ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, τὰ ἀστυκὰ καὶ τὰ ἀνώτερα παρθεναγωγεῖα

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{42116}{9\text{-}10\text{-}20}$ κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
26, ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1922

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως θεωρεῖται κλεψίτυπον.

Ν. Καπετανίδης

ΚΤ ΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

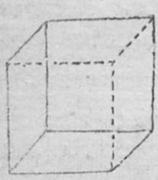
Περὶ τῶν ἁπλῶν στερεῶν καὶ ἐπιπέδων σχημάτων

§ **1. Περὶ ἐπιφανείας, γραμμῆς καὶ σημείου.**— α΄) Ὅταν κρατοῦμεν εἰς τὰς χεῖράς μας ἢ βλέπωμεν ἓν στερεὸν σῶμα (μὴ διαφανές), π. χ. ἓν μῆλον, ἕνα βῶλον, τὸν μαυροπίνακα, τὴν τράπεζαν κτλ. ἐγγίζομεν ἢ βλέπομεν μερικὰ ἢ πάντα τὰ ἄκρα εἰς τὰ ὁποῖα τελειώνει τὸ σῶμα τοῦτο. Τὰ ἄκρα ἑνὸς σώματος, μαζῆ λαμβανόμενα, λέγονται ἐπιφάνεια τοῦ σώματος. Ὥστε «*ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἄκρων του*».

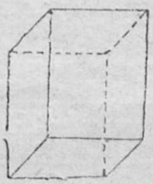
β΄) Ὄγκος ἑνὸς σώματος καλεῖται ὁ χῶρος, τὸν ὁποῖον κατέχει τὸ σῶμα τοῦτο. Ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος ὁρίζει τὸ σχῆμα τοῦ σώματος καὶ τὸν ὄγκον αὐτοῦ.

γ΄) *Ἡ Γεωμετρία* ἐξετάζει τὸ σχῆμα, τὸ μέγεθος καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν σωμάτων, ἀδιαφορεῖ δὲ διὰ τὴν ὕλην ἐκ τῆς ὁποίας συνίστανται.

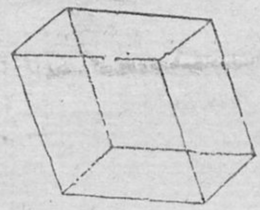
Τὸ σχῆμα τῶν διαφόρων στερεῶν σωμάτων εἶνε ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀκανόνιστον, ἀλλ' ὁ ἄνθρωπος δίδει ἐνίοτε εἰς αὐτὰ διὰ τῆς ἐπεξεργασίας των κανονικόν τι σχῆμα ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ τὸν ὁποῖον ἐπιδιώκει. Οὕτω π. χ. ἐκ τῶν ἀκανονίστων λίθων ἢ μαρμάρων δι' ἐπεξεργασίας των κατασκευάζονται κανονικὰ σχήματα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται μαρμάρινοι ἢ λίθινοι στῆλαι, βαθμίδες κλπ. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ φυσικὰ σώματα, τῶν ὁποίων τὸ σχῆμα εἶνε κανονικόν, π. χ. τὸ σχῆμα τῶν ᾠῶν, κρυστάλλων, φύλλων καὶ ἀνθέων φυτῶν τινων κλπ. Μεταξὺ τῶν σχημάτων φυσικῶν τινων σωμάτων καὶ ἐκείνων τὰ ὁποῖα ὁ ἄνθρωπος διὰ τῆς ἐπεξεργασίας των δίδει εἰς αὐτὰ εἶνε καὶ τῶν ἑξῆς στερεῶν. Τοῦ *κύβου* †) σχ. (1), τοῦ *παραλληλεπιπέ-*



(Σχ. 1).

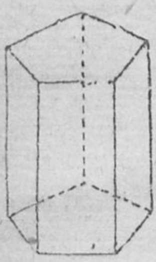


(Σχ. 2)

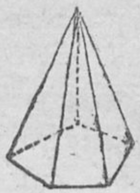


Σχ. (2′).

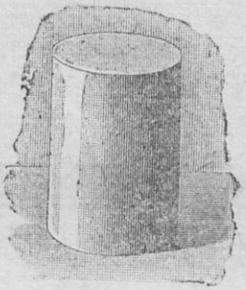
δου †)σχ.(2), καὶ (2′), τοῦ *πρίσματος* †)σχ.(3), τῆς *πυραμίδος* †)



(Σχ. 3).

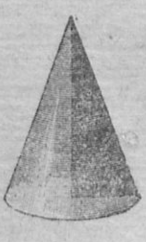


(Σχ. 4).

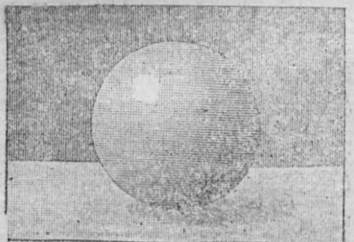


(Σχ. 5).

σχ. (4), τοῦ *κυλίνδρου* †) σχ. (5), τοῦ *κώνου* †) σχ. (6), τῆς *σφαίρας* †) σχ. (7).



(Σχ. 6).



(Σχ. 7).

†) Τὸ σημεῖον τοῦτο φανερώνει, ὅτι ὁ διδάσκων δεικνύει κατὰ τὴν διδασκαλίαν τὸ σῶμα, τὸ ὄργανον (καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεώς του) ἢ τὸ σχῆμα περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος, δίδει δ' αὐτὸ εἰς χεῖρας τῶν μαθητῶν, ἂν εἶνε δυνατόν.

δ') Ἡ ἐπιφάνεια σώματος στερεοῦ ἀποτελεῖται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἀπὸ μέρη. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕξ μέρη †), τοῦ πρίσματος σχ. (3) ἀπὸ ἑπτὰ †), τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τρία †) κ. ο. κ. Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς σώματος κατὰ τὸ ὁποῖον συναντῶνται δύο μέρη τῆς ἐπιφανείας του, καὶ ἐν γένει, ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν καλεῖται *κόψις* τοῦ σώματος ἢ *γραμμή*. Π. χ. γραμμὴ εἶνε τὸ μέρος κατὰ τὸ ὁποῖον συναντῶνται ἀνὰ δύο τά ἕξ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), ἀνὰ δύο τὰ τρία μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου †), κ. ο. κ. Κατὰ ταῦτα τὰ ἄκρα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ μέρους της ἀποτελοῦν γραμμήν. Π. χ. καθὲν τῶν ἕξ μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †) περιορίζεται ὑπὸ τεσσάρων γραμμῶν ἢ ὑπὸ μιᾶς μόνης, ἂν τὸ σύνολον τῶν ἄκρων του θεωρηθῇ ὡς ἕν ὅλον, ἤτοι ὡς μία γραμμή.

ε') Τὸ μέρος ἑνὸς σώματος κατὰ τὸ ὁποῖον συναντῶνται δύο (ἢ περισσότεραι) κόψεις ἢ γραμμαί του λέγεται *κορυφὴ* τοῦ σώματος ἢ *σημεῖον*. Οὕτω τὸ μέρος κατὰ τὸ ὁποῖον συναντῶνται ἀνὰ δύο, ἢ ἀνὰ τρεῖς, αἱ γραμμαὶ ὑπὸ τῶν ὁποίων περατοῦνται τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τοῦ πρίσματος †) σχ. (3) εἶνε σημεῖα.

Ἕν σημεῖον διακρίνομεν εἰς τὸν χῶρον 1) διὰ τῆς κορυφῆς ἑνὸς σώματος, διὰ τῆς αἰχμῆς τῆς γραφίδος, τοῦ ἄκρου μιᾶς βελόνης κλπ. 2) δι' ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον φανταζόμεθα τόσω μικρόν, ὥστε νὰ μὴ δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν μέρη του· π. χ. δι' ἑνὸς κόκκου κιμωλίας ἐπὶ τοῦ πίνακος, δι' ἑνὸς σταγονιδίου μελάνης ἐπὶ τοῦ χάρτου κλπ. Κατὰ ταῦτα «*τὸ σημεῖον θεωρεῖται ὡς λεπτότατον στίγμα καὶ δὲν ἔχει καμμίαν ἔκτασιν*», σημειώνομεν δ' αὐτὸ διὰ μιᾶς στιγμῆς ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος, καὶ διὰ νὰ τὸ διακρίνωμεν γράφομεν πλησίον του ἕν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, καθὼς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. σχ. (8).

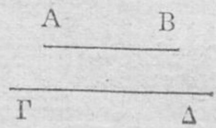
Α Β
· ·
Γ ·

(*Σχ.* 8)

στ') Ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι ἕν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ χάρτου, π. χ. τὸ ἄκρον μολυβδοκονδύλου ἢ γραφίδος, ἔστω δὲ τοῦτο Α σχ. (9), γράφει μίαν γραμμήν, ἡ ὁποία περιορίζεται ὑπὸ τῶν δύο ἄκρων σημείων της Α καὶ Κ.

Ἐν γένει, ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον διατρέχει ἓν σημεῖον, κινούμενον, εἶνε γραμμή. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἰδέαν τῆς γραμμῆς, ἐὰν φαντασθῶμεν μίαν τρίχα, νῆμα ἢ σύρμα λεπτότατον, τοῦ ὁποίου τὸ πάχος εἶνε τόσω μικρόν, ὥστε νὰ λέγωμεν ὅτι δὲν ἔχει πάχος. Κατὰ ταῦτα *«ἡ γραμμὴ ἔχει ἔκτασιν μόνον κατὰ*

(*Σχ.* 9)



(*Σχ.* 10)

μῆκος», θὰ τὴν σημειώνωμεν δὲ διὰ τῶν ἄκρων (ἢ περισσοτέρων) σημείων της, π. χ. τὰς ΑΘΙΚ σχ. (9), καὶ ΑΒ, ΓΔ, σχ. (10).

ζ') Τοὐναντίον *«ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἔκτασιν κατὰ μῆκος καὶ πλάτος ὄχι δὲ καὶ πάχος»* ἐνῷ *«εἰς τὸ στερεὸν σῶμα διακρίνομεν ἔκτασιν κατὰ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος (ἢ ὕψος)»*.

§ **2. Εἴδη γραμμῶν καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.**—

α') Τὰς γραμμὰς διακρίνομεν εἰς *εὐθείας, τεθλασμένας, καμπύλας, καὶ μεικτάς.*

Αἱ κόψεις τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τοῦ πρίσματος †), τῆς πυραμίδος †) εἶνε εὐθεῖαι γραμμαί, καθὼς καὶ ἡ ΑΒ σχ. (11). Λαμβάνομεν ἰδέαν τῆς εὐθείας γραμμῆς καὶ ἐκ τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον λαμβάνει νῆμα λεπτότατον, τεταμένον.

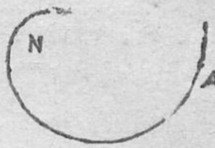
(*Σχ.* 11)

β') *Τεθλασμένη γραμμὴ* λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, ἀλλ' ὡς ὅλον θεωρουμένη δὲν εἶνε εὐθεῖα. Οὕτω τεθλασμένη γραμμὴ εἶνε ἡ γραμμὴ ὑπὸ τῆς ὁποίας περιορίζεται καθὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ πρίσματος †), τῆς πυραμίδος †), καθὼς καὶ ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ

(*Σχ.* 12)

σχ. (12), ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.

γ') *Καμπύλη γραμμὴ* καλεῖται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας κανὲν μέρος (ὁσονδήποτε μικρὸν) δὲν εἶνε εὐθεῖα. Οὕτω ἡ γραμμὴ ὑπὸ τῆς ὁποίας περιορίζεται καθεμία τῶν ἀπέναντι μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου †), καθὼς καὶ ΑΝ σχ. (13) εἶνε γραμμὴ καμπύλη.



(*Σχ.* 13)

δ') *Μεικτὴ γραμμὴ* λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.

ε') Ἐὰν ἀπὸ τὸν αὐτὸν τόπον ἀναχωρήσουν συγχρόνως δύο ἄνθρωποι, καὶ μεταβοῦν εἰς ἕνα ἄλλον, ἀλλὰ τὸν αὐτὸν τόπον καὶ οἱ δύο, βαδίζουν δὲ ὁμοίως, ἀλλ' ὁ μὲν ἀκολουθεῖ τὴν εὐθεῖαν ὁδόν, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς τόπους, ὁ δὲ ἄλλην ὁδόν, π. χ. τεθλασμένην ἢ καμπύλην, ταχύτερον θὰ φθάσῃ ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖ τὴν εὐθεῖαν. Ἤτοι «*ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων εἶνε ἡ εὐθεῖα γραμμή*».

στ') Ἐὰν βλέπωμεν κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ὥστε τὰ δύο ἄκρα της νὰ φαίνωνται ὅτι συμπίπτουν, τότε καὶ τὰ ἄλλα σημεῖά της φαίνονται ὅτι συμπίπτουν μὲ τὰ ἄκρα σημεῖά της.

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, ἐκτεινομένην ὅσον θέλομεν ἑκατέρωθεν τῶν ἄκρων της, ὥστε νὰ προκύπτῃ πάλιν εὐθεῖα γραμμή.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι «*δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ὅσον θέλομεν ἑκατέρωθεν τῶν ἄκρων της*».

ζ') Ἐὰν θέσωμεν τὴν κόψιν τοῦ κανόνος ἐπὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν τοῦ κύβου, τοῦ παραλληλεπιπέδου, τῆς πυραμίδος κλπ., ὥστε δύο σημεῖα τῆς κόψεώς του νὰ συμπέσουν ἀντιστοίχως μὲ δύο της εὐθείας, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι περιορίζονται μεταξὺ τῶν δύο ζευγῶν τῶν σημείων ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς, ὡς νὰ ὑπάρχῃ μία μόνη εὐθεῖα μεταξὺ τῶν ἄκρων σημείων. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι «*μεταξὺ* δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα δύναται ν' ἀχθῇ» λέγεται δὲ αὕτη καὶ ἀπόστασις τῶν σημείων τούτων.

§ 3. Πῶς χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμήν.—

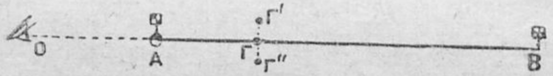
α΄) Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μεταχειριζόμεθα συνήθως τὸν κανόνα, ὁ ὁποῖος ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἶνε λεπτὴ καὶ ἐπιμήκης σανὶς †), τῆς ὁποίας αἱ κόψεις εἶνε εὐθεῖαι γραμμαὶ σχ. (14). Ἂν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος, τοποθετοῦμεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ τετραδίου, στηρίζομεν αὐτὸν διὰ τῶν δακτύλων μας, καὶ ἀκολούθως γράφομεν διὰ τῆς κιμωλίας ἢ τοῦ μολυβδοκονδύλου τὴν εὐθεῖαν, ἀκολουθοῦντες τὴν κόψιν τοῦ κανόνος †). Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ περνᾷ ἀπὸ ἓν (ἢ δύο) ὡρισμένα σημεῖα, π. χ. τὸ Α (ἢ τὰ Α καὶ Γ), τοποθετοῦμεν τὸν κανόνα, ὥστε ἡ κόψις του νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α (ἢ τὰ Α καὶ Γ), καὶ ἀκολούθως ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω †) σχ. (12).

(Σχ. 14).

β΄) Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν μεταξὺ δύο σημείων (καθὼς κάμνουν διάφοροι τεχνῖται) ἐπὶ σανίδος μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς σπάγγου βαμένου μὲ χρῶμα. Πρὸς τοῦτο στερεώνομεν τὸ σπάγγον εἰς τὰ δύο σημεῖα, τεταμένον, ὑψώνομεν αὐτὸν ἀπὸ τὸ μέσον του καὶ τὸν ἀφήνομεν νὰ κτυπήσῃ τὴν σανίδα †) ἐπὶ τῆς ὁποίας χαράσσεται ἡ εὐθεῖα γραμμή.

γ΄) Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν μεταξὺ δύο σημείων ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἔστω τῶν Α καὶ Β σχ. (16), μεταχειριζόμεθα ἀκόντια.

Τὰ ἀκόντια εἶνε συνήθως ῥάβδοι ξύλινοι μήκους (Σχ. 15). $1\frac{1}{2}$ - 3 μ. καὶ φέρουν εἰς τὸ ἓν (κάτω) ἄκρον κωνικὸν σιδηροῦν περίβλημα (διὰ νὰ ἐμπήγωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος) σχ. (15), εἰς δὲ τὸ ἄλλο (ἄνω) ἄκρον σῆμα ἀπὸ ὀθόνην, ἢ μεταλλικὴν πινακίδα χρώματος ἐρυθροῦ καὶ λευκοῦ, διὰ νὰ διακρίνωνται μακρόθεν. Πρὸς τοῦτο ἐμπήγομεν κατακορύφως ††) ἀνὰ ἓν ἀκόντιον εἰς τὸ Α καὶ Β καὶ τοποθετούμενοι εἰς τὸ Ο, κείμενον ὄπισθεν τοῦ ἑνὸς τούτων (2 μ. περίπου), ἔστω τοῦ Α, διευθύνομεν τὸ βλέμμα μας, ὥστε νὰ βλέπωμεν ὀπισθέν του τὸ ἄλλο Β. Ἀκολούθως εἷς βοηθὸς προχωρεῖ κατ᾽ εὐθεῖαν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, καὶ τοποθετεῖ κατακορύφως ἓν ἀκόντιον ἐπί τινος σημείου. Ἐπειδὴ συνήθως ὁ βοηθὸς τοποθετεῖ τὸ ἀκόντιον ἐκτὸς τῆς εὐθείας Α Β, π. χ. εἰς τὸ σημεῖον Γ′ ἢ Γ″, ὁδηγοῦμεν αὐτὸν διὰ σημάτων ἐκ τοῦ Ο νὰ μετακινήσῃ τὸ τρίτον ἀκόντιον καὶ νὰ τὸ τοποθετήσῃ ἀκριβῶς εἰς σημεῖον τῆς εὐθείας Α Β, ἔστω εἰς τὸ Γ, τὸ ὁποῖον θὰ ἐννοήσωμεν, διότι τότε τὸ τρίτον αὐτὸ ἀκόντιον θὰ κρυφθῇ ὑπὸ τοῦ ἀκοντίου τὸ ὁποῖον εἶνε εἰς τὸ Α. Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον τοποθετοῦνται καὶ ἄλλα ἀκόντια ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓΒ, τὰ ὁποῖα δὲν



(Σχ. 16).

ἀπέχουν πολὺ μεταξύ των (συνήθως 30 - 40 μέτρα), ὥστε νὰ φαίνωνται ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μετὰ τῶν Α, Γ καὶ Β†). Οὕτω διὰ τῶν Α,Γ,Δ,..Β ὁρίζεται ἡ εὐθεῖα ΑΓΔ...Β ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε σώματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα κύβου, παραλληλεπιπέδου, πρίσματος, πυραμίδος, κυλίνδρου, κώνου, σφαίρας.

2) Εἰς πόσας γραμμὰς περατοῦται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μαυροπίνακος, τοῦ ὑαλοπίνακος, ἑνὸς φύλλου τοῦ τετραδίου σας;

3) Πῶς δοκιμάζομεν, ἂν κατὰ τὴν ὥραν τῆς προσοχῆς οἱ μαθηταὶ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς εἰς τὸ μάθημα τῆς Γυμναστικῆς;

††) Καλοῦμεν *κατακόρυφον* τὴν διεύθυνσιν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει νῆμα, κρατούμενον ἀκλονήτως ἀπὸ ἓν σημεῖόν του καὶ φέρον βαρύ τι σῶμα κατὰ τὸ ἄκρον του, ὅταν ἀφεθῇ τὸ βάρος ἐλεύθερον †).

4) Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν ὁ κανὼν εἶνε ἀκριβής, σκοπεύομεν κατὰ τὴν διεύθυνσίν του, ὥστε νὰ φαίνωνται συμπίπτοντα τὰ δύο ἄκρα του, ὁπότε πρέπει καὶ τὰ ἐνδιάμεσα σημεῖα τῆς κόψεώς του νὰ φαίνωνται συμπίπτοντα μὲ τὰ ἄκρα. Διατί;

5) Λάβετε δύο σημεῖα ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας καὶ χαράξατε τὴν ἀπόστασίν των (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος).

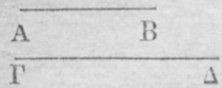
6) Λάβετε ἓν σημεῖον ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας, καὶ χαράξατε (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος) τρεῖς εὐθείας δι' αὐτοῦ.

7) Πόσαι εὐθεῖαι δύνανται νὰ περάσουν ἀπὸ ἓν σημεῖον;

8) Χαράξατε μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας, καὶ προεκτείνατέ την ἑκατέρωθεν.

9) Πῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος) ἂν τρία σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας;

§ 4. **Σύγκρισις εὐθειῶν.**— Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο εὐθείας μεταξύ των, π. χ. τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ σχ.(17), θέτομεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, π. χ. τὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Α ἐπὶ τοῦ Γ, καὶ ἡ ΑΒ ἐπὶ τῆς ΓΔ,



(Σχ. 17).

καὶ ἂν μὲν τὸ Β πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ, λέγομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι, καὶ σημειώνομεν

$$ΑΒ = ΓΔ,$$

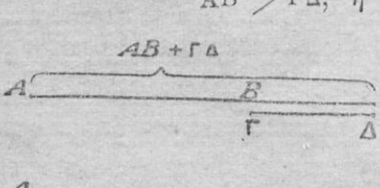
ἂν τὸ Β πέσῃ πρὸ τοῦ Δ, λέγομεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς ΓΔ καὶ γράφομεν

$$ΑΒ < ΓΔ, \text{ ἢ } ΓΔ > ΑΒ\cdot$$

ἂν δὲ τὸ Β πέσῃ πέραν τοῦ Δ (ἔξω τῆς ΓΔ), λέγομεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ καὶ σημειώνομεν

$$ΑΒ > ΓΔ, \text{ ἢ } ΓΔ < ΑΒ.$$

§ 5. **Ἄθροισμα καὶ διαφορὰ εὐθειῶν.**— α') *Ἄθροισμα* δύο εὐθειῶν, (α') π.χ. τῶν ΑΒ, ΓΔ σχ.(18, α') λέγεται ἡ εὐθεῖα ΑΔ, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἐὰν (β') προεκτείνωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος), ἔστω τὴν ΑΒ,



(Σχ. 18).

ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον της, ἔστω τὸ Β, τόσον, ὅση εἶνε ἡ ΓΔ. Οὕτω ἡ εὐθεῖα ΑΒΔ θὰ εἶνε ἄθροισμα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, σημειώνομεν δ' αὐτὸ, καθὼς καὶ ἐν τῇ 'Αριθμητικῇ, ὡς ἑξῆς:

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ.$$

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο εὐθειῶν, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὸ ἄθροισμα τούτου καὶ μιᾶς ἄλλης ἐκ τῶν δοθεισῶν κ. ο. κ., μέχρις ὅτου λάβωμεν πάσας τὰς δοθείσας εὐθείας.

γ') *Διαφορὰ* εὐθείας ἀπὸ ἄλλης (μεγαλυτέρας της) λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία μένει, ὅταν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἕν ἄκρον τῆς μεγαλυτέρας κόψωμεν ἀπ' αὐτῆς μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Οὕτω ἡ διαφορὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἡ ΑΔ σχ. (16, β') καὶ τὴν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς

$$ΑΒ - ΔΓ = ΑΔ.$$

'Ασκήσεις

1) Χαράξατε τρεῖς εὐθείας 20 γρ., 9 γρ., 15 γρ. ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας καὶ μίαν ἄλλην ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμά των.

2) Χαράξατε δύο εὐθείας 20 γρ. καὶ 12 γρ. καὶ ἄλλην ἴσην μὲ τὴν διαφοράν των.

3) Πόση εἶνε ἡ διαφορὰ δύο ἴσων εὐθειῶν;

4) Χαράξατε μίαν τεθλασμένην, μίαν καμπύλην γραμμὴν ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας.

5) Πόσας εὐθείας ἐν ὅλῳ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, ὥστε καθεμία νὰ περνᾷ ἀπὸ δύο ἐκ τῶν τριῶν σημείων;

§ **6. Εἴδη ἐπιφανειῶν** — α') Τὰς ἐπιφανείας διακρίνομεν εἰς *ἐπιπέδους*, *τεθλασμένας*, *καμπύλας* (κυρτὰς ἢ κοίλας) καὶ *μεικτάς*. Λέγομεν ὅτι μία ἐπιφάνεια εἶνε ἐπίπεδος, ἐὰν θέσωμεν τὸν κανόνα ἐπ' αὐτῆς εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἡ εὐθύγραμμος κόψις του τὴν ἐγγίζῃ πανταχοῦ. Οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι καθὲν τῶν μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τῆς πυραμίδος †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τοῦ πρίσματος †) εἶνε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐκτείνεται καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις ὅσον θέλομεν, καλεῖται δὲ καὶ ἁπλῶς *ἐπίπεδον*.

Ἐν γένει, «*ἐπίπεδον (ἢ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια) λέγεται μία ἐπιφάνεια, ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο σημεῖά της, κεῖται ὁλόκληρος ἐπ' αὐτῆς*».

β') *Τεθλασμένη* λέγεται μία ἐπιφάνεια, ἐὰν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ἀλλ' ὡς ὅλον θεωρουμένη δὲν εἶνε ἐπίπεδος ἐπιφάνεια. Οὕτω ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τῆς πυραμίδος †), κλπ. εἶνε τεθλασμέναι ἐπιφάνειαι.

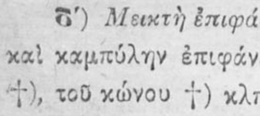
γ') *Καμπύλη ἐπιφάνεια* (κυρτὴ ἢ κοίλη) λέγεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας κανὲν μέρος της (ὁσονδήποτε μικρὸν) δὲν εἶνε ἐπίπεδον. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας †), ἓν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου †), τοῦ κώνου †), ἡ ἐξωτερικὴ (κυρτὴ) ἢ ἡ ἐσωτερικὴ (κοίλη) ἐπιφάνεια μιᾶς χύτρας, τῆς ὁποίας κανὲν μέρος δὲν εἶνε ἐπίπεδον, εἶνε καμπύλαι ἐπιφάνειαι.

δ') *Μεικτὴ ἐπιφάνεια* λέγεται ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην ἐπιφάνειαν. Οὕτω ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου †), τοῦ κώνου †) κλπ. εἶνε μεικταὶ ἐπιφάνειαι.

Περὶ ἐπιπέδων σχημάτων

§ 7. **Ὁρισμοί.**—α') *Ἐπίπεδον σχῆμα* λέγεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω ἓν μέρος ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς εἶνε σχῆμα ἐπίπεδον, π.χ. καθὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τῆς πυραμίδος †), τοῦ πρίσματος †) κλπ.

β') Δύο σχήματα λέγονται *ἴσα*, ἄν, ὅταν θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου (καταλλήλως) ἐφαρμόζουν, ὥστε καθὲν σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ εἶνε καὶ σημεῖον τοῦ ἄλλου, *ἰσοδύναμα* δὲ λέγονται, ἂν ἐφαρμόζουν τὰ μέρη των εἰς τὰ ὁποῖα διαιροῦνται καταλλήλως. Π. χ. ἂν ἡ γραμμὴ ΑΖ σχ. (19) ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ ΖΒ ἐπὶ τῆς ΔΕ, αἱ γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔΕ ἐφαρμόζουν

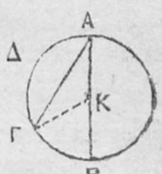


(Σχ. 19).

ἀφοῦ διαιρεθοῦν καταλλήλως εἰς μέρη ἴσα· ἡ πρώτη εἰς τὰ ΑΖ καὶ ΖΒ, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰ ΓΔ καὶ ΔΕ.

§ **8. Περὶ κύκλου.**— α΄) *Κύκλος λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία τὴν περικλείει.* Οὕτω αἱ δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται ὁ κύλινδρος †), ἡ μία τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ κώνου †), καθὼς καὶ τὸ σχ. (20) εἶνε κύκλοι.

β΄) *Περιφέρεια κύκλου* λέγεται ἡ (καμπύλη) γραμμή, ἡ ὁποία περικλείει τὸν κύκλον. Οὕτω εἰς τὸ σχ. (20) ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΑ λέγεται περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου.



(Σχ.20).

γ΄) *Κέντρον κύκλου* λέγεται τὸ σημεῖόν του, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ καθὲν σημεῖον τῆς περιφερείας του, καθὼς π.χ. τὸ σημεῖον Κ σχ. (20).

δ΄) *Ἀκτὶς κύκλου* λέγεται καθεμία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον του μὲ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας του. Π. χ. αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, σχ. (20) εἶνε ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ.

ε΄) *Διάμετρος κύκλου* λέγεται καθεμία εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον του καὶ περατοῦται εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας του, π. χ. ἡ εὐθεῖα ΑΚΒ σχ. (20) εἶνε διάμετρος τοῦ κύκλου Κ.

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε σώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν κυκλικὴν ἐπιφάνειαν.

2) Πόσας διαμέτρους καὶ πόσας ἀκτῖνας ἔχει ὁ κύκλος, καὶ διατί;

3) Μὲ πόσας ἀκτῖνας ἰσοῦται μία διάμετρος τοῦ κύκλου;

4) Αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου εἶνε ἴσαι μεταξύ των· διατί;

5) Εὕρετε σώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων διακρίνομεν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

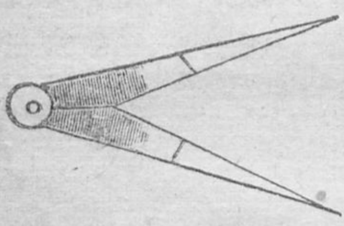
στ΄) *Τόξον κύκλου* λέγεται πᾶν μέρος τῆς περιφερείας του, π. χ. τὸ ΑΔΓ, καὶ τὸ ΓΒ, σχ. (20) τῆς περιφερείας ΑΔΓΒΑ.

ζ') *Χορδὴ τόξου κύκλου* λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, π. χ. ἡ εὐθεῖα ΑΓ σχ. (20) τοῦ τόξου ΑΔΓ.

η') *Κυκλικὸς τομεὺς* λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου του καὶ τῶν δύο ἀκτίνων του, αἵτινες ἄγονται εἰς τὰ ἄκρα του, π. χ. τὸ μέρος ΒΚΓ σχ. (20) τοῦ κύκλου Κ.

θ') *Τμῆμα κύκλου* λέγεται τὸ μέρος του, τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ ἑνὸς τόξου του καὶ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου τούτου, π. χ. τὸ μέρος ΑΔΓΑ τοῦ κύκλου Κ σχ. (20).

§ **9. Κατασκευὴ κύκλου.** — α') Διὰ νὰ χαράξωμεν περιφέρειαν κύκλου (καὶ νὰ κατασκευάσωμεν οὕτω κύκλον) ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος, μεταχειριζόμεθα ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *διαβήτης* (κοινῶς κουμπάσο). Ὁ διαβήτης ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σκέλη, τὰ ὁποῖα ἀπολήγουν εἰς αἰχμὰς λεπτοτάτας, ἑνώνονται δὲ τὰ δύο σκέλη μὲ μικρὸν ἄξονα, πέριξ τοῦ ὁποίου δύνανται νὰ περιστρέφωνται, νὰ πλησιάζουν, καὶ νὰ ἀπομακρύνωνται μεταξύ των †) σχ. (21).



(Σχ. 21).

β') Διὰ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν, ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου ὅσον θέλομεν· ἀκολούθως στηρίζομεν τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε κέντρον τοῦ κύκλου, τὴν δ' ἄλλην, ἀφοῦ προσδέσωμεν γραφίδα εἰς αὐτήν, τὴν περιφέρομεν †) (διατηροῦντες ἀμετάβλητον τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου), ὥστε νὰ ἐγγίζῃ τὸν χάρτην ἢ τὸν πίνακα, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀνεχώρησεν. Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν κύκλον μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ΑΒ π. χ., ἀνοίγομεν τὰ σκέλη τοῦ διαβήτου, ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν αἰχμῶν νὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν ΑΒ.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε (μὲ τὸν διαβήτην) κύκλον μὲ ἀκτῖνα 1 δ, 0.6 δ· 5 δ· 3 δ.

2) Κατασκευάσατε κύκλον ἐκ χαρτονίου καὶ σημειώσατε ἐπ' αὐτοῦ μίαν ἀκτῖνα, μίαν διάμετρον, ἓν τμῆμα κύκλου, ἕνα κυκλικὸν τομέα.

3) Κατασκευάσατε εἰς τὴν αὐλὴν τοῦ σχολείου κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,5· 3· 2,5· 0,75 μέτρ. (μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς νήματος).

Δένομεν χαλαρῶς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ νήματος εἰς καρφίον ἢ μικρὸν πάσσαλον (ἀπολήγοντα εἰς ὀξὺ διὰ νὰ ἐμπήγεται εἰς τὸ ἔδαφος), τὸν ὁποῖον ἐμπήγομεν εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ εἶνε κέντρον τοῦ κύκλου. Εἰς ἄλλο μέρος τοῦ νήματος δένομεν καρφίον, ὥστε τὸ μῆκος τοῦ νήματος μεταξὺ τῶν δύο καρφίων νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ περιφέρομεν τὸ νῆμα γύρω, τεταμένον, προσέχοντες νὰ μὴ τυλίσσεται εἰς τὸν πάσσαλον, ἀλλὰ νὰ ἔχῃ ἀμετάβλητον τὸ μῆκός του †).

4) Κατασκευάσατε κύκλον, καὶ μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου του ἀπὸ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου του, κείμενα ἐκτός του· ἀπὸ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου του, κείμενα ἐντός του. Συγκρίνατε τὰς ἀποστάσεις αὐτὰς μὲ τὴν ἀκτῖνά του· τί παρατηρεῖτε ;

5) Πόσα σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπέχουν ἀπόστασιν 1 μ. ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖόν του, καὶ ποῦ κεῖνται ὅλα αὐτά ;

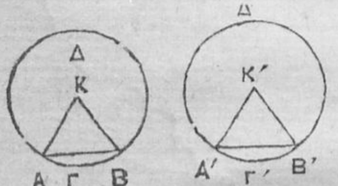
6) Κατασκευάσατε κύκλον μὲ ἀκτῖνα τινά· ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας του σύρατε διαφόρους χορδάς, ὥστε μία νά περνᾷ ἀπὸ τὸ κέντρον του, καὶ συγκρίνατέ τας μεταξύ των (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου). Ποία εἶνε ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ τοῦ κύκλου ;

7) Κατασκευάσατε δύο, τρεῖς,... κύκλους μὲ τὸ αὐτὸ κέντρον ἀλλὰ μὲ διαφόρους ἀκτῖνας. Οἱ τοιοῦτοι κύκλοι λέγονται *ὁμόκεντροι*.

§ **10. Ἰδιότητες τοῦ κύκλου.**— α΄) Ἐὰν κύκλον, π. χ. ἐκ χαρτονίου, χαράξωμεν κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου του, στρέψωμεν δὲ τὸ ἓν τῶν δύο μερῶν του περὶ τὴν διάμετρον αὐτήν, ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου †), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο μέρη ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς μεταξύ των. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι «*ἡ διάμετρος κύκλου διαιρεῖ αὐτὸν καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη*». Καθὲν τῶν μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια κύκλου ὑπὸ διαμέτρου του καλεῖται *ἡμιπεριφέρεια*, καθὲν δὲ τῶν μερῶν τοῦ κύκλου *ἡμικύκλιον* †).

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν δύο κύκλους μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, π. χ. ἐκ χαρτονίου, καὶ θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε νὰ συμπίπτουν τὰ κέντρα των, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ κύκλοι ἐφαρμόζουν. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι «*κύκλοι μὲ ἴσας ἀκτῖνας εἶνε ἴσοι*». Οὕτω π. χ. οἱ κύκλοι εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ κύλινδρος †) εἶνε ἴσοι.

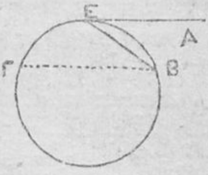
γ΄) Ἐὰν εἰς κύκλον ἢ δύο ἴσους κύκλους, ἔστω τοὺς Κ καὶ Κ΄ σχ. (22), δύο τόξα των εἶνε ἴσα, π. χ. τὰ ΑΓΒ καὶ Α΄Γ΄Β΄, φέρωμεν δὲ τὰς χορδάς των ΑΒ καὶ Α΄Β΄, καὶ τὰς συγκρίνωμεν μεταξύ των (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου) παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε ἴσαι. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι



(Σχ. 22)

«*εἰς ἴσα τόξα ἑνὸς κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί*». Καὶ ἀντιστρόφως «*ἐὰν δύο χορδαὶ ἑνὸς κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) εἶνε ἴσαι καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των εἶνε ἴσα (ἂν εἶνε καὶ τὰ δύο μικρότερα ἢ μεγαλύτερα τῆς ἡμιπεριφερείας*).

δ΄) Ἂν ἔχωμεν κύκλον [ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ ἐπὶ τοῦ χάρτου καὶ τοποθετήσωμεν τὸν κανόνα εἰς διαφόρους θέσεις σχετικῶς μὲ τὴν περιφέρειάν του †), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κόψις του ἢ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἢ θὰ ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν, ἢ καὶ δύο κοινά. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι «*περιφέρεια κύκλου ἢ δὲν ἔχει κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ εὐθεῖαν, ἢ ἔχει ἕν, ἢ δύο*». Μία εὐθεῖα λέγεται *ἐφαπτομένη περιφερείας* (ἢ κύκλου) σχ. (23), ἂν ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν, π. χ. ἡ ΑΕ σχ. (23) τὸ Ε· *τέμνουσα δὲ τῆς περιφερείας* (ἢ τοῦ κύκλου) ἂν ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτήν, καθὼς π.χ. ἡ ΒΕ καὶ ἡ ΒΓ σχ. (23), καὶ οἱαδήποτε διάμετρος τοῦ κύκλου.



(Σχ. 23).

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν γραμμήν, καὶ ἓν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς Α. Εὕρετε ἐπὶ τῆς εὐθείας ἓν σημεῖον, ἀπέχον τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν, π. χ. 3 δ., 5 δ., 8 δ., 10 δ. Πόσα τοιαῦτα σημεῖα δύνανται νὰ ὑπάρχουν; (Χρησιμοποιήσατε τὸν διαβήτην †).

2) Πῶς θὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι εἰς ἴσας χορδὰς κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων) ἀντιστοιχοῦν (ἢ μὴ) ἴσα τόξα;

3) Εὕρετε χορδὰς κύκλου ἀνίσους, ἀλλ' ὡρισμένου μήκους, π. χ. 2 δ., 3 δ. Συγκρίνατε τὰ τόξα τῶν χορδῶν τούτων. Τί ἐξάγετε ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης;

4) Λάβετε δύο σημεῖα ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος, ἀπέχοντα τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο 3 δ. Εὕρετε ἄλλο σημεῖον (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου), ἀπέχον 4 δ. ἀπὸ τὸ Α καὶ 2 δ. ἀπὸ τὸ Β. Πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουν;

Περὶ γωνιῶν.

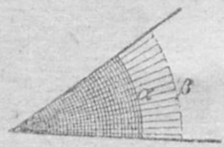
§ **11. Ὁρισμοί.**— *α'*) Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο συναντώμεναι κόψεις τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τῆς πυραμίδος †), τοῦ πρίσματος †), καθὼς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΔΕ σχ. (24) λέγεται *γωνία*. Ἐν γένει, *γωνία* καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ

(Σχ. 24)

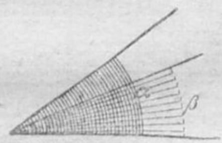
αὐτὸ σημεῖον χωρὶς νὰ κάμνουν μίαν εὐθεῖαν. *Πλευραὶ* μιᾶς γωνίας λέγονται αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τὴν σχηματίζουν, *κορυφὴ δὲ τῆς γωνίας* τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον κόπτονται αἱ πλευραί της. Π. χ. τῆς γωνίας ΓΔΕ σχ. (24) πλευραὶ εἶνε αἱ ΔΓ, ΔΕ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ.

β') Τὴν γωνίαν ἀπαγγέλλομεν συνήθως μὲ τρία γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν γράφεται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς της, ἓν ἄλλο ἐπὶ τῆς κορυφῆς της, καὶ τὸ τρίτον ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς της, προσέχομεν δὲ κατὰ τὴν ἀπαγγελίαν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ ἀπαγγέλλωμεν δεύτερον. Οὕτω λέγομεν ἡ γωνία ΓΔΕ, ἢ ΕΔΓ, τὴν σημειώνομεν δὲ οὕτω γων. ΓΔΕ, ἢ γων. ΕΔΓ. Ἐν τούτοις ὀνομάζομεν ἐνίοτε μίαν γωνίαν μὲ ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον γράφομεν πλησίον τῆς κορυφῆς της, ἢ ἐντός της. Οὕτω δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ἡ γωνία Δ σχ. (24), καὶ τὴν σημειώνομεν γων. Δ.

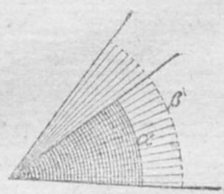
§ **12. Σύγκρισις γωνιῶν.**— Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο γωνίας μεταξύ των π. χ. τὰς α καὶ β, θέτομεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὴν α ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε αἱ κορυφαί των νὰ συμπέσουν †)



(Σχ. 25)



(Σχ. 26)



(Σχ. 27)

καὶ ἡ μία πλευρά της νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς β. Παρατηροῦμεν ἀκολούθως ποῦ πίπτει ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς α†). Ἂν μὲν πίπτῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς β, λέγομεν ὅτι αἱ δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ γράφομεν γων. α=γων. β, σχ. (25)· ἂν ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γων. α πίπτῃ ἐκτὸς τῆς γων. β, σχ. (26), λέγομεν ὅτι γωνία α εἶνε μεγαλυτέρα τῆς γωνίας β, καὶ σημειώνομεν γων. α > γων. β, ἂν δὲ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας α πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας β σχ. (27), λέγομεν ὅτι ἡ γωνία α εἶνε μικροτέρα τῆς γωνίας β, καὶ σημειώνομεν γων. α < γων. β.

§ 13. **Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις γωνιῶν.** —

α′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν, π.χ. τῶν α καὶ β σχ.(28), θέτομεν τὴν μικροτέραν τούτων, τὴν β, πλησίον τῆς

(Σχ. 28) (Σχ. 29) (Σχ. 30)

ἄλλης α, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ κορυφαί των, καὶ ἡ μία πλευρὰ τῆς β νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τῆς β νὰ λάβῃ θέσιν ἔξω τῆς α †)· οὕτω σχηματίζεται νέα γωνία, ἡ α + β σχ. (29), τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ γ· αὐτὴ καλεῖται ἄθροισμα τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν, σημειώνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν αὐτὴν ὡς ἑξῆς

γων. α + γων. β = γων. γ

Καθ' ὅμοιον τρόπον προσθέτομεν βαθμηδὸν περισσοτέρας τῶν δύο γωνίας.

β′) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο ἀνίσων γωνιῶν, π. χ. τῶν α καὶ β σχ. (28), θέτομεν τὴν μικροτέραν β ἐπὶ τῆς ἄλλης α, ὥστε νὰ συμπέσουν αἱ κορυφαί των, καὶ ἡ μία πλευρὰ τῆς β νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τῆς β νὰ λάβῃ θέσιν ἐντὸς τῆς α. Οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία α—β σχ. (30), τὴν ὁποίαν παριστάνομεν διὰ τοῦ δ, καὶ λέγεται διαφορὰ τῆς β ἀπὸ τῆς α, σημειώνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν οὕτω,

γων. α — γων. β = γων. δ.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε τρεῖς γωνίας (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος) καὶ ἐξηγήσατε, πῶς θὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμά των.

2) Κατασκευάσατε τρεῖς γωνίας, π. χ. τὰς γων. Α, γων. Β, γων. Γ, καὶ ἐξηγήσατε πῶς θὰ εὑρεθῇ α′) τὸ ἄθροισμα γων.Α + γων. Β + γων. Γ. β′) τὸ γων. Α + γων. Β — γων. Γ. γ′) τὸ γων. Α — γων. Β — γων. Γ. Πότε τοῦτο εἶνε δυνατόν;

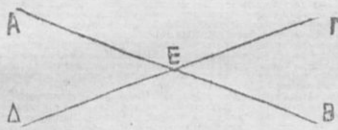
3) Μὲ τί ἰσοῦται ἡ διαφορὰ δύο ἴσων γωνιῶν;

4) Πότε μία γωνία θὰ λέγεται διπλασία, τριπλασία,..ἄλλης;

§ **14. Ἐφεξῆς καὶ κατὰ κορυφὴν γωνίαι.**— α′) Δύο γωνίαι λέγονται *ἐφεξῆς*, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς πλευράς των ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς. Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ εἶνε ἐφεξῆς σχ. (31).

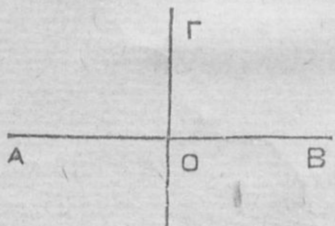
(Σχ. 31)

β′) *Κατὰ κορυφὴν* λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν ἔχουν κοινὴν κορυφήν, καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶνε προέκτασις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Οὕτω αἱ γωνίαι ΑΕΔ καὶ ΒΕΓ σχ. (32) ἔχουν τὴν κορυφὴν Ε κοινήν, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΕ τῆς μιᾶς εἶνε προέκτασις τῆς ΕΒ τῆς ἄλλης, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΓ. Ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΕΓ, ΒΕΔ εἶνε κατὰ κορυφὴν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.



(Σχ. 32)

γ′) *Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.* Ἐὰν ἔχωμεν δύο οἱασδήποτε κατακορυφὴν γωνίας, π. χ. τὰς γωνίας ΑΕΔ, ΒΕΓ, καὶ τὰς συγκρίνωμεν μεταξύ των (θέσωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης καταλλήλως), εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι· ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι ΑΕΓ, ΒΕΔ. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι «*αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι*».

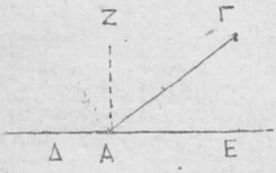


(Σχ. 33)

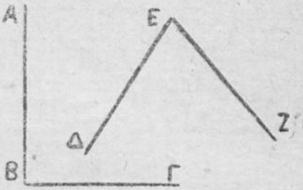
15. Ὀρθὴ γωνία. — α′) Ὅταν μία εὐθεῖα συναντᾷ ἄλλην, π.χ. ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ σχ. (33), καὶ σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, π. χ. τὰς γωνίας ΑΟΓ, ΓΟΒ, λέγομεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι εἶνε *κάθετοι μεταξύ των*, καθεμία δὲ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν, λέγεται *ὀρθὴ γωνία*. Οὕτω αἱ γωνίαι ΑΟΓ, ΓΟΒ, ΑΟΔ, ΔΟΒ εἶνε ὀρθαί, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΟΒ, καὶ ΓΟΔ κάθετοι (ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην).

Ἐν γένει, δύο εὐθεῖαι λέγονται *κάθετοι*, ἐάν, τεμνόμεναι, σχηματίζουν δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας. *Ὀρθὴ γωνία* λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ εὐθειῶν καθέτων».

β') Μία εὐθεῖα λέγεται *πλαγία* ὡς πρὸς ἄλλην, τὴν ὁποίαν



(Σχ. 34)

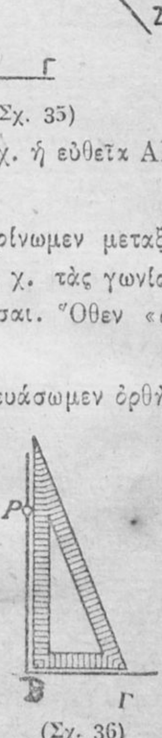


(Σχ. 35)

συναντᾷ, ἂν δὲν εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτήν, καθὼς π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΓ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΑΕ σχ. (34).

γ') *Ἰδιότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.* Ἐὰν συγκρίνωμεν μεταξύ των (§ 12) δύο ἢ περισσοτέρας ὀρθὰς γωνίας, π. χ. τὰς γωνίας ΑΒΓ, ΔΕΖ σχ. (35), παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε ἴσαι. Ὅθεν «*αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι*».

δ') *Κατασκευὴ ὀρθῆς γωνίας.* Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν (ἢ καθέτους εὐθείας), μεταχειριζόμεθα ἓν ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται *γνώμων*. Οὗτος εἶνε συνήθως λεπτὴ σανίς, περιοριζομένη γύρω ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν γραμμῶν †), αἱ δύο τῶν ὁποίων σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν σχ. (36), τὴν γωνίαν ΡΒΓ, (ἢ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κανόνας ξυλίνους (ἢ σιδηροῦς) συνηνωμένους, ὥστε αἱ κόψεις των νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν). Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τοῦ



(Σχ. 36)

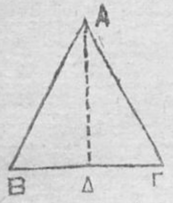
πίνακος ἢ τοῦ χάρτου, θέτομεν ἐπ' αὐτοῦ τὸν γνώμονα, ὥστε αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ ἐφαρμόζουν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου, καὶ διὰ τῆς κιμωλίας ἢ τοῦ μολυβδοκονδύλου γράφομεν εὐθείας καθέτους, ἀκολουθοῦντες τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος †).

ε') Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ εὐθεῖαν, ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΓ σχ.

(36), διερχομένην διά τινος σημείου Ρ, θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τῆς ΓΒ, ὥστε ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ἄλλη κάθετός της νὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ Ρ, καὶ ἀκολούθως γράφομεν εὐθεῖαν, ἀκολουθοῦντες τὴν πλευρὰν ταύτην †).

§ **16. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν.**—

α΄) Ἂν διά τινος σημείου Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας ΒΓ, σχ. (36), φέρωμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἔστω τὴν



(Σχ. 37)

ΑΔ, καὶ δύο, τρεῖς,... ἀκόμη εὐθείας, ἔστω τὰς ΑΒ, ΑΓ, (αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ τὰς ΒΓ καὶ ΑΔ), παρατηροῦμεν ὅτι καθεμία ἐξ αὐτῶν εἶνε πλαγία πρὸς τὴν ΑΔ. Διότι, ἂν συγκρίνωμεν τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΒΓ μὲ τὴν ΑΒ, καὶ τὴν ΑΓ, πρὸς τὴν ὀρθήν, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἄνισοι πρὸς αὐτήν. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν, ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως, ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ Α, κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΔΕ (ὁλ. σχ. (34)) Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι «*διὰ δοθέντος σημείου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν μόνην κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (κειμένην εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ αὐτήν)*».

β΄) Καλοῦμεν *ἀπόστασιν* σημείου ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. Οὕτω ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ΒΓ σχ. (37) εἶνε ἡ εὐθεῖα ΑΔ. Ἂν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας, σχ. (34), ἡ ἀπόστασίς του ἀπ' αὐτῆς εἶνε ἴση μὲ μηδέν.

γ΄) Ἂν συγκρίνωμεν τὴν ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν, κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, μὲ ἄλλας πλαγίας, τὰς ὁποίας φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὴν εὐθεῖαν σχ. (37), παρατηροῦμεν ὅτι καθεμία τῶν πλαγίων εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως. Ἑπομένως «*ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν, κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἥτις ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον μέχρι τῆς εὐθείας*».

§ 17. **Γωνίαι ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι.**— α') *Ὀξεῖα γωνία* λέγεται πᾶσα γωνία, ἡ ὁποία εἶνε μικροτέρα τῆς ὀρθῆς. Π. χ. αἱ εἰς τὰ σχ. (38, 39) γωνίαι, αἱ ὁποῖαι εἶνε μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ὀξεῖαι.

(Σχ. 38) (Σχ. 39) (Σχ. 40)

β') *Ἀμβλεῖα γωνία* λέγεται πᾶσα γωνία, ἡ ὁποία εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς. Π. χ. ἡ εἰς τὸ σχ. (40), τῆς ὁποίας ἕν μέρος εἶνε ἡ ὀρθή, εἶνε ἀμβλεῖα, ὡς μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς.

γ') Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος, ἂν μία γωνία, εἶνε ὀρθή, ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα. Πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν μὲ τὴν (ὀρθὴν) γωνίαν τοῦ γνώμονος. Θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τῆς γωνίας †), ὥστε ἡ μὲν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας, ἡ δὲ μία τῶν καθέτων πλευρῶν τῆς γωνίας του ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης, καὶ παρατηροῦμεν, ποῦ θὰ πέσῃ ἡ ἄλλη πλευρά του πρὸς τὸ μέρος τῆς δοθείσης γωνίας †). Ἂν πέσῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας, τότε ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ὀρθή· ἂν πέσῃ ἐντός, ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ἀμβλεῖα· ἂν δὲ πέσῃ ἐκτὸς (πέραν τῆς ἄλλης πλευρᾶς), ἡ δοθεῖσα γωνία εἶνε ὀξεῖα. Οὕτω ἐργαζόμενοι διὰ τὰς γωνίας τῶν ἐπιπέδων μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ὀρθαί.

§ 18. **Γωνίαι συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαί.**— α') Δύο γωνίαι λέγονται *συμπληρωματικαί*, ἂν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Οὕτω δύο γωνίαι καθεμία τῶν ὁποίων εἶνε ἡμίσεια ὀρθή, καθὼς καὶ αἱ δύο γωνίαι τοῦ σχ. (39) (ὅπου τὸ ἄθροισμά των εἶνε μία ὀρθή) λέγονται συμπληρωματικαί.

β') Δύο γωνίαι λέγονται *παραπληρωματικαί*, ἐὰν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Οὕτω δύο ὀρθαὶ γωνίαι, καθὼς αἱ γωνίαι Ρ καὶ Ι τοῦ σχ. (38) εἶνε παραπληρωματικαί, διότι τὸ ἄθροισμά των εἶνε δύο ὀρθαί.

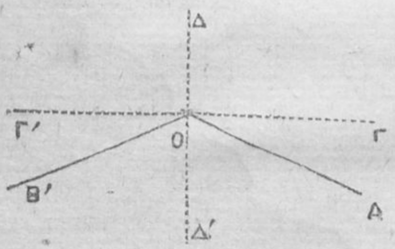
γ') Ἂν ἔχωμεν δύο ἐφεξῆς γωνίας π. χ. τὰς γωνίας ΑΓΔ, καὶ ΔΓΒ σχ. (41), τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν, τὴν ΑΓΒ, καὶ προσθέσωμεν τὰς δύο αὐτὰς γωνίας (§ **12**, α'), εὑρίσκομεν ἄθροισμά των δύο ὀρθάς. Ἑπομένως,

(Σχ. 41)

«*δύο ἐφεξῆς γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ἀποτελοῦν εὐθεῖαν, εἶνε παραπληρωματικαί*».

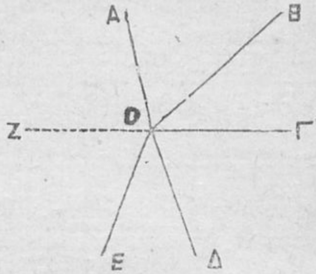
δ') «*Ἐὰν ἀπὸ σημεῖον εὐθείας φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της (κειμένας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μὲ αὐτήν), τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας*».

Διότι ἔστω ΓΟΓ' ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. (42) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ', ἀγόμεναι διὰ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ κάτω μέρος τῆς εὐθείας, κείμεναι δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) μετ' αὐτῆς. Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον τῆς ΓΓ' διὰ τοῦ Ο (**13**, ε'), ἔστω τὴν ΔΟΔ', παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΟΑ, ΑΟΒ', Β'ΟΓ' ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΟΔ', Δ'ΟΓ', καθεμία τῶν ὁποίων εἶνε ὀρθὴ (§ **13**, α'). Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν, ἄρα καὶ τῶν γωνιῶν ΓΟΑ, ΑΟΒ', Β'ΟΓ' ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.



(Σχ. 42)

ε') «*Ἐὰν ἀπὸ σημεῖον ἐπιπέδου φέρωμεν εὐθείας, κειμένας ἐπ' αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν* ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς». Ἔστω π. χ. τὸ σημεῖον Ο σχ. (43), ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ, ΟΕ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν διὰ τοῦ Ο φέρωμεν μίαν ἀκόμη εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἐκτείνεται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, ἔστω τὴν ΓΟΖ, παρατηροῦμεν κατὰ τἀνωτέρω,



(Σχ. 43)

ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΓΟΒ, ΒΟΑ, ΑΟΖ εἶνε ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΖ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ, ΟΕ ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθάς.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν ἐφεξῆς ἄλλης δοθείσης, ἔστω τῆς γωνίας ΑΒΓ. Πόσας τοιαύτας γωνίας δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν;

2) Δίδεται μία γωνία, ἔστω ἡ ΑΒΓ. Πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλην κατὰ κορυφὴν ταύτης;

3) Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν, καὶ προεκτείνατε μίαν πλευράν της. Πῶς λέγονται αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν, μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμά των; Διατί;

4) Ἀπὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) φέρομεν τρεῖς, τέσσαρας εὐθείας ἐπ' αὐτοῦ, ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶνε ἴσαι. Τί μέρος τῆς ὀρθῆς θὰ εἶνε καθεμία γωνί; Διατί;

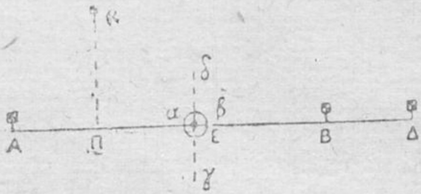
5) Ἂν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶνε συμπληρωματικαί, ποίαν ἰδιότητα θὰ ἔχουν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των;

6) Ἂν ἀπὸ σημεῖον εὐθείας φέρωμεν δύο, τρεῖς,.... εὐθείας προς τὸ αὐτὸ μέρος της (ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου), ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶνε ἴσαι, μὲ τί μέρος τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται καθεμία τῶν γωνιῶν τούτων;

7) Ἐπ' εὐθείας ΑΒ δίδεται ἓν σημεῖον Γ. Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὰς εὐθείας ΓΕ=ΓΖ (ἑκατέρωθεν τοῦ Γ.) Μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνας ἴσας (μεγαλυτέρας τῆς ΓΕ) γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι κόπτονται, ἔστω εἰς τὸ Δ. Φέρατε τὴν ΔΓ καὶ δείξατε (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος) ὅτι εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

8) *(ἐν ὑπαίθρῳ). Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.*

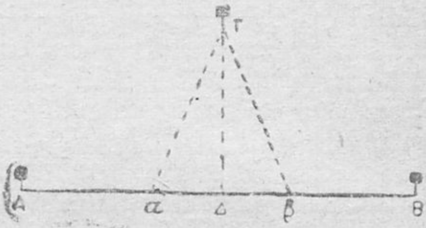
α') Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Κ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς. Τοποθετοῦμεν ἀκόντια κατακόρυφα, ἓν εἰς τὸ Κ, καὶ ἄλλα ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἔστω εἰς τὰ Α, Β καὶ Δ. Ἄλλο ἀκόντιον, φέρον ἄνω ἐπίπεδον (ξυλίνην) πλάκα ὁριζοντίαν †) ἐπὶ τῆς ὁποίας χαράσσομεν δύο εὐθείας καθέτους αβ καὶ γδ, ἐμπήγομεν εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, ἔστω εἰς τὸ Ε, ὥστε ἐκ τῶν δύο καθέτων εὐθειῶν τῆς πλακὸς ἡ αβ νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ. Ἂν ἡ προέκτασις τῆς ἄλλης διευθύνσεως γδ διέρχεται διὰ τοῦ ἀκοντίου Κ σχ. (44), τότε ἡ εὐθεῖα ΚΕ θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος. Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, μεταφέρομεν τὸ ἀκόντιον ἐκ τοῦ Ε εἰς ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ, ἔστω εἰς τὸ Π, ὥστε ἡ διεύθυνσις γδ νὰ συναντᾷ τὸ ἀκόντιον εἰς τὸ Κ (ἡ αβ θὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ). Πρὸς εὐκολίαν ἐμπήγομεν τέσσαρα καρφία ἢ βελόνας κατακορύφως ἐπὶ τῆς πλακὸς ἀνὰ δύο εἰς τὰ ἄκρα τῶν καθέτων εὐθειῶν, διὰ νὰ σκοπεύωμεν †) εὐκόλως τὰς διευθύνσεις δι' αὐτῶν. Ὅταν εὕρωμεν τὴν κατάλληλον θέσιν, Π π. χ., τοῦ ἀκοντίου, τοῦ φέροντος τὴν πλάκα, ἐμπήγομεν καὶ ἄλλα ἀκόντια μεταξὺ τοῦ Κ καὶ τοῦ Π (ἂν τὸ Κ εἶνε πολὺ μακράν), ὥστε αὐτὰ με τὰ τῶν εἰς τὰ Κ καὶ Π νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Τὰ σημεῖα, ὅπου ἐμπήγονται τὰ ἀκόντια αὐτά, ὁρίζουν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.



(Σχ. 44)

β') Ἂν τὸ δοθὲν σημεῖον, ἔστω τὸ Δ, κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ σχ.

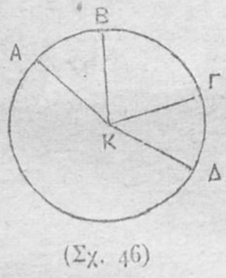
(45), μεταχειριζόμεθα λεπτὸν σχοινίον ὑποδιῃρημένον διὰ κόμβων (ἢ καὶ ἄλλως) εἰς ἴσα μέρη. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Δ δύο σημεῖα εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ, ἔστω τὸ α καὶ τὸ β. Εἰς αὐτὰ στερεώνομεν τὰ ἄκρα τοῦ σχοινίου, τὸ ὁποῖον τεντώνομεν ἐκ τοῦ μέσου τοῦ Γ, ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶνε ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ σχ.(45).



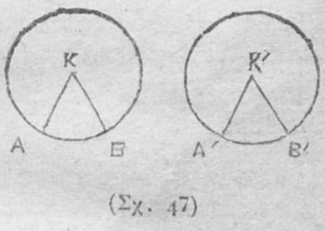
(Σχ. 45)

§ 19. **Ἐπίκεντρος γωνία.** — α') *Ἐπίκεντρος γωνία* καλεῖται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶνε κέντρον κύκλου. Οὕτω αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΓΚΔ σχ. (45) εἶνε ἐπίκεντροι.

β') Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἐπικέντρους γωνίας ἴσας τοῦ αὐτοῦ ἢ



(Σχ. 46)



(Σχ. 47)

ἴσων κύκλων, π. χ. τὰς ΑΚΒ, Α'Κ'Β' σχ. (47) τῶν ἴσων κύκλων Κ, Κ', καὶ θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αὐτοὶ καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τομεῖς ΑΚΒ, Α'Κ'Β', καθὼς καὶ τὰ τόξα ΑΒ, Α'Β' σχ. (47) θὰ ἐφαρμόσουν. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι «*εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἐὰν δύο (ἢ περισσότεραι) ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των εἶνε ἴσα*».

Καὶ ἀντιστρόφως,

«*ἂν εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς ἴσους κύκλους δύο (ἢ περισσότερα) τόξα εἶνε ἴσα, καὶ αἱ ἀντίστοιχοί των ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι*».

Πράγματι ἂν τὰ τόξα ΑΒ, Α'Β' σχ. (47) τῶν ἴσων κύκλων Κ,Κ' εἶνε ἴσα, καὶ θέσωμεν τὸν κύκλον Κ ἐπὶ τοῦ Κ', ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν τὰ ἴσα τόξα ΑΒ καὶ Α'Β', τὸ σημεῖον Α καὶ Β τοῦ ἑνὸς νὰ πέσουν ἐπὶ τῶν Α' καὶ Β' τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως, τὸ Κ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Κ' καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς Κ'Α', ἡ δὲ ΚΒ ἐπὶ τῆς Κ'Β' (§ **2**, ζ'). Ἄρα καὶ ἡ γωνία ΑΚΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας Α'Κ'Β'.

§ **20. Ἐγγεγραμμένη γωνία.**— α') Μία γωνία λέγεται *ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον*, ἂν ἡ κορυφή της κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της εἶνε χορδαί του. Οὕτω π. χ. ἡ γωνία ΓΑΒ σχ. (48) λέγεται ἐγγεγραμμένη γωνία τοῦ κύκλου Κ.

(Σχ. 48)

β') Ἔστω ὅτι ἔχομεν κύκλον ἐκ χαρτονίου †) τὸν Κ, καθὼς εἰς τὸ σχ. (48), τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτὸν γωνίαν ΓΑΒ, καὶ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΓΚΒ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ τόξον ΓΒ, περικλειόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς γωνίας ΓΑΒ. Ἐὰν ἀποκόψομεν (διὰ μαχαιριδίου) †) τὰς γωνίας ΓΑΚ, (ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ τὴν ΓΑΒ), καὶ τὴν ΓΚΒ, συγκρίνωμεν δ' αὐτὰς μεταξύ των (§ **12**) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΚΒ εἶνε διπλασία τῆς ΓΑΚ, ἄρα διπλασία καὶ τῆς γωνίας ΓΑΒ.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων εὑρίσκομεν ὅτι *«ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἑνὸς κύκλου εἶνε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης του, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ αὐτὸ (ἢ ἴσον τόξον)».*

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε κύκλον ἐκ χαρτονίου, καὶ ἐγγράψατε εἰς αὐτὸν μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν ὀρθήν. Τί μέρος τῆς περιφερείας ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν;

2) Φέρατε δύο διαμέτρους καθέτους εἰς ἕνα κύκλον (πῶς;). Τί μέρος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε καθὲν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς καθεμίαν τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν;

3) Κατασκευάσατε μίαν ἐγγεγραμμένην γωνίαν εἰς κύκλον καὶ τὴν ἐπίκεντρον, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Πόσας ἐγγεγραμμένας γωνίας δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἴσας μὲ τὴν πρώτην (εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον;).

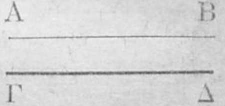
4) Μία ἐγγεγραμμένη, καὶ μία ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἡ ἐγγεγραμμένη;

5) Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον εἶνε τὸ ἥμισυ ὀρθῆς γωνίας, πόσον μέρος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν; πόσον ἄν, ἡ ἐγγεγραμμένη εἶνε ὀρθὴ γωνία;

Περὶ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἐπιφανειῶν

21. Ὁρισμοί.— α΄) Δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, λέγονται *παράλληλοι*, ἐὰν ὅσον καὶ προεκταθοῦν δὲν συναντῶνται.

Οὕτω αἱ ἀνὰ δύο ἀπέναντι κόψεις καθενὸς μέρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ σχ. (49), αἱ ὁποῖαι ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν δὲν συναντῶνται, λέγονται παράλληλοι.

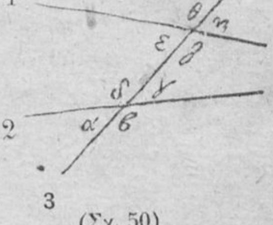


(Σχ. 49)

β΄) Κατ' ἀνάλογον τρόπον λέγομεν ὅτι δύο ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι εἶνε παράλληλοι, ἐὰν ὅσον καὶ ἂν ἐκταθοῦν (καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις των) δὲν συναντῶνται. Π. χ. τὰ ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἐπίπεδα μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τοῦ πρίσματος †), τοῦ κυλίνδρου κ.ο.κ. εἶνε παράλληλα.

Ὁμοίως εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον λέγονται παράλληλα, ἂν ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν δὲν συναντῶνται.

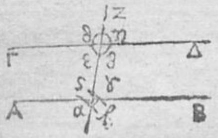
γ΄) Ἂν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, π. χ. αἱ 1 καὶ 2 σχ. (50), τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, ἔστω τῆς 3, σχηματίζονται ὀκτὼ γωνίαι ἐν ὅλῳ, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. Ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων αἱ γωνίαι γ καὶ ζ λέγονται «*ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν εὐθειῶν 1 καὶ 2*», καθὼς καὶ αἱ γωνίαι



(Σχ. 50)

ε καὶ δ, ἐπειδὴ εὑρίσκονται μεταξὺ (ἐντὸς) τῶν 1 καὶ 2 καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τρίτης εὐθείας 3. Αἱ γωνίαι ε καὶ γ, καθὼς καὶ αἱ δ, ζ λέγονται «*ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν*», ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν 1 καὶ 2, ἀλλὰ πρὸς τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος (ἐναλλὰξ) τῆς 3. Αἱ γωνίαι ζ καὶ α καθὼς καὶ αἱ ε καὶ 6, αἱ γ καὶ θ, αἱ δ καὶ η λέγονται «*ἐντὸς ἐκτὸς ἐναλλὰξ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν*», ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἡ μία ἐντὸς καὶ ἡ ἄλλη ἐκτὸς τῶν 1 καὶ 2, ἐναλλὰξ δὲ τῆς 3. Αἱ γωνίαι α, θ καὶ 6, η λέγονται «*ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν εὐθειῶν*», ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἐκτὸς τῶν 1 καὶ 2 καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς 3.

§ **22. Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.**— α΄) Ἂν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, π. χ. αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. (51), τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, ἔστω τῆς ΗΖ, συγκρίνωμεν δὲ μεταξύ των (§ **12**) τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας των, π. χ. τὰς γ καὶ ε, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι. Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι εἶνε ἴσαι μεταξύ των αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ μέρη γωνίαι, π. χ. αἱ γ καὶ η. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι γων. ε=γων. γ, γων δ=γων. ζ, γων. ε=γων. α, γων. 6=γων. ζ, γων. γ=γων. η, γων. δ=γων. θ.



(Σχ. 51)

Ἐὰν προσθέσωμεν δύο γωνίας (§ **13**, α΄) αἱ ὁποῖαι εἶνε ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, π. χ. τὰς γωνίας ζ καὶ γ, ἢ τὰς ε καὶ δ, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶνε δύο ὀρθαὶ γωνίαι. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν εἰς δύο οἱασδήποτε παραλλήλους, αἵτινες κόπτονται ὑπὸ τρίτης εὐθείας.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

«*ἐὰν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας, τὰς δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς*».

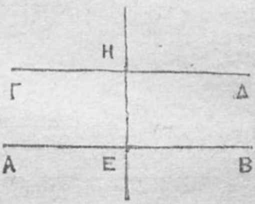
Ἂν δύο εὐθεῖαι, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, π. χ. αἱ 1 καὶ 2 σχ. (50) δὲν εἶνε παράλληλοι, ὁ ἀνωτέρω κανὼν δὲν ἰσχύει, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν συγκρίνωμεν π. χ. δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας.

β') Ἀντιστρόφως παρατηροῦμεν ὅτι

«ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, καὶ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς, αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ ἐξελέγξωμεν, ἂν δύο εὐθεῖαι (κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον) εἶνε παράλληλοι, τὰς τέμνομεν ὑπὸ τρίτης, καὶ συγκρίνομεν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας των, ἢ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Ἂν αὐταὶ εἶνε ἀντιστοίχως ἴσαι, συνάγομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶνε παράλληλοι. Ἐπίσης θὰ εἶνε παράλληλοι, ἂν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι τῶν εὐθειῶν εἶνε παραπληρωματικαί.

§ **23. Πῶς ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐκτὸς εὐθείας φέρομεν παράλληλόν της.**-α')Διὰ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΑΒ σχ. (52), ἀπὸ ἓν σημεῖον π.χ. τὸ Η, κείμενον ἔξω τῆς εὐθείας καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου) μετ' αὐτῆς, φέρομεν πρῶτον διὰ τοῦ Η εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ(§ 15,ε'), τὴν ΗΕ. Ἔπειτα μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΕ διὰ τοῦ Η,ἔστω τὴν ΔΗΓ. Ἡ ΔΗΓ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι αἱ γωνίαι ΑΕΗ, ΓΗΕ εἶνε, ὀρθαὶ καὶ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν ΑΒ, ΓΔ.



(Σχ. 52)

β') Ἂν δοκιμάσωμεν νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ ἐκ τοῦ σημείου Η σχ. (52), παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον, ἤτοι δὲν ὑπάρχει ἄλλη παράλληλος τῆς ΑΒ διὰ τοῦ Η.

Ἑπομένως

«ἐκ σημείου, ἐκτὸς εὐθείας κειμένου, μία μόνη παράλληλός της δύναται ν' ἀχθῇ».

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας καὶ λάβετε δύο σημεῖά της· φέρατε δύο καθέτους της διὰ τῶν σημείων τούτων (ἐπάνω εἰς τὸ τετράδιον)· τί εἶνε μεταξύ των αἱ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν; Διατί;

2) Φέρατε μίαν κάθετον ἐπὶ μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν καὶ προεκτείνατέ την μέχρις ὅτου κόψῃ καὶ τὴν ἄλλην. Τί γωνίαν θὰ σχηματίζῃ καὶ μὲ αὐτήν; Διατί;

3) Τοποθετήσατε τὸ μολυβδοκόνδυλόν σας, ὥστε νὰ εἶνε παράλληλον πρὸς τὸν πίνακα.

4) Δείξατε α') παράλληλα ἐπίπεδα ἐπὶ τοῦ κύβου· ἐν τῷ δωματίῳ· β') παραλλήλους εὐθείας ἐπὶ τοῦ κύβου· ἐπὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου· γ') παραλλήλους ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ πρίσματος· ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου.

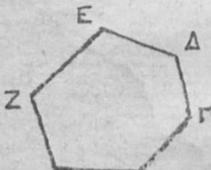
5) Ἂν τρεῖς, τέσσαρες,... εὐθεῖαι εἶνε κάθετοι ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, (καὶ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον) τί εἶνε μεταξύ των καὶ διατί;

6) Ἂν ἔχετε μίαν σειρὰν ἐκ τριῶν, τεσσάρων,... παραλλήλων εὐθειῶν καὶ ἄλλην ἀπὸ καθέτους πρὸς τὰς πρώτας, τί θὰ εἶνε μεταξύ των αἱ εὐθεῖαι τῆς δευτέρας σειρᾶς; Διατί;

7) Ἂν ἐκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΖ, ἡ μία εἶνε ἥμισυ τῆς ὀρθῆς, τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία τῶν ἄλλων ἑπτὰ γωνιῶν; Διατί.

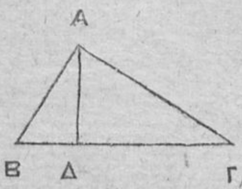
Περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων

§ **24.** *Εὐθύγραμμον σχῆμα* καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμάς. Οὕτω καθὲν τῶν ἐπιπέδων μερῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), τῆς πυραμίδος †), τοῦ πρίσματος †) περατοῦται εἰς εὐθείας γραμμάς, καθὼς καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ χάρτου, ἥτις περικλείεται ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΑΒΓΔΕΖΑ σχ. (53) εἶνε σχήματα εὐθύγραμμα.



(Σχ. 53)

§ **25. Περὶ τριγώνων.**— α') *Τρίγωνον* καλεῖται εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς τρεῖς εὐθείας γραμμάς, αἵτινες καλοῦνται *πλευραὶ* τοῦ τριγώνου. Οὕτω τὸ ΑΒΓ σχ. (54) εἶνε τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.



(Σχ. 54)

β') *Περίμετρος* ἑνὸς τριγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Οὕτω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σχ. (54) ἡ περίμετρος εἶνε εὐθεῖα ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ.

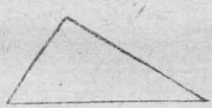
γ') *Γωνίαι* ἑνὸς τριγώνου λέγονται αἱ τρεῖς γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του· *κορυφαὶ* δὲ τοῦ τριγώνου αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. Οὕτω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σχ. (54) γωνίαι εἶνε αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

δ') *Βάσις* ἑνὸς τριγώνου λέγεται μία τῶν πλευρῶν του, *ὕψος* δὲ ἡ ἀπόστασις μιᾶς τῶν κορυφῶν του ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της πλευρὰν (§ **16**, β'). Οὕτω τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σχ. (54) ἡ ΑΔ (κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ), λέγεται ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

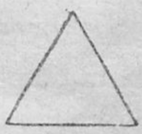
§ **26. Εἴδη τριγώνων.**— α') Ἐκ τῆς σχέσεως τὴν ὁποίαν ἔχουν μεταξύ των αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχομεν τὰ ἑξῆς εἴδη τριγώνων.

1) *Τὸ σκαληνόν*, ἂν αἱ πλευραί του εἶνε ἄνισοι μεταξύ των, καθὼς τὸ σχ. (55).

2) *Τὸ ἰσοσκελές*, ἐὰν δύο πλευραί του εἶνε ἴσαι μεταξύ των,


(Σχ. 55)


(Σχ 56)


(Σχ. 57)

ὅτε ἡ τρίτη του πλευρὰ καλεῖται *βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου*. Π. χ. τὸ σχ. (56) παριστάνει ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Συνήθως καλεῖται *κορυφὴ ἰσοσκελοῦς τριγώνου* ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεώς του κορυφή.

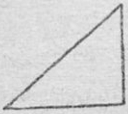
3) *Τὸ ἰσόπλευρον*, ἂν αἱ πλευραί του εἶνε ἴσαι μεταξύ των, π. χ. τὸ τρίγωνον τοῦ σχ. (57), ἐπειδὴ αἱ πλευραί του εἶνε ἴσαι.

β') Ἐκ τῆς σχέσεως τὴν ὁποίαν ἔχουν μεταξύ των αἱ γωνίαι τριγώνου ἔχομεν τὰ ἑξῆς εἴδη τριγώνων.

1) *Τὸ ὀρθογώνιον*, ἐὰν μία γωνία του εἶνε ὀρθή, ὅτε ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας ταύτης πλευρὰ λέγεται *ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου*. Οὕτω τὸ σχ. (58) εἶνε τρίγωνον ὀρθογώνιον.

2) *Τὸ ἀμβλυγώνιον*, ἂν μία γωνία του εἶνε ἀμβλεῖα, π. χ. τὸ σχ. (59) εἶνε τρίγωνον ἀμβλυγώνιον.

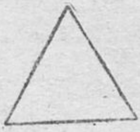
3) *Τὸ ὀξυγώνιον*, ἐὰν αἱ γωνίαι του εἶνε ὀξεῖαι. Π. χ. τὸ



(Σχ. 58)

(Σχ. 59)

(Σχ. 60)



(Σχ. 61)

σχ. (60) εἶνε τρίγωνον ὀξυγώνιον, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι του εἶνε ὀξεῖαι.

4) *Τὸ ἰσογώνιον*, ἂν αἱ γωνίαι του εἶνε ἴσαι, π. χ. τὸ σχ. (61).

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Πόσας πλευρὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἄλλας του;

2) Πόσας πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρέπει νὰ γνωρίζωμεν, διὰ νὰ ἔχωμεν πάσας τὰς πλευράς του;

3) Πόσαι γωνίαι ἑνὸς ἰσογωνίου τριγώνου πρέπει νὰ δοθοῦν, διὰ νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας του;

4) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου διάφορα εἴδη τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἐγνωρίσατε, καὶ σημειώσατε ἐπ' αὐτῶν τὰς πλευράς των, τὰς γωνίας των, τὰ ὕψη των.

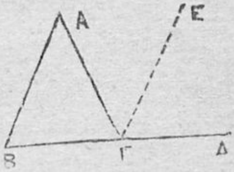
5) Κατασκευάσατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, καὶ φέρατε τὸ ὕψος του, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν βάσιν του †). Συγκρίνατε τὰ μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται οὕτω ἡ βάσις του (διὰ τοῦ διαβήτου). Ποίαν ἰδιότητα συνάγετε;

6) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶνε ἰσοσκελές; Διατί;

§ 27. Ἰδιότητες τοῦ τριγώνου.—

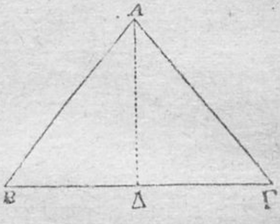
α΄) «*Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς*». Ἔστω ἓν τρίγωνον ἐκ χαρτονίου, π. χ. τὸ ΑΒΓ σχ. (62).

Κόπτομεν ἐκ χαρτονίου δύο ἀκόμη τρίγωνα ἀκριβῶς ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ †). Τοποθετοῦμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δεξιὰ τοῦ ΑΒΓ, ὥστε ἡ ἴση γωνία του μὲ τὴν γων. Α τοῦ ΑΒΓ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΓΕ. Τοποθετοῦμεν καὶ τὸ ἄλλο τρίγωνον δεξιὰ τοῦ δευτέρου †), ὥστε ἡ ἴση γωνία του μὲ τὴν γων. Β τοῦ ΑΒΓ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΕΓΔ. Προσθέτομεν τὰς τρεῖς γωνίας ΒΓΑ, ΑΓΕ καὶ ΕΓΔ, αἱ ὁποῖαι εἶνε ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Γ, Α, Β τοῦ δοθέντος τριγώνου, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς (§ 18,δ'). Ἤτοι ὅτι γων. Α + γων. Β + γων. Γ = μὲ 2 ὀρθάς.



(Σχ. 62)

β') «*Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶνε ἴσαι*». Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ χαρτονίου σχ. (63) καὶ ΒΓ ἡ βάσις του. Κόπτομεν ἐκ χαρτονίου †) ἓν ἄλλο τρίγωνον ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ. Θέτομεν τὸ δεύτερον ἐπὶ τοῦ πρώτου, ὥστε ἡ μία πλευρὰ τῆς γωνίας του, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ τὴν Β τοῦ ΑΒΓ, νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΓ τοῦ ΑΒΓ, ὅτε καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς παρατηροῦμεν †) ὅτι θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΓΒ. Ἤτοι ἡ γωνία Β θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν γων. Γ, δηλαδὴ εἶνε γων. Β = γων. Γ.



(Σχ. 63)

γ') «*ἐὰν δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου εἶνε ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶνε ἰσοσκελές*». Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν ἓν τρίγωνον π. χ. τὸ ΑΒΓ σχ. (63), τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι Γ, Β εἶνε ἴσαι, συγκρίνωμεν δὲ μεταξύ των (§ 4) τὰς ἀπέναντί των πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι.

δ') «*Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφὴν μὲ τὸ μέσον τῆς βάσεώς του διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς του, καὶ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του*». Πράγματι ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ σχ. (63) μὲ βάσιν του τὴν ΒΓ. Ἐὰν τὸ Δ εἶνε τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, ἑνώσωμεν δὲ τὴν κορυφήν του Α μὲ τὸ Δ διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ, ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν γωνιῶν ΒΑΔ, ΓΑΔ (§ 12) παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶνε ἴσαι μεταξύ των. Ἤτοι, ἡ ΑΔ διχοτομεῖ (διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη) τὴν γωνίαν Α τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Ἐπίσης ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν γωνιῶν ΓΔΑ, ΒΔΑ εὑρίσκομεν ὅτι καὶ αὗται εἶνε ἴσαι, ἐπομένως ὅτι ἡ ΑΔ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ (§ 13, α΄).

Ἀσκήσεις

1) Τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι (δηλ. τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ἰσογώνιον)· διατί;

2) Τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον εἶνε καὶ ἰσόπλευρον· διατί;

3) Δύναται ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον νὰ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας; Διατί;

4) Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ χαρτονίου· ἀποκόψατε τὰς δύο μὴ ὀρθὰς γωνίας του καὶ θέσατέ τας ἐπὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας του ὥστε νὰ σκεπασθῇ αὕτη. Τί συνάγετε ἐκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς;

5) Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο γωνίαι εἶνε ὀξεῖαι· διατί; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἄθροισμά των;

6) Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου (ἰσογωνίου) τριγώνου;

7) Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου; Διατί;

8) Ἂν τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε 0,5 ὀρθ., ἡ ἄλλη 0,8 ὀρθ., τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε ἡ τρίτη;

9) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μία τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του εἶνε 0,65 ὀρθ.· πόση εἶνε καθεμία τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του;

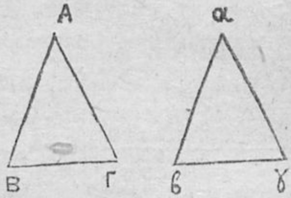
10) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεώς του γωνία εἶνε 0,75 τῆς ὀρθῆς· πόση εἶνε καθεμία τῶν δύο ἄλλων;

11) Τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεώς του εἶνε 0,25 ὀρθ.· πόση εἶνε καθεμία τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου;

12) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας των ἴσας ἀντιστοίχως, θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην των ἴσην. Διατί;

§ **28. Πῶς διακρίνομεν ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα.**— α') Διὰ νὰ εὕρωμεν, ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα, θέτομεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, καὶ ἂν ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς (7, β') λέγομεν ὅτι εἶνε ἴσα. Δυνάμεθα ὅμως καὶ ὡς ἑξῆς νὰ διακρίνωμεν ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ἴσα.

β') «*Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των μίαν μὲ μίαν ἴσας εἶνε ἴσα*». Πράγματι, ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἐκ χαρτονίου σχ. (64) ἔχουν τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν αβ, τὴν ΑΓ μὲ τὴν αγ, τὴν ΒΓ μὲ τὴν βγ, εἶνε ἴσα, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν θέτοντες †) τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως.



(Σχ.64)

γ') «*Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, καὶ δύο γωνίας των ἴσας εἶνε ἴσα*». Π. χ. ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ ἐκ χαρτονίου σχ. (64) ἔχουν τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν αβ, τὴν γων. Α=γων. α καὶ τὴν γων. Β=γων. β, εἶνε ἴσα, ὡς βεβαιούμεθα θέτοντες †) τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως.

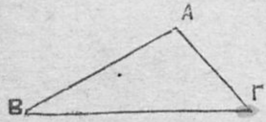
δ') «*Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περικλειομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην, εἶνε ἴσα*». Οὕτω ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ σχ. (64) ἔχουν τὴν ΑΒ=αβ, τὴν ΑΓ=αγ καὶ τὴν γων. Α=γων. α εἶνε ἴσα, ὡς βλέπομεν θέτοντες †) τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως.

§ **29. Κατασκευὴ τριγώνου.**— α') Ἂν ἔχωμεν ἓν τρίγωνον, π. χ. τὸ ΑΒΓ σχ. (64), παρατηροῦμεν ὅτι (§ 2, ε') τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν του, π. χ. τὸ ΑΒ+ΒΓ, εἶνε μεγαλύτερον τῆς τρίτης, ΑΓ. Ἐὰν ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀφαιρέσωμεν μίαν ἄλλην πλευράν του, καὶ τὴν διαφοράν, τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν, συγκρίνωμεν μὲ τὴν τρίτην πλευράν του, εὑρίσκομεν ὅτι η πλευρὰ αὐτὴ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι

«*καθεμία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἀλλὰ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των*».

β') Ἂν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς ἴσας μὲ δοθείσας εὐθείας, πρέπει καθεμία τῶν εὐθειῶν αὐτῶν νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των. Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο ἡ κατασκευὴ εἶνε ἀδύνατος.

γ') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον μὲ πλευρὰς 2 δ., 4 δ., 3 δ., π. χ. Γράφομεν μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΒΓ σχ. (65) ἴσην μὲ 4 δ. (Ἀνοίγομεν τὸν διαβήτην ὥστε τὰ ἄκρα τῶν αἰχμῶν του νὰ ἀπέχουν 4 δ., τοποθετοῦμεν αὐτὸν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος, ὥστε αἱ αἰχμαί του νὰ ἐγγίζουν τὸν χάρτην ἢ τὸν πίνακα, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Β καὶ ἑνώνομεν τὰ Γ καὶ Β διὰ τῆς εὐθείας ΓΒ †). Ἀκολούθως μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ γράφομεν περιφερείας μὲ ἀκτῖνας ἴσας μὲ 3 δ., καὶ 2 δ. ἀντιστοίχως. Αἱ περιφέρειαι κόπτονται εἰς δύο σημεῖα.



(Σχ. 65)

Ἔστω τὸ Α ἓν ἐξ αὐτῶν. Ἑνώνομεν τὰ Α, Β, Γ μὲ εὐθείας καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ζητούμενον. Διότι ἔχει τὴν ΑΓ=μὲ 2 δ., τὴν ΒΓ=μὲ 4 δ., καὶ τὴν ΑΒ=μὲ 3 δ. Καθ' ὅμοιον τρόπον κατασκευάζομεν τρίγωνον μὲ πλευρὰς οἱασδήποτε εὐθείας α, β, γ, ἂν πληροῦται ὁ ἀνωτέρω περιορισμὸς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τούτων.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Κατασκευάσατε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀπὸ χαρτόνιον, καὶ διπλώσατε αὐτό, ὥστε νὰ ἔχετε τὸ ὕψος του κατὰ τὴν πτυχὴν (τσάκισμα).

2) Κατασκευάσατε ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ χαρτονίου, φέρατε τὸ ὕψος του, καὶ διπλώσατε αὐτό, ὥστε αἱ τρεῖς κορυφαί του νὰ πέσουν εἰς τὸ σημεῖον κατὰ τὸ ὁποῖον συναντᾶται τὸ ὕψος του μὲ τὴν βάσιν του. Τί γωνίας σχηματίζουν οὕτω αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου, καὶ πόσον ἄθροισμα ἔχουν;

3) Κατασκευάσατε μὲ βάσιν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, δύο, τρία....

ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Φέρατε τὰ ὕψη των· τί ἀποτελοῦν τὰ ὕψη αὐτὰ τῶν τριγώνων; ποῦ κεῖνται αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων αὐτῶν;

4) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς α') 0,042 μ. 0,065 μ. 0,042 μ. β') τὴν μίαν 0,025 μ. καὶ τὰς ἄλλας διπλασίας ταύτης. Τί τρίγωνα θὰ εἶνε αὐτά;

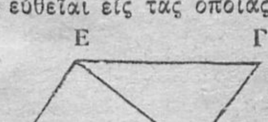
Ὁμὰς δευτέρα. 1) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευράς· α') 6 δ., 4 δ., 8 δ. β') 5 δ., 6 δ., 3 δ. γ') 7 δ., 5 δ., 3.

2) Κατασκευάσατε τρίγωνον· α') ὀρθογώνιον μὲ καθέτους πλευρὰς 3 δ., 4 δ. β') ἰσοσκελὲς μὲ βάσιν 3 δ. καὶ τὰς ἄλλας πλευράς του 5 δ. γ') ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν 10 δ. καὶ τὴν μίαν κάθετον πλευράν του ἴσην μὲ 8 δ. δ') ἰσόπλευρον μὲ πλευρὰς 5 δ. ε') μὲ περίμετρον 8 δ., τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ εἶνε 3,8 δ. καὶ ἄλλη 3,2 δ. ς') ἰσοσκελὲς μὲ βάσιν 6 δ. καὶ περίμετρον 15 δ.

Περὶ τετραπλεύρων καὶ παραλληλογράμμων

§ **30. Περὶ τετραπλεύρων.**— α') *Τετράπλευρον* καλεῖται εὐθύγραμμον σχῆμα, περατούμενον εἰς τέσσαρας εὐθείας γραμμάς. Οὕτω καθὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), καθὼς καὶ τὸ ΑΒΓΕ σχ. (66) εἶνε τετράπλευρα.

β') *Πλευραὶ* τετραπλεύρου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται, *γωνίαι του* αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του, καὶ *κορυφαί του* αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. Π. χ. τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΕ σχ. (66) πλευραὶ εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΕ, ΕΑ· κορυφαί του τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Ε, καὶ γωνίαι του αἱ γων. Α, γων. Β, γων. Γ, γων. Ε.



(Σχ. 66)

γ') *Περίμετρος* ἑνὸς τετραπλεύρου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Οὕτω τοῦ ΑΒΓΕ ἡ περίμετρος εἶνε τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ + ΓΕ + ΕΑ.

δ') *Κυρτὸν* λέγεται ἓν τετράπλευρον, ἂν καθεμία τῶν πλευρῶν του προεκτεινομένη ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της. Οὕτω τὸ ΑΒΓΕ σχ. (66) εἶνε κυρτόν, διοτι ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ, ἢ τὴν ΒΓ, ἢ τὴν ΓΕ, ἢ τὴν ΑΕ, τὸ σχῆμα ΑΒΓΕ μένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος καθεμιᾶς τούτων.

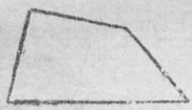
ε') *Διαγώνιος* ἑνὸς τετραπλεύρου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο κορυφάς του μὴ διαδοχικάς. Οὕτω ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶνε διαγώνιος τοῦ ΑΒΓΕ σχ. (66).

§ **31. Διάφοροι μορφαὶ τετραπλεύρων.**— Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνομεν τὰς ἑξῆς μορφάς.

α') *Τὸ τραπεζοειδές* εἶνε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν εἶνε παράλληλοι, π. χ. τὸ τετράπλευρον τοῦ σχ. (67).

β') *Τὸ τραπέζιον*, τὸ ὁποῖον εἶνε τετράπλευρον, ἔχον μόνον δύο πλευράς του παραλλήλους καθὼς τὸ σχ. 68.

γ') *Τὸ παραλληλόγραμμον* εἶνε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι. Οὕτω τὸ ΑΒΓΕ σχ. (66).


(Σχ. 67)

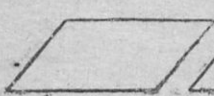

(Σχ. 68)

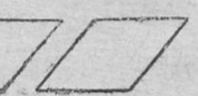

(Σχ. 69)

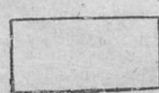
εἶνε παράλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ, ΓΕ καὶ αἱ ΑΕ, ΒΓ εἶνε παράλληλοι. Ἐπίσης παραλληλόγραμμον εἶνε τὸ σχ. (69), καὶ καθὲν μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †).

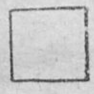
§ **32. Εἴδη παραλληλογράμμων.**— Διακρίνομεν τὰ ἑξῆς εἴδη παραλληλογράμμων.

α') *Τὸ ῥομβοειδές* εἶνε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ


(Σχ. 70)


(Σχ. 71)


(Σχ. 72)


(Σχ. 73)

πλευραὶ δὲν εἶνε ἴσαι μεταξύ των, καθὼς τὸ σχ. (70).

β') *Ὁ ῥόμβος* εἶνε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε ἴσαι μεταξύ των, καθὼς τὸ σχ. (71).

γ΄) *Τὸ ὀρθογώνιον* εἶνε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶνε ὀρθαί, καθὼς π. χ. τὸ σχ. (72).

δ΄) *Τὸ τετράγωνον* εἶνε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι του ὀρθαί, καθὼς τὸ σχ. (73), καθὼς καὶ τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου †).

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ὁμὰς πρώτη. 1) Τὸ ὀρθογώνιον εἶνε παραλληλόγραμμον· διατί; πότε ἓν παραλληλόγραμμον εἶνε ὀρθογώνιον;

2) Τὸ τετράγωνον εἶνε καὶ ὀρθογώνιον· διατί;

3) Τὸ τετράγωνον εἶνε καὶ ῥόμβος· διατί;

4) Πότε ἓν παραλληλόγραμμον εἶνε ῥόμβος; πότε τετράγωνον; πότε ὀρθογώνιον;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Πόσαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἢ τετραγώνου, πρέπει νὰ δοθοῦν, διὰ νὰ γνωρίζωμεν πάσας τὰς γωνίας των; Διατί;

2) Πόσαι πλευραὶ ἑνὸς ῥόμβου, ἢ τετραγώνου, πρέπει νὰ δοθοῦν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρόν των; Πῶς τὴν εὑρίσκομεν τότε; Διατί;

3) Τί εἶνε μεταξύ των ἀνὰ δύο τεμνόμεναι πλευραὶ ἑνὸς τετραγώνου; Διατί; Ἑνὸς ὀρθογωνίου;

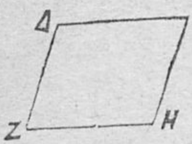
4) Ἂν φέρωμεν μίαν διαγώνιον ἑνὸς τετραγώνου, θὰ χωρισθῇ εἰς δύο τρίγωνα. Τί τρίγωνα εἶνε αὐτὰ ὡς πρὸς τὰς γωνίας των; Διατί; Εἶνε ἴσα τὰ τρίγωνα αὐτά; Διατί;

5) Ἂν φέρωμεν μίαν διαγώνιον ἑνὸς ὀρθογωνίου, τί τρίγωνα θὰ σχηματισθοῦν ὡς πρὸς τὰς γωνίας των; Διατί;

6) Τί σχῆμα ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μαυροπίνακος; οἱ ὑαλοπίνακες τῶν παραθύρων; ἓν φύλλον χάρτου;

§ **33. Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.**— α΄) Ἂν ἑνὸς παραλληλογράμμου, π. χ. τοῦ ΔΕΖΗ σχ. (74) συγκρίνωμεν μεταξύ των τὰς ἀπέναντι πλευράς των (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου), τὰς ΔΕ, ΖΗ καὶ τὰς ΔΖ, ΕΗ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι· ἤτοι ΔΕ=ΖΗ. Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ΔΖ=ΕΗ.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων ἔχομεν ὅτι «*αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσαι*».

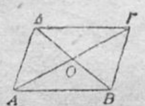


(Σχ. 74)

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν ἓν παραλληλόγραμμον ἐκ χαρτονίου καθὼς τὸ ΔΕΖΗ σχ.(74) καὶ τὸ κόψωμεν κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΗ, χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα †), τὰ ΖΔΗ καὶ ΔΗΕ. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶνε ἴσα (§ **28**, β΄), ἑπομένως εἶνε καὶ γων. Ζ=γων. Ε. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε καὶ γων. Δ=γων. Η. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων (εἰς ἄλλα παραλληλόγραμμα) ἕπεται ὅτι

«*αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶνε ἴσαι*».

γ΄) Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ἑνὸς παραλληλογράμμου, π. χ. τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (75), τὴν ΑΓ καὶ τὴν Β Δ, κόπτονται αὗται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο. Συγκρίνοντες μεταξύ των τὰς εὐθείας ΑΟ, ΟΓ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι· δηλαδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ κόπτεται εἰς τὸ μέσον (διχοτομεῖται) ὑπὸ τῆς ἄλλης διαγωνίου ΒΔ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ΒΟ=ΟΔ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι



(Σχ. 75)

«*αἱ διάγωνοι ἑνὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται*».

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Δίδεται ἓν παραλληλόγραμμον, (ἢ τετράπλευρον) ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· φέρομεν μίαν διαγώνιόν του, ἔστω τὴν ΑΓ. Δείξατε (μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἰδιότητος τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος σχήματος ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς.

2) Μία γωνία ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶνε 0,75 ὀρθ.· πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία τῶν ἄλλων του γωνιῶν;

3) Τὸ ἄθροισμα δύο ἐκ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶνε 1,8 ὀρθ.· πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία γωνία του;

4) Ἑνὸς παραλληλογράμμου μία ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶνε ὀρθή· τί εἶνε αἱ ἄλλαι του γωνίαι ; Διατί ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἡ περίμετρος ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶνε 19,28 δ., μία δὲ τῶν πλευρῶν του 8,6 δ.· πόση εἶνε καθεμία τῶν ἄλλων του πλευρῶν ;

2) Πόση εἶνε ἡ περίμετρος ῥόμβου, ἔχοντος πλευρὰν 8,5 δ.;

3) Πόση εἶνε ἑκάστη πλευρὰ τετραγώνου, ἂν ἡ περίμετρός του εἶνε 14, 8 δ.;

4) Κατασκευάσατε ἓν τρίγωνον· φέρατε ἀπὸ καθεμίαν κορυφήν του εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ἀπέναντί της πλευράν. Θὰ προκύψῃ ἓν νέον τρίγωνον· καὶ πόσα παραλληλόγραμμα ; Δείξατε ὅτι καθεμία τῶν πλευρῶν τοῦ νέου τριγώνου εἶνε διπλασία τῆς ἀπέναντί της τοῦ δοθέντος τριγώνου.

§ **34. Πῶς εὑρίσκομεν ἂν τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον.**— α΄) Ἔστω ἓν τετράπλευρον, π. χ. τὸ ΔΕΖΗ σχ. (74), τοῦ ὁποίου αἱ ἀνὰ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε ἴσαι· δηλαδὴ εἶνε ΔΕ=ΖΗ, ΔΖ=ΗΕ. Ἂν προσθέσωμεν τὰς γωνίας Δ καὶ Ζ, καθὼς καὶ τὰς γωνίας Ζ καὶ Η, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε παραπληρωματικαί. Ἑπομένως αἱ πλευραὶ ΔΕ καὶ ΖΗ, καθὼς καὶ αἱ ΔΖ, ΗΕ εἶνε παράλληλοι (§ **22**,β΄), τὸ δὲ ΔΕΖΗ εἶνε παραλληλόγραμμον. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων συνάγομεν ὅτι

«ἂν ἑνὸς τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε ἴσαι, τὸ τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον».

β΄) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ σχ. (74), τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶνε ἴσαι, δηλαδὴ γων. Δ=γων. Η, καὶ γων.Ζ=γων. Ε. Ἂν προσθέσωμεν τὰς γωνίας Δ καὶ Ζ, καθὼς καὶ τὰς γωνίας Ζ καὶ Η, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε παραπληρωματικαί. Ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΔΕ, ΖΗ, καὶ αἱ ΔΖ, ΕΗ εἶνε παράλληλοι (§ **22**, β΄), ἤτοι τὸ ΔΕΖΗ εἶνε παραλληλόγραμμον. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι

«ἂν τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶνε ἴσαι, τὸ τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον».

γ΄) Ἂν ἑνὸς τετραπλεύρου, π. χ. τοῦ ΔΕΖΗ σχ. (74), αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του, π. χ. αἱ ΔΕ καὶ ΖΗ, εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, συγκρίνωμεν δὲ μεταξύ των καὶ τὰς δύο ἄλλας ἀπέναντι πλευράς του, τὰς ΔΖ καὶ ΗΕ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι μεταξύ των. Ἑπομένως (§ **34**, α΄) τὸ ΔΕΖΗ εἶνε παραλληλόγραμμον.

Ἤτοι

«ἂν τετραπλεύρου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον».

δ΄) Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ σχ. (75), τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται· ἤτοι εἶνε ΑΟ=ΟΓ, ΒΟ=ΟΔ. Ἂν συγκρίνωμεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσαι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶνε παραλληλόγραμμον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

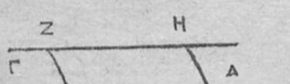
«ἂν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, τὸ τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον».

ε΄) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα

«διὰ νὰ εἶνε ἓν τετράπλευρον παραλληλόγραμμον, ἀρκεῖ αἱ ἀπέναντι πλευραί του νὰ εἶνε ἴσαι, ἢ αἱ ἀπέναντι γωνίαι του νὰ εἶνε ἴσαι, ἢ αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραί του ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἢ νὰ διχοτομοῦνται αἱ διαγώνιοί του».

§ 35. Κατασκευὴ παραλληλογράμμου.—

α΄) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν παραλληλόγραμμον (ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ τοῦ χάρτου) λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖόν της, ἔστω τὸ Ε φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν ὁπωσδήποτε, ἔστω τὴν ΕΖ. Ἀπὸ ἄλλο σημεῖόν της, τὸ Θ π. χ. φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ (§ **23**, α΄) ἀπὸ δὲ τὸ Ζ, τυχὸν σημεῖον τῆς ΕΖ, φέρομεν παράλληλον τῆς ΑΒ. Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ τετράπλευρον ΕΘΖΗ, τὸ ὁποῖον εἶνε παραλληλόγραμμον· ἐπειδὴ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους.



(Σχ. 76)

β΄) Ἂν θέλωμεν τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον νὰ ἔχῃ πλευρὰς ἴσας μὲ δοθείσας εὐθείας, λαμβάνομεν τὴν ΕΘ ἴσην μὲ μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν, καὶ τὴν ΕΖ ἴσην μὲ τὴν ἄλλην.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον ἐκ χαρτονίου, καὶ σημειώσατε τὰς διαγωνίους του.

2) Πῶς κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον (τετράπλευρον); Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον (τετράπλευρον) ἐκ χαρτονίου.

3) Πῶς κατασκευάζεται τετράγωνον; Κατασκευάσατε τοιοῦτον ἐκ χαρτονίου. Κατασκευάσατε ῥόμβον, καὶ τραπέζιον.

4) Φέρατε δύο παραλλήλους καὶ ἴσας εὐθείας· ἑνώσατε τὰ ἄκρα των, ὥστε νὰ γίνῃ ἓν τετράπλευρον. Τοῦτο θὰ εἶνε παραλληλόγραμμον· διατί;

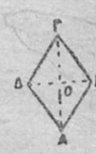
Ὁμὰς δευτέρα. 1) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον, καὶ δείξατε (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου) ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶνε ἴσαι σχ. (77).

(Σχ. 77)

2) Κατασκευάσατε ῥόμβον καὶ δείξατε (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος) ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶνε κάθετοι μεταξύ των σχ. (78).

3) Πῶς ἐκ τῶν ἀνωνέρω συνάγομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶνε ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των;

4) Ἂν φέρετε τὰς διαγωνίους ἑνὸς ῥόμβου σχ. (78), εἰς πόσα τρίγωνα διαιρεῖται; Τί τρίγωνα εἶνε αὐτά; Εἶνε ἴσα μεταξύ των; Διατί;



(Σχ.78)

Ὁμὰς τρίτη. 1). Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον, καὶ φέρατε μίαν διαγώνιόν του. Τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα οὕτω διαιρεῖται εἶνε ἴσα· διατί;

2) Τὰ δύο τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἓν παραλληλόγραμμον ὑπὸ μιᾶς διαγωνίου του εἶνε ἴσα· διατί;

3) Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ἑνὸς ὀρθογωνίου, π. χ. τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (77), τὰς ΑΓ, ΒΔ, αὐταὶ εἶνε ἴσαι μεταξύ των (ἄσκ. 1, ὁμάς δευτέρα) καὶ διχοτομοῦνται. Τί εἶνε καθὲν ἐκ τῶν τριγώ-

νων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ ὡς πρὸς τὰς πλευράς των, ἂν Ο εἶνε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων; Διατί;

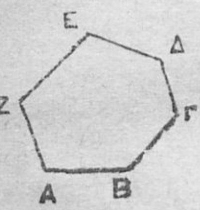
4) Ἡ μία ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἰς τὴν τομήν των εἶνε 0,25ὀρθῆς. Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία τῶν δώδεκα γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν διαγωνίων καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου; Διατί;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον ἐκ χαρτονίου, καὶ χωρίσατε αὐτὸ εἰς δύο, τέσσαρα, ὀκτώ,... ἴσα μέρη.

2) Ἔχομεν ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰν 1 μ· πῶς θὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς ἄλλα τετράγωνα μὲ πλευρὰν 0,1 μ., ἢ 0,01 μ.;

Περὶ πολυγώνων

§ **36. Ὁρισμοί.**— α') *Πολύγωνον* λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, περατούμενον εἰς εὐθείας γραμμάς. Οὕτω τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος †) καὶ τὸ σχ. (79) ΑΒΓΔΕΖ εἶνε πολύγωνον, καὶ περατοῦται εἰς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ ΖΑ.



(Σχ. 79)

β') *Πλευραὶ* πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται, *γωνίαι* του αἱ γωνίαι τῶν πλευρῶν του, *κορυφαὶ* δὲ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν του. Οὕτω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (79) πλευραὶ εἶνε αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ, γωνίαι του αἱ γων. Α, γων. Β, γων. Γ γων. Δ, γων. Ε,καὶ γων. Ζ, κορυφαὶ δὲ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ.

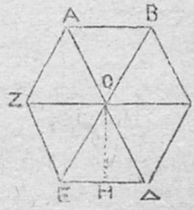
Περίμετρος πολυγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του. Π. χ. τοῦ ΑΒΓΔΕΖ περίμετρος εἶνε τὸ ἄθροισμα ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΑ.

γ') *Κυρτὸν* λέγεται ἓν πολύγωνον, ἂν καθεμία πλευρά του προεκτεινομένη,ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ ἓν μέρος της.

Οὕτω τὸ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (79) εἶνε κυρτόν, διότι οἱανδήποτε τῶν πλευρῶν του καὶ ἂν προεκτείνωμεν, π. χ. τὴν ΑΒ, ὁλόκληρον τὸ σχῆμα μένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος.

(Κατωτέρω κάμνομεν χρῆσιν κυρτῶν πολυγώνων).

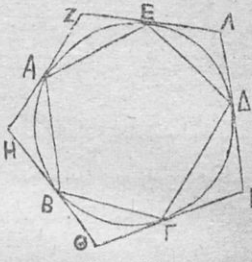
δ') *Διαγώνιοι* ἑνὸς πολυγώνου λέγονται αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο κορυφάς του, μὴ διαδοχικάς. Οὕτω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (80) αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ,... λέγονται διαγώνιοί του.



(Σχ. 80)

ε') *Κανονικὸν* λέγεται ἓν πολύγωνον, ἂν αἱ πλευραί του εἶνε ἴσαι μεταξύ των, καὶ αἱ γωνίαι του ἴσαι μεταξύ των. Π.χ. τὸ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (80) εἶνε κανονικὸν πολύγωνον.

στ') *Ἐγγεγραμμένον* εἰς κύκλον λέγεται ἓν πολύγωνον, ἐὰν αἱ κορυφαὶ εἶνε σημεῖα τῆς περιφερείας κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ χορδαὶ τοῦ κύκλου. *Περιγεγραμμένον* εἰς κύκλον λέγεται ἓν πολύγωνον, ἂν καθεμία πλευρά του εἶνε ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (§ **1Θ,δ'**). Οὕτω τὸ ΑΒΓΔΕ σχ. (81) εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ δὲ ΖΗΘΚΛ περιγεγραμμένον.



(Σχ. 81)

Κέντρον (ἐγγεγραμμένου) κανονικοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον, *ἀπόστημά* του δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ μίαν πλευράν του. Οὕτω ἡ ΟΗ εἶνε τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ σχ. (81).

ζ') Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν (καὶ πλευρῶν) ἑνὸς πολυγώνου εἶνε *πέντε, ἕξ,*... τὸ πολύγωνον καλεῖται *πεντάγωνον, ἑξάγωνον,*.. (ἢ *πεντάπλευρον, ἑξάπλευρον,...*) Κατὰ ταῦτα τὸ τρίγωνον καὶ τετράπλευρον δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς πολύγωνα μὲ τρεῖς ἢ τέσσαρας πλευρὰς ἀντιστοίχως.

Ἀσκήσεις

1) Πότε ἓν τρίγωνον δύναται νὰ λέγεται καὶ κανονικόν; Πότε ἓν τετράπλευρον εἶνε κανονικόν; Τὸ κανονικὸν τετράπλευρον εἶνε παραλληλόγραμμον; Διατί;

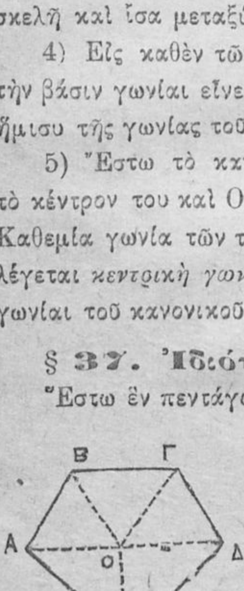
2) Πόσας πλευρὰς (γωνίας) ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἀρκεῖ νὰ γνωρίζομεν, διὰ νὰ ἔχωμεν πάσας τὰς πλευρὰς (γωνίας) του;

3) Ἔστω ὅτι ἔχετε ἓν κανονικὸν πολύγωνον, π. χ. τὸ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (80). Εὕρετε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου σας τὸ μέσον δύο πλευρῶν του †), ἔστω τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Φέρατε καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτῶν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος. Αἱ δύο αὐταὶ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο. Αὐτὸ εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ τούτου πολυγώνου. Ἂν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ ἢ τὴν ΟΒ,... γράψωμεν περιφέρειαν, θὰ περάσῃ αὕτη ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου. Οὕτω τὸ δοθὲν πολύγωνον θὰ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Διὰ τοῦτο λέγομεν (ἀνωτέρω) ὅτι κέντρον κανονικοῦ πολυγώνου εἶνε τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένον. Φέρατε τὰς ἀκτῖνας ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,... ΟΖ. Εἰς πόσα τρίγωνα διαιρεῖται τὸ πολύγωνον; Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶνε ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ των· διατί;

4) Εἰς καθὲν τῶν τριγώνων ΟΑΒ,ΟΒΓ,... σχ. (80) αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ καθεμία τούτων εἶνε ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Διατί;

5) Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ σχ. (80), Ο τὸ κέντρον του καὶ ΟΑ,ΟΒ,... αἱ ἀκτῖνες εἰς τὰς κορυφάς του. Καθεμία γωνία τῶν τριγώνων ΑΟΒ,ΒΟΓ,... ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ο λέγεται *κεντρικὴ γωνία* τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶνε ἴσαι μεταξύ των. Διατί;

§ 37. Ἰδιότητες τῶν γωνιῶν πολυγώνου.— Ἔστω ἓν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ σχ. (82). Ἂν λάβωμεν ἓν σημεῖον τυχὸν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου, ἔστω τὸ Ο, καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ,ΟΕ (ἀπὸ τὸ Ο εἰς τὰς κορυφὰς Α,Β, Γ,Δ,Ε), διαιρεῖται τοῦτο εἰς πέντε τρίγωνα (ὅσαι εἶνε αἱ πλευραί του). Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν πέντε τούτων τριγώνων ἰσοῦται μὲ 10 ὀρθάς.



(Σχ. 82)

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ θὰ εἶνε καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ,ΟΕ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθὰς (§ **18,ε'**). Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος πενταγώνου εἶνε 6 ὀρθαί, ἤτοι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του πλὴν τέσσαρα. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων πολυγώνων εὑρίσκομεν ὅτι

«*Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τόσας ὀρθὰς γωνίας ὅσον εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του πλὴν τέσσαρα*».

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀκταγώνου, δεκαγώνου, δωδεκαγώνου;

2) Τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία γωνία ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου;

3) Ἑνὸς πολυγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶνε 16 ὀρθαί· τί πολύγωνον εἶνε;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Πόση εἶνε ἡ περίμετρος κανονικοῦ πενταγώνου (ἑξαγώνου), τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶνε 3,4 (13,25) δ.;

2) Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ὀκταγώνου (δωδεκαγώνου) ἔχοντος περίμετρον 14,56 (14,46) δ.;

Ὁμὰς τρίτη. 1). Ἂν τὴν περιφέρειαν κύκλου χωρίσωμεν εἰς ἴσα μέρη, καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων (τὰ ὁποῖα ὁρίζουν ἀνὰ δύο διαδοχικὰ σημεῖα), αὗται θὰ εἶνε ἴσαι μεταξύ των, καθὼς καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἀνὰ δύο διαδοχικαὶ χορδαί. (Φέρατε καὶ τὰς ἀκτῖνας, καὶ συγκρίνατε τὰς γωνίας τῶν χορδῶν μὲ τὰς ἀντιστοίχους των ἐπικέντρους γωνίας).

2) Κανονικὸν πεντάγωνον, ἑξάγωνον,... εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Τί μέρος τῆς περιφερείας εἶνε καθὲν τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευράς των;

3) Ἂν περιφέρειαν κύκλου χωρίσωμεν εἰς τρία, τέσσαρα,... ἴσα μέρη, καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν σημείων τῆς περιφερείας, τί σχήματα προκύπτουν; Διατί;

4) Κανονικόν τι πολύγωνον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Δείξατε ὅτι τ' ἀντιστοιχοῦντα τόξα εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου εἶνε ἴσα. (Φέρατε καὶ τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Γεωμετρικαὶ κατασκευαί

§ **38. Γεωμετρικὰ ὄργανα καὶ γεωμετρικαὶ κατασκευαί.**— α΄) Εἰς τὴν § **3**, α΄ ἐγνωρίσαμεν τὸν κανόνα, εἰς τὴν § **9** τὸν διαβήτην, εἰς δὲ τὴν § **15**, δ΄ τὸν γνώμονα, καὶ ἐχρησιμοποιήσαμεν τὰ ὄργανα αὐτὰ διὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων. Οὕτω π. χ. διὰ νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν μεταξὺ δύο σημείων, μετεχειρίσθημεν τὸν κανόνα, διὰ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, τὸν διαβήτην, καὶ διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὸν γνώμονα. Ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος τῆς Γεωμετρίας μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὀργάνων τούτων, καὶ ἰδίως μόνον διὰ τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος καλεῖται *γεωμετρικὴ λύσις*.

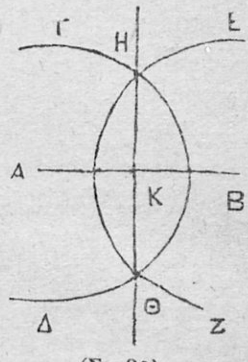
Οὕτω γεωμετρικὴ λύσις λέγεται ἡ κατασκευὴ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει δοθείσας πλευράς, ἡ ὁποία ἔγινε διὰ τῆς χρήσεως τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος (§ **29**, γ΄).

β΄) Τὰ κυρίως ὄργανα τῆς Γεωμετρίας εἶνε *ὁ διαβήτης καὶ ὁ κανών*, καλοῦνται δὲ *πρωτεύοντα γεωμετρικὰ ὄργανα*, ἐνῶ τὰ ἄλλα τοιαῦτα, καθὼς π. χ. ὁ γνώμων, εἶνε δευτερεύοντα γεωμετρικὰ ὄργανα, καὶ χρησιμεύουν συνήθως διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶνε ἐξησφαλισμένη διὰ τῶν πρωτευόντων ὀργάνων. Αἱ διάφοροι κατασκευαί, τὰς ὁποίας κάμνομεν διὰ νὰ λύσωμεν γεωμετρικόν τι πρόβλημα μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων, λέγονται συνήθως *γεωμετρικαὶ κατασκευαί*.

§ **39. Λύσις ἁπλῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων.**— Κατωτέρω λύομεν ἁπλᾶ τινα γεωμετρικὰ προβλήματα μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πρωτευόντων γεωμετρικῶν ὀργάνων.

(Πρόβλημα 1). «*Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας, καὶ νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος εὐθεῖα εἰς τὸ μέσον της*».

Ἔστω ΑΒ σχ. (83) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον της, καὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου της.

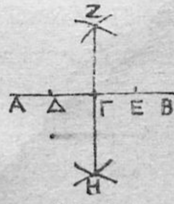


(Σχ. 83)

Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα της Α,Β καὶ ἀκτῖνας ἴσας μεταξύ των καὶ ὁσονδήποτε μεγαλυτέρας τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ γράφομεν περιφερείας κύκλων. Αἱ περιφέρειαι αὐταὶ κόπτονται εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Η. Ἑνώνομεν αὐτὰ διὰ τῆς εὐθείας ΘΗ (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος). Τὸ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον αὐτὴ κόπτει τὴν ΑΒ, εἶνε τὸ μέσον της ΑΒ. Ἡ εὐθεῖα ΘΗ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον της Κ.

(Πρόβλημα 2). «*Νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον*».

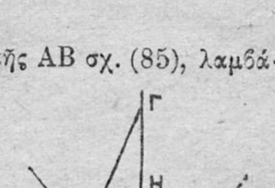
α') Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα σχ. (84) καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπ' αὐτῆς. Ζητεῖται νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Γ.



(Σχ. 84)

Γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ κόπτει τὴν ΑΒ, (προεκτεινομένην ἐν ἀνάγκῃ) ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὸ Γ εἶνε μέσον τῆς ΔΕ. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΕ (κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα), ἔστω τὴν ΖΓ, ἡ ὁποία εἶνε ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ.

β') Ἂν τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ σχ. (85), λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Δ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος της, καὶ γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ κόπτει τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα, ἔστω εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Εὑρίσκομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ἔστω

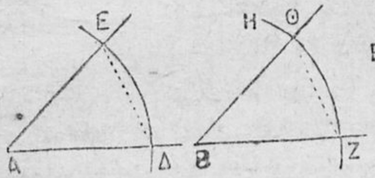


(Σχ. 85)

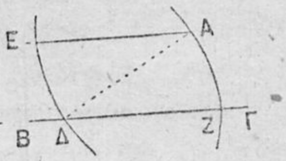
τὴν ΗΓ (κατὰ τὸ πρόβλ. 1), αὐτὴ δὲ θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ, δηλαδὴ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος.

(Πρόβλημα 3). «*Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν*».

Ἔστω Α ἡ δοθεῖσα γωνία σχ. (86). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν ἓν τόξον, ἔστω τὸ ΔΕ. Μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ μὲ κέντρον ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας ΒΖ, ἔστω τὸ Β σχ. (86), γράφομεν τόξον ΖΗ· ἐπ' αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸ



(Σχ. 86)



(Σχ. 87)

μέρος ΖΘ ἴσον μὲ τὸ ΔΕ (§ **10**, γ'). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΘ, καὶ ἡ γωνία ΖΒΘ εἶνε ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α (§ **19**, β').

(Πρόβλημα 4). «*Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ν' ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν*».

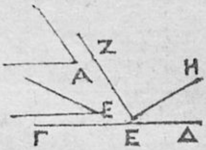
Ἔστω ΒΓ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ ἔξω αὐτῆς σημεῖον Α σχ. (87). Ζητεῖται νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν διὰ τοῦ σημείου Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

Μὲ κέντρον τὸ Α γράφομεν τόξον κύκλου ΔΕ, τὸ ὁποῖον νὰ κόπτῃ τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Δ. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν τόξον ΑΖ, τὸ ὁποῖον κόπτει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ τὸ μέρος ΔΕ ἴσον μὲ τὸ ΑΖ (§ **10**, γ'), καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶνε παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Διότι ἂν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΔΑΕ καὶ ΖΔΑ εἶνε ἴσαι, ὡς ἐπίκεντροι γωνίαι ἴσων κύκλων, βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα (§ **19**, β').

(Πρόβλημα 5). «*Δίδονται αἱ δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη*».

Ἔστωσαν Α καὶ Ε αἱ δοθεῖσαι γωνίαι σχ. (88), τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (ἐπειδὴ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς). Ζητεῖται διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου.

Λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΓΔ, καὶ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ΓΕΖ καὶ ΔΕΗ ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὰς Α καὶ Ε (κατὰ τὸ πρόβλ. 3). Ἡ γωνία ΖΕΗ εἶνε ἡ ζητουμένη τοῦ τριγώνου. Διότι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΓΕΖ, ΖΕΗ, ΗΕΔ, εἶνε ἴσον μὲ δύο

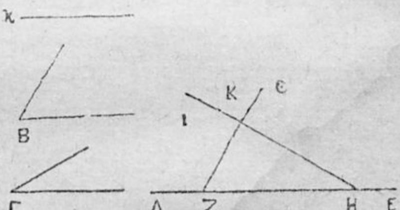


(Σχ. 88)

ὀρθὰς (§ 18, δ')· ἀλλ' ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη ἐκ τούτων εἶνε ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Ε τοῦ τριγώνου· ἐπομένως ἡ ἄλλη, ἡ ΖΕΗ, εἶνε ἴση μὲ τὴν ζητουμένην τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου.

(Πρόβλημα 6). «*Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μίαν πλευρὰν καὶ δύο γωνίας*».

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ πλευρὰ α σχ. (89) ἑνὸς τριγώνου, καὶ αἱ παρακείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαι του Β καὶ Γ (τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν). Ζητεῖται μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.



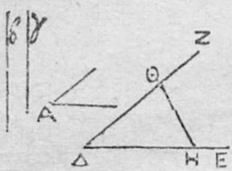
(Σχ. 89)

Λαμβάνομεν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὴν ΖΗ ἴσην μὲ τὴν α. Εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς Ζ καὶ Η κατασκευάζομεν ἀντιστοίχως γωνίας ἴσας μὲ τὴν Β καὶ Γ (κατὰ τὸ πρόβλ. 3), τὰς ΗΖΘ καὶ ΖΗΙ (ἐχούσας πλευρὰν τὴν ΖΗ). Τὸ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ ΖΘ καὶ ΗΙ, μὲ τὰ Ζ, Η ὁρίζουν τὸ τρίγωνον ΚΖΗ. Τὸ τρίγωνον ΚΖΗ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ζητούμενον. Διότι ἔχει τὴν πλευρὰν ΖΗ ἴσην μὲ τὴν α, καὶ τὰς γωνίας Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς δοθείσας· ἄρα εἶνε ἴσον μὲ τὸ ζητούμενον (§ 28, γ').

Ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι δὲν εἶνε παρακείμεναι τῆς δοθείσης πλευρᾶς, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (κατὰ τὸ πρόβλ. 5), καὶ οὕτω ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν.

(Πρόβλ. 7). *«Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία»*.

Ἔστωσαν σχ. (90) β, γ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι καὶ Α δοθεῖσα γωνία. Ζητεῖται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον, ἔχον πλευρὰς τὰς δοθείσας εὐθείας β καὶ γ, καὶ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γων. Α.



(Σχ. 90)

Λαμβάνομεν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὴν ΔΗ ἴσην μὲ τὴν γ. Εἰς τὸ ἄκρον Δ τῆς ΔΗ κατασκευάζομεν γωνίαν, ἔχουσαν πλευρὰν τὴν ΔΗ ἴσην μὲ τὴν Α, (κατὰ τὸ πρόβλ. 3) τὴν ΗΔΖ. Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΘ ἴσην μὲ τὴν β, καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΘΗ. Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶνε τὸ ΔΘΗ. Διότι ἔχει τὴν πλευρὰν ΔΗ καὶ τὴν ΔΘ ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς γ καὶ β τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ τὴν γωνίαν ΗΔΘ ἴσην μὲ τὴν Α τοῦ ζητουμένου· ἄρα εἶνε ἴσον μὲ αὐτὸ (§ **28**, δ').

(Πρόβλημα 8). *«Νὰ διχοτομήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν»*.

Ἔστω ΒΑΓ σχ. (91) ἡ δοθεῖσα γωνία. Ζητεῖται νὰ τὴν χωρίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη.

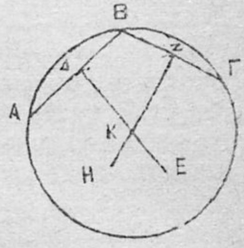
Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, ἔστω τὴν ΑΓ, γράφομεν ἓν τόξον, τέμνον τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Γ καὶ Β, τὸ ΓΒ. Φέρομεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ (κατὰ τὸ πρόβλ. 1), ὁ ὁποία θὰ κόψῃ τὸ τόξον, ἔστω εἰς τὸ Ε. Τέλος φέρομεν τὴν ΑΕ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ χωρίζεται εἰς τὰς δύο ἴσας γωνίας, τὰς ΒΑΕ καὶ ΕΑΓ. Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι ἡ ΑΕ χωρίζει καὶ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ΒΕ καὶ ΕΓ, ἐπειδὴ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίκεντροι γωνίαι των εἶνε ἴσαι (§ **19**, β')

(Σχ 91)

(Πρόβλημα 9). *«Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων»*.

Τὰ δοθέντα σημεῖα δὲν πρέπει νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι περιφέρεια καὶ εὐθεῖα τὸ πολὺ δύο σημεῖα κοινὰ δύνανται νὰ ἔχουν (§ **10**, δ').

Ἔστωσαν τὰ δοθέντα σημεῖα τὰ Α,Β,Γ σχ. (92), μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ζητεῖται νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ.



(Σχ. 92)

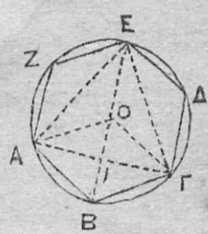
Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ,καὶ καθέτους εἰς τὰ μέσα τούτων,τὰ Δ καὶ Ζ(κατὰ τὸ πρόβλ. 1), τὰς ΕΔ καὶ ΗΖ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἂν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΚΑ (ἢ ΚΒ ἢ ΚΓ) γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, θὰ περάσῃ, καθὼς βλέπομεν, καὶ ἀπὸ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ.

(Πρόβλημα 9'). «*Δοθέντος τριγώνου νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ὥστε τὸ τρίγωνον νὰ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτόν*».

Πρὸς λύσιν τούτου ἀρκεῖ νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν, ἔστω τῶν Α,Β,Γ, τοῦ τριγώνου. Ἑπομένως ἡ λύσις γίνεται καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

(Πρόβλημα 10). «*Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ἑξάγωνον*».

Κατασκευάζομεν ἕνα κύκλον 0 σχ. (93) καὶ γράφομεν τόξον μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας του, ἔστω τὸ Α, καὶ ἀκτῖνα τὴν τοῦ Ο. Τοῦτο κόπτει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Β καὶ Ζ. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν τόξον, κόπτον τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ, κ.ο.κ. προχωροῦμεν μέχρις ὅτου ἐπανεύρωμεν τὸ Ζ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ, ΖΑ καὶ τὸ σχῆμα,ΑΒΓΔΕΖ εἶνε κανονικὸν ἑξάγωνον. Διότι τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ,... εἶνε ἴσα μεταξύ των, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (§ **28**, β'), ἑπομένως καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ἑξαγώνου εἶνε ἴσαι. Οὕτω διηρέθη καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἰς ἓξ ἴσα μέρη (§ **19**, β').



(Σχ. 93)

(Πρόβλημα 11). «*Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον*».

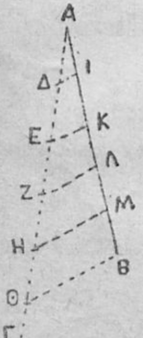
Ἔστω Ο σχ. (93) ὁ δοθεὶς κύκλος. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσόπλευρον, ὥστε νὰ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα μέρη διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, (κατὰ τὸ πρόβλ. 10) καὶ ἑνώνομεν τὰς κορυφὰς Α, Γ καὶ Ε δι' εὐθειῶν. Οὕτω τὸ ΑΓΕ εἶνε τὸ ζητούμενον τρίγωνον, ἐπειδὴ αἱ πλευραί του εἶνε ἴσαι ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων (τῶν δύο ἕκτων τῆς περιφερείας).

(Πρόβλημα 12). «*Δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ διαιρέσωμεν εἰς τρία, τέσσαρα, ... ἴσα μέρη*».

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν π. χ. τὴν ΑΒ σχ. (94) εἰς πέντε ἴσα μέρη.

Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου της, ἔστω τοῦ Α, φέρομεν ἄλλην εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΑΓ· ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου) πέντε ἴσα μέρη διαδοχικά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ Α· τὰ ΑΔ,ΔΕ,ΕΖ,ΖΗ,ΗΘ. Τὸ ἄκρον Θ τοῦ τελευταίου καὶ τὸ Β ἑνώνομεν μὲ τὴν εὐθεῖαν ΘΒ, ἀπὸ δὲ τὰ ἄλλα ἄκρα Δ,Ε,Ζ,Η τῶν ἴσων μερῶν φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΘΒ (κατὰ τὸ πρόβλ. 4). Οὕτω ἡ ΑΒ κόπτεται εἰς 5 ἴσα μέρη, τὰ ΑΙ,ΙΚ,ΚΛ,ΛΜ,ΜΒ καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν περὶ τούτου συγκρίνοντες τὰ μέρη ταῦτα μεταξύ των (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου).



(Σχ. 94)

(Πρόβλημα 13). «*Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον*».

Φέρομεν τυχοῦσαν διάμετρον τοῦ κύκλου σχ. (95), ἔστω τὴν ΑΒ, καὶ ἄλλην κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἔστω τὴν ΓΔ. Ἑνώνομεν μὲ εὐθείας ἀνὰ δύο διαδοχικὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων, καὶ ἔχομεν τὸ ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Διότι αἱ χορδαὶ ΑΓ,ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ εἶνε ἴσαι μεταξύ των (§ **10**,γ'), καὶ αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἀνὰ δύο διαδοχικαὶ εἶνε ὀρθαὶ (§ **20**, β'). Οὕτω διηρέθη καὶ ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

(Σχ. 95)

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν γεωμετρικῶς τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν καὶ διχοτομήσατέ την. Διαιρέσατέ την εἰς τέσσαρα, ὀκτὼ ἴσα μέρη.

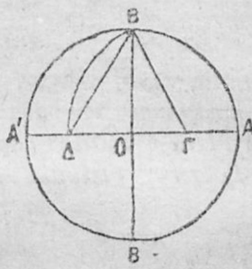
2) Διαιρέσατε εὐθεῖαν εἰς δύο, τέσσαρα, ὀκτὼ . . . ἴσα μέρη.

3) Διαιρέσατε ἓν τόξον κύκλου εἰς δύο, τέσσαρα, ὀκτὼ..... ἴσα μέρη. (Φέρατε τὴν χορδήν του, διχοτομήσατέ την, καὶ ἡ διχοτομοῦσα αὐτὴν διχοτομεῖ καὶ τὸ τόξον).

4) Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον εἰς κύκλον. (Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα μέρη, διχοτομοῦμεν καθὲν τῶν μερῶν τούτων, καὶ φέρομεν τὰς νέας χορδάς).

5) Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον εἰς κύκλον. (Διαιρέσατε προηγουμένως τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη).

6) Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον, καὶ δεκάγωνον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους ΑΟΑ′, ΒΟΒ′. Λαμβάνομεν τὸ μέσον Γ τῆς ΟΑ. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία κόπτει τὴν Α Α′ εἰς τὸ Δ. Ἡ ΒΔ εἶνε ἡ πλευρὰ κανονικοῦ πενταγώνου, ἡ δὲ ΟΔ δεκαγώνου σχ. (96).



(Σχ. 96)

7) Δίδεται ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου (ἢ ἓν τόξον της) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον του (κατὰ τὸ πρόβλ. 9).

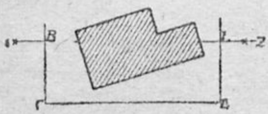
Ὁμὰς δευτέρα. 1) Αἱ πλάκες τὰς ὁποίας μεταχειρίζονται διὰ νὰ στρώνουν αἰθούσας, αὐλάς, διαδρόμους κ.λ.π. ἔχουν συνήθως σχῆμα κανονικῶν πολυγώνων. Ἡ γωνία τῶν πολυγώνων αὐτῶν εἶνε τόση, ὥστε παρατιθέμενα τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο ἔχουν τὰς γωνίας των ἐφεξῆς καὶ δὲν ἀφίνουν κενὸν χῶρον μεταξύ των. Οὕτω π.χ. δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τρίγωνα ἰσόπλευρα διὰ πλακόστρωσιν. Διότι καθεμία γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{3}$ ὀρθ., καὶ ἓξ τρίγωνα τοποθετούμενα πέριξ κοινῆς κορυφῆς δὲν ἀφίνουν κενὸν χῶρον, διότι $\frac{2}{3}.\ 6 = 4$ ὀρθ. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ νὰ μεταχειρισθῶμεν τετραγωνικὰς πλάκας (διατί;).

2) Δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν πενταγωνικὰς κανονικὰς πλάκας διὰ πλακόστρωσιν; Διατί;

3) Δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν ὀκτάγωνα (κανονικὰ) καὶ τετράγωνα διὰ πλακώστρωσιν; πόσα ἀπὸ καθὲν εἶδος; (2· 1)

Ὁμὰς τρίτη (εἰς τὸ ὕπαιθρον). 1) Κῆπος ὀρθογωνίου σχήματος εἶνε κλεισμένος γύρω ὑπὸ τῶν τοίχων. Θέλομεν νὰ χαράξωμεν δρόμον (εὐθεῖαν) ἐντὸς τοῦ κήπου, ὥστε νὰ εἶνε κάθετος πρὸς τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του. Ἂν γνωρίζωμεν τὸ μέρος τοῦ τοίχου ἀπὸ τὸ ὁποῖον θὰ ἐξέλθῃ ὁ δρόμος, πῶς θὰ εὕρωμεν τὴν ἄλλην ἔξοδόν του;

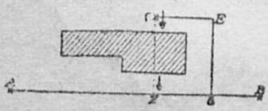
2) *Εὐθύγραμμος δρόμος (εὐθεῖα γραμμὴ) συναντᾷ οἰκίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνέχειά του πέραν τῆς οἰκίας.* Φέρομεν κάθετον εἰς ἓν σημεῖον Β τοῦ δοθέντος δρόμου ΑΒ σχ.(97)τὴν ΒΓ, καὶ τὴν



(Σχ. 97)

ΓΔ κάθετον εἰς τὴν ΒΓ (§ σελ. 25, ἄσκ. 8)· Ἐπ᾿ αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Δ πέραν τῆς οἰκίας, καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τῆς ΓΔ, τὴν ΔΕ. Λαμβάνομεν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΒΓ, καὶ ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ τὴν ΔΕ εἰς τὸ Ε εἶνε ἡ ζητουμένη προέκτασις τοῦ δρόμου ΑΒ †).

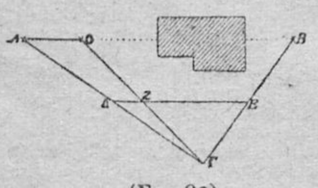
3) *Μεταξὺ εὐθείας (δρόμου) ΑΒ καὶ σημείου Γ ὑπάρχει μία οἰκία σχ. (98). Θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὸν (δρόμον).*



Σχ. (98)

Φέρομεν εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ (μακρὰν τῆς οἰκίας) ἔστω τὸ Δ, κάθετον, τὴν ΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ Γ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ, τὴν ΓΕ. Λμβάνομεν τὴν ΔΖ ἴσην μὲ τὴν ΓΕ. Τὸ Ζ εἶνε τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ζητουμένη κάθετος θὰ κόψῃ τὴν ΑΒ †).

4) *Οἰκία κεῖται μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς ΑΒ, καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα θὰ διαπεράσῃ αὕτη τὴν οἰκίαν (Σχ. 99).*



(Σχ. 99)

Λαμβανόμενον ἓν σημεῖον Γ, ὥστε νὰ φαίνεται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΒ καὶ εὑρίσκομεν τὰ μέσα τούτων, ἔστω τὸ Δ καὶ Ε. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, καὶ μίαν ἄλλην ΓΟ τέμνουσαν εἰς τὸ Ζ τὴν ΔΕ. Λαμβάνομεν ΖΟ ἴσην μὲ ΓΖ (κατὰ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΖ) καὶ ἡ ΑΟ ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν ΑΒ σχ. (99).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Περὶ μετρήσεως τῶν γραμμῶν καὶ γωνιῶν

§ **40. Μέτρησις γεωμετρικῶν ποσῶν.**— α') Καλοῦμεν *ποσὸν* πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν, π.χ. τὸ μῆκος, τὸ βάρος, τὸν ὄγκον κ.λ.π.

β') *Γεωμετρικὰ ποσὰ* λέγονται τὰ ποσά, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Π χ. ἡ γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια, ἡ γωνία λέγονται γεωμετρικὰ ποσά.

γ') *Μέτρησις* ἑνὸς γεωμετρικοῦ ποσοῦ λέγεται ἡ σύγκρισίς του πρὸς ἄλλο ὁμοειδές του, τὸ ὁποῖον εἶνε ὡρισμένον.

Τὸ ὡρισμένον ποσὸν μὲ τὸ ὁποῖον μετροῦμεν ἄλλο ὁμοειδές του λέγεται *μονὰς μετρήσεως*, ὁ δὲ ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως παριστάνει τὸ μετρηθὲν ποσόν, καὶ ἐκφράζει πόσας φορὰς ἡ μονὰς περιέχεται εἰς αὐτό. Οὕτω,ἂν ἐκ τῆς μετρήσεως μιᾶς γραμμῆς διὰ τοῦ μέτρου εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν $12\frac{1}{2}$,θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ γραμμὴ περιέχει $12 + \frac{1}{2}$ φορὰς τὸ μέτρον, καὶ διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ μῆκός της εἶνε $12\frac{1}{2}$ μέτρα. Ἐν γένει, εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως, δίδομεν τὴν ἐπωνυμίαν τῆς μονάδος μετρήσεως, διὰ νὰ γνωρίζωμεν ὑπὸ τίνος μονάδος ἔγινεν ἡ μέτρησις.

§ **41. Μέτρησις γραμμῶν.**— α') *Μῆκος γραμμῆς*. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως γραμμῆς, (ἤτοι ὁ ἀριθμὸς, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῆς) λέγεται *μῆκος τῆς γραμμῆς*.

β') *Μονάδες μήκους*. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γραμμῶν ἔχομεν ὡς μονάδα τὸ *μέτρον* ἢ *βασιλικὸν πῆχυν* †), τὸ ὁποῖον εἶνε τὸ ἓν τῶν 10000000 ἴσων μερῶν τοῦ τετάρτου μέρους τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς· τὸ *δεκάμετρον* (10 μ.), τὸ *ἑκατόμετρον* (100 μ.), τὸ *χιλιόμετρον* (1000 μ.), τὸ *μυριάμετρον* (10000 μ.).

Διὰ τὴν μέτρησιν μικρῶν γραμμῶν λαμβάνομεν ὡς μονάδας τὴν *παλάμην* ἢ *ὑποδεκάμετρον* (0,1 μ.), τὸν *δάκτυλον* ἢ *ἑκατοστόμετρον* κοινῶς *πόντον* (0,01 μ.), τὴν *γραμμὴν* ἢ *χιλιοστόμετρον* (0,001 μ.).

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. 1) Μετρήσατε μὲ τὸ μέτρον τὰς πλευράς, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται γύρω τὸ πάτωμα τοῦ δωματίου, καὶ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του.

2) Μετρήσατε μὲ τὸ μέτρον τὰς πλευρὰς (τῆς ἐπιφανείας) τοῦ πίνακος, καὶ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του.

3) Μετρήσατε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὰς πλευρὰς ἑνὸς φύλλου τοῦ βιβλίου σας, καὶ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του.

4) Μετρήσατε, καὶ εὕρετε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου. (Ἂν ἔχῃ σχῆμα ὀρθογωνίου, πόσας πλευρὰς ἀρκεῖ νὰ μετρήσετε, διὰ νὰ εὕρετε τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου της) ;

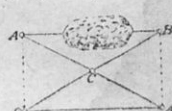
Ὁμὰς δευτέρα (εἰς τὸ ὕπαιθρον) — 1) *Μέτρησις εὐθείας ἐπὶ ἐδάφους.* Διά νὰ μετρήσωμεν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μεταχειριζόμεθα συνήθως τὴν *μετροταινίαν.* Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ λινὴν ταινίαν μήκους 10—25 μ. καὶ πλάτους 0,015 μ. εἶνε δὲ σημειωμέναι ἐπ' αὐτῆς διαιρέσεις ἀνὰ μέτρον, παλάμην καὶ δάκτυλον. Ἡ ταινία αὕτη περιτυλισσομένη περὶ ἄξονα διὰ στροφάλου Γ, κλείεται ἐντὸς δερματίνου περιβλήματος σχ. (100). Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους (3Β, γ'). Ὁ εἷς ἐκ δύο ἀνθρώπων (μετρητὴς) κρατεῖ εἰς τὸ Α ἓν ἄκρον τῆς ταινίας, ἐνῶ ὁ ἄλλος (βοηθὸς) κρατῶν τὴν μετροταινίαν βαδίζει πρὸς τὸ Β κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ (ἐνῶ ἡ ταινία ἐκτυλίσσεται), μέχρις ὅτου ἡ ταινία τεντωθῇ †). Εἰς τὸ σημεῖον Γ, π.χ. εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ταινίας ἐμπήγει ὁ βοηθὸς πάσσαλον (ἀπολήγοντα εἰς ὀξύ). Ἀκολούθως καὶ οἱ δύο ἄνθρωποι προχωροῦν ἐμπρός, κρατοῦντες ἀντιστοίχως τὰ ἄκρα τῆς ταινίας, μέχρις ὅτου ὁ μετρητὴς φθάσῃ εἰς τὸ Γ, ὁ δὲ βοηθὸς εἰς τὸ Δ π.χ., ὥστε ἡ ταινία νὰ εἶνε πάλιν τεταμένη, ὅπου ἐμπήγει ὁ βοηθὸς νέον πάσσαλον. Προχωροῦν ὁμοίως ἐμπρός, ἀφοῦ ὁ μετρητὴς λάβῃ μαζῆ του τὸν πάσσαλον εἰς τὸ Γ, καὶ φθάσῃ εἰς τὸ Δ, ὁ δὲ βοηθὸς εἰς τὸ Ε· καὶ οὕτω προχωροῦν

Σχ. (100)

μέχρις ὅτου ὁ βοηθὸς φθάσῃ εἰς τὸ Β. Ὁ μετρητὴς ἀριθμεῖ τοὺς πασσάλους, τοὺς ὁποίους ἀπέσπασε καὶ ἔφερε μαζῆ του, καὶ ἐπειδὴ εἰς καθένα ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ τὸ μῆκος τῆς μετροταινίας, πολλαπλασιάζει τὸ μῆκός της μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πασσάλων, εἰς τὸ ἐξαγόμενον δὲ προσθέτει καὶ τὸ μῆκος ἀπὸ τοῦ τελευταίου πασσάλου μέχρι τοῦ Β, τὸ ὁποῖον εὑρίσκει ὁ βοηθὸς ἐπὶ τῆς μετροταινίας. Ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον οὕτω εὑρίσκει, παριστάνει τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς μέτρα.

2) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α, Β προσιτῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει οἰκία τις π. χ.*

Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Ο, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνονται τὰ Α καὶ Β. Εὑρίσκομεν τὰς εὐθείας ΑΟ, ΒΟ καὶ εἰς τὰς προεκτάσεις των λαμβάνομεν ΟΑ′=ΟΑ, ΟΒ′=ΟΒ. Εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας Α′Β′, ἥτις ἰσοῦται μὲ τὴν ΑΒ. Διατί; σχ. (101).



Σχ. (101)

3) Τὸ μῆκος ἑνὸς βήματος εἶνε 0,65 μ.· πόσα τοιαῦτα βήματα θὰ διανύσωμεν 3900 μ.;

4) Δρόμος τις ἔχει μῆκος 2576 μ.· ἐὰν κατὰ μῆκός του φυτευθοῦν δένδρα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἀπέχει τοῦ προηγουμένου του κατὰ 3, 5 μ,. πόσα δένδρα θὰ φυτευθοῦν κατὰ σειράν;

5) Εὕρετε πόσα βήματα θὰ κάμετε διὰ νὰ διατρέξετε 10 μ., ἀκολούθως μετρήσατε διὰ βημάτων τὰς πλευρὰς τοῦ δωματίου, καὶ εὕρετε πόσα μέτρα θὰ εἶνε καθεμία (περίπου, ὅταν προκύψῃ καὶ μέρος βήματος ὄχι τελείως ὡρισμένον).

6) Μετρήσατε μὲ τὴν μετροταινίαν τὴν περίμετρον τῆς αὐλῆς τοῦ σχολείου, ἀκολούθως διὰ βημάτων, καὶ εὕρετε τὴν διαφορὰν τῶν δύο μετρήσεων εἰς μέτρα.

§ **42. Μῆκος περιφερείας κύκλου.** — α′) Ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλον (ἐκ χαρτονίου) μὲ διάμετρον ἴσην πρὸς 1 μέτρον, ἢ 1 δάκτυλον, τυλίξωμεν νῆμα εἰς τὴν περιφέρειάν του καὶ μετρήσωμεν αὐτό, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 3,14159 μέτρα, ἢ δακτύλους (κατὰ προσέγγισιν). Ἐὰν μετρήσωμεν περιφέρειαν μὲ διπλασίαν, τριπλασίαν... (τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον,...) διάμετρον τῆς προηγουμένης, εὑρίσκομεν μῆκός της διπλάσιον, τριπλάσιον... (τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον...) τοῦ προηγουμένου 3,14159... (κατὰ προσέγγισιν).

Ὅθεν «*τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου, εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν διάμετρόν του, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159...*»

β') Παριστάνομεν συνήθως τὸν ἀριθμὸν 3,14159... (ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ) διὰ τοῦ γράμματος π, καὶ τὸν ἀντικαθιστῶμεν πρὸς εὐκολίαν ὑπὸ τοῦ 3,141. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ a τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου, ἐπειδὴ ἡ διάμετρός του θὰ εἶνε $2.\ a$, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $2.\ a.\ \pi.$ ἢ ὑπὸ τοῦ $2.\ \pi.\ a.$

Καθὼς βλέπομεν, ὁ ἀριθμὸς π προκύπτει ἀπὸ τὸ 2. π. α, ἐὰν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2α, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι·

«*ὁ λόγος περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν π.*»

γ') Ἐπειδὴ ἡ διάμετρος κύκλου εἶνε π φορὰς μικροτέρα τῆς περιφερείας του, ἕπεται ὅτι

«*ὅταν δίδεται τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου, εὑρίσκομεν τὴν διάμετρόν του, ἂν διαιρέσωμεν τὸ δοθὲν μῆκος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ π*».

Οὕτω ἂν τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου εἶνε 157 μ., ἡ διάμετρός του θὰ ἔχῃ μῆκος 157 : 3,141=50 μ. καὶ ἡ ἀκτίς του 25 μ. (κατὰ προσέγγισιν).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος περιφερείας κύκλου, ἔχοντος ἀκτῖνα 3,8· 2,14· 0,03· 13,7· $\frac{5}{8}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{3}{7}$ μέτρα.

2) Τροχός τις ἔχει ἀκτῖνα 0,34 μ.· πόση εἶνε ἡ περιφέρειά του;

3) Πόση εἶνε ἡ διάμετρος κυκλικοῦ δίσκου, τοῦ ὁποίου ὁ γῦρος εἶνε 1,38 μ.;

4) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς ποτηρίου εἶνε 0,252 μ.· πόση εἶνε ἡ ἀκτίς της;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Ἐκ δύο τροχῶν ὁ α′ ἔχει ἀκτῖνα 0,32 μ., ὁ β′ 0,38 μ.· κατὰ πόσα μέτρα εἶνε μεγαλυτέρα ἡ περιφέρεια τοῦ β′ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ α′;

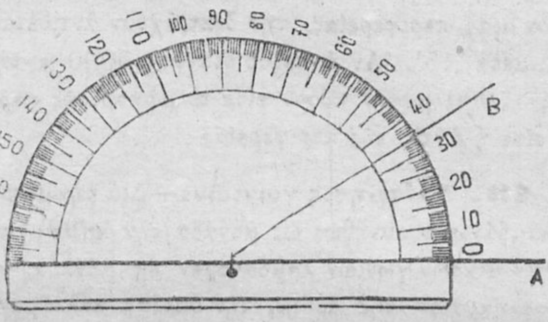
2) Ἱπποδρομίου κυκλικοῦ ἡ ἀκτὶς εἶνε 17,5 μ. Πόσα μέτρα διέτρεξεν ἵππος, ὁ ὁποῖος διέτρεξεν 25 φορὰς τὸν γῦρον τοῦ ἱπποδρομίου;

3) Πεζὸς καὶ ἱππεύς, ἀναχωρήσαντες συγχρόνως ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον μιᾶς περιφερείας, τὴν διατρέχουν ἀντιθέτως, καὶ συναντῶνται μετὰ 15′. Ἂν ὁ πεζὸς διανύσῃ 5000 μ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ ἱππεὺς 15000 μ. α′) πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας; β′) πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας;

§ **43. Μέτρησις γωνιῶν.**—Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν λαμβάνομεν συνήθως ὡς μονάδα τὴν *ὀρθὴν γωνίαν*. Διὰ τὴν μέτρησιν μικρῶν γωνιῶν λαμβάνομεν ὡς μονάδα γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἐννενηκοστὸν τῆς ὀρθῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν γωνίαν μιᾶς *μοίρας*. Ὥστε ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 90 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*. Καθεμία μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *πρῶτα λεπτά*, καὶ καθὲν τούτων εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *δεύτερα λεπτά*. Θὰ σημειώνωμεν τὰς μοίρας δι' ἑνὸς μικροῦ ο, γραφομένου δεξιὰ καὶ ὑπεράνω τοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. 3^o, 15^o, κ. ο. κ. Τὰ πρῶτα λεπτά, σημειώνομεν διὰ μιᾶς ὀξείας (′), τὰ δὲ δεύτερα διὰ δύο ὀξειῶν (″). Οὕτω ὁ ἀριθμὸς $15^o\ 3'\ 20''$ φανερώνει 15 μοίρας, 3 πρῶτα λεπτὰ καὶ 20 δεύτερα.

§ **44. Περὶ τοῦ μοιρογνωμονίου.** — α′) Πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν μεταχειριζόμεθα ὄργανον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *μοιρογνωμόνιον* ἢ *ἀναγωγεύς*. Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶνε συνήθως ἡμικύκλιον ἐκ μετάλλου σχ. (102), τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶνε διῃρημένον εἰς 180 ἴσα μέρη. Μία μικρὰ ἐντομὴ εἰς τὸ μέσον Ο τῆς διαμέτρου του δεικνύει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ἡ διαίρεσις 90 ὁρίζει τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν περατουμένην εἰς τὰ σημεῖα Ο καὶ

180. Ἐὰν καθεμία τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζει ἡ συνδέουσα ἀκτὶς τὸ κέντρον μὲ τὸ σημεῖον 90, εἶνε διῃρημένη εἰς 90 ἴσα μέρη, καθὲν τούτων εἶνε γωνία μιᾶς μοίρας, καὶ θὰ σχηματίζεται ὑπὸ δύο διαδοχικῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦνται εἰς σημεῖα τῆς διαιρέσεως τοῦ τόξου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 0°, 1°,... 180° φανερώνουν τὰς μοίρας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς γωνίας, τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ



Σχ. (102)

τῆς ΟΑ καὶ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Ο εἰς τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν 1°, 2°...

β') *Πῶς χρησιμοποιοῦμεν τὸν ἀναγωγέα.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνία ΑΟΒ σχ. (102) μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ μοιρογνωμονίου. Θέτομεν τὸ ὄργανον ἐπὶ τῆς γωνίας, ὥστε τὸ κέντρον του Ο νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας, ἡ ἀκτὶς εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας εἶνε ὁ ἀριθμὸς 0° νὰ ἐφαρμόσῃ μετὰ τῆς πλευρᾶς ΟΑ, καὶ παρατηροῦμεν εἰς ποίαν ὑποδιαίρεσιν τοῦ ὀργάνου ἀντιστοιχεῖ ἡ ἄλλη πλευρὰ ΟΒ τῆς γωνίας †). Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγομεν ὅτι παριστάνει τὴν γωνίαν ΑΟΒ. Οὕτω ἂν ἀντιστοιχῇ ὁ ἀριθμὸς 35, λέγομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶνε 35° καὶ ἐνοοῦμεν δι' αὐτοῦ, ὅτι εἶνε $\frac{35}{90}$ ἢ $\frac{7}{18}$ τῆς ὀρθῆς. Ἂν εὕρωμεν διὰ τῆς μετρήσεως αὐτῆς, ὅτι μία γωνία εἶνε π. χ. 135°, θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι εἶνε $\frac{135}{90}$ τῆς ὀρθῆς, δηλαδὴ 1,5 ὀρθῆς κ. ο. κ.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσων μοιρῶν εἶνε γωνία $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, 0,1· 0,25· 3 $\frac{1}{5}$· 8,35 ὀρθῆς ;

2) Μὲ ποῖον κλασματικὸν μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε γωνία $5^o\cdot 6^o\cdot 15^o$;

3) Ποῖον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε γωνία $3^o\ 30'$· $2^o\ 15'\ 20''$

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Γράψατε ἓν τρίγωνον καὶ μετρήσατε καθεμίαν τῶν γωνιῶν του διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου. Πόσων μοιρῶν πρέπει νὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα καὶ τῶν τριῶν ; Διατί ;

2) Πῶς θὰ ἐξελέγξωμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου, ἂν μία γωνία εἶνε ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα ;

3) Γράψατε τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας, ὥστε νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Μετρήσατε τὰς γωνίας ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου· μὲ πόσας μοίρας ἰσοῦται τὸ ἄθροισμά των ; Διατί ;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Μία γωνία εἶνε $123^o\ 45'$. Ἂν προεκτείνωμεν μίαν τῶν πλευρῶν της ἀπὸ τὴν κορυφήν της, πόση θὰ εἶνε ἡ σχηματιζομένη νέα γωνία ;

2) Ἂν προεκτείνωμεν τὰς δύο πλευρὰς (ἀπὸ τὴν κορυφὴν) γωνίας $28^o\ 32'\ 20''$, πόσον θὰ εἶνε καθεμία ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματισθοῦν ; Διατί ;

3) Πόσων μοιρῶν ἐπίκεντρος (ἐγγεγραμμένη) γωνία ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον $\frac{3}{5}$ μιᾶς περιφερείας ;

4) Τριγώνου τινὸς ἡ μία γωνία εἶνε $\frac{3}{4}$ ὀρθ., ἡ ἄλλη $\frac{13}{20}$ ὀρθ.· πόσων μοιρῶν εἶνε ἡ τρίτη ;

5) Τριγώνου ἡ μία γωνία εἶνε $63^o\ 48'\ 25''$, ἡ ἄλλη $36^o\ 20'$. Πόσων μοιρῶν, καὶ τί μέρος τῆς ὀρθῆς, εἶνε ἡ τρίτη γωνία του ;

6) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε 50^o. Πό-

σων μοιρῶν καὶ τί μέρος τῆς ὀρθῆς εἶνε καθεμία τῶν δύο ἄλλων;

Ὁμὰς τετάρτη. 1) Πόσων μοιρῶν εἶνε καθεμία γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου; Διατί;

2) Πόσων μοιρῶν εἶνε αἱ γωνίαι ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου; Διατί;

3) Πόσων μοιρῶν εἶνε καθεμία γωνία κανονικοῦ ἑξαγώνου; ὀκταγώνου; δεκαγώνου; πενταγώνου; Διατί;

§ **45. Μῆκος κυκλικοῦ τόξου.**—Ἔστω ὅτι ἔχομεν κύκλον τινὰ Ο καὶ τόξον του ΑΒ. Ἂν ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ εἶνε 36°, λέγομεν, συνήθως, ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶνε 36° καὶ ἐννοοῦμεν δι' αὐτοῦ, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶνε 36°. Ἐν γένει, ὅταν λέγωμεν, ὅτι τόξον τι περιφερείας εἶνε τόσων μοιρῶν, θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ὁρίζουν τὸ τόξον τοῦτο, εἶνε τόσων μοιρῶν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς μοίρας ἑνὸς τόξου, καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου του, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκός του. Π.χ. ἂν τὸ τόξον ΑΒ εἶνε 36° καὶ ἡ ἀκτὶς 6 μ., παρατηροῦμεν ὅτι, ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς 360°, ἔχει μῆκος $12.\pi$ (μ.) (§ **42, β'**)· τόξον 1° θὰ ἔχῃ μῆκος $12.\pi : 360 = \frac{12\pi}{360}$, καὶ τόξον 36° θὰ ἔχῃ μῆκος $\frac{12.\pi}{360} \cdot 36 = 3{,}769$ μ.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι «*διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τόξου μοιρῶν τινων, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνά του, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας, τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 360*».

Ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου, καὶ διὰ τοῦ α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, τὸ μῆκος τοῦ τόξου θὰ εἶνε $\frac{2\,\pi.\,\alpha.\,\mu}{360}$

Ἐφαρμογή. Οὕτω π.χ. ἂν ζητῆται τὸ μῆκος τόξου 37° κύκλου ἀκτῖνος 2,5 μ., ἔχομεν $\alpha = 2{,}5$· $\mu = 37$. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον μῆκος εἶνε $\frac{2.\ 3{,}141.\ 2{,}5}{360} \times 37$ μ. (κατὰ προσέγγισιν).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 18°· 20°· 32°, ἂν ἡ ἀκτὶς εἶνε ἀντιστοίχως 0,8· 3,4· 5 μέτρα;

2) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 40° 20′· 15° 20′ 30″· 3° 30′ 30″, ἂν ἡ ἀκτίς του εἶνε ἀντιστοίχως 3· 6,8· 3,2 μ.;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2,25 μ. τόξον τι ἔχει μῆκος 3 μ. Πόσον μοιρῶν εἶνε τὸ τόξον;

2) Κατὰ πόσας μοίρας στρέφεται ὁ λεπτοδείκτης (ὡροδείκτης) ὡρολογίου εἰς 1· 3· 6 (1·2) ὥρ.;

3) Τόξον 34° ἔχει μῆκος 15,35 μ. Πόση εἶνε ἡ ἀκτίς του;

4) Τόξον 3° 20′ 15″ ἔχει μῆκος 8,32 μ. Πόση εἶνε ἡ ἀκτίς του;

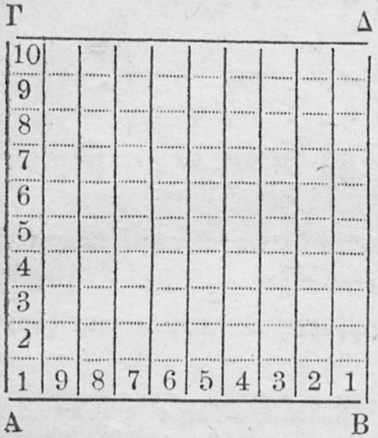
Περὶ μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν

§ 46. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας. —

α′) *Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας* καλεῖται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως αὐτῆς.

β′) Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας λαμβάνεται ὡς μονὰς «*τὸ τετραγωνικὸν μέτρον*» εἶνε δὲ τοῦτο τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν 1 μ. Ἐκτὸς ταύτης ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς μονάδας διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἢ μικρῶν ἐκτάσεων ἐπιφανείας. Τὸ *τετρ. δεκάμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 10 μ.)· τὸ *τετρ. ἑκατόμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 100 μ.)· τὸ *τετρ. χιλιόμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 1000 μ.)· τὸ *τετρ. μυριάμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 10000 μ.)· τὸ *τετρ. δεκατόμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 0, 1 μ.)· τὸ *τετρ. ἑκατοστόμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 0,01 μ.)· τὸ *τετρ. χιλιοστόμετρον* (τετρ. ἔχον πλευρὰν 0,001 μ.). Πρὸς συντομίαν παριστάνομεν τὸ τετρ. μέτρον διὰ τοῦ ($μ^2$)· τὸ τετρ. δεκάμετρον, καὶ ἑκατόμετρον, διὰ τοῦ ($δμ^2$) καὶ ($εμ^2$)· τὸ τετρ. χιλιόμετρον διὰ τοῦ ($χμ^2$)· τὸ τετρ. δεκατόμετρον διὰ τοῦ ($δκ^2$) κ. ο. κ.

γ') Ἐὰν τετραγώνου τινὸς π.χ. τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (103), διαιρέσωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς 10 ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεώς των φέρωμεν ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ΑΒ, χωρίζεται εἰς 100 ἴσα τετράγωνα, καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει πλευρὰν τὸ δέκατον τῆς τοῦ ἀρχικοῦ, εἶνε δὲ τὸ ἑκατοστὸν ἐκείνου. Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ ἔχον πλευρὰν δεκαπλασίαν τοῦ ἄλλου εἶνε ἑκατονταπλάσιον αὐτοῦ.



Σχ. (103)

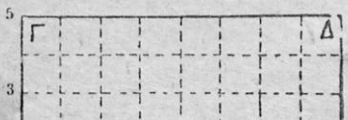
Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ (δμ^2)$=$100 (μ^2)·
τὸ (εμ^2)$=$100(δμ^2)$=$10000 (μ^2) κ. ο. κ.,
τὸ (δκ^2)$=$0,01 (μ^2)· τὸ (εκ^2)$=$0,0001 (μ^2) κ.λ.π.

δ') Πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων μεταχειριζόμεθα, συνήθως ἐν Ἑλλάδι, ὡς μονάδα τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν μήκους ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως ἢ 0,75 μ., καὶ λέγεται *τεκτονικὸς τετρ. πῆχυς*· τὸν παριστάνομεν διὰ τοῦ (πχ^2), εἶνε δὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ (μ^2). Καὶ ἀντιστρόφως, τὸ 1 (μ^2) εἶνε ἴσον μὲ $\frac{16}{9}$ τοῦ (πχ^2).

§ **47. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου.**—α') Ἔστω ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ σχ. (104), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε

ΑΒ$=$8μ., ΑΓ$=$5μ.

Διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς 8 τὴν δὲ ΑΓ εἰς τρία ἴσα μέρη, (§ **39**, πρόβλ. 12) καθὲν τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ μῆκος 1 μ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΒ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτε τὸ



(Σχ. 104)

ΑΒΓΔ χωρίζεται εἰς 8 ὀρθογώνια, ἔχοντα πλευρὰς μήκους

1 μ. καὶ 5 μ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ καθὲν τῶν 8 προηγουμένων ὀρθογωνίων διαιρεῖται εἰς 5 τετράγωνα, ἔχοντα πλευρὰν 1 μ. Οὕτω τὸ ΑΒΓΔ διῃρέθη εἰς 40 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου εἶνε 40 ($μ^2$). Τὸ ἐξαγόμενον 40 εἶνε καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 5, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὴν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι, ἂν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶνε 4 μ. καὶ 7 μ., τὸ ἐμβαδόν του εἶνε $4.7=28$ ($μ^2$).

β') Ἂν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶνε 2π., καὶ 3δ., τρέπομεν τὰς 2π. εἰς δακτύλους=20δ., καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε $20.3=60$ ($εκ^2$). Ἂν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου εἶνε 5,16 μ. καὶ 0,845 μ., τρέπομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5,16μ. καὶ 0,845 μ. εἰς γραμμάς· ἤτοι εἰς 5160 γρ. καὶ 845 γρ., καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε 5160.845 ($γρ^2$)=4360200 ($γρ^2$), ἢ ἂν τὸ τρέψωμεν εἰς ($μ^2$), εὑρίσκομεν 4 ($μ^2$), 36 ($δκ^2$), 02 ($εκ^2$). Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 5,16 καὶ 0,846, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰς δύο πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου.

γ') Συνήθως καλοῦμεν τὸ μῆκος τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου *διαστάσεις* αὐτοῦ· τῆς μιᾶς *μῆκος* ἢ *βάσιν*, τῆς δὲ ἄλλης του *πλάτος* ἢ *ὕψος*. Οὕτω τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (104) αἱ διαστάσεις εἶνε τὸ μῆκος τῆς ΑΒ (βάσις) καὶ τὸ τῆς ΑΓ (ὕψος).

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἔχομεν ὅτι

«τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του» (μετρούμενα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα). Ἂν διὰ τοῦ $β$ καὶ $υ$ παραστήσωμεν τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου, σημειώσωμεν δὲ διὰ τοῦ E τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἔχωμεν $E=β.\ υ$

Ἐφαρμογή. Οὕτω π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ἔχοντος μῆκος 31 μ. καὶ πλάτος 7 μ., ἔχομεν $β=31$, $υ=7$. Ἑπομένως θὰ εἶνε $E=31.\ 7=217$ ($μ^2$).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Ὀρθογωνίου πατώματος αἱ διαστάσεις εἶνε 3,15 μ. (3,20μ.) (1) καὶ 2,8 μ. (135 γρ.)· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδόν του;

2) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν οἰκοπέδου ὀρθογωνίου σχήματος, α') εἰς ($μ^2$)· β') εἰς ($πχ.^2$) ἂν αἱ διαστάσεις του εἶνε 16 μ.· 25 μ.;

3) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου κήπου, ἔχοντος μῆκος $85\frac{3}{4}$ μ., καὶ πλάτος $42\frac{1}{2}$ μ.;

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν δωματίου, ἔχοντος μῆκος 5,25 μ. καὶ πλάτος $4\frac{1}{2}$ μ.

5) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου πατώματος εἶνε 7,75 μ. καὶ 5,75μ.· πόσον θὰ κοστίσῃ ὁ ἐλαιοχρωματισμός του, ἐὰν ὁ ἐλαιοχρωματισμὸς πληρώνεται 1,85 δρχ. τὸ ($μ^2$);

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Στέγη ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 ἴσα ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις εἶνε 12 μ. καὶ 0,52 μ.· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδόν της;

2) Τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, ἔχοντος βάσιν 7 μ., εἶνε 25 ($μ^2$).· πόσον εἶνε τὸ ὕψος του;

3) Πόσον εἶνε τὸ ὕψος ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 135,30 ($μ^2$) καὶ βάσιν 9 μ.;

4) Τὸ πάτωμα αἰθούσης ἔχει 25 σανίδας, καθεμία τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 3,2 μ. καὶ πλάτος 0,15μ.· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς αἰθούσης;

Ὁμὰς τρίτη. 1) Δωμάτιον ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις 8 μ. καὶ 5μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶνε 3,8 μ. καὶ πλάτος 0,32 μ.· πόσαι σανίδες χρειάζονται;

2) Αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 35μ., 18μ. πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας τετραγώνους, ἐχούσας πλευρὰν

(1) Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ αὐτὴ διατύπωσις ἑνὸς προβλήματος μὲ ἠλλαγμένους ἀριθμούς, τίθενται οἱ νέοι ἀριθμοὶ ἐν παρενθέσει.

0,25 μ.· α') πόσαι πλάκες χρειάζονται; β') πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ τὰς πλάκας, ἂν ἡ χιλιάς των τιμᾶται 24,5 δραχ.;

3) Δρόμος ἔχων πλάτος 6 μ. περνᾷ διὰ μέσου κτήματος καὶ καταλαμβάνει ἔκτασιν 1660 (μ^2)· πόσον μῆκος ἔχει ἐντὸς τοῦ κτήματος;

4) Ὀρθογωνίου διαδρόμου τὸ μῆκος εἶνε 8,4 μ. τὸ δὲ πλάτος 2,1 μ.· πόσαι ὀρθογόνιοι ἴσαι πλάκες χρειάζονται διὰ νὰ στρωθῇ, ἂν αἱ διαστάσεις των εἶνε 0,2μ. καὶ 0,5 μ;

§ **49. Ἐμβαδὸν τετραγώνου.**—Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθογώνιον, ἔχον βάσιν καὶ ὕψος ἴσα. Ἐπομένως, ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶνε α μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του E θὰ εἶνε $E = \alpha.\ \alpha$ (μ^2), ἢ $E = \alpha^2$ (μ^2)· (τὸ $\alpha.\alpha = \alpha^2$ λέγεται τετράγωνον τοῦ α).

Ὅθεν «*τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς του*».

Ἐφαρμογή. Ἂν π.χ. ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 0,32 μ., εἶνε $\alpha = 0{,}32$ μ. Ἐπομένως

$E = 0{,}32^2 = 0{,}32.\ 0{,}32$ (μ^2).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰς 3,5μ.; 26 δ.; 7, 8 γρ.;

2) Ἑνὸς κύβου ἡ τετραγωνικὴ ἀκμὴ εἶνε 0,12 μ. α') πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του; β') ὅλων τῶν (ἕξ) ἑδρῶν του;

3) Πόσον κοστίζει τάπης, ἔχων σχῆμα τετραγωνικὸν καὶ πλευρὰν 3,75 μ., ἂν τὸ (μ^2) κοστίζῃ 43,20 δραχ.;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶνε α') 36 (μ^2); β') 121 (μ^2)· γ') 81 (μ^2); Πόση εἶνε ἡ πλευρά του;

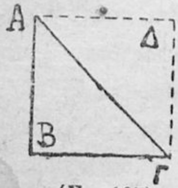
Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτό, πρέπει νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του δίδει γινόμενον 36. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 36, καὶ εἶνε ὁ 6. Διότι $6.6 = 36$, σημειώνεται δὲ ὡς ἑξῆς $\sqrt{36} = 6$.

Ἐν γένει, καλοῦμεν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν δοθέντα. Οὕτω ἔχομεν $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{49}=7$· ἐνῶ καὶ ἡ $\sqrt{38}=6$, καὶ τὸ 6 λέγεται τότε τετρ. ρίζα τοῦ 38 κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

2) Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ τετραγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν α΄) 81 (μ^2); β΄) 144 (μ^2); γ΄) 64 (μ^2); δ΄) 121 ($\delta\kappa^2$);

3) Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχοντος ἐμβαδὸν α΄) 1622 (μ^2)· β΄) $\frac{9}{4}$ (μ^2); γ΄) $\frac{25}{9}$ (μ^2);

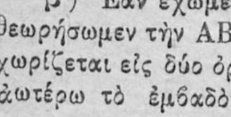
§ **49 Ἐμβαδὸν τριγώνου.** — α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ σχ. (105).



(Σχ. 105)

Ἂν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ, θὰ σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓ (§ **28**, β΄). Διότι θὰ εἶνε ΑΔ=ΒΓ, ΔΓ=ΑΒ (§ **33**, α΄). Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ἐπομένως καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ ἰσοῦται (§ **47**, γ΄) μὲ β. υ (μ^2), ὅπου β καὶ υ παριστάνουν τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους (εἰς μέτρα π.χ.) τοῦ ΑΒΓΔ, ἢ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶνε $E=\frac{\beta.\upsilon}{2}(\mu^2)$

β΄) Ἐὰν ἔχωμεν οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ σχ. (106), καὶ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒ ὡς βάσιν του, φέρωμεν δὲ τὸ ὕψος του ΓΔ, χωρίζεται εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΒΓΔ, καὶ ΑΔΓ. Κατὰ τ᾽ ἀωτέρω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΒΓΔ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς ΒΔ ἐπὶ τὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ τοῦ ΑΔΓ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὸ τῆς ΓΔ. Ἑπομένως, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ τῆς ΓΔ.



(Σχ. 106)

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

« *τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του* ».

Ἂν διὰ τοῦ *β* καὶ *υ* παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου εἰς μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν του E θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\frac{\beta.\upsilon}{2}$ (μ^2).

Ἐφαρμογή. Π. χ. ἂν ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, ἔχοντος βάσιν 32 μ. καὶ ὕψος 10 μ., εἶνε β=32μ., υ=10μ.. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $E=\frac{32.10}{2}=160$ (μ²).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, ἔχοντος βάσιν καὶ ὕψος α′) 9,5 μ., 1,8 μ. ; β′) 3,5 μ., $35\frac{3}{7}$δ. ;

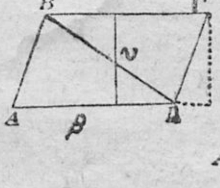
2) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν οἰκοπέδου τριγωνικοῦ, ἔχοντος βάσιν 20,4 μ. καὶ ὕψος 5 μ., καὶ πόσον κοστίζει, ἂν ὁ 1 (πχ²) τιμᾶται 2,70 δρ. ;

3) Τριγωνικὸς ἀγρὸς ἔχει βάσιν 148 μ. καὶ ὕψος 95.8 μ. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδόν του, καὶ πόσον κοστίζει, ἂν τὸ 1 (μ²) κοστίζῃ 2,4 δρ. ;

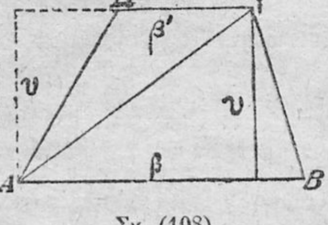
4) Τριγωνικὸν οἰκόπεδον ἔχει βάσιν 27 μ. καὶ ὕψος 20 μ. Πρόκειται νὰ ἀνταλλαχθῇ μὲ ἄλλο ὀρθογώνιον ἴσον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἔχον μῆκος 18 μ.· πόσον πλάτος πρέπει νὰ ἔχῃ τοῦτο ;

5) Ἐκ δύο τριγώνων τὸ ἓν ἔχει βάσιν 0,35 μ. καὶ ὕψος 0,18 μ., τὸ δὲ ἄλλο βάσιν 0,28 μ. καὶ ὕψος 0,25 μ.· ποῖον ἔχει μεγαλύτερον ἐμβαδόν, καὶ πόσον ;

§ **50. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.** — Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, π.χ. τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (107). Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιόν του ΒΔ χωρίζεται εἰς τὰ δύο ἴσα τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΓΒ (§ **28**, β′). Τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τούτων ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ (ΑΔ). υ, ἂν (ΑΔ) καὶ υ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ υ (υ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῆς ΑΔ ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ΒΓ, π.χ. ἀπὸ τὸ Γ).



Σχ. (107)



Σχ. (108)

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ θὰ εἶνε ἴσον μὲ (ΑΔ.) υ.

Συνήθως καλοῦμεν *βάσιν παραλληλογράμμου* μίαν τῶν πλευρῶν του, *ὕψος* του δὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς βάσεως του ἀπό ἓν σημεῖον τῆς ἀπέναντί της πλευρᾶς. Ἐὰν διὰ τοῦ β καὶ υ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους παραλληλογράμμου, τὸ ἐμβαδόν του E θὰ εἶνε $E=\beta.\ \upsilon$. Ὥστε «*τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τό γινόμενον τοῦ μήκους τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τοῦ ὕψους του*».

Ἐφαρμογή. Π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, ἔχοντος βάσιν 3 μ. καὶ ὕψος 3,5 μ., εἶνε $\beta=3$μ., $\upsilon=3,5$μ. Ἑπομένως ἔχομεν $E=3.\ 3{,}5=10{,}5$ (μ²).

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, ἔχοντος α') βάσιν 2,7 μ. καὶ ὕψος 8,32 μ. β) 13.28 μ. βάσιν καὶ ὕψος 18 δ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις παραλληλογράμμου, ἔχοντος ὕψος 3,58 καὶ ἐμβαδὸν 7,518 (μ²).

3) Πόσον εἶνε τὸ ὕψος παραλληλογράμμου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 40,5 (μ²) καὶ βάσιν 1,5 μ.;

§ **81. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.**—α') Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ σχ. (108). Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιόν του ΑΓ, χωρίζεται εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΓΒ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΓΒ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ (ΑΒ). υ, τοῦ δὲ ΔΓΑ μὲ $\frac{1}{2}$(ΔΓ). υ, ὅπου (ΑΒ), (ΔΓ), παριστάνουν τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΔΓ. Τὰ ὕψη τῶν τριγώνων εἶνε ἴσα μὲ υ, (βλ. σχ. (108)). Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}(AB).\ \upsilon+\frac{1}{2}(\Delta\Gamma).\ \upsilon=\frac{(AB)+(\Delta\Gamma)}{2}.\ \upsilon$· ἤτοι μὲ τὸ ἥμισυ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου εἰς ταύτας.

β') Καλοῦμεν *βάσεις* τραπεζίου τὰς δύο παραλλήλους πλευράς του, *ὕψος* του δὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς μιᾶς τούτων ἀπό τινος σημείου τῆς ἄλλης. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν β, β' τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ διὰ τοῦ υ τὸ τοῦ ὕψους τοῦ τραπεζίου, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ E θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\frac{(\beta+\beta').\ \upsilon}{2}$ Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι «*τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ τοῦ ὕψους του*».

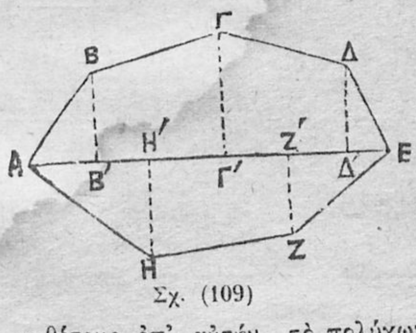
Ἐφαρμογή. Ἂν ζητῆται π.χ. τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ἔχοντος βάσεις 2 μ., 8 μ. καὶ ὕψος 9 μ. εἶνε $\beta=2\mu.$, $\beta'=8\mu.$ καὶ $\upsilon=9$ μ,. Ἑπομένως ἔχομεν $E=\frac{2+8}{2}\cdot 9=45\ (\mu^2)$.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ἔχοντος βάσεις 7,5(8)μ· 4,3 (10,5) μ. καὶ ὕψος 2,4 (5) μ.

2) Οἰκόπεδον ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶνε 40 μ. καὶ 35 μ. τὸ δὲ ὕψος 40 μ. Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν του;

§ 52. **Ἐμβαδὸν πολυγώνου.**—α') Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, π.χ. τοῦ ΑΒΓΔΕΖΗ σχ. (109), τὸ διαιροῦμεν εἰς μέρη (τρίγωνα, τετράπλευρα), τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου. Οὕτω, ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιόν του ΑΕ καὶ τὰς εὐθείας

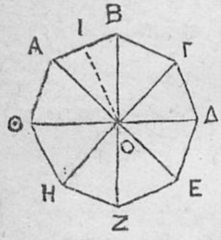


Σχ. (109)

ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΖΖ', ΗΗ' καθέτους ἐπ' αὐτήν, τὸ πολύγωνον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΒ', ΔΕΔ', ΕΖΖ', ΑΗΗ', καὶ τὰ τραπέζια ΒΒ' ΓΓ', ΓΓ' ΔΔ', ΖΖ' ΗΗ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τούτων δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου.

β') Ἐνίοτε φέρομεν ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ πολυγώνου τὰς διαγωνίους του, ὅτε διαιρεῖται εἰς τρ γωνα, τὸ ἄθροισμα δὲ τῶν ἐμβαδῶν τούτων δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

γ') Ἂν τὸ πολύγωνον εἶνε κανονικὸν (ἐγγεγρ. εἰς κύκλον), τὸ διαιροῦμεν δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ κέντρον του μὲ τὰς κορυφάς του, εἰς τρίγωνα, ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον του. Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘ σχ. (110) ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἴσων του



Σχ. (110)

τριγώνων Ο Β, ΟΒΓ,... Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τούτων ἰσοῦται ἀντιστοίχως μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ΒΓ, ... ἐπὶ τὸ ἀπόστημα (§ **36, στ'.**) ΟΙ, ἔπεται ὅτι τὸ *ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.*

Ἐφαρμογή. Ἂν π.χ. ζητῆται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ σχ. (109) καὶ εἶνε (ΑΒ') = 2 μ., (ΒΒ') = 2,8 μ., (ΑΗ') = 4 μ., (ΗΗ') = 3,5 μ., (ΕΖ') = 3 μ., (ΖΖ') = 2,24 μ., (ΕΔ') = 1 μ., (ΔΔ') = 2,6 μ., (ΓΓ') = 3,26 μ., (ΑΓ') = 11 μ., καὶ (ΕΓ') = 5 μ, ἔχομεν

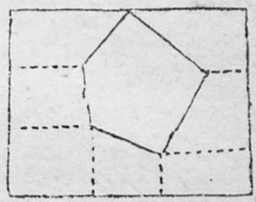
ἐμβ. ΑΒΒ' = $\frac{2.2,8}{2} = 2,8\ (\mu^2)$· ἐμβ. ΑΗΗ' = $\frac{4.3,5}{2} =$ $2.3,5 = 7\ (\mu^2)$· ἐμβ. ΔΕΔ = $\frac{1.2\,6}{2}$ $1,3\ (\mu^2)$· ἐμβ. ΖΕΖ' = $\frac{3.2,24}{2} = 3.1,12 = 3,26\ (\mu^2)$. Ἡ (Δ'Γ') = (ΕΓ') — (ΕΔ') = $5 - 1 = 4$ μ. Ἐμβ. ΓΓ' ΔΔ' = $\frac{(2.6+3,26).4}{2} = 5,86.2 = 11,72\ (\mu^2)$. Ἡ (Β' Γ') = (ΑΓ') — (ΑΒ') = $11 - 2 = 9$μ., καὶ ἐμβ. ΒΒ' ΓΓ' = $\frac{(2,8+3,26).\ 9}{2} = 3,03.9 = 27,27\ (\mu^2)$. Ἡ (Ζ'Η') = (ΑΕ) -- (ΑΗ') — (ΕΖ') = $16 - 4 - 3 = 9$ μ., καὶ ἐμβ. ΖΖ' ΗΗ' = $\frac{(2,24+3\,5).9}{2}$ $= 5,74 \cdot \frac{9}{2} = 25,83\ (\mu^2)$. Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔΕΖΗ $= 25,83 + 11,72 + 3,36 + 27,27 + 1,3 + 7 + 2,8 = 79,28 (\mu^2)$.

Ἀσκήσεις

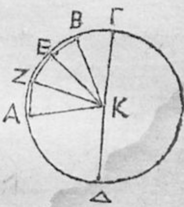
1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἔχοντος διαγώνιον (ΑΔ) = 0,7 μ., καθέτους δὲ ἐπ' αὐτὴν (ΒΕ) = 0,5 μ., (ΓΖ) = 0,4 μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγρ. εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μ. καὶ ἔχοντος ἀπόστημα 1,73 μ.

3) Πῶς εὑρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τόπου εἰς τὸν ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ εἰσέλθωμεν, π.χ. τοῦ περὶ τὸ μέσον πολυγώνου εἰς τὸ σχ.(111);(Γράφομεν γύρω τοῦ δοθέντος ἓν ὀρθογώνιον, καθὼς εἰς τὸ σχ.(110)'Από τὸ ἐμβαδὸν τούτου ἀφαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν γραμμῶν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ δοθέντος πολυγώνου Πῶς; (Βλέπε σχ.(111).).


(Σχ. 111)

§ 53. Ἐμβαδὸν κύκλου.— α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου Κ σχ. (112). Φέρομεν ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΖ, ΚΕ, ΚΒ, ὥστε ὁ κύκλος νὰ διαιρεθῇ εἰς πολλοὺς τομεῖς, ἀλλὰ πολὺ στενοὺς ΑΚΖ,ΖΚΕ,ΕΚΒ,..... Καθεὶς ἐξ αὐτῶν ἐξομοιώνεται κατὰ προσέγγισιν μὲ ἓν τρίγωνον,τοῦ ποίου βάσις εἶνε τὸ τόξον του ΑΖ, ΖΕ, ΕΒ, καὶ ὕψος του ἡ ἀκτίς.'Εκ τούτων βλέπομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς τομέως θὰ εἶνε (κατὰ προσέγγισιν) ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν οὕτω σχηματιτομένων τομέων καὶ αἱ βάσεις των ἀποτελοῦν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἕπεται ὅτι



(Σχ. 112)

«τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ τῆς ἀκτῖνός του».

Κατὰ ταῦτα τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 5 μ. θὰ εἶνε $\frac{1}{2}.\ 2.\ \pi.\ 5.\ 5. = \pi.\ 5.\ 5. = 3{,}141.\ 25 = 78{,}525$ (μ^2) (κατὰ προσέγγισιν).

β') Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ἑνὸς κύκλου διὰ τοῦ α, ἐπειδὴ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του εἶνε 2 π. α (§ **42**, β'), τὸ ἥμισυ τούτου εἶνε π. α. τὸ δὲ ἐμβαδὸν E τοῦ κύκλου εἶνε $E = \pi.\ \alpha.\ \alpha. = \pi.\ \alpha^2$.

«ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ἔχοντος μῆκος ἀκτῖνος α, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ α».

Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 3 μ. θὰ εἶνε π. $3^2=\pi.3.3$ $=3{,}141.\ 9=28,\ 269$ (μ^2) (κατὰ προσέγγισιν).

γ') Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, ἔστω τοῦ ΑΟΒ, ἐπειδὴ οὗτος ἐξομοιοῦται (κατὰ προσέγγισιν) μὲ τρίγωνον, ἔχον βάσιν τὸ τόξον του καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνά του, ἕπεται ὅτι *«τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τοῦ μήκους τοῦ τόξου του ἐπὶ τὸ τῆς ἀκτῖνός του»*.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 2 μ.· $\frac{3}{4}$ μ.· 0,60 μ.

2) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δίσκου, ἔχοντος περιφέρειαν 120 μ; (Εὕρετε πρῶτον τὴν ἀκτῖνά του).

3) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, ἂν τὸ τόξον του εἶνε τὸ 0,5· 0,25· $\frac{1}{6}$· $\frac{1}{8}$ τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 5 μ.;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν μεγεθῶν

§ **54. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν.** — α') *Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν* λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ ἄλλου. Π.χ. ἂν γραμμή τις α συγκριθῇ πρὸς ἄλλην β, καὶ εὑρεθῇ ὅτι εἶνε τριπλασία (ἢ τὸ $\frac{1}{4}$) αὐτῆς, τὸ 3 (ἢ τὸ $\frac{1}{4}$) λέγεται λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν γραμμήν, καὶ σημειώνομεν

$$\alpha:\beta=3,\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha}{\beta}=3.$$

β') *Λόγος δύο ἀριθμῶν* λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου. Π.χ. ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 3 εἶνε ἴσος μὲ $12:3=\frac{12}{3}=4$, τοῦ 5,2 πρὸς τὸν 7,48 μὲ $\frac{5{,}2}{7{,}48}=\frac{520}{748}=\frac{130}{187}$ κ. ο. κ. Ἐν γένει, ὁ λόγος ἀριθμοῦ τινος α πρὸς ἄλλον β εἶνε ἴσος μὲ $\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}$.

γ') Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δύναται νὰ παριστάνεται διὰ κλάσματος, ἕπεται ὅτι ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ κλάσματος. Διὰ τοῦτο, ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθοῦν, ἢ διαιρεθοῦν, μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}=\frac{20}{40}=\frac{60}{120}$ κ. ο. κ.

§ **55. Ἰδιότητες τοῦ λόγου ὁμοειδῶν μεγεθῶν.**— Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ἔχομεν δύο ἐπιφανείας, καὶ ὅτι ὁ λόγος τῆς πρώτης πρὸς τὴν δευτέραν εἶνε 4. Ἂν μετρήσωμεν καθεμίαν τούτων διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος, π. χ. διὰ τοῦ 1 (μ^2), καὶ εὕρωμεν ὅτι ἡ δευτέρα ἔχει ἐμβαδὸν 3 (μ^2), ἡ πρώτη, ὡς τετραπλασία αὐτῆς, θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν 3. 4=12 (μ^2). Οὕτω αἱ δύο ἐπιφάνειαι, μετρηθεῖσαι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (μ^2), θὰ παριστάνωνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 12, καὶ 3, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον 4 τῶν δύο ἐπιφανειῶν. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι

«*ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τὰ παριστάνουν, (ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα)*».

Κατὰ ταῦτα, ἂν τὸ μῆκος δύο δρόμων (γραμμῶν) εἶνε ἀντιστοίχως 8000 μ., καὶ 12000 μ., ὁ λόγος των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον $\frac{8000}{12000}=\frac{2}{3}$.

§ **56. Ἀναλογία.**— α') *Ἀναλογία* λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔχει μεγέθη (ἢ ἀριθμοὺς) ὁμοειδῆ.

Οὕτω ἡ ἰσότης $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$ λέγεται ἀναλογία. Διότι οἱ λόγοι $\frac{12}{3}$ καὶ $\frac{20}{5}$ εἶνε ἴσοι μὲ 4. Αὕτη γράφεται οὕτω 12 : 3=20 : 5, καὶ ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς· *12 πρὸς 3 ἴσον μὲ 20 πρὸς 5* ἢ *καὶ* $\frac{12}{3}$ *ἴσον μὲ* $\frac{20}{5}$. Ἐὰν οἱ δύο ἴσοι λόγοι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, ἡ ἀναλογία θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, ἢ α : β=γ : δ. Ἂν τὰ α, β, γ, δ παριστάνουν μεγέθη, τὰ α, β εἶνε ὁμοειδῆ μεταξύ των, καθὼς καὶ τὰ γ καὶ δ.

β') Οἱ τέσσαρες ἀριθμοί, ἢ τὰ μεγέθη, τῆς ἀναλογίας λέγονται ὅροι της, καὶ ὁ μὲν πρῶτος καὶ τρίτος *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ ἄλλοι *ἑπόμενοι*, ὁ πρῶτος καὶ τέταρτος *ἄκροι*, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τρίτος *μέσοι* ὅροι τῆς ἀναλογίας. Οὕτω τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ οἱ α, δ εἶνε ἄκροι, οἱ β, γ μέσοι, οἱ α, γ ἡγούμενοι καὶ οἱ β, δ ἑπόμενοι.

§ **57. Μεγέθη ἀνάλογα.**—Δύο ἢ περισσότερα μεγέθη λέγονται *ἀνάλογα* πρὸς ἄλλα ἰσάριθμά των καὶ ἀντοιστοίχως ὁμοειδῆ των, ἐὰν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οὕτω π.χ. τρεῖς εὐθεῖαι 6 μ., 4 μ., 8 μ. λέγονται ἀνάλογοι τριῶν ἄλλων, 3 μ., 2 μ., 4 μ. Διότι καθεμία τῶν πρώτων προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχόν της τῶν δευτέρων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2.

Ὁ ἀριθμὸς 2 καλεῖται *λόγος τῶν ἀντιστοίχων* εὐθειῶν, καὶ σημειώνομεν τὴν ἰδιότητά των αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\frac{6\ \mu.}{3\ \mu.}=\frac{4\ \mu.}{2\ \mu.}=\frac{8\ \mu.}{4\ \mu.}=2$.

Ἐν γένει, ἐὰν α, β, γ παριστάνουν μεγέθη ἀνάλογα πρὸς τὰ α', β', γ' ἀντοιστοίχως ὁμοειδῆ των (α καὶ α', β' καὶ β', γ καὶ γ'), ἐπειδὴ οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, $\frac{\gamma}{\gamma'}$ εἶνε ἴσοι, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἡ ὁποία λέγεται ἀναλογία μεταξὺ τῶν α, β, γ καὶ α', β', γ'.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἔχωμεν δύο τρίγωνα καὶ δύο κύκλους καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς ἔχουν μήκη 15 μ., 20 μ., 8 μ. τοῦ ἄλλου ἀντιστοίχως 30 μ., 40 μ., 16 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κύκλου 25 (μ^2) καὶ τοῦ ἄλλου 50 (μ^2), θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν $\frac{15\mu.}{30\mu.}=\frac{20\mu.}{40\mu.}=\frac{8\mu.}{16\mu.}=\frac{25\,(\mu^2)}{50\,(\mu^2)}=\frac{1}{2}$, ὁ δὲ λόγος εἶνε $\frac{1}{2}$.

Ἀσκήσεις

1) Ποῖος εἶνε ὁ λόγος (τῶν ἐμβαδῶν) δύο ὀρθογωνίων, ἐχόντων διαστάσεις 15μ., 7μ. καὶ 40μ., 8μ.;

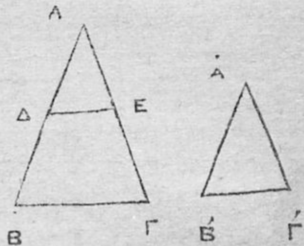
2) Δύο ὀρθογώνια ἔχουν ἴσας βάσεις· μὲ τί ἰσοῦται ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των;

3) Τὸ μῆκος εὐθείας εἶνε 15μ, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τριγώνου 35 (μ^2). Εὕρετε μεγέθη ἀνάλογα τούτων μὲ λόγον 2, ἢ 3, ἢ $\frac{1}{2}$.

Περὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων

§ **58. Ὅμοια τρίγωνα.**—α′) Δύο τρίγωνα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, καὶ τὰς γωνίας, τὰς ἀπέναντι τῶν ἀναλόγων πλευρῶν των, ἴσας. Οὕτω τὰ ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ σχ. (113) λέγονται ὅμοια, ἐὰν εἶνε $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ καὶ γων Γ.=γων. Γ′ (ἀπέναντι τῶν ΑΒ, Α′Β′). γων. Α = γων. Α′, γων. Β=γων. Β′.

β′) Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας, αἱ ἀπέναντι τούτων πλευραὶ λέγονται ὁμόλογοι πλευραί των.



Σχ. (113)

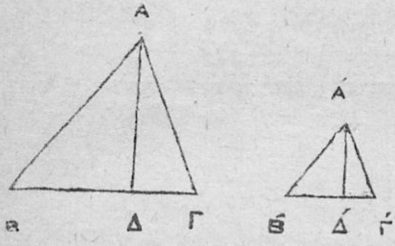
§ **59. Πῶς εὑρίσκομεν ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια.**—α′) Κατὰ τ' ἀνωτέρω, διὰ νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια, πρέπει νὰ εὕρωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι των εἶνε ἀνὰ μίαν ἴσαι, αἱ δὲ ὁμόλογοι πλευραὶ των ἀνάλογοι. Ἐν τούτοις δυνάμεθα καὶ ὡς ἑξῆς νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια.

β′) «*Ἂν αἱ γωνίαι δύο τριγώνων εἶνε ἀνὰ μίαν ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια*». Διότι τότε καὶ οἱ ὁμόλογοι πλευραί των εἶνε ἀνάλογοι, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν τὰς μετρήσωμεν, καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὅτε εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε ἴσοι.

γ′) «*Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια*». Διότι τότε καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ἀναλόγων πλευρῶν γωνίαι των εἶνε ἴσαι, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν τὰς μετρήσωμεν, καὶ τὰς συγκρίνωμεν μεταξύ των.

δ′) «*Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, εἶνε ὅμοια*». Διότι τότε καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι των θὰ εἶνε ἴσαι ἀνὰ μία, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τῆς συγκρίσεώς των.

§ **60** **Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων τριγώνων.**—α') Ἔστω ὅτι δύο τρίγωνα, π.χ. τὰ ΑΒΓ, Α' Β' Γ' σχ. (114) εἶνε ὅμοια ὁ δὲ λόγος τῶν πλευρῶν των εἶνε π.χ. ὁ 3· ἤτοι



Σχ. (114)

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = 3.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰ ὕψη των ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους των κορυφάς, ἔστω τὰ ΑΔ καὶ Α'Δ', καὶ εὕρωμεν τὸν λόγον $\frac{ΑΔ}{Α'Δ'}$, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος αὐτὸς ἰσοῦται μὲ 3, ἤτοι μὲ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς ἄλλα ὅμοια τρίγωνα. Ἑπομένως,

« ἐὰν δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν».

β') Ἂν E παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ E' τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Α'Β'Γ' ἔχομεν (§ **49**, α').

$$E = \frac{1}{2}\,(ΒΓ).\,(ΑΔ),\quad E' = \frac{1}{2}\,(ΒΓ)\,(ΑΔ)$$

Ἀλλ' ἐδόθη, ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶνε τριπλασία τῆς Β'Γ'· εὕρομεν δὲ ὅτι τὸ ὕψος ΑΔ εἶνε τριπλάσιον τοῦ Α'Δ'· ἐπειδὴ ὁ λόγος των εἶνε 3. Ἂν λοιπὸν γράψωμεν ἀνωτέρω ἀντὶ τοῦ ΒΓ τὸ ἴσον του 3. Β'Γ', καὶ ἀντὶ τοῦ ΑΔ τὸ ἴσον του 3. Α'Δ', θὰ ἔχωμεν $E = \frac{(ΒΓ).(ΑΔ)}{2} = \frac{3\,(Β'Γ').\;3\,(Α'Δ')}{2} = E'3^2$. Ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν E τοῦ ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν E' τοῦ Α' Β' Γ', πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου 3.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παρατηρήσεων ἕπεται ὅτι *«ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν».*

Κατὰ ταῦτα, ἂν ὁ λόγος τῶν πλευρῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶνε 2, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶνε $2^2=4$. Ἂν ὁ λόγος τῶν πλευρῶν εἶνε $\frac{1}{4}$, ὁ τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶνε $\frac{1}{16}$ κ.ο.κ.

§ **61. Πῶς κατασκευάζομεν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθέν.** — α') Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχ. (113), καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιόν του. Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἀπὸ ἓν σημεῖον Δ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν του, ἔστω τῆς ΑΒ, τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ. Διότι τὸ ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουν τὴν γωνίαν Α κοινήν, τὰς Β καὶ Δ ἴσας, καθὼς καὶ τὰς Γ καὶ Ε (ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ).

β') Ἂν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ΑΒΓ, ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου πρὸς τὰς τοῦ δοθέντος νὰ ἰσοῦται μὲ 3 π. χ., λαμβάνομεν τὸ Δ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ, ὥστε νὰ εἶνε ἡ ΑΔ τριπλασία τῆς ΑΒ, καὶ ἀκολούθως ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον τῆς ΒΓ, ὡς ἀνωτέρω.

γ') Ἂν ζητῆται νὰ κατασκευάσωμεν ὅμοιον τρίγωνον πρὸς δοθὲν ΑΒΓ, ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἔστω ὅτι ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν θέλομεν νὰ εἶνε $\frac{1}{2}$. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν αβ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Μὲ πλευρὰν αβ καὶ κορυφὰς τὰ α καὶ β κατασκυεάζομεν γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ ΑΒΓ. Οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον αβγ ὅμοιον μὲ τὸ δοθέν. Διότι ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας ἀνὰ μίαν πρὸς τὰς γωνίας ἐκείνου, ὁ δὲ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν του εἶνε $\frac{1}{2}$ (ἐπειδὴ ἐλήφθη $αβ = \frac{1}{2} \cdot ΑΒ$).

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε τρίγωνον μὲ πλευρὰς 12 γρ., 8 γρ., 5 γρ. καὶ ἄλλο ὅμοιόν του, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν νὰ εἶνε ἴσος μὲ 2· α') τοῦ πρώτου πρὸς τὰς τοῦ δευτέρου. β') τοῦ δευτέρου πρὸς τὰς τοῦ πρώτου.

2) Δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια, καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν ἰσοῦται μὲ $2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot$ πόσος εἶνε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των;

3) Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ 16 (τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τοῦ δευτέρου). Πόσος εἶνε ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν; Διατί;

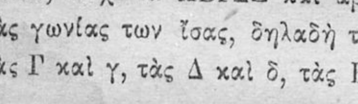
4) Ἂν δύο τρίγωνα εἶνε ὅμοια, καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν εἶνε 3 π. χ., καὶ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των εἶνε 3. Διότι ἂν α, β, γ εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ πρώτου καὶ α′, β′, γ′ αἱ ὁμόλογοί των τοῦ ἄλλου, θὰ ἔχωμεν $\alpha = 3.\ \alpha'$, $\beta = 3.\ \beta'$, $\gamma = 3, \gamma'$, καὶ $\alpha + \beta + \gamma = 3\ \alpha' + 3\ \beta' + 3\ \gamma' = 3\ (\alpha' + \beta' + \gamma')$.

§ **62. Ὅμοια πολύγωνα.** — *α′*) Ἂν δύο πολύγωνα ἔχουν ἴσον πλῆθος πλευρῶν, καὶ τὰς γωνίας των ἴσας ἀνὰ μίαν, αἱ πλευραί των, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν, λέγονται *ὁμόλογαι πλευραὶ τῶν πολυγώνων.*

β′) Δύο πολύγωνα λέγονται *ὅμοια*, ἐὰν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας ἀνὰ μίαν, τὰς δὲ ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους. Οὕτω, π. χ. τὰ ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε σχ. (115), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, δηλαδὴ τὰς γωνίας Α καὶ α, τὰς Β καὶ β, τὰς Γ καὶ γ, τὰς Δ καὶ δ, τὰς Ε καὶ ε, τὰς δὲ ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους, δηλαδὴ $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{B\Gamma}{\beta\gamma} = \frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta} = \frac{\Delta E}{\delta\varepsilon} = \frac{AE}{\alpha\varepsilon}$ λέγονται ὅμοια. Κατὰ ταῦτα δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, δύο τετράγωνα, καί, ἐν γένει, δύο πολύγωνα κανονικὰ μὲ ἴσον πλῆθος πλευρῶν εἶνε ὅμοια. Διότι, ὡς κανονικὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, αἱ δὲ πλευραί των ὡς ἴσαι ἔχουν ἀντιστοίχως τὸν αὐτὸν λόγον.

§ **63. Πῶς κατασκευάζομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθέν.** —

Ἔστω ὅτι δίδεται ἓν πολύγωνον, π. χ. τὸ ΑΒΓΔΕ σχ. (115), καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιόν του, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶνε π. χ. διπλάσιαι τῶν τοῦ δοθέντος.



(Σχ. 115)

Λαμβάνομεν ἓν τυχὸν σημεῖον ἐντὸς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ἔστω τὸ Ο. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Τὰς προεκτείνομεν, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὰς εὐθείας Οα', Οβ', Ογ', Οδ, Οε' ἀντιστοίχως διπλασίας τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Φέρομεν τὰς εὐθείας α'β', β'γ', γ'δ', δ'ε', ε'α' καὶ τὸ πολύγωνον α'β'γ'δ'ε' εἶνε τὸ ζητούμενον. Διότι αἱ γωνίαι τῶν δύο πολυγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ α'β'γ'δ'ε' εἶνε ἀνὰ μίαν ἴσαι (Π.χ. αἱ Α καὶ α' ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο μέρη ἴσα, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι παραλλήλων εὐθειῶν), αἱ δὲ πλευραί των εἶνε ἀνάλογοι· καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν τὰς μετρήσωμεν, καὶ σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων των.

§ **64. Ἰδιότητες τῶν ὁμοίων πολυγώνων.** — α') «*Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν*». Πράγματι, ἔστω ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδε, ΑΒΓΔΕ σχ. (115) εἶνε ὅμοια, καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν αβ, καὶ ΑΒ· βγ, καὶ ΒΓ· γδ, καὶ ΓΔ· δε καὶ ΔΕ· εα καὶ ΕΑ εἶνε ὁ 2. Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, κατασκευάζομεν τὸ πολύγωνον α'β'γ'δ'ε' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν τοῦ νέου πρὸς τὰς τοῦ ΑΒΓΔΕ νὰ εἶνε ὁ 2. Τὰ πολύγωνα αβγδε καὶ α'β'γ'δ'ε' εἶνε ἴσα. Διότι αἱ γωνία των εἶνε ἴσαι (ὡς ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ ΑΒΓΔΕ), αἱ δὲ πλευραί των ἴσαι, ὡς διπλάσιαι τῶν ἀντιστοίχων τοῦ ΑΒΓΔΕ. Οὕτω ἀντὶ τοῦ αβγδε δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ ἴσον του, τὸ α'β'γ'δ'ε'.

Τὰ τρίγωνα Οα'β', ΟΑΒ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας των ἴσας, ὁ δὲ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των εἶνε ὁ 2. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα Οβ'γ' καὶ ΟΒΓ· Ογ'δ' καὶ ΟΓΔ· Οδ'ε' καὶ ΟΔΕ· Οε'α' καὶ ΟΕΑ. Ἑπομένως ἔχομεν (§ **60**, β') ἐμβ. Οα'β' = 4. ἐμβ. ΟΑΒ· ἐμβ. Οβ'γ' = 4. ἐμβ. ΟΒΓ· ἐμβ. Ογ'δ' = 4. ἐμβ. ΟΓΔ· ἐμβ. Οδ'ε' = 4. ἐμβ. ΟΔΕ· ἐμβ. Οε'α' = 4 ἐμβ. ΟΕΑ. Ἄρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ α'β'γ'δ'ε' ἢ τοῦ αβγδε εἶνε τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓΔΕ· δηλαδὴ ὁ λόγος τῶν δύο ἐμβαδῶν ἰσοῦται μὲ 4, τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου 2 τῶν πλευρῶν των.

β') Κατ' ἀνάλογον τρόπον παρατηροῦμεν ὅτι «*ὁ λόγος τῶν* *περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν»*. Διότι, ἔστω ὅτι ἔχομεν τὰ ὅμοια πολύγωνα τοῦ σχ. (115). Ἐπειδὴ καθεμία πλευρὰ τοῦ αβγδε εἶνε διπλασία τῆς ὁμολόγου της τοῦ ΑΒΓΔΕ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ αβγδε εἶνε διπλάσιον τοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔΕ. Ἤτοι ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν ὁμοίων τούτων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον 2 τῶν ὁμολόγων τῶν πλευρῶν.

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε δύο ὅμοια τρίγωνα ἐκ χαρτονίου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των νὰ εἶνε 3.

2) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ἓν τετράγωνον; καὶ ἓν ἄλλο (ὅμοιόν του), ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν των νὰ εἶνε $\frac{1}{3}$.

3) Κατασκευάσατε κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 3 δ. καὶ ἄλλο ὅμοιόν του, ὥστε ὁ λόγος τῶν πλευρῶν των νὰ εἶνε $\frac{1}{3}$.

4) Δύο ὅμοια πολύγωνα ἔχουν λόγον τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν 3· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶνε 27 (μ^2);

5) Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶνε 49· πόσος εἶνε ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων των πλευρῶν;

6) Ἂν αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ δύο ὀρθογωνίων εἶνε ἀνάλογοι, τὰ ὀρθογώνια εἶνε ὅμοια. Διατί; Πόσος εἶνε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των, ἂν ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν των εἶνε ἴσος μὲ $2\frac{1}{2}$;

7) Πολύγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 1,25 (μ^2). Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν ὁμοίου του πολυγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε α΄) τριπλάσιαι, β΄) τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος;

8) (*Ἐν ὑπαίθρῳ*). *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος πύργου (ἢ δένδρου ἢ κωδωνοστασίου) κατακορύφου*. (Ἔστω ΑΒ ὁ κατακόρυφος πύργος. Τοποθετοῦμεν ῥάβδον, ἔστω α β, ὡρισμένου μήκους, κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Μετροῦμεν τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς,

ἔστω ΑΓ, τοῦ πύργου καὶ τῆς σκιᾶς τῆς ράβδου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἔστω αγ. Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶνε ὅμοια (διότι αἱ σκιαὶ τῶν δύο σωμάτων εἶνε παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΒ, γβ). Ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν αβ θὰ εἶνε ἴσος με τὸν λόγον τῶν μηκῶν τῶν δύο σκιῶν. Ἂν λοιπὸν τὸ μῆκος τῆς ράβδου πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν λόγον τοῦ μήκους τῆς σκιᾶς τοῦ πύργου πρὸς τὸ τῆς σκιᾶς τῆς ράβδου, θὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος τοῦ πύργου. Οὕτω, ἂν τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶνε 1,5 μ. καὶ ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν σκιῶν 8, τὸ ὕψος τοῦ πύργου θὰ εἶνε 1,5.8=12 μ.).

Ἀπεικόνησις ἐπιπέδου σχήματος ὑπὸ κλίμακα.

§ **65. Σχέδιον ὑπὸ κλίμακα.**—α΄) Ὅταν θέλωμεν νὰ ἀπεικονίσωμεν σχῆμα ἐπίπεδον, π. χ. ἓν τρίγωνον, ἓν πολύγωνον, ἐπὶ ἐπιπέδου, κατασκευάζομεν σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, τὸ ὁποῖον λέγεται συνήθως *σχεδιον* ἢ *σχεδιάγραμμα* τοῦ δοθέντος.

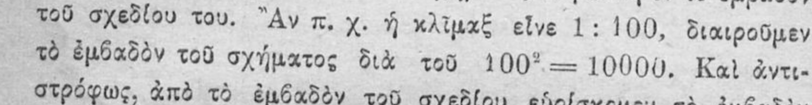
Ἐὰν ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ σχεδίου καὶ τοῦ δοθέντος εἶνε 0,1 λέγομεν ὅτι τὸ σχέδιον κατεσκευάσθη ὑπὸ *κλίμακα* 0,1 ἢ 1 : 10, ἐννοοῦμεν δὲ μὲ τὴν ἔκφρασιν «*ὑπὸ κλίμακα 1 : 10*» ὅτι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ σχεδίου εἶνε τὸ 0,1 τῆς ὁμολόγου της τοῦ δοθέντος. Ἑπομένως, ἂν μία πλευρὰ ἔχῃ μῆκος 1 μ., ἢ 5 μ. εἰς τὸ δοθὲν σχῆμα, εἰς τὸ σχέδιον ἔχει 0,1 μ. ἢ 0,5 μ. Κατ' ἀνάλογον τρόπον κατασκευάζομεν σχέδιον ἑνὸς σχήματος ὑπὸ κλίμακα 0,01 ἢ 0,001 κ.ο.κ., ἂν κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν, ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ σχεδίου νὰ εἶνε τὸ 0,01 ἢ τὸ 0,001 κ.ο.κ. τῶν ἀντιστοίχων των τοῦ δοθέντος. Κατὰ ταῦτα, τὸ σχέδιον τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 8 μ. ὑπὸ κλίμακα 0,1 (ἢ 1 : 100) θὰ εἶνε τετράγωνον μὲ πλευρὰν 0,8 μ. (ἢ 0,08 μ.).

β΄) Ἀντιστρόφως, ἂν γνωρίζωμεν τὸ σχέδιον ἑνὸς σχήματος καὶ τὴν κλίμακα ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔγινε, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀρχικὸν σχῆμα ἐκ τοῦ σχεδίου. Ἐὰν π. χ. τὸ σχέδιον τριγώνου ἔχῃ πλευρὰς 0,03 μ., 0,05 μ., 0,04 μ. ὑπὸ κλίμακα 1 : 100, τὸ πραγματικὸν σχῆμα τοῦ τριγώνου θὰ ἔχῃ πλευρὰς 0,03.100 =3 μ., 0,05. 100=5 μ., 0,04 100=4 μ., γωνίας δὲ ἴσας μὲ τὰς τοῦ σχεδίου. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν, καὶ ἂν δοθῇ τὸ σχέδιον τυχόντος πολυγώνου, κατασκευασμένου ὑπὸ κλίμακα 1 : 10 ἢ 1 : 1000 κλπ.

γ') Ἐκ τῆς σχέσεως τῶν εὐθειῶν σχήματος καὶ τοῦ σχεδίου του εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων (τόπων) ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν ἀντιστοίχων των σημείων τοῦ σχεδίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κλίμακα ὑπὸ τὴν ὁποίαν κατεσκευάσθη τὸ σχέδιον. Οὕτω π. χ. ἡ ἀπόστασις δύο τόπων, οἵτινες εἰς τὸν γεωγραφικὸν χάρτην ἀπέχουν 0,03 θὰ εἶνε 0,03. 1000000, ἂν ἡ κλῖμαξ εἶνε 1 : 1000000.

δ') Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς σχήματος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου του. Ἂν π. χ. ἡ κλῖμαξ εἶνε 1 : 100, διαιροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος διὰ τοῦ $100^2 = 10000$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος, ἐξ οὗ ἔγινεν, ὅταν ἡ κλῖμαξ εἶνε π. χ. 1 : 100, πολλαπλασιάζοντες τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου ἐπὶ $100^2 = 10000$ (§ **64**, α').

§ **66. Κατασκευὴ κλίμακος.**—α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμε κλίμακα 1 : 100. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου λεπτὴν εὐθεῖαν γραμμὴν σχ. (116). Ἐπ' αὐτῆς ἐφαρμόζομεν ὑποδεκάμετρον. Μεταφέρομεν



Σχ. (116).

τὰς ὑποδιαιρέσεις του (ἑκατοστὰ καὶ χιλιοστὰ τοῦ μέτρου) ἐπ' αὐτῆς, σημειώνομεν δ' εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας τὸ ο. Εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου ἑκατοστοῦ, δηλαδὴ εἰς τὸ β, σημειώνομεν 1 μ. Διότι ἓν ἑκατοστὸν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀνταποκρίνεται εἰς ἓν μέτρον, (ἐπειδὴ ἡ κλῖμαξ θὰ εἶνε 1 : 100). Εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ δευτέρου ἑκατοστοῦ, δηλαδὴ εἰς τὸ γ, σημειώνομεν 2 μ. Διότι 2 ἑκατοστὰ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἀντιστοιχοῦν εἰς 2 μ. Οὕτω προχωροῦμεν, σημειώνοντες 3 μ. εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν τοῦ τρίτου ἑκατοστοῦ κ.λ.π. Αἱ διαιρέσεις τῶν γραμμῶν ἀνταποκρίνονται εἰς τὰ δέκατα τοῦ μέτρου.

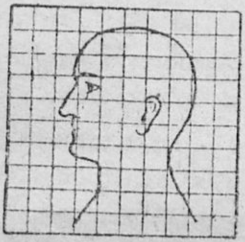
β΄) Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν κλίμακα 1 : 1000, εἰς μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς γραμμῆς θὰ σημειώσωμεν ο, εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου ἑκατοστοῦ, εἰς τὸ β θὰ σημειώσωμεν 10μ. (βλ. σχ. 116). Διότι ἓν ἑκατοστὸν θ' ἀνταποκρίνεται εἰς 10 μ. Εἰς τὸ δεύτερον ἑκατοστὸν θὰ σημειώσωμεν 20 μ. κ.ο.κ. Αἱ διαιρέσεις τῶν γραμμῶν θ' ἀνταποκρίνωνται εἰς τὰ μέτρα. Σημειώνουν τὰς ὑποδιαιρέσεις τῶν γραμμῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς γραμμῆς αβγ, προεκτεινομένης. Εἰς τὸ τμῆμα αὐτὸ λαμβάνουν συνήθως μῆκος ἑνὸς δακτύλου καὶ τὸ ὑποδιαιροῦν εἰς 10 ἴσα μέρη, καθὲν τῶν ὁποίων ἀνταποκρίνεται εἰς ἓν μέτρον.

§ **67. Χρῆσις τῆς κλίμακος.**—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ἔχωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῆς κλίμακος (1 : 1000) μῆκος, τὸ ὁποῖον νὰ παριστάνῃ μῆκος 73 μ. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἑκατοστοῦ ἐπὶ τῆς κλίμακος ἀντιστοιχοῦν 10μ. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον μῆκός της θὰ περιέχῃ 7 διαιρέσεις της. Εὑρίσκομεν δεξιὰ τοῦ Ο τὴν διαίρεσιν ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶνε σημειωμένα 70 μ. Ἀκολούθως ἀριστερὰ τοῦ Ο εὑρίσκομεν τὴν ὑποδιαίρεσιν 3, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται εἰς τὰ 3 μ. Τέλος μὲ τὸν διαβήτην λαμβάνομεν μῆκος εὐθείας ἴσον μὲ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο διαιρέσεων, τὰς ὁποίας εὕρομεν, 70 μ. καὶ 3 μ., τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ μῆκος 73 μ. ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἀπόστασιν περιέχουσαν καὶ ἑκατοστά, π.χ. 73 μ. καὶ 0,60 μ., ἐπειδὴ τὰ 0,60 μ. εἶνε μῆκος μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως μέτρου, λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην μῆκος εὐθείας, περιεχόμενον μεταξὺ τῆς διαιρέσεως 70 μ. καὶ τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Ο καὶ ὀλίγον πέραν τοῦ μέσου τῶν ὑποδιαιρέσεων 3 μ. καὶ 4 μ., ὥστε νὰ ἔχωμεν ἀκόμη κατὰ προσέγγισιν τὰ 0,60 μ.

§ **68. Κατασκευὴ σχεδίου.**—α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον τριγώνου, ἔχοντος πλευρὰς 35 μ., 28 μ., 32 μ. ὑπὸ κλίμακα 1 : 100.

Κατασκευάζομεν ἓν τρίγωνον μὲ πλευρὰς 0,35 μ., 0,28. μ. καὶ 0,32 μ. Τοῦτο θὰ εἶνε ὅμοιον μὲ τὸ δοθέν. Ἐπειδὴ αἱ πλευραί του εἶνε τὸ ἑκατοστὸν ἐκείνου. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου θὰ εἶνε τὸ $\frac{1}{100^2} = \frac{1}{10000}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος τριγώνου.

β΄) Πρὸς κατασκευὴν τοῦ σχεδίου ἑνὸς σχήματος οἱουδήποτε ὑπὸ κλίμακα μεταχειρίζονται συνήθως τὴν καλουμένην μέθοδον τῶν τετραγωνιδίων. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον τῆς εἰκόνος (ἀνθρώπου) τοῦ σχήματος (117) ὑπὸ κλίμακα 2 : 3 ἢ 1 : $\frac{2}{3}$. Περικλείομεν τὴν εἰκόνα ἐντὸς τετραγώνου ἔστω τοῦ εἰς τὸ σχ. (117). Διαιροῦμεν τοῦτο εἰς 100 ἴσα τετράγωνα (§ **46**, γ΄). Ἀκολούθως κατασκευάζομεν τὸ σχέδιον τοῦ τετραγώνου τοῦ σχ. (117) ὑπὸ κλίμακα 1 : $\frac{2}{3}$ Ἔστω τοῦτο τὸ εἰς τὸ σχ. (118). Τοῦτο διαιροῦμεν πάλιν εἰς 100 ἴσα τετραγωνίδια. Κατασκευάζομεν τὰ διάφορα μέρη τῆς δοθείσης εἰκόνος ἐπὶ τοῦ σχεδίου καὶ καθὲν εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του τετραγωνίδιον μὲ μεγάλην προσέγγισιν εἰς τὴν ἀντίστοιχον θέσιν του. Οὕτω ὁ ὀφθαλμὸς τῆς δοθείσης εἰκόνος, ὁ ὁποῖος κεῖται εἰς τὸ 28ον τετραγωνίδιον τοῦ μεγάλου τετραγώνου σχ. (117), θὰ κατασκευασθῇ εἰς τὸ ἀντίστοιχόν του 28ον τετραγωνίδιον τοῦ μικροῦ τετραγώνου σχ. (118).



Σχ. (117)

Σχ. (118)

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Πόσον μεγάλη πρέπει νὰ ἰχνογραφηθῇ εὐθεῖα 15 μ., 9 μ., 8 μ. ὑπὸ κλίμακα 1 : 10, ἢ 1 : 100;

2) Πόσον θὰ εἶνε τὸ σχέδιον εὐθείας 120 μ.· 150 μ.· 25 δκ. ὑπὸ κλίμακα 1 : 100;

3) Πόσον θὰ εἶνε τὸ σχέδιον εὐθείας 15 μ.· 12 μ.· 40 εκ.· ὑπὸ κλίμακα 1 : 20 ; πόσον ὑπὸ κλίμακα 1 : 50 ;

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶνε 25 μ., 20 μ., 15 μ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχέδιόν του ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000.

2) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχέδιον τετραγώνου ὑπὸ κλίμακα 1 : 100, ἂν ἡ πλευρά του εἶνε 8 μ.· 25 μ.· 10 μ.

3) Ὀρθογωνίου αἱ πλευραὶ εἶνε 12 μ., 7 μ. νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχέδιόν του ὑπὸ κλίμακα 1 : 200.

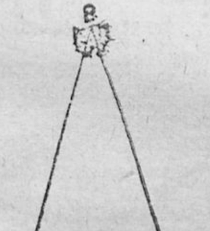
4) Κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 3 μ., νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 0,01.

Ὁμὰς τρίτη. 1) Τὸ σχέδιον σχήματος ἔχει εὐθείας μήκους 5 γρ., 8 δ., 3 γρ., 4, 5 δ. Πόσον εἶνε τὸ πραγματικὸν μῆκος τῶν γραμμῶν, ἐὰν τὸ σχέδιον ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 ; 1 : 2000 ; 1 : 500 ;

2) Τὸ σχέδιον ὀρθογωνίου αἰθούσης διδασκαλίας ἔχει διαστάσεις 0,960 μ. καὶ 0,670 μ. Τίνες εἶνε αἱ διαστάσεις τῆς αἰθούσης, ἂν τὸ σχέδιον ἔγινεν ὑπὸ κλίμακα 1 : 10 ; Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου καὶ τῆς αἰθούσης ; τίς ὁ λόγος των ; Διατί ;

3) Τὸ σχέδιον παραλληλογράμου ὑπὸ κλίμακα 1 : 100 ἔχει πλευρὰς 3 γρ., 7.· ἡ γωνία τούτων εἶνε 45°. Πόσαι θὰ εἶνε αἱ πλευραὶ καὶ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ;

Ὁμὰς τετάρτη (ἐν ὑπαίθρῳ). 1) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις*



Σχ. (119)

Σχ. (120)

Σχ. (121)

Σχ. (122)

σημείου Α ἀπὸ ἄλλου Β, εἰς τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ πλη-

σιάσωμεν. (Ἀπὸ τὸ Α μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μίαν εὐθεῖαν ΑΓ. Σημειώνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε (διὰ πασσάλων), ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΓΕ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ Β. Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Ζ καὶ Η ἐπὶ τῆς ΑΓ. Μετροῦμεν τὰς πλευρὰς σχ. (119) τῶν τριγώνων ΑΖΔ, ΗΓΕ. Γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖαν αγ ἴσην π. χ. μὲ τὸ χιλιοστὸν τῆς ΑΓ σχ. (120). Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ αζ ἴσον μὲ τὸ χιλιοστὸν τῆς ΑΖ. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον αζδ ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΖΔ (λόγος τῶν πλευρῶν 1 : 1000). Ἐπίσης λαμβάνομεν τὴν γη ἴσην μὲ τὸ χιλιοστὸν τῆς ΓΗ. Κατασκευάζομεν τὸ γηε ὅμοιον τοῦ ΓΗΕ. Αἱ γωνίαι γ, Γ εἶνε ἴσαι καθὼς καὶ αἱ α, Α. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς αδ, γε μέχρις ὅτου συναντηθοῦν, καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ τρίγωνον αδγ ὅμοιον τοῦ ΑΒΓ. Πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς αδ ἐπὶ 1000, καὶ ἔχομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ).

2) «*Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀγροῦ πολυγωνικοῦ*».

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ σχ. (121) ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Μετροῦμεν διὰ τῆς μετροταινίας τὰς πλευράς του (σελ. 60, ὁμὰς 2α, ἄσκ. 1) καὶ τὰς διαγωνίους του ΑΔ, ΑΓ. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ὑπὸ κλίμακα 1 : 1000 π. χ. τὰ τρίγωνα αδγ, αγδ, αδε ὅμοια πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ ἀντιστοίχως καὶ ὁμοίως κείμενα σχ. (122). Τὸ αδγδε θὰ εἶνε ὅμοιον τοῦ ΑΒΓΔΕ. Εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ αδγδε, εὑρίσκοντες τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων του, καὶ προσθέτοντες αὐτά (§ **32**). Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 1000^2, καὶ ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔΕ (§ **63**, **δ'**).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδων ἐν τῷ χώρῳ

§ **69. Πῶς ὁρίζεται ἓν ἐπίπεδον.**—*α'*) Ἐὰν διὰ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, φέρωμεν ἐπίπεδον, καὶ προσπαθήσωμεν νὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶνε ἀδύνατον. Διότι πᾶν τοιοῦτον ἐπίπεδον συμπίπτει μὲ τὸ πρῶτον. Ὥστε

«*τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον*».

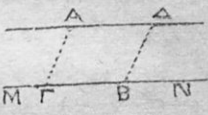
β') Ὅταν ἔχωμεν τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διὰ τῶν δύο ἐξ αὐτῶν διέρχεται μία εὐθεῖα γραμμή, ἑπομένως

«*μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς αὐτῆς, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον*».

γ') Ἂν ἔχωμεν τρία σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, καὶ συνδέσωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν μὲ τὰ δύο ἄλλα δι' εὐθειῶν, θὰ ἔχωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας. Ἑπομένως

«*δύο εὐθεῖαι, τεμνόμεναι, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον*».

δ') Ἐὰν ἔχωμεν δύο εὐθείας παραλλήλους, ἔστω τὰς ΑΔ καὶ ΜΝ σχ. (123), καὶ κατασκευάσωμεν ἐπίπεδον διὰ μιᾶς τῶν παραλλήλων καὶ ἑνὸς σημείου τῆς ἄλλης, παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο συμπίπτει ἀκριβῶς μὲ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι

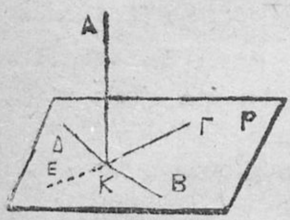


Σχ. (123)

«*δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον*».

§ **70. Θέσεις δύο εὐθειῶν μεταξύ των.**—Καθὼς εἴδομεν, δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἢ παράλληλοι, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, καὶ κεῖνται ἐπ' αὐτοῦ. Δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ ἔχουν καὶ τοιαύτην θέσιν μεταξύ των, ὥστε ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν, νὰ μὴ κόπτωνται, ἀλλὰ καὶ νὰ μὴ ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον. (Π.χ. δύο τηλεγραφικὰ σύρματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν περνᾷ ὑπεράνω τοῦ ἄλλου, καὶ φαίνεται ὅτι διασταυρώνει τὸ πρῶτον, χωρὶς νὰ τὸ ἐγγίζῃ †). Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν ὅτι «δύο εὐθεῖαι ἢ *τέμνονται*, ἢ εἶνε *παράλληλοι*, ἢ δὲν *ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον*».

§ **71. Θέσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.**—α') Λέγομεν ὅτι μία εὐθεῖα εἶνε *κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον*, ἂν εἶνε κάθετος ἐπὶ καθεμίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ση μείου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δοθεῖσα τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον. Οὕτω εἰς τὸ σχ. (124) ἡ εὐθεῖα ΑΚ λέγεται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἂν εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΒ, τὴν ΚΓ, τὴν ΚΔ, τὴν ΚΕ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ Ρ καὶ διέρχονται διὰ τοῦ Κ.



Σχ. (124)

β') Εὐθεῖά τις λέγεται *πλαγία πρὸς ἐπίπεδον*, ἂν τρυπᾷ αὐτὸ (εἰς ἓν σημεῖον), καὶ δὲν εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτό.

γ') Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον μία εὐθεῖα, π.χ. ἡ ΑΚ (σχ. 124) τρυπᾷ ἢ τέμνει ἐπίπεδον λέγεται *ἴχνος* τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου· ἂν δὲ ἡ εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, καλοῦμεν τὸ ἴχνος της καὶ *πόδα* τῆς καθέτου αὐτῆς, καθὼς π.χ. τὸ Κ τῆς καθέτου ΑΚ σχ. (124).

§ **72. Πῶς διακρίνομεν ἂν μία εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον.**—α') Ἐὰν εὐθεῖα ΑΚ τρυπᾷ ἐπίπεδον Ρ σχ. (124) εἰς τὸ σημεῖον Κ, καὶ εἶνε κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, π.χ. τὰς ΚΓ καὶ ΚΔ, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Ρ, διερχομένην διὰ τοῦ Κ, π.χ. ἐπὶ τὰς ΚΒ, ΚΕ.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι «*ἂν εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ἐπιπέδου εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον*».

Οὕτω π.χ. καθεμία τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου †) καὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου †) εἶνε κάθετος ἐπὶ δύο ἀκμὰς τῆς ἕδρας τὴν ὁποίαν συναντᾷ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν αὐτήν.

β') Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν μία εὐθεῖα, π.χ. ἡ ΑΚ σχ. (124), εἶνε κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, τὸ Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει, τοποθετοῦμεν τὸ γνώμονα (ὄρθιον) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἴχνους Κ τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ΑΚ, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ πρώτη κάθετός του πλευρὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου †), ἡ ΑΚ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

§ 73. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον.—

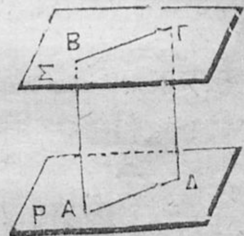
α΄) Ἐὰν ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς (ἢ ἐπὶ) ἐπιπέδου, φέρωμεν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἄλλας, αἱ ὁποῖαι τὸ τέμνουν, παρατηροῦμεν, ὅτι καθεμία ἐξ αὐτῶν εἶνε πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι *«ἐκ σημείου ἐκτὸς (ἢ ἐπὶ) ἐπιπέδου κειμένου, ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπ' αὐτό».*

β΄) Καλοῦμεν *ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου,* τὴν εὐθεῖαν, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

γ΄) Ἂν συγκρίνωμεν τὴν ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον, κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ, μὲ ἄλλας πλαγίας, τὰς ὁποίας φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου πρὸς τὸ ἐπίπεδον, παρατηροῦμεν ὅτι καθεμία τῶν πλαγίων εἶνε μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως. Ἑπομένως, *«ἡ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον, κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἥτις ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον μέχρι τοῦ ἐπιπέδου».*

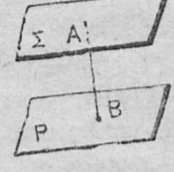
§ 74 Ἰδιότης τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.—

α΄) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (§ 21, β΄) π.χ. τὰ Ρ καὶ Σ σχ. (125), κοποῦν ὑπὸ ἄλλου, π. χ. τοῦ ΒΔ, αἱ τομαὶ των ΑΔ καὶ ΒΓ εἶνε εὐθεῖαι παράλληλοι. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι *«αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου εἶνε εὐθεῖα παράλληλοι».*



Σχ. (125)

β΄) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα μεταξύ των, π. χ. τὰ Σ καὶ Ρ σχ. (126), καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ ἑνός, π. χ. ἀπὸ τοῦ Α τοῦ Σ, φέρωμεν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἄλλο Ρ, ἔστω τὴν ΑΒ, αὐτὴ θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ πᾶσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο. Ἤτοι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι κοιναὶ κάθετοι τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.

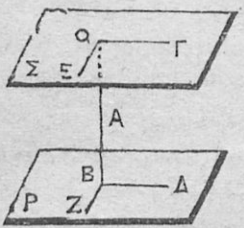


(Σχ. 126)

γ΄) Καλοῦμεν *ἀπόστασιν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων* τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁ ὁποία εἶνε κοινὴ κάθετος τῶν ἐπιπέδων τούτων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀρκεῖ ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ ἑνὸς νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ἄλλο.

ϛ') Ἐὰν ἔχωμεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, π. χ. τὰ Σ καὶ Ρ σχ. (126) καὶ μεταξὺ αὐτῶν φέρωμεν εὐθείας παραλλήλους, τὰς συγκρίνωμεν δὲ μεταξύ των, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε ἴσαι. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι *«εὐθεῖαι παράλληλοι, κείμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶνε ἴσαι»*.

ε') Ἐὰν ἔχωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΟΒ σχ. (127) καὶ φέρωμεν πάσας τὰς καθέτους της ἀπὸ καθὲν τῶν ἄκρων της Ο καὶ Β, παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ εἰς τὸ Ο κάθετοι ἐπ' αὐτὴν θὰ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἔστω τοῦ Σ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ο· αἱ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ Β κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἔστω τοῦ Ρ, ἐπίσης καθέτου ἐπ' αὐτήν. Τὰ δύο αὐτὰ κάθετα ἐπίπεδα (Ρ καὶ Σ) ἐπὶ τὴν ΟΒ εἶνε παράλληλα μεταξύ των. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι *«ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶνε παράλληλα»*.



Σχ. (127)

ζ') Ἀντιστρόφως, *«ἐὰν εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ ἓν ἐκ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὰ ἄλλα»*, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος), προεκτείνοντες τὴν εὐθεῖαν ἐν ἀνάγκῃ.

Ἀσκήσεις

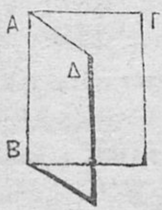
1) Εὕρετε εὐθείας ἐν τῷ δωματίῳ, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶνε κάθετοι ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον· ἐπὶ δύο ἐπίπεδα· ποίαν θέσιν ἔχουν τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα μεταξύ των; Διατί;

2) Εὕρετε παράλληλα ἐπίπεδα ἐν τῷ δωματίῳ· τοποθετήσατε καταλλήλως δύο βιβλία κλειστά, ὥστε νὰ ἔχουν θέσιν παραλλήλων ἐπιπέδων.

3) Τοποθετήσατε τὸ μολυβδοκόνδυλόν σας ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ ἐπὶ τοῦ χάρτου, ὥστε νὰ ἔχετε α') τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον· β') καθέτου πρὸς ἐπίπεδον· γ') πλαγίας πρὸς ἐπίπεδον.

Περὶ διέδρων καὶ στερεῶν γωνιῶν

§ **75. Δίεδροι γωνίαι.**—α') *Δίεδρος γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνονται καὶ περατοῦνται εἰς τὴν τομήν των. Οὕτω π.χ. δύο τεμνόμεναι ἕδραι τοῦ κύβου†), τοῦ παραλληλεπιπέδου†), τοῦ πρίσματος†) καὶ τὰ ἐπίπεδα Γ καὶ Δ σχ. (128) ἀποτελοῦν δίεδρον γωνίαν.



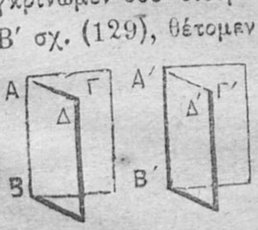
(Σχ. 128)

β') *Ἕδραι* διέδρου γωνίας λέγονται τὰ ἐπίπεδα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται, *ἀκμὴ* δὲ τῆς διέδρου ἡ τομὴ τῶν δύο ἑδρῶν της.

γ') Τὴν δίεδρον γωνίαν σημειώνομεν συνήθως διὰ δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα γράφομεν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς της, ἢ καὶ διὰ τεσσάρων, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ μὲν δύο γράφομεν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς της καθὲν δὲ τῶν ἄλλων δύο ἐπὶ μιᾶς τῶν ἑδρῶν της ἀντιστοίχως. Κατὰ τὴν ἀπαγγελίαν της τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς τίθενται μεταξὺ τῶν ἄλλων. Οὕτω ἡ δίεδρος γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα Γ καὶ Δ σχ. (128), τεμνόμενα κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB, σημειώνεται διὰ τοῦ AB ἢ διὰ τοῦ Γ-AB-Δ.

δ') Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *ἴσαι*, ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ τεθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ ἀκμὴ καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἀκμῆς καὶ τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης ἀντιστοίχως, καὶ ν' ἀποτελεσθῇ μία μόνη δίεδρος γωνία.

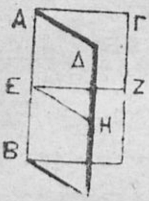
§ **76. Σύγκρισις διέδρων γωνιῶν.**— Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο διέδρους γωνίας μεταξύ των, π.χ. τὰς AB καὶ A'B' σχ. (129), θέτομεν τὴν AB ἐπὶ τῆς A'B' καταλλήλως, ὥστε ἡ ἀκμή της καὶ ἡ μία ἕδρα της νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς καὶ τῆς μιᾶς ἕδρας τῆς ἄλλης ἀντιστοίχως, ἡ δὲ δευτέρα ἕδρα τῆς AB νὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος τῆς δευτέρας ἕδρας τῆς A'B'. Ἂν ἡ ἕδρα αὐτὴ τῆς AB πέσῃ



(Σχ. 129)

ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας τῆς A' B', αἱ δύο δίεδροι γωνίαι εἶνε ἴσαι· ἂν πέσῃ ἐντὸς τῆς διέδρου Α΄Β΄ (μεταξὺ τῶν ἑδρῶν της), ἡ ΑΒ εἶνε μικροτέρα τῆς Α΄Β΄· ἂν δὲ πέσῃ ἔξω τῆς Α΄Β΄ (πέραν τῆς δευτέρας ἕδρας της), ἡ ΑΒ εἶνε μεγαλυτέρα τῆς Α΄Β΄.

§ 77. **Πῶς μετροῦμεν δίεδρον γωνίαν.** — α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν μίαν δίεδρον γωνίαν, π.χ. τὴν Γ-ΑΒ-Δ σχ. (130). Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἀκμῆς της, ἔστω τὸ Ε,



(Σχ. 130)

φέρομεν δύο εὐθείας καθέτους ἐπ᾽ αὐτήν, καὶ ὥστε ἡ μὲν μία νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἕδρας Γ, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τῆς ἕδρας Δ. Ἔστωσαν αὗται ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΕΗ. Οὕτω σχηματίζεται ἡ γωνία ΖΕΗ. Ἡ γωνία ΖΕΗ θὰ λέγωμεν ὅτι μετρεῖ ἢ παριστάνει τὴν δίεδρον Γ-ΑΒ-Δ, καὶ καλεῖται *ἀντίστοιχος τῆς διέδρου.*

β΄) Κατὰ ταῦτα *ἀντίστοιχος γωνία διέδρου* λέγεται ἡ (ἐπίπεδος) γωνία, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν, καθέτων ἐπὶ τὴν ἀκμήν της εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ κειμένων ἐπὶ τῶν ἑδρῶν της ἀντιστοίχως.

γ΄) Διὰ νὰ μετρήσωμεν δίεδρόν τινα γωνίαν, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀντίστοιχόν της, καὶ ὅσων μοιρῶν εἶνε αὕτη τόσων μοιρῶν λέγομεν ὅτι εἶνε ἡ καὶ δίεδρος.

§ 78. **Εἴδη διέδρων γωνιῶν.** — α΄) Δίεδρος γωνία λέγεται *ὀρθή*, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχός της εἶνε ὀρθή· τότε δὲ λέγομεν ὅτι αἱ ἕδραι της εἶνε *κάθετοι* μεταξύ των.

Ἐν γένει, «*λέγομεν ὅτι δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα (μεταξύ των), ἐάν, τεμνόμενα, σχηματίζουν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν*».

β΄) *Ὀξεῖα* ἢ *ἀμβλεῖα* λέγεται μία δίεδρος γωνία, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχός της εἶνε ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

γ΄) Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται *συμπληρωματικαί*, ἢ *παραπληρωματικαί*, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοί των εἶνε συμπληρωματικαί, ἢ παραπληρωματικαί.

δ΄) *Ἐφεξῆς* λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἂν ἔχουν τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας των ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

ε΄) *Κατὰ κορυφὴν* λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἂν αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶνε προέκτασις τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης.

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν διέδρων γωνιῶν τοῦ κύβου†). Ἐξηγήσατε διατὶ καθεμία ἐξ αὐτῶν εἶνε ὀρθή.

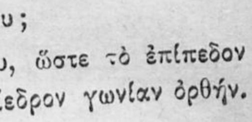
2) Κατασκευάσατε δύο ἐφεξῆς διέδρους γωνίας ἐκ χαρτονίου· κατασκευάσατε τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν καθεμιᾶς ἐξ αὐτῶν.

3) Πῶς θὰ κατασκευάσετε δύο ἐφεξῆς διέδρους γωνίας παραπληρωματικὰς ἐκ χαρτονίου; Πῶς δύο ἐφεξῆς συμπληρωματικάς;

4) Πῶς θὰ μετρήσετε μίαν δίεδρον γωνίαν τοῦ δωματίου, σχηματιζομένην ὑπὸ δύο ἐπιπέδων τοίχων του;

5) Ἀνοίξατε τὴν θύραν τοῦ δωματίου, ὥστε τὸ ἐπίπεδον τῆς θύρας καὶ τοῦ τοίχου νὰ σχηματίζουν δίεδρον γωνίαν ὀρθήν.

§ 79. Περὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν.—α΄) *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, διερχόμενα δι' ἑνὸς σημείου, καὶ περατούμενα καθὲν εἰς τὰς δύο εὐθείας καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν παρακειμένων του δύο ἐπιπέδων. Οὕτω ἀνὰ τρεῖς ἕδραι τοῦ κύβου †), τοῦ παραλληλεπιπέδου †), διερχόμεναι διὰ μιᾶς κορυφῆς του ἀποτελοῦν στερεὰς γωνίας. Ἐπίσης τὸ σχ. (131), τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία ἐπίπεδα ΣΑΒ, ΣΑΓ, ΣΒΓ, διερχόμενα διὰ τοῦ σημείου Σ, καὶ περιοριζόμενα καθὲν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων (τὸ ΣΑΒ ὑπὸ τῶν ΣΑ καὶ ΣΒ· τὸ ΣΒΓ ὑπὸ τῶν ΣΒ καὶ ΣΓ, τὸ ΣΑΓ ὑπὸ τῶν ΣΑ καὶ ΣΓ), παριστάνει στερεὰν γωνίαν εἰς τὸ Σ.



(Σχ. 131)

β΄) *Ἕδραι* στερεᾶς γωνίας λέγονται τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τὴν σχηματίζουν, *ἀκμαὶ* δὲ τῆς στερεᾶς γωνίας αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν της, καὶ *κορυφή* της τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἑδρῶν της. *Δίεδροι γωνίαι στερεᾶς γωνίας* λέγονται αἱ δίεδροι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἕδραι της. *Ἐπίπεδοι γωνίαι στερεᾶς γωνίας* λέγονται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦν αἱ ἀκμαὶ καθεμιᾶς ἕδρας.

γ') Στερεὰ γωνία λέγεται *τρίεδρος, τετράεδρος* . . . ., ἐὰν ἔχῃ *τρεῖς, τέσσαρας* . . . . ἕδρας. Οὕτω τὸ ΣΑΒΓ σχ. (131), παριστάνει τρίεδρον στερεὰν γωνίαν (εἰς τὸ Σ) τῆς ὁποίας ἕδραι εἶνε τὰ ἐπίπεδα ΣΑΒ, ΣΑΓ, ΣΒΓ, ἀκμαί της αἱ εὐθεῖαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, καὶ κορυφή της τὸ σημεῖον Σ.

δ') *Ἴσαι* λέγονται δύο στερεαὶ γωνίαι, ἂν δύναται νὰ τεθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν καὶ νὰ ἀποτελέσουν μίαν στερεὰν γωνίαν, καθὼς π.χ. αἱ Σ' καὶ Σ' τοῦ σχ. (131).

Ἀσκήσεις

1) Πόσαι στερεαὶ γωνίαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἓξ ἐπιπέδων ἑδρῶν δωματίου ; Πόσας ἕδρας, διέδρους ἔχει καθεμία ;

2) Πόσας στερεὰς γωνίας ἔχει ὁ κύβος †); Πόσας ἕδρας ἔχει καθεμία καὶ πόσας ἀκμάς ; Ὁ κύλινδρος ἔχει διέδρους καὶ στερεάς γωνίας †); Διατί ;

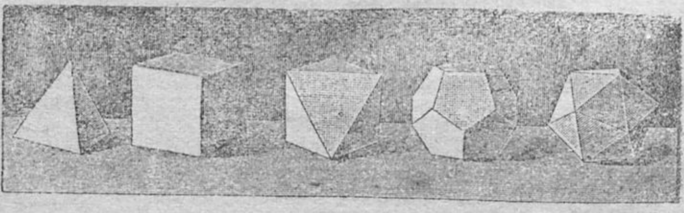
3) Ὁ κῶνος ἔχει στερεὰς γωνίας †); Διέδρους ; Διατί ;

4) Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἔχομεν διέδρους γωνίας †); Στερεάς; Διατί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περὶ τῶν κυριωτέρων γεωμετρικῶν στερεῶν σωμάτων.

§ **80. Περὶ πολυέδρων.**—α') *Πολύεδρον* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν ὑπὸ εὐθυγράμμων

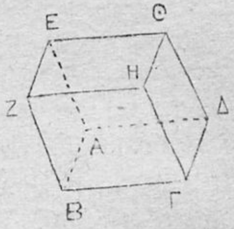


(Σχ. 132) (Σχ. 133) (Σχ. 134) (Σχ. 135) (Σχ. 136)

σχημάτων. *Ἕδραι* πολυέδρου λέγονται τὰ εὐθύγραμμα σχήματα εἰς τὰ ὁποῖα περατοῦται. Οὕτω ὁ κύβος †), τὸ παραλληλεπίπεδον †), τὸ πρίσμα †), ἡ πυραμὶς †) εἶνε πολύεδρα.

β') Ἀκμαὶ ἑνὸς πολυέδρου λέγονται αἱ εὐθεῖαι, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνονται ἀνὰ δύο παρακείμεναι ἕδραι του. Ἐὰν ἓν πολύεδρον ἔχῃ 4· 5· 6· 8· 12· 20·... ἕδρας, λέγεται τετράεδρον σχ. (132)· πεντάεδρον· ἑξάεδρον σχ. (133)·...ὀκτάεδρον σχ. (134)· δωδεκάεδρον σχ. (135)·... εἰκοσάεδρον σχ. (136)...

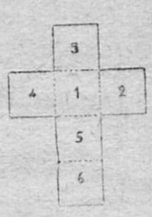
γ') *Κορυφαὶ πολυέδρου* λέγονται τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα συναντῶνται ἀνὰ τρεῖς, ἢ περισσότεραι, παρακείμεναι ἕδραι του. Οὕτω τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ σχ. (137) παριστάνει ἑξάεδρον. Αἱ ἓξ ἕδραι τούτου εἶνε αἱ ΒΔ(κάτω), ΖΘ (ἄνω), ΓΘ (δεξιά), ΒΕ (ἀριστερά), ΒΗ (ἐμπρός), καὶ ΑΘ (ὀπίσω). Ἀκμαὶ τοῦ ἑξαέδρου αὐτοῦ εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΕΖ, ΒΖ, ΑΕ, ΓΗ, ΔΘ· κορυφαί του δὲ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.



(Σχ. 137)

§ 81. **Περὶ κύβου.**—α') *Κύβος* λέγεται τὸ ἑξάεδρον†), τοῦ ὁποίου καθεμία ἕδρα εἶνε τετράγωνον. Ἡ ἐπιφάνειά του ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ἴσα τετράγωνα. Ὁ κύβος ἔχει 12 ἴσας ἀκμάς, καὶ 8 κορυφάς.

§ 82. **Πῶς κατασκευάζομεν κύβον.**—Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κύβον ἀπὸ χαρτόνιον, κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χαρτονίου ἓξ ἴσα τετράγωνα, καθὼς τὰ 1· 3· 5· 6· 2· 4 σχ. (138). Οὕτω σχηματίζεται εἷς σταυρός, τὸν ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τὸ χαρτόνιον. Χαράσσομεν ἐλαφρῶς τὴν περίμετρον τοῦ 1, καὶ τὴν εὐθεῖαν κατὰ τὴν ὁποίαν συνδέονται τὰ 5 καὶ 6, ὥστε νὰ δυνηθῶμεν νὰ στρέψωμεν πέριξ αὐτῶν τὰ τετράγωνα, χωρὶς ν' ἀποκοποῦν. Ἀκολούθως κρατοῦμεν τὸ 1 ἐπὶ τῆς τραπέζης, καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ὑψώνομεν τὰ 2· 3· 4 καὶ 5· 6, ὥστε νὰ εἶνε ὄρθια. Οὕτω ἔχομεν ἓν κυτίον ἀνοικτὸν ἄνωθεν, τὸ ὁποῖον κλείομεν διὰ τοῦ τετραγώνου 6, στρεφομένου πρὸς τὰ κάτω †).



(Σχ. 138)

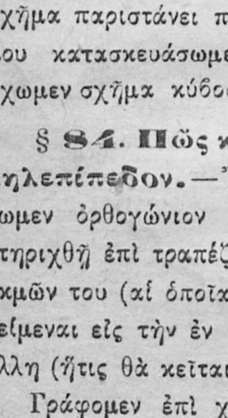
§ **83. Περὶ παραλληλεπιπέδου.**— α') *Παραλληλεπίπεδον* καλεῖται τὸ ἑξάεδρον, τοῦ ὁποίου καθεμία ἕδρα εἶνε παραλληλόγραμμον. Οὕτω τὸ ἑξάεδρον ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ σχ. (137) παριστάνει παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἓξ ἕδραι εἶνε παραλληλόγραμμα. Τοῦτο ἔχει δώδεκα ἀκμάς, καὶ ὀκτὼ κορυφάς, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

β') *Ὀρθογώνιον* λέγεται ἓν παραλληλεπίπεδον, ἐὰν αἱ ἕδραι του εἶνε ὀρθογώνια.

γ') Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα, παριστάνον παραλληλεπίπεδον, ἐπὶ τοῦ πίνακος (ἢ τοῦ χάρτου), γράφομεν ἓν παραλληλόγραμμον, ἔστω τὸ ΒΓΖΗ σχ. (137). Φανταζόμεθα ὅτι τοῦτο μετακινεῖται ἐπὶ τοῦ πίνακος (ἢ τοῦ χάρτου), ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΔ, καὶ ἡ ΖΗ τὴν ΕΘ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΓΔ, ΖΕ, ΗΘ, καὶ θὰ ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ οὕτω προκύπτον σχῆμα παριστάνει παραλληλεπίπεδον. Ἂν ἀντὶ παραλληλογράμμου κατασκευάσωμεν τετράγωνον, καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, θὰ ἔχωμεν σχῆμα κύβου.

§ **84. Πῶς κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.**—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου ὥστε, ἂν στηριχθῇ ἐπὶ τραπέζης διὰ μιᾶς τῶν ἑδρῶν του, ἐκ τῶν τριῶν ἀκμῶν του (αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς μίαν κορυφήν του), αἱ μὲν κείμεναι εἰς τὴν ἐν λόγῳ ἕδραν νὰ εἶνε 12 γρ. καὶ 6 γρ., ἡ δὲ ἄλλη (ἥτις θὰ κεῖται ἄνω τῆς ἕδρας αὐτῆς) 9 γρ.

Γράφομεν ἐπὶ χαρτονίου τέσσαρα ὀρθογώνια κατὰ σειρὰν σχ. (139) ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ μὲ πλευρὰς 12 γρ., 9 γρ. (τὸ α')· 12 γρ., 6 γρ. (τὸ β')· 12 γρ. 9 γρ. (τὸ γ')· καὶ 12 γρ. 6 γρ. (τὸ δ'). Ἐπὶ τῶν δύο ἔξω πλευρῶν τοῦ β' κατασκευάζομεν ἀκόμη δύο ἴσα ὀρθογώνια μὲ πλευρὰς τῶν 6 γρ., 9 γρ. Τὸ ὅλον τοῦτο σχῆμα ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὸ χαρτόνιον. Χαράσσομεν ἐλαφρῶς τὴν περίμετρον τοῦ β', καὶ τὴν εὐθεῖαν κατὰ τὴν ὁποίαν



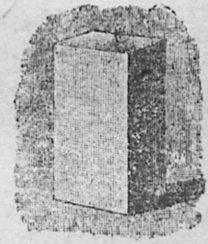
(Σχ. 139)

συνδέονται τὰ δύο δεξιά. Κρατοῦμεν ὁριζόντιον τὸ β΄. Ὑψώνομεν τὰ ἄλλα πέριξ, μέχρις ὅτου γίνουν κατακόρυφα †)· στρέφομεν καὶ τὸ τελευταῖον δεξιά, μέχρις ὅτου κλείσῃ τὸ κυτίον, καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

§ **85. Περὶ πρίσματος.**—α΄) *Πρίσμα* καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο μὲν ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι παραλληλόγραμμα. *Βάσεις* τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ παράλληλοι καὶ ἴσαι ἕδραι του. Οὕτω τὰ σχ. (140, 141) παριστάνουν πρίσματα.

(Σχ. 140)

β΄) Τὸ πρίσμα λέγεται *τριγωνικόν*, *τετραγωνικόν*, *πενταγωνικόν*..., ἐὰν αἱ βάσεις του εἶνε *τρίγωνα*, *τετράπλευρα*, *πεντάγωνα*... Οὕτω τὸ ΑΒΓΔΕΖ σχ. (140) παριστάνει τριγωνικὸν πρίσμα μὲ βάσεις τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ. Τὸ σχ. (141) παριστάνει πρίσμα τετραγωνικόν, ἐπειδὴ ἔχει βάσεις τετράπλευρα.



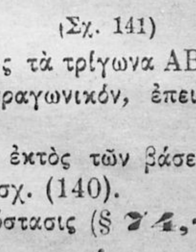
(Σχ. 141)

γ΄) Ἓν πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ἐὰν αἱ ἐκτὸς τῶν βάσεων ἕδραι του εἶνε ὀρθογώνια, καθὼς π.χ. τὸ τοῦ σχ. (140).

δ΄) *Ὕψος* ἑνὸς πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις (§ 74, γ΄) τῶν βάσεών του. Οὕτω εἰς τὸ σχ. (140) ἡ εὐθεῖα ΔΗ παριστάνει τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος τούτου.

§ **86. Πῶς κατασκευάζομεν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.**—

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἐκ χαρτονίου, ἔχον βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο γράφομεν ἐπὶ χαρτονίου κατὰ σειρὰν τρία ὀρθογώνια ἴσα, τὰ 1· 2· 3 σχ. (142). Ἔπειτα ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα τοῦ 2 καὶ πρὸς τὰ ἔξω γράφομεν δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ 4 καὶ 5, μὲ πλευρὰς τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ.



(Σχ. 142)

Τὸ σχῆμα αὐτὸ ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὸ χαρτόνιον, καὶ ἔπειτα χαράσσομεν τὰς πλευρὰς τοῦ 2· στρέφομεν τὰ 1 καὶ 3 πέριξ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, τὰ δὲ τρίγωνα πέριξ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν, ὅτε ἔχομεν τὸ πρίσμα †).

Ἀσκήσεις

1 Ὁ κύβος εἶνε πρίσμα; Διατί; Εἶνε ὀρθὸν πρίσμα; Διατί;

2) Τί καλοῦμεν ὕψος τοῦ κύβου; Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ὕψος ἑνὸς κύβου; Διατί;

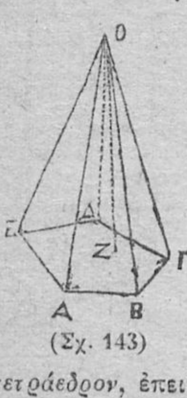
3) Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε πρίσμα; Διατί; Πότε τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε ὀρθὸν πρίσμα; Διατί;

4) Τί εἶνε ἡ βάσις ἑνὸς κύβου; Ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

5) Εὕρετε σώματα, ἔχοντα σχῆμα παραλληλεπιπέδου.

§ **87. Περὶ πυραμίδος.**—α') *Πυραμὶς* λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία μὲν ἕδρα εἶνε πολύγωνον, αἱ δὲ ἄλλαι τρίγωνα, ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν (ἔξω τοῦ πολυγώνου), πλευρὰς δὲ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

β') *Κορυφὴ* πυραμίδος λέγεται ἡ κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν της, *βάσις* δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς της πολυγωνικὴ ἕδρα της. Οὕτω τὸ Ο-ΑΒΓΔΕ σχ. (143) παριστάνει πυραμίδα μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Ο, καὶ βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ.

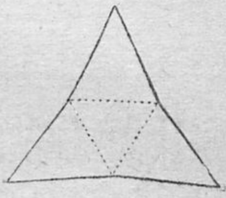


(Σχ. 143)

γ') *Ὕψος* πυραμίδος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς της ἀπὸ τὴν βάσιν της. Οὕτω εἰς τὸ σχ. (143) ἡ ΟΖ παριστάνει τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος Ο-ΑΒΓΔΕ.

δ') Πυραμὶς λέγεται *τριγωνική*, *τετραγωνική*... ἐὰν ἔχῃ βάσιν *τρίγωνον*, *τετράπλευρον*... Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται καὶ *τετράεδρον*, ἐπειδὴ ἔχει τέσσαρας ἕδρας. Οὕτω ἡ πυραμὶς τὴν ὁποίαν παριστάνει τὸ σχ. (143) εἶνε πενταγωνική.

§ **88. Πῶς κατασκευάζομεν τριγωνικὴν πυραμίδα.**—Ἡ ἁπλουστέρα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε ἡ ἔχουσα βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας της τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα μεταξύ των. Τοιαύτην κατασκευάζομεν ἐκ χαρτονίου ὡς ἑξῆς. Γράφομεν ἐπ' αὐτοῦ τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἔστω τὸ μεσαῖον τοῦ σχ. (144)· γύρω τούτου γράφομεν τρία ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τρίγωνα, ἔχοντα βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου. Ἀποκόπτομεν τὸ σχῆμα ἐκ τοῦ χαρτονίου, καὶ χαράσσομεν τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου τριγώνου. Ἔπειτα ἀνασηκώνομεν τὰ ἔξω τρίγωνα γύρω ἀπὸ τὸ μεσαῖον, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν ἐπὶ τῆς τραπέζης, μέχρις ὅτου αἱ κορυφαὶ των συναντηθοῦν †)· Οὕτω ἔχομεν τὴν πυραμίδα.



(Σχ. 144)

Ἀσκήσεις

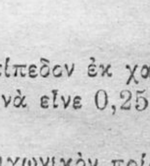
1) Κατασκευάσατε κύβον ἐκ χαρτονίου.

2) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ χαρτονίου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς βάσεώς του νὰ εἶνε 0,25 καὶ 0,15 μ. τὸ δὲ ὕψος του 0,30 μ.

3) Κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα.

4) Κατασκευάσατε τριγωνικὴν πυραμίδα, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι νὰ εἶνε ἰσόπλευρα τρίγωνα.

§ **89. Περὶ κυλίνδρου.**—α') *Κύλινδρος* καλεῖται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γίνεται ἀπὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του (μένουσαν ἀκίνητον) κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἔστω ὅτι ἔχομεν π.χ. τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ σχ. (145). Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ μὲν πλευρά του ΑΓ μένῃ ἀκίνητος, τὸ δὲ ὀρθογώνιον στρέφεται γύρω της ὁλόκληρον στροφὴν †), αἱ μὲν εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ γράφουν δύο ἴσους κύκλους, ἡ δὲ εὐθεῖα ΔΒ μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια* τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος γίνεται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσους κύκλους,



(Σχ. 145)

β') *Βάσις* ἑνὸς κυλίνδρου λέγεται καθὲν τῶν ἴσων κυκλικῶν μερῶν τῆς ἐπιφανείας του. Οὕτω τὸ σχ. (145) παριστάνει κύλινδρον μὲ βάσεις τοὺς κύκλους, τῶν ὁποίων κέντρα εἶνε τὰ Α καὶ Γ.

γ') *Ὕψος (ἢ καὶ ἄξων)* κυλίνδρου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν βάσεών του. Οὕτω ἡ εὐθεῖα ΑΓ σχ. (145) παριστάνειτὸ ὕψος (καὶ τὸν ἄξονα) τοῦ κυλίνδρου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Ποῦ παρατηρεῖτε κύλινδρον;

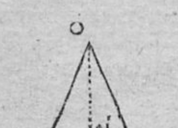
2) Περιτυλίξατε ἓν φύλλον χάρτου, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου.

3) Κατασκευάσατε κύλινδρον ἀπὸ χαρτόνιον.

4) Δοκιμάσατε νὰ ἐφαρμόσεσε τὸν κανόνα ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου Πόσας εὐθείας (διαφόρους) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐπὶ κυλίνδρου; Διατί;

90. Περὶ κώνου.—α') *Κῶνος* καλεῖται τὸ στερεὸν, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν στρέφεται ὁλόκληρον στροφὴν (κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν) πέριξ μιᾶς τῶν καθέτων του πλευρῶν.

Ἔστω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Ο'Α'Γ' σχ. (146) στρέφεται πέριξ τῆς καθέτου πλευρᾶς του Ο'Γ' ὁλόκληρον στροφήν †). Ἡ μὲν πλευρά του Α'Γ' γράφει τὸν κύκλον μὲ κέντρον Γ', ἡ δὲ ὑποτείνουσά του Ο'Α' μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου*, ὁ ὁποῖος γίνεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. Οὕτω ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κύκλον μὲ κέντρον Γ', καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.



(Σχ. 146)

β') *Βάσις* κώνου λέγεται τὸ κυκλικὸν μέρος τῆς ἐπιφανείας του. *Ὕψος* κώνου (ἢ καὶ *ἄξων* του) λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται τοῦτο, ἵνα τὸν παραγάγῃ. Οὕτω τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον παριστάνει τὸ σχ. (146), βάσις εἶνε ὁ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Γ', ὕψος (ἢ ἄξων του) δὲ ἡ εὐθεῖα Ο'Γ' ἢ υ'.

γ') *Κορυφὴ* τοῦ κώνου σχ. (146) λέγεται τὸ σημεῖον Ο', *πλευρά* του δὲ ἡ ὑποτείνουσα Ο'Α' τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον τὸν παράγει.

Ἀσκήσεις

1) Ποῦ παρατηρεῖτε κῶνον;

2) Περιτυλίξατε φύλλον χάρτου, ὥστε νὰ σχηματισθῇ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου.

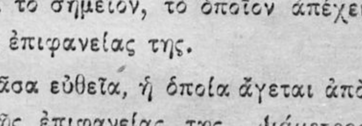
3) Πότε μία εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείαι ἑνὸς κώνου;

4) Πόσας εὐθείας (διαφόρους) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐπὶ ἑνὸς κώνου;

§ **91. Περὶ σφαίρας.**—α') *Σφαῖρα* καλεῖται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του.

β') *Κέντρον σφαίρας* λέγεται τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας της.

γ') *Ἀκτὶς σφαίρας* λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον της εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της. *Διάμετρος* σφαίρας λέγεται εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου της καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειάν της. Οὕτω τὸ σχ. (147) παριστάνει σφαῖραν, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ, κέντρον τὸ Κ, καὶ διάμετρον τὴν ΡΚΡ'.



(Σχ. 147)

δ') *Μέγιστος κύκλος σφαίρας* λέγεται ὁ κύκλος, κατὰ τὸν ὁποῖον κόπτεται ἡ σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου της· *μικρὸς δὲ κύκλος σφαίρας* ὁ κύκλος, κατὰ τὸν ὁποῖον κόπτεται ἡ σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου, μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου της. Οὕτω ὁ κύκλος ΡΣΡ'Ρ σχ. (147), ἔχει κέντρον τὸ τῆς σφαίρας Κ, καὶ παριστάνει μέγιστον κύκλον, ὁ δὲ ΜΠΝΜ μικρὸν κύκλον της. Ἡ ἀκτὶς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶνε ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνά της, μικροῦ δὲ κύκλου εἶνε μικροτέρα.

ε') *Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας* λέγονται αἱ κυκλικαὶ τομαί της, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα (§ **21**,β').

στ') *Σφαιρικὴ ζώνη* λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων της. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ λέγονται *βάσεις* τῆς σφαιρικῆς ζώνης.

Οὕτω εἰς τὸ σχ. (147) ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο κύκλων ΡΣΡ'Ρ καὶ ΜΠΝΜ, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθεται ὅτι εἶνε παράλληλοι, λέγεται *σφαιρικὴ ζώνη*, οἱ δὲ κύκλοι αὐτοὶ εἶνε αἱ βάσεις τῆς σφαιρικῆς αὐτῆς ζώνης.

Ὕψος σφαιρικῆς ζώνης λέγεται ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο βάσεών της.

Ἐνίοτε σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν μόνον βάσιν, ἂν τὸ ἓν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται, ἐγγίζῃ τὴν ἐ..ιφάνειαν τῆς σφαίρας χωρὶς νὰ τὴν κόπτῃ.

ζ') *Σφαιρικὸν τμῆμα* λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. *Βάσεις* σφαιρικοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται τοῦτο· *ὕψος* του δὲ ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο βάσεών του. Ἐὰν τὸ ἓν τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἐγγίζῃ μόνον εἰς ἓν σημεῖον τὴν σφαῖραν, τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν. Οὕτω τὸ μέρος τῆς σφαίρας σχ. (147), τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων, τῶν ὁποίων κέντρα εἶνε τὸ Κ καὶ Ζ, λέγεται σφαιρικὸν τμῆμά της, ἡ δὲ ΚΖ εἶνε ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τμήματος.

Ἀσκήσεις

1) Ἂν ἓν σημεῖον κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς σφαίρας, ποίαν σχέσιν ἔχει ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ κέντρον της ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνά της;

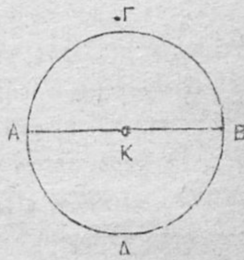
2) Πόσας ἀκτῖνας ἔχει ἡ σφαῖρα; Πόσας διαμέτρους;

3) Δείξατε μεγίστους κύκλους ἐπὶ τῆς γεωγραφικῆς σφαίρας.

4) Τί κύκλος εἶνε ὁ ἰσημερινὸς καὶ οἱ μεσημβρινοὶ ἐπὶ τῆς γεωγραφικῆς σφαίρας;

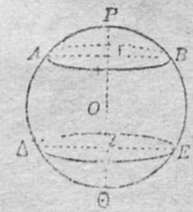
5) Δείξατε παραλλήλους κύκλους ἐπὶ τῆς γεωγραφικῆς σφαίρας.

§ **92. Πῶς γεννᾶται σφαῖρα διὰ περιστροφῆς.** — Ἂν ἡμικύκλιον, π.χ. τὸ ΑΚΒΓΑ σχ. (148), στρέφεται πέριξ τῆς διαμέτρου του ΑΒ ὁλόκληρον στροφήν†), προκύπτει σφαῖρα, ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἡμικυκλίου. Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν σφαῖραν μὲ ὡρισμένην ἀκτῖνα, π.χ. 4 δ., ἐκ περιστροφῆς, γράφομεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα 5 δ. καὶ ἓν ἡμικύκλιον τούτου στρέφομεν περὶ τὴν διάμετρόν του κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.



(Σχ. 148)

§ **93. Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας.** — α') *Πόλοι κύκλου μιᾶς σφαίρας* λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου της, ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Οὕτω ἂν ἡ εὐθεῖα ΡΘ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ, τὰ σημεῖα Ρ καὶ Θ λέγονται πόλοι τοῦ κύκλου ΑΒ.



(Σχ. 149)

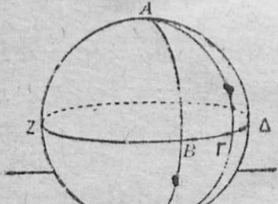
β') Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν παραλλήλων κύκλων σφαίρας εἶνε παράλληλα, π. χ. τῶν ΑΒ καὶ ΔΕ σχ. (149), ἡ διάμετρός της, ἡ κάθετος ἐπὶ ἓν τῶν ἐπιπέδων τούτων, θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὰ ἄλλα (§ **91**, ε'). Ἑπομένως «*οἱ πόλοι παραλλήλων κύκλων σφαίρας εἶνε οἱ αὐτοί*»

§ **94. Ἰδιότης μεγίστου κύκλου σφαίρας.** — «*Τὰ δύο μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ μεγίστου κύκλου της εἶνε ἴσα μεταξύ των*». Διότι, ἂν χωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα μέρη τῆς σφαίρας, καὶ τὰ ἐφαρμόσωμεν, ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς βάσεώς των, θὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἐπιφάνειαί των. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖά των ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς βάσεώς των. Τὰ δύο ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται σφαῖρα ὑπὸ μεγίστου κύκλου της καλοῦνται *ἡμισφαίρια*.

§ **95. Πῶς γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ σφαίρας.**—α′) Διὰ νὰ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου (μὲ ἀκτῖνα μὴ ὑπερβαίνουσαν τὴν τῆς σφαίρας) ἐπὶ σφαίρας, μεταχειριζόμεθα τὸν *σφαιρικὸν διαβήτην*†), τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶνε καμπύλα †). Πρὸς τοῦτο στηρίζομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους του εἰς ἓν σημεῖον τῆς σφαίρας, καὶ περιστρέφομεν αὐτόν, ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους του νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε τὴν ἐπιφάνειάν της. Τὸ ἄκρον τοῦτο γράφει περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου πόλος εἶνε τὸ σημεῖον ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ ἀκίνητον ἄκρον †).

β′) Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου ἐπὶ τῆς σφαίρας, λαμβάνομεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἴσην μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τεταρτημορίου τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της.

§ **96. Ἄτρακτος καὶ σφαιρικὸς ὄνυξ.**—α′) *Ἄτρακτος* καλεῖται μέρος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων της. Οὕτω εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ σχ. (150) ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΕΓΑ, περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ, μεγίστων κύκλων λέγεται ἄτρακτος.



(Σχ. 150)

β′) *Σφαιρικὸς ὄνυξ* λέγεται μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων της. Οὕτω εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ σχ. (150) τὸ μέρος της, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο ἡμικυκλίων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ μεγίστων κύκλων της, λέγεται σφαιρικὸς ὄνυξ.

γ') *Βάσις ἑνὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος* λέγεται ὁ ἄτρακτος, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν τῶν ἡμικυκλίων τοῦ ὄνυχος. Οὕτω τοῦ ἀνωτέρω σφαιρικοῦ ὄνυχος βάσις εἶνε ὁ ἄτρακτος ΑΕΓΑ σχ. (150).

Ἐὰν πορτοκάλιον ἔχῃ σχῆμα σφαίρας, μία φέτα του εἶνε σφαιρικὸς ὄνυξ, ἡ δὲ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς φέτας εἶνε ἄτρακτος.

Ἀσκήσεις

1) Εὕρετε ἐπὶ τῆς γεωγραφικῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους· μικροὺς καὶ παραλλήλους κύκλους.

2) Τί κύκλοι εἶνε οἱ μεσημβρινοί, ὁ ἰσημερινὸς ἐπὶ τῆς γηΐνης σφαίρας; Διατί;

3) Τίνων κύκλων τῆς γηΐνης σφαίρας εἶνε πόλοι οἱ πόλοι τῆς σφαίρας αὐτῆς.

4) Δείξατε μίαν σφαιρικὴν ζώνην ἐπὶ τῆς σφαίρας †), ἕνα ἄτρακτον, ἕνα σφαιρικὸν ὄνυχα.

Περὶ μετρήσεως τῶν στερεῶν σωμάτων

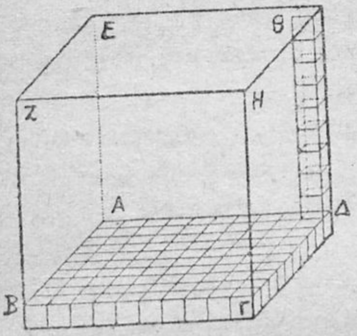
§ **97. Ὁρισμοί.**—α') Καλοῦμεν *ὄγκον* ἑνὸς στερεοῦ σώματος τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεώς του, καὶ ἐκφράζει τὴν ἔκτασίν του.

β') Ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν στερεῶν λαμβάνομεν συνήθως τὸ κυβικὸν μέτρον. Τοῦτο εἶνε κύβος μὲ ἀκμὴν 1 μ. καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ ($μ^3$). Οὕτω 5 ($μ^3$) σημαίνει 5 κυβικὰ μέτρα.

Τὸ 1 ($μ^3$) διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικὰς παλάμας, δηλαδὴ εἰς 1000 κύβους, τῶν ὁποίων ἡ ἀκμὴ εἶνε 0,1 μ. Ἡ κυβικὴ παλάμη εἶνε τὸ χιλιοστὸν τοῦ ($μ^3$), καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ ($δκ^3$) σχ. (151).

Ἡ 1 ($δκ^3$) διαιρεῖται εἰς 1000 κυβικοὺς δακτύλους, καθεὶς τῶν ὁποίων εἶνε κύβος, μὲ ἀκμὴν 0,01 μ. καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ ($εκ^3$), εἶνε δὲ τὸ ἓν ἑκατομμυριοστὸν τοῦ ($μ^3$). Κατὰ ταῦτα τὸ 1 ($μ^3$) ἔχει 1000 ($δκ^3$) καὶ 1000000 ($εκ^3$).

§ **98. Μέτρησις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.**— α΄) Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος εἶνε 4μ., ἡ δὲ βάσις ἔχει διαστάσεις 3 μ. καὶ 2 μ. Διαιροῦμεν τὴν βάσιν του εἰς $3.2=6$ (μ²) (§ **47**, α΄). Ἐπὶ καθενὸς τῶν 6 τούτων τετραγώνων θέτομεν στήλην ἀπὸ τέσσαρα κυβικὰ μέτρα (καθὼς εἰς τὸ σχ. (151) ἔχομεν δέκα τοιούτους μικροὺς κύβους), διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον. Ἐπειδὴ ἔχει ὕψος 4 μ. Ἑπομένως τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον περιέχει 6.4 ἢ $3.2.4=24$(μ³). Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προκύπτει καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς 3, 2, 4, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν τὰ μήκη τῶν διαστάσεων τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ παραλληλεπιπέδου, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ διαστάσεις του (*μῆκος, πλάτος, ὕψος του*).



(Σχ. 151)

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν, ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἄλλων ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων (τρέποντες ἐν ἀνάγκῃ τὰ μήκη τῶν διαστάσεών του εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως). Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι «*ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του*».

β΄) Ἂν διὰ τῶν α, β, γ παραστήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὁ ὄγκος του, τὸν ὁποῖον παριστάνομεν διὰ τοῦ O, θὰ εἶνε $O=\alpha.\beta.\gamma$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.$ παριστάνει, ὡς γνωστὸν (§ **47**, γ΄), τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἑπομένως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι «*ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του*».

Οὕτω ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπίδου, ἔχοντος διαστάσεις 3μ., 4μ., 5μ., θὰ εἶνε $O=3.\ 4.\ 5=60$ (μ^3).

γ') Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληπεπιπέδου, παρατηροῦμεν, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ ὀρθογώνια. Ἑπομένως «*διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν καθεμιᾶς τῶν ἑδρῶν του, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα*».

§ **99. Μέτρησις κύβου.**—Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κύβου, ἔχοντος ἀκμὴν α, θὰ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα τὸ γινόμενον α. α. α, τὸ ὁποῖον λέγεται *κύβος τοῦ α* ἢ *τρίτη δύναμις τοῦ α*, καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ α^3. Διότι ὁ κύβος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶνε ἴσαι. Ἑπομένως

«*ὁ ὄγκος κύβου, ἔχοντος ἀκμὴν α, ἰσοῦται μὲ* α^3, *ἤτοι μὲ τὸν κύβον τῆς ἀκμῆς του*».

Οὕτω ὁ ὄγκος κύβου, ἔχοντος ἀκμὴν $\frac{3}{2}$ μ., ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{2}\cdot\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}=\frac{27}{8}$ (μ^3).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἔχοντος διαστάσεις α') 3 μ., 12 μ, 7 μ. β') 3,8 μ. 2 μ., 8,5 μ.. γ') $2\frac{1}{2}$ μ., 0.5 μ., $3\frac{1}{3}$ μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κύβου, ἔχοντος ἀκμὴν α') 3, 7μ· β') 8,5 μ., γ') $\frac{4}{9}$ μ.

3) Μιᾶς κυβικῆς δεξαμενῆς ἡ (ἐσωτερικὴ) ἀκμὴ εἶνε 3,5μ.· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος της;

4) Κτίστης κτίζει τοῖχον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μήκους 56,34 μ. πάχους 0,38 μ. καὶ ὕψους 1,40 μ. α') πόσον ὄγκον ἔχει ὁ τοῖχος; β') Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ, ἂν πληρώνεται 6,20 δρ. διὰ καθὲν (μ^3).

5) Δεξαμενή τις ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχοντος (ἐσωτερικὰς) διαστάσεις 23μ., 9μ., 7μ. α') Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος της; β') Πόσα λίτρα ὕδατος χωρεῖ; (ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης λέγεται λίτρον).

§ **100. Μέτρησις ὀρθοῦ πρίσματος καὶ πυραμίδος.** — α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς οἱουδήποτε παραλληλεπιπέδου. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, καὶ τὸ ὕψος, εἶνε ἴσα, μὲ τὰ ἀντίστοιχα τοῦ δοθέντος. Διότι, ἂν δύο τοιαῦτα παραλληλεπίπεδα εἶνε κατεσκευασμένα ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης (π.χ. ἐκ κηροῦ, ξύλου....) καὶ ζυγισθοῦν, *ἔχουν ἴσα βάρη*, ἄρα καὶ ἴσους ὄγκους. Διότι, *ὅπως σχετίζονται μεταξύ των τὰ βάρη δύο στερεῶν ἐκ τῆς αὐτῆς ὕλης, οὕτω σχετίζονται καὶ οἱ ὄγκοι των*, καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ οἱονδήποτε ὀρθὸν πρίσμα. Ἑπομένως ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

«Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του». Π.χ. ἂν ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς πρίσματος εἶνε 40 (μ^2), τὸ δὲ ὕψος του 3μ., ὁ ὄγκος του θὰ εἶνε $40.3 = 120$ (μ^3).

β') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς πυραμίδος. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου πρίσματος, ἔχοντος ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, καὶ ὕψος, ἴσα μὲ τὰ τῆς πυραμίδος ἀντιστοίχως. Διότι, ἂν ἔχωμεν δύο τοιαῦτα στερεὰ σώματα, κατεσκευασμένα ἀπὸ τὴν αὐτὴν ὕλην, καὶ τὰ ζυγίσωμεν, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ βάρος τῆς πυραμίδος εἶνε τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πρίσματος. Ἄρα, καὶ ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶνε τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου πρίσματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, τὸ δὲ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι

«ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της».

Π.χ. ἂν μιᾶς πυραμίδος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶνε 7 (μ^2) τὸ δὲ ὕψος 6 μ., ὁ ὄγκος της θὰ εἶνε $\frac{1}{3} \cdot 7.6 = 14$ (μ^3).

γ΄) Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος, ἢ μιᾶς πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καθεμιᾶς τῶν ἑδρῶν των καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 12,45 (μ^2), τὸ δὲ ὕψος του εἶνε 2,3μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ μὲν βάσις ἔχει ἐμβαδὸν α΄) 35 (μ^2)· β΄) 14,5 (μ^2) γ΄) $142\frac{3}{4}$ (μ^2). τὸ δὲ ὕψος εἶνε ἀντιστοίχως α΄) 8,3 μ β΄) 3,15 μ. γ΄) 1,81 μ.

Ὁμὰς δευτέρα. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πρίσματος, ἔχοντος ὕψος 1,8 μ. καὶ ὄγκον ἴσον μὲ 383,4 (μ^3).

2) Πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πυραμίδος, ἐχούσης ὄγκον 128, 35 (μ^3) καὶ ὕψος 3,7μ.;

3) Πόσον εἶνε τὸ ὕψος πυραμίδος, ἂν ὁ ὄγκος της εἶνε 400,35 (μ^3), τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της 98,3 (μ^2);

§ 101. Μέτρησις κυλίνδρου καὶ κώνου.—

α΄) Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου. Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν καὶ ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, κατεσκευασμένον ἀπὸ τὴν αὐτὴν ὕλην, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖται ὁ κύλινδρος, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, καὶ τὸ ὕψος, εἶνε ἴσα μὲ τὰ ἀντίστοιχα τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ζυγίσωμεν τὰ δύο αὐτὰ στερεά, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχουν ἴσον βάρος. Ἄρα καὶ οἱ ὄγκοι των εἶνε ἴσοι. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

«ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του».

Οὕτω, ἂν διὰ τοῦ $α$ παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως κυλίνδρου, καὶ διὰ τοῦ $υ$ τὸ ὕψος του, ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶνε (§ **53, β΄**) $\pi.\,\alpha^2$, ὁ ὄγκος του O θὰ εἶνε $O = \pi\alpha^2.\upsilon$.
Π.χ. ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶνε 3μ., τὸ δὲ ὕψος του

7 μ., ὁ ὄγκος του O θὰ εἶνε $O=\pi.3^2.7=3,141.3^2.7$ (κατὰ προσέγγισιν).

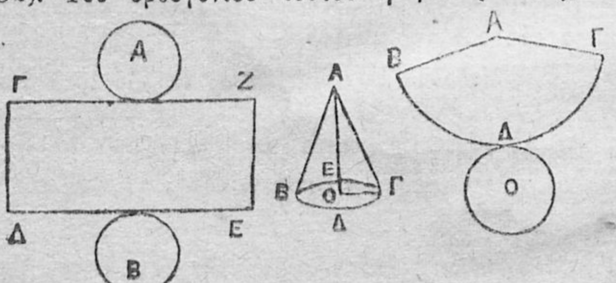
β') Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου. Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν καὶ κύλινδρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, καὶ τὸ ὕψος, εἶνε ἴσα μὲ τὰ τοῦ κώνου, καὶ ὅτι τὰ δύο στερεὰ εἶνε κατασκευασμένα ἀπὸ τὴν αὐτὴν ὕλην. Ἂν ζυγίσωμεν τὰ δύο αὐτὰ στερεά, θὰ εὕρωμεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ κώνου εἶνε τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ κυλίνδρου. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«*ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του*».

Οὕτω, ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως κώνου, καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος του, ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\pi.\alpha^2$, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος του O θὰ εἶνε $O=\pi\,\alpha^2.\upsilon.$

Κατὰ ταῦτα ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα 2 μ. καὶ ὕψος 5 μ., θὰ εἶνε $\frac{\pi.2^2.5}{3}=\frac{\pi.20}{3}=\frac{3,141.20}{3}=\frac{62,82}{3}(\mu^3)$.

γ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών του, καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὴν σκεπάζομεν ἀκριβῶς διὰ χάρτου†)· ἔπειτα, ἐκτυλίσσομεν τὸν χάρτην ἐπὶ ἐπιπέδου. Οὕτω προκύπτει ἓν ὀρθογώνιον, ἔστω τὸ ΔΓΕΖ σχ. (152). Τοῦ ὀρθογωνίου τούτου ἡ μὲν βάσις ἔχει μῆκος



(Σχ. 152) (Σχ. 153) (Σχ. 154)

ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ δὲ ὕψος του ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἑπομένως *«τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του»*.

Ἂν εἰς τὸ οὕτω εὑρισκόμενον ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του, π.χ. τῶν Α καὶ Β σχ. (152), ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας του. Τοῦτο καλεῖται συνήθως ἐμβαδὸν τῆς *ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου*.

Κατὰ ταῦτα, ἂν α παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου, καὶ υ τὸ ὕψος του, ἡ μὲν κυρτὴ ἐπιφάνειά του ἔχει ἐμβαδὸν $2\pi.\alpha.\upsilon$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του $2\pi\alpha.\upsilon + 2\pi\alpha^2$.

ϛ') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, π.χ. τοῦ ΑΒΓΔ σχ. (153), παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του, καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, τὴν σκεπάζομεν ἀκριβῶς διὰ χάρτου †)· ἔπειτα, ἐκτυλίσσομεν τὸν χάρτην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω θὰ ἔχωμεν ἕνα κυκλικὸν τομέα,ἔστω τὸν ΑΒΔΓ σχ. (154),τοῦ ὁποίου τὸ τόξον ΒΔΓ εἶνε ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἀκτὶς δὲ εἶνε ἴση μὲ πλευράν του. Ἑπομένως

«τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὴν πλευράν του.»

Ἂν α παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ λ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, τὸ ἐμβαδὸν E τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, θὰ εἶνε

$$E = \frac{2\pi\alpha\lambda}{2} = \pi\alpha\lambda.$$

Ἤτοι διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἀκτῖνος α καὶ πλευρᾶς λ, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν π ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα α καὶ τὸ γινόμενον ἐπὶ τὴν πλευρὰν λ. Ἂν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του Ο σχ. (153) καὶ (154) θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του κώνου. Αὐτὴ λέγεται συνήθως *ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου*. Π.χ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἔχοντος ἀκτῖνα 3 μ. καὶ πλευρὰν 8 μ. ἰσοῦται μὲ 3,141.3.8 =24. 3,141 ($μ^2$) (κατὰ προσέγγισιν).

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἔχοντος ἀκτῖνα (διάμετρον) τῆς βάσεώς του α′) 3 μ. β′) 2,4 μ. γ′) $2\frac{3}{4}$ μ. καὶ ὕψος ἀντιστοίχως α′) 0,5 β′) 1,4 μ. γ′) $2\frac{1}{3}$ μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα διάμετρον τῆς βάσεώς του α′) 2 μ. β′) 3,5 μ. γ′) $10\frac{4}{5}$ μ. καὶ ὕψος ἀντιστοίχως α′) 1,2 μ. β′) 3,2 μ. γ′) $3\frac{1}{2}$ μ.

3) Κυλίνδρου τινὸς ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶνε 2,59 μ., τὸ δὲ ὕψος 2,05. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας.

4) Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος περιφέρειαν τῆς βάσεως 13,56 μ. καὶ ὕψος 1,8.;

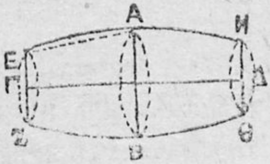
Ὁμὰς δευτέρα. 1) Δεξαμενῆς κυλινδρικῆς ἡ (ἐσωτερικὴ) ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε 1,26 μ., τὸ δὲ ὕψος 2,4 μ. α′) πόσας λίτρας ὕδατος (ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°K) χωρεῖ; β′) Πόσα χιλιόγραμμα (πόσας ὀκάδας) ζυγίζει τὸ ὕδωρ;

2) Κώνου ἐξ ζακχάρεως ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε 0,18 μ. τὸ δὲ ὕψος 0,36 μ. Πόσος εἶνε ὁ ὄγκος του;

3) Δοχεῖον κυλινδρικὸν ἔχει (ἐσωτερικὴν) διάμετρον 0,8 μ. καὶ περιέχει γάλα μέχρις ὕψους 0,56 μ. Πόσα λίτρα γάλακτος περιέχει;

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ἔχοντος ἀκτῖνα βάσεως 0,45 μ. καὶ πλευρὰν 3,2 μ.

§ **102. Ὄγκος βαρελίου καὶ κάδου.**—α΄)Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἐσωτερικὸν ὄγκον ἑνὸς βαρελίου, π.χ. τοῦ ΕΖΗΘ σχ. (155) μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς κανόνα. Ἐξομοιώνομεν αὐτὸ μὲ κύλινδρον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν τὴν ἐσωτερικὴν ἀπόστασιν ΓΔ τῶν κέντρων τῶν δύο κυκλικῶν βάσεών του, ἀκτῖνα δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων τῆς ἐσωτερικῆς βάσεώς του καὶ τοῦ μέσου του.



(Σχ. 155)

(Σχ. 156)

Ἐὰν π.χ. ἡ ἐσωτερικὴ βάσις τοῦ βαρελίου ἔχῃ ἀκτῖνα 0,34 μ., ἡ δὲ μέση του ἀκτὶς εἶνε 0,4 μ., καὶ τὸ ὕψος του 1,4 μ., τὸ μὲν ἡμιάθροισμα τῶν 0,34 καὶ 0,4 εἶνε $\frac{0.34+0.4}{2}=$ 0,37 μ. Ὁ δὲ ὄγκος του θὰ ἰσοῦται μὲ $3,141 . 0,37^2 . 1,4$ (μ^3). Συνήθως μεταχειρίζονται καὶ τὸν ἑξῆς τύπον πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὄγκου ἑνὸς βαρελίου††)

$$0,262\ (\Delta^2+\delta^2).\ M,$$

ὅπου τὸ Δ παριστάνει τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τοῦ μέσου τοῦ βαρελίου, τὸ δ τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τῆς μιᾶς τῶν βάσεών του, καὶ M τὴν ἐσωτερικὴν ἀπόστασιν τῶν βάσεών του.

β΄) Διὰ τὴν εὕρεσιν ἐσωτερικοῦ τοῦ ὄγκου κάδου σχ. (156) μεταχειριζόμεθα τὸν ἑξῆς τύπον

$$\frac{1}{12}\cdot \pi . (\Delta^2+\Delta . \delta+\delta^2) . \upsilon$$

ὅπου τὸ Δ παριστάνει τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τῆς μεγάλης βάσεώς του, τὸ δ τὴν ἐσωτερικὴν διάμετρον τῆς μικρᾶς βάσεώς του, καὶ υ τὴν ἐσωτερικὴν ἀπόστασιν τῶν δύο βάσεων.

††) Τὸν κανόνα τοῦτον ἐφαρμόζει τὸ Ὑπουργεῖον τῶν Οἰκονομικῶν τῆς Ἑλλάδος. Ἐν τῷ χημικῷ ἐργαστηρίῳ τοῦ Κράτους μεταχειρίζονται τὸν τύπον $\frac{1}{4}\ \pi . \left(\frac{2.\Delta+\delta}{3}\right)^2$ M.

Οὕτω ἂν $Δ=2μ, δ=0,75$ καὶ $υ=1,5μ$. ὁ ἐσωτερικὸς ὄγκος τοῦ κάδου αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{π.1,5}{12}(4+1,5+0,563)=\frac{π.1,5}{12}\,6,06(μ^3)$.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος βαρελίου, ἔχοντος τὴν ἀπόστασιν Μ ἴσην μὲ α') 120 (δκ). β') 0,65 μ. γ') 0,8 μ. δ') 1,4 μ. ἀκτῖνα τῆς βάσεως α') 25 (δκ). β') 0,323μ. γ') 0,8μ. δ') $\frac{3}{4}$ μ. ἀκτῖνα δὲ τοῦ μέσου του α') 38 (δκ). β') 0,47 μ. γ') $\frac{5}{6}$ μ. δ') 0,82 μ

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης κάδου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις υ εἶνε ἴση μὲ $\frac{1}{4}$ μ. β') μὲ $\frac{4}{5}$ μ. γ') 0,85 μ. αἱ δ' ἀκτῖνες τῆς βάσεως καὶ τοῦ μέσου εἶνε 0,27 καὶ 0,32 μ;

§ **103. Μέτρησις τῆς σφαίρας.**—α') Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα

«*τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἐπὶ 4*»

Ὥστε, ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας (ἡ ὁποία εἶνε καὶ ἀκτὶς καθενὸς τῶν μεγίστων κύκλων της), τὸ ἐμβαδὸν E τῆς ἐπιφανείας της θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $E=4πα^2$.

Κατὰ ταῦτα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἐχούσης ἀκτῖνα $\frac{3}{4}$ μ., θὰ εἶνε $4.π.\frac{3^2}{4^2}=4.π.\frac{9}{16}=π.\frac{9}{4}=\frac{3,141.9}{4}(μ^2)$.

β') Ἂν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας, ἔστω μὲ κέντρον Ο, λάβωμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ κείμενα πολὺ πλησίον τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, καὶ φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τὸ στερεὸν ΟΑΒΓ, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ, ἐξομοιοῦται μὲ πυραμίδα, ἔχουσαν βάσιν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓ τῆς σφαίρας, καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα της. Διὰ τοῦτο, ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνολον πυραμίδων, ἐχουσῶν ὕψος τὴν ἀκτῖνά της, ἄθροισμα δὲ τῶν βάσεών των τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ἑπομένως

«ὁ ὄγκος σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνός της».

Ἂν α παριστάνῃ τὴν ἀκτῖνα σφαίρας, ὁ ὄγκος της O θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τύπου $O=4\,\pi\,\alpha^2\,\frac{\alpha}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,\alpha^3$.

Π. χ. ἂν ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶνε 0,3 μ., ὁ ὄγκος της θὰ εἶνε $\frac{4}{3} \cdot \pi . 0,3^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi . 0,3 . 0,3 . 0,3 = \frac{4}{3} \cdot \pi . 0,027$ (μ.^{3}).

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶνε α′) 0,05 μ. β′) 0,032μ. γ′) 0,25μ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶνε α′) 0,50 μ. β′) $\frac{3}{4}$ μ. γ′) $\frac{4}{5}$ μ.

3) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶνε ἴση μὲ 18μ. Πόση εἶνε ἡ ἀκτίς της, καὶ πόσος ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας;

4) Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶνε 358,1 (μ^3) ἡ δὲ ἐπιφάνειά της 35,40 (μ^2), νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς της.

§ **104. Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης.**—Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης ἔχομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

«πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης».

Κατὰ ταῦτα ἂν σφαιρικὴ ζώνη ἔχῃ ὕψος ἴσον μὲ 0,5 μ., ἡ δὲ σφαῖρα (τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας ἀποτελεῖ μέρος) ἀκτῖνα 1,2 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης θὰ εἶνε

$$2 . \pi\ 1,2 .\ 0,5 . (\mu^2) = 1,2 . \pi = 1,2 . 3,141\ (\mu^2).$$

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης μιᾶς σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα $\frac{3}{4}$ μ., ἂν τὸ ὕψος της εἶνε $\frac{1}{5}$ μ.

2) Ἔχομεν σφαῖραν, ἔχουσαν ἀκτῖνα 1 μ. Φέρομεν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον της $\frac{1}{5}$ μ. καὶ $\frac{1}{4}$ μ. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων.

3) Εἰς σφαῖραν, ἔχουσαν ἀκτῖνα 0,75 μ. φέρομεν ἐπίπεδον, ἀπέχον 0,75 ἀπὸ τὸ κέντρον της, καὶ ἄλλο ἀπέχον 0,035 μ. ἀπὸ τὸ κέντρον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τούτων ὁριζομένης σφαιρικῆς ζώνης.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος σφαιρικῆς ζώνης, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶνε 7,14 ($μ^2$) ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 0,52 μ.

5) Ἡ περιφέρεια μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶνε 16,14 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης της 8,25 ($μ^2$). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ταύτης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΚΑΙ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΤΩΝ Ν. ΔΟΚΙΜΩΝ

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διὰ τὰ ἑλληνικὰ σχολεῖα, τὰ ἀστυκὰ καὶ τὰ ἀνώτερα παρθεναγωγεῖα

Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{42116}{9-10-20}$ *κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας*

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
26, ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ

Ἀριθ. Πρωτ. 42116

Ἐν Ἀθήναις τῇ 9 Ὀκτωβρίου 1920

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς

τὸν κ. Νεῖλον Σακελλαρίου

*Ἀνακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι δι᾽ ἡμετέρας πράξεως τῇ 23η τοῦ λήξαντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 1η τοῦ ἀρξαμένου μηνὸς δημοσιευθείσης ἐν τῷ ὑπ᾽ ἀριθ. 60 φύλλῳ τῆς «Ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως» ἐνεκρίθη τὸ πρὸς κρίσιν ἐν χειρογράφῳ ὑποβληθὲν ὑμέτερον βιβλίον «**Πρακτικὴ Γεωμετρία**» διὰ τὰ ἑλλ. σχολεῖα, τὰ ἀστικὰ καὶ τὰ ἀνώτερα παρθεναγωγεῖα.*

Ἐντολῇ τοῦ Ὑπουργοῦ
Ὁ Τμηματάρχης τοῦ Γ΄ Τμήματος
Γ. ΔΡΟΣΙΝΗΣ

Π. ΖΑΓΑΝΙΑΡΗΣ

ΤΥΠΟΙΣ Ε. & Ι. ΜΠΛΑΖΟΥΔΑΚΗ