Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ

[illegible]

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ [illegible] Γ΄ ΤΑΞΙΣ
ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜΗ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τὴν πενταετίαν 1933—193[illegible]
(μετασχηματισθεῖσα κατὰ τὸ τελευταῖον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα)

Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41082—31-7-1933

Ἀντίτυπα 8000

Κ. Ξ. ΠΑΠΑΝΙΚΗΤΟΠΟΥΛΟΥ
Τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ ἐν Ἀθήναις Ἀρσακείου Διδασκαλείου

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ Α', Β', Γ' ΤΑΞΕΩΣ, ΤΩΝ ΗΜΙΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΠΑΡΘΕΝΑΓΩΓΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜΗ

Ἐγκριθεῖσα διὰ τὴν πενταετίαν 1933—1938
(μεταρρυθμισθεῖσα κατὰ τὸ τελευταῖον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα)
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 41062—31-7-1933

Ἀντίτυπα 5000

ΤΥΠΟΙΣ : Α. Κ. ΚΑΪΤΑΤΖΗ
ΑΝΑΞΑΓΟΡΑ 20 (Γωνία Πειραιῶς)—ΑΘΗΝΑΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μονὰς καὶ ἀριθμός.

1. Ὅταν παρατηρῶμεν πράγματα ὅμοια, π. χ. μαθητάς, πρόβατα, δένδρα, κτλ., (χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ αὐτῶν), ἕκαστον ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται ὡς ***μονάς***, ὥστε ὁ μαθητής, τὸ πρόβατον, τὸ δένδρον, κτλ., εἶναι μονάς. Δυνάμεθα ὅμως μὲ πολλοὺς μαθητὰς νὰ σχηματίσωμεν τάξεις, ἢ μὲ πολλὰ πρόβατα νὰ σχηματίσωμεν ποίμνια, τότε μονὰς εἶναι ἡ τάξις, τὸ ποίμνιον. Ὥστε ***μονὰς*** λέγεται ἕκαστον ἐκ τῶν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων (ἢ καὶ πολλὰ ὁμοῦ ὅμοια πράγματα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς ἓν ὅλον).

Τὸ πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων εἶναι ὡρισμένον, ὅταν γνωρίζωμεν πόσα εἶναι ταῦτα. Π. χ. ὅταν λέγωμεν οἱ μαθηταὶ μιᾶς τάξεως εἶναι ***τριάκοντα***, τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν εἶναι ὡρισμένον, ὁ δὲ τριάκοντα, ὅστις ὁρίζει τὸ πλῆθος τοῦτο, λέγεται ***ἀριθμός***. Ὥστε

Ἀριθμὸς λέγεται ἡ ἔννοια, ἡ ὁποία ὁρίζει πλῆθος ὁμοίων πραγμάτων.

2. ***Ἀρίθμησις***. Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ὁρίζει πλῆθός τι, λέγεται ***ἀρίθμησις*** τοῦ πλήθους τούτου. Ἀρίθμησις λέγεται καὶ ἡ ἐξήγησις τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου σχηματίζομεν, ὀνομάζομεν, γράφομεν καὶ ἀπαγγέλλομεν τοὺς ἀριθμούς. Τὴν ἀρίθμησιν καὶ τὰ περὶ ἀριθμῶν ἐν γένει διδάσκει ἡ Ἀριθμητική.

Σχηματισμὸς καὶ ὀνομασία τῶν ἀριθμῶν.

3. Ἡ μονὰς ὡς ἀριθμὸς θεωρουμένη λέγεται ***ἕν***. Ἐὰν μὲ τὴν μονάδα ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην μίαν μονάδα (π. χ. ἂν ἔχωμεν ἓν μῆλον καὶ λάβωμεν ἓν μῆλον ἀκόμη), σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***δύο***. Ἐὰν μὲ τὸν δύο ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην μίαν μονάδα, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***τρία***. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον σχηματίζομεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμούς: ***τέσσαρα***, ***πέντε***, ***ἕξ***, ***ἑπτά***, ***ὀκτώ***, ***ἐννέα***. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι

παριστῶσι **μονάδας ἁπλᾶς**· διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ὑπάρχουν καὶ μονάδες σύνθετοι, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄλλας μονάδας.

4. Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἓν ἀκόμη, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **δέκα**. Ὁ ἀριθμὸς δέκα, ἂν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα μονάδας, θεωρεῖται ὅμως ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **δεκάς**. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος σχηματίζονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: Μία δεκὰς ἢ ἁπλούστερον **δέκα**, δύο δεκάδες ἢ **εἴκοσι**, τρεῖς δεκάδες ἢ **τριάκοντα**, τέσσαρες δεκάδες ἢ **τεσσαράκοντα**, πέντε δεκάδες ἢ **πεντήκοντα**, ἓξ δεκάδες ἢ **ἑξήκοντα**, ἑπτὰ δεκάδες ἢ **ἑβδομήκοντα**, ὀκτὼ δεκάδες ἢ **ὀγδοήκοντα**, ἐννέα δεκάδες ἢ **ἐνενήκοντα**. Οἱ σχηματιζόμενοι ἀριθμοὶ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος παριστῶσι **δεκάδας**.

5. Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν δεκάδων ἀριθμοὶ λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν δεκάδων, ἤτοι **δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα** . . . . **ἐνενήκοντα**, καὶ τὰ ὀνόματα τῶν ἁπλῶν μονάδων, **ἕν δύο, τρία** . . . . **ἐννέα**, προτάσσονται ὅμως τὰ ὀνόματα τῶν δεκάδων καὶ βαίνουσι κατὰ τὴν ἑξῆς σειράν: ***Δέκα***, ***ἕνδεκα*** (ἐξαιρετικῶς ἀντὶ δέκα ἕν), **δώδεκα** (ἀντὶ δέκα δύο), **δέκα τρία, δέκα τέσσαρα, δέκα πέντε**, ... **ἐνενήκοντα ἐννέα**.

6. Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα ἑνώσωμεν μίαν δεκάδα ἀκόμη ἢ μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐνενήκοντα ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἓν ἀκόμη, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **ἑκατόν**. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ἂν καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ δέκα δεκάδας (ἢ ἑκατὸν μονάδας), θεωρεῖται ὅμως ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **ἑκατοντάς**. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἑκατοντάδος σχηματίζονται οἱ ἑξῆς ἀριθμοί: Μία ἑκατοντὰς ἢ **ἑκατόν**, δύο ἑκατοντάδες ἢ **διακόσια**, τρεῖς ἑκατοντάδες ἢ **τριακόσια**, τέσσαρες ἑκατοντάδες ἢ **τετρακόσια**, πέντε ἑκατοντάδες ἢ **πεντακόσια**, ἓξ ἑκατοντάδες ἢ **ἑξακόσια**, ἑπτὰ ἑκατοντάδες ἢ **ἑπτακόσια**, ὀκτὼ ἑκατοντάδες ἢ **ὀκτακόσια**, ἐννέα ἑκατοντάδες ἢ **ἐννεακόσια**.

7. Οἱ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἑκατοντάδων ἀριθμοὶ λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἐνενήκοντα ἐννέα, προτάσσονται ὅμως τὰ ὀνόματα τῶν ἑκατοντάδων. Π. χ. ἑξακόσια εἴκοσι.

8. Ἐὰν μὲ τὸν ἀριθμὸν ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα ἑνώσωμεν μίαν μονάδα ἢ ἕν, σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **χίλια**. Ὁ ἀριθμὸς χίλια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέ-

γεται **χιλιάς**. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς χιλιάδος σχηματίζονται ἀριθμοὶ χιλιάδων, οἵτινες λαμβάνουσι τὰ ὀνόματα τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα, εἰς τὰ ὁποῖα προσαρτᾶται ἡ λέξις **χιλιάδες**, ἤτοι λέγομεν **τρεῖς χιλιάδες**, **ἑξήκοντα πέντε χιλιάδες**, κτλ. Δυνατὸν ὅμως ἀριθμός τις τῶν χιλιάδων νὰ περιέχῃ καὶ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ χίλια, ἤτοι ἀριθμὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα.

9. Ὁ ἀριθμὸς δέκα χιλιάδες (τὸν ὁποῖον οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὠνόμαζον **μύρια**) θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **δεκὰς τῶν χιλιάδων** Ὁ ἀριθμὸς δέκα ἑκατοντάδες χιλιάδων ἢ χίλιαι χιλιάδες θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **ἑκατομμύριον** (διότι εἶναι ἑκατὸν μύρια). Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ ἑκατομμυρίου σχηματίζονται ἀριθμοὶ ἑκατομμυρίων. Καὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς δέκα ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **δεκὰς ἑκατομμυρίων**, ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸν ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίων**, ὁ δὲ ἀριθμὸς χίλια ἑκατομμύρια θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς καὶ λέγεται **δισεκατομμύριον**.

10. Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως πάλιν τοῦ δισεκατομμυρίου σχηματίζονται ἀριθμοὶ δισεκατομμυρίων, ἑπομένως ἔχουν καὶ οὗτοι μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας δισεκατομμυρίων. Χίλια δισεκατομμύρια σχηματίζουσι τὸν ἀριθμὸν **τρισεκατομμύριον** καὶ οὕτω καθεξῆς.

11. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων, τὰς ὁποίας ἐσχηματίσαμεν ἀνωτέρω, εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς :

Μονὰς (ἁπλῆ)	ἡ μονὰς	πρώτης τάξεως
Δεκὰς	»	δευτέρας »
Ἑκατοντὰς	»	τρίτης »
Μονὰς τῶν χιλιάδων ἢ χιλιάς . .	»	τετάρτης »
Δεκὰς χιλιάδων	»	πέμπτης »
Ἑκατοντὰς χιλιάδων	»	ἕκτης »
Μονὰς ἑκατομ. ἢ ἑκατομμύριον . .	»	ἑβδόμης »
Δεκὰς ἑκατομ.	»	ὀγδόης »
Ἑκατοντὰς ἑκατομ. . . . , . .	»	ἐνάτης »
Μονὰς δισεκατομμυρίου	»	δεκάτης »
Δεκὰς »	»	ἑνδεκάτης »
Ἑκατοντὰς »	»	δωδεκάτης » κτλ.

12. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονάδων αἱ ἑξῆς· **μονάς**, **χιλιάς**, **ἑκατομμύριον**, **δισεκατομμύριον**, **τρισεκατομμύριον** κτλ., ἑκάστη

τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ χιλίας μονάδας τῆς ἀμέσως προηγουμένης, λέγονται **ἀρχικαὶ** ἢ **πρωτεύουσαι μονάδες**.

13. Διὰ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων δύναται πᾶς ἀριθμὸς νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενος ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, καὶ ἐξ ἑκάστης τούτων νὰ μὴ περιέχῃ περισσοτέρας τῶν ἐννέα, διότι ἂν περιέχῃ δέκα, τότε δέκα μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ὥστε γνωρίζοντες τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἀριθμός τις, ὁρίζομεν ἐντελῶς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς ὅστις περιέχει τρεῖς χιλιάδας, πέντε ἑκατοντάδας, δύο δεκάδας καὶ ἓξ μονάδας, εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν ἀριθμῶν.

14. Τὰ σημεῖα ἢ χαρακτῆρες, μὲ τὰ ὁποῖα παριστῶμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς: ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἕξ, ἑπτά, ὀκτώ, ἐννέα, εἶναι τὰ ἑξῆς: 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ τὸ σημεῖον 0, μὲ τὰ ὁποῖα γράφονται ὅλοι οἱ ἀριθμοί, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, λέγονται **ψηφία** ἢ **ἀραβικοὶ χαρακτῆρες**· διότι ἡ γνῶσις αὐτῶν μετεδόθη εἰς ἡμᾶς ἐκ τῶν Ἀράβων. Τὸ ψηφίον 0 λέγεται **μηδὲν** ἢ **μηδενικὸν** καὶ χρησιμεύει, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰς τὸ νὰ κατέχῃ κατὰ τὴν γραφὴν τῶν ἀριθμῶν τὰς θέσεις τῶν ἐλλειπόντων ψηφίων, τὰ δὲ ἄλλα ψηφία λέγονται πρὸς διάκρισιν **σημαντικά**.

Διὰ νὰ γράφωμεν συντόμως τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰ ἀνωτέρω ψηφία, ἐτέθη ἡ ἑξῆς συνθήκη.

15. ***Πᾶν ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Καὶ τἀνάπαλιν***.

Κατὰ τὴν συνθήκην λοιπὸν ταύτην, ὁ ἀριθμὸς 5 χιλιάδες 2 ἑκατοντάδες 7 δεκάδες καὶ 3 μονάδες γράφεται 5273. Ἐὰν δὲ μονάδες κατωτέρας τινὸς τάξεως δὲν ὑπάρχουν, γράφομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0, διὰ νὰ τηρηθῇ τὸ εἶδος τῶν μονάδων ἑκάστου ψηφίου. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἔχει 2 ἑκατοντάδας καὶ 5 μονάδας, ἤτοι ὁ διακόσια πέντε, γράφεται 205.

Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ἓν ψηφίον λέγονται μονοψήφιοι, οἱ ἔχοντες δύο λέγονται διψήφιοι, οἱ ἔχοντες τρία τριψήφιοι, καὶ γενικῶς οἱ ἔχοντες πολλὰ πολυψήφιοι.

16. ***Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἀριθμὸν γεγραμμένον μὲ ψηφία καὶ ἔχοντα περισσότερα τῶν τριῶν ψηφίων, πράττομεν ὡς ἑξῆς· χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα μὲ στιγμὰς (.) ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν (τὸ τελευταῖον τμῆμα πρὸς τὰ ἀριστερὰ δυνατὸν νὰ εἶναι διψήφιον ἢ μονοψήφιον), ἔπειτα ἀρχόμενοι ἐξ ἀριστερῶν, ἀπαγγέλλομεν ἕκαστον τμῆμα μὲ τὸ ὄνομά του.***

Π. χ. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν τὸν ἀριθμὸν 23567309, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα, ἤτοι 23 567 309 καὶ ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς εἴκοσι τρία ἑκατομμύρια, πεντακόσια ἑξήκοντα ἑπτὰ χιλιάδες καὶ τριακόσια ἐννέα μονάδες.

17. ***Διὰ νὰ γράψωμεν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος τῆς ἀνωτέρας δοθείσης ἀρχικῆς μονάδος· ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράφομεν κατὰ σειρὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦ τμήματος ἑκάστης κατωτέρας ἀρχικῆς μονάδος· προσέχοντες ὅμως ἂν ὁ ἀριθμὸς τοῦ τμήματος κατωτέρας τινὸς ἀρχικῆς μονάδος δὲν δοθῇ, νὰ γράφωμεν εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ τρία μηδενικὰ πρὸς ἀναπλήρωσιν τῶν ἐλλειπουσῶν θέσεων μονάδων, δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων τοῦ τμήματος τούτου, ἂν ὅμως δοθῇ τοιοῦτος καὶ εἶναι διψήφιος ἢ μονοψήφιος, νὰ γράφωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ ἓν μηδενικὸν ἢ δύο μηδενικὰ πρὸς ἀναπλήρωσιν τῆς ἐλλειπούσης θέσεως τῶν ἑκατοντάδων ἢ τῶν δεκάδων καὶ ἑκατοντάδων***

Π. χ. Ὁ ἀριθμὸς δέκα πέντε δισεκατομμύρια τριάκοντα ὀκτὼ χιλιάδες καὶ ἓξ μονάδες γράφεται ὡς ἑξῆς· 15 000 038 006. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοὶ μία χιλιὰς ἢ χίλια, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον, ἓν τρισεκατομμύριον γράφονται ὡς ἑξῆς·

1 000, 1 000 000, 1 000 000 000, 1 000 000 000 000.

18. Ἐπειδὴ δέκα μονάδες τάξεώς τινος χρειάζονται διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ δέκα ψηφία μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν γραφὴν ὅλων τῶν ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς ἀριθμήσεως λέγεται ***δεκαδικὸν σύστημα***, ὁ δὲ ἀριθμὸς 10 λέγεται ***βάσις*** τοῦ συστήματος. 8

Ἑλληνικὴ καὶ Ρωμαϊκὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν

19. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μετεχειρίζοντο ὡς ἀριθμητικὰ σημεῖα τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τὰ ὁποῖα διήρεσαν εἰς τρεῖς τάξεις ἀπὸ ὀκτὼ γράμματα ἑκάστην.

Ἡ πρώτη τάξις ἀπὸ τοῦ α ἕως τοῦ θ περιελάμβανε τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἡ δευτέρα τάξις ἀπὸ τοῦ ι ἕως τοῦ π περιελάμβανε τὰς δεκάδας, καὶ ἡ τρίτη τάξις ἀπὸ τοῦ ρ ἕως τοῦ ω περιελάμβανε τὰς ἑκατοντάδας. Ἀλλ᾿ ἐπειδὴ ἑκάστη τάξις περιλαμβάνει ὀκτὼ γράμματα, ἐνῷ χρειάζονται ἐννέα ἀριθμητικὰ σημεῖα, διὰ τοῦτο προσετέθησαν εἰς μὲν τὴν πρώτην τάξιν καὶ μετὰ τὸ γράμμα ε τὸ ϛ (στίγμα), τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸν ἀριθμὸν 6· εἰς τὴν δευτέραν τάξιν καὶ μετὰ τὸ γράμμα π τὸ ϟ (κόππα), τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸν ἀριθμὸν 90· εἰς δὲ τὴν τρίτην τάξιν καὶ μετὰ τὸ γράμμα ω τὸ ϡ (σαμπί), τὸ ὁποῖον σημαίνει τὸν ἀριθμὸν 900. Τὰ γράμματα, ὅταν ἐπρόκειτο νὰ παραστήσωσιν ἀριθμούς, ἐτονίζοντο πάντοτε πρὸς διάκρισιν. Κατωτέρω παραθέτομεν τὰς μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας.

Μονάδες		Δεκάδες		Ἑκατοντάδες	
1	α΄	10	ι΄	100	ρ΄
2	β΄	20	κ΄	200	σ΄
3	γ΄	30	λ΄	300	τ΄
4	δ΄	40	μ΄	400	υ΄
5	ε΄	50	ν΄	500	φ΄
6	ϛ΄	60	ξ΄	600	χ΄
7	ζ΄	70	ο΄	700	ψ΄
8	η΄	80	π΄	800	ω΄
9	θ΄	90	ϟ΄	900	ϡ΄

Μὲ τὰ ἀνωτέρω γράμματα ἐξέφραζον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μέχρι τοῦ 999

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 11, 12, 13, 14, ... 19
γράφονται ὡς ἑξῆς : ια΄, ιβ΄, ιγ΄, ιδ΄, ... ιθ΄

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 21, 25, 36, 58, 101, 875, 999
γράφονται ὡς ἑξῆς : κα΄, κε΄, λϛ΄, νη΄, ρα΄, ωοε΄, ϡϟθ΄.

Τὰς μονάδας, δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας τῶν χιλιάδων ἐξέφραζον μὲ τὰ αὐτὰ ἀνωτέρω γράμματα, ἀλλ᾿ ἔθετον ὑπογεγραμμένην, ἤτοι ͵α = 1000, ͵β = 2000, ͵γ = 3000, ..., ͵ϡ = 9000.

Οἱ ἀριθμοὶ π. χ. 1821, 1932 καὶ 999999 γράφονται ὡς ἑξῆς : ͵αωκα΄, ͵αϡλβ΄, ͵ϡϟθϡϟθ΄. Συνήθως ἔμενον ἕως τὰς 100000 = ͵ρ, πέραν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου μετεχειρίζοντο τὴν λέξιν **μύριοι** = 10 000 ἑνωμένην μὲ τὰς λέξεις δεκάκις, εἰκοσάκις κτλ. Π. χ. δεκάκις μύριοι = 100 000, ἑκατοντάκις μύριοι = 1 000 000, χιλιάκις μύριοι = 10 000 000.

Οἱ Ρωμαῖοι μετεχειρίζοντο τὰ ἑξῆς γράμματα διὰ τὴν παράστασιν τῶν ἀριθμῶν·

I = 1, II = 2, III = 3, IV = 4, V = 5, VI = 6, VII = 7, VIII = 8, IX = 9, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Πᾶς ἀριθμός, ὅστις ἐγράφετο πρὸ ἄλλου μεγαλυτέρου του, ἐσήμαινε τὴν ἀφαίρεσιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ μεγαλυτέρου. Πᾶς δὲ ἀριθμός, ὅστις ἐγράφετο κατόπιν μεγαλυτέρου του, ἐσήμαινε τὴν πρόσθεσιν αὐτοῦ εἰς τὸν μεγαλύτερον. Π. χ. ὁ IV σημαίνει νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 1 ἀπὸ τὸν 5, ἤτοι 4. Τὸ XII σημαίνει εἰς τὸν 10 νὰ προσθέσωμεν 2, ἤτοι 12. Τὸ XL σημαίνει ἀπὸ τὸν 50 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 10, ἤτοι 40. Τὸ XIX σημαίνει εἰς τὸν 10 νὰ προσθέσωμεν 9, ἤτοι 19. Τὸ XC = 90, DC = 600, MCC = 1200 κτλ.

Συγκεκριμένοι καὶ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί. Ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί.

20. ***Συγκεκριμένοι*** ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουσι τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον παριστῶσι· π. χ. 5 βιβλία, 8 μῆλα. Ἀφῃρημένοι δὲ ὅσοι δὲν ὁρίζουσι τὸ πρᾶγμα· π. χ. 2, 9, 10. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ διακρίνονται εἰς ***ὁμοειδεῖς καὶ ἑτεροειδεῖς***.

Ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ λέγονται ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστῶσι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα· π. χ. 5 μῆλα καὶ 7 μῆλα. Ἑτεροειδεῖς δὲ ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων αἱ μονάδες παριστῶσι διάφορα πράγματα· π. χ. 8 πρόβατα καὶ 20 δραχμαί.

Ἴσοι καὶ ἄνισοι ἀριθμοί.

21. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἴσοι***, ὅταν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ τοῦ ἄλλου. Ἐὰν π. χ. δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 5 μῆλα καὶ εἰς ἄλλο παιδίον ἄλλα 5 μῆλα, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι. Ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, τὸ ὁποῖον εἶναι = καὶ ἀπαγγέλλεται ***ἴσον***· π. χ. γράφομεν 5=5 καὶ ἀπαγγέλλομεν πέντε ἴσον πέντε.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄνισοι***, ὅταν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς εἶναι περισσότεραι τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου. Ἐὰν π. χ. δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 5 μῆλα καὶ εἰς ἄλλο παιδίον 3 μῆλα, οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 3 εἶναι ἄνισοι. Ὅταν θέλωμεν νὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος, τὸ ὁποῖον εἶναι $>$, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν γράφομεν εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ σημείου τούτου· π. χ. $5 > 3$ ἢ $3 < 5$ καὶ ἀπαγγέλλομεν 5 μεγαλύτερος τοῦ 3, ἢ 3 μικρότερος τοῦ 5.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 2037089, 203407814, 3000082656.

2) Μὲ πόσα μηδενικὰ γράφεται μία χιλιάς, ἓν ἑκατομμύριον, ἓν δισεκατομμύριον;

3) Γράψε μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς πέντε ἑκατομμύρια καὶ δώδεκα χιλιάδες, εἴκοσι ἑκατομμύρια δέκα χιλιάδες καὶ πέντε μονάδες, ἕνδεκα δισεκατομμύρια δύο ἑκατομμύρια καὶ πεντήκοντα μονάδες.

4) Γράψε μὲ ψηφία τοὺς ἑλληνικοὺς ἀριθμοὺς ϟη', τοε', ϡογ', ͵αωεθ', ͵θσϟϛ'.

5) Γράψε μὲ ψηφία τοὺς ρωμαϊκοὺς ἀριθμοὺς XXV, XXL, CIV, CMX, MXML.

6) Γράψε τοὺς ἀριθμοὺς 37, 76, 159, 208, 1659 μὲ ἑλληνικοὺς καὶ ρωμαϊκοὺς χαρακτῆρας.

7) Πόσας μονάδας ἔχουν 3 χιλιάδες; 7 ἑκαντοντάδες; 4 δεκάδες;

8) Πόσας δεκάδας ἔχει μία ἑκατοντάς; Πόσας ἑκατοντάδας ἔχει μία χιλιάς;

9) Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 4582 εἰς τὰς διαφόρους μονάδας του.

(4 χιλ. 5 ἑκ. 8 δ. 2 μ.).

10) Τὸ αὐτὸ νὰ γίνῃ καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 7085 καὶ 52408.

11) Νὰ ἀναλυθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 4270, 15034, 70850 εἰς χιλιάδας καὶ μονάδας, εἰς ἑκατοντάδας καὶ μονάδας, εἰς δεκάδας καὶ μονάδας. (Ὁ 4270 ἀναλύεται εἰς 4 χιλ. καὶ 270 μονάδες, 42 ἑκατ. καὶ 70 μον., 427 δεκ. καὶ 0 μον.).

12) Πόσας ἐν ὅλῳ μονάδας (ἁπλᾶς), δεκάδας, ἑκατοντάδας κτλ. ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ 356708, 450675, 378004;

Διὰ νὰ μάθωμεν τοῦτο, ἀπαγγέλλομεν τὸν ἀριθμὸν μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κτλ. Ὁ ἀνωτέρω πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει 356708 μονάδας, 35670 δεκάδας, 3567 ἑκατοντάδας κτλ.

13) Ἓν ἑκατομμύριον δραχμαὶ πόσα χιλιόδραχμα εἶναι; Πόσα ἑκατοντάδραχμα; Καὶ πόσα δεκάδραχμα;

Μετρικὸν σύστημα Ἑλλάδος.

22. Αἱ μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὸ μῆκος, τὸ βάρος καὶ τὰ νομίσματα καὶ τῶν ὁποίων γίνεται καθημερινὴ χρῆσις, εἶναι αἱ ἑξῆς:

α') Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους μεταχειριζόμεθα τὸ ***γαλλικὸν μέτρον***, τὸ ὁποῖον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***δέκατα ἢ ὑποδεκάμετρα***. Κάθε δέκατον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ἑκατοστὰ ἢ δάκτυλοι ἢ πόντοι***. Τὸ μέτρον λοιπὸν ἔχει 100 πόντους. Τὸ χιλιόμετρον εἶναι 1000 μέτρα.

Ἐπίσης ἔχομεν τὸν ***ἐμπορικὸν πῆχυν***, τὸν ὁποῖον μεταχειρίζονται συνήθως οἱ ἔμποροι, διὰ νὰ μετροῦν τὰ ὑφάσματα. Ὁ πῆχυς εἶναι ἴσος μὲ 64 πόντους καὶ διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ρούπια**.

β΄) Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ βάρους μεταχειριζόμεθα ὡς μονάδα τὴν **ὀκᾶν**, ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς 400 δράμια. Τὸ βάρος 44 ὀκάδων λέγεται στατὴρ (**καντάρι**). Μεταχειριζόμεθα ἀκόμη καὶ τὸ γαλλικὸν **χιλιόγραμμον** ἢ **κιλόν**, τὸ ὁποῖον εἶναι 1000 γραμμάρια καὶ ἔχει βάρος 312 δράμια περίπου.

γ΄) Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν νομισμάτων ἔχομεν ὡς μονάδα τὴν **δραχμήν**, ἡ ὁποία ἔχει 100 λεπτά. Τὸ χιλιόδραχμον ἔχει 1000 δραχμάς, τὸ τάλληρον ἔχει 5.

δ΄) Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν ἡμέραν (ἤτοι τὸ ἡμερονύκτιον) Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα διαιρεῖται εἰς 60 λεπτὰ καὶ ἕκαστον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά.

Σημ. Θὰ μάθωμεν ἀργότερον ὅτι, ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων, μεταχειριζόμεθα καὶ ἄλλας ἀκόμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόσθεσις.

23. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδώσαμεν εἰς ἕνα πτωχὸν 2 δραχμάς, εἰς ἄλλον 4 καὶ εἰς ἄλλον 6 καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἐδώσαμεν ἐν ὅλῳ. Ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα μόνον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 6. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν ὡς ἑξῆς:

Πρόσθεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ ὅλας τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἔχουν δύο ἢ περισσότεροι δοθέντες ἀριθμοί.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ προστεθῶσι, λέγονται **προσθετέοι**· ὁ δὲ διὰ τῆς προσθέσεως αὐτῶν σχηματιζόμενος ἀριθμὸς λέγεται **ἄθροισμα**. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πρόκειται νὰ προστεθῶσι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$ τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***σύν***· ἤτοι $5+3$ καὶ ἀπαγγέλλομεν πέντε σὺν τρία (συνήθως ὅμως λέγομεν πέντε καὶ τρία).

Οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι συγκεκριμένοι ἢ ἀφῃρημένοι· ἐὰν ὅμως εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς·

διότι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν. Π. χ. 6 μῆλα καὶ 3 πρόβατα δὲν προστίθενται (διότι οὔτε 9 μῆλα κάμνουν, οὔτε 9 πρόβατα). Ἐπειδὴ λοιπὸν οἱ προσθετέοι θὰ εἶναι ὁμοειδεῖς, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τοὺς προσθετέους.

Πρόσθεσις μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Πρόβλημα. Πατήρ τις ἐμοίρασεν εἰς τὰ τέσσαρα τέκνα του μῆλα. Εἰς τὸ ἕνα ἔδωσεν 8 μῆλα, εἰς τὸ ἄλλο 5, εἰς τὸ ἄλλο 6 καὶ εἰς τὸ ἄλλο 9. Πόσα μῆλα ἔδωσεν ἐν ὅλῳ;

Διὰ νὰ μάθωμεν τοῦτο, προσθέτομεν πρῶτον τὰ μῆλα τῶν δύο πρώτων τέκνων, λέγομεν 8 καὶ 5, 13· εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τὰ μῆλα τοῦ τρίτου, λέγομεν 13 καὶ 6, 19· εἰς τὸ νέον τοῦτο ἄρθοισμα προσθέτομεν τὰ μῆλα τοῦ τετάρτου, λέγομεν 19 καὶ 9, 28. Ὥστε εἶναι $8+5+6+9=28$. Τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ εὕρωμεν, ἂν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ κατ' ἄλλην τάξιν· διότι αἱ μονάδες ἑκάστου ἀριθμοῦ εἶναι ὡρισμέναι καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ προστεθῶσι. Π. χ. λέγομεν 8 καὶ 6, 14· καὶ 5,19· καὶ 9, 28. Ὥστε εἶναι $8+5+6+9=8+6+5+9=28$. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς προσθέσεως.

24. ***Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς.***

Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης προτιμῶμεν χάριν συντομίας νὰ προσθέτωμεν νοερῶς πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν εὐκόλως ([1]).

Πρόσθεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Πρόβλημα. Ἔμπορός τις ἐπώλησε τρία ὑφάσματα· ἀπὸ τὸ ἓν ἔλαβε 2936 δραχμάς, ἀπὸ τὸ ἄλλο 4503 καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο 54 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐν ὅλῳ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, θὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας, χωριστὰ τὰς δεκάδας, χωριστὰ τὰς ἑκατοντάδας κτλ. καὶ ἔπειτα θὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα. Ὥστε ἡ πρόσθεσις τῶν πολυψηφίων ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μονοψηφίων.

Ἀλλ' ἵνα μὴ συμβῇ λάθος ἐν τῇ πράξει καὶ προσθέσωμεν

([1]) Περὶ τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως κάμνομεν λόγον εἰς τὸ Γ' Βιβλίον. Τοῦτο λέγομεν καὶ διὰ τὰς ἰδιότητας τῶν ἄλλων πράξεων.

ψηφία διαφόρων τάξεων (ἤτοι μονάδας μὲ δεκάδας, ἢ δεκάδας μὲ ἑκατοντάδας κτλ.), δὲν γράφομεν τοὺς προσθετέους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς: 2936 + 4503 + 54, ἀλλὰ τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ὡς δεικνύει ἡ κατωτέρω διάταξις.

$$\begin{array}{r} 2936 \\ 4503 \\ 54 \\ \hline 7493 \end{array}$$

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον εἶναι 13. Ἀλλὰ 13 μονάδες κάμνουν 1 δεκάδα καὶ 3 μονάδας, γράφομεν λοιπὸν 3 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν μονάδων καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 δεκάδα διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὰς δεκάδας. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα μαζὶ μὲ τὸ 1 κρατούμενον εἶναι 9· γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῆς ἀνωτάτης τάξεως. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 7493.

Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως.

26. Δοκιμὴ μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως λέγεται ἄλλη πρᾶξις, τὴν ὁποίαν κάμνομεν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ἂν ἡ πρώτη ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ἐπροσθέσαμεν τοὺς προσθετέους ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, προσθέτομεν αὐτοὺς ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἢ καὶ τἀνάπαλιν, καὶ ἂν εὕρωμεν τὸ ἴδιον ἄθροισμα, τότε εἶναι πιθανὸν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος (ἐδ. 24). Δυνατὸν ὅμως καὶ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς δοκιμῆς νὰ κάμωμεν λάθος, διὰ τοῦτο καλυτέρα δοκιμὴ μιᾶς πράξεως εἶναι ἡ μετὰ προσοχῆς ἐκτέλεσις αὐτῆς.

Ἀσκήσεις νοεραί. 1) Εἰς τὸν ἀριθμὸν 7 νὰ προσθέσῃς τὸν 8 καὶ εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα νὰ προσθέσῃς πάλιν τὸν 8 καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 95.

2) Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ προσθέσῃς εἰς τὸν 17 πρῶτον τὸν 7, ἔπειτα τὸν 8 καὶ ἔπειτα τὸν 9, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 100.

3) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 30 δραχμαὶ καὶ 27 δραχμαί; 60 καὶ 38; 25 καὶ 15; 35 καὶ 57 δραχμαί;

4) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 400 καὶ 300 δραχμαί; 600 καὶ 400; 700 καὶ 500; 5000 καὶ 4000; 7000 καὶ 8000;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις μίαν ἄμπελον μὲ 13 270 δραχμάς. Πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 1295 δραχμάς; (14 565).

2) Χωρικός τις ἠγόρασε δύο χωράφια· διὰ τὸ ἓν ἔδωσε 6 750 δραχμὰς καὶ διὰ τὸ ἄλλο ἔδωσε 2 350 δρ. περισσότερον τοῦ πρώτου. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε καὶ διὰ τὰ δύο χωράφια ; (15 850).

3) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν μὲ 285 000 δραχμὰς καὶ ἐξώδευσε διὰ νὰ τὴν ἐπισκευάσῃ 25 740 δραχμάς. Πόσον τοῦ ἐκόστισεν ἡ οἰκία ; Καὶ πόσον πρέπει νὰ τὴν πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 18 760 δραχμάς ; (310 740, 329 500).

4) Ὅλαι αἱ νῆσοι τῆς Ἑλλάδος ἔχουν κατοίκους 1 037 020 [1], ὅλα δὲ τὰ ἄλλα μέρη αὐτῆς ἔχουν 5 167 680. Πόσους κατοίκους ἔχει ἡ Ἑλλάς ; (6 204 700).

5) Ἐγεννήθη τις τὸ ἔτος 1874 (μετὰ Χριστὸν) καὶ ἔζησε 42 ἔτη. Ποῖον ἔτος ἀπέθανεν ; (1916).

6) Οἱ Ὀλυμπιακοὶ ἀγῶνες ἤρχισαν τὸ ἔτος 777 πρὸ Χριστοῦ. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον ;

7) Ὅταν ἐγεννήθη παιδίον τι ἡ μήτηρ του ἦτο 28 ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ του ἦτο 9 ἔτη μεγαλύτερος τῆς μητρός του, τώρα τὸ παιδίον εἶναι 14 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι οἱ γονεῖς του ; (42, 51).

8) Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴν Λάρισσαν εἶναι 347 χιλιόμετρα, ἀπὸ τὴν Λάρισσαν ἕως τὴν Θεσσαλονίκην εἶναι 170 χιλιόμ. καὶ ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην ἕως τοὺς Παρισίους εἶναι 2666 χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ἕως τὴν Θεσσαλονίκην ; Καὶ πόσα ἕως τοὺς Παρισίους ; (517, 3183).

Ἀφαίρεσις.

27. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν 9 μῆλα καὶ ἐξ αὐτῶν πρόκειται νὰ δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 3 μῆλα· θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα μῆλα θὰ μᾶς μείνουν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δίδωμεν ἀπὸ ἕνα μῆλον· καὶ πρῶτον ἐκ τῶν 9 μήλων δίδομεν 1 μῆλον, ὅτε μᾶς μένουν 8 μῆλα· ἔπειτα ἐκ τῶν 8 μήλων δίδομεν ἄλλο 1 μῆλον, ὅτε μένουν 7 μῆλα· ἔπειτα ἐκ τῶν 7 μήλων δίδομεν ἄλλο 1 μῆλον, ὅτε μένουν 6. Ὥστε μᾶς ἔμειναν 6 μῆλα καὶ ἐδώσαμεν τόσας φορὰς τὸ ἓν μῆλον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3, τουτέστιν ἠλαττώσαμεν τὸν 9 κατὰ 3 μονάδας. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη λέγεται **ἀφαίρεσις**.

Ὥστε ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν ὡς ἑξῆς:

Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐλαττώνομεν ἕνα ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

---

[1] Συμφώνως μὲ τὴν ἀπογραφὴν τοῦ ἔτους 1928.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται **μειωτέος**, ὁ ἄλλος, ὅστις δεικνύει κατὰ πόσας μονάδας θὰ ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος, λέγεται **ἀφαιρετέος**· ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μένει ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως, λέγεται **διαφορὰ** ἢ **ὑπόλοιπον.** Ὥστε εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μειωτέος εἶναι ὁ 9, ἀφαιρετέος ὁ 3 καὶ διαφορὰ ὁ 6.

Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀριθμός τις πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἄλλον, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **πλὴν** ἢ **μεῖον** ἢ **ἀπό,** καὶ πρῶτον μὲν ἀριθμὸν γράφομεν τὸν μειωτέον, δεύτερον δὲ τὸν ἀφαιρετέον, ἤτοι $9-3$, καὶ ἀπαγγέλλομεν ἐννέα πλὴν τρία ἢ ἐννέα μεῖον τρία ἢ τρία ἀπὸ ἐννέα.

28. Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λάβωμεν τὰ 3 μῆλα, τὰ ὁποῖα ἐδώσαμεν, καὶ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ 6 μῆλα, ὅπου μᾶς ἔμειναν, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 9 μῆλα.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι **ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς**, ἑπομένως ὁρίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἀφαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας, ὅταν μᾶς δοθῇ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν καὶ εἷς τῶν προσθετέων, εὑρίσκομεν τὸν ἄλλον.

Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν πρέπει οἱ δοθέντες ἀριθμοί, ἂν εἶναι συγκεκριμένοι, νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς· διότι ἄλλως δὲν δύναται νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις, διὰ τοῦτο δὲ καὶ ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τοὺς δεδομένους. Ἐὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μειωτέον, οὐδεμία μονὰς τοῦ μειωτέου μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ διαφορὰ εἶναι μηδέν· π. χ. εἶναι $7-7=0$. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀδύνατος, ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονοψήφιον ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ μίαν μίαν. Ἀλλ' ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι, ἀπαιτεῖ τοῦτο κόπον καὶ χρόνον, θὰ ἴδωμεν δὲ κατωτέρω πῶς ἐκτελεῖται συντόμως καὶ εὐκόλως ἡ ἀφαίρεσις τῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

Πρόβλημα. Ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ μεγαλύτερος εἶναι 9 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 7 ἐτῶν. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν; Ποία θὰ εἶναι μετὰ 6 ἔτη; Καὶ ποία ἦτο πρὸ 4 ἐτῶν;

Ἡ διαφορὰ εἶναι σήμερον $9-7=2$ ἔτη. Μετὰ 6 ἔτη ἡ ἡλικία ἑκάστου θὰ αὐξηθῇ κατὰ 6 ἔτη, καὶ θὰ εἶναι ὁ μεγαλύτερος 15 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 13 ἐτῶν, ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν θὰ εἶναι πάλιν 15 — 13 = 2 ἔτη. Πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑκάστου ἦτο κατὰ 4 ἔτη μικροτέρα, ὁ μεγαλύτερος ἦτο 5 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 3 ἐτῶν, ἡ διαφορὰ ἦτο πάλιν 5 — 3 = 2 ἔτη. Βλέπομεν ὅτι ἂν ὁ μειωτέος 9 καὶ ὁ ἀφαιρετέος 7 αὐξηθῶσιν ἢ ἐλαττωθῶσι κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ αὐτῶν δὲν ἀλλάσσει. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως.

29. ***Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.***

Πρόβλημα. Πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀπὸ 78 δραχμάς, ἂν δώσωμεν 25 δραχμάς;

Διὰ νὰ μάθωμεν τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 78 πρῶτον τὰς 5 μονάδας τοῦ 25, ὅτε μένουν 73· ἔπειτα τὰς 2 δεκάδας του ἀπὸ τὸν 73, ὅτε μένουν 53. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

30. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰ μέρη του (ἤτοι τὰς μονάδας του, τὰς δεκάδας του κτλ.).***

Ἀφαίρεσις πολυψηφίου ἀπὸ πολυψήφιον.

31. Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὴν διαφορὰν 7865—2473, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑποκάτω τοῦ μειωτέου, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους μονάδας τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 7865 \\ \underline{2473} \\ 5392 \end{array}$$

Ἀφαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὰς μονάδας τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μειωτέου λέγοντες 3 ἀπὸ 5 μένουν 2, γράφομεν λοιπὸν 2 εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς δεκάδας, ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 7 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 6, προσθέτομεν νοερῶς εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο τοῦ μειωτέου 10 δεκάδας καὶ γίνονται 16 δεκάδες· τώρα λέγομεν 7 ἀπὸ 16 μένουν 9 (δεκάδες), γράφομεν λοιπὸν 9 εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς ἑκατοντάδας, ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, πρέπει νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον 10 δεκάδας (ἐδάφ. 29), ὅσας δηλ. ἐπροσθέσαμεν καὶ εἰς τὸν μειωτέον, ἀλλὰ τὸ ἴδιον εἶναι ἂν προσθέσωμεν

1 ἑκατοντάδα εἰς τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀφαιρετέου λέγοντες 1 καὶ 4, 5 ἀπὸ 8 μένουν 3 (ἑκατοντάδες), γράφομεν λοιπὸν 3 εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς χιλιάδας καὶ εὑρίσκομεν 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι 5392.

Παραδείγματα.			
	5667	85204	670000
	879	27685	38480
	4788	57519	639520

32. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ ἕνα ἄλλον, ἢ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον τὸν πρῶτον, ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν τὸν δεύτερον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου ἀφαιρέσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς. Ὁ πρῶτος ὅμως τρόπος εἶναι συντομώτερος τοῦ δευτέρου.

Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.

33. Ἐπειδὴ ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς (ἐδάφ. 28), διὰ τοῦτο κάμνομεν τὴν δοκιμὴν τῆς ἀφαιρέσεως ὡς ἑξῆς. Προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὴν διαφοράν, καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δεικνύει πόσας μονάδας ἔχει ὁ μειωτέος περισσοτέρας τοῦ ἀφαιρετέου, διὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὴν διαφορὰν ἀπὸ τὸν μειωτέον, καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν ἀφαιρετέον, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Σημ. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν νοερῶς 9 ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν 10 καὶ ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὴν διαφορὰν 1. Ὅταν πάλιν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν 9 εἰς ἀριθμόν, προσθέτομεν 10 καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν 1.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν νοερῶς διψήφιον ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν τὰ μέρη του χωριστὰ ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως. Π. χ. διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 35 ἀπὸ τὸν 78, λέγομεν 30 ἀπὸ 78 μένουν 48· ἔπειτα 5 ἀπὸ 48 μένουν 43.

Ἀσκήσεις νοεραί. 1) Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 68 νὰ ἀφαιρέσῃς 5 καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν νὰ ἀφαιρέσῃς πάλιν 5 καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὁ 3.

2) Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἀφαιρέσῃς ἀπὸ τὸν 92 πρῶτον τὸν 7, ἔπειτα τὸν 8 καὶ ἔπειτα τὸν 9, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 5.

3) Παιδίον τι ἔχει 67 βόλους. Πόσοι βόλοι θὰ τοῦ μείνουν, ἂν παίξῃ καὶ χάσῃ 9, 8, 12, 15, 25, 38, 49 βόλους;

4) Ἡ Μεγάλη Τεσσαρακοστὴ ἔχει 48 ἡμέρας. Πόσαι ἡμέραι θὰ μείνουν ἀπὸ τὴν Τεσσαρακοστήν, ἂν περάσουν 9, 14, 19, 23, 36 ἡμέραι;

5) Μία χωρική ἔχει εἰς τὸ καλάθι της 200 αὐγά. Πόσα θὰ μείνουν, ἂν πωλήσῃ 40, 70, 65, 85, 120, 135, 165 αὐγά ;

6) Πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀπὸ 247 δραχμάς, ἂν ἐξοδεύσωμεν 99 δραχμάς ; Καὶ πόσαι μένουν ἀπὸ 3584 δραχμάς, ἂν ἐξοδεύσωμεν 999 δραχμάς ;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις χωράφιον μὲ 13 560 δραχμάς, ἀλλ' ἔδωσε μόνον 12 785 δραχμάς. Πόσας χρεωστεῖ ἀκόμη ; (775).

2) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν μὲ 458 750 δραχμάς, ἔπειτα τὴν ἐπώλησε 497 500 δρ. Πόσον ἐκέρδισε ; (38 750 δρ.).

3) Εἶχέ τις ἓν ἑκατομμύριον δραχμὰς καὶ ἠγόρασε μίαν οἰκίαν μὲ 684 500 δραχμάς. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ; (315 500).

4) Ἔχει τις 846 πρόβατα. Πόσα πρέπει νὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη, διὰ νὰ τὰ κάμῃ χίλια ; (154).

5) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 784, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν 1930 ; (1146).

6) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 639 καὶ ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι 375. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ἀριθμός ; (264).

7) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τὸ ἔτος 1847 καὶ ἀπέθανε τὸ ἔτος 1932. Πόσα ἔτη ἔζησε ; (85).

8) Τὸ ὑψηλότερον ὄρος τῆς Ἑλλάδος εἶναι ὁ Ὄλυμπος καὶ ἔχει ὕψος 2 985 μέτρα, τὸ ὄρος Παρνασσὸς ἔχει ὕψος 2 495 μ. καὶ ὁ Ταΰγετος 2 410 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ὑψηλότερος ὁ Ὄλυμπος ἀπὸ τὸν Παρνασσόν ; Καὶ πόσα ἀπὸ τὸν Ταΰγετον ; (490 καὶ 575).

9) Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἕως τὰς Καλάμας εἶναι 328 χιλιόμετρα καὶ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας ἕως τὴν Τρίπολιν εἶναι 213 χιλιόμ. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἀπὸ τὴν Τρίπολιν ἕως τὰς Καλάμας ; (115).

10) Αἱ Ἀθῆναι ἔχουν κατοίκους 452 919, ὁ Πειραιεὺς ἔχει 251 328 καὶ ἡ Θεσσαλονίκη 236 524. Πόσους κατοίκους ἔχουν περισσότερον αἱ Ἀθῆναι ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ; Καὶ πόσους ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην ; (201 591 καὶ 216 395).

11) Ἡ Μακεδονία ἔχει κατοίκους 1 412 477 καὶ ἡ Πελοπόννησος 1 053 327. Πόσους κατοίκους ἔχει περισσότερον ἡ Μακεδονία ; (359 150).

12) Ἡ ἅλωσις τῆς Κωνσταντινουπόλεως ὑπὸ τῶν Τούρκων ἔγινε τὸ ἔτος 1453. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον ;

13) Τὴν Ἀμερικὴν ἀνεκάλυψεν ὁ Κολόμβος τὸ ἔτος 1492. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον ;

14) Τὸν φωνόγραφον ἀνεκάλυψεν ὁ Ἀμερικανὸς Ἔδισσον τὸ ἔτος 1878. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον;

15) Ὁ Μέγας Ἀλέξανδρος ἐγεννήθη τὸ ἔτος 356 πρὸ Χριστοῦ καὶ ἔζησε 33 ἔτη. Ποῖον ἔτος ἀπέθανε; (323 π. Χ.).

16) Ἡ ἐν Μαραθῶνι μάχη ἔγινε τὸ ἔτος 490 π. Χ., ἡ δὲ ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχία τὸ 480 π. Χ. Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον

17) Μήτηρ τις εἶναι 37 ἐτῶν καὶ ἔχει κόρην 9 ἐτῶν. Πόσον ἐτῶν θὰ εἶναι ἡ μήτηρ, ὅταν ἡ κόρη γίνῃ 23 ἐτῶν; (51).

18) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανε τὸ ἔτος 1920 εἰς ἡλικίαν 84 ἐτῶν. Ποῖον ἔτος ἐγεννήθη; Καὶ πόσων ἐτῶν ἦτο τὸ ἔτος 1870, ὅτε ἐνυμφεύθη; (1836, ἦτο 34 ἐτῶν

Πολλαπλασιασμός.

34. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 5 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσας δραχμὰς θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 1 ὀκᾶν, θὰ δώσωμεν 5 δραχμάς· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 ὀκάδας, θὰ δώσωμεν δύο φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι $5+5$· καὶ διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 ὀκάδας, θὰ δώσωμεν τρεῖς φορὰς τὰς 5 δραχμάς, ἤτοι $5+5+5$ ἢ 15 δραχμάς. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἐπαναλαμβάνονται αἱ 5 δραχμαὶ τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ 3· ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη λέγεται πολλαπλασιασμός. Ὥστε ὁρίζομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ ἐπαναληφθῇ, λέγεται ***πολλαπλασιαστέος***, ὁ ἄλλος, ὅστις δεικνύει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ οὗτος, λέγεται ***πολλαπλασιαστής***, ὁ δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ σχηματιζόμενος ἀριθμὸς λέγεται ***γινόμενον***. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 5, πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 καὶ γινόμενον ὁ 15.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***παράγοντες*** τοῦ γινομένου. Ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἀφῃρημένοι καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀφῃρημένον· ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι, καθὼς οἱ ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἤτοι παριστᾷ τὸ αὐτὸ πρᾶγμα, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως· ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ἐν τῇ πράξει καὶ ἐν τῇ σκέψει ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ δεικνύει ἁπλῶς πόσας φορὰς θὰ ἐπαναληφθῇ ὁ πολλαπλασιαστέος.

Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῶσι, καθὼς οἱ ἀνωτέρω 5 καὶ 3, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον ×, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***ἐπί***, ἀλλὰ πρῶτον γράφομεν τὸν πολλαπλαστέον, ἤτοι 5×3, καὶ ἀπαγγέλλομεν πέντε ἐπὶ τρία. Ὥστε 7×5 σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν 7 πέντε φοράς, ἤτοι εἶναι $7 \times 5 = 7+7+7+7+7$ ἢ 35.

Σημ. Τὸ σημεῖον × ἀντικαθιστῶμεν ἐνίοτε μὲ μίαν τελείαν στιγμήν, π. χ. 7.5 ἀντὶ 7×5.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς ἐπαναλήψεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις ἀπαιτεῖ καὶ κόπον καὶ χρόνον, μάλιστα δὲ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ γινόμενα ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν. Ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα, ὅστις λέγεται ***Πυθαγόρειος πίναξ***· διότι ὁ φιλόσοφος Πυθαγόρας (ἀκμάσας περὶ τὸ 570 π. Χ.) λέγεται ὅτι ἐπενόησεν αὐτόν.

Πίναξ πολλαπλασιασμοῦ ἢ Πυθαγόρειος.

Ἡ πρώτη ὁριζοντία σειρὰ τοῦ πίνακος καὶ ἡ πρώτη κατακόρυφος σειρὰ περιέχουσι τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις 9, ἡ δευτέρα σειρὰ τούτων περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἡ τρίτη σειρὰ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 9.

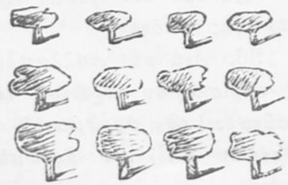
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα εἰς τὸν πίνακα τοῦτον τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν, π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 8, ζητοῦμεν τὸν μὲν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειρὰν (ἢ εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον σειράν), τὸν δὲ ἄλλον εἰς τὴν πρώτην κατακόρυφον σειρὰν (ἢ εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν σειράν)· ἐκεῖ δέ, ὅπου διασταυροῦνται αἱ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 8 ἀρχόμεναι δύο σειραί, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς τοῦ γινομένου αὐτῶν· εἰς τὸ παράδειγμά μας διασταυροῦνται εἰς τὸν ἀριθμὸν 48, οὗτος λοιπὸν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 8.

Ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Πρόβλημα. Εἰς ἕνα κῆπον ὑπάρχουν δένδρα εἰς τρεῖς ὁριζοντίας σειρὰς καὶ ἑκάστη σειρὰ περιέχει 4 δένδρα. Πόσα εἶναι ὅλα τὰ δένδρα;

Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὰ δένδρα ἕνα πρὸς ἕνα καὶ νὰ εὕρωμεν πόσα εἶναι, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην ὁριζοντίαν σειρὰν ὑπάρχουν 4 δένδρα καὶ ἐπειδὴ τοιαῦται σειραὶ εἶναι 3, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δένδρων εἶναι $4+4+4=4\times 3$, ἤτοι 12.



Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἰς ἑκάστην κατακόρυφον σειρὰν ὑπάρχουν 3 δένδρα καὶ ἐπειδὴ τοιαῦται σειραὶ εἶναι 4, ἕπεται ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δένδρων εἶναι $3+3+3+3=3\times 4$, ἤτοι 12. Οἱονδήποτε ὅμως τρόπον καὶ ἂν μεταχειρισθῶμεν, ὁ ἀριθμὸς τῶν δένδρων εὑρίσκεται ὁ αὐτός, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $4\times 3=3\times 4$. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

35. ***Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν (θεωρουμένων ἀφῃρημένων) δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν αὐτῶν, ἤτοι ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς πολλαπλασιαστέος.***

Σημ. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα 1 εἶναι ὁ ἴδιος ἀριθμός. Π. χ. $4\times 1=4$, $1\times 1=1$. Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 0 εἶναι 0.

Πολλαπλασιασμὸς ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα.

Πρόβλημα. Ἔμπορός τις ἔχει τρία εἴδη δαντέλλας. Τὸ πρῶτον εἶδος πωλεῖ πρὸς 4 δραχμὰς τὸν πῆχυν, τὸ δεύτερον εἶδος πρὸς 3 δραχμὰς καὶ τὸ τρίτον εἶδος πρὸς 2 δρ. Ἂν πωλήσῃ 5 πήχεις ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ;

Λύσις. Ἂν πωλήσῃ 1 πῆχυν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, θὰ λάβῃ $4+3+2$ ἢ 9 δραχμάς· ἀπὸ τοὺς 5 πήχεις θὰ λάβῃ 5 φορὰς τὰς 9 δραχμάς, ἤτοι 9×5 ἢ 45 δρ. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον 9×5 γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $(4+3+2)\times 5$, ἤτοι θέτομεν τὸ ἄθροισμα ἐντὸς παρενθέσεως, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 5.

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα καὶ μὲ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Ἀπὸ τὸ πρῶτον εἶδος θὰ λάβῃ 4×5 ἢ 20 δραχμάς, ἀπὸ τὸ δεύτερον 3×5 ἢ 15 δραχμάς, καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον 2×5 ἢ 10 δρ. Ὥστε θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ 4×5+3×5+2×5 ἢ 20+15+10, ἤτοι 45 δρ. Ἀλλ᾽ εἴτε τὸν πρῶτον τρόπον μεταχειρισθῶμεν εἴτε τὸν δεύτερον, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι (4+3+2)×5=4×5+3×5+2×5=20+15+10=45.

Ἐκ τῶν δύο τρόπων τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

36. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτο ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ἢ πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν προσθετέων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

Καὶ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ἄθροισμα ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν ἀριθμὸν ὡς πολλαπλασιαστὴν (ἐδ. 35) καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν.

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

37. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 4635 ἐπὶ 4· θὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν 4 φοράς, ἤτο 4635 + 4635 + 4635 + 4635. Ἀλλ᾽ ὁ ἀριθμὸς 4635 εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων, ἤτοι εἶναι 4635 = 4 χιλ. + 6 ἑκατ. + δεκ. + 5 μον., ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς μονάδα του, τὰς δεκάδας του κτλ. ἐπὶ 4 καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικ γινόμενα (ἐδ. 36). Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 4635 \\ 4 \\ \hline 18540 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς 5 μονάδας λέγοντες 5 ἐπὶ 4 (ἢ 4 ἐπὶ 5) κάμνουν 20 μονάδας, ἤτοι 2 δεκάδας καὶ 0 μονάδας, γράφομεν λοιπὸν 0 ὑποκάτω τῆς γραμμῆς καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 δεκάδας διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὰς 3 δεκάδας λέγοντες 3 ἐπὶ 4 κάμνουν 12 δεκάδας καὶ 2 τὰ κρατούμενα 14 δεκάδας, ἤτοι 1 ἑκατοντάδα καὶ 4 δεκάδας, γράφομεν λοιπὸν 4 εἰς τὴν θέσιν τῶν δεκάδων τοῦ γινομένου καὶ κρατοῦμεν τὴν 1 ἑκατοντάδα διὰ νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἑκατοντάδων. Ἐξακολουθοῦντες τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν γινόμενον 18540.

Σημ. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι σύντομος πρόσθεσις ἴσων ἀριθμῶν.

Παραδείγματα.

27456	79068	67009
8	9	7
219648	711612	469063

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς ἔχει τὸ πρῶτον ψηφίον σημαντικόν, τὰ δὲ λοιπὰ μηδενικά.

38. Ἔστω νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 245 καὶ 3000. Ἐὰν λάβωμεν ὡς πολλαπλασιαστέον τὸν 3000 (τοῦτο δὲν βλάπτε τὸ γινόμενον, ἐδάφ. 35), θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 3 χιλιάδας ἐπὶ 245, ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 245 ἐπὶ 3, ὅτε εὑρίσκομεν 735, κα ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο πρέπει νὰ παριστᾷ χιλιάδας (ὡς ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον), διὰ τοῦτο γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τρία μηδενικὰ (ὅσα δηλ. ἔχει ὁ 3000), ἤτοι 735000. Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔχει τὸ πρῶτον ψηφίον σημαντικόν, τὰ δὲ λοιπὰ μηδενικά παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ αὐτοῦ καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά.

Τὸ γινόμενον ἐπίσης τοῦ 348 ἐπὶ 10 εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ 1, ὅτε εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 348, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ γράψωμεν ἓν μηδενικόν, ἤτοι εἶναι $348 \times 10 = 3480$. Ἐπίσης εἶναι $5763 \times 100 = 576300$. Ὥστε

39. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συντόμως ἀριθμὸν ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000, καὶ γενικῶς ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἕν, δύο, τρία, κτλ. μηδενικὰ (δηλ. τόσα ὅσα ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα).***

Παραδείγματα.

255	$356 \times 100 = 35600$
3000	$17 \times 1000 = 17000$
765000	

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ πολυψήφιον.

40. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5273 ἐπὶ 462, ἤτοι νὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν 462 φοράς. Ἐπειδὴ εἶναι $462 = 400 + 60 + 2$, δυνάμεθα (κατὰ τὸ ἐδάφ. 36) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5273 χωριστὰ ἐπὶ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ 462, ἤτοι ἐπὶ 2, ἐπὶ 60 καὶ ἐπὶ 400, καὶ ἔπειτα νὰ

προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα (ἔχοντες ὑπ' ὄψει καὶ τὸ ἐδ. 38), ἤτοι

5273	5273	5273
2	60	400
10546	316380	2109200

10546
316380
2109200
Ἄθροισμα 2436126

Ἐπειδὴ τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ μηδενικὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου μερικοῦ γινομένου οὐδὲν προσθέτουσιν εἰς τὸ ἄθροισμα, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτά, ἤτοι

10546
31638
21092
2436126

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

5273	πολλαπλασιαστέος
462	πολλαπλασιαστής
10546	μερικὸν γινόμενον ἐπὶ 2 (μονάδας)
31638	» » » 6 (δεκάδας)
21092	» » » 4 (ἑκατοντ.)
2436126	ὁλικὸν γινόμενον

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, γράφομεν ὑποκάτω τοῦ πολλαπλασιαστέου τὸν πολλαπλασιαστὴν οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑποκάτω αὐτῶν σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν. Ἔπειτα, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε τὸ πρῶτον πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον ἑκάστου μερικοῦ γινομένου νὰ εὑρίσκηται ὑποκάτω ἐκείνου τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, μὲ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν. Τέλος σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ὑποκάτω αὐτῆς γράφομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων.

Παρατήρησις. Ὅταν μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὑπάρχουν μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μόνον μὲ τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (διότι τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ 0 εἶναι 0), προσέχοντες ὅμως νὰ γράφωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα συμφώνως μὲ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Παραδείγματα.			
	679	7896	6089
	86	703	1008
	4074	23688	48712
	5432	55272	6089
	58394	5550888	6137712

41. ***Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.*** Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ὡς ἑξῆς.

Ἀλλάσσομεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, ἤτοι θέτομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ πολλαπλασιάζομεν· ἂν εὕρωμεν τὸ ἴδιον γινόμενον, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος (ἐδ. 35).

Συντομίαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1ον) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀριθμούς, τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἢ καὶ οἱ δύο λήγουν εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτούς, ἔπειτα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τὰ παραλειφθέντα μηδενικά. Π. χ. διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4300 καὶ 120, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 43 καὶ 12, ἔπειτα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 516 τὰ παραλειφθέντα τρία μηδενικά, ἤτοι 516000.

2ον) Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει καὶ τὴν ἑξῆς συντομίαν. Ὡς πολλαπλασιαστὴν λαμβάνομεν πάντοτε τὸν ἔχοντα ὀλιγώτερα σημαντικὰ ψηφία. Διότι τότε θὰ ἔχωμεν ὀλιγώτερα μερικὰ γινόμενα.

3ον) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συντόμως ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ψηφία εἶναι 9, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα 9 ἔχει ὁ ἄλλος· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ σχηματισθέντος ἀριθμοῦ τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ ἡ διαφορὰ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον. Διατί;

4ον) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν νοερῶς διψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τὰς δεκάδας του, ἔπειτα τὰς μονάδας του καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Προβλήματα.

1) Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται 50 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται 3 πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Κατάξις τῶν ἀριθμῶν.	1 πῆχυς	50 δραχμὰς
	3	X

Ἤτοι γράφομεν εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμὰς (ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι αἱ 50 δραχμαί, καὶ τἀνάπαλιν ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν 50 δραχμῶν εἶναι ὁ 1 πῆχυς), ὑποκάτω δὲ γράφομεν τὴν νέαν δοθεῖσαν τιμὴν 3 ὑπὸ τὴν ὁμοειδῆ της, τὴν δὲ ἄγνωστον καὶ ἀντίστοιχον πρὸς αὐτὴν τιμὴν παριστῶμεν μὲ τὸ γράμμα X (1).

Διὰ νὰ λύσωμεν τώρα τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 1 πῆχυν, θὰ δώσωμεν 50 δραχμάς· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3 πήχεις, θὰ δώσωμεν τρεῖς φορὰς τὰς 50 δραχμάς, ἤτοι $50 + 50 + 50$ ἢ 50×3, ἤτοι 150 δραχμὰς (διότι δραχμὰς ἐπαναλαμβάνομεν).

2) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 λεμόνια. Πόσα θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 4 δραχμάς;

Κατάταξις. 1 δραχ. 3 λεμ.
4 X

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 λεμόνια, μὲ 4 δραχμὰς θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τέσσαρας φορὰς τὰ 3 λεμόνια, ἤτοι $3 + 3 + 3 + 3$ ἢ 3×4, ἤτοι 12 λεμόνια (διότι λεμόνια ἐπαναλαμβάνομεν).

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται πολλαπλασιασμός, εἶναι γνωστὴ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἤτοι εἰς μὲν τὸ πρῶτον πρόβλημα εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως, εἰς δὲ τὸ δεύτερον ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς δραχμῆς, ἡ ὁποία εἶναι 3 λεμόνια) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (ἤτοι τῶν πολλῶν πήχεων, τῶν πολλῶν δραχμῶν). Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

42. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ὁμοειδῶν), κάμνομεν πολλαπλασιασμόν*** (2).

Πολλαπλασιαστέος εἶναι πάντοτε ἡ ***τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος*** (διότι αὐτὴ ἐπαναλαμβάνεται πολλάκις) καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ

(1) Οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ ἐννοήσωσι τὸ ἑξῆς. Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἀριθμός τις εἶναι τιμὴ ἄλλου, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι πρέπει νὰ παριστᾷ οὗτος καὶ πάντοτε χρήματα, ἀλλὰ δύναται νὰ παριστᾷ οἱονδήποτε πρᾶγμα. Π. χ. ἐὰν δώσωμεν 2 μῆλα εἰς ἓν παιδίον καὶ λάβωμεν παρ' αὐτοῦ ὡς ἀντάλλαγμα 5 καρύδια, τὰ 2 μῆλα εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 5 καρυδίων καὶ τἀνάπαλιν τὰ 5 καρύδια εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 2 μήλων.

(2) Διὰ νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν, δὲν ἀρκεῖ μόνον νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ νὰ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων, ἀλλὰ πρέπει νὰ εἶναι καὶ τὸ πρόβλημα τοιαύτης φύσεως, ὥστε διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς μονάδος νὰ διπλασιάζηται, τριπλασιάζηται κλπ. καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ αὐτῆς. Διότι ἂν π.χ. εἷς ἐργάτης τελειώνῃ ἔργον τι εἰς 8 ὥρας, οἱ 2, οἱ 3 κτλ. ἐργάται δὲν θὰ τὸ τελειώσωσιν εἰς 8×2, 8×3 κτλ. ὥρας, ἀλλ' εἰς ὀλιγώτερον.

ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ὅστις, ὡς εἴπομεν καὶ προηγουμένως, θεωρεῖται ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ ἐν τῇ πράξει καὶ ἐν τῇ σκέψει. Εἰς τὸ πρῶτον λοιπὸν πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶναι αἱ 50 δραχμαὶ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶναι τὰ 3 λεμόνια καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 4.

Ἀφοῦ δὲ μάθωμεν ποῖος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ποῖος ὁ πολλαπλασιαστής, δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ τὸν πολλαπλασιαστέον ὡς ἀφῃρημένον ἀριθμὸν καὶ νὰ ἐκτελῶμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλομεν (διότι τὸ γινόμενον δὲν μεταβάλλεται, ἐδ. 35), ἀρκεῖ μόνον νὰ ἐνθυμώμεθα ὅτι τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλαστέον.

Παρατήρησις. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν 3 λεμόνια, ἂν δώσωμεν ὅμως περισσοτέρας δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ περισσότερα λεμόνια· καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἀγοράσωμεν περισσότερα λεμόνια, θὰ δώσωμεν καὶ περισσοτέρας δραχμάς. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν δραχμῶν καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν λεμονίων εἶναι μεταβλητός, ἐξαρτώμενος ὁ εἷς ἀπὸ τοῦ ἄλλου.

Ἀσκήσεις νοεραί. 1) Μία ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας. Πόσας ἡμέρας ἔχουν 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἑβδομάδες ;

2) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 6 δεκάδραχμα ; Πόσαι 7, 8, 9, 10, 14, 27, 35, 100 δεκάδραχμα ;

3) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 6 ἑκατοντάδραχμα ; Πόσαι 9, 10, 14, 65, 80 ἑκατοντάδραχμα ;

4) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 3 πεντακοσιόδραχμα ; Πόσαι 5, 7, 8, 9, 10 πεντακοσιόδραχμα ;

5) Τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας. Πόσους μῆνας ἔχουν 3, 6, 7 ἔτη ;

6) Μία ὀκᾶ ζάχαρι ἔχει 19 δρ. Πόσον ἔχουν 2 ὀκάδες ; Πόσον 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ὀκάδες ;

7) Μία ὀκᾶ ἐλαίου ἔχει 24 δρ. Πόσον ἔχουν 3, 4, 5, 6, 20 ὀκάδες ;

8) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι 5 εἰκοσάδραχμα ; Πόσαι 7, 20, 40, 15, 18, 35, 75 εἰκοσάδραχμα ;

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

Πρόβλημα. Εἰς μίαν πόλιν ὑπάρχουν 3 γυμνάσια· ἕκαστον γυμνάσιον ἔχει 6 τάξεις, ἑκάστη τάξις περιέχει 20 θρανία, καὶ εἰς ἕκαστον θρανίον κάθηνται 2 μαθηταί. Πόσους μαθητὰς ἔχουν καὶ τὰ 3 γυμνάσια ;

Λύσις. Τὸ ἓν γυμνάσιον ἔχει 6 τάξεις, τὰ 3 γυμνάσια ἔχουν 3×6 ἢ 18 τάξεις. Ἡ μία τάξις ἔχει 20 θρανία, αἱ 18 τάξεις ἔχουν 18 × 20 ἢ 360 θρανία. Εἰς ἓν θρανίον κάθηνται 2 μαθηταί, εἰς τὰ 360 θρανία κάθηνται 360 × 2 ἢ 720 μαθηταί. Τὸ ἐξαγόμενον 720, τὸ ὁποῖον εὕρομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν ἀριθμῶν, λέγεται ***γινόμενον πολλῶν παραγόντων*** καὶ σημειοῦται ὡς ἑξῆς 3 × 6 × 20 × 2. Ὥστε

43. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς δύο πρώτους, τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς.***

Σημ. Ὅταν ὅλοι οἱ παράγοντες εἶναι ἀφῃρημένοι καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἀφῃρημένον. Ὅταν ὅμως εἶναι συγκεκριμένοι, τότε ὁ εἷς μόνον τῶν παραγόντων λαμβάνεται ὡς συγκεκριμένος, ὁ ὁμοειδὴς μὲ τὸ ζητούμενον (οὗτος εἶναι καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος), ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι παράγοντες θεωροῦνται ἐν τῇ σκέψει καὶ ἐν τῇ πράξει ἀφῃρημένοι.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Π. χ. αἱ 6 τάξεις τοῦ ἑνὸς γυμνασίου ἔχουν θρανία 20 × 6 ἢ 120, μαθητὰς ἔχουν 120 × 2 ἢ 240, καὶ ἑπομένως τὰ 3 γυμνάσια ἔχουν 240 × 3 ἢ 720 μαθητάς. Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς· ἡ μία τάξις ἔχει μαθητὰς 20 × 2 ἢ 40, αἱ 6 τάξεις τοῦ ἑνὸς γυμνασίου ἔχουν 40 × 6 ἢ 240, καὶ τὰ 3 γυμνάσια ἔχουν 240×3 ἢ 720. Οἱονδήποτε ὅμως τρόπον καὶ ἂν μεταχειρισθῶμεν, τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκομεν. Ὥστε εἶναι

$$3 \times 6 \times 20 \times 2 = 20 \times 6 \times 2 \times 3 = 20 \times 2 \times 6 \times 3$$

Ἐκ τούτου μανθάνομεν ὅτι

44. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς.***

Σημ. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης προτιμῶμεν χάριν συντομίας νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς ἐκείνους, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εὑρίσκομεν εὐκόλως νοερῶς.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 290 ὀκάδες καφὲ πρὸς 58 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε; (16 820).

2) Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶναι ἴσον μὲ 1852 μέτρα. Πόσα μέτρα εἶναι 208 μίλια; (385 216).

3) Ἠγόρασέ τις 180 πρόβατα πρὸς 320 δραχμὰς τὸ καθὲν καὶ 75 ἀρνία πρὸς 250 δρ. τὸ καθέν. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε; (76 350).

4) Μία ὑπηρέτρια ἐλάμβανε μισθὸν τὸ πρῶτον ἔτος 250 δρ. τὸν

μῆνα, τὸ δεύτερον ἔτος 275 δρ. τὸν μῆνα. Πόσον ἔλαβε καὶ τὰ δύο ἔτη; (6300 δρ.).

5) Ἠγόρασέ τις χωράφιον καὶ ἔδωσε 6 χιλιόδραχμα, 19 πεντακοσιόδραχμα, 8 ἑκατοντάδραχμα, 14 εἰκοσάδραχμα καὶ 18 τάλληρα (πεντάδραχμα). Πόσας δραχμὰς τὸ ἠγόρασε; (16 670).

6) Ὑπάλληλός τις λογαριάζει ὅτι, ἂν ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν 98 δραχμάς, θὰ περάσῃ μὲ τὸν μισθόν του ἕνα μῆνα (30 ἡμ.) καὶ θὰ περισσεύσουν 1500 δραχμαί. Πόσος εἶναι ὁ μισθός του; (4200).

7) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 45 ὀκάδας βουτύρου πρὸς 82 δρ. τὴν ὀκᾶν· κατόπιν τὸ ἐπώλησε πρὸς 95 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐκέρδισε; (585 δρ.).

8) Ἀτμόπλοιον ἔκαμε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν 42 ὥρας. Τὰς πρώτας 30 ὥρας ἔτρεχε 13 μίλια τὴν ὥραν, τὰς δὲ ἄλλας ὥρας ἔτρεχε 12 μίλια τὴν ὥραν. Πόσα μίλια ἀπέχει ἡ Ἀλεξάνδρεια ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ; (534).

9) Ἠγόρασέ τις 6 στατῆρας ἀνθράκων πρὸς 3 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωσεν ἕνα χιλιόδραχμον. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ὀπίσω (ρέστα); (208).

10) Γυνή τις ἠγόρασε 2 δωδεκάδας μανδήλια πρὸς 9 δρ. τὸ καθέν· Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ὀπίσω ἀπὸ τρία ἑκατοντάδραχμα; (84).

11) Ἠγόρασέ τις 15 λεμόνια πρὸς 65 λεπτὰ τὸ καθὲν καὶ ἔδωσε δύο τάλληρα. Πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ὀπίσω; (25).

12) Ἠγόρασέ τις 14 αὐγὰ πρὸς 1 δραχμὴν καὶ 40 λεπτὰ (ἤτοι 140 λεπτὰ) τὸ καθὲν καὶ ἔδωσε ἕνα εἰκοσάδραχμον. Πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ὀπίσω; (40).

13) Εἰς ἕνα κῆπον εἶναι φυτευμένα μαρούλια εἰς 8 σειρὰς καὶ κάθε σειρὰ ἔχει 48 μαρούλια. Πόσα λεπτὰ θὰ λάβῃ ὁ κηπουρός, ἂν τὰ πωλήσῃ πρὸς 65 λ. τὸ ἕνα; (24 960).

14) Ἠγόρασέ τις 150 ὀκ. οἴνου πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν, κατόπιν ἔρριψεν εἰς τὸν οἶνον 20 ὀκ. ὕδατος καὶ τὸν ἐπώλησε πρὸς 10 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐκέρδισε; (500 δρ.).

15) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 35 ὀκ. καφὲ πρὸς 70 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 25 ὀκ. καφὲ ἄλλης ποιότητος πρὸς 60 δρ. τὴν ὀκᾶν. Κατόπιν ἀνέμιξε τὰς δύο ποιότητας καὶ ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν πρὸς 88 δρ. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε; (1330).

16) Λαμβάνει τις ἐνοίκιον ἐκ τῆς οἰκίας του κατὰ μῆνα ἐκ τοῦ ἄνω πατώματος 1500 δραχμάς, ἐκ τοῦ μεσαίου 1100 καὶ ἐκ τοῦ ὑπογείου 300, ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' ἐπισκευήν, φόρον οἰκο-

δομῶν κτλ. 6900 δραχ. Ζητεῖται πόσον ἔχει καθαρὸν εἰσόδημα τὸ ἔτος ἐκ τῆς οἰκίας του. (27 900).

17) Ἐργάτης τις ἤρχισε μίαν ἐργασίαν τὴν 9ην Ἰουλίου καὶ τὴν ἐτελείωσε τὴν 5 Αὐγούστου. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε πρὸς 75 δρ. τὴν ἡμέραν; (2100).

Σημ. Ὁ Ἰούλιος μὴν ἔχει 31 ἡμέρας.

18) Χωρική τις ἠγόρασεν ἀπὸ ἔμπορον 6 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 37 δρ. τὸν πῆχυν καὶ τοῦ ἔδωσε 2 ὀκάδας βούτυρον πρὸς 87 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 32 αὐγὰ πρὸς 1 δραχμὴν καὶ 50 λεπτὰ τὸ καθέν. Ποῖος χρεωστεῖ εἰς τὸν ἄλλον; (οὐδείς)

19) Εἰς ἓν ἐργοστάσιον ἐργάζονται 36 ἐργάται. Ἐξ αὐτῶν οἱ 8 ἐργάται λαμβάνουν τὴν ἡμέραν 90 δραχμὰς ἕκαστος, οἱ 15 λαμβάνουν 60 δρ. ἕκαστος, καὶ οἱ ἄλλοι 40 δρ. ἕκαστος. Πόσον λαμβάνουν ὅλοι εἰς 5 ἑβδομάδας; Τὰς Κυριακὰς δὲν ἐργάζονται. (64 200).

20) Ἔχει τις 3 ἀγελάδας καὶ ἑκάστη ἔδιδεν ἐπὶ ἕνα μῆνα 8 ὀκ. γάλα τὴν ἡμέραν, τὸ ὁποῖον ἐπώλει πρὸς 10 δρ. τὴν ὀκᾶν. Εἶχεν ὅμως ἔξοδα τὴν ἡμέραν διὰ τὴν τροφήν των 35 δρ. δι' ἑκάστην ἀγελάδα. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισεν εἰς ἕνα μῆνα (30 ἡμ.) ἀπὸ τὸ γάλα; (4050 δρ.)

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

45. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 12 μῆλα εἰς 4 παιδία ἐξ ἴσου, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα μῆλα θὰ λάβῃ ἕκαστον.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ πράξωμεν κατὰ τὸν ἑξῆς ἁπλοῦν τρόπον. Κατὰ πρῶτον δίδομεν ἀπὸ ἕνα μῆλον εἰς ἕκαστον, ὅτε μένουν 12—4, ἤτοι 8 μῆλα· ἔπειτα δίδομεν πάλιν ἀπὸ ἕνα μῆλον, ὅτε μένουν 8—4, ἤτοι 4 μῆλα· ἔπειτα δίδομεν πάλιν ἀπὸ ἕνα μῆλον, ὅτε δὲν μένει τίποτε, διότι εἶναι 4—4 = 0. Ἕκαστον λοιπὸν παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα, ἤτοι τόσα, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12. Ἡ πρᾶξις λοιπὸν αὕτη, διὰ τῆς ὁποίας ἐμοιράσαμεν τὰ 12 μῆλα εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι εἶναι 12 = 3 + 3 + 3 + 3), λέγεται ***διαίρεσις*** ἢ ***μερισμός***. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἑξῆς:

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας μοιράζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.

46. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 4

δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 12 δραχμάς. Τοῦτο πάλιν δυνάμεθα νὰ μάθωμεν κατὰ τὸν ἑξῆς ἁπλοῦν τρόπον.

Ἐὰν δώσωμεν 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν 1 ὀκᾶν καὶ θὰ μείνουν 8 δραχμαί· ἐὰν δώσωμεν ἄλλας 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλην 1 ὀκᾶν καὶ θὰ μείνουν 4 δραχμαί· ἐὰν δώσωμεν καὶ τὰς ὑπολοίπους 4 δραχμάς, θὰ ἀγοράσωμεν ἄλλην μίαν ὀκᾶν. Ὥστε θὰ ἀγοράσωμεν ἐν ὅλῳ 3 ὀκάδας, ἤτοι τόσας, ὅσας φορὰς ἀφῃρέσαμεν τὸν 4 ἀπὸ τὸν 12. Ἡ πρᾶξις πάλιν αὕτη λέγεται **διαίρεσις**. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην δὲν μοιράζονται αἱ 12 δραχμαί, ἀλλ' ἁπλῶς παρατηροῦμεν πόσας φορὰς ἔχομεν τὰς 4 δραχμάς, ἤτοι μετροῦμεν τὸν ἕνα ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὕτη λέγεται ἰδιαιτέρως **μέτρησις**. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσας φορὰς δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀριθμός τις ἀπὸ ἄλλον, τόσας φορὰς χωρεῖ οὗτος εἰς ἐκεῖνον. Ὥστε ὁρίζομεν τὴν διαίρεσιν καὶ ὡς ἑξῆς:

47. ***Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον ἀριθμόν.***

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρόκειται νὰ μοιρασθῇ ἢ μετρηθῇ, λέγεται **διαιρετέος**· ὁ δὲ ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη θὰ μοιρασθῇ ὁ διαιρετέος ἢ μὲ τὸν ὁποῖον θὰ μετρηθῇ οὗτος, λέγεται **διαιρέτης**· τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως λέγεται ***πηλίκον***. Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα διαιρετέος εἶναι ὁ 12, διαιρέτης ὁ 4 καὶ πηλίκον ὁ 3.

Τὸ πηλίκον εἰς τὸν μερισμὸν λέγεται ἰδιαιτέρως ***μερίδιον*** (διότι εἶναι μέρος τοῦ διαιρετέου), εἰς δὲ τὴν μέτρησιν λέγεται **λόγος** τοῦ διαιρετέου πρὸς τὸν διαιρέτην (ὑποθέτομεν ὅτι αἱ διαιρέσεις γίνονται ἀκριβῶς). Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀριθμός τις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ δι' ἄλλου, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον :, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται **διά**, ἀλλὰ τὸν διαιρέτην γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, π. χ. 12 : 4 καὶ ἀπαγγέλλομεν **δώδεκα διὰ τέσσαρα**.

Σημ. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος μὲ τὸν διαιρετέον, τὸ πηλίκον εἶναι ἡ μονὰς 1· ἐὰν δὲ ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

48. Ὅταν ἀριθμός τις δύναται νὰ διαιρεθῇ ἢ μοιρασθῇ ἀκριβῶς εἰς ἴσα μέρη, χωρὶς νὰ μείνῃ τίποτε, ἡ διαίρεσις τότε λέγεται **τελεία**, τοὐναντίον δὲ λέγεται **ἀτελής**. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἀπὸ

τὰ 12 μῆλα, τὰ ὁποῖα ἐμοιράσαμεν εἰς τὰ 4 παιδία, ἔλαβεν ἕκαστον 3 μῆλα καὶ δὲν ἔμεινε τίποτε· ἡ διαίρεσις λοιπὸν αὕτη εἶναι τελεία. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν π. χ. 22 μῆλα καὶ μοιράσωμεν αὐτὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον εἰς τὰ 4 παιδία, θὰ λάβῃ ἕκαστον 5 μῆλα καὶ θὰ μείνουν 2 μῆλα. Ἡ διαίρεσις λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀτελής· ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 (μῆλα), ὅστις μένει, λέγεται **ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου (διότι, ἂν ἦτο ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου 4, ἠδυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἀκόμη εἰς ἕκαστον παιδίον ἀπὸ ἓν ἢ περισσότερα μῆλα).

49. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω γενομένην τελείαν διαίρεσιν λαμβάνομεν ἀπὸ ἕκαστον παιδίον ὅσα μῆλα ἐδώσαμεν, τότε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 12 μῆλα· ἀλλ' ἕκαστον παιδίον ἔλαβε 3 μῆλα, ἑπομένως τὰ 4 παιδία ἔλαβον 3×4 μῆλα. Ὥστε εἶναι $12 = 3 \times 4$.

Ἐὰν πράξωμεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀτελῆ διαίρεσιν, ἤτοι λάβωμεν ἀπὸ ἕκαστον παιδίον ὅσα μῆλα ἐδώσαμεν καὶ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ 2 μῆλα, ὅπου ἔμειναν, θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰ 22 μῆλα· ἀλλ' ἕκαστον παιδίον ἔλαβε 5 μῆλα, ἑπομένως τὰ 4 παιδία ἔλαβον 5×4 μῆλα. Ὥστε εἶναι $22 = 5 \times 4 + 2$. Ἐκ τούτων μανθάνομεν ὅτι

50. ***Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου, εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ μὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον.***

Σημ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 0 δι' ἀριθμοῦ εἶναι 0 (καθὼς καὶ τὸ ὑπόλοιπον), ἤτοι εἶναι $0 : 5 = 0$. Διότι πολλαπλασιαζομένου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκεται ὁ διαιρετέος. Ἡ διαίρεσις ὅμως ἀριθμοῦ (ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς) διὰ 0, ὡς π. χ. $5 : 0$, εἶναι ἀδύνατος· διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον 5.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ἀφαιρέσεως τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ἀπαιτεῖ καὶ κόπον καὶ χρόνον, μάλιστα δὲ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι μεγάλοι. Διὰ τοῦτο θὰ μεταχειρισθῶμεν κατωτέρω ἄλλον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον συντόμως εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν.

Διαίρεσις ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον.

51. Κατὰ πρῶτον πρέπει νὰ μάθωμεν πότε τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι μονοψήφιον καὶ πότε πολυψήφιον.

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10, γράφοντες ἓν μηδενικὸν πρὸς τὰ δεξιά του, καὶ ἂν προκύψῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον· διότι τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 10 φοράς, ἀλλ' ὀλιγώτερον, ἑπομένως τὸ πηλίκον θὰ εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, . . . 9, ἤτοι μονοψήφιος. Ἐὰν ὅμως προκύψῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου, τὸ πηλίκον θὰ εἶναι διψήφιον ἢ πολυψήφιον· διότι τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ διαιρέτης χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 10 φορὰς ἢ περισσότερον. Ἐν τῇ διαιρέσει ταύτῃ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον, δυνατὸν ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι ἢ μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος· ὥστε διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον) ***Διαιρέτης μονοψήφιος.*** Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 32 διὰ 5. Ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 5 ἀπὸ τὸν 32 ὅσας φορὰς εἶναι δυνατὸν καὶ νὰ εὕρωμεν οὕτω τὸ πηλίκον, ὡς ἐπράξαμεν ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν τοῦτο συντόμως ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν νοερῶς τὸν διαιρέτην 5 ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε νὰ εὕρωμεν τὸ μεγαλύτερον γινόμενον τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν 32. Τοιοῦτον γινόμενον εἶναι ἐνταῦθα ὁ ἀριθμὸς 5×6, ἤτοι ὁ 30 (διότι 5×7, ἤτοι ὁ 35, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 32)· ὁ πολλαπλασιαστὴς λοιπὸν 6 δεικνύει ὅτι ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 32 ἓξ φοράς, τουτέστι τὸ πηλίκον τοῦ 32 διὰ 5 εἶναι ὁ 6· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν 30 ἀπὸ τὸν 32, ἤτοι εἶναι 2. Ὥστε ἡ διαίρεσις εἶναι σύντομος ἐπαναληπτικὴ ἀφαίρεσις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

2ον) ***Διαιρέτης πολυψήφιος.*** Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 6475 δραχμὰς εἰς 743 ἀνθρώπους. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον (τὸ ὁποῖον εἶναι μονοψήφιον· διότι ὁ 7430 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 6475), σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ ἄνθρωποι εἶναι μόνον 700 ἢ 7 ἑκατοντάδες· διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν δραχμήν, πρέπει νὰ μοιράσωμεν 7 ἑκατοντάδας δραχμῶν, ἀλλ' ἡμεῖς ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 64 ἑκατοντάδας (τόσας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 6475)· ὥστε θὰ λάβῃ ἕκαστος τόσας δραχμάς, ὅσας φορὰς αἱ 7 ἑκατοντάδες χωροῦν εἰς τὰς 64 ἑκατοντάδας ἢ ὁ 7 εἰς τὸ 64. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 64 διὰ 7 (ἤτοι διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου) εὑρίσκομεν πηλίκον 9, μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 6475 διὰ 743 εἶναι πάλιν 9· διότι οἱ ἄνθρωποι εἶναι περισσότεροι τῶν 7 ἑκατοντάδων, ἤτοι 743, καὶ ἑπομένως δὲν γνωρίζομεν, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος χωρεῖ εἰς ἐκεῖνον 9 φοράς.

Διὰ νὰ μάθωμεν, ἂν τὸ πηλίκον τοῦ 6475 διὰ 743 εἶναι 9 ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ 9 καὶ ἂν τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου, τότε πράγματι τὸ πηλίκον εἶναι 9· ἂν δὲ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ διαιρέτης δὲν χωρεῖ 9 φορὰς εἰς τὸν διαιρετέον, ἀλλ' ὀλιγώτερον. Τὸ γινόμενον λοιπὸν τοῦ 743 ἐπὶ 9 εἶναι 6687, ἤτοι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου 6475, διὰ τοῦτο θὰ δοκιμάσωμεν τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον τοῦ 9 ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 8, καὶ εὑρίσκομεν γινόμενον 743 × 8 ἢ 5944, ἤτοι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἑπομένως τὸ πηλίκον εἶναι 8, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι ἡ διαφορὰ 6475 — 5944, ἤτοι 531. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ 8 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 531 δραχμαί. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 6475 & 743 \\ \cline{2-2} 5944 & 8 \\ \cline{1-1} 531 & \end{array} \qquad \text{ἢ συντόμως} \qquad \begin{array}{r|l} 6475 & 743 \\ \cline{2-2} 531 & 8 \end{array}$$

52. Ὅταν μάθωμεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν εἶναι μονοψήφιον, εὑρίσκομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν ἰσάριθμα ψηφία, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ψηφίον (πρὸς τὰ ἀριστερὰ) τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ψηφίου τοῦ διαιρέτου· ἐὰν δὲ ὁ διαιρετέος ἔχῃ ἓν ψηφίον περισσότερον τοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτοῦ καὶ ἔπειτα δοκιμάζομεν (ὡς ἀνωτέρω), ἂν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ ἀληθὲς ἢ μικρότερον αὐτοῦ.

Παραδείγματα. $\begin{array}{r|l} 935 & 387 \\ \cline{2-2} 161 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 427 & 87 \\ \cline{2-2} 79 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3347 & 346 \\ \cline{2-2} 233 & 9 \end{array}$

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου νὰ χωρῇ εἰς τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρετέου, 10 φορὰς ἢ καὶ περισσότερον, δοκιμάζομεν ἀμέσως τὸν 9· Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω τρίτον παράδειγμα ὁ 3 χωρεῖ 11 φορὰς εἰς τὸν 33, ἀρχίζομεν λοιπὸν τὴν δοκιμὴν ἀπὸ τὸν 9, διότι γνωρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι μονοψήφιον.

Διαίρεσις ἀριθμῶν, ὧν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.

53. Ἐν τῇ διαιρέσει ταύτῃ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον, δυνατὸν πάλιν ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι μονοψήφιος ἢ πολυψήφιος· ὥστε καὶ ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1ον) ***Διαιρέτης μονοψήφιος.*** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν, ἤτοι νὰ μοιράσωμεν 4783 δραχμὰς εἰς 7 ἀνθρώπους.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ μερίδιον ἑκάστου, ἀρκεῖ νὰ μοιράσωμεν χωριστὰ τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ 4783, ἤτοι χωριστὰ τὰς χιλιάδας, χωριστὰ τὰς ἑκατοντάδας, χωριστὰ τὰς δεκάδας καὶ χωριστὰ τὰς μονάδας. Ἀλλ' αἱ 4 χιλιάδες αὐτοῦ δὲν φθάνουν διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν χιλιάδα (διότι οἱ ἄνθρωποι εἶναι 7), διὰ τοῦτο τρέπομεν αὐτὰς εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 40 ἑκατοντάδας (διότι ἑκάστη χιλιὰς ἔχει 10 ἑκατοντ.) καὶ 7 ἑκατοντάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 47 ἑκατοντάδας. Ἀλλ' ὁ 47 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὰ δύο πρῶτα ψηφία του. Διαιροῦντες τὰς 47 ἑκατοντάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 6 ἑκατοντ. (διότι εἶναι $7 \times 6 = 42$) καὶ μένουν 5 ἑκατοντάδες.

Τὰς 5 ἑκατοντάδας τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 50 δεκάδας (διότι ἑκάστη ἑκατοντὰς ἔχει 10 δεκάδας) καὶ 8 δεκάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 58 δεκάδας. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 58 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 5 τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 58. Διαιροῦντες τώρα τὰς 58 δεκάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δεκάδας καὶ μένουν 2 δεκάδες.

Τὰς 2 δεκάδας τοῦ ὑπολοίπου τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς 20 μονάδας (διότι μία δεκὰς ἔχει 10 μονάδας) καὶ 3 μονάδας ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς κάμνουν 23 μονάδας.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 23 εὑρίσκεται ἀμέσως, ἐὰν γράψωμεν (ἢ καταβιβάσωμεν) εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 2 τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου, ἤτοι 23. Διαιροῦντες τὰς 23 μονάδας διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 3 μονάδας καὶ μένουν 2 μονάδες. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ δραχμὰς 6 ἑκατοντάδας, 8 δεκάδας καὶ 3 μονάδας, ἤτοι θὰ λάβῃ 683 δρ. καὶ θὰ μείνουν 2 δραχμαί.

Διάταξις τῆς πράξεως.

$$\begin{array}{l|l} 4\acute{7}\acute{8}3 & 7 \\ \cline{2-2} \;\;58 & 683 \\ \;\;\;23 & \\ \;\;\;\;\;2 & \end{array}$$

2ον) ***Διαιρέτης πολυψήφιος.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 8459 δραχμὰς εἰς 343 ἀνθρώπους. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, ἤτοι τὸ μερίδιον ἑκάστου, θὰ ἀναλύσωμεν τὴν διαίρεσιν εἰς ἄλλας μερικὰς διαιρέσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων θὰ ἔχῃ πηλίκον μονοψήφιον. Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν περισσότερον, ἂν ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Ἐνταῦθα θὰ χωρίσωμεν τρία ψηφία, διότι ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς 845 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρέτου 343. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 845 διὰ 343 (ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 52) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 δεκάδας (διότι τὰς 845 δεκ. τοῦ διαιρετέου διῃρέσαμεν) καὶ ὑπόλοιπον 159 δεκάδας.

Ἐὰν τώρα καταβιβάσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 159 καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον 9 τοῦ διαιρετέου, σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 1599, ὅστις παριστᾷ μονάδας (διότι αἱ 159 δεκάδες κάμνουν 1590 μονάδας καὶ 9 τοιαύτας ὅπου ἔχει ὁ διαιρετέος κάμνουν 1599 μονάδας). Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 1599 διὰ τοῦ 343 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 227 μονάδας. Ὥστε τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 8459 διὰ 343 εἶναι 24 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 227, ἤτοι ἕκαστος θὰ λάβῃ 24 δρ. καὶ θὰ μείνουν 227 δρ.

Διάταξις τῆς πράξεως.

8459	343
1599	24
227	

54. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μανθάνομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν ἀκόμη, ἂν ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου. Τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ὅλον τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Τὸν σχηματισθέντα ἀριθμὸν (ἐκ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ ἑπομένου ψηφίου) διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου.

Σημ. Συμβαίνει πολλάκις, ἀφοῦ καταβιβάσωμεν πλησίον ὑπολοίπου τινὸς καὶ τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, νὰ μὴ διαιρῆται ὁ οὕτω σχηματισθεὶς ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφομεν τότε 0 εἰς τὸ πηλίκον (διὰ νὰ τηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου) καὶ καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμὸν ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου.

Παραδείγματα πρὸς ἄσκησιν.

598 : 89	προκύπτει	πηλίκον	6	καὶ ὑπόλοιπον	64
3456 : 398	»	»	8	»	36 2
47424 : 78	»	»	608	»	0
77416 : 97	»	»	798	»	10
895673 : 892	»	»	1004	»	105
705341 : 786	»	»	897	»	299

55. ***Πλῆθος ψηφίων πηλίκου.*** Ἐὰν θέλωμεν νὰ μάθωμεν πόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν αὐτήν, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ἔπειτα μετροῦμεν τὰ μὴ χωρισθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου καὶ ὅσα εἶναι ταῦτα καὶ ἓν ἀκόμη, τόσα ψηφία θὰ ἔχῃ τὸ πηλίκον. Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος.

Ἰδιότης τῆς διαιρέσεως.

56. Ἐὰν μοιράσωμεν 25 μῆλα εἰς 7 παιδία, ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα καὶ θὰ περισσεύσουν 4 μῆλα. Ἐὰν πάλιν μοιράσωμεν 25 μῆλα εἰς ἄλλα 7 παιδία, ἕκαστον θὰ λάβῃ πάλιν 3 μῆλα καὶ θὰ περισσεύσουν 4 μῆλα. Ὥστε ἐὰν μοιράσωμεν 25 + 25 ἢ 25 × 2, ἤτοι 50 μῆλα, εἰς 7 + 7 ἢ 7 × 2, ἤτοι εἰς 14 παιδία, ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ 3 μῆλα καὶ θὰ περισσεύσουν 4 + 4 ἢ 4 × 2, ἤτοι 8 μῆλα. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον 25 ἐπὶ 2 καὶ τὸν διαιρέτην 7 ἐπὶ 2, τὸ πηλίκον 3 μένει τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 4 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 2. Τοῦτο ἀληθεύει καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην μὲ οἱονδήποτε ἄλλον ἀριθμόν.

Ἐὰν πάλιν μοιράσωμεν π. χ. 46 καρύδια εἰς 8 παιδία, ἕκαστον θὰ λάβῃ 5 καρύδια καὶ θὰ περισσεύσουν 6 καρύδια. Ἐὰν ὅμως μοιράσωμεν τὰ μισὰ καρύδια, ἤτοι 46 : 2 ἢ 23 καρύδια, εἰς τὰ μισὰ παιδία, ἤτοι εἰς 8 : 2 ἢ 4 παιδία, ἕκαστον θὰ λάβῃ πάλιν 5 καρύδια καὶ θὰ περισσεύσουν 3 καρύδια ἢ 6 : 2. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ἂν διαιρέσωμεν τὸν διαιρετέον 46 καὶ τὸν διαιρέτην 8 διὰ 2, τὸ πηλίκον 5 μένει τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 6 διαιρεῖται διὰ 2.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

57. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Συντομίαι τῆς διαιρέσεως.

58. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 18359 δραχμὰς εἰς 400 ἀνθρώπους καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος. Διὰ νὰ λάβῃ ἕκαστος ἀπὸ μίαν δραχμήν, πρέπει νὰ μοιράσωμεν τόσας δραχμάς, ὅσοι εἶναι καὶ οἱ ἄνθρωποι, ἤτοι 400 ἢ 4 ἑκατοντάδας δραχμάς. Ὥστε ὅσας φορὰς αἱ 4 ἑκατοντάδες χωροῦν εἰς τὰς 183 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 18359 (παραλείποντες τὸν 59), τόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος. Διαιροῦντες λοιπὸν τὸν 183 διὰ 4, εὑρίσκομεν πηλίκον 45 καὶ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοντάδας, αἱ ὁποῖαι μαζὶ μὲ τὰς 59 μονάδας κάμνουν **359 μονάδας**. Ὥστε ἕκαστος θὰ λάβῃ 45 δραχμὰς καὶ θὰ μείνουν 359 δραχμαί.

Διάταξις τῆς πράξεως.

183(59	4(00
23	45
3	

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

59. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμὸν δι' ἄλλου λήγοντος εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, καθὼς καὶ ἴσον ἀριθμὸν ψηφίων ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τοὺς προκύπτοντας ἀριθμούς. Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον, ἐὰν δὲ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου τὰ παραλειφθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου, θὰ ἔχωμεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον.***

Τὸ πηλίκον ἐπίσης τοῦ ἀριθμοῦ 865 διὰ 10 εἶναι 86 (διότι εἶναι 86 : 1 = 86) καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5. Τὸ πηλίκον τοῦ 3596 διὰ 100 εἶναι 35 (διότι εἶναι 35 : 1 = 35) καὶ τὸ ὑπόλοιπον 96. Τὸ πηλίκον τοῦ 370000 διὰ 1000 εἶναι 370 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε

60. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμὸν διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 καὶ γενικῶς διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ἀπὸ μηδενικά, χωρίζομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἕν, δύο, τρία κτλ. ψηφία (ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα) καὶ τὰ μὲν χωρισθέντα ψηφία ἀποτελοῦσι τὸ ὑπόλοιπον, τὰ δὲ ἄλλα τὸ πηλίκον.***

61. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμὸν διὰ 5 πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 2 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 10.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 70 διὰ 5, διαιροῦμεν τὸν 70 × 2, ἤτοι τὸν 140, διὰ 5 × 2, ἤτοι διὰ 10, καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω πηλίκον 14 καὶ ὑπόλοιπον 0 (ἐδ. 57).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συντόμως ἀριθμὸν διὰ 25, πολλαπλα-

σιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ 4 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ 50, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 2 καὶ διαιροῦμεν διὰ 100. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δὲ αὐτὸν διὰ 125, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 8 καὶ διαιροῦμεν διὰ 1000.

62. **Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως.** Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου ηὐξημένον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον, ἂν ὑπάρχῃ (ἐδάφ. 50), διὰ τοῦτο κάμνομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον μὲ τὸν διαιρέτην καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Σημ. Ἡ δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται καὶ διὰ τῆς διαιρέσεως. Διαιροῦμεν τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων καὶ ἂν εὕρωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἄλλον παράγοντα καὶ ὑπόλοιπον 0, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος. Διότι, ἂν π.χ. ὁ 35 προκύπτῃ ἐκ τοῦ 5 ἐπαναλαμβανομένου ἑπτὰ φορὰς ἢ ἐκ τοῦ 7 ἐπαναλαμβανομένου πέντε φοράς, ἕπεται ὅτι ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 35 ἑπτὰ φοράς, ἢ ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 35 πέντε φοράς.

Προβλήματα.

1) Ἠγόρασέ τις 9 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωσε 27 δραχμάς. Πόσον τιμᾶται ἡ μία ὀκᾶ;

Κατάταξις. 9 ὀκ. 27 δραχ.

1 χ

Λύσις. Ἐὰν μοιράσωμεν τὰς 27 δραχμὰς εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσαι εἶναι αἱ ὀκάδες, ἤτοι εἰς 9, τὸ ἓν τῶν μερῶν τούτων θὰ παριστᾷ προφανῶς τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 27 διὰ 9 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3, ἄρα 3 δραχμὰς τιμᾶται ἡ μία ὀκᾶ (διότι δραχμὰς μοιράζομεν).

2) Μὲ 6 τάλληρα ἀγοράζομεν 24 πορτοκάλλια. Πόσα ἀγοράζομεν μὲ ἕνα τάλληρον;

Κατάταξις. 6 τάλ. 24 πορτ.

1 χ

Λύσις. Ἐὰν μοιράσωμεν τὰ 24 πορτοκάλλια εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα εἶναι τὰ τάλληρα, ἤτοι εἰς 6, τὸ ἓν τῶν μερῶν τούτων θὰ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν πορτοκαλλίων, τὰ ὁποῖα ἀγοράζομεν μὲ 1 τάλληρον. Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 24 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4, ἄρα 4 πορτοκάλλια ἀγοράζομεν (διότι πορτοκάλλια μοιράζομεν).

Καὶ εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα γίνεται διαίρεσις (μερισμός), εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων (εἰς μὲν τὸ πρῶτον πολλαὶ μονάδες εἶναι αἱ 9 ὀκάδες καὶ τιμὴ αὐτῶν αἱ 27 δραχμαί, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πολλαὶ μονάδες εἶναι τὰ 6 τάλληρα καὶ τιμὴ αὐτῶν τὰ 24 πορτοκάλλια) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς, τοῦ ἑνὸς ταλλήρου). Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

63. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ὁμοειδοῦς) κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμόν).***

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων καὶ διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμὸς καὶ ἐν τῇ πράξει καὶ ἐν τῇ σκέψει. Εἰς τὸ πρῶτον λοιπὸν πρόβλημα διαιρετέος εἶναι αἱ 27 δραχμαὶ καὶ διαιρέτης ὁ 9, εἰς δὲ τὸ δεύτερον πρόβλημα διαιρετέος εἶναι τὰ 24 πορτοκάλλια καὶ διαιρέτης ὁ 6.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, καθὼς καὶ εἰς τὰ κατωτέρω, ὑποθέτομεν τὰς διαιρέσεις τελείας.

3) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 9 δραχμάς. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 27 δραχμάς;

Κατάταξις. 1 πῆχ. 9 δραχ.

χ 27

Λύσις. Ὅσας φορὰς ἔχομεν τὰς 9 δραχμάς, τόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ἔχομεν τὰς 9 δραχμάς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 27, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (ἐδάφ. 47). Διαιροῦμεν λοιπὸν τὸν 27 διὰ 9 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3· ὥστε 3 φορὰς ἔχομεν τὰς 9 δραχμάς, ἑπομένως 3 πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐδόθησαν δύο ὁμοειδεῖς τιμαὶ (ἤτοι 9 δραχμαὶ καὶ 27 δραχμαί), ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος (ἤτοι τοῦ ἑνὸς πήχεως), ἡ δὲ ἄλλη εἶναι ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων (ἤτοι τῶν τριῶν πήχεων). Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

64. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας, τῶν ὁποίων τὴν ὁμοειδῆ τιμὴν ἔχομεν, κάμνομεν διαίρεσιν (μέτρησιν).***

Διαιρετέος εἶναι καὶ ἐδῶ ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης θεωροῦνται ὡς ἀφῃρημένοι ἀριθμοί, ἑπομένως καὶ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἀφῃρημένον· κατόπιν ὅμως κάμνομεν αὐτὸ συγκεκριμένον, ὡς ἀπαιτεῖ τὸ πρόβλημα, ἤτοι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν.

Σημ. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως πρέπει ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς καθ' ὅλα, διότι ἄλλως μέτρησις δὲν γίνεται.

4) Πόσα λεμόνια θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 3 δραχμάς, ὅταν τὸ καθὲν πωλῆται πρὸς 60 λεπτά;

Λύσις. Τρέπομεν πρῶτον καὶ τὰς 3 δρ. εἰς λεπτά, διὰ νὰ γίνουν ὁμοειδεῖς, καὶ ὅσας φορὰς τὰ 60 λ. (ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος) χωροῦν εἰς τὰ 300 λεπτά, τόσα λεμόνια θὰ ἀγοράσωμεν, ἤτοι 300 : 60 ἢ 5 λεμόνια (διότι λεμόνια παριστᾷ καὶ ἡ μονὰς τοῦ προβλήματος).

Παρατήρησις. Τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ διακρίνονται ἀπὸ τὰ προβλήματα τῆς μετρήσεως κατὰ τοῦτο· εἰς μὲν τὰ πρῶτα ἔχει δοθῆ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων, εἰς δὲ τὰ δεύτερα ζητεῖται οὗτος. Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν πρὸς λύσιν προβλήματός τινος, πρέπει πρὸς κατανόησιν αὐτοῦ νὰ κάμνωμεν διάκρισιν τῆς διαιρέσεως ταύτης, ἂν δηλ. εἶναι μερισμὸς ἢ μέτρησις. Π. χ. τὰ ἀνωτέρω προβλήματα 1ον καὶ 3ον λύονται καὶ τὰ δύο διὰ τῆς αὐτῆς διαιρέσεως 27 : 9, ἀλλ' εἶναι διάφορα τὴν φύσιν.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον εἰς τὴν διαίρεσιν (εἴτε μερισμὸς εἶναι αὕτη εἴτε μέτρησις), τοῦτο εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον.

Νοεραὶ ἀσκήσεις. 1) 3 ὀκάδες ἐξ ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 18 δρ. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Πόσον 7 ὀκάδες; 9 ὀκάδες; 40 ὀκάδες;

2) 4 πήχεις δαντέλλα ἀξίζουν 28 δρ. Πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς; Καὶ πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 35 δραχμάς; Μὲ 49 δραχμάς;

3) 6 πήχεις κορδέλλα ἀξίζουν 24 δρ. Πόσον ἀξίζει ὁ εἷς πῆχυς; Καὶ πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ 16 δραχμάς; Μὲ 36 δραχμάς;

4) Πόσας δραχμὰς κάμνουν 600 λεπτά; 1500 λεπτά;

Διαίρεσις ἀθροίσματος καὶ γινομένου δι' ἀριθμοῦ.

Πρόβλημα. Πατήρ τις ἐμοίρασεν ἐξ ἴσου εἰς τὰ 4 τέκνα του τὴν πρώτην φορὰν 20 καρύδια, τὴν δὲ δευτέραν φορὰν 28 καρύδια. Πόσα ἔλαβεν ἕκαστον τέκνον;

Λύσις. Ἐμοίρασεν ἐν ὅλῳ 20 + 28 ἢ 48 καρύδια, ἑπομένως ἕκαστον τέκνον ἔλαβε (20 + 28) : 4 ἢ 48 : 4, ἤτοι 12 καρύδια. Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Τὴν πρώτην φορὰν ἔλαβεν ἕκαστον τέκνον 20 : 4, ἤτοι 5 καρύδια, τὴν δὲ δευτέραν φορὰν ἔλαβεν 28 : 4, ἤτοι 7 καρύδια, ὥστε ἕκαστον τέκνον ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 5 + 7, ἤτοι 12 καρύδια. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

65. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτό, ἢ διαιροῦμεν ἕκαστον προσθετέον χωριστὰ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιρῆται ἀκριβῶς) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.***

Πρόβλημα. Ἐὰν εἰς 4 παιδία μοιράσωμεν τρεῖς φορὰς ἀπὸ 8 καρύδια, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

Λύσις. Θὰ μοιράσωμεν 8 × 3 ἢ 24 καρύδια καὶ θὰ λάβῃ ἕκαστον παιδίον (8 × 3) : 4 ἢ 24 : 4, ἤτοι 6 καρύδια. Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς· τὴν πρώτην φορὰν θὰ λάβῃ ἕκαστον παιδίον 8 : 4 ἢ 2 καρύδια, τὴν δευτέραν φορὰν θὰ λάβῃ ἄλλα 2 καρύδια καὶ τὴν τρίτην φορὰν ἄλλα 2 καρύδια, ὥστε θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ 2 + 2 + 2 ἢ 2 × 3 ἢ 6 καρύδια, ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον 2 τῆς διαιρέσεως 8 : 4 ἐπὶ 3. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

66. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον παραγόντων δι' ἀριθμοῦ, ἢ εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ γινόμενον καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἢ διαιροῦμεν ἕνα τῶν παραγόντων (ὅστις νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν μὲ τοὺς ἄλλους παράγοντας.***

Ἐὰν ὅμως συμβῇ ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι ἴσος μὲ ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, ἐξαλείφομεν τὸν παράγοντα τοῦτον, οἱ δὲ ἄλλοι παριστῶσι τὸ πηλίκον. Διότι εἶναι π. χ. $5 \times 7 \times 3 : 7 = 5 \times 1 \times 3 = 5 \times 3$.

Ἀσκήσεις. Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ ἐκτελῶνται πρῶτον αἱ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πράξεις.

$48 + 15 - 9$, $27 - 9 - 5 = 18 - 5 = 13$ ἢ $27 - 14 = 13$, $65 - 28 - 5$, $70 - (9 + 8) = 70 - 17 = 53$, $25 - (9 - 3)$, $(17 \times 4) + 20$, $(24 \times 5) - 15$, $70 - (8 \times 5)$, $(12 \times 6) + (7 \times 5)$, $(16 \times 5) - (12 \times 5)$, $(9 + 4 + 5) \times 8$, $(9 - 4) \times 7$, $(2 \times 5 \times 8) \times 4$, $(18 + 15 + 6) : 3$, $(15 \times 8 \times 2) : 4$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τὸ ὀκταπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 4872. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος; (609).

2) Τὸ ἐννεαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 7182. Πόσον εἶναι τὸ ἑπταπλάσιον αὐτοῦ; (5586).

3) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 85, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 6715; (79).

4) Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 84105 διὰ νὰ εὕρωμεν πηλίκον 97 καὶ ὑπόλοιπον 6; (867).

5) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 95 δίδει τὸ αὐτὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ ὁ 54128 διαιρούμενος διὰ 796; (6460).

6) Εἰς μίαν ἄμπελον εἶναι φυτευμένα 5963 κλήματα εἰς 89 σειρὰς καὶ ὅλαι αἱ σειραὶ ἔχουν ἴσα κλήματα. Πόσα κλήματα ἔχει κάθε σειρά; (67).

7) Ἐπληρώσαμεν εἰς ἔμπορον 2485 δραχμὰς ὅλας μὲ τάλληρα. Πόσα τάλληρα ἐδώσαμεν; (497).

8) Πόσας φιάλας τῶν 300 δραμίων ἠμποροῦμεν νὰ γεμίσωμεν μὲ 12 ὀκ. ἐλαίου; (16).

Σημ. Τρέπομεν καὶ τὰς ὀκάδας εἰς δράμια, διὰ νὰ γίνουν ὁμοειδεῖς.

9) Ἐδώσαμεν 35 δραχμὰς καὶ ἠγοράσαμεν αὐγὰ πρὸς 1 δραχμὴν καὶ 40 λεπτὰ (ἤτοι 140 λεπτὰ) τὸ καθέν. Πόσα αὐγὰ ἠγοράσαμεν; (25).

10) Ἠγόρασέ τις 15 ὀκ. βουτύρου καὶ ἔδωσε 1455 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Καὶ πόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη μὲ 2716 δραχμάς; (97 δρ., 28 ὀκ.).

11) Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 4 δραχμὰς εἰς 5 πτωχούς. Πόσον θὰ δώσωμεν εἰς τὸν καθένα;

Λύσις. 4 δρ. : 5 ἢ 400 λ. : 5 = 80 λεπτά.

12) Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 3 ὀκάδες μῆλα εἰς 16 παιδία. Πόσον θὰ δώσωμεν εἰς τὸ καθέν; (75 δράμια).

13) Μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 8 λεμόνια. Πόσον ἀξίζει τὸ καθέν; Καὶ πόσα λεμόνια ἀγοράζομεν μὲ 15 δραχμάς; (75 λεπτά, 20 λεμόνια).

14) Ἠγόρασέ τις 680 πορτοκάλλια πρὸς 850 δραχμὰς τὰ χίλια. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε; (578).

15) Γυνή τις ἠγόρασε 5 δωδεκάδας κουμπιὰ καὶ ἔδωσεν 27 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει τὸ καθέν; (45 λεπτά).

16) Ἠγόρασέ τις 15 ὀκάδας ἐλαίου καὶ ἔδωσεν εἰς τὸν παντοπώλην ἓν χιλιόδραχμον, ὁ δὲ παντοπώλης τοῦ ἐπέστρεψε 580 δρ. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν τοῦ ἐλαίου; (28 δρ.).

17) Μία χωρικὴ ἐπώλησε 35 ὀκ. σίτου πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν κατόπιν μὲ ὅσας δραχμὰς ἔλαβεν ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 14 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσας πήχεις ἠγόρασε; (20).

18) Ἀτμόπλοιον τρέχει 12 μίλια τὴν ὥραν. Πόσας ὥρας θὰ

κάμῃ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν Βόλον, ὁ ὁποῖος ἀπέχει 192 μίλια; Καὶ ἂν ἀναχωρήσῃ τὴν 7ην ὥραν πρὸ μεσημβρίας, ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ; (16 ὥρας, τὴν 11ην μ. μ.).

19) Παντοπώλης τις ἠγόρασε βούτυρον πρὸς 87 δρ. τὴν ὀκᾶν· κατόπιν τὸ ἐπώλησε πρὸς 96 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ ἐκέρδισε 585 δρ. Πόσας ὀκάδας βουτύρου ἠγόρασε; (65).

20) Γυνή τις ἠγόρασεν 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωσεν εἰς τὸν ἔμπορον 2 ἑκατοντάδραχμα, 3 εἰκοσάδραχμα, 6 πεντάδραχμα καὶ 4 δραχμάς. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν; (42 δρ.).

21) Πατήρ τις ἐμοίρασεν 27 καρύδια εἰς τοὺς δύο υἱούς του, ἀλλ' εἰς τὸν μεγαλύτερον ἔδωσε διπλάσια ἀπὸ ὅσα ἔδωσεν εἰς τὸν μικρότερον. Πόσα ἔδωσεν εἰς τὸν καθένα; (9 καὶ 18).

22) Μήτηρ τις ἔχει ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης της, αἱ ἡλικίαι δὲ καὶ τῶν δύο μαζὶ κάμνουν 56 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία των; (42 καὶ 14 ἐτῶν).

23) Διὰ νὰ κάμῃ τις ὑποκάμισα, ἠγόρασεν ὕφασμα πρὸς 19 δρ. τὸν πῆχυν καὶ ἔδωσε 437 δρ. Πόσον ὕφασμα ἠγόρασε; Καὶ πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμῃ, ἐὰν διὰ τὸ καθὲν χρειάζεται 5 πήχεις; (23 πήχ., 4 ὑπ. καὶ θὰ περισσεύσουν 3 π.)

24) Ἠγόρασέ τις πρόβατα καὶ ἀρνία μὲ 33000 δραχμάς. Ἀλλ' ὅσα ἦσαν τὰ πρόβατα, τόσα ἦσαν καὶ τὰ ἀρνία· τὰ πρόβατα ἠγόρασε πρὸς 280 δρ. τὸ καθὲν καὶ τὰ ἀρνία πρὸς 160 δρ. Πόσα ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος;

Λύσις. Ἂν ἀγοράσῃ 1 πρόβατον καὶ 1 ἀρνίον θὰ δώσῃ 440 δρ. Ὅσας φορὰς ὁ 440 χωρεῖ εἰς τὸν 33000, πόσα ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος, ἤτοι 75.

25) Ἐπλήρωσα εἰς ἕνα ἐργάτην 450 δραχμὰς μὲ εἰκοσάδραχμα καὶ πεντάδραχμα, ἀλλ' ὅσα ἦσαν τὰ εἰκοσάδραχμα, τόσα ἦσαν καὶ τὰ πεντάδραχμα. Πόσα ἦσαν ἀπὸ κάθε εἶδος; (18).

26) Εἰς ἓν σχολεῖον εἶναι 160 παιδία, ἄρρενα καὶ θήλεα, ἀλλὰ τὰ ἄρρενα εἶναι 74 περισσότερα ἀπὸ τὰ θήλεα. Πόσα εἶναι τὰ ἄρρενα καὶ πόσα τὰ θήλεα;

Λύσις. Ἐὰν ἀπὸ τὰ 160 παιδία ἀφαιρέσωμεν τὰ περιπλέον 74 ἄρρενα, θὰ μείνουν 86 παιδία, τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελῶνται ἐξ ἴσου ἀπὸ ἄρρενα καὶ θήλεα· Ὥστε τὰ θήλεα εἶναι 86 : 2, ἤτοι 43, καὶ τὰ ἄρρενα 43 + 74, ἤτοι 117.

27) Δύο παιδία ἔχουν μαζὶ 84 βόλους, ἀλλὰ τὸ ἓν παιδίον ἔχει 12 βόλους περισσότερον τοῦ ἄλλου. Πόσους βόλους ἔχει τὸ καθέν; (36 καὶ 48).

28) Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν μαζὶ 65 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 28 δρχ.

τὴν ὀκᾶν, ἀλλ' ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ἔδωσε 252 δρ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Πόσας δραχμὰς ἔδωσεν ἕκαστος; Καὶ πόσας ὀκάδας ἔλαβε;
(784 δρ. καὶ 1036 δρ., 28 ὀκ. καὶ 37).

29) Πατὴρ τις μὲ τοὺς τρεῖς υἱούς του εἰργάσθησαν 20 ἡμέρας καὶ ἔλαβον μαζὶ 4500 δρ. Ὁ πατὴρ ἐλάμβανε τὴν ἡμέραν 75 δραχμάς, ὁ πρῶτος υἱὸς 60 δρ. καὶ ὁ δεύτερος 50 δρ. Πόσον ἐλάμβανεν ὁ τρίτος υἱὸς τὴν ἡμέραν; (40).

30) Ἐργάτης τις λαμβάνει ἡμερομίσθιον 75 δραχμάς, ἀλλὰ δὲν ἐργάζεται τὰς Κυριακάς, ἐξοδεύει ὅμως τὴν ἑβδομάδα πρὸς συντήρησίν του 260 δραχ. Μετὰ πόσας ἑβδομάδας θὰ οἰκονομήσῃ 1520 δραχμάς, τὰς ὁποίας χρεωστεῖ; (8).

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

67. Συμβαίνει ἐνίοτε οἱ παράγοντες γινομένου τινὸς νὰ εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ὅπως π. χ. εἰς τὰ γινόμενα 6×6, $2 \times 2 \times 2$, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ κτλ., τότε τὰ γινόμενα ταῦτα λέγονται **δυνάμεις** ἑνὸς τῶν παραγόντων τούτων, ἤτοι τὸ γινόμενον 6×6 λέγεται δύναμις τοῦ 6, τὸ γινόμενον $2 \times 2 \times 2$ λέγεται δύναμις τοῦ 2 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε

Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Καὶ ἂν μὲν οἱ παράγοντες εἶναι δύο, λέγεται ἰδιαιτέρως ***δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον***· ἂν δὲ εἶναι τρεῖς, λέγεται ***τρίτη δύναμις ἢ κύβος***· ἂν δὲ εἶναι τέσσαρες, λέγεται ***τετάρτη δύναμις*** καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως μὲ ἕνα παράγοντα καὶ εἰς τὰ δεξιὰ καὶ ὀλίγον ἄνω αὐτοῦ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων καὶ λέγεται οὗτος ***ἐκθέτης***, ὁ δὲ παράγων λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως. Π. χ. ἡ δύναμις 6×6 γράφεται 6^2· καὶ ὁ μὲν 2 εἶναι ὁ ἐκθέτης, ὁ δὲ 6 εἶναι ἡ βάσις, καὶ ἀπαγγέλλεται ἓξ εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ 6 ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ 6· ὡσαύτως ἡ δύναμις $5 \times 5 \times 5$ γράφεται 5^3 καὶ ἀπαγγέλλεται πέντε εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ἢ ἡ τρίτη δύναμις τοῦ 5 ἢ ὁ κύβος τοῦ 5. Ὥστε εἶναι $6^2 = 6 \times 6$, $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ καὶ $5^1 = 5$.

Σημ. Πᾶσα δύναμις τῆς μονάδος 1 εἶναι πάλιν ἡ μονὰς 1· διότι εἶναι π. χ. $1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 εἶναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσος εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως· διότι εἶναι π. χ. $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

68. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ σχηματίζομεν δύναμιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.***

Π. χ. $2^3 \times 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$. Διότι εἶναι $2^3 \times 2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$. Ἐπίσης εἶναι $5^2 \times 5^3 \times 5 = 5^{2+3+1} = 5^6$.

69. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύναμιν δι' ἄλλης δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, σχηματίζομεν δύναμιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν.***

Π. χ. $3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$. Διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον 3^2 ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3^3, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον 3^5.

Ἐπίσης εἶναι $3^2 : 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $3^2 : 3^2$ ἰσοῦται καὶ μὲ τὴν μονάδα 1 (διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσοι), ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $3^0 = 1$. ***Πᾶς λοιπὸν ἀριθμὸς ἔχων ἐκθέτην 0 ἰσοῦται μὲ 1.***

70. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.***

Π. χ. εἶναι $(5^2)^3 = 5^6$. Διότι $(5^2)^3$ σημαίνει τρεῖς παράγοντας ἴσους μὲ 5^2, ἤτοι εἶναι $(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{2 \times 3} = 5^6$.

71. ***Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν, ὑψώνομεν ἕκαστον τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.***

Π. χ. $(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$. Διότι εἶναι $(3 \times 5)^2 = 3 \times 5 \times 3 \times 5 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ (ἐδ. 35) $= 3^2 \times 5^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

72. Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἄλλου (χωρὶς δηλ. νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον), λέγεται **διαιρετὸς** δι' αὐτοῦ· ὁ δὲ ἄλλος, ὅστις διαιρεῖ αὐτὸν ἀκριβῶς, λέγεται **διαιρέτης**. Π. χ. ὁ 12 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ὁ δὲ 6 εἶναι διαιρέτης τοῦ 12.

Ὅταν ἀριθμός τις παράγεται ἐξ ἄλλου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγεται **πολλαπλάσιον** αὐτοῦ. Π. χ. ὁ 15 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, διότι παράγεται ἐκ τοῦ 3 πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 5· εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 5 διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

73. ***Πᾶς ἀριθμός, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιον ἄλλου, εἶναι***

διαιρετὸς δι' αὐτοῦ. Καὶ πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Π. χ. ὁ 3 διαιρεῖ τὸν 15· διότι ἀφοῦ ὁ 15 παράγεται ἐκ τοῦ 3 πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ 5, ἕπεται ὅτι ὁ 3 χωρεῖ εἰς τὸν 15 πέντε φοράς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν 15. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 5 εἶναι παράγοντες τοῦ γινομένου 15, ὥστε οἱ παράγοντες ἀριθμοῦ εἶναι καὶ διαιρέται αὐτοῦ.

74. ***Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῇ δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. Καὶ ὅταν διαιρῇ δύο μόνον ἀριθμούς, διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τὸν 5, ὅστις διαιρεῖ τοὺς ἀριθμοὺς 45 καὶ 30· λέγω ὅτι ὁ 5 διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $45+30$. Διότι ὁ 5 εἰς τὸν 45 χωρεῖ 9 φορὰς καὶ εἰς τὸν 30 χωρεῖ 6 φοράς, ὁ 5 λοιπὸν εἰς τὸ ἄθροισμα $45+30$ χωρεῖ ἀκριβῶς $9+6$ ἢ 15 φοράς.

Ὥστε τὸ ἄθροισμα διαιρεῖται διὰ 5. Ἐὰν τώρα ἀπὸ τὰ 9 πέντε τοῦ 45 ἀφαιρέσωμεν τὰ 6 πέντε τοῦ 30, θὰ μείνουν 3 πέντε. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν $45-30$ θὰ περιέχῃ 3 πέντε, ἑπομένως διαιρεῖται διὰ 5.

75. ***Ὅταν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, διαιρεῖ καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ.***

Π. χ. ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 8, ὁ 4 θὰ διαιρῇ καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8, ἤτοι τὸ 8×2, τὸ 8×3 κτλ. Διότι εἶναι $8\times2=8+8$ καὶ $8\times3=8+8+8$, τὰ ἀθροίσματα ταῦτα διαιροῦνται διὰ 4 (ἐδ. 74).

Γνωρίσματα ἀριθμῶν διαιρετῶν διὰ 10, 100, 2, 5, 4, 25, 8, 125, 3, 9, 11.

76. Ὑπάρχουν γνωρίσματα μὲ τὰ ὁποῖα ἠμποροῦμεν νὰ μάθωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς μὲ τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Ἡ γνῶσις αὕτη, ἡ ὁποία πολλάκις θὰ μᾶς χρησιμεύσῃ, στηρίζεται εἰς τοὺς κατωτέρω κανόνας.

Διὰ 10, 100 κτλ. Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 10, 100 κτλ. (ἐδ. 60) συμπεραίνομεν ὅτι

77. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 10, ἐὰν λήγῃ εἰς ἓν τοὐλάχιστον μηδενικόν· διὰ 100, ἐὰν λήγῃ εἰς δύο τοὐλάχιστον μηδενικά, καὶ οὕτω καθεξῆς.***

Διὰ 2 ἢ διὰ 5. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 568. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀναλύεται εἰς 56 δεκάδας καὶ εἰς 8 μονάδας, ἤτοι εἶναι 568 = 56 δεκ. + 8 μον. Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν δεκάδα (ἤτοι τὸν 10) διὰ 2 ἢ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰς 56 δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ 568 ἑκάστην χωριστὰ διὰ 2 ἢ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ἐὰν λοιπὸν καὶ αἱ 8 μονάδες του διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2 ἢ 5, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 568 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5 (ἐδ. 74). Ὥστε βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς ὁ ἀριθμὸς 568 διὰ 2 ἢ 5, ἐξαρτᾶται τοῦτο ἀπὸ τὸ τελευταῖον ψηφίον του πρὸς τὰ δεξιά, καὶ ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ τὸ ψηφίον τοῦτο διαιρούμενον διὰ 2 ἢ 5, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός· ἐὰν δώσῃ ὑπόλοιπον 0, θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

78. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 2 ἢ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον ψηφίον του πρὸς τὰ δεξιὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5.***

Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς 568 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, διότι ὁ 8 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2. Διὰ 5 ὅμως δὲν εἶναι διαιρετός, διότι ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 8 διὰ 5, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 568 διὰ 5. Ἐὰν ὅμως συμβῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιὰ νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 2 ἢ 5, τότε αὐτὸ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ὥστε διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται ἀκριβῶς οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι λήγουν εἰς 0, 2, 4, 6, 8. Διὰ τοῦ 5 ὅσοι λήγουν εἰς 0 ἢ 5. Οἱ διαιρετοὶ ἀριθμοὶ διὰ τοῦ 2 λέγονται ***ἄρτιοι*** ἢ ***ζυγοί***, οἱ δὲ μὴ διαιρετοὶ λέγονται ***περιττοὶ*** ἢ ***μονοὶ*** καὶ λήγουν εἰς 1, 3, 5, 7, 9.

Σημ. Εἰς ἑκάστην δεκάδα (ἤτοι εἰς τὸν 10) ὁ 2 χωρεῖ 5 φορὰς καὶ ὁ 5 χωρεῖ 2 φοράς. Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 5 ἢ ἐπὶ 2 (θεωροῦντες αὐτὸν ἀφῃρημένον) καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ πηλίκον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του διὰ 2 ἢ 5, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ 7983 διὰ 2, πολλαπλασιάζομεν τὸν 798 ἐπὶ 5 καὶ εἰς τὸ γινόμενον 3990 προσθέτομεν τὸ πηλίκον τοῦ 3 διὰ 2, ἤτοι 1, καὶ εὑρίσκομεν 3991. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 7983 διὰ 5, πολλαπλασιάζομεν τὸν 798 ἐπὶ 2 καὶ εὑρίσκομεν 1596 (ὁ 5 δὲν χωρεῖ εἰς τὸν 3).

Διὰ 4 ἢ διὰ 25. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 7836. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀναλύεται εἰς 78 ἑκατοντάδας καὶ εἰς 36 μονάδας, ἤτοι εἶναι 7836 = 78 ἑκ. + 36 μον. Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν ἑκατοντάδα (ἤτοι τὸν 100) διὰ 4 ἢ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν· ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τὰς 78 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 7836 ἑκάστην χωριστὰ διὰ 4 ἢ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν.

Ἐὰν λοιπὸν καὶ αἱ 36 μονάδες του διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4 ἢ 25, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 7836 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25. Ὥστε βλέπομεν ὅτι διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς ὁ 7836 διὰ 4 ἢ 25, ἐξαρτᾶται τοῦτο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 36 τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, καὶ ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ οὗτος διαιρούμενος διὰ 4 ἢ 25, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός· ἂν δώσῃ ὑπόλοιπον 0, θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

79. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του πρὸς τὰ δεξιὰ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.***

Ὁ ἀνωτέρω λοιπὸν ἀριθμὸς 7836 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, διότι ὁ 36 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4· διὰ 25 ὅμως δὲν εἶναι διαιρετός. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 36 διὰ 25, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 11· τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 7836 διὰ 25. Διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 25, πρέπει τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του νὰ εἶναι ἢ 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

Σημ. Εἰς ἑκάστην ἑκατοντάδα (ἤτοι εἰς τὸν 100) ὁ 4 χωρεῖ 25 φορὰς καὶ ὁ 25 χωρεῖ 4 φοράς. Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑκατοντάδων ἀριθμοῦ τινος ἐπὶ 25 ἢ ἐπὶ 4 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέσωμεν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων του διὰ 4 ἢ 25, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25.

Διὰ 8 ἢ διὰ 125. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 35675. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἀναλύεται εἰς 35 χιλιάδας καὶ εἰς 675 μονάδας, ἤτοι εἶναι 35675 = 35 χιλ. + 675 μον. Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅπως ἀνωτέρω, μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

80. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ὅταν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία του πρὸς τὰ δεξιὰ ἀποτελοῦν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8 ἢ 125.***

Διὰ 3 ἢ διὰ 9. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 867. Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν δεκάδα (ἤτοι τὸν 10) ἢ μίαν ἑκατοντάδα (ἤτοι τὸν 100) ἢ μίαν χιλιάδα κτλ. διὰ 3 ἢ 9, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μίαν μονάδα (ἁπλῆν). Ὥστε ἀπὸ τὰς 8 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 867, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 8 μονάδας (μίαν μονάδα ἀπὸ ἑκάστην ἑκατοντάδα χωριστά), ἀπὸ τὰς 6 δεκάδας θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 6 μονάδας (μίαν μονάδα ἀπὸ ἑκάστην δεκάδα χωριστά), αἱ ὁποῖαι μαζὶ μὲ τὰς 7 μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν ἐν ὅλῳ 8 + 6 + 7 μονάδας. Ἐὰν λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο 8 + 6 + 7 ἢ 21 εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 867 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

81. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του (ὡς ἁπλῶν μονάδων θεωρουμένων) εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.***

Ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς 867 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του, ἤτοι ὁ 21, εἶναι διαιρετὸν διὰ 3· διὰ 9 ὅμως δὲν εἶναι διαιρετός. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν 21 διὰ 9, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3, τὸ αὐτὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν καὶ ἂν διαιρέσωμεν τὸν 867 διὰ 9.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἀριθμοῦ δὲν εἶναι μονοψήφιον, ἠμποροῦμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὰ ἀνωτέρω, ἤτοι νὰ προσθέσωμεν τὰ ψηφία του, μέχρις ὅτου εὕρωμεν μονοψήφιον ἀριθμόν. Ὅταν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 πάντοτε εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ 3. Τὸ ἀντίθετον ὅμως δὲν συμβαίνει πάντοτε.

Διὰ 11. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 376948. Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν ἑκατοντάδα (ἤτοι τὸν 100) διὰ 11, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον μίαν μονάδα (ἁπλῆν). Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὰς 3769 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 376948 διὰ 11, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 3769 μονάδας (μίαν μονάδα ἀπὸ ἑκάστην ἑκατοντάδα χωριστά). Ἐὰν πάλιν διαιρέσωμεν τὰς 37 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ 3769 διὰ 11, θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 37 μονάδας, αἱ ὁποῖαι μαζὶ μὲ τὰς 69 μονάδας του καὶ τὰς 48 μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 376948 ἀποτελοῦν ἐν ὅλῳ 37 + 69 + 48 μονάδας. Ἐὰν λοιπὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ 11, τότε καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς 376948 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

82. ***Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων αὐτοῦ ἐκ δεξιῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.***

Σημ. Τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ καὶ ἕνα μόνον ψηφίον.

Ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς 376948 εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, ἤτοι 37 + 69 + 48 ἢ 154, εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

Ἀσκήσεις. Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ γίνῃ ἡ ἀπάντησις, χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

1) Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 273, 5075, 7194, 56952, 81568 ποῖοι εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 9, διὰ 11, διὰ 25;

2) Τί ὑπόλοιπον θὰ εὕρωμεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 64573, 57902, 46819 διὰ 2, διὰ 3, διὰ 4, διὰ 5, διὰ 9;

3) Νὰ γραφῇ τετραψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2, ἄλλος διαιρετὸς διὰ 3, ἄλλος διὰ 5, ἄλλος διὰ 9, ἄλλος διὰ 4 καὶ ἄλλος διὰ 25.

4) Νὰ γραφῇ πενταψήφιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 2 καὶ διὰ 3, ἄλλος διὰ 3 καὶ διὰ 5, ἄλλος διὰ 5 καὶ διὰ 9, ἄλλος διὰ 4 καὶ διὰ 10.

5) Μία χωρικὴ ἔχει 317 αὐγά· ἂν τοποθετήσῃ αὐτὰ ἐν τῷ καλαθίῳ της ἀνὰ 2 ἢ ἀνὰ 3 ἢ ἀνὰ 4 ἢ ἀνὰ 5, πόσα αὐγὰ θὰ περισσεύσουν εἰς τὸ τέλος;

6) Δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν 613 δραχμὰς μόνον μὲ δίδραχμα ἢ μὲ πεντάδραχμα ἢ μὲ δεκάδραχμα ἢ μὲ εἰκοσιπεντάδραχμα; Καὶ ἂν δὲν δυνάμεθα, πόσας δραχμὰς θέλομεν τὸ ὀλιγώτερον ἀκόμη διὰ νὰ κατορθώσωμεν τοῦτο δι' ἕκαστον εἶδος;

ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ ΚΑΙ ΚΟΙΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ. ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

83. Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῇ ἀκριβῶς δύο ἢ περισσοτέρους ἀριθμοὺς λέγεται **κοινὸς διαιρέτης** αὐτῶν. Π. χ. ὁ 2, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 20, εἶναι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Ὅταν ἀριθμός τις εἶναι πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν (ἑκάστου χωριστὰ) λέγεται **κοινὸν πολλαπλάσιον** αὐτῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 6· διότι παράγεται ἐξ ἑκάστου διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διότι εἶναι διαιρετὸς δι' αὐτῶν (ἐδ. 73).

Ὅταν ἀριθμός τις δὲν ἔχῃ ἄλλον διαιρέτην, παρὰ μόνον τὸν ἑαυτόν του καὶ τὴν μονάδα, λέγεται **πρῶτος**. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11 κτλ. εἶναι πρῶτοι.

Ἀριθμός, ὅστις ἔχει διαιρέτας καὶ ἄλλους ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τῆς μονάδος, λέγεται **σύνθετος**. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 6 εἶναι σύνθετος· διότι εἶναι διαιρετός, οὐχὶ μόνον διὰ 6 καὶ διὰ τῆς μονάδος 1, ἀλλὰ καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 4, 8, 9, 15 κτλ. εἶναι σύνθετοι.

84. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους**, ὅταν δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ μόνον τὴν μονάδα (ἡ ὁποία εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν). Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 4 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διότι ἐκτὸς τῆς μονάδος οὐδεὶς ἄλλος ἀριθμὸς διαιρεῖ καὶ τοὺς δύο ἀκριβῶς. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 4, 10, 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι πρῶτος.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

(Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους).

85. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1000. Γράφομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 μὲ τὴν φυσικήν των σειράν, ἤτοι

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 κτλ., ἔπειτα δὲ διαγράφομεν μὲ μίαν γραμμὴν τοὺς μὴ πρώτους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 εἶναι προφανῶς πρῶτοι, ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 2×2 ἢ 4, 2×3 ἢ 6, 2×4 ἢ 8 κτλ. δὲν εἶναι πρῶτοι, διότι διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2 (ἐδ. 73), διὰ τοῦτο θὰ διαγράψωμεν αὐτούς. Ἀριθμοῦμεν λοιπὸν ἀνὰ δύο ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν ἑπόμενον τοῦ 2 ἀριθμόν, ἤτοι ἀπὸ τὸν 3, καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν δεύτερον ἀριθμόν. Ὥστε θὰ διαγράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 8, 10, 12, 14 κτλ. Ὁ μετὰ τὸν 2 ἐρχόμενος ἀριθμὸς 3, ὅστις δὲν διεγράφη, εἶναι πρῶτος. Διαγράφομεν ἔπειτα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 3×2 ἢ 6, 3×3 ἢ 9, 3×4 ἢ 12 κτλ. Ἀριθμοῦμεν λοιπὸν ἀνὰ τρεῖς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν ἑπόμενον τοῦ 3 ἀριθμόν, ἤτοι ἀπὸ τὸν 4, καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν τρίτον ἀριθμόν. Ὥστε θὰ διαγράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 9, 12, 15, 18 κτλ. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 6, 12, 18 κτλ. εἶναι διαγεγραμμένοι ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2, ἀλλὰ τοῦτο δὲν βλάπτει. Κατὰ πρῶτον λοιπὸν θὰ διαγράψωμεν τὸν 3×3 ἢ 9, ὅστις εἶναι τετράγωνον τοῦ 3· ὁ μετὰ τὸν 3 ἐρχόμενος ἀριθμὸς καὶ μὴ διαγεγραμμένος, ἤτοι ὁ 5, εἶναι πρῶτος· διότι δὲν εἶναι πολλαπλάσιον οὐδενὸς τῶν προηγουμένων του ἀριθμῶν.

Διαγράφομεν τώρα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5, ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 5×2 ἢ 10, 5×3 ἢ 15, 5×4 ἢ 20, 5×5 ἢ 25 κτλ. Ἀριθμοῦμεν λοιπὸν ἀνὰ πέντε ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν ἑπόμενον τοῦ 5 ἀριθμόν, ἤτοι ἀπὸ τὸν 6, καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν πέμπτον ἀριθμόν. Ὥστε θὰ διαγράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 10, 15, 20, 25, 30 κτλ., ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 10, 15, 20 εἶναι διαγεγραμμένοι ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5. Κατὰ πρῶτον λοιπὸν θὰ διαγράψωμεν τὸν 5×5 ἢ 25, ὅστις εἶναι τετράγωνον τοῦ 5. Ὁ μετὰ τὸν 5 ἐρχόμενος καὶ μὴ διαγεγραμμένος, ἤτοι ὁ 7, εἶναι πρῶτος.

Ἔπειτα διαγράφομεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7. Ἀριθμοῦμεν λοιπὸν ἀνὰ 7 ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸν ἑπόμενον τοῦ 7 ἀριθμόν, ἤτοι ἀπὸ τὸν 8, καὶ διαγράφομεν πάντοτε τὸν ἕβδομον ἀριθμόν. Ὥστε θὰ διαγράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7×2 ἢ 14, 7×3 ἢ 21,... 7×7 ἢ 49 κτλ. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 14, 21, 28, 35, 42 εἶναι διαγεγραμμένοι ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 7. Κατὰ πρῶτον λοιπὸν θὰ διαγράψωμεν τὸν 7×7 ἢ 49, ὅστις εἶναι τετράγωνον τοῦ 7. Ὁ μετὰ τὸν 7 ἐρχόμενος ἀριθμὸς καὶ μὴ διαγεγραμμένος, ἤτοι ὁ 11, εἶναι πρῶτος.

Παρατηροῦμεν ἀνωτέρω τὸ ἑξῆς. Ὅταν διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ, διαγράφεται κατὰ πρῶτον τὸ τετράγωνον αὐτοῦ. Ὥστε διὰ νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11, θὰ διαγράψωμεν κατὰ πρῶτον τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι 11×11 ἢ 121, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑπομένου του ἀριθμοῦ θὰ διαγράφωμεν πάντοτε τὸν ἑνδέκατον ἀριθμόν. Ὁ μετὰ τὸν 11 ἐρχόμενος ἀριθμὸς καὶ μὴ διαγεγραμμένος, ἤτοι ὁ 13, εἶναι πρῶτος. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ ἐξακολουθήσωμεν μέχρις οὗ εὕρωμεν πρῶτον ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1000· τοιοῦτος πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 37, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 37×37 ἢ 1369 ὑπερβαίνει τὸν 1000, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του πρώτου ἀριθμοῦ 31, ἤτοι τὸ 31×31 ἢ 961, εἶναι μικρότερον τοῦ 1000.

Μὲ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ὅστις λέγεται ***κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους,*** εὑρίσκομεν ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000 εἶναι οἱ ἑξῆς·

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	471	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	

Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας.

86. Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται, ὡς θὰ ἴδωμεν, νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς πρώτους, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν σύνθετον ἀριθμόν. Τοῦτο λέγεται **ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας.**

Ἂς λάβωμεν π. χ. τὸν σύνθετον ἀριθμὸν 360. Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸν εἰς πρώτους παράγοντας, διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 2 (πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοὺς ἀρχικοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7 κτλ.) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 180. Ὥστε εἶναι $360 = 2 \times 180$. Ὁ 180 διαιρεῖται πάλιν διὰ 2 καὶ προκύπτει πηλίκον 90, ὥστε εἶναι $180 = 2 \times 90$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα τὸν 180 διὰ τοῦ ἴσου του 2×90 καὶ ἔχομεν $360 = 2 \times 2 \times 90$.

Ὁ 90 διαιρεῖται διὰ 2 καὶ προκύπτει πηλίκον 45, ὥστε εἶναι $90 = 2 \times 45$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα τὸν 90 διὰ τοῦ ἴσου του 2×45 καὶ ἔχομεν $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 45$. Ὁ 45 διαιρεῖται διὰ 3 καὶ προκύπτει πηλίκον 15, ὥστε εἶναι $45 = 3 \times 15$ καὶ ἑπομένως εἶναι $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$. Ὁ 15 διαιρεῖται πάλιν διὰ 3 καὶ προκύπτει πηλίκον 5, ὥστε εἶναι $15 = 3 \times 5$ καὶ ἑπομένως εἶναι $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ἢ $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Ὁ 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ἑπομένως ἡ ἀνάλυσις ἐτελείωσεν. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν σύνθετον ἀριθμὸν εἰς πρώτους παράγοντας ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

87. ***Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμόν, καθὼς καὶ τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα πηλίκα, διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ 2, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον τὴν μονάδα 1. Τοὺς μὲν διαιρέτας γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν διαιρουμένων ἀριθμῶν, χωριζομένων διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα ὑποκάτω αὐτῶν. Κατόπιν σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν καὶ τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.***

Σημ. Καλὸν εἶναι νὰ δοκιμάζωμεν διὰ διαιρέτας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7 κτλ. τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἤτοι πρῶτον τὸν 2, καὶ ὅταν παύσῃ οὗτος νὰ εἶναι διαιρέτης, τότε δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως ἑπόμενον πρῶτον ἀριθμὸν 3.

Ἐνίοτε ἀριθμός τις ἀναλύεται ἀμέσως εἰς πρώτους παράγοντας. Π. χ. εἶναι $100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^2$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $1000 = 2^3 \times 5^3$, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, 10000 κτλ. ἀναλύονται εἰς τοὺς δύο πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5 καὶ μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν μηδενικῶν αὐτῶν.

Ἀσκήσεις. Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς πρώτους παράγοντας οἱ ἀριθμοὶ 585, 1848, 4950, 2100, 8000, 280000, 108000.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Περὶ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

88. Εἴπομεν ἀνωτέρω (ἐδάφ. 83) ὅτι κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ αὐτοὺς ἀκριβῶς. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 12, 18 καὶ 24 ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3 καὶ 6. Ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν τούτων διαιρετῶν, ἤτοι ὁ 6, λέγεται ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*** Ὥστε ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν.***

Εἴπομεν ἐπίσης (ἐδ. 83) ὅτι ὅταν ἀριθμός τις εἶναι πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ***κοινὸν πολλαπλάσιον*** αὐτῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 6. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 24, 36, 48 κτλ. εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 6· διότι εἶναι διαιρετοὶ δι' αὐτῶν (ἐδ. 73). Ἀλλ' ἐκ τῶν κοινῶν τούτων πολλαπλασίων 12, 24, 36, 48, τὰ ὁποῖα ἔχουν οἱ ἀριθμοὶ 3, 4 καὶ 6, τὸ μικρότερον αὐτῶν, ἤτοι ὁ 12, λέγεται ***ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον***· διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 12, ὅστις νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτῶν. Ὥστε ***Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μικρότερος τῶν ἀριθμῶν, τὸν ὁποῖον διαιροῦν οὗτοι.***

Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

89 Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου καὶ ἂν εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοῦ

νὸς διαιρέτης αὐτῶν· εἰ δὲ μή, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου, τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο διαιροῦμεν πάλιν διὰ τοῦ νέου εὑρεθέντος ὑπολοίπου καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν. Ὁ τελευταῖος διαιρέτης, διὰ τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον μηδέν, εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ. μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 36 καὶ 9 εἶναι ὁ 9, διότι οὗτος διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 36. Ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 9 δὲν διαιρεῖ τὸν 9 καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 62, διαιροῦμεν τὸν 360 διὰ 62 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 50· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 62 διὰ τοῦ ὑπολοίπου 50 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 12· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 50 διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου 12 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2· τέλος διαιροῦμεν τὸν 12 διὰ τοῦ νέου ὑπολοίπου 2 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἑπομένως ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 360 καὶ 62 εἶναι ὁ 2. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

	5	1	4	6
360	62	50	12	2
50	12	2	0	

ἤτοι χωρίζομεν τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν διαιρετέον διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς καὶ ὑπεράνω τοῦ διαιρέτου γράφομεν τὸ πηλίκον καὶ χωρίζομεν αὐτὸ ἀπὸ τὸν διαιρέτην διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, τὸ δὲ ὑπόλοιπον γράφομεν ὑποκάτω τοῦ διαιρετέου. (1)

Σημ. Ἐὰν εὑρεθῇ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἡ μονὰς 1, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

90. Ἐὰν ὁ μεγαλύτερος δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν διαιρῆται ἀκριβῶς δι᾽ ὅλων τῶν ἄλλων, οὗτος εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Π. χ. ἐκ τῶν ἀριθμῶν 6, 8 καὶ 24 ὁ μεγαλύτερος 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων 6 καὶ 8, οὗτος λοιπὸν εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 6, 8 καὶ 24. Διότι δὲν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 24, ὅστις νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 24.

(1) Εἰς τὸ Γ' Βιβλίον θὰ μάθωμεν πῶς εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. περισσοτέρων ἀριθμῶν.

Ἐνίοτε ὅμως, ἐνῷ ὁ μεγαλύτερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν ἄλλων, ἠμποροῦμεν διὰ μικρᾶς ἀσκήσεως νὰ διακρίνωμεν, ἂν τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον κτλ. αὐτοῦ διαιρῆται ἀκριβῶς δι' αὐτῶν· τότε αὐτὸ εἶναι τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Π χ. ἐκ τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 15, 20, ὁ μεγαλύτερος 20 δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, οὔτε τὸ διπλάσιον αὐτοῦ 40, ἐνῷ τὸ τριπλάσιον τοῦ 20, ἤτοι ὁ 60, διαιρεῖται ἀκριβῶς. Ὁ 60 λοιπὸν εἶναι τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 15, 20. Ἐὰν ὅμως καὶ τοῦτο δὲν ἠμποροῦμεν νὰ διακρίνωμεν, τότε ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς τρόπον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. πολλ. ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειράν, καὶ ἂν ὑπάρχουν δύο τοὐλάχιστον ἀριθμοὶ διαιρετοὶ διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ διαιροῦμεν αὐτούς, καὶ τὸν μὲν διαιρέτην γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῶν καὶ τὸν χωρίζομεν διὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, τὰ δὲ πηλίκα γράφομεν ὑποκάτω αὐτῶν, καθὼς καὶ τοὺς μὴ διαιρετοὺς ἀριθμούς. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς δευτέρας σειρᾶς, καθὼς καὶ εἰς ἑκάστην τῶν ἑπομένων, μέχρις ὅτου εὕρωμεν ἀριθμοὺς μὴ ἔχοντας κοινὸν διαιρέτην. Ἔπειτα σχηματίζομεν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν καὶ τῶν ὑπαρχόντων ἀριθμῶν εἰς τὴν τελευταίαν σειράν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 15, 20. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

6	8	15	20	2	διαιρέτης
3	4	15	10	2	»
3	2	15	5	3	»
1	2	5	5	5	»
1	2	1	1		

Ὥστε τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. εἶναι ὁ $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2$, ἤτοι ὁ 120.

Σημ. Καλὸν εἶναι νὰ δοκιμάζωμεν διὰ διαιρέτας κατὰ σειρὰν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν 2.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 384 καὶ 75, 420 καὶ 124, 525 καὶ 74. (3, 4, 1).

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 56 καὶ 60, 75 καὶ 48. (4 καὶ 840, 3 καὶ 1200).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 6, 20, 15, 40, καὶ τῶν 28, 8, 30, 20. (120 καὶ 840).

4) Ὁ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ 12, τὰ δὲ πηλίκα τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας ἐξετελέσαμεν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ, εἶναι κατὰ σειρὰν 5, 1, 4. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι; (348 καὶ 60).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

91. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν 3 μῆλα ἐξ ἴσου εἰς 4 παιδία. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μερίδιον ἑκάστου, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 3 διὰ τοῦ 4, ἀλλὰ καίτοι ἡ διαίρεσις αὕτη, ἤτοι ὁ μερισμὸς τῶν 3 μήλων εἰς τὰ 4 παιδία, γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς κοπῆς τῶν μήλων, εἶναι ὅμως ἀδύνατον νὰ παραστήσωμεν μὲ ἀριθμὸν τὸ μερίδιον ἑκάστου (διότι ὁ διαιρέτης εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου). Διὰ τοῦτο ἦτο ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι νέοι ἀριθμοὶ (ἐκτὸς τῶν ἀκεραίων), διὰ τῶν ὁποίων νὰ εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ τοιαύτη διαίρεσις. Θὰ ἴδωμεν κατωτέρω τοὺς νέους τούτους ἀριθμούς.

92. **Ἕκαστον** πρᾶγμα ἀκέραιον (ὁλόκληρον) παρίσταται, ὡς γνωστόν, διὰ τῆς μονάδος 1, ἡ ὁποία ἕνεκα τούτου λέγεται **ἀκεραία μονάς**. Π. χ. γράφομεν 1 μῆλον, 1 πρόβατον κτλ. Ἐὰν λάβωμεν τώρα ἕνα πρᾶγμα, π. χ. ἕνα μῆλον, καὶ τὸ κόψωμεν εἰς 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 5 κτλ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων μερῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν **κλασματικὴ μονάς**. Ὥστε

Κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἕκαστον τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς.

Καὶ ἂν μὲν τὸ πρᾶγμα τοῦτο, π. χ. ἓν μῆλον, τὸ κόψωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται ἰδιαιτέρως **δεύτερον** ἢ **ἥμισυ** (τοῦ μήλου)· ἂν δὲ τὸ κόψωμεν εἰς τρία ἢ τέσσαρα ἢ πέντε ἢ ἓξ κτλ. ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται **τρίτον, τέταρτον, πέμπτον, ἕκτον** κτλ.

93. Ὅπως πλῆθός τι ἀκεραίων μονάδων ἀποτελεῖ **ἀριθμὸν ἀκέραιον**, οὕτω καὶ πλῆθός τι κλασματικῶν μονάδων ἀποτελεῖ ἀριθμὸν **κλασματικὸν** ἢ ἁπλῶς **κλάσμα**. Ἂν π. χ. κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς πολλὰ ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν 2 ἢ 3 ἢ 4 κτλ. μέρη (ἢ καὶ 1 μέρος), τὸ πλῆθος τῶν μερῶν, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, ἀποτελεῖ κλάσμα. Ὥστε ***κλάσμα λέγεται πλῆθος κλασματικῶν μονάδων (ἢ καὶ μία μόνη κλασματικὴ μονάς).***

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία τῶν κλασμάτων.

94. Τὰ κλάσματα γράφομεν μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς φανερώνει τὸ ὄνομα τῆς κλασματικῆς μονάδος, ἤτοι εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ ἀκεραία μονὰς (δηλ. ἕνα πρᾶγμα

ἀκέραιον) καὶ λέγεται **παρονομαστής**· ὁ δὲ ἄλλος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν κλασματικῶν μονάδων, ἤτοι πόσα μέρη λαμβάνονται, καὶ λέγεται **ἀριθμητής**· καὶ οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Ὁ παρονομαστὴς γράφεται ὑποκάτω τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωρίζονται διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς.

Ἐὰν π. χ. κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 2 ἴσα μέρη, ἄλλο μῆλον εἰς 3 ἴσα μέρη, καὶ ἄλλο εἰς 4, καὶ λάβωμεν ἓν μέρος ἐξ ἑκάστης τῶν διαιρέσεων τούτων, τὰ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσιν ὡς ἑξῆς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καὶ ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικὸν ὄνομα καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστὴν ὡς τακτικόν, ἤτοι **ἓν δεύτερον** (ἢ **ἥμισυ**), **ἓν τρίτον**, **ἓν τέταρτον**. Ἐὰν πάλιν κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 5 ἴσα μέρη, ἄλλο δὲ μῆλον εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης τῶν διαιρέσεων τούτων 3 μέρη, ταῦτα θὰ παρασταθῶσιν ὡς ἑξῆς $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$ καὶ ἀπαγγέλομεν **τρία πέμπτα**, **τρία ὄγδοα**. Ὥστε βλέπομεν ὅτι μὲ τοὺς δύο ἀκεραίους ἀριθμούς, μὲ τοὺς ὁποίους γράφονται τὰ κλάσματα, ὁρίζονται καὶ τὰ λαμβανόμενα μέρη καὶ τὸ μέγεθος αὐτῶν (τὰ μῆλα ὑποτίθενται τοῦ αὐτοῦ μεγέθους).

95. Μὲ τοὺς νέους λοιπὸν τούτους ἀριθμούς, ἤτοι μὲ τὰ κλάσματα, δυνάμεθα τώρα νὰ ἐκτελῶμεν ὅλας τὰς διαιρέσεις (ἐκτὸς ἂν ὁ διαιρέτης εἶναι 0 καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός· ἴδε Σημ. ἐδαφ. 50). Διὰ νὰ μοιράσωμεν π. χ. 3 μῆλα εἰς 4 παιδία καὶ νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ παριστᾷ τὸ μερίδιον ἑκάστου, πράττομεν ὡς ἑξῆς :

Κατὰ πρῶτον κόπτομεν τὸ ἓν μῆλον εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ δίδομεν εἰς ἕκαστον παιδίον ἓν μέρος, ἤτοι 1 τέταρτον τοῦ μήλου. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὰ δύο ἄλλα μῆλα δίδοντες εἰς ἕκαστον παιδίον ἀπὸ 1 τέταρτον ἀκόμη. Ὥστε ἕκαστον παιδίον θὰ λάβῃ τὸ ὅλον 3 τέταρτα τοῦ μήλου (διότι 1 τέταρτον καὶ 1 τέταρτον καὶ 1 τέταρτον κάμνουν 3 τέταρτα). Ἀλλὰ τὰ 3 μῆλα παριστῶσι τὸν διαιρετέον, τὰ 4 παιδία τὸν διαιρέτην, τὸ δὲ μερίδιον ἑκάστου, ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου, παριστᾷ τὸ πηλίκον. Ἐκ τούτου μανθάνομεν ὅτι

96. ***Πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.***

97. Διὰ τῶν κλασμάτων λοιπὸν ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθ-

μῶν εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ τελεία, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν διαιρετέον ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστήν. Ἐὰν ἔχωμεν π. χ. νὰ μοιράσωμεν 7 δραχμὰς εἰς 2 ἀνθρώπους, ἕκαστος θὰ λάβῃ 3 δρ. καὶ θὰ μείνῃ 1 δραχμή, ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής. Διὰ τῶν κλασμάτων ὅμως γίνεται ἡ διαίρεσις τελεία· διότι τὸ πηλίκον τοῦ 7 διὰ 2 εἶναι $\frac{7}{2}$, ἤτοι εἶναι $7:2=\frac{7}{2}$· ὁμοίως εἶναι $2:3=\frac{2}{3}$ κτλ. καὶ ἀντιστρόφως εἶναι $\frac{5}{6}=5:6$, $\frac{3}{8}=3:8$ κτλ.

Ἡ διαίρεσις πάλιν $5:1=5$ γράφεται διὰ τῶν κλασμάτων καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{5}{1}=5$. Ὁμοίως αἱ διαιρέσεις $3:1=3$, $8:1=8$ κτλ. γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{3}{1}=3$, $\frac{8}{1}=8$. Ὥστε ***πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν αὐτὸν ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὴν μονάδα 1 ὡς παρονομαστήν.***

Σύγκρισις τῶν κλασμάτων πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

98. Ἐὰν κόψωμεν π. χ. 1 μῆλον εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 5, καὶ λάβωμεν 1 ἢ 2 ἢ 3 ἢ 4 μέρη, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν θὰ λάβωμεν ὁλόκληρον τὸ μῆλον· τὰ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσι μὲ τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι· ***Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1.***

Ἐὰν ὅμως λάβωμεν καὶ τὰ 5 μέρη τοῦ μήλου, τότε θὰ λάβωμεν ὁλόκληρον τὸ μῆλον, τὰ δὲ μέρη ταῦτα θὰ παρασταθῶσι μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{5}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ***Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.*** Ὥστε ἡ ἀκεραία μονὰς 1 δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ οἱονδήποτε κλάσμα ἔχον ἴσους ὅρους· π. χ. εἶναι $\frac{5}{5}=1$, $\frac{8}{8}=1$, $\frac{15}{15}=1$, κτλ.

Ἐὰν κόψωμεν τώρα καὶ ἓν ἄλλο μῆλον εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 5 μέρη τοῦ πρώτου μήλου (ἤτοι ὁλόκληρον τὸ μῆλον) καὶ μέρη τινὰ ἐκ τοῦ δευτέρου τούτου μήλου, π. χ. 2 μέρη, εἶναι τότε φανερὸν ὅτι θὰ λάβωμεν περισσότερον τοῦ ἑνὸς μήλου, τὰ δὲ 7 μέρη, τὰ ὁποῖα θὰ λάβωμεν, θὰ παρασταθῶσι μὲ τὸ κλάσμα $\frac{7}{5}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι· ***Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1.***

Ἀσκήσεις. 1) Ἐὰν κόψωμεν ἓν μῆλον εἰς 8 ἴσα μέρη καὶ λάβωμεν τὰ 3 μέρη, τὰ 5 μέρη, τί μέρος τοῦ μήλου θὰ λάβωμεν;

2) Ἀπὸ ἕνα γλύκισμα ἐδώσαμεν εἰς ἓν παιδίον τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ. Τί φανερώνει τὸ κλάσμα τοῦτο;

3) Ἐὰν μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 2, 3, 4 δραχμὰς εἰς 5 πτωχούς, τί μέρος τῆς δραχμῆς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

4) Ποῖα εἶναι τὰ τέλεια πηλίκα τῶν διαιρέσεων $3:5$, $7:8$, $9:4$;

5) Τίνων διαιρέσεων εἶναι πηλίκα τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{4}$;

6) Τί μέρος τῆς δραχμῆς εἶναι τὰ 45 λεπτά;

7) Τί μέρος τῆς ὀκᾶς εἶναι τὰ 70 δράμια;

8) Ἐκ τῶν κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (τοῦ αὐτοῦ πράγματος) ποία εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ποία μικροτέρα; Καὶ διατί;

9) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ ποῖα εἶναι μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος; Ποῖα ἴσα; Καὶ ποῖα μεγαλύτερα αὐτῆς; Καὶ διατί;

10) Γράψατε δύο κλάσματα ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, δύο μεγαλύτερα αὐτῆς καὶ δύο μικρότερα αὐτῆς.

Τροπὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς κλάσμα.

99. Διὰ νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 5 εἰς ἕβδομα, ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 7, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 7 ἕβδομα (διότι εἶναι $\frac{7}{7}=1$), αἱ 5 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 5 φορὰς τὰ 7 ἕβδομα, ἤτοι 7×5 ἢ 35 ἕβδομα· ἀλλὰ τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\frac{35}{7}$. Ὥστε εἶναι $5=\frac{5\times7}{7}=\frac{35}{7}$. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.

Ἀσκήσεις. Νὰ τραποῦν οἱ ἀκέραιοι 5, 6, 8, 9 εἰς τέταρτα, εἰς πέμπτα, εἰς ὄγδοα καὶ εἰς εἰκοστά.

Μικτὸς ἀριθμός. Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα.

100. Ἐὰν ἔχῃ τις π. χ. 5 δραχμὰς καὶ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, θὰ γράψωμεν ὅτι ἔχει $5 + \frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Ὁ ἀριθμὸς $5 + \frac{3}{4}$ ἢ ἁπλούστερον $5\frac{3}{4}$ ἄνευ τοῦ σημείου + λέγεται ***μικτὸς ἀριθμὸς*** καὶ εἶναι οὗτος ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Ὥστε ***μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἀπὸ ἀκέραιον καὶ ἀπὸ κλάσμα.***

101. Διὰ νὰ τρέψωμεν π. χ. τὸν μικτὸν ἀριθμὸν $8\frac{3}{5}$ εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν 5 (διότι αὐτὸν ἔχει τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ), τρέπομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 8 εἰς κλάσμα σκεπτόμενοι ὅπως καὶ ἀνωτέρω, ἤτοι λέγομεν ἡ 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 5 πέμπτα, αἱ 8 ἀκέραιαι μονάδες ἔχουν 8 φορὰς τὰ 5 πέμπτα, ἤτοι 40 πέμπτα. Εἰς ταῦτα θὰ προσθέσωμεν καὶ τὰ 3 πέμπτα τοῦ μικτοῦ· ἀλλὰ καθὼς π.χ. 40 καρύδια καὶ 3 καρύδια κάμνουν 43 καρύδια, οὕτω καὶ 40 πέμπτα καὶ 3 πέμπτα κάμνουν 43 πέμπτα ἢ $\frac{43}{5}$. Ὥστε εἶναι $8\frac{3}{5} = \frac{43}{5}$.

Ἐκ τούτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸν ἀριθμητήν, τὸ δὲ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.

Ἀσκήσεις. Νὰ τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ μικτοὶ ἀριθμοὶ $7\frac{5}{9}$, $6\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{5}$, $3\frac{7}{8}$, $2\frac{17}{20}$.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος.

102. Ὅταν τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἐν αὐτῷ περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας. Ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον πρᾶξις λέγεται ***ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{13}{4}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει τὸ κλάσμα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν 1 ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὰ 13 τέταρτα νὰ λάβωμεν 4 τέταρτα (διότι εἶναι $\frac{4}{4}=1$), ὅτε μένουν 9 τέταρτα (διότι καθὼς π. χ. ὅταν λαμβάνωμεν 4 μῆλα ἀπὸ 13 μῆλα μένουν 9 μῆλα, οὕτω καὶ ὅταν λαμβάνωμεν 4 τέταρτα ἀπὸ 13 τέταρτα μένουν 9 τέταρτα). Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην μίαν ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον 9 τέταρτα νὰ λάβωμεν ἄλλα 4 τέταρτα, ὅτε μένουν 5 τέταρτα. Διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἄλλην 1 ἀκεραίαν μονάδα, πρέπει ἀπὸ τὸ νέον ὑπόλοιπον 5 τέταρτα νὰ λάβωμεν ἄλλα 4 τέταρτα, ὅτε μένει 1 τέταρτον. Ὥστε τὰ 13 τέταρτα περιέχουν 3 ἀκεραίας μονάδας, ἤτοι τόσας ὅσας φορὰς τὰ 4 τέταρτα χωροῦν εἰς τὰ 13 τέταρτα ἢ ἁπλῶς ὅσας φορὰς ὁ παρονομαστὴς 4 χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμητὴν 13, καὶ μένει ὑπόλοιπον, ὡς εἴδομεν, 1 τέταρτον. Ὥστε εἶναι $\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$.

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

103. ***Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἐν τῷ κλάσματι περιεχομένας ἀκεραίας μονάδας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ μὲν πηλίκον παριστᾷ τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) γράφομεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τὸν ἴδιον.***

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν. Π. χ. εἶναι $\frac{8}{4}=2$, $\frac{18}{3}=6$ κτλ.

Ἀσκήσεις. 1) $\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}$; $4\frac{7}{8}=5\frac{7}{8}$, $\frac{36}{9}=4$, $\frac{58}{15}=3\frac{13}{15}$.

2) Πόσας ἀκεραίας μονάδας καὶ πόσας κλασματικὰς ἔχουν τὰ κλάσματα $\frac{15}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{35}{4}$, $\frac{125}{8}$, $\frac{65}{9}$, $\frac{24}{10}$, $\frac{250}{15}$;

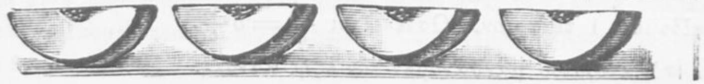
Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

104. Ἐὰν κόψωμεν π. χ. ἓν μῆλον εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 8, καὶ ἐκ τῶν μερῶν τούτων δώσωμεν εἰς ἓν παιδίον 2 μέρη, εἰς ἄλλο δὲ παιδίον δώσωμεν τριπλάσια μέρη, ἤτοι 6, τότε τὸ πρῶτον παιδίον θὰ λάβῃ τὰ $\frac{2}{8}$ τοῦ μήλου, τὸ δὲ δεύτερον τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ, καὶ θὰ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ θὰ εἶναι τρεῖς φορὰς μικρό-

τερον τοῦ κλάσματος $\frac{6}{8}$. Ἀλλα τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{8}$, ὅταν ὁ ἀριθμητής του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{2}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{6}{8}$, ὅταν ὁ ἀριθμητής του διαιρεθῇ διὰ τοῦ 3. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

105. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, διαιρεῖται.***

Ἐὰν κόψωμεν πάλιν ἓν μῆλον εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 4, καὶ ἐκ



τῶν μερῶν τούτων λάβωμεν π. χ. 3 μέρη, θὰ λάβωμεν τότε τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου. Ἐὰν ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων μερῶν κόψωμεν πάλιν εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 2, τότε τὸ μῆλον θὰ κοπῇ εἰς 8 ἴσα

μέρη· ἐὰν ἐκ τῶν νέων τούτων μερῶν λάβωμεν πάλιν 3 μέρη, θὰ λάβωμεν τότε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ μήλου. Ἀλλ' ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων, ἤτοι ἕκαστον ὄγδοον, εἶναι τὸ ἥμισυ ἑκάστου τῶν προηγουμένων μερῶν, ἤτοι ἑκάστου τετάρτου, ἑπομένως τὰ $\frac{3}{8}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ τἀνάπαλιν, τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι τὸ διπλάσιον τῶν $\frac{3}{8}$. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, ὅταν ὁ παρονομαστής του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{3}{8}$, ὅταν ὁ παρονομαστής του διαιρεθῇ διὰ 2. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

106. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν αὐτόν, πολλαπλασιάζεται.***

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἰδιότητες δύνανται νὰ συγχωνευθῶσιν εἰς τὴν ἑξῆς μίαν μόνην ἰδιότητα.

107. ***Ἡ ἀξία κλάσματος πολλαπλασιάζεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστήν· διαιρεῖται δέ, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἢ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν.***

Σημ. Γενικῶς τὸ κλάσμα αὐξάνει, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμητήν του· π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{3}{8}$, διότι λαμβάνονται περισσότερα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος· ἐλαττοῦται δέ, ὅταν αὐξήσωμεν τὸν παρονομαστήν του· π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{10}$ τοῦ πήχεως εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{5}{8}$, διότι καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ κατὰ μέγεθος.

108. Ἀνωτέρω ἐκόψαμεν ἓν μῆλον εἰς 4 ἴσα μέρη ἢ 4 τέταρτα· ἔπειτα ἕκαστον τέταρτον ἐκόψαμεν εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ ἑπομένως τὸ μῆλον ἐκόπη εἰς 8 ἴσα μέρη ἢ 8 ὄγδοα. Ὥστε 1 τέταρτον κάμνει 2 ὄγδοα, 2 τέταρτα κάμνουν 4 ὄγδοα, 3 τέταρτα κάμνουν 6 ὄγδοα κτλ. Τὸ ἴδιον λοιπὸν εἶναι εἴτε λάβωμεν π. χ. τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μήλου εἴτε λάβωμεν τὰ $\frac{6}{8}$ αὐτοῦ, τουτέστι τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀξίαν. Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{8}$ προκύπτει ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$, ὅταν οἱ ὅροι του πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2· καὶ τἀνάπαλιν, τὸ $\frac{3}{4}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{6}{8}$, ὅταν οἱ ὅροι του διαιρεθῶσι διὰ 2. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

109. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ἢ διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (ἐὰν εἶναι διαιρετοί), ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται.***

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ γίνωσι τὰ κλάσματα $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$ τρεῖς φορὰς μεγαλύτερα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

2) Νὰ γίνωσι τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ δύο φορὰς μικρότερα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους.

Ἁπλοποίησις τῶν κλασμάτων.

110. ***Ἁπλοποίησις*** ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀξίαν καὶ ὅρους μικροτέρους.

Διὰ νὰ ἁπλοποιηθῇ ἕνα κλάσμα, ἤτοι νὰ γίνῃ ἁπλούστερον ἄλλου, χωρὶς ἡ ἀξία του νὰ μεταβληθῇ, πρέπει οἱ ὅροι του νὰ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν (ἂν ἔχουν, ἐκτὸς τῆς μονάδος)· διότι τότε θὰ προκύψῃ κλάσμα ἔχον ὅρους μικροτέρους τοῦ δοθέντος, ἀλλὰ τὴν αὐτὴν ἀξίαν (ἐδάφ. 109).

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{48}{60}$. Ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 6, εὑρίσκομεν τὸ πρὸς αὐτὸ ἴσον κλάσμα $\frac{8}{10}$. Ἐὰν καὶ τούτου διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ 2, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀξίαν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{48}{60}$. Τὸ κλάσμα τώρα $\frac{4}{5}$ δὲν ἁπλοποιεῖται, ἤτοι δὲν ἀνάγεται εἰς ἄλλο κλάσμα ἁπλούστερον αὐτοῦ, διὰ τοῦτο λέγεται **ἀνάγωγον.** Ὥστε **ἀνάγωγον** κλάσμα λέγεται ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 84).

Σημ. Εἰς τὴν ἁπλοποίησιν καλὸν εἶναι νὰ λαμβάνωμεν χάριν συντομίας τοὺς μεγαλυτέρους γνωστοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος. Δυνάμεθα καὶ μὲ μίαν μόνην διαίρεσιν νὰ κάμωμεν ἓν κλάσμα ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του μὲ τὸν μέγιστον κ. δ. αὐτῶν. Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως τῶν κλασμάτων προξενεῖται διπλῆ ὠφέλεια. 1ον) Λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τῶν κλασμάτων, ἤτοι ἐννοοῦμεν καλύτερον τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς παρὰ τὰ $\frac{48}{60}$ αὐτῆς. 2ον) Σμικρυνομένων τῶν ὅρων τῶν κλασμάτων, εὐκολυνόμεθα πολὺ εἰς τὰς πράξεις αὐτῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Νὰ ἁπλοποιηθῶσι τὰ κλάσματα $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{12}{28}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{420}{560}$.

Ὁμώνυμα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα.

111. ***Ὁμώνυμα*** κλάσματα λέγονται, ὅσα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἑπομένως γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$, εἶναι ὁμώνυμα καὶ γίνονται ἐκ τῆς κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{7}$ ἐπαναλαμβανομένης πολλάκις. ***Ἑτερώνυμα*** κλάσματα λέγονται, ὅσα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἑπομένως δὲν γίνονται ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος. Π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$ εἶναι ἑτερώνυμα.

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

112. Ἂς λάβωμεν κατὰ πρῶτον δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 5 τοῦ ἄλλου κλάσματος, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{10}{15}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$ (κατὰ τὸ ἐδάφ. 109). Ἐὰν ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 3 τοῦ ἄλλου, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{12}{15}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{4}{5}$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἀντὶ λοιπὸν τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα $\frac{10}{15}$ καὶ $\frac{12}{15}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

113. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου.***

Ἂς λάβωμεν τώρα περισσότερα κλάσματα, $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{6}{7}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος $\frac{3}{4}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 5×7 ἢ 35, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{3\times35}{4\times35}$ ἢ $\frac{105}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{3}{4}$. Ἐὰν ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος $\frac{2}{5}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 4×7 ἢ 28, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{2\times28}{5\times28}$ ἢ $\frac{56}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{5}$. Ἐὰν τέλος πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου κλάσματος $\frac{6}{7}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 4×5 ἢ 20, εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{6\times20}{7\times20}$ ἢ $\frac{120}{140}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{6}{7}$.

Ἀντὶ λοιπὸν τῶν δοθέντων κλασμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα $\frac{105}{140}, \frac{56}{140}, \frac{120}{140}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὁμώνυμα καὶ πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦτα, διότι συμβαίνει νὰ εἶναι πάντοτε κοινὸ παρονομαστὴς αὐτῶν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{ccc} 35 & 28 & 20 \\ \hline 3 & 2 & 6 \\ \hline 4 & 5 & 7 \\ 105 & 56 & 120 \\ \hline 140 & 140 & 140 \end{array}$$

ἤτοι γράφομεν ὑπεράνω ἑκάστου κλάσματος τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ἔπειτα δὲ πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τοὺς ὅρους τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κλάσματος. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

114. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν τρία ἢ περισσότερα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.***

Παρατήρησις. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ κοινὸς παρονομαστὴς 140 εἶναι τὸ γινόμενον $4 \times 5 \times 7$ τῶν παρονομαστῶν καὶ ἑπομένως εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν (ἐδ. 73). Οἱ δὲ ἀριθμοὶ 35, 28 καὶ 20, μὲ τοὺς ὁποίους ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων καὶ ἐτρέψαμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, εἶναι τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ 140 δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν. Πολλάκις ὅμως εὑρίσκεται ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιρετὸς δι' αὐτῶν, τότε αὐτὸν πρὸς εὐκολίαν μας κάμνομεν κοινὸν παρονομαστὴν ἀκολουθοῦντες τὸν ἑξῆς τρόπον.

115. ***Εὑρίσκομεν τὸ ἐλάχ. κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν καὶ διαιροῦμεν τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ εὑρεθὲν ἀντίστοιχον πηλίκον.*** Π. χ. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{24}$ $\frac{1}{3}$. Ὁ μεγαλύτερος τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ὁ 24, διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν, ὥστε οὗτος εἶναι τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν (ἐδάφ. 90)· διαιροῦμεν λοιπὸν αὐτὸν διὰ τῶν παρονομαστῶν 4, 8, 24, 3 καὶ εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς κατὰ σειρὰν πηλίκα 6, 3, 1, 8. Ἕκαστον τούτων γράφομεν ὑπεράνω τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματός του καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος μὲ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{cccc} 6 & 3 & 1 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 7 & 1 \\ \hline 4 & 8 & 24 & 3 \\ 18 & 15 & 7 & 8 \\ \hline 24 & 24 & 24 & 24 \end{array}$$

Βλέπομεν ὅτι τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα συντομώτερον παρὰ μὲ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 114. Ἐκτὸς τούτου λαμβάνομεν ταῦτα καὶ μὲ μικροτέρους ὅρους, τὸ ὁποῖον μᾶς εὐκολύνει πολὺ εἰς τὰς πράξεις, ὡς θὰ ἴδωμεν.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα καὶ τὰ ἑξῆς κλάσματα $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{4}{15}$. Τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκεται ὅτι εἶναι ὁ 90, τὰ δὲ πηλίκα τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τῶν παρονομαστῶν 5, 6, 9 καὶ 15 εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς· 18, 15, 10 καὶ 6. Ὥστε ἔχομεν

$$\overset{18}{\frown}\quad \overset{15}{\frown}\quad \overset{10}{\frown}\quad \overset{6}{\frown}$$
$$\frac{4}{5}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{5}{9}\quad \frac{4}{15}$$
$$\frac{72}{90}\quad \frac{15}{90}\quad \frac{50}{90}\quad \frac{24}{90}$$

Σημ. Καλὸν εἶναι πρὸς εὐκολίαν μας νὰ ἁπλοποιῶμεν πρῶτον, ὅσα τῶν κλασμάτων ἁπλοποιοῦνται, καὶ ἔπειτα νὰ τρέπωμεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα.

116. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1ον) εἰς τὸ νὰ μάθωμεν ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἢ τὸ μικρότερον· πρὸς τοῦτο τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἀριθμητὴν εἶναι προφανῶς καὶ τὸ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τῶν κλασμάτων. Ἐὰν ὅμως συμβῇ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν, τότε δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα· διότι μεγαλύτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μικρότερον παρονομαστήν. Π.χ. ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{3}{10}$ τοῦ μήλου μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{3}{4}$ κατὰ μέγεθος. 2ον) Χρησιμεύει εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων, ὡς θὰ ἴδωμεν.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ τραποῦν τὰ κατωτέρω ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ μὲ τοὺς δύο τρόπους, ἤτοι μὲ τοὺς κανόνας τῶν ἐδαφίων 113 καὶ 114 κα μὲ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν.

$\frac{2}{3}$ $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{18}$, $\frac{7}{10}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{15}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

1ον) Πρόσθεσις κλασμάτων.

117. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἠγόρασέ τις τὴν πρώτην φορὰν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, τὴν δευτέραν φορὰν $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὴν τρίτην φορὰν $\frac{7}{8}$, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἠγόρασε τὸ ὅλον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, θὰ κάμωμεν πρόσθεσιν, ἤτοι $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$. Ἀλλὰ 3 ὄγδοα $+5$ ὄγδοα $+7$ ὄγδοα κάμνουν 15 ὄγδοα (καθὼς π. χ. καὶ 3 μῆλα $+5$ μῆλα $+7$ μῆλα κάμνουν 15 μῆλα) ἢ $\frac{15}{8}$. Ὥστε εἶναι $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}$ ἢ $1\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

118. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

Π. χ. διὰ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα (τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. τῶν παρονομαστῶν εἶναι ὁ 12) καὶ εὑρίσκομεν $\frac{8}{12}+\frac{10}{12}+\frac{7}{12}$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι $\frac{25}{12}$. Ὥστε εἶναι

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}=\frac{8}{12}+\frac{10}{12}+\frac{7}{12}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}.$$

2ον) Πρόσθεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

119. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι παιδίον τι ἔχει $3\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἄλλο δὲ παιδίον ἔχει $4\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς, καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσας δραχμὰς ἔχουν καὶ τὰ δύο παιδία. Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν τὰς δραχμὰς καὶ εὑρίσκομεν $3+4$ ἢ 7 δραχμάς· κατόπιν προσθέτομεν τὰ μέρη τῆς δραχμῆς καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=$

$\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$. Τὰ δύο λοιπὸν παιδία ἔχουν 7 δραχμὰς καὶ $\frac{13}{20}$ τῆς δραχμῆς ἢ $7\frac{13}{20}$. Ὥστε εἶναι $3\frac{2}{5}+4\frac{1}{4}=7\frac{13}{20}$. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

120. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰ δύο ἀθροίσματα.***

Σημ. Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν, ἀλλὰ εἶναι εὐκολώτερον νὰ προσθέτωμεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω νὰ εὑρεθῇ καὶ τὸ ἑξῆς ἄθροισμα $2\frac{3}{5}+3\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+6$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων εἶναι $2+3+4+6=15$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων εἶναι

$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{18}{30}+\frac{15}{30}+\frac{20}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30}$. Ὥστε εἶναι

$2\frac{3}{5}+3\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+6=15+1\frac{23}{30}=16\frac{23}{30}$.

Ἀσκήσεις. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}\left(=2\frac{1}{12}\right)$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{15}\left(=1\frac{31}{60}\right)$, $\frac{5}{6}+\frac{1}{12}+\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\left(=2\frac{13}{84}\right)$, $2\frac{3}{4}+5\frac{1}{7}\left(=2\frac{25}{28}\right)$, $2\frac{4}{9}+8\left(=10\frac{4}{9}\right)$, $\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}\left(=5\frac{3}{20}\right)$, $5\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\left(=5\frac{13}{21}\right)$, $3\frac{2}{5}+5\frac{1}{3}+\frac{7}{10}\left(=9\frac{13}{30}\right)$, $6\frac{2}{3}+5\frac{3}{4}+2\frac{7}{12}\left(=15\right)$.

Σημ. Ἡ ἰδιότης τῆς προσθέσεως (ἐδάφ. 24) ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὰ κλάσματα. Ἐπίσης ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων (ἐδάφ. 23) εἶναι καὶ εἰς τὰ κλάσματα ὁ αὐτός, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅμως ὅτι ἐδῶ δύνανται νὰ εἶναι αἱ μονάδες ἢ κλασματικαὶ μόνον ἢ ἀκέραιαι καὶ κλασματικαί.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παντοπώλης τις ἐπώλησε $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου, ἔπειτα ἐπώλησε $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα $\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσον βούτυρον ἐπώλησε; $\left(1\frac{21}{40}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

2) Μαθήτριά τις ἠγόρασε κορδέλλα $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως, ἡ δὲ φίλη της ἠγόρασε $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως περισσότερον αὐτῆς. Πόσον ἠγόρασεν ἡ

φίλη της; Καὶ πόσην ἠγόρασαν μαζί; $\left(1\frac{5}{8}, 2\frac{1}{2}\text{ πήχ.}\right)$.

3) Μία κόρη ἔπλεξε τὴν πρώτην ἡμέραν $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως δαντέλλαν, τὴν δευτέραν ἡμέραν $\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσην δαντέλλαν ἔπλεξε καὶ τὰς τρεῖς ἡμέρας;

$\left(2\frac{1}{24}\text{ πήχ.}\right)$.

4) Μία πτωχὴ εἶχε $9\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς καὶ τῆς ἔδωσαν $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας δραχμὰς εἶχε τότε; Καὶ πόσας θὰ ἔχῃ, ἂν τῆς δώσουν ἀκόμη $2\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς; $\left(10\frac{11}{20}, 13\frac{6}{20}\right)$.

5) Ἐργάτης τις ἐργάζεται τὸ πρωῒ $4\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας, μετὰ τὴν μεσημβρίαν ἐργάζεται $3\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν; $\left(8\frac{1}{4}\right)$.

6) Παντοπώλης τις ἐπώλησε $4\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου, κατόπιν ἐπώλησε $2\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς καὶ κατόπιν $5\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσον ἔλαιον ἐπώλησε; $\left(13\frac{1}{20}\text{ τῆς ὀκᾶς}\right)$.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

1ον) Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

121. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι παιδίον τι ἔχει $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσα θὰ τοῦ μείνουν, ἂν δώσῃ εἰς ἕνα πτωχὸν τὰ $\frac{6}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, θὰ κάμωμεν ἀφαίρεσιν, ἤτοι $\frac{9}{10}-\frac{6}{10}$. Ἀλλὰ 6 δέκατα ἀπὸ 9 δέκατα μένουν 3 δέκατα (καθὼς π. χ. καὶ 6 μῆλα ἀπὸ 9 μῆλα μένουν 3 μῆλα).

Ὥστε εἶναι $\frac{9}{10}-\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$, θὰ μείνουν λοιπὸν τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

122. *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο κλάσματα ὁμώνυμα, ἀφαι-*

ροῦμεν τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ τὴν διαφορὰν γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.

Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν. Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$. Τρέπομεν πρῶτον αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{15}{20} - \frac{8}{20}$, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι $\frac{7}{20}$. Ὥστε εἶναι $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$.

2ον) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν.

123. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει τις $7\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἂν δώσῃ $3\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς.

Κατὰ πρῶτον ἀφαιροῦμεν τὰς 3 δραχμὰς ἀπὸ τὰς 7 δραχμάς, ὅτε μένουν 4 δραχμαί· κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ εὑρίσκομεν ὅτι μένουν $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς. Ὥστε τοῦ ἔμειναν ἐν ὅλῳ 4 δραχμαὶ καὶ $\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς, ἢ $4\frac{7}{20}$ τῆς δραχμῆς. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$7\frac{3}{4} - 3\frac{2}{5} = 4\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = 4\frac{7}{20}.$$

Ἐκ τούτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

124. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἀπὸ μικτόν, ἀφαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον ἀπὸ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὰς δύο διαφοράς.***

Σημ. Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλ' εἶναι εὐκολώτερον νὰ ἀφαιρέσωμεν ὡς ἀνωτέρω.

125. Ἐὰν συμβῇ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νὰ μὴ ἀφαιρῆται ἀπὸ τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου, λαμβάνομεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον, τὸ ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα τοῦ μειωτέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν, ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4}$. Τρέπομεν πρώτον τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, ὅτε ἔχομεν $7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 7\frac{8}{20} - 3\frac{15}{20}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{8}{20}$, διὰ τοῦτο λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 7 μίαν μονάδα, ὅτε μένουν 6, καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον, ἤτοι $\frac{20}{20}$, τὸ ὁποῖον προσθέτομεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{8}{20}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{28}{20}$, κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{15}{20}$ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{28}{20}$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{13}{20}$. Ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν μικτῶν εἶναι $3\frac{13}{20}$. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς: $7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 7\frac{8}{20} - 3\frac{15}{20} = 6\frac{28}{20} - 3\frac{15}{20} = 3\frac{13}{20}$.

Σημ. Ἠμποροῦμεν καὶ μὲ ἄλλον τρόπον νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, χωρὶς νὰ λάβωμεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν 7. Προσθέτομεν $\frac{20}{20}$ εἰς τὸ $\frac{8}{20}$ τοῦ μειωτέου καὶ αὐξάνομεν τὸν ἀκέραιον 3 τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1, ὅτε ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται (ἐδ. 29). Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς: $7\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4} = 7\frac{8}{20} - 3\frac{15}{20} = 7\frac{28}{20} - 4\frac{15}{20} = 3\frac{13}{20}$.

Παραδείγματα μερικῶν περιπτώσεων.

$7\frac{2}{3} - 4 = 3\frac{2}{3}$, $2\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 2\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = 2\frac{2}{15}$, $5\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = 5\frac{5}{10} - \frac{6}{10} = 4\frac{15}{10} - \frac{6}{10} = 4\frac{9}{10}$.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μικτὸν ἢ κλάσμα ἀπὸ ἀκέραιον, λαμβάνομεν μίαν μονάδα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον τοῦ μειωτέου καὶ τρέπομεν αὐτὴν εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν.

Π. χ. $9 - 5\frac{4}{7} = 8\frac{7}{7} - 5\frac{4}{7} = 3\frac{3}{7}$, $5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$.

Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ὁμώνυμον μὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν, ἤτοι $5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$, ἀλλ' ὁ ἀνωτέρω τρόπος εἶναι συντομώτερος.

Ἀσκήσεις. $\frac{7}{8} - \frac{2}{5}\left(= \frac{19}{40}\right)$, $\frac{5}{7} - \frac{2}{9}\left(= \frac{31}{63}\right)$, $5\frac{3}{4} - 2\left(= 3\frac{3}{4}\right)$, $6\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(= 6\frac{1}{12}\right)$, $8\frac{2}{5} - \frac{5}{7}\left(= 7\frac{24}{35}\right)$, $6 - \frac{2}{9}\left(= 5\frac{7}{9}\right)$, $10 - 2\frac{5}{8}\left(= 7\frac{3}{8}\right)$, $6\frac{4}{5} - 2\frac{4}{7}\left(= 4\frac{8}{35}\right)$, $5\frac{2}{3} - 2\frac{4}{5}\left(= 2\frac{13}{15}\right)$.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παιδίον τι ἔχει $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσα θέλει ἀκόμη διὰ νὰ ἔχῃ μίαν δραχμήν; $\left(\frac{3}{5}\right)$.

2) Τί μένει ἀπὸ μίαν ὀκᾶν ἐλαίου, ἂν ἐξοδεύσωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς; Τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{8}\right)$.

3) Τί μένει ἀπὸ μισὴ ὀκᾶ βουτύρου, ἂν ἐξοδεύσωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{10}\right)$.

4) Ἐδώσαμεν εἰς ἕνα πτωχὸν $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ εἰς ἄλλον πτωχὸν $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Εἰς ποῖον ἐδώσαμεν περισσότερον; Καὶ πόσον περισσότερον; (εἰς τὸν β' $\frac{1}{20}$ τῆς δρ.).

5) Μία κόρη εἶχε 2 πήχεις κορδέλλα καὶ ἔδωσε εἰς μίαν φίλην της $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόση τῆς ἔμεινε; $\left(1\frac{3}{8}\right.$ πήχ.$\left.\right)$.

6) Πόσαι δραχμαὶ μένουν ἀπὸ ἕνα εἰκοσάδραχμον, ἂν ἐξοδεύσωμεν $7\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς; $\left(12\frac{1}{4}\right)$.

7) Πόσαι ὧραι εἶναι ἀπὸ τῆς ὥρας $4\frac{1}{2}$ τῆς πρωΐας μέχρι τῆς μεσημβρίας τῆς ἰδίας ἡμέρας; $\left(7\frac{1}{2}\right)$.

8) Ἔμπορός τις εἶχε $15\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε $4\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσον ὕφασμα τοῦ ἔμεινε;

Καὶ πόσον θὰ τοῦ μείνῃ, ἂν πωλήσῃ ἀκόμη $3\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως;

$\left(11\frac{1}{8},\ 7\frac{3}{8}\right)$.

9) Ἕνα καλάθι ἔχει μῆλα καὶ ζυγίζει $5\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς, κενὸν ζυγίζει $\frac{4}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσα μῆλα ἔχει; $\left(4\frac{7}{10}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

10) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μικτὸν $4\frac{2}{3}$, διὰ νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα $12\frac{5}{12}$; $\left(7\frac{3}{4}\right)$.

11) Πατήρ τις ἐχάρισεν εἰς τὴν μίαν κόρην του τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς χωραφίου καὶ εἰς τὴν ἄλλην κόρην του τὸ τέταρτον αὐτοῦ. Πόσον μέρος τοῦ χωραφίου ἔμεινε; (τὰ $\frac{7}{20}$).

12) Παντοπώλης τις εἶχεν 20 ὀκ. καφέ· ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε τὴν πρώτην φορὰν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς, τὴν δευτέραν φορὰν $\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς καὶ τὴν τρίτην φορὰν $\frac{7}{10}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσον καφὲ ἐπώλησε; Καὶ πόσος τοῦ ἔμεινε; $\left(1\frac{13}{40},\ 18\frac{27}{40}\right)$.

13) Δύο παιδία θέλουν νὰ ἀγοράσουν μαζὶ ἕνα τόπι, τὸ ὁποῖον πωλεῖται 15 δραχ. Τὸ ἓν παιδίον ἔχει $5\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς καὶ τὸ ἄλλο $6\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας δραχμὰς ἔχουν μαζί; Καὶ πόσας θέλουν ἀκόμη; $\left(12\frac{1}{4},\ 2\frac{3}{4}\right)$

14) Μία κόρη θέλει νὰ πλέξῃ $6\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως δαντέλλαν. Τὴν πρώτην ἡμέραν ἔπλεξε $1\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, τὴν δευτέραν ἡμέραν $\frac{2}{3}$ τοῦ πήχεως καὶ τὴν τρίτην ἡμέραν $1\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως. Πόσην δαντέλλαν ἔπλεξε; Καὶ πόσην θὰ πλέξῃ ἀκόμη; $\left(3\frac{11}{12},\ 2\frac{7}{12}\right)$.

15) Ἠγοράσαμεν ἀπὸ ἕνα παντοπώλην τὰ ἑξῆς πράγματα· βούτυρον ἀξίας 27 δραχμῶν, ζάχαριν ἀξίας $18\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἔλαιον ἀξίας $39\frac{1}{2}$ τῆς δρ. καὶ σάπωνα ἀξίας $15\frac{1}{10}$ τῆς δρ. καὶ τοῦ

ἐδώσαμεν δύο πεντηκοντάδραχμα. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωμεν ὀπίσω (τίποτε)

16) Ἐργάτης τις ἐργάζεται τὴν ἡμέραν ἀπὸ τῆς ὥρας $7\frac{3}{4}$ πρὸ μεσημβρίας μέχρι τῆς μεσημβρίας καὶ ἀπὸ τῆς ὥρας $2\frac{1}{2}$ μ. μ. μέχρι τῆς ὥρας $6\frac{1}{4}$. Πόσας ὥρας ἐργάζεται τὴν ἡμέραν; (8).

17) Παιδίον τι ἐγεννήθη τὴν πρωΐαν ὥραν $3\frac{3}{4}$ καὶ ἔζησε $17\frac{1}{2}$ ὥρας. Ποίαν ὥραν ἀπέθανε; $\left(9\frac{1}{4}\text{ μ. μ.}\right)$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἢ μικτοῦ ἐπὶ ἀκέραιον.

1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἀξίζουν αἱ 3 ὀκάδες.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς, αἱ 3 ὀκάδες ἀξίζουν 3 φορὰς τὰ $\frac{2}{9}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι $\frac{2}{9}\times 3=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2\times 3}{9}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τῆς δραχμῆς (ἁπλοποιούμενον).

Ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{2}{9}$, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ 9 διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3· ἤτοι εἶναι $\frac{2}{9}\times 3=\frac{2}{9:3}=\frac{2}{3}$.

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

126. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον, ἢ διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν εἶναι διαιρετός).***

Σημ. Τοῦτο ἐδείξαμεν καὶ ἐν τοῖς ἐδαφίοις 105 καὶ 106.

2ον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $4\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀξίζουν αἱ 2 ὀκάδες.

Αἱ 2 ὀκάδες ἀξίζουν 2 φορὰς τὰς $4\frac{2}{5}$ δρ., ἤτοι $4\frac{2}{5}\times 2$.

Ἐπειδὴ ὁ μικτὸς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος (ἐδάφ. 100), διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὰ μέρη του (ἤτοι χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα (ἐδ. 36).

Ἤτοι $4\frac{2}{5} \times 2 = 4 \times 2 + \frac{2}{5} \times 2 = 8 + \frac{4}{5}$ ἢ $8\frac{4}{5}$.

Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν καὶ ἂν τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν, ὡς ἀνωτέρω (ἐδάφ. 126).

Ἤτοι $4\frac{2}{5} \times 2 = \frac{22}{5} \times 2 = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

127. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ γινόμενα, ἢ τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.***

Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου ἢ κλάσματος ἐπὶ κλάσμα.

128. Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 7 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἀξίζουν οἱ 3 πήχεις.

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχμὰς ἐπὶ 3, ἤτοι 7×3 ἢ 21 δραχμάς. Ἐὰν τώρα ἐν τῷ γινομένῳ 7×3 ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν του ἄλλον ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πάλιν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχμὰς ἐπὶ τὸν νέον τοῦτον ἀριθμόν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἡ πρᾶξις δηλ. δὲν πρέπει νὰ μεταβληθῇ. Ὥστε ἐὰν ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

1ον) *Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 7 δραχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ* $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως ;

Πρέπει πάλιν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 7 δραχμὰς ἐπὶ $\frac{3}{8}$, ἤτοι $7 \times \frac{3}{8}$· διότι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἤλλαξε. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν ταύτην εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς.

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν πόσον ἀξίζει τὸ 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ 3 ὄγδοα αὐτοῦ. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ἀξίζει τὸ 1 ὄγδοον, ἤτοι τὸ 1 ρούπιον (διότι ὁ πῆχυς ἔχει 8 ρούπια), πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 7 δραχμὰς διὰ 8, ἤτοι 7 : 8, ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦτο δυνάμεθα νὰ τὸ παραστήσωμεν καὶ ὡς κλάσμα, ἤτοι $\frac{7}{8}$ (ἐδάφ. 96) Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ 1 ὄγδοον τοῦ πήχεως ἀξίζει $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς, τὰ 3 ὄγδοα, ἤτοι τὰ 3 ρούπια, θὰ ἀξίζουν 3 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\frac{7 \times 3}{8}$ (ἐδ. 105) ἢ $\frac{21}{8}$ τῆς δραχμῆς. Ἡ ἀξία λοιπὸν τῶν $\frac{3}{8}$ τοῦ πήχεως εὑρέθη. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $7 \times \frac{3}{8} = \frac{7 \times 3}{8} = \frac{21}{8}$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

129. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἴδιον.***

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι οἱαδήποτε κλασματικὴ μονάς, τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς καταντᾷ εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Π. χ. εἶναι $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα πολλαπλασιαστέος εἶναι αἱ 7 δραχμαί, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος (δηλ. τοῦ ἑνὸς πήχεως), καὶ πολλαπλασιαστὴς τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$, ἤτοι μέρος τῆς μονάδος. Εἴδομεν δὲ ὅτι πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἐκάμομεν δύο πράξεις, πρῶτον διαίρεσιν καὶ ἔπειτα πολλαπλασιασμόν. Τὰς δύο λοιπὸν ταύτας πράξεις θὰ τὰς ὀνομάζωμεν μὲ ἓν ὄνομα ***πολλαπλασιασμόν***, διὰ νὰ διατηρηθῇ ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδάφ. 42) καὶ ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα. Διὰ τοῦτο δὲ γενικεύομεν τὸν κανόνα ἐκεῖνον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς ἑξῆς.

130. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων (ὁμοειδῶν) ἢ μέρους τῆς μονάδος κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.***

Σημ. Πολλαπλασιαστέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους αὐτῆς.

2ον) *Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς;*

Γνωρίζομεν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι μιᾶς ὀκᾶς) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος $\left(\text{ἤτοι τῶν } \frac{3}{4}\right)$, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμόν, ἤτοι $\frac{7}{10} \times \frac{3}{4}$. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς οὗτος, διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν ταύτην εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἤτοι εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζει τὸ 1 τέταρτον τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα πόσον ἀξίζουν τὰ 3 τέταρτα.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ 1 ὀκᾶ ἀξίζει $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς, τὸ 1 τέταρτον, τὸ ὁποῖον εἶναι 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῆς μιᾶς ὀκᾶς, θὰ ἀξίζῃ καὶ 4 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{7}{10}$ τῆς δραχμῆς, ἤτοι $\frac{7}{10 \times 4}$ (ἐδ. 106), καὶ τὰ 3 τέταρτα, τὰ ὁποῖα εἶναι 3 φορὰς περισσότερα τοῦ 1 τετάρτου, θὰ ἀξίζουν καὶ 3 φορὰς περισσότερον τῶν $\frac{7}{10 \times 4}$, ἤτοι $\frac{7 \times 3}{10 \times 4}$ ἢ $\frac{21}{40}$ τῆς δραχμῆς. Ἡ ἀξία λοιπὸν τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς εὑρέθη. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{7}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{10 \times 4} = \frac{21}{40}$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

131. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστήν.***

Ἀσκήσεις. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{4}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$.

132. Εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι κλάσμα, δὲν ἐπαναλαμβάνεται ὁλόκληρος ὁ πολλαπλασιαστέος, ἀλλὰ μόνον μέρος αὐτοῦ καὶ τόσον μέρος, ὅσον δεικνύει ὁ παρονομαστὴς τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τόσας δὲ φορὰς τὸ μέρος τοῦτο, ὅσον δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ. Π. χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω τελευταῖον πρόβλημα ἐπαναλαμβάνεται τὸ τέταρτον τοῦ πολ-

λαπλασιαστέου $\frac{7}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{7}{10\times4}$, 3 φοράς· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$. Ἐκ τούτου λοιπὸν ὁδηγούμενοι δίδομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

133. ***Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ἕνα ἀριθμὸν ἢ μέρος αὐτοῦ τόσας φορὰς ὅσας μονάδας (ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς) ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.***

Τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδὲς μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον, διότι γίνεται ἐξ αὐτοῦ ἢ ἐκ μέρους αὐτοῦ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως.

Κατὰ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ γινόμενον $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ πέμπτον τοῦ $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{3}{4\times5}$, 2 φοράς, ἤτοι $\frac{3\times2}{4\times5}$ ἢ $\frac{6}{20}$.

Σημ. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος ἢ μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, τότε τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν ἀριθμῶν.

134. ***Ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι μικτὸς ἀριθμός, ἢ καὶ οἱ δύο παράγοντες εἶναι μικτοί, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν κατὰ τοὺς ἀνωτέρω κανόνας.***

Παραδείγματα. $2\times3\frac{4}{5}=2\times\frac{19}{5}=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$,

$$5\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{17}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{68}{21}=3\frac{5}{21},\quad \frac{2}{9}\times2\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times\frac{7}{3}=\frac{14}{27},$$

$$2\frac{1}{3}\times4\frac{3}{4}=\frac{7}{3}\times\frac{19}{4}=\frac{133}{12}=11\frac{1}{12}.$$

Σημ. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ μικτὸς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίου καὶ κλάσματος, διὰ τοῦτο δυνάμεθα καὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν καὶ ἔπειτα νὰ προσθέτωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα (ἐδάφ. 36). Τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν γινόμενα εὑρίσκονται καὶ ὡς ἑξῆς.

$$2\times3\frac{4}{5}=2\times3+2\times\frac{4}{5}=6+\frac{8}{5}=6+1\frac{3}{5}=7\frac{3}{5},$$

$$5\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=5\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{7}+\frac{8}{21}=\frac{60}{21}+\frac{8}{21}=$$

$$\frac{68}{21}=3\frac{5}{21},\quad \frac{2}{9}\times2\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\times2+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+\frac{2}{27}=$$

$\frac{12}{27}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $2\frac{1}{3}\times4\frac{3}{4}$ ὑποθέτομεν τὸν ἕνα παράγοντα, ἔστω τὸν $2\frac{1}{3}$, ὡς ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, τὸν δὲ ἄλλον $4\frac{3}{4}$ ὡς ἕνα ἀριθμόν· ἔχομεν τότε νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $2\frac{1}{3}\times 4 + 2\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$, πολλαπλασιάζοντες τώρα ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ $2\frac{1}{3}$ ἐπὶ 4 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\frac{3}{4}$ καὶ προσθέτοντες τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα εὑρίσκομεν $11\frac{1}{12}$.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

135. Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἀποτελούμενον ἐξ ἀκεραίων καὶ κλασμάτων ἢ κλασμάτων μόνον, εὑρίσκεται ὅπως καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο πρώτους παράγοντας, τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\frac{4}{5}\times 3\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{8}\times 2$. Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{4\times 3}{5}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τρίτον εἶναι $\frac{4\times 3\times 6}{5\times 7}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι $\frac{4\times 3\times 6\times 5}{5\times 7\times 8}$, τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν πέμπτον εἶναι $\frac{4\times 3\times 6\times 5\times 2}{5\times 7\times 8}$. Ὥστε εἶναι $\frac{4}{5}\times 3\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{8}\times 2 = \frac{4\times 3\times 6\times 5\times 2}{5\times 7\times 8}$. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι

136. ***Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι ἴσον μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμητῶν καὶ ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.***

Σημ. Ἡ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 44) ἐφαρμόζεται καὶ ἐδῶ. Ἐὰν εἰς τὸ γινόμενον ὑπάρχουν καὶ μικτοὶ ἀριθμοί, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν. Τὸ ἀνωτέρω κλάσμα τοῦ γινομένου δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ. Διαιροῦντες λοιπὸν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ διὰ 5, ἔπειτα διὰ 4 καὶ ἔπειτα διὰ 2 εὑρίσκομεν $\frac{18}{7}$. Ὥστε καλὸν εἶναι πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεών μας, πρὸ τοῦ νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων, νὰ διαιρῶμεν ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμητὴν ἢ ἀκέραιον καὶ ἕνα οἱονδήποτε παρονομαστὴν τῶν δοθέντων κλασμάτων διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ἂν ἔχουν, καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάζωμεν.

Ἀσκήσεις. $\frac{3}{4} \times 5 \left(= 3\ \frac{3}{4}\right)$, $4\frac{2}{3} \times 6 \left(= 28\right)$, $5 \times \frac{4}{5} \left(=4\right)$, $3 \times 2\frac{1}{2} \left(= 7\ \frac{1}{2}\right)$, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \left(= \frac{3}{10}\right)$, $2\ \frac{4}{5} \times \frac{4}{7} \left(=1\frac{3}{5}\right)$, $\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3} \left(=1\frac{1}{6}\right)$, $10 \times 5\frac{2}{5} \left(= 54\right)$, $2\frac{3}{4} \times 3\frac{4}{5} \left(= 10\frac{9}{20}\right)$, $6\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{4} \left(= 15\right)$, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \left(= \frac{2}{5}\right)$, $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \left(= \frac{1}{3}\right)$, $2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} \times 3 \times \frac{5}{6} \left(= \frac{4}{9}\right)$.

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ. Λύσις αὐτῶν διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δραχμάς. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς;

Κατάταξις. 1 ὀκᾶ — 4 δραχ.

$\frac{5}{6}$ — χ

Τοιοῦτον πρόβλημα ἐλύσαμεν καὶ προηγουμένως, τὴν αὐτὴν δὲ σκέψιν θὰ κάμωμεν καὶ τώρα.

Ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται 4 δραχμὰς

τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀκᾶς τιμᾶται $\frac{4}{6}$ τῆς δραχμῆς

καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ » » τιμῶνται $\frac{4 \times 5}{6}$ ἢ $3\frac{1}{3}$ τῆς δραχμῆς.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, εὕρομεν πρῶτον πόσον τιμᾶται τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἔπειτα πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτῆς. Ὁ τρόπος οὗτος, μὲ τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος (κλασματικῆς ἢ ἀκεραίας) καὶ ἔπειτα τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων, λέγεται ***ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα***.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, λύομεν καὶ ἄνευ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀλλὰ μόνον δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ. Ἤτοι ἔχομεν $4 \times \frac{5}{6} = \frac{20}{6}$ (ἐδάφ. 129) ἢ $3\frac{1}{3}$.

2) Ὁ πῆχυς μιᾶς δαντέλλας τιμᾶται $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως;

Κατάταξις. 1 πῆχ. $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς

$\frac{7}{8}$ χ

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

Ἀφοῦ ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς

τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. τιμᾶται $\frac{3}{4\times8}$ »

καὶ τὰ $\frac{7}{8}$ » » τιμῶνται $\frac{3\times7}{4\times8}$ ἢ $\frac{21}{32}$ »

Λύσις. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{21}{32}$ (ἐδ. 131).

Σημ. Ἐὰν ἔχωμεν μικτοὺς ἀριθμούς, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα χάριν εὐκολίας.

3) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 1 δραχμήν. Πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ $3\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις. $\frac{9}{4}$ ὀκ. 1 δραχμὴ

χ $\frac{7}{2}$

Μετὰ τὴν κατάταξιν τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ὅταν πρόκειται νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν πάντοτε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς, ὑποκάτω τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει ἡ ἄγνωστος τιμὴ τοῦ χ. Εἰς τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν πρόβλημα θὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὴν 1 δραχμὴν καὶ θὰ μεταβῶμεν εἰς τὰ $\frac{9}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Ἤτοι

ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν ἀγοράζομεν $\frac{9}{4}$ τῆς ὀκᾶς

μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς δραχ. » $\frac{9}{4\times2}$ »

καὶ μὲ $\frac{7}{2}$ » » $\frac{9\times7}{4\times2}$ ἢ $7\frac{7}{8}$ »

Λύσις. Διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. $2\frac{1}{4}\times3\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$.

4) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ 135.

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι 135,

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{135}{5}$

καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ » » $\frac{135 \times 2}{5}$ ἢ 54

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

137. ***Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν μέρος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.***

5) Παιδίον τι εἶχεν 27 καρύδια καὶ ἔφαγε τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῶν. Πόσα ἔφαγε;

Λύσις. $27 \times \frac{4}{9}$ ἢ 12. Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ νοερῶς ὡς ἑξῆς· διαιροῦμεν πρῶτον τὸν 27 μὲ τὸν παρονομαστὴν 9 καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τὸ πηλίκον 3 μὲ τὸν ἀριθμητὴν 4.

Ἀσκήσεις νοεραί. 1) Πόσον εἶναι τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 18; Πόσον τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ 40; Καὶ πόσον τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 45;

2) Πόσαι δραχμαὶ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν 25 δραχμῶν; τῶν 100, τῶν 500, τῶν 1000 δραχμῶν;

3) Πόσα λεπτὰ εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς; τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

4) Πόσα δράμια εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς;

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μία κόρη πλέκει τὴν ἡμέραν $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα. Πόσην θὰ πλέξῃ εἰς 5 ἡμέρας; $\left(4\frac{3}{8}\text{ π.}\right)$.

2) Μία ὀκᾶ ἀνθράκων ἀξίζει $3\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν 7 ὀκάδες; Καὶ πόσον 10 ὀκάδες; $\left(24\frac{1}{2}\text{ δρ. } 35\text{ δρ.}\right)$.

3) Δι' ἕνα σινδονόπανον μονόφυλλον θέλομεν $3\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως. Πόσους πήχεις θέλομεν διὰ 3 σινδονόπανα; Καὶ πόσους διὰ μίαν δωδεκάδα $\left(11\frac{1}{4}\text{ καὶ } 45\right)$.

4) Μία ὀκᾶ καφὲ ἀξίζει 74 δρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ πόσον τὰ 120 δράμια ; $\left(55\frac{1}{2},\ 74\times\frac{120}{400}\ \text{ἢ}\ 22\frac{1}{5}\right)$.

5) Μία λάμπα καίει εἰς μίαν ὥραν 45 δράμια πετρελαίου. Πόσον καίει εἰς $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας ; Καὶ πόσον εἰς $3\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας ;

(36 καὶ 150 δράμια).

6) Ἀτμόπλοιόν τι ἔτρεχε 12 μίλια τὴν ὥραν καὶ ἔκαμε ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Σμύρνην 17 $\frac{5}{12}$ τῆς ὥρας. Πόσα μίλια ἀπέχει ἡ Σμύρνη ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ ; (209).

7) Ὁ σιδηρόδρομος ἔκαμεν ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην $5\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὰς Σέρρας (χωρὶς νὰ σταματήσῃ), καὶ ἔτρεχε 30 χιλιόμ. τὴν ὥραν. Πόσα χιλιόμετρα ἀπέχουν αἱ Σέρραι ἀπὸ τὴν Θεσσαλονίκην ; (162).

8) Διὰ νὰ κάμωμεν γλύκισμα κουραμπιέδες, λαμβάνομεν εἰς μίαν ὀκᾶν ἀλεύρου 200 δράμια βούτυρον καὶ 150 δράμια ζάχαριν. Εἰς $3\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἀλεύρου πόσον βούτυρον καὶ πόσην ζάχαριν θὰ λάβωμεν ; X (βούτ. 700 δράμ. καὶ ζάχ. 525 δρ.).

9) Μὲ μίαν δραχμὴν ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς ; Καὶ πόσον μὲ $5\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς ; $\left(\frac{3}{10}\right.$ καὶ $2\frac{1}{16}$ τῆς ὀκᾶς).

10) Μία ὀκᾶ μῆλα ἀξίζει $18\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ; Καὶ πόσα $3\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ;

$\left(14\frac{1}{10}\right.$ καὶ $65\frac{8}{10}$ δρ).

11) Ἠγόρασέ τις 6 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος πρὸς $7\frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς τὴν ὀκᾶν καὶ ἔδωσεν ἕνα πεντηκοντάδραχμον. Πόσον θὰ λάβῃ ὀπίσω ; ($3\frac{1}{5}$ δρ.).

12) Ἠγόρασέ τις 56 αὐγὰ πρὸς $2\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς τὸ ζεῦγος.

(τὰ δύο) καὶ ἔδωσεν ἕνα ἑκατοντάδραχμον. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβη ὀπίσω; (23).

13) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος $3\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως πρὸς $45\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς τὸν πῆχυν καὶ 5 ρούπια βελοῦδο πρὸς 224 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσον ἔδωσε; $\left(298\frac{9}{10}\right)$.

14) Ἠγόρασέ τις 160 δράμια καφὲ πρὸς 86 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ $1\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς ζάχαριν πρὸς 22 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον θὰ δώσῃ; Καὶ πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν ἀπὸ ἕνα ἑκατοντάδραχμον ποὺ ἔχει μαζί του; $\left(65\frac{1}{5}\right.$ δρ., $\left.34\frac{4}{5}\right)$.

15) Ἠγόρασέ τις $19\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε διὰ τὴν οἰκογένειάν του $6\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ δὲ ἄλλο ἐπώλησε πρὸς 100 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον βούτυρον ἐπώλησε; Καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβε; $\left(12\frac{17}{8}\right.$ ὀκ., $1287\frac{1}{2}$ $\left.\text{δρ.}\right)$.

16) Γυνή τις ἠγόρασεν 145 δράμια νῆμα καὶ ἐξώδευσε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ. Πόσον νῆμα ἐξώδευσε καὶ πόσον ἔμεινε; (87 καὶ 58 δράμ.).

17) Πόσον εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$; Καὶ πόσον τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $2\frac{1}{4}$; $\left(\frac{3}{5}\right.$ καὶ $\left.\frac{1}{2}\right)$.

18) Πατήρ τις εἶχε μαζί του 480 δρ. καὶ ἐξ αὐτῶν ἔδωσε τὰ $\frac{2}{5}$ διὰ τὰ βιβλία τοῦ υἱοῦ του καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου διὰ τὰ βιβλία τῆς κόρης του. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε τὸ ὅλον; (408).

19) Ὁ καφές, ὅταν καβουρδισθῇ, χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του τὰ $\frac{4}{25}$. Ἂν καβουρδίσωμεν 300 δράμια καφέ, πόσος καφὲς θὰ μείνῃ; (252 δράμια).

20) Τὸ κρέας, ὅταν ψηθῇ, χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του τὸ $\frac{1}{4}$. Ἂν ψήσωμεν $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς κρέας, πόσον θὰ μείνῃ; $\left(1\frac{7}{8}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$.

21) Μία κόρη εἶναι 24 ἐτῶν. Πρὸ πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία της ἦτο τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς σημερινῆς; (πρὸ 9 ἐτῶν).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

138. Εἴδομεν (ἐδάφ. 97) ὅτι ἡ διαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν γίνεται διὰ τῶν κλασμάτων πάντοτε τελεία. Τὸ πηλίκον π. χ. τοῦ 5 διὰ 8 εἶναι $\frac{5}{8}$, τοῦ 17 διὰ 5 εἶναι $\frac{17}{5}$ ἢ $3\frac{2}{5}$. Τὸ ἀκριβὲς πηλίκον, ὡς βλέπομεν, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 3, ὁ ὁποῖος δεικνύει ποσάκις ὁ διαιρέτης 5 χωρεῖ εἰς τὸν διαιρετέον 17, καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον 2 τῆς διαιρέσεως καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην 5. Ὥστε δυνάμεθα εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν νὰ γράφωμεν τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) ὡς ἀριθμητὴν καὶ τὸν διαιρέτην ὡς παρονομαστὴν καὶ νὰ ἑνώνωμεν τὸ κλάσμα τοῦτο μὲ τὸ ἀκέραιον πηλίκον, ἀρκεῖ μόνον νὰ ἐπιτρέπῃ τοῦτο ἡ φύσις τοῦ προβλήματος.

139. Ἐπειδὴ διὰ τῶν κλασμάτων γίνεται ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν πάντοτε τελεία, διὰ τοῦτο ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου (ἐδάφ. 50). Ὥστε δίδομεν εἰς τὴν διαίρεσιν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν.

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμὸν (τὸ πηλίκον), ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα, καλούμενον διαιρέτην, δίδει τὸν ἄλλον, καλούμενον διαιρετέον.

Διαίρεσις κλάσματος ἢ μικτοῦ δι᾿ ἀκεραίου.

140. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μὲ 3 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{6}{7}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 δραχμήν.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ μὲ 3 δραχ. ἀγοράζομεν $\frac{6}{7}$ τῆς ὀκᾶς, μὲ 1 δραχμὴν θὰ ἀγοράσωμεν 3 φορὰς ὀλιγώτερον τῶν $\frac{6}{7}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$ τρεῖς φορὰς μικρότερον, πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ 3· ὥστε ἢ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστήν του ἐπὶ 3 ἢ θὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ 3 (ἐδ. 107), ἤτοι εἶναι $\frac{6}{7} : 3 =$

$\frac{6}{7\times 3}$ ἢ $\frac{2}{7}$ (ἁπλοποιούμενον), ἢ $\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$ ὀκ. Ὥστε

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου (ἂν εἶναι διαιρετός).

Σημ. Τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἶναι πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{6}{7}:3$· διότι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην 3, εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $\frac{6}{7}$.

141. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μικτὸν δι' ἀκεραίου τρέπομεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν ὡς ἀνωτέρω,***

π. χ. $6\frac{3}{4}:5=\frac{27}{4}:5=\frac{27}{20}$ ἢ $1\frac{7}{20}$,

ἢ διαιροῦμεν ἕκαστον μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστὰ διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα (ἐδ. 65),

ἤτοι $6\frac{3}{4}:5=\frac{6}{5}+\frac{3}{20}=\frac{24}{20}+\frac{3}{20}=\frac{27}{20}$ ἢ $1\frac{7}{20}$.

Διαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος.

142. Ἂς ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 3 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν, πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς (ἤτοι τὴν τιμὴν τῶν πολλῶν μονάδων) διὰ 3, ἤτοι 6 : 3 ἢ 2 δρ. Ἐὰν τώρα ἀλλάξωμεν τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν του ἄλλον ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον αὐτοῦ, πάλιν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς διὰ τοῦ νέου τούτου ἀριθμοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἡ πρᾶξις δηλ. δὲν πρέπει νὰ μεταβληθῇ διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ διαιρέτου 3. Ὥστε, ἐὰν ἔχωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

1ον) ***Μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ;***

Πρέπει πάλιν νὰ διαιρέσωμεν τὰς 6 δραχμὰς διὰ $\frac{3}{8}$, ἤτοι $6:\frac{3}{8}$, διότι μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων ἤλλαξε. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου 6 διὰ τοῦ κλάσματος

$\frac{3}{8}$, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἡ ἀξία τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς·

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν 6 δραχμάς,

τὸ $\frac{1}{8}$ » » ἀξίζει $\frac{6}{3}$ »

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἤτοι 1 ὀκ., ἀξίζουν $\frac{6\times8}{3}$ ἢ $6\times\frac{8}{3}$ δραχμάς.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $6:\frac{3}{8}=6\times\frac{8}{3}$ ἢ 16 δραχ.

Σημ. Ὁ $6\times\frac{8}{3}$ εἶναι πράγματι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $6:\frac{3}{8}$. Διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοῦτο ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{3}{8}$ εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον 6, ἤτοι εἶναι $6\times\frac{8}{3}\times\frac{3}{8}$ ἢ 6 μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος 6 ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{8}{3}$, ἤτοι ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον. Ὁ διαιρέτης $\frac{3}{8}$ εἶναι μέρος τῆς μονάδος (ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς), διὰ τοῦτο δὲ γενικεύομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐδαφίου 63 ὡς ἑξῆς :

143. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν πολλῶν μονάδων ἢ μέρους τῆς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ὁμοειδοῦς), κάμνομεν διαίρεσιν (μερισμόν).***

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους τῆς μονάδος.

2ον) ***Μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ ;***

Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ μέρους τῆς μονάδος καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος, διὰ τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μερισμὸν) ἤτοι $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$. Μένει τώρα νὰ ἴδωμεν, πῶς θὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις αὕτη, διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς ὀκᾶς. Ἀλλὰ τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς ὀκᾶς εὑρίσκομεν πάλιν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ὀκᾶς ἀξίζουν $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς.

τὸ $\frac{1}{6}$ » » ἀξίζει $\frac{3}{4\times5}$ »

καὶ τὰ $\frac{6}{6}$, ἤτοι ἡ 1 ὀκᾶ, ἀξίζουν $\frac{3\times 6}{4\times 5}$ ἢ $\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}$ τῆς δρ.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4}\times\frac{6}{5}$ ἢ $\frac{9}{10}$ τῆς δραχμῆς.

Ἐκ τούτου πάλιν βλέπομεν ὅτι ὁ διαιρετέος $\frac{3}{4}$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ τοῦ διαιρέτου ἀντεστραμμένον. Καὶ τὸ πηλίκον μικτοῦ ἀριθμοῦ διὰ κλάσματος εὑρίσκεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἤτοι εἶναι $2\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = 2\frac{4}{5}\times\frac{4}{3}$.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

144. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.***

Σημ. Ἐκ τοῦ τρόπου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος ἢ μεγαλύτερος τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου.

145. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ μικτοῦ, τρέπομεν πάντοτε τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν· διότι ἄλλος τρόπος δὲν ὑπάρχει.***

Ἀσκήσεις. $\frac{2}{5} : 3\left(=\frac{2}{15}\right)$, $3\frac{3}{5} : 9\left(=\frac{2}{5}\right)$, $2 : \frac{3}{8}\left(=5\frac{1}{3}\right)$, $8 : \frac{1}{2}\left(=16\right)$, $\frac{3}{7} : \frac{4}{5}\left(=\frac{15}{28}\right)$, $\frac{5}{6} : \frac{2}{3}\left(=1\frac{1}{4}\right)$, $5\frac{1}{3} : \frac{2}{3}\left(=8\right)$, $5 : 2\frac{3}{4}\left(=1\frac{9}{11}\right)$, $\frac{4}{5} : 1\frac{1}{5}\left(=\frac{2}{3}\right)$, $\frac{6}{7} : 3\frac{1}{2}\left(=\frac{12}{49}\right)$, $3\frac{1}{5} : 2\frac{2}{5}\left(=1\frac{1}{3}\right)$, $5\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3}\left(=4\right)$, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{5} : \frac{2}{7}\left(=1\right)$.

Σύνθετα κλάσματα.

146. Εἴδομεν (ἐδ. 97) ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, π. χ. εἶναι $5 : 8 = \frac{5}{8}$. Ἐὰν γενικεύσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην τοῦ πηλίκου καὶ εἰς οἱουσδήποτε ἄλλους ἀριθμούς, ἤτοι εἰς τὰς διαιρέσεις $\frac{3}{5} : 6$, $2\frac{5}{8} : 3$,

$3:\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}:\frac{2}{3}$ κτλ., θὰ ἔχωμεν τὰ ἑξῆς κλάσματα :

$$\frac{\frac{3}{5}}{6},\quad \frac{2\frac{5}{8}}{3},\quad \frac{3}{\frac{4}{5}},\quad \frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}\quad \text{κτλ.}$$

Τὰ τοιαῦτα κλάσματα, τῶν ὁποίων ὁ εἷς τῶν ὅρων ἢ καὶ οἱ δύο ὅροι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὀνομάζομεν **σύνθετα κλάσματα**, τὰ δὲ ἔχοντα ὅρους ἀκεραίους ὀνομάζομεν πρὸς διάκρισιν **ἁπλᾶ**. Τὰ σύνθετα κλάσματα ἔχουν ὅλας τὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς αὐτοὺς γνωστοὺς κανόνας. Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ σύνθετα κλάσματα εἶναι κλάσματα, διὰ τοῦτο παριστῶσι διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Ὥστε διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. Ἤτοι

$$\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4\times5}=\frac{3}{20},\quad \frac{2}{\frac{3}{7}}=2:\frac{3}{7}=2\times\frac{7}{3}=\frac{14}{3},$$

$$9\times\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=9\times\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=9\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{24}{5}\ \text{κτλ.}$$

147. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐὰν ὁ εἷς μόνον τῶν ὅρων του εἶναι κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος τούτου· ἐὰν δὲ καὶ οἱ δύο ὅροι του εἶναι κλάσματα, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν των (ἐδ. 109). Ἤτοι εἶναι

$$\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{\frac{3}{4}\times4}{5\times4}=\frac{3}{5\times4}=\frac{3}{20},\quad \frac{2}{\frac{3}{7}}=\frac{2\times7}{\frac{3}{7}\times7}=\frac{2\times7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$9\times\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=9\times\frac{\frac{2}{5}\times5\times4}{\frac{3}{4}\times5\times4}=9\times\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{24}{5}$$

Σημ. Ἐὰν συμβῇ νὰ ἔχουν καὶ οἱ δύο ὅροι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν παραλείπομεν αὐτόν. Ἐὰν ἔχουν μικτοὺς ἀριθμούς, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα.

Λύσις προβλημάτων διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.

1) Μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{7}{9}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ μίαν δραχμήν;

Σημ. Τοιοῦτον πρόβλημα ἐλύσαμεν καὶ προηγουμένως.

Κατάταξις. $\frac{3}{5}$ δραχ. $\frac{7}{9}$ ὀκ.

1 χ

Ἀφοῦ μὲ $\frac{3}{5}$ τῆς δρ. ἀγοράζομεν $\frac{7}{9}$ τῆς ὀκᾶς,

μὲ $\frac{1}{5}$ » » $\frac{7}{9\times3}$ »

καὶ μὲ $\frac{5}{5}$ ἤτοι μὲ 1 δρ. » $\frac{7\times5}{9\times3}$ ἢ $1\frac{8}{27}$ τῆς ὀκᾶς.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, καθὼς καὶ τὰ ὅμοια πρὸς αὐτό, λύομεν καὶ ἄνευ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, ἀλλὰ μόνον διὰ μιᾶς διαιρέσεως συμφώνως μὲ τὸν κανόνα τοῦ ἐδαφίου 143. Ἤτοι ἔχομεν $\frac{7}{9}:\frac{3}{5}=\frac{7}{9}\times\frac{5}{3}$ (ἐδ. 144) $=\frac{35}{27}=1\frac{8}{27}$.

2) Μὲ $6\frac{3}{10}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $1\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς;

Κατάταξις. $\frac{63}{10}$ δρχ. $\frac{3}{2}$ πήχ.

χ 1

Λύσις. Διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Ἐνθυμούμενοι νὰ ἀρχίζωμεν πάντοτε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον, ὑποκάτω τοῦ ὁποίου δὲν ὑπάρχει ἡ ἄγνωστος τιμὴ χ.

Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{2}$ τοῦ πήχεως ἀξίζουν $\frac{63}{10}$ τῆς δραχμῆς

τὸ $\frac{1}{2}$ » » ἀξίζει $\frac{63}{10\times3}$ »

καὶ τὰ $\frac{2}{2}$ ἤτοι ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει $\frac{63\times2}{10\times3}$ ἢ $4\frac{1}{5}$ τῆς δραχ.

Λύσις. Διὰ τῆς διαιρέσεως (ἐδ. 143). $6\frac{3}{10}:1\frac{1}{2}=\frac{63}{10}:\frac{3}{2}$ $=\frac{63}{10}\times\frac{2}{3}=4\frac{1}{5}$.

3) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $2\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις. 1 ὀκᾶ $\frac{11}{5}$ τῆς δραχμῆς

χ $\frac{3}{4}$

Λύσις. Θὰ εὕρωμεν πρῶτον, πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 δραχμὴν καὶ ἔπειτα πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{3}{4}$ τῆς δραχ. σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ μὲ $\frac{11}{5}$ τῆς δραχ. ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν

μὲ $\frac{1}{5}$ τῆς δραχ. ἀγοράζομεν $\frac{1}{11}$ τῆς ὀκᾶς

καὶ μὲ $\frac{5}{5}$, ἤτοι μὲ 1 δρ. » $\frac{5}{11}$ »

Ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν » $\frac{5}{11}$ »

μὲ $\frac{1}{4}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{5}{11 \times 4}$ »

καὶ μὲ $\frac{3}{4}$ » » $\frac{5 \times 3}{11 \times 4}$ ἢ $\frac{15}{44}$ τῆς ὀκᾶς

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐδόθησαν δύο ὁμοειδεῖς τιμαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία $\left(2\frac{1}{5}\right.$ τῆς δραχ.$\left.\right)$ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη $\left(\frac{3}{4}\right.$ τῆς δραχ.$\left.\right)$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς μονάδος, ἤτοι τῶν $\frac{5 \times 3}{11 \times 4}$ ἢ $\frac{15}{44}$ τῆς ὀκᾶς. Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς $\frac{5 \times 3}{11 \times 4}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{3}{4} : \frac{11}{5}$. Ὥστε γενικεύομεν τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐδαφίου 64 ὡς ἑξῆς.

148. ***Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας ἢ μέρος τῆς μονάδος τοῦ ὁποίου τὴν ὁμοειδῆ τιμὴν ἔχομεν, κάμνομεν διαίρεσιν (μέτρησιν).***

Σημ. Διαιρετέος εἶναι πάντοτε ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων ἢ τοῦ μέρους τῆς μονάδος, διαιρέτης δὲ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος.

4) Τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 141· ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύσις. Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 141

τὸ $\frac{1}{8}$ » » » » $\frac{141}{3}$

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\frac{141\times8}{3}$ ἢ 376.

Ἀλλ' ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς $\frac{141\times8}{3}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $141:\frac{3}{8}$. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

149. ***Ὅταν γνωρίζωμεν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ὅλον τὸν ἀριθμόν, κάμνομεν διαίρεσιν.***

Διαιρετέος εἶναι πάντοτε τὸ γνωστὸν μέρος τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ καὶ διαιρέτης τὸ κλάσμα, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται τὸ μέρος τοῦτο.

5) Μὲ $3\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος· πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς;

Κατάταξις. $\frac{7}{2}$ δρ. $\qquad \frac{3}{5}$ ὀκ.

$\frac{7}{9}$ $\qquad\qquad x$

Λύσις. Ἀφοῦ μὲ $\frac{7}{2}$ τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς

μὲ $\frac{1}{2}$ » » $\frac{3}{5\times7}$ »

καὶ μὲ $\frac{2}{2}$, ἤτοι μὲ 1 δρ. » $\frac{3\times2}{5\times7}$ »

Ἀφοῦ μὲ 1 δραχμὴν » $\frac{3\times2}{5\times7}$ »

μὲ $\frac{1}{9}$ τῆς δραχμῆς » $\frac{3\times2}{5\times7\times9}$ »

καὶ μὲ $\frac{7}{9}$ » » $\frac{3\times2\times7}{5\times7\times9}$ ἢ $\frac{2}{15}$ ὀκ.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀγοράζομεν μὲ 1 δραχμὴν (ἐδ. 143), ἤτοι $\frac{3}{5}:\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}$ ἢ $\frac{6}{35}$ τῆς ὀκᾶς. Καὶ ἔπειτα πόσον ἀγοράζομεν μὲ $\frac{7}{9}$ τῆς δραχμῆς (ἐδάφ. 130), ἤτοι $\frac{6}{35}\times\frac{7}{9}$ ἢ $\frac{2}{15}$ ὀκ.

Νοεραὶ ἀσκήσεις. 1) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 24 δρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 100 δράμια; καὶ πόσον τὸ 1 δράμι;

Λύσις. Τὰ 100 δράμια εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ὀκᾶς, ὥστε θὰ ἀξίζουν καὶ τὸ τέταρτον τῶν 24 δραχμῶν, ἤτοι 6 δραχ. Τὸ 1 δράμι ἀξίζει τὸ ἑκατοστὸν τῶν 6 δραχμῶν ἢ 600 λεπτῶν, ἤτοι 6 λεπ. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι *ὅσας δραχμὰς ἀξίζουν τὰ 100 δράμια, τόσα λεπτὰ ἀξίζει τὸ 1 δράμι.*

2) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 32 δρ. Πόσον ἀξίζουν τὰ 100 δράμια; Πόσον τὸ 1 δράμι; Καὶ πόσον τὰ 30;

Λύσις. Τὰ 100 δράμια ἀξίζουν 32 : 4 ἢ 8 δραχμάς, τὸ ἕνα δράμι ἀξίζει 8 λεπτὰ καὶ τὰ 30 δράμια ἀξίζουν 30×8 ἢ 240 λ., ἤτοι 3 δρ. καὶ 40 λ.

Ἀσκήσεις. Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ ἐκτελῶνται πρῶτον αἱ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πράξεις.

1) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{6}$ . . . . $\left(\frac{7}{12}\right)$

2) $\left(\frac{5}{8}-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{10}$ . . . . $\left(\frac{21}{40}\right)$

3) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\times 6$ . . . . $\left(6\ \frac{9}{10}\right)$

4) $\left(3-2\ \frac{4}{5}\right)\times 2\ \frac{1}{2}$ . . . . $\left(\frac{1}{2}\right)$

5) $\left(\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\right)\times 2\ \frac{1}{7}$ . . . . $\left(3\ \frac{1}{2}\right)$

6) $\left(5\ \frac{1}{4}+2\ \frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{7}$ . . . . $\left(5\ \frac{3}{4}\right)$

7) $\left(3\ \frac{3}{4}+2\ \frac{2}{5}+1\ \frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{9}$ . . . . . . $\left(4\ \frac{1}{4}\right)$

8) $\left(2\ \frac{2}{3}+3\ \frac{1}{2}\right):\frac{5}{6}$ . . . . $\left(7\ \frac{2}{5}\right)$

9) $\left(2\ \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right):\frac{4}{9}$ . . . . (3)

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Παιδίον τι ἠγόρασε 4 βόλους καὶ ἔδωσε $\frac{3}{5}$ τῆς δρ. Πόσον ἠγόρασε τὸν καθένα; $\left(\frac{3}{20}\ \text{τῆς δρ.}\right)$.

2) Μία κόρη ἠγόρασε 3 πήχ. κορδέλλα καὶ ἔδωσε $10\ \frac{4}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν; Καὶ πόσον θὰ δώσῃ ἂν ἀγοράσῃ ἀκόμη $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως; $\left(3\ \frac{3}{5}\ \text{δρ.},\quad 2\ \frac{1}{4}\ \text{δρ.}\right)$.

3) Τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν 23 δρ. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Καὶ πόσον ἀξίζουν $2\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(36\frac{4}{5}\ \text{καὶ 92 δρ.}\right)$.

4) Ἀπὸ 15 ὀκάδας ἐλαίας ἐξάγεται ἔλαιον $2\ \frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς; Ἀπὸ πόσας ὀκάδας ἐλαίας ἐξάγεται μία ὀκᾶ ἐλαίου; (6).

5) Διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα ὑποκάμισον θέλομεν $4\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσα ὑποκάμισα θὰ κάμωμεν μὲ 27 πήχεις; (6).

6) Ἕνα δράμι εἶναι ἴσον μὲ $3\frac{1}{5}$ τοῦ γραμμαρίου. Πόσα δράμια εἶναι 64 γραμμάρια; (20).

7) Μία οἰκογένεια ἠγόρασε 40 ὀκ. ἐλαίου. Πόσας ἑβδομάδας θὰ περάσῃ, ἐὰν ἐξοδεύῃ τὴν ἑβδομάδα $1\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς; (32).

8) Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει $7\frac{1}{2}$ τῆς δραχ. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 30 δραχμάς; Καὶ πόσον μὲ $18\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς;

$\left(4 \text{ ὀκ. καὶ } 2\frac{1}{2} \text{ ὀκ.}\right)$.

9) Ἀτμόπλοιον τρέχει τὴν ὥραν $12\frac{1}{2}$ τοῦ μιλίου. Πόσας ὥρας θὰ κάμῃ ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Κωνσταντινούπολιν, ἡ ὁποία ἀπέχει 358 μίλια; $\left(28\frac{16}{25}\right)$.

10) Ἡ Θεσσαλονίκη ἀπέχει ἀπὸ τὴν Δράμαν 233 χιλιόμετρα. Ἐὰν ὁ σιδηρόδρομος τρέχῃ $32\frac{1}{2}$ χιλιόμ. τὴν ὥραν, εἰς πόσας ὥρας θὰ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν ταύτην, χωρὶς νὰ σταματήσῃ; $\left(7\frac{11}{65}\right)$.

11) Μία ἀτμομηχανὴ σιδηροδρόμου τρέχει 42 χιλιόμ. εἰς $1\frac{1}{5}$ τῆς ὥρας. Πόσα χιλιόμετρα τρέχει τὴν ὥραν; Καὶ πόσας ὥρας θὰ κάμῃ διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὰς Ἀθήνας εἰς τὴν Λάρισσαν, ἡ ὁποία ἀπέχει 340 χιλιόμετρα; $\left(35, \quad 9\frac{5}{7}\right)$.

12) Γυνή τις ἐζύμωσε 6 ὀκάδας ἀλεύρου καὶ ἔγινεν ἄρτος $7\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσος ἄρτος γίνεται μὲ μίαν ὀκᾶν ἀλεύρου; Καὶ πόσον ἄλευρον χρειάζεται διὰ νὰ γίνῃ ἄρτος 20 ὀκάδες; $\left(1\frac{1}{4} \text{ καὶ } 16 \text{ ὀκ.}\right)$.

13) Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἀρνίου, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{5}$ ζυγίζουν $3\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(6\frac{1}{4} \text{ ὀκ.}\right)$.

14) Γυνή τις ἐξώδευσε διὰ τὴν ἀγορὰν ἑνὸς ὑφάσματος τὰ $\frac{5}{8}$ ἀπὸ ὅσας δραχμὰς εἶχε μαζί της καὶ τῆς ἔμειναν 150 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς εἶχε μαζί της;

Λύσις. Ἀφοῦ ἐξώδευσε τὰ $\frac{5}{8}$, τῆς ἔμειναν τὰ $\frac{3}{8}$, τὰ ὁποῖα εἶναι 150 δραχ., καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ δραχμαὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἦσαν 400.

15) Πτωχή τις γυνὴ ἠγόρασε $17\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 16 δραχ. τὸν πῆχυν καὶ συνεφώνησε νὰ πληρώσῃ τὸ ὕφασμα μὲ δόσεις, δίδουσα κάθε ἑβδομάδα 40 δραχμάς. Εἰς πόσας ἑβδομάδας θὰ ἀποπληρώσῃ τὸ χρέος της; (7).

16) Πόσον πετρέλαιον καίει τὴν ὥραν μία λάμπα, ὅταν εἰς $\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας καίῃ $\frac{3}{20}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ καύσῃ $2\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς; $\left(\frac{1}{4}\right.$ ὀκ., εἰς 10 ὥρ.$\left.\right)$.

17) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἑνὸς πράγματος ἀξίζουν $7\frac{1}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Καὶ πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 24 δραχμάς; $\left(9\frac{3}{5}\right.$ δρ., $2\frac{1}{2}$ ὀκ.$\left.\right)$.

18) Μία κόρη εἰς $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας πλέκει ἐκ μιᾶς δαντέλλας $\frac{8}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσην θὰ πλέξῃ εἰς 4 ὥρας; Καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ πλέξῃ $4\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως; $\left(1\frac{4}{5}\right.$ π., εἰς 10 ὥρ.$\left.\right)$

19) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $1\frac{1}{5}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος δίδομεν $6\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ πόσον διὰ 120 δράμια $\left(\frac{120}{400}\right.$ τῆς ὀκᾶς$\left.\right)$; (4 καὶ $1\frac{3}{5}$ δρ.).

20) Δύο γεωργοὶ ἀντήλλαξαν σῖτον καὶ κριθήν. Ὁ εἷς ἔδωσεν εἰς τὸν ἄλλον 36 ὀκ. σίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $7\frac{3}{4}$ τῆς δραχμῆς, καὶ ἔλαβε κριθήν, τῆς ὁποίας ἡ ὀκᾶ ἀξίζει $4\frac{1}{2}$ τῆς δραχμῆς. Πόσας ὀκάδας κριθῆς ἔλαβε; (62)

21) Γυνή τις εἰς 3 ὥρας ὑφαίνει ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος $\frac{3}{5}$ τοῦ πήχεως, ἄλλη γυνὴ εἰς 5 ὥρας ὑφαίνει ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος $1\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως. Πόσον ὑφαίνουν μαζὶ εἰς μίαν ὥραν; Καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ ὑφάνουν 12 πήχεις; $\left(\frac{9}{20}, \text{ εἰς } 26\frac{2}{3}\right)$.

22) Μία οἰκογένεια θέλει τὴν ἑβδομάδα $7\frac{7}{8}$ τῆς ὀκᾶς γάλα· ἐὰν ἕκαστον ἄτομον θέλῃ τὴν ἡμέραν $\frac{3}{16}$ τῆς ὀκᾶς γάλα, ἀπὸ πόσα ἄτομα ἀποτελεῖται ἡ οἰκογένεια; (6).

23) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τέταρτον ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 5, γίνεται ἴσον μὲ τὸν 17;

Λύσις. Ἐὰν δὲν αὐξηθῇ κατὰ 5, τότε τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 17 — 5 ἢ 12, καὶ ἑπομένως ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι 12×4 ἢ 48.

24) Τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας ἑνὸς παιδίου καὶ 6 ἔτη ἀκόμη κάμνουν 10 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία του; (12 ἐτῶν).

25) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ κατὰ 20;

Λύσις. Τὰ $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5}$ κατὰ $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ἢ $\frac{4}{15}$. Ὥστε τὰ $\frac{4}{15}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 20 καὶ ἑπομένως ὅλος ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 75.

26) Εἰς ἓν σχολεῖον τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν ὑπερβαίνει τὸ τρίτον αὐτοῦ κατὰ 40. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταί; (240).

27) Πατὴρ τις ἀποθανὼν ἄφησεν εἰς τὴν σύζυγόν του τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας του καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὴν θυγατέρα του. Ἡ θυγάτηρ του ἔλαβεν 120.000 δραχ. περισσότερον τῆς συζύγου. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του; Καὶ πόσον ἔλαβεν ἑκάστη;

(480 000, 180 000, 300 000).

28) Ἐπώλησέ τις ἀπὸ τὰ πρόβατά του τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτῶν, κατόπιν ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὑπολοίπων καὶ τοῦ ἔμειναν 144 πρόβατα. Πόσα πρόβατα εἶχεν ἀπ' ἀρχῆς; (420)

Λύσις. Ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$, τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{4}{7}$· ἐξ αὐτῶν πάλιν ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$, ἐπομένως τοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν, ἤτοι $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ ἢ $\frac{12}{35}$, τὰ ὁποῖα εἶναι 144 πρόβατα. Ὥστε ὅλα τὰ πρόβατά του εὑρίσκομεν ὅτι ἦσαν 420.

29) Χωρική τις ἔφερεν εἰς μίαν πόλιν 120 αὐγά. Ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 1 δραχμὴν καὶ 50 λεπτὰ (ἤτοι 150 λ.) τὸ καθέν, τὰ δὲ ἄλλα ἐπώλησε πρὸς 3 δρ. καὶ 25 λ. τὸ ζεῦγος (τὰ δύο)· ἔπειτα μὲ τὰ χρήματα, τὰ ὁποῖα ἔλαβεν, ἠγόρασεν 8 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἀπὸ ὅλα τὰ αὐγά; Καὶ πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος; $\left(186 \text{ δρ.}, 23\frac{1}{4} \text{ δρ.}\right)$.

30) Τρεῖς ἄνθρωποι ἠγόρασαν μαζὶ ἓν ἀρνίον πρὸς 36 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ὁ πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ, ὁ δεύτερος τὸ πέμπτον καὶ ὁ τρίτος τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο $2\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς. Πόσαι ὀκάδες ἦτο τὸ ἀρνίον; Πόσον ἔλαβεν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος; Καὶ πόσον ἐπλήρωσεν ἕκαστος;

Λύσις. Ὁ α′ καὶ ὁ β′ ἔλαβον μαζὶ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{7}{10}$, ὥστε ὁ γ′ ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον $\frac{3}{10}$, τὸ ὁποῖον εἶναι $2\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς, καὶ ἐπομένως ὅλον τὸ ἀρνίον εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 8 ὀκ. Ὁ α′ ἔλαβε 4 ὀκ. καὶ ἐπλήρωσε 144 δραχμάς, ὁ β′ $1\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς καὶ ἐπλήρωσε $57\frac{3}{5}$ δρ. καὶ ὁ γ′ ἐπλήρωσεν $86\frac{2}{5}$ δρ.

Τύποι πρὸς λύσιν στοιχειωδῶν προβλημάτων.

150. Εἰς ὅλα τὰ μέχρι τοῦδε προβλήματα ἐλαμβάνομεν ἀριθμοὺς καὶ ἐπ' αὐτῶν ἐγίνοντο οἱ συλλογισμοί. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ αὐτοὶ συλλογισμοὶ γίνονται δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς, διὰ τοῦτο πρὸς συντομίαν παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου, ἀλλ' ἕκαστον ἀριθμὸν πρέπει πρὸς διάκρισιν νὰ τὸν παριστῶμεν καὶ μὲ ἰδιαίτερον γράμμα. Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν ὅτι μὲ 20 δραχμὰς ἀγοράζομεν 4 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος, λέγομεν μὲ α δραχμὰς ἀγοράζομεν β ὀκάδας ἢ ἀντὶ α καὶ β δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱαδήποτε ἄλλα γράμματα, ἀλλὰ διάφορα.

Ἐὰν ἔχωμεν π. χ. νὰ προσθέσωμεν 20 δραχμὰς καὶ 15 δραχμάς, θὰ γράψωμεν $20+15=35$ δρ. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ γράψωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν α δραχμὰς καὶ β δραχμάς, ἤτοι $\alpha+\beta$· καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι γ δραχμάς, θὰ γράψωμεν $\alpha+\beta=\gamma$.

Ἐὰν πάλιν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 18 δραχ. ἀπὸ 45 δραχμάς, θὰ γράψωμεν $45-18=27$ δρ. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ γράψωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν β) δραχμὰς ἀπὸ α δραχμὰς (ὑποθέτομεν τὸν ἀριθμὸν α μεγαλύτερον τοῦ β) ἤτοι $\alpha-\beta$· καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι γ, θὰ γράψωμεν $\alpha-\beta=\gamma$.

Ἐὰν πάλιν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν π. χ. τὸν 5 ἐπὶ 4, θὰ γράψωμεν 5×4. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ γράψωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 5 ἐπὶ α ἢ τὸν α ἐπὶ β, ἤτοι $5\times\alpha$ καὶ $\alpha\times\beta$, ἢ ἄνευ σημείου 5α καὶ $\alpha\beta$. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\times$ ἢ τὴν στιγμὴν. παραλείπομεν τότε καὶ μόνον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται διὰ γραμμάτων, ἢ ὅταν ὁ εἷς παράγων εἶναι ἀριθμὸς καὶ ὁ ἄλλος γράμμα, οὐχὶ ὅμως καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι ἀριθμοί. Π. χ. τὸ γινόμενον 5×4 ἢ 5.4 δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἄνευ σημείου, ἤτοι 54· διότι τότε συγχύζεται τὸ γινόμενον αὐτῶν 20 μὲ τὸν ἀριθμὸν 54.

Ὅταν πάλιν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν π. χ. τὸν 20 διὰ 5, θὰ γράψωμεν $20:5$ ἢ $\frac{20}{5}$. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θὰ γράψωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν α διὰ τοῦ β, ἤτοι $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$.

Πότε στοιχειῶδες πρόβλημά τι λύεται δι' ἑνὸς μόνον πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς μόνον διαιρέσεως (μερισμοῦ ἢ μετρήσεως), ἔχομεν τοὺς γνωστοὺς κανόνας. Θὰ μάθωμεν τώρα ἄλλον τρόπον σύντομον, μὲ τὸν ὁποῖον θὰ λύωμεν τὰ τοιαῦτα προβλήματα.

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται α δραχμάς. Πόσον τιμῶνται β ὀκάδες;

Λύσις. Ἐὰν ἀγοράσωμεν π. χ. 5 ὀκάδας, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, αἱ 5 ὀκ. θὰ τιμῶνται 5 φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\alpha\times5$ δρ. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β ὀκάδας λέγοντες· ἀφοῦ ἡ 1 ὀκᾶ τιμᾶται α δραχμάς, αἱ β ὀκ. θὰ τιμῶνται β φορὰς περισσότερον, ἤτοι $\alpha\times\beta$ δραχμάς.

Ἡ σημείωσις ἀριθμητικῆς πράξεως ἐπὶ γραμμάτων, ὡς εἶναι ἡ $\alpha\times\beta$, λέγεται **τύπος**. Ἐὰν τώρα μᾶς δοθῶσιν οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ ὁμοίου προβλήματος πρὸς τὸ ἀνωτέρω καὶ θέσωμεν αὐτοὺς ἐν τῷ τύπῳ $\alpha \times \beta$ ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ ζητούμενον, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς ἀνωτέρω συλλογισμούς. Π. χ. ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος τιμᾶται 4 δρ.· πόσον τιμῶνται $9\frac{1}{2}$ ὀκάδες; Θέτομεν ἐν τῷ τύπῳ $\alpha \times \beta$ ἀντὶ τοῦ α τὸν 4 καὶ ἀντὶ τοῦ β τὸν $9\frac{1}{2}$ καὶ ἔχομεν $4 \times 9\frac{1}{2}$, ἤτοι 38 δραχμάς.

Πρόβλημα. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν β ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος δίδομεν α δραχ. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ μίαν ὀκᾶν;

Λύσις. Ἐὰν μὲ τὰς α δραχμὰς ἀγοράσωμεν π. χ. 5 ὀκάδας, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ διὰ 5 ὀκ. δίδομεν α δραχμάς, διὰ τὴν 1 ὀκᾶν θὰ δώσωμεν 5 φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{\alpha}{5}$ ἢ α : 5. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β ὀκάδας λέγοντες· ἀφοῦ διὰ β ὀκάδας δίδομεν α δραχμάς, διὰ 1 ὀκᾶν θὰ δώσωμεν β φορὰς ὀλιγώτερον, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α : β. Ἐὰν τώρα μᾶς δοθῶσιν οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ ὁμοίου προβλήματος πρὸς τὸ ἀνωτέρω καὶ θέσωμεν αὐτοὺς ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α : β ἀντὶ τῶν γραμμάτων α καὶ β, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τὸ ζητούμενον.

Πρόβλημα. Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει β δραχμάς. Πόσους πήχεις ἀγοράζομεν μὲ α δραχμάς;

Λύσις. Ἐὰν ὁ πῆχυς ἀξίζῃ π. χ. 20 δραχμάς, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς· ὅσας φορὰς αἱ 20 δραχμαὶ χωροῦν εἰς τὰς α δραχμάς, τόσους πήχεις ἀγοράζομεν, ἤτοι $\frac{\alpha}{20}$ ἢ α : 20. Οὕτω σκεπτόμεθα καὶ διὰ τὰς β δραχμὰς λέγοντες· ὅσας φορὰς αἱ β δραχμαὶ χωροῦν εἰς τὰς α δραχμάς, τόσους πήχεις ἀγοράζομεν, ἤτοι $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ἢ α : β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

151. Εἴπομεν (ἐδ. 92) ὅτι ***κλασματικὴ μονὰς λέγεται ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ἀκεραία μονάς, δηλ.***

ἓν **πρᾶγμα ἀκέραιον**. Ὅσαι ὅμως κλασματικαὶ μονάδες ἔχουν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, ὡς εἶναι αἱ ἑξῆς κατὰ σειρὰν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ., λέγονται **δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες** ἢ ἁπλῶς **δεκαδικαὶ μονάδες**· διότι ἑκάστη εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἑπομένης της. Τὸ δέκατον εἶναι δεκαδικὴ μονὰς **πρώτης τάξεως**, τὸ ἑκατοστὸν **δευτέρας τάξεως** καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δεκαδικὸν κλάσμα λέγεται πλῆθος δεκαδικῶν κλασματικῶν μονάδων (ἢ καὶ μία δεκαδικὴ κλασματικὴ μονάς). Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{375}{1000}$ κτλ. εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα. Τὰ δὲ ἄλλα κλάσματα, τὰ μὴ ἔχοντα παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, λέγονται πρὸς διάκρισιν **κοινὰ κλάσματα**.

Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὡς ἀκεραίων.

152. Εἴδομεν εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὅτι μία μονὰς τάξεώς τινος ἐπαναλαμβανομένη δέκα φορὰς γίνεται μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρω δεκαδικὰς κλασματικὰς μονάδας, διὰ τοῦτο τὰ δεκαδικὰ κλάσματα δυνάμεθα νὰ γράφωμεν καθὼς καὶ τοὺς ἀκεραίους, στηριζόμενοι εἰς τὴν αὐτὴν συνθήκην τοῦ ἐδαφίου 15, ἤτοι **πᾶν ψηφίον, τὸ ὁποῖον γράφεται πρὸς τὰ δεξιὰ ἄλλου, παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, καὶ τἀνάπαλιν**. Κατὰ τὴν συνθήκην λοιπὸν ταύτην, μετὰ τὴν γραφὴν τῶν ἁπλῶν μονάδων πρέπει νὰ γράφωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὰ δέκατα τῆς μονάδος ὡς δεκάκις μικρότερα αὐτῆς (διότι τὸ $\frac{1}{10}$ εἶναι δέκα φορὰς μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1), μετὰ τὰ δέκατα νὰ γράφωμεν τὰ ἑκατοστὰ αὐτῆς ὡς δεκάκις μικρότερα τῶν δεκάτων, μετὰ τὰ ἑκατοστὰ νὰ γράφωμεν τὰ χιλιοστὰ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἑκάστη δὲ τάξις δὲν θὰ ἔχῃ μονάδας περισσοτέρας τῶν 9, διότι δέκα μονάδες τάξεώς τινος κάμνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐὰν δὲ μονάδες τάξεώς τινος ἐλλείπωσι, πρέπει νὰ ἀναπληρῶμεν τὰς θέσεις των μὲ μηδενικά, ὅπως πράττομεν καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους. Ἀλλὰ διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἀπὸ τὰς δεκαδικάς, γράφομεν μετὰ τὸν ἀκέραιον ὑποδιαστολὴν (,) ἐὰν ὅμως δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιος, γράφομεν 0 εἰς τὴν θέσιν του.

Π. χ. ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει 5 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα καὶ 6 ἑκατοστὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος, γράφεται ὡς ἑξῆς 5,36, ἀντὶ νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς $5+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$ ἢ $5+\frac{30}{100}+\frac{6}{100}$ ἢ $5\,\frac{36}{100}$ ἢ $\frac{536}{100}$. Ὥστε εἶναι $5{,}36=\frac{536}{100}$.

Ὡσαύτως ὁ ἀριθμὸς 2 δέκατα καὶ 4 χιλιοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς 0,204 (ἐγράψαμεν 0 εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀκεραίου καὶ 0 εἰς τὴν θέσιν τῶν ἑκατοστῶν, διότι δὲν ἐδόθησαν τοιαῦτα), ἀντὶ νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς $\frac{2}{10}+\frac{4}{1000}$ ἢ $\frac{200}{1000}+\frac{4}{1000}$ ἢ $\frac{204}{1000}$. Ὥστε εἶναι $0{,}204=\frac{204}{1000}$. Ὅταν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα γράφωνται ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων ἀριθμῶν, π. χ. 5,36 καὶ 0,204, τότε οὗτοι λέγονται ἰδιαιτέρως ***δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ*** (ἀντὶ δεκαδικὰ κλάσματα). Πᾶς λοιπὸν δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἀπὸ τὸν ἀκέραιον (ἂν ἔχῃ) καὶ ἀπὸ τὸ δεκαδικόν. Τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους λέγονται πρὸς διάκρισιν ***δεκαδικὰ ψηφία***.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι εἶναι $5{,}36=\frac{536}{100}$ καὶ $0{,}204=\frac{204}{1000}$. Ὥστε

153. ***Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς κλάσμα, ἀρκεῖ νὰ παραλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ νὰ γράψωμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ νὰ γράψωμεν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός. Καὶ τἀνάπαλιν.***

154. ***Πᾶν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, γράφεται καὶ ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμητὴν χωριστὰ καὶ νὰ χωρίσωμεν ἀπὸ τὰ δεξιά του δι' ὑποδιαστολῆς τόσα ψηφία ὡς δεκαδικά, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.***

Ἐὰν ὅμως συμβῇ νὰ μὴ φθάνουν τὰ ψηφία διὰ νὰ χωρίσωμεν, ὅσα χρειάζονται, γράφομεν τότε πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ μηδενικὰ τόσα, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη ψηφία καὶ ἓν ἀκόμη μηδενικὸν διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος. Π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{35}{1000}$ γράφεται ὡς ἑξῆς 0,035, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητοῦ μηδενικά, τοῦτο δὲν βλάπτει τὸν ἀριθμόν, ἤτοι 0035· τώρα χωρίζομεν τρία ψηφία, ἤτοι 0,035.

Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

155. Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,26· ἐὰν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ μηδενικά, ἤτοι 5,260 ἢ 5,2600 κτλ., οἱ νέοι οὗτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν 5,26. Διότι ἂν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς τούτου ἀριθμοὺς ὡς κλάσματα θὰ ἔχωμεν $\frac{526}{100}=\frac{5260}{1000}=\frac{52600}{10000}$ κτλ. (ἐδ. 109). Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα :

Ἡ ἀξία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν γράψωμεν εἰς τὰ δεξιά του, ἢ παραλείψωμεν τοιαῦτα ἀπὸ τὰ δεξιά του (ἂν ὑπάρχουν).

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράφωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ὡς δεκαδικόν, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ μηδενικά. Π. χ. ὁ ἀκέραιος 5 γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς 5,0 ἢ 5,00 κτλ.

Ἀπαγγελία δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

156. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 8,375· ἐπειδὴ εἶναι $8,375=8+\frac{3}{10}+\frac{7}{100}+\frac{5}{1000}$ ἢ $8\frac{375}{1000}$ ἢ καὶ $\frac{8375}{1000}$, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν αὐτὸν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους. 1ον) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων του, ἤτοι 8 ἀκέραιαι μονάδες ἢ ἁπλῶς 8 ἀκέραια, 3 δέκατα, 7 ἑκατοστὰ καὶ 5 χιλιοστά. 2ον) Ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἤτοι 8 ἀκέραια καὶ 375 χιλιοστά· καὶ 3ον) Ἀπαγγέλλομεν ὅλον τὸν ἀριθμὸν ὡς ἀκέραιον, χωρὶς δηλαδὴ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν, καὶ εἰς τὸ τέλος λέγομεν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἤτοι 8375 χιλιοστά.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα τοὺς δύο τελευταίους τρόπους πρὸς ἀπαγγελίαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία. Ὅταν ὅμως ἔχῃ, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριψήφια (συνήθως) τμήματα, ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα ἀπαγγέλλομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος (ἂν ἔχῃ) καὶ χωριστὰ ἕκαστον τμῆμα μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου. Τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ εἶναι μονοψήφιον ἢ διψήφιον.

Ἔστω π. χ. ὁ δεκαδικὸς 15,3465895. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τριψήφια τμήματα διὰ στιγμῶν (.), ἤτοι 15,346.589.5 καὶ ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς· 15 ἀκέραια, 346 χιλιοστά, 589 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 5 δεκάκις ἑκατομμυριοστά.

Σημ. Τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς· 50 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστὰ ἢ 500 δισεκατομμυριοστὰ (ἰδ. 155).

Γραφὴ ἀπαγγελλομένου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

157. Διὰ νὰ γράφωμεν εὐκόλως δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον κατὰ τὸν ἀνωτέρω συνήθη δεύτερον ἢ τρίτον τρόπον, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα τοῦτο. Ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ ὡς κλάσματος ἀπαγγελλομένου ἀριθμοῦ, τόσα δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ ἔχωμεν. Ἐὰν ὅμως τὰ ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν, γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη, καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Ἔστω π. χ. νὰ γραφῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 6 ἀκέραια καὶ 5 χιλιοστά. Γράφομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον 6 καὶ χωρίζομεν τοῦτον δι' ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα ἐνθυμούμεθα ὅτι ὁ χίλια γράφεται μὲ τρία μηδενικά, ἑπομένως τρία δεκαδικὰ ψηφία πρέπει νὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ ὅμως μᾶς ἐδόθη ἓν μόνον ψηφίον, ἤτοι ὁ 5, διὰ τοῦτο γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ δύο μηδενικά, ἤτοι 6,005. Ὡσαύτως διὰ νὰ γράψωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 15 ἑκατοντάκις χιλιοστά, πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸν χιλιάδες γράφεται μὲ πέντε μηδενικὰ (ὁ ἑκατὸν μὲ δύο μηδενικὰ καὶ ὁ χίλια μὲ τρία, ἐν ὅλῳ πέντε μηδενικά), ἐπειδὴ ὅμως μᾶς ἐδόθησαν δύο μόνον ψηφία, ἤτοι ὁ 15, διὰ τοῦτο θὰ γράψωμεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 15 τρία μηδενικὰ καὶ ἓν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος, ἤτοι 0,00015. Ὡσαύτως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 8 ἑκατομμυριοστὰ γράφεται ὡς ἑξῆς 0,000008· διότι τὸ ἑκατομμύριον γράφεται μὲ ἓξ μηδενικά.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

158. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς ἀριθμούς, προσθέτομεν αὐτοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, προσέχοντες ὅμως νὰ γράφωμεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν, ἤτοι χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τὸ ἀκέραιον.***

Ἔστω π. χ. νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 2,723, 54,6 καὶ 0,1256. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 2{,}723 \\ 54{,}6 \\ 0{,}1256 \\ \hline 57{,}4486 \end{array}$$

Σημ. Ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως, καθὼς καὶ τῶν λοιπῶν πράξεων, γίνεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

159. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, ἀφαιροῦμεν ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, προσέχοντες ὅμως νὰ καταγράφωμεν τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· εἰς δὲ τὴν διαφορὰν θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν, ἤτοι χωρίζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τὸ ἀκέραιον.***

Ἔστω π. χ. νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 3,557 ἀπὸ τὸν 23,7 καὶ ὁ 0,6234 ἀπὸ τὴν μονάδα 1. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 23{,}700 \\ 3{,}567 \\ \hline 20{,}133 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}0000 \\ 0{,}6234 \\ \hline 0{,}3766 \end{array}$$

Ἐγράψαμεν μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μειωτέου, διὰ νὰ ἔχουν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία μὲ τὸν ἀφαιρετέον· τοῦτο δὲν βλάπτει (ἐδ. 155). Δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ παραλείψωμεν ταῦτα, ἀρκεῖ μόνον νὰ φανταζώμεθα ταῦτα ὡς γεγραμμένα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Μαθητὴς ἠγόρασε τρία βιβλία· διὰ τὸ ἓν ἔδωσε δρ. 22,80, διὰ τὸ ἄλλο ἔδωσε 9,60 περισσότερον τοῦ πρώτου καὶ διὰ τὸ ἄλλο ἔδωσε 15 δραχ. Πόσον ἔδωσε διὰ τὸ δεύτερον βιβλίον; Καὶ πόσον διὰ τὰ τρία; (32,40 καὶ 70,20).

2) Μία κόρη εἶχε κορδέλλα 3,45 τοῦ μέτρου καὶ ἀπ' αὐτὴν ἔδωσεν εἰς μίαν φίλην της 0,80 τοῦ μέτρου. Πόση τῆς ἔμεινε; (2,65 μ.).

3) Ἡ θερμοκρασία ἑνὸς ἀσθενοῦς ἦτο 37,4 (βαθμοί), ἔπειτα ἦτο 39,2. Πόσον ηὐξήθη; (1,8).

4) Τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 1,68 τοῦ μέτρου, τῆς δὲ συζύγου του εἶναι 0,295 μικρότερον αὐτοῦ. Πόσον εἶναι τὸ ἀνάστημα τῆς συζύγου του; (1,385 μ.).

5) Παιδίον τι εἶχε δρ. 2,65· κατόπιν τοῦ ἔδωσεν ὁ πατήρ του 1,80 δρ. Πόσας θέλει ἀκόμη, διὰ νὰ ἔχῃ ἕνα τάλληρον; (0,55).

6) Μήτηρ τις ἠγόρασεν 9 μέτρα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος διὰ φορέματα. Ἀπ' αὐτὸ ἔκοψε διὰ τὴν μεγαλυτέραν κόρην της 3 μέτρα καὶ διὰ τὴν μικροτέραν 2,30 τοῦ μέτρου, τὸ δὲ ἄλλο ὕφασμα ἐκράτησε διὰ τὸ ἰδικόν της φόρεμα. Πόσον ἐκράτησε; (3,70 μ.).

7) Ἀπὸ ἕνα παντοπώλην ἠγοράσαμεν καφὲν ἀξίας 78,60 τῆς δραχμῆς, ζάχαριν ἀξίας 49,80, ἔλαιον ἀξίας 65,70 καὶ βούτυρον ἀξίας 95 δρ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβωμεν ὀπίσω ἀπὸ ἓν χιλιόδραχμον; (710,90).

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

160. ***Διὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους (χωρὶς δηλ. νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ὑποδιαστολήν), εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες.***

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 32,205×4,2. Ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 32{,}205 \\ 4{,}2 \\ \hline 64410 \\ 128820 \\ \hline 135{,}2610 \end{array}$$

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον χωρίζομεν εἰς τὸ γινόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν οἱ παράγοντες, εἶναι ὁ ἑξῆς. Διότι ἂν γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὡς κλάσματα, τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{32205}{1000} \times \frac{42}{10} = \frac{1352610}{10000}$ ἢ 135,2610 (ἐδ. 154). Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εὕρομεν, ἀφοῦ ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς ἀριθμητάς, ἤτοι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, ἄνευ ὑποδιαστολῆς, καὶ ἐχωρίσαμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής, ἤτοι ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες. Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ ὅταν ὁ εἷς μόνον τῶν παραγόντων ἔχῃ δεκαδικὰ ψηφία.

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὰ ψηφία τοῦ γινομένου νὰ μὴ φθάνουν, διὰ νὰ χωρίσωμεν ὅσα χρειάζονται, γράφομεν τότε εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος.

Ἀσκήσεις. 1,24×6(=7,44), 35×4,5 (=157,5), 0,72×0,9 (=0,648), 1,89×2,87 (=5,4243), 6,79×0,006 (=0,04074), 0,003×0,05 (=0,00015).

Συντομίαι πολλαπλασιασμοῦ.

161. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 7,245. Μεταθέτομεν τὴν ὑπο-

διαστολὴν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 72,45. Ἐὰν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν ὡς κλάσματα, ἤτοι $\frac{7245}{1000}$ καὶ $\frac{7245}{100}$, βλέπομεν ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου κλάσματος εἶναι δέκα φορὰς μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο κλάσμα εἶναι δέκα φορὰς μεγαλύτερον τοῦ πρώτου (ἐδ. 106), ὥστε καὶ ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 72,45 εἶναι δέκα φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 7,245. Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 7,245 μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 724,5, ὁ ὁποῖος ἀποδεικνύεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅτι εἶναι 100 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ 7,245 καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὴν ἑξῆς συντομίαν.

162. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000 καὶ γενικῶς ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ μηδενικά, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦν τὴν μονάδα.***

Ἐὰν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται ἀκόμη.

Π. χ. $5,6 \times 1000 = 5600$. Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν 5,6 καὶ ὡς ἑξῆς 5,600 (ἐδ. 155).

163. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἐπὶ ἀκέραιον λήγοντα εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα μηδενικὰ παρελείψαμεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν.***

Π. χ. εἶναι $0,482 \times 400 = 48,2 \times 4 = 192,8$. Διότι ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διὰ μιᾶς ἐπὶ 400, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἐπὶ 100 καὶ ἔπειτα ἐπὶ 4.

Ἀσκήσεις. $4,567 \times 10$ $(=45,67)$, $0,8 \times 10$ $(=8)$, $0,750 \times 100$ $(=75)$, $3,465 \times 100$ $(=346,5)$, $0,004 \times 1000$ $(=4)$, $3,4 \times 10000$ $(=34000)$, $7,856 \times 70 = 78,56 \times 7 = 549,92$, $456 \times 3000 = 456 \times 3 = 1368$.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

164. Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν

δύο περιπτώσεις· 1ον) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι δεκαδικὸς καὶ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, καὶ 2ον) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ὁ διαιρέτης δεκαδικός.

1ον) Διαιρέτης ἀκέραιος.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 29,82 διὰ 6. Διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ 29 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 (ἀκεραίας μονάδας) καὶ ὑπόλοιπον 5· αἱ 5 αὗται ἀκέραιαι μονάδες κάμνουν 50 δέκατα (διότι 1 ἀκεραία μονὰς ἔχει 10 δέκατα) καὶ 8 δέκατα, ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός, κάμνουν 58 δέκατα. Διαιροῦντες ταῦτα διὰ 6, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 (δέκατα) καὶ ὑπόλοιπον 4 δέκατα· ταῦτα πάλιν κάμνουν 40 ἑκατοστὰ (διότι 1 δέκατον ἔχει 10 ἑκατοστά), καὶ 2 ἑκατοστά, ὅπου ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός, κάμνουν 42 ἑκατοστά. Διαιροῦντες τέλος καὶ ταῦτα διὰ 6 εὑρίσκομεν πηλίκον 7 (ἑκατοστὰ) καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

29,82	6
58	4,97
42	
0	

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

165. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ καὶ ἔπειτα τὸ δεκαδικόν, προσέχοντες ὅμως νὰ θέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ πέρας τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους.***

Σημ. Ἐὰν συμβῇ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ διαιρετέου νὰ μὴ διαιρῆται διὰ τοῦ διαιρέτου ἢ ὁ διαιρετέος νὰ μὴ ἔχῃ ἀκέραιον μέρος, γράφομεν τότε 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ χωρίζομεν τοῦτο δι' ὑποδιαστολῆς· ἔπειτα ἐξακολουθοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

Παραδείγματα.

3,15	5
15	0,63
0	

0,0078	6
18	0,0013
0	

0,893	7
19	0,127
53	
4	

Εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελὴς καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον 0,127 δὲν εἶναι τὸ ἀκριβές, διότι μένει καὶ ὑπόλοιπον 4 χιλιοστά· τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἶναι 0,127 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἐὰν λοιπὸν παραλείψωμεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ καὶ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,127, τὸ πηλίκον τότε θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀληθοῦς κατὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ χιλιοστοῦ καὶ ἑπομένως μικρότερον τοῦ ἑνὸς χιλιοστοῦ· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ***κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ***. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοστῶν, ἤτοι 0,12 ἢ μέχρι τοῦ ψηφίου τῶν δεκάτων, ἤτοι 0,1, λέγομεν τότε ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ ἢ κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου· τουτέστι τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν εἰς τὸ πηλίκον, εἶναι μικρότερον τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ ἢ ἑνὸς δεκάτου.

Εἶναι ὅμως φανερὸν ὅτι ὅσα περισσότερα ψηφία λαμβάνομεν εἰς τὸ πηλίκον, τόσον περισσότερον πλησιάζομεν εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον. Ὥστε ὅταν δὲν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθῶμεν τὴν διαίρεσιν καὶ νὰ προσεγγίζωμεν εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον, ὅσον θέλομεν· ἀρκεῖ νὰ τρέπωμεν ἕκαστον ὑπόλοιπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως (γράφοντες πρὸς τοῦτο ἓν μηδενικὸν εἰς τὰ δεξιά του) καὶ νὰ διαιρῶμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ διαιρέτου. Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ πράττωμεν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὁσάκις δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω τελευταίαν διαίρεσιν λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,12 ἀντὶ τοῦ 0,127, θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ 7 χιλιοστὰ ὀλιγώτερον αὐτοῦ· ἐὰν ὅμως λάβωμεν τὸν 0,13 ἀντὶ τοῦ 0,127, θὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον κατὰ 3 χιλιοστὰ περισσότερον. Ὥστε προτιμότερον εἶναι νὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 0,13 παρὰ τὸν 0,12. Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ κρατήσωμεν τὸ πηλίκον μὲ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία, καλὸν εἶναι νὰ αὐξάνωμεν τὸ τελευταῖον κρατηθὲν ψηφίον κατὰ 1, ὅταν τὸ παραλειφθὲν ἑπόμενον ψηφίον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5· διότι πλησιάζομεν τότε περισσότερον εἰς τὸ ἀληθὲς πηλίκον.

Παραδείγματα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ 32 διὰ 15 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 25,5 διὰ 11 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ. Εἰς τὸ πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν ἑκατοστῶν, ἀλλὰ διὰ νὰ παριστᾷ ὁ διαιρετέος ἑκατοστὰ γράφομεν εἰς τὰ δεξιά του δύο μηδενικὰ ὡς δεκαδικὰ ψηφία. Εἰς δὲ τὸ δεύτερον θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μέχρι τῶν χιλιοστῶν, διὰ τοῦτο γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου δύο μηδενικὰ διὰ νὰ παριστᾷ χιλιοστὸ (τοῦτο δὲν βλάπτει, ἐδάφ. 155). Ἤτοι

32,00	15	25,500	11
20	2,13	35	2,318
50		20	
5		90	
		2	

2ον) Διαιρέτης δεκαδικός.

166. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (ἐδ. 57). Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι γενικὴ δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς. Εἰς τὴν ἰδιότητα λοιπὸν ταύτην στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, ἀκολουθοῦντες τὸν ἑξῆς κανόνα.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν διὰ δεκαδικοῦ, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον αὐτοὺς (διαιρετέον καὶ διαιρέτην) ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κτλ. ὥστε νὰ γίνῃ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 9,38 διὰ 0,4. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 10 (διότι ἐπὶ 10 ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης 0,4 γίνεται ἀκέραιος) καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεκαδικὸν 93,8 διὰ τοῦ ἀκεραίου 4 (ἐδ. 165).

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 6 διὰ 8,56, πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ἐπὶ 100 (διότι ἐπὶ 100 ἂν πολλαπλασιασθῇ ὁ διαιρέτης 8,56 γίνεται ἀκέραιος) καὶ ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 600 διὰ 856. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς δεκάτου εἶναι 0,7. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8,42 διὰ 6,125, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ 1000 καὶ ἔχομεν τότε νὰ διαιρέσωμεν τὸν 8420 διὰ 6125. Τὸ πηλίκον αὐτῶν εὑρίσκομεν μὲ ὅσην προσέγγισιν θέλομεν.

Συντομίαι διαιρέσεως.

167. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν διὰ 10, διὰ 100, διὰ 1000 καὶ γενικῶς διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθουμένης ἀπὸ μηδενικά, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα μηδενικὰ ἀκολουθοῦσι τὴν μονάδα.***

Π. χ. εἶναι 25,6 : 10=2,56 καὶ 347,5 : 100=3,475. Διότι ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους γράψωμεν ὡς κλάσματα (ὅπως καὶ εἰς τὸ ἐδάφιον 161), θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ 2,56 εἶναι 10 φορὰς μικρότερος τοῦ 25,6 καὶ ὁ 3,475 εἶναι 100 φορὰς μικρότερος τοῦ 347,5.

Ἐὰν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ δὲν φθάνουν, διὰ νὰ μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολή, γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσαι χρειάζονται καὶ ἓν μηδενικὸν ἀκόμη διὰ τὸ ἀκέραιον μέρος. Π. χ. εἶναι 4,5 : 100=0,045. Διότι ὁ ἀριθμὸς 4,5 δὲν μεταβάλλεται ἂν γράψωμεν μηδενικὰ εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀκεραίου μέρους ἤτοι 004,5.

168. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν δι' ἀκεραίου λήγοντος εἰς μηδενικά, παραλείπομεν τὰ μηδενικὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ δεκαδικοῦ τόσας θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅσα μηδενικὰ παρελείψαμεν ἀπὸ τὸν ἀκέραιον, καὶ κατόπιν διαιροῦμεν.***

Π. χ. εἶναι 257,6 : 700=2,576 : 7=0,368. Διότι, ἂν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται (ἐδάφ. 57).

169. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,5 ἢ διὰ 0,50 ἢ διὰ 0,500 κτλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 2.***

Π. χ. 64 : 0,5=64×2=128 (διότι διὰ νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\frac{5}{10}$ ἢ $\frac{50}{100}$ ἢ $\frac{500}{1000}$ κτλ., ἤτοι διὰ $\frac{1}{2}$, θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἤτοι ἐπὶ $\frac{2}{1}$ ἢ 2).

170. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,25 ἢ διὰ 0,250 κτλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 4.***

Π. χ. 45,6 : 0,25=45,6×4=182,4 $\left(\text{διότι εἶναι } 0{,}25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\right)$

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ 0,1, διὰ 0,01, διὰ 0,001 κτλ. πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ 10, ἐπὶ 100, ἐπὶ 1000 κτλ.

Ἀσκήσεις. 273 : 0,3(=910), 3,15 : 0,7(=4,5), 522,6 : 6,7(=78), 59,595 : 6,85(=8,7), 7,8473 : 0,97(=8,09), 63,45 : 10 (=6,345), 5,03 : 10(=0,503), 437,2 : 100(=4,372), 0,4 : 100(=0,004), 290,3 :

1000(=0,2903), 12,6 : 30(=0,42), 43,2 : 600(=0,072), 436,75 : 12,37(=35, 22 κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ).

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὸν καὶ τἀνάπαλιν.

171. Διὰ νὰ τρέψωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς δεκαδικόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· διότι πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ἐδ. 96).

Ἂς τρέψωμεν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{8}$ εἰς δεκαδικόν, ἤτοι

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline 0 & 0,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 8 \\ \hline 20 & 0,625 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Ὥστε εἶναι $\frac{2}{5} = 0,4$, $\frac{3}{4} = 0,75$ καὶ $\frac{5}{8} = 0,625$.

Τὰ κλάσματα λοιπὸν ταῦτα ἐτράπησαν ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Καὶ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς κλάσματα, π. χ. οἱ δεκαδικοὶ 0,7, 0,35, 4,125 κτλ. γράφονται καὶ ὡς κλάσματα, ἤτοι $\frac{7}{10}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{4125}{1000}$ κτλ. (ἐδ. 153).

Πράξεις δεκαδικῶν καὶ κοινῶν κλασμάτων.

172. Ἡ πρόσθεσις ἢ ἡ ἀφαίρεσις δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν (ἂν τρέπηται ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν δεκαδικῆς τινος μονάδος) καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Ἢ τρέπομεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα προσθέτομεν ἢ ἀφαιροῦμεν τὰ δύο κλάσματα.

Π. χ. νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $2,35 + \frac{3}{4}$ Κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον ἔχομεν $2,35 + \frac{3}{4} = 2,35 + 0,75 = 3,10$· κατὰ τὸν δεύτερον δὲ τρόπον ἔχομεν $2,35 + \frac{3}{4} = \frac{235}{100} + \frac{3}{4} = \frac{310}{100} = 3,10$. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ καὶ κοινοῦ κλάσματος ἢ ἡ διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ κοινοῦ κλάσματος γίνεται, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀκεραίου καὶ κλάσματος. Δυνάμεθα καὶ νὰ τρέψωμεν τὸν δεκαδικὸν εἰς κλάσμα ἢ τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν καὶ ἔπειτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν.

Ἀσκήσεις. $3{,}50 + \frac{3}{4}$ $(= 4{,}25)$, $9{,}4 - \frac{4}{5}$ $(= 8{,}6)$, $\frac{7}{8} - 0{,}437$ $(= 0{,}438)$, $\frac{2}{3} \times 3{,}45$ $(= 2{,}30)$, $\frac{3}{5} : 1{,}5$ $(= 0{,}4)$.

$\left(1{,}45 + 2{,}15\right) - \left(3 - \frac{3}{5}\right)$. . . . . $(1{,}20)$

$\left(3{,}4 - 2\frac{3}{5}\right) \times 0{,}25$. . . . . $(0{,}2)$

$\left(\frac{5}{8} - 0{,}5\right) \times 2{,}5$. . . . . $(0{,}05)$

$\left(\frac{4}{5} \times 0{,}25\right) : 0{,}5$ . . . . $(0{,}4)$

$\left(2\frac{3}{4} : 0{,}25\right) : \frac{5}{6}$ . . . . $(13{,}2)$

Περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα.

173. Ἂς τρέψωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{4}{7}$ εἰς δεκαδικόν, ἤτοι

$$\begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \hline 50 & 0{,}571428\ldots \\ \;\;10 & \\ \;\;\;\;30 & \\ \;\;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;4 & \end{array}$$

Ὅσον καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, οὐδέποτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τὸ τελευταῖον εὑρεθὲν ὑπόλοιπον 4 εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, ὥστε ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν, θὰ ἐπανεύρωμεν τὰ αὐτὰ ὡς καὶ πρὶν ὑπόλοιπα, ἑπομένως καὶ τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου θὰ ἐπαναλαμβάνωνται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὡς πρότερον, ἤτοι θὰ ἐπαναλαμβάνωνται τὰ ψηφία 5 7 1 4 2 8. Τὸ σύνολον τῶν ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται ***περίοδος***· ὁ δὲ δεκαδικὸς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἐπαναλαμβάνονται τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγεται ***περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα***. Τὸ περιοδικὸν λέγεται ***ἁπλοῦν***, ὅταν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν· ***μικτὸν*** δέ, ὅταν ἡ περίοδος ἀρχίζῃ μετά τινα ψηφία, ὅπως π. χ. εἰς τὸ περιοδικὸν 0,54783783... (ἡ περίοδος εἶναι 783).

Ὑπάρχουν γνωρίσματα διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ μάθωμεν πότε ἕνα κλάσμα κοινὸν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικὸν καὶ πότε εἰς περιοδικὸν ἁπλοῦν ἢ μικτόν, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν. Εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς:

174. ***Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος***

ἀναλυθῇ εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς του καὶ περιέχῃ παράγοντας μόνον τὸν 2 ἢ 5 (ἢ καὶ τοὺς δύο), τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Ἐὰν δὲν περιέχῃ οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5, τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν. Ἐὰν περιέχῃ τὸν 2 ἢ 5 (ἢ καὶ τοὺς δύο) καὶ ἄλλους ἀκόμη παράγοντας, τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.

Π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{9}{20}$ τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διότι ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου κλάσματος ἀναλύεται εἰς $8 = 2 \times 2 \times 2$, ὁ δὲ παρονομαστὴς τοῦ δευτέρου ἀναλύεται εἰς $20 = 2 \times 2 \times 5$. Ὥστε ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου περιέχει μόνον τὸν 2 ἢ 5.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{6}{7}$ τρέπονται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν· διότι ὁ παρονομαστὴς τοῦ πρώτου περιέχει παράγοντα μόνον τὸν 3 καὶ ὁ τοῦ δευτέρου μόνον τὸν 7. Ὥστε ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου δὲν περιέχει τὸν 2 ἢ 5. Τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{7}{15}$ τρέπονται εἰς μικτὸν περιοδικόν. Διότι οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν ἀναλύονται εἰς $12 = 2 \times 2 \times 3$ καὶ $15 = 3 \times 5$, ἤτοι περιέχουν τὸν 2 ἢ 5 καὶ τὸν 3 ἀκόμη.

Σημ. Ὅταν τὰ κλάσματα δὲν εἶναι ἀνάγωγα, πρέπει πρῶτον νὰ τὰ κάμωμεν ἀνάγωγα.

Εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος ἐξ οὗ παράγεται περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.

175. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους, γράφομεν ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ ἀριθμὸν ἀποτελούμενον ἀπὸ τόσα 9, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.***

Π. χ. τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,353535.... παράγεται ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{35}{99}$. Ἐὰν ὅμως τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχῃ καὶ ἀκέραιον μέρος, π. χ. τὸ 2,363636.... παράγεται ἐκ τοῦ μικτοῦ $2\frac{36}{99}$ ἢ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{234}{99}$.

Σημ. Τὸ περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα 0,9999... ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγεται, διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι $\frac{9}{9}$ ἢ $\frac{99}{99}$ ἢ $\frac{999}{999}$ ἢ....$=1$.

176. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐκ τοῦ ὁποίου παράγεται μικτὸν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ γίνῃ ἁπλοῦν περιοδικόν, ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ κλάσμα ὅπως ἀνωτέρω. Ἐνθυμούμενοι νὰ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ παρονομαστοῦ τόσα μηδενικά, ὅσας θέσεις μετετέθη ἡ ὑποδιαστολή.***

Ἄς λάβωμεν π. χ. τὸ μικτὸν περιοδικὸν 2,35467467...... Μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ (ὅτε θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100), ἤτοι 235,467467.... Τοῦτο παράγεται ἐκ τοῦ μικτοῦ $235\frac{467}{999}$ ἢ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{235232}{999}$. Ὥστε τὸ περιοδικὸν 2,35467467..., τὸ ὁποῖον εἶναι 100 φορὰς μικρότερον τοῦ 235,467467...., παράγεται ἐκ τοῦ 100 φορὰς μικροτέρου τούτου κλάσματος, ἤτοι ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{235232}{99900}$.

Ἀσκήσεις. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{6}{48}$, $\frac{10}{35}$, $\frac{12}{20}$, ποῖα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν; Ποῖα εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν; Καὶ ποῖα εἰς μικτὸν περιοδικόν;

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

177. ***Τετράγωνον*** ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι 5×5, ἤτοι ὁ 25, τὸ τετράγωνον τοῦ 60 εἶναι 60×60, ἤτοι ὁ 3600, τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ κτλ. Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 εἶναι τὰ ἑξῆς· 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

178. ***Τετραγωνικὴ ῥίζα*** ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 36 εἶναι ὁ 6· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 6 εἶναι ὁ 36. Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν παριστῶμεν μὲ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ῥιζικόν***, ὑποκάτω δὲ αὐτοῦ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἤτοι $\sqrt{36}=6$.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγ. ῥίζαν τοῦ 50, βλέπομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 50· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι ὁ

49, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ 8 εἶναι ὁ 64. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 50 περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 8, ἤτοι εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 7 καὶ μικροτέρα τοῦ 8. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 50 λαμβάνομεν τὸν μικρότερον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ἤτοι τὸν 7, καὶ λέγομεν ὅτι ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ 50 εἶναι 7 ***κατὰ προσέγγισιν μονάδος***, δηλ. τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν λαμβάνοντες τὸν 7, εἶναι μικρότερον μιᾶς ἀκεραίας μονάδος. Ὥστε

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 70 εἶναι ὁ 8, διότι τὸ τετράγωνον τοῦ 8, ἤτοι ὁ 64, χωρεῖ εἰς τὸν 70, ἐνῷ τὸ τετράγωνον τοῦ 9, ἤτοι ὁ 81, δὲν χωρεῖ.

Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι ἀκριβῶς τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν, λέγονται ***τέλεια τετράγωνα***. Π. χ. ὁ 64 εἶναι τέλειον τετράγωνον τοῦ 8 (¹).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ, ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (²).

1) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει δρ. 180,75. Πόσον ἀξίζουν 4 μέτρα ; Καὶ πόσον 6,80 τοῦ μέτρου ; (723 καὶ 1229,10).

2) Γυνή τις ἠγόρασεν 7 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωσε δρ. 332,50. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ; Καὶ πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη μὲ 190 δραχμάς ; (47,50 δρ., 4 π.).

3) Ἠγόρασέ τις λεμόνια πρὸς δρ. 37,50 τὰ 100. Πόσον ἀξίζει τὸ ἕν ; Πόσον τὰ 1000 ; Καὶ πόσον τὰ 10 ;
(0,375 τῆς δρ., 375 δρ. καὶ 3,75 δρ.).

4) Ἠγόρασέ τις 17 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωσε

(1) Τὰ περὶ τετραγωνικῆς ρίζης ἐκτίθενται ἐκτενέστερον εἰς τὸ Γ' Βιβλίον.

(2) Ἐκ τῶν προβλημάτων τούτων νὰ δίδωνται κατ' ἐκλογὴν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Β' τάξεως κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ σχολικοῦ ἔτους πρὸς ἄσκησιν αὐτῶν εἰς τὸν συλλογισμὸν καὶ εἰς τὴν εὐχερῆ ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων.

δραχμὰς 484,50. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Καὶ πόσον τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀκᾶς; (28,50 καὶ 11,40).

5) Παντοπώλης τις πωλεῖ βούτυρον πρὸς δρχ. 92,80 τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζουν $2\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ πόσον τὰ 160 δράμια;

(255,20 καὶ $92{,}80 \times \frac{160}{400}$ ἢ 37,12).

6) Διὰ νὰ κάμωμεν μίαν πετσέταν τοῦ φαγητοῦ θέλομεν 0,60 τοῦ μέτρου ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσας θὰ κάμωμεν μὲ 9 μέτρα; (15).

7) Παντοπώλης τις πωλεῖ ἔλαιον πρὸς δρ. 24,80 τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἔλαιον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 155 δραχμάς; Καὶ πόσον μὲ 223,20;

$\left(6\frac{1}{4}\right.$ καὶ 9 ὀκ.$\left.\right)$.

8) Ὅταν ἡ Ἀγγλικὴ λίρα ἔχῃ δραχ. 486,50, πόσας λίρας ἀγοράζομεν μὲ 37947 δραχμάς; (78).

9) Πατήρ τις ἔλαβεν ἀπὸ τὸν υἱόν του, ὁ ὁποῖος εἶναι εἰς τὴν Ἀμερικήν, 450 δολλάρια, ὅταν τὸ δολλάριον εἶχε δρ. 95,40. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε; Καὶ πόσα δολλάρια ἔπρεπε νὰ στείλῃ ὁ υἱός του, διὰ νὰ λάβῃ 47700 δραχμάς; (42930 δρ., 500 δολ.).

10) Ἠγοράσαμεν 7 μανδήλια πρὸς δρ. 153,60 τὴν δωδεκάδα. Πόσον ἀξίζουν τὰ μανδήλια; Καὶ πόσας δραχμὰς θὰ λάβωμεν ὀπίσω ἀπὸ ἕνα ἑκατοντάδραχμον; (89,60 καὶ 10,40).

11) Ἕνα κεφαλοτύρι ἔχει βάρος $3\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς καὶ θέλουν νὰ τὸ μοιράσουν ἐξ ἴσου 4 ἄνθρωποι. Πόσα δράμια θὰ λάβῃ ἕκαστος; Καὶ πόσον θὰ πληρώσῃ πρὸς δρ. 56,80 τὴν ὀκᾶν;

(350 δράμια, 49,70 δρ.).

12) Γυνή τις ἠγόρασεν 7 ρούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει δρ. 89,60 καὶ ἔδωσεν ἕνα ἑκατοντάδραχμον. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ὀπίσω; (21,60).

13) Μία οἰκογένεια ἀγοράζει κάθε ἡμέραν 250 δράμια γάλα πρὸς δρ. 10,80 τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἐξοδεύει τὸν μῆνα (30 ἡμ.) διὰ τὸ γάλα; (202,50).

14) Ἠγόρασέ τις $2\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ ἔδωσε δραχμὰς 19,50. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ; Καὶ πόσον $3\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς; (7,80 καὶ 25,35).

15) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως καὶ ἔδωσε δρ. 32,90. Πόσας δραχμὰς θὰ δώσῃ ἀκόμη διὰ μισὸν πῆχυν; (18,80).

16) Μαθήτριά τις ἠγόρασε $3\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως δαντέλλα. Ἐὰν ἠγόραζεν ἀκόμη $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως, θὰ ἔδιδεν ἀκόμη δρ. 4,25. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε; (23,80).

17) Ἠγόρασέ τις 300 δράμια ζάχαριν καὶ ἔδωσε δραχ. 13,95. Πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ; Πόσον $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς; Καὶ πόσον θὰ ἀγοράσῃ μὲ 93 δραχμάς; (18,60 δρ., 41,85 δρ., 5 ὀκ.).

18) Ἀπὸ ἕνα παντοπώλην ἠγοράσαμεν $4\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου πρὸς δρ. 26,60 τὴν ὀκᾶν καὶ 320 δράμια βουτύρου πρὸς 92 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζουν καὶ τὰ δύο; Καὶ πόσας δραχμὰς θὰ λάβωμεν ὀπίσω ἀπὸ δύο ἑκατοντάδραχμα; (193,30 καὶ 6,70).

19) Ἠγόρασέ τις 840 λεμόνια πρὸς δρ. 44,50 τὰ 100, ἀλλὰ τοῦ ἐσάπισαν 20 λεμόνια, τὰ δὲ ἄλλα ἐπώλησε πρὸς 65 λεπτὰ τὸ καθέν. Πόσον ἐκέρδισε; (159,20 δρ.).

20) Ἠγόρασέ τις ποτήρια πρὸς δρ. 56,40 τὴν δωδεκάδα· κατόπιν τὰ ἐπώλησε πρὸς 6 δρ. ἕκαστον καὶ ἐκέρδισεν 624 δρ. Πόσα ποτήρια ἠγόρασε; (480).

21) Χωρικός τις ἔδωσεν εἰς παντοπώλην $1\frac{1}{3}$ τῆς ὀκᾶς βουτύρου πρὸς δρ. 94,50 τὴν ὀκᾶν καὶ ἔλαβεν ὡς ἀντάλλαγμα σάπωνα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει δρ. 16,80. Πόσον σάπωνα ἔλαβε;

$\left(7\frac{1}{2} \text{ ὀκ.}\right)$.

22) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμά τι πρὸς δρ. 72,80 τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισε δρ. 83,20. Ἐὰν ὅμως τὸ ἐπώλει πρὸς 75 δρ. τὸν πῆχυν, θὰ ἐκέρδιζε δρ. 97,50. Πόσους πήχεις ἐπώλησε;

$\left(6\frac{1}{2}\right)$.

23) Χωρική τις ἐπώλησεν ἀπὸ ὅσα αὐγὰ εἶχε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν πρὸς δρ. 1,45 τὸ καθὲν καὶ ἔλαβε 58 δρ. Πόσα αὐγὰ ἐπώλησε; Καὶ πόσα εἶχεν εἰς τὴν ἀρχήν; (40, 100).

24) Παιδίον τι εἶχε 25,50 δραχμὰς ἀποτελουμένας ἀπὸ δί-

δραχμα καὶ ἀπὸ πεντηκοντάλεπτα, ἀλλὰ τὰ πεντηκοντάλεπτα ἦσαν 6 περισσότερα ἀπὸ τὰ δίδραχμα. Πόσα εἶχεν ἀπὸ κάθε εἶδος; (9 καὶ 15).

25) Μὲ 556 δραχμὰς ἠγόρασέ τις σῖτον καὶ κριθήν· τὸν σῖτον ἠγόρασε πρὸς δρ. 8,50 τὴν ὀκᾶν, τὴν δὲ κριθὴν πρὸς 4,50 τὴν ὀκᾶν, ἀλλ' ἡ κριθὴ ἦτο 8 ὀκ. περισσότερον τοῦ σίτου. Πόσας ὀκάδας ἠγόρασεν ἀπὸ κάθε εἶδος; (40 καὶ 48).

26) Γυνή τις ἔδωσεν εἰς ἔμπορον $7\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ 42 δρ. ἀκόμη καὶ ἔλαβεν ὡς ἀντάλλαγμα $5\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς ἀξίζει δρ. 84,80. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς τοῦ πρώτου ὑφάσματος; (58 δρ.).

27) Ἠγόρασέ τις $17\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου πρὸς δρ. 28,40 τὴν ὀκᾶν· ἔπειτα παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν 2 δραχμαί, ἀλλ' ἔμεινε καὶ χρέος εἰς τὸν παντοπώλην 7,90. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἀπ' ἀρχῆς μαζί του; (484).

28) Τί εἶναι ὠφελιμώτερον, νὰ ἀγοράσωμεν 5 ὑποκάμισα πρὸς 180 δρ. ἕκαστον ἢ νὰ ἀγοράσωμεν ὕφασμα πρὸς δρ. 26,60 τὸν πῆχυν καὶ νὰ πληρώσωμεν διὰ ραπτικὰ καὶ ὑλικὰ 40 δρ. δι' ἕκαστον; Δι' ἕκαστον ὑποκάμισον χρειάζονται $4\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως.

(τὸ δεύτερον, διότι θὰ ἔχωμεν κέρδος 101,50 δρ).

29) Μία ὀκᾶ βουτύρου ἀξίζει τόσον, ὅσον ἀξίζουν $3\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου. Ἐὰν $1\frac{3}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου ἀξίζουν 36,30 τῆς δραχμῆς, πόσον ἀξίζουν 300 δράμια βουτύρου; (69,30).

30) Μία πτωχὴ κόρη ἔπλεξε 4 ζεύγη κάλτσες, τὰς ὁποίας ἐπώλησε πρὸς δρ. 20,80 τὸ ζεῦγος· δι' ἕκαστον ζεῦγος ἐχρειάσθη $32\frac{1}{2}$ δράμια νῆμα, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε πρὸς 90 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε; (53,95).

31) Ἠγόρασέ τις 350 ὀκ. οἴνου πρὸς δρ. 6,80 τὴν ὀκᾶν· ἔπειτα ἔρριψεν εἰς τὸν οἶνον 40 ὀκ. ὕδατος καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ ἐκέρδισε 1130 δρ. Πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν; (9 δρ.)

32) Ἠγόρασέ τις 2 ὀκ. καφὲ καὶ $3\frac{1}{2}$ ὀκ. ζάχαριν καὶ ἔδωσεν ἐν ὅλῳ δρ. 223,20· ἀλλὰ διὰ τὸν καφὲ ἔδωσε 88,80 περισσότερον

ἀπὸ τὴν ζάχαριν. Πόσον ἠγόρασε τὴν ὀκᾶν τὸν καφὲ καὶ πόσον τὴν ζάχαριν; (78 δρ. καὶ 19,20 δρ.).

33) Παντοπώλης τις πωλεῖ βούτυρον εἰς τιμὴν τετραπλασίαν τῆς τιμῆς τοῦ ἐλαίου. Ἐὰν πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ βουτύρου 94 δραχμάς, πόσον ἀξίζουν $5 \frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς ἐλαίου; (129,25).

34) Ἠγόρασέ τις 1800 πορτοκάλια πρὸς δρ. 32,50 τὰ 50 πορτοκάλια· ἔπειτα ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῶν πρὸς 80 λεπτὰ τὸ καθέν, τὰ δὲ ἄλλα ἐπώλησε πρὸς δρ. 3,25 τὰ 4 πορτοκάλια. Πόσον ἐκέρδισε; (277,50).

35) Εἰς μίαν ἐξοχὴν μετέβησαν 14 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ ἐξώδευσαν ἐν ὅλῳ 656,40 δρ. Ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐξώδευσε 54 δραχμάς, καὶ ἑκάστη τῶν γυναικῶν 37,40. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Ἐὰν ἦσαν ὅλοι ἄνδρες, θὰ ἐξώδευον 54×14 ἢ 756 δραχμάς, ἀλλ' ἐξώδευσαν 656,40, ἤτοι ὀλιγώτερον 99,60. Ἡ διαφορὰ αὕτη προέρχεται ἀπὸ τὰς γυναῖκας, διότι ἑκάστη ἐξώδευσεν ὀλιγώτερον ἑκάστου ἀνδρὸς 16,60· ὅσας λοιπὸν φορὰς ὁ 16,60 χωρεῖ εἰς τὸν 99,60 τόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, ἤτοι 6, ἑπομένως οἱ ἄνδρες ἦσαν 8.

36) Χωρική τις ἐπώλησε 83 αὐγὰ καὶ ἔλαβεν 135 δραχμάς· ἐξ αὐτῶν ἄλλα ἐπώλησε πρὸς δρ. 1,80 τὸ καθὲν καὶ ἄλλα πρὸς 1,50. Πόσα ἐπώλησε πρὸς 1,80 καὶ πόσα πρὸς 1,50; (35 καὶ 48).

37) Ἠγόρασέ τις πρόβατα καὶ ἀρνία ἐν ὅλῳ 180. Τὰ πρόβατα ἠγόρασε πρὸς 300 δρ. ἕκαστον, τὰ δὲ ἀρνία πρὸς 200 δραχμάς· ἔπειτα ἐπώλησεν ὅλα μαζὶ πρὸς δρ. 270,50 ἕκαστον καὶ ἐκέρδισεν 6690 δρ. Πόσα ἦσαν τὰ πρόβατα καὶ πόσα τὰ ἀρνία;

(60 πρ. καὶ 120 ἀρ.).

38) Γυνή τις εἶχε μαζί της 400 δρ. καὶ ἠγόρασεν 8 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ 9 μανδήλια πρὸς δρ. 130,80 τὴν δωδεκάδα· ἔπειτα παρετήρησεν ὅτι τῆς ἔμεινε 1,10. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν τοῦ ὑφάσματος; (37,60).

39) Ἐργάτης τις δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἓν ἔργον εἰς 4 ὥρας· ἄλλος ἐργάτης δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{5}{9}$ αὐτοῦ εἰς $2 \frac{2}{3}$ τῆς ὥρας. Ἐὰν ἐργασθῶσι μαζί, εἰς πόσας ὥρας θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον; $\left(2 \frac{2}{11}\right)$.

Σημ. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἔργον ἐκτελοῦν μαζὶ εἰς μίαν ὥραν.

40) Μία λάμπα καίει κάθε ὥραν 20 δράμια πετρελαίου καὶ κάθε ἑσπέραν ἔμενεν ἀνημμένη $3 \frac{1}{2}$ ὥρας ἐπὶ ἕνα μῆνα (30 ἡμ.). Πόσον πετρέλαιον ἔκαυσε; Καὶ πόσον ἀξίζει πρὸς δρ. 19,20 ἡ ὀκᾶ;
$\left(5 \frac{1}{4}\right.$ ὀκ., 100,80 δρ.$\left.\right)$.

41) Γυνή τις ἠγόρασε δύο ὑφάσματα τῆς αὐτῆς ποιότητος. Διὰ τὸ ἓν ἔδωσεν 161 δραχμὰς καὶ διὰ τὸ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ἦτο $2 \frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως περισσότερον τοῦ πρώτου, ἔδωσε 239,20. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ καθέν;
$\left(4 \frac{3}{8}\right.$ καὶ $\left.6 \frac{1}{2}\right)$.

42) Τρεῖς κληρονόμοι ἐμοίρασαν τὴν πατρικήν των περιουσίαν ὡς ἑξῆς· ἡ σύζυγος ἔλαβε τὸ πέμπτον αὐτῆς, ὁ υἱὸς τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς, καὶ ἡ θυγάτηρ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο κατὰ 15000 δρ. περισσότερον τοῦ μεριδίου τοῦ υἱοῦ. Πόση ἦτο ὅλη ἡ περιουσία; Καὶ πόσον ἦτο τὸ μερίδιον ἑκάστου;
(300 000, σύζ. 60 000, υἱὸς 112 500, θυγ. 127 500).

43) Τρεῖς γυναῖκες ἐμοίρασαν ὕφασμά τι ὡς ἑξῆς. Ἡ πρώτη ἔλαβε τὸ τέταρτον αὐτοῦ, ἡ δευτέρα τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτοῦ καὶ ἀκόμη $1 \frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως, καὶ ἡ τρίτη τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο $7 \frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα; Καὶ πόσους πήχεις ἔλαβεν ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα;
$\left(28\right.$ π., α′ 7, β′ $\left.13 \frac{1}{2}\right)$.

44) Καρραγωγεὺς ἔλαβε 1320 δραχμάς, διὰ νὰ μεταφέρῃ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην 60 σάκκους ἀλεύρου, ἕκαστος σάκκος εἶχε βάρος 55 ὀκ. καὶ συνεφώνησε πρὸς δρ. 1,20 τὰς 150 ὀκ. δι' ἕκαστον χιλιόμετρον. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο πόλεων ἀπόστασις;
(50).

45) Χωρική τις ἔφερεν εἰς μίαν πόλιν αὐγά· ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ πρὸς δρ. 1,70 τὸ καθέν, τὰ $\frac{8}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου ἐπώλησε πρὸς 3, 25 τὸ ζεῦγος (τὰ δύο), τὰ δὲ ὑπόλοιπα 8 ἔσπασαν. Πόσα αὐγὰ ἔφερε; Καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἀπὸ τὰ πωληθέντα;
(120 αὐγά, 185,60 δρ.).

46) Γυνή τις διὰ νὰ κάμῃ πετσέτες τοῦ φαγητοῦ, ἠγόρασεν

ὕφασμά τι καὶ ἔδωσε δρ. 92,80· ἂν ὅμως ἠγόραζε $1\frac{1}{4}$ τοῦ πήχεως ἀκόμη, θὰ ἔκαμνε 18 πετσέτες. Δι' ἑκάστην πετσέτα χρειάζεται $\frac{7}{8}$ τοῦ πήχεως. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος; (6,40).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ, ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΥ

Μέτρησις ποσῶν.

179. Πᾶν ὅ,τι δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἢ μικρότερον ἄλλου ὁμοίου, ἤτοι τὸ δυνάμενον νὰ αὐξηθῇ ἢ νὰ ἐλαττωθῇ, λέγεται *ποσόν*.

Π. χ. τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου, τὸ βάρος αὐτοῦ, τὸ μῆκος ἑνὸς ὑφάσματος κτλ. εἶναι ποσά. Διότι ὑπάρχουν δένδρα, ἄνθρωποι, ὑφάσματα κτλ. μεγαλύτερα ἢ μικρότερα αὐτῶν.

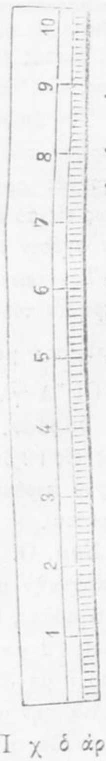
Διὰ νὰ μετρήσωμεν ποσόν τι, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὡς μονάδα ἓν ἄλλο ποσὸν ὡρισμένον καὶ ὁμοειδές, πρὸς τὸ ὁποῖον νὰ τὸ συγκρίνωμεν καὶ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσας τοιαύτας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται. Π. χ. διὰ νὰ μάθωμεν τὸ βάρος ἑνὸς πράγματος, πρέπει νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλο βάρος ὡρισμένον, τοιοῦτον δὲ βάρος ἔχομεν ὡς μονάδα τὴν ὀκᾶν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ποσόν τι ἐμετρήθη καὶ εὑρέθη ὅτι περιέχει δύο φορὰς τὴν μονάδα καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς τότε ὁ παριστῶν τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι. $2\frac{1}{4}$.

Ἡ σύγκρισις ἑνὸς ποσοῦ πρὸς τὴν ὁμοειδῆ του μονάδα λέγεται **μέτρησις** αὐτοῦ. Τὰ δὲ γνωστὰ καὶ ὡρισμένα ὄργανα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ὡς μονάδας καὶ μετροῦμεν τὰ διάφορα ποσά, λέγονται **μέτρα** (καθὼς εἶναι ἡ ὀκᾶ, ὁ πῆχυς κτλ.).

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφόρων ποσῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν καὶ διαφόρους μονάδας ὁμοειδεῖς πρὸς αὐτά. Ὥστε πρέπει νὰ ἔχωμεν ἰδίαν μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους κτλ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅλα τὰ Κράτη δὲν ἔχουν τὰς αὐτὰς μονάδας, διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν λόγον περὶ τῶν μονάδων ἐκείνων, τῶν ὁποίων μεγαλυτέρα χρῆσις γίνεται παρ' ἡμῖν.

Μονάδες μήκους ἢ γραμμικαί.

180. Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ **γαλλικὸν μέτρον**, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ $\frac{1}{40000000}$ τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, ὥστε 40000000 τοιαῦτα μέτρα ἀποτελοῦν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.



Ὑποδεκάμετρον διῃρημένον εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ χιλιοστόμετρα.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ὑποδεκάμετρα** ἢ **δεκατόμετρα**· ἕκαστον ὑποδεκάμετρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μερη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ὑφεκατόμμετρα** ἢ **ἑκατοστόμετρα**· ἕκαστον ὑφεκατόμμετρον διαιρεῖται πάλιν εἰς 10 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ὑποχιλιόμετρα** ἢ **χιλιοστόμετρα**.

Τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη ἐν Ἑλλάδι **βασιλικὸς πῆχυς**, ἀλλὰ τοῦ ὀνόματος τούτου σπανίως γίνεται χρῆσις, τὸ δέκατον τοῦ μέτρου ὠνομάσθη **παλάμη**, τὸ ἑκατοστὸν **δάκτυλος** καὶ τὸ χιλιοστὸν **γραμμὴ** (1). Εἶναι:

1 β. πῆχυς = 10 παλάμ. = 100 δακτ. = 1000 γραμμ.
1 παλάμη = 10 δακτ. = 100 γραμμ.
1 δακτ. = 10 γραμμ.

Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι, ὡς βλέπομεν, δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της. Ὥστε δυνάμεθα νὰ γράφωμεν αὐτάς, ὅπως καὶ τοὺς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ μέτρα ἢ β πήχεις, ὡς δέκατα τὰς παλάμας, ὡς ἑκατοστὰ τοὺς δακτύλους καὶ ὡς χιλιοστὰ τὰς γραμμάς. Π χ ὁ ἀριθ-

(1) Οἱ τεχνῖται τὸ μέτρον ὀνομάζουσι *πασσέτο*, τὰ δὲ ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου ὀνομάζουσι *πόντους*.

μός, ὅστις ἔχει 8 μέτρα 7 παλάμας 5 δακτ. 6 γραμμ. γράφεται ὡς ἑξῆς 8,756 μ. Εὐκόλως δὲ τρέπομεν καὶ ἀριθμὸν μέτρων εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς. Ὅπως λαμβάνομεν μέρη τινὰ τοῦ μέτρου ὡς νέας μονάδας (παλάμην, δάκτυλον καὶ γραμμήν), οὕτω λαμβάνομεν καὶ πολλαπλάσια αὐτοῦ ὡς νέας μονάδας, ἤτοι τὸ **δεκάμετρον** (10 μ.), τὸ **ἑκατόμμετρον** (100 μ.), τὸ **χιλιόμετρον** ἢ **στάδιον** (1000 μ.) καὶ τὸ **μυριάμετρον** (10000 μ.)

Ἡ μονὰς ἐκ τῆς ὁποίας σχηματίζονται ἄλλαι μονάδες μικρότεραι ἢ μεγαλύτεραι αὐτῆς, λέγεται **ἀρχικὴ μονάς**. Ὥστε τὸ μέτρον εἶναι ἀρχικὴ μονάς.

Σημ. Τὸ χιλιόμετρον καὶ τὸ μυριάμετρον εἶναι ὁδοιπορικαὶ μονάδες. Τὴν ἀπόστασιν 5 χιλιομέτρων ἢ σταδίων δύναταί τις νὰ διατρέξῃ μὲ σύνηθες βάδισμα εἰς μίαν ὥραν.

Ἐκτὸς τοῦ γαλλικοῦ μέτρου ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς μονάδας μήκους, ἀλλ' ἄνευ δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Τὸν **ἐμπορικὸν πῆχυν**, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ὑφασμάτων. Διαιρεῖται οὗτος εἰς 8 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ρούπια**, καὶ εἶναι ἴσος δὲ 0,648 τοῦ μέτρου. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὸ ἐμπόριον λαμβάνεται ἴσος μὲ 0,64 τοῦ μέτρου, διὰ τοῦτο τὴν σχέσιν ταύτην θὰ λαμβάνωμεν κατωτέρω.

Τὸν **τεκτονικὸν πῆχυν**, τὸν ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους τῶν οἰκοπέδων καὶ οἰκοδομῶν καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μὲ 0,75 ἢ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου.

Οἱ Ἄγγλοι ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους μεταχειρίζονται τὴν **ὑάρδαν**, ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς 3 **πόδας (φοὺτ)** καὶ ἕκαστος πούς εἰς 12 **δακτύλους (ἴντσας)**. Ἡ ὑάρδα εἶναι ἴση μὲ 0,914 τοῦ μέτρου περίπου. Ὁ δὲ ἐμπορικὸς πῆχυς εἶναι τὰ 0,7 τῆς ὑάρδας (περίπου).

Σημ. Οἱ Γάλλοι πρὸ τῆς παραδοχῆς τοῦ μέτρου μετεχειρίζοντο ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ μήκους τὴν ὀργυιάν, ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς 6 πόδας, ἕκαστος πούς εἰς 12 **δακτύλους** καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 12 **γραμμάς**. Ἡ ὀργυιὰ εἶναι ἴση μὲ 1,95 τοῦ μέτρου περίπου ἢ μὲ 3 πήχεις τοῦ ἐμπορίου.

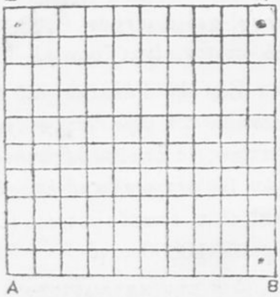
Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἀποστάσεων λαμβάνονται προσέτι ὡς μονάδες μήκους καὶ τὰ **μίλια**, τὰ ὁποῖα διακρίνονται εἰς τὰ ἑξῆς εἴδη:

Γεωγραφικὸν ἢ ***γερμανικὸν μίλιον*** =7420,44 μ. ***Ναυτικὸν***

μίλιον δι' ὅλα τὰ ἔθνη =1852 μέτρα (1) καὶ τὸ **ἀγγλικὸν μίλιον**= 1760 ὑάρδας ἢ 1608,64 τοῦ μέτρου.

Μονάδες ἐπιφανείας.

181. Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον**, ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἓν μέτρον. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ παριστᾷ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς 10 ἴσα μέρη ἑκάστην καὶ ἑνώσωμεν μὲ εὐθείας τὰ ἀπέναντι σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, ΑΒ καὶ ΔΓ, θὰ διαιρεθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ εἰς 100 **τετραγωνικὰς παλάμας**, διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγωνιδίου θὰ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ μέτρου, ἤτοι μία παλάμη. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ παλάμη εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.



Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν εἰς μίαν τετραγωνικὴν παλάμην, τότε αὕτη θὰ διαιρεθῇ εἰς 100 **τετραγ. δακτύλους**· διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου τετραγωνιδίου θὰ εἶναι τὸ δέκατον τῆς παλάμης, ἤτοι εἷς δάκτυλος. Ὥστε ὁ τετραγ. δάκτυλος εἶναι τὸ ἑκατοστὸν τῆς τετρ. παλάμης, καὶ ἐπειδὴ τὸ τετρ. μέτρον περιέχει 100 τετρ. παλάμας, ἄρα περιέχει 100×100 ἢ 10000 τετρ. δακτύλους. ἐπομένως ὁ τετρ. δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{10000}$ τοῦ τ.μ.

Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς ἕνα τετραγ. δάκτυλον, θὰ διαιρεθῇ οὗτος εἰς 100 **τετραγ. γραμμὰς** καὶ θὰ εἶναι ἡ τετραγ. γραμμὴ τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ τετρ. δακτύλου ἢ τὸ $\frac{1}{10000}$ τῆς τετραγωνικῆς παλάμης ἢ τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ τ. μ.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι ἑκατονταπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας της, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ ὡς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ τετραγωνικὰ μέτρα, ὡς ἑκατοστὰ τὰς τετρ.

(1) Τὸ ναυτικὸν μίλιον εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρα τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς.

παλάμας, ὡς δεκάκις χιλιοστὰ τοὺς τετρ. δακτύλους καὶ ὡς ἑκατομμυριοστὰ τὰς τετρ. γραμμάς. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἔχει 5 τ. μ. 7 τ. παλ. καὶ 15 τ. δ. γράφεται ὡς ἑξῆς 5,0715 τ. μ.

Ἐν Ἑλλάδι διὰ τὰς κτηματικὰς γαίας λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **βασιλικὸν στρέμμα**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1000 τετρ. μέτρα, καὶ ἂν νοηθῇ τοῦτο ὡς τετράγωνον, θὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ 31,62 μ. περίπου. Τὸ δὲ παλαιὸν στρέμμα εἶναι ἴσον μὲ 1,27 τοῦ β. στρέμματος, ἤτοι 1270 τετρ. μέτρα. Δι' ἀκόμη μεγαλυτέρας ἐκτάσεις, ἤτοι διὰ γεωγραφικάς, λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ **τετρ. χιλιόμετρον** (ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 1000 μέτρων), τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1000 β. στρέμματα.

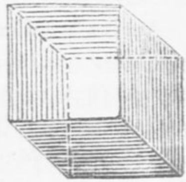
Εἰς τὴν Γαλλίαν καὶ εἰς ἄλλα τινὰ Κράτη λαμβάνουσιν ὡς μονάδα διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν κτηματικῶν γαιῶν τὸ τ. δεκάμετρον, τὸ ὁποῖον λέγεται ἄριον (are), ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 10 μέτρων, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσον μὲ 10×10 ἢ 100 τ.μ., καὶ τὸ τ. ἑκατόμμετρον (ἑκτάριον), τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 100 ἄρια ἢ 10000 τ. μ.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν οἰκοπέδων λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς ὁ **τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς** (ἤτοι τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα τεκτονικὸν πῆχυν), ὅστις εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τ. μ. (διότι ὁ τεκτον. πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου, ἐπομένως τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ ἢ $\frac{9}{16}$).

Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

182. Διὰ τὴν καταμέτρησιν τοῦ ὄγκου ἢ τῆς χωρητικότητος λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ **κυβικὸν μέτρον** (ἤτοι κύβος τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ ἓν μέτρον). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κατωτέρω σχῆμα εἶναι κυβικὸν μέτρον καὶ διαιρέσωμεν αὐτὸ κατὰ μῆκος εἰς 10 ἴσα μέρη, ἔπειτα κατὰ πλάτος εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα κατὰ ὕψος εἰς 10 ἴσα μέρη, θὰ προκύψωσι 1000 **κυβικαὶ παλάμαι**, διότι ἑκάστη θὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ μίαν παλά-

μην· ὥστε ἡ κυβικὴ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τοῦ κ. μ. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν καὶ εἰς μίαν κυβ. παλάμην, θὰ προκύψωσι 1000 **κυβικοὶ δάκτυλοι**, διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου θὰ εἶναι ἴση μὲ ἕνα δάκτυλον ὥστε ὁ κυβ. δάκτυλος εἶναι τὸ $\frac{1}{1000}$ τῆς κυβ. παλάμης καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{1}{1000000}$ τοῦ κ. μ.



Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω μονάδων εἶναι χιλιοπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας, διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τοὺς τοιούτους ἀριθμοὺς καὶ ὡς δεκαδικούς, ἀρκεῖ νὰ γράφωμεν ὡς ἀκέραιον μέρος τὰ κυβικὰ μέτρα, ὡς χιλιοστὰ τὰς κυβικὰς παλάμας καὶ ὡς ἑκατομμυριοστὰ τοὺς κυβικοὺς δακτύλους. Διὰ τὴν καταμέτρησιν μεγάλων ὄγκων λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ κυβικὸν χιλιόμετρον, ἤτοι κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 1000 μέτρα.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν τοίχων τῶν οἰκοδομῶν λαμβάνεται συνήθως ὁ **κυβικὸς τεκτονικὸς πῆχυς**, ἴσος πρὸς τὰ $\frac{27}{64}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου $\left(\text{διότι εἶναι } \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \text{ ἢ } \frac{27}{64}\right)$.

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ὑγρῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ ***λίτρα***, ἤτοι ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβ. παλάμης.

Σημ. Ἐπειδὴ τὸ κυβικὸν σχῆμα δὲν εἶναι κατάλληλον διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ ἐμπορίου, διὰ τοῦτο κατασκευάζουσι τὴν λίτραν κυλινδρικήν, καθὼς καὶ ἄλλα τοιαῦτα μέτρα χωρητικότητος.

Λίτρα

Κοιλὸν

Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν δημητριακῶν καρπῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ***κοιλόν***, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δέκατον τῆς χωρητικότητος τοῦ κυβ. μέτρου, ἤτοι ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἶναι 100 κυβ. παλ. Τὸ κοιλὸν ἔχει ἐσωτερικὴν διάμετρον καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἤτοι 0,5033 τοῦ μ. Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα τοιαῦτα μέτρα μικρότερα τοῦ κοιλοῦ.

Μονάδες βάρους.

183. Ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους λαμβάνεται τὸ ***γραμμάριον***,

ἤτοι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος (καθαροῦ καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4 βαθμῶν τοῦ Κελσίου), τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

Διὰ τὰ μεγάλα βάρη λαμβάνεται συνήθως ὡς μονὰς **τὸ *χιλιόγραμμον* (*κιλόγραμμον ἢ κιλόν*)**, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 1000 γραμ. (ἤτοι τὸ βάρος καθαροῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς μίαν κυβ. παλάμην) Δι' ἀκόμη μεγαλύτερα βάρη λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***τόννος*** (ἤτοι τὸ βάρος καθαροῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἓν κυβ. μέτρον). Χρῆσις αὐτοῦ γίνεται συνήθως εἰς τὰ φορτία τῶν πλοίων καὶ βαγονίων.

Ἐν Ἑλλάδι καὶ Τουρκίᾳ λαμβάνεται συνήθως ὡς ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους ἡ ὀκᾶ, ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς 400 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***δράμια***, ὥστε τὸ δράμιον εἶναι τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς. Διὰ μεγαλύτερα βάρη λαμβάνεται ὡς μονὰς ὁ ***στατὴρ (καντάρι)***, ἴσος μὲ 44 ὀκ. Μία ὀκᾶ εἶναι ἴση μὲ 1,280 τοῦ χιλιογράμμου ἢ 1280 γραμμάρια καὶ ἑπομένως ἓν δράμιον εἶναι ἴσον μὲ 1280 : 400 ἢ 3,2 τοῦ γραμμαρίου. Ἓν χιλιόγραμμον (ἢ κιλόγραμμον ἢ κιλὸν) εἶναι ἴσον μὲ 312,5 τοῦ δραμίου καὶ εἷς τόννος (ἤτοι 1000 χιλιόγραμμα) εἶναι ἴσος μὲ 312,5×1000 δράμια ἢ 781 ὀκ. καὶ 100 δράμια.

Σημ. Εἰς τὸ ἐμπόριον τὸ χιλιόγραμμον ἢ κιλὸν λαμβάνεται ἴσον μὲ 312 δράμια ἢ 0,78 τῆς ὀκᾶς καὶ ἑπομένως ὁ τόννος ἴσος μὲ 780 ὀκ. Ὥστε 100 κιλὰ εἶναι 78 ὀκάδες καὶ 1000 κιλὰ εἶναι 780 ὀκάδες.

Διὰ τὴν ζύγισιν τῶν φαρμάκων εἶναι ἐν χρήσει παρ' ἡμῖν αἱ ἑξῆς μονάδες: Κόκκος (γκράνουμ) ἀρχικὴ μονάς. Γράμμον (σκούρπουλον)=20 κόκκους. ***Δραχμὴ***=3 γράμμα=60 κόκκους. ***Οὐγγία***= 8 δραχμάς. ***Λίτρα***=12 οὐγγίας ἢ 112 δράμια περίπου. Πρὸ πολλοῦ ὅμως γίνεται χρῆσις καὶ τῶν γαλλικῶν μονάδων, ἤτοι λαμβάνεται ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ γραμμάριον, τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ ***δεκάγραμμον***, ***ἑκατόγραμμον*** κτλ καθὼς καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ, ἤτοι τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστὸν καὶ τὸ χιλιοστὸν τοῦ γραμμαρίου.

Εἰς τὰ σταφιδοφόρα μέρη τῆς Ἑλλάδος πρὸς στάθμισιν τῆς σταφίδος γίνεται χρῆσις τῆς ***ἐνετικῆς λίτρας***, ἴσης μὲ 150 δράμια· 1000 λίτραι εἶναι 375 ὀκ. Εἰς τὰ Ἑπτάνησα ὡς μονὰς βάρους εἶναι ἐν χρήσει ἡ ἀγγλικὴ λίτρα, ἴση μὲ 142 δράμια περίπου.

Διὰ τοὺς πολυτίμους λίθους ὡς μονὰς βάρους λαμβάνεται τὸ **καράτιον**, ἴσον μὲ 0,2 τοῦ γραμμαρίου περίπου· 16 καράτια ἀποτελοῦσι 3,2 τοῦ γραμ. ἤτοι ἓν δράμιον.

Μονάδες νομισμάτων.

184 Εὐρωπαϊκά τινα κράτη παρεδέχθησαν διὰ συμβάσεως νὰ κόπτωσι νομίσματα ὅμοια καὶ ἴσης ἀξίας πρὸς εὐκολίαν τοῦ ἐμπορίου. Τὰ κράτη ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς: Γαλλία, Ἰταλία, Ἑλλάς, Ἑλβετία καὶ Βέλγιον, εἰς ταῦτα δὲ προσετέθησαν κατόπιν καὶ ἄλλα Κράτη. Κατὰ τὴν σύμβασιν ταύτην, ἡ ὁποία ὠνομάσθη **Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις**, παρεδέχθησαν ὡς μονάδα τῶν νομισμάτων τὸ **φράγκον**, τὸ ὁποῖον ἐν Ἑλλάδι λέγεται **δραχμή**· εἶναι δὲ ἀργυροῦν νόμισμα καὶ ἔχει βάρος 5 γραμμάρια.

Ἀργυρᾶ νομίσματα παρεδέχθησαν καὶ τὰ ἑξῆς. Τὸ δίφραγκον (ἔχον βάρος 10 γραμ.), τὸ πεντάφραγκον (ἔχον βάρος 25 γραμ.), τὸ **ἥμισυ** τοῦ φράγκου (ἔχον βάρος 2,5 τοῦ γρ.), καὶ τὸ **πέμπτον** τοῦ φράγκου (ἔχον βάρος 1 γρ.). Χρυσᾶ δὲ τὰ ἑξῆς· Τὸ **πεντάφραγκον**, τὸ **δεκάφραγκον**, τὸ **εἰκοσάφραγκον**, τὸ **πεντηκοντάφραγκον** καὶ τὸ **ἑκατοντάφραγκον**. Τὸ φράγκον ἢ δραχμὴ διαιρεῖται εἰς 100 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα παρ' ἡμῖν λέγονται **λεπτά**.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω νομισμάτων ἔχομεν ἐν χρήσει καὶ τὰ μεταλλικὰ νομίσματα τῶν 5, 10, 20 καὶ 50 λεπτῶν, τῆς μιᾶς καὶ τῶν δύο δραχμῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι κρᾶμα χαλκοῦ καὶ νικελίου, τῶν 20 καὶ 10 δραχμῶν, τὰ ὁποῖα ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ εἶναι κρᾶμα ἀργύρου καὶ χαλκοῦ, καὶ τῶν 5 δρ. ἀπὸ καθαρὸν νικέλιον. Ἔχομεν ἀκόμη ἐν χρήσει καὶ τὰ τραπεζικὰ γραμμάτια ἢ χαρτονομίσματα τῶν 5, 10, 20, 25, 50, 100, 500, 1000 καὶ 5000 δραχμῶν.

185. Ἐπειδὴ ὁ καθαρὸς χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος εἶναι φύσει μαλακὰ μέταλλα, διὰ τοῦτο πρὸς κατασκευὴν νομισμάτων (καὶ ἐν γένει κοσμημάτων) ἐκ τοιούτων μετάλλων συγχωνεύουσι μετ' αὐτῶν διὰ τῆς τήξεως καὶ χαλκὸν (συνήθως), ἵνα ἀποκτήσωσι ταῦτα μεγαλυτέραν σκληρότητα καὶ ἑπομένως νὰ μὴ καταστρέφωνται ταχέως διὰ τῆς τριβῆς. Ὥστε τὰ ἀνωτέρω νομίσματα χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ εἶναι κρᾶμα χρυσοῦ ἢ ἀργύρου μετὰ χαλκοῦ.

Τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου (ὡς εἶναι ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος), τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος, λέγεται **βαθμὸς καθαρότητος** ἢ **τίτλος** καὶ ὁρίζεται συνήθως εἰς χιλιοστά. Ὅταν π. χ. λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμὸς καθαρότητος χρυσοῦ νομίσματος ἢ κοσμήματος εἶναι 0,900, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς 1 γραμμάριον ἢ δράμιον μόνον τὰ $\frac{900}{1000}$ αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{100}{1000}$ εἶναι ἄλλο μέταλλον μὴ πολύτιμον ὡς εἶναι ὁ χαλκός. Διὰ τῆς ἀνωτέρω συμβάσεως ὡρίσθη ὁ βαθμὸς καθαρότητος τῶν μὲν χρυσῶν νομισμάτων εἰς 0,900, τῶν δὲ ἀργυρῶν εἰς 0,835, πλὴν τοῦ ἀργυροῦ πενταφράγκου, ὁρισθέντος εἰς 0,900.

Σημ. Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τῶν χρυσῶν κοσμημάτων ἐκφράζεται καὶ εἰς εἰκοστὰ τέταρτα, ἅτινα λέγονται ***καράτια*** ([1]). Ὅταν π. χ. ὁ χρυσὸς εἶναι καθαρός, λέγομεν ὅτι εἶναι 24 καρατίων, ὅταν ὅμως λέγωμεν ὅτι εἶναι 18 καρατίων, ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς μίαν μονάδα βάρους μόνον τὰ $\frac{18}{24}$ αὐτῆς εἶναι καθαρὸς χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ $\frac{6}{24}$ εἶναι ἄλλο μέταλλον.

Ἐν Τουρκίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς τῶν νομισμάτων λαμβάνεται τὸ ***γρόσιον***, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀργυροῦν καὶ διαιρεῖται εἰς 4 ***μεταλλίκια*** (χαλκᾶ) καὶ ἕκαστον μεταλλίκιον εἰς 10 ***παράδες***. ***Ἡ τουρκικὴ λίρα*** εἶναι χρυσοῦν νόμισμα ἔχον βάρος 7,216 τοῦ γραμμαρίου καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916 διαιρεῖται δὲ εἰς 5 μετζίτια (ἀργυρᾶ), ἕκαστον τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς 4 ***πεντάγροσα*** (ἀργυρᾶ), ἐπομένως ἡ λίρα ἔχει 100 γρόσια. Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ νομίσματα.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς λαμβάνεται ἡ ***ἀγγλικὴ λίρα στερλίνα***, ἥτις διαιρεῖται εἰς 20 ***σελίνια***, ἕκαστον σελίνιον εἰς 12 ***πέννας*** καὶ ἑκάστη πέννα εἰς 4 ***φαρδίνια***. Καὶ ἡ μὲν ἀγγλικὴ λίρα εἶναι χρυσοῦν νόμισμα (ἔχον βάρος 7,988 τοῦ γραμ. καὶ βαθμὸν καθαρότητος 0,916), τὸ σελίνιον ἀργυροῦν, ἡ δὲ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον χαλκᾶ. Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ ἄλλα νομίσματα χρυσᾶ, ἀργυρᾶ καὶ χαλκᾶ.

Ἐν Γερμανίᾳ ὡς ἀρχικὴ μονὰς λαμβάνεται τὸ ***μάρκον*** (ἀργυροῦν). Ἐν Αὐστρίᾳ τὸ ***φιορίνιον*** (ἀργυροῦν) καὶ ἐν Ἀμερικῇ τὸ ***δολλάριον*** (ἀργυροῦν).

([1]) Τὸ καράτιον τοῦτο δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ καράτιον βάρους, μὲ τὸ ὁποῖον ζυγίζονται οἱ πολύτιμοι λίθοι.

Μονάδες χρόνου.

186. Ὡς ἀρχικὴν μονάδα τοῦ χρόνου λαμβάνουν ὅλα τὰ πεπολιτισμένα Ἔθνη τὴν **ἡμέραν** (ἤτοι τὸ ἡμερονύκτιον), ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη ὑπὸ τῆς φύσεως καὶ παριστᾷ τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ Γῆ, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ μίαν περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονά της. Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἑκάστη ὥρα εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά. Τὰ πρῶτα λεπτὰ σημειοῦνται μὲ τὸ γράμμα λ., ἤτοι 5 λ., τὰ δὲ δεύτερα λεπτὰ μὲ τὸ γράμμα δ., ἤτοι 36 δ.

Ἡ ἡμέρα λογίζεται ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ μεσονυκτίου καὶ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, ἤτοι ἀπὸ τοῦ μεσονυκτίου μέχρι τῆς μεσημβρίας εἶναι 12 ὧραι καὶ λέγονται **πρὸ μεσημβρίας**, καὶ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας μέχρι τοῦ ἑπομένου μεσονυκτίου εἶναι ἄλλαι 12 ὧραι καὶ λέγονται **μετὰ μεσημβρίαν**.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα εἶναι γνωστά. Ἐκ τούτων ὁ μὲν Ἀπρίλιος, Ἰούνιος, Σεπτέμβριος καὶ Νοέμβριος ἔχουν 30 ἡμέρας, οἱ δὲ λοιποὶ 31, ἐκτὸς τοῦ Φεβρουαρίου, ὅστις ἔχει ἄλλοτε 28 καὶ ἄλλοτε 29 ἡμ. Ὥστε τὸ ἔτος ἀποτελεῖται ἀπὸ 365 ἡμ. καὶ κάθε τετραετίαν ἀπὸ 366, ὅτε ὁ Φεβρουάριος ἔχει 29 ἡμέρας, λέγεται δὲ τότε τὸ ἔτος **δίσεκτον**. Δίσεκτα ἔτη εἶναι ὅσα διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 4, ὡς εἶναι τὰ ἔτη 1928, 1932, 1936, 1940 κτλ.

Διὰ νὰ εὑρίσκωμεν εὐκόλως τίνες μῆνες ἔχουν 30 ἡμέρας καὶ τίνες 31, ὅταν δὲν ἐνθυμώμεθα, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Σχηματίζομεν διὰ τῆς χειρός μας πηγμὴν καὶ ἐπὶ τῶν τελευταίων κονδύλων ἢ κόμβων ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν μηνῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν κόμβον τοῦ δείκτου (πρῶτος μὴν θεωρεῖται ὁ Ἰανουάριος), καὶ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὸν κόμβον τοῦ μικροῦ δακτύλου, ἐπανερχόμεθα εἰς τὸν κόμβον τοῦ δείκτου καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν ἀρίθμησιν. Ὅσων μηνῶν τὰ ὀνόματα πέσουν εἰς τοὺς κόμβους ἔχουν 31 ἡμέρας, ὅσων δὲ εἰς τὰ κοιλάσματα μεταξὺ δύο κόμβων ἔχουν 30 ἡμ. (πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου).

Σημ. Εἰς τὸ ἐμπόριον οἱ μῆνες λογίζονται μὲ 30 ἡμέρας καὶ τὸ ἔτος μὲ 360 ἡμ. Ἡ **ἑβδομὰς** ἔχει 7 ἡμέρας, καὶ τὸ ἔτος 52 ἑβδομάδας. Τὸ χρονικὸν διάστημα 100 ἐτῶν λέγεται **ἑκατονταετηρὶς** ἢ **αἰών**, τῶν δὲ 1000 ἐτῶν **χιλιετηρίς**.

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘ-

α') Μέτρα καὶ σταθμὰ δεκα-

Κράτη ἔχοντα ἐν χρήσει τὸ δεκ. μετρ. σύστημα	*Μονάδες μήκους*	*Μονάδες ἐπιφανείας*
Γαλλία, Βέλγιον, Ἑλβετία, Γερμανία, Αὐστρία, Ἰταλία, Ἱσπανία, Πορτογαλία, Ρουμανία, Σερβία, Βουλγαρία, Τουρκία, Ἑλλάς.	Μυριάμετρον=10000 μ. Χιλιόμετρον=1000 μ. Ἑκατόμμετρον=100 μ. Δεκάμετρον=10 μ. Μέτρον (ἀρχικὴ μονὰς) Ὑποδεκάμετρον=0,1 μ. Ὑφεκατόμμετρον=0,01 μ Ὑποχιλιόμετρον=0,001 μ	Τετραγ. μυριάμετρον= 100.000.000 τετρ. μ. Τετραγ. χιλιόμετρον= 1.000.000 τετρ. μ. Ἄριον (διὰ τὰς γαίας)= 100 τετρ μ. Ἑκτάριον = 100 ἄρια Τετρ. μέτρον (ἀρχικ.μον.) Τετ. ὑποδεκ.=0,01 τ. μ. Τετ. ὑφεκτ.=0,0001 τ. μ. Τετ. ὑποχ.=0,000001 τ.μ.
Ἄλλαι μονάδες ἐν χρήσει Ἐν Ἑλλάδι, Τουρκίᾳ καὶ Βουλγαρίᾳ.	Πῆχυς ἐμπορίου=0,64 μ. Ρούπιον= $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχ. Τεκτ. πῆχυς=0,75 μ.	Τετρ. τεκτ. π.= $\frac{9}{16}$ τ. μ. Βασιλ.στρέμμα = 1000 τ.μ. Παλαιὸν » =1270 τ.μ
Ἐν Ἀγγλίᾳ	Ὑάρδα=0,914 μ. Ποὺς= $\frac{1}{3}$ ὑάρδας Δάκτυλος= $\frac{1}{12}$ ποδὸς Μίλιον=1760 ὑάρδ.	Τετρ. ὑάρδα=0,836 τ.μ. Ἄκρε (διὰ τὰς γαίας)= 40,50 τ. μ.
Ἐν Ρωσσίᾳ	Ἀρσὶν=0,711 μ. Βέρτσιον=1500 ἀρσὶν	Τετρ. Ἀρσὶν=0,505 τ. μ.
Ἐν Ἡνωμέναις Πολιτείαις	Μέτρα καὶ σταθμὰ ἔχουν τὰ Ἀγγλικά.	

β') Μονάδες

Κράτη ἔχοντα νομίσματα τῆς Λατιν. νομισμ. συμβάσεως. Ὀνομασία τῆς μονάδος τῶν νομισμάτων καὶ διαίρεσις αὐτῆς.	*Ἀγγλία*	*Γερμανία*
Γαλλία, Βέλγιον, Ἑλβετία (Φράγκον=100 ἑκατοστὰ Ἑλλὰς Δραχμὴ =100 λεπτὰ Ἰταλία Λιρέττα =100 τσεντέσιμα Ρουμανία Λέϊ =100 μπάνι Βουλγαρία Λέβι =100 σκοτὶνκ Σερβία Δηνάριον =100 παρὰ Ἱσπανία Πεσέτα =100 ἑκατοστὰ	Λίρα στερλίνα= 20 σελίνια 1 σελ.=12 πέν-νας, 1 πέννα= 4 φαρδίνια Ἀξία λίρας= 25,22 φράγκα	Μάρκον = 100 πέφνιγκ Ἀξία μάρκου = 1,25 φράγκ.

ΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΡΑΤΩΝ

δικοῦ μετρικοῦ συστήματος

Μονάδες ὄγκου	*Μονάδες χωρητικότητος*	*Μονάδες βάρους*
Κυβικὸν χιλιόμετρον= 1.000.000.000 κυβ. μ. Κυβ. μέτρον (ἀρχικὴ μονάς). Κυβ. ὑποδεκάμετρον = 0,001 κ. μ. Κυβ. ὑφεκατόμμετρον= 0,000001 κ. μ. Κυβ. ὑποχιλιόμετρον= 0,000000001 κ. μ.	Ἑκατόλιτρον ἢ κιλὸν (διὰ τὰ σιτηρὰ)=100 λίτ. Λίτρα (χωρητικότητος μιᾶς κυβ. παλάμης).	Τόννος=1000 χιλιόγραμ. Χιλιόγραμμον = 1000 γραμμάρια. Γραμμάριον (ἀρχικὴ μονὰς)=0,001 τοῦ χιλιογράμμου.
Κυβ. τεκτ. πῆχυς= $\frac{27}{64}$ κυβ. μ.	Ὀκᾶ (διὰ τὰ ὑγρὰ) χωρητικότητος μιᾶς ὀκᾶς βάρους ὕδατος.	Στατὴρ=44 ὀκάδες. Ὀκᾶ (ἀρχικὴ μονάς) Δράμιον = $\frac{1}{400}$ ὀκᾶς. Ἀγγλικὴ λίτρα (ἐν Ἑπτανήσῳ)=142 δράμ.
Κυβ. ὑάρδα	Γαλλόνιον=4,543 τῆς Γαλλικῆς λίτρας.	Λίτρα=453,5 γραμ. Οὐγγία = $\frac{1}{16}$ λίτρας Στατὴρ=112 λίτρ.=50 χιλιόγραμμα.

νομισμάτων

Αὐστρία	*Ρωσσία*	*Τουρκία*	*Ἡνωμέναι Πολιτεῖαι*	*Ὀλλανδία*
Φιορίνιον=100 κρόϊτσερ Ἀξία φιορινίου =2,50 φράγκ.	Ρούβλιον = 100 καπίκια Ἀξία ρουβλίου = 2,65 φράγκ.	Γρόσιον=40 παράδες Λίρα=100 γρόσ. Ἀξία λίρας= 22,80 φράγκ.	Δολλάριον=100 σέντς Ἀξία δολ.= 5,18 φράγ.	Φλωρίνιον =100 ἑκατρ. Ἀξία= 2.10 φράγ.

Εὕρεσις τῆς ἡμέρας ἐκ τῆς χρονολογίας.

187. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ποία εἶναι ἡ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος, ὅταν δοθῇ τὸ ἔτος, ὁ μὴν καὶ ἡ ἡμερομηνία. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Ἐλαττώνομεν τὸ δοθὲν ἔτος κατὰ μίαν μονάδα καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ 4 (λαμβάνοντες μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου)· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν 28 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν ἑκάστου τῶν προηγουμένων μηνῶν τοῦ δοθέντος (ἀρχῆς γινομένης ἀπὸ τοῦ Ἰανουαρίου)· τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὴν ἡμερομηνίαν τοῦ δοθέντος μηνὸς μίαν μονάδα. Ἔπειτα προσθέτομεν τὸ κατὰ μονάδα ἐλαττωθὲν ἔτος, τὸ τέταρτον αὐτοῦ καὶ τὰς εὑρεθείσας διαφοράς· τὸ δὲ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ 7, καὶ ἂν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 1, ἡ ἡμέρα εἶναι Κυριακή· ἂν 2, Δευτέρα· ἂν 3, Τρίτη· ἂν 4, Τετάρτη· ἂν 5, Πέμπτη· ἂν 6, Παρασκευὴ καὶ ἂν 0, Σάββατον.

Ἔστω π. χ. νὰ εὑρεθῇ ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 18η Ἀπριλίου τοῦ ἔτους 1900

Ἀριθμὸς ἔτους ἠλαττωμένος κατὰ μονάδα	1899
Ἀριθμὸς ἀκεραίου πηλίκου τοῦ 1899 διὰ 4	474
Ἰανουάριος ἔχει 31 ἡμ., διαφορὰ 31—28=	3
Φεβρουάριος εἶχεν 29, διαφορὰ 29—28=	1
Μάρτιος ἔχει 31, διαφορὰ 31—28=	3
Ἡμερομηνία Ἀπριλίου ἠλαττωμένη κατὰ 1	17
Ἄθροισμα	2397

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος 2397 διὰ 7 εἶναι 3, ἑπομένως ἡ 18η Ἀπριλίου τοῦ 1900 ἦτο Τρίτη.

Ἀσκήσεις. 1) Ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 25 Μαρτίου τοῦ ἔτους 1821;

2) Ποία ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ἦτο ἡ 5η Μαρτίου τοῦ 1913, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐδολοφονήθη ἐν Θεσσαλονίκῃ ὁ βασιλεὺς τῶν Ἑλλήνων Γεώργιος Α΄;

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω ἡμερομηνίαι εἶναι τοῦ παλαιοῦ ἡμερολογίου. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἡμέραν τῆς ἑβδομάδος κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ πέσῃ δοθεῖσα ἡμερομηνία κατὰ τὸ νέον ἡμερολόγιον, ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος 13 καὶ κατόπιν διαιροῦμεν διὰ 7.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας κύκλου.

188. Ἡ περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **μοῖραι**· ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **πρῶτα λεπτὰ** τῆς μοίρας, καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν τῆς μοίρας διαιρεῖται εἰς 60 **δεύτερα λεπτὰ** τῆς μοίρας·

Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν σημειοῦται μὲ ἕνα μηδενικόν, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ καὶ ὀλίγον ἄνω· ὁ ἀριθμὸς τῶν πρώτων λεπτῶν σημειοῦται μὲ ἕνα τόνον καὶ ὁ τῶν δευτέρων μὲ δύο τόνους. Π. χ. τὸ τόξον 50 μοιρῶν 40 πρ λεπτῶν καὶ 30 δευτέρων γράφεται ὡς ἑξῆς $50^{o}\ 40'\ 30''$.

Δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα.

189. Ὅσαι τῶν ἀνωτέρω μονάδων διαιροῦνται εἰς δέκατα, ἑκατοστὰ κτλ., ἤτοι ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, καὶ τοιαῦται εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς βάσιν τὸ γαλλικὸν μέτρον, ἀποτελοῦν τὸ καλούμενον **δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα** Διὰ τῆς δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως τῶν μονάδων τούτων καὶ τῶν δεκαδικῶν πολλαπλασίων αὐτῶν ἐκτελοῦνται αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις εὐκόλως καὶ συντόμως

Προβλήματα ἀλλαγῆς μονάδων.

190. Πολλάκις εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν, πῶς τρέπονται οἱ πήχεις εἰς μέτρα καὶ τἀνάπαλιν, ἢ πῶς αἱ ὀκάδες τρέπονται εἰς χιλιόγραμμα κτλ. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμώμεθα τὴν πρὸς ἀλλήλας σχέσιν τῶν μονάδων τούτων· ἡ δὲ τροπὴ γίνεται δι᾽ ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ μιᾶς διαιρέσεως (μετρήσεως), ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω προβλημάτων.

1) Νὰ τραποῦν 35 ἐμπορικοὶ πήχεις εἰς μέτρα.

Κατάταξις. 1 πῆχ. ἰσοῦται μὲ 0,64 τοῦ μ.
35 » χ

Λύσις. Εὑρίσκομεν $0{,}64 \times 35$ ἢ 22,40 τοῦ μέτρου.

2) Νὰ τραποῦν 240 τεκτονικοὶ πήχεις εἰς μέτρα.

Κατάταξις. 1 τ. π. ἰσοῦται μὲ $\frac{3}{4}$ τοῦ μ.
240 » χ

Εὑρίσκομεν $240 \times \frac{3}{4}$ ἢ 180 μ. ***Νοερῶς*** τρέπομεν τεκτονικοὺς πήχεις εἰς μέτρα ὡς ἑξῆς· λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τούτου καὶ τὰ προσθέτομεν. Π. χ. τὸ ἥμισυ τοῦ 240 εἶναι 120, τὸ ἥμισυ τοῦ 120 εἶναι 60· $120 + 60 = 180$ μ. Διότι εἶναι $\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$.

3) Νὰ τραποῦν 60 μέτρα εἰς τεκτονικοὺς πήχεις.

Κατάταξις [1]. 1 τ. π. $\frac{3}{4}$ μ.
χ 60

[1] Καλὸν εἶναι νὰ γίνεται ἡ τοιαύτη κατάταξις τῶν ἀριθμῶν ἵνα εὐκόλως διακρίνωσιν οἱ μαθηταὶ ποίαν πρᾶξιν θὰ ἐκτελέσωσιν.

Εὑρίσκομεν $60 : \frac{3}{4}$ ἢ 80 π. Νοερῶς τρέπομεν μέτρα εἰς τεκτονικοὺς πήχεις ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων τὸ τρίτον αὐτοῦ. Π. χ. τὸ τρίτον τοῦ 60 εἶναι 20· ὥστε 60 + 20 =80 τ. π. Διότι εἶναι 1 μ. $= \frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3}$ τοῦ τ. π.

5) Νὰ τραποῦν 45 πήχεις (ἐμπορίου) εἰς ὑάρδας.

Λύσις. Ὁ πῆχυς εἶναι τὰ 0,7 τῆς ὑάρδας, ὥστε οἱ 45 πήχ. εἶναι 45×0,7 ἢ 4,5×7 ἢ 31,5 τῆς ὑάρδας. Τἀνάπαλιν αἱ 31,5 τῆς ὑάρδας εἶναι πήχεις 31,5 : 0,7 ἢ 315 : 7 ἤτοι 45. Ἐκ τούτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα.

Διὰ νὰ τρέψωμεν πήχεις (ἐμπορίου) εἰς ὑάρδας, πολλαπλασιάζομεν τὸ δέκατον αὐτῶν ἐπὶ 7. Τἀνάπαλιν· διὰ νὰ τρέψωμεν ὑάρδας εἰς πήχεις, διαιροῦμεν τὸ δεκαπλάσιον αὐτῶν διὰ 7.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ τραποῦν 40 μέτρα εἰς πήχεις. $\left(62 \frac{1}{2}\right)$.

2) Νὰ τραποῦν 600 τεκτ. πήχεις εἰς μέτρα. (450).

3) Νὰ τραποῦν 36,56 τοῦ μέτρου εἰς ὑάρδας. (40).

4) Νὰ τραποῦν 393,75 τοῦ τετρ. μέτρ. εἰς τ. τεκτ. πήχ. (700).

5) Νὰ τραποῦν 160 δράμια εἰς γραμμάρια (3,2×160 ἢ 512).

6) Νὰ τραποῦν 768 γραμμάρια εἰς δράμια. (240).

7) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει εἰς ἔμπορον 15 φρ. (γαλλικά), ὅταν τὸ φράγκον εἶχε δραχμὰς (χαρτίνας) 2,80. Πόσας δραχμὰς κοστίζει ὁ πῆχυς ἐμπορίου;

Λύσις. Τὸ μέτρον κοστίζει 2,80×15 ἢ 42 δραχ. Ὥστε ὁ πῆχυς κοστίζει 42×0,64 ἢ 26,88 δραχ.

8) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει 5 σελίνια, ὅταν ἡ λίρα εἶχε 376 δρ. Πόσας δραχμὰς κοστίζει ὁ πῆχυς; (63,70).

9) Παντοπώλης τις ἠγόρασεν 650 κιλὰ καφὲ πρὸς 45 δρ. τὸ κιλόν, ἀλλ' ἐξώδευσεν ἀκόμη μέχρις ἐναποθηκεύσεως αὐτοῦ 1300 δρ. Πόσον κοστίζει τὸ κιλὸν καὶ πόσον ἡ ὀκᾶ;

(τὸ κιλὸν ἢ 0,78 τῆς ὀκᾶς κοστίζει 47 δρ. καὶ ἡ ὀκ. 60,25).

10) Ἡ ἀγγλικὴ λίρα ἔχει βάρος 7,988 τοῦ γραμμαρίου. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν ἔχουν 25 λίραι, ἂν τὰ $\frac{11}{12}$ τοῦ βάρους των εἶναι καθαρὸς χρυσός

(183,058 γρ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

191. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐζυγίσαμεν πρᾶγμά τι καὶ εὕρομεν αὐτὸ $142\frac{50}{400}$ τῆς ὀκᾶς ἢ 3 στατῆρας 10 ὀκ. 50 δράμια (διότι, ἂν διαιρέσωμεν τὰς 142 ὀκ. διὰ 44, εὑρίσκομεν πηλίκον 3 στ. καὶ ὑπόλοιπον 10 ὀκάδ., τὰ δὲ τετρακοσιοστὰ τῆς ὀκᾶς λέγονται **δράμια**). Ὁ ἀριθμὸς 3 στατ. 10 ὀκ. 50 δρ. ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἀριθμούς· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ μονάς, ἤτοι ὁ 1 στατήρ, εἶναι πολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἤτοι τῆς μιᾶς ὀκᾶς (διότι εἶναι 1 στατὴρ=44 ὀκ.), τοῦ δὲ τρίτου ἡ μονάς, ἤτοι τὸ 1 δράμιον, εἶναι ὡρισμένον μέρος τῆς ἀρχικῆς μονάδος (διότι εἶναι ἓν δράμιον= $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς)· ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς λέγεται ***συμμιγής***. Ὥστε

192. ***Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐξ ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων αἱ μονάδες ἔχουν ἴδιον ὄνομα καὶ ἑκάστη εἶναι ἢ πολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἢ ὡρισμένον μέρος αὐτῆς.***

Σημ. Οἱ ἀκέραιοι, οἱ κλασματικοὶ καὶ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἀφῃρημένοι. Πρὸς διάκρισιν τῶν συμμιγῶν οἱ ἄλλοι οὗτοι ἀριθμοὶ λέγονται *ἁπλοῖ*.

Τροπὴ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν, ἤτοι εἰς μονάδας μιᾶς οἱασδήποτε τάξεώς του.

193. Ἔστω π. χ. νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὧραι εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς ὥρας. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ τὸ 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας, τὰ δύο ἔτη ἔχουν 12×2 ἢ 24 μῆνας καὶ 3 μῆνας ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 27 μῆνας. Ἔπειτα τρέπομεν τοὺς μῆνας εἰς ἡμέρας σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ὁ 1 μὴν ἔχει 30 ἡμέρας, οἱ 27 μῆνες ἔχουν 27×30 ἢ 810 ἡμέρας καὶ 5 ἡμ. ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 815 ἡμ. Τέλος τρέπομεν τὰς ἡμέρας εἰς ὥρας σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς· ἀφοῦ ἡ 1 ἡμέρα ἔχει 24 ὥρας, αἱ 815 ἡμέραι ἔχουν 815×24 ἢ 19560 ὥρας καὶ 4 ὥρας ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 19564 ὥρας. Ὥστε εἶναι 2 ἔτη 3 μ. 5 ἡμ. 4 ὥρ.=19564

ὧρ. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

2 ἔτη 3 μῆνες 5 ἡμ. 4 ὧραι.

$$\begin{array}{rl}
12 & \\
\hline
24 & \\
3 & \\
\hline
27 & \text{μῆνες} \\
30 & \\
\hline
810 & \\
5 & \\
\hline
815 & \text{ἡμέραι} \\
24 & \\
\hline
3260 & \\
1630 & \\
\hline
19560 & \\
4 & \\
\hline
19564 & \text{ὧραι}
\end{array}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ εἰς πρῶτα λεπτά, ἤτοι εἰς μονάδας κατωτέρας τῆς ἐν τῷ συμμιγεῖ δοθείσης κατωτέρας τάξεως, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ τὸ ἐξαγόμενον 19564 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 60 (διότι 1 ὥρα ἔχει 60 λ.) καὶ εὑρίσκομεν 1173840 λεπτά. Ἐὰν πάλιν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς δεύτερα λεπτά, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πρώτων λεπτῶν ἐπὶ 60 (διότι 1 λ. ἔχει 60 δ.) καὶ εὑρίσκομεν 70430400 δ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ συμμιγὴς τρέπεται εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του ἢ καὶ ἄλλης τάξεως κατωτέρας τῆς δοθείσης, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι **ἀκέραιος** ἀριθμός. Ἄς ἴδωμεν τώρα πῶς τρέπεται ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς μονάδας ἄλλης τάξεως ἀνωτέρας, ἤτοι εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη.

1ον) Ἔστω νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς ἡμέρας. Τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἶναι 1 ἡμέρα $=24$ ὧραι, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας καὶ ἑπομέμως αἱ 19564 ὧραι εἶναι τὰ $\frac{19564}{24}$ τῆς ἡμέρας. Ὥστε εἶναι 2 ἔτη 3 μ. 5 ἡμ. 4 ὧρ. $=\frac{19564}{24}$ τῆς ἡμ.

2ον) Ἔστω νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς μῆνας. Τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας τάξεώς του, ἤτοι εἰς ὥρας, καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἶναι 1 μὴν $=30$ ἡμέρας $=30\times24$ ἢ 720 ὥρας, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{720}$ τοῦ μηνὸς καὶ ἑπομένως αἱ 19564 ὧραι εἶναι τὰ $\frac{19564}{720}$ τοῦ μηνός. Ὥστε εἶναι 2 ἔτη 3 μῆν. 5 ἡμ. 4 ὧρ. $=\frac{19564}{720}$ τοῦ μηνός.

3ον) Ἔστω τέλος νὰ τραπῇ ὁ ἀνωτέρω συμμιγὴς εἰς ἔτη. Τρέπομεν πάλιν αὐτὸν εἰς ὥρας, καὶ ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ εἶναι 1 ἔτος $=12$ μ.$=12\times 30$ ἡμ.$=12\times 30\times 24$ ἢ 8640 ὥρας, ἄρα ἡ 1 ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{8640}$ τοῦ ἔτους καὶ ἑπομένως αἱ 19564 ὧραι εἶναι τὰ $\frac{19564}{8640}$ τοῦ ἔτους. Ὥστε εἶναι 2 ἔτη 3 μ. 5 ἡμ. 4 ὥρ.$=\frac{19564}{8640}$ τοῦ ἔτους.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι, ὅταν ὁ συμμιγὴς τρέπεται εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως ἀνωτέρας, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι **κλάσμα**. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

194. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μονάδας οἱασδήποτε τάξεως ἀνωτέρας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του καὶ τὸ ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ γράφομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης κατωτέρας τάξεώς του κάμνουν μίαν μονάδα τῆς τάξεως ἐκείνης, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ τραπῇ ὁ συμμιγής.***

Τροπὴ συγκεκριμένου ἁπλοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

195. Ἔστω π. χ. νὰ τραπῇ ὁ ἀριθμὸς 47350 δράμια εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς ὀκάδας, καὶ ὅσας φορὰς ὁ 400 (διότι ἡ 1 ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια) χωρεῖ εἰς τὸν 47350, τόσαι ὀκάδες περιέχονται· ὥστε διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 118 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 150 δράμια. Τὰς 118 ὀκ. τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς στατῆρας, καὶ ὅσας φορὰς ὁ 44 (διότι ὁ 1 στατὴρ ἔχει 44 ὀκ.) χωρεῖ εἰς τὸν 118, τόσοι στατῆρες περιέχονται· ὥστε διαιροῦντες εὑρίσκομεν πηλίκον 2 στ. καὶ ὑπόλοιπον 30 ὀκ. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

473(50 | 4(00
07   118 ὀκ. | 44
33   30 ὀκ.   2 στ.
150 δράμ.

Ὥστε εἶναι 47350 δράμια $=$ 2 στ. 30 ὀκ. 150 δράμ.

Καὶ κλάσμα τρέπεται εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του (διότι πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ). Ἔστω π. χ. νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{35}{8}$ τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Διαιροῦμεν τὸν 35 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 ὥρας καὶ ὑπόλοιπον 3 ὥρας. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς πρῶτα λεπτά, καὶ εὑρίσκομεν 60×3 ἢ 180 λ.· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 180 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 22 λ. καὶ ὑπόλοιπον 4 λ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ εὑρίσκομεν 60×4 ἢ 240 δ.· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸν 240 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 30 δ. καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε εἶναι $\frac{35}{8}$ τῆς ὥρας = 4 ὥρ. 22 λ. 30 δ. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

35 ὧραι	8
3	4 ὥρ. 22 λ. 30 δ.
60	
180 λ.	
20	
4	
60	
240 δ.	
0	

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

196. ***Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσμα μιᾶς τάξεως (οὐχὶ τῆς κατωτάτης) ἑνὸς συμμιγοῦς εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὸ κλάσμα, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ διαιροῦμεν τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως θὰ παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης· οὕτω δὲ ἐξακολουθοῦμεν μέχρι τῆς τελευταίας τάξεως.***

Σημ. Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ εἰς συμμιγῆ καὶ ἔπειτα ἑνώνομεν τὸν συμμιγῆ μὲ τὸν ἀκέραιον. Π. χ. εἶναι $6\frac{3}{5}$ τῆς ὑάρδας = 6 ὑάρδ. 1 π. $9\frac{3}{5}$ δ. Διὰ νὰ τρέψωμεν δεκαδικὸν εἰς συμμιγῆ, γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς κλάσμα καὶ ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω. Π. χ. εἶναι 0,28 τῆς ὥρας $=\frac{28}{100}=$ 16 λ. 48 δ. Ἐπίσης εἶναι 5,37 τῆς ὀκᾶς $= 5\frac{37}{100} =$ 5 ὀκάδ. 148 δράμια.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 3 στ. 10 ὀκ. 200 δράμ. εἰς δράμια, ὀκάδας καὶ στατῆρας.

(57000 δράμια, $\frac{57000}{400}$ τῆς ὀκᾶς, $\frac{57000}{17600}$ τοῦ στατ).

2) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 3 ἔτη 4 μῆνες 20 ἡμ. εἰς ἡμέρας, μῆνας καὶ ἔτη.

(1220 ἡμ., $\frac{1220}{30}$ τοῦ μηνός, $\frac{1220}{360}$ τοῦ ἔτους).

3) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 5 μ. 8 παλ. 9 δακτ. 6 γρ. εἰς μέτρα, παλάμας, δακτύλους καὶ γραμμάς. (5,896 μ., 58,96 π., 589,6 δακ., 5896 γρ.).

4) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 2 λίρ. 5 σελ. 10 πέν. εἰς λίρ. καὶ σελίνια.

($\frac{550}{240}$ τῆς λίρας, $\frac{550}{12}$ τοῦ σελινίου).

5) Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγὴς 10 ὑάρδ. 2 πόδ. 10 δ. εἰς ὑάρδας. $\left(\frac{394}{36}\right)$.

6) Νὰ τραποῦν 10 ὀκ. 100 δράμ. εἰς κλάσμα τοῦ στατ. $\left(\frac{4100}{17600}\right)$.

7) Νὰ τραποῦν 15 ἡμέραι εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους. $\left(\frac{15}{360}\right.$ τοῦ ἔτ.$\left.\right)$.

8) Νὰ τραποῦν 872430 δ. τῆς ὥρας εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.
(10 ἡμ. 2 ὧραι 20 λ. 30 δ.).

9) Νὰ τραποῦν 56970 δράμια εἰς συμμιγῆ. (3 στ. 10 ὀκ. 170 δράμ.).

10) Νὰ τραπῇ τὸ κλάσμα $\frac{21}{8}$ τοῦ στατῆρος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.
(2 στ. 27 ὀκ. 200 δρ.).

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

197. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμοὺς (ὁμοειδεῖς) προσθέτομεν αὐτούς, καθὼς καὶ τοὺς ἀκεραίους, ἤτοι γράφομεν τὸν ἕνα ὑποκάτω τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, ἔπειτα προσθέτομεν αὐτοὺς ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ τὸ ἄθροισμα τάξεώς τινος ἀποτελῇ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης κάμνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον (ἂν μείνῃ) γράφομεν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην τῶν προσθετέων, τὸ δὲ πηλίκον προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.***

Παραδείγματα.

3 στ.	35 ὀκ.	250 δρ.	3 ὥρ.	20 λ.	15 δ.
8	28	360	8	12	20
35	6			45	30
47 στ.	26 ὀκ.	210 δρ.	12 ὥρ.	18 λ.	5 δ.

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τὸ ἄθροισμα τῶν δραμίων εἶναι 610, ἤτοι 1 ὀκᾶ καὶ 210 δράμια, γράφομεν λοιπὸν 210 εἰς τὴν στήλην τῶν δραμίων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὰς ὀκάδας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 69 καὶ 1 τὸ κρατούμενον 70 ὀκάδες· ἀλλὰ 70 ὀκάδες κάμνουν ἕνα στατῆρα καὶ 26 ὀκάδας, γράφομεν λοιπὸν 26 εἰς τὴν στήλην τῶν ὀκάδων καὶ μεταβαίνομεν εἰς τοὺς στατῆρας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 46 καὶ 1 τὸ κρατούμενον 47, γράφομεν λοιπὸν 47 εἰς τὴν στήλην τῶν στατήρων. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τοῦ δευτέρου παραδείγματος.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

198. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν συμμιγῆ ἀπὸ συμμιγῆ, γράφομεν πρῶτον αὐτούς, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμὸν τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ συμβῇ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, προσθέτομεν εἰς αὐτὸν τόσας μονάδας, ὅσαι χρειάζονται, διὰ νὰ ἀποτελεσθῇ μία μονὰς τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, προσέχοντες ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦ ἀφαιρετέου τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως μίαν μονάδα, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορὰ*** (ἐδ. 29).

Ἔστω π. χ. νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 5 στ. 30 ὀκ. 300 δράμ. ἀπὸ τὸν συμμιγῆ 8 στ. 40 ὀκ. 100 δραμ.

8 στ.	40 ὀκ.	100 δραμ.
5	30	300
3 στ.	9 ὀκ.	200 δρ.

Ἐπειδὴ ὁ 300 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 100, προσθέτομεν 400 δράμια εἰς τὸν 100 (διότι εἶναι μία ὀκᾶ = 400 δράμ.) καὶ κατόπιν ἀφαιροῦμεν τὸν 300 ἀπὸ τὸν 500 καὶ εὑρίσκομεν διαφορὰν 200 δράμ. Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν λέγοντες 30 καὶ 1, 31 ἀπὸ 40 μένουν 9 ὀκ. Τέλος ἀφαιροῦμεν καὶ τὸν 5 ἀπὸ τὸν 8 καὶ εὑρίσκομεν 3 στ. Ἔστωσαν ἀκόμη καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα.

10 ὑάρ.	2 πόδ.	7 δάκ.	9 στ.		
6	1	10	4	20 ὀκ.	100 δρ.
4 ὑάρ.	0 π	9 δ.	4 στ.	23 ὀκ.	300 δρ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 9 πήχεις 7 ρούπια, κατόπιν ἐπώλησε 15 πήχ. 6 ρούπ. καὶ τοῦ ἔμειναν 24 πήχ. 5 ρούπ. Πόσον ἦτο ἀπ' ἀρχῆς τὸ ὕφασμα; (50 π. 2 ρ.)

2) Ἠγόρασέ τις σῖτον τὴν πρώτην φορὰν 3 στ. 20 ὀκ., τὴν δευτέραν φορὰν 7 στ. 300 δράμ. καὶ τὴν τρίτην φορὰν 15 στ. 40 ὀκ. 250 δρ. Πόσον ἠγόρασε τὸ ὅλον; (26 στ. 17 ὀκ. 150 δρ.).

3) Ἕνα αὐτοκίνητον διὰ νὰ μεταβῇ ἀπὸ μιᾶς πόλεως εἰς ἄλλην χρειάζεται 4 ὥρ. 35 λ. Ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ ἐκ τῆς πρώτης πόλεως, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν δευτέραν πόλιν τὴν μεσημβρίαν (12ην ὥραν); (7 ὥρ. 25 λ.)

4) Ὅταν ἐν Ἀθήναις εἶναι μεσημβρία, εἰς τὸ Λονδῖνον εἶναι 10 ὥρ. 24 λ. 37 δ. π. μ., εἰς τοὺς Παρισίους 10 ὥρ. 34 λ. 25 δ. καὶ εἰς τὴν Ρώμην 11 ὥρ. 14 λ. 59 δ. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ὥρας τῶν Ἀθηνῶν καὶ ἑκάστης τῶν πόλεων τούτων;

(1 ὥρ. 35 λ. 23 δ., 1 ὥρ. 25 λ. 35 δ., 45 λ. 1 δ.).

5) Μία οἰκογένεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν πατέρα, τὴν μητέρα καὶ τὴν κόρην των. Αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τριῶν κάμνουν μαζὶ 120 ἔτη. Ὁ πατὴρ εἶναι 58 ἐτῶν 9 μηνῶν 25 ἡμερῶν, ἡ μήτηρ εἶναι 40 ἐτῶν 7 μηνῶν 10 ἡμερῶν. Πόσον εἶναι ἡ κόρη των;

(20 ἐτῶν 6 μηνῶν 25 ἡμερῶν).

6) Τὴν πρώτην Δεκεμβρίου ὁ Ἥλιος ἀνατέλλει ὥρ. 7 καὶ 24 λ. καὶ δύει ὥρ. 5 καὶ 4 λ., τὴν δὲ πρώτην Ἰουνίου ἀνατέλλει ὥρ. 5 καὶ 7 λ. καὶ δύει ὥρ. 7 καὶ 39 λεπτά. Πόσον χρόνον μένει ὁ Ἥλιος ὑπεράνω τοῦ τόπου μας τὴν πρώτην φοράν; Πόσον τὴν δευτέραν φοράν; Καὶ πόσον περισσότερον τὴν δευτέραν φοράν; (α΄ 9 ὥρ. 40 λ., β΄ 14 ὥρ. 32 λ., 4 ὥρ. 52 λ.).

7) Ἠγόρασέ τις 8 στ. 10 ὀκ. 300 δράμια ἀνθράκων καὶ ἐξ αὐτῶν ἐπώλησε $2\frac{4}{5}$ τοῦ στατῆρος. Πόσοι ἄνθρακες τοῦ ἔμειναν;

(5 στ. 19 ὀκ. 220 δρ.).

8) Ἄνθρωπός τις ἐγεννήθη τὸ ἔτος 1858 Ἰουλίου 24 καὶ ἔζησε 49 ἔτ. 9 μῆν. 15 ἡμ. Πότε ἀπέθανε; (τὸ ἔτος 1908 Μαΐου 9).

9) Μία κόρη ἐγεννήθη τὸ ἔτος 1904 Μαρτίου 28 καὶ ἐνυμφεύθη τὸ ἔτος 1931 Αὐγούστου 20. Εἰς ποίαν ἡλικίαν ἐνυμφεύθη;

(27 ἐτῶν 4 μ. 22 ἡμ.).

10) Ἀπέθανέ τις τὸ ἔτος 1900 Ἰανουαρίου 8 καὶ ὥραν 1ην 15 λ. π. μ., ἡ δὲ σύζυγός του ἀπέθανε τὸ ἔτος 1905 Αὐγούστου 21 καὶ ὥραν 11 μ. μ. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τοῦ θανάτου του ἀπέθανεν ἡ σύζυγος; (μετὰ 5 ἔτ. 7 μ. 15 ἡμ 22 ὥρ. 45 λ.)

Σημ. Εἰς τὰς μεταμεσημβρινὰς ὥρας προσθέτομεν πάντοτε τὰς παρελθούσας 12 ὥρας μέχρι τῆς μεσημβρίας καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

1ον) Πολλαπλασιαστὴς ἢ διαιρέτης ἀκέραιος ἢ κλάσμα.

1) ***Πρόβλημα.*** Ἠγόρασέ τις 8 σάκκους ἀλεύρου καὶ ἕκαστος ἔχει βάρος 1 στ. 8 ὀκ. 120 δράμ. Πόσον βάρος ἔχουν καὶ οἱ 8 σάκκοι;

Λύσις. Ἀφοῦ ὁ 1 σάκκος ἔχει βάρος 1 στ. 8 ὀκ. 120 δράμια, οἱ 8 σάκκοι θὰ ἔχουν βάρος ὀκτὼ φορὰς περισσότερον, ὥστε θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ 8. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ 8 ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

1 στατ. 8 ὀκ. 120 δράμ.
8
8 στατ. 64 ὀκ. 960 δράμ.
ἢ 9 στατ 22 ὀκ. 160 δράμ.

Τὸ γινόμενον τῶν 120 δραμίων ἐπὶ 8 εἶναι 960 δράμια, ἤτοι 2 ὀκ. καὶ 160 δράμια, γράφομεν λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν στήλην 160 δρ. καὶ κρατοῦμεν τὰς 2 ὀκ. διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν ὀκάδων. Τὸ γινόμενον τῶν 8 ὀκ. ἐπὶ 8 εἶναι 64 ὀκ. καὶ 2 (τὰ κρατούμενα) 66 ὀκάδες, ἤτοι 1 στατὴρ καὶ 22 ὀκάδες, γράφομεν λοιπὸν 22 ὀκ. καὶ κρατοῦμεν τὸν 1 στατ. διὰ νὰ τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν στατήρων. Τέλος τὸ γινόμενον τοῦ 1 στ. ἐπὶ 8 εἶναι 8 στ. καὶ 1 (τὸ κρατούμενον) 9 στατῆρες, γράφομεν λοιπὸν 9 στατῆρες. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα:

199. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν κατωτέραν τάξιν.*** *Ἐὰν* ***μερικὸν γινόμενόν τι ἀποτελῇ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγομεν αὐτὰς (καθὼς πράττομεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν) καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὸ ἑπόμενον μερικὸν γινόμενον.***

2) ***Πρόβλημα.*** Πρόκειται νὰ μοιρασθῶσιν 60 στ. 23 ὀκ. 100 δρ. σίτου εἰς 25 πτωχὰς οἰκογενείας. Πόσον θὰ λάβῃ ἑκάστη;

Λύσις. Κατὰ πρῶτον μοιράζομεν τοὺς 60 στατῆρας, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 60 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 2 στ. καὶ ὑπόλοιπον 10 στ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς ὀκάδας, ἤτοι 10×44 ἢ 440 ὀκ. καὶ 23 ὀκ. ποὺ ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 463 ὀκάδας, μοιράζομεν τώρα τὰς 463 ὀκ., ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 463 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 18 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 13 ὀκ. Τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο τρέπομεν εἰς δράμια, ἤτοι 13×400 ἢ 5200 δράμ. καὶ 100 δράμ. ὅπου ἔχει ὁ συμμιγὴς κάμνουν 5300 δράμια, μοιράζομεν τέλος καὶ ταῦτα, ἤτοι διαιροῦμεν τὸν 5300 διὰ 25 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 212 δράμια καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε ἑκάστη θὰ λάβῃ 2 στ. 18 ὀκ. 212 δρ. σίτου.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

```
60 στ. 23 όκ. 100 δρ. | 25
10                    |______________________
44                     2 στ. 18 όκ. 212 δράμ.
---
440
 23
---
463 ὀκάδες
213
 13
400
---
5200
 100
---
5300 δράμια
  30
  50
   0
```

Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

200. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ δι' ἀκεραίου, διαιροῦμεν χωριστὰ ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀρχόμενοι ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ ἐκ μερικῆς τινος διαιρέσεως μείνῃ ὑπόλοιπον, τρέπομεν αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ὁμοειδεῖς μονάδας τοῦ συμμιγοῦς (ἂν ἔχῃ), τὸ δὲ ἄθροισμα διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου διαιρέσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ συμμιγοῦς.***

3) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἓν ἔργον χρειάζονται 7 ὧραι 50 λ. Πόσος χρόνος χρειάζεται διὰ νὰ ἐκτελεσθοῦν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου;

Κατάταξις. 1 ἔργον 7 ὥρ. 50 λ.

$\frac{3}{5}$ χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (ἐδάφ. 130). Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι ὁ συμμιγὴς 7 ὥρ. 50 λ., καὶ πολλαπλασιαστὴς τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$, ὥστε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα.

201. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.***

Σημ. Ὁ κανὼν οὗτος ἐξάγεται ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$7 \text{ ὥρ. } 50 \text{ λ.} \times \frac{3}{5}$$

```
         3
---------------
23 ὥρ. 30 λ.  | 5
 3            |______________
60              4 ὥρ. 42 λ.
---
180
 30
---
210 λ.
 10
  0
```

202. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπὶ μικτὸν ἢ δεκαδικόν, τρέπομεν τὸν μικτὸν ἢ δεκαδικὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν, ὡς ἀνωτέρω.***

203. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν συμμιγῆ διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν τὸν συμμιγῆ ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον (ἐδ. 144).***

Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι μικτὸς ἀριθμὸς ἢ δεκαδικός, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.

Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.

204. Ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς εἶναι πολυψήφιος ἀριθμός, πολλαπλασιάζομεν χάριν εὐκολίας καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 3 ὥρ. 30 λ. 45 δ. ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 540.

Θὰ πολλαπλασιάσωμεν πάλιν ἕκαστον ἀριθμὸν τοῦ συμμιγοῦς ἐπὶ 540, ἀρχόμενοι ὅμως ἀπὸ τὴν ἀνωτέραν τάξιν τοῦ συμμιγοῦς. Καὶ ἀφοῦ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀνωτέρας τάξεως, πρέπει νὰ παρατηρῶμεν, ὅταν θὰ μεταβαίνωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑκάστου τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν τοῦ συμμιγοῦς, ἂν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τέταρτον κτλ. μιᾶς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· εἰ δὲ μή, νὰ ἀναλύωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς τοιαῦτα ἁπλᾶ μέρη. Διὰ τοῦτο ὁ τρόπος οὗτος λέγεται ***μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν***.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν 3 ὡρῶν ἐπὶ 540 εἶναι 1620 ὧραι.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 30 λ., ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ 30 λ. εἶναι τὸ ἥμισυ μιᾶς ὥρας, ὅθεν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1 ὥραν ἐπὶ 540, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 540 ὥρας, ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 30 λ., ἤτοι τὸ ἥμισυ μιᾶς ὥρας, διὰ τοῦτο θὰ εὕρωμεν γινόμενον τὸ ἥμισυ τοῦ 540, ἤτοι 270 ὥρας.

Μεταβαίνομεν ἔπειτα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 45 δ., ἀλλὰ πρῶτον ἀναλύομεν τὰ 45 δ. εἰς 30 δ. καὶ 15 δ. (διότι τὰ 30 δ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, καὶ τὰ 15 δ. εἶναι τὸ τέταρτον αὐτοῦ ἢ τὸ ἥμισυ τῶν 30 δ.), ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν 30 λ. ἐπὶ 540 εἶναι 270 ὧραι, ἄρα τὸ γινόμενον τοῦ 1 λ. ἐπὶ 540 θὰ εἶναι τὸ τριακοστὸν τῶν 270 ὡρῶν, ἤτοι 9 ὧραι· ἐὰν λοιπὸν εἴχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1 λ. ἐπὶ 540, θὰ εὑρίσκομεν γινόμενον 9 ὥρας, ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν 30 δ., ἤτοι τὸ ἥμισυ ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ, διὰ τοῦτο θὰ εὕρωμεν γινόμενον τὸ ἥμισυ τῶν 9 ὡρῶν, ἤτοι 4 ὥρ. 30 λ. Ἀφοῦ δὲ τὸ γινόμενον τῶν 30 δ. ἐπὶ 540 εἶναι 4 ὥρ. 30 λ., ἄρα τὸ γινόμενον τῶν

15 δ., ἤτοι τὸ ἥμισυ τῶν 30 δ., θὰ εἶναι καὶ τὸ ἥμισυ τῶν 4 ὥρ. 30 λ., ἤτοι 2 ὥρ. 15 λ. Διατάξις τῆς πράξεως.

		3 ὥρ. 30 λ. 45 δ.	
		540	
	γινόμεν. 3 ὡρῶν ἐπὶ 540	1620 ὥρ.	
	» 30 λ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ μιᾶς ὥρας$\left.\right)$ ἐπὶ 540 ...	270	
45	» 30 δ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τοῦ 1 λ.$\left.\right)$ ἐπὶ 540 ...	4	30 λ.
	» 15 δ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τῶν 30 δ.$\left.\right)$ ἐπὶ 540 ...	2	15 λ.
	ἄθροισμα μερικῶν γινομένων	1896 ὥρ.	45 λ.

2ον) Πολλαπλασιαστὴς ἢ διαιρέτης συμμιγής.

1) ***Πρόβλημα.*** Ὁ πῆχυς ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 40 δρ. 80 λ. Πόσον ἀξίζουν 9 πήχ. 5 ρ. ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Κατάταξις. 1 πήχ. 40 δρ. 80 λ.
9 πήχ. 5 ρ. χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (ἐδ. 130). Πολλαπλασιαστέος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος, ἤτοι 40 δρ. 80 λ. καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ συμμιγὴς 9 πήχ. 5 ρ. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς δὲν γίνεται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν (διότι οὗτος ἔχει καὶ ρούπια), καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς (διότι ἡ ἀξία τοῦ πήχεως ἔχει δοθῇ), διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς πήχεις, διὰ νὰ γίνῃ ὁμοειδὴς πρὸς αὐτήν, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 9 πήχεις 5 ρ. $=\frac{77}{8}$ τοῦ πήχεως. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὰς 40 δρ. 80 λ. ἢ κάλλιον 40,80 δρ. ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{77}{8}$ (θεωροῦντες τοῦτο ἀφῃρημένον) καὶ εὑρίσκομεν 392,70 δρ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι

205. ***Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμμιγής, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν, καὶ ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν.***

2) ***Πρόβλημα.*** Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 6 δραχ. Πόσον ἀξίζουν 2 στ. 5 ὀκ. 300 δράμ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις. 1 ὀκ. 6 δρ.
2 στ. 5 ὀκ. 300 δρ. χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν διὰ τὸν ἀνωτέρω λόγον, ἀλλὰ πρῶτον θὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ὀκάδας (διότι ὀκάδας παριστᾷ καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 2 στ. 5 ὀκ. 300 δράμ. $= \frac{37500}{400}$ ἢ $\frac{375}{4}$ τῆς ὀκᾶς. Πολλαπλασιάζομεν τὰς 6 δραχμὰς ἐπὶ $\frac{735}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν 562,50 δρ.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν. Π. χ. διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρῶτον πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἀφοῦ ὁ πῆχυς ἀξίζει 40 δρ. 50 λεπτά, οἱ 9 πήχεις ἀξίζουν 9 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 360 δρ. 720 λ. Ἔπειτα ἀναλύομεν τὰ 5 ρ. εἰς 4 ρ. καὶ 1 ρ. (διότι τὰ 4 ρ. εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πήχεως καὶ τὸ 1 ρ. εἶναι τὸ τέταρτον τῶν 4 ρ.) καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ ὁ 1 π. ἀξίζει 40 δρ. 80 λεπτά, τὰ 4 ρούπια, τὰ ὁποῖα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πήχεως, ἀξίζουν καὶ τὸ ἥμισυ τῶν 40 δρ 80 λ., ἤτοι 20 δρ. 40 λεπτά, καὶ τὸ 1 ρούπιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τέταρτον τῶν 4 ρουπίων, ἀξίζει καὶ τὸ τέταρτον τῶν 20 δρ. 40 λ., ἤτοι 5 δρ. 10 λ. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω γινομένων εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

		40 δρ.	80 λ.
		9 π.	5 ρ.
	ἀξία 9 πήχεων	360 δρ.	720 λ.
5 ρ.	» 4 ρ. $\left(=\frac{1}{2}\right.$ τοῦ πήχ.$\left.\right)$	20	40 λ.
	» 1 ρ. $\left(=\frac{1}{4}\right.$ τῶν 4 ρ.$\left.\right)$	5	10
	ἄθροισμα	392 δρ.	70 λ.

3) ***Πρόβλημα***. Γυνή τις ἠγόρασε 2 πήχ. 5 ρούπια ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ ἔδωσε δρ. 98,70. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς ;

Κατάταξις. 2 π. 5 ρ. 98,70 δρ.

1 π. χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μερισμόν, ἐδ. 143), ἀλλὰ πρῶτον θὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς πήχεις, διὰ νὰ γίνῃ ὁμοειδὴς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, ἤτοι 2 π. 5 ρ. $= \frac{21}{8}$. Ἔπειτα διαιροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν $98,70 : \frac{21}{8}$ ἢ 37,60 δρ. Ὥστε

206. ***Ὅταν ὁ διαιρέτης (εἰς τὸν μερισμὸν) εἶναι συμμιγής, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς μὲ τὴν μονάδα τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ζητοῦμεν, καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν.***

4) ***Πρόβλημα.*** Μία ὑφάντρια εἰς 9 ὥρ. 30 λ. ὑφαίνει 2 π. 3 ρ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν;

Κατάταξις. 9 ὥρ. 30 λ. 2 π. 3 ρ.

1 χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μερισμόν), ἀλλὰ πρῶτον θὰ τρέψωμεν τὸν διαιρέτην εἰς ὥρας, ἤτοι εἶναι 9 ὥρ. 30 λ. $= \frac{570}{60}$ ἢ $\frac{57}{6}$ τῆς ὥρας. Διαιροῦμεν τώρα τὸν συμμιγῆ 2 π. 3 ρ. διὰ τοῦ κλάσματος τούτου καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἰς μίαν ὥραν ὑφαίνει 2 ρούπια.

5) ***Πρόβλημα.*** Ἡ ὀκᾶ ἑνὸς πράγματος ἀξίζει 2 δρ. 80 λεπτά. Πόσας ὀκάδας ἀγοράζομεν μὲ 3 τάλ. 4 δρ. 60 λ. ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις. 1 ὀκ. 2 δρ. 80 λ.

χ 3 τάλ. 4 δρ. 60 λ.

Λύσις. Γνωρίζομεν ἐδῶ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος (ἤτοι μιᾶς ὀκᾶς) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς πολλὰς μονάδας (τὰς πολλὰς ὀκάδας), τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὴν τιμὴν 3 τάλ. 4 δρ. 60 λ., διὰ τοῦτο θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μέτρησιν, ἐδ. 18). Διαιρετέος εἶναι ἡ τιμὴ τῶν ζητουμένων μονάδων καὶ διαιρέτης ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ μέτρησις τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἄλλου, πρέπει ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἁπλοῖ καὶ ὁμοειδεῖς, διότι ἄλλως μέτρησις δὲν γίνεται· διὰ τοῦτο τρέπομεν πρῶτον καὶ τοὺς δύο εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς λεπτά, καὶ εὑρίσκομεν 2 δρ. 80 λ.=280 λ. καὶ 3 τάλ. 4 δρ. 60 λ. = 1960 λ. Διαιροῦμεν τώρα τὸν 1960 διὰ τοῦ 280 (ὡς ἀφῃρημένους) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 ὀκ. (διότι ὀκάδας παριστᾷ καὶ ἡ μονάς, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν).

Σημ. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς συμμιγεῖς καὶ εἰς μονάδας οἱασδήποτε ἄλλης τάξεως (ἀλλὰ τῆς αὐτῆς πάντοτε), προτιμῶμεν ὅμως τὴν κατωτέραν τάξιν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενα ἀκεραίους ἀριθμοὺς πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεών μας. Ἐὰν δὲ συμβῇ οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ νὰ μὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν κατωτέραν τάξιν, παρατηροῦμεν ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τίς ἐκ τῶν δύο ἔχει τὴν μᾶλλον κατωτέραν τάξιν, ἐκεῖ δὲ τρέπομεν καὶ τοὺς δύο.

207. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι

Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις, τρέπομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην εἰς μονάδας τῆς αὐτῆς κατωτέρας τάξεως καὶ ἔπειτα

διαιροῦμεν (ὡς ἀφῃρημένους), τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὴν μονάδα, τῆς ὁποίας τὴν τιμὴν ἔχομεν.

Σημ. Εὐκόλως διακρίνομεν, ἂν ἡ διαίρεσις εἶναι μερισμὸς ἢ μέτρησις· διότι εἰς τὸν μερισμὸν δίδονται αἱ πολλαὶ μονάδες (ἢ μέρος τῆς μονάδος), ἐνῷ εἰς τὴν μέτρησιν ζητοῦνται αὗται. Τοῦτο εἴπομεν καὶ εἰς τὴν σελίδα 41.

6) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 6 ὀκ. 100 δράμια ἐξ ἑνὸς πράγματος δίδομεν 1 εἰκοσάδραχμον. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 2 στατῆρας ἐκ τοῦ ἰδίου πράγματος;

Κατάταξις.	6 ὀκ. 100 δρ.	1 εἰκοσ.
	2 στ.	χ

Λύσις. Θὰ κάμωμεν διαίρεσιν (μέτρησιν) καὶ ὅσας φορὰς αἱ 6 ὀκ. 100 δρ. ἢ 2500 δράμια χωροῦν εἰς τοὺς 2 στ. ἢ 35200 δράμια, τόσα εἰκοσάδραχμα θὰ δώσωμεν, ἤτοι 14 εἰκ. 1 δραχ. 60 λ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 4 ὑφάσματα καὶ τὸ καθὲν ἦτο 35 πήχ. 7 ρούπια. Πόσοι πήχεις ἦσαν καὶ τὰ 4 ὑφάσματα;
(143 π. 4 ρ.)

2) Τρεῖς ἄνθρωποι θέλουν νὰ μοιράσουν ἐξ ἴσου 8 στ. 27 ὀκ. 350 δρ. σίτου. Πόσον θὰ λάβῃ ἕκαστος; (2 στ. 38 ὀκ. 250 δρ.).

3) Γυνή τις διὰ νὰ ὑφάνῃ ἕνα πῆχυν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος χρειάζεται 3 ὥρ. 20 λ. Πόσον χρόνον χρειάζεται διὰ νὰ ὑφάνῃ $2\frac{3}{4}$ τοῦ πήχεως; (9 ὥρ. 10 λ.)

4) Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν μαζὶ 7 στ. 37 ὀκ. ἀνθράκων πρὸς δρ. 3,20 τὴν ὀκᾶν. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ἔλαβε τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος; Καὶ πόσον ἐπλήρωσεν;

(ὁ εἷς ἔλαβε 7 στ. 37 ὀκ. $\times\frac{2}{5}$ ἢ 3 στ. 6 ὀκ. καὶ ἐπλήρωσε 441,60 δρ., ὁ δὲ ἄλλος ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον 4 στ. 31 ὀκ. καὶ ἐπλήρωσεν 662,40 δρ.).

5) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 6 πήχ. 5 ρ. πρὸς δρ. 60,80 τὸν πῆχυν καὶ ἔδωσεν ἕνα χιλιόδραχμον. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ὀπίσω; (597,20).

6) Χωρικός τις εἶχε 8 στ. 10 ὀκ. 100 δρ. σίτου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε $4\frac{5}{8}$ τοῦ στατῆρος, τὸν δὲ ἄλλον σῖτον ἐπώλησε πρὸς 8,40 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον σῖτον ἐπώλησε; Καὶ πόσον ἔλαβε;
(3 στ. 26 ὀκ. 300 δρ., 1333,50 δραχ.).

7) Ἀτμόπλοιόν τι ἔτρεχε 10 μίλια τὴν ὥραν καὶ ἐχρειάσθη ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Θεσσαλονίκην 25 ὥρ. 24 λ. Πόσα μίλια ἀπέχει ἡ Θεσσαλονίκη ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ; (254).

8) Ἡ Ἀλεξάνδρεια ἀπέχει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ 534 μίλια. Πόσα μίλια τὴν ὥραν πρέπει νὰ τρέχῃ ἀτμόπλοιον, διὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν ταύτην εἰς 44 ὥρ. 30 λ.; (12).

9) Πόσα χιλιόγραμμα εἶναι 2 στ. 25 ὀκ. 200 δράμια; (1 χιλιόγραμμον=312,5 δράμ.) (145 χιλιόγρ. 280 γρ.).

10). Πόσαι ὑάρδαι εἶναι 29 πήχ. 7 ρ.; (20 ὑάρ. 2 π. 9 δ.).

Σημ. 1 π. = $\frac{7}{10}$ τῆς ὑάρδας.

11) Ἡ ὑάρδα ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζει 3 σελ. 6 πέννας. Πόσον ἀξίζουν 2 ὑάρδαι 2 πόδες; (9 σελ. 4 πέν.).

12) Μία κόρη ἠγόρασεν 8 πήχ. 2 ρ. δαντέλλα καὶ ἔδωσε δρ. 39,60. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; Καὶ πόσον θὰ δώσῃ ἂν ἀγοράσῃ ἀκόμη 3 πήχ. 5 ρούπια; (4,80 δρ. καὶ 17,40 δρ.).

13) Γυνή τις ἠγόρασεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 5 πήχ. 7 ρ. καὶ ἔδωσε δρ. 460,60. Πόσον ἀξίζει ὁ πῆχυς; Καὶ πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἀκόμη μὲ 392 δραχμάς; (78,40 δρ., 5 π.).

14) Διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα τραπεζομάνδηλον ἀπὸ ὕφασμα (διπλόφαρδο) θέλομεν 3 πήχ. 2 ρ. Πόσα ὅμοια τραπεζομάνδηλα θὰ κάμωμεν μὲ 16 πήχ. 7 ρούπια; (5 καὶ περισσεύουν 5 ρ.).

15) Μὲ ἕνα τάλληρον ἀγοράζομεν 2 πήχ. 4 ρούπια δαντέλλα. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 7 ρούπια; (1,75 δρ.).

16) Γυνή τις εἰς 17 ὥρ. 40 λ. ὑφαίνει ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 6 π. 5 ρ. Πόσον ὑφαίνει τὴν ὥραν; Καὶ εἰς πόσας ὥρας θὰ ὑφάνῃ 2 π. 6 ρούπια; (3 ρούπια, εἰς 7 ὥρ. 20 λ.).

17) Τὸ μέτρον ἑνὸς ὑφάσματος κοστίζει εἰς ἔμπορον 280 δρ. Πόσον κοστίζουν 7 π. 5 ρούπια; (1366,40).

18) Τρεῖς ἄνθρωποι ἔδωσαν 260 δραχ. καὶ ἠγόρασαν ἓν ἀρνίον 8 ὀκάδ. Ὁ α' ἔλαβε 3 ὀκ. 200 δράμια, ὁ β' 1 ὀκᾶν 320 δρ. καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Πόσον ἔλαβεν ὁ τρίτος; Καὶ πόσον θὰ πληρώσῃ ἕκαστος;

(2 ὀκ. 280 δρ., θὰ πληρώσῃ ὁ α' 113,75, ὁ β' 58,50 καὶ ὁ γ' 87,75).

19) Ἔμπορός τις εἶχεν 25 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ πῆχυς κοστίζει δρ. 22,68. Ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε 4 π. 6 ρούπια διὰ φόρεμα τῆς κόρης του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε καὶ παρετή-

ρησεν ὅτι τὸ ὕφασμα τῆς κόρης του ἔμεινε χάρισμα. Πόσον ἐπώλησε τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου ὑφάσματος ; (28 δρ.).

20) Ἡ σιδηροδρομικὴ γραμμὴ ἀπ' Ἀθηνῶν μέχρι Πατρῶν εἶναι 222 χιλιόμ. Ἐὰν ἀναχωρήσῃ ἐξ Ἀθηνῶν σιδηρόδρομος τὴν 6ην ὥρ. 45 λ. π. μ. μὲ ταχύτητα 30 χιλιομέτρων τὴν ὥραν (χωρὶς νὰ σταματήσῃ), ποίαν ὥραν θὰ φθάσῃ εἰς τὰς Πάτρας ; (τὴν 2 ὥρ. 9 λ. μ. μ.).

21) Ἠγοράσαμεν ἀπὸ ἔμπορον 4 π. 5 ρ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 280 δρ. τὸν πῆχυν καὶ 9 μανδήλια πρὸς δρ. 164,40 τὴν δωδεκάδα. Πόσον ἀξίζουν καὶ τὰ δύο ; Καὶ πόσας δραχ. θὰ λάβωμεν ὀπίσω ἀπὸ δύο χιλιόδραχμα ; (1418,30 καὶ 581,70).

22) Ἀπὸ ἕνα παντοπώλην ἠγοράσαμεν 2 ὀκ. 300 δρ. ζάχαρι πρὸς δρ. 19,80 τὴν ὀκᾶν, 3 ὀκ. 200 δρ. ἔλαιον πρὸς δρ. 24,40 τὴν ὀκᾶν καὶ 140 δράμια τυρὸν πρὸς 38 δραχ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἀξίζουν ὅλα αὐτά ; (153,15).

23) Ἔμπορός τις εἶχε 30 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησεν εἰς μίαν γυναῖκα 6 πήχ. 4 ρούπια, καὶ εἰς ἄλλην τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐκράτησε διὰ φόρεμα τῆς συζύγου του. Πόσον ὕφασμα ἐπώλησεν εἰς τὴν δευτέραν γυναῖκα καὶ πόσον ἐκράτησε ; (11 π. 5 ρ., 5 π. 7 ρ.).

24) Ὕφασμά τι, τὸ ὁποῖον εἶναι 30 ὑάρδαι 2 πόδ. 4 δ., κοστίζει εἰς ἔμπορον 2770 δρ. Πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὑάρδα ; Πόσον ὁ πῆχυς τοῦ ἐμπορίου ; Καὶ πόσον τὸ μέτρον ;
(ἡ ὑάρδα 90 δρ., ὁ πῆχυς 63 δρ. καὶ τὸ μ. 98,46 δρ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

208. ***Λόγος*** δύο ἀριθμῶν (ἀφῃρημένων ἢ συγκεκριμένων, ἀλλ' ὁμοειδῶν) λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου. Π. χ. ὁ λόγος τοῦ 12 πρὸς τὸν 4 εἶναι τὸ πηλίκον 12 : 4 ἢ $\frac{12}{4}$ (ἐδ. 96), ἤτοι 3 ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὸν 3 εἶναι $\frac{2}{3}$.

209. Δύο λόγοι ἢ δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντίστροφοι** μεταξύ των, ὅταν τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα 1. Π. χ. οἱ λόγοι $\frac{12}{4}$ ἢ 3 καὶ $\frac{4}{12}$ ἢ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι· διότι εἶναι $\frac{12}{4} \times \frac{4}{12} = 1$ ἢ $3 \times \frac{1}{3} = 1$. Ὥστε οἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{3}{5}$ καὶ 4 ἢ $\frac{4}{1}$ (ἐδάφ. 97) εἶναι οἱ $\frac{5}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$.

210. Πολλάκις ποσόν τι ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἄλλου ποσοῦ. Π. χ. αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας θὰ δώσωμεν, διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ἔλαιον, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὀκάδων, τὰς ὁποίας θὰ ἀγοράσωμεν· διότι ὅσας περισσοτέρας ὀκάδας ἐλαίου θὰ ἀγοράσωμεν, τόσας περισσοτέρας δραχμὰς θὰ δώσωμεν. Αἱ δραχμαὶ λοιπὸν εἶναι ποσὸν μεταβλητόν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὀκάδες εἶναι ποσὸν μεταβλητόν· διότι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας θὰ δώσωμεν. Ποσόν τι δύναται νὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ πολλῶν ἄλλων ποσῶν. Π. χ. αἱ ἡμέραι, αἱ ὁποῖαι χρειάζονται διὰ νὰ κτισθῇ τοῖχός τις, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ἐκ τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας, καὶ ἀκόμη ἐκ τοῦ ὕψους, τοῦ πλάτους καὶ τοῦ πάχους τοῦ τοίχου.

ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

211. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι μὲ 6 δραχμὰς ἀγοράζομεν 8 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος· ἐὰν ὅμως δώσωμεν διπλασίας, τριπλασίας κτλ. δραχμάς, ἤτοι 6×2, 6×3 κτλ., θὰ ἀγοράσωμεν καὶ διπλασίας, τριπλασίας κτλ. ὀκάδας, ἤτοι 8×2, 8×3 κτλ. Ἐὰν πάλιν δώσωμεν τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῶν 6 δραχμῶν, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κλπ. τῶν 8 ὀκάδων. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ ποσὰ **δραχμαὶ καὶ ὀκάδες** ἔχουν τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε, ὅταν ἡ τιμὴ 6 τῶν δραχμῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 τῶν ὀκάδων διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν ἡ τιμὴ 6 τῶν δραχμῶν γίνῃ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ., καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 8 τῶν ὀκάδων γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα**. Ὥστε

212. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀνάλογα**, ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν· Καὶ τἀνάπαλιν, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, διαιρεῖ-

ται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Σημ. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἀλλ' ὅμως συναυξάνονται, ταῦτα δὲν λέγονται ἀνάλογα. Π. χ. αὐξανομένης τῆς ἡλικίας ἑνὸς παιδίου αὐξάνεται καὶ τὸ ἀνάστημά του, ἐν τούτοις τὰ ποσὰ *ἡλικία* καὶ *ἀνάστημα* δὲν εἶναι ἀνάλογα· διότι διπλασιαζομένης, τριπλασιαζομένης κτλ. τῆς ἡλικίας τοῦ παιδίου, δὲν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. τὸ ἀνάστημά του.

213. Εἰς τὰ ἀνάλογα ποσὰ δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Π. χ. ἂν μὲ 6 δρ. ἀγοράζωμεν 8 ὀκάδας, μὲ τριπλασίας δραχμάς, ἤτοι 6×3, θὰ ἀγοράσωμεν καὶ τριπλασίας ὀκάδας, ἤτοι 8×3· ὁ λόγος τῶν 6 καὶ 6×3 δραχμῶν εἶναι $\frac{6}{6\times3}$ ἢ $\frac{1}{3}$, ὁ λόγος πάλιν τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν 8 καὶ 8×3 εἶναι $\frac{8}{8\times3}$ ἢ $\frac{1}{3}$, ἤτοι εἶναι ὁ αὐτός.

214. Ἂς ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι 18 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας· ἐὰν ὅμως ἦσαν διπλάσιοι, τριπλάσιοι κτλ. ἐργάται, ἤτοι 18×2 ἢ 18×3 κτλ., θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῶν ἡμερῶν, ἤτοι εἰς $12:2$ ἢ 6 ἡμέρας, εἰς $12:3$ ἢ 4 ἡμέρας κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν θὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἀριθμὸν ἡμερῶν. Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ ποσὰ **ἐργάται** καὶ **ἡμέραι** ἔχουν τοιαύτην σχέσιν μεταξύ των, ὥστε, ὅταν ἡ τιμὴ 18 τῶν ἐργατῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ., ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. Καὶ τἀνάπαλιν, ὅταν ἡ τιμὴ 18 τῶν ἐργατῶν γίνῃ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ., ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ 12 τῶν ἡμερῶν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κτλ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ **ἀντίστροφα**. Ὥστε

215. Δύο ποσὰ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ **ἀντίστροφα**, ὅταν, πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, διαιρῆται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Καὶ τἀνάπαλιν, διαιρουμένης τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, πολλαπλασιάζεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν.

Σημ. Ὅταν δύο ποσὰ δὲν ἔχουν μεταξύ των τὴν ἀνωτέρω σχέσιν, ἀλλ' ὅμως αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ποσοῦ, ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο, ταῦτα δὲν λέγονται ἀντίστροφα. Ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι χρειαζόμεθα μίαν ὥραν διὰ νὰ διατρέξωμεν ἐν τῇ θαλάσσῃ ἀπόστασίν τινα μὲ λέμβον ἔχουσαν δύο κώπας· ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν κωπῶν διπλασιασθῇ, τριπλασιασθῇ κτλ. θὰ χρειασθῶμεν μὲν ὀλιγώτερον χρόνον, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κτλ. τῆς μιᾶς ὥρας. Ὥστε τὰ ποσὰ κῶπαι καὶ χρόνος δὲν εἶναι ἀντίστροφα.

216. Εἰς τὰ ἀντίστροφα ποσὰ δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου, τὸν ὁποῖον ἔχουν αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Π. χ. ἂν 18 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 12 ἡμέρας, διπλάσιοι ἐργάται, ἤτοι 18×2, θὰ τελειώσουν αὐτὸ εἰς τὸ ἥμισυ τῶν ἡμερῶν, ἤτοι εἰς $12 : 2$ ἢ 6 ἡμ. Ὁ λόγος τῶν 18 καὶ 18×2 ἐργατῶν εἶναι $\frac{18}{18 \times 2}$ ἢ $\frac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν αὐτῶν 12 καὶ 6 ἡμ. εἶναι $\frac{12}{6}$ ἢ $\frac{2}{1}$, ἤτοι 2· οἱ δύο οὗτοι λόγοι εἶναι ἀντίστροφοι, διότι εἶναι $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ (ἐδ. 209).

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

1) ***Πρόβλημα***. Μὲ 270 δραχμὰς ἀγοράζομεν 6 πήχ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 180 δραχμάς;

Κατάταξις. $\frac{270 \text{ δρ.}}{180} \qquad \begin{matrix} 6 \text{ πήχ.} \\ x \end{matrix}$

Θὰ λύσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ πρόβλημα μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ μὲ 270 δραχ. ἀγοράζομεν 6 πήχεις

μὲ 1 δραχ. » $\frac{6}{270}$ τοῦ πήχ.

καὶ μὲ 180 δραχ. » $\frac{6 \times 180}{270}$ ἢ $6 \times \frac{180}{270}$ πήχεις

Ἐὰν τώρα χωρίσωμεν τὰς δύο δοθείσας τιμὰς 270 καὶ 180 τοῦ ἑνὸς ποσοῦ διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς, ὡς δεικνύεται εἰς τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τῶν ἀριθμῶν, καὶ παραβάλωμεν τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $6 \times \frac{180}{270}$ μὲ τὴν κατάταξιν ταύτην, βλέπομεν ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 6 μὲ τὸν λόγον $\frac{270}{180}$, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ δύο τιμαὶ 270 καὶ 180 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ἀντεστραμμένον. Εἶναι δὲ τὰ ποσὰ δραχμαὶ καὶ πήχεις ἀνάλογα (διότι μὲ διπλασίας, τριπλασίας κτλ. δραχμὰς ἀγοράζομεν καὶ διπλασίους, τριπλασίους κτλ. πήχεις).

2) ***Πρόβλημα***. 10 ἐργάται τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 30 ἡμέ-

ρας, 15 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ αὐτὸ ἔργον;

Κατάταξις. $\dfrac{10}{15}$ $\quad$ $\begin{matrix} 30 \text{ ἡμ.} \\ x \end{matrix}$

Λύσις. Ἀφοῦ οἱ 10 ἐργ. τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς 30 ἡμ., ὁ 1 ἐργάτης τελειώνει αὐτὸ εἰς 30×10 ἡμ. καὶ οἱ 15 ἐργ. τελειώνουν αὐτὸ εἰς $\frac{30\times10}{15}$ ἢ $30 \times \frac{10}{15}$ ἡμ. Ἐὰν πάλιν παραβάλωμεν τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον $30\times\frac{10}{15}$ μὲ τὴν ἀνωτέρω κατάταξιν τῶν ἀριθμῶν, βλέπομεν ὅτι τοῦτο εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν 30 μὲ τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ δύο τιμαὶ 10 καὶ 15 τοῦ ἄλλου ποσοῦ, ὅπως ἔχει. Εἶναι δὲ τὰ ποσὰ ἐργάται καὶ ἡμέραι ἀντίστροφα (διότι διπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν γίνεται τὸ ἥμισυ). Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω δύο προβλημάτων μὲ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα μανθάνομεν τὸν ἑξῆς σύντομον κανόνα.

217. ***Ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν μὲ τὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ἄλλου ποσοῦ (ὅταν χωρισθῶσι διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς), ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ὅπως δ' ἔχει, ἂν τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα.***

Τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια τούτων δυνάμεθα νὰ λύωμεν συντόμως μὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, ἀρκεῖ μόνον νὰ διακρίνωμεν, ἂν τὰ δοθέντα ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα· ἀλλὰ τοῦτο οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει.

Ὁ γενικὸς τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν τοῦ αὐτοῦ εἴδους προβλήματα, λέγεται ***μέθοδος***. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰ ἀνωτέρω προβλήματα καὶ τὰ ὅμοια τούτων δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον, διὰ τοῦτο ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν αὐτά, λέγεται ***μέθοδος τῶν τριῶν***. Ὥστε

218. ***Μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς νέαν τιμὴν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.***

3) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 πήχ. 4 ρ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος δίδομεν 70 δρ. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 6 πήχ. 2 ρ. ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

$$\textit{Κατάταξις.}\qquad \frac{2 \text{ πήχ. } 4 \text{ ρ.}}{6 \text{ πήχ. } 2 \text{ ρ.}} \qquad \begin{array}{c} 70 \text{ δρ.} \\ \chi \end{array}$$

Λύσις. Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 2 π. 4 ρ. δίδομεν 70 δρ.· διὰ νὰ ἀγοράσωμεν διπλάσιον ὕφασμα, θὰ δώσωμεν καὶ διπλασίας δραχμάς. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (ὕφασμα καὶ δραχμαὶ) εἶναι ἀνάλογα, ἑπομένως ἔχομεν $\chi=70\times\frac{6 \text{ π. } 2 \text{ ρ.}}{2 \text{ π. } 4 \text{ ρ.}}=70\times\frac{50}{20}=175$ δρ.

Σημ. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρω κλάσματος εἶναι συμμιγεῖς, διὰ τοῦτο ἐτρέψαμεν αὐτοὺς εἰς τὴν αὐτὴν κατωτέραν τάξιν, ἤτοι εἰς ρούπια, διὰ νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Τοῦτο πρέπει νὰ πράττωμεν πάντοτε εἰς τὰ κλάσματα ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα.

4) ***Πρόβλημα.*** Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 4 δρχ. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 3 ὀκάδες;

$$\textbf{Κατάταξις.}\qquad \frac{\frac{5}{8} \text{ ὀκ.}}{3} \qquad \begin{array}{c} 4 \text{ δρ.} \\ \chi \end{array}$$

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ ὀκάδες καὶ δραχμαὶ εἶναι ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ἔχομεν·

$$\chi=4\times\frac{3}{\frac{5}{8}}=4\times3:\frac{5}{8}\ (\text{ἐδ. } 96)=4\times3\times\frac{8}{5}=\frac{96}{5}=19{,}20 \text{ δρ.}$$

$$\text{ἢ } \chi=4\times\frac{3}{\frac{5}{8}}=4\times\frac{3\times8}{\frac{5}{8}\times8}\ (\text{ἐδ } 109)=4\times\frac{24}{5}=\frac{96}{5}=19{,}20.$$

ἢ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{5}{8}=0{,}625$ ἔχομεν $\chi=4\times\frac{3}{0{,}625}=\frac{12000}{625}=19{,}20.$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 6 μέτρα ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος δίδομεν 270 δραχμάς. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 2,50 τοῦ μέτρου ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος; (112,50 δρ.).

2) 100 βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου Κελσίου ἰσοδυναμοῦν μὲ 80 βαθμοὺς τοῦ θερμομέτρου Ρεωμύρου. Μὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἰσοδυναμοῦν 19 βαθμοὶ Κελσίου; Καὶ μὲ πόσους Κελσίου ἰσοδυναμοῦν 14 βαθμοὶ Ρεωμύρου; (15,2 καὶ 17,5).

3) Μὲ 12,50 τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν $\frac{5}{8}$ τοῦ πήχεως ἐξ ἑνὸς

ὑφάσματος. Πόσον ὕφασμα ἀγοράζομεν μὲ 70 δραχμάς; Καὶ πόσον μὲ 42,50 τῆς δραχμῆς $\left(3\frac{1}{2}\text{ π. καὶ } 2\frac{1}{8}\text{ π.}\right)$.

4) Μὲ 11,40 τῆς δραχμῆς ἀγοράζομεν 2 πήχ. 3 ρούπια $\left(2\frac{3}{8}\text{ π.}\right)$ ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 24 δραχμάς; Καὶ πόσον μὲ 4,20 τῆς δραχμῆς; $\left(5\text{ π. καὶ } \frac{7}{8}\text{ π.}\right)$.

5) Μὲ 21 δραχμὰς ἀγοράζομεν 1 ὀκᾶν 100 δράμια σάπωνα. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 46,20 τῆς δραχμῆς; $\left(2\frac{3}{4}\text{ ὀκ.}\right)$.

6) Μία οἰκογένεια λογαριάζει ὅτι, ἂν ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν 120 δράμια ἐλαίου, ἠμπορεῖ νὰ περάσῃ ἕνα μῆνα (30 ἡμ.) μὲ τὸ ἔλαιον τὸ ὁποῖον ἔχει. Πόσον ἔλαιον πρέπει νὰ ἐξοδεύῃ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ περάσῃ 36 ἡμέρας; (100 δράμια).

7) 100 στρατιῶται ἔχουν τροφὰς διὰ νὰ περάσουν 28 ἡμέρας. Ἐὰν ἀναχωρήσουν 30 στρατιῶται ἄνευ τροφῶν, πόσας ἡμέρας θὰ περάσουν οἱ λοιποὶ στρατιῶται μὲ τὰς ἰδίας τροφάς; (40).

8) Ἀτμόπλοιον τρέχει 12 μίλια τὴν ὥραν καὶ ἐχρειάσθη ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν Θεσσαλονίκην $21\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας. Πόσας ὥρας χρειάζεται ἄλλο ἀτμόπλοιον, τὸ ὁποῖον τρέχει 10 μίλια τὴν ὥραν; $\left(25\frac{1}{2}\right)$.

9) Μία μαθήτρια, ὅταν ἐργάζεται 2 ὥρας τὴν ἡμέραν, τελειώνει ἓν ἐργόχειρον εἰς 9 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸ τελειώσῃ, ὅταν ἐργάζεται $1\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας τὴν ἡμέραν; (12).

10) Διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $2\frac{1}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἐξ ἑνὸς πράγματος, δίδομεν 90 δρ. Πόσον θὰ δώσωμεν διὰ 5 ὀκάδας; (200 δρ.).

11) Γυνή τις χρειάζεται διὰ τὸ φόρεμά της $6\frac{1}{2}$ πήχ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 1 πῆχ. 4 ρούπ. Πόσον χρειάζεται ἐξ ἄλλου ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 2 πήχεις; $\left(4\frac{7}{8}\text{ πήχ.}\right)$.

12) Μία ὑφάντρια εἰς 4 ὥρ. 40 λεπτὰ ὑφαίνει ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 1 π. 6 ρούπια. Πόσον ὑφαίνει εἰς 8 ὥρας; Καὶ πόσον εἰς 3 ὥρ. 20 λεπτά; (3 π. καὶ 1 π. 2 ρ.).

οχι 13) Δωμάτιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 5,40 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 4 μέτρα, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος εἶναι 0,90 τοῦ μ. Πόσον μῆκος χρειάζεται ; (24 μ.).

Σημ. Ἐὰν τὸ ὕφασμα ἔχῃ πλάτος 4 μ. χρειάζεται μῆκος=5,40.

14) Ράβδος ὀρθὴ ἐστημένη ἔχει ὕψος 0,90 τοῦ μέτρου καὶ ρίπτει σκιάν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 0,50 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος κυπαρίσσου, ἡ ὁποία κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν στιγμὴν ρίπτει σκιάν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 5,20 ; (9,36 μ.).

15) Δύο αὐτοκίνητα ἀνεχώρησαν ἐκ μιᾶς πόλεως ὥραν 10 π.μ. καὶ μετέβησαν εἰς ἄλλην πόλιν. Τὸ ἓν ἔτρεχε 60 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ἔφθασεν εἰς τὴν πόλιν ὥραν 4 μ. μ., τὸ δὲ ἄλλο ἔφθασε τὴν 2 ὥρ. καὶ 48 λ.. Πόσα χιλιόμετρα ἔτρεχε τὴν ὥραν ; (75).

16) Οἱ ἐντὸς φρουρίου ὑπάρχοντες στρατιῶται ἔχουν τροφὰς διὰ νὰ περάσουν 25 ἡμέρας· ἐὰν εἶναι ἀνάγκη μὲ τὰς αὐτὰς τροφὰς νὰ περάσουν 40 ἡμέρας πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος στρατιώτης ; Καὶ ἂν ἕκαστος ἐλάμβανε πρότερον 240 δρ. ἄρτου, 80 δρ. κρέατος καὶ 60 δρ. τυροῦ, πόσον θὰ λαμβάνῃ τώρα ; $\left(\text{τὰ } \frac{5}{8}\right)$.

Σημ. Σιτηρέσιον λέγεται τὸ μερίδιον τῆς τροφῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἕκαστος κάθε ἡμέραν. Τοῦτο παριστῶμεν διὰ τῆς μονάδος 1.

17) Δύο πόλεις εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 27 μοίρας 20΄. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις, ὅταν ὅλος ὁ μεσημβρινὸς τῆς Γῆς εἶναι 40000 χιλιόμετρα ; (3037,037 τοῦ χιλ.).

Σημ. Ὅλος ὁ μεσημβρινὸς εἶναι 360 μοῖραι.

18) Ὁ μεσημβρινὸς μιᾶς γεωγραφικῆς σφαίρας εἶναι 0,80 τοῦ μέτρου, ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι 0,025 τοῦ μέτρου. Πόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀπόστασις αὐτῶν ; (1250).

Σημ. Τὰ 0,80 τοῦ μέτρου ἀντιστοιχοῦν πρὸς 40000 χιλιόμ. ἐπὶ τῆς Γῆς.

19) 100 ὀκάδες σταφύλια κάμνουν 60 ὀκ. μοῦστον. Πόσα σταφύλια θὰ κάμουν μοῦστον, διὰ νὰ γεμίσωμεν 3 βαρέλια τῶν 600 ὀκάδων τὸ καθέν ; (3000).

20) Μὲ 100 ὀκάδας ἀλεύρου κατασκευάζονται 135 ὀκ. ἄρτου. Πόσον ἄλευρον χρειάζεται διὰ νὰ κατασκευασθῇ ἄρτος πρὸς τροφὴν 432 στρατιωτῶν διὰ 3 ἡμέρας, λαμβάνοντος ἑκάστου τὴν ἡμέραν 300 δρ. ἄρτου ; (720 ὀκ.).

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

1ον) ***Πρόβλημα.*** 120 στρατιῶται διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας χρειάζονται 270 ἄρτους. Πόσους ἄρτους χρειάζονται 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμέρας;

Κατάταξις. $\frac{120}{160}$ στρ. $\frac{3}{5}$ ἡμ. $\frac{270}{\chi}$ ἄρτ.

Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσους ἄρτους χρειάζονται οἱ 160 στρατιῶται, διὰ νὰ περάσουν ὅσας ἡμέρας καὶ οἱ 120, ἤτοι 3 ἡμέρας. Ὥστε ἔχομεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

120 στρατιῶται χρειάζονται (διὰ τρεῖς ἡμέρας) 270 ἄρτους· 160 στρατιῶται πόσους χρειάζονται;

Κατάταξις. $\frac{120}{160}$ στρ. $\frac{270}{\chi}$ ἄρτ.

Λύσις. Τὰ ποσὰ (στρατιῶται καὶ ἄρτοι) εἶναι ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $\chi = 270 \times \frac{160}{120}$ ἄρτους. Ἀλλ' ἡμεῖς θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσους ἄρτους χρειάζονται οἱ 160 στρ. οὐχὶ εἰς 3 ἡμέρας, ἀλλ' εἰς 5· ὥστε ἔχομεν τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα. Διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας χρειάζονται $270 \times \frac{160}{120}$ ἄρτους (οἱ 160 στρ.). διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμ. πόσους ἄρτους χρειάζονται;

Κατάταξις. $\frac{3}{5}$ ἡμ. $\frac{270 \times \frac{160}{120}}{\chi}$ ἄρτ.

Λύσις. Τὰ ποσὰ (ἡμέραι καὶ ἄρτοι) εἶναι ἀνάλογα, ἐπομένως ἔχομεν $\chi = 270 \times \frac{160}{120} \times \frac{5}{3}$. Ὥστε οἱ 160 στρ. διὰ νὰ περάσουν 5 ἡμέρας, χρειάζονται $270 \times \frac{160}{120} \times \frac{5}{3}$, ἤτοι 600 ἄρτους.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ὡς βλέπομεν, ἀνελύθη εἰς δύο προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν (ἤτοι εἰς τόσα, ὅσα εἶναι τὰ δοθέντα ποσὰ πλὴν ἑνός), καὶ διὰ τοῦτο ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται ***σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν***, ἡ δὲ μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται πρὸς διάκρισιν ***ἁπλῆ***. Ὥστε

219. ***Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν λέγεται ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖον λύομεν προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δίδονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων ποσῶν ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ποία τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς νέαν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἄλλων ποσῶν.***

Δὲν εἶναι ὅμως ἀνάγκη νὰ ἀναλύωμεν τὸ πρόβλημα εἰς ἄλλα προβλήματα τῆς ἁπλῆς καὶ νὰ κάμνωμεν ἰδίαν κατάταξιν δι' ἕκαστον· ἀλλ' ὅπως ἔχει διαταχθῆ ἀπ' ἀρχῆς τὸ πρόβλημα, συγκρίνομεν ἕκαστον ποσὸν πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα τιμή, καὶ παρατηροῦμεν, ἂν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς αὐτὸ (ὑποθέτοντες τὰ ἄλλα ποσὰ ὡς μὴ ὑπάρχοντα).

Διὰ νὰ λύσωμεν, π. χ., τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Οἱ 120 στρατιῶται χρειάζονται 270 ἄρτους, διπλάσιοι στρατιῶται θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους. Τὰ ποσὰ λοιπὸν (στρατιῶται καὶ ἄρτοι) εἶναι ἀνάλογα, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν ὑπεράνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμὸν μὲ τὸν λόγον $\frac{120}{160}$ ἀντεστραμμένον, ἤτοι $270 \times \frac{160}{120}$ (τόσους ἄρτους χρειάζονται οἱ 160 στρ. διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμ.). Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ἡμερῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ περάσουν 3 ἡμέρας χρειάζονται $270 \times \frac{160}{120}$ ἄρτους, διὰ νὰ περάσουν διπλασίας ἡμέρας θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίους ἄρτους. Τὰ ποσὰ (ἡμέραι καὶ ἄρτοι) εἶναι ἀνάλογα, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὸν $270 \times \frac{160}{120}$ μὲ τὸν λόγον $\frac{3}{5}$ ἀντεστραμμένον, ἤτοι $270 \times \frac{160}{120} \times \frac{5}{3}$ ἢ 600 ἄρτους.

2ον) ***Πρόβλημα***. 10 ἐργάται 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι ἔσκαψαν εἰς 4 ἡμ. 6 στρέμματα ἀμπέλου. Εἰς πόσας ἡμέρας 12 ἐργ. 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἐργαζόμενοι θὰ σκάψωσι 8 στρέμματα;

Κατάταξις. $\frac{10 \text{ ἐργ.}}{12}$ $\frac{9 \text{ ὥρ.}}{8}$ $\frac{4 \text{ ἡμ.}}{x}$ $\frac{6 \text{ στρ.}}{8}$

Οἱ 10 ἐργάται χρειάζονται 4 ἡμ., διπλάσιοι ἐργάται θὰ χρειασθῶσι τὰς ἡμισείας ἡμέρας· τὰ ποσὰ (ἐργάται καὶ ἡμέραι) εἶναι ἀντίστροφα, ἑπομένως ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12}$ (τόσας ἡμέρας χρειάζονται οἱ 12 ἐργ. ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρ.).

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν ὡρῶν σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Ἂν ἐργάζωνται 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν, χρειάζονται $4 \times \frac{10}{12}$ ἡμέρας, ἂν ἐργάζωνται διπλασίας ὥρας τὴν ἡμέραν θὰ χρειασθῶσι ἡμισείας ἡμέρας· τὰ ποσὰ (ὧραι καὶ ἡμέραι) εἶναι ἀντίστροφα, ἑπομένως ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8}$ (τόσας ἡμέρας χρειάζονται οἱ 12 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας τὴν ἡμέραν διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρέμ.).

Ἔπειτα μεταβαίνομεν εἰς τὸ ποσὸν τῶν στρεμμάτων σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς. Διὰ νὰ σκάψωσιν 6 στρέμ. χρειάζονται $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8}$ ἡμέρας, διὰ νὰ σκάψωσι διπλάσια στρέμματα θὰ χρειασθῶσι καὶ διπλασίας ἡμέρας· τὰ ποσὰ (στρέμματα καὶ ἡμέραι) εἶναι ἀνάλογα, ὥστε ἔχομεν $4 \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{8} \times \frac{8}{6}$ ἢ 5 ἡμ.

Ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

220. ***Ὁ ἄγνωστος χ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸν μὲ ἕκαστον λόγον, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ δύο τιμαὶ ἑκάστου ποσοῦ (ὅταν χωρισθῶσι διὰ μιᾶς ὁριζοντίας γραμμῆς)· ἀντεστραμμένον μέν, ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσόν, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τιμή· ὅπως δ' ἔχει, ἂν εἶναι ἀντίστροφον.***

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) 5 γυναῖκες ἔρραψαν εἰς 10 ἡμέρας 45 ὑποκάμισα. Πόσα ὅμοια ὑποκάμισα θὰ ράψουν 8 γυναῖκες εἰς 15 ἡμέρας; (108).

2) Ὁδοιπόρος, βαδίζων 7 ὥρ. τὴν ἡμέραν, χρειάζεται 3 ἡμέρας διὰ νὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 105 χιλιομ. Ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ ἀπόστασιν 200 χιλιομέτρων; (5).

3) Μὲ 1332 δρ. ἠγόρασέ τις 3 δοχεῖα ἐλαίου καὶ τὸ καθὲν περιέχει 18 ὀκ. 200 δράμια· ἔπειτα ἠγόρασεν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ἐλαίου 5 δοχεῖα καὶ τὸ καθὲν περιέχει 20 ὀκ. Πόσον ἔδωσε; (2400).

4) Διὰ νὰ πατωθῇ δωμάτιόν τι διὰ σανίδων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι 2,80 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 0,25, χρειάζονται 40 σανίδες· ἐὰν τὸ μῆκος αὐτῶν εἶναι 2 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 0,20, πόσαι σανίδες χρειάζονται; (70).

5) Μία κόρη, ὅταν ἐργάζεται 3 ὥρας τὴν ἡμέραν, πλέκει εἰς 14 ἡμέρας 6 πήχ. δαντέλλα. Ὅταν ἐργάζεται $3\frac{1}{2}$ τῆς ὥρ. τὴν ἡμέραν, πόσην δαντέλλα θὰ πλέξῃ εἰς 16 ἡμέρας; (8 πήχ.).

6) Μία ὑφάντρια, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἓν ὕφασμα, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 30 πήχ. καὶ τὸ πλάτος 7 ρούπια, χρειάζεται 6 ὀκ. 50 δράμ. νήματος. Πόσον νῆμα χρειάζεται, διὰ νὰ ὑφάνῃ ἐκ τοῦ ἰδίου ὑφάσματος μῆκος 40 πήχ. καὶ πλάτος $1\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως; (14 ὀκ.).

7) Διὰ νὰ κάμωμεν 1 τραπεζομάνδηλον ἀπὸ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 2 πήχ. 2 ρούπια, θέλομεν $3\frac{1}{2}$ τοῦ πήχεως. Διὰ νὰ κάμωμεν 3 τραπεζομάνδηλα ἴσα μὲ αὐτὸ ἀπὸ ἄλλο ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἔχει πλάτος 2 π. 5 ρούπια, πόσον ὕφασμα θέλομεν; (9 π.).

8) 5 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν ἔσκαψαν εἰς 20 ἡμ. τάφρον ἔχουσαν μῆκος 100 μέτρα, πλάτος 0,80 τοῦ μέτρου καὶ βάθος 1,20 μ. Εἰς πόσας ἡμέρας 6 ἐργάται, ἐργαζόμενοι 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν, θὰ σκάψουν ἄλλην τάφρον ἔχουσαν μῆκος 90 μέτρα, πλάτος 0,60 μ. καὶ βάθος 1 μ.;

(8 ἡμ. 3 ὥρ. Ἡ ἐργάσιμος ἡμέρα εἶναι 9 ὥρ.).

9) Προαύλιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 6 μέτρα καὶ τὸ πλάτος 4,50 τοῦ μέτρου, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι 0,25 τοῦ μέτρου καὶ τὸ πλάτος 0,2 τοῦ μ. Πόσαι πλάκες χρειάζονται; (540).

Σημ. Ἐὰν ἑκάστη πλὰξ ἔχῃ μῆκος 6 μ. καὶ πλάτος 4,50 χρειάζεται μία πλάξ.

10) Ἔργον τι συνεφωνήθη νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 25 ἡμέρας· πρὸς τοῦτο ἐμισθώθησαν 6 ἐργάται, οἱ ὁποῖοι ἐντὸς 10 ἡμερῶν ἐξετέλεσαν τὸ τρίτον τοῦ ἔργου. Ζητεῖται πόσοι ἐργάται πρέπει νὰ προσληφθῶσιν ἀκόμη, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς ὡρισμένης προθεσμίας. (2).

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΤΟΣΟΝ ΤΟΙΣ ΕΚΑΤΟΝ (ποσοστά).

221. Εἰς τὸ ἐμπόριον καὶ εἰς ἄλλας χρηματικὰς ἐπιχειρήσεις ἐπεκράτησε συνήθεια νὰ ὑπολογίζηται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ποσοῦ τινος ἐπὶ τῇ βάσει 100 μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ. Ἄς ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι ἔμπορός τις ἐκ τῆς πωλήσεως ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀγοράσει 400 δραχμάς, ἐκέρδισε 36 δρ. καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσον ἐκέρδισεν ἐπὶ ὑφάσματος ἔχοντος ἀξίαν ἀγορᾶς 100 δρ. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς 36 δρ. διὰ 4 (διότι 4 ἑκατοντάδας ἔχουσι αἱ 400 δρ.), εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰς 100 δρ. ἐκέρδισεν 9 δραχμάς· λέγομεν τότε ὅτι ἐκέρδισεν 9 **τοῖς ἑκατὸν** ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ γράφομεν τοῦτο συμβολικῶς ὡς ἑξῆς 9 %. Ἐνίοτε ὑπολογίζεται τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία καὶ ἐπὶ τῇ βάσει 1000 μονάδων· ὥστε, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκέρδισέ τις 2 δρ. εἰς χιλίας δραχμάς, λέγομεν 2 ἐπὶ **τοῖς χιλίοις** καὶ γράφομεν 2 ‰. Τὸ τόσον τοῖς ἑκατὸν ἢ τοῖς χι-

λίοις λέγεται καὶ **ποσοστόν**. Τὰ προβλήματα ταῦτα λύομεν μὲ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἓν ὕφασμα μὲ 750 δραχμάς, κατόπιν τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 8 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε;

Κατάταξις. εἰς 100 δρ. ἐκέρδισε 8 δρ.
εἰς 750 δρ. » χ

Εὑρίσκομεν ὅτι ἐκέρδισε $8 \times \frac{750}{100} = 8 \times 7{,}50 = 60$ δρ.

Βλέπομεν ὅτι τὸ κέρδος εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἑκατοστὸν τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς τοῦ ὑφάσματος ἐπὶ 8.

Ἀσκήσεις νοεραί. Πόσον κερδίζομεν ἐξ ἑνὸς πράγματος, ὅταν κοστίζῃ.

α') 900 δρ. καὶ πωληθῇ μὲ κέρδος 5 %, 6 %, 8 %, 10 %;

Σημ. Μὲ 5 % κερδίζομεν $9 \times 5 = 45$ δρ. Διότι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ 900 εἶναι 9 (παραλείπομεν τὰ δύο μηδενικά του).

β') 400 δρ. καὶ πωληθῇ μὲ κέρδος 10 %, 12 %, 15 %, 20 %;
γ') 600 δρ. » » 4 %, 7 %, 9 %, 10 %;
δ') 3000 δρ. » » 7 %, 9 %, 20 %, 25 %;
ε') 1200 δρ. » » 5 %, 20 %, 30 %, 40 %;

2) Ἔμπορός τις πωλεῖ τὰ ὑφάσματά του μὲ κέρδος 20 % ἐπὶ τῆς ἀξίας των. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἀξίζει 650 δραχμάς;

Λύσις. Ἂν ἀξίζῃ 100 δρ. θὰ κερδίσῃ 20 καὶ θὰ τὸ πωλήσῃ 120 δραχ.

Κατάταξις. Ἂν ἀξίζῃ 100 δρ. θὰ τὸ πωλήσῃ 120 δρ.
» 650 δρ. » χ

Εὑρίσκομεν 780 δρ. Τὸ πρόβλημα λύομεν συντόμως καὶ χωρὶς κατάταξιν ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κέρδος τῶν 650 δραχμῶν μὲ 20 %, τὸ ὁποῖον εἶναι $6{,}50 \times 20$ ἢ 130 δρ. καὶ προσθέτομεν αὐτὸ εἰς τὰς 650 δρ. ἤτοι $650 + 130$ ἢ 780 δρ.

Ἀσκήσεις νοεραί. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσωμεν πρᾶγμά τι, τὸ ὁποῖον κοστίζει:

α') 800 δρ. διὰ νὰ κερδίσωμεν 5 %, 8 %, 15 %, 20 %;

Σημ. Μὲ 5 % θὰ κερδίσωμεν 8×5 ἢ 40 δρ. καὶ θὰ τὸ πωλήσωμεν 640 δρ.

β') 600 δρ. διὰ νὰ κερδίσωμεν 8 %, 9 %, 10 %, 12 %;
γ') 700 δρ. » 9 %, 20 %, 15 %, 30 %;
δ') 40 δρ. » 7 %, 9 %, 20 %, 25 %;
ε') 160 δρ. » 5 %, 6 %, 10 %, 20 %;

3) Ἠγόρασέ τις χωράφιον μὲ 13500 δραχμάς, κατόπιν τὸ ἐπώ-

λησε 14580 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του;

Εἰς 13500 δρ. ἐκέρδισε 1080 δρ.
100 δρ. » x $(=8\ \%)$.

4) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 54000 δραχμῶν καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ τὰς πληρώσῃ ἀργότερον, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰς ἐπλήρωσεν ἀμέσως, τοῦ ἀφήρεσαν 4 % ἐκ τῆς ἀξίας των (τοῦτο λέγεται **ἔκπτωσις ἢ σκόντο**). Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ;

Κατάταξις. Ἂν ἀξίζουν 100 δρ. θὰ πληρώσῃ 96
» 54000 » x
$(=51840)$.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς χωρὶς κατάταξιν. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἔκπτωσιν πρὸς 40 % ἡ ὁποία εἶναι 540×4 ἢ 2160 δρ. καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦμεν αὐτήν, $54000 - 2160 = 51840$ δρ.

Σημ. Πᾶν ὅ,τι χρησιμεύει πρὸς συσκευὴν ἐμπορεύματος (ἤτοι κιβώτιον, βαρέλιον, σάκκος κτλ.) διὰ τὴν εὔκολον καὶ ἀσφαλῆ μετακόμισίν του λέγεται **ἀπόβαρον** (κοινῶς **ντάρα**). Τὸ ὁλικὸν βάρος ἐμπορεύματος μετὰ τοῦ ἀποβάρου του λέγεται **μικτὸν βάρος**. Τὸ δὲ βάρος, τὸ ὁποῖον μένει ὅταν ἀπὸ τὸ μικτὸν ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀπόβαρον λέγεται **καθαρὸν** (νέτο) βάρος.

5) Βαρέλια περιέχουν ἔλαιον καὶ ζυγίζουν 2950 ὀκάδες. Ἐὰν τὸ ἀπόβαρον εἶναι 12 %, πόσον εἶναι τὸ καθαρὸν ἔλαιον;

μ. βάρος 100 ὀκ. καθαρὸν 88 ὀκ.
» 2950 » x $(=2596$ ὀκ.$)$.

Ἢ καὶ ὡς ἑξῆς. Τὸ ἀπόβαρον εἶναι $29{,}50 \times 12$ ἢ 354 ὀκ. καὶ τὸ καθαρὸν ἔλαιον εἶναι $2950 - 354 = 2596$ ὀκ.

Σημ. Ἡ ἀμοιβή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ διαπραγματευόμενος τὴν ἀγορὰν ἢ πώλησιν ἐμπορεύματος μεταξὺ ἀγοραστοῦ καὶ πωλητοῦ, λέγεται **μεσιτεία**, οὗτος δὲ λέγεται **μεσίτης**. Ἡ δὲ ἀμοιβή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ ἀγοράζων ἢ πωλῶν ἐμπορεύματα κατ' ἐντολὴν καὶ διὰ λογαριασμὸν ἄλλου, λέγεται **προμήθεια**, οὗτος δὲ λέγεται **παραγγελιοδόχος**.

6) Ἠγόρασέ τις διὰ μεσίτου μίαν οἰκίαν ἀξίας 285600 δρχ. Πόσον θὰ πληρώσῃ διὰ μεσιτείαν πρὸς $\frac{1}{2}$ %; (2142 δρ.).

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὑπάλληλος ἐμπορικοῦ καταστήματος, ἐκτὸς τοῦ μισθοῦ του, λαμβάνει ποσοστὰ 4 % ἀπὸ τὰ κέρδη. Ἐὰν τὰ κέρδη τοῦ μηνὸς εἶναι 18450 δραχμαί, πόσας θὰ λάβῃ; (738).

2) Ἔμπορός τις πωλεῖ τὰ ὑφάσματά του μὲ ἔκπτωσιν 15 % ἐπὶ τῆς ἐπ' αὐτῶν γραμμένης τιμῆς. Πόσον θὰ πληρώσωμεν διὰ ὕφασμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι γραμμένη ἡ τιμὴ 270 δραχμαί; (229,50).

3) Στρατιῶται ἀσκούμενοι εἰς τὴν σκοποβολὴν ἔρριψαν 24000 βολὰς καὶ ἐπέτυχον τοῦ σκοποῦ 14400 βολαί. Πόσον τοῖς ἑκατὸν εἶναι ἡ ἐπιτυχία; (60 %).

4) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἓν ὕφασμα πρὸς 143 δρ. τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του 10 %. Πόσον τὸ ἠγόρασε; (130).

5) Ἐπώλησέ τις ἔλαιον ἀντὶ 21600 δραχμῶν καὶ ἐκέρδισε 3600 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του; (20 %).

Σημ. Τὸ ἠγόρασε 21600—3600 ἢ 18000.

6) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἐμπορεύματα ἀντὶ 6439 δρχ. καὶ ἐζημιώθη 411 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐζημιώθη ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς των; (6 %).

7) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἓν ὕφασμα πρὸς δρ. 60,80 τὸν πῆχυν καὶ ἐζημιώθη 5 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον ἠγόρασε τὸν πῆχυν; (64 δρ.).

8) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα, τὰ ὁποῖα μαζὶ μὲ τὴν προμήθειαν 2 % ἐκόστισαν 46716 δρ. Πόσον τὰ ἠγόρασε; (45800).

Σημ. Ἂν τὰ ἠγόρασεν 100 δρ. ἐκόστισαν 102.

9) Ἔχει τις χωράφια $7\frac{1}{2}$ στρεμμάτων καὶ τὸ κάθε στρέμμα ἔκαμε πέρυσι 96 ὀκ. σίτου· ἐφέτος ἡ παραγωγὴ εἶναι 30 % μεγαλυτέρα τῆς περυσινῆς. Πόσαι ὀκάδες σίτου εἶναι ἡ ἐφετεινὴ παραγωγή; (936).

10) Παντοπώλης τις πωλεῖ τὴν ζάχαριν πρὸς δρ. 22,40 τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 12 % ἐπὶ τῆς ἀξίας της. Πόσον τοῖς ἑκατὸν θὰ κερδίζῃ, ἂν τὴν πωλῇ πρὸς δρ. 22,10 τὴν ὀκᾶν; (10,50 %).

11) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως ἦτο πρὸ ὀλίγων ἐτῶν 62450 τώρα εἶναι 69944. Πόσον τοῖς χιλίοις ηὐξήθη; (120 ‰).

12) Ἠγόρασέ τις μετοχὰς (1) πρὸς 800 δρ. τὴν μίαν. Ἐὰν τὸ ἐτή-

(1) Αἱ μεγάλαι ἐμπορικαὶ καὶ βιομηχανικαὶ ἐπιχειρήσεις χρειάζονται καὶ μεγάλα χρηματικὰ ποσά, διὰ τοῦτο οἱ ἀναλαμβάνοντες τοιαύτας ἐπιχειρήσεις διαιροῦν τὰ μεγάλα ταῦτα ποσὰ εἰς πολλὰ μικρὰ ἴσα μέρη ἀπὸ 100, 200 κτλ δραχμὰς τὸ καθὲν καὶ ἐκδίδουν ἔγγραφα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τοιαύτας ἀξίας, καὶ

σιον μέρισμα (κέρδος) ἑκάστης μετοχῆς εἶναι δρ. 54,40, πόσον τοῖς ἑκατὸν κερδίζει ; (6,80 %).

13) Ἠγοράσαμεν μετοχάς, αἱ ὁποῖαι δίδουν τὸ ἔτος κέρδος 8 % καὶ ἀπὸ ἑκάστην ἔχομεν ἐτήσιον κέρδος δρ. 62,40. Πόσον ἠγοράσαμεν ἑκάστην ; (780 δρ.).

14) Τὰ ἐν χρήσει μεταλλικὰ δίδραχμα ἔχουν βάρος 7,5 τοῦ γραμμαρίου καὶ περιέχουν χαλκὸν 75 % καὶ νικέλιον 25 %. Πόσον χαλκὸν καὶ πόσον νικέλιον περιέχουν 400 δίδραχμα ;

(225 καὶ 75 γραμ.)·

15) Πρόκειται εἰς μίαν πόλιν νὰ κτισθῇ σχολεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία προϋπελογίσθη εἰς 250000 δρ. Ἐργολάβος τις δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τοῦτο μὲ 220000 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔκπτωσιν πρέπει νὰ προσφέρῃ ἐπὶ τῆς προϋπολογισθείσης ἀξίας, διὰ νὰ κερδίσῃ 18000 δραχμάς ; (4,8 %).

16) Ὁ καφὲς κοστίζει εἰς παντοπώλην 11,20 φράγκα γαλλικὰ τὸ κιλὸν (0,78 τῆς ὀκᾶς) τὸ φράγκον κατὰ τὴν ἀγορὰν εἶχε δρ 5,40. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ 12 % ; (86,84).

17) Ὕφασμά τι κοστίζει εἰς ἔμπορον 15 σελίνια ἡ ὑάρδα. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίζῃ 15 % ; Ἡ ἀγγλικὴ λίρα κατὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ ὑφάσματος εἶχε 560 δρ.

(338,10).

18) Βιβλιοπώλης τις ἠγόρασεν ἀπὸ τὴν Γερμανίαν ἓν βιβλίον ἀντὶ 2 μάρκων καὶ ἐξώδευσε διὰ τὴν μεταφοράν του 8 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τὸ πωλήσῃ, διὰ νὰ κερδίσῃ 14 % ; Τὸ μάρκον κατὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ βιβλίου εἶχε 32 δραχμάς.

(78,80)..

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

222. Ὅταν ἐνοικιάζῃ τις τὴν οἰκίαν του εἰς ἄλλον, εἶναι δίκαιον νὰ λαμβάνῃ παρ' αὐτοῦ κέρδος τι, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἐνοίκιον**· οὕτω καὶ ὅταν δανείζῃ τις χρήματα εἰς ἄλλον, εἶναι δίκαιον νὰ

λέγονται *μετοχαί*· τὰς μετοχὰς ἀγοράζουν πολλοὶ ἄνθρωποι καὶ οὕτω συναθροίζωνται μεγάλα ποσά. Τὰ κέρδη τῆς ἐπιχειρήσεως μοιράζονται κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξαμηνίαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ μετοχαί, τὸ δὲ κέρδος ἑκάστης μετοχῆς λέγεται *μέρισμα*. Ἡ ἀρχικὴ ἀξία τῶν μετοχῶν μεταβάλλεται εἰς τὴν ἀγορὰν ἀναλόγως τοῦ κέρδους, τὸ ὁποῖον φέρουν.

λαμβάνῃ παρ' αὐτοῦ κέρδος τι, ὡς ἐνοίκιον τρόπον τινὰ τῶν δανεισθέντων χρημάτων του, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **τόκος**. Ὥστε

Τόκος λέγεται τὸ κέρδος τὸ προερχόμενον ἀπὸ τὰ δανειζόμενα χρήματα.

Ὁ τόκος τῶν δανειζομένων χρημάτων ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν 100 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος (συνήθως). Ἂν π. χ. δανεισθῇ τις χρήματα παρ' ἄλλου, πρέπει νὰ συμφωνήσῃ μετ' αὐτοῦ, πόσον θὰ τοῦ δίδῃ τόκον (ἤτοι κέρδος) εἰς κάθε 100 δραχμὰς καὶ εἰς 1 ἔτος· καὶ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι συνεφώνησαν νὰ δίδῃ 8 δραχμάς, ὁ τόκος οὗτος τῶν 100 δραχμῶν λέγεται ἰδίως **ἐπιτόκιον**. Ὥστε

Ἐπιτόκιον λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος. Τὸ ἐπιτόκιον σημειοῦται καὶ ἐδῶ διὰ τοῦ συμβόλου %, ἤτοι 8 %, καὶ ἀπαγγέλλεται ***ὀκτὼ τοῖς ἑκατόν***. ***Κεφάλαιον*** λέγεται τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων. ***Χρόνος*** λέγεται ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ δανείου.

Ὁ τόκος εἶναι ***ἁπλοῦς*** ἢ ***σύνθετος***. Ἁπλοῦς μὲν λέγεται, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου. Σύνθετος δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (συνήθως) προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ, καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος. Λέγομεν δὲ τότε ὅτι τὸ κεφάλαιον ***ἀνατοκίζεται***.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ προβλήματα τοῦ τόκου παρουσιάζονται τέσσαρα ποσά, ἤτοι τόκος, κεφάλαιον, ἐπιτόκιον καὶ χρόνος, ἐκ τῶν ὁποίων δίδονται τὰ τρία ποσὰ καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον, διὰ τοῦτο τὰ προβλήματα τοῦ τόκου διακρίνονται εἰς τέσσαρα εἴδη καὶ λύονται μὲ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν (ἢ μὲ τὴν ἁπλῆν ὅταν ἓν ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων ποσῶν μένῃ ἀμετάβλητον).

1ον) Εὕρεσις τοῦ τόκου.

Πρόβλημα. Πόσον τόκον φέρουν 525 δρ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 8 %;

Κατάταξις. $\dfrac{100}{525}$ κεφ. $\dfrac{1}{3}$ ἔτ. $\begin{matrix} 8 \\ x \end{matrix}$ τόκ.

Λύσις. Κεφάλαιον 100 δρ. φέρει τόκον 8 δρ. (εἰς 1 ἔτος), διπλάσιον κεφάλαιον θὰ φέρῃ καὶ διπλάσιον τόκον. Τὰ ποσὰ (κεφάλαιον καὶ τόκος) εἶναι ἀνάλογα καὶ ἐπομένως ἔχομεν $8 \times \dfrac{525}{100}$.

Εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον $8 \times \dfrac{525}{100}$ (κεφάλ. 525 δρ.), εἰς διπλάσια ἔτη θὰ φέρῃ καὶ διπλάσιον τόκον. Τὰ ποσὰ (χρόνος καὶ τόκος) εἶναι ἀνάλογα καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$8 \times \frac{525}{100} \times \frac{3}{1}$ ἢ $\frac{8 \times 525 \times 3}{100}$ ἤτοι 126 δρ. Τὸ ἐξαγόμενον $\frac{8 \times 525 \times 3}{100}$ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ κεφάλαιον 525 ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον 8 καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον 3 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ 100. Ἐκ τούτου λοιπὸν μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

223. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100.***

Ἐὰν τὰ ποσὰ ***Τόκον***, ***Κεφάλαιον***, ***Ἐπιτόκιον*** καὶ ***Χρόνον*** παραστήσωμεν μὲ τὰ ἀρχικὰ αὐτῶν γράμματα Τ, Κ, Ε, Χ, ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου $Τ = \frac{Κ.Ε.Χ}{100}$.

Σημ. Εἰς τὸν ἀνωτέρω κανόνα ὑποτίθεται ὅτι ὁ χρόνος ἔχει δοθῇ εἰς ἔτη· ἐὰν ὅμως δοθῇ εἰς μῆνας ἢ ἡμέρας, ἢ εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν πρῶτον αὐτὸν εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα (ἐνθυμούμενοι ὅτι τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνας καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος μὴν λογίζεται μὲ 30 ἡμ. πρὸς εὐκολίαν τῶν πράξεων, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ἔτος λογίζεται μὲ 360 ἡμ.). Ἐν γένει ὁ χρόνος τρέπεται εἰς μονάδας τῆς τάξεως ἐκείνης εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται καὶ ἡ χρονικὴ μονὰς τοῦ ἐπιτοκίου).

Ἐφαρμογαί. 1) Πόσον τόκον φέρουν 360 δραχμαὶ εἰς 4 μῆνας πρὸς 10 %;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι 4 μῆνες $= \frac{4}{12}$ τοῦ ἔτους, ἔχομεν

$$Τ = \frac{360 \times 10 \times \frac{4}{12}}{100} = \frac{360 \times 10 \times \frac{4}{12} \times 12}{100 \times 12} \text{ (ἐδ.147)} = \frac{360 \times 10 \times 4}{100 \times 12} = 12.$$

2) Πόσον τόκον φέρουν 3000 δρ. εἰς 2 ἔτ. 3 μ. πρὸς 7,50 %;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι 2 ἔτη 3 μ. $= \frac{27}{12}$ τοῦ ἔτους, ἔχομεν

$$Τ = \frac{3000 \times 7{,}50 \times \frac{27}{12}}{100} = \frac{3000 \times 7{,}50 \times 27}{100 \times 12} = 506{,}25.$$

3) Πόσον τόκον φέρουν 800 δρ. εἰς 3 μῆν. 15 ἡμ. πρὸς 9 %;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι 3 μῆν. 15 ἡμ. $= \frac{105}{360}$ τοῦ ἔτους, ἔχομεν

$$Τ = \frac{800 \times 9 \times \frac{105}{360}}{100} = \frac{800 \times 9 \times 105}{100 \times 360} = 21 \text{ δρ.}$$

4) Πόσον τόκον φέρουν 7000 δραχμαὶ εἰς 1 ἔτος πρὸς 8 %;

Λύσις. $T = \frac{7000 \times 8 \times 1}{100} = 70 \times 8$ ἢ 560 δρ. Βλέπομεν ὅτι πολλαπλασιάζεται τὸ ἑκατοστὸν τοῦ κεφαλαίου ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον. Ὥστε ***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἐτήσιον τόκον κεφαλαίου, πολλαπλασιάζομεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον.***

Π. χ. ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 7560 δραχμῶν πρὸς 9 % εἶναι 75,60×9 ἢ 680,40 δρ. Ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν 3000 δρ πρὸς 5 % εἶναι 30×5 ἢ 150 δρ. (ἀπεκόψαμεν τὰ δύο μηδενικὰ τοῦ 3000).

Ἀσκήσεις νοεραί, 1) Πόσος εἶναι ὁ ἐτήσιος τόκος τῶν

α΄) 600	δραχμῶν	πρὸς 4 % ;	πρὸς 7 % ;	πρὸς 9 % ;	πρὸς 10 % ;
β΄) 900	»	πρὸς 5 % ;	πρὸς 6 % ;	πρὸς 7 % ;	πρὸς 9 % ;
γ΄) 2000	»	πρὸς 4 % ;	πρὸς 5 % ;	πρὸς 9 % ;	πρὸς 10 %
δ΄) 9000	»	πρὸς 8 % ;	πρὸς 10 % ;	πρὸς 12 % ;	πρὸς 7 % ;
ε΄) 15000	»	πρὸς 4 % ;	πρὸς 5 % ;	πρὸς 5 % ;	πρὸς 8 % ;
στ΄) 6000	»	πρὸς $4\frac{1}{2}$ % ;	πρὸς $5\frac{1}{2}$ % ;	πρὸς $6\frac{1}{2}$ % ;	

2ον) Εὕρεσις τοῦ κεφαλαίου.

Πρόβλημα. Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 10 % καὶ ἔφερε τόκον 84 δραχμάς;

Κατάταξις. 100 κεφ. $\frac{1}{3}$ ἔτ. $\frac{10}{84}$ τόκ.
χ

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα, ἔχομεν $100 \times \frac{84}{10}$. Εἰς 1 ἔτος πρέπει νὰ τοκίσωμεν κεφάλαιον $100 \times \frac{84}{10}$ (διὰ νὰ λάβωμεν τόκον 84 δρ.), εἰς διπλάσια ἔτη πρέπει νὰ τοκίσωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου (διὰ νὰ λάβωμεν τὸν ἴδιον τόκον). Ὥστε τὰ ποσὰ (χρόνος καὶ κεφάλαιον) εἶναι ἀντίστροφα καὶ ἑπομένως ἔχομεν $100 \times \frac{84}{10} \times \frac{1}{3}$ ἢ $\frac{100 \times 84}{10 \times 3}$ ἤτοι 288. Τὸ ἐξαγόμενον $\frac{100 \times 84}{10 \times 3}$ εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν τόκον 84 ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ ἐπιτοκίου 10 καὶ τοῦ χρόνου 3. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

224. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τοῦ χρόνου.***

Ὁ τύπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου εἶναι ὁ ἑξῆς : $K = \frac{T.\ 100}{E.\ X}$.

Ἐφαρμογή. 1) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 1 ἔτ. 2 μῆνας πρὸς 8 $^0/_0$ καὶ ἔφερε τόκον 42 δραχμάς; Ἔχομεν

$$K = \frac{42\times100}{8\times\frac{14}{12}} = \frac{42\times100\times12}{8\times\frac{14}{12}\times12} = \frac{42\times100\times12}{8\times14} = 450 \text{ δρχ.}$$

2) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη εἰς ἓν ἔτος πρὸς 6 $^0/_0$ καὶ ἔφερε τόκον 1800 δραχμάς;

Λύσις. $K = \frac{1800\times100}{6\times1} = 300\times100$ ἢ 30000 δρ. Βλέπομεν ὅτι διαιρεῖται ὁ ἐτήσιος τόκος διὰ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100. Εἰς τοῦτο στηριζόμενοι λύομεν νοερῶς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις.

Ἀσκήσεις νοεραί. 1) Ὁ ἐτήσιος τόκος κεφαλαίου εἶναι 1600 δρ. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον πρὸς 8 $^0/_0$;

Λύσις. Τὸ πηλίκον τοῦ 1600 διὰ 8 εἶναι 200, ἑπομένως τὸ κεφάλαιον εἶναι 200×100 ἢ 20000 δρ.

2) Ποῖον κεφάλαιον τοκιζόμενον εἰς ἓν ἔτος,

α΄) πρὸς 4 $^0/_0$ φέρει τόκον 12, 20, 360, 400 δραχμάς ;

β΄) πρὸς 5 $^0/_0$ φέρει τόκον 25, 40, 50, 450 δραχμάς ;

γ΄) πρὸς 6 $^0/_0$ φέρει τόκον 12, 18, 300, 240 δραχμάς ;

δ΄) πρὸς 8 $^0/_0$ φέρει τόκον 240, 400, 720, 1600 δραχμάς ;

ε΄) πρὸς 9 $^0/_0$ φέρει τόκον 180, 450, 360, 2700 δραχμάς ;

στ΄) πρὸς 10 $^0/_0$ φέρει τόκον 300, 560, 3800, 700 δραχμάς ;

3ον) Εὕρεσις τοῦ ἐπιτοκίου.

Πρόβλημα. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 5370 δραχμῶν καὶ ἔφερεν εἰς 2 ἔτη τόκον 429,60 δρ.;

Κατάταξις. $\frac{5370 \text{ κεφ.}}{100}$ $\quad \frac{2 \text{ ἔτη}}{1}$ $\quad \frac{429{,}60 \text{ τόκ.}}{\chi}$

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ κεφάλαιον καὶ τόκος, χρόνος καὶ τόκος εἶναι ἀνάλογα, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$\chi = 429{,}60 \times \frac{100}{5370} \times \frac{1}{2}, \text{ ἤτοι } 4\ ^0/_0.$$

Τὸ ἐξαγόμενον εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωσεν τὸν τόκον 429,60 ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κεφαλαίου 5370 καὶ τοῦ χρόνου 2. Ἐκ τούτου μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

225. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐπιτόκιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ χρόνου.***

Ὁ τύπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου εἶναι ὁ ἑξῆς $Ε = \frac{Τ. 100}{Κ. Χ.}$.

Ἐφαρμογή. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη κεφάλαιον 2600 δρ. καὶ ἔφερεν εἰς 7 μῆνας τόκον 68,25 δρ.; Ἔχομεν

$$Ε = \frac{68,25 \times 100}{2600 \times \frac{7}{12}} = \frac{68,25 \times 100 \times 12}{2600 \times 7} = 4,5\ \%$$

4ον) Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

Πρόβλημα. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 900 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 4,5 %, θὰ φέρῃ τόκον 128,25 δραχ.;

Κατάταξις.

100 κεφ.	1 ἔτ.	4,50 τόκ.
900	χ	128,25

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ μὲν ποσὰ κεφάλαιον καὶ χρόνος εἶναι ἀντίστροφα, τὰ δὲ ποσὰ τόκος καὶ χρόνος εἶναι ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ἔχομεν $χ = 1 \times \frac{100}{900} \times \frac{128,25}{4,50}$, ἤτοι 3 ἔτη 2 μῆνας. Ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

226. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν χρόνον, πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων ποσῶν, ἤτοι τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου.***

Ὁ τύπος πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου εἶναι ὁ ἑξῆς $Χ = \frac{Τ. 100}{Κ. Ε.}$

Ἐφαρμογή. Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 1200 δρ. τοκιζόμενον πρὸς 9 %, φέρει τόκον 48 δρ.; Ἔχομεν $\frac{48 \times 100}{1200 \times 9}$ ἢ 5 μ. 10 ἡμ.

Παρατήρησις. Οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες τέσσαρες κανόνες δύνανται νὰ συγχωνευθῶσιν εἰς τὸν ἑξῆς ἕνα μόνον.

227. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον, πολλαπλασιάζομεν τὸ κεφάλαιον ἐπὶ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ τὸν χρόνον καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100. Διὰ νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ἄλλο ποσὸν (ἤτοι τὸ κεφάλαιον ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸν χρό-***

νον), πολλαπλασιάζομεν τὸν τόκον ἐπὶ 100 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων δεδομένων ποσῶν.

Σημ. Ἐνθυμούμενοι νὰ τρέπωμεν τὸν χρόνον εἰς κλάσμα τοῦ ἔτους, ἐὰν δὲν ἔχῃ δοθῆ εἰς ἔτη.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσον τόκον φέρουν 2400 δρ. εἰς 1 ἔτ. 3 μῆν. 6 ἡμ. πρὸς $6\frac{1}{4}$ %; (190).

2) Πόσον χρόνον ἐτοκίσθησαν 1500 δρ. πρὸς 9 % καὶ ἔφερον τόκον 26,25; (2 μ. 10 ἡμ.).

3) Ποῖον κεφάλαιον ἐτοκίσθη ἐπὶ 1 ἔτος 3 μ. πρὸς 7,50 % καὶ ἔφερε τόκον δρ. 562,50; (6000).

4) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν 3000 δρ. καὶ ἔφερον εἰς 1 ἔτ. 1 μ. 10 ἡμ. τόκον 200 δραχμάς; (6 %).

5) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιον 400 δρ. τοκιζόμενον πρὸς 8 % διπλασιάζεται (νὰ φέρῃ δηλ. τόκον ἴσον μὲ τὸ κεφάλαιον); (12 ἔτη 6 μ.).

Σημ. Ὅταν κεφάλαιον δὲν δοθῇ, λαμβάνομεν οἱονδήποτε.

6) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῇ κεφάλαιόν τι, διὰ νὰ διπλασιασθῇ μετὰ 10 ἔτη; (10 %).

7) Ποῖον κεφάλαιον πρέπει νὰ τοκίσωμεν ἐπὶ 5 μῆν. 10 ἡμ. πρὸς 9 %, διὰ νὰ λάβωμεν τόσον τόκον, ὅσον φέρουν 4000 δρ. εἰς 6 μ. πρὸς 10 %; (5000).

8) Ἐδανείσθη τις 2700 δρ. τὴν 25 Μαΐου τοῦ ἔτους 1932 πρὸς 10 % καὶ ἐπλήρωσε τὸ χρέος του τὴν 5 Ἰουλίου τοῦ ἔτους 1933. Πόσον ἐπλήρωσε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζί;

Λύσις. Τὸ δάνειον διήρκεσε 1 ἔτ. 1 μ. 10 ἡμ., ὁ δὲ τόκος εἶναι 300 δρ. καὶ ἑπομένως ἐπλήρωσε 2700 + 300, ἤτοι 3000 δρ.

9) Ἐδανείσθη τις 1200 δρ. πρὸς 9 % καὶ ἐπλήρωσε τὴν 2αν Φεβρουαρίου τοῦ ἔτους 1932 διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 1386 δρ. Πότε ἐδανείσθη τὸ κεφάλαιον τοῦτο;

(τὸ ἔτος 1930 Μαΐου 12).

10) Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον μὲ 9 % καὶ μετὰ 10 μῆνας ἔλαβε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 1032 δρ. Πόσον κεφάλαιον ἐδάνεισε καὶ πόσον τόκον ἔλαβε;

Λύσις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐδάνεισεν 100 δραχμάς· ὁ τόκος αὐτῶν εἰς 10 μ. πρὸς 9 % εἶναι 7,50. Ὥστε

ἂν λάβῃ κεφάλ. καὶ τόκ. 107,50 τὸ κεφ. εἶναι 100

» » » 1032 » χ

Εὑρίσκομεν 960, ἑπομένως ὁ τόκος εἶναι 1032 — 960 ἢ 72 δρ.

11) Ἠγόρασέ τις μίαν οἰκίαν μὲ 200000 δρ. καὶ ἐξώδευσε διὰ τὴν ἐπισκευήν της 40000 δρ. Πόσον πρέπει νὰ τὴν ἐνοικιάσῃ κατὰ μῆνα, διὰ νὰ κερδίζῃ ἐπὶ τῆς ἀξίας της $6\frac{1}{4}$ % ;

Λύσις. Ζητεῖται ὁ τόκος τῶν 240000 δρ. εἰς 1 μῆνα πρὸς $6\frac{1}{4}$ %, ὁ ὁποῖος εἶναι 1250 δρ.

12) Ἠγόρασέ τις χωράφιον μὲ 6000 δρ. καὶ μετὰ 2 ἔτη 3 μ. τὸ ἐπώλησε μὲ κέρδος 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον τὸ ἐπώησε ;

Λύσις. Ἐκ τῆς πωλήσεως ἔλαβε τὰς 6000 δρ. καὶ τὸν τόκον αὐτῶν 1350 δρ., ὥστε τὸ ἐπώλησε 7350 δρ.

13) Ἔμπορός τις ἔδωσε 39000 δρ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ ἐμπορεύματα καὶ 2 % διὰ μεσιτείαν· μετὰ 2 μῆνας τὰ ἐπώλησε μὲ κέρδος 20 %. Πόσον τὰ ἐπώλησε ;

Λύσις. Εἰς τὰς 39000 προσθέτομεν πρῶτον τὸ 2 % αὐτῶν, ἤτοι 780 δρ.· κατόπιν λύομεν αὐτὸ ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ἐπώλησε 41106 δρ.

14) Ἠγόρασέ τις ἔλαιον πρὸς δρ. 22,50 τὴν ὀκᾶν καὶ μετὰ 1 μην. 10 ἡμ. τὸ ἐπώλησε πρὸς 24 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ;

Λύσις. Ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν ἐκέρδισε 1,50 δρ.· τοῦτο εἶναι ὁ τόκος τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς, ἤτοι τῶν 22,50 εἰς 1 μ. 10 ἡμ., ἑπομένως τὸ ἐπιτόκιον εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 60 %.

15) Ἠγόρασέ τις μετοχὰς πρὸς 250 δρ. ἑκάστην καὶ μετὰ 8 μῆνας τὰς ἐπώλησε πρὸς 275 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ; (15 %).

16) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον 1800 τετρ. μέτρων πρὸς 10 δρ. τὸ τετρ. μέτρον· μετὰ 3 ἔτη 4 μῆνας τὸ ἐπώλησε πρὸς 15 δρ. τὸν τετρ. τεκτονικὸν πῆχυν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε ; (50 %).

17) Μία ἐμπορικὴ ἐπιχείρησις εἶχε κεφάλαιον 4000000 δρ. καὶ τὴν πρώτην ἑξαμηνίαν ἔφερε κέρδος 190000 δρ., ἀλλ' εἶχεν ἔξοδα 40000 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν μέρισμα θὰ δώσῃ ; — (7,50 %).

18) Αἱ ὁμολογίαι [1] ἑνὸς δανείου ἔχουν ἀρχικὴν ἀξίαν 100 δρ. καὶ δίδουν τὸ ἔτος τόκον δρ. 4,50. Ἐὰν ἀγοράσωμεν 800 ὁμολογίας 3 μῆνας πρὸ τῆς πληρωμῆς τοῦ τόκου των πρὸς δρ. 62,50 τὴν καθεμίαν, πόσον τόκον θὰ λάβωμεν; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν θὰ ἔλθουν τὰ χρήματά μας διὰ 3 μῆνας; (3600, 28,80 %).

19) Χωρικός τις εἶχε 50 ὀκ. βουτύρου καὶ ἐξ αὐτοῦ ἐκράτησε $7\frac{3}{5}$ τῆς ὀκᾶς, τὸ δὲ ἄλλο ἐπώλησε πρὸς 90 δρ. τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ὅσας δραχμὰς ἔλαβε, τὰς ἐτόκισε καὶ μετὰ 2 ἔτη 1 μῆνα ἔλαβε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 4770 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν τὰς ἐτόκισε; (12 %).

20) Ἐργάτης τις ἐδανείσθη 4000 δρ. δι' ἓν ἔτος πρὸς 12 %, ἀλλὰ μετὰ 5 μῆνας ἔδωσεν ἀπέναντι τοῦ χρέους του 3000 δρ. Πόσας χρεωστεῖ ἀκόμη νὰ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους; (1270).

21) Ὑπάλληλός τις ἐδανείσθη 6000 δρ. μὲ 15 % διὰ 2 ἔτη, ἀλλὰ μετὰ 6 μῆν. ἔδωσεν ἀπέναντι τοῦ χρέους του 2400 δρ. καὶ μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς πρώτης δόσεως ἔδωσεν ἄλλας 2000 δρ. Πόσας χρεωστεῖ ἀκόμη νὰ δώσῃ εἰς τὸ τέλος τῶν δύο ἐτῶν; (2710).

22) Χωρικός τις ἐδανείσθη ἀπὸ τοκιστὴν 2400 δρ. μὲ 15 %. Μετὰ 6 μῆνας ἠθέλησε νὰ τὸν πληρώσῃ καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶχε χρήματα, τοῦ ἔφερε 280 ὀκ. σῖτον πρὸς δρ. 8,50 τὴν ὀκᾶν καὶ 120 αὐγὰ πρὸς δρ. 2,75 τὸ ζεῦγος. Λογάριασε ποῖος χρεωστεῖ εἰς τὸν ἄλλον καὶ πόσον. (ὁ χωρικὸς 35 δρ.).

23) Λαμβάνει τις ἐνοίκιον ἐκ τῆς οἰκίας του κατὰ μῆνα ἐκ τοῦ ἄνω πατώματος 1200 δρ. καὶ ἐκ τοῦ κάτω 700 δρ., ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' αὐτὴν 3900 δρ. Πόσον πρέπει νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀξία της πρὸς $6\frac{3}{4}$ %;

Λύσις. Τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημα εἶναι 18900 δρ., ἐπομένως τὸ κεφάλαιον εἶναι 280000 δρ.

24) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν μὲ 300000 δρ., ἀλλ' ἐξώδευσε καὶ 20000 δρ. διὰ τὴν ἐπισκευήν της· κατόπιν τὴν ἐνοικίασε 2000 δρ. τὸν

(1) Τὰ Κράτη, ὅταν ἔχουν ἀνάγκην χρημάτων, δανείζονται καὶ δίδουν εἰς τοὺς δανειστάς των ἔγγραφα ἀξίας 100, 200 κτλ. δρ. τὸ καθέν, τὰ ὁποῖα λέγονται **ὁμολογίαι**. Οἱ ἔχοντες ὁμολογίας λαμβάνουν κατ' ἔτος ἢ κατὰ ἑξαμηνίαν τὸν τόκον τῆς ἀρχικῆς των ἀξίας, ἀλλ' ἡ ἀρχική των ἀξία μεταβάλλεται εἰς τὴν ἀγορὰν ἀναλόγως τῆς ζητήσεώς των.

μῆνα, ἔχει ὅμως ἔξοδα τὸ ἔτος δι' ἀσφάλειαν, φόρον οἰκοδομῶν κλπ. 6400 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἔχει καθαρὸν εἰσόδημα; (5,50 %).

25) Χωρικός τις ἐπώλησε σῖτον πρὸς δρ. 8,50 τὴν ὀκᾶν· κατόπιν ἐτόκισε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν ὅσων ἔλαβε χρημάτων πρὸς 15 % καὶ μετὰ 2 ἔτη 4 μ. ἔλαβε τόκον 1785 δρ. Πόσον κεφάλαιον ἐτόκισε; Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἐκ τοῦ πωληθέντος σίτου; Καὶ πόσας ὀκάδας ἐπώλησε; (5100, 6800, 800 ὀκ.).

26) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι πρὸς 80 δρ. τὸν πῆχυν. Κατόπιν ἐπώλησε τὸ τέταρτον αὐτοῦ πρὸς 90 δρ. τὸν πῆχυν, τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου πρὸς 95,50 τὸν πῆχυν, τὸ δὲ νέον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 25 πήχεις, ἐπώλησε πρὸς 100 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε;

(60 π., 20 %).

27) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του διὰ 5 ἔτη ἀντὶ 200000 δραχμῶν πρὸς 1,50 ‰, ἀλλ' ἡ ἀσφαλιστικὴ ἑταιρεία τοῦ ἐχάρισε τὰ ἀσφάλιστρα ἑνὸς ἔτους, ἐπειδὴ ἐπλήρωσεν ἀμέσως τὰ ἀσφάλιστρα τῶν ἄλλων 4 ἐτῶν. Ἐπλήρωσεν ἀκόμη φόρον τοῦ δημοσίου 14 % ἐπὶ τῶν ἀσφαλίστρων καὶ 99 δρ. διὰ χαρτόσημον κτλ. Πόσας δραχμὰς ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ; (1467).

28) Κατέθεσέ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον μιᾶς τραπέζης 20000 δρ. τὴν 15 Μαρτίου πρὸς 4,50 %. Πόσον θὰ λάβῃ διὰ κεφάλαιον καὶ τόκους τὴν 20 Σεπτεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους; Ἡ Τράπεζα κατὰ ἑξαμηνίαν, ἤτοι τὴν 1ην Ἰανουαρίου καὶ τὴν 1ην Ἰουλίου, προσθέτει εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον. (20465,07).

ΠΕΡΙ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

228. Ὅταν δανείζῃ τις χρήματα εἰς ἄλλον, δανείζει συνήθως αὐτὰ δι' ὡρισμένον χρόνον καὶ μὲ ὡρισμένον ἐπιτόκιον, συμπεφωνημένα μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ τοῦ δανειζομένου. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὸ ἐμπόριον, ὅταν ὁ ἀγοραστὴς δὲν πληρώνῃ ἀμέσως τὴν ἀξίαν τῶν ἀγορασθέντων ἐμπορευμάτων.

Ὁ δανείζων χρήματα εἰς ἄλλον ἢ δίδων ἐμπορεύματα βασίζεται κυρίως εἰς τὴν ἐντιμότητα τοῦ δανειζομένου. Χάριν ὅμως περισσοτέρας ἀσφαλείας ὑπόσχεται ὁ δανειζόμενος ἐγγράφως ἐπὶ χαρτοσήμου νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν δανειστήν του τὸ δανειζόμενον ποσὸν μετὰ τοῦ τόκου του (συνήθως) ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας. Τὸ ἔγγραφον δὲ τοῦτο λέγεται **γραμμάτιον**. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ὁ κ. Ἀθανασίου ἐδάνεισεν εἰς τὸν κ. Βασιλείου τὴν 20ὴν Μαρτίου 1932 δρ. 800 πρὸς 10 ‰ πληρωτέας μετὰ 3 μῆνας. Κατὰ πρῶτον εὑρίσκεται ὁ τόκος, ὅστις εἶναι 20 δρ., καὶ προστίθεται οὗτος εἰς τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον 800 δραχμῶν· κατόπιν ἐπὶ ἀναλόγου χαρτοσήμου, ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ νόμου, συντάσσεται τὸ ἑξῆς περίπου γραμμάτιον.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Μαρτίου 1932. Διὰ δρ. 820.

Μετὰ τρεῖς μῆνας ἀπὸ σήμερον ὑπόσχομαι νὰ πληρώσω εἰς τὸν κ. Ἀθανασίου ἢ εἰς τὴν διαταγὴν αὐτοῦ δραχμὰς ὀκτακοσίας εἴκοσι, τὰς ὁποίας ἔλαβον παρ' αὐτοῦ ὡς δάνειον.

(ὑπογραφὴ) ***Βασιλείου***

Ὁ μὲν δανειζόμενος ἢ ὀφειλέτης θὰ λάβῃ τὰς 800 δραχμάς, ὁ δὲ δανειστὴς τὸ γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῶν λέξεων *εἰς τὴν διαταγὴν* λέγεται **γραμμάτιον εἰς διαταγήν**.

Ἄσκησις. Ὁ κ.... ἐδανείσθη σήμερον ἀπὸ τὸν κ.... 9000 δρ. διὰ 6 μῆν. πρὸς 12 ‰. Νὰ γίνῃ τὸ γραμμάτιον ἐπὶ φύλλου χάρτου.

Οἱ κάτοχοι γραμματίων ἕνεκα ἀνάγκης χρημάτων πωλοῦσι πολλάκις ταῦτα εἰς ἄλλον πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας των. Δίκαιον λοιπὸν εἶναι ὁ προεξοφλῶν, ἤτοι ὁ ἀγοράζων τὸ γραμμάτιον, ἀφοῦ δὲν θὰ λάβῃ τὰ χρήματα ἀμέσως παρὰ τοῦ ὀφειλέτου, νὰ κρατήσῃ ἓν τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκ τοῦ ἀναφερομένου ποσοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου τὸ ὑπόλοιπον. Τὸ χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον κρατεῖται ἀπὸ τὸ ἐν τῷ γραμματίῳ ἀναφερόμενον ποσόν, ὅταν τοῦτο πληρώνηται πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του, λέγεται **ὑφαίρεσις ἢ ἔκπτωσις**.

Σημ. Τῆς ὑφαιρέσεως κάμνουν πολλὴν χρῆσιν οἱ ἔμποροι πρὸς εὐκολίαν των διδοντες καὶ λαμβάνοντες τοιαῦτα γραμμάτια. Ὥστε ἓν γραμμάτιον τίθεται πρὸ τῆς λήξεώς του εἰς κυκλοφορίαν ὡς εἶδος χρημάτων μεταβιβαζόμενον ἀπὸ ἑνὸς εἰς ἄλλον. Γραμμάτιον, μὴ περιέχον τὰς λέξεις **εἰς διαταγήν**, δὲν δύναται νὰ μεταβιβασθῇ εἰς ἄλλον. Ὁ μεταβιβάζων γραμμάτιον εἰς ἄλλον γράφει ὄπισθεν τοῦ γραμματίου πρὸς τὸν ὀφειλέτην του τὰ ἑξῆς: ***Πληρώσατε εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ. . . . . δραχμάς. . . . .*** (ὅσας ἀναφέρει τὸ γραμμάτιον). Ὑποκάτω γράφεται ἡ ἡμερομηνία καὶ ἡ ὑπογραφή του. Ἡ πρᾶξις αὕτη λέγεται ***ὀπισθογράφησις***.

229. Ἐκτὸς τοῦ γραμματίου μεταχειρίζονται συνήθως οἱ ἔμποροι καὶ τὴν **συναλλαγματικήν**, ἡ ὁποία εἶναι ἔγγραφον διὰ τοῦ ὁποίου ὁ δανείζων χρήματα ἢ δίδων ἐμπορεύματα ἐπὶ πιστώσει διατάσσει τὸν ὀφειλέτην του, διαμένοντα εἰς τὴν αὐτὴν πόλιν ἢ

εἰς ἄλλην, νὰ πληρώσῃ εἰς τρίτον πρόσωπον καὶ εἰς ὡρισμένον χρόνον τὸ ἐν αὐτῷ ἀναφερόμενον χρηματικὸν ποσόν. Εἰς τὴν συναλλαγματικὴν γράφονται περίπου τὰ ἑξῆς·

Ἐν Ἀθήναις..... **διὰ δρ......**

Μετὰ τριάκοντα (30) ἡμέρας ἀπὸ σήμερον πληρώσατε εἰς τὴν διαταγὴν τοῦ κ..... τὰς ἄνω..... δραχμάς.

Πρὸς τὸν κ.......... (ὄνομα πληρωτοῦ)

εἰς .... (κατοικία πληρωτοῦ)

ὑπογραφὴ (δανειστοῦ)

Σημ. Πρὸς εὐκολίαν ἀποστολῆς χρημάτων ἀπὸ ἑνὸς τόπου εἰς ἄλλον μεταχειριζόμεθα τὰς **τραπεζιτικὰς καὶ ταχυδρομικὰς ἐπιταγάς.** Ἡ ταχυδρομικὴ ἐπιταγὴ διαφέρει τῆς τραπεζιτικῆς κατὰ τοῦτο, ὅτι ἡ ταχυδρομικὴ δὲν ἐκδίδεται εἰς διαταγήν, ὅπως ἡ τραπεζιτική, ἀλλ' οὔτε καὶ διὰ ποσὸν μεγαλύτερον τῶν πέντε χιλιάδων δραχμῶν.

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις.

230. Ὑφαίρεσιν ἔχομεν δύο εἰδῶν, τὴν **ἐξωτερικὴν** καὶ τὴν **ἐσωτερικήν.**

Ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις λέγεται ὁ τόκος τοῦ ἀναφερομένου ποσοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ διὰ χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του (πρὸς ἐπιτόκιον συμπεφωνημένον). Ἔστω π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 1640 δραχμῶν, προεξοφλουμένου 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας του πρὸς 10 %;

Λύσις. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν εἶναι ὁ τόκος τῶν 1640 δρ. διὰ 3 μῆνας πρὸς 12 %, ἤτοι 41 δρ. Ταύτας θὰ κρατήσῃ ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον καὶ θὰ πληρώσῃ εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου τὰς ὑπολοίπους 1640—41 ἢ 1599 δρ. Ὥστε πᾶν γραμμάτιον ἔχει δύο ἀξίας, τὴν **ὀνομαστικήν**, ἤτοι τὴν ἀναφερομένην ἐν τῷ γραμματίῳ, καὶ τὴν **πραγματικὴν ἢ παροῦσαν,** ἤτοι τὴν ἐλαττουμένην κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν πρόβλημα ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι 1640 δραχμαί, ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 41 δρ. καὶ ἡ πραγματικὴ ἀξία αὐτοῦ 1599 δρ.

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία εἶναι ἄθροισμα τῆς ὑφαιρέσεως καὶ τῆς πραγματικῆς ἀξίας· ὥστε, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν (ὑφαίρεσιν ἢ πραγματικὴν), εὑρίσκομεν τὴν ἄλλην διὰ τῆς ἀφαιρέσεως αὐτῆς ἀπὸ τὴν ὀνομαστικήν.

Σημ. Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι ἄδικος, διότι ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον, ἀντὶ νὰ κρατήσῃ τὸν τόκον τῶν χρημάτων του, τὰ ὁποῖα πληρώνει διὰ τὴν ἀγορὰν τοῦ γραμματίου ἤτοι τῶν 1599 δραχμῶν, κρατεῖ τὸν τόκον τῶν ἀναφερομένων ἐν τῷ γραμματίῳ, ἤτοι τῶν 1640 δραχμῶν, τὰς ὁποίας δὲν ἔδωσεν. Ἐν τούτοις ὅμως αὐτῆς τῆς ὑφαιρέσεως κάμνουν χρῆσιν οἱ ἔμποροι, ὡς εὑρισκομένης εὐκόλως.

Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις

231. ***Ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις*** λέγεται ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα πληρώνει ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον διὰ χρόνον λογιζόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν λοιπὸν ταύτην ὁ προεξοφλῶν, ἤτοι ὁ ἀγοράζων γραμμάτιον, πρέπει νὰ πληρώνῃ τόσα χρήματα, ὥστε μετὰ τοῦ τόκου των νὰ ἀποτελῶσι τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου· διότι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία περιέχει τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν τόκον αὐτοῦ.

Ἔστω π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου 1640 δρ., προεξοφλουμένου 3 μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 10 %;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπλήρωσέ τις 100 δρ. διὰ νὰ ἀγοράσῃ γραμμάτιον λῆγον μετὰ 3 μῆν. πρὸς 10 %· ὁ τόκος αὐτῶν εἶναι 2,50, ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ ἀγορασθέντος γραμματίου εἶναι 102,50. Ἐκ τῶν δραχμῶν τούτων ὁ προεξοφλῶν ἐκράτησε 2,50, ἤτοι τὸν τόκον τῶν χρημάτων τὰ ὁποῖα πληρώνει, ἀλλ' ὁ τόκος οὗτος κατὰ τὰ ἀνωτέρω λέγεται ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις. Ὥστε

ἂν τὸ γραμ. εἶναι 102,50 ἡ ἐσωτ. ὑφ. εἶναι 2,50
» 1640 » χ

Εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι 40 δρ. Ταύτας θὰ κρατήσῃ ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον καὶ θὰ δώσῃ τὰς ὑπολοίπους 1600. Αἱ δραχμαὶ αὗται παριστῶσι τὴν πραγματικὴν ἢ παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, αἱ δὲ 1640 τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις 40 δρ. εἶναι πράγματι ὁ τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τῶν 1600 δραχμῶν, τὰς ὁποίας πληρώνει ὁ προεξοφλῶν τὸ γραμμάτιον πρὸς 10 % διὰ 3 μῆνας· ἐνῷ ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις τοῦ γραμματίου τούτου, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἶναι 41 δρ., ἤτοι μεγαλυτέρα τῆς ἐσωτερικῆς κατὰ 1 δρ. Ἡ διαφορὰ αὕτη, ἤτοι ἡ 1 δραχμή, εἶναι ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι τῶν 40 δραχμῶν· ὥστε ὁ προεξοφλῶν ἐξωτερικῶς κρατεῖ οὐ μόνον τὸν τόκον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὰς 40 δραχμάς, ἀλλὰ καὶ τὸν τόκον τοῦ τόκου, ἤτοι τῶν 40 δρ. Ὥστε ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι δικαία.

Προβλήματα ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εὑρίσκεται, ὅπως καὶ ὁ τόκος. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἄλλο τι ποσόν, ἤτοι χρόνον, ἐπιτόκιον κτλ., ἐφαρμόζομεν τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ τόκου, ἑπομένως ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς ὑφαιρέσεως οὐδεμίαν δυσκολίαν παρουσιάζει. Πρέπει ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰ ἑξῆς. Ὅταν λέγωμεν ὑφαίρεσιν, θὰ ἐννοῶμεν τόκον· καὶ ὁσάκις λαμβάνωμεν τὴν ἀνάγκην τοῦ κεφαλαίου, θὰ λαμβάνωμεν ὡς τοιοῦτον τὴν ὀνομαστικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως).

1) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 4800 δρ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη πρὸς 9 °/₀ καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερική) 180 δραχμαί;

Λύσις. Αἱ 4800 δρ. εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, ἡ δὲ ὑφαίρεσις 180 δρ. εἶναι ὁ τόκος. Ὥστε κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα (ἐδάφιον 226) ἔχομεν $\frac{180\times100}{480\times9}$, ἤτοι 5 μῆν.

2) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 1800 δρ., τὸ ὁποῖον προεξωφλήθη (ἐξωτερικῶς) πρὸς 6,50 °/₀ ἀντὶ 1767,50 δρ;

Λύσις. Αἱ 1800 δρ. εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, αἱ δὲ 1767,50, ἀντὶ τῶν ὁποίων προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον, εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία αὐτοῦ· ὥστε ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 1800 — 1767,50 ἤτοι 32,50. Ὥστε ἔχομεν $\frac{32,50\times100}{480\times6,50}$, ἤτοι 3 μῆν. 10 ἡμ.

3) Γραμμάτιον προεξωφλήθη 2 μῆν. 20 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 842,80 δρ. καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερική) 17,20 δρ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη;

Λύσις. Αἱ 842,80 δρ. εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ ὑφαίρεσις 17,20 εἶναι ὁ τόκος, κεφάλαιον δὲ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου, ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα τῆς πραγματικῆς ἀξίας καὶ τῆς ὑφαιρέσεως, ἤτοι 842,80+17,20 ἢ 860 δρ. Ὥστε κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα (ἐδ. 225) εὑρίσκομεν 9 %.

Σημ. Ἐὰν τὰ ἀνωτέρω προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον, ἦσαν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως, θὰ ἐλύοντο κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ὡς κεφάλαιον θὰ ἐλαμβάνομεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τοῦ γραμματίου ἀντὶ τῆς ὀνομαστικῆς (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως).

4) Γραμμάτιον προεξωφλήθη 6 μῆν. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 8 % καὶ ἐγένετο ὑφαίρεσις (ἐξωτερική) 360 δρ. Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ;

(Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον. Εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 9000).

Σημ. Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω ὑφαίρεσις 360 ἦτο ἐσωτερική, τὸ εὑρεθὲν κεφάλαιον 9000 θὰ ἦτο ἡ πραγματικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου καὶ ἑπομένως ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ θὰ ἦτο 9000+360 ἢ 9360 δρ.

5) Ποία εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία γραμματίου προεξοφληθέντος ἐξωτερικῶς 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9 % ἀντὶ 834,20 δρ.;

Λύσις. Ἐνταῦθα δὲν ἔχομεν τὴν ὑφαίρεσιν, ἤτοι τὸν τόκον, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ κεφάλαιον μὲ τὸν γνωστὸν κανόνα. Διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου ἦτο 100 δρ. Ὁ τόκος αὐτῶν εἰς 4 μ. πρὸς 9 % εἶναι 3 δρ. καὶ ἑπομένως θὰ προεξωφλεῖτο ἀντὶ 97 δρ. Ὥστε

ἂν προεξοφληθῇ ἀντὶ	97 δρ.	ἡ ὀνομ. ἀξία	εἶναι	100
»	834,20	»	»	χ

Εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 860 δρ.

Σημ. Ἐὰν τὸ ἀνωτέρω γραμμάτιον προεξωφλεῖτο ἐσωτερικῶς, εὑρίσκομεν τότε τὸν τόκον τῶν 834,20 εἰς 4 μ. πρὸς 9 % καὶ προσθέτομεν αὐτὸν εἰς τὴν πραγματικὴν ἀξίαν 834,20, τὸ δὲ ἄθροισμα εἶναι ἡ ζητουμένη ὀνομαστικὴ ἀξία.

6 6) Ἐδανείσθη τις κεφάλαιον πρὸς 10 % καὶ ὑπέγραψε γραμμάτιον διὰ 1365 δρ. πληρωτέον μετὰ 6 μῆν. Πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη; + (1300).

8) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 9000 δρ. καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ αὐτὰς μετὰ 2 μῆνας, ἀλλ' οὗτος ἠθέλησε νὰ πληρώσῃ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀμέσως, καὶ διὰ τοῦτο τοῦ ἔγινεν ἔκπτωσις 9 %. Πόσον ἐπλήρωσεν; (8865).

9 9) Γραμμάτιον 2700 δρ. λῆγον τὸ ἔτος 1933 Ἀπριλίου 5, προεξωφλήθη (ἐξωτερικῶς) πρὸς 8 % ἀντὶ 2568 δρ. Πότε προεξωφλήθη; (τὸ ἔτος 1932 Αὐγ. 25).

10) Τραπεζίτης προεξώφλησε γραμμάτιον 3000 δρ. πρὸς 6 %

τὴν 15 Σεπτεμβρίου 1932 καὶ ἔδωσεν εἰς τὸν κάτοχον τοῦ γραμματίου 2930 δρ. Πότε ἔληγε τὸ γραμμάτιον ; (τὸ ἔτος 1933 Φεβρ. 5).

Σημ. Αἱ τράπεζαι, ἐκτὸς τῆς ὑφαιρέσεως, κρατοῦν συνήθως καὶ ἕνα τόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκ τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου (μὴ λαμβανομένου ὑπ' ὄψει τοῦ χρόνου) ὡς ἔξοδα εἰσπράξεως αὐτοῦ· τοῦτο λέγεται ***προμήθεια***.

11) Γραμμάτιον 18000 δραχμῶν, λῆγον τὸ ἔτος 1934 Φεβρ. 15, προεξωφλήθη τὸ ἔτος 1932 Νοεμβρ. 25 πρὸς 6,50 % καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{3}{8}$ %. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ κράτησις ;

Λύσις. Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 1430 δρ. καὶ ἡ προμήθεια 67,50. ὥστε ἡ ὁλικὴ κράτησις εἶναι 1497,50.

12) Τραπεζίτης τις προεξώφλησε δύο γραμμάτια τὴν 8 Ἀπριλίου πρὸς 8 %, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἐκ δραχμῶν 2700 λήγει τὴν 18 Μαΐου (τοῦ αὐτοῦ ἔτους), τὸ δὲ ἐκ δρ. 4000 λήγει τὴν 2 Σεπτεμβρίου καὶ μὲ προμήθειαν $\frac{2}{5}$ %. Πόσον ἔδωσε ; (6521,20).

232 ***Κοινὴ λῆξις γραμματίων***. Συμβαίνει πολλάκις νὰ ὀφείλῃ τις εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον δύο ἢ περισσότερα γραμμάτια, λήγοντα εἰς διαφόρους χρόνους, καὶ θέλει χάριν εὐκολίας νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου καὶ τοιούτου, ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τῶν ἀντικαθισταμένων γραμματίων. Ἡ τοιαύτη ἀντικατάστασις λέγεται ***κοινὴ λῆξις*** τῶν γραμματίων. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα ἢ δίδεται ὁ χρόνος τῆς λήξεως τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία αὐτοῦ, ἢ δίδεται ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου καὶ ζητεῖται ἡ λῆξις αὐτοῦ. Ἔστωσαν π. χ. τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) ***Ὀφείλει τις δύο γραμμάτια εἰς τὸ αὐτὸ πρόσωπον, τὸ μὲν ἓν ἐκ δρ. 2400 λήγει μετὰ 50 ἡμ., τὸ δὲ ἐκ δρ. 4000 λήγει μετὰ 3 μῆνας, καὶ θέλει νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου, λήγοντος μετὰ 40 ἡμ. Πόση θὰ εἶναι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ γραμματίου τούτου, ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 9 % ;***

Λύσις. Ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ πρώτου εἶναι 2370, τοῦ δὲ δευτέρου 3910, καὶ τῶν δύο μαζὶ εἶναι 6280· τόση πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ζητουμένου γραμματίου. Ἔχομεν τώρα τὴν παροῦσαν ἀξίαν 6280, τὸν χρόνον 40 ἡμ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 9 %. Εὑρίσκομεν (κατὰ τὸ 5ον πρόβλημα) ὅτι ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ νέου γραμματίου θὰ εἶναι 6343,43 δρ.

2) ***Ὀφείλει τις δύο γραμμάτια, τὸ μὲν ἓν ἐκ 3000 δρ. λήγει μετὰ 2 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο ἐκ 4000 δρ. λήγει μετὰ 5 μῆνας, καὶ θέλει νὰ ἀντικαταστήσῃ ταῦτα δι' ἑνὸς γραμματίου***

ἐκ δραχ. 6974,70 πρὸς 6 %. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο;

Λύσις. Ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ πρώτου εἶναι 2970 δρ., τοῦ δὲ δευτέρου 3900, καὶ τῶν δύο μαζὶ εἶναι 6870. Τὸ πρόβλημα τώρα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς. ***Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 6974,70 δρ., τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται σήμερον πρὸς 6 % ἀντὶ 6870 δρ.;*** (μετὰ 8 μ.).

ΠΕΡΙ ΜΕΡΙΣΜΟΥ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

233. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ἐὰν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν προκύπτῃ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 8, 12, 20 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων, ὅταν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 4. Καὶ τἀνάπαλιν· οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 8, 12, 20· διότι οἱ πρῶτοι προκύπτουν ἐκ τῶν δευτέρων, ὅταν οὗτοι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\frac{1}{4}$ (ἤ, ὅπερ ταὐτό, διαιρεθῶσι διὰ 4). Ὥστε οἱ ἀνάλογοι ἀριθμοὶ πρὸς ἄλλους ἔχουν πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους των τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι εἶναι $\frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{20}{5} = 4$. Καὶ τἀνάπαλιν εἶναι $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

234. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογοι** πρὸς ἄλλους ἴσους τὸ πλῆθος, ὅταν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμοὺς (ἐδ. 209).

Π. χ οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 10, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 5, λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$.

235. ***Μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον μερίζομεν αὐτὸν εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί, καὶ τὰ μέρη ταῦτα νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς αὐτούς.***

1) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 48 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 10.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι

$6+8+10$ ἢ 24, τὰ μέρη θὰ εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 10 (διότι οὗτοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας 6, 8, 10, καθόσον προκύπτουν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὴν μονάδα 1) ἂν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι 1, τὰ μέρη θὰ εἶναι $\frac{6}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{10}{24}$ (οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας, διότι προκύπτουν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{24}$)· ἂν ὁ μεριστέος εἶναι 48, τὰ μέρη θὰ εἶναι $\frac{6\times48}{24}$, $\frac{8\times48}{24}$, $\frac{10\times48}{24}$, ἤτοι 12, 16, 20 (οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δοθέντας 6, 8, 10, διότι προκύπτουν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{48}{24}$, ἤτοι ἐπὶ 2).

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ εὑρισκόμενα μέρη πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸν μεριστέον ἀριθμόν.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

236. ***Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμόν τινα εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.***

Παρατήρησις. Ἐὰν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τῶν εὑρεθέντων κλασμάτων $\frac{6\times48}{24}$, $\frac{8\times48}{24}$, $\frac{10\times48}{24}$ δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, τὰ εὑρεθέντα μέρη 12, 16, 20 δὲν μεταβάλλονται (ἐδ. 109). Διαιροῦμεν λοιπὸν αὐτοὺς διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν τὰ πρὸς αὐτὰ ἴσα κλάσματα $\frac{3\times48}{12}$, $\frac{4\times48}{12}$, $\frac{5\times48}{12}$. Διηρέσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8, 10, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζεται ὁ ἀριθμὸς 48, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 24, διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 2. Ὥστε δυνάμεθα νὰ διαιρῶμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν (ἐὰν ἔχουν), καὶ τἀνάπαλιν, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάζωμεν αὐτοὺς ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ὅταν λοιπὸν οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ μερισθῇ ἀριθμός τις, εἶναι ἀκέραιοι καὶ ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, καλὸν εἶναι πρὸς εὐκολίαν μας νὰ διαιρῶμεν πρῶτον αὐτοὺς διὰ τοῦ κ. δ. αὐτῶν καὶ ἔπειτα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν κανόνα. Ὅταν δὲ πάλιν εἶναι κλάσματα, νὰ πολλαπλασιάζωμεν πρῶτον ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ἢ κάλλιον ἐπὶ τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. αὐτῶν διὰ νὰ γίνουν ἀκέραιοι πρὸς εὐκολίαν μας.

2) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 320 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40, 50, 70.

Κατάταξις.	40	ἢ	4
Μεριστέος 320	50	ἢ	5
	70	ἢ	7
		ἄθροισμα	16

Διῃρέσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν 10. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω λοιπὸν κανόνα εὑρίσκομεν τὰ μέρη $\frac{320\times4}{16}$ ἢ 80, $\frac{320\times5}{16}$ ἢ 100, $\frac{320\times7}{16}$ ἢ 140.

3) ***Πρόβλημα***. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 105 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{8}$.

Κατάταξις.	2	ἢ	2×8	ἢ	16
Μεριστέος 105	$\frac{1}{4}$	ἢ	$\frac{1}{4}\times8$	ἢ	2
	$\frac{3}{8}$	ἢ	$\frac{3}{8}\times8$	ἢ	3
			ἄθροισμα		21

Ἐπολλαπλασιάσαμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἐπὶ 8, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν· ἐφαρμόζομεν τώρα τὸν κανόνα καὶ εὑρίσκομεν $\frac{105\times16}{21}$ ἢ 80, $\frac{105\times2}{21}$ ἢ 10, $\frac{105\times3}{21}$ ἢ 15.

4) ***Πρόβλημα***. Δύο ἄνθρωποι μετέφερον σῖτον ἀπὸ ἑνὸς χωρίου εἰς μίαν πόλιν καὶ ἔλαβον δι' ἀγώγια 120 δραχμάς, τὰς ὁποίας θὰ μοιράσουν ἀναλόγως τοῦ βάρους τὸ ὁποῖον μετέφερον. Ὁ α′ μετέφερεν 80 ὀκ. καὶ ὁ β′ 70 ὀκ. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Κατάταξις.	α′	80 ὀκ.	ἢ	8
Μεριστέος 120	β′	70 ὀκ.	ἢ	7
			ἄθρ.	15

Ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{120\times8}{15}$ ἢ 64 δρ. καὶ ὁ β′ $\frac{120\times7}{15}$ ἢ 56 δρ.

Σημ. Ὅταν ἔχουν δοθῇ οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ ὁ μερισμός, τότε τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγονται ***ἁπλᾶ***, καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ ἀνωτέρω. Ὅταν ὅμως πρόκειται νὰ εὑρεθῶσι πρῶτον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, τότε τὰ προβλήματα αὐτὰ λέγονται ***σύνθετα*** καὶ τοιαῦτα εἶναι τὰ κατωτέρω.

5) ***Πρόβλημα***. Δύο ἁμαξηλάται συνεφώνησαν μὲ ἔμπορον νὰ μεταφέρουν ἐμπορεύματά του καὶ νὰ λάβουν 550 δρ. Ὁ πρῶτος μετέφερε 1000 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν 7 χιλιομέτρων, ὁ δὲ δεύτερος 800 ὀκ. εἰς ἀπόστασιν 5 χιλιομέτρων. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὰ βάρη καὶ αἱ ἀποστάσεις εἶναι διάφοροι, διὰ τοῦτο θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσας ὀκάδας ἔπρεπε νὰ μεταφέρουν εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν, διὰ νὰ λάβουν τόσας δραχμάς, ὅσας θὰ λάβουν καὶ εἰς τὰς διαφόρους ταύτας ἀποστάσεις. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Τὰς δραχμὰς τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ ὁ πρῶτος διὰ νὰ μεταφέρῃ 1000 ὀκ. εἰς 7 χιλιόμ., ἂν ἤθελε νὰ τὰς λάβῃ εἰς 1 χιλιόμετρον, ἔπρεπε νὰ μεταφέρῃ 7 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 1000×7 ἢ 7000 ὀκ. Τὰς δραχμὰς πάλιν τὰς ὁποίας θὰ λάβῃ ὁ δεύτερος διὰ νὰ μεταφέρῃ 800 ὀκ. εἰς 5 χιλιόμετρα, ἂν ἤθελε νὰ τὰς λάβῃ εἰς 1 χιλιόμετρον, ἔπρεπε νὰ μεταφέρῃ 5 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 800×5 ἢ 4000 ὀκ. Τὸ πρόβλημα τώρα λύομεν ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω, ἤτοι μοιράζομεν τὰς 550 δρ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 7000 καὶ 4000 ἢ τῶν 7 καὶ 4. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$\text{Μεριστέος } 550 \qquad \begin{array}{l} \alpha'\ 1000 \times 7 = 7000 \text{ ἢ } 7. \\ \beta'\ \ 800 \times 5 = 4000 \text{ ἢ } \underline{4} \\ \qquad\qquad\qquad \text{ἄθρ. } 11 \end{array}$$

Ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{550 \times 7}{11}$ ἢ 350 δρ. καὶ ὁ β′ $\frac{550 \times 4}{11}$ ἢ 200 δρ.

6) ***Πρόβλημα.*** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 94 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, $\frac{3}{4}$, 8.

Λύσις. Πρῶτον εὑρίσκομεν τοὺς ἀντιστρόφους αὐτῶν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{8}$. Μερίζομεν τώρα τὸν 94 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἀλλὰ πρῶτον πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ἐπὶ τὸ ἐλ. κ. πολ. τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 24, διὰ νὰ ἔχωμεν ἀκεραίους ἀριθμούς, ἤτοι

$$\text{Μεριστέος } 94 \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2} \times 24 = 12 \\ \frac{4}{3} \times 24 = 32 \\ \frac{1}{8} \times 24 = \ \underline{3} \\ \quad \text{ἄθρ} \quad 47 \end{array}$$

Τὰ μέρη εἶναι $\frac{94 \times 12}{47}$ ἢ 24, $\frac{94 \times 32}{47}$ ἢ 64, $\frac{94 \times 3}{47}$ ἢ 6.

Σημ. Ἐὰν μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι μικτοὶ ἀριθμοὶ ἢ δεκαδικοί, τρέπομεν πρῶτον αὐτοὺς εἰς κλάσματα.

237. ***Προβλήματα ἑταιρείας.*** Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα ἐκεῖνα,

εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μοιρασθῇ τὸ ἐκ τῆς ἐμπορικῆς ἐπιχειρήσεως κέρδος ἢ ζημία μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων συνεταίρων, καὶ λέγονται ταῦτα **προβλήματα ἑταιρείας**.

1) ***Πρόβλημα***. Δύο ἄνθρωποι συνεφώνησαν νὰ κάμουν μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν· ὁ πρῶτος κατέθεσε 20000 δρ. καὶ ὁ δεύτερος 25000, ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως δὲ ταύτης ἐκέρδισαν 18000 δρ. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Κατέθεσαν μαζὶ 45000 δρ. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Αἱ 45000 δρ. ἐκέρδισαν 18000

ἡ 1 δραχμὴ ἐκέρδισε $\dfrac{18000}{45000}$

καὶ αἱ 20000 τοῦ α΄ ἐκέρδισαν $\dfrac{18000\times20000}{45000}$ ἢ 8000

καὶ αἱ 25000 τοῦ β΄ » $\dfrac{18000\times25000}{45000}$ ἢ 10000

Βλέπομεν ὅτι τὸ κέρδος 18000 μερίζεται ἀναλόγως τῶν κεφαλαίων 20000 καὶ 25000. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ ἔμειναν τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν· ἐὰν ὅμως τὰ κεφάλαια εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ μένουν διαφόρους χρόνους εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, τότε πρέπει νὰ μερίζεται τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν χρόνων.

Σημ. Οἱ χρόνοι πρέπει νὰ γίνωνται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα.

2) ***Πρόβλημα***. Δύο ἄνθρωποι συνεφώνησαν νὰ κάμουν μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν· ὁ α΄ κατέθεσε 50000 δρ. καὶ ὁ β΄ 60000, ἀλλ' ὁ α΄ ἄφησε τὸ κεφάλαιόν του εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 2 μῆνας, ὁ δὲ β΄ 3 μῆνας· κατόπιν ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 14000 δρ. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ τὰ κεφάλαια εἶναι διάφορα καὶ οἱ χρόνοι διάφοροι, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς. Τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ λάβῃ ὁ α΄ καταθέτων 50000 δρ διὰ 2 μῆνας, ἂν ἤθελε νὰ τὸ λάβῃ εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ 2 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 50000$\times$ 2 ἢ 100000. Τὸ κέρδος πάλιν τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ λάβῃ ὁ β΄ καταθέτων 60000 διὰ 3 μῆνας, ἂν ἤθελε νὰ τὸ λάβῃ εἰς 1 μῆνα, ἔπρεπε νὰ καταθέσῃ 3 φορὰς περισσότερον, ἤτοι 60000$\times$3 ἢ 180000 δρ. Ὥστε εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ κατέθεσαν διὰ 1 μῆνα ὁ μὲν α΄ 100000, ὁ δὲ β΄ 180000. Τὸ πρόβλημα λύομεν ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω, ἤτοι μοιράζομεν τὸ κέρδος 14000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 100000 καὶ 180000. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

Μεριστέος	α′	$50000 \times 2 = 100000$ ἢ	10
14000	β′	$60000 \times 3 = 180000$ ἢ	18
		ἄθρ.	28

ὁ α′ θὰ λάβῃ $\frac{14000 \times 10}{28}$ ἢ 5000, ὁ β′ $\frac{14000 \times 18}{28}$ ἢ 9000.

Βλέπομεν ὅτι, ὅταν τὰ κεφάλαια καὶ οἱ χρόνοι διαφέρουν, μερίζεται τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ἐπὶ τὸν χρόνον του.

3) ***Πρόβλημα***. Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν μὲ 30000 δραχμάς· μετὰ 2 μῆνας προσέλαβε συνέταιρον μὲ 50000 δρ. καὶ μετὰ 3 μῆνας ἀπὸ τούτου προσέλαβον καὶ τρίτον μὲ 20000 δραχμάς· μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 25000 δρ. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Πρῶτον θὰ εὕρωμεν πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον ἑκάστου εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Ἐπειδὴ ἐλογαριάσθησαν μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἐμπορίου των, διὰ τοῦτο τὸ κεφάλαιον τοῦ α′ ἔμεινεν εἰς τὸ ἐμπόριον 1 ἔτος ἢ 12 μῆνας· τοῦ β′ ἔμεινε 2 μ. ὀλιγώτερον αὐτοῦ, ἤτοι 10 μ.· καὶ τοῦ γ′ 3 μ. ὀλιγώτερον τοῦ β′, ἤτοι 7. Λύομεν τώρα τὸ πρόβλημα ὅπως καὶ τὸ ἀνωτέρω.

Μεριστέος	α′	$30000 \times 12 = 360000$ ἢ	36
25000	β′	$50000 \times 10 = 500000$ ἢ	50
	γ′	$20000 \times 7 = 140000$ ἢ	14
		ἄθρ.	100

α′ $\frac{25000 \times 36}{100}$ ἢ 9000, β′ $\frac{25000 \times 50}{100}$ ἢ 12500, γ′ $\frac{25000 \times 14}{100}$ ἢ 3500.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τρεῖς ἐργάται ἔσκαψαν μίαν ἄμπελον καὶ ἔλαβον 1600 δραχμάς· ὁ α′ εἰργάσθη 8 ἡμέρας, ὁ β′ 7 καὶ ὁ γ′ 5 (μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον ὅλοι). Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α′ 640, β′ 560, γ′ 400).

2) Δύο ἔμποροι συνεφώνησαν νὰ κάμουν μίαν ἐμπορικὴν ἐπι-

χείρησιν· ὁ α' κατέθεσε 30000 δρ. καὶ ὁ β' 50000. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης ἐκέρδισαν 16000 δραχμάς, ἀλλ' εἶχον συμφωνήσει νὰ λάβῃ ὁ α' πρὸ τοῦ μερισμοῦ 15 °/₀ ἐκ τοῦ κέρδους ὡς διευθύνων τὴν ἐπιχείρησιν. Πόσον κέρδος θὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α' 7500, β' 8500)

3) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν μαζὶ 240000 δρ. διὰ μίαν ἐπιχείρησίν των, ἐκ τῆς ὁποίας ἐκέρδισαν 80000 δρ. Ἐκ τοῦ κέρδους τούτου ὁ α' ἔλαβε τὸ τέταρτον, ὁ β' τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον. Ζητεῖται πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος καὶ πόσον κατέθεσεν. (α' 20000, β' 32000, γ' 28000· κατέθεσαν 60000, 96000, 84000).

4) Τρεῖς ἄνθρωποι πρόκειται νὰ μεταφέρουν εἰς μίαν ἀπόστασιν 90 ὀκ. ἐξ ἑνὸς πράγματος καὶ συνεφώνησαν νὰ μοιράσουν τὸ βάρος τοῦτο εἰς τρία μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των· εἶναι ὁ α' 60 ἐτῶν, ὁ β' 40 καὶ ὁ γ' 30. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ μεταφέρῃ ἕκαστος; (α' 20, β' 30, γ' 40).

5) Εἰς μίαν συναναστροφὴν ἦσαν 40 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία. Οἱ ἄνδρες ἦσαν διπλάσιοι τῶν γυναικῶν καὶ αἱ γυναῖκες τριπλάσιαι τῶν παιδίων. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία;

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἦτο 1 παιδίον· τότε αἱ γυναῖκες ἦσαν 3 καὶ οἱ ἄνδρες 6. Μερίζομεν τώρα τὸν 40 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 6 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ παιδία ἦσαν 4, αἱ γυναῖκες 12 καὶ οἱ ἄνδρες 24.

6) Δύο ἁμαξηλάται μετέφερον ἐμπορεύματα καὶ ἔλαβον 3000 δραχμάς· ὁ α' μετέφερε 12 τόννους εἰς 20 χιλιόμετρα καὶ ὁ β' 15 τόννους εἰς 9 χιλιόμ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος;

(α' 1920, β' 1080).

7) Τρεῖς ἐργάται ἐξετέλεσαν ἓν ἔργον καὶ ἔλαβον 1200 δραχμάς· ὁ α' εἰργάσθη 5 ἡμ. ἐπὶ 10 ὥρ. τὴν ἡμέραν, ὁ β' 8 ἡμ. ἐπὶ 8 ὥρ. τὴν ἡμέραν, καὶ ὁ γ' 4 ἡμ. ἐπὶ 9 ὥρ. τὴν ἡμέραν. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; (400, 512, 288).

8) Δύο ποιμένες ἐνοικίασαν δι' ἓν ἔτος λιβάδιον ἀντὶ 4300 δραχμῶν· ὁ α' ἐβόσκησεν εἰς αὐτὸ τὰ πρόβατά του 2 μῆνας, ὁ δὲ β' 35 ἡμέρας, ἀλλὰ τὰ πρόβατα τοῦ α' ἦσαν τριπλάσια τοῦ β'. Πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ἕκαστος; (3600, 700).

Σημ. Λαμβάνομεν οἱονδήποτε ἀριθμὸν προβάτων τοῦ β'.

9) Δύο λάμπαι ἀνάπτονται καὶ σβύνονται συγχρόνως καθ' ἑσπέ-

ραν. Ἡ μία καίει 105 δράμια οἰνόπνευμα εἰς 3 ὥρας, ἡ δὲ ἄλλη 108 δρ. εἰς $2\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ἐὰν ὁ φωτισμὸς αὐτῶν κοστίζῃ τὸν μῆνα 320 δρ., πόσον κοστίζει ὁ φωτισμὸς ἑκάστης;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον οἰνόπνευμα καίει ἑκάστη λάμπα εἰς 1 ὥραν. Ἡ α' καίει 35 δράμια καὶ ἡ β' 45 δράμια. Κατόπιν μοιράζομεν τὰς 320 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 35 καὶ 45 καὶ εὑρίσκομεν 140 καὶ 180 δραχ.

10) Εἰς μίαν τράπεζαν ἔχει κατατεθῆ κεφάλαιον μὲ $5\frac{1}{2}$ °/ₒ, τὸ ὁποῖον κάθε ἑξαμηνίαν φέρει τόκον 1155 δρ. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς τρεῖς κληρονόμους ἀδελφὰς ἀναλόγως τῆς ἡλικίας των· ἡ πρώτη εἶναι 28 ἐτῶν, ἡ δευτέρα 22 καὶ ἡ τρίτη 20. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον τοῦτο; Καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἑκάστη; (κεφ. 42000, α' 16800, β' 13200, γ' 12000).

11) Δύο ζωέμποροι ἠγόρασαν μαζὶ 200 πρόβατα πρὸς 240 δρ. ἕκαστον· ὁ πρῶτος ἔδωσεν 8000 δρ. περισσότερον τοῦ δευτέρου. Κατόπιν τὰ ἐπώλησαν καὶ ἐκέρδισαν 6000 δρ. Ζητεῖται α') πόσας δραχμὰς ἔδωσεν ἕκαστος, β') πόσον κέρδος θὰ λάβῃ, καὶ γ') πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισαν.

(ὁ α' ἔδωσε 28000 καὶ ὁ β' 20000· ὁ α' θὰ λάβῃ κέρδος 3500 καὶ ὁ β' 2500· ἐκέρδισαν 12,50 °/ₒ).

12) Διὰ τὴν σκαφὴν μιᾶς ἀμπέλου ἐμίσθωσέ τις 8 ἐργάτας, τὴν ἄλλην ἡμέραν ἐμίσθωσεν ἄλλους 5 ἐργάτας καὶ τὴν ἄλλην ἡμέραν ἄλλους 3 καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἡμερομίσθιον ὅλους. Ἡ σκαφὴ ἐτελείωσεν εἰς 5 ἡμέρας καὶ ἔλαβον ὅλοι μαζὶ 4830 δρ. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

(ἕκαστος τῶν πρώτων 350 δρ, ἕκαστος τῶν δευτέρων 280, καὶ ἕκαστος τῶν τρίτων 210).

13) Ἔμπορός τις ἤρχισεν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν μὲ 40000 δραχμάς, μετὰ 20 ἡμέρας προσέλαβε συνέταιρον μὲ 50000 δραχμὰς καὶ μετὰ 2 μῆνας ἀπὸ τούτου προσέλαβον καὶ τρίτον μὲ 60000 δραχμάς. Μετὰ 4 μῆνας 10 ἡμ. ἀπὸ τῆς προσλήψεως τοῦ τρίτου ἐλογαριάσθησαν καὶ εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 51400 δρ. Πόσον κέρδος πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος; (16800, 19000, 15600).

14) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν συγχρόνως διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησίν των τὰ ἑξῆς ποσά. Ὁ α' 40000 δραχμάς, ὁ β' 30000 καὶ ὁ γ' 50000· μετὰ τὴν διάλυσιν τῆς ἐπιχειρήσεώς των ἔλαβεν

ὁ α' κέρδος 8000 δρ. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος τῶν ἄλλων;
(6000 καὶ 10000).

15) Τρεῖς ἔμποροι ἔκαμον μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκέρδισαν 30000 δραχ., μετὰ τὴν διάλυσιν δὲ ταύτης ἔλαβον κεφάλαιον καὶ κέρδος μαζὶ ὁ α' 48000, ὁ β' 72000, ὁ γ' 60000. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος; (8000, 12000, 10000).

16) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 17900 δρ. Ἐκ τούτων ὁ α' θὰ λάβῃ 15 % περισσότερον τοῦ β', ὁ δὲ β' 20 % περισσότερον τοῦ γ'. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἂν ὁ γ' λάβῃ 100 δρ., ὁ β' θὰ λάβῃ 120 καὶ ὁ α' 138. Μερίζομεν τώρα τὰς 17900 δρ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ γ' θὰ λάβῃ 5000, ὁ β' 6000 καὶ ὁ α' 6900.

17) Τρεῖς συνέταιροι ἐκέρδισαν ἐκ τοῦ ἐμπορίου των 60000 δρ. Ὁ α' ἔχει καταθέσει τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ὁλικοῦ κεφαλαίου των, ὁ β' τὸ τρίτον αὐτοῦ καὶ ὁ γ' τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἦτο 70000 δρ. Πόσον κεφάλαιον κατέθεσεν ὁ α' καὶ ὁ β' καὶ πόσον κέρδος ἔλαβεν ἕκαστος;

(α' 90000, β' 80000, κέρδος α' 22500, β' 20000, γ' 17500)

ΠΕΡΙ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

238. ***Μέσος ὅρος*** ὁμοειδῶν ἀριθμῶν (ἢ ἀφῃρημένων) λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἐκφράζει τὸ πλῆθος αὐτῶν. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου ἔστωσαν τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις εἰσέπραξεν ἐπὶ τρεῖς ἡμέρας τὰ ἑξῆς ποσά· τὴν πρώτην ἡμέραν 600 δρ., τὴν δευτέραν 475 καὶ τὴν τρίτην 554. Πόση εἶναι ἡ κατὰ μέσον ὅρον εἴσπραξις ἑκάστης ἡμέρας;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 600+475+554 ἢ 1629 διὰ 3 (διότι τρεῖς εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ) καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 543 δραχ.

Δυνατὸν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς νὰ ἐπαναλαμβάνεται δύο ἢ περισσοτέρας φοράς, ὡς φαίνεται κατωτέρω.

2) Ἠγόραζέ τις ἐπὶ πέντε ἡμέρας ἀπὸ μίαν ὀκᾶν ἀνθράκων τὴν ἡμέραν μὲ τὰς ἑξῆς τιμάς· τὰς τρεῖς πρώτας ἡμέρας πρὸς 3 δραχ. τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ὑπολοίπους πρὸς 3,50 τὴν ὀκᾶν. Πόσον ἠγόρασε κατὰ μέσον ὅρον τὴν ὀκᾶν;

Λύσις. Διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα 3+3+3+3,50+3,50 ἢ 16 δρ. διὰ 5 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κατὰ μέσον ὅρον τιμὴ τῆς ὀκᾶς εἶναι 3,20· δηλαδή, ἂν τὰ ἠγόραζε κάθε ἡμέραν πρὸς 3,20 τὴν ὀκᾶν, θὰ ἔδιδε πάλιν 16 δρ.

Τὸ αὐτὸ θέλομεν εὕρει, ἐὰν εἴπωμεν ὅτι ἠγόρασε 3 ὀκ. πρὸς 3 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 2 ὀκ. πρὸς 3,50. Διότι εἶναι

$$\begin{array}{rcl} 3 \times 3 & = & 9 \text{ δρ.} \\ 3,50 \times 2 & = & 7 \\ \hline 5 \text{ ὀκ.} & & 16 \text{ δρ.} \end{array} \qquad 16 : 5 = 3,20.$$

Προβλήματα. 1) Μαθητής τις ἔλαβεν εἰς τὰ διάφορα μαθήματά του τοὺς ἑξῆς ὁλικοὺς βαθμοὺς 6, 8, 5, 9, 5, 7, 4, 10. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος γενικὸς βαθμὸς αὐτοῦ; $\left(6\frac{3}{4} \text{ ἢ } 6,75\right)$.

2) Ἐπλήρωσέ τις δι' ἐνοίκιον τῆς οἰκίας του τὸ α' ἔτος 750 δρ. τὸν μῆνα, τὸ δὲ β' ἔτος 900. Πόσον ἐπλήρωσε κατὰ μέσον ὅρον τὸν μῆνα; (825).

3) Διὰ τὴν οἰκοδομὴν μιᾶς οἰκίας προσελήφθησαν 5 ἐργάται πρὸς 100 δρ. τὴν ἡμέραν ἕκαστος, 10 ἐργάται πρὸς 80 δρ. καὶ 5 ἐργάται πρὸς 60 δρ. Πόσον εἶναι κατὰ μέσον ὅρον τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου; (80 δρ.)

ΠΕΡΙ ΑΝΑΜΙΞΕΩΣ

239. Ὅταν οἱ ἔμποροι ἔχουν διαφόρους ποιότητας ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ πράγματος, π. χ. καφέ, καὶ δὲν δύνανται νὰ πωλήσωσιν εὐκόλως ἑκάστην ποιότητα χωριστὰ (διότι οὔτε ἡ καλὴ ποιότης πωλεῖται εὐκόλως ὡς ἀκριβή, οὔτε ἡ κακὴ ποιότης), ἀναγκάζονται ἐνίοτε νὰ ἀναμιγνύωσι τὰς ποιότητας ταύτας καὶ νὰ σχηματίζωσι μῖγμα μετρίας ποιότητος καὶ μετρίας ἀξίας· οὕτω δὲ εὐκολύνουσι τὴν πώλησιν τοῦ πράγματος τούτου. Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως διακρίνονται κυρίως εἰς τὰ ἑξῆς δύο εἴδη.

Πρῶτον εἶδος.

240. Εἰς τὸ πρῶτον εἶδος δίδονται πρὸς ἀνάμιξιν αἱ ποσότητες δύο ἢ περισσοτέρων πραγμάτων, δυναμένων νὰ ἀναμιχθῶσι, καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου αὐτῶν, ζητεῖται δὲ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Ἔστω π. χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Παντοπώλης ἀνέμιξε 10 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 80 δρ., μὲ 40 ὀκ. ἄλλου εἴδους καφέ, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 68 δρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ λάβῃ ὅσα χρήματα θὰ ἐλάμβανεν, ἂν ἐπώλει ἕκαστον εἶδος χωριστά;

Λύσις. Ἀπὸ τὰς 10 ὀκ. θὰ ἐλάμβανε $10 \times 80 = 800$ δρ.
» » 40 » » » $40 \times 68 = 2720$
ἄθρ. 50 ὀκ. ἄθρ. 3520 δρ.

Καὶ ἀπὸ τὰ δύο εἴδη θὰ ἐλάμβανε 3520 δρ. Τόσας πρέπει νὰ λάβῃ καὶ ἀπὸ τὰς 50 ὀκ. τοῦ μίγματος, ὥστε πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν 3520 : 50 ἢ 70,40 δρ.

Σημ. Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ 70,40 εἶναι ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαφόρων τιμῶν τοῦ καφέ, ὅταν δηλ. λάβωμεν 10 προσθετέους ἴσους μὲ τὰς 80 δρ. καὶ 40 προσθετέους ἴσους μὲ τὰς 68 δρ.

Δεύτερον εἶδος.

241. Εἰς τὸ δεύτερον εἶδος δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται πόσον θὰ λάβωμεν ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα ὡρισμένης ποσότητος, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τῆς μονάδος νὰ εἶναι ἐπίσης ὡρισμένη (κειμένη μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν δοθέντων πραγμάτων) καὶ νὰ μὴ ἔχωμεν κέρδος ἢ ζημίαν.

Πρόβλημα. Ἔχει τις δύο εἴδη βουτύρου· τοῦ πρώτου εἴδους τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 90 δραχμάς, τοῦ δὲ δευτέρου πρὸς 80. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 120 ὀκάδων, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν νὰ πωλῇ πρὸς 83 δρ. καὶ νὰ λάβῃ τὰ αὐτὰ χρήματα;

Λύσις. Ἡ ὀκᾶ τοῦ α΄ εἴδους πωλεῖται χωριστὰ 90 δραχμάς, εἰς τὸ μῖγμα εὑρισκομένη θὰ πωλῆται 83 δραχμάς, ἐπομένως θὰ χάνῃ 7 δρ. Ἡ ὀκᾶ τοῦ β΄ εἴδους πωλεῖται χωριστὰ 80 δραχμάς, εἰς τὸ μῖγμα θὰ πωλῆται 83 δραχμάς, ἐπομένως θὰ κερδίζῃ 3 δρ. Ἐὰν λοιπὸν λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 3 ὀκ. (ἤτοι ὅσας δραχμὰς κερδίζει ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ β΄), θὰ χάσῃ εἰς τὸ μῖγμα 7×3, ἤτοι 21 δρ. Ἐὰν λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος 7 ὀκάδ. (ἤτοι ὅσας δραχμὰς χάνει ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ α΄), θὰ κερδίσῃ εἰς τὸ μῖγμα 3×7, ἤτοι πάλιν 21 δρ. Ὥστε οὔτε θὰ χάνῃ οὔτε θὰ κερδίζῃ εἰς τὸ μῖγμα, ὅταν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 3 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος 7 ὀκ.

Αὕτη λοιπὸν ἡ ἀναλογία πρέπει νὰ τηρῆται πρὸς σχηματισμὸν τοῦ μίγματος· ὅσας δηλ. φορὰς λαμβάνει ἀπὸ τὸ α΄ τὰς 3 ὀκάδας, τόσας φορὰς πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ β΄ τὰς 7 ὀκ. Διὰ τοῦτο μερίζομεν τὸν ἀριθμὸν 120 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 7 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ 36 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ β΄ 84 ὀκ.

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

	α΄ 90 δρ.		3
Μεριστέος 120		83 δρ.	
	β΄ 80		$\frac{7}{10}$

$$\alpha' \frac{120\times3}{10} \text{ ἢ } 36 \text{ ὀκ., } \beta' \frac{120\times7}{10} \text{ ἢ } 84 \text{ ὀκ.}$$

Ἤτοι γράφομεν μεταξὺ τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν τὴν τιμὴν τοῦ μίγματος καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ α΄ εἴδους γράφομεν τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους, πρὸς δὲ τὰ δεξιὰ τῆς τιμῆς τοῦ β΄ εἴδους γράφομεν τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς καὶ τοῦ μίγματος καὶ τῆς τιμῆς τοῦ α΄ εἴδους. Κατόπιν μερίζομεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν ἀναλόγως τῶν διαφορῶν τούτων.

242. Εἰς τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως ὑπάγονται καὶ τὰ προβλήματα τῶν μεταλλικῶν κραμάτων, τῶν παραγομένων ἐκ τῆς συγχωνεύσεως δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων, καὶ λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Εἴδομεν (ἐδ. 185) ὅτι ***βαθμὸς καθαρότητος*** ἢ ***τίτλος*** κράματος πολυτίμου μετάλλου (χρυσοῦ ἢ ἀργύρου) μετὰ μὴ πολυτίμου μετάλλου λέγεται τὸ ποσὸν τοῦ πολυτίμου μετάλλου τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς μίαν μονάδα τοῦ κράματος.

2) ***Πρόβλημα.*** Χρυσοχόος συνεχώνευσε 30 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος ἢ βαθμὸς καθαρότητος εἶναι 0,920, μὲ 10 δράμια ἀργύρου, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,800. Ποῖος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Λύσις.	Τὰ 30 δρ. ἔχουν καθαρὸν ἄργυρον	30×0,920=27,600
	Τὰ 10 » » » »	10×0,800= 8,000
	ἄθρ. 40 δράμ.	ἄθρ. 35,600

Ὥστε τὰ 40 δράμια τοῦ κράματος ἔχουν καθαρὸν ἄργυρον 35,600 τοῦ δραμίου καὶ ἑπομένως τὸ 1 δράμιον ἔχει 35,600 : 40 ἢ 0,890. Τόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος.

3) ***Πρόβλημα.*** Χρυσοχόος ἔχει 2 τεμάχια χρυσοῦ· τοῦ πρώτου ὁ τίτλος εἶναι 0,900, τοῦ δὲ δευτέρου 0,820. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 32 δραμίων, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος νὰ εἶναι 0,850;

Λύσις. Ἀπὸ 1 δράμιον τοῦ α΄ θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα περίσσευμα 0,900 — 0,850 ἢ 0,050 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ· ἀπὸ 1 δράμιον τοῦ β΄ θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα ἔλλειμμα 0,850 — 0,820 ἢ 0,030 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ.

Ἐὰν λοιπὸν λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ εἶδος 0,030 τοῦ δραμίου, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα περίσσευμα 0,050×0,030 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ. Ἐὰν δὲ λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ 0,050 τοῦ δραμίου, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα ἔλλειμμα 0,030×0,050 τοῦ δραμίου καθαροῦ χρυσοῦ, ἤτοι πάλιν τὸ αὐτὸ ποσόν.

Ὥστε οὔτε περίσσευμα οὔτε ἔλλειμμα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κρᾶμα, ὅταν λαμβάνῃ ἀπὸ τὸ α΄ 0,030 τοῦ δραμίου καὶ ἀπὸ τὸ β΄ 0,050. Μερίζομεν τώρα τὸν ἀριθμὸν 32 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 0,030 καὶ 0,050 ἢ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5 (ἐδ. 236, Παρατήρησις) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α΄ 12 δράμια καὶ ἀπὸ τὸ β΄ 20.

Διάταξις τῆς πράξεως	α΄	0,900	0,030 ἢ	3
Μεριστέος 32		0,850		
	β΄	0,820	0,050 ἢ	5
				8

$$\alpha' \quad \frac{32\times3}{8} \text{ ἢ } 12, \qquad \beta' \quad \frac{32\times5}{8} \text{ ἢ } 20.$$

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἠγόρασέ τις 1400 ὀκ. οἴνου πρὸς 6 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 800 ὀκ. ἄλλου εἴδους πρὸς 7 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ἐὰν αναμίξῃ τὰ εἴδη ταῦτα μὲ 300 ὀκ. ὕδατος, πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος; (5,60).

2) Παντοπώλης τις ἀνέμιξε λίπος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 δρ., μὲ τετραπλασίας ὀκάδας βουτύρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 95 δρ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; Καὶ πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, διὰ νὰ κερδίζῃ ἀπὸ ἑκάστην ὀκᾶν 16 δραχμάς; (84 καὶ 100).

Σημ. Λίπος λαμβάνομεν ὅσον θέλομεν, π. χ. 1 ὀκᾶν, ἑπομένως βούτυρον θὰ λάβωμεν 4 ὀκ.

3) Παντοπώλης τις ἀνέμιξε 30 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 62 δραχμάς, μὲ 20 ὀκ. ἄλλου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 57 δρ. Ζητεῖται 1) πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος, 2) πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐξ ὅλου τοῦ μίγματος 450 δρ., καὶ 3) πόσον διὰ νὰ κερδίσῃ 20 %.

(60 δρ., 69 δρ., 72 δρ.).

4) Ἔχει τις δύο εἴδη βουτύρου, τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 95 δρ. καὶ 80 δρ. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τὰ εἴδη ταῦτα, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίζῃ 84 δρ.;

(νὰ λαμβάνῃ 4 ὀκ. ἀπὸ τὸ α΄ καὶ 11 ἀπὸ τὸ β΄).

5) Χωρικός τις ἔχει σῖτον καὶ κριθήν· τὸν σῖτον πωλεῖ πρὸς δρ. 7,80 τὴν ὀκᾶν, τὴν δὲ κριθὴν πρὸς 4 δρ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ἀναμίξῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 1000 ὀκ. καὶ νὰ λάβῃ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτῶν 6280 δραχμάς;

(600 καὶ 400).

6) Χρυσοχόος ἔκαμεν ἓν δακτυλίδιον μὲ 13 γραμμάρια χρυσοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,900, καὶ μὲ 2 γραμμάρια χαλκοῦ. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Λύσις. Τὰ 15 γραμ. τοῦ κράματος ἔχουν καθαρὸν χρυσὸν $0,900 \times 13$ ἢ 11,700 τοῦ γραμμαρίου, ἐπομένως ὁ τίτλος εἶναι $11,700 : 15$ ἢ 0,780.

7) Μία ἅλυσος ὡρολογίου ἀπὸ χρυσὸν καὶ χαλκὸν κατεσκευασμένη ζυγίζει 60 γραμμάρια καὶ ἔχει τίτλον 16 καρατίων· Πόσον χρυσὸν καὶ πόσον χαλκὸν περιέχει;

Λύσις. Χρυσὸν $60 \times \frac{16}{24}$ ἢ 40 γραμ. (ἴδε ἐδ. 185, Σημ.) καὶ χαλκὸν 20 γραμ.

8) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασε 400 ὀκ. οἴνου πρὸς 8 δρ. τὴν ὀκᾶν, κατόπιν ἔρριψεν ἐντὸς αὐτοῦ ὕδωρ 15 % καὶ τὸν ἐπώλησε πρὸς 12 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (72,50 %).

9) Παντοπώλης τις ἔχει δύο εἴδη καφέ· ἐὰν λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους 40 ὀκ., τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 69 δραχμάς, πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 63 δραχμάς, διὰ νὰ κάμῃ μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ νὰ κοστίζῃ 65 δραχμάς;

Λύσις. Ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ α΄ εἴδους θὰ χάνῃ εἰς τὸ μῖγμα 4 δρ. καὶ ἀπὸ τὰς 40 ὀκ. θὰ χάσῃ 160 δραχμάς· ταύτας πρέπει νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος, διὰ νὰ μὴ προκύψῃ ζημία. Ἀλλ' ἀπὸ μίαν ὀκᾶν τοῦ β΄ εἴδους θὰ κερδίζῃ εἰς τὸ μῖγμα 2 δραχμάς, ὥστε πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ β΄ εἶδος $160 : 2$ ἢ 80 ὀκ.

10) Ἔχει τις 450 ὀκ. ὄξους, τοῦ ὁποίου τὴν ὀκᾶν πωλεῖ πρὸς 6 δρ. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ῥίψῃ εἰς αὐτό, διὰ νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν 5,40 καὶ νὰ λάβῃ ὅσα καὶ πρὶν χρήματα; (50 ὀκ.).

11) Χρυσοχόος τις ἔχει δύο εἴδη χρυσοῦ· ἐὰν λάβῃ ἐκ τοῦ α΄

40 γραμ., τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,950, πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ β', τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,600 διὰ νὰ κάμῃ βραχιόλιον, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος νὰ εἶναι 0,880; (10 γρ.).

12) Παντοπώλης τις ἠγόρασε 350 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 20 δρ. τὴν ὀκᾶν καὶ 150 ὀκ. ἄλλου ἐλαίου πρὸς 22 δρ. τὴν ὀκᾶν, ἐξώδευσε δὲ ἀκόμη διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτοῦ 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του· κατόπιν ἀνέμιξε τὰ εἴδη ταῦτα καὶ ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος πρὸς 25 δρ. Πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (22,66, 10,32 %).

13) Παντοπώλης τις ἀνέμιξε 10 ὀκ. καφέ, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 65 δρ., μὲ 30 ὀκ. ἄλλου εἴδους καὶ ἐσχημάτισε μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 61,25 δρ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου εἴδους; (60 δρ.).

14) Ἀλευροπώλης τις ἔχει δύο εἴδη ἀλεύρου, τοῦ πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ κοστίζει 10,50 δραχμάς, τοῦ δὲ δευτέρου 10 δρ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος, διὰ νὰ σχηματίσῃ μῖγμα 2000 ὀκάδων, τὸ ὁποῖον νὰ πωλῇ πρὸς δρ. 11,96 τὴν ὀκᾶν καὶ νὰ κερδίζῃ 15 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του;

Λύσις. Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον τοῦ κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος.

Ἂν πωλῇ τὴν ὀκ. 115 δρ. τοῦ κοστίζει 100
» » » » 11,96 x

Εὑρίσκομεν 10,40. Λύομεν τώρα τὸ πρόβλημα, ὅπως καὶ τὸ ἐν τῷ ἐδαφίῳ 241, καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὸ α' θὰ λάβῃ 1600 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὸ β' 400.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΜΜΙΓΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ [1].

Α'. Ἀσκήσεις.

243. Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις νὰ ἐκτελῶνται πρῶτον αἱ

[1] Ἐκ τῶν προβλημάτων τούτων νὰ δίδωνται κατ' ἐκλογὴν ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος καὶ εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς Γ' τάξεως κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ σχολικοῦ ἔτους πρὸς ἄσκησιν αὐτῶν.

ἐντὸς τῶν παρενθέσεων πράξεις καὶ ἔπειτα αἱ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν.

$\left[(0,8\times0,5)-\frac{1}{4}\right]\times\frac{3}{5}$ . . . . (0,03).

$\left[\left(\frac{3}{4}\times0,4\right)\times\left(\frac{4}{5}+0,6\right)\right]:7$ . . . . (0,06)

$\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)-(0,2+0,45)\right]\times 2$ . . . . (1).

$\left[\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\times(5,20-2,80)\right]:0,5$ . . . . (6,8).

$\left[\left(5-\frac{4}{5}\right)+\left(3,40-\frac{3}{4}\right)\right]\times 0,4$ . . . . . . (27,40).

$\left[(3-1,70)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\right]:1,2$ . . . . (2).

$\left[(3,25\times0,2)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]\times 2,50$ . . . . . . (1).

$\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]:0,15$ . . . . . . (0,625).

$\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}$ . . . . $\left(3\frac{1}{9}\right)$.

$\dfrac{\left(\frac{2}{5}\times1\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}}{\left(2\frac{1}{4}:1\frac{1}{2}\right):3}=$ . . . . (2).

$\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{3-2\frac{4}{5}}-\dfrac{\frac{3}{4}}{1\frac{1}{2}}$ . . . . $\left(5\frac{1}{3}\right)$.

$\dfrac{\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{5}}:\dfrac{2\frac{1}{2}}{3-\frac{3}{4}}$ . . . . $\left(1\frac{1}{8}\right)$.

Β΄. Προβλήματα.

1) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν 25 πήχεις ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος πρὸς 20 δραχμὰς τὸν πῆχυν· ἔπειτα ἐπώλησεν ἐξ αὐτοῦ 16 πήχ. 6 ρούπ. πρὸς 24 δρ. τὸν πῆχυν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐπώλησε πρὸς 25 δρ. τὸν πῆχυν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (21,65 %).

2) Εἰς ἕκαστον στρατιώτην ἑνὸς συντάγματος ἐδίδετο ἄρτος

1 ὀκᾶ 380 δράμια διὰ 3 ἡμέρας καὶ ἐντὸς 10 ἡμερῶν ἐδόθησαν 11492 ὀκάδες, ἀλλὰ 80 στρατιῶται ἀπουσίαζον ἐπὶ 4 ἡμέρας. Ἐκ πόσων στρατιωτῶν ἀπετελεῖτο τὸ σύνταγμα; (1800).

3) Ἠγόρασέ τις ἓν κτῆμα 18 στρεμμάτων πρὸς 600 δρ. τὸ στρέμμα· μετὰ 5 ἔτη τὸ ἐπώλησε πρὸς δρ. 2,50 τὸν τετρ. τεκτονικὸν πῆχυν. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (128,15 %).

4) Ἠγόρασέ τις ἄνθρακας εἰς σάκκους, τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶναι 350 ὀκ. πρὸς δρ. 2,80 τὴν ὀκᾶν. Πόσον θὰ πληρώσῃ, ἂν τὸ ἀπόβαρον εἶναι $1\frac{1}{2}$ %; (965,30).

5) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ὕφασμά τι πρὸς 84 δρ. τὴν ὑάρδαν, ἐξώδευσεν ἀκόμη διὰ τὴν μεταφοράν του 20 %. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίζῃ 25 %; (88,20).

Σημ. 1 π. = 0,7 τῆς ὑάρδας.

6) Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ὕφασμά τι μὲ ζημίαν 5 % ἕνεκα μικρᾶς βλάβης· ἂν ὅμως τὸ ἐπώλει 9,10 δρ. περισσότερον τὸν πῆχυν, θὰ ἐκέρδιζε 8 %. Πόσον τοῦ ἐκόστιζεν ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος; (70 δρ.).

7) Ἐδανείσθη τις κεφάλαιον πρὸς 12 % διὰ 7 μῆνας, ἀλλὰ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ προπληρώσῃ τὸν τόκον· ἀφοῦ λοιπὸν ἐκρατήθη ὁ τόκος ἐκ τοῦ κεφαλαίου, ἔλαβε τὸ ὑπόλοιπον 13020 δρ. Πόσον κεφάλαιον ἐδανείσθη; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐδανείσθη πραγματικῶς; (14000, 12,90 %).

8) Ἔμπορός τις πτωχεύσας συνεβιβάσθη νὰ πληρώσῃ εἰς τοὺς τρεῖς δανειστάς του 40 %. Ἐπλήρωσεν εἰς τὸν πρῶτον 12000 δραχμάς, εἰς τὸν δεύτερον 11200 καὶ εἰς τὸν τρίτον τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν ὅσων ἐπλήρωσεν εἰς τὸν πρῶτον. Πόσον ἐχρεώστει εἰς ἕκαστον; (30000, 28000, 24000).

9) Γραμμάτιον, τὸ ὁποῖον λήγει τὸ ἔτος 1933 Ἀπριλίου 8, προεξωφλήθη πρὸς 6 % ἀντὶ 4624 δραχμῶν καὶ ἔγινεν ὑφαίρεσις (ἐξωτ.) 176 δρ. Πότε προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον; (τὸ ἔτος 1932 Αὐγ. 28).

10) Χρυσοχόος θέλει νὰ συγχωνεύσῃ 80 γραμμάρια χρυσοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι 0,750, μὲ καθαρὸν χρυσὸν καὶ νὰ κάμῃ κρᾶμα, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος νὰ εἶναι 0,840. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν θὰ συγχωνεύσῃ; (45 γρ.).

11) Πόσος καθαρὸς χρυσὸς πρέπει νὰ συγχωνευθῇ μὲ 84

γραμμάρια χρυσοῦ τῶν 16 καρατίων, διὰ νὰ σχηματισθῇ κρᾶμα 18 καρατίων; (28 γρ.).

12) Εἰς τὸ ἄκρον πρωτογενοῦς μοχλοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 2,40 τοῦ μέτρου, ἐξαρτᾶται βάρος 75 ὀκάδων· ἵνα ὁ μοχλὸς ἰσορροπήσῃ, πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον βάρος 15 ὀκάδων. Πόσον ἀπέχει τὸ ὑπομόχλιον ἀπὸ τὸ βάρος 75 ὀκάδων; (0,40).

13) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἐμπορεύματα ἀξίας 12000 δραχμῶν, ἐπλήρωσεν ἀκόμη διὰ προμήθειαν $\frac{1}{2}$ % καὶ διὰ ναῦλον κτλ. μέχρι παραλαβῆς 600 δρ. Πόσον τοῖς ἑκατὸν ηὐξήθη ἡ ἀγορὰ τῶν ἐμπορευμάτων; (5,50 %).

14) Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις γραμματίου προεξοφληθέντος 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του εἶναι 10,25 τῆς δραχμῆς, ἡ δὲ ἐσωτερικὴ εἶναι 10 δρ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον προεξωφλήθη τὸ γραμμάτιον; (6 %).

15) Ὑπάλληλός τις ἔχει μηνιαῖον εἰσόδημα 5760 δραχμάς· ἐκ τούτων τὰ $\frac{7}{9}$ εἶναι ἡ μισθοδοσία του, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ τόκος κεφαλαίου τοκισθέντος πρὸς 10 %. Πόση εἶναι ἡ μισθοδοσία του καὶ πόσον τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον; (4480, 153600).

16) Εἶχέ τις 34000 δρ. καὶ ἐξ αὐτῶν ἐτόκισε μέρος πρὸς 8 % καὶ τὸ ἄλλο πρὸς 10 %· μετὰ 1 ἔτος 3 μ. ἔλαβεν ἐν ὅλῳ τόκους 3930 δρ. Ποῖα εἶναι τὰ τοκισθέντα κεφάλαια; (21200 καὶ 12800).

17) Διέταξέ τις εἰς τὴν διαθήκην του νὰ μοιρασθῇ ἡ περιουσία του ὡς ἑξῆς. Ἡ θυγάτηρ του νὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς καὶ ὁ υἱός του τὸ τέταρτον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ κατατεθῇ εἰς μίαν τράπεζαν πρὸς 4,50 % καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτοῦ 2250 δρ. νὰ μοιράζεται κατ᾽ ἔτος εἰς πτωχὰς οἰκογενείας τῆς πατρίδος του. Πόση ἦτο ἡ περιουσία του; Καὶ πόσον θὰ λάβῃ ἡ θυγάτηρ καὶ ὁ υἱός; (400000, 250000, 100000).

18) Παντοπώλης τις ἠγόρασε σάπωνα 340 ὀκ. πρὸς δρ. 14,60 τὴν ὀκᾶν, ἐξώδευσε καὶ διὰ τὴν μεταφοράν του 236 δραχμάς, κατόπιν ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν πρὸς 17,40, ἀλλὰ παρετήρησεν ὅτι ὁ σάπων ἕνεκα ξηρασίας ἔχασε 5 % ἐκ τοῦ βάρους του. Πόσον ἐκέρδισε; (420,20 δρ.).

19) Ἔμπορός τις κατέθεσε διὰ μίαν ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν

49000 δραχμάς, μετά τινα δὲ χρόνον προσέλαβε συνέταιρον μὲ 50000 δρ. Μετὰ ἓν ἔτος ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἐμπορίου λογαριασθέντες εὗρον ὅτι ἐκέρδισαν 17600 δραχμάς· ἐκ τοῦ κέρδους τούτου ὁ πρῶτος ἔλαβεν 9600. Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ ἐμπορίου προσελήφθη ὁ δεύτερος. (μετὰ 4 μῆνας).

20) Παντοπώλης τις ἐσχημάτισε μῖγμα 460 ὀκάδων ἀπὸ δύο εἴδη βουτύρου, τῶν ὁποίων ἡ ὀκᾶ κοστίζει 90 καὶ 80 δραχμάς, ἀλλ' ἀπὸ τὸ δεύτερον εἶδος ἔλαβε τετραπλασίας ὀκάδας· κατόπιν ἐπώλησε τὸ μῖγμα καὶ ἐκέρδισε 5520 δρ. Πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε;

(94 δρ., 14,63 %).

21) Ἐργοστασιάρχης ἐπώλησεν εἰς ἔμπορον ὕφασμά τι μὲ κέρδος 8 %, ὁ δὲ ἔμπορος, ἀφοῦ ἐξώδευσε 12 % διὰ τὴν μεταφοράν του, μετεπώλησεν αὐτὸ πρὸς δρ. 69,55 τὸ μέτρον καὶ ἐκέρδισε 15 %. Πόσον ἐκόστιζε τὸ μέτρον εἰς τὸν ἐργοστασιάρχην;

(50 δρ.).

22) Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἴδη καφέ· τὸ α' εἶδος πωλεῖ πρὸς δρ. 82,20 τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 20 %, τὸ δὲ β' εἶδος πωλεῖ πρὸς δρ. 75,90 τὴν ὀκᾶν καὶ κερδίζει 15 %. Ἐὰν ἀναμίξῃ ἴσας ποσότητας ἐξ αὐτῶν, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν διὰ νὰ κερδίζῃ 12 %; (75,32 δρ.).

23) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιόν τι πρὸς 6,50 % δι' ἓν ἔτος. Εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἐτόκισε τὸ κεφάλαιον τοῦτο μαζὶ μὲ τὸν τόκον πρὸς 10 % καὶ μετὰ ἓν ἔτος ἔλαβε κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 14058 δρ. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον; (12000)

24) Νὰ μερισθῶσι 300000 δρ. εἰς τρεῖς κληρονόμους, ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ α' νὰ εἶναι πρὸς τὸ τοῦ β' ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3, τὸ δὲ μερίδιον τοῦ β' νὰ εἶναι πρὸς τὸ τοῦ γ' ὡς ὁ 3 πρὸς τὸν 5. Ποῖα εἶναι τὸ μερίδιά των; (60000, 90000, 150000).

25) Νὰ μερισθῶσι 42500 δρ. εἰς τρία μερίδια, ὥστε ὁ λόγος τοῦ α' πρὸς τὸ β' νὰ εἶναι $\frac{2}{3}$, ὁ δὲ λόγος τοῦ β' πρὸς τὸ γ' νὰ εἶναι $\frac{1}{4}$. Ποῖα εἶναι τὰ μερίδια ταῦτα;

(α' 5000, β' 7500, γ' 30000).

26) Τραπεζίτης προεξώφλησε μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον δύο γραμμάτια. Τὸ ἓν τούτων ἦτο 2800 δρ. καὶ ἔληγε μετὰ 3 μῆνας, τὸ δὲ ἄλλο ἦτο 3000 δρ. καὶ ἔληγε μετὰ 2 μ. 15 ἡμέρας, ἀλλ'

ἀπὸ τὸ δεύτερον ἐκράτησε 6 δρ. ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινεν ἡ προεξόφλησις; (8 %).

27) Νὰ μερισθῶσι 68000 δρ. εἰς 4 ἀνθρώπους ὥστε ὁ β′ νὰ λάβῃ διπλάσια τοῦ α′, ὁ γ′ τὸ τέταρτον τῶν ὅσων θὰ λάβῃ ὁ α′ καὶ ὁ δ′, καὶ ὁ δ′ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων θὰ λάβῃ ὁ γ′. Ποῖα εἶναι τὰ μερίδια; (α′ 16000, β′ 32000, γ′ 12000, δ′ 8000).

28) Ἐδάνεισέ τις 20000 δρ. διὰ 1 ἔτος 3 μῆνας καὶ ἄλλας 18000 δρ. διὰ 6 μῆνας μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ ἔλαβεν ἐν ὅλῳ τόκους 4080 δρ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τὰς ἐδάνεισε; (12 %).

29) Μία οἰκογένεια ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρα ἄτομα (τὸν πατέρα, τὴν μητέρα, τὸν υἱὸν καὶ τὴν θυγατέρα)· αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τεσσάρων ἀποτελοῦν μαζὶ 123 ἔτη, ὁ πατὴρ ἔχει διπλασίαν ἡλικίαν τῶν δύο τέκνων του, ἡ μήτηρ εἶναι τὰ $\frac{7}{9}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός, ἡ δὲ θυγάτηρ εἶναι τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία ἑκάστου ἀτόμου; (π. 54, μ. 42, υἱὸς 15, θ. 12).

30) Ἐὰν συγχωνεύσωμεν 142 γραμ. χρυσοῦ μὲ 8 γραμ. χαλκοῦ, θὰ ἔχωμεν κρᾶμα τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος θὰ εἶναι 0,852. Πόσος εἶναι ὁ τίτλος τοῦ χρυσοῦ; (0,900).

31) Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιόν τι καὶ μετὰ 9 μῆνας ἔλαβε διὰ κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 9460 δρ. Ἐὰν ὅμως ἐδάνειζε τὸ κεφάλαιον τοῦτο διὰ 1 ἔτος 3 μ. θὰ ἐλάμβανε κεφάλαιον καὶ τόκον μαζὶ 9900 δρ. Πόσον κεφάλαιον ἐδάνεισε; Καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον; (8800, 10%).

32) Ἐτόκισέ τις τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν χρημάτων του πρὸς 8 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐτόκισε μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ λαμβάνει ἐξ αὐτοῦ ἐτήσιον τόκον 2240 δρ. περισσότερον τοῦ πρώτου. Ποῖα εἶναι τὰ τοκισθέντα κεφάλαια; (56000 καὶ 84000).

33) Παντοπώλης τις ἀνέμιξεν 60 ὀκ. καφὲ μὲ 20 ὀκ. ἄλλου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 4 δρ. ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, καὶ ἐσχημάτισε μῖγμα, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ κοστίζει 57 δρ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ ἑκάστου εἴδους; (58 καὶ 54 δρ.).

34) Κατέθεσέ τις εἰς μίαν τράπεζαν 20000 δρ. πρὸς 4,50 % ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ· μετὰ 3 ἔτη 4 μ. κατέθεσεν εἰς ἄλλην τράπεζαν 30000 δρ. πρὸς 5 %. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ καὶ ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια ἴσους τόκους; (5).

35) Ἠγόρασέ τις σῖτον καὶ κριθὴν τὸ ὅλον 400 ὀκάδας· τὸν σῖτον ἠγόρασε πρὸς 8 δραχμὰς τὴν ὀκᾶν, τὴν δὲ κριθὴν πρὸς 4,50. Ἔπειτα ἐσχημάτισε μῖγμα, τὸ ὁποῖον ἐπώλησε πρὸς δρ. 8,03 τὴν ὀκᾶν κερδίσας 10 % ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς του. Πόσον σῖτον ἠγόρασε καὶ πόσην κριθήν; (σῖτον 320 ὀκ., κρ. 80 ὀκ.).

36) Τρεῖς ἔμποροι συνεταιρισθέντες κατέθεσαν ὁ μὲν α′ 46800 δραχμάς, ὁ δὲ β′ 78000 διὰ 9 μῆνας, ὁ δὲ γ′ ποσόν τι διὰ 8 μῆνας· μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου των ἔλαβεν ἕκαστος τὸ αὐτὸ κέρδος. Πόσον χρόνον ἔμεινε τὸ κεφάλαιον τοῦ α′ εἰς τὸ ἐμπόριον; Καὶ πόσον κατέθεσεν ὁ γ′;

Λύσις. Διὰ νὰ λάβωσι τὸ αὐτὸ κέρδος, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ γινόμενα τῶν κεφαλαίων των ἐπὶ τοὺς χρόνους εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον γινόμενον εἶναι 78000×9 ἢ 702000 (τόσον εἶναι καὶ τὰ ἄλλα). Ὥστε τὸ κεφάλαιον τοῦ α′ ἔμεινεν εἰς τὸ ἐμπόριον 702000 : 46800 ἢ 15 μῆνας, ὁ δὲ γ′ κατέθεσε 702000 : 8 ἢ 87750 δρ.

37) Τρεῖς ἔμποροι κατέθεσαν μαζὶ 370000 δρ. διὰ μίαν ἐμπορικήν των ἐπιχείρησιν· τοῦ α′ τὸ κεφάλαιον ἔμεινεν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 1 ἔτος 3 μῆνας, τοῦ β′ 10 μ. καὶ τοῦ γ′ 8 μ. Μετὰ τὴν διάλυσιν τοῦ ἐμπορίου ἔλαβον κέρδος ὁ α′ 36000, ὁ β′ 30000 καὶ ὁ γ′ τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ α′. Πόσον κεφάλαιον εἶχε καταθέσει ἕκαστος;

(α′ 120000, β′ 150000, γ′ 100000).

Σημ. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κέρδος ἑκάστου εἰς 1 μῆνα καὶ κατόπιν μερίζομεν τὰς 370000 δρ. ἀναλόγως τῶν κερδῶν τούτων.

38) Εἶχέ τις τοκίσει εἰς τρεῖς ἀνθρώπους ἐν ὅλῳ 35000 δρ. καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Ἀπὸ τὸν πρῶτον ἔλαβε τόκον 1350 δρ. εἰς 9 μῆνας, ἀπὸ τὸν δεύτερον 1000 δρ. εἰς 10 μῆνας καὶ ἀπὸ τὸν τρίτον 2250 δρ. εἰς ἓν ἔτος. Ποῖα εἶναι τὰ τοκισθέντα κεφάλαια καὶ πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθησαν; (12000, 8000, 15000, 15 %).

39) Ἔμπορός τις ἔχει δανείσει ἐν ὅλῳ 8000 δρ. εἰς δύο χωρικούς, εἰς τὸν α′ μὲ 12 % καὶ εἰς τὸν β′ μὲ 15 %· ἀπὸ τὸν α′ λαμβάνει ἐτήσιον τόκον 42 δρ. περισσότερον τοῦ β′. Πόσας δραχμὰς ἔχει δανείσει εἰς τὸν καθένα; (4600 καὶ 3400).

40) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 30 δρ. τὸν τετρ. πῆχυν· κατόπιν ἐπώλησε τὸ τέταρτον αὐτοῦ μὲ κέρδος 20 %, τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ μὲ κέρδος 25 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὲ κέρδος 30 %. Ἐκ τῆς πωλήσεως ὅλου τοῦ οἰκοπέδου ἐκέρδισε 13770 δρ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ οἰκόπεδον; Καὶ πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισε; (1800 π., 25,50 %).

41) Ἔχει τις καταθέσει εἰς μίαν τράπεζαν κεφάλαιόν τι πρὸς $4\frac{1}{2}$ %, εἰς ἄλλην τράπεζαν ἔχει καταθέσει τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ πρώτου κεφαλαίου πρὸς 6 % καὶ κάθε ἑξαμηνίαν λαμβάνει ἀπὸ τὰ δύο κεφάλαια τόκους 243 δρ. Ποῖα εἶναι τὰ τοκισθέντα κεφάλαια;

(6000 καὶ 3600).

42) Ἔμπορός τις εἶχεν ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος 40 πήχεις καὶ κοστίζει ὁ πῆχυς 60 δρ. Ἐξ αὐτοῦ ἐπώλησε 15 π. μὲ κέρδος 20 %, 7 π. μὲ ζημίαν 4 % (ἕνεκα μικρᾶς βλάβης). Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸν πῆχυν τοῦ ὑπολοίπου διὰ νὰ κερδίσῃ ἐξ ὅλου τοῦ ὑφάσματος 18 %; (82,40).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Ἰδιότητες τῶν ἴσων καὶ ἀνίσων ἀριθμῶν.

244. Γνωρίζομεν (ἐδ. 21) ὅτι δύο ἀριθμοὶ λέγονται *ἴσοι*, ὅταν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς εἶναι τόσαι, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες καὶ τοῦ ἄλλου, π. χ. εἶναι $7 = 7$. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἄνισοι***, ὅταν αἱ μονάδες τοῦ ἑνὸς εἶναι περισσότεραι τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου, π. χ. εἶναι $9 > 5$. Οἱ ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος $=$ ἢ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $>$ λέγονται ***μέλη*** τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος, καὶ ὁ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ $=$ ἢ τοῦ $>$ λέγεται ***πρῶτον μέλος***, ὁ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ λέγεται ***δεύτερον μέλος***.

Ἰδιότητες τῶν ἴσων ἀριθμῶν.

245. ***Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ ἴσους ἀριθμούς), θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἴσοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $8 = 8$, θὰ ἔχωμεν καὶ $8 + 1 = 8 + 1$, $8 + 2 = 8 + 2$ κτλ. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων ἀριθμῶν ἔχουν τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων ἴσας μονάδας.

Πρὸς γενίκευσιν τῆς ἰδιότητος ταύτης παριστῶμεν διὰ γραμμάτων τοὺς ἴσους ἀριθμούς, ἤτοι ἂν εἶναι $\alpha = \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \rho = \beta + \rho$. Ἐὰν πάλιν εἶναι $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

246. ***Ἐὰν ἀπὸ ἴσους ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ ἴσους ἀριθμούς), θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἴσοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $9=9$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς καὶ $9-1=9-1$, $9-2=9-2$ κτλ. Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $\alpha=\beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\rho=\beta-\rho$ (ὑποθέτομεν τὸν α μεγαλύτερον τοῦ ρ). Ἂν πάλιν εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\gamma=\beta-\delta$ (ὑποθέτομεν $\alpha>\gamma$).

247. ***Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἢ ἐπὶ ἴσους ἀριθμούς), θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἴσοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $5=5$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς καὶ $5\times2=5\times2$, $5\times3=5\times3$ κτλ. Διότι $5\times2=5\times2$ εἶναι $5+5=5+5$, καὶ $5\times3=5\times3$ εἶναι $5+5+5=5+5+5$ (ἐδ. 245).

Γενικῶς, ἂν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\rho=\beta\times\rho$. Ἐὰν πάλιν εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\gamma=\beta\times\delta$.

248. ***Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ (ἢ δι' ἴσων ἀριθμῶν), θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἴσοι*** (ὑποθέτομεν τὰς διαιρέσεις τελείας).

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $12=12$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς καὶ $12:2=12:2$, $12:3=12:3$ κτλ. Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha:\rho=\beta:\rho$. Ἐὰν πάλιν εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha:\gamma=\beta:\delta$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν μανθάνομεν καὶ τὸ ἑξῆς.

249. ***Ἐὰν ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ μεταξύ των.***

Ἂν π. χ. εἶναι $\beta=\alpha$ καὶ $\gamma=\alpha$, θὰ εἶναι καὶ $\beta=\gamma$.

Σημ. Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀληθεύουσι δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

Ἰδιότητες τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν.

250. ***Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἄνισοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $9>5$, θὰ ἔχωμεν καὶ $9+1>5+1$, $9+2>5+2$ κτλ. ἢ $9-1>5-1$, $9-2>5-2$ κτλ. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνισοτήτων τούτων ἔχουν μονάδας περισσοτέρας τῶν μονάδων τοῦ δευτέρου μέλους.

Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α+ρ>β+ρ$ καὶ $α-ρ>β-ρ$ (εἶναι $β>ρ$).

251. ***Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἄνισοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $7>4$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς κατὰ μείζονα λόγον καὶ $7+5>4+3$ (εἶναι $5>3$). Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $α>β$ καὶ $γ>δ$, θὰ εἶναι καὶ $α+γ>β+δ$.

252. ***Ἐὰν ἀνίσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἄνισοι.***

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $8>5$, θὰ ἔχωμεν καὶ $8\times2>5\times2$, $8\times3>5\times3$ κτλ. Διότι $8\times2>5\times2$ εἶναι $8+8>5+5$ καὶ $8\times3>5\times3$ εἶναι $8+8+8>5+5+5$ (ἐδ. 250). Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α\times ρ>β\times ρ$.

253. ***Ἐὰν δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ ἄνισοι*** (ὑποθέτομεν τὰς διαιρέσεις τελείας).

Ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $24>12$, θὰ ἔχωμεν προφανῶς καὶ $24:2>12:2$, $24:3>12:3$ κτλ. Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $α>β$, θὰ εἶναι καὶ $α:ρ>β:ρ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

Α΄. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

254. ***Τὸ ἄθροισμα ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν αὐτούς.***

Λέγω π. χ. ὅτι εἶναι $3+5+8+9=8+5+9+3$.

Διότι αἱ μονάδες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ὡρισμέναι, ὁ 3 π. χ. ἔχει τρεῖς μονάδας, ὁ 5 ἔχει πέντε μονάδας κτλ., ἑπομένως εἶναι ἀδιάφορον κατὰ ποῖον τρόπον θὰ ἑνώσωμεν αὐτάς, ἀρκεῖ μόνον νὰ λάβωμεν ὅλας.

Ἐπειδὴ οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, διὰ τοῦτο παριστῶμεν αὐτοὺς χάριν συντομίας διὰ γραμμάτων καὶ τότε ἡ ἰδιότης ἐκφράζεται γενικῶς διὰ τῆς ἰσότητος

$$α+β+γ+δ=γ+β+δ+α.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης λέγεται ***θεμελιώδης ἰδιότης***· διότι ἐπ' αὐτῆς στηρίζονται, ὡς θὰ ἴδωμεν, αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Λέγεται ἀκόμη καὶ ***ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως***. Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐμάθομεν καὶ ἄλλοτε (ἐδ. 24).

255. ***Τὸ ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους προσθετέους διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.***

Ἔστω π. χ. τὸ ἄθροισμα $7+8+6+5$. Λέγω ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσω τοὺς ἀριθμοὺς 8 καὶ 6 διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 14. Διότι δύναμαι νὰ προσθέσω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω (ἐδ. 254), προσθέτω λοιπὸν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 8 καὶ 6 καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 14 θὰ προσθέσω τοὺς ἄλλους ἀριθμοὺς 7 καὶ 5, ἑπομένως πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης $7+8+6+5=14+7+5$.

Εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 6 τοῦ πρώτου μέλους ἀντικατεστάθησαν εἰς τὸ δεύτερον μέλος διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν 14. Καὶ ὁ 14 τοῦ δευτέρου μέλους ἀντεκατεστάθη εἰς τὸ πρῶτον μέλος διὰ τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 6. Ἐκ τούτου μανθάνομεν ἀκόμη ὅτι

256. ***Τὸ ἄθροισμα δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον δι' ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.***

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$7+8+6+5=(8+6)+7+5$$

ἢ $$7+8+6+5=7+(8+6)+5 \quad \text{(ἐδ. 254).}$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\gamma)+\delta$.

257. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς ἄθροισμα (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτό), ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν αὐτὸν εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος.***

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὸν 2 εἰς τὸ ἄθροισμα $9+5+3$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(9+5+3)+2$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ $9+7+3$ (ἐπρόσθεσα τὸν 2 εἰς τὸν 5). Διότι κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα (ἐδ.256) δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν προσθετέον $(9+5+3)$ δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ὡς ἄθροισμα, ἤτοι διὰ τοῦ ἀθροίσματος $9+5+3$ (ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὴν παρένθεσιν), ὅτε ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$(9+5+3)+2=9+5+3+2=9+7+3 \quad \text{(ἐδ. 255).}$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

258. ***Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀθροίσματα (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτά), προσθέτομεν ὅλους τοὺς προσθετέους αὐτῶν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο ἀθροίσματα $5+6+3$ καὶ $7+4$, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $(5+6+3)+(7+4)$. Λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $5+6+3+7+4$. Διότι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς προσθετέους $(5+6+3)$ καὶ $(7+4)$ δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτοὺς ὡς ἄθροισμα, ἤτοι διὰ τῶν $5+6+3$ καὶ $7+4$ (ἐδ. 256), ὅτε θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$(5+6+3)+(7+4)=5+6+3+7+4$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.

Β'. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως

259. Ἐμάθομεν (ἐδ. 29) τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.

Ἂν π. χ. ἡ διαφορὰ εἶναι $\alpha-\beta$ καὶ ὁ προσθετόμενος ἢ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ γ, θὰ ἔχωμεν γενικῶς

$$\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) \text{ καὶ } \alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma).$$

260. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἀθροίσματος, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν ἀπὸ ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος (ὅστις νὰ μὴ εἶναι μικρότερός του).***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν 7 ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος $9+5+12$. Λέγω ὅτι εἶναι

$$(9+5+12)-7=2+5+12.$$

Διότι ἂν κάμωμεν τὴν δοκιμὴν καὶ προσθέσωμεν εἰς τὴν διαφορὰν $2+5+12$ τὸν ἀφαιρετέον 7, θὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον $9+5+12$ (ἐδ. 33). Πράγματι εἶναι

$$(2+5+12)+7=9+5+12 \quad (\text{ἐδ. } 257).$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=(\alpha-\delta)+\beta+\gamma$· ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha>\delta$.

Σημ. Ἐὰν ὁ ἀφαιρούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, ἐξαλείφομεν αὐτόν. Διότι εἶναι $(7+5+8)-5=7+(5-5)+8$ (ἐδ. 260) $=7+0+8=7+8$.

261. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ ἀφαιροῦ-***

μεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ὅλους τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $5+9$ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 20. Λέγω ὅτι εἶναι

$$20-(5+9)=(20-5)-9$$

Διότι $\qquad 20-(5+9)=20-14=6 \qquad (1)$

ἑπομένως εἶναι $20=14+6$ (ἐδ. 28) ἢ $20=5+9+6$ (ἐδ. 256).

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τὸν 5, ἤτοι

$$20-5=9+6 \quad \text{(ἐδ. 260, Σημ.).}$$

ἐκ ταύτης πάλιν ἀφαιροῦμεν τὸν 9, ἤτοι

$$(20-5)-9=6 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 6, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα (ἐδ. 249), ἤτοι

$$20-(5+9)=(20-5)-9$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$

262. ***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμοῦ τὴν διαφορὰν δύο ἄλλων (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτήν), προσθέτομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν $7-5$ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 12. Λέγω ὅτι εἶναι

$$12-(7-5)=(12+5)-7.$$

Διότι γνωρίζομεν ὅτι, ἂν εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται (ἐδ. 29). Προσθέτομεν λοιπὸν εἰς τὸν μειωτέρον 12 τὸν 5 (ἤτοι τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς) καὶ ἔχομεν $12+5$, προσθέτομεν καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον $7-5$ πάλιν τὸν 5 καὶ ἔχομεν $7-5+5$ ἢ 7. Ὥστε εἶναι $\qquad 12-(7-5)=(12+5)-7$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\qquad \alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$

Γ.´ Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

263. Ἐμάθομεν (ἐδ. 35) τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν αὐτῶν.

Ἤτοι εἶναι γενικῶς $\qquad \alpha\times\beta=\beta\times\alpha.$

Ἡ ἰδιότης αὕτη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **θεμελιώδης** *ἰδιότης*· διότι ἐπ᾽ αὐτῆς στηρίζονται αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Λέγεται ἀκόμη καὶ *ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.*

264. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $4+5+7$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) ἐπὶ 3. Λέγω ὅτι εἶναι

$$(4+5+7)\times3=(4\times3)+(5\times3)+(7\times3).$$

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον $4+5+7$ τρεῖς φοράς, ἤτοι

$$(4+5+7)\times3=(4+5+7)+(4+5+7)+(4+5+7).$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον δι᾽ ἄλλων ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα (ἐδ 256), ἤτοι

$$(4+5+7)\times3=4+5+7+4+5+7+4+5+7.$$

ἢ $(4+5+7)\times3=4+4+4+5+5+5+7+7+7$ (ἐδ. 254).

ἢ $(4+5+7)\times3=(4\times3)+(5\times3)+(7\times3).$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma)\times\delta=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta).$

265. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8 ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $5+6+2$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτό). Λέγω ὅτι εἶναι

$$8\times(5+6+2)=(8\times5)+(8\times6)+(8\times2).$$

Διότι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων (ἐδ. 35) καὶ θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, ἤτοι $(5+6+2)\times8=(5\times8)+(6\times8)+(2\times8)$

ἢ $(5+6+2)\times8=(8\times5)+(8\times6)+(8\times2)$ (ἐδ. 35).

Ὥστε εἶναι $8\times(5+6+2)=(8\times5)+(8\times6)+(8\times2)$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)=(\alpha\times\beta)+(\alpha\times\gamma)+(\alpha\times\delta).$

Σημ. Τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας (ἐδ. 264 καὶ 265) ἐμάθομεν καὶ ἄλλοτε (ἐδ. 36). Καὶ ἡ καθεμία τούτων λέγεται *ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης.*

266. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα.***

"Ας ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $4+5+6$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $2+3$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτά). Λέγω ὅτι εἶναι $(4+5+6)\times(2+3)=(4\times2)+(5\times2)+(6\times2)+(4\times3)+(5\times3)+(6\times3)$

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $(4+5+6)$ εὑρέθη καὶ παριστᾷ ἕνα μόνον ἀριθμόν, ἔχομεν τότε νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄθροισμα καὶ ἑπομένως ἔχομεν (ἐδ. 265

$(4+5+6)\times(2+3)=(4+5+6)\times2+(4+5+6)\times3$

ἀλλὰ $(4+5+6)\times2=(4\times2)+(5\times2)+(6\times2)$ (ἐδ. 264)

καὶ $(4+5+6)\times3=(4\times3)+(5\times3)+(6\times3)$. "Ωστε εἶναι $(4+5+6)\times(2+3)=(4\times2)+(5\times2)+(6\times2)+(4\times3)+(5\times3)+(6\times3)$

Καὶ γενικῶς εἶναι

$(\alpha+\beta+\gamma)\times(\delta+\varepsilon)=(\alpha\times\delta)+(\beta\times\delta)+(\gamma\times\delta)+(\alpha\times\varepsilon)+(\beta\times\varepsilon)+(\gamma\times\varepsilon)$.

267. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.***

"Ας ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν $9-5$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτὴν) ἐπὶ 3. Λέγω ὅτι εἶναι $(9-5)\times3=(9\times3)-(5\times3)$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν διαφορὰν $(9-5)$ τρεῖς φοράς, ἤτοι

$$(9-5)\times3=(9-5)+(9-5)+(9-5).$$

Ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων προσθετέων προσθέσωμεν 5, θὰ αὐξήσωμεν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης κατὰ $5+5+5$ ἢ 5×3, καὶ θὰ ἔχωμεν $(9-5+5)+(9-5+5)+(9-5+5)$ ἢ $9+9+9$ ἢ 9×3. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ 9×3 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δευτέρου μέλους κατὰ 5×3, διὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὸ 5×3 ἀπὸ τὸ 9×3 διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος, ἤτοι

$$(9-5)\times3=(9\times3)-(5\times3)$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha-\beta)\times\gamma=(\alpha\times\gamma)-(\beta\times\gamma)$.

Σημ. Καὶ ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν διαφορὰν μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον. Διότι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν διαφορὰν ὡς πολλαπλασιαστέον καὶ τὸν ἀριθμὸν ὡς πολλαπλασιαστήν.

268. Ἐμάθομεν (ἐδ. 44) ὅτι ***τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθ-***

μῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς.

Ἤτοι εἶναι γενικῶς $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\gamma\times\alpha\times\delta\times\beta$.

269. ***Δυνάμεθα εἰς ἓν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους παράγοντας διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν. Καὶ τἀνάπαλιν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα δι' ἄλλων παραγόντων ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον.***

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον $8\times5\times3\times4$. Λέγω ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντικαταστήσω τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 4 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 20. Διότι δύναμαι νὰ πολλαπλασιάσω τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς καθ' οἱανδήποτε τάξιν θέλω (ἐδ. 268), πολλαπλασιάζω λοιπὸν πρῶτον τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 4 καὶ ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν 20 θὰ πολλαπλασιάσω μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 8 καὶ 3. Ὥστε πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης

$$8\times5\times3\times4=20\times8\times3.$$

Εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 4 τοῦ πρώτου μέλους ἀντικατεστάθησαν εἰς τὸ δεύτερον μέλος διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 20. Καὶ τἀνάπαλιν, ὁ 20 τοῦ δευτέρου μέλους ἀντικατεστάθη εἰς τὸ πρῶτον μέλος διὰ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 4.

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$8\times5\times3\times4=(5\times4)\times8\times3$ ἢ $8\times5\times3\times4=8\times(5\times4)\times3$ (ἐδ. 268).

Καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

270. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἐπὶ ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον $5\times6\times4$ ἐπὶ 3, ἤτοι νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(5\times6\times4)\times3$. Λέγω ὅτι εἶναι $(5\times6\times4)\times3=5\times18\times4$.

Διότι εἰς τὸ γινόμενον $(5\times6\times4)\times3$ δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸν παράγοντα $(5\times6\times4)$ δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον (ἐδ. 269), ἤτοι ἔχομεν $(5\times6\times4)\times3=5\times6\times4\times3$.

Εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 6 καὶ 3 διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 18, ὅτε θὰ ἔχωμεν $(5\times6\times4)\times3=5\times18\times4$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

271. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων.***

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $4\times5\times6$ καὶ 2×3. Λέγω ὅτι εἶναι

$$(4\times5\times6)\times(2\times3)=4\times5\times6\times2\times3$$

Διότι ἂν εἰς τὸ γινόμενον $4\times5\times6\times2\times3$ ἀντικαταστήσωμεν τοὺς παράγοντας 4,5 καὶ 6 διὰ τοῦ γινομένου των $(4\times5\times6)$ καθὼς καὶ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 3 διὰ τοῦ γινομένου των (2×3), θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο γινόμενα $(4\times5\times6)$ καὶ (2×3). Ὥστε εἶναι

$$(4\times5\times6)\times(2\times3)=4\times5\times6\times2\times3.$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times(\delta\times\varepsilon)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\varepsilon$.

Δ΄. Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

272. ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Ἄς διαιρέσωμεν π. χ. τὸν 17 διὰ 5· θὰ εὕρωμεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 2, ἐπομένως εἶναι $17=5\times3+2$ (ἐδ. 50). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότης ταύτης ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἔστω ἐπὶ 4, θὰ προκύψωσιν ἀριθμοὶ πάλιν ἴσοι (ἐδ. 247), ἤτοι

$17\times4=(5\times3+2)\times4$ ἢ $17\times4=5\times3\times4+2\times4$ (ἐδ. 264)

ἢ καὶ $17\times4=(5\times4)\times3+2\times4$ (ἐδ. 269)

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον 2 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 5, ἤτοι $2<5$, ἔπεται ὅτι εἶναι καὶ $2\times4<5\times4$ (ἐδ. 252). Βλέπομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω τελευταίαν ἰσότητα ὅτι ὁ διαιρετέος 17 καὶ ὁ διαιρέτης 5 πολλαπλασιάζονται ἐπὶ 4, τὸ πηλίκον 3 ἔμεινεν ἀμετάβλητον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 2 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 4.

Γενικῶς, ἂν παραστήσωμεν τὸν διαιρετέον διὰ Δ, τὸν διαιρέτην διὰ δ, τὸ πηλίκον διὰ π καὶ τὸ ὑπόλοιπον διὰ υ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $\Delta=\delta\times\pi+\upsilon$· καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ, θὰ ἔχωμεν $\Delta\times\rho=(\delta\times\rho)\times\pi+\upsilon\times\rho$.

Ὁ ρ εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία καὶ πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαίρεσις μένει πάλιν τελεία καὶ τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.

Μὲ τὸν αὐτὸν ἀνωτέρω τρόπον μανθάνομεν καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

273. ***Ἐὰν διαιρέσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην μὲ τὸν αὐ-***

τὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

274. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι᾽ ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $8+6+10$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτὸ) διὰ τοῦ 2. Λέγω ὅτι εἶναι $(8+6+10):2=4+3+5$.

Διότι ἂν κάμωμεν τὴν δοκιμὴν καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον $4+3+5$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $8+6+10$. Πράγματι εἶναι

$(4+3+5)\times2=(4\times2)+(3\times2)+(5\times2)=8+6+10$. (ἐδ. 264)

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha+\beta+\gamma):\delta=(\alpha:\delta)+(\beta:\delta)+(\gamma:\delta)$.

Σημ. Ὑποθέτομεν ὅλας τὰς διαιρέσεις τελείας. Τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἐμάθομεν καὶ εἰς τὸ ἐδάφιον 65.

275. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν διαφορὰν δι᾽ ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου πηλίκου ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν $20-8$ (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτὴν) διὰ τοῦ 4. Λέγω ὅτι εἶναι

$$(20-8):4=5-2.$$

Διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον $5-2$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 4, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $20-8$. Πράγματι εἶναι

$(5-2)\times4=(5\times4)-(2\times4)=20-8$ (ἐδ. 267).

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$.

Σημ. Ὑποθέτομεν τὰς διαιρέσεις τελείας.

276. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι᾽ ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ (ὅστις νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς).***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $4\times15\times8$ διὰ 5. Λέγω ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν διὰ 5 τὸν 15, ὅστις διαιρεῖται ἀκριβῶς, ἤτοι εἶναι

$$(4\times15\times8):5=4\times3\times8.$$

Διότι ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πηλίκον $4\times3\times8$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5, θὰ εὕρωμεν τὸν διαιρετέον $4\times15\times8$.

Πράγματι εἶναι $(4\times3\times8)\times5=4\times15\times8$ (ἐδ. 270).

Καὶ γενικῶς εἶναι $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$.

277. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι᾽ ἑνὸς τῶν παρα-***

γόντων αὐτοῦ, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Λέγω ὅτι εἶναι $(5\times4\times7):4=5\times7$

Διότι εἶναι $(5\times4\times7):4=5\times1\times7$ (ἐδ. 276) $=5\times7$

278. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ γινομένου (χωρὶς νὰ εὕρωμεν αὐτό), διαιροῦμεν αὐτὸν διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιροῦμεν διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ λάβωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν 60 διὰ τοῦ γινομένου 3×5. Λέγω ὅτι εἶναι

$$60:(3\times5)=(60:3):5$$

Διότι $60:(3\times5)=60:15=4$ (1)

καὶ ἑπομένως εἶναι $60=15\times4$ ἢ $60=3\times5\times4$ (ἐδ. 269).

Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ 3, ἤτοι $60:3=5\times4$ (ἐδ. 277).

καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ 5, ἤτοι $(60:3):5=4$ (2)

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα (ἐδ. 249), ἤτοι

$$60:(3\times5)=(60:3):5$$

Σημ. Ὑποθέτομεν ὅλας τὰς διαιρέσεις τελείας.

Καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha:(\beta\times\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

279. Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 72 καὶ 60. Ἂν ἀναλύσωμεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$72=2^3\times3^2$$
$$60=2^2\times3\times5$$

Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι 72×60 ἢ $2^3\times3^2\times2^2\times3\times5=2^3\times2^2\times3^2\times3\times5$ (ἐδ. 35) $=2^5\times3^3\times5$ (ἐδ. 68). Ὥστε εἶναι $72\times60=2^5\times3^3\times5$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

280. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας, σχηματίζομεν ἓν γινόμενον ἐξ ὅλων***

τῶν παραγόντων αὐτῶν, καὶ ἕκαστος παράγων νὰ ἔχῃ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τοὺς ἀριθμούς.

ΓΕΝΙΚΟΝ ΓΝΩΡΙΣΜΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΔΙ' ΑΛΛΟΥ

281. Τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν γινόμενον $2^5 \times 3^3 \times 5$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 72 ἢ $2^3 \times 3^2$ καὶ τοῦ 60 ἢ $2^2 \times 3 \times 5$, ἑπομένως εἶναι διαιρετὸν δι' αὐτῶν (ἐδ. 73). Βλέπομεν ὅτι ὁ $2^5 \times 3^3 \times 5$ περιέχει τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 72 καθὼς καὶ τοῦ 60, καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον. Ὥστε

282. ***Διὰ νὰ εἶναι ἀριθμός τις διαιρετὸς δι' ἄλλου, πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον.***

Ἀλλ' ὅταν ὁ διαιρετέος περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον, τότε ἡ δύναμις ἑκάστου παράγοντος τοῦ διαιρετέου διαιρεῖται διὰ τῆς δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ παράγοντος τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ διαιρέτῃ. Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον, διαιροῦμεν τὰς δυνάμεις τῶν παραγόντων τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν δυνάμεων τῶν αὐτῶν παραγόντων τοῦ διαιρέτου. Οἱ δὲ ἄλλοι παράγοντες τοῦ διαιρετέου εἶναι παράγοντες τοῦ πηλίκου.

Π. χ. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $2^5 \times 3^3 \times 5 : 2^3 \times 3^2$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3 \times 5$ (διότι $2^5 : 2^3 = 2^2$ (ἐδ. 69) καὶ $3^3 : 3^2 = 3$), ὥστε εἶναι $2^5 \times 3^3 \times 5 = (2^3 \times 3^2) \times (2^2 \times 3 \times 5)$. Τὸ πηλίκον πάλιν τῆς διαιρέσεως $2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 11 : 2^3 \times 3^2 \times 5$ εἶναι $2 \times 5^2 \times 11$ ($3^2 : 3^2 = 1$, διότι ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἴσοι).

283. ***Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῆται δι' ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α διαιρεῖται διὰ τῶν ἀριθμῶν $2^3 \times 5$, $3^2 \times 7$, 11×13, οἵτινες εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, διότι δὲν ἔχουν δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων κοινόν τινα πρῶτον παράγοντα διὰ τοῦ ὁποίου νὰ διαιρῶνται. Ὁ Α ὡς διαιρούμενος δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων, θὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (ἐδ. 282), θὰ περιέχῃ ἑπομένως καὶ τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου αὐτῶν $(2^3 \times 5) \times (3^2 \times 7) \times (11 \times 13)$ ἢ $2^3 \times 5 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 13$, ὥστε θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Σημ. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης μᾶς εὐκολύνει εἰς τὸ νὰ εὑρίσκωμεν, ἂν ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλου δυναμένου νὰ ἀναλυθῇ εἰς πρώτους παράγοντας Π. χ. ἐπειδὴ εἶναι $6 = 2 \times 3$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, συμπεραίνομεν ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 6, ἂν διαιρῆται διὰ 2 καὶ διὰ 3. Ἐπειδὴ πάλιν εἶναι $12 = 3 \times 4$, $15 = 3 \times 5$ (οἱ δὲ ἀριθμοὶ 3 καὶ 4, 3 καὶ 5 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους), συμπεραίνομεν ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 12 ἢ διὰ 15, ἂν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 καὶ διὰ 4 ἢ διὰ 3 καὶ 5 καὶ οὕτω καθεξῆς.

284. ***Ἰδιότης τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι πρῶτος καὶ δὲν διαιρῇ ἄλλον ἀριθμόν, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.***

Π. χ. ὁ πρῶτος ἀριθμὸς 7 δὲν διαιρεῖ τὸν 25· λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 25 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι ὁ 7 ὡς πρῶτος ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας παρὰ μόνον τὸν 7 καὶ τὴν μονάδα 1, ἀλλ' ὁ 7 δὲν διαιρεῖ τὸν 25, μένει λοιπὸν κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 7 καὶ 25 ἡ μονὰς 1, ὥστε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 84).

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ

285. Εἴδομεν (ἐδ. 89) πῶς εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο μόνον ἀριθμῶν, θὰ ἴδωμεν τώρα πῶς εὑρίσκεται οὗτος, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν δύο. Ἀλλ' ἡ εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν στηρίζεται εἰς τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

286. ***Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἀτελοῦς διαιρέσεως, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Καὶ ἂν διαιρῇ τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν διαιρέτην, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τὸν ἀριθμὸν 46 ὡς διαιρετέον καὶ τὸν 8 ὡς διαιρέτην· τὸ πηλίκον εἶναι 5 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 6. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $46 = 8 \times 5 + 6$ (ἐδ. 50). Πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ τὸν διαιρετέον 46 καὶ τὸν διαιρέτην 8, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ γινόμενον 8×5, ἤτοι τὸν 40, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 8 (ἐδ. 73). Ὡς διαιρῶν τότε τοὺς ἀριθμοὺς 46 καὶ 40, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν 6 (ἐδ. 74), ἤτοι τὸ ὑπόλοιπον. Καὶ πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ τὸ ὑπόλοιπον 6 καὶ τὸν διαιρέτην 8, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 8×5, ἤτοι τὸν 40· ὡς διαιρῶν τότε τοὺς ἀριθμοὺς 40 καὶ 6, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 46 (ἐδ. 74), ἤτοι τὸν διαιρετέον.

287. ***Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἂν ἀντικαταστήσων ἕνα τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου μικροτέρου του.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 8, 20, 34 καὶ ἂς διαιρέσωμεν τὸν 20 διὰ τοῦ 8· θὰ εὕρωμεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 4. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν 20 διὰ τοῦ ὑπολοίπου 4, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 8, 4, 34. Λέγω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 8, 20, 34 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 8, 4, 34 ἔχουν τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας. Διότι πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ τοὺς 8, 20, 34, θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 8, 4, 34, οἵτινες διαφέρουν κατὰ τὸν 4. Ἀλλ' ὁ 4 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 20 διὰ τοῦ 8 καὶ γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ ὅταν διαιρῇ τὸ ὑπόλοιπον 4 καὶ τὸν διαιρέτην 8, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν διαιρετέον 20 (ἐδ. 366). Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 8, 20, 34 καὶ οἱ ἀριθμοὶ 8, 4, 34 ἔχουν τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας, ἑπομένως ἔχουν καὶ τὸν αὐτὸν μ. κ. δ.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τώρα τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 248 καὶ 60. Διαιροῦμεν τὸν 248 διὰ 60 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 8.

Οἱ ἀριθμοὶ 248 καὶ 60
καὶ οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 60 ἔχουν τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. (ἐδ. 287).

Διαιροῦμεν τὸν 60 διὰ 8 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 4.

Οἱ ἀριθμοὶ 60 καὶ 8
καὶ οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 4 ἔχουν τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 4 ἔχουν μ. κ. δ. τὸν 4 (ἐδ. 89), ἑπομένως καὶ οἱ ἀριθμοὶ 248 καὶ 60 ἔχουν τὸν αὐτὸν μ. κ. δ.

Διάταξις τῆς ἀνωτέρω πράξεως

	4	7	2
248	60	8	4
8	4	0	

Σημ. Μετά τινας διαιρέσεις θὰ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0. Διότι τὰ ἑκάστοτε εὑρισκόμενα ὑπόλοιπα, ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα τοῦ διαιρέτου, βαίνουσιν ἐλαττούμενα καὶ ὅταν ἀριθμός τις βαίνῃ πάντοτε ἐλαττούμενος, θὰ τελειώσῃ καὶ θὰ γίνῃ 0. Ἐὰν δὲ εὑρεθῇ μ.κ.δ. ἡ μονὰς 1, οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις. Ὅταν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν διαιρέσεων εὑρεθῇ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ἀφοῦ ἐκτελέσωμεν καὶ τὴν δι' αὐτοῦ διαίρεσιν καὶ δὲν εὕρομεν ὑπόλοιπον 0, παύομεν τὴν ἐξακολούθησιν τῶν διαιρέσεων· διότι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἂς εὕρωμεν π. χ.

τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 212 καὶ 65. Ἐπειδὴ ὁ 17 εἶναι πρῶτ

	3	3
212	65	17
17	14	

ἀριθμὸς καὶ δὲν διαιρεῖ τὸν 65, συμπεραίνομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 65 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 284), ἑπομένως καὶ οἱ ἀριθμοὶ 212 καὶ 65, οἵτινες ἔχουν τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 17 καὶ 65 (ἐδ. 287) εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἔχουν μ. κ. δ. τὴν μονάδα 1.

288. Ἂς εὕρωμεν τώρα τὸν μ. κ. δ. περισσοτέρων ἀριθμῶν, π. χ. τῶν 4, 8, 24, 40. Ἐπειδὴ ὁ μικρότερος ἐξ αὐτῶν, ἤτοι ὁ 4, διαιρεῖ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς, αὐτὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Διότι ὁ 4 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 24, 40, εἶναι δὲ καὶ ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν· διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 4 δὲν θὰ διαιρῇ τὸν 4 ὡς μικρότερόν του, ἀλλὰ τότε δὲν θὰ εἶναι οὗτος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 24, 40. Ὁ 4 λοιπὸν εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν δὲν διαιρῇ ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς, ὅπως συμβαίνει εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 12, 20, 46, 69, τότε θὰ ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων, διότι ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν δὲν θὰ μεταβληθῇ (ἐδ. 287). Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν, ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

Γράφομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μίαν ὁριζοντίαν σειρὰν καὶ διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν καὶ ἂν εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, ὁ μικρότερος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν· εἰ δὲ μή, γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἰς ἄλλην σειρὰν καὶ ὑποκάτω τῶν ἀριθμῶν, ἐξ ὧν προέκυψαν, καθὼς καὶ τὸν μικρότερον αὐτῶν, καὶ πράττομεν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους τῆς δευτέρας σειρᾶς καθὼς καὶ εἰς ἑκάστην τῶν ἑπομένων ὅ,τι καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης σειρᾶς, μέχρις ὅτου εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν, ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ μικρότερος αὐτῶν νὰ διαιρῇ τοὺς ἄλλους ἀκριβῶς· οὗτος θὰ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 12, 20, 46, 60· καθὼς καὶ τῶν ἀριθμῶν 8, 14, 28, 35. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

12	20	46	60		8	14	28	35
12	8	10	0		8	6	4	3
4	8	2	0		2	0	1	3
0	0	2	0		0	0	1	0

Τῶν μὲν ἀριθμῶν 12, 20, 46, 60 μ. κ. δ. εἶναι ὁ 2, τῶν δὲ ἀριθμῶν 8, 14, 28, 35 μ. κ. δ. εἶναι ἡ μονὰς 1. ἑπομένως οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

289. ***Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.***

Ἂς λάβωμεν π.χ. τοὺς ἀριθμοὺς 24, 32, 52, τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι ὁ 4 (ὡς φαίνεται εἰς τὴν κατωτέρω διάταξιν). Πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ τὸν διαιρέτην 24 καὶ τοὺς διαιρετέους 32 καὶ 52, θὰ διαιρῇ καὶ τὰ ὑπόλοιπα 8 καὶ 4 (ἐδ. 286). Ἀλλ' ὁ 4 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Καὶ ἀντιστρόφως πᾶς ἀριθμὸς ὅστις διαιρεῖ τὸν μ. κ. δ. 4, θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς 24,32,52 ὡς πολλαπλάσια τοῦ 4. Ὥστε ***κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.***

24	32	52
24	8	4
0	0	4

290. ***Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 24, 36, 64, τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι ὁ 4 (ὡς φαίνεται εἰς τὴν κατωτέρω διάταξιν). Λέγω ὅτι, ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους πολλαπλασιάσωμεν π. χ. ἐπὶ 2, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 24×2, 36×2, 64×2 θὰ ἔχουν μ. κ. δ. τὸν 4×2.

24	36	64
24	12	16
0	12	4
0	0	4

Διότι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. οἱ ἀριθμοὶ 36 καὶ 64 τῆς πρώτης σειρᾶς ἀντικατεστάθησαν εἰς τὴν δευτέραν σειρὰν διὰ τῶν εὑρεθέντων ὑπολοίπων 12 καὶ 16. Ἀλλ' ὅταν ὁ διαιρέτης 24 καὶ οἱ διαιρετέοι 36 καὶ 64 πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2, καὶ τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα θὰ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2 (ἐδ. 272). Ὅταν πάλιν ὁ διαιρέτης 12 καὶ ὁ διαιρετέος 16 (τῆς δευτέρας σειρᾶς) πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 2, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 4 (τῆς τρίτης σειρᾶς) θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2. Ἀλλ' ὁ 4 εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

291. ***Ἐὰν δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν θὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***

Ἂς λάβωμεν πάλιν τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς. Λέγω ὅτι, ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διαιρέσωμεν π. χ. διὰ 2, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν 4 θὰ διαιρεθῇ διὰ 2, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 24 : 2, 36 : 2, 64 : 2 θὰ ἔχουν μ. κ. δ. τὸν 4 : 2. Διότι ὅταν ὁ διαιρέτης 24 καὶ οἱ διαιρετέοι 36 καὶ 64 (ἴδε ἀνωτέρω διάταξιν) διαιρεθῶσι διὰ 2, καὶ τὰ εὑρεθέντα ὑπόλοιπα 12 καὶ 16 (τῆς δευτέρας σειρᾶς) θὰ διαιρεθῶσι διὰ 2 (ἐδ. 273). Ὅταν πάλιν ὁ διαιρέτης 12 καὶ ὁ διαιρετέος 16 (τῆς δευτέρας σειρᾶς) διαιρεθῶσι διὰ 2, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 4 (τῆς τρίτης σειρᾶς) θὰ διαιρεθῇ διὰ 2. Ἀλλ' ὁ 4 εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Σημ. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ συντομεύσωμεν ἐνίοτε τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. Διότι ἂν οἱ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ μ. κ. δ., ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, διαιροῦμεν πρῶτον αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν. Ἐὰν ἔχωμεν π. χ. νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 1200, 1500, 4800, διαιροῦμεν πρῶτον αὐτοὺς διὰ 100 καὶ ἔχομεν 12, 15, 48. Τούτων μ. κ. δ. εἶναι ὁ 3, ἑπομένως τῶν ἀριθμῶν 1200, 1500, 4800 μ. κ. δ. εἶναι ὁ 3×100 ἤτοι ὁ 300.

292. *Ἐὰν δύο ἢ* ***περισσότεροι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμοὺς 24, 36, 64. Ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν 4, θὰ προκύψουν τὰ πηλίκα 6, 9, 16. Ἀλλὰ τότε καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν 4 θὰ διαιρεθῇ διὰ 4 (ἐδ. 291), ἤτοι 4 : 4=1. Ὥστε τὰ πηλίκα 6, 9, 16 θὰ ἔχουν μ. κ. δ. τὴν μονάδα 1, ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

293. ***Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς Α διαιρεῖ τὸ γινόμενον 7×18 καὶ ὅτι εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 7. Λέγω ὅτι ὁ Α θὰ διαιρῇ τὸν 18. Διότι οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ Α, ἐπειδὴ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, θὰ ἔχουν μ. κ. δ. τὴν μονάδα 1. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτοὺς ἐπὶ 18 καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 18 (ἐδ. 290), ἤτοι θὰ ἔχωμεν 7×18, Α×18 καὶ μ. κ. δ. 1×18 ἢ 18. Ὁ Α διαιρεῖ τὸ γινόμενον 7×18, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δὲ γινόμενον Α×18 ὡς πολλαπλάσιόν του, ἑπομένως θὰ διαιρῇ καὶ τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν, ἤτοι τὸν 18 (ἐδ. 289), ὅστις εἶναι ὁ ἄλλος παράγων τοῦ δοθέντος γινομένου.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

294. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν ἐκ τῶν κοινῶν παραγόντων ἕκαστον μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν.***

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 24, 180, 252. Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ εὑρίσκομεν

$24 = 2^3 \times 3$

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$

Κοινοὺς παράγοντας ἔχουν μόνον τοὺς 2 καὶ 3, ὥστε θὰ λάβωμεν αὐτοὺς μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην, ἤτοι θὰ λάβωμεν τὸν 2^2 καὶ τὸν 3, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $2^2 \times 3$ ἢ 12. Λέγω ὅτι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 24, 180, 252 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^2 \times 3$· Διότι διὰ νὰ εἶναι οὗτος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, πρέπει πρῶτον νὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Εἶναι κοινὸς διαιρέτης, διότι οἱ ἀριθμοὶ 24, 180, 252 περιέχουν ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον, ἑπομένως διαιροῦνται δι᾽ αὐτοῦ (ἐδ. 282). Εἶναι δὲ καὶ ὁ μέγιστος τῶν κοινῶν διαιρετῶν αὐτῶν· διότι ἄλλος ἀριθμὸς μεγαλύτερος αὐτοῦ δὲν διαιρεῖ τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς. Ἂν ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι ὁ μ. κ. δ. εἶναι ὁ $2^2 \times 3 \times 5$, οὗτος διαιρεῖ μόνον τὸν 180, οὐχὶ ὅμως καὶ τοὺς ἀριθμοὺς 24 καὶ 252, διότι ὁ παράγων 5 δὲν ὑπάρχει εἰς αὐτοὺς καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν. Ἂν ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι ὁ μ. κ. δ. εἶναι ὁ $2^2 \times 3^2$, οὗτος διαιρεῖ μόνον τοὺς ἀριθμοὺς 180 καὶ 252, οὐχὶ ὅμως καὶ τὸν 24, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ παράγων 3 ὑπάρχει μίαν φοράν, ἤτοι ἔχει ἐκθέτην 1, ἐνῷ εἰς τὸν ἀριθμὸν $2^2 \times 3^2$ ἔχει ἐκθέτην 2. Βλέπομεν ὅτι ὁ κοινὸς διαιρέτης $2^2 \times 3$ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν παύει νὰ εἶναι τοιοῦτος, ὅταν αὐξηθῇ, ἑπομένως ὁ $2^2 \times 3$ εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 24, 180, 252.

Σημ. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα, τότε οὗτοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ὡς κοινὸς παράγων λαμβάνεται ἡ μονὰς 1.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΝΑΛΕΛΥΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

295. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας, πράττομεν ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν ἐξ ὅλων τῶν παραγόντων (κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν) ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν.***

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 180, 168, 660.

Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ εὑρίσκομεν

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$

Ἀπὸ ὅλους τοὺς παράγοντας τούτους θὰ λάβωμεν τὸν 2^3, τὸν 3^2, τὸν 5, τὸν 7 καὶ τὸν 11, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ ἢ 27720. Λέγω ὅτι τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 180, 168, 660 εἶναι ὁ $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$.

Διότι διὰ νὰ εἶναι ἐλ. κ. πολλαπλάσιον, πρέπει πρῶτον νὰ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν. Εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον, ἤτοι διαιρεῖται δι' αὐτῶν· διότι περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην οὐχὶ μικρότερον. Εἶναι δὲ καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν κοινῶν πολλαπλασίων αὐτῶν· διότι ἄλλος ἀριθμὸς μικρότερος αὐτοῦ δὲν διαιρεῖται δι' ὅλων τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Ἄν ὑποθέσωμεν, π. χ., ὅτι τὸ ἐλ. κ. πολλ. αὐτῶν εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$, οὗτος διαιρεῖται μόνον διὰ τῶν ἀριθμῶν 180 καὶ 168, οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ 660· διότι δὲν περιέχει τὸν παράγοντα αὐτοῦ 11 καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν. Ἄν ὑποθέσωμεν πάλιν ὅτι τὸ ἐλ. κ. πολλ. εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, οὗτος διαιρεῖται μόνον διὰ τῶν ἀριθμῶν 168 καὶ 660, οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ 180, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ παράγων 3 ἔχει ἐκθέτην μεγαλύτερον, ἤτοι 2. Βλέπομεν ὅτι τὸ κ. πολλ. $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν παύει νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὅταν ἐλαττωθῇ, ἑπομένως τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν 180, 168, 660 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11$.

Τὸ ἐλάχ. κ. πολλ. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἄς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 88, 63, 95, οἵτινες εἶναι πρωτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. Ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας, εὑρίσκομεν

$88 = 2^3 \times 11$
$63 = 3^2 \times 7$
$95 = 5 \times 19$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλ. κ. πολ. αὐτῶν, πρέπει νὰ λάβωμεν τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην καὶ νὰ σχηματίσωμεν γινόμενον. Ἀλλὰ κοινοὺς παράγοντας δὲν ἔχουν, ὥστε θὰ λάβωμεν ὅλους τοὺς μὴ κοινοὺς παράγοντας, ἤτοι $2^3 \times 11 \times 3^2 \times 7 \times 5 \times 19$ ἢ $88 \times 63 \times 95$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ἀναλυθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 36, 42, 120 εἰς πρώτους παράπαράγοντας καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ τὸ ἐλ. κ. πολλαπλάσιον. (6 καὶ 2520).

2) Νὰ ἀναλυθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 280, 126, 720, 297 εἰς πρώτους γοντας καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ τὸ ἐλ. κ. πολλαπλάσιον. (1 καὶ 166320).

3) Εἰς πόσας τὸ πολὺ οἰκογενείας δυνάμεθα νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου 950 ὀκ. ἀλεύρου καὶ 175 ὀκ. ἐλαίου; Καὶ πόσον ἄλευρον καὶ ἔλαιον θὰ λάβῃ ἑκάστη οἰκογένεια;

(εἰς 25 οἰκογ., 38 ὀκ. ἀλ. καὶ 7 ὀκ. ἐλ.).

4) Τρία ταχυδρομικὰ ἀτμόπλοια ἐπανέρχονται εἰς μίαν πόλιν τὸ ἓν μετὰ 5 ἡμέρας, τὸ ἄλλο μετὰ 9, καὶ τὸ ἄλλο μετὰ 15 μίαν τῶν ἡμερῶν ἐπανῆλθον καὶ τὰ τρία εἰς τὴν πόλιν ταύτην. Μετὰ πόσας τὸ ὀλιγώτερον ἡμέρας θὰ συμβῇ πάλιν τοῦτο; (45).

5) Ἐρωτηθεὶς τις περὶ τῆς ἡλικίας του, ἀπήντησεν· εἶμαι ὀλιγώτερον τῶν 60 ἐτῶν, ἂν δὲ ἡ ἡλικία μου διαιρεθῇ εἴτε διὰ 6, εἴτε διὰ 8 εἴτε διὰ 16, μένει ὑπόλοιπον 2. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία του;

Λύσις. Ἡ ἡλικία του ἐλαττουμένη κατὰ 2 εἶναι διαιρετὴ διὰ 6, διὰ 8 καὶ διὰ 16, ἑπομένως αὕτη εἶναι τὸ ἐλ. κ. πολλ. τῶν ἀριθμῶν τούτων ηὐξημένον κατὰ 2, ἤτοι εἶναι 50 ἐτῶν.

6) Ποιμήν τις ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα ἔχει, ἀπήντησεν: Ἔχω περισσότερα τῶν 600 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 900· ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων μου διαιρεθῇ εἴτε διὰ 36 εἴτε διὰ 45 εἴτε διὰ 60, μένει ὑπόλοιπον 15. Πόσα πρόβατα ἔχει; (735).

Σημ. Οἱ ἀριθμοὶ 36, 45, 60, οἵτινες διαιροῦν τὸ ἐλ. κ. πολλ. αὐτῶν, διαιροῦν καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ (ἐδ. 75).

7) Ἀνθοπώλης τις ἔχει 645 γαρύφαλα, 480 τριαντάφυλλα καὶ

135 κρίνους. Πόσας τὸ πολὺ ἀνθοδέσμας δύναται νὰ κάμῃ, ὥστε ἑκάστη νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος ἀνθέων ἐξ ἑκάστου εἴδους;

(15, ἑκάστη θὰ ἔχῃ 43 γαρ., 32 τριαντ. καὶ 9 κρίν.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΥ ΤΟΥ 100.

296. Εἴπομεν ἄλλοτε (ἐδ. 177) ὅτι τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι ὁ 7×7 ἤτοι 49, ὁ δὲ 7 λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 49 Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100 εὑρίσκομεν εὐκόλως ἀπὸ μνήμης, π. χ. ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 36 εἶναι 6, τοῦ 70 κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι 8. Ἀλλ' ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 100, εὑρίσκομεν τότε αὐτὴν ὡς ἑξῆς.

Ἔστω, π. χ., νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 390638. Χωρίζομεν αὐτὸν εἰς διψήφια τμήματα μὲ στιγμὰς ἀρχόμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἤτοι 39.06.38· τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ ἓν μόνον ψηφίον. Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι τοῦ 39, ἥτις εἶναι 6 (κατὰ προσέγγισιν μονάδος), καὶ αὕτη εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ χωριζομένου διὰ γραμμῆς (ὅπως εἰς τὴν διαίρεσιν). Τὸ τετράγωνον τοῦ 6, ἤτοι τὸν 36, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος, ἤτοι ἀπὸ τοῦ 39, καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 3 καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα, ἤτοι τὸ 06, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 306 (ἴδε κατωτέρω διάταξιν τῆς πράξεως). Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου χωρίζομεν μὲ στιγμὴν τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον του, ἤτοι το 6, τὸν δὲ ἄλλον πρὸς τὰ ἀριστερά του ἀριθμόν, ἤτοι τὸν 30, διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 6×2 ἢ 12, τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τῆς ῥίζης, τὸ δὲ πηλίκον 2 γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 12· τὸν οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν 122 πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 2, καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 306, γράφομεν τότε τὸ ψηφίον 2 ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον τοῦ 2 (ἕως ὅτου δηλ. ἡ ἀφαίρεσις νὰ εἶναι δυνατή). Ἐνταῦθα τὸ γινόμενον 122×2 ἢ 244 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 306 καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 62, γράφομεν λοιπὸν τὸ 2 ὡς δεύτερον ψηφίον τῆς ρίζης, εἰς δὲ τὰ δεξιὰ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 62 καταβιβάζομεν καὶ τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα 38, ὅτε σχηματίζεται ὁ ἀριθμὸς 6238.

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου πάλιν χωρίζομεν τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίον του 8, τὸν δὲ ἄλλον ἀριθμὸν 623 διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος μέρους τῆς ρίζης, ἤτοι διὰ τοῦ 62×2 ἢ 124, καὶ τὸ πηλίκον 5 γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 124· τὸν δὲ οὕτω σχηματισθέντα ἀριθμὸν 1245 πολλαπλασιάζομεν μὲ αὐτὸ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 5, καὶ ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ 6238, γράφομεν τότε τὸ ψηφίον 5 ὡς τρίτον ψηφίον τῆς ρίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον τοῦ 5. Ἐνταῦθα ὅμως τὸ γινόμενον 1245×5 ἢ 6225 ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 6238 καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 13. Ὥστε ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 390638 εἶναι 625 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ἐὰν εὑρεθῇ ὑπόλοιπον μηδέν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

39.06.38	625	
36	122	1245
30.6	2	5
24.4	244	6225
823.8		
6225		
13		

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἀκολουθοῦμεν καὶ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης οἱουδήποτε ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ καταβιβάσωμεν ὅλα τὰ διψήφια τμήματα αὐτοῦ.

Ἐὰν συμβῇ εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων νὰ μὴ χωρῇ εἰς τὸν διαιρετέον τὸ διπλάσιον μέρος τῆς εὑρεθείσης ρίζης, γράφομεν τότε μηδὲν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῆς ρίζης· ἔπειτα καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξίν μας.

Παρατήρησις. Τὸ ὑπόλοιπον δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ρίζης. Ἡ δὲ δοκιμὴ τῆς πράξεως γίνεται ὡς ἑξῆς· εἰς τὸ τετράγωνον τῆς εὑρεθείσης ρίζης προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον (ἂν ὑπάρχῃ) καὶ ἂν εὕρωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμόν, ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρὶς λάθος.

Ἡ τετραγ. ρίζα μικτοῦ ἢ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ. Π. χ. ἡ τετρ. ρίζα τοῦ μικτοῦ ἀριθμοῦ $50\frac{3}{4}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 50, ἤτοι ὁ 7. Ἐπίσης ἡ τετρ. ρίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 18,376 κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀκεραίου 18, ἤτοι ὁ 4.

Γνωρίσματα διὰ τῶν ὁποίων μανθάνομεν πότε ἀριθμός τις δὲν εἶναι τετράγωνον.

297. ***Ὅταν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς ἓν ἐκ τῶν ψηφίων 2, 3, 7, 8 ἢ εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.***

Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 354, θὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι 354×354, τὸ δὲ γινόμενον θὰ λήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του 4, ἀλλ' οὐδενὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον λήγει εἰς 2, 3, 7, 8.

Τὸ τετράγωνον πάλιν ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικὰ λήγει εἰς διπλάσια μηδενικά. Π. χ. τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 30, 400, 5000 κτλ. εἶναι $30\times30=900$, $400\times400=160000$, $5000\times5000=25000000$ κτλ., ἤτοι λήγουν εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ οὐχὶ εἰς περιττόν.

298. ***Ὅταν ἀριθμός τις εἶναι ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας καὶ οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων αὐτοῦ δὲν διαιροῦνται διὰ 2, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.***

Διότι διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ $2^3\times3^2\times5$, θὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι $2^3\times3^2\times5\times2^3\times3^2\times5=2^3\times2^3\times3^2\times3^2\times5\times5=2^6\times3^4\times5^2$ (ἐδ. 68). Βλέπομεν ὅτι οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων ἐδιπλασιάσθησαν καὶ ἔγιναν ἄρτιοι ἀριθμοί, ἐπομένως διαιροῦνται διὰ 2. Ὥστε, ὅταν οἱ ἐκθέται δὲν διαιροῦνται διὰ 2, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἡ τετραγωνικὴ λοιπὸν ρίζα ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς πρώτους παράγοντας καὶ τελείου τετραγώνου εὑρίσκεται, ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων διὰ 2.

Εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κατὰ προσέγγισιν.

299. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν ἀριθμοῦ τινος κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κτλ. τῆς ἀκεραίας μονάδος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἐξάγομεν τὴν τετρ.

ρίζαν τοῦ γινομένου κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, κατόπιν δὲ διαιροῦμεν ταύτην διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος.

Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ 39 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν 39 ἐπὶ 100 καὶ τοῦ γινομένου 3900 εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἥτις εἶναι 62· ταύτην διαιροῦμεν διὰ 10 καὶ εὑρίσκομεν 6,2. Αὕτη εἶναι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 39 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ κλάσματος $\frac{11}{4}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$, πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα ἐπὶ 10000 καὶ μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων εὑρίσκομεν 27500· τούτου ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 165, ἑπομένως ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{11}{4}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ εἶναι 1,65.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν 2436, 69270, 644824. (49, 263, 803).

2) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν δεκαδ. ἀριθμῶν 45,72 καὶ 783,5 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. (6,7 καὶ 27,9).

3) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 2 καὶ τοῦ δεκαδικοῦ 6,35467 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. (1,41 καὶ 2,52).

4) Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετρ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{7}$ καὶ $3\frac{1}{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. (0,84 καὶ 1,83).

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

300. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀριθμοῦ μὴ τελείου τετραγώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Π. χ. ἡ τετρ ρίζα τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000000}$ εἶναι 2,2, 2,23, 2,236, 2,236067 καὶ ἂν ἀκόμη προχωρήσωμεν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τετρ. ρίζης τοῦ 5, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἄπειρα, ἀλλ' οὐχὶ καὶ περιοδικά.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, λέγεται **ἀσύμμετρος ἀριθμός**. Ἐνῷ οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται πρὸς διάκρισιν **σύμμετροι ἀριθμοί.**

Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, παραλείπομεν ἀπό τινος δεκαδικοῦ ψηφίου καὶ ἐφεξῆς τὰ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν, καὶ τότε ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμούς. Τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων θὰ εἶναι πάντοτε κατὰ προσέγγισιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

301. Εἴδομεν (ἐδ. 208) ὅτι λόγος δύο ἀριθμῶν (ἀφῃρημένων ἢ συγκεκριμένων ἀλλ᾽ ὁμοειδῶν) λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου.

Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Π. χ. ὁ λόγος $\frac{8}{4}$ ἢ $8:4$ εἶναι ἴσος μὲ 2, ὁ λόγος $\frac{6}{3}$ ἢ $6:3$ εἶναι ἴσος μὲ 2· ὥστε οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$ ἢ $8:4=6:3$ εἶναι ἀναλογία.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀναλογίαν ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** τῆς ἀναλογίας. Ὅταν ἡ ἀναλογία γράφεται ὡς ἑξῆς $8:4=6:3$ ἀπαγγέλλεται 8 πρὸς 4 ὡς 6 πρὸς 3· καὶ οἱ μὲν εὑρισκόμενοι εἰς τὰ ἄκρα ἀριθμοὶ 8 καὶ 3 λέγονται **ἄκροι** ὅροι τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ εὑρισκόμενοι εἰς τὸ μέσον 4 καὶ 6 λέγονται **μέσοι**. Ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου λόγου λέγεται **ἡγούμενος**, ὁ δὲ δεύτερος ὅρος λέγεται **ἑπόμενος**. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν ἡγούμενος εἶναι ὁ 8 καὶ ὁ 6, ἑπόμενος δὲ ὁ 4 καὶ ὁ 3.

Σημ. Ἐὰν οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι, π. χ. $8:4=4:2$, ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχής**, ὁ δὲ κοινὸς μέσος ὅρος 4 λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν ἄκρων ὅρων 8 καὶ 2.

Ἰδιότης τῶν ἀναλογιῶν.

302. ***Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων.***

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $8:4=6:3$ ἢ $\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$· λέγω ὅτι εἶναι $8\times3=6\times4$. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτουν πάλιν ἴσοι ἀριθμοί (ἐδ. 247). Ἐπειδὴ ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει καὶ διὰ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους ἀριθμούς $\frac{8}{4}$ καὶ $\frac{6}{3}$ ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν 4×3 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{8\times4\times3}{4}=\frac{6\times4\times3}{3}$ ἢ (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν) $8\times3=6\times4$. Τοῦτο ἐπρόκειτο νὰ μάθωμεν.

Καὶ γενικῶς, ἂν εἶναι $\alpha:\beta=\gamma:\delta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma$.

303. Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα στηριζόμενοι εὑρίσκομεν ἕνα τῶν ὅρων ἀναλογίας, ὅταν μᾶς δοθῶσιν οἱ ἄλλοι τρεῖς ὅροι.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $6:3=10:\chi$, τῆς ὁποίας τὸν ἄγνωστον ὅρον παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος χ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔχομεν $6\times\chi=3\times10$. Ἀλλ' ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι πάλιν ἴσοι (ἐδ. 248). Διαιροῦμεν λοιπὸν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $6\times\chi$ καὶ 3×10 διὰ 6 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6\times\chi}{6}=\frac{3\times10}{6}$ ἢ $\chi=\frac{3\times10}{6}$, ἤτοι 5. Ἐκ τῆς ἀναλογίας πάλιν $20:\chi=15:3$ ἔχομεν $15\times\chi=20\times3$ ἢ $\frac{15\times\chi}{15}=\frac{20\times3}{15}$ ἢ $\chi=\frac{20\times3}{15}$, ἤτοι 4. Ἐκ τούτων μανθάνομεν τὸν ἑξῆς κανόνα.

304. ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον ὅρον, ἂν μὲν εἶναι ἄκρος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς μέσους ὅρους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· ἂν δὲ εἶναι μέσος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἄκρους ὅρους καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου.***

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν $8:\chi=\chi:2$, εὑρίσκομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω (ἐδ. 303) $\chi\cdot\chi=8\times2$ ἢ $\chi^2=16$. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 16 εἶναι 4, ἤτοι εἶναι $\chi=4$. Ὥστε

305 ***Ὁ μέσος ἀνάλογος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου αὐτῶν.***

306. ***Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι γεγραμμένοι κατὰ σειρὰν καὶ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἀριθμῶν ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, σχηματίζουσιν ἀναλογίαν.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 6, 2, 9, 3, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, ἤτοι $6\times3=2\times9$· λέγω ὅτι θὰ εἶναι $6:2=9:3$.

Διότι ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $6\times3=2\times9$ διὰ τοῦ γινομένου 3×2, τὰ πηλίκα θὰ εἶναι πάλιν ἴσα (ἐδ. 248), ἤτοι $\frac{6\times3}{3\times2}=\frac{2\times9}{3\times2}$ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν ἔχομεν $\frac{6}{2}=\frac{9}{3}$ ἢ $6:2=9:3$.

Καὶ γενικῶς, ἂν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ, δ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν $6 : 2 = 9 : 3$ βλέπομεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἑνὸς τῶν ἴσων γινομένων $6 \times 3 = 2 \times 9$ εἶναι ἄκροι ὅροι, καὶ οἱ παράγοντες τοῦ ἄλλου γινομένου εἶναι μέσοι ὅροι. Ὥστε

307. ***Ὅταν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων ἀριθμῶν, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τοὺς παράγοντας τοῦ ἑνὸς γινομένου ἄκρους καὶ τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου γινομένου μέσους.***

Γενικῶς, ἂν εἶναι $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.

308. Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τοὺς μέσους ἢ ἄκρους ὅρους ἢ νὰ κάμωμεν τοὺς ἄκρους ὅρους μέσους καὶ τοὺς μέσους ἄκρους. Διότι εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ταύτας τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων.

Π. χ. εἶναι	$4 : 3 = 8 : 6$	καὶ γενικῶς	$\alpha : \beta = \gamma : \delta$
	$4 : 8 = 3 : 6$		$\alpha : \gamma = \beta : \delta$
	$6 : 3 = 8 : 4$		$\delta : \beta = \gamma : \alpha$
	$3 : 4 = 5 : 8$		$\beta : \alpha = \delta : \gamma$
	κτλ.		κτλ.

309. ***Εἰς ἴσους λόγους τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ὅρων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ὅρων ἰσοῦται μὲ ἕκαστον τῶν λόγων τούτων.***

Ἂς λάβωμεν π. χ. τοὺς ἑξῆς δύο ἴσους λόγους $12 : 3 = 8 : 2$. Λέγω ὅτι εἶναι $\frac{12+8}{3+2} = \frac{12}{3}$ ἢ $\frac{8}{2}$.

Διότι εἶναι $12 : 3 = 4$ καὶ $8 : 2 = 4$ ἢ $12 = 3 \times 4$ καὶ $8 = 2 \times 4$. Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας ταύτας καὶ ἔχομεν (ἐδ. 245)

$12+8 = 3\times4+2\times4$ ἢ $12+8 = (3+2)\times4$ (ἐδ. 264). Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $3+2$ καὶ ἔχομεν $\frac{12+8}{3+2} = \frac{(3+2)\times4}{3+2}$ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν ἔχομεν $\frac{12+8}{3+2} = 4$ ἢ $\frac{12}{3}$.

Σημ. Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ ὅταν οἱ λόγοι εἶναι περισσότεροι τῶν δύο.

Λύσις προβλημάτων δι' ἀναλογιῶν.

1) Μὲ 26 δραχμὰς ἀγοράζομεν 4 ὀκάδας ἐξ ἑνὸς πράγματος. Πόσον ἀγοράζομεν μὲ 39 δραχμάς;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ (δραχμαὶ καὶ ὀκάδες) εἶναι ἀνάλογα, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν 26 καὶ 39 (δραχμαὶ) τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 4 καὶ χ (ὀκάδες) τοῦ δευτέρου ποσοῦ (ἐδ. 213), ἤτοι εἶναι $\frac{26}{39}=\frac{4}{\chi}$ ἢ $26 : 39=4 : \chi$ ἢ $\chi=\frac{39\times 4}{26}$ ἤτοι 6 πήχεις.

2) 8 ἐργάται τελειώνουν ἔργον τι εἰς 15 ἡμέρας· 6 ἐργάται εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὸ τελειώσωσι;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ (ἐργάται καὶ ἡμέραι) εἶναι ἀντίστροφα, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο δοθεισῶν τιμῶν 8 καὶ 6 (ἐργάται) τοῦ πρώτου ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν 15 καὶ χ (ἡμέραι) τοῦ δευτέρου ποσοῦ (ἐδ. 216), ἤτοι εἶναι $\frac{8}{6}=\frac{\chi}{15}$ ἢ $8 : 6=\chi : 15$ ἢ $\chi=\frac{15\times 8}{6}$ ἤτοι 20 ἡμ.

Σημ. Ἡ λύσις τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εἶναι μᾶλλον εὔληπτος.

Ἀσκήσεις. 1) $\chi : 6{,}40 = 3 : 3{,}84$ (5)

2) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 0{,}96 : \chi$ (80)

3) $1\frac{1}{4} : \frac{4}{5} = 2\frac{1}{2} : \chi$ $\left(1\ \frac{3}{5}\right)$

4) $\frac{2}{3} : \chi = \chi : 54$ (6)

5) Ποῖοι ἐκ τῶν κατωτέρω ἀριθμῶν, ὅπως εἶναι γεγραμμένοι, σχηματίζουσιν ἀναλογίαν;

15, 6, 20, 8. 5, $\frac{3}{4}$, 6, $\frac{7}{8}$. $\frac{5}{8}$, 6, $\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{5}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

310. Ἂς λάβωμεν τὰς ἰσότητας $5+4=9$ καὶ $3.4=12$. Ἐὰν εἰς τὰς ἰσότητας ταύτας ἀντικαταστήσωμεν τὸν 4 μὲ τὸ γράμμα χ, θὰ ἔχωμεν $5+\chi=9$ καὶ $3.\chi=12$ ἢ $3\chi = 12$ (ἄνευ στιγμῆς). Αἱ ἰσότητες αὗται, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὸ γράμμα χ καὶ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ δι᾽ ὡρισμένου ἀριθμοῦ, ὅπως ἐδῶ διὰ τοῦ 4, λέγονται ***ἐξισώσεις***. Ὥστε

311. ***Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, τῆς ὁποίας τὰ δύο μέλη γίνονται ἴσα, ὅταν τὰ γράμματα αὐτῆς ἀντικατασταθῶσι μὲ ὡρισμένους ἀριθμούς.***

Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως λέγονται **ἄγνωστοι** ἀριθμοί, οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶσι τὰ γράμματα καὶ γίνονται τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἴσα, λέγονται **τιμαὶ** τῶν ἀγνώστων. Π. χ. εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀξισώσεις ὁ 4 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ. Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι**· π. χ. τῆς ἐξισώσεως $3\chi=12$ ὅροι εἶναι ὁ 3χ καὶ ὁ 12.

Ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου λέγεται **λύσις** τῆς ἐξισώσεως. Διὰ νὰ μάθωμεν πῶς γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων, θὰ λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) ***Πρόβλημα***. Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 7, διὰ νὰ εὕρωμεν γινόμενον 126;

Λύσις. Τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν παριστῶμεν μὲ τὸ γράμμα χ (συνήθως) καὶ τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $7\chi=126$ (1). Ἐὰν τὰ ἴσα ταῦτα μέλη αὐτῆς διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 7, θὰ προκύψουν πάλιν ἴσα (ἐδ. 248), ἤτοι

$\frac{7\chi}{7}=\frac{126}{7}$ ἢ $\chi=18$ (μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν). Ὥστε ὁ ἄγνωστος χ εὑρέθη καὶ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 18. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν εἰς τὴν θέσιν τοῦ χ τὸν 18, γίνονται τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἴσα, ἤτοι $7.18=126$ ἢ $126=126$.

2) ***Πρόβλημα***. Παιδίον τι εἶπεν· ἐὰν μοῦ τριπλασιάσουν τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχω, καὶ μοῦ δώσουν ἀκόμη 16 δραχμάς, θὰ ἔχω τότε 100 δρ. Πόσας δραχμὰς ἔχει;

Λύσις. Παριστῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν του μὲ τὸν χ. Ἐὰν τριπλασιάσωμεν αὐτάς, ἤτοι 3χ, καὶ προσθέσωμεν 16 δραχμάς, θὰ ἔχῃ $3\chi+16$ δραχμάς, ἀλλὰ λέγει ὅτι θὰ ἔχῃ τότε 100 δραχ. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $3\chi+16=100$ (1). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον χ, ἀφαιροῦμεν πρῶτον ἀπὸ τὰ ἴσα μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 16, ὅτε θὰ μείνουν πάλιν ἴσα (ἐδ. 246), ἤτοι $3\chi+16-16=100-16$ (2) ἢ $3\chi=84$. Διαιροῦμεν τώρα καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ 3 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{3\chi}{3}=\frac{84}{3}$ ἢ $\chi=28$. Ὥστε εἶχε 28 δραχμάς.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ὁ γνωστὸς ὅρος 16 ὑπάρχει εἰς τὸ πρῶτον μέλος μὲ τὸ σημεῖον +, ἐνῷ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) ὑπάρχει οὗτος εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ τὸ σημεῖον —. Ὅταν λοιπὸν οἱ γνωστοὶ ὅροι δὲν εἶναι χωρισμένοι ἀπὸ τοὺς ἔχοντας τὸν ἄγνωστον, πρέπει πρῶτον νὰ τοὺς χωρίζωμεν· τοὺς γνωστοὺς ὅρους νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τοὺς ἔχοντας τὸν ἄγνωστον ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος, ἀλλὰ νὰ προσέχωμεν νὰ ἀλλάσσωμεν τὰ σημεῖα τῶν μεταφερομένων ὅρων, ἂν δηλ. ἔχουν $+$ ἢ $-$, νὰ τὸ κάμνωμεν $-$ ἢ $+$.

3) ***Πρόβλημα***. Εἰς ἓν σχολεῖον ὑπάρχουν 170 παιδία, ἄρρενα καὶ θήλεα, ἀλλὰ τὰ θήλεα εἶναι 98 ὀλιγώτερα ἀπὸ τὰ ἄρρενα· Πόσα εἶναι τὰ ἄρρενα καὶ πόσα τὰ θήλεα;

Λύσις. Παριστῶμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρρένων μὲ τὸ γράμμα χ. τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν θηλέων εἶναι $\chi-98$, ἀλλὰ τὰ ἄρρενα καὶ τὰ θήλεα μαζὶ εἶναι 170. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\chi+\chi-98=170$. Μεταφέρομεν τὸν 98 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖόν του, ἤτοι $\chi+\chi=170+98$ ἢ $2\chi=268$. Διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2\chi}{2}=\frac{268}{2}$ ἢ $\chi=134$. Ὥστε τὰ ἄρρενα εἶναι 134 καὶ τὰ θήλεα $134-98$ ἢ 36.

4) ***Πρόβλημα***. Μία κόρη εἶναι 10 ἐτῶν καὶ ἡ μητέρα της 42 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ μητέρα θὰ ἔχῃ ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης;

Λύσις. Παριστῶμεν μὲ τὸ χ τὰ ἔτη, τὰ ὁποῖα θὰ περάσουν ἀπὸ σήμερον διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο. Ἀλλὰ μετὰ χ ἔτη ἡ κόρη θὰ εἶναι $10+\chi$ ἐτῶν καὶ ἡ μητέρα $42+\chi$ ἐτῶν. Ἐπειδὴ ὅμως τότε ἡ μητέρα θὰ ἔχῃ ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης, διὰ τοῦτο τριπλασιάζομεν τὴν ἡλικίαν τῆς κόρης, διὰ νὰ τὰς κάμωμεν ἴσας, ἤτοι $3\,(10+\chi)=42+\chi$. Ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν (ἐδ. 264) $30+3\chi=42+\chi$ ἢ $3\chi-\chi=42-30$ ἢ $2\chi=12$, διαιροῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ 2 καὶ εὑρίσκομεν $\chi=6$. Ὥστε μετὰ 6 ἔτη θὰ γίνῃ τοῦτο, ἡ κόρη θὰ εἶναι τότε 16 ἐτῶν καὶ ἡ μητέρα 48 ἐτῶν, ἤτοι θὰ ἔχῃ ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης.

Σημ. Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος. Ἐὰν ὅμως τὰ κλάσματα εἶναι περισσότερα τοῦ ἑνός, πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

5) ***Πρόβλημα***. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 2, γίνεται ἴσον μὲ τὸν 20;

Λύσις. Παριστῶμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν μὲ τὸν χ. Τὸ τρίτον αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{3}$· ἐὰν εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν 2, τότε τὸ ἄθροισμα

$\frac{\chi}{3}+2$ συμφώνως μὲ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 20, ἤτοι $\frac{\chi}{3}+2=20$. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον καὶ τὰ δύο ἴσα μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 3, ἤτοι $3.\left(\frac{\chi}{3}+2\right)=20.3$ ἢ $\frac{3\chi}{3}+6=60$ ἢ $\chi+6=60$ ἢ $\chi=60-6$ ἤτοι $\chi=54$.

6) ***Πρόβλημα.*** Ἠρώτησέ τις μαθητήν, πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς του, καὶ ἐκεῖνος ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς. Ἐὰν προσθέσωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιρέσωμεν 6 μαθητάς, θὰ εὕρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταί;

Λύσις. Παριστῶμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν μὲ τὸν χ. Τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{4}$, τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2\chi}{5}$ (ἐδ. 237) καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$. Συμφώνως μὲ τὸ πρόβλημα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{4}+\frac{2\chi}{5}-6=\frac{\chi}{2}$. Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 4.5.2 ἢ 40 καὶ ἔχομεν $40.\left(\frac{\chi}{4}+\frac{2\chi}{5}-6\right)=\frac{40\chi}{2}$ ἢ $\frac{40\chi}{4}+\frac{80\chi}{5}-240=\frac{40\chi}{2}$ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν ἔχομεν $10\chi+16\chi-240=20\chi$ ἢ $10\chi+16\chi-20\chi=240$ ἢ $26\chi-20\chi=240$ ἢ $6\chi=240$ ἢ $\chi=40$.

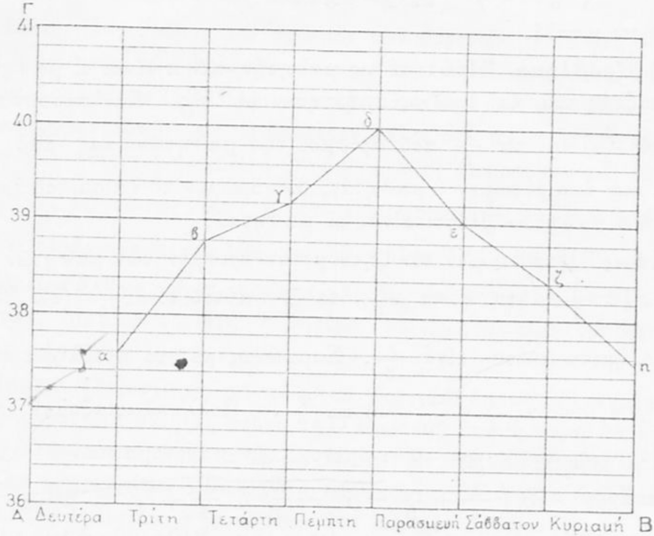
Γραφικὴ παράστασις τῶν τιμῶν ἑνὸς ποσοῦ.

312. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐξετάζομεν μὲ τὸ θερμόμετρον τὴν θερμοκρασίαν ἑνὸς ἀσθενοῦς καθημερινῶς τὴν 8ην ὥραν π. μ. καὶ εὑρίσκομεν ἐπὶ μίαν ἑβδομάδα τὰς ἑξῆς θερμοκρασίας,

Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκ.	Σάββ.	Κυριακή
37,6	38,8	39,2	40	39	38,4	37,5

Τῆς πορείας τῆς θερμοκρασίας ταύτης λαμβάνομεν ἀμέσως σαφῆ ἰδέαν μὲ τὴν ***γραφικὴν παράστασιν***, ἡ ὁποία γίνεται ὡς ἑξῆς.

Γράφομεν δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καθέτους μεταξύ των. Ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς 7 ἴσα μέρη (ὅσαι δηλ. εἶναι αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος), τὴν δὲ ΑΓ διαιροῦμεν εἰς ἴσα μέρη ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς βαθμοὺς τοῦ θερμομέτρου 36, 37, 38 κτλ. καὶ ἔπειτα ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων διαιροῦμεν, χάριν εὐκολίας, εἰς 5 ἴσα μέρη ἀντὶ εἰς 10 ποὺ εἶναι διῃρημένοι οἱ βαθμοὶ τοῦ θερμομέτρου, ὥστε ἕκαστον μέρος εἶναι 2 δέκατα τοῦ βαθμοῦ.



Ἡ θερμοκρασία τῆς **Δευτέρας** ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον α, τῆς Τρίτης εἰς τὸ σημεῖον β, τῆς Τετάρτης εἰς τὸ γ, τῆς Πέμπτης εἰς τὸ δ, τῆς Παρασκευῆς εἰς τὸ ε, τοῦ Σαββάτου εἰς τὸ ζ καὶ τῆς Κυριακῆς εἰς τὸ η. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ αβγδεζη δεικνύει τὴν πορείαν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀσθενοῦς.

Σημ. Τοιαύτας γραφικὰς παραστάσεις κάμνομεν διὰ τὰς τιμὰς ἐμπορεύματος, συναλλάγματος, θνησιμότητος, πληθυσμοῦ κτλ.

Ἀσκήσεις. 1) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἑξῆς τιμῶν τοῦ ἐλαίου. Τὴν α′ ἑβδομάδα ἡ ὀκᾶ τῆς πρώτης ποιότητος ἐπωλεῖτο 29 δρ., τὴν β′ ἑβδομάδα ἐπωλεῖτο 30,50, τὴν γ′ 30, τὴν δ′ 32 καὶ τὴν ε′ 28,50.

2) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς θερμοκρασίας μιᾶς ἑβδομάδος, τὴν ὁποίαν ἐδείκνυε τὸ θερμόμετρον εἰς ἕνα τόπον τὴν 8ην π. μ. ὥραν ἑκάστης ἡμέρας.

Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατον.
12 13 10 8 9,5 14

3) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν κατωτέρω τιμῶν τῆς ἀγγλικῆς λίρας, τὰς ὁποίας εἶχεν ἀπὸ τῆς 10 τοῦ μηνὸς μέχρι τῆς 18 τοῦ ἰδίου. 370 δραχ., 372, 375, 379, 374, 371, 376, 380.

ΤΕΛΟΣ

ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Σελὶς	36	στίχος	1	ἀντὶ θὰ ἔχῃ	νὰ γραφῇ	νὰ ἔχῃ
»	43	»	37	ἀντὶ Πόσας	»	Πόσους
»	87	»	17	ἀντὶ $\frac{1}{2}$	»	$1\frac{1}{2}$
»	87	»	25	ἀντὶ $2\frac{1}{4}$	»	$2\frac{1}{2}$
»	96	ἄσκησις 5η νὰ γραφῇ $\frac{5}{6}+\frac{4}{5}$.				

$\frac{7}{8}$ 400 $x = 400 \cdot \frac{7}{8} = 350$

10581
78
8464
7406
82524 | 23
3588
136
202
184
0

Να υπολογισθούν ~~αι δυνάμεις~~ γνώριμα

$2^3 \times 2^4 \times 2^5$ $5^2 \times 5^3 \times 5^5$

$7^2 \times 7^3 \times 7^4$

Να ~~υπολογισθούν~~ εύρεθούν τα πηλίκα

των διαιρέσεων

$5^7 : 5^3$, $7^5 : 7^2$, $3^8 : 3^5$ $a^9 : a$

$a^2 \times a^4 \times a^7$

Να υπολογισθούν

$(4^2)^3$ $3^8 : 3^5$ $(7^2)^6$, $(2 \times 3 \times 5)$

$(5^2)^4$ $(5^{7})^2 : 5^7$ $(3^2 \times 3^3 \times 3^4)$

100
270

3
270
$\cancel{108}$
2

27
3
81 | 2
= 1,405

1.835 · 717 / 1000

5290 | 1115
= 690 | 45

8.574
2
17148 | 5
3429,40
21
14
48
4