ΑΓΒ, ΜΔΕ εἶναι ὅμοια καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΑΒ : ΜΔ = ΑΓ : ΜΕ = ΒΓ : ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος τῇ ΔΕ, ἑπομένως ΒΓ : ΔΕ = ΟΒ : ΟΔ. Ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι ΑΒ:ΜΔ=ΟΒ:ΟΔ. Ἂν δὲ ἡ ΟΑ ἔτεμνε τὴν ΜΔ εἴς τι σημεῖον Μ′, θὰ προέκυπτεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΒ, ΟΜ′Δ ὅτι ΑΒ:ΔΜ′=ΟΒ:ΟΔ, ἄρα καὶ ΑΒ:ΜΔ=ΑΒ:Μ′Δ καὶ ΜΔ=Μ′Δ, ἤτοι Μ καὶ Μ′ συμπίπτουσι. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ τῆς ΟΑ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΑ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἐν τῇ χ′Οy καὶ y′Οχ σημεῖα τοῦ τόπου ἀποτελοῦσιν ἄλλην εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Ο καὶ ὁμοίως κατασκευαζομένην.

496.—Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ ζ. τόπου, ἤτοι κέντρον περιφερείας, ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας (Κ,Α), (Λ,α) (Α>α) κατὰ τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων ΑΚΒ, ΓΛΔ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΚΒ κοινὴ χορδὴ τῶν Μ,Κ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΚ, ἕπεται $(ΜΑ^2)=(ΜΚ)^2+Α^2$· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(ΜΔ)^2=(ΜΛ)^2+α^2$, ὅθεν ἐπειδὴ ΜΑ=ΜΔ, προκύπτει $(ΜΛ)^2-(ΜΚ)^2=Α^2-α^2$. Ὁ ζητούμενος ἄρα τόπος συμπίπτει μὲ τὸν τῆς ἀσκ 492 Β′.

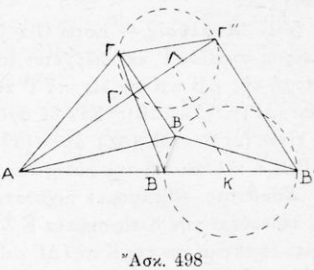
497.—Ἔστω ΑΒΓ τυχοῦσα θέσις τοῦ περὶ τὸ Α στρεφομένου τριγώνου, οὗ ἡ κορυφὴ Β κινεῖται ἐπὶ τῆς χy. Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ἡ ΑΒ καταλαμβάνει ποτὲ τὴν θέσιν ΑΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν χy, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν θέσιν τοῦ τριγώνου ἄγοντες εὐθεῖαν Β′Γ′ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΑΒ′ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΒΓ καὶ τὴν ΑΓ′ οὕτως ὥστε Β′ΑΓ′=γ. ΒΑΓ.



Ἄσκ. 497

Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒ′Γ′ εἶναι ὅμοιον τῷ ΑΒΓ, ἔχει δὲ τελείως ὡρισμένην θέσιν. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ΑΒΓ, ΑΒ′Γ′ εἶναι ΑΒ′ : ΑΒ=ΑΓ′ : ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ καὶ γ. ΒΑΒ′=γ. ΓΑΓ′, τὰ τρίγωνα ΓΑΓ′, ΒΑΒ′ εἶναι ὅμοια· ἄρα γ. ΓΓ′Α=γ. ΒΒ′Α=1 ὀρθ. Κεῖται ἄρα ἡ κορυφὴ Γ ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Γ′ ἐπὶ τὴν ΑΓ′ ὑψουμένης καθέτου. Ἐὰν δὲ Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης, ἀχθῇ δὲ ἡ ΑΓ καὶ ἡ ΑΒ οὕτως ὥστε γ. ΓΑΒ=γ. Γ′ΑΒ′, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΑΓ′, ΒΑΒ′ θὰ εἶναι ὅμοια, διότι θὰ εἶναι καὶ γ. ΓΑΓ′=γ. ΒΑΒ′, ἄρα ΑΒ′ : ΑΒ=ΑΓ′ : ΑΓ. Ἀλλὰ τότε καὶ τὰ ΑΒΓ, ΑΒ′Γ′ εἶναι ὅμοια. Εὐνόητον δὲ ὅτι, ἂν τὸ ΑΒ′Γ′ σχηματισθῇ ἀπὸ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΑΒ′, εὑρίσκεται ἑτέρα τοιαύτη εὐθεῖα $Γ_1$ Γ″. Ὥστε ὁ ζ. τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ΓΓ′ καὶ $Γ_1$ Γ″.

498.— Ἔστω ΑΒΓ τυχοῦσα θέσις τοῦ στρεφομένου περὶ τὸ Α τριγώνου, οὗ ἡ κορυφὴ Β διαγράφει τὴν περιφέρειαν Κ. Ὅταν ἡ ΑΒ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΚ, ἡ κορυφὴ Β θὰ ἔχῃ τὴν θέσιν Β′ ἢ Β″. Εἰς τὴν πρώτην θέσιν ἀντιστοιχεῖ τὸ $AB'\Gamma'$, ὅπερ κατασκευάζομεν ἄγοντες τὴν $B'\Gamma'$, οὕτως ὥστε γ.$AB'\Gamma'$=γ.$AB\Gamma$ καὶ τὴν $A\Gamma'$ οὕτως ὥστε γ. $B'A\Gamma'=BA\Gamma$. Εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ἀντιστοιχεῖ τὸ$AB''\Gamma''$, ὅπερ σχηματίζομεν ἄγοντες τὴν $B''\Gamma''$ παράλληλον τῇ $B'\Gamma'$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $AB\Gamma, AB'\Gamma'$ ἔπεται ὅτι $AB' : A\Gamma' = AB : A\Gamma$· ἐπειδὴ δὲ γ. BAB'=γ. $\Gamma A\Gamma'$ καὶ τὰ τρίγωνα $BAB', \Gamma A\Gamma'$ εἶναι ὅμοια, ἄρα καὶ γ. $A\Gamma\Gamma'$=γ. ABB'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι γ.$A\Gamma\Gamma''$=γ.ABB'', ὅθεν γ. $A\Gamma\Gamma''$—γ.$A\Gamma\Gamma'$=γ. ABB''—γ.ABB' ἢ $\Gamma'\Gamma\Gamma'' = B'BB''$=1ὀρθ.Κεῖται λοιπὸν τὸ Γ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὸ ὡρισμένον θέσει καὶ μεγέθει τμῆμα $\Gamma'\Gamma''$. Ἐὰν δὲ Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ἀχθῶσιν ΓΒ, ΑΒ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι γ. $A\Gamma B$=γ. $A\Gamma' B'$ καὶ γ. ΓAB=γ. $\Gamma' AB'$, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον τῷ $AB'\Gamma'$ καὶ τῷ $AB''\Gamma''$. Εἶναι ἄρα $AB' : AB = A\Gamma' : A\Gamma$, ἐπειδὴ δὲ καὶ γ. $\Gamma A\Gamma'$=γ. BAB', τὰ τρίγωνα $\Gamma A\Gamma'$, BAB' εἶναι ὅμοια καὶ γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι γ. $A\Gamma\Gamma''$=γ. ABB'', ὅθεν καὶ $A\Gamma\Gamma'$=γ.ABB' $B'BB'' = \Gamma'\Gamma\Gamma'' = 1$ ὀρθ· ἤτοι τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Εἶναι ἄρα τὸ Γ σημεῖον τοῦ τόπου.



Ἄσκ. 498

499.— Ἔστω Α κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας κειμένης ἐντὸς κύκλου (Κ, ρ) καὶ Β,Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τυχούσης θέσεως ΒΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἥτις στρέφεται περὶ τὸ Α. Τὸ μέσον Μ τῆς χορδῆς ΒΓ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἐπειδὴ δὲ ΑΜ=ΜΓ (§ 106 Πόρ. ΙΙΙ) καὶ $(KM)^2+(\Gamma M)^2=\rho^2$, ἔπεται ὅτι $(KM)^2+(AM)^2=\rho^2$. Ἀλλ' ἀφ' ἑτέρου ἐκ τοῦ τριγώνου ΚΜΑ, ἂν Ο εἶναι μέσον τοῦ ΚΑ προκύπτει $(KM)^2+(AM)^2 = 2(MO)^2+2(KO^2)$· ἄρα $2(MO)^2+2(KO)^2=\rho^2$ καὶ $(MO)^2=\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)^2-(KO)^2$. Κεῖται ἄρα τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)^2-(KO)^2}$. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὥστε ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζ. τόπος.

500.—***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω Κ ἡ ζ. περιφέρεια, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α,Β καὶ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας χy εἰς τὸ Δ. α') Ἂν ἡ ΑΒ τέμνῃ τὴν χy εἴς τι σημεῖον Γ, θὰ εἶναι $(\Gamma\Delta)^2=(\Gamma A)(\Gamma B)$.

Σύνθεσις.—Κατασκευάζομεν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ΓΑ,ΓΒ καὶ ἐπὶ τῆς xy ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ Γ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ ἢ ΓΔ' ἴσον πρὸς τὴν μέσην ταύτην ἀνάλογον. Γράφομεν εἶτα περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν σημείων Α, Β, Δ, ἢ Α, Β, Δ′. Τὸ πρόβλημα ἔχει προφανῶς δύο λύσεις.

β′) Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ xy, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ τέμνει τὴν xy κατὰ τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Δ.

501. ***Ἀνάλυσις.***—Ἔστω Ο ἡ ζ. περιφέρεια, ἥτις ἐφάπτεται δοθείσης Κ εἴς τι σημεῖον Γ καὶ διέρχεται διὰ δοθέντων σημείων Α,Β. Ἐὰν Δ εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΑΒ καὶ τῆς εἰς τὸ Γ κοινῆς τῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένης, θὰ εἶναι $(\Delta\Gamma)^2=(\Delta A)(\Delta B)$. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ τυχοῦσα τέμνουσα ΔΕΖ τῆς Κ, θὰ εἶναι $(\Delta\Gamma)^2=(\Delta E)(\Delta Z)$. ἄρα $(\Delta A)(\Delta B)=(\Delta E)(\Delta Z)$, ὅθεν ἕπεται ὅτι τὰ Α,Β,Ε,Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (§ 213 ἀντ.).

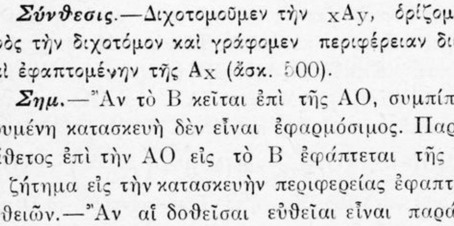
Σύνθεσις.—Γράφομεν τυχοῦσαν διὰ τῶν Α,Β διερχομένην περιφέρειαν καὶ τέμνουσαν τὴν Κ εἰς σημεῖα Ε,Ζ· ἂν δὲ Δ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΑΒ, ΕΖ, ἄγομεν ἐφαπτομένην τῆς Κ τὴν ΔΓ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ. Ἡ τομὴ Ο τῆς ΚΓ καὶ τῆς τὴν χορδὴν ΑΒ δίχα καὶ καὶ καθέτως τεμνούσης εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζ. περιφερείας. Εἰς ἑτέραν ἐφαπτομένην ΔΓ′ ἀντιστοιχεῖ ἕτερον κέντρον Ο′ καὶ ἄλλη περιφέρεια ἐκπληροῦσα τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

Σημ. Νά ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι.

502. ***Ἀνάλυσις.***—Ἔστω Ο περιφέρεια ἐφαπτομένη εἰς τὰ Ε,Ζ δεδομένων εὐθειῶν Αx,Αy καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β. Ἐπειδὴ τὸ Ο ἀπέχει ἴσον τῶν Αx,Αy ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς xΑy· τὸ συμμετρικὸν δὲ Β′ τοῦ Β πρὸς τὴν ΑΟ κεῖται ἐπίσης ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Σύνθεσις.—Διχοτομοῦμεν τὴν xΑy, ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς τὴν διχοτόμον καὶ γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Β,Β′ καὶ ἐφαπτομένην τῆς Αx (ἄσκ. 500).

Σημ.—Ἂν τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΟ, συμπίπτει μὲ τὸ Β′, ἡ δὲ προηγουμένη κατασκευὴ δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμος. Παρατηροῦντες ὅμως ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΟ εἰς τὸ Β ἐφάπτεται τῆς ζ περιφερείας ἀνάγομεν τὸ ζήτημα εἰς τὴν κατασκευὴν περιφερείας ἐφαπτομένης τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.—Ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, βλέπε ἄσκ. 228.



Ἄσκ. 503.

503 ***Ἀνάλυσις.***—Ἔστω Ο ἡ ζ. περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτομένη τῆς Κ εἴς τι σημεῖον Β καὶ τῆς xy εἴς τι σημεῖον Γ. Ἂν ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΒΟ,ΒΔ,ΒΓ,ΟΓ καὶ ἡ ΔΚΗ κάθετος ἐπὶ τὴν xy, θὰ εἶναι γ.ΔΚΒ=

γ. ΒΟΓ, κατ' ἀκολουθίαν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΚΔΒ, ΟΒΓ θὰ ἔχωσι καὶ γ. ΔΒΚ=γ.ΟΒΓ· ἄρα ἡ γραμμὴ ΔΒΓ εἶναι εὐθεῖα. Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τριγώνων ΔΒΕ,ΔΗΓ προκύπτει ὅτι ΔΒ:ΔΗ=ΔΕ:ΔΓ, ὅθεν (ΔΒ)(ΔΓ=(ΔΕ)(ΔΗ). Ἂν δὲ ἡ ΔΑ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Ζ, θὰ εἶναι (ΔΒ)(ΔΓ)=(ΔΖ)(ΔΑ), ἄρα καὶ (ΔΖ)(ΔΑ)=(ΔΕ)(ΔΗ)· κεῖται λοιπὸν τὸ Ζ ἐπὶ τῆς διὰ τῶν Ε,Η,Α διερχομένης περιφερείας

Σύνθεσις.—Ἄγομεν τὴν ΔΚΗ κάθετον ἐπὶ τὴν χy, γράφομεν τὴν διὰ τῶν Η, Ε,Α διερχομένην περιφέρειαν καὶ ἄγοντες τὴν ΔΑ ὁρίζομεν τὸ Ζ. Γράφομεν (ἄσκ. 500) εἶτα περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Ζ, Α καὶ ἐφαπτομένην τῆς xy.

—504. α') $\frac{(2\times5)-4}{5}=\frac{6}{5}$ ὀρθ. ϐ') $\frac{(2\times6)-4}{6}=\frac{4}{3}$ ὀρθ. γ') $\frac{(2\times10)-4}{10}=\frac{8}{5}$ ὀρθ. (§ 92, 227).

505.—Ἂν τοῦτο ἔχῃ ν πλευράς πρέπει νὰ εἶναι $\frac{2\nu-4}{\nu}=\frac{10}{7}$, ὅθεν ν=7

506.—Ἂν ν εἶναι τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν, θὰ εἶναι ἑκάστη γωνία $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθ ἢ 2 ὀρθ.—$\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Ἂν δὲ $\nu>4$, θὰ εἶναι $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ.<1 ὀρθ. καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\left(2-\frac{4}{\nu}\right)$ ὀρθ.>1 ὀρθ.

507.—Ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν, θὰ εἶναι ν καὶ αἱ περὶ τὸ κέντρον σχηματιζόμεναι γωνίαι· εἶναι ἄρα ἑκάστη $\frac{4}{\nu}$ ὀρθ. Ὥστε α') διὰ ν=4, αὕτη εἶναι 1 ὀρθ. β') διὰ ν=5, αὕτη εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρθ. γ') διὰ ν=6, αὕτη εἶναι $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ὀρθ,

508.—Ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν θὰ εἶναι $\frac{360^0}{\nu}=36^0$, ὅθεν ν=10.

509.—Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ πλευρά, Γ τὸ μέσον αὐτῆς, καὶ Κ τὸ κέντρον ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΓ εἶναι $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\rho^2-\theta^2$ ὅθεν $4(\rho^2-\theta^2)=\alpha^2$.

510.—Ἂν εἶναι ρ ἡ ἀκτίς, πρέπει $\rho^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=2\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $=2\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$ ὅθεν $\rho=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ μ.

511.—Κατὰ τὸ Θ. (§ 232) ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν εἶναι $^2/_3$. Ἄρα (§ 216) ὁ λόγος τῶν περιμέτρων αὐτῶν εἶναι $^2/_3$, ὁ δὲ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι $^4/_9$ (§ 219).

512.—Ἄγομεν ἐκ τοῦ σημείου εὐθείας εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς καὶ ἐκφράζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχηματιζομένων τριγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εὐθ. σχήματος.

513.—Ἐπειδὴ $\alpha=\rho\sqrt{2}$, ἕπεται ὅτι $4\alpha=4\rho\sqrt{2}$ καὶ $E=2\rho^2$. Διὰ ρ=3$^{\mu}$ γίνεται ἡ μὲν περίμετρος $12\sqrt{2}^{\mu}$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν 18 τ. μ.

514.—Τοῦ τριγώνου ΑΚΓ (Σχ· 164) ὄντος ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τὸ ὕψος ΚΖ εἶναι διάμεσος· ἄρα (§ 106 Πόρ. III) εἶναι $(ΚΖ)=\frac{ΑΓ}{2}=\frac{ρ\sqrt{2}}{2}$.

515. —α΄.) Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ καὶ Ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, θὰ εἶναι $α=Ρ\sqrt{2}$, $α^2=2Ρ^2$ καὶ $5{,}29=2Ρ^2$, ὅθεν $Ρ=1{,}15\sqrt{2}$. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου καὶ ἑπομένως $ρ=\frac{Ρ\sqrt{2}}{2}=1{,}15$.

516.—Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἄρα $Ε={}^1/_2$ ὀρθ.$=ΕΒΑ$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΒΑΕ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΑΕ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας καὶ $ΑΕ=ΑΒ$.

517.—Διαιροῦμεν (§ 231) τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα καὶ φέρομεν ἐφαπτομένας διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως. Ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον ἤτοι εἶναι 2ρ.

518.—Διαιροῦμεν πρῶτον τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα καὶ ἕκαστον τούτων εἰς δύο ἴσα μέρη (§ 69). Ἄγομεν εἶτα τὰς χορδὰς τῶν 8 τούτων τόξων καὶ ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν.

519. — Γράφομεν περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν καὶ ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον (§ 234).

520.—Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα καὶ ἕκαστον τούτων εἰς δύο ἴσα τόξα. Εἶτα ἄγομεν τὰς χορδας τῶν 12 τόξων καὶ ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν.

521.—Ἂν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ (Σχ. 165) θὰ $(ΑΗ)=\frac{ρ}{2}$ καὶ $(ΚΗ)^2=ρ^2-\frac{ρ^2}{4}=\frac{3ρ^2}{4}$, ὅθεν $(ΚΑ)=ρ\sqrt{3}:2$.

522.—Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ εἶναι $2\sqrt{3}=ρ\sqrt{3}:2$, ὅθεν $ρ=4$.

523.—Ἕκαστον κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς ρ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς ρ. Ἄρα (ἄσκ. 223) τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $6ρ^2\sqrt{3}/4$· κατ' ἀκολουθίαν εἶναι $6ρ^2\sqrt{3}/4=13{,}5\sqrt{3}$, ὅθεν $ρ^2=4.13{,}5/6=9$ καὶ $ρ=3$ μέτρα.

524.—Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα τόξα καὶ ἄγομεν ἐφαπτομένας διὰ τῶν ἄκρων.

525.—Ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν προηγούμενον.

526.—Ἐπειδὴ $ΔΑΓ=1$ ὀρθ. ἕπεται $ΔΑΒ=1$ ὀρθ.$-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ὀρθ. $=30^0$. Τὸ τόξον ἄρα ΔΒ εἶναι 60^0 καὶ τὸ $ΑΔ=ΑΔΒ-ΔΒ=120^0-60^0=60^0$, ἤτοι ἕκτον περιφερείας. Ἡ ΑΔ ἄρα εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι.

527.—Ἔστω ΚΗ (Σχ. 165) τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΔΖΒ. Τὸ τετράπλευρον ΚΖΑΒ ἔχει πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας· ἄρα αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως. Εἶναι λοιπὸν ΚΗ τὸ ἥμισυ τῆς ΚΑ.

Σημ.—Ὑπολογίζοντες τὴν ΚΗ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΖΗ καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

Συγκρίνοντες τὸ ἀπόστημα τοῦτο πρὸς τὸ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον συμπεραίνομεν ὅτι: ***Τὸ ἀπόστημα ἑκατέρου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἄλλου.***

528. Τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια (§ 232)· ὁ λόγος ἄρα τῶν περιμέτρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§ 232) καὶ πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων. Ἀλλ' ὁ λόγος οὗτος εἶναι $P:P/_2=2$, ἄρα $\Pi:\Pi'=2$ καὶ $\Pi=2\Pi'$.

529.—Ἀγομένων τῶν ἀκτίνων ΚΑ.ΚΒ,... ΚΖ (Σχ. 165) διαιρεῖται τὸ ἑξάγωνον εἰς τρεῖς ῥόμβους ἴσους. Τούτων δὲ τὰ ἡμίση ἀποτελοῦσι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΔΖΒ.

530.—Ταῦτα εἶναι ὅμοια καὶ ἔχουσι λόγον ὁμοιότητος 2 (ἄσκ 528). Ἄρα $E:E'=4$ καὶ $E=4E'$.

531.—Ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha=\rho\sqrt{3}$, ἕπεται $\rho=\alpha\sqrt{3}:3$

532.—Γνωρίζομεν (ἄσκ. 323) ὅτι $E=\alpha^2\sqrt{3}/_4$ καὶ $\alpha=\rho\sqrt{3}$ ἄρα $E=3\rho^2\sqrt{3}/_4$.

533.—Ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΔΑΗ,ΗΔΑ βαίνουσα ἐπὶ τόξου 120^0 εἶναι 60^0, ἄρα καὶ $H=60^0$.

534.—Ἐργαζόμεθα κατά τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν τῆς ἀσκ. 524.

535.—Ἐὰν ΚΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ (Σχ. 166), ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΡ εὑρίσκομεν $(KP)^2=\rho^2-\frac{(AB)^2}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ $(AB)=\frac{\varrho}{2}(-1+\sqrt{5})$, ἕπεται ὅτι $(AB)^2=\frac{\varrho^2}{4}(6-2\sqrt{5})$ καὶ ἑπομένως $(KP)^2=\frac{16\varrho^2-\varrho^2(6-2\sqrt{5})}{16}=\frac{\varrho^2(10+2\sqrt{5})}{16}$, ὅθεν $(KP)=\frac{\varrho}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

536.—Γνωρίζομεν ὅτι $E=10\,(AKB)=10.\frac{1}{2}\,(AB)(KP)=$
$5.\frac{\varrho}{2}(-1+\sqrt{5}).\frac{\varrho}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

537.—Γνωρίζομεν ὅτι (Σχ. 166) $E=5(AK\Delta)=5(A\Pi)(K\Pi)$. Ἐπειδὴ δὲ $(A\Pi)=\frac{(A\Delta)}{2}=\frac{\varrho}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $(K\Pi)=\frac{\varrho}{4}(1+\sqrt{5})$, ἕπεται ὅτι $E=\frac{5\varrho^2}{16}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{5\varrho^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

538.—Ἐὰν α εἶναι ἡ πλευρά του, ἐκ τῆς $\alpha=\frac{\varrho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ἕπεται $\rho=\frac{2\alpha}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ Ἐπειδὴ δὲ (Σχ. 166) εἶναι (§ 237) $(K\Pi)=\frac{\varrho}{4}(1+\sqrt{5})$, ἕπεται ὅτι $(\text{ΚΠ})=\frac{\alpha(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{\alpha(1+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(10-2\sqrt{5})}=\frac{\alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}=\frac{\alpha(10+2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}$.

539. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΕ εὑρίσκομεν $(\text{ΕΓ})^2=\rho^2+\frac{\rho^2}{4}=\frac{5\rho^2}{2}$, ὅθεν $\text{ΕΓ}=\text{ΕΖ}=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}$. Ἄρα $(\text{ΟΖ})=(\text{ΕΖ})-(\text{ΟΕ})=\frac{\rho}{2}(-1+\sqrt{5})$. Ἐκ δὲ τοῦ ΟΓΖ προκύπτει ὅτι $(\text{ΓΖ})^2=\rho^2+\frac{\rho^2}{4}(-1+\sqrt{5})^2$, ὅθεν $(\text{ΓΖ})=\frac{\rho}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

540.—Ἐν τῷ τριγώνῳ ΟΓΖ (ἄσκ. 539) εἶναι ΟΓ πλευρὰ ἑξαγώνου, ἡ ΓΖ πενταγώνου καὶ ἡ ΟΖ δεκαγώνου, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη.

Σημ. Ἀπ' εὐθείας ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κ. πενταγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τῶν ἄλλων.

541.—Ἂν Ε εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΓ(Σχ.164) καὶ ἀχθῇ ἡ ΚΕ τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ ἡ χορδὴ ΑΕ, αὕτη θὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ κ. ὀκταγώνου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΑΚΕ εἶναι ὀξεῖα, ἔπεται (§ 183] ὅτι $(\text{ΑΕ})^2=2\rho^2-2\rho(\text{ΚΖ})$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΖ ὡς ἀπόστημα τετραγώνου εἶναι $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$, ἔπεται $(\text{ΑΕ}^2)=2\rho^2-\rho^2\sqrt{2}$, ὅθεν $(\text{ΑΕ})=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$

542.—Τοῦ τριγώνου ΑΚΕ (Σχ. 164, ὡς προηγουμένως ἐτροποποιήθη) τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{1}{2}(\text{ΚΕ})(\text{ΑΖ})$ ἢ $^1/_2\,\rho.\rho\sqrt{2}/_2=\rho^2\sqrt{2}/_4$. Ἄρα $\text{Ε}=8\rho^2\sqrt{2}/_4=2\rho^2\sqrt{2}$.

543.—Ἐργαζόμενοι ὡς δι' ἄσκ. 541, 542 εὑρίσκομεν πλευρὰν $\rho\sqrt{2-\sqrt{3}}$ καὶ ἐμβαδὸν $3\rho^2$.

544.—Παριστῶντες διὰ χ τὸ ἀπόστημα τοῦ κ. ὀκταγώνου καὶ ἐνθυμούμενοι (ἄσκ. 542) ὅτι $(\text{ΑΚΕ})=\rho^2\sqrt{2}/_4$ καὶ $(\text{ΑΕ})=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι $(\text{ΑΚΕ})={}^1/_2\,\chi\,\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$ συμπεραίνομεν ὅτι $^1/_2\,\chi\,\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}=\rho^2\sqrt{2}/_4$, ὅθεν $\chi=\frac{\rho\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\rho}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀπόστημα κ. δωδεκαγώνου εἶναι $\frac{\rho}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

545.—Κατὰ τὸν τύπον $\gamma=2\pi\rho$, εἶναι $\gamma=10\pi=31,4159$ μέτρα.

546.—Προφανῶς $18,84954=2\pi\rho$, ὅθεν $\rho=3$ μέτρα.

547.—Ἐπειδὴ (ἄσκ. 521) ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι $\rho\sqrt{3}/_2=2\sqrt{3}$, τῆς δὲ περιγεγραμμένης $\rho=4$, ἔπεται ὅτι $\gamma=4\pi\sqrt{3}$ καὶ $\Gamma=8\pi$.

548.—Ἐκ τῆς $\gamma=2\pi\rho$ ἔπεται ὅτι $4\pi\sqrt{3}=2\pi\rho$, ὅθεν $\rho=2\sqrt{3}$ καὶ $\alpha=\rho\sqrt{3}=6$ μέτρα.

549.—Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, θὰ εἶναι

$2=\rho\sqrt{3}$, ὅθεν $\rho=2\sqrt{3}/_3$, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας θὰ εἶναι $\sqrt{3}/_3$ (ἄσκ. 527) καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $2\pi\sqrt{3}/_3$.

550.—Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, θὰ εἶναι $2\sqrt{2}=\rho\sqrt{2}$, ἄρα $\rho=2$, τὸ δὲ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 4π. Ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἶναι (ἄσκ. 514) $\sqrt{2}$ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $2\pi\sqrt{2}$.

551.— Ἂν χ ἡ ἀκτὶς τῆς ζητουμένης, ρ,ρ′ δὲ αἱ ἀκτῖνες τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν, θὰ εἶναι $2\pi\chi=2\pi\rho\pm2\pi\rho'$, ὅθεν $\chi=\rho\pm\rho'$, ἐξ ὧν συνάγεται ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς χ.

552.—Προφανῶς θὰ εἶναι $2\pi x=6\pi\rho$, ὅθεν $x=3\rho$.—

553.—Κατὰ τὸν τύπον (2,§ 252) εἶναι $\tau=3\pi.\frac{59^0}{180^0}=\frac{59\pi}{60}=3,08923$ μέτρα.

554.—Ὁμοίως εἶναι $\tau=4,60\ \pi.\frac{29^015'}{180^0}=4,64\pi.\frac{1755}{10800}$ μέτρα.

555.—Προφανῶς $2,10\pi=5,40\pi.\frac{\mu}{180}$, ὅθεν $\mu=70^0$.

556.—Προφανῶς εἶναι $0,2387=\pi\rho.\frac{32^020'15''}{180^0}=\pi\rho.\frac{116415}{10800}$, ὅθεν $\rho=\frac{0,2387.10800}{3,14159.116415}$ μέτρα.

557.—Ἐπειδὴ ἑκάστη γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 60^0, ἕκαστον τῶν τόξων τούτων εἶναι ἕκτον περιφερείας ἀκτῖνος α. Ἡ ὑπ' αὐτῶν δὲ σχηματιζομένη γραμμὴ εἶναι $^3/_6$ ἢ ἥμισυ περιφερείας. Ἔχει λοιπὸν αὕτη μῆκος $2\pi\ /_2=\pi\alpha$.

558—Κατὰ τὸν τύπον $K=\pi P^2$ (§ 255 Πόρ Ι) εἶναι $K=4\pi$. τετρ. μέτρα.

559.—Ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι 5^μ, ἄρα $K=25\pi$. τετρ. μέτρα.

560.—Προφανῶς $28,27431=\pi P^2$ ὅθεν $P^2=28,27431/\pi=9$, ἄρα $P=3$.

561.—Ἂν Α καὶ α εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν ὁμοκέντρων κύκλων Κ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δακτυλίου θὰ εἶναι $\pi\ (A^2-\alpha^2)$. Ἂν δὲ χορδὴ ΑΒΓ τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας εἰς τὸ Β, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΒ προκύπτει ὅτι $(AB)^2=A^2-\alpha^2$. Ὁ κύκλος ἄρα, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ΑΒ ἔχει ἐμβαδὸν $\pi(A^2-\alpha^2)$, ἤτοι ὅσον ὁ δακτύλιος.

562.—Αἱ χορδαὶ αὗται καὶ ἡ διάμετρος σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι $4\rho^2=10^2+7,50^2$. Ἄρα $\rho^2=39,0625$ καὶ ἑπομένως $K=39,0625\pi$ τετρ. μέτρα.

563—.Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μὲν ἑξαγώνου θὰ εἶναι $3\rho^2\sqrt{3}/_2$ τοῦ δὲ τετραγώνου $2\rho^2$. Ἄρα $3\rho^2\sqrt{3}/_2-2\rho^2=3\sqrt{3}-4$, ὅθεν $\rho^2=2$ καὶ $K=2\pi$ τετρ. μέτρα.

564. Ἂν x,ρ,ρ′ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τοῦ ζητουμένου καὶ τῶν δεδομένων κύκλων, θὰ εἶναι $\pi x^2=\pi\rho^2\pm\pi\rho'^2$, ὅθεν $x^2=\rho^2\pm\rho'^2$. Ἐκ τούτων προκύπτει ὁ τρόπος κατασκευῆς τῆς x εἰς ἑκατέραν περίπτωσιν.

565.— Ἂν α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha^2=6{,}25$ ἕπεται ὅτι $\alpha^2=2{,}5$ μέτρα. Ὁ ἐγγεγραμμένος ἄρα κύκλος ἔχει ἀκτῖνα 1,25 καὶ ἐμβαδὸν $1{,}25^2\pi=1{,}5625\pi$ τετρ. μέτρα. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου εἶναι $6{,}25-1{,}5625\pi=1{,}5625(4-\pi)$ τετρ. μέτρα·

566.—Ἄγομεν ἐκ τοῦ κέντρου εὐθείας εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος καὶ ἐκφράζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς ἃ διῃρέθη. Ὡς ὕψη τῶν τριγώνων λαμβάνομεν τὰς εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καταληγούσας ἀκτῖνας.

567.—Ἂν ρ,ρ' εἶναι αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, πρέπει $\rho-\rho'=1$ καὶ $\pi(\rho^2-\rho'^2)=15{,}70795$. Τούτων ἡ β' λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς α'. γίνεται $\pi(\rho+\rho')=15{,}70795$, ἄρα $\rho+\rho'=5$. Λύοντες τὸ σύστημα $\rho-\rho'=1, \rho+\rho'=5$ εὑρίσκομεν $\rho=3$, $\rho'=2$· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν περιφερειῶν εἶναι $2\pi.3-2\pi.2=2\pi$.

568.—Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon=\pi\rho.^2.\frac{\mu^0}{360^0}$ (§ 257) εἶναι $\varepsilon=36\,\pi.\frac{60^0}{360^0}=6\pi$ τετρ. μέτρα.

569.—Τὸ τόξον τοῦ τομέως εἶναι 60^0, ἄρα $\varepsilon=\pi\alpha^2\frac{60^0}{360^0}=\pi\alpha^2/_6$

570.—Κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 257) τύπον εἶναι $\pi/_3=\pi\rho^2.\frac{30^0}{360^0}$, ὅθεν $\pi\rho^2=4\pi$.

571.—α') Τὸ ζ. ἐμβαδὸν Ε εἶναι διαφορὰ τοῦ κυκλ. τομέως ΑΚΒ ὑπὲρ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΚΒ (Σχ. 165). Ἄρα $E=\frac{\pi\varrho^2}{6}-\frac{\varrho^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\varrho^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$.

Σημ. Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου καὶ διαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν διὰ 6.

β'.) Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, ὅταν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου, εὑρίσκομεν ὅτι $E=\frac{\varrho^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})$. γ') Ὅταν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ τετραγώνου, εἶναι $E=\frac{\varrho^2}{4}(\pi-2)$.

572. — Ἐπειδὴ $(K\Lambda)=\rho\sqrt{3}>\rho-\rho=0$ καὶ $K\Lambda=\rho\sqrt{3}<\rho+\rho=2\rho$ (Σχ. 83), αἱ περιφέρειαι τέμνονται, ἔστω δὲ ΑΑ' ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδή, ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Β τῆς ΚΛ, διότι τὸ ΚΑΛ εἶναι ἰσοσκελές. Εἶναι ἄρα $(KB)=\rho\sqrt{3}/_2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΑΑ' εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ἑκάτερον τῶν κύκλων. Τὸ ζητούμενον ἄρα ἐμβαδόν, ὡς ἄθροισμα τῶν κυκλ. τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὑπὸ τῆς ΑΑ' ἡ κοινὴ ἐπιφάνεια αὐτῶν, εἶναι (ἄσκ. 571, α') $\frac{\varrho^2}{6}(2\pi-3\sqrt{3})$.

573.—Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΔ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸ Θ. τοῦ Πτολεμαίου (ἄσκ. 459) εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εὑρίσκομεν $2\rho(A\Gamma)=$

$\alpha(\Delta\Gamma)+\beta(\Delta A)$. Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta\Gamma)=\sqrt{4\varrho^2-\beta^2}$ καὶ $(\Delta A)=\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}$, ἕπεται ὅτι $2\rho(A\Gamma)=\alpha\sqrt{4\varrho^2-\beta^2}+\beta\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}$, ὅθεν $(A\Gamma)=\frac{\alpha}{2\varrho}\sqrt{4\varrho^2-\beta^2}+\frac{\beta}{2\varrho}\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}$.

574.—Ἐὰν εἰς τὸν προηγουμένως εὑρεθέντα τύπον θέσωμεν $\beta=\alpha$, ΑΓ θὰ εἶναι χορδὴ τόξου ΑΒΓ διπλασίου τοῦ α, θὰ εἶναι δὲ $(A\Gamma)=\frac{\alpha}{\varrho}\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}$.

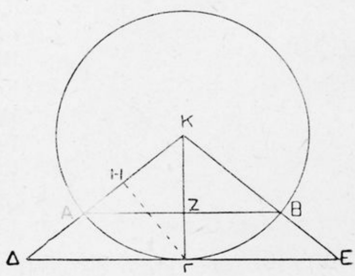
575.—Ἔστω ΑΒΔ (Σχ. 166) τόξον ἔχον χορδὴν $(A\Delta)=\alpha$ καὶ ΑΒ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΘ προκύπτει $(AB)^2=(B\Theta)\ (B\Pi)=2\,\rho.\,(\rho-K\Pi)$. Ἐπειδὴ δὲ $(K\Pi)=\sqrt{\varrho^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}}{2}$, αὕτη γίνεται $(AB)^2=2\,\rho\left(\rho-\frac{\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}}{2}\right)$, ὅθεν $(AB)=\sqrt{2\varrho^2-\varrho\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}}$.

576.—Τῶν τριγώνων ΟΑΔ, ΑΛΔ (Σχ. 168) ὄντων ἰσοσκελῶν ἡ ΟΛ τέμνει τὴν ΑΔ δίχα καὶ καθέτως εἰς τὸ μέσον Φ τῆς κοινῆς βάσεως ΑΔ. Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τριγώνων ΑΟΦ, ΟΑΛ προκύπτει ὅτι ΑΛ:ΑΦ=ΟΑ:ΟΦ, ὅθεν $K\Lambda : A\Delta=\rho:\sqrt{\rho^2-\frac{\alpha^2}{4}}$ καὶ $(K\Lambda)=\frac{2\alpha\varrho}{\sqrt{4\varrho^2-\alpha^2}}$.

577.—α΄) Διὰ τὸ ἑξάγωνον εἶναι $\alpha=\rho$, ὁ δὲ προηγούμενος τύπος δίδει $(K\Lambda)=2\rho\sqrt{3}/_3$, β΄) Διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $\alpha=\rho\sqrt{3}$ καὶ ὁ αὐτὸς τύπος δίδει $(K\Lambda)=2\rho\sqrt{3}$.

Σημ. Ταῦτα εὑρίσκομεν καὶ ἂν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ἕκαστον τούτων καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐγγεγραμμένον εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν.

578.—Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ κ. πολυγώνου ἐγγεγραμμένου καὶ ἔχοντος ν πλευρὰς καὶ ἐμβαδὸν ε, ΑΓ πλευρὰ κ. πολυγώνου ἔχοντος 2ν πλευρὰς καὶ ἐμβαδὸν Ε καὶ ΔΕ πλευρὰ περιγεγραμμένου καὶ ἔχοντος ν πλευρὰς καὶ ἐμβαδὸν Ε΄. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΑΖ, ΚΔΓ ἕπεται ΚΖ :ΚΓ = ΚΑ: ΚΔ, ὅθεν $^1/_2\,(KZ).(AZ):\,^1/_2\,(K\Gamma)\,(AZ)=\,^1/_2\,(KA)\,(\Gamma H):\,^1/_2\,(K\Delta)\,(\Gamma H)$ ἢ $(AKZ):(AK\Gamma)=(KA\Gamma):(K\Delta\Gamma)$, ἄρα $2\nu\,(AKZ):2\nu\,(AK\Gamma)=2\nu\,(KA\Gamma):2\nu\,(K\Gamma\Delta)$ ἢ ε : Ε=Ε : Ε΄.

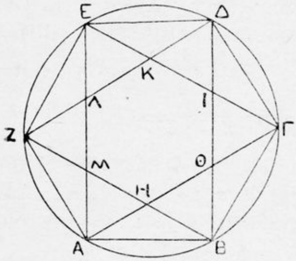


Ἄσκ. 578

579.—Τὸ καν. πολύγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ΑΓ, ἀποτελεῖται ἀπὸ 2ν τρίγωνα ἴσα πρὸς τὸ ΑΚΓ, ἤτοι $E=2\nu.\,(K\Gamma)(AZ)/_2=\nu\rho\,(AB)/_2$. Παρατηροῦντες ὅτι ν.(ΑΒ) εἶναι περίμετρος πολυγώνου περιέχοντος ν πλευρὰς ἴσας τῇ ΑΒ κατανοοῦμεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰσότης ἐκφράζει τὴν ἀποδεικτέαν ἰδιότητα.

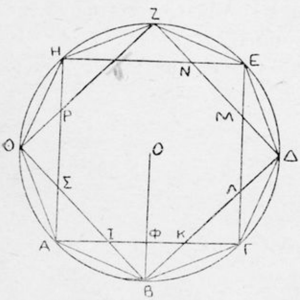
580.—Ἔστωσαν ΕΒ καὶ ΑΓ δύο διαγώνιοι τοῦ κ. πενταγώνου ΑΒΓΔΕ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ (ἄσκ. 144) γων. ΑΖΕ= 2 γων. ΑΓΕ καὶ γων. ΕΑΖ=2 γων. ΕΑΔ=2 γ. ΑΓΕ ἕπεται ΑΖΕ=ΕΑΖ καὶ ἑπομένως ΕΑ=ΕΖ. Τὰ τρίγωνα ΕΑΒ, ΑΒΖ ἔχοντα Β κοινὴν καὶ ΑΕΒ=ΖΑΒ εἶναι ὅμοια· ἄρα ΕΒ:ΑΒ=ΑΒ:ΖΒ ἢ ΕΒ:ΕΖ=ΕΖ:ΖΒ.

581.—Τα ΑΗΒ, ΒΘΓ...,ΖΜΑ ἔχοντα ΑΒ=ΒΓ= ... = ΖΑ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα· ἄρα Η=Θ=... = Μ καὶ ΑΗ = ΗΒ = ΒΘ= ΘΓ=...=ΜΑ. Τὰ δὲ τρίγωνα ΒΗΘ,ΓΘΙ, ...ΑΜΗ ἔχοντα πλὴν τῶν προηγουμένων πλευρῶν καὶ τὰς γωνίας Β,Γ, ... Α ὡς βαινούσας ἐπὶ ἴσων τόξων ἴσας εἶναι ἴσα· ἄρα καὶ ΗΘ=ΘΙ=...=ΜΗ. Τὸ ἑξάγωνον λοιπὸν ΗΘΙΚΛΜ εἶναι κανονικόν. Ἐπειδὴ ΗΒΘ=60^0 ὡς ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ τόξου 120^0, ἕπεται ὅτι τὸ ΒΗΘ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς ΗΘ=ΒΗ= ΑΗ=ΗΜ=ΜΑ=ΜΖ. Ἄρα ΗΜ=ΖΒ/$_3$= $\rho\sqrt{3}/_3$ καὶ Ε $= \frac{\varrho^2\sqrt{3}}{2}$ κατὰ τὸν τόπον Ε$=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$.



Ἀσκ. 578

582.—Ὡς προηγουμένως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΙΒ, ΒΚΓ,... ΘΣΑ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα· ἄρα Ι=Κ=Λ=....=Σ καὶ ΑΙ=ΙΒ=ΒΚ= ΚΓ=....,=ΣΑ. Ἐπειδὴ ΙΒΚ=ΚΓΛ= ... = ΣΑΙ = 1 ὀρθ., ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΒΚ, ΚΓΛ,....ΣΑΙ εἶναι ἴσα καὶ ΙΚ= ΚΛ=...=ΣΙ. Τὸ ὀκτάγωνον λοιπὸν ΙΚΛΜΝΠΡΣ εἶναι κανονικόν. Θέτοντες ΙΚ=χ εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΙΒΚ ὅτι $\chi^2 = 2(\mathrm{BI})^2$, ὅθεν $\chi = (\mathrm{BI})\sqrt{2}$. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΙΑ + ΙΚ + ΚΓ = ΑΓ συνάγομεν ὅτι $2(\mathrm{BI})+(\mathrm{BI})\sqrt{2}=\rho\sqrt{2}$, ὅθεν $(\mathrm{BI})= \frac{\varrho\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ καὶ $\chi = (\mathrm{BI})\sqrt{2}=$ $\frac{2\varrho}{2+\sqrt{2}}=\rho\,(2-\sqrt{2})=\rho\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)$.

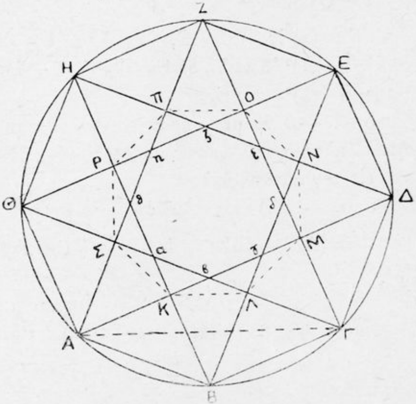


Ἀσκ· 582

Σημ. Εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν χ καὶ ἐκφράζοντες ὅτι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν δύο ὀκταγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν καὶ παρατηροῦντες ὅτι $(\mathrm{O\Phi})=\varrho - \frac{\chi}{2}$.

Καλοῦντες Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΙΚΛΜΝΠΡΣ καὶ ἐνθυμούμενοι (ἄσκ. 542) ὅτι τοῦ ΑΒ.... Θ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $2\rho^2\sqrt{2}$ ἔχομεν Ε : $2\rho^2\sqrt{2}=2\rho^2(\sqrt{2}-1)^2 : \rho^2(2-\sqrt{2})$, ὅθεν εὑρίσκομεν $E=4\rho^2(\sqrt{2}-1)$.

583.—Τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΛΓ,...,ΘΣΑ ἔχοντα ΑΒ=ΒΓ=....=ΘΑ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, διότι ἑκάστη εἶναι 45°, εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἴσα· ἄρα ΑΚ=ΚΒ=ΛΒ=ΛΓ=....=ΘΣ=ΣΑ. Ἐπειδὴ δὲ βΑΒ+ΑΒΓ=45°+135°=180° καὶ βΓΒ+ΑΒΓ=180° καὶ ΑΒ=ΒΓ, τὸ ΑΒΓβ εἶναι ρόμβος καὶ κατ'ἀκολουθίαν Αβ=βΓ, ἄρα βΚ=βλ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται γΛ=γΜ, δΜ=δΝ,....αΣ = αΚ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ β = γ = δ = ε= ....=α, διότι ἑκάστη ἰσοῦται πρὸς 135° ἕνεκα τῶν παραλληλογράμμων ΑβΓΔ,ΒγΔΓ,.... ΘαΒΑ, αἱ παρὰ τὰς βάσεις ΚΛ, ΛΜ,.... ΣΚ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΚβΛ, ΛγΜ,.... ΣαΚ εἶναι ἀνὰ 22°15΄ ἑκάστη καὶ ἑπομένως ΚΛΜ=ΛΜΝ=,..... = ΣΚΛ = 135°. Παρατηροῦντες ἤδη ὅτι αΒΓ=1 ὀρθ. καὶ αΓΒ = 45° συμπεραίνομεν ὅτι



Ἄσκ. 583

Καβ=45° καὶ τὸ ὀρθ. τρίγωνον αΚβ εἶναι ἰσοσκελές. ἤτοι Κα=Κβ=βΛ= Λγ=...=Σα. Τὰ τρίγωνα ἄρα αΚβ, Λβγ,....Σαθ ἀφ' ἑνὸς καὶ ΚβΛ,ΛγΜ,.... ΣαΚ ἀφ'ἑτέρου εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως αβ=βγ=....=θα, ΚΛ=ΛΜ=....= ΣΚ καὶ α=β=γ=....=θ. Ἀμφότερα λοιπὸν τὰ ὀκτάγωνα αβγ....θ,ΚΛΜ...Σ εἶνε κανονικά. β΄)Προφανῶς αβ=ΘΓ—(Θα+βΓ)=ΘΓ—2(ΑΒ). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΓΘΔ προκύπτει $(\Gamma\Theta)=\sqrt{4\rho^2-(\Gamma\Delta)^2}=\sqrt{4\rho^2-\rho^2(2-\sqrt{2})}=\rho\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ἕπεται ὅτι: $(\alpha\beta)=\rho\sqrt{2+\sqrt{2}}-2\,\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}=$

$$\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}-2\right)=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-2\right)=$$

$\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}-2)=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ E_3 τοῦ αβ...θ ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς σχέσεως $E_3:E_1=(\alpha\beta)^2:(AB)^2$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ὅτι $E_3:2\rho^2\sqrt{2}=\rho^2(2-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})^2 : \rho^2(2-\sqrt{2})$, ὅθεν $E_3= 2\rho^2\sqrt{2}(-1+\sqrt{2})^2$.

γ΄. Ἐπειδὴ βΚ=βΛ, βΑ=ΒΓ, ἕπεται ὅτι βΚ:βΑ=βΛ:βΓ, ἄρα τὰ τρίγωνα βΚΛ, βΑΓ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ΚΛ:ΑΓ=βΛ:βΓ, ὅθεν (ΚΛ)= $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. (βΛ) Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑΣΛΒ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ΣΛ=ΑΒ= $\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$ καὶ $2\beta\Lambda+\alpha\beta=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ὅθεν

$(\text{β}\Lambda)=\frac{\rho}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-\frac{\rho}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})=\frac{\rho}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})$.

Κατ' ἀκολουθίαν $(\text{Κ}\Lambda)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\frac{\rho}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})=\rho(\sqrt{2}-1)$.

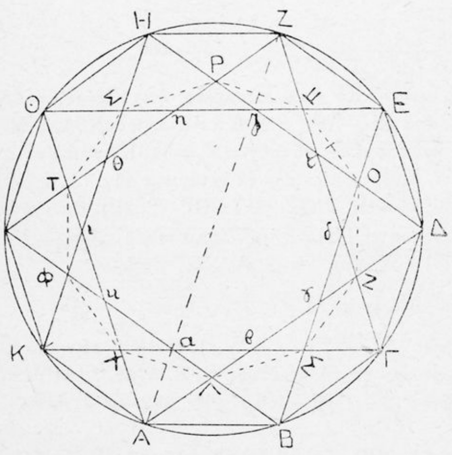
Καλοῦντες E_2 τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΚΛΜ... Σ ἔχομεν $E_2 : E_1=\rho^2(\sqrt{2}-1)^2 : \rho^2(2-\sqrt{2})$, ὅθεν $E_2=2\rho^2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=2\rho^2(\sqrt{2}-1)$.

δ'.) Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E_1=2\rho^2\sqrt{2}$, $E_3=2\rho^2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2$, ἕπεται $E_1.E_3=8\rho^4(\sqrt{2}-1)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $E_2=2\rho^2(\sqrt{2}-1)$, ἕπεται $2E_2^2=2.4\rho^4(\sqrt{2}-1)^2=8\rho^4(\sqrt{2}-1)^2=E_1.E_3$.

584. — Εὕρομεν προηγουμένως (ἄσκ. 583 β') ὅτι $(\Gamma\Theta)=\rho\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ἤτοι διπλασία τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ κυρτοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

585. — α'.) Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΖ (Σχ. ἀσκ. 586) προκύπτει $(\text{Α}\Delta)^2=(\text{ΑΖ})^2-(\Delta\text{Ζ})^2=4\rho^2-\frac{\rho^2}{4}(10-2\sqrt{5})=\frac{6\rho^2+2\rho^2\sqrt{5}}{4}$, ὅθεν $(\text{Α}\Delta)=\frac{\rho}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\frac{\rho}{2}(1+\sqrt{5})$.

586.—Τὰ τετράπλευρα ΑβΓΒ, ΒγΔΓ,....ΚαΒΑ εἶναι ῥόμβοι (ἄσκ. 583) ἄρα αβγ=ΑΒΓ=144°, βγδ = ΒγΔ = ΒΓΔ = 144°,...καβ = ΚαΒ = ΚΑΒ=144° καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι α,β, ...κ τοῦ δεκαγώνου αβγδ..κ εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Τὰ τρίγωνα αΒΓ, γΑΒ ἔχοντα ΒΓ = ΑΒ, αΓΒ= γΑΒ, αΒΓ=γΒΑ εἶναι ἴσα, ἄρα αΓ = γΑ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αΓ— βΓ=γΑ — βΑ ἢ αβ= βγ. Οὕτως ἀποδεικνύεται ὅτι βγ = γδ = δε =... κα. Τὸ αβγ.... κ εἶναι λοιπὸν κανονικόν.



Ἄσκ. 586

β'.) Τὰ τρίγωνα ΑΛΒ, ΒΜΓ, ..., ΚΧΑ εἶναι πάντα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ἄρα ΑΛ=ΛΒ=ΒΜ=ΜΓ=..,=ΚΧ=ΧΑ· ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσι ταῦτα ἀπὸ τῶν ἴσων Αβ, βΓ, γΒ,...Κα, αΒ προκύπτει ὅτι βΛ= βΜ=γΜ=...=αΧ=αΛ. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΛβΜ, ΜγΝ,...ΧαΛ εἶναι ἴσα καὶ ΛΜ= ΜΝ=....=ΧΛ καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς προσκείμεναι γωνίαι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ ΧΛΜ, ΛΜΝ, ΜΝΟ,....ΦΧΛ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα μέρη, εἶναι πᾶσαι ἴσαι. Τὸ δεκάγωνον λοιπὸν ΛΜΝ....Χ εἶναι κανονικόν.

γ΄. Προφανῶς εἶναι $(\alpha\beta)=(\text{ΚΓ})-2\,(\text{Κ}\alpha)=\frac{\varrho}{2}(1+\sqrt{5})-2(\text{ΑΒ})=$

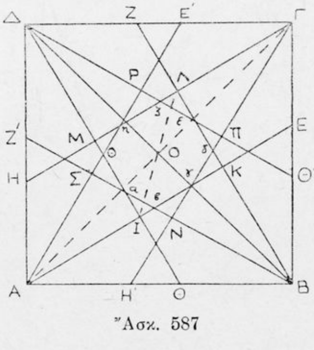
$\frac{\varrho}{2}(1+\sqrt{5})-\rho(-1+\sqrt{5})=\frac{\varrho}{2}(3-\sqrt{5})$.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ αβ...κ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως $\text{Ε}:(\text{ΑΒ}\ldots\text{Κ})=$ $\frac{\varrho^2}{4}$ $-\sqrt{5})^2:\frac{\varrho^2}{4}(-1+\sqrt{5})^2$ ἢ(ἄσκ. 536) $\text{Ε}:\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}\right)^2=$ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, ὅθεν $\text{Ε}=\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

δ΄. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων βΛΜ, βΑΓ ἕπεται ὅτι $\text{ΛΜ}:\text{ΑΓ}=\beta\text{Μ}:\beta\text{Γ}$, ὅθεν $(\text{ΛΜ})=\frac{(\text{ΑΓ})}{(\beta\text{Γ})}\cdot(\beta\text{Μ})$ ἢ $(\text{ΛΜ})=\frac{\varrho/_2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\varrho/_2(-1+\sqrt{5})}\cdot(\beta\text{Μ})$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ΑαΜΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἕπεται ὅτι $(\beta\text{Μ})=(\text{ΑΒ})-(\alpha\beta)=$ $\varrho/_2(-1+\sqrt{5})-\varrho/_2(3-\sqrt{5})=\varrho/_2(-4+2\sqrt{5})=\rho(-2+\sqrt{5})$. Ἄρα $(\text{ΛΜ})=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}\,\rho(-2+\sqrt{5})=\varrho/_4\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(3-\sqrt{5}$. Ἐὰν δὲ κληθῇ Ε΄ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΛΜΝ...Χ, θὰ εἶναι $\text{Ε}':5\rho^2/_4\sqrt{10-2\sqrt{5}}=$ $\varrho^2/_{16}(10-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2:\rho^2/_4(-1+\sqrt{5})^2$, ὅθεν

$$\text{Ε}'=5\varrho^2/_4\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(5-2\sqrt{5}).$$

587.—Τοῦ τριγώνου ΑΙΘ ἡ γωνία ΙΑΘ=30°, ΑΘΙ=60°, ἄρα ΑΙΘ=90° καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν ΜΙΚ=90°· ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ΙΚΛ=ΚΛΜ=ΛΜΙ= 90°. Τὸ ΙΚΛΜ εἶναι λοιπὸν ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΓΛ, ΓΔΜ, ΔΑΙ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι ΒΚ=ΓΛ=ΔΜ=ΑΙ καὶ ΑΚ=ΒΛ= ΓΜ=ΔΙ. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς ΔΙ= ΑΚ ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς ΔΜ = ΑΙ εὑρίσκομεν ΜΙ=ΙΚ· εἶναι λοιπὸν ΙΚΛΜ τετράγωνον.



Ἄσκ. 587

β΄. Τὰ τρίγωνα ΑΟΙ, ΓΛΟ ἔχοντα ΑΟ=ΟΓ, ΑΙ=ΓΛ καὶ ΟΑΙ=ΛΓΟ= 15° εἶναι ἴσα, ἄρα ΙΟ=ΟΛ καὶ ΑΟΙ= =ΛΟΓ· ἤτοι ΙΟΛ εἶναι εὐθεῖα καὶ Ο μέσον αὐτῆς, ὅθεν Ο κέντρον τοῦ ΙΚΛΜ.

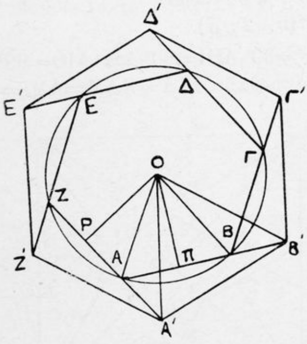
γ΄) Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΘ ἔχοντος μίαν ὀξείαν γωνίαν διπλασίαν τῆς ἄλλης εἶναι $2\,(\text{ΑΘ})=\text{ΔΘ}$. Ἄρα $(\text{ΔΘ})^2=\alpha^2+(\text{ΔΘ})^2/_4$, ὅθεν $(\text{ΔΘ})=2\alpha\sqrt{3}/_3$ καὶ $(\text{ΑΘ})=\alpha\sqrt{3}/_3$, $(\text{ΘΙ})=\alpha\sqrt{3}/_6$. Ἀλλὰ $(\text{ΙΚ})=(\text{ΑΕ})-(\text{ΑΙ}+\text{ΚΕ})$ καὶ $\text{ΑΕ}=\text{ΔΘ}=2\alpha\sqrt{3}/_3$, $(\text{ΑΙ})=\text{ΑΔ}/_2=\alpha/_2$, $\text{ΚΕ}=(\text{ΙΘ})=\alpha\sqrt{3}/_6$· ἄρα $(\text{ΙΚ})=$ $2\alpha\sqrt{3}/_3-(\alpha/_2+\alpha\sqrt{3}/_6)=\frac{4\alpha\sqrt{3}-3\alpha-\alpha\sqrt{3}}{6}=\frac{3\alpha(\sqrt{3}-1)}{6}=\frac{\alpha(\sqrt{3}-1)}{2}$. Κατ᾽

ἀκολουθίαν (ΙΚΛΜ) $=\frac{\alpha^2}{4}(\sqrt{3}-1)^2=\frac{\alpha^2}{2}(2-\sqrt{3})$.

588.—Τὸ ΣΝΠΡ εἶναι τετράγωνον, ὡς εὐκόλως κατὰ τὸν προηγούμενον τρόπον ἀποδεικνύεται. Τοῦ αϐγ....θ ἡ γωνία $\zeta=\Delta\zeta\Gamma=120^0$ ἡ δὲ ε εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $\Delta\epsilon Z=180^0-(30^0+120^0)=30^0$, ἄρα $\epsilon=150^0$. Τὸ ὀκτάγωνον λοιπὸν αϐγ....θ δὲν εἶναι κανονικόν. Τὸ δὲ ἐμϐαδὸν αὐτοῦ εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ (ΙΚΛΜ) ἀφαιρεθῶσι τὰ ἐμϐαδὰ τῶν αΙϐ, Κγδ, Λζε, Μθη. Ἐπειδὴ δὲ $(\alpha I\beta)={}^1/_2(I\beta)\,(\alpha I)$ καὶ $I\beta=A\beta-AI=AZ'-AI=BZ'/_2-A\Delta/_2=\alpha\sqrt{3}/_3-\alpha/_2=\alpha(2\sqrt{3}-3)/_6$ καὶ $I\beta=\alpha\beta/_2$, ἕπεται $(\alpha I)^2=4\,(I\beta)^2-(I\beta)^2=3(I\beta)^2=\frac{\alpha^2(\sqrt{3}-3)^2}{12}$ καὶ $(\alpha I)=\frac{\alpha(2\sqrt{3}-3)}{2\sqrt{3}}=\frac{\alpha}{2}(2-\sqrt{3})$. Κατ' ἀκολουθίαν $(\alpha I\beta)={}^1/_2.\alpha\,(2\sqrt{3}-3)/_6.\frac{\alpha}{2}(2-\sqrt{3})=\frac{\alpha^2}{24}(7\sqrt{3}-12)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν Κγδ,Λζη,Μθη ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμϐαδόν. Ἄρα :

$$(\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta)=\frac{\alpha^2}{2}(2-\sqrt{3})-\frac{\alpha^2}{6}(7\sqrt{3}-12)=\frac{\alpha^2}{3}(9-5\sqrt{3}).$$

589.—α'. Τὰ τρίγωνα ΑΑ'Β', ΒΒ'Γ',...ΖΖ'Α' ἔχοντα ΑΑ' = ΒΒ' = ... = ΖΖ', ΑΒ'=ΒΓ' =....=ΖΑ' καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἴσας ὡς παραπληρωματικὰς τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, εἶναι ἴσα· ἄρα Α'Β' = Β'Γ' = ... = Ζ'Α', ΑΑ'Β' = ΒΒ'Γ =....ΖΖ'Α' καὶ ΑΒ'Α'=ΒΓ'Β'= ....=ΖΑ'Ζ'· κατ' ἀκολουθίαν καὶ Α' = Β' = ... = Ζ', ὡς ἀθροίσματα ἴσων γωνιῶν. Εἶναι λοιπὸν τὸ Α'Β'...Ζ' κανονικόν. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον το ΑΒ....Ζ,τὰ τρίγωναΟΑΑ',ΟΒΒ',...ΟΖΖ' εἶναι προφανῶς ἴσα, ἄρα ΟΑ' = ΟΒ'=....ΟΖ'= εἶναι λοιπὸν τὸ Ο κέντρον καὶ τοῦ Α'Β'....Ζ'.



Ἀσκ. 589

ϐ'. Ἐὰν τεθῇ (ΑΑ')=x, θὰ εἶναι $(PA')=x+\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἑπομένως $(A'B')^2=(OA')^2=\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+(OP)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $(OP)^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}$, ἕπεται ὅτι $(A'B')^2=\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\frac{3\alpha^2}{4}=x^2+\alpha x+\alpha^2$. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ εἶναι $(A'B'...Z'):(AB...Z)=9:4$ καὶ ἀφ' ἑτέρου εἶναι $(A'B'....Z'):(AB...Z)=(A'B')^2:(AB)^2=(x^2+\alpha x+\alpha^2):\alpha^2$, ἕπεται ὅτι

$$(x^2+\alpha x+\alpha^2):\alpha^2=9:4,\ \text{ὅθεν}\ x=\frac{\alpha}{2}(-1+\sqrt{6}).$$

590. α'. Προφανῶς (ΑΓ)=(ΒΓ)—(ΑΒ)=(ΚΒ)—(ΑΒ). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΚ εὑρίσκομεν ὅτι (ΚΒ)$=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}$, ἕπεται ὅτι (ΑΓ)$=\frac{\rho}{2}\sqrt{5}-\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{2}(-1+\sqrt{5})$ (§ 236).

β'. (ΑΓ')=(ΑΒ)+(ΒΓ')$=\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}\sqrt{5}=\frac{\rho}{2}(1+\sqrt{5})$ (ὅρα ἄσκ. 585).

591.—α'. Ἐπειδὴ ΚΓ διχοτομεῖ τὴν ΑΚΒ εἶναι ΑΓ:ρ=ΓΒ:ΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ (ΚΒ)$=\sqrt{\rho^2+4^2\rho^2}=\rho\sqrt{5}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\text{ΑΓ}}{\rho}=\frac{\text{ΓΒ}}{\rho\sqrt{5}}=\frac{\text{ΑΓ}+\text{ΓΒ}}{\rho+\rho\sqrt{5}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, ὅθεν (ΑΓ)$=\frac{2\rho}{1+\sqrt{5}}=\frac{\rho}{2}(-1+\sqrt{5})$.

β'. Ὁμοίως εἶναι Γ'Β : ΚΒ = Γ'Α : ΚΑ ἢ Γ'Β : $\rho\sqrt{5}$ = Γ'Α : ρ, ὅθεν $\frac{\text{Γ'Β}}{\rho\sqrt{5}}=\frac{\text{Γ'Α}}{\rho}=\frac{\text{ΑΒ}}{\rho\sqrt{5}-\rho}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$, ἄρα(ΑΓ')$=\frac{2\rho}{\sqrt{5}-1}=\frac{\rho}{2}(1+\sqrt{5})$.

592. Ἔστω ΑΔ (Σχ. 168) χορδὴ τοῦ νυοστοῦ περιφερείας καὶ (ΑΒ)=γ χορδὴ διπλασίου τόξου. Τὸ ἐμβαδὸν Ε καν. πολυγώνου ἔχοντος πλευρὰν ΑΔ εἶναι (ΟΑΔ). ν, ἤτοι Ε=(ΟΑΔ).ν.$=\frac{1}{2}$ (ΟΔ) (ΑΤ).ν $=\rho/_2\cdot\gamma/_2.\nu=\nu\rho/_4\cdot\gamma$. α'.) Διὰ ν=3, θὰ εἶναι τόξ. ΑΒ$=\frac{2}{3}$ περιφερείας, ἄρα $\gamma=\rho\sqrt{3}$ καὶ Ε $=\frac{3\rho}{4}.\rho\sqrt{3}=3\rho^2\sqrt{3}/_4$.—β'. Διὰ τὸ τετράγωνον εἶναι ν=4 καὶ γ=2ρ, ἄρα Ε $=4\rho/_4.\ 2\rho=2\rho^2$. —γ') Διὰ τὸ καν. ἑξάγωνον εἶναι ν=6, $\gamma=\rho\sqrt{3}$ καὶ Ε$=6\rho/4.\ \rho\sqrt{3}=3\rho^2\sqrt{3}/_2$. δ) Διὰ τὸ καν. ὀκτάγωνον εἶναι ν=8, $\gamma=\rho\sqrt{2}$ καὶ Ε$=8\rho/_4.\rho\sqrt{3}=2\rho^2\sqrt{2}$.—ε') Διὰ τὸ καν. δεκάγωνον εἶναι ν=10, $\gamma=\rho/_2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ καὶ Ε$=10\rho/_4.\ \rho/_2\sqrt{10-2\sqrt{5}}=5\rho^2/_4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

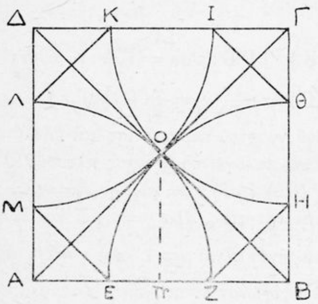
ϛ') Διὰ τὸ καν. δωδεκάγωνον εἶναι ν=12, γ=ρ καὶ Ε$=12\rho/_4.\rho=3\rho^2$. — ζ') Διὰ τὸ καν δεκαεξάγωνον εἶναι ν=16, $\gamma=\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$, ἄρα Ε$=16\rho/_4\cdot\ \rho\sqrt{2-\sqrt{2}}=4\rho^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

593.—Ἄγοντες ἐκ τοῦ Η κάθετον ΗΘ ἐπὶ τὴν ΑΔ σχηματίζομεν τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΗΔΘ, οὗ ἡ ὀξεῖα γωνία Δ εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθ. καὶ κατ' ἀκολουθίαν διπλασία τῆς Η· εἶναι ἄρα (ΔΘ)=(ΔΗ)$/_2=\frac{\alpha}{4}$ καὶ (ΘΗ)$=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{16}}=\frac{\alpha}{4}\sqrt{3}$. Κατ' ἀκολουθίαν (ΑΔΗ)$=\frac{1}{2}$ (ΑΔ) (ΘΗ)$=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Ἄρα (ΑΖΕΔΗ)= (ΑΖΕΔ)+(ΑΔΗ)$=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\alpha^2\sqrt{3}$ καὶ (ΑΒΓΗ)=(ΑΒΓΔ)—(ΑΔΗ) $=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$.

Σημ. Τὸ (ΑΒΓΗ) εὑρίσκομεν καὶ ὑπολογίζοντες χωριστὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΗ, ὧν τὸ πρῶτον ἔχει βάσιν ΑΓ καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ΟΒ, τὸ δὲ δεύτερον εἶναι ὀρθογώνιον (ΑΓΔ=1 ὀρθ.).

594.—α') Τὰ τόξα ΔΑΒ, ΑΒΓ εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΔΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι. Ἂν δὲ Ε εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι ΕΑΒ=ΕΒΑ=45°· ἄρα ΑΕΒ=90°.

β′.) Ἂν Ζ, Η, Θ, Ι εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τὸ ΖΗΘΙ εἶναι παραλληλόγραμμον ἔχον δύο πλευρὰς παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ δύο πρὸς τὴν ΔΒ καὶ ἴσας πρὸς τὰ ἡμίση τούτων. Εἶναι ἄρα τοῦτο τετράγωνον. Ἐπειδὴ $ΖΗ=ΑΓ/_2$, ἕπεται ὅτι $(ΖΗΘΙ)=ΑΓ^2/_4$, Ἀλλὰ $(ΑΓ)=(ΑΕ)+(ΕΓ)=(ΕΒ)+(ΕΓ)$. Ἐπειδὴ δὲ $ΑΓΒ=30^\circ$, ἕπεται $(ΕΒ)=(ΒΓ)/_2=\varrho\sqrt{2}/_2$ καὶ $(ΕΓ)=\sqrt{2\rho^2-\frac{\varrho^2}{2}}=\frac{\varrho}{2}\sqrt{6}\cdot$ ἄρα $(ΑΓ)=\varrho\sqrt{2}/_2+\varrho\sqrt{6}/_2=\varrho/_2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ καὶ $(ΖΗΘΙ)=\rho^2/_{16}(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=\rho^2/_{16}(8+2\sqrt{12})=\rho^2/_4(2+\sqrt{3})$.



Ἄσκ. 595.

595.—Ἐπειδὴ $ΑΒ=ΒΓ$ καὶ $ΑΖ=ΓΗ$ ἕπεται ὅτι $ΒΖ=ΒΗ\cdot$ τὰ τρίγωνα ἄρα ΖΒΗ, ΘΓΙ, ΔΚΛ, ΑΜΕ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα. Ἄρα ἑκάστη ὀξεῖα γωνία αὐτῶν εἶναι 45°, αἱ δὲ τοῦ ὀκταγώνου γωνίαι εἶναι ἑκάστη 135°. Εἶναι δὲ $ΒΖ=2\alpha-ΑΖ=2\alpha-ΑΟ=2\alpha-\alpha\sqrt{2}=\alpha(2-\sqrt{2})$ καὶ ἑπομένως $ΖΗ=\sqrt{2(ΒΖ)^2}=\alpha(2-\sqrt{2})\sqrt{2}=2\alpha(\sqrt{2}-1)$. Ἐπειδὴ δὲ $ΕΖ=2\alpha-2(ΒΖ)$, ἕπεται ὅτι $(ΕΖ)=2\alpha-4\alpha+2\alpha\sqrt{2}=2\alpha(\sqrt{2}-1)$, ἤτοι $ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ$ κτλ. Εἶναι λοιπὸν τὸ ὀκτάγωνον ΕΖΗ...Μ κανονικόν. — Τὸ ἐμβαδὸν Ε τούτου εὑρίσκομεν, ἂν ἀπὸ τοῦ (ΑΒΓΔ) ἀφαιρεθῇ 4(ΒΗΖ), ἤτοι εἶναι

$$Ε=4\alpha^2-2\alpha^2(2-\sqrt{2})^2=8\alpha^2(\sqrt{2}-1).$$

Σημ. Τὸ Ε εὑρίσκομεν ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $Ε=2\varrho^2\sqrt{2}$, ἂν προηγουμένως εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα $\varrho=(ΟΕ)$. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τῆς ΟΒΕ οὔσης ὀξείας εἶναι $(ΟΕ)^2=(ΟΒ)^2+(ΕΒ)^2-2(ΒΕ)(ΒΠ)$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΟΒ)=ΒΕ=\alpha\sqrt{2}$ καὶ $(ΒΠ)=\alpha$, αὕτη γίνεται $(ΟΕ)^2=4\alpha^2-2\alpha^2\sqrt{2}=2\alpha^2(2-\sqrt{2})$. Ἄρα $Ε=2\alpha^2(2-\sqrt{2})2\sqrt{2}=8\alpha^2(\sqrt{2}-1)$.

596. — α′) Τὸ ἐκτὸς τοῦ δεκαγώνου μέρος τοῦ κύκλου ἔχει ἐμβαδὸν $\pi\rho^2-\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (ἄσκ. 536). Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικροτέρου τμήματος εἶναι τὸ δέκατον τῆς διαφορᾶς ταύτης, ἤτοι $\frac{\varrho^2}{40}(4\pi-5\sqrt{10-2\sqrt{5}})$.—β′) Ἂν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ καν. δωδεκαγώνου εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κυκλ. τμῆμα ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{\varrho^2}{12}(\pi-3)$. Τῶν μεγαλυτέρων κυκλ. τμημάτων τὰ ἐμβαδὰ εὑρίσκονται εὐκόλως ἤδη.

597.—Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου καὶ τῶν ἐμβαδῶν τριῶν κυκλ. τμημάτων ὁριζομένων ὑπὸ χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν ἀκτῖνα, διότι τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι 60°. Εἶναι ἄρα

$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + 3 . \frac{\alpha^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (ἄσκ. 571) ὅθεν $E = \frac{\alpha^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

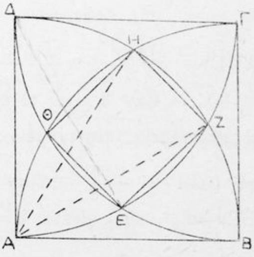
598. — Προφανῶς τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται, ἂν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἀφαιρεθῶσι 4 τεταρτοκύκλια ἀκτῖνος $\frac{\alpha}{2}$, ἤτοι $E = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4}(4 - \pi)$.

599.—Ἕκαστον φύλλον ἀποτελεῖται ἐκ δύο κυκλ. τμημάτων χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν ἐγγεγραμμένου τετραγώνου· ἔχει ἄρα (ἄσκ. 571) ἐμβαδὸν $\frac{\rho^2}{2}(\pi - 2)$, ἔνθα $\rho = \frac{\alpha}{2}$. Τὸ ζητούμενον ἄρα εἶναι $2\rho^2(\pi - 2) = \frac{\alpha^2}{2}(\pi - 2)$. ($\alpha$ εἶναι πλευρὰ τοῦ τετραγώνου).

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι τὰ 4 ἡμικύκλια ἀποτελοῦσι τὸ τετράγωνον καὶ τὰ φύλλα συμπεραίνομεν ὅτι τὰ φύλλα εἶναι $\frac{4 . \pi . \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2} - \alpha^2 = \frac{\pi\alpha^2}{2} - \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{2}(\pi - 2)$.

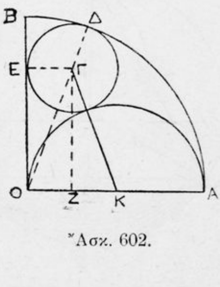
600.—Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑκάστου τῶν κύκλων Κ,Λ,Μ, τὸ τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ἰσόπλευρον πλευρᾶς 2ρ καὶ ἑκάστη γωνία του εἶναι 60^0. Εἶναι ἄρα $E = (ΚΛΜ) - 3(\text{τομ}. 60^0) = \frac{4\rho^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3\pi\rho^2}{6} = \rho^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$.

601. — Τὰ τόξα ΔΗ, ΗΖ, ΖΒ εἶναι ἴσα, ἄρα ἕκαστον 30^0, ἤτοι δωδέκατον περιφερείας ἀκτῖνος α· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα. Ὥστε τὸ εὐθ. σχῆμα ΕΖΗΘ ἔχει ἴσας πλευράς. Ἐπειδὴ δὲ $ΗΑΖ = 30^0$ καὶ $ΑΗ = ΑΖ$, ἕπεται ὅτι $ΗΖΑ = 75^0$· ἂν δὲ παρατηρήσωμεν ὅτι $ΑΖΕ = 15^0$, συμπεραίνομεν $ΗΖΕ = 75^0 + 15^0 = 90^0$. Τὸ ΕΖΗΘ εἶναι λοιπὸν τετράγωνον πλευρᾶς $(ΕΖ) = \alpha\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, διότι εἶναι πλευρὰ καν. δωδεκαγώνου. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἐμβαδὸν ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ (ΕΖΗΘ) καὶ ἀπὸ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλ. τμήματος χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δωδεκαγώνου (ἄσκ. 596). Εἶναι ἄρα $E = \alpha^2(2 - \sqrt{3}) + \frac{\alpha^2}{3}(\pi - 3) = \frac{\alpha^2}{3}(3 - 3\sqrt{3} + \pi)$.



Ἄσκ. 601

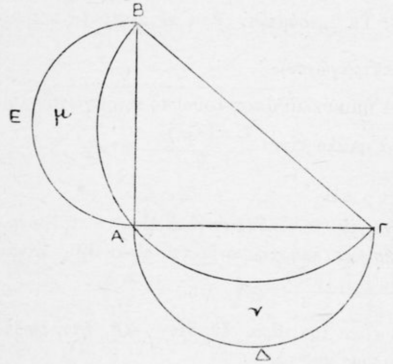
602.—Ἂν χ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ Γ, θὰ εἶναι $(ΟΓ) = (\rho - \chi)$, $(ΓΚ) = \chi + \frac{\rho}{2}$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΓΕ εὑρίσκομεν $(ΟΕ)^2 = (\rho - \chi)^2 - \chi^2 = \rho^2 - 2\rho\chi$, ἐκ δὲ τοῦ ΓΚΖ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $(ΖΚ) = \frac{\rho}{2} - \chi$ εὑρίσκομεν ὅτι $\left(\frac{\rho}{2} + \chi\right)^2 = \left(\frac{\rho}{2} - \chi\right)^2 + (\rho^2 - 2\rho\chi)$, ὅθεν $\chi = \frac{\rho}{4}$. Κατ' ἀ-



Ἄσκ. 602.

κολουθίαν $(ΖΚ)=\frac{ρ}{4}$, $(ΓΚ)=\frac{3ρ}{4}$, τὸ δὲ Γ ὁρίζεται ἐκ τούτων εὐκόλως.—
β') Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἡμικυκλίου Κ ἐπιφανείας τοῦ ΟΑΒ εἶναι προφανῶς Ε= (ΟΑΒ)— (ἡμικ, Κ)—(Γ) ἢ Ε=
$\frac{πρ^2}{4}-\left(\frac{1}{2}\frac{πρ^2}{4}+\frac{πρ^2}{16}\right)=\frac{πρ^2}{16}=(Γ)$.

603.—Ἐπειδὴ τὰ ἡμικύκλια ΑΒΓ, ΑΕΒ, ΑΔΓ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων αὐτῶν, ἕπεται ὅτι: $\frac{ἡμ(ΑΒΓ)}{(ΒΓ)^2}=\frac{ἡμ(ΑΔΓ)}{(ΑΓ)^2}=\frac{ἡμ(ΑΕΒ)}{(ΑΒ)^2}=\frac{ἡμ(ΑΔΓ)+ἡμ(ΑΕΓ)}{(ΑΓ)^2+(ΑΒ)^2}$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΓ)^2=(ΑΓ)^2+(ΑΒ)^2$, ἕπεται ὅτι ἡμ (ΑΒΓ) = ἡμ (ΑΔΓ) + ἡμ(ΑΕΓ). Ἂν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰ κοινὰ μέρη, εὑρίσκομεν μ+ν=τρίγ (ΑΒΓ).

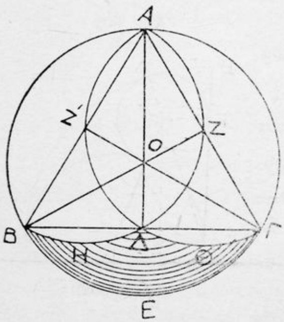


Ἄσκ. 603

Σημ. Πρατηροῦντες ὅτι τρ. (ΑΒΓ)+ἡμ(ΑΔΓ)+ ἡμ(ΑΒΕ) =ἡμ(ΑΒΓ) + μ + ν, συμπεραίνομεν ὅτι μ+ν=τρίγωνον (ΑΒΓ) $+π\frac{(ΑΓ)^2}{8}+π\frac{(ΑΒ)^2}{8}-π\frac{(ΒΓ)^2}{8}$=τρίγ. (ΑΒΓ).

604.—Ἐὰν Μ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ τοῦ τόξου τοῦ τομέως καὶ τῆς περιφερείας περιεχομένης ἐπιφανείας, θὰ εἶναι $\frac{πρ^2}{4}+Μ=$ τρίγ.(ΑΒΓ)+ $\frac{π(ΒΓ)^2}{8}$, ὅθεν Μ=τρίγ. (ΑΒΓ)$+π\frac{(ΒΓ)^2}{8}-\frac{πρ^2}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΓ)^2=2ρ^2$, αὕτη γίνεται Μ=τρίγ. (ΑΒΓ).

605.—Ἐὰν Δ,Ζ,Ζ' εἶναι τὰ μέσα τῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ, αἱ ΑΔ, ΒΖ, ΓΖ' εἶναι ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, κατ'ἀκολουθίαν διέρχονται διὰ μὲν τοῦ Δ ἀμφότεραι αἱ ἡμιπεριφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ δι' ἑκατέρου δὲ τῶν Ζ καὶ Ζ' ἡ ἑτέρα τῶν περιφερειῶν τούτων. Τὸ ζ. ἐμβαδὸν εἶναι Ε = τμῆμ. (ΒΕΓΒ) — τμῆμα (ΒΗΔ) —τμῆμ. (ΔΘΓ)· ἐπειδὴ δὲ τμῆμα ΒΗΔ=τμ. (ΔΘΓ) ἕνεκα τῆς συμμετρίας ἕπεται ὅτι Ε=τμ.(ΒΕΓΒ)—2 τμ.(ΔΘΓΔ). Ἀλλά (ἄσκ. 571 β') τμ. (ΒΕΓΒ) = $\frac{ρ^2}{12}(4π-3\sqrt{3})$ ἤ, ἐπειδὴ $α=ρ\sqrt{3}$ καὶ $ρ^2=$



Ἄσκ. 605

$\frac{\alpha^2}{3}$, τμ.(ΔΕΓΒ)$=\frac{\alpha^2}{63}(4\pi-3\sqrt{3})$. Τῆς δὲ ΔΖ οὔσης ἴσης πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ τὸ τρίγωνόν ΖΔΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ τμ. (ΔΘΓΔ) $=\frac{(\Delta Z)^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})=$ $\frac{\alpha^2}{48}(2\pi-3\sqrt{3})$. Ἄρα $E=\frac{\alpha^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3})-\frac{\alpha^2}{24}(2\pi-3\sqrt{3})=\frac{\alpha^2}{72}(2\pi+3\sqrt{3})$.

606.—Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΔ......., ὧν αἱ δύο ἄκραι κεῖνται ἐντός, ἡ δὲ μεσαία ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΕΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ.........

Προφανῶς $E=\frac{\pi}{8}(A\Delta^2+B\Gamma^2-AB^2-\Gamma\Delta^2)$. Ἐπειδὴ δὲ $A\Delta=AB+B\Gamma+\Gamma\Delta$, ἕπεται ὅτι

$$(A\Delta)^2=(AB)^2+(B\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+2(AB)(B\Gamma)+2(AB)(\Gamma\Delta)+2(B\Gamma)(\Gamma\Delta)$$

καὶ ἐπομένως $E=\frac{\pi}{8}[2(B\Gamma)^2+2(AB)(B\Delta)+2(B\Gamma)(\Gamma\Delta)]=\frac{\pi}{4}(A\Gamma)(B\Delta$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\delta^2=(A\Gamma)(B\Delta)$, αὕτη γίνεται $=\frac{\pi\delta^2}{4}=\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$.

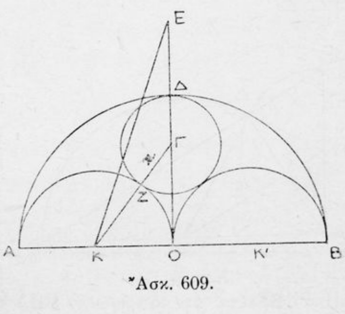
607.—Ἔστω ΒΕΑ τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ περιεχόμενον τόξον τῆς περιφερείας (Γ, ΓΑ) (Σχ. 164). Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τεταρτοκυκλίου ΓΒΕΑ, οὗ ἀκτὶς ἡ (ΓΑ)$=\alpha$ καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν δύο κυκλ. τμημάτων τοῦ κύκλου Κ χορδῆς α. Εἶναι ἄρα $E=\frac{\pi\alpha^2}{4}+2.\frac{\varrho^2}{4}(\pi-2)$ (ἄσκ. 571γ′) ἢ $E=\frac{\pi\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}(\pi-2)=\frac{\alpha^2}{2}(\pi-1)$.

Σημ. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν παρατηροῦντες ὅτι Ε=ἡμικ. (ΒΓΑ)+τμῆμ. (ΒΕΑΒ).

608.— Προφανῶς $E=\frac{\pi(AB)^2}{8}-\left[\frac{\pi(A\Gamma)^2}{8}+\frac{\pi(B\Gamma)^2}{8}\right]=\frac{\pi}{8}\left[(A\Gamma)^2+\right.$ $\left.(\Gamma B)^2+2(A\Gamma)(\Gamma B)-(A\Gamma)^2-(B\Gamma)^2\right]=\frac{\pi}{8}.\,2(A\Gamma)(\Gamma B)$. Ἐὰν δε ΓΔ εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ ἡμικυκλίου τμῆμα τῆς εἰς τὸ Γ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι $(\Gamma\Delta)^2=(A\Gamma)(\Gamma B)$ καὶ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $E=\frac{\pi(\Gamma\Delta)^2}{4}=\pi\left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2$.

Ἐκ ταύτης φαίνεται ὅτι Ε γίνεται μέγιστον, ὅταν ΓΔ γείνῃ μέγιστον, ὅπερ συμβαίνῃ, ὅταν τὸ Γ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ.

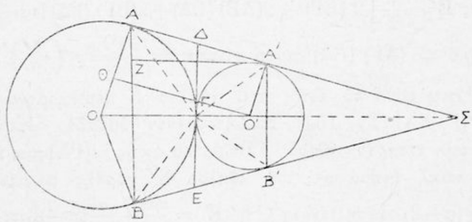
609.—Ἐπειδὴ ΓΚ=ΓΚ′, τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς ΑΒ ἀκτῖνος ΟΔ. Ἐὰν δὲ ληφθῇ ΔΕ=ΟΚ, θὰ εἶναι ΓΚ=ΓΕ, ἄρα τὸ Γ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΕ. Ὁρίζεται λοιπὸν τὸ Γ ὡς τομὴ τῶν ρηθέντων τόπων. Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου



Ἄσκ. 609.

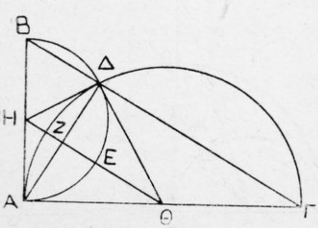
ΓΚΟ εὑρίσκομεν $\left(\chi+\frac{\varrho}{2}\right)^2=\frac{\varrho^2}{4}+(\rho-\chi)^2$, ὅθεν $\chi=\frac{\varrho}{3}$. Κατ' ἀκολουθίαν $E=\frac{\pi\varrho^2}{2}-\frac{\pi\varrho^2}{4}-\frac{\pi\varrho^2}{9}=\frac{5\pi\varrho^2}{36}$.

610.—Προφανῶς τὸ ΑΑ'Β'Β εἶναι τραπέζιον· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων ΣΑ=ΣΒ,ΣΑ'=ΣΒ' προκύπτει ὅτι ΑΑ'=ΒΒ', τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ κατ ἀκολουθίαν ἐγγράψιμον.—β') Ἐπειδὴ τόξ. ΑΓ =τόξ. ΓΒ, ἔπεται ὅτι γ. ΓΑΒ=γ. ΑΒΓ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒΓ=ΓΑΑ', ἔπεται ὅτι γ. ΓΑΒ=γ. ΓΑΑ', ἤτοι ἡ ΑΓ διχοτομεῖ τὴν ΒΑΑ'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ ΒΓ, Β'Γ, Α'Γ διχοτομοῦσιν ἀντιστοίχως τὰς γωνίας Β, Β', Α' τοῦ τραπεζίου. Ἀπέχει ἄρα τὸ Γ ἴσον ὅλων τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΒ'Α' καὶ κατ' ἀκολουθίαν τοῦτο εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον κέντρου Γ.—γ') Ἂν ΔΓΕ εἶναι ἡ



Ἄσκ. 610.

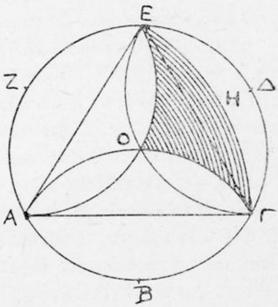
εἰς τὸ Γ κοινὴ τῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένη ἐκ τῶν ΔΑ=ΔΓ=ΔΑ',ΕΓ=ΕΒ=ΕΒ', ἔπεται ὅτι ΔΕ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου καὶ ἴση πρὸς ΑΔ+ΒΕ=ΑΑ'.Ἄρα (ΑΒΒ'Α')=(ΔΕ)(Α'Ζ).Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΑ'Ζ,ΟΟ'Θ εὑρίσκομεν Α'Ζ : Ο'Θ=ΑΑ': ΟΟ', ὅθεν $(Α'Ζ)=\frac{(Ο'Θ)(ΑΑ')}{(ΟΟ')}=\frac{(Ο'Θ)^2}{(ΟΟ')}$, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ.τριγώνου Ο'ΘΟ εὑρίσκομεν $(Ο'Θ)^2=(P+\rho)^2-(P-\rho)^2=4\,P\rho$, ἔπεται ὅτι $(Α'Ζ)=\frac{4P\varrho}{P+\varrho}$ καὶ $(ΑΒΒ'Α')=(ΑΑ')(Α'Ζ)=2\sqrt{P\varrho}\cdot\frac{4P\varrho}{P+\varrho}=\frac{8P\varrho\sqrt{P\varrho}}{P+\varrho}$.



Ἄσκ. 611.

611.—Προφανῶς τὰ περὶ οὗ ὁ λόγος τόξα περατοῦνται εἰς τὸν πόδα Δ τοῦ ὕψους ΑΔ. Ἐὰν δὲ Η, Θ εἶναι τὰ κέντρα τῶν τόξων τούτων, θὰ εἶναι ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἴση πρὸς $^{ΒΓ}/_2$ ἢ $^{\alpha}/_2$ Ἐπειδὴ δὲ τομ. ΗΔΕΑ=ΑΗΔΖΑ+ΑΖΔΕΑ καὶ τομ. ΘΑΖΔ=ΑΕΔΘΑ+ΑΖΔΕΑ, ἔπεται ὅτι: τομ. ΗΔΕΑ+τομ.ΘΑΖΔ=ΑΗΔΘ+ΑΕΔΖΑ. (1) Ἀλλ' ἐκ τῶν Γ=30°, Β=60° καὶ ΔΗ=ΗΒ ἔπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΗΔ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἄρα ΔΗΑ=120°, τομ.(ΗΔΕΑ)=$\frac{1}{3}$ π (ΗΔ)^2· καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ)= $\frac{α}{2}$, ἕπεται ὅτι (ΔΗ)=$\frac{α}{4}$ καὶ τομ. (ΗΔΕΑ) = $\frac{1}{3}π\frac{α^2}{16}=\frac{πα^2}{48}$. Ἐπίσης τοῦ ΑΔΘ ὄντος ἰσοπλεύρου εἶναι τομ. (ΘΑΖΔ)=$\frac{1}{6}$ π (ΔΘ)^2. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΓ)^2 = $α^2 - \frac{α^2}{4} = \frac{3α^2}{4}$, ἕπεται ὅτι (ΔΘ)= $\frac{(ΑΓ)}{2} = \frac{α\sqrt{3}}{4}$ καὶ τομ. (ΘΑΖΔ) = $\frac{πα^2}{32}$. Τὸ δὲ τετράπλευρον ΑΗΔΘ ἔχει ἐμβαδὸν $^1/_2$ (ΗΘ)(ΑΔ)= $\frac{1}{2}\cdot\frac{α}{2}\cdot\frac{α\sqrt{3}}{4} = \frac{α^2\sqrt{3}}{16}$. Ἡ ἰσότης ἄρα (1) γίνεται : $\frac{πα^2}{48}+\frac{πα^2}{32}=\frac{α^2\sqrt{3}}{16}$ + (ΑΕΔΖΑ), ὅθεν (ΑΕΔΖΑ)= $\frac{α^2}{96}(5π-6\sqrt{3})$.

612.—Προφανῶς Ε=τμῆμα (ΕΗΓΕ)+τρίγ.(ΟΓΕ)—2 τμῆμα(ΟΓ). Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 571) εἶναι τμῆμα (ΕΗΓΕ)= $\frac{(ΑΓ)^2}{12}(2π-3\sqrt{3})=\frac{ρ^2}{4}(2π-3\sqrt{3})$, τρίγ. (ΟΕΓ) = $\frac{1}{2}ρ\sqrt{3}\cdot\frac{ρ}{2}=\frac{ρ^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ 2 τμ. (ΟΓ)=$\frac{ρ^2}{6}(2π-3\sqrt{3})$ ἕπεται ὅτι Ε=$\frac{πρ^2}{6}$.



Ἄσκ. 612

613.— Ἐὰν ΚΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ ΚΒ, ΚΓ αἱ ζητούμεναι, θὰ εἶναι π(ΚΒ)^2 = π(ΚΓ^2—ΚΒ^2) = π(ΚΑ^2 — ΚΓ^2), ὅθεν (ΚΒ)^2+(ΚΓ)^2 = (ΚΑ)^2 καὶ 2(ΚΒ)^2 = (ΚΓ)^2, ἐξ ἧς (ΚΓ)^2 : (ΚΒ)^2 = 2. Ἐνθυμούμενοι ἤδη καὶ τὸ Πόρ. Ι (§ 180) κατασκευάζομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΒ, ΚΓ ὡς ἀκολούθως. Ἐπὶ εὐθ. τμήματος ΔΕ ἴσου πρὸς ΚΑ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτοῦ σημεῖον Ζ τοιοῦτον ὥστε ΔΖ : ΖΕ=2. Ὑψοῦμεν εἶτα κάθετον ἐκ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ μέχρις οὗ τμήσῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Η. Εὐκόλως ἤδη ἀποδεικνύεται ὅτι ΗΔ=ΚΓ καὶ ΗΕ=ΚΒ.

Σημ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι 3(ΚΒ)^2 = (ΚΑ)^2, ἄρα (ΚΒ)=$\frac{(ΚΑ)\sqrt{3}}{3}$, ἐξ ἧς φαίνεται ἕτερος τρόπος κατασκευῆς τῆς ΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ (ΚΓ) = (ΚΒ)$\sqrt{2}$ κατασκευάζεται εἶτα εὐκόλως καὶ ἡ ΚΓ.

614.— Τὸ ἓν τῶν μερῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιον ΑΓ, ἀπὸ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒ μεῖον τὸ ἡμικύκλιον ΓΒ, τὸ δὲ ἄλλο ἀπὸ τὸ ΓΒ, ἀπὸ τὸ ΑΒ μεῖον τὸ ΑΓ. Ἄρα π(ΑΓ^2+ΑΒ^2—ΓΒ^2) : π(ΑΒ^2+ΓΒ^2—ΑΓ^2)= μ : ν ἢ (ΑΓ^2+ΑΒ^2—ΓΒ^2) : (ΑΒ^2+ΓΒ^2—ΑΓ^2)= μ : ν. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ= ΑΓ+ΓΒ, αὕτη γίνεται μετὰ τὰς ἀναγκαίας πράξεις καὶ ἁπλοποιήσεις ΑΓ : ΒΓ= μ : ν, ὅθεν φαίνεται ὁ τρόπος τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ Γ (§ 205).

615.— Ἐὰν π. χ. ἡ ΒΚ (Σχ. 187) εἶχε μετὰ τοῦ Π πλὴν τοῦ Β καὶ ἄλλο κοινὸν σημεῖον, αὕτη θὰ ἔκειτο ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ Π (§ 14 Α'), τὸ δὲ Κ θὰ ἔκειτο ἐν τῷ Π.

616.— Ἐὰν ἡ ΚΒ (Σχ. 187) ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, θὰ ἔκειτο καὶ ἐκείνη ἐπὶ τοῦ Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

617.— Ἐὰν ἡ ε κεῖται ἐν ἐπιπέδῳ Π, ὅπερ ἡ ε' τέμνει εἰς τὸ Α, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν ε καὶ ε' θὰ περιεῖχε τὴν ε καὶ τὸ Α'· ἄρα (§ 266. Πόρ. ΙΙ) θὰ συνέπιπτε μετὰ τοῦ Π, ὅπερ ὅμως δὲν περιέχει τὴν ε'.

618.— Ἔστωσαν ΚΒΚ', ΚΔΚ', ΚΓΚ' (Σχ. 187) διὰ τῆς ΚΚ' διερχόμενα ἐπίπεδα καὶ Π ἐπίπεδον τέμνον αὐτὴν εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται εἰς τὰ ΚΒΚ', ΚΔΚ', ΚΓΚ' καὶ εἰς τὸ Π, εἶναι κοινὸν σημεῖον τούτου καὶ ἑκάστου ἐκείνων, ἄρα αἱ τομαὶ ἐκείνων ὑπὸ τοῦ Π διέρχονται διὰ τοῦ Α.

619.— Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο, Δ κεῖνται εἰς πάντα τὰ ἐπίπεδα ΟΑΔ, ΟΒΔ, ΟΓΔ, καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΔ κεῖται εἰς πάντα ταῦτα, ἤτοι εἶναι τομὴ αὐτῶν. Αὕτη ἄρα εἶναι ὁ ζ. τόπος.

620. Ἔστω εὐθεῖα ΔΖ (Σχ. 235) τέμνουσα πλαγίως τὸ ΑΒΓΔ. Διὰ τοῦ Δ ἄγεται (§ 274) ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ· ἂν τοῦτο τέμνῃ τὸ ΑΒΓΔ κατὰ τὴν ΔΚ, ἡ ΔΖ οὖσα ἐπὶ τὸ Ρ κάθετος εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΔΚ τοιαύτη. Ἂν δὲ ἡ ΔΖ ἦτο καὶ πρὸς ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ΑΒΓΔ κάθετος, θὰ ἦτο καὶ ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ κάθετος, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

621.— ***Ἂν εὐθεῖα . . . . ἐπὶ εὐθεῖαν τοῦ Π διερχομένην διὰ τοῦ Α καὶ μίαν μόνον.*** Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὑπάρχει εὐθεῖα ΔΑΕ τοῦ Π κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἡ ΔΑΕ οὖσα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓ κάθετος. Ἂν ἦτο καὶ ἄλλη εὐθεῖα ΑΖ τοῦ Π κάθετος ἐπὶ τὸ ΒΑΓ, αὕτη θὰ ἦτο καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος· ἀλλὰ τότε ἡ ΑΓ θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

622. Τὸ ζ. σημεῖον εἶναι τομὴ τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ἀπόστασιν τῶν δοθέντων σημείων (§ 275).

623.— Ἔστω Α (Σχ. 193) τὸ δοθὲν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ Ζ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζ. τόπου. Ἐπειδὴ τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΑΖ ἔχουσιν ὡρισμένον μέγεθος καὶ τὸ ΒΖ εἶναι ὡρισμένον. Κεῖται ἄρα πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἐπὶ τῆς περιφερείας (Β, ΒΖ) τοῦ Π. Ἐὰν δὲ Γ κεῖται ἐπ' αὐτῆς, θὰ εἶναι ΒΓ = ΒΖ, ἄρα καὶ ΑΓ = ΑΖ, ἤτοι τὸ Γ εἶναι σημεῖον τοῦ ζ. τόπου. Ὥστε ὁλόκληρος ἡ ῥηθεῖσα περιφέρεια ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

624.— Ἐὰν γων. ΑΒΓ = ΑΒΔ = γων. ΑΒΖ (Σχ. 193) καὶ λάβωμεν ΒΓ = ΒΔ = ΒΖ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΖ εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΑΓ = ΑΔ = ΑΖ· εἶναι ἄρα αὗται πλάγιαι πρὸς τὸ Π· ἐὰν δὲ ΑΟ ἦτο ἐπ' αὐτὸ κάθετος, θὰ ἦτο ΟΓ = ΟΔ = ΟΖ, τὰ δὲ σημεῖα Γ, Δ, Ζ θὰ ἔκειντο ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΓ). Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα κεῖνται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Β, ΒΓ), αἱ δύο ῥηθεῖσαι περιφέρειαι θὰ εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, ὅπερ ἄτοπον. Κατ' ἀνάγκην ἄρα αὗται συμπίπτουσι καὶ τὸ Ο συμπίπτει μὲ τὸ Β, ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

625.— Ἐὰν Κ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ (Σχ. 225) καὶ αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι πλάγιαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν δὲ Κκ εἶναι ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος, θὰ εἶναι κΑ = κΒ = κΓ, ἤτοι τὸ κ εἶναι κέντρον τῆς περὶ τὸ ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Τυχὸν ἄρα σημεῖον Κ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου εἰς τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὥστε ὁλόκληρος ἡ κάθετος αὕτη ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

626.— Τὸ ζ. σημεῖον εἶναι τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου Π καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ εἰς τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Πότε τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ;

627.— Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ (Σχ. 194) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ἡ δὲ ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι (§ 280) κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἄρα $(ΑΔ)^2=(ΑΓ)^2+(ΓΔ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $(ΑΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2$, ἕπεται ὅτι $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2 = 16+9+24=49$, ὅθεν $(ΑΔ) = 7$ μέτρα.

628.— Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, οὗ δηλ. αἱ ἀποστάσεις ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ εἶναι ἴσαι. Προφανῶς αἱ ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ εἶναι πᾶσαι πλάγιαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ· ἂν δὲ ΜΟ εἶναι ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος, θὰ εἶναι ΟΔ = ΟΕ = ΟΖ καὶ αὗται θὰ εἶναι (§ 281) ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ. Εἶναι ἄρα τὸ Ο κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ Ο περιφερείας καὶ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ Ο καθέτου ἐπὶ τὸ ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν σημεῖον αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, ἕπεται ὅλη αὕτη ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

629.— Ἔστω Ο τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπιπέδου Π, Α τὸ ἐκτὸς αὐτοῦ δοθὲν σημεῖον καὶ ΑΜ κάθετος ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΟΜ τοῦ Π. Ἂν ΑΒ εἶναι ἐπὶ τὸ Π κάθετος, ἡ ΒΜ εἶναι (§ 281) κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΜ. Φαίνεται ἄρα τὸ ΟΒ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, τὸ δὲ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Π, ἥτις ἔχει διάμετρον ΟΒ. Καὶ πᾶν δὲ σημεῖον Μ ταύτης εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι τῆς ΒΜ οὔσης καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΜ καὶ ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἡ ῥηθεῖσα ἄρα περιφέρεια ἀποτελεῖ τὸν ζ. τόπον.

630.— Ἡ ΑΒ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὰς ΑΔ, ΑΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΑΔΕ (§ 272). Τοῦτο δὲ εἶναι (§ 283) κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ.

631.— Ἐὰν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΓ, τὰ εὐθ. τμήματα ΕΖ, ΘΗ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ καὶ ἴσα τῷ ἡμίσει αὐτοῦ. Εἶναι ἄρα ΕΖ, ΘΗ ἴσα καὶ παράλληλα, τὸ δὲ ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμον.

632.— Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Σ, Ρ (Σχ. 191) εἶναι παράλληλα πρὸς εὐθεῖαν xy, ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη τῇ xy παράλληλος κεῖται (§ 286 Πόρ. ΙΙ) εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ταῦτα· εἶναι ἄρα ἡ τομὴ αὐτῶν Δ Α.

633.— Ἐὰν Α εἶναι ὁ πούς τῆς Ε′ ἐπὶ τὸ Π καὶ Β ἡ τομὴ τῶν Ε καὶ Ε′, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ τέμνει τὸ Π κατά τινα εὐθεῖαν ΑΔ, ἥτις ὡς κάθετος τῇ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ Ε. Εἶναι ἄρα (§ 286 Πόρ. Ι) ἡ Ε παράλληλος πρὸς τὸ Π.

634. Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 205) δύο μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι εὐθεῖαι. Ἂν φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ, τὸ ἐπίπεδον ΔΓΕ εἶναι (§ 286 Πόρ. Ι) τὸ ζητούμενον.

635.— Ἔστωσαν ΑΒΖΕ, ΑΔΗΕ (Σχ. 234) ἐπίπεδα καὶ ΒΖΗΔ ἄλλο παράλληλον πρὸς τὴν τομὴν αὐτῶν ΑΕ. Ἡ ΑΕ ὡς παράλληλος πρὸς τὸ ΒΖΗΔ εἶναι (§ 286 ἀντ.) παράλληλος καὶ πρὸς τὰς ΒΖ, ΔΗ· αὗται ἄρα (§ 284 Πόρ. Ι) εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.

636. — Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Ρ (Σχ. 199) ἔτεμνε τὴν ΑΔ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

637.— Ἀρκεῖ διὰ σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι (§ 290 Πόρ. ΙΙ) τὸ ζητούμενον.

638. — Ἐὰν Δ, Ε εἶναι πόδες τῆς ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὰ Π καὶ Ρ καθέτου, Γ ἡ τομὴ τοῦ Π ὑπὸ τῆς ΑΒ, νοηθῇ δὲ τὸ διὰ τοῦ Α πρὸς τὰ Π καὶ Ρ παράλληλον ἐπίπεδον θὰ εἶναι (§ 294) $(\text{ΑΓ}):(\text{ΑΔ}) = (\text{ΓΒ}):(\text{ΔΕ})$, ὅθεν $\frac{(\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΔ})}=\frac{(\text{ΓΒ})}{(\text{ΔΕ})}=\frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΕ})}=\frac{28}{8}$, ἄρα $(\text{ΑΓ})=\frac{28}{8}.6=21$ μέτρα καὶ $\text{ΓΒ}=\frac{28}{8}.2=7$ μέτρα.

639.— Ἐὰν ΕΗ (Σχ. 203) εἶναι τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα, θὰ εἶναι προφανῶς $\frac{(\text{ΕΖ})}{(\text{ΙΚ})}=\frac{(\text{ΖΗ})}{(\text{ΚΛ})}=\frac{24}{8}=3$. Ἄρα $(\text{ΕΖ})=3(\text{ΙΚ})=9$ μέτρα καὶ $(\text{ΖΗ})=3(\text{ΚΛ})=15$ μέτρα.

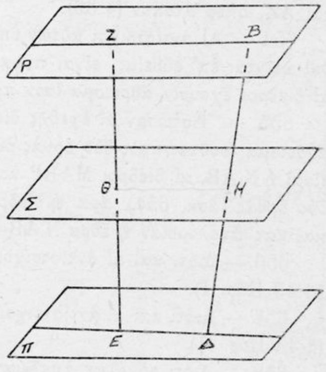
640.— Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 205) αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Ἂν φέρωμεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ τὴν ΑΣ παράλληλον τῇ ΓΔ, τὰ ἐπίπεδα ΓΔΕ, ΒΑΣ εἶναι (§ 295) τὰ ζητούμενα.

641.— Ἐὰν αἱ Ζ,Ζ′ δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν παράλληλοι, διότι ἐξ ὑποθέσεως κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἀλλὰ τότε ἡ Ε ὡς παράλληλος τῇ Ζ θὰ ἦτο καὶ τῇ Ζ′ παράλληλος (§ 284 Πόρ. Ι), ἐκ δὲ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν Ε καὶ Ε′ θὰ ἤγοντο δύο παράλληλοι τῇ Ζ′, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὸ Εὐκλείδειον ἀξίωμα. Τὸ δὲ ἐπίπεδον τῶν Ζ, Ζ′ εἶναι (§ 295) παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν Ε, Ε′

642.— Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ (Σχ. 204) εὐθ. τμήματα ἴσα, παράλληλα κτλ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ δὲ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΒ ἄρα καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι καὶ ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ, ἄρα καὶ τῷ Π. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν ΔΕ, ΔΖ εἶναι παράλληλον τῷ Π. Ἐπὶ τοῦ Ρ δὲ κεῖται καὶ τὸ Ζ, διότι, ἂν ἡ ΓΖ ἔτεμνε τὸ Ρ εἴς τι ἄλλο σημεῖον Ζ', θὰ ἦτο ΑΔ=ΓΖ' (§ 292 Πόρ. Ι)· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΑΔ=ΓΖ, ἕπεται ὅτι ΓΖ=ΓΖ', ἤτοι τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὅλον, ὅπερ ἄτοπον. Εἶναι δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ, διότι ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ καὶ Α = Δ (§ 89).

643. – Ἔστω ΑΒ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ Π (Σχ. 205) καὶ ΓΔ τυχοῦσα αὐτοῦ εὐθεῖα μὴ παράλληλος τῇ ΑΒ. Ἡ ἀπόστασις ΙΗ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΒΖ τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ Π. Εἶναι ἄρα αὕτη σταθερά.

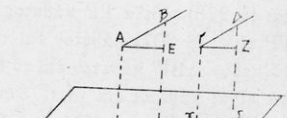
644.—Ἔστω ΖΕ ἡ ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΖΒ, ΕΔ, Θ τὸ μέσον αὐτῆς, ΒΔ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Β,Δ καὶ Σ τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ διχοτομεῖ καθέτως τὴν ἀπόστασιν ΖΕ. Τὰ εἰς τὰ Ζ,Ε κάθετα ἐπὶ τὴν ΖΕ ἐπίπεδα Ρ καὶ Π περιέχουσι (§ 273) τὸ μὲν τὴν ΖΒ τὸ δὲ ἄλλο τὴν ΕΔ. Ἐὰν δὲ Η εἶναι ἡ τομὴ τοῦ Σ ὑπὸ τῆς ΒΔ, θὰ εἶναι (§ 294) ΒΗ:ΖΘ=ΗΔ:ΘΕ, ὅθεν, ἐπειδὴ ΖΘ=ΘΕ,ἕπεται ὅτι ΒΗ=ΗΔ.



Ἄσκ. 644

645. – Τοῦ εὐθ. τμήματος ΙΒ (Σχ. 205) ὄντος παραλλήλου πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον Π, αἱ προβάλλουσαι ΙΗ,ΒΖ τῶν ἄκρων αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Τὸ σχῆμα ἄρα ΙΗΖΒ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως ΙΒ εἶναι ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὴν προβολὴν αὐτοῦ ΗΖ.

646. Αἱ προβάλλουσαι Αα, Γγ εἶναι παράλληλοι (284). Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ΑΒ, ΓΔ εἶναι παράλληλοι ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται (§ 295) ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΒΑα, ΔΓγ εἶναι παράλληλα· καὶ αἱ τομαὶ ἄρα αὐτῶν αβ,γδ ὑπὸ τοῦ Π εἶναι (§ 292) παράλληλοι.



Ἄσκ. 646

647. — Κατὰ τὴν (ἄσκ. 646) ἡ προβολὴ θὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

648. — Τῶν εὐθειῶν ΑΒ, αβ (Σχ. 207) τεμνομένων ὑπὸ τῶν παραλλήλων Αα, Μμ, Ββ εἶναι (§ 202) ΑΜ : ΜΒ=αμ : μβ.

649.— Ἐὰν Μ εἶναι μέσον τοῦ ΑΒ (Σχ. 207), θὰ εἶναι ΑΜ : ΜΒ=1·

ἐκ τῆς προηγουμένης δὲ ἰσότητος προκύπτει ὅτι 1=αμ : μβ, ἄρα αμ = μβ.

650.— Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΕ, ΓΖ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς αβ, γδ (Σχ. ἀσκ. 646), αἱ ΑΕ, ΓΖ θὰ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι. Τὰ τρίγωνα ἄρα ΑΒΕ, ΓΔΖ εἶναι ὅμοια καὶ ΑΒ : ΓΔ=ΑΕ : ΓΖ=αβ : γδ.

651.— Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒαΑ ὄντως ἰσοσκελοῦς ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι 45°.

652.— Ἐπειδὴ (ΒΑ)=2(Βα) ἕπεται (ἄσκ. 160) ὅτι ΒΑα=30° καὶ ΑΒα=60°.

653.— Ἂν ΓΑΕ (Σχ. 214) εἶναι ἡ πρὸς τὴν δίεδρον ΓΑΒΕ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος αὐτῆς, αἱ δίεδροι ΓΑΒΔ, ΔΑΒΕ θὰ εἶναι ἴσαι (§ 305), τὸ δὲ ἐπίπεδον ΒΑΔ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΓΑΒΕ. Ἂν πλὴν τούτου ὑπῆρχε καὶ ἄλλο διχοτόμον ΒΑΖ τέμνον τὸ ΓΑΕ κατὰ τὴν ΑΖ, θὰ ἦσαν αἱ γωνίαι ΓΑΖ, ΖΑΕ ἴσαι καὶ ἡ ΓΑΕ θὰ εἶχε δύο διχοτόμους ΑΔ καὶ ΑΖ, ὅπερ ἄτοπον (§ 36).

654.— Αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι ὡς ἐφεξῆς, ὧν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι παραπληρωματικαί. Ἄρα (§ 306 Πόρ. Ι) καὶ αἱ δίεδροι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς διέδρους.

655. — Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς δίεδροι ΜΑΒΡ, ΡΑΒΝ (Σχ. 211), ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς διέδρους. Ἐὰν προέκτασις τῆς ἕδρας ΜΑΒ εἶναι ἡ Ν'ΑΒ, αἱ δίεδροι ΜΑΒΡ καὶ ΡΑΒΝ' θὰ εἶχον ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς (ἄσκ. 654)· ἄρα ἡ δίεδρος ΡΑΒΝ' θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὴν ΡΑΒΝ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἕδρα Ν'ΑΒ συμπίπτει μετὰ τῆς ΝΑΒ.

656.— Διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθ. (§ 43 Πόρ. Ι).

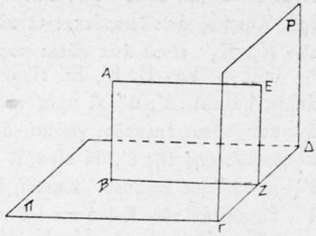
657.— Διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθ. (§ 43 Πόρ. ΙΙ).

658.— Διότι εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι ἔχουσι τὰς αὐτὰς σχέσεις πρὸς ἀλλήλας.

659.— Διὰ τυχόντος σημείου Γ εὐθείας ΑΒ (Σχ. 212) ἐπιπέδου Π ἄγεται (§ 276) εὐθεῖα ΓΡ κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Τὸ ἐπίπεδον ΑΡΒ περιέχον τὴν ΓΡ εἶναι (§ 307) κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Ἐὰν διὰ τῆς ΑΒ διήρχετο καὶ ἄλλο ἐπίπεδον ΑΒΡ' κάθετον ἐπὶ τὸ Π, ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΒ ἔπρεπε (§ 308 Πόρ. ΙΙ) νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

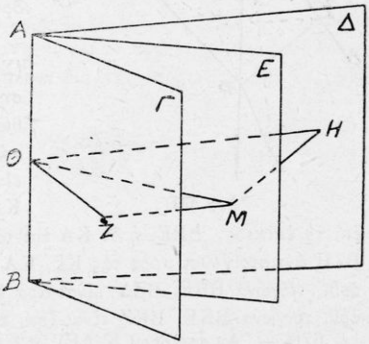
660.— Ἔστω ΑΒ (Σχ. 208) πλαγία πρὸς τὸ Π. Ἐὰν Αα εἶναι ἡ προβάλλουσα τὸ Α ἐπὶ τὸ Π εὐθεῖα, τὸ ἐπίπεδον ΑΒα εἶναι (§ 307) κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Ἐὰν καὶ τὸ ΑΒΓ ἦτο κάθετον ἐπὶ τὸ Π, θὰ ἦτο καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπ' αὐτό. (§ 308 Πόρ. ΙΙ).

661.— Ἔστω ἐπίπεδον Ρ καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ εὐθεῖα ΑΒ ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ Π. Ἡ ἐκ τοῦ ποδὸς Β κάθετος ΒΖ ἐπὶ τὸ Ρ κεῖται ἐν τῷ Π καὶ τέμνει τὸ Ρ εἴς τι σημεῖον Ζ τῆς τομῆς ΓΔ. Ἐπειδὴ τὰ Ρ καὶ ΑΒΖ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ Π, ἡ τομὴ αὐτῶν ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, κατ' ἀκολουθίαν δὲ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΖ· εἶναι ἄρα αἱ ΑΒ καὶ ΕΖ παράλληλοι, ἡ δὲ ΑΒ καὶ πρὸς τὸ Ρ παράλληλος.



Ἄσκ. 661.

662. — Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, ἤτοι τοιοῦτον ὥστε αἱ ἀποστάσεις ΜΖ, ΜΗ αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν Γ καὶ Δ τῆς διέδρου γωνίας ΑΒ εἶναι ἴσαι. Τὸ ἐπίπεδον ΖΜΗ ὂν κάθετον ἐπὶ τὰς ἕδρας Γ καὶ Δ τέμνει εἰς τὸ Θ καθέτως καὶ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ γωνία ΖΘΗ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΜΑΕ, αἱ γωνίαι ΖΘΜ, ΜΘΗ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους ΓΑΒΕ, ΕΑΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἴσων (§ 79) ὀρθ. τριγώνων ΘΖΜ, ΜΘΗ προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΖΘΜ, ΜΘΗ ἕπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΑΒ ἐπιπέδου ΕΑΒ. Τυχὸν δὲ σημεῖον Μ τοῦ Ε εἶνε σημεῖον τοῦ τόπου, διότι τῶν γωνιῶν ΖΘΜ, ΜΘΗ οὐσῶν ἴσων ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων ΓΑΒΕ, ΕΑΒΗ τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΜΘΖ, ΜΘΗ εἶναι ἴσα καὶ ἄρα ΜΖ = ΜΗ. Ὁ ζ. τόπος εἶναι λοιπὸν τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΑΒ ἐπίπεδον Ε.



Ἄσκ. 662.

663 — Τὸ ἐπίπεδον ΑΒαβ εἶναι (§ 307) κάθετον ἐπὶ τὰ Π καὶ Ρ· καὶ ἡ τομὴ ἄρα αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒαβ καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν αβ.

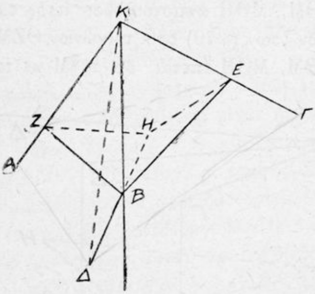
664. — Ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΖΕΘ, ΗΕΚ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι: α'.) Ἂν ἡ δίεδρος ΑΒ εἶναι ὀξεῖα, ὅτε καὶ ἡ ΚΕΘ εἶναι τοιαύτη, αἱ ΖΕ, ΕΗ κεῖνται ἐκτὸς τῆς ΚΕΘ, ἄρα καὶ ἐκτὸς τῆς διέδρου. β') Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ ΚΕΘ θὰ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ αἱ ΖΕ, ΕΗ κεῖνται ἐντὸς τῆς διέδρου ΑΒ. γ') Ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθή, καὶ ἡ ΚΕΘ εἶναι ὀρθή, αἱ δὲ ΖΕ, ΕΗ συμπίπτουσιν ἀντιστοίχως μετὰ τῶν ΕΚ, ΕΘ καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς ΑΒ.

665. — Ἔστωσαν Κ, Κ' δύο παραπληρωματικαὶ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, δ ἐπίπεδος ἀντίστοιχος διέδρου τινὸς Δ τῆς Κ καὶ ε ἕδρα τῆς Κ', δι' ἃς εἶναι $\delta + \varepsilon = 2$ ὀρθ. Ἐὰν K_1, K_1' εἶναι αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν Κ, Κ' καὶ δ' ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου Δ' τῆς K_1, ἧς αἱ ἕδραι εἶναι προε-

κτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς Δ, ε′ ἕδρα τῆς K_1' ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν ε, θὰ εἶναι $\delta = \delta'$ καὶ $\varepsilon = \varepsilon'$· κατ᾽ ἀκολουθίαν ἡ $\delta + \varepsilon = 2$ ὀρθ. γίνεται $\delta' + \varepsilon' = 2$ ὀρθ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας ἕδρας καὶ διέδρους τῶν K_1, K_1'· εἶναι ἄρα αὗται παραπληρωματικαὶ (§ 313).

666.— Ἐὰν Ε, Ε′, Ε″ εἶναι αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς, ε, ε′, ε″ αἱ ἕδραι τῆς ἄλλης καὶ Δ, Δ′, Δ″ αἱ πρὸς τὰς διέδρους τῆς παραπληρωματικῆς τῆς α′ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι, δ, δ′, δ″ αἱ ἐπίπεδοι τῶν διέδρων τῆς παραπληρωματικῆς τῆς 6′, θὰ εἶναι $E + \Delta = E' + \Delta' = E'' + \Delta'' = 2$ ὀρθ., $\delta + \varepsilon = \delta' + \varepsilon' = \delta'' + \varepsilon'' = 2$ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $E = \varepsilon$, $E' = \varepsilon'$, $E'' = \varepsilon''$, ἕπεται ἐκ τῶν $E + \Delta = \varepsilon + \delta$ κτλ. ὅτι $\Delta = \delta$ $\Delta' = \delta'$, $\Delta'' = \delta''$.

667.—Ἐὰν $\Delta = \delta$, $\Delta' = \delta'$, $\Delta'' = \delta''$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων $E + \Delta = \varepsilon + \delta$ κτλ. προκύπτει εὐκόλως ὅτι $E = \varepsilon$, $E' = \varepsilon'$. $E'' = \varepsilon''$.



Ἄσκ. 668

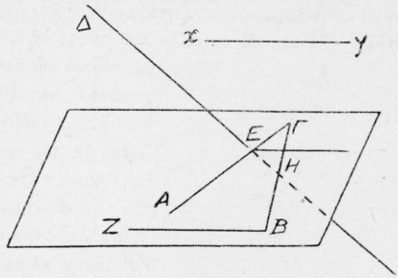
668.—Ἐὰν ἡ ἕδρα ΑΚΒ ἰσοῦται τῇ ΒΚΓ, ἀχθῇ δὲ τὸ ΒΚΔ διχοτομοῦν τὴν ΑΚΓ, αἱ τρίεδροι Κ.ΑΒΔ, Κ.ΒΔΓ ἔχουσι τὰς ἕδρας ἴσας. Ἄρα (§ 319) αἱ δίεδροι ΚΑ, ΚΓ εἶναι ἴσαι.

669.— Ἔστω ὅτι αἱ δίεδροι ΚΑ, ΚΓ (Σχ. ἀσκ. 668) εἶναι ἴσαι. Ἐὰν ἔκ τινος σημείου Β τῆς ΚΒ ἀχθῇ ἡ ΒΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΚΓ καὶ ΗΕ, ΗΖ κάθετοι εἰς τὰς ΚΓ, ΚΑ, αἱ ΒΕ, ΒΖ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τῆς ΚΓ, ΚΑ. Θὰ εἶναι ἄρα ἡ μὲν ΚΓ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΗΕ, ἡ δὲ ΚΑ ἐπὶ τὸ ΒΗΖ καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΒΕΗ, ΒΖΗ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς ΚΓ, ΚΑ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν εἶναι ἴσαι. Τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΒΗΕ, ΒΖΔ εἶναι ἄρα ἴσα καὶ ΒΕ=ΒΖ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΒΚΕ, ΒΚΖ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι ΒΚΕ=ΒΚΖ.

670.— Ἂν τριέδρου Κ.ΑΒΓ ἡ δίεδρος ΚΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΚΑ, ἀχθῇ δὲ ἐπίπεδον ΔΚΓ οὕτως ὥστε ἡ δίεδρος ΔΚΓΑ νὰ ἰσοῦται τῇ ΚΑ, τοῦτο θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς διέδρου ΒΚΓΑ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ἀπέναντι τὴν ἀπέναντι ἕδραν ΑΚΒ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΔ. Ἐπειδὴ δὲ τῆς τριέδρου Κ.ΑΔΓ δύο δίεδροι εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ΑΚΔ = ΔΚΓ. Ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου (§ 314) εἶναι ΒΚΓ < ΔΚΓ + ΔΚΒ, ὅθεν ΒΚΓ < ΑΚΔ + ΔΚΒ ἢ ΒΚΓ < ΑΚΒ. Ἀντιστρόφως. Ὑποθέσωμεν ὅτι ΒΚΓ < ΑΚΒ. Ἂν ἦτο ΚΑ ≥ ΚΓ, θὰ ἦτο (ἄσκ. 668, 670) ΒΚΓ ≥ ΑΚΒ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἄρα ΚΑ < ΚΓ.

671.—Τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους ΚΑ, ΚΒ τέμνονται προφανῶς κατά τινα εὐθεῖαν ΚΔ, ἧς πᾶν σημεῖον ἀπέχει ἴσον τῶν ἑδρῶν ΚΑΒ, ΚΑΓ ὡς καὶ τῶν ἑδρῶν ΚΒΑ, ΚΒΓ (ἄσκ. 662)· ἀπέχει ἄρα ἴσον καὶ τῶν ἑδρῶν ΚΑΓ, ΚΒΓ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΚΓ ἐπιπέδου.

672. — Τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ μία τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ π.χ. ἡ ΒΓ ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον Π. Ἐὰν ἡ ΔΕ τέμνῃ τὸ Π εἰς τὸ Ε, ἀχθῇ δὲ ἡ ΑΕ, αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη, ἂν τέμνῃ τὴν ΒΓ.

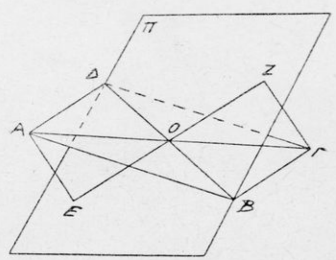


Ἄσκ. 572

Σημ. Ἡ Α Ε ὁρίζεται καὶ ὡς τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΑΔΕ.

673. — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν παράλληλον τῇ χy καὶ τέμνουσαν τὰς ΒΓ,ΔΕ. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΖ παράλληλον τῇ χy· ἐὰν ἡ ΔΕ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν ΒΓ,ΒΖ καὶ ἀχθῇ διὰ τοῦ ἴχνους αὐτῆς Ε εὐθεῖα ΕΗ παράλληλος τῇ ΒΖ, αὕτη θὰ εἶναι προφανῶς ἡ ζητουμένη. Ἐὰν ἡ ΔΕ δὲν τέμνῃ τὸ Π, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

674.—Ἔστω Π ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς διαγωνίου ΒΔ καὶ ΑΕ, ΓΖ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Γ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΕΖΓ τέμνει τὸ Π κατὰ τὴν ΕΖ, περιέχει δὲ καὶ τὸ Ο· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ὡς σημεῖον τῆς ΒΔ κεῖται καὶ εἰς τὸ Π, ἕπεται ὅτι εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν Π καὶ ΑΕΖΓ, κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΕΟ, ΓΟΖ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΑΟ=ΟΓ καὶ ΑΟΕ=ΖΟΓ, ἕπεται ὅτι ΑΕ =ΓΖ.



Ἄσκ. 674

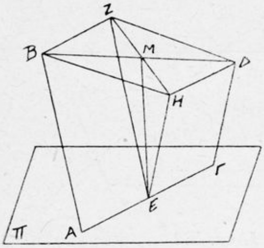
Σημ. Ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΟΕ, ΓΟΖ συνάγεται ἀμέσως ἐκ τῆς ΑΟ=ΟΓ καὶ τῆς ἰσότητος τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ΟΑΕ, ΟΓΖ.

675.— Ἂν τὰ δοθέντα σημεῖα Β, Γ, Δ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ διὰ τοῦ Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ. Ἂν δὲ τὰ Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

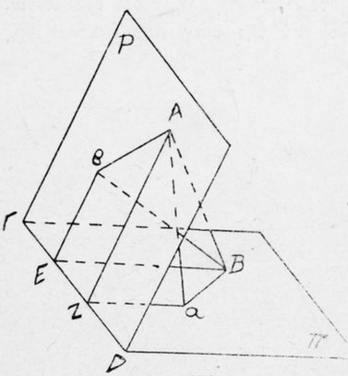
676.— α'. Ἂν τὸ ζ. ἐπίπεδον Π, ὅπερ διέρχεται διὰ δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἀπέχει ἴσον τῶν δοθέντων σημείων Γ, Δ, τέμνει τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Ε, τὸ ἐπίπεδον ΓΗΖΔ τῶν ἐπ' αὐτὸ καθέτων ΓΗ, ΔΖ τέμνει αὐτὸ κατὰ τὴν ΖΗ, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Ε. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΓΕΗ, ΔΖΕ ἔχοντα ΓΗ=ΔΖ καὶ τὰς περὶ τὸ Ε γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα, ἕπεται ΓΕ=ΔΕ. Τὸ ζ. ἐπίπεδον λοιπὸν ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ μέσου Ε τοῦ εὐθ.

τμήματος ΓΔ.— β') Τὸ διὰ τῆς ΑΒ παραλλήλως τῇ ΓΔ διερχόμενον ἐπίπεδον εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

677.— Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, ἤτοι μέσον εὐθ. τμήματος ΒΔ παραλλήλου τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ Π καὶ περιεχομένου μεταξὺ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, αἵτινες τέμνουσι τὸ Π εἰς τὰ σημεῖα Α,Γ. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Ε τοῦ ΑΓ φέρωμεν ΕΖ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ΕΗ ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΓΔ, τὸ ΒΗΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ τὸ Μ μέσον καὶ τοῦ ΖΗ, ὅπερ κείμενον ἐν ἐπιπέδῳ ΒΔΗΖ παραλλήλῳ τῷ Π εἶναι ἐπίσης παράλληλον τῷ Π. Συμπίπτει ἄρα ὁ ζ. τόπος μὲ τὸν τόπον τῶν μέσων εὐθ. τμημάτων ΖΗ παραλλήλων τῷ Π καὶ περιεχομένων μεταξὺ ὡρισμένων εὐθειῶν ΕΖ, ΕΗ. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ἡ διάμεσος ΕΜ τῶν τριγώνων ΖΕΗ, ὧν κορυφὴ τὸ Ε καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πλευραὶ παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ.



Ἄσκ. 677



Ἄσκ. 678

678. — Ἔστω ΑΒ ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας Π, Ρ τῆς διέδρου ΓΔ, ἤτοι ΑΒα = ΒΑϐ Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΒα,ΒΑϐ ἕπεται ὅτι Αα=Βϐ. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ϐΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ΒΕ θὰ εἶναι (§ 280) κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ δὲ γωνία ϐΕΒ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΓΔ. Ὁμοίως ἂν ἀχθῇ ἡ αΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ γωνία ΑΖα ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἄρα γων. ϐΕΒ = γων. ΑΖα, τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα ΒϐΕ, ΑαΖ εἶναι ἴσα, ἄρα ΒΕ= ΑΖ.

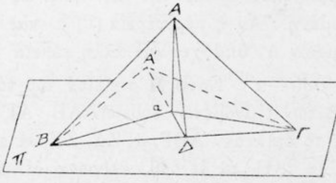
679.— ***Ἐὰν τὰ ἴχνη εὐθείας ἐπὶ τῶν ἑδρῶν διέδρου ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τῆς ἀκμῆς αὐτῆς, αὕτη εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας αὐτῆς.*** Ἐπειδὴ ΒΕ= ΑΖ καὶ Ε= Ζ, τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΒϐΕ, ΑΖα εἶναι ἴσα, ἄρα Βϐ= Αα. Τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα ΒΑβ, ΑΒα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως γων. ϐΑΒ= γων. ΑΒα.

680.— Ἐὰν σημείου Α προβολὴ ἐπὶ τὴν ἕδραν Π εἶναι α, ἐπὶ δὲ τὴν ἕδραν Ρ εἶναι α', τὸ ἐπίπεδον αΑα' κάθετον ἐπὶ τὰς ἕδρας Π καὶ Ρ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ αὐτῶν κάθετον. Ἐὰν δὲ Ε εἶναι ὁ πούς αὐτῆς θὰ εἶναι ἡ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὰς αΕ καὶ α'Ε.

681.— ***Ἐὰν αἱ ἐκ δύο σημείων τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας ἀγόμεναι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς κάθετοι τέμνωσιν αὐτὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὰ σημεῖα ἐκεῖνα εἶναι προβολαὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*** Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ (Σχ. ὡς προηγουμένως) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς αΕ, α'Ε, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αΕα'. Καὶ τὰ ἐπίπεδα δὲ Π καὶ Ρ περιέχοντα τὴν ΓΔ εἶναι ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ αΕα'. Ἐὰν ἄρα ἀχθῶσιν ἐκ τῶν α, α' κάθετοι ἐπὶ τὰ Π, Ρ, αὗται θὰ κεῖνται (§ 308 Πόρ. Ι) ἐν τῷ αΕα' καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ τέμνωνται, διότι ἂν ἦσαν παράλληλοι, τὸ ἐπίπεδον Π θὰ ἦτο καὶ ἐπὶ τὴν α'Ε κάθετον, ἄρα παράλληλον πρὸς τὸ Ρ, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἡ τομὴ δὲ αὐτῶν Α ἔχει προφανῶς προβολὰς α, α'.

682.— Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΓ ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον Π, ἡ προβολὴ αγ αὐτῆς εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ. Ἐπειδὴ αγ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Αα, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Αα· οὖσα δὲ ἡ ΑΓ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑαϐ. Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ αγ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΒΑαϐ ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν αϐ. Ἡ προβολὴ ἄρα ϐαγ τῆς ΒΑΓ εἶναι ὀρθὴ γωνία.

683.—Ἔστω ΒΑΓ ὀρθὴ γωνία καὶ ΒαΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ Π. Ἂν ἀχθῇ ἡ αΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ΑΔ>αΔ. Ἐὰν ἄρα τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ Π διὰ στροφῆς περὶ τὴν ΒΓ καὶ πρὸς ὃ μέρος κεῖται ἡ προβολὴ α, ἡ ΑΔ διαρκῶς μένουσα κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Δα καὶ καὶ τὸ Α πέραν τοῦ α εἰς Α'. Οὕτως ἡ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ χωρὶς νὰ μεταϐληθῇ κατὰ μέγεθος καταλαμϐάνει τὴν θέσιν ΒΑ'Γ· ἐπειδὴ δὲ (§ 72 Πόρ. Ι) εἶναι ΒαΓ>ΒΑ'Γ, ἕπεται ὅτι ΒαΓ>1 ὀρθῆς.



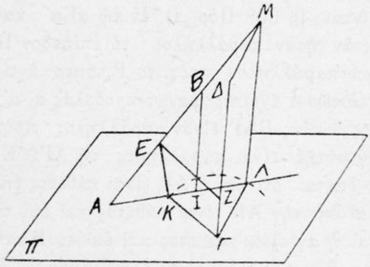
Ἀσκ. 683

Σημ. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ ΑΒα εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π, συνάγομεν ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ ΑΒα πίπτει ἐπὶ τῆς Βα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ αΒΓ εἶναι ἡ κλίσις τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒα· εἶναι ἄρα αΒΓ<ΑΒΓ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι αΓΒ<ΑΓΒ, ἄρα αΒΓ+αΓΒ<1ὀρθ. καὶ ἑπομένως ΒαΓ>1 ὀρθ.

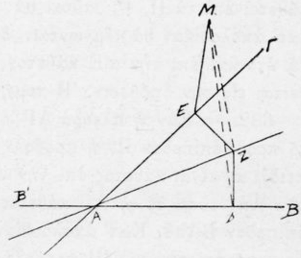
684. ***Ἀνάλυσις.***—Ἔστω ΕΖ εὐθ. τμῆμα ἴσον δοθέντι τ, παράλληλον τῷ Π καὶ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ΑΒ,ΓΔ. Ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ εὐθεῖα ΒΙ παράλληλος τῇ ΓΔ καὶ τέμνουσα τὸ Π εἰς τὸ Ι, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΙ τέμνει τὸ Π κατὰ ὡρισμένην εὐθεῖαν ΑΙ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ε ἀγομένη παράλληλος τῇ ΓΔ εὐθεῖα ΕΚ τέμνει τὸ Π εἴς τι σημεῖον Κ τῆς ΑΙ. Ἐπειδὴ δὲ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῷ Π, αὕτη εἶναι καὶ τῇ τομῇ ΓΚ τοῦ Π

καὶ τοῦ ΚΕΖΓ (§ 286 ἀντ.) κατ' ἀκολουθίαν τὸ σχῆμα ΚΕΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ΓΚ= ΕΖ= τ.

Σύνθεσις. Ὁρισθείσης τῆς ΑΙ μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τ γράφομεν ἐν τῷ Π περιφέρειαν· ἔστω δὲ Κ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τῆς ΑΙ. Ἄγομεν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον τῇ ΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε, ἐξ οὗ ἄγομεν



Ἄσκ. 684



Ἄσκ. 685

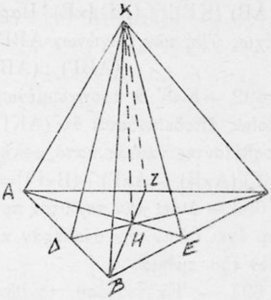
παράλληλον τῇ ΚΓ τὴν ΕΖ, ἥτις, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἂν ἡ περιφέρεια (Γ, τ) καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΙ ἔχωσι καὶ ἄλλο κοινον σημεῖον Λ, ὑπάρχει καὶ ἄλλη εὐθεῖα ΜΔ ὁμοίως ὁριζομένη.

685—α') Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ τόπου, οὗ δηλ. αἱ ἀποστάσεις ΜΔ, ΜΕ ἀπὸ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ εἶναι ἴσαι. Ἂν ΜΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, αἱ ΖΔ, ΖΕ θὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΑΓ (§ 281), τὰ δὲ ὀρθ. τρίγωνα ΜΖΔ, ΜΖΕ ἔχοντα τὴν ΜΖ κοινὴν καὶ ΜΔ= ΜΕ εἶναι ἴσα· ἄρα ΖΔ= ΖΕ. Ἡ ΑΖ διχοτομεῖ ὅθεν τὴν ΒΑΓ, τὸ δὲ ἐπίπεδον ΜΑΖ τέμνει τὸ ΒΑΓ κατὰ τὴν ΑΖ καθέτως. Ἐὰν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἐπειδὴ ΖΔ= ΖΕ, ἕπεται ὅτι ΜΔ= ΜΕ, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει καθέτως τὸ ΑΒΓ καὶ κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς Β'ΑΓ ἀποτελεῖ μέρος τοῦ τόπου. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ρηθέντων καθέτων ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπιπέδων. β') Ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἐργαζόμενοι ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ὁ ζ. τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει καθέτως τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν τούτων κατὰ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἀπέχει ἴσον ἀπ' αὐτῶν.

686.— Τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως τὰς ἕδρας ΑΚΒ, ΒΚΓ (Σχ. 225) τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν Κκ. Πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἴσον τῶν ἀκμῶν ΚΑ, ΚΒ ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀπὸ τῶν ΚΒ, ΚΓ ἀφ' ἑτέρου (ἄσκ. 685)· ἄρα ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΚΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ἕδραν ΑΚΓ.

687. — Ἂν ληφθῶσι ΚΑ= ΚΒ= ΚΓ, τὰ τρίγωνα ΑΚΒ, ΒΚΓ εἶναι

ἰσοσκελῆ καὶ αἱ διχοτόμοι ΚΔ, ΚΕ, τῶν γωνιῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ διέρχονται διὰ τῶν μέσων Δ, Ε τῶν ΑΒ, ΒΓ. Αἱ ΑΕ, ΓΔ εἶναι λοιπὸν διάμεσοι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Η, τὰ δὲ ἐπίπεδα ΓΚΔ, ΑΚΕ τέμνονται κατὰ τὴν ΚΗ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΗΖ εἶναι ἡ τρίτη διάμεσος τοῦ ΑΒΓ, τὸ Ζ εἶναι μέσον τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΚΖ διχοτόμος τῆς ΑΚΓ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον ΒΚΖ περιέχον τὸ Κ καὶ Η διέρχεται διὰ τῆς ΚΗ.

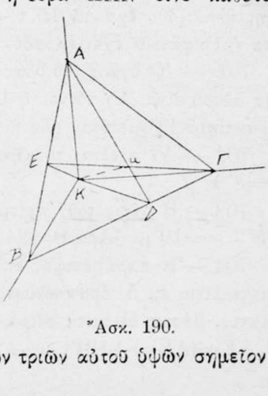


Ἄσκ. 687.

688.— Ἔστωσαν ΑΚΕ, ΓΚΔ ἐπίπεδα κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἕδρας ΒΚΓ, ΑΚΒ. Ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΕΓ κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΚΕ τῶν καθέτων ἐπιπέδων ΑΚΕ,ΒΚΓ, αὕτη θὰ κεῖται ἐν τῷ ΒΚΓ καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεπεδον ΑΚΕ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ὁμοίως ἡ ΒΔΑ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΓΚΔ καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Εἶναι λοιπὸν ΑΕ καὶ ΓΔ ὕψη τοῦ ΑΒΓ καὶ ἔχουσιν κοινὸν σημεῖον Η, τὰ δὲ ΑΚΕ, ΓΚΔ τέμνονται κατὰ τὴν ΚΗ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ, ὡς τομὴ τῶν ἐπ᾽ αὐτὸ καθέτων ἐπιπέδων ΑΚΕ, ΓΚΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΗΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, καὶ ἡ ΚΖ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἥτις διὰ τοῦτο εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΒΚΖ. Τὸ δὲ ἐπίπεδον ΑΚΓ περιέχον τὴν ΑΓ εἶναι καὶ αὐτὸ κάθετον ἐπὶ τὸ ΒΚΖ, ὅπερ διέρχεται διὰ τῆς ΚΗ.

689. —α΄. Ἔστω ὅτι ἡ δίεδρος ΚΜ (Σχ. 226) τῆς στερεᾶς γωνίας Κ.ΔΜΝ εἶναι ὀρθὴ δίεδρος καὶ ΔΜΝ τομὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΜ. Ἡ γωνία ΔΜΝ ὡς ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν ὀρθὴν δίεδρον ΚΜ εἶναι ὀρθή. β΄) Ἂν ΔΜΝ εἶναι τομὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΚΔΜ, ἥτις περιέχει τὴν ΚΔ Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ ἕδρα ΚΜΝ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔΜ,ἕπεται ὅτι ἡ τομὴ ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔΜ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν ΜΔ. Ἡ γωνία ἄρα ΔΜΝ εἶναι πάλιν ὀρθή.

690.— Ἔστω ΑΒΓ τυχοῦσα τομὴ τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Κ.ΑΒΓ καὶ κ ἡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ὀρθὴ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ. Ἐπειδὴ τὸ ΑΚκ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΒΚΓ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΑκΚ,ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑκΔ. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓκΕ. Εἶναι λοιπὸν ΑΔ, ΓΕ ὕψη τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ κ κοινὸν καὶ τῶν τριῶν αὐτοῦ ὑψῶν σημεῖον.



Ἄσκ. 190.

691.—Τοῦ τριγώνου ΓΚΕ ὄντος ὀρθογωνίου εἰς τὸ Κ εἶναι $(ΚΕ)^2=(ΓΕ)(κΕ)$, ὅθεν ΓΕ:ΚΕ=ΚΕ:κΕ, ὅθεν $^1/_2(ΑΒ)$ (ΓΕ):$^1/_2$ (ΑΒ)(ΚΕ)= $^1/_2(ΑΒ)$ (ΚΕ):$^1/_2(ΑΒ)(κΕ)$. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΓΕ, ΚΕ, κΕ, εἶναι ἀντιστοίχως ὕψη τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΚΒ, ΑκΒ συμπεραίνομεν ὅτι

$$(ΑΒΓ) : (ΑΒΚ) = (ΑΒΚ) : (ΑκΒ).$$

692.—Καθ' ἃ προηγουμένως ἀπεδείχθη εἶναι $(ΑΚΒ)^2 = (ΑΒΓ)(ΑκΒ)$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $(ΑΚΓ)^2=(ΑΒΓ)(ΑκΓ)$ καὶ $(ΒΚΓ)^2=(ΑΒΓ)(ΒκΓ)$. Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $(ΑΚΒ)^2+(ΑΚΓ)^2+(ΒΚΓ)^2=(ΑΒΓ)[(ΑκΒ)+(ΑκΓ)+(ΒκΓ)]=(ΑΒΓ)^2$.

693.—Διότι πᾶν τοιοῦτον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθὸν πρίσμα, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν σταθερὰν κάθετον τομὴν αὐτοῦ καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

694.— Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΔΒΖ (Σχ. 235) προκύπτει ὅτι $(ΔΖ)^2 = (ΔΒ)^2+(ΒΖ)^2=(ΔΒ)^2+(ΔΘ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΔΒΓ εἶναι $(ΔΒ)^2 = (ΔΓ)^2 + (ΒΓ)^2 = (ΔΓ)^2 + (ΔΑ)^2$, ἕπεται ὅτι $(ΔΖ)^2 = (ΔΓ)^2+(ΔΑ)^2+(ΔΘ)^2$

695.—α') Διότι τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἴσα κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα. β') Αἱ διαγώνιοι ΔΖ, ΒΘ (Σχ. 235) εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΔΒΖΘ κτλ.

696.—Ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα (ἀσκ. 694) παρατηροῦντες ὅτι διὰ τὸν κύβον εἶναι ΔΓ=ΔΑ=ΔΘ.

697.—Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $δ^2=3α^2=3.2^2$, ἄρα $δ=2\sqrt{3}$.

698.—Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $5^2 = 3α^2$, ὅθεν $α = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

699.—Ἐάν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς, θὰ εἶναι $6α^2=54$, ὅθεν $α^2=9$, ἄρα $δ^2= 3.9$ καὶ $δ=3\sqrt{3}$ μέτρα.

700.—Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι (§ 333) 3.4.5=60 κυβ. μέτρα. β'.) Δύο ἕδραι αὐτοῦ ἔχουσαι διαστάσεις $3^μ$ καὶ $4^μ$ ἔχουσιν ἐμβαδὸν 12 τ. μ. ἑκάστη, ἄλλαι δύο ἔχουσιν 15 τ. μ, ἑκάστη καὶ ἄλλαι δύο ἀνὰ 20 τ. μ. Ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν 12+15+20=47 τ. μ.

701. — Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι 3.2.2,5=15 κυβ. μέτρα. Τὸ βάρος ἄρα αὐτοῦ εἶναι 15 τόννοι ἢ 15000:1,28 = 11718 ὀκάδ. 300 δράμ. (Ὅρα Πρακτικὴν Γεωμετρίαν μου § 134 ἔκδοσις Δ'),

702.—Ἂν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς του, θὰ $6α^2=24$, ἄρα α=2 καὶ Θ=8 κ. μ.

703.—Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδὸν 24 τ. μ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι $\sqrt{6^2+8^2}=10$ μ. Ἄρα Θ=24.10=240 κυβ. μέτρα.

704.—Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΕΘ (Σχ. 239) ἀποτελεῖται ἐκ 5 ὀρθογωνίων, ὧν ἕκαστον ἔχει ὕψος τὸ ὕψος υ τοῦ πρίσματος, βάσεις δὲ κατὰ σειρὰν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,.., ΕΑ. Εἶναι ἄρα

$$Ε=(ΑΒ).υ+(ΒΓ).υ+....+(ΕΑ)υ = [(ΑΒ)+(ΒΓ)+...+(ΕΑ)].υ.$$

705. - ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας..*** Ἐὰν ΑΘ (Σχ.233) εἶναι πλάγιον πρίσμα καὶ αβγδε κάθετος αὐτοῦ τομή, αἱ πλευραὶ αβ,βγ,γδ,δε,εα αὐτῆς εἶναι κατὰ σειρὰν ὕψη τῶν παραλληγράμμων ΑΒΗΖ, ΒΓΘΗ,ΓΔΙΘ, ΔΕΚΙ,ΑΕΚΖ. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι Ε= (ΑΖ)(αβ)+(ΒΗ)(βγ)+,...+(ΑΖ)(αε)=(ΑΖ). [(αβ)+(βγ)+.... +(αε)].

706.—α'.Ἐπειδὴ (ἄσκ. 323) τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $\frac{2,5^2\sqrt{3}}{4}$, ἔπεται ὅτι $Θ=\frac{(2,5)^3\sqrt{3}}{4}=3,90625\sqrt{3}$ κυβ. μέτρα, .β') Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶναι $Ε=2.\frac{(2,5)^2\sqrt{3}}{4}+2,5(3.2,5)=(2,5)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)=$ $\frac{6,25}{2}(6+\sqrt{3})=3,125\ (6+\sqrt{3})$ τ. μ.

707. Ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ἔχει ὕψος $\sqrt{0,5^2-0,15^2}=0,476$ μ. καὶ ἐμβαδὸν 0,15. 0,476= 0,0714 τ. μ. Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ πρίσματος εἶναι 0,0714. 0,35 κυβ. μέτρα, τὸ δὲ βάρος 0,0714. 0,35. 7,78 τόννους.

708.— Ἂν α ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, θὰ εἶναι $\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}.υ=1,44$ καὶ $6αυ=4,8\sqrt{3}$. Διαιροῦντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{3α^2\sqrt{3}}{12α}=\frac{1,44}{4,8\sqrt{3}}$, ὅθεν $α=0,4$. Ἐκ δὲ τῆς $6αυ=4,8\sqrt{3}$ εὑρίσκομεν $υ=2\sqrt{3}$ μέτρα.

709.— ***Ἀνάλυσις.*** Ἂν τὰ ζητούμενα διὰ τῆς ΓΙ (Σχ. 232) ἐπίπεδα τέμνωσι τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Λ, Κ, θὰ εἶναι (ΒΚΓ).(ΓΙ)=(ΚΓΛ)(ΓΙ)= (ΑΓΛ)(ΓΙ), ὅθεν ἕπεται ὅτι (ΒΓΚ)=(ΚΓΛ)=(ΑΓΛ). Πρέπει ἄρα τὸ ΑΒΓ νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα διὰ τῶν ΓΚ,ΓΛ (ἄσκ. 301).

710.—Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $(0,4\times0,28):2=0,056$ τ. μ. Ὁ ὄγκος ἄρα εἶναι 0,056.1,2=0,0672 κυβ. μέτρα.

711.—Ἐὰν α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς, θὰ εἶναι $(α+1)^3-α^3=19$, ὅθεν $3α^2+3α-18=0$ καὶ $α=2^μ$, ἄρα $Θ=2^3=8$ κυβ. μέτρα.

712.—Τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 240) οὔσης κανονικῆς ἡ βάσις ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἔχον κέντρον τὸν πόδα Η τοῦ ὕψους ΚΗ. Εἶναι ἄρα ΗΑ = ΗΒ = ... =ΗΖ καὶ ἑπομένως (§ 277) εἶναι ΚΑ = ΚΒ=...=ΚΖ, ἤτοι τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ,... ΚΑΖ εἶναι πάντα ἰσοσκελῆ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ΑΒ=ΒΓ=...=ΑΖ ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι καὶ ἴσα.

713.—α') Ἂν τὸ Κ.ΑΒΓ (Σχ. 240) εἶναι κανονικόν, κατὰ τὸν ὁρισμὸν (§ 336) θὰ εἶναι ὅλαι αἱ ἕδραι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἡ βάσις ΑΒΓ, ἰσόπλευρον τρίγωνον. Καὶ αἱ ἄλλαι ἄρα ἕδραι, ὡς ἴσαι τῇ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἄρα ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ=ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ. β') Ἂν ΚΛ εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ Λ εἶναι κέντρον τοῦ ΑΒΓ καὶ $α=(ΑΛ)\sqrt{3}$, ἄρα $(ΑΛ)=\frac{α\sqrt{3}}{3}$. Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΚΛΑ προκύπτει ὅτι $(ΚΛ)^2=α^2-\frac{3α^2}{9}=\frac{6α^2}{9}$, ὅθεν $(ΚΛ)=\frac{α}{3}\sqrt{6}$.

714. — Γνωρίζομεν (§337) ὅτι $\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(AB\Gamma\Delta)}=\left(\frac{K\lambda}{K\Lambda}\right)^2$ καὶ $\frac{K\lambda}{K\Lambda}=\frac{K\alpha}{KA}$ (Σχ. 241). Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ εἶναι $(\alpha\beta\gamma\delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι $\left(\frac{K\alpha}{KA}\right)^2=\frac{1}{2}$, ὅθεν $(K\alpha)=(KA)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

715.—Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 337) εἶναι $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(\alpha\beta\gamma\delta)}=\left(\frac{KA}{K\alpha}\right)^2=\frac{9}{4}$ (Σχ. 241).

716.—Ἐὰν κληθῇ ε τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, θὰ εἶναι (§ 337) $\frac{\varepsilon}{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ὅθεν $\varepsilon=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$ τ. μ.

717.—Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 54 τ.μ., τὸ δὲ ὕψος $\sqrt{81+144}=15^{\mu}$. Ἄρα ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{1}{3}.\ 54.15=270$ κυβ. μέτρα.

718. — Προφανῶς (Σχ. 240) εἶναι $(AH)=(AB)=6^{\mu}$ καὶ $(KH)=\sqrt{10^2-6^2}=8^{\mu}$. Ἐπειδὴ δὲ $(AB\Gamma\Delta EZ)=\frac{3.6^2\sqrt{3}}{2}$, ἕπεται ὅτι $\Theta=\frac{1}{3}.\ \frac{3.36\sqrt{3}}{2}.\ 8=144\sqrt{3}$ κυβ. μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι $(AB\Gamma\Delta EZ)+6(KAB)$. Ἐὰν δὲ (ΚΛ) εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (ΚΑΒ), θὰ $(K\Lambda)=\sqrt{10^2-3^2}=\sqrt{91}$, ἑπομένως εἶναι $(KAB)=3\sqrt{91}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $E=\frac{3}{2}36\sqrt{3}+18\sqrt{91}=(54\sqrt{3}+18\sqrt{91})$τ.μ.

719.—Κατὰ τὰ γνωστὰ εἶναι $\frac{1}{3}(1{,}5)^2.\upsilon=0{,}9$, ὅθεν $\upsilon=\frac{2{,}7}{2{,}25}=1{,}2$ μ.

720.—Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, τὸ δὲ ὕψος τοῦ τετραέδρου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$(ἄσκ. 713). Ἄρα $\Theta=\frac{1}{3}.\ \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\ \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$.

721.—Κατὰ τὸν τύπον (3, § 186) τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $\sqrt{4{,}5.2{,}5.1{,}5.0{,}5}=\sqrt{8{,}4375}$. Ἄρα $\Theta=\frac{1}{3}.\ 5.\sqrt{8{,}4375}$ κ. μ. Ἂν δὲ α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ ἰσοδυνάμου κύβου, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha^3=\frac{1}{3}.\ 5.\sqrt{8{,}4375}$, ὅθεν $3\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 5+\frac{\lambda o\gamma 8{,}4375}{2}-\lambda o\gamma 3$, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὸν λογα καὶ εἶτα τὸν α.

722.—Βλέπε ἄσκ. 709.

723. — Τὰ ἐμβαδὰ τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι $\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ καὶ $\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

$$\text{Ἄρα } \Theta=\frac{1}{3}\left(\frac{9.\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}+\sqrt{\frac{9.3}{4}}\right).2=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)2=\frac{19\sqrt{3}}{6}\text{κ.μ.}$$

724. — Τὰ ἐμβαδὰ εἶναι $7{,}5^2=56{,}25$ καὶ $5^2=25$, ἄρα $\Theta=\frac{5}{3}(56{,}25+25+\sqrt{56{,}25.25})=\frac{5}{3}(56{,}25+25+7{,}5.5)=197{,}91\ldots$, κ. μ.

725. — Προφανῶς εἶναι $\beta:B=\rho^2$, ὅθεν $\beta=B\rho^2$ καὶ $\Theta=\frac{1}{3}(B+B\rho^2+\sqrt{B^2\rho^2})\upsilon=\frac{1}{3}B(1+\rho+\rho^2)$

726.—Ἐπειδὴ ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{0,70^2\sqrt{3}}{4}$τ.μ.,ἕπεται (§ 344 Πόρ. I) ὅτι $\Theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{0,70^2\sqrt{3}}{4}\cdot(1+2+2,50) = \frac{0,49.1,375\sqrt{3}}{3}$ κ. μ.

727.—Ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τῆς τομῆς εἶναι $\sqrt{0,5^2-0,3^2}=0,4^{\mu}$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $0,4.0,3:2=0,06$ τ. μ. Ἄρα $\Theta = \frac{1}{3}\cdot 0,06\ (2+4+6)=0,24$ κ. μ.

728.— Κατὰ τὸ Πόρ. I (§ 350) ὁ κύβος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $2^3=8$.

729.—Ἂν κληθῇ α ἡ ζητουμένη ἀκμή, θὰ εἶναι $\alpha^3=3.3^3$, ὅθεν $\alpha=3\sqrt[3]{3}$.

730.— Ἂν π. χ. εἶναι (K. α′β′γ′δ′) = (ΑΒΓΔ α′β′γ′δ′) (Σχ. 252), θὰ εἶναι καὶ 2(K. α′β′γ′δ′) = (K. ΑΓΒΔ), ὅθεν (K. ΑΒΓΔ) : (K. α′β′γ′δ′) = 2. Ἐπειδὴ δὲ (§ 349) (K. ΑΒΓΔ) : (K. α′β′γ′δ′) = $\left(\frac{K\Lambda}{K\alpha'}\right)^3$, ἕπεται ὅτι $\left(\frac{K\Lambda}{K\alpha'}\right)^3 = 2$, ὅθεν $(K\Lambda) = \frac{(K\Lambda)}{2}\sqrt[3]{4}$.

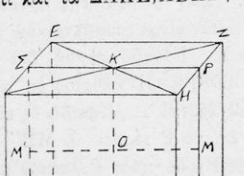
731.—Ἔστωσαν $E_1, E_2, E_3, \ldots E_\nu$ αἱ ἕδραι τοῦ ἑνός, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\nu$ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοίχως ὅμοιαι ἕδραι τοῦ ἄλλου καὶ α, α′ δύο ὁμόλογοι ἀκμαί. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι σταθερός, κατὰ τὸ Θεώρ. (§ 219) εἶναι $\frac{E_1}{\varepsilon_1}=\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2, \frac{E_2}{\varepsilon_2}=\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2, \ldots, \frac{E_\nu}{\varepsilon_\nu}=\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^2$, ὅθεν εὐκόλως $(E_1+E_2+\ldots+E_\nu):(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_\nu)=\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}$.

732.—Ἐὰν αβγδ εἶναι ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος, θὰ εἶναι (§ 349) $\frac{(K.AB\Gamma\Delta)}{5^3} = \frac{(K.\alpha\beta\gamma\delta)}{3^3} = \frac{(K.AB\Gamma\Delta)-(K,\alpha\beta\gamma\delta)}{5^3-3^3} = \frac{\chi}{98}$ ὅθεν $\chi = \frac{48}{125}\cdot 98 = 37,632$ κ. μ,

733.—Ἐὰν x, y, ω εἶναι αἱ πρὸς τὰς 2,3,4 ὁμόλογοι διαστάσεις, ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τούτου πρὸς τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον, ὅπερ ἔχει διαστάσεις 2,3,4, θὰ εἶναι $\chi^3:8=192:24$, ὅθεν $\chi^3=64$ καὶ $\chi=4^{\mu}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $y=6,^{\mu}$ $\omega=8^{\mu}$.

Σημ.—Αἱ διαστάσεις ἔχουσι μορφὴν 2λ,3λ,4λ. Ἐπειδὴ 2λ.3λ,4λ.=192. ἕπεται ὅτι $24\lambda^3=192$, ὅθεν λ=2 καὶ αἱ διαστάσεις εἶναι 4,6,8 μέτρα.

734.—Ἔστω ΚΛ τοιαύτη εὐθεῖα. Ἐπειδὴ τὰ σχήματα ΒΔΕΗ,ΑΓΖΘ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ΚΛ, τὰ μέσα ἀντικειμένων πλευρῶν ἑκατέρου ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ΔΛΚΕ,ΛΒΗΚ, ΑΛΚΘ,ΛΓΖΚ εἶναι ὀρθογώνια, ἡ δὲ ΚΛ παράλληλος πρὸς τὰς ΔΕ,ΒΗ,ΑΘ,ΓΖ ἄρα καὶ πρὸς τὰς ἕδρας ΑΒΗΘ,ΔΓΖΕ,ΑΔΕΘ,ΒΓΖΗ, ἐν ᾧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒΓΔ,ΕΖΗΘ. Τῶν κορυφῶν Β,Γ,Ζ,Η συμμετρικὰ πρὸς ΚΛ εἶναι προφανῶς αἱ κορυφαὶ Δ,Α,Θ,Ε τῆς ἀπέναντι ἕδρας ΑΔΕΘ, ἤτοι εἶναι προφανῶς αἱ κορυφαὶ Δ,Α,Θ,Ε τῆς ἀπέναντι ἕδρας ΑΔΕΘ, ἤτοι εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ σχήματος. Ἐὰν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ἕδρας ΒΓΖΗ, τὸ ἐπίπεδον ΜΚΛ τέμνει τὰς ἕδρας ΒΓΖΗ, ΑΔΕΘ κατὰ εὐθείας ΦΜΡ,ΤΣ παραλλήλους τῇ ΚΛ,

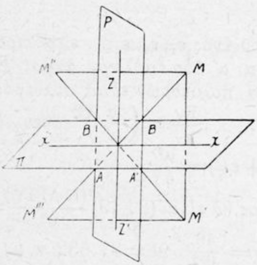


Ἀσκ. 734.

ἄρα καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΒΓΔ, ΘΗΖΕ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ ΣΡΦΤ εἶναι ὀρθογώνιον περιέχον καὶ τὴν ΜΟΜ΄ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ. Ἐκ δὲ τῶν ΜΟ= ΚΡ, Μ΄Ο=ΣΚ καὶ ΣΚ=ΚΡ, (ἄσκ. 122) ἕπεται ὅτι ΜΟ=ΟΜ΄, ἤτοι τὸ Μ΄ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς ΚΛ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ συμμετρικὸν πρὸς ΚΛ παντὸς ἄλλου σημείου τοῦ σχήματος ΑΖ κεῖται ἐπὶ τοῦ ΑΖ.

735.—Ἐὰν ΔΕΖΑΒΓ (Σχ. 232) Π,Π΄ εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ συμμετρικὰ τοῦ ΔΕΖΗΘΙ πρὸς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ ΔΕΖ, πρὸς τυχὸν κέντρον συμμετρίας καὶ πρὸς τυχὸν ἄλλο ἐπίπεδον συμμετρίας, θὰ εἶναι ΔΕΖΑΒΓ=Π καὶ ΔΕΖΑΒΓ=Π΄ (§ 353 Πόρ. ΙΙ, § 354) Ἐπειδὴ δὲ (§ 325) εἶναι καὶ ΔΕΖΑΒΓ=ΔΕΖΗΘΙ, ἕπεται ὅτι ΔΕΖΗΘΙ=Π=Π΄.

736 —Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο ἐπίπεδα συμμετρίας σχήματος Σ καθέτως τεμνόμενα κατὰ τὴν ΑΒ καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ Σ, Μ΄ τὸ πρὸς Π συμμετρικὸν αὐτοῦ, ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι σημεῖον τοῦ Σ. Ἐὰν διὰ τοῦ ποδὸς Γ τῆς ΜΜ΄ ἀχθῇ κάθετος ΓΟ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΜΟ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἥτις εἶναι κατ᾿ ἀκολουθίαν κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΜΓ, ἡ δὲ τομὴ ΟΓ τοῦ Π καὶ ΟΜΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ (§ 308 Πόρ. ΙΙ). Ἐὰν ἤδη ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΜΟ τμῆμα ΟΜ΄΄΄=ΟΜ, τὸ Μ΄΄΄ θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς ΑΒ. Ἐπειδὴ δὲ Ο,Γ εἶναι μέσα τῶν ΜΜ΄΄΄ καὶ ΜΜ΄, ἡ Μ΄΄΄Μ΄ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΓ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν κάθετος ἐπὶ τό Ρ. Ἐκ δὲ τῶν ΟΜ=ΟΜ΄, ΟΜ= ΟΜ΄΄΄ προκύπτει ὅτι ΟΜ΄΄΄=ΟΜ΄, ἄρα τὸ Ρ τέμνει τὸ Μ΄΄΄Μ΄ καὶ δίχα. Ὥστε τὸ Μ΄΄΄ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ΄ πρὸς Ρ, ἄρα σημεῖον τοῦ Σ. Εἶναι λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἄξων συμμετρίας τοῦ Σ.



Ἄσκ. 736·

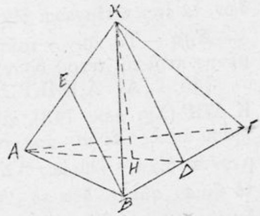
737.— Ἔστωσαν Π καὶ ΑΒ ἐπίπεδον καὶ ἄξων συμμετρίας σχήματος Σ. Τὸ πρὸς Π συμμετρικὸν Μ΄ σημείου Μ τοῦ Σ εἶναι σημεῖον τοῦ Σ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΓΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ Μ΄Ο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΜΜ΄. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΟΜ΄ ληφθῇ ΟΜ΄΄ =ΟΜ΄, τὸ Μ΄΄ θὰ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ΄ πρὸς ΑΒ καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν σημεῖον τοῦ Σ. Ἐὰν ἤδη ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὸ Π, θὰ εἶναι (§ 308) ἡ ΟΓ κάθετος ἐπ᾿ αὐτὸ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ ΜΜ΄΄ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ΟΜ΄΄=ΟΜ, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἕπεται ὅτι τὸ Ρ τέμνει τὸ ΜΜ΄΄ καὶ δίχα, ἤτοι τὸ Μ΄΄ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς Ρ. Τὸ πρὸς Ρ λοιπὸν συμμετρικὸν τυχόντος σημείου Μ τοῦ σχήματος Σ εἶναι σημεῖον τοῦ Σ. Εἶναι ἄρα τὸ Ρ ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ Σ.

738.— Ἔστω Θ ὁ ὄγκος καὶ ΔΕΖ κάθετος τομὴ πρίσματος ΑΒΓΗΘΙ (Σχ. 232). Ὡς γνωστὸν (§ 327, 335) εἶναι Θ=(ΔΕΖ) (ΙΓ). Ἡ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετος ΔΚ εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΓΙΘ κάθετος καὶ δηλοῖ τὴν ἀπὸ ταύτης ἀπόστασιν τῆς ἀκμῆς ΑΗ. Ἐπειδὴ δὲ $(\Delta EZ)=\frac{1}{2}(EZ)(\Delta K)$, ἕπεται ὅτι $\Theta=\frac{1}{2}(EZ)(\Delta K)(\Gamma I)$. Ἀλλὰ τῆς ΓΙ οὔσης καθέτου ἐπὶ τὴν ΕΖ, εἶναι $(EZ)(\Gamma I)=(B\Gamma I\Theta)$ καὶ ἑπομένως $\Theta=\frac{1}{2}(B\Gamma I\Theta)\,\Delta K)$.

739.— Ἐὰν $(A\Gamma)=0{,}32^{\mu}$, $(AB)=0{,}24^{\mu}$ καὶ ΑΔ ἡ πλευρά, ἥτις ἔχει μῆκος $0{,}85^{\mu}$ καὶ προβολὴν $(A\Theta)=0{,}40^{\mu}$ ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι $(\Delta\Theta)=\sqrt{0{,}85^2-0{,}40^2}=0{,}75^{\mu}$. Ἄρα $\Theta=(AB\Gamma).0{,}75=\frac{1}{2}.0{,}24\,.\,0{,}32\,.\,0{,}75=0{,}0288$ κυβ. μέτρα.

740.— Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὄντος ὀρθογωνίου εἶναι $(AB\Gamma)=6$ τ.μ. καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\Theta=2.\,2{,}20=4{,}4$. κ.μ.

741 α'.— Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΒΓ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἴσα καὶ ἕκαστον ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Τὰ δὲ ΚΑΒ, ΚΑΓ ἔχοντα ΑΒ $=$ ΑΓ, ΚΒ $=$ ΚΓ καὶ τὴν ΚΑ κοινὴν εἶναι ἴσα. Ἄρα εἶναι $E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.2+2(ABK)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+(KA)(BE)$, ἐὰν ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ. Ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, αἱ ΑΔ, ΚΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἑπομένως ἡ γωνία ΚΔΑ εἶναι 60° καὶ ἐπειδὴ $A\Delta=K\Delta=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, τὸ ΑΚΔ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἄρα $AK=A\Delta=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καὶ $(BE)=\sqrt{\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{16}}=\frac{\alpha}{4}\sqrt{13}$.



Ἄσκ. 741.

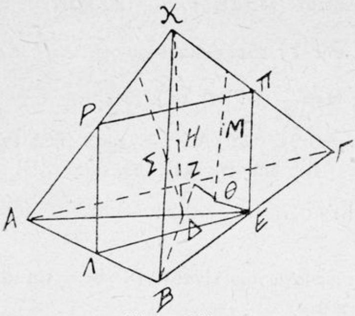
Ἄρα $E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha^2}{8}\sqrt{13}\sqrt{3}=\frac{\alpha^2}{8}(4+\sqrt{13})\sqrt{3}$.

β'. Τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΔ ὄντος καθέτου ἐπὶ τὸ ΑΒΓ, ἡ ΚΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ εἶναι ὕψος τῆς πυραμίδος. Ἄρα $(K.\,AB\Gamma)=\frac{1}{3}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.(KH)$. Ἐπειδὴ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΗΔ ἡ Δ εἶναι $60^{\circ}=2.HK\Delta$, ἕπεται ὅτι $H\Delta=\frac{K\Delta}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$, ἄρα $(KH)=\sqrt{(K\Delta)^2-(H\Delta)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{16}}=\frac{3}{4}\frac{\alpha}{}$. Ἄρα $(K.AB\Gamma)=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3\alpha}{4}=\frac{\alpha^3\sqrt{3}}{16}$.

742.— α'. Ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $2\rho^2\sqrt{2}$ (§ ἀσκ. 542). Ἄρα $\Theta=2\rho^2\sqrt{2}\cdot\rho\sqrt{2}=4\rho^3$.

β'. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων καὶ ὀκτὼ παραπλεύρων ὀρθογωνίων, ὧν ἕκαστον ἔχει βάσιν $\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}$ καὶ ὕψος $\rho\sqrt{2}$. Ἄρα εἶναι $E=4\rho^2\sqrt{2}+8\rho\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\rho\sqrt{2}=4\rho^2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2-\sqrt{2}})$.

743.—Τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους ΚΑ, ΚΒ ἐπίπεδα ΑΚΕ, ΒΚΖ τέμνονται προφανῶς κατὰ τὴν ΚΔ. Τὸ δὲ τὴν δίεδρον ΑΒ διχοτομοῦν τέμνει αὐτὴν εἴς τι σημεῖον Η, ὅπερ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου· κεῖται ἄρα καὶ ἐπὶ τῶν διχοτομούντων τὰς ἄλλας διέδρους ἐπιπέδων.



Ἄσκ. 743.

Σημ. Τὸ Η εἶναι κέντρον σφαίρας ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον.

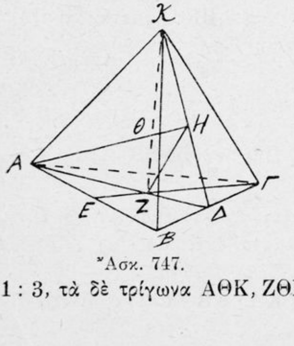
744.—Τὰ δίχα καὶ καθέτως τὰς ἀκμὰς ΑΓ, ΒΓ τέμνοντα ἐπίπεδα τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν ΘΜ, ἧς πᾶν σημεῖον ἀπέχει ἴσον τῶν Α καὶ Γ ὡς καὶ τῶν Γ, Β, ἄρα καὶ τῶν Α, Β· κεῖται ἄρα καὶ ἐπὶ τοῦ τὴν ΑΒ δίχα καὶ καθέτως τέμνοντος ἐπιπέδου. Τὸ τὴν ΚΓ δίχα καὶ καθέτως τέμνον ἐπίπεδον τέμνει τὴν ΘΜ εἴς τι σημεῖον Μ, ὅπερ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλων τῶν κορυφῶν. Κεῖται ἄρα καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουσι δίχα καὶ καθέτως καὶ τὰς ἄλλας ἀκμάς.

Σημ.—Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον Μ εἶναι κέντρον σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον).

745. Ἂν Λ, Ε, Π, Ρ, Σ, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ (Σχ. ἀσκ. 743), αἱ ΛΕ, ΠΡ εἶναι παράλληλοι τῇ ΑΓ καὶ ἑκατέρα τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Εἶναι ἄρα τὸ ΛΕΠΡ παραλλλόγραμμον καὶ αἱ ΛΠ, ΡΕ τέμνονται δίχα. Ὁμοίως ΛΣ καὶ ΠΖ εἶναι παράλληλοι τῇ ΚΑ καὶ ἑκατέρα τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἄρα τὸ ΛΖΠΣ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ αἱ ΛΠ, ΣΖ διχοτομοῦνται. Τὸ μέσον ἄρα τῆς ΛΠ εἶναι μέσον καὶ ἑκατέρας τῶν ΡΕ, ΣΖ.

746 Κατὰ τὴν ἄσκ. 744 περὶ τὸ τετράεδρον Κ.ΑΒΓ περιγράφεται σφαῖρα, ἔστω δὲ Μ τὸ κέντρον αὐτῆς καὶ ΜΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ, εἶναι καὶ ΑΘ=ΘΒ=ΘΓ, ἤτοι τὸ Θ εἶναι κέντρον τῆς περὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ περιγεγραμμένης περιφερείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ Μ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἄλλας ἕδρας διέρχονται διὰ τῶν ἀντιστοίχων κέντρων τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν.

747.—Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων ΑΔ, ΓΕ τῆς ἕδρας ΑΒΓ καὶ Η τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων τῆς ἕδρας ΒΚΓ, ὧν μία ἡ ΚΔ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΚΔ περιέχει προφανῶς τὰς εὐθείας ΑΗ καὶ ΚΖ, ὧν ἡ ΚΖ συνδέουσα τὰ Κ, Ζ, ἑκατέρωθεν τῆς ΑΗ κείμενα τέμνει τὴν ΑΗ εἴς τι σημεῖον Θ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 108) ΔΖ : ΔΑ = 1:3=ΔΗ:ΔΚ, ἕπεται (§ 210) ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΚΑ καὶ ΖΗ : ΚΑ= 1 : 3, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΘΚ, ΖΘΗ εἶναι ὅμοια· ἄρα ΖΘ : ΘΚ = ΘΗ : ΑΘ =

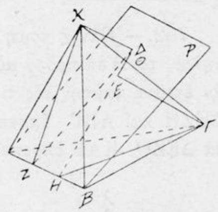


Ἄσκ. 747.

$ZH:AK=1:3$, ὅθεν $\frac{Z\Theta}{Z\Theta+\Theta K}=\frac{\Theta H}{\Theta H+\Theta A}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $Z\Theta:KZ=\Theta H:AH=1:4$, ἄρα $Z\Theta=\frac{KZ}{4}, \Theta H=\frac{AH}{4}$ καὶ $K\Theta=\frac{3}{4}KZ$, $A\Theta=\frac{3}{4}AH$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ΑΗ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον Μ τῶν διαμέσων τῆς ἕδρας ΑΚΒ ἀγομένη εὐθεῖα τέμνονται εἰς σημεῖον, ὅπερ ἀπὸ τοῦ Α ἀπέχει τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ΑΗ δηλ. εἰς τὸ Θ καὶ ὅτι $\Gamma\Delta=\frac{3}{4}\Gamma M$ κ.τ λ.

748. Ἔστω Ρ τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΑΒ ἐπίπεδον καὶ Θ ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ τῆς ΚΓ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν καθέτων ΚΔ,ΓΕ ἐπὶ τὸ Ρ τέμνει αὐτὸ κατὰ τὴν ΕΔ διερχομένην διὰ τοῦ Θ, τὰ δὲ τρίγωνα ΚΘΔ,ΓΘΕ εἶναι ὅμοια καὶ ἄρα ΚΘ:ΓΘ=ΚΔ:ΓΕ. (1)
Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΔΖ,ΕΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ αἱ ΚΖ,ΓΗ θὰ εἶναι ἐπ' αὐτὴν κάθετοι, αἱ δὲ γωνίαι ΚΖΔ,ΕΗΓ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διέδρους ΚΑΒΡ,ΡΑΒΓ εἶναι ἴσαι. Εἶναι ἄρα τὰ τρίγωνα ΚΖΔ, ΕΗΓ ὅμοια καὶ ἑπομένως
ΚΔ : ΓΕ=ΚΖ:ΓΗ (2)

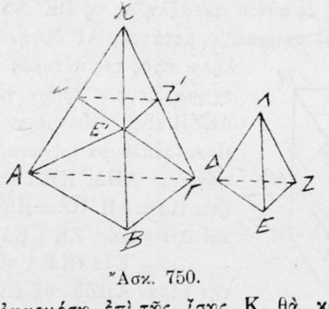


Ἄσκ 748.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΑΒ, ΓΑΒ ἔχουσι κοινὴν βάσιν εἶναι ΚΑΒ:ΓΑΒ= ΚΖ:ΓΗ. Ἐκ ταύτης καὶ τῶν (2) καὶ (1) ἕπεται ὅτι ΚΘ:ΓΘ=ΚΑΒ:ΓΑΒ.

749.— Ἐὰν Θ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΚΓ, τὰ τετράεδρα Κ.ΑΒΘ, Γ.ΑΒΘ ἔχουσι κοινὴν βάσιν ΑΒΘ καὶ ὕψος ΚΔ τὸ ἓν καὶ ΓΕ τὸ ἄλλο. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΚΘΔ, ΓΘΕ προκύπτει ΚΔ=ΓΕ, ἕπεται ὅτι (Κ.ΑΒΘ)=(Γ.ΑΒΘ).

750.— Ἂν τὸ τετράεδρον Λ.ΔΕΖ τεθῇ ἐπὶ τοῦ Κ.ΑΒΓ, οὕτως ὥστε ἡ



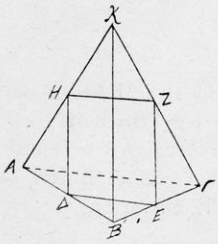
Ἄσκ. 750.

στερεὰ γωνία Λ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης Κ, θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν Κ.Δ'Ε'Ζ'. Τὰ τετράεδρα Ε'.ΚΑΓ, καὶ Ε'.ΚΔ'Ζ' ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, ἄρα

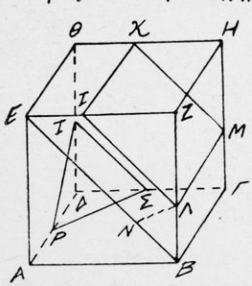
(Ε′.ΚΔ′Ζ′):(Ε′.ΚΑΓ)=(ΚΔ′Ζ′):(ΑΚΓ)=(ΛΔ) (ΛΖ):(ΚΑ) (ΚΓ) (1) (§ 176). Ὁμοίως (Ε′.ΚΑΓ) : (Κ.ΑΒΓ) = (Γ.Ε′ΚΑ) : (Γ.ΚΑΒ) = (ΚΕ′Α) : (ΚΑΒ)= (ΚΕ′):(ΚΒ)=(ΛΕ):(ΚΒ). Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα τῆς (1) εὑρίσκομεν (Ε′.ΚΔ′Ζ′) : (Κ.ΑΒΓ)=(ΛΔ)(ΛΖ)(ΛΕ):(ΚΑ)(ΚΓ)(ΚΒ) ἢ (Λ.ΔΕΖ) : (Κ.ΑΒΓ) = (ΛΔ)(ΛΖ)(ΛΕ) : (ΚΑ)(ΚΓ)(ΚΒ).

751.—Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ὕψους Λλ (Σχ. 246) καὶ χ τὸ ἐμβαδὸν τομῆς διερχομένης διὰ τοῦ Μ καὶ παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, θὰ εἶναι (§ 337) $Β:(ΚΛ)^2=χ:(ΚΜ)^2=β:(Κλ)^2$, ὅθεν $\frac{\sqrt{Β}}{ΚΛ}=\frac{\sqrt{χ}}{ΚΜ}=\frac{\sqrt{β}}{Κλ}$ καὶ $\frac{\sqrt{Β}-\sqrt{χ}}{ΜΛ}=\frac{\sqrt{χ}-\sqrt{β}}{λΜ}$. Ἐπειδὴ δὲ ΜΛ = λΜ ἕπεται ὅτι $\sqrt{Β}-\sqrt{χ}=\sqrt{χ}-\sqrt{β}$, ὅθεν $χ=\frac{Β+β+2\sqrt{Ββ}}{4}$.

752.—Ἐὰν ἡ τομὴ ΔΕΖΗ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ εἶναι ΗΖ, ΔΕ παράλληλοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῶν ΔΕΖΗ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, διότι, ἂν ἔτεμνε ταύτην εἴς τι σημεῖον Θ, τοῦτο ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων ΔΕΖΗ καὶ ΑΒΓ ἔπρεπε νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΔΕ· ὡς ἀνῆκον δὲ καὶ εἰς τὰ τὰ ΔΕΖΘ, ΚΑΓ ἔπρεπε νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΗΖ, ὅτε αἱ ΔΕ, ΗΖ δὲν θὰ ἦσαν παράλληλοι, Ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖΗ εἶναι παράλληλον τῇ ΑΓ, αἱ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, ΚΑΓ θὰ εἶναι παράλληλοι τῇ ΑΓ, ἄρα καὶ πρὸς ἀλλήλας. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἵνα αἱ ΗΔ, ΕΖ ὦσι παράλληλοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐπίπεδον ΗΔΕΖ νὰ εἶναι παράλληλον τῇ ΚΒ. Ἂν λοιπὸν φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς ΚΒ, ΑΓ, ἡ τομὴ ΗΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικόν, εἶναι ΚΑ=ΚΓ καὶ ΒΑ=ΒΓ, ἄρα ἡ ΚΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ τέμνει δίχα καὶ καθέτως τὴν ΑΓ. Ἂν δὲ Μ εἶναι ὁ ποὺς αὐτῆς καὶ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ παράλληλος τῇ ΒΚ, θὰ εἶναι καὶ τῇ ΔΗ παράλληλος. Ἐπειδὴ δὲ σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΓ ὀρθὴν γωνίαν καὶ αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῆς εὐθεῖαι ΗΖ, ΗΔ σχηματίζουσιν ὀρθὴν γωνίαν. Ὥστε ἡ τομὴ ΔΕΖΗ εἶναι ὀρθογώνιον. β′.) Ἐπειδὴ αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, καὶ τὰ ὅμοια αὐταῖς τρίγωνα ΑΗΔ, ΚΗΖ κτλ. εἶναι ἰσόπλευρα, ἤτοι ΗΔ=ΑΗ, ΗΖ=ΗΚ, ὅθεν ΔΗ+ΗΖ=ΑΚ καὶ ΔΗ+ΗΖ+ΖΕ+ΕΔ=2.ΑΚ.



Ἀσκ. 752

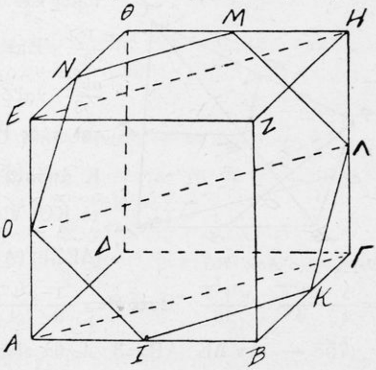


Ἀσκ. 753

753.—Ἐὰν ΙΚΜΛ εἶναι τομὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΖΕ, θὰ εἶναι ἡ ΙΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒΖΕ, ἄρα ἐπὶ τὴν ΙΛ, ἡ δὲ γωνία ΚΙΛ εἶναι ὀρθή. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας γωνίας τῆς τομῆς ΙΚΜΛ, ἥτις εἶναι διὰ τοῦτο ὀρθογώνιον. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τετράγωνον, πρέπει ΛΙ = ΙΚ = ΕΘ. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀκόλουθος λύσις. Ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΕΒ τυχούσης τοῦ κύβου ἕδρας λαμβάνομεν τμῆμα ΕΝ ἴσον τῇ ἀκμῇ αὐτοῦ, ἄγομεν τὴν ΝΛ παράλληλον τῇ ΕΖ καὶ τὴν ΛΙ παράλληλον τῇ ΕΒ. Ἄγομεν τέλος διὰ τῆς ΙΛ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΖΕ καὶ σχηματίζεται οὕτω ἡ τομὴ ΙΚΛΜ, ἥτις εἶναι τετράγωνον μὴ παράλληλον ἕδρᾳ τινί.

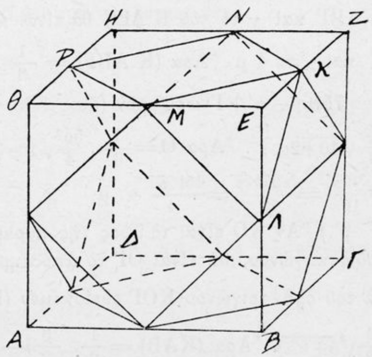
754.—Ἐὰν λάβωμεν ΔΡ=ΔΣ=ΔΤ, ἡ τομὴ ΡΣΤ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, ὡς εὐκόλως συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΔΡΣ,ΔΣΤ,ΔΤΡ.

755. — Τὰ μέσα Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ο, τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΕΑ, αἱ ὁποῖαι εἶναι διαδοχικαὶ καὶ οὐδεμία κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο προηγουμένων, κεῖνται εἰς ἓν ἐπίπεδον. Τῷ ὄντι· ἡ ΙΚ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ, πρὸς ἣν εἶναι παράλληλος καὶ ἡ ΟΛ, ὡς ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΗΕ φαίνεται. Εἶναι ἄρα αἱ ΙΚ καὶ ΟΛ παράλληλοι, τὰ δὲ σημεῖα Ι, Κ, Λ, Ο, κεῖνται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι Ι, Κ, Λ, Μ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ συμπίπτει μετὰ τοῦ ΟΙΚΛ, διότι ἔχει μετ' αὐτοῦ κοινὰ τὰ σημεῖα Ι,Κ,Λ· οὕτως ἐξακολουθοῦντες βεβαιούμεθα ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΟΙΚΛ περιέχει καὶ τὰ σημεῖα Ν καὶ Ο. Αἱ πλευραὶ ΙΚ,ΚΛ,ΛΜ, ΜΝ, ΝΟ, ΟΙ εἶναι ἴσαι, διότι ἑκάστη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ διαγωνίου ἕδρας τινος τοῦ κύβου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τραπέζια ΟΙΚΛ, ΙΚΛΜ, ΚΛΜΝ,.... εἶναι πάντα ἰσοσκελῆ, εἶναι γ. ΟΙΚ=γ. ΙΚΛ=γ. ΚΛΜ,.. Τὸ ἑξάγωνον ἄρα ΙΚΛΜΝΟ εἶναι κανονικόν.



Ἄσκ. 755

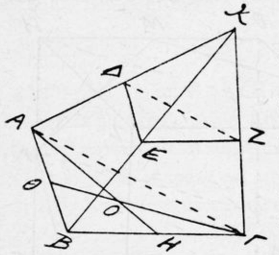
756. — α'. Τῆς πυραμίδος Ε.ΚΛΜ δύναται νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τὸ τρίγωνον ΕΜΛ, ὅτε ὕψος αὐτῆς εἶναι ΕΚ. Ἐπειδὴ δὲ (ΕΜΛ) = $\frac{1}{2}.\frac{\alpha}{2}.\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{8}$ καὶ (ΕΚ)=$\frac{\alpha}{2}$, ἕπεται ὅτι (Ε.ΚΛΜ) =



Ἄσκ. 756

$\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2}{8}.\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha^3}{48}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος **κυβοκταέδρου** εἶναι $\alpha^3-\frac{\alpha^3}{48}.8=\frac{5\alpha^3}{6}$. β'). Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυβοκταέδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς 8 βάσεις, ὡς ἡ ΚΛΜ, τῶν ἀποσπωμένων πυραμίδων καὶ ἀπὸ 6 τετράγωνα, ὡς τὸ ΚΜΡΝ, τὰ ὁποῖα ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας τοῦ κύβου ἔχουσι κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Ἄρα $E= 8\,(ΚΛΜ)+6(ΚΜΡΝ)=$ $8\,\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2\alpha^2}{4}+6.\frac{2\alpha^2}{4}=\alpha^2\sqrt{3}+3\alpha^2=\alpha^2(3+\sqrt{3})$.

757.— Τοῦ ΑΒΓ ὄντος ἰσοπλεύρου αἱ διάμεσοι αὐτοῦ εἶναι καὶ διχοτόμοι καὶ ὕψη αὐτοῦ, ἄρα $\rho=ΟΘ=\frac{1}{2}\,ΟΓ=\frac{P}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=P\sqrt{3}$, ἔπεται ὅτι $P=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ καὶ $\rho=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος ΚΟ ἰσοῦται πρὸς Ρ, τὸ δὲ ΔΕΖ ἀπέχει τῆς κορυφῆς Κ ἀπόστασιν $\frac{P}{2}$, ἔπεται ὅτι τὸ ΔΕΖ διαιρεῖ τὸ ΚΟ εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἄρα (§ 337) $(ΔΕΖ):(ΑΒΓ)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:4$, ὅθεν $(ΔΕΖ)=\frac{1}{4}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}$. Ὥστε $Θ=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}.\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}=\frac{7\alpha^3\sqrt{3}}{96}$.



Ἀσκ. 757

758.— Ἂν ΔΕ : ΑΒ=3 : 4, θὰ εἶναι $б:B=9:16$, ὅθεν $б=\frac{9}{16}B$, ὁ δὲ τύπος $Θ=\frac{1}{3}(B+б+\sqrt{Bб})\upsilon$ γίνεται $2=B\,\frac{1}{3}\left(1+\frac{9}{16}+\frac{3}{4}\right)$, ὅθεν $B=\frac{96}{37}$ τ.μ. καὶ $б=\frac{9}{16}.\frac{96}{37}=\frac{54}{37}$ τ.μ. Ἂν δὲ x εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ καὶ y τὸ τοῦ Κ.ΔΕΖ θὰ εἶναι $x:y=4:3$, ὅθεν $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{x-y}{1}=1$ καὶ $x=4$ μ. Ἄρα $(Κ.ΑΒΓ)=\frac{1}{3}.\frac{96}{37}.4=\frac{128}{37}$ κ. μ.

759. — α'.) Γνωρίζομεν (ἄσκ. 535 καὶ 536) ὅτι $B=\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\upsilon=\frac{\varrho}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Ἄρα $Θ=\frac{1}{3}.\frac{5\varrho^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\frac{\varrho}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\frac{5\varrho^3}{48}\sqrt{100-20}=\frac{5\varrho^3\sqrt{5}}{12}=\frac{5.27\sqrt{5}}{12}=\frac{45\sqrt{5}}{4}$ κ. μ.

β'.) Ἂν ΚΟ εἶναι τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ Γ τὸ μέσον πλευρᾶς ΑΒ τοῦ δεκαγώνου, θὰ εἶναι ΟΓ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ΚΟ=ΟΓ, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΟΓ εὑρίσκομεν $(ΚΓ)=(ΚΟ)\sqrt{2}=\frac{3}{4}\sqrt{20+4\sqrt{5}}=\frac{3}{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$. Ἄρα $(ΚΑΒ)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(-1+\sqrt{5})\frac{3}{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}=\frac{9}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$ καὶ $E=\frac{90}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}=\frac{45}{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}$ τ. μ.

760.—Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὑφάσματος εἶναι $2\pi.0,35.3$ τ. μ. Ἄρα τὸ ὕφασμα θὰ ἔχῃ μῆκος $2\pi.0,35.3:1,20=2,10\pi:1,20=\frac{7\pi}{4}$ μέτρα.

761.—Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι $2\pi.\ 0,40.\ 2,50]=2\ \pi$ τετρ. μ. Ἄρα ἡ δαπάνη εἶναι $5.2\pi=10\pi=31,4159$ δραχμαί.

762 —Ἐπειδὴ $\varepsilon=2\pi\rho\upsilon$, $\varepsilon'=2\pi\rho'\upsilon$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon:\varepsilon'=2\pi\rho\upsilon:2\pi\rho'\upsilon=\rho:\rho'$.

763.—Ἐκ τῶν $\varepsilon=2\pi\rho\upsilon$, $\varepsilon'=2\pi\rho\upsilon'$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon:\varepsilon'=\upsilon:\upsilon'$.

764.—Προφανῶς $\Theta=\pi.0,5^2.1=0,25\pi$ κυβ. μέτρα.

765.—Ἐκ τῆς ἰσότητος $5=\pi\rho^2.5$ ἕπεται ὅτι $\rho^2=\frac{1}{\pi}$, ὅθεν $\rho=\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ μέτρα.

766.—Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι $\pi.1^2.2=2\pi$ κυβ. παλάμας· ἄρα τὸ βάρος του εἶναι $2\pi=6,28318$ χιλιόγραμμα $=6,28318:1,28=4$ ὀκ. 363,2 δράμια.

767.—Ὁ τύπος $\Theta=\pi\rho^2.\upsilon$, γίνεται προφανῶς $\Theta=2\pi\rho.\upsilon.\frac{\rho}{2}$.

768.—α'). Ἐκ τῶν $\Theta=\pi\rho^2\upsilon, \Theta'=\pi\rho'^2\upsilon$, ἕπεται ὅτι $\Theta:\Theta'=\rho^2:\rho'^2$. β') Ἐκ δὲ τῶν $\Theta=\pi\rho^2\upsilon$, $\Theta'=\pi\rho^2.\upsilon'$, ἕπεται ὅτι $\Theta:\Theta'=\upsilon:\upsilon'$.

769.—Διότι ἔχουσι τὸν αὐτὸν ὄγκον, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

770.—Εὑρίσκομεν πρῶτον $\lambda=\sqrt{0,3^2+0,4^2}=0,5\mu$ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $\varepsilon=\pi\rho\lambda$.

771. — Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=(\lambda+\rho)\frac{2.\pi\rho}{2}=(\lambda+\rho)\ \pi\rho$.

772.—***Νὰ εὑρεθῇ....καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.*** Ἐκ τῶν $\varepsilon=2\pi\rho\upsilon$ καὶ $\varepsilon'=\pi\rho\lambda=\pi\rho\upsilon$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon':\varepsilon=1:2$.

773.—Προφανῶς εἶναι $2\pi\rho\upsilon=\pi\rho\lambda$, ὅθεν $\lambda=2\upsilon=2\rho$, ἄρα $\upsilon'=\sqrt{4\rho^2-\rho^2}=\rho\sqrt{3}$.

774. - Ἐπειδὴ $\Theta=\frac{1}{3}\pi.\ 0,15^2\ 0,40$ κυβ. μ. ἕπεται ὅτι

$B=\frac{1}{3}\pi.0,\ 15^2.0,40.7,788$ τόννους.

775.—Προφανῶς $\Theta=\frac{1}{3}\pi\ (A\Gamma)^2.(AB)$ καὶ $\Theta'=\frac{1}{3}\ \pi\ (AB)^2(A\Gamma)$, ὅθεν $\Theta:\Theta'=(A\Gamma):(AB)$.

776.—Ἐπειδὴ $\Theta=\frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$, $\Theta'=\frac{1}{3}\pi\rho'^2\upsilon$, ἕπεται ὅτι $\Theta:\Theta'=\rho^2:\rho'^2$.

777.—Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒΔΙ (Σχ. 262) εὑρίσκομεν $(B\Delta)=\lambda=\sqrt{4^2+3^2}=5\,\mu$ καὶ εἶτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $\varepsilon=\pi(A+\alpha)\lambda$ καὶ εὑρίσκομεν $\varepsilon=35\pi$ τετρ. μέτρα.

778.—Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon=\pi\ (A+\alpha)\lambda$ εἶναι $30=\pi(3+\alpha)2$, ὅθεν $\alpha=\frac{15-3\pi}{\pi}$ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ $\upsilon^2=\lambda^2-(A-\alpha)^2$, ἕπεται ὅτι $\upsilon^2=4-\left(\frac{6\pi-15}{\pi}\right)^2$, ὅθεν ὁρίζεται τὸ υ.

779. Κατὰ τὸν τύπον $E = \pi(A+\alpha)\lambda + \pi A^2 + \pi\alpha^2$ εἶναι

$$E = 35\pi + 16\pi + 9\pi = 60\pi \text{ τετρ. μ.}$$

780. — Κατὰ τὸν τύπον $\Theta = \frac{1}{3}\pi(A^2 + A\alpha + \alpha^2)\upsilon$ εἶναι

$$\Theta = \frac{1}{3}\pi(9+3+1)2 = \frac{26\pi}{3} \text{ κυβ. μέτρα.}$$

781.— Ἡ ἀκτὶς ΗΖ τομῆς ἴσον ἀπεχούσης τῶν βάσεων εἶναι $\frac{A+\alpha}{2}$, ἄρα $K = \pi\left(\frac{A+\alpha}{2}\right)^2 \upsilon = \pi.\, \frac{A^2+2A\alpha+\alpha^2}{4}.\,\upsilon$. Ἐπειδὴ δὲ $\Theta =$ $\frac{1}{3}\pi(A^2+A\alpha+\alpha^2)\upsilon$, ἕπεται ὅτι: $\Theta - K = \pi\upsilon\left(\frac{A^2+A\alpha+\alpha^2}{3} - \frac{A^2+2A\alpha+\alpha^2}{4}\right) =$ $\frac{\pi\upsilon}{12}(A^2-2A\alpha+\alpha^2) = \frac{\pi\upsilon}{12}(A-\alpha)^2 = \frac{1}{3}\pi\upsilon\left(\frac{A-\alpha}{2}\right)^2$.

782. — Προφανῶς $\Delta = \frac{1}{3}\pi(A^2+A\alpha+\alpha^2)\upsilon - \pi\alpha^2\upsilon =$

$$\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2+A\alpha-2\alpha^2) = \frac{1}{3}\pi\upsilon(A-\alpha)(A+2\alpha).$$

783.— Τὰ κοινὰ σημεῖα σφαίρας Σ καὶ εὐθείας ΑΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ, ὅπερ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\delta > \rho$, ἡ εὐθεῖα οὐδὲν ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας ταύτης σημεῖον, ἄρα καὶ μετὰ τῆς σφαίρας· ἂν δὲ $\delta = \rho$, ἡ εὐθεῖα ἔχει ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς περιφερείας, ἄρα καὶ μετὰ τῆς σφαίρας. Ἂν δὲ $\delta < \rho$, ἡ εὐθεῖα ἔχει πολλὰ κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ κύκλου, ἄρα καὶ μετὰ τῆς σφαίρας.

784.—Τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τὰ δὲ ἄλλα σημεῖα τῆς εὐθείας ἀπέχοντα τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

785.—Ἂν Α εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς σφαίρας Σ καὶ εὐθείας Ε, ἡ ἀπόστασις ΣΑ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι· πᾶν δὲ ἄλλο σημεῖον Β τῆς Ε ἐκτὸς τῆς σφαίρας κείμενον ἀπέχει τοῦ Σ ἀπόστασιν $\Sigma B > \Sigma A$. Εἶναι ἄρα (§ 49 6΄) ἡ ΣΑ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν Ε. Ἀλλὰ (§ 273) αἱ εἰς τὸ Α κάθετοι ἐπὶ τὴν ΣΑ κεῖνται ἐν ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐφαπτομένῳ (§ 384) τῆς σφαίρας.

786. Ἄλλως θὰ ἤγοντο ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν εὐθεῖαν πλείονες τῶν δύο ἴσαι εὐθεῖαι.

787.—Τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἐφάπτεται εἰς τὸ Α (Σχ. 106) τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας Κ, τέμνει τὴν ἐξωτερικὴν κατὰ κύκλον ἀκτῖνος ΑΜ. Ἄρα $E = \pi(AM)^2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΑ ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν εἶναι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΜ κάθετος, ἕπεται ὅτι $(AM)^2 = A^2 - \alpha^2$ καὶ $E = \pi(A^2 - \alpha^2)$.

788. — Ἂν $(\Sigma B) = 0{,}5^{\mu}$ καὶ $(\Sigma A) = 0{,}4$ (Σχ. 266), ἕπεται $(AB) = \sqrt{0{,}5^2 - 0{,}4^2} = 0{,}3^{\mu}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $E = \pi.0{,}3^2 = 0{,}09\pi$ τετρ. μέτρα καὶ $\Gamma = 2\pi.0{,}3 = 0{,}6\pi$ μέτρα.

789. Πρέπει (Σχ. 266) $\pi(AB)^2 = 0{,}36.\pi$, ὅθεν $(AB)^2 = 0{,}36$. Ἐπειδὴ δὲ $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B)^2 - (AB)^2$, ἕπεται ὅτι $(\Sigma A)^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, ὅθεν $(\Sigma A) = 0{,}8^{\mu}$.

790.—Ἐπειδὴ (Σχ. 267) εἶναι $(\Sigma\Sigma') = 5^{\mu}$, $(\Sigma A) = 4^{\mu}$ καὶ $(\Sigma' A) = 3^{\mu}$, τὸ τρίγωνον ΑΣΣ΄ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ $(A\Sigma\Sigma') = \frac{1}{2}(\Sigma\Sigma')(A\Gamma) =$

$\frac{1}{2}(ΣΑ)(Σ'Α)$, ὅθεν $(ΑΓ)=\frac{3.4}{5}=2{,}4^{μ}$

791.— Ἐπειδὴ (Σχ. 267) ΑΓ εἶναι ὕψος τοῦ ΑΣΣ', θὰ εἶναι (§ 186) $(ΑΓ)=\frac{2}{8}\sqrt{9.1.3.5}=\frac{3}{4}\sqrt{15}$. Κατ' ἀκολουθίαν $Γ=\frac{3π\sqrt{15}}{2}$ μέτρα.

792.— Ἐπειδὴ $(ΑΓ)=\frac{3}{4}\sqrt{15}$, ἕπεται ὅτι $Ε=\frac{9}{16}15π=\frac{135π}{16}$ τ. μ.

793.— Ἐὰν (Σχ. 268) εἶναι $(ΠΚ)=1{,}5^{μ}$, $(ΣΠ)=3^{μ}$, θὰ εἶναι $(ΚΠ')=4{,}5$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(ΓΠΔ)=2π.3.1{,}5=9π$ τετραγωνικὰ μέτρα καὶ $(ΓΠ'Δ)=2π.3.4{,}5=27π$ τετρ. μέτρα.

794.— Ἀρκεῖ (§ 397 Πόρ. Ι) νὰ διαιρεθῇ μία διάμετρος εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ νὰ ἀχθῶσι διὰ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα κάθετα ἐπ' αὐτήν.

795.— Γνωρίζομεν (Σχ. 270) ὅτι $(ΓΠΔ)=2πρ(ΚΠ)=π(ΠΠ')(ΚΠ)$. Ἐπειδὴ δὲ ἕνεκα τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΠΓΠ' εἶναι $(ΠΓ)^2=(ΠΠ')(ΚΠ)$, αὕτη γίνεται $(ΓΠΔ)=π(ΠΓ)^2$

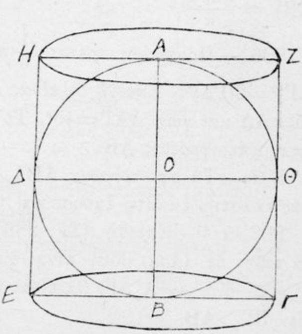
796.— Ἐπειδὴ $2πρυ=πρ^2$, ἕπεται $υ=\frac{ρ}{2}$.

797.— Κατὰ τὸν γνωστὸν (§ 402) τύπον (1) εἶναι $Σ=\frac{4}{3}π.2^3=\frac{32π}{3}$ κυβ. μέτρα.

798.— Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο ἀντικειμένων ἑδρῶν τοῦ κύβου κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς καθέτου. Ἄρα $Δ=α$ καὶ $Σ=\frac{1}{6}πα^3$ (§ 402, 2) καὶ $Ε=4π\left(\frac{α}{2}\right)^2=πα^2$.

799.— Ἀκτὶς τῆς τοιαύτης σφαίρας εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου, ἤτοι $\frac{α\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα $Σ=\frac{4}{3}π.\frac{α^3}{8}.\sqrt{3^3}=\frac{πα^3}{2}\sqrt{3}$ καὶ $Ε=4π.\frac{3α^2}{4}=3πα^2$.

800.— Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΗΕΒ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν Ο, τὸ δὲ ὀρθογώνιον θὰ γράψῃ περιγεγραμμένον περὶ αὐτὴν κύλινδρον. Εἶναι δὲ προφανῶς $Σ=\frac{4}{3}π(ΟΔ)^3$, $Κ=π(ΟΔ)^2(ΑΒ)=2π(ΟΔ)^3$. Ἄρα $Σ:Κ=2:3$. β'). Ἐὰν Ε, ε εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κυλίνδρου, ἐκ τῶν $Ε=4π(ΟΔ)^2$, $ε=2π(ΟΔ)^2+2π(ΟΔ)(ΑΒ)=6π(ΟΔ)^2$ ἕπεται ὅτι $Ε:ε=2:3$.



Ἀσκ. 800

801.— Ἐπειδὴ $\frac{4}{3}πρ^3=(\sqrt[3]{36π})^3=36π$ ἕπεται ὅτι $ρ^3=27$, ὅθεν $ρ=3^{μ}$.

802.— Ὁ α΄ κύκλος ἀπέχων τοῦ κέντρου τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ἔχει ἀκτῖνα $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, ὁ δὲ 6΄ ἀπέχων τὸ ἥμισυ πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς μέγ. κύκλον σφαίρας ἔχει ἀκτῖνα $\frac{5}{2}$. Ἄρα (§ 405) $T = \frac{1}{2}.\pi\left(\frac{3.25}{4}+\frac{25}{4}\right).\left(\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{6}.\pi\left(\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\pi.25.\frac{5}{2}(1+\sqrt{3})+\frac{1}{6}\pi\frac{125}{8}(1+\sqrt{3})^3=\frac{125\pi}{48}(1+\sqrt{3}).(12+4+2\sqrt{3})= \frac{125\pi}{24}(11+9\sqrt{3})$ κ. μ.

803.— Ἂν Θ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σφ. τμήματος ΓΠΔΚ (Σχ. 268) καὶ Θ′ ὁ τοῦ ΓΠ′ΔΚ, θὰ εἶναι $\Theta = \frac{1}{2}\pi(K\Delta)^2(K\Pi)+\frac{1}{6}\pi(K\Pi)^3$ καὶ $\Theta' = \frac{1}{2}\pi(K\Delta)^2(K\Pi')+\frac{1}{6}\pi(K\Pi')^3$. Ἐπειδὴ δὲ $(K\Pi)=\frac{3}{2}$, $(K\Delta)^2=3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$ καὶ $(K\Pi')=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, ἕπεται ὅτι $\Theta=\frac{1}{2}\pi.\frac{27}{4}.\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{90\pi}{16}$ καὶ $\Theta'=\frac{1}{2}\pi.\frac{27}{4}.\frac{9}{2}+\frac{1}{6}\pi.\left(\frac{9}{2}\right)^3=\frac{486\pi}{16}$ κυβ. μέτρα.

804. Ἂν ΑΒ εἶναι πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου, προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΟΓ εἶναι τὸ κέντρον Ο. Εἶναι δὲ (§ 403) $\Theta=\frac{1}{6}\pi.(AB)^2(AO)$. Ἐπειδὴ δὲ $(AB)^2=(2\sqrt{2})^2=8$, $(AO)=2$, ἕπεται ὅτι $\Theta=\frac{1}{6}\pi.8.\ 2=\frac{8\pi}{3}$ κυβ. μέτρα.

805.—Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 403) εἶναι $3=\frac{1}{6}\pi(AB)^2\cdot 1$, ὅθεν $(AB)=\frac{\sqrt{18\pi}}{\pi}$.

806.— Προφανῶς πρέπει $\frac{1}{6}\pi(A\Gamma)^2(A\Delta)=\frac{1}{3}\pi(\Gamma\Delta)^2(A\Delta)$, ὅθεν $(A\Gamma)^2=2(\Gamma\Delta)^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $(A\Gamma)^2=(A\Delta)^2+(\Gamma\Delta)^2$, ἕπεται ὅτι ΓΔ=ΑΔ καὶ γων. ΔΑΓ=45°. Τὸ τόξον ἄρα ΓΒ εἶναι 90° καὶ τὸ Γ μέσον τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΒ.

807.—Τὰ σφ. τρίγωνα ΑΒΔ,ΑΓΔ (Σχ. 287) ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας ἑκάστην ἑκάστῃ ἔχουσι καὶ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας.

808. α.′)—Ἐπειδὴ (Σχ. 286) εἶναι ΒΓ>ΑΒ, ἕπεται ὅτι ΒΣΓ>ΑΣΒ· διὰ τοῦτο δὲ (ἄσκ. 668) εἶναι δίεδ. ΣΑ> δίεδ. ΣΓ καὶ κατ' ἀκολουθίαν Α>Γ.—6′. Ἂν Α>Γ, θὰ εἶναι (ἄσκ. 669) καὶ ΣΑ>ΣΓ, ἄρα ΒΣΓ>ΑΣΒ, ὅθεν ΒΓ>ΑΒ.

809.—Κατὰ τὸ Πόρ. Ι (§ 416) εἶναι $E=4\pi.2^2: 4=4\pi$. τετρ. μέτρα.

810.—Κατὰ τὸ Πόρ. Ι (§ 416) εἶναι $E=4\pi.0{,}5^2:8=0{,}125\pi$ τετρ. μέτρα.

811. Κατὰ τὸ Πόρ. III (§ 417) εἶναι $\varepsilon = E.\frac{2/5}{4} = 4\pi.3^2.\frac{1}{10} = 3{,}6\pi$ τετρ. μέτρα.

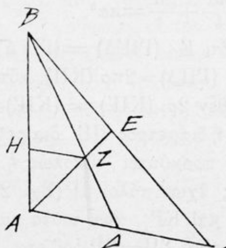
812.—Κατὰ τὸ Πόρ. I (§ 419) εἶναι $(AB\Gamma) = \frac{4\pi P^2}{8}\cdot\upsilon$, ἂν υ εἶναι ἡ σφ. ὑπεροχή. Ἐπειδὴ δὲ $\upsilon = \frac{4}{5} + \frac{3}{3} + \frac{7}{10} - 2 = 0{,}5$ ὀρθ. καὶ $P = 2^{\mu}$, ἕπεται $(AB\Gamma) = \frac{4\pi.4}{8}.0{,}5 = \pi$.

813.—Ἐπειδὴ $\upsilon = 78^0 + 120^0 + 100^0 - 180^0 = 118^0 = \frac{59}{45}$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι $(AB\Gamma) = \frac{4\pi.3{,}5^2}{8}\cdot\frac{59}{45} = \frac{49\pi.59}{8.45} = \frac{2891\pi}{360}$ τετρ. μέτρα.

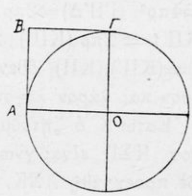
814.—Κατὰ τὸ Θ. (§ 420) εἶναι $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{\varepsilon} = 68^0 + 110^0 + 220^0 + 144^0 - 180^0.2 = 182^0 = \frac{91}{45}$ ὀρθ. ἄρα $(AB\Gamma\Delta) = \varepsilon.\frac{91}{45} = \frac{4\pi 4^2}{8}\cdot\frac{91}{45} = \frac{182\pi}{45}$ τ.μ.

815.—Ἐπειδὴ $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)$ καὶ $ZH = \frac{A\Gamma}{3}$, ὡς ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΗΖ, ΒΑΔ φαίνεται, ἕπεται ὅτι $(AB\Gamma)2\pi.(ZH) =$
$\frac{1}{2}(AB)(A\Gamma).\,2\pi.\frac{A\Gamma}{3} = \frac{1}{3}\pi(A\Gamma)^2(AB)$.

816.—Προφανῶς ἡ χορδὴ αὕτη γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίν-



Ἄσκ. 815.



Ἄσκ. 818.

δρου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως $P/2$ καὶ ὕψος τὴν χορδὴν ταύτην, ἤτοι $P\sqrt{3}$ (ἄσκ. 527). Ἄρα (§ 364) $E = 2\pi.P/2.\,P\sqrt{3} = \pi P^2\sqrt{3}$.

817.—Ἂν ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ΣΓΔ (Σχ. 268), ἕπεται ὅτι $\varepsilon = \pi(K\Delta).1 = \frac{4\pi}{10}$, ὅθεν $(K\Delta) = 0{,}4$ καὶ ἑπομένως $(\Sigma K) = \sqrt{1 - 0{,}16} = \sqrt{0{,}84}\,\mu$.

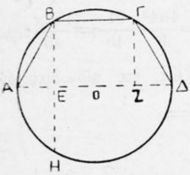
818.—Ἂν τὸ τεταρτοκύκλιον ΑΟΓ στραφῇ περὶ τὴν ΑΟ ὁλόκληρον στροφήν, θὰ γράψῃ ἡμισφαίριον ὄγκου $\frac{2}{3}\pi(O\Gamma)^3$, τὸ τετράγωνον ΑΟΓΒ θὰ γράψῃ περιγεγραμμένον κύλινδρον ὄγκου $\pi(O\Gamma)^2.(AO=\pi(O\Gamma)^3$, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΓ θὰ γράψῃ ἐγγεγραμμένον κῶνον ὄγκου $\frac{1}{3}\pi(O\Gamma)^2.(AO)=\frac{1}{3}\pi(O\Gamma)^3$.

Προφανῶς δὲ εἶναι $\pi(O\Gamma)^3-\frac{1}{3}\pi(O\Gamma)^3=\frac{2}{3}\pi(O\Gamma)^3$.

819.—Ἂν ΑΔ εἶναι ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, στραφῇ δὲ τοῦτο περὶ τὴν ΒΓ, τὸ παραγόμενον στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κώνους ἔχοντας κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον, ὃν γράφει τὸ ὕψος ΑΔ καὶ κορυφὰς ὁ μὲν Β, ὁ δὲ Γ. Ἄρα $E=2\pi(A\Delta).\alpha=2\pi\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.\alpha=\pi\alpha^2\sqrt{3}$ καὶ

$$\Theta=2.\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2.\frac{\alpha}{2}=2.\frac{1}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi\alpha^3}{4}.$$

820.— Τὸ στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν κύλινδρον, ὃν γράφει τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΖΕ καὶ ἀπὸ τοὺς κώνους τοὺς ὁποίους γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΖΔ. Ἄρα $E=2\pi(BE)(B\Gamma)+2\pi(BE)(AB)=4\pi(BE)(B\Gamma)$ καὶ $\Theta=\pi(BE)^2(B\Gamma)+\frac{2}{3}\pi(BE)^2(AE)$. Ἐπειδὴ δὲ $(B\Gamma)=\alpha$. $(BE)=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $(AE)=\frac{\alpha}{2}$, ἕπεται ὅτι



Ἄσκ. 820

$$E=4\pi\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.\alpha=2\pi\alpha^2\sqrt{3} \text{ καὶ}$$

$$\Theta=\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\alpha+\frac{2}{3}\pi.\frac{3\alpha^2}{4}.\frac{\alpha}{2}=\frac{3\pi\alpha^3}{4}+\frac{\pi\alpha^3}{4}=\pi\alpha^3.$$

821. — ***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω (Σχ. 275) ὅτι $E:(\Gamma\Pi'\Delta)=(\Gamma\Pi'\Delta):(\Gamma\Pi\Delta)$. Ἐπειδὴ $E=4\pi\rho^2$, $(\Gamma\Pi'\Delta)=2\pi\rho.(K\Pi')$ καὶ $(\Gamma\Pi\Delta)=2\pi\rho\,(K\Pi)$, αὕτη γίνεται $4\pi\rho^2:2\pi\rho(K\Pi')=2\pi\rho\,(K\Pi'):2\pi\rho(K\Pi)$, ὅθεν $2\rho:(K\Pi')=(K\Pi'):(K\Pi)$ ἢ $(\Pi\Pi'):(K\Pi')=(K\Pi'):(K\Pi)$, ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ διάμετρος ΠΠ′ διαιρεῖται κατὰ τὸ Κ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Ἐντεῦθεν προκύπτει εὐκόλως ἡ σύνθεσις.

822. — Ἔστω Κ ὁ ζητούμενος κύκλος ἔχων πόλον Π (Σχ. 270). Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΣΓ εἶναι γνωσταὶ αἱ ΣΓ καὶ ΚΓ, ἄρα τοῦτο κατασκευάζεται· ἐὰν δὲ προεκταθῇ ἡ ΣΚ, μέχρις οὗ γείνῃ ΣΠ=ΣΓ ὁρίζεται τὸ Π καὶ εἶτα ΠΓ, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων σφ. διαβήτου, δι᾽ οὗ γράφομεν τὸν ζητούμενον κύκλον.

823.—Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον καὶ ΑΕΒ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἀχθῇ δὲ ἡ ΕΖΗ κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ,ΓΔ, τὸ σχηματιζόμενον στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κολ. κώνους, οὓς γράφουσι τὰ τραπέζια ΑΕΗΔ, ΕΗΓΒ. Ἄρα $\Theta=\frac{2}{3}\pi(A\Delta)^2+A\Delta.EH+EH^2).\frac{\alpha}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $EH=EZ+ZH=$

$$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\alpha=\alpha\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ἕπεται ὅτι}$$

$$\Theta=\frac{2}{3}\pi\left[\alpha^2+\alpha^2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})+\alpha^2(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right]\frac{\alpha}{2}=\pi\alpha^3\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{4}\right).$$

824.—Ἂν ὁ ἄξων διέρχηται διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ΔΕ, ΒΖ, γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ γραφόμενον στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κολ. κώνους, οὓς γράφουσι τὰ τραπέζια ΕΑΓΔ, ΑΖΒΓ ἠλαττωμένα κατὰ τοὺς κώνους, οὓς γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΖ. Ἄρα: α'.) $E=2\pi(\Delta E+A\Gamma)(\Delta\Gamma)+2\pi(\Delta E)(A\Delta)=$

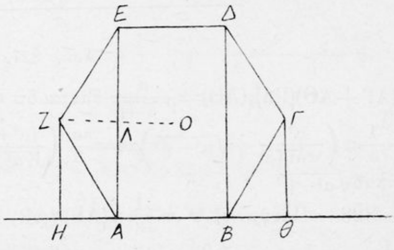
$$2\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha\sqrt{2}\right)\alpha+2\pi.\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.\ \alpha=4\pi\alpha^2\sqrt{2}.$$

β') $\Theta_1=\frac{2}{3}\pi[(\Delta E)^2+(\Delta E).(A\Gamma)+(A\Gamma)^2](AE)=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{2\alpha^2}{4}+\alpha^2+2\alpha^2\right)\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=$

$\frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{3}.\ \frac{7}{2},\quad \Theta_2=\frac{2}{3}\pi(\Delta E)^2.(AE)=\frac{2}{3}\pi.\frac{2\alpha^2}{4}.\ \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{2}}{6}$

καὶ $\Theta=\Theta_1-\Theta_2=\pi\alpha^3\sqrt{2}$.

825.—Ἔστω ὅτι τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ. Τῆς ΑΔ οὔσης διαμέτρου αἱ γωνίαι ΑΕΔ, ΑΒΔ εἶναι ὀρθαὶ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ ΑΕ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΑΒ. Ἐὰν δὲ ἀχθῶσι καὶ αἱ ἐπ' αὐτὸν κάθετοι ΖΗ, ΓΘ, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ στερεὸν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν κύλινδρον, ὃν γράφει τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΔΕ, ἀπὸ τοὺς κολ. κώνους, οὓς γράφουσι τὰ τραπέζια ΑΕΖΗ, ΒΔΓΘ μεῖον τοὺς κώνους, οὓς γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΖΗ, ΒΓΘ. Ἑπομένως α') Ε=ἐπιφ. (ΕΔ)+2 ἐπιφ. (ΖΕ) + 2 ἐπιφ.(ΑΖ)$=2\pi(AE)(E\Delta)+2\pi(ZH+AE)(ZE)+2\pi(ZH)(AZ)$. Ἐπειδὴ δὲ $(AE)=\alpha\sqrt{3},(E\Delta)=\alpha,(ZH)=(A\Lambda)=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2},(AH)=(Z\Lambda)=\frac{\alpha}{2}$, ἕπεται ὅτι



Ἄσκ. 825.

$E=2\pi\alpha^2\sqrt{3}+2\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\alpha\sqrt{3}\right)\alpha+2\pi.\ \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}=6\pi\alpha^2\sqrt{3}$. —β') $\Theta=$

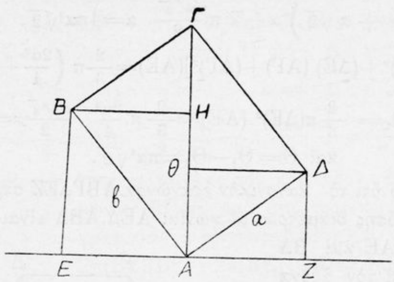
$\pi(AE)^2(E\Delta)+\frac{2}{3}[\pi(ZH)^2+(AE)^2+(ZH)(AE)](AH)-\frac{2}{3}\pi(ZH)^2(AH)=$

$3\pi\alpha^3+\frac{2}{3}\pi\left(\frac{3\alpha^2}{4}+3\alpha^2+\frac{3\alpha^2}{2}\right)\frac{\alpha}{2}-\frac{2}{3}\pi.\ \frac{3\alpha^2}{4}.\frac{\alpha}{2}=\frac{9\pi\alpha^3}{2}$

826.—Ἐὰν τὸ ΑΒΓ (Σχ. 122) στραφῇ περὶ τὴν ΒΓ, τὸ στερεόν, ὅπερ σχηματίζεται ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς κώνους, οὓς γράφουσι τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ. Ἄρα εἶναι: $\Theta=\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2(B\Delta)+\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2(\Delta\Gamma)=\frac{1}{3}\pi(A\Delta)^2(B\Gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ (§ 186) εἶναι $(A\Delta)^2=\frac{4}{81}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$, ἕπεται ὅτι

$\Theta=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{4}{81}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma).\ 9=44,116\ \pi.$

827.—Τὸ παραγόμενον στερεὸν εἶναι ἄθροισμα τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΑΓΔ. Ἄρα $\Theta = \frac{1}{3}$ ἐπιφ.(ΒΓ)(ΑΒ)$+\frac{1}{3}$ ἐπιφ.(ΓΔ)(ΑΔ). Ἐπειδὴ δὲ ἐπιφ. (ΒΓ)$=\pi$ (ΒΕ$+$ΑΓ)(ΒΓ)$=\pi$(ΑΗ$+$ΑΓ)(ΒΓ) καὶ (ΑΓ)$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, (ΑΒ)^2=(ΑΓ). (ΑΗ), (ΑΗ)$=\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, ἐπιφ. (ΓΔ)=



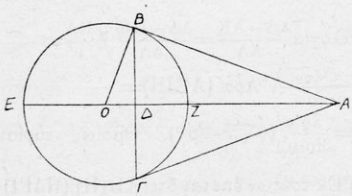
Ἄσκ. 827.

π(ΑΓ$+$ΑΘ)(ΓΔ),(ΑΘ)$=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, ἕπεται ὅτι $\Theta=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right).\alpha\beta$ $+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\alpha b=\frac{\pi\alpha\beta}{3}\left(\frac{(\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)=\frac{\pi\alpha\beta}{3}\ \frac{3(\alpha^2+\beta^2)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $=\pi\alpha b\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

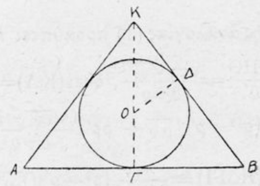
828.—Προφανῶς $\Theta'=\frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΓ})^2(\text{ΑΒ})$ καὶ $\Theta''=\frac{1}{3}\pi(\text{ΑΒ})^2(\text{ΑΓ})$. Ἄρα $\frac{1}{\Theta'^2}+\frac{1}{\Theta''2}=\frac{9}{\pi^2(\text{ΑΓ})^4(\text{ΑΒ})^2}+\frac{9}{\pi^2(\text{ΑΒ})^4\,(\text{ΑΓ})^2}=\frac{9}{\pi^2(\text{ΑΒ})^2\,(\text{ΑΓ})^2}\left[\frac{1}{(\text{ΑΓ})^2}+\frac{1}{(\text{ΑΒ})^2}\right]=$ $\frac{9(\text{ΒΓ})^2}{\pi^2(\text{ΑΒ})^4\,(\text{ΑΓ})^4}$. Ἐὰν δὲ ΑΔ εἶναι τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος θὰ εἶναι (ΑΒ) (ΑΓ)= (ΑΔ)(ΒΓ), ἄρα $\frac{1}{\Theta'^2}+\frac{1}{\Theta''^2}=\frac{9}{\pi^2(\text{ΒΓ})^2\,(\text{ΑΔ})^4}$. Ἐπειδὴ δὲ $\Theta=\frac{1}{3}\pi\,(\text{ΑΔ})^2\,(\text{ΒΓ})$, ἕπεται ὅτι $\frac{1}{\Theta^2}=\frac{9}{\pi^2(\text{ΒΓ})^2\,(\text{ΑΔ})^4}=\frac{1}{\Theta'^2}+\frac{1}{\Theta''^2}$.

829.— Ἔστω (ΣΚ)$=x$ καὶ (ΣΔ)$=$Ρ (Σχ. 275). Προφανῶς (ΓΣΔΠ)$=$ $\frac{1}{3}$Ρ. ζών. (ΓΠΔ) $=\frac{1}{3}$ Ρ. 2πΡ (ΠΚ) $=\frac{2}{3}\pi\,\text{Ρ}^2\,(\text{Ρ}-x)$ καὶ (ΓΣΔ) $=$ $\frac{1}{3}\pi(\text{ΓΚ})^2x=\frac{1}{3}\pi(\text{Ρ}^2-x^2)x$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ διχοτομεῖ τὸν τομέα ΓΣΔΠ, ἕπεται ὅτι 2(ΓΣΔ)=(ΓΣΔΠ) ἢ $\frac{2}{3}\pi(\text{Ρ}^2-x^2)x=\frac{2}{3}\pi\,\text{Ρ}^2\,(\text{Ρ}-x)$, ὅθεν $(\text{Ρ}^2-x^2)x=\text{Ρ}^2(\text{Ρ}-x)$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{Ρ}-x$ εἶναι διάφορον τοῦ 0, ἕπεται ὅτι $x^2+\text{Ρ}x-\text{Ρ}^2=0$ καὶ $x=\frac{\text{Ρ}(-1\pm\sqrt{5})}{2}$, ὧν παραδεκτὴ μόνον ἡ θετική, ἐξ ἧς φαίνεται ὅτι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον πρέπει νὰ διαιρῇ τὴν ΣΠ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

830.— Προφανῶς (ΒΖΓΒ)$=\frac{1}{2}\pi(\text{ΒΔ})^2\,(\text{ΔΖ})+\frac{1}{6}\pi.\,(\text{ΔΖ})^3$. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΟΒ εὑρίσκομεν $ΑΒ=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$· ἐπειδὴ δὲ (ΟΑ)(ΒΔ) $=$ (ΑΒ)(ΟΒ), ἔπεται $(ΒΔ)=\frac{8\sqrt{2}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Ἐκ δὲ τῆς $(ΟΒ)^2=(ΟΑ)(ΟΔ)$ εὑρίσκομεν ὅτι $(ΟΔ)=\frac{2}{3}$. Κατ' ἀκολουθίαν $(ΒΖΓΒ)=\frac{1}{2}π.\frac{32}{9}.\left(2-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}π.\left(2-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{2}π.\frac{32}{9}.\frac{4}{3}+\frac{1}{6}π.\frac{64}{27}=\frac{224π}{81}$ κυβ. μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ τῆς σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι $\frac{4}{3}π.2^3=\frac{32π}{3}$, ἔπεται ὅτι: $(ΒΕΓΒ)=\frac{32π}{3}-\frac{224π}{81}=\frac{640π}{81}$ κυβ. μέτρα.



Ἄσκ. 830



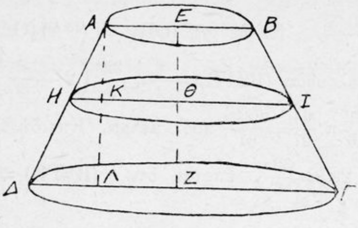
Ἄσκ. 831

831.— Προφανῶς α΄) $Θ=\frac{1}{3}π(ΓΒ)^2υ$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΟΔ, ΚΓΒ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\frac{ΓΒ}{Ρ}=\frac{υ}{ΚΔ}$, $ΓΒ=\frac{υΡ}{\sqrt{υ^2-2Ρυ}}$, ἔπεται ὅτι $Θ=\frac{1}{3}π.\frac{υ^2Ρ^2}{υ^2-2Ρυ}.υ=\frac{πυ^2Ρ^2}{3(υ-2Ρ)}$, β΄) $Ε=π(ΓΒ)^2+π(ΓΒ)(ΚΒ)$. Ἐπειδὴ δὲ $ΚΒ=ΚΔ+ΔΓ=ΚΔ+ΒΓ$, ἔπεται ὅτι $Ε=π(ΓΒ)^2+π(ΓΒ)^2+π(ΓΒ)(ΚΔ)=2π(ΓΒ)^2+π(ΓΒ)(ΚΔ)$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς $\frac{ΓΒ}{Ρ}=\frac{υ}{ΚΔ}$ προκύπτει ὅτι $(ΓΒ)(ΚΔ)=υΡ$, ἔπεται ὅτι $Ε=\frac{2πυ^2Ρ^2}{υ^2-2Ρυ}+πυΡ=\frac{πυ^2Ρ}{υ-2Ρ}$.

832.— Λαμβάνοντες ὡς μονάδα μήκους τὴν παλάμην ἔχομεν $1047,2=\frac{π}{3}(x^2+4x+16)10$, ὅθεν $x^2+4x+84=0$ καὶ $x=7,38$ παλ.$=0,738$ μέτρα.

833.—Ἐὰν ἡ γωνία ΓΑΒ εἶναι 60^0, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ $ΒΓ=ρ\sqrt{3}$. Ἄρα $ΒΔ=\frac{ρ\sqrt{3}}{2}$ καὶ $(ΑΔ)=\frac{3ρ}{2}$, ὁ δὲ ζητούμενος ὄγκος $Θ=\frac{1}{3}π(ΒΔ)^2(ΑΔ)=\frac{1}{3}π.\frac{3ρ^2}{4}.\frac{3ρ}{2}=\frac{3πρ^3}{8}$.

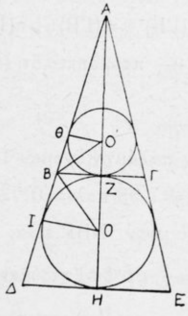
834.—Ἔστω ΗΙ ἡ τομὴ τοῦ κολ. κώνου ΑΒΓΔ. Προφανῶς $(ΑΒΙΗ)=\frac{1}{2}π(ΑΕ^2+ΑΕ.ΗΘ+ΗΘ)^2.(ΑΚ)$ καὶ $(ΗΔΓΙ)=\frac{1}{3}π\,(ΗΘ^2+ΗΘ.\,ΔΖ+$



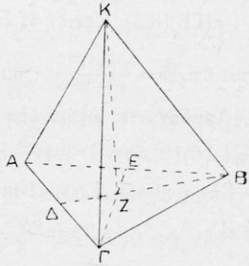
Ἄσκ. 834

ΔZ^2) (ΚΛ). Ὥστε πρέπει νὰ ὁρισθῶσι τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΗΘ, ΑΚ, ΚΛ. Ἐπειδὴ ὁ κύκλος Θ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν βάσεων, ἤτοι $\pi\rho^2 : \pi(H\Theta)^2 = \pi(H\Theta)^2 : \pi\rho'^2$, ἕπεται ὅτι $(H\Theta)=\sqrt{\varrho\varrho'}$. Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΗΚ, ΑΔΛ προκύπτει ὅτι $\frac{AK}{A\Lambda}=\frac{HK}{\Delta\Lambda}(1)$ ἢ $\frac{AK}{\upsilon}=\frac{HK}{\varrho-\varrho'}=\frac{\sqrt{\varrho\varrho'}-\varrho'}{\varrho-\varrho'}$, ἕπεται ὅτι $(AK)=\frac{\upsilon(\sqrt{\varrho\varrho'}-\varrho')}{\varrho-\varrho'}$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) προκύπτει ἡ ἀναλογία $\frac{A\Lambda-AK}{A\Lambda}=\frac{\Delta\Lambda-HK}{\Delta\Lambda}$ ἢ $\frac{K\Lambda}{\upsilon}=\frac{\Delta Z-H\Theta}{\varrho-\varrho'}=\frac{\varrho-\sqrt{\varrho\varrho'}}{\varrho-\varrho'}$, ὅθεν $(K\Lambda)=\frac{\upsilon(\varrho-\sqrt{\varrho\varrho'})}{\varrho-\varrho'}$. Ἄρα (ΑΒΙΗ)= $\frac{1}{3}\pi(\rho'^2+\rho'\sqrt{\varrho\varrho'}+\rho\rho')\frac{(\sqrt{\varrho\varrho'}-\varrho')\upsilon}{\varrho-\varrho'}=\frac{\pi\varrho'\upsilon}{3(\varrho-\varrho')}(\sqrt{\varrho\varrho'}-\rho'^2)$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(H\Delta\Gamma I)=\frac{\pi\varrho\upsilon}{3(\varrho-\varrho')}(\rho^2-\rho'\sqrt{\varrho\varrho'})$. β') Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι (ΑΒΙΗ):(ΗΔΓΙ)= $\frac{\pi\upsilon\varrho'\sqrt{\varrho'}}{3(\varrho-\varrho')}(\rho\sqrt{\varrho}-\rho'\sqrt{\varrho'}) : \frac{\pi\upsilon\varrho\sqrt{\varrho}}{3(\varrho-\varrho')}(\rho\sqrt{\varrho}-\rho'\sqrt{\varrho'}) = \rho'\sqrt{\varrho'}:\rho\sqrt{\varrho}=\sqrt{\frac{\varrho'^3}{\varrho^3}}$.

835. Προφανῶς εἶναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{3}\pi(BZ)^2(AZ)$ καὶ $A\Delta E=\frac{1}{3}\pi(\Delta H)^2(AH)$. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΒΟ′ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β, εἶναι $(BZ)^2=P\rho$, ὅθεν $(BZ)=\sqrt{P\varrho}$. Ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΟ′Θ, ΑΟΙ



Ἄσκ. 835.



Ἄσκ. 836.

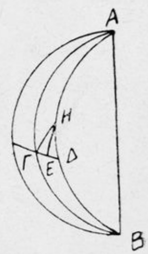
προκύπτει ὅτι $\frac{AO}{P}=\frac{AO'}{\varrho}=\frac{P+\varrho}{P-\varrho}$, ὅθεν $(AO)=\frac{P(P+\varrho)}{P-\varrho}$ καὶ $(AO')=\frac{\varrho(P+\varrho)}{P-\varrho}$, ἐξ ὧν $(AH)=\frac{P(P+\varrho)}{P+\varrho}+P=\frac{2P^2}{P-\varrho}$ καὶ $(AZ)=\frac{\varrho(P+\varrho)}{P-\varrho}+\rho=$

$\frac{2P\varrho}{P-\varrho}$. Ἤδη ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΖ, ΑΔΗ εὑρίσκομεν ὅτι ΔΗ:ΒΖ= ΑΗ:ΑΖ, ὅθεν $(\Delta H)=\frac{P}{\varrho}\sqrt{P\varrho}$. Ὥστε $(AB\Gamma)=\frac{1}{3}\ \pi.\ P\rho.\ \frac{2P\varrho}{P-\varrho}=\frac{2\pi P^2\varrho^2}{3(P-\varrho)}$ καὶ $(A\Delta E)=\frac{1}{3}\pi\ \frac{P^2}{\varrho^2}\cdot P\rho\cdot\frac{2P^2}{P-\varrho}=\frac{2\pi P^5}{3\varrho(P-\varrho)}$.

836.—Τὸ κέντρον Ο ἴσον ἀπέχον τῶν Α,Β,Γ κεῖται (ἄσκ. 625) ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ κέντρον Ζ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ. Αὕτη δὲ διέρχεται διὰ τοῦ Κ, διότι ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ κέντρον τῆς ἕδρας ΒΚΓ κ.τ.λ. Ἀπέχει ἄρα (ἄσκ. 747) τοῦ Κ ἀπόστασιν $(KO)=\frac{3}{4}$ (ΚΖ). Ἐπειδὴ δὲ $(\Gamma Z)=\frac{2}{3}(\Gamma E)=\frac{2}{3}\ \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, ἔπεται ὅτι $(KZ)^2=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{9}$, ὅθεν $(KZ)=\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$ καὶ $(KO)=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Κατ' ἀκολουθίαν $\Theta=\frac{4}{3}\pi\ \frac{\alpha^3 6\sqrt{6}}{64}=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{6}}{8}$.

837.—Ἂν τὸ τόξον ΑΔ (Σχ. 287) διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α, ἀχθῶσι δὲ τόξα μεγ. κύκλων ΔΒ,ΓΔ κάθετα ἐπὶ τὰ ΑΒ,ΑΓ, τὰ σχηματιζόμενα ὀρθ. σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΔΒ,ΑΔΓ ἔχοντα κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην εἶναι ἴσα, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται. Ἄρα εἶναι καὶ ΔΒ=ΔΓ.

838.—Ἔστω ΑΓΒ τόξον μεγ. κύκλου διχοτομοῦν τὴν γωνίαν Α ἀτράκτου ΖΑΒΔ καὶ Ε σημεῖον τοῦ ἀτράκτου ἐκτὸς τοῦ ΑΓΒ κείμενον. Ἂν ἀχθῶσι τόξα ΕΓΖ, ΕΔ μεγ. κύκλων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΖ,ΑΔ καὶ τὸ ΓΗ κάθετον ἐπὶ ΑΔ, θὰ εἶναι ΖΓ=ΓΗ (ἄσκ.837). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΕΗ>ΕΔ (ἄσκ. 808) καὶ ΕΗ<ΕΓ+ΓΗ ἢ ΕΗ<ΕΓ+ΖΓ=ΕΖ κατὰ μείζονα λόγον εἶναι ΕΔ<ΕΖ.



Ἄσκ. 838.

839.—Τὰ διχοτομοῦντα τὰς γωνίας Α,Β τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ, ἴσον ἀπέχον τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἄσκ. 837). Κεῖται δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν Γ, διότι ἄλλως θὰ ἀπεῖχεν ἄνισον τῶν ΑΓ,ΒΓ. (ἄσκ. 838).

840.—Ἐπειδὴ $A+B+\Gamma-2\text{ὀρθ.}=239^\circ 20'-180^\circ=\frac{178}{270}$ ὀρθ. ἔπεται ὅτι $(AB\Gamma)=\varepsilon.\frac{178}{270}=\frac{4\pi.4}{8}\ \frac{178}{270}=2\pi.\ \frac{178}{270}=\frac{178\pi}{135}$ τετρ. μέτρα.

ΤΕΛΟΣ

Τιμᾶται δραχ. 35