ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

ΓΕΝΕΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΥΠΟ
Ν. Δ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ

Τρεῖς διαλέξεις εἰς τὸ Σεμινάριον τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας διὰ τὴν πειραματικὴν μελέτην καὶ διδασκαλίαν τῶν νέων μαθηματικῶν, κατὰ Σεπτέμβριον 1962.

ΑΘΗΝΑΙ 1963

155

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΜΕΛΕΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

ΓΕΝΕΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΥΠΟ
Ν. Δ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ

Τρεῖς διαλέξεις εἰς τὸ Σεμινάριον τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας διὰ τὴν πειραματικὴν μελέτην καὶ διδασκαλίαν τῶν νέων μαθηματικῶν, κατὰ Σεπτέμβριον 1962.

ΑΘΗΝΑΙ 1963

Τά κυριότερα τυπογραφικά σφάλματα.

Σελίς 7, στ. 8 : μέ μέσα , ἀντί μέσα.

" 8 " 5 ἀπότό τέλος: συγκρητιστικῆς, ἀντί συγκριτιστικῆς.

" 17 " 4-5: ἀναφερθῶ , ἀντί ἀνεφερθεῖ.

" 20 " 6 : συγκροτεῖ , ἀντί συγκρατεῖ

" 22 " 1 : γενετήσια , ἀντί γενετική.

" 24 " 6 : Wallon , ἀντί Wallin.

" 37 " 6 : δέν , ἀντί δέ

" 48 " 4 : στό σύνθετο κλάσμα , ἀντί στά...

" 50 " 8 ἀπό τό τέλος : πῶς , ἀντί πώς

" 60 " 6 : βερμπαλισμοῦ , ἀντί βερμαλισμοῦ

" 82 " 8 : εἶταν ἀντί ταν

" 83 " 17 : occasion , ἀντί accasion

" 83 " 7 ἀπό τό τέλος : dans , ἀντί ans

" 83 " 1 ἀπό τό τέλος : tradi...., ἀντί traidi...

" 84 " 1 : basée , ἀντί beasée

" 84 " 2 ἀπό τό τέλος : Cf , ἀντί Cg.

Τὰ σημαντικότερα τυπογραφικὰ σφάλματα

[illegible]

Ι. Ἡ γενετική ψυχολογία.

Τό ἔργο πού ἐγκαινιάζεται μέ τό σεμινάριό μας ἀποτελεῖ ἐπέκταση, καί στή χώρα μας, ἑνός εὐρυτάτου προγράμματος τοῦ Ὀργανισμοῦ Οἰκονομικῆς Συνεργασίας καί Ἀναπτύξεως (Ο.Ο.Σ.Α) πού ἀποβλέπει στόν ἐκσυγχρονισμό τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν στή Μέση Ἐκπαίδευση.

Ἡ ἀρχή τοῦ προγράμματος αὐτοῦ ξεκινᾶ ἀπό μία "Διάσκεψη μελέτης ἐπί τῶν νέων ἀντιλήψεων τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν" πού ἔγινε στό Παρίσι πό 23 Νοεμβρίου ἕως 4 Δεκεμβρίου 1959 μέ πρωτοβουλία τοῦ Ὀργανισμοῦ Εὐρωπαϊκῆς Οἰκονομικῆς Συνεργασίας, ὅπως ὀνομαζόταν τότε ὁ Ο.Ο.Σ.Α.

Στή διάσκεψη ἐκείνη εἶχα τήν τιμή νά ἀντιπροσωπεύσω τή χώρα μας καί ἀπό τότε ἔχω καταβάλει κάθε δυνατή ἀτομική προσπάθεια, μέ ἐκθέσεις, μέ δημοσιεύματα , μέ διαλέξεις, μέ διαβήματα, νά συντελέσω , καί ἐγώ, στό μέτρο τῶν δυνάμεών μου, πλάϊ σέ ἄλλους ἱκανότερους καί ἁρμοδιότερους, στήν ὡρίμανση τῶν συνειδήσεων καί στήν προπαρασκευή τοῦ ἐδάφους γιά τήν ἐργοθέτηση τοῦ προγράμματος αὐτοῦ καί τήν ἔναρξη τῆς ἐκτελέσεώς του ἀπό τήν ἐκλεκτή ὁμάδα τῶν συναδέλφων πού μοῦ κάμνουν τήν τιμή νά παρακαλουθήσουν καί τή δική μου μικρή συμβολή στό ὅλο ἔργο.

Ὑπάρχει μία παιδαγωγική ἀρχή σέ μορφή παροιμίας πού λέγει: "Γιά νά διδάξουμε μαθηματικά στό Γιάννη δέν ἀρκεῖ νά ξέρουμε καλά τά μαθηματικά, εἶναι ἀπαραίτητο νά ξερουμε καί τό Γιάννη". Καί τό Γιάννη θά μᾶς τόν μάθει ἡ ψυχολογία. Καί πιό συγκεκριμένα, ἡ γενετική ψυχολογία πού μαζύ μέ τή φυσιολογία καί τήν κοινωνιολογία ἀποτελοῦν τά τρία κύρια σημεῖα στηρίξεως τῆς γενετικῆς παιδαγωγικῆς πού ἀποτελεῖ τό διδακτικό σήμερα.

Θεμελιωτές καί διαμορφωτές τῆς γενετικῆς ψυχολογίας εἶναι κυρίως οἱ Claparede, Decroly, Wallon καί Piaget. Πρό πάντων ὁ τελευταῖος πού τό ἔργο τῆς σχολῆς του ἔχει περάσει, στά τελευταῖα 30 χρόνια, μία πλούσια ἄνθιση καί βρίσκεται σήμερα σέ γόνιμη καρποφορία, τόσο στήν Εὐρώπη, ὅσο καί στήν Ἀμερική.

Σχετικά μέ τή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν σέ παγκόσμια κλίμακα τέθηκαν στή διάθεση τῶν συνέδρων στή Διάσκεψη τοῦ Παρισίου πολλά ειδικά κείμενα καί δοκουμέντα καί ἡ γενετική ψυχολογίακαίδιδακτική τῶν μαθηματικῶν τιμήθηκε ἰδιαίτερα μέ διαλέξεις, ὅπως τοῦ διαπρεποῦς μαθηματικοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Παρισιοῦ κ. G. Choquet καί γόνιμες συζητήσεις μέ τή συμμετροχή ἐξεχόντων μαθηματικῶν παιδαγωγῶν, ὅπως ὁ Βέλγος Servais, ὁ Ἐλβετός Pauli, ἡ Ἰταλίδα Castelnuovo, ὁ Ἄγγλος Maxwel, οἱ Ἀμερικανοί Fehr καί Bigs, ἡ Γαλλίδα L. Felix κ. ἄ.

Ἀνάμεσα στά διαφωτιστικά κείμενα σχετικά μέ τή διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ὑπάρχει μία ἔκθεση πού ἐπιγράφεται:

"Ἔρευνα τῶν ψυχολογικῶν καί παιδαγωγικῶν ἀπόψεων τῆς διδασκαλίας τῆς ἀριθμητικῆς καί τῶν μαθηματικῶν. Γραμμένη ἀπό τούς W.D. Wall, Διευθυντή καί J.B. Biggs , Ὑποδιευθυντή τῶν ἐρευνῶν στό Ἐθνικό Ἵδρυμα Ἐκπαιδευτικῶν Ἐρευνῶν τῆς Ἀγγλίας καί Οὐαλίας - Λονδίνο ".

Σημειώνω ἐδῶ τά ἀκόλουθα, ἰδιαιτέρως διαφωτιστικά, ἀπό τόν πρόλογο τῆς Ἀγγλικῆς αὐτῆς ἔρευνας

"...... 3. Κατά τήν πορεία τῆς ἐργασίας τους οἱ συγγραφεῖς ἐντυπωσιάσθηκαν ἀπό τόν σκόρπιο χαρακτῆρα πολλῶν μελετῶν, ἀπό τήν ἀπουσία ὀργανικῶν ἤ θεωρητικῶν δεσμῶν ἀνάμεσα στά μελετηθέντα θέματα καί στό σύνολο τῶν γνώσεων πού ἀναφέρονται στήν ἀνάπτυξη τοῦ παιδιοῦ, καθώς καί ἀπό τή σπάνη προσπαθειῶν γιά τήν ἐκπόνηση μιᾶς γενικῆς θεωρίας τῆς ψυχολογίας καί τῆς μεθοδολογίας τῶν μαθηματικῶν ..."

Καί καταλήγει:

"4. Ἄν κρίνουμε ἀπό τήν ὁμοφωνία τῶν εἰδικῶν, φαίνεται ὅτι ἔχει περάσει ὁ καιρός τῆς ψηλαφητῆς ἔρευνας, λίγο-πολύ στήν τύχη. Ἄν διαθέταμε τούς ἀναγκαίους πόρους καί διαβλέπαμε ὅλα τά πλεονεκτήματα πού ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν μπορεῖ νά κερδίσει ἀπό ἔρευνες καλά ὀργανωμένες, θά μπορούσαμε νά πετύχουμε μέσα στά πέντε ἐρχόμενα χρόνια περισσότερα ἀπό ὅσα κατά τά τελευταῖα 50 χρόνια".

Δέν πρόκειται βέβαια νά μᾶς ἀπασχολήσει περισσότερο ἡ μελέτη τῶν ἄγγλων ἐρευνητῶν. Ἄν ἀναφέρθηκα σ'αὐτήν, εἶναι γιά νά δείξω πόσο μεγάλη σημασία δίνεται σήμερα στή διδακτική τῶν μαθηματικῶν καί ποιά θέση κατέχει σ'αὐτήν τό ἔργο τοῦ Piaget. Πραγματικά, ἀναφερόμενοι οἱ ἄγγλοι ἐρευνητές, στό ἔργο τοῦ Ἀμερικανοῦ Swenson* , σχετικά πρόσφατο (1951), ἐκφράζουν τήν ἀπορία "πῶς δέν μνημονεύεται σ' αὐτό τό ἔργο τοῦ Piaget" καί προσθέτουν: "Καί ὅμως αὐτό εἶναι μιά πλατιά γενετική μελέτη πού ἐρευνᾶ τή νοητική ζωή καί ἀνάπτυξη τοῦ παιδιοῦ καί συνδέει εἰδικά τήν ἀνάπτυξη τῆς μαθηματικῆς σκέψεως μέ μία γενική ψυχολογική θεωρία. Εἶναι - συνεχίζει ἡ ἔκθεση - νά ἐκπλήσσεται κανείς ἀπό αὐτό τό κενό τοῦ Swenson , γιατί τό πρῶτο ἔργο πού δημοσιεύ-

---

* Swenson E. J. Arithmetic for pre - School and primary - grade. Chicago 1951, Univ. press.

θηκε πάνω σ'αὐτό τό θέμα ἀπό τόν Piaget "ἡ γένεση τοῦ ἀριθμοῦ στό παιδί" χρονολογεῖται ἀπό τό 1941 καί "Ἡ μαθηματική σκέψη τοῦ Ἐφήβου", πρίν ἀπό τό 1950. Τά ἔργα αὐτά καί ἡ ἴδια ἡ ἀντίληψη πού διαμορφώνει ὁ Piaget γιά τήν νοητική ἀνάπτυξη τοῦ παιδιοῦ ἔχουν ἀνατρέψει τίς ἰδέες μας πάνω στό ζήτημα . . . θά δώσουμε λοιπόν μία θέση ξεχωριστή στό ἔργο τοῦ Piaget στίς ἑπόμενες σελίδες ".

Αὐτά γράφουν οἱ ἄγγλοι ἐρευνητές.

Οἱ ἔρευνες τοῦ Piaget ξεκινώντας ἀπό τό ἔργο του "Ἡ γένεση τοῦ ἀριθμοῦ στό παιδί" (1941) καί, παλαιότερα, ἀπό τό "Γλῶσσα καί σκέψη στό παιδί" (1930) φθάνουν ὥς τήν ἀναζήτηση καί τήν ἀνακάλυψη , μέσα στή ψυχογενετική ἀνάπτυξη τῆς παιδικῆς σκέψεως, τῶν ἴδιων τῶν θεμελιωδῶν μαθηματικῶν δομῶν τῶν Bourbaki, δηλ. τῶν ἀλγεβρικῶν, τῶν δομῶν σχέσεως καί τῶν τοπολογικῶν *.

Οἱ βασικές γνώσεις πού ρυθμίζουν τήν πνευματική δραστηριότητα τοῦ παιδιοῦ κατά τή σχολική ἡλικία εἶναι ἀρχικά: ἡ γνώση τοῦ διαστήματος, ἡ γνώση τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ γνώση τοῦ χρόνου καί ἡ γνώση τῆς αἰτίας.

Ἀκολουθοῦν σ'ἕνα ἑπόμενο στάδιο οἱ γνώσεις τοῦ νόμου καί τοῦ περιβάλλοντος. Ἡ δυνατότητα νά ἀποκτήσει τό παιδί στοιχεῖα ἀπό τίς βασικές αὐτές γνώσεις προσδιορίζεται, γιά κάθε γνώση, ἀπό τήν ἡλικία του. Εἶναι π.χ. μάταιο νά ζητοῦμε ἀπό τό παιδί ἀπομνημόνευση ἱστορικῶν χρονολογιῶν πρίν συμπληρώσει τά 9-10 χρόνια τῆς ἡλικίας του. Τά παιδιά, πρίν

---

* L'enseignement des Mathematiques. . Piaget, E. Beth, J. Dieudonne κ.λ.π. Delachaux et Niestle-Paris 1955.

ἀπό αὐτή τήν ἡλικία ἐννοῦν τά ἱστορικά γεγονότα, ὅπως τά παραμύθια , ἔξω δηλαδή ἀπό τό χρόνο: "Μία φορά καί ἕνα καιρό ..." .

Χάρη στή γενετική ψυχολογία γνωρίζομε σήμερα τίς νοητικές δυνατότητες τοῦ παιδιοῦ καί τόν τρόπο πού λειτουργεῖ ἡ σκέψη του στήν κάθε ἡλικία:

Κατά τή νηπιακή περίοδο, καί μέχρι τριῶν ἐτῶν, τό παιδί ἀναπτύσσει τή γνωστική ἐμπειρία του μέσα κυρίως αἰσθητο- κινητικά. Μέ τό βάδισμα ἐξοικειώνεται μέ τόν κινητικό χῶρο, μέ τή γλῶσσα μπαίνει στόν κοινωνικό χῶρο.

Τά πράγματα καί οἱ σχέσεις τῶν πραγμάτων μεταξύ τους καί μέ τό ἴδιο τό παιδί, ἡ ἴδια ἡ δραστηριότητά του σέ ὅλη τήν ἔκταση καί τήν ποικιλία της, ἠμπορεῖ, μέ τή γλῶσσα, νά μεταφερθεῖ ἀπό τό αἰσθητο - κινητικό πεδίο στό συμβολικό τοῦ λόγου. Τό παιδί ἀρχίζει νά σκέπτεται: Νά ἀναπλάσσει δηλαδή μέ τό λόγο καί νά ἀνακαλεῖ στή μνήμη ἀντικείμενα ἀπόντα, καταστάσεις καί γεγονότα περασμένα καί ἀκόμη νά μετασχηματίζει κατά βούληση, ὅσο τοῦ ἐπιτρέπει ἡ φαντασία καί ἡ ἀποκτημένη ἐμπειρία, τήν παροῦσα αἰσθητοκινητική κατάσταση τοῦ ἄμεσου περιβάλλοντός του. Γύρω στά τρία χρόνια τῆς ἡλικίας του ἀρχίζει νά χαράζει ἡ ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀπό τά 3 ἕως τά 6 μέ 7 περίπου χρόνια ξετυλίγεται γοργά μία νέα φάση στήν ἀνάπτυξη τοῦ παιδιοῦ. Διαμορφώνεται προοδευτικά τό ἐγώ , ἡ παιδική προσωπικότητά του. Τό σῶμα του ἀρχίζει νά ἀποκτᾶ εὐκαμψία καί οἱ κινήσεις δεξιότητα καί χάρη - πρό πάντων στά κορίτσια. Στήν ἡλικία αὐτή τό παιδί δοκιμάζει μεγάλη χαρά, ὅταν τό προσέχουν,καί κάμνει ὅ,τι μπορεῖ γιά νά τονίσει τήν παρουσία του. Τοῦ ἀρέσει νά μιμεῖται τούς μεγάλους καί μέ τή μίμηση πλουτίζει τήν προσωπικότητά του. Κατά τά τρία - τέσσερα χρόνια αὐτῆς τῆς περιόδου τῆς ἡλικίας του ἄλλο δέν κάμνει ἀπό τό νά ρωτᾶ συνεχῶς καί νά μαθαίνει. Μέ τίς ἀπαντήσεις πού παίρνει ἀπό τούς μεγάλους, ἤ πού δίνει τό ἴδιο στόν ἑαυτό του, κατασκευάζει ἕνα παιδικό κόσμο στά μέτρα του.

Εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ συγκρητισμοῦ:

Ἀντιλαμβάνεται τά πράγματα συγκεχυμένα, κατά σύνολα πού τοῦ εἶναι ἀκόμη ἀδύνατο νά ξεχωρίσει τά στοιχεῖα τους καί νά κατανοήσει μέ λόγο, δηλαδή μέ ἀνάλυση καί μέ σύνθεση τίς σχέσεις καί τή λειτουργία τους. Τά σκέπτεται συνήθως κατά ζεύγη συνδυάζοντας π.χ. τό ἄσπρο μέ τό μαῦρο, τό σύννεφο μέ τόν καπνό, τόν ἄνεμο μέ τό δένδρο, τή σβοῦρα του μέ τό κόκκινο χρῶμα κ.τ.λ.

Στήν ἀρχή δέν εἶναι σέ θέση οὔτε νά περιγράφει, οὔτε νά ἀφηγηθεῖ, ἀργότερα ἀρχίζει νά ἐφευρίσκει, νά μυθοπλάσσει. Ὅτι βλέπει δέν εἶναι σέ θέση νά τό ἐξηγήσει μέ τούς κανόνες τῆς αἰτιότητας, ἀλλά ἀποδίδει στό κάθε τί ἀνθρωπομορφικές ἰδιότητες: τά φροῦτα τά φτιάχνει ὁ μανάβης καί τή ζάχαρη ὁ μπακάλης. Τά πάντα ἔχουν δημιουργηθεῖ πρός τό συμφέρον του γιά δική του χρήση.

Σ'αὐτή τή στοιχειώδη μορφή ἀντιλήψεως πού ὀνομάζεται συγκρητισμός, ὁ Pieget βέλεπει τήν ἔκφραση ἑνός συγκεκαλυμμένου ἐγωκεντρισμοῦ πού κάμνει τό παιδί νά θεωρεῖ τόν ἑαυτό του πώς εἶναι τό κέντρο καί ὁ λόγος τῆς ὑπάρξεως τοῦ κόσμου. Στό στάδιο αὐτό τῆς συγκριτιστικῆς νοημοσύνης τό παιδί εἶναι ἀδύνατο νά ξεχωρίσει τό ὑποκειμενικό ἐγώ του ἀπό τόν ἄλλο κόσμο· μιλᾶ μάλιστα γιά τόν ἑαυτό του σέ τρίτο πρόσωπο. Κατά τό Wallon ὁ συγκρητισμός εἶναι τό προκατηγορικό στάδιο τῆς παιδικῆς νοημοσύνης καί σκέφεως. Τό στάδιο δηλαδή πού θά προετοιμάσει τό παιδί στή νόηση τῶν κατηγοριῶν ἤ (κατά Piaget) τῶν κλάσεων: δέντρα, ἄνθρωποι κ.λ.π.:

Εἴπαμε ὅτι κύριο ὄργανο, μαζύ μέ τίς αἰσθήσεις καί τήν κίνηση μέσα στό χῶρο - κύριο ὄργανο στήν ἀνάπτυξη τῆς παιδικῆς νοημοσύνης, εἶναι ὁ λόγος, ἡ γλῶσσα: τό δῶρο αὐτό τῆς κοινωνίας πρός τόν ἄνθρωπο πού τόν κάνει ἱκανό νά σκέπτεται: νά βλέπει νοερά καί νά στοχάζεται τά πράγματα καί κατά τήν ἀπουσία τους, ἔξω δηλαδή ἀπό τό παρόν αἰσθητο - κινητικό περιβάλλον του. Νά ἀναφέρεται μέ τή μνήμη σέ καταστάσεις τοῦ παρελθόντος, νά προβάλλει μέ τή φαντασία στό μέλλον τόν ἑαυτό του καί τήν αἰσθητο-κινητική δραστηριότητά του πρός νέες ἰσορροπίες τοῦ ἐγώ μέ τό περιβάλλον.

Ὅλη αὐτή ἡ παιδική δραστηριότητα ἐκδηλώνεται σέ μορφή παιγνιδιῶν πού σκοπός τους εἶναι, κατά τόν Wallon, νά δώσουν κάποια ὀργανωμένη μορφή ἐκφράσεως στή ζωτικότητά τοῦ παιδιοῦ. Πολλά αὐτοσχέδια παιδικά παιγνίδια ἀποτελοῦν μίμηση ἐργασίας, ἐνῷ ἄλλα περιέχουν σπέρματα τέχνης. Μέ ἄλλα λόγια στή δεύτερη αὐτή παιδική ἡλικία, μέσα στό παιγνίδι,σκιαγραφοῦνται καί ἐκκολάπτονται ἡ ἐργασία καί ἡ τέχνη πού ἀργότερα θά μορφοποιηθοῦν σέ ξεχωριστές δραστηριότητες.

Τό στάδιο αὐτό τῆς παιδικῆς ἡλικίας τοῦ συγκρητισμοῦ (τῶν 3 ἕως 6 μέ 7 ἐτῶν) πού ὁ Wallon τό ὀνομάζει προσωποκρατικό, ξετυλίγεται, ὅπως καί ὅλα τά ἑπόμενα, ψυχογενετικά, κάτω ἀπό ὅρους πού ἄλλοι ὀφείλονται σέ ὀργανικές ἐξελίξεις καί ὡρισμάνσεις καί ἄλλοι στίς ἐπιδράσεις τοῦ περιβάλλοντος. Οἱ ὅροι τῶν δύο αὐτῶν κατηγοριῶν βρίσκονται σέ διαρκῆ ἀλληλεπίδραση κατά τρόπο πού οἱ ὅροι τοῦ περιβάλλοντος προκαλοῦν καί ὡρισμάζουν τήν ὀργανική λειτουργία ἐνῷ σύγχρονα ἡ ὀργανική λειτουργία μέ τήν ὡρίμανσή της συνειδητοποιεῖ τό περιβάλλον καί συντελεῖ στήν κατανόησή του. Χωρίς τό περιβάλλον ἡ ὀργανική λειτουργία - καί ἡ σκέψη εἶναι ὀργανική λειτουργία - θα ὑπῆρχε μόνο "δυνάμει" μέσα στό νευρικό σύστημα τοῦ παιδιοῦ. Τό παιγνίδι εἶναι ἡ πιό ἔκδηλη, ἡ πιό ζωντανή μορφή ἐπιδράσεως τοῦ περιβάλλοντος στήν ψυχογένεση καί ὄχι μόνο στή ψυχογένεση, ἀλλά καί στή σωματική ἀνάπτυξη τοῦ παιδιοῦ.

Ἀνακεφαλαιώνομε: Τρία εἶναι τά κύρια χαρακτηριστικά τῆς δεύτερης παιδικῆς ἡλικίας (3 ἕως 6-7 ἐτῶν): Ἡ ἔντονη βεβαίωση τῆς προσωπικότητας, ἡ συγκρητιστική ἀντίληψη καί τό παιγνίδι.

Στό ἑπόμενο στάδιο, τό στάδιο τῆς τρίτης παιδικῆς ἡλικίας τῶν 7 ἕως 12 ἐτῶν, στό παιγνίδι θά προστεθεῖ ἡ ἐργασία. Οἱ συνδέσεις τῶν αἰσθητηρίων νεύρων μέ τά διάφορα κέντρα τοῦ ἐγκεφαλικοῦ φλοιοῦ ἐπιτρέπουν πιά τό συνειδητό προσανατολισμό τῆς παιδικῆς δραστηριότητας πρός ὅτι λέγομε ἐργασία, στά πλαίσια βέβαια τοῦ οἰκογενειακοῦ καί τοῦ σχολικοῦ περιβάλλοντος. Τό πεισματάρικο καί ἐγωκεντρικό παιδί τῆς ἡλικίας τοῦ συγκρητισμοῦ καί τῆς προσωποκρατίας θά μεταμορφωθεῖ προοδευτικά σέ ἕνα ὑπάκουο παιδί πού πρόθυμα προσφέρεται στή μάθηση, χωρίς νά ρωτᾶ τό πῶς καί τό γιατί.

Γύρω στά 9 μέ 10 χρόνια τῆς ἡλικίας του ἡ λειτουργία τῆς μνήμης φθάνει στά ἀνώτατο ὅριο ἀναπτύξεως. Τό παιδί ἀπομνημονεύει μέ εὐκολία κάθε εἴδους λεκτική προσφορά, χωρίς μάλιστα νά πολυενδιαφέρεται γιά τή σημασία ἄγνωστών του λέξεων. Πολλές φορές μάλιστα τίς ντύνει μέ τά πιό απίθανα νοήματα. Είναι ή ήλικία πού τό παιδί προσφέρεται περισσότερο γιά τήν έκμάθηση ξένης γλώσσας. Στό πέρασμα τῆς ήλικίας αὐτῆς - θά τήν όνομάσουμε πρώτη σχολική ήλικία, γιατί σέ μᾶς καλύπτει τή βαθμίδα τοῦ Δημοτικοῦ σχολέίου - όλοκληρώνεται ή ποσοτική ἀνάπτυξη τῆς παιδικῆς νοημοσύνης.

Λέμε ποσοτική, γιατί ἀναπτύσσεται όμοιόμορφα σέ ὅλα τά παιδιά μέ ἀσήμαντες παρεκκλίσεις πρωϊμότητας ἤ καθυστερήσεως ἀπό παιδί σέ παιδί.

Ἔχει θεμελιώδη σημασία γιά τήν ἀγωγή τοῦ παιδιοῦ ή πρώτη αὐτή σχολική ήλικία. Εἴδαμε ὅτι κύριο χαρακτηριστικό της εἶναι ὅτι τό παιδί προσφέρεται πρόθυμα γιά μάθηση καί δέχεται κάθε προσφερόμενο, χωρίς νά ρωτᾶ τό πῶς καί τό γιατί. Εἶναι ή ήλικία τῆς"μνημοσύνης." Γιαυτό καί προσφέρεται πρό πάντων στήν ἐκμάθηση τῶν παιδευτικῶν αὐτοματισμῶν: δηλαδή τῆς ἀναγνώσεως τῆς γραφῆς καί τῆς όρθογραφίας, καί - αὐτό πού ἰδιαίτερα μᾶς ἐνδιαφέρει - τοῦ στοιχειώδους ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ τῶν τεσσάρων πράξεων. Ὅταν στήν πρώτη αὐτή σχολική ήλικία δέν θεμελιωθοῦν καλά οἱ παιδευτικοί αὐτοί αὐτοματισμοί δυσχεραίνεται ἀργότερα στή Μέση Ἐκπαίδευση ή ἀνάπτυξη τῶν ἀνώτερων ψυχικῶν λειτουργιῶν. Προσέξτε τά παιδιά πού εἶναι καθυστερημένα στά μαθηματικά, ἔστω καί σέ ἀνώτερες τάξεις τοῦ Γυμνασίου. Κάτω ἀπό τίς ἀδυναμίες τους θά ἀνακαλύψετε εὔκολα τή χαλαρότητα στό δέσιμο τῶν μαθηματικῶν αὐτοματισμῶν.

" Ἕνα παιδί πού κάθεται στό θρανίο τοῦ Δημοτικοῦ καί δέν ἀσχολεῖται μέ γραφή, μέ ἀνάγνωση ἤ μέ ἀριθμητικό λογισμό χάνει ἄδικα τόν καιρό του " λέγει κάπου ό Alain*.

---

* Alain, Propos sur l' Education. Presses Universitaires Paris.

Δυστυχῶς, στόν τόπο μας, ὁ περιορισμός τῆς ὑποχρεωτικῆς σχολικῆς ἡλικίας ὥς τό 12ο χρόνο ὑποχρεώνει τό Δημοτικό Σχολεῖο νά φορτώνει τό πρόγραμμά του μέ φορτίο δυσβάστακτο ἀπό γνώσεις, πολλές φορές ἀνώτερης στάθμης γιά τήν ἡλικία τοῦ μαθητῆ, μέ τή δικαιολογία ὅτι εἶναι χρήσιμες στήν κατοπινή ζωή, ἀφοῦ τά 75 % ἀπό τά παιδιά τοῦ Δημοτικοῦ δέν πρόκειται νά συνεχίσουν στή Μέση Ἐκπαίδευση. Ἔτσι οἱ ἐκπαιδευτικοί αὐτοματισμοί δέν στερεώνονται, τό παιδί στό Γυμνάσιο χάνει μέ τό καιρό τήν ἐμπιστοσύνη στό ἑαυτό του καί τήν αὐτοπεποίθηση πού γεννᾶ ἡ εὐχέρεια στήν ἀσφαλῆ ἐκτέλεση ἀριθμητικῶν πράξεων καί στήν ὀρθή χρήση τῆς γλώσσας, χάνει διαρκῶς ἔδαφος ἀντίκρυ στά ἄλλα παιδιά πού προχωροῦν κανονικά, χωλαίνει συνεχῶς καί σέρνεται κυριολεκτικά ἀπό τάξη σέ τάξη ὥσπουνά τά καταφέρει νά παρει τό περίφημο "χαρτί" ἀπό κάποια ἐλαστική Ἐπιτροπή ἀπολυτηρίων ἐξετάσεων ἰδιωτικοῦ νυκτερινοῦ Γυμνασίου.

Κύριο χαρακτηριστικό - γιά νά ξαναγυρίσουμε στό θέμα μας - εἶναι, στό στάδιο τῆς πρώτης σχολικῆς ἡλικίας, ἡ ψυχογενετική ὡρίμανση τῆς λογικῆς σκέψεως, σέ ἀντιδιαστολή πρός τό προηγούμενο τῆς συγκρητιστικῆς νοημοσύνης, πού ὁ Wallon τό ὀνομάζει προσωποκρατικό.

Στό στάδιο αὐτό ὑποχωρεῖ προοδευτικά ὁ προσωποκρατικός χαρακτήρας τοῦ παιδικοῦ ψυχισμοῦ μέ τόν ἐνδοστροφικό προσανατολισμό καί ἀρχίζουν νά ἀναπτύσσονται γοργά τά ἐνδιαφέροντα γιά τόν ἐξωτερικό κόσμο, γιά τό περιβάλλον μέσα στόν αἰσθητοκινητικό καί τόν κοινωνικοοικονομικό χῶρο πού ἔχει εὐρυνθεῖ τώρα μέ τή φοίτηση στό σχολεῖο καί τήν προσωπικότητα τοῦ δασκάλου. Νέα κίνητρα θά προστεθοῦν στή ψυχογένεση. Στό σπίτι μέ τούς γονεῖς καί τά ἀδέλφια θά προστεθεῖ ὁ δρόμος (ἀπό τό σπίτι στό σχολεῖο) μέ τήν πλούσια ποικιλία τῶν ἀντυπώσεων πού γεννᾶ στό παιδί τό σχολεῖο, ὁ δάσκαλος, οἱ συμμαθητές, οἱ διαβάτες.

"Ας μή νομισθεῖ ὅμως ὅτι στό πέρασμα ἀπό τό ἕνα στό ἄλλο στάδιο ὑπάρχει διαχωριστικό χρονικό ὅριο. "Οχι· αὐτό γίνεται διαλεκτικά μέ συνεχῆ πάλη τοῦ παιδιοῦ μέ τό περιβάλλον του καί μέ τόν ἴδιο τόν ἑαυτό του. Εἴδαμε πῶς,στό προσωποκρατικό στάδιο τό παιδί θέλει τονίζοντας τήν παρουσία του νά προβάλλει διαρκῶς τήν προσωπικότητά του καί νά ἐπικαλεῖται τήν προσοχή καί τό θαυμασμό τῶν μεγάλων.Αὐτό ὅμως δέν τοῦ φθάνει· σέ μία νέα φάση ἀρχίζει νά ἀναζητᾶ στό περιβάλλον του, ὄχι μόνο θαυμαστές,ἀλλά καί πρόσωπα πρός μίμηση. Πρότυπα πού νά θέλει νά τούς μοιάσει, νά πάρει τή θέση τους. Οἱ δύο αὐτές φάσεις συνυπάρχουν ἀνταγωνιστικά καί ἔχουν μεγάλη σημασία γιά τήν ἀγωγή τοῦ παιδιοῦ σ'αὐτή τήν ἡλικία, γιατί ὁ ἐνήλικος μπορεῖ νά παίξει κάποιο ρυθμιστικό ρόλο μετριάζοντας τή μία καί διεγείροντας τήν ἄλλη, ἀφοῦ ἡ μία συμπληρώνει τήν ἄλλη.

Κατά τό Wallon ἡ ἀτομικιστική ἀνάπτυξη τῆς παιδικῆς προσωπικότητας ἔχει καί τήν ἀντίθετη ὄψη της: "'Αναζητώντας τήν αὐτονομία του τό παιδί δέν κάνει, σ'αὐτό τό στάδιο, τίποτε ἄλλο ἀπό τό νά ὑποτάσσεται στίς ἐπιδράσεις, ἀπό τίς ὁποῖες ἰσχυρίζεται πώς θέλει νά ἀπελευθερωθεῖ. Ἡ συστηματική ἀντίθεση εἶναι ἡ ἄλλη ὄψη μιᾶς ὑποταγῆς, ἡ ἐπίδειξη εἶναι μία ὑποταγή στήν ἐπιδοκιμασία τοῦ ἄλλου, ἡ μίμηση εἶναι μία ὑποταγή σέ ξένη ἐπίδραση. Πραγματικά, οἱ πρῶτες προσπάθειες τοῦ παιδιοῦ νά ξεχωρίσει ἀπό τό περιβάλλον του ἔχουν γιά μόνο ἀποτέλεσμα νά τό κάμουν νά αἰσθανθεῖ πόσο τό ἄτομό του εἶναι ἐνυφασμένο στό περιβάλλον αὐτό....".*

---

* "Αρθρο τοῦ H. Wallon στό περιοδικό Bulletin de

Θά χρειασθεῖ,κατά τό νέο στάδιο, νά καταβάλει μεγάλες προσπάθειες τό παιδί γιά νά ξεχωρίσει, μέ τόν καιρό, τούς συγκεκριμμένους καί ἰδιαίτερους συνδέσμους μεταξύ τῶν πραγμάτων , τίς ὁμοιότητες καί τίς διαφορές πού προσαρμόζονται στίς διάφορες κατηγορίες τῶν ἀντικειμένων. Μόλις στά 11 μέ 12 χρόνια τῆς ἡλικίας του θά ἀπαλλαγεῖ ἀπό τά τελευταῖα ἴχνη τοῦ συγκρητισμοῦ.

Στό στάδιο τῆς πρώτης σχολικῆς ἡλικίας θά ἀποκτήσει τό παιδί προοδευτικά καί τίς ἔννοιες τῶν ἀναλλοιώτων ἤ σταθερῶν. Μέ τόν ὅρο ἀναλλοίωτες ἤ σταθερές ἐννοοῦμε π.χ. τήν ἔννοια τοῦ ἀναλλοιώτου μιᾶς ποσότητας, τήν ἔννοια τῆς κατακόρυφης διευθύνσεως, τήν ἔννοια τοῦ ἀναλλοιώτου μιᾶς μάζας ἀνεξάρτητα ἀπό τό σχῆμα ἤ τόν τεμαχισμό , τήν ἔννοια τῆς εὐθείας, τήν ἔννοια τῆς διατηρήσεως τῆς ἰσοδυναμίας δύο συνόλων, ὅταν μεταβάλλεται ἡ ἀντιστοίχιση τῶν στοιχείων τους, τῆς διατηρήσεως τῆς ἀποστάσεως δύο ἀκινήτων στοιχείων, ὅταν παρεμβάλλωνται ἄλλα μεταξύ τους κ.λ.π.

Ἄς σταθοῦμε σέ μερικά περίφημα πειράματα τοῦ Piaget:

1. Καλοῦμε ἕνα παιδί 4-5 χρονῶν νά τοποθετήσει διαδοχικά σέ μία γραμμή μερικά σπίρτα, π.χ. 6 (τό παιδί εἶναι σέ θέση καί νά τά μετρήσει μέ ἀρίθμηση). Τό καλοῦμε νά τοποθετήση μπροστά ἀπό κάθε σπίρτο μία δεκάρα· ἐκτελεῖ χωρίς δυσκολία καί ἀπαντᾶ σέ σχετική ἐρώτηση ὅτι οἱ δεκάρες εἶναι"τό ἴδιο" μέ τά σπίρτα. Ἀραιώνομε ἤ πυκνώνουμε τίς 6 δεκάρες. Τό παιδί δέν παραδέχεται πιά πώς εἶναι"τό ἴδιο". Οἱ δεκάρες ἔγιναν περισσότερες στήν ἀραίωση, λιγότερες στήν πύκνωση.

Psychologie. Paris No 10 Νοεμβρίου 1956 καί περιοδικό "Παιδεία καί Ζωή" No 60 - 1957.

Μόλις στήν ἡλικία 6 μέ 7 ἐτῶν θά μπορέσειτό ἴδιο παιδί νά κατανοήσει τή διατήρηση τοῦ πληθυκοῦ ἀριθμοῦ ἑνός συνόλου ἀνεξάρτητα ἀπό τή διάταξη τῶν στοιχείων του.

2. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει καί σέ συνεχῆ ποσά, π.χ. μαλακό πηλό. Μόλις τόν τεμαχίσουμε ἤ μεταβάλουμε τό σχῆμα του, γιά τό παιδί τῆς ἡλικίας τοῦ συγκρητισμοῦ μεταβάλλεται καί ἡ ποσότητά του καί τό βάρος του καί ὁ ὄγκος του. Τεμαχισμένο ἤ ἐπιμηκυσμένο εἶναι γιά τό παιδί περισσότερο.

3. Σ'ἕνα γυάλινο κυλινδρικό ποτήρι ρίχνομε μία ποσότητα χρωματισμένο νερό. Τό μεταγγίζομε ἀκολούθως- πάντοτε σέ παρουσία τοῦ παιδιοῦ - σ'ἕνα δεύτερο βάζο μέ διαφορετικό σχῆμα π.χ. στενότερο καί ψηλότερο. Τό παιδί τῆς ἡλικίας τοῦ συγκρητισμοῦ δέν παραδέχεται ὅτι ἡ ποσότητα τοῦ ὑγροῦ ἔμεινε ἀμετάβλητη. Τώρα τό βλέπει περισσότερο.

4. Σ'ἕνα γυάλινο κυλινδρικό ποτήρι ρίχνουμε πάλι μία ποσότητα χρωματισμένο νερό καί προτείνομε στό παιδί νά σχεδιάσει τό ποτήρι μέ τή στάθμη τοῦ νεροῦ. Τό παιδί σχεδιάζει σωστά. Ἡ γραμμή τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ εἶναι παράλληλη πρός τά χείλη τοῦ ποτηριοῦ, δηλαδή ὁριζόντια. Γέρνομε κατόπιν τό ποτήρι πρός τά πλάγια καί προτείνομε στό παιδί νά τό σχεδιάσει στή νέα του θέση. Θά δοῦμε ὅτι ἐνῶ σχεδιάζει σωστά τό πλαγιασμένο ποτήρι, χαράσει τή γραμμή τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας τοῦ ὑγροῦ ὄχι ὁριζόντια, ἀλλά, ὅπως καί πρίν, παράλληλη πρός τά γερμένα χείλη τοῦ ποτηριοῦ.

Τό παιδί λοιπόν στήν ἡλικία τοῦ συγκρητισμοῦ δέν ἔχει ἀποκτήσει ἀκόμη οὔτε τήν ἔννοια τοῦ ἀναλλοιώτου τῆς οὐσίας, δηλαδή τῆς μάζας καί τοῦ ὄγκου ἑνός σώματος, οὔτε τήν ἔννοια τῆς ὁριζόντιας στάθμης τῆς ἐλεύθερης ἐπιφανείας τῶν ὑγρῶν. Ὅταν μέσα στήν πραγματικότητα μεταβάλεται ἕνα ἀπό τά δεδομένα, ἔχει τήν παραίσθηση ὅτι σύγχρονα ἀλλάζει καί τό σύνολο. Όταν π.χ. αὔξησε τό ὕψος τῆς στάθμης τοῦ χρωματισμένου νεροῦ μέσα στό στενόμακρο ποτῆρι, αὔξησε καί ἡ ποσότητα τοῦ νεροῦ.

Αὐτό συνέβη γιατί τό παιδί στήν ἡλικία τοῦ συγκρητισμοῦ δέν εἶναι σέ θέση νά σκεφθεῖ, σύγχρονα μέ τήν αὔξηση τοῦ ὕψους, καί τήν ἐλάττωση τῆς διαμέτρου τοῦ ποτηριοῦ. Μόλις στά 11 μέ 12 χρόνια τῆς ἡλικίας τους τά παιδιά ἀρχίζουν νά ἀποκτοῦν ἀντικειμενική παράσταση καί ἀντίληψη τῶν πραγμάτων καί τῶν σχέσεών τους.

Κατά τό στάδιο τῆς πρώτης σχολικῆς ἡλικίας -τοῦ Δημοτικοῦ - ἡ ἀνάπτυξη τῆς παιδικῆς νοημοσύνης γίνεται κατά τρόπο ὁμαλό καί, μποροῦμε νά ποῦμε, ὁμοιόμορφο γιά ὅλα τά παιδιά.

Ἀπό τά 7 μέ 8 χρόνια τῆς ἡλικίας του ἀρχίζει τό παιδί νά ἀποκτᾶ τήν ἱκανότητα νά σκέπτεται λογικά μέ ἀνάλυση καί σύνθεση ἐπάνω στίς σχέσεις τῶν μερῶν τῶν ποσοτήτων μεταξύ τους καί πρός τό ὅλο καί, πλάϊ στήν ἀπόκτηση γνώσεων μέ τό μηχανικό τρόπο τοῦ ἐθισμοῦ, ἐμφανίζεται προοδευτικά ἡ νοητική λειτουργία τῶν λογικῶν πράξεων πού ὁ Piaget τίς ὀνομάζει Operations καί τίς ἀντιτάσσει στούς ἐθισμούς. Ἄς ξεκαθαρίσουμε ἀμέσως τίς δύο ἔννοιες:

Γιά τήν ἀπόκτηση ἑνός ἐθισμοῦ μεσολαβοῦν ἄμεσα οἱ αἰσθήσεις, χωρίς λογική ἀνάλυση καί σύνθεση, γιατί οἱ αἰσθήσεις ἐνεργοῦν πρός μία κατεύθυνση. Ὁ ἐθισμός ἐπεξεργάζεται γνώσεις πού δέν ἀντιστρέφονται. Ἄς πάρουμε γιά παράδειγμα τήν ἀλφαβητική σειρά τῶν γραμμάτων. Ἡ ἐκμάθησή της ἀποτελεῖ καθαρό ἐθισμό. Γιά νά μπορέσει τό παιδί νά τά ἐκφωνήσει ἀπό τό τέλος πρός τήν ἀρχή ἀπαιτεῖται νέος ἐθισμός, Γνωστικός ἐπίσης ἐθισμός εἶναι ἡ καθιερωμένη γραφή ἀπό τό ἀριστερά πρός τά δεξιά. Γραφή κατά τήν ἀντίθετη φορά ἀπαιτεῖ νέο ἐθισμό.

Τί εἶναι τώρα λογική πράξη (Operation) ; Θά ἀναφερθεῖ σέ ἕνα κλασσικό πείραμα τοῦ Piaget.

Παρουσιάζει σέ ἕνα παιδί ἕνα σύνολο ἀπό 20 - 30, δέν ἐνδιαφέρει ὁ ἀριθμός, ξύλινες χάνδρες, τίς περισσότερες σέ ἕνα χρῶμα π.χ. καστανές καί δύο μόνο λευκές. Ἄς ὀνομάσουμε Β τό σύνολον τῶν χανδρῶν, Α τό ὑποσύνολο τῶν καστανῶν καί Α΄ τῶν λευκῶν.

Τό παιδί τῆς ἡλικίας τοῦ συγκρητισμοῦ εἶναι ἀδύνατο νά σκεφθεῖ σύγχρονα ἀπάνω στό σύνολο Β καί στά δύο συμπληρωματικά ὑποσύνολα Α καί Α΄.

Στήν ἐρώτηση ἄν ὅλες οἱ χόνδρες εἶναι ξύλινες, ἀπαντᾶ σωστά. Στήν ἐρώτηση ποιές εἶναι περισσότερες οἱ καστανές ἤ οἱ ἄσπρες ἀπαντᾶ ἐπίσης σωστά. Στήν ἐρώτηση ὅμως ποιές εἶναι περισσότερες, οἱ ξύλινες ἤ οἱ καστανές, ἀπαντᾶ χωρίς δισταγμό καί ἐπιμένει: οἱ καστανές ! Στό ἴδιο λογικό σφάλμα πέφτει καί ὅταν ἐρωτηθεῖ πιό κομπολόι θά εἶναι μεγαλύτερο : μέ τίς ξύλινες χάνδρες ἤ μέ τίς καστανές ; ἀπαντᾶ καί πάλι, χωρίς δισταγμό: μέ τίς καστανές. Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό παιδί βλέποντας τίς καστανές χάνδρες πολύ περισσότερες ἀπό τίς δύο μόνο λευκές μένει προσηλωμένο στά δύο αὐτά ὑποσύνολα, χωρίς νά μπορεῖ νά σκεφθεῖ σύγχρονα σέ ὁλόκληρο τό σύνολο τῶν ξύλινων χανδρῶν. Τό ἴδιο πείραμα ἐπαναλαμβάνεται καί μέ ἄλλα ἀντικείμενα, π.χ. μέ λουλούδια δύο χρωμάτων. Τό συμπέρασμα εἶναι πάλι τό ἴδιο. Γύρω ὅμως στά 7 μέ 8 χρόνια τῆς ἡλικίας του τό παιδί ἀπαντᾶ σωστά σέ ὅλα τά ἐρωτήματα καί ξαίρει νά αἰτιολογεῖ τίς ἀπαντήσεις του.

Ἕνα παιδί 7 ἐτῶν καί 2 μηνῶν, τό ἴδιο πού δέν ἀπαντοῦσε σωστά πρίν άπό λίγο καιρό,ξαίρει τώρα νά άπαντᾶ άλάνθαστα:

- 'Ερ. Μήπως ὑπάρχουν σ'αὐτό τό κουτί περισσότερες χάνδρες στρογγυλές ἤ καστανές ;
- 'Απ. Περισσότερες καστανές. "Α ὄχι!(αὐθόρμητα):περισσότερες στρογγυλές,γιατί εἶναι καί δύο ἄσπρες.

Σωστή ἐπίσης ἀπάντηση καί στό κομπολόϊ.

Νά τό ἴδιο πείραμα σέ παιδί 8 ἐτῶν.

- 'Ερ. Ποιές εἶναι περισσότερες, οἱ ξύλινες χάνδρες ἤ οἱ καστανές ;
- 'Απ. Οἱ ξύλινες βέβαια.
- 'Ερ. Γιατί ;
- 'Απ. Γιατί οἱ δύο ἄσπρες εἶναι ἐπίσης ξύλινες.

Τό ἴδιο σωστή μέ βεβαιότητα ἡ ἀπάντηση γιά τό μῆκος τοῦ κομπολογιοῦ.

" Καθένα ἀπ' αὐτά τά παιδιά, παρατηρεῖ ὁ Piaget, κατορθώνει, ἤ σχεδόν, νά σκέπτεται συγχρόνως καί στό σύνολο ἀναφορᾶς Β πού χαρακτηρίζεται ἀπό τήν ποιότητα β (οὐσία ἤ σχῆμα) καί στά ὑποσύνολα Α καί Α΄ πού χαρακτηρίζονται ἀπό τίς ποιότητες α καί α΄ (χρῶμα), 'Απ' αὐτό προέρχεται καί ἡ ἑπόμενη διαπίστωση, ὅτι οἱ ξύλινες (ἤ οἱ στρογγυλές) χάνδρες Β περιέχουν ἐπίσης καί τίς δύο Α΄ πού ἔχουν τήν ποιοτική διαφορά α΄".

'Η μαθηματική σημασία τῆς ἱκανότητος τῶν παιδιῶν αὐτῶν νά ἀπαντοῦν σωστά στίς παραπάνω ἐρωτήσεις ἔγκειται στό ὅτι κατανοοῦν σ ύ γ χ ρ ο ν α καί ἀ λ λ η λ έ ν δ ε τ α τίς σχέσεις $B = A + A'$, $A = B - A'$ καί $A' = B - A$.

Τά παιδιά λοιπόν τῆς ἡλικίας τῶν 7 μέ 8 ἐτῶν εἶναι πιά

* 'Αναφέρεται ἀπό τόν L Johannot , σελ. 141 καί ἀπό τόν Piaget στό ἄρθρο του πού περιέχεται στόν τόμο"L' enseignement des mathematiques" (βλ. Βιβλιογραφία).

ὥριμα νά σκέπτωνται μέ λογικές πράξεις πού διαφέρουν ἀπό τόν ἐθισμό κατά τοῦτο,ὅτι εἶναι ἐπιδεκτικές ἀντιστροφῆς. Συμβαίνει κι'ἐδῶ τό ἴδιο μέ τά πειράματα πού προαναφέραμε γιά τή διατήρηση τῆς μάζας, τοῦ βάρους καί τοῦ ὄγκου καθώς καί τίς ἄλλες ἀναλλοίωτες, ὅπως ἡ ὁριζόντια ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τῶν ὑγρῶν, ἡ διεύθυνση τῆς βαρύτητα κ.τ.λ. "Μεταξύ τῶν 7 ἕως 11 ἐτῶν περίπου, λέγει ὁ Piaget,τό παιδί κατασκευάζει .... τή διατήρηση τῆς οὐσίας, τοῦ βάρους καί ἀκόμη τοῦ ὄγκου. Ἐπί πλέον βεβαιώνει τή διατήρηση αὐτή ἐνεξάρτητα ἀπό κάθε λεπτομερειακό ἐμπειρικό ἔλεγχο καί πιστεύει σ'αὐτήν σάν σέ ἀναγκαία ἤ ἐκ τῶν προτέρων (a priori) ἀλήθεια. Πῶς λοιπόν κατορθώνει νά νικήσει τελικά τά ἀντιληπτικά φαινόμενα γιά νά ἐπεξεργασθεῖ σχέσεις καθαρά λογικές ;

Τέτοιες γνώσεις προϋποθέτουν πραγματικά μία ὁλόκληρη ἀντιστρέψιμη κατασκευή ... ". Οἱ συλλογισμοί πού μεταχειρίζεται τό παιδί γιά νά δικαιολογήσει τό ἀμετάβλητο στίς φυσικές ποσότητες, δείχνουν πραγματικά ὅτι ἡ συνειδητοποίηση τῆς ἀντιστρεπτότητας τῶν λογικῶν πράξεων παίζει πρωταρχικό ρόλο στήν οἰκοδόμηση τῶν γνώσεων αὐτοῦ τοῦ εἴδους. " Μποροῦμε νά ξαναβροῦμε, λέγει ὁ Piaget, τήν ἀρχική μορφή, , νά ξαναφτιάξουμε τό ὅλο μέ τά μέρη του, νά ἐπανορθώσουμε κάθε ἀλλοίωση μέ ἕνα ἀντίστροφο μετασχηματισμό κ.τ.λ."*

Ἄς ξαναγυρίσουμε μέ λίγα ἀκόμη λόγια στήν περίπτωση τοῦ πειράματος μέ τίς χάνδρες :

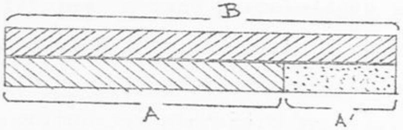
Τό παιδί στήν ἡλικία τῶν 8 ἐτῶν εἶναι σέ θέση νά ἀντιληφθεῖ σύγχρονα τίς λογικά ἰσοδύναμες σχέσεις:

$$B = A + A' \Longleftrightarrow A = B - A' \Longleftrightarrow A' = B - A$$

---

* Οἱ παραπάνω περικοπές ἀναφέρονται ἀπό τόν Aebli σ.54.

'Εδῶ ἡ ἀντιστροφή ἔχει πάρει μία σκεπασμένη μαθηματική μορφή πού σχηματικά μπορεῖ νά ἀποδοθεῖ μέ τό ἀκόλουθο διάγραμμα.



Στό στάδιο αὐτό τῆς παιδικῆς νοημοσύνης μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἐκεῖνο πού χαρακτηρίζει τήν ποιότητά της εἶναι ἡ ἱκανότητα νά συγκρατεῖ σέ ὁ μ ά δ α π ρ ο σ θ ε τ ι κ ή (μέ τή μαθηματική σημασία τοῦ ὅρου) τίς ἀντιστρέψιμες λογικές πράξεις πού ἔχει ἐσωτερικεύσει νοητικά, ἀφοῦ προηγουμένως τίς ἔχει ἐκτελέσει πραγματικά καί ἀντιληφθεῖ ἐνορατικά, δηλαδή σέ παραστατικές νοερές εἰκόνες καί μέ τή βοήθεια τοῦ λόγου. 'Η ἱκανότητα τοῦ παιδιοῦ στήν ἡλικία αὐτή νά συγκροτεῖ σέ ὁμάδες διάφορα σύνολα καί νά ξεχωρίζει λογικές σχέσεις ἀνάμεσα στά στοιχεῖα τούς ἀνεβάζει τή σκέψη σέ ἀνώτερο ποιοτικά ἐπίπεδο καί ὡριμάζει τό πνεῦμα του γιά μιά ἀληθινή μαθηματική ἄνοιξη. Δέν εἶναι, ἀλήθεια, δύσκολο νά διακρίνουμε στό πείραμα μέ τίς χάνδρες τίς ἰδιότητες τῆς ὁμάδας ἀπό τίς σχέσεις:

1) $A + A' = B$: Νόμος συνθέσεως

2) $A = B - A'$: 'Αντίστροφη πράξη

3) $(A+B) + \Gamma = A + (B+\Gamma)$: Προσεταιριστικότητα (Α,Β,Γ, χάνδρες μέ διάφορα χρώματα).

4) $A + 0 = 0 + A = A$ = Ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου πού προκύπτει ἀπό τή σύνθεση $A + (-A) = 0$

Δέν νομίζω ὅτι χρειάζεται νά προστεθεῖ ὅτι ἡ ὡρίμανση στό παιδί τῆς ἱκανότητας νά σκέπτεται μέ λογικές πράξεις (operations) δέν ἀποκλείει τόν ἀναντίστρεπτο ἐθισμό πού, πάντοτε, σέ ὁλόκληρη τή ζωή, εἶναι ἀπαραίτητος γιά τήν ἑδραίωση μέχρις αὐτοματισμοῦ τῶν γνώσεων πού προέρχονται εἴτε ἀπό λογικές ἐπεξεργασίες, εἴτε ἀπό ἀναντίστρεπτες ἐμπειρίες σχέσεων καί καταστάσεων.

Ἀλλά καιρός εἶναι, πρίν κλείσουμε τή σημερινή ὁμιλία μας νά σταθοῦμε γιά λίγο στά κύρια ψυχογενετικά χαρακτηριστικά τῆς ἡλικίας τῶν 13, 14 καί 15 ἐτῶν πού μᾶς ἐνδιαφέρουν στήν πρώτη γυμνασιακή βαθμίδα.

Στό κατώφλι τῆς εἰσόδου στή Μ. Ε. ἀρχίζει - νωρίτερα κάπως στά κορίτσια - τό στάδιο τῆς ἐφηβικῆς ἀνησυχίας πού διαρκεῖ 3 ἕως 4 χρόνια.

Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ ὡρίμανση τοῦ σώματος χαρακτηρίζεται ἀπό δύο σειρές φαινόμενα πού ὀφείλονται στίς λειτουργίες ἐνδοκρινῶν ἀδένων. Μία ἀπότομη αὔξηση τοῦ ἀναστήματος πού ἀκολουθεῖται ἀπό αὔξηση τοῦ βάρους -νωρίτερα πάντα στά κορίτσια - καί ἡ ἐμφάνιση τῶν δευτερογενῶν σεξουαλικῶν χαρακτήρων πού ἐκδηλώνονται μέ τήν ἐμμηνορροή στά κορίτσια, μέ τήν ἐκσπερμάτιση στ'ἀγόρια.

Οἱ ριζικοί αὐτοί φυσιολογικοί μετασχηματισμοί ἐπιδροῦν σέ ὁλόκληρο τόν ψυχισμό τοῦ παιδιοῦ καί οἱ προκαλούμενες διαταραχές εἶναι ποικίλες.

" Ἡ συναισθηματικότητα ἐντείνεται πάντοτε μέχρι παροξυσμοῦ μαζύ μέ τό ξύπνημα τῆς προσοχῆς πρός τό σῶμα.

" Ἐμφανίζεται ἡ αἰδημοσύνη, κυρίως στά κορίτσια. Περιέργειες καί σεξουαλικά παιγνίδια, αὐτοερωτισμός τοῦ νεανία, πού ζητᾶ μιά ἱκανοποίηση στό ἴδιο του τό σῶμα, νέοι πόθοι πού σπρώχνουν τό ἕνα πρός τό ἄλλο φῦλο, ὅλα σημάδια πού συνοδεύουν τό ξύπνημα τῆς σεξουαλικότητας στή γενετική μορφή"*

"Όλες αὐτές οἱ βιοψυχικές ἀναταραχές μεταφράζονται στό διανοητικό πεδίο μέ τήν ἀλλαγή καί τή μεταβλητότητα στά ἐνδιαφέροντα καί στίς ἰδέες, καθώς καί στή γεννώμενη διάθεση πρός συζήτηση. Ἡ ὀνειροπόληση στή σκέψη εἶναι χαρακτηριστικό τῆς διανοητικῆς ζωῆς τοῦ νεανία καί μπορεῖ κάποτε νά πάρει τήν ἐπικίνδυνη τροπή πρός τό ξυπνητό ὄνειρο, ὅπου ἡ ἀδυναμία προσαρμογῆς στή σχολική πραγματικότητα συνοδεύεται ἀπό ἐπικίνδυνη φυγή πρός φαντασιώσεις καί ὀνειροπάρματα.

Ἀκόμη καί στήν πιό ὁμαλή ἐξέλιξη τῆς ἐφηβείας τό παιδί, κατά τόν Wallon, νοιώθει ἕνα εἶδος ξερριζώματος ἀπό τόν ἑαυτό του, τό παρελθόν του, τίς συνήθειές του, τήν οἰκογένειά του. Αἰσθάνεται ὅτι γίνεται ἄλλος. Ἀμφιβάλλει ἄν ἄλλαξε αὐτός ὁ ἴδιος ἤ τό περιβάλλον του. Θά κατηγοροῦσε εὐχαρίστως τούς ἄλλους ἀλλά στό βάθος ἐπιθυμεῖ αὐτή τήν ἀλλαγή. Συγχρόνως ὅμως καί τή φοβᾶται. Ἀναγνωρίζει ὅτι ἔρχεται σέ ἀντιφάσεις μέ τόν ἑαυτόν του καί ἀνησυχεῖ. Γενικῶς τοῦ φαίνεται ὅτι ζεῖ σέ μία σφαῖρα μυστηρίου.

Σ'αὐτήν βρίσκει εὐχαρίστηση, ἀλλά ἀνάμικτη μέ φόβο. Θέτει ἐρωτήματα σχετικά μέ τόν ἑαυτό του, μέ τούς δικούς του, μέ τά μυστικά τῶν πραγμάτων. Τόν ἀπασχολεῖ τό πρόβλημα τῆς ὑπάρξεως τῶν πραγμάτων, τῆς καταγωγῆς τους.

". . . Ἡ ἐφηβεία εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ θρησκευτικοῦ ζήλου τῶν μεταφυσικῶν καί συναισθηματικῶν ἐνθουσιασμῶν. Συνοδεύεται ἀπό τήν ἀναζήτηση τοῦ ἰδεώδους ὄντος, ὅπου ὁ ἔφηβος θά βρεῖ τό συμπλήρωμα τοῦ ἑαυτοῦ του, φανταστικό ἤ πραγματικό, προικισμένο πάντως μέ προσόντα καί θέλγητρα ποθητά.

---

* M. Debesse: Les etapes de l'education (σελ. 111) PressesUniversitaires- Paris.

" Όλες αὐτές οἱ συναισθηματικές μεταπτώσεις καί διαχύσεις μεταμορφώνουν βαθιά τήν προσωπικότητα τοῦ παιδιοῦ καί τή διάνοιά του. Προσθέτουν μιά νέα διάσταση στή ψυχογένεσή του. Θέτουν τό ἐρώτημα τοῦ προορισμοῦ καί τῶν εὐθυνῶν, καλοῦν τό παιδί νά σκεφθεῖ γιά τήν αἰτία καί τήν ἀξία τοῦ περιβάλλοντός του.

". . . Στή νεανική αὐτή ἡλικία δέν μένει ἄλλο ἀπό τό νά ἐξασφαλίσει τήν ἰσορροπία ἀνάμεσα στίς ἀκόμα διάχυτες ψυχικές δυνατότητες, ἀπό τό ἕνα μέρος, καί στίς αὐριανές πραγματικότητες ἀπό τό ἄλλο. Χρειάζεται ἀκόμα πρόοδος στή διαμόρφωση τοῦ χαρακτῆρα καί στίς πνευματικές ἱκανότητες".

Κατά τήν περίοδο αὐτή τῆς ἐφηβείας ἐξακολουθεῖ νά ἀναπτύσσεται, μέ ἀργό κάπως ρυθμό, ποσοτικά ἡ νυημοσύνη τοῦ παιδιοῦ, ἀντίθετα πρός ὅσα ὑποστηρίζουν μερικοί ψυχολόγοι* ὅτι δηλαδή ἡ ποσοτική αὔξηση τῆς νοημοσύνης σταματᾶ μέ πλήρη ὡρίμανση στά 11 μέ 12 χρόνια τῆς ἡλικίας , στό κατώφλι δηλαδή τῆς ἐφηβείας. Ἡ γενετική ψυχολογία ἀποδεικνύει ὅτι ἐκεῖνο πού σταματᾶ στό κατώφλι τῆς ἐφηβείας εἶναι ἡ ὁμοιομορφία στήν ποσοτική αὔξηση τῆς νοημοσύνης πού μετριέται μέ τά τέστ πού καθιέρωσαν γιά πρώτη φορά, στίς ἀρχές τοῦ αἰώνα μας, οἱ γάλλοι ψυχολόγοι Binet-Simon . Πέρα ἀπό τά 12 χρόνια τά τέστ αὐτά δέν ἔχουν πιά ἐφαρμογή. Κι'αὐτό ἀκριβῶς ἔγινε ἀφορμή νά νομισθεῖ ἀπό τούς παλαιούς ψυχολόγους ὅτι σταμάτησε ἡ ἀνάπτυξη τῆς νοημοσύνης. Εἶναι σάν νά ὑποστηρίζομε ὅτι,ἐπειδή τάχα ἕνα ὄργανο μετρήσεως δέν παρέχει ἐνδείξεις αὐξήσεως τοῦ μετρούμενου ποσοῦ, τό ποσό ἔπαυσε νά αὐξάνει. Τό ἐναντίο συμβαίνει στήν προκείμενη περίπτωση: τά ὄργανο δηλαδή πού πρίν μετροῦσε μιά, λίγο πο-

---

* Βλέπε σχετική μελέτη μου στό περιοδικό "Παιδεία καί Ζωή" , τεῦχος 20 - 21 Σεμ/ριος 1953.

λύ ὁμοιόμορφη αὔξηση τῆς νοημοσύνης, εἶναι τώρα ἀκατάλληλο νά μετρήσει μιά νοημοσύνη πού αὐξάνει ὄχι μόνο ποσοτικά, ἀλλά πρό πάντων ποιοτικά.

Μιά νέα λοιπόν νοημοσύνη ἀρχίζει νά ἀναπτύσσεται μέ τήν ἐφηβεία πού ποιοτικά διαφοροποιεῖ τούς ἐφήβους μεταξύ τους. Τό εἶδος αὐτό τῆς νοημοσύνης ὁ Wallin τό ἔχει ὀνομάσει ποιοτική νοημοσύνη καί γιά τή μέτρησή της χρειάζονται εἰδικά τέστ.

Κατά τήν περίοδο τῆς ἐφηβείας, καί ἀκόμη πιό πέρα, ὥς καί τά 18 χρόνια τῆς ἡλικίας, διαμορφώνεται ἡ ψυχοπνευματική προσωπικότητα τοῦ ἀτόμου, ἐκδηλώνονται καί προσανατολίζονται (γύρω στά 15 χρόνια) οἱ κλίσεις καί τά ἐνδιαφέροντά καί ἀποκρυσταλλώνεται ὁ συγκεκριμένος καί ὁριστικός ἀντιληπτικός τύπος του.

Κατά τόν Wallon "Οἱ σχέσεις τῶν πραγμάτων ἐμφανίζονται τώρα κάτω ἀπό διάφορες ὄψεις καί μορφές πού εἶναι, ἄλλες λιγότερο καί ἄλλες περισσότερο, προσιτές στά διάφορα ἄτομα, σύμφωνα μέ τίς ἰδιαίτερες ἱκανότητές του. Μερικοί δέν κατορθώνουν νά φθάσουν ποτέ σέ ὁρισμένο παραστατικό εἶδος. Ὁ Descart εἶχε ὀρθά παρατηρήσει ὅτι ἐκεῖνο πού διαφορίζει τούς ἀνθρώπους μεταξύ τους εἶναι τά μέσα τῆς ἐκφράσεως, τά διάφορα συστήματα συμβολισμοῦ.

" "Ἄλλοι εἶναι ἱκανοί νά μεταχειρίζονται τίς λέξεις μέ μεγάλη παραστατική ἰσχύ καί δύναμη τοῦ συλλογισμοῦ. "Ἄλλοι εἶναι ἀνίκανοι, ἀλλά, ἀντίθετα, μπροστά στίς ἀλγεβρικές παραστάσεις ἤ τά γεωμετρικά σχήματα ἔχουν μία ξεχωριστή νοητική ἱκανότητα πού λείπει σέ ἄλλα ἄτομα. Ὑπάρχουν μαθηματικοί ἱκανοί νά παίζουν μέ τούς μαθηματικούς τύπους στό νοητικό χῶρο, ἀλλά πού δέν ἔχουν ἀναπτυγμένη στόν ἴδιο βαθμό τήν ἱκανότητα νά συλλαμβάνουν τά πράγματα σέ μορφή μηχανική. 'Υπάρχει μία ὁλόκληρη σειρά ἀπό διάφορες νοητικές διαλέκτους πού ξεχωρίζουν τά ἄτομα ἀνάμεσά τους καί πού πρέπει νά μποροῦμε νά τίς ἀνισχνεύσουμε καί νά τίς καλλιεργήσουμε σέ κάθε ἄτομο κατά τήν περιόδο τῆς ἐφηβείας".

Νά λοιπόν γιατί ἡ πρώτη γυμνασιακή βαθμίδα ὀνομάζεται σήμερα κ ύ κ λ ο ς σ χ ο λ ι κ ο ῦ κ α ί ἐ π α γ γ ε λ μ α τ ι κ ο ῦ π ρ ο σ α ν α τ ο λ ι σ μ ο ῦ.

'Η πρόοδος τῶν λογικῶν πράξεων (operations) πού ὁδηγοῦν στά διάφορα ἐκφρασικό μέσα τῶν νοητῶν σχέσεων μεταξύ τῶν πραγμάτων, κατά τήν περίοδο αὐτή, πρέπει νά εἶναι ἡ βάση τῆς διδασκαλίας παράλληλα μέ τή ψυχολογική ἔρευνα πού φωτίζει τούς δρόμους της. Πρέπει νά μεταχειριζόμαστε τό λεκτικό τρόπο, ἀλλά ἐπίσης καί τό γραφικο, τό μαθηματικό συμβολισμό, τούς καλλιτεχνικούς πίνακες καί τά στατιστικά διαγράμματα, γιά νά εἴμαστε βέβαιοι ὅτι ἀγγίζομε ὅλες τίς κατηγορίες τῶν νοητικῶν δυνατοτήτων τῆς μαθητικῆς προσαρμογῆς).

Μέ μόνο τό λεκτικό τρόπο δέν μποροῦμε νά ἀνακαλύφουμε καί νά ἀναπτύξουμε ὅλα ὅσα ἀνήκουν στό ἀνθρώπινο βάθος καί πού βρίσκονται ἄνισα μοιρασμένα στά διάφορα παιδιά σέ λομνθάνουσα κατάσταση.

Οἱ διάφορες σέ ποικιλία νοητικές ἱκανότητες πού χαρακτηρίζουν ποιοτικά τό εἶδος τῆς νοημοσύνης στό κάθε παιδί εἶναι καλλιεργήσιμες καί ἐξελίξιμες.

Μποροῦν μέ τή βοήθειά μας νά περάσουν ἀπό τή λανθάνουσα στήν ἐνεργητική μορφή.

Καί ἄν ἀκόμη δεχθοῦμε ὅτι ὅλα τά παιδιά δέν εἶναι ἱκανά νά πᾶνε μακρυά στήν πλατιά λεωφόρο τῶν μαθηματικῶν, γιά ὅλα ὅμως τά παιδιά εἶναι δυνατή καί ἀπαραίτητη μία μαθηματική ἀγωγή πού θά τούς ἐπιτρέψει νά πραγματοποιήσουν στή ζωή τόν καλύτερο ἑαυτό τους καί νά ἀξιοποιήσουν μέ τό γονιμότερο τρόπο τό τάλαντο πού τούς προίκισε ἡ φύση.

Στίς δύο ἑπόμενες διαλέξεις θά ἐξετάσουμε εἰδικότερα πῶς λειτουργεῖ ἡ μαθηματική σκέψη στόν ἔφηβο καί τή διδακτική τῶν μαθηματικῶν σύμφωνα μέ τή γενετική ψυχολογία.

II. Ἡ μαθηματική σκέψη τοῦ Ἐφήβου.

Τό ἔργο τοῦ Jean Piaget εἶναι ἔργο καθαρῶς ψυχολογικῆς ἔρευνας. Ὁ ἴδιος δέν ἀσχολήθηκε μέ τή διδασκαλία γιά νά ἐφαρμόσει καί νά δοκιμάσει στήν πράξη τά πορίσματα τῶν ἐρευνῶν του.

Μέ τό γερό ὅμως ἐπιστημονικό ὁπλισμό του ἀπό φυσικές ἐπιστῆμες καί μαθηματικά κατόρθωσε νά κατευθύνει τά πειράματά του κατά τρόπο ἐξαιρετικά διαφωτιστικό σέ ὅτι ἀφορᾶ τίς ψυχικές λειτουργίες σχετικά μέ τά μαθηματικά.

Πρῶτος ὁ μαθητής του Louis Johannot στά 1947, ὕστερα ἀπό συστηματικές πειραματικές ἔρευνες, σύμφωνα μέ τίς ἀρχές τῆς γενετικῆς ψυχολογίας, κατάληξε σέ σαφῆ συμπεράσματα σχετικά μέ τή μαθηματική σκέψη τοῦ ἐφήβου (ἀπό 13 ἕως 18 ἐτῶν) καί ἔγραψε τό περίφημο βιβλίο του "Ἡ μαθηματική Σκέψη τοῦ Ἐφήβου"*, προλογιζόμενο ἀπό τόν ἴδιο τόν Piaget. Γιά τό βιβλίο αὐτό γύνεται είδική μνεία στήν ἔκθεση τῶν ἄγγλων ἐρευνητῶν Wall καί Bigs, στήν πρώτη μας διάλεξη.

Ἡ ἐξέταση τοῦ ἔργου τοῦ Johannot εἶναι τό ἀντικείμενο τῆς σημερινῆς ὁμιλίας μας.

Εἴδαμε στήν προηγούμενη διάλεξή μας πόσο δύσκολη καί ταραγμένη εἶναι ἡ ψυχογένεση κατά τήν περίοδο τῆς ἐφηβείας. Ἄν τό παιδί τῆς πρώτης σχολικῆς ἡλικίας προσφέρεται ἀνοι-

---

*Louis Johannot. Le raisonnemant mathematique de l'addescent (entre 13 et 18 ans). Delachaux et Niestle - Paris.

κτά καί πρόθυμα στόν πειραματισμό, ὁ ἔφηβος, μέ τήν ψυχική ἀναταραχή πού μόνιμα τόν κατέχει, πολύ δύσκολα προσφέρεται στή ψυχολογική ἔρευνα.

Μία συζήτηση τοῦ ψυχολόγου μέ τόν ἔφηβο εἶναι πολύ δύσκολη, ὅταν πρόκειται γιά τίς ἐνδόμυχες σκέψεις του, γιατί κινδυνεύει, ὅπως ὁμολογεῖ ὁ ἴδιος ὁ Piaget στόν πρόλογό του, νά ἐπηρεάσει τίς ἀπαντήσεις του ἤ νά ἐξαπατηθεῖ ὁ ἴδιος ἀπό τόν ἐρωτώμενο.

Ἡ μέθοδος πού ἐφάρμοσε ὁ Johannot πολύ λίγο διαφέρει ἀπό ὅτι μία κοινή προφορική ἐξέταση τοῦ μαθητῆ πάνω σ'ἕνα συγκεκριμένο μαθηματικό πρόβλημα. Ἡ ἀνάλυση τῶν ἀπαντήσεων καί ἡ ἐξαγωγή τῶν συμπερασμάτων προβάλλει μέ ἀσφάλεια ἀπό τήν ἐπανάληψη τοῦ πειράματος, μεμονωμένα, σέ πολλά ἄτομα. Ἡ ἐργασία εἶναι πολύ λεπτή καί χρειάζονται ἡ ἐμπειρία καί ἡ γνώση ἑνός παιδαγωγοῦ, σύγχρονα ψυχολόγου καί μαθηματικοῦ, ὅπως ὁ Johannot γιά νά φθάσει σέ θετικά ἀποτελέσματα.

Πρίν μποῦμε στό καθαυτό ἔργο τοῦ Johannot κρίνομε σκόπιμο νά ἀναφέρουμε περιληπτικά τά συγκεκριμένα συμπεράσματα, στά ὁποῖα κατάληξαν καί ἄλλοι νεότεροι ἐρευνητές, ψυχολόγοι καί μαθηματικοί, ὅπως τά συγκεφαλαιώνει ὁ ἴδιος ὁ Johannot :

" 1ον Ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στή Μέση ἐκπαίδευση δέν πρέπει νά εἶναι καθαρά τυπική καί λογική (ὅτι λέμε δηλαδή θεωρητική)

2ον Δέν πρέπει ἐντούτοις νά εἶναι καθαρά ἐνορατική.

3ον Πρέπει νά βοηθήσουμε τό μαθητή νά ἀποκτήσει μερικούς αὐτοματισμούς ἀπαραίτητους στή λύση τῶν τρεχόντων προβλημάτων.

4ον Οἱ δυσκολίες στήν ἀριθμητική καί στήν ἄλγεβρα ὀφείλονται σέ αἴτια ἐξωλογικά, ὅπως ἡ ὀκνηρία ἤ ἡ δυσκολία τῆς ἐκφράσεως.

Γιά νά ἐξηγήσουμε τούς λόγους τῶν δυσκολιῶν αὐτῶν, συνεχίζει ὁ Johannot , πρέπει νά ξεκινήσουμε ἀπό τό παιδί:νά μελετήσουμε τόν τρόπο πού σκέπτεται καί τίς μεθόδους λύσεως πού ἐφαρμόζει. Νά δώσουμε μία ἐπιστημονική ἀπάντηση στό τόσο ἀντιλεγόμενο ζήτημα, πότε καί πῶς πρέπει νά διδαχθεῖ ἡ ἀριθμητική καί ἡ ἄλγεβρα ".

Εἴπαμε ὅτι ἡ μέθοδος πού ἀκολούθησε ὁ Johannot εἶναι μέθοδος προφορικῆς ἐξετάσεως πάνω σέ συγκεκριμένα προβλήματα πού ἡ λύση τους μπορεῖ νά δοθεῖ εἴτε μέ πρακτική προσφυγή σέ συγκεκριμένες ποσότητες, εἴτε μέ τήν ἀριθμητική καί τήν ἄλγεβρα, εἴτε ἀμέσως νοερά.

Γιά νά διαλέξει τά προβλήματα αὐτά χρειάστηκε προηγουμένως νά κάμει ἕνα γραπτό τέστ σέ 800 μαθήτριες ἑνός σχολείου, καί στίς ἕξη τάξεις του, μέ ἐπί πλέον προβλήματα γιά τίς ἀνώτερες τάξεις. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἐξασφάλισε ἕνα σίγουρο προσανατολισμό πρός τή λύση τῶν προβλημάτων τοῦ προφορικοῦ πειράματός του.

Τό πρῶτο πρόβλημα, τόσο ἁπλό στή μορφή, ὅσο καί σύνθετο στήν ποικιλία τῶν ἀντιδράσεων πού μπορεῖ νά προκαλέσει στή μαθηματική σκέψη, ὁ συγγραφέας τό ὀνομάζει πρόβλημα τῶν 23 φράγκων " Ἰδού το :

" "Ας ὑποθέσουμε ὅτι καί οἱ δύο μας ἔχομε τήν ἴδια ποσότητα χρημάτων. "Εχετε ἕνα σωρό ἀπό χρήματα μπροστά σας καί ἕνα σωρό ἐγώ,ἀκριβῶς τά ἴδια. Ἐάν πάρω 23 φράγκα ἀπό τά δικά μου καί σᾶς τά δώσω,πόσα, τή στιγμή αὐτή,θά ἔχετε περισσότερα ἀπό ἐμένα;".

Τό πρόβλημα αὐτό, ἀπό λογική πλευρά, ἔχει μία μόνο δυσκολία. Ἡ λύσις προβάλλει ἀμέσως ἀπό τή στιγμή πού γίνεται σύγχρονη θεώρηση τῆς ἐλαττώσεως τοῦ ἑνός ποσοῦ καί τῆς αὐξήσεως τοῦ ἄλλου. Θά μποροῦσε λοιπόν νά νομισθεῖ ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι δύο τύποι ἀπαντήσεων εἶναι δυνατοί: ἐκεῖνες πού προέρχονται ἀπό τή θεώρηση μόνης τῆς αὐξήσεως ἤ μόνης τῆς ἐλαττώσεως καί εἶναι 23 φράγκα καί ἐκεῖνες πού προέρχονται ἀπό τή σύγχρονη θεώρηση τῶν δύο μεταβολῶν καί εἶναι 46 φράγκα. Ἐκεῖνο ὅμως πού ἐνδιαφέρει εἶναι πρῶτα πρῶτα ἡ ὡριμότητα τοῦ παιδιοῦ νά συλλάβει τό πρόβλημα στήν ἀφηρημένη μορφή πού ἔχει τεθεῖ παρά πάνω.

Θά ἦταν ἐντελῶς διαφορετικό,ἄν τό πρόβλημα τῶν 23 φράγκων τό παρουσιάζαμε κατά τρόπο συγκεκριμένο. Νά θέσουμε π.χ. μπροστά στό παιδί ἕνα κουτί σπίρτα καί ἄλλο ἕνα μπροστά μας Νά τά συγκεντρώσουμε σέ δύο σωρούς καί σέ συνέχεια νά δώσουμε 23 σπίρτα ἀπό τά δικά μας στό παιδί.

Θά δοῦμε ὅτι ἐνῷ στή δομή του καί μέ τίς δύο διατυπώσεις τό πρόβλημα εἶναι οὐσιαστικά τό ἴδιο, ἡ λύση του ἐντούτοις στή δεύτερη μορφή - τή συγκεκριμένη - εἶναι ἀπείρως εὐκολότερη ἀπό τήν πρώτη.

Τελικά ὁ συγγραφέας ταξινομεῖ τίς ἀπαντήσεις σέ τέσσερες τύπους πού ἀποτελεοῦν τά στάδια τῆς γενετικῆς ἀναπτύξεως τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

Ἡ λέξη στάδια χρησιμοποιεῖται ἐδῶ μέ τήν ἔννοια ὅτι μία νοητική στάθμη προέρχεται ἀπό ἀποκτημένες προηγούμενες πού ἀποτελοῦν ἀπαραίτητο ὑπόβαθρο γιά τή νέα.

Τά στάδια αὐτά εἶναι τά ἀκόλουθα καί θά τά ἐξετάσουμε κατά σειρά :

1ον στάδιο: Λύση τοῦ προβλήματος στό συγκεκριμένο πεδίο.
2ον στάδιο: Λύση στό πεδίο τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

3ο στάδιο: Λύση στό τυπικό ἀριθμητικό πεδίο.

4ο στάδιο: Λύση στό τυπικό ἀλγεβρικό πεδίο.

Ἄς ἐξετάσουμε τά στάδια αὐτά μέ κάθε δυνατή συντομία τονίζοντας τά κύρια γενετικά χαρακτηριστικά τους.

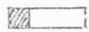
Γιά τό καθένα ὁ συγγραφέας παραθέτει σειρά ἀπό πρωτόκολλα τοῦ πειραματισμοῦ πού κάμνουν ἐντελῶς σαφῆ καί βέβαια τά συμπεράσματα.

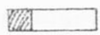
Εἶναι φυσικό νά ἀρχίσουμε ἀπό τό πρῶτο στάδιο:

Οἱ ἐρωτήσεις ἀπευθύνονται σέ ἕνα ἀγόρι 13 ἐτῶν καί 7 μηνῶν :

Στήν ἀφηρημένη ἐρώτηση, ὅπως ἔχει τεθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικά, ἡ ἀπάντηση εἶναι 23 φράγκα.

Παρουσιάζει τό πρόβλημα πιό συγκεκριμένο σέ γραφική παράσταση, ὅπως φαίνεται παρακάτω:

ἔχω 23 περισσότ.  ἐσεῖς

ἔχω αὐτά περισσ.  ἐγώ

τί μοῦ ἀπομένουν;

(Δείχνει στό σχῆμα σωστά τό λευκό μέρος) Ἔχετε 23 λιγότερα καί ἐγώ 23 περισσότερα, 23 !

Καί πόσα ἔχετε περισσότερα ἀπό ὅσα μοῦ μένουν ;
(Θέτω τρία σπίρτα μπροστά μου, τρία μπροστά του)

| | |　　　　| | |

Ἐάν σοῦ δώσω ἕνα σπίρτο ;

Θά ἔχω ἕνα περισσότερο, ὄχι 4–2 = 2 , ἔχω λοιπόν δύο περισσότερα.

Ἐάν σοῦ σώσω δύο ;
(Τό ἐκτελῶ)

|　　　　| | | | |

πόσα θά ἔχεις περισσότερα

ἀπό μένα ;

5,ὄχι,4.

Θέτω 5 σπίρτα μπροστά ἀπό καθένα μας

| | | | |

| | | | |

Ἄν σοῦ ἔδινα 2, θά εἶχες:

2 περισσότερα ἀπό σᾶς.

Πῶς τό βρῆκες; Ἄς δοκιμάσουμε:

7 - 5 = 2

| | |

| | | | | | |

Ὄχι εἶναι 4 παραπάνω δέν σκέφθηκα ὅτι σᾶς λεῖψαν 2

Ἐάν ἔχουμε καί οἱ δύο ἀπό 100 γράγκα καί σοῦ δώσω 5, πόσα θά ἔχεις περισσότερα ἀπό μένα ;

5 φράγκα , 105 - 100,
Ὄχι 10 φρ. γιατί ἐσεῖς δέν θά ἔχετε πιά τά 5 φρ. πού μού δώσατε, ἐνῶ ἐγώ τά ἔχω ἐπί πλέον τῶν 100.

Ἄς γυρίσουμε στό πρόβλημα μας (δείχνει σωστά τό περισσότερο στό σχῆμα)

Κάμνουν 46, γιατί ἔχω τό ποσόν μου καί 23 παραπάνω

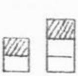
Θά προσθέσουμε ἄλλο ἕνα ἐρωτηματολόγιο ἀναφερόμενο σέ κορίτσι.

Τίθεται τό πρόβλημα.
Πόσα ἔχετε περισσότερα ἀπό μένα ;

23 φράγκα.

Ξαίρετε νά κάμετε ἕνα σχέδιο ;

ἐγώ ἐσεῖς

Πρόσξετε,  }α)

τό α) Ἔχει ἐνδιαφέρον ;

Ὄχι , αὐτό δέν ἐνδιαφέρει

Ἔχομε μία ζυγαριά μέ κάποιο ἀριθμό κιλά, τόν ἴδιο καί ἀπό τά δύο μέρη. Ἐάν ἀφαιρέσω ἕνα κιλό ἀπό τό ἀριστερό μέρος καί τό θέσω στό ἄλλο, πόσα κιλά πρέπει νά προσθέσω στό ἀριστερό μέρος γιά νά ξαναφέρω τήν ἰσορροπία ; — Ἕνα κιλό.

(ἀκολουθεῖ σχεδιάγραμμα)

Θέτω 4 σπίρτα μπροστά σας καί τέσσερα μπροστά μου. Ἐάν σᾶς

| | | | | | | |

δώσω ἕνα , πόσα θάχετε περισσότερα ἀπό μένα ; — Ἕνα.

Ἐκτελῶ τή μεταβολή

| | | | | | | |

Ἄ ! δύο.

Ὡραῖα! καί ἄν ἕνα σπίρτο ἀντιπροσωπεύει 23 φράγκα, πόσα φρ. θά ἔχετε περισσότερα ἀπό μένα ; — 23.

4 σπίρτα πόσα φράγκα ἀντιπροσωπεύουν ; — 92.

θά ἔχετε ; — 92 + 23 = 115.

Καί ἐγώ ; — 92 - 23 = 69.

Πόσα θάχετε περισσότερα ἀπό μένα ; — 115-69 = 46 , περίεργο !

Προσέξτε τώρα τό σχεδιο. — Ἄ! τότε τό α) ἔχει σημασία.

Θά ἔχετε ἤδη παρατηρήσει ὅτι τό δεύτερο ἐρωτηματολόγιο διαφέρει ἀπό τό πρῶτο στίς λεπτομέρειες, ὅπως διαφέρουν καί ὅλα τά ἄλλα, ὥστε νά μή ὑπάρχουν δύο ἀπολύτως ὅμοια μεταξύ τους. Στήν οὐσία τους ὅμως, ἀπό ἄποψη νοητικῆς μορφῆς εἶναι ἰσοδύναμα. Ἡ ἀλλαγή γίνεται ἐπίτηδες, γιατί τό πανομοιότυπο ἐρωτηματολόγιο εἶναι δυνατό νά ὁδηγήσει σέ πανομοιότυπα σφάλματα πού νά ὀφείλωνται ἐνδεχομένως ὄχι σέ μιά ὁρισμένη στάθμη τῆς ἐξελίξεως τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, ἀλλά σέ μιά φραστική παρανόηση ἤ σέ ὁποιοδήποτε ἄλλο ἐξωλογικό αἴτιο.

Οἱ δύο παραπάνω περιπτώσεις ἀντιστοιχοῦν στή χαμηλότερη στάθμη πού μπορεῖ κανείς νά συναντήσει στήν ἐξέλιξη τῆς μαθηματικῆς σκέψεως ἑνός παιδιοῦ 13 - 14 ἐτῶν. Πραγματικά ἡ ὀρθή λύση στό πεδίο τῶν συγκεκριμένων πράξεων, ὄχι μόνον δέν πετυχαίνεται, ἀλλά,ἀκόμη καί σ'αὐτό τό πεδίο τῆς ἄμεσης πραγματικότητας,ἡ πρόβλεψη εἶναι ἐσφαλμένη καί τροποποιεῖται μόνο μπροστά στά διαφορετικά, ἀλλά ὀρθά ἀποτελέσματα. Καί τελικά, ἀφοῦ δέν εἶναι σέ θέση νά καταλάβει αἰτιολογικά τό ἀποτέλεσμα, ἀδυνατεῖ νά τό γενικεύσει. Ἐάν τό παιδί, στή συγκεκριμένη περίπτωση , βλέπει 5 σπίρτα μπροστά του καί ἄλλα 5 μπροστά μου καί μετά ἀπό λίγο βλέπει τά δικά του νά γίνονται 7 καί τά δικά μου νά μένουν 3 εἶναι ὑποχρεωμένο ἀπό τά πραγματα νά πεῖ ὅτι ἔχει 4 περισσότερα, ἀλλά τοῦ εἶναι ἀδύνατο νά ἐξηγήσει ὅτι τά τέσσερα αὐτά σπίρτα προέρχονται ἀπό μιά διπλῆ διαφορά 2 σπίρτων σέ σχέση μέ τούς ἀρχικούς ἀριθμούς.

Ἡ ἀναγκαία πρόοδος τοῦ συλλογισμοῦ πού θά ἐπιτρέψει τή γενίκευση φαίνεται στόν πρῶτο πειραματισμό,ὅταν τό ἀγόρι τῶν 13 ἐτῶν καί 7 μηνῶν λέγει, ὕστερα ἀπό σκέψη: ""Οχι 10 φραγ.,γιατί ἐσεῖς δέν ἔχετε πιά τά 5 καί ἐγώ τά ἔχω παραπάνω ἀπό τά 100, καί στό δεύτερο πειραματισμό, ὅταν ἡ μαθήτρια ἀναγνωρίζει ὅτι τό σύμβολο α), δηλαδή "τά δικά σας 23 φρ. λιγότερα", ἔχει σημασία.

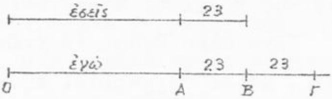
Ἀκολουθοῦν καί ἄλλοι πειραματισμοί, ὅπου φαίνεται προοδευτικά ἡ ἐξέλιξη στή μαθηματική σκέψη τοῦ ἐφήβου καί τό προοδευτικό πλησιάσμα πρός τό δεύτερο στάδιο, ὅπου προβάλλει ἡ λύση στό πεδίο τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Πείραμα σέ ἀγόρι 15 ἐτῶν:

23 περισσότερα.

Τό ἴδιο πρόβλημα μέ σπίρτα. Τό λύει ἀμέσως.

Μπορεῖτε νά κάμετε ἕνα σχέδιο ;



Τί ἔχεις παραπάνω ; Δείχνει ΒΓ

Τί μοῦ μένει, είχνει σωστά

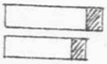
'Εσᾶς περισσότερο ; Δείχνει τελικά ΑΓ.

"Οπως θά μποροῦσε νά περιμένει κανείς , στήν ἡλικία αὐτή, ἡ λύση στό τυπικό ἀριθμητικό στάδιο (III) εἶναι σφαλμένη, ἀφοῦ ὁ μαθητής ἀπαντᾶ ἀμέσως 23. 'Απεναντίας στό πρακτικό στάδιο, μέ τά σπίρτα, ἀπαντᾶ ἀμέσως μέ μεγάλη εὐκολία." Στό στάδιο ὅμως τῆς γραφικῆς παραστάσεως δυσκολεύεται στήν ἀρχή, γιατί σκέπτεται μόνο τή δικιά του αὔξηση ΒΓ. Μόλις ὅμως τοῦ ὑποδειχθῆ ἡ ἄλλη ἐλάττωση ἀμέσως προβάλλει τή σωστή ἀπάντηση ΑΓ. Τό παιδί μεταβαίνει ἀπό τό ἄθροισμα ΟΒ + ΒΓ πού τό παρασύρει στήν ἐσφαλμένη ἀπάντηση ΒΓ ,δηλ. 23, στή διαφορά ΟΓ - ΟΑ = ΑΓ, δηλ. 46.

"Ενα κοριτσάκι τῆς ἴδιας ἡλικίας στήν πρώτη γραφική παράσταση πού σχεδιάζει μόνο του

'Εσεῖς 'Εγώ

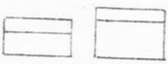
Δείχνει τό δικό του μαῦρο τετράγωνο καί ἀπαντᾶ 23. Ὕστερα ὅμως ἀπό ἕνα δεύτερο σχεδίασμα καμωμένο ἀπό τόν ἐξεταστή ἀπαντᾶ ἀμέσως: " "Α! ἔχω 46 περισσότερα. "Εχετε 23 λιγό-



τερα καί ἐγώ 23 περισσότερα· ἔχω λοιπόν περισσότερα δύο φορές 23. Δέν τό εἶχα σκεφθεῖ ".

Στήν περίπτωση αὐτή προβάλλει ἀκόμη καθαρότερα ἡ ἱκανότητα τοῦ παιδιοῦ, μέ λίγη μόνο βοήθεια τοῦ καθηγητῆ νά κατανοήσει τή λύση τοῦ προβλήματος στό δεύτερο στάδιο, δηλαδή τῆς γραφικῆς παραστάσεως.

Ἕνα ἄλλο ἀγόρι 14 ἐτῶν καί 3 μηνῶν, ἐνῶ ἀρχικά ἀπαντᾶ 23 , μόλις ἀντικρίσει τή γραφική παράσταση ἀπαντᾶ ἀμέσως: " Ὄχι δέν ἔχω μόνο 23 φρ. περισσότερα, ἀλλά διπλάσια, 46 φραγ. περισσότερα.



Στήν ἐρώτηση: Τί εἶχε ξεχάσει, ἀπαντᾶ: ἐσεῖς χάνετε ἐνῶ ἐγώ αὐξάνω.

Στό δεύτερο αὐτό στάδιο ἀναπτύξεως τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, ἡ ἀντίληψη πού σχηματίζεται μέ τή γραφική παράσταση χρησιμεύει σάν ὑποστήριγμα στή λογική οἰκοδόμηση πού δέ μπορεῖ ἀκόμα νά πραγματοποιηθεῖ χωρίς τή βοήθεια τῆς ὁράσεως· τό σχέδιο ὅμως ἀποτελεῖ κατά κάποιοτρόπο τή μετάφραση τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος σέ μιά σχηματική γλῶσσα πιό ἐνορατική πού εὐκολύνει τή λύση.

Τό παιδί σχεδιάζει, ὅπως ὁ μαθηματικός καταστρώνει ἐξισώσεις. Στό δεύτερο αὐτό στάδιο τό παιδί καταβάλλει λιγότερη προσπάθεια ἀπό ὅση στό πρῶτο γιά τή γενίκευση τῆς λύσεως.

Ἄς σημειωθεῖ ἀκόμη ὅτι στό στάδιο αὐτό τό παιδί τῶν 13 ἤ 14 ἐτῶν εἶναι ἀκόμη ἀνίκανο νά κατανοήσει καί νά ἐκτελέσει τήν ἀλγεβρική ἀφαίρεση

$$(\alpha+23) - (\alpha-23),$$

ἐκτός ἐάν τήν ἐκτελέσει μηχανικά ὕστερα ἀπό ἐθισμό μέ τήν ἐφαρμογή ἑνός ἀντιστοίχου κανόνα.

"Ας περάσουμε τώρα στό στάδιο III

Στάδιο III. Λύση στό τυπικό ἀριθμητικό ἐπίπεδο.

" ὅταν τό παιδί, λέγει ὁ Johannot, δέν ἔχει πιά ἀνάγκη νά ψηλαφεῖ ἤ νά βλέπει τίς ποσότητες πού ἐπεξεργάζεται, δέ **πρέπει** ἀκόμη νά νομίζουμε ὅτι εἶναι ἱκανό νά σκέπτεται νοερά πάνω σέ ἀφηρημένες ποσότητες. Μία τέτοια γνώμη θά ἦταν ἀντίθετη πρός τά γεγονότα πού μᾶς ὑποχρεώνουν νά παρεμβάλουμε ἐδῶ ἕνα τρίτο στάδιο, ὅπου τό ἁπτικό καί τό ὀπτικό παράδειγμα ἀναπληρώνεται μέ ἕνα ἀριθμητικό ἀφηρημένο παράδειγμα. Ὁ καθαρός ἀλγεβρικός συλλογισμός (IVο στάδιο) ὡριμάζει μόνο κατά τή στιγμή πού ἡ ἱκανότητα πρός γενίκευση ἐπιτρέπει στό μαθητή νά ἀντιληφθεῖ σχεδόν ἀσυνείδητα τίς ὑπάρχουσες ἀναλογίες ἀνάμεσα στό πρᾶγμα καί στό ἀλγεβρικό σύμβολο".

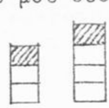
Ἡ σκέψη λοιπόν προοδεύει πρός κατεύθυνση ἀπό τό συγκεκριμένο στό ἀφηρημένο. Ἀλλά στήν πρώτη παρουσιαζόμενη δυσκολία εἶναι ἀναγκαία ἡ ἐπιστροφή πρός τά πίσω, ὥς τό στάδιο πού θά ἐπιτρέψει στό μαθητή νά συλλάβει καθαρά τά δεδομένα τοῦ προβλήματος.

"Ας παραθέσουμε πάλι δυό παραδείγματα:

"Πόσα ἔχετε περισσότερα ἀπό μένα ;

Κάνετε ἕνα σχέδιο.

23 φργ. Προσθέτω τά χρήματα πού μου δόσατε



Ἐάν 23 φρ. εἶναι τό $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων σας, ἀφαιρεῖτε 23

	καί μοῦ τά δίδετε.
Τί μοῦ μένουν ;	$\frac{2}{3}$.
καί σέ σᾶς ;	$\frac{4}{3}$.
'Εάν 23 εἶναι τό $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων μου ;	Λοιπόν $\frac{4}{3}$ = 92 φρ.
Καί ἐγώ ;	46 φρ.
Εἶσαι πάντα βέβαιη ὅτι ἔχεις 23 περισσότερα ἀπό μένα ;	Μάλιστα.
Ἔχετε 92 καί ἔχω 46 φρ , αὐτό δέν ἔχει σημασία ;	Ὄχι.
Γιατί ;	Σᾶς πῆραν 23 φρ., αὐτό δέν τό εἶχα σκεφθεῖ".

'Εδῶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ μαθήτρια προσπαθεῖ νά βρεῖ τή λύση στό ἀριθμητικό πεδίο, παρ'ὅλο πού ἀπότυχε μέ τή γραφική παράσταση.

Μιά ἄλλη μαθήτρια ἀπαντᾶ ἀμέσως:

	"46 φρ. Ὑπέθεσα ὅτι εἴχαμε ἀπό 23 φρ., τώρα λοιπόν ἔχω τά δικά μου καί τά δικά σας.
Καί ἐγώ πόσα ἔχω;	Μηδέν
Θά ἦταν τό ἴδιο ἄν εἶχα με ἀπό 100 φρ ;	Ναί πάντα εἶναι τό ἴδιο."

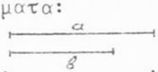
Ἄλλο παράδειγμα σέ μαθητή.

... Πόσα περισσότερα ;	46 φρ.
Γιατί ;	Γιατί ἔλαβα παραπάνω καί σεῖς δέν ἔχετε πιά ὅσα εἴχατε.

Στάδιο IV. Λύση στό τυπικό άλγεβρικό έπίπεδο.

Ένας μαθηματικός πού καταστρώνει μιά έξίσωση δέν ξέρει τίς λύσεις της πρίν νά τή λύσει. Οί καθαρές λοιπόν άλγεβρικές λύσεις στό τέταρτο στάδιο πρέπει νά είναι έκεινες, όπου τό άποτέλεσμα δέν προβλέπεται, άλλά προέρχεται άπό τό λογισμό. Τό πρόβλημα όμως τών 23 φρ. είναι τέτοιο στή φύση του, πού φέρνει τό μαθητή μπροστά σέ δίλημμα:

Έάν ή ένορατική λύση 23 φρ. είναι σωστή – έτσι πιστεύει ό μαθητής στήν άρχή – τί χρειάζεται ή έξίσωση ; Άν πάλι ή λύση τής έξισώσεως άντιφάσκει μέ τήν ένορατική λύση, ποιά θά είναι ή στάση τού μαθητή Άπό τό διλημματικό αύτό άδιέξοδο ένας τρόπος ύπάρχει γιά νά βγεί ό μαθητής: ή άναδρομή σέ προηγούμενο στάδιο, στό δεύτερο ή τό πρώτο. Νά τό παράδειγμα σέ μιά μαθήτρια 15 έτών:

"Πόσα έχετε περισσότερα άπό μένα ;	23 φρ.
Έχομε καθένας 23 σπίρτα καί σάς δίνω ένα άπό τά δικά μου.	2: Ένα σχετικά μέ τό δοσμένο, δύο σχετικά μέ ότι μένει.
Μέ χρήματα, ένα σπίρτο =23φρ. πόσα περισσότερα άπό μένα ;	Όπωσδήποτε 23, (άμφιβάλλει) όχι. Είναι λάθος.
Ό έξεταστής σχεδιάζει δύο τμήματα:  Πώς θά ύπολογισθεί ή διαφορά τών δύο τμημάτων;	Πρέπει νά κάμω μιά άφαίρεση: α – β ή (x+23) – (x–23) = = 46. Είναι τό διπλάσιο τού 23. 46 ; ! κάποιο λάθος. Μού δώσατε 23, έχω λοιπόν όπωσδήποτε 23 παραπάνω. Σέ σάς μένουν 23.

Μέ ἕνα σχέδιο ;	
	ἐσεῖς ἐγώ
Τό μαῦρο σημαίνει ;	23
Τό γραμμοσκιασμένο ;	23
Τό λευκό (τό δικό σας);	x
Τό ὑπογραμμισμένο ἀριστερά ;	x − 23 (τά δικά σας)
Καί τό δεξιά ;	x + 23 ,(τά δικά μου)
Καί θάχετε πόσα περισσότερα ἀπό μένα ;	23, μοῦ φαίνεται.
(Ξαναδείχνει τά σχέδια)	Ναί , εἶναι 46, γιατί ἔχω τώρα 23 καί τά δικά σας 23, κάνουν 46".

Εἶναι τυπικό τό τέστ αὐτό, γιατί συναντοῦμε καί τά τέσσερα στάδια. Τό σπουδαιότερο ὅμως συμπέρασμα πού μποροῦμε νά βγάλουμε εἶναι ἡ ἔλλειψη ἐμπιστοσύνης πού ἔχουν τά παιδιά στίς ἀλγεβρικές λύσεις τῶν προβλημάτων, προπάντων ὅταν δέν εἶναι σέ θέση νά τούς δώσουν μιά ἐνορατική λύση.

Τά παιδιά ὑπολογίζουν μέ τόν ἴδιο τρόπο πού γράφουν. Θά κάμουν λογιστικά λάθη, ὅπως κάμνουν ὀρθογραφικά, ὥς πού νά ὡριμάσει ἀρκετά ἡ μαθηματική σκέψη καί νά ἀποκτηθεῖ ἡ συνειδητή ἐμπιστοσύνη στήν ἄλγεβρα, ὅπως στό παρακάτω παράδειγμα.

("Αμεση ἀπάντηση)	46
Σέ ἐξίσωση ;	"Εχετε x − 23, ἐγώ x + 23. "Εχετε − 23 προσθέτω λοιπόν αὐτά τά 23 καί γίνονται 46

'Εάν φ εἶναι ἡ διαφορά

ἀνάμεσά μας ; $\phi = (x+23) - (x-23) = 46$

Τελειώνοντας τήν ἔκθεση τῶν πειραμάτων του ὁ Johannot, πρίν ἀκόμη ἀνακεφαλαιώσει τά συμπεράσματά του, κάμνει τήν ἀκόλουθη παρατήρηση:

" Μᾶς μένει νά διακριβώσουμε ἕνα βασικό σημεῖο γιά τή διάκριση μεταξύ ἀριθμητικῶν καί ἀλγεβρικῶν συλλογισμῶν: ἐνῶ στούς ἀριθμητικούς οἱ ὑπολογισμοί σχετικά μέ τό πρόβλημα τῶν 23 φρ. εἶναι καθαρά νοεροί, στούς ἀλγεβρικούς ἡ χρήση τοῦ συμβολισμοῦ ἐπιτρέπει νά μεταφρασθεῖ ἡ σκέψη σέ ἐξίσωση πού παρέχει σχεδόν αὐτόματα τή ζητούμενη λύση. Σέ κάθε μία ἀπό τίς δύο αὐτές μεθόδους ἀντιστοιχοῦν πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα.

" Στίς περισσότερες περιπτώσεις, ἡ ἀριθμητική λύση ἀκολουθεῖ χρονολογικά τήν εὐθεῖα γραμμή πού πηγαίνει ἀπό τά δεδομένα στά συμπεράσματα περνώντας ἀπό ὅλα τά ἐνδιάμεσα στάδια. Ὁ μαθηματικός πού θάθελε νά λύσει μέ τήν ἀριθμητική τό πρόβλημα τῶν 23 φρ., θά ἔλεγε: Ἀφαιρεῖτε 23 φρ. ἀπό τό ποσόσας, ἔχετε λοιπόν 23 φρ. λιγότερα. Ἐγώ ἔχω τά ἀρχικάμου, ἔχω 23 περισσότερα ἀπό σᾶς· μοῦ δίνετε τά 23 φρ. καί τά προσθέτω σ'αὐτά πού ἔχω· αὐτό μού ἐπειτρέπει νά συμπεράνω ὅτι ὑπάρχει μιά διαφορά 46 φρ. σ'αὐτά πού ἔχομε τελικά.

"Τό πλεονέκτημα τοῦ ἀριθμητικοῦ αὐτοῦ λογισμοῦ ἔγκειται στό γεγονός ὅτι ἀρκεῖ νά ἀκολουθηθοῦν μέ τή σκέψη οἱ διαδοχικοί μετασχηματισμοί τῶν δεδομένων, κατά τή λογική τάξη, γιά νά φθάσουμε στήν ὀρθή ἀπάντηση.

"Τά μειονεκτήματα ἀπεναντίας εἶναι διπλά. Ἀπό τό ἕνα μέρος οἱ ὑπολογισμοί γίνονται νοερά πρᾶγμα πού ἀπαιτεῖ μεγάλη διανοητική συγκέντρωση καί συχνά ἐμποδίζει τή διάκριση τῶν ἀναλογιῶν δομῆς μεταξύ προβλημάτων τοῦ ἰδίου τύπου. Ἀπό τήν ἄλλη ἡ ἀνάγκη νά συγκρατοῦνται οἱ ἐνδιάμεσοι μετασχηματισμοί περιπλέκει τό συλλογισμό, ὅπως εἴδαμε.

"Στήν ἄλγεβρα, ἀπεναντίας, παράγεται τό ἀντίθετο φαινόμενο. Ὁ ἀλγεβρικός λογισμός ἐπιτρέπει νά πάμε ἀπό τά τεθέντα συμπεράσματα πού περιέχουν τούς ἀγνώστους καί τούς γνωστούς, ἀπό τούς ὁποίους μερικοί θά ἐξαλειφθοῦν κατά τόν ὑπολογισμό, γιά νά φθάσουμε μέ ἁπλές ἐφαρμογές λογιστικῶν κανόνων στό ὁριστικό ἀποτέλεσμα. Στό πρόβλημα τῶν 23 φρ. ἡ λύση εἶναι ἄμεση: (α+23) - (α-23) = 46.

Ὁ ἀλγεβρικός τρόπος εἶναι ἁπλός, γρήγορος καί γενικεύεται εὔκολα. Παρουσιάζει ἐντούτοις τήν ἀνάγκη πλήρους κατανοήσεως καί ἀπολύτου ἀφομοιώσεως τοῦ ἀλγεβρικοῦ συμβολισμοῦ. Καί αὐτοῦ βρίσκεται τό κύριο μειονέκτημά του. Τέλος, τό γεγονός ὅτι ἀκολουθεῖται ἕνας δρόμος ἀντίθετος τῆς ἀριθμητικῆς, ἀπαιτεῖ μία εὐκινησία στόν ἀλγεβρικό λογισμό πού μόνο γύρω στά 16 χρόνια τους μποροῦν νά σταθεροποιήσουν οἱ ἔφηβοι".

Ἡ ἀνακεφαλαίωση καί τά συμπεράσματα ἀπό τίς 27 χαρακτηριστικές περιπτώσεις πού παραθέτει ὁ συγγραφέας εἶναι τά ἀκόλουθα:

Στάδιο 1 : Ὀρθές ἀπαντήσεις μόνο στό συγκεκριμένο πεδίο μέχρι τῶν 13 ἐτῶν.

Στάδιο II: Ὀρθές ἀπαντήσεις στό πεδίο τῆς γραφικῆς παραστάσεως ἀπό 12 ἕως 14 ἐτῶν.

Στάδιο III: Ὀρθές ἀπαντήσεις στό ἐνορατικό ἤ τυπικό ἀριθμητικό πεδίο ἀπό 13 ἕως 17 ἐτῶν.

Στάδιο V : Ὀρθές ἀπαντήσεις στό τυπικό ἀλγεβρικό πεδίο μόνο ἀπό 17 ἐτῶν.

Ὅπως φάνηκε καί ἀπό τά παραδείγματα πού ἀναφέραμε, τό ἕνα στάδιο ὡριμάζει μέσα στό ἄλλο, ὥς που νά δυναμώσει, νά ἀπελευθερωθεῖ καί νά γίνει ἱκανό κά κινᾶ αὐτοδύναμα τή μαθηματική σκέψη. Ὁ ἀλγεβρικός λογισμός π.χ. χρειάζεται μακρόχρονη ἐπώαση μέσα στά προηγούμενα στάδια γιά νά δυναμώσει. Καί τό δυνάμωμάτου θά γίνει μέ διαρκῆ ἐπιστροφή στά προηγούμενα στάδια καί κυρίως στό IIο , τῆς γραφικῆς παραστάσεως. Σκοπός τῆς μαθηματικῆς ἀγωγῆς εἶναι νά διευκολύνει καί νά ἐπιταχύνει τήν ἀνάπτυξη τῶν σταδίων, νά συντομέψει τό δρόμο πού ὁδηγεῖ ἀπό τό ἕνα στό ἄλλο. Γι'αὐτό ἡ ἄλγεβρα μπαίνει στό πείραμα πού ἀρχίζομε ἀμέσως ἀπό τόν πρῶτο χρόνο τῆς πρώτης βαθμίδας. Δέν πρέπει νά ξεχνάμε ποτέ ὅτι κάθε πρόβλημα πού λύει τό παιδί , ἀκόμη καί στό δημοτικό, εἶναι ἄλγεβρα πού περιμένει τό συμβολισμό της. Δέν πρέπει ποτέ νά ὑποτιμοῦμε τίς δυνατότητες τῶν μικρῶν μαθητῶν μας.

Ἡ ὥς τώρα ἀνάλυση τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ ἐφήβου ἦταν κατά κάποιο τρόπο περιγραφική.

Δέν ἔγινε βαθύτερη ἐξέταση τοῦ μαθηματικοῦ συλλογισμοῦ "καθ'ἑαυτόν" στήν ἐφηβική ἡλικία. Ἔχομε καταλήξει στό συμπέρασμα ὅτι: ὅταν ὁ ἔφηβος κατανοήσει καλά τή σημασία τῶν ἀριθμητικῶν καί τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων, θά μπορεῖ νά σκέπτεται μέ τήν ἴδια εὐκολία, εἴτε πρόκειται γιά συγκεκριμένα, εἴτε γιά ἀφηρημένα προβλήματα. Δυστυχῶς διάφοροι παράγοντες ἐπιβραδύνουν τήν κατανόηση αὐτή καί ἀπομακρύνουν τή στιγμή πού ἡ τυπική νοημοσύνη θά ἔχει πραγματικά προσαρμοσθεῖ στή λύση τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων.

Τά μαθηματικά εἶναι, κατά κάποιο τρόπο, ἡ γλῶσσα τῶν ἀριθμῶν. Εἶναι παγκόσμια γλῶσσα μέ ἁπλούστατη σύνταξη πού δέν ἀφήνει περιθώρια σέ παρανοήσεις. Οἱ κανόνες της εἶναι χωρίς ἐξαιρέσεις καί ἔχουν τό ἀξιοσημείωτο προσόν ὅτι εἶναι λογικοί." Αὐτό σημαίνει ὅτι μποροῦμε νά τούς ἐξηγήσουμε καί νά τούς κατανοήσουμε· ὄχι νά τούς δεχθοῦμε, ὅπως τούς κανόνες τῆς γραμματικῆς. Ἑπομένως δέν ἔχουν ἀνάγκη νά ἀπομνημονευθοῦν.

Μία πρώτη σοβαρή δυσκολία στήν ἐκμάθηση τῆς μαθηματικῆς γλώσσας εἶναι ἡ ἀπομάκρυνση, μέ τό συμβολισμό, ἀπό τήν πραγματικότητα. Ἡ ἀπόσταση ἀπό τή συγκεκριμένη ἐκφώνηση ἑνός προβλήματος ὥς τήν ἀφηρημένη ἐξίσωσή του εἶναι γιά τόν ἀρχάριο μαθητή μεγάλη. Μέσα στήν ἐξίσωση καί στούς κανόνες τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ τό παιδί χάνει τήν ἐπαφή του μέ τή λογική πραγματικότητα. Τά μαθηματικά γίνονται γι'αὐτό μιά ἄσκηση ἐξαιρετικά δύσκολη, ὑποκείμενη σέ σκοτεινούς κανόνες πού συχνά, χωρίς νά τούς κατανοεῖ, τούς ἀπομνημονεύει μηχανικά καί προσπαθεῖ νά μάθει κάθε τύπο προβλήματος πού λύεται μέ ὁρισμένο κανόνα. Γίνεται ἀνίκανο νά ἐμβαθύνει καί δυσκολεύεται νά διακρίνει μιά διαφορά δύο τετραγώνων π.χ. $4x^2y^2 - (x^2+y^2)^2$, ὅταν δέν τή βλέπει στήν κλασσική της μορφή $\alpha^2 - \beta^2$.

Ὅλες οἱ δυσκολίες αὐτοῦ τοῦ τύπου μᾶς εἶναι γνωστές ἀπό τήν πείρα μας καί μποροῦν νά ξεπεραστοῦν, ὅταν ἔχομε ὑπομονή καί δέν ὀκνοῦμε νά γυρίζομε καί νά ξαναγυρίζομε συνεχῶς στά συγκεκριμένα, μέ ἀριθμούς καί προπάντων μέ γραφικές παραστάσεις.

Τό πέρασμα ἀπό τούς ἀκεραίους στά κλάσματα παρουσιάζει τίς μεγαλύτερες δυσκολίες προσαρμογῆς. "Αν ἡ ἔννοια τοῦ ἁπλοῦ κλάσματος δέν παρουσιάζει στή σύλληψή της μεγάλες δυσκολίες οἱ πράξεις ἐν τούτοις μέ κλάσματα, καί προπάντων ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση, παρουσιάζουν στήν κατανόησή τους σημαντικές δυσκολίες πού γιά νά ξεπερασθοῦν ὁριστικά πρέπει νά καταβληθοῦν ἐντατικές προσπάθειες, καί χρόνος πολύς. Συνηθισμένο τό παιδί στίς πράξεις μέ τούς ἀκεραίους, εἶναι φυσικό, ὅταν τούς βλέπει συνοδευόμενους ἀπό διάφορα σύμβολα - ὄχι μόνο στόν κλασματικό συμβολισμό -νά παρασύρεται, ἀπό ἐπιφανειακές ἀναλογίες, σέ σοβαρά σφάλματα ὅπως:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{3+2} \quad , \quad \sqrt{7} - \sqrt{3} = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$$

$$3^2 + 3^5 = 3^7 \quad , \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha + \beta \quad , \quad 3^3 = 9 \text{ κ.λ.π.}$$

Περιττό βέβαια νά ἀσχοληθοῦμε μέ τή στάση τοῦ καθηγητῆ μπροστά σέ σφάλματα τέτοιου εἴδους πού κλιμακώνεται ἀπό τήν ἁπλῆ παρατήρηση καί ὑπομονετική ἐξήγηση τοῦ σφάλματος, μέ ἀναδρομή στίς ἀρχικές ἁπλές λογιστικές μορφές,ὥς τήν ἐχθρική καί περιφρονητική στάση μπροστά στό"διαπραχθέν ἔγκλημα καθοσιώσεως", μέ αὐστηρές κυρώσεις, χωρίς καμιά προσπάθεια ἐπαναφορᾶς στό ὀρθό.

Ἄς ἐξετάσουμε ὅσο γίνεται σύντομα, τίς δυσκολίες πού παρουσιάζει ὁ κλασματικός συμβολισμός, ὅπως τίς ἀναλύει ὁ Johannot στηριζόμενος σέ πειραματική ἔρευνα ἀνάλογη μέ τήν περίπτωση τοῦ προβλήματος τῶν 23 φρ.

Τό ἐρώτημα πού θέτει εἶναι ἐπίτηδες διαλεγμένο γιά νά φανερώνει στήν κάθε περίπτωση, τό βαθμό κατανοήσεως τῶν κλασμάτων ἀπό τούς ἐξεταζόμενους μαθητές.

Ἰδού αὐτό:

Τί σημαίνει τό κλάσμα $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ ἤ $\dfrac{2}{\frac{2}{3}}$ κ.λπ.

Ὁλοισχεδόν οἱ ἐξεταζόμενοι, ἀπό κάθε ἡλικία καί τάξη, ἀπαντοῦν σωστά: Διαίρεση 1 διά $\frac{1}{2}$. Ὅταν ὅμως τούς ζητηθεῖ νά τό θέσουν σέ ἁπλῆ μορφή, νά βροῦν δηλαδή τό πηλίκο, παρουσιάζεται ἕνας ἀπίθανος κυκεώνας ἀπαντήσεων πού ζητᾶ τή ψυχολογική ἑρμηνεία τους. Ἡ πιό συνειθισμένη ἀπάντηση εἶναι $\frac{1}{2}$. Χαρακτηριστικά ἀναφέρει ὁ συγγραφέας τήν ἀπάντηση μιᾶς φοιτήτριας, γιά τήν ὁποία ὁ συμβολισμός εἶναι γράμμα νεκρή, ἀφοῦ ἀπαντᾶ: "Ενα ἐπάνω ἀπό τό μισό κάμνουν 3 μισά. Εἶναι σάν νά ἔχουμε βάλει ἕνα μῆλο πάνω ἀπό μισό μῆλο".

Μπροστά στό γεγονός τῆς ἀδυναμίας τῶν περισσότερων μαθητῶν νά βροῦν τό πηλίκο 1 διά $\frac{1}{2}$, ὁ συγγραφέας ἀναλύει βάσει τῶν ἀπαντήσεων τά αἴτια τοῦ σφάλματος.

Δυστυχῶς τά ὅρια μιᾶς διαλέξεως δέν ἐπιτρέπουν νά ἐκταθοῦμε σέ λεπτομέρειες, ὅπως στό πρόβλημα τῶν 23 φρ. Θά περιορισθοῦμε λοιπόν στίς παρατηρήσεις καί τά συμπεράσματα τοῦ συγγραφέα :

Ὁ κόμπος τῆς δυσκολίας βρίσκεται στήν ἀνεπαρκῆ κατανόηση τῆς πράξεως τῆς διαιρέσεως σάν ἀντίστροφης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, προκειμένου μάλιστα περί κλασμάτων.

Ἄς δοῦμε τά πράγματα ἀπό κοντά:

Ὑπάρχουν δύο εἰδῶν διαιρέσεις: ἡ διαίρεση μερισμοῦ καί ἡ διαίρεση μετρήσεως ἤ, καλύτερα, περιεκτικότητας.

Ἀνάμεσα στά δύο αὐτά εἴδη διαιρέσεως ὑπάρχουν ριζικές διαφορές: Στή διαίρεση μερισμοῦ τό πηλίκον εἶναι πάντοτε συγκεκριμένο καί ὁμοειδές πρός τό μεριζόμενο, ἐπίσης συγκεκριμένο ποσό.

20 δραχμές διαιρούμενες διά 4 δίδουν πηλίκο 5 δραχμές. Ἐπί πλέον τό πηλίκο εἶναι πάντοτε μικρότερο ἀπό τό διαιρετέο.

Ἀντίθετα, ἡ διαίρεση περιεκτικότητας εἶναι ἕνα εἶδος ἀντιστροφή τῆς διαιρέσεως μερισμοῦ· ἰδού τό ἴδιο πρόβλημα γυρισμένο σέ διαίρεση περιεκτικότητας:

Πόσες φορές περιέχονται οἱ 5 δραχμές μέσα στίς 20 ; Ἡ ἀπάντηση 4 εἶναι ἕνας ἀριθμός τελείως ἀφηρημένος καί μπορεῖ νά σημαίνει κάθε ἄλλο ἐκτός ἀπό δραχμές, ἐνῷ ἀπό τήν ἄλλη τό πηλίκο μπορεῖ νἆναι καί μεγαλύτερο ἀπό τό διαιρετέο, ὅπως π.χ. στό πρόβλημα, πόσες φορές χωράει τό μισό μέτρο στά 3 μέτρα, ὁπότε $3 : \frac{1}{2} = 6 > 3$

Ἡ οὐσιώδης αὐτή διαφορά μεταξύ διαιρέσεως μερισμοῦ καί διαιρέσεως περιεκτικότητας πολύ λίγο προσέχεται κατά τή διδασκαλία τῶν κλασμάτων.

Ὁ Johannot παρατηρεῖ - καί ἐπιμένει σ'αὐτό - ὅτι ἡ σύγχυση προέρχεται ἀπό τήν προσπάθειά μας νά διδάξουμε σύγχρονα τά δύο αὐτά εἴδη διαιρέσεως. Ἡ διδακτική ὅμως ἀρχή "ἀπό τό συγκεκριμένο στό ἀφηρημένο" ἐπιβάλλει πρῶτα τή διδασκαλία καί τή θεμελίωση τῆς διαιρέσεως μερισμοῦ πού ἐνεργεῖ κατά τρόπο συγκεκριμένο σέ ποσά συγκεκριμένα καί κατόπιν τή διαίρεση περιεκτικότητας πού καταλήγει σέ πηλίκο ἀφηρημένο ἀπό ποσά συγκεκριμένα, καί μάλιστα σέ πηλίκο πού μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διαιρετέο.

Στήν περίπτωση τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ εἶναι φανερό ὅτι ἔχομε νά κάνουμε μέ μία διαίρεση περιεκτικότητας· καί αὐτό πρέπει τό παιδί νά εἶναι σέ θέση νά τό καταλάβει· καί τό καταλαβαίνει μόλις τοῦ τροποποιήσουμε τό ἐρώτημα: πόσες φορές χωράει τό $\frac{1}{2}$ στή μονάδα ; ὅσο δέν γίνεται αὐτό, τό παιδί θά ἀπαντάει $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ καί ὅ,τι ἄλλο θέλετε ἐκτός ἀπό τό σωστό 2. Μόνο ὅταν πιά τό παιδί θά ἔχει κατανοήσει στήν οὐσία της τήν ἰδιομορφία τῆς διαιρέσεως περιεκτικότητας θά μπορέσει νά κατανοήσει καί τήν ἀντιστροφή της μέ τόν πολλαπλασιασμό, κάτι ἰδιαίτερα δύσκολο στά κλάσματα γιατί οἱ πράξεις σ'αὐτά, ἀντίθετα μέ τούς ἀκεραίους, εἶναι πράξεις σέ άριθμούς τελείως άφηρημένους, όταν μάλιστα προέρχονται άπό πηλίκα διαιρέσεως περιεκτικότητος συνοδευόμενα άπό σειρά όλόκληρη διαφόρων συμβόλων πού είκονίζουν διάφορες πράξεις, όπως π.χ. στά σύνθετα κλάσματα

$$\frac{2+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}}{3-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}}$$ κ.ἄ. συνθετότερα.

Στήν άπλῆ περίπτωση τοῦ $\frac{1}{\frac{1}{2}}$, τό παιδί πού δέν εἶναι σέ θέση νά καταλάβει ὅτι πρόκειται γιά διαίρεση περιεκτικότητας πέφτει εὔκολα στό ψυχολογικό σφάλμα νά συγχέει τή διαίρεση 1 διά $\frac{1}{2}$ μέ τόν πολλαπλασιασμό $1\times\frac{1}{2}$ πού ἰσοδυναμεῖ μέ τή διαίρεση 1 : 2 γιατί, ψυχολογικά, άπό τήν πράξη $1 : \frac{1}{2}$ πού εἶναι διαίρεση περιεκτικότητος, στήν πράξη νά βροῦμε τό $\frac{1}{2}$ τοῦ 1 πού εἶναι διαίρεση μερισμοῦ τοῦ 1:2, ἡ άπόσταση εἶναι πολύ μικρή.

Χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια γιά νά κατανοήσει τό παιδί ὅτι ἡ ἔκφραση "πόσες φορές χωρεῖ τό $\frac{1}{2}$ στό 1" δέν εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἔκφραση "νά διαιρέσουμε τό 1 διά 2" ἀλλά "νά διαιρέσουμε τό 1 διά $\frac{1}{2}$" Καί μιά τέτοια διαίρεση εἶναι - τό ξαναλέμε - άκατανόητη γιά τό παιδί ὅσο δέν ἔχει ἀφομοιώσει τήν ἀντίστροφή της, δηλαδή $2\times\frac{1}{2} = 1$. Αὐτοῦ βρίσκεται ὁ ψυχολογικός κόμπος καί θά λυθεῖ σέ ἕνα δεύτερο στάδιο. Τό πέρασμα ὅμως στό δεύτερο αὐτό στάδιο γίνεται προοδευτικά καί μόνο ὕστερα άπό πλήρη κατανόηση τοῦ κανόνα.

'Αφοῦ ὁ συγγραφέας παραθέσει μερικά πρωτόκολλα άπό προφορικά ἐξεταστικά τέστ, καταλήγει στό ἀκόλουθο συμπέρασμα.

" Ἕνας ἀριθμητικός ἤ ἀλγεβρικός κανόνας δέν θά χρησιμοποιηθεῖ ποτέ ὀρθά καί ἡ χρήση του δέ θά μπορέσει ποτέ νά γενικευθεῖ, ὅσο δέν θά προέρχεται ἀπό μιά λογική κατασκευή πού νά ἐπιτρέπει τήν ἐκτέλεση τῶν ἀναγκαίων αὐτομάτων πράξεων.

Συμπέρασμα: " Ἡ λόγική κατανόηση πρέπει νά προηγεῖται τῆς αὐτόματης χρήσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ κανόνα".

Θά χρειαζόταν ὄχι μιά, ἀλλά σειρά ἀπό διαλέξεις συνοδευόμενες ἀπό προσωπική μελέτη καί συζήτηση γιά νά ἐξαντληθεῖ τό θέμα τῆς λειτουργίας τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ ἐφήβου μέ μιά πλήρη ἀνάλυση τοῦ βιβλίου τοῦ κ. Johannot. Ὡστόσο, ὅσα ἐξετάσαμε ἕως τώρα εἶναι ἀρκετά γιά νά προβληματισθοῦμε στό ἔργο πού πρόκειται νά ἀναλάβουμε, ἀφοῦ μάλιστα θάχουμε νά κάμουμε μέ παιδιά 12 ἕως 13 ἐτῶν καί περισσότερο μέ τήν ἀριθμητική.

Θά κλείσουμε λοιπόν, τή σημερινή ὁμιλία μας μέ μερικά γενικά συμπεράσματα συνδεόμενα κυρίως μέ τήν κατανόηση τῶν κλασμάτων.

Εἴπαμε ὅτι ἕνα σύνθετο κλάσμα ἔχει ἀφηρημένα χαρακτῆρα. Τό κλάσμα π.χ. $\frac{2/3}{3/4}$ παρ'ὅλο πού μπορεῖ νά μεταφρασθεῖ στήν ἔκφραση "πόσες φορές ὁ $\frac{3}{4}$ χωρεῖ στόν $\frac{2}{3}$" ἔχει γιά πολλά παιδιά μιά σημασία τόσο περίπλοκη, ὅπως τό παρακάτω σύνθετο κλάσμα γιά ἕνα μαθηματικό πού θά τοῦ ζητοῦσαν νά ἀπαντήσει ἀμέσως μέ ποιό ἁπλόκλάσμα ἰσοῦται:

$$\frac{1-\dfrac{2}{3-\dfrac{5}{2}}}{2-\dfrac{4}{5-\dfrac{3}{2}}}$$

Ἐν τούτοις τό γεγονός ὅτι ὁ μαθηματικός δέ μπορεῖ νά φαντασθεῖ στό σύνολό τους τά δεδομένα τοῦ προβλήματος πού ἔχει νά λύσει μέ τήν ἐκτέλεση τῶν πολλαπλῶν πράξεων πού περιέχονται στό παραπάνω κλάσμα, δέν τόν ἐμποδίζει νά ἐκτελέσει τήν ἁπλοποίηση καί νά βρεῖ ὅτι ἰσοῦται μέ $-\frac{7}{2}$. Ἀλλά ἡ ἁπλοποίηση αὐτή πού γίνεται μέ τήν αὐτόματη χρήση κανόνων θά ἦταν ἀδύνατη, ἄν προηγουμένως δέν εἶχε νοηθεῖ καθαρά ἡ συγκεκριμένη σημασία τῶν κανόνων.

Καταλαβαίνω ἕνα κανόνα σημαίνει καταλαβαίνω λογικά τήν πράξη πού τόν σχηματοποιεῖ. Καί, λογική πράξη, σημαίνει σύγχρονη κατανόηση καί τῆς ἀντιστροφῆς της.

Ἄς ξαναγυρίσουμε στό σύνθετο κλάσμα $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$ πού σημαίνει διαίρεση τοῦ $\frac{2}{3}$ διά $\frac{3}{4}$. Τό παιδί πού ἔχει κατανοήσει ὅτι ἡ διαίρεση ἀντιστρέφεται μέ τόν πολλαπλασιασμό θά ζητήσει τόν ἀριθμό μέ τόν ὁποῖο πολλαπλασιαζόμενος ὁ $\frac{3}{4}$ μᾶς δίνει τόν $\frac{2}{3}$ καί ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ὁ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{8}{9}$, διότι $\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{3}{4} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}$. Ἡ ἀντιστροφή εἶναι σύγχρονα καί ἡ ἀπόδειξη τῆς ὀρθότητας τοῦ πηλίκου.

Ἄς ἐμβαθύνομε λίγο στά πράγματα ἀκολουθώντας τόν Johannot στήν ἔρευνά του :

Γιά νά φθάσουμε στόν ὀρθό μαθηματικό συλλογισμό πρέπει προηγουμένως νά ἀφομοιώσουμε στήν ἐντέλεια τίς θεμελιώδεις πράξεις. Τότε, καί μόνον τότε, ἡ σημασία τῶν συμβόλων καί ἡ χρήση τῶν κανόνων δέν συναντοῦν καμιά δυσκολία, καμιά ἀμφιβολία" πότε ὅμως καί πώς ὁλοκληρώνεται ἡ ἀφομοίωση τῶν θεμελιωδῶν πράξεων στή στάθμη τῆς Μ. Ε. πού μᾶς ἐνδιαφέρει; Ὅσα ἔχουμε ἐκθέσει μέχρι τώρα, ἰδίως γιά τά σύνθετα κλάσματα, δίνουν τήν ἀπάντηση : Ἀπό τή στιγμή πού θά ἀφομοιωθεῖ ἡ διαίρεση. Καί ἡ διαίρεση ἀποκτᾶ λογική δομή, ἀφομοιώνεται καί γενικεύεται, μόνον ὅταν νοηθεῖ σάν πράξη ἀντίστροφη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἡ λογική λοιπόν πράξη τῆς ἀντιστροφῆς τῆς διαιρέσεως μέ τόν πολλαπλασιασμό καί, εννοεῖται, τῆς ἀφαιρέσεως μέ τήν πρόσθεση εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς λειτουργίας τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, ὅπως καί τῆς λειτουργίας τῆς λογικῆς σκέψεως, μέ τό συλλογισμό.

Ἀπό τή στιγμή πού θά ἀποκτηθεῖ ἡ δυνατότητα αὐτή ἀντιστροφῆς, οἱ λογικές πράξεις μποροῦν νά συγκροτηθοῦν σέ ὁμάδες. Καί ὁ συγγραφέας ὑπενθυμίζει τά θεμελιώδη χαρακτηριστικά τῆς προσθετικῆς καί τῆς πολλαπλασιαστικῆς ὁμάδας:

Τό νόμο τῆς συνθέσεως τῶν στοιχείων,

Τό νόμο τῆς προσεταιριστικότητας,

Τό νόμο τῆς ὑπάρξεως ἑνός οὐδετέρου στοιχείου (τοῦ 0 στήν προσθετική καί τοῦ 1 στήν πολλαπλασιαστική ὁμάδα).

Καί, τό νόμο τῆς ὑπάρξεως γιά κάθε στοιχεῖο ἑνός ἄλλου πού ἡ σύνθεση τῶν δύο δίδει τό οὐδέτερο στοιχεῖο.

Ποιά εἶναι τώρα τά ἄμεσα συμπεράσματα, γιά τή σημασία τῆς ψυχολογίας στή διδακτική τῶν μαθηματικῶν, ἀπό ὅσα ἔχουν ἐκτεθεῖ ἕως τώρα ;

Δέν θά ἀπείχαμε πολύ ἀπό τήν πραγματικότητα,ἄν ἀναφέραμε ὅτι οἱ καθηγηταί τῶν μαθηματικῶν στή Μ. Ε. κατά πλειονότητα αἰσθάνονται κάποια ἔντονη ἀποστροφή γιά κάθε τί σχετικό μέ τή ψυχολογία. Αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ἡ ἐπιστήμη αὐτή μετεωριζόταν ἐπί μακρά ἔτη σέ φιλοσοφικές σφαῖρες, καθαρά ἀφηρημένες, χωρίς νά ἐνδιαφέρεται καθόλου γιά τίς διδακτικές ἐφαρμογές τῶν θεωριῶν της στήν πράξη. Ἦταν τό ἀποκλειστικό προνόμιο λίγων μεμυημένων καί, τό ειδικό λεξιλόγιό της, φόβιζε τούς βεβήλους. Οἱ διαφωνίες, τέλος, ἀνάμεσα σέ ψυχολόγους ἔκαμναν πολύ δύσκολη τήν ἐκλογή καί κατά συνέπεια τήν ἐφαρμογή στήν πράξη τῶν διαφόρων κατακτήσεων.

Ὕστερα ὅμως ἀπό τήν γενετική ψυχολογία τοῦ Piaget, ὕστερα ἀπό τό πειραματικό ἔργο γιά τήν ἐφαρμογή της στά μαθηματικά - ἔργο ἐκτελεσμένο ἀπό μαθηματικούς ψυχολόγους, ὅπως οἱ Johannot καί Aebli στήν Ἑλβετία, ὁ Mialaret κ.ἄ. στήν Γαλλία καί σέ ἄλλες χῶρες, ἐπί τῶν ἡμερῶν μας, κάθε δυσπιστία, κάθε ἐπιφύλαξη τοῦ καθηγητῆ τῶν μαθηματικῶν στή Μ. Ε. εἶναι ἀδικαιολόγητη.

Ἀλλά εἶναι καί κάτι ἄλλο:

Ὅπως εἴδαμε ἕως τώρα ἡ ψυχολογική ἔρευνα τοῦ Piaget καί ἐν γένει τῶν ὀπαδῶν τῆς γενετικῆς ψυχολογίας στηρίζεται πρό πάντων στά μαθηματικά, ἀφοῦ ἡ ἴδια ἡ λειτουργία τῆς παιδικῆς σκέψεως, στή βαθύτερη ἀνάλυσή της εἶναι μαθηματικά, καί ἡ ἴδια ἡ νεότερη λογική ἔχει ντυθεῖ μέ τήν πανοπλία τῶν μαθηματικῶν. Στή Γαλλία ὁ Mialaret χρησιμοποιεῖ στίς ψυχολογικές ἔρευνές του μέ ἐπιτυχία τά στατιστικά μαθηματικά καί δέ μπορεῖ νά νοηθεῖ σήμερα Φιλοσοφία, ἄξια τοῦ ὀνόματος χωρίς βαθειά κατανόηση τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν καί τῆς νεότερης φυσικῆς.

Ἄν Φιλοσοφία σημαίνει τή θεωρητική ἔρευνα καί σπουδή τῆς ἀνθρώπινης σκέψεως ἀπό ἄποψη γνώσεων δράσεως καί λειτουργίας. Ἄν σήμερα ἡ ψυχολογία τείνει μέ τή βοήθεια τῶν μαθηματικῶν νά γίνει θετική ἐπιστήμη. Ἄν μέ ἕνα λόγο ἡ Ψυχολογία δέ μπορεῖ πιά νά ζήσει καί νά ἀναπτυχθεῖ ἔξω ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα τῶν μαθηματικῶν. Πῶς, ἐμεῖς οἱ μαθηματικοί ἔχομε τό δικαίωμα νά τήν ἀγνοήσουμε, ἀφοῦ ἄλλο δέν κάμνει ἀπό τό νά φωτίζει τούς δρόμους καί τά μονοπάτια τῆς μαθηματικῆς σκέψεως στή λειτουργία της ; λειτουργία πού, σέ τελευταία ἀνάλυση, εἶναι μαθηματικά ; Πολλά θά εἴχαμε νά κερδίσουμε μελετώντας τή ψυχολογία καί ἀντίστροφα, ἡ ψυχολογία στά χέρια τῶν μαθηματικῶν - στά χέρια μας - θά γινόταν κι' ἡ ἴδια γονιμότερη καί πλουσιότερη. Σέ ξένα χέρια θά ἐξακολουθήσει νά μετεωρίζεται στούς ἀφηρημένους κόσμους τῶν ἐρευνητῶν τῆς κλασσικῆς φιλοσοφίας πού δέν εἶναι πραγματική Φιλοσοφία ἀλλά φιλολογία ἤ - τό πολύ - ἱστορία τῆς Φιλοσοφίας.

III. Γενετική διδακτική τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ γενετική διδακτική στά μαθηματικά ἀντλεῖ τή μέθοδό της καί τίς ἀρχές της ἀπό τή γενετική ψυχολογία πού τήν πληρέστερη μορφή της ἔχει πάρει στό πολύτομο ἔργο τοῦ Piaget. Ἄν ὁ Louis Johannot ἀσχολήθηκε περισσότερο μέ τή λειτουργία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ ἐφήβου, ὅπως εἴδαμε στή δεύτερή μας διάλεξη, ὁ Hans Aebli στό βιβλίο του "Ψυχολογική Διδακτική-Εφαρμογή στή διδακτική τῆς ψυχολογίας τοῦ Piaget", ἀσχολεῖται περισσότερο μέ τή διδακτική τῶν μαθηματικῶν προσαρμόζοντάς την στή γενετική ψυχολογία.

Ἀκόμη στά διδακτικά μας βιβλία τῶν δύο κατωτέρων γυμνασιακῶν τάξεων χρησιμοποιοῦμε τόν ὅρο "Πρακτική Ἀριθμητική" καί "Πρακτική Γεωμετρία" κατ'ἀντιδιαστολή πρός τή "Θεωρητική Ἀριθμητική" καί "Θεωρητική Γεωμετρία". Ὁ ὅρος ὅμως "πρακτική" δέν ἀποδίδει σωστά τή φύση τῆς ἐφαρμοζομένης διδακτικῆς. Μαθαίνω "πρακτικά" θά πεῖ μαθαίνω μηχανικά. Αὐτό μπορεῖ νά γίνεται ὡς ἕνα σημεῖο στό δημοτικό κατά τήν ἐκμάθηση τῶν αὐτοματισμῶν, ὄχι ὅμως καί στήν κατώτερη γυμνασιακή βαθμίδα, ὅπου ἔχομε νά κάμουμε μέ παιδιά 13, 14 καί 15 ἐτῶν, ὥριμα πιά γιά νά κατανοοῦν λογικά αὐτά πού πρόκειται νά μάθουν, νά τά ἀφομοιώνουν ψυχογενετικά - ὄχι νά τά ἀπομνημονεύουν μηχανικά μέ ἐθισμό. Αὐτό ἄλλωστε γίνεται καί στά ἐγκεκριμένα διδακτικά μας βιβλία πού ἐντούτοις ἐξακολουθοῦμε νά τά χαρακτηρίζουμε πρακτικά, ἐνῷ δέν εἶναι.
Ἡ λογική κατανόηση τῶν διδασκομένων μαθηματικῶν στά

δύο προπάντων πρῶτα χρόνια τῆς Μ.Ε. γίνεται ἐνορατικά: δηλαδή μέ τή ψυχική λειτουργία πού λέγεται ἐνόραση, γιά τήν ὁποία, δυστυχῶς, καθόλου δέν γίνεται λόγος στά διδακτικά μας ἐγχειρίδια τῆς Ψυχολογίας. Ἡ λέξη ἐνόραση εἶναι μετάφραση τοῦ γαλλικοῦ καί τοῦ ἀγγλικοῦ intuition , ἰταλικά intuizione , πού προέρχεται ἀπό τό λατινικό intueri = = ἐν - ὁρῶ . Οἱ δικοί μας συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν καί τούς ὅρους διόραση - διαίσθηση καί ἐναίσθηση πού σημαίνουν τό ἴδιο. Πολύ συχνά ἡ ἐνόραση συγχέεται μέ τήν ἐποπτεία (γερμ. Auschauung) πού συγγενεύει μέ τήν ἐνόραση ἀλλά εἶναι κάτι πολύ γενικότερο.

Ποιό εἶναι τό ἀκριβές περιεχόμενο τοῦ ὅρου ;

Ἡ μεγάλη Ἑλληνική Ἐγκυκλοπαίδεια γράφει:

"Σαφής καί ἄμεσος γνῶσις ἀληθείας τινός, τήν ὁποίαν δύναται νά συλλάβη τό πνεῦμα, χωρίς νά παρίσταται ἀνάγκη διαστοχασμοῦ". Ὁ ὁρισμός αὐτός εἶναι κατά λέξη μετάφραση ἀπό τή γαλλική ἐγκυκλοπαίδεια Larousse.

Σέ ὅτι ἀφορᾶ ὅμως τήν ἐνόραση σάν ψυχική λειτουργία οἱ διάφοροι ψυχολόγοι παρουσιάζουν ἀποκλίσεις ἀντιλήψεων πού δέν εἶναι τῆς ὥρας - καί δέν εἴμαστε ἁρμόδιοι-νά ἐξετάσουμε. Εὐτυχῶς ὁ ρόλος τῆς ἐνοράσεως στά μαθηματικά εἶναι ἀρκετά ξεκαθαρισμένος σέ ὅτι λέμε ἐνορατική ἀριθμητική καί ἐνορατική γεωμετρία. Ἔχομε δύο εἰδῶν σκέψη: τήν ἐνορατική καί τή διαστοχαστική (pensee discursive) πού λειτουργεῖ μέ συλλογισμούς. Ὅπως ξαίρομε ἀπό τή λογική, ὁ συλλογισμός εἶναι ἕνας παραγωγικός στοχασμός, μέ τήν ἔννοια ὅτι ἡ σκέψη κινεῖται ἀπό τίς ἀρχές πρός τίς λογικά ἀναγκαῖες συνέπειες. Εἰδικότερα στά μαθηματικά ἡ παραγωγική σκέψη, ὁ παραγωγικός στοχασμός, παίρνει τή μορφή πού λέγεται <u>κατασκευαστι-</u>

κή παραγωγή (deduction constructive). Σ'ένα θεώρημα τό συμπέρασμα δέν διαφαίνεται μέσα στήν υπόθεση, ούτε καί μέσα στά αξιώματα καί στίς προηγούμενα αποδειγμένες προτάσεις πού μεσολαβοῦν γιά νά φθάσουμε στήν απόδειξη, άλλά κατασκευάζεται συνθετικά μέ τίς προτάσεις αὐτές, καί συνάγεται μάλιστα ἀπό αὐτές κατά λογική ἀνάγκη· αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ ἀπόδειξη ἐμφανίζει καινούργια πρόταση πού ἡ ἀλήθειά της βρίσκεται μέσα στήν ἀναγκαιότητα τοῦ συμπεράσματος. Ὁ ψυχολογικός μηχανισμός τῆς ἀποδείξεως εἶναι στό βάθος ὁ ἴδιος μέ τόν κοινό παραγωγικό στοχασμό. Πρόκειται πάντως γιά τήν εὕρεση ἐνδιαμέσων προτάσεων καί ἐννοιῶν. Ἡ μόνη διαφορά εἶναι ὅτι ἐνῷ ὁ κοινός παραγωγικός συλλογισμός λειτουργεῖ ἀναλυτικά, ἡ μαθηματική κατασκευαστική παραγωγή λειτουργεῖ συνθετικά.

Γιά ν'ἀποδείξουμε π.χ. ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μέ δύο ὀρθές, πρέπει νά βροῦμε μία κατάλληλη κατασκευή πού νά τίς μετασχηματίζει σέ τρεῖς διαδοχικές παραπληρωματικές καί ἡ ἀπόδειξη νά ἰσχύει γιά κάθε τρίγωνο, ἀνεξάρτητα ἀπό μορφή καί μέγεθος. Ὑπάρχουν βέβαια θεωρήματα πού οἱ ἐνδιάμεσες προτάσεις εἶναι περισσότερες καί ἔχουν πάντα αὐστηρή λογική διάρθρωση.

Ἀντίθετα μέ τή λογική σκέψη καί τόν παραγωγικό στοχασμό πού ὁδηγεῖ κατασκευαστικά ἀπό τήν ὑπόθεση στό συμπέρασμα (ἀπό τίς ἀρχές στίς συνέπειες) μέ τήν ἀπόδειξη, ἡ ἐνόραση ὁδηγεῖ κατευθεῖαν στή γνώση τῆς ἀλήθειας, χωρίς τή μεσολάβηση ἐνδιαμέσων ἐννοιῶν καί προτάσεων. Δέν πρέπει ὡστόσο νά συγχέουμε τήν ἐνόραση μέ τήν ἀντίληψη πού ἔχει πηγή τήν ἔνυλη πραγματικότητα καί ὄργανα τά αἰσθητήρια. Μποροῦμε ἐντούτοις νά ποῦμε ὅτι ἡ ἐνόραση εἶναι ἕνα εἶδος ἀντίληψη πού ὅμως δέν ἔχει ἀνάγκη ἀπό τά ὄργανα τῶν αἰσθήσεων γιά νά συνάγει τήν ἀλήθεια. Ἡ ἐνόραση σκέπτεται πάνω σέ εἰκόνες καί σύμβολα τῶν πραγμάτων πάνω σέ ἐσωτερικευμένες προγενέστερες ἐμπειρίες. Μέ ἄλλα λόγια ἐκεῖνο πού "βλέπει" ἡ ἐνόραση σέ ἕνα πρᾶγμα ἤ σέ ἕνα ὁρισμένο γεγονός δέν εἶναι τό γεγονός καθ'ἑαυτό, ἀλλά ἡ ἀναφορά του πρός τό ὑποκείμενο," σχέσεις δηλαδή ἤ ἀνταποκρίσεις μεταξύ τοῦ ὑποκειμένου πού "ἐνορᾶ" καί τοῦ ἀντικειμένου τῆς ἐνοράσεως "'Αντίθετα μέ τό σκεπτόμενο λογικό πού χρησιμοποιεῖ γιά νά λειτουργήσει δεκανίκια, ὅπως τά σύμβολα,οἱ ἔννοιες καί οἱ ἀναλλοίωτες, ἡ ἐνόραση πάει κατευθεῖαν στό σκοπό, λειτουργεῖ μέ αὐτόματη ἐπαγωγή"*.

'Οδηγεῖ ἐπίσης ἡ μαθηματική ἐνόραση στήν ἀλήθεια προτάσεων μέ τήν ἐπαγωγική λειτουργία τῆς σκέψεως ('Επαγωγή στή ψυχολογία καί τή λογική σημαίνει τή λειτουργία τῆς σκέψεως πού ὁδηγεῖ ἀπό τά γεγονότα στούς νόμους. 'Η ἐπαγωγή εἶναι ἡ κατ'ἐξοχήν μέθοδος τῆς φυσικῆς.) Στόν ἐνορατικό στοχασμό ἡ σκέψη λειτουργεῖ συνθετικά: συνδυάζει τίς παρατηρήσεις της μέ τίς γνωστές της μαθηματικές ἀλήθειες, γενικεύει καί κατασκευάζει τό νέο.

"Ας ξαναγυρίσουμε π.χ. στό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Εἴδαμε πῶς ἀποκαλύπτει τήν ἀλήθεια ὁ παραγωγικός στοχασμός μέ τήν ἀπόδειξη. "Ας δοῦμε τώρα πώς λειτουργεῖ ἡ ἐνόρασή στήν ἀποκάλυψη τῆς ἰδίας ἀλήθειας: 1ο ἀποκόπτομε τίς τρεῖς γωνίες τοῦ τριγώνου καί τίς κάμνομε ἐφεξῆς. 'Η ἀλήεθια προβάλλεται ἀμέσως. 2ο. 'Εκτελοῦμε τό ἴδιο μέ κατάλληλες διπλώσεις σ'ἕνα κομμάτι χαρτί ἀποκομμένο σέ τριγωνικό σχῆμα. 3ο. Μετροῦμε μέ τό γωνιόμετρο τίς γωνίες καί τίς προσθέτομε. 'Η ἐπανάληψη τοῦ πειράματος ὁδηγεῖ μέ τή γενίκευση στήν ἐνόραση τῆς ἀλήθειας. 'Η σκέψη μέ τήν ἔρευνα

---

*Gustave Morf: Elements de Psychologie. Ed du Mont Blanc Geneve - Suisse.

καί τήν παρατήρηση κατασκευάζει ένορατικά τό νέο.

Μά ύπάρχει δύο είδῶν άνόραση: ή περιγραφική ένόραση, ὅπως στήν παραπάνω περίπτωση, μιά ένόραση στηριζόμενη στήν κατά παράδοση διδακτική καί ή κατασκευαστική ένόραση, στηριζόμενη στή γενετική ψυχολογία τοῦ Piaget. Θά μιλήσουμε καί γι'αύτήν στό κατάλληλο μέρος.

Μά πρέπει πρῶτα νά κάμουμε μιά σύντομη άναδρομική θεώρηση τῆς διδακτικῆς τῶν μαθηματικῶν.

Ἡ άρχή τῆς περιγραφικῆς ένοράσεως άποτελεῖ τό θεμέλιο τῆς κατά παράδοση διδακτικῆς πού εἶναι ή κληρονομιά τῆς μεθοδολογίας τοῦ 19ου αἰώνα. Ἡ μεθοδολογία αύτή προῆλθε κυρίως άπό τίς θεωρίες τοῦ Comenius, τοῦ Rousseau, τοῦ Pestalozzi καί τοῦ Herbart καί έξακολουθεῖ μέχρι καί σήμερα νά διέπει κατά μέγα μέρος τή διδακτική τῶν μαθηματικῶν καί στή χώρα μας μέ τό ὄνομα "πρακτική",άντί ένορατική διδασκαλία.

Ἄς δώσουμε σέ ἕνα χαρακτηριστικό παράδειγμα τόν τρόπο τῆς λειτουργίας τῆς διδακτικῆς αύτῆς στά μαθηματικά θά άναφερθοῦμε στή διδασκαλία τῶν κοινῶν κλασμάτων:

Σάν πρώτη εἰσαγωγή θά σταθοῦμε στή σπουδή τῶν έπιφανειῶν, τῶν γραμμῶν, καί άκόμη τῶν άντικειμένων, θά τεμαχίσουμε έπιφάνειες, καί γραμμές , θά χαράξουμε κυκλικούς τομεῖς καί θά τούς χρωματίσουμε, θά κόψουμε μῆλα καί πορτοκάλια γιά νά έντυπώσουμε εἰκόνες στήν παιδική ψυχή.

Κάτι άνάλογο θά κάμουμε καί στή διδασκαλία τοῦ έμβαδοῦ τοῦ όρθογωνίου: Θά τό χωρίσουμε σέ ταινίες τεμνόμενες κάθετα κατά τετραγωνικές μονάδες. Ὅσες εἶναι οἱ τετραγωνικές μονάδες, τόσο εἶναι τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν δύο διαστάσεών του , δηλ. τό έμβαδόν του.

Καθ'όλη τή διάρκεια τοῦ XIX αἰώνα ὁ τόνος τῆς διδακτικῆς ἔμπαινε πάντα στοῦ εἴδους αὐτοῦ τήν ἐνόραση: Ἔτσι ὁ γερμανός παιδαγωγός Diesteswеg (1790-1866) ἔγραφε: " Θά ξεκινήσεις ἀπό τήν ἐνόραση καί ἀπό αὐτήν θά φθάσεις στήν ἔννοια, ἀπό τό μερικό στό γενικό, ἀπό τό συγκεκριμένο στό ἀφηρημένο". Ἐξ ἄλλου ὁ W. Rein (1847-1929), ἀρκετά νεότερος, γράφει: "... Ἀπό τή ζωντανή ἐνόραση πρέπει ὁ μαθητής νά πορισθεῖ τίς ἀφηρημένες του ἔννοιες, γιατί δέν ὑπάρχει τίποτα στή νόηση πού νά μή προϋπῆρξε στίς αἰσθήσεις". Ἔτσι ὁρίζεται ἀπό τό Rein ἡ ἀρχή τῆς ἐνοράσεως (" Grundsatz der Auschaulichkeit") πού ἐμεῖς ὀνομάσαμε περιγραφική καί στηρίζεται στή ψυχολογία πού χαρακτηρίζεται σάν "αἰσθησιο - ἐμπειρική ", ὡς βασιζόμενη στήν ἐμπειρία τῶν αἰσθήσεων. Σύμφωνα μέ τήν ψυχολογία αὐτή οἱ παραστατικές εἰκόνες τυπώνονται στήν παιδική μνήμη,ὅπως ἡ φωτογραφία στή φωτογραφική πλάκα - τό ἴδιο διδάσκει καί ὁ Ἀριστοτέλης- .

Μετά ἀπό τή φωτογραφική ἀπεικόνιση ἀκολουθεῖ ἡ ψυχολογική ἐπεξεργασία τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ὑλικῶν στοιχείων τῶν εἰκόνων γιά νά μείνει στό τέλος ἡ καθαρή ἔννοια, ὅπως π.χ. στά κλάσματα πού τή διδασκαλία τους περιγράψαμε παραπάνω.

Σέ ὅλη τή διδακτική τοῦ εἴδους αὐτοῦ ὁ μαθητής παραμένει ἀδρανής θεατής. Τό πολύ πολύ νά κληθεῖ ἕνας στόν πίνακα γιά νά ἐκτελέσει τά θεώμενα παθητικά ἀπό τήν τάξη. Ἡ αἰσθησιο-ἐμπειρική ψυχολογία θεωρεῖ ἐπαρκῆ τή νοερή ἀποτύπωση τῶν στατικῶν εἰκόνων στήν παιδική ψυχή γιά νά συλληφθεῖ ἡ ἔννοια τοῦ κλάσματος ἤ ὁποιαδήποτε ἄλλη τῶν μαθηματικῶν ἤ ἄλλου διδακτικοῦ κλάδου. Πῶς γίνεται τώρα ἡ ἀφαιρετική ἐπεξεργασία καί πῶς τό παιδί συναισθάνεται μέσα του νά συντελεῖται τό θαῦμα τῆς μεταβάσεως ἀπό τή συγκεκριμένη στατική εἰκόνα στό ἀφηρημένο κλάσμα, εἶναι ἕνα ἄλλο ζήτημα πού τό ἀφήνει μετέωρο ἡ αἰσθησιο-ἐμπειρική ψυχολογία. Πρέπει ὡστόσο νά ἀναγνωρίσουμε ὅτι ἡ ἀρχή τῆς ἐνοράσεως" ὅπως τήν ὁρίσαμε παραπάνω -"οὐδέν ἐν τῷ νῷ, ὅ μή πρότερον ἐν τῇ αἰσθήσει", λέγει ὁ 'Αριστοτέλης,- ἀποτελεῖ κατά τό XIX αἰώνα μιά ἀληθινή διδακτική ἐπανάσταση ἐναντίον τοῦ βερμαλισμοῦ πού ἐννοοῦσε τή διδασκαλία καθαρό ἀκρόαμα γιά τό μαθητή.

'Από τίς ἀτέλειες τῆς διδακτικῆς ἀρχῆς τῆς περιγραφικῆς ἐνοράσεως, ὅπως ἐκτέθηκαν παρά πάνω, ἦρθαν νά μᾶς ἀπαλλάξουν κατά μέγα μέρος, νεότερες σύγχρονές μας διδακτικές ἀρχές καί μέθοδοι πού μποροῦμε νά τίς συμπεριλάβουμε κάτω ἀπό τό γενικό τίτλο "Διδακτική τοῦ ἐνεργητικοῦ σχολείου", κατ'ἀντίθεση πρός τό παλαιό σχολεῖο τῆς παθητικῆς παρουσίας τοῦ μαθητῆ. Οἱ προσπάθειες αὐτές ἐκτείνονται ἀπό τίς ἀρχές τοῦ αἰώνα μας μέχρι τῶν ἡμερῶν μας, τόσο στήν Εὐρώπη, ὅσο καί στήν 'Αμερική. Τέσσερις εἶναι κατά τόν Aebli οἱ κυριότεροι ἐκπρόσωποί της: ὁ W.A.Lay (Γερμανία), ὁ John Dewey ('Αμερική) ὁ Eduard Claparède ('Ελβετία) καί ὁ Kerschensteiner (Γερμανία).

Τό ἔργο καί τῶν τεσσάρων αὐτῶν ψυχολόγων-παιδαγωγῶν ἐξετάζει σέ συντομία ὁ Aebli γιά νά χαράξει τά σύνορα πού τό χωρίζουν, μά καί τό συνδέουν μέ τή γενετική ψυχολογία τοῦ Piaget. Στά ἀμέσως ἑπόμενα θά προσπαθήσουμε νά ξεκαθαρίσουμε τά σημεῖα ἀποκλεισμοῦ καί τά σημεῖα ἐπικοινωνίας αὐτῶν τῶν συνόρων. Αὐτό θά μᾶς βοηθήσει νά καταλάβουμε καλλίτερα, βαθύτερα, καθαρότερα τήν οὐσία τῆς γενετικῆς διδακτικῆς καί εἰδικότερα τήν κατασκευαστική ἐνόραση. Θά ἐπιμείνουμε περισσότερο στό Lay.

'Ο Lay ὀνομάζει "θεμελιώδη ψυχολογική ἀντίδραση τό φυχολογικό σχῆμα, ἐντύπωση - ἐπεξεργασία - ἔκφραση πού εἶναι ἀπότοκο φυσιολογικῶν ἀνακαλύψεων τοῦ XIX αἰώνα, ὅπως τό ἀνακλαστικό τόξο καί ἡ κιναισθησία. Τό ἀνακλαστικό τόξο εἶναι ἡ ὁλική αὐτόματη ἀντίδραση πού συνίσταται κατά τή ψυχική λειτουργία τῆς ἀντιλήψεως, ἀπό μία αἰσθητηρία διέγερση καί τήν κινητική ἀπάντηση πρός αὐτή. Μιά ὀπτική ἀντίληψη π.χ. στήν ἁπλούστερη μορφή της περιέχει κινητικά στοιχεῖα:

"Οταν μία φωτιστική διέγερση προσβάλλει τήν ὅραση ὁ ὀφθαλμός ἀπαντᾶ, ὅπως γνωρίζομε , μέ μία αὐτόματη κινητήρια προσαρμογή, κατευθύνεται πρός τήν ἀκριβῆ διεύθυνση τῆς φωτεινῆς πηγῆς, καί προσαρμόζεται πρός τήν ἀπόσταση τοῦ ἀντικειμένου. Σύγχρονα ὅμως ἡ κινητήρια ἀντίδραση τοῦ ὀφθαλμοῦ προκαλεῖ στό ὑποκείμενο ἕνα νέο τύπο αἰσθημάτων πού ἡ σημασία τους δέν εἶχε ἀρκετά προσεχθεῖ ἀπό τήν παλαιά κατά παράδοση παιδαγωγική. Μέ τά κιναισθητικά αἰσθήματα πού ὀφείλονται στούς μῦς καί στίς ἀρθρώσεις τό ἄτομο μπορεῖ νά ἀντιληφθεῖ τίς ἴδιες του κινήσεις, χωρίς νά τίς βλέπει.

'Από αὐτές τίς ψυχολογικές ἀντιλήψεις, ὁ Lay συνάγει τή θεμελιώδη ἀρχή,σύμφωνα μέ τήν ὁποία τό φυσικό στοιχεῖο τῆς ψυχικῆς ζωῆς δέν εἶναι οὔτε τό αἴσθημα, οὔτε καμιά ἄλλη ἀπομονωμένη ψυχική λειτουργία, ἀλλά ἡ συνολική ἀντίδραση πού ἀποτελεῖται ἀπό τήν πρόσληψη ἐρεθισμάτων τοῦ περιβάλλοντος καί - σέ ἀπάντηση - τήν ἀντίδραση σ'αὐτά. "Ετσι οἱ ζωτικές πράξεις χαρακτηρίζονται ἀπό τήν "ἑνότητα τοῦ ἐρεθίσματος καί τῆς ἀντιδράσεως σ'αὐτό" (δηλ. τῆς ἐκφράσεως πού ἐπιτρέπει στό ὑποκείμενο νά προσαρμόσει τό περιβάλλον στίς ἀνάγκες του, ἤ νά προσαρμοσθεῖ τό ἴδιο σ'αὐτό. Τό πέρασμα ὅμως ἀπό τό ἐρέθισμα στήν ἀντίδραση - ἔκφραση δέν γίνεται χωρίς κάποια,λίγη ἤ πολλή πνευματική ἐπεξεργασία πού θά ὁδηγήσει τελικά στήν καθαρή ἀντίληψη.

'Από αυτό ό Lay διατυπώνει τά ακόλουθα παιδαγωγικά συμπεράσματα: "Ό μαθητής εἶναι ενταγμένος σέ ένα ζωντανό περιβάλλον πού δέχεται τίς επιδράσεις του καί σύγχρονα αντιδρᾶ σ'αυτό ... Οἱ επεξεργασμένες καί αφομοιωμένες αντιλήψεις... οφείλουν νά βροῦν κατ'αρχήν, σέ ὅλες τίς περιοχές καί σέ ὅλες τίς βαθμίδες τῆς εκπαιδεύσεως, τό συμπλήρωμά τους στήν ἔκφραση".

Χωρίς νά ξεφεύγει εντελῶς, από τήν παλαιά συνειρμική ψυχολογία πού παραδέχεται ὅτι οἱ αισθήσεις εντυπώνουν εικόνες συνδεόμενες μεταξύ τους μέ ομοιότητες, αντιθέσεις κ.λ.π. τήν ξεπερνᾶ ὅμως αρκετά, ὅταν στήν ψυχική λειτουργία τῆς αντιλήψεως ενσωματώνει καί τήν ενεργό "αντίδραση - ἔκφραση " τοῦ υποκειμένου. Ἔτσι ἡ ψυχοπαιδαγωγική θεωρία τοῦ Lay θεωρεῖ τό παιδί σάν ζωντανό στοιχεῖο μιᾶς κοινότητας πού δέχεται τίς επιδράσεις της, ενῷ σύγχρονα αντιδρᾶ σ'αυτές καί ἡ αντίδρασή του μορφοποιεῖται στήν "ἔκφραση". Στήν αντίδραση - ἔκφραση ό Lay ενσωματώνει καί τά μαθηματικά πέφτοντας ἔτσι σέ βασική πλάνη, γιατί τά μαθηματικά δέν οφείλονται οὔτε σέ συνειρμούς παραστάσεων - εικόνων, οὔτε σέ ἄμεσες εντυπώσεις, ὅσο ζωντανά κι'ἄν εἶναι οργανωμένη ἡ συμμετοχή τοῦ μαθητῆ στό σχηματισμό τους.

Ξέρομε σήμερα από τόν Piaget ὅτι ό νοερή εικόνα εἶναι μιά εσωτερικευμένη αναπαραγωγή πραγματικῶν δράσεω , καί προϋποθέτει τήν ενεργητική φύση τῆς σκέψεως. Ἡ αντίληψη π.χ. τοῦ αριθμοῦ σχηματίζεται από αντιστρεπτές λογικές πράξεις (operations) καί ὄχι από εντυπώσεις καί, ακόμη, ὅτι ό αριθμός μπορεῖ νά "εκφρασθεῖ" δηλ. νά "εξωτερικευθεῖ μέ τήν πραγματική καί συγκεκριμένη εκτέλεση λογικῶν πράξεων συνθέσεως , καταμερισμοῦ, κατατάξεως κ.λ.π." (Aebli σελ. 21).

Στόν Dewey καί στόν Claparede οφείλομε τήν "ινστρουμανταλιστική ἑρμηνεία τῆς σκέψεως.

Γιά τόν Dewey ἐκεῖνο πού χαρακτηρίζει τίς σχέσεις ἀνάμεσα στό ἄτομο καί στόν κόσμο εἶναι ἡ δημιουργική δραστηριότητά του.

Ὁ ἄνθρωπος μεταβάλλει τά πράγματα μέσα στό φυσικό του περιβάλλον καί κατασκευάζει νέες δομές μέσα στό κοινωνικό περιβάλλον. Ἡ σκέψη, ὅπως καί ἡ παρατήρηση, εἶναι τό ἐργαλεῖο στήν προσαρμοστική δραστηριότητα τοῦ ἀτόμου.

Γιά τό παιδί ἰδιαίτερα ἔχει ἀξία μόνο ὅσο τό βοηθᾶ νά λύνει τά πρακτικά προβλήματα τῆς ζωῆς του καί νά πραγματοποιεῖ τούς σκοπούς τῶν παιγνιδιῶν του. Σκεπτόμαστε ὄχι γιά νά σκεπτόμαστε, ἀλλά γιά νά ἐκτελέσουμε κάτι πού ξεπερνᾶ τή σκέψη. Ἔτσι ἡ σκέψη συνυπάρχει μέ τή δράση. Ὁ ἄνθρωπος ἀναγκάζεται νά σκεφθεῖ, ὅταν κατά τήν ἐκτέλεση μιᾶς δραστηριότητας συναντᾶ δυσκολίες.

Ἀνεξάρτητα ἀπό τόν Dewey ὁ Claparede κατάληξε σέ παρόμοια ἑρμηνεία τῆς λειτουργίας τῆς σκέψεως: ἡ σκέψη δέ μπορεῖ νά νοηθεῖ ξεχωριστά ἀπό τήν πράξη. Κάθε πράξη ἔχει γιά λειτουργικό σκοπό τήν ἀναπροσαρμογή τοῦ ὑποκειμένου στό περιβάλλον του, ὅταν ἡ ἰσορροπία ἀνάμεσά τους διακοπεῖ. Ἡ διακοπή αὐτή μπορεῖ νά ὀφείλεται σέ μιά μεταβολή τοῦ περιβάλλοντος.

Ἀλλά πολύ συχνά ὁ ἴδιος ὁ ἄνθρωπος διακόπτει τήν ὑφιστάμενη ἰσορροπία γιά νά τήν πραγματοποιήσει σέ ἀνώτερη στάθμη.

Γιαυτό "τό παιδί ἀνικανοποίητο ἀπό ὅτι εἶναι ἀρκετό γιά τίς ἀνάγκες τῆς στιγμῆς, ἐπιθυμεῖ νά γνωρίσει ὅλο καί περισσότερα, ἐρωτᾶ, πειραματίζεται, χειρίζεται, ἐγγίζει τό καθετί ξεπερνώντας σταθερά τό ὅριο τῶν ἄμεσων ἀναγκῶν του, ὑψωνόμενο κάθε στιγμή πάνω ἀπό τόν ἑαυτό του" (Aebli σελ. 23).

Σέ ὅλη αὐτή τή δραστηριότητα ἡ λειτουργία τῆς σκέψεως ἔχει παρεμβατικό χαρακτῆρα στό ξεπέρασμα τῶν δυσκολιῶν· χαρακτῆρα δηλ. ἰνστρουμανταλιστικό ὅπως καί στόν Dewey.

Ποιά ὅμως εἶναι ἡ φύση τῆς σκέψεως τό πρόβλημα αὐτό οὔτε ὁ Dewey οὔτε ὁ Claparede μπόρεσε νά τό λύσει: Ὁ Dewey περιγράφει τή λειτουργία της σάν ἕνα παιγνίδι ἀπό ἐπιφορές (inferences) πού συνδέουν τά δεδομένα τῆς παρατηρήσεως μέ τίς σημασίες τους καί τά περιεχόμενα τῆς συνειδήσεως, ἀνάμεσά τους. Ἔτσι παρουσιάζεται κάποιος ἀντιφατικός διχασμός στίς ἀντιλήψεις του: ἀπό τό ἕνα μέρος ἡ ψυχική ζωή περιγράφεται σάν οὐσιαστικά ἐνεργητική (προσπάθεια προσαρμογῆς τοῦ ἀνθρώπου πρός τό περιβάλλον) ἐνῶ, ἀπό τό ἄλλο , στήν ἐσωτερική φύση της, ἡ σκέψη, νοεῖται σάν ἕνα παιγνίδι ἀπό συνειρμούς πού συνδέουν ἄκαμπτα περιεχόμενα. Ἀνάλογη εἶναι καί ἡ ἑρμηνεία τοῦ Claparede : Ὁ σχηματισμός τῶν γνώσεων εἶναι ἕνα πρόβλημα "ἐπιπλώσεως". Πρόκειται βέβαια γιά ἐπίπλωση "εἰκονική" Ὅμως παραβάλλοντας τίς σκέψεις μέ "ἔπιπλα " φθάνομε μοιραῖα σέ μιά στατική ἀντίληψη τῆς λειτουργίας τῆς σκέψεως, ἔστω καί ἄν παραδεχθοῦμε ὅτι ἡ "ἐπίπλωση" γίνεται μέ τήν προσωπική ἔρευνα τοῦ μαθητῆ

Ὡστόσο ὁ Dewey εἶχε διαισθανθεῖ τόν ἀντιφατικό διχασμό πού συσκότιζε τήν ἑρμηνεία του τῆς ἐσωτερικῆς φύσεως τῆς σκέψεως. Γιαυτό στά 1929 (πέθανε στά 1952) ἀναπτύσσει κατά τρόπο συγκεκριμένο πιά τήν θεωρία τῆς πραξιακῆς (operatoire) φύσεως τῆς σκέψεως. Σ'αὐτήν ὅμως τήν ἑρμηνεία καταλήγει ἀπό θεωρήσεις μᾶλλον φιλοσοφικές καί ὄχι ἀπό πειραματικές ψυχολογικές ἔρευνες, ὅπως ὁ Piaget.

– Ὁ Kerschensteiner εἶχε μελετήσει τόν Dewey καί μετάφρασε μάλιστα στά γερμανικά τό βιβλίο του How wethink. Ἀπό ὅσα ἀναφέραμε γιά τόν Dewey καί τόν Claparede μποροῦμε νά συναγάγουμεστίς βασικές γραμμές της τή ψυχολογία καί τήν παιδαγωγική τοῦ Kerschensteiner πού ἄλλωστε μᾶς εἶναι ἀρκετά γνωστή ἀπό τό Σχολεῖο 'Εργασίας" πού κατά τό μεσοπόλεμο ἀρκετά εἶχε ἀπασχολήσει - καί ταλανίσει - τήν ἐκπαίδευσή μας 'Αρκεῖ ὡστόσο νά σημειώσουμε ὅτι στή διδακτική του τονίζει περισσότερο τόν παράγοντα τοῦ ἐλέγχου τῶν ὑποθέσεων, γιά νά πετύχει ἀπό τό μαθητή μιά κριτική στάση ἀντίκρυ στόν ἴδιο τόν ἑαυτό του. Νά τόν κάμει νά καταβάλει ἐπίμονες προσπάθειες : "Τό οὐσιαστικό χαρακτηριστικό, λέγει, τοῦ ἀληθινά ἐνεργητικοῦ σχολείου εἶναι νά ἀναπτύξει στό μαθητή τήν ἐσωτερική ὑποχρέωση νά δοκιμάζει ὁ ἴδιος αὐτό πού ἐδημιούργησε, εἴτε εἶναι δεσμός ἰδεῶν, εἴτε ἠθική πράξη, εἴτε τεχνικόν προϊόν..." (Aebli σελ. 33).

Θἄπρεπε ἀκόμη νά ἀναφέρουμε ὅτι ὁ Kesschensteiner ζητᾶ νά καλλιεργήσει στό μαθητή μιά νοητική πειθαρχία σέ τρόπο πού νά πραγματοποιεῖ τίς παιδευτικές ἀξίες μᾶλλον ἀπό καθῆκον, παρά ἀπό προσωπικό ἐνδιαφέρον, πρᾶγμα πολύ ἐπικίνδυνο γιά τήν παιδεία, γιατί ἔτσι ἡ νοητική πειθαρχία φθάνοντας στά ἄκρα κινδυνεύει νά ἐκφυλισθεῖ σέ μία καθαρή ἐξωτερική ὑποταγή πού ὁ ἐθνικοσοσιαλισμός μᾶς ἔδωσε ἕνα οἰκτρό καί ὀλέθριο δεῖγμα.

'Αφομοίωση παιδευτικῶν ἀξιῶν ἀλήθειας, τέχνης καί ἐπιστήμης δέν γίνεται χωρίς ἐνδόμυχο ἐνδιαφέρον.

Γιά νά κλείσουμετό κεφάλαιο τῶν προοδευτικῶν ψυχολογικῶν καί παιδαγωγικῶν ρευμάτων τῆς ἐποχῆς μας θάπρεπε νά προστεθοῦν λίγα λόγια γιά τήν "ψυχολογία τῆς μορφῆς" (Gestaltpsychologie) πού διδάσκει ὅτι ἡ πρόσληψη μέ τίς αἰσθήσεις καί ἡ νοημοσύνη εἶναι λειτουργίες ἀλληλένδετες κι'ὅτι δέν ὑπάρχει λόγος νά ξεχωρίζουμετό αἰσθητό ἀπό τό νοητό. Δέν χρειάζεται ὅμως νά ἐκταθοῦμε, γιατί τόσο στή θεωρία της, ὅσο καί στίς παιδαγωγικές ἐφαρμογές της ἔχει πλατιά ἀπήχηση στήν ἐκπαίδευσή μας, τόσο στή Δημοτική ὅσο καί στή Μέση.

Ἡ γενετική διδακτική σάν μέθοδος δέν μπορεῖ νά νοηθεῖ χωριστά ἀπό τίς ψυχολογικές ἀρχές τῆς καταγωγῆς της. Καί γι'αὐτό ἐπιμείναμε τόσο στό θεωρητικό μέρος τῆς ψυχολογίας τοῦ Piaget καί εἰδικότερα στόν τρόπο τῆς λειτουργίας τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ ἐφήβου. Γιά νά γίνει μάλιστα καθαρότερη καί βαθύτερη ἡ κατανόηση ἐξετάσαμε κατ'ἀντιδιαστολή τίς ἐπικρατέστερες ψυχολογικές καί διδακτικές ἀρχές καί ἰδέες ἄλλων ψυχολόγων καί παιδαγωγῶν τοῦ αἰώνα μας πού μέχρι σήμερα ἐπηρέασαν καί ἐξακολουθοῦν νά ἐπηρεάζουν ποιός ξέρει ὡς πότε ἀκόμη τήν παιδεία μας. Ἡ συνεχής ροή τῆς ἀνθρωπότητας μέσα στό χρόνο τίς κρατᾶ ζωντανές ἀκόμη μέσα στούς κόλπους της, ὥς πού νά ἐπικρατήσουν οἱ νέες πού ἀδιάκοπα δυναμώνουν τρεφόμενες ἀπό τήν πρόοδο τῆς ἐπιστήμης καί τῆς τεχνικῆς. Τό νέο κυοφορεῖται πάντοτε μέσα στό παλαιό καί συζεῖ ἀνταγωνιστικά μαζύ του, ὥς πού νά ἐπικρατήσει ὁριστικά. Θά πρέπει ὅμως νά δοῦμε στό τέλος τῆς σημερινῆς ὁμιλίας μας τίς ἀπαραίτητες ἐκεῖνες τεχνικές πληροφορίες πού θά δώσουν σέ συγκεκριμένη μορφή ὅτι ὀνομάσαμε γενετική διδακτική.

Μιλήσαμε στήν ἀρχή γιά τήν ἐνόραση καί τήν ξεχωρίσαμε σέ δύο μορφές: τήν περιγραφική καί τήν κατασκευαστική. Ἡ περιγραφική ἀποτελεῖ στήν οὐσία της καί στή μορφή της τήν κλασσική διδακτική, ὅπως τήν ἔχομε περιγράφει στή διδασκαλία τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Θά δοῦμε τώρα πῶς μποροῦμε νά διδάξουμε τό ἴδιο μάθημα κατά τρόπο κατασκευαστικό, σύμφωνα μέ τή γενετική ψυχολογία ὅπου "ἡ νοητική εἰκόνα εἶναι πολύ περισσότερο ἕνα σκίτσο ἐκτελούμενο ἐσωτερικά κάθε φορά πού ὁ μαθητής τό ἀνακαλεῖ, παρά μιά φωτογραφία πού προβάλλει ἀπό ἕνα μυστηριῶδες βάθος (τῆς "μνήμης", τοῦ "ὑποσυνείδητου" κ.τ.λ.) κατά τήν ἀνάκλησή του".

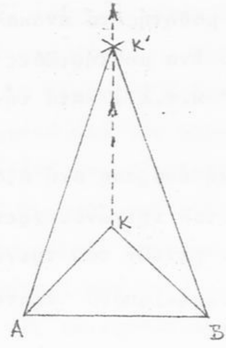
Γιά νά λειτουργήσει ἡ κατασκευαστική ἐνόραση στή διδασκαλία τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου χρειάζεται μία γενετική, δυναμική σύλληψη τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ἡ ἰταλίδα μαθηματικός καί παιδαγωγός Castelnuovo προτείνει τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Θέλομε, λέγει, νά τραβήξουμε τήν προσοχή τοῦ μαθητῆ στίς γωνίες τοῦ τριγώνου παρατηρώντας αὐτές τίς γωνίες καί ἡ παρατήρηση αὐτή νά γεννηθεῖ αὐθόρμητα. Ἀλλά οἱ γωνίες, ὅπως καί οἱ πλευρές, σάν στοιχεῖα ἑνός ὁποιουδήποτε σχήματος δέν παρατηροῦνται ὅσο τό σχῆμα εἶναι στατικό, ἀμετάβλητο. Ἡ παρατήρηση γεννιέται μόλις παρουσιασθεῖ μία ἀλλαγή. Ἡ σύγκριση σέ δύο τρίγωνα ἤ σέ μερικά τρίγωνα μπορεῖ νά ὁδηγήσει στό συμπέρασμα ὅτι μιά γωνία εἶναι πιό μεγάλη πιό μικρή ἤ ἴση.πρός κάποια ἄλλη. Ἡ παρατήρηση ὅμως αὐτή δέ λέγει τίποτα, δέν ὁδηγεῖ πουθενά.

Γιά νἆναι ἡ ἐνόραση κατασκευαστική,μέ τήν μαθηματική σημασία τοῦ ὅρου,πρέπει νά θεωρήσουμε ἕνα ἄπειρο ἀριθμό περιπτώσεις. Πρέπει κάθε περίπτωση νά συγκριθεῖ μέ τίς προηγούμενες καί μέ τίς ἑπόμενές της· σέ συντομία,πρέπει νά μετασχηματίζεται τό σχῆμα κατά ἀνεπαίσθητες μεταβολές. Αὐτό μπορεῖ νά γίνει μέ ἕνα κινηματογραφικό φίλμ, ἀλλά,ἀκόμη ἁπλούστερα, μποροῦμε νά μεταχειρισθοῦμε μιά στοιχειώδη συσκευή πού μπορεῖ νά τήν κατασκευάσει τό κάθε παιδί:

Ἕνα κομμάτι εὐθύγραμμο σύρμα AB ὑλοποιεῖ μιά πλευρά τριγώνου.

Ἕνα ἐλαστικό νῆμα προσδένεται στά ἄκρα, ὥστε , χαλαρό ,



νά συμπίπτει κατά τό μῆκος του μέ τήν ΑΒ.

Τείνουμε άπό τό μέσο τό έλαστικό νῆμα, ὥστε νά σχηματίζεται ἕνα ίσοσκελές τρίγωνο μέ μεταβλητές γωνίες. Ὅσο τείνεται τό έλαστικό, οἱ γωνίες Α καί Β. αὐξάνουν καί πάνε νά γίνουν όρθές, ένῶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Κ τείνει νά μηδενισθεῖ. Ἀντιστρέφομε τήν κίνηση πλησιάζοντας τήν κορυφή Κ πρός τήν ΑΒ, Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γωνία Κ αὐξάνει ένῷ οἱ Α καί Β τείνουν νά μηδενισθοῦν. Τελικά έξαφανίζεται τό τρίγωνο, ένῶ ἡ γωνία Κ γίνεται άποπλατυσμένη, δηλ. 2 όρθές. Ἡ αὐξομοίωση τῶν γωνιῶν τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου δίνει κατασκευαστικά τήν έν΄ραση τοῦ σταθεροῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ὅτι χάνει σέ μέγεθος ἡ ἀπομακρυνόμενη γωνία τῆς κορυφῆς Κ τό κερδίζουν οἱ γωνίες Α καί Β τῆς βάσεως καί ἀντίστροφα κατά τήν ἐπιστροφή.

Προτείνουμε ἀκόμη γιά τήν κατασκευαστική ένόραση τοῦ σταθεροῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τριγώνου τή χρησιμοποίηση ένός ἀρθρωτοῦ παραλληλογράμμου μέ μία κινητή διαγώνιο πού νά μοιράζει τίς γωνίες του σέ δύο ἴσα τρίγωνα.

Ἡ διαγώνιος αὐτή, στήν όρθογώνια θέση τοῦ παραλληλογράμμου, χωρίζει τίς 4 όρθές σέ δύο ἴσα όρθογώνια τρίγωνα ἀπό δύο όρθές στό καθένα.

Σέ μιά όποιαδήποτε ἄλλη θέση τοῦ μετασχηματιζόμενου παραλληλογράμμου βλέπομε ὅτι πάντα τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 4 όρθές (δύο ζεύγη έντός καί έπί τά αὐτά). Ἐπομένως στό καθένα ἀπό τά δύο ἴσα τρίγωνα πού χωρίζεται ἀπό τή μεταβλητή διαγώνιο ἀντιστοιχοῦν δύο όρθές.

῎Ας ἔλθουμε τώρα στά κλασσικά γνωρίσματα ἰδότητος τριγώνων:

Στό πειραματικό μας βιβλίο θά βρεῖτε ἁπλές σχετικά ἀποδείξεις στηριζόμενες στή συμμετρία πρός ἄξονα. Θά εἶναι ἴσως δύσκολο - δέν λέγω ἀδύνατο - νά ἀφομοιώσουν οἱ μαθηταί τῆς ἡλικίας τῶν 13 ἐτῶν τίς ἀποδείξεις αὐτές, ὅσο ἁπλές καί ἄν εἶναι στή διατύπωσή τους, χωρίς νά προηγηθεῖ μιά ἐνόραση τῆς ἀλήθειας τῶν προτάσεων.

῎Ας ζητήσουμε ἀπό τά παιδιά νά κατασκευάσουν ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, π.χ. ἀπό τήν πλευρά ΒΓ = 58 mm τή γωνία Β = 58^0 καί τή γωνία Γ = 72^0.

Τά παιδιά τό κατασκευάζουν χωρίς δυσκολία.

῎Ας τούς ζητήσουμε νά κατασκευάσουν μέ τά ἴδια στοιχεῖα ἕνα ἄλλο τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ καί νά τό συγκρίνουν μέ τό ΑΒΓ. Χωρίς κἄν νά ἀποτυπώσουν σέ διαφανές τό δεύτερο τρίγωνο γιά νά κάμουν τή σύγκριση, μερικά παιδιά θά ποῦν ἀμέσως ὅτι τά δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. Καί δέν θἄναι δύσκολο νά συμπεράνουμε ἐπαγωγικά ὅτι τό ἴδιο συμβαίνει σέ δύο ὁποιαδήποτε τρίγωνα πού ἔχουν τίς πλευρές ΒΓ = Β΄Γ΄ καί τίς γωνίες Β = Β΄ καί Γ = Γ΄.

Ἡ ἐνόραση αὐτή εἶναι περιγραφική, παρ᾽ὅλο πού μεσολάβησε κατασκευή. Εἶναι ὡστόσο ἀρκετά διδακτική καί δέν εἶναι σωστό νά ἀπορρίπτεται.

Μιά καθαρά κατασκευαστική ἐνόραση εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Ὁ μαθητής ἔχει στή διάθεσή του εὐθύγραμμα κομμάτια ἀπό σύρμα ἤ πλαστικό σέ διάφορα μεγέθη. Τοῦ ζητοῦμε νά κατασκευάσει διάφορα τρίγωνα. Ἀρχικά ἡ προσοχή του στρέφεται μόνο στίς πλευρές καί δέν θά τοῦ εἶναι δύσκολο νά διαπιστώσει ὅτι τό τρίγωνο δέν κατασκευάζεται μέ τρία ὁποιαδήποτε σύρματα. ῎Αν ἐπιστήσουμε τήν προσοχή του καί στίς γωνίες δέν θἆναι δύσκολο νά διαπιστώσει καί τίς δύο ἄλλες περιπτώσεις δυνατότητας κατασκευῆς τοῦ τριγώνου, δηλαδή ἀπό μιά πλευρά καί τίς προσκείμενές της γωνίες καί ἀπό 2 πλευρές καί τήν περιεχόμενή τους γωνία. Τά τρία γνωρίσματα ἰσότητος τῶν τριγώνων βγαίνουν σάν ἄμεσα συμπεράσματα. Καί δέν πρέπει νά ξεχνοῦμε ὅτι ἱστορικά τά γνωρίσματα ἰσότητος τριγώνων βγῆκαν ἀπό κατασκευαστικές ἀνάγκες.

Ἄν προχωρώντας ζητήσουμε ἀπό τά παιδιά νά κατασκευάσουν ἕνα τρίγωνο ἀπό τίς τρεῖς γωνίες του, θά μᾶς ρωτήσουν ἀμέσως : ποιά βάση θά πάρουμε ; θἆναι εὔκολο νά τά βοηθήσουμε νά φθάσουν στό συμπέρασμα ὅτι τρίγωνα μέ ἴσες μία πρός μία τίς γωνίες τους ὑπάρχουν πολλά.

Μόνο ὕστερα ἀπό μιά τέτοια ἐνόραση μποροῦμε νά πιστεύουμε ὅτι τά παιδιά εἶναι σέ θέση νά κατανοήσουν ὅσα ἀναφέρονται στό πειραματικό βιβλίο μας γιά τά γνωρίσματα ἰσότητας τῶν τριγώνων.

Ἀπό ὅλα αὐτά μποροῦμε νά συμφωνήσουμε μέ τήν Castelnuovo στά ἀκόλουθα:

1ον Τό ἁπλό σχέδιο δέν ἀρκεῖ γιά νά δώσει χαρακτῆρα κατασκευαστικό στήν ἐνορατική γεωμετρία. Δέν προβάλλει προβλήματα, γιατί παρέχει περιορισμένο ἀριθμό περιπτώσεις, πρᾶγμα πού περιορίζει τήν ἐλευθερία στή σκέψη τοῦ παιδιοῦ.

2ο . Τό γεγονός ὅτι τό ἁπλό σχῆμα εἶναι στατικό δέν ὁδηγεῖ στήν παρατήρηση καί συνεπῶς δέ μπορεῖ νά ὁδηγήσει στήν ἐνόραση τῆς ἀλήθειας.

3ον Δέν ἐπιτρέπει - κι 'αὐτό εἶναι προφανές - τό σχηματισμό μιᾶς πραγματικῆς εἰκόνας, ἔστω καί στατικῆς, μιᾶς γεωμετρικῆς καταστάσεως στό χῶρο, ἔξω δηλ. ἀπό τό ἐπίπεδο σχεδιάσεως.

Ἀλλά τό σχέδιο ἀποδεικνύεται ἀνεπαρκές καί γιά ἕνα ἄλλο λόγο: ὅταν τό παιδί σχεδιάζει ἕνα σχῆμα ἡ προσοχή του προσηλώνεται στίς γραμμές πού χαράσσει δηλαδή στό περίγραμμα καί ὄχι στό ἐσωτερικό τοῦ σχήματος πού μένει κενό,ἐνῶ οἱ γωνίες δέν ξεκαθαρίζονται σάν κύρια στοιχεῖα τοῦ σχήματος, γιατί τό παιδί δέν ἔχει τήν ἀπαραίτητη ἀγωγή γιά μιά γενικότερη ἑρμηνεία.

Γιά νἄχει λοιπόν ἡ ἐνορατική γεωμετρία κατασκευαστικό χαρακτῆρα, πρέπει νά προσφεύγουμε ὄχι μόνο στό συγκεκριμένο ἀντικείμενο ἀλλά καί στή γενετική κίνηση.

Τά πρακτικά μέσα μπορεῖ νά εἶναι διάφορα, ὅπως ἕνα μοντέλο, μιά συσκευή, ἕνα πείραμα πραγματοποιούμενο μέ ὑλικά μέσα ἤ ἁπλῶς φανταζόμενο, μεταβολές,φωτεινῶν κινηματογραφικῶν εἰκόνων ἤ σκιῶν κ.λ.π.

Ὕστερα ἀπό τήν ἐκτενῆ αὐτή παρεμβολή γιά τή διδακτική ὑπεροχή τῆς κατασκευαστικῆς ἐνοράσεως ἀντίκρυ στήν περιγραφική, πρέπει - γιά νά ὁλοκληρώσουμε τήν ἑνότητα τῆς ὁμιλίας μας - νά ξαναγυρίσουμε στό ἔργο τοῦ Aebli καί νά δοῦμε πῶς ἐννοεῖ ὁ ἴδιος τή γενετική διδακτική, πῶς τήν ἐφάρμοσε πειραματικά καί σέ ποιά συμπεράσματα κατάληξε. Περιττό βέβαια νά ἀναφέρουμε ὅτι ἡ κατασκευαστική ἐνόραση, ὅπως τήν ἔχομε ἐκθέσει, βρίσκεται μέσα στά πλαίσια τῆς γενετικῆς διδακτικῆς, κι'αὐτό θά μᾶς ἐπιτρέψει νά εἴμαστε ὅσο εἶναι δυνατό σύντομοι.

Κατά τή θεμελιώδη θέση τῆς γενετικῆς ψυχολογίας ἡ σκέψη δέν εἶναι ἕνα σύνολο ἀπό στατικά στοιχεῖα οὔτε μιά συλλογή ἀπό "περιεχόμενα τῆς συνειδήσεως", εἰκόνες κ.τ.λ.,ἀλλά ἕνα παιγνίδι ἀπό ζωντανές καί δραστικές λογικές πράξεις. Σκέπτομαι θά πεῖ ἐκτελῶ. Ὅταν λέμε ὅτι ὁ μαθητής πρέπει νά ἀφομοιώσει ὁρισμένες γνώσεις,ἐννοοῦμε ὅτι πρέπει νά μάθει νά έκτελεῖ άντίστοιχες λογικές πράξεις, άρχικά στήν πραγματικότητα, αύτούσια ἤ εἰκονική καί κατόπιν σέ μορφή έσωτερικευμένη ' ἤ, ἄν θέλετε, παραστατική. Χωρίς τήν προσωπική ένέργεια καί δράση τοῦ μαθητῆ πάνω στό πραγματικό πεδίο (αύτούσιο ἤ εἰκονικό) κάθε διδασκαλία βγαίνει. ἔξω ἀπό τά ὅρια καί τούς νόμους τῆς γενετικῆς ψυχολογίας, ὅσο καί ἄν τό άντικείμενό της βρίσκεται μέσα στήν άκτίνα τῆς ψυχογενετικῆς ὡριμότητας τοῦ μαθητῆ.

Πρέπει λοιπόν στό κάθε νέο άντικείμενο μαθήσεως νά άναζητήσουμε τά κίνητρα καί τά μέσα πού θά θέσουν σέ λειτουργία τή μαθητική σκέψη κατά τρόπο δημιουργικό καί, πιό συγκεκριμένα, κατασκευαστικό.. Στήν ἔρευνά του ὁ μαθητής θά έπικαλεσθεῖ καί θά δοκιμάσει ὅλο τόν άποκτημένο γνωστικό ὁπλισμό του (πού πάντα πρέπει νά τόν κρατεῖ σέ κατάσταση έτοιμότητας)· θά κάμει ὑποθέσεις καί συσχετίσεις, ὥς πού ἡ άστραπή τῆς ένοράσεως θά φωτίσει τή σκέψη νά "έπανεύρει" τή μαθηματική άλήθεια. Ἡ κατάκτηση ἔτσι τῆς μαθηματικῆς άλήθειας εἶναι κάτι πού μένει, γιατί ὅλοι οἱ χειρισμοί τῶν ὑλικῶν άντικειμένων καί ὅλες οἱ γραφικές παραστάσεις πού χαράχθηκαν κατά τήν ἔρευνα ἔχουν έσωτερικευθεῖ λειτουργικά στή σκέψη καί μποροῦν σέ κάθε στιγμή νά άναπαραχθοῦν.

Ξεχνάει εὔκολα ὁ μαθητής έκεῖνο πού μαθαίνει άπό τρίτους, δέν ξεχνάει ὅμως ποτέ έκεῖνο πού βρίσκει ὁ ἴδιος. Ἡ σκέψη άνεβαίνει πάντα άπό τό χέρι στό κεφάλι γιά νά ξαναγυρίσει σοφότερη καί άποτελεσματικότερη πάλι στό χέρι. Μέ τό γοργό αὐτό παλινδρομικό πέρασμά της άπό τό χέρι στό κεφάλι ὑφαίνεται, ὅπως μέ τή σαΐτα, τό ὕφασμα τῆς γνώσεως στόν άργαλιό τῆς παιδείας. Ἡ γνώση δέν εἰσάγεται, ἕτοιμη άπό τόν ἔξω κόσμο μέσα στό κεφάλι τοῦ μαθητῆ. Κατασκευάζεται γενετικά μέ πραγματική ένεργό δράση, ὅπου τό χέρι παίζει βασικό ρόλο, τόσο βασικό, πού τολμοῦμε νά ποῦμε ὅτι τό παιδί σκέπτεται μέ τό χέρι.

. .

Ἄς δοῦμε τώρα, γιά νά τελειώνουμε, τό συγκεκριμένο διδακτικό πείραμα τοῦ Aebli καί τά πορίσματά του:

Τό πείραμα ἔγινε στό τέλος τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1948-49 στήν τελευταία τάξη δύο μικρῶν δημοτικῶν σχολείων, σέ παιδιά ἡλικίας 12 ἐτῶν καί 2 μηνῶν ἕω 12 ἐτῶν καί 5 μηνῶν. Τό ἕνα σχολεῖο ἀνῆκε σέ μία πλούσια κωμόπολη 8000 κατοίκων στίς ἀκτές τῆς λίμνης τῆς Ζυρίχης, τό ἄλλο σ'ἕνα προάστιο ἡμιαγροτικό τῆς Ζυρίχης. Στό πρῶτο ἐφάρμοσε τήν κατά παράδοση διδασκαλία, στό δεύτερο τή γενετική κατά Piaget. Ἡ τάξη τοῦ πρώτου εἶχε 14 ἀγόρια καί 22 κορίτσια, ἡ τάξη τοῦ δευτέρου 15 ἀγόρια καί 15 κορίτσια. Πρίν ἐφαρμόσει τήν πειραματική διδασκαλία θέλησε νά ἐξακριβώσει μέ ἕνα τέστ τή νοητική στάθμη τῶν μαθητῶν καί τίς ἀποκτημένες γνώσεις τους. Διάλεξε λοιπόν 30 προβλήματα ἀναφερόμενα σέ μήκη καί σέ ἐπιφάνειες, στά ὁποῖα ἀπάντησαν γραπτά τά παιδιά σέ χρονικό διάστημα 2 ὡρῶν. Νά τρία ἀπό αὐτά τά προβλήματα γιά κατατοπισμό:

21. Μία ὁριζοντία στέγη εἶναι σκεπασμένη μέ 8 ταινίες ἀπό 20 τετράγωνες πλάκες ἡ κάθε μιά. Ἡ κάθε τετράγωνη πλάκα ἔχει μῆκος καί πλάτος 1 m. Πόσο εἶναι τό μῆκος καί πόσο τό πλάτος τῆς στέγης;

22. Πόσες πλάκες χρειάστηκαν γιά νά σκεπασθεῖ ἡ στέγη;

23. Πόσο μῆκος ἔχει ἡ κορνίζα πού περιβάλλει τή στέγη;

Ἡ βαθμολογία τῶν γραπτῶν κατά τή διόρθωση εἶταν μιά μονάδα γιά κάθε σωστή λύση.

Ὅπως μποροῦσε νά προβλεφθεῖ, τά παιδιά τῆς πρώτης ὁμάδας (πλούσια κωμόπολη) παρουσίασαν ἀνώτερη στάθμη γνώσεων καί νοήσεως μέ μέσο ὅρο βαθμολογίας 22,3 ἀπέναντι 19,6 τοῦ ἡμιαγροτικοῦ προαστίου. Κράτησε τελικά γιά τήν πειραματική διδασκαλία 26 παιδιά ἀπό τό πρῶτο καί 23 ἀπό τό δεύτερο σχολεῖο , τῆς ἴδιας περίπου νοητικῆς στάθμης.

Ἄς ἔλθουμε τώρα στή διδασκαλία, ὅπως ἔγινε ἀπό τόν ἴδιο τόν Aebli στά δύο σχολεῖα.

Α.' Γενετική διδακτική (μοντέρνο τμῆμα).

Ἡ διδασκαλία ὅπως εἴπαμε, ἔγινε στό ἡμιαγροτικό προάστιο, δηλαδή στά παιδιά πού μειονέκτησαν στό δοκιμαστικό τέστ. Ἀναπτύχθηκε σέ 7 μαθήματα καί εἶχε ἀντικείμενο τήν περίμετρο καί τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου. Δέν πρόκειται βέβαια νά ἀναπτύξουμε τίς 7 αὐτές διδασκαλίες στίς λεπτομέρειές τους ,θά ἀναφέρουμε μόνο τά βασικά χαρακτηριστικά τους. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι στήν Ἐλβετία τά παιδιά αὐτῆς τῆς ἡλικίας δέν ἔχουν ἀκόμη διδαχθεῖ τά ἐμβαδά, ὅπως σ'ἐμᾶς στό δημοτικό, καί ὁ λόγος εἶναι εὐνόητος, ἀφοῦ στήν Ἐλβετία ἡ φοίτηση εἶναι ὑποχρεωτική καί δωρεάν πολύ πέρα ἀπό τήν ἡλικία αὐτή.

Εἴπαμε παραπάνω ὅτι σέ μιά γενετική διδακτική ξεκινοῦμε ἀπό τήν πραγματικότητα, αὐτούσια ἤ εἰκονική. Ἐπειδή δέν εἴταν.εὔκολο νά μεταβεῖ ἡ τάξη σ'ἕνα πραγματικό ὀρθογώνιο κῆπο, ἡ ἐργασία ἔγινε σ'ἕνα εἰκονικό μέ διαστάσεις 7m 4m καί πάνω σέ τετραγωνισμένο κατά cm χαρτί. Τά παιδιά δέν δυσκολεύθηκαν νά τόν σχεδιάσουν σέ κλίμακα 1:100 , ἐνῶ ὁ δάσκαλος τόν σχεδίασε στόν πίνακα σέ κλίμακα 1:10 (7dm 4dm).

Σέ συνέχεια ὁ δάσκαλος ζητᾶ νά μάθει τό μῆκος τοῦ καγκελωτοῦ φράκτη. Τά παιδιά δέν βρίσκουν καμιά δυσκολία, τά ἀποτελέσματα γράφονται στόν πίνακα:

$$4\ m + 7\ m + 4\ m + 7\ m = 22\ m$$

---

*Ὁ Aebli τή χαρακτηρίζει ἐνεργητική διδακτική (didactique active).

4 m + 4 m + 7 m + 7 m = 22 m

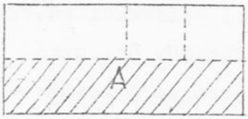
2x4 m = 8 m , 2x7 m = 14 m , 8 m + 14 m = 22 m

4 m + 7 m = 11 m , 2x11 m = 22 m

Ὁ δάσκαλος καμώνεται πώς ἀπορεῖ, γιατί βρίσκεται πάντα τό ἴδιο ἀποτέλεσμα, οἱ μαθηταί ὅμως τοῦ ἐξηγοῦν ὅτι αὐτό συμβαίνει, γιατί ἡ σύνθεση τῶν πλευρῶν ἔγινε μέ διαφορετικούς τρόπους. Ἀκολουθεῖ συμφωνία γιά τούς ὅρους "μῆκος", "πλάτος" , "περίμετρος" καί σέ συνέχεια μεταβολή τῶν διαστάσεων μέ προσθῆκες κατά τρόπο πού τό νέο σχῆμα νά παρουσιάζει ἕνα σύμπλεγμα ἀπό ὀρθογώνια πού οἱ μαθηταί καλοῦνται νά τά ξεχωρίσουν καί νά βροῦν τίς περιμέτρους τους. Ἀφοῦ οἱ μαθηταί ἀσκηθοῦν καλά στήν εὕρεση τῆς περιμέτρου ἀπό τό μῆκος καί τό πλάτος τῶν διαφόρων ὀρθογωνίων τοῦ συμπλέγματος, ἀρχίζει σάν παιγνίδι ἡ ἀντίστροφη ἐργασία: ἡ ἀνεύρεση δηλαδή, μέσα στό σύμπλεγμα, ἑνός ὀρθογωνίου ἀπό τήν περίμετρό του, π.χ. 2 cm + 2 cm + 5 cm + 5 cm. Ἡ ἐργασία αὐτή γίνεται στόν πίνακα καί ἀπαιτεῖ μεγάλη συγκέντρωση προσοχῆς. Στό τέλος ὑπολογίζεται ἄλλη μιά φορά ἡ περίμετρος τοῦ ἀρχικοῦ ὀρθογωνίου (ἀφοῦ σβηστοῦν τά πρόσθετα). Αὐθόρμητα οἱ περισσότεροι μαθηταί ἔχουν καταλήξει στή μορφή . 2 x 4 + 2 x 7 καί ὁ δάσκαλος δέν ἐπιβάλλει κανένα τύπο, ἐνῶ ἡ διδασκαλία κλείνει μέ τήν ἀντίθετη ἐργασία (δέν πρέπει νά ξεχνᾶμε ὅτι κάθε λογική πράξη εἶναι ἀντιστρεπτή): Ἀπό τήν περίμετρο τῶν 22 m ἀφαιροῦμε διδοχικά τίς πλευρές, ὥς πού νά βροῦμε ὑπόλοιπο 0. Στά 10 λεπτά πού ἔμειναν ἀπό τή διδασκαλία οἱ μαθηταί ὑπολόγισαν χωρίς δυσκολία μερικές ἀκόμη περιμέτρους μέ διάφορα δεδομένα.

Τό δεύτερο μάθημα ἀναφέρεται στή σύγκριση ὀρθογωνίων ἐπιφανειῶν μέ ἀκέραιες διαστάσεις πού ὁδηγεῖ στήν εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ. Ἡ ἐργασία καί πάλι γίνεται σέ ἀπεικονισμένους ἀγρούς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η , , μιᾶς περιοχῆς πού ἔχουν σχῆμα ὀρθογώνιο, ἤ δυνάμενο νά χωρισθεῖ σέ ὀρθογώνια.

Δύο ἀπό τούς ἀγρούς σχεδιάζονται στόν πίνακα:



Ὁ Α ἔχει διαστάσεις 4×2, ὁ Β 6×1.

Στό σχέδιο μέ τούς 7 ἀγρούς πού ἔχει δοθεῖ στόν κάθε μαθητή τό σχῆμα εἶναι σέ κλίμακα 1:100 στόν πίνακα 1:10.

Τό πρόβλημα μπαίνει ὡς ἑξῆς: Ὁ ἰδοκτήτης τοῦ ἀγροῦ Α ἐθέρισε τέσσερα φορτία στάχυα. Ὁ γείτονάς του Β τοῦ προτείνει νά κάμουν ἀνταλλαγή τῶν δύο ἀγρῶν.

Συμφέρει αὐτό στόν ἰδοκτήτη τοῦ Α ;

Ἕνας μαθητής παρατηρεῖ ἀμέσως ὅτι θά σκεφθεῖ ἄν θά ἔχει τήν ἴδια συγκομιδή ἀπό τόν ἀγρό Β.

Ὁ δάσκαλος προτείνει στά παιδιά νά βροῦν ἀπάντηση γιά τό χωρικό· μποροῦν νά χρησιμοποιήσουν ψαλίδι ἤ ἕνα ἄλλο φύλλο χαρτί. Τό σχέδιο δέν πρέπει νά πειραχθεῖ.

Ἐπί μερικά λεπτά οἱ μαθηταί ἀναζητοῦν ἕνα μέσον συγκρίσεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν συζητῶντας μεγαλόφωνα μεταξύ τους : Μερικοί νομίζουν ὅτι ὁ ἀγρός Β (6×1) εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν Α (4×2) γιατί ἔχει μεγαλύτερη περίμετρο (14 ἀντίκρυ σέ 12 m). Ἄλλοι ὅμως ἔχουν ἀντιρρήσεις, γιατί ἔχουν τήν ἄμεση ἐντύπωση ὅτι ὁ Α ἔχει μεγαλύτερη ἐπιφάνεια. Μερικοί ἐν τούτοις (περισσότερο κορίτσια) ἔχουν τήν ἰδέα νά ἀποτυπώσουν καί νά ἀποκόψουν σέ διαφανές χαρτί τόν ἀγρό Β καί νά προσπαθήσουν νά καλύψουν τόν ἀγρό Α. Μιά μαθήτρια μάλιστα ἀποκόπτει ἀπό τόν ἀποτυπωμένο ἀγρό Β ἕνα ἑκατοστό, καί ἀπό τά δύο ἄκρα,καί παρατηρεῖ ὅτι ἡ ταινία πού μένει τῶν 4 cm καλύπτει ἀκριβῶς τό μισό ἀγρό Α. Τά.δύο ἄλλα κομμένα τεμάχια τά τοποθετεῖ στό ἄλλο μισό τοῦ Α, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα. Ὅλη ἡ τάξη συμφωνεῖ ὅτι ὁ ἀγρός Β εἶναι μικρότερος ἀπό τόν Α ,γιατί ἀποδίδει μόνο 3 φορτία (ἕνα στά δύο τετράγωνα) στάχυα ἀντίκρυ στά 4 τοῦ Α. Ὅλοι οἱ μαθηταί ἀποκόπτουν κατά τόν ἴδιο τρόπο τόν ἀγρό Β καί κάμνουν τήν ἐπαλήθευση. Εἶναι φανερό ὅτι τό πέρασμα ἀπό τά φο ρτία τά στάχυα στό μετρικό τετράγωνο σάν μονάδα μετρήσεως εἶναι εὔκολο καί γίνεται ἀπό τά ἴδια τά παιδιά,χωρίς τή βοήθεια τοῦ δασκάλου. Ὁ ἀγρός λοιπόν Β ἔχει 6 μετρικά τετράγωνα ἐνῶ ὁ Α ἔχει 8, (Δέν γίνεται ἀκόμα χρήση τῶν καθιερωμένων ὅρων). Ἔτσι ἡ τάξη φθάνει στό συμπέρασμα ὅτι ἡ περίμετρος δίνει τό μῆκος τοῦ καγγελωτοῦ φράκτη, ἐνῶ γιά τήν ἐπιφάνεια χρειάζεταινάὐπολογοισθεῖ ἡ ἀπόδοση τοῦ ἀγροῦ.

Σέ συνέχεια ὁ δάσκαλος ζητᾶ ἀπό τά παιδιά νά θέσουν δικά τους προβλήματα σχετικά μέ τούς ἀγρούς.Α καί Β πάνω σέ δεδομένα σχετικά μέ τό σκάψιμο τοῦ ἀγροῦ, τή λίπανση, τό βάψιμο τοῦ φράκτη κ.τ.λ.

Στό τρίτο μάθημα γίνεται μεθοδικά διαχωρισμός τοῦ ὀρθογωνίου σέ ταινίες ἀπό μετρικά τετράγωνα καί ἀκολουθεῖ ἡ εὕρεση τοῦ ἐμβαδοῦ μέ πολλαπλασιασμό τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεραγώνων μιᾶς ταινίας μέ τόν ἀριθμό τῶν ταινιῶν.

Χρησιμοποιεῖται πάλι τετραγωνισμένο χαρτί καί ἐπί πλέον ἕνα χαρτόνι κομμένο σέ ὀρθή γωνία μέ μήκη πλευρῶν 20 cm καί 15 cm καί πλάτος ταινίας 3 cm. Μετακινώντας κατάλληλα αὐτή τή γωνία μποροῦν οἱ μαθηταί νά ἀποχωρίζουν στό τετραγωνισμένο χαρτί,π.χ. ἀριστερά καί ἐπάνω,διάφορα ὀρθογώνια καί νά μετροῦν τόν ἀριθμό τῶν ταινιῶν τοῦ καθενός καί τά μετρικά τετράγωνα τῆς κάθε ταινίας καί ἀντίστροφα νά ξεχωρίζουν τό ὀρθογώνιο,ὅταν τούς δοθεῖ ὁ ἀριθμός τῶν ταινιῶν του καί ὁ ἀριθμός τῶν τετραγώνων τῆς κάθε ταινίας. Ἡ ἄσκηση εἶναι ἐξαιρετικά ἐνδιαφέρουσα γιά τά παιδιά καί ὁδηγεῖ ἀλάνθαστα στήν ἐνόραση τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου μέ τόν πολλαπλασιασμό τοῦ μήκους μιᾶς ταινίας μέ τόν ἀριθμό τῶν ταινιῶν καί στόν ὁρισμό τῆς τετραγωνικῆς μονάδας πού μπορεῖ νά εἶναι τό 1 cm^2 στό σχέδιο τοῦ τετραδίου,τό 1 dm^2 στό σχέδιο τοῦ πίνακα τό 1 m^2 στόν ἀγρό.

Στό τέταρτο μάθημα τό πρόβλημα μπαίνει διαφορετικά:

" Ἡ Ἰωάννα θέλει νά πλέξει ἕνα κλινοκάλυμμα γιά τή μητέρα της. Πλέκει γιαυτό τετράγωνα μέ πλευρά 1 dm γιά νά τά συρράψει κατόπιν. Θά περιβάλει τελικά τό κλινοκάλυμμα μέ ἕνα στενό φυτίλωμα ἀπό ὕφασμα . Τό κλινοκάλυμμα πρέπει νά ἔχει μῆκος 12 dm καί πλάτος 7 dm ".

Τά παιδιά ἀρχίζουν μέ ἕνα σχεδιάγραμμα,σέ κλίμακα 1:10· δηλαδή καταλήγουν σέ ὀρθογώνιο μέ διαστάσεις 12x7 (ἐδῶ ἡ σκέψη προηγεῖται καί ἀκολουθεῖ τό σχεδίασμα).

Βρίσκεται πρῶτα ἡ περίμετρος καί ἀναγράφεται στόν πίνακα:

2×7 dm = 14 dm

2×12 dm =24 dm

περίμετρος =38 dm (γύρος τοῦ κλινοκαλύμματος)

Ἕνας μαθητής προτείνει:

"Χρειάζονται 84 τετράγωνα γιά νά κατασκευασθεῖ τό κλινοκάλυμμα".

Οἱ ἄλλοι συμφωνοῦν καί δικαιολογοῦν τό ἀποτέλεσμα. Πλάϊ στόν ὑπολογισμό τῆς περιμέτρου μπαίνει ὁ ὑπολογισμός τῆς ἐπιφάνειας:

7 ταινίες τῶν 12 dm^2

7×12 dm^2 = 84 dm^2

ἐπιφάνεια = 84 dm^2 (κλινοκάλυμμα)

'Ακολουθοῦν ἄλλα προβλήματα μέ ποικίλο περιεχόμενο π.χ. στρώσιμο τετράγωνων πλακῶν κατά ταινίες 43 πλακῶν κ.λ.π.

Τελικά γίνεται τό πέρασμα στήν ἀφηρημένη πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο διαστάσεων γιά νά βρεθεῖ τό ἐμβαδόν καί στήν πρόσθεση τῶν διπλασίων τους γιά νά βρεθεῖ ἡ περίμετρος.

Στό πέμπτο μάθημα γίνεται συγκεκριμένη προπαρασκευή γιά τήν ἀριθμητική λύση ἀντίστροφων προβλημάτων.

'Η τάξη ἔχει χωρισθεῖ σέ 6 ὁμάδες καί στή διάθεση τῆς καθεμιᾶς ἔχουν τεθεῖ 36 τετράγωνα χαρτόνια μέ πλευρά 1 dm τό καθένα. Οἱ ὁμάδες ἐργάζονται στό δάπεδο σύμφωνα μέ τίς ἀκόλουθες ὁδηγίες:

"Γιά νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο πρέπει νά χρησιμοποιηθοῦν καί τά 36 τετράγωνα. Λάβετε τή μιά πλευρά 4 dm καί ὑπολογίσετε πόσες ταινίες τῶν 4 dm θά χρειασθοῦν γιά νά μποῦν ὅλα τά τετράγωνα χαρτόνια. Κάμετε ἐπαλήθευση. 'Αλλάξετε ὕστερα τή βάση καί ἐργασθεῖτε κατά τόν ἴδιο κάθε φορά τρόπο". Τά ἀποτελέσματα καταγράφονται σέ ἕνα πίνακα ἑτοιμασμένο ἀπό πρίν:

'Αρχική πλευρά σέ dm	dm^2 στήν ἀρχική ταινία	Πόσες ταινίες	μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς	ὑπολογισμός

'Ο δάσκαλος παρακολουθεῖ καί ἐπεμβαίνει, ὅπου χρειάζεται.

Στό 6ο μάθημα γίνεται γραφική παράσταση τῆς ἀντίστροφης πράξεως.

'Ο δάσκαλος παρουσιάζει ἕνα ἀριθμό τετράγωνα χαρτόνια τῶν 1 dm^2:

Δ. "Εχω ἐδῶ μερικά τετράγωνα. Θέλω νά κατασκευάσουμε μ' αὐτά μία ταινία μέ πλάτος 3 dm.

Θέτω ἕνα ζήτημα ...

Μαθ. Πόσο θᾶναι τό μῆκος τῆς ταινίας. Πρέπει ὅμως πρῶτα νά ξέρουμε πόσα εἶναι τά τετράγωνα.

Ὁ δάσκαλος φωνάζει ἕνα μαθητή καί τά μετρᾶ: τά βρίσκει 15 καί τά ἁπλώνει σέ μιά ταινία 1,5 m κατά μῆκος τῆς ἕδρας.

Μαθ. Πρέπει κάθε φορά νά παίρνουμε 3 τετράγωνα.

Ἔτσι φθάνομε σέ ἕνα ὀρθογώνιο μέ μῆκος 5 dm

Οἱ μαθηταί δικαιολογοῦν τήν πράξη κατά τρόπο πού φανερώνει τήν πλήρη κατανόησή της. Τελικά ἡ πράξη μεταφέρεται στό ἀριθμητικό πεδίο καί ἀναγράφεται στόν πίνακα:

$15\ dm^2 : 3\ dm^2 = 5$ φορές

Αὐτό δίνει 5 ταινίες.

Ὕψος 5 dm

Χωρίς δυσκολία βρίσκεται καί ἡ περίμετρος, 16 dm.

Σέ συνέχεια ὁ δάσκαλος σχεδιάζει στόν πίνακα μιά ταινία πλάτους 15 dm χωρισμένη σέ 5 μέρη ἀπό 3 dm τό καθένα καί σχηματοποιεῖ τή μετακίνηση κάθε ταινίας τῶν 3 dm κατά τρόπο πού ἐμφανίζεται τελικά τό ὀρθογώνιο $5 \times 3 = 15\ dm^2$. Οἱ μαθηταί ἐκτελοῦν τό ἴδιο σχέδιο σέ χαρτί μέ κλίμακα 1:10, δηλ. σέ cm.

Ἀκολουθοῦν παρόμοια προβλήματα μέ ἄλλο πλῆθος τετράγωνα χαρτόνια π.χ. 72 πού πρέπει νά διατεθοῦν μέ βάση 9 dm ἤ 12 dm κ.λ.π. καί ζητεῖται νά βρεθεῖ τό ὕψος. Ἡ ἐπιτυχία τῆς ἀσκήσεως δείχνει ὅτι τά παιδιά εἶναι πιά ὥριμα νά περάσουν στό ἀφηρημένο στάδιο τοῦ καθαροῦ ἀριθμητικοῦ λογισμοῦ καί νά λύσουν κάθε παρόμοιο πρόβλημα, χωρίς νά προσφεύγουν οὔτε στό πραγματικό πεδίο ἔρευνας, οὔτε σέ γραφική παράσταση Νά π.χ. ἕνα πρόβλημα σέ συνεχές γεωμετρικό μέγεθος:

"Μιά ὁμάδα ἐργάτες ἀσφαλτοστρώνουν 48 m^2 τήν ἡμέρα σ'ἕνα δρόμο.. 'Ο δρόμος αὐτός ἔχει πλάτος 4 m. Πόσα μέτρα μῆκος θάχει τό τμῆμα τοῦ δρόμου πού μποροῦν νά ἀσφαλτοστρώσουν σέ μιά μέρα ;"

Οἱ λίγες δυσκολίες πού παρουσιάσθηκαν ἀρχικά σ'αὐτό τό πρόβλημα ἐξουδετερώθηκαν, ὅταν ὁ δάσκαλος τούς ὑπέδειξε ὅτι τά 48 m^2 πού μποροῦν νά τεθοῦν σέ μιά ταινία 48 m μήκους πρέπει νά κατανεμηθοῦν διαφορετικά, ἀφοῦ ὁ δρόμος δέν ἔχει πλάτος 1 m ἀλλά 4 m. Πῶς ;

Στά λίγα λεπτά πού μένουν γιά νά κλείσει ἡ διδακτική ὥρα λύεται ἀτομικά ἀκόμη ἕνα πρόβλημα παρόμοιο μέ τό προηγούμενο.

Στό ἕβδομο, τέλος , μάθημα μπῆκαν 13 συνολικά προβλήματα μέ ποικίλο περιεχόμενο σχετικά μέ τήν περίμετρο καί τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου γιά νά λυθοῦν ἀτομικά ἀπό τό κάθε παιδί. Τό ἀποτέλεσμα ἀπόδειξε ὅτι οἱ τρεῖς πράξεις, δηλ. περίμετρος ὀρθογωνίου, ἐμβαδόν ὀρθογωνίου, ἀντιστροφή τοῦ ἐμβαδοῦ,ἀφομοιώθηκαν καλά ἀπό ὁλόκληρη τήν τάξη μέ κανονικές διακυμάνσεις ἀδυναμιῶν.

Δέν νομίζομε ὅτι χρειάζεται νά ἐκταθοῦμε πολύ γιά τό πείραμα μέ κατά παράδοση διδασκαλία πού ἔγινε στά 26 παιδιά ἀνώτερης πνευματικῆς στάθμης στήν παράκτια κωμόπολη τῆς λίμνης τῆς Ζυρίχης. Σημειώνομε ὅτι χρειάσθηκαν μόνο 5 μαθήματα γιά νά γίνει πλήρης ἡ ἀφομοίωση τῆς διδασκαλίας στά τρία παρουσιαζόμενα προβλήματα τοῦ ὀρθογωνίου. Τά πρωτόκολλα τῶν 5 διδασκαλιῶν πού ἔκαμε ὁ ἴδιος ὁ Aebli ὑπάρχουν στό βιβλίο του καί μποροῦν νά πείσουν γιά τό ἄφογο τῆς διδασκαλίας. Τά προβλήματα πού μπαίνουν στό κάθε μάθημα εἶναι ἀνάλογα μέ τά προβλήματα πού μπήκαν στήν τάξη τῆς γενετικῆς διδασκαλίας.

'Εδῶ ὅμως ἡ ἐπέμβαση τοῦ δασκάλου εἶναι συχνότερη καί ἡ ἐργασία τῆς τάξεως ἔκδηλα κατευθυνομένη. Ὁ διάλογος δασκάλου καί μαθητῶν εἶναι πυκνός καί ἡ κατανόηση τοῦ κάθε μαθήματος, ὅπως καί ἡ ἀφομοίωσή τους,γίνεται σέ γοργότερο ρυθμό. Τά προβλήματα πού μπαίνουν ἔχουν τήν ἴδια, ὅπως καί πρίν ὑφή καί ποικιλία.

Στό τελευταῖο μάθημα δόθηκαν 15 προβλήματα γιά νά διαπιστωθεῖ ὁ βαθμός ἀφομοιώσεως τῶν μαθημάτων. Τά ἀποτελέσματα ταν ἀνώτερα ἀπό τά ἀποτελέσματα τῆς γενετικῆς διδασκαλίας. Ἔξω ἀπό μερικά λογιστικά σφάλματα,δέν βρέθηκε οὔτε μιά πλάνη στό εἶδος τῶν πράξεων πού ὁδηγοῦσαν στή σωστή λύση. Οἱ ὀπαδοί τῆς κλασσικῆς διδασκαλίας θά μποροῦσαν νά ἀντλήσουν ἐπιχειρήματα ἀπό ἕνα τέτοιο ἀποτέλεσμα.

Τέσσερις μόνο μέρες ὕστερα ἀπό τό τελευταῖο μάθημα στά δύο σχολεῖα ἔγινε μιά γραπτή δοκιμασία μέ 30 προβλήματα , τά ἴδια καί στίς δύο τάξεις. Καί τά 30 προβλήματα ἀναφερόταν στά διδαγμένα γιά τό ὀρθογώνιο. Ὁ συγγραφέας τοῦ βιβλίου παραθέτει ἕνα λεπτομερειακό στατιστικό πίνακα τῶν ἀποτελεσμάτων. Δίνομε τά πιό χαρακτηριστικά στοιχεῖα αὐτοῦ τοῦ πίνακα.

Οἱ καλοί μαθηταί καί τῶν δύο τάξεων, ὅπως εἶχαν καταταχθεῖ στήν ἀρχική δοκιμασία (πρίν ἀρχίσει ἡ διδασκαλία) παρουσιάζουν ἀσήμαντες παρεκκλίσεις. Οἱ μαθηταί αὐτοί εἶναι 10 ἀπό τήν τάξη τῆς γενετικῆς διδασκαλίας καί 18 ἀπό τήν ἄλλη τάξη , τῆς κλασσικῆς.

Οἱ καθυστερημένοι ὅμως μαθηταί,ὅπως εἶχαν ἀρχικά καταταχθεῖ, 13 ἀπό τήν τάξη τῆς γενετικῆς διδασκαλίας καί 8 ἀπό τήν ἄλλη, παρουσιάζουν καταπληκτική διαφορά. Στήν τάξη τῆς γενετικῆς διδασκαλίας σέ 302 περιπτώσεις λύσεως προβλημάτων παρουσιάζονται 21 περιπτώσεις μέ σύγχυση πράξεων, δηλαδή 7%.

Στό ἄλλο τμῆμα, σέ 220 προβλήματα παρουσιάζονται 82 περιπτώσεις μέ σύγχυση πράξεων,δηλ. ποσοστό 37,3 % !
Ποσοστό ὀρθῶν λύσεων : 93 % στό γενετικό τμῆμα, 53,7 % στό ἄλλο.

Ἡ διαφορά πού παρουσιάζεται ἀνάμεσα στίς δύο τάξεις προκειμένου γιά τούς ἀδύνατους μαθητές πού ὑποβλήθηκαν μαζύ μέ τούς καλούς στά δύο εἴδη διδασκαλίας, εἶναι καταπληκτική καί πολύ διδακτική ἡ ἀνάλυση τῶν ἀποτελεσμάτων πού κάμνει στό τέλος τοῦ βιβλίου του ὁ Aebli.

Ἡ σύγχυση μάλιστα τῆς περιμέτρου μέ τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου πού παρουσιάζει ποσοστό 6,3 % στό γενετικό τμῆμα ἀντίκρυ σέ 44,4 % στό ἄλλο,εἶναι χαρακτηριστική. Δείχνει καθαρά ὅτι στήν περίπτωση τῆς κλασσικῆς κατά παράδοση διδασκαλίας,ὅσο τέλεια καί ἄν εἶναι στή μορφή καί τή διάρθρωση, οἱ ἀδύνατοι μαθηταί ἀποτυπώνουν μνημονικά εἰκόνες καί νοητικά σχήματα χωρίς ἐνεργό κατανόηση τῶν λογικῶν πράξεων πού χαρακτηρίζονται κυρίως ἀπό τήν ἀντιστρεπτότητα. Μαθαίνουν χωρίς πλήρη καί ἐνεργητική κατανόηση καί γι'αὐτό εὔκολα καί γρήγορα ξεχνοῦν.

Ἡ ἐφαρμογή στή διδακτική τῶν μαθηματικῶν τῆς γενετικῆς ψυχολογίας , ὅπως τή σχεδιάσαμε παραπάνω στό διδακτικό πείραμα τοῦ Aebli καί ὅσα στίς δύο προηγούμενες διαλέξεις μας ἐκθέσαμε γιά τή ψυχογένεση κατά Piaget καί γιά τή λειτουργία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως στόν ἔφηβο, μᾶς ἐπιτρέπουν νά προσαρμόσουμε τήν διδασκαλία μας στήν πρώτη βαθμίδα τῆς Μ.Ε. σύμφωνα μέ τίς ἀρχές καί τίς μεθόδους τῆς περιγραφικῆς καί τῆς κατασκευαστικῆς ἐνοράσεως - πρό πάντων τῆς κατασκευαστικῆς - γιά νά φθάσουμε στά καλύτερα δυνατά ἀποτελέσματα καί στόν ἀσφαλέστερο δρόμο πού θά μᾶς φέρει προοδευτικά ἀπό τήν κατασκευαστική ἐνόραση στήν αὐστηρή μαθηματική παραγωγή μέ τό λογικό φαρμ[illegible] κύκλο τῆς Μ.Ε.

RÉSUMÉ

Psychologie génétique
et didactique des mathématiques.

Trois conférences faites par le prof. de gymnase N. Sotirakis au séminaire organisé en Septèmber 1962 par le Ministère Grec de l' Education National pour l'enseignement expérimental des mathématiques nouvelles au premier cycle de l' enseignement secondaire.

Resumé des conférences.

L' enseignement des mathématiques au premier cycle de l' enseignement secondaire (enfants de 13,14et 15 ans) doit être basé sur la pensée intuitive,les élèves de cet âge n'étant encore mûrs et aptes à saisir la stucture de la déduction mathématique et, moins encore ,à développer des syllogismes et à formuler des démonstrations. Neanmoins la pensée déductive s'éctôt au fur et à mesure que l'adolescence mûrit et,enconséquence il ne faut perdre aucune accasion pour favorise r cette éclosion.

La psychologie génétique, selon Jean Piaget et Henri Wallon à été,en général,l' objet de notre première conférense.Nous nous sommes occupés surtout de la psychogénese de l' âge scolaire et, plus spécialement, de l' adolescence.

Notre deuxième conférence à étè consacrée à la pensée mathématique de l' adolescent suivant, surtout, les expériences et les travaux de Louis Johannot, comme ils sont exposés ans son livre intitulé "La pensée mathématique de l' adolescent".

Notre Troisième conference avait pour objet la didactique des mathématiques et plus spécialement de la géométrie intuitive.

Nous avons insisté sur la différence entre l'intuition descriptive traiditionnelle et l' intuition constructive beasée sur la psychologie génètique. Le livre de Hans Aebli "Didactique psychologiique - application à la didastique de la psychologie de Jean Piaget" nous a étè particulierement utile.

A côtè des livres citès plus haut nous avons aussi consulté les éditions de la Commission internationale pour l' étude et l' amélioration de l' enseignement des mathematiques, à savoir "L' Enseignement des Mathématiques" et "Le matériel pour l' Enseignement des Mathematiques" et, plus spécialement les éditions de l' O.E.C.E. "Mathématiques Nouvelles" et "Un programme moderne des mathématiques pour l' enseignement secondaire". D' ailleurs notre participation aux travaux de la Session d'études de Royaumont en 1959 sur le thème "Les Mathématiques Nouvelles", nous a aidé à saisir l' esprit de la reforme entreprise.

N. Sotirakis

Pour tous les livres citès Cg. à la bibliographie qui suit ce résumè.

Ξένη Βιβλιογραφία

Σχετική μέ τή γενετική ψυχολογία καί τή διδακτική τῶν μαθηματικῶν.

1. Jean Piaget: La genèce du nombre shez l'emfant.Ed. Delachaux ei Niestlé - Paris.
2. Jeans Piaget : La construction du réel chez l' enfans. Ed. Delachaux et Niestlé. Paris.
3. Jean Piaget : Le developpement desquantités chez l'enfant. Ed. Presses Universitaires. Paris.
4. Jean Piaget : La representation de l' espace chez l' enfant. Ed. Presses univercitaires. Paris.
5. Jean Piaget : Classes relations et Nombres. Ed. Vrin-Paris.
6. J. Piaget, E. Bethe, J. Dieudonné e.c.t.: L'enseignement des mathematiques. Ed. Delachaux et Neistlé. Paris.
7. G. Gatenio, W. Servais, E. Castelnuovo e.c.t.: Le matériel pour l' enseignement des mathematiques. Ed. Delachaux et Nestlé- Paris.
8. Documentation No 5. Ed. Ministère de l' instruction publique- Bruxelles.
9. Documentation No 7. Ed. Ministère de l' instruition publique - Bruxelles.
10. H. Wallon: Les origines de la pensée chez l' enfant. Tomes I et II. Ed. Presses Universitaires de France. (Paris).
11. H. Wallon : De l' acte à la pensée. Ed. Flammarion, Paris.
12. LouisJohannot: Le raisonnement mathématique de l'adolescent. Ed. Delachaux et Niestlé ; Paris.
13. Hans Aebli : Didactique psychologique-Application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget. Ed.

Delachaux et Niestlé, Paris.
14. G. Mialaret : Nouvelle pédagogie Scientifique Ed. Presses Universitaires de France, Paris.
15. M. Debesse : Les étapes de l' éducation Ed. Presses, Universitaires de France, Paris.
16. H. Wallon : Psychologie Genétique. Bulletin de psychologie. Paris No 10, Nov. 1956.Καί μετάφραση τοῦ ἄρθρου στό περιοδικό "Παιδεία καί Ζωή"No60καί 61 1957.
17. W. Servais : Modernisation de l' enseignement des Mathématiques. Cahiers Pédagogiques pour l' enseignement du serond De gré . Revue mensuelle publiée par le Comité Universitaire d' Information Pédagogique No 8, Juin 1956, Paris. Καί μετάφραση στό περιοδικό
a "Παιδεία καί Ζωή", No 52 καί 53 , Ὀκτώβρης - Νοέμ-
a βρης 1956.
18. L' enseignement des mathematiques: Ed. Speciale des Cahies Pédagogiques ...e.c.t. No 3, 15 Novembre 1955.
19. Autour des Méthodes Actives. Ed. Sp. des Cahiers Pedagogigues e.ç.t' No 30,Nov. 1961.
20. Gustave Morf : Element, de Psychologie. Ed. du Mont Blánc, Genève - Suisse.