ΤΕΥΧΟΣ 2ον

ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΥΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

- ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΙΣ ΓΩΝΙΑΣ
  4η, 5η, καὶ 6η ΜΕΘΟΔΟΣ
- ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΠΤΑΓΩΝΩΝ
- ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΝΕΑΓΩΝΟΝ

ΛΕΑΝΔΡΟΣ Β. ΤΣΙΜΕΝΗΣ

1975

Γι᾿ αὐτοὺς ποὺ πιστεύουν στὴν Παγκόσμια ΑΓΑΠΗ δὲν ὑπάρχουν ἄλυτα προβλήματα.

Τσιμένης Λέανδρος

Ἡ ΣΙΩΠΗ εἶναι χρυσός, ἀλλὰ μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ ΒΛΑΚΕΙΑ.

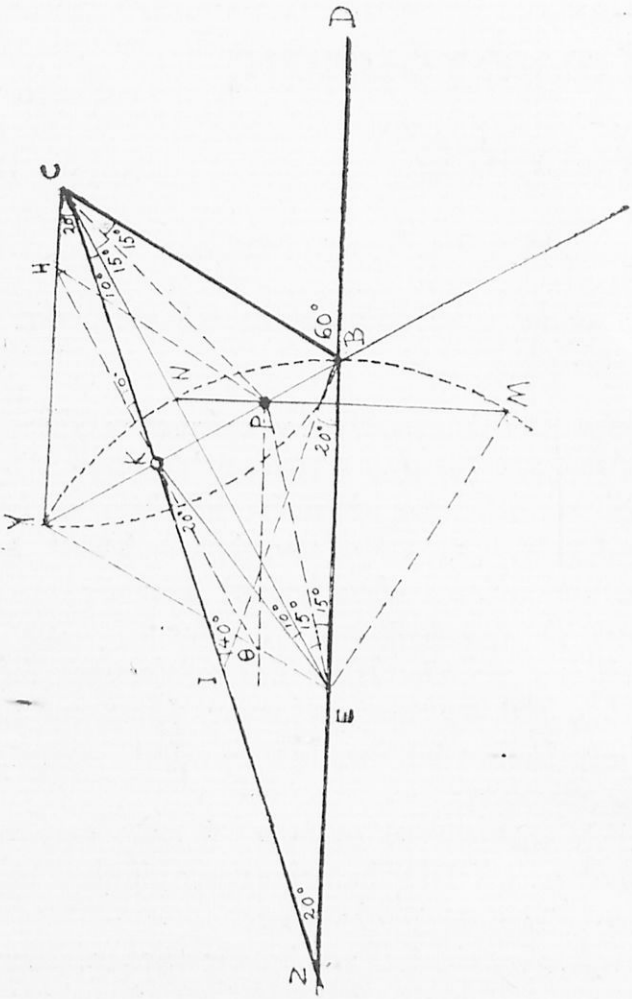
Τριχοτόμησις γωνίας

Μέθοδος 4η

Τριχοτόμησις τυχούσης γωνίας διὰ γνώμονος καὶ διαβήτου

Ἐκτὸς τῶν ἀναφερθέντων τρόπων τριχοτομήσεως εἰς τὸ ἐκδοθὲν ἔντυπον «Λύσεως Ἀλύτων Προβλημάτων», μεταξὺ τῶν μὴ εἰσέτι ἐκδοθέντων εἶναι καὶ ὁ, εἰς τὸ συνημμένον σχέδιον, ἀναφερόμενος, διὰ τοῦ ὁποίου καθορίζεται εὐκόλως καὶ ἀκριβῶς τὸ μῆκος IZ ἤοτι τὸ ἀναφερόμενον εἰς τὴν Μεγάλην Ἐγκυκλοπαίδειαν, εἰς τὴν λέξιν «Τριχοτόμησις» διὰ τῶν στοιχείων EF ὡς ἀναζητούμενον, βάσει τοῦ καθορισμοῦ τοῦ ὁποίου θὰ ἦτο ἐφικτὴ πᾶσα τριχοτόμησις γωνίας τυχούσης.

Εἰς τὸ προκείμενον σχέδιον ἡ πρὸς τριχοτόμησιν γωνία εἶναι ἡ CBD, δι ἀτὴν τριχοτόμησιν τῆς ὁποίας ἐνεργοῦμεν ὡς ἀκολούθως:
Προεκτείνομεν τὴν BD καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάονμεν τὸ μῆκος EB=BC μὲ τὴν πλευρὰν τῆς γωνίας. Φέρομεν τὰς EY παράλληλον πρὸς τὴν BC καὶ CY παράλληλον πρὸς τὴν EB. Οὕτω σχηματίζεται ὁ ρόμβος EYCB τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς διαγω-



νίους EC καὶ BY. Ἐν σύνεχεία μὲ κέντρον τὸ E καὶ ἀκτίνα τὴν EB φέρομεν τὸ τόξον YNBM ὥστε YB = NM καὶ φέρομεν καὶ τὰς χορδὰς YB = NM.

Αἱ χορδαὶ YB καὶ NM τέμνονται εἰς σημεῖον P τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας NEB = NCB. Ἐὰν τώρα φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου C τὴν εὐθείαν CZ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου K κειμένου ἐπὶ τῆς διαγωνίου YB τοῦ ρόμβου YCBE καὶ εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους YP, τότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον CBZ τοῦ ὁποίου ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι CBD κα ἔχει καὶ τὰς γωνίας BCZ = 2CZB ὁπότε ἡ CBD = 3CZB.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν φέρωμεν τὴν EK ἔχομεν τὸ ἰσοτελὲς τρίγωνον EKC ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ ZKE, ἡ ὁποία μὲ τὴν KZE ὁμοῦ ἀποτελοῦν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν KEB = KCB, ὁπότε ἐὰν ἡ γωνία KZE = ZKE τότε ἡ CBD = 3KZE.

Πῶς εἶναι ἡ γωνία CBD = 3KZE;

Ἰδοὺ πῶς: Ἀρχίζομεν τὴν ἀπόδειξιν ἐκ τῆς γωνίας CZD, τὴν ὁποίαν διπλασιάζομεν διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ZEK. Ἡ KEB = 2KZE ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ ZEK. Ἐν συνεχείᾳ κατασκευάζομεν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον EKC τοῦ ὁποίου ἐξωτερικὴ γωνία εἶναι ἡ ZKE = KZE καὶ τοῦ νέου σχηματισθέντος τριγώνου CEZ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία CEB = 3KCE. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν εὐθείαν YB κάθετον ἐπὶ τὴν EC καὶ διερχομένην διὰ τοῦ K φέρωμεν καὶ CB ἔχομεν νέον ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ CBE ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ὁποίου ἡ CBD = 6KCE = 3KZE.

Πλέον παρουσιάζεται ὡς καίριον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ στηριχθῶμεν διὰ νὰ προβῶμεν εἰς οἱανδήποτε τριχοτόμησιν. Τὸ σημεῖον Κ ἡ θέσις τοῦ ὁποίου εἶναι ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΥΒ τοῦ ῥόμβου YCBE καὶ εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους ΥΡ.

Τὸ ὅτι εὑρίσκεται τὸ Κ ἐπὶ τῆς ΥΒ εἶναι αὐταπόδεικτον.

Ὅ,τι εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ μήκους ΥΡ τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως: Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΘΗ παράλληλον πρὸς τὴν EC καὶ διερχομένην διὰ τοῦ Κ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΘΥΗ ἰσοσκελὲς ὅμοιον μὲ τὸ EYC καὶ διὰ τῶν ΘΡ παράλληλον πρὸς ΕΒ καὶ ΗΡ παράλληλον πρὸς CB ἔχομεν τὸν ῥόμβον ΘΥΗΡ ὅμοιον μὲ τὸν EYCB, ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι ΥΚ=ΚΡ. Ἀναφέραμεν ἐν ἀρχῇ ὅτι τὸ Ρ εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας NCB καὶ ΝΕΒ καὶ ἑπομένως ἔχομεν HPC + HCP=YHP=CBD καὶ HKC + HCK=YHK καὶ ἀφοῦ YHP = 2YHK τὸ σημεῖον Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΥΡ.

Ὥστε διὰ νὰ τριχοτομήσωμεν τυχοῦσαν γωνίαν CBD ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ῥόμβον EYCB, νὰ φέρωμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, νὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ σημεῖον Ρ διὰ τῶν χορδῶν ὡς ἀναφέραμεν καὶ ἐκ τοῦ σημείου C νὰ φέρωμεν τὴν CZ διερχομένην διὰ τοῦ Κ μέσου τῆς ΥΡ, ἡ σχηματισθησομένη γωνία μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς BD ἢ CZB εἶναι τὸ τρίτον τῆς δοθείσης πρὸς τριχοτόμησιν CBD.

Μέθοδος 5η

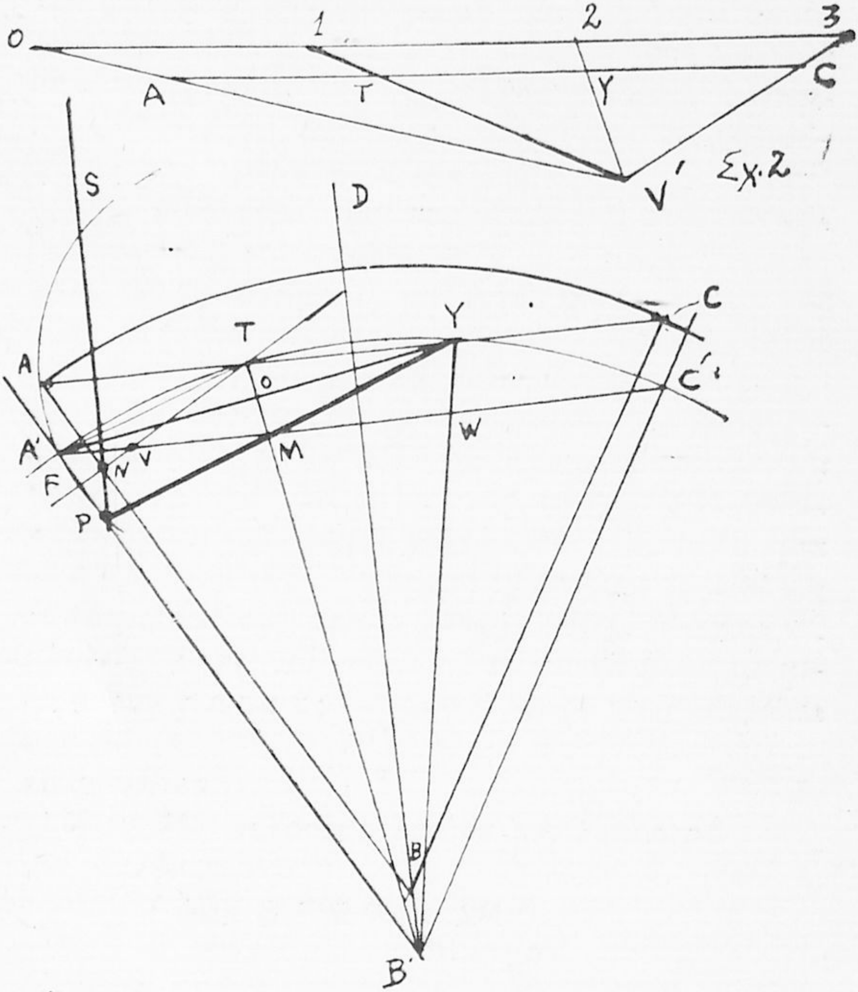
Τριχοτόμησις τυχούσης γωνίας διὰ γνώμονος καὶ διαβήτου

Ἀ ν ά λ υ σ ι ς: Ἔστω ἡ γωνία ABC φέρομεν τὴν χορδὴν AC τοῦ τόξου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ἀνταποκρίνεται, τὴν ὁποίαν χορδὴν καὶ διαιροῦμεν εἰς τρία ἴσα μέρη AT = TY = YC τῇ βοηθείᾳ εὐθείας 03 (Σχ. 2) ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τρία μήκη ἴσα τὰ 01 = 12—23. (σχ. 1) ἐκ τοῦ σημείου T φέρομεν τὴν κάθετον TN ἐπὶ τὴν AB καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου N φέρομεν τὴν SN παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ABC τὴν BD.

Ἡ SN πορεκτεινομένη τέμνεται μετὰ τοῦ τόξου SAP εἰς τὸ σημεῖον P. Τὸ τόξον SAP ἄγεται μὲ κέντρον τὸ T καὶ ἀκτίνα τὴν AT = TY = YC.

Ἤδη διερχομένη διὰ τοῦ σημείου P φέρομεν τὴν A΄B΄ παράλληλον πρὸς τὴν AB.

Αὐτὴ ἡ A΄B΄ τέμνει τὸ τόξον SAP εἰς δύο σημεῖα, τὸ P καὶ τὸ A΄. Ἐὰν τώρα, φέρωμεν μὲ κέντρον τὴν τομὴν B΄ τῆς A΄B΄ μετὰ τῆς προεκτάσεως τῆς διχοτόμου BD καὶ ἀκτίνα τὴν A΄B΄ ἐὰν φέρωμεν τόξον τὸ A΄ T C΄ αὐτὸ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων A΄, T, Y καὶ C΄ καὶ ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς



Σχ.2

TB΄, YB΄ καὶ τὴν C΄B΄ παράλληλον πρὸς τὴν CB τότε ἔχομεν τριχοτομημένην τὴν γωνίαν A΄B΄C΄ = ABC. Τὸ παρὸν ἀποτέλεσμα ἐρεύνης παρουσιάζω ἵνα ἀποφανοθῦν ἐπὶ τῆς εὐσταθείας αὐτοῦ οἱ θεωρούμενοι εἰδικοί.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς σ χ ε τ ι κ α ί:

Ἡ τομὴ V τῶν A΄C΄ μὲ τὴν TN μετατίθεται ἀναλόγως τοῦ ἀνοίγματος τῆς δοθείσης πρὸς τριχοτόμησιν γωνίας. Συμπίπτει ἡ V μετὰ τῆς N μόνον εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὅτον τὰ τριγωνίδια A΄FV = NFP. Τὸ μῆκος A΄P εἶναι ἴσον μὲ τὸ TM = YW καὶ ἐπίσης τὸ A΄F = FP = TO = OM. Τὸ σχῆμα A΄ TYM εἶναι ρόμβος.

Μέθοδος 6η

Τριχοτόμησις τυχούσης γωνίας διὰ γνώμονος καὶ διαβήτου

Τυχούσης γωνίας ABC φέρομεν τὸ τόξον αὐτῆς ADC, τὴν χορδὴν τοῦ AC τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ AZ=ZE—EC τῇ βοηθείᾳ ἄλλης εὐθείας ὡς ἀναφέραμε προηγουμένως καὶ διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν διὰ τῆς διχοτόμου αὐτῆς BD.

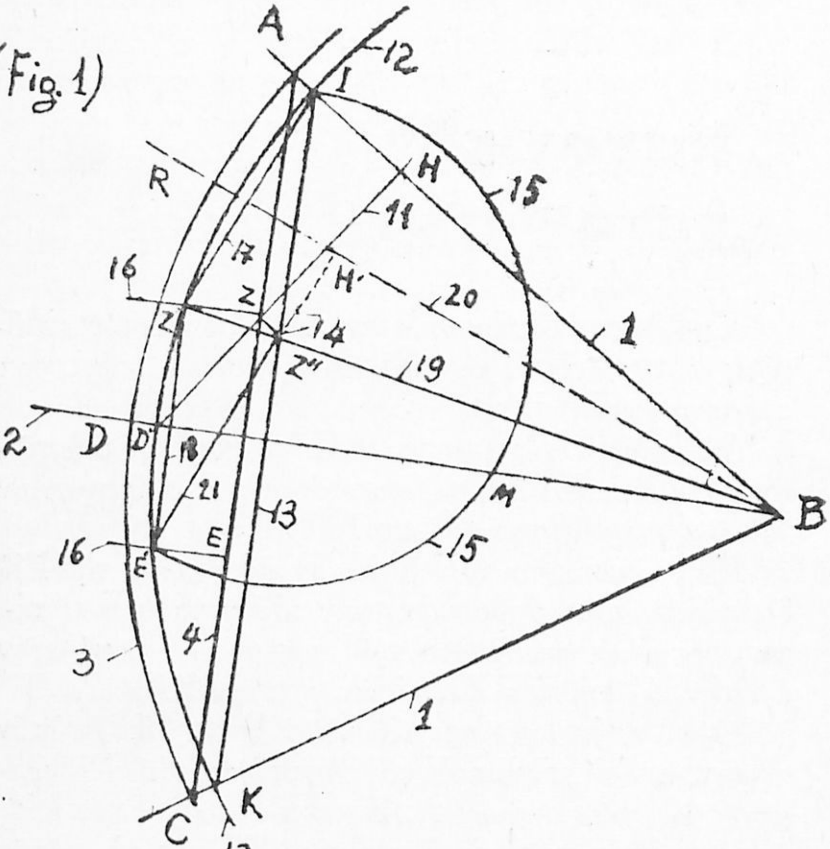
Ἤδη διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Z φέορμεν τὴν D΄H κάθετον ἐπὶ τὴν AB πλευρὰν τῆς γωνίας. Ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὴν DB εἴς τι σημεῖον D΄.

Μὲ κέντρον τὸ B καὶ ἀκτίνα τὴν BD΄ φέρομεν τὸ τόξον KD΄I, τὴν χοδρὴν αὐτοῦ IK καὶ ἐκ τῶν Z καὶ E τὰς ZZ΄ καὶ EE΄ παραλλήλους πρὸς τὴν BD καὶ τὴν ZZ΄΄ παράλληλον πρὸς τὴν AB.

Ἐκ τούτων αἱ μὲν ZZ΄ καὶ EE΄ τέμνουν τὸ τόξον KD΄I εἰς τὰ σημεῖα E΄ καὶ Z΄ ἡ δὲ ZZ΄΄ τέμνει τὴν χορδὴν IB εἴς τι σημεῖον Z΄΄.

Φέροντες τὰς εὐθείας E΄Z΄, E΄Z΄΄, ZI καὶ IZ΄΄ σχηματίζεται ὁ ῥόμβος E΄ Z΄IZ΄΄ τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος Z΄Z΄΄ προεκτεινομένη εἶναι ἡ τριχοτόμος τῆς γωνίας KBI=ABC, διότι τὰ ἀποτελοῦντα τὸν ῥόμβον τρίγωνα Z΄E΄Z΄΄ = Z΄IZ΄΄ εἶναι ὅμοια μὲ τὸ Z΄BI = RBD καὶ ἰσοσκελῆ.

(Fig. 1)


A
12
I
R
H
15
11
17
16
H'
Z
20
Z
14
Z''
19
1
2
D
D'
18
21
M
13
B
16
E
E
15
E'
4
3
1
C
K
11

Κανονικὸν ἑπτάγωνον

Ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν εὐθείαν ΑΒ. Μὲ βάσεις τὰ ἡμίση αὐτῆς ΑΓ=ΓΒ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΕΓ=ΓΔΒ.

Ἀκολούθως φέρομεν τὴν ΛΝ διερχομένην διὰ τῶν σημείων Ε καὶ Δ καὶ φέρομεν καὶ τὴν ΕΒ διαγώνιον τοῦ σχηματισθέντος ρόμβου ΕΓΒΔ.

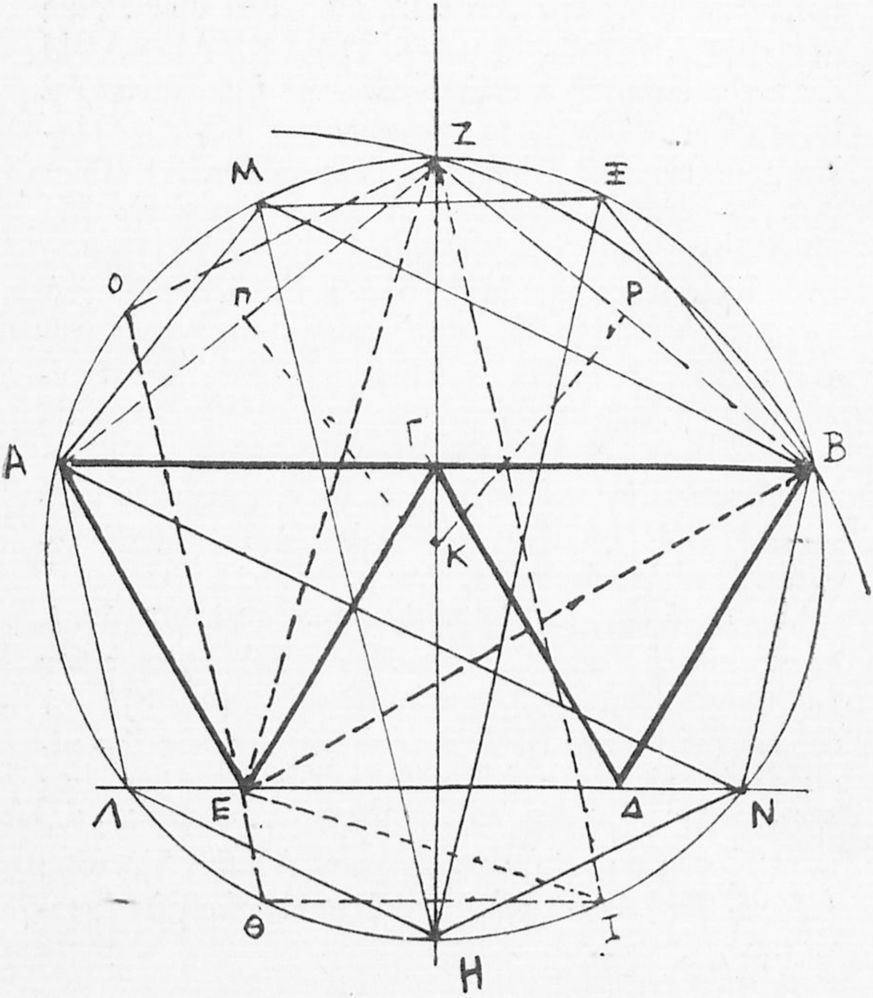
Ἤδη μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ε καὶ ἀκτίνα τὴν ΕΒ διαγώνιον τοῦ ρόμβου φέρομεν τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΔ εὐθείαν ΖΗ εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΖ καὶ ΖΒ καὶ δι᾽ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸ κέντρον Κ τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημίων Α, Ζ καὶ Β.

Ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν ΛΝ εἰς τὰ σημεῖα Λ καὶ Ν καὶ τὴν ΖΗ εἰς τὸ σημεῖον Η.

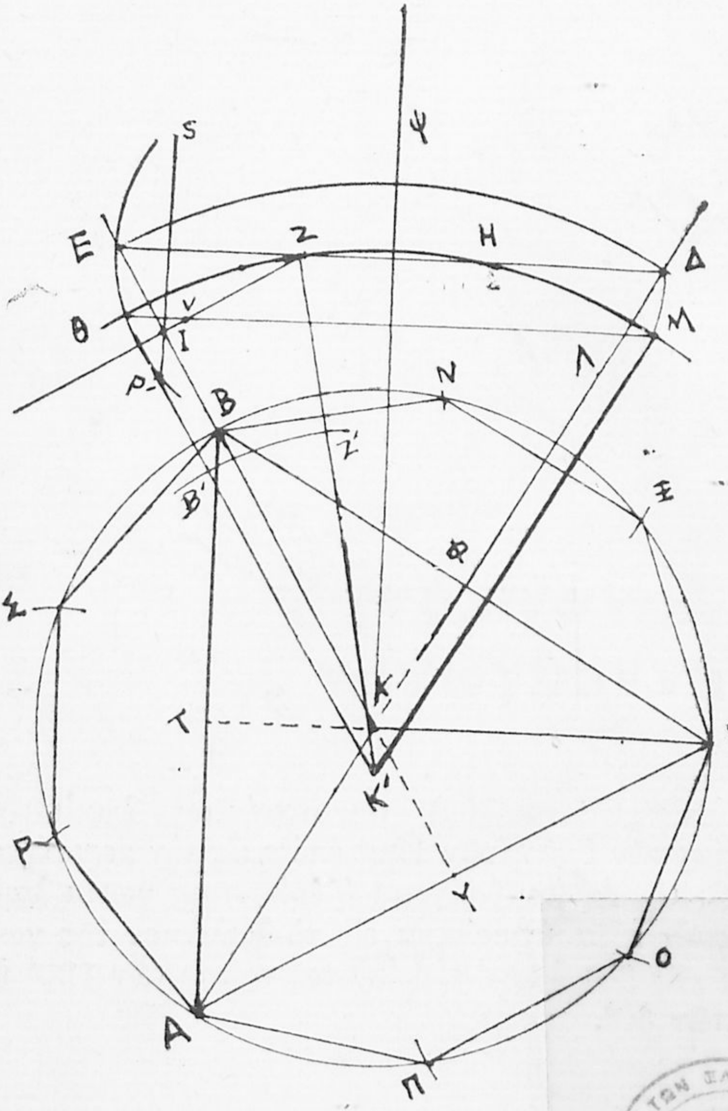
Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΛ καὶ ΒΝ καὶ τὴν ΛΝ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἄν ἐκ τοῦ Β φέρωμεν τὴν ΒΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΝ αὐτὴ θὰ εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὴν ΛΝ, διότι αἱ γωνίαι ΛΝΑ = ΝΑΒ = ΑΒΜ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ παραλλήλων καὶ ἡ βαίνουσα ἐπὶ ἴσων τόξων. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν ΜΞ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ θὰ ἔχωμεν τὰς ΑΜ = ΞΒ = ΒΝ = ΑΛ. Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΞΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΝΒ καὶ ἡ ΗΝ = ΞΒ. Καθὼς καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΛ ἔχομεν ΑΜ = ΛΗ. Ἐξ αὐτῶν συνάγεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΗΞΝ = ΛΜΗ = ΑΜΒ = ΑΝΛ. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης συνάγεται ὅτι καὶ τὰ ΝΑΒ = ΜΗΞ διότι ἀλλέως δὲν θὰ ἦταν δυνατὴ ἡ ἰσότης ΑΒΜ = ΑΝΛ = ΗΞΝ = ΗΜΛ ὥστε τὸ σχηματισθὲν σχῆμα ΑΜΞΒΝΗΛ εἶναι κανονικὸν ἑπτάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὸ σχῆμα ΑΕΓΔΒ νὰ φέρωμεν τὴν ΑΝ καὶ τὴν διαγώνιον ΕΒ τοῦ ρόμβου ΕΓΒΔ, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Ε καὶ ἀκτίνα ΕΒ νὰ φέρωμεν τὸ τόξον ΒΡΖ ἀφ' οὗ φέρωμεν ὡς ἀναφέραμεν ἀνωτέρω τὴν ΖΗ κάθετον ἐπὶ τοῦ μέσου τῆς ΔΕ καὶ ἀφοῦ διὰ τῶν ΑΖ καὶ ΖΒ εὕρωμεν τὸ κέντρον Κ φέρωμεν τὴν περιφέρειαν ΑΖΝ. Τὰ τόξα ΑΛ καὶ ΒΝ εἶναι τὰ ἀναλογοῦντα εἰς πλευρὰς ἑπταγώνου.


Z
M
Ξ
O
Π
P
A
Γ
B
K
Λ
E
Δ
N
Θ
I
H

Κανονικὸν ἐννεάγωνον

Κατασκευάζεται διὰ τριχοτομήσεως ἐπικέντρου γωνίας τῶν 60° ἢ τῶν 120° ὁπότε εἰς τὴν περιφέρειαν εἰς τὴν ὁποίαν ὑπάγεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία λαμβάνομεν τόξα ὑπαγόμενα εἰς τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας τῶν 20° ἢ κατ' εὐθείαν τοῦ τρίτου τῶν 120ε ἤτοι τῶν 40°.


S
Ψ
E
Z
H
Δ
Θ
V
I
M
Λ
N
B
Z′
B′
Ξ
Φ
Σ
K
T
Γ
K′
P
Υ
O
A
Π