ΓΕΩΡΓΙΟΥ Χ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΩΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΤΕΥΧΟΣ Α!

$A \subset B \wedge B \subset \Gamma \Rightarrow A \subset \Gamma$

ΑΘΗΝΑΙ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΧΡ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΩΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σύμφωνα μὲ τὸ νέον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα
(Β. Διάταγμα 72/1966, Φ.Ε.Κ. 16/26-1-66)

Α'

ΑΘΗΝΑΙ
1966

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως

Πίναξ τῶν χρησιμοποιουμένων συμβόλων.

Σύμβολον	Σημασία τοῦ συμβόλου
$\{\ \}$	ἄγκιστρα συνόλου
$\in$	εἶναι, ἀνήκει εἰς ...
$\notin$	δὲν εἶναι, δὲν ἀνήκει εἰς ...
$\subset$	γνήσιον ὑποσύνολον
$\subseteq$	ὑποσύνολον
$\supset$	ὑπερσύνολον ἢ κυρίαρχον σύνολον
$\wedge$	καὶ
$\Longrightarrow$	ἄρα, συμπεραίνομεν ὅτι, (μονοσήμαντος ἔννοια)
$\rightarrow$	ἄρα, ἑπομένως
$\Longleftrightarrow$	πρέπει καὶ ἀρκεῖ. Ἡ πρότασις ὅπως δίδεται καὶ ἡ ἀντίστροφός της (ἀμφιμονοσήμαντος ἔννοια)
$\sim$	ἰσοδύναμον
$\varnothing$	τὸ κενὸν σύνολον
(ΑΒ)	μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ
$\forall$	δι' ὅλα τὰ
$=$	σύμβολον τῆς ἰσότητος
$\simeq$	περίπου ἴσον (κατὰ προσέγγισιν ἴσον)
$\equiv$	σύμβολον τῆς ταυτότητος
$>, <$	σύμβολον τῆς ἀνισότητος
$\geqslant, \leqslant$	σύμβολον τῆς ἀνισοϊσότητος
$\neq$	διάφορον τοῦ, ἄνισον (δηλαδὴ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον)
$\cup$	ἕνωσις συνόλων
$\cap$	τομὴ συνόλων
$\leftrightarrow$	ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις, ἀμφιμονοσήμαντος ἔννοια
Φ	σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν
Φ_0	σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενὸς
P	σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν
$\perp$	σύμβολον τῆς καθετότητος
$//$	σύμβολον τῆς παραλληλίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ι. Σύνολα

1. Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου: Πολλὲς φορὲς ἀναγκαζόμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἕνα ὡρισμένον πλῆθος ἀντικειμένων ἢ καὶ ἐννοιῶν ὡς ἕνα πρᾶγμα, ὡς ἕνα ὅλον. Λέμε π.χ. μία **δωδεκάδα πιάτα** καὶ ἐννοοῦμεν δώδεκα ὅμοια πιάτα, **οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας** καὶ ἐννοοῦμεν ὅλους τοὺς μαθητὰς ποὺ φοιτοῦν εἰς τὴν τάξιν μας, **ἡ τάδε ποδοσφαιρικὴ ὁμάδα** καὶ ἐννοοῦμεν τοὺς 11 παίκτας ποὺ ἀποτελοῦν τὴν ποδοσφαιρικὴν αὐτὴν ὁμάδα, **τὸ ἀλφάβητον** καὶ ἐννοῦμεν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

Τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα ἐκφράζει ἕνα συγκεκριμένον πλῆθος ὁμοειδῶν πραγμάτων. Τὸ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ πλήθη λέμε ὅτι εἶναι ἕνα **σύνολον.** Ὥστε

Σύνολον θὰ λέμε ἕνα πλῆθος ὁμοειδῶν ἀντικειμένων μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ ἔχουν κάποιαν κοινὴν ἰδιότητα καὶ ὅτι εἶναι ἐντελῶς ξεχωρισμένα τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο, τὰ ὁποῖα ἀντικείμενα θὰ θεωροῦμεν ὅτι ἀποτελοῦν ἕνα ὅλον.

Τὰ ἀντικείμενα ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου αὐτοῦ.

Ἄλλα παραδείγματα συνόλων εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς :

α) Ὅλοι οἱ διψήφιοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

β) Τὰ δένδρα ἑνὸς ἐλαιοπεριβόλου ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

γ) Τὰ γράμματα τῆς λέξεως κῆπος ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

δ) Τὰ σπήτια μιᾶς κωμοπόλεως ἀποτελοῦν ἕνα σύμολον.

ε) Τὰ πράγματα ποὺ ὑπάρχουν μέσα σὲ μιὰ κασσετίνα (μολύβι, γομολάστιχα, διαβήτης, ξύστρα κ.λ.π.) ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

στ) Τὰ θρανία τῆς αἰθούσης μας ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

ζ) Οἱ μαθηταί, τὰ θρανία, ὁ πίνακας καὶ ἡ ἕδρα τῆς τάξεώς μας ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον.

Τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων τῶν παραδειγμάτων ε', ζ', ναὶ μὲν δὲν εἶναι ὁμοειδῆ μὲ τὴν κυριολεκτικὴν σημασίαν τῆς λέξεως ὁμοειδής, ἀλλὰ ἔχουν κάποιαν κοινὴν ἰδιότητα, π.χ. τὰ πράγματα τῆς κασσετίνας ἔχουν τὴν κοινὴν ἰδιότητα ὅτι εὑρίσκονται μέσα εἰς τὴν κασσετίνα. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι καὶ τὰ ἀντικείμενα τῶν παραδειγμάτων ε', ζ', ἀποτελοῦν σύνολα.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ βρῆτε παραδείγματα συνόλων α) ἀπὸ πράγματα ποὺ βρίσκονται μέσα εἰς τὴν τάξιν σας, β) ἀπὸ πράγματα ποὺ βρίσκονται μέσα εἰς τὸ σχολεῖον σας, γ) ἀπὸ πράγματα ποὺ βρίσκονται μέσα εἰς τὸ σπῆτι σας, δ) ἀπὸ πράγματα ποὺ βρίσκονται εἰς μίαν ἔκτασιν ποὺ καλλιεργεῖται, ε) ἀπὸ πράγματα ποὺ βρίσκονται εἰς τὸ ὕπαιθρον, στ) ἀπὸ ἀφηρημένα πράγματα (π.χ. ἀριθμούς).

2.1 Παράστασις ἑνὸς συνόλου: Κατὰ συνήθειαν ἕνα σύνολον τὸ παριστῶμεν μὲ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα, τὰ δὲ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μποροῦμε νὰ τὰ παραστήσωμεν μὲ μικρὰ γράμματα ἢ μὲ ἀριθμοὺς (ἢ καὶ μὲ ἄλλα σύμβολα), ποὺ χωρίζονται μὲ κόμμα καὶ ποὺ ἐγκλείονται μέσα σὲ ἄγγιστρα { }. Γράφομεν π.χ.

$$K = \{ \alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega \} \qquad (1)$$

ὅπου Κ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων καὶ α, ε, η, ι, ο, υ, ω εἶναι τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Ἐπίσης, ἂν Μ εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, γράφομεν :

$$M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}, \qquad (2)$$

Ὁ παραπάνω τρόπος λέγεται παράστασις ἑνὸς συνόλου **μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του.**

2.2 Ὅταν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου εἶναι πολλὰ **καὶ μποροῦμε νὰ τὰ κατατάξωμεν** κατὰ κάποιαν τάξιν ἢ σειράν, τότε μέσα εἰς τὰ ἄγγιστρα ἀναγράφομεν τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα τοῦ συνόλου, θέτομεν κατόπιν τρεῖς τελεῖες καὶ εἰς τὸ τέλος ἀναγράφομεν τὸ τελευταῖον στοιχεῖον. Π.χ. τὸ σύνολον Δ τῶν διψηφίων ἀριθμῶν τὸ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς :

$$\Delta = \{ 10, 11, 12, \ldots, 99 \} \qquad (3)$$

Μποροῦμεν ὅμως νὰ παραστήσωμεν τὸ σύνολον Δ τῶν διψηφίων ἀριθμῶν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\Delta = \{ x/x \text{ διψήφιος ἀριθμὸς} \} \qquad (3')$$

καὶ τὸ διαβάζομεν : Δ εἶναι τὸ σύνολον τῶν διψηφίων ἀριθμῶν x, ἔνθα x εἶναι διψήφιος ἀριθμός.

Ὁ δεύτερος αὐτὸς τρόπος παραστάσεως ἑνὸς συνόλου λέγεται : παράστασις ἑνὸς συνόλου **μὲ περιγραφὴν τῶν στοιχείων του** καὶ τὸν προτιμοῦμεν ὅταν εἶναι δυσχερὴς ἡ κατάταξις τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου κατὰ κάποιαν τάξιν. Γράφομεν π.χ.

$$M = \{ x/x \text{ μαθητὴς τῆς τάξεώς μας} \}$$

καὶ διαβάζομεν : Μ εἶναι τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν x τῆς τάξεώς μας, ἔνθα x εἶναι μαθητὴς τῆς τάξεώς μας.

Ἐπίσης διὰ τὰ σύνολα τῶν παραδειγμάτων β′, γ′, ζ′ τῆς σελίδος 5 γράφομεν

$A = \{ x/x$ δένδρον ἑνὸς ἐλαιοπεριβόλου $\}$.
$B = \{ x/x$ γράμμα τῆς λέξεως κῆπος $\}$.
$\Gamma = \{ x/x$ κάθε τι ποὺ βρίσκεται μέσα στὴν τάξιν μας $\}$.

2.3 Ἐξετάζομεν τὸ σύνολον (1)

$$K = \{ \alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega \} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι : κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Κ εἶναι φωνῆεν καὶ ἀντιστρόφως : κάθε φωνῆεν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Κ.

Ἐπίσης εἰς τὸ σύνολον (2) κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ εἶναι μονοψήφιος ἀριθμὸς καὶ ἀντιστρόφως κάθε μονοψήφιος ἀριθμὸς εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ.

Ἡ ἀμοιβαία αὐτὴ σχέσις μεταξὺ ἑνὸς συνόλου καὶ τῶν στοιχείων αὐτοῦ ὑφίσταται εἰς κάθε σύνολον.

2.4 Ἄς πάρωμεν τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν

$$M = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \} \qquad (2)$$

Ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ὁ μονοψήφιος ἀριθμὸς 5 **εἶναι** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ, γράφομεν :

$$5 \in M$$

καὶ διαβάζομεν : Τὸ 5 **εἶναι** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ, ἢ τὸ 5 **ἀνήκει** εἰς τὸ σύνολον Μ.

Ὅταν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 12 **δὲν εἶναι** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ, γράφομεν :

$$12 \notin \mathrm{M}$$

καὶ διαβάζομεν : Τὸ 12 **δὲν εἶναι** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ, ἢ τὸ 12 **δὲν ἀνήκει** εἰς τὸ σύνολον Μ. Ἔτσι δια τὸ σύνολον Μ ἔχομεν τὰς ἐνδείξεις :

$$4 \in \mathrm{M}, \quad 15 \notin \mathrm{M}, \quad 38 \notin \mathrm{M}, \quad 9 \in \mathrm{M}.$$

Διὰ δὲ τὸ σύνολον Δ τῶν διψηφίων ἀριθμῶν, ἔχομεν τὰς ἐνδείξεις :

$$4 \notin \Delta, \quad 15 \in \Delta, \quad 8 \notin \Delta, \quad 48 \in \Delta, \quad 9 \notin \Delta.$$

Ὥστε τὸ σύμβολον $\in$ ἔχει τὴν σημασίαν : **εἶναι** (ἢ ἀνήκει εἰς τό . . .), τὸ δὲ σύμβολον $\notin$ ἔχει τὴν σημασίαν : **δὲν εἶναι** (ἢ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ . . .).

2.5 Πέρνομεν τὴν λέξιν *πτηνόν*. Παριστῶμεν μὲ Ε τὸ σύνολον τῶν μακρῶν φωνηέντων αὐτῆς, δηλαδή :

$$\mathrm{E} = \{ \eta \}$$

καὶ ἑπομένως : $\eta \in \mathrm{E}$, ἐνῶ $\mathrm{o} \notin \mathrm{E}$, $\nu \notin \mathrm{E}$.

Παριστῶμεν μὲ Ζ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων αὐτῆς, δηλαδή :

$$\mathrm{Z} = \{ \eta, \ \mathrm{o} \}$$

καὶ ἑπομένως : $\eta \in \mathrm{Z}$, $\mathrm{o} \in \mathrm{Z}$, ἐνῶ $\nu \notin \mathrm{Z}$.

Παριστῶμεν μὲ Θ τὸ σύνολον τῶν συμφώνων αὐτῆς, δηλαδή :

$$\Theta = \{ \pi, \ \tau, \ \nu \}$$

Παριστῶμεν μὲ Κ τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων αὐτῆς, δηλαδή :

$$\mathrm{K} = \{ \pi, \ \tau, \ \eta, \ \nu, \ \mathrm{o} \}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

α) Τὸ σύνολον Ε ἔχει **ἕνα μόνον** στοιχεῖον καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **μονομελὲς** ἢ **μονοστοιχειακὸν** σύνολον ἢ **μονοσύνολον.**

β) Τὸ σύνολον Ζ ἔχει **δύο μόνον** στοιχεῖα καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **διμελὲς** σύνολον.

γ) Τὸ σύνολον Θ ἔχει **τρία μόνον** στοιχεῖα καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **τριμελὲς** σύνολον.

δ) Τὸ σύνολον Κ ἔχει περισσότερα τῶν τριῶν στοιχείων καὶ διὰ τοῦτο λέγεται **πολυμελὲς** σύνολον.

Ὅταν ἕνα στοιχεῖον περιέχεται περισσοτέρας τῆς μιᾶς φορᾶς εἰς ἕνα σύνολον, τότε κατὰ τὴν ἀναγραφήν τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τὸ στοιχεῖον τοῦτο τὸ ἀναγράφομεν **μίαν μόνον φοράν.** Γράφομεν π.χ. :

$\Theta = \{ \pi, \tau, \nu \}$ καὶ ὄχι $\Theta = \{ \pi, \tau, \nu, \nu \}$

Ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως Ἀναξαγόρας εἶναι :

$\Lambda = \{ \alpha, \nu, \xi, \gamma, o, \rho, \sigma \}$ καὶ ὄχι $\Lambda = \{ \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \nu, \xi, \gamma, o, \rho, \sigma \}$

Παραδείγματα συνόλων.

α) Δορυφόρος τῆς Γῆς (μονομελὲς σύνολον), β) Πόλοι τῆς γηίνης σφαίρας (διμελὲς σύνολον), γ) Ἡ ἁγία Τριὰς (τριμελὲς σύνολον), δ) Τὰ πόδια τοῦ τραπεζιοῦ (τετραμελὲς σύνολον), ε) Ἡ ντουζίνα (δωδεκαμελὲς σύνολον).

Παρατήρησις: Διὰ ἕνα ὡρισμένον σύνολον Σ καὶ διὰ ἕνα τυχαῖον στοιχεῖον x μπορεῖ νὰ συμβῇ ἕνα καὶ **μόνον ἕνα** ἀπὸ τὰ ἑξῆς δύο περιστατικά :

ἢ $x \in \Sigma$ ἢ $x \notin \Sigma$

II. Τὸ κενὸν σύνολον

3. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ἀναγράψωμεν τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως *ἀεί*. Ἀλλὰ ἡ λέξις ἀεὶ **δὲν ἔχει κανένα σύμφωνον.** Ἑπομένως πρέπει νὰ βγάλωμεν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ σύνολον ποὺ ζητοῦμεν δὲν ὑπάρχει, ὅτι δηλαδὴ τὸ σύνολον ποὺ ζητοῦμεν **δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον.**

Συμβατικὰ δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον. Τὸ σύνολον τοῦτο τὸ ὀνομάζομεν **κενὸν** σύνολον καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον $\varnothing$. Θὰ γράψωμεν λοιπόν :

Σύνολον συμφώνων τῆς λέξεως *ἀεὶ* $= \varnothing$.

Ἐπίσης ὅταν μία τάξις Γυμνασίου ἀρρένων δὲν ἔχῃ καμμίαν μαθήτριαν, γράφομεν :

Σύνολον μαθητριῶν τῆς τάξεως $= \varnothing$.

Ἀσκήσεις

2. Νὰ ἀναγράψετε κατὰ δύο τρόπους (δηλαδὴ μὲ ἀναγραφὴν καὶ μὲ περιγραφὴν τῶν στοιχείων των) α) Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου, β) Τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν, γ) Τὸ σύνολον τῶν τάξεων τοῦ Γυμνασίου σας, δ) Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως *ἀκρωτήριον*, ε) Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως *περιτριγυρίζω*, στ) Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.

3. Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἑξῆς λέξεις : α) *πίνακας*, β) *τραπέζι*, γ) *ἀεροπόρος*, δ) *Καλαμπάκα*, ε) *ὑπερηφάνεια*, στ) *οἰκία*, ζ) *μελετῶ*.

4. Νὰ ἀναγράψετε α) Τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων καὶ β) Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παραπάνω λέξεις.

5. Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω λέξεις : α) *δῶρον*, β) *ἀργία*, γ) *θαλασσοπόρος*, δ) *θερμόμετρον*, ε) *παράγραφος*, στ) *διώκω*, ζ) *Ἀταλάντη*, η) *Κύμη*.

6. Ἂν εἶναι Φ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τὸ 20, νὰ ἐξακριβώσετε ποῖαι ἀπὸ τὰς παρακάτω ἐκφράσεις εἶναι ἀληθινὲς καὶ ποῖαι ὄχι.

$$6 \in \Phi, \quad 8 \notin \Phi, \quad 25 \in \Phi, \quad 9\frac{1}{2} \in \Phi, \quad 40 \notin \Phi, \quad 0 \notin \Phi.$$

7. Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω λέξεις : α) *Εὔα*, β) *οὐαί*, γ) *ἴον*, δ) *οὐ*.

8. Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον τῶν μηνῶν ποὺ τὸ ὄνομά τους ἀρχίζει α) ἀπὸ Ι, β) ἀπὸ Μ, γ) ἀπὸ Β, δ) ἀπὸ Ε.

9. Νὰ βρῆτε παραδείγματα α) τετραμελοῦς συνόλου, β) ἑπταμελοῦς συνόλου, γ) δωδεκαμελοῦς συνόλου, δ) τριανταμελοῦς συνόλου.

III. Ὑποσύνολα

4.1 Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ μαθηταὶ Κώστας, Πέτρος καὶ Χρῆστος ἀποτελοῦν τὴν ἀθλητικὴν ὁμάδα τῆς Α΄ τάξεως καὶ ἂν ὀνομάσωμεν μὲ Α τὸ σύνολον αὐτῶν καὶ μὲ Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως, θὰ ἔχωμεν τὰ ἑξῆς δύο σύνολα :

$$M = \{ x / x \text{ μαθητὴς τῆς Α΄ τάξεως} \} \qquad (1)$$
$$A = \{ \text{Κώστας, Πέτρος, Χρῆστος} \} \qquad (2)$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α περιέχεται εἰς τὸ σύνολον Μ, διότι ὁ Κώστας, ὁ Πέτρος καὶ ὁ Χρῆστος εἶναι μαθηταὶ τῆς Α' τάξεως. Ὅμως τὸ σύνολον Μ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ στοιχεῖα ποὺ δὲν περιέχονται εἰς τὸ σύνολον Α. Π.χ. τὸν μαθητὴν Νίκον, ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ἀθλητικὴν ὁμάδα. Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Α λέγεται **ὑποσύνολον** τοῦ συνόλου Μ, σημειώνεται δὲ ὡς ἑξῆς :

$$A \subset M$$

καὶ ἀναγιγνώσκεται ὡς ἑξῆς : Τὸ σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Μ, ἢ τὸ Α **περιέχεται** εἰς τὸ Μ. Ἐπίσης εἰς τὰ σύνολα :

$$\Gamma = \{\, x/x \text{ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου} \,\} \qquad (3)$$

$$\Phi = \{\, x/x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου} \,\} \qquad (4)$$

τὸ Φ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Γ καὶ ἄρα ἔχομεν :

$$\Phi \subset \Gamma.$$

Ὥστε : **Ἕνα σύνολον Α λέγεται ὑποσύνολον ἑνὸς συνόλου Μ ὅταν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Μ.**

Ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ περιέχονται εἰς τὸ σύνολον Γ, διότι ὅλα τὰ φωνήεντα εἶναι γράμματα. Ὑπάρχει ὅμως στοιχεῖον τοῦ Γ, ὅπως τὸ γράμμα δ, ποὺ δὲν περιέχεται εἰς τὸ σύνολον Φ. Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Φ λέγεται **γνήσιον ὑποσύνολον** τοῦ Γ. Ἐπίσης τὸ σύνολον Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Μ.

Ἂν ὅμως εἰς τὸ σύνολον (2) **ὅλοι οἱ μαθηταὶ** τῆς Α' τάξεως συμβῇ νὰ μετέχουν εἰς τὴν ἀθλητικὴν ὁμάδα, ποὺ εἶναι δυνατόν, τότε θὰ γράψωμεν :

$$A \subseteq M \qquad (5)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ Α λέγεται ἁπλῶς **ὑποσύνολον** τοῦ Μ, δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ Α **δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον** τοῦ Μ.

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι κάθε σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του, ἤτοι εἶναι

$$A \subseteq A, \quad M \subseteq M, \quad \Gamma \subseteq \Gamma, \quad \Phi \subseteq \Phi.$$

Τὸ σύνολον Μ λέγεται **ὑπερσύνολον** τοῦ Α, ἢ **κυρίαρχον σύνολον** τοῦ Α. Ὁμοίως τὸ Γ λέγεται **ὑπερσύνολον** τοῦ Φ.

Συμφωνοῦμεν νὰ λέμε ὅτι τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον κάθε συνόλου, δηλαδή :

$$\varnothing \subset A, \quad \varnothing \subset M, \quad \varnothing \subset \Gamma$$

4.2 Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ τρία σύνολα :

$M = \{ x/x$ μαθητὴς τῆς Α′ τάξεως τοῦ Β′ Γυμν. Ἀθηνῶν $\}$

$N = \{ x/x$ μαθητὴς τοῦ Β′ Γυμνασίου Ἀθηνῶν $\}$

$\Pi = \{ x/x$ μαθητὴς τῶν Γυμνασίων Ἀθηνῶν $\}$

Τότε εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$M \subset N$ καὶ $N \subset \Pi$. Ἄρα καὶ $M \subset \Pi$ (6)

Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$$M \subset N \ \wedge \ N \subset \Pi \implies M \subset \Pi \qquad (6')$$

Τὸ σύμβολον $\wedge$ ἀναγιγνώσκεται : **καί,** τὸ δὲ σύμβολον $\implies$ ἀναγιγνώσκεται : **ἄρα,** ἤτοι τὸ σύμβολον $\implies$ δηλώνει τὸ **συμπέρασμα.**

Ἡ σχέσις (6′) ποὺ δηλώνει μὲ τὸ σύμβολον $\subset$ ὅτι ἕνα σύνολον **περιέχεται** εἰς ἕνα ἄλλο σύνολον, λέγεται **μεταβατικὴ** ἰδιότης τῶν συνόλων καὶ δηλώνει ὅτι :

Ἐὰν ἕνα σύνολον Μ περιέχεται εἰς τὸ σύνολον Ν καὶ τὸ σύνολον Ν περιέχεται εἰς τὸ σύνολον Π, **τότε συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύνολον Μ περιέχεται εἰς τὸ σύνολον Π.**

Ἀσκήσεις

10. Μᾶς δίνουν τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως *ἐπιχείρησις*, δηλαδή

$$\Gamma = \{ \varepsilon, \pi, \iota, \chi, \rho, \eta, \sigma \}$$

Νὰ σχηματίσετε ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Γ, τὰ σχετικὰ α) μὲ τὰ μακρὰ φωνήεντα, β) μὲ τὰ βραχέα φωνήεντα, γ) μὲ τὰ φωνήεντα, δ) μὲ τὰ σύμφωνα τῆς λέξεως αὐτῆς.

11. Νὰ γράψετε ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{ \alpha, \beta \}$. (θὰ βρῆτε τέσσαρα ὑποσύνολα).

12. Νὰ γράψετε ὅλα τὰ ὑποσύνολα τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως *ἐπὶ* (θὰ βρῆτε ὀκτὼ ὑποσύνολα).

13. Μᾶς δίνουν τὸ σύνολον $\Lambda = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \}$. Νὰ σχηματίσετε α) ὅλα τὰ μονομελῆ ὑποσύνολα αὐτοῦ, β) ὅλα τὰ διμελῆ ὑποσύνολα αὐτοῦ, γ) ὅλα τὰ τριμελῆ ὑποσύνολα αὐτοῦ.

14. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε πόσα τριμελῆ ὑποσύνολα ἔχει τὸ σύνολον Α τῆς παραπάνω ἀσκήσεως ;

15. Μᾶς δίνουν τὰ σύνολα

$$A = \{\, \alpha, \beta, \gamma \,\} \qquad \Gamma = \{\, \beta, \gamma, \delta \,\}$$
$$B = \{\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \,\} \qquad \Delta = \{\, \alpha, \beta, \gamma \,\}$$

Ποῖαι ἀπὸ τὰς παρακάτω ἐκφράσεις εἶναι ἀληθινὲς καὶ ποῖαι ὄχι ;

$$A \subset B, \quad A \subset \Gamma, \quad A \subset \Delta, \quad \Gamma \subset B, \quad B \subset \Gamma, \quad A \subseteq \Delta, \quad A \subseteq \Gamma$$

16. Ὅσες ἀπὸ τὰς παραπάνω ἐκφράσεις διορθώνονται, νὰ τὰς διορθώσετε ὥστε νὰ γίνουν ἀληθινές.

IV. Γραφικὴ παράστασις συνόλων. Βέννιον διάγραμμα

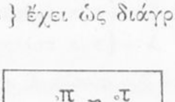
5. Ἕνα σύνολον μποροῦμε νὰ τὸ παραστήσωμεν γραφικὰ (γεωμετρικὰ) ὡς ἑξῆς :

Σχεδιάζομεν μίαν κλειστὴν γραμμὴν π.χ. μίαν περιφέρειαν (ἢ ἕνα ὀρθογώνιον) καὶ ἐντὸς αὐτῆς θέτομεν σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Ἡ κατασκευαζομένη ἔτσι γραφικὴ παράστασις λέγεται **διάγραμμα*** τοῦ συνόλου. Π.χ. ἀπὸ τὰ σύνολα τῆς σελίδος 8

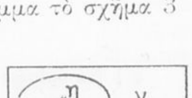
Τὸ $E = \{\, \eta \,\}$ ἔχει ὡς διάγραμμα τὸ σχῆμα 1
Τὸ $Z = \{\, \eta, o \,\}$ ἔχει ὡς διάγραμμα τὸ σχῆμα 2
Τὸ $K = \{\, \pi, \tau, \eta, \nu, o \,\}$ ἔχει ὡς διάγραμμα τὸ σχῆμα 3

Σχ. 1.

Σχ. 2.



Σχ. 3.



Σχ. 4.

Τὸ διάγραμμα τῶν συνόλων Ζ καὶ Κ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Ζ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Κ, δηλαδὴ εἶναι $Z \subset K$, εἶναι τὸ σχῆμα 4.

* Τὰ διαγράμματα συνήθως λέγονται Βέννια διαγράμματα, διότι ἡ ἐφαρμογή των ὀφείλεται εἰς τὸν Ἄγγλον φιλόσοφον Βὲνν (John Venn 1834 — 1923).

Διὰ τοῦτο τὸ ὑποσύνολον Ζ λέγομεν ὅτι **ἐγκλείεται** εἰς τὸ σύνολον Κ. Ἑπομένως ἡ σχέσις :

$$Z \subset K$$

λέγεται καὶ **σχέσις ἐγκλεισμοῦ** τοῦ ὑποσυνόλου Ζ εἰς τὸ σύνολον Κ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

17. Ἀπὸ τὰ σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$B = \{3, 5, 7\}$$
$$\Gamma = \{2, 4, 6\}$$

Ποῖον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ἄλλου ;

18. Μᾶς δίδουν τὰς λέξεις : *δημητριακά, μήτηρ, δέμα.* Νὰ σχηματίσετε τὸ σύνολον τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς λέξεως καὶ νὰ συγκρίνετε αὐτὰ μεταξύ των. Ποῖον συμπέρασμα βγάζετε ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτήν ;

19. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως : *παράδεισος* καὶ Β εἶναι τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως : *προδοσία,* ποῖος ἐκ τῶν συμβολισμῶν $B \subset A$, $B \subseteq A$, $A \subseteq B$, $A \subset B$ εἶναι σωστός ;

20. Νὰ δόσετε εἰς ἕνα διάγραμμα τὴν γραφικὴν παράστασιν καὶ τῶν τριῶν συνόλων τῆς ἀσκήσεως 17.

21. Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον τῶν συμφώνων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς λέξεις α) *αἴσιος,* β) *εὖα,* γ) *οὐαί.*

22. Ἂν Τ εἶναι τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων καὶ Σ εἶναι τὸ σύνολον τῶν τετραπλεύρων, ποία ἐκ τῶν σχέσεων $T \subset \Sigma$, $T \subseteq \Sigma$ εἶναι ἀληθινή ;

23. Δίδονται τὰ σύνολα

$$\Sigma = \{x/x \text{ ἀκέραιος μικρότερος τοῦ } 20\}$$
$$\Delta = \{x/x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ } 4\}$$

α) Νὰ ὁρίσετε τὰ δύο σύνολα Σ καὶ Δ μὲ περιγραφὴν τῶν στοιχείων αὐτῶν καὶ β) Νὰ ἐξακριβώσετε ποία ἀπὸ τὰς δύο ἐκφράσεις $\Delta \subset \Sigma$, $\Delta \subseteq \Sigma$ εἶναι ἀληθινή ;

24. Ποία σχέσις ἐγκλεισμοῦ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν τριῶν συνόλων

$$\Pi = \{x/x \text{ πορτοκαλιὰ}\}$$
$$O = \{x/x \text{ ὀπωροφόρον δένδρον}\}$$
$$\Delta = \{x/x \text{ δένδρον}\}$$

25. Ἂν εἶναι

$$K = \{x/x \text{ κόκκινο τριαντάφυλλον}\}$$
$$T = \{x/x \text{ τριαντάφυλλον}\}$$
$$A = \{x/x \text{ ἄνθος}\}$$

τότε ποία ἀπὸ τὰς κάτωθι ἐκφράσεις εἶναι ἀληθινὴ καὶ ποία ὄχι;

$$K \subset T, \quad T \subseteq A, \quad K \subset A, \quad K \subseteq T \subset A.$$

26. Μᾶς δίδουν τὰ σύνολα

$$A = \{ x/x \text{ κάτοικος τῶν 'Αθηνῶν} \}$$
$$B = \{ x/x \text{ κάτοικος τῆς 'Αττικῆς} \}$$
$$\Gamma = \{ x/x \text{ "Ελλην} \}$$
$$\Delta = \{ x/x \text{ Εὐρωπαῖος} \}$$

Νὰ σχηματίσετε τὴν σχέσιν ἐγκλεισμοῦ ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν συνόλων τούτων καὶ νὰ κατασκευάσετε τὸ σχετικὸν διάγραμμα.

V. Ἴσα σύνολα

6.1 Ἕνα σύνολον A λέγεται ἴσον πρὸς ἕνα σύνολον B ὅταν

I. κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ B καὶ

II. κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ A.

Ἡ ἰσότης τῶν δύο συνόλων A καὶ B σημειώνεται ὡς ἑξῆς:

$$A = B. \tag{1}$$

Ἐπὶ παραδείγματι τὰ σύνολα

$$A = \{ \alpha, \varepsilon, \iota \} \quad \text{καὶ} \quad B = \{ \varepsilon, \alpha, \iota \}$$

εἶναι ἴσα, διότι κάθε στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ ἄλλου.

Ἄλλα παραδείγματα ἴσων συνόλων εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς:

$$1\text{ον}) \quad \left.\begin{array}{l} A = \{ x/x \text{ ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ } 18 \} \\ B = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 18 \} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B.$$

$$2\text{ον}) \quad \left.\begin{array}{l} \Gamma = \{ x/x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ } 5 \} \\ \Delta = \{ x/x \text{ ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγων εἰς } 0 \text{ ἢ } 5 \} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma = \Delta.$$

$$3\text{ον}) \quad \left.\begin{array}{l} K = \{ x/x \text{ ἰσοσκελὲς τρίγωνον} \} \\ \Lambda = \{ x/x \text{ τρίγωνον μὲ δύο γωνίας ἴσας} \} \end{array}\right\} \Longrightarrow K = \Lambda.$$

6.2 Ἡ ἰσότης(1) ἔχει τὰς ἑξῆς τρεῖς προφανεῖς ἰδιότητας.

I. Κάθε σύνολον A εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι

$$A = A.$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **ἀνακλαστική**, ἢ **αὐτοπαθής**, ἰδιότης.

II. Ἐὰν ἕνα σύνολον A εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον B, τότε **καὶ**

μόνον τότε καὶ τὸ σύνολον Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον Α. Τοῦτο σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$A = B \iff B = A$$

καὶ ἀναγιγνώσκεται : Ἐὰν τὸ Α ἰσοῦται μὲ τὸ Β, τότε καὶ μόνον τότε καὶ τὸ Β ἰσοῦται μὲ τὸ Α καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **συμμετρικὴ** ἰδιότης ἢ **συνεπαγωγή.**

Τὸ σύμβολον $\iff$ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς συμμετρικότητος καὶ ἔχει μίαν ἀπὸ τὰς ἑξῆς συνωνύμους σημασίας :

Συνεπάγεται, ἢ ἔχει ὡς συνέπειαν
Ἡ πρότασις ὅπως δίδεται καὶ ἡ ἀντίστροφός της.
Πρέπει καὶ ἀρκεῖ.
Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ πρότασις.

Τὴν συμμετρικὴν ἰδιότητα $A = B \iff B = A$ δύο ἴσων συνόλων μποροῦμε νὰ τὴν ἐκφράσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A \iff A = B$$

III. Ἂν τὸ σύνολον Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον Β καὶ τὸ σύνολον Β εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον Γ, τότε συμπεραίνομεν ὅτι καὶ τὸ σύνολον Α θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον Γ, ἤτοι

$$A = B \;\wedge\; B = \Gamma \implies A = \Gamma$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **μεταβατική,** τὸ δὲ σύμβολον $\implies$ σημαίνει : **ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι.**

Σημ. Τὸ σύμβολον $\implies$ ἔχει τὴν σημασίαν τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ἡ ἀντίστοιχος ἡ πρότασις.

Τὸ σύμβολον $\iff$ ἔχει τὴν ἔννοιαν, τὴν ὁποίαν ἐκφράζει ἡ ἀντίστοιχος πρότασις καὶ τὴν ἀντίστροφον ἔννοιαν.

Ἀσκήσεις

27. Νὰ σχηματίσετε δύο ἴσα σύνολα μὲ τὰ γράμματα α καὶ β.

28. Νὰ Σχηματίσετε ἓξ ἴσα σύνολα μὲ τὰ γράμματα α, β, γ.

29. Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν καὶ Β εἶναι τὸ σύνολον τῶν δεκάδων τῶν διψηφίων ἀριθμῶν, τότε : α) Νὰ παραστήσετε κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα Α καὶ Β μὲ τὴν συμβολικὴν γραφὴν τῆς § 2.2 καὶ β) Νὰ ἐξακριβώσετε ἂν εἶναι ἀληθὴς ὁ συμβολισμὸς

$$A = B \iff B = A.$$

30. Νὰ ἀναγνώσετε τοὺς συμβολισμοὺς

α) $M = N \iff N = M$.

β) $K = M \wedge M = N \implies K = N$.

VI. Ἰσοδύναμα σύνολα

7. 1 Ἄς ποῦμε ὅτι ἕνα λεωφορεῖον ἔχει 20 καθίσματα καὶ μεταφέρει 20 καθημένους ἐπιβάτας. Εἶναι φανερὸν ὅτι

α) Εἰς κάθε κάθισμα κάθεται ἕνας ἐπιβάτης.

β) Κάθε ἐπιβάτης ἔχει τὸ κάθισμά του.

γ) Δὲν ὑπάρχει κάθισμα κενόν, οὔτε ἐπιβάτης χωρὶς κάθισμα.

Ἄν K εἶναι τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων καὶ E εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐπιβατῶν, ἔχομεν τὰ ἑξῆς δύο σύνολα :

$$K = \{\, x / x \text{ κάθισμα τοῦ λεωφορείου} \,\} \qquad (1)$$

$$E = \{\, x / x \text{ ἐπιβάτης τοῦ λεωφορείου} \,\} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ ἑνὸς συνόλου K **ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνον ἕνα** στοιχεῖον τοῦ ἄλλου συνόλου E καὶ ἀντιστρόφως. Τότε τὰ δύο αὐτὰ σύνολα λέγονται **ἰσοδύναμα,** ἤτοι :

V Δύο σύνολα λέγονται ἰσοδύναμα ὅταν τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς συνόλου εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχισθοῦν ἕνα πρὸς ἕνα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ ἄλλου συνόλου. V

Διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ σύνολον K εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον E, γράφομεν

$$K \sim E \qquad (3)$$

καὶ ἀναγιγνώσκομεν : **Τὸ K εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ E.**

7. 2. Δύο ἴσα σύνολα εἶναι καὶ ἰσοδύναμα. Δηλαδὴ ἂν

$$A = B, \quad \text{τότε καὶ} \quad A \sim B \qquad (4)$$

ἤτοι ἂν $\quad A = B \implies A \sim B. \qquad (4')$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει. Δηλαδὴ δύο ἰσοδύναμα σύνολα δὲν εἴμεθα βέβαιοι ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἰσοδυναμία ἔχει τὰς τρεῖς βασικὰς ἰδιότητας, ἤτοι

I. Ἀνακλαστική. Κάθε σύνολον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι

$$A \sim A. \qquad (5)$$

II. Συμμετρική. Ἐὰν τὸ σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον B, τότε καὶ τὸ σύνολον B εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ A, ἤτοι

$$A \sim B \iff B \sim A. \qquad (6)$$

III. Μεταβατική. Ἐὰν τὸ σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ B καὶ τὸ B εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ Γ, τότε καὶ τὸ σύνολον A θὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον Γ. ἤτοι

$$A \sim B \wedge B \sim \Gamma \Longrightarrow A \sim \Gamma. \qquad (7)$$

Ἄλλα παραδείγματα ἰσοδυνάμων συνόλων εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς

1ον) $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ γράμμα τοῦ ἑλλην. ἀλφαβήτου}\} \\ B = \{x/x \text{ ἀκέραιος, ἀπὸ 1 μέχρι καὶ } 24\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B.$

2ον) $\left.\begin{array}{l} \Gamma = \{x/x \text{ φωνῆεν τοῦ ἑλλην. ἀλφαβήτου}\} \\ \Delta = \{x/x \text{ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος}\}. \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \sim \Delta.$

7. 3. Δύο ἢ περισσότερα ἰσοδύναμα σύνολα λέγομεν ὅτι ἔχουν τὸ **ἴδιον πλῆθος** στοιχείων ἢ τὴν **ἰδίαν δυναμικότητα.** Π.χ. τὰ ἰσοδύναμα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\varkappa, \lambda, \mu\}, \quad \Gamma = \{\delta, \eta, \theta\}$$

ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων, ἤτοι 3 στοιχεῖα ἕκαστον. Ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται **πληθικὸς ἀριθμὸς** καθενὸς ἀπὸ τὰ παραπάνω σύνολα.

Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι **τὰ ἰσοδύναμα σύνολα ἔχουν πάντοτε τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμόν.** Ἐνῷ τὰ σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad \Delta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$$

τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἰσοδύναμα, **δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμόν.** Διότι τὸ σύνολον A ἔχει τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν 3, τὸ δὲ σύνολον Δ ἔχει τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν 5.

Ἀσκήσεις

31. Ἀπὸ τὰ παρακάτω σύνολα

$$\Sigma_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$\Sigma_2 = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$$
$$\Sigma_3 = \{x/x \text{ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος}\}$$
$$\Sigma_4 = \{x/x \text{ μήνας τοῦ ἔτους}\}$$

ποῖα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ποῖα ὄχι ; Ποῖος εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς καθενός ;

32. Τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον $A = \{x\}$, ἢ ὄχι ; καὶ διατί ;

33. Νὰ ἀναγράψετε ἕνα σύνολον ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον

$$\Sigma = \{x/x \text{ νῆσος τῆς Δωδεκανήσου}\}$$

34. Νὰ ἀναγράψετε ἕνα σύνολον ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον

$$\Sigma = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$$

35. Νὰ ἀναγράψετε ἕνα σύνολον ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον

$$\Sigma = \{x/x \text{ νῆσος τῆς Ἑπτανήσου}\}$$

36. Νὰ ἀναγράψετε ἕνα σύνολον ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον

$$\Theta = \{x/x \text{ θεὸς τοῦ Ὀλύμπου}\}$$

Σθb

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

8. 1. Ἂς πάρωμεν τὰ μονοστοιχειακὰ σύνολα

$A = \{ x/x$ σύμφωνον τῆς λέξεως ἐπὶ $\}$, ἤτοι $A = \{ \pi \}$
$B = \{ x/x$ φωνῆεν τῆς λέξεως φῶς $\}$, ἤτοι $B = \{ \omega \}$
$\Gamma = \{ x/x$ ἡ μητέρα μου Μ (Μαρία) $\}$, ἤτοι $\Gamma = \{ M \}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ μονοστοιχειακὰ αὐτὰ σύνολα ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν τὸ ἕνα (γράφεται 1 καὶ ἀπαγγέλλεται **ἕνα**).

Ἂς πάρωμεν τὰ διμελῆ σύνολα

$\Delta = \{ x/x$ σύμφωνον τῆς λέξεως χαρὰ $\}$, ἤτοι $\Delta = \{ \chi, \rho \}$
$E = \{ x/x$ φωνῆεν τῆς λέξεως κύκλος $\}$, ἤτοι $E = \{ \upsilon, o \}$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ διμελῆ αὐτὰ σύνολα ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν τὸ δύο (γράφεται 2 καὶ ἀπαγγέλλεται **δύο**).

Ἂς πάρωμεν τὸ τριμελὲς σύνολον

$Z = \{ x/x$ γράμμα τῆς λέξεως ἀπό $\}$, ἤτοι $Z = \{ \alpha, \pi, o \}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τριμελὲς σύνολον Ζ ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν τὸ τρία (γράφεται 3 καὶ ἀπαγγέλλεται **τρία**) κ.λ.π.

Ἂς πάρωμεν τὰ δωδεκαμελῆ σύνολα

$\Theta = \{ x/x$ ἀρχαῖος θεὸς τοῦ Ὀλύμπου $\}$
$M = \{ x/x$ μήνας τοῦ ἔτους $\}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ δωδεκαμελῆ αὐτὰ σύνολα ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν τὸ δώδεκα (γράφεται 12 καὶ ἀπαγγέλλεται **δώδεκα**) κ.λ.π.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διὰ νὰ μποροῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν κάθε συνόλου, δημιουργοῦμεν τὸ λεγόμενον σύστημα τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν.**

$$\Phi = \{ 1, \ 2, \ 3, \ldots \}$$

8. 2. Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἕνα **θεμελιῶδες σύνολον,** εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει τὸ ἀρχικὸν στοιχεῖον 1, τὸ ὁποῖον λέγεται **μονάς,** κάθε ἕνα δὲ ἀπὸ τὰ ἄλλα στοιχεῖα αὐτοῦ γίνεται ἀπὸ τὴν μονάδα ἐπαναλαμβανομένην (τὸ 2 γίνεται ἀπὸ δύο μονάδες, τὸ 3 γίνεται ἀπὸ τρεῖς μονάδες κ.λ.π.).

Ἂς πάρωμεν τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον $\varnothing$ δὲν ἔχει κανένα πληθικὸν ἀριθμόν, ἀφοῦ δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον. Συμφωνοῦμεν νὰ παριστῶμεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ $\varnothing$ μὲ 0 (γράφεται 0 καὶ ἀπαγγέλλεται **μηδέν**), δηλαδὴ ἔχομεν

$$\varnothing = \{ 0 \}$$

Ἐὰν θέσωμεν καὶ τὸ μηδὲν εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, τότε ἀποτελοῦμεν τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενός, μὲ πρῶτον στοιχεῖον τὸ 0, δηλαδή :

$$\Phi_0 = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$$

Τὸ σύνολον Φ_0 τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται καὶ **σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.**

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ λέγονται **διαδοχικοὶ** ὅταν διαφέρουν κατὰ μίαν μονάδα, π,χ. οἱ ἀριθμοὶ 26 καὶ 27 ἢ οἱ ἀριθμοὶ 15 καὶ 14.

9. Πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἂς κάμωμεν τὴν ἑξῆς ὑπόθεσιν.

Ὁ ἀριθμὸς 1 ἀντιπροσωπεύει τὸ μονομελὲς σύνολον ποὺ ἔχει ὡς στοιχεῖον **μίαν** τελείαν, ὁ ἀριθμὸς 2 ἀντιπροσωπεύει τὸ διμελὲς σύνολον ποὺ ἔχει ὡς στοιχεῖα **δύο** τελεῖες, ὁ 3 ἀντιπροσωπεύει τὸ τριμελὲς σύνολον μὲ **τρεῖς** τελεῖες, ὁ 4 μὲ **τέσσαρες** τελεῖς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Διαπιστώνομεν ὅτι κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα αὐτὰ τῶν τελειῶν ἔχει **ἕνα στοιχεῖον** (μίαν τελείαν) περισσότερον ἀπὸ τὸ προηγούμενόν του. Ἂν λοιπὸν φαντασθοῦμε ἕνα ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν , π.χ. τὸν 450 ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ σύνολον ποὺ περιέχει 450 τελεῖες, μποροῦμε νὰ προσθέσωμε **μίαν τελείαν ἀκόμη** καὶ ἔτσι δημιουργοῦμε τὸν ἀριθμὸν 451, ποὺ ἀντιπροσωπεύει ἕνα νέον σύνολον ποὺ περιέχει 451 στοιχεῖα (τελεῖες).

$1 \ \{\cdot\}$

$2 \ \{\cdot\ \cdot\}$

$3 \ \{\cdot\ \cdot\ \cdot\}$

$4 \ \{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$

$5 \ \{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$

$6 \ \left\{\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{matrix}\right\}$

$7 \ \left\{\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\end{matrix}\right\}$

$8 \ \left\{\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{matrix}\right\}$

$9 \ \left\{\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\end{matrix}\right\}$

$10 \ \left\{\begin{matrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{matrix}\right\}$

. . . .

. . . .

Ἀλλὰ καὶ ὁσονδήποτε μεγάλον ἀριθμὸν ἂν φαντασθοῦμε, μποροῦμε μὲ τὴν προσθήκην μιᾶς τελείας (ἑνὸς ἀκόμη στοιχείου) νὰ δημιουργήσωμεν τὸν κατὰ μονάδα μεγαλύτερον ἀριθμόν.

Μποροῦμεν λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι **δὲν ὑπάρχει τελευταῖον στοιχεῖον** εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι ὅτι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπέραντον (ἄνευ πέρατος) ἢ ὅπως λέμε εἶναι **ἄπειρον.** Ὥστε

Τὸ πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ποὺ ἔχει ἄπειρον πλῆθος στοιχείων) λέγεται **ἀπειροσύνολον.**

Ἀπειροσύνολον εἶναι ἐπίσης τὸ σύνολον Φ_0 τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἀντίθετα πρὸς ἕνα ἀπειροσύνολον, κάθε σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει **πεπερασμένον** πλῆθος στοιχείων, λέγεται **πεπερασμένον σύνολον**.

Παραδείγματα

Πεπερασμένα σύνολα	Ἀπειροσύνολα
1) Οἱ μόνιμοι κάτοικοι μιᾶς πόλεως	1) Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ
2) Αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος	2) Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ
3) Οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας	3) Οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ
4) Τὰ δένδρα ἑνὸς δάσους	4) Τὰ σημεῖα μιᾶς γραμμῆς.
5) Τὰ ἔτη ποὺ ἔζησεν ὁ Σωκράτης	

Ἀσκήσεις

37. Νὰ βρῆτε δύο σύνολα μὲ 4 στοιχεῖα τὸ καθένα (π.χ. ρόδες αὐτοκινήτου καὶ πόδια τραπεζιοῦ) καὶ νὰ τὰ καταγράψετε.

38. Νὰ βρῆτε ἕνα σύνολον μὲ ἕνδεκα στοιχεῖα.

39. Νὰ βρῆτε ἕνα σύνολον μὲ τριάντα στοιχεῖα.

40. Νὰ βρῆτε σύνολα μὲ δώδεκα στοιχεῖα τὸ καθένα.

41. Νὰ σημειώσετε ποῖα εἶναι πεπερασμένα σύνολα καὶ ποῖα ἀπειροσύνολα εἰς τὰ παρακάτω α) τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας, β) τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ποὺ τελειώνουν εἰς 5, γ) τὸ σύνολον τῶν δευτερολέπτων ἑνὸς εἰκοσιτετραώρου, δ) τὸ σύνολον τῶν τριψηφίων ἀκεραίων ποὺ τελειώνουν εἰς 4, ε) τὸ σύνολον τῶν τριψηφίων ἀκεραίων ἀριθμῶν.

42. Νὰ ἀναφέρετε ἄλλα παραδείγματα πεπερασμένων συνόλων καὶ ἀπειροσυνόλων.

10. Συγκεκριμένοι, ἀφηρημένοι, γενικοὶ ἀριθμοί : Ἄς πάρωμε τὴν φράσιν : Τὸ Γυμνάσιόν μας ἔχει **τρεῖς** τάξεις : τὴν **πρώτην**, τὴν **δευτέραν** καὶ τὴν **τρίτην** τάξιν.

Ὅταν λέμε πρώτη, δευτέρα, τρίτη τάξις, ἐννοοῦμεν ὅτι ἐτοποθετήσαμεν ἢ **διατάξαμεν** τὰς 3 τάξεις κατὰ μίαν σειράν. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ πρῶτος, δεύτερος, τρίτος λέγονται **διατακτικοὶ** ἀριθμοί.

Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς 3 τάξεις λέγεται **συγκεκριμένος,** διότι φανερώνει τὸ ἐντελῶς ὡρισμένον εἶδος τοῦ ἀντικειμένου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται, δηλαδὴ τὰς τάξεις. Ἄλλοι συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ εἶναι : 5 μαθηταί, 8 θρανία, 4 δένδρα, 2 μῆλα κ.λ.π.

Ὅταν ὅμως εἰποῦμε ἑπτά, τότε δὲν λέμε καμμίαν ἔνδειξιν διὰ τὸ εἶδος τῶν ἀντικειμένων εἰς τὰ ὁποῖα μπορεῖ νὰ ἀναφέρεται ὁ ἀριθμὸς 7. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ἀριθμὸς 7 λέγεται **ἀφηρημένος** ἀριθμός.

Ἔχομεν ἐπίσης τοὺς **ὁμοειδεῖς** ἀριθμοὺς ποὺ φανερώνουν τὸ ἴδιον πράγμα, π.χ. 5 θρανία καὶ 8 θρανία, ἢ 2 μολύβια καὶ 6 μολύβια καὶ τοὺς **ἑτεροειδεῖς** ἀριθμούς, ποὺ δὲν φανερώνουν τὸ ἴδιον πράγμα, π.χ. 4 θρανία καὶ 8 μολύβια, ἢ 3 δένδρα καὶ 9 τετράδια.

Ὅταν δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει μὲ ἀκρίβειαν ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς συνόλου ἀλλὰ ἁπλῶς ὅτι ὑπάρχει, τότε μποροῦμεν νὰ σημειώσωμεν τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὲ ἕνα γράμμα. Μποροῦμε π.χ. νὰ ποῦμε ὅτι μέσα στὴν αἴθουσαν βρίσκονται αὐτὴν τὴν στιγμὴν **α μαθηταί.** Τότε ὁ ἀριθμὸς α λέγεται **γενικὸς** ἀριθμός. Οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ μπορεῖ νὰ εἶναι συγκεκριμένοι ἢ ἀφηρημένοι, ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

Ἂν ὅμως καταμετρήσωμεν τοὺς μαθητὰς ποὺ εἶναι αὐτὴν τὴν στιγμὴν μέσα στὴν αἴθουσαν καὶ βροῦμεν ὅτι εἶναι 15, τότε θὰ συμπεράνωμεν ὅτι εἶναι :

$$\alpha = 15 \text{ μαθηταὶ}$$

Τὸ 15 λέγεται **τιμὴ** τοῦ γενικοῦ ἀριθμοῦ α. Ὥστε ὁ συγκεκριμένος (ἢ ἀφηρημένος) ἀριθμός, ποὺ **ἀντικαθιστᾶ** ἕνα γενικὸν ἀριθμὸν λέγεται **τιμὴ** ἢ **ἀριθμητικὴ τιμὴ** τοῦ γενικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις

43. Νὰ σημειώσετε τὸ εἶδος κάθε ἀριθμοῦ εἰς τὰς παρακάτω προτάσεις: Κατοικῶ εἰς τὸν *τέταρτον* ὄροφον *μιᾶς* πολυκατοικίας, ποὺ ἔχει 5 ὀρόφους μὲ 2 διαμερίσματα ἕκαστος. Τὸ διαμέρισμά μου ἔχει 4 δωμάτια. Τὸ δωμάτιόν μου ἔχει 2 παράθυρα, τὸ *πρῶτον* πρὸς τὸν δρόμον καὶ τὸ δεύ*τερον* πρὸς τὴν αὐλήν, ἔχει 1 κρεββάτι, 1 τραπέζι, 2 καρέκλες καὶ 3 κάδρα.

44. Νὰ σημειώσετε τὸ εἶδος κάθε ἀριθμοῦ εἰς τὰ παρακάτω α) τέσσαρα βιβλία, β) ὀκτώ, γ) τρία μῆλα, δ) εἶμαι πέμπτος εἰς τὴν τάξιν μου, ε) εἴκοσι, στ) β μολύβια, ζ) α, η) 4 τετράδια καὶ 1 μολύβι, θ) σαράντα πέντε.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίσεως. Ἀρίθμησις

11.1 Ἂς πάρωμεν τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος

$$H = \{ x/x \text{ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος} \} \quad \text{ἢ}$$

$$H = \{ \text{Κυρ., Δευτ., Τρίτη, Τετ., Πεμ., Παρ., Σάββατον} \}$$

ἂς πάρωμεν δὲ καὶ τὸ τμῆμα τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 ἕως καὶ τὸ 7, ἤτοι

$$\Phi_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Η τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος **ἀντιστοιχεῖ** (ἀνταποκρίνεται) ἕνα καὶ μόνον ἕνα στοιχεῖον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τὸ 7. ἤτοι

$$\begin{array}{cccccccc} H = & \text{Κυρ.,} & \text{Δευτ.,} & \text{Τρ.,} & \text{Τετ.,} & \text{Πεμ.,} & \text{Παρ.,} & \text{Σάβ.} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \Phi_1 = & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \end{array}$$

Δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ συνόλου Η, τὸ ὁποῖον νὰ μὴ ἔχει ὡς ἀντίστοιχον ἕνα στοιχεῖον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι 7.

Ἡ τοιαύτη ἀντιστοίχισις τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Η μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1 ἕως 7 λέγεται **ἀρίθμησις**, τὸ ἐξαγόμενον δὲ τῆς ἀριθμήσεως αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 7.

Ἐπίσης ἐὰν πάρωμεν τὰ δύο δωδεκαμελῆ σύνολα

$$M = \{ x/x \text{ μήνας τοῦ ἔτους} \}$$

$$\Phi_2 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$$

τότε κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους ἔχει ὡς ἀντίστοιχον ἕνα μόνον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_2 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τὸ 12.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν **ἀρίθμησιν** τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους ἀπὸ 1 ἕως 12 καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως αὐτῆς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12. (Κατὰ τὴν ἀναγραφὴν μιᾶς ἡμερομηνίας πολλὲς φορὲς ἀντὶ τοῦ ὀνόματος τοῦ μηνὸς ἀναγράφομεν τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν του. Π.χ. ἀντὶ νὰ γράψωμεν 23 Ἀπριλίου 1966 μποροῦμεν νὰ γράψωμεν : 23 - 4 - 66).

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κάνομεν τὴν ἀρίθμησιν τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, ἢ τῶν θρανίων τῆς τάξεώς μας, ἢ ὁποιωνδήποτε ἄλλων πραγμάτων. Κατὰ τὴν ὥραν τοῦ μαθήματος τῆς Γυμναστικῆς ὁ Γυμναστὴς δίδει τὸ παράγγελμα : **ἀριθμήσατε :** καὶ ἀρχίζουν οἱ μαθηταὶ νὰ ἀπαγγέλλουν μὲ τὴν σειράν : ἕνα, δύο, τρία κ.λ.π. Ὅμως κάθε μαθητὴς θὰ ἀπαγγείλῃ **ἕνα μόνον** ἀριθμόν, ἐκεῖνον ὁ ὁποῖος φανερώνει τὴν σειρὰν ποὺ ἔχει εἰς τὸ σύνολον τῶν γυμναζομένων μαθητῶν.

Ἡ ἀντιστοίχισις κάθε στοιχείων ἑνὸς συνόλου πρὸς ἀνάλογον τμῆμα τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, μὲ ἀρχὴν τὸ στοιχεῖον 1, λέγεται **προφορικὴ ἀρίθμησις.**

11.2 Ἡ ἀντιστοίχισις **ἕνα πρὸς ἕνα** μπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ μεταξὺ δύο ἰσοδυνάμων συνόλων. Ἂν ἔχωμεν π.χ. τὰ σύνολα

$$A = \{ x / x \text{ νῆσος τῆς Ἑπτανήσου} \}$$

$$B = \{ x / x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου} \}$$

τότε μία ἀντιστοίχισις μεταξὺ τῶν στοιχείων αὐτῶν εἶναι ἡ ἑξῆς :

Κέρκυρα,	Κεφαλληνία,	Ζάκυνθος,	Ἰθάκη,	Λευκάς,	Παξοί,	Κήθυρα
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
α	ε	η	ι	ο	υ	ω

Ἄλλη ἀντιστοίχισις μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἡ ἑξῆς :

Κέρκυρα,	Παξοί,	Ἰθάκη,	Λευκάς,	Ζάκυνθος,	Κεφαλληνία,	Κήθυρα
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
α	ε	η	ι	ο	υ	ω

Ἡ παραπάνω εἶναι ἁπλῆ ἀντιστοίχισις τῶν στοιχείων τῶν δύο ἰσοδυνάμων συνόλων. Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀρίθμησις τῶν στοιχείων καθενός, πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀντιστοίχισις τῶν στοιχείων τοῦ καθενὸς συνόλου πρὸς τὸ τμῆμα τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τὸ 7.

Ἀσκήσεις

45. Νὰ γράψετε τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου καὶ νὰ σημειώσετε τὴν ἀντιστοίχισιν αὐτῶν πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 1 μέχρι καὶ τὸ 17.

46. Νὰ σχηματίσετε τὴν ἀντιστοίχισιν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων.

Λ = { x/x δάκτυλος τῆς χειρός μας }

Μ = { x/x κυνηγὸς μιᾶς ποδοσφαιρικῆς ὁμάδος }

47. Νὰ βρῆτε παραδείγματα ἀντιστοιχίσεως κατὰ τὴν ὥραν τῆς Γυμναστικῆς ἢ εἰς ἕνα ποδοσφαιρικὸν γήπεδον, ἢ εἰς ἕνα ἀγῶνα μπάσκετ.

Τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως

12.1 Γραπτὴ ἀρίθμησις: Γνωρίζομεν ὅτι :

α) Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δὲν ἔχει τέλος (δὲν ἔχει πέρας, εἶναι ἄπειρον).

β) Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα φυσικὸν ἀριθμὸν χρησιμοποιοῦμεν ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς δέκα ψηφία, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἀραβικὰ ψηφία***

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Κατορθώνομεν δὲ νὰ γράψωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς ἑξῆς βασικοὺς κανόνας.

α) Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ μηδὲν καὶ τοὺς μονοψηφίους φυσικοὺς ἀριθμοὺς μέχρι καὶ τὸ ἐννέα, χρησιμοποιοῦμεν αὐτὰ ταῦτα τὰ δέκα ἀραβικὰ ψηφία.

β) Χωρίζομεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς εἰς **μονάδας διαφόρων τάξεων** καὶ συμφωνοῦμεν κάθε **δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως νὰ κάνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.** π.χ.

κάθε δέκα ἁπλαῖ μονάδες κάνουν μίαν **δεκάδα**

κάθε δέκα δεκάδες κάνουν μίαν **ἑκατοντάδα**

κάθε δέκα ἑκατοντάδες κάνουν μίαν **χιλιάδα**

κάθε δέκα χιλιάδες κάνουν μίαν **δεκάδα χιλιάδων** κ.λ.π.

---

* Λέγονται ἀραβικὰ ψηφία διότι οἱ Ἄραβες μετέδωσαν εἰς τὴν Εὐρώπην τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν. Λέγεται ὅτι τὰ ἀραβικὰ ψηφία οἱ Ἄραβες τὰ εἶχον παραλάβει ἀπὸ τοὺς Ἰνδούς.

γ) Κάθε ψηφίον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔχει τὴν ἀξίαν του ἀνάλογα μὲ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κατέχει εἰς τὸν ἀριθμόν, ἤτοι τὸ πρῶτον ψηφίον ἐκ δεξιῶν φανερώνει ἁπλᾶς μονάδας, τὸ δεύτερον ψηφίον ἐκ δεξιῶν φανερώνει δεκάδας, τὸ τρίτον ἑκατοντάδας, τὸ τέταρτον χιλιάδας καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἔτσι ἔχομεν τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, τοὺς διψηφίους, τοὺς τριψηφίους, τοὺς τετραψηφίους κ.λ.π.

π.χ. 35 = τριάντα πέντε

872 = ὀκτακόσια ἑβδομήκοντα δύο

4568 = τέσσαρες χιλιάδες πεντακόσια ἑξήκοντα ὀκτώ.

12.2 Ἀπαγγελία ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἄς πάρωμεν τὸν ὀκταψήφιον ἀριθμὸν

96537245

Διὰ νὰ μπορέσωμεν νὰ τὸν ἀπαγγείλωμεν (νὰ τὸν διαβάσωμεν) τὸν χωρίζομεν εἰς τριψήφια τμήματα ἐκ δεξιῶν, ἤτοι

96 537 245

καὶ τὸ μὲν πρῶτον τριψήφιον τμῆμα 245 ἐκ δεξιῶν φανερώνει τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἤτοι διακόσιαι τεσσαράκοντα πέντε μονάδες. Τὸ

Τάξις μονάδων	Ὀνομασία τάξεως	Γραφὴ τάξεως	Κλάσις
1η	ἁπλῆ μονάδα	1	1η κλάσις μονάδες
2α	δεκάδα	10	
3η	ἑκατοντάδα	100	
4η	χιλιάδα	1.000	2α κλάσις χιλιάδες
5η	δεκάδα χιλιάδων	10.000	
6η	ἑκατοντάδα χιλιάδων	100.000	
7η	ἑκατομμύριον	1.000.000	3η κλάσις ἑκατομμύρια
8η	δεκάδα ἑκατομμυρίων	10.000.000	
9η	ἑκατοντάδα ἑκατομμυρ.	100.000.000	
10η	δισεκατομμύριον	1.000.000.000	4η κλάσις δισεκατομ.
	. . . .		

δεύτερον τριψήφιον τμῆμα 537 φανερώνει τὰς χιλιάδας, ἤτοι πεντακόσιαι τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες. Τέλος τὸ ἄλλο τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔτυχε νὰ εἶναι διψήφιον, φανερώνει τὰ ἑκατομμύρια ἤτοι ἐνενήκοντα ἓξ ἑκατομμύρια. Ὥστε ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς θὰ ἀπαγγελθῇ ὡς ἑξῆς : ἐνενήντα ἓξ ἑκατομμύρια πεντακόσιαι τριάκοντα ἑπτὰ χιλιάδες διακόσια τεσσαράκοντα πέντε.

Κάθε τρία ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν μίαν **κλάσιν,** τὴν κλάσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων, τὴν κλάσιν τῶν χιλιάδων, τὴν κλάσιν τῶν ἑκατομμυρίων, τὴν κλάσιν τῶν δισεκατομμυρίων κ.λ.π. ὅπως φαίνεται εἰς τὸν παραπάνω πίνακα

12. 3 Τὸ ψηφίον μηδὲν τὸ χρησιμοποιοῦμεν ἐκεῖ ὅπου δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως. Γράφομεν π.χ.

ὀκτὼ χιλιάδες ἑβδομήκοντα = 8 070

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι τὸ μηδὲν εἰς τὰ ἀριστερὰ ἑνὸς ἀριθμοῦ δὲν ἔχει ἀξίαν κατὰ τὴν γραπτὴν ἀρίθμησιν ἑνὸς ἀριθμοῦ. Γράφομεν π.χ.

15 ἢ 015 ἢ 0015 = δέκα πέντε

καὶ ἐννοοῦμεν τὸν διψήφιον ἀριθμὸν δέκα πέντε.

Ἐν τούτοις μερικὲς φορὲς ποὺ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν π.χ. ὡς ἑξαψήφιον, ὅπως εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τηλεφώνου τῶν Ἀθηνῶν, τότε τὸ μηδὲν ποὺ γράφεται εἰς τὰ ἀριστερὰ ὑπολογίζεται. Ὅταν π.χ. θέλωμεν νὰ καλέσωμεν τηλεφωνικῶς τὸν ἀριθμὸν 019340 τότε ὡς πρῶτον καλούμενον ψηφίον θὰ καλέσωμεν τὸ μηδὲν κατόπιν τὸ 1 κ.λ.π. Καὶ ἂν ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τοῦ ἰδικοῦ μας τηλεφώνου καὶ μᾶς ἐρωτήσουν τί ἀριθμὸν τηλεφώνου ἔχομεν, θὰ ἀπαντήσωμεν : Μηδὲν δέκα ἐννέα τριακόσια σαράντα καὶ ὄχι δέκα ἐννέα τριακόσια σαράντα.

Ἡ αὐτὴ διάταξις ὑπάρχει καὶ εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῶν λαχείων, εἰς τὰ μπλὸκ ἀποδείξεων τῶν τραπεζῶν ἢ μεγάλων καταστημάτων κ.λ.π.

Ὁ παραπάνω περιγραφόμενος τρόπος ἀριθμήσεως λέγεται **δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως,** διότι ὡς βάσις αὐτοῦ λαμβάνεται τὸ 10 (δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως κάνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως). Διὰ τοῦτο μᾶς χρειάζονται δέκα ψηφία (ἀπὸ τὸ 0 μέχρι καὶ τὸ 9).

Τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως ἐφευρέθηκε ἀπὸ τῆς ἀρχαιοτάτης ἐποχῆς τῶν πρωτογόνων ἀνθρώπων, οἱ ὁποῖοι ἐχρησιμοποίησαν τοὺς δέκα δακτύλους τῶν χειρῶν των διὰ τὴν ἀρίθμησιν, χρησιμοποιεῖται δὲ σχεδὸν ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀνθρώπους τῆς Γῆς.

Ἀσκήσεις

48. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμούς, α) ὀγδόντα ἑπτὰ β) πέντε χιλιάδες τριακόσια, γ) σαράντα χιλιάδες εἴκοσι, δ) δέκα ὀκτὼ ἑκατομμύρια τριακόσια πενήντα ὀκτὼ χιλιάδες ἑκατὸν εἴκοσι τρία, ε) ἑξήντα ἑκατομμύρια ἐνενήντα πέντε χιλιάδες ἑπτά, στ) τρία δισεκατομμύρια ἑβδομήντα πέντε, ζ) ἑκατὸν ἑπτὰ ἑκατομμύρια ἑπτακόσια ἕξ, η) δώδεκα δισεκατομμύρια τριάντα ὀκτὼ χιλιάδες πεντακόσια

49. Νὰ ἀπαγγείλετε τοὺς ἀριθμούς :

α) 5849 β) 289546 γ) 27674 δ) 663080
ε) 103700 στ) 6572948 ζ) 8000060 η) 9006004
θ) 2534908427 ι) 4056089107304

50. Μὲ τὰ ψηφία 0, 5, 2, 8 νὰ κατασκευάσης τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ποὺ μπορεῖς. Ἔπειτα μὲ τὰ ἴδια ψηφία νὰ κατασκευάσης τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν ποὺ μπορεῖς.

51. Ποίους διψηφίους ἀριθμοὺς μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε μὲ τὰ ψηφία 5 καὶ 8 ;

52. Ποίους τριψηφίους ἀριθμοὺς μποροῦμε νὰ κατασκευάσωμε μὲ τὰ ψηφία 2, 7, 4 ; (θὰ βρῆτε ἕξ ἀριθμούς).

53. Τοὺς τριψηφίους ἀριθμοὺς ποὺ θὰ κατασκευάσετε μὲ τὰ παραπάνω τρία ψηφία νὰ τοὺς κατατάξετε κατὰ τάξιν μεγέθους α) αὐξανομένου καὶ β) ἐλαττουμένου.

54. Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγαλυτέρου μονοψηφίου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ μικροτέρου διψηφίου ἀριθμοῦ.

55. Πόσοι καὶ ποῖοι διψήφιοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 5 καὶ τοῦ 15, χωρὶς νὰ συμπεριληφθῆ τὸ 15 ; Νὰ τοὺς καταγράψετε.

Ἄλλα εἴδη γραφῆς ἀριθμῶν

13. I Ἀρχαία Ἑλληνικὴ γραφή: Οἱ ἀρχαῖοι πρόγονοί μας, ποὺ δὲν ἐγνώριζαν τὰ ἀραβικὰ ψηφία, χρησιμοποιοῦσαν τὸ ἀλφάβητον διὰ νὰ γράψουν τοὺ ἀριθμούς. Κάθε γράμμα διὰ νὰ παριστάνη ἀριθμόν, πρέπει νὰ ἔχη ἕνα τόνον (ὀξεῖαν) δεξιὰ καὶ ἄνωθεν. Ἐπειδὴ τὰ 24 γράμματα τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου δὲν ἐπαρκοῦσαν, διὰ τοῦτο οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες χρησιμοποιοῦσαν καὶ τὰ ἑξῆς τρία σύμβολα : τὸ ϛ (στίγμα), τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ ὡς στ, τὸ ϟ (κόππα) καὶ τὸ ϡ (σαμπί).

Ἡ ἀντιστοιχία τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀραβικῶν ψηφίων εἶναι ἡ ἑξῆς :

Μονάδες	α′	β′	γ′	δ′	ε′	στ′ ἢ ϛ′	ζ′	η′	θ′
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δεκάδες	ι′	κ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϟ′
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ἑκατοντάδες	ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′
	100	200	300	400	500	600	700	800	900

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 35 γράφεται λε′, ὁ ἀριθμὸς 578 γράφεται φοη′, ὁ ἀριθμὸς 409 γράφεται υθ′ κ.λ.π.

Διὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1000 μέχρι 999000 χρησιμοποιοῦσαν τὰ αὐτὰ γράμματα, ἀλλὰ μὲ τὸν τόνον κάτω καὶ ἀριστερά. Π.χ. 2000 = ͵β, 25000 = ͵κε, 5047 = ͵εμζ′, 658943 = ͵χνηϡμγ′.

Ἡ ἀρχαία ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται καὶ σήμερον εἰς ἀρκετὰς περιπτώσεις, ὅπως εἰς τὴν ἀρίθμησιν τῶν κεφαλαίων ἑνὸς βιβλίου, εἰς τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν περιπτώσεων ἢ παραγράφων ἑνὸς κειμένου κ.λ.π. Τὰ Γυμνάσια μιᾶς πόλεως, τὰ ἀστυνομικὰ τμήματα, αἱ οἰκονομικαὶ ἐφορίαι, αἱ τάξεις τοῦ σχολείου, ἡ ἀρίθμησις παλαιῶν νόμων κ.λ.π. ἀναγράφονται μὲ τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν γραφήν. Λέγομεν π.χ. τὸ Θ′ Γυμνάσιον Ἀρρένων Ἀθηνῶν, ἡ ΙΖ′ οἰκονομικὴ ἐφορία Ἀθηνῶν, τὸ ΚΖ′ ἀστυνομικὸν τμῆμα, ἡ ΣΤ′ τάξις, ὁ Νόμος ͵ΒΧΗ′ κ.λ.π.

14. ΙΙ Ρωμαϊκὴ γραφή : Εἰς τὴν ρωμαϊκὴν γραφὴν χρησιμοποιοῦνται ὡς ἀρχικὰ σύμβολα τὰ ἑξῆς :

Σύμβολον :	I	V	X	L	C	D	M
ἀντιστοιχία :	1	5	10	50	100	500	1000

Ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ ἄνω σύμβολα γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας :

1) Ὅμοια σύμβολα γραμμένα στὴ σειρὰ προσθέτουν τὴν ἀξίαν των π.χ. II = 2, XXX = 30, CC = 200.

2) Κάθε σύμβολον γραμμένο δεξιὰ ἀπὸ ἄλλο μεγαλύτερόν

του προσθέτει τὴν ἀξίαν του εἰς αὐτό, γραμμένο δὲ ἀριστερὰ ἀπὸ ἄλλο μεγαλύτερόν τοῦ ἀφαιρεῖ τὴν ἀξίαν του ἀπὸ αὐτό. Π.χ.

VI = 6, XXV = 25, LII = 52, DCCXXXV = 735

ἐνῶ IV = 4, IX = 9, XL = 40, CD = 400, CMIV = 904.

Διὰ νὰ γράψωμεν τὰς χιλιάδας θέτομεν ἀπὸ πάνω μία ὁριζοντίαν γραμμήν, π,χ. $\overline{\text{XII}}$ = 12000, $\overline{\text{LIV}}$ = 54 000, $\overline{\text{CMIX}}$ = 909 000 καὶ διὰ νὰ γράψωμεν τὰ ἑκατομμύρια θέτομεν ἀπὸ πάνω δύο ὁριζοντίας γραμμὰς π.χ. $\overline{\overline{\text{XIX}}}$ = 19.000.000, $\overline{\overline{\text{LXI}}}$ = 61.000.00.

Ἀσκήσεις

56. Νὰ γράψετε κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα τοὺς ἀριθμοὺς
ια΄, κβ΄, νστ΄, ρμδ΄, χοη΄, ͵ατοστ΄, ͵βφ΄, ͵θωνε΄.

57. Πῶς γράφονται μὲ γράμματα τῆς ἀλφαβήτου οἱ ἀριθμοὶ
35, 76, 258, 404, 820, 3568, 6977, 8500 ;

58. Νὰ γράψετε κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα τοὺς ἀριθμοὺς
VIII, XIX, LXV, XC, CCLXIX, DCCL, MDLXI

59. Πῶς γράφονται κατὰ τὴν ρωμαϊκὴν γραφὴν οἱ ἀριθμοὶ
9, 17, 26, 39, 42, 65, 87, 124, 249, 491, 511, 876, 1573, 2688 ;

Σχέσεις μεγέθους φυσικῶν ἀριθμῶν

15.1 Διάταξις τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἀπὸ τὸν τρόπον ποὺ σχηματίζονται οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ (καθένας γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του, ἂν τὸν αὐξήσωμεν κατὰ μίαν μονάδα) ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ βρίσκονται σὲ **διάταξι κατὰ μέγεθος** ἀπὸ τὸν μικρότερον πρὸς τὸν μεγαλύτερον. Καὶ ἂν μᾶς δόσουν ἕνα πλῆθος π.χ. ἀπὸ τοὺς ὀκτὼ φυσικοὺς ἀριθμούς.

5, 9, 12, 6, 2, 15, 4, 7

τότε μᾶς εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ τοὺς διατάξωμεν κατὰ σειρὰν **μεγέθους αὐξανομένου**

2, 4. 5, 6, 7, 9, 12, 15

ἢ κατὰ σειρὰν **μεγέθους ἐλαττουμένου**

15, 12, 9, 7, 6, 5, 4, 2

15. 2 Ἴσοι ἀριθμοὶ - Ἰσότης. Δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ θὰ λέγωμεν ὅτι **εἶναι ἴσοι, ὅταν εἶναι πληθικοὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων συνόλων.** Π.χ. ἂν αἱ ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος εἶναι α καὶ τὰ φωνήεντα τοῦ ἀλφαβήτου εἶναι β, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha = \beta \qquad (1)$$

διότι μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο τούτων συνόλων ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοίχισις.

Ἡ σχέσις (1) εἶναι μία **ἰσότης,** σύμβολον δὲ τῆς ἰσότητος εἶναι τὸ **ἴσον** =. Ἡ ἰσότης ἔχει **δύο μέλη,** τὰ ὁποῖα ξεχωρίζουν μὲ τὸ =, τὸ **πρῶτον** μέλος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τὸ **δεύτερον** μέλος πρὸς τὰ δεξιά.

Ἡ ἰσότης ἔχει τὰς ἑξῆς τρεῖς βασικὰς ἰδιότητας :

I τὴν ἀνακλαστικὴν	$\alpha = \alpha$
II τὴν συμμετρικὴν	$\alpha = \beta \iff \beta = \alpha$
III τὴν μεταβατικὴν	$\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma \implies \alpha = \gamma$

15. 3 Ἀνισότης. Ἄς πάρωμε τὰ δύο σύνολα

$$E = (\, x / x \text{ ἐπιβάτης λεωφορείου} \,)$$
$$K = (\, x / x \text{ κάθισμα λεωφορείου} \,)$$

καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἐπιβατῶν εἶναι α καὶ τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων εἶναι β.

Αἱ ἑξῆς **τρεῖς περιπτώσεις** μπορεῖ νὰ συμβοῦν

I. Οἱ ἐπιβάται α νὰ εἶναι τόσοι, ὅσα καὶ τὰ καθίσματα β. Τότε ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοίχισις μεταξύ των στοιχείων τῶν δύο τούτων συνόλων καὶ τότε, ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν § 15.2 ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha = \beta \qquad (1)$$

II. Οἱ ἐπιβάται α νὰ εἶναι ὀλιγώτεροι ἀπὸ τὰ καθίσματα β, ὁπότε θὰ μείνουν μερικὰ καθίσματα ἄδειανὰ (κενά), διότι δὲν θὰ ὑπάρχουν ἐπιβάται διὰ νὰ καθίσουν. Τότε λέγομεν ὅτι **τὸ α εἶναι μικρότερον τοῦ β** καὶ τοῦτο τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$\alpha < \beta \qquad (2)$$

III. Οἱ ἐπιβάται α νὰ εἶναι περισσότεροι ἀπὸ τὰ καθίσματα β, ὁπότε θὰ μείνουν ὄρθιοι μερικοὶ ἐπιβάται, διότι δὲν θὰ ὑπάρχουν καθίσματα διὰ νὰ καθίσουν. Τότε λέγομεν ὅτι **τὸ α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ β,** καὶ τοῦτο τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$\alpha > \beta \qquad (3)$$

Κάθε μία ἀπὸ τὰς σχέσεις (2) καὶ (3), δηλαδὴ τὰς

$$\alpha < \beta \qquad \alpha > \beta$$

λέγεται **ἀνισότης,** σύμβολον δὲ τῆς ἀνισότητος εἶναι μία γωνία $<$ ἢ $>$. Ἡ ἀνισότης ἔχει δύο μέλη, τὸ **πρῶτον** μέλος πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τὸ **δεύτερον** μέλος πρὸς τὰ δεξιά. Εἰς τὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας γράφομεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν καὶ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας γράφομεν τὸν μικρότερον.

τὸ $\alpha < \beta$ διαβάζεται : α μικρότερον τοῦ β

τὸ $\alpha > \beta$ διαβάζεται : α μεγαλύτερον τοῦ β.

Αἱ τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις μᾶς δίνουν τὸν **νόμον τῆς τριχοτομῆς** δηλαδὴ ὅτι ἐκτὸς ἀπὸ τὰς τρεῖς αὐτὰς περιπτώσεις ποὺ ἐξετάσαμε, **δὲν ὑπάρχει ἄλλη.**

Σημ. Ἡ ἀνισότης $\alpha < \beta$ (α μικρότερον τοῦ β) μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ὡς ἑξῆς : $\beta > \alpha$ (β μεγαλύτερον τοῦ α).

Ἐπίσης ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$ μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ὡς ἑξῆς : $\beta < \alpha$.

IV. Ὅταν τὸ σύνολον α τῶν ἐπιβατῶν δὲν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ σύνολον β τῶν καθισμάτων καὶ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ποῖον ἀπὸ τὰ δύο εἶναι μεγαλύτερον καὶ ποῖον μικρότερον, τότε σημειώνομεν

$$\alpha \neq \beta \qquad (4)$$

καὶ διαβάζομεν : **α διάφορον τοῦ β.**

Ὥστε ἅμα γράψωμεν $\alpha \neq \beta$ (α διάφορον τοῦ β) ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ **α δὲν εἶναι β** καὶ ἑπομένως ἢ τὸ α εἶναι μικρότερον τοῦ β, ἢ τὸ α εἶναι μεγαλύτερον τοῦ β. Ὥστε τὸ σύμβολον $\neq$ μποροῦμε νὰ τὸ διαβάσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς : **μεγαλύτερον ἢ μικρότερον.**

Σημ. Τὸ σύμβολον $\neq$ εἶναι τὸ σύμβολον τῆς **ἀδιαφορίας**, ἡ δὲ σχέσις (4) περιέχει καὶ τὰς δύο σχέσεις (2) καὶ (3) μαζί.

V. Κατὰ τὴν ὥραν τῆς γυμναστικῆς οἱ μαθηταὶ συνήθως μπαίνουν στὴ γραμμὴ **κατ᾽ ἀνάστημα,** ἀπὸ τοῦ ὑψηλοτέρου πρὸς τὸν χαμηλότερον (ἢ ἀντιστρόφως).

Ἂν τὸ ὕψος ἑνὸς μεσαίου μαθητοῦ εἶναι α καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὑψηλωτέρου ἀπὸ αὐτὸν εἶναι β, τότε ὅπως εἴπαμε παραπάνω, θὰ γράψωμεν

$$\alpha < \beta$$

Μπορεῖ ὅμως καὶ ὁ διπλανὸς τοῦ μεσαίου μαθητοῦ (πρὸς τὸ μέρος τῶν ὑψηλωτέρων) νὰ ἔχῃ ὕψος β ἴσον πρὸς τὸ ὕψος α. Τότε θὰ γράψωμεν

$$\alpha \leqslant \beta \qquad (5)$$

καὶ θὰ διαβάσωμεν : α μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς β.

Ἡ σχέσις $\alpha \leqslant \beta$ λέγεται **ἀνισοϊσότης**, ἔχει δὲ καὶ αὐτὴ δύο μέλη, τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὸ δεύτερον μέλος.

Μὲ τὰς αὐτὰς σκέψεις, ἂν γ εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς χαμηλωτέρου μαθητοῦ, θὰ γράψωμεν

$$\alpha \geqslant \gamma \qquad (6)$$

καὶ θὰ διαβάσωμεν : α μεγαλύτερον ἢ ἴσον πρὸς γ.

Ἡ σχέσις (5) περιέχει καὶ τὰς δύο σχέσεις (1) καὶ (2) μαζύ, ἡ δὲ σχέσις (6) περιέχει καὶ τὰς δύο σχέσεις (1) καὶ (3) μαζύ.

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἂν συμβαίνῃ νὰ εἶναι

$$\text{καὶ} \quad \alpha \leqslant \beta \quad \text{καὶ} \quad \beta \leqslant \alpha$$

τότε συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι $\alpha = \beta$. Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\alpha \leqslant \beta \ \wedge \ \beta \leqslant \alpha \implies \alpha = \beta$$

Μία ἀνισότης ἢ μία ἀνισοϊσότης ἔχει τὴν **μεταβατικὴν** ἰδιότητα

$$\alpha < \beta \ \wedge \ \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma \quad \text{ἢ}$$

$$\alpha \leqslant \beta \ \wedge \ \beta \leqslant \gamma \implies \alpha \leqslant \gamma$$

Ἀσκήσεις

60. Νὰ καταγράψετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον Φ_1 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν α, ἔνθα εἶναι $3 < \alpha < 10$.

61. Τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὸ σύνολον Φ_2 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν β, ἔνθα εἶναι $5 \leqslant \beta < 12$.

62. Νὰ καταγράψετε τὸ σύνολον $\Phi_3 = \{ x /, 2 < x \leqslant 8 \}$ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων αὐτοῦ.

63. Νὰ συγκρίνετε τὰ σύνολα α = ἡλικία μου, β = ἡλικία πατρός μου, γ = ἡλικία παπποῦ μου.

64. Νὰ καταγράψετε τὸ σύνολον $A = \{x / , 5 \leqslant x \leqslant 12\}$ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων αὐτοῦ.

65. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\alpha = \beta$ καὶ $\beta > \gamma$. Νὰ καταγράψετε τὴν σχέσιν ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν α καὶ γ.

66. Τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸ $\alpha < \beta$ καὶ $\beta = \gamma$.

67. Νὰ συμπληρώσετε τὸν συμβολισμὸν $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Longrightarrow \ldots$

68. Ποῖον συμπέρασμα βγάζομεν ἂν εἶναι $\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma$;

69. Ποῖον συμπέρασμα βγάζομεν ἂν εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\beta = \gamma$;

70. Μποροῦμε νὰ βγάλωμε συμπέρασμα διὰ τὰ α καὶ γ ἀπὸ τὰς σχέσεις $\alpha < \beta$ καὶ $\beta > \gamma$; ἂν ἔπρεπεν ὁπωσδήποτε νὰ βγάλωμεν κάποιο συμπέρασμα μεταξὺ τῶν α καὶ γ, τί θὰ ἐγράφαμεν ;

71. Ἐὰν $x \in \Phi \wedge 5 \leqslant x < 9 \wedge 4 < x \leqslant 7$, τότε ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ ὁ x ;

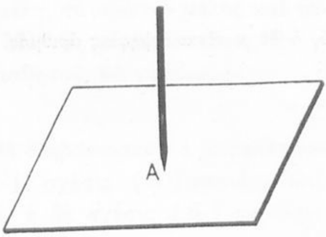
72. Ἐὰν $x \in \Phi \wedge 8 \leqslant x \leqslant 15$, ὁ δὲ x εἶναι διψήφιος ἀριθμός, τότε ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ ὁ x ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

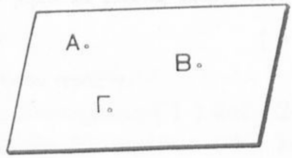
ΤΟ ΣΗΜΕΙΟΝ ΚΑΙ Η ΓΡΑΜΜΗ

16. Τὸ σημεῖον. Ἡ αἰχμὴ μιᾶς βελώνας, ἕνας κόκκος σκόνη, ἕνα μόριον μιᾶς χημικῆς οὐσίας εἶναι **φυσικὰ σημεῖα.**

Πέρνομεν ἕνα μολύβι σχεδιάσεως μὲ τὴν μύτη καλὰ ξυσμένη καὶ τὸ στηρίζομεν ὄρθιο πάνω σὲ ἕνα λευκὸ χαρτί, τὸ πιέζομεν



Σχ. 5.



Σχ. 6.

λίγο καὶ ἔπειτα τὸ ἀποσύρομεν. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ μολύβι ἄφησεν ἐπάνω στὸ χαρτὶ ἕνα **ἴχνος,** μίαν τελείαν. Ἡ τελεία αὐτὴ ποὺ μόλις φαίνεται εἶναι τὸ **ἴχνος** ἢ ἡ **εἰκόνα** ἑνὸς φυσικοῦ σημείου ἐπάνω στὸ χαρτί. Τὸ ἴδιον περίπου συμβαίνει καὶ μὲ τὴν κιμωλίαν ἐπάνω στὸν πίνακα.

Τὸ **μαθηματικὸν σημεῖον** εἶναι μία πρωταρχικὴ ἔννοια ποὺ τὴν δεχόμεθα χωρὶς ὁρισμὸν καὶ τὴν συνειδητοποιοῦμεν μὲ τὴν εἰκόνα ἑνὸς φυσικοῦ σημείου.

Ἔτσι ἡ ἀπεικόνισις ἑνὸς μαθηματικοῦ σημείου γίνεται μὲ μίαν τελείαν (κουκίδα). Ἡ κουκίδα συνοδεύεται ἀπὸ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα ποὺ εἶναι τὸ ὄνομα τοῦ σημείου. Λέμε π.χ. τὸ σημεῖον Α, τὸ σημεῖον Β, τὸ σημεῖον Γ (σχ. 6).

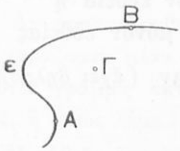
Τὸ σημεῖον (φυσικὸν ἢ μαθηματικὸν) δὲν ἔχει **καμίαν διάστασιν,** δὲν ἔχει δηλαδὴ οὔτε μῆκος, οὔτε πλάτος, οὔτε ὕψος.

17. Ἡ γραμμή. Ἂν μετακινηθῇ ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ ποὺ εἶναι στηριγμένη ἐπάνω στὸ χαρτί, ἂν δηλαδὴ γλυστρίση ἐπάνω στὸ χαρτὶ χωρὶς νὰ ξαναγυρίση πίσω, τότε θὰ ἀφίση ἐπάνω στὸ χαρτὶ τὴν **εἰκόνα μιᾶς γραμμῆς**

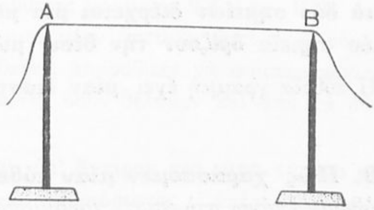
Τὸ μολύβι κατὰ τὴν μετακίνησίν του χωρὶς διακοπήν, ἀφίνει σὲ κάθε θέσιν τὸ ἴχνος ἑνὸς σημείου. Τὸ σύνολον τῶν ἰχνῶν τούτων σχηματίζει τὴν εἰκόνα τῆς γραμμῆς. Ὥστε μποροῦμε νὰ εἰποῦμεν ὅτι : **γραμμὴ εἶναι τὸ σύνολον σημείων**

Ἑπομένως ἡ γραμμὴ εἶναι **σημειοσύνολον.** Κάθε γραμμὴν μποροῦμε νὰ τὴν ὀνομάσωμεν μὲ δύο κεφαλαῖα γράμματα, ἢ καὶ μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα. Λέμε π.χ. ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἢ ἡ γραμμὴ ε.

Σημ. Συνήθως ὅταν τὴν γραμμὴν τὴν ὀνομάζωμεν μὲ ἕνα γράμμα κλείομεν τὸ γράμμα ἐντὸς παρενθέσεως. Λέμε π.χ. ἡ γραμμὴ (ε).



Σχ. 7.



Σχ. 8.

Κάθε σημεῖον ποὺ βρίσκεται ἐπάνω στὴν γραμμήν, **εἶναι** σημεῖον τῆς γραμμῆς, ἐνῶ κάθε σημεῖον ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὴν γραμμὴν **δὲν εἶναι** σημεῖον τῆς γραμμῆς. Ἔτσι διὰ τὴν γραμμὴν (ε) καὶ διὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, τοῦ σχήματος 7 ἔχομεν :

$$\mathrm{A} \in (\varepsilon), \quad \mathrm{B} \in (\varepsilon), \quad \Gamma \notin (\varepsilon)$$

Διὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς γραμμῆς (ε) μποροῦμε νὰ εἰποῦμε ὅτι : ἡ γραμμὴ (ε) **διέρχεται** ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β, ἐνῶ διὰ τὸ σημεῖον Γ λέμε ὅτι ἡ γραμμὴ (ε) **δὲν διέρχεται** ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ.

Καθὼς εἶναι ἀδύνατον νὰ καταμετρήσωμεν τὰ σημεῖα ποὺ ἀποτελοῦν μίαν γραμμήν, λέμε ὅτι :

Ἡ γραμμὴ εἶναι ἕνα ἀπειροσύνολον σημείων.

18. Ἡ εὐθεῖα γραμμή. Τὸ μολύβι κατὰ τὴν συνεχῆ μετακίνησίν του ἐπάνω στὸ χαρτί, μπορεῖ νὰ γράψη διάφορες γραμμές.

Ἀπὸ ὅλες αὐτὲς ἡ ἁπλουστέρα εἶναι ἡ **εὐθεῖα γραμμὴ** ἢ ἁπλῶς ἡ **εὐθεῖα.**

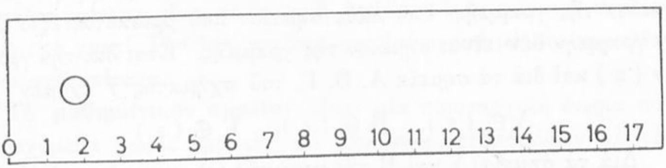
Ἔννοιαν τῆς εὐθείας πέρνομεν ἂν κρατήσωμεν ἕνα λεπτὸν νῆμα καλὰ τεντωμένο μεταξὺ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β. λέγομεν δὲ ὅτι ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 8). Ἐπίσης μία ὀπτικὴ ἀκτίνα εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἂν τεντώσωμεν μεταξὺ τῶν δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β λεπτὰ νήματα διαφορετικοῦ χρώματος (διὰ νὰ μποροῦμε νὰ τὰ διακρίνωμεν μεταξύ των) θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν σταθερῶν σημείων Α καὶ Β ὅλα τὰ νήματα **συμπίπτουν.** Τοῦτο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συμπεράνωμεν ὅτι :

Δύο εὐθεῖαι, ποὺ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν ἢ
Διὰ δύο σημείων διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα ἢ
Δύο σημεῖα ὁρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει **μίαν διάστασιν** (ἔχει δηλαδὴ **μῆκος**).

19. Πῶς χαράσσομεν μίαν εὐθεῖαν. Διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν εὐθεῖαν ἐπάνω στὸ χαρτὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸν χάρακα (ρίγαν ἢ κανόνα). Ὁ χάρακας εἶναι ἕνα ἐργαλεῖον σχεδιάσεως ξύλινον ἢ μετάλλινον ἢ ἀπὸ πλαστικὴν ὕλην, τοῦ ὁποίου κάθε



Σχ. 9

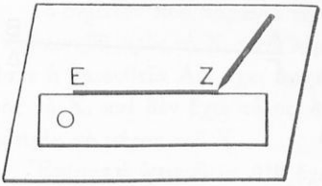
ἀκμὴ (κόψη) εἶναι εὐθυγραμμισμένη ἔτσι ὥστε ἂν τοποθετήσωμεν ἐπάνω της τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, νὰ ἐφαρμόζουν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΑΒ(*).

Διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, τοποθετοῦμεν τὸν χάρακα ἔτσι ὥστε ἡ ἀκμή του νὰ περνᾶ καὶ ἀπὸ τὸ Ε καὶ ἀπὸ τὸ Ζ.

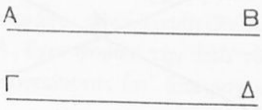
---

* Τέτοιος συνειθισμένος χάρακας εἶναι τὸ **ὑποδεκάμετρον,** δηλαδὴ ἕνας χάρακας ποὺ εἶναι διῃρημένος συνήθως σὲ 30 ἢ 40 cm (σχ. 9).

Σύρομεν κατόπιν τὸ μολύβι ἀπὸ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ φροντίζοντες ὥστε ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ νὰ βρίσκεται διαρκῶς ἐπάνω στὴν ἀκμὴ τοῦ



Σχ. 10.



Σχ. 11.

χάρακα. Ἔτσι μετὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ χάρακα μένει ἐπάνω στὸ χαρτὶ ἡ εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς ΕΖ (σχ. 10).

Ἂν παρακολουθήσωμεν μίαν ὀπτικὴν ἀκτίνα, ἢ τὸν τρόπον ποὺ χαράζομεν μίαν εὐθεῖαν, μποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι : ἡ εὐθεῖα γραμμὴ **ἐκτείνεται** ὅσον θέλομεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτῆς, ἢ ὅπως λέμε :

Ἡ εὐθεῖα ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, ἢ καὶ ὅτι : **Ἡ εὐθεῖα εἶναι ἀπεριόριστος** (ἀπέραντος, χωρὶς πέρας, χωρὶς τέλος).

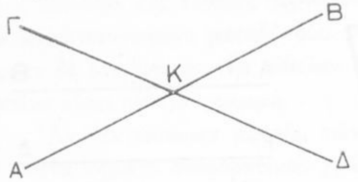
Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν δύο σημεῖα αὐτῆς. Λέμε π.χ. ἡ εὐθεῖα ΕΖ καὶ ἐννοοῦμεν τὴν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ.

Διὰ δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ τὰ ἑξῆς **τρία** πράγματα μπορεῖ νὰ συμβοῦν.

I. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ μὴ ἔχουν **κανένα** κοινὸν σημεῖον (σχ. 11) (μία περίπτωσις εἶναι νὰ εἶναι παράλληλοι, ὅπως θὰ ἴδωμεν).

II. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ ἔχουν **ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον,** τὸ Κ (σχ. 12). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ **τέμνονται** εἰς τὸ σημεῖον Κ. Τὸ σημεῖον Κ λέγεται **σημεῖον τομῆς** ἢ **κοινὸν σημεῖον** τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

III. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα (σχ. 13). Τότε ὅλα τὰ σημεῖα τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι κοινὰ καὶ τότε λέμε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ **ταυτίζονται,** ἤτοι ὅτι ἀποτελοῦν μίαν μόνον εὐθεῖαν.



Σχ. 12.

Σχ. 13.

Σημεῖα ποὺ βρίσκονται ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας θὰ τὰ λέμε **ὁμοευθειακὰ** σημεῖα.

Ἀσκήσεις

73. Νὰ γράψετε τρία σημεῖα Α, Β, Γ ὄχι ὁμοευθειακὰ καὶ νὰ χαράξετε ὅλας τὰς εὐθείας ποὺ ὁρίζουν τὰ Α, Β, Γ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο.

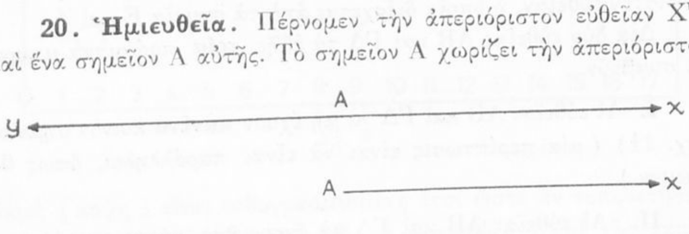
74. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο διὰ τὰ τέσσαρα ὄχι ὁμοευθειακὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ.

75. Νὰ τοποθετήσετε τὰς εὐθείας ΧΧ′ καὶ ΨΨ′′ καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἂν γνωρίζετε ὅτι $A \in XX'$, $B \in XX'$, $B \in \Psi\Psi''$.

76. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι : $A \in XX'$, $A \in \Psi\Psi''$, $B \in XX'$, $B \in \Psi\Psi''$.

77. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι : $A \in XX'$, $A \in \Psi\Psi''$, $B \notin XX'$, $B \notin \Psi\Psi''$.

20. Ἡμιευθεῖα. Πέρνομεν τὴν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΧΨ καὶ ἕνα σημεῖον Α αὐτῆς. Τὸ σημεῖον Α χωρίζει τὴν ἀπεριόριστον



Σχ. 14.

εὐθεῖαν ΧΨ εἰς δύο **ἡμιευθείας,** τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΨ. Ὥστε ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$AX \subset X\Psi \qquad A\Psi \subset X\Psi$$

Ἔχομεν εἰπῆ παραπάνω ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἀπειροσύνολον σημείων, ἢ ὅτι ἡ εὐθεῖα παράγεται ὅταν ἕνα σημεῖον μετακινῆται διαρκῶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς ἀκμῆς τοῦ χάρακα.

Τὸ σημεῖον ποὺ παράγει τὴν εὐθεῖαν ΧΨ ὅταν ἀρχίσῃ ἀπὸ τὸ Α καὶ κινηθῇ πρὸς τὸ Χ, τότε λέμε ὅτι παράγει τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ. Ὥστε ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ ἔχει **ἀρχὴν** τὸ Α, ἔχει **φορὰν** τὴν ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Χ, καὶ δὲν ἔχει τέλος, δηλαδὴ ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον μόνον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Χ.

Ἐπίσης ἡ ἡμιευθεῖα ΑΨ ἔχει ἀρχὴν τὸ Α, φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Ψ καὶ ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ψ.

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΧΨ, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται αἱ δύο ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ ΑΨ, λέγεται **ἄξων** ἢ **φορεὺς** κάθε μιᾶς ἀπὸ αὐτάς.

Αἱ δύο ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ ΑΨ, ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον φορέα ΧΨ, λέμε ὅτι ἔχουν **ἀντιθέτους φοράς**.

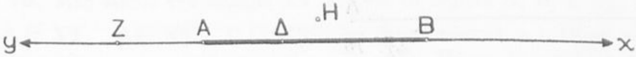
21. Εὐθύγραμμον τμῆμα. Πέρνομεν ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν-φορέα ΧΨ δύο σημεῖα, τὸ Α καὶ τὸ Β (σχ. 15).

Τότε εἰς τὸν φορέα ΧΨ διακρίνομεν τὰ ἑξῆς **τρία** ξεχωριστὰ μέρη.

Ι. Τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΧ μὲ ἀρχὴν τὸ Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Χ.

ΙΙ. Τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΨ μὲ ἀρχὴν τὸ Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Ψ.

ΙΙΙ. Τὸ μέρος ΑΒ. Τὸ μέρος ΑΒ λέγεται **εὐθύγραμμον τμῆμα** ἢ ἁπλῶς τμῆμα καὶ περιλαμβάνει τὸ σημεῖον Α (ἀρχὴν), τὸ σημεῖον Β (τέλος) καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ φορέως ΧΨ ποὺ βρίσκονται μεταξὺ Α καὶ Β.



Σχ. 15.

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β λέγονται **ἄκρα** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τὸ δὲ μέρος αὐτοῦ ποὺ βρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β λέγεται **ἐσωτερικὸν** τοῦ τμήματος ΑΒ.

Κάθε σημεῖον Δ, ποὺ βρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ, **εἶναι** δηλαδὴ σημεῖον τοῦ ΑΒ, ἤτοι :

$$\Delta \in AB$$

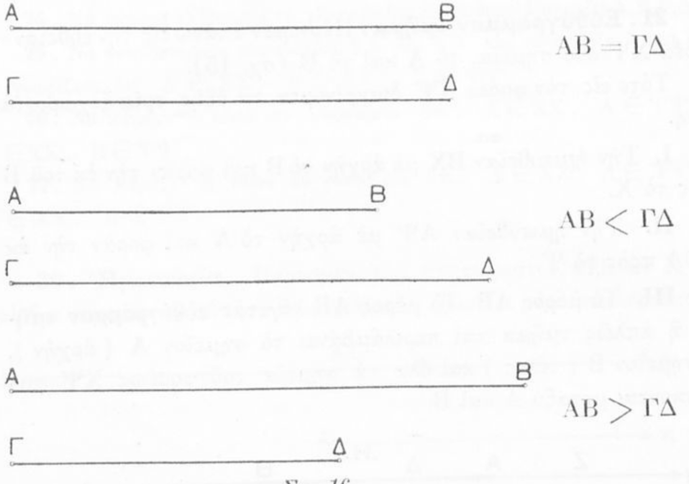
Κάθε σημεῖον Ζ ἢ Η, ποὺ δὲν βρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ΑΒ, δὲν ἀνήκει εἰς τὸ τμῆμα ΑΒ, **δὲν εἶναι** δηλαδὴ σημεῖον τοῦ ΑΒ, ἤτοι :

$$Z \notin AB, \qquad H \notin AB.$$

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἶναι καὶ αὐτὸ ἕνα **σημειοσύνολον,** εἶναι δὲ γνήσιον ὑποσύνολον τῆς εὐθείας ΧΨ ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται, εἶναι δηλαδὴ

$$AB \subset X\Psi$$

22. Σύγκρισις εὐθυγράμμων τμημάτων. Πέρνομεν τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ θέτομεν τὸ ΑΒ ἐπάνω εἰς τὸ ΓΔ ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχὴ Α αὐτοῦ νὰ πέση ἐπάνω στὴν ἀρχὴ Γ τοῦ



Σχ. 16.

ΓΔ. Τότε κατὰ τὸν νόμον τῆς **τριχοτομῆς** (§ 15.3) αἱ ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις μπορεῖ νὰ συμβοῦν.

Ι. Τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ νὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ τέλος Δ τοῦ ΓΔ, Τότε λέμε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ **εἶναι ἴσα,** δηλαδὴ

$$AB = \Gamma\Delta \tag{1}$$

II. Τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τμήματος ΓΔ, νὰ γίνῃ δηλαδὴ τὸ Β ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ΓΔ. Τότε λέμε ὅτι τὸ ΑΒ **εἶναι μικρότερον** ἀπὸ τὸ ΓΔ, δηλαδὴ

$$AB < \Gamma\Delta \tag{2}$$

III. Τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ νὰ πέσῃ ἔξω ἀπὸ τὸ τμῆμα ΓΔ, τὸ Β δηλαδὴ νὰ μὴ γίνῃ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ΓΔ. Τότε λέμε ὅτι τὸ ΑΒ **εἶναι μεγαλύτερον** ἀπὸ τὸ ΓΔ, δηλαδὴ

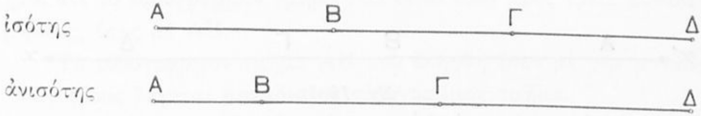
$$AB > \Gamma\Delta \tag{3}$$

Ἡ ἰσότης (1) ἔχει καὶ τὰς τρεῖς βασικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος (σχ. 17 α′) δηλαδὴ

I Τὴν ἀνακλαστικὴν $AB = AB$

II Τὴν συμμετρικὴν $AB = \Gamma\Delta \Longleftrightarrow \Gamma\Delta = AB$

III Τὴν μεταβατικὴν $AB = B\Gamma \wedge B\Gamma = \Gamma\Delta \Longrightarrow AB = \Gamma\Delta$



Σχ. 17.

Ἡ ἀνισότης ἔχει μόνον τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα (σχ. 17 β′)

$$AB < B\Gamma \wedge B\Gamma < \Gamma\Delta \Longrightarrow AB < \Gamma\Delta$$

Ἀσκήσεις

78. Νὰ χαράξετε τρεῖς ἡμιευθεῖες ΑΧ, ΑΨ, ΑΖ καὶ νὰ κατασκευάσετε τὰς ἀντιθέτους αὐτῶν.

79. Μᾶς δίδουν τὴν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ διὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ μᾶς λένε ὅτι $A \in X\Psi$, $B \in X\Psi$, $\Gamma \in X\Psi$. Νὰ διαπιστώσετε α) Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα σχηματίζονται καὶ ποῖα ; β) Πόσαι ἡμιευθεῖαι σχηματίζονται καὶ ποῖαι ;

80. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι $A \in X\Psi$, $B \in X\Psi$, $\Gamma \notin X\Psi$.

81. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι $A \in X\Psi$, $B \notin X\Psi$, $\Gamma \notin X\Psi$.

82. Νὰ γράψετε τρία ὄχι ὁμοευθειακὰ σημεῖα Δ, Ε, Η καὶ νὰ χαράξετε τὰς εὐθείας ποὺ ὁρίζουν αὐτὰ λαμβανόμενα ἀνὰ δύο. Νὰ καταγράψετε κατόπιν α) ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ προσδιορίζονται καὶ β) ὅλας τὰς ἡμιευθείας ποὺ δημιουργοῦται.

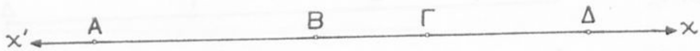
83. Ἐπάνω σὲ μιὰ εὐθεῖα ΧΨ μᾶς δίδουν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ μᾶς λένε ὅτι $\text{ΑΓ} \subset \text{ΑΒ} \subset \text{ΑΧ}$. Νὰ καταγράψετε α) ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ β) ὅλας τὰς ἡμιευθείας ποὺ δημιουργοῦνται.

84. Μᾶς δίδουν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ ὁποῖα εἶναι μόνον ἀνὰ δύο ὁμοευθειακά. Νὰ χαράξετε καὶ νὰ καταγράψετε α) ὅλας τὰς εὐθείας, β) ὅλας τὰς ἡμιευθείας καὶ γ) ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ δημιουργοῦνται μὲ βάσιν τὰ τέσσαρα αὐτὰ σημεῖα (θὰ βρῆτε 6 εὐθεῖες 24 ἡμιευθεῖες καὶ 6 εὐθύγραμμα τμήματα).

85. Μᾶς δίδουν τὴν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ γνωρίζομεν ὅτι $\text{Α} \in \text{ΧΨ}$, $\text{Β} \in \text{ΧΨ}$, $\text{Γ} \in \text{ΧΨ}$, $\text{Δ} \in \text{ΧΨ}$, $\text{ΑΒ} < \text{ΑΔ}$ καὶ $\text{ΑΒ} > \text{ΑΓ}$. Νὰ κάνετε τὸ κατάλληλον σχῆμα καὶ νὰ προσδιορίσητε ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ ὅλας τὰς ἡμιευθείας ποὺ σχηματίζονται.

Μέτρησις εὐθυγράμμων τμημάτων

23. Διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα : Πέρνομεν ἐπὶ ἑνὸς φορέως ΧΧ′ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δύο



Σχ. 18.

αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἔχουν τὸν ἴδιον φορέα ΧΧ′, ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὸ τέλος Β τοῦ πρώτου τμήματος εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου τμήματος. Διὰ τοῦτο τὰ δύο αὐτὰ τμήματα λέγονται **διαδοχικά**. Ὥστε

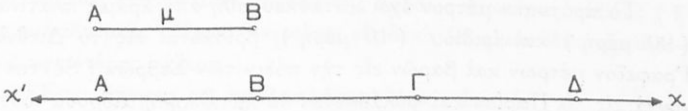
Δύο εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται διαδοχικὰ ὅταν εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως, ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὸ τέλος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀρχὴ τοῦ ἑπομένου.

Ἐπίσης τὰ τμήματα ΒΓ καὶ ΓΔ (σχ. 18) εἶναι διαδοχικά, ἐνῷ τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ δὲν εἶναι διαδοχικά, οὔτε τὰ τμήματα ΑΒκαὶ ΓΔ.

Διαδοχικὰ ἐπίσης εἶναι τὰ τρία τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ διότι εἶναι ἀνὰ δύο διαδοχικά, δηλαδὴ τὸ πρῶτον μὲ τὸ δεύτερον καὶ τὸ δεύτερον μὲ τὸ τρίτον.

24. 1 Μέτρησις εὐθυγράμμου τμήματος: Πέρνομεν τὰ τρία ἴσα καὶ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Ἐπομένως εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ. **Συγκρίνομεν** τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ΑΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρία εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα πρὸς τὸ ΑΒ, δηλαδὴ τὸ ΑΒ χωρεῖ τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΔ (σχ. 19). Τοῦτο τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς :

$$ΑΔ = 3ΑΒ.$$



Σχ. 19.

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ΑΒ = 1 μ., ὅτι δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ἴσον μὲ τὴν **μονάδα τοῦ μήκους**, τότε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι

$$ΑΔ = 3 \text{ μ.}$$

ἤτοι ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς τρεῖς μονάδες μήκους, ἴσας μὲ ΑΒ.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ποὺ ἐλήφθη ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους λέγεται **μοναδιαῖον** εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἡ σύγκρισις τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ πρὸς τὸ μοναδιαῖον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, λέγεται **μέτρησις** τοῦ ΑΔ, τὸ δὲ ἐξαγόμενον 3 μ. λέγεται **μῆκος** ἢ **μέτρον** τοῦ ΑΔ. Ὥστε

Μέτρησις ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς τὸ μοναδιαῖον εὐθύγραμμον τμῆμα (δηλαδὴ πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ λαμβάνεται ὡς μονάς).

Μέτρον ἢ μῆκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος λέγεται τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως αὐτοῦ.

24. 2 Τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς : (ΑΔ) = 3 μ. Ὥστε ΑΔ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ Α καὶ τελειώνει εἰς τὸ Δ, ἐνῶ (ΑΔ) εἶναι τὸ μῆκος ἢ τὸ μέτρον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΔ. Δηλαδὴ τὸ μὲν ΑΔ εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ δὲ (ΑΔ) εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3 μ.

24. 3 **Μονάδες μήκους**: Ὡς μονάδα μετρήσεως μήκους μονάδος χωρίζεται ἀπὸ τὸ ἀκέραιον μέρος μὲ ἕνα κόμμα (,) τὸ ὁποῖον λέγεται **ὑποδιαστολή.** Ἔτσι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

25,3764

περιέχει 2 δεκάδες, 5 μονάδες (δηλαδὴ 25 μονάδες), 3 δέκατα, 7 ἑκατοστά, 6 χιλιοστὰ καὶ 4 δεκάκις χιλιοστά.

Ἡ ἀξία τῶν ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ μέρους καθορίζεται ἀνάλογα μὲ τὴν θέσιν ποὺ ἔχει καθένα μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, δηλαδὴ τὸ πρῶτον ψηφίον (μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν) φανερώνει δέκατα τὸ δεύτερον ψηφίον (μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν) φανερώνει ἑκατοστὰ τὸ τρίτον ψηφίον (μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν) φανερώνει χιλιοστὰ τὸ τέταρτον ψηφίον (μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν) φανερώνει δεκάκις χιλιοστὰ κ.λ.π.

Ὅταν λοιπὸν θέλωμεν νὰ γράψωμεν 8 χιλιοστά, θὰ γράψωμεν

0,008

ἔτσι ὥστε τὸ 8 νὰ εἶναι τρίτον ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν. Τὰ ἄλλα ψηφία ποὺ λείπουν τὰ σημειώνομεν μὲ 0. Ἐπίσης εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος ποὺ δὲν ὑπάρχει θέτομεν ἕνα μηδέν.

Διὰ νὰ διαβάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν διαβάζομεν χωριστὰ τὸ ἀκέραιον μέρος (ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν σελίδα 27) καὶ χωριστὰ τὸ δεκαδικόν. Τὸ δεκαδικὸν μέρος πέρνει τὴν ὀνομασίαν τῆς τάξεως ποὺ κατέχει τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ψηφίον. Ἔτσι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

25,3764

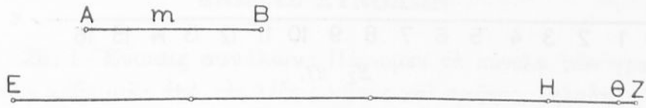
διαβάζεται : 25 ἀκέραιος καὶ 3764 δεκάκις χιλιοστά. Ἐπίσης γράφομεν καὶ διαβάζομεν τοὺς παρακάτω ἀριθμούς :

13,5 δέκα τρία (ἀκέραιος) καὶ 5 δέκατα
0,28 (0 ἀκέραιος καὶ) 28 ἑκατοστὰ
65,346 65 (ἀκέραιος) καὶ 346 χιλιοστὰ κ.λ.π.

Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,28 δὲν περιέχει ἀκεραίας μονάδας Διὰ τοῦτο στὴ θέσι τοῦ ἀκεραίου μέρους ἐθέσαμεν ἕνα μηδέν, μποροῦμε δὲ νὰ τὸν διαβάσωμεν ὡς ἑξῆς : 28 ἑκατοστά.

26. Εἴδαμε εἰς τὴν § 24 ὅτι τὸ μοναδιαῖον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ χωρεῖ **ἀκριβῶς** τρεῖς φορὲς εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ καὶ βγάλαμε τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ΑΔ εἶναι ἴσον πρὸς 3 μονάδες ἴσες μὲ ΑΒ, δηλαδὴ (ΑΔ) = 3(ΑΒ).

Τὸ πιθανότερον ὅμως εἶναι τὸ ΑΒ νὰ μὴ χωρῇ ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΔ. Ἂν π.χ. τὸ μοναδιαῖον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ = 1 m



Σχ. 20.

χωρῇ τρεῖς φορὲς εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ καὶ περισσεύει τὸ τμῆμα ΗΖ, τότε διὰ τὸ ΗΖ ποὺ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ΑΒ πέρνομεν ὡς μονάδα τὸ δέκατον τοῦ m καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δέκατον τοῦ m χωρεῖ 4 φορὲς εἰς τὸ ΗΖ καὶ περισσεύει τὸ τμῆμα ΘΖ. Τότε πέρνομεν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ m καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἑκατοστὸν τοῦ m χωρεῖ 6 φορὲς ἀκριβῶς εἰς τὸ ΘΖ. Τότε συμπεραίνομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ΕΖ εἶναι 3,46 m, ἤτοι

$$(ΕΖ) = 3{,}46 \ \text{m}.$$

Ἂν περισσεύσῃ τμῆμα καὶ μετὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἑκατοστοῦ, τότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ χιλιοστόν, τὸ δεκάκις χιλιοστὸν τοῦ μέτρου κ.λ.π. (*)

27. Ἄλλες μονάδες μήκους εἶναι ἡ ἀγγλικὴ **ὑάρδα** (yd) ποὺ ἔχει 914 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου (0,914 m) καὶ ὑποδιαιρεῖται εἰς 3 **πόδες** (ft) καὶ 36 **ἴντσες** (in). Ἑπομένως

1 yd = 914 mm = 91,4 cm = 0,914 m

1 ft = 30,5 cm = 0,305 m   1 in = 2,54 cm.

Εἰς τὸ ἐμπόριον παλαιότερα ἐχρησιμοποιεῖτο ὁ ἐμπορικὸς πῆχυς ποὺ εἶχε 0,64 m. καὶ ἐχωρίζετο εἰς 8 ρούπια.

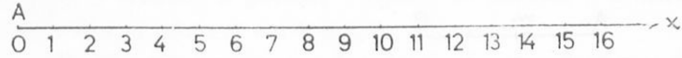
Διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν οἰκοπέδων χρησιμοποιεῖται ὁ **τεκτονικὸς πῆχυς** ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 75 cm ἢ 0,75 m.

Σημ.: Εἰς τὴν πραγματικότητα χρησιμοποιεῖται ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς ποὺ εἶναι τὰ 0,5625 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

---

* Θὰ ἴδωμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον ὅτι ὑπάρχουν εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν χωρεῖ ἀκριβῶς ὁποιαδήποτε ὑποδιαίρεσις τῆς μονάδος τοῦ μήκους (ὅσον μικρὴ καὶ ἂν εἶναι)

28. Γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἀκεραίων. Πέρνομεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΑΧ καὶ τὴν διαιροῦμεν εἰς ἴσα μέρη μὲ ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν Α αὐτῆς (τοῦτο εἶναι εὔκολον, ἀρκεῖ νὰ πάρωμεν ἕνα ὁποιονδήποτε ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου καὶ νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν πολ-



Σχ. 21.

λὲς φορὲς μὲ ἀρχὴν τὸ Α). Τοποθετοῦμεν κατόπιν εἰς τὴν ἀρχὴν Α τὸ μηδὲν καὶ μετὰ ἐπάνω σὲ κάθε ὑποδιαίρεσιν τοποθετοῦμεν κατὰ σειρὰν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . . Ἔτσι ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ μὲ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς παριστάνει τὴν **γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.**

Ἀσκήσεις

86. Πόσα cm ἔχει καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 15 m, 2 χιλιόμετρα ;

87. Πόσα mm ἔχει καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 8 m, 345 cm, 3 χιλιόμετρα ;

88. Νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς m, εἰς cm καὶ εἰς mm οἱ ἀριθμοὶ 25 mm, 458 m, 542 cm, 8 χιλιόμετρα ;

89. Νὰ γράψετε τοὺς ἀριθμοὺς α) δέκα ὀκτὼ χιλιοστά, β) 356 ἑκατοστά, γ) τριάντα πέντε (ἀκέραιος) καὶ 7 δεκάκις χιλιοστά, δ) σαράντα δύο ἑκατομμυριοστά, ε) πέντε χιλιόμετρα καὶ 3 ἑκατοστά.

90. Μετροῦμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ μὲ μονάδα τὸ (ΑΒ) = 1 cm. καὶ βρίσκομεν ὅτι τὸ (ΑΒ) = 1 cm χωρεῖ 245 φορὲς εἰς τὸ ΕΖ καὶ μένει ἕνα κομμάτι, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ δέκατον τοῦ (ΑΒ) χωρεῖ 3 φορὲς ἀκριβῶς. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος (ΕΖ) α) εἰς m, β) εἰς cm, γ) εἰς mm ;

91. Μὲ πόσα m ἰσοδυναμοῦν 250 yd ;

92. Μὲ πόσα m καὶ μὲ πόσα cm ἰσοδυναμοῦν 38 yd 2 ft 10 in;

93. Ἕνα νησὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ 150 ναυτικὰ μίλια. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀπόστασις αὐτὴ εἰς χιλιόμετρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

29. 1 Ἕνωσις συνόλων : Πέρνομεν τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς λέξεις *κῆπος* καὶ *σμῆνος*, δηλαδὴ

$$A = \{ \varkappa,\ \eta,\ \pi,\ o,\ \sigma \}$$
$$B = \{ \sigma,\ \mu,\ \eta,\ \nu,\ o, \}$$

καὶ σχηματίζομεν ἕνα νέον σύνολον Γ ποὺ περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα καὶ τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β, δηλαδὴ

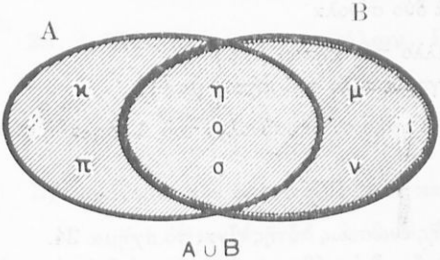
$$\Gamma = \{ \varkappa, \eta, \pi, o, \sigma, \mu, \nu \}$$

Τὸ σύνολον Γ τὸ λέμε **ἕνωσιν** τῶν συνόλων Α καὶ Β. Σύμβολον τῆς ἑνώσεως εἶναι τὸ $\cup$. Ἑπομένως ἔχομεν

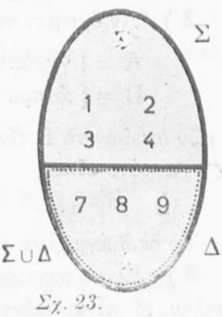
$\{ \varkappa,\ \eta,\ \pi,\ o,\ \sigma \} \cup \{ \sigma,\ \mu,\ \eta,\ \nu,\ o \} = \{ \varkappa,\ \eta,\ \pi,\ o,\ \sigma,\ \mu,\ \nu \}$ ἢ
$A \cup B = \Gamma$ (διαβάζομεν : Α ἕνωσις Β ἴσον Γ). Ὥστε

Ἕνωσις δύο συνόλων λέγεται τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα ὅλα τὰ στοιχεῖα καὶ τῶν δύο συνόλων καὶ μόνον αὐτά.

Τὸ στοιχεῖον η, ποὺ εἶναι κοινὸν στοιχεῖον τῶν συνόλων Α καὶ



Σχ. 22.



Σχ. 23.

Β, τὸ ἀναγράφομεν μίαν φορὰν εἰς τὴν ἕνωσιν Γ αὐτῶν. Ἐπίσης καὶ τὰ κοινὰ στοιχεῖα ο καὶ σ τὰ ἀναγράφομεν μίαν φορὰν εἰς τὴν ἕνωσιν αὐτῶν.

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι καὶ $B \cup A = \Gamma$. Ὥστε εἶναι πάντοτε

$$A \cup B = B \cup A$$

Ἡ ἰδιότης αὐτή, κατὰ τὴν ὁποίαν **ἡ ἕνωσις δύο συνόλων δὲν ἀλλάζει ἂν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν συνόλων,** λέγεται ἰδιότης τῆς **ἀντιμεταθέσεως** εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν συνόλων.

Τὸ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως Γ τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β εἶναι τὸ σκιασμένον σχῆμα 22.

29. 2 **Μερικαὶ περιπτώσεις. 1)** Ὅταν ἔχωμεν τὰ δύο σύνολα

$$\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\Delta = \{7, 8, 9\}$$

τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν στοιχεῖον, τότε ἡ ἕνωσις Ε αὐτῶν εἶναι

$E = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ δηλαδὴ

$\Sigma \cup \Delta = E$ (Σ ἕνωσις Δ ἴσον Ε)

Τὸ δὲ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων Σ καὶ Δ εἶναι ὁλόκληρον τὸ σκιασμένον σχῆμα 23.

Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν στοιχεῖον, λέγονται **ξένα** σύνολα ἢ **διαζευγμένα** σύνολα. Ὥστε

Δύο σύνολα λέγονται ξένα ἢ διαζευγμένα ὅταν δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν στοιχεῖον.

2) Ἂν ἔχωμεν τὰ δύο σύνολα

Α = { γαρύφαλλο τοῦ κήπου μας }
Β = { ἄσπρο γαρύφαλλο τοῦ κήπου μας }

ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Β εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α, δηλαδὴ εἶναι $B \subset A$, τότε εἶναι

$$A \cup B = A$$

Τὸ δὲ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως αὐτῆς εἶναι τὸ σχῆμα 24.

3) Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ κάθε σύνολον Α καὶ διὰ τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι πάντοτε

$$A \cup \varnothing = A \quad ἢ \quad \varnothing \cup A = A$$

δηλαδὴ τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ ἑνούμενον μὲ τὸ σύνολον Α **δὲν τὸ ἀλλάζει.** Διὰ τοῦτο τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ λέγεται **οὐδέτερον στοι-**

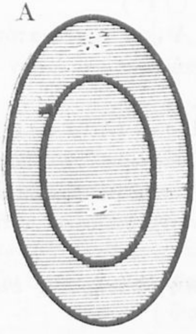
χεῖον διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων. Ἔχομεν ἐπίσης

$$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

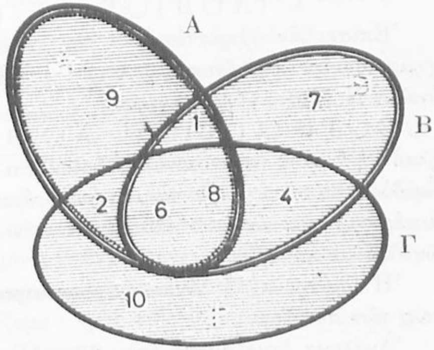
4) Εἰς τὰ μὴ ξένα σύνολα

$$A = \{ \varkappa, \eta, \pi, o, \sigma \} \quad \text{καὶ} \quad B = \{ \sigma, \mu, \eta, \nu, o \}$$

τῆς παραπάνω § 29.1 τὸ διάγραμμα τῆς ἑνώσεως αὐτῶν περιέχει



Σχ. 24.



Σχ. 25.

καὶ κοινὸν μέρος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχοῦν τὰ κοινὰ στοιχεῖα η,ο,σ.

5) Ἂν εἶναι $B \subseteq A$, τότε θὰ εἶναι

$$A \cup B = A \quad \text{ἢ} \quad A \cup A = A$$

29.3 Ἕνωσις τριῶν συνόλων. Πέρνομεν τρία σύνολα

$$A = \{ 1, 2, 6, 8, 9 \}$$
$$B = \{ 1, 4, 6, 7, 8 \}$$
$$\Gamma = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

Σχηματίζομεν τὴν ἕνωσιν Μ τῶν Α καὶ Β, δηλαδὴ

$$A \cup B = M = \{ 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9 \}$$

κατόπιν σχηματίζομεν τὴν ἕνωσιν Ν τῶν Μ καὶ Γ, δηλαδὴ

$$(A \cup B) \cup \Gamma = M \cup \Gamma = \{ 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 \} = N$$

Τὸ σύνολον Ν λέγεται ἕνωσις τῶν τριῶν συνόλων Α, Β, Γ τὸ δὲ διάγραμμα αὐτῆς εἶναι τὸ σχῆμα 25, τὸ ὁποῖον λέγεται **τρίφυλλον** διάγραμμα.

᾿Αξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἂν σχηματίσωμεν τὴν ἕνωσιν τοῦ B καὶ τοῦ Γ, δηλαδὴ

$$B \cup \Gamma = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$$

καὶ κατόπιν σχηματίσωμεν τὴν ἕνωσιν τοῦ A καὶ τοῦ $(B \cup \Gamma)$ εὑρίσκομεν

$$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\} = N$$

δηλαδὴ εὑρίσκομεν πάλιν ὡς ἕνωσιν τὸ σύνολον N. Ὥστε εἶναι

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$$

᾿Επίσης ἂν σχηματίσωμεν τὴν ἕνωσιν $A \cup \Gamma$ καὶ κατόπιν σχηματίσωμεν τὴν ἕνωσιν $(A \cup \Gamma) \cup B$, εὑρίσκομεν πάλιν τὸ σύνολον N. Ὥστε εἶναι πάντοτε

$$A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup \Gamma) \cup B$$

δηλαδὴ ἡ ἕνωσις τριῶν συνόλων βρίσκεται ἂν κάμωμεν τὴν ἕνωσιν τῶν δύο ἀπὸ αὐτὰ χωρὶς νὰ μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ σειρά μὲ τὴν ὁποίαν τὰ πέρνομεν καὶ κατόπιν κάμωμεν τὴν ἕνωσιν τῆς ἑνώσεως αὐτῶν τῶν δύο μὲ τὸ τρίτον.

῾Η ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **προσεταιριστικὴ** ἰδιότης τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων.

᾿Ανάλογα ἐργαζόμεθα ὅταν θέλωμεν νὰ κάμωμεν τὴν ἕνωσιν τεσσάρων ἢ περισσοτέρων συνόλων.

᾿Ασκήσεις

94. Μᾶς δίδουν τὰ δύο σύνολα

$A = \{x/x$ γράμμα τῆς λέξεως *Καλαμάτα*$\}$

$B = \{x/x$ γράμμα τῆς λέξεως *Καλαμπάκα*$\}$

Νὰ εὕρετε τὴν $A \cup B$

95. Ποία εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν τριῶν συνόλων

$K = \{x/x \in \Phi\ 5 \leqslant x \leqslant 10\}$

$\Lambda = \{x/x \in \Phi\ 3 < x < 7\}$

$M = \{x/x \in \Phi\ 4 < x < 9\}$

96. Νὰ κάμετε τὴν ἕνωσιν καὶ τὸ διάγραμμά της εἰς τὰ τρία ξένα σύνολα.

$Z = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$H = \{6,\ 7,\ 8\}$

$\Theta = \{9,\ 10,\ 11,\ 12\}$

97. Νὰ κάμετε τὴν ἕνωσιν καὶ τὸ διάγραμμά της εἰς τὰ δύο σύνολα.

$A = \{$γαρύφαλλο τοῦ κήπου σας$\}$

$B = \{$κόκκινο λουλοῦδι τοῦ κήπου σας$\}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

30.1 Πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν : Πέρνομεν τὰ δύο **ξένα** σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων *ἔχω* καὶ *ἴσον*, δηλαδὴ

$A = \{ε, χ, ω\}$ μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν 3
$B = \{ι, ν, ο, σ\}$ μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν 4

καὶ σχηματίζομεν τὴν ἕνωσιν $A \cup B$, δηλαδὴ

$$A \cup B = \{ε, χ, ω, ι, ν, ο, σ\}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον $A \cup B$ ἔχει πληθικὸν ἀριθμὸν 7. Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς 7 τῆς ἑνώσεως τῶν δύο ξένων συνόλων μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4 λέγεται **ἄθροισμα** τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 4. Τὸ ἄθροισμα σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$3 + 4 = 7$ (διαβάζομε : τρία **σὺν** τέσσαρα ἴσον ἑπτὰ)

καὶ γενικὰ $α + β = γ$. Ὥστε

Ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β λέγεται ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως δύο ξένων συνόλων μὲ πληθικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β.

Οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 4 λέγονται **προσθετέοι** ἢ **ὅροι** τοῦ ἀθροίσματος, ἡ δὲ πρᾶξις τὴν ὁποίαν κάνομεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα λέγεται **πρόσθεσις.**

Σύμβολον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ **σύν** $+$.

30.2 Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 3 καὶ 4, δηλαδὴ οἱ προσθετέοι εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $Φ_0$. Ἀλλὰ καὶ τὸ ἄθροισμα 7 αὐτῶν εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ συνόλου $Φ_0$. Ὥστε συμβολίζομεν

$$3,4 \in Φ_0 \implies 3 + 4 \text{ ἢ } 7 \in Φ_0$$

καὶ γενικὰ $\quad α,β \in Φ_0 \implies α + β \in Φ_0$

καὶ λέμε : Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι **ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου $Φ_0$** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διότι καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου $Φ_0$.

Σπουδαία παρατήρησις : Δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχυσιν μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν **σύνολον** καὶ **ἄθροισμα** διότι ἔχουν δύο διαφορετικὲς ἔννοιες. Πράγματι οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 4 ἔχουν σύνολον τὸ $\{3, 4\}$ ἢ τὸ $\{4, 3\}$ ἐνῶ ἔχουν **ἄθροισμα** τὸ $3+4$, δηλαδὴ τὸ 7.

Ἐπίσης δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχυσιν μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν **πρόσθεσις** καὶ **ἄθροισμα**. Διότι **πρόσθεσις** εἶναι ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομεν, ἐνῶ **ἄθροισμα** εἶναι τὸ ἐξαγόμενον ποὺ βρίσκομεν (ἡ πρόσθεσις εἶναι μία πρᾶξις, τὸ δὲ **ἄθροισμα** εἶναι ἕνας ἀριθμός).

30. 3 Ὅπως ἡ ἕνωσις δύο συνόλων εἶναι πρᾶξις ἀντιμεταθετική, ἔτσι καὶ ἡ πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν εἶναι πρᾶξις **ἀντιμεταθετική,** εἶναι δηλαδὴ

$$3+4=4+3$$

καὶ γενικὰ $\qquad \alpha+\beta=\beta+\alpha$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰδιότης **τῆς ἀντιμεταθέσεως** εἰς τὴν πρόσθεσιν δύο ἀριθμῶν.

31. Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι

$$A \cup \varnothing = A \quad \text{ἢ} \quad \varnothing \cup A = A$$

Ἂν α εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου A, τότε ἐπειδὴ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $\varnothing$ εἶναι μηδέν, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha+0=\alpha \quad \text{ἢ} \quad 0+\alpha=\alpha$$

Τὰ παραπάνω μᾶς λένε ὅτι: **Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο προσθετέους εἶναι μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ ἄλλος προσθετέος** ἢ

Τὸ μηδέν, ὅταν προστεθῇ εἰς ἕνα ἀριθμόν, δὲν τὸν μεταβάλλει.

Διὰ τοῦτο τὸ μηδὲν λέγεται **οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὴν πρόσθεσιν.**

Ἀσκήσεις

98. Ἂν εἶναι $\alpha+\beta=\alpha$, τότε τί συμπέρασμα βγάζομεν;

99. Δύο ἀριθμοὶ τοῦ συνόλου Φ_0 ἔχουν ἄθροισμα 14 καὶ ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι διψήφιος. Ποῖος μπορεῖ νὰ εἶναι ὁ ἄλλος;

100. Ἡ ἰδία ἐρώτησις ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοῦ συνόλου Φ.

101. Ποῖοι διψήφιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 25;

102. Ἂν $\alpha \in \Phi_0 \wedge \beta \in \Phi_0 \wedge \alpha + \beta = 1$, τότε ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β;

103. Ἂν $\alpha, \beta \in \Phi \wedge \alpha + \beta = 2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β.

104. Ἡ ἰδία ἐρώτησις ἂν $\alpha, \beta, \in \Phi_0 \wedge \alpha + \beta = 2$.

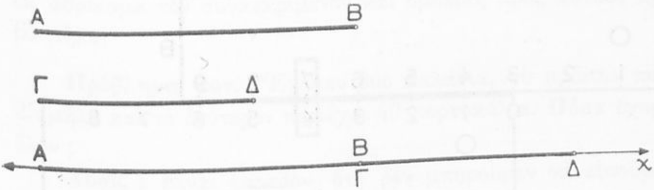
105. Ἂν $\alpha, \beta \in \Phi_0 \wedge \alpha + \beta = 4$, νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν τὰ α καὶ β ἀντιστοίχως.

106. Μᾶς λένε ὅτι εἰς τὸ σύνολον Φ εἶναι $\lambda + \mu = 8$. Νὰ βρῆτε ὅλας τὰς τιμὰς ποὺ μποροῦν νὰ πάρουν τὰ λ καὶ μ ἀντιστοίχως.

107. Ἡ ἰδία ἐρώτησις καὶ διὰ τὸ σύνολον Φ_0.

108. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε δύο διψηφίους ἀριθμοὺς ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 18; Σημειώσετε τὸ σύνολον αὐτῶν.

32. Πρόσθεσις δύο εὐθυγράμμων τμημάτων: Πέρνομεν τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Διὰ νὰ τὰ προσθέσωμεν



Σχ. 26.

τὰ καθιστῶμεν διαδοχικά, δηλαδὴ ἐπὶ ἑνὸς φορέως XX′ πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ συνέχεια πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχὴ Γ αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ. Τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ, δηλαδὴ

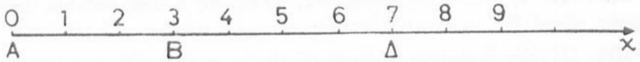
$$AB + \Gamma\Delta = A\Delta$$

Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι διαδοχικά, ὅπως τὰ ΑΒ καὶ ΒΔ τοῦ ἄξονος XX′, τότε τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ ΑΔ, δηλαδὴ

$$AB + B\Delta = A\Delta.$$

33. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς προσθέσεως: Εἴδαμεν εἰς τὴν § 28 πῶς παριστῶμεν γεωμετρικῶς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ

Μποροῦμεν νὰ εἰποῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3 ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ὁ ἀριθμὸς 4 ἀντιπροσωπεύεται



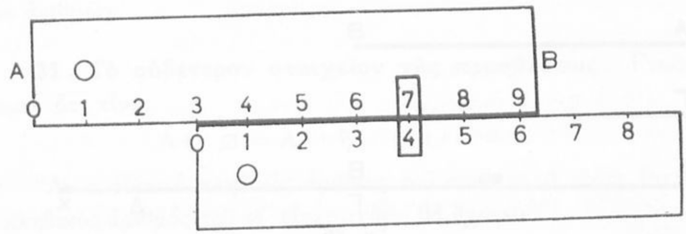
Σχ. 27.

ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΔ, δηλαδὴ $AB = 3$ καὶ $B\Delta = 4$. Ἑπομένως εὑρίσκομεν

$$AB + B\Delta = A\Delta$$
$$3 + 4 = 7$$

Τὰ παραπάνω μπορεῖ νὰ γίνουν πρακτικὰ ὡς ἑξῆς :

Πέρνομεν δύο ὑποδεκάμετρα καὶ τοποθετοῦμεν τὸ ἕνα σταθερὰ (ἀμετακίνητο) στὴν θέσιν ΑΒ καὶ τὸ ἄλλο νὰ κινῆται



Σχ. 28.

κατὰ μῆκος τοῦ πρώτου ἔτσι ὥστε τὸ 0 τοῦ δευτέρου νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ 3 τοῦ πρώτου, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ παραπάνω σχῆμα 28. Τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ 4 τοῦ δευτέρου θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ 7 τοῦ πρώτου καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$3 + 4 = 7$$

Ἀσκήσεις

109. Τὰ δύο διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἔχουν μήκη 345 cm τὸ πρῶτο καὶ 29 cm τὸ δεύτερο, δηλαδὴ εἶναι $(AB) = 345$ cm καὶ $(B\Gamma) = 29$ cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀθροίσματος $(AB) + (B\Gamma)$ εἰς cm, εἰς m καὶ εἰς mm.

110. Εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $(A\Delta) = 5845$ mm προσθέτομεν τὸ $(\Delta E) = 679$ mm. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος $(A\Delta) + (\Delta E)$ εἰς mm, εἰς cm καὶ εἰς m. ;

111. Ἂν εἶναι (ΑΒ) = 25 m, (ΒΓ) = 42 dm, (ΓΔ) = 587 cm καὶ (ΔΕ) = 5892 mm. νὰ εὑρεθοῦν εἰς mm καὶ εἰς m τὰ μήκη τῶν ἀθροισμάτων

α) (ΑΒ) + (ΒΓ), β) (ΒΓ) + (ΓΔ) καὶ γ) (ΓΔ) + (ΔΕ).

34. Ἄθροισμα ὁμοειδῶν — ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν. Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἑξῆς προβλήματα (*).

Πρόβλημα 1ον. Ἔχομεν δύο καλάθια μῆλα ποὺ περιέχουν τὸ πρῶτον 25 μῆλα καὶ τὸ δεύτερον 40 μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχομεν τὸ ὅλον ;

Λύσις : Εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ βροῦμεν

25 μῆλα + 40 μῆλα = 65 μῆλα

Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὸ ὅλον 65 μῆλα. Ἐδῶ οἱ προσθετέοι εἶναι καὶ συγκεκριμένοι καὶ ὁμοειδεῖς ἀριθμοί. Διὰ τοῦτο βρίσκομεν ὡς ἄθροισμα τὸν συγκεκριμένον καὶ ὁμοειδῆ πρὸς αὐτοὺς ἀριθμὸν 65 μῆλα.

Πρόβλημα 2ον. Ἔχομεν δύο καλάθια, τὸ πρῶτον περιέχει 25 μῆλα καὶ τὸ δεύτερον περιέχει 40 πορτοκάλια. Πόσα ἔχομεν τὸ ὅλον ;

Λύσις : Εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν μποροῦμεν νὰ εἰποῦμεν ὅτι ἔχομεν 25 + 40 = 65 διότι τὰ 65 δὲν εἶναι ὅλα μῆλα ἢ ὅλα πορτοκάλια. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα νὰ **σημειώσωμεν** τὸ ἄθροισμα ποὺ μᾶς ζητοῦν χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν διότι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίνουν εἶναι **ἑτεροειδεῖς.** Θὰ ἀπαντήσωμεν λοιπὸν ὅτι ἔχομεν 25 μῆλα + 40 πορτοκάλια.

Πρόβλημον 3ον. Ἔχομεν μίαν δωδεκάδα (ντουζίνα) μανδήλια καὶ 4 μανδήλια. Πόσα μανδήλια ἔχομεν ;

Λύσις : Καὶ ἐδῶ δὲν μποροῦμεν νὰ εἰποῦμεν ὅτι ἔχομεν 1 + 4 = 5 διότι ναὶ μὲν οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4 εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀλλὰ δὲν γίνονται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Διὰ τοῦτο θὰ μετατρέψωμεν τὴν

(*) **Πρόβλημα** εἶναι μία πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν μᾶς δίνουν μερικὰ στοιχεῖα (τὰ δεδομένα) καὶ μᾶς ζητοῦν νὰ βροῦμε ἄλλα (τὰ ζητούμενα). **Λύσις** δὲ τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἐργασία ποὺ κάνομεν διὰ νὰ βροῦμε τὰ ζητούμενα.

μίαν δωδεκάδα εἰς 12 μανδήλια καὶ τότε θὰ εἰποῦμεν ὅτι ἔχομεν

$$12 + 4 = 16 \text{ μανδήλια.}$$

'Απὸ τὰ παραπάνω τρία προβλήματα βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἕνα ἄθροισμα **ἐκτελεῖται** ὅταν οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ποὺ μᾶς δίνουν εἶναι καὶ ὁμοειδεῖς καὶ γίνονται ἀπὸ τὴν ἰδίαν μονάδα. Ὅταν δὲν συμβαίνῃ αὐτὸ ἀρκούμεθα νὰ **σημειώσωμεν** τὸ ἄθροισμα. 'Εκτελοῦμεν ἐπίσης τὸ ἄθροισμα ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι **ἀφῃρημένοι** ἀριθμοί.

35. Ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων : Πέρνομεν τὰ τρία σύνολα Α, Β, Γ ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο, ποὺ ἔχουν πληθικοὺς ἀριθμοὺς ἀντίστοιχα 3, 4, 6. Ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν § 29. 3, ἡ ἕνωσις αὐτῶν Ε εἶναι

$$E = (A \cup B) \cup \Gamma$$

'Επομένως ἡ ἕνωσις Ε αὐτῶν θὰ ἔχῃ πληθικὸν ἀριθμὸν λ ποὺ εἶναι

$$\lambda = (3 + 4) + 6 = 7 + 6 = 13$$

'Επίσης ἡ ἕνωσις Ε τῶν τεσσάρων συνόλων Α, Β, Γ, Δ ποὺ εἶναι ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ ἔχουν ἀντίστοιχα πληθικοὺς ἀριθμοὺς 3, 4, 6, 9 θὰ εἶναι

$$E = [(A \cup B) \cup \Gamma] \cup \Delta$$

μὲ πληθικὸν ἀριθμὸν $\lambda = [(3 + 4) + 6] + 9$ ποὺ βρίσκεται ὡς ἑξῆς

$$3 + 4 = 7$$
$$7 + 6 = 13$$
$$13 + 9 = 22$$

Ὥστε τὸ ἄθροισμα $3 + 4 + 6 + 9$ εἶναι 22, ἤτοι

$$3 + 4 + 6 + 9 = 22$$

'Απὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

Ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ ἐξαγόμενον ποὺ βρίσκομεν ἂν προσθέσωμεν τοὺς δύο πρώτους ἀριθμούς, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν τρίτον ἀριθμόν, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα προσθέσωμεν τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου πάρωμεν ὅλους τοὺς προσθετέους.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γίνεται καὶ ἡ πρόσθεσις πολλῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

Ἀσκήσεις

112. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα

α) 15 m + 28 m + 300 cm εἰς m καὶ εἰς cm
β) 2500 cm + 17 m + 8000 mm εἰς m καὶ εἰς cm.
γ) 350 dm + 28 500 cm + 34 m + 9000 mm εἰς m.

113. Μᾶς δίνουν τὰ μήκη τῶν ἑξῆς εὐθυγράμμων τμημάτων (ΑΒ) = 16 m., (ΒΓ) = 348 cm, (ΓΔ) = 5950 mm, (ΔΕ) = 345 dm.

Νὰ βρῆτε εἰς cm τὰ μήκη τῶν ἑξῆς ἀθροισμάτων

α) (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ), β) (ΑΒ) + (ΓΔ) + (ΔΕ)
γ) (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΕ), δ) (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΕ).

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

36.1 I. Προσεταιριστικὴ ἰδιότης: Θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$3+4+6$$

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς § 35 προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους προσθετέους $3+4=7$ καὶ κατόπιν εἰς τὸ $(3+4)$ ἢ 7 προσθέτομεν τὸ 6, δηλαδὴ $7+6=13$. Ἄρα

$$(3+4)+6=13$$

Ἀλλὰ μποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς δύο τελευταίους προσθετέους $4+6=10$ καὶ κατόπιν νὰ προσθέσωμεν τὸ 3 μὲ τὸ $4+6$ ἢ 10, δηλαδὴ $3+10=13$ ἢ

$$3+(4+6)=13$$

Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι

$$3+4+6=(3+4)+6=3+(4+6) \quad \text{ἢ}$$
$$3+4+6=7+6=3+10$$

καὶ γενικὰ $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **προσεταιριστικὴ** ἰδιότης τῆς προσθέσεως.

Ὥστε εἰς τὸ ἄθροισμα $3+4+6$ τὸν προσθετέον 4 τὸν προσθέτομεν εἴτε εἰς τὸν 3 καὶ βρίσκομεν $7+6$, εἴτε εἰς τὸν 6 καὶ βρίσκομεν $3+10$. Τελικὰ βρίσκομεν 13 καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως γίνεται ἀπέναντι.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ {}^{1}\ \ \\ 4\ 736 \\ 3\ 928 \\ \hline 8\ 664 \end{array} +$$

Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων βρίσκομεν 14. Ἀλλὰ αἱ 14 μονάδες ἀποτελοῦν **μίαν δεκάδα** καὶ περισσεύουν 4 μονάδες. Διὰ τοῦτο κάτω ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν γράφομεν τὰς 4 μονάδας, τὴν δὲ μίαν δεκάδα (κρατούμενον) τὴν προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων, ἔχομεν δηλαδὴ $2+3+1$ ἢ 6 δεκάδες (χωρὶς κρατούμενον) ποὺ τὰς γράφομεν κάτω ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν. Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἑκατοντάδων εὑρίσκομεν $9+7$ ἢ 16 ἑκατοντάδες ποὺ κάνουν 1 χιλιάδα καὶ 6 ἑκατοντάδες. Τὰς 6 ἑκατοντάδες τὰς γράφομεν κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴν τὴν δὲ 1 χιλιάδα (κρατούμενον) τὴν προσθέτομεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων, δηλαδὴ ἔχομεν $3+4+1$ ἢ 8 χιλιάδες ποὺ τὰς γράφομεν κάτω ἀπὸ τὴν γραμμήν.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸν ἑξῆς κανόνα τῆς προσθέσεως.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμοὺς θέτομεν τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, εἰς τρόπον ὥστε αἱ μονάδες νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς δεκάδας, αἱ ἑκατοντάδες κάτω ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας κ.ο.κ. Σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀπὸ τὰ δεξιὰ κάτω.

Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης ἂν βροῦμεν ἄθροισμα ἄνω τοῦ 9, γράφομεν κάτω ἀπὸ τὴν γραμμὴν μόνον τὰς εὑρισκομένας μονάδας, τὰς δὲ δεκάδας τὰς μετατρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως καὶ τὰς προσθέτομεν (ὡς κρατούμενα) εἰς αὐτάς. Τὰ κρατούμενα ἢ τὰ ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης ἢ τὰ γράφομεν ἀπὸ πάνω ἀπὸ τὴν στήλην των μὲ μικρότερα ψηφία.

38. Πῶς γίνεται ἡ δοκιμὴ τῆς προσθέσεως: Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν ἂν μία πρόσθεσις ἔχει γίνει **σωστά,** κάνωμεν ἀντιστρόφως τὴν πρόσθεσιν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἔτσι ἐφαρμόζομεν τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως. Ἂν βροῦμεν τὸ ἴδιον ἄθροισμα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις ἔγινε σωστά.

Μποροῦμεν ὅμως νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα, προσθέτοντες τμηματικῶς τοὺς προσθετέους. Εἰς τὴν παρακάτω πρόσθεσιν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 9487 τῶν πέντε πρώτων προσθετέων, κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα 49029 τῶν πέντε τελευταίων προσθετέων καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰ δύο μερικὰ ἀθροίσματα 9487 + 49029. Ἂν εὕρωμεν τὸ ἴδιον ἄθροισμα 58516 βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ πρόσθεσις ἔγινε σωστή.

348	
2 583	
4 975	
39	
1 542	9 487
27 583	
956	
3 458	
14 025	
3 007	49 029
58 516	58 516

Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι γραμμένοι κατὰ στήλας (προσθετικὰς) τότε κάνομεν τὰς προσθέσεις ὁριζοντίως καὶ καθέτως, τὸ δὲ τελικὸν ἄθροισμα πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἴδιον καὶ κατὰ τὴν ὁριζοντίαν τελικὴν πρόσθεσιν καὶ κατὰ τὴν κατακόρυφον, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ παρακάτω παράδειγμα.

Κατάστασις φόρου εἰσοδήματος

Ὄνομα καὶ ἐπώνυμον	Φόρος εἰσοδήματος	Πρόσθετος φόρος	Χαρτόσημον	Πρόσθετον χαρτόσημον	Ἄθροισμα
Κ. Γεωργίου	3.582	358	108	21	4.069
Π. Δημητρίου	4.937	494	130	26	5.587
Α. Μερλῆς	9.872	987	296	59	11.214
Δ. Ἰωάννου	830	83	25	5	943
Β. Παππᾶς	6.389	639	192	38	7.258
Χ. Πανάγου	7.500	750	225	45	8.520
ἄθροισμα →	33.110	3.311	976	194	37.591

Ἐκτελοῦμεν τὰς προσθέσεις καὶ καθέτως καὶ ὁριζοντίως. Ἂν προσθέσωμεν τὰ καθέτως εὑρισκόμενα ἀθροίσματα καὶ τὰ ὁριζοντίως εὑρισκόμενα ἀθροίσματα πρέπει νὰ βροῦμε τὸ **τελικὸν ἄθροισμα** 37 591.

39. Ἀπὸ μνήμης λογισμός: Τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως μποροῦμεν νὰ τὰς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμόν. Π.χ. 34 + 72 (30 + 70 = 100, 4 + 2 = 6, 100 + 6 = 106).
589 + 240 (500 + 200 = 700, 80 + 40 = 120, 700 + 120 + 9 = 829)

$$3875 + 5942 \left\{ \begin{array}{r} 3000 + 5000 = 8000 \\ 800 + 900 = 1700 \\ 70 + 40 = 110 \\ 5 + 2 = 7 \end{array} \right\} = 9817$$

Ἀσκήσεις

114. Νὰ βρῆτε ἀπὸ μνήμης τὰ ἀθροίσματα

α) 7400 + 3850 + 5420

β) 15 000 + 23 500 + 47 500 + 6 000

γ) 23 200 + 19 200 + 5 200 + 8 200 + 34 200

115. Νὰ κάμετε τὰς παρακάτω προσθέσεις

3 587	5 634	125 348	586 000
452	37 082	27 852	98 750
5 608	48 953	3 967	645
25	378	345	6 452
250	4 945	28	79 854
6 038	67 000	9 852	893 342

116. Νὰ συμπληρώσετε μὲ τὸν κατάλληλον ἀριθμὸν κάθε τελεία εἰς τὰς παρακάτω προσθέσεις

α)	β)	γ)
23.5	35897	25089
.63.	.345	.78.2
459	8.73	6.79
...27	.65..	9.53.
13240	98049	210607

117. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε λάδι καὶ πλήρωσε 15824 δρχ. Ἐπλήρωσε φόρον 458 δρχ. καὶ διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ λαδιοῦ 672 δρχ. τὸ πούλησε δὲ μὲ κέρδος 975 δρχ. Πόσας δραχμὰς τὸ πούλησε ;

118. Ἕνας ἀγρότης πούλησε τὰ προϊόντα του καὶ πῆρε ἀπὸ τὸ σιτάρι 3500 δρχ. ἀπὸ τὸ λάδι 7852 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ κρασὶ 4950 δρχ. Πόσες δρχ. πῆρε ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν προϊόντων του ;

119. Τέσσαρες πλημμυροπαθεῖς χωρικοὶ πῆραν χρηματικὸν βοήθημα ὡς ἑξῆς : ὁ 1ος πῆρε 5400 δρχ. ὁ 2ος πῆρε 1950 δρχ. περισσότερο, ὁ 3ος πῆρε 753 δρχ. περισσότερα ἀπὸ τὸν 2ον καὶ ὁ 4ος πῆρε 2325 δρχ. περισσότερα ἀπὸ τὸν 1ον. Πόσες δραχμὲς πῆρε καθένας ; καὶ πόσες δραχμὲς ἦτο ὅλον τὸ χρηματικὸν βοήθημα ;

120. Ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι Α = 1 532 δρχ., Β = 3 950 δρχ., Γ = Α + Β, Δ = Α + Γ, Ε = Β + Δ. Τότε νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα α) Α + Β + Γ, β) Α + Γ + Δ, γ) Α + Β + Γ + Δ.

121. Ἕνα ἡμιφορτηγὸν αὐτοκίνητον τοῦ ἑνὸς τόνου (δηλαδὴ ποὺ πέρνει φορτίον 1000 κιλῶν) θέλει νὰ μεταφέρῃ 1 600 κιλὰ τσιμέντο ἀπὸ τὴν Ἐλευσῖνα στὴν Κόρινθο, γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ Κόρινθος ἀπέχει ἀπὸ τὴν Ἐλευσῖνα 62 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξῃ τὸ αὐτοκίνητο, α) ἂν μείνῃ τελικὰ στὴν Κόρινθο ; β) ἂν ἐπιστρέψῃ στὴν Ἐλευσῖνα ;

122. Στὴν Γ′ τάξιν τοῦ Γυμνασίου σας φοιτοῦν 42 μαθηταί, στὴν Β′ τάξιν φοιτοῦν 5 περισσότεροι καὶ στὴν Α′ τάξιν φοιτοῦν 8 περισσότεροι ἀπὸ τὴν Β′ τάξιν. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν σὲ κάθε τάξιν καὶ πόσους μαθητὰς ἔχει τὸ Γυμνάσιόν σας ;

123. Ἂν ἔχωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὁ ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι α, τότε ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος ;

124. Νὰ γράψετε τρεῖς διαδοχικοὺς ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος εἶναι ὁ α.

125. Νὰ γράψετε τέσσαρες διαδοχικοὺς ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μικρότερος τριψήφιος ἀριθμός.

126. Νὰ γράψετε πέντε διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μεγαλύτερος διψήφιος ἀριθμός.

127. Νὰ συμπληρώσετε τὴν κάτωθι μισθοδοτικὴν κατάστασιν :

Ὄνομα καὶ ἐπώνυμον	Μισθὸς	Προσαύξησις πολυετίας	Ἐπίδομα ἀκριβείας	Πρόσθετον βοήθημα	Ἄθροισμα
Κ. Ν.	3 500	350	175	105	. . .
Λ. Μ.	4 000	400	200	120	. . .
Α. Π.	3 750	375	188	112	. . .
Βι Σ.	3 800	380	190	114	. . .
Γ. Π.	2 500	250	125	75	. . .
Ἄθροισμα	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ἡ ἔννοια τῆς συνεπαγωγῆς.— Διαγραφὴ

40.1 I Εἰς τὴν ἰσότητα: Τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα τῆς ἰσότητος τῆς § 15.2

$$\alpha = \beta \;\wedge\; \beta = \gamma \;\Longrightarrow\; \alpha = \gamma$$

μποροῦμεν νὰ τὴν διαβάσωμεν καὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

α) Ἀφοῦ εἶναι $\alpha = \beta$

καὶ $\beta = \gamma$

ἄρα **συμπεραίνομεν** ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \gamma$.

β) Τὸ $\alpha = \beta$

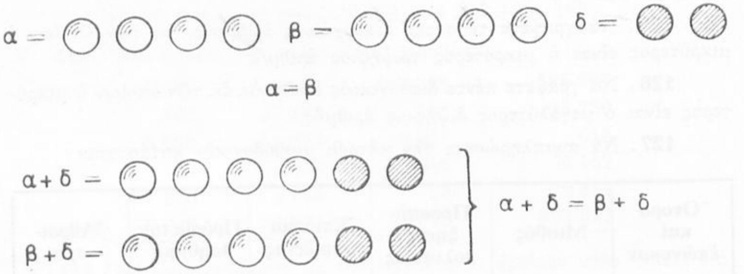
καὶ $\beta = \gamma$ **συνεπάγεται** ὅτι $\alpha = \gamma$

Ὥστε τὸ γεγονὸς ὅτι εἶναι $\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma$ μᾶς δίνει τὸ **λογικὸν συμπέρασμα** (συνεπάγεται) ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \gamma$.

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἔννοια τῆς **συνεπαγωγῆς**.

Τὴν ἔννοιαν τῆς συνεπαγωγῆς τὴν βλέπομεν καὶ εἰς τὸ ἑξῆς :

Ἂν κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο ἴσους ἀριθμοὺς α καὶ β παριστάνει βόλους π.χ. 4 βόλους καὶ ὁ δ παριστάνει π.χ. 2 βόλους, ὅπως



Σχ. 29.

φαίνεται στὸ σχῆμα, θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν $\alpha = \beta$, ἀφ' ἑτέρου δὲ

$$\boxed{\alpha + \delta = \beta + \delta}$$

Ὥστε τὸ $\alpha = \beta$ **συνεπάγεται** τὸ $\alpha + \delta = \beta + \delta$, δηλαδὴ

$$\boxed{\alpha = \beta \implies \alpha + \delta = \beta + \delta} \qquad (1)$$

καὶ τὸ ἀντίστροφον

$$\alpha + \delta = \beta + \delta \implies \alpha = \beta \qquad (2)$$

Ἡ παραπάνω σχέσις (2) μᾶς δίνει τὴν ἔννοιαν τῆς **διαγραφῆς** εἰς τὴν πρόσθεσιν. Πράγματι ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος

$$\alpha + \delta = \beta + \delta$$

διαγράφομεν (βγάζομεν) τὸ δ καὶ βρίσκομεν

$$\alpha = \beta$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος, τότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

Ἀπὸ δὲ τὴν σχέσιν (2) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

Ἐὰν διαγράψωμεν (ἀφαιρέσωμεν) καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

40. 2 Ἔχομεν ἐπίσης καὶ τὴν συνεπαγωγὴν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ \gamma=\delta\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν συνεπαγωγὴν (3) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι
Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη δύο ἰσότητες, τότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

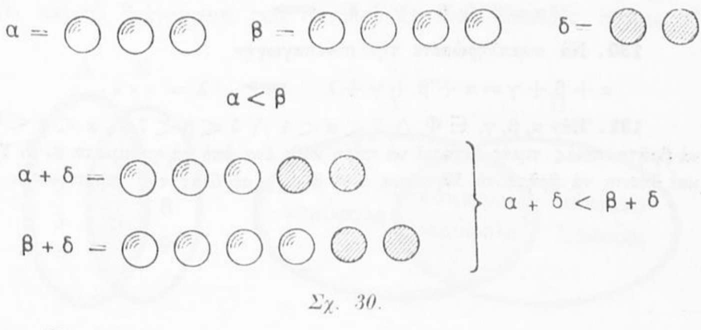
Ἔχομεν ἐπίσης καὶ τὴν συνεπαγωγὴν

$$\alpha+\beta=\alpha \Longrightarrow \beta=0$$

41. II **Εἰς τὴν ἀνισότητα**: Τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα τῆς ἀνισότητος τῆς § 15.3

$$\alpha<\beta \wedge \beta<\gamma \Longrightarrow \alpha<\gamma$$

μποροῦμε νὰ τὴν διαβάσωμεν ὡς συνεπαγωγὴν καὶ ὡς ἑξῆς :



Σχ. 30.

Τὸ $\alpha<\beta$

καὶ $\beta<\gamma$ **συνεπάγεται** ὅτι καὶ $\alpha<\gamma$

Ἐπίσης ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς α παριστάνει 3 βόλους, ὁ ἀριθμὸς β παριστάνει 4 βόλους καὶ ὁ ἀριθμὸς δ παριστάνει 2 βόλους. Τότε ἔχομεν τὴν ἑξῆς συνεπαγωγήν :

$$\alpha < \beta \implies \alpha + \delta < \beta + \delta \qquad (4)$$

καὶ τὴν ἀντίστροφον συνεπαγωγὴν

$$\alpha + \delta < \beta + \delta \implies \alpha < \beta \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (4) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

Ἐὰν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος, τότε προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς
καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν (5) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

Ἐὰν διαγράψωμεν (ἀφαιρέσωμεν) καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τότε προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἡ σχέσις (5) μᾶς δίνει καὶ τὴν ἔννοιαν τῆς **διαγραφῆς** εἰς μίαν ἀνισότητα.

Ἀσκήσεις

128. Νὰ συμπληρώσετε τὴν συνεπαγωγὴν

$$\alpha + \beta = \alpha \implies \beta = \ldots$$

129. Νὰ συμπληρώσετε τὴν συνεπαγωγὴν

$$\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma + \delta \implies \alpha = \ldots$$

130. Νὰ συμπληρώσετε τὴν συνεπαγωγὴν

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma + \lambda \implies \lambda = \ldots .$$

131. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \in \Phi \wedge 2 < \alpha < 4 \wedge 4 \leqslant \beta < 7 \wedge \alpha < \gamma < 5$ νὰ βρῆτε ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ γράμματα α, β, γ, καὶ ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ σὲ ὅλας τὰς περιπτώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

Τομὴ συνόλων. Συμπληρωματικὰ σύνολα.

42.1 Τομὴ συνόλων. Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

καὶ σχηματίζομεν ἕνα νέον σύνολον Γ ποὺ περιέχει **μόνον τὰ κοινὰ στοιχεῖα** 5 καὶ 6 τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β, δηλαδὴ

$$\Gamma = \{5, 6\}$$

Τὸ σύνολον Γ τὸ λέμε **τομὴν** τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β. Ὥστε

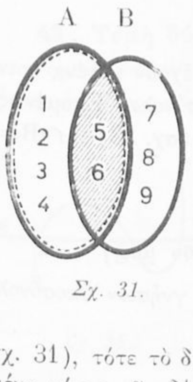
Τομὴ δύο συνόλων εἶναι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ μόνον στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων.

Σύμβολον τῆς τομῆς τῶν συνόλων εἶναι τὸ $\cap$. Ἔχομεν λοιπὸν

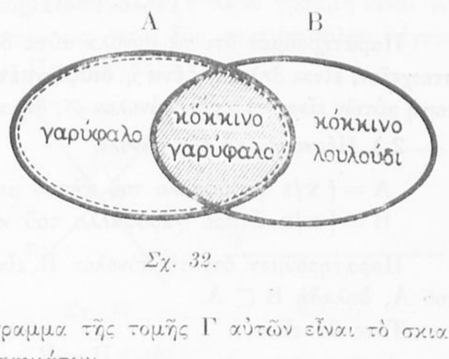
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{5, 6, 7, 8, 9\} = \{5, 6\} \quad \text{ἢ}$$

$$A \cap B = \Gamma \quad (\text{διαβάζομεν : Α τομὴ Β ἴσον Γ})$$

Ἂν τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Α εἶναι τὸ ᾠοειδὲς σχῆμα Α, καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ συνόλου Β εἶναι ᾠοειδὲς σχῆμα Β



Σχ. 31.



Σχ. 32.

(σχ. 31), τότε τὸ διάγραμμα τῆς τομῆς Γ αὐτῶν εἶναι τὸ σκιασμένο μέρος τῶν δύο σχημάτων.

42. 2 **Ἄλλα παραδείγματα τομῆς συνόλων.**

1) Ἂν εἶναι

A = { x/x γαρύφαλλο τοῦ κήπου μας }
B = { x/x κόκκινο λουλούδι τοῦ κήπου μας }

τότε θὰ εἶναι (σχ. 32)

A ∩ B = { x/x κόκκινο γαρύφαλλο τοῦ κήπου μας }

2) Ἂν εἶναι

A = { x/x γράμμα τῆς λέξεως *καταβρέχω* }
B = { x/x γράμμα τῆς λέξεως *παραγωγή* }

τότε θὰ εἶναι

$$A \cap B = \{\alpha, \rho, \omega\}$$

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἂν πάρωμεν πρῶτα τὸ σύνολον B καὶ ἔπειτα τὸ σύνολον A, τότε ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι πάλιν

$$B \cap A = \{\alpha, \rho, \omega\}$$

Ὥστε εἶναι πάντοτε

$$A \cap B = B \cap A$$

δηλαδὴ ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς **ἀντιμεταθέσεως** καὶ εἰς τὴν τομὴν δύο συνόλων.

42. 3 **1) Μερικαὶ περιπτώσεις:** Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{6, 7, 8, 9\}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σύνολα αὐτὰ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν στοιχεῖον, εἶναι δηλαδὴ **ξένα** ἢ **διαζευγμένα** σύνολα. Ἑπομένως ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$, δηλαδὴ (σχ. 33) $A \cap B = \varnothing$

2) Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

A = { x/x γαρύφαλλο τοῦ κήπου μου }
B = { x/x ἄσπρο γαρύφαλλο τοῦ κήπου μου }

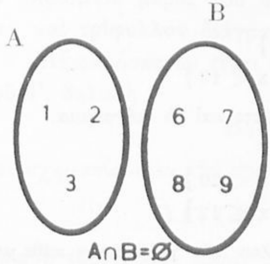
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον B εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ A, δηλαδὴ $B \subset A$.

Τότε θὰ εἶναι

$$A \cap B = B$$

Ὥστε : $B \subset A \implies A \cap B = B$, δηλαδὴ

Ὅταν ἕνα σύνολον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ἑνὸς ἄλλου συνόλου, τότε ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦτο.



Σχ. 33.

Σχ. 34.

3) Ὅταν συμβῇ ὅλα τὰ γαρύφαλλα τοῦ κήπου μου νὰ εἶναι ἄσπρα, τότε θὰ εἶναι $B \subseteq A$, δηλαδὴ $B = A$ καὶ ἄρα

$$B \subseteq A \implies B \cap A = A \quad \text{ἢ} \quad A \cap A = A.$$

4) Στὸν κῆπο μου δὲν ὑπάρχουν ἄσπρα γαρύφαλλα. Τότε εἶναι $B = \varnothing$ καὶ ἄρα

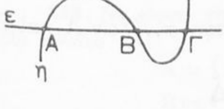
$$A \cap B = A \cap \varnothing = \varnothing$$

Ὁμοίως ἂν ἦτο $A = \varnothing$, τότε $A \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing$.

5) Ἐπίσης εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν εἶναι καὶ $A = \varnothing$ καὶ $B = \varnothing$, τότε

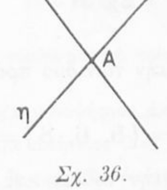
$$A \cap B = \varnothing \quad \text{ἢ} \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing.$$

43. Τομὴ δύο σημειοσυνόλων: Κάθε γραμμὴ εἶναι καὶ ἕνα σημειοσύνολον. Ἐπομένως **τομὴ** δύο σημειοσυνόλων λέγεται τὸ κοινὸν μέρος αὐτῶν. Παραδείγματα



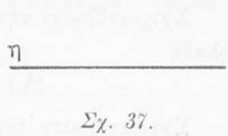
Σχ. 35.

$\varepsilon \cap \eta = \{A, B, \Gamma\}$



Σχ. 36.

$\varepsilon \cap \eta = \{A\}$



Σχ. 37.

$\varepsilon \cap \eta = \varnothing$

Ἀσκήσεις

132. Νὰ σχηματίσετε τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς λέξεις *παράδεισος*, *περιπατῶ* καὶ νὰ σχηματίσετε τὴν τομὴν αὐτῶν.

133. Μᾶς δίδουν τὰ σύνολα

$$\Sigma = \{ x/x \text{ ἀκέραιος} \leqslant 9 \}$$
$$T = \{ x/x \text{ ἀκέραιος } 5 < x < 13 \}$$

Νὰ εὕρετε τὴν τομὴν $\Sigma \cap T$. Νὰ κάμετε καὶ τὸ διάγραμμα.

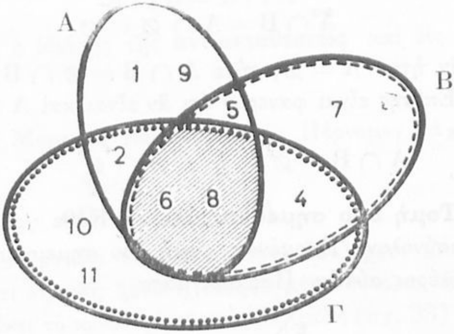
134. Ποία εἶναι ἡ τομὴ τῶν συνόλων

$$A = \{ x/x \text{ ἀκέραιος } 3 < x < 20 \}$$
$$B = \{ x/x \text{ ἀκέραιος } 8 \leqslant x \leqslant 12 \}$$

135. Νὰ εὕρετε τὴν τομὴν τῶν συνόλων τῶν γραμμάτων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς λέξεις *δένδρον*, *σταφύλι*.

44. Τομὴ τριῶν συνόλων : Πέρνομεν τὰ τρία σύνολα

$$A = \{ 1, 2, 5, 6, 8, 9 \}$$
$$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8 \}$$
$$\Gamma = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 11 \}$$



Σχ. 38.

Σχηματίζομεν τὴν τομὴν τῶν δύο πρώτων συνόλων A καὶ B, δηλαδὴ

$$A \cap B = \{ 5, 6, 8 \} = \Delta$$

Σχηματίζομεν τὴν τομὴν τοῦ Δ καὶ τοῦ Γ, ἤτοι

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \Delta \cap \Gamma = \{ 6, 8 \} = E$$

Τὸ σύνολον $E = \{6, 8\}$ λέγεται τομὴ τῶν τριῶν συνόλων Α, Β, Γ.

Τὸ διάγραμμα τῆς τομῆς τῶν τριῶν συνόλων Α, Β, Γ εἶναι τὸ σκιασμένο μέρος τοῦ σχήματος 38. Τὸ διάγραμμα 38 λέγεται καὶ **τρίφυλλον** διάγραμμα.

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἂν πάρωμεν τὴν τομὴν τοῦ Β καὶ τοῦ Γ, δηλαδὴ

$$B \cap \Gamma = \{4, 6, 8\}$$

καὶ σχηματίσωμεν τὴν τομὴν τοῦ Α καὶ τοῦ $B \cap \Gamma$, θὰ εὕρωμεν

$$A \cap (B \cap \Gamma) = \{6, 8\} = E$$

δηλαδὴ εὑρίσκομεν πάλιν τὴν τομὴν $\{6, 8\}$ τῶν τριῶν συνόλων

Ἐπίσης ἂν πάρωμεν τὴν τομὴν τῶν Α καὶ Γ, δηλαδὴ

$$A \cap \Gamma = \{2, 6, 8\}$$

καὶ ἔπειτα σχηματίσωμεν τὴν τομὴν τοῦ Β καὶ τοῦ $A \cap \Gamma$ εὑρίσκομεν

$$(A \cap \Gamma) \cap B = \{6, 8\} = E$$

εὑρίσκομεν δηλαδὴ πάλιν τὴν τομὴν $\{6, 8\}$ τῶν τριῶν συνόλων. Ἑπομένως συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι

$$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap \Gamma) \cap B.$$

Ὥστε ἡ τομὴ τῶν τριῶν συνόλων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς σειρᾶς μὲ τὴν ὁποίαν πέρνομεν αὐτὰ ἀνὰ δύο.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **προσεταιριστικὴ** ἰδιότης τῆς τομῆς τῶν συνόλων.

Ἀνάλογα ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν τομὴν τεσσάρων ἢ περισσοτέρων συνόλων.

Ἀσκήσεις

136. Νὰ εὕρετε τὴν τομὴν καὶ τὸ τρίφυλλον διάγραμμα αὐτῆς εἰς τὰ τρία σύνολα

$$A = \{x/x \text{ μονοψήφιος ἀκέραιος}\}$$
$$B = \{x/x \text{ ἀκέραιος } 7 \leqslant x \leqslant 12\}$$
$$\Gamma = \{x/x \text{ περιττὸς ἀκέραιος}\}$$

137. Ποία εἶναι ἡ τομὴ τῶν τριῶν συνόλων

$E = \{ \text{λουλούδια} \}$
$Z = \{ \text{τριαντάφυλλα} \}$
$H = \{ \text{κόκκινα τριαντάφυλλα} \}$

138. Μᾶς δίδουν τὰ σύνολα

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$
$B = \{ 1, 3, 5, 7, 9,) \}$
$\Gamma = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
$\Delta = \{ 1, 3, 9, 12 \}$
$E = \{ 1, 4, 8, 12, 16 \}$

νὰ σχηματίσετε τὰς τομὰς $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cap \Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \cap \Delta \cap E$, $B \cap \Gamma \cap \Delta \cap E$, $A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta \cap E$.

139. Νὰ βρῆτε τὴν τομὴν $A \cap B$, τὴν τομὴν $B \cap \Gamma$ καὶ τὴν τομὴν $A \cap \Gamma$ τῶν συνόλων A, B, Γ τῆς § 44 (σχῆμα 38).

45.1 Συμπληρωματικὰ σύνολα. Διαμερισμός: Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

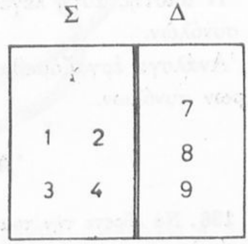
$A = \{ x/x \text{ γαρύφαλλο τοῦ κήπου μου} \}$
$B = \{ x/x \text{ ἄσπρο γαρύφαλλο τοῦ κήπου μου} \}$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον B εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ A, δηλαδὴ $B \subset A$. Ἐπομένως, ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν § 42.3, 2ον ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι

$$A \cap B = B.$$

Εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 39 ὁ μεγάλος κύκλος A παρι-

Σχ. 39.



Σχ. 40.

στάνει ὅλα τὰ γαρύφαλλα τοῦ κήπου μας ἄσπρα καὶ χρωματιστά, ὁ δὲ ἐντὸς αὐτοῦ μικρὸς κύκλος B παριστάνει ὅλα τὰ **ἄσπρα** γαρύφαλλα. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ μέρος τοῦ μεγάλου κύκλου πού εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν μικρὸν κύκλον Β παριστάνει ὅλα τὰ **μὴ ἄσπρα** (χρωματιστὰ) γαρύφαλλα. Ἂν ὀνομάσωμεν Β′ τὸ σύνολον αὐτῶν δηλαδὴ

Β′ = { x/x μὴ ἄσπρο γαρύφαλλο τοῦ κήπου μου }

Τότε θὰ εἶναι $B' \subset A$ καὶ

$$B \cap B' = \varnothing$$

Τὸ σύνολον Β′ τὸ ὀνομάζομεν **συμπληρωματικὸν** σύνολον τοῦ Β ἢ ἁπλῶς **συμπλήρωμα** τοῦ Β.

45. 2 Δύο συμπληρωματικὰ σύνολα Β καὶ Β′ ἔχουν τὰς ἑξῆς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας.

α) Ἡ ἕνωσίς των μᾶς δίνει τὸ **κυρίαρχον σύνολον** Α, ἡ δὲ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$.

β) Ἕνα στοιχεῖον λ τοῦ κυριάρχου συνόλου ἢ θὰ εἶναι ἄσπρο γαρύφαλλο καὶ ἄρα θὰ ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Β, ἢ θὰ εἶναι μὴ ἄσπρο γαρύφαλλο καὶ ἄρα θὰ ἀνήκη εἰς τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον Β′. Δηλαδὴ τὸ τυχὸν στοιχεῖον ἑνὸς κυριάρχουν συνόλου **δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ταυτοχρόνως στοιχεῖον καὶ τοῦ συνόλου Β καὶ τοῦ συμπληρωματικοῦ συνόλου Β′ αὐτοῦ.**

45. 3 Ὅταν ἕνα κυρίαρχον σύνολον Α διαμοιράζεται εἰς τὰ δύο συμπληρωματικὰ ὑποσύνολα Β καὶ Β′ αὐτοῦ ὅταν δηλαδὴ εἶναι

$$A = B \cup B'$$

τότε λέμε ὅτι ἔχομεν **διαμερισμὸν τοῦ κυριάρχου συνόλου εἰς δύο κλάσεις,** τὴν κλάσιν Β καὶ τὴν κλάσιν Β′.

Τὰ δύο ξένα σύνολα (σχ. 40)

$$\Sigma = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$
$$\Delta = \{7,\ 8,\ 9\}$$

ἔχουν ἕνωσιν $E = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$ καὶ τομὴν $\Sigma \cap \Delta = \varnothing$. Ἂν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον Ε ὡς κυρίαρχον σύνολον, τότε τὰ Σ καὶ Δ εἶναι συμπληρωματικὰ ὑποσύνολα τοῦ Ε καὶ τότε λέμε ὅτι ἔχομεν διαμερισμόν τοῦ συνόλου Ε εἰς τὰς δύο κλάσεις Σ καὶ Δ.

Ἀσκήσεις

140. Μᾶς δίνουν τὸ σύνολον $A = \{ x/x$ μονοψήφιος ἀριθμός $\}$.

Νὰ διαμοιρασθῇ τοῦτο εἰς δύο ὑποσύνολα ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα νὰ ἔχῃ τὰ στοιχεῖα 2, 5, 6. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἄλλο ;

141. Τὰ δύο σύνολα $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ εἶναι συμπληρωματικὰ τοῦ κυριάρχου συνόλου Γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον Γ.

142. Νὰ σχηματίσετε τὸ σύνολον Σ τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας καὶ νὰ τὸ διαμοιράσετε εἰς δύο ὑποσύνολα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα νὰ εἶναι ὑποσύνολον τῶν ἀγοριῶν καὶ τὸ ἄλλο νὰ εἶναι ὑποσύνολον τῶν κοριτσιῶν.

143. Ἂν ἡ τάξις σας ἔχῃ μόνον ἀγόρια (ἢ μόνον κορίτσια) πῶς θὰ γίνῃ ὁ διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Σ τῶν μαθητῶν εἰς τὰ δύο ὑποσύνολα ἀγοριῶν καὶ κοριτσιῶν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

Ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων

46. Ἀφαίρεσις δύο ἀριθμῶν : Πέρνομεν ἕνα καλάθι πορτοκάλια, βγάζομεν μερικὰ ἀπὸ αὐτὰ καὶ τὰ ἄλλα μένουν μέσα στὸ καλάθι.

Ἂν εἶναι Α τὸ σύνολον ὅλων τῶν πορτοκαλλιῶν, Β τὸ σύνολον τῶν πορτοκαλιῶν ποὺ βγάζομεν καὶ Γ τὸ σύνολον τῶν πορτοκαλιῶν ποὺ μένουν μέσα εἰς τὸ καλάθι τότε διαπιστώνομεν ὅτι τὸ Α (κυρίαρχον σύνολον) διαμερίζεται εἰς τὰ δύο συμπληρωματικὰ ὑποσύνολα Β καὶ Γ αὐτοῦ, ἔχομεν δηλαδὴ

$$A = B \cup \Gamma \qquad (1)$$

Τὸ ὑποσύνολον Γ (πορτοκάλια ποὺ μένουν) τὸ λέμε **διαφορὰν** τῶν δύο συνόλων Α (ὅλα τὰ πορτοκάλια) καὶ Β (πορτοκάλια ποὺ βγάζομεν) καὶ τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς.

$$A - B = \Gamma \qquad (2)$$

Ἂν εἶναι 20 ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Α καὶ 8 ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Β, τότε εὔκολα βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Γ εἶναι 12 καὶ τότε ἡ σχέσις (2) γίνεται

$$20 - 8 = 12 \qquad (3)$$

καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$20 = 8 + 12 \qquad (4)$$

Ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις ποὺ δηλώνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ἢ ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) λέγεται **ἀφαίρεσις,** ὁ ἀριθμὸς 20 (σύνολον Α) λέγεται **μειωτέος** διότι μειώνεται δηλαδὴ ἐλαττώνεται, ὁ ἀριθμὸς 8 (σύνολον Β) λέγεται **ἀφαιρετέος** διότι ἀφαιρεῖται ἢ βγαίνει καὶ ὁ ἀριθμὸς 12 (σύνολον Γ) ποὺ μένει λέγεται **διαφορὰ** ἢ **ὑπόλοιπον**.

Ἡ διαφορὰ 12 ἔχει τὸ ἑξῆς γνώρισμα : Ἂν προστεθῇ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, δίνει ὡς ἄθροισμα τὸν μειωτέον.

Σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ **πλὴν** ἢ **μεῖον** —. Ὥστε

'Αφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν ὁποίαν μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοὶ (ὁ πρῶτος = μειωτέος καὶ ὁ δεύτερος = ἀφαιρετέος) **καὶ εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἂν προστεθῇ εἰς τὸν δεύτερον μᾶς δίδει τὸν πρῶτον ἀριθμόν.**

Γενικὰ ἡ ἀφαίρεσις σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\alpha - \beta = \gamma} \qquad (5)$$

Εὔκολα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι, διὰ νὰ μπορῇ νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις, πρέπει ὁ ἀφαιρετέος **νὰ μὴ εἶναι μεγαλύτερος** ἀπὸ τὸν μειωτέον. Ὥστε εἰς τὴν ἀφαίρεσιν

$\alpha - \beta$ ὑπάρχει ὁ **περιορισμὸς** νὰ εἶναι $\alpha \geqslant \beta$

Πραγματικὰ ἂν ἀπὸ τὰ 20 πορτοκάλια θελήσωμεν νὰ βγάλωμεν 25, θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι **δὲν μπορεῖ** νὰ γίνῃ. Μποροῦμεν ὅμως νὰ βγάλωμεν καὶ τὰ 20, ὁπότε **μένει** μέσα στὸ καλάθι ὑπόλοιπον **μηδέν,** δηλαδὴ εἶναι

$$20 - 20 = 0 \qquad (6)$$

Ἡ σχέσις (6) μᾶς λέγει ὅτι : **ἡ διαφορὰ δύο ἴσων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν.**

Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁ μειωτέος 20 καὶ ὁ ἀφαιρετέος 8 εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ_0. Ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 12 εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_0. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι **ἐσωτερικὴ** πρᾶξις εἰς τὸ σύνολον Φ_0.

Σημ. : Δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχυσιν μεταξὺ τῶν δύο ἐννοιῶν **ἀφαίρεσις** καὶ **διαφορά.** Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ πρᾶξις, ἐνῷ διαφορὰ εἶναι ὁ ἀριθμός, εἶναι δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενον ποὺ βρίσκομεν ὅταν κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

47 . 1 Πράξεις ἀντίστροφοι : Κάνομεν τὴν ἀφαίρεσιν

$$12 - 9 = 3$$

Ἂν προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον 9 εἰς τὴν διαφορὰν 3, τότε βρίσκομεν τὸν μειωτέον 12, δηλαδὴ

$$9 + 3 = 12$$

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς διπλῆν συνεπαγωγὴν

$$12 - 9 = 3 \iff 9 + 3 = 12 \qquad (1)$$

καὶ γενικὰ $\boxed{\alpha - \beta = \gamma \iff \beta + \gamma = \alpha}$ (2)

Ἡ παραπάνω σχέσις (1) ἢ (2) μᾶς λέγει ὅτι :

Τὸν ἀριθμὸν 9 (τὸν β) ἂν τὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν μειωτέον 12 (ἀπὸ τὸν α) καὶ κατόπιν τὸν προσθέσωμεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον 3 (εἰς τὸ γ), τότε βρίσκομεν πάλιν τὸν μειωτέον 12 (τὸν α). Δηλαδὴ

Ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ πρόσθεσις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 9 εἰς τὸ 12 **δὲν ἀλλάζει** τὸ 12. Τοῦτο τὸ διατυπώνομεν ὡς ἑξῆς :

Ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ πρόσθεσις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ εἰς ἕνα δοθέντα ἀριθμὸν **εἶναι δύο πράξεις ἀντίστροφοι,** δηλαδὴ ἡ μία πρᾶξις καταργεῖ τὴν ἄλλην, ἢ

Ἕνας ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται ὅταν προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν καὶ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Ἔχομεν δηλαδὴ

$$\boxed{\alpha + \beta - \beta = \alpha}$$

Δύο προτάσεις λέγονται **ἀντίστροφοι** ὅταν ἡ μία ἀντιστρεφομένη (ἀναποδογυριζομένη) δίδει τὴν ἄλλην πρότασιν, σύμβολον δὲ τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι τὸ $\iff$, τὸ ὁποῖον ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν § 6.2 ἔχει **ἀμφιμονοσήμαντον** ἔννοιαν, ἔχει δηλαδὴ τὴν ἔννοιαν ὅπως τὴν διαβάζομεν καὶ τὴν ἀντίστροφον ἔννοιαν. Ἐνῶ τὸ σύμβολον $\Longrightarrow$ ἔχει **μονοσήμαντον** ἔννοιαν, ἔχει δηλαδὴ μόνον τὴν ἔννοιαν ὅπως τὴν διαβάζομεν.

47. 2 Δύο παραδείγματα ἀμφιμονοσημάντου καὶ μονοσημάντου ἐννοίας εἶναι τὰ ἑξῆς :

α) Πέρνομεν τὰ δύο ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Φ

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$B = \{\, x / x \text{ μονοψήφιος ἀριθμὸς} \,\}$$

Ἑπομένως γράφομεν $\boxed{A \iff B}$

καὶ διαβάζομεν : **Τὸ Α εἶναι Β** καὶ ἀντιστρόφως **τὸ Β εἶναι Α.** Πραγματικὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι μονοψήφιος ἀριθμὸς καὶ ἀντιστρόφως κάθε μονοψήφιος ἀριθμὸς εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α.

β) Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

Γ = { φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας }
Δ = { γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας }

Ἑπομένως γράφομεν $\boxed{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$

καὶ διαβάζομεν: **Τὸ Γ εἶναι Δ,** διότι κάθε φωνῆεν εἶναι καὶ γράμμα. **Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν εἶναι ἀληθινό,** δηλαδὴ ἡ ἀντίστροφος σχέσις $\Delta \Longrightarrow \Gamma$ δὲν εἶναι ἀληθινὴ διότι κάθε γράμμα ὅπως τὸ λ, δὲν εἶναι φωνῆεν.

47. 3 Μία ἄλλη ἀμφιμονοσήμαντος συνεπαγωγὴ εἶναι καὶ ἡ ἑξῆς:

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha - \gamma = \beta \quad \text{μὲ} \quad \beta < \alpha \wedge \gamma < \alpha$$

διότι ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha - \beta = \gamma$ βρίσκομεν $\alpha = \beta + \gamma$
καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha - \gamma = \beta$ βρίσκομεν πάλιν $\alpha = \beta + \gamma$.

Ἡ παραπάνω συνεπαγωγὴ μᾶς λέγει ὅτι:

Σὲ μίαν διαφορὰν ὁ ἀφαιρετέος μπορεῖ νὰ γίνη ὑπόλοιπον καὶ τὸ ὑπόλοιπον μπορεῖ νὰ γίνη ἀφαιρετέος.

Πραγματικὰ ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν

$15 - 4 = 11$ συμπεραίνομεν ὅτι καὶ $15 - 11 = 4$

καὶ ἀντιστρόφως. Πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅμως ὅτι τὰ ἀποτελέσματα (ὑπόλοιπα) τῶν δύο αὐτῶν ἀφαιρέσεων δὲν εἶναι τὰ ἴδια.

47. 4 Ἀμφιμονοσήμαντοι εἶναι καὶ αἱ συνεπαγωγαὶ

$\alpha = \beta \iff \alpha + \delta = \beta + \delta$ τῆς § 40.1

καὶ $\alpha < \beta \iff \alpha + \delta < \beta + \delta$ τῆς § 41.

Ἀσκήσεις

144. Νὰ συμπληρώσετε τῆς παρακάτω ἰσότητες

α) $18 - \ldots = 12$ β) $\ldots - 10 = 16$, γ) $34 - \ldots = 34$
δ) $\ldots - 0 = 11$, ε) $\ldots + 0 = 12$ στ) $19 + \ldots = 25$

145. Ποία ἀπὸ τὶς δύο διαφορὲς $15 - \alpha$ καὶ $20 - \alpha$ εἶναι μεγαλύτερη;

146. Τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰς διαφορὰς $\alpha - 12$ καὶ $\alpha - 5$.

147. Πόσος μπορεῖ νὰ εἶναι ὁ α διὰ νὰ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις $6 - \alpha$;

148. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λ διὰ νὰ γίνεται ἡ ἀφαίρεσις $\lambda - 5$;

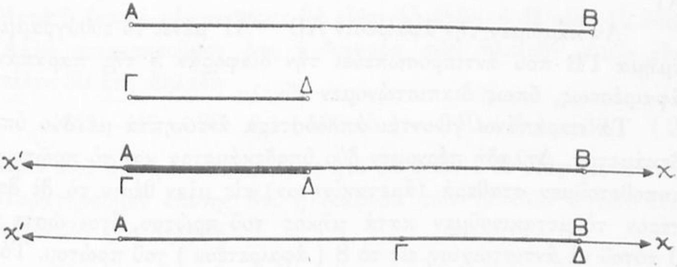
149. Νὰ συμπληρώσης τὴν συνεπαγωγὴν

$$25 - 17 = \ldots \;\wedge\; 18 - 10 = \ldots \;\Longleftrightarrow\; \ldots = \ldots$$

150. Τὸ ἴδιο διὰ τὴν συνεπαγωγὴ $19 - \alpha = 12 \wedge \beta + 5 = 12 \Longrightarrow \alpha ; \beta ;$

151. Τὸ ἴδιο διὰ τὴν συνεπαγωγὴ $13 - \alpha = 9 \wedge \beta - 3 = 5 \Longrightarrow \alpha ; \beta ;$

48. Ἀφαίρεσις εὐθυγράμμων τμημάτων: Μᾶς δίνουν τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (ΑΒ > ΓΔ) καὶ θέλομεν νὰ βροῦμε τὴν διαφορὰν ΑΒ — ΓΔ αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸ ΑΒ ἐπάνω σὲ ἕνα ἄξονα XX′ καὶ ἔπειτα τοποθε-



Σχ. 41.

τοῦμεν ἐπάνω στὸν ἴδιον ἄξονα τὸ ΓΔ ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχὴ Γ αὐτοῦ νὰ συμπέση μὲ τὴν ἀρχὴν Α τοῦ ΑΒ, τὸ δὲ ΓΔ νὰ πάρη τὴν ἴδια φορὰ μὲ τὸ ΑΒ. Τότε τὸ τμῆμα ΔΒ ποὺ περισσεύει εἶναι ἡ διαφορὰ ποὺ ζητοῦμεν. Ὥστε ἔχομεν

$$\text{ΑΒ} - \text{ΓΔ} = \text{ΔΒ} \qquad (1)$$

Μποροῦμεν ὅμως νὰ ἐργασθοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ ΓΔ τὸ τοποθετοῦμεν ἐπάνω στὸ ΑΒ ἔτσι ὥστε τὸ τέλος Δ αὐτοῦ νὰ συμπέση μὲ τὸ τέλος Β τοῦ ΑΒ. Τότε τὸ τμῆμα ΑΓ ποὺ περισσεύει εἶναι ἡ διαφορὰ ποὺ ζητοῦμε. Ὥστε ἔχομε

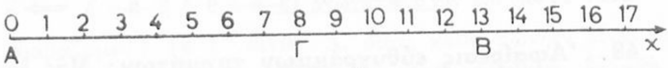
$$\text{ΑΒ} - \text{ΓΔ} = \text{ΑΓ} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) βγάζομε τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι ΔΒ = ΑΓ.

49. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς ἀφαιρέσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν (δηλ. νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν)

$$13 - 8$$

Ἐπάνω εἰς τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΧ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁ μειω-

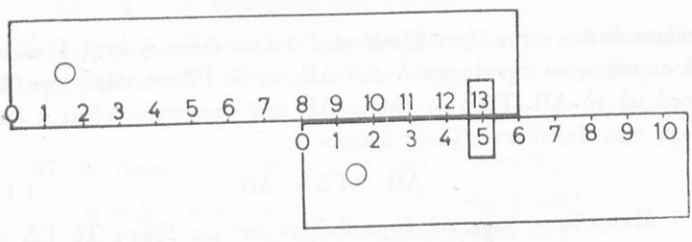


Σχ. 42.

τέος 13 ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ὁ ἀφαιρετέος 8 ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ.

Ἂν κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ΑΒ — ΑΓ μένει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΒ ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὴν διαφορὰν 5 τῆς παραπάνω ἀφαιρέσεως, ὅπως διαπιστώνομεν εὔκολα.

Τὰ παραπάνω γίνονται ἁπλούστερα ἀντιληπτὰ μὲ δύο ὑποδεκάμετρα. Δηλαδὴ πέρνομεν δύο ὑποδεκάμετρα καὶ τὸ πρῶτο τὸ τοποθετοῦμεν σταθερὰ (ἀμετακίνητον) εἰς μίαν θέσιν, τὸ δὲ δεύτερον τὸ μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος τοῦ πρώτου, ἔτσι ὥστε τὸ 0 αὐτοῦ νὰ ἀντιστοιχίσῃ εἰς τὸ 8 (ἀφαιρετέον) τοῦ πρώτου. Τότε



Σχ. 43.

θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ 13 (μειωτέον) τοῦ πρώτου ἀντιστοιχίζεται τὸ 5 (ὑπόλοιπον) τοῦ δευτέρου. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι

$$13 - 8 = 5$$

Ἀσκήσεις

152. Ἂν εἶναι $(AB) = 356$ cm καὶ $(\Gamma\Delta) = 2472$ mm, νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $(AB) - (\Gamma\Delta)$ α) εἰς mm, β) εἰς cm καὶ γ) εἰς m.

153. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $(AB) = 15$ m., $(B\Gamma) = 345$ cm καὶ $(\Gamma\Delta) = 2\,500$ mm. Νὰ εὑρεθῇ εἰς cm κάθε μία ἀπὸ τὰς διαφορὰς α) $(AB) - (B\Gamma)$, β) $(AB) - (\Gamma\Delta)$, γ) $(B\Gamma) - (\Gamma\Delta)$.

50.1 Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως: I. Πέρνομεν τὴν πρότασιν **Ἕνας πατέρας εἶναι 40 ἐτῶν καὶ ὁ υἱός του εἶναι 10 ἐτῶν.** Ἑπομένως ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν εἶναι 30 ἔτη, δηλαδὴ

$$40 - 10 = 30 \qquad (1)$$

Μετὰ 5 ἔτη ὁ μὲν πατέρας θὰ εἶναι 45 ἐτῶν ὁ δὲ υἱὸς 15 ἐτῶν. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν εἶναι πάλιν 30 ἔτη δηλαδὴ

$$45 - 15 = 30 \quad \text{ἢ} \quad (40 + 5) - (10 + 5) = 30 \qquad (2)$$

Πρὶν ἀπὸ 2 ἔτη ὁ μὲν πατέρας ἦτο 38 ἐτῶν ὁ δὲ υἱὸς ἦτο 8 ἐτῶν. Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἡλικιῶν αὐτῶν εἶναι πάλιν 30 ἔτη δηλαδὴ

$$38 - 8 = 30 \quad \text{ἢ} \quad (40 - 2) - (10 - 2) = 30 \qquad (3)$$

Εἰς τὸ παραπάνω παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ 40 — 10 δὲν ἄλλαξε εἴτε ἂν προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 5 καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, εἴτε ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 2 καὶ ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον. Τὰ παραπάνω μὲ γενικοὺς ἀριθμοὺς γράφονται

$$\boxed{\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)} \quad \alpha > \beta > \gamma$$

Ὥστε : **Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἂν αὐξήσωμεν ἢ ἂν ἐλαττώσωμεν κατὰ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον.**

50.2 II. Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα : **Τὸ ταμεῖον ἑνὸς ἐμπόρου παρουσίασε τὴν ἑξῆς κίνησιν : εἰσπράξεις 35 δρχ., 72 δρχ., 47 δρχ., 100 δρ. Πληρωμαὶ 40 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ τὸ ταμεῖον ;**

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν τὰς ἑξῆς πράξεις :

$$(35 + 72 + 47 + 100) - 40$$

ἔχομεν δηλαδὴ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 40 ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $35 + 72 + 47 + 100$. Ἂν βάλωμεν ἐπάνω στὸ τραπέζι χωριστὰ κάθε εἴσπραξιν, δηλαδὴ

35 72 47 100

τότε τὰς 40 δρχ. μποροῦμε νὰ τὰς βγάλωμεν ἢ ἀπὸ τὰς 72 δρχ., ἢ ἀπὸ τὰς 47 δρχ., ἢ ἀπὸ τὰς 100 δρχ., διότι δὲν μποροῦμε νὰ τὰς βγάλωμεν ἀπὸ τὰς 35 δρχ. ($40 > 35$). Ἂς ποῦμε ὅτι τὰς βγάζομεν ἀπὸ τὰς 47 δρχ. Τότε βρίσκομεν

$$(35 + 72 + 47 + 100) - 40 = 35 + 72 + (47 - 40) + 100 =$$
$$= 35 + 72 + 7 + 100 = 214$$

Μποροῦμεν ἐπίσης νὰ τὰς βγάλωμεν ἀπὸ τὰς 72 δρχ. δηλαδὴ

$$(35 + 72 + 47 + 100) - 40 = 35 + (72 - 40) + 47 + 100 =$$
$$= 35 + 32 + 47 + 100 = 214$$

γενικὰ δὲ $\boxed{(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - \lambda = \alpha + (\beta - \lambda) + \gamma + \delta}$ $\beta > \lambda$

Ὥστε :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἕνα μόνον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος.

Παρατήρησις : Ἂν ἔχωμεν τὴν ἀφαίρεσιν

$$(35 + 72 + 47 + 100) - 47$$

τότε βρίσκομεν $35 + 72 + 100 = 207$, δηλαδὴ ὅταν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα ἕνα προσθετέον του, ἀρκεῖ νὰ τὸν **ἐξαλείψωμεν,** ἀρκεῖ δηλαδὴ νὰ τὸν σβύσωμεν.

50. 3 III. Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἕνας ἔμπορος ἔχει τὴν ἑξῆς κίνησιν εἰς τὸ ταμεῖον του. Εἴσπραξις 200 δρχ. πληρωμὴ 70 δρχ. εἴσπραξις 40 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ ;

Λύσις : Εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ ἔχῃ

$$(200 - 70) + 40 \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) μᾶς δείχνει ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 40 εἰς τὴν διαφορὰν 200 — 70. Κατὰ δύο τρόπους μπορεῖ νὰ γίνῃ αὐτό.

α) Ἢ θὰ ποῦμε $200 + 40 = 240$ καὶ $240 - 70 = 170$ ἢ
β) θὰ ποῦμε $70 - 40 = 30$ καὶ $200 - 30 = 170$.

Ὥστε ἔχομεν :

$$(200 - 70) + 40 = (200 + 40) - 70 = 200 - (70 - 40) = 170$$

γενικὰ $\boxed{(\alpha - \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) - \beta = \alpha - (\beta - \gamma)}$ Ὥστε

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀριθμὸν εἰς διαφορὰν ἢ προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ἢ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς.

50. 4 **IV.** Μὲ ἀνάλογον τρόπον ἂν αἱ 40 δραχμαὶ εἶναι πληρωμή, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$(200 - 70) - 40 = (200 - 40) - 70 = 200 - (70 + 40) = 90$$

γενικὰ $\boxed{(\alpha - \beta) - \gamma = (\alpha - \gamma) - \beta = \alpha - (\beta + \gamma)}$ Ὥστε

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ διαφορὰν ἢ ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν μειωτέον τῆς διαφορᾶς ἢ προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς.

Τὸ παραπάνω μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(200 - 70) - 40 = 200 - 70 - 40 = 130 - 40 = 90$$

50. 5 **V.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰς διαφορὰς $\alpha - \beta$ καὶ $\gamma - \delta$. Ἐφαρμόζοντες τὰ παραπάνω εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) &= [\alpha + (\gamma - \delta)] - \beta = && (\text{III ἰδιότης})\\ &= [(\alpha + \gamma) - \delta] - \beta = && (\text{III ἰδιότης})\\ &= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) && (\text{IV ἰδιότης})\end{aligned}$$

Ἑπομένως εὑρίσκομεν :

$\boxed{(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)}$ Ὥστε

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο διαφορὰς προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον ἄθροισμα ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.

51. Ἀριθμητικὰ πολυώνυμα: Εἰς τὴν ἀφαίρεσιν μᾶς δίνουν συνήθως δύο ἀριθμούς. Μπορεῖ ὅμως νὰ γράψωμεν, ὅπως εἴδαμεν παραπάνω

$$200 - 70 - 40$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν δύο ἀφαιρέσεις, πρέπει δηλαδὴ ἀπὸ τὸ 200 νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 70 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ 40, δηλαδὴ εὑρίσκομεν

$$200 - 70 - 40 = 130 - 40 = 90$$

Ἐπίσης μπορεῖ νὰ ἔχωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους νὰ ἔχῃ σημειωθῆ ἀλλοῦ πρόσθεσις καὶ ἀλλοῦ ἀφαίρεσις. Π.χ. τὸ ταμεῖον ἑνὸς καταστήματος παρουσίασε τὴν ἑξῆς κίνησιν: Εἴσπραξιν 45 δρχ., εἴσπραξις 5 δρχ., πληρωμὴ 4 δρχ., εἴσπραξις 12 δρχ., πληρωμὴ 9 δρχ., πληρωμὴ 2 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ τὸ ταμεῖον; Θὰ ἔχωμεν:

$$45 + 5 - 4 + 12 - 9 - 2$$

Θὰ ἐκτελέσωμεν κάθε πρᾶξιν μὲ τὴν σειράν, δηλαδὴ

$$45 + 5 = 50$$
$$50 - 4 = 46$$
$$46 + 12 = 58$$
$$58 - 9 = 49$$
$$49 - 2 = 47$$

Ὥστε τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ 47 δραχμάς.

Μποροῦμεν ὅμως νὰ πάρωμεν χωριστὰ τὰς εἰσπράξεις καὶ χωριστὰ τὰς πληρωμὰς καὶ στὸ τέλος νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, δηλαδὴ

Εἰσπράξεις : $45 + 5 + 12 = 62$

Πληρωμαί : $4 + 9 + 2 = 15$

Ἑπομένως τὸ ταμεῖον θὰ ἔχῃ $62 - 15 = 47$ δραχμάς.

Τὸ $\quad 45 + 5 - 4 + 12 - 9 - 2$

τὸ ὀνομάζομεν **ἀριθμητικὸν πολυώνυμον**, οἱ δὲ προσθετέοι ἢ ἀφαιρετέοι τοὺς ὁποίους περιέχει τὸ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον λέγονται **ὅροι** αὐτοῦ.

Τὸ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta + \lambda - \mu + \nu$$

Οἱ ὅροι τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου χωρίζονται ἢ μὲ τὸ + ἢ μὲ τὸ — Ὥστε

Τὸ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον εἶναι ἕνα ἄθροισμα πολλῶν ὅρων, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἄλλοι ἔχουν ἐμπρὸς τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως + καὶ ἄλλοι ἔχουν ἐμπρὸς τὸ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως —. Ἑπομένως μποροῦμεν νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν ὅρων αὐτοῦ. Π.χ. τὸ παραπάνω ἀριθμητικὸν πολυώνυμον μπορεῖ νὰ τὸ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\alpha + \beta + \lambda + \nu - \gamma - \delta - \mu$$

Ἀσκήσεις

154. Νὰ συμπληρώσετε τὶς παρακάτω ἰσότητες

α) (120 + . . .) — (70 + 20) = 50.

β) (80 — 12) — (20 — . . .) = 60.

γ) (45 — 15) + 11 = (45 + . . .) — 15 = 45 — (15 — . .)

δ) (52 — 8) — 13 = (52 — . . .) — 8 = 52 — (. . . + 8)

ε) (28 — 15) + (13 — 6) = (28 + 13) — (. . . + . . .)

155. Νὰ βρῆτε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ παρακάτω ἀριθμητικὰ πολυώνυμα.

α) 25 + 4 — 13 — 5 + 19 — 8 + 12

β) 130 — 70 + 20 + 12 — 19 — 27 — 4

γ) 45 — 10 — 28 + 30 + 11 — 17 — 31

156. Τὸ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον 15 + α — 12 + 7 — 25 γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσον μὲ 5. Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ α ;

157. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου 18 — 6 + α — 4 ὅταν γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ α ;

158. Τί παθαίνει ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, α) ἂν προσθέσωμεν τὸ 20 εἰς τὸν μειωτέον ; β) ἂν προσθέσωμεν τὸ 20 εἰς τὸν ἀφαιρετέον ; γ) ἂν προσθέσωμεν τὸ 20 καὶ εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέρον ;

159. Τί παθαίνει ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν α) ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ 15 ἀπὸ τὸν μειωτέον ; β) ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ 15 ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ; γ) ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ 15 καὶ ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ;

52.1 Ἡ ἔννοια τῆς διαγραφῆς εἰς τὴν ἀφαίρεσιν : Ι. Πέρνομεν τὴν ἰσότητα $\alpha = \beta$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $\alpha = 4$ βόλοι καὶ $\beta = 4$ βόλοι (ἴδε σελίδα 68) καὶ ὅτι ἔχομεν $\delta = 2$ βόλοι. Εὔκολα συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι $\alpha - \delta = 2$ βόλοι καὶ $\beta - \delta = 2$ βόλοι ἄρα ἔχομεν

$$\alpha - \delta = \beta - \delta \quad \text{μὲ} \quad \delta < \alpha$$ Ὥστε

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος, τότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

52. 2 **II**. Ἔχομεν καὶ τὴν συνεπαγωγὴν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta \\ \gamma = \delta\end{array}\right| \Longrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \delta \qquad \alpha > \gamma \wedge \beta > \delta$$

Ἑπομένως **μποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.**

52. 3 **III**. Πέρνομεν τὴν ἀνισότητα

$$\alpha < \beta$$

καὶ ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha = 3$ βόλοι, $\beta = 4$ βόλοι καὶ ἔστω $\delta = 2$ βόλοι. Τότε εὔκολα βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι (§ 41)

$$\alpha - \delta < \beta - \delta \quad \text{μὲ} \quad \delta < \alpha$$

Ὥστε **μποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἀνισότης τῆς ἰδίας φορᾶς.**

Ἀσκήσεις

160. Νὰ συμπληρώσετε κάθε μία ἀπὸ τὰς κάτωθι συνεπαγωγὰς

α) $\alpha - \beta = \gamma \Longrightarrow (\alpha + \lambda) - \ldots \ldots = \gamma$

β) $\alpha = \beta + 5 \quad \wedge \quad \beta + 2 = 3 \Longrightarrow \alpha = \ldots$

γ) $\alpha < 5 \quad \wedge \quad \alpha - \beta < 1 \Longrightarrow \alpha = \ldots, \beta = \ldots$

δ) $\alpha > 8 \quad \wedge \quad \alpha = \beta + 3 \Longrightarrow \beta > \ldots$

ε) $\alpha > \beta + 7 \quad \wedge \quad \beta = 9 - 3 \Longrightarrow \alpha > \ldots$

161. Τὶ μπορεῖτε νὰ συμπεράνετε ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta \,;$$

162. Τὶ μπορεῖτε νὰ συμπεράνετε ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \delta \,;$$

53.1 Ταυτότης - ἐξίσωσις: α) Πέρνομεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἀληθινὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ γενικοῦ ἀριθμοῦ α καὶ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ γενικοῦ ἀριθμοῦ β, τοὺς ὁποίους περιέχει ἡ ἰσότης αὐτή. Διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης (1) λέγεται **ταυτότης** (= τὸ αὐτό, τὸ ἴδιον). Ὥστε:

Ταυτότης λέγεται μία ἰσότης ποὺ εἶναι ἀληθινὴ διὰ κάθε τιμὴν τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.

Τὸ σύμβολον τῆς ταυτότητος εἶναι $\equiv$. Γράφομεν π.χ.

$$\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha.$$

53.2 β) Πέρνομεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha + 5 = 8 \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης (2) εἶναι ἀληθινὴ **μόνον** διὰ τὴν τιμὴν $\alpha = 3$ τοῦ γενικοῦ ἀριθμοῦ α ποὺ περιέχει. Διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται **ἐξίσωσις**. Ὥστε:

Ἐξίσωσις λέγεται μία ἰσότης ποὺ εἶναι ἀληθινὴ διὰ ὡρισμένην μόνον τιμὴν τοῦ γράμματος ποὺ περιέχει (ἢ μόνον δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων ποὺ περιέχει).

Τὸ γράμμα (γενικὸς ἀριθμὸς) ποὺ περιέχει μία ἐξίσωσις λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως καὶ συνήθως τὸ παριστάνομεν μὲ τὸ γράμμα x. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (2) συνήθως γράφεται:

$$x + 5 = 8 \qquad (2)$$

Ἡ τιμὴ $x = 3$, διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις, λέγεται **ρίζα** τῆς ἐξισώσεως, ἡ δὲ ἐργασία ποὺ πρέπει νὰ κάμωμεν διὰ νὰ βροῦμε τὴν ρίζαν λέγεται **ἐπίλυσις** (λύσις) τῆς ἐξισώσεως.

Ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως (2) γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$x + 5 = 8 \implies x = 8 - 5 \implies x = \mathbf{3}$$

Ἐπίσης ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως

$$x - 7 = 6 \qquad (3)$$

γίνεται ὡς ἑξῆς:

$$x - 7 = 6 \implies x = 7 + 6 \implies x = \mathbf{13}$$

Ἐπίσης ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως

$$20 - x = 6 \qquad (4)$$

γίνεται ὡς ἑξῆς :

$$20 - x = 6 \implies 20 = x + 6 \implies 20 - 6 = x \implies \mathbf{x = 14}$$

53. 3 **Ἡ ἐπαλήθευσις** (δηλαδὴ ἡ δοκιμὴ) τῆς ἐπιλύσεως μιᾶς ἐξισώσεως γίνεται εὔκολα ὡς ἑξῆς : Θέτομεν τὴν ρίζαν ποὺ βρίσκομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ποὺ μᾶς δίνουν, ὁπότε πρέπει νὰ βροῦμε τὸ πρῶτον μέλος ἴσον μὲ τὸ δεύτερον. Π.χ. ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι

$$3 + 5 = 8 \implies 8 = 8$$

Ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως (4) εἶναι

$$20 - 14 = 6 \implies 6 = 6$$

53. 4 **Σπουδαῖαι παρατηρήσεις : 1)** Ὅταν εἰς μίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν ρίζαν, τότε ἡ ἐξίσωσις παύει νὰ εἶναι ἐξίσωσις διότι μετατρέπεται εἰς ἰσότητα, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις

$$x + 5 = 8 \quad \text{διὰ} \quad x = 3$$

γίνεται ἰσότης

$$3 + 5 = 8.$$

2) Θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$8 - x = 12 \qquad (5)$$

πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν

$$8 - x = 12 \implies 8 = x + 12 \implies 8 - 12 = x \text{ ἢ } \mathbf{x = 8 - 12}$$

Ἀλλὰ ἡ ἀφαίρεσις $8 - 12$ **δὲν γίνεται,** διότι εἶναι $8 < 12$. Ἑπομένως βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἐξίσωσις $8 - x = 12$ **δὲν ἔχει λύσιν.**

Ὥστε ὑπάρχουν καὶ ἐξισώσεις ποὺ δὲν ἔχουν λύσιν.

Ἀσκήσεις

163. Ἀπὸ τῆς παρακάτω ἰσότητες ποίες εἶναι ταὐτότητες καὶ ποῖες εἶναι ἐξισώσεις ;

α) $\alpha + x = x + \alpha$, β) $1 + x = 5$ γ) $x + 8 = 12$
δ) $45 - x = 42$, ε) $\alpha + x = x + \beta$ στ) $\alpha + x + 8 = \alpha + 19$.

164. Νὰ ἐπιλύσετε τὰς παρακάτω ἐξισώσεις

α) $348 - x = 150$ β) $27 = x - 42$ γ) $x + 25 = 975$
δ) $37 - x = 0$ ε) $38 + x = 25 + 13$ στ) $56 - x = 60$

165. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha + x = x + \beta$ τὶ συμπέρασμα βγάζετε;

166. Ἡ ἰσότης $\alpha + x + 8 = \alpha + 19$ εἶναι ταυτότης ἢ ἐξίσωσις; ἂν εἶναι ἐξίσωσις τότε ποία εἶναι ἡ ρίζα της;

167. Νὰ λύσης τὴν ἐξίσωσιν $\alpha + \beta + x = \gamma + 345$ ἂν γνωρίζης ὅτι εἶναι $\alpha = 38$, $\beta = \alpha + 45$, $\gamma = \beta + 94$

168. Τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζης ὅτι εἶναι $\alpha + \beta = \gamma$

54. Χρῆσις ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

Τὰς ἐξισώσεις τὰς χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον **παριστῶμεν μὲ x τὸ ζητούμενον** εἰς τὸ πρόβλημα, **καταστρώνομεν** τὴν ἐξίσωσιν καὶ ἐπιλύομεν αὐτήν. Ἡ ρίζα ποὺ βρίσκομεν θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω παραδείγματα.

1) Πούλησα ἕνα ἐμπόρευμα 320 δραχμὰς καὶ ἐκέρδισα 80 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τὸ εἶχα ἀγοράσει;

Λύσις : Ἂν τὸ εἶχα ἀγοράσει x δραχμάς, τότε ἡ ἀξία τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ κέρδος κάνουν τὴν ἀξίαν τῆς πωλήσεως. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x + 80 = 320 \Longrightarrow x = 320 - 80 \Longrightarrow x = \mathbf{240}$$

Ὥστε τὸ εἶχα ἀγοράσει 240 δραχμάς. Πραγματικὰ τὸ ἀγόρασα 240 δραχμὰς καὶ τὸ πούλησα 320 δραχμάς, ἄρα ἐκέρδισα 80 δραχμάς.

2) Ἐρωτήθηκε ἕνας πόσων ἐτῶν εἶναι; καὶ ἀπήντησεν ὅτι εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν κόρην του κατὰ 25 ἔτη, γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ κόρη του εἶναι 14 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι;

Λύσις : Ἂν εἶναι x ἐτῶν, τότε καταστρώνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x - 25 = 14 \Longrightarrow x = 25 + 14 \Longrightarrow x = 39$$

Ὥστε εἶναι 39 ἐτῶν.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν μὲ ἐξισώσεις τὰ παρακάτω προβλήματα :

169. Ἕνα ἐμπόρευμα μοῦ στοίχισε 1 350 δρχ. καὶ τὸ πούλησα μὲ κέρδος 523 δρχ. πόσες δρχ. τὸ πούλησα;

170. Ἕνα ἐμπόρευμα μοῦ στοίχισε 2 500 δρχ. καὶ τὸ πούλησα μὲ ζημίαν 342 δρχ. πόσες δρχ. τὸ πούλησα;

171. 'Αγόρασα ένα εμπόρευμα, πλήρωσα 385 δρχ. διὰ τὴν μεταφοράν του, τὸ πούλησα 7 582 δρχ. καὶ ἔτσι ἐκέρδισα 1 985 δρχ. πόσες δρχ. τὸ ἀγόρασα ;

172. Εἰς τὸν ἀριθμὸν x προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν α, εἰς τὸ ἄθροισμά των προσθέτομεν τὸν ἀριθμὸν β καὶ βρίσκομεν τελικὸν ἄθροισμα 250. Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι εἶναι $\alpha = 120$ καὶ $\beta = \alpha - 40$, πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς x ;

173. Εἰς τὰ χρήματα ποὺ ἔχω προσθέτω 1 000 δραχμάς. Κατόπιν ἐξοδεύω 1 250 δραχμὰς καὶ παρετήρησα ὅτι μοῦ ἔμειναν 3 827 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχα ;

174. Ἕνα χρηματικὸν ποσὸν ποὺ συγκεντρώθηκεν εἰς ἕνα ἔρανον ἐμοιράσθηκεν εἰς τέσσαρας πτωχὰς οἰκογενείας ὡς ἑξῆς : Ἡ α' οἰκογένεια πῆρε 1 855 δρχ., ἡ β' πῆρε 185 δρχ. περισσοτέρας, ἡ γ' πῆρε 270 δρχ. ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὴν β' οἰκογένειαν καὶ ἡ δ' πῆρε 125 δρχ. ὀλιγωτέρας ἀπὸ τὴν α' οἰκογένειαν. Πόσας δραχ. πῆρε κάθε οἰκογένεια ; Καὶ πόσα χρήματα συγκεντρώθηκαν εἰς τὸν ἔρανον, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἐδημιουργήθησαν καὶ ἔξοδα ἀπὸ 130 δραχμάς ;

55. Πῶς ἐξηγεῖται ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως : Ὅπως γνωρίζομεν, διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 2736 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 6582, θέτομεν τὸν ἀφαιρετέον κάτω ἀπὸ τὸν μειωτέον ἔτσι ὥστε αἱ μονάδες νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες κάτω ἀπὸ τὰς δεκάδας κ.ο.κ., ἀρχίζομεν δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰ δεξιά.

$$\begin{array}{r} 6582 \\ -\ 2736 \\ \hline 3846 \end{array}$$

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως γράφομεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον ἀναλελυμένον εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του δηλαδή :

$$\begin{array}{rl} 6582 = & 6\chi + 5\varepsilon + 8\delta + 2\mu \\ -\ 2736 = & 2\chi + 7\varepsilon + 3\delta + 6\mu \\ \hline = & 4\chi + (5 - 7)\varepsilon + 5\delta + (2 - 6)\mu \end{array}$$

Ἀλλὰ ἡ ἀφαίρεσις τῶν $2 - 6$ μονάδων δὲν γίνεται, οὔτε τῶν $5 - 7$ ἑκατοντάδων. Διὰ τοῦτο ἀφαιροῦμεν μίαν δεκάδα ἀπὸ τὰς 5δ, τὴν μετατρέπομεν σὲ 10 μονάδες καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὰς 2 μονάδας τοῦ μειωτέου. Ἐπίσης πέρνομεν μίαν χιλιάδα ἀπὸ τὰς 4χ τὴν μετατρέπομεν σὲ 10 ἑκατοντάδας καὶ τὰς προσθέτομεν εἰς τὰς 5ε καὶ εὑρίσκομεν

$$3\chi + (15 - 7)\,\varepsilon + 4\delta + (12 - 6)\,\mu \quad \text{ἤ}$$
$$3\chi + 8\varepsilon + 4\delta + 6\mu = 3846.$$

'Αντὶ ὅμως νὰ ἐλλατώσωμεν τὰς 5δ εἰς 4δ, μποροῦμεν τὴν μίαν δεκάδα νὰ τὴν προσθέσωμεν εἰς τὰς 2 μονάδας τοῦ μειωτέου (ἀφοῦ τὴν μετατρέψωμεν εἰς 10 μονάδας) καὶ εἰς τὰς 3δ τοῦ ἀφαιρετέου, ἐφαρμόζεντες τὴν Ι ἰδιότητα τῆς § 50. 1. Τὴν πρόσθεσιν τῆς 1 δεκάδας εἰς τὰς 3δ τοῦ ἀφαιρετέου τὴν κάνομεν ὑπὸ μορφὴν κρατουμένου. Τὸ ἴδιον κάνομεν καὶ μεταξὺ τῶν χιλιάδων καὶ τῶν ἑκατοντάδων.

56. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως : Γνωρίζομεν ὅτι ὁ μειωτέος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου. Ὥστε προσθέτομεν τὸν ἀφαιρετέον καὶ τὸ ὑπόλοιπον καὶ ἂν βροῦμεν τὸν μειωτέον βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἔγινε σωστά.

$$\begin{array}{r} 2736 \\ 3846 \\ \hline 6582 \end{array} +$$

'Ασκήσεις

175. Νὰ συμπληρώσετε τὰ ψηφία ποὺ λείπουν εἰς τὰς παρακάτω ἀφαιρέσεις.

$$\alpha)\ \begin{array}{r} 3548 \\ 1.5. \\ \hline 18.5 \end{array} - \qquad \beta)\ \begin{array}{r} 6\ldots4 \\ 835. \\ \hline 57087 \end{array} - \qquad \gamma)\ \begin{array}{r} \ldots6. \\ 283.5 \\ \hline 60928 \end{array} -$$

176. Νὰ βρῆτε τὴν διαφορὰν ποὺ προκύπτει ὅταν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 635 ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ σχηματίζεται ἂν ἀντιστρέψωμεν τὰ ψηφία του.

177. Μᾶς δίνουν τὸν ἀριθμὸν 3 574. Νὰ βρῆτε α) Ποία ψηφία του πρέπει νὰ ἀντιμεταθέσωμεν ὥστε νὰ βροῦμε ἀριθμὸν μεγαλύτερόν του κατὰ 180; β) Ποία ψηφία πρέπει νὰ ἀντιμεταθέσωμεν ὥστε νὰ βροῦμε ἀριθμὸν μικρότερον κατὰ 99 ; γ) Ποῖα ψηφία πρέπει νὰ ἀντιμεταθέσωμεν ὥστε νὰ βροῦμε ἀριθμὸν μικρότερον κατὰ 27 ; δ) Ἂν ἀντιστρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν τί θὰ συμβῇ ; (θὰ βροῦμε ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ μικρότερον καὶ κατὰ πόσον) ;

178. Αἱ Πάτραι ἀπέχουν ἀπὸ τὰς 'Αθήνας 220 χιλιόμετρα. Ἡ ὁδὸς 'Αθηνῶν — Πατρῶν περνάει ἀπὸ τὴν Κόρινθον καὶ ἀπὸ τὸ Αἴγιον, γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ Κόρινθος ἀπέχει ἀπὸ τὰς 'Αθήνας 85 χιλιόμετρα καὶ τὸ Αἴγιον ἀπέχει ἀπὸ τὰς Πάτρας 40 χιλιόμετρα. Νὰ βρῆτε α) τὴν ἀπόστασιν Κορίνθου — Αἰγίου καὶ β) τὴν ἀπόστασιν Κορίνθου — Πατρῶν.

179. Σὲ μιὰ ἐκδρομὴ εἶχαν λάβει μέρος 120 ἄτομα. Ἂν γνωρίζῃς ὅτι ἦσαν 95 ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ 65 γυναῖκες καὶ παιδιὰ νὰ βρῇς πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδιά.

180. Νὰ συμπληρώσετε τὴν ἑξῆς μισθοδοτικὴν κατάστασιν

Ὄνομα καὶ ἐπώνυμον	Μισθὸς	Πρόσθετον ἐπίδομα	Βοήθημα	Σύνολον	Κρατήσεις Φόρος	Κρατήσεις Ταμεῖον Προνοίας	Κρατήσεις Σύνολον	Πληρωτέον ὑπόλοιπον
Γ. Ἀθανασίου	3 548	355	180	...	70	35	...	...
Π. Γεωργίου	5 675	567	280	...	113	57	...	...
Λ. Θεοδώρου	4 900	490	245	...	98	49	...	...
Ε. Δημητρίου	5 240	524	262	...	104	52	...	...
Θ. Παναγιώτου	2 750	275	137	...	55	28	...	...
Σύνολον	...	...	...	...	...	...	...	...

181. Ὁ ταμίας ποὺ ἔκαμε τὴν πληρωμὴν τῶν παραπάνω ὑπαλλήλων πῆρε ἀπὸ τὴν Τράπεζα 20 χιλιάρικα, 8 πεντακοσιάρικα, 17 δραχμὰς καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ πῆρε εἰς πενηντάρικα. Πόσα πενηντάρικα πῆρε ;

182. Ἕνα ἔμπορος παρέλαβε ἕνα ἐμπόρευμα ἀξίας 350 000 δραχμῶν ἐπλήρωσε δὲ 200 000 δραχμὰς τοῖς μετρητοῖς, 110 000 μετὰ δύο ἡμέρας καὶ τὰ ὑπόλοιπα τὰ χρωστοῦσε. Ἀπὸ τὰ χρήματα ποὺ εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησιν τοῦ ἐμπορεύματος κατέθεσεν εἰς τὴν Τράπεζαν 320 000 καὶ μὲ τὰ ὑπόλοιπα ἐπλήρωσε τὸ χρέος του καὶ τοῦ ἔμειναν καὶ 45 850 δραχμαί. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

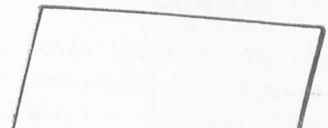
ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ — Η ΓΩΝΙΑ — Ο ΚΥΚΛΟΣ

I. Τὸ ἐπίπεδον

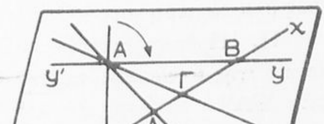
57. 1 Τὰ διάφορα ἀντικείμενα (σώματα) ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἀντίληψίν μας μόνον ἀπὸ τὸ **ἐξωτερικὸν μέρος** αὐτῶν. Τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τῶν σωμάτων δὲν τὸ ἀντιλαμβανόμεθα ἀμέσως, ἀλλὰ τὸ συμπεραίνομεν (μόνον ὅταν τὸ σῶμα εἶναι διαφανὲς ἢ ὅταν τὸ τεμαχίσωμεν, σχηματίζομεν ἀντίληψιν διὰ τὸ ἐσωτερικόν του).

Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν μερῶν ἑνὸς σώματος τὸ ὀνομάζομεν **ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος.** Λέμε π.χ. ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα καὶ ἐννοοῦμεν τὸ ἐξωτερικὸν μαῦρο μέρος τοῦ πίνακα. ("Αν σκαλίσωμεν τὸν πίνακα μὲ ἕνα μυτερὸ μαχαίρι θὰ ἰδοῦμε ἀπὸ μέσα τὸ ἄσπρο ξύλο ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἶναι καμωμένος ὁ πίνακας).

57. 2 Ἡ περισσότερον ἀξιόλογος ἐπιφάνεια εἶναι ἡ **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια,** ἢ ἁπλῶς τὸ **ἐπίπεδον.** Σχηματίζομεν ἀντίληψιν ἐπιπέδου ἐπιφανείας ὅταν παρατηρήσωμεν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὕδατος, τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πατώματος, τὴν ἐπι-



Σχ. 44.



Σχ. 45.

φάνειαν τοῦ τοίχου, τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπεζιοῦ, τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σανίδας καλὰ πλανισμένης κ.λ.π. Ἐπίσης σχηματίζομεν ἀντίληψιν ἑνὸς ἐπιπέδου ὅταν πάρωμεν μιὰ κόλα λεπτοῦ χαρτιοῦ καὶ τὴν ἀφίσουμε ἐπάνω στὸ τραπέζι. Ἡ κόλα τοῦ χαρτιοῦ φανερώνει ἕνα ἐπίπεδον (δηλαδὴ ἕνα κομμάτι ἐπιπέδου).

57. 3 Ἕνα ἐπίπεδον (δηλαδὴ μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια) ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα : Ἂν πάρωμεν μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ τὴν τοποθετήσωμεν ὁπωσδήποτε ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι **ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας βρίσκονται** (ἀκουμποῦν) **ἐπάνω εἰς τὸ ἐπίπεδον.** Διὰ τοῦτο μποροῦμε νὰ εἰποῦμε ὅτι :

Ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει ἡ εὐθεῖα γραμμή, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὴν τοποθετήσωμεν ἐπάνω του.

Ἕνα ἐπίπεδον τὸ ὀνομάζομεν συνήθως μὲ ἕνα κεφαλαῖον γράμμα (ἢ καὶ μὲ ἕνα γράμμα τοῦ γαλλικοῦ ἀλφαβήτου). Λέμε π.χ. τὸ ἐπίπεδον Π (σχ. 44).

58. Πῶς παράγεται ἕνα ἐπίπεδον : Πέρνομεν μίαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΧΧ′ καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Σύρομεν μίαν ἄλλην ἀπεριόριστον εὐθεῖον ΨΑΨ′ ποὺ νὰ περνᾶ ἀπὸ τὸ Α καὶ νὰ τέμνῃ τὴν ΧΧ′ ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Β. Περιστρέφομεν τὴν εὐθεῖαν ΨΑΨ′ περὶ τὸ σημεῖον Α ἔτσι ὥστε νὰ συναντᾶ διαρκῶς τὴν ΧΧ′ (νὰ πέρνῃ δηλαδὴ τὰς θέσεις ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κ.λ.π.). Τότε ἡ κινητὴ εὐθεῖα ΨΑΨ′ παράγει τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν Π, διότι θὰ μένῃ διαρκῶς ἐπάνω στὴν ἐπιφάνειαν ποὺ γράφει (σχ. 45). Ἀπὸ τὸν τρόπον αὐτὸν κατὰ τὸν ὁποῖον παράγεται τὸ ἐπίπεδον Π βγάζομεν τὰ ἑξῆς σπουδαῖα συμπεράσματα.

I. Ἕνα ἐπίπεδον ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον (δηλαδὴ ὅσο θέλομεν) **πρὸς ὅλα τὰ μέρη του.**

II. Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΧΧ′ ὁρίζεται ἐντελῶς ἀπὸ δύο σημεῖα αὐτῆς ἔστω ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἡ δὲ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΨΑΨ′ ὁρίζεται ἐντελῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΧΧ′ ἔστω ἀπὸ τὸ Β ἢ τὸ Γ. Ὥστε ἔχομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ ὁμοευθειακά, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περνάει τὸ ἐπίπεδον Π ποὺ παράγεται. Ἂν ἐπιχειρήσωμεν νὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλο ἕνα ἐπίπεδον ποὺ νὰ περνάῃ ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ μὴ ὁμοευθειακὰ σημεῖα Α, Β, Γ τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἄλλο τοῦτο ἐπίπεδον θὰ ἐφαρμόσῃ ἐντελῶς ἐπάνω στὸ πρῶτο ἐπίπεδο Π. Ἀπὸ αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι :

Τρία σημεῖα μὴ ὁμοευθειακὰ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.

III. Τὸ ἐπίπεδον Π περιλαμβάνει πολλὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΧΧ′ κ.λ.π. γνωρίζομεν δὲ ὅτι κάθε εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἕνα σημειοσύνολον μὲ ἄπειρα σημεῖα. Ὥστε :

Τὸ ἐπίπεδον εἶναι σημειοσύνολον μὲ ἄπειρα σημεῖα

Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὑποσύνολον αὐτοῦ. Δηλαδὴ διὰ τὴν εὐθεῖαν ΧΧ′ τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι

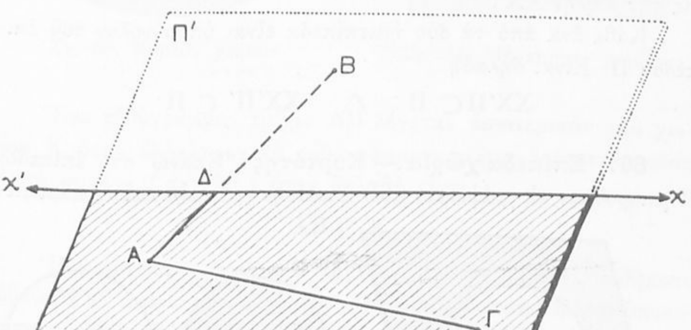
$$XX' \subset \Pi$$

IV. Ὅταν μία εὐθεῖα ΑΒ ἔχῃ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς ἐπάνω σὲ ἕνα ἐπίπεδον, τότε ὁλόκληρη ἡ εὐθεῖα βρίσκεται ἐπάνω στὸ ἐπίπεδον, ἢ ὅπως λέμε ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον (εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου).

Τοῦτο τὸ συμβολίζομε μὲ τὴν ἑξῆς συνεπαγωγήν :

$$A \in \Pi \quad \wedge \quad B \in \Pi \quad \Longrightarrow \quad AB \in \Pi$$

59. Ἡμιεπίπεδον : Πέρνομεν τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΧ′ αὐτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (ἀπεριόριστος) εὐθεῖα



Σχ. 46.

ΧΧ′ χωρίζει τὸ (ἀπεριόριστον) ἐπίπεδον Π εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ πρὸς τὰ ἄνω μέρος ΧΧ′Π′ καὶ εἰς τὸ πρὸς τὰ κάτω μέρος ΧΧ′Π. Κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ δύο μέρη λέγεται **ἡμιεπίπεδον.** Ἡ εὐθεῖα ΧΧ′ ποὺ ξεχωρίζει τὰ δύο ἡμιεπίπεδα λέγεται **ἀκμὴ** ἢ διαχωριστικὴ γραμμὴ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων.

Ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἔξω ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΧΧ΄ ἢ θὰ βρίσκεται εἰς τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδον ἢ θὰ βρίσκεται εἰς τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδον. Π.χ. τὸ σημεῖον Β βρίσκεται εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ΧΧ΄Π΄, τὸ δὲ σημεῖον Α βρίσκεται εἰς τὸ κάτω ἡμιεπίπεδον ΧΧ΄Π. Τὸ ἴδιον σημεῖον δὲν μπορεῖ νὰ βρίσκεται καὶ εἰς τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδον καὶ εἰς τὸ ἄλλο. Ἔχομεν δηλαδὴ διὰ τὸ σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου Π.

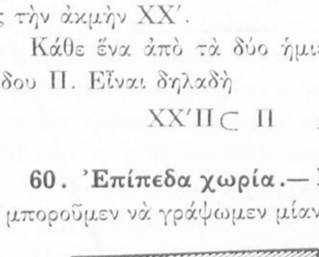
$$\mathrm{A} \in \Pi \quad \wedge \quad \mathrm{A} \in \mathrm{XX'}\Pi \Longrightarrow \mathrm{A} \notin \mathrm{XX'}\Pi'$$

Ὅταν τὰ ἄκρα Α καὶ Γ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΓ βρίσκωνται εἰς τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδον ΧΧ΄Π, τότε ὁλόκληρον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ βρίσκεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τοῦτο. Ὅταν τὸ ἕνα ἄκρον Α ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται στὸ ἕνα ἡμιεπίπεδον ΧΧ΄Π καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον Β βρίσκεται στὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδον ΧΧ΄Π΄, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ διαπερνᾶ τὴν διαχωριστικὴν γραμμὴν (τὴν ἀκμὴν) τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, ἢ ὅπως λέμε τὸ ΑΒ **τέμνει** τὴν ἀκμὴν ΧΧ΄ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὸ σημεῖον Δ λέγεται **ἴχνος** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπάνω εἰς τὴν ἀκμὴν ΧΧ΄.

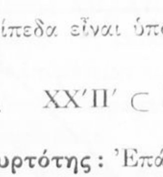
Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἡμιεπίπεδα εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἐπιπέδου Π. Εἶναι δηλαδὴ

$$\mathrm{XX'}\Pi \subset \Pi \quad \wedge \quad \mathrm{XX'}\Pi' \subset \Pi$$

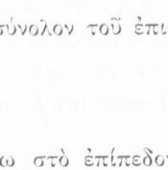
60. Ἐπίπεδα χωρία.— Κυρτότης: Ἐπάνω στὸ ἐπίπεδον Π μποροῦμεν νὰ γράψωμεν μίαν κλειστὴν γραμμὴν καὶ νὰ πάρωμεν



Σχ. 47.



Σχ. 48.

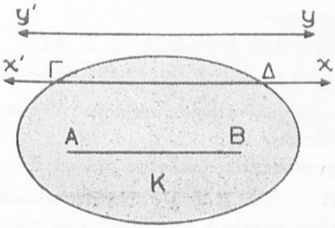


Σχ. 49.

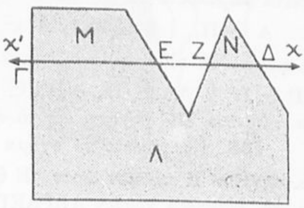
τὸ σύνολον τῶν σημείων ποὺ βρίσκονται μέσα στὴν κλειστὴν αὐτὴν γραμμήν, π.χ. τὸ σύνολον τῶν σημείων Κ. Τότε λέμε ὅτι ἔχομεν ἕνα ἐπίπεδον **χωρίον** (π.χ. σὲ μιὰ κόλα χαρτὶ σχεδιάζομεν ἕνα κύκλον καὶ ἀποκόπτομεν τὸν κύκλον. Ὁ κύκλος ποὺ ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὴν κόλαν εἶναι ἕνα ἐπίπεδον **χωρίον** μένει δὲ εἰς τὴν κόλα τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 47). Ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον χωρίον Κ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἐπιπέδου Π, δηλαδὴ εἶναι

$$K \subset \Pi.$$

Κάθε ἐπίπεδον χωρίον περικλείεται ἀπὸ μίαν γραμμήν, ἡ ὁποία λέγεται **περίμετρος** τοῦ χωρίου. (Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ κύκλου ἡ περίμετρος λέγεται περιφέρεια).



Σχ. 50. Κυρτὸν χωρίον.



Σχ. 51. Μὴ κυρτὸν χωρίον.

Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ λέγεται **ἐσωτερικὸν** τοῦ χωρίου Κ ὅταν ὁλόκληρον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα βρίσκεται μέσα εἰς τὸ χωρίον (σχ. 50) ὅταν δηλαδὴ εἶναι

$$AB \subset K$$

Ἕνα ἐπίπεδον χωρίον Κ λέγεται **κυρτὸν** ὅταν ὁποιαδήποτε εὐθεῖα Ψ'Ψ" ἀφίνει τὸ χωρίον πρὸς τὸ ἕνα μέρος της, ἢ ὅταν ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ΧΧ' ποὺ τέμνει τὸ χωρίον ὁρίζει ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ ποὺ εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ χωρίου (σχ. 50).

Ἕνα ἐπίπεδον χωρίον Λ λέγεται μὴ κυρτὸν ὅταν ὑπάρχῃ κάποια εὐθεῖα ποὺ τέμνει τὸ χωρίον καὶ ἀφίνει μέρη τοῦ χωρίου ἑκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 51). Δηλαδὴ εἰς τὸ μὴ κυρτὸν χωρίον Λ ὑπάρχει κάποια εὐθεῖα ΧΧ' ποὺ ἀφίνει πρὸς τὸ ἕνα μέρος της τὸ κάτω κομμάτι τοῦ χωρίου καὶ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος της τὸ κομμάτι Μ ἢ τὸ κομμάτι Ν τοῦ χωρίου.

'Ασκήσεις

183. Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ἐπιπέδων.

184. Νὰ πάρετε ἕνα ἐπίπεδον (μιὰ κόλα χαρτὶ) νὰ χαράξετε μία εὐθεῖα XX′ ἐπάνω εἰς αὐτὸ καὶ νὰ προσδιορίσετε τὰ δύο ἡμιεπίπεδα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον. 'Ονομάστε τα Π_1 καὶ Π_2. Πάρετε ἔπειτα τὰ σημεῖα.

$A \in \Pi_1$, $B \in \Pi_1$, $\Gamma \in XX'$, $\Delta \in XX'$, $E \in \Pi_2$, $Z \in \Pi_2$

καὶ σχηματίσετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ, ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ. Ποῖα ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα ἀνήκουν εἰς τὸ Π_1 καὶ ποῖα εἰς τὸ Π_2 Νὰ σημειώσετε τὰ ἴχνη αὐτῶν ἐπὶ τῆς XX′.

185. Νὰ πάρετε ἕνα ἡμιεπίπεδον Π_1 καὶ τὴν ἀκμὴν XX′ αὐτοῦ ἔπειτα νὰ πάρετε τὰ μὴ ὁμοευθειακὰ σημεῖα

$A \in \Pi_1$, $B \in \Pi_1$, $\Gamma \in XX'$, $\Delta \notin \Pi_1$ ἀλλὰ $\Delta \in A\Gamma$

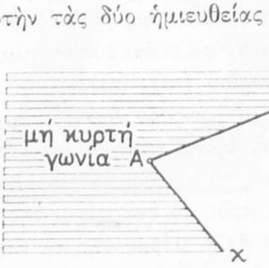
νὰ φέρετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ ΑΔ καὶ ΒΔ. Νὰ διαπιστώσετε ἂν $AB \in \Pi_1$, $A\Delta \in \Pi_1$, $B\Delta \in \Pi_1$ καὶ νὰ σημειώσετε ποῖα εὐθύγραμμα τμήματα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον Π_1.

186. Νὰ κάμετε τὸ σχῆμα τῆς παραπάνω ἀσκήσεως καὶ νὰ πάρετε τὸ σημεῖον Ε τέτοιον ὥστε $E \in B\Gamma \wedge E \notin \Pi_1$. Νὰ διαπιστώσετε ἂν τὸ ἐπίπεδον χωρίον ΑΒΓΔΕΓΑ εἶναι κυρτὸν ἢ ὄχι. Ἔπειτα νὰ πάρετε τὸ σημεῖον Ζ τοῦ χωρίου ΓΔΕ καὶ νὰ φέρετε τὰ τμήματα ΖΑ, ΖΒ, ΖΔ καὶ νὰ ἐξακριβώσετε ποῖα ἀπὸ τὰ τμήματα αὐτὰ ἀνήκουν εἰς τὸ χωρίον ΑΒΓΔΕΓΑ καὶ ποῖα εἶναι τμήματα τοῦ Π_1 ;

187. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα κυρτὸν χωρίον Σ_1 καὶ ἕνα μὴ κυρτὸν χωρίον Σ_2 τέτοια ὥστε νὰ ἔχουν κοινὸν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ.

II. Ἡ Γωνία

61. 1 Πέρνομεν μίαν κόλα χαρτί, χαράσσομεν ἐπάνω εἰς αὐτὴν τὰς δύο ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΑΨ καὶ κόβομεν τὸ χαρτὶ μὲ



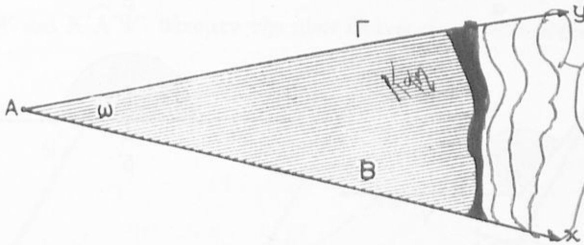
Σχ. 52.

Σχ. 53.

ἕνα ψαλίδι ἐπάνω εἰς τὰς χαραγμένας ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΑΨ. Τότε σχηματίζονται δύο χωρία. Κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ χωρία λέγεται **ἐπίπεδος γωνία** ἢ ἁπλῶς **γωνία**. Αἱ δύο ἡμιευθεῖαι λέγονται πλευραὶ τῆς γωνίας, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας. Ὥστε δύο ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ ΑΨ ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀρχὴν Α, σχηματίζουν δύο γωνίας, τὴν κυρτὴν γωνίαν τοῦ σχήματος 53 καὶ τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν τοῦ σχήματος 52.

Τὴν γωνίαν τὴν ὀνομάζομεν μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

α) Θέτομεν ἕνα γράμμα εἰς τὴν κορυφήν της καὶ ἀπὸ ἕνα γράμμα σὲ κάθε πλευρὰ καὶ διαβάζομεν τὰ τρία γράμματα ἔτσι



Σχ. 54.

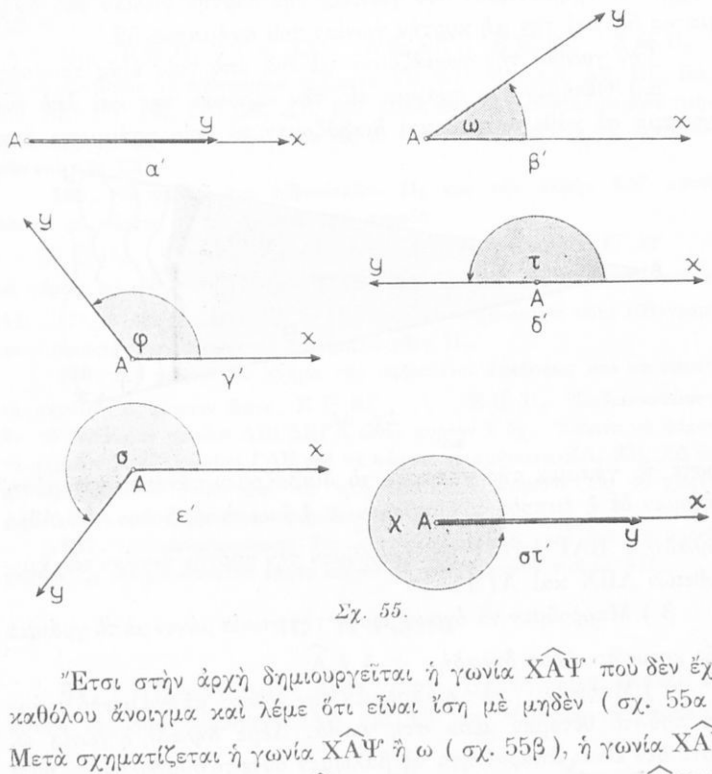
ὥστε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τὸ διαβάζομεν πάντοτε στὴ μέση, θέτομεν δὲ ἢ ἐμπρὸς τὸ σύμβολον ∢ ἢ ἄνω τὸ σύμβολον ⌒. Λέμε δηλαδὴ ∢ ΒΑΓ ἢ $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$ καὶ ἐννοοῦμεν τὴν κυρτὴν γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒΧ καὶ ΑΓΨ.

β) Μποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὴν γωνία μόνον μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς. Λέμε δηλαδή : ∢ Α ἢ $\widehat{\text{Α}}$.

γ) Μποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὴν γωνίαν μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα ποὺ τὸ θέτομεν μέσα στὴ γωνία. Λέμε δηλαδὴ ἡ γωνία ω. Τότε δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ βάλωμεν οὔτε τὸ σύμβολον ∢ οὔτε τὸ σύμβολον ⌒.

δ) Μποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν τὴν γωνίαν μὲ τὸ ὄνομα τῶν δύο ἡμιευθειῶν ποὺ τὴν σχηματίζουν. Τότε τὸ ὄνομα τῶν ἡμιευθειῶν τὸ χωρίζομεν μὲ κόμμα καὶ συνήθως τὰς κλείομεν μέσα σὲ παρενθέσεις. Λέμε δηλαδὴ ∢ (ΑΧ,ΑΨ) ἢ (ΑΧ,ΑΨ)

61. 2 Μποροῦμεν ὅμως νὰ εἰποῦμε ὅτι μία γωνία δημιουργεῖται καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Πέρνομεν δύο ἡμιευθεῖες ΑΧ, ΑΨ καὶ τὰς θέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην ἔτσι ὥστε νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Α καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν (σχ. 55α). Κατόπιν περιστρέφομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΨ περὶ τὸ Α ὅπως στρέφονται οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου, ἔτσι ὥστε ἡ περιστρεφομένη ἡμιευθεῖα νὰ βρίσκεται πάντοτε στὸ ἴδιον ἐπίπεδον.

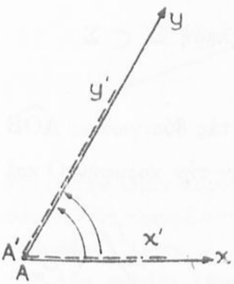


Σχ. 55.

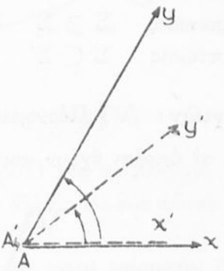
Ἔτσι στὴν ἀρχὴ δημιουργεῖται ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ποὺ δὲν ἔχει καθόλου ἄνοιγμα καὶ λέμε ὅτι εἶναι ἴση μὲ μηδὲν (σχ. 55α). Μετὰ σχηματίζεται ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ἢ ω (σχ. 55β), ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ἢ φ (σχ. 55γ) ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ἢ τ (σχ. 55δ), ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ἢ σ (σχ. 55ε) καὶ ἡ γωνία $\widehat{XA\Psi}$ ἢ χ (σχ. 55 στ΄). Αἱ γωνίαι τοῦ σχήματος β΄ καὶ γ΄ εἶναι κυρταί, ἡ γωνία τοῦ σχήματος δ΄ ποὺ ἡ μία ἡμιευθεῖα ΑΨ γίνεται προέκτασις τῆς ἄλλης ΑΧ λέγεται **πεπλατυσμένη** ἢ **εὐθύγραμμος γωνία,** ἡ γωνία τοῦ σχήματος ε΄ εἶναι μὴ κυρτὴ καὶ τέλος ἡ γωνία τοῦ σχήματος στ΄ ποὺ ἡ κινουμένη ἡμιευθεῖα ΑΨ μετὰ ἀπὸ μία πλήρη περιστροφὴν πίπτει ἐπάνω εἰς τὴν ΑΧ λέγεται **πλήρης** γωνία.

Τὰ παραπάνω τὰ ἀντιλαμβανόμεθα πολὺ εὔκολα ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν δείκτην τῶν ὡρῶν τὸν ὁποῖον ἂς φαντασθοῦμε ὅτι μένει ἀκίνητος εἰς τὸ 12, ἡ δὲ ἡμιευθεῖα ΑΨ κινεῖται πρὸς τὰ κάτω καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν δείκτην τῶν πρώτων λεπτῶν. Τότε τὴν ὥραν 12 θὰ δείξουν τὴν γωνίαν 0 (σχ. 55α) τὴν ὥραν π.χ. 12 καὶ 20′ θὰ δείξουν τὴν γωνίαν φ, τὴν ὥραν 12 καὶ 30′ θὰ δείξουν τὴν εὐθύγραμμον γωνίαν τοῦ σχήματος δ′ καὶ τὴν ὥραν 1 θὰ δείξουν τὴν πλήρη γωνίαν τοῦ σχήματος στ′.

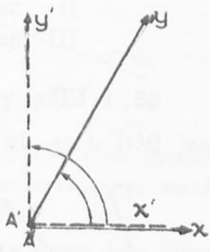
62. Σύγκρισις δύο γωνιῶν: Πέρνομεν δύο γωνίας τὰς $X\widehat{A}\Psi$ καὶ $X'\widehat{A'}\Psi'$ θέτομεν τὴν μίαν ἐπάνω εἰς τὴν ἄλλην ἔτσι ὥστε



Σχ. 56.



Σχ. 57.



Σχ. 58.

ἡ κορυφὴ Α′ τῆς μιᾶς νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν Α τῆς ἄλλης καὶ ἡ μία πλευρὰ Α′Χ′ αὐτῆς νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΑΧ τῆς ἄλλης, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΨ καὶ Α′Ψ′ νὰ πέσουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΧ. Τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι θὰ συμβῇ ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς τρία :

I. Ἡ πλευρὰ Α′Ψ′ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΑΨ (σχ. 56). Τότε αἱ δύο γωνίαι ἐφαρμόζουν καὶ τότε λέμε ὅτι αἱ γωνίαι ε ἶ ν α ι ἴσαι δηλαδὴ

$$X\widehat{A}\Psi = X'\widehat{A'}\Psi'$$

II. Ἡ πλευρὰ Α′Ψ′ θὰ πέσῃ μέσα εἰς τὴν γωνίαν $X\widehat{A}\Psi$, (σχ. 57) ὁπότε αἱ δύο γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουν. Τότε λέμε ὅτι ἡ γωνία $X\widehat{A}\Psi$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν γωνίαν $X'\widehat{A'}\Psi'$ δηλαδὴ

$$X\widehat{A}\Psi > X'\widehat{A'}\Psi'$$

III. Ἡ πλευρὰ $\mathrm{A}'\Psi'$ θὰ πέσῃ ἔξω ἀπὸ τὴν πλευρὰν $\mathrm{A}\Psi$ (σχ. 58) ὁπότε πάλιν αἱ δύο γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουν. Τότε λέμε ὅτι ἡ γωνία $\mathrm{X}\widehat{\mathrm{A}}\Psi$ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴν γωνίαν $\mathrm{X}'\widehat{\mathrm{A}'}\Psi'$ δηλαδὴ

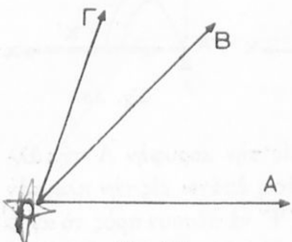
$$\mathrm{X}\widehat{\mathrm{A}}\Psi < \mathrm{X}'\widehat{\mathrm{A}'}\Psi'$$

Ὥστε **τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμά της.** Διότι αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας μποροῦν νὰ μεγαλώσουν ὅσο θέλομεν, ἀφοῦ εἶναι ἡμιευθεῖαι.

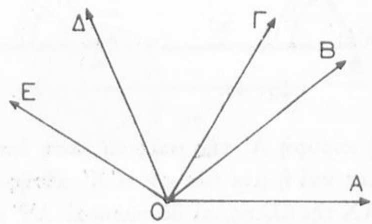
Ἐὰν Σ εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῆς γωνίας $\mathrm{X}\widehat{\mathrm{A}}\Psi$ καὶ Σ' εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῆς γωνίας $\mathrm{X}'\widehat{\mathrm{A}'}\Psi'$, τότε θὰ εἶναι

I περίπτωσις $\Sigma = \Sigma'$
II περίπτωσις $\Sigma \supset \Sigma'$ δηλαδὴ $\Sigma' \subset \Sigma$
III περίπτωσις $\Sigma \subset \Sigma'$

63. 1 **Εἴδη γωνιῶν: Α)** Πέρνομεν τὰς δύο γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ καὶ $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$ (σχ. 59), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴν Ο καὶ



Σχ. 59.



Σχ. 60.

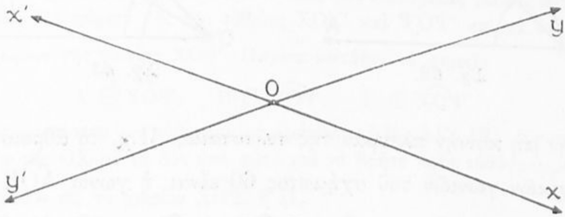
τὴν πλευρὰν ΟΒ, αἱ δὲ δύο ἄλλαι μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΓ βρίσκονται ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο (ἑκατέρωθεν) τῆς κοινῆς πλευρᾶς. Τότε αἱ δύο γωνίαι λέγονται **ἐφεξῆς.** Ὥστε

Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς ὅταν ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευράν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.

63. 2 **Β)** Πέρνομεν τὰς γωνίας $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma$, $\Gamma\widehat{\mathrm{O}}\Delta$, $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{E}$ (σχ. 60) καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἀνὰ δύο εἶναι ἐφεξῆς, δηλαδὴ ἡ α′ μὲ τὴν β′, ἡ β′ μὲ τὴν γ′ καὶ ἡ γ′ μὲ τὴν δ′. Τότε αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται **διαδοχικαί.** Ὥστε

Τρεῖς ἢ περισσότεραι γωνίαι λέγονται διαδοχικαὶ ὅταν εἶναι ἐφεξῆς ἀνὰ δύο.

63. 3 **Γ)** Δύο εὐθεῖαι ΧΟΧ′ καὶ ΨΟΨ″, ποὺ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο, σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας τὰς $\widehat{XO\Psi}$, $\widehat{\Psi OX'}$, $\widehat{X'O\Psi''}$, $\widehat{\Psi''OX}$. Ἀπὸ τὰς τέσσαρας αὐτὰς γωνίας ἡ $\widehat{XO\Psi}$ καὶ $\widehat{X'O\Psi''}$



Σχ. 61.

ἔχουν τὴν ἰδίαν κορυφὴν Ο καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι λέγονται **κατὰ κορυφήν.** Ὥστε

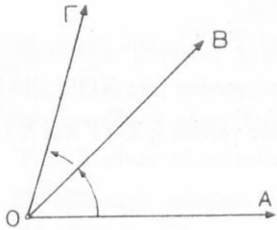
Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφὴν ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας ποὺ σχηματίζουν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΧΟΧ′ καὶ ΨΟΨ″ ἀνὰ δύο εἶναι κατὰ κορυφὴν καὶ ἀνὰ δύο εἶναι ἐφεξῆς, δηλαδὴ κατὰ κορυφὴν εἶναι αἱ $\widehat{XO\Psi}$ καὶ $\widehat{X'O\Psi''}$ ἢ αἱ $\widehat{XO\Psi''}$ καὶ $\widehat{\Psi OX'}$. Ἐφεξῆς εἶναι αἱ $\widehat{XO\Psi}$ καὶ $\widehat{\Psi OX'}$ ἢ $\widehat{\Psi OX'}$ καὶ $\widehat{X'O\Psi''}$ ἢ $\widehat{X'O\Psi''}$ καὶ $\widehat{\Psi''OX}$.

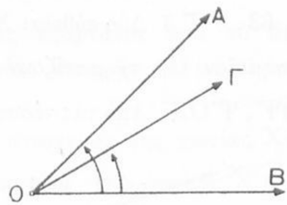
64. 1 **Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις γωνιῶν: Α)** Πέρνομεν δύο γωνίας. Διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν τὰς κάνομεν ἐφεξῆς. Τότε ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία ποὺ ἔχει πλευρὰς τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς τῶν δύο γωνιῶν (σχ. 62) ἔχομεν δηλαδὴ

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$$

Ὅταν ἔχωμεν περισσοτέρας γωνίας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν τὰς κάνομεν διαδοχικάς. Τότε ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἡ γωνία ποὺ ἔχει ὡς πλευρὰς τὴν μὴ κοινὴν πλευρὰν τῆς πρώτης γωνίας



Σχ. 62.



Σχ. 63.

καὶ τὴν μὴ κοινὴν πλευρὰν τῆς τελευταίας. Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν τοῦ σχήματος 60 εἶναι ἡ γωνία $\widehat{AOE}$ δηλαδὴ

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = \widehat{AOE}$$

εἶναι ἐπίσης $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{AO\Delta}$

$$\widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = \widehat{BOE}$$

64. 2 Β) Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο γωνίας θέτομεν τὴν μικροτέραν ἐπάνω εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἔτσι ὥστε νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν κορυφὴν καὶ τὴν μίαν πλευράν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ νὰ πέσουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς (σχ. 63). Τότε τὸ μέρος ποὺ περισσεύει εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν, δηλαδὴ

$$\widehat{BOA} - \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA}$$

Ὅταν αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε **ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν.**

Σημ. : Ἐνῷ αἱ δύο γωνίαι $\widehat{BO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma OA}$ (σχ. 63) εἶναι ἐφεξῆς αἱ δύο γωνίαι $\widehat{BOA}$ καὶ $\widehat{BO\Gamma}$ **δὲν εἶναι ἐφεξῆς.**

Ἀσκήσεις

188. Νὰ πάρετε μίαν γωνίαν $\widehat{BO\Gamma}$, τὸ σημεῖον $A \in \widehat{BO\Gamma}$ καὶ τὸ σημεῖον $\Delta \notin \widehat{BO\Gamma}$ καὶ νὰ σχηματίσετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΟ, ΔΒ, ΔΑ, ΔΟ, νὰ σημειώσετε καὶ τὴν $ΑΔ \cap ΟΓ$ καὶ $ΔΒ \cap ΟΓ$. Ποῖα ἀπὸ αὐτὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι τμήματα τοῦ χωρίου $\widehat{ΒΟΓ}$ καὶ ποῖα ὄχι ;

189. Ποῖον εἶδος γωνίας σχηματίζουν οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου α) τὴν ὥραν 12 ; β) τὴν ὥραν 4 ; γ) τὴν ὥραν 6 ; δ) τὴν ὥραν 9 ;

190. Πέρνομεν τὸ ἡμιεπίπεδον $Π_1$ καὶ τὴν ἀκμὴν ΧΧ′ αὐτοῦ. Κατόπιν πέρνομεν τὰ σημεῖα

$$Α \in ΧΧ', \quad Β \in Π_1, \quad Γ \in Π_1, \quad Δ \in Π_1$$

καὶ φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Νὰ διαβάσετε ὅλας τὰς ἐφεξῆς γωνίας ποὺ σχηματίζονται καὶ κατόπιν ὅλας τὰς διαδοχικὰς γωνίας ἀνὰ τρεῖς.

191. Νὰ πάρετε τὰς δύο εὐθείας ΧΟΧ′ καὶ ΨΟΨ″ καὶ νὰ ὀνομάσετε $Π_1$ τὸ χωρίον τῆς γωνίας $\widehat{ΧΟΨ}$. Πάρετε κατόπιν τὰ σημεῖα

$$Α \in \widehat{ΧΟΨ}, \quad Β \in \widehat{ΧΟΨ}, \quad Γ \in \widehat{ΧΟΨ''}$$

καὶ νὰ σχηματίσετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Σημειώσετε τὴν τομὴν τῆς ΟΧ μὲ τὰ δύο ἀπὸ αὐτὰ καὶ νὰ βρῆτε ποῖα εὐθύγραμμα τμήματα ἀνήκουν εἰς τὸ χωρίον $\widehat{ΧΟΨ}$ ἢ $Π_1$.

192. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν μὲ τὴν σειρὰν ποὺ δείχνουν οἱ δεῖκται τοῦ ὡρολογίου τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ καὶ ΟΕ.

α) Νὰ διαβάσετε ὅλας τὰς σχηματιζομένας γωνίας ὡς ἐφεξῆς καὶ ὡς διαδοχικὰς ἀνὰ τρεῖς. β) Νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα

$$\widehat{ΑΟΒ} + \widehat{ΒΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{ΑΟΒ} + \widehat{ΒΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ} + \widehat{ΔΟΕ}$$

γ′) Νὰ βρῆτε τὰς διαφορὰς $\widehat{ΑΟΓ} - \widehat{ΑΟΒ}$ καὶ $\widehat{ΑΟΔ} - \widehat{ΒΟΔ}$.

III. Ὁ κύκλος

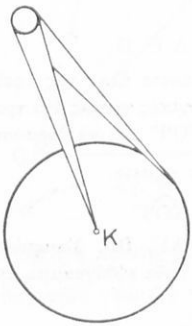
65. Κύκλος: Πέρνομεν τὸν **διαβήτην** *, τοῦ δίνομεν ἕνα ὡρισμένον ἄνοιγμα, στηρίζομεν τὸ μυτερὸν σκέλος εἰς ἕνα σταθερὸν σημεῖον Κ καὶ μὲ μία ὁλόκληρη περιστροφὴ τοῦ ἄλλου σκέλους γράφομεν μίαν γραμμήν. Τότε σχηματίζεται τὸ ἐπίπεδον σχῆμα ποὺ λέγεται κύκλος. Ὁ κύκλος ἔχει τὰ ἑξῆς γνωρίσματα.

α) Τὸ σταθερὸν σημεῖον Κ, ποὺ λέγεται **κέντρον** τοῦ κύκλου (σχ. 65).

(*) Διαβήτης εἶναι ἕνα ὄργανον πολὺ γνωστὸν καὶ πολὺ χρήσιμον. Ἔχει δύο σκέλη ποὺ μποροῦν νὰ ἀνοιγοκλείνουν, τὸ ἕνα μυτερὸν καὶ τὸ ἄλλο κατάλληλον νὰ δέχεται μολύβι ἢ πέννα διὰ μελάνι. Μὲ τὸν διαβήτην κάνομεν σχεδιάσεις, γράφομεν περιφέρειες, μετροῦμεν ἀποστάσεις κλπ. Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὸν διαβήτην διὰ μέτρησιν ἀποστάσεων, τότε ἔχει καὶ τὰ δύο σκέλη μυτερὰ καὶ τότε ὁ διαβήτης λέγεται **διαστημόμετρον**.

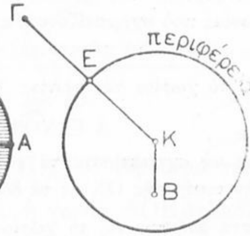
β) Τὴν κλειστὴν γραμμήν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ κέντρον Κ καὶ ἡ ὁποία λέγεται **περιφέρεια** τοῦ κύκλου.

γ) Τὸ ἐπίπεδον χωρίον ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν καὶ λέγεται **ἐσωτερικὸν** τοῦ κύκλου. Ὥστε :



Σχ. 64.

Σχ. 65.



Σχ. 66.

Περιφέρεια κύκλου λέγεται ἡ κλειστὴ γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον ποὺ λέγεται κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλος λέγεται τὸ ἐπίπεδον χωρίον, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

Ἑπομένως ἡ περιφέρεια Π εἶναι ὑποσύνολον τοῦ κύκλου Κ, δηλαδὴ εἶναι

$$\Pi \subset K$$

Ἀκτῖνα (ἀκτὶς) τοῦ κύκλου λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας, ὅπως ἡ ΚΑ.

Συνήθως τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου τὴν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γαλλικὸν γράμμα R, τὸν δὲ κύκλον τὸν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γράμμα τοῦ κέντρου καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα του ὡς ἑξῆς :

κύκλος (Κ, ΚΑ) ἢ ἂν εἶναι $KA = R$, λέμε : κύκλος (Κ, R).

Ἀπὸ τὸν τρόπον ποὺ κατασκευάζεται ἕνας κύκλος βγάζομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

α) Ὁ κύκλος ἔχει ἄπειρες ἀκτῖνες, ὅλαι δὲ αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

β) Κάθε σημεῖον, ποὺ βρίσκεται ἐπάνω στὴν περιφέρειαν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Κ ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα, π.χ. ΑΚ = R ἢ

$$Α \in Περ. \Longrightarrow ΑΚ = R, \quad Ε \in Περ \Longrightarrow ΕΚ = R.$$

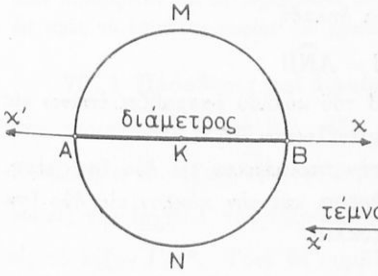
γ) Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο Κ ἀπόστασιν μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα π.χ. ΒΚ < R ἢ

$$Β \in Κ \Longrightarrow ΒΚ < R$$

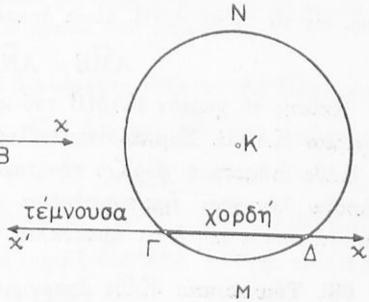
δ) Κάθε σημεῖον ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Κ ἀπόστασιν μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα, π.χ. ΓΚ > R ἢ

$$Γ \notin Κ \Longrightarrow ΓΚ > R$$

66. Διάμετρος : Πέρνομεν τὸν κύκλον Κ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΧΚΧ′ ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρον Κ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΧΚΧ′ τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β.



Σχ. 67.



Σχ. 68.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ λέγεται **διάμετρος** τοῦ κύκλου. Ὥστε

Διάμετρος ἑνὸς κύκλου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

$$ΚΑ = R, \quad ΚΒ = R \quad καὶ \quad ΑΒ = ΚΑ + ΚΒ = R + R = 2R$$

Ὥστε :

Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

67. Τόξον — Χορδή: Πέρνομεν τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ (σχ. 68). Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, τὸ ΓΜΔ καὶ τὸ ΓΝΔ. Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ λέγεται **τόξον.**

Ὥστε : **Τόξον λέγεται ἕνα μέρος τῆς περιφερείας.**

Τὸ τόξον σημειώνεται μὲ ⌒ ποὺ γράφεται ἀπὸ πάνω. Λέμε π.χ. τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$, ἢ τόξον $\widehat{\Gamma N\Delta}$. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ λέγονται ἄκρα τοῦ τόξου.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τοῦ τόξου λέγεται **χορδὴ** τοῦ τόξου.

Ἐπειδὴ τὸ μέρος ΑΜΒ τῆς περιφερείας Κ (σχ. 67) εἶναι τόξον διὰ τοῦτο συμπεραίνομεν ὅτι **ἡ διάμετρος ΑΒ εἶναι καὶ χορδή.**

Ἂν περιστρέψωμεν καταλλήλως τὸ τόξον $\widehat{AMB}$ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ (σχ. 67) εὔκολα συμπεραίνομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπάνω εἰς τὸ τόξον $\widehat{ANB}$, εἶναι δηλαδὴ

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

Ἐπίσης τὸ χωρίον ΚΑΜΒ τοῦ κύκλου ἐφαρμόζει ἐπάνω εἰς τὸ χωρίον ΚΑΝΒ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

Κάθε διάμετρος χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμιπεριφέρειαι** καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται **ἡμικύκλια.**

68. Τέμνουσα: Κάθε ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν λέγεται **τέμνουσα** τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου. Ἡ τέμνουσα ΧΔΓΧ' ὁρίζει μίαν χορδὴν ΓΔ (σχ. 68) καὶ δύο τόξα, τὸ $\widehat{\Gamma M\Delta}$ μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τὸ $\widehat{\Gamma N\Delta}$ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας. Εἰς τὸ ἑξῆς λέγοντες τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας τόξον $\widehat{\Gamma M\Delta}$.

69. Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω ἔχομεν τὰς ἑξῆς **μονοσημάντους** ἐννοίας.

α) Κάθε διάμετρος εἶναι καὶ χορδή.

β) Ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι τόξον.

γ) Τὸ τόξον ἔχει μίαν χορδήν.

Αἱ παραπάνω ἔννοιαι εἶναι **μονοσήμαντοι,** διότι δὲν ἀληθεύουν αἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν, δηλαδὴ

κάθε χορδὴ **δὲν** εἶναι διάμετρος

κάθε τόξον **δὲν** εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

κάθε χορδὴ **δὲν** ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τόξον.

Ἀσκήσεις

193. Ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ σὲ μίαν περιφέρειαν ;

194. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα κύκλον μὲ κέντρον τὸ Κ και μὲ διάμετρον 8 cm. Νὰ πάρετε ἔπειτα εἰς τὸ ἐπίπεδον ποὺ βρίσκεται ὁ κύκλος τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι ΑΚ = 5 cm, ΒΚ = 4 cm, ΓΚ = 2 cm, ΔΚ = 6 cm καὶ ΕΚ = 0 cm. Ἂν παραστήσετε μὲ (Κ) τὸ ἐπίπεδον χωρίον τοῦ κύκλου, νὰ σημειώσετε μὲ τὰ σύμβολα $\in$ καὶ $\notin$ τὴν σχέσιν ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ (Κ) καὶ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε.

195. Ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν (ε) πέρνομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = 2 cm., ΑΓ = 5 cm. ΑΔ = 6 cm, ΑΕ = 8 cm, ΑΖ = 9 cm. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα 3 cm νὰ γράψετε μίαν περιφέρειαν καὶ νὰ σημειώσετε τὴν θέσιν καθενὸς ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον χωρίον τοῦ κύκλου ποὺ σχηματίσθηκε.

70. 1 Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τόξων : Α) Πέρνομεν εἰς τὴν περιφέρειαν Κ τὰ δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{Γ\Delta}$, καὶ μετακινοῦμεν κατάλληλα τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχὴ Α αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν ἀρχὴν Γ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{Γ\Delta}$, τὸ δὲ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{Γ\Delta}$*. Τότε θὰ συμβῇ ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς τρία (κατὰ τὸν νόμον τῆς τριχοτομῆς § 15.3).

I. Τὸ τέλος Β τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ τέλος Δ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{Γ\Delta}$. Τότε τὰ δύο τόξα θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τότε λέμε ὅτι εἶναι ἴσα, (σχ. 69) δηλαδὴ

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{Γ\Delta}$$

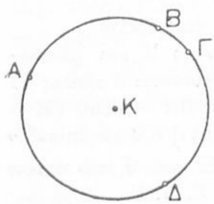
II. Τὸ τέλος Β τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τόξου $\overset{\frown}{Γ\Delta}$

(*) Ὅταν μετακινήσωμεν ἕνα τόξον ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειάν του, τότε τὸ τόξον εἰς τὴν νέαν θέσιν του θὰ βρίσκεται πάλιν ἐπάνω εἰς τὴν περιφέρειαν, ἀφοῦ κάθε σημεῖον τοῦ τόξου τούτου θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας.

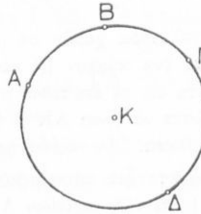
ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Β′ (σχ. 70). Τότε λέμε ὅτι τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$ δηλαδὴ

$$\widehat{AB} < \widehat{\Gamma\Delta}$$

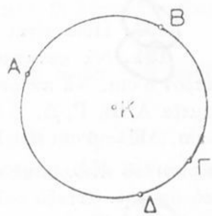
ΙΙΙ. Τὸ τέλος Β τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ θὰ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τόξου $\widehat{\Gamma\Delta}$



Σχ. 69.



Σχ. 70.



Σχ. 71.

ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Β′ (σχ. 71). Τότε λέμε ὅτι τὸ τόξον $\widehat{AB}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ τόξον $\widehat{\Gamma\Delta}$, δηλαδὴ

$$\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$$

70. 2 **Β)** Δύο ἢ περισσότερα τόξα λέγονται **διαδοχικὰ** ὅταν τὸ τέλος τοῦ πρώτου εἶναι ἀρχὴ τοῦ δευτέρου, τὸ τέλος τοῦ δευτέρου εἶναι ἀρχὴ τοῦ τρίτου κ.ο.κ. Π.χ. διαδοχικὰ εἶναι τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$.

70. 3 **Γ)** Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἴσων περιφερειῶν) τὰ κάνομεν διαδοχικὰ καὶ τότε ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι τὸ τόξον ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου. Θὰ εἶναι δηλαδὴ (σχ. 69)

$$\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$$

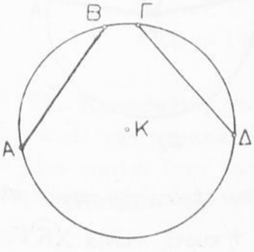
$$\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} + \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{A\Delta}$$

70. 4 **Δ)** Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἴσων περιφερειῶν) θέτομεν τὸ μικρότερον ἐπάνω εἰς τὸ μεγαλύτερον ἔτσι ὥστε νὰ συμπέσῃ ἡ ἀρχὴ αὐτῶν. Τότε ἡ διαφορὰ τῶν δύο τόξων θὰ εἶναι τὸ τόξον ποὺ περισσεύει. Θὰ εἶναι δηλαδὴ (σχ. 69).

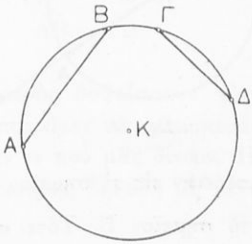
$$\widehat{\mathrm{A\Gamma}} - \widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{B\Gamma}} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\mathrm{B\Delta}} - \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \widehat{\mathrm{B\Gamma}}$$

Ὅταν τὰ δύο τόξα εἶναι ἴσα, τότε ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

71. Ἰδιότης τῶν ἴσων τόξων: Εἰς τὴν περιφέρειαν Κ πέρνομεν τὰ δύο ἴσα τόξα $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ καὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ



Σχ. 72.



Σχ. 73.

αὐτῶν (σχ. 72). Εἴδαμεν ὅτι ἂν μετακινήσωμεν τὸ τόξον $\widehat{\mathrm{AB}}$ ἔτσι ὥστε ἡ ἀρχὴ Α αὐτοῦ νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν ἀρχὴν Γ τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$, τότε τὸ τέλος Β τοῦ πρώτου τόξου θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ τέλος Δ τοῦ δευτέρου τόξου διότι τὰ τόξα εἶναι ἴσα. Ἑπομένως βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι θὰ εἶναι καὶ χορδὴ ΑΒ=χορδὴ ΓΔ. Καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει. Δηλαδὴ ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΓΔ τότε καὶ τὰ τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ θὰ εἶναι ἴσα. Ὥστε

Εἰς μίαν περιφέρειαν (ἢ εἰς ἴσας περιφερείας) **εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσα χορδαὶ** καὶ ἀντιστρόφως **ἴσαι χορδαὶ προσδιορίζουν ἴσα τόξα.**

Τὴν **ἀμφιμονοσήμαντον** αὐτὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων τόξων τὴν ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς:

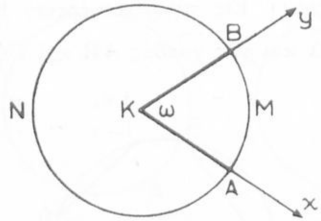
$$\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} \iff \text{χορδὴ } \mathrm{AB} = \text{χορδὴ } \mathrm{\Gamma\Delta}.$$

Συμπεραίνομεν ἐπίσης καὶ τὸ ἑξῆς (σχ. 73):

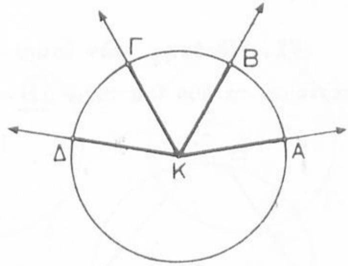
$$\widehat{\mathrm{AB}} > \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} \iff \text{χορδὴ } \mathrm{AB} > \text{χορδὴ } \mathrm{\Gamma\Delta}$$

Αἱ παραπάνω ἀνισότητες ἀληθεύουν ὅταν τὰ τόξα εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.

72. Ἐπίκεντρος γωνία: Πέρνομεν τὸν κύκλον Κ καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτοῦ φέρομεν τὰς δύο ἡμιευθείας ΚΧ ποὺ τέμνει τὴν



Σχ. 74.



Σχ. 75.

περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ΚΨ ποὺ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Β. Τότε σχηματίζεται ἡ κυρτὴ γωνία $\widehat{XK\Psi}$, ἢ $\widehat{AKB}$, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐπάνω εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐπίκεντρος** γωνία. Ὥστε :

Μία γωνία λέγεται ἐπίκεντρος, ὅταν ἔχῃ τὴν κορυφήν της ἐπάνω εἰς τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας.

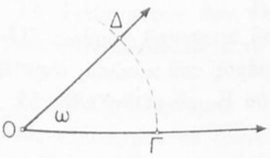
Αἱ πλευραὶ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ τόξον $\widehat{AB}$. Λέμε ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AKB}$ **ἔχει ὡς ἀντίστοιχον τόξον** τὸ τόξον $\widehat{AB}$ ἢ ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\widehat{AKB}$ **βαίνει εἰς τὸ τόξον $\widehat{AB}$.**

Κάθε ἐπίκεντρος γωνία ἔχει καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς. Πραγματικὰ αἱ δύο ἡμιευθεῖαι ΚΑΧ καὶ ΚΒΨ σχηματίζουν δύο γωνίας, τὴν κυρτὴν γωνίαν $\widehat{AKB}$ ποὺ βαίνει εἰς τὸ (μικρότερον ἡμιπεριφερείας) τόξον $\widehat{AMB}$ καὶ τὴν μὴ κυρτὴν γωνίαν $\widehat{AKB}$ (τὴν ἀπέξω) ποὺ βαίνει εἰς τὸ μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας τόξον $\widehat{ANB}$.

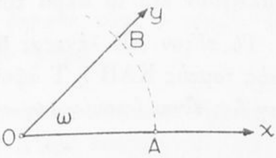
73. Ἰδιότης ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ τόξων αὐτῶν : Ὅταν δύο ἐπίκεντροι γωνίαι τῆς ἰδίας περιφερείας (ἢ ἴσων περιφερειῶν) εἶναι ἴσαι π.χ. $\widehat{AKB} = \widehat{\Gamma K \Delta}$ (σχ. 75) τότε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα, δηλαδὴ εἶναι καὶ $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$. Διότι ἂν περιστρέψωμεν τὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma K \Delta}$ περὶ τὸ Κ ἔτσι ὥστε ἡ πλευρὰ ΚΓ νὰ πέση ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΚΑ, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΚΔ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΚΒ ἀφοῦ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τότε τὸ μὲν Γ θὰ πέση εἰς τὸ Α τὸ δὲ Δ εἰς τὸ Β, δηλαδὴ θὰ ἐφαρμόσουν τὰ τόξα $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ $\widehat{AB}$ καὶ ἄρα εἶναι ἴσα. Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς **ἀμφιμονοσήμαντον** ἰδιότητα.

$$\widehat{AKB} = \widehat{\Gamma K \Delta} \iff \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$$

74. Κατασκευὴ γωνίας ἴσης πρὸς δοθεῖσαν : Στηριζόμενοι εἰς τὴν παραπάνω ἰδιότητα μποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν ω ποὺ μᾶς δίνουν. Πρὸς τοῦτο καθιστῶμεν τὴν γωνίαν ω ἐπίκεντρον, δηλαδὴ μὲ κέντρον



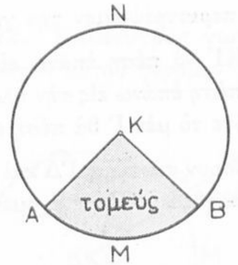
Σχ. 76.



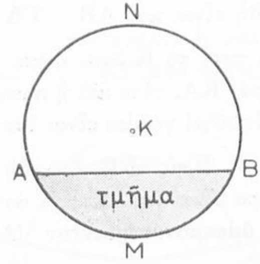
Σχ. 77.

τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ μὲ ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν (ἢ τόξον) ποὺ τέμνει τὰς πλευράς της εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν Ο τῆς ἡμιευθείας ΟΧ (ποὺ θέλομεν νὰ εἶναι κορυφὴ τῆς γωνίας ποὺ θὰ κατασκευάσωμεν) καὶ ἀκτῖνα τὴν ἰδίαν γράφομεν περιφέρειαν (ἢ τόξον) ποὺ τέμνει τὴν ΟΧ εἰς τὸ σημεῖον Α. Κατόπιν ἐπὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ πέρνομεν $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒΨ. Ἔτσι κατασκευάσαμεν τὴν γωνίαν $\widehat{AOB} = \omega$, διότι εἰς τὰς ἴσας περιφερείας ποὺ γράψαμε, αἱ γωνίαι αὐταὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἴσα τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

75. 1 Τομεὺς — Τμῆμα — Δακτύλιος: Α) Πέρνομεν τὸν κύκλον Κ καὶ φέρομεν τὰς δύο ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ ἐξετά-



Σχ. 78.



Σχ. 79.

ζομεν τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ καὶ τῶν δύο ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΚΒ. Τὸ μέρος τοῦτο τὸ ὀνομάζομεν **κυκλικὸν τομέα.** Ὥστε:

Κυκλικὸς τομεὺς λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν δύο ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

Τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται **βάσις** τοῦ κυκλικοῦ τομέως. Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΒ ἢ Τ ἀφοῦ εἶναι μέρος τοῦ κύκλου, συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ὑποσύνολον τοῦ κύκλου Κ, εἶναι δηλαδὴ

$$T \subset K$$

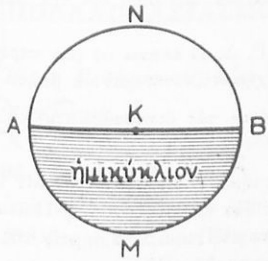
Αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΚΒ σχηματίζουν καὶ τὸν κυκλικὸν τομέα ΚΑΝΒ, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι τὸ (μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας) τόξον $\overset{\frown}{ANB}$. Ὁ τομεὺς αὐτὸς εἶναι μὴ κυρτὸν χωρίον

75. 2 Β) Πέρνομεν τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$ καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ αὐτοῦ (σχ. 79). Τὸ μέρος τοῦ κύκλου ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ τὸ ὀνομάζομεν **κυκλικὸν τμῆμα.** Ὥστε:

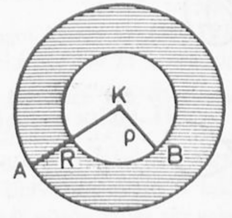
Κυκλικὸν τμῆμα λέγεται τὸ μέρος τοῦ κύκλου, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Ἡ χορδὴ ΑΒ ὁρίζει δύο κυκλικὰ τμήματα, τὸ ΑΒΜ καὶ τὸ ΑΒΝ. Κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ κύκλου Κ, εἶναι δηλαδὴ τμῆμα ABM $\subset$ K, τμῆμα ABN $\subset$ K.

Ἂν ἡ χορδὴ AB εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου (σχ. 80), τότε δημιουργεῖται τὸ **ἡμικύκλιον** AKBM ἢ τὸ AKBN, εἶναι δὲ



Σχ. 80.



Σχ. 81.

τὸ ἡμικύκλιον καὶ κυκλικὸς τομεὺς καὶ κυκλικὸν τμῆμα. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς **μονοσήμαντον** πρότασιν

ἡμικύκλιον AKBM $\Longrightarrow$ τομεὺς AKBM ἢ τμῆμα AKBM

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει, δηλαδὴ οὔτε ὁ τομεὺς εἶναι πάντοτε ἡμικύκλιον, οὔτε τὸ κυκλικὸν τμῆμα.

75. 3 **Γ)** Πέρνομεν δύο **ὁμοκέντρους** κύκλους, δηλαδὴ δύο κύκλους ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιον κέντρον K καὶ διαφορετικὲς ἀκτῖνες KA = R καὶ KB = ρ καὶ ἐξετάζομεν τὸ μέρος τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου ποὺ βρίσκεται ἔξω ἀπὸ τὸν μικρότερον (σχ. 81). Τὸ μέρος τοῦτο τὸ ὀνομάζομεν **κυκλικὸν δακτύλιον.** Ὥστε

Κυκλικὸς δακτύλιος λέγεται τὸ μέρος ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν δύο ὁμοκέντρων κύκλων.

Ἂν εἶναι K_1 τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου (K, R) καὶ K_2 εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ μικροτέρου κύκλου (K, ρ), τότε ὁ κυκλικὸς δακτύλιος θὰ εἶναι $K_1 - K_2$ εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ ὁ κυκλικὸς δακτύλιος ὡς τομὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ κύκλου K_1 καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τοῦ κύκλου K_2, δηλαδὴ

κυκλικὸς δακτύλιος $K_1 - K_2 =$ ἐσωτ. $K_1 \cap$ ἐξωτ. K_2

Ἀσκήσεις

196. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα κύκλον μὲ ἀκτῖνα R = 4 cm καὶ μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα νὰ πάρετε τὰ διαδοχικὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ νὰ φέρετε τὴν χορδὴν ΑΔ. Τί διαπιστώνετε διὰ τὴν ΑΔ ; καὶ πόσον μῆκος ἔχει ;

197. Νὰ πάρετε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐπάνω σὲ μία περιφέρεια νὰ σημειώσετε τὰ διαδοχικὰ τόξα ποὺ σχηματίζονται καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀνὰ τρία. Νὰ βρῆτε κατόπιν τὰς διαφορὰς $\widehat{A\Delta} - \widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ $\widehat{A\Delta} - \widehat{AB}$.

198. Νὰ πάρετε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα (ΑΒ) = 6 cm. Μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα 5 cm νὰ γράψετε δύο περιφέρειες. α) Ποῖον εἶναι τὸ χωρίον τῆς τομῆς αὐτῶν. β) Σημειώσετε μὲ Γ καὶ Δ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῶν καὶ μετρήσετε τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς ΓΔ.

199. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα 3 cm νὰ γράψετε μίαν περιφέρειαν, νὰ τοποθετήσετε τὰ ὁμοευθειακὰ σημεῖα Α Β, Γ, Δ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι (ΚΑ) = 2 cm. (ΚΒ) = 3 cm. (ΚΓ) = 4 cm καὶ (ΚΔ) = 6 cm. Νὰ βρῆτε α) τὰ ἀθροίσματα (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) καὶ (ΚΑ) + (ΓΔ), β) τὰς διαφορὰς (ΑΔ) — (ΑΒ) καὶ (ΑΔ) — (ΓΔ).

200. Νὰ κατασκευάσετε τὸν κυκλικὸν δακτύλιον ποὺ σχηματίζεται ὅταν πάρωμε ἀκτῖνας 3 cm καὶ 4 cm.

201. Νὰ γράψετε μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα R = 3 cm. Ἔπειτα νὰ πάρετε τὸ σημεῖον Α αὐτῆς καὶ νὰ γράψετε ἀπὸ τὸ Α μίαν χορδὴν μήκους 4 cm. (πόσες λύσεις ὑπάρχουν ;) Ἔπειτα νὰ γράψετε ἀπὸ τὸ Α μίαν χορδὴν μήκους 6 cm. Τί παρατηρεῖτε ; Ἔπειτα νὰ προσπαθήσετε νὰ γράψετε ἀπὸ τὸ Α μίαν χορδὴν μήκους 7 cm. Τί παρατηρεῖτε ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

76. 1 Γινόμενον δύο ἀκραίων: Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἀγοράζομεν 4 κιλὰ μῆλα πρὸς 5 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς θὰ δόσωμεν;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διὰ ἕνα κιλὸν μῆλα δίνομεν 5 δραχμές.

Διὰ ἄλλο ἕνα κιλὸν μῆλα θὰ δόσωμεν ἄλλες 5 δραχμές.

Διὰ ἄλλο ἕνα κιλὸν θὰ δόσωμεν ἄλλες 5 δρχ. κ.λ.π.

Ὥστε θὰ δόσωμεν **τόσας φορὰς** τὰς 5 δραχμάς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 4. Θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

$$5+5+5+5=20 \text{ δρχ.}$$

Τοῦτο τὸ σημειώνομεν σύντομα ὡς ἑξῆς:

5×4 ἢ $5 \cdot 4$ καὶ τὸ διαβάζομεν πέντε **ἐπὶ** τέσσαρα.

Τὸ $5 \times 4 = 20$ τὸ λέμε **γινόμενον** τοῦ ἀριθμοῦ 5 **ἐπὶ** τὸν ἀριθμὸν 4. Ὥστε:

Γινόμενον δύο ἀριθμῶν λέγεται τὸ ἐξαγόμενον ποὺ βρίσκομεν ἂν ἐπαναλάβωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἐπαναλαμβάνομεν λέγεται **πολλαπλασιαστέος** καὶ ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς λέγει πόσας φορὰς θὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον λέγεται **πολλαπλασιαστής.** Καὶ οἱ δύο μαζὶ λέγονται **παράγοντες** τοῦ γινομένου.

Ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομεν λέγεται πολλαπλασιασμός, τὸ δὲ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ **ἐπὶ** ($\times$ ἢ $\cdot$). Ὥστε:

Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ ἐπανάληψις ἑνὸς ἀριθμοῦ πολλὰς φοράς.

Γενικὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν β εἶναι τὸ

$$\alpha \times \beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha \cdot \beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta$$

Τὸ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μπορεῖ νὰ τὸ παραλείψωμεν μεταξὺ δύο γραμμάτων ἢ μεταξὺ ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς γράμματος, γράφομεν π.χ. αβ καὶ ἐννοοῦμεν $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$, γράφομεν 5α καὶ ἐννοοῦμεν $5 \times \alpha$ ἢ $5 \cdot \alpha$. Τὸ σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν παραλείπεται ποτὲ μεταξὺ δύο ἀριθμῶν π.χ. τὸ γινόμενον 5×7 ἢ $5 \cdot 7$ ποτὲ δὲν γράφεται 57, διότι τὸ 57 εἶναι ὁ διψήφιος ἀριθμὸς πενήντα ἑπτὰ ποὺ ἔχει 5 δεκάδες καὶ 7 μονάδας ἐνῶ τὸ γινόμενον 5×7 εἶναι 35.

Σημ. : Δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχυσιν τῆς ἐννοίας *πολλαπλασιασμὸς* ποὺ εἶναι ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ἔννοιαν *γινόμενον* ποὺ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως. Τὸ γινόμενον δηλαδὴ εἶναι ἀριθμὸς ἐνῶ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομεν διὰ νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι μία σύντομος πρόσθεσις.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$ Ἀλλὰ καὶ

$4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ Ὥστε εἶναι

$\mathbf{5 \times 4 = 4 \times 5}$ καὶ γενικὰ $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$ Ὥστε

Εἰς τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων.

76. 2 Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 4 καὶ 5, δηλαδὴ οἱ δύο παράγοντες τοῦ γινομένου 4×5 εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ_0 τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν 20 εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_0 τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ὥστε συμβολίζομεν

$$4,\ 5 \in \Phi_0 \implies 4 \times 5 \text{ ἢ } 20 \in \Phi_0$$

καὶ γενικὰ $\alpha, \beta \in \Phi_0 \implies \alpha\beta \in \Phi_0$ καὶ λέμε

Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν **εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις** εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ἴδε καὶ § 30.2).

77. Τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ : Πέρνομεν τὸ γινόμενον 1×4. Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, θὰ εἶναι : $1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $1 \times 4 = 4 \times 1$ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως. Ὥστε εἶναι καὶ

$$4 \times 1 = 4$$

γενικὰ δὲ $1 \cdot \alpha = \alpha$ καὶ $\alpha \cdot 1 = \alpha$ Ὥστε :

Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας ἑνὸς γινομένου εἶναι ἡ μονάς, τότε τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἄλλον παράγοντα.

Δηλαδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ μονὰς λέγεται **οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.**

78. Τὸ μηδὲν ὡς παράγων: Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον 0×4 εἶναι:

$$0 \times 4 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον $4 \times 0 = 0 \times 4$ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $4 \times 0 = 0$ γενικὰ δὲ $0 \cdot \alpha = 0$ καὶ $\alpha \cdot 0 = 0$. Ὥστε

Ὅταν ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας ἑνὸς γινομένου εἶναι μηδέν, τότε τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ μηδέν.

79. Γινόμενον δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν: Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο μονοψηφίους ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμεν τὸν

Πυθαγόρειος πίνακας

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	**40**	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	**40**	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

παραπάνω πίνακα, πού λέγεται Πυθαγόρειος* πίνακας καὶ τὸν ὁποῖον ὀφείλομεν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης. Θέλομεν π.χ. νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον 5×8. Εἰς τὴν πρώτην ὁριζοντίαν γραμμὴν βρίσκομεν τὸν 5 καὶ εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην βρίσκομεν τὸν 8. Βλέπομεν κατόπιν ὅτι ἡ στήλη τοῦ 5 καὶ ἡ ὁριζοντία γραμμὴ τοῦ 8 συναντῶνται εἰς τὸ 40. Ἑπομένως εἶναι $5 \times 8 = 40$. Μποροῦμεν ὅμως νὰ βροῦμε πού διασταυρώνεται ἡ στήλη πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 8 μὲ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 5, ὁπότε πάλιν βρίσκομεν 40, δηλαδὴ $8 \times 5 = 40$.

Ὁ τρόπος αὐτῆς τῆς ἐργασίας εἶναι ἐπίσης ἕνας τρόπος ἐπαληθεύσεως τῆς ἰδιότητος τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅτι δηλαδὴ εἶναι $5 \times 8 = 8 \times 5$.

Ἀσκήσεις

202. Νὰ γράψετε δύο παράγοντας, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν γινόμενον τὸ 24, μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

203. Μᾶς δίνουν τὸ γινόμενον 5×8. Νὰ βρῆτε δύο ἄλλους παράγοντας πού νὰ ἔχουν γινόμενον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον πού μᾶς ἔδοσαν. Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν;

204. Νὰ μετατρέψετε εἰς γινόμενον δύο ἀριθμῶν κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς ἀθροίσματα.

α) 6 τετράδια + 6 τετρ. + 6 τετρ. + 6 τετράδια

β) α cm + α cm + α cm + α cm + α cm .

γ) $\beta+\beta+\beta+\beta+\beta+\beta+\beta+\beta$.

205. Μία τάξις ἔχει 60 μαθητάς. Πόσες ὁμάδες τῶν 5 μαθητῶν μποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ; καὶ πόσες ὁμάδες τῶν 6 μαθητῶν ;

206. Νὰ συμπληρωθῇ ἡ συνεπαγωγὴ $\alpha\lambda = \alpha \implies \lambda = \ldots$

207. Ἔχομεν : $\alpha\beta = 2$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α καὶ τοῦ β. ἔνθα $\alpha, \beta \in \Phi$.

208. Νὰ συμπληρώσῃς τὴν συνεπαγωγὴν

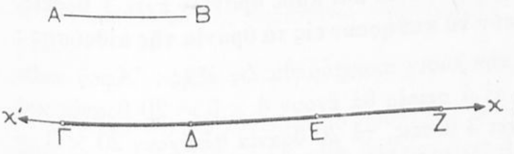
$$\alpha\beta = 0 \quad \wedge \quad \alpha \neq 0 \implies \beta = \ldots \quad \text{ἔνθα} \quad \alpha, \beta \in \Phi_0.$$

(*) Ὁ Πυθαγόρας γεννήθηκε εἰς τὴν Σάμον τὸ 580 π. Χ. καὶ ἵδρυσε τὴν περίφημη Πυθαγόρειον Σχολὴν εἰς τὸν Κρότωνα τῆς Κάτω Ἰταλίας τὸ 529 π. Χ. Ὑπῆρξεν ἕνας ἀπὸ τοὺς μεγαλύτερους σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος καὶ ἔδωσε μεγάλην ὤθησιν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν. Εἰς αὐτὸν ὀφείλονται οἱ λεγόμενοι **πυθαγόρειοι ἀριθμοί**, τοὺς ὁποίους θὰ εἰδοῦμε σὲ ἄλλο κεφάλαιον.

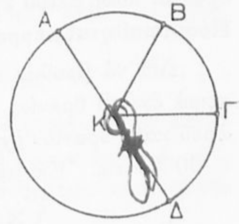
209. Ἂν εἶναι $x\psi = 8 \wedge x, y \in \Phi$ νὰ βρῆτε τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y.

210. Ἂν εἶναι $xy + 7 = 27 \wedge x, y \in \Phi$ τότε ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ ὁ x καὶ ποίας ἀντιστοίχους τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρῃ ὁ y;

80. Πολλαπλασιασμὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον. Θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν 3, δηλαδὴ νὰ πάρωμεν 3 φορὰς τὸ



Σχ. 82.



Σχ. 83.

AB. Πρὸς τοῦτο ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν X′X λαμβάνομεν τὰ τρία διαδοχικὰ τμήματα ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ὅλα ἴσα καὶ μεταξύ των καὶ πρὸς τὸ AB, δηλαδὴ

$$\Gamma\Delta = \Delta E = EZ = AB$$

Τότε κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς § 76 θὰ εἶναι :

$$\Gamma Z = AB + AB + AB \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{\Gamma Z = AB \cdot 3} = 3AB$$

Ὥστε διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν πέρνομεν τὸ ἄθροισμα τόσων εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ δοθέν, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἂν εἶναι $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε

$$\widehat{A\Delta} = \widehat{AB} + \widehat{AB} + \widehat{AB} \quad \text{ἤτοι} \quad \widehat{A\Delta} = 3\,\widehat{AB}$$

Ἐπίσης ἂν εἶναι $\widehat{AKB} = \widehat{BK\Gamma} = \widehat{\Gamma K\Delta}$, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$\widehat{AK\Delta} = \widehat{AKB} + \widehat{AKB} + \widehat{AKB} \quad \text{ἤτοι} \quad \widehat{AK\Delta} = 3\,\widehat{AKB}$$

Παρατήρησις. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΖ εἶναι **τριπλάσιον** τοῦ AB, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ὁ πολλαπλασιαστὴς 3, ποὺ εἶναι ἀφηρημένος ἀριθμός, **ἐτριπλασίασε** τὸ ΑΒ καὶ ἔδοσε τὸ ὁμοειδὲς πρὸς αὐτὸ τμῆμα ΓΖ. **Ἐξετέλεσε** δηλαδὴ ὁ 3 τὸν τριπλασιασμὸν τοῦ ΑΒ. Διὰ τοῦτο ὁ ἀφηρημένος πολλαπλασιαστὴς 3 λέγεται καὶ **ἐκτελεστὴς** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

81. Γινόμενον πολλῶν παραγόντων: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἡ αἴθουσα διδασκαλίας τοῦ σχολείου μας ἔχει 4 σειρὲς θρανία, κάθε σειρὰ ἔχει 5 θρανία καὶ κάθε θρανίον ἔχει 3 θέσεις. Πόσοι μαθηταὶ μποροῦν νὰ καθήσουν εἰς τὰ θρανία τῆς αἰθούσης ;

Διὰ νὰ βροῦμε τὴν λύσιν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἀφοῦ κάθε σειρὰ ἔχει 5 θρανία, αἱ 4 σειρὲς θὰ ἔχουν $4 \times 5 = 20$ θρανία καὶ ἀφοῦ κάθε θρανίον ἔχει 3 θέσεις, τὰ 20 θρανία θὰ ἔχουν $20 \times 3 = 60$ θέσεις. Ἑπομένως βρίσκομεν 60 θέσεις, δηλαδὴ

$$4 \times 5 \times 3 = 20 \times 3 = 60 \text{ θέσεις}$$

Τὸ γινόμενον $4 \times 5 \times 3$ λέγεται γινόμενον τριῶν παραγόντων.

Ἂν ποῦμε ἀκόμη ὅτι τὸ σχολεῖον μας ἔχει 6 αἴθουσες ὅμοιες καὶ θέλομεν νὰ μάθωμεν πόσους μαθητὰς μπορεῖ νὰ χωρέσῃ τὸ σχολεῖον, θὰ βροῦμε : $60 \times 6 = 360$ μαθητάς, δηλαδὴ

$$4 \times 5 \times 3 \times 6 = 20 \times 3 \times 6 = 60 \times 6 = 360.$$

Τὸ γινόμενον $4 \times 5 \times 3 \times 6$ λέγεται γινόμενον τεσσάρων παραγόντων. Ὁμοίως ὅταν ἔχωμεν νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον τῶν πέντε παραγόντων

$$4 \times 5 \times 3 \times 6 \times 7$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$4 \times 5 = 20$$
$$20 \times 3 = 60$$
$$60 \times 6 = 360$$
$$360 \times 7 = 2520.$$

Ὥστε :

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέγεται τὸ γινόμενον ποὺ βρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα, τὸ νέον γινόμενον τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου πάρωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας.

Ἀσκήσεις

211. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενον $5 \times 8 \times 9 \times 3 \times 4$

212. Ἂν εἶναι $\alpha\beta\gamma = 10$, νὰ βρῆτε ποίας τιμὰς μποροῦν νὰ πάρουν τὰ γράμματα α, β, γ.

213. Τὸ ἴδιον ἂν εἶναι $\alpha\beta\gamma = 30$

214. Νὰ συμπληρώσετε τὰς παρακάτω ἰσότητας

α) $8 \times 23 \times 19 \times 0 = \ldots$ β) $13 \times 7 \times 25 \times \ldots = 0$

82.1 Ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.

I. Τὸ πρόβλημα τῆς παραπάνω παραγράφου μᾶς ἔδωσε τὸ γινόμενον :

$$4 \times 5 \times 3 = 20 \times 3 = 60 \text{ θέσεις} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα αὐτὸ μποροῦμε νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς : Τὸ κάθε θρανίον ἔχει 3 θέσεις καὶ ἄρα τὰ 5 θρανία κάθε σειρᾶς θὰ ἔχουν $5 \times 3 = 15$ θέσεις καὶ αἱ 4 σειρὲς θρανίων θὰ ἔχουν $15 \times 4 = 60$ θέσεις, δηλαδὴ

$$5 \times 3 \times 4 = 15 \times 4 = 60 \text{ θέσεις} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς δύο ἰσότητας (1) καὶ (2) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι

$$4 \times 5 \times 3 = 5 \times 3 \times 4$$

καὶ γενικὰ $$\boxed{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \cdot \alpha}$$

Μποροῦμεν ἀκόμη νὰ γράψωμεν $4 \times 5 \times 3 = 4 \times 3 \times 5$ κ.λ.π. Ὁμοίως μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, δηλαδὴ

$$\boxed{\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \,.\, \delta = \alpha \,.\, \gamma \,.\, \beta \,.\, \delta = \delta \,.\, \gamma \,.\, \alpha \,.\, \beta}$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων δὲν μεταβάλλεται ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ὥστε ἰσχύει ἡ **ἀντιμεταθετικὴ** ἰδιότης εἰς τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

82.2 II. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι

$$20 \times 3 = 4 \times 15 \qquad \text{ἢ}$$

$$(4 \times 5) \times 3 = 4 \times (5 \times 3)$$

γενικὰ δὲ $\boxed{(\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma = \alpha \,.\, (\beta \,.\, \gamma)}$

ἢ καὶ $(\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma) \,.\, \delta = \alpha \,.\, (\beta \,.\, \delta) \,.\, \gamma$ Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπὶ ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι ἡ **προσεταιριστικὴ** ἰδιότης εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

82. 3 **III.** Ἡ ἰσότης $5 \times 3 \times 4 = 15 \times 4$ μᾶς λέγει καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τοῦ γινομένου.

Εἰς ἕνα γινόμενον μποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των.

82. 4 **IV.** Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον τῆς ἄνω III ἰδιότητος ἀληθεύει, διότι τὸ γινόμενον 15×4 μποροῦμε νὰ τὸ γράψωμε $5 \times 3 \times 4$

γενικὰ δὲ $\boxed{(\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma = \alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma}$ Ὥστε

Εἰς ἕνα γινόμενον μποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα μὲ ἄλλους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν αὐτὸν ὡς γινόμενον.

Ἡ ἄνω ἰδιότης λέγεται **ἐπιμεριστικὴ** ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

82. 5 **V.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο γινόμενα, δηλαδὴ

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta) \cdot (\lambda \cdot \mu)$$

Σύμφωνα μὲ τὴν IV ἰδιότητα, εὑρίσκομεν :

$$\boxed{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta) \cdot (\lambda \cdot \mu) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \lambda \cdot \mu}$$ Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα, σχηματίζομεν ἕνα

γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν γινομένων καὶ μόνον αὐτούς.

Ἀσκήσεις

215. Νὰ βρῆτε κατὰ τὸν εὐκολώτερον τρόπον τὸ γινόμενον $2 \times 5 \times 4 \times 25 \times 47$. Ποίαν ἰδιότητα ἐφαρμόζετε ;

216. Κατὰ τί θὰ μεταβληθῆ τὸ γινόμενον αβγδ ὅταν διπλασιάσωμεν τὸν παράγοντα α ;

217. Κατὰ τί θὰ μεταβληθῆ τὸ γινόμενον αβγδ ὅταν τριπλασιάσωμεν τὸν παράγοντα β καὶ τετραπλασιάσωμεν τὸν παράγοντα γ ;

218. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενον τῶν δύο γινομένων 4αβ καὶ 25×9γδλ.

83.1 Πολλαπλασιασμὸς ἀθροισμάτων : I. Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἕνας ἐργάτης πέρνει ἡμερομίσθιον α δραχ., ἕνας ἄλλος ἐργάτης πέρνει β δρχ. καὶ ἕνας τρίτος ἐργάτης πέρνει γ δρχ., ἐργάσθησαν δὲ 3 ἡμέρας. Πόσας δραχμὰς πῆραν καὶ οἱ τρεῖς ἐργάται μαζύ ;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ τῶν ἡμερομισθίων ἐπὶ 3. Βρίσκομεν κατὰ σειράν :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot 3 =$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) = \quad (\S\ 76)$$
$$= \alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma = \quad (\S\ 36.4)$$
$$= \alpha + \alpha + \alpha + \beta + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \gamma = \quad (\S\ 36.3)$$
$$= (\alpha + \alpha + \alpha) + (\beta + \beta + \beta) + (\gamma + \gamma + \gamma) = \quad (\S\ 36.1)$$
$$= \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 3 + \gamma \cdot 3 = 3\alpha + 3\beta + 3\gamma \quad (\S\ 76).$$

Ἑπομένως βρίσκομεν $(\alpha + \beta + \gamma) . 3 = 3\alpha + 3\beta + 3\gamma$

γενικὰ δὲ $\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda}$ Ὥστε :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα ποὺ βρίσκομεν.

Ἡ παραπάνω ἰδιότης εἶναι ἡ **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν.**

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως θὰ εἶναι καὶ

$$\lambda(\alpha+\beta+\gamma)=\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma$$

Παράδειγμα : Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν

$$(5+8+12)\times 4$$

Βρίσκομεν : $(5+8+12)\times 4=20+32+48=100.$

Ἀλλὰ εὐκολώτερα μποροῦμεν νὰ κάμωμεν πρῶτα τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀθροίσματος καὶ ἔπειτα νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, δηλαδὴ

$$(5+8+12)\times 4=25\times 4=100$$

Ὥστε τὴν παραπάνω ἰδιότητα τὴν ἐφαρμόζομεν ὅταν δὲν μποροῦμεν νὰ βροῦμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$.

83. 2 **Παρατήρησις I :** Τὴν τελευταίαν ἰσότητα τῆς § 83.1 μποροῦμε νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδὴ

$$\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma=\lambda(\alpha+\beta+\gamma)$$

δηλαδὴ εἰς τοὺς τρεῖς προσθετέους ἢ **ὅρους** $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$ μποροῦμεν νὰ βγάλωμεν ἔξω ἀπὸ τὴν παρένθεσιν τὸν **κοινὸν παράγοντα** λ. Γράφομεν π.χ.

$$5\alpha+15=5(\alpha+3) \quad \text{διότι} \quad 15=5\cdot 3$$

$$8\alpha+4\beta+16\gamma+24=4(2\alpha+\beta+4\gamma+6)$$

Τὴν ἐργασίαν αὐτὴν τὴν λέμε **ἐξαγωγὴν κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως**

Παρατήρησις II : Ἐπίσης μποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$5\alpha+4\alpha=(5+4)\alpha=9\alpha \quad \text{καὶ}$$

$$6\beta+\beta=6\beta+1\beta=(6+1)\beta=7\beta$$

Οἱ ὅροι 5α καὶ 4α λέγονται **ὅμοιοι ὅροι,** τὴν δὲ πρόσθεσιν αὐτῶν τὴν λέμε **ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.** Π.χ. εἰς τὸ πολυώνυμον (§ 51)

$$3\alpha+4\beta+6\gamma+8+9\alpha+2\beta+16$$

μποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ βρίσκομεν :

$$12\alpha + 6\beta + 6\gamma + 24 = 6\ (\ 2\alpha + \beta + \gamma + 4\ )$$

Ὥστε : $3\alpha + 4\beta + 6\gamma + 8 + 9\alpha + 2\beta + 16 = 6\ (2\alpha + \beta + \gamma + 4)$

83. 3 **II.** Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα

Ἕνας ἐργάτης πέρνει ἡμερομίσθιον α δρχ. καὶ ἐξοδεύει διὰ τὸ φαγητόν του β δρχ. (β<α). Πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ ὅταν ἐργασθῇ ἐπὶ 4 ἡμέρας ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν διαφορὰν $\alpha - \beta$ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 4. Βρίσκομεν :

$$\begin{aligned}(\ \alpha - \beta\ )\cdot 4 &= (\ \alpha - \beta\ ) + (\ \alpha - \beta\ ) + (\ \alpha - \beta\ ) + (\ \alpha - \beta\ ) = \\ &= (\ \alpha + \alpha + \alpha + \alpha\ ) - (\ \beta + \beta + \beta + \beta\ ) \quad (\ \S\, 50.5) \\ &= \alpha \cdot 4 - \beta \cdot 4 = 4\alpha - 4\beta \quad (\ \S\ 76\ )\end{aligned}$$

Ὥστε βρίσκομεν $\quad (\ \alpha - \beta\ ) \cdot 4 = 4\alpha - 4\beta \quad \alpha > \beta$

γενικὰ δὲ $\quad (\ \alpha - \beta\ )\,\lambda = \alpha\lambda - \beta\lambda \quad \alpha > \beta$ Ὥστε:

Δια νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαφορὰν ἐπὶ ἀριθμόν, πολλαπλασιάζομεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.

Ἡ παραπάνω ἰδιότης εἶναι ἡ **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀφαίρεσιν.**

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως, θὰ εἶναι καὶ

$$\lambda(\alpha - \beta) = \lambda\alpha - \lambda\beta \qquad \alpha > \beta$$

Παράδειγμα : $(\ 25 - 6\ ) \times 8 = 200 - 48 = 152$ ἢ

$$(\ 25 - 6\ ) \times 8 = 19 \times 8 = 152$$

καὶ ἐδῶ εἶναι εὐκολώτερον νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν (ἂν μποροῦμε) καὶ ἔπειτα τὸν πολλαπλασιασμόν .

Παρατήρησις : Τὴν παραπάνω ἰσότητα μποροῦμεν νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ἀντιστρόφως, δηλαδὴ

$$\lambda\alpha - \lambda\beta = \lambda(\alpha - \beta)$$

δηλαδὴ μποροῦμεν νὰ βγάλωμεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν **κοινὸν παράγοντα** λ. Γράφομεν π.χ.

α) $8\alpha - 24 = 8 (\alpha - 3)$ διότι $24 = 8 \cdot 3$

β) $4 (\alpha - \beta) + 5 (\alpha + \beta) + 2\beta =$

$= 4\alpha - 4\beta + 5\alpha + 5\beta + 2\beta = 9\alpha + 3\beta = 3 (3\alpha + \beta)$

διότι τὸ $4\alpha + 5\alpha = 9\alpha = 3 \cdot 3\alpha$ καὶ τὸ $5\beta - 4\beta + 2\beta = 3\beta$

83. 4 II. Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα.

Ἕνα συνεργεῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς ἐργάτας. Ὁ πρῶτος ἐργάτης πέρνει ἡμερομίσθιον α δρχ., ὁ δεύτερος πέρνει β δρχ. καὶ ὁ τρίτος πέρνει γ δρχ. Τὸ συνεργεῖον ἐργάσθηκε λ ἡμέρας τὸν ἕνα μῆνα καὶ μ ἡμέρας τὸν ἄλλον μῆνα. Πόσας δραχμὰς πῆρε τὸ συνεργεῖον ;

Διὰ νὰ βροῦμε τὴν λύσιν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ τῶν ἡμερομισθίων ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\lambda + \mu$ τῶν ἡμερῶν ποὺ ἐργάσθησαν, δηλαδὴ

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\lambda + \mu)$$

Ἂν θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα $(\alpha + \beta + \gamma)$ ὡς ἕνα ἀριθμόν, τότε ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $(\alpha + \beta + \gamma)$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\lambda + \mu$ καὶ εὑρίσκομεν :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\lambda + \mu) = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \lambda + (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \mu =$$
$$= \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu$$

Ὥστε :

$$\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) \cdot (\lambda + \mu) = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \alpha\mu + \beta\mu + \gamma\mu}$$

ἤτοι

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀθροίσματα, πολλαπλασιάζομεν κάθε προσθετέον τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπὶ κάθε προσθετέον τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα ποὺ βρίσκομεν.

Ἔχομεν π.χ. 1) $(\alpha + 3) \cdot (\beta + 5) = \alpha\beta + 3\beta + 5\alpha + 15$

2) $(\alpha + 2\beta + 6) . (3\gamma + 5) =$

$= 3\alpha\gamma + 6\beta\gamma + 18\gamma + 5\alpha + 10\beta + 30$

Κατὰ ἀνάλογον τρόπον βρίσκομεν ὅτι εἶναι καὶ

$$(\alpha - 4) \cdot (\beta + 3) = \alpha\beta - 4\beta + 3\alpha - 12$$

Παράδειγμα : $(5+7+15)\cdot(4+8) =$
$= 20+28+60+40+56+120 = 324.$

Μποροῦμε ὅμως νὰ ἐργασθοῦμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(5+7+15)\cdot(4+8) = 27 \times 12 = 324$$

Ὥστε τὴν παραπάνω ἰδιότητα τὴν ἐφαρμόζομεν ὅταν δὲν μποροῦμεν νὰ βροῦμεν τὰ ἀθροίσματα .

Σπουδαία παρατήρησις: Αἱ τρεῖς παραπάνω ἰδιότητες (§ 83.1, 83.3, 83.4) **εἶναι πολὺ σπουδαῖαι** καὶ διὰ τοῦτο **πρέπει νὰ μελετηθοῦν πολὺ καλά.**

83. 5 **Ἐφαρμογαί.** Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὰς παρακάτω πράξεις :

α) $3\cdot5+8\cdot9+2\cdot4\cdot6\cdot5$
β) $5\cdot8+3\cdot6-7\cdot5-2\cdot4$
γ) $5(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha-\gamma)-5\beta$

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν :

α) $3\cdot5+8\cdot9+2\cdot4\cdot6\cdot5 = 15+72+240 = 327$
β) $5\cdot8+3\cdot6-7\cdot5-2\cdot4 = 40+18-35-8 =$
$= 58-35-8 = 23-8 = 15$
γ) $5(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha-\gamma)-5\beta =$
$= 5\alpha+5\beta+5\gamma+3\alpha-3\gamma-5\beta = 8\alpha+2\gamma = 2(4\alpha+\gamma).$

Εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα βλέπομεν ὅτι **δὲν ὑπάρχουν παρενθέσεις.** Διὰ τοῦτο **κάνομεν πρῶτα τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις ἢ ἀφαιρέσεις.**

Εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα **ἐξαλείφομεν** πρῶτα τὰς παρενθέσεις μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν ποὺ εἶναι σημειωμένοι, κάνομεν ἔπειτα τὴν **ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων** καὶ τέλος βγάζομεν ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα 2.

Ἀσκήσεις

219. Νὰ ὑπολογίσετε κατὰ δύο τρόπους τὰ γινόμενα

α) $(8+3+7)\cdot 6$, β) $(8+4-7)\cdot 9$, γ) $(7+12+6)\cdot(3+7)$

δ) $(9+4-3)\cdot(6+5)$, ε) $(9-5-2)\cdot(4+6)$

στ) $(3+5+8)\cdot(7+9+6)$.

220. Νὰ τρέψετε σὲ γινόμενον τὸ ἄθροισμα $4\alpha+8\beta+12$ βγάζοντες ἐκτὸς παρενθέσεως τὸν κοινὸν παράγοντα.

221. Τὸ ἴδιον διὰ τὸ πολυώνυμον $3\alpha+6\alpha\beta+12\alpha\gamma$.

222. Τὸ ἴδιον διὰ τὸ πολυώνυμον $16\alpha+8\beta-40$.

223. Μᾶς δίδουν τὸ πολυώνυμον $20x-5y-10$ α) νὰ τὸ τρέψετε εἰς γινόμενον καὶ β) νὰ βρῆτε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν αὐτοῦ ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $x=8$ καὶ $y=15$.

224. Νὰ βρῆτε τὸ ἐξαγόμενον $3(\alpha+\beta)+5(\alpha-\beta)+7\alpha+2\beta$ καὶ νὰ βρῆτε τὴν τιμήν του διὰ $\alpha=6$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ β ἢ ὄχι ; καὶ διατί.

225. Νὰ βρῆτε τὰ παρακάτω ἐξαγόμενα καὶ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν καθενὸς διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ποὺ γράφονται ἀπέναντι ἑκάστου.

α) $5(\alpha-\beta)+8(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha+2\gamma)$ $\alpha=4,\ \beta=3,\ \gamma=5$

β) $4(\alpha-3\beta)+7(2\alpha+\beta)+5(\alpha+\beta)$ $\alpha=8,\ \beta=;$

γ) $6(x+y-5)+5(x-y+3)$ $x=y=10$

δ) $6(x+y-\alpha)+3(x-y+\alpha)+2(\alpha+y-x)$ $x=4,\ y=\alpha=5$

ε) $(\alpha+2\beta+5)\cdot(6+3\gamma)$ $\alpha=3,\ \beta=4,\ \gamma=0$

στ) $3(\alpha+2\beta-3\gamma)+5(4\alpha-\beta+2\gamma)+6(\alpha+\beta-\gamma)$, $\alpha=\beta=\gamma=5$

84. 1 Ἡ ἔννοια τῆς διαγραφῆς εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\alpha=\beta$$

Μποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς π.χ. ἐπὶ 3 ὁπότε βρίσκομεν :

$$3\alpha=3\beta$$

Πραγματικὰ μποροῦμεν νὰ γράψωμεν τὰς ἰσότητας :

$$\alpha=\beta$$
$$\alpha=\beta$$
$$\alpha=\beta$$

καὶ νὰ τὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη (§ 40.2), βρίσκομεν δὲ

$$\alpha+\alpha+\alpha=\beta+\beta+\beta \qquad \text{ἢ}$$
$$3\alpha=3\beta \qquad \text{Ὥστε}$$

Μποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

'Αλλὰ καὶ ἂν ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$3\alpha = 3\beta$$

μποροῦμεν νὰ διαγράψωμεν τὸν παράγοντα 3 καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη αὐτῆς (δηλαδὴ τὸν κοινὸν παράγοντα 3 τῶν δύο μελῶν) διότι ἡ ἰσότης $3\alpha = 3\beta$ προέρχεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\alpha = \beta$ μὲ πολλαπλασιασμὸν τῶν μελῶν της ἐπὶ 3.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀμφιμονοσήμαντον συνεπαγωγὴν

$$\alpha = \beta \iff 3\alpha = 3\beta$$

γενικὰ δὲ $\quad \alpha = \beta \iff \lambda\alpha = \lambda\beta, \quad \lambda \neq 0$

Σημ. Ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος πρέπει νὰ εἶναι **διάφορος τοῦ μηδενός.** Διότι ἂν εἶναι $\lambda = 0$, τότε βρίσκομε $0 = 0$ ἢ ἀντιστρόφως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $0 \cdot 4 = 0 \cdot 9$ ἂν διαγράψωμεν τὸ μηδὲν βρίσκομεν $4 < 9$ δηλαδὴ δὲν βρίσκομεν πάλιν ἰσότητα.

Μὲ τὴν ἔννοια τῆς διαγραφῆς μποροῦμε νὰ λύσωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν $25x = 200$. Βρίσκομεν

$$\mathbf{25x = 25 \cdot 8 \implies x = 8}$$

84. 2 Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $\lambda = \mu$, τότε ἡ παραπάνω ἰσότης $\lambda\alpha = \lambda\beta$ γίνεται : $\lambda\alpha = \mu\beta$· δηλαδὴ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \lambda = \mu \end{array}\right\} \implies \alpha\lambda = \beta\mu$$

Ὥστε

Δύο ἰσότητας μποροῦμεν νὰ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

84. 3 Ἐπίσης ὅταν ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha < \beta$, τότε εὔκολα συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι

$$\alpha\lambda < \beta\lambda \qquad \lambda \neq 0$$

Ὥστε

Μποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ὁπότε προκύπτει πάλιν ἀνισότης τῆς ἰδίας φορᾶς.

Ἀσκήσεις

226. Νὰ λυθοῦν αἱ παρακάτω ἐξισώσεις :

α) $3(2x-4) = 60$ β) $2(x+5)+3(x-2) = 104$

γ) $4(x-2)+5(x+6)+3(8-x) = 76$

δ) $7(x+1)+6(4-x) = 33$.

227. Τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 91. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί ;

228. Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 78. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

229. Ἕνας πατέρας ἀγόρασε 29 πορτοκάλια καὶ ἔδοσε σὲ κάθε παιδί του ἀπὸ 6 πορτοκάλια, παρετήρησε δὲ ὅτι τοῦ περίσευσαν 5 πορτοκάλια. Πόσα παιδιὰ εἶχε ;

230. Σὲ μίαν ἐκδρομὴν πῆραν μέρος 50 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά. Αἱ γυναῖκες ἦσαν κατὰ 15 περισσότερες ἀπὸ τὰ παιδιὰ καὶ οἱ ἄνδρες ἦσαν κατὰ 26 περισσότεροι ἀπὸ τὰ παιδιά. Πόσοι ἄνδρες, πόσες γυναῖκες καὶ πόσα παιδιὰ ἦσαν εἰς τὴν ἐκδρομήν ;

231. Τρία παιδιὰ ἔχουν μαζὺ ἡλικίαν 44 ἔτη. Τὸ δεύτερον εἶναι κατὰ 3 ἔτη μικρότερον ἀπὸ τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον εἶναι κατὰ 5 ἔτη μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ δεύτερον. Πόσων ἐτῶν εἶναι κάθε παιδί ;

85.1 Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίων ἀριθμῶν : I. Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον 3687×4, δηλαδὴ τὸ γινόμενον ἑνὸς πολυψηφίου ἀριθμοῦ ἐπὶ ἕνα μονοψήφιον ἀριθμόν. Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι

$$3687 = 3\chi + 6\varepsilon + 8\delta + 7\mu$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :

$$3687 \times 4 = (3\chi + 6\varepsilon + 8\delta + 7\mu) \times 4$$

Ἀλλὰ ἡ ἄνω ἰσότης μᾶς φανερώνει ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἄθροισμα ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν καὶ σύμφωνα μὲ τὴν § 83.1 βρίσκομεν :

$$\begin{aligned}(3\chi + 6\varepsilon + 8\delta + 7\mu) \times 4 &= 12\chi + 24\varepsilon + 32\delta + 28\mu = \\ &= 1\delta\chi + 2\chi + 2\chi + 4\varepsilon + 3\varepsilon + 2\delta + 2\delta + 8\mu = \\ &= 1\delta\chi + 4\chi + 7\varepsilon + 4\delta + 8\mu = 14748\end{aligned}$$

Ὥστε θὰ εἶναι $3687 \times 4 = 14748$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς →
Πάνω ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον 3687 ἐγράψαμε τὰ κρατούμενα μὲ μικρότερα ψηφία

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3\,2} \\ 3687 \\ 4 \times \\ \hline 14748 \end{array}$$

85.2 II. Ὅταν θέλωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυψηφίους ἀριθμοὺς π.χ. 3687×584 εὑρίσκομεν :

$$(3\chi + 6\varepsilon + 8\delta + 7\mu) \cdot (5\varepsilon + 8\delta + 4\mu)$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι γινόμενον δύο ἀθροισμάτων καὶ σύμφωνα μὲ τὴν § 83.4 εὑρίσκομεν :

α) (3χ + 6ε + 8δ + 7μ) × 4 = 14748 μ. ὅπως παραπάνω

β) (3χ + 6ε + 8δ +7μ) × 8δ = 24δχ + 48χ + 64ε + 56δ =
= 2εχ + 4δχ + 4δχ + 8χ + 6χ + 4ε + 5ε + 6δ =
= 2εχ + 8δχ + 14χ + 9ε + 6δ = 29496 δ.

γ) (3χ + 6ε + 8δ + 7μ) × 5ε =
= 15εχ + 30δχ + 40χ + 35ε =
= 1 ἑκατ. + 5εχ + 3εχ + 4δχ + 3χ + 5ε =
= 1 ἑκατ. + 8εχ + 4δχ + 3χ + 5ε = 18435ε

Ὥστε τὸ γινόμενον 3687 × 584 θὰ εἶναι :

18435ε + 29496δ + 14748μ = 1843500 + 294960 + 14748 =
= 2153208.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	3687
	584 ×
α΄ μερικὸν γινόμενον	14748
β΄ » »	29496
γ΄ » »	18435
ὁλικὸν »	2153208

Τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον εἶναι 29496 δεκάδες ἢ 294960 μονάδες. Παραλείπομεν τὸ τελευταῖον μηδενικὸν καὶ γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 29496 τῶν δεκάδων μίαν θέσιν ἀριστερώτερα ἀπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον 14748 τῶν μονάδων. Τὸ δὲ γ΄ μερικὸν γινόμενον χωρὶς τὰ δύο μηδενικὰ τὸ γράφομεν ἀκόμη μίαν θέσιν ἀριστερώτερα.

86. 1 Εὐκολίαι εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. α) Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10, 100, 1000 κ.λ.π.

345 × 10 = 345 × 1δ = 345δ = 3450
893 × 100 = 893 × 1ε = 893ε = 89300
3568 × 1000 = 3568 × 1χ = 3568000 Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000

κλπ. θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τόσα μηδενικὰ ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

86. 2 **β)** Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν λήγοντα εἰς μηδενικά.

$$832 \times 400 = 832 \times 4\varepsilon = 3328\varepsilon = 332800$$ Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ ἀριθμὸν λήγοντα εἰς μηδενικὰ δὲν ὑπολογίζομεν τὰ μηδενικὰ κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὰ θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου.

86. 3 **γ)** Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν ποὺ ἔχει στὸ ἐνδιάμεσον μηδενικά.

$$832 \times 400 = \begin{array}{r} 832 \\ 4(00 \\ \hline 332800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5463 \\ 305 \times \\ \hline 27315 \\ 16389 \\ \hline 1666215 \end{array}$$

Δὲν γράφομεν τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 0 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, διότι εἶναι μηδέν, ἀλλὰ τὸ γ΄ μερικὸν γινόμενον τὸ γράφομεν δύο θέσεις ἀριστερώτερα.

86. 4 Ἡ **δοκιμὴ** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται ὅταν ἀντιμεταθέσωμεν τοὺς δύο παράγοντας (ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως) καὶ κάμωμεν πάλιν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὁπότε πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἴδιον γινόμενον.

Ἀσκήσεις

232. Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοὶ

α) 5879×346, β) 3956×508, γ) 35273×400

δ) 4058×5342 ε) 75809×6005 στ) 9873×3080

233. Εἰς τὰ παρακάτω γινόμενα νὰ συμπληρωθῇ κάθε τελεία μὲ τὸν κατάλληλον ἀριθμόν :

$$\alpha)\ \begin{array}{r} 3..2 \\ 8 \times \\ \hline 2.77. \end{array} \qquad \beta)\ \begin{array}{r} .5... \\ 9 \times \\ \hline 591372 \end{array} \qquad \gamma)\ \begin{array}{r} 6.82 \\ 47 \times \\ \hline 309354 \end{array}$$

234. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἀπὸ μνήμης τὰ παρακάτω γινόμενα μὲ προσεταιρισμὸν τῶν παραγόντων ποὺ ἔχουν γινόμενον 10 ἢ 100 ἢ 1000.

α) $6 \times 2 \times 25 \times 4 \times 5$ β) $345 \times 25 \times 2 \times 2$

γ) $872 \times 2 \times 125 \times 4$ δ) $2 \times 4 \times 8 \times 5 \times 25 \times 125 \times 7$

235. Τὸ γινόμενον 72×9 γράφεται $72 \times (10 - 1) = 720 - 72 = 648$ Σύμφωνα μὲ αὐτὸ νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα

σ) 7356×9, β) 245×99, γ) 382×999

236. Τὸ γινόμενον 37×11 γράφεται $37 \times (10+1) = 370+37=407$ Σύμφωνα μὲ αὐτὸ νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα

α) 5892×11, β) 378×101, γ) 256×1001

δ) 279×110 ε) 492×111, στ) 225×1101

87.1 Πολλαπλάσια ἑνὸς ἀριθμοῦ: Τὸ $4+4 = 2 \times 4$ λέγεται **διπλάσιον** τοῦ 4, τὸ 3×4 λέγεται **τριπλάσιον** τοῦ 4 κ.λ.π. καὶ γενικὰ τὸ 4ν, ἔνθα $\nu \in \Phi$ λέγεται **πολλαπλάσιον** τοῦ 4. Ἐπίσης τὸ $2\alpha =$ διπλάσιον τοῦ α, τὸ $3\alpha =$ τριπλάσιον τοῦ α κ.λ.π. καὶ γενικὰ τὸ $\nu\alpha = \alpha + \alpha + \alpha \ldots$ ν φοράς, ἔνθα $\nu \in \Phi$, λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ α. Ὥστε :

Πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ α λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ γίνεται ἀπὸ τὸν α ἐπαναλαμβανόμενον πολλὰς φοράς.

Παρατήρησις. Ἂν ὀνομάσωμεν Π(6) τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 6, δηλαδὴ

$$\Pi(6) = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$$

παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον Π(6) ἔχει πρῶτον στοιχεῖον τὸ 6 καὶ δὲν ἔχει τελευταῖον στοιχεῖον. Ἑπομένως (§ 9) εἶναι ἀπειροσύνολον. Ὥστε :

Τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀπειροσύνολον.

87.2 Κοινὰ πολλαπλάσια: Πέρνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 18 καὶ βρίσκομεν πολλαπλάσια καθενὸς ἀπὸ αὐτούς, δηλαδὴ

πολλαπλάσια τοῦ 12 = 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108** . . .

πολλαπλάσια τοῦ 18 = 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, 126, **144** . . .

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 36, 72, 108, 144, . . . εἶναι πολλαπλάσια καὶ τοῦ 12 καὶ τοῦ 18. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται **κοινὰ πολλαπλάσια** τοῦ 12 καὶ τοῦ 18. Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν τὰ σημειώνομεν μὲ κ.π.

Ἀπὸ ὅλα τὰ κ.π. τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 18 τὸ μικρότερον, δηλαδὴ τὸ 36, τὸ λέμε **ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον** αὐτῶν καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ ε.κ.π.

Παρατήρησις : Ἄν ὀνομάσωμεν Π(12) καὶ Π(18) τὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 18 ἔχομεν τὰ δύο σύνολα

Π (12) = { 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, 120 , . . . }

Π (18) = { 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, 126, **144**. . . }

Τότε ὅλα τὰ κ.π. αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ τομὴ Π (12) ∩ Π(18) τῶν δύο τούτων συνόλων, δηλαδὴ

κ.π. = Π (12) ∩ Π (18) = { 36, 72, 108, 144, . . . }

88. Εὕρεσις τοῦ ε.κ.π. ἀριθμῶν : Α) Ἄν ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς εἶναι πολλαπλάσιον καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἄλλους, τότε αὐτὸς εἶναι τὸ ε.κ.π. ὅλων π.χ. ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 6,10, 15, 60 εἶναι ὁ 60, διότι ὁ 60 εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 6 καὶ τοῦ 10 καὶ τοῦ 15 καὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

Β) Ἄν ὁ μεγαλύτερος δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τῶν ἄλλων. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 6, 10, 15, 50. Τότε πέρνομεν κατὰ σειρὰν τὰ πολλαπλάσια τοῦ

6	10	15	50
			100
			150

μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ 50 καὶ σταματῶμεν ἐκεῖ ποὺ θὰ βροῦμεν ἀριθμὸν ποὺ νὰ διαιρῆται ἀπὸ ὅλους. Ἔτσι βρίσκομεν ε.κ.π. τῶν παραπάνω ἀριθμῶν τὸ 150.

Σημ. : Ἐπειδὴ τὸ 50 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10 διὰ τοῦτο κατὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πολλαπλασίων τοῦ 50 δὲν χρειάζεται νὰ δοκιμάσωμεν διὰ τὸν 10 διότι ξέρομεν ὅτι ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 50 εἶναι καὶ πολλαπλάσια τοῦ 10.

Ἀσκήσεις

237. Νὰ βρῆτε ὅλα τὰ διψήφια κ.π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 9 καὶ 15.

238. Ποῖον εἶναι τὸ ε.κ.π τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 12 καὶ 18 ; Ἄν εἶναι Ε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν, νὰ ὑπολογίσετε τὸν ἀριθμὸν νΕ ἔνθα ν ∈ Φ καὶ 3<ν≤5.

Νὰ διαπιστώσετε δὲ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ νΕ ποὺ θὰ βρῆτε εἶναι κ.π. τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 12 καὶ 18.

239. Πέρνετε τὰ τρία σύνολα

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(3) = \{3, 6, 9, \ldots \nu\} \\ \Pi(5) = \{5, 10, 15 \ldots \nu\} \\ \Pi(6) = \{6, 12, 18, \ldots \nu\} \end{array}\right\} \text{ ἔνθα } \nu \in \Phi \wedge \nu < 100$$

Νὰ σχηματίσετε τὸ σύνολον τῆς τομῆς αὐτῶν, ἀναγράφοντες ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

240. Ἕνα πλοῖον (τῆς ἀκτοπλοϊκῆς συγκοινωνίας) φεύγει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ κάθε δεύτερη ἡμέρα, ἕνα ἄλλο φεύγει κάθε τρίτη ἡμέρα καὶ ἕνα ἄλλο φεύγει κάθε τέταρτη ἡμέρα. Ἂν φύγουν σήμερα καὶ τὰ τρία πλοῖα ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ, μετὰ πόσες ἡμέρες θὰ συμπέσῃ νὰ ξαναφύγουν καὶ τὰ τρία μαζύ; Καὶ πόσες τέτοιες συμπτώσεις θὰ γίνουν σὲ ἕνα μῆνα;

Προβλήματα πρὸς λύσιν

241. Τὸ εἰσιτήριον μιᾶς λεωφοριακῆς γραμμῆς τῶν Ἀθηνῶν εἶναι 2 δραχμαί, διαθέτει δὲ ἡ γραμμὴ αὐτὴ 5 λεωφορεῖα. Ἂν κάθε λεωφορεῖον μεταφέρῃ 60 ἐπιβάτας καὶ κάνῃ 10 διαδρομὰς ἡμερησίως, πόσαι δραχμαὶ εἰσπράτονται κάθε ἡμέραν;

242. Ἂν μεγαλώσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν β ἑνὸς γινομένου αβ κατὰ 4 μονάδες, τότε τὸ γινόμενον μεγαλώνει κατὰ 300. Ποῖος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος α; Νὰ θέσετε ὁποιανδήποτε τιμὴν εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν β καὶ νὰ ἐπαληθεύσετε τὸ παραπάνω.

243. Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 1800 κιλὰ λάδι πρὸς 23 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ πλήρωσε μεταφορικὰ 126 δρχ. ἀλλὰ κατὰ τὴν μεταφορὰν εἶχεν ἔλλειμμα (φύραν) 5 κιλά. Πούλησε τὸ λάδι πρὸς 25 δρχ. τὸ κιλό. Πόσας δρχ. ἐκέρδισε;

244. Ἕνα τόπι ὕφασμα 40 μέτρων στοιχίζει εἰς τὸν ἔμπορον 9200 δρχ. Ὁ ἔμπορος πούλησε λιανικῶς τὸ ὕφασμα ὡς ἑξῆς:

α)	3	μέτρα	πρὸς	245	δραχμὰς τὸ μέτρον
β)	5	»	»	244	» »
γ)	8	»	»	246	» »
δ)	10	»	»	247	» »
ε)	7	»	»	243	» »

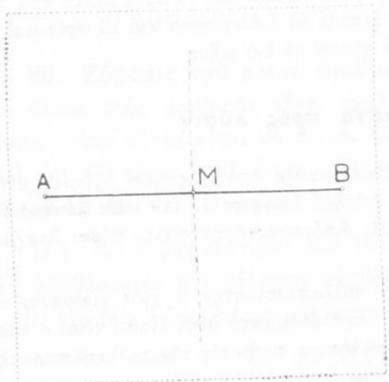
καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὕφασμα πρὸς 242 δρχ. τὸ μέτρον. Πόσας δραχμὰς ἐκέρδισε;

245. Ἕνας γεωργὸς πούλησε 4500 κιλὰ λάδι πρὸς 21 δρχ. τὸ κιλόν, 3000 κιλὰ σιτάρι πρὸς 5 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ ἕνα χωράφι 12 στρεμμάτων πρὸς 6350 δρχ. τὸ στρέμμα. Μὲ τὰ χρήματα ποὺ συγκέντρωσε ἀγόρασεν ἕνα διαμέρισμα πολυκατοικίας εἰς τὴν Ἀθήνα. Πόσας δραχμὰς τοῦ ἐστοίχισε τὸ διαμέρισμα;

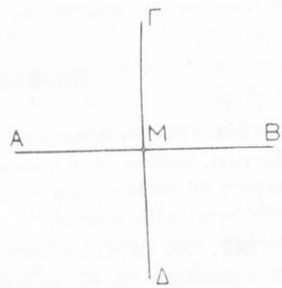
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι'

ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ

89. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος: Ἐπάνω σὲ μία λεπτὴ κόλα χαρτὶ χαράσσομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Κατόπιν διπλώνομεν τὸ χαρτὶ ἔτσι ὥστε τὸ σημεῖον Β νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς



Σχ. 84.



Σχ. 85.

τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ τσακίζομεν. Θὰ παρατηρήσωμεν τότε ὅτι τὸ τσάκισμα τοῦ χαρτιοῦ προσδιορίζει ἐπάνω εἰς τὸ ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι

$$MA = MB$$

Τότε τὸ σημεῖον Μ λέγεται **μέσον** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Ὥστε ὑπάρχει μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος καὶ εἶναι **ἕνα μόνον,** διαιρεῖ δὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο ἴσα μέρη. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι :

Μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος λέγεται τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σημ. Δὲν πρέπει νὰ συγχίζωμεν τὸ **μέσον** μὲ τὸ **ἥμισυ** (δηλαδὴ μὲ τὸ μισὸ) τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος. Π.χ. ἂν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ =

10 cm. τότε τὸ μὲν μισὸ αὐτοῦ εἶναι $AM = MB = 5$ cm, τὸ δὲ μέσον αὐτοῦ εἶναι τὸ σημεῖον Μ.

90. Κάθετοι εὐθεῖαι. Ὀρθὴ γωνία: Ἐὰν γράψωμεν τὴν γραμμὴν ΓΜΔ κατὰ τὴν ὁποίαν τσακίσθηκε ἡ κόλα τοῦ χαρτιοῦ, τότε παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΜΒ καὶ ΓΜΔ σχηματίζουν τέσσερες γωνίες ποὺ εἶναι **ὅλες ἴσες** μεταξύ των, ὅπως εὔκολα διαπιστώνομεν ἂν τσακίσωμεν τὸ χαρτὶ κατὰ τὴν ΓΜΔ καὶ κατὰ τὴν ΑΜΒ, (σχ. 85) εἶναι δηλαδή :

$$\widehat{AM\Gamma} = \widehat{\Gamma MB} = \widehat{BM\Delta} = \widehat{\Delta MA}$$

Τότε αἱ μὲν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ λέμε ὅτι εἶναι **κάθετοι** ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην, αἱ δὲ τέσσαρες ἴσαι γωνίαι λέγονται **ὀρθαὶ γωνίαι.** Ἔχει δὲ κάθε ὀρθὴ γωνία τὰς πλευράς της καθέτους, τὴν μίαν ἐπὶ τὴν ἄλλην. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι :

Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ μίαν ἄλλην ὅταν σχηματίζη μὲ αὐτὴν τέσσαρας γωνίας ἴσας μεταξύ των.

Μία γωνία λέγεται ὀρθὴ ὅταν ἔχη τὰς πλευρὰς αὐτῆς καθέτους, τὴν μίαν ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Σύμβολον τῆς **καθετότητος** εἶναι τὸ $\perp$, δηλαδὴ ἕνα ἀνάποδο ταῦ κεφαλαῖον, σύμβολον δὲ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι τὸ ∟. Εἶναι δηλαδή :

$$\Gamma\Delta \perp AB \quad \text{καὶ} \quad \widehat{AM\Gamma} = 1^{\llcorner}$$

Ἡ εὐθεῖα ΓΔ ποὺ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ λέγεται **μεσοκάθετος** τοῦ ΑΒ. Κάθε εὐθεῖα ποὺ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ λέγεται **πλαγία.**

91. 1 Μέσον τόξου.—Διχοτόμος γωνίας. Πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ΓΜΔ αὐτοῦ, ὅπως παραπάνω, ἑνώνομεν δὲ ἕνα σημεῖον Δ τῆς μεσοκαθέτου μὲ τὰ ἄκρα Α καὶ Β. Ἀφοῦ κατὰ τὸ τσάκισμα τοῦ χαρτιοῦ τὸ Β θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ Α καὶ τὸ Δ δὲν θὰ κινηθῆ, βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι (σχ. 86)

$$\Delta A = \Delta B$$

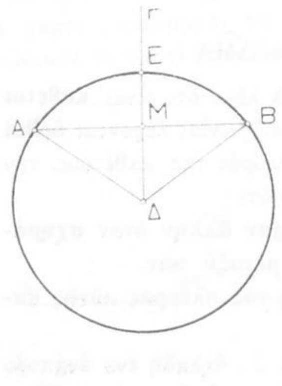
Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει διὰ κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι :

Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος

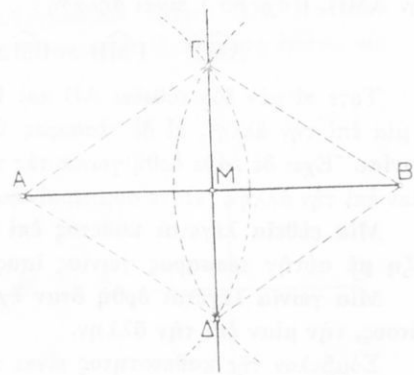
ἰσαπέχει (ἀπέχει ἐξ ἴσου) ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Εὔκολα διαπιστώνομεν ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις, δηλαδή :

Κάθε σημεῖον ποὺ ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος βρίσκεται ἐπάνω εἰς τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ.



Σχ. 86.



Σχ. 87.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς συνεπαγωγὴν

$$\mathbf{\Gamma M\Delta \perp AB \;\wedge\; MA = MB \;\wedge\; \Delta \in \Gamma M \Longrightarrow \Delta A = \Delta B}$$

91. 2 Ἐὰν γράψωμεν μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΔΑ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάση καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β, διότι εἶναι ΔΒ = ΔΑ, θὰ συναντήση δὲ τὴν μεσοκάθετον ΓΜΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐπειδὴ κατὰ τὸ δίπλωμα τοῦ χαρτιοῦ τὸ σημεῖον Β θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ δὲ σημεῖον Ε θὰ μείνη ἀμετακίνητον, συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι

$$\widehat{\mathrm{EB}} = \widehat{\mathrm{EA}} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{A}$$

Διὰ τοῦτο τὸ μὲν σημεῖον Ε λέγεται **μέσον** τοῦ τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$, ἡ δὲ ἡμιευθεῖα ΔΕ ποὺ διαιρεῖ τὴν (ἐπίκεντρον) γωνίαν $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}$

εἰς τὰς δύο ἴσας γωνίας $\widehat{E\Delta B} = \widehat{E\Delta A}$, λέγεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας $\widehat{A\Delta B}$. Ὥστε :

Μέσον ἑνὸς τόξου λέγεται τὸ σημεῖον ποὺ διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη, εἶναι δὲ ἕνα μόνον.

Διχοτόμος μιᾶς γωνίας λέγεται ἡ ἡμιευθεῖα ποὺ διαιρεῖ τὴν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας, εἶναι δὲ μία μόνον.

Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος ΔΜ τῆς γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ εἶναι μία μόνον καὶ συναντᾶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ μόνον εἰς τὸ σημεῖον Μ, διὰ τοῦτο βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον μιᾶς εὐθείας μία μόνον κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Παρατήρησις : Ἡ διχοτόμος τῆς ἐπικέντρου γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τοῦ ἀντιστοίχου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τῆς γωνίας.

92. 1 Πῶς χαράσσομεν τὴν μεσοκάθετον. Πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ θέλομεν νὰ χαράξωμεν τὴν μεσοκάθετον αὐτοῦ (σχ. 87).

Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β αὐτοῦ καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ μισὸ τοῦ ΑΒ γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ λέμε ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ. Διότι εἶναι :

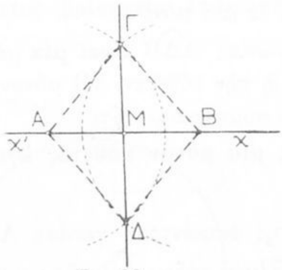
$$\Gamma A = \Gamma B \quad \text{καὶ} \quad \Delta A = \Delta B$$

Ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ σημεῖον Δ ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι δὲ **μία μόνον.**

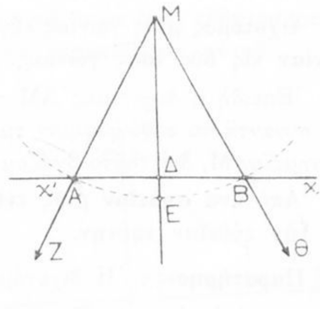
Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον α) Βρίσκομεν τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, β) Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{AM\Gamma} = 1^{L}$ ἢ $\widehat{\Gamma MB} = 1^{L}$.

92. 2 Πῶς χαράσσομεν κάθετον ἀπὸ ἕνα σημεῖον ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν. Α) Ἂν τὸ σημεῖον βρίσκεται ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν ἀλλὰ δὲν εἶναι μέσον αὐτῆς. Θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον $M \in XX'$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΧΧ'. Πέρνομεν ἐπὶ τῆς ΧΧ' δύο σημεῖα Α καὶ Β ἑκατέρωθεν τοῦ Μ, ὥστε νὰ εἶναι ΜΑ = ΜΒ. Ἔτσι τὸ Μ γίνεται μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ, ἐργαζόμεθα δὲ ὅπως εἰς τὴν παραπάνω παράγραφον (σχ. 88). Ὥστε εἶναι ΓΜΔ $\perp$ ΧΧ′.

Β) Ἂν Μ$\notin$ΧΧ′. Τότε μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα κατάλληλον γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΧΧ′ εἰς τὰ σημεῖα Α



Σχ. 88.



Σχ. 89.

καὶ Β (σχ. 89). Τώρα ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον ΜΔ τοῦ τμήματος ΑΒ, ἡ ὁποία θὰ περνάῃ καὶ ἀπὸ τὸ Μ, διότι εἶναι ΜΑ = ΜΒ. Ὥστε εἶναι ΜΔ $\perp$ ΧΧ′.

Ἂν συνδυάσωμεν τὰς § 92.1 καὶ 92.2 μποροῦμεν νὰ βγάλωμεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον ποὺ βρίσκεται ἢ ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν ἢ ἔξω ἀπὸ αὐτήν, μία μόνον κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

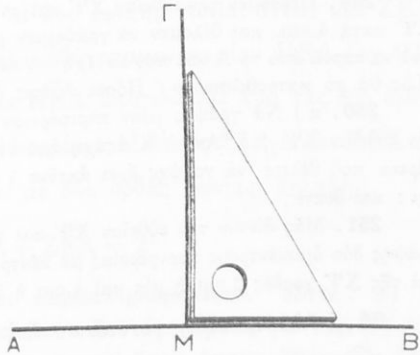
92. 3 **Πῶς διχοτομοῦμεν μίαν γωνίαν :** Ἡ κατασκευὴ τοῦ σχήματος 89 μᾶς δείχνει πῶς μποροῦμεν νὰ διχοτομήσωμεν μίαν γωνίαν (νὰ βροῦμε δηλαδὴ τὴν διχοτόμον αὐτῆς). Πέρνομεν τὴν γωνίαν $\widehat{ΖΜΘ}$ καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Μ αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα ὁποιαδήποτε, ἔστω τὴν ΜΑ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ΜΔ. Ἡ ΜΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΑΜΒ}$ ὅπως εὔκολα διαπιστώνομεν ἂν τσακίσωμεν τὸ χαρτὶ κατὰ τὴν ΜΔ.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον βρίσκομεν καὶ τὸ μέσον Ε τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$, διότι εἶναι $\overset{\frown}{ΑΕ} = \overset{\frown}{ΕΒ}$.

93. Γνώμων : Γνώμων (τρίγωνον) εἶναι ἕνα ὄργανον ξύλινον ἢ ἀπὸ πλαστικὴν ὕλην, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὸ χρησιμοποιοῦμεν διὰ σχεδιάσεις. Τὸν γνώμονα τὸν χρησιμοποιοῦμεν καὶ διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ αὐτῆς, ἢ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ ποὺ εἶναι ἐκτὸς τῆς ΑΒ.

Πρὸς τοῦτο χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα ἔτσι ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ βρίσκεται

Σχ. 90.



Σχ. 91.

(νὰ ἀκουμπᾶ) ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρά του νὰ περνάῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ ἢ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ (σχ. 91). Ἔπειτα σύρομεν μὲ τὸ μολύβι μίαν γραμμὴν ΜΓ κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς τοῦ γνώμονος. Ἡ γραμμὴ ΜΓ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ποὺ ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον Μ ἢ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ. Διότι εἶναι $\widehat{\mathrm{BM\Gamma}} = 1^{\llcorner}$.

Ἀσκήσεις

246. Νὰ πάρετε ἕνα ἡμιεπίπεδον Π_1 καὶ τὴν ἀκμὴν ΧΧ′ αὐτοῦ. Ἔπειτα νὰ πάρετε τὰ σημεῖα

$$\mathrm{A} \in \mathrm{XX'} \wedge \mathrm{B} \in \mathrm{XX'} \wedge (\mathrm{AB}) = 4 \text{ cm}$$

νὰ φέρετε τὴν $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{XX'}$ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι

$$\Gamma \in \Pi_1 \wedge (\mathrm{A\Gamma}) = 3 \text{ cm}.$$

νὰ φέρετε τὴν ΒΓ καὶ νὰ μετρήσετε τὸ μῆκος αὐτῆς μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον.

247. Νὰ κατασκευάσετε τὰς τρεῖς ἴσας διαδοχικὰς γωνίας $\widehat{\mathrm{AOB}} =$

$\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$. Ἔπειτα νὰ βρῆτε ποία εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{AO\Gamma}$ καὶ ποία εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{BO\Delta}$.

248. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα κύκλον μὲ ἀκτῖνα $R = 4$ cm. καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον O αὐτοῦ νὰ φέρετε τὴν ἡμιευθεῖαν OX, ποὺ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον A. Νὰ πάρετε κατόπιν τὰ σημεῖα.

$$B \in OX \quad \wedge \quad (OB) = 1 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma \in OX \quad \wedge \quad (O\Gamma) = 7 \text{ cm}.$$

Τί διαπιστώνετε διὰ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ καὶ διὰ τὸ σημεῖον Α; Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ΒΓ;

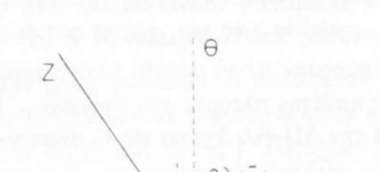
249. Πέρνομεν τὴν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ τὸ σημεῖον Α ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ΧΨ κατὰ 4 cm. καὶ θέλομεν νὰ γράψωμεν μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος 5 cm. ποὺ νὰ περνᾷ ἀπὸ τὸ Α καὶ ποὺ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπάνω εἰς τὴν ΧΨ. Πῶς θὰ τὸ κατορθώσωμεν; Πόσες λύσεις ὑπάρχουν;

250. α) Νὰ γράψῃς μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Κ ποὺ νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ. β) Ἂν τὸ Κ ἀπέχῃ ἀπὸ τὴν ΧΨ κατὰ 5 cm καὶ ἡ περιφέρεια ποὺ θέλεις νὰ γράψῃς ἔχει ἀκτῖνα 4 cm μπορεῖς νὰ τὴν γράψῃς ἢ ὄχι; καὶ διατί;

251. Μᾶς δίνουν τὴν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ τὸ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ γράψῃς δύο ὁμοκέντρους περιφερείας μὲ κέντρον τὸ Α, αἱ ὁποῖαι νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΧΨ χορδὲς 2 cm ἡ μία καὶ 4 cm ἡ ἄλλη.

94.1 Ἄλλα εἴδη γωνιῶν: Α) Πέρνομεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{\Gamma OA}$ καὶ φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν OB εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς (σχ. 92). Τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἐσχηματίσθηκαν αἱ δύο ἐφεξῆς

Σχ. 92.



Σχ. 93.

γωνίαι $\widehat{AOB}$ καὶ $\widehat{BO\Gamma}$ ποὺ κάθε μία εἶναι μικρότερη τῆς ὀρθῆς, ἔχουν δὲ ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{AO\Gamma}$. Δηλαδή:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} \quad \text{ἤ} \quad \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 1^{L}$$

Διὰ τοῦτο κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς λέγεται **ὀξεῖα** γωνία. Καὶ αἱ δύο μαζὺ λέγονται **συμπληρωματικαὶ** γωνίαι. Ὥστε : **ὀξεῖα γωνία λέγεται ἡ γωνία ποὺ εἶναι μικρότερη ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.**

Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

94. 2 Β) Πέρνομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΑ καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ε αὐτῆς φέρομεν τὴν ΕΘ $\perp$ ΗΑ καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΕΖ. Παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι $\widehat{HEZ}$ καὶ $\widehat{ZEA}$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄθροισμα τὴν εὐθύγραμμον γωνίαν $\widehat{HEA}$ (σχ. 93). Ἀλλὰ ἡ εὐθύγραμμος γωνία $\widehat{HEA}$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας $\widehat{HE\Theta}$ καὶ $\widehat{\Theta EA}$ καὶ ἑπομένως αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι $\widehat{HEZ}$ καὶ $\widehat{ZEA}$ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, δηλαδή :

$$\widehat{HEZ} + \widehat{ZEA} = 2^{L}$$

Αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται **παραπληρωματικαί.** Ὥστε : α) **Ἡ εὐθύγραμμος γωνία ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὀρθὰς γωνίας.** β) **Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.**

Ἀπὸ τὰς δύο παραπληρωματικὰς γωνίας ἡ $\widehat{HEZ}$ εἶναι ὀξεῖα. Ἡ ἄλλη γωνία $\widehat{ZEA}$ ποὺ εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{\Theta EA}$, λέγεται ἀμβλεῖα γωνία. Ὥστε

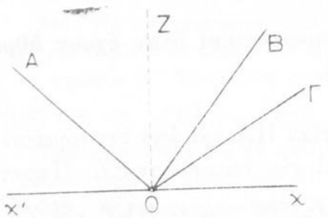
Μία γωνία λέγεται ἀμβλεῖα ὅταν εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

95. Δύο ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα γωνιῶν. Α) Πέρνομεν τὴν εὐθεῖαν ΧΧ′ καὶ τὸ σημεῖον $O \in XX'$ καὶ φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κ.λ.π. πρὸς τὸ ἄνω μέρος τῆς ΧΧ′ (σχ. 94). Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ποὺ σχηματίζονται ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας $\widehat{X'OZ}$ καὶ $\widehat{ZOX}$

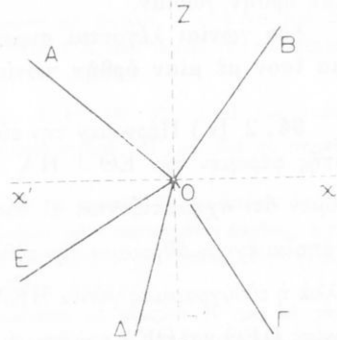
ἤτοι : $$\widehat{X'OA} + \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma OX} = 2^{L}.$$

Β) Πέρνομεν τὸ σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου Π καὶ ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὰς διαφόρους ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ κ.λ.π.

τοῦ ἐπιπέδου Π (σχ. 95). Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ποὺ σχηματίζονται ἔχουν ἄθροισμα τὰς τέσσαρας ὀρθὰς



Σχ. 94.



Σχ. 95

γωνίας $\widehat{X'OZ}$, $\widehat{ZOX}$, $\widehat{XOZ'}$, $\widehat{Z'OX'}$, δηλαδή:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} + \widehat{EOA} = 4^L$$

Ἀσκήσεις

252. Πέρνομεν τὸ ἡμιεπίπεδον Π_1 ποὺ ἔχει ἀκμὴν τὴν AB καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τῆς ἀκμῆς φέρομεν ἐπάνω εἰς τὸ Π_1 τὴν $\Gamma\Delta \perp AB$ καὶ τὰς διχοτόμους ΓΕ καὶ ΓΖ τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν $\widehat{\Delta\Gamma A}$ καὶ $\widehat{\Delta\Gamma B}$. α) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. β) Νὰ βρῆτε τὸ μέγεθος κάθε μιᾶς (εἰς μέρος τῆς ὀρθῆς) καὶ γ) Νὰ ἐξακριβώσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ὀρθὴ ἡ γωνία $\widehat{E\Gamma Z}$.

253. Μία γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὰ 0,3 τῆς ὀρθῆς. Πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ συμπληρωματικὴ πρὸς αὐτὴν καὶ πόσα ἡ παραπληρωματικὴ πρὸς αὐτήν;

254. Δύο ἐφεξῆς γωνίαι ω καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαί. Νὰ ἐξακριβώσετε τί εἴδους γραμμὴν ἀποτελοῦν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν.

255. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς ΧΨ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου Π_1 φέρομεν εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Νὰ ἐξακριβώσετε ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται.

256. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ τοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἐξακριβώσετε ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται.

257. Δίδονται τέσσαρες διαδοχικαὶ ἡμιευθεῖσαι ΟΧ, ΟΨ, ΟΖ, ΟΤ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι

$(OX,O\Psi) = 2(O\Psi,OZ)$, $(OZ,OT) = 30^0$ καὶ $(OT,O\Psi) = 80^0$

Νὰ ἀποδείξετε ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΤ εἶναι ἀντίθετοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ'

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

96. Τελεία διαίρεσις: Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἔχομεν 24 δραχμὰς καὶ θέλομεν νὰ τὰς μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 4 μαθητάς. Πόσας δραχμὰς θὰ πάρῃ καθένας ;

Λύσις : Βάζομε τὰς 24 δρχ. ἐπάνω εἰς τὸ τραπέζι, ἔτσι ὥστε νὰ σχηματισθοῦν 4 ὁριζόντιες γραμμὲς (δηλαδὴ χωρίζομεν τὰς

Σχ. 96.

24 δρχ. σὲ 4 ἴσα μέρη) καὶ βλέπομεν ὅτι κάθε γραμμὴ περιέχει 6 δρχ. μπορεῖ δὲ κάθε μαθητὴς νὰ πάρῃ τὰς 6 δρχ. κάθε γραμμῆς Βρίσκομεν λοιπὸν ὅτι κάθε μαθητὴς θὰ πάρῃ 6 δραχμάς.

Ἡ πρᾶξις ποὺ κάνομεν λέγεται **διαίρεσις,** ὁ ἀριθμὸς 24 ποὺ μοιράζομεν λέγεται **διαιρετέος,** ὁ δὲ ἀριθμὸς 4 ποὺ μᾶς λέγει σὲ πόσα ἴσα μέρη μοιράζομεν τὸν διαιρετέον λέγεται **διαιρέτης.** Ἐκεῖνο ποὺ βρίσκομεν λέγεται **πηλίκον**

Σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ **διά :** Ὥστε γράφομεν $24 : 4 = 6$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

$$24 = 4 \times 6$$

Ἡ παραπάνω διαίρεσις λέγεται **τελεία** διότι **δὲν μένει τίποτε** μετὰ τὸ μοίρασμα.

Ἂν ὀνομάσωμεν Δ τὸν διαιρετέον 24, δ τὸν διαιρέτην 4 καὶ π τὸ πηλίκον 6, βρίσκομεν

$$\boxed{\Delta = \delta \cdot \pi} \qquad (1)$$

Ὥστε : Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν **ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.**

97. Ἀτελὴς διαίρεσις: Ἂν ὅμως εἴχαμεν 27 δραχμάς, τότε μετὰ τὸ μοίρασμα θὰ περισσεύσουν 3 δρχ. Τὸ 3 λέγεται **ὑπόλοιπον,** ἡ δὲ διαίρεσις τότε λέγεται **ἀτελής.**

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$27 = 4 \cdot 6 + 3$$

Καὶ ἂν ὀνομάσωμεν υ τὸ ὑπόλοιπον, τότε ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$\boxed{\Delta = \delta\pi + \upsilon} \qquad (2)$$

Ὥστε : **Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ὑπολοίπου καὶ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.**

Ἡ παραπάνω σχέσις (2) εἶναι ἡ σχέσις ποὺ συνδέει τοὺς ὅρους τῆς διαιρέσεως, **εἶναι δὲ πάντοτε $\upsilon < \delta$.**

Διὰ $\upsilon = 0$ ἡ σχέσις (2) δίνει τὴν σχέσιν (1) τῆς τελείας διαιρέσεως.

Παρατήρησις : Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ υ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (2) βρίσκομεν

$$\Delta - \upsilon = \delta\pi \qquad (3)$$

δηλαδὴ διαίρεσιν τελείαν. Ὥστε :

Εἰς μίαν ἀτελῆ διαίρεσιν ἂν ἐλαττώσωμεν τὸν διαιρετέον κατὰ τὸ ὑπόλοιπον, ἡ διαίρεσις γίνεται τελεία.

Σημ. I. Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν (1) παρατηροῦμεν ὅτι **ὁ διαιρετέος εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.**

Σημ. II. Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν 27 : 4 βρίσκομεν πηλίκον 6 καὶ μένει ὑπόλοιπον. Διὰ τοῦτο μποροῦμε νὰ εἰποῦμε ὅτι τὸ πηλίκον 27 : 4 εἶναι 6 **κατὰ προσέγγισιν μονάδος.** Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον 6 εἶναι ὀλιγώτερον (ἀφοῦ μένει ὑπόλοιπον) διὰ τοῦτο τὸ κατὰ προσέγγισιν τοῦτο πηλίκον τὸ λέμε πηλίκον **κατ' ἔλλειψιν.** Ἂν θέσωμεν 27 : 4 = 7 τότε βρίσκομεν πηλίκον **καθ' ὑπεροχὴν** (δηλαδὴ περισσότερον ἀπὸ τὸ πραγματικόν). Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν ὡς κατὰ προσέγγισιν πηλίκον πέρνομεν τὸ κατ' ἔλλειψιν.

98. 1 **Μερικαὶ ἀξιοσημείωτοι διαιρέσεις: α)** Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, ὅταν δηλαδὴ εἶναι $\delta = 1$, τότε θὰ εἶναι $\upsilon = 0$ διότι εἶναι πάντοτε $\upsilon < \delta$ ἤτοι $\upsilon < 1$. Ὥστε ἡ διαίρεσις θὰ εἶναι τελεία καὶ τότε ἡ σχέσις (1) δίνει :

$$\Delta : 1 = \pi \implies \Delta = 1\pi = \pi \implies \Delta : 1 = \Delta$$

Ὥστε : **Ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τῆς μονάδος 1 δίνει ὡς πηλίκον τὸν ἴδιον τὸν ἀριθμόν.**

98. 2 **β)** Ὅταν τὸ πηλίκον εἶναι ἡ μονάς, ὅταν δηλαδὴ εἶναι $\pi = 1$, τότε ἡ σχέσις (1) δίνει

$$\Delta : \delta = 1 \implies \Delta = \delta \cdot 1 = \delta \implies \Delta : \Delta = 1$$

Ὥστε : **Ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του δίνει ὡς πηλίκον τὴν μονάδα.**

98. 3 **γ)** Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10 ἢ 100 κ.λ.π. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν :

$$357 : 10$$

Ἐπειδὴ εἶναι $357 = 350 + 7 = 35 \cdot 10 + 7$ διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις 357 : 10 δίνει πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 35 τῶν δεκάδων καὶ ὑπόλοιπον τὰς μονάδας 7 αὐτοῦ.

Μὲ τὴν ἰδίαν σκέψιν ἡ διαίρεσις 357 : 100 δίνει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 57, διότι εἶναι $357 = 300 + 57 = 3 \cdot 100 + 57$ Ἐπίσης εἶναι $25863 = 25000 + 863 = 25 \cdot 1000 + 863$ καὶ ἄρα ἡ διαίρεσις 25863 : 1000 δίνει πηλίκον 25 καὶ ὑπόλοιπον 863. Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1 000 κλπ. ἀποκόπτομεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τόσα ψηφία ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης. Τὸ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα εἶναι τὸ πηλίκον καὶ τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τμῆμα εἶναι τὸ ὑπόλοιπον.

Ἀσκήσεις

258 Νὰ βρῆτε τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων εἰς τὰς παρακάτω ἰσότητας
α) $75 = 5\pi$ β) $42 = 7\pi$ γ) $88 = 4\pi + \upsilon$
δ) $32 = 6\pi + \upsilon$ ε) $65 = 8\pi + \upsilon$ στ) $78 = 9\pi + \upsilon$

259. Νὰ γράψετε τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω διαιρέσεις :
α) 356 : 10 β) 487 : 100 γ) 5400 : 100
δ) 2583 : 1000 ε) 89000 : 1000 στ) 70000 : 1000

260 Νὰ κάμετε τὴν πρᾶξιν ποὺ χρειάζεται ὥστε αἱ παρακάτω διαιρέσεις νὰ γίνουν τέλειαι χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ πηλίκον
α) 78 : 8 β) 45 : 7 γ) 65 : 9

261 Νὰ κάμετε τὸ ἴδιο καὶ εἰς τὰς παρακάτω διαιρέσεις ἀλλὰ νὰ αὐξηθῇ κατὰ μονάδα τὸ πηλίκον.
α) 65 : 7 β) 48 : 9 γ) 35 : 8

262 Ποῖος εἶναι ὁ διαιρετέος τῆς διαιρέσεως ποὺ ἔχει διαιρέτην 12 καὶ δίνει πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 5 ;

263 Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ὑπολοίπων ποὺ μπορεῖ νὰ ἀφίσῃ μία διαίρεσις ποὺ ἔχει διαιρέτην 5. Ὁμοίως ποὺ ἔχει διαιρέτην 8.

264. Νὰ βρῆτε ὅλους τοὺς μικροτέρους τοῦ 100 ἀριθμοῦ, οἱ ὁποῖοι ἂν διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 9 ἀφίνουν ὑπόλοιπον 4.

265 Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν διψηφίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἂν διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 8 νὰ ἀφήνουν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ πηλίκον.

266 Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν Δ, οἱ ὁποῖοι ἂν διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 9 νὰ ἀφήνουν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ πηλίκον, ὅταν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $50 < \Delta < 70$.

267 Νὰ συμπληρώσετε τὰς παρακάτω ἰσότητας :
α) $\Delta = \ldots \times 32 + 4$, ἔνθα εἶναι $\Delta \leqslant 100$
β) $\Delta = 27 \times \ldots + 8$, ἔνθα εἶναι $\Delta < 50$
γ) $\Delta = \ldots \times 72 + 30$ ἔνθα εἶναι $\Delta < 200$

99. 1 Πράξεις ἀντίστροφοι : Ἡ ἰσότης τῆς τελείας διαιρέσεως εἶναι ὅπως εἴδαμε παραπάνω.

$$\Delta = \delta\pi \qquad (1)$$

ὅπου Δ εἶναι ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης καὶ π τὸ πηλίκον. Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως εἶναι $\delta\pi = \pi\delta$. Ὥστε ἡ ἄνω σχέσις (1) μπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\Delta = \pi\delta \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) μᾶς λέγει ὅτι ὁ διαιρέτης εἶναι π καὶ τὸ πηλίκον εἶναι δ. Ἑπομένως εἰς μίαν τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης μπορεῖ νὰ γίνῃ πηλίκον καὶ τὸ πηλίκον διαιρέτης. Π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 96 ἂν οἱ μαθηταὶ ἦσαν 6, τότε καθένας θὰ ἔπερνε 4 δρχ. Ὥστε μποροῦμε νὰ σημειώσωμε τὴν ἀμφιμονοσήμαντον συνεπαγωγήν :

$$\boxed{\Delta : \delta = \pi \iff \Delta : \pi = \delta \iff \delta\pi = \Delta}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\Delta : \delta = \pi$, βρίσκομεν :

$$(\Delta : \delta)\cdot\delta = \delta\pi = \Delta.$$

Ὥστε

Ἂν διαιρέσωμεν διὰ δ ἕνα ἀριθμὸν Δ καὶ τὸ πηλίκον τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δ, βρίσκομεν πάλιν τὸν ἀριθμὸν Δ. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι ἡ διαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν εἶναι πράξεις **ἀντίστροφοι** ἡ μία δηλαδὴ ἀναιρεῖ τὴν ἄλλην.

99. 2 Αἱ παραπάνω σχέσεις $\Delta = \delta\pi$ ἢ $\Delta = \pi\delta$ μᾶς λένε καὶ τὸ ἑξῆς : Ὅταν ἔχωμεν μίαν ἰσότητα, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ἕνα μέλος εἶναι ἕνας ἀριθμὸς καὶ τὸ ἄλλο μέλος εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, τότε ἡ ἰσότης αὐτὴ φανερώνει μίαν διαίρεσιν, τῆς ὁποίας διαιρετέος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ἑνὸς μέλους καὶ ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας τοῦ ἄλλου μέλους ὁ ἕνας εἶναι διαιρέτης καὶ ὁ ἄλλος εἶναι πηλίκον, δηλαδὴ

$$\boldsymbol{\Delta = \delta\pi \implies \Delta : \delta = \pi \quad \text{ἢ} \quad \Delta : \pi = \delta}$$

100. Εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὅταν ἔχωμεν τὴν τελείαν διαίρεσιν 24 : 4, τότε τὸ πηλίκον 6 εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_0. Ὅταν ὅμως ἔχωμεν τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν 27 : 4 τότε τὸ ἀκριβές* πηλίκον αὐτῆς **δὲν εἶναι** στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_0. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως **δὲν εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις τοῦ συνόλου Φ_0** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις

268. Ποῖες τέλειες διαιρέσεις δίνει ἡ ἰσότης $480 = 32 \times 15$;

269. Ποῖες ἀτελεῖς διαιρέσεις δίνει ἡ ἰσότης $437 = 16 \times 27 + 5$;

(*) Ὅπως θὰ ἰδοῦμε εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων, τὸ ἀκριβὲς πηλίκον 27 : 4 εἶναι ὁ μικτὸς ἀριθμὸς $6\frac{3}{4}$ ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

270. Μεταξὺ ποίων διαδοχικῶν πολλαπλασίων τοῦ 8 βρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 50 ;

271. Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ ν εἰς τὴν ἰσότητα $\Delta = 16\nu$ ὅταν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $\Delta < 100$.

272. Τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν ἰσότητα $\Delta = 8\nu$ ἂν εἶναι $\Delta < 40$

273. Τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν ἰσότητα $\Delta = 8\nu$ ἂν εἶναι $\Delta \leqslant 40$.

274. Τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν ἰσότητα $\Delta = 15\nu$ ἂν εἶναι $60 < \nu \leqslant 160$.

275. Τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὴν ἰσότητα $\Delta = 15\nu$ ἂν εἶναι $50 < \nu < 60$.

276. Νὰ βρῆτε τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀφίνουν ὑπόλοιπον 2 ἂν διαιρεθοῦν εἴτε διὰ 5 εἴτε διὰ 6 εἴτε δια 8 (θὰ βρῆτε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν κλπ.).

277. Νὰ βρῆτε ὅλους τοὺς διψηφίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀφίνουν ὑπόλοιπον 1 ἂν διαιρεθοῦν εἴτε διὰ 3 εἴτε διὰ 5 εἴτε διὰ 6 (θὰ βρῆτε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν κλπ.).

278. Μετρῶντας τοὺς βόλους του ἕνα παιδὶ ἀνὰ 4 ἢ ἀνὰ 5 ἢ ἀνὰ 6 παρατηρεῖ ὅτι τοῦ περισσεύουν 2 βόλοι. Πόσους βόλους ἔχει ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν βόλων του περιλαμβάνεται μεταξὺ 100 καὶ 150 ;

279. Νὰ βρῆτε τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἂν διαιρεθοῦν διὰ 10 ἀφίνουν ὑπόλοιπον 5, διὰ 11 ἀφίνουν ὑπόλοιπον 6 καὶ διὰ 55 ἀφίνουν ὑπόλοιπον 50.

280. Νὰ βρῆτε ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τῆς παραπάνω ἀσκήσεως ποὺ περιλαμβάνονται μεταξὺ 100 καὶ 500.

101. Τὸ μηδὲν εἰς τὴν διαίρεσιν : Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

I. Ὁ διαιρετέος εἶναι μηδέν : Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ 0 εἰς 4 ἴσα μέρη, ὅτι δηλαδὴ ἔχομεν τὴν διαίρεσιν :

$$0 : 4$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι 0, δηλαδὴ $0 : 4 = 0$, διότι εἶναι ὁ διαιρετέος $0 = 4 \cdot 0 = 0$. Ὥστε :

Ἡ διαίρεσις τοῦ μηδενὸς διὰ κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ δίνει πηλίκον τὸ μηδέν.

II. Ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν

$$\mathbf{25 : 0}$$

Ἂν ποῦμε ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι π, τότε κατὰ τὴν ἰσότητα (1) θὰ πρέπει νὰ εἶναι :

$$25 = 0 \cdot \pi$$

Ἀλλὰ (§ 78) γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $0 \cdot \pi = 0$. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $25=0$, τὸ ὁποῖον εἶναι **ἀδύνατον.** Λέμε λοιπὸν ὅτι **ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ μηδενὸς δὲν ἔχει νόημα,** ἢ καὶ ὅτι :

Ἡ διαίρεσις ἑνὸς ἀριθμοῦ ($\neq 0$) διὰ τοῦ μηδενὸς εἶναι ἀδύνατος.

Διὰ τοῦτο **σὲ κάθε διαίρεσιν** θέτομεν πάντοτε τὸν περιορισμὸν ὅτι ὁ **ὁ διαιρέτης πρέπει νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.**

ΙΙΙ. Καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν :

$$0:0$$

Ἂν εἶναι π τὸ πηλίκον, τότε κατὰ τὴν σχέσιν (1) θὰ ἔχωμεν $0=0\cdot\pi$. Ἀλλὰ ἡ ἰσότης $0=0\cdot\pi$ εἶναι ἀληθινὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ π, ἀφοῦ εἶναι πάντοτε $0\cdot\pi=0$. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι ἡ διαίρεσις $0:0$ **δὲν ξέρομε τὶ πηλίκον δίνει,** ἀφοῦ κάθε ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς πηλίκον. Τοῦτο τὸ ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς :

Ἡ διαίρεσις τοῦ μηδενὸς διὰ τοῦ μηδενὸς εἶναι ἀπροσδιόριστος (δὲν προσδιορίζεται).

IV. Τὸ πηλίκον εἶναι μηδέν : α) Ἂν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, ἔστω $\Delta:\delta=0$, τότε κατὰ τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν

$$\Delta=\delta\cdot 0 \quad\Longrightarrow\quad \Delta=0$$

Ὥστε εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν ἂν τὸ πηλίκον εἶναι 0 τότε καὶ ὁ διαιρετέος εἶναι 0. (ἴδε Ι περίπτωσιν).

β) Εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν. Ἔστω ὅτι εἰς τὴν διαίρεσιν $\Delta:\delta$ τὸ πηλίκον $\pi=0$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι υ. Τότε κατὰ τὴν σχέσιν (2) βρίσκομεν :

$$\Delta=\delta\cdot 0+\upsilon \quad\Longrightarrow\quad \Delta=\upsilon$$

Ὥστε ὅταν εἰς μίαν ἀτελῆ διαίρεσιν τὸ πηλίκον εἶναι μηδέν, ὁ διαιρετέος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ὑπόλοιπον, εἶναι δηλαδὴ $\Delta=\upsilon$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\upsilon<\delta$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\Delta<\delta$. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι

Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν διαιρέτην, τότε τὸ πηλίκον εἶναι μηδέν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.

Μία τέτοια διαίρεσις (δηλ. ὅταν εἶναι $\Delta<\delta$) δὲν μπορεῖ νὰ γίνη εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Δὲν μποροῦμε π.χ. νὰ μοιράσωμεν τὸ 5 εἰς 8 ἴσα μέρη* εἰς τὸ σύνολον Φ_0.

Ἀσκήσεις

281. Ἀπὸ τὰς παρακάτω διαιρέσεις ποῖες εἶναι ἀδύνατες καὶ ποῖες ἀπροσδιόριστες ;

α) $15 : 0$ β) $8 \times 0 : 0$ γ) $45 : (5 \times 0)$

282. Τί πηλίκον δίνει κάθε μία ἀπὸ τὰς παρακάτω διαιρέσεις ;

α) $24 \times 0 : 6$ β) $8 : 11$ γ) $\alpha : \alpha$ δ) $\alpha : 1$

102. 1 **Μερισμὸς καὶ μέτρησις : I.** Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἔχομεν 20 m. ὕφασμα καὶ θέλομεν νὰ τὸ μοιράσωμεν εἰς 6 ἄτομα. Πόσα m. θὰ πάρη καθένας ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $20 : 6$ βρίσκομεν δὲ

$$20 : 6 = 3 \text{ πηλίκον καὶ } 2 \text{ ὑπόλοιπον}$$

Ὥστε κάθε ἄτομον θὰ πάρη **3 m** καὶ περισσεύουν **2 m.** Εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν **ἐμοιράσαμε** τὰ 20 m εἰς 6 **ἴσα μέρη.** Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὐτὴ λέγεται **διαίρεσις μερισμοῦ.** Εἰς τὴν διαίρεσιν μερισμοῦ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς : α) Ὁ διαιρετέος 20 m καὶ ὁ διαιρέτης 6 ἄτομα εἶναι **ἑτεροειδεῖς** β) καὶ τὸ πηλίκον 3 m καὶ τὸ ὑπόλοιπον 2 m εἶναι **ὁμοειδῆ πρὸς τὸν διαιρετέον.**

102. 2 **II.** Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα : **Ἔχομεν 20 m. ὕφασμα καὶ θέλομεν νὰ βροῦμε πόσα κοστούμια τῶν 3 m. μποροῦμε νὰ κάμωμεν ;**

Καὶ ἐδῶ πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $20 : 3$ καὶ βρίσκομεν

$$20 : 3 = 6 \text{ πηλίκον καὶ } 2 \text{ ὑπόλοιπον.}$$

Ὥστε βρίσκομεν **6 κοστούμια** καὶ περισσεύουν **2 m**

Εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτὴν μποροῦμε νὰ κάμωμεν τὴν ἑξῆς σκέψιν. **Μετροῦμεν πόσας φορὰς** μποροῦμε νὰ πάρωμεν τὰ 3m ἀπὸ τὰ 20m. Διὰ τοῦτο ἡ διαίρεσις αὐτὴ λέγεται **διαίρεσις μετρήσεως.** Εἰς τὴν διαίρεσιν μετρήσεως παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς : α) Καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι **ὁμοειδεῖς** β) Τὸ πηλίκον εἶναι

(*) Εἰς τὸ κεφάλαιον τῶν κλασμάτων θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ διαίρεσις $5 : 8$ δίνει πηλίκον τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$.

ἑτεροειδὲς πρὸς τὸν διαιρετέον τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι **ὁμοειδὲς** πρὸς αὐτόν.

102. 3 Ὥστε μποροῦμε νὰ κάμωμεν τὸν ἑξῆς διαχωρισμὸν μεταξὺ τῶν δύο εἰδῶν τῆς διαιρέσεως.

Διαίρεσις μερισμοῦ	**Διαίρεσις μετρήσεως**
Διαιρετέος - Διαιρέτης **ἑτεροειδεῖς**	Διαιρετέος - διαιρέτης **ὁμοειδεῖς**
πηλίκον **ὁμοειδὲς** πρὸς διαιρετέον	πηλίκον **ἑτεροειδὲς** πρὸς διαιρετέον

ὑπόλοιπον **ὁμοειδὲς** πρὸς διαιρετέον

Μποροῦμεν ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν καὶ τὰ ἑξῆς :

Διαίρεσις μερισμοῦ	Διαίρεσις μετρήσεως
Δm : δ ἄτομα = πm, υm	Δm : πm = δ ἄτομα, υm
$\Delta = \delta\pi + \upsilon$	$\Delta = \pi\delta + \upsilon$

Ὥστε μποροῦμε νὰ βγάλωμεν καὶ τὰ ἑξῆς συμπεράσματα : α) Καὶ τὰ δύο εἴδη διαιρέσεως συνδέονται μὲ τὴν ἰδίαν σχέσιν $\Delta = \delta\pi + \upsilon$, β) Ἂν εἰς τὴν διαίρεσιν **μερισμοῦ** ὁ διαιρέτης γίνῃ πηλίκον καὶ τὸ πηλίκον γίνῃ διαιρέτης, τότε ἡ διαίρεσις γίνεται διαίρεσις **μετρήσεως**· καὶ ἀντιστρόφως.

102. 4 Μποροῦμεν ἐπίσης νὰ βγάλωμεν καὶ τοὺς ἑξῆς δύο κανόνες :

1) **Εἰς τὴν διαίρεσιν μερισμοῦ μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων** (τὰ 20 m) **καὶ αἱ πολλαὶ μονάδες** (τὰ 6 ἄτομα) **καὶ ζητοῦμεν νὰ βροῦμε τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος** (1 ἄτομον πέρνει 3 m).

2) **Εἰς τὴν διαίρεσιν μετρήσεως μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων** (τὰ 20 m) **καὶ ἡ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος** (τὰ 3 m) **καὶ ζητοῦμεν νὰ βροῦμε τὰς πολλὰς μονάδας** (τὰ 6 ἄτομα).

Ἕνα πρακτικὸν γνώρισμα διὰ νὰ ξεχωρίζωμεν τὰ δύο εἴδη τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ ἑξῆς :

Διαιρετέος — Διαιρέτης **ἑτεροειδεῖς** = διαίρεσις **μερισμοῦ**
Διαιρετέος — Διαιρέτης **ὁμοειδεῖς** = διαίρεσις **μετρήσεως**

Ἀσκήσεις

(Νὰ βρῆτε τὸ εἶδος κάθε διαιρέσεως ποὺ θὰ κάνετε κατὰ τὴν λύσιν τῶν παρακάτω προβλημάτων).

283. Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε λάδι καὶ πλήρωσε 1035 δρχ. Ἂν ὅμως ἀγόραζε 5 κιλὰ περισσότερον λάδι θὰ πλήρωνε 1150 δρχ. πόσα κιλὰ λάδι ἀγόρασε ;

284. Ἕνα τόπι ὕφασμα κοστίζει εἰς τὸν ἔμπορον 8750 δρχ. Τὸ πούλησε 9500 δρχ. μὲ κέρδος 15 δρχ. στὸ μέτρο. Πόσα μέτρα ἦτο τὸ τόπι ; Καὶ πόσας δρχ. ἀγόρασε τὸ m ;

285. Τὸ m ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 85 δρχ. Πόσα m θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 2720 δρχ. ; Καὶ πόσας δρχ. πρέπει νὰ πωλήσωμεν τὸ m ὥστε, ἀφοῦ κρατήσωμεν 4 m διὰ ἕνα φόρεμα, νὰ ἔχωμεν καὶ κέρδος 80 δρχ. ;

286. Μὲ 3300 δρχ. ἀγοράζομεν ὕφασμα διὰ 5 φορέματα τῶν 5 m καθένα. Ἂν τὸ ὕφασμα ἦτο ἀκριβώτερον κατὰ 33 δρχ. τὸ m., πόσα φορέματα τῶν 5 m καθένα θὰ ἐκάναμε ;

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως

103. 1 **I.** Θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον $12 \times 15 \times 32$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 8. Ἐπειδὴ εἶναι $32 = 4 \times 8$, διὰ τοῦτο (§ 82.4) βρίσκομεν :

$$(12 \times 15 \times 32) = 12 \times 15 \times 4 \times 8 = (12 \times 15 \times 4) \times 8$$

Ἄρα (§ 99.2) $\quad (12 \times 15 \times 32) : 8 = 12 \times 15 \times 4$

γενικὰ δὲ $\quad \boxed{\alpha\beta\gamma : \delta = \alpha \cdot \beta \cdot (\gamma : \delta)}$

ἔνθα $\gamma : \delta$ εἶναι τελεία διαίρεσις*. Ὥστε :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ.

103. 2 **Παρατήρησις I.** Μία συνέπεια τῆς παραπάνω ἰδιότητος εἶναι ἡ ἑξῆς :

$\boxed{\alpha\beta\gamma : \gamma = \alpha\beta}$ $\quad$ διότι εἶναι $\gamma : \gamma = 1$ ἤτοι

(*) Εἰς τὰ κλάσματα θὰ ἰδοῦμε ὅτι ἂν ἡ διαίρεσις $\gamma : \delta$ δὲν εἶναι τελεία, τότε γράφεται $\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀληθεύουν καὶ ὅταν ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι τελεία.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα γινόμενον μὲ ἕνα παράγοντά του ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα αὐτόν. Π.χ. $6\beta\lambda : 6 = \beta\lambda$.

103. 3 Παρατήρησις ΙΙ. Ἄλλη συνέπεια τῆς παραπάνω ἰδιότητος εἶναι ἡ ἑξῆς: Γνωρίζομεν (§ 87.1) ὅτι κάθε πολλαπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ λ γράφεται νλ. Ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\nu\lambda : \lambda = \nu \qquad \text{δηλαδὴ}$$

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖ ἀκριβῶς κάθε πολλαπλάσιόν του

π.χ. ὁ ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ πολλαπλάσιόν του 60. Διότι εἶναι $60 = 5 \cdot 12$ καὶ ἄρα $60 : 5 = 12$

103. 4 Παρατήρησις ΙΙΙ. Ἄλλη συνέπεια τῆς παραπάνω ἰδιότητος εἶναι ἡ ἑξῆς: Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς δ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν α καὶ δίνει πηλίκον π, εἶναι δηλαδὴ

$$\alpha = \delta\pi$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ν, βρίσκομεν:

$$\nu\alpha = \nu\delta\pi \quad \text{ἢ} \quad \nu\alpha = \delta \cdot (\nu\pi) \implies \nu\alpha : \delta = \nu\pi. \quad \text{Ὥστε:}$$

Ἂν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα ἄλλον, τότε θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς καὶ κάθε πολλαπλάσιον αὐτοῦ· π.χ. ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 12 ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 12ν ποὺ εἶναι ὁποιονδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ 12.

104. Ι. Θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα $20 + 35 + 45$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5. Ἀλλὰ (§ 83.2) παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 5 εἶναι κοινὸς παράγων τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ εἶναι δηλαδή:

$$20 + 35 + 45 = 5 \cdot (4 + 7 + 9)$$

Ἀλλὰ τότε (§ 99.2) ἔχομεν τὴν ἑξῆς διαίρεσιν

$$(20 + 35 + 45) : 5 = 4 + 7 + 9$$

εἶναι δὲ $20 : 5 = 4$, $35 : 5 = 7$, $45 : 5 = 9$. Ὥστε μποροῦμε νὰ γράψωμεν:

$$(20 + 35 + 45) : 5 = 20 : 5 + 35 : 5 + 45 : 5 = 4 + 7 + 9 = 20.$$

Γενικὰ δὲ $\boxed{(\alpha + \beta + \gamma) : \lambda = \alpha : \lambda + \beta : \lambda + \gamma : \lambda}$

Ὥστε : **Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἄθροισμα μὲ ἕνα ἀριθμὸν διαιροῦμεν κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος μὲ τὸν ἀριθμὸν καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα ποὺ βρίσκομεν.**

105. II. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον σκεπτόμεθα καὶ ὅταν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $(48-30):6$ ἤτοι

$$(48-30):6=48:6-30:6=8-5=3$$

γενικὰ δὲ $\quad (\alpha-\beta):\lambda=\alpha:\lambda-\beta:\lambda \qquad \alpha>\beta$ Ὥστε

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν μίαν διαφορὰν μὲ ἕνα ἀριθμὸν διαιροῦμεν καὶ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τῆς διαφορᾶς μὲ τὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον πηλίκον ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον.

106. III. Ἂς πάρωμεν τὴν διαίρεσιν $22:5$. Βρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ὥστε θὰ εἶναι :

$$22=5\cdot4+2$$

Μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς παραπάνω ἰσότητος ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν π.χ. τὸν 7, ὁπότε βρίσκομεν

$$22\cdot7=(5\cdot4+2)\cdot7=5\cdot4\cdot7+2\cdot7=(5\cdot7)\cdot4+2\cdot7$$

Ἄρα $\qquad 22\cdot7=(5\cdot7)\cdot4+2\cdot7$

Ἀλλὰ ἡ ἰσότης αὐτὴ μᾶς λέγει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $22\cdot7$ ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $5\cdot7$ δίνει πηλίκον 4 καὶ ἀφίνει ὑπόλοιπον $2\cdot7$. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, τότε τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον συνεπαγωγὴν

$$\Delta=\delta\pi+\upsilon \iff \Delta\lambda=(\delta\lambda)\pi+\upsilon\lambda$$

107. Ἂν θυμηθοῦμε τὴν ἔννοιαν τῆς διαγραφῆς εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν (§ 84.1) παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τὴ ἰσότητα

$$3\alpha=3\beta$$

βρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\quad \alpha=\beta$

Ἐπίσης μποροῦμε νὰ ἔχωμεν

$$15\alpha=25\beta \implies 3\alpha=5\beta \qquad \text{Ὥστε :}$$

Μπορούμε νὰ διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ὁπότε προκύπτει πάλιν ἰσότης.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ γράφεται γενικά :

$$\alpha = \beta \quad \wedge \quad \lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha : \lambda = \beta : \lambda$$

Εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτὴν στηρίζεται καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $\alpha x = \beta$. Πραγματικὰ ἔχομεν

$$7x = 35 \Longrightarrow x = 35 : 7, \quad \text{δηλαδὴ} \quad x = 5$$

Ἀσκήσεις:

287. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα τῶν παρακάτω διαιρέσεων

α) $4 \times 25 \times 7 : 5$ β) $42\,\alpha : \alpha$ γ) $35 \times 16 \times 9 : 35$
δ) $40\,\alpha\beta\gamma : 8$, ε) $3\,\alpha\lambda\nu : \nu$ στ) $(18\alpha + 36\beta + 90\gamma) : 18$
ζ) $(120 - 50) : 10$ η) $(8\alpha\nu + 40\alpha\nu + 72\alpha\nu + 16\alpha\nu) : 8\alpha\nu$

288. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ πάρῃ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν ὥστε νὰ εἶναι τέλειαι αἱ παρακάτω διαιρέσεις, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν ὅτι εἶναι $7 \leqslant \nu \leqslant 21$;

α) $25\alpha\nu : 7$ β) $(15\alpha\nu + 8\beta\nu + \lambda\nu) : 9$
γ) $(6\nu + 7\alpha\nu + 8\beta\nu + 9\gamma\nu) : 15$.

289. Εἰς μίαν διαίρεσιν βρίσκομεν ὑπόλοιπον 8. Τί πρέπει νὰ κάμωμεν ὥστε νὰ βροῦμε ὑπόλοιπον 24 ; Νὰ βρῆτε παραδείγματα τῆς διαιρέσεως αὐτῆς ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $30 < \Delta \leqslant 40$ καὶ $\delta = 4$.

290. Ἀπὸ τὴν διαίρεσιν $35 = 6 \times 5 + 5$ νὰ βρῆτε ἀμέσως τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω διαιρέσεις.

α) $70 : 12$ β) $140 : 24$ γ) $350 : 60$

291. Νὰ λύσετε τὰς παρακάτω ἐξισώσεις :

α) $26 = 3x + 2$, β) $47 = 5 \times 8 + x$, γ) $3x = 5 \times 9 + 3$

108. 1 Ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως : I. Μονοψήφιος ἢ διψήφιος διὰ μονοψηφίου : Ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν μονοψήφιον ἢ διψήφιον ἀριθμὸν διὰ μονοψηφίου χρησιμοποιοῦμεν ἀντιστρόφως τὸν πυθαγόρειον πίνακα (σελ. 123), ὅπως φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω παραδείγματα :

α) 36 : 4. Εἰς τὴν στήλην ποὺ ἔχει ἀπὸ πάνω τὴν διαιρέτην 4 ἀναζητοῦμεν τὸ 36 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 36 διασταυρώνεται μὲ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν ποὺ ἔχει ἐμπρὸς τὸ 9. Ἄρα βρίσκομεν $36 : 4 = 9$.

β) 45 : 7. Εἰς τὴν στήλην ποὺ ἔχει ἀπὸ πάνω τὸν διαιρέτην

7 ἀναζητοῦμεν τὸ 45 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $42<45<49$. Τὸ $42:7=6$. Ὥστε τὸ πηλίκον $45:7$ εἶναι 6 κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ἑπομένως βρίσκομεν $45:7=6$ πηλίκον καὶ 3 ὑπόλοιπον.

γ) $92:5$ Ἐπειδὴ εἰς τὴν στήλην τοῦ διαιρέτου 5 ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς εἶναι τὸ 50, διὰ τοῦτο γράφομεν $92=50+42$. Ὥστε ἡ διαίρεσις $92:5$ γίνεται (§ 104)

$$(50+42):5=50:5+42:5=10+8 \text{ καὶ ὑπόλοιπον } 2.$$

Ὥστε ἔχομεν $92:5=18$ πηλίκον, 2 ὑπόλοιπον

108. 2 **II. Πολυψήφιος διὰ μονοψηφίου.** Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $8974:6$. Ἐπειδὴ $8974=8\chi+9\varepsilon+7\delta+4\mu$ διὰ τοῦτο (§ 104) βρίσκομεν :

$$\begin{aligned} 8974:6 &= (8\chi+9\varepsilon+7\delta+4\mu):6= \\ &= 8\chi:6+9\varepsilon:6+7\delta:6+4\mu:6 \end{aligned}$$

Ἀλλὰ $8\chi:6=\mathbf{1\chi}$ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον $2\chi=20\varepsilon$. Αἱ 20ε μαζὺ μὲ τὰς 9ε κάνουν 29ε. Ὥστε $29\varepsilon:6=\mathbf{4\varepsilon}$ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον $5\varepsilon=50\delta$. Αἱ 50δ μαζὺ μὲ τὰς 7δ κάνουν 57δ. Ὥστε $57\delta:6=\mathbf{9\delta}$ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον $3\delta=30\mu$. Αἱ 30μ μαζὺ μὲ τὰς 4μ κάνουν 34μ. Ὥστε $34\mu:6=\mathbf{5\mu}$ καὶ ὑπόλοιπον $\mathbf{4\mu}$. Ὥστε βρίσκομεν

$$\text{πηλίκον} \quad 1\chi+4\varepsilon+9\delta+5\mu=1495$$

καὶ ὑπόλοιπον 4.

$$\begin{array}{r|l} 8974 & 6 \\ \cline{2-2} 29 & 1495 \\ 57 & \\ 34 & \\ 4 & \end{array}$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὅπως ἀπέναντι

108. 3 **III. Πολυψήφιος διὰ πολυψηφίου.** Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν $9476:37$. Χωρίζομεν τὸν διαιρετέον εἰς τὰς μονάδας διαφόρων τάξεών του ὡς ἑξῆς :

$$9476=94\varepsilon+7\delta+6\mu$$

γράφομεν 94ε καὶ ὄχι $9\chi+4\varepsilon$ διότι ὁ διαιρέτης 37 εἶναι διψήφιος. Ὥστε ἔχομεν τὴν διαίρεσιν (§ 104)

$$9476:37=(94\varepsilon+7\delta+6\mu):37=94\varepsilon:37+7\delta:37+6\mu:37$$

Ἀλλὰ εἶναι

$$94=74+20 \text{ διότι } 2\cdot 37=74<94 \text{ καὶ } 3\cdot 37=111>94.$$

Ὥστε εἶναι

$94\varepsilon : 37 = (74\varepsilon + 20\varepsilon) : 37 = \mathbf{2\varepsilon}$ καὶ ὑπόλοιπον 20ε
Αἱ $20\varepsilon = 200\delta$ μαζὺ μὲ τὰς 7δ κάνουν 207δ. Εἶναι δὲ $207 = 185 + 22$, διότι $5 \cdot 37 = 185 < 207$ καὶ $6 \cdot 37 = 222 > 207$. Ὥστε $207\delta : 37 = (185\delta + 22\delta) : 37 = \mathbf{5\delta}$ καὶ ὑπόλοιπον 22δ.
Αἱ $22\delta = 220\mu$ μαζὺ μὲ τὰς 6μ κάνουν 226μ εἶναι δὲ $226 = 222 + 4$ διότι $6 \cdot 37 = 222 < 226$.
Ὥστε $226\mu : 37 = (222\mu + 8\mu) : 37 = \mathbf{6\mu}$ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον **4μ**. Βρίσκομεν λοιπὸν

πηλίκον $2\varepsilon + 5\delta + 6\mu = 256$ καὶ ὑπόλοιπον 4.

$$\begin{array}{r|l} 9476 & 37 \\ \cline{2-2} 207 & 256 \\ 226 & \\ 4 & \end{array}$$

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὅπως ἀπέναντι.

109. Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως: Ἐπειδὴ εἶναι $\Delta = \delta\pi + \upsilon$ διὰ τοῦτο μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διὰ νὰ δοκιμάσωμεν ἂν ἡ πρᾶξις ἔγινε σωστή, πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ προσθέτομεν καὶ τὸ ὑπόλοιπον. Ἂν βροῦμε τὸν διαιρετέον, βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ διαίρεσις ἔγινε σωστή. Π.χ. ἡ δοκιμὴ τῆς παραπάνω διαιρέσεως γίνεται ἀπέναντι.

Δοκιμὴ

$$\begin{array}{rl} 256 & \\ 37 & \times \\ \hline 1792 & \\ 768 & \\ \hline 9472 & \\ 4 & + \\ \hline 9476 & \end{array}$$

Ἀσκήσεις

292. Νὰ γίνουν αἱ παρακάτω διαιρέσεις καὶ ἡ δοκιμὴ αὐτῶν.
α) 3879 : 45 β) 6025 : 125 γ) 50042 : 713

293. Νὰ βρῆτε ἕνα ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἑξαπλάσιον ἂν μεγαλώσῃ κατὰ 8 γίνεται 380.

294. Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι ὀκταπλάσιος ἑνὸς ἄλλου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἂν ἔχουν ἄθροισμα 153.

295. Ἕνας ἔμπορος ἑτοίμων ἐνδυμάτων ἀγόρασε 20 ἐνδυμασίες. Ἂν μὲ τὰ ἴδια χρήματα ἀγόραζε 4 ἐνδυμασίες λιγότερον τότε κάθε μία ἐνδυμασία θὰ ἐστοίχιζε 210 δραχμὲς περισσότερον. Πόσας δρχ. τοῦ ἐστοίχισε κάθε ἐνδυμασία καὶ πόσας δραχμὰς ἔδωσε;

296. Νὰ βρῆτε τρεῖς ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 138.

297. Νὰ βρῆτε τέσσαρας ἀκεραίους διαδοχικοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 134.

298. Ἕνας κτηνοτρόφος ἐπώλησεν ἀγελάδες πρὸς 6000 δρχ. κάθε μίαν καὶ τριπλάσια πρόβατα πρὸς 620 δραχμὰς κάθε ἕνα καὶ πῆρε 31440 δραχ. Πόσες ἀγελάδες καὶ πόσα πρόβατα ἐπώλησε;

299. Τέσσαρα ἄτομα ἐμοιράσθησαν 1030 δραχμὰς ὡς ἑξῆς : Ὁ δεύτερος πῆρε 10 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν πρῶτον, ὁ τρίτος πῆρε 5 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν δεύτερον καὶ ὁ τέταρτος πῆρε 5 δραχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν πρῶτον. Πόσας δρχ. πῆρε καθένας ;

Προβλήματα πρὸς λύσιν

300. Τὸ γινόμενον αβ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι 3060. Ἂν προσθέσωμεν 5 μονάδας εἰς τὸν ἕνα παράγοντα, τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνεται 3400. Νὰ βρῆτε τοὺς δύο ἀριθμοὺς α καὶ β.

301. Ἕνα αὐτοκίνητον τρέχει μὲ ταχύτητα 72 χιλιόμετρα τὴν ὥρα καὶ κάνει τὸ ταξείδι Ἀθηνῶν — Θεσσαλονίκης εἰς 7 ὥρας. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξήση τὴν ταχύτητά του ὥστε νὰ κάμη τὸ ταξείδι αὐτὸ εἰς 6 ὥρας ;

302. Ἀγοράζω λάδι καὶ πληρώνω 2760 δρχ. Ἂν ἀγόραζα 5 κιλὰ περισσότερον, θὰ πλήρωνα 2875 δρχ. Πόσα κιλὰ λάδι ἀγόρασα ;

303. Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται 25 εἰδικευμένοι ἐργάται μὲ ἡμερομίσθιον 150 δρχ., 48 ἀνειδίκευτοι ἐργάται μὲ ἡμερομίσθιον 95 δρχ. καὶ 32 ἐργάτριαι. Ὁ ἐργοστασιάρχης κάθε Σάββατον διαθέτει 67998 δρχ. διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν ἐργαζομένων. Εἰς τὸ ποσὸν αὐτὸ συμπεριλαμβάνει καὶ ἡμερήσια ἔξοδα θερμάνσεως κλπ. ἀπὸ 143 δρχ. Νὰ βρῆτε πόσον εἶναι τὸ ἡμερομίσθιον κάθε ἐργατρίας.

304. Δύο ἐργάται πέρνουν μαζὺ ἡμερομίσθιον 225 δρχ. καὶ ἀφοῦ ἐργάσθησαν μερικὲς ἡμέρες πῆραν μαζὺ 2925 δρχ. Ἂν ὁ πρῶτος ἐργάτης πῆρε 325 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν δεύτερον νὰ βρῆτε α) ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἐργάσθησαν ; καὶ β) τί ἡμερομίσθιον πέρνει καθένας ;

305. Ἕνα παιδὶ χωρίζει τοὺς βόλους του ἀνὰ 3, ἀνὰ 4 καὶ ἀνὰ 8 καὶ κάθε φορὰ παρατηρεῖ ὅτι τοῦ περισσεύουν 2 βόλοι. Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι οἱ βόλοι ποὺ ἔχει περιλαμβάνονται μεταξὺ 80 καὶ 100 νὰ βρῆτε πόσους βόλους ἔχει.

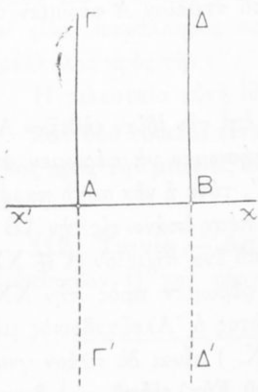
306. Οἱ οἰκοδόμοι πληρώνονται κάθε Σάββατον. Εἰς μίαν ἀνεγειρομένην οἰκοδομὴν ἐργάσθησαν τὰ ἑξῆς συνεργεῖα ἐργατῶν. α) Οἱ ἀμμοκονιασταί, 5 τεχνῖται καὶ 3 βοηθοὶ ἐπὶ 4 ἡμέρας, β) οἱ ἐλαιοχρωματισταί, 4 τεχνῖται καὶ 2 βοηθοὶ ὁλόκληρον τὴν ἑβδομάδα, γ) οἱ μωσαϊκοί, 3 τεχνῖται καὶ 2 βοηθοὶ ἐπὶ 3 ἡμέρας. Τὸ ἡμερομίσθιον κάθε τεχνίτου εἶναι 160 δρχ. καὶ κάθε βοηθοῦ εἶναι 90 δρχ. Πόσα χρήματα πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ μηχανικὸς τὸ Σάββατον διὰ νὰ κάμῃ τὰς πληρωμάς ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ'

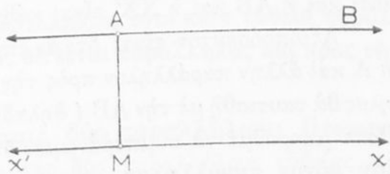
ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

110. Παράλληλοι εὐθεῖαι: Ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον πέρνομεν μίαν εὐθεῖαν XX' καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς. Φέρομεν τὴν ΑΓ ⊥ XX' καὶ τὴν ΒΔ ⊥ XX' (σχ. 97).

Εἶναι εὔκολον νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΑΓ' καὶ ΔΒΔ', ποὺ εἶναι καὶ αἱ δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν XX',



Σχ. 97.



Σχ. 98.

δὲν μποροῦν νὰ συναντηθοῦν, ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν.

Διότι ἂν εἰποῦμε ὅτι θὰ συναντηθοῦν π.χ. εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τότε θὰ εἶναι

$$ΟΓΑ \perp XX' \quad \text{καὶ} \quad ΟΔΒ \perp XX'$$

δηλαδὴ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο θὰ ἔχωμεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν XX'. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο δὲν μπορεῖ νὰ γίνῃ διότι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο **μίαν μόνον κάθετον** μποροῦμε νὰ φέρωμεν ἐπὶ τὴν XX'.

Διὰ τοῦτο αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι ΓΓ' καὶ ΔΔ' λέγονται **παράλληλοι** εὐθεῖαι. Ὥστε

Δύο εὐθεῖαι λέγονται παράλληλοι ὅταν βρίσκωνται εἰς τὸ

αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ δὲν συναντῶνται, ὁσονδήποτε καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν.

Τὸ σύμβολον τῆς παραλληλίας δύο εὐθειῶν εἶναι τὸ //. Γράφομεν δηλαδή :

$$ΓΓ' \ // \ ΔΔ'$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν καὶ τὸ συμπέρασμα ὅτι

Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλοι.

111. 1 **Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη :** Πέρνομεν τὴν εὐθεῖαν XX' καὶ τὸ σημεῖον A ποὺ εἶναι ἐκτὸς αὐτῆς. Θέλομεν δὲ νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ A τὴν παράλληλον πρὸς τὴν XX'. Ἕνας τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς :

Φέρομεν τὴν $AM \perp XX'$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τὴν $AB \perp AM$ (σχ. 98). Τότε θὰ εἶναι

$$AB \ // \ XX'$$

διότι καὶ ἡ AB καὶ ἡ XX' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν AM

Ἀξιοπρόσεκτον εἶναι ὅτι ἂν ἐπιχειρήσωμεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ A καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν XX', τότε ἡ νέα αὐτὴ παράλληλος θὰ ταυτισθῆ μὲ τὴν AB (δηλαδὴ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὴν AB). Ὥστε μποροῦμε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖον $A \notin XX'$ **μίαν μόνον παράλληλον** μποροῦμε νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν XX'. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο τὸ διετύπωσε πρῶτος ὁ Ἀλεξανδρινὸς μαθηματικὸς **Εὐκλείδης** (περὶ τὸ 300 π.X.) εἶναι δὲ πλέον γνωστὸν εἰς ὅλον τὸν κόσμον ὡς **αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη*** καὶ διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

(*) Τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη βρίσκεται εἰς τὰ Στοιχεῖα, δηλαδὴ εἰς τὸ βιβλίον ποὺ ἔγραψεν ὁ Εὐκλείδης περὶ τὸ 300 π.X. καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο εἰς τὴν περίφημην Βιβλιοθήκην τῆς Ἀλεξανδρείας. Τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδη ἦτο ἕνα σύγγραμμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἄντλησαν γνώσεις ὄχι μόνον οἱ Ἀλεξανδρινοὶ φιλόσοφοι, ἀλλὰ καὶ ὅλοι οἱ μετέπειτα μεγάλοι ἐπιστήμονες ποὺ ἀφιέρωσαν τὴν ζωήν των εἰς τὴν πρόοδον τῶν ἐπιστημῶν, τὸ δὲ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδη (δηλαδὴ ἡ ἁπλῆ αὐτὴ πρότασις ποὺ δὲν ἀποδεικνύεται) ἔδωσεν εἰς τοὺς μεταγενεστέρους μεγάλην ὤθησιν πρὸς ἁλματικὴν πρόοδον τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Φυσικῶν ἐπιστημῶν. Ἔτσι ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη, ἀπὸ τὸν Δημόκριτον καὶ ἀπὸ τοὺς ἄλλους σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος μπόρεσε ὁ ἀνθρώπινος νοῦς νὰ συλλάβη καὶ νὰ πραγματοποιήση τὰ θαύματα τῆς ἐξελίξεως τῆς σημερινῆς ἐπιστήμης (διάσπασις τοῦ ἀτόμου, πυρηνικὴ ἐνέργεια, ἠλεκτρονικὸς ἐγκέφαλος, ἐκτόξευσις δορυφόρων ἔξω ἀπὸ τὴν Γῆν, κλπ.).

Ἀπὸ ἕνα σημεῖον ποὺ βρίσκεται ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας, μίαν μόνον παράλληλον μποροῦμε νὰ φέρωμεν πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

111. 2 Εἰς τὴν παραλληλίαν τῶν εὐθειῶν ἀληθεύουν αἱ παρακάτω τρεῖς ἰδιότητες διὰ τὰς εὐθείας $\varepsilon // \varepsilon' // \varepsilon''$

I Ἀνακλαστικὴ $\varepsilon // \varepsilon$

δηλαδὴ μία εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτό της.

II Συμμετρικὴ $\varepsilon // \varepsilon' \iff \varepsilon' // \varepsilon$

δηλαδὴ ἐὰν μία εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε', τότε καὶ ἡ εὐθεῖα ε' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε.

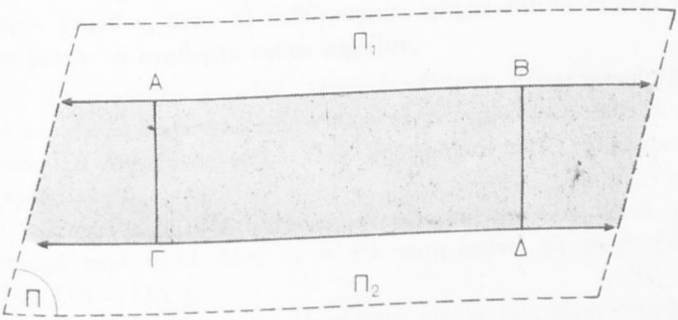
III Μεταβατικὴ $\varepsilon // \varepsilon' \wedge \varepsilon' // \varepsilon'' \implies \varepsilon // \varepsilon''$

δηλαδὴ ἐὰν ἡ εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε' καὶ ἡ ε' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε'', τότε καὶ ἡ ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε''.

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἰδιότης μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ἄλλην.

112. Ταινία.—Ἀπόστασις δύο παραλλήλων. Πέρνομεν τὸ ἐπίπεδον Π καὶ φέρνομεν τὰς δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ



Σχ. 99.

καὶ ΓΔ, δηλαδὴ ΑΒ//ΓΔ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π χωρίζεται εἰς τὰ ἑξῆς τρία μέρη. α) εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον Π_1 μὲ ἀκμὴν τὴν μίαν παράλληλον ΑΒ, β) εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον Π_2 μὲ ἀκμὴν τὴν ἄλλην παράλληλον ΓΔ καὶ γ) εἰς τὸ μέρος ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων. Τὸ μέρος τοῦτο τοῦ ἐπιπέδου λέγεται **ταινία** (λωρίδα), αἱ δὲ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ποὺ σχηματίζουν τὴν ταινίαν λέγονται **πλευραὶ** αὐτῆς.

Φέρνομεν τὴν ΑΓ ⊥ ΑΒ καὶ τὴν ΒΔ ⊥ ΑΒ. Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν τὰ ἑξῆς α) εἶναι ΑΓ // ΒΔ διότι καὶ αἱ δύο εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ, β) εἶναι ΑΓ ⊥ ΓΔ καὶ ΒΔ ⊥ ΓΔ καὶ γ) εἶναι ΑΓ = ΒΔ. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι ἂν φέρωμεν καθέτους μεταξὺ τῶν πλευρῶν μιᾶς ταινίας, τότε αἱ κάθετοι αὐταὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους αὐτὰς λέγεται **πλάτος** τῆς ταινίας ἢ **ἀπόστασις** τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ // ΓΔ.

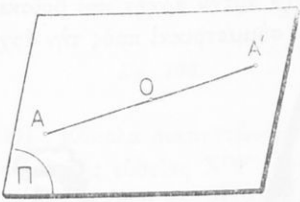
Ἀσκήσεις

307. Νὰ κατασκευάσετε μίαν ταινίαν πλάτους 5 cm., νὰ φέρετε τὸ πλάτος ΑΓ αὐτῆς καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς της (ποὺ περιέχει τὸ σημεῖον Γ) νὰ πάρετε τμῆμα ΓΔ = 12 cm. καὶ νὰ φέρετε τὴν ΑΔ. Μετρήσατε πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ΑΔ ; (βρίσκεται ἀκριβῶς)

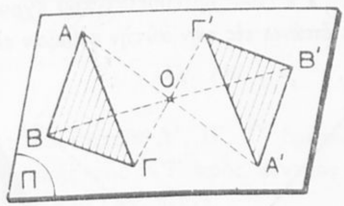
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

113. 1 Ι. Συμμετρία πρὸς κέντρον : Ἐπάνω εἰς ἕνα ἐπίπεδον πέρνομεν τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ΑΟ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς πρὸς τὸ μέρος



Σχ. 100.



Σχ. 101.

τοῦ Ο πέρνομεν τμῆμα ΟΑ′ = ΟΑ. Ἐπομένως τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΑ′. Τότε τὸ σημεῖον Α′ τὸ λέμε **συμμετρικὸν** τοῦ Α πρὸς κέντρον τὸ Ο. Ὥστε

Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον ἕνα σταθερὸν σημεῖον, ὅταν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ τὰ ἑνώνει ἔχει ὡς μέσον τὸ σταθερὸν τοῦτο σημεῖον.

Τὸ σταθερὸν σημεῖον λέγεται **κέντρον συμμετρίας.** Ἔτσι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον. Τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ μέσον τῆς χορδῆς αὐτοῦ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν περιστρέψωμεν τὴν ΟΑ′ κατὰ μισὴ στροφὴ περὶ τὸ Ο, τότε τὸ Α′ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ Α (ἀφοῦ εἶναι ΟΑ′= ΟΑ).

Εἶναι αὐτονόητον ὅτι τὸ κέντρον συμμετρίας εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ἑαυτοῦ του.

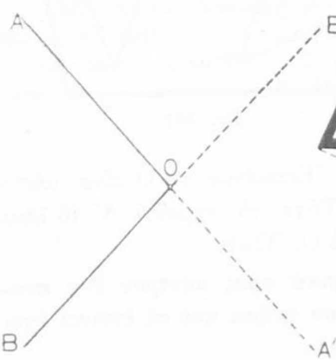
113. 2 Συμμετρικὰ σχήματα : Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς κέντρον ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο ὅπως π.χ. τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον Ο (σχ. 101). Ὅταν περιστρέψωμεν τὸ σχῆμα Α′Β′Γ′ κατὰ μισὴ στροφὴ περὶ τὸ Ο, τότε κάθε σημεῖον αὐτοῦ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ συμμετρικόν του, π.χ. τὸ Α′ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ Α, τὸ Β′ ἐπάνω εἰς τὸ Β κ.λ.π. Ὥστε τὰ δύο σχήματα θὰ ἐφαρμώσουν καὶ ἄρα θὰ εἶναι ἴσα. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς κέντρον εἶναι ἴσα.

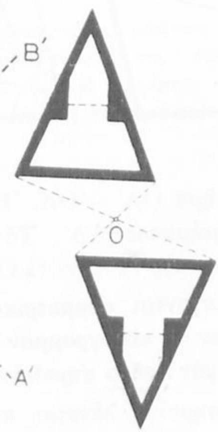
Ἡ συμμετρία πρὸς κέντρον λέγεται καὶ **κεντρικὴ συμμετρία.**

113. 3 Παραδείγματα συμμετριῶν πρὸς κέντρον.

1) Δύο ἡμιευθεῖαι ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ βρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν ἀρχὴν



Σχ. 102.



Σχ. 103.

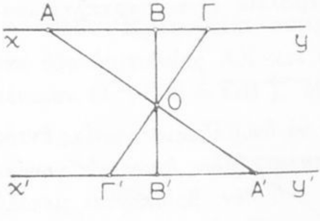
Σχ. 104

αὐτῶν, π.χ. αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΑ′ ἢ αἱ ΟΒ καὶ ΟΒ′. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΑ′ ποὺ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο αὐτῶν ἔχουν **ἀντίθετες φορές.**

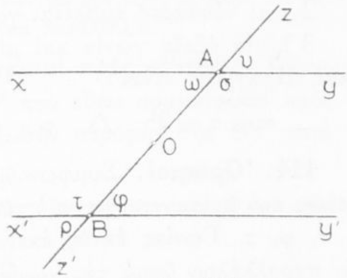
2) Εἰς τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἐπειδὴ κατὰ τὴν μισὴν στροφὴν περὶ τὸ Ο τῆς γωνίας $\widehat{A'OB'}$ (σχ. 102) ἡ μὲν ΟΑ′ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὴν ΟΑ, ἡ δὲ ΟΒ′ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὴν ΟΒ, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι $\widehat{A'OB'}$ καὶ ΑΟΒ εἶναι ἴσαι. Ὥστε

Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3) Πέρνομεν ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ βρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ A', B', Γ' αὐτῶν πρὸς κέντρον τὸ σημεῖον $O \notin X\Psi$, δηλαδὴ $OA' = OA$, $OB' = OB$ καὶ $O\Gamma' =$



Σχ. 105.



Σχ. 106.

$= O\Gamma$. Εὔκολα διαπιστώνομεν ὅτι τὰ σημεῖα A', B', Γ' βρίσκονται ἐπὶ τῆς εὐθείας $X'\Psi'$ συμμετρικῆς τῆς $X\Psi$ πρὸς κέντρον τὸ O, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν (σχ. 105).

Εἶναι ἐπίσης $AB = A'B'$ καὶ $AB // A'B'$ δηλ. $AB = // A'B'$. Ὥστε :

Δύο εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον εἶναι καὶ ἴσα καὶ παράλληλα.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. Ὅταν δηλαδὴ εἶναι $AB = // A'B'$ τότε τὰ τμήματα AB καὶ $A'B'$ ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον συμμετρίας.

4) Τὸ σημεῖον O εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $X\Psi$ καὶ $X'\Psi'$. Ἂν εἶναι $OB \perp X\Psi$, τότε θὰ εἶναι καὶ $OB' \perp X'\Psi'$ (§ 110). Ὥστε τὸ κέντρον συμμετρίας δύο παραλλήλων εὐθειῶν βρίσκεται μεταξὺ των (εἰς τὴν ταινίαν αὐτῶν) καὶ **ἰσαπέχει** ἀπὸ αὐτάς.

5) Πέρνομεν τὰς εὐθείας $X\Psi // X'\Psi'$ καὶ τὰς τέμνομεν μὲ τὴν ZZ' εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B (σχ. 106). Ἂν εἶναι O τὸ μέσον τῆς AB, τότε τὸ O εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν δύο παραλλήλων Καὶ ἂν περιστρέψωμεν τὴν $X'\Psi'$ κατὰ μισὴ στροφὴ περὶ τὸ κέντρον O, ἡ $X'\Psi'$ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν $X\Psi$ καὶ τὸ B ἐπάνω εἰς τὸ A. Ἔτσι ἡ γωνία $\widehat{OB\Psi'}$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{OAX}$ καὶ ἡ $\widehat{OBX'}$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὴν $\widehat{OA\Psi}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι : Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ὅταν τέμνωνται ἀπὸ μίαν ἄλλην, σχηματίζουν ὀκτὼ γωνίας, τέσσαρας ὀξείας καὶ τέσσαρας ἀμβλείας καὶ ὅτι

1) αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των

2) αἱ τέσσαρες ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των

3) μία ὀξεῖα γωνία καὶ μία ἀμβλεῖα εἶναι παραπληρωματικαί. Πράγματι εἶναι :

$$\omega + \sigma = 2^{L} \quad \wedge \quad \varphi = \omega \quad \Longrightarrow \quad \varphi + \sigma = 2^{L}$$

114. Ὁρισμοί. Συμφωνοῦμεν νὰ ὀνομάζωμεν γωνίας **ἐντὸς** ἐκείνας ποὺ βρίσκονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ὅπως τὰς γωνίας ω, σ, φ, τ. Γωνίας **ἐκτὸς** ἐκείνας ποὺ δὲν βρίσκονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ὅπως τὰς γωνίας υ, ρ. Γωνίας **ἐναλλὰξ** ἐκείνας ποὺ βρίσκονται ἀπὸ τὸ ἕνα καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος (ἑκατέρωθεν) τῆς τεμνούσης, ὅπως τὰς γωνίας ω καὶ φ ἢ σ καὶ τ, ἢ υ καὶ ρ. Γωνίας **ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** ἐκείνας ποὺ βρίσκονται πρὸς τὸ ἕνα μέρος τῆς τεμνούσης, ὅπως τὰς γωνίας σ, φ, υ. Ἀπὸ ὅλας αὐτὰς τὰς γωνίας πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἰδιαιτέρως τὰ ἑξῆς τρία ζεύγη γωνιῶν (σχ. 106).

1) Τὰς **ἐντὸς ἐναλλὰξ** γωνίας ω καὶ φ ἢ σ καὶ τ, εἶναι δὲ $\omega = \varphi$ καὶ $\sigma = \tau$.

2) Τὰς **ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** γωνίας φ καὶ υ, ἢ ω καὶ ρ κ.λ.π. εἶναι δὲ $\varphi = \upsilon$, $\omega = \rho$.

3) Τὰς **ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη** γωνίας φ καὶ σ ἢ ω καὶ τ, εἶναι δὲ $\varphi + \sigma = 2^{L}$ καὶ $\omega + \tau = 2^{L}$.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ ἑξῆς σπουδαῖον συμπέρασμα :

Ὅταν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται ἀπὸ μίαν ἄλλην, τότε σχηματίζουν :

1) Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας

2) Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας

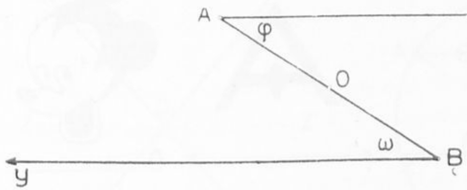
3) Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

Εὔκολα διαπιστώνομεν καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ἂν εἶναι δηλαδὴ $\omega = \varphi$ καὶ γίνη μισὴ στροφὴ περὶ τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ, τότε ἡ εὐθεῖα ΒΨ′ θὰ ἐφαρμόση ἐπάνω εἰς τὴν ΑΧ κ.λ.π. Ὥστε θὰ εἶναι ΒΨ′ // ΑΧ ἤτοι Χ′Ψ′ // ΧΨ.

Ὥστε τὸ **κριτήριον τῆς παραλληλίας** δύο εὐθειῶν εἶναι νὰ σχηματίζουν ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

Σημ. Αἱ παραπάνω ὀνομασίαι τῶν γωνιῶν εἶναι αἱ ἴδιαι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ αἱ δύο εὐθεῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι.

115. Ἡμιευθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς κέντρον: Πέρνομεν τὰς δύο ἡμιευθείας AX καὶ BΨ ποὺ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ κέντρον O (OA = OB). Μὲ μισὴν στροφὴν τῆς BΨ περὶ τὸ



Σχ. 107.

κέντρον O παρατηροῦμεν ὅτι ἡ BΨ ταυτίζεται (συμπίπτει) μὲ τὴν AX. Ἑπομένως εἶναι γωνία $\omega = \varphi$ καὶ ἄρα BΨ // AX. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἡμιευθεῖαι AX καὶ BΨ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς (σχ. 107). Ὥστε :

Δύο ἡμιευθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς κέντρον εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς.

Ἀσκήσεις

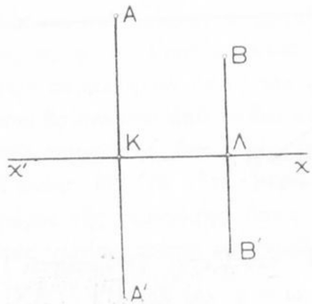
308. Νὰ βρῆτε παραδείγματα συμμετρίας πρὸς κέντρον.

309. Νὰ σύρετε δύο εὐθείας XX′ καὶ ΨΨ′ καὶ νὰ φέρετε μίαν τέμνουσαν ZZ′ νὰ σημειώσετε δὲ μὲ A τὴν ZZ′ ∩ XX′ καὶ μὲ B τὴν ZZ′ ∩ ΨΨ′. Νὰ ὀνομάσετε ὅλα τὰ ζεύγη τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται (δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἶναι XX′ // ΨΨ′).

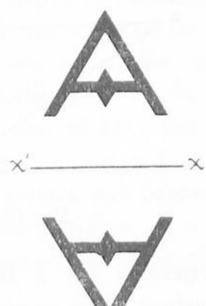
310. Νὰ πάρετε τὰς εὐθείας (Δ) // (Δ′). Ἡ εὐθεῖα (Z) εἶναι τέτοια ὥστε A = (Z) ∩ (Δ) καὶ B = (Z) ∩ (Δ′). Νὰ διαπιστώσετε ὅτι εἶναι α) αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι (διατί ;) β) αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι παραπληρωματικαὶ (διατί ;)

311. Δίδονται αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (Δ) // (Δ′). Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας ποὺ τέμνουν τὴν εὐθεῖαν (Δ) εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τὴν εὐθεῖαν (Δ′) εἰς τὰ σημεῖα A′ καὶ B′. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ σχήματα MAB καὶ MA′B′ ἔχουν κέντρον συμμετρίας τὸ M καὶ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

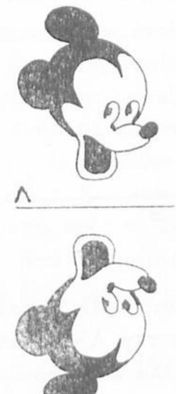
116. ΙΙ. Συμμετρία πρὸς ἄξονα : Πέρνομεν μίαν εὐθεῖαν - ἄξονα ΧΧ′ καὶ ἕνα σημεῖον $Α \notin ΧΧ'$. Φέρομεν τὴν $ΑΚ \perp ΧΧ'$ καὶ λαμβάνομεν $ΚΑ' = ΚΑ$. Τότε ὁ ἄξων ΧΧ′ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΑ′. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι τὸ σημεῖον Α′ εἶναι **συμμετρικὸν** τοῦ Α πρὸς **ἄξονα** τὸν ΧΧ′. Ὥστε



Σχ. 108.



Σχ. 109.



Σχ. 110.

Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα ὅταν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ τὰ ἑνώνει τέμνεται δίχα* καὶ καθέτως ἀπὸ τὸν ἄξονα.

Ὁ ἄξων ΧΧ′ λέγεται **ἄξων συμμετρίας** τῶν δύο σημείων Α καὶ Α′.

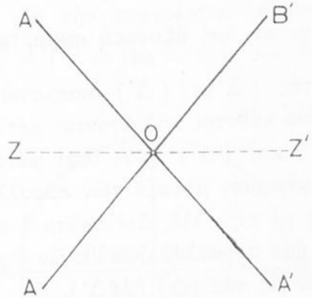
Δύο σχήματα λέγονται **συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα** ὅταν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον. Ὅταν διπλώσωμεν τὸ χαρτὶ περὶ τὸν ἄξονα ΧΧ′, τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ Α′ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Α (ἀφοῦ εἶναι $ΚΑ' = ΚΑ$ καὶ $ΑΑ' \perp ΧΨ'$). Ἐπίσης ὅλα τὰ σημεῖα τῶν σχημάτων 109 καὶ 110 θὰ πέσουν ἐπάνω εἰς τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν καὶ ἄρα συμπεραίνομεν ὅτι :

Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα εἶναι ἴσα.

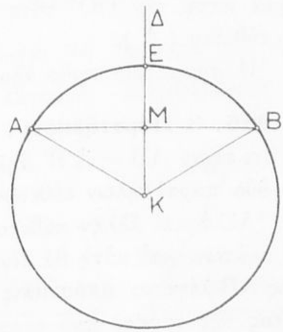
(*) Δίχα = εἰς δύο ἴσα μέρη.

116. 2 Ὥστε : 1) Τὰ δύο ἴσα μέρη εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται μία γωνία ἀπὸ τὴν διχοτόμον αὐτῆς εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας (ὅπως φαίνεται ἂν ἀναδιπλώσωμεν τὸ σχῆμα 112 κατὰ τὴν διχοτόμον ΚΔ τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{AKB}}$).

2) Ἡ διχοτόμος ΟΖ τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{AO\Delta}}$ ἂν προεκταθῇ πρὸς



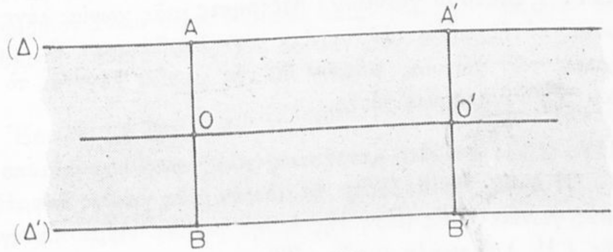
Σχ. 111.



Σχ. 112.

τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο, δηλαδὴ ἡ ΟΖ′ γίνεται διχοτόμος τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας $\mathrm{A'\widehat{O}B'}$. Ὥστε ἡ διχοτόμος ΖΟΖ′ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{AO\Delta}}$ καὶ $\mathrm{A'\widehat{O}B'}$.

3) Πέρνομεν μίαν ταινίαν, δηλαδὴ τὸ μέρος ποὺ περιλαμ-



Σχ. 113.

βάνεται μεταξὺ τῶν (Δ)//(Δ′). Φέρομεν τὴν ΑΒ ⊥ (Δ). Τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν (Δ)//(Δ′). Ἂν φέρωμεν καὶ τὴν Α′Β′ ⊥ (Δ) τότε καὶ τὸ μέσον Ο′ αὐτῆς εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (Δ) καὶ (Δ′).

Ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον τῆς ΟΟ′ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῶν. Ὥστε δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ἔχουν πολλὰ κέντρα συμμετρίας, τὰ ὁποῖα βρίσκονται ἐπάνω εἰς τὴν **μεσοπαράλληλον** ΟΟ′ αὐτῶν, δηλαδὴ εἰς τὴν παράλληλον ποὺ ἰσαπέχει ἀπὸ αὐτάς. Ἡ μεσοπαράλληλος ΟΟ′ εἶναι ὁ ἄξων συμμετρίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν (Δ) καὶ (Δ′). Διότι ἂν ἀναδιπλώσωμεν τὸ σχῆμα κατὰ τὴν ΟΟ′ τότε ἡ εὐθεῖα (Δ′) θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν (Δ).

Ἡ συμμετρία πρὸς ἄξονα λέγεται καὶ **ἀξονικὴ συμμετρία.**

116. 3 **Παρατήρησις :** Εἰς τὰς (Δ)//(Δ′) διαπιστώνομεν ὅτι εἶναι ΑΒ = Α′Β′ δηλαδὴ δύο κάθετοι ποὺ ἄγονται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν (Δ) καὶ (Δ′) εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἀλλὰ καὶ ἄλλην κάθετον ἂν φέρωμεν μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων, καὶ αὐτὴ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ. Διὰ τοῦτο ἡ κάθετος ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις** τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἢ καὶ **πλάτος** τῆς ταινίας ποὺ περατοῦται εἰς τὰς (Δ) //(Δ′).

Ἀσκήσεις

312. Νὰ βρῆτε παραδείγματα συμμετρικῶν σχημάτων πρὸς ἄξονα συμμετρίας.

ΟΙ ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

117. 1 **Μέτρον γωνιῶν : Μέτρησις** μιᾶς γωνίας λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτῆς πρὸς τὴν γωνίαν ποὺ λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν, **μέτρον** δὲ τῆς γωνίας λέγεται τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς.

117. 2 Ὡς μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται α) Ἡ **ὀρθὴ γωνία.** Τότε τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ἐκφράζεται εἰς ὀρθὰς γωνίας ἢ εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς γωνίας. Λέμε π.χ. γωνία 1 ὀρθῆς (1^{L}) ἢ γωνία μισῆς ὀρθῆς κ.λ.π.

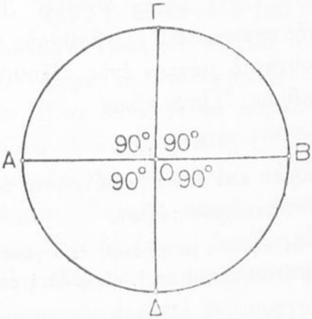
β) **Ἡ μοῖρα.** Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου Ο εἰς 360 ἴσα μέρη καὶ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὸ ὀνομάζομεν **τόξον μιᾶς μοίρας.** Ἂν ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας μὲ τὸ κέντρον, δημιουργεῖται μία ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης **γωνία μιᾶς μοίρας.** Τὰς μοίρας τὰς σημειώνομεν μὲ ἕνα μηδὲν ποὺ τὸ γράφομεν μικρότερο, δεξιὰ καὶ ἄνω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν. Π.χ.

γράφομεν 360^0 καὶ διαβάζομεν 360 μοῖραι

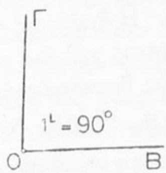
Ὅταν φέρωμεν τὰς δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ τότε δημιουργοῦνται περὶ τὸ κέντρον Ο τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι

$$\widehat{\mathrm{A O \Gamma}} = \widehat{\mathrm{\Gamma O B}} = \widehat{\mathrm{B O \Delta}} = \widehat{\mathrm{\Delta O A}} = 1^{L}$$

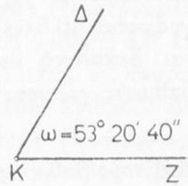
εἰς δὲ τὴν περιφέρειαν δημιουργοῦνται τὰ τέσσαρα ἴσα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = \overset{\frown}{\mathrm{\Gamma B}} = \overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}} = \overset{\frown}{\mathrm{\Delta A}}$, τὰ ὁποῖα λέγονται **τεταρτημόρια** καὶ



Σχ. 114.



Σχ. 115.



Σχ. 116.

ἑπομένως καθένα εἶναι $360^0 : 4 = 90^0$. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε τεταρτημόριον ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ὀρθὴν γωνίαν, βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι

$$\mathbf{1^{L} = 90^0}$$

Ἐπειδὴ (§ 72) κάθε ἐπίκεντρος γωνία βαίνει εἰς ἕνα τόξον καὶ ἀντιστρόφως σὲ κάθε τόξον ἀντιστοιχεῖ μία ἐπίκεντρος γωνία, διὰ τοῦτο τὰς μοίρας τὰς χρησιμοποιοῦμεν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀντιστοίχων τόξων καὶ διὰ τοῦτο

Κάθε γωνία εἶναι τόσων μοιρῶν, ὅσων μοιρῶν εἶναι καὶ τὸ τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει, καὶ ἀντιστρόφως.

Κάθε μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 **πρῶτα λεπτὰ** (60′) καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 **δευτερόλεπτα** (60″)

Ὥστε :

$$1 \text{ περιφέρεια} = 360^0$$
$$1^0 = 60'$$
$$1' = 60''$$

Λέμε π.χ. γωνία $\widehat{ZK\Delta} = \omega = 53^0\ 20'\ 40''$.

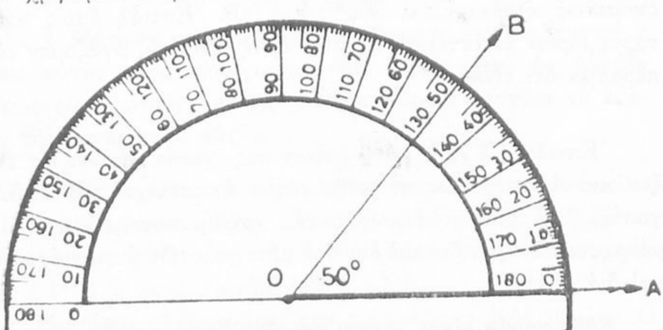
γ) Ὁ **βαθμός :** Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 400 ἴσα μέρη καὶ κάθε ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὸ ὀνομάζομεν **τόξον ἑνὸς βαθμοῦ.** Τοὺς βαθμοὺς τοὺς σημειώνομεν μὲ ἕνα β μικρότερον δεξιὰ καὶ ἄνω. Γράφομεν π.χ. 400^β καὶ διαβάζομεν 400 βαθμοί. Κάθε βαθμὸς ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 πρῶτα λεπτὰ καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 δετευρόλεπτα. Ὥστε τόξον $46^\beta\ 68'\ 36''$ γράφεται $46,^\beta 6836$. Ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς βαθμοὺς εἶναι **δεκαδικὴ διαίρεσις** καὶ διὰ τοῦτο τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου εἰς βαθμοὺς γράφεται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός. Ὥστε εἶναι

$$360^0 = 400^\beta \ \wedge \ 90^0 = 100^\beta$$

Καὶ τοὺς βαθμοὺς τοὺς χρησιμοποιοῦμεν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν γωνιῶν καὶ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀντιστοίχων τόξων.

Σημ. Ἀργότερα θὰ μάθωμεν ὅτι ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸ **ἀκτίνιον** (radian), εἶναι δὲ 1 rad. $= 57^0\ 17'\ 44''$.

118. Μοιρογνωμόνιον : Διὰ νὰ μετρήσωμεν πρακτικὰ μίαν γωνίαν χρησιμοποιοῦμεν τὸ **μοιρογνωμόνιον.** Τὸ μοιρογνωμό-



Σχ. 117.

νιον εἶναι ἕνα ὄργανον ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἀπὸ μίαν διάμετρόν της. Τὸ μέσον Ο τῆς διαμέτρου εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐπάνω εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἶναι χαραγμένες 180 ἴσαι ὑποδιαιρέσεις ποὺ φανερώνουν τὰς μοίρας ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0 (σχ. 117).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας $\widehat{AOB}$, θέτομεν τὸ μοιρογνωμόνιον ἐπάνω εἰς τὴν γωνίαν ἔτσι ὥστε τὸ Ο τοῦ μοιρογνωμονίου νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ τὸ ἕνα μέρος τῆς διαμέτρου τοῦ μοιρογνωμονίου νὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν πλευρὰν ΟΑ τῆς γωνίας. Τότε παρατηροῦμεν εἰς ποίαν ὑποδιαίρεσιν πέφτει ἡ ἄλλη πλευρὰ ΟΒ τῆς γωνίας. Ἔτσι παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ ποὺ μετροῦμεν εἶναι 50^0.

119. 1 Ἡ ἔννοια τοῦ συμμιγοῦς ἀριθμοῦ : Τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ω εἶναι $42^0\ 15'\ 20''$. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $42^0\ 15'\ 20''$ παρὰ τὸ ὅτι ἐκφράζει τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας, ἐν τούτοις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ ὡς ἕνας ἑνιαῖος ἀριθμός. Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς $42^0\ 15'\ 20''$ λέγεται **συμμιγὴς** (ἀνάμικτος) ἀριθμός. Ὁ συμμιγὴς αὐτὸς ἀριθμὸς περιέχει **μονάδας τριῶν τάξεων,** δηλαδὴ **μοίρας, πρῶτα λεπτὰ** καὶ **δεύτερα λεπτά,** παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας δὲν εἶναι δεκαδικαὶ (δηλαδὴ μία μοῖρα δὲν διαιρεῖται εἰς 100′ ἀλλὰ εἰς 60′). Ὥστε Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ δημιουργοῦνται εἰς μεγέθη, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.

119. 2 Ἄλλα παραδείγματα συμμιγῶν ἀριθμῶν εἶναι :

α) **Ἡ ὥρα** (h) διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου. Ἡ ὥρα ὑποδιαιρεῖται εἰς πρῶτα λεπτὰ (min) καὶ εἰς δεύτερα λεπτὰ (sec) ὡς ἑξῆς :

1 h = 60 min (πρῶτα λεπτά), 1 min = 60 sec (δεύτερα λεπτά)

Λέμε π.χ. ὅτι ξεκινᾶμε ἀπὸ τὴν Ἀθήνα καὶ φθάνομεν εἰς τὴν Κόρινθον μετὰ 1 h 25 min 30 sec

β) **Ἡ ἀγγλικὴ λίρα** (£) μονὰς νομίσματος τῆς Ἀγγλίας. Ἡ £ ὑποδιαιρεῖται ὡς ἑξῆς :

1 £ = 20 s (σελήνια)
1 s = 12 d (πέννες)
1 d = 4 f (φαρδίνια)

Λέμε π.χ. ὅτι ἕνας ἔμπορος ἐξαργύρωσε μίαν ἐπιταγὴν 5 £ 16 s 7 d ἢ ἁπλούστερον £ 5 — 16 — 7.

γ) Ἡ ὑάρδα (ἀγγλικὴ μονὰς μήκους) (ἴδε § 27)

1 yd = 3 f, 1 f = 12 in, 1 yd = 36 in.

Πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν

120. 1 Α′ Πρόσθεσις: Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν $\widehat{A} = 75^0\ 16'\ 46''$, $\widehat{B} = 42^0\ 57'\ 35''$ καὶ $\widehat{\Gamma} = 61^0\ 45'\ 39''$. Βρίσκομεν

$$\begin{array}{l} \widehat{A} = 75^0\ 16'\ 46'' \\ \widehat{B} = 42^0\ 57'\ 35'' \quad + \\ \widehat{\Gamma} = 61^0\ 45'\ 39'' \\ \hline \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 178^0\ 118'\ 120'' \quad \text{ἢ} \\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0 \end{array}$$

διότι τὰ 120″ κάνουν 2′ καὶ τὰ 118′+ 2′ = 120′ κάνουν 2⁰. Ὥστε Διὰ νὰ προσθέσωμεν συμμιγεῖς ἀριθμοὺς θέτομεν τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον ἔτσι ὥστε αἱ μονάδες κάθε τάξεως νὰ βρίσκωνται κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἰδίας τάξεως. Προσθέτομεν κατόπιν χωριστὰ τὰς μονάδας κάθε τάξεως καὶ τέλος τακτοποιοῦμεν τὸ ἄθροισμα.

120. 2 Β′ Ἀφαίρεσις: Ἔχομεν £ 25 — 13 — 4 καὶ ἐξοδεύομεν £ 17 — 5 — 7. Πόσα χρήματα μᾶς ἔμειναν; Βρίσκομεν

$$\begin{array}{r} \pounds\ 25\text{–}13\text{–}\overset{16}{\overbrace{4}} \quad - \\ \pounds\ 17\text{–}\ 5\text{–}7 \\ \hline 8\text{–}\ 7\text{–}9 \end{array}$$

Ὥστε μᾶς ἔμειναν £ 8 — 7 — 9. Ἐπειδὴ αἱ 7 d δὲν βγαίνουν ἀπὸ τὰς 4 d, πέρνομεν 1 s τὸ ὁποῖον κάνει 12 d καὶ 4 d ποὺ ἔχομεν = 16 d καὶ λέμε 16 d — 7 d = 9 d. Τὸ 1 s ποὺ πήραμε τὸ προσθέτομεν ὡς κρατούμενον εἰς τὰ 5 s τοῦ ἀφαιρετέου.

120. 3 Γ. Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον: Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἀγοράζομεν 5 m ἀγγλικοῦ ὑφάσματος πρὸς £ 1 — 13 — 8 τὸ μέτρον. Πόσα χρήματα θὰ δώσωμεν ; Βρίσκομεν

$$\begin{array}{l} £\ 1 - 13 - 8 \\ \qquad\qquad 5 \times \\ \hline 5\,£\ \ 65\,s\ \ 40\,d \\ \ \ {\scriptstyle 3}\qquad\ \ {\scriptstyle 3} \\ \hline 8\,£\ \ \ 8\,s\ \ 4\,d \end{array}$$

Ὥστε θὰ δώσωμεν £ 8 — 8 — 4. Καὶ ἐδῶ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου £ 5 — 65 — 40 κάνομεν τὴν τακτοποίησιν αὐτοῦ, δηλαδὴ αἱ 40 d περιέχουν 3 s καὶ περισσεύουν 4 d. Τὰ 65 + 3 = = 68 s κάνουν 3 £ καὶ περισσεύουν 8 s καὶ τέλος βρίσκομεν 5 + 3 = 8 £.

120. 4 Δ. Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου: Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἕνας δρομεὺς κάνει 8 φορὲς τὸν γύρον τοῦ σταδίου σὲ 1 h 1 min 12 sec, τρέχει δὲ μὲ σταθερὴ ταχύτητα. Σὲ πόσον χρόνον κάνει μίαν φορὰν τὸν γύρον τοῦ σταδίου ; Βρίσκομεν

$$\begin{array}{lll|l} 1\,h & 1\,min & 12\,sec & 8 \\ \cline{4-4} & 60 & 300 & 0\,h\ \ 7\,min\ \ 39\,sec \\ \cline{2-3} & 61\,min & 312\,sec & \\ & 5 & 72 & \\ & & 0 & \end{array}$$

Ὥστε τὸν ἕνα γύρον τὸν κάνει σὲ 7 min 39 sec. Ἐπειδὴ ἡ 1 h δὲν διαιρεῖται διὰ 8, βρίσκομεν 0 h καὶ τὴν 1 h τὴν κάνομεν 60 min + 1 min = 61 min. Ἐπειδὴ τὰ ὑπόλοιπα 5 min δὲν διαιροῦνται διὰ 8 τὰ κάνομεν 300 sec + 12 sec = 312 sec.

120. 5 Ἐφαρμογαὶ τῶν συμμιγῶν: Α) Δύο ὀξεῖαι γωνίαι ω καὶ φ εἶναι συμπληρωματικαί. Ἂν εἶναι $\omega = 35^0\ 56'\ 42''$ πόση εἶναι ἡ γωνία φ ; Βρίσκομεν

$$\omega + \varphi = 90^0 \qquad \begin{array}{r} 90^0 = 89^0\ \ 59'\ \ 60'' \ - \\ \omega = 35^0\ \ 56'\ \ 42'' \quad \\ \hline \varphi = 54^0\ \ \ 3'\ \ 18'' \quad \end{array}$$

Ἄρα βρίσκομεν ὅτι εἶναι $\varphi = 54^0\ 3'\ 18''$.

Β) Δύο γωνίαι ω καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἂν εἶναι $\omega = 35^0\ 56'\ 42''$ πόση εἶναι ἡ γωνία φ ; βρίσκομεν

$$\omega + \varphi = 180^0 \qquad \begin{array}{rl} 180^0 = & 179^0\ 59'\ 60'' \\ \omega = & 35^0\ 56'\ 42'' \\ \hline \varphi = & 144^0\ 3'\ 18'' \end{array}$$

Ὥστε βρίσκομεν ὅτι εἶναι $\varphi = 144^0\ 3'\ 18''$.

Γ) Ἂν εἰς τὸ σχῆμα 106 τῆς σελίδος 173 εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία $\varphi = 39^0\ 16'\ 40''$, τότε μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ μέτρον καὶ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν. Πραγματικὰ εἶναι

$\varphi = \omega = \upsilon = \rho = 39^0\ 16'\ 40''$

$$\varphi + \sigma = 2^L = 180^0 \text{ Ἄρα } \begin{array}{rl} 180^0 = & 179^0\ 59'\ 60'' \\ \varphi = & 39^0\ 16'\ 40'' \\ \hline \sigma = & 140^0\ 43'\ 20'' \end{array}$$

καὶ ἄρα θὰ εἶναι $\sigma = \tau = A = B = 140^0\ 43'\ 20''$

Ἀσκήσεις

313. Μία γωνία εἶναι $25^0\ 36'\ 42''$. Πόση εἶναι ἡ συμπληρωματική της ; καὶ πόση ἡ παραπληρωματική της ;

314. Ἐπάνω σὲ μία περιφέρεια πέρνομεν τὰ διαδοχικὰ τόξα $\widehat{AB} = 20^0\ 40'$, $\widehat{B\Gamma} = 32^0\ 15'$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 37^0\ 5'$, $\widehat{\Delta E} = \widehat{EZ} = 45^0$. Ἂν εἶναι Κ τὸ κέντρον νὰ βρῆτε τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας $\widehat{AK\Delta}$, $\widehat{AKE}$, $\widehat{AKZ}$. Τί γραμμὴ θὰ εἶναι ἡ ΑΚΖ καὶ διὰ τί ;

315. Πέρνομε τὴν εὐθεῖαν Χ'Χ καὶ τὸ σημεῖον $O \in X'X$ καὶ φέρνομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς Χ'Χ. Ἂν ὅλαι αἱ γωνίαι ποὺ σχηματίζονται εἶναι ἴσαι μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον κάθε μιᾶς.

316. Δύο εὐθεῖαι ΧΧ' καὶ ΨΨ' ἔχουν $O = XX' \cap \Psi\Psi'$. α) πόσαι γωνίαι σχηματίζονται ; β) Τί εἴδους γωνίαι εἶναι ἂν τὰς ἐξετάσωμεν ἀνὰ δύο ; γ) Ἂν ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μέτρον $73^0\ 52'\ 20''$ πόσον θὰ εἶναι τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας ;

317. Εἶναι $XX' // \Psi\Psi'$ καὶ ἡ ΑΒ τέμνει αὐτάς. Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας ποὺ σχηματίζονται ἔχῃ μέτρον $60^0\ 10'$ νὰ βρεθῇ τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας.

318. Πέρνομεν τὰς ἓξ ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ κατὰ κυκλικὴν σειρὰν ποὺ σχηματίζουν ἴσας διαδοχικὰς γωνίας. α) Νὰ βρῆτε τὸ μέτρον κάθε μιᾶς σχηματιζομένης γωνίας. β) Τί εἴδους γραμμὴν ἀποτελοῦν αἱ ἡμιευθεῖσαι ΟΑ καὶ ΟΔ ; αἱ ΟΒ καὶ ΟΕ ; αἱ ΟΓ καὶ ΟΖ ; γ)

Ποῖον εἶναι τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν $(\widehat{OA, OB})$ καὶ $(\widehat{O\Delta, OE})$;

319. Δίδονται αἱ δύο ἐφεξῆς γωνίαι $(OX, O\Psi) = 60^0$ καὶ $(O\Psi, OZ) = 45^0$. Φέρομεν τὰς ἡμιευθείας OX', $O\Psi'$, OZ' ἀντιθέτους πρὸς τὰς ἡμιευθείας OX, $O\Psi$, OZ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας ποὺ σχηματίζονται πέριξ τοῦ σημείου O.

320. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ποὺ ἔχει μῆκος 60 yd ἐπωλήθησαν α) 7 yd 1 f. 8 in, β) 12 yd 2 f. 10 in, γ) 16 yd 9 in, δ) 18 yd 2 f. 8 in. Πόσον ὕφασμα ἔμεινε;

321. Τὸ ταμεῖον ἑνὸς ἄγγλου ἐμπόρου παρουσίασε μίαν ἡμέραν τὴν ἑξῆς κίνησιν: εἴσπραξις £ 3–4–8, εἴσπραξις £ 12–15–6, πληρωμὴ £ 7–17–9, εἴσπραξις £ 15–18–11, πληρωμὴ £ 11–16–4. Πόσα χρήματα εἶχε τὸ ταμεῖον τὸ βράδυ τῆς ἡμέρας αὐτῆς;

322. Ἕνας συρμὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ σιδηροδρόμου Πειραιῶς—Ἀθηνῶν κάνει τὴν διαδρομὴν Πειραιῶς—Ἀθηνῶν—Κηφισιᾶς εἰς 45 min 30 sec. Εἰς πόσον χρόνον θὰ κάμῃ 4 ταξείδια ἀπὸ Πειραιᾶ εἰς Κηφισιά. α) Μὲ τελικὴν ἐπιστροφὴν εἰς Πειραιᾶ; καὶ β) Μὲ τελικὴν παραμονὴν εἰς Κηφισιάν;

323. Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 5 ἄτομα ἕνα χρηματικὸν ποσὸν ἀπὸ £ 37–7–6. Πόσα θὰ πάρῃ καθένας; Καὶ πόσον θὰ εἶναι εἰς δραχμὰς τὸ μερίδιον καθενὸς μὲ τιμὴν λίρας 300 δραχμάς;

324. Μὲ πόσα μέτρα ἰσοδυναμοῦν 18 yd 1 f. 9 in;

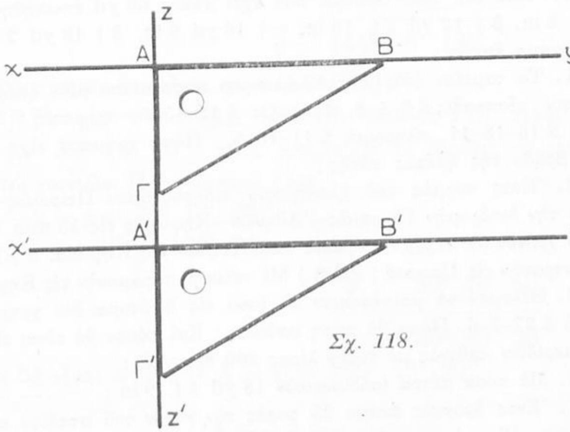
325. Ἕνας δρομεὺς ἔκαμε 25 φορὲς τὸν γῦρον τοῦ σταδίου εἰς 1 h 8 min 45 sec. Εἰς πόσον χρόνον ἔκαμε τὸν ἕνα γῦρον;

121.1 Παράλληλος μετατόπισις εὐθείας: Μᾶς δίνουν τὴν εὐθεῖαν $X\Psi$ καὶ θέλομεν νὰ κάμωμεν μίαν παράλληλον μετατόπισιν αὐτῆς, θέλομεν δηλαδὴ νὰ χαράξωμεν μίαν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $X\Psi$. Πρὸς τοῦτο πέρνομεν τὸν γνώμονα καὶ τὴν μίαν πλευρὰν AB αὐτοῦ τὴν ἐφαρμόζομεν ἐπάνω εἰς τὴν $X\Psi$, χαράσσομεν μίαν τέμνουσαν ZZ' κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς $A\Gamma$ τοῦ γνώμονος, μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα ἔτσι ὥστε ἡ πλευρὰ $A\Gamma$ νὰ βρίσκεται πάντοτε ἐπάνω εἰς τὴν τέμνουσαν ZZ' καὶ εἰς τὴν νέαν θέσιν ἔστω $A'\Gamma'$ τοῦ γνώμονος χαράσσομεν ἐπὶ τῆς πρώτης πλευρᾶς τὴν γραμμὴν $X'A'B'\Psi'$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $X'\Psi' // X\Psi$ διότι εἶναι $\Gamma'\widehat{A'}B' = \Gamma\widehat{A}B$ ὅπως κατασκευάσθησαν. Ἑπομένως ἡ $X\Psi$ μετατοπίσθηκε παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν της εἰς τὴν θέσιν $X'\Psi'$ (σχ. 118).

121.2 Πῶς ἄγεται παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν: Μᾶς δίνουν τὴν εὐθεῖαν $X\Psi$ καὶ τὸ σημεῖον $A \notin X\Psi$ καὶ θέλομεν νὰ χαράξωμεν ἀπὸ τὸ A παράλληλον πρὸς τὴν $X\Psi$. Ἕνας τρόπος εἶναι ἡ παράλληλος μετατόπισις τῆς $X\Psi$ ὥστε νὰ περνάῃ ἀπὸ τὸ

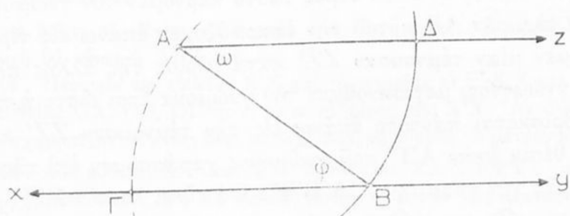
Α, ποὺ γίνεται ὅπως εἴδαμε παραπάνω. Ἄλλος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς (σχ. 119) :

Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ κατάλληλον ἀκτῖνα γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ Β. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα



Σχ. 118.

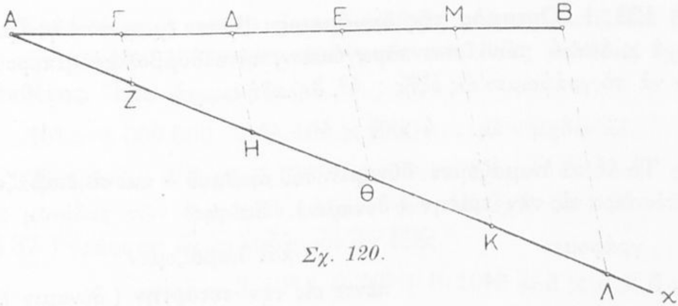
τὴν ἰδίαν γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ Α καὶ τέμνει τὴν ΧΨ εἰς τὸ Γ. Πέρνομεν ἐπὶ τοῦ πρώτου τόξου τὸ $\widehat{\mathrm{B\Delta}} = \widehat{\mathrm{\Gamma A}}$ καὶ σύρομεν τὴν γραμμὴν ΑΔ. Τότε θὰ εἶναι ΑΔ//ΧΨ, διότι



Σχ. 119.

ἂν φέρωμεν καὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ, θὰ εἶναι ω = φ ἢ $\widehat{\mathrm{\Delta AB}} = \widehat{\mathrm{AB\Gamma}}$ ὡς ἐπίκεντροι γωνίαι ποὺ βαίνουν εἰς τὰ ἴσα τόξα $\widehat{\mathrm{B\Delta}} = \widehat{\mathrm{\Gamma A}}$.

122. Πῶς διαιροῦμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς ἴσα μέρη : Μᾶς δίνουν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ θέλομεν νὰ τὸ διαιρέσωμεν ἔστω εἰς 5 ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Α αὐτοῦ σύρομεν τὴν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΑΧ καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὴν πέρνομεν μὲ τὸν διαβήτην τὰ 5 ἴσα τμήματα (ὁποιαδήποτε) ΑΖ = ΖΗ = = ΗΘ = ΘΚ = ΚΛ (σχ. 120). Κατόπιν ἑνώνομεν τὸ Λ μὲ τὸ



Σχ. 120.

ἄλλο ἄκρον Β τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ, Κ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΒΛ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε, Μ. Τότε εἶναι ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΜ = ΜΒ, ὅπως διαπιστώνομεν εὔκολα μὲ παραλλήλους μετατοπίσεις τῆς ΒΛ.

Ἀσκήσεις

326. Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα 11 cm. νὰ τὸ διαιρέσετε εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη μὲ τὴν κατασκευὴν τῆς § 122.

327. Νὰ πάρετε ἕνα σχῆμα ποὺ νὰ περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα (π.χ. τρίγωνον ἢ τετράπλευρον), νὰ μετακινήσετε ὅλας τὰς πλευράς του παραλλήλως πρὸς μίαν διεύθυνσιν κατὰ 5 cm. καὶ νὰ συγκρίνετε τὸ νέον σχῆμα πρὸς τὸ ἀρχικόν. Τί συμπέρασμα βγάζετε ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ'

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

123. 1 Ὁρισμὸς τῆς δυνάμεως: Ὅταν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $4 \times 4 \times 4$ τῶν ἴσων παραγόντων, τότε συμβολικὰ μποροῦμεν νὰ τὸ γράψωμεν ὡς ἑξῆς: 4^3, δηλαδή:

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

Τὸ 4^3 τὸ ὀνομάζομεν **δύναμιν** τοῦ ἀριθμοῦ 4 καὶ τὸ διαβάζομε τέσσαρα εἰς τὴν **τρίτην** (δύναμιν). Ἐπίσης

γράφομεν	καὶ διαβάζομεν
$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$	πέντε εἰς τὴν **τετάρτην** (δύναμιν)
$\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^6$	α εἰς τὴν **ἕκτην** (δύναμιν). Ὥστε

Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ποὺ εἶναι ἴσοι μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

Βάσις τῆς δυνάμεως λέγεται ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς ἴσους παράγοντας, ὁ δὲ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς λέγει **πόσοι εἶναι οἱ ἴσοι παράγοντες**, λέγεται **ἐκθέτης** τῆς δυνάμεως. Ὁ ἐκθέτης γράφεται μικρότερος ἀπὸ τὴν βάσιν καὶ δεξιὰ καὶ παραπάνω ἀπὸ τὴν βάσιν, π.χ. τῆς δυνάμεως 5^4 ἡ βάσις εἶναι τὸ 5 καὶ ὁ ἐκθέτης εἶναι τὸ 4. Ὥστε τὸ 5^4 (πέντε εἰς τὴν τετάρτην) σημαίνει $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Ἰδιαίτερα ἡ **δευτέρα** δύναμις λέγεται καὶ **τετράγωνον**, ἡ δὲ **τρίτη** δύναμις λέγεται καὶ **κύβος** π.χ.

6^2 (ἓξ εἰς τὸ τετράγωνον) $\Longrightarrow$ $6^2 = 6 \times 6 = 36$
5^3 (πέντε εἰς τὸν κύβον) $\Longrightarrow$ $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Παρατήρησις: Πρέπει νὰ προσέξωμεν ὅτι εἰς τὰς δυνάμεις δὲν ἀληθεύει οὔτε ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως οὔτε ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης μεταξὺ βάσεως καὶ ἐκθέτου. Εἶναι δηλαδή:

$2^3 \neq 3^2$ διότι τὸ μὲν $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, τὸ δὲ $3^2 = 3 \times 3 = 9$

Σημ. Ι. Εἰς τὰς δυνάμεις λέμε ὅτι **ὑψώνομεν** τὴν βάσιν εἰς τὴν δύναμιν ποὺ μᾶς λέγει ὁ ἐκθέτης, λέμε π.χ. ὅτι ὑψώνομεν τὸ 6 εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν καὶ ἐννοοῦμεν $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1\,296$.

Σημ. II. Δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχυσις μεταξὺ πολλαπλασιασμοῦ καὶ δυνάμεως. Π.χ. τὸ 2^3 λέγει ὅτι εἶναι $2 \times 2 \times 2 = 8$ καὶ ὄχι $2 \times 3 = 6$.

123. 2 **Δυνάμεις τοῦ 10:** Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100,\ 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000,\ 10^4 = 10\,000$ κ.λ.π. Ὥστε :

Κάθε δύναμις τοῦ 10 εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζεται ἂν εἰς τὴν μονάδα 1 θέσωμεν τόσα μηδενικά, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης. Ἔτσι ἔχομεν :

$10^6 = 1\,000\,000$ καὶ $10^\nu = 1000 \ldots$ μὲ ν μηδενικά.

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 3687 ποὺ τὸν ἔχομεν ἀναλύσει εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του ὡς $3\chi + 6\varepsilon + 8\delta + 7\mu$ (§ 37) γράφεται ὡς πολυώνυμον ὡς ἑξῆς :

$$3687 = 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7$$

123. 3 **Δυνάμεις τῆς μονάδος 1:** Πέρνομεν μίαν δύναμιν τῆς μονάδος 1 π.χ. $1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1$. Ἀλλὰ (§ 77) εἶναι $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$. Ὥστε βρίσκομεν ὅτι εἶναι $1^4 = 1$. Ὁμοίως $1^7 = 1$, κ.λ.π. Ὥστε

Κάθε δύναμις τῆς μονάδος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα

123. 4 **Δυνάμεις τοῦ μηδενός:** Πέρνομεν τὴν δύναμιν :

$0^4 = 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$. Ὥστε $0^4 = 0$ κ.λ.π. Ἄρα

Κάθε δύναμις τοῦ μηδενὸς εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

124. 1 **Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων : I.** Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον $4^3 \times 4^5$ τῶν δυνάμεων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 4. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμειν καὶ κατὰ τὴν § 82.5, βρίσκομεν

$$4^3 \times 4^5 = (4 \cdot 4 \cdot 4) \times (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $4^3 \times 4^5$ ἂν γραφῇ ἀναλυτικά, περιέχει $3 + 5$ δηλαδὴ 8 παράγοντας ἴσους μὲ 4 καὶ ἄρα θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δύναμιν 4^8.

Ὁμοίως βρίσκομεν $\quad 5^3 \times 5^4 \times 5^6 = 5^{13}$ $\quad$ Ὥστε :

Τὸ γινόμενον δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἡ παραπάνω ἰδιότης γενικὰ γράφεται :

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \quad \textbf{καὶ} \quad \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\mu+\nu+\lambda}$$

124. 2 **II.** Θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὴν δύναμιν 5^4 εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, δηλαδὴ θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ $(5^4)^3$. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ μὲ τὴν παραπάνω ἰδιότητα, βρίσκομεν :

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$$

εἶναι δὲ $4 \times 3 = 12$. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν αὐτοῦ, σχηματίζομεν μίαν δύναμιν ποὺ ἔχει ὡς ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ γενικὰ γράφεται :

$$(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}$$

124. 3 **III.** Θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον τὸ γινόμενον $(5 \times 6 \times 4)$, θέλομεν δηλαδὴ νὰ βροῦμε τὴν δύναμιν $(5 \times 6 \times 4)^3$. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ μὲ τὴν § 85 βρίσκομεν

$$\begin{aligned}(5 \times 6 \times 4)^3 &= (5 \times 6 \times 4) \cdot (5 \times 6 \times 4) \cdot (5 \times 6 \times 4) \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 4 \times 5 \cdot 6 \cdot 4 \times 5 \cdot 6 \cdot 4 = \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \times 6 \cdot 6 \cdot 6 \times 4 \cdot 4 \cdot 4 = \\ &= 5^3 \times 6^3 \times 4^3\end{aligned}$$

Βρίσκομεν λοιπὸν $(5 \times 6 \times 4)^3 = 5^3 \times 6^3 \times 4^3$ Ὥστε :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα γινόμενον εἰς μίαν δύναμιν ὑψώνομεν εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν κάθε παράγοντα τοῦ γινομένου.

Γενικὰ ἔχομεν : $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} \cdot \gamma^{\nu}$

124. 4 **IV.** Θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν δύναμιν α^7 διὰ τῆς δυνάμεως α^3. Σύμφωνα μὲ τὴν I ἰδιότητα, γνωρίζομεν ὅτι εἶναι

$\alpha^3 \cdot \alpha^4 = \alpha^7$. Ἄρα (§ 99.2) βρίσκομεν

$$\alpha^7 : \alpha^3 = \alpha^4$$

εἶναι δὲ $7 - 3 = 4$. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐκθέτην τὴν διαφορὰν ποὺ βρί-

σκομεν ἂν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρέτου.

Γενικὰ ἔχομεν $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu - \nu}$ μὲ $\mu > \nu$

125. Τὰ σύμβολα α^1 καὶ α^0 : Πέρνομεν τὴν διαίρεσιν $\alpha^3 : \alpha^2$ καὶ τὴν διαίρεσιν $\alpha^3 : \alpha^3$. Σύμφωνα μὲ τὴν IV ἰδιότητα τῶν δυνάμεων, βρίσκομεν

$$\alpha^3 : \alpha^2 = \alpha^{3-2} = \alpha^1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^3 : \alpha^3 = \alpha^{3-3} = \alpha^0$$

Ἀλλὰ καὶ τὸ α^1 καὶ τὸ α^0 δὲν ἔχουν ἔννοιαν σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ ἐκθέτης ν πρέπει νὰ εἶναι $\nu \geqslant 2$. Ἐν τούτοις ἂν κάμωμεν τὸν παρακάτω συλλογισμόν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ τὸ α^1 καὶ τὸ α^0 ἔχουν ἔννοιαν.

Πέρνομεν μίαν δύναμιν τοῦ α, π.χ. τὴν α^6, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους παράγοντας ἐπὶ τὴν μονάδα 1 (§ 77) καὶ κάθε φορὰν ἐλαττώνομεν κατὰ ἕνα τοὺς ἴσους παράγοντας, βρίσκομεν δὲ διαδοχικά :

$$\begin{aligned}
1 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= \alpha^6 \\
1 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= \alpha^5 \\
1 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= \alpha^4 \\
1 \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha &= \alpha^3 \\
1 \cdot \alpha \cdot \alpha &= \alpha^2 \\
1 \cdot \alpha &= \alpha^1 \\
1 &= \alpha^0
\end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι κάθε φορὰν ποὺ ἐλαττώνονται κατὰ ἕναν οἱ ἴσοι παράγοντες τοῦ α΄ μέλους ἐλαττώνεται κατὰ μίαν μονάδα ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ β΄ μέλους. Φθάνομεν λοιπὸν ἔτσι εἰς τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας καὶ βρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\alpha^1 = \alpha \quad \text{καὶ} \quad \alpha^0 = 1.$$

Ὥστε μποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν ὅτι :

α) Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$ εἶναι ἴση πρὸς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

β) Ἡ μηδενικὴ δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.

Ἔτσι τὸ πολυώνυμον τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ 3687 μποροῦμε νὰ τὸ συμπηρώσωμεν ὡς ἑξῆς :

$$3687 = 3\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$$

126. Τετράγωνον ἀθροίσματος: Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta$, δηλαδὴ τὸ $(\alpha + \beta)^2$. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων βρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 =$$
$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Ὥστε εἶναι $\boxed{(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$ Ἄρα

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτῶν καὶ ἀπὸ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

328. Ἀπὸ τὰ γινόμενα α) $5\cdot5\cdot5\cdot5$, β) $3\cdot5\cdot4\cdot8$, γ) $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$, δ) $3\cdot\alpha\ 5\cdot\beta$, ε) $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta$, στ) $\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\gamma\cdot\gamma\cdot\gamma$. Ποῖα γράφονται ὡς δυνάμεις; Καὶ ποίας δυνάμεις παριστάνουν;

329. Νὰ εὑρεθῇ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα, α) 7^2, β) 6^3, γ) 8^1, δ) 9^0, ε) 7^4, στ) 5^6, ζ) 2^8, η) 2^{10}.

330. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ παρακάτω ἐξαγόμενα (βρῆτε πρῶτα τὰς δυνάμεις).

α) $3^4+5^3+2^5$ β) 4^3-5^2, γ) $8^3-5^3-4^3-2^3$ δ) $4^3\times 3^4$

ε) $2^5\times 3^2\times 4^1$ στ) $6^2\times 5^3\times 4^0$, ζ) $2^5\times 3^4\times 4^3\times 5^2\times 6^1\times 7^0$

331. Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ παρακάτω γινόμενα νὰ μετατραπῇ εἰς μίαν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ.

α) $3^4\times 3^2$ β) $3^4\times 9$, γ) $5^2\times 125$, δ) $36\times 6^3\times 6$

ε) $\alpha\cdot\alpha^3\cdot\alpha^5$, στ) $\alpha^0\cdot\alpha^1\cdot\alpha^2\cdot\alpha^3\cdot\alpha^4$, ζ) $\alpha^4\cdot\beta^4\cdot\gamma^4\cdot\delta^0$

332. Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ παρακάτω γινόμενα νὰ μετατραπῇ εἰς μίαν δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ (ΙΙ καὶ ΙΙΙ ἰδιότης).

α) $2^3\times 3^3$ β) $3^2\times 4^2\times 5^2$, γ) 16×81, δ) $16\times 9\times 49$

ε) $4^3\times 2^2$, στ) $8^2\times 4^2\times 2^1$, ζ) $3^4\times 16\times 625$, η) $(\alpha^3)^2\cdot\beta^6$.

333. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν τιμὴν κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω παραστάσεις διὰ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν γραμμάτων:

α) x^2+y^2 ὅταν εἶναι $x=5$, $y=3$

β) $x+y^2+\omega^3$ » » $x=12$, $y=13$, $\omega=4$

γ) $x^3-y^3-\omega^3$ » » $x=9$, $y=4$, $\omega=1$

δ) $3x^2+4y^3+8\omega^0$ » » $x=4$, $y=3$, $\omega=15$

334. Νὰ ἐξηγήσετε διατὶ εἶναι $(\alpha^\mu)^\nu = (\alpha^\nu)^\mu$

335. Νὰ βρῆτε κατὰ δύο τρόπους τὸ $(5+4)^2$

336. Νὰ βρῆτε τὸ $(\alpha+4)^2$ καὶ τὸ $(7+x)^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

127. Διαιρέτης ἀριθμοῦ: Ἡ σχέσις ποὺ συνδέει τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην μιᾶς τελείας διαιρέσεως, ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν § 96 εἶναι.

$$\Delta = \delta\pi.$$

Τὴν σχέσιν αὐτὴν μποροῦμεν νὰ τὴν γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\alpha = \delta\nu \qquad (1)$$

ὅπου α εἶναι ὁ διαιρετέος, δ ὁ διαιρέτης καὶ ν τὸ πηλίκον. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν βλέπομεν τὰ ἑξῆς : α) Ὁ ἀριθμὸς α **εἶναι πολλαπλάσιον** τοῦ ἀριθμοῦ δ (§ 87.1) καὶ ὁ δ **διαιρεῖ ἀκριβῶς** τὸν α. Διὰ τοῦτο ὁ δ λέγεται **διαιρέτης τοῦ α.** Ὥστε :

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται διαιρέτης ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ὅταν διαιρῇ αὐτὸν ἀκριβῶς.

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀριθμοῦ 20, ἐνῶ ὁ 20 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5.

Εἴδαμεν εἰς τὰς § 103.3 καὶ 103.4 ὅτι :

α) **Κάθε ἀριθμὸς διαιρεῖ ὅλα τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ καὶ μόνον αὐτά.**

β) **Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, τότε θὰ διαιρῇ καὶ κάθε πολλαπλάσιον αὐτοῦ.**

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 6 ποὺ διαιρεῖ τὸν 18, θὰ διαιρῇ καὶ κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 18, θὰ διαιρῇ δηλαδὴ καὶ τὸν ἀριθμὸν 18ν ἔνθα $\nu \in \Phi_0$. Ἐπίσης ὁ 4 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν 4ν, ἔνθα $\nu \in \Phi_0$.

Θὰ ἰδοῦμεν ἀκόμη μερικὲς ἰδιότητες τοῦ διαιρέτου.

128. 1 Α΄. Πέρνομεν τὰς τελείας διαιρέσεις

$$\alpha = \delta\nu, \quad \beta = \delta\mu, \quad \gamma = \delta\lambda. \qquad (2)$$

καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας αὐτάς, δηλαδὴ

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta\nu + \delta\mu + \delta\lambda, \quad \text{ἢ} \quad \alpha + \beta + \gamma = \delta(\nu + \mu + \lambda) \qquad (3)$$

Ἡ τελευταία ἰσότης (3) φανερώνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς δ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma$, δηλαδὴ ἡ διαίρεσις $(\alpha+\beta+\gamma):\delta$ δίνει πηλίκον τὸ $\nu+\mu+\lambda$. Ὥστε

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

128. 2 **Β΄**. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἀπὸ τὰς ἰσότητας (2), βρίσκομεν

$$\alpha-\beta=\delta\nu-\delta\mu \quad \text{ἢ} \quad \alpha-\beta=\delta(\nu-\mu)$$ Ὥστε

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

128. 3 **Γ΄**. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (2), βρίσκομεν

$$\alpha\beta\gamma=\delta^3\lambda\mu\nu$$

Ὁ ἀριθμὸς δ διαιρεῖ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἄνω ἰσότητος (§ 103.3). Ἄρα θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς, θὰ διαιρῇ δηλαδὴ τὸ γινόμενον $\alpha\beta\gamma$. Ὥστε :

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλους, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

128. 4 **Δ΄**. Πέρνομεν τὴν σχέσιν τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως

$$\Delta=\delta\pi+\upsilon \iff \Delta-\delta\pi=\upsilon$$

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς ν εἶναι διαιρέτης τοῦ διαιρετέου Δ καὶ τοῦ διαιρέτου δ, τότε θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ $\delta\pi$, ποὺ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δ. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς ν θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς $\Delta-\delta\pi$ (§ 128.2), δηλαδὴ τοῦ υ. Ὥστε :

Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ διαιρετέον καὶ διαιρέτην μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 5 ποὺ διαιρεῖ τὸν 120 καὶ τὸν 25, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 120 : 25, δηλαδὴ τὸ 20.

129. 1 **Κοινοὶ διαιρέται:** Πέρνομεν τοὺς ἀριθμοὺς 30 καὶ 48 καὶ βρίσκομεν τοὺς διαιρέτας καθενός, δηλαδὴ

διαιρέται τοῦ 30 = **1**, **2**, **3**, 5, **6**, 10, 15, 30
διαιρέται τοῦ 48 = **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 8, 12, 16, 24, 48

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ διαιρέται 1, 2, 3, 6 εἶναι διαιρέται καὶ τοῦ 30 καὶ τοῦ 48. Διὰ τοῦτο οἱ διαιρέται αὐτοὶ λέγονται **κοινοὶ διαιρέται** τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 48 καὶ ἀπὸ αὐτοὺς ὁ 6, ποὺ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ ὅλους, λέγεται **μέγιστος κοινὸς διαιρέτης** αὐτῶν.

Οἱ κοινοὶ διαιρέται σημειώνονται μὲ κ.δ., ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης σημειώνεται μὲ μ.κ.δ.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἔχομεν κ.δ. περισσοτέρων ἀριθμῶν.

Παρατήρησις : Οἱ κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν μπορεῖ νὰ σημειωθοῦν καὶ ὡς τομὴ τῶν συνόλων τῶν διαιρετῶν αὐτῶν. Π.χ. οἱ διαιρέται τοῦ 30 καὶ τοῦ 48 εἶναι

$\Sigma_1 = \delta\,(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$\Sigma_2 = \delta\,(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

Ἑπομένως εἶναι κ.δ. $= \delta\,(30) \cap \delta\,(48) = \{1, 2, 3, 6\}$

129. 2 Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι (§ 103.3) ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ κάθε πολλαπλάσιον τοῦ ἄλλου, διὰ τοῦτο κάθε διαιρέτης τοῦ μ.κ.δ. 6 τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 48 θὰ εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 30 καὶ τοῦ 48 ποὺ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 6. Δηλαδὴ κάθε διαιρέτης τοῦ 6 θὰ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 30 καὶ 48. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

130. 1 **Εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. ἀριθμῶν :** Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

Α΄ Ἂν ὁ μικρότερος ἀπὸ αὐτοὺς διαιρῇ ὅλους τοὺς ἄλλους, τότε αὐτὸς εἶναι ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 8, 24, 32, 80, 120 ἔχουν μ.κ.δ. = 8.

130. 2 **Β΄. Ὅταν μᾶς δίδωνται δύο ἀριθμοί :** Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. τῶν δύο ἀριθμῶν 3510 καὶ 765. Ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 3510 : 765 βρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 450. Σύμφωνα μὲ τὴν § 128.4, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς διαιρῇ τὸν διαιρετέον 3510 καὶ τὸν διαιρέτην 765 θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ὑπόλοιπον 450. Ὥστε οἱ κ.δ. δὲν βλάπτονται ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3510 μὲ τὸ ὑπόλοιπον 450. Ἑπομένως ἀντὶ νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 3510 καὶ 765 μποροῦμεν νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 765 καὶ 450. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἰδίαν σκέψιν καὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 765 καὶ 450. Ἡ διαίρεσις 765 : 450 δίδει ὑπόλοιπον 315. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ ζητήσωμεν τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 450 καὶ 315. Ἐξακολουθοῦμεν ἔτσι μέχρις ὅτου βροῦμε τελείαν διαίρεσιν. Τότε ὁ τελευταῖος διαιρέτης θὰ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἡ παραπάνω ἐργασία διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	4	1	1	2	3
3510	765	450	315	135	**45**
450	315	135	45	0	

Εἰς τὰς παραπάνω ἀλλεπαλλήλους διαιρέσεις τὰ πηλίκα τὰ γράφομεν ἀπὸ πάνω ἀπὸ κάθε διαιρέτην καὶ κάθε ὑπόλοιπον τὸ μεταφέρομεν ὡς νέον διαιρέτην. Ἔτσι βρίσκομεν ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 3510 καὶ 765 εἶναι ὁ 45. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ 45 εἶναι κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 3510 καὶ 765. Βρίσκομεν δηλαδὴ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3510 καὶ 765 ἔχουν κοινοὺς διαιρέτας τοὺς 1, 3, 5, 9, 15, 45 ποὺ εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. 45 αὐτῶν.

Ἡ παραπάνω μέθοδος τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν λέγεται **ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη.**

130. 3 Γ΄. Ὅταν μᾶς δίδωνται πολλοὶ ἀριθμοί : Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 150, 540, 3210, 4095. Ἀντὶ νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸν ἀλγόριθμον τοῦ Εὐκλείδη διὰ κάθε ζεῦγος ἀπὸ αὐτούς, ἐργαζόμεθα ἁπλούστερα ὡς ἑξῆς : Κάτω ἀπὸ τὸν μικρότερον γράφομεν τὸν ἑαυτόν του καὶ κάτω ἀπὸ καθένα ἀπὸ τοὺς ἄλλους γράφομεν τὰ ὑπόλοιπα ποὺ βρίσκομεν ἂν τοὺς διαιρέσωμεν μὲ τὸν μικρότερον. Ἐξακολουθοῦμεν τὸ ἴδιον καὶ διὰ τοὺς εὑρισκομένους ἀριθμοὺς μέχρις ὅτου βροῦμε ὑπόλοιπα 0 εἰς ὅλους **πλὴν ἑνός.** Ὁ ἕνας αὐτὸς ποὺ μένει εἶναι ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν. Δηλαδὴ

150	540	3210	4095
150	90	60	45
15	0	15	45
15	0	0	0

Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ 150, 540, 3210, 4095 ἔχουν μ.κ.δ. = 15

Τὸν παραπάνω τρόπον μποροῦμε νὰ τὸν ἐφαρμόσωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν δύο ἀριθμούς.

131. Ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους: Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 17 καὶ 25. Εὑρίσκομεν :

17	25
17	8
1	8
1	0

Ὥστε βρίσκομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 25 ἔχουν μ.κ.δ.= 1 Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ λέγονται **πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους**· Ὥστε

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν ἔχουν μ.κ.δ. τὴν μονάδα.

Ἐπίσης οἱ ἀριθμοὶ 8, 9, 13, ποὺ ἔχουν μ.κ.δ.= 1 λέγονται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Παρατήρησις : Ὅταν διαιρέσωμεν ἀριθμοὺς ποὺ μᾶς δίδονται μὲ ἕνα κ.δ. αὐτῶν, τότε καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν θὰ διαιρεθῆ διὰ τοῦ κοινοῦ αὐτοῦ διαιρέτου. Ἑπομένως βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ὅταν διαιρέσωμεν δοθέντας ἀριθμοὺς διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν, τότε προκύπτουν ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διότι καὶ ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν θὰ διαιρεθῆ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ θὰ δώση πηλίκον τὴν μονάδα, π.χ. οἱ ἀριθμοὶ

24, 60, 96, 120 ἔχουν μ.κ.δ.= 12

Ἂν τοὺς διαιρέσωμεν διὰ 12 βρίσκομεν τοὺς ἀριθμοὺς

2, 5, 8, 10 ποὺ ἔχουν μ.κ.δ. = 1

καὶ ἄρα εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἀσκήσεις

337. Γνωρίζετε ὅτι ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ 20. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε ὅλους τοὺς κ.δ. αὐτῶν ; Γράψετε ἕνα δικό σας σχετικὸν παράδειγμα.

338. Νὰ βρῆτε τὸν μ.κ.δ. κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω ὁμάδας ἀριθμῶν. α) 35 καὶ 308, β) 840 καὶ 5 685, γ) 1 530 καὶ 6 840, δ) 4 800, 1 080 καὶ 2 700, ε) 480, 1 280, 1 680 καὶ 2 080.

339. Νὰ βρῆτε ὅλους τοὺς κ.δ. τῶν παρακάτω ὁμάδων ἀριθμῶν :

α) 42 καὶ 70, β) 48 καὶ 60, γ) 64 καὶ 80
δ) 24, 60 καὶ 84, ε) 70, 105, 245 καὶ 385

340. Ἀπὸ τὰ παρακάτω ζεύγη ἀριθμῶν ποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ;

α) 15 καὶ 16, β) 12 καὶ 35, γ) 18 καὶ 45, δ) 121 καὶ 49
ε) 29 καὶ 36, στ) 40 καὶ 61, ζ) 25 καὶ 49 η) 18 καὶ 63

341. Ἕνας ἀνθοπώλης ἔχει 100 κόκκινα γαρύφαλα, 80 ἄσπρα γαρύφαλα καὶ 50 τριαντάφυλλα. Πόσες ὁμοιόμορφες ἀνθοδέσμες μπορεῖ νὰ κάμη ; Καὶ πόσα ἄνθη ἀπὸ τὸ κάθε εἶδος θὰ ἔχη κάθε μία ἀνθοδέσμη ;

342. Εἰς ἕνα ἔρανον συνεκεντρώθησαν τὰ παρακάτω εἴδη ποὺ πρόκειται νὰ διανεμηθοῦν ὁμοιομόρφως εἰς τὰς οἰκογενείας μιᾶς σεισμοπλήκτου περιοχῆς. 30 000 δραχμαί, 960 κλινοσκεπάσματα, 240 κιλὰ λάδι καὶ 600 κιλὰ ἄλευρα. Σὲ πόσες οἰκογένειες μπορεῖ νὰ γίνη ὁμοιόμορφος διανομή ; Καὶ πόσα ἀπὸ κάθε εἶδος θὰ πάρη κάθε οἰκογένεια ;

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

132. 1 Πολλὲς φορὲς μᾶς εἶναι χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον ἑνὸς ἄλλου, χωρὶς νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν. Διὰ τοῦτο ἔχομεν τὰ ἑξῆς κριτήρια διὰ μερικοὺς διαιρέτας.

132. 2 **Κριτήριον διαιρετότητος διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10 :** Ἐπειδὴ εἶναι $2 \times 5 = 10$, διὰ τοῦτο βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ σύνολον τῶν δεκάδων ἑνὸς ἀριθμοῦ διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 10. Ἔτσι τὸν ἀριθμὸν 4537 τὸν γράφομεν :

$$4530 + 7$$

Ἀφοῦ ὁ 4530 διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 10, ἀρκεῖ νὰ δοῦμεν ἂν ὁ ἀριθμὸς 7 διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10 (§ 128.1). Ἔτσι βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10 ὅταν τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ διαιρῆται διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10.

Ἔτσι διὰ τοῦ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τελειώνουν εἰς 0, 2, 4, 6, 8, διὰ τοῦ 5 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τελειώνουν εἰς 0 ἢ 5 καὶ διὰ τοῦ 10 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ ποὺ τελειώνουν εἰς 0.

Κάθε ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖται διὰ 2 λέγεται **ἄρτιος** (ζυγὸς) ἀριθμὸς καὶ κάθε ἀριθμὸς ποὺ δὲν διαιρεῖται διὰ 2 λέγεται **περιττὸς** (μονὸς) ἀριθμός. Ἔτσι ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ ἀρτίου ἀριθμοῦ εἶναι 2ν, τοῦ δὲ περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 2ν + 1, δηλαδὴ

$$\text{ἄρτιος} = \mathbf{2\nu}, \quad \text{περιττὸς} = \mathbf{2\nu + 1}, \quad \text{ἔνθα} \quad \nu \in \Phi_0.$$

Παρατήρησις : Μὲ τὸ παραπάνω κριτήριον μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ τὸ ὑπόλοιπον ποὺ ἀφίνει ἕνας ἀριθμὸς ἂν διαιρεθῆ διὰ

2 ἢ 5 ἢ 10. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὶ ὑπόλοιπον θὰ ἀφίσῃ τὸ τελευταῖον ψηφίον του ἂν διαιρεθῇ διὰ 2 ἢ 5 ἢ 10, π.χ. ὁ ἀριθμὸς 4537 διαιρούμενος διὰ 2 ἀφίνει ὑπόλοιπον 1, διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει ὑπόλοιπον 2 (ὑπόλοιπον 7 : 5) καὶ διὰ 10 ἀφίνει ὑπόλοιπον 7 (§ 98.3).

Σημ. Κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 5 γράφεται 5ν, ἔνθα $\nu \in \Phi_0$. Ἑπομένως κάθε μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 5 θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν.

$$5\nu+1 \quad ἢ \quad 5\nu+2 \quad ἢ \quad 5\nu+3 \quad ἢ \quad 5\nu+4 \quad \text{μὲ } \nu \in \Phi_0$$

γενικὰ δὲ τὸ μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 5 ἔχει τὴν μορφὴν $5\nu \pm 1$ ἢ $5\nu \pm 2$

132.3 Κριτήριον διαιρετότητος διὰ 4 ἢ 25 ἢ 100 : Ἐπειδὴ εἶναι $4 \times 25 = 100$, διὰ τοῦτο τὸ σύνολον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἢ 25 ἢ 100, π.χ. ὁ ἀριθμὸς 6372 γράφεται

$$6300 + 72$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $6300 = 63 \times 100 = 63 \times 4 \times 25$, διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ 4 ἢ 25 ἢ 100 ὁ ἀριθμὸς 72 ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25 ἢ 100 ὅταν ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του διαιρῆται διὰ 4 ἢ 25 ἢ 100.

Ὁ ἀριθμὸς 6372 διαιρεῖται διὰ 4, (διότι τὸ 72 : 4 δίδει $\upsilon = 0$) διαιρούμενος δὲ διὰ 25 ἀφίνει ὑπόλοιπον 22 (διότι ἡ διαίρεσις 72 : 25 ἀφίνει $\upsilon = 22$), διαιρούμενος δὲ διὰ 100 ἀφίνει ὑπόλοιπον 72 (§ 98.3).

Σημ. I. Κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν 4ν, $\nu \in \Phi_0$ καὶ κάθε μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν $4\nu \pm 1$ ἢ $4\nu+2$ ἔνθα $\nu \in \Phi_0$. Κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 25 ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν 25ν.

Σημ. II. Κάθε ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖται διὰ 25 λήγει εἰς 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

132.4 Κριτήριον διαιρετότητος διὰ 8 ἢ 125 ἢ 1000 : Πέρνομεν τὸν ἀριθμὸν 27348. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται

$$27348 = 27000 + 348 = 27 \times 8 \times 125 + 348$$

διότι εἶναι $1000 = 8 \times 125$. Ὥστε σκεπτόμενοι ὅπως παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 8 ἢ 125 ἢ 1 000 ὅταν ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀποτελοῦν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία αὐτοῦ διαιρῆται διὰ 8 ἢ 125 ἢ 1 000.

Π.χ. ὁ ἀριθμὸς 27348 διαιρούμενος διὰ 8 ἀφίνει $υ = 4$ (διότι τὸ $348 : 8$ ἀφίνει $υ = 4$), διαιρούμενος διὰ 125 ἀφίνει $υ = 98$ (διότι τὸ $348 : 125$ δίδει $υ = 98$) καὶ διὰ 1000 ἀφίνει $υ = 348$ (§ 98.3).

132. 5 **Κριτήριον διαιρετότητος διὰ 3 ἢ 9:** Ἐν πρώτοις διαπιστώνομεν ὅτι κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 9 ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν 9ν. Κατόπιν παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

$$10^1 = 10 = 9 + 1 = 9ν + 1$$
$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 9ν + 1$$
$$10^3 = 1000 = 999 + 1 = 9ν + 1 \quad κ.λ.π.$$

δηλαδὴ κάθε δύναμις τοῦ 10 εἶναι τῆς μορφῆς $9ν + 1$. Ὥστε ἂν ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 5673 καὶ θέλωμεν νὰ ἴδοῦμε πρὶν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν τὶ ὑπόλοιπον θὰ ἀφίσῃ ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 9, τὸν γράφομεν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} 5673 &= 5000 + 600 + 70 + 3 = \\ &= 5 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 = \\ &= 5 (9ν + 1) + 6 (9ν + 1) + 7 (9ν + 1) + 3 = \\ &= 5 \cdot 9ν + 5 + 6 \cdot 9ν + 6 + 7 \cdot 9ν + 7 + 3 = \\ &= (5 \cdot 9ν + 6 \cdot 9ν + 7 \cdot 9ν) + 5 + 6 + 7 + 3 \end{aligned}$$

Ἀλλὰ τὸ $5 \cdot 9ν + 6 \cdot 9ν + 7 \cdot 9ν$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ βροῦμε τὶ ὑπόλοιπον θὰ ἀφίσῃ διὰ τοῦ 9 τὸ ἄθροισμα $5 + 6 + 7 + 3$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 5673, εἶναι δὲ $5 + 6 + 7 + 3 = 21$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 5673 διαιρούμενος διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3 (διότι τὸ $21 : 9$ δίδει $υ = 2 + 1 = 3$).

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $9ν = 3 \cdot 3ν$ διὰ τοῦτο κάθε δύναμις τοῦ 10 εἶναι καὶ τῆς μορφῆς $3ν + 1$. Ὥστε καὶ διὰ τὸν διαιρέτην 3 κάνομεν ἀκριβῶς τὰ ἴδια. Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται δια 3 ἢ 9 ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ 3 ἢ 9.

Σημ. Κάθε πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἢ τοῦ 9 ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν 3ν ἢ 9ν, ἔνθα $ν \in Φ_0$. Κάθε μὴ πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἔχει τὴν μορφὴν $3ν + 1$ ἢ $3ν + 2$.

132. 6 Κριτήριον διαιρετότητος διὰ 11: Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι:

$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 11 \cdot 9 + 1 = 11\nu + 1$$

$$10^4 = 10000 = 9999 + 1 = 11 \cdot 909 + 1 = 11\nu + 1 \quad \text{κ.λ.π.}$$

δηλαδὴ κάθε ἀρτία δύναμις τοῦ 10 εἶναι τῆς μορφῆς $11\nu + 1$. Ὥστε ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸν ἀριθμὸν 61347, τὸν γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} 61347 &= 60000 + 1300 + 47 = \\ &= 6 \, 10000 + 13 \cdot 100 + 47 = \\ &= 6 \cdot (11\nu + 1) + 13 \cdot (11\nu + 1) + 47 = \\ &= (6 \cdot 11\nu + 13 \cdot 11\nu) + 6 + 13 + 47 \end{aligned}$$

Ἀλλὰ τὸ $6 \cdot 11\nu + 13 \cdot 11\nu$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 11. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἰδοῦμε τὶ ὑπόλοιπον θὰ ἀφίση διὰ τοῦ 11 τὸ ἄθροισμα $6 + 13 + 47$, εἶναι δὲ τοῦτο τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν ἐκ δεξιῶν τὸν ἀριθμόν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $6 + 13 + 47 = 66$ καὶ $66 : 11$ ἀφίνει $\upsilon = 0$, διὰ τοῦτο συμπεραίνομεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 61347 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 11. Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 11 ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν αὐτὸν (ἐκ δεξιῶν) ἀποτελῇ ἀριθμὸν ποὺ διαιρεῖται διὰ τοῦ 11.

133. Δοκιμὴ τῶν πράξεων διὰ τοῦ 9: Ἐπειδὴ σύμφωνα μὲ τὰς ἰδιότητας Α', Β', Γ' τῆς § 128 ὁ ἀριθμὸς 9 ἐὰν διαιρῇ ἄλλους, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμά των καὶ τὴν διαφοράν των καὶ τὸ γινόμενόν των, διὰ τοῦτο μποροῦμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν **μέθοδον τῶν ὑπολοίπων** διὰ τοῦ 9 διὰ τὴν δοκιμὴν τῶν πράξεων, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω παραδείγματα:

Α'. Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως:

	3479	διὰ 9	$\upsilon = 5$	
+	6532	»	$\upsilon = 7$	+
	7245	»	$\upsilon = 0$	
	17256 $\upsilon = \mathbf{3}$	»	$\upsilon = \mathbf{3}$	

Τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν προσθετέων διὰ τοῦ 9 εἶναι $5 + 7 + 0 = 12$, ἢ $1 + 2 = 3$. Ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀθροίσματος 17256 τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 εἶναι ἐπίσης 3. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πρόσθεσις ἔγινε σωστή.

Β΄. Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως :

$$\begin{array}{rcc} & 8342 & \text{διὰ } 9 \quad υ = 8 \\ - & 6537 & » \quad υ = 3 \\ \hline & 1805 \ υ = \mathbf{5} & » \quad υ = \mathbf{5} \end{array}$$

Τὸ ὑπόλοιπον διὰ 9 τοῦ μειωτέου εἶναι 8 καὶ τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι 3. Ἄρα $8 - 3 = 5$. Ἀλλὰ καὶ τὸ υ διὰ 9 τῆς διαφορᾶς 1805 εἶναι ἐπίσης 5. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἔγινε σωστὴ

Γ΄. Δοκιμὴ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

$$\begin{array}{r} 4351 \\ \times \quad 23 \\ \hline 13053 \\ 8702 \\ \hline 100073 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 4 & 5 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{array}$$

Ὁ πολλαπλασιαστέος διαιρούμενος διὰ 9 ἀφίνει $υ = 4$, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἀφίνει $υ = 5$. Ἔχομεν $4 \times 5 = 20$, ὑπόλοιπον τοῦ 20 διὰ 9 εἶναι 2. Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον 100073 διαιρούμενον διὰ 9 ἀφίνει $υ = 2$. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔγινε σωστός.

Παρατήρησις : Ἐν τούτοις ὅταν τὸ λάθος ποὺ γίνεται εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 δὲν μποροῦμεν νὰ τὸ βροῦμε μὲ τὴν μέθοδον τῶν ὑπολοίπων διὰ τοῦ 9. Ἂν δηλαδὴ π.χ. εἰς τὴν πρόσθεσιν βροῦμε ἄθροισμα 17346 ἀντὶ τοῦ σωστοῦ 17256, τότε ἡ δοκιμὴ διὰ τοῦ 9 μᾶς λέγει ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε σωστὴ ἐνῷ τὸ ἄθροισμα βρέθηκε λάθος. Εἶναι δὲ τὸ λάθος $17346 - 17256 = 90$ δηλαδὴ πολλαπλάσιον τοῦ 9. Ὥστε ἡ δοκιμὴ μὲ τὰ ὑπόλοιπα διὰ τοῦ 9 **δὲν μᾶς δίνει ἀπόλυτον ἀσφάλειαν περὶ τῆς ἀκριβοῦς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως.**

Ἀσκήσεις

343. Σὲ τί ψηφίον πρέπει νὰ λήγῃ ἕνας ἀριθμὸς διὰ νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 5 ;

344. Σὲ τί ψηφίον τελειώνει ἕνας περιττὸς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς 5ν, μὲ $\nu \in \Phi_0$; καὶ σὲ τί ἕνας ἄρτιος ;

345. Ποῖα πρέπει νὰ εἶναι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἑνὸς ἀριθμοῦ, διὰ νὰ διαιρῆται οὗτος καὶ διὰ 4 καὶ διὰ 25 ;

346. Μᾶς δίνουν τὸν ἀριθμὸν 4ν, ἔνθα $\nu \in \Phi \wedge 5 \leqslant \nu < 11$. Νὰ βρῆτε τὰς τιμὰς τοῦ ν ὥστε α) ὁ ἀριθμὸς 4ν νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, β) ὁ ἀριθμὸς 4ν νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς 4ν νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3.

347. Νὰ συμπληρώσετε τὸν παρακάτω πίνακα (π.χ. ὁ 2 475 διαιρούμενος διὰ 10 ἀφίνει $\upsilon = 5$, διὰ 9 ἀφίνει $\upsilon = 0$ κλπ.).

Ἀριθμοὶ	Ὑπόλοιπα διαιρέσεως διὰ							
	2	3	4	5	8	9	10	25	100
1530									
2475						0	5		
1600									
5400									
4739									
9832									

348. Κατὰ τί πρέπει νὰ μεταβάλῃς τὰς μονάδας καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 1 372, 496, 5 637, 37 124, 17 465, 85 907, 92 008 ὥστε νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9 ;

349. Νὰ συμπληρώσετε τὸν τετραψήφιον ἀριθμὸν 25.. ἔτσι ὥστ νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦ 9 (πόσες λύσεις βρίσκετε ;)

350. Νὰ συμπληρώσετε τὸν πενταψήφιον ἀριθμὸν 37... ἔτσι ὥστε νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ 25 καὶ διὰ τοῦ 9 (πόσες λύσεις βρίσκετε ;)

351. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 350, 3 850, 1 350, 625, 315, 2 925. Ἂν εἶναι Ε τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3 καὶ Ζ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ αὐτοὺς ποὺ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 25, νὰ βρῆτε τὴν $E \cap Z$ καὶ τὴν $E \cup Z$.

134. Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί: Ἂς προσπαθήσωμεν νὰ βροῦμε τοὺς διαιρέτας τῶν διαφόρων ἀριθμῶν π.χ.

ὁ 2 ἔχει διαιρέτας τοὺς 1, 2	ὁ 4 ἔχει διαιρέτας τοὺς 1, 2, 4
ὁ 3 » » » 1, 3	ὁ 6 » » » 1,2,3,6
ὁ 5 » » » 1, 5	ὁ 8 » » » 1,2,4,8
ὁ 7 » » » 1, 7	ὁ 9 » » » 1,3,9
ὁ 11 » » » 1, 11	ὁ 10 » » » 1,5,10

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ποὺ ἔχουν **δύο μόνον** διαιρέτας, τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν τους, ὅπως οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11 κ.λ.π. ὑπάρχουν δὲ καὶ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχουν περισσοτέρους ἀπὸ δύο διαιρέτας, ὅπως οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, 9, 10 κλπ.

Μποροῦμε λοιπὸν μὲ βάσιν τὰ παραπάνω νὰ διαχωρίσωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν μίαν νὰ βάλωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἔχουν δύο μόνον διαιρέτας δηλαδὴ τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν τους καὶ τοὺς ὁποίους λέμε **πρώτους*** ἀριθμούς, εἰς δὲ τὴν ἄλλην κατηγορίαν νὰ βάλωμεν τοὺς ὑπολοίπους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους λέμε **συνθέτους** ἀριθμούς. Ὥστε

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται πρῶτος, ὅταν ἔχῃ ὡς διαιρέτας μόνον τὴν μονάδα καὶ τὸν ἑαυτόν του.

Ἕνας ἀριθμὸς λέγεται σύνθετος ὅταν δὲν εἶναι πρῶτος.

Ὁ διαιρέτης ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος λέγεται **δεύτερος διαιρέτης** τοῦ ἀριθμοῦ π.χ. ὁ δεύτερος διαιρέτης τοῦ 9 εἶναι ὁ 3, τοῦ 35 εἶναι ὁ 5, τοῦ 13 εἶναι ὁ 13. Ὥστε **ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν δεύτερον διαιρέτην.**

135. Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν: Ὁ ἀρχαῖος φιλό-

---

* Δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχσιν τῶν **πρώτων** ἀριθμῶν μὲ τοὺς **πρώτους πρὸς ἀλλήλους**. Δύο ἀριθμοὶ μπορεῖ νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀλλὰ χωριστὰ ἐξεταζόμενος καθένας μπορεῖ νὰ εἶναι ἢ πρῶτος ἢ σύνθετος π.χ.

8 καὶ 9 = πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἐνῶ 8 = σύνθετος, 9 = σύνθετος
7 καὶ 8 = » » » » 7 = πρῶτος, 8 = σύνθετος
5 καὶ 7 = » » » » 5 = πρῶτος, 7 = πρῶτος

σοφος Ἐρατοσθένης (276 — 195 π.χ.) βρῆκε μίαν μέθοδον μὲ τὴν ὁποίαν μποροῦμεν νὰ βροῦμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς καὶ ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι κάθε πολλαπλάσιον ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ εἶναι σύνθετος ἀριθμός. Θέλομεν π.χ. νὰ βροῦμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 1 μέχρι τὸ 100. Τοποθετοῦμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μέχρι τὸ 100 εἰς δέκα σειρὲς ἀπὸ 10 ἀριθμοὺς κάθε μία ὅπως φαίνεται παρακάτω. Ἔπειτα λέμε : Ὁ 2 εἶναι πρῶτος ἀλλὰ

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Σχ. 121. **Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.**

τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 εἶναι σύνθετοι ἀριθμοί. Διαγράφομεν λοιπὸν ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 (ὅλους τοὺς ἀρτίους ἀριθμοὺς πλὴν τοῦ 2). Ἔπειτα λέμε : Ὁ 3 εἶναι πρῶτος, ὅλα δὲ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 τὰ διαγράφομεν. (Ἀρχίζομεν νὰ διαγράφωμεν ἀπὸ τὸ 3 × 3 δηλ. 9 διότι τὸ 3 × 2 ἔχει διαγραφῆ ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 2). Κατόπιν διαγράφομεν ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 5 (ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 5 × 5 δηλ. 25) καὶ ἔπειτα διαγράφομεν ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7 (ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 7 × 7 δηλ. 49). Δὲν χρειάζεται νὰ συνεχίσωμεν διότι κατόπιν ἔπρεπε νὰ διαγράψωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 11 ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 11^2 δηλ. 121, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς τὸν ἄνω πίνακα διότι εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 100.

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ δὲν ἔχουν διαγραφῆ εἶναι πρῶτοι εἶναι δὲ οἱ ἑξῆς :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 καὶ 97.

Ἡ παραπάνω μέθοδος λέγεται **κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους.** Μὲ τὸ κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους μποροῦμεν νὰ βροῦμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς μέχρις ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν θέλομεν. Εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει πίναξ τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 1000.

136. Τροπὴ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων: Ὅταν μᾶς δοθῆ ἕνας ἀριθμὸς μποροῦμεν νὰ τὸν τρέψωμεν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων μὲ ἀλεπάλληλες διαιρέσεις, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω παραδείγματα.

Α) Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, τρέπεται εἰς γινόμενον τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, π.χ. $7 = 1 \times 7$, $31 = 1 \times 31$.

Β΄) Ὅταν εἶναι σύνθετος, διαιροῦμεν αὐτὸν μὲ τὸν δεύτερον διαιρέτην του, τὸ πηλίκον τὸ διαιροῦμεν μὲ τὸν δεύτερον διαιρέτην του κ.ο.κ. μέχρις ὅτου βροῦμε πηλίκον τὴν μονάδα. Ὅλους τοὺς διαιρέτας τοὺς γράφομεν δεξιὰ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς τὴν ὁποίαν σύρομεν δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ. Κάτω ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν βάζομεν τὸ ἑκάστοτε πηλίκον.

$$\begin{array}{r|l}
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
180 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5 \ \text{ἢ} \\
180 = 2^2 \times 3^2 \times 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\quad 32 = 2^5$$

137. 1 Ἐφαρμογαί: Τὴν μετατροπὴν τῶν ἀριθμῶν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τὴν χρησιμοποιοῦμεν α) Διὰ νὰ βρίσκωμεν τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν, β) διὰ νὰ γνωρίζωμεν μερικὰ ἀκόμη κριτήρια διαιρετότητος, γ) εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀριθμῶν κ.λ.π. ὅπως φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω.

137. 2 Α΄. Εὕρεσις μ.κ.δ. καὶ ε.κ.π. Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 120, 180, 720. Μετατρέπομεν αὐτοὺς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καὶ βρίσκομεν.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}$$

Διὰ νὰ βροῦμε τὸν μ.κ.δ. αὐτῶν σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον ποὺ περιέχει **μόνον τοὺς κοινοὺς** πρώτους παράγοντας καὶ κάθε ἕνα μὲ τὸν **μικρότερον ἐκθέτην**, δηλαδὴ βρίσκομεν

$$\mu.\kappa.\delta. = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60 \Longrightarrow \mu.\kappa.\delta. = 60$$

Διὰ νὰ βροῦμε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον ποὺ περιέχει **ὅλους** τοὺς πρώτους παράγοντας καὶ κάθε ἕνα μὲ τὸν **μεγαλύτερον** ἐκθέτην, δηλαδὴ βρίσκομεν.

$$\varepsilon.\kappa.\pi. = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \times 9 \times 5 = 720 \Longrightarrow \varepsilon.\kappa.\pi. = 720.$$

Παρατήρησις I. Πέρνομεν τοὺς δύο πρώτους πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὺς 8 καὶ 9 καὶ τοὺς τρέπομεν εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, δηλαδὴ

$$8 = 2^3, \qquad 9 = 3^2$$

βρίσκομεν δὲ $\mu.\kappa.\delta. = 1$, $\varepsilon.\kappa.\pi. = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \times 9 = 72$

Ὥστε : **Ὅταν δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους** (καὶ ἄρα ἔχουν μ.κ.δ. = 1 (§ 131) **τότε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενόν των.**

Παρατήρησις II. Ὅταν ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ καὶ $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, τότε ὁ μὲν μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι ἡ τομὴ $A \cap B$, τὸ δὲ ε.κ.π. αὐτῶν εἶναι ἡ ἕνωσις $A \cup B$. Πραγματικὰ ἔχομεν :

$$\mu.\kappa.\delta. = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = A \cap B$$
$$\varepsilon.\kappa.\pi. = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = A \cup B$$

137. 3 **Β′ Μερικὰ ἀκόμη κριτήρια διαιρετότητος:** α) **Κριτήριον διὰ 6.** Ἐπειδὴ εἶναι $2 \times 3 = 6$, διὰ τοῦτο κάθε ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3 θὰ περιέχῃ μέσα εἰς τὸ γινόμενον πρώτων παραγόντων του καὶ τὸ 2×3 δηλαδὴ τὸν ἀριθμὸν 6. Ἑπομένως θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 6. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 6 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3.

β) **Κριτήριον διὰ 12.** Ἐπειδὴ εἶναι $3 \times 4 = 12$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ 3 καὶ 4 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διὰ τοῦτο ἂν σκεφθοῦμεν ὅπως παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 12 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 3 καὶ διὰ 4.

Σημ. Εἶναι καὶ $2 \times 6 = 12$. Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 6 δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἄρα δὲν ἔχουν μ.κ.δ. τὸ 1. Ὥστε δὲν μποροῦμε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 12 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 6.

Πραγματικὰ ὁ ἀριθμὸς 30 ποὺ διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 6, δὲν διαιρεῖται διὰ 12. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 30 διαιρεῖται διὰ 3 ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται διὰ 4, ἄρα δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ 12.

γ) Κάνοντες τὰς παραπάνω σκέψεις μποροῦμε νὰ βγάλωμεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 18 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 9.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 30 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 6.

Ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 45 ὅταν διαιρῆται καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 9. κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

352. Νὰ μετατρέψετε εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων κάθε ἕνα ἀριθμὸν ἀπὸ τὰς παρακάτω ὁμάδας ἀριθμῶν καὶ ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. κάθε ὁμάδος

α) 60 καὶ 150, β) 64, 160 καὶ 288,

γ) 225, 675 καὶ 825 δ) 18, 54, 90, 144 καὶ 288.

353. Μὲ μετατροπὴν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων νὰ βρῆτε τὸν μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 72 καὶ 150. Κατόπιν νὰ συγκρίνετε τὸ γινόμενον (μ.κ.δ.)$\times$(ε.κ.π.) μὲ τὸ γινόμενον 72×150. Νὰ κάμετε καὶ ἄλλα παραδείγματα μὲ δύο ἄλλους ἀριθμοὺς καὶ νὰ βγάλετε ἕνα σχετικὸν κανόνα.

354. Νὰ βρῆτε τὸν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 350 καὶ 500 καὶ ἔπειτα μὲ βάσιν τὸν κανόνα ποὺ θὰ βγάλετε ἀπὸ τὴν λύσιν τῆς παραπάνω ἀσκήσεως νὰ βρῆτε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν.

355. Νὰ βρῆτε κριτήριον διαιρετότητος διὰ τοῦ 20 (νὰ κάμετε δοκιμὴν εἰς μερικὰ δικά σας παραδείγματα).

356. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸν ἀριθμὸν 60.

357. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸν ἀριθμὸν 75.

358. Ἀπὸ τοὺς παρακάτω ἀριθμοὺς 60, 90, 135, 144, 160, 180, 360 νὰ βρῆτε ποῖοι εἶναι πολλαπλάσια α) τοῦ 6, β) τοῦ 12, γ) τοῦ 20 καὶ δ) τοῦ 45.

359. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γινόμενον $\nu(\nu+1)(\nu+2)$ ἔνθα $\nu \in \Phi$ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6.

360. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 24.

361. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 120.

362. Νὰ βρῆτε ἕνα τριψήφιον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 8 ἀφίνει ὑπόλοιπον 5, διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 6 καὶ διὰ 10 ἀφίνει ὑπόλοιπον 7.

363. Ἂν τοποθετήσωμεν τοὺς μαθητὰς ἑνὸς Γυμνασίου καθ' ὁμάδας τῶν 10 ἢ τῶν 12 ἢ τῶν 16 μαθητῶν, μᾶς περισσεύουν 6 μαθηταί. Ἂν ὅμως τοὺς τοποθετήσωμεν καθ' ὁμάδας τῶν 11 μαθητῶν δὲν περισσεύει κανείς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου αὐτοῦ, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι εἶναι τριψήφιος ἀριθμός.

364. Νὰ ἀναλύσετε τοὺς ἀριθμοὺς 120, 150, 360, 600 εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων. Κατόπιν νὰ βρῆτε τὰ γινόμενα

α) 120×150, β) 120×360, γ) 120×600, δ) $120 \times 150 \times 360$ καὶ ε) $120 \times 150 \times 360 \times 600$ σημειώνοντες αὐτὰ ὡς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

365. Νὰ ἀναλύσετε εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων τὸν ἀριθμὸν 3 600. Κατόπιν νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸν ἀριθμὸν 1 200 ποὺ εἶναι διαιρέτης τοῦ 3 600. Νὰ συγκρίνετε τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ νὰ βγάλετε ἕνα συμπέρασμα.

366. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ παραπάνω συμπεράσματος νὰ διαπιστώσετε ἂν ὁ ἀριθμὸς $A = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$ διαιρῆται ἀκριβῶς ἢ ὄχι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν $B = 2^2 \times 3^2 \times 5$ καὶ ποῖον εἶναι τὸ πηλίκον $A : B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΣΤ'

ΑΛΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ

138. 1 Ὅπως εἴδαμε εἰς τὴν § 12 τὸ σύστημα ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦμεν γενικὰ εἶναι τὸ **δεκαδικὸν** σύστημα ἀριθμήσεως, κατὰ τὸ ὁποῖον **δέκα μονάδες** μιᾶς τάξεως κάνουν **μίαν μονάδα** τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς 10 λέγεται **βάσις** τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα εἶναι

ἡ μονὰς $1 = 10^0$, ἡ δεκὰς $10 = 10^1$, ἡ ἑκατοντὰς $100 = 10^2$, ἡ χιλιὰς $1000 = 10^3$ κ.λ.π. ἕνας δὲ ἀριθμὸς π.χ. ὁ 37856934 ἂν ἀναλυθῇ εἰς τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του γράφεται :

$$37\,856\,934 = 30\,000\,000 + 7\,000\,000 + 800\,000 + 50\,000 + 6\,000 + 900 + 30 + 4 \quad \text{ἢ} \quad 37\,856\,934 = 3\cdot10^7 + 7\cdot10^6 + 8\cdot10^5 + 5\cdot10^4 + 6\cdot10^3 + 9\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0$$

Ἡ ἀναλυτικὴ αὐτὴ γραφὴ ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ σχηματίζει τὸ λεγόμενον πολυώνυμον τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ (§ 125).

138. 2 Ὅταν ὅμως ὁρίσωμεν ὅτι : **Ὀκτὼ μονάδες μιᾶς τάξεως κάνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως,** τότε μποροῦμεν νὰ δημιουργήσωμεν τὸ λεγόμενον **ὀκταδικὸν** σύστημα ἀριθμήσεως μὲ **βάσιν** τὸ 8. Ὥστε εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως θὰ συμβαίνῃ ὅτι :

ὀκτὼ ἁπλαῖ μονάδες κάνουν μίαν **ὀκτάδα** (μονάδα 2ας τάξεως)
ὀκτὼ ὀκτάδες κάνουν μίαν **ὀκτάκις ὀκτάδα*** (μονάδα 3ης τάξεως)
ὀκτὼ μονάδες 3ης τάξεως κάνουν μίαν μονάδα 4ης τάξεως κ.λ.π.

(*) Ἡ ὀνομασία ὀκτάκις ὀκτάδα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἑκατοντάδα, μπῆκε κατὰ συνθήκην. Ἐὰν λειτουργοῦσε εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ ὀκταδικὸν σύστημα, τότε θὰ εἶχε δημιουργηθῆ μία λέξις ποὺ θὰ φανέρωνε τὴν μονάδα 3ης τάξεως τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, ὅπως ἔχει δημιουργηθῆ ἡ ὀνομασία **ἑκατοντάδα** ποὺ φανερώνει τὴν μονάδα 3ης τάξεως τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος. Ἐπίσης θὰ εἶχε δημιουργηθῆ ἀπὸ μία ὀνομασία διὰ τὴν μονάδα 4ης τάξεως (χιλιάδα), τὴν μονάδα 5ης τάξεως κλπ.

Εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως μᾶς χρειάζονται **ὀκτὼ** μόνον ἀραβικὰ ψηφία. Διότι ὅπως εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα τὸ δέκα ποὺ εἶναι μονὰς 2ας τάξεως γράφεται 10, δηλαδὴ μὲ τὴν μονάδα καὶ μὲ ἕνα μηδέν, ἔτσι καὶ εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα τὸ **ὀκτὼ** ποὺ εἶναι μονὰς 2ας τάξεως θὰ γραφῆ ὡς 10, δηλαδὴ μὲ τὴν μονάδα καὶ μὲ ἕνα μηδέν. Τὸ δὲ 9 (ποὺ εἶναι $8+1$) θὰ γραφῆ ὡς 11 καὶ τὸ 10 (ποὺ εἶναι $8+2$) θὰ γραφῆ ὡς 12. Ὥστε τὰ ψηφία 8 καὶ 9 δὲν χρειάζονται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα.

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 6345 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος γράφεται ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς :

$$(6345)_8 = 6\cdot 8^3 + 3\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 5\cdot 8^0$$

Καὶ ἂν μετατρέψωμεν αὐτὸν εἰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος βρίσκομεν :

$$\begin{aligned} 6\cdot 8^3 &= 6 \times 512 = 3072 \\ 3\cdot 8^2 &= 3 \times 64 = 192 \\ 4\cdot 8^1 &= 4 \times 8 = 32 \\ 5\cdot 8^0 &= 5 \times 1 = 5 \\ & \overline{3301} \end{aligned}$$

Ὥστε ἔχομεν $(6345)_8 = (3301)_{10}$ δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς 6345 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3301 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

138. 3 Ἐπίσης ἂν ὁρίσωμεν ὅτι : **Δώδεκα μονάδες μιᾶς τάξεως κάνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως,** τότε δημιουργοῦμεν τὸ **δωδεκαδικὸν** σύστημα ἀριθμήσεως μὲ **βάσιν** τὸ 12 καὶ τότε μᾶς χρειάζονται δύο ἀκόμη σύμβολα (ἀραβικὰ ψηφία), διότι πρέπει νὰ δημιουργήσωμεν ἕνα σύμβολον (ψηφίον) ποὺ θὰ παριστάνη τὸ δέκα καὶ ἕνα ἀκόμη σύμβολον ποὺ θὰ παριστάνη τὸ ἕνδεκα, καθόσον εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως καὶ τὸ δέκα καὶ τὸ ἕνδεκα εἶναι **μονοψήφιοι** ἀριθμοὶ ἐνῶ τὸ δώδεκα ποὺ θὰ εἶναι μονὰς 2ας τάξεως θὰ γραφῆ ὡς 10, δηλαδὴ μὲ τὴν μονάδα καὶ μὲ ἕνα μηδέν.

Ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 5978 τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος γράφεται ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς :

$$(5978)_{12} = 5\cdot 12^3 + 9\cdot 12^2 + 7\cdot 12^1 + 8\cdot 12^0$$

Καὶ ἂν μετατρέψωμεν αὐτὸν εἰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος βρίσκομεν :

$$\begin{aligned} 5\cdot 12^3 &= 5\times 1728 = 8640 \\ 9\cdot 12^2 &= 9\times 144 \;\;= 1296 \\ 7\cdot 12^1 &= 7\times 12 \;\;\;= \;\;\;84 \\ 8\cdot 12^0 &= 8\times 1 \;\;\;\;= \;\;\;\;8 \\ & \overline{\qquad\qquad\quad 10028} \end{aligned}$$

Ὥστε ἔχομεν $(5978)_{12} = (10028)_{10}$, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς 5978 τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10028 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

138. 4 Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 53264 τοῦ **ἑπταδικοῦ** συστήματος γράφεται ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς :

$$(53264)_7 = 5\cdot 7^4 + 3\cdot 7^3 + 2\cdot 7^2 + 6\cdot 7^1 + 4\cdot 7^0$$

Καὶ ἂν μετατρέψωμεν αὐτὸν εἰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος βρίσκομεν :

$$\begin{aligned} 5\cdot 7^4 &= 5\times 2401 = 12005 \\ 3\cdot 7^3 &= 3\times 343 \;\;= \;\;1029 \\ 2\cdot 7^2 &= 2\times 49 \;\;\;\;= \;\;\;\;98 \\ 6\cdot 7^1 &= 6\times 7 \;\;\;\;\;\;= \;\;\;\;42 \\ 4\cdot 7^0 &= 4\times 1 \;\;\;\;\;\;= \;\;\;\;\;4 \\ & \overline{\qquad\qquad\quad 13178} \end{aligned}$$

Ὥστε ἔχομεν $(53264)_7 = (13178)_{10}$, δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς 53264 τοῦ ἑπταδικοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 13178 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

139. Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι μποροῦμε νὰ δημιουργήσωμεν διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως, ἀνάλογα μὲ τὴν βάσιν ποὺ θὰ ἐκλέξωμεν. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως μόνον τὸ **δεκαδικὸν** σύστημα χρησιμοποιεῖται.

140. Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχει τὸ **δυαδικὸν σύστημα** ἀριθμήσεως, εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς βάσις τὸ δύο καὶ κατὰ τὸ ὁποῖον **δύο μονάδες μιᾶς τάξεως κάνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.** Εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα μᾶς χρειάζονται **δύο μόνον** ἀραβικὰ ψηφία τὸ 0 καὶ τὸ 1. Διότι τὸ δύο πού εἶναι μονὰς 2ας τάξεως θὰ γραφῇ ὡς 10, τὸ τρία ($2+1$) θὰ γραφῇ ὡς 11, τὸ τέσσαρα (μονὰς 3ης τάξεως, $4=2^2$) θὰ γραφῇ ὡς 100, τὸ πέντε θὰ γραφῇ ὡς 101 κ.λ.π.

Ὁ ἀριθμὸς 110101 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος γράφεται ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς :

$$(110101)_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

Καὶ ἂν τὸν μετατρέψωμεν εἰς μονάδας τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος βρίσκομεν :

$$(110101)_2 = 1\times 32 + 1\times 16 + 0\times 8 + 1\times 4 + 0\times 2 + 1 =$$
$$= 32 + 16 + 4 + 1 = 53$$

Ὥστε εἶναι $\qquad (110101)_2 = (53)_{10}$.

Τὸ δυαδικὸν σύστημα ἀριθμήσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν **ἠλεκτρονικὸν ἐγκέφαλον.** Εἶναι δὲ ὁ ἠλεκτρονικὸς ἐγκάφαλος μία πολυπλοκωτάτη συσκευὴ ἠλεκτρικῶν μηχανημάτων εἰς τὴν ὁποίαν ὑποβάλλονται ἐρωτήσεις κατὰ τέτοιον σαφῆ τρόπον, ὥστε ὁ ἐγκέφαλος νὰ ἀπαντήσῃ μὲ ἕνα ΝΑΙ (+), ἢ μὲ ἕνα ΟΧΙ (—).

Ὥστε εἰς τὸν ἠλεκτρονικὸν ἐγκέφαλον χρειάζονται δύο μόνον στοιχεῖα, τὸ ΝΑΙ (+) μὲ διαβίβασιν ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καὶ τὸ ΟΧΙ (—) μὲ διακοπὴν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, καὶ διὰ τοῦτο χρησιμοποιεῖ τὸ **δυαδικὸν σύστημα.** Ὁ ἠλεκτρονικὸς ἐγκέφαλος εἶναι χρησιμώτατος διότι δίνει λύσιν **μὲ ἀκρίβειαν καὶ ταχύτητα** εἰς προβλήματα διὰ τὴν λύσιν τῶν ὁποίων θὰ ἐχρειάζοντο πάρα πολλοὶ ἄνθρωποι καὶ πάρα πολὺς χρόνος. Ἡ σηματοδότησις τῶν κεντρικῶν ὁδῶν τῶν Ἀθηνῶν, ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ Ἀπολυτηρίου, ἡ σύνταξις τῶν ἐκλογικῶν καταλόγων, ὁ προσδιορισμὸς τοῦ φόρου εἰσοδήματος εἰς τὰς οἰκονομικὰς ἐφορίας, ἡ καθημερινὴ καταγραφὴ τῶν ὑπολοίπων ἐμπορευμάτων ἑνὸς μεγάλου καταστήματος κ.λ.π. εἶναι προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίνει λύσιν ἀκριβῆ καὶ ταχύτατα ὁ ἠλεκτρονικὸς ἐγκέφαλος.

Ἀσκήσεις

367. Νὰ γράψετε κατὰ τὸ ὀκταδικὸν σύστημα τοὺς ἀριθμοὺς 15, 26, 32, 64 καὶ 75 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

368. Νὰ γράψετε κατὰ τὸ ἑπταδικὸν σύστημα τοὺς ἀριθμοὺς 12, 14, 28, 30 καὶ 91 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

369. Ὁ ἀριθμὸς 2 563 τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

370. Ὁ ἀριθμὸς 2321 τοῦ πενταδικοῦ συστήματος νὰ γραφῇ κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Πράξεις μὲ ἀριθμοὺς ἄλλων συστημάτων

141. 1 Α΄. Πρόσθεσις: 1) Θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 3246, 5477, 1665 καὶ 172 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος πρὸς τοῦτο βρίσκομεν :

α) $2+5+7+6=20$ ἁπλαῖ μονάδες $=2$ ὀκτάδες καὶ 4 μονάδες. Γράφομεν τὰς 4 μονάδας καὶ ἔχομεν 2 κρατούμενα

β) $7+6+7+4+2=26$ μονάδες 2ας τάξεως $=3$ μονάδες 3ης τάξεως καὶ 2 μονάδες 2ας τάξεως. Γράφομεν τὸ 2 καὶ ἔχομεν 3 κρατούμενα.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,3\,2} \\ 3246 \\ 5477 \\ 1665 \\ 172 \\ \hline 13024 \end{array} +$$

γ) $1+6+4+2+3=16$ μονάδες 3ης τάξεως $=2$ μονάδες 4ης τάξεως καὶ 0 μονάδες 3ης τάξεως. Γράφομεν τὸ 0 καὶ ἔχομεν 2 κρατούμενα.

δ) $1+5+3+2=11$ μονάδες 4ης τάξεως $=1$ μονάδα 5ης τάξεως καὶ 3 μονάδες 4ης τάξεως. Γράφομεν τὸ 3 καὶ ἔπειτα ἀριστερὰ τὸ 1. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν παραπάνω τεσσάρων ἀριθμῶν τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος εἶναι 13024.

2) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀπέναντι ἀριθμῶν τοῦ πενταδικοῦ συστήματος

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 342 \\ 103 \\ 224 \\ \hline 1224 \end{array} +$$

3) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀπέναντι ἀριθμῶν τοῦ δυαδικοῦ συστήματος

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 101101 \\ 1011 \\ \hline 111000 \end{array} +$$

Ἀσκήσεις

371. Νὰ βρῆτε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 352, 5 241, 2 376, 754 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος.

372. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 3 527, 6 714, 253, 5 827 καὶ 356 τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος ;

373. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 110 010, 10 111 καὶ 1 101 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ;

141. 2 **Β′**. **Ἀφαίρεσις**: Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὰς παρακάτω ἀφαιρέσεις :

α) **Ἐννεαδικοῦ συστήματος**

$$\begin{array}{r} \underbrace{13}\;\underbrace{11} \\ 8452 \\ 4735 \\ \hline 3616 \end{array} -$$

β) **Δυαδικοῦ συστήματος**

$$\begin{array}{r} \underbrace{2}\;\;\underbrace{2} \\ 10110 \\ 1101 \\ \hline 1001 \end{array} -$$

α) Εἰς τὸ ἐννεαδικὸν σύστημα : Αἱ 5 μονάδες δὲν βγαίνουν ἀπὸ τὰς 2 μονάδας. Διὰ τοῦτο πέρνομεν μίαν μονάδα τῆς 2ας τάξεως (ἐννεάδα) ποὺ κάνει 9 μονάδες $+ 2 = 11$ καὶ λέμε 5 ἀπὸ 11 ἴσον 6. Τὴν μίαν ἐννεάδα τὴν προσθέτομεν ὡς κρατούμενον εἰς τὸ 3 δηλαδὴ $3 + 1 = 4$ ἀπὸ $5 = 1$. Ἐπίσης αἱ 7 (ἑκατοντάδες) δὲν βγαίνουν ἀπὸ τὰς 4. Διὰ τοῦτο πέρνομεν μίαν μονάδα 4ης τάξεως καὶ τὴν κάνομεν 9 μονάδες 3ης τάξεως δηλαδὴ $9 + 4 = 13$ καὶ 7 ἀπὸ $13 = 6$. Κατόπιν εἰς τὰς μονάδας 4ης τάξεως λέμε $4 + 1$ κρατούμενον $= 5$ ἀπὸ $8 = 3$. Ὥστε βρίσκομεν ὅτι εἶναι $8452 - 4735 = 3616$.

β) Εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα : 1 ἀπὸ 0 δὲν βγαίνει. Πέρνομεν μίαν μονάδα 2ας τάξεως ποὺ κάνει 2 μονάδες 1ης τάξεως καὶ λέμε 1 ἀπὸ $2 = 1$. Ἔπειτα λέμε $0 + 1$ κρατούμενον $= 1$ ἀπὸ $1 = 0$ κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

374. Νὰ βρῆτε τὴν διαφορὰν 3 726 — 677 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος.

375. Νὰ βρῆτε τὴν διαφορὰν 2 301 — 323 τοῦ τετραδικοῦ συστήματος.

376. Νὰ βρῆτε τὴν διαφορὰν 101 100 — 10 110 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

141. 3 **Γ′**. **Πολλαπλασιασμός**: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ γινόμενον 3472×6 τοῦ **ὀκταδικοῦ** συστήματος. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὅπως κάτωθι.

Λέμε : α) $6 \times 2 = 12 = 8 + 4$, γράφομεν 4 καὶ ἔχομεν 1 κρατούμενον.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,5\,1} \\ 3472 \\ 6\ \times \\ \hline 25534 \end{array}$$

β) $6 \times 7 = 42 + 1 = 43 = 40 + 3 = 5 \cdot 8 + 3$, γράφομεν 3 καὶ ἔχομεν 5 κρατούμενα.

γ) $6 \times 4 = 24 + 5 = 29 = 3 \,.\, 8 + 5$, γράφομεν 5 καὶ ἔχομεν 3 κρατούμενα.

δ) $6 \times 3 = 18 + 3 = 21 = 2 \,.\, 8 + 5$, γράφομεν 5 καὶ τὰ 2 κρατούμενα τὰ γράφομεν ἐμπρὸς ἀπὸ τὸ 5.

Ὥστε τὸ γινόμενον 3472×6 τοῦ **ὀκταδικοῦ** συστήματος εἶναι 25534.

Ἀσκήσεις

377. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενον 256×37 τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος.

378. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενον $4\,324 \times 34$ τοῦ πενταδικοῦ συστήματος.

379. Νὰ βρῆτε τὸ γινόμενον $1\,011 \times 1101$ τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

142. Τροπὴ ἀριθμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν ἄλλου συστήματος : Θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν 3893 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος. Τοῦτο γίνεται μὲ διαδοχικὲς διαιρέσεις διὰ 8, ὅπως φαίνεται παρακάτω :

$$\begin{array}{r|l}
3893 & 8 \\ \cline{2-2}
69 & \begin{array}{r|l} 486 & 8 \\ \cline{2-2} 06 & \begin{array}{r|l} 60 & 8 \\ \cline{2-2} \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{array} \\ \mathbf{6} & \end{array} \\
53 & \\
\mathbf{5} &
\end{array}$$

Τὸ τελευταῖον πηλίκον 7 εἶναι αἱ μονάδες τῆς μεγαλυτέρας τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ ζητοῦμεν καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα ἐκ δεξιῶν εἶναι τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῶν ἄλλων τάξεων. Ἔτσι βρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν 7465. Ὥστε ἔχομεν $(\,3893\,)_{10} = (\,7465\,)_8$

Δοκιμή. Ὁ ἀριθμὸς 7465 τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος, μετατρεπόμενος εἰς ἀριθμὸν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, δίνει :

$$\begin{array}{rrrr}
7465 = 7 \times 8 = & 56\ + & & \\
& 4\ \ & & \\ \cline{2-2}
& 60 \times 8 = & 480\ + & \\
& & 6\ \ & \\ \cline{3-3}
& & 486 \times 8 = & 3888\ + \\
& & & 5\ \ \\ \cline{4-4}
& & & 3893
\end{array}$$

ἢ $7465 = 7 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 6 . 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 7 \times 512 + 4 \times 64 + 6 \times 8 + 5 = 3584 + 256 + 48 + 5 = 3893.$

Ἀσκήσεις

380. Νὰ μετατρέψετε τὸν ἀριθμὸν 94 373 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς ἀριθμὸν τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος.

381. Ὁ ἀριθμὸς 2 598 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος νὰ γίνῃ ἀριθμὸς τοῦ ἑξαδικοῦ συστήματος.

382. Ὁ ἀριθμὸς 9 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος μὲ ποῖον ἀριθμὸν τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ἰσοδυναμεῖ;

383. Ὁ ἀριθμὸς 265 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος νὰ γίνῃ ἀριθμὸς τοῦ δυαδικοῦ συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ΄

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΖΕΥΓΗ - ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ

143. 1 Διατεταγμένον ζεῦγος: Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Δύο μαθηταὶ ἔχουν μαζὺ 6 μολύβια. Πόσα μολύβια ἔχει κάθε ἕνας;

Ἂν ποῦμε ὅτι ὁ πρῶτος μαθητὴς ἔχει x μολύβια καὶ ὁ δεύτερος μαθητὴς ἔχει y μολύβια, τότε θὰ εἶναι:

$$x + y = 6$$

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ βροῦμε τὰς ἑξῆς λύσεις:

Ἂν ὁ πρῶτος ἔχῃ 1 μολύβι, τότε ὁ δεύτερος θὰ ἔχῃ 5 μολύβια
» » » 2 » » » » 4 »
» » » 3 » » » » 3 »
» » » 4 » » » » 2 »
» » » 5 » » » » 1 »

Δηλαδὴ τὸ πρόβλημα ἔχει τὰς ἑξῆς **πέντε** λύσεις:

$(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς πέντε λύσεις περιέχει δύο ἀριθμούς, εἶναι δηλαδὴ **ἕνα ζεῦγος** ἀριθμῶν, εἶναι δὲ καὶ αἱ πέντε ἐντελῶς διάφοροι μεταξύ των, π.χ. ἡ λύσις (2, 4) λέγει ὅτι ὁ α′ μαθητὴς ἔχει 2 μολύβια καὶ ὁ β′ ἔχει 4 μολύβια, ἐνῶ ἡ λύσις (4, 2) λέγει ὅτι ὁ α′ μαθητὴς ἔχει 4 μολύβια καὶ ὁ β′ ἔχει 2 μολύβια. Ὥστε ἡ λύσις (2, 4) εἶναι ἐντελῶς διάφορη ἀπὸ τὴν λύσιν (4, 2).

Οἱ δύο ἀριθμοὶ κάθε λύσεως εἶναι **διατεταγμένοι** εἶναι δηλαδὴ γραμμένοι κατὰ ὡρισμένην σειρὰν (πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μολυβιῶν τοῦ α′ μαθητοῦ καὶ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μολυβιῶν τοῦ β′ μαθητοῦ). Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι κάθε λύσις ἀποτελεῖ ἕνα **διατεταγμένον ζεῦγος**. Ὥστε :

Διατεταγμένον ζεῦγος λέγεται τὸ ζεῦγος δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ κάποιαν ὡρισμένην διάταξιν.

Οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους γράφονται συνήθως ἐντὸς παρενθέσεως καὶ χωρίζονται μὲ κόμμα.

Σημ. Ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι διαφορετικὸν ἀπὸ ἕνα σύνολον μὲ δύο στοιχεῖα. Π.χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 2 καὶ 4 ἢ 4 καὶ 2 ἔχουν σύνολον τὸ $\{2, 4\} = \{4, 2\}$ ἀλλὰ σχηματίζουν τὰ ἑξῆς δύο διαφεριτικὰ διατεταγμένα ζεύγη (2, 4) καὶ (4, 2). Ἐπίσης τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (3,3) ἔχει δύο ὅμοια στοιχεῖα ἐνῶ ὡς σύνολον γράφεται $\{3\}$.

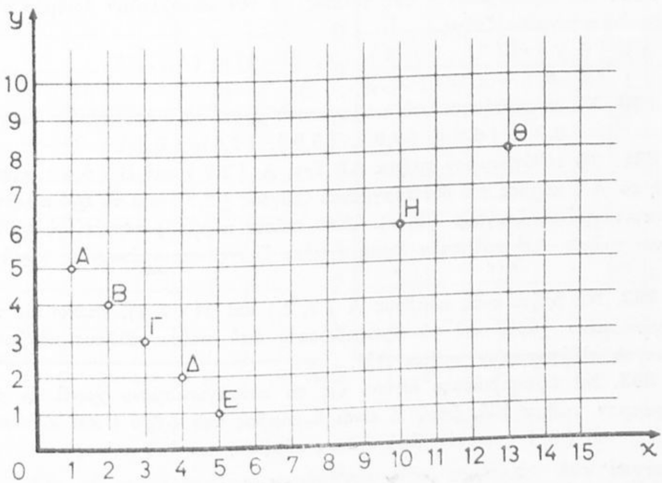
Ἑπομένως **διὰ νὰ εἶναι ἴσα δύο διατεταγμένα ζεύγη,** διὰ νὰ εἶναι δηλαδὴ (α, β) = (γ, δ) **πρέπει νὰ εἶναι καὶ** $\alpha = \gamma$ **καὶ** $\beta = \delta$.

143. 2 Ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος μπορεῖ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ὡς ἑξῆς : Πέρνομεν τὰς δύο ἡμιευθείας (ἡμιάξονες) ΟΧ καὶ ΟΨ ποὺ σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{X O \Psi} = 1^L$ καὶ ἐπάνω σὲ κάθε μίαν τοποθετοῦμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς (§ 28) μὲ τὸ 0 εἰς τὴν ἀρχὴν Ο αὐτῶν. Ἔπειτα σύρομεν καθέτους καὶ παραλλήλους ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν καὶ ἔτσι κατασκευάζομεν τὸ λεγόμενον **τετραγωνισμένον** χαρτὶ (ὅπως εἶναι τὸ τετράδιον ἀριθμητικῆς τοῦ δημοτικοῦ σχολείου ἢ τὸ μιλιμετρὲ χαρτὶ σχεδιάσεως τῶν μηχανικῶν). Τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν γραμμῶν τοῦ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ λέγονται **κόμβοι.**

Ἔτσι ὅταν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) τῶν λύσεων τοῦ παραπάνω προβλήματος, πέρνομεν ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ τὴν τιμὴν τοῦ x (τὴν πρώτην) καὶ ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΟΨ πέρνομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ y (τὴν δευτέραν). Ὁ κόμβος εἰς τὸν ὁποῖον διασταυρώνονται αἱ δύο ἀντίστοιχοι γραμμαὶ παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ ζεύγους (τὴν λύσιν). π.χ.

Τὸ Α παριστᾶ τὴν λύσιν (1, 5) ὅπου εἶναι $x = 1$, $y = 5$
Τὸ Β » » » (2, 4) » » $x = 2$, $y = 4$
Τὸ Δ » » » (4, 2) » » $x = 4$, $y = 2$ κλπ.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως κάθε κόμβος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ἐντελῶς ὡρισμένον διατεταγμένον ζεῦγος. π.χ. ὁ κόμβος Γ ποὺ ἔχει $x = 3$ καὶ $y = 3$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος



Σχ. 122.

(3, 3). Ὁ κόμβος Η, ποὺ ἔχει $x = 10$, $y = 6$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (10, 6). Ὁ κόμβος Θ ποὺ ἔχει $x = 13$ καὶ $y = 8$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (13, 8) κ.λ.π. Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Κάθε κόμβος ἑνὸς τετραγωνισμένου χαρτιοῦ δίνει τὴν εἰκόνα ἑνὸς μόνον ζεύγους ἀριθμῶν (x, y) ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος (ὁ x) βρίσκεται ἐπάνω εἰς τὸν ἡμιάξονα ΟΧ καὶ ὁ δεύτερος (ὁ y) βρίσκεται ἐπάνω εἰς τὸν ἡμιάξονα ΟΨ.

Ἀσκήσεις

384. Νὰ σχηματίσετε τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν λύσιν τῆς ἰσότητος $x+y=8$, ἔνθα $x, y \in \Phi$, καὶ τὴν γραφικὴν λύσιν αὐτῶν.

385. Τὸ ἴδιον πρόβλημα διὰ τὴν ἰσότητα $x+y=8$, ἔνθα $x, y \in \Phi_0$.

386. Τὸ ἴδιον πρόβλημα διὰ τὴν ἰσότητα $x+y=1$, ἔνθα

$$x \in \Phi_0 \wedge y \in \Phi_0.$$

387. Τὸ ἴδιον διὰ τὴν ἰσότητα $x+y=10$, ἔνθα $x \in \Phi_0 \wedge y \in \Phi_0$

388. Νὰ βρῆτε τὴν τιμὴν τοῦ x ἢ τοῦ y εἰς τὰ ἀκόλουθα ἴσα διατεταγμένα ζεύγη :

α) $(x, 5) = (4, 5)$ β) $(7, y) = (3+4, 5-2)$

γ) $(x, y) = (9-3, 2+4)$.

389. Νὰ συμπληρώσετε τὰς τελείας μὲ τὸν κατάλληλον ἀριθμὸν εἰς τὰ ἑξῆς διατεταγμένα ζεύγη.

α) $(6, y) = (\ldots, 7)$ β) $(x, 9-1) = (4, \ldots)$

γ) $(5+8, 6-2) = (\ldots, \ldots)$.

390. Νὰ παραστήσετε στὸ τετραγωνικὸ χαρτὶ τὰ διατεταγμένα ζεύγη

$$(0,7),\ (6,8),\ (9,0),\ (5,9),\ (7,1),\ (0,0).$$

391. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει Α (2,7) καὶ Β (6,3), εἶναι δηλαδὴ τὸ Α ὁ κόμβος τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (2,7) καὶ τὸ Β ὁ κόμβος τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (6,3). Ἀπὸ ποίους κόμβους περνάει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ποῖα διατεταγμένα ζεύγη παριστάνουν οἱ κόμβοι αὐτοί ;

392. Νὰ βρῆτε τοὺς κόμβους Λ (3, 2) καὶ Μ (7, 4), ἐπάνω εἰς τὸ τετραγωνισμένο χαρτὶ καὶ νὰ ἐξακριβώσετε ἀπὸ ποίους ἄλλους κόμβους περνάει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΛΜ.

393. Νὰ ἐξακριβώσετε ἐπάνω εἰς τὸ τετραγωνισμένο χαρτὶ ἂν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ, ὅπου Ε εἶναι ὁ κόμβος τοῦ (2, 5) καὶ Ζ εἶναι ὁ κόμβος τοῦ (9, 1) περνάει ἀπὸ ἄλλους κόμβους καὶ ἀπὸ ποίους ;

144. 1 Καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων : Πέρνομεν τὰ δύο σύνολα

$$A = \{2, 6, 8\}$$
$$B = \{4, 7\}$$

καὶ σχηματίζομεν ἕνα νέον σύνολον Γ ποὺ ἔχει ὡς στοιχεῖα ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη ποὺ μποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν λαμβάνοντες ὡς πρῶτον μέλος ἑκάστου ζεύγους ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α καὶ ὡς δεύτερον μέλος ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β, δηλαδὴ

$$\Gamma = \{(2, 4), (6, 4), (8, 4), (2, 7), (6, 7), (8, 7)\}$$

Τότε τὸ σύνολον Γ τὸ ὀνομάζομεν **Καρτεσιανὸν*** **γινόμενον** τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β, τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς :

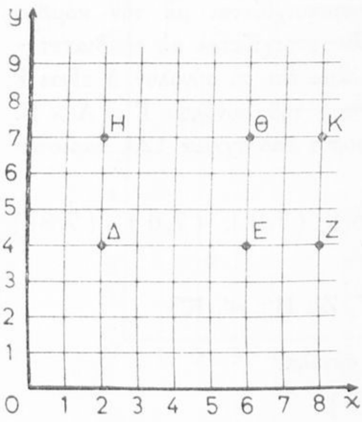
$$A \times B = \Gamma$$

καὶ τὸ διαβάζομεν ὡς ἑξῆς : **Α καρτεσιανὸν γινόμενον Β.**
Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

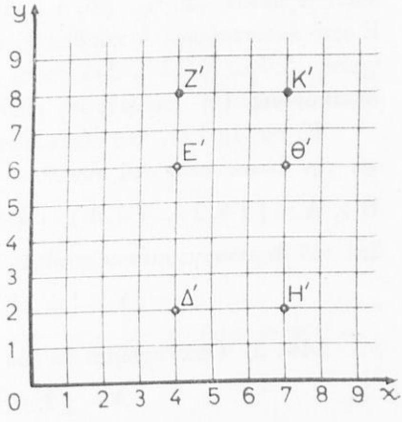
$A \times B = \{ (2,4), (6,4), (8,4), (2,7), (6,7), (8,7) \}$
καὶ $B \times A = \{ (4,2), (4,6), (4,8), (7,2), (7,6), (7,8) \}$

$$A \times B \neq B \times A$$

ἀφοῦ εἶναι $(2,4) \neq (4,2)$, $(6,4) \neq (4,6)$ κ.λ.π. δηλαδὴ



Σχ. 123.



Σχ. 124.

Εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

Σημ. Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον

$$A \times \varnothing = \varnothing$$

διότι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο σύνολα εἶναι τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ ποὺ δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον. Ἑπομένως δὲν μποροῦν νὰ σχηματισθοῦν διατεταγμένα ζεύγη.

Ἐπίσης εἶναι $\varnothing \times A = \varnothing$

(*) Ὠνομάσθηκε **Καρτεσιανὸν** γινόμενον πρὸς τιμὴν τοῦ πρώτου χρησιμοποιήσαντος τὰ διατεταγμένα ζεύγη διὰ τὴν παράστασιν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μαθηματικοῦ Καρτεσίου (Descartes 1596 — 1650).

Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου $A \times B$ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 123 ὅπου Δ εἶναι ὁ κόμβος τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(2,4)$, E εἶναι ὁ κόμβος τοῦ $(6,4)$ κ.λ.π. Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς ἓξ κόμβους Δ, E, Z, H, Θ, K ἀντιπροσωπεύει ἢ **ἀπεικονίζει** κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἓξ διατεταγμένα ζεύγη - στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \times B$. Οἱ ἓξ αὐτοὶ κόμβοι σχηματίζουν ἕνα σύνολον Λ, δηλαδὴ

$$\Lambda = \{\Delta, E, Z, H, \Theta, K\}$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι μεταξὺ τῶν στοιχείων (διατεταγμένων ζευγῶν) τοῦ συνόλου $A \times B$ καὶ τῶν στοιχείων (κόμβων) τοῦ συνόλου Λ ὑφίσταται πλήρης ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα. π.χ. τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(6, 4)$ ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν κόμβον E καὶ ἀντιστρόφως ὁ κόμβος E ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(6,4)$. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ σύνολον Λ εἶναι ἡ **ἀπεικόνισις** (ἡ γεωμετρικὴ εἰκόνα) τοῦ συνόλου $\Gamma = A \times B$.

Τὸ σχῆμα 124, ποὺ εἶναι διάφορον ἀπὸ σχῆμα 123, παριστάνει τὴν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου

$$B \times A = \{(4,2), (4,6), (4,8), (7,2), (7,6), (7,8)\}$$

ἐπὶ τοῦ δημιουργουμένου συνόλου

$$\Lambda' = \{\Delta', E', Z', H', \Theta', K'\}$$

144. 2 Ὅταν ἔχωμεν τὰ δύο σύνολα

$$A = \{2, 6, 8\}$$
$$B = \{2, 6, 8\}$$

τότε εἶναι $A = B$ καὶ τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times B$ ἢ $A \times A$ ἢ A^2 γράφεται :

$$A^2 = \{(2,2), (6,2), (8,2), (2,6), (6,6), (8,6), (2,8), (6,8), (8,8)\}$$

καὶ διαβάζεται : **A καρτεσιανὸν γινόμον A,** ἡ δὲ ἀπεικόνισίς του φαίνεται εἰς τὸ ἀπέναντι σχῆμα 125.

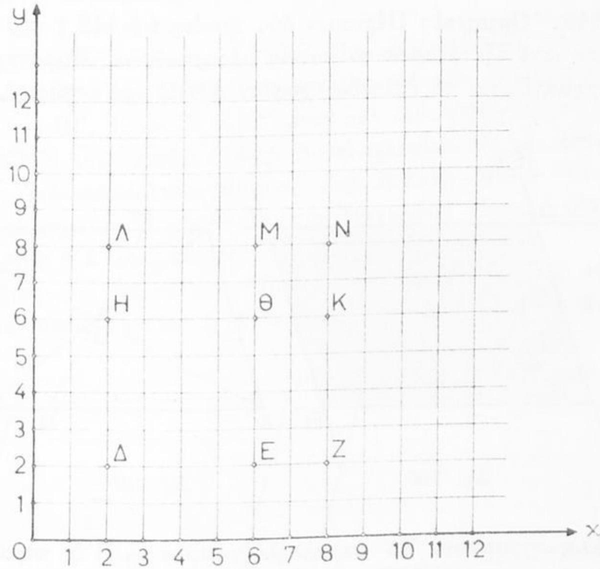
Ἀσκήσεις

394. Νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν δύο συνόλων $\Sigma = \{1, 5, 7, 9\}$ καὶ $P = \{4, 6, 9\}$ καὶ νὰ κάμετε τὴν ἀπεικόνισίν του (γεωμετρικὴν εἰκόνα του).

395. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰ δύο σύνολα

$$\Sigma = \{10, 30, 40, 70\} \text{ καὶ } P = \{30, 40, 80\}$$

(Εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα μπορεῖτε νὰ τοποθετήσετε ἐπάνω εἰς τοὺς ἡμιάξονας τοὺς ἀριθμοὺς ἀνὰ 10, διὰ νὰ γίνῃ μικρότερον τὸ σχεδιάγραμμα).



Σχ. 125.

396. Νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν δύο συνόλων

$$\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ καὶ } P = \{\lambda, \mu, \nu\}$$

Εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα μπορεῖτε νὰ πάρετε ἐπάνω εἰς τοὺς ἡμιάξονας ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, ... μόνον τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ εἰς τὸν ἕνα ἡμιάξονα καὶ λ, μ, ν εἰς τὸν ἄλλον ὑποθέτοντες ὅτι εἶναι

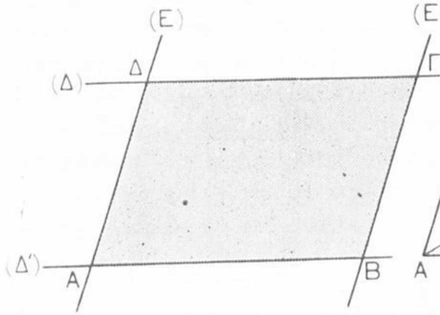
$$\alpha < \beta < \gamma \quad \text{καὶ} \quad \lambda < \mu < \nu.$$

397. Νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον A^2 καὶ τὴν ἀπεικόνισίν του διὰ τὸ σύνολον $A = \{3, 4, 7, 10\}$

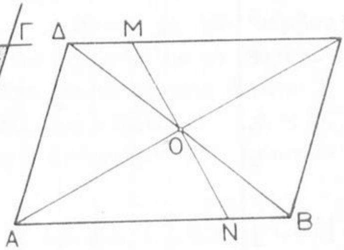
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΝ

145. Ὁρισμοί: Πέρνομεν δύο ταινίες (§ 112) ποὺ νὰ τέμνωνται καὶ ἐξετάζομεν τὸ κοινὸν μέρος αὐτῶν. Παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζεται τὸ ἐπίπεδον χωρίον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον λέγεται



Σχ. 126.



Σχ. 127.

παραλληλόγραμμον. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ περατοῦται εἰς τὰ τέσσαρα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τὰ ὁποῖα λέγονται **πλευραὶ** αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ πλευραί, λέγονται κορυφαὶ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἀνὰ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ὁρίζουν μίαν γωνίαν, ἤτοι $\widehat{\Delta A B}$ ἢ $\widehat{A}$, $\widehat{AB\Gamma}$ ἢ $\widehat{B}$, $\widehat{B\Gamma\Delta}$ ἢ $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta A}$ ἢ $\widehat{\Delta}$. Ἔχει λοιπὸν τὸ παραλληλόγραμμον τέσσαρας γωνίας, τὰς $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἐπειδὴ ἔχει τέσσαρας πλευράς, λέγεται γενικώτερα **τετράπλευρον.**

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο, δηλαδὴ ΑΒ // ΓΔ καὶ ΑΔ // ΒΓ. Ὥστε μποροῦμεν νὰ ποῦμε ὅτι :

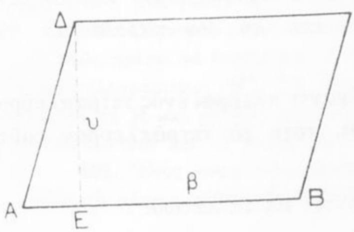
Παραλληλόγραμμον λέγεται τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους ἀνὰ δύο.

Περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πλευρῶν αὐτοῦ.

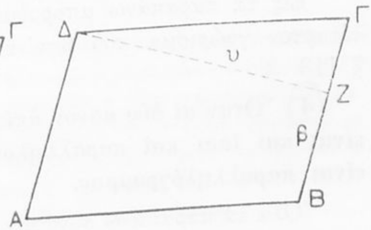
Κάθε πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου ἑνώνει δύο διαδοχικὰς κορυφάς. Ἡ ΑΓ ὅμως ποὺ ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς λέγεται **διαγώνιος** αὐτοῦ (σχ. 127). Διαγώνιος ἐπίσης εἶναι καὶ ἡ ΒΔ. Ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει 4 πλευράς, 4 κορυφάς, 4 γωνίας καὶ 2 διαγωνίους.

Ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν § 113.3, 3ον τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων εἶναι **κέντρον συμμετρίας** καὶ τῶν ΑΒ // ΓΔ καὶ τῶν ΑΔ // ΒΓ. Εἶναι δὲ τὸ Ο μέσον καὶ κάθε εὐθυγράμμου τμήματος ΜΟΝ ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ Ο καὶ τελειώνει εἰς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, εἶναι δηλαδὴ ΜΟ = ΟΝ Διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων λέγεται **κέντρον συμμετρίας** ἢ ἁπλῶς **κέντρον** τοῦ παραλληλογράμμου.

Βάσις τοῦ παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρὰ αὐτοῦ, ὕψος δὲ αὐτοῦ λέγεται ἡ ἀπόστασις (§ 116.3) τῆς ἀπέναντι



Σχ. 128.



Σχ. 129.

πλευρᾶς ἀπὸ τὴν βάσιν. π.χ. τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἂν ὡς βάσις ληφθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ, τότε τὸ ὕψος εἶναι ἡ ΔΕ ⊥ ΑΒ (σχ. 128) ἂν ὅμως ὡς βάσις ληφθῇ ἡ ΒΓ, τότε τὸ ὕψος εἶναι ἡ ΔΖ ⊥ ΒΓ (σχ. 129).

146. 1 Ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου: Ἀφοῦ τὸ σημεῖον Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου, συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι :

α) ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ (σχ. 127) δηλαδὴ

Αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

β) Τὰ δύο σχήματα ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, συμμετρικὰ πρὸς κέντρον τὸ Ο, εἶναι ἴσα (§ 113.2) καὶ ἄρα θὰ εἶναι

$$AB = \Gamma\Delta \text{ καὶ } A\Delta = B\Gamma \text{ δηλαδὴ}$$

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

γ) Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$, δηλαδὴ

Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

146. 2 Πότε ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἀλλὰ ἀληθεύουν καὶ αἱ ἀντίστροφοι τῶν παραπάνω προτάσεων, δηλαδὴ

1) **Ὅταν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τετραπλεύρου διχοτομοῦνται, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

2) **Ὅταν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

3) **Ὅταν αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

Εἰς τὰ παραπάνω μποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἑξῆς τέταρτον γνώρισμα ποὺ βγαίνει ἀπὸ τὸ 3ον παράδειγμα τῆς § 113. 3.

4) **Ὅταν αἱ δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι καὶ ἴσαι καὶ παράλληλοι, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.**

Ὅλα τὰ παραπάνω συνοψίζονται εἰς τὰ κάτωθι :

$$AB\Gamma\Delta = \text{παραλληλό-γραμμον } (AB//\Gamma\Delta,\ A\Delta//B\Gamma) \quad \begin{cases} \Longleftrightarrow AO = O\Gamma \wedge BO = O\Delta \\ \qquad \text{ἔνθα } O = A\Gamma \cap B\Delta \\ \Longleftrightarrow AB = \Delta\Gamma \wedge A\Delta = B\Gamma \\ \Longleftrightarrow \widehat{A} = \widehat{\Gamma} \wedge \widehat{B} = \widehat{\Delta} \\ \Longleftrightarrow AB \,//\, \Gamma\Delta \wedge AB = \Gamma\Delta \end{cases}$$

Κατὰ τὴν § 114 εἶναι $A + \Delta = 2^L$ ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν $AB//\Delta\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $A\Delta$. Ὥστε ἂν γνωρίζωμεν τὴν μίαν γωνίαν ἑνὸς παραλληλογράμμου, μποροῦμεν νὰ βροῦμεν ὅλας τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ. Ἂν π.χ. εἶναι $\Delta = 136^0\ 20'$ τότε θὰ εἶναι καὶ $B = 136^0\ 20'$

$A + \Delta = 180^0$ ἄρα $180^0 = 179^0\ 60'$

$\widehat{\Delta} = 136^0\ 20'$

$\widehat{A} = 43^0\ 40'$

Ὥστε εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{A} = 43^0\ 40'$

Ἀφοῦ εἶναι $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^0$ καὶ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0$ εὑρίσκομεν

$A + B + \Gamma + \Delta = 360^0 = 4^L$ Ὥστε :

√ **Καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς γωνίας** (ἢ μὲ 360^0).

Ἀσκήσεις

398. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ πλευρὰς 3 cm καὶ 5 cm καὶ μὲ μίαν γωνίαν 45^0. Νὰ βρῆτε τὴν περίμετρόν του καὶ κάθε μίαν γωνίαν του.

399. Ἕνα παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον 18 cm καὶ ἡ μία πλευρά του εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ἄλλην. Νὰ τὸ κατασκευάσετε ἂν γνωρίζετε ὅτι ἡ μία γωνία αὐτοῦ εἶναι 120^0.

400. Πέρνομεν μίαν ταινίαν Τ πλάτους 4 cm. καὶ τὸ σημεῖον $K \in T$. α) Πῶς πρέπει νὰ ἐκλέξωμεν τὸ Κ ὥστε νὰ εἶναι κέντρον συμμετρίας ἑνὸς παραλληλογράμμου ; β) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα παραλληλόγραμμον μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. γ) Νὰ μετρήσετε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον καὶ νὰ βρῆτε τὴν περίμετρόν του (κατὰ προσέγγισιν).

401. Ἑνὸς παραλληλογράμμου ἡ μία γωνία εἶναι $50^0\ 10'\ 35''$. Νὰ βρῆτε τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ.

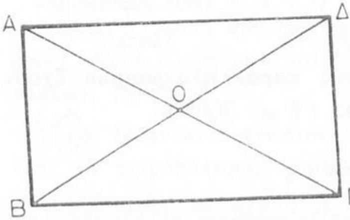
Εἴδη παραλληλογράμμων

147. 1 Α) **Τὸ ὀρθογώνιον** : Αἱ δύο ταινίαι τοῦ σχήματος 126 ποὺ σχηματίζουν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ **δὲν τέμνονται καθέτως** (τέμνονται **πλαγίως**). Διὰ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ λέγεται **πλάγιον παραλληλόγραμμον.** Ἂν ὅμως αἱ δύο ταινίαι τμηθοῦν καθέτως, τότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 130) τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, δηλαδὴ $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 1^L$. Διὰ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο λέγεται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς **ὀρθογώνιον.** Ὥστε :

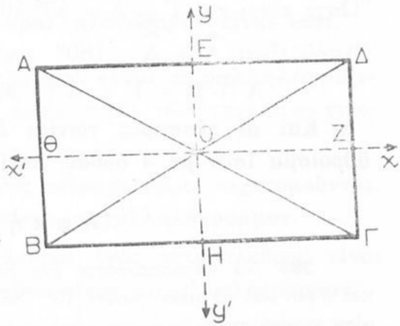
Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον ποὺ ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς.

Τὸ ὀρθογώνιον ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου καὶ ἀκόμα τὴν ἑξῆς :

Ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρωμεν τὴν ΧΟΧ′ ⊥ ΑΒ καὶ τὴν ΨΟΨ″ ⊥ ΑΔ, τότε τὰ σχήματα ΑΕΟΘ, ΕΟΖΔ, ΖΟΗΓ, ΗΟΘΒ



Σχ. 130.



Σχ. 131.

εἶναι καὶ αὐτὰ ὀρθογώνια (σχ. 131) καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΟΘ = ΟΖ καὶ ΟΕ = ΟΗ, διὰ τοῦτο μὲ ἀναδίπλωσιν ἢ περὶ τὴν ΧΟΧ′ ἢ περὶ τὴν ΨΟΨ″ τὸ ἕνα μέρος τοῦ ὀρθογωνίου ἐφαρμόζει ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο μέρος. Ἑπομένως βγάζομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα :

α) Οἱ ΧΟΧ′ καὶ ΨΟΨ″ εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου καὶ εἶναι ΧΟΧ′ ⊥ ΨΟΨ″.

β) Εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ ἤτοι ΑΓ = ΒΔ. Ὥστε

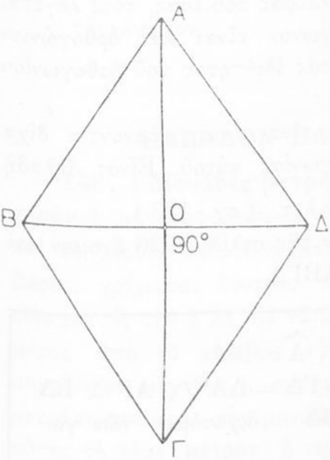
Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει. **Ὅταν δηλαδὴ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον.** Πραγματικὰ ἀφοῦ εἶναι ΑΓ = ΒΔ, γνωρίζομεν δὲ (§ 146) ὅτι εἶναι καὶ ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ, ἄρα ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ. Ὥστε (§ 91.1) ἡ ΧΟΧ′ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΒ καὶ ἡ ΨΟΨ″ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΔ καὶ $\widehat{ΧΟΨ} = 1^{L}$. Ἑπομένως τὸ σχῆμα ΑΕΟΘ ἔχει τὰς τρεῖς γωνίας $\widehat{Ε}$, $\widehat{Ο}$, $\widehat{Θ}$ ὀρθάς. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Α} = 1^{L}$.

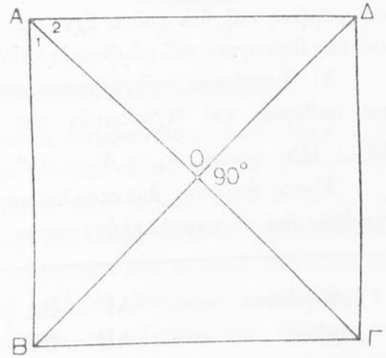
Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον, ἀφοῦ ἔχει τὴν γωνίαν $\widehat{Α} = 1^{L}$.

Ὡς **βάσις** τοῦ ὀρθογωνίου λαμβάνεται ἡ μία πλευρά του, ὁπότε ἡ ἄλλη προσκειμένη πλευρά του εἶναι τὸ ὕψος π.χ. εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἂν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ ΒΓ, τότε τὸ ὕψος του εἶναι ἡ ΒΑ (σχ. 130). Ἂν ΒΑ = β, τότε ΒΓ = υ.

147. 2. Β′ Ρόμβος: Ἐὰν ἕνα πλάγιον παραλληλόγραμμον ἔχῃ ὅλας τὰς πλευράς του ἴσας μεταξύ των, τότε λέγεται **ρόμβος**.



Σχ. 132.



Σχ. 133.

π.χ. ἂν εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ, τότε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 132 λέγεται ρόμβος.

Ὁ ρόμβος ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἀκόμη τὰς ἑξῆς δύο.

α) Ἐπειδὴ εἶναι ΒΑ = ΒΓ καὶ ΔΑ = ΔΓ, διὰ τοῦτο (§ 91.1) ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε

Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως.

β) Κάθε διαγώνιος τοῦ ρόμβου εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο (§ 116.2) εἶναι

$$\widehat{\mathrm{AB O}} = \widehat{\mathrm{OB\Gamma}},\ \widehat{\mathrm{B\Gamma O}} = \widehat{\mathrm{O\Gamma\Delta}},\ \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta O}} = \widehat{\mathrm{O\Delta A}},\ \widehat{\mathrm{BAO}} = \widehat{\mathrm{OA\Delta}}.$$

Ὥστε :

Κάθε διαγώνιος τοῦ ρόμβου διχοτομεῖ τὰς γωνίας του, ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν ὁποίων ἄγεται.

Καὶ τὰ ἀντίστροφα ἀληθεύουν, δηλαδὴ

Ἂν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνωνται καθέτως ἢ διχοτομοῦν τὰς γωνίας αὐτοῦ, τότε τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο εἶναι ρόμβος.

147. 3. Γ' Τετράγωνον : Ἂν ἕνα παραλληλόγραμμον ἔχῃ καὶ τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, τότε λέγεται **τετράγωνον.** Ἐπομένως τὸ τετράγωνον εἶναι καὶ ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος καὶ διὰ τοῦτο ἔχει καὶ τὰς ἰδιότητας τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τὰς ἰδιότητας τοῦ ρόμβου δηλαδή :

Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, τέμνονται δίχα καὶ καθέτως καὶ διχοτομοῦν τὰς γωνίας αὐτοῦ. Εἶναι δηλαδὴ $ΑΓ \perp ΒΔ$, γωνία $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2} = 45^0$ κ.λ.π. (σχ. 133).

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῆς σελίδος 226 ἔχομεν καὶ τὴν ἑξῆς διὰ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

ὀρθογώνιον	$\Longleftrightarrow$	$ΑΓ = ΒΔ \wedge \widehat{Α} = 90^0$
ρόμβος	$\Longleftrightarrow$	$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ \wedge ΑΓ \perp ΒΔ$ $\wedge$ ΑΓ, ΒΔ = διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του
τετράγωνον	$\Longleftrightarrow$	$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ,\quad ΑΓ = ΒΔ,$ $ΑΓ \perp ΒΔ\quad \widehat{Α_1} = \widehat{Α_2} = 45^0$

147. 4 Σύνολα παραλληλογράμμων : Πέρνομεν τὰ σύνολα :

$$Π = \{ x/x \text{ παραλληλόγραμμον} \} \quad \begin{aligned} Ο &= \{ x/x \text{ ὀρθογώνιον} \} \\ Ρ &= \{ x/x \text{ ρόμβος} \} \\ Τ &= \{ x/x \text{ τετράγωνον} \} \end{aligned}$$

Τότε διαπιστώνομεν ὅτι ὅλα τὰ εἴδη τῶν παραλληλογράμμων εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Π τῶν παραλληλογράμμων, δηλαδὴ

$$Ο \subset Π, \qquad Ρ \subset Π, \quad Τ \subset Π.$$

Ἐπίσης τὸ τετράγωνον εἶναι ὑποσύνολον καὶ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου, δηλαδὴ

$$Τ \subset Ο \quad \wedge \quad Τ \subset Ρ. \qquad \text{Ἄρα} \quad Ο \cap Ρ = Τ$$

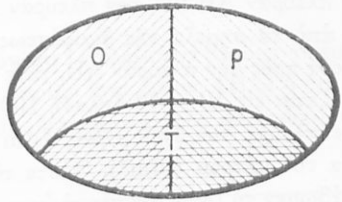
Ἔχομεν ἐπίσης $\qquad Ο \cup Ρ = Π$

Τὰ ὡς ἄνω σύνολα τὰ παριστῶμεν μὲ Βέννιον διάγραμμα ὡς ἑξῆς (σχ. 134):

παραλληλόγραμμον

ὀρθογώνιον   ρόμβος   Π =

τετράγωνον

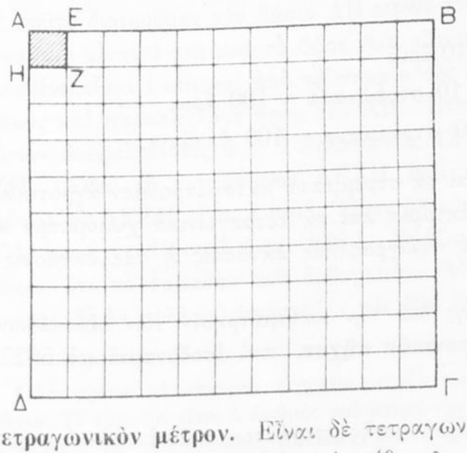


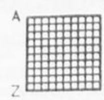
Σχ. 134.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

148. 1 Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανείας : Κατ᾽ ἀρχὰς λέμε **ποσὸν** ἢ **μέγεθος** κάθε τὶ ποὺ μπορεῖ νὰ αὐξηθῆ ἢ νὰ ἐλαττωθῆ καὶ τὸ ὁποῖον μπορεῖ νὰ μετρηθῆ. π.χ. μῆκος, ἐπιφάνεια, ὄγκος, βάρος, χρήματα, δύναμις, ταχύτης, θερμοκρασία κ.λ.π. Ὅπως εἴδαμεν εἰς τὴν § 24 διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα μέγεθος πέρνομεν ἕνα μέρος ἀπὸ τὸ μέγεθος αὐτὸ ποὺ τὸ ὀνομάζομεν **μονάδα** (ἢ μοναδιαῖον μέγεθος), συγκρίνομεν τὸ μέγεθος ποὺ θέλομεν νὰ μετρήσωμεν πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ λέμε **μέτρον** ἢ **τιμὴν** τοῦ ὑπὸ μέτρησιν μεγέθους. Διὰ τὸ μῆκος πήραμε ὡς μονάδα τὸ μέτρον μήκους (§ 24.3).

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν πέρνομεν ὡς μονάδα





Σχ. 135.

τὸ **τετραγωνικὸν μέτρον.** Εἶναι δὲ τετραγωνικὸν μέτρον (τ.μ. ἢ m^2) ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ ποὺ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος

1m. δηλαδὴ εἶναι $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta = 1m$. Ἂν χωρίσωμεν τὴν πλευρὰν AB καὶ τὴν πλευρὰν $A\Delta$ εἰς 10 ἴσα μέρη κάθε μίαν καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρωμεν καθέτους καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν AB, τότε τὸ τετραγωνικὸν μέτρον $AB\Gamma\Delta$ χωρίζεται εἰς 10×10 δηλαδὴ 100 τετράγωνα σὰν τὸ $AEZH$ ποὺ κάθε πλευρά του ἔχει μῆκος 1dm καὶ λέγονται τετραγωνικὰ δέκατα τοῦ μέτρου (dm^2). Ὥστε τὸ $1m^2$ ἔχει 100 dm^2. Ἂν ἐπαναλάβωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὸ τετραγωνικὸν δεκατόμετρον $AEZH$, τότε χωρίζεται τοῦτο εἰς 10×10 δηλ. 100 τετραγωνάκια, ποὺ καθένα ἔχει πλευρὰν 1cm καὶ λέγονται τετραγωνικὰ ἑκατοστόμετρα (cm^2). Ὥστε ὁλόκληρον τὸ m^2 ἔχει 100×100 δηλ. 10.000 cm^2. Ἂν κάμωμεν τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὸ cm^2, χωρίζεται τοῦτο εἰς $10 \times 10 = 100$ τετραγωνικὰ χιλιοστόμετρα (mm^2). Ὥστε τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 1000×1000 δηλαδὴ 1 000 000 mm^2. Εἶναι λοιπὸν

$$\mathbf{1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\ 000\ cm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2}$$

148. 2 Ἄλλαι μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν εἶναι :

α) Τὸ **ἄριον** (are) ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 100 m^2.

β) Τὸ **στρέμμα** ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1000 m^2.

γ) Τὸ **ἑκτάριον** (hectare) ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 000 m^2

δ) Τὸ **τετραγωνικὸν χιλιόμετρον** (km^2) ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 1 000 000 m^2. Ὥστε εἶναι

1 στρέμμα = 10 ἄρια

1 ἑκτάριον = 10 στρέμματα = 100 ἄρια

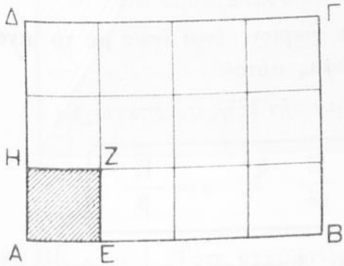
1 km^2 = 1000 στρέμματα = 100 ἑκτάρια.

Μὲ τὰ ἄρια καὶ τὰ στρέμματα καταμετροῦμεν ἀγροτικὰς ἐκτάσεις καὶ μὲ τὰ ἑκτάρια καὶ τὰ τετραγωνικὰ χιλιόμετρα καταμετροῦμεν μεγάλας γεωγραφικὰς ἐκτάσεις ἢ τὰς ἐκτάσεις τῶν διαφόρων κρατῶν.

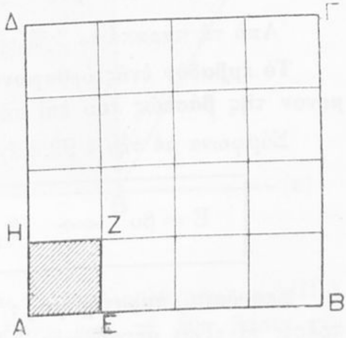
Ἔχομεν ἐπίσης διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν οἰκοπέδων τὸν **τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν,** ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ 5625 cm^2 ἢ μὲ 0,5625 m^2.

149. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μιᾶς ἐπιφανείας τὸ λέμε **ἐμβαδὸν** τῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας ἐκφράζεται πάντοτε εἰς μονάδες μετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν*, δηλαδὴ εἰς m^2 ἢ dm^2 ἢ cm^2 κ.λ.π.

150. 1 Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου : Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν $AB = 4$ cm καὶ ὕψος $A\Delta = 3$ cm. Ἔχει δηλαδὴ διαστάσεις τοὺς ἀκεραίους ἀρι-



Σχ. 136.



Σχ. 137.

θμοὺς 4 cm. καὶ 3 cm. Ὅπως εἶναι γνωστὸν (§ 18) ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει **μίαν διάστασιν** (μόνον μῆκος) τὸ δὲ ἐπίπεδον χωρίον (ἡ ἐπιφάνεια) ἔχει **δύο διαστάσεις** (μῆκος καὶ πλάτος) Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΑΒ αὐτοῦ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ποὺ καθένα εἶναι 1 cm καὶ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ εἰς τρία ἴσα μέρη ποὺ καθένα εἶναι 1 cm καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ. Ἔτσι ὁλόκληρον τὸ ὀρθογώνιον διαιρεῖται εἰς 4×3 δηλαδὴ εἰς 12 τετράγωνα σὰν τὸ ΑΕΖΗ. Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον ΑΕΖΗ ἔχει πλευρὰν 1 cm. καὶ ἑπομένως τὸ ΑΕΖΗ εἶναι 1 cm^2. Ὥστε ὁλόκληρον τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περιέχει 12 cm^2 (σχ. 136). Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι 12 cm^2, βρίσκεται δὲ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς δύο διαστάσεις 4 cm καὶ

---

* Δὲν πρέπει νὰ κάνωμεν σύγχυσιν μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν *ἐμβαδὸν* καὶ *ἐπιφάνεια*. Τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μετρᾶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ ἐκφράζεται πάντοτε εἰς τετραγωνικὰς μονάδας, ἐνῶ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν μερῶν ἑνὸς σώματος.

3 cm αὐτοῦ. Ὥστε ἂν ὀνομάσωμεν (ΑΒΓΔ) ἢ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ, βρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$(ΑΒΓΔ) = 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2 \quad ἢ \quad E = 12 \text{ cm}^2$$

Γενικὰ ἂν β εἶναι ἡ βάσις καὶ υ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου χωρίου, τότε τὸ ἐμβαδὸν Ε αὐτοῦ εἶναι :

$$\mathbf{E = \beta . \upsilon} \quad \text{τετραγ. μονάδες} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου χωρίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ*.

Σύμφωνα μὲ τὴν § 99.2 ἔχομεν τὴν ἑξῆς συνεπαγωγήν :

$$\boxed{E = \beta\upsilon \iff \beta = \frac{E}{\upsilon} \quad ἢ \quad \upsilon = \frac{E}{\beta}}$$

Σπουδαία παρατήρησις : Αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, πρέπει νὰ εἶναι μετρημένες μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα (§ 34). Ἂν π.χ. τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι $\beta = 4$ cm καὶ $\upsilon = 3$ mm τότε δὲν μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι εἶναι (ΑΒΓΔ) = 4 cm × 3 mm ἀλλὰ μετατρέπομεν τὰ 4 cm εἰς 40 mm καὶ βρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι

$$(ΑΒΓΔ) = 40 \text{ mm} \times 3 \text{ mm} = 120 \text{ mm}^2 \quad ἢ \quad E = 120 \text{ mm}^2$$

150. 2 **Ἐμβαδὸν τετραγώνου :** Ἂν ἔχωμεν ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν α cm. τότε καὶ ἡ βάσις β καὶ τὸ ὕψος υ εἶναι α cm, διότι τὸ τετράγωνον εἶναι καὶ ὀρθογώνιον. Καὶ ἂν σκεφθοῦμεν ὅπως παραπάνω, βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου Ε εἶναι :

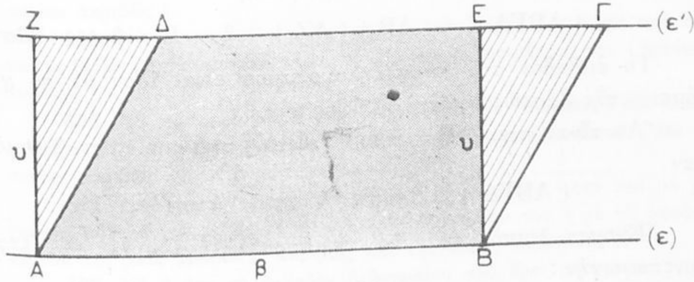
$$E = \alpha . \alpha \text{ cm}^2 \quad ἤτοι \quad \mathbf{E = \alpha^2} \text{ cm}^2$$

Ἐπὶ παραδείγματι τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 137) ἔχει ἐμβαδὸν $E = 4^2 = 16$ cm²

150. 3 **Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου :** Πέρνομεν μίαν ται-

* Θὰ ἰδοῦμεν ὅτι ὁ κανὼν αὐτὸς διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἰσχύει ὄχι μόνον μὲ ἀκεραίας διαστάσεις, ἀλλὰ μὲ ὁποιασδήποτε διαστάσεις αὐτοῦ.

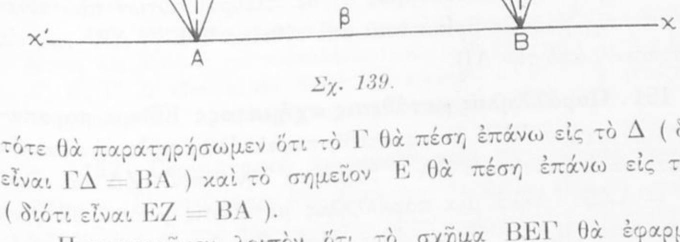
νίαν μὲ πλευρὰς τὰς παραλλήλους εὐθείας (ε) // (ε′) καὶ μὲ πλάτος υ. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς (ε) πέρνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἔστω ὅτι εἶναι ΑΒ = β, φέρομεν δὲ τὰς ΑΔ // ΒΓ ποὺ νὰ τελειώνουν εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν (ε′) καὶ τὰς ΑΖ ⊥ (ε′)



Σχ. 138.

καὶ ΒΕ ⊥ (ε′). Τότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, ποὺ ἔχουν καὶ τὰ δύο βάσιν τὴν ΑΒ = β καὶ ὕψος τὸ ΑΖ = υ.

Ἂν κάμωμεν μίαν παράλληλον μετάθεσιν τῆς ΒΓ καὶ τῆς ΒΕ κατὰ τὴν φορὰν ΒΑ μέχρις ὅτου τὸ Β πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Α,



Σχ. 139.

τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Δ (διότι εἶναι ΓΔ = ΒΑ) καὶ τὸ σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Ζ (διότι εἶναι ΕΖ = ΒΑ).

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ σχῆμα ΒΕΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὸ σχῆμα ΑΖΔ καὶ ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν μέρος ΑΒΕΔ καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα σχήματα ΒΕΓ καὶ ΑΖΔ. Ὥστε εἶναι ἰσοδύναμα, ἔχουν δηλαδὴ ἴσας ἐπιφανείας ἄρα καὶ ἴσα ἐμβαδά. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΖ εἶναι (ΑΒ) (ΑΖ) δηλαδὴ (ΑΒΕΖ) = βυ, διὰ τοῦτο βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦπαραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θὰ εἶναι (ΑΒ) (ΑΖ) δηλαδὴ

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒ})(\text{ΑΖ}) \quad \text{ἤ} \quad \text{Ε} = \beta\upsilon$$

Ὥστε

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἂν εἶναι π.χ. ΑΒ = 6 cm καὶ ΑΖ = 4 cm. τότε βρίσκομεν

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = 6\ \text{cm} \times 4\ \text{cm} = 24\ \text{cm}^2$$

Ἔχομεν λοιπὸν καὶ διὰ τὸ παραλληλόγραμμον τὴν ἑξῆς συνεπαγωγήν :

$$\boxed{\text{Ε} = \beta\upsilon \iff \beta = \frac{\text{Ε}}{\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \frac{\text{Ε}}{\beta}}$$

Παρατήρησις : Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὰς παραλλήλους ΑΔ // ΒΓ, $\text{Α}\Delta_1$ // $\text{Β}\Gamma_1$, $\text{Α}\Delta_2$ // $\text{Β}\Gamma_2$ κ.λ.π. ποὺ ὅλες τελειώνουν εἰς τὴν ΨΨ′, τότε σχηματίζονται τὰ διάφορα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, $\text{ΑΒ}\Gamma_1\Delta_1$, $\text{ΑΒ}\Gamma_2\Delta_2$, $\text{ΑΒ}\Gamma_3\Delta_3$ κ.λ.π. ὅλα δὲ αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των, διότι ὅλα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ (χ. 139). Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμμέρασμα ὅτι :

Ὅλα τὰ παραλληλόγραμμα ποὺ ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος **εἶναι ἰσοδύναμα,** αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ποὺ εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως βρίσκονται ἐπὶ εὐθείας ΨΨ′ // ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν υ ἀπὸ τὴν ΑΒ.

151 . Παράλληλος μετάθεσις σχήματος : Εἴδαμε παραπάνω ὅτι τὸ σχῆμα ΒΕΓ ἂν μετατεθῇ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν του καὶ κατὰ ἀπόστασιν ΒΑ = β, πέρνει τὴν θέσιν ΑΖΔ καὶ εἶναι ΒΕΓ = ΑΖΔ. Ἀλλὰ μία παράλληλος μετάθεσις μπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ διὰ ὁποιοδήποτε ἄλλο σχῆμα. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι :

Δύο σχήματα, ποὺ τὸ ἕνα προκύπτει ἀπὸ τὴν παράλληλον μετάθεσιν τοῦ ἄλλου, εἶναι ἴσα.

Ἀσκήσεις

402. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον ποὺ νὰ ἔχῃ περίμετρον 20 cm καὶ τὴν μίαν πλευράν του 6 cm.

403. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον μὲ πλευρὰς 8 cm καὶ 6 cm καὶ νὰ βρῆτε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὸ μῆκος κάθε διαγωνίου αὐτοῦ (βρίσκεται ἀκριβῶς).

404. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ρόμβον μὲ διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm καὶ νὰ βρῆτε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου του (βρίσκεται ἀκριβῶς).

405. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τετράγωνον μὲ πλευρὰν 5 cm καὶ νὰ μετρήσετε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ (δὲν βρίσκεται ἀκριβῶς).

406. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ρόμβον μὲ πλευρὰν 4 cm καὶ μὲ μίαν γωνίαν 60^0 καὶ νὰ βρῆτε τὸ μῆκος κάθε διαγωνίου του (μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τῆς μιᾶς βρίσκεται ἀκριβῶς καὶ τῆς ἄλλης περίπου).

407. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει περίμετρον 40 cm καὶ βάσιν 12 cm.

408. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου ποὺ ἔχει περίμετρον 28 cm.

409. Θέλομεν νὰ στρώσωμεν μὲ πλακάκια τετράγωνα τῶν 20 cm τὸ πάτωμα μιᾶς ἀποθήκης σχήματος ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει μῆκος 5 m καὶ πλάτος 4 m. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθῶμεν ;

410. Θέλομεν νὰ ἐπενδύσωμεν μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια τῶν 20 cm. τὸν τοῖχον τοῦ λουτροῦ ἑνὸς σπιτιοῦ μέχρις ὕψους 1,80 m. ἔχει δὲ τὸ λουτρὸν περίμετρον 7,60 m. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθῶμεν ; Καὶ πόσα θὰ πληρώσωμεν ἂν διὰ κάθε τετραγωνικὸν μέτρον πληρώνομεν 120 δρχ. διὰ τὴν ἐργασίαν ; ἕκαστον δὲ πλακάκι ἔχει 6 δραχμάς ;

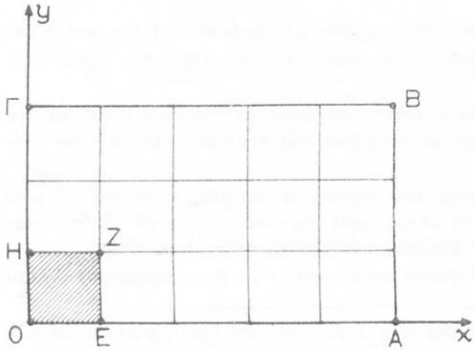
411. Θέλομεν νὰ ἐπιστρώσωμεν τὴν ταράτσαν ἑνὸς σπιτιοῦ μὲ πλάκες τετραγωνικὰς τῶν 40 cm. Ἔχει δὲ ἡ ταράτσα σχῆμα ὀρθογώνιον μὲ τὴν μίαν πλευρὰν 8 m καὶ τὴν ἄλλην 12 m. πόσες πλάκες θὰ χρειασθῶμεν ;

412. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου ποὺ ἔχει πλευρὰν 25 cm καὶ ὕψος 8 cm.

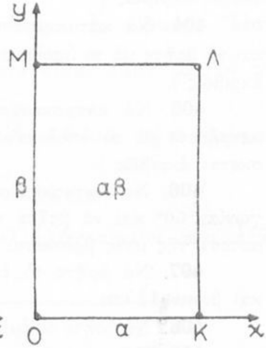
413. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ νὰ μεταθέσετε τὰς πλευράς του παραλλήλως πρὸς μίαν διεύθυνσιν κατὰ 6 cm. Ἂν Α′, Β′, Γ′, Δ′ εἶναι αἱ νέαι θέσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ, νὰ συγκρίνετε τὸ σχῆμα Α′Β′Γ′Δ′ πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

152. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων : Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν π.χ. $5 \times 3 = 15$ μποροῦμεν νὰ τοῦ δώσωμεν τὴν ἑξῆς γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν.

Ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ = 5 cm καὶ τὸ διαιροῦμεν εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος ΟΨ ⊥ ΟΧ πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΓ = 3 cm καὶ τὸ διαιροῦμεν εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους καὶ παραλλήλους πρὸς τὸν ΟΧ καὶ ἔτσι παρατηροῦμεν ὅτι δημιουργεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 15 τετράγωνα σὰν τὸ ΟΕΖΗ (τρεῖς ὁριζόντιες ται-



Σχ. 140.



Σχ. 141.

νίες ἀπὸ 5 τετράγωνα κάθε μία) (σχ. 140). Ἀλλὰ τὸ τετράγωνον ΟΕΖΗ ἔχει πλευρὰν 1 cm καὶ ἐπομένως εἶναι 1 cm^2. Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν 15 cm^2 δηλαδὴ 5 cm $\times$ 3 cm.

Ἐπομένως τὸ γινόμενον 5×3 τῶν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 καὶ 3 παριστᾶ γεωμετρικῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΟΑΒΓ, ποὺ ἔχει διαστάσεις τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 3 (δηλαδὴ βάσιν $ΟΑ = 5$ καὶ ὕψος $ΟΓ = 3$).

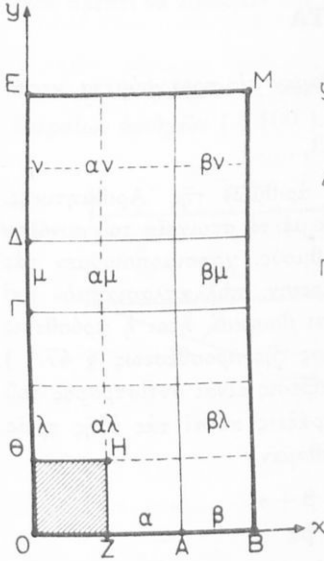
Ἐπίσης ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ γινομένου αβ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΟΚΛΜ ποὺ ἔχει διαστάσεις $ΟΚ = α$ καὶ $ΟΜ = β$ (σχ. 141).

Ἐπίσης τὸ γινόμενον $(α + β) (λ + μ + ν) = αλ + βλ + + αμ + βμ + αν + βν$ παριστᾶ γεωμετρικῶς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΟΒΜΕ ποὺ ἔχει βάσιν τὸ $ΟΒ = α + β$ καὶ ὕψος τὸ $ΟΕ = λ + μ + ν$ (σχ. 142).

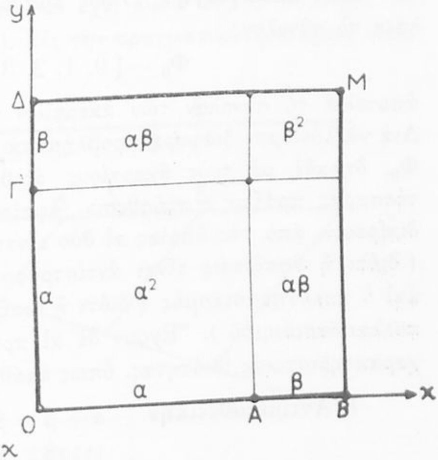
Εἰς τὸ σχῆμα 142 ἐλήφθη $ΟΑ = α = 2$ cm, $ΑΒ = β = 1$ cm $ΟΓ = λ = 3$ cm, $ΓΔ = μ = 1$ cm, $ΔΕ = ν = 2$ cm. Ἐπομένως εἶναι $(α + β) (λ + μ + ν) = 3 \times 6 = 18$ cm^2 = (ΟΒΜΕ)

Πραγματικὰ τὸ ὀρθογώνιον ΟΒΜΕ ἀποτελεῖται ἀπὸ 18 τετράγωνα ἴσα μὲ τὸ τετράγωνον $ΟΖΗΘ = 1$ cm^2.

Ἐπίσης τὸ $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ γεωμετρικῶς παριστᾶ τὸ τετράγωνον ΟΒΜΔ ποὺ ἔχει βάσιν $OB = \alpha + \beta$ καὶ ὕψος $O\Delta = \alpha + \beta$ (σχ. 143).



Σχ. 142.



Σχ. 143.

Ἀσκήσεις

414. Νὰ σχεδιάσετε τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τοῦ γινομένου $(\alpha+\beta+\gamma)\,\lambda$ ἂν εἶναι $\alpha = 3$ cm, $\beta = 2{,}4$ cm $\gamma = 2{,}6$ cm καὶ $\lambda = 4$ cm.

415. Νὰ σχεδιάσετε τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν τοῦ γινομένου $(\alpha-\beta)\,.\,\gamma$ ὅταν εἶναι $\alpha = 63$ mm $\beta = 28$ mm καὶ $\gamma = 6$ cm.

416. Ποία εἶναι ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ $(\alpha+5)^2$; (πάρετε διὰ τὸ α ἕνα αὐθαίρετον μῆκος εἰς cm, λογαριάστε δὲ τὸ 5 εἰς cm).

417. Ποία εἶναι ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ γινομένου $(\alpha+3)(\beta+\gamma+4)$; μὲ α, β, γ αὐθαίρετα μήκη;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

153. Εἰσαγωγή: Ὅπως ἐμάθαμεν εἰς προηγούμενα κεφάλαια τὸ σύνολον

$$\Phi_0 = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς. Διὰ νὰ λύνωμεν διάφορα προβλήματα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ_0, δηλαδὴ μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, χρησιμοποιοῦμεν τὰς τέσσαρας πράξεις: πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν, ἀπὸ τὰς ὁποίας αἱ δύο εἶναι *βασικαί*, ἤτοι ἡ πρόσθεσις (διότι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως § 47.1) καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς (διότι ἡ διαίρεσις εἶναι ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἔχουν δὲ αἱ πράξεις αὐταὶ τὰς ἑξῆς τρεῖς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας, ὅπως ἐμάθαμεν.

I Ἀντιμεταθετικὴν $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

II Προσεταιριστικὴν $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

$$(\alpha\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\gamma)$$

III Ἐπιμεριστικὴν $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$

$$(\alpha\beta)\cdot\gamma = \alpha\beta\gamma$$

Μὲ κατάλληλον συνδυασμὸν τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων βρίσκομεν ὅλας τὰς ἄλλας ἰδιότητας ποὺ ἀναφέρονται εἰς τὰς τέσσαρας πράξεις, ἂν λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ ὅτι τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον εἰς μὲν τὴν πρόσθεσιν εἶναι τὸ 0, εἰς δὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν εἶναι ἡ μονάς, τότε ἀποτελοῦμεν τὸ λεγόμενον

σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς

μὲ τὸ ὁποῖον λύνομεν κάθε πρόβλημα ποὺ ἔχει σχέσιν μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.

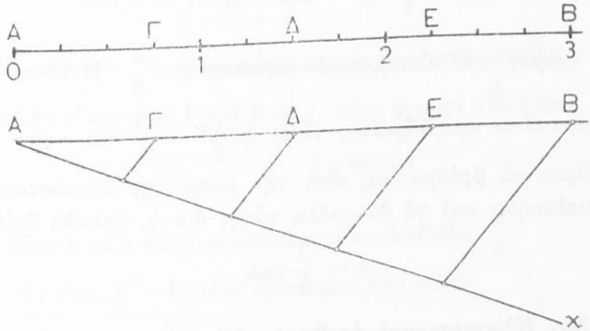
154. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα **οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δὲν μποροῦν νὰ μᾶς δόσουν λύσιν.** Ἔχομεν π.χ. τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς 4 ἴσα μέρη ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μήκους 3 cm. Πόσον θὰ εἶναι τὸ κάθε μέρος ;

Ἂν ὀνομάσωμεν x κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ 4 ἴσα μέρη ποὺ ζητοῦμεν, τότε πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$4x = 3 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (§ 100). Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως ὑπάρ-



Σχ. 144.

χει λύσις. Διότι ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (§ 122) ὁπότε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτά, ἔστω τὸ ΑΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

155. Κλασματικοὶ ἐκτελεσταί. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ ποὺ εἶναι τὸ **ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσαρα ἴσα μέρη,** εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὸ ΑΒ, τὸ λέμε **τέταρτον** τοῦ ΑΒ καὶ τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς :

$$ΑΓ = \frac{ΑΒ}{4} \quad ἢ \quad ΑΓ = \frac{1}{4}\,ΑΒ$$

Ἔτσι ἂν πάρωμεν τέσσαρας φορὰς τὸ ΑΓ, βρίσκομεν τὸ ΑΒ, δηλαδὴ 4 ΑΓ = ΑΒ. Ὥστε ἔχομεν τὴν συνεπαγωγήν :

$$ΑΓ = \frac{ΑΒ}{4} \quad ἢ \quad ΑΓ = \frac{1}{4}\,ΑΒ \quad \Longleftrightarrow \quad 4ΑΓ = ΑΒ.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, διὰ νὰ βροῦμε τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ **ἐκτελοῦμεν** τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν μὴ ἀκέραιον ἐκτελεστὴν $\frac{1}{4}$.

Τὸν ἐκτελεστὴν $\frac{1}{4}$ συμφωνοῦμεν νὰ τὸν λέμε **κλασματικὸν ἐκτελεστήν.**

Ἡ παραπάνω συνεπαγωγή, μὲ ΑΒ = 3 cm. γράφεται :

$$\text{ΑΓ} = \frac{3}{4}\text{ cm} \iff 4\text{ ΑΓ} = 3\text{ cm.}$$

ὁπότε ἔχομεν τὸν κλασματικὸν ἐκτελεστὴν $\frac{3}{4}$ Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ παραπάνω προβλήματος εἶναι ἡ ΑΓ = $\frac{3}{4}$ cm. τὴν ὁποίαν μποροῦμεν νὰ βροῦμε καὶ ἀπὸ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἂν διαιρέσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς διὰ 4, δηλαδὴ βρίσκομεν

$$x = \frac{3}{4}\text{ cm.} \qquad (2)$$

156. Κλασματικοὶ ἀριθμοί: Οἱ κλασματικοὶ ἐκτελεσταὶ $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$ ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λέγονται **κλασματικοὶ ἀριθμοί,** ἢ ἁπλῶς **κλάσματα.** Ἔτσι δημιουργεῖται ἕνα νέον σύστημα ἀριθμῶν, τὸ

σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς

Κάθε κλάσμα γράφεται μὲ δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς ποὺ χωρίζονται μὲ μίαν γραμμήν. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ πρὸς τὰ ἐπάνω λέγεται **ἀριθμητὴς** καὶ ὁ πρὸς τὰ κάτω λέγεται **παρονομαστής.** Καὶ οἱ δύο μαζὺ λέγονται **ὅροι** τοῦ κλάσματος. Ὥστε τοῦ κλάσματος $\frac{1}{4}$ (ἕνα τέταρτον) ἀριθμητὴς εἶναι τὸ 1 καὶ παρονομαστὴς εἶναι τὸ 4, τοῦ δὲ κλάσματος $\frac{3}{4}$ (τρία τέταρτα) ἀριθμητὴς εἶναι τὸ 3 καὶ παρονομαστὴς τὸ 4.

Εἰδικώτερα τὸ κλάσμα $\frac{1}{4}$, ποὺ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, λέγεται **κλασματικὴ μονάς.**

Ὥστε μὲ τὴν δημιουργίαν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἔχει πάντοτε λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = \beta$, ἔνθα εἶναι $\alpha \neq 0$, ἔχομεν δηλαδή :

$$\alpha x = \beta \quad \wedge \quad \alpha \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\beta}{\alpha}.$$

157. Εἰδικαὶ περιπτώσεις: α) Ἂν εἶναι $\beta = 1$ εἰς τὴν παραπάνω ἐξίσωσιν, τότε βρίσκομεν τὴν λύσιν :

$$x = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0)$$

Τὸ κλάσμα $\frac{1}{\alpha}$ τὸ ὀνομάσαμεν κλασματικὴν μονάδα.

β) Ἂν εἶναι $\alpha \neq 1$ καὶ $\beta \neq 1$, τότε ἔχομεν τὴν λύσιν

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (\alpha \neq 0)$$

δηλαδὴ τότε ἡ ρίζα εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\beta}{\alpha}$.

γ) Ἂν εἶναι $\alpha = 1$, τότε βρίσκομεν τὴν λύσιν

$$x = \frac{\beta}{1}, \quad \text{δηλαδὴ} \quad \chi = \beta \qquad (\S\, 98.1)$$ Ὥστε

Κάθε ἀκέραιος ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ γραφῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν μονάδα.

δ) Ἂν εἶναι $\alpha = \beta$, τότε βρίσκομεν τὴν λύσιν :

$$x = \frac{\alpha}{\alpha}, \quad (\alpha \neq 0), \quad \text{δηλαδὴ} \quad x = 1 \qquad (\S\, 98.2)$$

Ὥστε : **ὅταν ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν του, τότε τὸ κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1.**

ε) Ἂν εἶναι $\beta = 0$, τότε βρίσκομεν τὴν λύσιν :

$$x = \frac{0}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \qquad (\S\, 101.\mathrm{I})$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$ μὲ $\alpha \neq 0$, δηλαδὴ ἡ ρίζα $\frac{\beta}{\alpha}$ μᾶς λέγει ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον $\beta : \alpha$ τῶν δύο φυσικῶν ἀριθμῶν β καὶ α, εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$. Καὶ ἂν μὲν ὁ ἀριθμητὴς β

εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ α. τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (§ 127α΄). Ἂν δὲ ὁ β δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ α, τότε τὸ πηλίκον εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$. Ὥστε μποροῦμε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι :

Κάθε κλάσμα δηλώνει τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Κατὰ συνέπειαν : **Κάθε διαίρεσις εἶναι δυνατή.**

Ἀσκήσεις

418. Ποία εἶναι ἡ κατάλληλος τιμὴ τοῦ α εἰς τὰς ἰσότητας

α) $\frac{5}{\alpha} = 1$, β) $\frac{8}{\alpha} = 8$ γ) $\frac{18}{3} = \alpha$;

419. Ποῖον εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον εἰς τὰς διαιρέσεις

α) 5 : 11, β) 3 : 8, γ) 6 : 5, δ) 15 : 17

158. Μία ἄλλη ἔννοια τῶν κλασμάτων : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκεραία μονὰς ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB, ὅτι δηλαδὴ εἶναι ἔστω AB = 1 δέκατον τοῦ μέτρου.

Σχ. 145.

Διαιροῦμεν τὸ AB εἰς πέντε ἴσα μέρη, τὰ AΓ = ΓΔ = ΔE = = EZ = ZB. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$A\Gamma = \frac{1}{5}\ AB, \quad \text{δηλαδὴ} \quad A\Gamma = \frac{1}{5}\ \text{dm.} \quad \text{καὶ}$$

$$AE = A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E, \quad \text{ἤτοι} \quad AE = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \Longrightarrow$$

$$AE = \frac{3}{5}\ \text{dm.}$$

Ὥστε μποροῦμε νὰ δώσωμεν τὴν ἑξῆς ἔννοιαν εἰς τὰ κλάσματα.

α) Κλασματικὴ μονὰς εἶναι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα.

β) Κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν κλασματικῶν μονάδων, ἢ καὶ ὅτι :

Ὁ μὲν παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος φανερώνει **εἰς πόσα ἴσα μέρη** χωρίζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ὁ δὲ ἀριθμητὴς φανερώνει **πόσα** ἀπὸ αὐτὰ πέρνομεν.

Διὰ τοῦτο ὁ μὲν ἀριθμητὴς διαβάζεται ὡς συνήθης ἀριθμός, ὁ δὲ παρονομαστὴς διαβάζεται ὡς **διατακτικὸς** ἀριθμὸς (§ 10).

Δηλαδὴ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ διαβάζεται : **τρία πέμπτα.**

159. Ἀπὸ τὰς ἑξῆς συνεπαγωγάς, μὲ $AB = 1$

$$A\Gamma = \frac{1}{5}AB = \frac{1}{5} \wedge 5\,A\Gamma = AB = 1 \Longrightarrow 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$AE = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \wedge 5\,AE = 3\,AB = 3 \Longrightarrow 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ὅταν ἕνα κλάσμα πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, τότε δίνει ὡς γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

Ἑπομένως εἶναι γενικὰ $\quad \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta$

Παρατήρησις : Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{5}$ λέγεται **ἀντίστροφος** τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ 5 καὶ γενικὰ ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{\alpha}$ λέγεται ἀντίστροφος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α.

Ἀσκήσεις

420. Ἀπὸ ποίαν κλασματικὴν μονάδα γίνεται καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{5}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{6}, \quad \frac{\beta}{\alpha}$$

421. Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ παραπάνω κλάσματα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν κατάλληλον ἀριθμὸν ὥστε νὰ γίνῃ ἀκέραιος ἀριθμός.

160. Κλάσεις ἰσοδυναμίας εἰς τὰ κλάσματα : Πέρνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $AB = 1$ dm καὶ τὸ χωρίζομεν εἰς 5 ἴσα μέρη τὰ $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ = ZB$ (σχ. 146). Ἑπομένως θὰ εἶναι

$$A\Gamma = \frac{1}{5}AB, \quad A\Delta = \frac{2}{5}AB, \quad AE = \frac{3}{5}AB, \quad AZ = \frac{4}{5}AB \quad ἤ$$

$$A\Gamma = \frac{1}{5}, \qquad A\Delta = \frac{2}{5}, \qquad AE = \frac{3}{5}, \qquad AZ = \frac{4}{5}$$

Χωρίζομεν κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ 5 ἴσα μέρη τοῦ ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. Τότε τὸ ΑΒ χωρίζεται εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ θὰ εἶναι

Σχ. 146.

$$ΑΓ = \frac{2}{10},\ ΑΔ = \frac{4}{10},\ ΑΕ = \frac{6}{10},\ ΑΖ = \frac{8}{10}$$

Χωρίζομεν κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ 5 ἴσα μέρη τοῦ ΑΒ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη. Τότε τὸ ΑΒ χωρίζεται εἰς 20 ἴσα μέρη καὶ θὰ εἶναι

$$ΑΓ = \frac{4}{20},\ ΑΔ = \frac{8}{20},\ ΑΕ = \frac{12}{20},\ ΑΖ = \frac{16}{20}.\ \text{κ.λ.π.}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} \text{ ἤ } \frac{1}{5} = \frac{1\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{1\cdot 4}{5\cdot 4} \iff \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} \text{ ἤ } \frac{2}{5} = \frac{2\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4} \iff \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ κ.λ.π.}$$

Ὥστε ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους αὐτοῦ μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμόν, τότε προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ τὸ ἀρχικὸν κλάσμα.

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{16}{40} = \ldots = \frac{2ν}{5ν}$ $ν \in Φ$ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον ἴσων κλασμάτων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μίαν **κλάσιν ἰσοδυναμίας** διὰ τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$.

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ σχηματίζει τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας, ποὺ ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{3ν}{5ν}$, $ν \in Φ$ καὶ γενικὰ τὸ κλάσμα $\frac{α}{β}$ σχηματίζει τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τῆς μορφῆς $\frac{αν}{βν}$, $ν \in Φ$.

Ὥστε κάθε κλάσμα ἔχει τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας του, τὴν ὁποίαν σχηματίζομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ ν, ἔνθα $ν \in Φ$.

'Αξιοπαρατήρητον εἶναι τὸ ὅτι ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας ἑνὸς κλάσματος δὲν παριστάνει διαφόρους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἀλλὰ διάφορες μορφὲς τοῦ ἰδίου κλάσματος π.χ. Ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$ παριστάνει τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ ὑπὸ τὰς διαφόρους μορφὰς $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{10}{25}$, $\frac{12}{30}$ κ.λ.π. καὶ γενικὰ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{2\nu}{5\nu}$, $\nu \in \Phi$.

161. Ἁπλοποίησις κλάσματος. Ἀνάγωγα κλάσματα : Ἡ παραπάνω ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βρίσκωμεν κλάσμα ἴσον πρὸς ἕνα δοθὲν κλάσμα ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους. Π.χ. ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ 10 τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{480}{720}$ βρίσκομεν τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{48}{72}$ καὶ ἂν διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους καὶ αὐτοῦ διὰ 24 βρίσκομεν τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$. Ὥστε ἀντὶ τοῦ κλάσματος $\frac{480}{720}$ μποροῦμεν νὰ ἔχωμεν τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ $\frac{2}{3}$. Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **ἁπλοποίησις** τοῦ κλάσματος. Ὥστε :

Ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἴσου πρὸς αὐτό, ἀλλὰ μὲ μικροτέρους ὅρους.

Ἡ ἁπλοποίησις ἑνὸς κλάσματος ἐπιτυγχάνεται μὲ διαίρεσιν τῶν ὅρων του δι' ἑνὸς κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν. Τὸ κλάσμα 2/3 δὲν ἁπλοποιεῖται πλέον, **δὲν ἀνάγεται** δηλαδὴ εἰς ἁπλούστερον, διότι οἱ ὅροι του εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἄρα δὲν ἔχουν κοινὸν διαιρέτην. Διὰ τοῦτο τὸ κλάσμα τοῦτο λέγεται **ἀνάγωγον.** Ὥστε :

Ἀνάγωγον λέγεται ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους καὶ ἄρα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Διὰ νὰ κατορθώσωμεν νὰ βροῦμε ἀνάγωγον κλάσμα μὲ μίαν μόνον ἁπλοποίησιν, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν (§ 131 παρατ.).

Ἑπομένως εἰς μίαν κλάσιν ἰσοδυνάμων κλασμάτων **τὸ ἁπλούστερον εἶναι τὸ ἀνάγωγον, τὸ ὁποῖον γράφομεν πρῶτον εἰς τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας του.**

Ἀσκήσεις

422. Νὰ ἁπλοποιήσετε καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα

$$\frac{16}{60},\quad \frac{28}{42},\quad \frac{72}{108},\quad \frac{480}{900},\quad \frac{55}{66},\quad \frac{75}{375}$$

423. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\frac{18\alpha}{30\alpha},\quad \frac{12\chi+24}{6\chi+12},\quad \frac{5\alpha\times 15}{3\alpha\times 9},\quad \frac{4\alpha+12}{5\alpha+15}$$

424. Νὰ κάμετε ἀνάγωγα τὰ ἑξῆς κλάσματα μὲ μίαν μόνον ἁπλοποίησιν. :

$$\frac{80}{120},\quad \frac{640}{960},\quad \frac{5600}{6300},\quad \frac{7200}{9000}$$

425. Νὰ βρῆτε : α) τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τοῦ κλάσματος $\frac{12}{16}$,

β) ποίαν σειρὰν κατέχει τοῦτο εἰς τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας του; και γ) ποῖος εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας αὐτοῦ ;

426. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{36}{42}$.

427. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{36}{54}$.

428. Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ καὶ ἔχουν ἀριθμητὴν μικρότερον τοῦ 30.

429. Πόσα κλάσματα ἴσα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$ ὑπάρχουν ποὺ νὰ ἔχουν παρανομαστὴν μικρότερον τοῦ 50 ;

430. Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ καὶ ἔχουν ἀριθμητὴν $\alpha \in \Phi_0 \wedge 15 < \alpha < 30$.

431. Νὰ βρῆτε τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ καὶ ἔχουν παρανομαστὴν $x \in \Phi_0 \wedge 10 \leqslant x < 30$.

432. Νὰ βρῆτε ἕνα κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{6}$ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἄθροισμα ὅρων 55.

433. Νὰ βρῆτε ἕνα κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νὰ ἔχουν διαφορὰν 12.

434. Ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, τότε κάθε κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ ἔχει τὴν γενικὴν μορφὴν $\frac{\alpha\nu}{\beta\nu}$, $\nu \in \Phi$. Μὲ βάσιν αὐτὸ νὰ βρῆτε τὰ α, β, ν, ὅταν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $\frac{\alpha\nu}{\beta\nu} = \frac{12}{28}$.

435. Ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}$ καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, τότε πῶς συνδέονται οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων αὐτῶν ;

436. Μὲ βάσιν τὰ ἄνω νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha+\lambda}{\beta+\mu}$ νὰ ἀναφέρετε δὲ καὶ ἀριθμητικὸν παράδειγμα.

437. Μὲ βάσιν τὰ ἄνω νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha+\gamma+\lambda}{\beta+\delta+\mu}.$$

162. Ὁμώνυμα - ἑτερώνυμα κλάσματα: Δύο ἢ περισσότερα κλάσματα λέγονται **ὁμώνυμα**, ὅταν ἔχουν τὸν ἴδιον παρονομαστὴν καὶ **ἑτερώνυμα** ὅταν δὲν ἔχουν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.

π.χ. ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι τά : $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{11}{8}$

ἑτερώνυμα κλάσματα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{7}{8}$.

Ὅταν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, μποροῦμε νὰ τὰ κάμωμεν ὁμώνυμα, σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς :

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ ἀνάγωγα καὶ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$. Σχηματίζομεν τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας καθενός, δηλαδὴ

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\mathbf{\frac{8}{12}}=\frac{10}{15}=\frac{12}{18}=\frac{14}{21}=\mathbf{\frac{16}{24}}=\cdots=\frac{2\nu}{3\nu}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\mathbf{\frac{9}{12}}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\mathbf{\frac{18}{24}}=\frac{21}{28}=\cdots=\frac{3\nu}{4\nu}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{8}{12}$ τῆς πρώτης κλάσεως καὶ $\frac{9}{12}$ τῆς δευτέρας κλάσεως εἶναι ὁμώνυμα. Ἐπίσης καὶ τὰ κλάσματα $\frac{16}{24}$ καὶ $\frac{18}{24}$ εἶναι ὁμώνυμα, μποροῦμε δὲ νὰ βροῦμε καὶ ἄλλα ζεύγη ὁμωνύμων κλασμάτων εἰς τὰς δύο αὐτὰς κλάσεις.

Ὥστε ἀντὶ τῶν κλασμάτων $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ μποροῦμε νὰ πάρωμε τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{8}{12}$ καὶ $\frac{9}{12}$ ἢ τὰ $\frac{16}{24}$ καὶ $\frac{18}{24}$ κ. λ.π.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τὰ ὁμώνυμα κλάσματα ἔχουν κοινὸν παρονομαστὴν ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 4, δηλαδὴ τὸ 12 ἢ τὸ 24 κ.λ.π.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ὡς ἑξῆς : Ἐκλέγομεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων καὶ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸ πηλίκον ποὺ βρίσκομεν ἂν διαιρέσωμεν τὸ ε.κ.π. μὲ κάθε παρονομαστήν. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\overbrace{2}^{4}}{3},\ \frac{\overbrace{3}^{3}}{4} \qquad \text{ε.κ.π. παρονομ.} = 12 \implies \frac{8}{12},\ \frac{9}{12}$$

Ἄλλα παραδείγματα : α) Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ κλάσματα

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{2}$$

Τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ 24. Ἑπομένως βρίσκομεν :

$$\frac{\overbrace{3}^{6}}{4},\ \frac{\overbrace{5}^{2}}{12},\ \frac{\overbrace{7}^{3}}{8},\ \frac{\overbrace{1}^{12}}{2} \quad \text{ε.κ.π.} = 24 \implies \frac{18}{24},\ \frac{10}{24},\ \frac{21}{24},\ \frac{12}{24}$$

β) Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{8}$

Τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ $3 \times 5 \times 8 = 120$, διότι οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε βρίσκομεν

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{8} \quad \text{ε.κ.π.} = 120 \implies \frac{80}{120},\ \frac{96}{120},\ \frac{75}{120}$$

Παρατήρησις : Ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε τὸ ε.κ.π. αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενόν των. Καὶ τότε μποροῦμε πάνω ἀπὸ κάθε κλάσμα νὰ βάλωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παρονομαστῶν, ὅπως εἰς τὸ β' παράδειγμα.

163. 1 Σύγκρισις κλασμάτων : Ἀπὸ τὴν § 160 συμπεραίνομεν ὅτι δύο ἴσα κλάσματα ἀνήκουν εἰς τὴν ἰδίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Ὥστε ἂν πάρωμεν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{8}$, τότε κάθε

κλάσμα ἴσον πρὸς αὐτὸ ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{3\nu}{8\nu}$, ἔνθα $\nu \in \Phi$.

Ἂς πάρωμεν γενικὰ τὰ δύο ἴσα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$,

δηλαδὴ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Μετατρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, δηλαδὴ $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}$

Καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν κάθε κλάσμα ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν βδ αὐτῶν βρίσκομεν

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \cdot \beta\delta = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \cdot \beta\delta \quad \text{ἢ} \quad (\S\ 159) \quad \boldsymbol{\alpha\delta = \beta\gamma}$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἔχωμεν $\alpha\delta = \beta\gamma$ καὶ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διὰ τοῦ γινομένου βδ, βρίσκομεν

$$\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἢ ἁπλοποιοῦντες} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν συνεπαγωγήν :

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma}$$

Ὥστε :

Δύο κλάσματα εἶναι ἴσα ἐὰν εἶναι ἴσα τὰ γινόμενα τοῦ ἀριθμητοῦ καθενὸς ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἄλλου καὶ ἀντιστρόφως.

163. 2 Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}$ βγάλαμε τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι $\alpha\delta = \beta\gamma$, εἶναι δὲ τὰ κλάσματα αὐτὰ ὁμώνυμα. Ὥστε

Διὰ νὰ εἶναι ἴσα δύο ὁμώνυμα κλάσματα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἴσοι οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν.

π.χ. θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{8} = \frac{3}{8}$ ἐὰν εἶναι $\alpha = 3$ καὶ ἀντιτρόφως καὶ

$\frac{\alpha}{8} > \frac{3}{8}$ ἐὰν εἶναι $\alpha > 3$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν συνεπαγωγήν :

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta} \iff \alpha > \gamma \qquad \text{Ὥστε :}$$

Ἀπὸ δύο ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ συγκρίνομεν. Ἑπομένως διὰ

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \text{ βρίσκομεν } \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} > \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} \iff \alpha\delta > \beta\gamma$$

164. Σύγκρισις κλάσματος μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα: Θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1. Ἐπειδὴ (§ 157 δ') εἶναι $1 = \frac{\beta}{\beta}$, κατὰ τὸν νόμον τῆς τριχοτομῆς (§ 15.3) θὰ εἶναι :

$$\alpha)\ \frac{\alpha}{\beta} = 1 \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} \iff \alpha = \beta$$

$$\beta)\ \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\beta} \iff \alpha < \beta$$

$$\gamma)\ \frac{\alpha}{\beta} > 1 \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\beta} \iff \alpha > \beta. \qquad \text{Ὥστε :}$$

α) Ἕνα κλάσμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι ἴσος μὲ τὸν παρονομαστήν του καὶ ἀντιστρόφως.

β) Ἕνα κλάσμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν του καὶ ἀντιστρόφως.

γ) Ἕνα κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, ὅταν ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστήν του καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔχομεν π.χ. $\frac{6}{6} = 1$, $\frac{5}{8} < 1$, $\frac{7}{4} > 1$.

165. Μικτοὶ ἀριθμοί: Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε τὸ κλάσμα περιέχει ἀκεραίας μονάδας, μποροῦμε δὲ νὰ τὰς βγάλωμεν διαιροῦντες τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{19}{5}$ περιέχει 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ περισσεύουν $\frac{4}{5}$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\frac{19}{5}=3+\frac{4}{5} \quad \text{ἢ} \quad \text{ἁπλούστερον} \quad \frac{19}{5}=3\frac{4}{5}$$

ὁ ἀριθμὸς $3\frac{4}{5}$ ἐπεκράτησεν ἡ συνήθεια νὰ λέγεται **μικτὸς** ἀριθμός.

Ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ δ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\Delta=\delta\pi+\upsilon$ τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως (§ 97) βρίσκομεν

$$\frac{\Delta}{\delta}=\pi+\frac{\upsilon}{\delta}$$

διότι εἶναι $\frac{\delta\pi}{\delta}=\pi$. Ὥστε ἡ διαίρεσις τοῦ διαιρετέου Δ διὰ τοῦ διαιρέτου δ εἰς μίαν ἀτελῆ διαίρεσιν δίδει μικτὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις

438. Πῶς πρέπει νὰ μεταβάλωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{3}{8}$ ὥστε νὰ γίνῃ τοῦτο ἴσον μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1 ;

439. Νὰ γίνουν ὁμώνυμα τὰ κλάσματα κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω ὁμάδας κλασμάτων :

α) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{16}$, β) $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$, γ) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

440. Νὰ τεθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους τὰ κλάσματα :

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{15}, \frac{7}{20}, \frac{19}{40}, \frac{53}{60}$,

441. Νὰ συγκρίνετε τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

442. Νὰ βάλετε τὸ κατάλληλον σημεῖον τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος μεταξὺ τῶν δύο κλασμάτων κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς παρακάτω ὁμάδας κλασμάτων :

α) $\frac{4}{5} \quad \frac{2}{3}$, β) $\frac{8-5}{3+2} \quad \frac{3}{4}$, γ) $\frac{3\cdot5-4}{2\cdot4+3} \quad \frac{2\cdot5}{11-1}$,

δ) $\frac{5\cdot4-2\cdot3}{6\cdot3+2\cdot4} \quad \frac{7}{11+4}$, ε) $\frac{42\times4}{25\times3} \quad \frac{4\times15-3}{8\times3+1}$

443) Ποῖον μικτὸν ἀριθμὸν δίνει ἡ διαίρεσις 87 : 12 ;
444) Ποῖον μικτὸν ἀριθμὸν δίνει ἡ διαίρεσις 5873 : 125 ;

166. Κλάσματα μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμητήν: Πέρνομεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\delta}$ ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητήν.

Κατὰ τὸν νόμον τῆς τριχοτομῆς (§ 15.3) θὰ εἶναι :

α) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\delta}$ ἢ $\alpha\delta=\alpha\beta \iff \delta=\beta$

β) $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha}{\delta}$ ἢ $\alpha\delta<\alpha\beta \iff \delta<\beta$ ἤτοι $\beta>\delta$

γ) $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha}{\delta}$ ἢ $\alpha\delta>\alpha\beta \iff \delta>\beta$ ἤτοι $\beta<\delta$ Ὥστε

α) Ὅταν οἱ ἀριθμηταὶ δύο ἴσων κλασμάτων εἶναι ἴσοι, τότε καὶ οἱ παρονομασταὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι καὶ ἀντιστρόφως.

β) Ἀπὸ δύο κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν μικρότερον εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μεγαλύτερον παρονομαστὴν καὶ ἀντιστρόφως.

εἶναι π.χ. $\frac{3}{7}<\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{3}{7}>\frac{3}{8}$

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὰς § 163.2 καὶ 166 βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι : α) Εἰς ὁμώνυμα κλάσματα μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μεγαλύτερον ἀριθμητὴν β) εἰς κλάσματα ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἔχει μικρότερον παρονομαστὴν ἢ καὶ

Ἕνα κλάσμα μεγαλώνει ἢ ὅταν μεγαλώνῃ ὁ ἀριθμητής του ἢ ὅταν μικραίνῃ ὁ παρονομαστής του.

167. Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ὡς διατεταγμένον ζεῦγος: Ἂν πάρωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ καὶ ἐναλλάξωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ, βρίσκομεν τὸ κλάσμα $\frac{5}{3}$ ποὺ εἶναι διάφορον τοῦ $\frac{3}{5}$. Ὥστε (§ 143.1) μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι :

Οἱ ὅροι ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος.

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ γράφεται : (3 : 5) καὶ ὄχι (3,5) τὸ δὲ διατεταγμένον ζεῦγος τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{3}$ γράφεται (5 : 3)

Ἀσκήσεις

445. Νὰ τεθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους τὰ ἑξῆς κλάσματα (χωρὶς νὰ γίνουν ὁμώνυμα) :

$$\frac{3}{10},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{3}{14},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{3}{11},\quad \frac{3}{4}$$

446. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰ κλάσματα

$$\frac{4}{5},\quad \frac{8}{6},\quad \frac{12}{27},\quad \frac{20}{35},\quad \frac{24}{18}$$

447. Νὰ γράψετε ὡς διατεταγμένα ζεύγη τὰ κλάσματα :

$$\frac{3}{7},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{8}{3},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{9}{4},\quad \frac{5}{6}$$

448. Ποῖα κλάσματα παριστάνουν τὰ παρακάτω διατεταγμένα ζεύγη

(3 : 4), (5 : 6), (12 : 8), (7 : 12), (2 : 3), (20 : 35)

νὰ βάλετε ἔπειτα τὰ κλάσματα αὐτὰ κατὰ σειρὰν μεγέθους.

449. Τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{11}$ νὰ τὰ μετατρέψετε εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα ποὺ νὰ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καὶ ἔπειτα νὰ τὰ βάλετε κατὰ σειρὰν μεγέθους.

450. Νὰ βρῆτε ἕνα κλάσμα ἴσον μὲ τὸ κλάσμα (12 : 16) ποὺ νὰ ἔχῃ α) ἀριθμητὴν 3 καὶ β) παρανομαστὴν 20.

451. Νὰ βρῆτε τὴν τιμὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ κλάσματα

$$\frac{5+2}{7-2},\quad \frac{6+3}{10-1},\quad \frac{8-2}{5+1},\quad \frac{12-4}{5+4},\quad \frac{7+4}{15-4}$$

καὶ ἔπειτα νὰ τὰ τοποθετήσετε κατὰ σειρὰν μεγέθους.

452. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον καὶ διὰ τὰ κλάσματα :

$$\frac{3\times 4-2}{5\times 2},\quad \frac{16-2\times 5}{2\times 3},\quad \frac{4\times 5-2\times 3}{2\times 6},\quad \frac{3\times 4}{3\times 5-2\times 3}$$

453. Νὰ βρῆτε τὴν κατάλληλον τιμὴν τοῦ γράμματος α, ὥστε νὰ ἀληθεύῃ κάθε μία ἀπὸ τὰς παρακάτω ἰσότητας :

$$\frac{3}{\alpha-5}=1,\quad \frac{\alpha-4}{5}=0,\quad \frac{\alpha+3}{\alpha-1}=2,\quad \frac{5}{\alpha-2}=5,\quad \frac{6}{5-\alpha}=6$$

168. Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν: Ἂν ὀνομάσωμεν K τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ

$$K = \{ x / x \text{ κλασματικὸς ἀριθμὸς} \}$$

καὶ πάρωμεν τὴν ἕνωσιν τοῦ συνόλου Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ συνόλου K τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν

$$P = \Phi_0 \cup K$$

Τὸ σύνολον P, ποὺ εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο συνόλων Φ_0 καὶ K, τὸ ὀνομάζομεν **σύνολον τῶν ρητῶν** (ἢ συμμέτρων) ἀριθμῶν.

Ἑπομένως καὶ τὸ σύνολον Φ_0 καὶ τὸ σύνολον K εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου P δηλαδὴ εἶναι

$$\Phi_0 \subset P \wedge K \subset P$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον Φ_0 μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν στοιχείων 5 καὶ 6 αὐτοῦ (ἢ μεταξὺ τῶν στοιχείων ν καὶ ν + 1 αὐτοῦ) **δὲν ὑπάρχει** ἄλλο στοιχεῖον. Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Φ_0 τὸ λέμε **διακριτικὸν σύνολον.** Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιον καὶ εἰς τὸ σύνολον K τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. π.χ. μεταξὺ τῶν δύο κλασματικῶν μονάδων $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$ ὑπάρχουν ἄπειρα ἄλλα κλάσματα.

Πραγματικὰ ἔχομεν $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ἢ $\frac{4}{12}$; $\frac{7}{12}$ καὶ μεταξὺ τῶν κλασμάτων αὐτῶν ὑπάρχουν τὰ κλάσματα $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{6}{12}$. Ἀλλὰ τὰ κλάσματα αὐτὰ γράφονται $\frac{40}{120}$, $\frac{70}{120}$ καὶ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν τὰ κλάσματα $\frac{41}{120}$, $\frac{42}{120}$ . . . $\frac{69}{120}$. Ἀλλὰ ἀκόμη τὰ κλάσματα αὐτὰ γράφονται $\frac{400}{1200}$, $\frac{700}{1200}$ καὶ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν τὰ κλάσματα $\frac{401}{1200}$, $\frac{402}{1200}$, . . . $\frac{699}{1200}$ κ.λ.π.

Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι τὸ σύνολον K τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶναι **πυκνὸν** σύνολον καὶ ὄχι διακριτικόν. Κατ' ἐπέκτασιν λέμε ὅτι καὶ **τὸ σύνολον P τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι πυκνὸν σύνολον.**

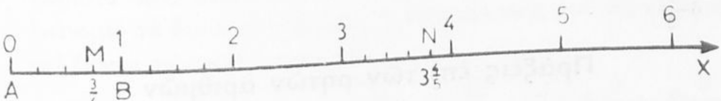
Εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν αἱ τρεῖς βασικαὶ ἰδιότητες

I ἀνακλαστικὴ			$\alpha \leqslant \alpha$		
II συμμετρικὴ	$\alpha \leqslant \beta$	$\wedge$	$\beta \leqslant \alpha$	$\Longrightarrow$	$\alpha = \beta$
III μεταβατικὴ	$\alpha \leqslant \beta$	$\wedge$	$\beta \leqslant \gamma$	$\Longrightarrow$	$\alpha \leqslant \gamma$

Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι **τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἔχει ὁλικὴν διάταξιν.**

Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ $\frac{\alpha}{\beta}$, μὲ $\beta \neq 0$.

169. Γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ συνόλου Ρ : Τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μποροῦμεν νὰ τὸ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς ἐπάνω εἰς ἕνα ἡμιάξονα ΟΧ ὡς ἑξῆς :



Σχ. 147.

Ἐπάνω εἰς τὸν ἡμιάξονα ΟΧ τοποθετοῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ_0, δηλαδὴ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, . . . (§ 28). Κατόπιν κάθε ἀκεραίαν μονάδα ΑΒ τὴν διαιροῦμεν σὲ τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος πού ἔχομεν καὶ τοποθετοῦμεν σὲ κάθε διαίρεσιν τὸ ἀντίστοιχον κλάσμα.

Π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ τοποθετεῖται εἰς τὸ σημεῖον Μ τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{19}{5} = 3\,\frac{4}{5}$ τοποθετεῖται εἰς τὸ σημεῖον Ν τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ.

Ἔτσι διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν βρίσκομεν ἕνα καὶ μόνον ἕνα σημεῖον (μίαν μόνον θέσιν) ἐπάνω εἰς τὸν ἡμιάξονα ΟΧ.

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει. Δηλαδὴ κάθε σημεῖον τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ δὲν ἀντιστοιχεῖ ἀναγκαστικὰ εἰς ἕνα ρητὸν ἀριθμόν. (Θὰ ἴδωμεν ὅτι ὑπάρχουν καὶ σημεῖα τοῦ ἡμιάξονος ΟΧ ποὺ δὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν).

Ἀσκήσεις

454. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 3, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{25}{5}$, $\frac{20}{7}$, $\frac{40}{9}$, $\frac{20}{37}$, $\frac{60}{15}$ ποὺ εἶναι ὅλοι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, νὰ καταγράψετε χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ_0, χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Κ, μὲ τὴν ἔννοιαν **μικρότεροι τῆς ἀκεραίας μονάδος** καὶ χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ δὲν ἀνήκουν οὔτε εἰς τὸ σύνολον Φ_0 οὔτε εἰς τὸ σύνολον Κ.

455. Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{8}{\alpha}$, ἔνθα $\alpha \in \Phi \wedge 5 \leqslant \alpha \leqslant 10$ νὰ βρῆτε τὰς τιμὰς τοῦ α ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο νὰ εἶναι α) στοιχεῖον τοῦ συνόλου Φ_0 καὶ β) στοιχεῖον τοῦ συνόλου Κ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

456. Ἐπάνω εἰς τὸν ἡμιάξονα τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν νὰ τοποθετήσετε τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, 5, $6\frac{1}{2}$.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

170. Α΄ Πρόσθεσις: α) Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα.

Γνωρίζομεν (§ 119.2) ὅτι τὸ σελήνιον εἶναι τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς ἀγγλικῆς λίρας. Ὅταν θέλωμεν λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν 5 σελήνια καὶ 6 σελήνια γράφομεν

$$5 \text{ σελ.} + 6 \text{ σελ.} = 11 \text{ σελ.} \quad \text{ἢ} \quad \frac{5}{20} + \frac{6}{20} = \frac{11}{20} \text{ τῆς λίρας.}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι τὸ πρῶτον λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας. Ἑπομένως

$$15^{\pi} + 7^{\pi} + 20^{\pi} = 42^{\pi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{15}{60} + \frac{7}{60} + \frac{20}{60} = \frac{42}{60} \text{ τῆς ὥρας.}$$

Ὥστε :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα προσθέτομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὸν ἴδιον παρονομαστήν.

β) Ὅταν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα κάνομεν τὴν πρόσθεσιν π.χ.

$$\overset{8}{\frac{3}{5}}+\overset{5}{\frac{5}{8}}+\overset{2}{\frac{17}{20}}=\frac{24}{40}+\frac{25}{40}+\frac{34}{40}=\frac{83}{40}=2\,\frac{3}{40}$$

γ) Ὅταν ἔχωμεν ἕνα μικτὸν ἀριθμὸν μποροῦμε νὰ τὸν μετατρέψωμεν εἰς κλάσμα ὡς ἑξῆς :

$$5\,\frac{3}{4}=\frac{5}{1}+\frac{3}{4}=\frac{20}{4}+\frac{3}{4}=\frac{23}{4} \qquad \text{ἤτοι}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα μικτὸν ἀριθμὸν εἰς κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, προσθέτομεν καὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸ ἐξαγόμενον τὸ θέτομεν ὡς ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ θέτομεν τὸν αὐτόν.

δ) Ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν μικτοὺς ἢ προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ κατόπιν ἑνώνομεν τὰ δύο ἀποτελέσματα, ἢ κάνομεν τοὺς μικτοὺς κλάσματα καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομεν π.χ.

$$3\,\frac{3}{4}+4\,\frac{7}{8}=3\,\frac{6}{8}+4\,\frac{7}{8}=7\,\frac{13}{8}=7+1\,\frac{5}{8}=8\,\frac{5}{8} \quad \text{ἢ}$$

$$3\,\frac{3}{4}+4\,\frac{7}{8}=\frac{15}{4}+\frac{39}{8}=\frac{30}{8}+\frac{39}{8}=\frac{69}{8}=8\,\frac{5}{8}$$

Παρατήρησις : Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων εἶναι **ἐσωτερικὴ πρᾶξις** εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας ποὺ ἔχει καὶ ἡ πρόσθεσις τῶν ἀκεραίων εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων γενικὰ γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}+\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$$

171. Β′. Ἀφαίρεσις : α) Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ὁμώνυμα.

Ἔχομεν $\dfrac{7}{8}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{4}{8}$ διότι (§ 46) $\dfrac{7}{8}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{8}$

β) Ἂν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα. Ἔχομεν

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{9}=\frac{27}{36}-\frac{20}{36}=\frac{7}{36}, \quad \text{διότι} \quad \frac{20}{36}+\frac{7}{36}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

γ) Ὅταν εἶναι μικτοὶ ἀριθμοί. Ἔχομεν

$$9\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}=\frac{77}{8}-\frac{19}{4}=\frac{77}{8}-\frac{38}{8}=\frac{39}{8}=4\frac{7}{8} \quad \text{ἢ}$$

$$9\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}=9\frac{5}{8}-4\frac{6}{8}=8\frac{13}{8}-4\frac{6}{8}=4\frac{7}{8}$$

δ) $12-3\frac{5}{6}=11\frac{6}{6}-3\frac{5}{6}=8\frac{1}{6}$

Παρατήρησις : Καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων εἶναι **ἐσωτερικὴ πρᾶξις** τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας ποὺ ἔχει καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀφαίρεσις δύο κλασμάτων γενικὰ γράφεται :

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}-\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \text{ἔνθα} \quad \alpha\delta>\beta\gamma$$

Ἀσκήσεις

457. Νὰ κάμετε τὰς παρακάτω προσθέσεις :

α) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$ β) $\frac{3}{7}+\frac{5}{14}+\frac{19}{21}+\frac{1}{2}$

γ) $\frac{10}{3}+\frac{8}{5}+\frac{13}{15}+\frac{23}{30}$ δ) $6\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+7\frac{1}{8}$

458. Νὰ κάμετε τὰς παρακάτω πράξεις :

α) $3\frac{4}{5}-\frac{3}{4}$ β) $5\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$ γ) $6\frac{2}{3}-2\frac{3}{4}$

δ) $\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{8}\right)-1\frac{7}{8}$

ε) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{7}{30}-\frac{7}{60}\right)$

459. Μᾶς δίνουν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+5}{\beta+5}$. Ἂν εἶναι $\alpha<\beta$ ποῖον ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ κλάσματα εἶναι μεγαλύτερον καὶ κατὰ πόσον ;

460. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $\alpha>\beta$.

461. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $\alpha=\beta$.

462. Ποίας τιμὰς δὲν μπορεῖ νὰ πάρη ὁ α εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\alpha-5}$ ἂν γνωρίζωμεν ὅτι $\alpha\in\Phi \wedge \alpha<8$; καὶ ποίας τιμὰς μπορεῖ νὰ πάρη ;

463. Τὸ ἄθροισμα δύο κλασμάτων εἶναι $\frac{3}{4}$ καὶ τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι $\frac{5}{9}$. Ποῖον εἶναι τὸ ἄλλο κλάσμα ;

464. Ποῖος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν $8\frac{3}{5}$ διὰ νὰ βροῦμε $3\frac{7}{20}$;

465. Τὶ μεταβολὴν παθαίνει τὸ κλάσμα $\frac{7}{8}$ ἂν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους του τὸν ἀριθμὸν 2 ;

466. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ 2 καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους του.

467. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι τυρὶ ὁ παντοπώλης ἐπώλησε $3\frac{3}{5}$ κιλά, $8\frac{2}{3}$ κιλὰ καὶ $13\frac{3}{4}$ κιλά. Ἂν ὅλο τὸ βαρέλι περιεῖχε 40 κιλὰ πόσον τυρὶ τοῦ ἔμεινε ;

468. Ἕνας παντοπώλης παρέλαβε τρία βαρέλια λάδι ποὺ ζύγιζαν 120 κιλὰ τὸ α', $122\frac{1}{2}$ κιλὰ τοῦ β' καὶ $125\frac{3}{4}$ κιλὰ τὸ γ'. Τὸ ἀπόβαρον κάθε βαρελίου ἦτο $8\frac{1}{2}$ κιλά. Ὁ παντοπώλης πούλησε τὴν μίαν ἡμέραν $132\frac{2}{5}$ κιλὰ λάδι καὶ τὴν ἄλλην ἡμέραν $145\frac{3}{4}$ κιλὰ λάδι. Πόσα κιλὰ λάδι τοῦ ἔμειναν ;

469. Ἀπὸ ἕνα τόπι ὕφασμα ὁ ἔμπορος ἐπώλησε $3\frac{1}{2}$ m. καὶ $8\frac{3}{4}$ m. καὶ $7\frac{1}{3}$ m. καὶ $11\frac{2}{3}$ καὶ παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν $15\frac{5}{6}$ m. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ τόπι ;

172. 1 Γ'. Πολλαπλασιασμός: α) Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, τότε (§ 159) βρίσκομεν ὡς γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του. π.χ.

$$\frac{3}{8} \times 8 = 3 \qquad \text{καὶ γενικὰ} \qquad \frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha = \beta$$

β) Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν $\frac{3}{8} \times 5$.

Κατὰ τὴν § 76 βρίσκομεν

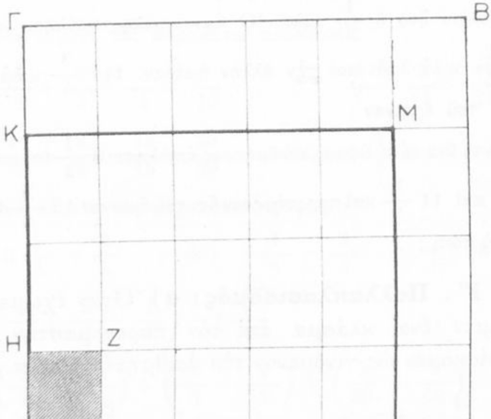
$$\frac{3}{8} \times 5 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

Ἐπίσης $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Τὸ γινόμενον $\frac{3}{8} \times 4 = \frac{3}{8:4} = \frac{3}{2}$. Ὥστε

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ τὸ γινόμενον τὸ θέτομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ ἀφίνομεν τὸν ἴδιον (ἢ ἀφίνομεν ἀριθμητὴν τὸν ἴδιον καὶ θέτομεν ὡς παρονομαστὴν τὸ πηλίκον τοῦ παρονομαστοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου, ἂν εἶναι ἀκριβές).

172. 2 γ) Πῶς πολλαπλασιάζομεν δύο κλάσματα. Θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο κλάσματα $\frac{5}{6}$ καὶ $\frac{3}{4}$. Πρὸς τοῦτο πέρνομεν ἕνα τετράγωνον ΟΑΒΓ ποὺ ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους π.χ. ΟΑ = 1 dm καὶ ΟΓ = 1 dm. Ἄρα



Σχ. 148.

εἶναι (ΟΑΒΓ) = 1 dm². Διαιροῦμεν τὴν βάσιν ΟΑ τοῦ τετραγώνου εἰς 6 ἴσα μέρη (ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πρῶτος παρονομαστὴς) καὶ τὸ ὕψος ΟΓ εἰς 4 ἴσα μέρη (ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος παρονομαστὴς) καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν ΟΑ. Ἔτσι τὸ τετράγωνον ΟΑΒΓ = $= 1\ dm^2$ διαιρεῖται εἰς $6 \times 4 = 24$ ὀρθογώνια ἴσα μὲ τὸ ΟΕΖΗ. Ἑπομένως εἶναι (ΟΕΖΗ) $= \frac{1}{24}\ dm^2$. Ἔπειτα, ἐπὶ τῆς βάσεως ΟΑ πέρνομεν τὸ τμῆμα ΟΔ $= 5$ (τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πρῶτος ἀριθμητὴς) καὶ ἐπὶ τοῦ ὕψους ΟΓ πέρνομεν τμῆμα ΟΚ $= 3$ (τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος ἀριθμητὴς) καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΔΜΚ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ $5 \times 3 = 15$ ὀρθογώνια ἴσα μὲ τὸ ΟΕΖΗ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$(\text{ΟΔΜΚ}) = 15\ (\text{ΟΕΖΗ}) = 15 \times \frac{1}{24} = \frac{15}{24}\ dm^2$$

Ἀλλὰ εἶναι $\quad \text{ΟΔ} = \frac{5}{6}(\text{ΟΑ}) = \frac{5}{6}\ dm. \quad$ καὶ

$$\text{ΟΚ} = \frac{3}{4}(\text{ΟΓ}) = \frac{3}{4}\ dm. \quad \text{καὶ} \quad (\text{ΟΔΜΚ}) = \frac{5}{6}\ dm \times \frac{3}{4}\ dm.$$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι εἶναι

$$\frac{5}{6} dm \times \frac{3}{4} dm = \frac{15}{24}\ dm^2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$$

Ἀπὸ αὐτὰ συμπεραίνομεν ὅτι

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων ἰσοῦται μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Θὰ εἶναι ἐπίσης $\quad \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

καὶ γενικὰ $\quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

Ὥστε εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἂν εἶναι ὁμώνυμα ἢ ἑτερώνυμα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων ἀνάγεται καὶ ἡ περίπτωσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον. Διότι τὸ γινόμενον

$$\frac{3}{8} \times 5 \text{ γράφεται } \frac{3}{8} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{8}$$

Παρατήρησις : Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο κλασμάτων ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων (ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστήν), εἶναι δὲ καὶ τὸ γινόμενον κλάσμα. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι **ἐσωτερικὴ πρᾶξις εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν** ἀριθμῶν. Ἑπομένως ἰσχύουν καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων, δηλαδὴ

I ἀντιμεταθετικὴ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$

II προσεταιριστικὴ $\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}\right)$

III ἐπιμεριστικὴ $\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}\right) \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$

Καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέμε τὸ γινόμενον ποὺ βρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ γινόμενον αὐτῶν τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον παράγοντα, τὸ νέον γινόμενον τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τέταρτον παράγοντα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου πάρωμεν ὅλους τοὺς παράγοντας. π.χ.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{24} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{30}{168} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{120}{840} \cdot \frac{1}{2} = \frac{120}{1680} = \frac{1}{14}$$

Σημ. I. Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, εἰς ἕνα γινόμενον πολλῶν κλασμάτων ἀριθμητὴς εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴς εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν. Εἶναι δηλαδὴ

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}$$

Διὰ τοῦτο μποροῦμε νὰ κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἁπλοποιήσεις πρὶν κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἁπλοποιοῦμεν δηλαδὴ διὰ 3 (διαγράφομεν τὸ 3 καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν καὶ ἀπὸ τὸν παρανομαστὴν) καὶ διὰ 5 καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 4 καὶ ἔτσι μένει ὡς γινόμενον τὸ $\frac{1}{2 \cdot 7} = \frac{1}{14}$

Σημ. II. Ἀπὸ τὸ σχῆμα τῆς σελίδος 262 βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΟΔΜΚ ποὺ ἔχει βάσιν $\text{Ο}\Delta = \frac{5}{6}$ dm καὶ ὕψος $\text{ΟΚ} = \frac{3}{4}$ dm ἔχει ἐμβαδὸν

$$(\text{Ο}\Delta\text{ΜΚ}) = (\text{Ο}\Delta)\ (\text{ΟΚ}) = \frac{5}{6}\ \text{dm} \cdot \frac{3}{4}\ \text{dm} = \frac{15}{24}\ \text{dm}^2$$

Ὥστε ὁ κανὼν τῆς § 150 . 1 ποὺ μᾶς λέγει πῶς βρίσκεται τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἰσχύει καὶ ὅταν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοί.

172. 3 Πολλαπλασιασμὸς μικτῶν : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο μικτῶν ἀριθμῶν π.χ. $4\frac{1}{6} \times 7\frac{3}{5}$ ἐργαζόμεθα κατὰ ἕνα ἀπὸ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

α) $4\frac{1}{6} \times 7\frac{3}{5} = \frac{25}{6} \times \frac{38}{5} = \frac{950}{30} = \frac{95}{3} = 31\frac{2}{3}$

β) $\left(4 + \frac{1}{6}\right) \cdot \left(7 + \frac{3}{5}\right) = 28 + \frac{7}{6} + \frac{12}{5} + \frac{3}{30} =$

$= 28 + \frac{35}{30} + \frac{72}{30} + \frac{3}{30} = 28 + \frac{110}{30} = 28 + 3\frac{2}{3} = 31\frac{2}{3}$

Ὁ δεύτερος τρόπος, ποὺ εἶναι πολυπλοκώτερος, στηρίζεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀθροισμάτων (§ 83.4).

172. 4 Ἀντίστροφοι ἀριθμοί : Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{5}{3}$ ἔχουν γινόμενον τὴν μονάδα, ἤτοι $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$. Ὁμοίως $5\frac{2}{3} \times \frac{3}{17} = \frac{17}{3} \times \frac{3}{17} = 1$

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἔχουν αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγονται **ἀντίστροφοι** ἀριθμοί. Ὥστε : **Ἀντίστροφοι λέγονται δύο ἀριθμοὶ ὅταν ἔχουν γινόμενον τὴν μονάδα.**

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς α ἔχει ἀντίστροφον τὸν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ ἔχει ἀντίστροφον τὸν $\frac{\beta}{\alpha}$

Ὅταν εἰς μίαν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα, ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἀντὶ διαιρέσεως κάνομεν πολλαπλασιασμόν. ἢ

Τὸ πηλίκον ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἑνὸς κλάσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα.

Γενικὰ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

173. 2 **Μερικαὶ περιπτώσεις: Α)** Κλάσμα διὰ ἀκεραίου.

α) $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8} : \frac{3}{1} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$

β) $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ ἢ

$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$. Ὥστε

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα διὰ ἀκεραίου ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ ἀκεραίου ἂν διαιρῆται ἀκριβῶς.

Β) Κλάσμα διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ του.

$$\frac{3}{5} : 3 = \frac{3:3}{5} = \frac{1}{5}$$

Γ) Ἀκέραιος διὰ κλάσματος

$$8 : \frac{3}{4} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = 10\,\frac{2}{3}$$

Δ) Διαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν

$$8\,\frac{2}{5} : 2\,\frac{4}{7} = \frac{42}{5} : \frac{18}{7} = \frac{42}{5} \times \frac{7}{18} = \frac{7}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{49}{15} = 3\,\frac{4}{15}$$

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνομεν ὅτι εἰς τὸ σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις εἶναι πάντοτε δυνατή, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι ἡ διαίρεσις εἶναι **ἐσωμερικὴ πρᾶξις** εἰς τὸ σύνολον Ρ. Ὥστε, ἐνῶ εἰς τὸ σύνολον Φ_0 τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι ἐσωτερικὴ πρᾶξις, εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις (πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις) εἶναι **ἐσωτερικαὶ πράξεις.**

174. Πῶς ὑψώνεται κλάσμα εἰς δύναμιν : Θέλομεν νὰ βροῦμε τὴν δύναμιν $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, ἔχομεν

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

γενικὰ δὲ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 = \frac{\alpha^4}{\beta^4}$ καὶ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$. Ὥστε

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν ἕνα κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν καὶ τὸν ἀριθμητήν του καὶ τὸν παρονομαστήν του εἰς τὴν δύναμιν αὐτήν.

Ἀσκήσεις

477. Νὰ κάμετε τὰς παρακάτω διαιρέσεις :

α) $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$, β) $6\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$, γ) $9 : \frac{3}{5}$, δ) $25\frac{1}{3} : 9\frac{1}{2}$,

ε) $12\frac{3}{4} : 3$ στ) $16\frac{1}{4} : 5$, ζ) $7\frac{2}{3} : 6$, η) $8\frac{1}{2} : 9$

478. Ἀγοράζομεν $3\frac{2}{5}$ m. ὕφασμα καὶ δίνομεν $630\frac{7}{10}$ δραχμὰς. Πόσας δραχμὰς ἀξίζει τὸ μέτρον τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;

479. Πόσας δραχμὰς ἔχει τὸ κιλὸν τοῦ καφέ, ὅταν διὰ $1\frac{3}{4}$ κιλὰ ἐδόσαμεν $149\frac{5}{8}$ δραχμάς ;

480. Ἕνα αὐτοκίνητον καίει τὸ γαλόνι τῆς βενζίνης εἰς τὰ $45\frac{1}{2}$ χιλιόμετρα. Πόσα γαλόνια βενζίνης θὰ χρειασθῇ διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν $235\frac{3}{4}$ χιλιομέτρων ; Καὶ πόσας δραχμὰς θὰ τοῦ στοιχίσῃ ἡ διαδρομὴ αὐτὴ εἰς καύσιμα πρὸς 26 δραχμὰς τὸ γαλόνι ;

481. Ἕνας ἔμπορος ἔχει 510 κιλὰ ζάχαρι καὶ θέλει νὰ τὴν τοποθετήσῃ σὲ σακοῦλες νάϋλον ποὺ κάθε μία χωράει $12\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ κοστίζει $4\frac{2}{5}$ δρχ. Πόσας δρχ. θὰ δόσῃ διὰ νὰ ἀγοράσῃ τὶς σακοῦλες ποὺ τοῦ χρειάζονται ;

482. Ἕνας ἔμπορος ἑτοίμων ἐνδυμάτων ἔχει ἕνα τόπι ὕφασμα τῶν 50 m. ποὺ τοῦ στοιχίζει $85\frac{1}{2}$ δρχ. τὸ m. Διὰ κάθε ἐνδυμασίαν χρειάζονται $3\frac{1}{3}$ m. καὶ πληρώνει διὰ τὸ ράψιμον 185 δρχ. διὰ κάθε ἐνδυμασίαν. Πόσες ἐνδυμασίες θὰ κάμῃ ; καὶ πόσον τοῦ στοιχίζει κάθε μία ;

483. Νὰ βρῆτε τὰ παρακάτω γινόμενα :

α) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ β) $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot 4^2$, γ) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$

484. Νὰ κάμετε μίαν δύναμιν τὸ γινόμενον $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \cdot \left(\frac{3\beta}{4}\right)^3$

485. Νὰ κάμετε μίαν δύναμιν τὸ γινόμενον $\frac{8}{27} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$

175. Σύνθετα κλάσματα: Σύμφωνα μὲ τὴν § 157ε', κάθε διαίρεσις μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῆ ὡς κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Ὥστε τὴν διαίρεσιν

$\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$ μποροῦμε νὰ τὴν γράψωμεν ὡς κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο , τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, λέγεται **σύνθετον** κλάσμα. Ἕνα σύνθετον κλάσμα μποροῦμε νὰ τὸ κάμωμεν ἁπλοῦν ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του. π.χ.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1\ \frac{1}{5}$$

Κατὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν παρατηροῦμεν ὅτι ἐθέσαμεν ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον 3×8 καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον 4×5. Ὥστε μποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$\alpha)\ \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} \quad (\beta\ \ \frac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\gamma} \quad \gamma)\ \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$$

Δηλαδὴ διὰ νὰ κάμωμεν ἁπλοῦν ἕνα σύνθετον κλάσμα φροντίζομεν ὥστε νὰ ἔχη τέσσαρας ὅρους. Κατόπιν θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν τοῦ ἁπλοῦ τὸ γινόμενον τοῦ α' καὶ τοῦ δ' ὅρου καὶ ὡς παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τοῦ β' καὶ γ' ὅρου. Ἄλλα παραδείγματα :

$$\frac{9\ \frac{3}{5}}{2\ \frac{2}{3}} = \frac{\frac{48}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{48 \times 3}{5 \times 8} = \frac{6 \times 3}{5} = \frac{18}{5} = 3\ \frac{3}{5}$$

'Ασκήσεις

486. Νὰ κάμετε ἁπλᾶ τὰ παρακάτω σύνθετα κλάσματα :

$$\alpha)\ \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}},\quad \beta)\ \frac{2}{\frac{5}{3}},\quad \gamma)\ \frac{\frac{3}{4}}{6},\quad \delta)\ \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{3}{4}}$$

$$\varepsilon)\ \frac{5\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2}-\frac{3}{4}},\quad \sigma\tau)\ \frac{2\frac{2}{3}\times 3\frac{1}{2}}{4\frac{2}{3}},\quad \zeta)\ \frac{6\frac{1}{4}-3\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}$$

Λύσις προβλημάτων μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα

176. Διὰ νὰ λύσωμεν ὡρισμένα προβλήματα χρησιμοποιοῦμεν τὴν λεγομένην μέθοδον τῆς **ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.** Ὁ τρόπος ποὺ ἐργαζόμεθα φαίνεται εἰς τὰ παρακάτω παραδείγματα.

Πρόβλημα 1ον. Γνωρίζομεν ὅτι τὰ 5 m. ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 350 δρχ. Πόσας δρχ. θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 12 m. ἀπὸ τὸ ἴδιον ὕφασμα ;

Λύσις. 'Αφοῦ τὰ 5 m. ἀξίζουν 350 δρχ. τὸ 1 m θὰ ἀξίζη 5 φορὲς λιγώτερον, δηλαδὴ $\frac{350}{5}$ καὶ τὰ 12 m. θὰ ἀξίζουν 12 φορὲς περισσότερον δηλαδὴ $\frac{350}{5}\times 12 = 70\times 12 = 840$ δρχ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

ἀφοῦ τὰ 5 m. ἀξίζουν 350 δρχ.

τὸ 1 m. (5 φορὲς λιγώτερο) ἀξίζει $\frac{350}{5}$

καὶ τὰ 12 m ἀξίζουν $\frac{350}{5}\times 12 = 70\times 12 = 840$ δρχ.

Πρόβλημα 2ον. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἀριθμοῦ 760 ;

Λύσις : Κάνομεν κατ' εὐθεῖαν τὴν κατάταξιν τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα, δηλαδὴ

ἀφοῦ τὰ $\frac{8}{8}$ (ὁλόκληρος ὁ ἀριθμὸς) εἶναι 760

τὸ $\frac{1}{8}$ (8 φορὲς λιγώτερον) εἶναι $\frac{760}{8}$

καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ (5 φορὲς περισσότ.) εἶναι $\frac{760}{8} \times 5 = 95 \times 5 = 475$

Ὥστε τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ 760 εἶναι 475.

Τὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ λυθῇ καὶ μὲ **πολλαπλασιασμὸν** ὡς ἑξῆς

$$760 \times \frac{5}{8} = \frac{3800}{8} = 475$$

Πρόβλημα 3ον. Τὰ $\frac{7}{9}$ ἑνὸς βαρελίου περιέχουν 56 κιλὰ λάδι. Πόσον λάδι χωράει ὁλόκληρον τὸ βαρέλι ;

Λύσις : Ἀφοῦ τὰ $\frac{7}{9}$ περιέχουν 56 κιλὰ

τὸ $\frac{1}{9}$ (7 φορ. λιγ) » $\frac{56}{7}$

καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ (9 φορ. περ.) » $\frac{56}{7} \times 9 = 8 \times 9 = 72$

Ὥστε τὸ βαρέλι χωράει 72 κιλὰ λάδι.

Τὸ πρόβλημα μπορεῖ νὰ λυθῇ καὶ μὲ **διαίρεσιν** ὡς ἑξῆς

$$56 : \frac{7}{9} = 56 \times \frac{9}{7} = \frac{504}{7} = 72$$

Ἀπὸ τὴν λύσιν τοῦ 2ου καὶ 3ου προβλήματος μποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν τοὺς ἑξῆς δύο κανόνας.

1) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμεν νὰ βροῦμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος (ἢ τῶν πολλῶν μονάδων) **κάνομεν πολλαπλασιασμὸν** (2ον πρόβλημα).

2) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν μέρους τῆς μονάδος (ἢ τῶν πολλῶν μονάδων) **καὶ ζητοῦμεν νὰ βροῦμε τὴν τιμὴν τῆς μιᾶς μονάδος κάνομεν διαίρεσιν** (3ον πρόβλημα).

Πρόβλημα 4ον : Τὰ $4\frac{2}{5}$ μέτρα ἀπὸ ἕνα ὕφασμα ἀξίζουν 880 δρχ. Πόσας δρχ. θὰ δώσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν $7\frac{3}{5}$ m. ἀπὸ τὸ ἴδιον ὕφασμα ;

Λύσις : Κάνομεν τοὺς μικτοὺς κλάσματα, δηλαδὴ $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$

καὶ $7\frac{3}{5} = \frac{38}{5}$ καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

ἀφοῦ τὰ $\frac{22}{5}$ μέτρα ἀξίζουν 880 δρχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ (22 φορὲς λιγώτερο) ἀξίζει $\frac{880}{22}$

καὶ τὰ $\frac{38}{5}$ (38 φορὲς περισσότ.) ἀξίζουν $\frac{880}{22} \times 38 =$

$= 40 \times 38 = 1520$

Ὥστε τὰ $7\frac{3}{5}$ m τοῦ ὑφάσματος ἀξίζουν 1520 δρχ.

Τὸ παραπάνω πρόβλημα μποροῦμε νὰ τὸ λύσωμεν καὶ μὲ μίαν διαίρεσιν καὶ ἕνα πολλαπλασιασμὸν δηλαδὴ

α) $880 : 4\frac{2}{5} = 880 : \frac{22}{5} = 880 \times \frac{5}{22} = 40 \times 5 = 200$

β) $200 \times 7\frac{3}{5} = 200 \times \frac{38}{5} = 40 \times 38 = 1520$ δρχ.

Πρόβλημα 5ον. Τὰ $6\frac{3}{4}$ κιλὰ τυρὶ ἀξίζουν 243 δρχ. Πόσον ἀξίζουν τὰ $10\frac{2}{5}$ κιλὰ ἀπὸ τὸ ἴδιο τυρί ;

Λύσις : Ἔχομεν $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}, 10\frac{2}{5} = \frac{52}{5}$. Ἑπομένως

ἀφοῦ τὰ $\frac{27}{4}$ κιλὰ ἀξίζουν 243 δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ (27 φορὲς λιγώτερο) » $\frac{243}{27}$

καὶ τὰ $\frac{4}{4} = 1$ κιλὸ » $\frac{243 \times 4}{27}$

ἀφοῦ τὸ 1 κιλὸ ἢ $\frac{5}{5}$ » $\frac{243 \times 4}{27}$

τὸ $\frac{1}{5}$ » $\frac{243 \times 4}{27 \times 5}$

καὶ τὰ $\frac{52}{5}$ » $\frac{243 \times 4 \times 52}{27 \times 5} =$

$= \frac{9 \times 4 \times 52}{5} = \frac{1872}{5} = 374\frac{2}{5}$ δρχ.

Σημ. Ἐκάναμε δύο φορὲς ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα διότι τὰ κλάσματα $\frac{27}{4}$ καὶ $\frac{52}{5}$ εἶναι ἑτερώνυμα. Ἂν τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, τότε κάνομεν μίαν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα ὅπως εἰς τὸ 4ον πρόβλημα.

Προβλήματα (Μὲ ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα)

487. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ἀριθμοῦ 1954 ;

488. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ ἀριθμοῦ 427 ;

489. Πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τοῦ ἀριθμοῦ 144 ;

490. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{6}$ εἶναι 40 ;

491. Ποίου ἀριθμοῦ τὸ τετραπλάσιον καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάνουν $28\frac{1}{2}$;

492. Ἔχω 1000 δρχ. καὶ ἐξοδεύω τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων μου καὶ κατόπιν τὰ $\frac{7}{8}$ τῶν ὑπολοίπων. Πόσα χρήματα μοῦ ἔμειναν ;

493. Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε τὰ $\frac{5}{9}$ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ τοῦ ἔμειναν 24 m. Πόσον ὕφασμα εἶχε ;

494. Ἕνα αὐτοκίνητον διήνυσε τὰ $\frac{3}{8}$ μιᾶς ἀποστάσεως καὶ τοῦ μένει νὰ διανύσῃ ἀκόμη 60 χιλιόμετρα. Πόση εἶναι ὁλόκληρη ἡ ἀπόστασις ;

495. Ἀπὸ ἕνα βαρέλι γεμᾶτο κρασὶ βγάζομεν τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κρασιοῦ ποὺ περιέχει καὶ παρατηροῦμεν ὅτι μένουν μέσα εἰς τὸ βαρέλι 72 κιλά. Πόσα κιλὰ κρασὶ περιεῖχε τὸ βαρέλι ;

496. Τέσσαρες ἄνθρωποι ἐμοίρασαν 1500 δρχ. ὡς ἑξῆς. Ὁ α΄ πῆρε τὰ $\frac{3}{10}$ τῶν χρημάτων, ὁ β΄ πῆρε τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν ὑπολοίπων, ὁ γ΄ πῆρε τὰ $\frac{4}{9}$ αὐτῶν ποὺ ἔμειναν καὶ ὁ δ΄ πῆρε ὅσα ἐπερίσσευσαν. Πόσας δρχ. πῆρε καθένας ;

497. Ἕνας παντοπώλης εἶχε 200 κιλὰ ζάχαρη καὶ ἐπώλησε τὰ $\frac{4}{7}$ τῶν $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Πόσα κιλὰ ζάχαρη τοῦ ἔμειναν ;

498. Ἂν ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν δραχμῶν ποὺ ἔχομεν ἀφαιρέσωμεν τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῶν περισσεύουν 195 δρχ. Πόσας δραχμὰς ἔχομεν ;

499. Ποίου ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{7}$ καὶ τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι 86 ;

500. Τὰ $\frac{5}{8}$ ἑνὸς ἔργου τὰ τελειώνει ἕνας ἐργάτης σὲ 3 ὧρες. Σὲ πόσες ὧρες θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου ;

501. Ἕνας ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Α καὶ διανύει τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς ἀποστάσεως ΑΒ. Ἄλλος ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Β καὶ διανύει τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἀποστάσεως ΒΑ. Τότε παρετήρησαν ὅτι ἀπέχουν μεταξύ των οἱ δύο ποδηλάται 14 χιλιόμετρα. Νὰ βρῆτε τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων Α καὶ Β.

502. Ἕνα αὐτοκίνητον τρέχει μὲ ταχύτητα 60 χιλόμετρα τὴν ὥρα. Μετὰ 4 ὥρας ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά του κατὰ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῆς καὶ μετὰ 3 ὥρας ἀκόμη ἐλαττώνει τὴν ταχύτητά του κατὰ 6 χιλιόμετρα ἀκόμη. Ἂν τὸ αὐτοκίνητον ἔτρεχεν ἐπὶ 10 ὥρας, πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε ;

503. Δύο φίλοι ἔχουν μαζὺ 1600 δρχ. ἀλλὰ ὁ ἕνας ἔχει τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ ἄλλου. Πόσας δρχ. ἔχει καθένας ;

504. Δύο παιδιὰ ἔχουν 33 βόλους μαζύ. Τὸ ἕνα παιδὶ ἔχει κατὰ τὰ $\frac{3}{4}$ περισσοτέρους βόλους ἀπὸ τὸ ἄλλο. Πόσους βόλους ἔχει κάθε παιδί ;

505. Νὰ μοιράσετε 7980 δρχ. εἰς τρία παιδιὰ ἔτσι ὥστε τὸ β' νὰ πάρῃ κατὰ τὸ $\frac{1}{5}$ περισσότερα ἀπὸ τὸ α' καὶ τὸ γ' νὰ πάρῃ κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸ α'. Πόσας δρχ. θὰ πάρῃ κάθε παιδί ;

506. Τέσσαρα ἄτομα ἐμοίρασαν ἕνα ποσὸν χρημάτων καὶ πῆρε καθένας τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων τοῦ προηγουμένου. Ἂν ὁ τρίτος πῆρε 200 δραχμάς, πόσα πῆρε καθένας ἀπὸ τοὺς ἄλλους ; καὶ πόσα ἦσαν τὰ χρήματα ;

507. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΧ, ΟΨ, ΟΖ σχηματίζουν τρεῖς διαδοχικὰς γωνίας ποὺ καλύπτουν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι, εἶναι δὲ

$$(ΟΧ,\ ΟΨ) = \frac{1}{4}(ΟΨ,\ ΟΖ) = \frac{5}{2}(ΟΖ,\ ΟΧ)$$

νὰ βρῆτε τὸ μέγεθος κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς τρεῖς γωνίας εἰς μοίρας.

508. Αἱ τέσσερες ἡμιευθεῖαι ΟΧ, ΟΨ, ΟΖ, ΟΤ σχηματίζουν ἀνὰ δύο διαδοχικὰς γωνίας, ποὺ καλύπτουν ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ ἡμιευθεῖαι. Ἂν εἶναι

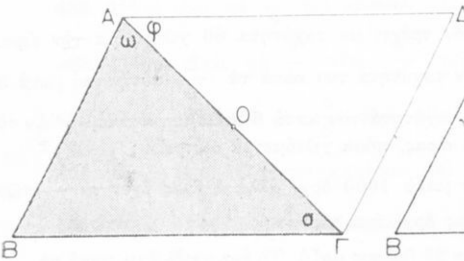
$$(ΟΧ,\ ΟΨ) = 1\frac{1}{3}(ΟΨ, ΟΖ), \qquad (ΟΨ, ΟΖ) = 1\frac{2}{3}(ΟΖ, ΟΤ)$$

νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς γωνίας ποὺ σχηματίζονται.

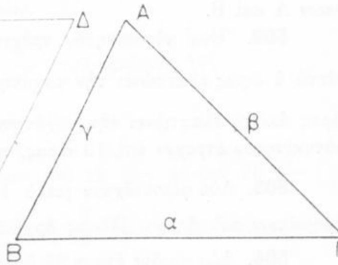
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ΄

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

177. Ὁρισμοί: Πέρνομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ αὐτοῦ καὶ τὸ διαχωρίζομεν ἐπάνω εἰς



Σχ. 149.



Σχ. 150.

τὴν ΑΓ. Μένει τὸ ἐπίπεδον χωρίον ΑΒΓ (σχ. 149), τὸ ὁποῖον λέγεται **τρίγωνον**. Κάθε τρίγωνον ἔχει τὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

α) τὰς τρεῖς **πλευρὰς** ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αὐτοῦ

β) τὰς τρεῖς **γωνίας** $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ αὐτοῦ

γ) τὰς τρεῖς **κορυφὰς** Α, Β, Γ αὐτοῦ.

Συνήθως ὀνομάζομεν μὲ α τὴν πλευρὰν ΒΓ, ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, μὲ β τὴν πλευρὰν ΑΓ ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β καὶ μὲ γ τὴν πλευρὰν ΑΒ ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ (σχ. 150).

Περίμετρος τοῦ τριγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Συνήθως τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τὴν ὀνομάζομεν 2τ. Ὥστε εἶναι

$$2\tau = B\Gamma + A\Gamma + AB \quad \text{ἢ} \quad \boxed{2\tau = \alpha + \beta + \gamma}$$

Τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἁπλούστερον ἐπίπεδον σχῆμα, εἶναι πάντοτε **κυρτὸν χωρίον** καὶ δὲν ἔχει διαγωνίους.

Αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι λέγονται **κύρια** στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

178. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέσον Ο τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ (σχ. 149). Καὶ ἂν στραφῇ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ κατὰ 180^0 περὶ τὸ Ο, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, θὰ εἶναι δηλαδὴ τρίγ. ΑΔΓ = τριγ. ΑΒΓ. Ὥστε

Ἡ διαγώνιος ἑνὸς παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

179. Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} = \omega$, $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \sigma$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 114) ὅτι εἶναι

$\omega + \widehat{B} + \varphi = 180^0$ καὶ $\varphi = \sigma$. Ἑπομένως βρίσκομεν:

$$\omega + \widehat{B} + \sigma = 180^0, \text{ ἤτοι } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^0$$ Ὥστε

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας (180^0). Τοῦτο συμβαίνει εἰς κάθε τρίγωνον.

Παρατήρησις: Ἐπειδὴ σὲ κάθε κυρτὸν τετράπλευρον ἡ μία διαγώνιός του τὸ χωρίζει εἰς δύο τρίγωνα καὶ κάθε τριγώνου αἱ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 180^0, διὰ τοῦτο βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι:

Αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς γωνίας (ἢ 360^0).

Ἑπομένως αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν ἄθροισμα 360^0.

180. 1 **Εἴδη τριγώνων:** Ἂν ἐξετάσωμεν ἕνα τρίγωνον ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν του, διακρίνομεν τὰ ἑξῆς τρία εἴδη.

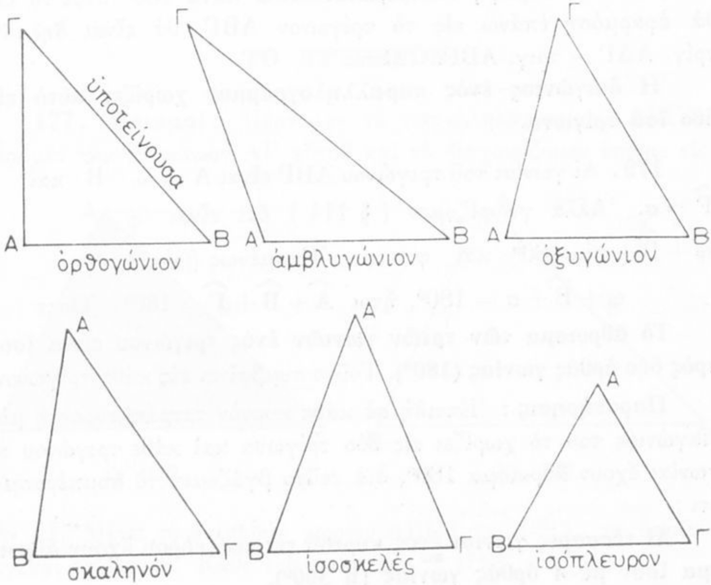
α) Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A} = 90^0$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 90^0$, ἤτοι αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι πάντοτε συμπληρωματικαὶ. Ἡ πλευρὰ ΒΓ = α. ποὺ βρίσκεται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται **ὑποτείνουσα.**

β) Τὸ **ἀμβλυγώνιον** τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

γ) Τὸ **ὀξυγώνιον** τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας.

Ἂν ἐξετάσωμεν ἕνα τρίγωνον ἀπὸ τὰς πλευράς του, διακρίνομεν τὰ ἑξῆς τρία εἴδη:

α) Τὸ **σκαληνὸν** ἢ ἀνισόπλευρον τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἀνίσους μεταξύ των.



Σχ. 151.

β) Τὸ **ἰσοσκελὲς** τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ τὰς δύο πλευράς του ἴσας μεταξύ των.

γ) Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ὅταν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας μεταξύ των.

180. 2 Σύνολα τριγώνων: Ἐὰν πάρωμεν τὰ σύνολα

$$\mathrm{T} = \{\, x/x \ \text{τρίγωνον} \,\} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}_1 = \{\, x/x \ \text{ὀρθογώνιον τρίγωνον} \,\} \\ \mathrm{T}_2 = \{\, x/x \ \text{ἀμβλυγώνιον τρίγωνον} \,\} \\ \mathrm{T}_3 = \{\, x/x \ \text{ὀξυγώνιον τρίγωνον} \,\} \\ \mathrm{T}_4 = \{\, x/x \ \text{σκαληνὸν τρίγωνον} \,\} \\ \mathrm{T}_5 = \{\, x/x \ \text{ἰσοσκελὲς τρίγωνον} \,\} \\ \mathrm{T}_6 = \{\, x/x \ \text{ἰσόπλευρον τρίγωνον} \,\} \end{array} \right.$$

Τότε διαπιστώνομεν ὅτι ὅλα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Τ τῶν τριγώνων, εἶναι δηλαδὴ

$$\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}_3 \subset \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}_4 \subset \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}_5 \subset \mathrm{T}, \quad \mathrm{T}_6 \subset \mathrm{T}.$$

Εἶναι ἐπίσης τὰ σύνολα T_1 καὶ T_2 ξένα, δηλαδὴ $T_1 \cap T_2 = \varnothing$
τὰ σύνολα T_1 καὶ T_3 ξένα, δηλαδὴ $T_1 \cap T_3 = \varnothing$
τὰ σύνολα T_2 καὶ T_3 ξένα, δηλαδὴ $T_2 \cap T_3 = \varnothing$
τὰ σύνολα T_1 καὶ T_6 ξένα, δηλαδὴ $T_1 \cap T_6 = \varnothing$
τὰ σύνολα T_2 καὶ T_6 ξένα, δηλαδὴ $T_2 \cap T_6 = \varnothing$
τὰ σύνολα T_4 καὶ T_5 ξένα, δηλαδὴ $T_4 \cap T_5 = \varnothing$

Τὸ σύνολον T_6 τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου T_5 τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων. Εἶναι δηλαδὴ

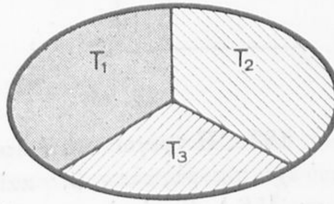
$$T_6 \subset T_5 \quad \wedge \quad T_6 \cap T_5 = T_6 \quad \wedge \quad T_6 \cup T_5 = T_5$$

Ἔχομεν ἐπίσης τὰς σχέσεις :

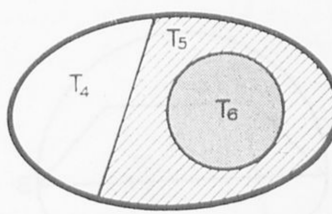
$$T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T \quad \wedge \quad T_4 \cup T_5 = T.$$

Τὰ ἄνω σύνολα τὰ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς μὲ βέννια διαγράμματα

Τρίγωνον Τ $\begin{cases} \text{ὀρθογώνιον } T_1 \\ \text{ἀμβλυγώνιον } T_2 \\ \text{ὀξυγώνιον } T_3 \end{cases}$



Τρίγωνον Τ $\begin{cases} \text{σκαληνὸν } T_4 \\ \text{ἰσοσκελὲς } T_5 \\ \text{ἰσόπλευρον } T_6 \end{cases}$



Σχ. 152

181. Εἴδη γραμμῶν : Ἂν ἐξετάσωμεν διάφορες γραμμές, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ ἑξῆς εἴδη.

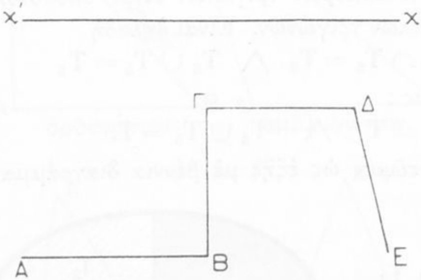
α) Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν XX′ (σχ. 153 α′).

β) Τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΕ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα χωρὶς νὰ εἶναι ὁλόκληρος εὐθεῖα (σχ. 153 β′). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **τεθλασμένη** γραμμή.

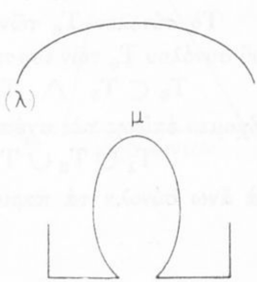
γ) Τὴν γραμμὴν (λ), τῆς ὁποίας κανένα μέρος δὲν εἶναι εὐθύγραμμον (σχ. 154 α′). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **καμπύλη** γραμμὴ (ὅπως εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου).

δ) Τὴν γραμμὴν (μ) ποὺ ἀποτελεῖται καὶ ἀπὸ καμπύλην γραμμὴν καὶ ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα (σχ. 154 β΄). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ λέγεται **μικτὴ** γραμμή.

Ἀξιοπρόσεκτος εἶναι ἡ ἑξῆς πρότασις : Ἂν περνοῦν πολλὲς γραμμὲς μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (σχ. 155) τότε ἡ μικρότερη ἀπ' ὅλες εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ.

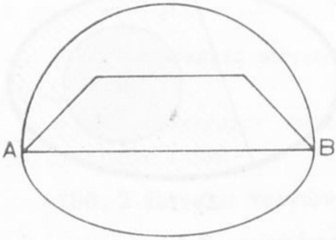


Σχ. 153.

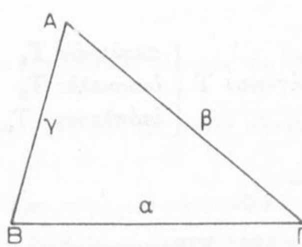


Σχ. 154.

182. Ἡ τριγωνικὴ ἀνισότης : Πέρνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει πλευρὰς τὰς α, β, γ καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $\alpha > \beta > \gamma$ (σχ. 156). Κατὰ τὴν παραπάνω πρότασιν εἶναι :



Σχ. 155.



Σχ. 156.

$$\alpha < \beta + \gamma \implies \alpha - \beta < \gamma \wedge \alpha - \gamma < \beta \quad (\S\, 52.3)$$
$$\beta < \alpha + \gamma \implies \beta - \gamma < \alpha$$
$$\gamma < \alpha + \beta$$

Ἀπὸ τὰς παραπάνω ἀνισότητας συμπεραίνομεν ὅτι :

Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερη τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ μεγαλύτερη τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Τὰ παραπάνω συνοψίζονται εἰς τὰς ἑξῆς διπλᾶς ἀνισότητας :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta-\gamma &< \alpha < \beta+\gamma \\ \alpha-\gamma &< \beta < \alpha+\gamma \\ \alpha-\beta &< \gamma < \alpha+\beta \end{aligned}}$$

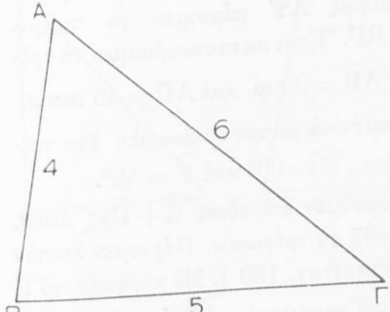
Παρατήρησις : Ἂν α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ τριγώνου, τότε αἱ ἓξ παραπάνω ἀνισότητες περιλαμβάνονται εἰς τὴν ἑξῆς διπλῆν ἀνισότητα :

$$\boxed{\beta-\gamma < \alpha < \beta+\gamma}$$

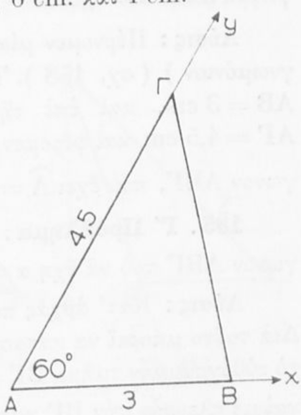
Πραγματικὰ ἀφοῦ εἶναι $\alpha < \beta+\gamma$ ἄρα (§ 52. 3) θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\gamma < \beta$ καὶ $\alpha-\beta < \gamma$. Ἐπίσης ἀφοῦ εἶναι $\beta < \alpha$ θὰ εἶναι πολὺ περισσότερον $\beta < \alpha+\gamma$ καὶ ἀφοῦ εἶναι $\gamma < \alpha$ θὰ εἶναι πολὺ περισσότερον $\gamma < \alpha+\beta$.

Κατασκευὴ τριγώνων

183. Α′ Πρόβλημα : Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς 5 cm., 6 cm. καὶ 4 cm.



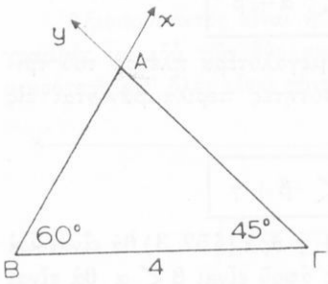
Σχ. 157.



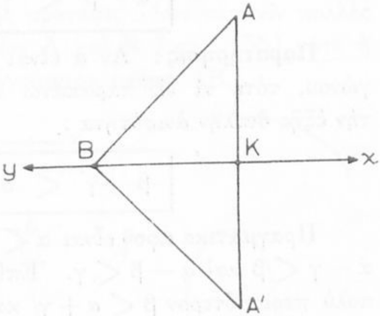
Σχ. 158.

Λύσις : Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha = 5$ cm., $\beta = 6$ cm., $\gamma = 4$ cm. Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\beta-\gamma < \alpha < \beta+\gamma$, δηλαδὴ $6-4 < 5 < 6+4$. Ἑπομένως μπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον τοῦτο. Πέρνομεν λοιπὸν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα

$ΒΓ = 5$ cm (σχ. 157). Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα 6 cm. γράφομεν τόξον καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα 4 cm. γράφομεν ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ πρῶτον τόξον εἰς τὸ σημεῖον Α.



Σχ. 159.



Σχ. 160.

Φέρομεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἔτσι κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει πλευρὰς $ΒΓ = 5$ cm., $ΑΓ = 6$ cm. καὶ $ΑΒ = 4$ cm.

184. Β′ Πρόβλημα: Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει $\widehat{Α} = 60^0$, $ΑΒ = 3$ cm. καὶ $ΑΓ = 45$ mm.

Λύσις: Πέρνομεν μίαν γωνίαν $\widehat{ΧΑΨ} = 60^0$ (μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον) (σχ. 158). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΧ πέρνομεν τὸ τμῆμα $ΑΒ = 3$ cm. καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΨ πέρνομεν τὸ τμῆμα $ΑΓ = 4{,}5$ cm καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ. Ἔτσι κατασκευάσαμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ποὺ ἔχει $\widehat{Α} = 60^0$, $ΑΒ = 3$ cm. καὶ $ΑΓ = 45$ mm.

185. Γ′ Πρόβλημα: Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ νὰ ἔχῃ $α = 4$ cm., $\widehat{Β} = 60^0$ καὶ $\widehat{Γ} = 45^0$.

Λύσις: Κατ' ἀρχὰς παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\widehat{Β} + \widehat{Γ} < 180^0$. Διὰ τοῦτο μπορεῖ να κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον. Πέρνομεν λοιπὸν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $ΒΓ = 4$ cm. (σχ. 159). Μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ΓΒΧ} = 60^0$ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Γ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΒ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ΒΓΨ} = 45^0$. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΒΧ καὶ ΓΨ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἔτσι κατακατασκευάζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει $ΒΓ = α = 4$ cm., $\widehat{Β} = 60^0$ καὶ $Γ = 45^0$.

Σημ. Βρίσκομεν ὅτι εἶναι $\widehat{Α} = 180^0 - 60^0 - 45^0 = 75^0$.

186. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν: Πέρνομεν τήν εὐθεῖαν ΧΨ καὶ τὸ σημεῖον Α $\notin$ ΧΨ, φέρομεν τήν ΑΚ $\perp$ ΧΨ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΚ πέρνομεν ΚΑ′=ΚΑ (σχ. 160). Ἄρα τὸ Α′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς ἄξονα τήν ΧΨ. Ἂν φέρωμεν καὶ μίαν ὁποιανδήποτε πλαγίαν ΑΒ καὶ περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΚΒ περὶ τὴν ΚΒ (περὶ τὸν ἄξονα ΧΨ), τότε τὸ Α θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ συμμετρικὸν Α′ αὐτοῦ καὶ ἡ ΑΒ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τήν ΒΑ′. Ἑπομένως θὰ εἶναι ΒΑ′= ΒΑ. Ἀλλὰ εἰς τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΑ′ θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΑ' < ΑΒ + ΒΑ' \quad ἢ \quad 2ΑΚ < 2ΑΒ \implies ΑΚ < ΑΒ.$$ Ὥστε:

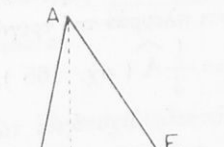
Ἡ κάθετος ΑΚ ἐπὶ τὴν ΧΨ εἶναι μικροτέρα κάθε πλαγίας ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΧΨ.

Διὰ τοῦτο ἡ κάθετος ΑΚ λέγεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τήν εὐθεῖαν ΧΨ.

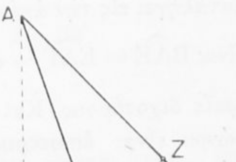
187. Ἄλλα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Βάσις ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἡ μία πλευρά του, **ὕψος** δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ τήν βάσιν.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ μία κάθετος πλευρά, ὁπότε ὕψος εἶναι ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά. Ἂν ὅμως ληφθῆ

Σχ. 161.



Σχ. 162.



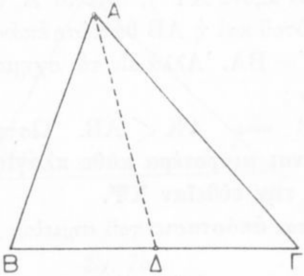
Σχ. 163.

ὡς βάσις ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ (σχ. 161) τότε τὸ ὕψος του εἶναι $υ' = ΑΔ \perp ΒΓ$. Ὥστε ἕνα τρίγωνον ἔχει τρία ὕψη (ἀφοῦ κάθε πλευρά του μπορεῖ νὰ ληφθῆ ὡς βάσις).

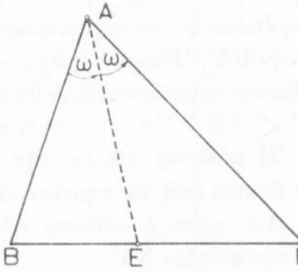
Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι ὅτι εἰς ἕνα ὀξυγώνιον τρίγωνον (σχ. 162) καὶ τὰ τρία ὕψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶναι **ἐσωτερικὰ** τμήματα τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ τριγώνου, ἐνῶ εἰς ἕνα ἀμβλυγώνιον τρίγωνον

(σχ. 163) τὸ ἕνα ὕψος, τὸ BZ εἶναι ἐσωτερικὸν τμῆμα ἀλλὰ τὰ δύο ἄλλα ὕψη ΑΔ καὶ ΓΕ εἶναι ἐξωτερικὰ τμήματα τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ τριγώνου.

Διάμεσος ἑνὸς τριγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει κάθε κορυφὴν μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. π.χ. ἡ



Σχ. 164.



Σχ. 165.

ΑΔ, ἔνθα εἶναι ΔΒ = ΔΓ (σχ. 164). Τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς διαμέσους. Καὶ αἱ τρεῖς διάμεσοι εἶναι **ἐσωτερικὰ** τμήματα τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ τριγώνου.

Διχοτόμος γωνίας ἑνὸς τριγώνου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ τριγώνου. π.χ. ἡ ΑΕ, ἔνθα εἶναι $B\widehat{A}E = E\widehat{A}\Gamma = \omega = \frac{1}{2}\widehat{A}$ (σχ. 165). Τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς διχοτόμους. Καὶ αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι **ἐσωτερικὰ** τμήματα τοῦ ἐπιπέδου χωρίου τοῦ τριγώνου.

Πότε δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα

188. Δύο ἴσα σχήματα ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα, ἕνα πρὸς ἕνα. Ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ ὄχι, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα, ἕνα πρὸς ἕνα. Αἱ τρεῖς περιπτώσεις τῆς κατασκευῆς ἑνὸς τριγώνου (§§ 183 - 185) μᾶς δίνουν τὰ ἑξῆς τρία κριτήρια διὰ τὴν ἰσότητα δύο τριγώνων.

Ι Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

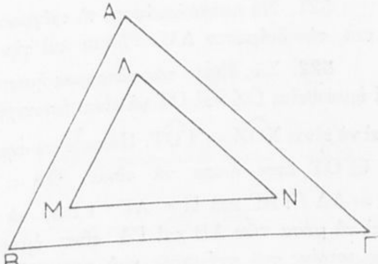
II Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην.

III Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Δηλαδὴ ἂν τὸ ἕνα τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ καὶ τὸ ἄλλο ἴσον πρὸς αὐτὸ εἶναι τὸ Α'Β'Γ' θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς τρεῖς συνεπαγωγάς:

I	$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma'$	$\Longleftrightarrow$	τρ. ΑΒΓ = τρ. Α'Β'Γ'
II	$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$	$\Longleftrightarrow$	τρ. ΑΒΓ = τρ. Α'Β'Γ'
III	$\alpha = \alpha',\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$	$\Longleftrightarrow$	τρ. ΑΒΓ = τρ. Α'Β'Γ'

Παρατήρησις. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, τότε δὲν μποροῦμε νὰ βγάλωμεν τὸ συμπέρασμα ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι. π.χ. τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΛΜΝ (σχ. 166) ἔχουν $\widehat{A} = \widehat{\Lambda}, \widehat{B} = \widehat{M}, \widehat{\Gamma} = \widehat{N}$, ἀλλὰ τὰ τρίγωνα αὐτὰ δὲν εἶναι ἴσα.



Σχ. 166.

Ἀσκήσεις

509. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον ποὺ ἔχει πλευρὰς 5 cm., 7 cm καὶ 8 cm.

510. Μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3 cm, 4 cm καὶ 8 cm ἢ ὄχι ; καὶ διατί ;

511. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον μὲ μίαν πλευρὰν 6 cm καὶ μὲ προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας 40^0 καὶ 75^0 (νὰ μετρήσετε τὰς γωνίας του μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον).

512. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει $\alpha = 6{,}3$ cm, $\beta = 55$ mm καὶ $\widehat{\Gamma} = 60^0$.

513. Ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι $32^0\ 25'\ 42''$ καὶ ἡ ἄλλη γωνία αὐτοῦ εἶναι $84^0\ 40'\ 50''$. Πόση εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ;

514. Ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι $43^0\ 18'\ 37''$ καὶ ἡ ἄλλη γωνία αὐτοῦ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ αὐτὴν κατὰ $54^0\ 47'\ 30''$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

515. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία ὀξεῖα γωνία εἶναι $58^0\ 20'\ 10''$ Πόση εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ ;

516. Εἰς ἕνα τρίγωνον ἡ μία γωνία του εἶναι $35^0\ 47'\ 16''$ καὶ ἡ ἄλλη γωνία του εἶναι $54^0\ 12'\ 44''$. Πόση εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου τούτου ; Καὶ τί τρίγωνον εἶναι ;

517. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ρόμβον μὲ πλευρὰν 5 cm. καὶ μὲ μίαν γωνίαν 60^0. Νὰ μετρήσετε δὲ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον τὸ μῆκος κάθε διαγωνίου αὐτοῦ (τῆς μιᾶς βρίσκεται ἀκριβῶς).

518. Νὰ κατασκευάσετε μίαν γωνίαν $\widehat{B} = 60^0$, ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς νὰ πάρετε τμῆμα ΒΑ = 6 cm. καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτῆς νὰ πάρετε τμῆμα ΒΓ = 3 cm. καὶ νὰ βρῆτε μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὸ μέγεθος κάθε γωνίας τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ΑΒΓ. Τί τρίγωνον εἶναι ;

519. Διατὶ τὸ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει **μίαν μόνον** γωνίαν ἀμβλεῖαν ;

520. Διατί τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει **μίαν μόνον** γωνίαν ὀρθήν ;

521. Νὰ κατασκευάσετε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἂν γνωρίζετε τὸ ὕψος ΑΔ = 4 cm, τὴν διάμεσον ΑΜ = 5 cm καὶ τὴν βάσιν ΒΓ = 9 cm.

522. Σᾶς δίνουν τὰς τέσσαρας ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΨ, ΟΖ, ΟΤ, ἔτσι ὥστε αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΖ καὶ ΟΤ νὰ εἶναι ἐσωτερικαὶ τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΨ) καὶ νὰ εἶναι $\widehat{XOZ} = \widehat{\Psi OT}$. Πέρνετε τὰ σημεῖα $A \in OX$, $B \in O\Psi$, $\Gamma \in OZ$, $\Delta \in OT$ ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $OA = OB$ καὶ $O\Gamma = O\Delta$. Ἂν εἶναι $E = A\Delta \cap B\Gamma$ καὶ $H = A\Gamma \cap B\Delta$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ σημεῖα Ο, Ε, Η καὶ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὁμοευθειακὰ καὶ ὅτι ἡ ΟΗ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος ποὺ σχηματίζεται.

523. Σᾶς δίνουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προεκτείνετε τὴν πλευρὰν ΒΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως νὰ πάρετε τμῆμα $AB' = AB$, νὰ προεκτείνετε καὶ τὴν πλευρὰν ΓΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως νὰ πάρετε τμῆμα $A\Gamma' = A\Gamma$. Νὰ ἀποδείξετε κατόπιν α) ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $AB'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, β) ὅτι τὸ τετράπλευρον $B\Gamma B'\Gamma'$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ γ) ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ καὶ τὸ μέσον Μ′ τῆς $B'\Gamma'$ εἶναι ὁμοευθειακὰ μὲ τὴν κορυφὴν Α (§ 145).

524. Σᾶς δίνουν τὴν γωνίαν $\widehat{XO\Psi} = 120^0$ καὶ τὸ σημεῖον $A \in \widehat{XO\Psi}$ Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α νὰ φέρετε τὴν $AB \perp OX$ καὶ τὴν $A\Gamma \perp O\Psi$ καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ μέγεθος τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$.

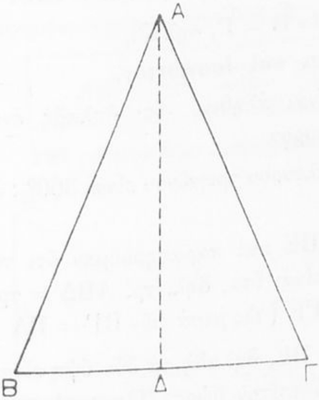
525. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν ΒΓ = 62 mm ὕψος ΑΔ = 3 cm καὶ πλευρὰν ΑΒ = 53 mm. Πόσες λύσεις βρίσκετε ;

189. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον : Πέρνομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει ΑΒ = ΑΓ καὶ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ (σχ. 167). Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ = ΑΓ διὰ τοῦτο (§ 91.1) ἡ

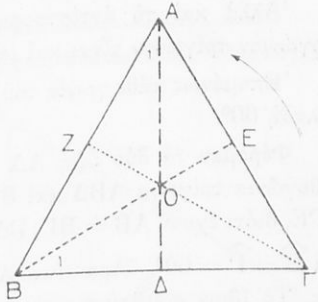
$A\Delta \perp B\Gamma$ εἶναι μεσοκάθετος καὶ ἄρα ἡ $A\Delta$ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου. Ὥστε :

Τὸ ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἂν ἀναδιπλώσωμεν τὸ μέρος $A\Delta\Gamma$ περὶ τὴν $A\Delta$ ὥστε νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ μέρους $A\Delta B$, τότε θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ $\Delta\Gamma$ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὴν ΔB, διότι εἶναι $A\widehat{\Delta}\Gamma = A\widehat{\Delta}B = 90^0$ καὶ τὸ Γ



Σχ. 167.



Σχ. 168.

θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ B, διότι εἶναι $\Delta\Gamma = \Delta B$. Ὥστε παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕψος $A\Delta$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ τρ. $A\Delta B$ = τρ. $A\Delta\Gamma$. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι :

Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἀληθινόν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι αἱ δύο γωνίαι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἑξῆς ἀμφιμονοσήμαντον συνεπαγωγήν :

$$\boxed{AB\Gamma = \text{ἰσοσκελὲς τρίγωνον} \iff \widehat{B} = \widehat{\Gamma}}$$

Συμπεραίνομεν ἀκόμη ὅτι τὸ ὕψος $A\Delta$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ (διότι εἶναι $\Delta B = \Delta\Gamma$) Ἐπίσης τὸ ὕψος $A\Delta$ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας A τῆς κορυφῆς (διότι εἶναι $B\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}\Gamma$).

190. Ἰσόπλευρον τρίγωνον: Ἂν κάμωμεν τὴν ἰδίαν σκέψιν καὶ διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 168) τότε παρατηροῦμεν ὅτι

α) Τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι καὶ διάμεσος (ΒΔ = ΔΓ) καὶ διχοτόμος ($\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}$), εἶναι δὲ $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$. Ἀλλὰ καὶ τὸ ὕψος ΒΕ εἶναι καὶ διάμεσος (ΓΕ = ΕΑ) καὶ διχοτόμος ($\widehat{ΓΒΕ} = \widehat{ΕΒΑ}$) καὶ εἶναι $\widehat{Γ} = \widehat{Α}$. Ὥστε θὰ εἶναι $\widehat{Α} = \widehat{Β} = \widehat{Γ}$, δηλαδὴ

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι ἀληθινό, ὅτι δηλαδὴ ἕνα ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.

Ἑπομένως κάθε γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $360^0 : 3$ δηλαδὴ 60^0

Φέρομεν τὰ δύο ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΕ εἶναι ἴσα, δηλ. τρ. ΑΒΔ = τρ. ΒΓΕ, διότι ἔχουν ΑΒ = ΒΓ, ΒΔ = ΓΕ (ὡς μισὰ τῶν ΒΓ = ΓΑ) καὶ $\widehat{Β} = \widehat{Γ} = 60^0$. Ἄρα εἶναι ΑΔ = ΒΕ, δηλαδὴ τὰ δύο ὕψη εἶναι ἴσα. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὸ τρίτον ὕψος. Ὥστε **τὰ τρία ὕψη ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα,** εἶναι δὲ τὰ ὕψη καὶ διάμεσοι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Τὰ δύο ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἂν φέρωμεν καὶ τὴν ΟΓ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΔΓΕ χωρίζεται εἰς τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΟΓ ($\widehat{Δ} = 90^0$) καὶ ΕΟΓ ($\widehat{Ε} = 90^0$). Ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΟΔΓΕ ἔχουν ἄθροισμα 4^L ἤτοι 360^0, ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\widehat{Δ} = 90^0$, $\widehat{Ε} = 90^0$ καὶ $\widehat{Γ} = 60^0$, βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι εἶναι $\widehat{ΔΟΕ} = 120^0$. Ἀλλὰ θὰ εἶναι τριγ. ΔΟΒ = τριγ. ΕΟΑ διότι ἔχουν ΔΒ = ΕΑ (ὡς μισὰ τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ = ΓΑ), $\widehat{Δ} = \widehat{Ε} = 90^0$ καὶ $Β_1 = Α_1 = 30^0$. Ὥστε θὰ εἶναι καὶ ΟΔ = ΟΕ.

Ἂν λοιπὸν περιστρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΒΓΕ περὶ τὸ σημεῖον Ο καὶ κατὰ γωνίαν 120^0, τότε τὸ τρίγωνον ΒΕΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπάνω εἰς τὸ τρίγωνον ΓΖΑ. Ὥστε συμπεραίνομεν ὅτι:

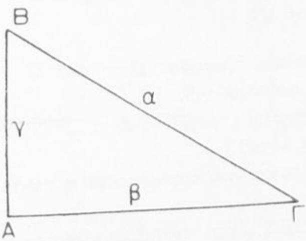
Τὸ σημεῖον τομῆς Ο τῶν ὑψῶν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι **κέντρον συμμετρίας** αὐτοῦ, καὶ κάθε ὕψος εἶναι **ἄξων συμμετρίας** τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Συμπεραίνομεν ἀκόμη ὅτι τὰ τρία ὕψη ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Σημ. Θὰ ἰδοῦμεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον ὅτι τὰ τρία ὕψη ἑνὸς ὁποιουδήποτε τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον.

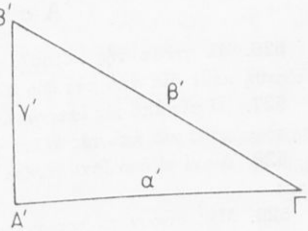
Ἔχομεν λοιπὸν καὶ διὰ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ τὴν ἀμφιμονοσήμαντον συνεπαγωγὴν

$$\boxed{\text{ΑΒΓ} = \text{ἰσόπλευρον τρίγωνον} \Leftrightarrow \widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{Β}} = \widehat{\Gamma}}$$

191. Πότε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα : Ὅταν ἔχω-



Σχ. 169



Σχ. 170

μεν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τότε μποροῦμε νὰ διακρίνωμεν τὰς ἑξῆς πέντε περιπτώσεις διὰ τὴν ἰσότητα αὐτῶν.

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν

α) Τὰς δύο καθέτους πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν (διότι ἔχουν καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν $\widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{Α}'} = 90^0$) δηλαδὴ

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \gamma'$$

β) Τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην (διότι ἔχουν καὶ τὴν $\widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{Α}'} = 90^0$) δηλαδὴ

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}'}.$$

γ) Τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ τὴν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, δηλαδὴ

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}'}$$

δ) Τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην καὶ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, δηλαδὴ

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}'$$

ε) Τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, δηλαδὴ $\beta = \beta'$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{B}'$

Διὰ τὴν γ', δ' καὶ ε' περίπτωσιν συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἀπὸ τὰ δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ (σχ. 167).

Τὰς πέντε παραπάνω περιπτώσεις διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων μποροῦμε νὰ τὰς περιλάβωμεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἢ ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.

Ἀσκήσεις

526. Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $68^0\ 40'\ 5''$. Νὰ εὑρεθῇ κάθε μία ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας γωνίας αὐτοῦ.

527. Ἡ μία ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $72^0\ 20'\ 20''$. Πόση εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ ;

528. Διατί αἱ δύο ἴσαι γωνίαι ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι πάντοτε ὀξεῖαι ;

529. Μᾶς δίνουν τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του καὶ πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τετραγώνου κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ καὶ φέρομεν τὰς ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ. α) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΘΕ, ΒΕΖ, ΓΖΗ, ΔΗΘ εἶναι ἴσα μεταξύ των. β) Νὰ βρῆτε πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε γωνία αὐτῶν. γ) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον.

530. Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $\widehat{B} = 30^0$. Νὰ συγκρίνετε τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς β καὶ τῆς ὑποτεινούσης α. Τί διαπιστώνετε ;

531. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν 5 cm.

532. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 6 cm καὶ μὲ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευράς του 5 cm. Νὰ μετρήσετε δὲ τὸ ὕψος αὐτοῦ (βρίσκεται ἀκριβῶς).

533. Νὰ κατασκευάσετε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, νὰ φέρετε τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ. Τί συμπέρασμα βγάζετε ;

534. Νὰ συγκρίνετε τὰ τέσσαρα τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἕνας ρόμβος ἀπὸ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ. Τί συμπέρασμα βγάζετε ;

535. Νὰ πάρετε δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' μὲ τὰς ἴσας βάσεις ΒΓ = Β'Γ'. Νὰ φέρετε τὰ ὕψη ΑΔ καὶ Α'Δ' καὶ νὰ συγκρίνετε αὐτά. Τί διαπιστώνετε ; καὶ διατί ;

536. Νὰ φέρετε τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας (ΟΧ,ΟΨ) καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α τῆς διχοτόμου νὰ φέρετε τὴν ΑΒ $\perp$ ΟΧ καὶ τὴν ΑΓ $\perp$ ΟΨ καὶ νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ εἶναι ἴσα.

537. Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ καὶ τῆς γωνίας $\widehat{Γ}$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ.

538. Σᾶς δίνουν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν τὴν ΒΓ. Νὰ κατασκευάσετε τὸ συμμετρικόν του, α) ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, β) ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, γ) ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν Α.

539. Σᾶς δίνουν τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^0$) Νὰ κατασκευάσετε τὸ συμμετρικόν του ΑΒ'Γ' ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν Α καὶ νὰ ἐξακριβώσετε τί σχῆμα εἶναι τὸ ΒΓΒ'Γ'.

540. Σᾶς δίνουν ἕνα κύκλον κέντρου Κ. Νὰ φέρετε τὰς δύο ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ φέρετε τὴν ΑΓ $\perp$ ΑΚ καὶ τὴν ΒΓ $\perp$ ΒΚ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδείξετε α) ὅτι ἡ ΚΓ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος ΚΑΓΒ, β) ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ γ) Νὰ βρῆτε τὴν σχέσιν ποὺ συνδέει τὰς γωνίας (ΚΑ,ΚΒ) καὶ (ΓΑ,ΓΒ)

541. Δίδονται αἱ δύο εὐθεῖαι ΧΟΧ' $\perp$ ΨΟΨ'. Πέρνομεν τὰ σημεῖα Α $\in$ ΧΧ', Β $\in$ $\widehat{ΧΧ'}$, Γ $\in$ ΨΨ', Δ $\in$ ΨΨ', ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ. Νὰ ἀποδείξετε α) ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΔ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἴσα καὶ β) ἐὰν εἶναι Μ = ΑΔ $\cap$ ΒΓ καὶ Μ$\in\widehat{ΒΟΔ}$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΟΔ}$.

542. Νὰ κατασκευάσετε τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ποὺ ἔχει βάσιν ΒΓ = 46 mm καὶ ὕψος ΑΔ = 34 mm.

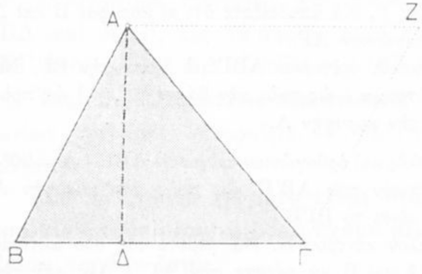
543. Δίδονται αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΧΑΧ' // ΨΒΨ' καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ αὐτῶν. Ἂν Μ $\in$ ΑΒ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΧ τμῆμα ΑΓ = ΜΒ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΨΨ' τμῆμα ΒΔ = ΜΑ (δύο περιπτώσεις). Νὰ ἀποδείξετε α) ὅτι εἶναι τριγ. ΜΑΓ = τριγ. ΜΒΔ καὶ β) ὅτι τὸ τρίγωνον ΜΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

544. Δίδεται ἡ κυρτὴ γωνία (ΑΧ, ΑΨ) καὶ ἡ διχοτόμος ΑΖ αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Η $\in$ ΑΖ φέρομεν τὴν ΒΗΓ $\perp$ ΑΖ ποὺ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας $\widehat{ΧΑΨ}$ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν ΑΖ.

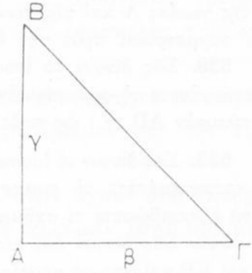
Ἐμβαδὸν τριγώνου

192. Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ποὺ ἔχει βάσιν ΒΓ = α = 4 cm καὶ ὕψος ΑΔ = 3 cm. Ἂν φέρωμεν τὴν ΑΖ // ΒΓ καὶ τὴν ΓΖ // ΑΒ, τότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΒΓ = 4 cm καὶ ὕψος

ΑΔ = 3 cm. Ἔχει δηλαδή τήν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀλλὰ (§ 178) γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.



Σχ. 171.



Σχ. 172.

Ἐπομένως συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΖ καὶ ἄρα θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐπειδὴ δὲ (§ 150. 3) εἶναι $(\text{ΑΒΓΖ}) = \beta\cdot\upsilon$ ἄρα $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon.$

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΓ})(\text{ΑΔ}) = \frac{1}{2}\times 4 \times 3 = 6 \text{ cm}^2.$$ Ὥστε

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Παρατήρησις Ι. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{\beta}{2}\cdot\upsilon = \beta\cdot\frac{\upsilon}{2}$, διὰ τοῦτο μποροῦμεν νὰ εἴπουμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἢ μὲ τὴν βάσιν του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του.

Παρατήρησις ΙΙ. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον (σχ. 172) καὶ πάρωμεν ὡς βάσιν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν β αὐτοῦ, τότε ὕψος θὰ εἶναι ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ γ αὐτοῦ καὶ τότε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$\text{Ε} = \frac{1}{2}\beta\gamma$$

Δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, ποὺ ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ, τότε ἔχομεν τὴν ἑξῆς συνεπαγωγήν :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\beta\upsilon \iff \beta = \frac{2E}{\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = \frac{2E}{\beta}}$$

193. Ἐμβαδὸν Ρόμβου. Θέλομεν νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ = 6 cm καὶ ΒΔ = 4 cm αὐτοῦ (σχ. 132, σελ. 229). Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως. Ἀλλὰ κάθε διαγώνιος χωρίζει τὸν ρόμβον εἰς δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, δηλ. τρ. ΑΒΔ = τρ. ΒΔΓ. Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ νὰ τὸ διπλασιάσωμεν. Ἔχομεν

$$(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΔ})(\text{ΑΟ}) \quad \text{καὶ} \quad 2(\text{ΑΒΔ}) = (\text{ΒΔ})(\text{ΑΟ})$$

Ἄρα βρίσκομεν $(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΒΔ})(\text{ΑΟ}) = 4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$.

Γενικὰ ἂν εἶναι ΑΓ = λ καὶ ΒΔ = μ αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου θὰ ἔχωμεν :

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΒΔ})(\text{ΑΟ}) = \mu \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{Ἄρα} \quad E = \frac{\lambda\mu}{2}. \text{ Ὥστε}$$

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

545. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ποὺ ἔχει βάσιν 25 cm. καὶ ὕψος 10 cm.

546. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς 6 cm. καὶ 9 cm. καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

547. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου τῆς ἀσκήσεως 532·

548. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου τῆς ἀσκήσεως 404.

549. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν 12 cm. καὶ μὲ ὑποτείνουσαν 13 cm. Νὰ μετρήσετε τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν του καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

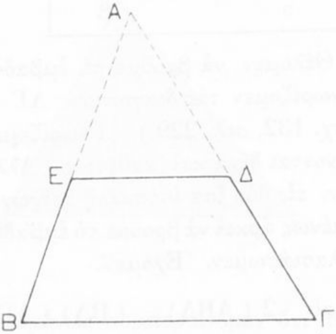
550. Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm. καὶ 10 cm. Νὰ τὸν κατασκευάσετε καὶ νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

551. Ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ = 4 cm. καὶ ΒΔ = 7 cm. τέμνονται καθέτως ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον δὲν εἶναι ρόμβος. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ (σκεφθῆτε κατὰ τὸν τρόπον τῆς § 193).

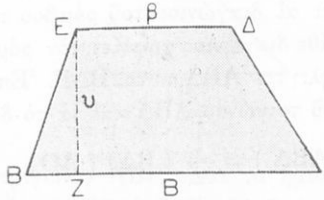
552. Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι x, x + 7, x + 8, ἡ δὲ περίμετρός του εἶναι 30 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Τραπέζιον

194. Πέρνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, φέρομεν τὴν ΔΕ // ΒΓ καὶ ἀποκόπτομεν τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν Α μέρος ΑΔΕ. Τότε μένει



Σχ. 173



Σχ. 174

τὸ ἐπίπεδον χωρίον ΒΓΔΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει μόνον τὰς ΒΓ // ΔΕ. Τὸ χωρίον ΒΓΔΕ λέγεται **τραπέζιον.** Ὥστε

Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει τὰς δύο μόνον ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους.

Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ ΒΓ καὶ ΔΕ τοῦ τραπεζίου λέγονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ὥστε τὸ τραπέζιον ἔχει δύο βάσεις, τὴν μεγάλην βάσιν ΒΓ = Β καὶ τὴν μικρὴν βάσιν ΔΕ = β. **Ὕψος** τοῦ τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις ΕΖ = υ τῶν δύο βάσεων.

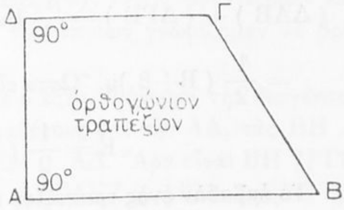
Σημ. Εἰς ἕνα τραπέζιον δὲν μποροῦμε νὰ πάρωμε ὡς βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΒΕ καὶ ΓΔ.

Περίμετρος τοῦ τραπεζίου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἕνα τραπέζιον λέγεται **ἰσοσκελὲς** ὅταν αἱ δύο μὴ παράλληλοι πλευραί του εἶναι ἴσαι. Τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον προκύπτει ἀπὸ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἂν ἀποκόψωμεν τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν μέρος μὲ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν. Ἐπομένως εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}$, (σχ. 175) δηλαδὴ αἱ παρὰ ἑκάστην βάσιν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἕνα τραπέζιον λέγεται **ὀρθογώνιον τραπέζιον,** ὅταν ἡ μία μὴ παράλληλος πλευρά του εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις αὐτοῦ ὅπως τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ. 176) εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΔ ⊥ ΑΒ καὶ ΑΔ ⊥ ΔΓ. Τὸ ὀρθογώνιον τραπέζιον προκύπτει

Σχ. 175

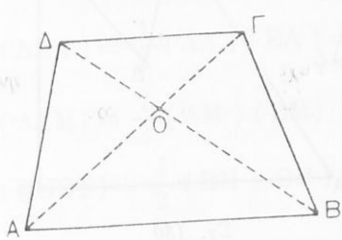


Σχ. 176

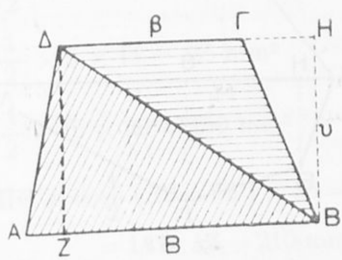
ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΒ ἂν ἀποκόψωμεν τὸ πρὸς τὴν κορυφὴν μέρος ΟΔΓ αὐτοῦ μὲ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΒ αὐτοῦ.

Διαγώνιος τραπεζίου λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς. Τὸ τραπέζιον ἔχει δύο διαγωνίους τὴν ΔΒ καὶ τὴν ΑΓ (σχ. 177).

195. Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τραπεζίου : Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε τὸ τραπέζιον χωρίζεται



Σχ. 177



Σχ. 178

εἰς τὰ δύο ἄνισα τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ (σχ. 178). Διὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ βρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ καὶ τὰ προσθέτομεν, δηλαδὴ

$$(\Delta A B) = \frac{1}{2}(AB)(\Delta Z) = \frac{1}{2} B \cdot \upsilon$$

$$(\Delta \Gamma B) = \frac{1}{2}(\Delta\Gamma)(BH) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon$$

διότι τοῦ τριγώνου ΔΓΒ πέρνομεν ὡς βάσιν τὴν μικρὰν βάσιν ΔΓ =

β τοῦ τραπεζίου, ὁπότε τὸ ὕψος του εἶναι τὸ ΒΗ = ΖΔ = υ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν :

$$(\Delta AB) + (\Delta \Gamma B) = \frac{1}{2} B\upsilon + \frac{1}{2} \beta\upsilon \quad \text{ἢ} \quad (AB\Gamma\Delta) =$$

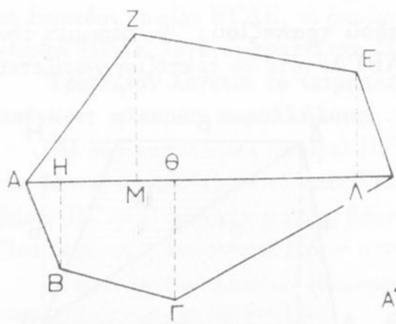
$$= \frac{1}{2}(B+\beta)\upsilon.$$ Ὥστε εἶναι διὰ τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ

$$E = \frac{1}{2}(B+\beta)\upsilon.$$ δηλαδὴ

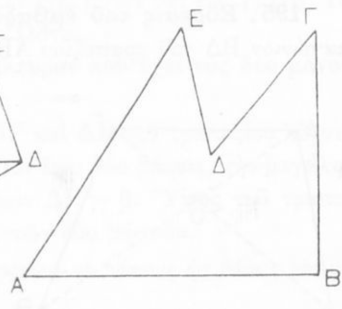
Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐμβαδὸν πολυγώνου

196. Πολύγωνον λέγεται κάθε εὐθύγραμμον σχῆμα ποὺ περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται **πλευραὶ** τοῦ πολυγώνου. Κάθε πολύγωνον πέρνει τὴν ὀνομασίαν του



Σχ. 179



Σχ. 180

ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του. Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράπλευρα ποὺ ἔχομεν μάθει εἶναι πολύγωνα. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ λέγεται **ἑξάγωνον** διότι ἔχει ἓξ πλευρὰς ἄρα καὶ ἓξ γωνίας. Ἔτσι ἔχομεν πεντάγωνα, ἑπτάγωνα, ὀκτάγωνα κ.λ.π.

Περίμετρος τοῦ πολυγώνου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, **διαγώνιος** δὲ λέγεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφάς, ὅπως π.χ. ἡ ΑΔ. Ὑπάρχουν πολύγωνα κυρτά, ὅπως εἶναι τὸ ἑξάγωνον τοῦ σχήματος 179 καὶ μὴ κυρτὰ ὅπως εἶναι τὸ πεντάγωνον τοῦ σχήματος 180.

Ἐμάθαμεν πῶς βρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τραπεζίου. Ἂν θέλωμεν νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, (σχ. 179), φροντίζομεν καὶ τὸ χωρίζομεν εἰς ἄλλα σχήματα, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν νὰ βρίσκωμεν τὸ ἐμβαδόν.

Ἕνας τρόπος χωρισμοῦ εἶναι ὁ ἑξῆς. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΔ καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΔ, τὰς $ΒΗ \perp ΑΔ$, $ΓΘ \perp ΑΔ$, $ΕΛ \perp ΑΔ$ καὶ $ΖΜ \perp ΑΔ$. Ἄρα εἶναι $ΒΗ \,//\, ΓΘ \,//\, ΕΛ \,//\, ΖΜ$. Ἔτσι τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ χωρίζεται εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ, ΓΔΘ, ΔΕΛ καὶ ΑΖΜ καὶ εἰς τὰ τραπέζια ΒΓΘΗ καὶ ΖΜΛΕ. Βρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς ἀπὸ τὰ σχήματα αὐτὰ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ποὺ βρίσκομεν θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἂν π.χ. εἶναι $ΑΔ = 50$ mm, $ΑΗ = 5$ mm, $ΑΜ = 15$ mm, $ΑΘ = 20$ mm, $ΔΛ = 5$ mm, $ΒΗ = 12$ mm, $ΓΘ = 16$ mm, $ΕΛ = 14$ mm καὶ $ΖΜ = 20$ mm. βρίσκομεν :

$$(ΑΒΗ) = \frac{1}{2}(ΑΗ)(ΒΗ) = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \text{ mm}^2$$

$$(ΓΘΔ) = \frac{1}{2}(ΓΘ)(ΘΔ) = \frac{1}{2} \times 16 \times 30 = 240 \text{ mm}^2$$

$$(ΔΕΛ) = \frac{1}{2}(ΔΛ)(ΕΛ) = \frac{1}{2} \times 5 \times 14 = 35 \text{ mm}^2$$

$$(ΑΖΜ) = \frac{1}{2}(ΑΜ)(ΖΜ) = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150 \text{ mm}^2$$

$$(ΒΗΘΓ) = \frac{1}{2}(ΒΗ + ΘΓ)(ΗΘ) = \frac{1}{2}(12 + 16) \times 15 = 14 \times 15 = 210 \text{ mm}^2$$

$$(ΖΜΛΕ) = \frac{1}{2}(ΖΜ + ΕΛ) \cdot (ΜΛ) = \frac{1}{2} \cdot (20 + 14) \times 30 = 17 \times 30 = 510 \text{ mm}^2$$

Ὥστε βρίσκομεν :

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = 30 + 240 + 35 + 150 + 210 + 510 = 1175 \text{ mm}^2$$

Ἀσκήσεις

553. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου ποὺ ἔχει βάσεις 8 m. καὶ 14m. καὶ ὕψος 6 m.

554. Ἕνα κτῆμα ἔχει σχῆμα τριγώνου μὲ βάσιν 65 m. καὶ μὲ ὕψος

40 m., πουλήθηκε δὲ πρὸς 250 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσα χρήματα πουλήθηκε ;

555. Μία ἔκτασις ἔχει σχῆμα τραπεζίου μὲ βάσεις 250 m. καὶ 190 m. καὶ μὲ ὕψος 150 m., χωρίσθηκε δὲ εἰς οἰκόπεδα τῶν 750 m^2 τὸ καθένα. Εἰς πόσα οἰκόπεδα χωρίσθηκε ;

556. Ἕνα τραπέζιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 10 m. ἔχει δὲ βάσεις 15 m. καὶ 25 m. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ.

557. Μία ἔκτασις σχήματος κυρτοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΑΔ ἴσην μὲ 80 m. Αἱ κάθετοι ΒΖ, ΓΘ, ΕΗ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΔ εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ κάθε μία ἔχει μῆκος 25 m. Ἂν εἶναι ΑΖ = 10 m., ΖΗ = 20 m. καὶ ΗΘ = 20 m. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκτάσεως αὐτῆς ;

558. Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ κορυφὴν τὸ Α. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο ἴσων πλευρῶν πέρνομεν τμῆμα ΒΒ′ = ΓΓ′. Νὰ ἐξακριβώσετε τί τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒ′Γ′ καὶ τί σχῆμα εἶναι τὸ ΒΓΓ′Β′.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ′

ΤΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

197. 1 Εἴδαμεν εἰς τὴν § 25 τὴν ἔννοιαν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἂς πάρωμεν τὸν δεκαδικὸν ἀριθμὸν 0,7 (ἑπτὰ δέκατα). Ἡ ἐκφώνησις αὐτοῦ εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐκφώνησιν ἑνὸς κλάσματος καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς § 158 τὸ 0,7 σημαίνει ὅτι χωρίζομεν τὴν ἀκεραίαν μονάδα εἰς δέκα ἴσα μέρη καὶ πέρνομεν τὰ ἑπτά. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{7}{10}$. Ὥστε ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,7 μπορεῖ νὰ γραφῆ καὶ ὡς κλάσμα $\frac{7}{10}$.

Ἐπίσης ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 5,34 ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 ἀκεραίας μονάδας καὶ ἀπὸ τριάντα τέσσαρα ἑκατοστά, μπορεῖ νὰ γραφῆ ὡς μικτὸς ἀριθμὸς $5\frac{34}{100}$ ἢ ὡς κλάσμα $\frac{534}{100}$.

Γράφομεν ἐπίσης $35{,}873 = 35\frac{873}{1000} = \frac{35873}{1000}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι καὶ αὐτοὶ κλάσματα, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν εἶναι κάποια δύναμις τοῦ 10. Πραγματικὰ γράφομεν :

$$0{,}7=\frac{7}{10}=\frac{7}{10^1},\quad 5{,}34=\frac{534}{100}=\frac{534}{10^2},\quad 35{,}873=\frac{35873}{1000}=\frac{35873}{10^3}$$

Διὰ τοῦτο οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **δεκαδικὰ κλάσματα.**

197. 2 Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν κλασματικήν του μορφήν, τὸν θέτομεν χωρὶς ὑποδιαστολὴν ὡς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν θέτομεν τὴν μονάδα μὲ τόσα μηδενικὰ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμός.

Ἕνα δεκαδικὸν κλάσμα π.χ. τὸ $\frac{47}{10}$ μπορεῖ νὰ γραφῇ **εὐκολώτερα** ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφήν του ὡς 4,7.

Ἀπὸ τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τοῦ κλάσματος $\frac{47}{10}$ πέρνομεν τὰ ἴσα κλάσματα ποὺ ἔχουν παρονομαστὴν δύναμιν τοῦ 10, δηλαδή:

$$\frac{47}{10}=\frac{470}{100}=\frac{4700}{1000}=\frac{47000}{10000}=\dots$$

καὶ γράφομεν τὰ κλάσματα αὐτὰ ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφήν των, δηλαδή,

$$4{,}7=4{,}70=4{,}700=4{,}7000=\dots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 4,7 μποροῦμεν νὰ βάλωμεν ὅσα μηδενικὰ θέλομεν καὶ νὰ τὸν γράψωμεν π.χ. ὡς 4,7000, ἢ τὰ μηδενικὰ ποὺ ὑπάρχουν εἰς τὸ τέλος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 4,7000 μποροῦμεν νὰ τὰ παραλείψωμεν καὶ νὰ τὸν γράψωμεν ὡς 4,7, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 4,7.

Ἔτσι κάθε ἀκέραιον ἀριθμὸν μποροῦμεν νὰ τὸν γράψωμεν ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν. Γράφομεν π.χ.

$$8=8{,}0=8{,}00=8{,}000 \text{ κ.λ.π.}$$

Ἀσκήσεις

559. Νὰ γράψετε ὑπὸ τὴν κλασματικὴν μορφὴν καθένα ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς: α) 0,27, β) 1,47, γ) 6,43, δ) 87,71, ε) 0,0037.

560. Νὰ γράψετε ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν καθένα ἀπὸ τὰ κλάσματα:

α) $\frac{34}{100}$, β) $\frac{6533}{1000}$, γ) $\frac{852}{1000}$, δ) $\frac{5}{10000}$, ε) $\frac{17}{10^4}$, στ) $\frac{256893}{10^5}$

561. Ποῖον εἶναι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα ποὺ εἶναι ἴσον μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς:

α) 0,25, β) 0,625, γ) 6,45, δ) 87,75, ε) 0,00875

Πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς

198. 1 Ὅταν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι γραμμένα κατὰ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν αὐτῶν, τότε **ὅλαι αἱ πράξεις γίνονται πολὺ εὐκολώτερα,** ἀκολουθοῦν δὲ τοὺς κανόνας ποὺ καθορίζουν τὰς πράξεις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. π.χ.

Πρόσθεσις

$$
\begin{array}{r}
25,37 \\
5,893 \\
348,7 \\
56 \\
\hline
435,963
\end{array}
\quad ἢ \quad
\begin{array}{r}
25,370 \\
5,893 \\
348,700 \\
56,000 \\
\hline
435,963
\end{array}
$$

Ἀφαίρεσις

$$
\begin{array}{r}
28,3 \\
9,724 \\
\hline
18,576
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
28,300 \\
9,724 \\
\hline
18,576
\end{array}
$$

Ὥστε εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἀκολουθοῦμεν ἐπακριβῶς τοὺς κανόνας τῶν § 37 καὶ 55. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν κάθε δεκαδικὸν ἀριθμὸν κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον ἔτσι ὥστε **ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ βρίσκεται εἰς τὴν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην.** Κατόπιν κάνομεν τὴν πρόσθεσιν ἢ τὴν ἀφαίρεσιν ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ φροντίζομεν ὥστε εἰς τὸ ἀποτέλεσμα ἡ ὑποδιαστολὴ νὰ βρίσκεται εἰς τὴν ἴδιαν κατακόρυφον στήλην.

198. 2 **Πολλαπλασιασμός:** Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα : **Πόσας δραχμὰς θὰ δόσωμεν διὰ νὰ ἀγοράσωμεν 3,25 κιλὰ ζάχαριν πρὸς 12,40 δρχ. τὸ κιλόν ;**

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν

$$12,40 \times 3,25$$

Ἀλλὰ εἶναι $12,40 = 12,4 = \dfrac{124}{10}$ καὶ $3,25 = \dfrac{325}{100}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο κλασμάτων $\dfrac{124}{10} \times \dfrac{325}{100}$ καὶ κατὰ τὴν § 172. 2 βρίσκομεν :

$$\frac{124}{10} \times \frac{325}{100} = \frac{40300}{1000} = 40,30$$

Ὥστε βρίσκομεν $12,40 \times 3,25 = 40,30$ δρχ.

Ἀλλὰ τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα βρίσκομεν εὐκολώτερα ἂν κάμωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου **χωρίσωμεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο μαζὺ παράγοντες.** Ἔτσι βρίσκομεν ἐπίσης

$$8,73 \times 5 = 43,65$$

Πολλαπλασιασμὸς

$$\begin{array}{r} 12,4 \times \\ 3,25 \\ \hline 620 \\ 248 \\ 372 \\ \hline 40,300 \end{array}$$

198. 3 **Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1 000 κλπ.** Κάνομεν τοὺς παρακάτω πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὴν § 86.1

α) $28,375 \times 10 = 283,750 = 283,75$

β) $5,68 \times 100 = 568,00 = 568$

γ) $8,7 \times 1000 = 8700,0 = 8700$

καὶ βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.λ.π. **μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν.**

Τὰ ψηφία ποὺ λείπουν τὰ συμπληρώνομεν μὲ μηδενικά.

198. 4 **Διαίρεσις:** α) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος.

Θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Ἀγοράζομεν 17 κιλὰ λάδι καὶ πληρώνομεν 398,65 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει τὸ κιλόν ;

Κάνομεν τὴν διαίρεσιν ὅπως εἰς τοὺς ἀκεραίους, ἀλλὰ ὅταν κατεβάσωμεν τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον, θέτομεν ὑποδιαστολὴν εἰς τὸ πηλίκον.

$$\begin{array}{r|l} 398,65 & 17 \\ \cline{2-2} 58 & 23,45 \\ 76 & \\ 85 & \\ 0 & \end{array}$$

Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς : Πέρνομεν τὴν ἰσότητα $\Delta = \delta\pi$ τῆς τελείας διαιρέσεως καὶ πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ 100, δηλαδὴ

$$100\,\Delta = 100\,\delta\pi \quad \text{ἢ} \quad 100\,\Delta = \delta \cdot (\,100\,\pi\,)$$

Ἀλλὰ ἡ παραπάνω ἰσότης φανερώνει τὴν διαίρεσιν $100\,\Delta : \delta = 100\,\pi$. Ὥστε ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως ἐπὶ 100, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ πηλίκον ἐπὶ 100. Ὁ διαιρετέος λοιπὸν γίνεται 39865 καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν 39865 : 17 βρίσκομεν πηλίκον 2345. Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τοῦτο ἔχει πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 100. Ὥστε τὸ ἀληθινὸν πηλίκον θὰ εἶναι $\frac{2345}{100} = 23,45$.

β) Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός. Θέλομεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 43,965 : 4,5. Ἀλλὰ (§ 106) γνωρίζομεν ὅτι ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται. Τότε ὁ διαιρετέος γίνεται 439,65 ὁ δὲ διαιρέτης 45. Κάνομεν λοιπὸν τὴν διαίρεσιν 439,65 : 45 βρίσκομεν πηλίκον 9,77.

439,65	45
346	9,77
315	
0	

Ἄλλα παραδείγματα :

1,0945 : 2,75

109,45	275
2695	0,398
2200	
0	

0, 02688 : 0,64

2,688	64
128	0,042
0	

Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός, μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ εἰς τὸν διαιρετέον καὶ εἰς τὸν διαιρέτην τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιὰ μέχρις ὅτου ὁ διαιρέτης γίνῃ ἀκέραιος καὶ ἔπειτα κάνομεν τὴν διαίρεσιν.

Εἰς τὰ παραπάνω παραδείγματα αἱ διαιρέσεις εἶναι τέλειαι. Ὅταν πρόκειται δι' ἀτελεῖς διαιρέσεις ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν παρακάτω § 201.

199. Διαίρεσις διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κλπ. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν § 98.3 βρίσκομεν :

125 : 10 = 12,5
345,4 : 100 = 3,454
345,4 : 1000 = 0,3454
8,657 : 10000 = 0,0008657

Ὥστε

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν διὰ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.λ.π. μεταθέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον διαιροῦμεν.

Ἀσκήσεις

562. Νὰ βρῆτε τὰ ἐξαγόμενα :

α) 6,75+ 0,897+ 583+ 0,0976+ 63,54

β) 973,5+ 8,734+ 34,57 — 87,25 — 345,573

γ) 1500 — 15,873 — 273,94 — 45,006

563. Νὰ κάμετε τοὺς πολλαπλασιασμούς :

α) 3587 × 43, β) 6,875 × 54,6, γ) 56,34 × 4,535

δ) 0,025 × 0,42, ε) $(5,62)^2$, στ) $(0,024)^2$

564. Νὰ βρῆτε τὰ πηλίκα :

α) 1198,428 : 42, β) 56,7 : 6,75, γ) 0,1288 : 4,6

565. Ἕνας οἰκογενειάρχης ἀγόρασε 2,35 κιλὰ κρέας πρὸς 36,80 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ 5 κιλὰ πατάτες πρὸς 6,30 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσας δραχμὰς ἔδωσε ;

566. Ἕνας ἀγόρασε 8,75 m. ὕφασμα καὶ πλήρωσε 2143,75 δραχμὰς Ἂν μὲ τὴν ἰδίαν τιμὴν τοῦ μέτρου ἀγόραζε 2,45 m ἀκόμη πόσας δραχμὰς θὰ ἔδιδεν ἀκόμη ;

567. Ἕνας ἔμπορος λαδιοῦ διέθεσε 6063,90 δρχ. διὰ νὰ ἀγοράση λάδι πρὸς 24,60 δρχ. τὸ κιλόν. Τὸ λάδι ποὺ ἀγόρασε τὸ ἔβαλε σὲ δοχεῖα τῶν 14,5 κιλῶν καθένα. Πόσα δοχεῖα ἐγέμισε ;

200. Τροπὴ κλάσματος εἰς δεκαδικόν : Πέρνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο φανερώνει τὴν διαίρεσιν 3 : 4 καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 3 μπορεῖ νὰ γραφῆ ὡς δεκαδικὸς 3,00 διὰ τοῦτο ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 3.00 : 4 βρίσκομεν πηλίκον 0,75. Ὥστε εἶναι :

$$\begin{array}{r|l} 3,00 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

Ἐπίσης τὸ κλάσμα $\frac{345}{8}$ γίνεται $\frac{345,000}{8}$ καὶ ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν βρίσκομεν πηλίκον 43,125. Ὥστε εἶναι :

$$\begin{array}{r|l} 345,000 & 8 \\ \cline{2-2} 25 & 43,125 \\ 10 & \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{345}{8} = 43,125$$

Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἕνα κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἀφοῦ προηγουμένως γράψωμεν τὸν ἀριθμητὴν ὡς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

201. Πηλίκα κατὰ προσέγγισιν : Καὶ αἱ παραπάνω διαιρέσεις ἔγιναν ἀκριβῶς. Ἂν ὅμως θέλωμεν νὰ τρέψωμεν εἰς δεκαδικὸν τὸ κλάσμα 5/6 τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις **δὲν τελειώνει ποτέ.** Διότι βρίσκομεν πάντοτε 3 εἰς τὸ πηλίκον καὶ μένει πάντοτε ὑπόλοιπον 2. Διὰ τοῦτο σταματῶμεν εἰς ἕνα δεκαδικὸν ψηφίον καὶ τότε λέμε ὅτι τὸ πηλίκον 5 : 6 βρίσκεται **κατὰ προσέγγισιν,** δηλαδὴ περίπου. Γράφομεν λοιπὸν

$$\frac{5}{6} = 0{,}83 \text{ κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ.}$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}833 \text{ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ κ.λ.π.}$$

Ἀντὶ τῆς φράσεως κατὰ προσέγγισιν μποροῦμε νὰ γράψωμεν τὸν συμβολισμὸν $\simeq$. Γράφομεν δηλαδὴ

$$\frac{5}{6} \simeq 0{,}83 \quad \text{ἢ} \quad \frac{5}{6} \simeq 0{,}833$$

ὅπου τὸ σύμβολον $\simeq$ σημαίνει **περίπου.**

Σημ. Ἢ θὰ γράψωμεν $\frac{5}{6} = 0{,}833\ldots$ ἢ θὰ γράψωμεν $\frac{5}{6} \simeq 0{,}833$.

Παρατήρησις : Μποροῦμεν νὰ γράψωμεν

$$\frac{5}{6} = 0{,}83\frac{2}{6}$$

γράφοντες δὲ $\frac{5}{6} \simeq 0{,}83$ παραλείπομεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{6}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Διὰ τοῦτο λέμε ὅτι εἶναι $\frac{5}{6} \simeq 0{,}83$ **κατ' ἔλλειψιν** διότι τὸ κλάσμα $\frac{2}{6}$ ποὺ παραλείπομεν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ μισὸ τοῦ ἑκατοστοῦ.

Ὅταν ὅμως ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, τότε βρίσκομεν

$$\frac{2}{3} = 0{,}666\frac{2}{3}$$

Τότε γράφομεν $\frac{2}{3} \simeq 0{,}667$ **καθ' ὑπεροχήν,** διότι τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μισὸ τοῦ χιλιοστοῦ. Ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὰς ἀτελεῖς διαιρέσεις **πηλίκα κατὰ προσέγγισιν,** ἢ δὲ προσέγγισις εἶναι ἢ **κατ' ἔλλειψιν** (λιγώτερο τοῦ σωστοῦ) ἢ **καθ' ὑπεροχὴν** (περισσότερο τοῦ σωστοῦ).

202. 1 Δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοί : Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,8**333** . . . τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν ψηφίον 3 **ἐπαναλαμβάνεται κατὰ συνέχειαν** λέγεται **δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός**, τὸ δὲ ἐπαναλαμβανόμενον ψηφίον 3 λέγεται **περίοδος** αὐτοῦ.

Ἔχομεν ἐπίσης :

$$\frac{15}{11} = 1{,}\mathbf{36}3636\ldots$$

εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς 1,363636 . . . δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ **περίοδον** τὸ διψήφιον τμῆμα 36, εἶναι δηλαδὴ ἡ περίοδος αὐτοῦ ὁ διψήφιος ἀριθμὸς 36. Ὥστε :

Περίοδος ἑνὸς δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀποτελοῦν τὰ ἐπαναλαμβανόμενα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς λέγεται **ἁπλοῦς** ὅταν ἡ περίοδός του ἀρχίζῃ ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ὅπως οἱ ἀριθμοὶ 0,666 . . . καὶ 1,363636 . . ., ἐνῶ ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς 0,833 . . . λέγεται **μὴ ἁπλοῦς** διότι τὸ δεκαδικὸν ψηφίον 8 **δὲν εἶναι περιοδικόν.**

202. 2 Πότε ἕνα κλάσμα γίνεται ἀκριβῶς δεκαδικὸς ἀριθμός : Πέρνομεν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο δεκαδικὸς ἀριθμός, πρέπει νὰ γίνῃ ἴσος μὲ κλάσμα ποὺ ἔχει παρονομαστὴν δύναμιν τοῦ 10, νὰ ἔχῃ δηλαδὴ παρονομαστὴν 10^ν καὶ ἐπειδὴ εἶναι $10 = 2 \times 5$, πρέπει νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν $2^\nu \times 5^\nu$. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{K}{10^\nu} = \frac{K}{2^\nu \times 5^\nu}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν § 160 τὸ κλάσμα $\frac{K}{2^\nu \times 5^\nu}$ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι :

$$2^\nu \times 5^\nu = \beta\lambda. \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) φανερώνει ὅτι ὁ παρονομαστὴς β ἀφοῦ διαιρεῖ τὸ βλ ὡς πολλαπλάσιόν του, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον του $2^\nu \times 5^\nu$.

'Αλλὰ διὰ νὰ γίνεται τοῦτο πρέπει ὁ β νὰ ἔχῃ ὡς πρώτους παράγοντας ἢ τὸ 2 ἢ τὸ 5 ἢ καὶ τὸ 2 καὶ τὸ 5 καὶ κανένα ἄλλον.

Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Διὰ νὰ γίνεται ἀκριβῶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα, πρέπει ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ νὰ ἔχει ὡς πρώτους παράγοντας μόνον τὸ 2 ἢ μόνον τὸ 5 ἢ μόνον καὶ τὸ 2 καὶ τὸ 5.

'Επὶ παραδείγματι τὸ κλάσμα $\frac{9}{64}$ γίνεται ἀκριβῶς δεκαδικὸς ἀριθμός, διότι ὁ παρονομαστής του $64 = 2^6$ ἔχει ὡς πρῶτον παράγοντα μόνον τὸ 2. Πραγματικὰ βρίσκομεν :

$$\frac{9}{64} = 0{,}140625$$

Τὸ κλάσμα τοῦτο ἔχει τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τοῦ παρονομαστοῦ 2^6.

202. 3 Κάθε ἄλλο κλάσμα γίνεται δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, δηλαδή :

α) "Αν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος δὲν ἔχῃ ὡς πρώτους παράγοντας οὔτε τὸ 2 οὔτε τὸ 5, τότε τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικόν. Βρίσκομεν π,χ.

$$\frac{46}{33} = 1{,}\mathbf{39}3939\ldots$$

διότι ὁ παρονομαστὴς $33 = 3 \times 11$ δὲν περιέχει οὔτε 2 οὔτε 5. 'Επίσης βρίσκομεν :

$$\frac{6}{7} = 0{,}\mathbf{857142}\,857142\ldots$$

μὲ περίοδον τὸν ἑξαψήφιον ἀριθμὸν 857142.

β) "Αν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ ὡς πρώτους παράγοντας καὶ ἄλλους καὶ τὸν 2 ἢ τὸν 5, τότε τὸ κλάσμα μετατρέπεται εἰς **μὴ ἁπλοῦν** δεκαδικὸν περιοδικόν. Βρίσκομεν π.χ.

$$\frac{89}{36} = 2{,}47\mathbf{2}22\ldots$$

'Επειδὴ ὁ παρονομαστὴς $36 = 2^2 \times 3^2$ περιέχει ὡς πρώτους παράγοντας καὶ τὸ 2 καὶ τὸ 3, τὸ κλάσμα μετατρέπεται εἰς τὸ μὴ ἁπλοῦν περιοδικὸν 2,47222 . . . ποὺ τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία 47 δὲν εἶναι περιοδικά.

Σημ. Τὰ μὴ περιοδικὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι τόσα ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἐκθέτης τοῦ 2 (ἢ τοῦ 5).

Ἀσκήσεις

568. Ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{7}{16}$, $\frac{27}{375}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{45}{39}$, $\frac{42}{150}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{45}{160}$, $\frac{35}{30}$, $\frac{21}{48}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{27}{21}$, $\frac{16}{22}$, $\frac{80}{34}$, $\frac{37}{60}$, $\frac{39}{64}$

α) ποῖα γίνονται ἀκριβῶς δεκαδικά, β) ποῖα γίνονται ἁπλᾶ περιοδικὰ καὶ γ) ποῖα γίνονται μὴ ἁπλᾶ περιοδικά ;

569. Τὰ κλάσματα τῆς παραπάνω ἀσκήσεως νὰ γίνουν δεκαδικοὶ ἀριθμοί. Εἰς ὅσα γίνονται περιοδικὰ νὰ σταματήσῃ ἡ διαίρεσις ἀφοῦ βρῆτε μίαν περίοδον.

570. Νὰ γίνουν αἱ παρακάτω πράξεις :

α) $25{,}78+\frac{57}{40}$, β) $6{,}75+\frac{17}{12}$, γ) $27{,}4-\frac{379}{60}$

δ) $\frac{8532}{240}-23{,}48$, ε) $38{,}49-\frac{543}{22}$, στ) $\frac{7}{32}+\frac{9}{80}+4{,}25$

Ὅσα κλάσματα γίνονται ἀκριβῶς δεκαδικὰ νὰ γίνουν πρὶν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν. Εἰς ὅσα δὲν γίνονται ἀκριβῶς δεκαδικά, νὰ γίνουν οἱ δεκαδικοὶ κλάσματα.

Ἀπὸ ποῖον κοινὸν κλάσμα γίνεται ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός.

203. 1 **Α' Περίπτωσις:** Πέρνομεν τὸν ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν 0,3535 . . . ποὺ δὲν ἔχει ἀκέραιον μέρος καὶ τὸν ὀνομάζομεν Α, δηλαδὴ $A = 0{,}3535\ldots$ (1)

Ἐπειδὴ ἡ περίοδός του εἶναι ὁ διψήφιος ἀριθμὸς 35, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἐπὶ 100 καὶ βρίσκομεν :

$$100\,A = 35{,}3535\ldots \quad \text{ἢ} \quad 100A = 35 + 0{,}3535\ldots$$

$$\text{ἢ } 100\,A = 35 + A \text{ ἢ } 100A - A = 35 \text{ ἢ } 99A = 35 \Longrightarrow A = \frac{35}{99}$$

Ὥστε βρίσκομεν : $\mathbf{0{,}3535\ldots = \frac{35}{99}}$

Ἄλλα παραδείγματα :

2ον $A = 0{,}888\ldots$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 10 διότι ἡ περίοδος εἶναι ὁ μονοψήφιος ἀριθμὸς 8 καὶ βρίσκομεν :

$10\,A = 8{,}888\ldots$ ἢ $10\,A = 8 + 0{,}888\ldots$ ἢ $10\,A = 8 + A$

ἢ $9A = 8 \Longrightarrow A = \frac{8}{9}$. Ἄρα $0{,}888\ldots = \frac{8}{9}$

3ον $A = 0{,}783783\ldots$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 1000 διότι ἡ περίοδος εἶναι ὁ τριψήφιος ἀριθμὸς 783 καὶ βρίσκομεν :

$1000\,A = 783{,}783783\ldots$ ἢ $1000\,A = 783 + 0{,}783783\ldots$

ἢ $1000\,A = 783 + A$ ἢ $999\,A = 783 \Longrightarrow A = \frac{783}{999}$

Ὥστε βρίσκομεν : $\mathbf{0{,}783\,783\ldots = \frac{783}{999} = \frac{87}{111} = \frac{29}{37}}$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ κοινὸν κλάσμα ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἕνας ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς χωρὶς ἀκέραιον μέρος, ἔχει ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.

203. 2 **Β' Περίπτωσις:** Πέρνομεν τὸν ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν 24,555 . . . μὲ ἀκέραιον μέρος καὶ τὸν ὀνομάζομεν Α δηλαδή : $A = 24{,}555\ldots$ ἢ $A = 24 + 0{,}555\ldots$

Ἀλλὰ τὸ $0{,}555\ldots = \frac{5}{9}$. Ὥστε βρίσκομεν

$$A = 24\,\frac{5}{9} = \frac{221}{9} = \frac{245 - 24}{9}$$

Εἶναι ἐπίσης $32{,}5656\ldots = 32\,\frac{56}{99} = \frac{3224}{99} = \frac{3256 - 32}{99}$.

Ὥστε βγάζομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ κοινὸν κλάσμα ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἕνας ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἀκέραιον μέρος ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὴν διαφορὰν ποὺ βρίσκομεν ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἀποτελοῦν τὰ ἀκέραια ψηφία μαζὺ μὲ μίαν περίοδον ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἀποτελοῦν τὰ ἀκέραια ψηφία, ὡς παρονομαστὴν δὲ τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος.

203. 3 **Γ'. Περίπτωσις:** Πέρνομεν τὸν μὴ ἁπλοῦν δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν 5,27444... καὶ τὸν ὀνομάζομεν A, δηλαδὴ

$$A = 5{,}27444\ldots$$

Πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 100 ὥστε ὁ ἀριθμὸς νὰ γίνῃ ἁπλοῦς καὶ βρίσκομεν :

$$100A = 527{,}444\ldots = 527\,\frac{4}{9} = \frac{4747}{9} = \frac{5274-527}{9}$$

Ἄρα $A = \dfrac{5274-527}{900}$.

Βγάζομεν λοιπὸν τὸ συμπέρασμα ὅτι :

Τὸ κοινὸν κλάσμα ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἕνας μὴ ἁπλοῦς δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ἔχει ὡς ἀριθμητὴν τὴν διαφορὰν ποὺ βρίσκομεν ἂν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἀποτελοῦν ὅλα τὰ ψηφία του μέχρι καὶ τῆς πρώτης περιόδου ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἀποτελοῦν τὰ ἀκέραια καὶ τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία, παρονομαστὴν δὲ τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος μὲ τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Ἀσκήσεις

571. Ἀπὸ ποῖα κοινὰ κλάσματα γίνονται οἱ δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοί :

α) 0,444... β) 0,2525... γ) 4,777...
δ) 65,2828..., ε) 7,35666..., στ) 28,04888...,
ζ) 3,783535..., η) 0,6453425425...

572. Νὰ κάμετε τὰς παρακάτω πράξεις, ἀφοῦ μετατρέψετε τοὺς δεκαδικοὺς περιοδικοὺς ἀριθμοὺς εἰς κοινὰ κλάσματα :

α) 0,3737... + 18,6555... + 34,5959... − 19,35222...
β) 6,2525... + 18,3232... − 23,93444...
γ) 8,54333... × 25, δ) 476,5888... : 32

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ

204. Εἰς τὰς § 119 καὶ 120 εἴδαμεν τὴν ἔννοιαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν καὶ τὰς ἁπλᾶς πράξεις μὲ συμμιγεῖς. Τώρα θὰ ἰδοῦμεν μερικὰς ἀκόμη περιπτώσεις συμμιγῶν ἀριθμῶν.

204. 1 **Α' Μετατροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἀκέραιον ἢ κλάσμα: α)** Θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν £ 8— 15— 10 εἰς μονάδας μιᾶς τάξεώς του. Πρὸς τοῦτο τὸν μετατρέπομεν εἰς ἀκέραιον, δηλαδὴ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του. Βρίσκομεν

$$\begin{array}{l} 8 \times 20 = 160 \text{ σελ.} \\ \quad + 15 \\ \hline 175 \times 12 = 2100 \text{ πέν.} \\ \quad\quad + 10 \\ \hline \quad\quad 2110 \text{ πέν.} \end{array}$$

Ὥστε αἱ £ 8 — 15 — 10 ἰσοδυναμοῦν μὲ 2110 πέννας.

Ἀλλὰ 12 πέννες κάνουν 1 σελήνιον καὶ ἑπομένως αἱ 2110 πέννες θὰ κάνουν $\frac{2110}{12} = 175\frac{10}{12} = 175\frac{5}{6}$ σελήνια.

Ἐπίσης $12 \times 20 = 240$ πέννες κάνουν 1 λίραν καὶ ἑπομένως αἱ 2110 πέννες θὰ κάνουν $\frac{2110}{240} = \frac{211}{24} = 8\frac{19}{24}$ λίρες.

Βρίσκομεν λοιπὸν ὅτι :

$$£\, 8 - 15 - 10 = 2110 \text{ πέν.} = 175\frac{5}{6} \text{ σελ.} = 8\frac{19}{24} \text{ λίρες.}$$

β) Θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν $32^0\, 16'\, 40''$ εἰς μονάδας μιᾶς τάξεώς του. Κατ᾽ ἀρχὰς τὸν μετατρέπομεν εἰς ἀκέραιον δηλαδὴ εἰς δευτερόλεπτα. Βρίσκομεν :

$$\begin{array}{l} 32^0 \times 60' = 1920' \\ \quad + 16 \\ \hline 1936' \times 60 = 116160'' \\ \quad\quad + 40 \\ \hline \quad\quad 116200'' \end{array}$$

Ὥστε αἱ $32^0\, 16'\, 40''$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $116200''$. Ἀλλὰ τὰ $60''$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $1'$ καὶ ἑπομένως βρίσκομεν ὅτι τὰ

$$116200'' = \frac{116200}{60} = \frac{11620}{6} = 1936'\,\frac{4}{6} = 1936'\,\frac{2}{3}.$$

Ἐπίσης $60 \times 60 = 3600''$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 1^0 καὶ ἄρα τὰ

$$116200'' = \frac{116200}{3600} = \frac{1162}{36} = \frac{581}{18} = 32^0\,\frac{5}{18}.$$

Βρίσκομεν λοιπὸν ὅτι εἶναι :

$$32^0\, 16'\, 40'' = 116200'' = 1936'\,\frac{2}{3} = 32^0\,\frac{5}{18}.$$ Ὥστε

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν ἕνα συμμιγῆ ἀριθμὸν εἰς μονάδας μιᾶς τάξεώς του, τὸν μετατρέπομεν κατ' ἀρχὰς εἰς ἀκέραιον, δηλαδὴ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεώς του μὲ πολλαπλασιασμοὺς καὶ προσθέσεις. Κατόπιν τὸ ἐξαγόμενον τὸ θέτομεν ὡς ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν θέτομεν τὸν ἀριθμὸν πού φανερώνει πόσαι μονάδες τῆς τελευταίας τάξεώς του κάνουν μίαν μονάδα τῆς τάξεως πού ζητοῦμεν.

204. 2 Β'. Μετατροπὴ ἀκεραίου ἢ κλάσματος εἰς συμμιγῆ: α) Θέλομεν νὰ μετατρέψωμεν 315730'' εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν. Ἐπειδὴ 60'' ἰσοδυναμοῦν μὲ 1' καὶ 60' ἰσοδυναμοῦν μὲ 1^0, διὰ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ 60 καὶ τὸ πηλίκον τὸ διαιροῦμεν πάλιν διὰ 60, δηλαδὴ

315730''	60	
157	5262'	60
373	462	**87⁰**
130	**42'**	
10''		

Ὥστε βρίσκομεν ὅτι εἶναι 315730'' = 87^0 42' 10''.

β) Νὰ μετατραποῦν 15895 πέννες εἰς συμμιγῆ. Βρίσκομεν

15895 πεν.	12	
38	1324 σελ.	20
29	124	**66 λίρ.**
55	**4 σελ.**	
7 πέν.		

Ὥστε βρίσκομεν ὅτι εἶναι 15895 πέν. = £ 66 — 4 — 7.

γ) Νὰ μετατραποῦν $15\frac{11}{12}$ λίρες εἰς συμμιγῆ. Πέρνομεν τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$ τῆς λίρας καὶ τὸ μετατρέπομεν εἰς σελήνια πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 20 δηλαδὴ

$$\frac{11}{12} \times 20 = \frac{220}{12} = 18\frac{4}{12} \text{ σελήνια.}$$

Πέρνομεν τὸ κλάσμα $\frac{4}{12}$ καὶ τὸ μετατρέπομεν εἰς πέννες δηλ. $\frac{4}{12} \times 12 = 4$ πέν. Ἑπομένως βρίσκομεν

$15\frac{11}{12}$ λίρ. = 15 λίρ. 18 σελ. 4 πέν. = £ 15 — 18 — 4

205. Πράξεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν: Ἐκτὸς ἀπὸ τὰς περιπτώσεις ποὺ εἴδαμεν εἰς τὴν § 120, ἔχομεν καὶ τὰς ἑξῆς:

α) Ἔχομεν ἕνα τεμάχιον ὑφάσματος ποὺ εἶναι 15 yd 1 f. 8 in καὶ ἐπωλήσαμεν τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ. Πόσον ἐπωλήσαμεν καὶ πόσον μᾶς ἔμεινε; Βρίσκομεν 15 yd 1 f 8 in $\times \frac{3}{8}$, δηλαδὴ

$$
\begin{array}{ccc|l}
15\ \text{yd} & 1\ \text{f} & 8\ \text{in} & \\
 & & 3\ \times & \\
\hline
45\ \text{yd} & 3\ \text{f} & 24\ \text{in} & 8 \\
\cline{4-4}
5\ \times & 15 & 24 & 5\ \text{yd}\quad 2\ \text{f}\quad 6\ \text{in} \\
3 & 18\ \text{f} & 48\ \text{in} & \\
15 & 2 & 0 & \\
 & 12\ \times & & \\
 & 24 & &
\end{array}
$$

Ὥστε εἶναι 15 yd 1 f 8 in $\times \frac{3}{8} =$ 5 yd 2 f 6 in καὶ

$$
\begin{array}{rccc}
 & 15\ \text{yd} & 1\ \text{f} & 8\ \text{in} \\
- & 5\ \text{yd} & 2\ \text{f} & 6\ \text{in} \\
\hline
 & 9\ \text{yd} & 2\ \text{f} & 2\ \text{in}
\end{array}
$$

Ὥστε μᾶς μένουν 9 yd 2 f 2 in

β) Νὰ μετατραποῦν $95^{\beta},6532$ εἰς μοίρας.

Γνωρίζομεν (§ 117.2) ὅτι εἶναι $100^{\beta} = 90^{0}$. Ἑπομένως $1^{\beta} = 0^{0},9$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $95^{\beta},6532 \times 0,9 = 86^{0},08788$.

Ἀλλὰ $0^{0},08788$ κάνουν $0,08788 \times 60 = 5',2728$ καὶ τὰ $0',2728$ κάνουν $0,2728 \times 60 = 16'',368$. Ὥστε βρίσκομεν:

$$95^{\beta},6532 \simeq 86^{0}\ 5'\ 16''$$

γ) Νὰ μετατραποῦν $52^{0}\ 16'\ 40''$ εἰς βαθμούς:

Ἔχομεν $16' = 16 \times 60 = 960''$, $16'\ 40'' = 1000''$. Ὥστε

$$52^{0}\ 16'\ 40'' = 52^{0}\frac{1000}{3600} = 52^{0}\frac{5}{18} \qquad \text{καὶ}$$

$$52^{0}\frac{5}{18} : 0,9 = \frac{941}{18} : \frac{9}{10} = \frac{941}{18} \times \frac{10}{9} = \frac{9410}{162} \simeq 58^{\beta},0864$$

206. Μονάδες μετρήσεως μεγεθῶν: Ἔχομεν ἀναφέρει διὰ τὰς μονάδας μήκους εἰς τὴν § 24.3, διὰ τὰς μονάδας ἐπιφανείας εἰς τὴν § 148 καὶ διὰ τὰς μονάδας μετρήσεως περιφερείας καὶ χρόνου εἰς τὴν § 117 καὶ 119. Θὰ ἀναφέρωμεν μερικὰς ἀκόμη μονάδας μετρήσεως ὄγκου - χωρητικότητος καὶ βάρους.

Α΄. Διὰ νὰ μετροῦμεν ὄγκον χρησιμοποιοῦμεν τὸ **κυβικὸν μέτρον** (m^3), δηλαδὴ ἕνα κύβον ποὺ ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ ἕνα μέτρον. Εἶναι δὲ

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

Β΄. Διὰ νὰ μετροῦμεν χωρητικότητα, ἰδίως διὰ τὰ ὑγρὰ χρησιμοποιοῦμεν τὸ **λίτρον.** Εἶναι δὲ ἕνα λίτρον ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης (δηλαδὴ ἑνὸς κυβικοῦ δεκάτου τοῦ μέτρου).

Γ΄. Διὰ νὰ μετροῦμεν βάρος χρησιμοποιοῦμεν τὸ **χιλιόγραμμον** ἢ κιλὸν (kgr). Εἶναι δὲ χιλιόγραμμον τὸ βάρος ὕδατος (ἀπεσταγμένου 4^0) ποὺ χωρεῖ εἰς μίαν κυβικὴν παλάμην. Τὸ χιλιόγραμμον ἔχει 1000 γραμμάρια (gr). Εἶναι δὲ γραμμάριον τὸ βάρος ὕδατος (ἀπεσταγμένου 4^0) ποὺ χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν cm. Πολλαπλάσιον τοῦ χιλιογράμμου εἶναι ὁ τόνος ποὺ ἔχει 1000 χιλιόγραμμα. Ὥστε εἶναι

$$1\ \text{τόννος} = 1000\ kgr = 1\ 000\ 000\ gr.$$

Παλαιότερον ἐχρησιμοποιεῖτο καὶ ἡ ὀκᾶ ποὺ εἶχε 1280 gr. καὶ διῃρεῖτο εἰς 400 δράμια καὶ πολλαπλάσιον τῆς ὀκᾶς ἦτο ὁ στατὴρ ποὺ εἶχε 44 ὀκάδες.

Δ΄. Διὰ νὰ μετροῦμεν θερμοκρασίαν ἔχομεν τοὺς βαθμοὺς Κελσίου ποὺ σημειώνονται ὅπως αἱ μοῖραι. Εἶναι δὲ 1^0 ἡ θερμοκρασία τοῦ τηκομένου πάγου καὶ 100^0 ἡ θερμοκρασία τοῦ βράζοντος ὕδατος.

Ἀσκήσεις

573. Νὰ μετατραποῦν £ 35 — 15 — 10, α) εἰς πέννας, β) εἰς σελήνια καὶ γ) εἰς λίρας.

574. Νὰ μετατραποῦν 13 yd 2f 10in α) εἰς ἴντσας, β) εἰς πόδας καὶ γ) εἰς ὑάρδας.

575. Νὰ μετατραποῦν 5h 32min 46sec, α) εἰς δευτερόλεπτα. β) εἰς πρῶτα λεπτὰ καὶ γ) εἰς ὥρας.

576. Νὰ μετατραπῆ τὸ κλάσμα $\frac{29}{24}$ h. εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

577. Νὰ μετατραπῆ ὁ μικτὸς $28\frac{5}{6}$ yd εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν.

578. Ἔχομεν £ 36 — 8 — 10 καὶ ἐξοδεύομεν τὰ 0,7 αὐτῶν. Πόσα ἐξοδεύσαμεν καὶ πόσα μᾶς ἔμειναν ;

579. Ἡ τιμὴ τῆς χαρτίνης λίρας εἶναι 84 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ εἰσπράξωμεν ὅταν ἐξαργυρώσωμεν μίαν ἐπιταγὴν ἀπὸ £ 75 — 7 — 10 ;

580. Εἰς ἕνα τρίγωνον ἡ μία γωνία του εἶναι $68^0\ 16'\ 40''$ καὶ ἡ ἄλλη γωνία του εἶναι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς. Πόση εἶναι ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου αὐτοῦ;

581. Ἕνα αὐτοκίνητον διήνυσε τὰ $\frac{3}{4}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἰς 2 h 30 min. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ ὁλόκληρον τὴν ἀπόστασιν ;

582. Τὰ $\frac{5}{9}$ ἑνὸς τεμαχίου ὑφάσματος εἶναι 9 yd 2 f. 8 in. Πόσον εἶναι ὁλόκληρον τὸ ὕφασμα ; Καὶ πόσα εἶναι τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ ;

583. Ἕνας ἔμπορος ἐξαργύρωσε δύο ἐπιταγές, τὴν πρώτην ἀπὸ £ 35 — 6 — 3 καὶ τὴν δευτέραν ἀπὸ £ 27 — 18 — 11. Ἡ Τράπεζα τοῦ κράτησε διὰ τὰ ἔξοδά της τὰ $\frac{3}{80}$ ὅλων τῶν χρημάτων. Πόσα χρήματα πῆρε ὁ ἔμπορος ἀπὸ τὴν Τράπεζαν ; Καὶ πόσες δραχμὲς κάνουν τὰ χρήματα ποὺ πῆρε πρὸς 84 δραχμὰς τὴν λίραν ;

584. Μία γωνία εἶναι $87^0\ 35'\ 20''$. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας αὐτῆς εἰς βαθμούς.

585. Ἑνὸς τριγώνου ἡ μία γωνία εἶναι 38^0 καὶ ἡ ἄλλη γωνία εἶναι $115^β,6530$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μοίρας ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου.

586. Εἰς ἕνα τρίγωνον ἡ μία γωνία του εἶναι $α^0$, ἡ ἄλλη γωνία του εἶναι $α^β$ καὶ ἡ τρίτη γωνία του εἶναι $4α^β$. Νὰ βρῆτε εἰς μοίρας τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις ἐπαναλήψεως

587. Δίδεται τὸ σύνολον Κ τῶν σημείων ἑνὸς κύκλου καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νὰ κάμετε τὸ κατάλληλον σχῆμα , ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι

α) $ΑΒ \subset Κ$, β) $ΑΒ \cap Κ = \varnothing$, γ) $ΑΒ \cup Κ = Κ$.

588. Ἐὰν $Σ_1$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς εὐθείας (Δ) καὶ $Σ_2$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας Κ, τί σημαίνει ἡ ἔκφρασις $Σ_1 \cap Σ_2 = \varnothing$; καὶ τί σημαίνει ἡ ἔκφρασις $Σ_1 \cap Σ_2 = \{Α, Β\}$; Νὰ κάμετε τὸ κατάλληλον σχῆμα δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

589. Τὰ σύνολα Α, Β, Γ εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου Δ, εἶναι δὲ $Α \cap Β = \varnothing$, $Β \cap Γ = \varnothing$, $Γ \cap Α = \varnothing$. α) νὰ γίνῃ τὸ σχετικὸν βέννιον διάγραμμα, β) νὰ βρῆτε ποῖον εἶναι τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ συνόλου Α ; γ) Νὰ ἐλέγξετε ἂν εἶναι ἀληθὴς ἡ ἔκφρασις $Β' = Α \cup Γ$, ἔνθα Β′ εἶναι τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ συνόλου Β, δ) νὰ ἐλέγξετε ἂν εἶναι ἀληθὴς ἡ ἔκφρασις $Δ = Α \cup Β \cup Γ$.

590. Δίδονται τὰ δύο σύνολα $Α = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ καὶ $Β = 2 \times 3^2 \times$

5×7^2. α) Νὰ βρῆτε τὴν $A \cap B$ καὶ τὴν $A \cup B$. β) Ποῖον ἄλλο ὄνομα ἔχει ἡ $A \cap B$ καὶ ποῖον ἡ $A \cup B$; (§ 137.2).

591. Νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον α) $A \times B$ καὶ β) $B \times A$ τῶν δύο συνόλων $A = \{1, 3, 5, 7\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta\}$ ἔνθα $\alpha < \beta$ καὶ τὴν ἀπεικόνισιν αὐτοῦ.

592. Νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον A^2 διὰ τὸ σύνολον $A = \{1, 4, 5, 8, 9\}$ καὶ τὴν ἀπεικόνισιν αὐτοῦ.

593. Νὰ σχηματίσετε τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τοῦ γινομένου $(\alpha - \beta) \cdot \gamma$ ἔνθα εἶναι $\alpha > \beta$.

594. Νὰ σχηματίσετε τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τοῦ $(\alpha + 6)^2$.

---

595. Ἕνας παντοπώλης ἐπλήρωσε 690 δραχμὰς διὰ τὴν ἀγορὰν 3 δοχείων ἐλαίου τῶν 14 κιλῶν τὸ καθένα. Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώση διὰ τὴν ἀγορὰν 5 δοχείων τοῦ ἰδίου ἐλαίου τῶν 11 κιλῶν τὸ καθένα, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι κάθε δοχεῖον κενὸν ἔχει 6 δρχ. τῶν 14 κιλῶν καὶ 5 δρχ. τῶν 11 κιλῶν ; ('Απ. δρχ. 905)

596. Ἕνα συνεργεῖον ἀπὸ 20 ἐργάτας καὶ 15 ἐργατρίας δι' ἐργασίαν 5 ἡμερῶν πῆρε 16000 δραχμάς. Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι κάθε ἐργάτρια ἔχει ἡμερομίσθιον κατὰ 20 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον κάθε ἐργάτου, νὰ βρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον αὐτῶν. ('Απ. 100 δρχ. 80 δρχ.)

597. Ἕνας ἐργάτης πέρνει ἡμερομίσθιον 120 δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει διὰ τὸ φαγητόν του κ.λ.π. 80 δραχμὰς τὴν ἡμέραν. Ἂν ἐργάζεται καθημερινῶς πλὴν τῶν Κυριακῶν, σὲ πόσες ἑβδομάδες θὰ ἐξοικονομίση 960 δρχ.; ('Απ. 6)

598. Πρόκειται νὰ γίνη ἔρανος εἰς τὴν τάξιν σας δι' ἕνα φιλανθρωπικὸν σκοπόν. Ἂν κάθε μαθητὴς δόση ἀπὸ 20 δραχμὰς ὑπολείπονται ἀκόμη 80 δραχμαὶ διὰ νὰ συγκεντρωθῇ τὸ ἀπαιτούμενον ποσόν. Ἂν ὅμως κάθε μαθητὴς δόση ἀπὸ 22 δραχμάς, τότε περισσεύουν 32 δραχμαί. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ καὶ πόσον τὸ χρηματικὸν ποσὸν τοῦ ἐράνου ; ('Απ. 56 1200)

599. Εἰς μίαν ἐκδρομὴν ἔλαβαν μέρος 35 ἄτομα ἄνδρες καὶ γυναῖκες καὶ τὰ ἔξοδα ἦσαν 1400 δραχμαί. Ἀλλὰ κατὰ τὴν πληρωμὴν ἀπεφασίσθη οἱ ἄνδρες νὰ πληρώσουν καὶ τὰ ἔξοδα τῶν γυναικῶν καὶ ἔτσι κάθε ἄνδρας πλήρωσε 10 δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν του. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ; ('Απ. 28 ἄνδρες, 7 γυναῖκες)

600. Ἕνας οἰνοπώλης ἀγόρασε 8 ὅμοια βαρέλια κρασὶ (ρετσίνα), πρὸς 7 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ τὰ ἐπώλησε πρὸς 9 δραχμὰς τὸ κιλὸν καὶ ἐκέρδισε 2840 δραχμάς. Ἂν γνωρίζωμεν ὅτι εἰς κάθε βαρέλι ἔμειναν 5 κιλὰ λάσπη, νὰ βρεθῇ πόσα κιλὰ κρασὶ περιεῖχε κάθε βαρέλι ; ('Απ. 200)

601. Ἕνας διψήφιος ἀριθμὸς ἔχει καὶ τὰ δύο ψηφία τὰ ἴδια. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἂν διαιρεθῇ οὗτος διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία αὐτά. (§ 123.2).

602. Ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς ἔχει καὶ τὰ τρία ψηφία του τὰ ἴδια. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του δίδει πηλίκον 37, ἡ δὲ διαίρεσις αὐτὴ εἶναι τελεία. (§ 123.2).

603. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ μικρότεροι τοῦ 200 τριψήφιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἂν διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 24 δίδουν πηλίκον ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον (§ 97) ('Απαντ. 100, 125, 175).

604. Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἔχουν ἄθροισμα 424, ἡ δὲ διαίρεσίς των δίδει πηλίκον 15 καὶ τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν ὑπόλοιπον (§ 97). ('Απ. 399, 25)

605. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ἀριθμὸν N ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $N = 2\alpha^2 + 5\beta^3 - 3\gamma^3$ καὶ $\alpha = 7$, $\beta = 4$ καὶ $\gamma = 5$. ('Απ. $N = 43$)

606. Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ἀριθμὸν N ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι $N = 3\alpha\beta + 5\alpha^3 - 6\beta^3$ καὶ $\alpha = 5$, $\beta = 4$. ('Απ. $N = 301$)

607. Νὰ λύσετε τὴν ἐξίσωσιν $(x+1)^2 - x^2 = 25$ (§ 126).

608. Νὰ λύσετε τὴν ἐξίσωσιν $(x+3)^2 - x^2 = 33$ (§ 126).

609. Ἐὰν εἶναι $\alpha < \beta$ καὶ $\alpha, \beta \in \Phi$ πόσοι φυσικοὶ ἀριθμοὶ ν ὑπάρχουν ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\alpha < \nu < \beta$; Νὰ κάμετε καὶ ἀριθμητικὸν παράδειγμα. ('Απ. $\beta - \alpha - 1$)

610. Νὰ κάμετε τὸ ἴδιον ἂν εἶναι $\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta$. ('Απ. $\beta - \alpha + 1$)

611. Ἐὰν $\nu \in \Phi$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu^2}$.

612. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{\nu(\nu+1)}$.

613. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, νὰ ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

614. Ἐὰν α, β, γ εἶναι πλευραὶ τριγώνου, (§ 182) νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$.

615. Ἕνα κτῆμα εἶναι τριπλάσιον ἀπὸ ἕνα ἄλλο, εἶναι δὲ καὶ τὰ δύο μαζὶ 5860 m². Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι καθένα ; (1465, 4395).

616. Δύο ἄτομα ἐμοίρασαν 56890 δρχ., πῆρε δὲ ὁ πρῶτος 7340 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὸν δεύτερον. Πόσα πῆρε καθένας ; (32.115, 24775).

617. Τρία αὐτοκίνητα μετέφεραν 6220 κιλὰ ἐμπορευμάτων. Ἂν τὸ πρῶτον μετέφερε 150 κιλὰ περισσότερα τοῦ δευτέρου καὶ τὸ δεύτερον μετέφερε 230 κιλὰ περισσότερα τοῦ τρίτου, πόσα κιλὰ μετέφερε κάθε αὐτοκίνητον ; ('Απ. $\alpha = 2250$, $\beta = 2100$, $\gamma = 1870$)

618. Ἕνας καταστηματάρχης ἔκαμε τὴν ἑξῆς συμφωνίαν μὲ ἕνα ὑπάλληλόν του. Δι' ἑκάστην ἡμέραν ἐργασίας νὰ τοῦ δίδῃ ἡμερομίσθιον 120 δραχμάς, ἀλλὰ δι' ἑκάστην ἡμέραν ἀπουσίας ὄχι μόνον δὲν θὰ τοῦ δίνῃ τίποτε ἀλλὰ θὰ τοῦ κρατῇ ὡς πρόστιμον 20 δραχμάς. Δεδομένου ὅτι κάθε μῆνας ἔχει 26 ἐργασίμους ἡμέρας καὶ ὅτι ὁ ὑπάλληλος πῆρε τὸν πρῶτον μῆνα 2840 δραχμάς, τὸν δεύτερον μῆνα πῆρε 2280 δραχμὰς καὶ τὸν τρίτον μῆνα πῆρε 1020 δραχμὰς νὰ βρῆτε πόσας ἡμέρας εἰργάσθη τὸν κάθε μῆνα ὁ ὑπάλληλος ; ('Απ. α' μῆνα 24 ἡμ., β' μῆνα 20 ἡμ., γ' μῆνα 11 ἡμ.)

619. Μία κυρία ἐζήτησε νὰ ἀγοράσῃ 5 m. μαλλίνου ὑφάσματος καὶ 4 m. φόδρα καὶ ὑπελόγιζεν ὅτι μὲ τὰς τιμὰς ποὺ τῆς εἶπεν ὁ ἔμπορος θὰ πλήρωνε 990 δραχμάς. Ὁ ἔμπορος ὅμως κατὰ λάθος τῆς ἔδωσε 5 m. ὑφάσματος καὶ 5 m. φόδρα καὶ ἔτσι ἐπλήρωσε 1035 δραχμάς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου ὑφάσματος. ('Απ. 162 δρχ. καὶ 45 δρχ.).

620. Εἶπε ἕνας ὅτι «ἐὰν μοῦ τριπλασιάσουν τὰ χρήματά μου, δίνω 1500 δραχμάς». 'Αφοῦ ἐξεπληρώθη τρεῖς φορὲς ἡ αἴτησίς του, παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν 210 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχε στὴν ἀρχή ; ('Απ. 730 δρ.)

---

621. Ἕνα τραῖνο ἀναχωρεῖ ἐξ 'Αθηνῶν πρὸς Θεσσαλονίκην μὲ σταθερὰν ταχύτητα 35 χιλιομέτρων τὴν ὥρα. Τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἡ ταχεῖα ἀναχωρεῖ ἐκ Θεσσαλονίκης πρὸς 'Αθήνας μὲ σταθερὰν ταχύτητα 50 χιλιόμετρα στὴν ὥρα. Ἂν ἡ ἀπόστασις 'Αθηνῶν — Θεσσαλονίκης εἶναι 510 χιλιόμετρα τὰ δὲ τραῖνα δὲν κάμουν ἐνδιαμέσους σταθμούς, πότε καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ 'Αθηνῶν θὰ συναντηθοῦν ; ('Απ. μετὰ 6 ὥρας εἰς 210 km)

622. Αὐτοκίνητον καὶ ποδήλατον ἀνεχώρησαν ταυτοχρόνως ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β ποὺ ἀπέχουν 162 χιλιόμετρα, συναντήθησαν δὲ μετὰ 3 ὥρας. Ἂν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι πενταπλασία ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ ποδηλάτου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου. ('Απ. 45 καὶ 9)

623. Ἕνα αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὰς 'Αθήνας μὲ ταχύτητα 40 χιλιόμετρα στὴν ὥρα. Μετὰ 3 ὥρας ἕνα περιπολικὸν λαμβάνει ἐντολὴν νὰ φθάση τὸ αὐτοκίνητον. Ἂν ἡ ταχύτης τοῦ περιπολικοῦ εἶναι 70 χιλιόμετρα στὴν ὥραν, μετὰ πόσας ὥρας θὰ τὸ φθάση ; ('Απ. μετὰ 4 ὥρας)

624. Δύο ἀτμόπλοια ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ Πειραιῶς πρὸς τὴν Ρόδον μὲ ταχύτητας 18 κόμβων καὶ 12 κόμβων ἀντιστοίχως. Μετὰ 4 ὥρας τὸ ταχύτερον ἔπαθε βλάβην καὶ ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώση τὴν ταχύτητά του εἰς 9 κόμβους. Πότε καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐκ Πειραιῶς θὰ συναντηθοῦν ; ('Απ. μετὰ 12 ὥρ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν 96 μιλίων).

625. Δύο αὐτοκίνητα ἀπέχουν 200 χιλιόμετρα. Ὅταν κινηθοῦν ἀντιθέτως συναντῶνται μετὰ 2 ὥρας, ὅταν ὅμως κινηθοῦν κατὰ τὴν ἰδίαν φοράν, τότε συναντῶνται μετὰ 10 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου αὐτοκινήτου. ('Απ. 60 καὶ 40 χιλιόμετρα)

626. Ἕνα τραῖνο διέρχεται μίαν σήραγγα μήκους 360 m. εἰς 24'' καὶ μίαν ἄλλην σήραγγα μήκους 510 m. εἰς 33''. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ τραίνου καὶ τὸ μῆκος τοῦ τραίνου. ('Απ. 60 km/h, 40 m.)

---

627. Νὰ βρῆτε ἕνα τριψήφιον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 300, διαιρετὸν διὰ 5 καὶ διὰ 9 καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων νὰ εἶναι 2. ('Απ. 720).

628. Ὁ ἀριθμὸς α72β εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 36. Ἂν τοῦ ἀφαιρέσωμεν 3 μονάδας τότε εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 25. Νὰ βρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ('Απ. 1728).

629. Ἕνας γεωργικὸς συνεταιρισμὸς πρόκειται νὰ μοιράση εἰς τὰ μέλη του ὁμοιομόρφως 1350 κιλὰ ἀζωτούχου λιπάσματος καὶ 1080 κιλὰ φωσφορούχου λιπάσματος. 'Απὸ πόσα μέλη ἀποτελεῖται ὁ συνεταιρισμός, δεδομένου ὅτι μετὰ τὴν ὁμοιόμορφον διανομὴν δὲν ἔμεινε τίποτε ; Καὶ πόσα κιλὰ κάθε εἴδους πῆρε ἕκαστος συνεταῖρος ; (135 μέλη 10 κιλὰ καὶ 8 κιλά).

630. Νὰ βρῆτε ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν $N < 500$ ποὺ νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 καὶ ὁ ὁποῖος ἀφίνει ὑπόλοιπον 1 ἂν διαιρεθῇ ἢ διὰ 2 ἢ διὰ 3 ἢ διὰ 4 ἢ διὰ 5 ἢ διὰ 6. ('Απ. 301)

631. Τρία πυροβόλα βάλλουν ὡς ἑξῆς : τὸ Α' δέκα βολὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτόν, τὸ Β' 15 βολὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτὸν καὶ τὸ Γ' 20 βολὰς ἀνὰ πρῶτον λεπτόν. Ἂν ἀρχίσουν νὰ βάλλουν τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ τὰ τρία, ἀνὰ πόσα χρονικὰ διαστήματα αἱ βολαί των θὰ εἶναι ταυτόχρονοι ; ('Απ. ἀνὰ 12 sec.)

632. Ἕνας ποιμὴν ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα εἶχεν ἀπήντησεν. Ἔχω περισσότερα τῶν 200 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 300. Ἂν τὰ μετρῶ ἀνὰ 10 περισσεύουν 3 καὶ ἂν τὰ μετρῶ ἀνὰ 12 περισσεύουν 5. Πόσα πρόβατα εἶχε ; ('Απ. 233)

633. Ἀπὸ ἕνα λόχον ποὺ ἔχει 150 ἄνδρας ἀπεσπάσθησαν μερικοὶ στρατιῶτες δι' ὑπηρεσίαν. Ἂν οἱ ὑπόλοιποι χωρισθοῦν εἰς ὁμάδας τῶν 10 ἢ τῶν 12 ἢ τῶν 15 ἢ τῶν 20 στρατιωτῶν περισσεύουν 6 στρατιῶται, ἂν δὲ χωρισθοῦν εἰς ὁμάδας τῶν 18 στρατιωτῶν δὲν περισσεύει κανείς. Πόσοι στρατιῶται ἀπεσπάσθησαν δι' ὑπηρεσίαν ; ('Απ. 24)

---

634. Νὰ βρῆτε δύο κλάσματα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ κλάσματα $\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{11}{8}$ τοιαῦτα ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν των νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν των (§ 160) $\left(\text{'Απ. } \frac{9}{21} \text{ καὶ } \frac{44}{32}\right)$

635. Δίδονται τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. Νὰ βρῆτε τρία ἄλλα κλάσματα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς αὐτὰ καὶ τοιαῦτα ὥστε τὰ δύο πρῶτα νὰ ἔχουν τὸν ἴδιον ἀριθμητὴν καὶ τὰ δύο τελευταῖα νὰ ἔχουν τὸν ἴδιον παρονομαστὴν (§ 160). $\left(\text{'Απ. } \frac{36}{45}, \frac{36}{48}, \frac{32}{48}\right)$

636. Ἕνα βαρέλι περιέχει 200 κιλὰ κρασί. Βγάζομεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν μὲ νερό. Κατόπιν βγάζομεν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ μίγματος καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν μὲ νερό. Να βρῆτε πόσον κρασὶ περιέχει τὸ νέον μίγμα ποὺ βρίσκεται μέσα εἰς τὸ βαρέλι. ('Απ. 100 κιλά)

637. Ἕνας παραγωγὸς ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς σταφίδος ποὺ εἶχε Ἔπειτα ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν ὑπολοίπων καὶ παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειαν 38 κιλά. Πόσην σταφίδαν εἶχε ; ('Απ. 456 κιλά)

638. Ἕνας τυροκόμος ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ τυροῦ ποὺ εἶχε. Ἔπειτα ἐπώλησε τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ κατόπιν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἔμειναν $8\frac{4}{7}$ κιλά. Πόσα κιλὰ τυρὶ εἶχεν καὶ πόσον ἐπώλησεν κάθε φοράν ; $\left(\text{'Απ. 80 κ. α' } 34\frac{2}{7}, \text{ β' } 32, \text{ γ' } 5\frac{1}{7}\right)$

639. Ἕνα βαρέλι κενὸν ζυγίζει $12\frac{3}{4}$ κιλὰ καὶ γεμάτο λάδι ζυγίζει

150 κιλά. Ἐπωλήσαμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ περιεχομένου λαδιοῦ πρὸς 23 δραχμὰς τὸ κιλόν. Νὰ βρῆτε α) Πόσας δραχμὰς πήραμε ; καὶ β) Πόσα κιλὰ θὰ ζυγίζῃ ἔπειτα τὸ βαρέλι (Ἀπ. α' 2525,40 δρχ. β' 40 $\frac{1}{5}$ κιλά)

640. Ἕνας ἀγόρασεν ἕνα τόπι ὕφασμα πρὸς 165 δραχμὰς τὰ 8 μέτρα καὶ τὸ ἐπώλησε πρὸς 127 δραχμὰς τὰ 5 μέτρα καὶ ἔτσι ἐκέρδισε 382 δραχμάς. Πόσων μέτρων ἦτο τὸ τόπι ; (Ἀπ. 80)

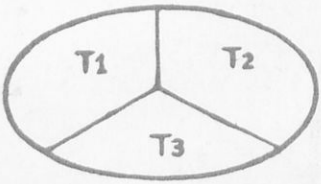
641. Δύο φίλοι ἔχουν μαζὶ 180 δραχμάς, ἐξοδεύουν δὲ ὁ πρῶτος τὰ $\frac{4}{5}$ τῶν χρημάτων του καὶ ὁ δεύτερος τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του, παρετήρησαν δὲ ὅτι τοὺς ἔμειναν 39 δραχμαί. Πόσα χρήματα εἶχε καθένας ; (Ἀπ. Α = 120 δρχ. Β = 60 δρχ.).

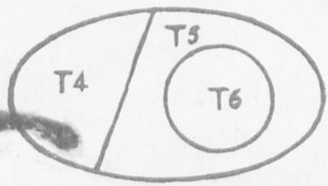
642. Ἕνας κρουνὸς (βρύση) γεμίζει μίαν δεξαμενὴν εἰς 16 ὥρας. Ἄλλος κρουνὸς εἰς τὸν ἴδιον χρόνον ρίπτει εἰς τὴν δεξαμενὴν τετραπλάσιον νερό. Ἂν ἡ δεξαμενὴ εἶναι ἄδεια καὶ ἀνοίξουν ταυτοχρόνως καὶ οἱ δύο κρουνοὶ ἐπὶ 3 ὥρας χρειάζεται ἀκόμη ἡ δεξαμενὴ 50 κιλὰ νερὸ διὰ νὰ γεμίσῃ Πόσα κιλὰ νερὸ χωράει ἡ δεξαμενή ; (Ἀπ. 800).

Πίναξ πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 — 1000.

1	2	3	5	7	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





50.

530.000
470.000
60.000

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ οδός Βαλτινών 84 ΑΘΗΝΑΙ (702) Τηλ. 663.880