ΕΛΠΙΝΙΚΗΣ Μ. ΣΤΑΜΑΤΑΚΗ
ΥΠΟΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΠΩΣ ΜΑΘΑΙΝΟΥΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1959

ΕΛΠΙΝΙΚΗΣ Μ. ΣΤΑΜΑΤΑΚΗ
ΥΠΟΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΠΩΣ ΜΑΘΑΙΝΟΥΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 1959

Ἀφιερώνεται στὴ μνήμη τοῦ πατέρα μου

Μ ι χ α ή λ

Αξιότιμον Κον
Κων/νον Δημαράν
Γενικόν Διευθυντήν Ι.Κ.Υ.

Τιμής ένεκεν

[illegible]

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀποτελεῖ ἕνα σπουδαῖο μέρος τοῦ σχολικοῦ προγράμματος, ὄχι μόνο γιατὶ εἶναι ἡ πρώτη ἀπὸ τὶς ἐπιστῆμες καὶ ἡ μητέρα τῆς ἀκριβείας καὶ τῆς ἀσφαλείας, ἀλλὰ γιατὶ εἶναι ἕνα μάθημα μεγάλης πρακτικῆς ἀξίας.

Ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ σημερινοῦ ἀνθρώπου ἀποτελεῖ μέρος τοῦ καθημερινοῦ του ἐφοδιασμοῦ γιὰ νὰ ζήσῃ στὴν κοινωνία.

Καθὼς ὅμως ἔχει ἀποδείξει ἡ πεῖρα, τὸ μάθημα τοῦτο εἶναι ἀρκετὰ δύσκολο. Ἡ μελέτη τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ἰδίως στὶς κατώτερες τάξεις τοῦ δημοτικοῦ σχολείου, ἔχει ἀπασχολήσει σοβαρῶς τοὺς ἐκπαιδευτικοὺς τῆς τελευταίας 15)ετίας, ὅπως μαρτυροῦν οἱ πολυάριθμες μελέτες.

Προσπαθοῦν ν' ἀνακαλύψουν μεθόδους διδασκαλίας οἱ ὁποῖες νὰ κάμουν τὸ δύσκολο τοῦτο μάθημα κατανοητὸ στὸ παιδί. Μεθόδους, ποὺ ν' ἀφυπνίζουν στὴν παιδικὴ ψυχὴ ξεχωριστὸ διαφέρον καὶ πραγματικὴ χαρά, ἡ ὁποία νὰ πηγάζῃ ἀπὸ τὴν ἀπασχόληση μὲ τὸ ὑλικὸ τῆς ἀριθμήσεως.

Γιατί, ἐὰν δὲν γίνῃ αὐτό, δὲν εἶναι βέβαιον, ὅτι θ' ἀποκτήσῃ τὸ παιδὶ τὴν ἱκανότητα νὰ χρησιμοποιῇ ἀποτελεσματικὰ τοὺς ἀριθμοὺς στὶς καταστάσεις τῆς καθημερινῆς του ζωῆς.

Ἡ μάθηση τῆς ἀριθμητικῆς δὲ μπορεῖ ν' ἀφεθῇ στὸ ἄτομο ἀλλὰ πρέπει νὰ γίνῃ μάθημα σαφοῦς διδασκαλίας. Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ γίνῃ ἕνας ἐνεργητικὸς μαθητής, ποὺ θὰ ἀναπτύξῃ τὶς ἀριθμητικὲς δεξιότητες, τὴν ἱκανότητα νὰ σκέπτεται ποσοτικά, καὶ τὴν δύναμη νὰ ἐφαρμόζῃ τὴν ἀριθμητικὴ μ' εὐκολία, ἀσφάλεια κι' ἐμπιστοσύνη στὶς κοινωνικὲς καταστάσεις. Γιὰ νὰ γίνουν ὅμως ὅλα αὐτὰ πρέπει νὰ διδαχθῇ μὲ τὸ καλύτερο σύστημα μαθήσεως πού θά κάμη τό δύσκολο καί ἀνιαρό τοῦτο μάθημα ἑλκυστικό καί κατανοητό.

Ἡ παροῦσα μελέτη παρουσιάζει μία συγκεκριμένη καί πρακτική συζήτηση γύρω ἀπό τίς μεθόδους τῆς διδασκαλίας τῆς ἀριθμητικῆς στήν πρώτη τάξη τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου, μέ τήν ἐλπίδα νά βοηθήση τό δάσκαλο στήν ἀριθμητική του ἐργασία.

Ἡ μελέτη αὐτή στηρίζεται:

1) Στίς τάσεις Παιδαγωγῶν καί ψυχολόγων τῆς τελευταίας 15)ετίας νά ὑποδείξουν τά καλύτερα συστήματα πού θά βοηθήσουν τό παιδί νά κατανοήση τήν ἔννοια τῶν ἀριθμῶν καί τῶν σχέσεών των.

2) Στήν ἐργασία σχολείων Ἀμερικῆς, Ἑλβετίας καί Γερμανίας.

3) Στήν διδασκαλική μας πεῖρα.

ΕΛΠΙΝΙΚΗ ΣΤΑΜΑΤΑΚΗ

Ἰωάννινα 15 Δεκεμβρίου 1959

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ἡ ἀριθμητικὴ ποὺ διδάσκομε στὸ σχολεῖο εἶναι ἕνας τρόπος σκέψεως περὶ τῶν ποσῶν, τῶν μεγεθῶν, τῶν ἀποστάσεων κλπ. Περιλαμβάνει τὶς ἐρωτήσεις:

Πόσα; Τί μέρος; Πότε συνέβη αὐτό; Πόσο στοιχίζει ἐκεῖνο τὸ πρᾶγμα; κλπ. καὶ ζητεῖ νὰ βρῆ τὶς ἀπαντήσεις.

Ζητεῖ δηλ. νὰ ἀναγνωρίση τὶς ἐρωτήσεις τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσδιορίση τὶς ἀπαντήσεις του.

Ἡ ἀναγνώριση τῶν ἐρωτήσεων καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῶν ἀπαντήσεων δὲν εἶναι χωριστὲς ἐνέργειες. Ἐμφανίζονται μόνο ἔτσι καθὼς τὶς μελετοῦμε χωριστὰ καὶ δίδομε σ' αὐτὲς διαφορετικὲς ἀντικειμενικὲς ἐκθέσεις.

Ἡ γνώση μιᾶς ἐρωτήσεως εἰσηγεῖται τὴν ἀπάντηση ποὺ πρέπει νὰ ζητήσωμε καὶ πῶς θὰ τὴν βροῦμε.

Γιὰ νὰ γίνη ἱκανὸ τὸ παιδὶ ν' ἀναγνωρίζη τὶς ἐρωτήσεις τοῦ ἀριθμοῦ στὶς καταστάσεις τῆς ζωῆς του καὶ νὰ προσδιορίζη τὶς ἀπαντήσεις, πρέπει νὰ μάθη νὰ σκέπτεται μὲ ἀριθμητικὲς ἔννοιες.

Τὸ παιδὶ μαθαίνει τὸν τρόπο νὰ σκέπτεται καθὼς ἐρευνᾶ τὸν τρόπο. Μαθαίνει τὸν δρόμο τῆς σκέψεως καὶ πῶς θὰ κινηθῆ μπροστὰ καθὼς ταξιδεύει στὸ δρόμο αὐτό. Ἡ ταχύτης τῆς κινήσεώς του εἶναι μικροτέρας σημασίας ἐὰν συγκριθῆ μὲ τὸ γεγονός, ὅτι γιὰ νὰ προοδεύση τὸ παιδὶ ταξιδεύει μὲ τὴν ἰδική του δύναμη.

Ὁ τρόπος ὅμως τῆς σκέψεώς μας περὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεών των δὲν εἶναι ἀντικειμενικὸς ἀλλὰ ὑποκειμενικός.

Εἶναι διανοητικὸς τρόπος.

Τὸ παιδὶ στὴν ἀρχὴ τῆς σκέψεώς του μεταχειρίζεται συγκεκριμένα ἀντικείμενα κατὰ τρόπο ποὺ εἶναι ὑποκειμενικός. Ὁ τρόπος ποὺ σκέπτεται δὲν εἶναι ἐντελῶς συγκεκριμένος ἢ ἀντικειμενικός. Αὐτὸς ποὺ ἀρχίζει νὰ μαθαίνη ἀριθμητικὴ μεταφέρει τὴν σκέψη του στὴν ὁμάδα καὶ βελτιώνει τὴν σκέψη του ὅσο περισσότερο μελετᾶ τὴν ὁμάδα. Καὶ κατανοεῖ τὴν ἀριθμητικὴ ὅταν ἐννοήση καλῶς ὅτι ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἰδέα τῆς ὁμάδος.

Εἶναι δὲ ἡ ποιότης τῆς σκέψεώς του ποὺ ἐνδιαφέρει καὶ ὄχι οἱ ποιότητες τῶν ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα μεταχειρίζεται.

Κάθε φάση τῆς σκέψεώς του συνδέεται στενὰ μὲ τὶς ἐπιτυχίες οἱ ὁποῖες τὸ κάνουν ἱκανὸ νὰ κινηθῆ μέσα σὲ νέα φάση.

Καθὼς προχωρεῖ στὴ σκέψη του, κάθε νέα φάση αὐτῆς δὲν εἶναι ἄγνωστη ἀλλὰ ἐπέκταση ὅλων ἐκείνων ποὺ ἔχει μάθει.

Ὅταν π.χ. τὸ παιδὶ ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ ὁρίση τὸ μέγεθος τῆς ὁμάδος τοῦ 8, μπορεῖ νὰ ὁρίση καὶ τὸ μέγεθος τῆς ὁμάδος 10 καὶ ἀκόμη γνωρίζει καλῶς τί συμβαίνει μὲ τὸν χωρισμὸ ἢ τὸν συνδυασμὸ ὁμάδων.

Γιὰ νὰ μάθη τὸ παιδὶ ἀριθμητικὴ πρέπει νὰ κάμη τὴν ἰδική του σκέψη. Κανεὶς δὲν μπορεῖ νὰ κάμη τοῦτο ἀντὶ αὐτοῦ. Μόνο του θὰ σκεφθῆ καὶ θὰ μάθη νὰ συμβιβάζη τὴ σκέψη του μὲ τὶς ἀριθμητικὲς ἀπαιτήσεις.

Αὐτὸ πρέπει νὰ βαδίση βῆμα πρὸς βῆμα τὸν δρόμο τοῦ ἀριθμητικοῦ του ταξιδίου. Καὶ θὰ ἐπιτύχη, ὅταν ἀναγνωρίζη καὶ ἐκτελῆ μὲ ἀσφάλεια καὶ ἐμπιστοσύνη τὶς πράξεις ποὺ ἀπαιτεῖ ἡ ἀριθμητική. Ἔχει δηλ. ἀποκτήσει τὴν ἀπαιτουμένη ἱκανότητα νὰ χρησιμοποιῆ τοὺς ἀριθμοὺς ἀποτελεσματικὰ σ' ὅλες τὶς καταστάσεις τῆς ζωῆς του. Καὶ θὰ συμβοῦν αὐτὰ ὅταν ὑποδείξωμε στὸ παιδί, σὲ τὶ θὰ προσέξη καὶ τὶ θὰ παρατηρήση καθὼς προχωρεῖ στὴν σκέψη του καὶ ἐρευνᾶ κάθε μέρος τοῦ διανοητικοῦ του ταξιδίου.

Πρέπει νὰ τὸ ὁδηγήσωμε νὰ κινηθῆ μὲ δραστηριότητα καὶ εὐχαρίστηση ἀφοῦ τοῦ ὑποδείξωμε τὴν καλύτερη μέθοδο, ποὺ θὰ θέση σὲ κίνηση τὴν κρίση του καὶ τὶς ἄλλες πνευματικές του ἱκανότητες, γιὰ νὰ κατακτήση κάθε ἀριθμητικὴ γνώση, ἡ ὁποία θὰ ὑπηρετήση τὴν πρακτική του σκέψη.

ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ

Ὅλοι ὅσοι γνωρίζουν πῶς μαθαίνουν τὰ παιδιά, συμφωνοῦν, ὅτι προτοῦ ἀρχίσωμε τὴ διδασκαλία κάθε μαθήματος, πρέπει νὰ μελετήσωμε τὴ φύση καὶ τὴν ἔκταση τῶν διαφορῶν τῶν παιδιῶν καὶ νὰ ἐξακριβώσωμε τί γνωρίζουν περὶ τοῦ μαθήματος —προκειμένου περὶ τῆς ἀριθμητικῆς, τί γνωρίζουν περὶ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ πῶς ἀντιλαμβάνονται τὴν ἔννοιά του— ἀπὸ τὴν προσχολική τους ἡλικία.

1. Μεταξὺ τῶν παιδιῶν ὑπάρχουν μεγάλες διαφορές, ὡς πρὸς τὴν διανοητικὴ ἱκανότητα, τὸν βαθμὸ ἱκανότητος μαθήσεως, τὴν ἑτοιμότητα γιὰ ἐργασία, τὰ διαφέροντα καὶ τὶς ἀνάγκες, τὰ εἴδη δυσκολιῶν ποὺ ἀντιμετωπίζουν σὲ κάθε μάθημα κ.λ.π.

Στατιστικὰ δεδομένα δείχνουν ὅτι ἡ διανοητικὴ ἡλικία ποικίλει ἀπὸ 9.6—15.3, ἡ ἡλικία ὑπολογισμοῦ ἀπὸ 9.8—14.0, ἡ ἡλικία λύσεως προβλημάτων ἀπὸ 9.3—15.3, ἡ ἡλικία λεξιλογίου ἀπὸ 8.0—16.1 καὶ ἡ ἡλικία ποσοτικῶν σχέσεων ἀπὸ 7.6—13.9. Τὰ δεδομένα αὐτὰ βεβαιώνουν ὅτι ὑπάρχουν σημαντικὲς διαφορὲς τὶς ὁποῖες πρέπει νὰ ἔχη ὑπ' ὄψη του ὁ δάσκαλος.

2. Πολλὲς μελέτες ἔγιναν καὶ πολλὲς πειραματικὲς ἔρευνες, γιὰ νὰ ἐξακριβώσουν τί γνωρίζει περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τὸ παιδὶ τῆς προσχολικῆς ἡλικίας.

Οἱ ἔρευνες ἀπέδειξαν ὅτι τὸ παιδὶ ἔχει τὴν τάση νὰ λογαριάζη.

Ἔχει ἔμφυτη τὴν ἱκανότητα νὰ μετρᾶ ἀντικείμενα ποὺ βρίσκονται γύρω του. Πολὺ προτοῦ ἔλθη στὸ σχολεῖο, χρησιμοποιεῖ ὡρισμένες ἀριθμητικὲς σχέσεις.

Μερικὰ παιδιὰ 3 ἢ 4 ἐτῶν ἴσως εἶναι ἱκανὰ νὰ εἴπουν πότε ἔχουν δύο ἢ τρεῖς βώλους. Νὰ μετρήσουν 1,2,3, ἢ 7 αὐγά, νὰ εἴπουν θέλω δύο καρύδια κλπ.

Ἐὰν παρακολουθήσωμε συνομιλίες τους θὰ ἀκούσωμε τὶς ἐκφράσεις :

—«Περίμενε ἕνα λεπτό». «Ἔχω ἑκατὸ σὰν αὐτό». «Ἔχω ἕνα ἑκατομμύριο παιγνίδια». «Γρήγορα θὰ γίνω μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν πατέρα μου». «Δῶσε μου τὸ μεγαλύτερο κομμάτι». «Δὲν τὸ θέλω γιατὶ εἶναι τὸ μικρότερο». «Θὰ παίξω πρῶτος». «Ἡ Μαρία ξυπνᾶ κάθε πρωῒ τελευταία». «Τὰ μισὰ μῆλα εἶναι σάπια».

Μεταχειρίζονται πολλὲς λέξεις τῶν ἀριθμῶν, καὶ χρησιμοποιοῦν τέτοιες ἐκφράσεις προτοῦ ἀντιληφθοῦν τὴν ἔννοιά τους. Δὲν ἔχουν τὴν ἱκανότητα νὰ συλλάβουν τὶς ἔννοιες τῶν ἀριθμῶν ποὺ ὀνομάζουν. Οἱ ἰδέες τους εἶναι ἀόριστες, καὶ ἀνακριβεῖς, γιατὶ δὲν ἔχουν μελετήσει τὶς ὁμάδες μὲ συστηματικὲς μεθόδους. Στὰ περισσότερα παιδιὰ παρουσιάζεται πολὺ ἐνωρὶς ἡ θέληση ἀπαριθμήσεως ἁπλῶν σειρῶν ἀντικειμένων.

Καὶ ἡ θέληση καὶ ἡ δημιουργικὴ ὁρμὴ εἶναι ἔμφυτες ἱκανότητες, ἀλλὰ ἐνισχύονται ἀπὸ τὴν ἐπίδραση τῆς οἰκογενείας καὶ τοῦ σχολείου.

Ἀπὸ τὴν οἰκογένεια θὰ μάθουν τὰ παιδιὰ πρῶτα τὶς σχέσεις ποὺ ἐκφράζομε ὅταν λέμε: Αὐτὴ ἡ ὁμάδα ἔχει περισσότερα ἀπὸ μία ἄλλη ὁμάδα.

Αὐτὴ εἶναι ἡ πρώτη ἰδέα περὶ ἀριθμοῦ ποὺ ἔχει τὸ παιδί. Ἀντιλαμβάνεται δὲ αὐτή, μὲ τὸ νὰ συγκρίνη τὸ πλῆθος τῶν μολυβιῶν του μὲ τὸ πλῆθος τῶν μολυβιῶν τοῦ φίλου του, χωρὶς νὰ προσέχη στὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ τὸν **Russel** (1) ἡ ἰδέα τοῦ παιδιοῦ γιὰ τὸ ἕνα καὶ τὰ πολλά, τὰ περισσότερα καὶ τὰ ὀλιγώτερα, προηγεῖται τῆς ἱ-

---

1. **Russel G. «Decimal usage in the occupational world»** σελ. 633-638.

κανότητος νὰ μετρᾶ.

Πολλοὶ Παιδαγωγοὶ ὅπως εἶναι οἱ **Maclatchy**, (1) **Mott**(2), **Brownell**(3), **Buchingham**(4), **Grand** (5), **Carper** (6) καὶ ἄλλοι, μὲ πειραματικὲς ἔρευνες ἀπέδειξαν ὅτι τὰ 80% περίπου τῶν πρωτοετῶν μαθητῶν μποροῦν νὰ μετρήσουν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 20 καὶ μποροῦν νὰ ἀπαριθμήσουν ἀντικείμενα μέχρι τοῦ 6 ἢ 7 καὶ 22% περίπου εἶναι ἱκανὰ νὰ μετρήσουν μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 100.

Ὁ **Carper** μάλιστα ἔδωσε σὲ 300 παιδιὰ τῆς πρώτης τάξεως ἕνα TEST γιὰ νὰ ἀναγνωρίσουν σχηματισμοὺς τοῦ 3, τοῦ 4, καὶ τοῦ 5. Ἐζήτησε δηλ. νὰ ταυτίσουν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὶς ὁμάδες τῶν παρακάτω στιγμῶν:

Τὰ ἀποτελέσματα ἔδειξαν ὅτι, 81% ἀνεγνώριζαν ὁμάδες τοῦ 3, 66% ὁμάδες τοῦ 4 καὶ 52% ὁμάδες τοῦ 5. Δηλ. 50% τοὐλάχιστον, ἦσαν ἱκανὰ νὰ ἀναγνωρίσουν τὴν ὁμάδα τοῦ 5.

Οἱ **Hooper** καὶ **Stratton** (7) λέγουν, ὅτι, ὅταν τὸ παιδὶ

---

1. **Maclatchy J. «Seeing and Understanding in Number Names»** σελ. 144-152.
2. **Mott S. «Number Concepts of small children»** σελ. 291-301.
3. **Brownell W. «A critique of the Committee of Seven s Investigations on Grade placement of Arithmetic Topics»** σελ. 58.
4. **Buchingham and Maclatchy «The Number Ability of children when they enter Grade One»**. σελ. 473-524.
5. **Grant A. «An Analysis of the Number Knowledge of First Grade pupils, according to Levels of Intelligence»** σελ. 63-66.
6. **Carper D. «Seeing Numbers as Groups in Primary Grade»**. 43 : 166-170
7. **Hooper and Stratton «Developing Number Concepts with young Children**. σελ. 193 - 198.

ἀναλαμβάνη τὴν εὐθύνη νὰ μεταφέρη τὰ λουλούδια στὸ δωμάτιο, νὰ γράψη τὴν θερμοκρασία, νὰ τρέξη νὰ κάμη τὰ θελήματα τῆς μητέρας του, νὰ βρῆ τὶς σελίδες τοῦ βιβλίου, οἱ ἀνάγκες του νὰ χρησιμοποιήση τοὺς ἀριθμοὺς αὐξάνουν. Καὶ ἔτσι σιγὰ - σιγὰ ἀναγνωρίζει τὴν σημασία τῶν ἀριθμῶν στὴν καθημερινή του ζωή.

Γιὰ ν' ἀναπτυχθῆ ὅμως ἡ ἀκρίβεια στὸ μέτρημα, στὴν ἐκτίμηση τοῦ χρόνου, τοῦ χώρου, τῆς ἀποστάσεως, τῶν ποσῶν κλπ., πρέπει νὰ μελετήση τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὶς σχέσεις των μὲ συστηματικὲς μεθόδους. Εἶναι ἀνάγκη νὰ παρακολουθήση ἕνα πρόγραμμα διδακτέας ὕλης ποὺ θὰ ἀρχίζη ἀπὸ ὅ,τι γνωρίζει τὸ παιδὶ καὶ μ' αὐτὸ ὡς ἀφετηρία θὰ προχωρήση στὴν ἀνάπτυξη τῶν δεξιοτήτων οἱ ὁποῖες θὰ τὸ βοηθήσουν νὰ χρησιμοποιήση ἀποτελεσματικὰ τὴν ἀριθμητικὴ στὶς μετέπειτα ἀνάγκες του.

Η ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΤΟΙΜΟΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΙΔΙΟΥ

Ὁ ὅρος ἑτοιμότης ἔχει χρησιμοποιηθῆ πολὺ τὶς τελευταῖες δύο δεκαετίες, καὶ πολλὴ συζήτηση ἔχει γίνει γύρω ἀπὸ τὸ θέμα αὐτό.

Εἶναι εὔκολο νὰ ποῦμε, ὅτι ἕνα παιδὶ πρέπει νὰ διδαχθῆ ἀνάγνωση ἢ ἀριθμητικὴ ὅταν εἶναι ἕτοιμο, ἀλλὰ νὰ γνωρίσωμε πότε εἶναι ἕτοιμο δὲν εἶναι εὔκολο πρᾶγμα.

Ἡ ἀπόκτηση τῆς ἑτοιμότητος εἶναι μία συνεχὴς πορεία νὰ γίνεται τὸ ἄτομο ἕτοιμο ἀπὸ ὅ,τι ἦτο προηγουμένως.

Ἡ ἑτοιμότης εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς σπουδαίους παράγοντας ποὺ πρέπει ν' ἀναγνωρίσουμε προτοῦ νὰ ἀρχίσωμε τὴν ἀριθμητική μας ἐργασία.

Ἡ ἑτοιμότης γιὰ κάθε μάθημα ἀναφέρεται στὴν ὕπαρξη ἑνὸς σημείου ἐκκινήσεως γιὰ τὴν ἀπόκτηση μιᾶς νέας πείρας.

Συμβαίνει πολλὲς φορὲς ἕνα παιδὶ νὰ εἶναι ἕτοιμο νὰ μάθη ἀνάγνωση, ἀλλὰ ἀνέτοιμο νὰ μάθη ἀριθμητική. Ἀκόμη μέσα στὸ πεδίον τῆς ἀριθμητικῆς, ἕνα παιδὶ πιθανὸν νὰ εἶναι ἕτοιμο νὰ μάθη ἁπλοῦς συνδυασμοὺς προσθέσεως, ἀλλὰ νὰ μὴν εἶναι ἕτοιμο νὰ μάθη πῶς νὰ προσθέτη διψηφίους ἀριθμοὺς μὲ κρατούμενα.

Ὁ Woody (1) λέγει ὅτι ὑπάρχουν 4 τύποι ἑτοιμότητος:

1) Ἡ βιολογική, 2) ἡ ψυχολογική, 3) ἡ κοινωνιολογική, καὶ 4) ἡ ἐκπαιδευτική.

Ὁ ἴδιος ὑποστηρίζει ὅτι καὶ οἱ 4 τύποι εἶναι σπουδαῖοι σὲ κάθε μάθηση.

Ὁ Washburn (2) παραδέχεται:

1) Τὴν φυσικὴ ἑτοιμότητα, 2) τὴν διανοητικὴ ἀνάπτυξη, 3) τὴν πεῖρα καὶ 4) τὶς ἀνάγκες καὶ τὰ διαφέροντα. Καὶ ὑποστηρίζει ὅτι ἡ πεῖρα εἶναι στενὰ συνδεδεμένη μὲ τὴν φυσικὴ καὶ διανοητικὴ ἀνάπτυξη.

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω καὶ οἱ **Schindner** (3), **Hildreth** (4) **Dirckey J.** (5), **Brownell** (6), **Riess** (7), **Brueckner** (8), **Grossnickle** (9), **Macceoch** (10) καὶ **Spencer** (11), ὡμίλησαν περὶ ἑτοι-

---

1. **Woody C. «A General educator Looks at Arithmetic Readiness»** σελ. 314-321.
2. **Washburne C. W. «When should we teach arithmetic ?»** σελ. 659-665.
3. **Schindner, «Readiness for learning»** σελ. 301-304
4. **Hildreth G. «Readiness for school Beginnrs»** σελ. 324-364.
5. **Dirckey J. «Readiness in Arithmetic»** σελ. 592-598.
6. **Brownell W. «Arithmetic in Grades I and II»** σελ. 165.
7. **Riess A. and Hartung M. «Developing Number Readiness»** 1946.
8. **Brueckner L. and Grossnickle, »How to Make Arithmetic Meaningful»** σελ. 106.
9. **Grossnickle C. Metzner «Instructional Materials for Teaching Arithmetic»** σελ. 156-157.
10. **Macceoch, «The psychology of Human Learning»** σελ. 513.
11. **Spencer P. Brydegard, «Building Mathematical Concepts in the Elementary School»** σελ. 34.

μότητος καὶ ὑπεστήριξαν τὴν ἄποψη ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ ἑτοιμότης εἶναι μιὰ ὑπηρεσία ὄχι μόνον διανοητικῆς ὡριμότητος καὶ ἐσωτερικῆς ἀναπτύξεως, ἀλλὰ καὶ προηγουμένης πείρας μεθόδων, διαφερόντων καὶ σκοπῶν.

Ἡ ἑτοιμότης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς ἐμπειρίες τὶς ὁποῖες ἔχει τὸ παιδί, τὰ διαφέροντα ποὺ ἔχει ἀναπτύξει καὶ τὰ ἐπίπεδα ὡριμότητος ποὺ ἔχει ἀποκτήσει.

Εἶναι ματαιοπονία νὰ προχωρήσωμε στὴ συστηματικὴ ἀνάπτυξη ἑνὸς ἀριθμητικοῦ θέματος, ἐὰν τὸ παιδὶ δὲν εἶναι ἕτοιμο νὰ δεχθῆ τὸ νέον.

Ὁπωσδήποτε κανένας συνδυασμὸς ἐμπειριῶν δὲν θὰ κάμη τὸ παιδὶ ἕτοιμο γιὰ τὴν μάθηση, ἐὰν τὸ ἐπίπεδο τῆς διανοητικῆς του ὡριμότητος εἶναι κατώτερο ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ τὴν ἀποτελεσματικὴ μάθηση.

Πολλὲς ἀποτυχίες τῶν σχολείων καὶ σήμερα καὶ στὸ παρελθόν, ὀφείλονται στὸ ὅτι δὲν ἀνεγνωρίσαμε τὴν σπουδαιότητα τῆς ἑτοιμότητος.

Τὸ σχολεῖο πρέπει νὰ ἀρχίση ἀπὸ ἐκεῖ ποὺ εἶναι τὸ παιδὶ καὶ ὄχι ἀπὸ ἐκεῖ ποὺ σκέπτεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι, ἢ ὅτι ἔπρεπε νὰ εἶναι.

Τὸ καθῆκον τοῦ δασκάλου εἶναι ν' ἀναπτύξη τὴν ἑτοιμότητα. Σπουδαῖοι δὲ παράγοντες οἱ ὁποῖοι θὰ βοηθήσουν εἶναι ἡ MOTIVATION καὶ ὁ σκοπός.

Ἡ ἀνάπτυξη τῆς ἑτοιμότητος δὲν εἶναι εὐθύνη μόνον τοῦ δασκάλου τῆς ἀριθμητικῆς ἀλλὰ κάθε ἐκπαιδευτικοῦ ἀνθρώπου ποὺ ἐργάζεται μὲ παιδιά.

Ἡ πρώτη φροντίδα τοῦ σχολείου εἶναι ν' ἀνακαλύψη ἐὰν τὰ παιδιὰ εἶναι ἕτοιμα νὰ δεχθοῦν τὸ νέον.

Καὶ εἶναι ἕτοιμα ὅταν:

1) Ἔχουν φυσικὴ καὶ διανοητικὴ ὡριμότητα ποὺ ἀπαιτεῖ τὸ μάθημα.

2) Ἔχουν διαφέρον γιὰ τὴν ἐργασία ποὺ ἐκτελοῦν.

3) Διαθέτουν τὴν ἀνάλογη πεῖρα καὶ τὰ κατάλληλα ὑλικά.

4) Μποροῦν νὰ ἐκτιμήσουν τὴν πρόοδό τους, καταλαβαίνουν τί κάνουν καὶ εἶναι ἕτοιμα γιὰ τὸ ἑπόμενο βῆμα. Ἔτσι λέγομε ἑτοιμότης γιὰ ἀρίθμηση, ἑτοιμότης γιὰ τὶς θεμελιώδεις πράξεις κλπ.

Αὐτὲς οἱ καταστάσεις ἐπεκτείνονται σὲ κάθε πεδίον ἐκπαιδευτικῆς ἀναπτύξεως.

Ο ΔΑΣΚΑΛΟΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Ἀπαραίτητη προϋπόθεση γιὰ τὴν ἐπιτυχία τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας εἶναι ἡ κατάλληλη προπαρασκευὴ τοῦ δασκάλου.

Πρέπει νὰ εἶναι κάτοχος τῶν πορισμάτων τῆς Ψυχολογίας τοῦ παιδιοῦ γιὰ νὰ μάθη νὰ περιμένη ἐπάνω στὸ παιδί. Ἡ Ἐκπαιδευτικὴ Ψυχολογία διδάσκει ὅτι πρέπει ἡ διδασκαλία νὰ βασίζεται στὴν ἀκριβῆ γνώση τῆς ἱκανότητος τοῦ παιδιοῦ. Ἔτσι θὰ ἀποφύγη τὸ σφᾶλμα νὰ νομίζη ὅτι τὸ παιδὶ μπορεῖ νὰ ἰδῆ μὲ τὰ μάτια τοῦ δασκάλου καὶ ὅτι οἱ θεωρίες του εἶναι ἀναγκαστικὰ οἱ ἴδιες τοῦ δασκάλου. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀντιλαμβάνεται τὰ ἐπιτυχῆ ἐπίπεδα σκέψεως ποὺ ἐργάζεται γιὰ νὰ τὸ βοηθήση νὰ ἀποκτήση σαφεῖς ἔννοιες σὲ κάθε φάση τῆς πορείας τῆς μαθήσεως. Νὰ εἶναι κάτοχος τοῦ θέματος ποὺ θὰ διδάξη, πῶς θὰ τὸ διδάξη καὶ τί ὑλικὰ θὰ χρησιμοποιήση.

Νὰ ἐξακριβώση ἐὰν τὰ παιδιὰ ἔχουν τὴν ἀπαιτουμένη ἑτοιμότητα γιὰ νὰ θεμελιώση πάνω σ' αὐτὴ τὴν ὕλη ποὺ θὰ διδάξη. Νὰ παρατηρῆ τὸ παιδὶ καὶ τὸν κόσμο του γιὰ νὰ ἀνακαλύψη πῶς θὰ τὸ βοηθήση ἀποτελεσματικά.

Νὰ ἔχη τὴν διδακτικὴ ἱκανότητα νὰ κρατῆ ζωηρὸν τὸ διαφέρον τῶν παιδιῶν γι' αὐτὸ ποὺ διδάσκει. Καὶ θὰ ἐπιτύχη αὐτὸ ἐὰν γνωρίζη τὶς ψυχολογικὲς καὶ μεθοδολογικὲς ἀπόψεις ἑνὸς ἀποτελεσματικοῦ προγράμματος διδασκαλίας, ἐὰν γνωρίζη τὶς ἀρχὲς τῆς μαθήσεως, ἐὰν ἐφαρμόζῃ τὴν μάθηση στὸ ἐπίπεδο ὡριμότητος τοῦ μαθητοῦ καὶ ἀκόμη ἐὰν μεταχειρίζεται τὶς καλύτερες μεθόδους διδασκαλίας ποὺ θὰ ὁδηγήσουν τὸ παιδὶ στὴν κατανόηση τοῦ μαθήματος.

Ἡ ὑπηρεσία του εἶναι μᾶλλον νὰ ὁδηγήσῃ παρὰ νὰ διευθύνῃ. Νὰ ὁδηγήσῃ τὸ παιδὶ νὰ γίνῃ ἐνεργητικὸς ζητητὴς τῶν προβλημάτων του γιατὶ μόνο ἔτσι θὰ βοηθηθῇ νὰ ὀργανώσῃ τὶς ἰδέες του καὶ θὰ παύσῃ νὰ εἶναι τυφλὸς ἀκόλουθος τοῦ δασκάλου. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ὁδηγῇ τὴν τάξη μὲ σαφεῖς ἐρωτήσεις καὶ νὰ δίδῃ τὴν εὐκαιρία σ' ὅλους νὰ βοηθήσουν καὶ νὰ βοηθηθοῦν. Νὰ βοηθήσῃ τὸ παιδὶ ν' ἀντιληφθῇ τὶς ἀριθμητικές του ἀνάγκες καὶ γιὰ νὰ τὸ ἐπιτύχῃ πρέπει νὰ τὸ ὁδηγήσῃ νὰ διορθώνῃ μόνο του τὰ σφάλματά του.

Ἔτσι θ' ἀντιληφθῇ τὶς ἀδυναμίες του καὶ θὰ προσπαθήσῃ νὰ τὶς νικήσῃ.

Νὰ ἐνθυμῆται πάντοτε τὶς ἀρχές:

1) Οἱ μαθηταὶ δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐνθυμοῦνται τὶς ἀπαντήσεις στὶς ἐρωτήσεις π. χ. τῶν ὁμάδων κλπ. Καθένας πρέπει νὰ στηρίζεται στὶς δυνάμεις του, στὴν ἰδική του σκέψη γιὰ νὰ βρῇ τὶς ἀπαντήσεις. Πρέπει νὰ πιστεύῃ ὅτι ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ ἀπαντήσῃ σὲ κάθε ἐρώτηση τοῦ δασκάλου. Μὲ ἄλλα λόγια, πρέπει νὰ εἶναι ἕτοιμος νὰ δεχθῇ τὸ νέο.

2) Νὰ προλαμβάνῃ τὴν ἀνάγκη προτοῦ παρουσιασθῇ καὶ νὰ ἐκπαιδεύῃ τοὺς μαθητές του νὰ χρησιμοποιοῦν τὸν ἀριθμὸ σὲ κάθε τους ἀνάγκη.

3) Νὰ κάνῃ σοφὴ χρήση τοῦ χρόνου.

4) Νὰ εἰσάγῃ τὴ νέα σελίδα τοῦ βιβλίου σὲ ὅλη τὴν τάξη καὶ νὰ ἐνθαρρύνῃ τοὺς καθυστερημένους νὰ μάθουν. Δὲν ἐπιτρέπεται νὰ χωρίζῃ τὴν τάξη σὲ καθυστερημένους καὶ προχωρημένους.

5) Κάθε νέα ἰδέα εἰσάγεται πρῶτα μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα, μετὰ μὲ εἰκόνες καὶ ἡμιαφῃρημένα σύμβολα, καὶ τελικὰ μὲ ἀφῃρημένα σύμβολα. Αὐτὴ ἡ ἀρχὴ εἶναι ἡ σπουδαιότερη γιατὶ ἡ ἀντίληψη τοῦ παιδιοῦ γιὰ κάτι προχωρεῖ ἀπὸ τὶς

ἀπ' εὐθείας ἐμπειρίες μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα, στὶς ἡμιαφηρημένες ἐμπειρίες μὲ εἰκόνες καταστάσεων καὶ ἀντικειμένων μὲ ἡμιαφηρημένα σύμβολα, στὴν ἀφηρημένη χρήση τῶν συμβόλων τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων.

Καὶ 6) Νὰ συνεργάζεται στενὰ μὲ τοὺς γονεῖς.

Τὸ σχολεῖον ἔχει καθῆκον νὰ πληροφορῆ τοὺς γονεῖς γιὰ τὴν πρόοδο τῶν παιδιῶν τους καὶ νὰ ἐξηγῆ σ' αὐτοὺς ποῦ τὸ παιδὶ ἔχει ἀνάγκη βοηθείας ἢ μὲ ποιὸ τρόπο θὰ τὸ βοηθήση.

Ἡ συνεργασία μας μὲ τοὺς γονεῖς εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ βασικά μας καθήκοντα.

«Εἶναι πολὺ σπουδαῖο γιὰ τὸ δάσκαλο καὶ τὸ ἔργο του νὰ αἰσθάνεται τὸν ἑαυτό του ὡς βοηθὸ τῶν γονέων».(1)

Η ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Τὸ παιδὶ τῆς Πρώτης τάξεως ἔχει ἄμεσες ἀνάγκες νὰ χρησιμοποιήση τοὺς ἀριθμοὺς στὶς ἐνέργειες τῆς ἰδικῆς του ζωῆς.

Ἔχει ἀνάγκη, νὰ βρῆ τὸν ἀριθμὸ τῆς σελίδος τοῦ μαθήματός του, νὰ διαβάση λέξεις στὸ ἀλφαβητάριο καὶ νὰ τὶς ἐννοήση, νὰ παίξη παιγνίδια μὲ ἀριθμούς, νὰ μετρήση τοὺς κτύπους τοῦ ὡρολογίου, νὰ μετρήση τὰ βήματα τοῦ χοροῦ, νὰ διαβάση τὸ ἡμερολόγιο, νὰ μάθη τὴν ἡλικία του, τὴν ἡμέρα τῆς γεννήσεώς του, τὶς ἡμέρες τῆς ἑβδομάδος, τὸν ἀριθμὸ τῶν παιδιῶν ποὺ ἀπουσιάζουν, τὶς διαιρέσεις τῆς ἡμέρας (πρωΐ, ἀπόγευμα, ἡμέρα, νύκτα).

Σχεδὸν ὅλες οἱ καθημερινὲς ἐνέργειές του περιλαμβάνουν ἀπαρίθμηση κάποιου εἴδους. «Εἶναι ὥρα νὰ σηκωθῶ». «Ἐννέα ἡ ὥρα». «Αὔριο τὸ πρωΐ». «Τὸ ἐρχόμενο Σάββατο».

Βλέπε: Ζομπανάκη Γ. «Ἐγκόλπιο τοῦ Νέου Δασκάλου» σελ. 54-60.

«Μία δωδεκάδα μολύβια». «Μισὴ δωδεκάδα αὐγά».

Πρέπει λοιπὸν τὸ παιδὶ τῆς πρώτης νὰ μάθη ἀριθμητική. Τὰ περισσότερα παιδιὰ ἀπὸ τὴν πρώτη ἡμέρα τῆς σχολικῆς τους ζωῆς εἶναι ἕτοιμα νὰ παρακολουθήσουν ἀριθμητικὴ καὶ νὰ ἐπεκτείνουν αὐτὸ ποὺ ἔχουν ἀρχίσει νὰ μαθαίνουν.

Ἐπειδή, ὡς εἶναι γνωστό, ὅσα γνωρίζουν περὶ τῶν ἀριθμῶν τὰ παιδιά, εἶναι ἀνακριβῆ καὶ ἀόριστα καὶ συμβαίνει πολλὲς φορὲς νὰ ποῦν 4 μετὰ τὸ 3 ἀλλὰ δὲν ἔχουν τὴν ἱκανότητα νὰ μετρήσουν 4 ἀντικείμενα, ἡ διδασκαλία τῆς ἀριθμητικῆς θὰ ἀρχίση ἀπὸ τὰ ἀφηρημένα σύμβολα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ὀργανωμένα μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα, εἰκόνες καὶ ἡμιαφηρημένα σύμβολα.

Θὰ ἀσκηθοῦν τὰ παιδιὰ νὰ ἀπαριθμοῦν ἀντικείμενα καὶ ἄλλα ὑλικὰ ὀργανωμένα μὲ τὰ μαθηματικὰ σύμβολα καὶ θὰ ἀνακαλύψουν τὶς βασικὲς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν.

Γεννᾶται ὅμως τὸ ἐρώτημα :

Ποῖες εἶναι οἱ σχέσεις ποὺ πρέπει νὰ ἀνακαλύψη τὸ παιδὶ καθὼς μελετᾶ τοὺς ἀριθμοὺς 1—10;

Οἱ βασικὲς αὐτὲς σχέσεις εἶναι:

1) Κάθε ἀριθμὸς ἔχει μία ὡρισμένη θέση στὴ σειρὰ τῆς ἀριθμήσεως.

2) Κάθε ἀριθμὸς στὴ σειρὰ τῆς ἀριθμήσεως ἐννοεῖ ἕνα περισσότερο ἀπὸ τὸν προηγούμενο ἀριθμό. Π. χ. τὸ 3 ἐννοεῖ 1 περισσότερο ἀπὸ τὸ 2 κλπ.

3) Κατὰ τὴν ἀρίθμηση μιᾶς ὁμάδος ἀντικειμένων, ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς λέγει πόσα εἶναι στὴν ὁμάδα.

4) Κάθε ἀριθμὸς παρουσιάζει μία ὁμάδα.

5) Κάθε ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1 μπορεῖ νὰ χωρισθῆ σὲ δύο ἢ περισσότερες ὁμάδες.

Ἀφοῦ ἀνακαλυφθοῦν καὶ κατανοηθοῦν αὐτὲς οἱ σχέσεις, ἀναπτυχθοῦν οἱ ἰδέες τῶν ἁπλῶν ὁμάδων κάθε μεγέθους μέχρι τοῦ 10, ὀνομασθῆ κάθε μία μὲ τὸ ἁπλό της ὄνομα καὶ παρουσιασθῆ κάθε μέγεθος μέχρι τοῦ 9 μὲ τὸ ἁπλό του ἀριθμητικό, διδαχθοῦν τὰ ἁπλᾶ συμπλέγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 1—9, θὰ προχωρήσωμε στὴ διδασκαλία τῆς ἐννοίας τῆς δεκάδος καὶ τῶν ἀριθμῶν 10—20 (εἰδικὸς τρόπος γραφῆς τοῦ 10 καὶ τῶν σχέσεών του, κλπ).

Αὐτὴ ἡ μελέτη θὰ συνεχισθῇ καὶ θὰ τονισθοῦν ἰδιαιτέρως τὰ ἑξῆς :

1) Κάθε διψήφιος ἀριθμὸς εἶναι συνδυασμὸς μονάδων καὶ δεκάδων.

2) Τὸ μηδὲν χρειάζεται γιὰ νὰ συμπληρώσῃ μία θέση. Νὰ δείξῃ δηλ. ὅτι δὲν ὑπάρχουν μονάδες σὲ καθένα ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 10, 20 κλπ.

3) Ἐργαζόμεθα μὲ τὸ 10 καὶ τὶς δυνάμεις τοῦ 10 μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ποὺ ἐργαζόμεθα μὲ τὶς ἁπλὲς μονάδες μέχρι τοῦ 9.

Ἀφοῦ κατανοηθοῦν οἱ βασικὲς σχέσεις τοῦ ἀριθμοῦ, τὰ παιδιὰ εἶναι ἕτοιμα νὰ οἰκοδομήσουν τὶς ἔννοιες τῶν συμπλεγμάτων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Πρόσθεση :

Στὴν ἀρχὴ θὰ διδαχθῇ ἡ πρόσθεση ὡς μία πορεία ἑνώσεως ὁμάδων καὶ ὀλίγα συμπλέγματα προσθέσεως σὲ ἀφηρημένη μορφή. Ἰδιαιτέρως θὰ προσέξωμε στὴ γραπτὴ πρόσθεση.

Ἀφαίρεση :

Ἡ ἀφαίρεση θὰ διδαχθῇ ὡς μία πορεία ποὺ παίρνομε μία ὁμάδα ἀπὸ μία ἄλλη. Καὶ ἐδῶ θὰ προσέξωμε ἰδιαιτέρως τὴν γραπτὴ ἀφαίρεση.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ Διαίρεση :

Στὴν πρώτη τάξη θὰ διδαχθοῦν μόνον ἁπλᾶ συμπλέγματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως. Γραπτὸς πολλαπλασιασμὸς καὶ γραπτὴ διαίρεση δὲν θὰ διδαχθοῦν.

Γιὰ τὴν κατανόηση ὅλων τῶν συμπλεγμάτων θὰ μεταχειρισθοῦμε ἀρκετὰ ἐποπτικὰ μέσα (βλέπ. σχετικὸ κεφάλαιο).

Ἡ ἔννοια τῶν ὅρων· πρόσθεσε, ἀφαίρεσε,

βγάλε, βάλε, ἀπό, καί, πάρε πολλὲς φορὲς τὸ ἴδιο πρᾶγμα, δῶσε πολλὲς φορὲς τὸ ἴδιο πρᾶγμα, μοίρασε, χώρισε, διά, ὡς καὶ τῶν σημείων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων (+) σὺν (—) πλήν, (X) ἐπὶ (:) διὰ καὶ (=) ἴσον θὰ ἀναπτυχθῆ μόλις εἰσαχθοῦν οἱ πράξεις.

Λύση Προβλημάτων:

Προβλήματα εὐκαιριακά, σὲ σχολικὲς καταστάσεις, θὰ λυθοῦν πολλὰ γιὰ νὰ ἐπεξηγήσουν τὶς σχέσεις τῶν ἀριθμῶν. Γραπτὰ προβλήματα θὰ δοθοῦν ὀλίγα καὶ ἁπλᾶ.

Χρήματα:

Στὸ ἀριθμητικό μας Μουσεῖο θὰ ἔχωμε κέρματα καὶ χάρτινα χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς χρησιμεύσουν ὡς μέσα γιὰ τὴν κατανόηση τῶν νομισμάτων, (ἡ δραχμή, τὸ πενηντάλεπτο, τὸ εἰκοσάλεπτον, τὸ δεκάλεπτον, τὸ πεντάλεπτον), ποὺ τόσο ἐνδιαφέρουν τὰ παιδιά.

Στὴν αἴθουσα τῆς διδασκαλίας θὰ ἔχωμε, ἕνα ἡμερολόγιο καὶ ενα ὡρολόγιο, ποὺ θὰ μᾶς βοηθήσουν νὰ ἀναπτύξωμε τὰ στοιχεῖα ποὺ σχετίζονται μὲ αὐτὰ τὰ ὄργανα.

ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Ἀρίθμηση εἶναι ἡ πρωταρχικὴ πορεία ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ ἄνθρωπος. Εἶναι ἴσως ἡ πρώτη μας μέθοδος μαθήσεως τῶν ἀριθμῶν. Εἶναι ἡ μόνη ἀληθινὴ θεμελιώδης πορεία. Οἱ τέσσερεις πράξεις, πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση σ' αὐτὴν στηρίζονται.

Πολλὲς συζητήσεις ἔχουν γίνει τὰ τελευταῖα χρόνια γύρω ἀπὸ τὸ θέμα τῆς ἀριθμήσεως καὶ πολλὲς μελέτες γράφτηκαν πάνω σ' αὐτό.

Μερικοὶ ἐκπαιδευτικοὶ ὑποστηρίζουν ὅτι ἡ ἀρίθμηση εἶναι μιὰ ἱκανότης τοῦ ἀνθρώπου νὰ ἐφαρμόζη τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν στὰ ἀτομικὰ ἀντικείμενα μιᾶς ὁμάδος γιὰ νὰ βρῆ τὸ συνολικὸ ἀριθμό τους.

Ἄλλοι πάλι λέγουν, ὅτι ἀρίθμηση εἶναι ἡ ἱκανότης τοῦ ἀνθρώπου νὰ ἀπαγγέλλη τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν κατὰ σειράν.

Κατὰ τοὺς **Brueckner** καὶ **Grossnickle** (1) ἀρίθμηση στὴν ἁπλουστάτη της μορφὴ εἶναι κυρίως ἀρίθμηση ἀπὸ μνήμης, ἀλλὰ ἡ ἀρίθμηση πρέπει νὰ ἀναπτυχθῆ κατὰ τρόπο ποὺ νὰ περιλαμβάνη ὁμάδες.

Οἱ ἴδιοι Παιδαγωγοὶ προτείνουν ἔξι στάδια ἀριθμήσεως.

1) Ἀρίθμηση ἀπὸ μνήμης, δηλ. ἐπανάληψη τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν χωρὶς ἔννοια.

2) Ἀπαρίθμηση. Δηλ. ἀρίθμηση γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ἀριθμοῦ πραγμάτων σὲ μία ὁμάδα (βῶλοι, ξυλάκια, μολύβια κλπ).

3) Ταύτιση. Δηλ. ὀνομασία τοῦ ἀριθμοῦ ἄσπρων βώλων, ἢ μαύρων βώλων, σὲ μιὰ ὁμάδα καὶ ταύτιση τῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ πράγματα. Ἡ ταύτιση ἀπαντᾶ στὴν ἐρώτηση αὐτοῦ τοῦ τύπου: Σὲ ποία ὁμάδα εἶναι τέσσερεις βῶλοι;

4) Ἀναπαραγωγή. Δηλ. ἐκλογὴ ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ βώλων (μαύρων ἢ ἄσπρων) καὶ ἀναπαραγωγὴ τοῦ ἀριθμοῦ.

5) Σύγκριση. Δηλ. ἀπόφαση ἐὰν ὑπάρχουν περισσότεροι ἄσπροι βῶλοι ἀπὸ τοὺς μαύρους καὶ σύγκριση τοῦ ἀριθμοῦ κάθε χρώματος. Ἀπαντᾶ στὴν ἐρώτηση: Ποῖοι βῶλοι εἶναι περισσότεροι; Ποῖοι βῶλοι εἶναι ὀλιγώτεροι;

6) Συνάθροιση. (σύνθεση). Δηλ. συνένωση τῶν ὁμάδων καὶ ἀρίθμηση γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ.

1. **Brueckner and Grossnickle F.** σελ. 170-172.

Κατὰ τὸν **Brownell** (1), ἡ ἀρίθμηση στηρίζεται στὴν ἀνάπτυξη ταχείας καὶ ἀκριβοῦς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ μέσα σὲ μία ὁμάδα συγκεκριμένων πραγμάτων καὶ 2) στὸ νὰ δώση στὸ παιδὶ τὶς πρῶτες ἰδέες τῆς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν, ὥστε νὰ διατηρήση στὸ μυαλό του σὲ ἕνα ὡρισμένο σύστημα, τὴ θέση καθενὸς ἀριθμοῦ γιὰ ἀρίθμηση ἀντικειμένων καὶ προσάρτηση τῶν ὀνομάτων τοῦ ἀριθμοῦ στὰ μετρούμενα ἀντικείμενα ἕνα πρὸς ἕνα.

Ἡ ἀρίθμηση ἀνὰ 1, εἶναι βέβαια ἀναγκαία, λέγει, καὶ πρέπει νὰ προηγῆται τῆς ὅλης διδασκαλίας, ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ ἀκολουθῆ ἀμέσως ἡ διδασκαλία τῶν ἀφηρημένων συμβόλων.

Πρῶτα θὰ ἀσκηθοῦν οἱ μαθητὲς νὰ σκέπτωνται τοὺς ἀριθμοὺς 1) ὡς ὁμάδες ποὺ ἔχουν γίνει ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, καὶ 2) ὡς ἀκέραια μέρη μεγαλυτέρων ἀριθμῶν. Πρέπει νὰ κατανοήσουν ὅτι ἡ ἰδέα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἰδέα τῆς ὁμάδος.

Ὁ **Wheat** (2) ὑποστηρίζει ὅτι πρέπει νὰ διδαχθοῦν 4 μέθοδοι μελέτης τῶν ὁμάδων:

1) Ἀρίθμηση ὁμάδων.
2) Σύγκριση ὁμάδων.
3) Ἀνάλυση ὁμάδων.
4) Ἀνάλυση καὶ σύνθεση ὁμάδων.

Ὁ ἴδιος ἐπίσης λέγει ὅτι, κατὰ τὴν ἀρίθμηση πρέπει νὰ κάμωμε 4 πράγματα συγχρόνως:

1) Νὰ χρησιμοποιήσωμε τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν κατὰ σειρά.
2) Νὰ διακρίνωμε τὰ ἀντικείμενα σὲ μία ὁμάδα.
3) Νὰ σκεφτοῦμε μία ὁμάδα ὡς ἕνα σύνολο.
4) Νὰ χρησιμοποιήσωμε τὰ ὀνόματα ὡς κύριες ἔννοιες διακρίσεως.

---

1. **Brownell W. «The Development of children s' Number Ideas in Primary Grades»** σελ. 216-226.
2. **Wheat «How to teach arithmetic»** σελ. 16-74.
3. **Wheat «The psychology and Teaching of Arithmetic»** σελ. 16-67.

Ὁ **Stokes** (1) πιστεύει ὅτι τὸ π ρ ῶ τ ο β ῆ μ α στὴ διδασκαλία τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι: 1) ἡ ἀρίθμηση ἀπὸ μνήμης καὶ 2) ἡ λογικὴ ἀρίθμηση.

Τὸ παιδὶ ὅταν μετρᾶ βώλους, βιβλία, τετράδια, μολύβια μαθαίνει νὰ μετρᾶ κατανοητά. Αὐτὴ εἶναι λογικὴ ἀρίθμηση.

Δύο καταστάσεις πρέπει νὰ εἶναι παροῦσες γιὰ νὰ κάμη τὸ παιδὶ λογικὴ ἀρίθμηση:

1) Πρέπει νὰ ὑπάρχη κάτι γιὰ ἀρίθμηση καὶ

2) Πρέπει νὰ ἔχη ἀντίληψη τῆς συνεχείας τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ πρῶτο ἀναφέρεται στὴν κοινωνικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὸ ἄλλο περιλαμβάνει τὴν μαθηματικὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ ἕνα συμπληρώνει τὸ ἄλλο. Εἶναι οἱ δύο εἰδικὲς βιταμῖνες μιᾶς ὑγιεινῆς δίαιτας τῆς ἐργασίας τοῦ ἀριθμοῦ. Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ ἀριθμῆ τὰ πράγματα ποὺ βλέπει στὸ δωμάτιο (καθίσματα, θρανία, κ.λ.π.).

Οἱ μελέτες τῶν **Willey** καὶ **Robinson** ἀπέδειξαν ὅτι πολλὰ παιδιά διαβάζουν ἀριθμοὺς γιὰ νὰ ποῦν τὴν ὥρα, νὰ βροῦν τὶς σελίδες τοῦ βιβλίου των. Ἐπίσης ἀριθμοῦν ὅταν παίζουν. Αὐτὲς οἱ ἐνέργειες δείχνουν τὴν κοινωνικὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἀριθμήσεως, καὶ τῆς ἀναγνώσεως ἀριθμῶν. Ἡ μαθηματικὴ πλευρά τῆς ἀριθμήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἀντίληψη τῆς συνεχοῦς διατάξεως ἀριθμῶν στὸ σύστημα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῶν σχετικῶν μεγεθῶν.

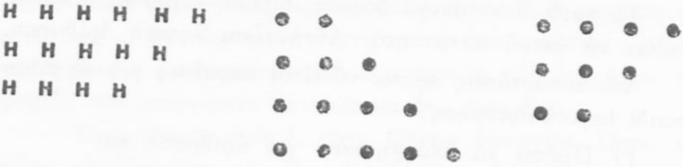
Τ ὸ δ ε ύ τ ε ρ ο β ῆ μ α εἶναι ἡ παρατήρηση τῶν μεγεθῶν.

Μὲ τὴν σύγκριση ἁπλῶν πραγμάτων ἢ ὁμάδων διαφορετικῶν μεγεθῶν, ἀναπτύσσονται οἱ πρῶτες ἰδέες ἀριθμήσεως. Θὰ παρουσιάσωμε πολλὲς ὁμάδες διαφορετικῶν μεγεθῶν μὲ τί-

---

1. **Stokes N. «Teaching the meanings of Arithmetic».**

τοια διάταξη ὥστε τὸ παιδὶ φυσικὰ νὰ ἐκτιμήση τὸ μέγεθος (βλ. σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

Τὰ ὑλικὰ διδασκαλίας ποὺ βρίσκονται στὴν τάξη (καθίσματα, θρανία, τετράδια, μολύβια, βιβλία) θὰ τὰ συμπληρώσωμε μὲ ἄλλα μικρότερα ὑλικὰ (βῶλοι, μολυβένια στρατιωτάκια, ὄσπρια, ξυλάκια,)παιγνίδια, εἰκόνες καὶ ἄλλα.

Ἐπειδή, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ παιδί τῆς πρώτης τάξεως μπορεῖ νὰ ἐκτιμήση τοὐλάχιστον 4 πράγματα χωρίς ἀρίθμηση θὰ μιλήσωμε γιὰ τὶς ὁμάδες τῶν δύο, τριῶν καὶ τεσσάρων πραγμάτων καθὼς προχωροῦμε στὴν ἀριθμητική μας ἐργασία.

Τὸ τελευταῖο βῆμα εἶναι νά ἀποκτήση ἀκρίβεια στὴ μελέτη τῆς ὁμάδος ὡς ὁλότητος.

Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ ἀσκηθῆ νὰ ἀναγνωρίζη ὁμάδες μέσα στὴν ὁλότητα (μικρότερες ὁμάδες).

Ἕνας ἀποτελεσματικὸς τρόπος εἶναι νὰ διαιρεθῆ ἡ τάξη σὲ ὁμάδες γιὰ παιγνίδια, νὰ σχεδιασθοῦν ὁμάδες εἰκόνων σὲ καρτέλλες καὶ ἡμιαφηρημένα σύμβολα στὸν πίνακα. Οἱ **Spencer** καὶ **Brydegard** (1) καὶ **Morton**, (2) λέγουν ὅτι ἡ ἀρίθμηση εἶναι ἡ θεμελιώδης πράξη. Ἡ ἐργασία τῆς ἀριθμήσεως ἔχει ἄμεση ἐφαρμογή.

---

1. **Spencer and Brydegard «Building Mathematical concepts in the Elementary School»** σελ. 357-368.
2. **Morton R. «Teaching Arithmetic in the Elementary School»** σελ 57 75.

Ἕνας μπορεῖ νὰ μετρήση τὴν ἀξία τῆς συλλογῆς πραγμάτων. Ἡ πορεία λέγεται πρόσθεση. Ἕνας ἄλλος νὰ ὁρίση πόσα ἀντικείμενα ἔμειναν ἀφοῦ πάρομε ἕνας μέρος ἀπ' αὐτά. Αὐτὴ ἡ πορεία λέγεται ἀφαίρεση.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση δὲν εἶναι νέες ἐργασίες. Πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἕνας εἰδικὸς τρόπος προσθέσεως καὶ διαίρεση εἶναι ἕνας εἰδικὸς τρόπος ἀφαιρέσεως. Ἡ ἀρίθμηση εἶναι ἡ μόνη ἀληθινὴ θεμελιώδης πορεία. Τέλος ὁ Swenson (1) λέγει ὅτι αὐτὸς ποὺ ἐπιχειρεῖ νὰ διδάξη ἀρίθμηση καὶ νὰ ὁδηγήση τὰ παιδιὰ στὴν μάθηση τῆς ἀριθμητικῆς πρέπει νὰ ἀκολουθήση ἕξ φάσεις:

1) Ἀρίθμηση ἀπὸ μνήμης, 2) τακτικὸς ἀριθμός, 3) κύριος ἀριθμός, 4) ἀνάγνωση καὶ γραφὴ ἀριθμῶν, 5) ἀξία θέσεως καὶ 6) τὸ μηδέν.

Ἕνα θέμα, συνεχίζει, ὁ ἴδιος, δὲν συμπληρώνεται προτοῦ ἀρχίση τὸ ἄλλο.

Ἡ ἀρίθμηση ἀπὸ μνήμης π.χ. δὲν συμπληρώνεται προτοῦ ἀρχίση ἡ ἀναγνώριση τῶν τακτικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ μελέτη τῶν ὁμάδων θὰ ἀκολουθήση τὰ ἑξῆς τρία στάδια:

1. Κυρίως ἀρίθμηση,
2. Σύγκριση ὁμάδων καὶ
3. Ἀνάλυση καὶ σύνθεση ὁμάδων.

Τὸ πρῶτον στάδιον τῆς κυρίως ἀριθμήσεως εἶναι ἡ μάθηση καὶ χρήση τῶν ὀνομάτων τῶν ἀριθμῶν.

Τὸ παιδὶ θὰ μάθη νὰ ἐφαρμόζη τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν στὰ ἀντικείμενα μιᾶς ὁμάδος καὶ νὰ ὁρίζη τὸ μέγεθος τῆς ὁμάδος.

Τὸ παιδὶ ὅταν μετρᾶ θὰ παρατηρῆ κάθε πρᾶγμα, θὰ τὸ ἐγγίζη, θὰ τὸ σημειώνη καὶ θὰ ἐφαρμόζη σ' αὐτὸ τὸ κατάλληλον ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ στὴν κατάλληλη θέση στὴ σειρὰ τῶν

---

1. Swenson «Arithmetic for preschool and primary-Grade children» σελ. 58 75.

ὀνομάτων. Ὅταν μετρᾶ, πρέπει νὰ προσέχη σὲ κάθε μέρος τῆς ὁμάδος καὶ στὴν ὁλικὴ ὁμάδα. Στὴν ὁμάδα ὡς ὁλότητα, καὶ στὴν μονάδα ὡς μονάδα.

Οἱ ἐρωτήσεις τοῦ δασκάλου: Πόσα τετράδια εἶναι ἐκεῖ; Πόσα βιβλία βλέπεις στὸ τραπέζι; Πόσα μολύβια ἔχω στὸ χέρι μου; βοηθοῦν τὸ παιδὶ νὰ προσέξη στὴν ὁλικὴ ὁμάδα προτοῦ μετρήση, καθὼς μετρᾶ, καὶ ὅταν ἔχει μετρήσει.

Καὶ τώρα τὸ ἐρώτημα:

Πῶς θὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι τὰ παιδιὰ ἔχουν μάθει νὰ μετροῦν; Ὅταν ἐγγίζουν, σημειώνουν, καὶ παρατηροῦν σὲ κάθε ἀντικείμενο μιᾶς ὁμάδος καὶ λέγουν 1,2,3, κ.λ.π. καὶ ὅταν ἐννοοῦν ὅτι τὸ ὄνομα τοῦ τελευταίου ὀνομαζομένου ἀριθμοῦ λέγει τὸν ἀριθμὸ τῶν πραγμάτων τῆς ὁμάδος, ἔχουν μάθει ἀρίθμηση καὶ εἶναι ἕτοιμα γιὰ τὸ ἑπόμενο στάδιο τῆς συγκρίσεως ὁμάδων. Γιὰ νὰ προχωρήσωμε στὴν σύγκριση πρέπει νὰ ὁρίσωμε πόσα εἶναι στὴ μία ὁμάδα καὶ πόσα στὴν ἄλλη. Θὰ ἀπευθύνωμε τὴν ἑξῆς βοηθητικὴ ἐρώτηση: Πόσα περισσότερα; Ἡ λέξη περισσότερα ἔχει ἔννοια καὶ πρέπει νὰ ἐξηγηθῆ γιατὶ εἶναι νέα καὶ ἄγνωστη σὲ πολλὰ παιδιά. Σημειοῦται ὅτι ἡ γλῶσσα τῆς συγκρίσεως περιέχει τοὺς ὅρους: Περισσότερο ἢ ὀλιγώτερο, ἀρχαιότερο ἢ νεώτερο, μικρότερο ἢ μεγαλύτερο κ.λ.π.

Ἡ χρήση τῶν δακτύλων θὰ βοηθήση στὴν ἐργασία αὐτὴ ἡ ὁποία θὰ προχωρῆ βῆμα πρὸς βῆμα.

Ὁ δάσκαλος θὰ ἐρωτήση:

Σηκώσετε δύο δάκτυλα στὸ δεξὶ χέρι καὶ τέσσερα δάκτυλα στὸ ἀριστερό. Σὲ ποιὸ χέρι βλέπετε περισσότερα δάκτυλα;

Σημείωση: Ἡ ἀπαρίθμηση ἐμφανίζεται προχωρητικῶς καὶ ὀπισθοχωρητικῶς ἕως τὴν δευτέρα ἢ τρίτη δεκάδα ἀνὰ ἕνα-ἕνα καὶ ἀνὰ δύο-δύο.

Βλέπε: Καραχρήστου Ν. «Ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία στὸ Δημοτικό μας σχολεῖο» σελ. 53.

Στὸ θρανίο τοῦ Νίκου βλέπω τρία μολύβια κόκκινα καὶ δύο μολύβια μαῦρα. Ποῖα μολύβια εἶναι περισσότερα, τὰ κόκκινα ἢ τὰ μαῦρα;

Ὁ δάσκαλος ἔχει ζωγραφίσει στὸν πίνακα δύο εἰκόνες. Ἡ μία δείχνει 4 δένδρα καὶ ἡ ἄλλη 3 δένδρα. Ποία εἰκόνα ἔχει τὰ περισσότερα δένδρα;

Σὲ μία καρτέλλα εἶναι μία εἰκόνα ποὺ δείχνει 5 τετράγωνα καὶ σὲ μία ἄλλη μία εἰκόνα μὲ 3 τετράγωνα. Ὁ δάσκαλος παρουσιάζει τὶς καρτέλλες ἐνῶ ἐρωτᾶ: Σὲ ποία καρτέλλα βλέπετε περισσότερα τετράγωνα;

Παιδιά, στὴν πρώτη τάξη φοιτοῦν 6 ἀγόρια καὶ 4 κορίτσια. Ποῖα εἶναι περισσότερα τὰ ἀγόρια ἢ τὰ κορίτσια;(γιὰ νὰ βεβαιωθοῦμε πρέπει σὲ κάθε περίπτωση νὰ μετρήσουν τὰ πράγματα).

Θὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι ἔχουν ἐννοήσει καλῶς τὴν σύγκριση, ὅταν ἀπαντοῦν μὲ εὐκολία καὶ ἐμπιστοσύνη στὶς παραπάνω ἐρωτήσεις.

Τὸ τελευταῖο στάδιο εἶναι ἡ ἀνάλυση καὶ ἡ σύνθεση. Οἱ ἀσκήσεις ποὺ θὰ προετοιμάσουν τὰ παιδιὰ γιὰ τὴν ἀνάλυση εἶναι: 1) ἡ μελέτη μιᾶς ὁμάδος γνωστοῦ μεγέθους, 2) ἡ διάταξη μιᾶς ὁμάδος σὲ δύο μικρότερες, 3) ἡ εὕρεση τῶν μερῶν τῆς κάθε μικρότερηςὁμάδος, 4) ἡ προσοχὴ στὴν ὁλικὴ ὁμάδα καὶ στὶς μικρότερες ὁμάδες (τὰ μέρη της), 5) περιγραφὴ τῶν νέων διατάξεων τῆς ὁμάδος.

Μὲ τὴν ἀνάλυση τὰ παιδιὰ μαθαίνουν νὰ σκέπτωνται τὴν ὁμάδα καὶ τὴ σχέση της μὲ τὶς μικρότερες ὁμάδες στὶς ὁποῖες χωρίζεται.

Τέλος, θὰ μάθουν τὰ παιδιὰ τὴν σύνθεση καὶ τὴν ἀνάλυση ὁμάδων. Οἱ ἑξῆς ἐρωτήσεις θὰ βοηθήσουν στὴν κατανόηση: Πόσα μολύβια κρατῶ στὸ ἀριστερό μου χέρι; (κρατᾶ 4 μολύβια). Πόσα μολύβια ἔχω στὸ δεξὶ μου χέρι; (ἔχει 3). Πόσα μολύβια ἔχω τώρα; (Ἑνώνει ὅλα τὰ μολύβια). Πόσα μολύβια θὰ μείνουν ἐὰν βγάλωμε 2 ἀπὸ ἕξ;

Τὰ στάδια τῆς προόδου στὴ μελέτη τῶν ὁμάδων μὲ ἀνάλυση καὶ σύνθεση εἶναι:

1) Προσοχὴ στὴν διάταξη ἀντικειμένων ὅταν ὁ δάσκαλος κάνη καὶ περιγράφη τὴν διάταξη.

2) Προσοχὴ στὴν διάταξη ἀντικειμένων ὅταν τὸ παιδὶ κάνη καὶ περιγράφη τὴν διάταξη.

3) Προσοχὴ στὴν διάταξη ἀντικειμένων ὅταν τὸ παιδὶ δὲν χρησιμοποιῆ ἀντικείμενα ἀλλὰ σκέπτεται μόνο τὴν διάταξη.

4) Προσοχὴ στὴν διάταξη ὅταν τὰ ἀντικείμενα εἶναι παρόντα μόνον στὴν φαντασία.

5) Προσοχὴ στὴν διάταξη ὅταν ἀπουσιάζουν τὰ ἀντικείμενα καὶ χρησιμοποιῆται ἡ γλῶσσα τοῦ ἀριθμοῦ γιὰ τὴν περιγραφὴ τῆς διατάξεως ἡ ὁποία τώρα εἶναι καθαρὸς τρόπος σκέψεως.

Βοηθοῦμε στὴν κατανόηση τῶν ὁμάδων ἐὰν παρουσιάσωμε τὶς διάφορες ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

Τὸ δύο μὲ τὶς διατάξεις 0 0   0
0

Τὸ τρία μὲ τὶς διατάξεις 0 0 0   0
0
0   0 0
0

0
0 0   0 0
0   ἤ

Μὲ τὴν μελέτη τῶν ὁμάδων τὰ παιδιὰ ἔχουν μπεῖ στὸ δρόμο τῆς ἀριθμητικῆς μαθήσεως. Ἔχουν ἀναπτύξει καὶ ταξινομήσει τὶς ἰδέες τους μέχρι τοῦ 10 καὶ εἶναι ἕτοιμα νὰ διδαχθοῦν τὴν ἔννοια καὶ τὴν χρήση τῶν συμπλεγμάτων τῶν ἀριθμῶν.

ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ

Στατιστικὰ δεδομένα βεβαιώνουν, ὅτι τὰ περισσότερα παιδιὰ συναντοῦν μεγάλες δυσκολίες στὸ ν' ἀφομοιώσουν τὴν ἀριθμητική.

Τοῦτο ὀφείλεται σὲ πολλὲς αἰτίες, ὅπως εἶναι ἡ ἔλλειψη οἰκογενειακοῦ περιβάλλοντος, ἡ ἔλλειψη διαφωτισμοῦ τῆς οἰκογενείας στὸ πῶς θὰ βοηθήση πρακτικὰ τὸ παιδὶ στὴν ἀριθμητική του, ἡ μὴ χρησιμοποίηση τῆς ἐμπειρίας τοῦ μαθητοῦ κλπ.

Ἡ ἐπιτυχία τῆς ἀριθμητικῆς ἐξαρτᾶται κατὰ πολὺ ἀπὸ τὴ μέθοδο, ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμε, καὶ ἀπὸ τὰ ὑλικὰ τῆς διδασκαλίας.

Δὲν ὑπάρχει καμμιὰ μέθοδος ἢ ἁπλὸς τύπος διδακτικοῦ ὑλικοῦ, ποὺ νὰ ἐπαρκῇ σ' ὅλες τὶς καταστάσεις. Ὁ δεξιοτέχνης δάσκαλος ἐκλέγει μεθόδους καὶ ὑλικὰ ἀνάλογα μὲ ἐκεῖνο ποὺ θὰ διδάξη.

Ὁ ἰσχυρισμὸς μερικῶν, ὅτι, γιὰ νὰ μάθη τὸ παιδὶ ἀριθμητική, πρέπει νὰ ἔχη εἰδικὴ κλίση στὸ μάθημα, δὲν εὐσταθεῖ γιὰ τὸ δημοτικὸ σχολεῖο, γιατὶ ἡ ὕλη τοῦ δημοτικοῦ σχολείου καὶ τοῦ Γυμνασίου ἀκόμη, πρέπει ν' ἀφομοιώνεται ἀπὸ κάθε κανονικὸ παιδί, ὅταν ἡ μάθηση ἐφαρμόζεται στὸ ἐπίπεδον ὡριμότητός του.

Τὸ νέο σχολεῖο ὑποστηρίζει, ὅτι ἡ ἀπόκτηση τῶν γνώσεων δὲν πρέπει ν' ἀρχίζη μὲ λόγια, γιατὶ ὡς εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν ψυχολογία, τὰ παιδιά στὴν ἀρχὴ δὲν ἔχουν τὴν ἱκανότητα γιὰ τέτοιες ἐνέργειες. Οἱ μαθητές, τῶν κατωτέρων τάξεων τοῦ δημοτικοῦ σχολείου δὲν ἔχουν ἀκόμη ἀνεπτυγμένες τὶς νοητικές των ἱκανότητες. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο πρέπει ν' ἀπευθυνώμαστε κυρίως στὶς συναισθηματικοκινητικὲς καὶ δημιουργικὲς ἱκανότητές των.

Κατὰ τὴν προσχολικὴ ἡλικία καὶ μέχρι τοῦ 10ου ἔτους ἡ νόηση λειτουργεῖ ὄχι τόσον εὐκρινῶς. Μετὰ τὸ δέκατο ἔτος ἀρχίζει νὰ ἐνεργῆ εὐκρινέστερα. Τὸ παιδὶ μέχρι αὐτὴ τὴν ἡλικία ἀσχολεῖται μόνο μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα. Σκέπτεται, πάντα μὲ τὴ βοήθεια συγκεκριμένου ὑλικοῦ πραγμάτων, λέγει ὁ ἱδρυτὴς τῆς Πειραματικῆς Ψυχολογίας, ὁ **Meuman.** Τὸ μάθημα τῆς ἀριθμητικῆς πρέπει ν' ἀρχίζη μὲ συγκεκριμένα πράγματα καὶ βαθμιαῖα νὰ προχωρῆ στὰ ἀφηρημένα σύμβολα.

Ὅλοι οἱ Παιδαγωγοὶ καὶ Ψυχολόγοι πιστεύουν, ὅτι τὰ παιδιὰ δὲν πρέπει νὰ ἰδοῦν μόνον αὐτὸ ποὺ μαθαίνουν, ἀλλὰ πρέπει ν' ἀσχοληθοῦν μ' αὐτό, νὰ τὸ μελετήσουν, νὰ τὸ παρατηρήσουν, νὰ τὸ ἐγγίσουν, δηλ. νὰ χρησιμοποιήσουν, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ὅλες τους τὶς αἰσθήσεις.

Εἶναι ἄλλως τε γνωστόν, ὅτι τὰ παιδιά μαθαίνουν καλλίτερα ὅταν ἔχουν εὐκαιρίες νὰ ἰδοῦν, νὰ ἀκούσουν, νὰ ἐξετάσουν, νὰ χειρισθοῦν, νὰ ἐρωτήσουν καὶ νὰ συζητήσουν. Αὐτὸς εἶναι ὁ ἀποτελεσματικώτερος τρόπος μαθήσεως. Τὰ ἐποπτικὰ μέσα γι' αὐτὸ τὸ λόγο εἶναι ἀπαραίτητα γιὰ τὴ διδασκαλία κάθε μαθήματος καὶ εἰδικά τῆς ἀριθμητικῆς.

Δέν εἶναι δυνατὸν νὰ διδάξωμε ἀριθμητικὴ κατανοητά, ἐὰν ὁ μόνος διδακτικὸς ὁπλισμὸς τῆς τάξεως ἀποτελεῖται ἀπὸ χαρτιά, μολύβια, κιμωλία καὶ μαυροπίνακα. Αὐτὰ τὰ ὑλικὰ βέβαια, εἶναι βασικὰ καὶ πρέπει νὰ ὑπάρχουν σὲ κάθε αἴθουσα διδασκαλίας, ἀλλὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ συμπληρωθοῦν μὲ ἄλλα ὑλικά, ποὺ θὰ βοηθήσουν τὸ μαθητὴ ν' ἀνακαλύψη τὶς σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν.

Ὁ δάσκαλος πρέπει ν' ἀναγνωρίζη, ὅτι τὰ συγκεκριμένα τῆς ζωῆς ἀντικείμενα ἀποτελοῦν τὴν βάση κάθε μαθήσεως. Τὸ παιδὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίση τί θὰ τὸ βοηθήση νὰ κατανοήση τὶς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν πράξεών τους καὶ ἀκόμη πῶς ἡ ἀριθμητικὴ ἐνεργεῖ στὴν καθημερινή του ζωή. Γιὰ ν' ἀφομοιώση δὲ ἐκεῖνο ποὺ μαθαίνει καὶ νὰ ἀποκτήση σαφῆ καὶ ἀκριβῆ ἰδέα τῶν ἀριθμῶν, πρέπει νὰ χρησιμοποιήση ὑλικά. Δὲν εἶναι ἀρκετὸ νὰ συνηθίση νὰ κάνη μηχανικὰ τὶς ἀριθμητικὲς πράξεις, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἔχη καὶ τὴν ἱκανότητα νὰ τὶς ἐννοῇ καὶ νὰ δικαιολογῇ, γιατὶ ἔγινε ἡ κάθε μία.

Τὸ παιδὶ ποὺ χρησιμοποιεῖ ὑλικὰ μέσα, ἐννοεῖ τί κάνει. Γίνεται ἕνας ἀνεξάρτητος ἐργάτης, ποὺ εἶναι ἱκανὸς νὰ βρῇ μόνος του τὶς ἀπαντήσεις.

Ὅσο σπουδαία εἶναι ἡ χρήση ὑλικῶν ἀναγνώσεως γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς ἀναγνωστικῆς ἱκανότητος τῶν παιδιῶν, τόσο σπουδαία εἶναι καὶ ἡ χρήση ποικίλων ἐποπτικῶν μέσων γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς ἀριθμητικῆς, ἰδίως στὶς 2 πρῶτες τάξεις τοῦ δημοτικοῦ σχολείου.

Καὶ ἰδοὺ τώρα τὸ ἐρώτημα:

Ποιὰ ὑλικὰ μέσα θὰ μεταχειρισθοῦμε, γιὰ νὰ ἐπιτύχωμε τὸν ἀριθμητικό μας σκοπό;

Καθὼς γνωρίζομε, ἡ μεταφορὰ ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο δὲν γίνεται τόσο ἀπότομα.

Ὑπάρχουν τέσσερα στάδια διὰ τῶν ὁποίων ὁ μαθητὴς θὰ προχωρήση ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο (συγκεκριμένα, εἰκόνες, ἡμιαφηρημένα σύμβολα, ἀφηρημένα σύμβολα). Αὐτὸ ὅμως δὲν σημαίνει ὅτι χρησιμοποιοῦμε αὐτὰ τὰ ὑλικὰ συνεχῶς μέχρι νὰ φθάσωμε στὸ ἀφηρημένο καὶ μετὰ παύομε τὴ χρήση των.

Μὲ τὴν βοήθειά μας τὸ παιδὶ θὰ κινηθῇ ἀπὸ τὰ συγκεκριμένα, εἰκόνες καὶ ἡμιαφηρημένα σύμβολα στὰ ἀριθμητικὰ σύμβολα καὶ θὰ ἐπιστρέψῃ πίσω στὰ συγκεκριμένα ἀντικείμενα τοῦ περιβάλλοντος τῆς ζωῆς.

Σὲ ὅλες τὶς τάξεις, τὸ συγκεκριμένο καὶ οἱ εἰκόνες θὰ εἶναι ἀναγκαῖες, ὅταν εἰσάγωνται νέες ἰδέες καὶ σχέσεις.

Ἡ αἴθουσα τῆς διδασκαλίας πρέπει νὰ εἶναι ἕνα ἐργαστήριο μὲ ἄφθονα ἐποπτικὰ μέσα.

Στὸ Μουσεῖο ἀριθμητικῆς τῆς τάξεως θὰ συγκεντρώση ὁ δάσκαλος τὰ ὑλικὰ ποὺ τοῦ χρειάζονται καὶ θὰ τὰ ἔχη ἕτοιμα πρὸς χρήση, ὅταν παραστῇ ἀνάγκη.

Μερικὰ ὑλικὰ μποροῦν νὰ φέρουν τὰ παιδιὰ ἀπὸ τὰ σπίτια τους, ἄλλα μποροῦν νὰ ἀγορασθοῦν καὶ πολλὰ εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν ἀπὸ τὸ δάσκαλο καὶ τοὺς μαθητές. Στὸ μάθημα π.χ. τῆς ἰχνογραφίας τὰ παιδιὰ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ δασκάλου θὰ ζωγραφίσουν σὲ χαρτόνι λευκὸ διάφορες εἰκόνες, τοὺς ἀριθμοὺς 1—100 κλπ.

Ἀπὸ τὰ συγκεντρωμένα ὑλικὰ ὁ δάσκαλος θὰ ἐκλέγῃ ἐκεῖνα, ποὺ εἶναι ἀπαραίτητα γιὰ τὴν αἰσθητοποίηση τῆς ἀριθμητικῆς διδασκαλίας.

Τὰ ὑλικὰ στὶς διάφορες τάξεις θὰ ποικίλλουν.

Νέα ὑλικὰ θὰ προστεθοῦν σὲ κάθε τάξη, ὡς συμπληρωματικὰ καὶ μερικὰ παλαιὰ θὰ χρησιμοποιηθοῦν σὲ νέους καὶ ἄγνωστους τρόπους.

Συγκεκριμένα ὑλικὰ

Στὴν ἀρχὴ οἱ μαθητὲς θὰ ἐργασθοῦν μὲ τὰ συγκεκριμένα τῆς ζωῆς ἀντικείμενα, ποὺ μποροῦν νὰ κρατήσουν, νὰ ἐγγίσουν, νὰ παρατηρήσουν, νὰ μεταφέρουν.

Τὰ ὑλικὰ αὐτὰ τὰ ταξινομοῦμε σὲ 8 κατηγορίες:

1) Ὑλικὰ ποσότητος	5) Ὑλικὰ ἀξίας (χρήματος)
2) » μήκους	6) » βάρους
3) » χρόνου	7) » ἐκτάσεως
4) » θερμοκρασίας	8) » ὄγκου

Τὰ ἴδια τὰ παιδιά, τὰ δάκτυλά τους, καὶ τὰ χέρια τους, εἶναι θαυμάσια ὑλικὰ ἐπίσης.

Μικρὰ ὑλικὰ (ξυλαράκια, πετραδάκια, ὄσπρια, στρατιωτάκια, κουμπιά, χάρτινα χρήματα καὶ ἄλλα) πρέπει νὰ φέρουν μαζί των πάντοτε τὰ παιδιά.

Εἰκόνες

Μετὰ τὰ συγκεκριμένα ὑλικὰ ἀκολουθεῖ ἡ χρήση εἰκόνων ζώων, φυτῶν, ἀνθρώπων, κλπ.

Οἱ εἰκόνες εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ἀποτελεσματικώτερα μέσα ἀριθμήσεως μετὰ τὰ συγκεκριμένα τῆς ζωῆς ἀντικείμενα, διότι αἰσθητοποιοῦν τὴν συνολικὴ ἐντύπωση τῶν ἀριθμῶν. Εἶναι ἕνα σπουδαῖο μέσο νὰ διεγείρωμε τὸ διαφέρον τοῦ μαθητοῦ γιὰ ἕνα θέμα.

Ὁ **Johnson D.** (1) λέγει:

Ἡ ἀριθμητικὴ κατανοεῖται ὅταν τὰ παιδιὰ ἔχουν συγκεκριμένη πεῖρα καὶ ἰδοῦν αὐτὴ τὴν πεῖρα σχετιζομένη μὲ τὰ μαθηματικὰ σύμβολα.

Ὅλοι μας γνωρίζομε πόσο χαίρονται τὰ παιδιὰ ὅταν τοὺς παρουσιάσωμε εἰκόνες καὶ μάλιστα ἔγχρωμες.

Οἱ ἔγχρωμες εἰκόνες, λέγει ὁ **Hartung** (2) ὄχι μόνο προσθέτουν γενικὴ ἑλκυστικότητα καὶ βοηθοῦν τὴν συγκέντρωση τῆς προσοχῆς σὲ κάποιο βαθμό, ἀλλὰ βοηθοῦν καὶ τὸ δάσκαλο νὰ συνεννοῆται μὲ τοὺς μαθητές.

Λέγει π.χ. ὁ δάσκαλος:

Τώρα θὰ μελετήσωμε τὰ παραδείγματα μὲ τὸ κόκκινο χρῶμα. Συγκρίνετε τοὺς μαύρους βώλους μὲ τοὺς ἄσπρους βώλους. Νὰ βρῆτε ἂν οἱ μαῦροι ἢ οἱ ἄσπροι χοῖροι εἶναι περισσότεροι κ.λ.π.

Μὲ τὶς εἰκόνες τὰ παιδιὰ παρατηροῦν τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀντικειμένων σὲ μία εἰκόνα, τὰ μεγέθη καὶ τὰ σχήματα αὐτῶν.

Καλὲς εἰκόνες μποροῦν ν' ἀποτελέσουν τὴ βάση συζητήσεων γιὰ τὴν χρήση τῆς ἀριθμητικῆς στὴν καθημερινὴ ζωή, ὅταν δὲν ὑπάρχη συγκεκριμένο ὑλικό.

Βοηθοῦν τὸ δάσκαλο τῶν κατωτέρων τάξεων νὰ δείξη σὲ λίγο χρονικὸ διάστημα πολλὲς χρήσεις τῆς ἀριθμητικῆς.

«Ἐν πᾶσι σχεδὸν τοῖς μαθήμασι παρίσταται ἀνάγκη τῆς χρήσεως εἰκόνων πρὸς πλουτισμὸν τῶν γνώσεων τῶν παίδων.

Καὶ αὐτὴ ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν ποιεῖται

1. **Johnson D. Toward Living Mathematics «See and Hear 1946,** σελ. 19-20.
2. **Hartung M. Engen M. «Seeing through Arithmetic»** σελ. 13.

σήμερον ἐπωφελεστάτην χρῆσιν αὐτῶν πρὸς ἐκτέλεσιν ἀριθμητικῶν πράξεων, εὕρεσιν καὶ λύσιν προβλημάτων κ.τ.λ. Οὕτως ἐν ταῖς κατωτάταις τάξεσι τοῦ δημοτικοῦ σχολείου τὰ νέα βιβλία ἀριθμητικῆς κοσμοῦνται δι' εἰκόνων καταλλήλων, διὰ τῶν ὁποίων ὁδηγοῦνται οἱ παῖδες κατόπιν κατανοήσεως τοῦ περιεχομένου καὶ καταλλήλου συναισθηματικῆς προσαρμογῆς νὰ θέτωσιν οἱ ἴδιοι προβλήματα ἀριθμητικὰ καὶ νὰ ἀσχολῶνται περὶ τὴν λύσιν αὐτῶν. Καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρας τάξεις χρησιμοποιοῦνται ὡσαύτως ἀριθμητικαὶ εἰκόνες, ὑποβοηθοῦσαι τοὺς παῖδας πρὸς ποικίλους μαθηματικοὺς συνδυασμούς». (1)

Κατὰ τὸν Stern (2) πολλὰ παιδιὰ τῆς πρώτης τάξεως εἶναι ἕτοιμα νὰ λύσουν προβλήματα προτοῦ γίνουν ἱκανὰ νὰ διαβάσουν. Ἡ ἀναγνώριση αὐτὴ ἔχει ὁδηγήσει στὴν παράσταση προβλημάτων μὲ εἰκόνες. Εἰσάγεται ἡ λύση τοῦ προβλήματος μὲ τὴ βοήθεια τῶν εἰκόνων.

Ὁ δάσκαλος π.χ. δείχνει μία εἰκόνα πουλιῶν, ποὺ κάθονται σὲ ὁμάδες, μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, καὶ ρωτᾶ τὸ παιδὶ νὰ εἰπῆ τὴν ἱστορία.

Ἔγχρωμες εἰκόνες ἀπὸ περιοδικὰ καὶ βιβλία εἶναι ἄριστα ἐποπτικὰ μέσα καὶ βοηθοῦν στὴ διδασκαλία τῆς ἐννοίας τῆς λέξεως «μεγάλα» ἢ τῆς λέξεως «μικρά». Ὁ δάσκαλος ἀπευθύνει διάφορες ἐρωτήσεις: Βρῆτε τὸ μεγάλο ἀγόρι. Πῆτε τί κάνει τὸ μικρὸ κορίτσι. Τί χρῶμα ἔχει ὁ μικρὸς γάτος. Πόσα μεγάλα πουλάκια βλέπεις. Τὰ παιδιὰ θὰ δώσουν τὶς σχετικὲς ἀπαντήσεις, ἀφοῦ μελετήσουν τὶς σχετικὲς εἰκόνες. Ἔτσι βοηθοῦνται στὴν κατανόηση τῶν ἐννοιῶν καὶ τῶν λέξεών των.

Μποροῦν καὶ τὰ ἴδια τὰ παιδιὰ νὰ ζωγραφίσουν εἰκόνες, καὶ νὰ σχηματίσουν τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὶς ὁμάδες μὲ πηλὸ

---

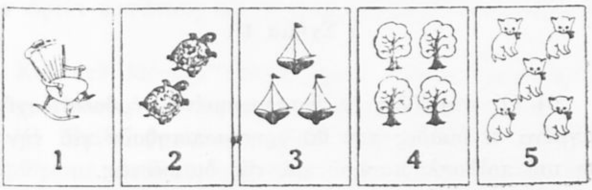
1. Βλέπε: Ἐξαρχοπούλου Ν. Γενικὴ Διδακτική, Τόμος Δεύτερος 1946, σελ. 206-276.

2. Βλ. **Stern C. «Children Discover Arithmetic,** 1949 σελ. 107-109.

ἢ πλαστιλίνη, ἢ κέντημα.

Βοηθητικὰ ἐποπτικὰ μέσα εἶναι:

1) Οἱ καρτέλλες μὲ εἰκόνες καὶ ἀριθμοὺς (βλέπε σχ. 1). Στὸν πίνακα ἀνακοινώσεων θὰ προσθέτωμε μία καρτέλλα ὅταν διδάσκεται κάθε ἀριθμός.

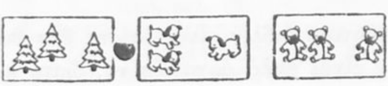


(Σχῆμα 1)

2) Οἱ καρτέλλες ἀναγνωρίσεως ὁμάδος, ποὺ περιέχουν εἰκόνες ἀντικειμένων σὲ τρεῖς τοὐλάχιστον διαφορετικὲς διατάξεις (βλέπε σχῆμα 2).

(Σχῆμα 2)

3) Οἱ καρτέλλες ἀντικειμένων ποὺ δείχνουν ὅτι 2 καὶ 1 κάνουν 3, (σχῆμα 3).

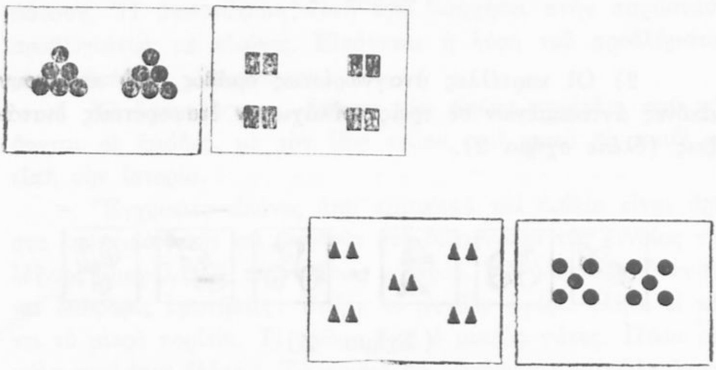


(Σχῆμα 3)

4) Οἱ καρτέλλες ἀναγνωρίσεως μιᾶς ὁμάδος (βλέπε σχῆμα 4).

(Σχῆμα 4)

5) Οἱ καρτέλλες μὲ ἡμιαφηρημένα σύμβολα (σχῆμα 5) διαταγμένα σὲ ὁμάδες ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ τὴν κατανόηση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.



(Σχῆμα 5)

Βιβλία Ἀριθμητικῆς

Τὰ βοηθητικὰ βιβλία εἶναι ἐπίσης ἕνα θαυμάσιο ἐποπτικὸ μέσον, ὅταν εἶναι καλὰ ὀργανωμένα, ὥστε ἡ χρήση των νὰ βοηθῆ τὸ δάσκαλο νὰ ἐφαρμόση τὴν διδασκαλία του στὶς ἀνάγκες καὶ τὰ διαφέροντα τῶν τροφίμων. Χρειάζονται καλὰ συντεταγμένα βιβλία ὥστε νὰ τὰ μεταχειρίζωνται τὰ παιδιὰ χωρὶς μεγάλο κόπο.

Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ ἔχῃ ἕναν ἀληθινὸν ἐνθουσιασμὸ γιὰ τὸ βιβλίο του.(1)

Τὰ βοηθητικὰ βιβλία ἀποτελοῦν ἕναν ἀπὸ τοὺς σπουδαιότερους διδακτικοὺς παράγοντες στὰ σχολεῖα τῆς Ἀμερικῆς. Χρησιμοποιοῦνται σὲ ὅλες τὶς τάξεις τοῦ Δημοτικοῦ σχολείου. Ἔχουν ἀρτία ἐμφάνιση καὶ ἡ εἰκονογράφησή τους εἶναι ἐξαιρετική.

Καὶ στὸ Μόναχο ἐπίσης ἔχουν βιβλία ἀριθμητικῆς μὲ ἔγχρωμες εἰκόνες γιὰ τὶς τάξεις πρώτη, δευτέρα, τρίτη.

Ὁ Ἐπιθεωρητὴς τῶν Δημοτικῶν Σχολείων τὸν ὁποῖον ἐπισκεφθήκαμε τὸ 1958, μᾶς ἔδωσε δύο βιβλία τῆς πρώτης τάξεως τῶν συγγραφέων **Karl Dehn** (2) καὶ **Eugen Koller** (3) καὶ δύο τῆς δευτέρας τάξεως τῶν ἰδίων συγγραφέων, εἰκονογραφημένα. Περιέχουν ὡραῖες μικρὲς πολύχρωμες εἰκόνες ζώων, ἡμιαφηρημένων συμβόλων κ.λ.π. (βλέπε σχῆμα 1) σελ. 38, ποὺ βοηθοῦν τὸν μαθητὴ νὰ ἀναγνωρίσῃ τὶς διάφορες διατάξεις τῶν ὁμάδων καὶ νὰ προχωρήσῃ βαθμιαῖα ἀπὸ τὰ συγκεκριμένα καὶ τὶς εἰκόνες στὰ μαθηματικὰ σύμβολα.

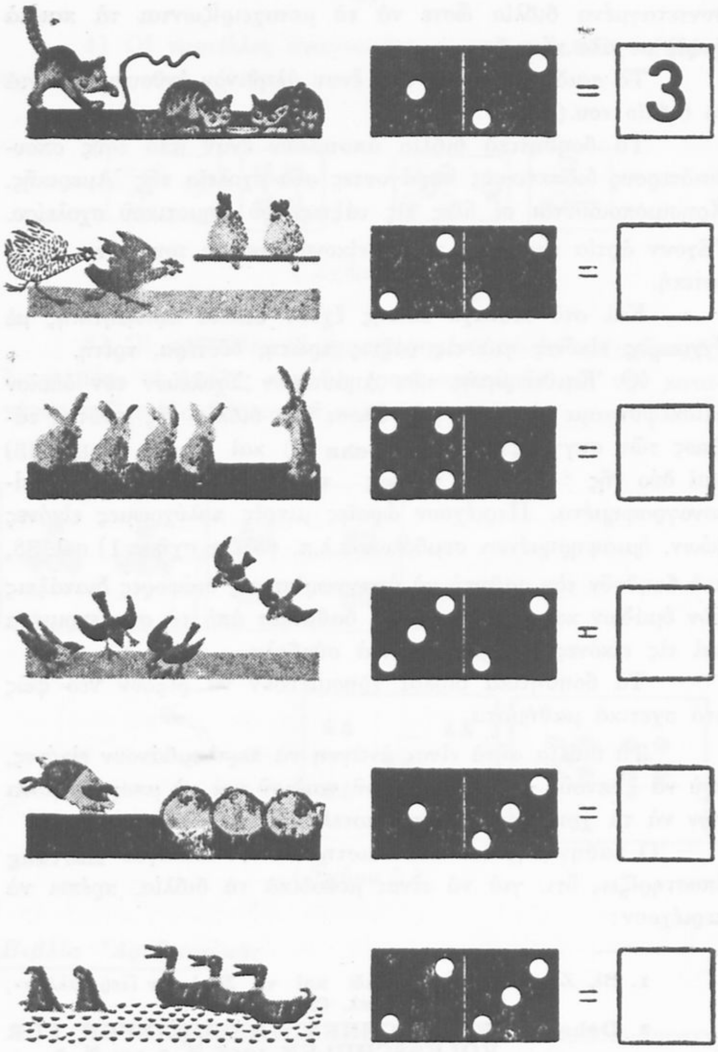
Τὰ βοηθητικὰ βιβλία χρησιμεύουν νὰ ρίξουν νέο φῶς στὰ σχετικὰ μαθήματα.

Τὰ βιβλία αὐτὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ περιλαμβάνουν εἰκόνες, ποὺ νὰ ξυπνοῦν τὸ διαφέρον τοῦ παιδιοῦ καὶ νὰ μποροῦν μόνα των νὰ τὰ χρησιμοποιήσουν ἀποτελεσματικά.

Ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Σικάγου **Hartung** ὑποστηρίζει, ὅτι, γιὰ νὰ εἶναι μεθοδικὰ τὰ βιβλία, πρέπει νὰ περιέχουν:

---

1. Βλ. Ζορμπᾶ Β. «Τὸ παιδὶ καὶ τὸ Σχολικὸν Περιβάλλον», 1955, σελ. 62.
2. **Dehn K. WIR RECHNEN I RECHENBUCH FÜR VOLKSSCHULEN 1957 N. 1** καὶ **N. 2.**
3. **Eugen Koller RECHENBUCH für die bayenifchen Volksfchulen N. 1** καὶ **N. 2.**



(Σχῆμα 1)

1) Εἰκόνες συνεχείας, ποὺ θὰ βοηθήσουν στὴν ἀντίληψη τῶν συμπλεγμάτων τῶν τεσσάρων στοιχειωδῶν πράξεων καὶ τοῦ συστήματος τοῦ ἀριθμοῦ.

2) Ἁπλὲς εἰκόνες ποὺ ἐνθαρρύνουν τὸ παιδὶ νὰ φαντασθῇ, ὅτι ὡρισμένες φυσικὲς πράξεις ἔχουν συμπληρωθῆ καὶ νὰ περιγράψη αὐτὲς τὶς πράξεις μὲ τὴν χρήση τεχνικῶν λέξεων ἢ συμβόλων.

3) Εἰκονογραφημένες προβληματικὲς καταστάσεις ποὺ πρέπει νὰ ἀναλυθοῦν καὶ νὰ ὀργανωθοῦν μὲ τὶς λέξεις, καὶ

4) Ἄσκηση τῶν συνδυασμῶν τοῦ ἀριθμοῦ πάνω στὴν χρήση τῶν τεχνικῶν λέξεων. Αὐτὰ τὰ τέσσερα εἴδη ὑλικοῦ τοποθετοῦνται σὲ μιὰ συνέχεια, ἡ ὁποία δημιουργεῖ μιὰ εὐνοϊκὴ κατάσταση μαθήσεως. Τὸ βιβλίο πρέπει νὰ ἀποτελῇ τὴν βάση, πάνω στὴν ὁποία θὰ οἰκοδομήση τὸ σχολεῖο ἀργότερα τὴν ἀριθμητικὴ ἐργασία. Ἀντὶ ἡ μάθηση νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἀνάγνωση ἢ τὶς ἀσκήσεις μὲ ἀφηρημένα σύμβολα, τοῦ ἀριθμοῦ ἡ ἐμφάνιση πρέπει νὰ τοποθετῆται στὰ συγκεκριμένα, ποὺ πρέπει νὰ συμπληρώνωνται μὲ εἰκόνες.

Τὰ παιδιὰ ἀσφαλῶς θὰ βοηθηθοῦν νὰ κάμουν ἀνακαλύψεις περὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεών των καὶ νὰ σκέπτωνται τοὺς ἀριθμούς, σὰν χρήσιμες ἔννοιες στὴν καθημερινή των ζωή.

Σπάνια, ἰδίως στὶς κατώτερες τάξεις, ἕνας μαθητὴς εἶναι ἱκανὸς νὰ κάμη ἀνακαλύψεις μαθηματικῆς ἀρχῆς, ὅταν ἀσχολῆται μόνο μὲ συμβολικὰ ὑλικά. Γιὰ νὰ διευκρινήσωμε, ἂς ἐξετάσωμε, πῶς μπορεῖ ἕνα παιδὶ νὰ κάμη ἀνακαλύψεις μαθηματικῶν ἀρχῶν μὲ τὴν χρήση ἐποπτικοῦ ὑλικοῦ, γιὰ νὰ παρουσιάση βασικὰ συμπλέγματα στὴν πρόσθεση. Ἐὰν ἕνα παιδὶ ἔχῃ 6 βώλους ἢ καρτέλλες, μπορεῖ νὰ τοὺς τακτοποιήση κατὰ διαφορετικοὺς τρόπους καὶ νὰ σχηματίση ὁμάδες. Μὲ τὴν ἐργασία αὐτὴ θὰ ἀνακαλύψη, ὅτι μπορεῖ νὰ σχηματίση ὁμάδες τοῦ 1 καὶ 5, 2 καὶ 4, 3 καὶ 3, 4 καὶ 2, 5 καὶ 1. Ὁ δάσκαλος τότε μὲ κατάλληλες ἐρωτήσεις γιὰ τὶς ὁμάδες θὰ βοηθήση τὸ παιδὶ ν' ἀνακαλύψη, τὶ συνέβη στὸ μέγεθος κάθε ὁμάδος.

Ἐὰν ἕνα παιδὶ δὲν γνωρίζη σὲ τὶ διαφορετικοὺς τρόπους ἕνας ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ παρουσιασθῆ, χρησιμοποιεῖ συγκεκριμένα ἀντικείμενα ἢ εἰκόνες κλπ. γιὰ νὰ βρῆ τὴν ἀπάντηση.

Ἐὰν π.χ. δὲν γνωρίζη τὸ ποσὸ μιᾶς ὁμάδος, ὅπως π.χ. τοῦ 3 καὶ 5, πρέπει νὰ βρῆ τὴν ἀπάντηση μὲ τὴν χρήση ἐποπτικοῦ ὑλικοῦ.

Σημειώνεται ὅτι ἡ μάθηση εἶναι μία πορεία ἀναπτύξεως ἀπὸ ἕνα μὴ ὥριμο ἐπίπεδον ἐργασίας στὸ ἐπίπεδον ἐργασίας τῶν ὡρίμων ἐφήβων.

Ὅταν ἕνα παιδὶ χρησιμοποιῆ ἐποπτικὰ μέσα, ἐργάζεται στὸ ἐπίπεδο τῶν μὴ ὡρίμων. Φθάνει δὲ στὸ ἐπίπεδο τῶν ὡρίμων ὅταν χρησιμοποιῆ ἀποτελεσματικὰ τὰ σύμβολα. Τότε ἐκτελεῖ μιὰ πράξη μὲ ταχύτητα καὶ ἀκρίβεια, μὲ ἕνα λογικὸ βαθμὸ ταχύτητος καὶ μὲ τὴ βεβαιότητα, ὅτι ἡ ἀπάντησή του εἶναι σωστή.

Ἡμιαφηρημένα σύμβολα

Ὅπως εἴπαμε καὶ παραπάνω τὰ περισσότερα παιδιὰ τῆς Πρώτης τάξεως δὲν μποροῦν νὰ βροῦν τὶς ἀπαντήσεις στὰ βασικὰ συμπλέγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ἐὰν δὲν χρησιμοποιήσουν ἐποπτικὰ μέσα. Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ συγκεκριμένα ἀντικείμενα καὶ τὶς εἰκόνες πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουν καὶ ἡμιαφηρημένα σύμβολα (γραμμές, τελεῖες, κύκλους, τετράγωνα κλπ).

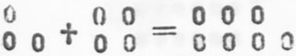
Ἡ μέθοδος τῶν ὁμάδων εἶναι πολὺ βοηθητικὴ γιὰ τὴν κατανόηση τῶν ἁπλῶν συμπλεγμάτων, προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, καὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Δίνονται στὰ παιδιὰ πρὸς λύση τὰ κατωτέρω συμπλέγματα :

1) 3+4=, 13—8 καὶ 4Χ9 (Τὸ σύμπλεγμα 4Χ9 διδάσκεται στὴν Βα τάξη).

Γιὰ νὰ λύσουν τὸ πρῶτο σύμπλεγμα, ζωγραφίζουν δύο ὁμάδες, μιὰ ἀπὸ τέσσερεις κύκλους καὶ μιὰ ἀπὸ τρεῖς καὶ προσθέτουν τὶς δύο ὁμάδες (σχ. 1).

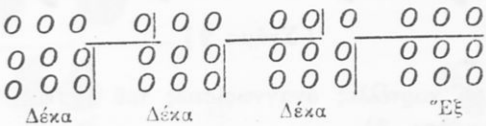
Γιὰ νὰ βροῦν τὴν ἀπάντηση στὸ δεύτερο σύμπλεγμα ζωγραφίζουν δέκα τρεῖς τελεῖες ἢ κύκλους καὶ μετὰ διαγράφουν ὀκτώ. (σχ. 2).



(Σχῆμα 1)

(Σχῆμα 2)

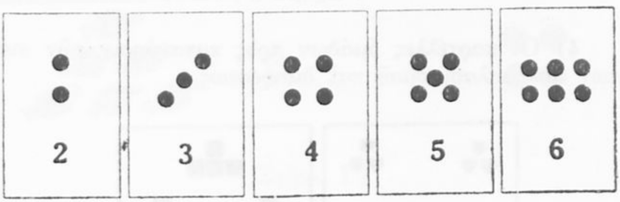
Ἡ ἀπάντηση στὸ τρίτο σύμπλεγμα βρίσκεται ἐὰν ζωγραφίσουν τέσσερεις ὁμάδες κύκλους ἀπὸ 9 κύκλους σὲ κάθε ὁμάδα καὶ μετὰ χωρίσουν τοὺς κύκλους κατὰ δεκάδες (1) (σχῆμα 3).



(Σχῆμα 3)

Πολὺ πρακτικὲς καὶ ὠφέλιμες εἶναι :

Οἱ καρτέλλες ἡμιαφηρημένων συμβόλων ἀπὸ 1—10 (σχ. 1).

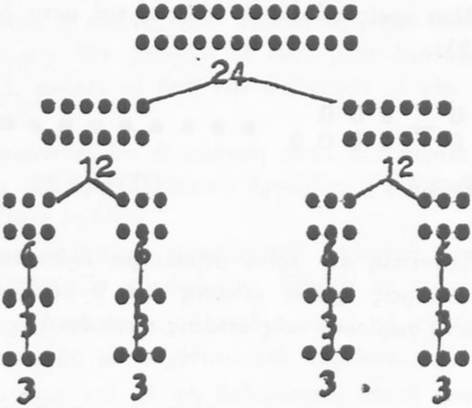


(Σχῆμα 1)

---

1. Wheat H. Tbe Nanure and Seguences of Leasning σελ. 22-52.

2) Οἱ καρτέλλες ἀναλύσεως ὁμάδων (σχ. 2).

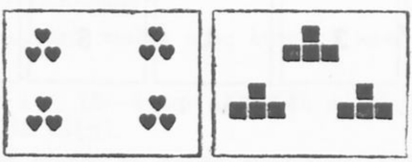


(Σχῆμα 2)

3) Οἱ καρτέλλες ἀναγνωρίσεως τοῦ ½ καὶ ¼ ἁπλῶν ἀντικειμένων (σχ. 3).

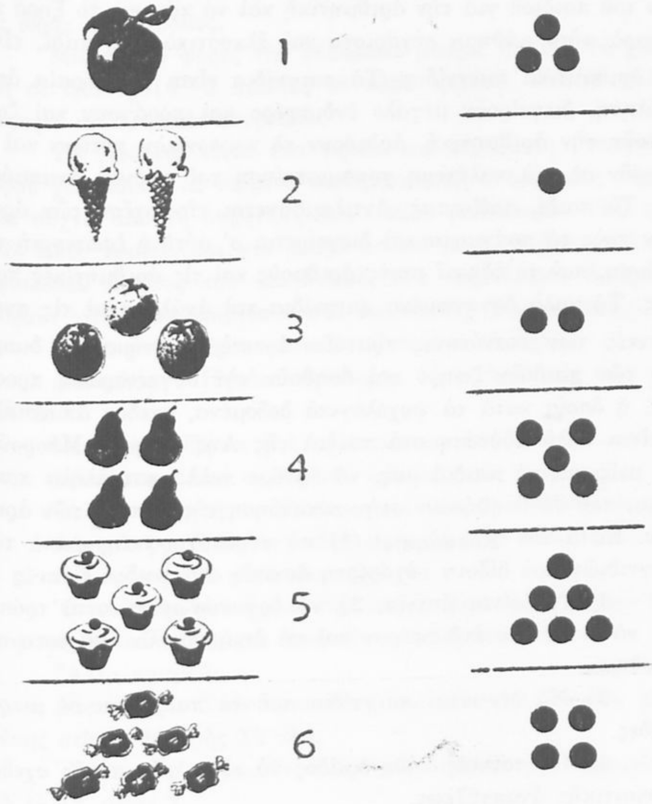
(Σχῆμα 3)

4) Οἱ καρτέλλες ὁμάδων πρὸς κατανόησιν τῶν συμπλεγμάτων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.



(Σχῆμα 4)

5) Οἱ καρτέλλες μὲ εἰκόνες ἀντικειμένων, ἡμιαφηρημένων συμβόλων, καὶ ἀφηρημένων συμβόλων (βλέπε σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

Παιγνίδια

Ἕνα ἀποτελεσματικὸ μέσο, γιὰ νὰ κινήσωμε τὸ διαφέρον τοῦ παιδιοῦ γιὰ τὴν ἀριθμητικὴ καὶ νὰ κάμωμε τὸ ξηρὸ καὶ ἀνιαρὸ αὐτὸ μάθημα εὐχάριστο καὶ ἑλκυστικὸ στὸ παιδί, εἶναι τὰ ἀριθμητικὰ παιγνίδια. Τὰ παιγνίδια εἶναι μιὰ ὡραία ἀπασχόληση, διεγείρουν μεγάλο ἐνδιαφέρο καὶ προάγουν καὶ ζωογονοῦν τὴν ἀριθμητική, ἀρδεύουν τὸ κοινωνικὸν πνεῦμα καὶ ὁδηγοῦν σὲ μιὰ καλύτερη χρησιμοποίηση τοῦ χρόνου ἀναπαύσεως. Τὸ παιδί, παίζοντας, ἀντιλαμβάνεται τὴν σχέση τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰ πράγματα καὶ διεγείρεται σ' αὐτὸ ἡ ἐσωτερική του ἀνάγκη, ποὺ τὸ ὁδηγεῖ στοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὶς ἀριθμητικὲς πράξεις. Τὰ καλὰ ὀργανωμένα παιγνίδια καὶ ἀνάλογα μὲ τὶς πνευματικές των ἱκανότητες κρατοῦν ἀρκετὸ διάστημα τὸ διαφέρον τῶν παιδιῶν ζωηρὸ καὶ βοηθοῦν τὴν συγκέντρωση προσοχῆς, ἡ ὁποία κατὰ τὰ ψυχολογικὰ δεδομένα, σχεδὸν ἀπουσιάζει ἢ εἶναι πολὺ ἀδύνατη στὰ παιδιὰ τῆς Αης τάξεως. Μποροῦμε καὶ μεῖς καὶ τὰ παιδιά μας, νὰ βροῦμε πολλὰ κατάλληλα παιγνίδια, ποὺ θὰ βοηθήσουν στὴν κατανόηση τῆς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν. Κατὰ τὸν **Rosenquist** (1) τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῶν παιγνιδιῶν ποὺ δίδουν εὐχάριστη ἄσκηση στὰ παιδιά εἶναι :

1) Νὰ εἶναι ἀστεῖα, 2) νὰ ὀργανώνωνται κατὰ τρόπον ποὺ νὰ κινοῦν τὸ ἐνδιαφέρον καὶ νὰ δημιουργοῦν εὐάρεστο συναίσθημα.

3) Νὰ δίνωνται παιγνίδια ποὺ νὰ παίζωνται σὲ μικρὲς ὁμάδες.

4) Οἱ παῖκτες κάθε ὁμάδος νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς σχεδὸν πνευματικῆς ἀναπτύξεως.

5) Οἱ ἐνεργητικότητες, ποὺ χρησιμοποιοῦνται στὸ παιγνίδι, νὰ μὴν εἶναι δύσκολες γιὰ τοὺς παῖκτες, ἀλλ' ἀνάλογες πρὸς τὶς πνευματικές των ἱκανότητες καὶ

---

1. **Resenquist L. L. «Young Children learn to use Arithmetic». Boston, 1949.** σ. 141-143.

6) Τὸ πνεῦμα τῆς κοινωνικότητας νὰ κυριαρχῆ στὸ παιγνίδι καὶ ἡ γνώση του νὰ ὁδηγῆ σὲ μιὰ καλύτερη μεταχείριση τῆς ὥρας ἀναπαύσεως.

Μιὰ ἢ δυὸ φορὲς τὴν ἑβδομάδα μπορεῖ ἡ τάξη νὰ χωρισθῆ σὲ ὁμάδες (4—5 παῖκτες σὲ κάθε ὁμάδα), καὶ νὰ παίξη διάφορα ἀριθμητικὰ παιγνίδια.

Τὸ Ντόμινο εἶναι ἕνα ὡραῖο καὶ εὐχάριστο παιγνίδι. Ἀφοῦ χωρισθοῦν τὰ ντόμινα στοὺς παῖκτες, ὁ δάσκαλος σημειώνει συχνὰ ἀπὸ τὴ συζήτησή των πόσο μαθαίνουν. Τὸ παιγνίδι αὐτὸ προτείνεται γιὰ μικρὰ παιδιὰ μέχρι 6 ἐτῶν. Οἱ πιὸ περίπλοκοι κανόνες τοῦ παιγνιδιοῦ, ποὺ περικλείουν διαίρεση, μποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν στὰ παιδιὰ τῆς Βας τάξεως.

Ἄλλο ἐνδιαφέρον παιγνίδι εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς:

Δάσκαλος : Παιδιὰ σκέπτομαι δύο ἀριθμοὺς ποὺ κάνουν 8.

Μαθητής: Πέντε καὶ τρία κάνουν ὀκτώ.

Δάσκαλος: Δὲν σκέπτομαι αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς.

Ἄλλος μαθητής : Τέσσερα καὶ τέσσερα κάνουν ὀκτώ.

Δάσκαλος : Μάλιστα, αὐτὴ εἶναι ἐξ ἴσου σωστὴ ἀπάντηση μὲ τὴν πρώτη καὶ αὐτὴ σκεπτόμουν.

Ὁ μαθητὴς ποὺ βρῆκε τὴν σωστὴ ἀπάντηση παίρνει τὴν θέση τοῦ δασκάλου καὶ τὸ παιγνίδι συνεχίζεται.

Ἄλλο παιγνίδι :

Δάσκαλος : Σκέπτομαι ἕναν ἀριθμό, πού, ἂν τὸν προσθέσης στὸ 8, θὰ βρῆς 13 κλπ.

Ἐπίσης σκέπτομαι ἕναν ἀριθμό, πού, ἂν τὸν ἀφαιρέσης ἀπὸ τὸ 12, μένει 7.

Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα πολλὰ παιγνίδια καὶ ἀπ' αὐτὰ θὰ ἐκλέξωμε ὅσα θὰ βοηθήσουν καλύτερα στὴν κατανόηση τῶν ἀριθμῶν. Γενικῶς τὰ καλὰ παιδαγωγικὰ παιγνίδια εἶναι χρήσιμα γιατὶ ξεκουράζουν τὸ παιδὶ καὶ ἔτσι τὸ ἀνιαρὸ καὶ δύσκολο μάθημα τῆς ἀριθμητικῆς προσφέρεται εὐκολώτερα καὶ πιὸ εὐχάριστα. Σ' ὅλα τὰ μαθήματα καὶ πολὺ περισσότερο στὴν ἀριθμητικὴ ποὺ εἶναι ἀνιαρὸ καὶ δύσκολο μάθημα εἶναι ἀνάγκη νὰ δημιουργήσουμε εὐχάριστη σχολικὴ ἀτμόσφαιρα καὶ εὐάρεστο συναίσθημα.

Ἐκδρομὲς καὶ περίπατοι

Μὲ τὶς ἐκδρομὲς τὰ παιδιὰ ἔχουν πραγματικὴ ἐπαφὴ μὲ τὰ πράγματα ποὺ θέλουν ν' ἀγοράσουν ἢ νὰ παρατηρήσουν. Ἡ ἀξία τῆς ἐπαφῆς μὲ τὰ πράγματα ἔχει ἀποδειχθῆ ἀπὸ πολλοὺς πειραματιστές. Πρέπει δὲ νὰ ἐκλέξωμε κατάλληλα μέρη γιὰ ἐπίσκεψη, ὥστε νὰ ἔχουν τὴν εὐκαιρία νὰ παρατηρήσουν καὶ ν' ἀναλύσουν τοὺς τρόπους ποὺ χρησιμοποιεῖται ὁ ἀριθμός.

Κατάλληλα μέρη γιὰ ἐπίσκεψη εἶναι τὰ κρεοπωλεῖα, λαχανοπωλεῖα, ἐμπορικὰ καταστήματα, τράπεζες, ταχυδρομεῖα, πυροσβεστικὴ ὑπηρεσία, νοσοκομεῖα, κλινικές, ἐργοστάσια, γραφεῖα ταξιδίων, ἀεροδρόμια, σταθμοὶ αὐτοκινήτων, μουσεῖα κλπ.

Πίνακες ἀνακοινώσεων

Ὁ πίνακας ἀνακοινώσεων προσφέρει μιὰ ἐξαιρετικὴ εὐκαιρία γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς ἐννοίας τῶν ἀριθμῶν. Εἰκόνες βιβλίων, εἰκονογραφημένα περιοδικὰ στερεώνονται γιὰ παρατήρηση στὸν πίνακα καὶ μποροῦν νὰ ἀποτελέσουν τὴν βάση συζητήσεων γύρω ἀπὸ ἕνα θέμα.

Ἕνας καλὸς πίνακας βοηθεῖ τὸ παιδὶ νὰ μελετήση τὶς ὁμάδες μὲ τὴν ἀπαρίθμηση, τὴν σύγκριση ἢ τὴν ἀρίθμηση (ἀρίθμηση ὁμάδων, χωριστὰ καὶ ἀρίθμηση ὁμάδων μαζί).

Καλὸς πίνακας εἶναι ἐκεῖνος ποὺ περιέχει ὀλίγα ὑλικά, γιατὶ τὰ πολλὰ φέρουν σύγχιση στὴ συνείδηση τοῦ παιδιοῦ.

Ὁ Bloss E. (1) εἰσηγεῖται τὰ παρακάτω τρία παραδείγματα ποὺ μποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν στὸν πίνακα αὐτό.

4	3	1	6	5	2
3	4	6	1	2	5
7	7	7	7	7	7

Εἴμεθα ἡ οἰκογένεια τοῦ 7, κάμετε προβλήματα γιὰ μᾶς.

(Σχῆμα 1)

Βοήθεια - Βοήθεια
χαθήκαμε

Βάλτε μας στὴν οἰκογένειά μας, εἴμεθα ἡ οἰκογένεια τοῦ 7.

5 φασόλια	3 κεράσια	4 μῆλα
1 μῆλο	2 μῆλα	1 φασόλι
2 κεράσια	1 φασόλι	2 κεράσια.

(Σχῆμα 2)

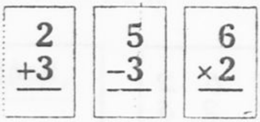
Ἀτομικὲς καρτέλλες ἀσκήσεως

Βοηθητικὸ μέσο στὶς κατώτερες τάξεις εἶναι καὶ οἱ καρτέλλες ἀσκήσεως ποὺ χρησιμοποιοῦνται μετὰ τὴν ἐκμάθηση τῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἔχουν προσεκτικὰ ἀναπτυχθῆ καὶ κατανοηθῆ. Ἡ χρήση αὐτῶν, προτοῦ κατανοηθῆ ὁ ἀριθμός, εἶναι μιὰ ἐσφαλμένη μέθοδος.

Ἀπὸ τὴν μιὰ πλευρὰ τῆς καρτέλλας, «ἡ πλευρὰ τοῦ TEST», δίνεται ἕνα σύμπλεγμα πράξεως χωρὶς τὴν ἀπάντηση (σχ. 1) καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρὰ «ἡ πλευρὰ μελέτης» τὸ ἴδιο σύμπλεγμα μὲ τὴν ἀπάντηση. Τὸ παιδὶ θὰ χρησιμοποιήση τὴν πλευρὰ χωρὶς ἀπάντηση καὶ ἀφοῦ τὴν μελετήση μὲ τὴν χρήση ἐποπτικοῦ ὑλικοῦ καὶ βρῆ τὴν ἀπάντηση, θὰ χρησιμοποιήση τὴν ἄλλη πλευρὰ γιὰ νὰ κάμη τὸν ἔλεγχο τῆς ἀπαντήσεώς του. Ἔτσι κάθε παιδὶ μπορεῖ νὰ ἐλέγξη τὶς γνώσεις του καὶ ν' ἀνακαλύψη,

1. **Bloss E. «The Audiovisual Way to Number Learning » Educational Screen No 10, 1948.** σελ. 491-504.

ἐὰν ἔχῃ ἀνάγκη περισσοτέρας ἀσκήσεως.



(Σχῆμα 1)

Παράδειγμα: Ὁ δάσκαλος κρατᾶ μία καρτέλλα ποὺ ἔχει τὸ σύμπλεγμα π.χ. 5Χ4 καὶ ζητεῖ ἀπὸ τὰ παιδιὰ νὰ βροῦν τὴν λύση μὲ τὴν χρήση ὑλικῶν (ξύλων, ὀσπρίων, κύβων κλπ.) ποὺ ἔχουν στὰ θρανία των.

Ἡ παρακάτω εἶναι μία καρτέλλα ἀναγνωρίσεως ὁμάδος.

(Σχῆμα 2)

Καὶ οἱ ἀτομικὲς καρτέλλες ἀσκήσεως καὶ οἱ καρτέλλες ἀναγνωρίσεως βοηθοῦν τὸν δάσκαλο νὰ ἐλέγξῃ τὶς ἀριθμητικὲς ἱκανότητες τῶν παιδιῶν καὶ νὰ ἀνακαλύψῃ ἐὰν εἶναι ἀνάγκη νὰ συνεχίσῃ ἐπὶ πολὺ τὴν ἄσκηση.

Κοινωνικὴ μέθοδος

Ἡ κοινωνικὴ μέθοδος εἶναι πολὺ σπουδαία. Κινεῖ τὸ διαφέρον τοῦ παιδιοῦ καὶ τὸ βοηθεῖ νὰ κατανοήσῃ τὶς ἀριθμητικὲς σχέσεις. Τὰ παιδιὰ ὅταν σχεδιάζουν PARTIES ἢ Χριστουγεννιάτκο δένδρο, πρέπει νὰ προσδιορίσουν τὰ πράγματα ποὺ ἔχουν ἀνάγκη, τὰ χρήματα ποὺ θὰ διαθέσουν γιὰ τὴν ἀγορὰ γλυκῶν κλπ. τὰ καθίσματα ποὺ θὰ χρειασθοῦν γιὰ τοὺς καλεσμένους κλπ. Ἔτσι ἀσκοῦνται στὴν ἀριθμητική.

Δραματοποίηση

Ἕνας ἀπὸ τοὺς καλύτερους τρόπους νὰ δείξωμε τὴν ἔννοια κάθε πράξεως στὸ παιδὶ εἶναι ἡ δραματοποίηση ἡ ὁποία θὰ κάμῃ τὸ μάθημα εὐχάριστο καὶ ἑλκυστικὸ καὶ τοῦτο γιατὶ καθὼς εἶναι γνωστὸν τὸ παιδὶ ἀγαπᾶ νὰ λέγῃ ἱστορίες.

Παράδειγμα:

Ἓξ παιδιὰ κάθονται γύρω στὸ τραπέζι καὶ μελετοῦν. Ἡ Ἄννα καὶ ὁ Νῖκος παίρνουν τὰ βιβλία ὅλων τῶν παιδιῶν. Ἡ Ἄννα παίρνει τέσσερα βιβλία καὶ ὁ Νῖκος δύο βιβλία. Πόσα βιβλία πῆραν; Ἡ Ἄννα θέτει ὅλα τὰ βιβλία μαζὶ στὸ τραπέζι καὶ ὁ Νῖκος τὰ δικά του μαζὺ μὲ τ' ἄλλα. Τὰ μετροῦν μετὰ νὰ βροῦν πόσα εἶναι ὅλα καὶ ἡ ἱστορία συνοψίζεται ὡς ἑξῆς: 4 καὶ 2 εἶναι 6.

Μὲ τὴ δραματοποίηση μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ἔννοια κάθε ἀριθμητικῆς πράξεως.

Ὑπάρχουν καὶ ἄλλα ὑλικὰ διδασκαλίας ποὺ χρησιμοποιοῦνται ὡς συμπληρωματικὰ ὅπως εἶναι:

Τὸ ἀριθμητήριον «ΔΙΔΑΞΕ ΕΝΑ ΑΡΙΘΜΟ».

Εἶναι ἕνα βασικὸ ἐποπτικὸ μέσο ποὺ βοηθεῖ στὴν κατανόηση τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σχέσεων αὐτῶν ὡς ἐπίσης καὶ τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν πράξεων.

Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔγχρωμα τετράγωνα σχετιζόμενα μεταξύ των ὡς πρὸς τὸ μέγεθος.

Ἀρχίζοντες μὲ τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 1, τοποθετοῦμε κοντὰ σ' αὐτὸ τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 2 καὶ βλέπομε ὅτι τὸ τετράγωνο τοῦτο εἶναι δύο φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀριθ. 1. Ἑνώνομε κατόπιν δύο τετράγωνα ὑπ' ἀρ. 1 καὶ παρατηροῦμε, ὅτι ἔχουν ἀκριβῶς τὸ ἴδιο πάχος μὲ τὸ ὑπ' ἀρ. 2 τετράγωνο. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ ἐργασθοῦμε γιὰ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μέχρι τοῦ δέκα καὶ πέραν αὐτοῦ.

Διδασκαλία προσθέσεως:

Τὸ ἄθροισμα κάθε ἑνώσεως τετραγώνων δίδεται ὅταν ἕνα τετράγωνο ἀντιστοίχου μεγέθους τοποθετεῖται πλησίον αὐτοῦ Π.χ. τὰ τετράγωνα ὑπ' ἀρ. 4, 3 καὶ 1 ἔχουν τὸ ἴδιο πάχος μὲ τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 8. Ἔτσι $4+3+1=8$.

Διδασκαλία ἀφαιρέσεως:

Γιὰ ν' ἀπαντήσωμε τὸ σύμπλεγμα $9—5=4$, ἑνώνομε τὰ τετράγωνα ὑπ' ἀρ. 5 καὶ 4. Παίρνομε μετὰ τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 9 καὶ τὸ συγκρίνομε μὲ τὸ προηγούμενο καὶ βλέπομε ὅτι εἶναι τὸ ἴδιο. Ἐὰν ἀφαιρέσωμε τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 5 μένει τὸ τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 4. Ἔτσι $9—5=4$.

Διδασκαλία πολλαπλασιασμοῦ:

Ἑνώνομε τρία τετράγωνα ὑπ' ἀρ. 3. Κατόπιν παίρνομε ἕνα τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 9 καὶ τὸ συγκρίνομε μὲ τὰ προηγούμενα καὶ βλέπομε ὅτι εἶναι τὸ ἴδιο. Εἶναι φανερὸ τότε ὅτι $3Χ3=9$.

Διδασκαλία διαιρέσεως:

Ἑνώνομε 4 τετράγωνα ὑπ' ἀρ. 2. Παίρνομε μετὰ ἕνα τετράγωνο ὑπ' ἀρ. 8 καὶ τὸ συγκρίνομε μὲ τὰ ἑνωθέντα 4 τετράγωνα καὶ βρίσκομε ὅτι εἶναι ὅμοια. Εἶναι φανερὸν τότε ὅτι $8:2=4$.

Πολλὰ ἀμερικανικὰ σχολεῖα χρησιμοποιοῦν ἀποτελεσματικὰ τὰ διδακτικὰ FILMS καὶ SLIDES.

Οἱ Παιδαγωγοί, **Ellworth** (1), **Hoban** (2), **Grossnickle** (3) καὶ ἄλλοι πολλοὶ ὑποστηρίζουν ὅτι τὰ ὑλικὰ αὐτὰ εἶναι ἄριστα μέσα διδασκαλίας, ὄχι μόνο γιὰ τὸ μάθημα τῆς ἀριθμητικῆς ἀλλὰ γιὰ ὅλα τὰ μαθήματα.

Ἡ Δὶς **Anita Utzinger** (2) μᾶς εἶπε ὅτι βρίσκει πολὺ ὠφέλιμον ἐποπτικὸ μέσο τὸ ἑξῆς:

Ἔχει ἐννέα μπλὲ δίσκους καὶ ἕνα ἄσπρο. Τοὺς δίσκους αὐτοὺς στηρίζει στὸν πίνακα κατὰ σειρά. Ὁ ἄσπρος δίσκος εἶναι ὁ ἕκτος στὴ σειρά.

Τὰ παιδιὰ καθισμένα σὲ κύκλο ρίχνουν, τὸ καθένα μὲ τὴ σειρά του, ἕνα χάρτινο κύβο ποὺ ἔχει στιγμὲς ἢ ἀριθμούς. Τὸ παιδὶ ποὺ θὰ ρίξη τὸν κύβο πρέπει νὰ δείξη στὸν πίνακα ποῖος δίσκος λέγει τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἔδειξε ὁ κύβος.

Ἡ ἰδία διδασκάλισσα ἔχει ἐφοδιάσει ὅλα της τὰ παιδιὰ μὲ χάρτινες ταινίες χωρισμένες σὲ δεκάδες. Κάθε δεκάδα ἔχει διαφορετικὸ χρῶμα. Οἱ ταινίες αὐτὲς βοηθοῦν στὴν κατανόηση τῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ τὸν Καραχρῖστον(5) ἔξοχο θὰ ἦταν ἂν ἕνας ἀπὸ τοὺς τοίχους τῆς αἰθούσης διδασκαλίας τῆς α΄ τάξεως εἶχε κολλημένη ἢ ζωγραφισμένη κάποια μετροταινία μὲ ἀναγραφὴ τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν μέχρι περίπου τοῦ 22.

Τὰ παιδιὰ θὰ ἐκαλοῦντο νὰ ἐκτελοῦν στὴν μετροταινία διάφορες ἀνιοῦσες καὶ κατιοῦσες ἀριθμητικὲς ἀσκήσεις κλπ.

Ἀφηρημένα σύμβολα

Τὰ παιδιὰ ἐργάζονται μὲ τ' ἀριθμητικὰ σύμβολα 1,2,3,

1. **Ellworth C. «The Audio-visual Handbook, 1957,** σελ. 57.
2. **Hoban C. «Focus on learning Motion pictures in the School, 1942.**
3. **Grossnickle «The use of visual aids in the Teaching of Arithmetic».**
4. Ἡ Δὶς **Anita Utzinger** διδάσκει στὶς δύο πρῶτες τάξεις τοῦ **Schulhaus Schanzengraden** τῆς Ζυρίχης.
5. Βλέπε: Καραχρίστου Ν. «Ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία στὸ Δημοτικό μας Σχολεῖο» σ. 102.

4, 5, κλπ. χωρὶς νὰ χρησιμοποιοῦν ὑλικὰ νὰ δείξουν τὴν ἔννοιά των. Αὐτό, ὡς καὶ προηγουμένως εἴπαμε, δὲν ἐννοεῖ ὅτι αὐτοὶ οἱ τύποι ὑλικῶν χρησιμοποιοῦνται σὲ συνεχὲς σύστημα, μέχρι νὰ φθάσωμε στὸ ἀφηρημένο, καὶ τότε παύομε τὴν χρήση των. Ἐννοεῖ ὁπωσδήποτε ὅτι πρέπει νὰ βοηθήσωμε τὰ παιδιὰ νὰ πᾶνε ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο καὶ πίσω στὸ συγκεκριμένο, ὅταν εἶναι ἀνάγκη (συγκεκριμένο — ἀφηρημένο — συγκεκριμένο).

Τὰ ἀφηρημένα σύμβολα πρέπει νὰ διδάσκωνται ἐνωρὶς ὀργανωμένα μὲ τ' ἀντικείμενα, τὶς εἰκόνες καὶ τὰ ἡμιαφηρημένα σύμβολα. Εἶναι σφάλμα νὰ ἀναβάλωμε τὴν εἰσαγωγὴ των γιὰ τὸ δεύτερον ἑξάμηνο.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

Ἔχει ἀποδειχθῆ ὅτι κάθε πρόβλημα ποὺ λύεται μὲ μία ἀπὸ τὶς τέσσερεις πράξεις (πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμὸ καὶ διαίρεση) λύεται καὶ μὲ ἀρίθμηση.

Τὰ περισσότερα καθημερινὰ προβλήματα τοῦ παιδιοῦ μποροῦν νὰ λυθοῦν μὲ ἀρίθμηση.(1)

Οἱ τέσσερεις πράξεις ἑπομένως στηρίζονται στὴν ἀρίθμηση. Ἐὰν κατανοήσουν αὐτὸ τὰ παιδιὰ ἡ διδασκαλία τῶν πράξεων γίνεται εὐκολώτερη.

Στὶς δύο πρῶτες τάξεις ποὺ οἱ χρησιμοποιούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι σχετικῶς μικροί, εἶναι δυνατὸν οἱ μαθητὲς εὐκαιριακῶς νὰ λύουν προβλήματα καὶ μὲ τὴν ἀρίθμηση καὶ μὲ τὶς πράξεις.

1. Deans E. «The contribution of Gronping to Number Development, 307-310.

Ἔτσι βοηθοῦνται νὰ ἀντιληφθοῦν τὴ σχέση μεταξὺ τῶν πράξεων καὶ τῆς ἀριθμήσεως καὶ ἀκόμη ἡ συγκριτικὴ ἐνέργεια τῶν θεμελιωδῶν πράξεων γίνεται καταφανής.

Πρόσθεση

Εἶναι βεβαιωμένον ὅτι πολλὰ παιδιὰ ἀπὸ τὴν προσχολικὴ ἀκόμη ἡλικία ἔχουν κάποια γνώση περὶ τῆς προσθέσεως. Δίδουν σωστὲς ἀπαντήσεις σὲ συνδυασμοὺς τῶν ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 6 ἢ τοῦ 7 ὅταν παρουσιάζωνται συγκεκριμένα.

Δὲν πρέπει ὅμως νὰ ὑποθέσωμε, ὅτι ἐπειδὴ μποροῦν νὰ ἀριθμήσουν εἶναι ἕτοιμα νὰ μάθουν πρόσθεση.

Ἕνα παιδί, πιθανὸν νὰ γνωρίζη ὅτι δύο παιδιὰ καὶ δύο παιδιὰ εἶναι τέσσερα παιδιά, ἀλλὰ δὲν ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ βρῆ ὅτι 2 καὶ 2 κάνει 4 κάτω ἀπὸ κάθε κατάσταση γιατὶ δὲν ἔχει μάθει τὴν πλήρη ἔννοια αὐτοῦ τοῦ μαθηματικοῦ κανόνος.

Στὸν κανόνα θὰ φθάση ἐὰν ἀσκηθῆ πολὺ μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα, μὲ εἰκόνες καὶ ἡμιαφηρημένα σύμβολα καὶ τελικὰ μὲ μαθηματικὰ σύμβολα γιὰ νὰ ἐκφράση τὶς ἰδέες.

Κάθε ἀριθμητικὸ σύμπλεγμα ($3+4=7$, $5—1=4$, ἢ $3X2=6$ κλπ.) ἀποτελεῖ μία γενίκευση πείρας καὶ θὰ τὸ κατανοήση τὸ παιδὶ ὅταν τὸ συναντήση σὲ πολλὲς κατανοητὲς καταστάσεις.

Προτοῦ νὰ ἀρχίσωμε τὴν διδασκαλία τῶν συμπλεγμάτων τῆς προσθέσεως πρέπει νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι τὰ παιδιά μας εἶναι ἕτοιμα νὰ δεχθοῦν τὸ νέον. Εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐξακριβώσωμε ἐὰν ἔχουν ἀντιληφθῆ ὡρισμένες σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν καὶ ἐὰν μποροῦν νὰ τὶς ἐφαρμόζουν.

Ἐὰν γνωρίζουν, ὅτι κάθε ἀριθμὸς στὴ σειρὰ τῆς ἀριθμήσεως ἐννοεῖ ἕνα περισσότερο ἀπὸ τὸν προηγούμενον ἀριθμό.

Ὅτι κάθε ἀριθμὸς ἐκτὸς τοῦ 1, μπορεῖ νὰ χωρισθῆ σὲ δύο ἢ περισσότερες ὁμάδες. Ἐὰν γνωρίζουν τί ἐννοεῖ μία ὁμάδα ἀντικειμένων ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ ἕνα ἀντικείμενο, καὶ τέλος ἐὰν ἔχουν πραγματικὲς ἐμπειρίες ποὺ περιλαμβάνουν νὰ θέσωμε ὁμάδες, μαζί, εἶναι ἕτοιμα νὰ μελετήσουν τὰ βασικὰ συμπλέγματα τῆς προσθέσεως.

Τὸ νέο ποὺ θὰ διδάξωμε πρέπει νὰ ἐνδιαφέρη τὸ παιδὶ καὶ θὰ τοῦ κινήση τὸ διαφέρον, μόνον ὅταν εἶναι πραγματικό, παρμένο ἀπὸ τὴ ζωή του.

Ἡ ἀγορὰ πραγμάτων (φρούτων, σχολικῶν εἰδῶν κλπ.) εἶναι κατάσταση πραγματικὴ καὶ ὄχι κάτι τὸ φανταστικό. Μποροῦμε νὰ ὑποδείξωμε στὸ παιδί νὰ πάη στὸ κατάστημα ν' ἀγοράση κάποιο πρᾶγμα καὶ νὰ μᾶς φέρη τὰ ὑπόλοιπα χρήματα.

Πρέπει νὰ τοῦ παρέχωμε πολλὲς εὐκαιρίες νὰ προσπαθῆ μόνο του γιατὶ τότε αἰσθάνεται εὐχαρίστηση καὶ ἡ ἐπιτυχία μας εἶναι ἐξησφαλισμένη.

Καλὸν εἶναι νὰ ἔχωμε στὸ σχολεῖο μας ἕνα πρόχειρο παντοπωλεῖο. Ἔτσι ἀσκοῦνται τὰ παιδιὰ στὴν ἀλλαγὴ τῶν χρημάτων καὶ συνηθίζουν στὴν ἀγορά. Πρέπει ὅμως προηγουμένως νὰ συνεργασθοῦμε μὲ τοὺς γονεῖς γιὰ νὰ τοὺς δώσουν χρήματα.

Μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε καὶ χάρτινα χρήματα ποὺ θὰ τὰ ἔχωμε στὸ ἀριθμητικό μας Μουσεῖο.

Εἶναι ἀνάγκη νὰ βοηθήσωμε τὰ παιδιὰ νὰ κατανοήσουν, λέγει ὁ **Swenson** ὅτι πρόσθεση δὲν εἶναι μία πράξη ποὺ μᾶς δίδει περισσότερα. Εἶναι μία πράξη ποὺ θέτομε μαζὶ καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς προσθέσεως δὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς προσθετέους.

Ὅταν π.χ. 4 καθίσματα μιᾶς ὁμάδος κινηθοῦν καὶ ἑνωθοῦν μὲ μία ἄλλη ὁμάδα 5 καθισμάτων, λέμε ὅτι προσθέσαμε τὰ 4 στὴν ὁμάδα τοῦ 5, ἀλλὰ τὰ καθίσματα δὲν εἶναι περισσότερα.

Δύο μικρότερες ὁμάδες ἑνώνονται σὲ μιὰ ἄλλη ὁμάδα ποὺ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὶς δύο προηγούμενες, ἀλλὰ πάντοτε εἶναι 9 καθίσματα.

Πρέπει νὰ ἐννοήσουν ὅτι σὲ κάθε σύμπλεγμα ἀριθμοῦ ὑπάρχουν δύο βασικὰ συμπλέγματα πλὴν τῶν διπλῶν. Π.χ. τὸ $3+5$ καὶ $5+3$ κλπ.

Καὶ τώρα γεννᾶται τὸ ἐρώτημα:

Πῶς θὰ ὁδηγήσωμε τὰ παιδιά μας στὴ μελέτη τῶν συμπλεγμάτων τῆς προσθέσεως;

Ἐπειδὴ εἶναι ἀνώριμα καὶ δὲν ἔχουν δικές των μεθόδους θὰ τὰ βοηθήσωμε ν' ἀνακαλύψουν τοὺς πιὸ συστηματικοὺς τρόπους μελέτης.

Θ' ἀκολουθήσωμε τὰ ἑξῆς 6 στάδια μελέτης:

I. Θὰ ἐργασθοῦμε μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα.

Παραδείγματα:

1. Θὰ καλέσωμε δύο παιδιὰ νὰ σταματήσουν στὴν μία γωνία τῆς αἰθούσης καὶ ἕνα ἄλλο παιδὶ στὴν ἄλλη γωνία, καὶ μετὰ νὰ ἑνωθοῦν.

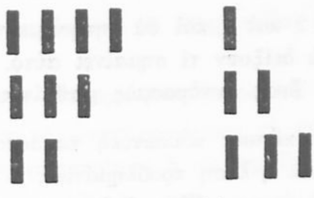
Θὰ ζητήσωμε ἔπειτα νὰ μᾶς ἐξηγήσουν τί συνέβη.

2. Σηκώνομε δύο δάκτυλα στὸ ἕνα χέρι καὶ ἕνα δάκτυλο στὸ ἄλλο χέρι. Τὰ ἑνώνομε καὶ ζητοῦμε νὰ μᾶς διηγηθοῦν τί συνέβη.

Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνουν καὶ τὰ παιδιά.

3. Παιδιὰ διατάξετε στὰ θρανία σας τρία φασόλια σὲ δύο ὁμάδες, καὶ ἑνώσετε κατόπιν τὶς ὁμάδες αὐτές. Διηγηθῆτε ὅλη τὴν ἱστορία.

4. Πάρετε πέντε ξυλάκια καὶ διατάξετέ τα ἐπάνω στὸ θρανίο σας σὲ ὁμάδες (βλέπε σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

II. Θ ὰ χρησιμοποιήσωμε εἰκόνες νὰ παρουσιάσωμε τὸ σύμπλεγμα.

Παραδείγματα:

1. Παιδιὰ παρατηρήσετε τὴν εἰκόνα ποὺ εἶναι στὸν πίνακα καὶ πῆτε τί βλέπετε (ἡ εἰκόνα παρουσιάζει δύο γατάκια νὰ πίνουν γάλα καὶ ἕνα ἄλλο γατάκι νὰ τρέχη νὰ πιῆ καὶ αὐτὸ γάλα).

2. Παιδιὰ ζωγραφίσετε δύο παιδάκια σὲ μία ὁμάδα καὶ ἕνα παιδάκι σὲ μία ἄλλη ὁμάδα. Βρῆτε πόσα εἶναι ὅλα τὰ παιδάκια.

III. Θ ὰ χρησιμοποιήσωμε ἡμιαφηρημένα σύμβολα.

Παραδείγματα:

1. Παιδιὰ ζωγραφίσετε δύο ὁμάδες κύκλους. Ἡ μία ὁμάδα νὰ ἔχη δύο κύκλους καὶ ἡ ἄλλη ὁμάδα ἕνα κύκλο.

Βρῆτε πόσοι κύκλοι εἶναι καὶ στὶς δύο ὁμάδες.

2. Κάθε σύμπλεγμα μπορεῖ νὰ παρασταθῆ μὲ στιγμὲς ἢ γραμμές. Π.χ. τὸ σύμπλεγμα 2 + 2 = 4 μὲ κύκλους 00 + 00 = 0000.

$$ή\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} + \begin{matrix}0\\0\end{matrix} = \begin{matrix}0\ 0\\0\ 0\end{matrix}$$

IV. Ἀναπαριστάνομε γραφικὰ τὸν συνδυασμό.

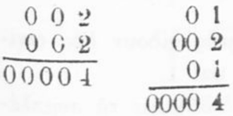
Θὰ ποῦμε 2 καὶ 1 καὶ θὰ ζητήσωμε νὰ μᾶς ἐξηγήσουν ὅλα τὰ στάδια νὰ δείξουν τί σημαίνει αὐτό.

V. Ἐπειδὴ ἕνας συνδυασμὸς μαθαίνεται εὐκολώτερα ὅταν ἐκφρασθῆ σὲ κάποια κοινωνικὴ κατάσταση, τὸ τελευταῖο μας στάδιο θὰ εἶναι ἡ λύση προβλημάτων.

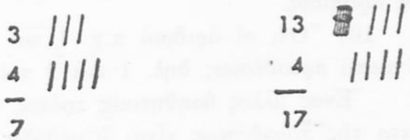
Παράδειγμα: Εἶχα 2 δραχμὲς καὶ μοῦ ἔδωσε καὶ ὁ πατέρας μου 1 δραχμή. Πόσες δραχμὲς ἔχω;

Γιὰ νὰ λύση λοιπὸν τὸ παιδὶ ἕνα σύμπλεγμα προσθέσεως πρέπει νὰ χρησιμοποιήση, συγκεκριμένα ἀντικείμενα, εἰκόνες, ἡμιαφηρημένα σύμβολα, ἀφηρημένα σύμβολα καὶ τέλος νὰ ἐφαρμόση αὐτὸ ποὺ ἔμαθε σὲ προβλήματα παρμένα ἀπὸ τὴν ζωή του.

Καθὼς παρουσιάζομε δὲ τὸν κάθε συνδυασμὸ μποροῦμε νὰ γράψωμε καὶ τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς ὅπως δείχνουν τὰ σχήματα 1 καὶ 2.



(Σχῆμα 1)



(Σχῆμα 2)

Καὶ τώρα τὸ ἐρώτημα:

Πῶς θὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι τὰ παιδιὰ ἔμαθαν αὐτὸ ποὺ τοὺς διδάξαμε;

Θὰ ἔχουν μάθει τὸ σύμπλεγμα τῆς προσθέσεως ὅταν ἔχουν τὶς κατωτέρω ἱκανότητες:

1) Νὰ παρουσιάσουν τὸ σύμπλεγμα μὲ συγκεκριμένα ἀντικείμενα.

2) Γνωρίζουν ὅτι πρόσθεση ἐννοεῖ νὰ θέσωμε μαζί.

3) Μποροῦν νὰ ἀναπαραγάγουν τὸ σύμπλεγμα ἀμέσως καὶ ἀσφαλῶς μὲ δραματοποίηση ἢ μὲ σημεῖα ἢ στὴν πλάκα.

4) Γνωρίζουν καλῶς ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀλλαγὴ τῆς καταστάσεως τῶν ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει τὸ ποσόν.

5) Γνωρίζουν πῶς νὰ γράφουν τὸ σύμπλεγμα σὲ ὁριζόντιο καὶ κάθετο σχηματισμό.

6) Βεβαιώνουν τὸ ἀποτέλεσμα μὲ ἄλλα γνωστὰ συμπλέγματα.

7) Χρησιμοποιοῦν ἀποτελεσματικὰ τὸ σύμπλεγμα σὲ προβληματικὲς καταστάσεις.

8) Βρίσκουν τὴν ἀπάντηση γρήγορα καὶ μὲ ἐμπιστοσύνη ὅτι εἶναι σωστή.

9) Ἀναγνωρίζουν ὅτι π.χ. 2 αὐγὰ καὶ 2 αὐγὰ εἶναι 4 αὐγὰ καὶ ὅτι 2 κάθε πράγματος καὶ 2 περισσότερα τοῦ αὐτοῦ πράγματος εἶναι 4 ἀπὸ τὰ ἴδια πράγματα καὶ τὸ ἴδιο γιὰ ὅλους τοὺς ἀριθμούς.

10) Ὅτι οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 1 καὶ 2 μᾶς δίδουν δύο συμπλέγματα προσθέσεως δηλ. 1 καὶ 2 καὶ 2 καὶ 1.

Ἕνας ἄλλος βοηθητικὸς τρόπος νὰ διδάξωμε τὰ συμπλέγματα τῆς προσθέσεως εἶναι ἡ μέθοδος τῶν οἰκογενειῶν.

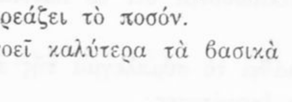
Ἡ οἰκογένεια τοῦ 4 π.χ. ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ συμπλέγματα 2+2, 3+1, 1+3.

Τὸ παιδὶ θὰ αἰσθητοποιήση πρῶτα τὴν οἰκογένεια τοῦ 4 μὲ συγκεκριμένα ὑλικά, μὲ εἰκόνες καὶ σύμβολα.

Μετὰ θὰ ἀκολουθήση ἡ διάταξη τῆς οἰκογενείας σὲ διαφορετικὲς ὁμάδες, ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 1.

Ὁ τρόπος αὐτὸς βοηθεῖ τὸν μαθητὴ νὰ ἀνακαλύψη ὅτι ἡ διάταξη δὲν ἐπηρεάζει τὸ ποσόν.

Ἔτσι κατανοεῖ καλύτερα τὰ βασικὰ συμπλέγματα.



(σχῆμα 1)

Τὰ κατωτέρω 81 βασικὰ συμπλέγματα προσθέσεως ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὅλες τὶς δυνατὲς διατάξεις τῶν ἀριθμῶν 1--9.

1							
+1							
2							
2	1						
+1	+2						
3	3						
3	1	2					
+1	+3	+2					
4	4	4					
4	1	3	2				
+1	+4	+2	+3				
5	5	5	5				
5	1	4	2	3			
+1	+5	+2	+4	+3			
6	6	6	6	6			
6	1	5	2	4	3		
+1	+6	+2	+5	+3	+4		
7	7	7	7	7	7		
7	1	6	2	5	3	4	
+1	+7	+2	+6	+3	+5	+4	
8	8	8	8	8	8	8	
8	1	7	2	6	3	4	5
+1	+8	+2	+7	+3	+6	+5	+4
9	9	9	9	9	9	9	9

9	2	8	3	7	4	6	5
+2	+9	+3	+8	+4	+7	+5	+6
11	11	11	11	11	11	11	11

9	3	8	4	7	5	6
+3	+9	+4	+8	+5	+7	+6
12	12	12	12	12	12	12

9	4	8	5	7	6
+4	+9	+5	+8	+6	+7
13	13	13	13	13	13

9	5	8	6	7
+5	+9	+6	+8	+7
14	14	14	14	14

9	6	8	7
+6	+9	+7	+8
15	15	15	15

9	7	8
+7	+9	+8
16	16	16

9	8
+8	+9
17	17

9
+9
18

Ἀφαίρεση

Πρέπει νὰ διδάσκωνται οἱ πράξεις, πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση, ταυτοχρόνως ἢ χωριστά;

Ἰδοὺ μία ἐρώτηση ποὺ ἔχει ἀπασχολήσει τοὺς ἐκπαιδευτικοὺς τὰ τελευταῖα χρόνια. Δυστυχῶς ὅμως πολὺ ὀλίγη ἔρευνα ἔχει γίνει γιὰ νὰ ὁρισθῆ ἐὰν πρέπη νὰ διδαχθοῦν οἱ δύο αὐτὲς πορεῖες ταὐτοχρόνως ἢ χωριστά. Ἡ πρόθεση καὶ ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξεις ποὺ σχετίζονται μεταξύ τους καὶ εἶναι ἀνάγκη νὰ τὸ κατανοήσουν τὰ παιδιά.

Ὡρισμένως τὸ παιδὶ κατανοεῖ καλύτερα τὴν ἔννοια τῶν συμπλεγμάτων 6+5 καὶ 5+6 ὅταν γνωρίζῃ τὰ ἀντίστοιχα συμπλέγματα 11—5 καὶ 11—6.

Γιὰ κάθε σύμπλεγμα προσθέσεως ὑπάρχει καὶ τὸ ἀντίστοιχο σύμπλεγμα ἀφαιρέσεως.

Ἂν καὶ οἱ δύο αὐτὲς πράξεις εἶναι δύο δυνάμεις ἀριθμήσεως ὑπάρχει ἕνα μεγάλο χάσμα μεταξὺ τῆς ἱκανότητος ν' ἀριθμοῦμε καὶ τῆς ἱκανότητος νὰ προσθέτωμε ἢ ν' ἀφαιροῦμε.

Ἀφαίρεση δὲν εἶναι μία πράξη ποὺ μᾶς δίδει ὀλιγώτερα. Εἶναι μία πράξη ποὺ χωρίζομε ἢ παίρνομε ἕναν ἀριθμὸ ἀπὸ ἕνα ἄλλο. Εἶναι ἕνας γρήγορος τρόπος νὰ βροῦμε τὸν ἀριθμὸ πραγμάτων ποὺ μένουν σὲ μία ὁμάδα μετὰ τὴν ἀφαίρεση μιᾶς μικροτέρας ὁμάδος.

Ὅταν π.χ. ὁ Γιάννης ἔχει 8 μολύβια καὶ δώσῃ 3 μολύβια στὴ Νίκη, ὁ Γιάννης θὰ ἔχῃ ὀλιγώτερα μολύβια. Ἡ θεμελιώδης πράξη εἶναι ὅτι χωρίζεται ἡ ὁμάδα τοῦ Γιάννη τῶν 8 μολυβιῶν σὲ δύο νέες ὁμάδες, μία ὁμάδα τοῦ 3 ποὺ δίδει στὴ Νίκη καὶ μία ὁμάδα τοῦ 5 ποὺ κρατεῖ αὐτός.

Μία δηλ. μεγαλύτερη ὁμάδα χωρίζεται σὲ δύο μικρότερες ὁμάδες. Αὐτὸ ὅταν ἐννοήσῃ καλῶς τὸ παιδὶ ἔχει μάθει τὰ βασικὰ συμπλέγματα τῆς ἀφαιρέσεως.

Γιὰ νὰ ἐπιτύχῃ αὐτὸ θὰ τὸ ὁδηγήσωμε νὰ ἀκολουθήσῃ τὴν ἑξῆς πορεία:

I. Χρήση παιδιῶν καὶ συγκεκριμένων ἀντικειμένων.

Παραδείγματα:

1) Νὰ σηκωθοῦν ἐπάνω ὁ Νῖκος, ὁ Γιῶργος, ὁ Μανώλης, ἡ Μαρία καὶ ἡ Ἑλένη.

Νὰ καθίσουν ἡ Μαρία καὶ ἡ Ἑλένη.

Ἕνα παιδὶ νὰ ἐξηγήσῃ τί συνέβη.

2. Παιδιὰ σηκώσετε τὰ δάκτυλα τῆς μιᾶς χειρός.

Κρύψετε τὰ δύο δάκτυλα. Πόσα ἔμειναν;

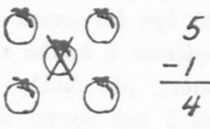
3. Τοποθετοῦμε 5 μολυβένια στρατιωτάκια στὴν ἕδρα. Παίρνομε τὰ δύο. Καλοῦμε μετὰ ἕνα παιδὶ νὰ διηγηθῆ τί συνέβη.

4. Ὁ Νῖκος ἔχει 5 μολύβια. Δίδει στὴν ἀδελφοῦλα του τὰ 2 μολύβια. Πόσα τοῦ μένουν;

II. Χρήση εἰκόνων.

Παραδείγματα:

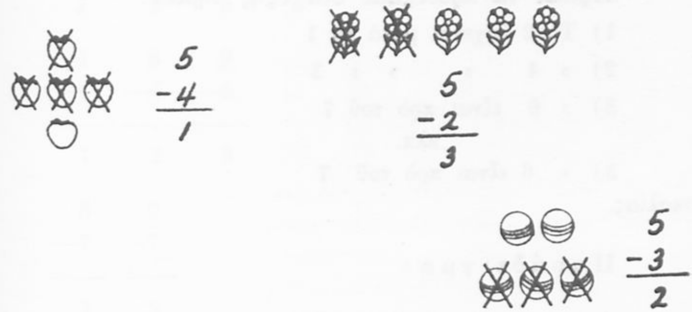
α) Ζωγραφίζομε 5 μῆλα στὸν πίνακα. Διαγράφομε τὸ 1 μῆλο, (βλέπε σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

Ρωτοῦμε τὰ παιδιὰ νὰ μᾶς διηγηθοῦν τί συνέβη.

β) Ζωγραφίζομε πάλι 5 μῆλα καὶ διαγράφομε τὰ 4, 5 δένδρα καὶ διαγράφομε τὰ 2 καὶ 5 βώλους καὶ διαγράφομε τοὺς 3 (σχῆμα 2).



(Σχῆμα 2)

γ) Ζητοῦμε νὰ ζωγραφίσουν καὶ τὰ παιδιὰ διάφορα πράγματα (πλοῖα κλπ.) καὶ νὰ ἐργασθοῦν μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

δ) Ἀναπαριστάνομε γραφικὰ τὴν ἀφαίρεση π.χ. $\begin{array}{r}4\\ -2\\ \hline 2\end{array}$ καὶ ζητοῦμε ἀπὸ τὰ παιδιὰ νὰ ζωγραφίσουν εἰκόνες νὰ μᾶς δείξουν τί ἐννοοῦν.

III. Χρήση προβληματικῶν καταστάσεων.

Παραδείγματα:

1. Εἶχα 4 μολύβια. Ἔδωσα στὴν Ἑλένη 2 μολύβια. Πόσα μοῦ ἔμειναν;

2. Ὁ Νῖκος ἔχει 3 καραμέλες. Πόσες θέλει ἀκόμη γιὰ νὰ ἔχη 5 καραμέλες;

IV. Χρήση καρτελλῶν.

Παραδείγματα:

Ἔχομε τυπώσει τοὺς ἀριθμοὺς 1—20 σὲ καρτέλλες.

Τὶς στηρίζομε στὸν τοῖχο καὶ ἐρωτοῦμε:

Ποῖος ἀριθμὸς εἶναι 1 ἀπὸ 3, 1 μικρότερο ἀπὸ 4, 1 ὀλιγώτερο ἀπὸ 6 κλπ.

Πρέπει νὰ προσέξωμε στὰ ἑξῆς σημεῖα:

1) Τὸ 2 ἔρχεται μετὰ τὸ 1

2) » 4 » » » 3

3) » 6 εἶναι πρὸ τοῦ 7

κλπ.

3) » 6 εἶναι πρὸ τοῦ 7

σκαλίας.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

Σκέπτομαι τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἔρχεται μετὰ τὸ 7.

Μπορεῖτε νὰ τὸν βρῆτε;

Παραθέτομεν παρακάτω τὰ βασικὰ συμπλέγματα ἀφαιρέσεως:

2	3	4	5	6	7	8	9
—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1	—1
1	2	3	4	5	6	7	8

3	4	5	6	7	8	9
—2	—2	—2	—2	—2	—2	—2
1	2	3	4	5	6	7

4	5	6	7	8	9
—3	—3	—3	—3	—3	—3
1	2	3	4	5	6

5	6	7	8	9
—4	—4	—4	—4	—4
1	2	3	4	5

6	7	8	9
—5	—5	—5	—5
1	2	3	4

7	8	9
—6	—6	—6
1	2	3

8	9
—7	—7
1	2

10	10	10	10	10	10	10	10	10
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
9	8	7	6	5	4	3	2	1

11	11	11	11	11	11	11	11	11
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
10	9	8	7	6	5	4	3	2

12	12	12	12	12	12	12	12	12
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
11	10	9	8	7	6	5	4	3

13	13	13	13	13	13	13	13	13
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
12	11	10	9	8	7	6	5	4

14	14	14	14	14	14	14	14	14
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
13	12	11	10	9	8	7	6	5

15	15	15	15	15	15	15	15	15
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
14	13	12	11	10	9	8	7	6
16	16	16	16	16	16	16	16	16
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
15	14	13	12	11	10	9	8	7
17	17	17	17	17	17	17	17	17
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
16	15	14	13	12	11	10	9	8
18	18	18	18	18	18	18	18	18
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
17	16	15	14	13	12	11	10	9
19	19	19	19	19	19	19	19	19
—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
18	17	16	15	14	13	12	11	10

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση

Ὅπως μᾶς πληροφορεῖ ἡ ψυχολογία τῆς μαθήσεως, στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν ἰδεῶν, πρέπει νὰ ὑπάρχη σύστημα καὶ συνέχεια.

Ἡ ἀρίθμηση εἶναι ἡ στοιχειώδης πορεία καὶ ὅλες οἱ πράξεις (πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση) στηρίζονται σ' αὐτή.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μπορεῖ νὰ βασισθῆ στὴν ἀρίθμηση, ἀλλὰ εἶναι πολὺ οἰκονομικὸ καὶ περισσότερο ἐνδιαφέρον νὰ βασισθῆ στὴν πρόσθεση. Τὸ παιδὶ π.χ. ἀνακαλύπτει, ὅτι 3 φορὲς τὸ 6 εἶναι 18, μὲ τὸ νὰ γράψη τρεῖς φορὲς τὸ 6 σὲ στήλη καὶ νὰ προσθέση.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ +6 \\ \hline 18 \end{array}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς δὲν εἶναι μία πορεία ποὺ παίρνομε περισσότερα. Εἶναι ἕνας γρήγορος τρόπος προσθέσεως. Θέτομε μαζὶ δύο ἢ περισσότερες ὁμάδες. Οἱ ὁμάδες ὅμως εἶναι πάντοτε ἴσου μεγέθους ἐνῶ στὴν πρόσθεση εἶναι ἀνίσου μεγέθους. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κονδυλίων πρὸ καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι ὁ ἴδιος.

Ἡ διαίρεση μπορεῖ νὰ βασισθῇ στὴν ἀφαίρεση ἀλλὰ εἶναι πολὺ οἰκονομικώτερο γιὰ τὸ παιδὶ νὰ ἰδῇ τὴν διαίρεση σχετιζομένη μὲ τὸν πολλαπλασιασμό. Γνωρίζοντας ὅτι 3 φορὲς τὸ 8 κάνει 24, τὸ παιδί, ἅμα ἐρωτηθῇ πόσες φορὲς τὸ 8 κάνει 24 ἀπαντᾶ 3, γιατὶ 3 φορὲς τὸ 8 εἶναι 24.

Διαίρεση, εἶναι ἕνας γρήγορος τρόπος ἀφαιρέσεως. Εἶναι μία πράξη χωρισμοῦ μιᾶς μεγαλυτέρας ὁμάδος σὲ δύο ἢ περισσότερες ὁμάδες ἴσου μεγέθους. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κονδυλίων πρὸ καὶ μετὰ τὴν διαίρεση εἶναι ὁ ἴδιος. Κατὰ τὸν **Smith** (1) διαίρεση εἶναι μία σειρὰ ἀφαιρέσεων ἀκριβῶς ὅπως πολλαπλασιασμὸς εἶναι μία σειρὰ προσθέσεων. Στὸν πολλαπλασιασμὸ ἔχομε ἴσους προσθετέους, στὴ διαίρεση ἔχομε, ἂς ποῦμε, ἴσους ἀφαιρετέους. Ἐὰν διαιρέσωμεν 17 διὰ 3 βρίσκομε 5 καὶ ὑπόλοιπο 2. Εἶναι σπουδαῖο νὰ γνωρίζωμε ὅτι ἀφαιρώντας 3 φορὲς τὸ 5 δίδει τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα ὡς νὰ ἀφαιροῦμε 5Χ3 ἀμέσως. Αὐτὲς οἱ ἰδέες εἶναι σπουδαῖες στὴν ἀντίληψη τῆς διαιρέσεως.

Μερικοὶ παιδαγωγοὶ ὑποστηρίζουν ὅτι ὁ πολλαπλασια-

1. **Smith R. Meaningful Division** σελ. 12-18

σμὸς καὶ ἡ διαίρεση δὲν πρέπει νὰ διδαχθοῦν στὶς δύο πρῶτες τάξεις τοῦ δημοτικοῦ σχολείου. Στὴν Ἀμερικὴ μάλιστα ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων διδάσκονται μόνον ἡ προσθαφαίρεση ἐπὶ δύο μονοψηφίων.(1)

Κατὰ τὸν Swenson, ἐὰν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση πρέπει νὰ διδαχθοῦν ἢ ὄχι στὶς δύο πρῶτες τάξεις θὰ ἐξαρτηθῆ ἀπὸ τὴν ἑτοιμότητα καὶ τὴν ἀποτελεσματικότητα τῆς διδασκαλίας.

Ἐπέτυχε ἡ διδασκαλία μου νὰ βοηθήση τὸ παιδὶ νὰ ἀνακαλύψη τὴν σχέση μεταξὺ προσθέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ, ἀφαιρέσεως καὶ διαιρέσεως;

Ἐστηρίχθηκα σὲ ὅτι τὰ παιδιὰ ἐγνώριζαν περὶ ἀριθμοῦ γιὰ νὰ διδάξω πολλαπλασιασμὸ καὶ διαίρεση;

Ποία πορεία ἀκολουθοῦν τὰ παιδιὰ γιὰ νὰ λύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως;

Γιατὶ συναντοῦν δυσκολίες μὲ τὸ ὑπόλοιπο στὴ διαίρεση;

Γιατὶ δυσκολεύονται νὰ ὀνομάσουν τὸ γινόμενο, τὸ πηλῖκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον μετὰ τὴν ἐπιτυχῆ λύση τῶν προβλημάτων;

Αὐτὲς εἶναι μερικὲς ἐρωτήσεις ποὺ ὡδήγησαν πολλοὺς παιδαγωγοὺς νὰ προσπαθήσουν ν' ἀνακαλύψουν πῶς σκέπτονται τὰ παιδιὰ ὅταν ἐπιχειροῦν νὰ λύσουν προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως προτοῦ νὰ διδαχθοῦν τὰ σχετικὰ συμπλέγματα. Δηλ. πῶς, χωρὶς νὰ διδαχθοῦν τὶς πράξεις αὐτές, ἀντιδροῦν ὅταν προσπαθοῦν νὰ λύσουν σχετικὰ προβλήματα.

Σὲ παιδιὰ τῆς πρώτης τάξεως ποὺ εἶχαν πολλὲς εὐκαιρίες νὰ λύσουν προβλήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως μὲ τὴν βοήθεια ἐποπτικῶν μέσων, ἐδόθη ἕνα TEST ἁπλῶν προβλημάτων πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

Τὰ παιδιὰ αὐτὰ γνώριζαν πολὺ ὀλίγο γιὰ πολλαπλασια-

---

1. Φωτεινοπούλου Θ. «Ἡ ἐκπαίδευσις εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας» σελ. 112.

σμὸ καὶ διαίρεση. Οἱ ὅροι πολλαπλασιασμὸς καὶ πολλαπλασιάζω δὲν εἶχαν διδαχθῆ. Ἡ λέξη διαίρεση εἶχε χρησιμοποιηθῆ μόνο κατὰ τὴν συζήτηση. Π.χ. «Δῶσε στὴ Μαρία τὰ μισὰ κάστανα». Ἔλυσαν τὰ προβλήματα μὲ τὴν βοήθειαν ἐποπτικῶν μέσων.

Ὁ πειραματισμὸς ἀπέδειξε ὅτι:

1. Τὰ παιδιὰ εἶχαν μία καλὴ ἀντίληψη τῆς ἐννοίας τῶν προβλημάτων.

2. Δίδοντας ἕνα πρόβλημα στὰ παιδιὰ θὰ τὸ λύσουν μὲ τὶς ἔννοιες καὶ τὸν ἐφοδιασμὸ ποὺ ἔχουν.

3. Ἂν καὶ δὲν εἶχαν μάθει τὶς μεθόδους πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως ἔφθασαν στὴ λύση μὲ τὴν ἐμπιστοσύνη ποὺ εἶχαν κερδίσει ἀπὸ μία μακρὰ περίοδο ἐπιτυχοῦς λύσεως προβλημάτων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

4. Μποροῦμε νὰ διδάξωμε πολλαπλασιασμὸ καὶ διαίρεση ἁπλῶν συμπλεγμάτων στὴν πρώτη τάξη ἐὰν τὰ παιδιὰ εἶναι ἕτοιμα νὰ δεχθοῦν τὸ νέον.

5. Ἡ σχέση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς προσθέσεως πρέπει νὰ συνεχισθῆ νὰ τονίζεται.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

$$\begin{array}{r} 0\,0\,0\,0\,4 \\ +\,0\,0\,0\,0\,4 \\ 0\,0\,0\,0\,4 \\ \hline 12 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

6. Ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεση θὰ εἰσαχθοῦν σὲ προβληματικὲς καταστάσεις ποὺ ὁδηγοῦν τὰ παιδιὰ ν' ἀνακαλύψουν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος νὰ βροῦμε τὸ σύνολον ὅταν ὅμοιοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ ἑνωθοῦν. Καὶ ἡ διαίρεση εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος νὰ βροῦμε:

1) Πόσες φορὲς ἕνας ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἕναν ἄλλο καὶ

2) Τὸ μέγεθος τῶν ἴσων μερῶν στὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἕνας ἀριθμός.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

1) Ἕνα γραμματόσημο κάνει 3 δραχμές. Πόσα γραμματόσημα μπορεῖς ν' ἀγοράσης μὲ 15 δραχμές;

2) Ἐὰν τρία γραμματόσημα στοιχίζουν 15 δραχ., πόσο στοιχίζει τὸ κάθε γραμματόσημο;

Ἡ ἀπάντηση τοῦ πρώτου παραδείγματος βρίσκεται ἐὰν ἀφαιροῦμε 3 ἀπὸ 15 δραχ. πέντε φορές.

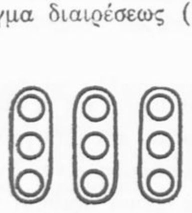
15	12	9	6
—3	—3	—3	—3
12	9	6	3

Ἡ ἀπάντηση δείχνει, ὅτι τὸ ἕνα ποσὸν εἶναι πέντε φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλλο ποσόν. Ἡ ἀπάντηση εἶναι ἕνας ἀφηρημένος ἀριθμὸς ἀλλὰ τὸ περιεχόμενον τοῦ προβλήματος δείχνει τί παρουσιάζει αὐτὸς ὁ ἀριθμός. Στὸ πρῶτο πρόβλημα τὸ 5 παρουσιάζει τὸν ἀριθμὸ γραμματοσήμων.

Τὸ ἀποτέλεσμα στὸ δεύτερο πρόβλημα δείχνει τὸ μέγεθος καθενὸς ἀπὸ τὰ τρία ἴσα μέρη στὰ ὁποῖα τὸ 5 διαιρεῖται.

Ἐὰν ἕνα παιδὶ δὲν γνωρίζει τὴν ἀπάντηση στὸ πρόβλημα, μπορεῖ νὰ τοποθετήση δεκάρες σὲ 3 ὁμάδες μέχρις ὅτου γίνουν ὁμάδες ὅλες.

Πολλὲς φορὲς πρέπει νὰ χρησιμοποιοῦμε εἰκόνες γιὰ νὰ ἐξηγήσωμε ἕνα σύμπλεγμα διαιρέσεως (βλέπε σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

Π.χ. πόσες φορὲς τὸ 3 εἶναι ἴσον μὲ τὸ 9;

9 λέγει τὸν ἀριθμὸ τῶν βώλων
3 » » » κάθε ὁμάδος
3 » » » τῶν ὁμάδων.

Δὲν θὰ ἀρκεσθοῦμε μόνο σὲ ὀλίγα παραδείγματα, τὰ παιδιὰ πρέπει νὰ μάθουν ὅτι ὑπάρχει μία μέθοδος γιὰ ὅμοια παραδείγματα.

Γραπτὴ διαίρεση δὲν θὰ διδάξωμε στὴν τάξη αὐτὴ ἀλλὰ θὰ δώσωμε προβλήματα τὰ ὁποῖα θέλουν νὰ γνωρίζουν. Τὰ προβλήματα αὐτὰ θὰ τὰ λύσουν μὲ τὴν βοήθεια ἐποπτικῶν μέσων.

Παραδείγματα πολλαπλασιασμοῦ:

Γιὰ νὰ διδάξωμε τὸν πολλαπλασιασμὸ τοῦ 2 μὲ ἕνα πρόβλημα τοῦ κόστους γραμματοσήμων τῶν 2 δρχ. τῶν 3 δρχ. κλπ. τὸ παιδὶ πρέπει νὰ μελετήση πρῶτα τὰ ποσὰ μὲ χρήματα. Κατόπιν θὰ βρῆ τὴν ἀπάντηση μὲ τὴ χρήση σημείων. Ἔπειτα μὲ πρόσθεση καὶ τέλος θὰ διδαχθῆ νὰ γράφη τὸ σύμπλεγμα στὸ σχηματισμὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ π.χ.

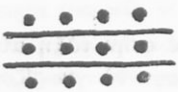
$$\begin{array}{r} 2 \\ X2 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ X3 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \text{κ. λ. π.}$$

Καθὼς εἰσάγεται νέος συνδυασμὸς πρέπει νὰ διδάσκεται ἐπίσης καὶ ὁ ἀντίστροφος σχηματισμός.

Ἀντὶ νὰ βρῆ π.χ. τὸ κόστος γραμματοσήμων τῶν 2 δρχ., μπορεῖ νὰ βρῆ τὸ κόστος γραμματοσήμων τῶν 3 δρχ. κλπ.

Πρέπει νὰ δραματοποιήση κάθε σχηματισμὸ ἔτσι ὥστε νὰ ἐννοήση τὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ συμπλέγματος 3Χ2 καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του 2Χ3.

Ὁ δάσκαλος θ' ἀναπτύξη τὴν ἔννοια τῶν ἀντιστρόφων κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ὡς καὶ προηγουμένως. Γιὰ νὰ κατανοήσουν τὰ παιδιά, ὅτι ὅταν γνωρίζωμε τὴν ἀπάντηση τοῦ ἑνὸς ζεύγους τοῦ πολλαπλασιασμοῦ 3X4, γνωρίζομε καὶ τὴν ἀπάντηση τοῦ ἄλλου ζεύγους 4X3, ζωγραφίζομε στὸν πίνακα στιγμὲς ὡς δείχνει τὸ σχῆμα 1.



Ὁ δάσκαλος λέγει :

Γνωρίζω τὴν ἀπάντηση σ' αὐτὸ τὸν πολλαπλασιασμό.

Ὁ δάσκαλος λέγει :

Ποιὰ εἶναι ἡ ἀπάντηση σ' αὐτὸ τὸν πολλαπλασιασμό;

(Σχῆμα 1)

Τὸ τελευταῖο στάδιο στὴ συνέχεια τῆς ἀναπτύξεως εἶναι ἡ χρήση τῶν συμπλεγμάτων στὰ προβλήματα. Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ κάμῃ τέτοια προβλήματα.

Ὁ δάσκαλος θ' ἀρχίζῃ μὲ τὸ συγκεκριμένο (γραμματόσημα) προχωρεῖ στὶς εἰκόνες, στὰ ἡμιαφηρημένα σύμβολα καὶ στὰ ἀφηρημένα σύμβολα καὶ ἐπιστρέφει στὰ συγκεκριμένα (κοινωνικὴ ἐφαρμογή).

Γιὰ νὰ ἐλέγξῃ δὲ τὴν ἀντίληψη τῶν συμπλεγμάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐρωτᾶ τὸν μαθητὴ νὰ δώσῃ ἀπάντηση σὲ κάθε σύμπλεγμα καὶ ν' ἀποδείξῃ τὴν ἀπάντησή του μὲ τρεῖς διαφορετικοὺς τρόπους ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 2.

1)	11111	11111	11111	11111
	5	10	15	20

2)

10

2 δεκάδες ἢ 20

10

3)	XXXX	XXXX	XXXX	XXXX	XXXX
	4	8	12	16	20

(Σχῆμα 2)

Ἡ τάξη, τέλος, πρέπει ν' ἀνακαλύψη τοὺς κατωτέρω κανόνες:

1) Ἡ ἀλλαγὴ τῶν ἀριθμῶν στὸν πολλαπλασιασμὸ δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἀπάντηση. Αὐτὸς εἶναι σπουδαῖος κανόνας.

2) Τὸ ἀποτέλεσμα σὲ κάθε πολλαπλασιασμὸ βρίσκεται καὶ μὲ πρόσθεση.

3) Στὸ σύμπλεγμα 3Χ2 τὸ 2 δείχνει πόσες φορὲς νὰ προσθέσωμε τὸ 3 γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἀποτέλεσμα.

4) Πολλαπλασιάζοντας μὲ τὸ 2 εἶναι τὸ ἴδιο ὡς νὰ διπλασιάζωμε τὸν ἀριθμό.

5) Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος παρουσιάζει π.χ. δραχμὲς ἢ κάτι ἄλλο συγκεκριμένο ποσόν, ἡ ἀπάντηση θὰ ἔχη τὸ ἴδιο ὄνομα μὲ τὸν πολλαπλασιαζόμενο ἀριθμό.

6) Τὸ σπουδαῖο σημεῖο δὲν εἶναι ὅτι τὰ παιδιὰ πρέπει νὰ ἐνθυμοῦνται τὴν ἀπάντηση σὲ κάθε ἐρώτηση, ἀλλὰ ὅτι πρέπει νὰ γνωρίζουν πῶς θὰ βροῦν τὴν ἀπάντηση.

Ἕνα πρόγραμμα ἐξ ἄλλου ἀριθμητικῆς, δὲν ἔχει σκοπὸ νὰ διδάξη ἕνα ὡρισμένο ἀριθμὸ συνδυασμῶν ἀλλὰ νὰ ὁδηγήση τὰ παιδιὰ νὰ μάθουν κανόνες οἱ ὁποῖοι θὰ τὰ κάμουν ἱκανὰ νὰ σκέπτωνται ἀπαντήσεις γιὰ πολλὰ σχετιζόμενα συμπλέγματα.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΕΚΑΔΟΣ

Καθὼς γνωρίζομε, πολλὰ παιδιὰ μαθαίνουν νὰ μετροῦν, νὰ διαβάζουν καὶ νὰ γράφουν ἀριθμοὺς μεγαλυτέρους τοῦ 10, προτοῦ ἐννοήσουν τὴν ἀξία τους.

Πρέπει νὰ ἐννοήσουν καλῶς ὅτι:

1) Τὸ ἀριθμητικὸ σύστημα ἔχει βάση τὸ δέκα.

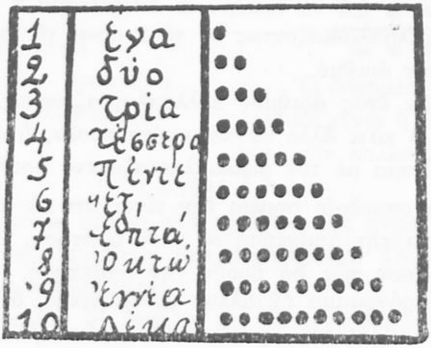
2) Δέκα μονάδες κάνουν μία δεκάδα.

3) Ἐὰν τὸ δύο ἔρχεται μετὰ τὸ ἕνα καὶ οἱ δύο δεκάδες ἔρχονται μετὰ τὴν μία δεκάδα.

Ι. Προτοῦ ἀρχίσομε τὴν διδασκαλία τῆς δεκάδος πρέπει νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι οἱ μαθητές μας κατενόησαν ὅτι κάθε ὁμάδα μέχρι τοῦ δέκα εἶναι μία ἁπλῆ ὁμάδα ποὺ τῆς δίδομε ἕνα εἰδικὸ ὄνομα.

Παρουσιάζομε δὲ τὴν ὁμάδα μὲ τὸ νὰ γράψωμε τὸ εἰδικὸ ψηφίο.

Στὴν ἀρχὴ θὰ δείξωμε τοὺς ἀριθμοὺς 1—10 σὲ συνέχεια ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα 1.



(Σχῆμα 1)

Ἔπειτα θὰ κάνωμε διάφορες ἐρωτήσεις:

Πόσα εἶναι ἐδῶ; (δείχνομε τὴν ὁμάδα τοῦ 5). Τὰ παιδιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἱκανὰ νὰ ἐξηγήσουν ὅτι τὸ ὄνομα πέντε λέγει πόσα, καὶ εἶναι ἕνα ὄνομα γιὰ τὴν ὁμάδα του. Θὰ γράψουν δὲ τὸν ἀριθμὸ 5 γιὰ τὴν ὁμάδα τοῦ πέντε.

II. Ἡ ὁμάδα τοῦ δέκα εἶναι μία εἰδικὴ ὁμάδα ποὺ τῆς δίδομε ἕνα εἰδικὸ ὄνομα ἀλλὰ δὲν ἔχομε ψηφίο νὰ παρουσιάσωμε τὸ 10 ὡς μία εἰδικὴ ὁμάδα. Θὰ τὸ παρουσιάσωμε ὅταν τὸ γράψωμε μὲ ἕνα εἰδικὸ τρόπο. Ὅπως κάθε ὁμάδα μέχρι τοῦ δέκα ἔτσι καὶ τὸ δέκα εἶναι μία ὁμάδα καὶ ἔχομε ἕνα ὄνομα γι' αὐτήν.

Ἐρωτοῦμε: Πόσα εἶναι ἐδῶ; (δείχνομε τὴν ὁμάδα τοῦ

10, (σχῆμα 1). Τὸ ὄνομα δέκα εἶναι ἕνα ὄνομα γι' αὐτὴν τὴν ὁμάδα. Πόσα εἶναι σ' αὐτὴ τὴν ὁμάδα;

(Σχῆμα 1)

Μαθητές: Δέκα.

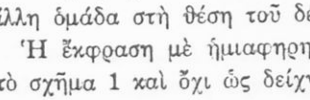
Δάσκαλος: Δὲν ἔχομε ψηφίο ποὺ λέγει πόσα. Πρέπει λοιπὸν νὰ βροῦμε ἕνα τρόπο νὰ γράψωμε τὸ δέκα. Τὸ δέκα δὲν μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε μὲ τὸ 1, γιατὶ τὸ δέκα δὲν εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ 1.

Πρέπει γι' αὐτὸ νὰ τοῦ βάλωμε κάτι ποὺ θὰ τὸ διακρίνη ἀπὸ τὸ 1. Θὰ βάλωμε μηδέν.

Τὸ μηδὲν δὲν εἶναι ἕνα ἀριθμητικό, ἀλλὰ κυρίως ἕνα σημεῖο γιὰ νὰ κρατήση μία θέση. Τὸ χρησιμοποιοῦμε ὅταν δὲν ἔχομε μονάδες νὰ παρουσιάσωμε. Ὅταν ἔχωμε μονάδες δὲν μᾶς χρειάζεται. Στὸν ἀριθμὸ 1 τὸ μηδὲν ἔχει δώσει μία νέα ἀξία μὲ τὸ νὰ κρατήση θέση στὸ 10. Ἐπειδὴ δὲν εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοηθῆ αὐτὴ ἡ σχέση τοῦ μηδενὸς γι' αὐτὸ εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνουν πολλὲς ἀσκήσεις μὲ ἀριθμοὺς ποὺ ἔχουν τὸ μηδέν.

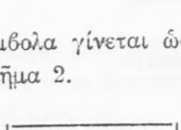
III. Κάθε ἀριθμὸ ἄνω τοῦ 10, τὸν σκεπτόμεθα ὄχι ὡς μία ὁμάδα ἀλλὰ ὡς δύο ὁμάδες. Π.χ. τὸ δώδεκα ὡς δύο καὶ δέκα. Ὁ ἀριθμὸς 2 ἀποτελεῖ τὴν μία ὁμάδα καὶ ὁ ἀριθμὸς 1 τὴν ἄλλη ὁμάδα στὴ θέση τοῦ δέκα.

Ἡ ἔκφραση μὲ ἡμιαφηρημένα σύμβολα γίνεται ὡς δείχνει τὸ σχῆμα 1 καὶ ὄχι ὡς δείχνει τὸ σχῆμα 2.



Δέκα Πέντε

(Σχῆμα 1)



(Σχῆμα 2)

Γιὰ νὰ βρῇ τὸ παιδὶ τὸ σύμπλεγμα 7+8 θέτει τὶς δύο ὁμάδες μαζὶ ὄχι σὲ μία ὁμάδα ἀλλὰ σὲ δύο ὁμάδες μία τοῦ 10 καὶ μία τοῦ 5.

Ὁ δάσκαλος στὴν ἀρχὴ δὲν ἐρωτᾶ πόσα κάνουν ἑπτὰ καὶ ὀκτώ:

Γιατὶ τὸ παιδὶ δυνατὸν ν' ἀπαντήσῃ μία δωδεκάδα καὶ τρία.

Ἡ ἀπάντηση ἂν καὶ σωστὴ δὲν εἶναι ἡ ἐπιθυμητὴ ἀπάντηση. Ἡ ἐπιθυμητὴ ἀπάντηση εἶναι δέκα καὶ πέντε. Ἔτσι ὁ δάσκαλος ἐρωτᾶ:

Ἑπτὰ καὶ ὀκτώ, πόσες δεκάδες καὶ πόσες μονάδες εἶναι;

Τὸ παιδὶ σκέπτεται: Ὀκτὼ καὶ δύο εἶναι δέκα. Δύο ἀπὸ ἑπτὰ εἶναι πέντε. Ὀκτὼ καὶ ἑπτὰ εἶναι μία δεκάδα καὶ πέντε μονάδες ἢ δέκα πέντε, (σχῆμα 1).

$$\begin{array}{r} 7 \\ +8 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \text{XXXXX} \\ \text{XXXXX} \end{array}}\begin{array}{l} \text{XX} \\ \text{XXX} \end{array}$$

(Σχῆμα 1)

Ὁ μαθητὴς ἔπειτα θὰ προσπαθήσῃ νὰ βρῇ μόνος του τὶς ἀπαντήσεις στὰ ὑπόλοιπα συμπλέγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Κλάσματα

Ὅπως γνωρίζομεν, τὸ παιδὶ ὅταν ἔλθῃ στὴν πρώτη τάξη γνωρίζει κάτι περὶ κλασμάτων.

Ἐὰν παρακολουθήσωμε συνομιλίες τῶν μικρῶν παιδιῶν θὰ ἀκούσωμε τὶς φράσεις:

«Δῶσε μου μισὸ μῆλο». «Μαρία μοίρασε αὐτὸ τὸ γλυκὸ σὲ τέσσερα κομμάτια» κλπ.

Ὁ **Polkinghorne** (1) ἐξήτασε 266 παιδιὰ τοῦ Νηπιαγωγείου καὶ τῆς πρώτης τάξεως τοῦ Πειραματικοῦ σχολείου τοῦ Πανεπιστημίου Σικάγου καὶ ἀνεκάλυψε ὅτι ἐγνώριζαν περὶ κλασμάτων πολὺ περισσότερα ἀπὸ ὅ,τι περίμενε.

Πολλοὶ παιδαγωγοὶ εἰσηγοῦνται ὅτι στὶς τάξεις πρώτη καὶ δευτέρα ὅλη ἡ ἐργασία μὲ τὰ κλάσματα πρέπει νὰ περιορισθῆ στὰ κλασματικὰ μέρη ἁπλῶν ἀντικειμένων.

Στὴν τάξη αὐτὴ θὰ διδάξωμε τὸ ½, τὸ ⅓ καὶ τὸ ¼.

Τὰ σύμβολα ½, ⅓, ¼ δὲν θὰ ἐμφανισθοῦν.

Πολλὰ παιδιὰ σκέπτονται τὸ μισὸ ὡς μέρος μόνον. Γιὰ νὰ χωρίσουν ἕνα γλυκὸ μὲ τοὺς ἀδελφοὺς ἢ ἀδελφές, δίδουν μισὸ στὸ καθένα ἀπὸ τὰ τέσσερα πρόσωπα.

Μὲ τὴν χρήση μήλων, τεμαχίων χάρτου κλπ. θὰ διδάξωμε ὅτι τὰ δυὸ κομμάτια πρέπει νὰ ἔχουν τὸ ἴδιο μέγεθος.

Καρτέλλες ποὺ δείχνουν ½, ⅓, ¼ ἁπλῶν ἀντικειμένων θὰ χρησιμοποιηθοῦν μετὰ τὰ πραγματικὰ ἀντικείμενα, (βλέπε σχῆμα 1).

(Σχῆμα 1)

Ὅταν τὰ παιδιὰ σκέπτονται μισὴ ἡμέρα, μισὸ μῆλο κλπ. ὁ δάσκαλος θὰ ἐπεκτείνῃ τὴν συζήτηση νὰ τονίσῃ ὅτι τὰ μισὰ εἶναι ἴσα μέρη, καὶ τὰ τέταρτα εἶναι ἴσα στὸ μέγεθος.

---

1 **Polknghorne A. «Young Children and Fractions»** σελ. 354-358.

ΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πειραματικὲς ἔρευνες ἀπέδειξαν ὅτι τὸ παιδὶ μαθαίνει εὐκολώτερα νὰ προσθέτη, ν' ἀφαιρῆ, νὰ πολλαπλασιάζη καὶ νὰ διαιρῆ ἀπὸ τὸ νὰ μαθαίνη πότε, σὲ ποιὲς προβληματικὲς καταστάσεις νὰ χρησιμοποιῆ τὶς πράξεις αὐτές.

Οἱ δάσκαλοι πολλὲς φορὲς λέγουν: «Τὰ παιδιά μου δυσκολεύονται νὰ διαβάσουν τὰ προβλήματα ποὺ τοὺς δίδω νὰ λύσουν». «Τὰ παιδιά μου λύουν εὔκολα ἀριθμητικὲς ἀσκήσεις ἀλλὰ συναντοῦν μεγάλες δυσκολίες νὰ λύσουν προβλήματα, θέλουν νὰ τοὺς εἴπω τί πράξη θὰ κάμουν ἀφοῦ διαβάσουν τὸ πρόβλημα».

Αὐτὲς οἱ παρατηρήσεις παρορμοῦν τὸ δάσκαλο ποὺ ἐνδιαφέρεται νὰ βελτιώση τὴν διδασκαλία τῆς ἀριθμητικῆς νὰ κάμη κάποια προσεκτικὴ ἔρευνα γιὰ νὰ βρῆ τὶς αἰτίες ποὺ κρύπτονται κάτω ἀπὸ τὶς καταστάσεις αὐτές.

Ὀφείλεται τοῦτο στὴν ἀδυναμία τοῦ παιδιοῦ νὰ χρησιμοποιήση τὴν κατάλληλη εἰδικὴ πορεία γιὰ νὰ φθάση στὴν λύση τοῦ προβλήματος; Ὀφείλεται στὰ βιβλία ποὺ συνήθως δὲν σχετίζονται στενὰ μὲ τὶς ἐμπειρίες τῶν παιδιῶν; Ὀφείλεται στὴν πτωχὴ μέθοδο ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ δάσκαλος;

Ὁ σκοπὸς τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ δὲν εἶναι νὰ ἀπαντήση στὶς ἐρωτήσεις αὐτές, ἀλλὰ νὰ περιγράψη τὶς δυσκολίες ποὺ συναντοῦν τὰ παιδιὰ ὅταν λύουν ἀριθμητικὰ προβλήματα καὶ νὰ ὑποδείξη πῶς θὰ τὰ βοηθήσωμε νὰ ὑπερνικήσουν αὐτὲς τὶς δυσκολίες καὶ ἔτσι νὰ βελτιώσωμε τὴν τεχνικὴ τῆς διδασκαλίας μας.

Προτοῦ προχωρήσωμεν εἶναι ἀνάγκη νὰ κάνωμε μία διάκριση μεταξὺ ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων. Σὲ μία ἄσκηση ὁ μαθητὴς λέγει τί πορεία θὰ χρησιμοποιήση εἴτε μὲ ἕνα σὺν (+), εἴτε ἕνα πλὴν (—), εἴτε μία λέξη (πρόσθεση, ἀφαίρεση, κλπ.) ἢ μία φράση (τὸ ποσὸν κλπ.). Ἡ προσοχή του ἔτσι τοποθετεῖται ἐξ ὁλοκλήρου στὸ νὰ ἐκτελέση τὸν ὑπολογισμό. Σ' ἕνα πρόβλημα ὅμως ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ διαβάση τὴν περιγραφὴ μιᾶς ποσοτικῆς καταστάσεως καὶ ἀφοῦ ἀντιληφθῆ καλῶς τὴν κατάσταση ν' ἀποφασίση τί πορεία νὰ χρησιμοποιήση, προτοῦ ἐκτελέση τὸν ὑπολογισμόν.

Γιὰ νὰ περιγράψωμε τὶς δυσκολίες ποὺ συχνὰ παρουσιάζονται στὰ παιδιά, ὅταν λύουν προβλήματα καὶ νὰ ὑποδείξωμε πῶς θὰ τὰ βοηθήσωμε νὰ ὑπερνικήσουν τὶς δυσκολίες αὐτὲς πρέπει νὰ μελετήσωμε τὶς κατωτέρω 4 ἐρωτήσεις.

1) Τί τύπους προβλημάτων τὰ παιδιὰ μποροῦν νὰ λύσουν;

2) Σὲ τί κατάσταση (προσθετική, ἀφαιρετική, συγκριτική) ἀνήκει κάθε μία ἀπὸ τὶς χρησιμοποιούμενες πορεῖες;

3) Πόση προσοχὴ πρέπει νὰ δοθῆ στὰ προφορικὰ προβλήματα;

4) Τί στάδια θὰ ἀκολουθήσωμε γιὰ νὰ ἀναπτύξωμε τὴν ἱκανότητα τῶν παιδιῶν νὰ λύουν προβλήματα;

Ἀπάντηση στὴν πρώτη ἐρώτηση

Τὰ προβλήματα διεγείρουν τὸ διαφέρον τῶν παιδιῶν ὅταν εἶναι ἁπλᾶ, σχετικὰ μὲ τὶς γνώσεις ποὺ ἔχουν, παρμένα ἀπὸ τὴν καθημερινή των ζωή, κατανοητὰ ἀπὸ ὅλα τὰ παιδιὰ καὶ γραμμένα σὲ ἁπλῆ γλῶσσα. Πρέπει ἐπίσης νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὴν ἀντιληπτική των βαθμίδα.

Προβλήματα ποὺ εὐχαρίστως θὰ φαντασθοῦν μόνα των τὰ παιδιὰ κινοῦν τὸ διαφέρον των (προετοιμασία μιᾶς ἐκδρομῆς, προετοιμασία μιᾶς γιορτῆς, ἐκλογὴ καὶ ἀγορὰ παιγνιδιῶν, κλπ.): Τὸ περιεχόμενό των πρέπει νὰ βρίσκεται σὲ στενὸ σύνδεσμο μὲ τὶς ἐμπειρίες τῶν παιδιῶν. Στὴν ἀρχὴ πραγματικὰ προβλήματα ποὺ δίδουν ἔννοια καὶ βγαίνουν ἀπὸ τὶς ἀνάγκες τῶν μαθητῶν θὰ ἀποτελοῦν τὴ βάση προβληματικῶν καταστάσεων στὶς κατώτερες τάξεις. Θὰ ἀρχίζουν μὲ κάποιο πρᾶγμα συγκεκριμένο καὶ ἁπλὸ καὶ τελικὰ θὰ φθάνουν σὲ προβλήματα ὀλιγώτερον συγκεκριμένα ἀλλὰ πολὺ ἁπλᾶ (προβλήματα χρόνου κλπ.).

Ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ προσέξη στοὺς τύπους τῶν προβλημάτων, νὰ τοὺς διδάξη χωριστά. Μικτὰ προβλήματα δὲν πρέπει νὰ δοθοῦν προτοῦ τὸ παιδὶ μάθη τὸν κάθε τύπο. Πρέπει νὰ προηγηθῆ ἡ ἐκμάθηση τοῦ κάθε ἁπλοῦ τύπου καὶ ν' ἀκολουθήση ἡ ἐκμάθηση τοῦ μικτοῦ τύπου.

Παραθέτομεν μερικοὺς ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτούς:

Π ρ ῶ τ ο ς τ ύ π ο ς: Νὰ βρῆτε τὴν ἀπάντηση σὲ μία ἁπλῆ ἐρώτηση π.χ. Ἡ Ἄννα εἶχε 3 μολύβια μπλὲ καὶ 4 κόκκινα μολύβια.

Πόσα μολύβια ἔχει; (Ἡ ἁπλῆ ἐρώτηση εἶναι πόσα μολύβια ἔχει).

Δ ε ύ τ ε ρ ο ς τ ύ π ο ς: Νὰ βρῆτε πόσο στοιχίζουν 3 τετράδια ἀπὸ 3 δραχ. τὸ καθένα.

Τ ρ ί τ ο ς τ ύ π ο ς: Νὰ βρῆτε τὴν ἀπάντηση σὲ δύο ἐρωτήσεις ποὺ ἡ κάθε μία εἶναι ἄσχετη πρὸς τὴν ἄλλη π.χ. Ὁ Γιάννης ἔκαμε 24 φάκελλα καὶ 16 τσάντες. Πούλησε τὸ κάθε φάκελλο μία δεκάρα καὶ τὶς τσάντες 3 δραχ. Πόσα χρήματα πῆρε ἀπὸ τὰ φάκελλα; Πόσα χρήματα πῆρε ἀπὸ τὶς τσάντες; (Οἱ δύο ἐρωτήσεις εἶναι. Πόσα χρήματα πῆρε ἀπὸ τὰ φάκελλα; Πόσα χρήματα πῆρε ἀπὸ τὶς τσάντες;) .

Τ έ τ α ρ τ ο ς τ ύ π ο ς: Λύση προβλημάτων μὲ τὴν χρήση ἀποτελέσματος προηγουμένου προβλήματος. Π.χ. πόσα χρήματα πῆρε ὁ Γιάννης ἀπὸ τὰ φάκελλα καὶ τὶς τσάντες; (τὸ ἀναγκαῖον ἀποτέλεσμα τοῦ προηγουμένου προβλήματος εἶναι τὰ ληφθέντα χρήματα ἀπὸ τὰ φάκελλα καὶ τὶς τσάντες).

Π έ μ π τ ο ς τ ύ π ο ς: Λύση προβλημάτων μὲ δύο ἐρωτήσεις ποὺ ἡ ἀπάντηση τῆς μιᾶς εἶναι ἀναγκαία γιὰ τὴν λύση τῆς ἄλλης. Π.χ. Ὁ Νῖκος εἶχε 10 βώλους ἄσπρους καὶ 16 σκούρους βώλους. Πούλησε τοὺς μισοὺς ἀπ' αὐτοὺς στὸ Βασίλη. Πόσους πούλησε; Πόσα χρήματα θὰ πάρη ἂν πουλήση καθένα ἀπὸ 1 δραχ.; Ἡ πρώτη ἐρώτηση εἶναι πόσους πούλησε. Ἡ δευτέρα ἐρώτηση ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πρώτη εἶναι πόσα θὰ πάρη ἀπὸ αὐτούς.

Ἔκτος τύπος: Λύση προβλημάτων ποὺ ἡ ἀπάντηση τῆς μιᾶς ἐρωτήσεως ἀσφαλίζεται ἀπὸ μία κρυμμένη ἐρώτηση π.χ. Ὁ Μανώλης ἤθελε νὰ κερδίση 50 δραχ. γιὰ νὰ πάη ἐκδρομή. Τὴν πρώτη ἑβδομάδα ἔβαλε 10 δραχ. στὸν κουμπαρᾶ του, τὴν δεύτερη 5 δραχ. καὶ τὴν τρίτη 20 δραχ. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ βάλη ἀκόμη στὸν κουμπαρᾶ του γιὰ νὰ γίνουν ὅλα 50 δραχ. (Ἡ ἐρώτηση εἶναι: Πόσα χρήματα πρέπει νὰ βάλη ἀκόμη στὸν κουμπαρᾶ του; Ἡ κρυμμένη ἐρώτηση εἶναι πόσα χρήματα ἔχει μαζί του τώρα;).

Ἀπάντηση στὴν δευτέρα ἐρώτηση.

Συμβαίνει πολλὲς φορὲς ἕνα παιδὶ νὰ ἔχη τὴν ἱκανότητα νὰ διαβάση ἕνα πρόβλημα καὶ νὰ τὸ ἐννοήση ἀλλὰ νὰ εἶναι ἀνίκανο νὰ ἀποφασίση τί θὰ κάμη. Αὐτὸ συμβαίνει γιατὶ δὲν ἀντιλαμβάνεται τὴν ἔννοια τῆς πορείας.

Ὑπάρχει μία σπουδαία διαφορὰ μεταξὺ τῆς πορείας καὶ τῆς πράξεως τὴν ὁποίαν ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ ἔχη ὑπ' ὄψη του ἐὰν θέλη νὰ διδάξη ἀριθμητικὴ κατὰ τρόπο ὁ ὁποῖος νὰ μὴ τεμαχίζη τὴν πρόοδο τῆς μαθήσεως τοῦ παιδιοῦ.

Κατὰ τὸν **Hartung** (1) ὑπάρχουν δύο πολὺ σπουδαῖες ἀπόψεις ποὺ πρέπει νὰ μελετηθοῦν κατὰ τὴν διδασκαλία τῆς λύσεως προβλημάτων.

1) Τὸ παιδὶ πρέπει νὰ ἀναγνωρίζη ἐὰν μία προβληματικὴ κατάσταση περιλαμβάνει ἀφαιρετικὲς πράξεις ἢ προσθετικὲς ἢ συγκριτικὲς) καὶ 2) νὰ ἐκτελῆ τὴν πορεία προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως.

Διαφορὰ μεταξὺ πράξεως καὶ πορείας.

Ὑπάρχουν προβλήματα στὴν ἀριθμητική, ὅπου τὸ παιδὶ

Βλέπε: **Hartung M. and Engen Mahoney «Numbers in Action»**, σελ 150.

συνήθως διδάσκεται νὰ ἀφαιρῇ, ἀλλὰ ποὺ στὸν φυσικὸ τρόπο τῆς σκέψεώς των εἶναι προσθετικὴ κατάσταση. Πολλοὶ δάσκαλοι παρουσιάζουν τὴν ἀφαιρετικὴ κατάσταση, ὅτι καλύπτει τὴν ἔννοια τῆς ἀφαιρέσεως, γιατὶ δὲν ἔχουν σημειώσει τὶς σπουδαῖες διαφορὲς ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτοῦ τοῦ τύπου καὶ τῶν δύο ἄλλων τύπων. Δὲν γνωρίζουν ὅτι ὑπάρχει μιὰ σπουδαία διαφορὰ μεταξὺ πράξεως καὶ πορείας. Καὶ ὅμως αὐτοὶ οἱ ἴδιοι ἐκπλήσσονται γιατὶ συναντοῦν τὰ παιδιά των δυσκολίες, ὅταν ἀσχολοῦνται μὲ προβλήματα ἀφαιρέσεως. Τόσον ὁ δάσκαλος ὅσο καὶ οἱ μαθητὲς πρέπει νὰ γνωρίζουν καλῶς τί συμβαίνει σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς παρακάτω τρεῖς καταστάσεις ἀφαιρέσεως.

1) Ὁ Νῖκος ἔχει 8 δραχ. Μερικὲς ἀπ' αὐτὲς τοῦ ἔπεσαν στὸ πάτωμα. Τοῦ ἔμειναν 5 στὸ χέρι. Πόσες τοῦ ἔπεσαν στὸ πάτωμα; ἢ πόσες πρέπει νὰ ἔχη γιὰ νὰ κάμη πάλι 8.

Καθὼς ἔχει ἀποδείξει ἡ ἀριθμητικὴ ἔρευνα τὰ παιδιὰ σκέπτονται τὸ πρόβλημα αὐτὸ ὡς πρόβλημα προσθέσεως. Αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἐκπλήσση ἐπειδὴ οἱ λέξεις δείχνουν ὅτι 3 περισσότερες δραχ. πρέπει νὰ προστεθοῦν στὴν ὁμάδα τοῦ 5 γιὰ νὰ κάμουν τὴν ὁμάδα τοῦ 8.

Ὅλη ἡ προηγούμενη ἐμπειρία τοῦ παιδιοῦ τὸ ἔχει διδάξει νὰ σκέπτεται αὐτὸ τὸ πρόβλημα σὰν μία προσθετικὴ κατάσταση. Ψυχολογικὰ καὶ λογικὰ τὸ παιδὶ ἔχει δίκιο. Ἡ κατάσταση εἶναι προσθετική, ἀλλὰ ἡ ἀπάντηση ἀποκτᾶται μὲ ἀφαίρεση. Δηλ. οἱ πράξεις ποὺ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ νὰ λυθῆ τὸ πρόβλημα εἶναι προσθετικὴ κατάσταση. Ἡ κατάσταση εἶναι προσθετική, ἀλλὰ ἡ πορεία εἶναι ἀφαιρετική.

2) Ὁ Νῖκος ἔχει 8 δραχ. Δίδει στὸν μικρό του ἀδελφὸ 5 δραχ. Πόσες δραχ. τοῦ ἔμειναν;

Στὸ πρόβλημα αὐτὸ ὁ Νῖκος θ' ἀρχίση μὲ 8 δραχ. καὶ θὰ δώση στὸν ἀδελφό του 5 ἀπ' αὐτές. Ἐδῶ ἡ κατάσταση εἶναι ἀφαιρετικὴ καὶ ἡ πορεία εἶναι ἀφαιρετική. Ἔχομε δηλ. αναζήτηση τοῦ ὑπολοίπου.

3) Ὁ Νῖκος ἔχει 8 δραχ. Ὁ μικρός του ἀδελφὸς ἔχει

5. Πόσες δραχ. περισσότερες ἔχει ὁ Νῖκος, δηλ. ποιὰ εἶναι ἡ διαφορά;

Ἐδῶ ἔχομε μία συγκριτικὴ κατάσταση καὶ ὄχι ἀφαιρετική. Δὲν ζητοῦμε τὸ ὑπόλοιπο ἀλλὰ τὴν διαφορά.

Πρέπει νὰ γίνη εἰδικὴ διδασκαλία, σχετικὴ μὲ τὴν πορεία ὄχι μόνον τῶν τριῶν ἀνωτέρω τύπων ἀφαιρέσεως, ἀλλὰ καὶ τῶν ἄλλων πράξεων.

Τὰ παιδιὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ κατανοήσουν ὅτι: 1) Ἡ πρόσθεση ἀπαντᾶ στὴν ἐρώτηση, πόσα πολλά; 2) Ἡ ἀφαίρεση ἀπαντᾶ στοὺς 3 τύπους ἐρωτήσεως α) πόσα ἔμειναν; (ἀφαιρετικὴ ἀφαίρεση), β) πόσα χρειαζόμεθα ἀκόμη; (προσθετικὴ ἀφαίρεση) καὶ γ) ποία εἶναι ἡ διαφορά; (συγκριτικὴ ἀφαίρεση).

3) Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀπαντᾶ στὴν ἐρώτηση. Πόσα πολλά, ὅταν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἑνώνονται εἶναι ὅμοιοι.

4) Ἡ διαίρεση ἀπαντᾶ στὴν ἐρώτηση: Πόσα σὲ κάθε ἴσο μέρος;

Ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι ποὺ μποροῦν νὰ ἀπαντηθοῦν ἐρωτήσεις αὐτοῦ τοῦ τύπου καὶ τὰ παιδιὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ βοηθηθοῦν στὸ νὰ συνδέσουν τὶς προβληματικὲς καταστάσεις μὲ τὶς πορεῖες, ποὺ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ νὰ λύσουν αὐτὰ τὰ προβλήματα.

Ἐὰν ὁ δάσκαλος δὲν ἐννοεῖ καλῶς ὅλες αὐτὲς τὶς καταστάσεις δὲν μπορεῖ νὰ ὁδηγήση ἀποτελεσματικὰ τὸ παιδὶ νὰ κατανοήση ὅτι ὅλες οἱ καταστάσεις (προσθετικές, ἀφαιρετικές, συγκριτικὲς) εἶναι καταστάσεις ἀφαιρέσεως.

Δὲν πρέπει δὲ νὰ παραξενευόμαστε ἂν τὰ παιδιά μας δὲν γνωρίζουν ὅτι πρέπει ν' ἀφαιρέσουν στὶς προσθετικὲς καὶ συγκριτικὲς καταστάσεις, ἂν ἔχουν διδαχθῆ ὅτι ἡ ἀφαίρεση ἐννοεῖ πάντοτε νὰ ἀφαιρέσης.

Ἀπάντηση στὴν τρίτη ἐρώτηση.

Ἀρκετὸς χρόνος πρέπει νὰ διατεθῆ στὶς κατώτερες τάξεις γιὰ τὴν λύση προφορικῶν προβλημάτων ποὺ παρουσιάζονται σχετιζόμενα μὲ τὶς δραστηριότητές των ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σχολείου.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

1) Ὁ Βασίλης ἔχει 4 μολύβια καὶ ἕνας συμμαθητής του τοῦ ἔδωσε 2 μολύβια. Πόσα μολύβια ἔχει;

2) Ὁ Κώστας ἔχει 5 βώλους καὶ τοῦ δίνει καὶ ὁ φίλος του ὁ Νῖκος 3. Πόσους βώλους ἔχει;

3) Ὁ πατέρας τοῦ Μανώλη τοῦ ἔδωσε 6 δραχ. ἀλλὰ ἔχασε τὶς 2 δραχ. Πόσες δραχ. τοῦ ἔμειναν; κλπ. κλπ.

Ἀ π ά ν τ η σ η σ τ ὴ ν τ ε τ ά ρ τ η ἐ ρ ώ τ η σ η.

Οἱ δάσκαλοι πρέπει νὰ ἀναπτύξουν τὴν ἱκανότητα τῶν παιδιῶν νὰ λύουν γραπτὰ προβλήματα, γιατὶ ἡ λύση γραπτῶν προβλημάτων εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ὅσων ὁ μαθητὴς ἔμαθε ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἡ λύση τῶν προβλημάτων στηρίζεται στὰ κατωτέρω 4 στάδια:

α) Τὸ τεθὲν πρόβλημα κατ' ἀρχὴν πρέπει νὰ κατανοήσουν ὅλοι οἱ μαθηταί. Ὁ τρόπος νὰ διαβάση ἕνας μαθητὴς ἕνα πρόβλημα εἶναι τελείως διαφορετικὸς ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ χρησιμοποιεῖ ὅταν διαβάζη μία ἱστορία. Ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ μάθη νὰ διαβάζη τὸ πρόβλημα σιγὰ - σιγὰ μὲ προσοχή, γιὰ ν' ἀντιληφθῆ τὶς λεπτομέρειες καὶ σὲ τὶ κατάσταση ἀνήκει τοῦτο.

Τὸ λεξιλόγιο τῶν προβλημάτων πρέπει νὰ προσεχθῆ ἰδιαιτέρως, διότι μερικὲς ἀπὸ τὶς χρησιμοποιούμενες λέξεις δὲν παρουσιάζονται στὰ βιβλία καὶ πολλὲς ἀπὸ τὶς γνωστὲς λέξεις λαμβάνουν διαφορετικὴ ἔννοια ὅταν ἀναφέρωνται σὲ ποσοτικὲς καταστάσεις. Ἡ γλῶσσα τῶν καλῶν προβλημάτων εἶναι ἡ γλῶσσα ποὺ κατανοοῦν τὰ παιδιὰ ἀπηλλαγμένη ἀπὸ ἄγνωστες λέξεις.

Τὰ καλὰ προβλήματα α) Τὰ διαβάζουν σὰν ἱστορίες, ἔχουν ἕνα ἑλκυστικὸ Style καὶ προμηθεύουν εὐκαιρίες γιὰ νὰ χρησιμοποιήσουν τὶς θεμελιώδεις δεξιότητές των.

Τὰ προβλήματα ὅταν εἶναι παρμένα ἀπὸ τὴ ζωή τους ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σχολείου κάνουν τὴν ἀριθμητική των νὰ εἶναι ἕνα ζωτικὸ μάθημα γεμᾶτο ἐνδιαφέρον καὶ ἔννοια.

β) Κάθε μαθητὴς πρέπει νὰ ἔχῃ τὴν ἱκανότητα νὰ κατανοήση καθαρὰ τὴν κατάσταση ποὺ περιγράφει τὸ πρόβλημα προτοῦ ἀποφασίση τί πράξη θὰ κάμη.

Παραθέτομεν μερικοὺς βοηθητικοὺς τρόπους:

1) Διάβασε τὸ πρόβλημα καὶ πὲς τὴν ἱστορία τοῦ προβλήματος μὲ δικές σου λέξεις. Π.χ. ἕνας μαθητὴς διαβάζει τὸ ἑξῆς πρόβλημα. Ὁ Κώστας ἔπιασε 5 ψάρια. Ὁ πατέρας του ἔπιασε 3 ψάρια. Πόσα ψάρια περισσότερα ἔπιασε ὁ Κώστας ἀπὸ τὸν πατέρα του;

Ὁ μαθητὴς λέγει τὴν ἱστορία: Ἕνα ἀγόρι καὶ ὁ πατέρας του πῆγαν στὸ ψάρεμα καὶ τὸ ἀγόρι ἔπιασε περισσότερα ψάρια. Θέλω νὰ βρῶ πόσα περισσότερα ψάρια ἔπιασε τὸ ἀγόρι ἀπὸ τὸν πατέρα του;

2) Χρησιμοποίησε συγκεκριμένα ἀντικείμενα, ζωγράφισε εἰκόνες ἀντικειμένων ἢ ζωγράφισε διαγράμματα νὰ δείξης τὶ εἶπες στὸ πρόβλημα.

3) Χρησιμοποίησε τὶς εἰκόνες τῶν βιβλίων ποὺ θὰ σὲ βοηθήσουν γιὰ νὰ ταξινομήσης τὶς καταστάσεις.

4) Κάμε πρωτότυπα προβλήματα βασισμένα στὴν προσωπικὴν ἐμπειρία των χρησιμοποιῶντας ἀκριβεῖς ἐκθέσεις.

5) Περίγραψε καταστάσεις καὶ ζήτησε ἀπὸ τὰ παιδιὰ νὰ γράψουν τὶς ἐρωτήσεις προτοῦ ἐργασθοῦν μὲ προβλήματα.

Ἡ λύση προβλημάτων μπορεῖ νὰ βελτιωθῆ μὲ τὴν χρήση ποικίλων τύπων ἀσκήσεων.

Οἱ κατωτέρω εἶναι μερικοὶ ἀπ' αὐτοὺς τοὺς τύπους:

α) Περίγραψε καταστάσεις καὶ ζήτησε ἀπὸ τὰ παιδιά σου νὰ γράψουν τὶς ἐρωτήσεις, προτοῦ ἐργασθοῦν μὲ προβλήματα.

β) Ζήτησε ἀπὸ τοὺς μαθητές σου νὰ κάμουν πρωτότυπα προβλήματα παρμένα ἀπὸ τὴ ζωή τους.

γ) Χρησιμοποίησε προβλήματα αὐτοῦ τοῦ τύπου: Ἡ Ἑλένη εἶχε 3 κόκκινα μολύβια καὶ 4 μπλὲ μολύβια. Πόσα λεπτὰ ἐξόδεψε γιὰ νὰ τὰ ἀγοράση;

δ) Χρησιμοποίησε προβλήματα χωρὶς ἀριθμούς. Π.χ. ἡ Ἄννα γνωρίζει πόσο στοιχίζει ἕνα γραμματόσημο καὶ πόσα γραμματόσημα θέλει ἡ μητέρα της νὰ τῆς ἀγοράση. Πῶς θὰ βρῆ ἡ Ἄννα πόσα χρήματα θὰ πάρη γιὰ τὸ ταχυδρομεῖο;

Ἡ λύση τῶν προβλημάτων πρέπει νὰ γίνεται καὶ ὑπὸ παιγνιώδη μορφὴ μὲ τὴ χρήση διαφόρων ἀριθμητικῶν παιγνιδιῶν.

Κάθε πρόβλημα ποὺ θὰ δίδεται στὸ παιδὶ νὰ τὸ λύση πρέπει νὰ ἀποβλέπη στὸ νὰ τὸ βοηθήση νὰ λύση τὶς καταστάσεις ποὺ θὰ συναντήση στὴ ζωή του ἔξω ἀπὸ τὸ σχολεῖο.

Ἡ λύση προβλημάτων εἶναι ἡ καρδιὰ κάθε ἐκπαιδευτικῆς ἀναπτύξεως καὶ προσφέρει ἀπεριόριστες εὐκαιρίες γιὰ χαρούμενη δημιουργικὴ σκέψη διὰ τῆς ἀνακαλύψεως βασικῶν ἀριθμητικῶν σχέσεων.

Ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ ἐνθυμῆται πάντοτε ὅτι ἡ κατανοητὴ μάθηση στηρίζεται στὴν ἀνακάλυψη καὶ στὴν λύση προβλημάτων. Γι' αὐτὸ ἔχει καθῆκον νὰ προσπαθήση ὥστε: 1) νὰ γίνη ἱκανὸ τὸ παιδί νὰ ἀναγνωρίζη καὶ νὰ σχηματίζη ἕνα πρόβλημα, 2) νὰ συλλέγη τὴν ἀναγκαία πληροφορία ποὺ περιλαμβάνεται σὲ μία ποσοτικὴ κατάσταση, 3) νὰ προσδιορίζη τὶς σχέσεις ποὺ περικλείονται στὴν κατάσταση καὶ 4) νὰ ἐκφράζη τὶς σχέσεις αὐτὲς σὲ συμβολισμοὺς — λέξεις ἢ σύμβολα ἀριθμοῦ τὰ ὁποῖα περικλείουν πράξεις καὶ 5) νὰ βρίσκη τὴν λύση.(1)

Γιὰ νὰ ἐπιτύχη δὲ στὸ ἔργον του ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ ἔχη ὑπ' ὄψη του τὶς 3 παρακάτω σπουδαῖες ἀρχὲς κατὰ τὸν **Hartung**

---

1. **Stamataki E. Recent Trends in Arithmetic Instruction** 1957.

1) Ἡ μάθηση προχωρεῖ περισσότερον ἀποτελεσματικὰ ὅταν ὑπάρχη κάποια ἐπίγνωση μέσα στὴ συνολικὴ προβληματικὴ κατάσταση καὶ ὅταν τὰ μέρη ποὺ ἀπαρτίζουν τὴ γενικὴ κατάσταση εἶναι σὐνδεδεμένα μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν γενικὴ κατάσταση.

2) Ἡ μάθηση προχωρεῖ περισσότερον ἀποτελεσματικὰ ἂν ἕνα ἀντικείμενον ὀργανώνεται συστηματικὰ ἔτσι ὥστε νὰ μποροῦν ν' ἀναγνωρισθοῦν οἱ σχέσεις ἀργότερα καὶ νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ νὰ ἑνοποιήσουν τὸ μάθημα.

3) Ἡ μάθηση προχωρεῖ περισσότερον ἀποτελεσματικὰ ἂν τὸ ἀντικείμενον ἀναγνωρίζεται ἀπὸ τὸν μαθητὴ ὡς χρήσιμο σ' αὐτὸν κατὰ κάποιο τρόπο.

ΕΠΕΞΗΓΗΜΑΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

I

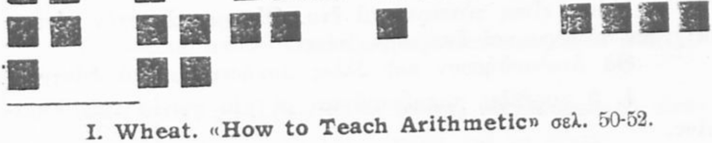
Ἡ ὁμάδα τοῦ 5 (1)

1. Δάσκαλος: (Ζωγραφίζει 5 κύκλους στὸν πίνακα).

O O O O O

Παιδιὰ αὐτὸς εἶναι ἕνας τρόπος νὰ διατάξωμε 5 πράγματα. Διατάξετε καὶ σεῖς πέντε φασόλια στὸ θρανίο σας μὲ ἄλλους τρόπους.

Μαθηταί: Διατάσσουν τὰ φασόλια τους κατὰ τοὺς κατωτέρω τρόπους:



1. Wheat. «How to Teach Arithmetic» σελ. 50-52.

2. Δάσκαλος: Στὸν πίνακα ὑπάρχει μία εἰκόνα μὲ στιγμὲς ἡ ὁποία ὅμως εἶναι καλυμένη μὲ ἕνα χαρτί.

Παιδιὰ προσέξετε. Θὰ τὴν ἀποκαλύψω, ἀλλὰ δὲν θὰ ἔχετε χρόνο νὰ μετρήσετε τὶς στιγμές. Μπορῆτε ὅμως νὰ μοῦ εἰπῆτε πόσες στιγμὲς εἶναι στὴν εἰκόνα. Ἂς προσπαθήσουμε λοιπόν.

Ἡ εἰκόνα ἀποκαλύπτεται πάλι γιὰ ἕνα λεπτὸ καὶ καλοῦνται τώρα τὰ παιδιὰ νὰ γράψουν πόσες στιγμὲς ἐμέτρησαν.

Ἀφοῦ γραφοῦν οἱ ἀπαντήσεις ἡ εἰκόνα ἀποκαλύπτεται ὥστε νὰ μποροῦν νὰ ἐλέγξουν τὴν ὀρθὴ ἀπάντησή των.

Ἡ ἄσκηση αὐτὴ βοηθεῖ τὰ παιδιὰ νὰ ἐννοήσουν καλύτερα τὴν ὁμάδα σὰν μία ὁλότητα.

3. Ἡ ἀνάλυση μιᾶς ὁμάδος, π.χ. τοῦ 5, εἰσάγεται μὲ τὸ νὰ ἐρωτήσωμε ἕνα παιδὶ νὰ δείξη τὰ πέντε δάκτυλα τοῦ ἑνὸς χεριοῦ.

Γιὰ νὰ βεβαιωθῆ δὲ ὅτι εἶναι πέντε δάκτυλα πρέπει νὰ τὰ μετρήση καὶ ἕνα ἄλλο παιδὶ νὰ γράψη στὸν πίνακα πέντε γραμμὲς I I I I I νὰ παραστήση τὰ πέντε δάκτυλα.

Δάσκαλος: Ἕνα παιδὶ νὰ δείξη πέντε δάκτυλα καὶ τῶν δύο χεριῶν.

Μαθητής: Δείχνει 4 δάκτυλα στὸ ἕνα χέρι καὶ 1 δάκτυλο στὸ ἄλλο χέρι. Τὰ ἄλλα παιδιὰ προσέχουν στὸ ἕνα δάκτυλο καὶ τέσσερα δάκτυλα.

Ὁ δάσκαλος γιὰ νὰ δείξη τὴν διάταξη τῶν δακτύλων ζωγραφίζει στὸν πίνακα I I I I καὶ I.

Τέλος ἕνας μαθητὴς περιγράφει αὐτὸ ποὺ συνέβη ὡς ἑξῆς:

Ὁ Νῖκος ἔδειξε πέντε μὲ τὰ 4 δάκτυλα στὸ ἕνα χέρι καὶ ἕνα δάκτυλο στὸ ἄλλο χέρι.

Πέντε εἶναι τέσσερα καὶ ἕνα. Οἱ γραμμὲς στὸν πίνακα δείχνουν τέσσερα καὶ ἕνα, δηλ. πέντε.

Θὰ ἀκολουθήσουν καὶ ἄλλες ἀσκήσεις μὲ τὰ δάκτυλα.

4. 5 καρέκλες τοποθετοῦνται σὲ μία γωνία τοῦ δωματίου.

Δάσκαλος: Πόσες καρέκλες εἶναι στὴν ὁμάδα αὐτή; (δείχνει τὶς καρέκλες).

Μαθητής: Πέντε.

Δάσκαλος: Οἱ καρέκλες μποροῦν νὰ διαταχθοῦν καὶ κατὰ διαφορετικοὺς τρόπους καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι στὴν ἴδια γραμμή. Μετακινεῖ μία καρέκλα καὶ ἐρωτᾷ:

Πόσες καρέκλες εἶναι ἐδῶ; (δείχνει τὶς τέσσερεις καρέκλες). Πόσες καρέκλες εἶναι ἐκεῖ; (δείχνει τὴν μία καρέκλα).

Πόσες καρέκλες εἶναι ὅλες; (τὶς δείχνει ὅλες).

Μαθητής: Ὑπάρχουν τέσσερεις καρέκλες στὴν σειρά. Τέσσερεις εἶναι μαζὶ καὶ μία εἶναι μόνη της.

Ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ βεβαιωθῇ ὅτι τὰ παιδιὰ κατενόησαν ὅτι πέντε, εἶναι τέσσερα καὶ ἕνα, ἢ πέντε, εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ τέσσερα καὶ ἕνα.

Τὰ παιδιὰ θὰ κάμουν διάφορες ἀσκήσεις ὅπως:

Τέσσερα καὶ ἕνα	Δύο καὶ τρία
Τρία καὶ δύο	Ἕνα καὶ τέσσερα

5. Δάσκαλος: Παιδιὰ μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε γράμματα νὰ δείξωμε τὶς καρέκλες (σχῆμα 1).

Κ Κ Κ Κ Κ	πέντε	Λ	ἕνα
Κ Κ Κ Κ	τέσσερα	Λ Λ	δύο
Κ Κ Κ	τρία	Λ Λ Λ	τρία
Κ Κ	δύο	Λ Λ Λ Λ	τέσσερα
Κ	ἕνα	Λ Λ Λ Λ Λ	πέντε

(σχῆμα 1)

Τὰ παιδιὰ μποροῦν νὰ ζωγραφίσουν καὶ ἄλλα ἀντικείμενα.

Δάσκαλος: Ποιὸ παιδὶ μπορεῖ νὰ ζωγραφίση εἰκόνες μὲ κύκλους καὶ νὰ εἰπῇ τὴν ἱστορία γιὰ τὸ πέντε;

Π.χ. 0 0 0 0 0 πέντε.

0 0 0 0 0 τέσσερα καὶ ἕνα.

6. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ ἀναλυθοῦν ὅλες οἱ ὁμάδες μέχρι τοῦ 10.

Ἡ ἀνάλυση τῶν ὁμάδων θὰ ἐπεκταθῆ μὲ τὴν χρήση τῶν εἰκόνων.

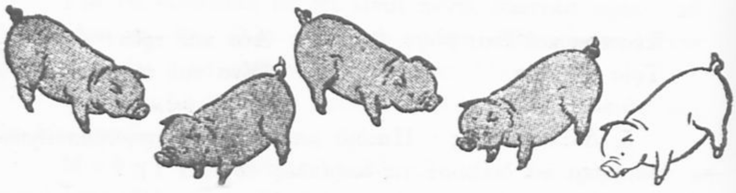
Ἡ παρακάτω εἰκόνα (σχ. 1) βοηθεῖ στὴν ἀνάπτυξη τῆς ἱκανότητος τοῦ παιδιοῦ στὸ νὰ ἀναγνωρίζη τὴν ὁμάδα τοῦ 5.

Πόσοι χοῖροι εἶναι στὴν εἰκόνα;

Πόσοι εἶναι μαῦροι;

Πόσοι εἶναι ἄσπροι;

Τὰ παιδιὰ λέγουν τὴν ἱστορία γιὰ τοὺς χοίρους. Ὁ Νῖκος ἔχει πέντε χοίρους. Τέσσερεις ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι μαῦροι καὶ ἕνας εἶναι ἄσπρος.



(σχῆμα 1)

Μελετῶντας τὸ παιδὶ τὴν ἀνάλυση τῶν ὁμάδων μαθαίνει νὰ σκέπτεται τὴν ὁμάδα σχετιζομένη μὲ τὶς μικρότερες ὁμάδες στὶς ὁποῖες εἶναι δυνατὸν νὰ χωρισθῆ μία ὁμάδα.

Αὐτὸ εἶναι πολὺ σπουδαῖο γιατὶ βοηθεῖ τὸ παιδὶ στὸ νὰ ἀναπτύξη τὴν ἱκανότητα νὰ συνδυάζη καὶ νὰ χωρίζη ὁμάδες δηλ. ἀσκεῖται στὴν πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση.

Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ δασκάλου τὰ παιδιὰ συνεχίζουν τὴν μελέτη τῶν ὁμάδων καὶ ὁδηγοῦνται στὴν ἀνακάλυψη τῶν κατωτέρω ἀπαντήσεων:

1) Δύο ἀπὸ πέντε εἶναι 3

$$\begin{array}{r} 5 \\ -2 \\ \hline 3 \end{array}$$

2) Δύο καὶ τρία κάνουν πέντε 5

$$\begin{array}{r} 3 \\ +2 \\ \hline 5 \end{array}$$

3) Τέσσερα ἀπὸ πέντε εἶναι 1

$$\begin{array}{r} 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array}$$

4) Τέσσερα καὶ ἕνα κάνουν πέντε

$$\begin{array}{r} 4 \\ +1 \\ \hline 5 \end{array}$$

Ἡ ὁμάδα τοῦ 5 II

Συμβολισμὸς τῶν βασικῶν συμπλεγμάτων προσθέσεως (1)

Τὸ βοηθητικὸ βιβλίο τοῦ παιδιοῦ θὰ χρησιμοποιηθῆ ὡς ἐποπτικὸ μέσον.

Ὁ δάσκαλος λέγει: Παιδιὰ ἀνοίξετε τὸ βιβλίο σας στὴ σελίδα π.χ. 93 καὶ διαβάσετε προσεκτικὰ τὸ πρόβλημα.

Βρῆτε τὴν εἰκόνα ποὺ λέγει γι' αὐτὸ τὸ πρόβλημα.

Γράψετε τὸ γράμμα Α σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο μικρὰ τετράγωνα τῆς εἰκόνος.

Μελετήσετε τὸ πρόβλημα Β.

Βρῆτε τὴν εἰκόνα ποὺ λέγει γι' αὐτὸ καὶ γράψετε τὸ Β σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτῆς τῆς εἰκόνος.

Κάμετε τὸ ἴδιο γιὰ ὅλα τὰ προβλήματα.

Ὁ δάσκαλος πρέπει νὰ ἐξηγήση ὅτι ὑπάρχουν δύο μαῦρα τετράγωνα σὲ κάθε εἰκόνα γιατὶ ὑπάρχουν δύο προβλήματα γιὰ κάθε εἰκόνα.

---

1. Βλέπε : **Hartung M. «Our Number Warkshop»** σελ. 11

Α. 4 χοῖροι σὺν 1 χοῖρος εἶναι 5 χοῖροι.

Β. 1 χοῖρος καὶ 4 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι.

Γ. 3 χοῖροι καὶ 2 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι

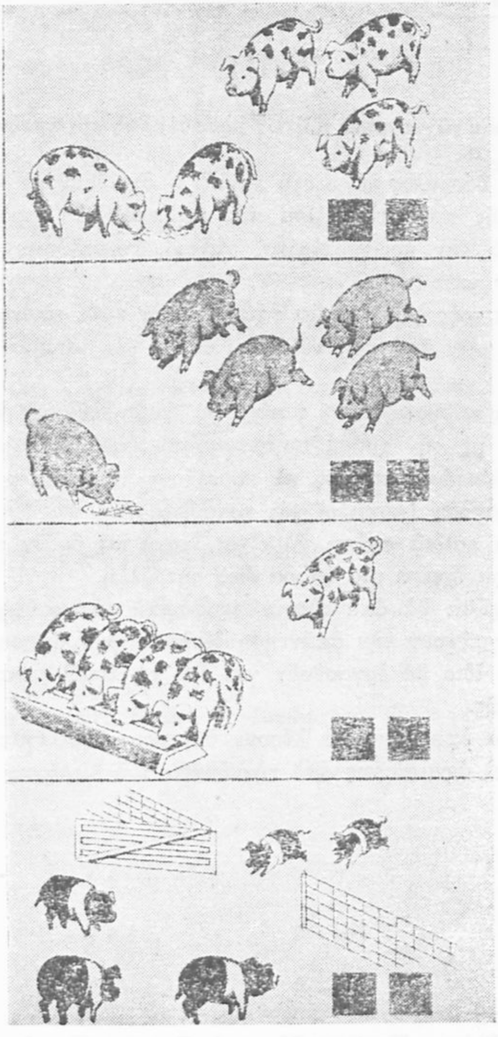
Δ. 2 χοῖροι καὶ 3 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι.

Ε. 4 χοῖροι καὶ 1 χοῖρος εἶναι 5 χοῖροι.

Στ. 2 χοῖροι σὺν 3 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι.

Ζ. 3 χοῖροι σὺν 2 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι

Η. 1 χοῖρος σὺν 4 χοῖροι εἶναι 5 χοῖροι.



Ἡ ὁμάδα τοῦ 8

III

Συμβολισμὸς τῶν συμπλεγμάτων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως (1)

Ὁ δάσκαλος λέγει στὰ παιδιὰ ν' ἀνοίξουν τὰ βιβλία τῆς ἀριθμητικῆς των στὴ σελίδα π.χ. 96 καὶ νὰ παρατηρήσουν προσεκτικὰ τὴν πρώτη εἰκόνα, γιὰ ν' ἀνακαλύψουν πῶς θὰ βροῦν τὴν ἀπάντηση.

Θὰ τοὺς ἐξηγήση ὅτι ὑπάρχει στὴν κάθε εἰκόνα ἡ ἀπάντηση γιὰ κάθε ἐρώτηση καὶ ὅτι ὑπάρχει μία ἱστορία γιὰ κάθε εἰκόνα.

Τὰ καθυστερημένα παιδιὰ θὰ βοηθηθοῦν νὰ βροῦν τὴν ἀπάντηση μὲ τὴν χρήση συγκεκριμένου ὑλικοῦ.

Ἰδιαιτέρως πρέπει νὰ προσέξουν τὶς εἰκόνες ποὺ δείχνουν σύγκριση (ποντικοὶ καὶ καναρίνια).

Τὰ παιδιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἱκανὰ νὰ βροῦν πόσα ζῶα περισσότερα ἔχει ἡ μία ὁμάδα ἀπὸ τὴν ἄλλη.

Πρῶτα θὰ ἀπαντήσουν προφορικὰ τὰ προβλήματα καὶ μετὰ θὰ γράψουν τὴν ἀπάντηση δίπλα στὴν ἐρώτηση.

Τὸ ἴδιο θὰ ἐργασθοῦν γιὰ ὅλα τὰ προβλήματα τῆς σελίδος αὐτῆς.

Γιὰ ἐφαρμογὴ θὰ λύσουν διάφορα συμπλέγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀπὸ τὴν ὁμάδα τοῦ 8.

---

1. Βλέπε: **Hartung M, and Engen «Numbers in Action»** σελ. 73.

Πόσα κουνελάκια τρῶνε;

Πόσα κουνελάκια τρέχουν νὰ φᾶνε;

Πόσα κουνελάκια θὰ φᾶνε μαζί;

7 κουνελάκια +1 κουνελάκι = ... κουνελάκια.

3 σκύλοι +5 σκύλοι = ... σκύλοι.

Μερικὲς χελῶνες ἦσαν στὸ νερόλακκο.

Πόσες χελῶνες ἦσαν στὸ νερόλακκο;

Πόσες χελῶνες φεύγουν ἀπὸ τὸ νερόλακκο;

Πόσες χελῶνες ἔμειναν στὸ νερόλακκο;

8 χελῶνες — 6 χελῶνες = ... 8—6 =

8 πουλιὰ — 2 πουλιὰ = ... 8—2 =

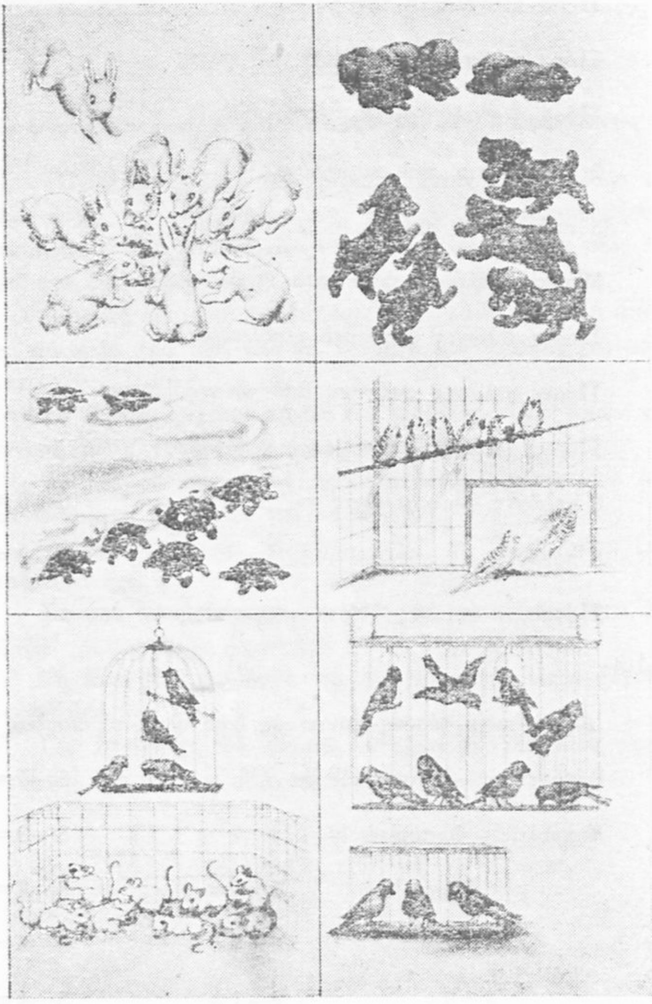
Πόσους ποντικοὺς βλέπετε περισσότερους ἀπὸ τὰ πουλιά;

Ἀφαιρέσατε τόσους ποντικοὺς ὅσα εἶναι τὰ πουλιά.

8 ποντικοὶ —4 ποντικοὶ = ... 8—4 =

8 πουλιὰ —3 πουλιὰ = ... 8—3 =

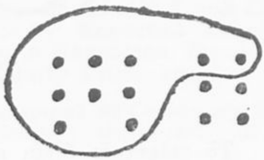
5 + 3 =	1 + 7 =	8—3 =
4 + 4 =	8 + 5 =	8—6 =
2 + 6 =	8—1 =	8—4 =
6 + 2 =	8—7 =	8—2 =



IV

1. Δάσκαλος: Πόσα κάνουν ὀκτὼ καὶ ἕξ:

Μαθηταί: Ζωγραφίζουν δύο ὁμάδες στιγμές, τὴν ὁμάδα τοῦ 8 καὶ τὴν ἄλλη τοῦ 6 γιὰ ν' ἀπαντήσουν τὴν ἐρώτηση ἐὰν ἔχουν ξεχάσει, ἢ δὲν εἶναι βέβαιοι γιὰ τὴν ἀπάντηση, (σχῆμα 1).



(Σχῆμα 1)

Σκέπτονται δὲ ὡς ἑξῆς καθὼς ζωγραφίζουν:

Ὀκτὼ καὶ δύο κάνουν δέκα. Μὲ ἕνα κύκλο κλείουν τὶς δέκα αὐτὲς στιγμὲς καὶ προχωροῦν.

Δύο ἀπὸ ἕξ τέσσερα. Ἔτσι ὀκτὼ καὶ ἕξ κάνουν δέκα τέσσερα.

2. Τὰ παιδιὰ σκέπτονται τὴν ἀπάντηση χωρὶς τὴ βοήθεια ἡμιαφηρημένων συμβόλων.

Ἐρώτηση: Ὀκτὼ καὶ ἕξ εἶναι δέκα καὶ πόσα;

Ὀκτὼ καὶ δύο κάνουν δέκα.

Δύο ἀπὸ ἕξ τέσσερα.

Ὀκτὼ καὶ ἕξ κάνουν δέκα τέσσερα.

$$\begin{array}{r} 8 \\ +6 \\ \hline 14 \end{array}$$

3. Δίδεται ἡ ἐρώτηση: Πόσα μένουν ἐὰν βγάλωμε ἀπὸ δέκα πέντε ὀκτώ;

Ἡ ἀπάντηση θὰ δοθῇ μὲ τὴ βοήθεια τῶν στιγμῶν.

Ζωγραφίζουν δέκα στιγμὲς μία ὁμάδα καὶ πέντε μία ἄλλη (σχῆμα 2) σελ. 98. Μὲ ἕνα κύκλο μετὰ κλείουν ὀκτὼ στιγμὲς ἀπὸ τὴν ὁμάδα τοῦ δέκα γιὰ νὰ δείξουν ὅτι παίρνουν ὀκτὼ ἀπὸ τὸ δέκα.

Ἔπειτα σκέπτονται δύο καὶ πέντε κάνουν ἑπτά.
Ὥστε ὀκτὼ ἀπὸ δέκα πέντε μένουν ἑπτά.

(Σχῆμα 2)

Τὸ τελευταῖο βῆμα εἶναι ἡ εὕρεση τῆς ἀπαντήσεως μὲ ἀφῃρημένα σύμβολα.

$$\begin{array}{r} 15 \\ -8 \\ \hline 7 \end{array}$$

Βλέπε : **Wheat How to teach Arithmetic**. σελ. 112-113.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bloss E. «The Audio-Visual way to Number learning Educational Screen» No 10, 1948 σελ. 494-504.

2. Brownell, W. A. «A Critique of the Committee of Seven's Investigations on grade Placement of Arithmetic Topics,« Elementary School Journal, XXXVIII (1938), 505.

3. Brownell, W. A. Arithmetic in Grades I and II : A Critical Summary of New Previously Reported Research, Duke University Research Studies in Education, No. 6. Durham, North Carolina : Duke University Press, 1941.

4. Brownel, W. A. The Development of Children's Number Ideas in Primary Grades. Chicago : University of Chicago Press, 1928.

5. Bruechner, L. J., and Grossnickle, Foster F. How to Mace Arithmetic Meaningful. Philadelphia : John C. Winston Co., 1947.

6. Buckingham, B. R., and J. Maclatchey. The Number Ability of Children When They Enter Grade One. Twenty ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education. Bloomington : Illinois Public School Pub. Co., 1930.

7. Carper, D. «Seeing Numbers as Groups in Primary Grades 43 : 166-170.

8. Deans, Edwina. The Contribution of Grouping to Number Development,» Childhood Education XVII (1940-1941), 307-310.

9. Dehn WIR REGHNEN RECHENBUCH FÜR VOLKSSCHULEN 1957 N 1 καὶ N 2.

10. Dickey, J. «Readiness in Arithmetic,» Elementary School Journal, XI (April, 1940), 592-98.

11. Ellsworth C. Dent «The Audio-Visual Hanndbook, Chicago. Society for visual Education Inc, 1957, 57.

12. Φωτεινοπούλου Θ. «Ἡ Ἐκπαίδευσις εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας» σελ. 112.

13. Ἐξαρχοπούλου Ν. Γενικὴ Διδακτική, Τόμος Δεύτερος 1946, σελ. 206-276.

14. Grant, Albert. «An Analysis of the Number Knowledge of First Grade Pupils, According to Levels of Intelli-

gence,» Journal of Experimental Education. VII (September, 1938), 63-66.

15. Grossnickle F. Metzner «The use of visual aids in the teaching of Arithmetic Brooklyn», 2, N. Y.

16. Grossnikle, Foster E., Junge, Charlotte, and Metzner, W. Instructional Materials for Teaching Arithmetic: The Teaching of Arithmetic. Fiftieth Yearbook of the National Society for the Study of Education. Bloomington Illinois: Public School Pub. Co., 1951. σελ. 156-157.

17. Hartung M. Engeu M. Seeing Through Arithmetic Teaching Guide σελ 13.

18. Hartung M. L. Our Number Workshop, Curriculum Foundation Series. Chicago: Scott, Foresman & Co., 1952.

19. Hartung M. Engen H, Mahoney: «Our Number Workshop» 1952 σελ. 41.

20. Hartung M. L., and Mahoney, C. Numbers in Action. Chicago: Scott, Foresman & Co., 1951.

21. Hildreth, G. Readiness for School Beginners. Yonkers, New York: World Book Co., 1950.

22. Hoban C. «Focus on learning Motion pictures in the School» 1942 A. C. E. Washington D. C.

23. Hooper, L., and Stratton, B. «Developing Number Concepts with Young Children,» Educational Method, XVI (January, 1937), 193-19-.

24. Johnson D, Toward Living Mathematics «See and Hear» 1946 σελ. 19-20.

25. Καραχρίστου Ν. «Ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ ἡ Γεωμετρία στὸ Δημοτικό μας Σχολεῖο». Ἐκδ. Οἶκος Ζαφειροπούλου, σελ. 61-62

26. Koller E. RECHENBUCH für die bayenifchen Volksfchulen N. I N. 2.

27. MacLatchey, J. H. «Seeing and Understanding in Number Names,» Elementary School Journal. XLV (1945), 144-152.

28. McCeoch, J. A. The Psychology of Human Learning. Chicago: Longmans, Green & Co., 1942.

29. Morton, R. L. Teaching Arithmetic in rhe Elementary School. New York: Silver Burdett Co., 1937.

30. Mott, S. M. «Number Concepts of Small Children,» Mathematics Teacher, XXXVIII (November, 1945), 291-301.

31. Πετρίτου Κ. «Παιδαγωγικά Ἐπίκαιρα» 1958, σελ. 20.

32. Polkinghorne, Ada R. «Young Children and Fractions,» Childhood Education, XI (May, 1935), 354-358.

33. Riess, A., and Hartung, M. L. Developing Number Readiness : Teacher's Manual for the Number Readiness Chart. Chicago : Scott, Foresman & Co., 1946. σελ. 3-6.

34. Rosenquist, L. L. Young Children Learn to Use Arithmetic. Boston : Cinn & Co., 1949. σελ. 141-143.

35. Russel G. B. «Decimal usage in the occupational world» Journal of Educational Research 38 : 633-638.

36. Schneider, A. W. «Readiness for Learning,» Childhood Education, XXIV (March, 1948), 301-304.

37. Smith, R. R. «Meaningful Division,» Mathematics Teacher XLIII (1950), 12-18.

38. Spencer, P. L., and Brydegaard, M, Building Mathematical Concepts in the Elementary School. New York : Henry Holt & Co., 1952. σελ. 57-75.

39. Stamataki E. Recent Trends in Arithmetic Insrtuction 1957.

40. Swenson, E. «Arithmetic for Pre-school and Primary Grade Children,» The Teaching of Arithmetic, Fiftieth Yearbooc of the National Society for the Study of Education, Part II, Bloomington, Illinois : Pubjic School Pub. Co., 1951.

41. Stern, C., and Others. Children Discover Arithmetic, New York : Harper & Bros., 1947.

42. Stokes, N. Teaching the Meanings of Arithmetic New York : Appleton Century-Crofts Inc., 1951.

43. Washburne C. W. «When Should we teach Arithmetic ?» Elementary School Journal 27 : 659-665.

44. Wheat, H. G. How to Teach Arihtmetic. Evanston, Illinois : Row, Peterson & Co., 1951.

45. Wheat, H. G. The Psychology and Teaching of Arithmetic. Boston : D. C. Heath & Co., 1937.

46. Wheat H. The Nature and Sequences of Learning σελ. 22-52.

47. Woody, C. «When Shall Systematic Instruction in A-

rithmetic Begin ?», Educational Method, XVI. (November, 1937), 193—198.

48. Ζορμπᾶ Β. «Τὸ παιδὶ καὶ τὸ Σχολικὸν περιβάλλον», Ἀθῆναι 1955, σελ. 62.

49. Ζομπανάκη Γ. «Ἐγκόλπιο τοῦ Νέου Δασκάλου» σελ. 54-60.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΥΠΟΙΣ ''ΠΡΩΪΝΟΣ ΛΟΓΟΣ,,