ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΝΤΙΝΟΥ ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

ΝΤΙΝΟΥ ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ Α′ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σύμφωνα μὲ τὸ νέο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα
(Β. Διάταγμα ἀριθ. 651/17-10-1964—Φ.Ε.Κ. 183 τ.Α′)

ΤΕΥΧΟΣ ΠΡΩΤΟ

Περιεχόμενα

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

Ὁλόκληρο τὸ βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τῆς Α΄ Γυμνασίου

ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία τεύχη

Τὸ δεύτερο τεῦχος θὰ κυκλοφορήση τὴν 1ην Ἰανουαρίου καὶ τὸ τρίτο στὶς 20 Φεβρουαρίου 1965.

ΤΟ ΝΕΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Σκοπός: Ὁ νοῦς διὰ τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, προσδιορίζων μεγέθη, συλλαμβάνων καὶ διατυπώνων μὲ ἀκρίβειαν σχέσεις ποσοτικὰς καὶ ποιοτικάς, δεσπόζει ἐπὶ τῆς πραγματικότητος καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ μέτρον ἀναπτύσσει καὶ καλλιεργεῖ τὴν ἀναλυτικὴν καὶ συνθετικὴν δύναμίν του.

Σκοπὸς τῶν Μαθηματικῶν ὡς μαθήματος πραγματολογικοῦ καὶ εἰδολογικοῦ εἶναι νὰ διδάξῃ καὶ νὰ ἀσκήσῃ τοὺς μαθητὰς εἰς τὴν μέθοδον τοῦ μαθηματικοῦ λογισμοῦ καὶ τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

2. Διδακτέα ὕλη: α) Ἀριθμητική.

Περὶ Συνόλων: Ἔννοια τοῦ συνόλου καὶ καθορισμὸς τοῦ συνόλου. Ὑποσύνολα συνόλου. Τὸ κενὸν σύνολον. Βέννια διαγράμματα. Ἴσα σύνολα. Ἰσοδυναμικὰ σύνολα. Ἕνωσις συνόλων. Τομὴ συνόλων. Συμπλήρωμα συνόλου. Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τὸ μηδέν. Πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου. Σύνολον μὲ πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων. Σύνολον μὲ μὴ πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων (= ἀπειροσύνολον). (Ἀπαραιτήτως θὰ χρησιμοποιηθοῦν τὰ σύμβολα τῶν «ἀνήκει», «εἶναι ὑποσύνολον», «ἕνωσις», «τομή», «συνεπάγεται», «ἰσοδυναμεῖ μέ»).

Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς. Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι. Δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως, προφορικὴ καὶ γραπτὴ ἀρίθμησις. Σύντομος μνεία τῆς Ἑλληνικῆς καὶ Ρωμαϊκῆς γραφῆς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀκέραιοι καὶ ἰδιότητες αὐτῶν (ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική). Διάταξις τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις αὐτῶν ἐπὶ ἡμιευθείας (ἢ ἀκριβέστερον, ἐπὶ ἀκτῖνος).

Αἱ πράξεις μὲ ἀκεραίους τῆς Ἀριθμητικῆς. 1. Πρόσθεσις. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως. Κατάδειξις (διὰ ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων) τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσμως ἤτοι: α) ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. β) Προσεταιριστικὴ ἰδιότης: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ γ) Τὸ μηδὲν ὡς οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως. δ) Ἰδιότης τῆς ἰσότητος εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἤτοι: ἂν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Ἡ ἰδιότης: ἂν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων. Ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi + \alpha = \beta$. Σύντομος ἐξήγησις τοῦ κανόνος ἐκτελέσεως τῆς προσθέσεως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν θεμελιωδῶν (βασικῶν) ἰδιοτήτων. Ἀσκήσεις εἰς τὸν νοερὸν (ἀπὸ μνήμης) λογισμόν. Προβλήματα ἀναγόμενα εἰς τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως καὶ λυόμενα μὲ χρῆσιν ἑνὸς ἀγνώστου x.

2. Ἀφαίρεσις: Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς ἀφαιρέσεως μὲ ἀκεραίους τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ ἀφαίρεσις ὡς ἀντίστροφος πρᾶξις τῆς προσθέσεως. Ἐπίλυσις ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\chi + \beta = \alpha$, $\chi - \beta = \alpha$, $\alpha - \chi = \beta$. Ἡ ἰδιότης $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$. Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων. Σύντομος ἐξήγησις τοῦ κανόνος ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως. Ἀσκήσεις εἰς τὸν νοερὸν (ἀπὸ μνήμης) λογισμόν. Λύσις ἁπλῶν προβλημάτων συνδυαζόντων πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ὡς καὶ ἀσκήσεων, τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς συνδυασμὸν ἰδιοτήτων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Προβλήματα λυόμενα μὲ χρῆσιν ἑνὸς ἀγνώστου x. Ἀριθμητικὸν πολυώνυμον.

3. Πολλαπλασιασμός: Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Κατάδειξις (δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων) τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤτοι ἂν α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι τῆς ἀριθμητικῆς τότε: α) ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης: $\alpha.\beta = \beta.\alpha$. β) προσεταιριστικὴ ἰδιότης: $(\alpha.\beta).\gamma = \alpha.(\beta.\gamma)$. γ) ὁ 1 ὡς οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. δ) ἰδιότης τῆς ἰσότητος εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι: ἂν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha.\gamma = \beta.\gamma$. ε) Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης (τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν): $\alpha.(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Σύντομος ἐξήγησις τοῦ κανόνος τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἰδιοτήτων. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων καὶ αἱ κυριώτεραι ἰδιότητες αὐτοῦ δι' ἁπλῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων. Ἄσκησις εἰς τὸν νοερὸν (ἀπὸ μνήμης) λογισμόν. Προβλήματα συνδυάζοντα πράξεις περισσοτέρας τῆς μιᾶς. Ἀσκήσεις λυόμεναι ἐπὶ τῇ βάσει γνωστῶν ἰδιοτήτων. Προβλήματα λυόμενα διὰ τῆς χρήσεως ἑνὸς ἀγνώστου x.

4. **Διαίρεσις.** Ἡ διαίρεσις μὲ ἀκεραίους τῆς ἀριθμητικῆς ὡς ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Σαφὴς διάκρισις μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν «μερισμὸς» καὶ «μέτρησις». Αἱ κυριώτεραι ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως βάσει ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἀσκήσεων. Ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως καὶ ἡ δοκιμὴ αὐτῆς (διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἁπλᾶ προβλήματα συνδυάζοντα πράξεις περισσοτέρας τῆς μιᾶς. Εἰσαγωγὴ τοῦ ἀγνώστου x κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων. Δυνάμεις καὶ ἰδιότητες αὐτῶν. Ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων $α^1$, $α^0$ (α διάφορον τοῦ 0). Διαιρετότης. Ἀνάλυσις ἀκεραίου εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Εὕρεσις τοῦ ΕΚΠ καὶ ΜΚΔ ἀκεραίων. Δοκιμὴ τῶν ἐξαγομένων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ 9. Ἔννοια διατεταγμένου ζεύγους. Σύνολα διατεταγμένων ζευγῶν. Καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων. Ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως. Δυαδικὸν σύστημα.Μετάβασις ἀπὸ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ δυαδικὸν καὶ ἀντιστρόφως.

Κλάσματα: 1. Οἱ ρητοὶ τῆς ἀριθμητικῆς: Τὸ κλάσμα ὡς ἀκριβὲς πηλίκον διαιρέσεως. Τὸ κλάσμα ὡς διατεταγμένον ζεῦγος. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $αx = β$. Ρητοὶ (ἢ σύμμετροι) ἀριθμοί. Γραφικὴ παράστασις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Ἰσοδύναμα κλάσματα.

2. **Αἱ πράξεις μὲ κλάσματα:** Ἰσχὺς τῶν γνωστῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων, ἤτοι ἀντιμεταθετικότητος καὶ προσεταιριστικότητος εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλασιασμόν, ὡς καὶ τῆς ἐπιμεριστικότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν τῶν κλασμάτων. Σύντομος θεώρησις τῶν τεσσάρων πράξεων μὲ ἀκεραίους, κλάσματα καὶ μικτούς. Ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα ὡς μέθοδος λύσεως προβλημάτων.Ἐπίλυσις ἁπλῶν προβλημάτων μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἀγνώστου x. Δυνάμεις μὲ βάσιν κλάσματα καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον. Ἐπέκτασις τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων.

3. **Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί:** Δεκαδικὰ κλάσματα. Δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Αἱ τέσσαρες πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ἔννοια τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ.

4. **Λόγοι καὶ ἀναλογίαι:** Ἔννοιαι τοῦ λόγου. Σύγκρισις δύο ποσῶν διὰ τῆς διαφορᾶς καὶ τοῦ λόγου αὐτῶν. Ἀναλογίαι καὶ κυριώτεραι ἰδιότητες αὐτῶν. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν εἰς τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ ποσοστῶν.

5. **Τετραγωνικὴ ρίζα:** Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου καὶ πρακτικὴ κατὰ προσέγγισιν εὕρεσις αὐτῆς. Ἔννοια τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς.

β΄ Γεωμετρία:

Τὰ κυριώτερα ἐπίπεδα σχήματα (σημεῖα, γραμμαί, γωνίαι, εὐθύγραμμα σχήματα, κύκλος) καὶ ἀναγνώρισις αὐτῶν ὡς στοιχείων εἰς τὰ γνωστὰ γεωμετρικὰ στερεά. Τὰ ἐπίπεδα σχήματα ὡς σύνολα σημείων (σημειοσύνολα) τοῦ ἐπιπέδου. Κυρτὰ καὶ μὴ κυρτὰ ἐπίπεδα σχήματα. Παραδείγματα. Μέτρησις γεωμετρικῶν μεγεθῶν (εὐθυγράμμων τμημάτων, γωνιῶν, τόξων περιφερείας). Βασικαὶ μονάδες μετρήσεως. Ἔννοια τοῦ συμμιγοῦς καὶ ἁπλαῖ πράξεις μὲ συμμιγεῖς. Ἁπλᾶ γεωμετρικὰ προβλήματα λυόμενα διὰ κανόνος, γνώμονος, μοιρογνωμονίου, διαβήτου.Συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἰδιότητες αὐτῆς (πρακτικῶς διαπιστούμεναι). Κάθετοι εὐθεῖαι καὶ ἁπλᾶ σχετικὰ προβλήματα λυόμενα διὰ κανόνος καὶ διαβήτου. Συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἰδιότητες αὐτῆς (πρακτικῶς διαπιστούμεναι). Ἴσα τρίγωνα. Γεωμετρικοὶ μετασχηματισμοὶ (συμμετρίαι, παράλληλος μετατόπισις, στροφὴ) καὶ ἐφαρμογαὶ αὐτῶν. Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου. Ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα. Ὅμοια τρίγωνα. Κλῖμαξ. Σχεδίασις ὑπὸ κλίμακα εὐθυγράμμου σχήματος.Μέτρησις εὐθυγράμμων ἐπιπέδων χωρίων. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, πλαγίου παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου, πολυγώνου. Μέτρησις κύκλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΙ ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Τί εἶναι συλλογὴ πραγμάτων.— Τὸ ἕνα καὶ τὰ πολλὰ εἶναι δυὸ ἔννοιες, ποὺ ὁ καθένας μας προσλαμβάνει καὶ συνειδητοποιεῖ ἀπὸ τὰ πρῶτα παιδικά του χρόνια.

Τὸ παιδὶ εὔκολα ξεχωρίζει τὸ ἕνα ἀπὸ ὅλα τὰ δάκτυλα τοῦ χεριοῦ του, τὸν ἕνα βῶλο μέσα ἀπὸ ἕνα **σωρὸ** βώλων, τὸ ἕνα πρόβατο στὸ **κοπάδι** τῶν προβάτων ...καί, γενικά, τὴ **μονάδα** (τὸ ἕνα) μέσα σὲ μιὰ **συλλογὴ** (δάκτυλα, σωρός, κοπάδι...) ἀπὸ **πράγματα**, ποὺ ἔχουν ἕνα κοινὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα (μορφή, ὄνομα...).

Σχ. 1. Μιὰ συλλογὴ γραμματοσήμων

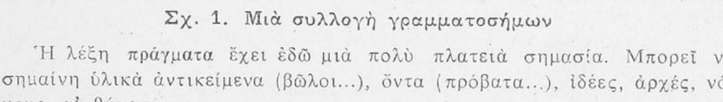
Ἡ λέξη πράγματα ἔχει ἐδῶ μιὰ πολὺ πλατειὰ σημασία. Μπορεῖ νὰ σημαίνη ὑλικὰ ἀντικείμενα (βῶλοι...), ὄντα (πρόβατα...), ἰδέες, ἀρχές, νόμους, αἰσθήματα..

● **Παραδείγματα** : Ὁμάδα ποδοσφαιριστῶν, τάξη μαθητῶν, συλλογὴ γνωμικῶν, λόχος στρατιωτῶν, τὰ φύλλα αὐτοῦ τοῦ βιβλίου... εἶναι διάφορες συλλογὲς πραγμάτων.

2. Μιὰ πρώτη ἰδέα τοῦ συνόλου.—Στὰ σύγχρονα Μαθηματικὰ κάθε συλλογὴ πραγμάτων λέγεται **σύνολο** καὶ καθένα ἀπὸ τὰ πράγματα τῆς συλλογῆς **στοιχεῖο τοῦ συνόλου**. Ὥστε :

> **Σύνολο λέγεται κάθε συλλογὴ πραγμάτων καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου καθένα ἀπὸ τὰ πράγματα τῆς συλλογῆς.**

Τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ εἶναι ὅμοια. Ἀρκεῖ τὸ κοινὸ χαρακτηριστικό τους γνώρισμα νὰ δίνεται μὲ τέτοιον τρόπο,



Σχ. 2. Ἕνα σύνολο γραμματοσήμων

ὥστε ἀπ' αὐτὸ νὰ μποροῦμε νὰ διαπιστώνουμε, ἂν ἕνα πρᾶγμα ἀνήκει (εἶ·

ναι στοιχεῖο) ἢ δὲν ἀνήκει (δὲν εἶναι στοιχεῖο) ἤ, κι' ἀλλοιῶς περιέχεται ἢ δὲν περιέχεται σ' αὐτὸ τὸ σύνολο.

● **Παραδείγματα :** 1. Οἱ μαθηταί : **Παπαδόπουλος** (Π), **Νικολάου** (Ν), **Ἀσημίδης** (Α) ἀποτελοῦν τὸ σύνολο ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ πρώτου θρανίου στὴν τάξη μας. Κοινὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα ἐδῶ εἶναι : i) εἶναι μαθηταί, ii) ἀνήκουν στὴν τάξη μας, καὶ iii) κάθονται στὸ πρῶτο θρανίο.

2. Τὰ γράμματα : **α, ε, η, ι, ο, υ, ω** ἀποτελοῦν τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου.

3. **«Ἐλευθερία, Ἰσότης, Ἀδελφοσύνη»** εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀρχῶν τῆς Γαλλικῆς ἐπαναστάσεως.

4. **Λεξικό, πολυκατοικία, στόλος...** εἶναι διάφορα σύνολα, ποὺ στοιχεῖα τους εἶναι, ἀντίστοιχα, **λέξεις, διαμερίσματα, πλοῖα...**

3. Πῶς γίνεται ἡ παράσταση ἑνὸς συνόλου.—Ὁ πιὸ ἁπλὸς τρόπος, γιὰ νὰ παραστήσουμε ἕνα σύνολο, εἶναι νὰ γράφουμε τὰ στοιχεῖα του ἀνάμεσα στὰ δύο σύμβολα $\{\ \}$ ποὺ λέγονται **ἄγκιστρα**.

Ὁλόκληρο τὸ σύνολο σημειώνουμε μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. Α,Β,Γ,...Σ..., ἐνῶ τὰ στοιχεῖα του μέσα στὰ ἄγκιστρα γράφουμε ἢ μὲ τ' ὄνομά τους ἢ μὲ τ' ἀρχικό τους μόνο γράμμα ἤ, στὴ γενικὴ περίπτωση, μὲ πεζὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ποὺ χωρίζονται μεταξύ τους μὲ κόμμα (,).

Ὁ τρόπος αὐτὸς γιὰ τὴν παράσταση ἑνὸς συνόλου λέγεται **μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του**.

Στὴν παράσταση ἑνὸς συνόλου μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του κάνουμε τὶς ἀκόλουθες δυὸ ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις :

1. Γιὰ λόγους, ποὺ θὰ ἐξηγήσουμε στὸ ἑπόμενο κεφάλαιο, ἀδιαφοροῦμε τελείως γιὰ τὴ σειρὰ τῆς ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων μέσα στὰ ἄγκιστρα.

2. Κάθε στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου ἀναγράφεται μιὰ καὶ μόνο μιὰ φορὰ μέσα στὰ ἄγκιστρα, ἔστω κι' ἂν τὸ σύνολο περιέχη πολλὰ ὅμοια στοιχεῖα.

● **Παραδείγματα :** 1. Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ πρώτου θρανίου στὴν τάξη μας σημειώνεται ἔτσι :

$$\text{Μ} = \{\text{Παπαδόπουλος, Νικολάου, Ἀσημίδης}\}$$

ἢ καὶ μὲ τ' ἀρχικά τους γράμματα : $\text{Μ} = \{\Pi, \text{Ν}, \text{Α}\}$.

2. Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου γράφεται :

$$\Sigma = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$

3. Τὸ σύνολο τῶν ἀρχῶν τῆς Γαλλικῆς ἐπαναστάσεως εἶναι :

$$\text{Α} = \{\text{ἐλευθερία, ἰσότης, ἀδελφοσύνη}\}$$

4. Τὸ σύνολο ὅλων τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Παντάνασσα» εἶναι :

$$\Pi = \{\alpha, \nu, \pi, \sigma, \tau\}$$

5. Στὴ γενικὴ περίπτωση ἕνα σύνολο σημειώνεται ἔτσι :

$$\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

ὅπου τὰ γράμματα α, β, γ, δ παριστάνουν διάφορα πράγματα, ποὺ ἀνήκουν σ' αὐτὸ τὸ σύνολο.

4. Ὁ συμβολισμὸς τοῦ «ἀνήκει στὸ» ἢ «δὲν ἀνήκει στό».— Ἂς πάρουμε τὸ σύνολο ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, ποὺ κάθονται στὸ πρῶτο θρανίο.

$M = \{$Παπαδόπουλος, Νικολάου, Ἀσημίδης$\}$ ἢ $M = \{П, N, A\}$

Ὁ Παπαδόπουλος εἶναι μαθητής, ἀνήκει στὴν τάξη μας καὶ κάθεται στὸ πρῶτο θρανίο. Ἄρα ὁ Παπαδόπουλος (Π) εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Μ. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο οἱ Νικολάου (Ν) καὶ Ἀσημίδης (Α) εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Μ. Αὐτὸ συμβολίζεται ἔτσι:

$$\Pi \in M, \quad N \in M, \quad A \in M$$

ὅπου τὸ σύμβολο $\in$ σημαίνει **«ἀνήκει στὸ»** ἢ **«περιέχεται στό»**.

Κάθε ἄλλος μαθητὴς ἢ ἀνήκει στὴν τάξη μας, ἀλλὰ δὲν κάθεται στὸ πρῶτο θρανίο, ὅπως π.χ. ὁ Γρηγορίου (Γ) ἢ δὲν ἀνήκει καθόλου στὴν τάξη μας, ὅπως π.χ. ὁ Ζήσης (Ζ). Ἄρα οἱ Γρηγορίου καὶ Ζήσης δὲν ἀνήκουν στὸ σύνολο Μ. Αὐτὸ συμβολίζεται ἔτσι:

$$\Gamma \notin M, \quad Z \notin M$$

ὅπου τὸ σύμβολο $\notin$ σημαίνει **«δὲν ἀνήκει στὸ»** ἢ **«δὲν περιέχεται στό»**.

● **Παραδείγματα**: 1. Ἂν Σ εἶναι τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, θὰ εἶναι:

$$\eta \in \Sigma, \quad \upsilon \in \Sigma, \quad \omega \in \Sigma, \quad \varkappa \notin \Sigma, \quad \rho \notin \Sigma$$

2. Τὸ σύνολο ὅλων τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Πελοπόννησος» εἶναι:

$$\Pi = \{\varepsilon, \eta, \lambda, \nu, o, \pi, \sigma\}$$

Ἂν γιὰ τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ συνόλου ἐφαρμόσουμε τὸν παραπάνω συμβολισμό, θὰ ἔχουμε:

$$\alpha \notin \Pi, \quad \nu \in \Pi, \quad \varkappa \notin \Pi, \quad \sigma \in \Pi, \quad \upsilon \notin \Pi, \quad o \in \Pi.$$

5. Ποιὰ σύνολα λέγονται ξένα. – Εἶναι προφανὲς ὅτι ἕνας μαθητὴς τῆς πρώτης τάξεως τοῦ Γυμνασίου δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ταυτόχρονα καὶ μαθητὴς τῆς δευτέρας τάξεως.

Ἄρα τὸ σύνολο Α ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως καὶ τὸ σύνολο Β ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ Γυμνασίου δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ στοιχεῖο.

Δυὸ ἢ καὶ περισσότερα τέτοια σύνολα λέγοντα **ξένα μεταξύ τους** ἢ ἁπλῶς **ξένα** σύνολα. Ὥστε:

> **Δυὸ ἢ περισσότερα σύνολα λέγονται ξένα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν δὲν ἔχουν κανένα κοινὸ στοιχεῖο.**

● **Παραδείγματα**: 1. Τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων καὶ τὸ σύνολο τῶν μακρῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου εἶναι ξένα μεταξύ τους.

2. Τὸ σύνολο ὅλων τῶν διαμερισμάτων μιᾶς πολυκατοικίας εἶναι ξένο πρὸς τὸ σύνολο ὅλων τῶν διαμερισμάτων μιᾶς ἄλλης πολυκατοικίας.

3. Τὰ σύνολα τῶν παικτῶν δυὸ ποδοσφαιρικῶν ὁμάδων, ποὺ ἀγωνίζονται, εἶναι ξένα μεταξύ τους.

6. Τί εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς συνόλου.—Ἂν ὀνομάσουμε Σ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας καὶ Α τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς πρώτης τάξεως, εἶναι προφανὲς ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Σ. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο τὸ σύνολο Α λέγεται **ὑποσύνολο** τοῦ συνόλου Σ. Ὥστε:

> **Ἕνα σύνολο Α λέγεται ὑποσύνολο ἑνὸς συνόλου Σ, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν κάθε στοιχεῖο τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ Σ.**

Γιὰ τὸ ἴδιο λόγο καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα Β καὶ Γ τῶν μαθητῶν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως τοῦ Γυμνασίου μας εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Σ.

Οἱ σχέσεις αὐτὲς τῶν συνόλων Α, Β καὶ Γ πρὸς τὸ σύνολο Σ συμβολίζονται ἔτσι:

$$A \subset \Sigma, \; B \subset \Sigma, \; \Gamma \subset \Sigma$$

καὶ διαβάζονται: «τὸ Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Σ»... ἤ, κι' ἀλλοιῶς, «τὸ Α περιέχεται στὸ Σ»...

Ὅταν μερικὰ σύνολα Α, Β, Γ,... εἶναι ὑποσύνολα τοῦ ἴδιου συνόλου Σ, τὸ Σ λέγεται **σύνολον ἀναφορᾶς** τῶν Α, Β, Γ...

● **Παραδείγματα**: 1. Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου.

2. Τὸ Σωματεῖον Οἰκοδόμων Ἀθηνῶν εἶναι ὑποσύνολο τῆς Ὁμοσπονδίας Οἰκοδόμων, ποὺ κι' αὐτὴ εἶναι ὑποσύνολο τῆς Γενικῆς Συνομοσπονδίας Ἐργατῶν Ἑλλάδος (Γ.Σ.Ε.Ε.).

3. Τὸ σύνολο: $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ εἶναι σύνολον ἀναφορᾶς τῶν ὑποσυνόλων: $A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{\alpha, \gamma\}$, $\Gamma = \{\beta, \gamma\}$, $\Delta = \{\alpha\}$, $E = \{\beta\}$, $Z = \{\gamma\}$.

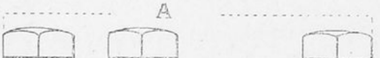
7. Μιὰ βασικὴ ἔννοια: ἡ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα.—Ἂς πάρουμε τὰ δυὸ διάφορα σύνολα, ποὺ εἰκονίζονται στὸ σχῆμα 3. Τὸ πρῶτο (Α) ἀποτελεῖται ἀπὸ βίδες καὶ τὸ δεύτερο (Β) ἀπὸ παξιμάδια.

Ἂν τὰ δυὸ αὐτὰ σύνολα διατάξουμε ἔτσι, ποὺ ὅλες οἱ βίδες νὰ βρίσκονται σὲ μιὰ σειρὰ καὶ κάτω ἀπὸ κάθε βίδα ἕνα παξιμάδι, ὅταν συμπληρωθῆ αὐτὴ ἡ διάταξη, παρατηροῦμε ὅτι:

1ο. Σὲ κάθε βίδα ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον ἕνα παξιμάδι.

2ο. Σὲ κάθε παξιμάδι ἀντιστοιχεῖ μιὰ καὶ μόνο μιὰ βίδα.

3ο. Ἡ ἀντιστοίχιση αὐτὴ πραγματοποιεῖται μ' ὁποιαδήποτε τάξη κι' ἂν συνταιριάσουμε τὰ στοιχεῖα τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων.



Σχ. 3. Ἡ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα

Σὲ κάθε τέτοια περίπτωση θὰ λέμε ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δυὸ συνόλων ὑπάρχει **ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα** ἤ, κι' ἀλλοιῶς, ὑπάρχει **ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία**.

Τὸ σύνολο καὶ ἡ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα ἀποτελοῦν δυὸ ἀπὸ τὶς βασικὲς ἔννοιες, ποὺ θεμελιώνουν τὰ σύγχρονα Μαθηματικά.

● **Παραδείγματα**: 1. Τὰ δάκτυλα τοῦ δεξιοῦ μας χεριοῦ μποροῦν νὰ τεθοῦν πάντοτε σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μὲ τὰ δάκτυλα τοῦ ἀριστεροῦ μας χεριοῦ.

2. Τὰ ντουΐ καὶ οἱ λαμπτῆρες φωτισμοῦ τοῦ σπιτιοῦ μας βρίσκονται πάντα σὲ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία.

3. Τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων $A = \{\alpha, \beta\}$ καὶ $B = \{x, y\}$ μποροῦν νὰ τεθοῦν σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα κατὰ δυὸ τρόπους:

$$1\text{ος}\ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \updownarrow & \updownarrow \\ x & y \end{array} \qquad 2\text{ος}\ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \updownarrow & \updownarrow \\ y & x \end{array}$$

8. Τί εἶναι ἀπαρίθμηση συνόλου καὶ τί φυσικὸς ἀριθμός.—Ὅταν μᾶς ἐρωτοῦν: «Πόσα στοιχεῖα ἔχει ἕνα ὡρισμένο σύνολο;», γιὰ νὰ δώσουμε τὴν ἀπόκριση, πρέπει νὰ προβοῦμε σὲ μιὰ πράξη, ποὺ θὰ μᾶς δώση τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων, καὶ ν' ἀπαντήσουμε μὲ μιὰ λέξη, ποὺ νὰ ἐκφράζη αὐτὸ τὸ πλῆθος.

Ἡ πράξη αὐτὴ λέγεται **ἀπαρίθμηση** (μέτρημα) τοῦ συνόλου καὶ ἡ λέξη, μὲ τὴν ὁποία θ' ἀπαντήσουμε, λέγεται **φυσικὸς ἀριθμός**. Ὥστε:

> **Ἀπαρίθμηση ἑνὸς συνόλου λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων του καὶ φυσικός του ἀριθμὸς ἡ ἔννοια, ποὺ ἐκφράζει αὐτὸ τὸ πλῆθος.**

Ἀλλὰ πῶς γίνεται ἡ ἀπαρίθμηση ἑνὸς συνόλου; Θὰ τὸ δοῦμε ἀμέσως πιὸ κάτω.

9. Τὰ πρότυπα σύνολα καὶ οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί.—Ὅταν ἔχουμε ἕνα σύνολο Σ, θὰ ὀνομάζουμε **ἀμέσως ἑπόμενον αὐτοῦ** τὸ σύνολο, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ καὶ ἕνα ἐπὶ πλέον στοιχεῖο.

Ἔτσι, ἂν πάρουμε σὰν ἀρχικὸ τὸ σύνολο Σ_1 (διαβάζεται: Σίγμα ἕνα ἢ Σίγμα μὲ δείκτη ἕνα), ποὺ ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο, τὸ τετραγωνικὸ σύμβολο ▦, μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε τὴν παρακάτω ἀκολουθία συνόλων:

Σ_1:	▦	ἕνα	1
Σ_2:	▦ ▦	δύο	2
Σ_3:	▦ ▦ ▦	τρία	3
Σ_4:	▦ ▦ ▦ ▦	τέσσαρα	4
Σ_5:	▦ ▦ ▦ ▦ ▦	πέντε	5
Σ_6:	▦ ▦ ▦ ▦ ▦ ▦	ἕξ	6
Σ_7:	▦ ▦ ▦ ▦ ▦ ▦ ▦	ἑπτὰ	7

. . . .

ὅπου κάθε σύνολο εἶναι τὸ ἀμέσως ἑπόμενο τοῦ προηγουμένου του.

Γράφοντας ἔτσι τὸ ἀμέσως ἑπόμενο καθενὸς ἀπὸ τὰ σύνολα αὐτά, θὰ ἔχουμε μιὰ **ἀτέλειωτη** (χωρὶς τέλος) ἤ, κι' ἀλλοιῶς, μιὰ **ἀπέρατη** (δίχως πέρας) ἀκολουθία συνόλων.

Τὰ σύνολα, ποὺ σχηματίζονται μ' αὐτὸ τὸν τρόπο, λέγονται **πρότυπα σύνολα**.

Καθένα ἀπὸ τὰ πρότυπα σύνολα ἔχει ἕνα ὡρισμένο πλῆθος στοιχείων, ποὺ ἐκφράζεται μ' ἕνα φυσικὸν ἀριθμό. Οἱ λέξεις: **ἕνα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά...**, ποὺ εἶναι γραμμένες δίπλα σὲ καθένα ἀπὸ τὰ παραπάνω σύνολα εἶναι οἱ φυσικοί τους ἀριθμοί, ἐνῶ τὰ σύμβολα: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...** ἀποτελοῦν τὴ γραφὴ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

ἕνα (1) δύο (2) τρία (3) τέσσαρα (4) πέντε (5)

Σχ. 4. Πρότυπα σύνολα μὲ τὰ δάκτυλα τοῦ χεριοῦ μας

Ἀπὸ τὰ παιδικά μας χρόνια ἔχουμε συνηθίσει νὰ σχηματίζουμε τέτοια πρότυπα σύνολα μὲ τὰ δάκτυλα τοῦ χεριοῦ μας, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 4.

10. Πῶς γίνεται ἡ ἀπαρίθμηση ἑνὸς συνόλου.—Στὴν ἐρώτηση: «Πόσες ἡμέρες εἶναι ἀπὸ τὴν Τρίτη ὡς τὸ Σάββατο», ποὺ σημαίνει πόσα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$H = \{ \text{Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο} \}$$

γιὰ νὰ δώσουμε τὴν ἀπόκριση, ἀρχίζουμε ν' ἀπαγγέλλουμε ἕνα-ἕνα, ὡς τὸ τέλος, ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ συνόλου, ἐνῶ ταυτόχρονα κλείνουμε ἕνα-ἕνα ὅλα τὰ δάκτυλα τοῦ χεριοῦ μας, ἂν εἶναι ἀνοικτά, ἤ, ἀντίστροφα, τὰ ἀνοίγουμε, ἂν εἶναι κλειστὰ (σχ. 4).

Ἀλλὰ ὅλα τὰ δάκτυλα τοῦ χεριοῦ μας ἀποτελοῦν ἕνα γνωστὸ πρότυπο σύνολο, ποὺ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸ πέντε. Πέντε θὰ εἶναι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Η.

Ὥστε ἡ ἀπαρίθμηση τοῦ συνόλου Η ἔγινε μὲ τὸ νὰ θέσουμε τὰ στοιχεῖα του σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἀπὸ τὰ πρότυπα σύνολα. Ὁ φυσικὸς ἀριθμός, ποὺ χαρακτηρίζει τὸ πρότυπο αὐτὸ σύνολο, θὰ εἶναι καὶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Η.

Μ' αὐτόν, γενικά, τὸν τρόπο γίνεται ἡ ἀπαρίθμηση ὁποιουδήποτε συνόλου.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα, ὅτι κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς προέρχεται ἀπὸ τὴν ἀπαρίθμηση κάποιου συνόλου. Γι' αὐτὸ καὶ οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ **ἀριθμοὶ ἀπαριθμήσεως**.

Κάθε σύνολο, ποὺ μπορεῖ νὰ τεθῆ σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μὲ ἕνα πρότυπο σύνολο, λέγεται **πεπερασμένο** σύνολο.

Τὸ σύνολο, ποὺ ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο, λέγεται **μονομελὲς** ἢ **μονοστοιχειακὸ** σύνολο ἢ ἀκόμη καὶ **μονοσύνολο**. Ἕνα σύνολο μὲ δύο, τρία... στοιχεῖα λέγεται **διμελές, τριμελές**... Ἰδιαίτερα, τὸ διμελὲς σύνολο λέγεται καὶ **ζεῦγος στοιχείων**.

● **Παραδείγματα**: 1. Οἱ τάξεις τοῦ Γυμνασίου εἶναι τρεῖς, γιατὶ τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ συνόλου μποροῦν νὰ τεθοῦν σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ προτύπου συνόλου Σ_3 (§ 9).

2. Τὰ φωνήεντα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου μποροῦν νὰ τεθοῦν σὲ ἀμφιμονο-

σήμαντη ἀντιστοιχία μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ προτύπου συνόλου Σ_7. Ἄρα ἡ ἀπαρίθμηση αὐτοῦ τοῦ συνόλου δίνει τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν 7.

3. Τὸ σύνολο τῶν συμφώνων γραμμάτων τῆς λέξεως «ἠχώ» εἶναι μονομελές, γιατὶ βρίσκεται σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα μὲ τὸ πρότυπο σύνολο Σ_1.

11. Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.— Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἕνα ἰδιαίτερο σύνολο: τὸ **σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν**, ποὺ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα Φ. Ὥστε εἶναι:

$$\Phi = \{ \text{ἕνα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά...} \}$$

Τὸ σύνολο αὐτὸ ἔχει ἕνα ἀρχικὸ στοιχεῖο, τὴ **μονάδα**, ἐνῶ κάθε ἄλλο του στοιχεῖο δὲν εἶναι παρὰ ἕνα **σύνολο μονάδων** (δύο, τριῶν...).

Ἀλλά, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, σὲ κάθε σύνολο ὑπάρχει τὸ ἀμέσως ἑπόμενο σύνολο. Ἄρα γιὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸ ὑπάρχει ὁ ἀμέσως ἑπόμενος, ἐκεῖνος δηλ. ποὺ ἔχει μιὰ μονάδα ἐπὶ πλέον. Ἔτσι ὅμως φθάνουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐνῶ ὑπάρχει ἕνα ἀρχικὸ στοιχεῖο, δὲν ὑπάρχει κανένα τελευταῖο. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο λέμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι **μὴ πεπερασμένον** (χωρὶς πέρας) ἤ, κι' ἀλλοιῶς, εἶναι ἕνα **ἀπειροσύνολο.**

Ὁ συμβολισμὸς τοῦ ἀπειροσυνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γίνεται ἔτσι:

$$\Phi = \{ 1, 2, 3, \ldots 7, \ldots \}$$

ὅπου οἱ τρεῖς στιγμὲς ... μεταξὺ 3 καὶ 7 σημαίνουν: «καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς», ἐνῶ οἱ τρεῖς τελευταῖες ... σημαίνουν: «κ.ο.κ. χωρὶς τέλος».

Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἀπειροσύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν καὶ πολλὰ ἄλλα ἀπειροσύνολα, ποὺ θὰ γνωρίσουμε στὰ παρακάτω κεφάλαια.

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἕνα **θεμελιῶδες σύστημα ἀριθμῶν.** Σ' αὐτοὺς ἐπάνω θὰ στηρίξουμε τὸ οἰκοδόμημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ποὺ θὰ γνωρίσουμε ἀμέσως πιὸ κάτω καὶ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, ποὺ θὰ συναντήσουμε ἀργότερα.

12. Πληθικοὶ καὶ διατακτικοὶ ἀριθμοί.— 1. Τὸ Γυμνάσιο ἔχει τρεῖς τάξεις: τὴν **πρώτη**, τὴ **δευτέρα** καὶ τὴν **τρίτη**.

2. Ἡ πολυκατοικία, ποὺ διαμένω, ἔχει ἕξ ὀρόφους κι' ἐγὼ κατοικῶ στὸν **τέταρτο.**

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ **τρία**, ἕξ..., ποὺ ἐκφράζουν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου λέγονται **πληθικοὶ** ἀριθμοί, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ **πρῶτος, δεύτερος, τρίτος, τέταρτος**..., ποὺ δείχνουν τὴ θέση ποὺ ἔχει ἕνα ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου, σὲ μιὰ ὡρισμένη διάταξή τους, εἴτε φυσική, ὅπως τῶν τάξεων ἑνὸς σχολείου ἢ τῶν ὀρόφων μιᾶς πολυκατοικίας, εἴτε τυχαία, λέγονται ἀριθμοὶ **διατακτικοί.**

Οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ ἀπαγγέλονται μὲ τὰ ἀπόλυτα ἀριθμητικά: ἕνα, δύο, τρία,..., ἐνῶ οἱ διατακτικοὶ μὲ τὰ τακτικά: πρῶτος, δεύτερος, τρίτος...

13. Ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι καὶ ἀφηρημένοι.— Οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ **τρία** πρόβατα, **πέντε** θρανία, **δυὸ** αὐτοκίνητα, ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὴν ἀπαρίθμηση ὡρισμένων συνόλων, λέγονται ἀριθμοὶ **συγκεκριμένοι.**

Ἀντίθετα, οἱ ἀριθμοὶ ἔξ, **ὀκτώ, εἴκοσι**, ποὺ δὲν συνοδεύονται ἀπὸ καμμιὰ ἔνδειξη γιὰ τὴ φύση τῶν ἀντικειμένων, στὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, λέγονται ἀριθμοὶ **ἀφηρημένοι**.

14. Οἱ γενικοὶ ἀριθμοί.—Σὲ πολλὲς περιπτώσεις δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει τόσο τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου, ὅσο ἡ σχέση ποὺ ἔχει ὁ πληθικός του ἀριθμὸς μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν στοιχείων ἑνὸς ἄλλου συνόλου.

Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς χρησιμοποιοῦμε τοὺς **γενικοὺς ἀριθμούς**. Δηλ. μὲ τὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ χρησιμοποιοῦμε γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἢ λατινικοῦ ἀλφαβήτου. Ἔτσι γράφουμε ὅτι ἀπὸ δυὸ ὁμίλους ὀρειβατῶν ὁ ἕνας ἔχει **α** μέλη κι' ὁ ἄλλος **β** μέλη.

Ἕνας συγκεκριμένος γενικὸς ἀριθμὸς **α δένδρων** μπορεῖ νὰ παριστάνη ὁποιοδήποτε πλῆθος στοιχείων (τρία, πέντε, δέκα...) τοῦ ὡρισμένου συνόλου τῶν δένδρων, ἐνῶ ὁ ἀφηρημένος ἀριθμὸς **β** μπορεῖ νὰ παριστάνη ὁποιονδήποτε πληθικὸν ἀριθμὸ (δύο, ἑπτά, ἑκατὸ...) ὁποιουδήποτε συνόλου (μαθητῶν, δένδρων, πλοίων...).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ γραφοῦν πέντε διάφορες συλλογὲς κι' ἡ καθεμιὰ μὲ τὸ ἰδιαίτερο ὄνομά της (π.χ. ὅμιλος...).

2. Νὰ δοθοῦν πέντε διάφορα παραδείγματα συνόλων.

3. Νὰ γίνη συμβολικὴ παράσταση καθενὸς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα σύνολα : i) τῶν μακρῶν φωνηέντων, ii) τῶν συμφώνων τῆς λέξεως «Ἄννα», iii) τῶν ἐπίπλων τῆς τάξεώς σας, iv) τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ ἔχουν 30 ἡμέρες καὶ v) τῶν καθηγητῶν, ποὺ διδάσκουν στὴν τάξη σας.

4. Νὰ ὀνομάσετε μὲ τὸ χαρακτηριστικό τους γνώρισμα καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα : i) Α = {ε, ο}, ii) Β = {χάρακας, διαβήτης, τρίγωνο}, iii) Γ= {πατέρας, μητέρα, ἀδελφός, ἀδελφή}, iv) Δ = {κρεβάτι, κομοδίνο, ντουλάπα, καρέκλα} καὶ v) Ε = {Δεκέμβριος, Ἰανουάριος, Φεβρουάριος}.

5. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι, ἀντίστοιχα, τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων «Ἀλαμάνα», «γαλατᾶς», «τάγμα» : i) Νὰ παραστήσετε καθένα ἀπ' αὐτά, ii) νὰ σχηματίσετε τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων, ποὺ περιέχονται καὶ στὶς τρεῖς αὐτὲς λέξεις καὶ iii) νὰ συμβολίσετε σὲ ποιὰ ἀπὸ τὰ σύνολα Α, Β, Γ περιέχεται καὶ σὲ ποιὰ δὲν περιέχεται καθένα ἀπὸ τὰ γράμματα : γ, λ, μ, ν, τ, σ.

6. Γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα : Α = {Θρησκευτικά, Ἑλληνικά, Μαθηματικά}, Β = {μηλιά, συκιά}, Γ = {Κυριακή, Δευτέρα, Τρίτη} νὰ γράψετε ἀπὸ ἕνα ξένο σύνολο μὲ ὅμοια στοιχεῖα.

7. Τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου νὰ χωρίσετε σὲ δυὸ χαρακτηριστικὰ ὑποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Ἐπίσης νὰ χωρίσετε σὲ τρία ξένα ὑποσύνολα τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων.

8. Θεωρήσατε ὡς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο τῶν παικτῶν τῆς ἀγαπημένης σας ποδοσφαιρικῆς ὁμάδος καὶ γράψτε ὅλα τὰ ὑποσύνολά του, ποὺ καθορίζονται ἀπὸ τὴ θέση τῶν παικτῶν στὸ γήπεδο κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ ἀγῶνος. Τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ξένα μεταξύ τους ; Γιατί ;

9. Ἔχουμε ἕνα σύνολο ἀπὸ πέντε διάφορα λουλούδια. Σὲ πόσα ὑποσύνολα

τῶν δυὸ λουλουδιῶν μπορεῖτε νὰ τὸ χωρίσετε ; Σὲ πόσα τῶν τριῶν καὶ σὲ πόσα τῶν τεσσάρων ;

10. Νὰ τεθοῦν σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα, μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τὰ σύνολα : i) τῶν συμφώνων γραμμάτων τῶν λέξεων «φῶς» καὶ «ἡμέρα», ii) $A = \{α, β, γ\}$ καὶ $B = \{x, y, ω\}$ (ἕξ τρόποι).

11 Μποροῦν νὰ τεθοῦν σὲ ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα : i) τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων καὶ τὸ σύνολο τῶν φθόγγων τῆς μουσικῆς κλίμακος ; ii) τὸ σύνολο τῶν ποδιῶν ἑνὸς ἀλόγου καὶ τὸ σύνολο τῶν τροχῶν ἑνὸς αὐτοκινήτου ; iii) τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν καὶ τὸ σύνολο τῶν θρανίων τῆς τάξεώς σας ;

12. Νὰ γραφοῦν τρεῖς λέξεις τέτοιες, ποὺ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τους νὰ εἶναι μονομελές, κι' ἄλλες τρεῖς ποὺ τὰ σύμφωνά τους ν' ἀποτελοῦν ζεῦγος στοιχείων.

13. Θεωρήσατε ὡς πρότυπα σύνολα τά : x, xx, xxx, xxxx, xxxxx, xxxxxx, xxxxxxx καὶ ἀπαριθμήσατε τὰ σύνολα : i) τῶν αἰσθήσεών σας, ii) τῶν ποδιῶν σας, iii) τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, iv) τῶν συμφώνων τῆς λέξεως «κακία», v) τῶν τοίχων τῆς τάξεώς σας, vi) τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «ἕνα», vii) τῶν τάξεων τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου.

14. Ἀπὸ τὸ σῶμα σας νὰ βρῆτε σύνολα, ποὺ νὰ χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὸν ἀριθμό : i) ἕνα, ii) δύο, iii) τέσσαρα, iv) πέντε.

15. Τὸ σύνολο ὅλων τῶν κερμάτων, ποὺ μπορεῖ νὰ βρίσκονται στὸ πορτοφόλι σας εἶναι πεπερασμένο ; Γιατί ; Ἀναφέρατε καὶ σεῖς τρία ἀκόμη τέτοια παραδείγματα.

16. Στὶς προτάσεις : i) «τὸ δωμάτιό μου ἔχει **δύο** παράθυρα», ii) «ἀνήκω στὸν **ἕκτο** λόχο, iii) «ποιός εἶναι ὁ **ἕβδομος** μήνας τοῦ ἔτους ;» iv) «τὰ μέλη τῆς οἰκογενείας μου εἶναι **πέντε**», v) στὸν κῆπο μας ὑπάρχουν **τέσσαρα** δένδρα», vi) «κάθομαι στὸ **τρίτο** θρανίο», νὰ διακρίνετε τοὺς πληθικοὺς ἀπὸ τοὺς διατακτικοὺς ἀριθμούς.

17. Ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς ποιοί εἶναι συγκεκριμένοι καὶ ποιοί ἀφηρημένοι : i) ἕνδεκα, ii) ἕξ βιβλία, iii) δύο ποδήλατα, iv) ἑπτά, v) τρία ποτήρια, vi) τέσσαρα, vii) ἑκατό, viii) πέντε πλοῖα.

18. Γράψτε παραδείγματα σχετικὰ μέ : i) τρεῖς πληθικοὺς καὶ τρεῖς διατακτικοὺς ἀριθμούς, ii) τρεῖς συγκεκριμένους καὶ τρεῖς ἀφηρημένους ἀριθμούς, iii) τρεῖς γενικοὺς συγκεκριμένους καὶ τρεῖς γενικοὺς ἀφηρημένους ἀριθμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΤΟ ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

15. Τί εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.—Τὸ σύνολο τῶν σχεδιαστικῶν ἐργαλείων, πού βρίσκονται στὴν κασετίνα μας, εἶναι :

$$A = \{\text{χάρακας, διαβήτης, τρίγωνο}\}$$

καὶ πληθικός του ἀριθμὸς ὁ **τρία**.

Ὅταν βγάλουμε τὸ χάρακα, στὴν κασετίνα μας ἀπομένει τὸ σύνολο :

$$B = \{\text{διαβήτης, τρίγωνο}\}$$

μὲ πληθικὸν ἀριθμὸ **δύο**.

Ὅταν χρησιμοποιοῦμε ταυτόχρονα τὸ χάρακα καὶ τὸ διαβήτη, τὸ σύνολο τῶν ἐργαλείων τῆς κασετίνας μας εἶναι τὸ μονομελές :

$$\Gamma = \{\text{τρίγωνο}\}$$

Ἄν, τέλος, βγάλουμε καὶ τὸ τρίγωνο, ἡ κασετίνα μας θ' ἀπομείνη κενή, δηλ. χωρὶς κανένα στοιχεῖο. Ὥστε τώρα τὸ σύνολο τῶν ἐργαλείων τῆς κασετίνας μας θὰ εἶναι :

$$\Delta = \{\ \}$$

Αὐτὸ τὸ σύνολο ὀνομάζουμε **κενὸ σύνολο** καὶ τὸν πληθικό του ἀριθμὸ **μηδέν**, ποὺ συμβολίζεται μὲ τὸ **0**, πρῶτο γράμμα τῆς λέξεως «Οὐδέν». Ὥστε :

> **Κενὸ σύνολο λέγεται ἕνα σύνολο χωρὶς στοιχεῖα καὶ μηδὲν (0) ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ κενοῦ συνόλου.**

Τὸ κενὸ σύνολο σημειώνεται πάντα μὲ τὸ σύμβολο $\varnothing$.

● **Παραδείγματα :** 1. Τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων τῆς λέξεως «φωνὴ» εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, γιατὶ κανένα φωνῆεν σ' αὐτὴ τὴ λέξη δὲν εἶναι βραχύ.

2. Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, ποὺ τ' ὄνομά τους ἀρχίζει ἀπὸ Α, εἶναι τὸ κενὸ σύνολο. Καμμιὰ τέτοια ἡμέρα δὲν ὑπάρχει.

3. Κενὸ ἐπίσης εἶναι καὶ τὸ σύνολο τῶν συμμαθητῶν σας, ποὺ ἔχουν ἀνάστημα τὸ λιγώτερο τρία μέτρα.

16. Τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.—Τὸ μηδὲν μαζὶ μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀποτελοῦν ἕνα νέο σύνολο : τὸ σύνολο τῶν **ἀπολύτων ἀκεραίων ἀριθμῶν** ἢ τῶν **ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς**.

Τὸ νέο αὐτὸ σύνολο συμβολίζεται μὲ Φ_0 καὶ γράφεται ἔτσι :

$$\Phi_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots 7 \ldots\}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς θὰ ὀνομάζουμε προσωρινὰ ἁπλῶς **ἀκεραίους**, χωρὶς δηλ. τὸν προσδιορισμὸ ἀπολύτους ἢ τῆς **Ἀριθμητικῆς**.

Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς μονοσυνόλου θὰ λέγεται **ἀκεραία μονάς**.

Εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο.

17. Πότε δυὸ σύνολα λέγονται ἴσα.—Ἄς πάρουμε τὰ δυὸ σύνολα :

$$A = \{\kappa, \lambda, \mu, \rho\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\lambda, \rho, \mu, \kappa\}$$

ποὺ συμβολίζουν καὶ τὰ δυὸ τὸ σύνολο ὅλων τῶν συμφώνων γραμμάτων τῆς λέξεως «καλημέρα».

Συγκρίνοντας τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β παρατηροῦμε ὅτι:

1ο. Κάθε στοιχεῖο τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Β, καὶ

2ο. Κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α.

Δυὸ τέτοια σύνολα, ὅπως τὰ Α καὶ Β, ποὺ δὲν ἀποτελοῦν παρὰ διαφορετικὴ γραφὴ τοῦ ἴδιου συνόλου, λέγονται **σύνολα ἴσα**.

Εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ τὰ σύνολα: $\Gamma = \{\rho, \kappa, \mu, \lambda\}$, $\Delta = \{\mu, \kappa, \rho, \lambda\}$ ... εἶναι ἴσα μὲ τὰ Α καὶ Β. Ὥστε:

> **Δυὸ ἢ περισσότερα σύνολα λέγονται ἴσα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἔχουν τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα.**

Τὴ σχέση αὐτὴ μεταξὺ δύο συνόλων συμβολίζουμε ἔτσι:

$$A = B \tag{17,1}$$

καὶ διαβάζουμε: «σύνολο Α ἴσο μὲ σύνολο Β».

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ συμπεραίνουμε ὅτι:

1ο. Κατὰ τὴν ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου μᾶς εἶναι ἀδιάφορη ἡ διάταξή τους ἀνάμεσα στὰ ἄγκιστρα (βλ. § 3).

2ο. Δυὸ ἢ περισσότερα ἴσα σύνολα ἔχουν τὸν ἴδιο πληθικὸν ἀριθμό.

Ὅταν δυὸ σύνολα δὲν εἶναι ἴσα, αὐτή τους τὴ σχέση σημειώνουμε ἔτσι:

$$A \neq B \tag{17,2}$$

ὅπου τὸ σύμβολο $\neq$ διαβάζεται «διάφορο».

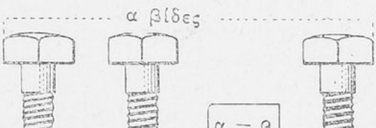
18. Ποιὰ σύνολα λέγονται ἰσοδύναμα.—Τὰ διάφορα σύνολα Α καὶ Β τοῦ σχήματος 5, ποὺ ἀνάμεσα στὰ στοιχεῖα τους ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα, λέμε ὅτι ἔχουν τὴν ἴδια **δυναμικότητα** ἢ ὅτι εἶναι **σύνολα ἰσοδύναμα**: Ὥστε:

> **Δύο σύνολα λέγονται ἰσοδύναμα, τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν μεταξὺ τῶν στοιχείων τους ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα.**

Ἡ σχέση **ἰσοδυναμίας** μεταξὺ δύο συνόλων σημειώνεται ἔτσι:

$$A \sim B \tag{18,1}$$

καὶ διαβάζεται: «σύνολο Α ἰσοδύναμο μὲ σύνολο Β».



Εἶναι προφανὲς ὅτι δυὸ ἴσα σύνολα εἶναι καὶ ἰσοδύναμα, ἐνῶ δυὸ ἰσοδύναμα σύνολα δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ καὶ ἴσα.

Ἡ σχέση τῆς ἰσότητος εἶναι μιὰ μερικὴ περίπτωση ἰσοδυναμίας. Γι' αὐτὸ καὶ πρέπει νὰ μὴ γίνεται σύγχιση ἀνάμεσα στὴν ἰσότητα καὶ τὴν ἰσοδυναμία δυὸ συνόλων.

● **Παραδείγματα**: 1. Ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{3, 4, 5, 6\}$, θὰ εἶναι $A \sim B$.

2. Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «Μαθηματικά» εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «γεωργός».

3. 'Ισοδύναμα εἶναι ἐπίσης τὸ σύνολο τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους καὶ τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «πετρελαιοκινητῆρες».

19. 'Αριθμοὶ ἴσοι. 'Ισότητες.—'Από τὴν παραπάνω σχέση ἰσοδυναμίας δύο συνόλων βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι δύο ἢ περισσότερα ἰσοδύναμα μεταξύ τους σύνολα ἔχουν τὸν ἴδιο πληθικὸν ἀριθμὸ ἢ ὅτι οἱ πληθικοί τους ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι. Τὸ ἴδιο δηλ. ποὺ συμβαίνει καὶ στὰ ἴσα σύνολα. "Ωστε :

Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν χαρακτηρίζουν σύνολα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.

Γιὰ νὰ σημειώσουμε ὅτι δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι, γράφουμε ἀναμεσά τους τὸ σύμβολο =, ποὺ διαβάζεται **ἴσον**. Ἡ γραφή :

$$\alpha = \beta \qquad (19,1)$$

λέγεται **ἰσότης** καὶ οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β **μέλη τῆς ἰσότητος** καὶ μάλιστα ὁ πρὸς τ' ἀριστερὰ ἀριθμὸς (ὁ α) λέγεται **πρῶτο μέλος** καὶ ὁ πρὸς τὰ δεξιὰ (ὁ β) **δεύτερο μέλος** τῆς ἰσότητος.

20. Οἱ τρεῖς βασικὲς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.—Οἱ ἰσότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχουν τὶς ἀκόλουθες τρεῖς βασικὲς ἰδιότητες :

1ο Κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἑαυτό του.

Ἡ ἰδιότης αὐτή, ποὺ εἶναι προφανής, λέγεται **ἀνακλαστικὴ** καὶ σημειώνεται ἔτσι :

$$\alpha = \alpha \qquad (20,1)$$

2ο "Αν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος μὲ ἕναν ἄλλο φυσικὸν ἀριθμὸ β, τότε καὶ ὁ β θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν α.

Κι' αὐτὴ ἡ ἰδιότης εἶναι προφανής, λέγεται **συμμετρικὴ** καὶ ἐκφράζεται ἔτσι :

$$\alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha \qquad (20,2)$$

ὅπου τὸ σύμβολο ⇒ ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ ἄρα ἢ τότε ἢ συνεπάγεται καὶ λέγεται **σύμβολο συνεπαγωγῆς**.

3ο Δυὸ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἴσοι μ' ἕναν τρίτον ἀριθμὸ εἶναι καὶ μεταξύ τους ἴσοι.

Ἡ ἰδιότης αὐτή, πού εὔκολα ἐπαληθεύεται, λέγεται **μεταβατικὴ** καὶ σημειώνεται ἔτσι :

$$\alpha = \beta \ \wedge \ \beta = \gamma \ \Rightarrow \ \alpha = \gamma \qquad (20,3)$$

ὅπου τὸ σύμβολο ∧ εἶναι τὸ συνδετικὸ **καὶ** καὶ λέγεται **σύμβολο συζεύξεως**.

● **Παρατήρηση :** Εἶναι προφανὲς ὅτι οἱ τρεῖς αὐτὲς ἰδιότητες ἀληθεύουν ὄχι μόνο γιὰ τοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ καὶ γιὰ τὰ ἴσα, ὅσο καὶ γιὰ τὰ ἰσοδύναμα σύνολα. "Ετσι, ἂν εἶναι $A = B$ καὶ $\Delta \sim E$, θὰ εἶναι :

1ο $A = A$ καὶ $\Delta \sim \Delta$

2ο $A = B \Rightarrow B = A$ καὶ $\Delta \sim E \Rightarrow E \sim \Delta$

3ο $A = B \wedge B = \Gamma \Rightarrow A = \Gamma$ καὶ $\Delta \sim E \wedge E \sim Z \Rightarrow \Delta \sim Z$.

21. 'Αριθμοὶ ἄνισοι—Διαδοχικοὶ ἀριθμοί.—1ο "Ας πάρουμε τὰ σύνολα Α καὶ Β (σχ. 6). Τὸ Α περιέχει **α** βίδες καὶ τὸ Β περιέχει β παξιμάδια.

Συγκρίνοντας τὰ δυὸ αὐτὰ σύνολα παρατηροῦμε ὅτι, ἀφοῦ βιδώσουμε τὴν τελευταία βίδα στὸ ἀντίστοιχο παξιμάδι, περισσεύει ἕνα, τὸ λιγώτερο, παξιμάδι. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων δὲν ὑπάρχει **ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα**, ἀφοῦ σὲ κάθε βίδα ἀντιστοιχεῖ ἕνα παξιμάδι, ἐνῶ σὲ κάθε παξιμάδι δὲν ἀντιστοιχεῖ κι' ἀπὸ μιὰ βίδα.

Τὰ σύνολα λοιπὸν Α καὶ Β δὲν εἶναι ἰσοδύναμα κι' οἱ πληθικοί τους ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἴσοι, ἀλλὰ **ἀριθμοὶ ἄνισοι**. "Ωστε:

> **Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, ἂν δὲν χαρακτηρίζουν σύνολα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.**

Γιὰ νὰ σημειώσουμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἄνισοι, γράφουμε:

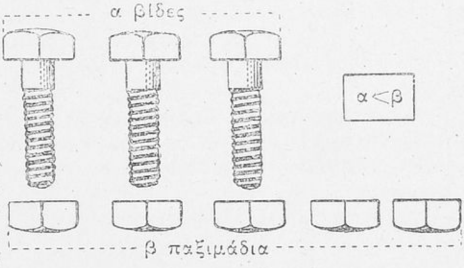
$$\alpha \neq \beta \quad \text{ἢ} \quad \beta \neq \alpha \qquad (21,1)$$

καὶ διαβάζουμε: «α διάφορο τοῦ β» ἢ «β διάφορο τοῦ α».

Ὁ ἀριθμὸς α, ποὺ χαρακτηρίζει ἐδῶ (σχ. 6) τὸ σύνολο μὲ τὴ μικρότερη δυναμικότητα λέγεται **μικρότερος** τοῦ β. Αὐτὸ γράφεται:

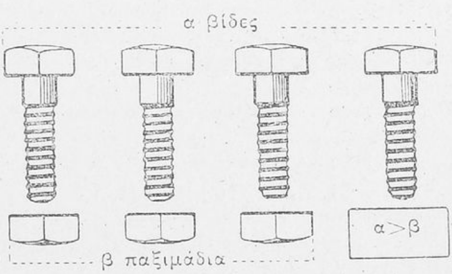
$$\alpha < \beta \qquad (21,2)$$

καὶ διαβάζεται: «α μικρότερο τοῦ β».



Σχ. 6

2ο. "Αν τώρα συγκρίνουμε τὰ σύνολα Α καὶ Β τοῦ σχήματος 7, παρατηροῦμε ὅτι δὲν μποροῦμε νὰ βιδώσουμε ὅλες τὶς βίδες σὲ παξιμάδια, γιατὶ ὑπάρχει μιά, τὸ λιγώτερο, βίδα χωρὶς τὸ ἀντίστοιχο παξιμάδι.



Σχ. 7

Καὶ σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση δὲν ὑπάρχει **ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα** καὶ οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β τῶν δυὸ συνόλων εἶναι ἐπίσης ἀριθμοὶ ἄνισοι. 'Αλλὰ ἐδῶ (σχ. 7) ὁ ἀριθμὸς α χαρακτηρίζει τὸ σύνολο μὲ τὴ μεγαλύτερη δυναμικότητα καὶ γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ὁ α εἶναι **μεγαλύτερος** ἀπὸ τὸν β. Αὐτὸ γράφεται:

$$\alpha > \beta \qquad (21,3)$$

καὶ διαβάζεται: «α μεγαλύτερο τοῦ β».

Δυὸ ἀριθμοὶ ἄνισοι, ποὺ ὁ ἕνας εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ τὸν ἄλλο κατὰ μιὰ μονάδα λέγονται **διαδοχικοὶ ἀριθμοί**.

Δυὸ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ χαρακτηρίζουν δύο σύνολα, ποὺ τὸ ἕνα εἶναι τὸ ἀμέσως ἑπόμενον τοῦ ἄλλου (βλ. § 8).

22. 'Ανισότητες – Βασικὴ ἰδιότης.—Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς γραφές :

$$\alpha < \beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha > \beta \tag{22,1}$$

λέγεται **ἀνισότης**.

Μιὰ ἀνισότης ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ σύμβολο τῆς ἀνισότητος ($>$ ἢ $<$), ποὺ χωρίζει, ὅπως καὶ στὶς ἰσότητες, τὸ πρῶτο μέλος ἀπὸ τὸ δεύτερο μέλος.

'Απὸ τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος μόνον ἡ **μεταβατικὴ** ἀληθεύει στὶς ἀνισότητες, κι' αὐτὴ μόνο καὶ τότε μόνο, ὅταν οἱ ἀνισότητες ἔχουν τὴν ἴδια φορά, εἶναι δηλ. **ὁμοιόστροφες**. Δηλ. :

Ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς α, μικρότερος ἀπὸ ἕνα ἄλλον ἀριθμὸ β, θὰ εἶναι μικρότερος κι' ἀπὸ κάθε ἀριθμὸ γ, μεγαλύτερον τοῦ β.

Ἡ μεταβατικὴ αὐτὴ ἰδιότης τῶν ἀνισοτήτων, ποὺ εὔκολα ἐπαληθεύεται, συμβολίζεται ἔτσι :

$$\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma \tag{22,2}$$

Τὴν ἴδια αὐτὴ ἰδιότητα μποροῦμε νὰ σημειώσουμε καὶ μ' αὐτὸ τὸν τρόπο :

$$\alpha < \beta < \gamma \tag{22,3}$$

Αὐτὴ ἡ γραφὴ λέγεται **διπλῆ ἀνισότης** καὶ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λέμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ βρίσκονται σὲ διάταξη μεγέθους αὐξανομένου.

Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ γράψουμε τὴ διπλῆν ἀνισότητα :

$$\gamma > \beta > \alpha \tag{22,4}$$

ποὺ δείχνει τοὺς ἴδιους ἀριθμοὺς σὲ διάταξη μεγέθους ἐλαττουμένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο : i) τῶν μακρῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «βέλος», ii) τῶν βουνῶν τῆς 'Ελλάδος ποὺ ἔχουν ὑψόμετρο πάνω ἀπὸ 5 χιλιάδες μέτρα. iii) τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ ὁ καθένας ἔχει τριανταδυὸ ἡμέρες, iv) τῶν συμμαθητῶν σας, ποὺ προάγονται μὲ βαθμὸ «τρία», v) τῶν ἐφημερίδων, ποὺ κυκλοφοροῦν μὲ πέντε σελίδες ;

20. Γράψτε τρία πρωτότυπα παραδείγματα συνόλων, ποὺ ὁ πληθικός τους ἀριθμὸς νὰ εἶναι μηδέν.

21. Δίνονται τὰ σύνολα : $A = \{\beta, \varkappa, \lambda\}$, $B = \{4, 7, 1\}$, $\Gamma = \varnothing$, $\Delta = \{\varkappa, \lambda, \beta\}$, $E = \{4, 7\}$, $Z = \{0\}$, $H = \{1, 4, 7\}$, $\Theta = \{7, 4\}$. Νὰ σημειώσετε τὰ ἴσα σύνολα. Δυὸ ἀπ' αὐτὰ εἶναι διάφορα. Ποιά ;

22. Τὸ σύνολο : $A = \{x, y, \omega\}$ εἶναι ἴσο μὲ πέντε ἄλλα σύνολα. Ποιὰ εἶναι τὰ σύνολα αὐτά ;

23. Νὰ σημειώσετε μὲ τ' ἀρχικά τους κεφαλαῖα γράμματα, νὰ παραστήσετε καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων : i) ἕνα, νέα, ii) Πάτραι, ἀπαρτία, iii) ἅρμα, μάρμαρα, iv) Λαμία, 'Ιμαλάϊα, v) ἀόρατος, στρατός, τσάρος.

24. Τὸ ἴδιο γιὰ τὰ σύνολα : i) τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων «τάγμα», «Κα-

λαμάτα» καὶ «ἄλμα», ii) τῶν συμφώνων τῶν λέξεων «κίνησις», «σύνοικος», «Νίκος», «ἀνίκανος». Ποιὸς εἶναι ὁ πληθικός τους ἀριθμός ;

25. Γράψτε τρία σύνολα ἰσοδύναμα μὲ τό : i) $A = \{α, β, γ\}$, ii) $B = \{5, 7\}$, iii) $Γ = \{$Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη$\}$.

26. Νὰ συγκριθοῦν τὰ σύνολα : i) τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος καὶ τῶν φθόγγων τῆς βυζαντινῆς μουσικῆς κλίμακος, ii) τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ τ᾽ ὄνομά τους ἀρχίζει ἀπὸ Α, καὶ ἐκείνων ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ Ι, iii) τῶν διχρόνων φωνηέντων καὶ τῶν ὀπισθοφυλάκων μιᾶς ποδοσφαιρικῆς ὁμάδος.

27. Νὰ σημειώσετε μὲ τ᾽ ἀρχικά τους κεφαλαῖα γράμματα, νὰ παραστήσετε καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων : i) Πρωθυπουργός, Κωνσταντῖνος, ii) Ἀντισυνταγματάρχης, σιδηροβιομηχανία, iii) Ἀντιπρόεδρος, Θρησκευτικά, ποδοσφαιριστής. Ποιὸς εἶναι ὁ πληθικός τους ἀριθμός ;

28. Ἂν εἶναι : $α =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν τροχῶν ἑνὸς ποδηλάτου, $β =$ ὁ ἀριθμὸς 6, $γ =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰκοσαλέπτων μιᾶς δραχμῆς, $δ =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν χεριῶν σας, $ε =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυνηγῶν μιᾶς ποδοσφαιρικῆς ὁμάδος, $ζ =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, νὰ γράψετε τὶς ἰσότητες ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $α$, $β$, $γ$, $δ$, $ε$, $ζ$.

29. Ἡ ἡλικία τοῦ Γιάννη εἶναι ὅση καὶ τῆς Μαρίας, ποὺ εἶναι δεκατεσσάρων ἐτῶν. Ποιὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Γιάννη ; Ποιὰν ἰδιότητα ἐπαληθεύετε μ᾽αὐτὸ τὸ πρόβλημα ; Δώσατε καὶ σεῖς ἕνα παρόμοιο παράδειγμα.

30. Σημειώσατε μὲ τὸ $α$ τὸν ἀριθμὸ τῶν ματιῶν μιᾶς γάτας, μὲ τὸ $β$ τὸν ἀριθμὸ τῶν ποδιῶν της καὶ μὲ τὸ $γ$ τὸν ἀριθμὸ τῶν αὐτιῶν της καὶ γράψτε μιὰν ἰσότητα καὶ δυὸ ἀνισότητες.

31. Γράψτε τὴ σχέση μεταξὺ $α$ καὶ $β$ στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις : i) $α =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν ἑνὸς ἔτους καὶ $β =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τοῦ σχολικοῦ ἔτους, ii) $α =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν καὶ $β =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν διδράχμων, ποὺ κάνουν ἕνα δεκάρικο, iii) $α =$ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Καθηγητὴς» καὶ $β =$ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων λέξεως «ἀπειροσύνολον».

32. Ποιοὶ εἶναι οἱ διαδοχικοὶ ἀριθμοί : i) τοῦ 3, ii) τοῦ 0 iii) τοῦ 6 ;

33. Εἶναι δυνατὸ νὰ τοποθετηθῆ τὸ σύμβολο $\Rightarrow$ μεταξὺ τῶν ἀνισοτήτων καθενὸς ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ζεύγη :

i) $α > β$ . . . . . . $β < α$ ii) $β < α$ . . . . . . $α > β$;

Ἐπαληθεύσατε τὶς ἀπαντήσεις σας μὲ ἀριθμούς.

34. Νὰ συμπληρωθῆ μὲ μιὰν ἀνισότητα ἡ συνεπαγωγή :

$$\left.\begin{array}{l} α = β \\ β < γ \end{array}\right\} \Rightarrow \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

35. Νὰ γραφοῦν κατὰ δύο τρόπους σὲ διπλῆν ἀνισότητα οἱ ἀνισότητες :

$$x < y \quad \text{καὶ} \quad ω > y.$$

36. Ἂν $α$ εἶναι ἡ ἡλικία ἑνὸς παιδιοῦ, $β$ ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα του καὶ $γ$ ἡ ἡλικία τοῦ παπποῦ του, ἐνῶ ἀντίστοιχα x, y, $ω$ εἶναι τὸ ἔτος ποὺ γεννήθηκε ὁ καθένας, νὰ γραφοῦν οἱ διπλὲς ἀνισότητες ποὺ συνδέουν στὴ σειρὰ τοὺς ἀριθμοὺς $α, β, γ$, καθὼς καὶ τοὺς $x, y, ω$. Ποιὰ εἶναι ἡ διάταξη τῶν ἀριθμῶν σὲ κάθε μιὰ περίπτωση ;

37. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο $Σ$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἂν γιὰ κάθε του στοιχεῖο x ἀληθεύη ἡ σχέση : $3 < x < 4$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ
ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

23. Τί εἶναι ἀρίθμηση.—Μιὰ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἀπέρατο, ἄπειρες λέξεις θὰ ἐχρειάζοντο γιὰ τὴν ὀνομασία τους καὶ ἄπειρα σύμβολα γιὰ τὴ γραφή τους.

Ἔτσι ὅμως, ὅπως εἶναι φανερό, θὰ ἦταν ἀδύνατη ἡ ἀπομνημόνευση καὶ χρησιμοποίηση τῶν ἀριθμῶν πέρα ἀπὸ ἕνα λογικὸ ὅριο. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο, ἀπὸ τὴ μακρυνὴν ἀρχαιότητα ἀκόμα, οἱ ἄνθρωποι ἐπινόησαν τρόπους γιὰ τὴν ὀνομασία ὅλων τῶν ἀριθμῶν μὲ λίγες μόνο λέξεις καὶ τὴ γραφή τους μὲ ἀκόμη πιὸ λίγα σύμβολα.

Τὸ σύνολο τῶν κανόνων, ποὺ καθορίζουν τὸν τρόπο τῆς ὀνομασίας καὶ τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, λέγεται ἀρίθμηση.

Ἡ ἀρίθμηση διακρίνεται στὴν **προφορική**, ποὺ ἐξετάζει τὸν τρόπο τῆς ὀνομασίας καὶ τὴ **γραπτή**, ποὺ πραγματεύεται τὸν τρόπο τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν.

24. Ἱστορικὸ σημείωμα.—Βασικὴ ἀρχὴ τῆς ἀριθμήσεως εἶναι, ὅπως θὰ ἰδοῦμε πιὸ κάτω, ὁ χωρισμὸς τοῦ συνόλου τῶν μονάδων, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμός, σὲ ὑποσύνολα ὡρισμένου πλήθους στοιχείων.

Αὐτὸ γινόταν κι' ἀπὸ τὰ ἀρχαῖα χρόνια, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι σὲ διαφόρους λαοὺς καὶ σὲ διάφορες ἐποχὲς διαφορετικὸς ἦταν ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς κάθε ὑποσυνόλου ἤ, ὅπως λέμε συνήθως, ἡ βάση τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως.

Ἔτσι, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν πρωτόγονη κοινωνία τῶν ἀνθρώπων, ἔχουμε τὴν ἀρίθμηση μὲ βάση τὸ πλῆθος τῶν δακτύλων τοῦ ἑνὸς χεριοῦ, δηλ. τὸν ἀριθμὸ πέντε, ἢ τῶν δακτύλων καὶ τῶν δυὸ χεριῶν, δηλ. μὲ βάση τὸ δέκα, ἢ τῶν δακτύλων τῶν χεριῶν καὶ τῶν ποδιῶν μαζί, δηλ. τὸ εἰκοσαδικὸ σύστημα. Κι' ἐνῶ τελικὰ ἐπικράτησε καὶ γενικεύτηκε ὡς τὴν ἐποχή μας τὸ **δεκαδικὸ** σύστημα ἀριθμήσεως, καὶ σήμερα ἀκόμη νομαδικὲς φυλὲς τῆς Ν. Ἀμερικῆς χρησιμοποιοῦν τὸ **πενταδικό**. Οἱ Μάγια, ἰθαγενεῖς τῆς Ἀμερικῆς χρησιμοποιοῦσαν τὸ **εἰκοσαδικὸ** σύστημα ἀριθμήσεως.

Οἱ Χετταῖοι τῆς Μεσοποταμίας χρησιμοποιοῦσαν τὸ **δωδεκαδικὸ** σύστημα, ποὺ βάση του ἦταν ὁ ἀριθμὸς τῶν φαλάγγων τῶν δακτύλων τοῦ ἑνὸς χεριοῦ, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἀντίχειρα. Ἴχνη αὐτοῦ τοῦ συστήματος συναντᾶμε καὶ σήμερα μὲ τὶς «δωδεκάδες» καὶ τὶς «γκρόσσες» (δώδεκα δωδεκάδες) στὸ ἐμπόριο μικροπραγμάτων (κουμπιά, πέννες...).

Οἱ Βαβυλώνιοι (2000 π.Χ.) εἶχαν διαμορφώσει τὸ **ἑξηκονταδικὸ** σύστημα, ποὺ ὑπολείμματά του εἶναι οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ὥρας ἢ τῆς μοίρας σὲ ἑξήντα πρωτόλεπτα καὶ τοῦ πρωτολέπτου σὲ ἑξήντα δευτερόλεπτα.

Ἰδιαίτερη ὅμως ἀξία, μεγαλύτερη ἴσως καὶ ἀπὸ ἐκείνη τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, ἔχει ἡ χρήση τοῦ **δυαδικοῦ** συστήματος μὲ τὴν ἐφαρμογή του στὶς σύγχρονες ἠλεκτρονικὲς ὑπολογιστικὲς μηχανές.

Ἀλλὰ καὶ ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν πέρασε ἀπὸ πολλὰ στάδια, ὡς ποὺ νὰ φθάση στὴ σημερινὴ γενικὴ χρήση τῶν 'Ινδο- 'Αραβικῶν ψηφίων καὶ τοῦ ἑλληνικῆς ἐμπνεύσεως μηδὲν στὸ **ἀριθμογραφικὸ θεσιακὸ σύστημα**. Τὰ κυριώτερα ἀριθμογραφικὰ συστήματα, ποὺ χρησιμοποιήθηκαν παλαιότερα, ἦσαν τὸ **'Ιωνικὸ ἀλφαβητικὸ** (προσθετικὸ σύστημα) καὶ τὸ **Ρωμαϊκὸ** (προσθετικὸ καὶ ἀφαιρετικὸ σύστημα), ποὺ καὶ σήμερα διατηροῦνται σὲ περιωρισμένη χρήση.

Τὰ 'Ινδο-'Αραβικὰ ψηφία ἄρχισαν νὰ χρησιμοποιοῦνται στὴν Εὐρώπη ἀπὸ τὸν 9ον αἰῶνα καί, ἀφοῦ πέρασαν ἀπὸ ἀρκετὲς διαμορφώσεις, πῆραν τὴν σημερινή τους μορφὴ κατὰ τὸν 16ον αἰῶνα

25. Τὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως. —'Η δεκαδικὴ ἀρίθμηση στηρίζεται στὸ γεγονὸς ὅτι τὰ δάκτυλα καὶ τῶν δυὸ χεριῶν μας σχηματίζουν ἕνα σύνολο ἀξιοσημείωτο καὶ πολὺ ἁπλό, ποὺ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ δέκα.

Σ' αὐτὸ τὸ σύστημα, προκειμένου νὰ ἀπαριθμήσουμε ἕνα σύνολο Σ, π.χ. γραμματοσήμων, τὸ χωρίζουμε σὲ ὑποσύνολα τῶν δέκα στοιχείων (φακελλάκια τῶν δέκα γραμματοσήμων), ὅσα γίνεται, κι' ἕνα ἀκόμη ὑποσύνολο μὲ μ στοιχεῖα, ὅσα περισσεύουν, ποὺ εἶναι λιγώτερα ἀπὸ δέκα. Κάθε ὑποσύνολο τῶν δέκα στοιχείων ὀνομάζουμε **δεκάδα,** ἐνῶ τὶς μ μονάδες ὀνομάζουμε **ἁπλὲς μονάδες.**

Τὰ ὑποσύνολα τῶν δεκάδων ἀποτελοῦν ἕνα νέο σύνολο Δ. Ἂν τὸ Δ ἔχῃ περισσότερα ἀπὸ δέκα στοιχεῖα, τὸ χωρίζουμε σὲ ὑποσύνολα τῶν δέκα δεκάδων (πακέττα τῶν δέκα φακέλλων), ὅσα γίνεται, κι' ἕνα ἀκόμη ὑποσύνολο μὲ δ στοιχεῖα, ὅσα περισσεύουν, ποὺ εἶναι λιγώτερα ἀπὸ δέκα. Κάθε ὑποσύνολο τῶν δέκα δεκάδων ὀνομάζουμε **ἑκατοντάδα.**

Τὰ ὑποσύνολα τῶν ἑκατοντάδων ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο Ε. Ἂν τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ συνόλου εἶναι περισσότερα ἀπὸ δέκα, τὸ χωρίζουμε σὲ ὑποσύνολα τῶν δέκα ἑκατοντάδων (δέματα τῶν δέκα πακέττων), ποὺ τὸ καθένα λέγεται **χιλιάδα,** κι' ἕνα ἀκόμη ὑποσύνολο μὲ ε στοιχεῖα, λιγώτερα τῶν δέκα, ὅσα περισσεύουν.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο συνεχίζουμε τὴν ἀπαρίθμηση μέχρις, ὅτου ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑποσυνόλων, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ συγκέντρωση ἀνὰ δέκα, εἶναι μικρότερος τοῦ δέκα.

Ἂν π.χ. τὰ ὑποσύνολα τῶν χιλιάδων εἶναι x, λιγώτερα ἀπὸ δέκα, ὁ ἀριθμὸς ποὺ χαρακτηρίζει τὸ σύνολο Σ τῶν γραμματοσήμων θὰ εἶναι: x χιλιάδες, ε ἑκατοντάδες, δ δεκάδες καὶ μ ἁπλὲς μονάδες.

26. Τάξεις καὶ κλάσεις μονάδων.—Τὴν ὀνομασία, ὅσο καὶ τὴ γραφή, τῶν ἀριθμῶν διευκολύνει ἡ διάκριση τῶν παραπάνω ὑποσυνόλων σὲ **τάξεις** καὶ **κλάσεις.**

Τὶς ἁπλὲς μονάδες ὀνομάζουμε **μονάδες πρώτης τάξεως**, τὶς δεκάδες **μονάδες δευτέρας τάξεως**, τὶς ἑκατοντάδες **μονάδες τρίτης τάξεως...**, ὅπως φαίνεται στὸν παρακάτω πίνακα ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερά.

Τάξη	15η	14η	13η	12η	11η	10η	9η	8η	7η	6η	5η	4η	3η	2η	1η
	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες
Κλάση	τρισεκατομ-μυρίων			δισεκατομ-μυρίων			ἑκατομμυ-ρίων			χιλιάδων			ἁπλῶν μονάδων		

Χωρίζοντας τὶς τάξεις σὲ τριάδες δημιουργοῦμε τὶς κλάσεις. Ἔτσι ἔχουμε τὴν **κλάση τῶν ἁπλῶν μονάδων**, τὴν **κλάση τῶν χιλιάδων**, τὴν **κλάση τῶν ἑκατομμυρίων**...

Κάθε κλάση μονάδων περιλαμβάνει τρεῖς τάξεις : τὴν τάξη τῶν μονάδων, τὴν τάξη τῶν δεκάδων καὶ τὴν τάξη τῶν ἑκατοντάδων αὐτῆς τῆς κλάσεως. Ἔτσι κάθε μονάδα μιᾶς κλάσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ χίλιες μονάδες τῆς ἀμέσως προηγουμένης κλάσεως : Ἡ χιλιάδα ἀπὸ χίλιες μονάδες, τὸ ἑκατομμύριο ἀπὸ χίλιες χιλιάδες...

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγεται ἡ ἀκόλουθη συνθήκη γιὰ τὴ δεκαδικὴν ἀρίθμηση :

> **Στὴ δεκαδικὴν ἀρίθμηση δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ χίλιες μονάδες μιᾶς κλάσεως ἀποτελοῦν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας κλάσεως.**

Σ' αὐτὴ τὴ βάση στηρίζεται τόσο ἡ ὀνομασία, ὅσο καὶ ἡ γραφὴ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

27. Πῶς γίνεται ἡ προφορικὴ ἀρίθμηση τῶν ἀκεραίων.—1. Γιὰ τὴν ὀνομασία τῶν ἁπλῶν μονάδων χρησιμοποιοῦνται ἐννέα λέξεις :

ἕνα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα

Γιὰ τὴν ὀνομασία τῆς μιᾶς δεκάδος, τῶν δύο, τριῶν...δεκάδων δηλ. τῶν μονάδων δευτέρας τάξεως, χρησιμοποιοῦνται ἐννέα ἀκόμη λέξεις :

δέκα, εἴκοσι, τριάντα, σαράντα, πενήντα, ἑξήντα,
ἑβδομήντα, ὀγδόντα, ἐνενήντα

Γιὰ τὴν ὀνομασία τῶν μονάδων τρίτης τάξεως, δηλ. τῆς μιᾶς, δύο...ἑκατοντάδων χρησιμοποιοῦνται ἄλλες ἐννέα λέξεις :

ἑκατό, διακόσια, τριακόσια, τετρακόσια, πεντακόσια,
ἑξακόσια, ἑπτακόσια, ὀκτακόσια, ἐννιακόσια

Γιὰ τὶς μονάδες τῶν διαφόρων κλάσεων χρησιμοποιοῦνται οἱ λέξεις :

χιλιάδες, ἑκατομμύρια, δισεκατομμύρια, τρισεκατομμύρια...

2. Προκειμένου τώρα γιὰ τὴν ἀπαγγελία ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἐπειδή:

Κάθε ἀκέραιος ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδες διαφόρων τάξεων κι' ἀπὸ κάθε τάξη ἔχει λιγώτερες ἀπὸ δέκα μονάδες,

γιὰ νὰ ἀπαγγείλουμε ἕναν ἀριθμό, ποὺ ἔχει μονάδες τῶν τριῶν πρώτων τάξεων, δηλ. τῆς πρώτης κλάσεως, ἀρκεῖ νὰ παραθέσουμε στὴ σειρά, ἀπὸ τὴν ἀνώτερη πρὸς τὴν κατώτερη τάξη, ἀπὸ τὶς παραπάνω λέξεις ἐκεῖνες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸν ἀριθμὸ τῶν μονάδων κάθε τάξεως. Π.χ. τὸν ἀριθμό, ποὺ ἔχει ἕξ ἁπλὲς μονάδες, **τέσσαρες** δεκάδες (σαράντα) καὶ **ὀκτὼ** ἑκατοντάδες (ὀκτακόσια), ἀπαγγέλλουμε : **ὀκτακόσια σαράντα** ἕξ.

Μόνο πού, ἀντὶ γιὰ **δέκα** ἕνα καὶ **δέκα δύο**, λέμε ἕνδεκα καὶ **δώδεκα.**

Ὅταν ὅμως ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ μονάδες διαφόρων κλάσεων, σχηματίζουμε, ὅπως παραπάνω, τὸν ἀριθμὸ τῶν μονάδων κάθε κλάσεως καὶ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἀπαγγέλλουμε στὴ σειρά, ἀπὸ τὴν ἀνώτερη πρὸς τὴν κατώτερη κλάση, συνοδεύοντάς τους μὲ τὸ ὄνομα τῆς κλάσεως, ποὺ ἀνήκουν.

● **Παραδείγματα :** 1. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἔχει **ὀκτὼ** ἁπλὲς μονάδες καὶ **πέντε** δεκάδες, ἀπαγγέλλεται : **πενήντα ὀκτώ.**

2. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἔχει **μιὰ** ἁπλῆ μονάδα, **καμμιὰ** δεκάδα καὶ **τρεῖς** ἑκατοντάδες, ἀπαγγέλλεται : **τριακόσια ἕνα.**

3. Τὸν ἀριθμό, ποὺ ἔχει **ἑπτὰ** ἁπλὲς μονάδες, **τέσσαρες** ἑκατοντάδες, **δυὸ** χιλιάδες, **τρεῖς** δεκάδες χιλιάδων καὶ **πέντε** ἑκατοντάδες χιλιάδων, ἀπαγγέλλομε : **πεντακόσιες τριάντα δύο χιλιάδες τετρακόσια ἑπτά.**

28. Τὸ ἀριθμογραφικὸ θεσιακὸ σύστημα.—Σ' αὐτὸ τὸ σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμε δέκα μόνο σύμβολα, ποὺ λέγονται **ψηφία**, τὰ Ἰνδο-Ἀραβικά :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ τὸ **0**

ποὺ καὶ μόνα τους συμβολίζουν στὴ σειρὰ τοὺς ἀριθμούς : **ἕνα, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα** καὶ **μηδέν.**

Μὲ τὸ συνδυασμὸ τῶν δέκα αὐτῶν ψηφίων, γραμμένων στὴν κατάλληλη θέση, μπορεῖ νὰ γραφῆ ὁποιοσδήποτε ἀριθμός, σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθη συνθήκη :

Κάθε ψηφίο ἔχει μιὰ ἀπόλυτη τιμή, ποὺ δείχνει τὸν ἀριθμὸ τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως, καὶ μιὰ θεσιακὴ τιμή, ποὺ ὁρίζει τὴν τάξη. Τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ δεξιὰ ψηφίο συμβολίζει τὶς ἁπλὲς μονάδες, ἐνῶ κάθε ψηφίο γραμμένο ἀριστερώτερα ἀπὸ ἄλλο συμβολίζει μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Τὸ μηδὲν συμπληρώνει στὸν ἀριθμὸ τὴ θέση μιᾶς τάξεως, ποὺ δὲν ἔχει καμμιὰ μονάδα.

Ἔτσι, μὲ τὴν παραπάνω συνθήκη καὶ τὴ βοήθεια τοῦ πίνακος τῆς §26, μποροῦμε νὰ γράψουμε ὁποιονδήποτε ἀριθμό, καθὼς ἐπίσης καὶ νὰ τὸν διαβάσουμε γραμμένον.

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ γράφονται μὲ ἕνα, δύο, τρία,... ψηφία λέγονται, ἀντίστοιχα, **μονοψήφιοι, διψήφιοι, τριψήφιοι... πολυψήφιοι.**

● **Παραδείγματα:** 1. Ὁ ἀριθμὸς δέκα γράφεται **10**, δηλ. μιὰ δεκάδα καὶ καμμιὰ μονάδα, ἐνῶ ὁ τριάντα ἑπτὰ γράφεται **37**, ποὺ τὰ ψηφία του ἔχουν ἀπόλυτη τιμὴ 3 καὶ 7 καὶ θεσιακὴ 3 δεκάδες καὶ 7 ἁπλὲς μονάδες.

2. Ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸ γράφεται **100**, δηλ. μιὰ ἑκατοντάδα, καμμιὰ δεκάδα καὶ καμμιὰ μονάδα, ὁ τριακόσια εἴκοσι γράφεται **320**, δηλαδὴ 3 ἑκατοντάδες, 2 δεκάδες καὶ καμμιὰ μονάδα, ἐνῶ ὁ ἑπτακόσια δύο γράφεται **702**, δηλ. 7 ἑκατοντάδες, καμμιὰ δεκάδα καὶ 2 ἁπλὲς μονάδες.

3. Ὁ ἀριθμὸς χίλια γράφεται **1000**, δηλ. 1 χιλιάδα, καμμιὰ ἑκατοντάδα, καμμιὰ δεκάδα καὶ καμμιὰ μονάδα, ὁ ἀριθμὸς τρεῖς χιλιάδες πεντακόσια ἕνα γράφεται **3501**, δηλ. 3 χιλιάδες, 5 ἑκατοντάδες, καμμιὰ δεκάδα καὶ μιὰ μονάδα, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς διακόσιες ὀκτὼ χιλιάδες τρία γράφεται **208 003**, δηλ. 2 ἑκατοντάδες χιλιάδων, καμμιὰ δεκάδα χιλιάδων, 8 χιλιάδες, καμμιὰ ἑκατοντάδα, καμμιὰ δεκάδα καὶ 3 ἁπλὲς μονάδες.

● **Ἀξιοσημείωτη παρατήρηση** : Ὁσαδήποτε μηδενικὰ κι' ἂν γράψουμε στ' ἀριστερὰ ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν ἀλλάζουμε τὴν ἀξία του. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τοῦ λαχείου μου εἶναι 00837 δηλ. 837.

29. Τὸ ἀριθμογραφικὸ προσθετικὸ σύστημα. - Τέτοιο εἶναι τὸ Ἰωνικὸ ἀλφαβητικὸ σύστημα. Σ' αὐτὸ χρησιμοποιοῦνται ὡς ψηφία τὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, μ' ἕνα τόνο δεξιώτερα καὶ ψηλότερα, καὶ συμπληρωματικὰ τὰ σύμβολα ϛ' (στίγμα), ϟ (κόππα) καὶ ϡ (σαμπί). Τὸ ϛ' γράφεται συχνὰ στ'.

Ἡ ἀντιστοιχία αὐτῶν τῶν γραμμάτων πρὸς τοὺς Ἰνδο-ἀραβικοὺς χαρακτῆρες εἶναι ἡ ἀκόλουθη :

Μονάδες	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ϛ'	ζ'	η'	θ'
Δεκάδες	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	ϟ'
Ἑκατοντάδες	100	200	300	400	500	600	700	800	900
	ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϡ'

Γιὰ τὶς χιλιάδες χρησιμοποιοῦνται τὰ ἴδια γράμματα μ' ἕνα τόνο ἀριστερώτερα καὶ χαμηλότερα. Ἔτσι τὸ 1000 γράφεται ͵α, τὸ 8000 ͵η,...

Ἡ γραφὴ τῶν ἀκεραίων μ' αὐτὸ τὸ σύστημα ἀκολουθεῖ τὴν ἑξῆς συνθήκη :

> **Κάθε ψηφίο ἐκφράζει ἕναν ἀριθμὸ ἁπλῶν μονάδων καὶ ὁ ἀριθμός, ποὺ σχηματίζουν στὴ σειρὰ τὰ ψηφία, ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτῶν τῶν ψηφίων.**

●**Παραδείγματα** : 1. Ὁ ἀριθμὸς 27, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 καὶ 7 ἁπλὲς μονάδες, γράφεται : κζ'.

2. Ὁ ἀριθμὸς 503, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 500 καὶ 3 ἁπλὲς μονάδες, γράφεται : φγ'.

3. Ἡ Ἑλληνικὴ ἐπανάσταση ἔγινε στὶς κα' Μαρτίου τοῦ ͵αωκα' καὶ τὸ πρῶτο Σύνταγμα τῆς Ἑλλάδος τὸ ἔτος ͵αωμδ'.

30. Τὸ ἀριθμογραφικὸ προσθετικὸ - ἀφαιρετικὸ σύστημα.—Τέτοιο εἶναι τὸ σύστημα τῆς Ρωμαϊκῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Σ' αὐτὸ χρησιμοποιοῦνται :

τὰ σύμβολα :	I	V	X	L	C	D	M
μὲ τὴν ἀντιστοιχία :	1	5	10	50	100	500	1000

Ἡ γραφὴ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν γίνεται σύμφωνα μὲ τὶς ἀκόλουθες συνθῆκες :

1. Ὅμοια ψηφία, γραμμένα στὴ σειρά, προσθέτουν τὴν τιμή τους.

Ἔτσι τὸ III συμβολίζει τὸν ἀριθμὸ 3, τὸ XXX τὸν 30, τὸ CC τὸν 200...

2. Κάθε ψηφίο, γραμμένο δεξιώτερα ἀπὸ ἄλλο μεγαλύτερό του, προσθέτει σ' αὐτὸ τὴν τιμή του.

Ἔτσι τὰ VI, VII, VIII συμβολίζουν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 7, 8, τὸ XI τὸν 11, τὸ LX τὸν 60, τὸ DCC τὸν 700...

3. Κάθε ψηφίο, γραμμένο ἀριστερώτερα ἀπὸ ἄλλο μεγαλύτερό του, τὸ ἐλαττώνει κατὰ τὴν τιμή του.

Ἔτσι τὸ IV συμβολίζει τὸν 4, τὸ IX τὸν 9, τὸ XL τὸν 40, τὸ CD τὸν 400, τὸ CM τὸν 900...

4. Γιὰ τὴ γραφὴ ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐφαρμόζεται τὸ προσθετικὸ σύστημα.

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 172 γράφεται CLXXII, ὁ 44 XLIV, ὁ 419 CDXIX.

Γιὰ τὴ γραφὴ τῶν χιλιάδων, ἑκατομμυρίων... χρησιμοποιοῦνται τὰ ἴδια σύμβολα μὲ μιά, δυό... γραμμὲς πάνω ἀπ' αὐτά.

Ἔτσι τὸ 2000 γράφεται $\overline{\text{II}}$, τὸ 9000 $\overline{\text{IX}}$, τὸ 40 000 000 $\overline{\overline{\text{XL}}}$, τὸ 4 000 000 000 γράφεται $\overline{\overline{\overline{\text{IV}}}}$.

Συνηθέστερα ὅμως οἱ ἀριθμοὶ 2000 καὶ 3000 γράφονται MM καὶ MMM.

31. Ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως. α') Τὸ **δωδεκαδικὸ** σύστημα ἀριθμήσεως ἔχει βάση του τὸν ἀριθμὸ δώδεκα καὶ ἡ δομή του ἀκολουθεῖ τὴ συνθήκη :

Κάθε δώδεκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Ἔτσι μονάδα δευτέρας τάξεως εἶναι ἡ δωδεκάδα, τρίτης τάξεως ἡ γκρόσσα (δώδεκα δωδεκάδες)...

Γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν σ' αὐτὸ τὸ σύστημα χρησιμοποιοῦνται τὰ ψηφία 0, 1, 2, . . . 9 καὶ δυὸ ἀκόμη σύμβολα : τὸ α_0 (διαβάζεται ἄλφα μηδὲν ἢ ἄλφα μὲ δείκτη 0) καὶ τὸ α_1 (διαβάζεται ἄλφα ἕνα), ποὺ συμβολίζουν τοὺς ἀριθμοὺς 10 καὶ 11.

Ἔτσι οἱ ἀριθμοὶ 9 ἕως 24 γράφονται σ' αὐτὸ τὸ σύστημα :

Βάση																	
	10	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	12	9	α_0	α_1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$1\alpha_0$	$1\alpha_1$	20

ὅπου τὸ 12 τοῦ δεκαδικοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 δωδεκάδα καὶ καμμιὰ μονάδα καὶ γράφεται 10 στὸ δωδεκαδικό, τὸ 17 ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ δωδεκάδα καὶ 5 μονάδες καὶ γράφεται 15...

β') Τὸ **πενταδικὸ** σύστημα ἔχει βάση του τὸν ἀριθμὸ πέντε καὶ ἡ δομή του ἀκολουθεῖ τὴ συνθήκη:

> **Κάθε πέντε μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.**

Ἔτσι μονάδα δευτέρας τάξεως εἶναι ἡ πεντάδα, τρίτης τάξεως ἡ εἰκοσιπεντάδα (πέντε πεντάδες)...

Γιὰ τὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν στὸ πενταδικὸ σύστημα ἀρκοῦν τὰ ψηφία 0, 1, 2, 3, 4. Στὸν ἀκόλουθο πίνακα δίνεται ἡ ἀντιστοιχία τῶν ἀριθμῶν 4 ἕως 20 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος πρὸς ἐκείνους τοῦ πενταδικοῦ.

Βάση																	
10	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40

ὅπου τὸ 5, 10, 15, 20... τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦν μὲ τοὺς 10 (μιὰ πεντάδα, καμμιὰ μονάδα), 20 (2 πεντάδες, καμμιὰ μονάδα), 30, 40... τοῦ πενταδικοῦ.

γ') Στὸ **δυαδικὸ** σύστημα ἀριθμήσεως βάση εἶναι ὁ ἀριθμὸς δύο καὶ ἡ δομή του ἀκολουθεῖ τὴ συνθήκη:

> **Κάθε δυὸ μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.**

Ἔτσι μονάδα δευτέρας τάξεως εἶναι ἡ δυάδα, τρίτης ἡ τετράδα, τετάρτης ἡ ὀκτάδα, πέμπτης ἡ δεκαεξάδα...

Γιὰ τὴ γραφὴ στὸ δυαδικὸ σύστημα δύο μόνο ψηφία εἶναι ἀρκετά: τὸ 0 καὶ τὸ 1.

Τὸ 2 τοῦ δεκαδικοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 δυάδα καὶ καμμιὰ μονάδα καὶ γράφεται 10 στὸ δυαδικό. Τὸ 3 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀποτελεῖται ἀπὸ 1 δυάδα καὶ μιὰ μονάδα καὶ γράφεται στὸ δυαδικὸ 11. Τὸ 4 εἶναι μιὰ μονάδα τρίτης τάξεως καμμιὰ δυάδα καὶ καμμιὰ ἁπλῆ μονάδα καὶ στὸ δυαδικὸ σύστημα γράφεται 100.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο γράφονται καὶ οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ τοῦ δυαδικοῦ συστήματος, ὅπως φαίνεται στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

Βάση															
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110

δ') Μὲ παρόμοιο τρόπο μποροῦμε νὰ γράψουμε ἀριθμοὺς σὲ σύστημα μὲ βάση ὁποιαδήποτε, ἀρκεῖ νὰ σημειώσουμε τὴ συνθήκη ποὺ στηρίζει τὴ δομή του.

Κάθε ἀριθμὸν ὁποιουδήποτε ἄλλου συστήματος, πλὴν τοῦ δεκαδικοῦ, γράφουμε σὲ παρένθεση καὶ ἔξω ἀπ' αὐτήν, ὡς δείκτη, τὴ βάση τοῦ συστήματος. Π.χ. $(20)_{12}$, $(34)_5$, $(1011)_2$.

Ἡ τροπὴ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος στὸν ἀντίστοιχό του ἀριθμὸ ἄλλου συστήματος, καὶ ἀντίστροφα, ἀπαιτεῖ μιὰ σειρὰ πράξεων. Γι' αὐτὸ καὶ τὸ θέμα αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα σὲ ἑπόμενα κεφάλαια αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

32. Σύγκριση δυὸ γραμμένων μὲ ψηφία ἀριθμῶν.—Δυὸ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ γραμμένοι μὲ ψηφία μποροῦν νὰ συγκριθοῦν εὔκολα στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις :

1. **Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμὸ ψηφίων,** τότε μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος, ποὺ ἔχει τὰ περισσότερα ψηφία.

2. **Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμὸ ψηφίων,** συγκρίνομε τὰ ψηφία τους ἀρχίζοντας ἀπὸ τ' ἀριστερά, ὡς ποὺ νὰ βροῦμε ψηφία διάφορα. Οἱ ἀριθμοὶ τότε θὰ ἔχουν τὴν ἴδια τάξη μεγέθους, ποὺ ἔχουν τὰ δυὸ πρῶτα διάφορα μεταξύ τους ψηφία, ποὺ συναντᾶμε.

● **Παραδείγματα:** 1. Κατὰ τὸν α΄ κανόνα εἶναι :

$$52874>9873 \text{ καὶ } 84687<100101$$

2. Σύμφωνα μὲ τὸν β΄ κανόνα ἀπὸ τὴ σύγκριση βρίσκουμε :

$$6873>6859 \text{ καὶ } 108302<108310.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Σειρά : 38. Ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἀπαριθμήσεως καὶ ἀριθμήσεως; Ποιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς πράξεις γίνεται πρώτη ;

39. Ποιὰ εἶναι ἡ μονάδα : i) 3ης τάξεως, ii) 7ης τάξεως, iii) 4ης τάξεως, iv) 10ης τάξεως, v) 5ης τάξεως ;

40. Σὲ ποιὰ κλάση περιέχεται ἡ μονάδα : i) 6ης τάξεως, ii) 2ας τάξεως, iii) 11ης τάξεως, iv) 5ης τάξεως, v) 8ης τάξεως ;

41. Πόσες διάφορες λέξεις χρειάζονται γιὰ νὰ ὀνομασθοῦν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ ἕνα ὡς τὸ ἕνα δισεκατομμύριο ;

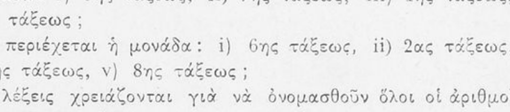
42. Πόσες δεκάδες ἔχει ἡ χιλιάδα ; Πόσες ἑκατοντάδες ἔχει τὸ ἑκατομμύριο ; Πόσες δεκάδες χιλιάδων ἔχει τὸ δισεκατομμύριο ;

43. Νὰ ὀνομασθοῦν οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἔχουν : i) 8 μονάδες, 3 χιλιάδες καὶ 2 ἑκατοντάδες χιλιάδων, ii) 5 δεκάδες, 9 ἑκατοντάδες χιλιάδων καὶ 4 δεκάδες ἑκατομμυρίων, iii) 6 δεκάδες, 5 δεκάδες χιλιάδων καὶ 7 ἑκατομμύρια.

44. Νὰ γραφοῦν μὲ ψηφία Ἰνδο-Ἀραβικὰ οἱ ἀριθμοί : 1) 6 μονάδες, 3 ἑκατοντάδες καὶ 5 δεκάδες χιλιάδων, ii) 8 δεκάδες, 2 ἑκατοντάδες χιλιάδων καὶ 4 δεκάδες ἑκατομμυρίων, iii) 1 ἑκατοντάδα, 7 ἑκατομμύρια καὶ 9 δεκάδες δισεκατομμυρίων.

45. Νὰ διαβασθοῦν οἱ ἀριθμοί : 303, 1 011, 40 404, 606 606, 7 007 700, 20 200 002, 5 505 005 050 καὶ νὰ γραφοῦν μὲ τὴν ὀνομασία τους.

46. Ποιὰ εἶναι ἡ κατανάλωση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἑνὸς ἐργαστηρίου, ἂν ὁ μετρητὴς παρουσιάζη τὶς ἐνδείξεις τοῦ σχήματος 8 σὲ βαττῶρες;



Σχ. 8. Μετρητὴς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος

47. Ποιὸ εἶναι τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων, τῶν χιλιάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων

χιλιάδων σὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 871, 50 804, 10 203 045, 76 054 032;

48. Ποιὰ εἶναι ἡ τάξη τῶν μονάδων ποὺ δείχνουν τὰ ψηφία 3 καὶ 6 στοὺς ἀριθμούς: 306, 6 300, 30 600, 63, 60 300, 3 000 060, 6 000 300;

49. Ἕνας ἀριθμὸς ἔχει 7 ἢ 11 ἢ 13 ψηφία. Τί μονάδες ἐκφράζει τὸ πρῶτο ἀπὸ τ' ἀριστερὰ ψηφίο;

50. Πόσα ψηφία ἔχει ἕνας ἀριθμός, ἂν τὸ πρῶτο ἀπὸ τ' ἀριστερὰ ψηφίο εἶναι: i) ἑκατοντάδες χιλιάδων, ii) δεκάδες ἑκατομμυρίων, iii) ἑκατοντάδες δισεκατομμυρίων;

51. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀπόλυτη καὶ ποιὰ ἡ θεσιακὴ τιμὴ κάθε ψηφίου τῶν ἀριθμῶν: 543, 17 084, 203 509;

52. Πόσες μονάδες, πόσες δεκάδες, πόσες ἑκατοντάδες... περιέχει καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς: 107 832, 20 010 203; (Π.χ. ὁ α' ἔχει 107 832 μονάδες, 10783 δεκάδες, 1078 ἑκατοντάδες...).

53. Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν, πού: i) τὸ ψηφίο τῶν μονάδων τους εἶναι 1, ii) τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων εἶναι 4;

54. Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν, ποὺ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων τους εἶναι 3 καὶ πόσοι τετραψήφιοι μὲ ψηφίο μονάδων 7;

55. Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος καὶ ποιὸς ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς μὲ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 ψηφία;

56. Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν; πόσοι τριψήφιοι; πόσοι τετραψήφιοι;

57. Γιὰ ν' ἀριθμήσουμε τὶς σελίδες ἑνὸς τετραδίου τῶν 50 φύλλων, πόσες φορὲς θὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ ψηφίο 5 καὶ πόσες τὸ 0;

58. Πόσα ψηφία (διάφορα ἢ ὄχι) θὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ νὰ γράψουμε ὅλους τοὺς διψηφίους ἀριθμούς;

59. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ μεγαλυτέρου διψηφίου καὶ τοῦ μικροτέρου τριψηφίου ἀριθμοῦ;

60. Ποιὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος καὶ ποιὸς ὁ μικρότερος ἀριθμός, ποὺ μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε μὲ τὰ ψηφία; i) 7, 6, 3, 9, ii) 4, 1, 0, 2, iii) 5, 8, 1, 3;

61. Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος καὶ ποιὸς ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός, ποὺ μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε μὲ 4 διάφορα ψηφία;

62. Νὰ γραφοῦν στὸ 'Ιωνικὸ ἀλφαβητικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοί: 12, 49, 75, 94, 107, 309, 643, 1 647, 1 875, 1 964.

63. Νὰ γραφοῦν μὲ 'Ινδο-'Αραβικοὺς χαρακτῆρες οἱ ἀριθμοί: ξθ', υλε', ωζ', ϡμη', ͵βφνς', ͵ετ'.

64. Νὰ γραφοῦν στὴ Ρωμαϊκὴ γραφὴ οἱ ἀριθμοί: i) 7, 16, 38, 236, ii) 149, 904, 4 209, iii) 6 892, 17 894, 236 080.

65. Νὰ γραφοῦν μὲ 'Ινδο-'Αραβικοὺς χαρακτῆρες: i) τὰ ὀνόματα τῶν Παπῶν τοῦ XX αἰῶνος: Λέων XIII, Πῖος X, Βενέδικτος XV, Πῖος XI, Πῖος XII, 'Ιωάννης XIII, ii) τὰ ὀνόματα τῶν Βασιλέων τῆς Γαλλίας: Λουδοβῖκος IX, Λουδοβῖκος XVI, iii) τὸ κεφάλαιο XCIX, ὁ ψαλμὸς CLII, τὸ ἔτος MCMLXIV.

66. Νὰ γραφοῦν στὸ δωδεκαδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ 20 ὡς τὸ 50, καθὼς καὶ οἱ: 100, 140, 144, 150.

67. Νὰ γραφοῦν στὸ πενταδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ 15 ὡς τὸ 25, καθὼς καὶ οἱ: 30, 43, 50, 75, 125.

68. Νὰ γραφοῦν στὸ δυαδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τὸ 14 ὡς τὸ 20, καθὼς καὶ οἱ: 24, 32, 34, 40.

69. Νὰ γραφοῦν στὸ δεκαδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοί : $(2\alpha_0)_{12}$, $(37)_{12}$, $(\alpha_1 7)_{12}$, $(100)_{12}$, $(159)_{12}$, $(43)_5$, $(134)_5$, $(231)_5$, $(11)_2$, $(110)_2$, $(10010)_2$, $(10101)_2$, $(11000)_2$.

70. Πόσους τριψηφίους ἀριθμοὺς μποροῦμε νὰ γράψουμε μὲ τὰ ψηφία 5, 8, 9; Νὰ διαταχθοῦν σὲ τάξη μεγέθους αὐξανομένου, μὲ χρήση τοῦ συμβόλου τῆς ἀνισότητος.

71. Νὰ γραφοῦν ὅλοι οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοὶ μὲ τὰ ψηφία 5, 2, 3, 3 καὶ νὰ διαταχθοῦν σὲ τάξη μεγέθους ἐλαττουμένου, μὲ χρήση τοῦ συμβόλου τῆς ἀνισότητος.

72. Μὲ πολλαπλῆν ἀνισότητα νὰ διαταχθοῦν σὲ τάξη μεγέθους αὐξανομένου οἱ ἀριθμοί : 6 873, 57, 1 391, 24 897, 94, 482, 7, 57 633, 4 082.

73. Μὲ πολλαπλῆν ἀνισότητα νὰ διαταχθοῦν σὲ τάξη μεγέθους ἐλαττουμένου οἱ ἀριθμοί : 5 301, 612, 689 250, 25, 9, 107 103, 485, 809 604.

Β΄ Σειρά : 74. Ποιὲς μεταβολὲς παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 47, ὅταν γράψουμε ἕνα μηδενικὸ στὰ δεξιά του ;

Λύσις : Τὸ ψηφίο 4 γίνεται ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 4 ἑκατοντάδες. Οἱ 7 μονάδες γίνονται δεκάδες. Ὥστε οἱ δεκάδες, ποὺ ἦσαν 4, αὐξάνονται κατὰ 3. Στὸν νέον ἀριθμὸ δὲν ὑπάρχουν μονάδες. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώθηκε κατὰ 7 μονάδες. Συνεπῶς, ὁ ἀριθμὸς 47, ὅταν γίνῃ 470, αὐξάνεται κατὰ 4 ἑκατοντάδες καὶ 3 δεκάδες καὶ ἐλαττώνεται κατὰ 7 μονάδες.

75. Ποιὲς μεταβολὲς παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 83, ὅταν γράψουμε 2 μηδενικὰ στὰ δεξιά του ;

76. Ποιὲς μεταβολὲς παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 25, ὅταν γράψουμε ἕνα μηδενικὸ μεταξὺ τῶν ψηφίων του ;

77. Ποιὲς μεταβολὲς παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 325, ἂν γράψουμε 2 μηδενικὰ μεταξὺ 2 καὶ 5 ;

78. Νὰ συγκριθῆ ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ προκύπτει, ὅταν ἐναλλάξουμε τὰ ψηφία τῶν μονάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων στὶς περιπτώσεις : i) ἂν τὰ ψηφία αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ii) ἂν εἶναι διαδοχικά.

79. Πῶς μποροῦμε νὰ ἐκλέξουμε δυὸ ἀριθμοὺς διψηφίους, ὥστε ὁ μικρότερος νὰ γίνεται μεγαλύτερος, ὅταν ἐναλλάξουμε τὰ ψηφία του ; Νὰ ἐξετασθοῦν οἱ περιπτώσεις ποὺ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων τους εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.

80. Νὰ γραφοῦν δυὸ τετραψήφιοι ἀριθμοί, ποὺ δὲν ἀλλάζουν, ὅταν ἀντιστρέφουμε τὴν τάξη τῶν ψηφίων τους. Νὰ γραφοῦν καὶ δυὸ τέτοιοι πενταψήφιοι ἀριθμοὶ καὶ νὰ γενικευθῆ τὸ συμπέρασμα, ποὺ θὰ βγάλετε.

81. Πόσοι διψήφιοι ἀριθμοὶ μποροῦν νὰ γραφοῦν μὲ δύο διάφορα ψηφία; Νὰ ἐξετασθῆ ἡ περίπτωση, ποὺ τὸ ἕνα ψηφίο εἶναι 0.

82. Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ μποροῦν νὰ γραφοῦν μὲ 3 διάφορα ψηφία ; Νὰ ἐξετασθοῦν οἱ περιπτώσεις, ποὺ τὸ ἕνα ψηφίο εἶναι 0 ἢ τὰ δύο ψηφία εἶναι ἴσα.

83. Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ μποροῦν νὰ γραφοῦν, ὅταν εἶναι ὡρισμένο τὸ ψηφίο τους τῶν δεκάδων ;

84. Τὸ ψηφίο τῶν δεκάδων ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 3. Ποιὲς μεταβολὲς θὰ πάθῃ αὐτὸς ὁ ἀριθμός, ὅταν γράψουμε 0 μεταξὺ τῶν ψηφίων του;

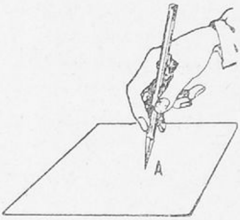
85. Ὅταν γράψουμε 0 μεταξὺ τῶν ψηφίων ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ, αὐτὸς αὐξάνεται κατὰ 6 ἑκατοντάδες καὶ ἐλαττώνεται κατὰ 6 δεκάδες. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄

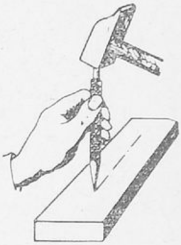
ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ Η ΓΡΑΜΜΗ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ

33. Μιὰ εἰκόνα τοῦ σημείου.—Ἡ μύτη ἑνὸς μολυβιοῦ, καλὰ ξυσμένου, ἀφίνει πάνω στὸ χαρτὶ ἕνα **ἴχνος**. Αὐτὸ τὸ ἴχνος δίνει μιὰν εἰκόνα τοῦ **σημείου** (σχ. 9).

Τὸ ἴδιο γίνεται μὲ τὴν κιμωλία στὸν πίνακα ἢ μὲ μιὰ μυτερὴ πόντα πάνω στὸ ξύλο ἢ στὸ μέταλλο (σχ. 10). Στὴν ἀνέφελη νύκτα κάθε ἀστέρι δίνει τὴ φωτεινὴν εἰκόνα ἑνὸς σημείου πάνω στὸν οὐρανό.



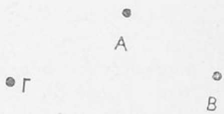
Σχ. 9. Γραφὴ σημείου



Σχ. 10. Ποντάρισμα

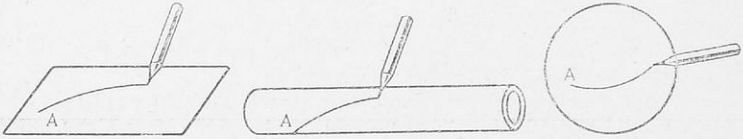
Ἡ παράσταση ἑνὸς σημείου γίνεται μὲ μιὰ κοκκίδα, ποὺ συνοδεύεται ἀπὸ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου. Τὸ σχ. 11 δίνει τὴν παράσταση τριῶν σημείων, τῶν Α, Β καὶ Γ. Διαβάζουμε: «σημεῖο Α», «σημεῖο Β»,...

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο δὲν δίνουμε παρὰ μιὰ ἀτελῆ εἰκόνα τοῦ γεωμετρικοῦ σημείου, ποὺ τὸ δεχόμαστε σὰν μιὰν ἔννοια δίχως ὁρισμό.



Σχ. 11.
Παράσταση σημείου

34. Πῶς γεννιέται μιὰ γραμμή.—Ἂν κάνουμε νὰ γλυστρήση ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας πάνω στὸ χαρτί, θὰ ἀφίση ὡς ἴχνος τὴν εἰκόνα μιᾶς **γραμμῆς**. Τὸ ἴδιο γίνεται μὲ τὴν κιμωλία στὸν πίνακα ἢ μὲ τὴν πόντα πάνω σὲ μιὰ μετάλλινη πλάκα. Τὴν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς μποροῦμε ἐπίσης



Σχ. 12. Ἡ γένεση τῆς γραμμῆς στὸ χαρτί, σὲ σωλήνα ἢ σὲ μπάλλα

νὰ δώσουμε καὶ πάνω σ' ἕνα σωλήνα ἢ σὲ μιὰ μπάλλα (σχ. 12).

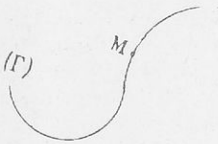
Γενικά, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι μιὰ γραμμὴ παράγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, κατὰ τὴ μετατόπισή του σὲ μιὰ ὁποιαδήποτε διαδρομή. Ἔτσι ἕνα μετέωρο, διαγράφοντας τὸν οὐρανό, δίνει τὴν εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς. Γι' αὐτὸ μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι: **γραμμὴ εἶναι ἡ τροχιὰ ἑνὸς κινητοῦ σημείου.**

Τὴ γραμμὴ σημειώνουμε μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα, μέσα σὲ παρένθεση, ὅπως στὸ σχῆμα 13 τὴ γραμμὴ (Γ).

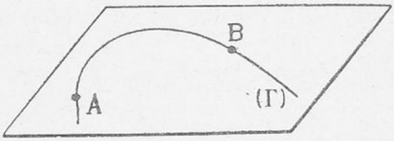
Ὥστε μιὰ γραμμὴ (Γ) συνίσταται ἀπὸ σημεῖα. Εἶναι δηλαδὴ ἕνα **σύνολο σημείων** ἤ, κι' ἀλλοιῶς, ἕνα **σημειοσύνολο**. Τὸ σημεῖο Μ (σχ. 13), ποὺ περιέχεται στὴ γραμμὴ (Γ), λέμε ὅτι **κεῖται** ἐπὶ τὴν (Γ) καὶ γράφουμε:

$$M \in (\Gamma)$$

Ἕνα μέρος μιᾶς γραμμῆς, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ σημεῖα της, λέγεται **τμῆμα** αὐτῆς τῆς γραμμῆς. Ἔτσι πάνω στὴ (Γ) ἔχουμε τὸ τμῆμα της ΑΒ (σχ. 14). Τὰ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα** τοῦ τμήματος.



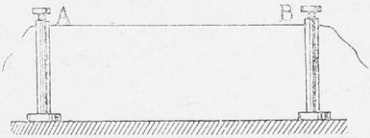
Σχ. 13. Σημείωση γραμμῆς



Σχ. 14. Τμῆμα ΑΒ μιᾶς γραμμῆς (Γ)

35. Τί εἶναι εὐθεῖα γραμμή.—Εἶναι προφανές, ὅτι ὑπάρχουν πολυάριθμες στὴ μορφὴ γραμμές. Οἱ πιὸ ἁπλές, ἀλλὰ καὶ πιὸ ἐνδιαφέρουσες, ἀπ' αὐτὲς εἶναι οἱ **εὐθεῖες γραμμές**, ἢ ἁπλῶς οἱ **εὐθεῖες**.

Μιὰ εἰκόνα τῆς εὐθείας μᾶς δίνει ἕνα λεπτὸ νῆμα, καλὰ τεντωμένο (σχ. 15). Τὸ ἴδιο, μιὰ φωτεινὴ ἀκτῖνα μᾶς δίνει μιὰν ἱκανοποιητικὴν ἰδέα τῆς εὐθείας.



Σχ. 15. Μιὰ εἰκόνα τῆς εὐθείας

Γιὰ νὰ συμπληρώσουμε αὐτὴ τὴν εἰκόνα, πρέπει νὰ ὑποθέσουμε ὅτι αὐτὴ ἡ γραμμὴ προεκτείνεται πολὺ μακρυὰ καὶ κατὰ τὶς δυὸ διευθύνσεις. Ὥστε: **ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀπέρατη**, εἶναι δηλ. ἕνα **ἀπειροσύνολο σημείων**. Στὴν πραγματικότητα τὸ τεντωμένο νῆμα δὲν εἶναι παρὰ ἕνα μέρος τῆς εὐθείας.

Ἂν στοὺς σφιγκτῆρες Α καὶ Β (σχ. 15) τεντώσουμε καὶ ἄλλα νήματα, μὲ διάφορο χρῶμα, παρατηροῦμε ὅτι ἀνάμεσα στὰ σημεῖα Α καὶ Β τὰ νήματα αὐτὰ γίνονται ἕνα. Λέμε τότε ὅτι **συμπίπτουν**. Ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι:

> **Δυὸ εὐθεῖες, ποὺ ἔχουν δυὸ κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν.**

Αὐτὴν τὴν ἰδιότητα τῆς εὐθείας μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε κι' ἔτσι:

> **Ἀπὸ δυὸ διάφορα σημεῖα Α καὶ Β περνάει μιὰ καὶ μόνο μιὰ εὐθεῖα.**

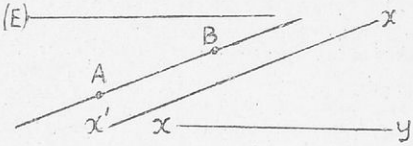
ἢ κι' ἀκόμη ὅτι:

> **Δυὸ διάφορα σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν μιὰ καὶ μόνο μιὰ εὐθεῖα.**

Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ παριστάνουμε τὴν ἀπέρατη εὐθεῖα (Ε) μὲ δυὸ μόνο σημεῖα της. Λέμε ἡ **εὐθεῖα ΑΒ**, γιὰ νὰ δείξουμε τὴν ἀπέρατη εὐθεῖα, ποὺ περνάει ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 16).

Ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτὴ τῶν εὐθειῶν συνάγεται ὅτι:

Δυὸ διάφορες εὐθεῖες δὲν μποροῦν νὰ ἔχουν περισσότερα ἀπὸ ἕνα κοινὸ σημεῖο.



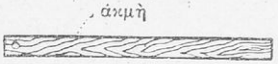
Σχ. 16. Τρόποι παραστάσεως εὐθείας.

Συχνὰ τὴν ἀπέρατη εὐθεῖα σημειώνουμε ἔτσι: εὐθεῖα x'x (σχ. 16) ἢ καὶ xy (σχ. 16).

Ἂν ἕνα σημεῖο Γ κεῖται πάνω στὴν εὐθεῖα ΑΒ, λέμε ὅτι τὰ σημεῖα Α,Β καὶ Γ εἶναι **εὐθυγραμμισμένα.**

36. Πῶς χαράσσεται μιὰ εὐθεῖα. Ὁ κανόνας.

— Ὁ κανόνας (χάρακας, ρίγα) (σχ. 17) εἶναι ἕνα σχεδιαστικὸ ἐργαλεῖο, καμωμένο ἀπὸ ξύλο, μέταλλο, πλαστικὸ ὑλικό..., ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χαράσσουμε τὶς εὐθεῖες. Ὥστε:



Σχ. 17. Ἕνας κανόνας

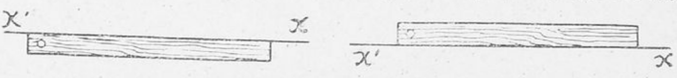
Ἡ εὐθεῖα παράγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖο κατὰ τὴ μετατόπισή του, μὲ «ὁδηγὸ» στὴ διαδρομή του τὸν κανόνα.

Αὐτὸ γίνεται, ἂν σύρουμε τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας σ' ἐπαφὴ μὲ τὴ μιὰ ἀκμὴ (κόψη) τοῦ κανόνος (σχ. 18).

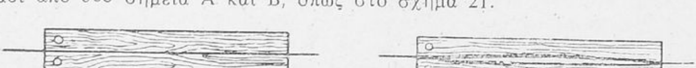
Σχ. 18. Χάραξη εὐθείας

Ἡ ἀκμὴ τοῦ κανόνος πρέπει νὰ συμπίπτη μ' ἕνα λεπτὸ νῆμα καλὰ τεντωμένο. Ἀλλὰ τὴν ἀκρίβεια αὐτοῦ τοῦ ἐργαλείου μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε, ἂν χαράξουμε δυὸ φορὲς μιὰ εὐθεῖα ΑΒ, ἀφοῦ ἀντιστρέψουμε τὸν κανόνα, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 19. Ὁ κανόνας θὰ εἶναι ἀκριβής, ἂν τὰ δυὸ ἴχνη συμπίπτουν σὲ μιὰ εὐθεῖα, ἢ ἀνακριβής, ἂν τὰ ἴχνη εἶναι δύο διάφορες γραμμές, πού, σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω ἰδιότητα, καμμιὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα (σχ. 20).

Ὁ κανόνας μᾶς δίνει τὴ δυνατότητα νὰ χαράσσουμε μιὰ εὐθεῖα ποὺ περνάει ἀπὸ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β, ὅπως στὸ σχῆμα 21.



Σχ. 19. Ἔλεγχος γιὰ τὴν ἀκρίβεια ἑνὸς χάρακα

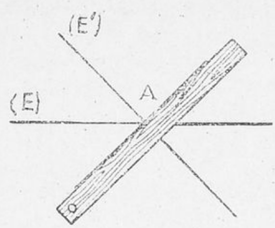


Σχ. 20. Ἀκριβὴς καὶ ἀνακριβὴς κανόνας

Μὲ τὸν κανόνα μποροῦμε ἐπίσης νὰ χαράξουμε ὁσεσδήποτε εὐθεῖες, ποὺ περνᾶνε ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α (σχ. 22).

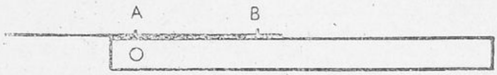
Μὲ τὴ χρήση ἀκόμη τοῦ κανόνος μποροῦμε νὰ προεκτείνουμε μιὰ χαραγμένη εὐθεῖα. Ἀρκεῖ γι' αὐτὸ νὰ ἐκλέξουμε δυὸ σημεῖα Α, Β τῆς εὐθείας,

Σχ. 21. Ἡ εὐθεῖα δύο σημείων



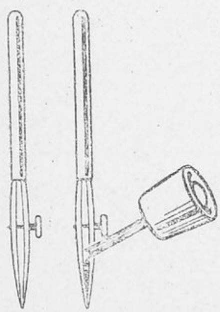
Σχ. 22. Εὐθεῖες ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

πρὸς τὸ μέρος ποὺ θέλουμε νὰ γίνῃ ἡ προέκταση, καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνος σ' αὐτὰ τὰ σημεῖα ἔτσι, ποὺ νὰ ἐξέχῃ τόσο, ὅσο ἐπιθυμοῦμε νὰ εἶναι αὐτὴ ἡ προέκταση (σχ.23)

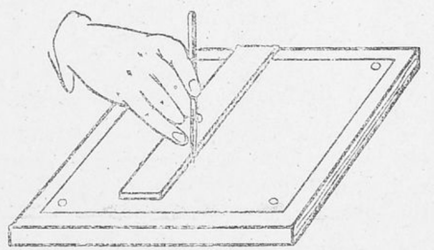


Σχ. 23. Προέκταση εὐθείας

37. **Ὁ γραμμοσύρτης καὶ ἡ χρήση του.**—Γιὰ τὴ χάραξη εὐθειῶν, στὶς τεχνικὲς κυρίως σχεδιάσεις, χρησιμοποιεῖται ἕνα ἐργαλεῖο, ποὺ λέγεται γραμμοσύρτης (σχ. 24).



Σχ. 24. Ὁ γραμμοσύρτης



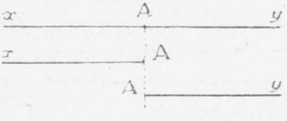
Σχ. 25. Χάραξη μὲ κανόνα καὶ γραμμοσύρτη

Πρόκειται γιὰ ἕνα λεπτὸ ἐργαλεῖο, ποὺ πρέπει νὰ χρησιμοποιεῖται μὲ πολλὴν προσοχὴ καὶ ποὺ πρέπει νὰ καθαρίζεται μ' ἕνα μεταξωτὸ πανὶ ἀμέσως, ὕστερα ἀπὸ κάθε του χρήση.

Ἡ χάραξη τῶν εὐθειῶν γίνεται μὲ σινικὴ μελάνη, ποὺ εἰσάγουμε ἀνάμεσα στὰ δυὸ σκέλη τοῦ ἐργαλείου, ἀφοῦ τὰ ξεσφίξουμε μὲ τὸ εἰδικὸ βιδάκι, τόσο, ὥστε νὰ ἐπιτύχουμε τὸ ἐπιθυμητὸ πάχος γραμμῆς. Ἡ μελάνη εἰσάγεται μὲ τὴ βοήθεια μιᾶς πέννας ἀπὸ φτερὸ χήνας, ποὺ εἶναι προσαρμοσμένη στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ πώματος τοῦ φιαλιδίου τῆς σινικῆς μελάνης. Γιὰ τὴ διατήρηση τοῦ πάχους τῆς γραμμῆς φροντίζουμε, ὥστε σὲ κάθε ξαναγέμισμα μὲ μελάνη νὰ διατηρεῖται ἀμετάβλητη ἡ ἀπόσταση τῶν δύο σκελῶν.

Προκειμένου νὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ μιὰ χάραξη τὸ γραμμοσύρτη, πρέπει νὰ προσέξουμε νὰ μὴν ὑπάρχῃ οὔτε ἴχνος ἀπὸ μελάνη στὶς ἐξωτερικὲς ὄψεις τῶν σκελῶν. Τότε πλέον σύρουμε τὸ ἐργαλεῖο κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος ἔτσι, ποὺ τὸ πλατὺ μέρος τοῦ ἐσωτερικοῦ σκέλους νὰ βρίσκεται σὲ ἐπαφὴ μὲ τὴν κόψη τοῦ κανόνος (σχ. 25).

38. Τί εἶναι ἡμιευθεῖα. – Πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα xy ἂς πάρουμε ἕνα σημεῖο A. Ἡ εὐθεῖα χωρίζεται ἔτσι σὲ δυὸ μέρη, ποὺ λέγονται **ἡμιευθεῖες** (σχ. 26), τὶς Ax καὶ Ay.

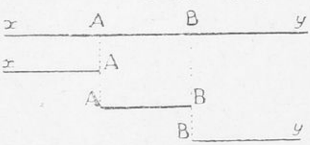


Σχ. 26. Οἱ ἡμιευθεῖες

Τὸ σημεῖο A εἶναι ἡ **ἀρχὴ** κάθε ἡμιευθείας. Γι' αὐτὸ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς Ax καὶ Ay λέγεται **ἡμιευθεῖα ἀρχῆς A**.

Ἡ εὐθεῖα xy λέγεται **φορεὺς** τῶν ἡμιευθειῶν Ax καὶ Ay, ποὺ ὁρίζονται πάνω σ' αὐτὴ κι' ἔχουν **ἀντίθετη φορά**.

39. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα. — Πάνω στὴν εὐθεῖα xy ἂς πάρουμε δύο σημεῖα της A καὶ B (σχ. 27). Ἡ εὐθεῖα χωρίζεται ἔτσι σὲ τρία μέρη :



Σχ. 27. Τὸ εὐθ. τμῆμα AB

— τὴν ἡμιευθεῖα Ax,

— τὴν ἡμιευθεῖα Ay, καὶ

— τὸ **εὐθύγραμμο τμῆμα AB**.

Ὥστε :

Εὐθύγραμμο τμῆμα AB εἶναι ἕνα κομμάτι εὐθείας, ποὺ περιορίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα της A καὶ B.

Τὰ σημεῖα A καὶ B λέγονται **ἄκρα** τοῦ εὐθ. τμήματος, ἐνῶ ἡ εὐθεῖα xy, ποὺ περιέχει αὐτὸ τὸ τμῆμα, λέγεται **φορεύς** του.

Κάθε εὐθ. τμῆμα εἶναι ὡρισμένο, ὅταν ὁρισθοῦν τὰ ἄκρα του, γι' αὐτὸ καὶ σημειώνεται ὡς **τμῆμα AB**.

40. Σχήματα – Σημειοσύνολα. — Οἱ γραμμές, οἱ εὐθεῖες, οἱ ἡμιευθεῖες, τὰ εὐθ. τμήματα, ποὺ γνωρίσαμε ὡς τώρα, λέγονται **γεωμετρικὰ σχήματα**. Κι' ἄλλα πολλὰ σχήματα θὰ γνωρίσουμε στὰ ἑπόμενα κεφάλαια.

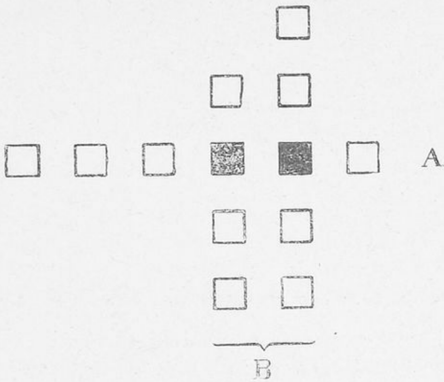
Ἀπὸ τὸν τρόπο, ποὺ γεννιέται μιὰ γραμμή, φθάσαμε στὸ συμπέρασμα, ὅτι κάθε γραμμὴ εἶναι ἕνα **σύνολο σημείων**. Ἐπεκτείνοντας τὸ συμπέρασμα αὐτὸ μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι :

Κάθε σχῆμα εἶναι ἕνα σύνολο σημείων ἢ σημειοσύνολο.

Τὸ σύνολο ὅλων τῶν σημείων κάθε σχήματος εἶναι, προφανῶς, **ἀπειροσύνολο**.

41. Τί εἶναι τομὴ δύο συνόλων.— Ἂς πάρουμε τὰ σύνολα Α καὶ Β (σχ. 28), ὅπου ἡ σειρὰ τῶν τετραγωνικῶν συμβόλων ἀποτελεῖ τὸ σύνολο Α κι' οἱ δυὸ στῆλες ἀπὸ τὰ ἴδια σύμβολα ἀποτελοῦν τὸ σύνολο Β.

Τὰ δυὸ αὐτὸ σύνολα παρατηροῦμε, ὅτι ἔχουν **κοινὰ στοιχεῖα,** τὰ σημειωμένα μὲ μαῦρα τετραγωνίδια. Τὰ κοινὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο Τ. Αὐτὸ τὸ σύνολο Τ λέγεται **τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β.**



Σχ. 28. Ἡ τομὴ δυὸ συνόλων

Ὥστε :

Τομὴ δυὸ συνόλων Α καὶ Β λέγεται τὸ σύνολο Τ, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β.

Τὴν τομὴ Τ δύο συνόλων Α καὶ Β σημειώνουμε ἔτσι :

$$T = A \cap B$$

καὶ διαβάζουμε : «Τ ἴσον Α τομὴ Β».

Εἶναι προφανὲς ὅτι :

1. Ἂν δυὸ σύνολα δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα (ξένα σύνολα), τομή τους θὰ εἶναι τὸ κενὸ σύνολο $\varnothing$.

2. Ἂν δυὸ σύνολα εἶναι ἴσα, ἡ τομή τους θὰ εἶναι ἕνα σύνολο ἴσο μ' αὐτά. Δηλ. :

$$A \cap A = A$$

● **Παραδείγματα :** 1. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Βῆμα» καὶ Β τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «Μεσημβρινή», θὰ εἶναι: $T = A \cap B = \{\beta, \eta, \mu\}$.

2. Εἶναι : $\{3, 5, 7\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{5, 7\}$.

3. Εἶναι : $\{x, y, \omega\} \cap \{1, 2\} = \varnothing$.

4. Εἶναι : $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cap \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

42. Ἡ Τομὴ δύο γραμμῶν.— Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ τῆς τομῆς δύο συνόλων :

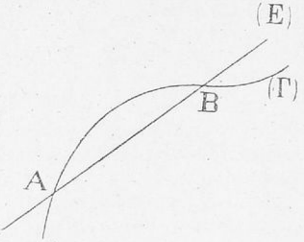
Τομὴ δύο γραμμῶν εἶναι τὸ σύνολο τῶν κοινῶν τους σημείων.

Ἔτσι τομὴ τῆς εὐθείας (Ε) καὶ τῆς γραμμῆς (Γ) εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων Α καὶ Β (σχ. 29). Εἶναι δηλ.:

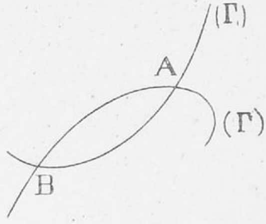
$$(E) \cap (\Gamma) = \{A, B\}.$$

Ἡ εὐθεῖα (Ε) λέγεται γι' αὐτὸ **τέμνουσα** τῆς γραμμῆς (Γ).

Τὸ ἴδιο τὰ σημεῖα Α καὶ Β, κοινὰ τῶν δύο γραμμῶν (Γ) καὶ (Γ'), αποτελοῦν τὴν τομὴν αὐτῶν τῶν γραμμῶν (σχ. 30) ἢ, ὅπως συνήθως λέμε, εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν (Γ) καὶ (Γ΄).

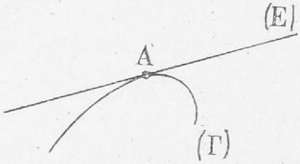


Σχ. 29. **Τομὴ γραμμῆς καὶ εὐθείας.**

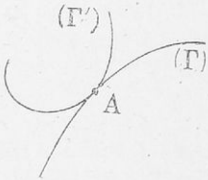


Σχ. 30. **Τομὴ δυὸ γραμμῶν.**

Ἂν ἡ τομὴ μιᾶς εὐθείας (Ε) καὶ μιᾶς γραμμῆς (Γ) (σχ. 31) ἢ δυὸ γραμμῶν (Γ) καὶ (Γ΄) (σχ. 32) ἔχει ἕνα μόνο στοιχεῖο, δηλ. εἶναι ἕνα μόνο σημεῖο, θὰ λέμε ὅτι οἱ γραμμὲς αὐτὲς **ἐφάπτονται** καὶ τὸ κοινό τους σημεῖο θὰ λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῶν δύο γραμμῶν.



Σχ. 31. **Εὐθεῖα ἐφαπτομένη γραμμῆς.**



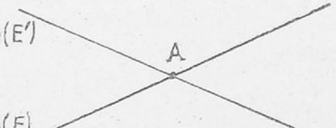
Σχ. 32. **Δυὸ ἐφαπτόμενες γραμμὲς**

Προκειμένου τώρα γιὰ τὴν τομὴ δύο εὐθειῶν, πρέπει νὰ θυμηθοῦμε ὅτι (§ 34):

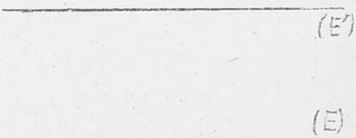
1. Ἂν δυὸ εὐθεῖες ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν, καὶ
2. Δυὸ διάφορες εὐθεῖες δὲν μποροῦν νὰ ἔχουν περισσότερα ἀπὸ ἕνα κοινὰ σημεῖα.

Συνεπῶς, ἂν ἔχουμε δυὸ διάφορες εὐθεῖες (Ε) καὶ (Ε΄) πάνω στὸ χαρτὶ ἢ στὸν πίνακα, τότε δυὸ εἶναι τὰ ἐνδεχόμενα:

1. Νὰ ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο Α (σχ. 33). Τὸ Α λέγεται τότε **τομὴ** τῶν δύο εὐθειῶν ἢ οἱ εὐθεῖες λέμε ὅτι **τέμνονται στὸ Α**.
2. Ἡ τομή τους νὰ εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, δηλ. οἱ εὐθεῖες νὰ μὴν ἔχουν κοινὸ σημεῖο. Στὴν περίπτωση αὐτὴ οἱ εὐθεῖες λέγονται **παράλληλες** (σχ.34).



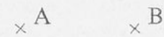
Σχ. 33. Δυὸ τεμνόμενες εὐθεῖες.



Σχ. 34. Δυὸ παράλληλες εὐθεῖες.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω μποροῦμε νὰ βγάλουμε τὸν ἑξῆς ὁρισμὸ τοῦ σημείου:

Σημεῖο εἶναι κάθε στοιχεῖο τῆς τομῆς δύο γραμμῶν ἢ ἡ τομὴ δύο εὐθειῶν.



Σχ. 35. Παράσταση σημείων

Γι' αὐτὸ τὸ λόγο γιὰ τὴν παράσταση ἑνὸς σημείου, ἀντὶ γιὰ μιὰ κοκκίδα (§ 32, σχ. 8), μποροῦμε νὰ χρησιμοποιοῦμε δυὸ διασταυρούμενες μικρὲς γραμμές, ὅπως στὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 35).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86. Γράψτε δυὸ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τρεῖς διάφορες γραμμές, ποὺ νὰ περνᾶνε ἀπ' αὐτὰ τὰ σημεῖα. (Χρησιμοποιεῖστε μολύβια μὲ διάφορο χρῶμα).

87. Γράψτε τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ καὶ δυὸ διάφορες γραμμές, ποὺ νὰ περνᾶνε κι' ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα.

88. Γράψτε τρία σημεῖα Α, Β καὶ Γ καὶ τρεῖς γραμμές, ποὺ κάθε μιὰ νὰ περνάη ἀπὸ τὰ δύο μόνο σημεῖα καὶ ν' ἀφίνη τὸ τρίτο ἔξω ἀπ' αὐτήν.

89. Στὴν αἴθουσα διδασκαλίας καὶ στὰ ἔπιπλά της δεῖξτε 5 εὐθεῖες γραμμές.

90. Μπορεῖτε νὰ χαράξετε μιὰν εὐθεῖα πάνω σ' ἕνα σωλῆνα ἢ σ' ἕνα τόπι, ἢ σ' ἕνα χωνί;

91. Νὰ γράψετε μιὰν εὐθεῖα, ποὺ νὰ περνάη ἀπὸ δυὸ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ νὰ τὴν προεκτείνετε κι' ἀπὸ τὰ δυό της μέρη.

92. Μὲ τὸ γραμμοσύρτη σχεδιάστε τὰ σχήματα 16, 26, 27, 33 καὶ 34 αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

93. Γράψτε πέντε εὐθεῖες, ποὺ νὰ περνᾶνε ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α. Πόσες ἡμιευθεῖες θὰ ἔχετε; Μπορεῖτε νὰ γράψετε κι' ἄλλες εὐθεῖες, ποὺ νὰ περνᾶνε ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α. Πόσες;

94. Γράψτε 4 ἡμιευθεῖες, ποὺ νὰ περνᾶνε ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α καὶ νὰ μὴν ἔχουν ἀνὰ δύο τὸν ἴδιο φορέα. Ἔπειτα νὰ προεκτείνετε πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀρχῆς της κάθε ἡμιευθεῖα.

95. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα xy νὰ γράψετε δυὸ σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ὀνομάσετε τὶς τέσσαρες ἡμιευθεῖες, ποὺ ἔχουν ἀρχή τους τὰ σημεῖα αὐτά.

96. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα γράψτε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ. Ὀνομάστε τὰ τρία τμήματα καὶ τὶς ἕξ ἡμιευθεῖες, ποὺ ὁρίζονται σ' αὐτὸ τὸ σχῆμα. Ἐργασθῆτε σὲ σχῆμα μὲ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

97. Γράψτε τρία μὴ εὐθυγραμμισμένα σημεῖα Α, Β, καὶ Γ καὶ ἑνώσατέ τα ἀνὰ δύο, ὥστε νὰ ἐπιτύχετε ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ πολλὰ εὐθ. τμήματα. Πόσα ἐπιτύχατε; Ἡ ἴδια ἄσκηση νὰ γίνη μὲ 4 σημεῖα καὶ 7 σημεῖα.

98. Στὰ σχήματα τῆς παραπάνω ἀσκήσεως ὑπάρχουν καὶ σύνολα μὲ πεπερασμένο πλῆθος στοιχείων. Ποιὰ εἶναι αὐτά;

99. Γράψτε τρία εὐθυγραμμισμένα σημεῖα. Πόσα εὐθ. τμήματα διάφορα, ἀλλὰ ποὺ νὰ μποροῦν καὶ νὰ συμπίπτουν κατὰ μέρη, θὰ ἔχετε; Ἡ ἴδια ἄσκηση γιὰ 4 σημεῖα καὶ 5 σημεῖα.

100. Ἂν εἶναι: $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$, νὰ βρεθῇ τό: $T = A \cap B$.

101. Νὰ γραφῆ ἡ τομὴ τῶν συνόλων τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων «Γεώργιος» καὶ «Ἰωάννης».

102. Νὰ βρῆτε μιὰ λέξη τέτοια, ποὺ ἡ τομὴ τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων της μὲ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «ἐπιμελὴς» νὰ εἶναι $T = \{\varepsilon, \eta\}$.

103. Ἂν εἶναι: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{5, 6, 7\}$ νὰ γραφῆ τὸ $T = A \cap B$.

104. Ποιὰ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων καὶ τοῦ συνόλου τῶν συμφώνων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου;

105. Νὰ συμπληρωθῆ ἡ ἰσότης: $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 1, 3\} = \ldots\ldots$

106. Νὰ γραφῆ ἡ τομὴ τῶν συνόλων τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων «παιδεία» καὶ «καλλιέργεια».

107. Γράψτε μιὰν ὁποιαδήποτε γραμμὴ καὶ μιὰν εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἡ τομή τους νὰ εἶναι τὸ κενὸ σύνολο. Τὸ ἴδιο γιὰ δυὸ ὁποιεσδήποτε γραμμές.

108. Γράψτε μιὰν ὁποιαδήποτε γραμμὴ καὶ μιὰ εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἡ τομή τους νὰ εἶναι τὸ σύνολο $\{K, \Lambda, M\}$.

109. Γράψτε μιὰν ὁποιαδήποτε γραμμὴ καὶ μιὰν εὐθεῖα γραμμή, ποὺ ἡ τομή τους νὰ εἶναι τὸ μονοσύνολο $\{A\}$. Τὸ ἴδιο γιὰ δυὸ ὁποιεσδήποτε γραμμές.

110. Γράψτε τρεῖς εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο στὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ.

111. Γράψτε δυὸ εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνωνται στὸ σημεῖο Α. Πάνω στὴ μιὰν ἀπ' αὐτὲς νὰ πάρετε ἕνα σημεῖο Β καὶ ἀπ' αὐτὸ νὰ φέρετε δυὸ εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνουν τὴν ἄλλη στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

112. Γράψτε 2 εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνωνται στὸ Α. Ἔξω ἀπὸ τὶς εὐθεῖες αὐτὲς νὰ πάρετε ἕνα σημεῖο Β καὶ ἀπ' αὐτὸ νὰ φέρετε 2 ἄλλες εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνουν τὶς πρῶτες στὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

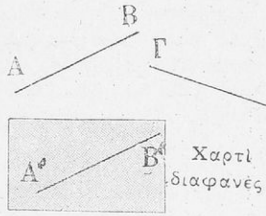
113. Γράψτε 4 εὐθεῖες, ποὺ νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο, καὶ σημειώστε μὲ τὰ Α, Β, Γ,... τὰ κοινά τους σημεῖα. Πόσα θὰ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς;

114. Ἂν στὴν παραπάνω ἄσκηση τὰ σημεῖα τομῆς εἶναι 5 ἢ 4, ποιὰ θὰ εἶναι σὲ κάθε περίπτωση ἡ μεταξύ τους θέση αὐτῶν τῶν εὐθειῶν ἀνὰ δύο;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε΄

ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

43. Πότε δυὸ εὐθ. τμήματα λέγονται ἴσα.— Ἔχουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ (σχ. 36). Ἂν πάρουμε ἕνα χαρτὶ διαφανὲς καὶ τὸ θέσουμε πάνω στὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ, μποροῦμε νὰ ἀντιγράψουμε τὸ ΑΒ στὸ Α΄Β΄ πάνω στὸ διαφανὲς χαρτί.



Σχ. 36. Ἴσα εὐθ. τμήματα

Ἂν τώρα ἔχουμε κι' ἕνα δεύτερο εὐθ. τμῆμα ΓΔ καὶ θέσουμε πάνω σ' αὐτὸ τὸ διαφανὲς χαρτὶ μὲ τὸ ἀντίγραφο Α΄Β΄ τοῦ ΑΒ, ἔτσι ποὺ τὸ Α΄ νὰ πέση πάνω στὸ Γ καὶ ὁλόκληρο τὸ Α΄Β΄ πάνω στὸ ΓΔ, τότε, ἂν καὶ τὸ Β΄ συμπέση μὲ τὸ Δ, θὰ λέμε ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα.

Μὲ τὸ ἀντίγραφο Α΄Β΄ τοῦ ΑΒ λέμε ὅτι πραγματοιεῖται ἡ **μεταφορὰ** τοῦ τμήματος ΑΒ. Ὥστε :

> **Δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα, ἂν τὸ τμῆμα ΑΒ, μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορά, μπορεῖ νὰ ἐφαρμόση πάνω στὸ τμῆμα ΓΔ.**

Γιὰ νὰ σημειώσουμε τὴν ἰσότητα τῶν εὐθ. τμημάτων, γράφουμε :

$$ΑΒ = ΓΔ$$

Τὴ μεταφορὰ ἑνὸς εὐθ. τμήματος μποροῦμε ἐπίσης νὰ κάμουμε μὲ τὴ βοήθεια μιᾶς χάρτινης λωρίδας, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 37.

Σχ. 37. Μεταφορὰ εὐθ. τμήματος μὲ χάρτινη λωρίδα

Τέλος, τὴν ἰσότητα δυὸ εὐθ. τμημάτων μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε καὶ μὲ τὸ **διαβήτη**, ἕνα πολύτιμο σχεδιαστικὸ ἐργαλεῖο, ποὺ τὴν περιγραφὴ καὶ τὴ χρήση του θὰ γνωρίσουμε στὰ ἑπόμενα.

Εἶναι προφανὲς ὅτι : **ὅλες οἱ εὐθεῖες**, εἶναι ἴσες, καθὼς ἐπίσης **καὶ ὅλες οἱ ἡμιευθεῖες**.

44. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν εὐθ. τμημάτων.—1. Εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε εὐθ. τμῆμα εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἑαυτό του. Εἶναι δηλ. :

$$ΑΒ = ΑΒ \qquad \text{(Ἰδιότης ἀνακλαστική)} \quad (44,1)$$

2. Σὲ δυὸ εὐθ. τμήματα ἀληθεύει ἐπίσης ἡ σχέση :

$$ΑΒ = ΓΔ \Rightarrow ΓΔ = ΑΒ \qquad \text{(Ἰδιότης συμμετρική)} \quad (44,2)$$

3. Γιὰ τρία εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta = EZ \end{array}\right\} \Rightarrow AB = EZ \qquad \text{(Ἰδιότης μεταβατική)} \quad (44,3)$$

4. Ἂν τὸ ἀντίγραφο Α΄Β΄ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀντιστρέψουμε πάνω στὸ ΑΒ ἔτσι, ποὺ τὸ Β΄ νὰ ἐφαρμόση στὸ Α, τότε καὶ τὸ Α΄ θὰ ἐφαρμόση στὸ Β. Ἀπ᾿ αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι :

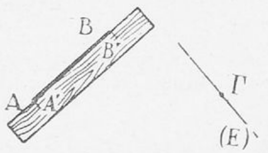
$$AB = BA \qquad (44,4)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι σ᾿ ἕνα εὐθ. τμῆμα μᾶς εἶναι ἀδιάφορη ἡ σειρὰ ποὺ ἔχουν τὰ ἄκρα του ἤ, κι᾿ ἀλλοιῶς, ἡ φορὰ ποὺ ἀκολουθεῖ ἕνα κινητὸ σημεῖο μεταβαίνοντας ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ ἄλλο.

Αὐτὴ ἡ ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ σημειώνουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα μὲ ἕνα μόνο γράμμα. Ἔτσι γράφουμε : ΑΒ = Μ.

45. Τί λέγεται μεταφορὰ ἑνὸς τμήματος. – Λέγεται ἔτσι ἡ κατασκευὴ εὐθ. τμήματος ἴσου μὲ ἄλλο εὐθ. τμῆμα, ποὺ μᾶς ἔχει δοθῆ ἤ, ἀκριβέστερα, ὅταν δίνεται ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ, μιὰ εὐθεῖα (Ε) καὶ πάνω στὴν εὐθεῖα ἕνα σημεῖο Γ, νὰ κατασκευασθῆ ἕνα εὐθ. τμῆμα, πού :

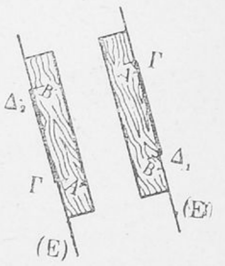
— νὰ ἔχη τὸ ἕνα ἄκρο του στὸ Γ,
— νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (Ε),
— νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ τμῆμα ΑΒ.



Σχ. 38. Τὸ ἀντίγραφο τοῦ ΑΒ

Γιὰ νὰ πραγματοποιήσουμε μιὰ τέτοια κατασκευή, χρησιμοποιοῦμε μιὰ χάρτινη λωρίδα, ποὺ στὴν κόψη της παίρνουμε τὸ ἀντίγραφο Α΄Β΄ τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 38). Ἔπειτα τὸ ὡρισμένο στὴ λωρίδα τμῆμα Α΄Β΄ θέτουμε πάνω στὴν εὐθεῖα (Ε), ἔτσι, ποὺ τὸ Α΄ νὰ συμπέση μὲ τὸ Γ καὶ τότε παίρνουμε πάνω σ᾿ αὐτὴ τὴν εὐθεῖα πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο μέρος της τὰ τμήματα $\Gamma\Delta_1$ καὶ $\Gamma\Delta_2$ (σχ. 39) καὶ ποὺ καὶ τὰ δυὸ πληροῦν τὶς συνθῆκες τοῦ προβλήματος.

Ὁ διαβήτης ἐπιτρέπει, ἐπίσης, μιὰ πολὺ εὔκολη κατασκευή.



Σχ. 39. $\Gamma\Delta_1 = \Gamma\Delta_2 = AB$

46. Ἄνισα εὐθ. τμήματα.—Γενικά, γιὰ νὰ συγκρίνουμε δυὸ εὐθ. τμήματα, θέτουμε τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο ἔτσι, ποὺ νὰ ἔχουν κοινὸ τὸ ἕνα τους ἄκρο. Αὐτὸ γίνεται μ᾿ ἕνα ἀπὸ τὰ παραπάνω μέσα μεταφορᾶς, δηλ. τὸ διαφανὲς χαρτί, τὴ χάρτινη λωρίδα ἢ τὸ διαβήτη.

Ἔτσι γιὰ τὰ τμήματα ΓΔ καὶ ΑΒ, ἂν κάμουμε νὰ συμπέσουν τὰ σημεῖα Γ καὶ Α, τρία εἶναι τὰ ἐνδεχόμενα :

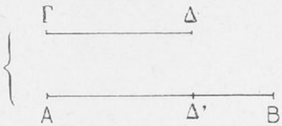
1. Νὰ συμπέση καὶ τὸ Δ μὲ τὸ Β, ὁπότε εἶναι : $\Gamma\Delta = AB$. (46,1)

2. Τὸ Δ νὰ πέση στὴ θέση Δ΄, μεταξὺ Α καὶ Β (σχ. 40). Τότε λέμε ὅτι τὸ ΓΔ εἶναι μικρότερο τοῦ ΑΒ καὶ γράφουμε : $\Gamma\Delta < AB$. (46,2)

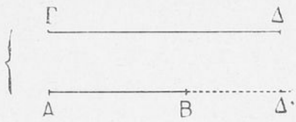
3. Τὸ Δ νὰ πέση στὴ θέση Δ΄, πέρα ἀπὸ τὸ Β, στὴν προέκταση τῆς ΑΒ

(σχ. 41), ὁπότε λέμε ὅτι τὸ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ ΑΒ καὶ γράφουμε:

$$ΓΔ > ΑΒ. \qquad (46,3)$$



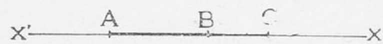
Σχ. 40. ΓΔ < ΑΒ



Σχ. 41. ΓΔ > ΑΒ

47. Διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα.— Πάνω στὴν εὐθεῖα x'x παίρνουμε τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ.

Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 42):



Σχ. 42. Διαδοχικὰ εὐθ. τμήματα

— Κεῖνται πάνω στὴν ἴδια εὐθεῖα.

— Ἔχουν ἕνα κοινὸ ἄκρο, τὸ Β.

— Βρίσκονται τὸ ἕνα ἀπὸ τὴ μιὰ καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριὰ (ἑκατέρωθεν) τοῦ κοινοῦ των σημείου.

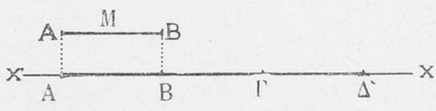
Δυὸ τέτοια εὐθ. τμήματα λέγονται **τμήματα διαδοχικά**.

Ἂν δυὸ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσα, τὸ κοινὸ σημεῖο τους Β λέγεται **μέσον** τοῦ τμήματος ΑΓ καὶ καθένα ἀπὸ τὰ ΑΒ καὶ ΒΓ **μισὸ** τοῦ ΑΓ.

Οἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων ἀνὰ δύο διαδοχικῶν ἴσων τμημάτων λέγονται **κανονικὰ διαστήματα**. Τέσσαρα σημεῖα πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα, σὲ ἴση ἀπόσταση τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, ὁρίζουν 3 διαστήματα καί, γενικὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων, ποὺ ὁρίζονται ἔτσι εἶναι κατὰ ἕνα μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν σημείων.

48. Μέτρηση εὐθ. τμήματος.—Πάνω στὴν εὐθεῖα x'x παίρνουμε διαδοχικὰ ἴσα εὐθ. τμήματα, ὅπως τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ... (σχ. 43).

Τὸ τμῆμα ΑΓ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 τμήματα ἴσα μὲ τὸ ΑΒ, ἐνῶ τὸ ΑΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 τμήματα ἴσα μὲ τὸ ΑΒ.



Σχ. 43. Μέτρηση εὐθ. τμήματος

Ἂν τὸ ΑΒ θεωρήσουμε ὡς τὴ μονάδα τῶν εὐθ. τμημάτων (ΑΒ = Μ), τότε ἡ σύγκριση καθενὸς ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΓ,ΑΔ,... μὲ τὸ ΑΒ = Μ, λέγεται **μέτρηση** αὐτῶν τῶν τμημάτων, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 2, 3..., ποὺ ἐκφράζουν τὰ πλῆθος τῶν μονάδων, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἀποτελεῖται καθένα ἀπὸ τὰ τμήματα αὐτά, λέγεται **μῆκος** αὐτοῦ τοῦ τμήματος. Ὥστε:

> **Μέτρηση εὐθ. τμήματος λέγεται ἡ σύγκρισή του μὲ ἕνα εὐθ. τμῆμα, ποὺ λαμβάνεται ὡς μονάδα, καὶ μῆκος τοῦ τμήματος ὁ ἀριθμός, ποὺ προκύπτει ἀπ' αὐτὴ τὴ σύγκριση.**

Ἐξ ἄλλου, ὅταν μᾶς δοθοῦν δυὸ σημεῖα, θὰ λέμε **ἀπόσταση** αὐτῶν τῶν σημείων, τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος, ποὺ ὁρίζουν. Ὥστε:

Ἀπόσταση δυὸ σημείων Α καὶ Β λέγεται τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος, ποὺ ὁρίζεται ἀπ' αὐτὰ τὰ σημεῖα.

Τὸ τμῆμα - μονάδα ἤ, ἀλλοιῶς, τὸ μοναδιαῖο τμῆμα μποροῦμε νὰ πάρουμε αὐθαίρετα, εἶναι δηλ. μιὰ μονάδα **συμβατική**.

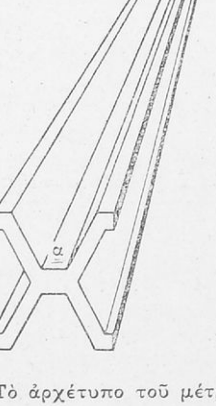
● **Παραδείγματα**: 1. Ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν εἴσοδο τοῦ προαυλίου ὡς τὴν εἴσοδο τοῦ διδακτηρίου εἶναι 100 βήματα. Μονάδα εἶναι τὸ βῆμα μας.

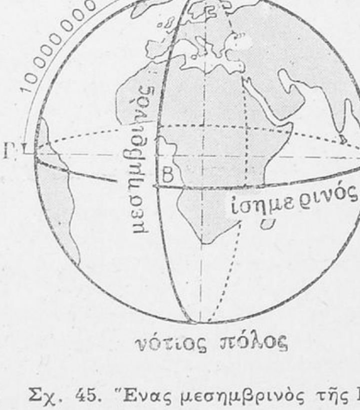
2. Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας ἔχει μῆκος 36 πόδια. Μονάδα ἐδῶ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ παπουτσιοῦ μας.

3. Τὸ μῆκος τοῦ θρανίου μας εἶναι 6 παλάμες. Μονάδα εἶναι τὸ ἄνοιγμα τῆς παλάμης μας.

49. Μονάδες μήκους-Τὸ μέτρο.—Ἀλλ', ἐνῶ ἡ μονάδα γιὰ τὴ μέτρηση ἑνὸς εὐθ. τμήματος μπορεῖ νὰ ληφθῆ αὐθαίρετα, γιὰ τὴν εὐρύτερη συνεννόηση μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων ἔχει καθορισθῆ ὡς μονάδα μήκους, σὲ παγκόσμια κλίμακα, ἕνα ὡρισμένο εὐθ. τμῆμα, τὸ **μέτρο**, ποὺ συμβολίζεται διεθνῶς μὲ τὸ **m**, πρῶτο γράμμα τῆς γαλλικῆς του ὀνομασίας mètre.

Τὸ μέτρο εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ χαραγὲς ἑνὸς διεθνοῦς ἀρχετύπου, καμωμένου ἀπὸ πλατίνα (90 μέρη) καὶ ἰρίδιο (10 μέρη) καὶ διατηρουμένου σὲ θερμοκρασία 0° Κελσίου.

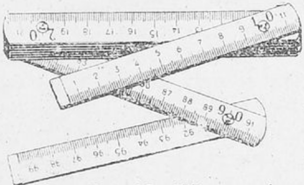




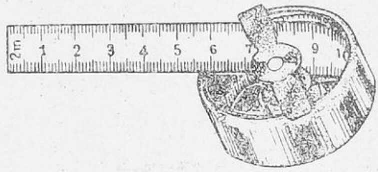
Σχ. 44. Τὸ ἀρχέτυπο τοῦ μέτρου **Σχ. 45. Ἕνας μεσημβρινὸς τῆς Γῆς**

Τὸ ἀρχέτι . υὐτὸ (σχ. 44) βρίσκεται στὸ Διεθνὲς Γραφεῖο Βαρῶν καὶ Μέτρων στὴν πόλη τῶν Σεβρῶν (Sèvres), κοντὰ στὸ Παρίσι. Ἡ θερμοκρασία του διατηρεῖται στοὺς 0° Κελσίου, δηλ. στὴ θερμοκρασία τοῦ πάγου ποὺ λυώνει, ἐπειδὴ σὲ κάθε μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας μεταβάλλεται καὶ τὸ μῆκος κάθε μετάλλου.

Τὸ μέτρο ἔχει ἐκλεγῆ μὲ τέτοιον τρόπο, ὥστε τὸ μῆκος κάθε μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς (σχ. 45) νὰ εἶναι, μὲ μεγάλη προσέγγιση, ἴσο μὲ 40 000 000 m.



Σχ. 46. Ξύλινο μέτρο



Σχ. 47. Ἀτσαλένιο μέτρο

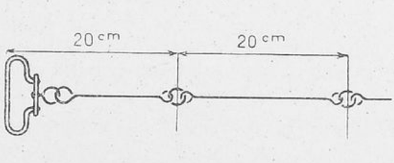
Τὸ μέτρο, ποὺ χρησιμοποιοῦμε συνήθως στὶς μετρήσεις μας, εἶναι ξύλινο καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 στελέχη, ποὺ μποροῦν νὰ διπλωθοῦν (σχ. 46) ἢ εἶναι μιὰ ἀτσάλινη ταινία, ποὺ τυλίγεται σὲ μετάλλινη θήκη (σχ. 47).

50. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ μέτρου.—Τὸ σύστημα μετρήσεως, ποὺ ἔχει βάση του τό μέτρο, λέγεται **μετρικὸ σύστημα**.

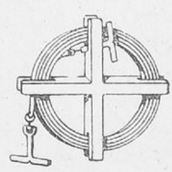
Σ' αὐτὸ λοιπὸν τὸ σύστημα, ὅταν ἔχουμε νὰ μετρήσουμε μεγάλες ἀποστάσεις, χρησιμοποιοῦμε τὰ **πολλαπλάσια τοῦ μέτρου**, ποὺ ἀκολουθοῦν πάντα τὸ νόμο τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως. Εἶναι δηλ. οἱ μονάδες αὐτὲς 10, 100, 1000....φορὲς μεγαλύτερες ἀπὸ τὸ μέτρο. Τέτοιες μονάδες εἶναι:

Ὄνομα	Γαλλικὸς ὅρος	Σύμβολο	Ἀντίστοιχη τάξη	Τιμὴ
μέτρο	mètre	m	ἁπλὲς μονάδες	1m
δεκάμετρο	décamètre	dam	δεκάδες	10m
ἑκατόμετρο	hectomètre	hm	ἑκατοντάδες	100m
χιλιόμετρο	kilomètre	km	χιλιάδες	1000m

Στὴν τεχνικὴ τῶν μετρήσεων τὸ δεκάμετρο παρουσιάζεται σὲ δυὸ μορφές: σὰν **ἁλυσίδα**, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μικρὲς μετάλλινες ράβδους καὶ συνδετικοὺς κρίκους (σχ. 48), ἢ σὰν **μετροταινία** (κορδέλα) τῶν 10 m, ἀπὸ ἀτσάλι, ποὺ τυλίγεται (σχ. 49).

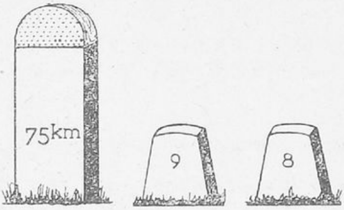


Σχ. 48. Ἄκρο μετρητικῆς ἁλυσίδας



Σχ. 49. Ἀτσάλινη μετροταινία

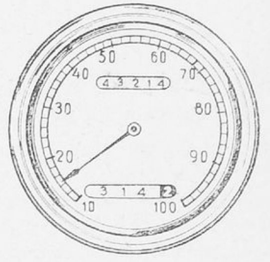
Στὸ ἐθνικὸ ὁδικὸ δίκτυο οἱ ἀποστάσεις σὲ χιλιόμετρα ἀπὸ μιὰ ὡρισμένη ἀφετηρία σημειώνονται πάνω σὲ πέτρινες στῆλες, ποὺ λέγονται **σταδιοδεῖκτες** (σχ. 50). Στὶς σιδηροδρομικὲς μάλιστα γραμμὲς ἀνάμεσα σὲ δυὸ διαδοχικοὺς χιλιομετρικοὺς δεῖκτες μεσολαβοῦν ἄλλοι μικρότεροι, ποὺ δείχνουν ἀποστάσεις ἑκατὸ μέτρων ἀπὸ τὸν τελευταῖο σταδιοδείκτη.



Σχ. 50. Σταδιοδείκτης καὶ ἑκατομετροδεῖκτες

Οἱ ἀποστάσεις, τέλος, ποὺ διατρέχει ἕνα αὐτοκίνητο, γράφονται ἀπὸ ἕνα μηχάνημα ποὺ λέγεται **χιλιομετρικὸς μετρητὴς** (compteur, κοντέρ).

Στὸ μετρητὴ τοῦ σχήματος 57 ὁ κάτω ἀριθμὸς διαβάζεται 314 km 2 hm καὶ δείχνει τὴν ἀπόσταση, ποὺ διέτρεξε τὸ αὐτοκίνητο ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς τελευταίας του διαδρομῆς, ὁ ἐπάνω ἀριθμὸς 43 214 km δίνει τὸν ὁλικὸν ἀριθμὸ χιλιομέτρων, ποὺ διέτρεξε ἀπό τὴ στιγμὴ ποὺ μπῆκε σὲ κυκλοφορία, ἐνῶ οἱ περιφερειακοὶ ἀριθμοὶ δείχνουν σὲ κάθε στιγμή, μὲ τὴ βοήθεια τῆς στρεφομένης βελόνης, τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου σὲ χιλιόμετρα τὴν ὥρα.



Σχ. 51. Χιλιομετρικὸς μετρητὴς αὐτοκινήτου

51. Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοί.—1. Ἕνα αὐτοκίνητο σὲ μιά του διαδρομὴ διέτρεξε 124 χιλιόμετρα καὶ 25 ἑκατόμετρα.

Αὐτὸ τὸ γράφουμε ἔτσι : 124 km 25 hm.

2. Ἡ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν εἴσοδο τοῦ σχολείου μας ὡς τὴν πόρτα τῆς ἐκκλησίας εἶναι 5 ἑκατόμετρα 7 δεκάμετρα καὶ 8 μέτρα.

Αὐτὸ τὸ γράφουμε ἔτσι : 5 hm 7 dam 8 m.

Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς γραφές : 124 km 25 hm καὶ 5 hm 7 dam 8 m εἶναι κι' ἀπὸ ἕνας ἀριθμός, γιατὶ προέρχεται ἀπὸ τὴ μέτρηση μιᾶς ἀποστάσεως μὲ μιὰ ὡρισμένη μονάδα καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτῆς τῆς μονάδος.

Αὐτοῦ τοῦ εἴδους οἱ ἀριθμοὶ λέγονται **συμμιγεῖς** (ἢ σύμμικτοι), ἐπειδὴ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολλοὺς συγχρόνως συγκεκριμένους ἀκεραίους ἀριθμούς, βγαλμένους ἀπὸ διάφορες μονάδες, ποὺ ὅμως ὅλες τους εἶναι πολλαπλάσια ἤ, ὅπως θὰ δοῦμε πιὸ κάτω, ὑποδιαιρέσεις μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος.

Τέτοιους συμμιγεῖς ἀριθμοὺς θὰ συναντήσουμε στὰ ἑπόμενα κατὰ τὴ μέτρηση διαφόρων μεγεθῶν καί, ἰδιαίτερα, στὶς περιπτώσεις, ποὺ οἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς βασικῆς μονάδος δὲν ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο.

52. Οἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου.—Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε ἀποστάσεις μικρότερες ἀπὸ τὸ μέτρο, ὅπως π.χ. τὸ μῆκος τοῦ μολυβιοῦ μας, τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ σειρὲς αὐτοῦ τοῦ βιβλίου..., πρέπει νὰ δεχθοῦμε μονάδες, ποὺ ν' ἀποτελοῦν ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου, δηλ. μονάδες 10, 100, 1000... φορὲς μικρότερες ἀπὸ τὸ μέτρο. Γι' αὐτὸ διαιροῦμε τὸ m:

1_o Σὲ 10 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **δεκατόμετρα** (dm) ἢ δέκατα τοῦ m.

2_o Σὲ 100 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **ἑκατοστόμετρα** (cm) ἢ ἑκατοστὰ τοῦ m.

3_o Σὲ 1000 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **χιλιοστόμετρα** (mm) ἢ χιλιοστὰ τοῦ m.

4_o Τὸ mm ὑποδιαιροῦμε σὲ 1 000 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **μικρὸν** (μ).

5_o Τὸ μ ὑποδιαιροῦμε σὲ 10 000 ἴσα μέρη, ποὺ λέγονται **ἄγγστρομ** (Å).

Οἱ δυὸ αὐτὲς τελευταῖες μονάδες χρησιμοποιοῦνται, ἰδιαίτερα, στὴ Φυσική.

Στὶς συνήθεις μετρήσεις μηκῶν μικροτέρων τοῦ m χρησιμοποιοῦμε τὸ διπλὸ δεκατόμετρο, ποὺ συνηθίζεται νὰ τὸ λέμε **ὑποδεκάμετρο** καὶ ἀντιστοιχεῖ σὲ 20 cm.

53. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.—Ὅπως τὸ μέτρο, ἔτσι καὶ κάθε μονάδα μποροῦμε νὰ χωρίζουμε σὲ 10, 100, 1000, 10 000... ἴσα μέρη κι' ἔτσι θὰ ἔχουμε τὰ **δέκατα**, τὰ **ἑκατοστά**, τὰ **χιλιοστά**, τὰ **δεκάκις χιλιοστὰ**... αὐτῆς τῆς μονάδος.

Αὐτὲς οἱ νέες μονάδες, ὑποδιαιρέσεις μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος, ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο ἔτσι, ποὺ **κάθε μονάδα νὰ περιέχη 10 μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως** καὶ λέγονται **δεκαδικὲς μονάδες**, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ ποὺ γίνονται ἀπὸ τέτοιες μονάδες λέγονται **δεκαδικοὶ ἀριθμοί.**

Ἔτσι ἡ κλίμακα τῶν μονάδων διαφόρων τάξεων ἐπεκτείνεται καὶ πρὸς τὰ κάτω, ὅπως στὸν ἀκόλουθο πίνακα:

Τάξεις ἀκεραίων μονάδων								Τάξεις δεκαδικῶν μονάδων							
8η	7η	6η	5η	4η	3η	2η	1η	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η
Δεκάδες ἑκατομμυρίων	Ἑκατομμύρια	Ἑκατοντάδες χιλιάδων	Δεκάδες χιλιάδων	Χιλιάδες	Ἑκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	Δέκατα	Ἑκατοστά	Χιλιοστά	Δεκάκις χιλιοστά	Ἑκατοντάκις χιλιοστά	Ἑκατομμυριοστά	Δεκάκις ἑκατομμυριοστά	Ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά

54. Πῶς γράφονται οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.—Ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἀκολουθεῖ τὴ συνθήκη γραφῆς τῶν ἀκεραίων στὸ θεσιακὸ δεκαδικὸ σύστημα (§ 28). Οἱ μονάδες κάθε τάξεως, ἀκέραιες ἢ δεκαδικές, παίρνουν τὴ θέση ποὺ καθορίζεται ἀπὸ τὸν παραπάνω πίνακα. Τὸ μηδὲν συμπληρώνει τὴν τάξη, ἀπὸ τὴν ὁποία δὲν ὑπάρχουν μονάδες καὶ ἡ **ὑποδιαστολὴ** (,) χωρίζει τὸ ἀκέραιο ἀπὸ τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ.

● **Παραδείγματα:** 1. Τὸ μῆκος τοῦ μαυροπίνακος εἶναι 9 dm 4 cm 5mm. Αὐτὸ γράφεται: 0,945 m.

2. Ἡ ἀπόσταση δυὸ δένδρων τοῦ κήπου μας εἶναι 3 dam 4 m 8 dm 6 cm. Αὐτὸ γράφεται: 34,86 m.

3. Τὸ πάχος κάθε φύλλου τοῦ βιβλίου μου εἶναι 5 δεκάκις χιλιοστὰ τοῦ m. Γράφουμε: 0,0005 m.

Ὕστερα ἀπ' αὐτὰ εὔκολα μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε τὸν παρακάτω πίνακα, ποὺ δίνει τὶς ὑποδιαιρέσεις τοῦ m.

Ὄνομα	Γαλλικὸς ὅρος	Σύμβολο	Τιμὴ σὲ m
δεκατόμετρο	décimètre	dm	0,1
ἑκατοστόμετρο	centimètre	cm	0,01
χιλιοστόμετρο	millimetre	mm	0,001
μικρὸν	micron	μ	0,000001
ἄγγστρομ	angström	Å	0,0000000001

55. Πῶς διαβάζεται ἕνας δεκαδικὸς ἀριθμός.—Τρεῖς τρόποι ὑπάρχουν γιὰ νὰ διαβάσουμε ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμό:

1ο Ὁ ἀριθμὸς 405,253m εἶναι: 4 hm 5 m 2 dm 5 cm 3 mm καὶ διαβάζεται, ἂν τὸν ἀπαγγείλουμε σὰν ἀριθμὸ συμμιγῆ.

2ο Ὁ ἀριθμὸς 84,027 m ἔχει 84 m καὶ 2 cm ἢ 20 mm καὶ 7 mm, δηλ. εἶναι 84 m 27 mm καὶ διαβάζεται: 84 ἀκέραιος καὶ 27 χιλιοστά. Ἀπαγγέλλεται δηλ. χωριστὰ τὸ ἀκέραιο καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικό του μέρος.

3ο Ὁ ἴδιος αὐτὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ 84 ἀκέραιες μονάδες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ 84000 χιλιοστά, καὶ ἀπὸ 27 ἀκόμη χιλιοστά, δηλ. ἀπὸ 84 027 χιλιοστά. Διαβάζεται λοιπόν: ὀγδόντα τέσσαρες χιλιάδες εἴκοσι ἑπτὰ χιλιοστά. Μ' αὐτὸν δηλ. τὸν τρόπο ἀπαγγέλλουμε τὸν ἀριθμὸ σὰν νὰ ἦταν ἀκέραιος καὶ δίνουμε τ' ὄνομα τῶν μονάδων τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως.

● **Ἀξιοσημείωτη παρατήρηση:** Τὰ 3 δέκατα ἀντιστοιχοῦν σὲ 30 ἑκατοστὰ ἢ σὲ 300 χιλιοστὰ ἢ σὲ 3 000 δεκάκις χιλιοστά... Ὥστε εἶναι 0,3 = = 0,30 = 0,300 = 0,3000..., ποὺ σημαίνει ὅτι τὰ μηδενικὰ στὸ τέλος ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἀλλάζουν τὴν ἀξία του.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἀνάλογη ἰδιότητα τῶν ἀκεραίων (§ 28 Παρατ.) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράφουμε:

$$3,25 = 03,250 = 003,2500,\ 0003,250\,000.$$

● **Παραδείγματα:** 1. Ὁ ἀριθμὸς 0,03074 διαβάζεται: 0 ἀκέραιος καὶ 3 074 ἑκατοντάκις χιλιοστὰ ἢ 3 074 ἑκατοντάκις χιλιοστά.

2. Ὁ ἀριθμὸς 1003,0017 διαβάζεται: 1 003 ἀκέραιος καὶ 17 δεκάκις χιλιοστὰ ἢ 10 030 017 δεκάκις χιλιοστά.

56. Ἄλλες μονάδες μήκους.—1. Στὴ χώρα μας, ἐκτὸς ἀπὸ τὴ διεθνῆ μονάδα, τὸ μέτρο, χρησιμοποιεῖται, κυρίως στὴν ἐκτίμηση τῶν διαστάσεων ἑνὸς οἰκοπέδου, καὶ ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς** (τ. πχ.), ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ 75 cm ἢ 0,75 m.

2. Στὸ ἐμπόριο καὶ τὴν τεχνικὴ χρησιμοποιεῖται ἐπίσης καὶ ἡ Ἀγγλοσαξωνικὴ μονάδα **ὑάρδα** (yd), ποὺ ὑποδιαιρεῖται σὲ 3 **πόδια** (ft) καὶ κάθε πόδι σὲ 12 **ἴντσες** (in ἢ ″). Ἡ ἀντιστοιχία αὐτῶν τῶν μονάδων μὲ τὸ μέτρο εἶναι:

$$1\ \mathrm{yd} = 0{,}914\ \mathrm{m} = 91{,}4\ \mathrm{cm} = 914\ \mathrm{mm}$$

$$1\ \mathrm{ft} = 0{,}305\ \mathrm{m} = 30{,}5\ \mathrm{cm} \quad \text{καὶ} \quad 1\ \mathrm{in} = 2{,}54\ \mathrm{cm} = 25{,}4\ \mathrm{mm}.$$

3. Στὶς ὁδικὲς ἀποστάσεις χρησιμοποιεῖται τὸ **Ἀγγλοσαξωνικὸ μίλι** (ml), ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ 1 609 m ἢ 1,609 km, ἐνῶ γιὰ τὶς ναυτικὲς μετρήσεις τὸ Γαλλικὸ **ναυτικὸ μίλι** (mar. ml), ἴσο μὲ 1 852 m ἢ 1,852 km.

57. Ὄργανα γιὰ μετρήσεις ἀκριβείας.—Ὅταν ζητεῖται τὸ πάχος μιᾶς λάμας ἢ οἱ διαστάσεις ἑνὸς λεπτοῦ ἐξαρτήματος μηχανῆς, χρειάζεται μεγάλη ἀκρίβεια στὶς μετρήσεις. Γιὰ τέτοιου εἴδους μετρήσεις χρησιμοποιοῦνται εἰδικὰ ὄργανα. Τὰ κυριώτερα ἀπ' αὐτὰ τὰ ὄργανα εἶναι τὸ **παχύμετρο** καὶ τὸ **μικρόμετρο** (palmer, πάλμερ).

1ο Τὸ **παχύμετρο** (σχ. 52) δίνει μήκη μὲ ἀκρίβεια ἑνὸς δεκάτου τοῦ mm. Τὸ **στέλεχός** του εἶναι στερεωμένο πάνω σ' ἕνα **ράμφος** A καὶ βαθμολογημένο σὲ mm. Ἕνα δεύτερο ράμφος B, ποὺ μπορεῖ νὰ κινεῖται κατὰ μῆκος τοῦ στελέχους, φέρει μιὰ εἰδικὴ βαθμολογία **(βερνιέρος)**, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διαβάζουμε τὰ δέκατα τοῦ mm.

Τὸ ἀντικείμενο, τοῦ ὁποίου ζητοῦμε τὸ πάχος, τοποθετοῦμε ἀνάμεσα στὰ δυὸ ράμφη καὶ στερεώνουμε τὸ κινητὸ μέρος τοῦ ὀργάνου μὲ τὸν **σφιγκτήρα**. Ἡ ἀνάγνωση τοῦ πάχους γίνεται τότε σὲ δυὸ στάδια:

α'. **Τὴν ἀνάγνωση τῶν mm.** Αὐτὰ εἶναι ὁ ἀριθμός, ποὺ δίνεται ἀπὸ τὸ στέλεχος μεταξὺ τοῦ 0 τοῦ στελέχους καὶ τοῦ 0 τοῦ βερνιέρου. Στὴ μεγέθυνση τῆς βαθμολογίας, κάτω ἀπὸ τοῦ σχέδιο τοῦ ὀργάνου, διαβάζουμε 21 mm.

Σχ. 52. Παχύμετρο καὶ μεγέθυνση τοῦ βερνιέρου του

β'. **Τὴν ἀνάγνωση τῶν δεκάτων τοῦ mm.** Αὐτὰ εἶναι ὁ ἀριθμός, ποὺ δίνεται ἀπὸ τὴν ἔνδειξη τῆς χαραγῆς τοῦ βερνιέρου ποὺ συμπίπτει μὲ μιὰ ἀπὸ τὶς χαραυγὲς τοῦ στελέχους.

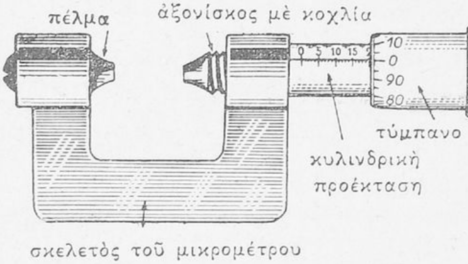
Στὸ σχῆμα 52 ἡ ἔνδειξη αὐτὴ εἶναι 5 δέκατα τοῦ mm.

Ὥστε τὸ πάχος τοῦ ἀντικειμένου, ποὺ μετρήσαμε, εἶναι 21,5 mm.

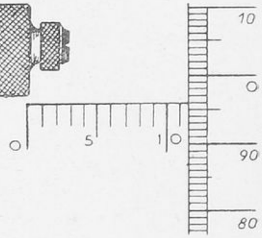
2ο Τὸ **μικρόμετρο** (σχ. 53) δίνει τὸ πάχος ἑνὸς ἀντικειμένου, π.χ. ἑνὸς φύλλου λαμαρίνας, μὲ ἀκρίβεια ἑνὸς ἑκατοστοῦ τοῦ mm. 'Αποτελεῖται ἀπὸ δυὸ μέρη:

α' Τὸ **σκελετὸ** σὲ σχῆμα πετάλου, ποὺ ἔχει στὸ ἕνα του ἄκρο τὸ **πέλμα** καὶ στὸ ἄλλο μιὰ **κοίλη κυλινδρικὴ προέκταση** βαθμολογημένη σὲ mm.

β'. Τὸ **κινητὸ μέρος**, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα **κοχλιοφόρο ἀξονίσκο**, ποὺ μετατοπίζεται κατὰ 1 mm σὲ κάθε στροφὴ τοῦ **τυμπάνου**, ποὺ κι' αὐτὸ εἶναι κυκλικὰ βαθμολογημένο ἀπὸ 0-100 mm.



Σχ. 53. Τὸ μικρόμετρο (πάλμερ)



Σχ. 54. Ἔνδειξη μικρομέτρου

Τὸ ἀντικείμενο, τοῦ ὁποίου ζητοῦμε τὸ πάχος, σφίγγουμε ἀνάμεσα στὸ πέλμα καὶ τὸν ἀξονίσκο, ποὺ προχωρεῖ μὲ τὴν περιστροφὴ τοῦ τυμπάνου. Καὶ τότε διαβάζουμε:

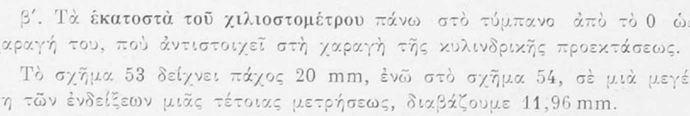
α'. Τὰ **χιλιοστόμετρα** πάνω στὴ βαθμολογημένη κυλινδρικὴ προέκταση, ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὸ σημεῖο, ποὺ διασταυρώνεται μὲ τὸ τύμπανο.

β'. Τὰ **ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστομέτρου** πάνω στὸ τύμπανο ἀπὸ τὸ 0 ὡς τὴ χαραγή του, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ χαραγὴ τῆς κυλινδρικῆς προεκτάσεως.

Τὸ σχῆμα 53 δείχνει πάχος 20 mm, ἐνῶ στὸ σχῆμα 54, σὲ μιὰ μεγέθυνση τῶν ἐνδείξεων μιᾶς τέτοιας μετρήσεως, διαβάζουμε 11,96 mm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115. Μὲ ὁποιοδήποτε μέσο μεταφορᾶς νὰ συγκριθοῦν τὰ εὐθ. τμήματα, ποὺ ἀποτελοῦν καθένα ἀπὸ τὰ εἰκονιζόμενα κεφαλαῖα γράμματα (σχ. 55).



Σχ. 55. Σύγκριση εὐθ. τμημάτων

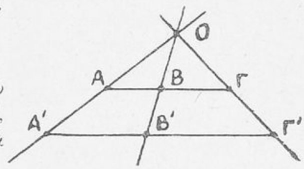
116. Ὅμοια σύγκριση νὰ γίνῃ καὶ μεταξὺ τῶν τμημάτων, ποὺ σχηματίζουν τὰ γράμματα τοῦ σχήματος 56. Νὰ τεθοῦν γράμματα στὰ ἀκραῖα σημεῖα καὶ στὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθ. τμημάτων καὶ νὰ γραφοῦν οἱ ἰσότητες καὶ ἀνισότητες, ποὺ προκύπτουν σὲ κάθε σχῆμα χωριστά.

Σχ. 56. Σύγκριση εὐθ. τμημάτων

117. Νὰ τεθῇ στὴ θέση τῶν στιγμῶν τὸ σύμβολο <ἢ> γιὰ κάθε ζεῦγος τμημάτων τοῦ ἀπέναντι σχήματος (σχ. 57).

ΑΒ ... ΒΓ Β΄Γ΄...Α΄Β΄

ΑΒ ... ΑΓ Β΄Γ΄...Α΄Γ΄



Σχ. 57

118. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα xy νὰ γραφοῦν τέσσαρα διαδοχικὰ ἴσα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. Ποιὸ εἶναι τὸ μέσον καθενὸς ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΓ, ΓΕ, ΒΔ, ΑΕ ;

119. Σὲ μιὰ δενδροστοιχία ὑπάρχουν 17 δένδρα σὲ ἴσην ἀπόσταση τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσα κανονικὰ διαστήματα ὁρίζονται ἀνάμεσα στὸ πρῶτο καὶ τελευταῖο δένδρο ;

120. Τηλεγραφικοὶ στύλοι, τοποθετημένοι σ' εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἴσες ἀποστάσεις, ὁρίζουν μεταξύ τους 12 κανονικὰ διαστήματα. Πόσοι εἶναι αὐτοὶ οἱ στῦλοι ;

121. Κατὰ μῆκος τοῦ προαυλίου τοῦ σχολείου μας ὑπάρχει ἕνας ἀριθμὸς δένδρων, σὲ ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τοὺς πλαγινοὺς τοίχους καὶ μεταξύ τους. Ἂν ἔτσι ὁρίζονται 8 κανονικὰ διαστήματα μεταξὺ τῶν δύο τοίχων πόσα εἶναι τὰ δένδρα ;

122. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα xy νὰ γραφοῦν τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ = = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ. Μὲ μονάδα Μ = ΑΒ ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ ;

123. Πόσα dam ὑπάρχουν στά : i) 2 km, ii) 27 km, iii) 9 hm, iv) 59 hm ;

124. Μὲ πόσα m ἀντιστοιχοῦν τά : i) 123 km ii) 1 010 km, iii) 504 hm, iv) 2 704 hm, v) 132 dam, vi) 4 763 dam.

125. Κάθε ζευγάρι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς παριστάνει τὴν ἴδια ἀπόσταση : i) 3 καὶ 300, ii) 15 καὶ 15000, iii) 400 καὶ 4000. Ἂν ὁ δεύτερος ἀριθμὸς σὲ κάθε ζευγάρι ἐκφράζῃ m, τί ἐκφράζει ὁ πρῶτος ;

126. Πόσοι δεῖκτες ἑκατομετρικοὶ ὑπάρχουν ἀνάμεσα σὲ δύο διαδοχικοὺς χιλιομετρικοὺς δεῖκτες μιᾶς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ;

127. Πόσοι δεῖκτες χιλιομετρικοὶ ὑπάρχουν μεταξὺ τοῦ 60οῦ καὶ 70οῦ km μιᾶς ἐθνικῆς ὁδοῦ ; Θὰ ὑπολογισθοῦν καὶ οἱ ἐξωτερικοὶ δεῖκτες.

128. Πόσα m διέτρεξεν ἕνας πεζός, ποὺ ξεκίνησε ἀπὸ ἕνα χιλιομετρικὸ δείκτη καὶ ἔφθασε στὸν 24ον ἑκατομετρικὸ δείκτη ;

129. Πόσην ἀπόσταση σὲ m θὰ διατρέξῃ ἕνα τραῖνο ἀπὸ τὸν 5ον ἑκατομετρικὸ δείκτη, ποὺ προηγεῖται τοῦ 215 km καὶ τοῦ 9ου ἑκατομετρικοῦ δείκτη μετὰ τὸ 216 km ;

130. Νὰ τραποῦν σὲ m οἱ ἀριθμοί : i) 3 km 5 dam, ii) 7 hm 3 dam, iii) 2 km 4 hm 5 dam, iv) 7 hm, 6 m, v) 3 km 4 dam 9 m.

131. Νὰ γραφοῦν ὡς συμμιγεῖς οἱ ἀριθμοί : i) 437 m, ii) 835 dam, iii) 6 072 m, iv) 575 hm, v) 80 504 m.

132. Πόσα dm ὑπάρχουν στά: i) 8 m, ii) 13 dam, iii) 5 hm, iv) 20 km, v) 5 dam 6 m, vi) 2 hm 2 m, vii) 4 km 5 dam 7 m;

133. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς οἱ: i) 64 dm, ii) 873 dm, iii) 1 054 dm, iv) 21 085 dm.

134. Μὲ πόσα cm ἀντιστοιχοῦν: i) 8 dm, ii) 24 m, iii) 5 dam, iv) 37 hm, v) 2 km, vi) 3 m 2 dm, vii) 3 hm 5 m 7 dm viii) 2 km 5 dam;

135. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς οἱ ἀριθμοί: i) 585 cm, ii) 2 022 cm, iii) 7 760 cm, iv) 30 702 cm.

136. Μὲ πόσα mm ἀντιστοιχοῦν: i) 7 cm, ii) 4 dm, iii) 8 m, iv) 6 m 2 dm, v) 3 m 2 dm 5 cm, vi) 21 085 dm;

137. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς οἱ ἀριθμοί: i) 62 mm, ii) 507 mm, iii) 6 843 mm, iv) 10 803 mm.

138. Πόσα μ ὑπάρχουν στά: i) 1 mm, ii) 7 mm, iii) 1 cm, iv) 6 cm, v) 1 dm, vi) 3 dm, vii) 1 m, viii) 4 m;

139. Νὰ τραποῦν σὲ Å τά: i) 1 μ, ii) 52 μ, iii) 1 mm, iv) 8 mm.

140. Σχεδιάστε στὸ τετραδιό σας τμήματα: i) 1 mm, ii) 7 mm, iii) 1 cm, iv) 6 cm, v) 1 dm.

141. Μὲ ἕνα διπλὸ δεκατόμετρο νὰ μετρήσετε ἀκριβῶς τὸ μῆκος: i) τοῦ βιβλίου σας, ii) τῆς κασετίνας σας, iii) τοῦ θρανίου σας, iv) τοῦ στυλογράφου σας.

142. Νὰ γράψτε μιὰν εὐθεῖα xy καὶ νὰ πάρετε πάνω σ' αὐτὴν ἕνα σημεῖο Α. Πόσα σημεῖα τῆς εὐθείας ὑπάρχουν σὲ ἀπόσταση 3 cm ἀπὸ τὸ Α; Νὰ γραφοῦν αὐτὰ τὰ σημεῖα.

143. Πάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα δίνεται ἕνα σημεῖο Ο. Ἑκατέρωθεν αὐτοῦ τοῦ σημείου νὰ ληφθοῦν τὰ τμήματα ΟΑ = ΟΒ = 4 cm καὶ ΟΓ = ΟΔ = 7 cm καὶ νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ ΑΔ καὶ ΒΓ.

144. Κάθε ζευγάρι ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς παριστάνει τὴν ἴδια ἀπόσταση: i) 5 καὶ 500, ii) 7 καὶ 70, iii) 9 καὶ 900 000. Ἂν ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἐκφράζῃ dm, τί ἐκφράζει ὁ δεύτερος;

145. Ἂν τὸ ἀκέραιο μέρος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παριστάνει m, τί μονάδες παριστάνει τὸ δεκαδικὸ ψηφίο: i) 2ας τάξεως, ii) 6ης τάξεως; Ποιὰ θέση κατέχουν τὰ δέκατα καὶ ποιὰ τὰ χιλιοστά;

146. Νὰ γραφοῦν μὲ ψηφία οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπό: i) 3 δεκάδες 7 μονάδες 4 δέκατα 6 χιλιοστά, ii) 2 μονάδες 3 ἑκατοστὰ 9 δεκάκις χιλιοστά, iii) 5 δέκατα 6 χιλιοστὰ 2 ἑκατοντάκις χιλιοστά, iv) 1 ἑκατοστὸ 2 δεκάκις χιλιοστὰ 7 ἑκατομμυριοστά.

147. Γράψτε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς i) 27 ἀκέραιος 3 χιλιοστά, ii) 5 ἀκέραιος 72 δεκάκις χιλιοστά, iii) 107 ἀκέραιος 23 ἑκατοντάκις χιλιοστά, iv) 2 ἀκέραιος 1703 ἑκατομμυριοστά, v) ἑπτὰ κόμμα 204 δεκάκις ἑκατομμυριοστά, vi) 340 κόμμα 7008 δισεκατομμυριοστά.

148. Νὰ ἐκφράσετε σὲ m τὰ ἀκόλουθα μήκη καὶ νὰ διαβάσετε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ θὰ βρῆτε: i) 5 hm 3 m 4 dm 5 cm, ii) 2 km 6 dam 5 mm, iii) 6 m 7 mm 1 μ, iv) 4,02 dm, v) 6006,06 cm.

149. Νὰ τραποῦν σὲ συμμιγεῖς οἱ ἀριθμοί: i) 3,702 m, ii) 23,747 m, iii) 5,83 dam, iv) 8,104 hm, v) 2,670403 km, vi) 8,03 dm, v) 307,2 cm.

150. Νὰ ἐκφρασθοῦν σὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸ dam τὰ μήκη: i) 27 hm 52 m, ii) 6 km 5 dam 3 m 9 dm, iii) 234 m 102 mm, iv) 7 004 cm, v) 1 001 mm.

151. Νὰ ἐκφρασθοῦν σὲ km οἱ ἀποστάσεις: i) 54 702 m, ii) 8 760 dam, iii) 8 063 hm, iv) 52 003 dm, v) 4 008 003 mm, vi) 1 084 dam 152 mm, vii) 301 hm 52 mm, viii) 40 802 cm.

152. Νὰ ἐκφρασθοῦν σὲ cm τὰ μήκη: i) 5,24 dm, ii) 672 mm iii) 4,5 m, iv) 0,375 mm, v) 5 m 2 mm, vi) 2 dam 3 dm 4 mm.

153. Νὰ τραποῦν σὲ μ οἱ ἀριθμοί: i) 0,02 cm, ii) 4,07 mm, iii) 0,02 dm, iv) 5 cm 3 mm, v) 2 m 3 cm.

154. Νὰ τραποῦν σὲ Å οἱ ἀριθμοί: i) 3,7 μ, ii) 0,03 μ, iii) 0,124 μ, iv) 0,023 mm, v) 0,0014 mm.

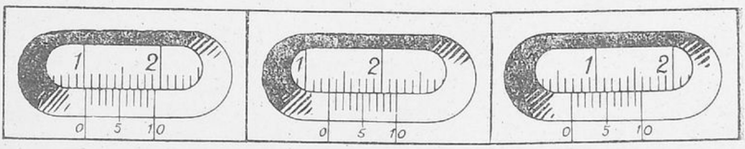
155. Νὰ τραποῦν σὲ μ οἱ ἀριθμοί: i) 27 Å, ii) 203 Å, iii) 1054 Å.

156. Τρία διαδοχικὰ τμήματα ἔχουν μῆκος: ΑΒ = 25 yd, ΒΓ = 25 τ.πχ. καὶ ΓΔ = 25 m. Νὰ διαταχθοῦν σὲ τάξη μεγέθους αὐξανομένου τὰ τρία αὐτὰ τμήματα.

157. Νὰ συγκριθοῦν τὰ εὐθ. τμήματα: ΑΒ = 1 ft, ΓΔ = 31 cm, ΕΖ = = 294 mm, ΗΘ = 3,05 dm καὶ νὰ διαταχθοῦν μὲ πολλαπλῆν ἀνισότητα.

158. Τὸ πάχος τριῶν σανίδων εἶναι ἀντίστοιχα: α = 2,6 cm, β = 1 in, γ = 25 mm. Ποιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς εἶναι παχύτερη;

159. Νὰ διαβασθοῦν οἱ ἐνδείξεις τῶν βερνιέρων τοῦ σχ. 58.

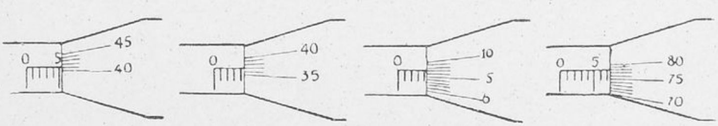


Σχ. 58. Ἐνδείξεις βερνιέρων παχυμέτρου

160. Νὰ διαβάσετε τὰ μήκη ποὺ δίνουν οἱ βερνιέροι τοῦ σχ. 59.

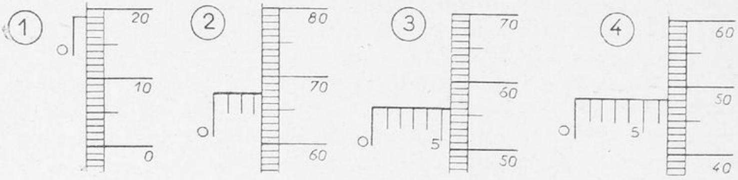
Σχ. 59. Ἐνδείξεις βερνιέρων παχυμέτρου

161. Νὰ διαβάσετε τὶς ἐνδείξεις τῶν μικρομέτρων τοῦ σχ. 60.



Σχ. 60. Ἐνδείξεις μικρομέτρων

162. Ποιὸ εἶναι τὸ πάχος, ποὺ δείχνουν τὰ μικρόμετρα στὶς μεγεθύνσεις τοῦ σχ. 61;



Σχ. 61. 'Ενδείξεις μικρομέτρων σὲ μεγέθυνση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ΄

Η ΕΝΩΣΗ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

58. Τί λέγεται ἕνωση δύο συνόλων.—Ἂς ὀνομάσουμε :

$A = \{$ Γεώργας, Ζαφείρης, Πανάγου, Θεοδώρου$\}$

τὸ σύνολο ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, ποὺ ἀνήκουν στὴν ἀθλητικὴν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου μας καί :

$B = \{$ Ἀθανασίου, Γεώργας, Παύλου, Θεοδώρου, Χρόνης $\}$

τὸ σύνολο ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, ποὺ ἀνήκουν στὴ χορωδία.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἀπὸ τὴν τάξη μας παίρνει μέρος στὶς δυὸ αὐτὲς ἐκδηλώσεις τοῦ σχολείου μας τὸ σύνολο :

$E = \{$Γεώργας, Ζαφείρης, Πανάγου, Θεοδώρου, Ἀθανασίου, Παύλου, Χρόνης$\}$

Τὸ σύνολο Ε λέγεται **ἕνωση τῶν συνόλων Α καὶ Β**. Αὐτὸ συμβολίζεται ἔτσι :

$$E = A \cup B$$

καὶ διαβάζεται : «Ε ἴσον Α ἕνωσις Β». Ὥστε :

> **Ἕνωση δύο συνόλων Α καὶ Β λέγεται τὸ σύνολον Ε, ποὺ στοιχεῖα του εἶναι ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων, ἀλλὰ τὸ καθένα ἀπὸ μιὰ φορά.**

Ἀπὸ τὸ παραπάνω παράδειγμα γίνεται φανερὸ ὅτι τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν Α καὶ Β, οἱ μαθηταὶ Γεώργας καὶ Θεοδώρου, στὸ σύνολο Ε περιέχονται μιά, καὶ μόνο μιά, φορά.

● **Παραδείγματα** : 1. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$ καὶ $B = \{3, 4, 5, 6\}$, θὰ εἶναι : $E = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Εἶναι : $\{\alpha, \beta, \gamma\} \cup \{\alpha, \beta,\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

3. Εἶναι : $\{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

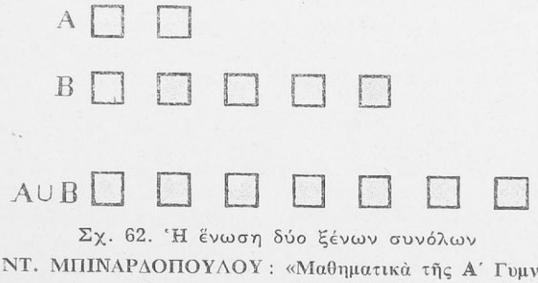
4. Εἶναι : $\{x, y, \omega\} \cup \{x, y, \omega\} = \{x, y, \omega\}$.

5. Εἶναι : $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \cup \varnothing = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

6. Εἶναι : $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

59. Ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν.—Ἂς πάρουμε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα, τὰ σύνολα Α καὶ Β τῶν τετραγωνικῶν συμβόλων (σχ. 62), ποὺ τὸ πρῶτο ἔχει 2 στοιχεῖα καὶ τὸ δεύτερο 5, κι' ἂς σχηματίσουμε τὴν ἕνωσή τους :

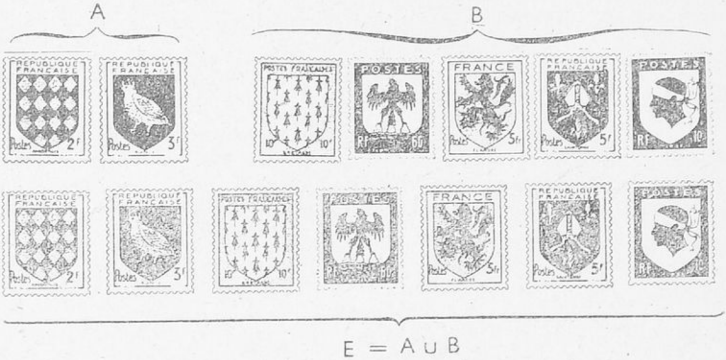
$$E = A \cup B.$$



Σχ. 62. Ἡ ἕνωση δύο ξένων συνόλων

Ἂν ἀπαριθμήσουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ε βρίσκομε πληθικὸν ἀριθμὸν 7.

Τὸ ἴδιο, ἂν πάρουμε τὰ σύνολα Α καὶ Β τῶν γραμματοσήμων (σχ. 63), ποὺ εἶναι ξένα μεταξύ τους κι᾽ ἔχουν τοὺς ἴδιους, ὅπως παραπάνω, πλη-



Σχ. 63. Ἡ ἕνωση δυὸ συνόλων γραμματοσήμων

θικοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 5 ἡ ἕνωσή τους: $E = A \cup B$ θὰ ἔχη τὸ ἴδιο πλῆθος στοιχείων, δηλ. τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν 7.

Τὸν ἀριθμὸ 7 ὀνομάζομε **ἄθροισμα** τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5. Ὥστε:

Ὁ ἀριθμός, ποὺ χαρακτηρίζει τὴν ἕνωση δυὸ ξένων συνόλων, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, ποὺ χαρακτηρίζουν καθένα ἀπ᾽ αὐτὰ τὰ σύνολα.

Ὅταν δίνονται δυὸ ἀφηρημένοι ἀριθμοὶ καὶ ζητοῦμε τὸ ἄθροισμά τους, πρέπει νὰ ἐκτελέσουμε μιὰ πράξη, ποὺ λέγεται **πρόσθεση**. Ὥστε:

Πρόσθεση δύο ἀριθμῶν λέγεται ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκομε τὸ ἄθροισμά τους.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 γράφεται:

$$2 + 5 = 7$$

ὅπου τὸ σύμβολο + (διαβάζεται σὺν) μᾶς ὑποδεικνύει νὰ ἐκτελέσουμε τὴν πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5, ἐνῶ τὸ 7 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν, ποὺ βρίσκεται ἀπ᾽ αὐτὴν τὴν πράξη.

Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 5 λέγονται **προσθετέοι** ἢ **ὅροι** τοῦ ἀθροίσματος.

Γενικά, ἂν α καὶ β παριστάνουν τοὺς ἀριθμούς, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀπαρίθμηση δυὸ ξένων συνόλων Α καὶ Β γράφουμε:

$$\alpha + \beta = \gamma$$

καὶ διαβάζουμε: «α σὺν β ἴσον γ», ὅπου γ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου: $E = A \cup B$.

60. Παρατηρήσεις.—1. Δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχιση τῶν ὅρων **ἄθροισμα** καὶ **πρόσθεση**. Τὸ ἄθροισμα εἶναι ἕνας ἀριθμός, ἐνῶ ἡ πρόσθεση εἶναι μιὰ πράξη.

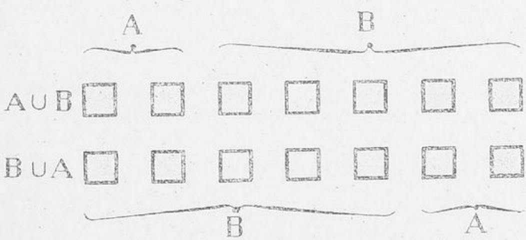
2. Τώρα, ποὺ ξέρομε πιὰ τὴ σημασία τῆς λέξεως σύνολο, δὲν πρέπει ποτὲ νὰ τὴ χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ ἐκφράσουμε τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν. Σύνολο τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 εἶναι τό : $\{2, 5\}$, ἐνῶ ἄθροισμά τους εἶναι τό: $2+5=7$.

3. Τὸ ρῆμα «προσθέτω» σὲ πολλὲς περιπτώσεις μπορεῖ ν' ἀντικατασταθῆ ἀπὸ τὸ ρῆμα «αὐξάνω». Ἔτσι π.χ., ἀντὶ νὰ ποῦμε: «προσθέτομε στὸν 2 τὸν 5», λέμε: «αὐξάνομε τὸν 2 κατὰ 5».

4. Πιὸ πάνω μιλήσαμε γιὰ τὴν πρόσθεση δύο ἀριθμῶν ἀφηρημένων. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι, ἡ πρόσθεσή τους εἶναι δυνατὴ μόνον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι **ὁμοειδεῖς**, δηλ. ὅταν κι' οἱ δυὸ προέρχονται ἀπὸ τὴν ἀπαρίθμηση στοιχείων τῆς ἴδιας φύσεως ἤ, προκειμένου γιὰ γεωμετρικὰ μεγέθη, ὅπως εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα, ὅταν προέρχονται ἀπὸ μεγέθη τοῦ ἴδιου εἴδους καὶ μάλιστα μετρημένα μὲ τὴν ἴδια μονάδα. Ἔτσι π.χ. εἶναι ἀκατανόητη ἡ πρόσθεση 2 μαθητῶν καὶ 5 θρανίων, ἐνῶ ἐξ ἄλλου τὸ ἄθροισμα 2 m καὶ 30 cm θὰ βρεθῆ, ἂν τὰ 2 m τραποῦν σὲ 200 cm, ὁπότε θὰ γίνη ἡ πρόσθεση : $200+30$.

5. Ὅταν τὰ σύνολα δὲν εἶναι ξένα μεταξύ τους, ἢ ὅταν τὸ ἕνα εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πληθικῶν τους ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν πληθικὸν ἀριθμό, ποὺ χαρακτηρίζει τὴν ἕνωσή τους. Ἔτσι π.χ. στὸ παράδειγμα τῆς § 50 οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν συνόλων Α καὶ Β εἶναι, ἀντίστοιχα, 4 καὶ 5 καὶ τὸ ἄθροισμά τους : $4+5=9$, ἐνῶ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $E=A\cup B$ εἶναι ὁ 7.

61. Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθετικότητος στὴν πρόσθεση.— Ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β ἑνώσουμε μὲ τὴ σειρὰ $A\cup B$ ἢ τὴ $B\cup A$, θὰ ἔχουμε τὸ ἴδιο σύνολο Ε (σχ. 64). Ἔχομε δηλ. : $A\cup B=B\cup A=E$ καὶ γιὰ τοὺς πληθικούς τους ἀριθμοὺς τὴ σχέση : $2+5=5+2=7$



Σχ. 64. Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθετικότητος

Γενικά, ἂν α καὶ β εἶναι δυὸ ἀριθμοί, θὰ εἶναι πάντοτε : $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

Ἀπ' αὐτὴ τὴ σχέση συνάγεται ὅτι :

> Στὴν πρόσθεση δύο ἀριθμῶν μποροῦμε ν' ἀλλάξουμε τὴν τάξη τῶν προσθετέων.

Αὐτὴ τὴν ἰδιότητα ὀνομάζομε ἀντιμεταθετικότητα τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν. Ὥστε :

> Ἡ πρόσθεση δύο ἀριθμῶν εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική.

62. Οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεση.— Εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν στὴν ἕνωση δύο συνόλων Α καὶ Β τὸ ἕνα, ἔστω τὸ Β, εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, τότε ἡ ἕνωσή τους θὰ εἶναι τὸ σύνολο Α (βλ. § 58 παραδ. 5). Θὰ εἶναι δηλ.:

$$A \cup \varnothing = A \text{ καὶ μὲ τὴν ἀντιμεταθετικότητα: } \varnothing \cup A = A$$

καί, ἂν ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ Α εἶναι α, ἐπειδὴ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $\varnothing$ εἶναι 0 θὰ εἶναι:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι:

Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μηδέν, τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἄλλον ὅρο.

Ὥστε κάθε ἀριθμὸς δὲν ἀλλάζει, ἂν τὸν αὐξήσουμε κατὰ μηδέν. Τὸ μηδὲν εἶναι ὁ μόνος ἀκέραιος ἀριθμός, ποὺ ἔχει αὐτὴν τὴν ἰδιότητα. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι:

Ὁ ἀριθμὸς μηδὲν εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεση.

Ἔτσι εἶναι: $8 + 0 = 0 + 8 = 8$ ἢ $3{,}75 + 0 = 0 + 3{,}75 = 3{,}75$.

63. Ἡ πρόσθεση δυὸ μονοψηφίων ἀριθμῶν.— Γιὰ νὰ ἔχουμε τὸ ἄθροισμα δυὸ μονοψηφίων ἀριθμῶν κατασκευάζομε ἕνα πίνακα μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Σὲ μιὰ γραμμὴ γράφομε τοὺς ἀριθμούς: 1, 2 ... 9. Κάτω ἀκριβῶς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς γράφομε στὴ σειρά τους: 1, 2, 3, ... 10. Μιὰ τρίτη γραμμὴ κάτω ἀπὸ τὴ δεύτερη περιλαμβάνει τοὺς ἀριθμούς: 2, 3, 4, ... 11. Συνεχίζοντας μὲ τὸν ἴδιον τρόπο καταλήγομε στὴ δεκάτη γραμμὴ μὲ τοὺς ἀριθμούς: 9, 10, 11, ... 18. Ἔτσι ἔχομε τὸν πίνακα τῆς προσθέσεως δυὸ μονοψηφίων ἀριθμῶν:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	$\boxed{11}$	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	$\boxed{11}$	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ἡ χρήση τοῦ πίνακος εἶναι ἁπλῆ: Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, π.χ., τῶν 7 καὶ 4, βρίσκεται στὴ διασταύρωση τῆς στήλης, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ 7, καὶ τῆς γραμμῆς, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ 4. καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 11.

Ἀλλὰ τὸ ἴδιο ἄθροισμα βρίσκομε στὴ διασταύρωση τῆς στήλης, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ 4 καὶ τῆς γραμμῆς, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ 7, κι' αὐτὸ ἀποτελεῖ μιὰ θαυμάσια ἐπίδειξη τῆς ἀντιμεταθετικότητος στὴν πρόσθεση.

64. Ὁ νόμος τῆς ἀποκλειστικότητος στὴν πρόσθεση.— Ἀπὸ τὸν παραπάνω πίνακα, ποὺ μποροῦμε νὰ ἐπεκτείνουμε σὲ μῆκος καὶ πλάτος ἀπεριόριστα, διαπιστώνουμε ὅτι τὸ ἄθροισμα δυὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν, π.χ. τῶν 4 καὶ 7, εἶναι ἀποκλειστικὰ ἕνας, **καὶ μόνον** ἕνας, ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ 11. Αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, ποὺ ἰσχύει γιὰ ὁποιοδήποτε ἄθροισμα $(α + β)$ δυὸ ἀκεραίων, ὀνομάζομε **νόμο τῆς ἀποκλειστικότητος** στὴν πρόσθεση.

Ὁ νόμος αὐτὸς στὴ γλῶσσα τῶν συνόλων μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ ἔτσι:

> **Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $α$ καὶ $β$ ἀνήκουν στὸ σύνολο $Φ_0$ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τότε καὶ τὸ $α + β$ θὰ εἶναι ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖο τοῦ $Φ_0$.**

Αὐτὸ συμβολίζεται ἔτσι:

$$\forall α, β \in Φ_0 \Rightarrow α + β \in Φ_0$$

ὅπου τὸ σύμβολο $\forall$ σημαίνει: «γιὰ κάθε» ἢ «γιὰ ὅλα τά».

65. Τί εἶναι ταυτότης καὶ τί ἐξίσωση.—Ἡ ἰσότης:

$$α + β = β + α$$

τῶν δυὸ γενικῶν ἀριθμῶν $α$ καὶ $β$ ἀληθεύει ὁποιουσδήποτε ἀριθμοὺς κι' ἂν παριστάνουν τὰ γράμματα $α$ καὶ $β$.

Ἔτσι π.χ., ἂν στὴν παραπάνω ἰσότητα ἀντικαταστήσουμε τὸ $α$ μὲ 5 καὶ τὸ $β$ μὲ 8, θὰ ἔχουμε:

$$5 + 8 = 8 + 5 = 13$$

Μιὰ τέτοιαν ἰσότητα θὰ ὀνομάζουμε **ταυτότητα**. Ὥστε:

> **Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ποὺ περιέχει γράμματα καὶ ἀληθεύει γιὰ ὁποιεσδήποτε ἀριθμητικὲς τιμὲς κι' ἂν δώσουμε σ' αὐτὰ τὰ γράμματα.**

Ταυτότης εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ ἰσότης: $x + 3 = 3 + x$.

Ἂς πάρουμε τώρα τὴν ἰσότητα:

$$x + 5 = 9$$

μὲ ἕνα μόνο γράμμα, τὸ x, ποὺ παριστάνει ἕναν ἀκέραιον ἀριθμό. Ποιὸς εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμός;

Ἂν δοκιμάσουμε δίνοντας στὸ x διάφορες τιμές, π.χ. 1, 2, 3, 4, 5 ..., θὰ ἔχουμε διαδοχικά:

$1 + 5 = 6 \neq 9$, $2 + 5 = 7 \neq 9$, $3 + 5 = 8 \neq 9$, $4 + 5 = 9$, $5 + 5 = 10 \neq 9$...

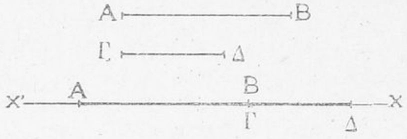
Βλέπομε ἔτσι ὅτι ἀπ' ὅλες τὶς ἀριθμητικὲς τιμές, ποὺ μποροῦμε νὰ δώσουμε στὸ x μιά, καὶ μόνο μιά, ἐπαληθεύει αὐτὴν τὴν ἰσότητα.

Μιὰ τέτοιαν ἰσότητα θὰ ὀνομάζουμε **ἐξίσωση γιὰ τὸ x** ἢ ἁπλῶς **ἐξίσωση**. Ὥστε:

> **Ἐξίσωση λέγεται μιὰ ἰσότητα, ποὺ περιέχει ἕνα γράμμα x καὶ ἀληθεύει μόνο, ὅταν τὸ γράμμα αὐτὸ πάρη ὡρισμένην ἀριθμητικὴ τιμή.**

Τὸ γράμμα x λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή, ποὺ τὴν ἐπαληθεύει, λέγεται **λύση** (ἢ καὶ **ρίζα**) τῆς ἐξισώσεως.

66. Πρόσθεση δυὸ εὐθ. τμημάτων.—Ἂς πάρουμε τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 65).



Σχ. 65. Πρόσθηση εὐθ. τμημάτων

Ἂν γράψουμε μιὰν εὐθεῖα x΄x καὶ πάνω σ' αὐτὴ μεταφέρουμε (§ 45) τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι διαδοχικά, τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀκρινὰ σημεῖα τῶν δυὸ τμημάτων, λέγεται ἄθροισμα τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ. Αὐτὸ σημειώνεται ἔτσι:

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΒ + ΒΔ = ΑΔ$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγεται ὅτι:

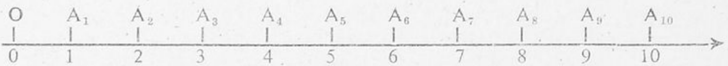
Γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὸ ἄθροισμα δυὸ εὐθ. τμημάτων, τὰ μεταφέρομε πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι διαδοχικά, καὶ παραλείπομε τὸ κοινό τους σημεῖο.

Ὅταν δίνονται τὰ μήκη τῶν εὐθ. τμημάτων, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ ἄθροισμά τους θὰ ἔχῃ μῆκος ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο τμημάτων. Ἔτσι, π.χ., ἂν εἶναι: ΑΒ = 3 cm καὶ ΓΔ = 4 cm θὰ εἶναι:

$$ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ = 3 + 4 = 7 \text{ cm}.$$

Καὶ ἡ πρόσθεση δυὸ εὐθ. τμημάτων εἶναι, προφανῶς, πράξη ἀντιμεταθετική.

67. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως δύο ἀριθμῶν.—Ἂν πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα Οx πάρουμε τὰ ἴσα διαδοχικὰ τμήματα: $ΟΑ_1 = Α_1Α_2 = Α_2Α_3 = Α_3Α_4 = \dots$ καὶ θεωρήσουμε καθένα ἀπ' αὐτὰ ἴσο μὲ μιὰ μονάδα μήκους, τότε τὰ σημεῖα: $Ο, Α_1, Α_2, Α_3, Α_4, \dots$ μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν σὰν γεωμετρικὴ εἰκόνα τῶν ἀριθμῶν: 0, 1, 2, 3, 4, ... (σχ. 66).



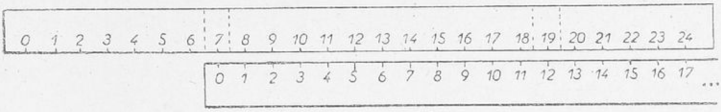
Σχ. 66. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως

Ἔτσι ὅμως ἡ πρόσθεση δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, π.χ. τῶν 3 καὶ 5, μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ σὰν πρόσθεση δυὸ εὐθ. τμημάτων, ποὺ ἔχουν μήκη 3 καὶ 5 μονάδες. Τέτοια τμήματα διαδοχικὰ εἶναι τά: $ΟΑ_3 = 3$ καὶ $Α_3Α_8 = 5$ καὶ ἄθροισμά τους τὸ τμῆμα: $ΟΑ_8 = 8$ μονάδες μήκους.

Στὸ ἴδιο συμπέρασμα φθάνομε, ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα κινητὸ σημεῖο, ποὺ βρίσκεται στὸ Ο μετατοπίζεται πάνω στὴν ἡμιευθεῖα Οx κατὰ 3 μονάδες μήκους, ὁπότε φθάνει στὸ $Α_3$, καὶ συνεχίζει τὴν μετατόπισή του κατὰ 5 μονάδες ἀκόμη, ὁπότε φθάνει στὸ $Α_8$.

Αὐτὸ στὴν πράξη γίνεται μὲ δυὸ χαρτονένιες λωρίδες, βαθμολογημένες π.χ. ἀπὸ 0 - 24 (σχ. 67). Ἡ μιὰ ἀπ' αὐτὲς διατηρεῖται σταθερή, ἐνῶ ἡ ἄλλη μετατοπίζεται σ' ἐπαφὴ μὲ τὴν πρώτη. Γιὰ νὰ βροῦμε ἔτσι τὸ ἄθροισμα

7 + 12, μετατοπίζομε τὴν κινητὴ λωρίδα ἔτσι, ποὺ τὸ 0 της νὰ συμπέση μὲ τὸ 7 τῆς σταθερῆς. Τότε τὸ ἄθροισμα 7 + 12 θὰ εἶναι ἡ ἔνδειξη τῆς



Σχ. 67. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως

πρώτης λωρίδας, μὲ τὴν ὁποία θὰ συμπέση τὸ 12 τῆς κινητῆς, δηλ. ὁ ἀριθμὸς 19.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

163. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων καὶ Β τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, πιὸ εἶναι τὸ $A \cup B$. Ποιὰ ἰδιότης συνάγεται ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτό ; (Βλέπε παράδειγμα 2 § 58).

164. Παραστήσατε μὲ τὸ Α τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «Μαθηματικὰ» καὶ μὲ Β τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «βῶλος». Ποιὸ εἶναι τὸ $A \cup B$; Διατυπώσατε τὴν ἰδιότητα, ποὺ συνάγεται ἀπ' αὐτὸ τὸ παράδειγμα. (Βλ. παραδ. 3 § 58).

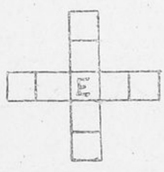
165. Ἂν $A = \{5, 6, 7\}$ καὶ Β τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν x, ποὺ ἐπαληθεύουν τὴ σχέση $4 < x < 8$, νὰ βρεθῆ τὸ $A \cup B$ καὶ νὰ διατυπωθῆ ἡ σχετικὴ ἰδιότης. (Βλ. παραδ. 4 § 58).

166. Ἂν εἶναι : $A = \{1, 5, 7\}$ καὶ Β τὸ σύνολο τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 10, νὰ βρεθῆ τὸ $A \cup B$ καὶ νὰ διατυπωθῆ ἡ σχετικὴ ἰδιότης. (Βλ. παραδ. 5 § 58).

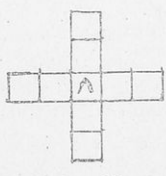
167. Σημειώσατε μὲ τὸ Α τὸ σύνολο τῶν μακρῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «βέλος» καὶ μὲ Β τὸ σύνολο τῶν βραχέων φωνηέντων τῆς λέξεως «φωνή». Ποιὸ εἶναι τὸ $A \cup B$ καὶ ποιὰ ἰδιότης τῆς ἑνώσεως συνάγεται ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτό ; (Βλ. παραδ. 6 § 58).

168. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $x < 5$ καὶ Β τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν: $2 < x < 7$, νὰ γραφῆ τὸ $A \cup B$ καὶ τὸ $A \cap B$.

169. Νὰ βρεθοῦν δυὸ λέξεις ποὺ ἡ ἕνωση τῶν γραμμάτων τους νὰ εἶναι τὸ σύνολο : $E = \{\alpha, \gamma, \varepsilon, \eta, \lambda, o, \rho, \sigma, \chi\}$ καὶ ἡ τομή τους $T = \{\varepsilon\}$ (σχ. 68). Ἡ ὁριζόντια σημαίνει μιὰ ὀφειλὴ καὶ ἡ κάθετη μιὰ συλλογὴ ζώων.



Σχ. 68



Σχ. 69

170. Τὸ ἴδιο, ἂν $E = \{\alpha, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, o, \pi, \sigma\}$ καὶ $T = \{\lambda\}$ (σχ. 69). Ἡ ὁριζόντια εἶναι ἕνα νησὶ τοῦ Αἰγαίου καὶ ἡ κάθετη τὸ κάτω μέρος τοῦ ποδιοῦ μας.

171. Ἂν $A = \{\alpha, \eta, \mu, \rho, \tau, \chi\}$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων μιᾶς λέξεως, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐξαρτᾶται ἡ ἀγοραστική μας ἱκανότης, $B = \{\alpha, \gamma,$

η, μ, ν, σ, τ, υ} τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς εἰδικότητος ἑνὸς καθηγητοῦ σας, $A \cup B$ τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων ἑνὸς στρατιωτικοῦ βαθμοῦ καὶ $A \cap B$ τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων μιᾶς λέξεως, ποὺ ἐκφράζει μέρη μιᾶς εὐθείας, νὰ βρεθοῦν οἱ τέσσαρες αὐτὲς λέξεις.

172. Γράψτε ὅλες τὶς προσθέσεις ἀνὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα 10.

173. Παίζομε μὲ δυὸ ζάρια. Οἱ ὄψεις τους εἶναι σημειωμένες μὲ κοκκίδες ἀπὸ 1—6. Κάθε φορά, ποὺ ρίχνομε τὰ ζάρια, προσθέτομε τὸν ἀριθμὸ τῶν κοκκίδων, ποὺ βρίσκονται στὴν ἐπάνω ὄψη τους. Νὰ γράψτε ὅλα τὰ δυνατὰ ἀθροίσματα.

174. Τί σημαίνει τὸ ἄθροισμα δυὸ ἀριθμῶν, ὅταν ὁ ἕνας εἶναι ἴσος μὲ 1; (βλ. § 21).

175. Τὸ ἄθροισμα δυὸ φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι 16. Ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατὴ τιμὴ γιὰ τὸν ἕνα προσθετέο; Ποιὸς θὰ εἶναι τότε ὁ ἄλλος;

176. Τὸ ἄθροισμα δυὸ φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι 100. Πόσα ψηφία μπορεῖ νὰ ἔχῃ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς;

177. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 6 καὶ ποιὸ τὸ ἄθροισμά τους;

178. Ἂν εἶναι: $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{5, 7\}$ καὶ $\Gamma = \{4, 5, 6, 7\}$, νὰ σχηματισθοῦν οἱ ἑνώσεις $A \cup B$, $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Gamma$ καὶ νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων κάθε ἑνώσεως μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τῶν συνόλων της. Ποιὰ εἶναι τὰ συμπεράσματά σας ἀπ' αὐτὴ τὴ σύγκριση;

179. Νὰ γραφῇ μὲ δυὸ διαφόρους τρόπους ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν: i) 17 καὶ 23, ii) 52 καὶ 34, iii) 47 καὶ 8.

180. Νὰ συμπληρωθοῦν οἱ ἀκόλουθες συνεπαγωγές:

$$\alpha + \beta = \alpha \Rightarrow \beta = \ldots \quad \text{καὶ} \quad \alpha + \beta = \beta \Rightarrow \alpha = \ldots$$

181. Στὴν ἰσότητα: $\alpha + \beta = \beta + 3$ ποιὰ τιμὴ πρέπει νὰ πάρῃ τὸ α, ὥστε νὰ ἔχουμε μιὰ ταυτότητα;

182. Νὰ βρῆτε μὲ τὸ νοῦ σας τὶς λύσεις καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις: i) $x + 3 = 10$, ii) $x + 8 = 12$, iii) $7 + x = 15$, iv) $5 + x = 8$.

183. Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸν 6, ὥστε νὰ ἔχουμε ἄθροισμα: i) 10, ii) 8, iii) 15; Νὰ γράψετε τὶς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις καὶ νὰ βρῆτε τὶς λύσεις τους.

184. Δίνονται δυὸ εὐθ. τμήματα, ποὺ τὰ μήκη τους εἶναι 5 cm καὶ 2 cm. Νὰ κατασκευασθοῦν αὐτὰ τὰ τμήματα καὶ ἔπειτα ἕνα τρίτο τμῆμα ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμά τους. Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ μῆκος αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος;

185. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα γράφομε τρία σημεῖα Α,Β,Γ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι $AB = 7$ cm καὶ $A\Gamma = 3$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΒΓ, ἂν τὸ Α βρίσκεται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

186. Μὲ τὴ γεωμετρικὴν εἰκόνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀθροίσματα: i) $2 + 3$, ii) $1 + 5$, iii) $3 + 4$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ Η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

68. Ἡ ἕνωση πολλῶν συνόλων.— Ἄς πάρουμε τὰ ἀριθμοσύνολα :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{4, 6, 8\}$$

κι' ἄς σχηματίσουμε τὴν ἕνωσή τους. Θὰ εἶναι :

$$E = A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Τὸ Ε, δηλ. ἡ ἕνωση τῶν συνόλων Α καὶ Β, εἶναι κι' αὐτὸ ἕνα σύνολο. Ἄρα μποροῦμε νὰ τὸ ἑνώσουμε μ' ἕνα τρίτο σύνολο, π.χ. τό :

$$\Gamma = \{2, 5, 6, 9\}$$

ὁπότε θὰ ἔχουμε :

$$Z = E \cup \Gamma = (A \cup A) \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Τὸ Ζ λέγεται **ἕνωση τῶν τριῶν συνόλων** Α,Β Γ καὶ γράφεται :

$$Z = A \cup B \cup \Gamma$$

Μὲ τὸν ἴδιο συλλογισμὸ μποροῦμε νὰ προχωρήσουμε στὴν ἕνωση 4,5,... συνόλων.

Ἡ **παρένθεση** ( ) στὸ $(A \cup B)$ σημαίνει ὅτι ἡ πράξη αὐτὴ ἔχει ἐκτελεσθῆ, πρὶν νὰ προβοῦμε στὴν ἀμέσως ἑπόμενη πράξη. Μ' αὐτὴν τὴ σημασία χρησιμοποιοῦμε, γενικά, τὶς παρενθέσεις, καθὼς καὶ τὶς ἀγκύλες [ ].

69. Ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν.—Ἄν Α, Β, Γ, Δ εἶναι στὴ σειρὰ τέσσαρα ξένα μεταξύ τους σύνολα καὶ 4, 3, 2, 5 εἶναι, ἀντίστοιχα, οἱ πληθικοί τους ἀριθμοί, ἡ ἕνωση Ε τῶν συνόλων αὐτῶν πού, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, εἶναι :

$$E = [(A \cup B) \cup \Gamma] \cup \Delta$$

μᾶς δείχνει τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖο θὰ βρεθῆ τὸ ἄθροισμα ε τῶν πληθικῶν τους ἀριθμῶν. Θὰ εἶναι δηλ.

$$\varepsilon = [(4 + 3) + 2] + 5$$

Αὐτὴ ἡ γραφὴ μᾶς ὑποδείχνει τὴν ἑξῆς ἀκολουθία πράξεων :

$$4 + 3 = 7$$
$$7 + 2 = 9$$
$$9 + 5 = 14$$

Ὁ ἀριθμὸς 14 λέγεται **ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 4, 3, 2, 5** κι' ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκεται αὐτὸς ὁ ἀριθμός, λέγεται **πρόσθεση αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν**. Γράφομε :

$$4 + 3 + 2 + 5 = 14$$

Ὥστε :

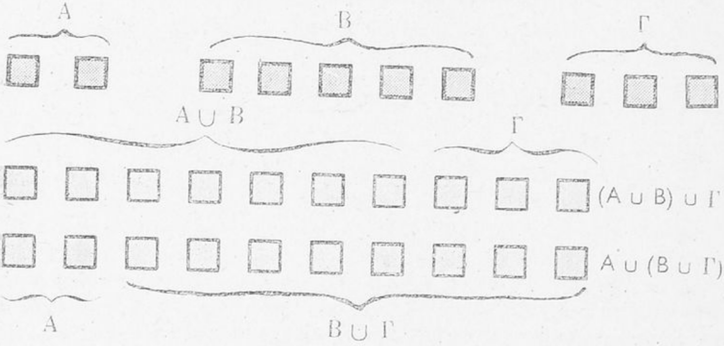
> **Ἄθροισμα μερικῶν ἀριθμῶν, δοσμένων μὲ μιὰν ὡρισμένη τάξη, λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει, ἂν προσθέσουμε τὸν δεύτερον ἀριθμὸ στὸν πρῶτο, ἔπειτα τὸν τρίτο στὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ συνεχίσουμε μ' αὐτὸν τὸν τρόπο τὶς πράξεις ὡς τὸν τελευταῖον ὅρο.**

Γενικά, ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, δοσμένων μ' αὐτὴν τὴν τάξη, δίνεται ἀπὸ τὴν ἀκολουθία τῶν πράξεων :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta = \varepsilon$$

ὅπου ε εἶναι τὸ ἄθροισμά τους.

70. Ὁ νόμος τῆς προσεταιριστικότητος στὴν πρόσθεση.—Ἂς πάρουμε τὰ ξένα σύνολα Α, Β, Γ (σχ. 70 α' σειρά), ποὺ στοιχεῖα τους εἶναι τὰ τετραγωνικὰ σύμβολα, κι ἂς σχηματίσουμε τὴν ἕνωσή τους, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω. Αὐτὴ θὰ εἶναι τὸ σύνολο : (Α ⋃ Β) ⋃ Γ (σχ. 70 β' σειρά).



Σχ. 70. Ὁ νόμος τῆς προσεταιριστικότητος στὴν πρόσθεση

Ἂν, ἐξ ἄλλου, σχηματίσουμε τὴν ἕνωση τῶν συνόλων Β καὶ Γ καὶ τὴν ἑνώσουμε μὲ τὸ σύνολο Α, θὰ ἔχουμε τὸ σύνολο : Α ⋃ (Β ⋃ Γ) (σχ. 70 γ' σειρά).

Ἀλλὰ τὰ σύνολα τῆς β' καὶ γ' σειρᾶς εἶναι ἴσα, ἀφοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα (§ 17). Ἄρα θὰ εἶναι :

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma \qquad (70{,}1)$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τῆς ἑνώσεως περισσοτέρων τῶν δυὸ συνόλων λέγεται προσεταιριστική.

Ἂν στὴν παραπάνω σχέση (70,1) ἀντικαταστήσουμε τὰ σύνολα μὲ τοὺς πληθικούς των ἀριθμοὺς 2,4 καὶ 3, θὰ ἔχουμε τὴ σχέση :

$$(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3) = 2 + 5 + 3$$

ποὺ σημαίνει ὅτι :

‖ **Ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν εἶναι πράξη προσεταιριστική.**

Γενικά, ἂν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι ἀριθμοί, θὰ εἶναι πάντοτε :

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma \qquad (70{,}2)$$

κι' αὐτὴ ἡ σχέση στὰ σύγχρονα Μαθηματικὰ συμβολίζεται ἔτσι :

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \Phi_o \Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

71. Ἄλλες ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.—Στὸ νόμο τῆς ἀντιμεταθετικότητος στὴν πρόσθεση δυὸ ἀριθμῶν (§ 61) καὶ στὸ νόμο τῆς προσεταιριστικότητος στὴν πρόσθεση τριῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τοὺς θεμελιώδεις νόμους τῆς προσθέσεως, στηρίζεται μιὰ σειρὰ ἀπὸ ἰδιότητες αὐτῆς τῆς πράξεως, ποὺ μᾶς δίνουν τὴ δυνατότητα νὰ ἐξηγήσουμε τὸν τρόπο ποὺ γίνεται ἡ πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν καὶ μᾶς διευκολύνουν στὴ νοερὴ ἐκτέλεση αὐτῆς τῆς πράξεως.

1ο Ἡ προσεταιριστικότης στὴν πρόσθεση μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράφουμε:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma \qquad (71,1)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Στὴν πρόσθεση τριῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ καταργοῦμε ἢ νὰ εἰσάγουμε παρενθέσεις.**

2ο Ἂν σὲ κάθε παρένθεση τοῦ α′ καὶ β′ μέλους τῆς σχέσεως (71,1) ἐφαρμόσουμε τὴν ἀντιμεταθετικότητα, θὰ ἔχουμε ἀπὸ τὸ α′ μέλος:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = (\beta + \alpha) + \gamma = \beta + \alpha + \gamma$$

κι' ἀπὸ τὸ β′ μέλος:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + (\gamma + \beta) = \alpha + \gamma + \beta$$

καὶ σύμφωνα μὲ τὴ μεταβατικὴν ἰδιότητα τῶν ἰσοτήτων (§ 20,3):

$$\alpha + \beta + \gamma = \beta + \alpha + \gamma = \alpha + \gamma + \beta \qquad (71,2)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Τὸ ἄθροισμα μερικῶν ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει, ὅπως κι' ἂν ἀλλάξουμε τὴν τάξη τῶν προσθετέων.**

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι ἡ ἀντιμεταθετικότης στὴν πρόσθεση περισσοτέρων τῶν δυὸ ἀριθμῶν κι' ἐφαρμόζεται σὲ ὁποιοδήποτε πλῆθος προσθετέων.

3ο Ἡ σχέση (71,1) μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῆ σὲ προσθέσεις μὲ ὁσουσδήποτε ὅρους. Ἔτσι ἔχουμε τὶς ἰσότητες:

$$5 + 3 + 8 + 2 + 4 = (5 + 3) + (8 + 2 + 4) = (5 + 3 + 8) + (2 + 4) = \ldots$$

ποὺ εὔκολα ἐπαληθεύονται μὲ τὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων, καὶ γενικά:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta + \varepsilon) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\delta + \varepsilon) = \ldots (71,3)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀντικαταστήσουμε μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους.**

4ο Ἀντίστροφα, ὅπως εὔκολα ἐπαληθεύεται, εἶναι:

$$(5 + 3) + (8 + 2 + 4) = 5 + 3 + (8 + 2 + 4) = 5 + 3 + 8 + 2 + 4$$

καὶ γενικά:

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta + \varepsilon) = \alpha + \beta + (\gamma + \delta + \varepsilon) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \qquad (71,4)$$

ὅπου στὸ α′ μέλος ἔχουμε ἄθροισμα 2 ὅρων, στὸ β′ ἄθροισμα 3 ὅρων καὶ στὸ γ′ ἄθροισμα 5 ὅρων. Ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι:

> **Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει, ἂν ἕναν ὅρον ἀντικαταστήσουμε μὲ ἄλλους, ποὺ τὸν ἔχουν ὡς ἄθροισμα.**

5ο Ἐφαρμόζοντας τὴν προσεταιριστικότητα καὶ ἀντιμεταθετικότητα στὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, μποροῦμε νὰ ἔχουμε:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \gamma + \beta = (\alpha + \gamma) + \beta$$

Ἄρα θὰ εἶναι:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\gamma)+\beta \qquad (71,5)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Γιὰ νὰ προσθέσουμε ἕναν ἀριθμὸ σ' ἕνα ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ τὸν προσθέσουμε σ' ἕνα μόνο ὁποιονδήποτε ὅρο του.**

Ἔτσι εἶναι:

$$(5+3+7)+2=(5+2)+3+7=5+(3+2)+7=5+3+(7+2).$$

6_o Ἀπό τὴ σχέση (71,4) συνάγεται ὅτι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \qquad (71,6)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Γιὰ νὰ προσθέσουμε ἀθροίσματα ἀρκεῖ νὰ σχηματίσουμε ἕνα ἄθροισμα μὲ ὅρους ὅλους τοὺς προσθετέους αὐτῶν τῶν ἀθροισμάτων καὶ μόνον αὐτούς.**

Ἔτσι εἶναι: $(5+4+8)+(3+7)=5+4+8+3+7=27.$

72. Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως.—Εἴδαμε παραπάνω (§ 59 καὶ 64) ὅτι ἡ πρόσθεση δυὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι μιὰ **πράξη**, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει ν' ἀντιστοιχίσουμε σ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἀκέραιον ἀριθμό, τὸ **ἄθροισμά** τους. Ὁ ὁρισμός, ἐξ ἄλλου, τῆς προσθέσεως πολλῶν ἀριθμῶν (§ 69) ἀνάγει αὐτὴν τὴν πράξη σὲ μιὰ διαδοχὴ προσθέσεων δυὸ ἀριθμῶν.

Ὅλοι ξέρομε νὰ προσθέτουμε δυὸ ἀριθμούς. Ἀλλὰ πῶς ἐξηγεῖται αὐτὸς ὁ τρόπος τῆς ἐργασίας μας;

Ἄς πάρουμε γιὰ παράδειγμα τὴν πρόσθεση: 3 847 + 2 695 κι' ἄς παραστήσουμε μὲ τὰ γράμματα Μ, Δ, Ε, Χ,..., ἀντίστοιχα, τὶς μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες,... Ἄν ἐφαρμόσουμε τὶς παραπάνω ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, θὰ ἔχουμε στὴ σειρά:

$$\begin{array}{lll}
\alpha' \ 3847+2695 & =(3X+8E+4\Delta+7M)+(2X+6E+9\Delta+5M) & \\
\beta' & =3X+8E+4\Delta+7M+2X+6E+9\Delta+5M & (\S\ 71{,}6)\\
\gamma' & =3X+2X+8E+6E+4\Delta+9\Delta+7M+5M & (\S\ 71{,}2)\\
\delta' & =(3+2)X+(8+6)E+(4+9)\Delta+(7+5)M & (\S\ 71{,}3)\\
\varepsilon' & =5X+14E+13\Delta+12M & (\S\ 63)\\
\varsigma' & =5X+(10+4)E+(10+3)\Delta+(10+2)M & (\S\ 71{,}4)\\
\zeta' & =5X+1X+4E+1E+3\Delta+1\Delta+2M & (\S\ 25)\\
\eta' & =(5+1)X+(4+1)E+(3+1)\Delta+2M & (\S\ 71{,}3)\\
\theta' & =6X+5E+4\Delta+2M & (\S\ 63)\\
\iota' & =5542 & (\S\ 28)
\end{array}$$

Ἀπό τὰ παραπάνω βλέπομε ὅτι, ἂν κατὰ τὴν πρόσθεση τῶν μονάδων μιᾶς τάξεως προκύψη μιὰ (ἢ περισσότερες στὴν πρόσθεση πολλῶν ἀριθμῶν) μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὴν προσθέτομε στὸν ἀριθμὸ τῶν μονάδων αὐτῆς τῆς τάξεως. Αὐτὸς ὁ προσεταιρισμὸς λέγεται **μεταφορὰ μονάδων**.

Τὴ γνωστή μας πρακτικὴ διάταξη τῆς παραπάνω προσθέσεως δίνουμε παραπλεύρως, σημειώνοντας μὲ λεπτότερα στοιχεῖα τὶς μονάδες, ποὺ μεταφέρονται (τὰ κρατούμενα). Αὐτή, φυσικά, ἡ σημείωση μπορεῖ νὰ παραλείπεται καὶ ἡ μεταφορὰ τῶν μονάδων νὰ γίνεται νοερά.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 111}\\ +\ 3847\\ 2695\\ \hline 6542 \end{array}$$

73. Πρόσθεση συμμιγῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—Προκειμένου νὰ ἐξηγήσουμε πιὸ πάνω τὸν τρόπο, ποὺ γίνεται ἡ πρόσθεση: 3847 + 2695, γράψαμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς σὲ μορφὴ συμμιγῶν ἀριθμῶν. Ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι καὶ ἡ πρόσθεση τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται μὲ τὸν ἴδιον τρόπο. Ἀρκεῖ μόνο γιὰ τὴ μεταφορὰ μονάδων νἄχουμε στὸ νοῦ μας, πόσες μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Τὸ γεγονός, ἐξ ἄλλου, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἀκολουθοῦν στὴ δομή τους τὸν δεκαδικὸ νόμο ἀριθμήσεως, μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα, ὅτι μὲ τὸν ἴδιον τρόπο γίνεται καὶ ἡ πρόσθεση τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἂν, μάλιστα, προσέξουμε ὥστε οἱ ὑποδιαστολὲς νὰ εἶναι στὴν ἴδια στήλη, τότε καὶ ὅλα τὰ ψηφία, ἀκεραίας καὶ δεκαδικῆς τάξεως, θὰ βρίσκονται στὴ θέση τους. Σὲ προσθέσεις μὲ πολλοὺς ὅρους τὶς πράξεις διευκολύνει καὶ ἡ συμπλήρωση τῶν κενῶν θέσεων μὲ μηδενικά.

Σ' ἐφαρμογὴ τῶν παραπάνω δίνουμε ἀπὸ ἕνα παράδειγμα προσθέσεως ἀκεραίων, συμμιγῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

122 332 23	2	3		21 223 11 1
493 058 970	3 yd	1 ft	10 in	68 453,50000
505 408	2	0	8	87,60352
78 654 289		2	6	4 378,74030
76 831	1	1	9	0,87000
5 263 357	7	0	11	47 853,45808
208 653 126	4	1	0	124,30700
786 211 901	19 yd	2 ft	8 in	120 898,47890

74. Συμβολὴ στὴ νοερὴ πρόσθεση τῶν ἀριθμῶν.— Οἱ νόμοι τῆς προσεταιριστικότητος καὶ ἀντιμεταθετικότητος στὴν πρόσθεση μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ἐκτελοῦμε νοερὰ αὐτὴ τὴν πράξη μὲ εὐκολία καὶ ταχύτητα, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

1ο Τὸ ἄθροισμα δυὸ ἀριθμῶν ποὺ λήγουν σὲ 0, βρίσκεται, ἂν προσθέσουμε τὶς δεκάδες τους καὶ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος γράψουμε 0. Τὸ ἴδιο, ἂν οἱ ἀριθμοὶ λήγουν σὲ 2 ἢ 3 . . . μηδενικά, προσθέτουμε τὶς ἑκατοντάδες ἢ τὶς χιλιάδες . . . καὶ στὰ δεξιὰ τοῦ ἀθροίσματος γράφουμε 2 ἢ 3... μηδενικά.

Ἔτσι εἶναι: i) 70 + 80 = 150, ii) 150 + 40 = 190, iii) 400 + 800 = 1200, iv) 7200 + 600 = 7 800, v) 4 000 + 9 000 = 13 000.

2ο Μὲ ἀποσύνθεση τοῦ ἑνὸς ὅρου. Εἶναι: 47 + 35 = 47 + (30 + 5) = = (47 + 30) + 5 = 77 + 5 = 82. Προσθέτομε δηλ. στὸν πρῶτον ἀριθμὸ τὶς μονάδες διαφόρων τάξεων τοῦ δευτέρου, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν ἀνώτερη τάξη.

Ἔτσι, γιὰ νὰ προσθέσουμε σ' ἕναν ἀριθμὸ τὸν 11 (10 + 1), αὐξάνομε αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ κατὰ 10 καὶ ἔπειτα προσθέτομε 1. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο προσθέτομε τὸν 101, 1 001 ...

3ο Μὲ τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἑνὸς ὅρου. Εἶναι : $70 + 68 = 70 + (30 + 38) = (70 + 30) + 38 = 100 + 38 = 138$.

Χωρίζουμε δηλ. τὸν δεύτερο προσθετέο σὲ δυὸ ὅρους τέτοιους, ποὺ ὁ ἕνας ἀπ᾽ αὐτοὺς μαζὶ μὲ τὸν πρῶτο προσθετέο νὰ δίνη ἄθροισμα 100 ἢ ἀκέραιον ἀριθμὸ ἑκατοντάδων.

4ο Μὲ τὸν συνδυασμὸ ἀνὰ δύο ὅρων. Εἶναι : $7 + 26 + 13 = 7 + 13 + 26 = (7 + 13) + 26 = 20 + 26 = 46$. Τὸ ἴδιο εἶναι : $17 + 29 + 43 + 61 = (17 + 43) + (29 + 61) = 60 + 90 = 150$.

Συνδυάζομε δηλ. τοὺς προσθετέους ἀνὰ δυὸ ἔτσι, ποὺ νὰ παίρνουμε ἄθροισμα ἀκεραίους ἀριθμοὺς δεκάδων ἢ ἑκατοντάδων..., τοὺς ὁποίους καὶ προσθέτομε εὔκολα.

5ο Γιὰ νὰ προσθέσουμε σ᾽ ἕνα ἀριθμὸ τὸν 9, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε 10 στὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Ἔτσι εἶναι : $57 + 9 = 56 + 10 = 66$ καὶ $272 + 9 = 271 + 10 = 281$.

Τὸ ἴδιο γίνεται γιὰ νὰ προσθέσουμε σ᾽ ἕναν ἀριθμὸ 19 ἢ 29 . . . Προσθέτουμε στὸν κατὰ μονάδα μικρότερόν του τὸν 20, 30 . . . Ἔτσι εἶναι : $74 + 39 = 73 + 40 = 113$ καὶ $147 + 89 = 146 + 90 = 236$.

75. Πῶς γίνεται ὁ ἔλεγχος τῆς προσθέσεως.—1. Ἀφοῦ ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, πρέπει τὸ ἄθροισμα νὰ μὴν ἀλλάζη, ἂν ἀλλάξουμε τὴν τάξη τῶν ὅρων. Γι᾽ αὐτὸ ὁ ἔλεγχος (δοκιμὴ) τῆς προσθέσεως γίνεται μὲ τὸ νὰ ἐπαναλάβουμε τὴν πράξη μὲ τὴν ἀντίστροφη σειρὰ τῶν ὅρων. Νὰ κάνουμε δηλ. τὴν πρόσθεση ἀπὸ τὰ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω, ἂν τὴν πρώτη φορὰ ἔγινε ἀπὸ τὰ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω.

Ἂν τὸ ἄθροισμα, ποὺ βρίσκεται μὲ τὶς δυὸ αὐτὲς πράξεις, τὴν πρόσθεση καὶ τὴ δοκιμή, δὲν εἶναι τὸ ἴδιο, πρέπει νὰ συμπεράνουμε ὅτι ἡ μιὰ τὸ λιγώτερο ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς πράξεις εἶναι λαθεμένη. Ἂν ὅμως ἡ δοκιμὴ ἐπιτύχη, τότε πιθανώτατα ἡ πράξη ἔγινε σωστά.

5 832	
279	
27 634	
8 673	42 418
32 255	
9 763	
48	
46 561	88 627
131 045	131 045

2. Ἡ πρόσθεση εἶναι ἐπίσης πράξη προσεταιριστική. Ἄρα μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε σ᾽ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα (71,3). Ἔτσι, ἀφοῦ ἐκτελέσουμε τὴν πράξη σὲ μιὰ στήλη, χωρίζομε ἔπειτα τὴ στήλη σὲ σπονδύλους καὶ κάνομε τὴν πρόσθεση σὲ κάθε σπόνδυλο χωριστά. Προσθέτοντας, τέλος, τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν σπονδύλων πρέπει νὰ βροῦμε, ἂν ἡ πράξη ἔγινε σωστά, τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα ποὺ βρήκαμε κι᾽ ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ πρόσθεση.

Ὁ ἔλεγχος αὐτὸς ἐπιβάλλεται, ὅταν, ὅπως γίνεται στὰ λογιστικὰ βιβλία, οἱ στῆλες τῶν προσθετέων εἶναι μεγάλου ὕψους.

3. Ἕναν ἄλλον τρόπο γιὰ τὸν ἔλεγχο τῆς προσθέσεως θὰ μάθουμε ἀργότερα στὸ κεφάλαιο τῆς διαιρετότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

76. Προσθέσεις σὲ στῆλες καὶ γραμμές.—Σὲ μισθοδοτικὲς καταστάσεις ὑπαλλήλων καὶ ἐργατῶν, σὲ πίνακες στατιστικοὺς καὶ πολλὲς ἄλλες περιπτώσεις παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ γίνουν προσθέσεις σὲ στῆλες καὶ γραμμές.

Τάξη	Ἀγόρια	Κορίτσια	Ἄθροισμα
Α΄	137	94	231
Β΄	120	89	209
Γ΄	108	85	193
Ἄθροισμα	365	268	633

Ἔτσι π.χ. στὸν παραπλεύρως πίνακα ἀναγράφονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀγοριῶν καὶ κοριτσιῶν, ποὺ φοιτοῦν σὲ κάθε τάξη ἑνὸς μικτοῦ Γυμνασίου, καὶ πρέπει νὰ βρεθοῦν : α) ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν κάθε τάξεως (προσθέσεις σὲ γραμμές), β) οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἀγοριῶν καὶ κοριτσιῶν χωριστὰ (προσθέσεις σὲ στῆλες) καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου.

Ὁ τελευταῖος αὐτὸς ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ἴσος καὶ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μαθητῶν κατὰ τάξεις, δηλ. τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας στήλης, καὶ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀγοριῶν καὶ κοριτσιῶν, δηλ. τῶν ἀριθμῶν τῆς τελευταίας γραμμῆς. Κι' αὐτὸ ἀποτελεῖ τὸν ἔλεγχο γιὰ τὴ σωστὴ κατάρτιση τοῦ πίνακος.

77. Ἡ πρόσθεση σὲ ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως.—Ἡ πρόσθεση δυὸ ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἄλλων συστημάτων ἀριθμήσεως γίνεται, ὅπως ἀκριβῶς καὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. Ἀρκεῖ μόνο νὰ συντάξουμε ἕνα πίνακα προσθέσεως τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ὅπως ἔγινε καὶ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος (§ 63).

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	$\boxed{12}$
4	10	11	$\boxed{12}$	13

Ἔτσι π.χ. γιὰ τὸ πενταδικὸ σύστημα σχηματίζομε τὸν παραπλεύρως πίνακα, ποὺ ἡ α΄ σειρὰ καθὼς καὶ ἡ α΄ στήλη περιλαμβάνει τὰ ψηφία 0 ἕως 4. Ἡ β΄ σειρὰ καὶ ἡ β΄ στήλη περιλαμβάνουν τὰ ἀθροίσματα : $1+1=2$ ἕως $1+4=10$... καὶ ἡ τελευταία σειρὰ καὶ ἡ τελευταία στήλη δίνουν τὰ ἀθροίσματα : $4+1=10$ ἕως $4+4=13$.

Χρησιμοποιώντας τὸν πίνακα αὐτὸν μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος. Ἔτσι π.χ. γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα : $(234)_5 + (342)_5 + (4103)_5$, γράφομε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς σὲ μιὰ στήλη, χωρὶς τὸν δείκτη, ὅπως γίνεται στὸ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως, καὶ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς ἁπλὲς μονάδες λέμε :

$$\begin{array}{r} 234 \\ +\ 342 \\ 4103 \\ \hline 10234 \end{array} \quad \boxed{5}$$

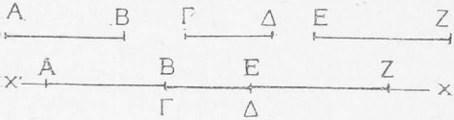
$3+2=10$, $10+4=14$. Γράφομε τὸν 4 καὶ τὴ μονάδα 2ας τάξεως μεταφέρομε στὴ β΄ στήλη. Συνεχίζομε : 1 (ἀπὸ τὴ μεταφορὰ) $+0=1$, $1+4=10$, $10+3=13$. Γράφομε τὸν 3 καὶ τὴ μονάδα 3ης τάξεως μεταφέρομε στὴ γ΄ στήλη... ὡς ποὺ τελικὰ φθάνομε στὸ ἄθροισμα $(10234)_5$.

Σχηματίζοντας ἕνα παρόμοιον πίνακα γιὰ τὸ δωδεκαδικὸ ἢ γιὰ ὁποιοδήποτε ἄλλο σύστημα, μποροῦμε μὲ τὸν ἴδιον τρόπο νὰ κάνουμε τὴν πρόσθεση ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν αὐτοῦ τοῦ συστήματος.

Γιὰ τὸ δυαδικό, ἰδιαίτερα, σύστημα οἱ στοιχειώδεις προσθέσεις εἶναι:

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 10.$$

78. Πρόσθεση πολλῶν εὐθ. τμημάτων.—Γίνεται, ὅπως καὶ στὴν πρόσθεση 2 εὐθ. τμημάτων (§ 66). Ἔτσι π.χ. γιὰ τὰ τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ (σχ. 71) βρίσκομε ἄθροισμα τὸ τμῆμα ΑΖ. Εἶναι δηλ.:



Σχ. 71. Ἄθροισμα τριῶν εὐθ. τμημάτων

$$AB + \Gamma\Delta + EZ = AB + BE + EZ = AZ \qquad (78,1)$$

Ἂν τὰ παραπάνω τμήματα κάνουμε διαδοχικὰ πάνω στὴν εὐθεῖα x΄x, μὲ ὁποιαδήποτε τάξη, βρίσκομε πάντα τὸ ἴδιο ἄθροισμα. Ὥστε εἶναι:

$$AB + \Gamma\Delta + EZ = \Gamma\Delta + AB + EZ = EZ + \Gamma\Delta + AB = \ldots \qquad (78,2)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε εὐθ. τμημάτων δὲν ἀλλάζει, ὁπωσδήποτε κι᾿ ἂν ἀλλάξουμε τὴν τάξη τους.

Ἐξ ἄλλου, εἶναι προφανὲς ὅτι:

$$(AB + \Gamma\Delta) + EZ = AB + (\Gamma\Delta + EZ) = AZ \qquad (78,3)$$

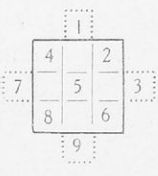
ποὺ σημαίνει ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε εὐθ. τμημάτων δὲν ἀλλάζει, ἂν ἀντικαταστήσουμε μερικὰ ἀπ᾿ αὐτὰ μὲ τὸ ἄθροισμά τους.

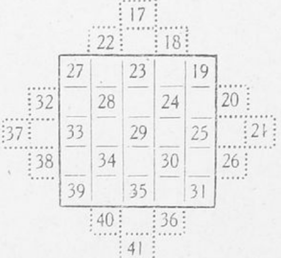
Ὥστε καὶ ἡ πρόσθεση τῶν εὐθ. τμημάτων εἶναι πράξη **ἀντιμεταθετικὴ** καὶ **προσεταιριστική**.

79. Πῶς νὰ κάνετε μαγικὰ τετράγωνα.—Λέμε μαγικὸ τετράγωνο ἕνα τετράγωνο χωρισμένο σὲ μικρὰ τετραγωνίδια, ποὺ περιέχουν ἀριθμοὺς τέτοιους, ὥστε τὸ ἄθροισμά τους σ᾿ ὅλες τὶς στῆλες, σ᾿ ὅλες τὶς γραμμὲς καὶ στὶς δυὸ διαγώνιες διευθύνσεις νὰ εἶναι τὸ ἴδιο.

Γιὰ νὰ σχηματίσουμε ἕνα τέτοιο τετράγωνο μὲ 9 τετραγωνίδια, ποὺ νὰ περιέχουν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 ἕως 9, χρησιμοποιοῦμε 4 βοηθητικὰ τετραγωνίδια, τὰ γραμμένα μὲ στιγμὲς στὸ σχῆμα 72, καὶ γράφουμε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς μὲ τὴ διάταξη τοῦ σχήματος. Ἔπειτα κάθε ἀριθμὸν ἐξωτερικὸ μιᾶς γραμμῆς μεταφέρομε στὸ ἀπέναντι τετραγωνίδιο τῆς ἴδιας γραμμῆς μέσα στὸ τετράγωνο καὶ κάθε ἐξωτερικὸν ἀριθμὸ μιᾶς στήλης μεταφέρομε στὸ ἀπέναντι ἐσωτερικὸ τετράγωνο τῆς ἴδιας στήλης (σχ. 72).



Σχ. 72. Μαγικὸ τετράγωνο μὲ 9 τετραγωνίδια



Σχ. 73. Μαγικὸ τετράγωνο μὲ 25 τετραγωνίδια

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο, ἀλλὰ χρησιμοποιώντας 4 βοηθητικὰ ἐξωτερικὰ τετράγωνα σὲ κάθε πλευρά, κατασκευάζομε ἕνα μαγικὸ τετράγωνο μὲ 25 τετραγωνίδια (σχ. 73), ποὺ νὰ περιέχῃ 25 ἀριθμοὺς στὴ σειρά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α' Σειρά: 187. Νὰ γίνουν οἱ ἑνώσεις $A \cup B \cup \Gamma$, ἂν εἶναι: i) $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $\Gamma = \{0, 3, 6\}$, ii) $A = \{\alpha, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, \beta\}$, $\Gamma = \{2, \alpha, \beta\}$.

188. Νὰ γίνουν οἱ ἑνώσεις $A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta$, ἂν εἶναι: i) $A = \{7\}$, $B = \{5, 9\}$, $\Gamma = \{2, 4, 10, 12\}$, $\Delta = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, ii) $A = \{\alpha\}$, $B = \{0\}$, $\Gamma = \varnothing$, $\Delta = \{\beta\}$.

189. Νὰ βρεθοῦν τὰ $A \cup B \cup \Gamma$, ἂν A, B, Γ εἶναι ἀντίστοιχα: i) τὰ σύνολα τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων «σχολεῖο», «γήπεδο», «τάξεις», ii) τὰ σύνολα τῶν ἀκεραίων x, γιὰ τοὺς ὁποίους ἀληθεύουν οἱ ἀνισότες: $3 < x < 11$, $7 < x < 15$, $5 < x < 10$.

190. Νὰ γραφοῦν τρεῖς διάφορες προσθέσεις τριῶν ὅρων μὲ ἄθροισμα 10.

191. Μιὰ πρόσθεση ἔχει 20 ὅρους ἴσους μὲ 1. Ποιὸ εἶναι τὸ ἄθροισμά τους; Ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα, ἂν ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μηδέν;

192. Τί συνάγεται ἀπὸ τὴ σχέση: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta$; Τὸ συμπέρασμα νὰ διατυπωθῇ μὲ χρήση τοῦ συμβόλου $\Rightarrow$ τῆς συνεπαγωγῆς.

193. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν κοκκίδων, ποὺ βρίσκονται σὲ κάθε δυὸ ἀπέναντι ὄψεις ἑνὸς ζαριοῦ εἶναι πάντοτε 7. Μ' αὐτὴ τὴ βάση νὰ βρῆτε: i) Ἂν ἕνα ζάρι τοποθετημένο στὸ τραπέζι ἔχει στὴν ἐπάνω του ὄψη 3 κοκκίδες, ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κοκκίδων, ποὺ εἶναι σημειωμένες στὶς ορατὲς ὄψεις; ii) Ἂν ἕνα ζάρι εἶναι τοποθετημένο πάνω σὲ ἄλλο καὶ ἡ ὁρατὴ ὄψη τοῦ ἐπάνου ζαριοῦ ἔχει 4 κοκκίδες, ἐνῶ δυὸ πλαγινὲς ὄψεις τοῦ κάτω ζαριοῦ ἔχουν, ἀντίστοιχα, 1 καὶ 3 κοκκίδες, ποιὸ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κοκκίδων τῶν μὴ ὁρατῶν ὄψεων;

194. Ἂν $A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{\alpha, 1, 2\}$, $\Gamma = \{\alpha, 2, \beta\}$, νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι: $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$.

195. Ἡ ἰσότης: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma + \delta)$ πότε εἶναι δυνατή; Στὴν ἀπάντηση νὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς ἔτσι:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma + \delta) \Rightarrow ....$$

196. Νὰ γίνουν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις μὲ κατάργηση τῆς παρενθέσεως: i) $6 + (2 + 3 + 7)$, ii) $4 + 8 + (3 + 5)$, iii) $(8 + 4) + (2 + 5)$.

197. Μὲ τὴν ἀντιμεταθετικότητα νὰ γράψτε σὲ 5 διάφορες μορφὲς τὰ ἀθροίσματα: i) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, ii) $2 + 7 + 3 + 4 + 6$.

198. Μὲ τὴν κατάργηση τῶν παρενθέσεων καὶ τὴν προσεταιριστικότητα νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα: i) $3 + (2 + 7) + (10 + 8)$, ii) $12 + (5 + 7) + (15 + 18 + 13)$, iii) $(24 + 7) + (6 + 11) + (9 + 33)$

199. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ δυὸ διάφορους τρόπους τὰ ἀθροίσματα i) $(7 + 2) + (5 + 3) + (1 + 4)$, ii) $(6 + 1 + 3) + (2 + 5) + (4 + 7)$.

200. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις:

i)	347	ii)	42 893	iii)	4 082 357	iv)	13 874 209
	8 935		5 674		487 664		107 382 400
	84		104 301		53 205		5 003 899
	46 513		58		3 875 018		87 688 046
	798		27 135		7 613		900 407 286

201. Πόσο αὐξάνεται τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν, ἄν αὐξήσουμε τὸν α΄ κατὰ 7 δεκάδες, τὸν β΄ κατὰ 18 ἑκατοντάδες καὶ τὸν γ΄ κατὰ 3 χιλιάδες ;

202. Στοὺς τρεῖς ὅρους ἑνὸς ἀθροίσματος προσθέτομε, ἀντίστοιχα, 257, 364 καὶ 1002. Πόσο θ' αὐξηθῆ τὸ ἄθροισμα ;

203. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις :

i)	3 dam	7 m	6 dm	3 cm	ii)	8 yd	2 ft	5 in	iii)	4 yd	1 ft	10 in
		8	4	5		4	1				2	9
	8	6	3	7			2	7		3		8

204. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις :

i)	8,302	ii)	0,0304	iii)	1008,305	iv)	0,0403
	54,8		12,30805		106,9		0,00085
	127,2805		7,009682		4700,8473		1,000473
	0,054		0,980009		72,606		2,987008

205. Νὰ προστεθοῦν : i) 4 δέκατα καὶ 253 χιλιοστὰ καὶ 2859 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 207 ἑκατοντάκις χιλιοστά, ii) 5807 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 3854 χιλιοστὰ καὶ 45 δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 2 ἑκατοντάκις χιλιοστά, iii) 0,0402 dm καὶ 4,7 mm καὶ 5832 μ, iv) 1,7 μ καὶ 0,07 mm καὶ 0,0049 cm.

206. Μὲ ἀποσύνθεση τοῦ ἑνὸς ὅρου νὰ γίνουν νοερὰ οἱ προσθέσεις : i) 80 + + 47, ii) 40 + 78, iii) 53 + 25, iv) 954 + 220, v) 732 + 125.

207. Μὲ τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἑνὸς ὅρου νὰ γίνουν οἱ προσθέσεις : i) 40 + 72, ii) 60 + 48, iii) 80 + 63, iv) 127 + 680, v) 250 + 158.

208. Μὲ συνδυασμὸ ἀνὰ δυὸ ὅρων νὰ γίνουν νοερὰ οἱ προσθέσεις : i) 6 + + 21 + 84, ii) 17 + 18 + 92, iii) 34 + 77 + 23 + 56, iv) 38 + 47 + 22 + 13, v) 43 + 18 + 17 + 25 + 12 + 33.

209. Νὰ γίνουν νοερὰ οἱ προσθέσεις : i) 64 + 9, ii) 72 + 19, iii) 134 + 39, iv) 79 + 37, v) 243 + 59, vi) 1 212 + 199, vii) 243 + 399.

210. Νὰ γραφοῦν τρεῖς προσθέσεις διάφορες μὲ τέσσαρες ὅρους ἡ καθεμιὰ καὶ ἄθροισμα 100. Οἱ δυὸ ὅροι νὰ λήγουν σὲ 0 καὶ οἱ ἄλλοι δυὸ σὲ 5.

211. Νὰ γίνουν σ' εὐθεῖα γραμμὴ οἱ προσθέσεις καὶ ἡ δοκιμή τους :

i) 4 873 + 954 + 10 892 + 78 + 374 652 + 8 657 + 105

ii) 3 853 672 + 10 803 + 254 107 + 693 + 3 894 + 207 008.

212. Νὰ γίνουν οἱ ἀκόλουθοι ὑπολογισμοὶ καὶ ὁ ἔλεγχός τους :

i) 54 + 83 + 92 + 8 = ...	ii) 127 + 804 + 83 + 92 = ...
75 + 9 + 23 + 64 = ...	883 + 7 + 323 + 593 = ...
7 + 25 + 67 + 19 = ...	256 + 49 + 5 + 124 = ...
32 + 61 + 6 + 87 = ...	83 + 352 + 127 + 6 = ...
... + ... + ... + ... = ...	... + ... + ... + ... = ...

213. Νὰ γίνουν οἱ προσθέσεις: i) $(2)_5+(3)_5$, ii) $(4)_5+(2)_5$, iii) $(232)_5+$ $+(3)_5$, iv) $(4223)_5+(34)_5$, v) $(421)_5+(320)_5+(144)_5$.

214. Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα: i) $(4)_{12}+(3)_{12}$, ii) $(6)_{12}+(8)_{12}$, iii) $(\alpha_0)_{12}+(\alpha_1)_{12}$, iv) $(5\alpha_0 7)_{12}+(352)_{12}$, v) $(2\alpha_0\, 2\alpha_1)_{12}+(47\alpha_0\alpha_0)_{12}+(\alpha_1 8)_{12}$.

215. Νὰ γίνουν οἱ προσθέσεις στοὺς ἀριθμοὺς τοῦ δυαδικοῦ συστήματος: i) 101 + 10, ii) 1011 + 100, iii) 100001 + 10110, iv) 101101 + 11110.

216. Μὲ τὴ βοήθεια μιᾶς χάρτινης λωρίδας νὰ κατασκευάσετε εὐθ. τμῆμα ἴσο μὲ ἄθροισμα τριῶν ἄλλων εὐθ. τμημάτων.

217. Στὸ τετραδιό σας νὰ πάρετε 7, ὄχι εὐθυγραμμισμένα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η καὶ νὰ βρῆτε: i) Πόσα εὐθ. τμήματα θὰ ἔχουμε, ἂν ἑνώσουμε τὸ Α μὲ τὰ ἄλλα σημεῖα, ii) πόσα νέα τμήματα, ἂν ἑνώσουμε τὸ Β μὲ τὰ ἄλλα σημεῖα, iii) κάνοντας τὸ ἴδιο γιὰ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ὅλων τῶν τμημάτων ποὺ γράφονται μ' αὐτὸ τὸν τρόπο;

218. Δίνονται 4 εὐθ. τμήματα μὲ μήκη 12 mm, 4,2 cm, 2 cm καὶ 19 mm. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄθροισμά τους καὶ νὰ ἐκτιμηθῇ τὸ μῆκος του.

219. Πάνω σὲ μιὰ ἡμιευθεῖα Αx νὰ πάρετε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, Ε ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι ΑΒ = 2 cm, ΒΓ = 1,5 cm, ΓΔ = 18 mm καὶ ΔΕ = 24 mm, καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ ΑΕ.

220. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα μαγικὸ τετράγωνο μὲ 9 τετραγωνίδια, ποὺ νὰ περιέχουν τοὺς ἀριθμοὺς 42—50.

221. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα μαγικὸ τετράγωνο μὲ 25 τετραγωνίδια, ποὺ νὰ περιέχουν τοὺς ἀριθμοὺς 47—71.

Β'. Σειρά: 222. Νὰ συμπληρωθοῦν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις μὲ τοποθέτηση στὴ θέση κάθε κοκκίδας τοῦ καταλλήλου ψηφίου:

i)	843●	ii)	210	iii)	●●●●	iv)	2●3	v)	23●
	4●831		47●		6375		●2●		●62
	●43		2●5		9612		734		1047
	●98●4		●●69		●8315		895		93
	118 655		2 000		40 000		●505		1 9●6

223. Νὰ συμπληρωθοῦν οἱ ἀκόλουθες προσθέσεις τοῦ πενταδικοῦ συστήματος:

i)	4●	ii)	2●3	iii)	42●●	iv)	22●	v)	43 ●0
	2		2●		34		3●2		●4●
	100		●14		4 ●10		1 ●31		1● 111

224. Κατὰ τὴν ἐκτέλεση τῆς προσθέσεως μερικῶν ἀριθμῶν παραλείψαμε τὴ μεταφορὰ μονάδων κι' ἔτσι βρήκαμε σὲ κάθε στήλη ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά: i) 16, 13, 7, ii) 12, 13, 14. Ποιὰ εἶναι τὰ ἀθροίσματα;

225. Στὴν παραπλεύρως πρόσθεση τὰ γράμματα α καὶ β παριστάνουν δυὸ ψηφία. Ποιὰ μπορεῖ νὰ εἶναι αὐτὰ τὰ ψηφία;

$$\begin{array}{r} \alpha\beta \\ \beta\alpha \\ \hline 110 \end{array}$$

Λύσις: Δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ τὰ δυὸ 0. Ἄρα στὴ στήλη τῶν μονάδων πρέπει νὰ εἶναι: $\alpha+\beta=10$. Γράφοντας στὸ ἄθροισμα τὸ 0 μεταφέρμε 1 δεκάδα. Ἄρα στὶς δεκάδες πρέπει νὰ εἶναι: $1+\alpha+\beta=1+10=11$. Συνεπῶς, τὰ ψηφία θὰ εἶναι ἀντίστοιχα: $\alpha=1, 2, 3,\ldots 9$ καὶ $\beta=9, 8, 7\ldots 1$. Ὑπάρχουν δηλ. 9 λύσεις.

226. Νὰ βρεθοῦν τὰ ψηφία α β γ στὶς ἀκόλουθες προσθέσεις:

i)	ii)	iii)	iv)	v)	vi)
αβ	αβ	αβ	αβγ	αβγ	αβγ
βα	βα	βα	γβα	γβα	γβα
44	99	132	444	929	1029

227. Ἔχομε μιὰν ἀκολουθία ἀριθμῶν, ποὺ ὁ πρῶτος εἶναι 5. Κάθε ἄλλος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν προηγούμενό του κατὰ 3. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ δέκατος ὅρος τῆς ἀκολουθίας καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα αὐτῶν ὅρων.

228. Μιᾶς ἀκολουθίας ἀριθμῶν ὁ πρῶτος εἶναι 3, ὁ δεύτερος 7 καὶ καθένας ἀπὸ τοὺς ἄλλους εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ ἀμέσως προηγουμένων του. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγδοος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ αὐτῶν ὅρων.

229. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἄθροισμα δέκα διαδοχικῶν ἀκεραίων, ἂν ὁ πέμπτος ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι 53.

230. Μὲ βάση ποιὲς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως μποροῦμε νὰ γράψουμε:
i) $(34+23)+(77+56)=90+100$, ii) $38+(17+42)+23=80+40$
iii) $(\alpha+24)+(\beta+\gamma+36)+(40+\delta)=(100+\alpha)+(\beta+\gamma+\delta)$

231. Μὲ τὴ βοήθεια 4 λωρίδων τῶν 4, 5, 6, 7 cm νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

232. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα μαγικὸ τετράγωνο μὲ 25 ἀκεραίους ἀπὸ 10—35. i) Νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμα κάθε στήλης, κάθε γραμμῆς καὶ κάθε διαγωνίου, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος. ii) Ἂν προσθέσουμε τὸν 7 σὲ ὅλους ἀριθμοὺς τοῦ πίνακος, τὸ νέο τετράγωνο θὰ εἶναι μαγικό; Γιατί;

Γ' Σειρά: 233. Ὅπως γράφει τὸ Δελτίο τῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος, τὸ ἔτος 1962 ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτοκινήτων στὴ χώρα μας ἦταν κατὰ 13 016 μεγαλύτερος τοῦ 1961 καὶ κατὰ 16 286 μικρότερος τοῦ 1963. Ἐξ ἄλλου τὰ αὐτοκινητιστικὰ ἀτυχήματα τοῦ 1962 ἦσαν κατὰ 7 763 περισσότερα τοῦ 1961 καὶ κατὰ 5 056 λιγώτερα τοῦ 1963. Ἂν τὸ 1961 συνέβησαν 77 691 ἀτυχήματα, ποὺ ἦσαν κατὰ 18 007 λιγώτερα ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν αὐτοκινήτων, ποὺ κυκλοφοροῦσαν τότε, νὰ βρεθῆ ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτοκινήτων τοῦ 1963 καὶ ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀτυχημάτων τῆς τριετίας 1961 - 1963.

234. Αὐτοκίνητο, ποὺ ξεκίνησε ἀπὸ τὴν Καλαμάτα, ἔφθασε στὴν Ἀλεξανδρούπολη μὲ ἐνδιαμέσους σταθμοὺς στὴν Τρίπολη, στὴν Ἀθήνα, στὴ Λαμία καὶ στὴ Θεσσαλονίκη. Τὸ β' τμῆμα τῆς διαδρομῆς εἶναι κατὰ 103 km μεγαλύτερο τοῦ α' καὶ κατὰ 16 km μικρότερο τοῦ γ'. Τὸ δ' εἶναι κατὰ 4 km μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ πρώτων καὶ κατὰ 56 km μικρότερο τοῦ ε'. Ἂν τὸ α' τμῆμα εἶναι 96 km, πόσα km εἶναι ὁλόκληρη ἡ διαδρομὴ ἀπὸ τὴν Καλαμάτα ὡς τὴν Ἀλεξανδρούπολη;

235. Ἕνας μαθητὴς ὀφείλει σὲ δυὸ συμμαθητάς του τὸν ἴδιον ἀριθμὸ βώλων. Ἂν μὲ τοὺς βώλους, ποὺ ἔχει, ἐξοφλήση τὸν Α, τοῦ περισσεύουν 63 βῶλοι, ἐνῶ γιὰ νὰ ἐξοφλήση καὶ τὸν Β χρειάζεται ἀκόμη 37 βώλους. Πόσους βώλους ἔχει;

236. Δυὸ παιδιὰ παίζουν βώλους. «Ἂν κερδίσω 25 βώλους, λέει ὁ Α στὸν Β, θὰ ἔχω ὅσους βώλους ἔχεις». Κι' ὁ Β ἀπαντᾶ: «Ἂν ἐγὼ κερδίσω 15 βώλους θὰ ἔχω ὅσους ἔχεις κι' ἄλλους τόσους». Πόσους βώλους ἔχει ὁ καθένας;

237. Σὲ μιὰ δενδροστοιχία ἀπὸ 5 δένδρα ἡ ἀπόσταση τῶν α' καὶ β' εἶναι κατὰ

3,86 m μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τῶν β' καὶ γ' καὶ κατὰ 5,6 m μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τῶν γ' καὶ δ', ποὺ εἶναι κατὰ 1,083 m μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀπόσταση τῶν δ' καὶ ε'. Ἂν ἡ τελευταία αὐτὴ ἀπόσταση εἶναι 10,7 m, ποιὸ εἶναι τὰ μῆκος τῆς δενδροστοιχίας;

238. Τρία συνεργεῖα ἐργάζονται στὴν κατασκευὴ ἑνὸς δρόμου. Τὸ α' εἶχε 43 ἐργάτες περισσότερους ἀπὸ τὸ β', ἐργάσθηκε 7 ἡμέρες περισσότερες ἀπὸ τὸ γ' κι' ἔκαμε 12,037 kg δρόμου.Τὸ β' εἶχε 84 ἐργάτες καὶ σὲ 18 ἡμέρες περισσότερες ἀπὸ ὅσο ἐργάσθηκαν μαζὶ τὰ α' καὶ γ' συνεργεῖα ἔκαμε 4,763 km περισσότερα ἀπὸ τὸ α' καὶ 3,85 kg λιγώτερα ἀπὸ τὸ γ'.Τὸ γ' συνεργεῖο εἶχε 33 ἐργάτες περισσοτέρους ἀπὸ τὸ α' καὶ β' μαζὶ καὶ ἐργάσθηκε 17 ἡμέρες. Νὰ βρεθῆ πόσοι ἦσαν ὅλοι οἱ ἐργάτες, πόσες ὁλικὰ ἡμέρες ἐργάσθηκαν καὶ πόσα km δρόμου ἔκαμαν καὶ τὰ τρία μαζὶ συνεργεῖα.

239. Μιὰ νοικοκυρὰ ἔχει τέσσαρα κομμάτια ὕφασμα. Τὸ α' εἶναι ὅσο τὰ β' καὶ γ' μαζί. Τὸ β' εἶναι ὅσο τὰ γ' καὶ δ' μαζί. Τὸ δ' ἔχει μῆκος 3 yd 2 ft 8 in καὶ εἶναι κατὰ 1 yd 2 ft 6 in μικρότερο ἀπὸ τὸ γ'. Ποιὸ εἶναι τὸ ὁλικὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος;

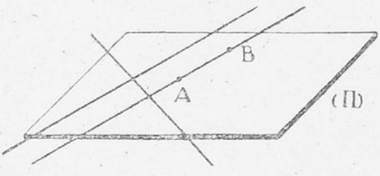
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄

ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ

80. Ἡ εἰκόνα τοῦ ἐπιπέδου.—Μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε μιὰν ἰδέα τῆς **ἐπιπέδου ἐπιφανείας** ἤ, συντομώτερα, τοῦ **ἐπιπέδου**, ἂν παρατηρήσουμε τὴν ἤρεμη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ μιᾶς δεξαμενῆς ἢ λίμνης, τὸ ἐπάνω μέρος μιᾶς μαρμάρινης πλάκας ἐργαστηρίου, τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς τζαμιοῦ ἢ μιᾶς καλὰ πλανισμένης σανίδας...

Ἕνα φύλλο χαρτιοῦ, στρωμένο πάνω σ' ἕνα καλοπλανισμένο τραπέζι, παριστάνει ἐπίσης μιὰν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια ἤ, πιὸ σωστά, ἕνα **μέρος** ἐπιπέδου. Τὸ ἐπίπεδο φανταζόμαστε πάντα νὰ ἐκτείνεται **ἀπεριόριστα** πρὸς ὅλες τὶς διευθύνσεις.

Ἕνα λεπτὸ νῆμα, καλὰ τεντωμένο, ἢ ἡ κόψη τοῦ χάρακα ἐφαρμόζει **παντοῦ** πάνω στὴν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια αὐτοῦ τοῦ χαρτιοῦ. Ἔτσι, μὲ τὸν κανόνα μποροῦμε νὰ χαράξουμε πάνω σ' αὐτὸ ὁσεσδήποτε εὐθεῖες (σχ. 74). Ἄν, μάλιστα, γράψουμε στὴν τύχη δυὸ σημεῖα Α καὶ Β, ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἂν τὸ χαρτὶ εἶναι πραγματικὰ ἐπίπεδο, θὰ ἐφαρμόζη **ὁλόκληρη** πάνω σ' αὐτό. Κι' αὐτὸ ἀποτελεῖ τὸ βασικὸ χαρακτηριστικὸ γνώρισμα τοῦ ἐπιπέδου. Ὥστε:



Σχ. 74. Μιὰ εἰκόνα τοῦ ἐπιπέδου

> **Δυὸ ὁποιαδήποτε σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου ὁρίζουν μιὰν εὐθεῖα, ποὺ ἐφαρμόζει ὁλόκληρη πάνω σ' αὐτό.**

Κάθε γραμμή, ποὺ ὅλα της τὰ σημεῖα βρίσκονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο, λέγεται **ἐπίπεδη γραμμή**.

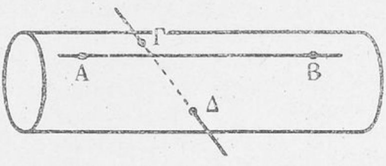
Στὸ μηχανουργεῖο γιὰ νὰ διαπιστώσουν, ἂν ἕνα ἐξάρτημα ποὺ ἐπεξεργάζονται εἶναι πραγματικὰ ἐπίπεδο, χρησιμοποιοῦν μιὰν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ἀπόλυτα ἐλεγμένη, ποὺ λέγεται **πλάκα ἐφαρμογῆς**. Τὴν πλάκα αὐτὴ σκεπάζουν μ' ἕνα λεπτὸ στρῶμα λαδιοῦ κι' ἐπάνω της στηρίζουν τὸ ἐξάρτημα, ποὺ θέλουν νὰ ἐλέγξουν. Ἂν αὐτὸ εἶναι ἐπίπεδο, ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνειά του λαδώνεται. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση, τὸ λάδι ἀναφαίνεται τοπικὰ στὰ ἐξογκώματα τῆς ἐπιφανείας του.

81. Πῶς γεννιέται μιὰ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια.—Πάνω σὲ δυὸ εὐθεῖες τεμνόμενες (σχ. 33) ἢ παράλληλες (σχ. 34) μποροῦμε νὰ στηρίξουμε μιὰν εὐθεῖα γραμμή. Ἂν φαντασθοῦμε τὴν εὐθεῖα αὐτὴ νὰ μετατοπίζεται **ἀπεριόριστα** ἔτσι, ποὺ νὰ **στηρίζεται σταθερὰ** πάντα πάνω στὶς τεμνόμενες ἢ παράλληλες εὐθεῖες, θὰ γράψη μιὰν ἐπιφάνεια. Αὐτὴ ἡ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι ἕνα ἐπίπεδο. Ὥστε:

> **Ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολο εὐθειῶν, ποὺ στηρίζονται πάντα πάνω σὲ δυὸ τεμνόμενες ἢ παράλληλες εὐθεῖες.**

Κάθε ζευγάρι δυὸ τεμνομένων ἢ παραλλήλων εὐθειῶν ὁρίζει στὸ χῶρο ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ἐπίπεδο.

Ἀλλὰ κι' ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς σωλῆνα (σχ. 75) γεννιέται ἀπὸ μιὰν εὐθεῖα, ποὺ ὅμως δὲν ἔχει στὴ μετατόπισή της τὸν ἴδιο, ὅπως παραπάνω, ὁδηγό. Πάνω σὲ μιὰ τέτοιαν ἐπιφάνεια, ποὺ λέγεται **κυλινδρική**, ὑπάρχουν ἄπειρες εὐθεῖες, ὅπως ἡ ΑΒ. Ὅμως κάθε εὐθεῖα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ ὁποιαδήποτε σημεῖα αὐτῆς τῆς ἐπιφανείας, ὅπως ἡ ΓΔ, δὲν κεῖται ὁλόκληρη πάνω σ' αὐτή, ὅπως γίνεται στὸ ἐπίπεδο.



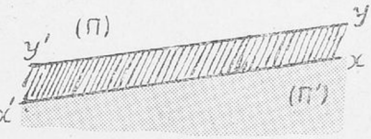
Σχ. 75. **Μιὰ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια**

Ὑπάρχουν, τέλος, καὶ ἐπιφάνειες, ποὺ δὲν περιέχουν καμμιὰν εὐθεῖα. Ἐπάνω π.χ. σὲ μιὰ μπάλλα καμμιὰ εὐθεῖα δὲν μπορεῖ νὰ ἐφαρμόση, ὅπως κι' ἂν τοποθετηθῆ. Μιὰ τέτοια ἐπιφάνεια λέγεται **σφαιρική**.

82. Τὰ ἡμιεπίπεδα -Ἡ ταινία.—Μιὰ εὐθεῖα xy τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 76) χωρίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ δυὸ ἀπέρατα μέρη Π καὶ Π', ποὺ βρίσκονται τὴ μιὰ καὶ τὴν ἄλλη μεριὰ τῆς εὐθείας. Τὰ μέρη αὐτὰ τοῦ ἐπιπέδου λέγονται **ἡμιεπίπεδα**.

Ἂν τὸ ἡμιεπίπεδο Π' στρέψουμε γύρω ἀπὸ τὴν xy κατὰ μισὴ στροφή, θὰ πέση πάνω στὸ ἡμιεπίπεδο Π καὶ θὰ ταὐτισθῆ μ' αὐτό. Αὐτὸ σημαίνει

Σχ. 76. **Τὰ ἡμιεπίπεδα Π καὶ Π'.**

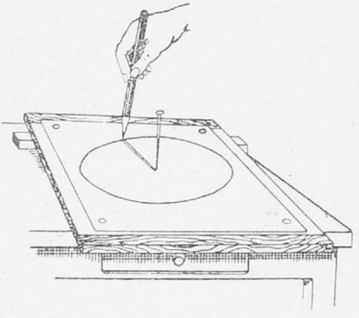


Σχ. 77. **Ἡ ταινία δυὸ παραλλήλων**

ὅτι τὰ **ἡμιεπίπεδα εἶναι ἴσα** κι' αὐτὸ τὸ γεγονὸς εἶναι, ποὺ δικαιολογεῖ καὶ τὸ ὄνομά τους.

Ἂν τώρα πάρουμε πάνω στὸ ἐπίπεδο δυὸ παράλληλες εὐθεῖες x'x καὶ y'y, τὸ ἐπίπεδο χωρίζεται σὲ τρία μέρη: στὰ ἡμιεπίπεδα Π καὶ Π' καὶ σ' ἕνα ἀπέρατο, ἐπίσης, μέρος ποὺ βρίσκεται ἀνάμεσα στὶς δυὸ παράλληλες εὐθεῖες. Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ ἐπιπέδου ποὺ περιορίζεται, ἀπὸ δυὸ παράλληλες εὐθεῖες του λέγεται **ταινία**. Στὸ σχῆμα 77 ἡ ταινία εἶναι τὸ διαγραμμισμένο μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

83. Τί εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου.—Πάνω στὸ ἐπίπεδο τοῦ γραφείου μας ἢ τοῦ σχεδιαστικοῦ μας πίνακα στρώνομε ἕνα χαρτί. Σ' ἕνα σημεῖο Κ τοῦ χαρτιοῦ στερεώνομε μιὰ καρφίτσα καὶ μὲ μιὰ κλωστὴ ὁποιουδήποτε μήκους τὴ συνδέομε μὲ τὴ μύτη ἑνὸς καλὰ ξυσμένου μολυβιοῦ. Ἂν τὸ μολύβι μας μετακινήσουμε ἕνα γῦρο ἔτσι, ποὺ ἡ κλωστὴ νὰ μένη διαρκῶς τεντωμένη διατηρώντας τὸ ἀρχικό της μῆκος, ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας, ὅταν θὰ φθάση στὸ σημεῖο ἀπὸ ὅπου ξεκίνησε, θὰ ἔχη γράψει μιὰ ἐπίπεδη κλειστὴ γραμμὴ (σχ. 78). Αὐτὴ ἡ γραμμὴ εἶναι μιὰ **περιφέρεια κύκλου.**



Σχ. 78. Μιὰ περιφέρεια κύκλου

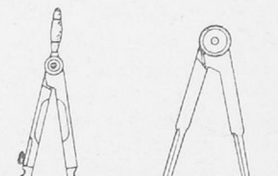
Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὁ κηπουρὸς μὲ ἕνα πάσσαλο, ἕνα σχοινὶ κι' ἕνα καρφὶ θὰ χαράξη πάνω στὸ ἔδαφος τοῦ κήπου τὴν περιφέρεια ἑνὸς παρτεριοῦ. Τὸ ἴδιο γίνεται καὶ στὸ ποδοσφαιρικὸ γήπεδο γιὰ τὴ χάραξη τῆς σέντρας μὲ ἀσβέστη. Ὥστε :

Περιφέρεια κύκλου εἶναι μιὰ ἐπίπεδη κλειστὴ γραμμή, ποὺ ὅλα της τὰ σημεῖα βρίσκονται σὲ ἴσην ἀπόσταση ἀπὸ ἕνα ὡρισμένο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου της.

Τὸ ὡρισμένο σημεῖο Κ λέγεται **κέντρον** τῆς περιφερείας καὶ ἡ σταθερὴ ἀπόσταση ὅλων τῶν σημείων της ἀπὸ τὸ κέντρο λέγεται **ἀκτῖνα.**

84. Πῶς χαράσσεται μιὰ περιφέρεια – Ὁ διαβήτης.—Ὁ διαβήτης εἶναι ἕνα σχεδιαστικὸ ἐργαλεῖο, ξύλινο ἢ μετάλλινο, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἀρθρωτὰ σκέλη. Ἡ ἄρθρωσή τους εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρή, ὥστε τὰ σκέλη νὰ διατηροῦν ἕνα σταθερὸ ἄνοιγμα σὲ κάθε χρήση τοῦ διαβήτη.

Σ' ὅλους τοὺς διαβῆτες τὸ ἕνα σκέλος εἶναι μυτερό. Τὸ ἄλλο σκέλος, στό σχολικό μας διαβήτη ἔχει μιὰν ὑποδοχή, στὴν ὁποία τοποθετοῦμε τὴν κιμωλία, στὸ διαβήτη τοῦ σχεδιαστῆ (σχ. 79α') καταλήγει σὲ γραφίδα ἀπὸ ψύχα μολυβιοῦ ἢ γραμμοσύρτη, ἐνῶ στὸ διαβήτη τοῦ μηχανουργοῦ ἢ ξυλουργοῦ (σχ. 79β') καὶ τὸ δεύτερο σκέλος εἶναι μυτερό. Εἰδικά, γιὰ τὴ χάραξη περιφερειῶν μὲ μεγάλην ἀκτῖνα χρησιμοποιεῖται καὶ ὁ διαβήτης μὲ κανόνα (σχ. 80).



Σχ. 79. Διαβῆτες : α) σχεδιαστῆ β) ἐφαρμοστῆ

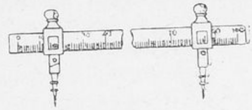
Γιὰ τὴ χάραξη μιᾶς περιφερείας ἡ μύτη τοῦ ἑνὸς σκέλους τοποθετεῖται στὸ κέντρο, ὅπου καὶ διατηρεῖται σταθερὰ μὲ τὴν πίεση τῆς παλάμης μας, ἐνῶ τὸ ἄλλο σκέλος, μὲ τὸ ἐπιθυμητὸ ἄνοιγμα, στρέφεται ἐλεύθερα σ' ἐπαφὴ μὲ τὸ χαρτί, τὸ μέταλλο ἢ τὸ ξύλο γράφοντας τὴν περιφέρεια.

Ὁ διαβήτης χρησιμοποιεῖται ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε στὰ προηγούμενα, γιὰ τὴ σύγκριση (§ 42), τὴ μεταφορὰ (§ 44) ἢ τὴ μέτρηση (§ 47) εὐθ. τμημάτων.

Ἔχομε στὸ νοῦ μας ὅτι :

—Μιὰ γραμμὴ γεννιέται ἀπὸ τὴ μετατόπιση ἑνὸς σημείου σὲ μιὰ ὁποιαδήποτε διαδρομὴ (§ 33).

—Μιὰ εὐθεῖα παράγεται ἀπὸ τὴ μετατόπιση ἑνὸς σημείου μὲ ὁδηγὸ τὸν κανόνα (§ 35).

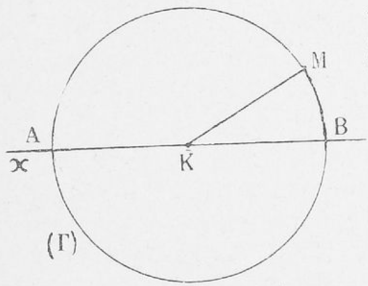


Σχ. 80. Διαβήτης μὲ κανόνα

Ἀπὸ τὸν τρόπο, ποὺ γεννιέται μιὰ περιφέρεια, συμπεραίνουμε ὅτι :

—Μιὰ περιφέρεια κύκλου παράγεται ἀπὸ τὴ μετατόπιση ἑνὸς σημείου πάνω στὸ ἐπίπεδο μὲ ὁδηγὸ τὸ διαβήτη.

85. Ἀκτῖνες καὶ διάμετροι περιφερείας.—Τὰ εὐθ. τμήματα, ποὺ ἔχουν τὸ ἕνα τους ἄκρο στὸ κέντρον K καὶ τὸ ἄλλο σὲ ἕνα σημεῖο M τῆς περιφερείας (Γ), ὅπως τὸ KM (σχ. 81), λέγονται **ἀκτῖνες** τῆς περιφερείας. Ἀλλὰ ἀκτίνα ὀνομάσαμε πιὸ πάνω (§ 83) καὶ τὴν ἀπόσταση KM, δηλ. ἕνα μῆκος α. Συνεπῶς, ὁ ὅρος ἀκτίνα ἔχει διπλῆ σημασία : σημαίνει τὸ τμῆμα KM καὶ τὸ μῆκος α αὐτοῦ τοῦ τμήματος.



Σχ. 81. Ἀκτίνα καὶ διάμετρος περιφερείας

Εἴδαμε ὅμως πιὸ πάνω ὅτι :

$$\forall M \in (\Gamma) \Rightarrow KM = \alpha$$

κι' ἀπ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι :

Ὅλες οἱ ἀκτῖνες μιᾶς περιφερείας κύκλου εἶναι ἴσες.

Κάθε εὐθεῖα xy, ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο K, λέγεται **διάμετρος** τῆς περιφερείας.

Μιὰ διάμετρος τέμνει τὴν περιφέρεια σὲ δυὸ σημεῖα A καὶ B, ποὺ λέγονται **ἀντιδιαμετρικά**. Καὶ τὸ τμῆμα AB τῆς xy, ποὺ περατοῦται στὴν τομὴ τῶν ἡμιευθειῶν Kx καὶ Ky ἀπὸ τὴν περιφέρεια (Γ) λέγεται ἐπίσης διάμετρος τῆς (Γ).

Εἶναι προφανὲς ὅτι : $AB = AK + KB$ καί, ἂν $KB = \alpha$, θὰ εἶναι : $AB = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Καὶ τὸ μῆκος $\Delta = 2\alpha$ λέγεται διάμετρος τῆς περιφερείας.

Συνεπῶς, ὁ ὅρος διάμετρος ἔχει τριπλῆ σημασία : σημαίνει τὴν ἀπέραντη εὐθεῖα xy, τὸ τμῆμα AB καὶ τὸ μῆκος $\Delta = 2\alpha$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι :

1ο Ἡ διάμετρος περιφερείας εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα δυὸ ἀκτίνων της καὶ 2ο Ὅλες οἱ διάμετροι περιφερείας εἶναι ἴσες.

Μιὰ περιφέρεια κύκλου εἶναι τελείως ὡρισμένη κατὰ τὴ θέση καὶ τὸ μέγεθος, ὅταν δοθῆ :

1ο Τὸ κέντρον Κ καὶ ἡ ἀκτίνα της α. Γι' αὐτὸ καὶ μιὰ περιφέρεια σημειώνεται ἔτσι: περιφέρεια (Κ,α).

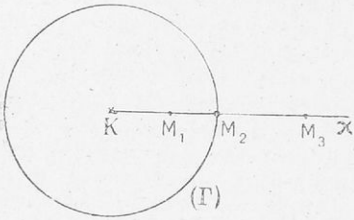
2ο Τὸ κέντρον Κ κι' ἕνα σημεῖο της Μ. Τότε ἡ ἀπόσταση ΚΜ, ποὺ τὴν παίρνουμε μὲ τὸ διαβήτη, ὁρίζει τὴν ἀκτῖνα της.

3ο Μιὰ διάμετρός της. Τότε, μὲ τρόπο ποὺ θὰ μάθουμε ἀργότερα, βρίσκομε τὸ μέσον της κι' ἔτσι ἔχουμε τὸ κέντρο καὶ τὴν ἀκτῖνα της.

86. Θέσεις σημείου ὡς πρὸς μιὰ περιφέρεια.—Ἂς φαντασθοῦμε ἕνα κινητὸ σημεῖο Μ, ποὺ ξεκινάει ἀπὸ τὸ κέντρο Κ μιᾶς περιφερείας (Γ) καὶ μετατοπίζεται πάνω σὲ μιὰ ἡμιευθεῖα Κx (σχ. 82). Παρατηροῦμε τότε ὅτι:

1ο. Ὅσο τὸ σημεῖο βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς περιφερείας, ὅπως στὴ θέση M_1, ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ Κ θὰ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα α. Θὰ εἶναι δηλ.:

$$KM_1 < \alpha \qquad (86,1)$$



Σχ. 82. Τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3 καὶ ἡ περιφέρεια (Κ,α)

2ο Ὅταν τὸ σημεῖο θὰ φθάση πάνω στὴν περιφέρεια, ὅπως στὸ M_2, ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ Κ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα. Δηλ.:

$$KM_2 = \alpha \qquad (86,2)$$

3ο Ὅταν τὸ σημεῖο βρεθῆ ἔξω ἀπὸ τὴν περιφέρεια, ὅπως στὴ θέση M_3, ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸ Κ θὰ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα. Δηλ. τότε θὰ εἶναι:

$$KM_3 > \alpha \qquad (86,3)$$

Ἀντίστροφα, ἂν ὀνομάσουμε δ τὴν ἀπόσταση ΚΜ, θὰ ἔχουμε:

1ο Ἂν $\delta < \alpha$, τὸ Μ θὰ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς περιφερείας.

2ο Ἂν $\delta = \alpha$, τὸ Μ θὰ κεῖται πάνω στὴν περιφέρεια.

3ο Ἂν $\delta > \alpha$, τὸ Μ θὰ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν περιφέρεια.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι:

> **Περιφέρεια κύκλου (Κ,α) λέγεται τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ βρίσκονται σὲ μιὰν ὡρισμένην ἀπόσταση α ἀπὸ ἕνα σημεῖο του Κ.**

Ὥστε, ἂν (Γ) ὀνομάσουμε αὐτὸ τὸ σύνολο, γιὰ τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3 εἶναι:

$$M_1 \notin (\Gamma), \quad M_2 \in (\Gamma), \quad M_3 \notin (\Gamma)$$

87. Ποιὰ γραμμὴ λέγεται καμπύλη.—Ἀπὸ τὸν τρόπο, ποὺ γεννιέται μιὰ περιφέρεια (§ 81), φαίνεται καθαρὰ ὅτι κανένα της μέρος, ὅσο μικρὸ κι' ἂν τὸ φαντασθοῦμε, δὲν εἶναι εὐθ. τμῆμα. Μιὰ τέτοια γραμμὴ λέγεται, γενικά, *γραμμὴ καμπύλη*. Ὥστε:

> **Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμή, ποὺ κανένα της μέρος δὲν εἶναι εὐθ. τμῆμα.**

Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι λοιπὸν μιὰ γραμμὴ καμπύλη. Καμπύλες γραμμὲς εἶναι τὸ γράμμα Ο, τὸ λατινικὸ C...

Εἶναι φανερὸν ὅτι σὲ κάθε ἡμιευθεῖα Κx (σχ. 82), ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὸ Κ, δὲν ὑπάρχει παρὰ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖο Μ τῆς περιφερείας. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι **γραμμὴ κλειστή**. Γενικά:

Μιὰ γραμμὴ λέγεται κλειστή, ὅταν τὰ ἄκρα της συμπίπτουν.

Ἀπὸ τὰ γράμματα Ο καὶ C μόνο τὸ Ο εἶναι **κλειστὴ καμπύλη γραμμή**.

88. Περιφέρειες ἴσες - Ἴσα ἐπίπεδα σχήματα.—Ἂς πάρουμε τὶς περιφέρειες (Γ) καὶ (Γ′), ποὺ ἔχουν κέντρα τους τὰ Κ καὶ Κ′ καὶ ἀκτῖνες ΚΜ καὶ Κ′Μ′, ἀντίστοιχα (σχ. 83), καὶ μ' ἕνα διαφανὲς χαρτὶ τὸ ἀντίγραφο (γ) τῆς πρώτης.

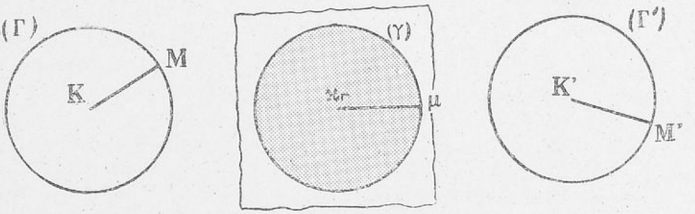
Θέτομε τὴν περιφέρεια (γ) πάνω στὴν (Γ′) ἔτσι, ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν τὰ κέντρα τους κ καὶ Κ′. Ἂν τότε ἡ (γ) ἐφαρμόσῃ πάνω στὴ (Γ′), θὰ λέμε ὅτι οἱ περιφέρειες (Γ) καὶ (Γ′) εἶναι ἴσες.

Μὲ τὸ ἀντίγραφο (γ) τῆς (Γ) ἐπραγματοποιήσαμε μιὰ μεταφορὰ τῆς περιφερείας (Γ). Ὥστε:

Δυὸ περιφέρειες εἶναι ἴσες, ὅταν μποροῦν, μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορά, νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μιὰ πάνω στὴν ἄλλη.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο διαπιστώσαμε στὰ προηγούμενα (§ 43) τὴν ἰσότητα δυὸ εὐθ. τμημάτων.

Ἡ περιφέρεια εἶναι κι' αὐτή, ὅπως ἡ εὐθεῖα, τὸ εὐθ. τμῆμα..., ἕνα



Σχ. 83. Ἴσες περιφέρειες κύκλου

γεωμετρικὸ σχῆμα (§ 40). Σ' αὐτὸ μάλιστα τὸ σχῆμα ὅλα του τὰ σημεῖα βρίσκονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο. Ἕνα τέτοιο σχῆμα λέγεται **ἐπίπεδο σχῆμα**.

Ἐπίπεδα σχήματα θὰ γνωρίσουμε πολλὰ στὴ συνέχεια αὐτοῦ τοῦ βιβλίου. Ἡ σύγκριση δυὸ ἐπιπέδων σχημάτων γίνεται, γενικά, μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορά τους καὶ ἡ ἰσότης τους διαπιστώνεται μὲ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ ἑνὸς πάνω στὸ ἄλλο ἤ, κι' ἀλλοιῶς, μὲ τὴν ταύτισή τους. Ὥστε:

Δυὸ ἐπίπεδα σχήματα εἶναι ἴσα, ὅταν μποροῦν μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορά τους, νὰ ταυτισθοῦν.

Οἱ παραπάνω περιφέρειες (Γ) καὶ (Γ′), ὅπως εἴδαμε, εἶναι ἴσες. Σὲ κάθε ἡμιευθεῖα Κx τῆς (Γ) ὑπάρχει ἕνα σημεῖο τῆς (Γ), τὸ Μ, ποὺ συμπίπτει μὲ ἕνα σημεῖο Μ′ τῆς (Γ′) Ἀλλὰ τότε εἶναι:

$$KM = K'M' = \alpha$$

πού σημαίνει ὅτι :

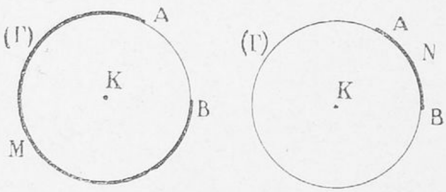
Οἱ ἀκτῖνες δυὸ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσες καί, ἀντίστροφα, δυὸ περιφέρειες, ποὺ γράφονται μὲ τὴν ἴδια ἀκτῖνα, εἶναι ἴσες.

Ἂν δυὸ ἴσες περιφέρειες ἐφαρμόσουν καὶ στερεώσουμε τὰ κέντρα τους, μποροῦμε νὰ περιστρέψουμε τὴ μιὰ γύρω ἀπὸ τὸ κοινὸ κέντρο, χωρὶς νὰ πάψη ποτὲ νὰ συμπίπτη μὲ τὴν ἄλλη. Κάθε σημεῖο Μ τῆς πρώτης θὰ ἐφαρμόζη πάντοτε σ' ἕνα σημεῖο Μ' τῆς ἄλλης.

89. Τόξα περιφερείας.—Ἂν πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια (Γ) πάρουμε δυὸ σημεῖα Α καὶ Β, ἡ (Γ) χωρίζεται σὲ δυὸ μέρη. Καθένα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ εἶναι ἕνα **τόξο** τῆς περιφερείας καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β **ἄκρα** τῶν τόξων. (σχ. 84). Ὥστε :

Τόξο εἶναι ἕνα μέρος τῆς περιφερείας, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ σημεῖα της.

Δυὸ ὅμως σημεῖα ὁρίζουν πάνω στὴν περιφέρεια δυὸ διάφορα τόξα. Γιὰ νὰ διακρίνουμε τὰ δυὸ αὐτὰ τόξα γράφομε ἀπὸ ἕνα ἀκόμη σημεῖο ἀνάμεσα στὰ Α καὶ Β. Ἔτσι τὰ δυὸ τόξα τοῦ σχήματος 84 σημειώνονται ἔτσι : $\overset{\frown}{AMB}$ καὶ $\overset{\frown}{ANB}$. Συνήθως, ὅταν δὲν ὑπάρχει καμμιὰ σχετικὴ ἔνδειξη, ὀνομάζουμε $\overset{\frown}{AB}$ τὸ μικρότερο ἀπὸ τὰ δυὸ τόξα.



Σχ. 84. Τόξα περιφερείας

Δυὸ τόξα εἶναι ἴσα, ἂν μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορὰ μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο.

Τόξα πάνω σὲ περιφέρειες μὲ διαφορετικὴν ἀκτῖνα δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ εἶναι ἴσα. Ἄρα δυὸ ἴσα τόξα θὰ περιέχονται ἀναγκαστικὰ στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες.

Ἡ σύγκριση δυὸ τόξων, ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες γίνεται ἀκριβῶς, ὅπως καὶ ἡ σύγκριση δυὸ εὐθ. τμημάτων (§ 46).

Κάθε διάμετρος ὁρίζει πάνω στὴν περιφέρεια δυὸ σημεῖα ἀντιδιαμετρικά, τὰ Α καὶ Β (σχ. 81), χωρίζοντας ἔτσι τὴν περιφέρεια σὲ δυὸ τόξα. Ἡ σύγκριση τῶν δυὸ αὐτῶν τόξων δείχνει ὅτι εἶναι ἴσα. Γι' αὐτὸ καὶ καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ τόξα λέγεται **ἡμιπεριφέρεια**.

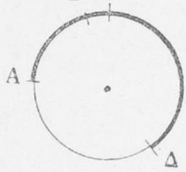
Δεχόμαστε ὅτι κάθε τόξον ἔχει ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, μέσον. Ἂν σημειώσουμε τὰ μέσα τῶν δυὸ ἡμιπεριφερειῶν, θὰ ἔχουμε χωρίσει τὴν περιφέρεια σὲ τέσσαρα ἴσα τόξα, ποὺ τὸ καθένα τους λέγεται **τεταρτημόριο** τῆς περιφερείας.

Δυὸ τόξα περιφερείας λέγονται **διαδοχικὰ** ἢ **ἐφεξῆς**, ἂν ἔχουν ἕνα κοινὸ ἄκρο ἀνάμεσα στὰ δυὸ ἄλλα ἄκρα τους.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα μερικῶν τόξων τῆς ἴδιας ἢ ἴσων περιφερειῶν, τὰ μεταφέρομε στὴν ἴδια ἢ σὲ μιὰ ἴση περιφέρεια ἔτσι, ποὺ νὰ γίνουν διαδοχικά. Τὸ τόξο, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀκραῖα σημεῖα καὶ περιέχει αὐτὰ τὰ τόξα, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμά τους. Ἔτσι εἶναι :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Delta} \quad (\sigma\chi.85).$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ ἡ πρόσθεση τόξων εἶναι πράξη ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.



Σχ. 85. Ἄθροισμα τόξων

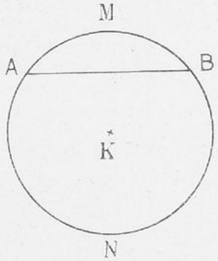
90. Χορδὲς τόξων περιφερείας.— Ἂν ἑνώσουμε τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου ΑΒ, θὰ πάρουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα, ποὺ λέγεται **χορδὴ** αὐτοῦ τοῦ τόξου. (σχ. 86). Ὥστε :

Χορδὴ τόξου εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἄκρα του.

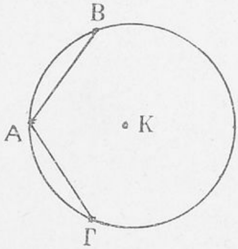
Ἀλλ', ἐνῶ κάθε τόξο ΑΒ ἔχει τὴ χορδή του, σὲ κάθε χορδὴ ΑΒ ἀντιστοιχοῦν δυὸ τόξα, τὰ $\overset{\frown}{AMB}$ καὶ $\overset{\frown}{ANB}$ (σχ. 86).

Μιὰ διάμετρος περιφερείας δὲν εἶναι παρὰ χορδή της, ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρο της.

Στὴν περιφέρεια μὲ κεντρον Κ (σχ. 87) παίρνομε δυὸ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ γράφομε τὶς χορδές τους. Ἂν μεταφέρουμε τὸ τόξο ΑΒ ἔτσι, ποὺ νὰ ἐφαρμόση στὸ ἴσο του τόξο ΑΓ, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι οἱ χορδές τους θὰ ἐφαρμόσουν. Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆ καί, ἂν τὰ τόξα ἀνήκουν σὲ ἴσες περιφέρειες. Ὥστε :



Σχ. 86. Χορδὴ τόξου



Σχ. 87. Ἴσες χορδὲς

Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες, ὅταν δυὸ τόξα εἶναι ἴσα, καὶ οἱ χορδές τους θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσες.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφο εἶναι ἀληθινό. Δηλ.

Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες, ὅταν δυὸ χορδὲς εἶναι ἴσες, θὰ ὁρίζουν δυὸ ζεύγη ἴσων τόξων.

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰδιότης ἔχει μεγάλη πρακτικὴν ἀξία, γιατὶ μᾶς ἐπιτρέπει, προκειμένου νὰ πάρουμε δυὸ ἴσα τόξα στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες, νὰ παίρνουμε σ' αὐτὲς μὲ τὸ διαβήτη μας δυὸ ἴσες χορδές.

91. Μέτρον τόξου - Μονάδες τόξων.—Κάθε περιφέρεια μπορεῖ νὰ νοηθῆ χωρισμένη σ' ἕναν ἀριθμὸν ἴσων τόξων. Καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ τόξα μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς μονάδα, προκειμένου νὰ ἐκτιμηθῆ τί μέρος τῆς πε-

Μοίρες	Βαθμοί	Μοίρες	Βαθμοί
1	1,11 111	46	51,11 111
2	2,22 222	47	52,22 222
3	3,33 333	48	53,33 333
4	4,44 444	49	54,44 444
5	5,55 556	50	55,55 556
6	6,66 667	51	56,66 667
7	7,77 778	52	57,77 778
8	8,88 889	53	58,88 889
9	10,00 000	54	60,00 000
10	11,11 111	55	61,11 111
11	12,22 222	56	62,22 222
12	13,33 333	57	63,33 333
13	14,44 444	58	64,44 444
14	15,55 556	59	65,55 556
15	16,66 667	60	66,66 667
16	17,77 778	61	67,77 778
17	18,88 889	62	68,88 889
18	20,00 000	63	70,00 000
19	21,11 111	64	71,11 111
20	22,22 222	65	72,22 222
21	23,33 333	66	73,33 333
22	24,44 444	67	74,44 444
23	25,55 556	68	75,55 556
24	26,66 667	69	76,66 667
25	27,77 778	70	77,77 778
26	28,88 889	71	78,88 889
27	30,00 000	72	80,00 000
28	31,11 111	73	81,11 111
29	32,22 222	74	82,22 222
30	33,33 333	75	83,33 333
31	34,44 444	76	84,44 444
32	35,55 556	77	85,55 556
33	36,66 667	78	86,66 667
34	37,77 778	79	87,77 778
35	38,88 889	80	88,88 889
36	40,00 000	81	90,00 000
37	41,11 111	82	91,11 111
38	42,22 222	83	92,22 222
39	43,33 333	84	93,33 333
40	44,44 444	85	94,44 444
41	45,55 556	86	95,55 556
42	46,66 667	87	96,66 667
43	47,77 778	88	97,77 778
44	48,88 889	89	98,88 889
45	50,00 000	90	100,00000

′	Βαθμοί	′	Βαθμοί	′	Βαθμοί
1	0,01 852	21	0,38 889	41	0,75 926
2	0,03 704	22	0,40 741	42	0,77 778
3	0,05 556	23	0,42 593	43	0,79 630
4	0,07 407	24	0,44 444	44	0,81 481
5	0,09 259	25	0,46 296	45	0,83 333
6	0,11 111	26	0,48 148	46	0,85 185
7	0,12 963	27	0,50 000	47	0,87 037
8	0,14 815	28	0,51 852	48	0,88 889
9	0,16 667	29	0,53 704	49	0,90 741
10	0,18 519	30	0,55 556	50	0,92 593
11	0,20 370	31	0,57 407	51	0,94 444
12	0,22 222	32	0,59 259	52	0,96 296
13	0,24 074	33	0,61 111	53	0,98 148
14	0,25 926	34	0,62 963	54	1,00 000
15	0,27 778	35	0,64 815	55	1,01 852
16	0,29 630	36	0,66 667	56	1,03 704
17	0,31 481	37	0,68 519	57	1,05 556
18	0,33 333	38	0,70 370	58	1,07 407
19	0,34 185	39	0,72 222	59	1.09 259
20	0,37 037	40	0,74 074	60	1,11 111

″	Βαθμοί	″	Βαθμοί	″	Βαθμοί
1	0,00 031	21	0,00 648	41	0,01 265
2	0,00 062	22	0,00 679	42	0,01 296
3	0,00 093	23	0.00 710	43	0,01 327
4	0,00 123	24	0,00 741	44	0,01 358
5	0,00 154	25	0,00 772	45	0,01 389
6	0,00 185	26	0,00 802	46	0,01 420
7	0,00 216	27	0,00 833	47	0,01 451
8	0,00 247	28	0,00 864	48	0,01 481
9	0,00 278	29	0,00 895	49	0,01 512
10	0,00 309	30	0,00 926	50	0,01 543
11	0,00 340	31	0,00 957	51	0,01 574
12	0,00 370	32	0,00 988	52	0,01 605
13	0,00 401	33	0,01 019	53	0,01 636
14	0,00 432	34	0,01 049	54	0,01 667
15	0,00 463	35	0,01 080	55	0,01 698
16	0,00 494	36	0,01 111	56	0,01 728
17	0,00 525	37	0,01 142	57	0,07 759
18	0,00 556	38	0,01 173	58	0,01 790
19	0,00 586	39	0,01 204	59	0,01 821
20	0,00 617	40	0,01 235	60	0.01 852

Βαθμοί	Μοίρες πρωτόλεπτα	Βαθμοί	Μοίρες πρωτόλεπτα
1	0° 54′	51	45° 54′
2	1° 48′	52	46° 48′
3	2° 42′	53	47° 42′
4	3° 36′	54	48° 36′
5	4° 30′	55	49° 30′
6	5° 24′	56	50° 24′
7	6° 18′	57	51° 18′
8	7° 12′	58	52° 12′
9	8° 6′	59	53° 6′
10	9° 0′	60	54° 0′
11	9° 54′	61	54° 54′
12	10° 48′	62	55° 48′
13	11° 42′	63	56° 42′
14	12° 36′	64	57° 36′
15	13° 30′	65	58° 30′
16	14° 24′	66	59° 24′
17	15° 18′	67	60° 18′
18	16° 12′	68	61° 12′
19	17° 6′	69	62° 6′
20	18° 0′	70	63° 0′
21	18° 54′	71	63° 54′
22	19° 48′	72	64° 48′
23	20° 42′	73	65° 42′
24	21° 36′	74	66° 36′
25	22° 30′	75	67° 30′
26	23° 24′	76	68° 24′
27	24° 18′	77	69° 18′
28	25° 12′	78	70° 12′
29	26° 6′	79	71° 6′
30	27° 0′	80	72° 0′
31	27° 54′	81	72° 54′
32	28° 48′	82	73° 48′
33	29° 42′	83	74° 42′
34	30° 36′	84	75° 36′
35	31° 30′	85	76° 30′
36	32° 24′	86	77° 24′
37	33° 18′	87	78° 18′
38	34° 12	88	79° 12′
39	35° 6′	89	80° 6′
40	36° 0′	90	81° 0′
41	36° 54′	91	81° 54′
42	37° 48′	92	82° 48′
43	38° 42′	93	83° 42′
44	39° 36′	94	84° 36′
45	40° 30′	95	85° 30′
46	41° 24′	96	86° 24′
47	42° 18′	97	87° 18′
48	43° 12′	98	88° 12′
49	44° 6′	99	89° 6′
50	45° 0′	100	90° 0′

ἑκατοστὰ βαθμοῦ	πρωτόλεπτα καὶ δευτερόλεπτα	ἑκατοστὰ βαθμοῦ	πρωτόλεπτα καὶ δευτερόλεπτα
1	0′ 32″4	51	27′ 32″4
2	1′ 4″8	52	28′ 4″8
3	1′ 37″2	53	28′ 37″2
4	2′ 9″6	54	29′ 9″6
5	2′ 42″0	55	29′ 42″0
6	3′ 14″4	56	30′ 14″4
7	3′ 46″8	57	30′ 46″8
8	4′ 19″2	58	31′ 19″2
9	4′ 51″6	59	31′ 51″6
10	5′ 24″0	60	32′ 24″0
11	5′ 56″4	61	32′ 56″4
12	6′ 28″8	62	33′ 28″8
13	7′ 1″2	63	34′ 1″2
14	7′ 33″6	64	34′ 33″6
15	8′ 6″0	65	35′ 6″0
16	8′ 38″4	66	35′ 38″4
17	9′ 10″8	67	36′ 10″8
18	9′ 43″2	68	36′ 43″2
19	10′ 15″6	69	37′ 15″6
20	10′ 48″0	70	37′ 48″0
21	11′ 20″4	71	38′ 20″4
22	11′ 52″8	72	38′ 52″8
23	12′ 25″2	73	39′ 25″2
24	12′ 57″6	74	39′ 57″6
25	13′ 30″0	75	40′ 30″0
26	14′ 2″4	76	41′ 2″4
27	14′ 34″8	77	41′ 34″8
28	15′ 7″2	78	42′ 7″2
29	15′ 39″6	79	42′ 39″6
30	16′ 12″0	80	43′ 12″0
31	16′ 4″4	81	43′ 44″4
32	17′ 16″8	82	44′ 16″8
33	17′ 49″2	83	44′ 49″2
34	18′ 21″6	84	45′ 21″6
35	18′ 54″0	85	45′ 54″0
36	19′ 26″4	86	46′ 26″4
37	19′ 58″8	87	46′ 58″8
38	20′ 31″2	88	47′ 31″2
39	21′ 3″6	89	48′ 3″6
40	21′ 36″0	90	48′ 36″0
41	22′ 8″4	91	49′ 8″4
42	22′ 40″8	92	49′ 40″8
43	23′ 13″2	93	50′ 13″2
44	23′ 45″6	94	50′ 45″6
45	24′ 18″0	95	51′ 18″0
46	24′ 50″4	96	51′ 50″4
47	25′ 22″8	97	52′ 22″8
48	25′ 55″2	98	52′ 55″2
49	26′ 27″6	99	53′ 27″6
50	27′ 0″0	100	54′ 0″0

χιλιοστὰ βαθμοῦ	Δευτερόλεπτα
1	3″24
2	6″48
3	9″72
4	12″96
5	16″20
6	19″44
7	22″68
8	25″92
9	29″16
10	32″4

ριφερείας εἶναι ἕνα τόξο. Ὁ ἀριθμός, ποὺ ἐκφράζει ἀπὸ πόσες μονάδες τόξων ἀποτελεῖται ἕνα τόξο περιφερείας λέγεται **μέτρον** τοῦ τόξου.

Οἱ κυριώτερες μονάδες γιὰ τὴν ἐκτίμηση τοῦ μέτρου ἑνὸς τόξου εἶναι:

1ο **Ἡ μοῖρα.** Ἂν μιὰ περιφέρεια νοηθῆ χωρισμένη σὲ 360 ἴσα μέρη, καθένα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ εἶναι **τόξο μιᾶς μοίρας**, ποὺ γράφεται 1^0. Ὥστε κάθε περιφέρεια ἔχει μέτρον 360^0.

Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται σὲ 60 πρωτόλεπτα (′) καὶ τὸ κάθε πρωτόλεπτο σὲ 60 δευτερόλεπτα (″).

Μὲ μονάδα τὴ μοῖρα καὶ τὶς ὑποδιαιρέσεις της, ποὺ ἀκολουθοῦν τὸ Βαβυλωνιακὸ ἑξηκονταδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως, τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου ἐκφράζεται μὲ συμμιγῆ ἀριθμό. Π.χ. τόξο : $40^0\ 35'\ 20''$.

2ο **Ὁ βαθμός.** Ὅταν μιὰ περιφέρεια νοηθῆ χωρισμένη σὲ 400 ἴσα τόξα, καθένα ἀπ' αὐτὰ λέγεται **τόξον ἑνὸς βαθμοῦ**. Ὥστε ὁλόκληρη ἡ περιφέρεια ἔχει μέτρον 400 βαθμῶν.

Ὁ βαθμός, ποὺ διεθνῶς συμβολίζεται gr (grade, γράδο), ὑποδιαιρεῖται σὲ δέκατα (dgr), ἑκατοστὰ (cgr) καὶ χιλιοστὰ (mgr) τοῦ βαθμοῦ.

Ὥστε, μὲ μονάδα τὸ βαθμό, τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου ἐκφράζεται μὲ δεκαδικὸν ἀριθμό. Π.χ. τόξο 50,635 gr.

Ἡ ἀντιστοιχία μοιρῶν καὶ βαθμῶν δίνεται ἀπὸ τοὺς πίνακες I καὶ II (σελ. 78–79).

● **Ἀξιοσημείωτη παρατήρηση** : Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος μερικῶν τόξων εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων αὐτῶν τῶν τόξων.

92. Χρήση τῶν πινάκων γιὰ τὴν μετατροπὴ μονάδων.—Στὸν πίνακα I δίνονται οἱ τιμὲς σὲ βαθμοὺς τόξων ἀπὸ 1^0 ἕως 90^0, ἀπὸ 1′ ἕως 60′ καὶ ἀπὸ 1″ ἕως 60″. Ἡ μετατροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ μοιρῶν σὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸ βαθμῶν καὶ ἀντίστροφα δὲν εἶναι παρὰ πρόβλημα προσθέσεως.

● **Παράδειγμα I : Νὰ τραποῦν σὲ βαθμοὺς $41^0\ 39'\ 43''$.** Ἡ μετατροπὴ θὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

$$\begin{array}{rcl} 41^0 & = & 45{,}555\,56 \\ 39' & = & 0{,}722\,22 \\ 43'' & = & 0{,}013\,27 \\ \hline 41^0\ 39'\ 43{,}6'' & = & 46{,}291\,05 \text{ gr.} \end{array}$$

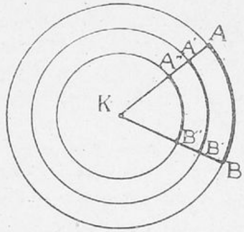
● **Παράδειγμα II : Νὰ τραποῦν σὲ μοῖρες οἱ 57,837 gr.** Ἡ μετατροπὴ θὰ γίνῃ κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

$$\begin{array}{lrcl} & 57 & = & 51^0\ 18' \\ & 0{,}83 & = & 44'\ 49{,}2'' \\ & 0{,}007 & = & 22{,}68'' \\ \hline & 57{,}837 \text{ gr} & = & 51^0\ 62'\ 71{,}88'' \\ \hline ἢ & 57{,}837 \text{ gr} & = & 52^0\ 3'\ 11{,}88'' \end{array}$$

93. Ὁμόκεντρες περιφέρειες - Τὸ μοιρογνωμόνιο.—Μὲ τὸ ἴδιο κέντρο καὶ μὲ διαφορετικὲς ἀκτῖνες γράφουμε τρεῖς περιφέρειες (σχ. 88). Οἱ περιφέρειες αὐτὲς λέγονται **ὁμόκεντρες**.

Κάθε ἡμιπεριφέρεια ἔχει μέτρον 180^0 ἢ 200 gr καὶ κάθε τεταρτημόριο περιφερείας ἔχει μέτρον 90^0 ἢ 100 gr.

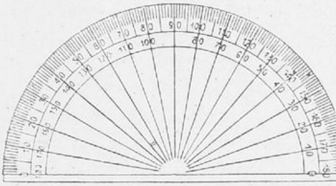
Ἂν στὴν ἐξωτερικὴ ἀπὸ τὶς παραπάνω ὁμόκεντρες περιφέρειες (σχ. 88) πάρουμε ἕνα τόξο ΑΒ καὶ γράψουμε τὶς ἀκτῖνες στὰ ἄκρα του, αὐτὲς ὁρίζουν στὶς ἄλλες περιφέρειες τὰ τόξα Α'Β' καὶ Α''Β''. Καὶ τὰ τρία αὐτὰ ἄνισα τόξα ἔχουν τὸ ἴδιο μέτρο.



Σχ. 88. Ὁμόκεντρες περιφέρειες

Ὥστε, ἐνῶ ἴσα τόξα ἔχουν τὸ ἴδιο μέτρο, τόξα μὲ τὸ ἴδιο μέτρο δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ καὶ ἴσα.

Στὶς ὁμόκεντρες περιφέρειες στηρίζεται ἡ χρήση ἑνὸς ὀργάνου, ποὺ χρησιμεύει γιὰ τὴν ἐκτίμηση τοῦ μέτρου ἑνὸς τόξου περιφερείας καὶ λέγεται μοιρογνωμόνιο (σχ. 89).


Σχ. 89. Τὸ μοιρογνωμόνιο

Τὸ μοιρογνωμόνιο εἶναι μιὰ ἡμιπεριφέρεια ἀπὸ μέταλλο, ξύλο ἢ πλαστικό, μὲ ὁποιαδήποτε διάμετρο, χωρισμένη σὲ 180^0 κατὰ δυὸ φορές, ἀπὸ τ' ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἀντίστροφα. Ἡ ἀναγραφὴ τῶν μοιρῶν γίνεται ἀνὰ 10^0, δηλ. 0^0, 10^0, 20^0 ... 90^0, ἐνῶ οἱ λοιπὲς μοῖρες σημειώνονται μὲ ἁπλὲς χαραγές.

Γιὰ νὰ ἐκτιμήσουμε τὸ μέτρο ἑνὸς τόξου ΑΒ περιφερείας (Γ), γράφομε τὶς ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ τοποθετοῦμε τὸ μοιρογνωμόνιο ἔτσι, ποὺ τὸ κέντρο του νὰ συμπέση μὲ τὸ κέντρο Κ τῆς περιφερείας καὶ ἡ διάμετρός του μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ, τότε ἡ ἀκτῖνα ΚΒ μᾶς δίνει τὸ μέτρο τοῦ τόξου ΑΒ, μὲ ἄμεση ἀνάγνωση πάνω στὴ μιὰ ἀπὸ τὶς βαθμολογημένες περιφέρειες ἐκείνη, ποὺ ἔχει τὸ 0 της πάνω στὴν ἀκτῖνα ΚΑ.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο χρησιμοποιοῦμε τὸ μοιρογνωμόνιο γιὰ νὰ πάρωμε πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια ἕνα τόξο μὲ ὡρισμένο τὸ ἕνα ἄκρο του καὶ μὲ ὡρισμένο μέτρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

240. Ἀναφέρατε τρεῖς εἰκόνες τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἀπὸ τὸν κόσμο τῆς ἐμπειρίας σας.

241. Μέσα στὴν αἴθουσα διδασκαλίας μεταξὺ τοίχων, ὀροφῆς καὶ πατώματος νὰ βρῆτε ζεύγη εὐθειῶν τεμνομένων ἢ παραλλήλων, ποὺ νὰ ὁρίζουν ἐπίπεδα, καὶ νὰ καθορίσετε αὐτὰ τὰ ἐπίπεδα.

242. Ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, ποὺ βρήκατε παραπάνω στὴν αἴθουσα διδασκαλίας, καὶ ζεύγη, ποὺ δὲν ὁρίζουν κανένα ἐπίπεδο; Δεῖξτε 3 τέτοια ζεύγη.

243. Δώσατε δυὸ παραδείγματα ἐπιφανείας κυλινδρικῆς καὶ ἄλλα δυὸ σφαιρικῆς.

244. Χαράξτε σ' ἕνα λευκὸ χαρτὶ τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες. Πόσα ἡμιεπίπεδα καὶ πόσες ταινίες ὁρίζονται ἔτσι ;

245. Τὸ πεντάγραμμο τοῦ τετραδίου σας τῆς μουσικῆς πόσες ταινίες ὁρίζει;

246. 'Απὸ τὸν κόσμο τῆς ἐμπειρίας σας δεῖξτε πέντε εἰκόνες περιφερείας κύκλου.

247. Μὲ κέντρο Κ καὶ ἀκτῖνα 3 cm γράψτε στὸ τετράδιό σας μιὰ περιφέρεια κύκλου. Τί ὄργανα θὰ χρησιμοποιήσετε ;

248. Γράψτε ἕνα τμῆμα ΟΑ μὲ μῆκος 2,5 cm καὶ χαράξτε τὴν περιφέρεια (Ο,ΟΑ).

249. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα νὰ πάρετε τρία σημεῖα Α, Β, Γ στὴ σειρὰ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι ΑΒ = 3 cm καὶ ΒΓ = 2 cm, καὶ νὰ γράψετε τὶς περιφέρειες (Β,ΒΑ) καὶ (Β,ΒΓ).

250. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς περιφερείας, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 4 cm, καὶ πόση ἡ ἀκτίνα μιᾶς ἄλλης περιφερείας, ποὺ ἔχει διάμετρον 6 cm ;

251. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα 4 cm καὶ τὴν ἀκτῖνα της ΚΑ. Ἔπειτα νὰ γράψετε τὴν περιφέρεια, ποὺ ἔχει διάμετρο τὴν ΑΚ.

252. Μὲ ἕνα παχύμετρο νὰ βρῆτε τὴ διάμετρο ποὺ ἔχει τὸ δίδραχμο, τὸ πεντάδραχμο, τὸ δεκάδραχμο, τὸ εἰκοσάδραχμο.

253. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο Κ καὶ ἀκτῖνα 3 cm. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετήσουμε ἕνα σημεῖο Α, γιὰ νὰ εἶναι : i) $ΚΑ > 3$, ii) $ΚΑ = 3$, iii) $ΚΑ < 3$;

254. Δίνεται μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο Κ καὶ ἀκτῖνα 5 cm. Ποῦ βρίσκονται, ὡς πρὸς τὴν περιφέρεια, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : ΚΑ = 3 cm, ΚΒ = 7 cm, ΚΓ = 1 cm, ΚΔ = 5 cm, ΚΕ = 6 cm, ΚΖ = 2,5 cm ;

255. Σημειῶστε στὸ χαρτί σας ἕνα σημεῖο Α. Πῶς μπορεῖτε νὰ ὁρίσετε τὸ κέντρο Κ τῆς περιφερείας, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα 2 cm καὶ περνάει ἀπὸ τὸ Α ; Πόσες τέτοιες περιφέρειες μπορεῖτε νὰ γράψετε ; Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν κέντρων αὐτῶν τῶν περιφερειῶν ;

256. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα xy δίνεται ἕνα σημεῖο Α. Νὰ βρεθῆ περιφέρεια, ποὺ νὰ περνάη ἀπὸ τὸ Α, νὰ ἔχη ἀκτῖνα 1,5 cm καὶ τὸ κέντρο της πάνω στὴ xy. Πόσες τέτοιες περιφέρειες ὑπάρχουν ;

257. Γράψτε στὸ τετράδιό σας καμπύλες γραμμές, μὲ βάση τὰ πεζὰ γράμματα τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ 'Ινδο-'Αραβικὰ ψηφία ἀριθμήσεως.

258. Δίνονται δυὸ εὐθ. τμήματα κοινῆς ἀρχῆς Ο, τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ συγκρίνετε τὶς περιφέρειες (Ο,ΟΑ) καὶ (Ο,ΟΒ), ἂν εἶναι ΟΑ = ΟΒ.

259. Γράψτε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ = 6 cm καὶ τὶς ἡμιπεριφέρειες, ποὺ ἔχουν διάμετρο τὴν ΑΒ. Πόσα τεταρτημόρια ἔχει ὁλόκληρη ἡ περιφέρεια ;

260. Γράψτε μιὰ περιφέρεια καὶ πάνω σ' αὐτὴ 3 σημεῖα στὴ σειρὰ Α,Β,Γ. Νὰ ὀνομάσετε τὰ διαδοχικὰ τόξα, ποὺ ὁρίζονται ἀπ' αὐτὰ τὰ σημεῖα. Τὸ ἴδιο νὰ γίνη μὲ 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

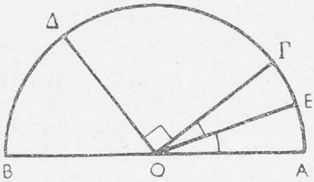
261. Γιὰ τὶς χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ συμπληρωθοῦν οἱ συνεπαγωγές :

$$\text{i)}\ \left.\begin{array}{l} AB = \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta = 3\text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \ldots \qquad \text{ii)}\ \left.\begin{array}{l} AB = 3\text{ cm} \\ \Gamma\Delta = 30\text{ mm} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \ldots$$

262. Νὰ συμπληρώσετε μὲ τὰ σύμβολα $<$ ἢ $>$ ἢ $=$ τὶς σχέσεις μεταξὺ τῶν τόξων τοῦ σχήματος 90 :

i) $\widehat{A\Gamma} \ldots \widehat{\Gamma\Delta}$ ii) $\widehat{\Gamma\Delta} \ldots \widehat{\Delta B}$, iii) $\widehat{AE} \ldots \widehat{E\Gamma}$, iv) $\widehat{AB} \ldots \widehat{\Gamma\Delta}$.

263. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο Κ καὶ ἀκτῖνα 4 cm καί : i) Μιὰ χορδὴ $AB = 5$ cm. Πόσες λύσεις ὑπάρχουν ; ii) Μιὰ χορδὴ $A\Gamma = 9$ cm. Πῶς λέγεται αὐτὴ ἡ χορδή ; iii) Μιὰ χορδὴ $A\Delta = 9$ cm. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν λύσεων ;



Σχ. 90. Σύγκριση τόξων

264. Πάνω σὲ μιὰ περιφέρεια (Γ), μὲ ἀκτῖνα 3 cm, νὰ πάρετε ἕνα σημεῖο Μ καὶ νὰ ὁρίσετε τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Μ: i) 2 cm, ii) 3 cm, iii) 6 cm, iv) 8 cm. Ποιὸς εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τῶν λύσεων σὲ κάθε περίπτωση ;

265. Ποιὸ εἶναι τὸ μέτρο σὲ μοῖρες καὶ βαθμούς : i) τῆς ἡμιπεριφερείας ; ii) τοῦ τεταρτημορίου τῆς περιφερείας ;

266. Πόσων μοιρῶν καὶ βαθμῶν εἶναι τὸ τόξο ποὺ διαγράφει τὸ ἄκρο τοῦ λεπτοδείκτη ἑνὸς ρολογιοῦ : i) σὲ μιὰ ὥρα, ii) σὲ μισὴ ὥρα, iii) σ' ἕνα τέταρτο τῆς ὥρας ;

267. Γιὰ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ συμπληρωθοῦν οἱ συνεπαγωγές :

i) $\left.\begin{array}{l}\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \\ \widehat{\Gamma\Delta} = 52^0\end{array}\right\} \Rightarrow AB = \ldots$ ii) $\left.\begin{array}{l}\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta} \\ \widehat{\Gamma\Delta} = 95\text{ gr}\end{array}\right\} \Rightarrow AB > \ldots$

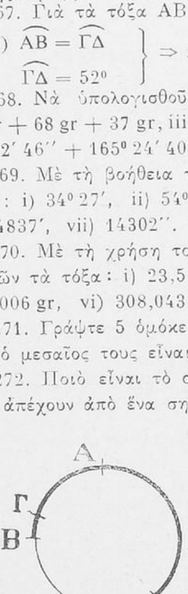
268. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα : i) $17^0 + 24^0 + 49^0$, ii) 43 gr + 52 gr + 68 gr + 37 gr, iii) $31^0\,24' + 46^0\,58'\,24'' + 44^0\,37''$, iv) $107^0\,42'\,34'' + 86^0\,52'\,46'' + 165^0\,24'\,40''$, v) 68,5 gr + 174,28 gr + 52,373 gr + 104,847 gr.

269. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ πίνακος Ι (σελ. 78) νὰ τραποῦν σὲ βαθμοὺς τὰ τόξα : i) $34^0\,27'$, ii) $54^0\,46'\,35''$, iii) $142^0\,54'$, iv) $224^0\,58'\,46''$, v) $305^0\,40''$, vi) $4837'$, vii) $14302''$.

270. Μὲ τὴ χρήση τοῦ πίνακος ΙΙ (σελ. 79) νὰ τραποῦν σὲ συμμιγῆ ἀριθμὸ μοιρῶν τὰ τόξα : i) 23,57 gr, ii) 54,427 gr, iii) 80,023 gr, iv) 127,708 gr, v) 273,006 gr, vi) 308,043 gr.

271. Γράψτε 5 ὁμόκεντρες περιφέρειες μὲ ἀκτῖνες 5 διαδοχικοὺς ἀκεραίους, ποὺ ὁ μεσαῖος τους εἶναι 3 cm.

272. Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀπειροσυνόλων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ ἕνα σημεῖο του Ο ἀποστάσεις 2, 3, 4 καὶ 5 cm;



Σχ. 91. Μέτρηση τόξων

273. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο μετρῆστε τὰ τόξα ΑΓ, ΒΔ καὶ ΑΔ τῆς περιφερείας τοῦ σχήματος 85 (σελ. 77), καθὼς καὶ τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, ΓΔ τοῦ παραπλεύρως σχήματος 91.

274. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ κέντρο Κ καὶ ἀκτῖνα $\alpha = 3$ cm καὶ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο σημειῶστε τὰ τόξα της $\widehat{AB} = 45^0$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta} = 60^0$.

275. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα $\alpha = 35$ mm καὶ σημειῶστε τὰ διαδοχικὰ τόξα $\widehat{AB} = 43^0$ καὶ

$\widehat{ΒΓ} = 69^0$. Ποιὸ εἶναι τὸ μέτρο τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$ σὲ μοῖρες καὶ βαθμούς;

276. Γράψτε μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα $α = 42$ mm, σημειῶστε 4 σημεῖα Α, Β, Γ, Δ στὴ σειρὰ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι: $\widehat{ΑΒ} = 54^0$, $\widehat{ΒΓ} = 65^0$ καὶ $\widehat{ΓΔ} = 71^0$ καὶ χαράξτε τὴ χορδὴ ΑΔ. Νὰ βρῆτε τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΔ καὶ τὴ θέση τῆς χορδῆς ΑΔ.

277. Σὲ μιὰ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα $α = 25$ mm, νὰ πάρετε 3 τόξα $\widehat{ΑΒ} = 45^0$, $\widehat{ΓΔ} = \widehat{90}$, $\widehat{ΕΖ} = 120^0$, νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμά τους καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ μέτρο του.

278. Δυὸ δρομεῖς ξεκινοῦν ταυτόχρονα ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Α τῆς περιφερείας κυκλικοῦ στίβου καὶ τρέχουν μὲ ἀντίθετη φορά. Ὅταν ὁ α' εἶχε διατρέξει τόξο ΑΒ κατὰ 78^0 μεγαλύτερο τοῦ τεταρτημορίου, ὁ β' εἶχε διανύσει τόξο ΑΓ κατὰ 12^0 μεγαλύτερο τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ βρεθῆ τὸ μέτρο τοῦ τόξου ΒΓ.

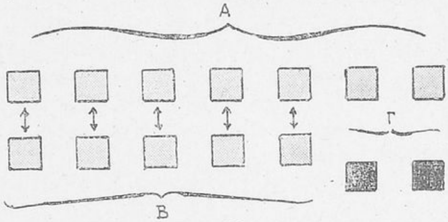
279. Μὲ ἀφετηρίες τρία σημεῖα Α, Β, Γ περιφερείας κυκλικοῦ ποδηλατοδρομίου τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι: $\widehat{ΑΒ} = 38^0\ 20'$ καὶ $\widehat{ΒΓ} = 54^0\ 45'$, ξεκινοῦν ταυτόχρονα τρεῖς ποδηλάτες κατὰ τὴν ἴδια φορά. Ὅταν ὁ α' ἔφθασε στὸ Β, ὁ β' εἶχε ξεπεράσει τὸ Γ κατὰ $13^0\ 28'$ κι' εἶχε φθάσει σ' ἕνα σημεῖο Δ, ἐνῶ ὁ γ' βρισκόταν σ' ἕνα σημεῖο Ε, $72^0\ 36'$ μετὰ τὸ Δ. Νὰ βρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν τόξων ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, ΑΕ.

280. Τέσσαρα διαδοχικὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι τέτοια ὥστε: $\widehat{ΔΕ} = \widehat{ΒΓ} + \widehat{ΓΔ}$, $\widehat{ΓΔ} = \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΒΓ}$, $\widehat{ΑΒ} = 35^0\ 27'\ 35''$. Ἂν τὸ ΑΒ εἶναι κατὰ $15^0\ 8'\ 47''$ μικρότερο τοῦ ΒΓ, νὰ βρεθῆ τὸ μέτρο τοῦ τόξου ΑΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ΄

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

94. Συμπλήρωμα συνόλου ὡς πρὸς σύνολον ἀναφορᾶς.—Ἂς πάρουμε τὸ σύνολον Α τῶν τετραγωνικῶν συμβόλων (σχ. 92 α΄ σειρὰ) καὶ τὸ ὑποσύνολό του Β (σχ. 92 β΄ σειρὰ) κι᾿ ἂς ἀντιστοιχίσουμε ἕνα μ᾿ ἕνα τὰ στοιχεῖα τοῦ Β πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ Α. Παρατηροῦμε τότε ὅτι ὑπάρχουν καὶ στοιχεῖα τοῦ Α, ποὺ δὲν ἔχουν ἀντίστοιχα στὸ Β. Αὐτὰ τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν ἕνα νέο σύνολο Γ, τό σημειωμένο μὲ τὰ μαῦρα τετραγωνίδια, ποὺ λέγεται **συμπλήρωμα** ἢ **συμπληρωματικὸ** τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ σύνολον ἀναφορᾶς Α. Ὥστε:



Σχ. 92

> **Συμπλήρωμα ἑνὸς συνόλου Β ὡς πρὸς σύνολον ἀναφορᾶς Α λέγεται τὸ σύνολον Γ ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ Α, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ Β.**

Τὸ Γ, συμπληρωματικὸ τοῦ συνόλου Β ὡς πρὸς τὸ Α, σημειώνουμε πάντοτε μὲ τὸ ἴδιο γράμμα τονούμενο, **Β΄**, ποὺ διαβάζουμε: «συμπλήρωμα τοῦ Β».

Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ κι᾿ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ὑποσυνόλου (§ 6) συνάγεται, ὅτι γιὰ ἕνα σύνολο Β καὶ τὸ συμπληρωματικό του Β΄ ὡς πρὸς Α ἀληθεύουν οἱ σχέσεις:

$$B \cap B' = \varnothing \quad \text{καὶ} \quad B \cup B' = A \qquad (94,1)$$

ποὺ σημαίνουν ὅτι τὰ σύνολα Β καὶ Β΄ εἶναι ξένα μεταξύ τους κι᾿ ἡ ἕνωσή τους εἶναι τὸ σύνολον ἀναφορᾶς Α.

Ἀλλὰ τὸ σύνολον Α, περιέχοντας ἐκτὸς ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ Β κι᾿ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τοῦ Β΄, διαφέρει ἀπὸ τὸ Β. Γι᾿ αὐτὸ τὸ λόγο τὸ Β΄ λέγεται καὶ **διαφορὰ τοῦ Α ἀπὸ τὸ Β**, συμβολίζεται ἔτσι:

$$A - B = B' \qquad (94,2)$$

καὶ διαβάζεται: «ἄλφα πλὴν βῆτα». Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴ συνεπαγωγή:

$$B \cap B' = \varnothing \wedge B \cup B' = A \Rightarrow A - B = B' \qquad (94,3)$$

● **Παραδείγματα**: 1. Τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν συμφώνων γραμμάτων, ὡς πρὸς τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, εἶναι τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων.

2. Τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου $B = \{1, 4, 7\}$, ὡς πρὸς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονοψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό: $B' = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$.

3. Ἂν εἶναι $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \varnothing$, θὰ εἶναι: $B' = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

4. Ἂν εἶναι $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{2, 4, 3, 1\}$, θὰ εἶναι: $B' = \varnothing$.

95. Ἡ διαφορὰ δυὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν.—Ἂν τώρα στὶς παραπάνω σχέσεις θέσουμε τοὺς πληθικοὺς ἀριθμούς 7,5 καὶ 2 τῶν συνόλων Α, Β καὶ Γ (σχ. 92), θὰ πάρουμε:

ἀπὸ τὴν $B \cup B'$ τὴν προφανῆ ἰσότητα : $5 + 2 = 7$

καὶ ἀπὸ τὴν $A - B = \Gamma$ τὴν ἰσότητα : $7 - 5 = 2$

ποὺ διαβάζεται: «ἑπτὰ πλὴν (μεῖον) 5 ἴσον 2». Ὁ ἀριθμὸς 2 λέγεται **διαφορὰ τοῦ 7 ἀπὸ τὸν 5.**

Γενικά: δυὸ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α καὶ β, ὅπου $\alpha \geqslant \beta$ (διαβάζεται: «ἄλφα μεγαλύτερο ἢ ἴσο μὲ βῆτα»), μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ δυὸ συνόλων Α καὶ Β, τέτοιων, ποὺ τὸ Β ἔχοντας μικρότερη δυναμικότητα νὰ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Α. Τότε ὅμως θὰ ὑπάρχη κι' ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς γ, ποὺ θὰ εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου $A - B$, δηλ. τοῦ συμπληρωματικοῦ τοῦ Β ὡς πρὸς Α, τέτοιος, ὥστε νὰ εἶναι : $\gamma + \beta = \alpha$. ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γ λέγεται τότε **διαφορὰ τοῦ α ἀπὸ τὸν β**, σημειώνεται μὲ τὴ γραφή:

$$\gamma = \alpha - \beta$$

ποὺ διαβάζεται: «γ ἴσον ἄλφα πλὴν (μεῖον) βῆτα». Ὥστε:

Διαφορὰ $\alpha - \beta$ δυὸ ἀκεραίων ἀριθμῶν α καὶ β ($\alpha \geqslant \beta$) λέγεται ἕνας τρίτος ἀριθμὸς γ τέτοιος, ὥστε νὰ εἶναι $\gamma + \beta = \alpha$.

Ἄρα: $\gamma + \beta = \alpha \Rightarrow \alpha - \beta = \gamma$.

Ἡ πράξη, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βρίσκουμε τὴ διαφορὰ δυὸ ἀριθμῶν α καὶ β ($\alpha \geqslant \beta$) λέγεται **ἀφαίρεση**. Ὥστε:

Ἀφαίρεση δυὸ ἀριθμῶν λέγεται ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία σ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ἀντιστοιχίζομε τὴ διαφορά τους.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται **ὅροι τῆς διαφορᾶς α-β**, ὁ πρῶτος ἀπ' αὐτούς, ὁ α, λέγεται **μειωτέος** κι' ὁ δεύτερος **ἀφαιρετέος**. Τὸ σημεῖο — εἶναι στὴν ἀφαίρεση τὸ σημεῖον πράξεως καὶ ὑποδείχνει ὅτι πρέπει νὰ ἀφαιρεθῆ ὁ β ἀπὸ τὸν α. Τὸ ἐξαγόμενο τῆς ἀφαιρέσεως $\alpha - \beta$ γράφεται: $(\alpha - \beta)$, δηλ. μέσα σὲ παρένθεση.

96. Παρατηρήσεις.—1. Ὅπως δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχιση ἀνάμεσα στοὺς ὅρους **ἄθροισμα** καὶ **πρόσθεση**, ἔτσι πρέπει νὰ διακρίνουμε καὶ τοὺς ὅρους **διαφορὰ** καὶ **ἀφαίρεση**. Ἡ διαφορὰ εἶναι ἕνας ἀριθμός, ἐνῶ ἡ ἀφαίρεση εἶναι μιὰ πράξη.

2. Ἂν εἶναι: $\alpha = \beta$, τότε τὰ σύνολα Α καὶ Β, ποὺ χαρακτηρίζονται ἀπ' αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς, εἶναι ἰσοδύναμα καὶ τὸ συμπλήρωμα τοῦ Β ὡς πρὸς Α εἶναι τὸ κενὸ σύνολο (βλ. § 94 παραδ. 4). Συνεπῶς, ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς γ τοῦ Γ θὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ διαφορά: $\alpha - \beta = \alpha - \alpha = 0$. Ὥστε:

Οἱ ἴσοι, καὶ μόνον οἱ ἴσοι, ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν μηδέν.

3. Ἂν εἶναι: $\alpha < \beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἢ τῶν ἀπολύτων ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἔτσι, ἐνῶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 23 καὶ 15 βρίσκεται μὲ τὴν ἀφαίρεση: $23 - 15 = 8$, δὲν μποροῦμε νὰ γράψουμε: $15 - 23$, γιατὶ δὲν ὑπάρχει κανένας ἀριθμὸς x τοῦ συνόλου Φ

ἢ Φ_0 τέτοιος, ποὺ εἶναι : $x + 23 = 15$. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἡ πράξη $15 - 23$ εἶναι ἀδύνατη. Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνουμε ἀκόμη ὅτι :

Ἡ ἀφαίρεση δυὸ ἀριθμῶν δὲν εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική.

4. Ὅπως στὴν πρόσθεση τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν (§ 60,4), ἔτσι καὶ στὴν ἀφαίρεση οἱ ὅροι μιᾶς διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμοὶ **ὁμοειδεῖς**. Εἶναι ἀδιανόητη ἡ ἀφαίρεση 5 μήλων ἀπὸ 8 αὐγά.

5. Ἀντὶ γιὰ τὸ ρῆμα «ἀφαιρῶ», ποὺ χαρακτηρίζει σύγκριση δυὸ ἀριθμῶν, σὲ πολλὲς περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται τὸ ρῆμα «ἐλαττώνω». Τότε τὸ ἐξαγόμενο τῆς πράξεως λέγεται **ὑπόλοιπο** κι' ὄχι **διαφορά**. Ἔτσι π.χ., ὅταν ἔχουμε 10 βώλους καὶ χάσουμε τοὺς 6 μένει **ὑπόλοιπο** 4 βῶλοι, ἐνῶ, ἂν ὁ πατέρας μου εἶναι 40 ἐτῶν κι' ἐγὼ 14, ἡ **διαφορά** τῆς ἡλικίας μας εἶναι : $40 - 14 = 26$ ἔτη.

97. Συνεπαγωγὴ καὶ ἰσοδυναμία.—Ἡ ἐμπειρία μᾶς ἔχει ἐφοδιάσει μ' ἕνα πλῆθος ἀπὸ λογικοὺς συνδυασμοὺς προτάσεων τέτοιους, ποὺ ἡ ἀλήθεια τῆς μιᾶς προτάσεως νὰ συνεπάγεται τὴν ἀλήθεια καὶ τῆς ἄλλης. Ἔτσι π.χ. λέμε :

— Ὅταν κάποιος εἶναι μαθητὴς τοῦ Γυμνασίου, τότε θὰ εἶναι νέος. (97,1)

— Ὅταν ἀνοίξουμε τὸ διακόπτη τοῦ ἠλεκτρικοῦ, τότε θὰ ἔχουμε φῶς. (97,2)

Τὴ λέξη «τότε» σ' αὐτὲς τὶς προτάσεις μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε μὲ τὶς λέξεις **«ἄρα»**, **«ἕπεται ὅτι»**, **«συνεπῶς»**, **«συνεπάγεται ὅτι»**... κι' ἕνα τέτοιο συνδυασμὸ προτάσεων ὀνομάζουμε **συνεπαγωγή**. Τὸ συνδετικὸ σύμβολο τῆς συνεπαγωγῆς εἶναι τὸ $\Rightarrow$, ποὺ διαβάζεται μ' ἕνα ἀπὸ τοὺς παραπάνω τρόπους.

Ἂν ξεφυλλίσουμε τὶς προηγούμενες σελίδες τοῦ βιβλίου μας, θὰ συγκεντρώσουμε τὶς ὡς τώρα γνωστές μας συνεπαγωγές :

$$\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha \quad (20,2) \qquad \alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \quad (20,3)$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \Phi_0 \Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi_0 \quad (\S\ 64)$$

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \Phi_0 \Rightarrow (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad (\S\ 70)$$

$$B \cap B' = \varnothing \wedge B \cup B' = A \Rightarrow A - B = B' \quad (94,3)$$

$$\gamma + \beta = \alpha \Rightarrow \alpha - \beta = \gamma \quad (\S\ 95).$$

Ἂς ἐξετάσουμε τώρα τὴ συνεπαγωγὴ (97,1). Ἂν P καὶ Q ὀνομάσουμε τὶς δυὸ προτάσεις ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, θὰ ἔχουμε τὴ λογικὴ πράξη τῆς συνεπαγωγῆς :

$$P \Rightarrow Q, \tag{97,3}$$

ποὺ διαβάζεται : «Πὲ συνεπάγεται Κιοῦ» καὶ σημαίνει ὅτι ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως P συνεπάγεται τὴν ἀλήθεια καὶ τῆς προτάσεως Q. Πραγματικά, κάθε μαθητὴς τοῦ Γυμνασίου εἶναι νέος στὴν ἡλικία. Ὅμως κάθε νέος δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ καὶ μαθητὴς τοῦ Γυμνασίου. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως Q δὲν συνεπάγεται καὶ τὴν ἀλήθεια τῆς P.

Ἂν ἰδοῦμε ὅμως τὴ συνεπαγωγὴ (97,2) εἶναι προφανὲς ὅτι :

$$P \Rightarrow Q \quad \text{καὶ} \quad Q \Rightarrow P$$

ποὺ σημαίνει ὅτι ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως P συνεπάγεται τὴν ἀλήθεια τῆς Q καί, ἀντίστροφα, ἡ ἀλήθεια τῆς Q συνεπάγεται τὴν ἀλήθεια τῆς P. Ἡ νέα αὐτὴ λογικὴ πράξη λέγεται **ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ** ἢ **λογικὴ**

ἰσοδυναμία ἢ καί, συντομώτερα, **ἰσοδυναμία** καὶ συμβολίζεται ἔτσι:

$$P \Leftrightarrow Q \qquad (97,4)$$

ὅπου τὸ σύμβολο $\Leftrightarrow$ διαβάζεται συνήθως «**ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν**» ἢ «**ὅταν καὶ μόνον ὅταν**» ἢ «**εἶναι ἰσοδύναμο**». Ἔτσι ἡ ἰσοδυναμία (97,2) διατυπώνεται ἔτσι: «Θὰ ἔχουμε φῶς, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, ἀνοίξουμε τὸν διακόπτη τοῦ ἠλεκτρικοῦ».

Ἡ ἰσοδυναμία δυὸ σχέσεων μᾶς ἐπιτρέπει, ὅταν μᾶς χρειάζεται, νὰ ἀντικαθιστοῦμε τὴ μιὰ σχέση μὲ τὴν ἄλλη.

98. Σχέση μεταξὺ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.—Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω οἱ σχέσεις $\alpha - \beta = \gamma$ καὶ $\alpha = \beta + \gamma$ συνιστοῦν τὴν ἰσοδυναμία

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma \qquad (98,1)$$

ποὺ παρουσιάζει τὴν ἀφαίρεση σὰν μιὰ πράξη, μὲ τὴν ὁποία γίνεται δυνατὴ ἡ εὕρεση τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος δυὸ ἀριθμῶν, ὅταν δίνεται αὐτὸ τὸ ἄθροισμα καὶ ὁ ἄλλος ὅρος του.

Αὐτὸ τὸ συμπέρασμα ἐκφράζομε λέγοντας ὅτι:

Ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξη ἀντίστροφη τῆς προσθέσεως.

Τὸ ἀντιστρεπτὸ τῶν δυὸ αὐτῶν πράξεων ἐκδηλώνεται πρακτικὰ μὲ τὴν ἐξουδετέρωση τῆς μιᾶς πράξεως ἀπὸ τὴν ἄλλη. Ἔτσι εἶναι:

$$(8-5)+5=3+5=8 \quad \text{καὶ} \quad (8+5)-5=13-5=8$$

καὶ γενικά:

$$(\alpha-\beta)+\beta=\alpha \quad \text{καὶ} \quad (\alpha+\beta)-\beta=\alpha \qquad (98,2)$$

Οἱ σχέσεις αὐτὲς βγαίνουν εὔκολα ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία (98,1). Πράγματι· ἂν στὴν ἰσότητα: $\alpha - \beta = \gamma$, ἀντικαταστήσουμε τὸ α μὲ ἴσον του $\gamma + \beta$, θὰ ἔχουμε: $(\gamma+\beta)-\beta=\gamma$. Ἐπίσης ἂν στὴν ἰσότητα: $\gamma + \beta = \alpha$ ἀντικαταστήσουμε τὸ γ μὲ τὸ ἴσον του $\alpha - \beta$, θὰ ἔχουμε: $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$. Ὥστε:

Ἡ ἀφαίρεση ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ἡ πρόσθεση τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ, ὅταν ἐκτελεσθοῦν διαδοχικά, ἀναιροῦν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη.

Ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία (98,1) συνάγεται ὅτι σὲ κάθε ἄθροισμα δυὸ ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ ἀντιστοιχίσουμε δυὸ διαφορές:

$$\beta+\gamma=\alpha \Leftrightarrow \alpha-\beta=\gamma \quad \text{καὶ} \quad \beta+\gamma=\alpha \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta \qquad (98,3)$$

Ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς ἰσοδυναμίες μὲ τὴ μεταβατικότητα συνάγεται ἡ:

$$\alpha-\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta \qquad (98,4)$$

99. Συμβολὴ στὴν ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων.—Οἱ παραπάνω ἰσοδυναμίες (98,3) μᾶς ἐπιτρέπουν τὴν ἐπίλυση ἐξισώσεων, ποὺ ἔχουν τὴν μορφή:

$$x+\beta=\alpha \quad \text{ἢ} \quad \alpha-x=\beta \quad \text{ἢ} \quad x-\beta=\gamma$$

ὅπου x εἶναι ὁ ἄγνωστος καὶ α, β γνωστοὶ ἀριθμοί.

Πρόβλημα I: Δυὸ συμμαθηταὶ σας ἔχουν μαζὶ 10 γραμματόσημα. Ἂν ὁ δεύτερος ἔχει 3 γραμματόσημα, πόσα ἔχει ὁ πρῶτος;

Λύση: Ἂν x εἶναι τὰ γραμματόσημα τοῦ πρώτου, ὁ ἀριθμὸς x καὶ ὁ 3 πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα 10. Ὥστε ὁ x πρέπει νὰ ἐπαληθεύει τὴν ἰσότητα:

$$x+3=10$$

Αὐτὴ ὅμως ἡ ἰσότης εἶναι μιὰ ἐξίσωση γιὰ τὸν x, ποὺ θὰ λυθῆ εὔκολα μὲ τὴν ἰσοδυναμία (98,1). Εἶναι:

$$x + 3 = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 3$$

καὶ $x = 7$. Ὥστε ὁ πρῶτος εἶχε 7 γραμματόσημα.

Πρόβλημα ΙΙ. Ἕνας μαθητὴς εἶχε 20 βώλους καί, ἀφοῦ παίζοντας ἔχασε μερικούς, ἀπέμεινε μὲ 12 βώλους. Πόσους ἔχασε ;

Λύση : Ἂν x ἦταν ὁ ἀριθμὸς τῶν βώλων, ποὺ ἔχασε, τὸ ὑπόλοιπον $20 - x$ θὰ εἶναι 12. Ὥστε θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση :

$$20 - x = 12$$

ποὺ μὲ τὴν ἰσοδυναμία (98,4) μπορεῖ ν' ἀντικατασταθῆ ἀπὸ τὴν

$$20 - 12 = x \quad \text{ἢ} \quad x = 20 - 12$$

Ἄρα $x = 8$. Ὥστε εἶχε χάσει 8 βώλους.

Πρόβλημα ΙΙΙ. Ἕνα αὐτοκίνητο εἶχε νὰ διατρέξη τὴν ἀπόσταση ἀνάμεσα σὲ δυὸ πόλεις. Ἀφοῦ διέτρεξε 70 km ἀπομένουν ἀκόμη 30 km γιὰ νὰ φθάση στὸ τέρμα. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀπόσταση πού χωρίζει τὶς δυὸ πόλεις ;

Λύση : Ἂν x εἶναι αὐτὴ ἡ ἀπόσταση, ἡ διαφορὰ $x - 70$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ 30. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση :

$$x - 70 = 30$$

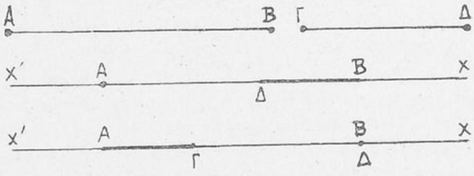
Ἐφαρμόζοντας σ' αὐτὴ τὴν ἰσοδυναμία (98,1) θὰ ἔχουμε :

$$x - 70 = 30 \Leftrightarrow x = 70 + 30$$

καὶ $x = 100$ km. Ὥστε ἡ ἀπόσταση ἦταν 100 km.

100. Ἀφαίρεση εὐθ. τμημάτων ἢ τόξων.—1. Γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε δυὸ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 93), παίρνουμε μιὰν εὐθεῖα x′x, πάνω σ' αὐτὴ μεταφέρομε τὸ τμῆμα ΑΒ κι' ἔπειτα πάνω στὸ ΑΒ τὸ ΓΔ ἔτσι, ποὺ τὸ Γ νὰ συμπέση μὲ τὸ Α. Τὸ τμῆμα ΔΒ θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὥστε εἶναι :

$$AB - \Gamma\Delta = \Delta B, \text{ ὅπου } AB = \Gamma\Delta + \Delta B$$



Σχ. 93. Ἀφαίρεση εὐθ. τμημάτων

Ἀλλὰ στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ φθάσουμε, ἂν μεταφέρουμε τὸ ΓΔ πάνω στὸ ΑΒ ἔτσι, ποὺ τὸ Δ νὰ ἐφαρμόση στὸ Β. Τότε θὰ εἶναι :

$$AB - \Gamma\Delta = A\Gamma, \quad \text{ὅπου} \quad AB = A\Gamma + \Gamma\Delta$$

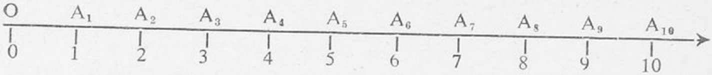
Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο γίνεται καὶ ἡ ἀφαίρεση δυὸ τόξων. Ἔτσι (σχ. 85, σελ. 77) εἶναι :

$$\overset{\frown}{A\Gamma} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma}$$

Πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι, ὅταν μιλᾶμε γιὰ πρόσθεση ἢ ἀφαίρεση τόξων, ἐννοοῦμε πάντοτε τόξα, ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες.

101. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς ἀφαιρέσεως.— Ὅπως τὴν πρόσθεση, ἔτσι καὶ τὴν ἀφαίρεση δυὸ ἀριθμῶν, μποροῦμε νὰ ἐκτελέσουμε, χρησιμοποιώντας τὶς γεωμετρικὲς εἰκόνες αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι ἡ ἀφαίρεση : 10 — 3 θὰ γίνη, ἂν ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα OA_{10} (σχ. 94),

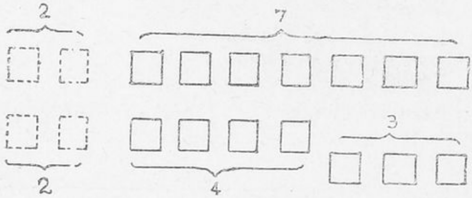


Σχ. 94 Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς ἀφαιρέσεως

ποὺ εἶναι ἴσο μὲ 10 μονάδες μήκους ἀφαιρέσουμε, μὲ τὸν δεύτερο ἀπὸ τοὺς παραπάνω τρόπους, ἕνα τμῆμα ἴσο μὲ τρεῖς μονάδες, ὅπως τὸ A_7A_{10}. Ἡ διαφορὰ $A_0A_{10} - A_7A_{10} = A_0A_7$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν ἀριθμὸν 7, ἀποτελεῖ τὴ διαφορὰ 10 — 3.

Τὴν ἴδια διαφορὰ θὰ βροῦμε, ἂν φαντασθοῦμε ἕνα κινητὸ σημεῖο, ποὺ ξεκινώντας ἀπὸ τὸ O διατρέχει τὸ τμῆμα OA_{10} κι' ἀπὸ τὴ θέση A_{10} ξαναγυρίζει πρὸς τὸ O διατρέχοντας τὸ τμῆμα $A_{10}A_7$, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ 3 μονάδες μήκους. Γεωμετρικὴ εἰκόνα τῆς διαφορᾶς θὰ εἶναι πάλι τὸ τμῆμα OA_7 μήκους 7 μονάδων.

102. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως.—Ἂς πάρουμε τὴ διαφορά : 7 — 4 κι' ἂς θεωρήσουμε τοὺς ὅρους της ὡς πληθικοὺς ἀριθμοὺς δυὸ συνόλων ἀπὸ τετραγωνικὰ σύμβολα (σχ.95). Εὔκολα στὸ σχῆμα διακρίνομε τὴ διαφορὰ τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων μὲ πληθικὸν ἀριθμὸ 3.



Σχ. 95. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως

Ἂν τώρα αὐξήσουμε καὶ τὰ δυὸ σύνολα κατὰ 2 ἀκόμη στοιχεῖα, τὰ τετραγωνικὰ σύμβολα μὲ τὴ διακεκομμένη γραμμή, οἱ πληθικοί τους ἀριθμοὶ γίνονται : 7 + 2 καὶ 4 + 2, ἐνῶ ἡ διαφορά τους : (7 + 2) — (4 + 2) ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι 3.

Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆ, ἂν τὰ δυὸ σύνολα ἐλαττώσουμε κατὰ τὸ ἴδιο πλῆθος στοιχείων, ὅσο γίνεται, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ αὐτὴ ἡ ἐλάττωση.

Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνομε ὅτι :

> **Ἡ διαφορὰ δυὸ ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει, ἂν αὐξήσουμε ἢ ἐλαττώσουμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους της κατὰ τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

Γενικά, ἂν α καὶ β εἶναι οἱ ὅροι τῆς διαφορᾶς, ὅπου $\alpha \geqslant \beta$, καὶ k ὁ ἀριθμός, ποὺ προσθέτομε στοὺς δυὸ ὅρους τῆς διαφορᾶς ἢ ἀφαιροῦμε, ὁπότε $k \leqslant \beta$, αὐτὴ ἡ ἰδιότης ἐκφράζεται μὲ τὶς ἰσότητες :

$$\alpha - \beta = (\alpha + k) - (\beta + k) = (\alpha - k) - (\beta - k)$$

Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς ἰσότητες αὐτὲς μπορεῖ ν' ἀποδειχθῆ καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἂν γ εἶναι ἡ διαφορά, θὰ εἶναι :

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

Ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ εἶναι καί :

$$(\alpha + k) - (\beta + k) = \gamma \Leftrightarrow (\beta + k) + \gamma = \alpha + k$$

Ἡ δεύτερη ὅμως ἀπὸ τὶς ἰσότητες μὲ τὴν προσεταιρικὴν ἰδιότητα γίνεται: $(\beta + k) + \gamma = (\beta + \gamma) + k = \alpha + k$, ἐπειδὴ $\beta + \gamma = \alpha$. Ἄρα εἶναι ἀληθὴς καί, λόγω τῆς ἰσοδυναμίας, ἀληθὴς θὰ εἶναι καὶ ἡ πρώτη. Ἡ μεταβατική, τέλος, ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψουμε τὴν ἰσότητα:

$$\alpha - \beta = (\alpha + k) - (\beta + k)$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι θεμελιώδης. Μᾶς διευκολύνει στὴ νοερὴ ἐκτέλεση τῆς πράξεως καὶ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἐξήγηση τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖο γίνεται ἡ ἀφαίρεση δυὸ ἀριθμῶν.

Μιὰ εὔκολη ἐπαλήθευση αὐτῆς τῆς ἰδιότητος δίνει τὸ ἀκόλουθο πρόβλημα: Ἕνας πατέρας εἶναι 30 ἐτῶν κι' ἡ κόρη του 5 ἐτῶν. Ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας τους εἶναι, προφανῶς, 25 ἔτη. Ἡ ἴδια θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτὴ κι' ὕστερα ἀπὸ 10, 20... ἔτη, ἢ ἦταν πρὶν 2,3 ἢ 4 ἔτη.

103. Ἄλλες ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.— 1. **Ἀφαίρεση ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄθροισμα**: Ἡ διαφορά: $(3 + 5 + 10) - 8$ ἔχει μειωτέον ἕνα ἄθροισμα, ποὺ ἕνας του ὅρος, ὁ 10, εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο 8. Ἄν ἐκτελέσουμε τὴν ἀφαίρεση $10 - 8$, τὸ ἄθροισμα θὰ γίνη: $3 + 5 + (10 - 8)$. Αὐτὸ τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὴ διαφορά, ποὺ μᾶς δόθηκε. Θὰ εἶναι δηλ.:

$$\underbrace{(3 + 5 + 10)}_{\alpha} - \underbrace{8}_{\beta} = \underbrace{3 + 5 + (10 - 8)}_{\gamma}$$

Πράγματι· σύμφωνα μὲ τὴ βασικὴν ἰσοδυναμία τῆς ἀφαιρέσεως (98,1) καὶ τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (70,2), θὰ εἶναι:

$$\underbrace{[3 + 5 + (10 - 8)]}_{\gamma} + \underbrace{8} = 3 + 5 + [(10 - 8) + 8] = \underbrace{3 + 5 + 10}_{\alpha}$$

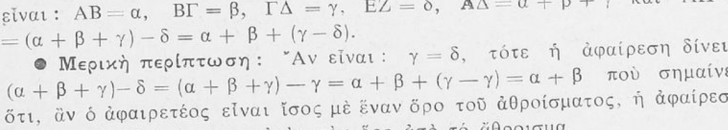
Γενικά, ἂν ἔχουμε τὴ διαφορά: $(\alpha + \beta + \gamma) - \delta$ καὶ ὑπάρχει ὅρος τοῦ ἀθροίσματος μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο δ, π.χ. $\gamma > \delta$, θὰ εἶναι:

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \delta = \alpha + \beta + (\gamma - \delta) \qquad (103,1)$$

Ὥστε:

Γιὰ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ τὸν ἀφαιρέσουμε, ἂν εἶναι δυνατόν, ἀπὸ ἕνα μόνον ὅρο τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοὺς ἄλλους νὰ ἀφήσουμε ὅπως εἶναι.

Μιὰ γεωμετρικὴν ἑρμηνεία αὐτῆς τῆς πράξεως δίνει τὸ σχῆμα 96, ὅπου



Σχ. 96. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς πράξεως: $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+\beta+(\gamma-\delta)$

εἶναι: $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $EZ = \delta$, $A\Delta = \alpha + \beta + \gamma$ καὶ $AH = (\alpha + \beta + \gamma) - \delta = \alpha + \beta + (\gamma - \delta)$.

● **Μερικὴ περίπτωση**: Ἄν εἶναι: $\gamma = \delta$, τότε ἡ ἀφαίρεση δίνει: $(\alpha + \beta + \gamma) - \delta = (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \alpha + \beta + (\gamma - \gamma) = \alpha + \beta$ ποὺ σημαίνει ὅτι, ἂν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ ἕναν ὅρο τοῦ ἀθροίσματος, ἡ ἀφαίρεση θὰ γίνη, ἂν ἐξαλείψουμε αὐτὸν τὸν ὅρο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα.

2. **Ἀφαίρεση ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμόν:** Ἡ διαφορά: $30-(8+5+10)$ ἔχει ἀφαιρετέον ἕνα ἄθροισμα, μικρότερο ἀπὸ τὸν μειωτέο. Ἂν ὀνομάσουμε x αὐτὴ τὴ διάφορά, θὰ ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία:

$$30-(8+5+10)=x \Leftrightarrow x+(8+5+10)=30$$

Ἡ β' ἰσότης γράφεται: $x+(8+5+10)=x+8+5+10=x+10+5+8=(x+10+5)+8=30$ καὶ μὲ διαδοχικὴν ἐφαρμογὴ τῆς βασικῆς ἰσοδυναμίας (98,1) θὰ ἔχουμε στὴ σειρά:

$x+10+5=30-8,\qquad x+10+5=30-8,\qquad x+10=(30-8)-5,$

$$x=[(30-8)-5]-10$$

καὶ μὲ τὴν ἰδιότητα τῆς μεταβατικότητος (20,3) θὰ ἔχουμε:

$$30-(8+5+10)=[(30-8)-5]-10$$

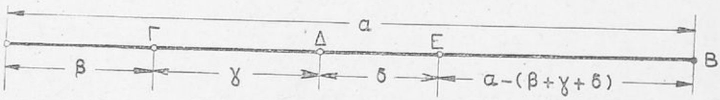
καὶ γενικά:

$$\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta \qquad (103,2)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Γιὰ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸ ἕνα ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσουμε διαδοχικὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος.**

Τὴ γεωμετρικὴν ἑρμηνεία αὐτῆς τῆς πράξεως δίνει τὸ σχῆμα 97, ὅπου



Σχ. 97. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς πράξεως: $\alpha-(\beta+\gamma+\delta)=[(\alpha-\beta)-\gamma]-\delta$

$AB=\alpha\quad A\Gamma=\beta,\quad \Gamma\Delta=\gamma,\quad \Delta E=\delta$ καὶ $EB=\alpha-(\beta+\gamma+\delta)$

3. **Πρόσθεση διαφορᾶς σὲ ἀριθμό:** Ἔχουμε τὸ ἄθροισμα: $10+(7-3)$, ποὺ ὁ ἕνας του ὅρος εἶναι μιὰ διαφορά. Ἂν τὸ ὀνομάσουμε x θὰ ἔχουμε:

$$x=10+(7-3)$$

πού, σύμφωνα μὲ τὴν ἰσοδυναμία (98,1) δίνει στὴ σειρὰ τὶς ἰσότητες:

$x-10=7-3,\qquad x-10+3=7,\qquad x+3=10+7,\qquad x=(10+7)-3$

καὶ μὲ τὴ μεταβατικὴν ἰδιότητα καὶ τὴν 1η ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως (104,1):

$$10+(7-3)=(10+7)-3=(10-3)+7$$

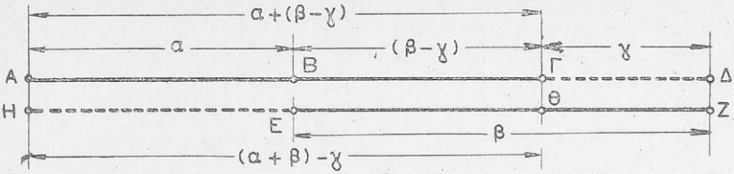
καὶ γενικά, ἂν $\alpha<\gamma$, θὰ ἔχουμε:

$$\alpha+(\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta \qquad (103,3)$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Γιὰ νὰ προσθέσουμε σ' ἕναν ἀριθμὸ μιὰ διαφορά, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε στὸν ἀριθμὸ τὸν μειωτέο κι' ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενο ν' ἀφαιρέσουμε τὸν ἀφαιρετέο τῆς διαφορᾶς ἢ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸν ἀφαιρετέο τῆς διαφορᾶς, ἂν αὐτὸ εἶναι δυνατόν, κι' ἔπειτα νὰ προσθέσουμε τὸν μειωτέο.**

Γεωμετρικὴν ἑρμηνεία τῆς πράξεως αὐτῆς δίνει τὸ σχῆμα 98, ὅπου: $AB=\alpha,\ EZ=\beta,\ \Gamma\Delta=\Theta Z=\gamma,\ B\Gamma=B\Delta-\Gamma\Delta=EZ-\Gamma\Delta=\beta-\gamma,\ A\Gamma=AB+B\Gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$ καὶ $H\Theta=HZ-\Theta Z=(\alpha+\beta)-\gamma=A\Gamma$.



Σχ. 98. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς πράξεως: $\alpha + (\beta - \gamma) = (\alpha + \beta) - \gamma$

4. **Ἀφαίρεση διαφορᾶς ἀπὸ ἀριθμό**: Ἂς πάρουμε τὴ διαφορά: $12 - (9 - 4)$, ὅπου ὁ ἀφαιρετέος της εἶναι μιὰ διαφορά, κι' ἂς τὴν ὀνομάσουμε x. Θὰ εἶναι:

$$x = 12 - (9 - 4)$$

κι' ἂν ἐφαρμόσουμε τὴν ἰσοδυναμία (98,1) καθὼς καὶ τὴν παραπάνω ἰδιότητα (103,3), θὰ ἔχουμε στὴ σειρά:

$$x + (9 - 4) = 12, \quad (x + 9) - 4 = 12, \quad x + 9 = 12 + 4, \quad x = (12 + 4) - 9$$

ὁπότε, μὲ τὴ μεταβατικὴν ἰδιότητα καὶ τὴν ἰδιότητα (103,1), θὰ εἶναι:

$$12 - (9 - 4) = (12 + 4) - 9 = (12 - 9) + 4$$

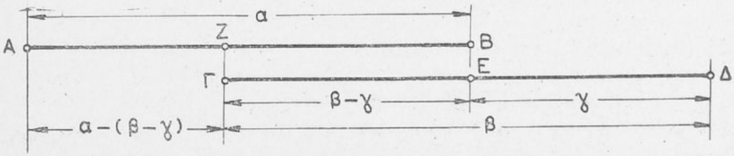
καὶ γενικά, ἂν $\alpha > \beta$, θὰ ἔχουμε τὶς ἰσότητες:

$$\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta = (\alpha - \beta) + \gamma \qquad (103,4)$$

ποὺ σημαίνουν ὅτι:

Γιὰ ν' ἀφαιρέσουμε μιὰ διαφορὰ ἀπὸ ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε στὸν ἀριθμὸ τὸν ἀφαιρετέο τῆς διαφορᾶς κι' ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ν' ἀφαιρέσουμε τὸν μειωτέο ἢ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸν μειωτέο, ἂν αὐτὸ εἶναι δυνατό, κι' ἔπειτα νὰ προσθέσουμε τὸν ἀφαιρετέο.

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς πράξεως αὐτῆς βρίσκεται στὸ σχῆμα 99,



Σχ. 99. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς πράξεως: $\alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha + \gamma) - \beta$

ὅπου: $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \beta$, $E\Delta = \gamma$, $\Gamma E = \Gamma\Delta - E\Delta = \beta - \gamma$ καὶ $AZ = AB - \Gamma E = \alpha - (\beta - \gamma)$.

104. Ἀριθμητικὰ πολυώνυμα.—Κάθε γραφὴ τῆς μορφῆς:

$$30 - 12 + 8 - 4 - 6 \quad \text{ἢ καὶ γενικὰ} \quad \alpha - \beta - \gamma + \delta - \varepsilon$$

μᾶς ὑποδείχνει τὴν διαδοχικὴν ἐκτέλεση μεταξὺ τῶν σημειωμένων ἀριθμῶν τῶν προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, ποὺ συμβολίζονται μὲ τὰ σημεῖα + καὶ −.

Μιὰ τέτοια ἀκολουθία προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων ἐπὶ ἀριθμῶν λέγεται **ἀριθμητικὸ πολυώνυμο**, κι' οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τὴν ἀποτελοῦν **ὅροι** τοῦ πολυωνύμου.

Τὸ ἐξαγόμενο τῆς διαδοχικῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων λέγεται **τιμὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου.**

Ἡ τιμὴ τοῦ παραπάνω ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου θὰ βρεθῆ ἔτσι:

$$30 - 12 + 8 - 4 - 6 = \left([(30 - 12) + 8] - 4 \right) - 6 = [(18 + 8) - 4] - 6$$
$$= (26 - 4) - 6 = 22 - 6 = 16$$

Κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου μποροῦμε ν' ἀλλάξουμε τὴν τάξη τῶν ὅρων του, ἀρκεῖ στὴ νέα διαδοχὴ τῶν πράξεων νὰ εἶναι δυνατὲς οἱ ἀφαιρέσεις. Ἔτσι π.χ. μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$15 - 6 + 8 - 10 = 15 + 8 - 6 - 10$$

ὅπως εὔκολα ἐπαληθεύεται, ἀλλὰ δὲν μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$15 - 6 + 8 - 10 = 15 - 6 - 10 + 8$$

Οἱ πράξεις ἑνὸς ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου δὲν εἶναι μόνο **ἀντιμεταθετικές**, ὑπὸ ὅρους, ἀλλὰ καὶ **προσεταιριστικές**. Αὐτὸς μάλιστα ὁ προσεταιρισμὸς σὲ συνδυασμὸ μὲ τὶς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ δίνουμε σ' ἕνα ἀριθμητικὸ πολυώνυμο μιὰ μορφὴ πιὸ ἁπλῆ. Ἔτσι π.χ. εἶναι:

$$12 - (\alpha + 7 - \beta) = 12 - [(\alpha + 7) - \beta] = 12 + \beta - (\alpha + 7) =$$
$$12 + \beta - \alpha - 7 = 5 + \beta - \alpha$$
$$24 - (47 - \alpha) = 24 + \alpha - 47 = \alpha + 24 - 47 = \alpha - (47 - 24) = \alpha - 23$$

105. Ἡ πράξη τῆς ἀφαιρέσεως.—Ἡ ἐκτέλεση τῆς ἀφαιρέσεως δυὸ ἀριθμῶν μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὸ Δημοτικὸ Σχολεῖο. Ἐδῶ θὰ περιορισθοῦμε μόνο στὸ νὰ ἐξηγήσουμε, μὲ βάση τὶς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖον γίνεται αὐτὴ ἡ πράξη.

Ἄς πάρουμε γιὰ παράδειγμα τὴν ἀφαίρεση: 3452 — 865 κι' ἄς παραστήσουμε μὲ τὰ γράμματα Μ, Δ, Ε, Χ,... τὶς μονάδες, δεκάδες, ἑκατοντάδες, χιλιάδες... Εἶναι:

$$3452 - 865 = (3X + 4E + 5\Delta + 2M) - (8E + 6\Delta + 5M)$$
$$= 3X + 4E + 5\Delta + 2M - 8E - 6\Delta - 5M$$

Ἀλλὰ σ' αὐτὸ τὸ ἀριθμητικὸ πολυώνυμο δὲν μπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῆ ἡ ἀντιμεταθετικότης καὶ προσεταιριστικότης, γιατὶ δὲν μποροῦν νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις μεταξὺ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων. Γι' αὐτὸ καταφεύγουμε στὴ θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως (§ 102), ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ προσθέτουμε στὸν μειωτέο καὶ τὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιον ἀριθμό. Προσθέτομε λοιπὸν στὸν μειωτέο 10 Μ (= 1 Δ) καὶ 10 Δ (= 1 Ε) καὶ 10 Ε (=1 Χ) καὶ στὸν ἀφαιρετέο 1 Δ καὶ 1 Ε καὶ 1 Χ, κι' ἔτσι ἔχομε:

$$\begin{aligned} 3452 - 865 &= (3X + 14E + 15\Delta + 12M) - (1X + 9E + 7\Delta + 5M) \\ &= 3X + 14E + 15\Delta + 12M - 1X - 9E - 7\Delta - 5M \\ &= (3 - 1)X + (14 - 9)E + (15 - 7)\Delta + (12 - 5)M \\ &= 2X + 5E + 8\Delta + 7M \\ &= 2587 \end{aligned}$$

106. Ἀφαίρεση συμμιγῶν καὶ δεκαδικῶν ἀριθμῶν.—Οἱ παρατηρήσεις, ποὺ μᾶς ἔδειξαν τὸν τρόπο γιὰ τὴν πρόσθεση τῶν συμμιγῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν (§ 73), ἰσχύουν ἐξ ὁλοκλήρου καὶ στὴν ἀφαίρεση. Ὥστε καὶ ἡ ἀφαίρεση αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν γίνεται ὅπως καὶ τῶν ἀκεραίων.

Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα δείχνουν τὸν τρόπο, ποὺ γίνεται ἡ ἀφαίρεση τῶν ἀκεραίων, τῶν συμμιγῶν καὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{r} 46\,326\,532 \\ -\ \ 8\,738\,654 \\ \hline 37\,587\,878 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 5\text{ yd} & 1\text{ ft} & 6\text{ in} \\ -\ 2 & 2 & 10 \\ \hline 2\text{ yd} & 1\text{ ft} & 8\text{ in} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 204{,}107 \\ -\ \ 68{,}620\,6 \\ \hline 135{,}486\,4 \end{array}$$

107. Πῶς γίνεται ὁ ἔλεγχος τῆς ἀφαιρέσεως.—1. Ἡ ἰσοδυναμία (98,1)

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta + \gamma = \alpha$$

μᾶς ὑποδείχνει ὅτι ὁ ἔλεγχος μιᾶς ἀφαιρέσεως γίνεται μὲ τὴν ἀντίστοιχη σ᾽ αὐτὴν πρόσθεση. Ἀφοῦ δηλ. ἐκτελεσθῆ ἡ ἀφαίρεση, προσθέτομε στὸν ἀφαιρετέο τὴ διαφορά, ὁπότε, ἂν κι᾽ οἱ δυὸ αὐτὲς πράξεις ἔχουν γίνη σωστά, πρέπει νὰ βρεθῆ ὁ μειωτέος (παράδειγμα α′).

$$\alpha)\ \begin{array}{r} 834 \\ -\ 576 \\ \hline +\ 258 \\ \hline 834 \end{array} \qquad \beta)\ \begin{array}{r} 834 \\ -\ 258 \\ \hline +\ 576 \\ \hline 834 \end{array}$$

2. Ἡ ἰσοδυναμία ἐξ ἄλλου: $\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta$ (98,4) μᾶς ὑποδείχνει ὅτι γιὰ τὸν ἔλεγχο τῆς ἀφαιρέσεως, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸν μειωτέο ν᾽ ἀφαιρεθῆ ἡ διαφορά, ὁπότε πρέπει νὰ βρεθῆ ὁ ἀφαιρετέος (παράδειγμα β′). Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς δοκιμῆς, περισσότερο θεωρητικός, δὲν ἐφαρμόζεται στὴν πράξη.

3. Ἕνα τρίτον τρόπο δοκιμῆς τῆς ἀφαιρέσεως, ποὺ ἐφαρμόζεται γενικὰ σ᾽ ὅλες τὶς πράξεις, θὰ γνωρίσουμε ἀργότερα.

108. Ἐφαρμογὴ τῶν ἰδιοτήτων στὴ νοερὴ ἀφαίρεση.— Οἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως μᾶς διευκολύνουν στὴ νοερὴ ἐκτέλεση τῆς ἀφαιρέσεως, ὅπως στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1ο. Μὲ ἀποσύνθεση τοῦ ἀφαιρετέου. Εἶναι: $876 - 245 = 876 - (200 + 40 + 5) = [(876 - 200) - 40] - 5 = (676 - 40) - 5 = 636 - 5 = 631$. Ἀφαιροῦμε δηλ. ἀπὸ τὸν μειωτέο τὶς μονάδες διαφόρων τάξεων τοῦ ἀφαιρετέου, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴν ἀνώτερη τάξη.

Ἔτσι γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕναν ἀριθμὸν τὸν 11 (10 + 1), ἀφαιροῦμε 10 κι᾽ ἔπειτα 1. Τὸ ἴδιο, γιὰ ν᾽ ἀφαιρέσουμε 101, ἀφαιροῦμε πρῶτα 100 κι᾽ ἔπειτα 1. Ἔτσι γίνεται κι᾽ ἡ ἀφαίρεση τοῦ 1001, 10001...

2ο. Ἡ ἀφαίρεση δύο ἀριθμῶν ποὺ λήγουν σὲ 0, γίνεται μὲ τὴν ἀφαίρεση τῶν δεκάδων τους καὶ τὴν ἀναγραφὴ ἑνὸς μηδενικοῦ στὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς. Τὸ ἴδιο γίνεται, ἂν οἱ ἀριθμοὶ λήγουν στὸν ἴδιον ἀριθμὸ μηδενικῶν.

Π. χ. $140 - 60 = 80$, $3800 - 700 = 3100$, $67\,000 - 23\,000 = 44\,000$.

3ο. Ἂν οἱ ἀριθμοὶ λήγουν στὸ ἴδιο ψηφίο, ἀφαιροῦμε τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦν τὰ ἄλλα ψηφία καὶ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς γράφομε 0.

Π. χ. $73 - 23 = 50$, $728 - 418 = 310$, $68\,734 - 25\,034 = 43\,700$.

4ο. Μὲ τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἀφαιρετέου, ὥστε νὰ τελειώνη σὲ μηδὲν καὶ τὴ διόρθωση τοῦ ἀποτελέσματος. Π. χ. εἶναι: $70 - 16 = 70 - (20 - 4) = (70 - 20) + 4 = 50 + 4 = 54$. Ἐπίσης εἶναι: $346 - 68 = (346 - 70) + 2 = 276 + 2 = 278$.

Ἔτσι γιὰ ν᾽ ἀφαιρέσουμε τὸν 9, 99, 999..., ἀφαιροῦμε, ἀντίστοιχα, 10, 100, 1000... καὶ στὸ ἀποτέλεσμα προσθέτομε 1.

5ο. Μὲ τὸ συμπλήρωμα καὶ τῶν δυὸ ὅρων. Εἶναι: $100 - 47 = (100 + 3) - (47 + 3) = 103 - 50 = 53$. Ἐπίσης εἶναι: $500 - 385 = 515 - 400 = 115$.

109. Ἡ ἀφαίρεση σὲ ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως.— Ὅπως ἡ πρόσθεση, ἔτσι κι' ἡ ἀφαίρεση δυὸ ἀριθμῶν ὁποιουδήποτε συστήματος ἀριθμήσεως γίνεται, ὅπως ἀκριβῶς καὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

$$\begin{array}{rr} & 2525 \\ - & 781 \\ \hline & 1\,634 \\ \hline & 2\,525 \end{array} \quad \boxed{9}$$

Ἔτσι π. χ., γιὰ νὰ ἐκτελέσουμε τὴν ἀφαίρεση: $(2525)_9 - (781)_9$, γράφομε τοὺς ἀριθμοὺς σὲ μιὰ στήλη, παραλείποντας τὸν δείκτη, κι' ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς ἁπλὲς μονάδες ἐργαζόμαστε ἔτσι:

Τὸ $5 - 1 = 4$ καὶ γράφομε 4. Τὸ 8 ἀπὸ 2 δὲν ἀφαιρεῖται. Προσθέτομε λοιπὸν 9 μονάδες β' τάξεως στὸ 2 κι' ἔχομε τὴν ἀφαίρεση: $(2 + 9) - 8 = 11 - 8 = 3$ μονάδες β' τάξεως. Στὸν ἀφαιρετέο προσθέτομε 1 μονάδα γ' τάξεως καὶ γίνεται $7 + 1 = 8$. Ἀλλὰ τὸ 8 ἀπὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται. Προσθέτομε τότε στὸ μειωτέο 9 μονάδες γ' τάξεως κι' ἔτσι ἔχομε τὴν ἀφαίρεση: $(5 + 9) - 8 = 14 - 8 = 6$ μονάδες γ' τάξεως. Στὸν ἀφαιρετέο προσθετομε, τέλος, 1 μονάδα δ' τάξεως, ποὺ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὶς ἀντίστοιχες μονάδες τοῦ μειωτέου καὶ δίνει διαφορὰ 1.

Τὴ διάταξη, καθὼς καὶ τὴ δοκιμὴ τῆς πράξεως, δίνομε παραπάνω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α' Σειρά: 281. Ποιὸ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, ποὺ ἔχουν ἀπὸ 31 ἡμέρες, ὡς πρὸς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους;

282. Μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, νὰ γράψετε τὰ συμπληρωματικὰ τοῦ συνόλου: i) τῶν βραχέων φωνηέντων, ii) τῶν μακρῶν φωνηέντων, iii) τῶν διχρόνων φωνηέντων.

283. Ἂν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς πάρουμε τὸ σύνολο τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων καὶ εἶναι: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 4, 8\}$, $\Gamma = \{5\}$, $\Delta = \{0, 3, 6, 9\}$, νὰ βρεθοῦν τά: i) A', ii) B', iii) Γ', iv) Δ', v) $A \cup \Gamma'$ vi) $(B \cup \Gamma)'$, vii) $(A \cup B)'$, viii) $B' \cap \Delta'$, ix) $(A \cap B')'$, x) $(A' \cup \Delta) \cup (B' \cap \Gamma)$.

284. Νὰ βρεθῆ: i) τὸ $\{0\}'$ ὡς πρὸς τὸ Φ_0 καὶ ii) τὸ Φ' ὡς πρὸς τὸ Φ_0.

285. Νὰ γράψετε τὴν ἀφαίρεση, ποὺ δίνει τὴ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν 200 καὶ 80, κι' ἔπειτα τὴν ἀντίστοιχη πρόσθεση.

286. Γράψτε 10 διάφορες ἀφαιρέσεις μονοψηφίων ἀριθμῶν.

287. Γράψτε ὅλες τὶς ἀφαιρέσεις τῶν μονοψηφίων, ποὺ δίνουν διαφορὰ μηδέν.

288. Ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυὸ διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν;

289. Γράψτε τὶς διαφορὲς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν κοκκίδων, ποὺ ὑπάρχουν σὲ κάθε δυὸ ἀπέναντι ὄψεις ἑνὸς ζαριοῦ.

290. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ συμπλήρωμα τῶν ἀριθμῶν: i) 12, 7, 15, 4 ὡς τὸ 20, ii) 40, 25, 65, 89 ὡς τὸ 100.

291. Πόσες σελίδες εἶναι ἕνα κεφάλαιο τοῦ βιβλίου μας, ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς σελίδος 42 καὶ τελειώνει στὸ τέλος τῆς σελίδος 65;

292. Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς διαφορᾶς εἶναι 120 κι' ἡ διαφορὰ 80. Ποιὸς εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος της;

293. Ὁ δεύτερος ὅρος μιᾶς διαφορᾶς εἶναι 272 κι' ἡ διαφορὰ 909. Ποιὸς εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος της;

294. Χωρὶς νὰ κάμετε τὴν πράξη, νὰ διακρίνετε ποιὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀπὸ τὶς διαφορές: i) $47-24$ καὶ $63-24$. ii) $843-279$ καὶ $406-279$, iii) $601-414$ καὶ $601-563$, iv) $1001-819$ καὶ $1001-820$, v) $47-(17+3)$ καὶ $47-20$, vi) $58-30$ καὶ $58-(30+6)$, vii) $683-(15+24)$ καὶ $683-(24-15)$.

295. Ἕνας πατέρας εἶναι 65 ἐτῶν κι' ἔχει 5 παιδιὰ ἡλικίας 30, 27, 23, 18 καὶ 15 ἐτῶν. Σὲ ποιὰ ἡλιλία ἀπέκτησε καθένα ἀπὸ τὰ παιδιά του;

296. Πῶς θὰ παραστήσετε 5 διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, ἂν: i) ὁ μικρότερος εἶναι ν, ii) ὁ μεσαῖος εἶναι ν, iii) ὁ μεγαλύτερος εἶναι ν;

297. Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ α εἶναι δυνατὸν νὰ γράψουμε τὴ διάφορὰ $\alpha-7$ καὶ γιὰ ποιὲς τὴν $7-\alpha$;

298. Ὑπάρχει μιὰ είδικὴ περίπτωση ἀφαιρέσεως, στὴν ὁποία μποροῦμε ν' ἀντιμεταθέσουμε τοὺς ὅρους της;

299. Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ σύμβολο $\Rightarrow$ τῆς συνεπαγωγῆς ἢ τὸ σύμβολο $\Leftrightarrow$ τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας σὲ κάθε ζεῦγος ἀπὸ τὶς προτάσεις;

i) Ὁ Γιάννης εἶναι πατέρας τοῦ Γιώργη. Ὁ Γιώργης εἶναι γυιὸς τοῦ Γιάννη.

ii) Ὁ Ἀνδρέας εἶναι στὴν Α΄ Γυμνασίου...Ὁ Ἀνδρέας διδάσκεται Λατινικά.

iii) Ὁ Α καὶ ὁ Β ἔχουν τὴν ἴδια ἡλικία... Ὁ Α εἶναι 20 ἐτῶν καὶ ὁ Β 20.

iv) Στὴν ἴδια περιφέρεια εἶναι: $\widehat{AB}=90^0$, $\widehat{\Gamma\Delta}=90^0$ ... $\widehat{AB}=\widehat{\Gamma\Delta}$.

300. Νὰ συμπληρωθῇ ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία: $\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow$...

301. Ποιὲς ἀπὸ τὶς παρακάτω συνεπαγωγὲς συνιστοῦν ἰσοδυναμίαν;

i) $\alpha>\beta \Rightarrow \beta<\alpha$ ii) $\alpha>\beta \Rightarrow 0-\beta\neq 0$

iii) $\alpha<15 \Rightarrow \alpha\neq 15$ iv) $\alpha-\beta=8 \Rightarrow \alpha>8$

302. Νὰ συμπληρωθοῦν οἱ ἰσότητες, ὥστε ν' ἀποτελοῦν ἰσοδυναμίες:

i) $17+0=17 \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots-\ldots=0 \\ \ldots-\ldots=17 \end{cases}$ ii) $18+12=30 \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots-\ldots=\ldots \\ \ldots-\ldots=\ldots \end{cases}$

303. Ἀπὸ τὶς παρακάτω ἐξισώσεις νὰ ἐπιλυθοῦν ὅσες εἶναι ἐπιλύσιμες καὶ νὰ ὑποδειχθοῦν αὐτές, ποὺ δὲν ἔχουν λύση στὸ σύνολο Φ_0.

i) $x+17=20$, ii) $25+x=30$, iii) $12+x=7$, iv) $x+47=47$
v) $15-x=8$ vi) $40=50-x$ vii) $7-x=8$ viii) $11=0-x$
ix) $x-23=1$ x) $0=x-18$ xi) $x-0=0$ xii) $21=x-0$

Σχηματίζοντας τὴν ἀντίστοιχη ἐξίσωση νὰ λύσετε τὰ προβλήματα:

304. Ὁ Πέτρος λέει στὸν Κώστα: «Ἂν κερδίσω 30 βώλους θὰ ἔχω 100». Πόσους βώλους εἶχε;

305. Ἕνας βοσκὸς ἔχει 100 ἀρνιά. Πόσα πρέπει νὰ πωλήση, ὥστε νὰ τοῦ μείνουν 60;

306. Ποιὸς εἶναι ὁ μισθὸς ἑνὸς ὑπαλλήλου, ποὺ ξοδεύοντας τὸ μῆνα 3600 δρχ. ἀποταμιεύει 400 δρχ;

307. Ἕνας πατέρας ἦταν 28 ἐτῶν, ὅταν γεννήθηκε ὁ γυιός του. Πόσων ἐτῶν ἦταν ὁ γυιός, ὅταν ὁ πατέρας του πέθανε σὲ ἡλικία 75 ἐτῶν;

308. Μιὰ διαδρομὴ 800 km, πρέπει ἕνα αὐτοκίνητο νὰ τὴν κάμη σὲ δυὸ ἡμέρες. Πόσα km πρέπει νὰ διανύση τὴν α΄ ἡμέρα, ὥστε νὰ μείνουν 350 km γιὰ τὴν β΄ ἡμέρα;

309. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν στὴ Α΄ τάξη τοῦ Γυμνασίου μας, ἂν στὴν Β΄, ποὺ εἶναι 23 λιγώτεροι, φοιτοῦν 67 μαθηταί;

310. Σὲ μιὰν ἡμιευθεῖα Ox σημειῶστε 2 σημεῖα A καὶ B ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι OA = 36 cm καὶ OB = 49 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος AB.

311. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα παίρνομε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἂν εἶναι: ΑΒ = 2,5 cm, ΑΔ = 6 cm, ΓΔ = 18 mm. Πόσα mm θὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΒΓ;

312. Δίνεται ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ = 60 cm καὶ πάνω σ' αὐτὸ στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε ἔτσι, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ = 20 cm, ΓΕ = 25 cm, ΔΕ = 15cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΑΔ, ΕΒ, ΓΒ.

313. Σὲ μιὰ περιφέρεια νὰ πάρετε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἔτσι, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = 42^0, ΑΓ = 98^0, ΑΔ = 168^0, καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν τόξων ΒΓ, ΒΔ καὶ ΓΔ.

314. Ἕνας πατέρας 40 ἐτῶν ἔχει γυιὸ 12 ἐτῶν. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἡλικίας του σήμερα, πόση ἦταν πρὶν 5 ἔτη καὶ πόση θὰ εἶναι ὕστερα ἀπὸ 15 ἔτη;

315. Μὲ βάση ποιὰν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως μποροῦμε νὰ γράψουμε;

i) $87 - 37 = 90 - 40 = 50$ καὶ ii) $87 - 37 = 80 - 30 = 50$

316. Χρησιμοποιώντας τὴ θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως, νὰ συμπληρώσετε τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες:

i) $(345 - \ldots) - (72 - 27) = \ldots - 72$, ii) $(125 + 83) - (\ldots + 83) = 125 - 51$

iii) $(\alpha + \ldots) - (\gamma + \beta) = \alpha - \gamma$, iv) $(x - \ldots) - (y - \omega) = \ldots - y$.

317. Νὰ γίνουν μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους οἱ ὑπολογισμοί:

i) $(120 + 17 + 50) - 57$ ii) $(125 + 80 + 15 + 60) - 75$

318. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες, στὶς ὁποῖες τὰ γράμματα παριστάνουν ἀκεραίους ἀριθμούς, ἀφοῦ τὶς φέρετε στὴν ἁπλούστερη μορφή τους:

i) $20 - (\alpha + 8 + \beta) = \ldots$, ii) $35 - (\alpha + 7 + \beta) = \ldots$,

iii) $\alpha - (\beta + 12 + \gamma) = \ldots$, iv) $\ldots - (15 + \beta + 3) = 100 - \ldots$,

v) $\alpha - (\ldots + 5 + \gamma) = \ldots - 5 - \beta - \gamma$

319. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους οἱ παραστάσεις:

i) $27 + (52 - 21)$, ii) $5 + (24 - 20)$, iii) $72 + (53 - 45)$, iv) $13 + (84 - 53)$.

320. Νὰ ἐργασθῆτε, ὅπως στὴν ἄσκηση 318, στὶς ἀκόλουθες ἰσότητες:

i) $43 + (10 - \alpha) = \cdots$, ii) $81 + (\cdots - \cdots) = 81 + \alpha - \beta$,

iii) $10 + (5 - \cdots) = \cdots - \beta$, iv) $84 + (\cdots - 20) = \cdots + \alpha$.

321. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους οἱ παραστάσεις:

i) $51 - (37 - 12)$, ii) $603 - (318 - 298)$,

iii) $17 - (42 - 38)$, iv) $145 - (200 - 55)$.

322. Νὰ ἐργασθῆτε, ὅπως στὴν ἄσκηση 320, στὶς ἀκόλουθες ἰσότητες:

i) $50 - (8 - \alpha) = \cdots$, ii) $27 - (\cdots - \cdots)$, iii) $75 - (\beta - \cdots) = 85 - \cdots$

iv) $\alpha - (\cdots - 5) = \alpha + \cdots - \beta$, v) $42 - (\cdots - \cdots) = 43 - \beta$.

323. Νὰ αἰτιολογήσετε τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες:

i) $389 - 58 = 389 - 60 + 2$, ii) $389 + 58 = 389 + 60 - 2$

iii) $453 - 46 = 453 - 43 - 3$, iv) $715 - 681 = (710 - 680) + (5 - 1)$

324. Σὲ τί ἀποτέλεσμα θὰ καταλήξουμε, ἂν: i) στὴ διαφορὰ δυὸ ἀριθμῶν προσθέσουμε τὸν μικρότερο ἀπ' αὐτούς, ii) τὴ διαφορά τους ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο ;

325. Νὰ βρεθοῦν μὲ δυὸ τρόπους οἱ τιμὲς τῶν πολυωνύμων :

i) $19 - 4 + 21 + 27 - 18 + 12 - 34$, ii) $38 - 12 + 27 + 15 - 7$
iii) $145 - 40 - 35 + 50$, iv) $201 - 49 - 79 - 48$, v) $98 - 13 - 24 - 17 + 8$

326. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ τὸν ἁπλούστερο τρόπο οἱ παραστάσεις :

i) $31 - (27 - 12) + (41 - 38)$, ii) $87 - (23 + 37 + 8 - 18 - 2)$

327. Νὰ ἐξαλειφθοῦν οἱ παρενθέσεις καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν :

i) $104 + (52 - 38) - (46 - 17) + 24 - (8 + 21 + 37 - 12 - 15)$,
ii) $179 - (36 - 17 + 45 - 36 - 11)$

328. Νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ δυὸ διαφόρους τρόπους οἱ παραστάσεις :

i) $(57 + 24 - 36) - (21 + 43 - 29) + 74 - (11 - 7)$,
ii) $625 - (100 - 75) - (428 - 208)$.

329. Νὰ ὑπολογίσετε καὶ νὰ φέρετε στὴν πιὸ ἁπλῆ μορφή τους :

i) $54 + (\alpha - 7) - (\beta + 6 + \gamma)$, ii) $\alpha - (\beta - 8) - (\gamma + 10)$,
iii) $(\alpha - 5) + (\beta + 8)$, iv) $(7 + \alpha + \beta) - (2 - \gamma)$,
v) $(48 - \alpha) + (56 - \beta) - (20 + \gamma + 3)$, vi) $(15 - \alpha) + \beta - (30 - \alpha)$

330. Νὰ γίνη σύγκριση ἀνάμεσα στὶς ἀκόλουθες παραστάσεις καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ἡ διαφορά τους :

$(93 - 17) - (37 - 29)$ καὶ $93 - 17 - 37 - 29$.

331. Νὰ γίνουν σ' εὐθεῖα γραμμὴ οἱ ἀφαιρέσεις κι' ἡ δοκιμή τους :

i) 47 353 — 24 897 = ;, ii) 254 802 — 103 201 = ;, iii) 81 002 — 64 899 = ;
iv) 1 047 603 — 54 207 = ;, v) 3 212 523 — 1 999 888 = ;

332. Νὰ γίνουν σ' εὐθεῖα γραμμὴ οἱ ἀφαιρέσεις καὶ ἡ δοκιμή τους :

i) 654 321 — 543 210, ii) 876 543 — 765 432, iii) 765 432 — 654 321,
iv) 987 654 — 876 543, v) 888 888 — 672 437, vi) 483 512 — 218 763.

333. Νὰ γίνουν οἱ ἀκόλουθες ἀφαιρέσεις καὶ ἡ δοκιμή τους :

i)	ii)	iii)	iv)
829 310	723 821 917	420 371 205	1 003 002
— 497 583	— 253 078 023	— 378 428 078	— 897 564

334. Ν' ἀντικατασταθοῦν οἱ κοκκίδες μὲ τὰ κατάλληλα ψηφία :

i)	ii)	iii)	iv)	v)
7 5 8 3	● ● ● ●	1 ● 4 3	4 ● 7 5	1 2 7 ● ●
— ● ● ● ●	— 2 7 4 3	— 3 ● ●	— ● 4 ● ●	— 8 2 4 4
4 8 3 5	5 3 1 4	1 1 5 4	2 8 8 8	● ● 5 5

335. Νὰ συμπληρωθῆ καὶ ἐπαληθευθῆ ἡ ἀκόλουθη μισθοδοτικὴ κατάσταση :

α/α	Δικαιοῦχος	Μισθὸς	Ἐπίδομα	Ἄθροισμα	Κρατήσεις	Πληρωτέον
1	Γεωργίου Α.	3 874	1 673		472	
2	Ἀθανασίου Δ.	2 983	1 568		409	
3	Δημητρίου Κ.	2 678	1 207		386	
4	Πανάγου Β.	2 467	1 006		377	
5	Θεοδώρου Σ.	1 964	963		298	

336. Νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις : i) 4,95 km — 3,08 km, ii) 10 m — 7,85 m, iii) 1 m − 24 dm, iv) 100 gr − 47,253 gr, v) 173,014 gr − 89,307 gr, vi) 7 − 0,007.

337. Νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις : i) 57'30'' — 43'17'', ii) 5 m 4 dm 3 cm — 8 dm 6 cm 4 mm, iii) 5 yd 1 ft 4 in — 2 yd 2 ft 10 in, iv) 67° 34' 42'' — 36° 47' 54'', v) 90° — 54° 23' 49'', vi) 4 m — 8 dm 7 cm 6 mm.

338. Ὁ μεγαλύτερος ὅρος μιᾶς διαφορᾶς εἶναι 127,5 καὶ ἡ διαφορὰ 87,807. Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος της ;

339. Νὰ γίνῃ μὲ δυὸ διαφόρους τρόπους ὁ ὑπολογισμὸς τῶν παραστάσεων :

i) 17,4 — (8,32 — 6,7 + 12,308 — 7,42) — (4,54 — 2,006 — 1,987)

ii) 8 yd — (3 yd 2 ft — 2 ft 10 in + 6 yd 5 in — 4 yd 1 ft 8 in).

340 Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα νὰ πάρετε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἂν εἶναι ΑΔ = 5,2 cm, ΒΔ = 4,3 cm, ΓΔ = 25 mm, νὰ κατασκευάσετε τὸ σχῆμα καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ.

341. Μὲ ἀποσύνθεση τοῦ ἑνὸς ὅρου νὰ γίνουν νοερὰ οἱ ἀφαιρέσεις :

i) 90 — 47 ii) 87 — 33 iii) 76 — 48 vi) 83 — 37 v) 189 — 54
vi) 257 — 83 vii) 319 — 79 viii) 623 — 53 xi) 567 — 347 x) 823 — 615

342. Μὲ ἀποσύνθεση τοῦ ἀφαιρετέου νὰ γίνουν νοερὰ οἱ ἀφαιρέσεις :

i) 70 — 33 ii) 83 — 47 iii) 76 — 58 iv) 127 — 34 v) 295 — 198
vi) 371 — 275 vii) 563 — 283 viii) 638 — 360 ix) 767 — 387 x) 2357 — 1360

343. Μὲ τὸ συμπλήρωμα τοῦ μικροτέρου ὅρου νὰ γίνουν νοερὰ οἱ πράξεις:

i) 50 — 29 ii) 80 — 17 iii) 70 — 38 iv) 165 — 99 v) 275 — 68
vi) 231 — 88 vii) 873 — 159 viii) 737 — 499 ix) 851 — 169 x) 2376 — 269

344. Νὰ γίνουν νοερὰ οἱ ἀφαιρέσεις μὲ βάση τὴ θεμελιώδη ἰδιότητα :

i) 100 — 53 ii) 100 — 41 iii) 100 — 19 iv) 100 — 37 v) 500 — 429
vi) 500 — 477 vii) 500 — 289 viii) 500 — 135 ix) 1000 — 821 x) 1000 — 546

345. Νὰ γίνουν νοερὰ μὲ τὸν πιὸ κατάλληλο τρόπο οἱ ἀφαιρέσεις :

i) 735 — 23 ii) 735 — 38 iii) 735 — 98 iv) 735 — 145 v) 735 — 545

346. Μὲ τὸν καταλληλότερο τρόπο νὰ γίνουν νοερὰ οἱ πράξεις :

i) 47 + 24 — 17 ii) 34 + 28 — 12 iii) 56 — 44 + 24 iv) 68 + 52 — 27
v) 76 − 39 + 24 − 19 vi) 87 − 47 + 53 — 51 vii) 328 — 71 − 58 − 29

347. Νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις : i) $(43)_5 - (21)_5$, ii) $(342)_5 - (201)_5$ iii) $(1432)_5 - (212)_5$, iv) $(9\alpha_1)_{12} - (3\alpha_0)_{12}$. v) $(4\alpha_1 8)_{12} - (275)_{12}$.

348. Νὰ γίνουν οἱ ἀφαιρέσεις : i) $(41)_5 - (12)_5$, ii) $(324)_5 - (34)_5$, iii) $(4320)_5 - (1232)_5$, iv) $(32)_{12} - (\alpha_0)_{12}$, v) $(47)_{12} - (19)_{12}$, vi) $(\alpha_0 4)_{12} - (2\alpha_1)_{12}$.

Β' σειρά : 349. Δυὸ σωροὶ ἀπὸ βώλους διαφέρουν κατὰ 24. Πόση θὰ γίνῃ αὐτὴ ἡ διαφορά, ἂν : i) αὐξήσουμε κατὰ 12 βώλους τὸν μεγαλύτερο σωρό, ii) ἐλαττώσουμε κατὰ 15 τὸν μικρότερο, iii) ἐλαττώσουμε κατὰ 14 τὸν μεγαλύτερο, iv) αὐξήσουμε κατὰ 23 τὸν μικρότερο, v) αὐξήσουμε κατὰ 10 τὸ μεγαλύτερο καὶ ἐλαττώσουμε κατὰ 16 τὸν μικρότερο, vi) αὐξήσουμε κατὰ 3 τὸν μεγαλύτερο καὶ κατὰ 18 τὸν μικρότερο, vii) ἐλαττώσουμε κατὰ 4 τὸν μικρότερο καὶ κατὰ 18 τὸν μεγαλύτερο, viii) ἐλαττώσουμε κατὰ 8 τὸν μεγαλύτερο καὶ αὐξήσουμε κατὰ 16 τὸν μικρότερο ;

350. Νὰ πάρετε δυὸ ἄνισα εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (ΑΒ > ΓΔ) καὶ νὰ κατασκευάσετε : i) τὸ ἄθροισμά τους, ii) τὴ διαφορά τους. Ἔπειτα νὰ προ-

σθέσετε στὸ ἄθροισμα τὴ διαφορὰ καὶ νὰ συγκρίνετε τὸ τμῆμα, ποὺ θὰ βρῆτε, μὲ τὸ ΑΒ. Τέλος, νὰ ἀφαιρέσετε τὴ διαφορὰ ΑΒ - ΓΔ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΓΔ καὶ τὸ τμῆμα, ποὺ θὰ βρῆτε, νὰ συγκρίνετε μὲ τὸ ΓΔ.

351. Ν' ἀπαλειφθοῦν οἱ παρενθέσεις καὶ ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ ἀποτελέσματα:

i) $(5\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha - \beta + \gamma) - (\alpha + \beta - \gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)$

ii) $(3\alpha + 4\beta + 2\gamma) + (4\alpha - 3\beta + \gamma) - (5\alpha - \beta - \gamma)$

iii) $(5x + 4y) - (3x - y) + (x - 2y) + (3x - 3y)$

352. Δίνεται ἡ παράσταση: $E = \alpha - \beta + \gamma - (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) - (\gamma - \beta)$: i) Νὰ ἐξαλειφθοῦν οἱ παρενθέσεις, ii) νὰ βρεθῆ ἡ τιμὴ τοῦ Ε, ἂν $\alpha = 5$, $\beta = 3$.

353. Νὰ ὑπολογισθῆ: $E = (x + y + z) - (x - y + z) + (x + y + z) - (y + z - x)$.

354. Στὴν ἀπέναντι ἀφαίρεση τὰ α καὶ β παριστάνουν δυὸ διάφορα ψηφία, μὴ μηδενικά. Νὰ προσδιορισθοῦν.

Λύσις: Αὐτὴ ἡ ἀφαίρεση εἶναι λογικὴ ἰσοδυναμία τῆς διπλανῆς της προσθέσεως, ποὺ δείχνει ὅτι τὰ α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα 4. Συνεπῶς, ἀφοῦ δὲν ἴσα, θὰ εἶναι ἢ $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 3$ ἢ $\alpha = 3$ καὶ $\beta = 1$. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἔχει δυὸ λύσεις, ποὺ δίνουν τὶς ἀκόλουθες ἀφαιρέσεις: 44—31=13 καὶ 44—13=31.

$$\begin{array}{r} 44 \\ -\ \alpha\beta \\ \hline \beta\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{r} \beta\alpha \\ +\ \alpha\beta \\ \hline 44 \end{array}$$

355. Νὰ βρεθοῦν τὰ ψηφία α,β,γ στὶς ἀκόλουθες ἀφαιρέσεις:

i) $\begin{array}{r} 66 \\ -\ \alpha\beta \\ \hline \beta\alpha \end{array}$ ii) $\begin{array}{r} 5\alpha \\ -\ \alpha\beta \\ \hline 13 \end{array}$ iii) $\begin{array}{r} \alpha 3 \\ -\ \beta\alpha \\ \hline 55 \end{array}$ iv) $\begin{array}{r} 585 \\ -\ \alpha\beta\gamma \\ \hline \gamma\beta\alpha \end{array}$ vi) $\begin{array}{r} \alpha 7 \\ -\ \beta\alpha \\ \hline 21 \end{array}$ vii) $\begin{array}{r} \alpha 6 \\ -\ \beta 9 \\ \hline 3\alpha \end{array}$

356. Δίνεται ὁ ἀριθμὸς 654. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ προκύπτει, ἂν ἀντιστρέψουμε τὰ ψηφία του; Ποιὰ ἡ διαφορὰ τῶν δυὸ ἀριθμῶν; Κάνετε τὸ ἴδιο μὲ τὸν ἀριθμὸ 876. Τί παρατηρεῖτε; Ἡ παρατήρηση αὐτὴ εἶναι γενική; Γιατί;

357. Τριψήφιος ἀριθμὸς ἔχει ψηφία του τρεῖς διαδοχικοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, τοποθετημένους σὲ αὐξανομένη διάταξη. Ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἴδια ψηφία, γραμμένα μὲ τὴν ἀντίστροφη τάξη. i) Ποιός ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἶναι μεγαλύτερος; ii) Νὰ δείξετε ὅτι ἡ διαφορά τους δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ ψηφία αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

358. Γράψτε κρυφὰ ἕνα τριψήφιον ἀριθμό, ποὺ τὸ ψηφίο τῶν ἑκατοντάδων του νὰ εἶναι κατὰ 2 μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ψηφίο τῶν μονάδων του. Ἀπ' αὐτὸν ἀφαιρέσατε τὸν ἀριθμό, ποὺ προκύπτει μὲ ἐναλλαγὴ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων καὶ μονάδων. Στὴ διαφορά, ποὺ θὰ βρῆτε, προσθέσατε τὸν ἀριθμό, ποὺ προκύπτει μὲ τὴν ἐναλλαγὴ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων καὶ μονάδων αὐτῆς τῆς διαφορᾶς. Τὸ ἄθροισμα, ποὺ θὰ βρῆτε θὰ εἶναι 1089, ὁποιοσδήποτε κι' ἂν ἦταν ὁ ἀριθμός, ποὺ διαλέξατε. Ἐπαληθεύσατέ το μὲ ἄλλον ἀριθμὸν τῆς ἐκλογῆς σας καὶ μὲ τὴν ἴδια διαδοχὴ πράξεων.

359. Στὶς ἐξετάσεις δόθηκαν 3 ἀριθμοὶ α, β, γ κι' ἐζητήθηκε νὰ ὑπολογισθῆ τό: $\alpha - (\beta - \gamma)$. Ἕνας μαθητὴς κάνει τὸν ὑπολογισμὸ ἔτσι: $\alpha - \beta - \gamma$ καὶ βρίσκει ἀποτέλεσμα κατὰ 72 μικρότερο ἀπὸ τὸ σωστό. Μ' αὐτὰ τὰ στοιχεῖα, ποιόν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ μπορεῖτε νὰ ὑπολογίσετε;

360. Ἔχομε δυὸ σωροὺς μὲ διάφορον ἀριθμὸ βώλων. Ἂν ἀφαιρέσουμε 8 βώλους ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο καὶ τοὺς προσθέσουμε στὸν μικρότερο, κι' οἱ δυὸ σω-

ροὶ θὰ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμὸ βώλων. Κατὰ πόσους βώλους διαφέρουν οἱ δυὸ αὐτοὶ σωροί;

361. Ἕνας μαθητὴς κάνοντας τὴν ἀφαίρεση: 3 241 — 2 792 παρέλειψε τὴ μεταφορὰ τῶν μονάδων στὸν ἀφαιρετέο. Χωρὶς νὰ κάμετε τὴν πράξη, νὰ βρῆτε ποιὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀποτελέσματος, ποὺ βρῆκε, ἀπὸ τὸ σωστό.

Γ΄ σειρά: 362. Οἱ περιουσίες δυὸ ἀδελφῶν διαφέρουν κατὰ 210 865 δρχ. Ἂν ὁ πλουσιώτερος ἔχῃ 375 852 δρχ., ποιὰ εἶναι ἡ περιουσία τοῦ ἄλλου καὶ πόσο αὐτὴ διαφέρει ἀπὸ τὴν περιουσία τῆς ἀδελφῆς των, ποὺ εἶναι 131 888 δρχ.;

363. Σ' ἐργοστάσιο ἐργάζονται 100 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Ἂν οἱ ἄνδρες μαζὶ μὲ τὰ παιδιὰ εἶναι 70, ἐνῶ οἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδιὰ μαζὶ εἶναι 40, πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες, πόσες οἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά;

364. Πῶς θὰ γίνῃ ἡ ἐκκαθάριση τοῦ λογαριασμοῦ τριῶν συνεργαζομένων ἐμπόρων, ἂν ὁ Α ὀφείλει στὸν Β 14 853,50 δρχ., ὁ Β στὸν Γ 8 318,80 δρχ. κι' ὁ Γ στὸν Α 10 317,60 δρχ.;

365. Δυὸ συνεταῖροι ἐζημιώθηκαν σὲ μιὰ κοινὴ ἐπιχείρηση, ὁ Α 27 854 δρχ. κι' ὁ Β 19 609 δρχ. Ἔτσι τὸ κεφάλαιο ποὺ ἔμεινε καὶ στοὺς δυὸ μαζὶ ἦταν 233 030 δρχ. Ἂν τὸ ἀρχικὸ κεφάλαιο τοῦ Α ἦταν 167 893 δρχ., ποιὸ ἦταν τὸ κεφάλαιο τοῦ Β;

366. Κάποιος, ποὺ ρωτήθηκε σὲ ποιὰν ἡλικία πέθανε ὁ πατέρας του, ἔδωσε τὴν ἀπάντηση: «Εἶμαι 43 ἐτῶν καὶ ἤμουν 17 ἐτῶν, ὅταν ὁ πατέρας μου εἶχε τὴ σημερινή μου ἡλικία. Ὁ πατέρας μου πέθανε, ὅταν γεννήθηκε ὁ γυιός μου, ποὺ σήμερα εἶναι 5 ἐτῶν». Σὲ ποιὰ ἡλικία πέθανε;

367. Ἀπὸ τρεῖς ἐργάτες ὁ Α παίρνει ἡμερομίσθιο 22,15 δρχ. περισσότερο ἀπὸ τὸν Β καὶ 29,60 δρχ. περισσότερο ἀπὸ τὸν Γ. Ἂν τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ Β εἶναι 34,65 δρχ., ποιὸ θὰ εἶναι τὸ ἡμερομίσθιο τοῦ Γ;

368. Τὸ ἕνα ἀπὸ δυὸ τόπια ὕφασμα εἶναι 43 yd 2 ft 8 in. Ἂν τὸ μῆκος αὐτοῦ τοῦ κομματιοῦ ἦταν κατὰ 3 yd 2 ft 10 in μεγαλύτερο καὶ τοῦ ἄλλου κατὰ 8 yd 1 ft 9 in ἐπίσης μεγαλύτερο, τὸ ὁλικὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος θὰ ἦταν 83 yd 2 ft 9 in. Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ β΄ κομματιοῦ;

369. Ἔμπορος ἀγόρασε ἐμπορεύματα ἀξίας 24 837,20 δρχ. Ἀφοῦ ἐπώλησεν ἕνα μέρος ἀπ' αὐτὰ εἰσέπραξε 26 434,90 δρχ., ἐνῶ ἡ ἀξία τῶν ὑπολοίπων ἦταν 5 381,20 δρχ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κέρδος.

370. Ἀπὸ δυὸ μεταλλικὲς ράβδους ἡ μιὰ ἔχει μῆκος 4,082 m. Ὅταν κι' οἱ δυὸ θερμανθοῦν, τὸ μῆκος τους αὐξάνεται κατὰ 0,024 568 m τῆς α΄ καὶ κατὰ 0,010 432 m τῆς β΄ καὶ τὸ ὁλικό τους μῆκος γίνεται τότε 7,845 m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς β΄.

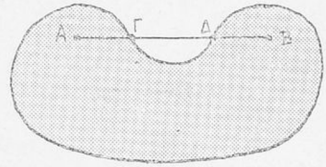
371. Ἀπὸ δυὸ τόξα τῆς ἴδιας περιφερείας τὸ ἕνα εἶναι κατὰ $15^0\ 24'\ 38''$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ τεταρτημόριο καὶ τὸ ἄλλο κατὰ $24^0\ 53'\ 8''$ μικρότερο τῆς ἡμιπεριφερείας. Πόσο διαφέρει τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ αὐτῶν τόξων ἀπὸ ὁλόκληρη τὴν περιφέρεια;

372. Ἕνας πατέρας ἡλικίας 43 ἐτῶν ἔχει γυιὸ 18 ἐτῶν καὶ κόρη 13 ἐτῶν. Νὰ ὑπολογίσετε ὕστερα ἀπὸ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι΄

Η ΕΠΙΠΕΔΗ ΓΩΝΙΑ
ΜΕΤΡΗΣΗ ΓΩΝΙΩΝ

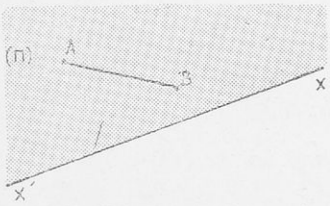
110. Ἐπίπεδον χωρίον - Κυρτότης.— Κάθε ἡμιεπίπεδο, ὅπως εἴδαμε στὰ προηγούμενα (§ 82), εἶναι ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ μιὰ ἀπέρατη εὐθεῖα. Ἡ ταινία, ἐπίσης, εἶναι ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ παράλληλες εὐθεῖες.



Σχ. 100. Ἕνα ἐπίπεδο χωρίον

Ἡ περιφέρεια κύκλου, καθὼς καὶ κάθε ἄλλη ἐπίπεδη κλειστὴ γραμμὴ (σχ. 100), χωρίζει τὸ ἐπίπεδό της σὲ δυὸ μέρη : τὸ ἐσωτερικό της μέρος, ποὺ περιορίζεται ἀπ' αὐτὴ τὴ γραμμή, καὶ τὸ ἔξω ἀπ' αὐτὴν ἀπέρατο μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Κάθε μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ὁπωσδήποτε κι' ἂν ὁρίζεται, καθὼς καὶ τὸ ἴδιο τὸ ἀπέρατο ἐπίπεδο, θὰ ὀνομάζουμε στὰ ἑπόμενα **ἐπίπεδον χωρίον.**

Ἂν Α καὶ Β εἶναι δυὸ ὁποιαδήποτε σημεῖα ἑνὸς ἡμιεπιπέδου (Π) (σχ. 101), εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ θὰ κεῖται ὁλόκληρο μέσα σ' αὐτὸ τὸ ἡμιεπίπεδο. Τὸ ἴδιο γίνεται, ἂν πάρουμε δυὸ ὁποιαδήποτε σημεῖα στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς περιφερείας κύκλου. Τὸ εὐθ. τμῆμα, ποὺ θὰ ὁρίζεται ἀπ' αὐτὰ τὰ σημεῖα, θὰ βρίσκεται ὁλόκληρο στὸ ἐσωτερικὸ τῆς περιφερείας. Κάθε ἐπίπεδο χωρίον, ποὺ ἔχει αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, λέγεται **κυρτὸ** ἐπίπεδο χωρίον. Ὥστε :



Σχ. 101. Κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίον

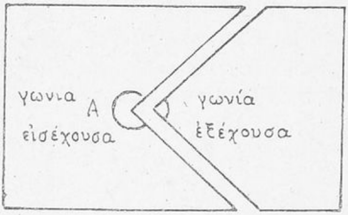
> **Ἕνα ἐπίπεδο χωρίον λέγεται κυρτό, ἂν κάθε τμῆμα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ ὁποιαδήποτε σημεῖα του, βρίσκεται ὁλόκληρο μέσα σ' αὐτὸ τὸ χωρίον.**

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἐπίπεδα χωρία μὴ **κυρτά**. Τέτοιο π.χ. εἶναι τὸ ἐπίπεδο χωρίον, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κλειστὴ καμπύλη τοῦ σχήματος 100. Σ' αὐτό, ἕνα μέρος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, τὸ ΓΔ, βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο χωρίον.

111. Τί εἶναι ἐπίπεδη γωνία καὶ ποιὰ τὰ στοιχεῖα της.— Σ' ἕνα φύλλο χαρτὶ πάρτε ἕνα σημεῖο Α καὶ γράψτε δυὸ ἡμιευθεῖες Αx καὶ Αy. Ἔπειτα, κόψτε μὲ τὸ ψαλίδι τὸ χαρτί, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 102. Τότε θὰ ἔχετε δυὸ διάφορα ἐπίπεδα χωρία. Καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ χωρία λέγεται **γωνία.** Ὥστε :

Γωνία εἶναι τὸ ἐπίπεδο χωρίον, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δυὸ ἡμιευθεῖες κοινῆς ἀρχῆς.

Ἀλλὰ κάθε ζεῦγος ἡμιευθειῶν, ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀρχή, ὁρίζει δυὸ γωνίες· τὴ μιὰ **εἰσέχουσα** καὶ τὴν ἄλλη **ἐξέχουσα**. Ἡ δεύτερη ἀπ' αὐτὲς εἶναι, προφανῶς, ἕνα κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίον καὶ λέγεται **γωνία κυρτή**, ἐνῶ ἡ πρώτη εἶναι **μὴ κυρτὴ γωνία**.



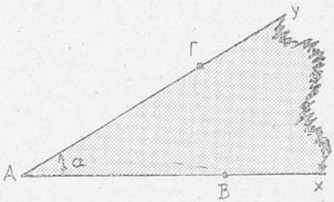
Σχ. 102. Γωνία τῶν ἡμιευθειῶν **Ox, Oy**

Οἱ ἡμιευθεῖες Ax καὶ Ay, ποὺ ὁρίζουν κάθε μιὰ ἀπ' αὐτὲς τὶς γωνίες, λέγονται **πλευρὲς** τῆς γωνίας ἐνῶ τὸ κοινὸ σημεῖο A τῶν πλευρῶν λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας. Ἡ κορυφὴ καὶ οἱ πλευρὲς ἀποτελοῦν τὰ **στοιχεῖα** κάθε γωνίας. Στὰ ἑπόμενα, ὅταν δὲν ὑπάρχει ἀντίθετη ἔνδειξη, γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν Ax, Ay θὰ θεωροῦμε τὴν κυρτὴ γωνία.

Κάθε γωνία ὀνομάζεται καὶ συμβολίζεται μὲ ἕνα ἀπ' τοὺς ἀκολούθους τρόπους:

1ο Μὲ τὸ γράμμα μόνο τῆς κορυφῆς. Αὐτὸ γίνεται στὴν περίπτωση, ποὺ δὲν ὑπάρχουν ἄλλες γωνίες μὲ τὴν ἴδια κορυφή. Τότε λέμε: «ἡ γωνία A» καὶ γράφουμε: $\sphericalangle$ A (σχ. 103).

2ο Μὲ τρία στὴ σειρὰ κεφαλαῖα γράμματα, ποὺ τὸ μεσαῖο εἶναι πάντα τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς. Λέμε: «ἡ γωνία ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ» καὶ γράφουμε $\sphericalangle$ ΒΑΓ ἢ $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$.

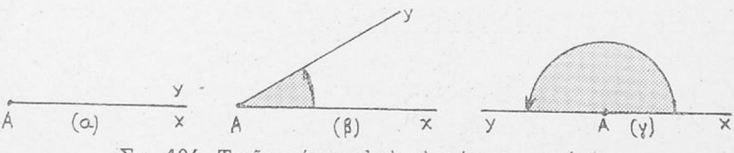


Σχ. 103. Μιὰ κυρτὴ γωνία

3ο Μὲ τὴν ἔνδειξη τῶν ἡμιευθειῶν, ποὺ τὴν ὁρίζουν. Λέμε: «γωνία Ax κόμμα Ay» καὶ γράφουμε: $\sphericalangle$ (Ax, Ay).

4ο Μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα, ἔξω ἀπὸ ἕνα τόξο, ποὺ ἑνώνει τὶς πλευρές της. Λέμε καὶ γράφουμε: «γωνία α».

112. Πῶς γεννιέται μιὰ γωνία.—Ὅταν μιὰ ἡμιευθεῖα Ax στρέφεται γύρω ἀπ' τὴν ἀρχή της A, πάντοτε κατὰ τὴν ἴδια **φορά**, ὅπως ἕνας δείκτης τοῦ ρολογιοῦ, ξεκινώντας ἀπὸ μιὰ ἀρχικὴ θέση Ax γιὰ νὰ φθάση σὲ μιὰ τελικὴ θέση Ay, λέμε ὅτι διαγράφει (σαρώνει) μιὰ γωνία (σχ. 104).



Σχ. 104. Τρεῖς φάσεις ἀπὸ τὴ γένεση γωνίας

Ἂν πάρουμε ὡς ἀρχικὴ τὴ θέση τοῦ λεπτοδείκτη ἑνὸς ρολογιοῦ ἀκριβῶς τὸ μεσημέρι, στὶς διαδοχικές του θέσεις ὁ δείκτης αὐτὸς θὰ δίνη μιὰν ἀκολουθία ἀπὸ γωνίες **κυρτές**, μέχρις ὅτου φθάση στὴν ἔνδειξη VI τοῦ ρολογιοῦ (σχ. 105).

Σ' αὐτὴ τὴ θέση ὁ λεπτοδείκτης θὰ βρίσκεται σ' εὐθεῖα γραμμὴ ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ἀρχική του θέση. Ἡ γωνία, ποὺ σχηματίζεται ἔτσι, λέγεται **ἀποπλατυσμένη ἢ ἁπλωτὴ γωνία** (σχ. 104 γ'). Μιὰ ἀποπλατυσμένη γω-

Σχ. 105. Γωνίες μὲ τὸ λεπτοδείκτη ἑνὸς ρολογιοῦ

νία εἶναι, προφανῶς, κυρτὴ καὶ καλύπτει τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ ἡμιεπίπεδα, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἡμιευθεῖα xy. Σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση κανένας ἀπ' τοὺς παραπάνω συμβολισμοὺς δὲν ἐπαρκεῖ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς γωνίας τῶν ἡμιευθειῶν Ax, Ay. Γι' αὐτὸ χρησιμοποιοῦμε κι' ἕνα ἀκόμη σημεῖο Μ τοῦ ἡμιεπιπέδου τῆς γωνίας καὶ λέμε: «ἡ γωνία (Ax, Ay), ποὺ περιέχει τὸ Μ».

Ὅταν ὁ λεπτοδείκτης ξεπεράση τὴ θέση, τὴν ἀντίθετη τῆς ἀρχικῆς, θὰ διαγράφη γωνίες **μὴ κυρτές**.

Ὅταν, τέλος, ὁ λεπτοδείκτης συμπληρώση μιὰν ὁλόκληρη στροφή, θὰ συμπέση μὲ τὴν ἀρχική του θέση καὶ τότε θὰ ἔχη διαγράψει μιὰ **πλήρη γωνία**, ποὺ καλύπτει ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο. Μιὰ πλήρης γωνία ἀποτελεῖται ἀπὸ δυὸ ἁπλωτὲς γωνίες.

Ἀλλὰ σ' αὐτὴ τὴ θέση, τῆς συμπτώσεως μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς Ax καὶ τελικῆς Ay πλευρᾶς τῆς γωνίας, εὑρίσκετο ὁ λεπτοδείκτης καὶ πρὶν ν' ἀρχίση τὴν περιστροφή του γύρω ἀπὸ τὸ Α (σχ. 104 α'). Τότε λέμε ὅτι εἴχαμε μιὰ **γωνία μηδενική**.

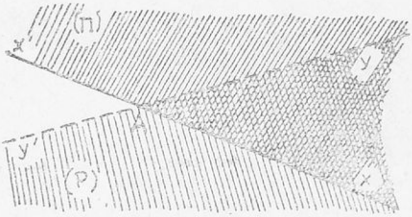
Παρατηροῦμε ὅτι οἱ δυὸ πλευρὲς μιᾶς γωνίας μηδενικῆς καὶ μιᾶς γωνίας πλήρους συμπίπτουν. Ἀλλὰ στὴν πρώτη περίπτωση ἡ ἡμιευθεῖα δὲν ἔχει τεθῆ σὲ περιστροφή, ἐνῶ στὴ δεύτερη ἔχει κάμει μιὰ ὁλόκληρη στροφὴ γύρω ἀπὸ τὴν ἀρχή της. Ὥστε, δυὸ ἡμιευθεῖες, ποὺ συμπίπτουν, ὁρίζουν δυὸ γωνίες: μιὰ κυρτὴ γωνία μηδενικὴ καὶ μιὰ μὴ κυρτὴ γωνία πλήρη.

● **Παρατήρηση:** Μιλήσαμε πιὸ πάνω γιὰ στροφὴ τῆς ἡμιευθείας κατὰ μιὰ ὁποιαδήποτε φορά: αὐτὴν ποὺ ἀκολουθοῦν οἱ δεῖκτες τοῦ ρολογιοῦ ἢ τὴν ἀντίθετη. Συμφωνοῦμε νὰ ὀνομάζουμε **θετικὴ φορὰ** τὴν ἀντίθετη ἀπὸ ἐκείνην τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ ἤ, καλλίτερα, ἐκείνην ποὺ ἀκολουθεῖ ὁ ἑλληνικὸς χορός. Ὅλες τὶς γωνίες θεωροῦμε, συνήθως, νὰ διαγράφωνται κατὰ τὴ θετικὴ φορά, ἐκτὸς ἂν ὑποδειχθῆ τὸ ἀντίθετο.

113. Ἡ γωνία ὡς τομὴ ἢ ἕνωση δυὸ ἡμιεπιπέδων.—Τὸ ἡμιεπίπεδο εἶναι, προφανῶς, ἕνα ἀπειροσύνολο σημείων. Ἡ εὐθεῖα x'x ἑνὸς ἐπιπέδου (Σ), χωρίζει τὸ ἐπίπεδο αὐτὸ σὲ δυὸ ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Π′) δηλ. σὲ δυὸ ἀπειροσύνολα σημείων, ποὺ τομή τους εἶναι ἡ εὐθεῖα x′x καὶ ἕνωσή τους τὸ ἐπίπεδο (Σ). Ὥστε εἶναι :

$$(\Pi) \cap (\Pi') = x'x \quad \text{καὶ} \quad (\Pi) \cup (\Pi') = (\Sigma)$$

Ἂν τώρα πάρουμε πάνω στὸ ἐπίπεδο (Σ) δυὸ διάφορες εὐθεῖες x′x καὶ y′y, ποὺ ἔχουν ἕνα κοινὸ σημεῖο A, θὰ ἔχουμε δυὸ ζεύγη ἡμιεπιπέδων: τὸ ζεῦγος (Π), (Π′) καὶ τὸ (Ρ), (Ρ′). Τὰ διαγραμμισμένα στὸ σχῆμα 106 ἡμιεπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) ἔχουν κοινὰ σημεῖα. Αὐτὰ τὰ κοινὰ σημεῖα, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν τομὴν τῶν ἀπειροσυνόλων (Π) καὶ (Ρ), εἶναι τὸ ἐπίπεδο χωρίον, ποὺ ὀνομάσαμε παραπάνω κυρτὴ γωνία (Ax, Ay).



Σχ. 106. Ἡ γωνία ὡς τομὴ δυὸ ἡμιεπιπέδων

Ὥστε ἡ κυρτὴ γωνία (Ax, Ay) εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἡμιεπιπέδου, ποὺ ἔχει σύνορο τὴν Ax καὶ περιέχει τὴν Ay, καὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου, ποὺ ἔχει σύνορο τὴν Ay καὶ περιέχει τὴν Ax.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπον ὁρίζουμε τὴν κυρτὴ γωνία (Ax′, Ay′) ὡς τὴν τομὴν τῶν ἡμιεπεπέδων (Π′) καὶ (Ρ′), δηλ. τοῦ ἡμιεπιπέδου, ποὺ ἔχει σύνορο τὴν Ax′ καὶ περιέχει τὴν Ay′, καὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου, ποὺ ἔχει σύνορο τὴν Ay′ καὶ περιέχει τὴν Ax′.

Ἐξ ἄλλου, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἡ ἕνωση τῶν ἡμιεπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ἀποτελεῖ τὴν μὴ κυρτὴ γωνία (Ax′, Ay′), ἐνῶ ἡ ἕνωση τῶν (Π′) καὶ (Ρ′) ἀποτελεῖ τὴ μὴ κυρτὴ γωνία (Ax, Ay).

114. Σύγκριση δύο γωνιῶν - Ἴσες καὶ ἄνισες γωνίες.— Ὅπως γιὰ ὅλα τὰ σχήματα, ποὺ γνωρίσαμε ὡς τώρα (εὐθ. τμήματα, τόξα...), ἔτσι καὶ γιὰ δυὸ γωνίες θὰ λέμε ὅτι εἶναι ἴσες, ἂν μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορὰ (ἐδῶ μὲ ἀντίγραφο σὲ διαφανὲς χαρτὶ) μποροῦν νὰ ταυτισθοῦν.

Στὴν ἰσότητα, ἰδιαίτερα δύο γωνιῶν παρατηροῦμεν ὅτι :

1ο Ἡ ἰσότης τους δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν, ἀφοῦ οἱ πλευρές, ὡς ἡμιευθεῖες, εἶναι ἀπέρατες.

2ο Γιὰ τὴν ταύτιση τῶν γωνιῶν δὲν ἀρκεῖ μόνον ἡ ἐφαρμογὴ τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ ὁλοκλήρων τῶν ἐπιπέδων χωρίων. Ἀλλοιῶς θὰ ἔπρεπε νὰ δεχθοῦμε ὅτι μιὰ κυρτὴ καὶ μιὰ μὴ κυρτὴ γωνία, ποὺ ἔχουν τὶς ἴδιες πλευρές, εἶναι ἴσες.

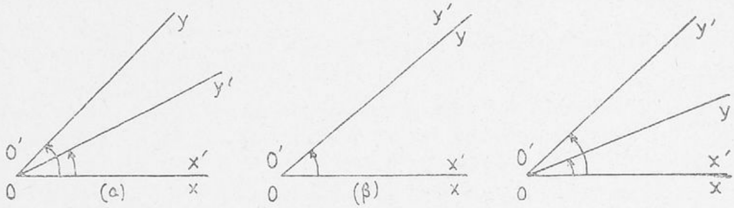
3ο Δυὸ ἀποπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες.

Ἂς πάρουμε γιὰ σύγκριση δυὸ γωνίες: τὴ $\sphericalangle$ (Ox, Oy) καὶ τὴ $\sphericalangle$ (O′x′, O′y′) (σχ. 107). Ὅταν μὲ διαφανὲς χαρτὶ πάρουμε τὸ ἀντίγραφο τῆς $\sphericalangle$ (O′x′, O′y′) καὶ τὸ θέσουμε πάνω στὴ $\sphericalangle$ (Ox, Oy) ἔτσι, ποὺ ἡ ἡμιευθεῖα O′x′ νὰ ἐφαρμόση πάνω στὴν Ox, τρία εἶναι τὰ ἐνδεχόμενα :

1ο Ἡ O′y′ νὰ πέση στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $\sphericalangle$ (Ox, Oy) (σχ. 107α′), ὁπότε λέμε ὅτι ἡ γωνία (O′x′, O′y′) εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ γωνία (Ox, Oy) καὶ γράφουμε :

$$\sphericalangle (O'x', O'y') < \sphericalangle (Ox, Oy)$$

2ο Ἡ O′y′ νὰ ἐφαρμόση κι᾽ αὐτή, μαζὶ μ᾽ ὁλόκληρο τὸ χωρίον, πάνω



Σχ. 107. Σύγκριση τῶν γωνιῶν (Ox, Oy) καὶ (O′x′, O′y′)

στὴν Oy (σχ. 107β′), ὁπότε λέμε ὅτι οἱ γωνίες εἶναι ἴσες καὶ γράφουμε :

$$\sphericalangle (O'x', O'y') = \sphericalangle (Ox, Oy)$$

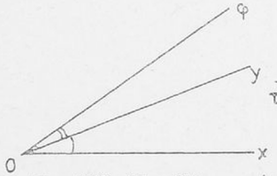
3ο Ἡ O′y′ νὰ πέση ἔξω ἀπὸ τὴ γωνία (Ox, Oy) (σχ. 107γ′), ὁπότε λέμε ὅτι ἡ γωνία (O′x′, O′y′) εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν (Ox, Oy) καὶ γράφουμε :

$$\sphericalangle (O'x', O'y') > \sphericalangle (Ox, Oy).$$

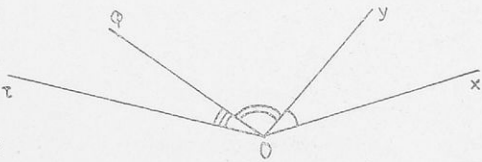
Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι : **δυὸ γωνίες εἶναι ἄνισες, ἂν ἡ μιὰ εἶναι ἴση μὲ μέρος τῆς ἄλλης.**

Τὸ ἴδιο αὐτὸ γνώρισμα τῆς ἀνισότητος ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ σχήματα, ποὺ προσφέρονται γιὰ σύγκριση.

115. Γωνίες ἐφεξῆς - Διαδοχικὲς γωνίες.—Οἱ γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Oy, Oφ) (σχ. 108), ἑνὸς ἐπιπέδου (**ὁμοεπίπεδες γωνίες**) ἔχουν μεταξύ τους



Σχ. 108. Ἐφεξῆς γωνίες



Σχ. 109. Διαδοχικὲς γωνίες

μιὰν εἰδικὴ θέση, ποὺ χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα γνωρίσματα :

1ο Ἔχουν τὴν ἴδια κορυφή.

2ο Ἔχουν μιὰ κοινὴ πλευρά.

3ο Βρίσκονται τὴ μιὰ καὶ τὴν ἄλλη μεριὰ (ἑκατέρωθεν) τῆς κοινῆς πλευρᾶς.

Δυὸ τέτοιες γωνίες λέγονται **ἐφεξῆς γωνίες**. Ὥστε :

Δυὸ γωνίες λέγονται ἐφεξῆς, ἂν εἶναι ὁμοεπίπεδες, ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴ καὶ βρίσκονται ἑκατέρωθεν μιᾶς κοινῆς πλευρᾶς.

Τρεῖς ἢ περισσότερες γωνίες, ποὺ ἡ θέση τους καθορίζεται ἔτσι : ἡ δεύτερη νὰ εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὴν πρώτη, ἡ τρίτη ἐφεξῆς μὲ τὴ δεύτερη, ἡ τέταρτη ἐφεξῆς μὲ τὴν τρίτη..., ὅπως στὸ σχῆμα 109, λέγονται **γωνίες διαδοχικές**.

Οἱ γωνίες (Ox, Oy), (Oy, Oφ), (Oφ, Oτ) τοῦ σχήματος 109 εἶναι γωνίες διαδοχικές.

116. Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση γωνιῶν.—Δίνονται οἱ ἐφεξῆς γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Oy, Oφ) (σχ. 108) καὶ ζητεῖται τὸ ἄθροισμά τους.

Ἄθροισμα δυὸ ἐφεξῆς γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία, ποὺ ἔχει ἀρχικὴ πλευρὰ τὴν ἀρχικὴ τῆς πρώτης καὶ τελικὴ πλευρὰ τὴν τελικὴ τῆς δευτέρας.

Ὥστε θὰ εἶναι: $\sphericalangle(Ox, Oy) + \sphericalangle(Oy, O\varphi) = \sphericalangle(Ox, O\varphi)$.

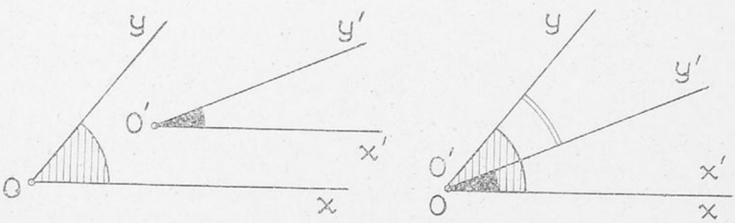
Ἂν ζητεῖται τὰ ἄθροισμα δυὸ μὴ ἐφεξῆς γωνιῶν, τότε μὲ τὴν κατάλληλη μεταφορὰ τὶς κάνουμε ἐφεξῆς καὶ προσθέτομε, ὅπως παραπάνω.

Γιὰ νὰ προσθέσουμε, τέλος, τρεῖς ἢ περισσότερες γωνίες, ἀρκεῖ νὰ τὶς καταστήσουμε διαδοχικὲς καὶ νὰ πάρουμε τὴ γωνία, ποὺ ἔχει ἀρχικὴ πλευρὰ τὴν ἀρχικὴ τῆς πρώτης καὶ τελικὴ τήν τελικὴ τῆς τελευταίας. Ἔτσι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ σχήματος 109 εἶναι:

$$\sphericalangle(Ox, Oy) + \sphericalangle(Oy, O\varphi) + \sphericalangle(O\varphi, O\tau) = \sphericalangle(Ox, O\tau)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι μᾶς εἶναι ἀδιάφορη ἡ σειρά, μὲ τὴν ὁποία θὰ καταστήσουμε αὐτὲς τὶς γωνίες διαδοχικές. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι καὶ ἡ πρόσθεση τῶν γωνιῶν εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική.

Ἐπίσης, στὸ ἴδιο ἄθροισμα θὰ καταλήξουμε, ἂν προσθέσουμε πρῶτα τὶς γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Oy, Oφ) καὶ στὸ ἄθροισμά τους προσθέσουμε ἔπειτα τὴν (Oφ, Oτ), ἢ ἂν στὴ γωνία (Ox, Oy) προσθέσουμε τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ ἄλλων γωνιῶν. Ὥστε καὶ ἡ πρόσθεση τῶν γωνιῶν ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ προσεταιρισμοῦ.



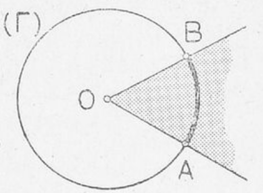
Σχ. 110. Ἡ διαφορά: $\sphericalangle(Ox, Oy) - \sphericalangle(O'x', O'y')$

Ἂν τώρα δοθοῦν οἱ γωνίες (Ox, Oy) καὶ (O′x′, O′y′) (σχ. 110) ὅπου $\sphericalangle(Ox, Oy) > \sphericalangle(O'x', O'y')$ καὶ ζητεῖται ἡ διαφορά τους, θέτομε τὴ μικρότερη γωνία πάνω στὴ μεγαλύτερη ἔτσι, ποὺ τὸ ζεῦγος τῶν ἀρχικῶν πλευρῶν Ox, O′x′ νὰ συμπέση. Ἡ O′y′ θὰ πάρη τότε μιὰ θέση ἀνάμεσα στὶς πλευρὲς τῆς μεγαλυτέρας γωνίας καὶ θὰ σχηματισθῆ μιὰ τρίτη γωνία, ἡ (O′y′, Oy), τέτοια, ποὺ τὸ ἄθροισμά της μὲ τὴ μικρότερη γωνία εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀπὸ τὶς γωνίες, ποὺ δόθηκαν. Συνεπῶς, ἡ $\sphericalangle(O'y', Oy)$ θὰ εἶναι ἡ διαφορά, ποὺ ζητοῦμε. Εἶναι δηλ.:

$$\sphericalangle(O'y', Oy) = \sphericalangle(Ox, Oy) - \sphericalangle(O'x', O'y')$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι: **ἡ διαφορὰ δυὸ ἴσων γωνιῶν εἶναι ἡ μηδενικὴ** γωνία.

117. Ἐπίκεντρες γωνίες καὶ ἀντίστοιχα τόξα.—Ἂς πάρουμε τὴν περιφέρεια (Γ) μὲ κέντρον O (σχ. 111). Καθεμιὰ ἀπ' τὶς γωνίες (Ox, Oy), ποὺ ἔχει τὴν κορυφή της στὸ κέντρο τῆς περιφερείας, λέγεται **ἐπίκεντρη γωνία**.



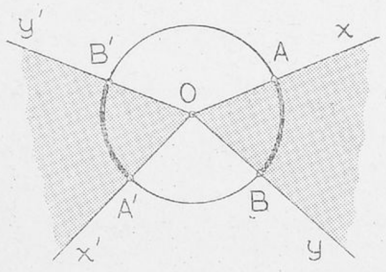
Σχ. 111. Ἐπίκεντρη γωνία

Οἱ ἡμιευθεῖες Ox, Oy τέμνουν τὴ (Γ) στὰ σημεῖα A καὶ B, ἀντίστοιχα, ὁρίζοντας ἔτσι πάνω στὴν περιφέρεια δυὸ τόξα μὲ ἄκρα τὰ A καὶ B. Τὸ τόξο AB, ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς κυρτῆς ἢ τῆς μὴ κυρτῆς γωνίας (Ox, Oy) λέγεται ἀντίστοιχο τόξο αὐτῆς τῆς γωνίας. Ὥστε:

Ἐπίκεντρη γωνία λέγεται κάθε γωνία, ποὺ ἔχει τὴν κορυφή της στὸ κέντρο μιᾶς περιφερείας, καὶ ἀντίστοιχο σ' αὐτὴν τόξο, τὸ τόξο ποὺ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ αὐτῆς τῆς γωνίας.

Ἔτσι ἡ κυρτὴ γωνία (Ox, Oy) λέμε ὅτι ἔχει ἀντίστοιχο τόξο τὸ $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 111) ἢ ὅτι **βαίνει στὸ τόξο AB.**

Σὲ μιὰ περιφέρεια (Γ) ἂς πάρουμε δυὸ ἴσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{A'B'}$, κι' ἂς σχηματίσουμε τὶς ἐπίκεντρες γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Ox' Oy'), ποὺ βαίνουν σ' αὐτὰ (σχ. 112). Ἂν σ' ἕνα διαφανὲς χαρτὶ βγάλουμε τὸ ἀντίγραφο τοῦ ὅλου σχήματος καὶ καρφώνοντας τὸ κέντρο του πάνω στὸ κέντρο τῆς περιφερείας (Γ) τὸ περιστρέφουμε ἔτσι, ποὺ τὸ A' νὰ συμπέση μὲ τὸ A, τότε καὶ τὸ B' θὰ συμπέση μὲ τὸ B, ἀφοῦ εἶναι $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$. Ἀλλὰ τότε καὶ οἱ πλευρὲς Ox, Oy τῆς γωνίας (Ox, Oy) θὰ συμπέσουν μὲ τὶς Ox', Oy' τῆς (Ox', Oy') καὶ τὰ ἐπίπεδα χωρία θὰ ταυτισθοῦν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι καὶ οἱ γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Ox', Oy') εἶναι ἴσες.



Σχ. 112. Ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες

Τὸ ἴδιο θὰ συμβῆ, ἂν πάρουμε δυὸ ἴσα τόξα, ὄχι στὴν ἴδια περιφέρεια, ἀλλὰ σὲ δυὸ ἴσες περιφέρειες, δηλ. σὲ περιφέρειες μὲ ἀκτῖνες $\alpha = \alpha'$ (§ 88). Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι:

Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες σὲ ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες.

Ὥστε: $\alpha = \alpha' \wedge \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \Rightarrow \sphericalangle(Ox, Oy) = \sphericalangle(Ox', Oy')$ (117,1)

Ἀλλὰ μὲ τὸν ἴδιο, ὅπως παραπάνω τρόπο, μποροῦμε νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι :

Στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες σὲ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα.

Εἶναι δηλ. :

$$\alpha = \alpha' \wedge \sphericalangle(Ox, Oy) = \sphericalangle(Ox' \; Oy') \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \qquad (117{,}2)$$

Οἱ δυὸ αὐτὲς συνεπαγωγὲς (117,1) καὶ (117,2) συνιστοῦν τὴν ἰσοδυναμία:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \Leftrightarrow \sphericalangle(Ox, Oy) = \sphericalangle(Ox', Oy') \qquad (117{,}3)$$

ποὺ ἀποτελεῖ τὴ θεμελιώδη σχέση μεταξὺ τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων τόξων στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες.

Εὔκολα, ἐπίσης, μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες σὲ ἄνισα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἄνισες ἐπίκεντρες γωνίες καί, μάλιστα, στὸ μεγαλύτερο τόξο ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερη γωνία. Καί, ἀντίστροφα, σὲ ἄνισες ἐπίκεντρες γωνίες ἀντιστοιχοῦν ἄνισα τόξα καί, μάλιστα, στὴ μεγαλύτερη ἐπίκεντρη γωνία ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερο τόξο.

118. Μέτρηση καὶ μέτρο γωνίας.—Ὅταν ἐκλέξουμε μιὰ γωνία καὶ τῆς δώσουμε τὸ ὄνομα **μονάδα**, **μέτρηση** μιᾶς ὁποιασδήποτε γωνίας θὰ εἶναι ἡ εὕρεση τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ ἐκφράζει ἀπὸ πόσες γωνίες - μονάδες (μοναδιαῖες γωνίες) ἀποτελεῖται αὐτὴ ἡ γωνία. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται **μέτρον** τῆς γωνίας.

Ἀλλὰ ποιὰ θὰ εἶναι ἡ μοναδιαία γωνία;

Στὴν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ὅτι σὲ ἴσα τόξα μιᾶς περιφερείας ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες. Εἴδαμε ἐπίσης πιὸ πάνω (§ 93) ὅτι, ἂν ἔχουμε ὁσεσδήποτε ὁμόκεντρες περιφέρειες μὲ κέντρον O καὶ στὴν ἐξωτερικὴν ἀπ' αὐτὲς πάρουμε ἕνα τόξο AB, μέτρου μ, οἱ ἀκτῖνες OA, OB ὁρίζουν πάνω στὶς ἄλλες περιφέρειες τόξα A'B', A''B'',..., ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο μέτρο μ (βλ. σχ. 88, σελ. 81).

Ἂν λοιπὸν γράψουμε μιὰ ὁποιαδήποτε περιφέρεια, πάρουμε πάνω σ' αὐτὴ τόξο, 1^0 ἢ 1 gr καὶ γράψουμε τὴν ἐπίκεντρη γωνία, ποὺ βαίνει σ' αὐτὸ τὸ τόξο, ἡ γωνία αὐτὴ θὰ εἶναι ἡ **μονάδα τῶν γωνιῶν** καὶ θὰ λέγεται **γωνία μιᾶς μοίρας ἢ γωνία ἑνὸς βαθμοῦ.**

Κάθε γωνία, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4... γωνιῶν ἴσων μὲ τὴν μοναδιαία γωνία τῆς 1^0 ἢ τοῦ 1 gr, θὰ λέμε ὅτι ἔχει μέτρον 2^0, 3^0, 4^0,... ἢ 2 gr, 3 gr, 4 gr... Χρησιμοποιώντας, ἐπίσης, τὶς ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας ἢ τοῦ βαθμοῦ, μποροῦμε νὰ ἔχουμε γωνίες : $40^0\ 30'$ ἢ $50^0\ 45'\ 20''$ ἢ 48,583 gr.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι :

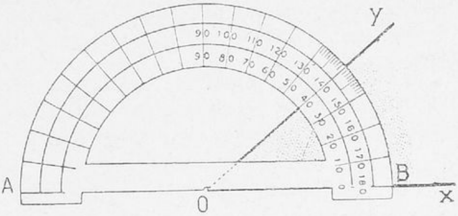
Μέτρον μιᾶς γωνίας εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τῆς περιφερείας, ποὺ γράφεται μὲ κέντρον τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας καὶ μὲ ὁποιαδήποτε ἀκτῖνα.

Συνεπῶς, ἡ μέτρηση γωνίας, καθὼς καὶ ἡ κατασκευὴ γωνίας μὲ ὡρισμένο μέτρο, γίνεται μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο, ὅπως στὰ ἀκόλουθα προβλήματα :

● **Ἀξιοσημείωτη παρατήρηση :** Ἐνῶ δυὸ τόξα ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο μέτρο, εἶναι ἴσα, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, βρίσκονται πάνω στὴν ἴδια ἢ σὲ ἴσες περιφέρειες (§ 93), **δυὸ γωνίες, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο μέτρο, εἶναι πάντοτε ἴσες.**

119. Πρόβλημα Ι.—**Νὰ βρεθῆ τὸ μέτρο της γωνίας (Οx, Oy) τοῦ σχήματος 113.**

Τοποθετοῦμε τὸ μοιρογνωμόνιο ἔτσι, ποὺ νὰ συμπέσουν μὲ τὴ μεγαλύτερη δυνατὴ ἀκρίβεια :



Σχ. 113. Μέτρηση γωνίας

1ο Τὸ κέντρον Ο τοῦ μοιρογνωμονίου μὲ τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας.

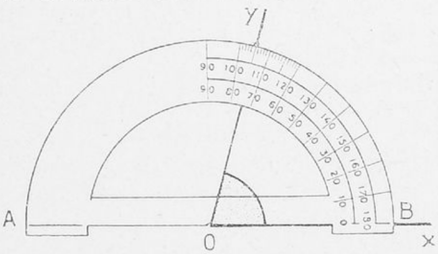
2ο Ἡ διάμετρος ΑΒ τοῦ μοιρογνωμονίου μὲ τὴν πλευρὰ Οx τῆς γωνίας

Καὶ τότε ἀρκεῖ νὰ διαβάσουμε πάνω στὴ βαθμολογημένη περιφέρεια τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν ὑποδιαίρεση, ποὺ ὑποδείχνει ἡ πλευρὰ Oy. Ἔτσι στὸ σχῆμα 113 ἔχουμε : $\widehat{xOy} = 40^0$.

120. Πρόβλημα ΙΙ.—**Νὰ κατασκευασθῆ γωνία 75⁰ μὲ μιὰ πλευρὰ τὴν ἡμιευθεῖα Οx καὶ κορυφὴ τὴν ἀρχή της Ο.**

Τοποθετοῦμε τὸ μοιρογνωμόνιο ἔτσι, ποὺ μὲ τὴ μεγαλύτερη δυνατὴ ἀκρίβεια νὰ συμπέσουν :

1ο Τὸ κέντρο τοῦ μοιρογνωμονίου μὲ τὴν ἀρχὴ τῆς ἡμιευθείας.



Σχ. 114. Κατασκευὴ γωνίας

2ο Ἡ διάμετρος τοῦ μοιρογνωμονίου μὲ τὴν ἡμιευθεῖα Οx.

Καὶ τότε, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ 0 τοῦ μοιρογνωμονίου, ποὺ βρίσκεται πάνω στὴν Οx, διαβάζουμε πάνω στὴν περιφέρειά του τὴν ἔνδειξη 75^0 καὶ σημειώνουμε στὸ χαρτί μας τὸ σημεῖο, ποὺ δείχνει ἡ ἀντίστοιχη χαραγή. Ἀποσύρομε, τέλος, τὸ μοιρογνωμόνιο καὶ ἑνοῦμε τὸ σημεῖο αὐτὸ μὲ τὸ Ο. Ἔτσι θὰ ἔχουμε τὴ δεύτερη πλευρὰ Oy τῆς γωνίας. Θὰ εἶναι δηλ. $\widehat{xOy} = 75^0$.

Μιὰν ἀκόμη γωνίαν 75^0 μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριὰ τῆς Οx, χρησιμοποιώντας τὴν ἄλλη βαθμολογία τοῦ μοιρογνωμονίου.

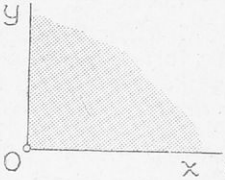
121. Τὰ μέτρα διαφόρων γωνιῶν.— 1. Μιὰ γωνία μηδενική, (σχ. 104α΄) ἔχει προφανῶς μέτρον 0^0 ἢ 0 gr.

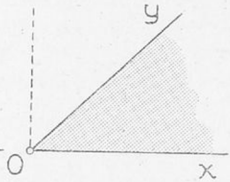
2. Μιὰ πλήρης γωνία ἔχει ἀντίστοιχο τόξο ὁλόκληρη περιφέρεια. Συνεπῶς, τὸ μέτρο μιᾶς τέτοιας γωνίας εἶναι 360^0 ἢ 400 gr.

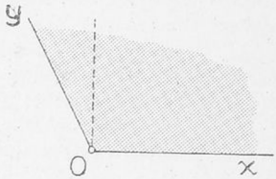
3. Μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία (σχ. 104γ΄) βαίνει σὲ ἡμιπεριφέρεια. Ἄρα τὸ μέτρο της εἶναι 180° ἢ 200 gr. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν μέτρων συνάγεται ὅτι: ὅλες οἱ ἀποπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες (βλ. καὶ § 114).

4. Μιὰ κυρτὴ γωνία (σχ. 113) ἔχει ἀντίστοιχο ἕνα τόξο μικρότερο τῆς ἡμιπεριφερείας. Γι' αὐτὸ καὶ τὸ μέτρο της εἶναι μικρότερο τῶν 180° ἢ τῶν 200 gr.

5. Μιὰ μὴ κυρτὴ γωνία ἔχει προφανῶς μέτρο μεγαλύτερο τῶν 180° ἢ 200 gr. Ἡ κατασκευὴ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο, μιᾶς τέτοιας γωνίας, ὅταν δίνεται τὸ μέτρο της, ἀνάγεται στὴν κατασκευὴ τῆς κυρτῆς γωνίας, ποὺ ἔχει







Σχ. 115. Ὀρθὴ γωνία. **Σχ. 116.** Ὀξεῖα γωνία. **Σχ. 117.** Ἀμβλεῖα γωνία

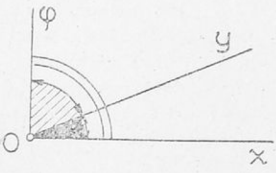
μέτρο τὴ διαφορὰ τῶν 360° ἢ 400 gr ἀπὸ τὸ μέτρο αὐτῆς τῆς γωνίας. Ἔτσι, π.χ., γιὰ νὰ κατασκευάσουμε μιὰ γωνία 300°, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσουμε τὴ γωνία τῶν: 360° − 300° = 60° καὶ νὰ πάρουμε τὴ μὴ κυρτὴ γωνία, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς ἴδιες πλευρές.

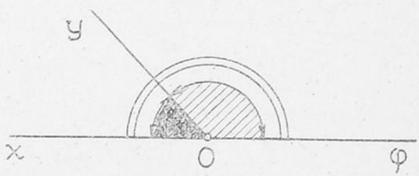
6. Κάθε γωνία, ποὺ βαίνει σὲ τεταρτημόριο περιφερείας, ἔχει δηλ. μέτρο 90° ἢ 100 gr λέγεται **γωνία ὀρθὴ** (σχ. 115). Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν μέτρων συνάγεται ὅτι: ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες. Κάθε ὀρθὴ γωνία εἶναι τὸ μισὸ μιᾶς ἁπλωτῆς γωνίας (σχ. 116).

7. Μία γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ὀξεῖα γωνία.** Συνεπῶς, τὸ μέτρο μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι μικρότερο τῶν 90° ἢ 100 gr.

8. Μιὰ γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ λέγεται **ἀμβλεῖα γωνία** (σχ. 117). Ὥστε κάθε ἀμβλεῖα γωνία ἔχει μέτρο μεγαλύτερο τῶν 90° ἢ 100 gr.

9. Δυὸ γωνίες, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα μιὰ ὀρθὴ γωνία, λέγονται **γωνίες**





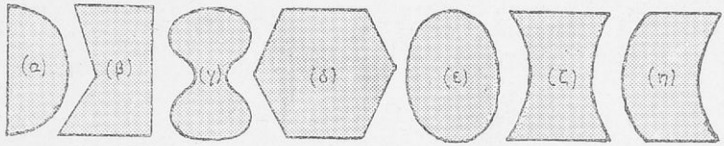
Σχ. 118. Γωνίες συμπληρωματικές. **Σχ. 119.** Γωνίες παραπληρωματικὲς

συμπληρωματικὲς (σχ. 118) κι' ἡ καθεμιὰ λέγεται **συμπλήρωμα** τῆς ἄλλης. Π.χ. οἱ γωνίες τῶν 30° καὶ 60° εἶναι συμπληρωματικές, γιατί: 30° + 60° = 90°.

10. Δυὸ γωνίες, ποὺ τὸ ἄθροισμά τους εἶναι μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία, λέγονται **γωνίες παραπληρωματικὲς** (σχ. 119) κι' ἡ καθεμιὰ λέγεται **παραπλήρωμα** τῆς ἄλλης. Τέτοιες π.χ. εἶναι οἱ γωνίες τῶν 60° καὶ 120°, ἀφοῦ: 60° + 120° = 180°.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

373. 'Απὸ τὰ ἐπίπεδα χωρία, ποὺ εἰκονίζονται στὸ σχῆμα 120 ποιά εἶναι κυρτὰ καὶ ποιά μὴ κυρτά ;



Σχ. 120. Διάφορα κυρτὰ καὶ μὴ κυρτὰ ἐπίπεδα χωρία

374. Τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς κυρτοῦ ἐπιπέδου χωρίου, ὡς πρὸς ὁλόκληρο τὸ ἐπίπεδο, εἶναι κυρτό ; 'Η ἴδια ἐρώτηση γιὰ τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς μὴ κυρτοῦ ἐπιπέδου χωρίου.

375. Δυὸ κυρτὰ χωρία (Α) καὶ (Β) στὸ ἴδιο ἐπίπεδο ἔχουν κοινὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα, ποὺ τὸ σύνολό τους ἀποτελεῖ ἕνα νέο ἐπίπεδο χωρίον (Γ). Εἶναι δηλ. $(A) \cap (B) = (\Gamma)$. Τὸ (Γ) θὰ εἶναι κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίον ; Κάμετε μ' ἕνα σχέδιο τὴν ἐπαλήθευση.

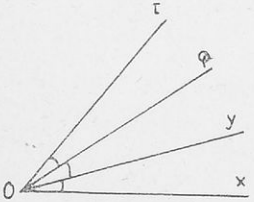
376. Νὰ σχεδιάσετε δυὸ ἐπίπεδα χωρία, ποὺ ἡ τομή τους νὰ μὴν εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι : i) τὸ ἕνα κυρτό, τὸ ἄλλο μὴ κυρτὸ καὶ ἡ τομή τους μὴ κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίο, ii) καὶ τὰ δυὸ μὴ κυρτὰ καὶ ἡ τομή τους μὴ κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίο, iii) καὶ τὰ δυὸ μὴ κυρτὰ καὶ ἡ τομή τους κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίο.

377. Χαράξτε δυὸ εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ, ποὺ νὰ τέμνωνται στὸ Ο, καὶ ὀνομάστε ὅλες τὶς κυρτὲς γωνίες ποὺ σχηματίζονται.

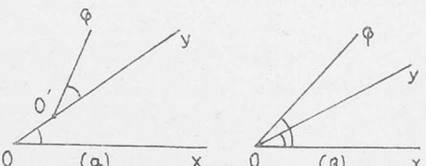
378. Δίνονται δυὸ παράλληλες εὐθεῖες ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ μιὰ τρίτη εὐθεῖα ΕΖ, ποὺ τὶς κόβει στὰ σημεῖα Η καὶ Θ, ἀντίστοιχα. Πόσες κυρτὲς γωνίες σχηματίσθηκαν ; 'Ονομάστε ὅλες αὐτὲς τὶς γωνίες.

379. Ἂν θεωρήσουμε σὰν ἀρχικὴ πλευρὰ τὸν ὡροδείκτη καὶ τελικὴ τὸ λεπτοδείκτη ἑνὸς ρολογιοῦ, τί εἴδους γωνίες, ὡς πρὸς τὴν κυρτότητα σχηματίζουν οἱ δυὸ αὐτοὶ δεῖκτες, ὅταν τὸ ρολόϊ δείχνει: i) 1 ὡρ. 20 π. ii) 2 ὡρ. 50 π., iii) 3 ὡρ. 40 π., iv) 5 ὡρ. 15 π., v) 6 ὡρ., vi) 8 ὡρ. 5 π., vii) 10 ὡρ. 25 π., viii) 12 ὡρ. ;

380. Στὸ σχῆμα 121 εἶναι : $x\widehat{O}y = y\widehat{O}\varphi = \varphi\widehat{O}\tau$. Νὰ συμπληρωθοῦν μὲ τὰ



Σχ. 121. Σύγκριση γωνιῶν



Σχ. 122. 'Εφεξῆς καὶ μὴ ἐφεξῆς γωνίες

τὰ σημεῖα = ἢ ⟨ ἢ ⟩ : i) $xO\varphi \dots xOy$, ii) $x\widehat{O}\varphi \dots y\widehat{O}\tau$, iii) $y\widehat{O}\varphi \dots y\widehat{O}\tau$.

381. Νὰ ἐξακριβώσετε, ἂν οἱ γωνίες (Ox, Oy) καὶ (O′y, O′φ) τοῦ σχήματος 121α′, καθὼς καὶ οἱ γωνίες (Ox, Oy) καὶ (Ox, Oφ) τοῦ σχήματος 122β′ εἶναι ἐφεξῆς. Σὲ ἀρνητικὴ ἀπάντηση νὰ ἀναφέρετε τί κοινὰ γνωρίσματα καὶ τί διαφορὲς ἔχουν μὲ τὶς ἐφεξῆς γωνίες.

382. Μὲ βάση τὸ σχῆμα 121 νὰ συμπληρώσετε μὲ + ἢ − τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες :

i) $x\widehat{O}\tau = x\widehat{O}\varphi \dots \varphi\widehat{O}\tau$, ii) $y\widehat{O}\varphi = x\widehat{O}\varphi \dots x\widehat{O}y$

iii) $x\widehat{O}y = x\widehat{O}\tau \dots \tau\widehat{O}y$, iv) $x\widehat{O}\tau = x\widehat{O}y \dots y\widehat{O}\varphi \dots \varphi\widehat{O}\tau$

383. Ἀπὸ τὸ ἴδιο παραπάνω σχῆμα νὰ συμπληρώσετε μὲ γωνίες τὶς ἰσότητες :

i) $y\widehat{O}\varphi = \tau\widehat{O}y - \dots$ ii) $x\widehat{O}\varphi = x\widehat{O}\tau - \dots$

iii) $x\widehat{O}\tau = \dots + \dots = \dots + \dots$

384. Νὰ συγκριθοῦν οἱ γωνίες, ποὺ σχηματίζει ὁ ὡροδείκτης καὶ λεπτοδείκτης ἑνὸς ρολογιοῦ στὶς ἀκόλουθες ὧρες : i) 3 ὡρ. καὶ 9 ὡρ., ii) 1 ὡρ. καὶ 11 ὡρ., iii) 5 ὡρ. καὶ 7 ὡρ., iv) 8 ὡρ. καὶ 4 ὡρ.

385. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν : i) $4^{0}\,12'\,14'' + 15^{0}\,26'\,34'' + 36^{0}\,42'\,53''$, ii) $38^{0}\,50'\,24'' + 63^{0}\,42'\,38'' + 54^{0}\,26'\,15''$, iii) 42,5 gr + 23,27 gr + 36,843 gr, iv) 56,208 gr + 73,45 gr + 88,7 gr.

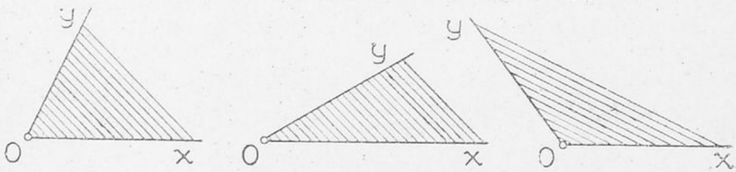
386. Νὰ ὑπολογίσετε τὶς διαφορὲς τῶν γωνιῶν : i) $84^{0}\,32' - 47^{0}\,54'\,26''$, ii) $57^{0}\,4'' - 23^{0}\,45'$, iii) 83,5 gr − 56,483 gr, iv) 127,52 gr − 84,675 gr.

387. Μὲ χρήση τῶν πινάκων I καὶ II (σελ. 78–79) νὰ ἐκτιμήσετε σὲ βαθμοὺς τὶς γωνίες : i) $52^{0}\,30'\,24''$, ii) $83^{0}\,45'\,27''$ καὶ σὲ μοῖρες τὶς γωνίες : i) 54,8 gr, ii) 36,837 gr.

388. Μὲ τοὺς ἴδιους πίνακες νὰ βρῆτε πόσες μοῖρες καὶ πόσους βαθμοὺς διαφέρουν οἱ γωνίες : i) 45^{0} καὶ 45 gr, ii) 62^{0} καὶ 62 gr, iii) 32^{0} καὶ 32 gr.

389. Τὸ ἄθροισμα τεσσάρων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι 150^{0}. Ποιό εἶναι τὸ μέτρο κάθε γωνίας, ἂν ἡ α′ ἔχῃ μέτρο $38^{0}\,24'$ καὶ εἶναι κατὰ $12^{0}\,42'\,36''$ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ β′ καὶ κατὰ $23^{0}\,42'\,8''$ μικρότερη ἀπὸ τὴ γ′ ;

390. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο νὰ μετρηθοῦν οἱ γωνίες τοῦ σχήματος 123.



Σχ. 123. Μέτρηση γωνιῶν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο

391. Γράψτε στὸ τετράδιό σας τρεῖς γωνίες καὶ μὲ τὸ μάτι νὰ ἐκτιμήσετε τὸ μέτρο τους σὲ μοῖρες. Ἔπειτα νὰ κάμετε ἐπαλήθευση μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

392. Νὰ κατασκευάσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο γωνίες : i) 30^{0}, 60^{0}, 70^{0}, ii) 120^{0}, 135^{0}, 150^{0}.

393. Γράψτε δυὸ γωνίες κυρτές. Μετρῆστε τις καὶ κατασκευάστε τὸ ἄθροισμά τους καὶ τὴ διαφορά τους.

394. Νὰ κατασκευάσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο γωνίες: 240^0, 300^0, 330^0.

395. Νὰ κατασκευάσετε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο δυὸ γωνίες, τὴ μιὰ 125^0 καὶ τὴν ἄλλη 85^0. Ἔπειτα νὰ κατασκευάσετε τὸ ἄθροισμα καὶ τὴ διαφορά τους καὶ νὰ κάμετε ἐπαλήθευση μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

396. Ἂν ὁ λεπτοδείκτης ἑνὸς ρολογιοῦ δείχνει ἀκριβῶς 12, πόσα πρωτόλεπτα πρέπει νὰ περάσουν, ὥστε νὰ ἔχη σχηματίση μὲ τὴν ἀρχική του θέση μιὰ γωνία: i) ὀρθή, ii) ἁπλωτή;

397. Στὴ συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = 90^0 \\ \widehat{B} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

μπορεῖ τὸ $\Rightarrow$ ν' ἀντικατασταθῆ ἀπὸ τὸ σύμβολο $\Leftrightarrow$ τῆς ἰσοδυναμίας;

398. Ποιές ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες γωνίες εἶναι ὀξεῖες, ἀμβλεῖες, κυρτές, μὴ κυρτές: i) 25^0, ii) 148^0, iii) 224^0, iv) 32^0, v) 75^0, vi) 215^0, vii) 110^0, viii) 187^0, ix) 270^0;

399. Ὅταν ὁ λεπτοδείκτης ἑνὸς ρολογιοῦ ἀπὸ τὴν ἔνδειξη 12 στραφῆ ἐπί: i) 8 λεπτά, ii) 42 λ., iii) 18 λ., iv) 29 λ., v) 16 λ., vi) 53 λ., vii) 14 λ., τί εἴδους γωνίαν θὰ ἔχη διαγράψει (ὀξεῖαν, ἀμβλεῖαν, κυρτήν, μὴ κυρτήν);

400. Στὸ ἐσωτερικὸ μιᾶς ἀποπλατυσμένης γωνίας $x\widehat{O}y$ νὰ γράψτε τὶς ἡμιευθεῖες $O\varphi$, $O\tau$ ἔτσι, ποὺ οἱ γωνίες $x\widehat{O}\varphi$ καὶ $\varphi\widehat{O}\tau$ νὰ εἶναι ὀξεῖες καὶ ἡ $\tau\widehat{O}y$ ἀμβλεῖα.

401. Νὰ βρῆτε νοερὰ τὰ συμπληρώματα τῶν γωνιῶν: i) 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, ii) 25 gr, 50 gr, 75 gr.

402. Ἀπὸ δυὸ γωνίες συμπληρωματικὲς ἡ μιὰ μπορεῖ νὰ εἶναι ἀμβλεῖα; Γιατί;

403. Γράψτε δυὸ ἐφεξῆς γωνίες μὲ μέτρα 28^0 καὶ 62^0. Σὲ ποιά σχέση βρίσκονται αὐτὲς οἱ γωνίες;

404. Ὑπολογίσατε τὰ συμπληρώματα τῶν γωνιῶν: i) $57^0\,30'$, $69^0\,45'$, $47^0\,52'\,43''$, $12^0\,37'\,54''$, ii) 52,84 gr, 93,213 gr, 27,5 gr.

405. Δυὸ ἐφεξῆς γωνίες ἔχουν μέτρα 54^0 καὶ 40 gr. Σὲ ποιά σχέση βρίσκονται αὐτὲς οἱ γωνίες;

406. Νὰ συμπληρωθῆ ἡ συνεπαγωγή:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 90^0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\widehat{A} < \cdots \\ \widehat{B} < \cdots\end{array}\right.$$

Μπορεῖ νὰ εἶναι ἰσοδυναμία;

407. Νὰ βρῆτε νοερὰ τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν: i) 30^0, 60^0, 120^0, 150^0, ii) 25 gr, 50 gr, 75 gr, 100 gr, 150 gr.

408. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν: i) $47^0\,25'$, $83^0\,52'$, $114^0\,35'\,23''$, $153^0\,28'\,47''$, ii) 63,5 gr, 97,283 gr, 189,46 gr.

409. Δυὸ ἐφεξῆς γωνίες ἔχουν μέτρα 62,5 gr καὶ $123^0\,45'$. Σὲ ποιά σχέση βρίσκονται αὐτὲς οἱ γωνίες;

410. Ποιό εἶναι τὸ παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος δυὸ γωνιῶν, ποὺ ἡ μιὰ εἶναι $23^0\,45'$ καὶ ἡ ἄλλη $94^0\,28'$;

411. Δυὸ γωνίες εἶναι παραπληρωματικὲς καὶ ἴσες. Τί εἴδους γωνίες εἶναι;

412. Ἡ συνεπαγωγή: «ὅταν δυὸ γωνίες εἶναι ὀρθές, εἶναι παραπληρωματικές» ἀποτελεῖ λογικὴν ἰσοδυναμία;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΑ΄

ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ
Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ

122. Τί εἶναι ἰσότης.—Εἴδαμε στὰ προηγούμενα (§ 19) ὅτι: **δυὸ φυσικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι τότε, καὶ μόνον τότε, ὅταν χαρακτηρίζουν σύνολα ἰσοδύναμα.**

Ἐμάθαμε, ἐπίσης, ὅτι: **ἰσότης εἶναι ἡ γραφή, ποὺ ἐκφράζει ὅτι δυὸ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.** Ἡ γραφή:

$$\alpha = \beta$$

εἶναι μιὰ ἰσότης, ποὺ **μέλη** της εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β.

Ἀπὸ τὶς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εἴδαμε ἀκόμη ὅτι δυὸ ἀριθμοὶ ἴσοι μπορεῖ νὰ εἶναι τὰ ἀποτελέσματα δυὸ τέτοιων πράξεων. Συνεπῶς, ἰσότητες εἶναι καὶ οἱ γραφές:

$$18 + 12 = 20 + 10, \quad 23 + 8 = 40 - 9, \quad 54 - 10 = 36 + 8.$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμό, τέλος, τῆς διαφορᾶς δυὸ ἀριθμῶν (§ 95), ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἰσοδυναμία (98,1):

$$\alpha - \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

μποροῦμε νὰ δώσουμε ἕνα πιὸ αὐστηρὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητος δυὸ ἀριθμῶν.

Ἂν $\gamma = 0$ ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία γίνεται:

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 0.$$

Ἀλλὰ τὸ 0 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεση (§ 62). Συνεπῶς, εἶναι:

$$\alpha = \beta + 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

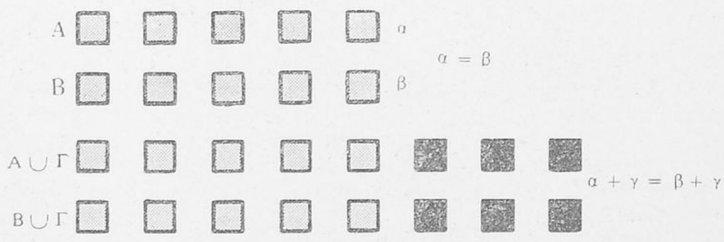
κι᾽ οἱ δυὸ αὐτὲς ἰσοδυναμίες, μὲ τὴ μεταβατικότητα, δίνουν τήν:

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

> **Δυὸ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ διαφορά των εἶναι μηδέν.**

123. Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στὴν πρόσθεση.—Ἂν α καὶ β εἶναι



Σχ. 124. Ὁ νόμος τῆς προσθετικῆς διαγραφῆς

οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ δυὸ ἰσοδυνάμων συνόλων Α καὶ Β (σχ. 124), θὰ εἶναι:

$$\alpha = \beta.$$

Ἕνας ὁποιοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς γ, μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς συνόλου Γ, ξένου πρὸς τὰ Α καὶ Β, τοῦ συνόλου ποὺ ἔχει στοιχεῖα του τὰ μαῦρα τετραγωνίδια σχ. (124). Ἡ ἕνωση τοῦ συνόλου Γ μὲ καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα Α καὶ Β δίνει τὰ σύνολα $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Gamma$ μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha + \gamma$ καὶ $\beta + \gamma$.

Ἡ ἀντιστοίχιση τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων δείχνει ὅτι εἶναι σύνολα ἰσοδύναμα. Ἄρα καὶ οἱ πληθικοί των ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ἴσοι. Θὰ εἶναι δηλ. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Ὥστε θὰ ἔχουμε τὴ συνεπαγωγή :

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντίστροφα, ὅπως δείχνει τὸ παραπάνω σχῆμα, ἔχουμε τὴ συνεπαγωγή :

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

κι᾽ ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς συνεπαγωγὲς τὴν ἰσοδυναμία :

$$\alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \tag{124,1}$$

ποὺ ἐκφράζει ὅτι :

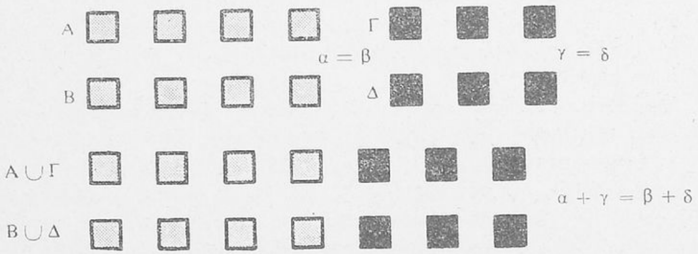
Καὶ στὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἰσότητος μποροῦμε νὰ προσθέσουμε ἢ ν᾽ ἀφαιρέσουμε τὸν ἴδιον ἀριθμό.

Σημειώνουμε ὅτι, στὴν περίπτωση τῆς ἀφαιρέσεως, πρέπει ἡ ἀφαίρεση νὰ εἶναι δυνατή. Ἔτσι π.χ. στὴν ἰσότητα : $\alpha - 7 = 8$ δὲν μποροῦμε ν᾽ ἀφαιρέσουμε κι᾽ ἀπὸ τὰ δυὸ μέλη ἀριθμὸ μεγαλύτερον ἀπὸ 8.

Ἡ παραπάνω ἰδιότης λέγεται **νόμος τῆς διαγραφῆς** ἢ καὶ **νόμος τῆς προσθετικῆς ἁπλοποιήσεως** κι᾽ ἔχει πολὺ μεγάλη σημασία στὰ Μαθηματικὰ γιὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐφαρμογῶν της.

124. Πρόσθεση ἰσοτήτων κατὰ μέλη.—Ἂν ἔχουμε τὰ ἰσοδύναμα σύνολα Α καὶ Β μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β, θὰ εἶναι : $\alpha = \beta$ (σχ. 125).

Δυὸ ἄλλα σύνολα Γ καὶ Δ, ἰσοδύναμα μεταξύ τους καὶ ξένα, ἀντίστοιχα, πρὸς τὰ Α καὶ Β, μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς γ, δ δίνουν τὴν ἰσότητα : $\gamma = \delta$.



Σχ. 125. Πρόσθεση ἰσοτήτων κατὰ μέλη

Αἱ ἑνώσεις $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Delta$ θὰ ἔχουν πληθικοὺς ἀριθμούς, ἀντίστοιχα, $\alpha + \gamma$ καὶ $\beta + \delta$, ποὺ ἡ ἀντιστοίχιση τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων, $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Delta$, δείχνει ὅτι εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι. Ὥστε θὰ ἔχουμε τὴν συνεπαγωγή :

$$\alpha = \beta \wedge \gamma = \delta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \tag{125,1}$$

στὴν ὁποίαν ἡ δεύτερη ἰσότης σχηματίζεται, ἂν προσθέσουμε κατὰ μέλη τὶς δυὸ πρῶτες ἰσότητες.

Εἶναι προφανὲς ὅτι μὲ τοὺς ἴδιους, ὅπως παραπάνω, συλλογισμοὺς καταλήγουμε στὴ συνεπαγωγή :

$$\alpha=\beta \wedge \gamma=\delta \wedge \varepsilon=\zeta \wedge \cdots \wedge \mu=\nu \Rightarrow \alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots+\mu=\beta+\delta+\zeta+\cdots+\nu \quad (125,2)$$

Ὥστε :

Δυὸ ἢ περισσότερες ἰσότητες μποροῦμε νὰ προσθέσουμε κατὰ μέλη.

Ἡ ἰδιότης αὐτή, σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν προηγουμένη, δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή, δηλ. ἡ σχέση (125,2) δὲν ἀποτελεῖ ἰσοδυναμίαν. Πράγματι· δυὸ ἀθροίσματα μπορεῖ νὰ εἶναι ἴσα, χωρὶς οἱ ὅροι τους νὰ εἶναι ἀνὰ δυὸ ἴσοι. Ἔτσι π.χ. ἡ ἰσότης :

$$3+8+5+7=2+4+8+9$$

δὲν ἔχει τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους ἴσους μὲ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου.

Δυὸ ἰσότητες : $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$ μποροῦμε νὰ ἀφαιρέσουμε κατὰ μέλη μόνον, ἐὰν ἡ ἀφαίρεση $\alpha-\gamma$ εἶναι δυνατή, δηλ. ἐὰν $\alpha \geqslant \gamma$.

125. Τί εἶναι ἀνισότης.—Εἶναι γνωστὸν ὅτι : **δυὸ φυσικοὶ ἀριθμοὶ** α **καὶ** β **εἶναι ἄνισοι, ὅταν χαρακτηρίζουν σύνολα, ποὺ τὰ στοιχεῖα τους δὲν μποροῦν νὰ τεθοῦν σ' ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα** (§ 21).

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς διαφορᾶς δυὸ ἀριθμῶν (§ 95) συνάγεται, ἐξ ἄλλου, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α θὰ λέγεται μεγαλύτερος τοῦ β, ἂν $\alpha=\beta+\gamma$, ὅπου $\gamma \neq 0$. Ἀπ' αὐτὸ ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία :

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+\gamma \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$$

Ἂν π.χ. εἶναι : $12=7+5$, μποροῦμε νὰ γράψουμε :

$$12>7 \quad \text{ἢ} \quad 7<12 \qquad \text{καὶ} \qquad 12>5 \quad \text{ἢ} \quad 5<12.$$

Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς παραπάνω γραφὲς λέγεται **ἀνισότης** (§ 22) μὲ ἕνα πρῶτο μέλος, πρὶν ἀπὸ τὸ σύμβολο τῆς ἀνισότητος, κι' ἕνα δεύτερο μέλος, μετὰ ἀπ' αὐτό.

Ὅπως στὶς ἰσότητες, ἔτσι καὶ σὲ κάθε ἀνισότητα τὰ μέλη της μπορεῖ νὰ εἶναι τὰ ἐξαγόμενα προσθέσεων ἢ ἀφαιρέσεων. Ἔτσι π.χ. εἶναι :

$$15+13>18+6, \qquad 5+7>25-18, \qquad 32-10>12+9.$$

Οἱ ἀνισότητες : $8>5$ καὶ $10>3$, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο σύμβολο ἀνισότητος, τὸ $>$, λέγονται **ὁμοιόστροφες** ἀνισότητες, ἐνῶ οἱ ἀνισότητες : $9>2$ καὶ $3<7$, ποὺ ἔχουν διάφορα σύμβολα ἀνισότητος, ἡ πρώτη τὸ $>$ καὶ ἡ ἄλλη τὸ $<$, λέγονται ἀνισότητες **ἑτερόστροφες**.

Ἡ διάκριση αὐτὴ δυὸ ἢ περισσοτέρων ἀνισοτήτων σὲ ὁμοιόστροφες καὶ ἑτερόστροφες εἶναι ἀναγκαία, ὅπως θὰ ἰδοῦμε στὰ ἑπόμενα.

Ἡ διπλῆ γραφή : $\alpha>\beta$ ἢ $\beta<\alpha$ τῆς ἴδιας ἀνισότητος μᾶς δίνει τὴ δυνατότητα ὁσεσδήποτε ἑτερόστροφες ἀνισότητες νὰ τὶς κάνουμε ὁμοιόστροφες. Ἔτσι π.χ. τὶς ἀνισότητες :

$$\alpha > 7, \quad \beta + 3 < 5, \quad \gamma - 6 > 1, \quad \delta < 3$$

μποροῦμε νὰ γράψουμε :

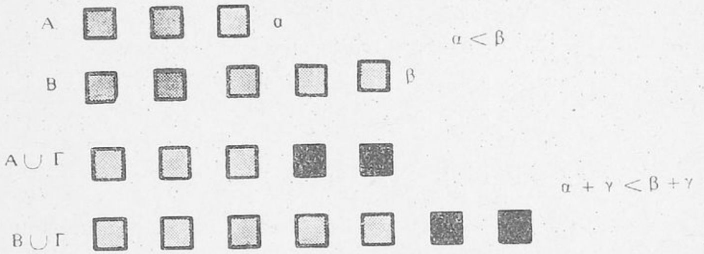
$$\alpha > 7, \quad 5 > \beta + 3, \quad \gamma - 6 > 1, \quad 3 > \delta$$

ἢ καὶ

$$7 < \alpha, \quad \beta + 3 < 5, \quad 1 < \gamma - 6, \quad \delta < 3.$$

126. Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στὶς ἀνισότητες.—Ἂν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β χαρακτηρίζουν, ἀντίστοιχα, τὰ διάφορα σύνολα Α καὶ Β (σχ. 126), εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε ὅτι : $\alpha < \beta$.

Ἂν ἕνα τρίτο σύνολο Γ, αὐτὸ μὲ τὰ μαῦρα τετραγωνικὰ σύμβολα, ποὺ



Σχ. 126. Ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στὶς ἀνισότητες

ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸ γ κι' εἶναι ξένο πρὸς τὰ Α καὶ Β, ἑνώσουμε μὲ καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ σύνολα, θὰ ἔχουμε ἕνα νέο ζεῦγος συνόλων, τὰ $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Gamma$, μὲ πληθικοὺς ἀριθμούς, ἀντίστοιχα, $\alpha + \gamma$ καὶ $\beta + \gamma$.

Ἡ ἀντιστοίχιση τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων δείχνει ὅτι : $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

Ὥστε θὰ εἶναι :

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

καὶ ἀντίστροφα, ὅπως συνάγεται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχῆμα, θὰ εἶναι:

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta.$$

Αὐτὲς οἱ δυὸ συνεπαγωγὲς συνιστοῦν τὴν ἰσοδυναμία :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma \tag{126,1}$$

ποὺ μᾶς λέει ὅτι :

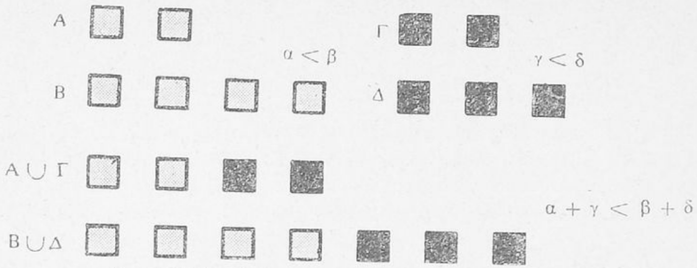
> **Καὶ στὰ δυὸ μέλη μιᾶς ἀνισότητος μποροῦμε νὰ προσθέσουμε ἢ ν' ἀφαιρέσουμε τὸν ἴδιον ἀριθμό.**

Εἶναι φανερὸν ὅτι στὴν περίπτωση τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει νὰ εἶναι δυνατὴ αὐτὴ ἡ πράξη.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸν **νόμο τῆς διαγραφῆς** ἢ τῆς **προσθετικῆς ἁπλοποιήσεως** στὶς ἀνισότητες.

127. Πρόσθεση ἀνισοτήτων κατὰ μέλη.—Ἐξ ἀρχῆς διευκρινίζουμε, ὅτι μιὰ τέτοια πράξη μπορεῖ νὰ γίνῃ μόνο σὲ ὁμοιόστροφες ἀνισότητες.

Ἂν $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta$ δείχνουν τὴ σχέση τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τῶν συνόλων Α, Β καὶ Γ, Δ (σχ. 127), οἱ ἑνώσεις $A \cup \Gamma$ καὶ $B \cup \Delta$, ἐφ' ὅσον τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἀνὰ δυὸ ξένα μεταξύ τους, θὰ ἔχουν πληθικοὺς ἀριθ-



Σχ. 127. Προσθεση ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων

μοὺς $\alpha + \gamma$ καὶ $\beta + \delta$, ποὺ ἡ μεταξύ τους σχέση θὰ δίνεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα :

$$\alpha + \gamma < \beta + \delta \qquad (127,1)$$

ποὺ εἶναι ὁμοιόστροφη πρὸς τὶς $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta$. Ὥστε θὰ εἶναι :

$$\alpha < \beta \wedge \gamma < \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$$

μιὰ συνεπαγωγή, ποὺ ἀληθεύει ὄχι μόνο γιὰ δυό, ἀλλὰ γιὰ ὁποιοδήποτε πλῆθος ἀπὸ ὁμοιόστροφες ἀνισότητες καὶ σημαίνει ὅτι :

Δυὸ ἢ περισσότερες ὁμοιόστροφες ἀνισότητες μποροῦμε νὰ προσθέσουμε κατὰ μέλη.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτή, ὅπως καὶ ἡ ἀντίστοιχη ἰδιότης τῶν ἰσοτήτων, δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή.

Ἡ ἀφαίρεση κατὰ μέλη δυὸ ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων δὲν εἶναι δυνατὴ καὶ ὅταν ἀκόμη εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεση τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοίχων μελῶν. Μιὰ τέτοια ἀφαίρεση κατὰ μέλη μπορεῖ νὰ μᾶς ὁδηγήση σὲ μιὰ ἀνισότητα ὁμοιόστροφη πρὸς τὶς δοθεῖσες ἢ ἑτερόστροφη πρὸς αὐτὲς ἢ ἀκόμη καὶ σὲ ἰσότητα. Ἔτσι π.χ. εἶναι :

$$\alpha)\ \begin{array}{r} 12 > 5 \\ -\ 7 > 2 \\ \hline 5 > 3 \end{array} \qquad \beta)\ \begin{array}{r} 10 > 7 \\ -\ 8 > 3 \\ \hline 2 < 4 \end{array} \qquad \gamma)\ \begin{array}{r} 8 > 5 \\ -\ 6 > 3 \\ \hline 2 = 2 \end{array}$$

128. Συμβολὴ στὴν ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων.—Ἡ ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων, ποὺ μερικὲς ἁπλές τους μορφὲς γνωρίσαμε στὰ προηγούμενα (§ 99), ἁπλουστεύεται μὲ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ νόμου τῆς διαγραφῆς. Ἔτσι :

1ο Ἡ ἐξίσωση : $x - \beta = \alpha$, ἂν προσθέσουμε καὶ στὰ δυό της μέλη τὸν ἀριθμὸ β, γίνεται : $x - \beta + \beta = \alpha + \beta$ κι' ἔχει τὴ λύση : $x = \alpha + \beta$.

2ο Ἡ ἐξίσωση : $x + \beta = \alpha$, ἂν ἀφαιρέσουμε κι' ἀπὸ τὰ δυό της μέλη τὸν ἀριθμὸ β, ἐφ' ὅσον εἶναι $\beta \leqslant \alpha$, γίνεται : $x + \beta - \beta = \alpha - \beta$ κι' ἔχει λύση : $x = \alpha - \beta$.

3ο Ἡ ἐξίσωση : $\alpha - x = \beta$, μὲ τὴν πρόσθεση τοῦ x καὶ στὰ δυό της μέλη γίνεται : $\alpha - x + x = \beta + x$ ἢ $\alpha = \beta + x$ καί, μὲ τὴν ἀφαίρεση τοῦ β κι' ἀπὸ τὰ δυὸ μέλη, γίνεται : $\alpha - \beta = x$ ἢ $x = \alpha - \beta$.

129. Γεωμετρικὲς ἐφαρμογές.—1. Στὰ συμπληρώματα μιᾶς γωνίας. Ἂν οἱ γωνίες α καὶ β εἶναι συμπληρώματα μιᾶς γωνίας γ (σχ. 128), σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν (§ 121,9), θὰ εἶναι:

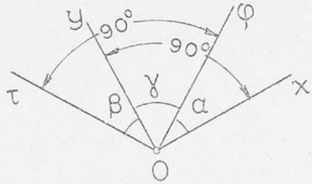
$\alpha + \gamma = 90^0$ καὶ $\beta + \gamma = 90^0$

ποὺ μὲ τὴ μεταβατικότητα τῶν ἰσοτήτων δίνουν τὴν ἰσότητα:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

Ἐφαρμόζοντας στὴν ἰσότητα αὐτὴ τὸ νόμο τῆς διαγραφῆς, παίρνουμε:

$$\alpha = \beta.$$



Σχ. 128. Συμπληρώματα γωνίας

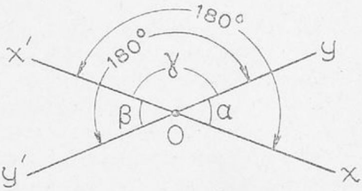
Στὴν ἴδια αὐτὴν ἰσότητα θὰ καταλήξουμε, ἂν οἱ γωνίες α καὶ β εἶναι συμπληρώματα δυὸ ἴσων γωνιῶν γ καὶ δ. Ὥστε:

‖ **Τὰ συμπληρώματα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων γωνιῶν εἶναι γωνίες ἴσες.**

2. Στὰ παραπληρώματα μιᾶς γωνίας. Ἂν οἱ γωνίες α καὶ β εἶναι παραπληρώματα μιᾶς γωνίας γ (ἢ δυὸ ἴσων γωνιῶν $\gamma = \delta$) (σχ. 129), θὰ ἔχουμε, ὅπως πιὸ πάνω, τὴ συνεπαγωγή:

$$\alpha + \gamma = 180^0 \wedge \beta + \gamma = 180^0 \Rightarrow$$
$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

πού, μὲ τὸ νόμο τῆς διαγραφῆς, δίνει τὴν ἰσότητα:



Σχ. 129. Παραπληρώματα γωνίας

$$\alpha = \beta$$

ποὺ σημαίνει ὅτι:

‖ **Τὰ παραπληρώματα τῆς αὐτῆς ἢ ἴσων γωνιῶν εἶναι γωνίες ἴσες.**

3. Στὶς κατὰ κορυφὴν γωνίες. Οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$ στὸ παραπάνω σχῆμα 129 εἶναι τέτοιες, ὥστε πλευρὲς τῆς μιᾶς νὰ εἶναι οἱ ἀπέναντι ἡμιευθεῖες τῆς ἄλλης. Δυὸ τέτοιες γωνίες λέγονται **κατὰ κορυφὴν γωνίες.**

Γενικά, δυὸ εὐθεῖες $x'x$ καὶ $y'y$, ποὺ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο O, σχηματίζουν τέσσαρες διαδοχικὲς γωνίες, ποὺ ἀνὰ δυὸ ἀπέναντι εἶναι κατὰ κορυφήν.

Ἂν τὶς κατὰ κορυφὴν γωνίες α καὶ β (σχ. 129) συνδυάσουμε μὲ τὴν ἐνδιάμεση γωνία γ θὰ ἔχουμε ἀθροίσματα $\alpha + \gamma$ καὶ $\beta + \gamma$ τὶς ἁπλωτὲς γωνίες $x\widehat{O}x'$ καὶ $y\widehat{O}y'$. Ἀλλά, ὅπως ξέρουμε (§ 114 καὶ 121), ὅλες οἱ ἁπλωτὲς γωνίες εἶναι ἴσες. Συνεπῶς, θὰ εἶναι καί:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

καί; μὲ τὸ νόμο τῆς διαγραφῆς, θὰ ἔχουμε τὴν ἰσότητα:

$$\alpha = \beta$$

ποὺ ἐκφράζει ὅτι:

‖ **Οἱ κατὰ κορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' σειρά: 413. Μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος; Ποιὰν ἰδιότητα ἐφαρμόζουμε;

414. Νὰ ἐξαλειφθοῦν οἱ παρενθέσεις στὶς ἰσότητες:
i) $\alpha - (10 - \beta) = \ldots$, ii) $\alpha + 6 + (\beta - 2) = \ldots$,
iii) $8 + \alpha - (\beta + 5) = \ldots = \ldots$

415. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες μὲ τοὺς ὅρους, ποὺ λείπουν:
$\alpha + 5 - (\beta + 8) = \alpha + 5 - \ldots - 8 = \alpha - \beta - \ldots$

416. Νὰ συμπληρώσετε τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες μὲ τὰ σημεῖα, ποὺ λείπουν:
i) $3\alpha - (\beta - 7) = 3\alpha \ldots 7 \ldots \beta$, ii) $5 + (2\alpha - 8) = 5 + 2\alpha \ldots 8 = 2\alpha \ldots 3$.

417. Δυὸ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ συνδέονται μὲ τὴν ἰσότητα: $\alpha - 8 = \beta$. Ποιὲς εἶναι οἱ μικρότερες τιμές, ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν τὰ α καὶ β;

418. Ἔχουμε τὴν ἰσότητα: $20 + \alpha - 3 = \beta + 17$. Ν' ἁπλοποιηθῆ τὸ πρῶτο μέλος καὶ νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β.

419. Νὰ γίνη μεταφορὰ τοῦ 10 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἰσότητος:

$$\alpha - 10 = \beta + 8.$$

420. Νὰ μεταφερθῆ ὁ 1 στὸ πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητος: $7 = 3x - 1$.

421. Ὅταν μεταφέρουμε τὸ 3 στὸ πρῶτο μέλος τῆς ἰσότητος: $\alpha - 2\beta = 3$, τί γίνεται τὸ δεύτερο μέλος;

422. Μπορεῖ νὰ γίνει μεταφορὰ τοῦ 7 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἰσότητος: $\alpha + 7 - \beta = 3$; Γιατί;

423. Μὲ ποιὸν περιορισμὸ μπορεῖ νὰ γίνη ἡ μεταφορὰ τοῦ β στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἰσότητος: $\alpha + \beta = 3$;

424. Ἡ ἰσότης: $\alpha + 13 - \beta = 8$ νὰ τραπῆ: i) σὲ ἰσότητα ἀθροισμάτων καὶ ii) σὲ ἰσότητα διαφορῶν.

425. Νὰ προστεθοῦν κατὰ μέλη οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες καὶ νὰ γραφῆ ἡ ἰσότης, ποὺ θὰ προκύψη, στὴν ἁπλούστερη μορφή της:
i) $\alpha = \beta + 7$ καὶ $\gamma - 1 = 2$, ii) $2\alpha = 3 + \beta$ καὶ $\beta - 5 = 4$
iii) $\alpha - 3 = 4$ καὶ $\beta = 6 + \alpha$.

426. Νὰ ἀφαιρέσετε κατὰ μέλη τὶς ἀκόλουθες ἰσότητες καὶ νὰ γράψτε τὴ νέαν ἰσότητα στὴν πιὸ ἁπλῆ μορφή της:
i) $\alpha + 1 = 7$ καὶ $\beta - 1 = 3$, ii) $\alpha + 7 = \beta + 11$ καὶ $1 - \beta = 3$.

427. Ἂν α, β, καὶ α', β' εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τέτοιοι, ὥστε νὰ εἶναι: $\alpha = \alpha'$ καὶ $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$, νὰ συγκριθοῦν οἱ β καὶ β'.

428. Ἂν α, β, γ, α', β', γ' εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τέτοιοι, ὥστε νὰ εἶναι: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$, νὰ συγκριθοῦν οἱ γ καὶ γ'.

429. Ἂν α, β, α', β' εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τέτοιοι, ὥστε νὰ εἶναι: $\alpha - \beta = \alpha' - \beta'$ καὶ $\beta = \beta'$ νὰ συγκριθοῦν οἱ α καὶ α'.

430. Μποροῦμε νὰ ἐναλλάξουμε τὰ μέλη μιᾶς ἀνισότητος;

431. Ποιὲς ἀνισότητες μπορεῖτε νὰ πάρετε ἀπὸ τὴν ἰσότητα: $20 = 8 + 12$;

432. Ἂν παραστήσουμε μὲ α τὸ μέτρον μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ μὲ β τὸ μέτρον μιᾶς ἀμβλείας, νὰ γραφῆ ἡ ἀνισότης μεταξὺ τῶν α καὶ β.

433. Ποιὸ σύμβολο ἀνισότητος μποροῦμε νὰ γράψουμε μεταξὺ τοῦ 0 καὶ ἑνὸς ὁποιουδήποτε φυσικοῦ ἀριθμοῦ;

434. Γράψτε τὸ κατάλληλο σύμβολο ἀνισότητος μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν: i) α καὶ $\alpha+1$, ii) α καὶ $\alpha-1$.

435. Νὰ συμπληρωθοῦν μὲ τὸ κατάλληλο σύμβολο ἰσότητος ἢ ἀνισότητος: i) $18-7\ldots6+5$, ii) $23-5\ldots15+1$, iii) $5+\alpha-3\ldots\alpha+2$, iv) $1\ldots2+\alpha+\beta$, v) $12\ldots5-\alpha\ldots7-\alpha$, vi) $\alpha-(\beta-3)\ldots\alpha-\beta$.

436. Δυὸ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι τέτοιοι, ὥστε: $\alpha<25$, $\beta<25$. Μποροῦμε νὰ γράψουμε μιὰν ἀνισότητα μεταξὺ α καὶ β; Νὰ αἰτιολογηθῆ ἡ ἀπόκριση μὲ παραδείγματα.

437. Δυὸ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α καὶ β συνδέονται μὲ τὴν ἀνισότητα: $\alpha-13<\beta$. Ποιές εἶναι οἱ μικρότερες τιμές, ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν τὰ α καὶ β;

438. Νὰ γραφῆ μιὰ διπλῆ ἀνισότης μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 9, 13 καὶ 5.

439. Νὰ γραφῆ μιὰ διπλῆ ἀνισότης, ποὺ νὰ ἀληθεύη γιὰ ὅλους τοὺς ἀκεραίους x, ποὺ γράφονται μὲ δυὸ ψηφία.

440. Νὰ χωρισθῆ σὲ δυὸ ἀνισότητες ἡ διπλῆ ἀνισότης: $\alpha+3<\beta-1<18-\alpha$.

441. Πῶς ὀνομάζονται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, ποὺ ἐπαληθεύουν τὶς ἀνισότητες: $100\leqslant\alpha<1000$;

442. Νὰ γίνουν ὁμοιόστροφες οἱ ἀνισότητες: i) $\alpha+7<25$ καὶ $\beta-3>1$, ii) $x-1>7$ καὶ $5<x+2$.

443. Ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες συνεπαγωγὲς ποιές ἀποτελοῦν ἰσοδυναμία;
i) $\alpha<4\Rightarrow\alpha\neq4$, ii) $\alpha>0\Rightarrow\alpha\neq0$, iii) $\alpha>5\Rightarrow\alpha\geqslant6$.

444. Νὰ προστεθῆ i) ὁ 17 καὶ στὰ δυὸ μέλη τῆς ἀνισότητος $24-6>9+7$, ii) ὁ 26 στὰ μέλη τῆς ἀνισότητος: $4+3<14-5$.

445. Νὰ γίνη μεταφορὰ τοῦ 6 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἀνισότητος: $\alpha+6>10$.

446. Νὰ μεταφερθῆ ὁ 4 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἀνισότητος: $4+\alpha<16$.

447. Μπορεῖ νὰ μεταφερθῆ ὁ 10 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἀνισότητος: $\alpha+10>7$;

448. Μποροῦμε νὰ μεταφέρουμε τὸ 8 στὸ δεύτερο μέλος τῆς ἀνισότητος: $8+\alpha>6$; Μὲ ποιὸν περιορισμὸ μπορεῖ νὰ μεταφερθῆ ὁ α;

449. Ὅταν μεταφέρουμε τὸ 8 στὸ πρῶτο μέλος τῆς ἀνισότητος: $3\alpha-5>8$, τί γίνεται τὸ δεύτερο μέλος;

450. Ἂν α, β, α', β' εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε: $\alpha>\alpha'$, $\beta=\beta'$, νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha'+\beta'$.

451. Ἂν α, β, α', β' εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε: $\alpha\geqslant\alpha'$, $\alpha'\geqslant\beta$, $\beta=\beta'$, νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\alpha'-\beta'$.

452. Οἱ α, β, γ, α', β', γ' εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma>\gamma'$. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha'+\beta'$, καθὼς καὶ οἱ $\alpha+\beta+\gamma$ καὶ $\alpha'+\beta'+\gamma'$.

453. Νὰ γίνουν ὁμοιόστροφες, νὰ προστεθοῦν κατὰ μέλη οἱ ἀνισότητες: $\alpha<\beta+3$ καὶ $\gamma-5>3$ καὶ τὸ ἀποτέλεσμα νὰ γραφῆ ἑτερόστροφο πρὸς τὴν πρώτην ἀνισότητα.

454. Νὰ γράψετε τρία ζεύγη ἀνισοτήτων τῆς ἴδιας φορᾶς, ποὺ ἡ ἀφαίρεσή τους κατὰ μέλη νὰ δίνη: i) ἀνισότητα ὁμοιόστροφη, ii) ἰσότητα, iii) ἀνισότητα ἑτερόστροφη.

455. Γράψτε δυὸ εὐθεῖες $x'x$ καὶ $y'y$ μ' ἕνα κοινὸ σημεῖο O καὶ τέτοιες, ὥστε νὰ εἶναι $x\widehat{O}y=48^0$. i) Πῶς λέγονται οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $y\widehat{O}x'$ καὶ νὰ

βρεθῆ τὸ μέτρο τῆς $y\widehat{O}x'$. ii) Πῶς λέγονται οἱ γωνίες $y\widehat{O}x'$ καὶ $x'\widehat{O}y'$ καὶ νὰ βρεθῆ τὸ μέτρο τῆς $x'\widehat{O}y'$. iii) Νὰ συγκριθοῦν οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$.

456. Ὅταν ἔχετε τὴν κυρτὴ γωνία $x\widehat{O}y$, πῶς μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε τὴν κατὰ κορυφή της γωνία;

457. Γράψτε δυὸ εὐθεῖες $x'x$ καὶ $y'y$ κι' ἔπειτα μιὰ τρίτη $\varphi'\varphi$, ποὺ νὰ κόβη τὴν $x'x$ στὸ Α καὶ τὴν $y'y$ στὸ Β. Νὰ βρῆτε τὰ ζεύγη τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν μὲ κορυφὴν Α καὶ τὰ ζεύγη τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, ποὺ ἔχουν κορυφὴ τὸ Β.

458. Ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες, ποὺ σχηματίζουν δυὸ διασταυρούμενες εὐθεῖες εἶναι 52^0. Νὰ βρεθῆ τὸ μέτρον καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ἄλλες γωνίες.

Β' σειρά: 459. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα $x'x$ παίρνομε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Γ, Α, Β, Δ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι $ΓΑ = ΒΔ$. i) Δεῖξτε ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν τὸ ἴδιο μέσον Μ. ii) Ἂν εἶναι $ΓΑ = 3$ cm καὶ $ΑΒ = 4$ cm, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΓΒ καὶ ΜΔ.

460. Ἕνα τμῆμα ΑΒ εὐθείας $x'x$ ἔχει μέσον Ο. Ἂν Μ εἶναι ἕνα κινητὸ σημεῖο τῆς $x'x$, νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ στὶς περιπτώσεις, ποὺ τὸ Μ κεῖται: i) ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ax', ii) μεταξὺ Α καὶ Ο, iii) μεταξὺ Β καὶ Ο, iv) ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Bx. Γενικά, ποῦ πρέπει νὰ βρίσκεται τὸ Μ πάνω στὸ ΑΒ, ὥστε νὰ εἶναι: $ΜΑ < ΜΒ$;

461. Πάνω στὴν εὐθεῖα $x'x$ παίρνομε τμῆμα ΑΒ μήκους α καὶ δυὸ ἴσα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ μήκους β, ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια φορὰ μὲ τὸ ΑΒ. Ἂν εἶναι $\alpha > \beta$, νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μῆκος τοῦ ΒΓ καὶ νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἡ ἴδια ἄσκηση πάνω στὴν περιφέρεια, ὅταν $\overset{\frown}{AB} = \alpha^0$, $\overset{\frown}{AΓ} = \overset{\frown}{BΔ} = \beta^0$ καὶ $\alpha > \beta$.

462. Σὲ μιὰ ἡμιπεριφέρεια ΑΒ παίρνουμε δυὸ σημεῖα Α, Β τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι: $\overset{\frown}{AΓ} = \overset{\frown}{BΔ}$. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AΔ}$ καὶ $\overset{\frown}{BΓ}$.

463. Δίνεται μιὰ γωνία $x\widehat{O}y$ μέτρου α. Στὸ ἐσωτερικό της γράφουμε μιὰν ἡμιευθεῖα Ox' καὶ ἔξω ἀπὸ τὴ γωνία τὴν ἡμιευθεῖα Oy' ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι: $x\widehat{O}x' = y\widehat{O}y' = \beta$ $(\beta < \alpha)$. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ γωνία $x'\widehat{O}y$ καὶ νὰ συγκριθοῦν οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$.

464. Τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ δίνονται μ' αὐτὴ τὴ σειρὰ πάνω στὴν εὐθεῖα $x'x$ ἔτσι, ποὺ νὰ εἶναι: $ΑΒ = ΓΔ$. Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΓΔ, νὰ βρῆτε στὸ σχῆμα τμήματα ἴσα μὲ τὸ ΜΝ.

465. Δυὸ ὀρθὲς γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$ εἶναι τέτοιες, ὥστε ἡ Ox νὰ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $x'\widehat{O}y'$ καὶ ἡ Ox' στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $x\widehat{O}y$. Νὰ βρεθοῦν στὸ σχῆμα δυὸ ζεύγη ἴσων γωνιῶν.

466. Δυὸ ὀρθὲς γωνίες $x\widehat{O}y$ καὶ $x'\widehat{O}y'$ εἶναι τέτοιες, ὥστε οἱ πλευρὲς τῆς τῆς μιᾶς νὰ βρίσκωνται ἔξω ἀπὸ τὴν ἄλλη γωνία. Νὰ βρῆτε στὸ σχῆμα δυὸ ζεύγη ἴσων γωνιῶν.

467. Δυὸ τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{ΓΔ}$ περιφερείας ἔχουν τὸ ἴδιο μέσον Μ. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AΓ}$ καὶ $\overset{\frown}{BΔ}$, καθὼς καὶ τὰ $\overset{\frown}{AΔ}$ καὶ $\overset{\frown}{BΓ}$.

468. Πάνω σὲ μιὰν εὐθεῖα $x'x$ παίρνομε στὴ σειρὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ δείξετε ὅτι: $ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

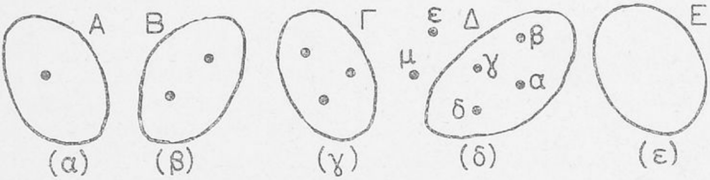
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΒ'

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΒΕΝΝΙΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

130. Διαγραμματικὴ παράσταση συνόλου.—Προκειμένου νὰ δώσουμε μιὰ γεωμετρικὴν ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως (§ 67) καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (§101), χρησιμοποιήσαμε μιὰ **γραφικὴ παράσταση** τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Παραστήσαμε δηλ. τοὺς ἀκεραίους μὲ σημεῖα μιᾶς ἡμιευθείας Οx. Μὲ τὴ γραφικὴ παράσταση τῶν ἀκεραίων ἐπαληθεύσαμε ἔπειτα τὶς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως (§ 103).

Ἡ γνωριμία μας μὲ τὰ σημειοσύνολα (§ 34) καὶ τὰ ἐπίπεδα χωρία (§ 110) μᾶς δίνει τώρα τὴ δυνατότητα νὰ παριστάνουμε τὰ διάφορα σύνολα μ' ἕνα τρόπο γεωμετρικό. Γιὰ μιὰ τέτοια παράσταση συνόλου χρησιμοποιοῦμε μιὰν ὁποιαδήποτε κλειστὴ ἐπίπεδη γραμμὴ καὶ στὸ **ἐσωτερικὸ** τοῦ ἐπιπέδου χωρίου, ποὺ ὁρίζεται ἔτσι, γράφουμε διάφορα σημεῖα, ποὺ τὸ καθένα ἀντιπροσωπεύει κι' ἀπὸ ἕνα στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Ἡ γραφικὴ αὐτὴ παράσταση λέγεται **διάγραμμα** τοῦ συνόλου.

Τὸ σχῆμα 130 δίνει τὰ διαγράμματα διαφόρων συνόλων: τοῦ μονοσυνόλου Α, τοῦ συνόλου Β ποὺ ἔχει δυὸ στοιχεῖα, τοῦ Γ μὲ τρία στοιχεῖα.



Σχ. 130. Διαγράμματα διαφόρων συνόλων

Ἂν Μ = {Ἀντύπας, Βάρκας, Γρέγος, Δάλλας} εἶναι τὸ σύνολο τῶν συμμαθητῶν σας, ποὺ παίρνει μέρος στὴ μαντολινάτα τοῦ Γυμνασίου μας, ἡ γραφική του παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ διάγραμμα Δ (σχ. 130 δ'), ποὺ στὸ ἐσωτερικό του τὰ γράμματα α, β, γ, δ ἀντιπροσωπεύουν αὐτοὺς τοὺς μαθητάς. Κάθε ἄλλος μαθητής, ὅπως ὁ Ἑρμίδης (ε), ποὺ δὲν ἀνήκει στὴ μαντολινάτα, ἢ κάθε ἄλλο πρᾶγμα, ὅπως τὰ μαντολίνα (μ) τῶν παραπάνω μαθητῶν..., ποὺ δὲν ἀνήκουν σ' αὐτὸ τὸ σύνολο, μποροῦν νὰ σημειωθοῦν ἔξω ἀπὸ τὴ γραμμή.

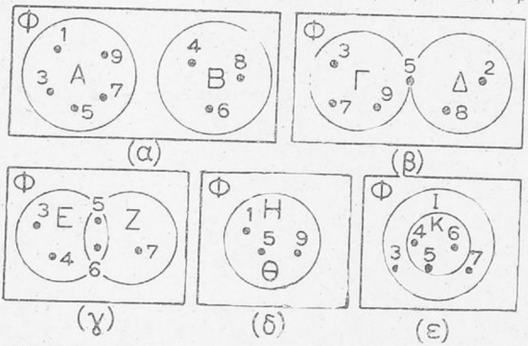
Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου Ε εἶναι πολὺ μεγάλο ἢ ἀπέρατο, τότε ἡ γραφική του παράσταση δίνεται ἀπὸ ὁλόκληρο τὸ **ἐσωτερικὸ** τοῦ ἐπιπέδου χωρίου, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κλειστὴ γραμμή. Ἔτσι ἔχουμε τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Ε ὅλων τῶν κατοίκων τῆς Ἀθήνας (σχ. 130 ε').

● **Σημείωση**: Τὰ διαγράμματα, γενικά, εἶναι ἐπινόηση τοῦ Ἑλβετοῦ Μαθηματικοῦ Ὄϊλερ (Euler: 1707–1783), ἡ συστηματική τους ὅμως χρησιμοποίηση στὰ Μαθηματικὰ ὀφείλεται στὸν Ἄγγλο Βὲνν (Venn: 1834-1923), γι' αὐτὸ καὶ λέγονται **Βέννια διαγράμματα**.

131. Παράσταση ἑνός συνόλου ἀναφορᾶς καὶ ὑποσυνόλων του.— Μὲ τὰ διαγράμματα μποροῦμε νὰ αἰσθητοποιήσουμε καὶ νὰ μελετήσουμε διάφορες σχέσεις μεταξὺ συνόλων, ὅπως εἶναι τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς συνόλου ἀναφορᾶς.

Τὸ διάγραμμα ἑνὸς συνόλου ἀναφορᾶς ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁλόκληρο τὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς κλειστοῦ ἐπιπέδου χωρίου, ἐνῶ τὰ διάφορα ὑποσύνολά του σημειώνονται μὲ μικρότερα ἐπίπεδα χωρία, ποὺ περιέχονται μέσα στὸ πρῶτο καὶ μὲ τὰ σημεῖα τόσο τῆς **περιφερείας** τους ὅσο καὶ τοῦ **ἐσωτερικοῦ** τους ἀντιπροσωπεύουν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ κάθε ὑποσυνόλου.

Ἀλλὰ σὲ μιὰ τέτοια διαγραμματικὴ παράσταση πρέπει νὰ εἰκονίζωνται καὶ οἱ σχέσεις, ποὺ ὑπάρχουν ἀνάμεσα στὰ διάφορα ὑποσύνολα τοῦ ἴδιου συνόλου ἀναφορᾶς. Ἔτσι π. χ., ἂν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς θεωρήσουμε τὸ σύνολο Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, μποροῦμε νὰ διακρίνουμε τὶς ἀκόλουθες σχέσεις ἀνάμεσα σὲ διάφορα ὑποσύνολά του:



Σχ. 131. Παράσταση ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου

1ο Ὅταν τὰ ὑποσύνολα εἶναι ξένα μεταξύ τους, ὅπως π. χ. τά: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ καὶ $B = \{4, 6, 8\}$, τότε τὰ παριστάνουμε μὲ δυὸ ξεχωριστὲς περιφέρειες (σχ. 131 α').

2ο Ὅταν ἔχουν ἕνα κοινὸ στοιχεῖο, ὅπως π. χ. τά: $\Gamma = \{3, 5, 7, 9\}$ καὶ $\Delta = \{2, 5, 8\}$, τότε τὰ σημειώνουμε μὲ δυὸ περιφέρειες ἐφαπτόμενες (σχ. 131 β').

3ο Ὅταν ἔχουν περισσότερα κοινὰ στοιχεῖα, ὅπως π.χ. τά: $E = \{3, 4, 5, 6\}$ καὶ $Z = \{5, 6, 7\}$, τότε τὰ παριστάνουμε μὲ δυὸ τεμνόμενες περιφέρειες (σχ. 131 γ').

4ο Ὅταν εἶναι ἴσα, ὅπως π.χ. τά: $H = \{1, 5, 9\}$ καὶ $\Theta = \{9, 1, 5\}$, τότε τὰ γράφουμε μὲ δυὸ περιφέρειες, ποὺ ταυτίζονται (σχ. 131 δ').

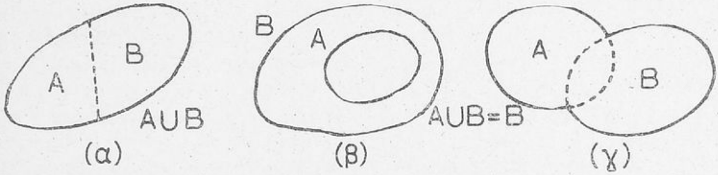
5ο Ὅταν τὸ ἕνα εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου, ὅπως π.χ. τά: $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ καὶ $K = \{4, 5, 6\}$, τότε ἡ περιφέρεια K θὰ βρίσκεται μέσα στὴ I (σχ. 131 ε').

Μὲ τὸ συνδυασμὸ τῶν παραπάνω περιπτώσεων κατασκευάζομε τὸ διάγραμμα ὁσωνδήποτε ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου.

Ἀντίστροφα· στὸ κάθε τέτοιο διάγραμμα μποροῦμε νὰ διαβάζουμε τὴ σχέση, ποὺ ἔχουν μεταξύ τους τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς ὡρισμένου συνόλου ἀναφορᾶς.

132. Τὸ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως δυὸ συνόλων.—Οἱ διαγραμματικὲς παραστάσεις μᾶς διευκολύνουν στὴν ἐκτέλεση τῶν βασικῶν πράξεων ἐπὶ τῶν συνόλων, ποὺ εἶναι ἡ ἕνωση (§ 58) καὶ ἡ τομή τους (§ 41), καθὼς ἐπίσης καὶ στὴν ἐπαλήθευση τόσο τοῦ ἀποτελέσματος, ὅσο καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν τῶν πράξεων.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό, ἕνωση δυὸ συνόλων Α καὶ Β εἶναι τὸ σύνολο $A \cup B$, ποὺ κάθε στοιχεῖο του ἀνήκει ἢ μόνο στὸ σύνολο Α ἢ μόνο στὸ Β ἢ καὶ στὰ δυὸ μαζὶ σύνολα Α καὶ Β, ἐφ' ὅσον αὐτὰ τὰ σύνολα ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Ἔτσι γιὰ τὴν παράσταση τῆς ἑνώσεως δυὸ συνόλων διακρίνομε τὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις :



Σχ. 132. Διαγράμματα τῆς ἑνώσεως συνόλων

1ο Ὅταν τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ξένα μεταξύ τους, γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου $A \cup B$, ἀρκεῖ νὰ ἑνώσουμε σὲ ἕνα τὰ διαγράμματα τῶν δυὸ αὐτῶν συνόλων (σχ. 132 α΄).

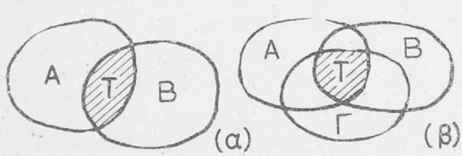
2ο Ὅταν τὸ σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Β, τότε ἡ ἕνωσή τους θὰ εἶναι τὸ σύνολο Β κι' ἔτσι διάγραμμα τοῦ $A \cup B$ θὰ εἶναι ἐκεῖνο τοῦ Β (σχ. 132 β΄).

3ο Ὅταν τὰ σύνολα Α καὶ Β ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, χωρὶς τὸ ἕνα νὰ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου, διάγραμμα τοῦ $A \cup B$ θὰ εἶναι τὸ ἐπίπεδο χωρίον (σχ. 132 γ΄), ποὺ περιβάλλεται ἀπὸ τὴ **συνεχῆ** κλειστὴ γραμμή.

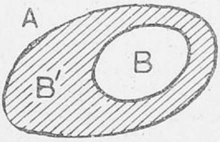
Ἀπὸ τὰ διαγράμματα αὐτὰ εὔκολο εἶναι νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι : $A \cup \varnothing = A$. Ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὸ $B = \varnothing$.

Σχηματίζοντας, ὅπως παραπάνω (σχ. 132 γ΄), τὸ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως τριῶν συνόλων, μποροῦμε μὲ πολὺ ἁπλὸ τρόπο νὰ ἐπαληθεύσουμε τὴν ἀντιμεταθετικότητα καὶ τὴν προσεταιριστικότητα στὴν ἕνωση (§ 70).

133. Διαγράμματα τῆς τομῆς καὶ τῆς διαφορᾶς δυὸ συνόλων.— Τομὴ δυὸ συνόλων Α καὶ Β, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ (§ 41), εἶναι τὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν Α καὶ Β. Συνεπῶς, ἂν Α καὶ Β εἶναι τὰ διαγράμματα τῶν δυὸ συνόλων (σχ. 133 α΄), τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου $A \cap B$ θὰ εἶναι τὸ γραμμοσκιασμένον ἐπίπεδο χωρίον Τ.



Σχ. 133. Διαγράμματα τομῆς



Σχ. 134. Συμπλήρωμα συνόλου

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπο σχηματίζεται τὸ διάγραμμα τῆς τομῆς τριῶν συνόλων Α, Β, Γ (σχ. 133 β') καὶ μ' αὐτὸ εὔκολα ἐπαληθεύεται ἡ ἀντιμεταθετικὴ καὶ προσεταιριστικὴ ἰδιότης τῆς τομῆς.

Τὸ συμπλήρωμα Β', τέλος, ἑνὸς συνόλου Β ὡς πρὸς ἕνα σύνολον ἀναφορᾶς Α, δίνεται διαγραμματικὰ ἀπὸ τὸ γραμμοσκιασμένο μὴ κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίον (σχ. 134). Σημειώνουμε ὅτι τὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν Α καὶ Β δὲν ἀνήκουν στὸ Β', ἀφοῦ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Α **δὲν ἀνήκουν** στὸ σύνολον Α (§ 130), ἐνῶ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Β **ἀνήκουν** στὸ Β (§ 131).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

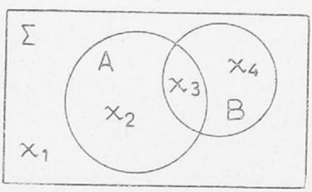
469. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διαγράμματα τῶν συνόλων: i) τῶν ἐπίπλων, ποὺ βλέπετε στὴν αἴθουσα τῆς τάξεώς μας, ii) τῶν πραγμάτων, ποὺ περιέχονται στὴν τσάντα σας, iii) τῶν καθηγητῶν, ποὺ σᾶς διδάσκουν Μαθηματικά.

470. Μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ Φ_0 νὰ κατασκευάσετε τὰ διαγράμματα τῶν ὑποσυνόλων του: i) $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ καὶ $B = \{5, 7, 8\}$, ii) $A = \{4, 7, 9\}$ καὶ $B = \{3, 6\}$, iii) $A = \{7, 1, 6, 3, 8\}$ καὶ $B = \{8, 1, 4, 3\}$, iv) $A = \{3, 2, 1\}$ καὶ $B = \{2, 3, 1\}$, v) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ καὶ $B = \{5, 6, 7\}$.

471. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, Β τὸ σύνολο τῶν ὀρθῶν καὶ Γ τὸ σύνολον τῶν ἀμβλειῶν, νὰ κατασκευάσετε τὸ διάγραμμα ὡς πρὸς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο τῶν κυρτῶν γωνιῶν.

472. Ἂν $A = \{2, 3, 4, 5\}$, Β εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀθροισμάτων τοῦ 2 μὲ καθένα ἀπὸ τ' ἄλλα στοιχεῖα καὶ Γ τὸ σύνολο τῶν διαφορῶν τοῦ 5 μὲ καθένα ἀπὸ τ' ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α, νὰ γίνουν τὰ διαγράμματα τῶν: i) $A \cup B \cup \Gamma$, ii) $A \cap B$, iii) $A \cap \Gamma$, iv) $B \cap \Gamma$.

473. Ἂν Δ εἶναι τὸ σύνολο τῶν μονοψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ Α, Β, Γ τὰ παραπάνω σύνολα, νὰ γίνουν χωριστὰ τὰ διαγράμματα τῶν i) A', ii) $(A \cup B)'$, iii) $(A \cup \Gamma)'$, iv) $(A \cap \Gamma)'$, v) $(B \cap \Gamma)'$ πρὸς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ Δ.



Σχ. 135. Βένια διαγράμματα

474. Μὲ σύνολον ἀναφορᾶς Α τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων νὰ κατασκευάσετε τὸ διάγραμμα τῶν ὑποσυνόλων του Β, Γ καὶ Δ, ὅπου Β, Γ, Δ εἶναι, ἀντίστοιχα, τὰ σύνολα τῶν φωνηέντων τῶν λέξεων «ἄνθρωπος», «καθηγητὴς» καὶ «μαθητής».

475. Στὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 135 εἰκονίζεται τὸ σύνολον Σ καὶ τὰ ὑποσύνολά του Α καὶ Β, ποὺ ὁρίζουν τὰ ἐπίπεδα χωρία X_1, X_2, X_3, X_4. Ἀπὸ ποιὰ χωρία ἢ ἀπὸ τὸ συνδυασμὸ ποιῶν χωρίων δίνεται ἡ διαγραμματικὴ παράσταση τῶν συνόλων: i) $A \cup B$, ii) $A \cap B$, iii) A', iv) $A' \cup B$, v) $(A \cup B)'$, vi) $(A \cap B)'$, vii) $A' \cap B'$;

476. Μὲ βάση τὸ παραπάνω διάγραμμα νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰσότητες:

i) $A \cup (A \cup B) = A \cup B$, ii) $A' \cup (A \cup B) = A \cup (A' \cup B')$,

iii) $A \cap B' = (A' \cup B)'$, iv) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$.

477. Μὲ τὸ σχῆμα 135 νὰ γίνῃ διαγραμματικὴ ἐπαλήθευση τῶν ἐξαγομένων: i) $A \cup (A \cap B) = A$, ii) $A \cap B \neq A' \cup B'$, iii) $A \cap (A \cup B) \neq B$, iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

25