Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
ΜΕΤΑ 331 ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ // 1948

Τὸ παρὸν ἔργον ἐκυκλοφόρησε λιθόγραφον εἰς τὴν πρώτην μορφήν του τὸ 1944, ὡς περίληψις τῆς ὕλης τῆς Μηχανικῆς τῆς διδασκομένης εἰς τὸ πλαίσιον τοῦ μαθήματος τῆς Γενικῆς Φυσικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον Ἀθηνῶν. Εἰς τὴν προκειμένην ἔκδοσιν ἐγένετο ἀναθεώρησις καὶ σημαντικὴ ἐπέκτασις οὕτως ὥστε νὰ περιλαμβάνῃ, ἐκτὸς τῆς ἀπαραιτήτου διὰ τοὺς πρωτοετεῖς φοιτητὰς ὕλης, καὶ θέματα περαιτέρω μελέτης τῆς Μηχανικῆς. Ἡ ἐπέκτασις αὕτη δὲν θὰ δυσχεράνῃ τὸν διὰ πρώτην φορὰν ἀναγινώσκοντα τὸ βιβλίον καθόσον ἐλήφθη πρόνοια νὰ διακρίνωνται τὰ ἀπαραίτητα διὰ χρησιμοποιήσεως μεγαλυτέρων τυπογραφικῶν στοιχείων.

Τὸ περιεχόμενον κατενεμήθη εἰς ὀκτὼ μέρη, τὰ ὁποῖα πραγματεύονται τὴν Μηχανικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου, τὴν Μηχανικὴν τοῦ στερεοῦ σώματος καὶ τὴν Μηχανικὴν τῶν ρευστῶν. Εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς Ὑδροδυναμικῆς καὶ Ἀεροδυναμικῆς ἐδόθη μεγαλυτέρα πως ἔκτασις διότι αἱ ἐφαρμογαὶ τῶν δύο τούτων κλάδων τῆς Μηχανικῆς ἀποκτοῦν ὁσημέραι περισσοτέραν σημασίαν, λόγῳ κυρίως τῆς μεγάλης ἀναπτύξεως τῆς ἀεροπορίας.

Γενικῶς ὅμως ἡ ἔκτασις τοῦ βιβλίου δὲν ἠδύνατο ἢ νὰ εἶναι περιωρισμένη καί, συνεπῶς, νὰ περιλαμβάνῃ μόνον τὰς γενικὰς ἀρχὰς ἑκάστου τῶν θεμάτων τῆς Μηχανικῆς. Ὁ ἐπιθυμῶν, ἄρα, νὰ τὴν μελετήσῃ εἰς μεγαλυτέραν ἔκτασιν θὰ πρέπει νὰ καταφύγῃ εἰς εἰδικὰ συγγράμματα, μερικὰ τῶν ὁποίων καὶ ἀναφέρομεν κατωτέρω.

Ἰδιαιτέρα σημασία ἀπεδόθη εἰς τὰς εἰκόνας καὶ τὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα ἐξελέγησαν οὕτως, ὥστε νὰ προσφέρωνται κατὰ πάντα εἰς τὴν παραστατικὴν κατανόησιν τοῦ θέματος εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαστον ἀναφέρεται. Δι᾿ αὐτὸν δὲ ἀκριβῶς τὸν λόγον καὶ ἀδιστάκτως ἐλήφθησαν πολλὰ ἐξαιρέτως ἐπιτυχῆ σχήματα ἐκ ξενογλώσσων βιβλίων, ὅπως ἐκ τοῦ βιβλίου τοῦ **R. W. Pohl**, *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, τοῦ **Grimsehl**, *Mechanik, Wärmelehre, Akustik*, κ.ἄ.

Τὸ βιβλίον ἐγράφη ἐν συνεργασίᾳ μὲ τὸν Φυσικὸν κ. **Γ. Μπίλλην.**

Ὡρισμένα κεφάλαια τὰ διεξῆλθεν ἐν χειρογράφῳ ὁ καθηγητὴς τοῦ Πολυτεχνείου κ. **Π. Κριεζῆς**, ὁ ὁποῖος καὶ προέβη εἰς πλείστας εὐστόχους ὑποδείξεις, δι᾿ ἃς καὶ ἐντεῦθεν τὸν εὐχαριστοῦμεν.

Ἀθῆναι, Ἰανουάριος 1948

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΔΙ' ΕΚΤΕΝΕΣΤΕΡΑΝ ΜΕΛΕΤΗΝ

Κ. Γεωργικοπούλου, Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν θεωρητικὴν μηχανικήν, Ἀθῆναι, 1943.

Κ. Παλαιολόγου, Φυσική· τεῦχος πρῶτον, Μηχανικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ τοῦ στερεοῦ σώματος, Ἀθῆναι 1939· τεῦχος τέταρτον, Ταλαντώσεις καὶ κύματα - Ἀκουστική, Ἀθῆναι 1947.

Κ. Παπαϊωάννου, Ἐφηρμοσμένη κινηματική, Ἀθῆναι, 1939.

S. Timoshenko - D. Young, Engineering mechanics. I, Statics, II, Dynamics, New York, 1937.

G. Bruhat, Mécanique, Paris, 1944.

C. Müller - G. Prange, Algemeine Mechanik, Hannover, 1923.

S. Timoshenko - G. Mac Cullough, Elements of strength of materials, New York, 1940.

A. Föppl (μετάφρ. Δ. Ἀγαπητοῦ), Ἀντοχὴ τῆς ὕλης, Ἀθῆναι, 1920.

A. Sherwood, Aerodynamics, New York, 1946.

L. Prandtl - O. Tietjens, Hydro-und Aeromechanik, Berlin, 1929. (Τὸ αὐτὸ ἀγγλιστί, New York, 1934).

R. Daugherty, Hydraulics, New York, 1937.

B. Eck, Technische Strömungslehre, Berlin, 1941.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄
ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄
ΕΡΓΟΝ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΙΣΧΥΣ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ς'

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ΄

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΟΡΓΑΝΑ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελὶς 8, στίχος 7 (κάτωθεν), ἀντὶ *ἀποστάξεων*, γράφε: ***ἀποστάσεων***

» 31, ἐπὶ τῶν τεταγμένων τοῦ σχήματος 45, ἀντὶ τῶν γ καὶ υ νὰ γραφῇ **υ** καὶ s, ὁμοίως εἰς τὴν ἐξήγησιν τῆς εἰκόνος τοῦ αὐτοῦ σχήματος, ἀντὶ τῶν $\gamma=f(t)$ καὶ $\upsilon=f(t)$, νὰ γραφῇ $\boldsymbol{v}=f(t)$ καὶ $s=f(t)$.

» 83, στίχος 13, ἀντὶ *(§ 999)*, γράφε: ***(§ 137)***

» 107, εἰς τὸν τύπον (1), ἀντὶ ...συν$\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$. t, γρ... **συν**$\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)$

» 109, στίχος 3, ἀντί, . . . *αἱ δύο συνιστῶσαι παρουσιάζουν* . . . , γράφε: . . . ***αἱ δύο συνιστῶσαι δὲν παρουσιάζουν*. . .**

» 109, στίχος 4, ἀντί, . . . *ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν δὲν παρουσιάζουν* . . ., γράφε: . . . ***ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν παρουσιάζουν*. . .**

» 147, εἰς τὴν ἐξήγησιν τῆς εἰκόνος τοῦ σχήματος 187, ἀντί, . . . *τοῦ σχήματος 180*, γράφε: . . . ***τοῦ σχήματος 181.***

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Περιεχόμενον τῆς Μηχανικῆς. Ἡ Μηχανικὴ εἶναι τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς Φυσικῆς τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων τοῦ περιβάλλοντος ἡμᾶς κόσμου καὶ τὰς δυνάμεις αἱ ὁποῖαι τὰς προκαλοῦν.

Ὅλα τὰ σώματα ἔχουν ἔκτασιν, καταλαμβάνουν δηλ. πεπερασμένον χῶρον. Ἡ Μηχανικὴ ὅμως, ἐνίοτε, διὰ ν' ἁπλουστεύσῃ διάφορα ζητήματα, θεωρεῖ τὰς διαστάσεις τῶν σωμάτων τόσον μικρὰς ὥστε ἕνα σῶμα νὰ καταλήγῃ εἰς ***ὑλικὸν σημεῖον***· εἰς ἄλλας ὅμως περιπτώσεις λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὰς διαστάσεις τοῦ σώματος, ὁπότε τὸ θεωρεῖ ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλὰ ὑλικὰ σημεῖα τόσον στερεῶς συνδεδεμένα μεταξύ των ὥστε αἱ ἀμοιβαῖαι ἀποστάσεις των νὰ παραμένουν πάντοτε ἀμετάβλητοι ***(ἀπολύτως στερεὰ σώματα)***. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει μόνον κατὰ προσέγγισιν καθόσον τὰ σώματα δύνανται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων, νὰ παραμορφωθοῦν καὶ ἑπομένως αἱ ἀποστάσεις δὲν παραμένουν ἀμετάβλητοι.

Εἰς τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ τῶν ὑλικῶν σημείων (δηλ. τῶν μορίων) εἶναι τόσον μικραὶ ὥστε ταῦτα νὰ μὴ συγκρατοῦνται εἰς τὰς θέσεις των καὶ τὸ σχῆμα τοῦ σώματος νὰ μὴ εἶναι καθωρισμένον, ἀλλὰ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς ἑκάστοτε ἐπικρατοῦντας ἐξωτερικοὺς ὅρους (σχῆμα περιέχοντος δοχείου κ.λ.).

Κατὰ ταῦτα, διακρίνομεν τὴν *Μηχανικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου*, τὴν *Μηχανικὴν τῶν στερεῶν σωμάτων* καὶ τὴν *Μηχανικὴν τῶν ρευστῶν*.

Ἐκτὸς τοῦ τρόπου τούτου τῆς διαιρέσεως, ἡ Μηχανικὴ διαιρεῖται καὶ εἰς

τὴν ***Κινηματικήν***, τὸ μέρος, δηλ., τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὴν κίνησιν ἀνεξαρτήτως τῶν αἰτίων αὐτῆς (δηλ. τῶν δυνάμεων)·

τὴν ***Στατικήν,*** ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις καὶ τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας αὗται ἰσορροποῦν·

τὴν ***Δυναμικήν,*** ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς δυνάμεις ἐν σχέσει πρὸς τὴν ὑπ' αὐτῶν παραγομένην κίνησιν.

§ 2. Φυσικὰ μεγέθη καὶ μέτρησις αὐτῶν. Πᾶν μέγεθος παρουσιαζόμενον κατὰ τὰ φυσικὰ φαινόμενα καλεῖται ***φυσικὸν μέγεθος***. Ἡ μέτρησις ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους συνίσταται εἰς τὴν σύγκρισιν αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁ μ ο ε ι δ έ ς, τὸ ὁποῖον κατὰ συνθήκην δεχόμεθα ὡς μονάδα, ἀριθμητικὴ δὲ τιμὴ τοῦ μετρουμένου μεγέθους καλεῖται ὁ ἐκ τῆς συγκρίσεως προκύπτων ἀριθμός.

Τὰ φυσικὰ μεγέθη διαιροῦνται εἰς τὰ μονόμετρα καὶ τὰ ἀνυσματικά. ***Μονόμετρον*** λέγεται τὸ φυσικὸν μέγεθος τὸ ὁριζόμενον τελείως ἐκ τῆς τιμῆς καὶ τῆς μονάδος αὐτοῦ, π. χ. ἡ μᾶζα 5 gr., ἡ θερμότης 10 kcal κ.ἄ. ***Ἀνυσματικὸν*** λέγεται τὸ μέγεθος διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ὁποίου χρειάζονται, ἐκτὸς τῆς τιμῆς καὶ τῆς μονάδος ***(μέτρον)***, δύο ἐπὶ πλέον στοιχεῖα, ἡ *διεύθυνσις* καὶ ἡ *φορὰ* αὐτοῦ. Ἀνυσματικὰ μεγέθη εἶναι, π. χ., ἡ δύναμις, ἡ ἐπιτάχυνσις κ. ἄ.

Ἕνα ἀνυσματικὸν μέγεθος παρίσταται δι' εὐθυγράμμου τμήματος τὸ ὁποῖον καταλήγει κατὰ τὸ ἓν ἄκρον εἰς βέλος ***(ἄνυσμα)***. Καὶ ἡ μὲν διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος παρέχει τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τοῦ θεωρουμένου ἀνυσματικοῦ μεγέθους, τὸ δὲ μῆκος τὸ μέτρον αὐτοῦ. Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ἄνυσμα καλεῖται ***φορεὺς*** (ἢ *στήριγμα*) τοῦ ἀνύσματος. Ἀνύσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν φορέα καλοῦνται ***συγγραμμικά***.

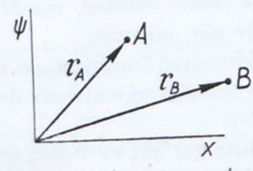
Εἴδη ἀνυσματικῶν μεγεθῶν. Τὰ ἀνύσματα, ἀναλόγως τῶν ἰδιοτήτων τῶν διαφόρων ἀνυσματικῶν μεγεθῶν τὰ ὁποῖα παριστάνουν, διακρίνονται εἰς ἐλεύθερα, ὀλισθαίνοντα καὶ ἐφαρμοστά.

Ἐλεύθερον καλεῖται ἕνα ἄνυσμα ὅταν δύναται νὰ μετατεθῇ, εἴτε ἐπὶ τοῦ φορέως του, εἴτε παραλλήλως πρὸς ἑαυτό. Ἐλεύθερον ἄνυσμα, π. χ., εἶναι ἡ ροπὴ ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων (*βλ.* § 50).

Ὀλισθαῖνον καλεῖται τὸ ἄνυσμα τὸ ὁποῖον δύναται μὲν νὰ μετατεθῇ ἐπὶ τοῦ φορέως του, ἀλλ' ὄχι παραλλήλως πρὸς ἑαυτό. Τοιοῦτο ἄνυσμα εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος, ἡ γωνιακὴ ταχύτης κ. ἄ.

Ἐφαρμοστὸν καλεῖται ἕνα ἄνυσμα ὅταν ἔχῃ ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς καί, συνεπῶς, δὲν δύναται νὰ μετατεθῇ οὔτε ἐπὶ τοῦ φορέως του, οὔτε παραλλήλως πρὸς ἑαυτό. Ἐφαρμοστὸν ἄνυσμα εἶναι ἡ ταχύτης ἑνὸς κινουμένου ὑλικοῦ σημείου, ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου κ. ἄ.

Ἐπιβατικὴ ἀκτίς. Ἄνυσμα συχνὰ συναντώμενον εἰς τὴν Μηχανικὴν εἶναι ἡ ***ἐπιβατικὴ ἀκτίς***, ἡ ὁποία καθορίζει τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου ὡς πρὸς ἄλλο δεδομένον σημεῖον. Οὕτω, ἡ θέσις τῶν δύο σημείων Α καὶ Β *(σχ. 1)* καθορίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου χ, ψ ἀπὸ τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτίνας r_A καὶ r_B.



Σχ. 1. *Ἡ θέσις τῶν σημείων Α καὶ Β καθορίζεται διὰ τῶν ἐπιβατικῶν ἀκτίνων* r_A *καὶ* r_B.

§ 3. Θεμελιώδεις καὶ παράγωγοι μονάδες. Διὰ τὴν μέτρησιν ἑκάστου φυσικοῦ μεγέθους πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀντίστοιχον μονάδα. Δυνατὸν ἐν τούτοις νὰ ἐκλέξωμεν ὡρισμένας ***θεμελιώδεις μονάδας*** καὶ ἐξ αὐτῶν νὰ λάβωμεν, τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διάφορα μεγέθη, ***παραγώγους μονάδας***.

Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφόρων μεγεθῶν τῶν συναντωμένων εἰς τὴν Μηχανικὴν ἀρκοῦν τρεῖς θεμελιώδεις μονάδες ἐκ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ προκύψουν ὅλαι αἱ παράγωγοι. Αἱ τρεῖς αὗται μονάδες δυνατὸν νὰ ἐκλεγοῦν ἐντελῶς αὐθαιρέτως, πρέπει ὅμως, διὰ πρακτικοὺς λόγους, νὰ δύνανται νὰ ἀναπαραχθοῦν εὐκόλως καὶ αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν μετρήσεων τῶν διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα συναντῶμεν εἰς τὴν καθημερινὴν ζωήν, νὰ εἶναι εὔχρηστοι.

Διεθνῶς ἐπεκράτησεν εἰς τὰς ἐπιστημονικὰς μετρήσεις, τῆς Μηχανικῆς κυρίως, νὰ χρησιμοποιοῦνται δύο συστήματα μονάδων : τὸ σύστημα C. G. S καὶ τὸ τεχνικὸν σύστημα.

Εἰς τὸ ***σύστημα μονάδων C. G. S*** (centimètre, gramme, seconde) ἐξελέγησαν ὡς θεμελιώδη μεγέθη τὸ ***μῆκος,*** ἡ ***μᾶζα*** καὶ ὁ ***χρόνος,*** μὲ ἀντιστοίχους μονάδας τὸ ἑκατοστόμετρον (cm) διὰ τὸ μῆκος, τὸ γραμμάριον (gr) διὰ τὴν μᾶζαν καὶ τὸ δευτερόλεπτον (sec) διὰ τὸν χρόνον. Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν αἱ παράγωγοι μονάδες, ὅπως ἡ μονὰς ἐπιφανείας, τὸ cm^2, ἡ μονὰς πυκνότητος, τὸ gr/cm^3 κ.λ.

Τὸ ***τεχνικὸν σύστημα*** (Τ. Σ.) μονάδων ἔχει ὡς θεμελειώδη μεγέθη τὸ ***μῆκος,*** τὴν ***δύναμιν*** καὶ τὸν ***χρόνον,*** μὲ ἀντιστοίχους μονάδας τὸ μέτρον (m) διὰ τὸ μῆκος, τὸ χιλιόγραμμον βάρους (kgr *) διὰ τὴν δύναμιν καὶ τὸ δευτερόλεπτον (sec) διὰ τὸν χρόνον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐνῷ εἰς τὸ C. G. S ἡ μᾶζα εἶναι θεμελιῶδες μέγεθος — καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ δύναμις προκύπτει ὡς παράγωγον μέγεθος —, εἰς τὸ Τ. Σ. ἡ δύναμις εἶναι θεμελιῶδες μέγεθος καὶ ἡ μᾶζα παράγωγον.

§ 4. Διαστάσεις τῶν φυσικῶν μεγεθῶν. Κάθε φυσικὸν μέγεθος εὑρίσκεται εἰς ὡρισμένην σχέσιν πρὸς τὰ θεμελιώδη καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς συνάρτησις αὐτῶν. Οὕτω, π. χ., εἶναι

$$\text{ἐπιφάνεια } S = \text{μῆκος} \, . \, \text{μῆκος}$$

$$\text{ταχύτης } \upsilon = \frac{\text{μῆκος}}{\text{χρόνος}}$$

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν συμβόλων L, M, T μῆκος (longueur), μᾶζαν (masse) καὶ χρόνον (temps), αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γράφονται, συμβολικῶς, ὡς ἑξῆς :

$$[S] = [L] \, . \, [L] = [L^2]$$

$$[\upsilon] = \frac{[L[}{[T]} = [L \, . \, T^{-1}]$$

Αἱ συμβολικαὶ αὗται σχέσεις δύνανται νὰ γραφοῦν καὶ ὡς ἑξῆς :

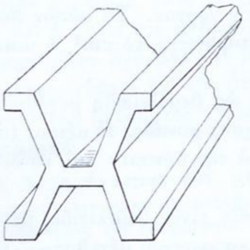
$$[S] = [L^2 \, . \, M^0 \, . \, T^0]$$

$$[\upsilon] = [L^1 \, . \, M^0 \, . \, T^{-1}]$$

Οἱ ἐκθέται τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν ὀνομάζονται ***διαστάσεις*** τῶν μεγεθῶν. Οὕτω, αἱ διαστάσεις τῆς ταχύτητος εἶναι 1, 0, −1. Προφανὲς ὅτι οἱ καθαροὶ ἀριθμοὶ ἔχουν διαστάσεις 0, 0, 0. Καταχρηστικῶς ὅμως λέγοντες διαστάσεις, π. χ., τοῦ ἐμβαδοῦ S, ἐννοοῦμεν ὅλον τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἄνω ἐξισώσεως, δηλ. τὸ $[L^2]$ (διότι $M^0 = 1$ καὶ $T^0 = 1$).

Διαστάσεις τῶν τύπων. Οἱ φυσικοὶ τύποι εἶναι ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν τοῦ ἑνὸς μέλους καὶ τῶν μεγεθῶν τοῦ ἄλλου. Τὰ μονώνυμα (ἢ πολυώνυμα) ἑκάστου μέλους εἶναι γινόμενα ἢ πηλίκα φυσικῶν μεγεθῶν καί, ὡς ἐκ τούτου, ἔχουν διαστάσεις αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς διαστάσεις τῶν ἀποτελούντων αὐτὰ συστατικῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἰσότης καὶ πρόσθεσις εἶναι δυνατὴ μόνον μεταξὺ ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ ὑπάρχη ἰσότης μεταξὺ τῶν διαστάσεων τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως. Κατὰ ταῦτα, ὁ ἔλεγχος διὰ τῶν διαστάσεων δυνατὸν νὰ χρησιμεύση ὡς κριτήριον τοῦ ἂν ἕνας φυσικὸς τύπος εἶναι ἐσφαλμένος.

§ 5. Μονάδες μήκους. Ὅπως ἴδωμεν, ὡς μονὰς μήκους εἰς τὸ σύστημα C. G. S λαμβάνεται τὸ ἑκατοστόμετρον. Τοῦτο ὁρίζεται ὡς τὸ 1/100 τοῦ ***προτύπου μέτρου,*** δηλ. τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ δύο χαραγῶν, ἐπὶ ἑνὸς κανόνος ἐξ ἰριδιούχου λευκοχρύσου, φυλασσομένου εἰς τὸ Bureau International des Poids et Mesures εἰς Sévres πλησίον τῶν Παρισίων *. Ὁ κανὼν οὗτος ἔχει τομὴν εἰς σχῆμα H *(σχ. 2)*, οὕτως ὥστε τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἡ χάραξις νὰ συμπίπτη ἀκριβῶς μὲ τὰς οὐδετέρας ἶνας (Βλ. Κεφ. Ἐλαστικότητος), ὁπότε ἡ ἀπόστασίς των κατὰ τυχὸν κάμψιν παραμένει ἀμετάβλητος.



Σχ. 2. Σχῆμα τοῦ προτύπου μέτρου.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 cm χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ:

1 km (χιλιόμετρον)	$= 10^5$	cm
1 m (μέτρον)	$= 10^2$	cm
1 dm (δεκατόμετρον)	$= 10$	cm
1 mm (χιλιοστόμετρον)	$= 10^{-1}$	cm
1 μ (μικρὸν)	$= 10^{-4}$	cm
1 Å (Ångström)	$= 10^{-8}$	cm

Πρὸς τούτοις εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ ἑξῆς μονάδες **:
Εἰς τὴν φασματοσκοπίαν τῶν ἀκτίνων Röntgen ἡ μονὰς

$$1\ \text{X}\ (\chi\tilde{\iota}) = 10^{-11}\ \text{cm}$$

Εἰς τὴν Ἀστρονομίαν αἱ μονάδες

$$1\ \text{ἔτος φωτὸς} = 0{,}946 \cdot 10^{18}\ \text{cm}$$
$$1\ \text{Parsec} = 3{,}08 \cdot 10^{18}\ \text{cm}$$

Ἓν *ἔτος φωτὸς* εἶναι ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διατρέχει τὸ φῶς ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος ἴσου πρὸς ἓν ἔτος.

---

* Τὸ μέτρον εἶχεν ὁρισθῆ ἀρχικῶς ὡς τὸ 1/40.000.000 τῆς περιφερείας ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς. Τὸ οὕτως ὁριζόμενον μέτρον εἶναι, περίπου, κατὰ 0,1 ‰ μικρότερον τοῦ σημερινοῦ προτύπου.

** Βλ. καὶ § 10.

Ἕνα *Parsec* (ἐκ τῶν λέξεων parallaxe καὶ seconde) εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ Ἡλίου καὶ ἐκείνου τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς τῆς Γῆς φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ἑνὸς δευτέρου λεπτοῦ τῆς μοίρας.

Εἰς τὴν ναυτιλίαν χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς

1 ναυτικὸν μίλιον = 1852 m

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀναπαραγωγὴ τοῦ προτύπου μέτρου, ἐν περιπτώσει καταστροφῆς του, ἐγένετο σύγκρισις πρὸς τὰ μήκη κύματος τριῶν γραμμῶν τοῦ φάσματος τοῦ Cd. Οὕτως εὑρέθη ὅτι εἰς τὸν ἀέρα καὶ ὑπὸ κανονικὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν 15^0 C περιέχονται εἰς ἕνα μέτρον 1553164,1 μήκη κύματος τῆς ἐρυθρᾶς γραμμῆς τοῦ Cd.

§ 6. Μονάδες μάζης. Ὡς μονὰς μάζης εἰς τὸ σύστημα C.G.S χρησιμοποιεῖται τὸ ***γραμμάριον (μάζης)***, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ 1/1000 τῆς μάζης τοῦ προτύπου χιλιογράμμου, δηλ. ἑνὸς ἐξ ἰριδιούχου λευκοχρύσου κατεσκευασμένου κυλίνδρου φυλασσομένου εἰς τὸ Bureau Intenational des Poids et Mesures. Τὸ γραμμάριον, κατὰ τὸν ἀρχικόν του ὁρισμόν *, εἶναι ἡ μᾶζα ἑνὸς cm^3 ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας $+4^0$ C.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 gr., χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια αὐτοῦ:

1 t (τόννος) $= 10^3$ kgr
1 kgr (χιλιόγραμμον) $= 10^3$ gr
1 mgr (χιλιοστόγραμμον) $= 10^{-3}$ gr
1 γ (γάμμα) $= 10^{-6}$ gr

Εἰς τὸ Τεχνικὸν σύστημα ὡς μονὰς μάζης χρησιμοποιεῖται τὸ 1 $kgr^* . m^{-1} . sec^2$, τὸ ὁποῖον, ἐνίοτε, καλεῖται καὶ 1 *Newton* (Nt).

1 Nt = 9,81 kgr

Ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος ταύτης, δίδεται εἰς τὴν § 34.

§ 7. Μονάδες χρόνου. Ὡς μονὰς χρόνου εἰς τὸ σύστημα C. G. S λαμβάνεται τὸ ***δευτερόλεπτον***, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $1/86400 = 1/24 \cdot 60 \cdot 60$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας **.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 sec, χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, καὶ αἱ ἑξῆς:

1 min (λεπτὸν) = 60 sec
1 h (ὥρα) $= 60 \cdot 60$ sec

§ 8. Μονάδες ἐπιφανείας καὶ ὄγκου. Ἡ παράγωγος μονὰς ἐπιφανείας εἰς τὸ σύστημα C. G. S εἶναι τὸ ***τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον*** (cm^2). Εἰς πολλὰς περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται, ἀντ' αὐτοῦ, τὸ mm^2 καὶ τὸ m^2.

Ὡς μονὰς ὄγκου εἰς τὸ σύστημα C. G. S λαμβάνεται τὸ ***κυβικὸν ἑκα-***

---

* Τὸ οὕτως ὁριζόμενον γραμμάριον εἶναι μικρότερον τοῦ σήμερον χρησιμοποιουμένου κατὰ 0,03‰.

** *Μέση ἡλιακὴ ἡμέρα* καλεῖται ὁ κατὰ μέσον ὅρον χρόνος ὁ παρερχόμενος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεσουρανήσεων τοῦ Ἡλίου. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ δευτερολέπτου πρέπει νὰ λαμβάνεται ἡ μέση τιμὴ διότι, ὡς γνωστόν, ἡ διάρκεια τῆς ἀληθοῦς ἡμέρας μεταβάλλεται κατὰ διαφόρους ἐποχὰς τοῦ ἔτους.

τοστόμετρον (cm^3). Ἐπὶ πλέον χρησιμοποιοῦνται:

$$1 \text{ lt (λίτρον)} = 10^3 \text{ cm}^3$$
$$1 \text{ m}^3 \text{ (κυβ. μέτρον)} = 10^3 \text{ lt}$$

§ 9. Γωνίαι καὶ μονάδες αὐτῶν. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, θεωροῦμεν ἕνα κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς των καὶ ἀκτῖνα r οἱανδήποτε. Τὸ πηλίκον τοῦ μήκους s τοῦ τόξου τοῦ ὑποτείνοντος αὐτὴν πρὸς τὴν ἀκτῖνα r καλεῖται (ἐπίπεδος) ***γωνία*** φ. Ἤτοι

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \tag{1}$$

Ἡ γωνία ὡς πηλίκον δύο μηκῶν εἶναι καθαρὸς ἀριθμός. Ὡς μονὰς γωνίας λαμβάνεται τὸ ***ἀκτίνιον*** (radian). Ἓν ἀκτίνιον ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ἡ ὁποία ὑποτείνει τόξον μήκους ἴσου πρὸς τὴν ἀκτῖνα· Ἑπομένως εἰς πλήρη κύκλον ἀντιστοιχεῖ γωνία 2π ἀκτινίων.

Ἄλλη μονὰς γωνίας εἶναι ἡ ***μοῖρα*** (1°), ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ ὑποδιαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 360 ἴσα μέρη, καὶ ὁ ***βαθμός***, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐξ ὑποδιαιρέσεως τοῦ κύκλου εἰς 400 ἴσα μέρη. Ἡ σχέσις μεταξὺ ἀκτινίου καὶ μοίρας προκύπτει ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι

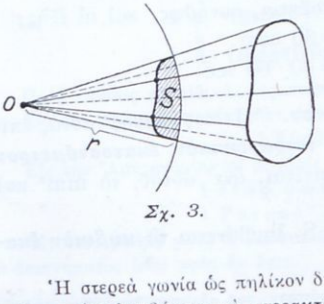
2π ἀκτίνια ἀντιστοιχοῦν εἰς 360°

1 » x ;

$$x = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}296^\circ$$

ἤτοι: $1 \text{ rad} = 57{,}296^\circ$

Στερεὰ γωνία. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ σύνολον τῶν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου 0 πρὸς τὴν περίμετρον δεδομένης ἐπιφανείας φερομένων εὐθειῶν *(σχ. 3)*, θεωροῦμεν σφαῖραν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα r οἱανδήποτε. Τὸ πηλίκον τοῦ ἐμβαδοῦ S τὸ ὁποῖον ἀποκόπτεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος καλεῖται ***στερεὰ γωνία*** Ω.



Σχ. 3.

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{r^2}}$$

Ἡ στερεὰ γωνία ὡς πηλίκον δύο ἐμβαδῶν εἶναι καθαρὸς ἀριθμός. Μονὰς στερεᾶς γωνίας λαμβάνεται τὸ ***στερακτίνιον***.

Ἓν στερακτίνιον ἰσοῦται μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν ἡ ὁποία ἐπὶ σφαίρας ἀκτῖνος r ἀποκόπτει ἐπιφάνειαν ἐμβαδοῦ ἴσου πρὸς r^2.

Κατὰ ταῦτα, εἰς μίαν σφαῖραν ἀντιστοιχεῖ στερεὰ γωνία 4π στερακτινίων.

§ 10. Μονάδες μήκους, ἐπιφανείας κ.λ. χρησιμοποιούμεναι εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας. Συνήθως εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας χρησιμοποιοῦνται αἱ ἑξῆς μονάδες:

α) *Μονάδες μήκους:* 1 ἴ ν τ ζ α (in) = 2,54 cm
1 π ο ῦ ς (ft) = 12 in = 30,5 cm
1 ὑ ά ρ δ α (yd) = 3 πόδες = 0,914 m
1 μ ί λ ι ο ν (mile) = 1609 m

β) *Μονάδες ἐπιφανείας.* Ὡς μονάδες ἐπιφανείας λαμβάνονται ἡ τετραγωνικὴ ἴντζα, ὁ τετραγωνικὸς ποῦς κ.λ.

γ) *Μονάδες ὄγκου.* Ἐκτὸς τῶν μονάδων yd^3, ft^3 καὶ in^3, χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ ἑξῆς μονάδες ὄγκου: 1 π ί ν τ α (pt), 1 κ ο υ ὰ ρ τ (qt) = 2 pt, 1 γ α λ ό ν ι ο ν = 4 qt.

Προκειμένου περὶ ὄγκου ὑγρῶν, τὸ γαλόνιον ὁρίζεται ἴσον πρὸ; 1 British gallon = 4,546 ltr εἰς τὴν Μεγάλην Βρετανναν καὶ 1 gallon (U. S) = 3,785 ltr εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας.

δ) *Μονάδες μάζης.* Ἐν τῷ ἐμπορίῳ χρησιμοποιοῦνται αἱ μονάδες

1 ο ὐ γ γ ί α (oz. Av)* = 28,35 gr
1 λ ί μ π ρ α (lb. Av.) = 16 oz = 453,6 gr

Ἐνίοτε (π. χ. ἐν τῇ Φαρμακευτικῇ) χρησιμοποιοῦνται καὶ αἱ κατά τι διάφοροι μονάδες

1 ο ὐ γ γ ί α (oz. t)* = 31,10 gr
1 λ ί μ π ρ α (lb. t) = 373,2 gr

§ 11. Μέτρησις μήκους. Ὁ ἁπλούστερος τρόπος μετρήσεως μήκους εἶναι ὁ δι' ἐπιθέσεως ἑνὸς διῃρημένου κανόνος ἐπὶ τοῦ πρὸς μέτρησιν ἀντικειμένου. Διὰ τῆς τοιαύτης μετρήσεως ἐπιτυγχάνεται ἀκρίβεια περίπου 0,5

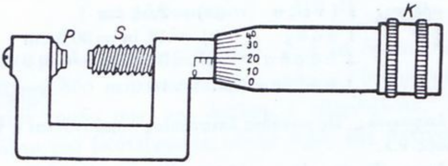
Σχ. 4. Διαστημόμετρον.

mm. Ὅταν τὸ πρὸς μέτρησιν μῆκος εἶναι πολλῶν μέτρων, χρησιμοποιοῦνται, ἀντὶ κανόνος, ταινίαι ***(μετροταινίαι)*** ἢ ἅλυσος ἐκ χάλυβδος.

Διὰ μετρήσεις εἰς τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖται ἀκρίβεια περίπου 1/10 τοῦ mm χρησιμοποιεῖται τὸ **διαστημόμετρον** (καλίμπρα) *(σχ. 4).* Διὰ τὴν μέτρησιν φέρεται τὸ ἀντικείμενον μεταξὺ τῶν δύο σιαγόνων, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἀναγι-

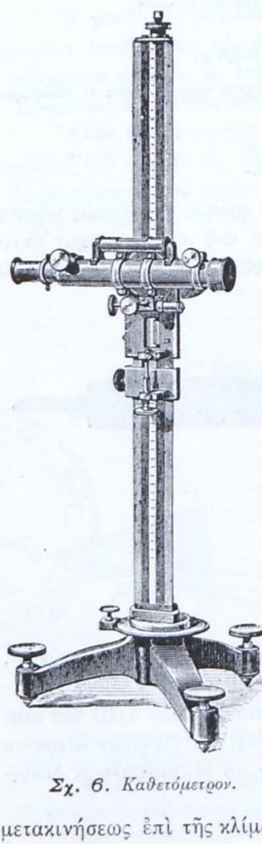
* *Av = Avoirdupois, t = Troy.*

γνώσκεται ἐπὶ τῆς κλίμακος τῇ βοηθείᾳ *βερνιέρου* (βλ. κατωτέρω). Συνήθως ἡ κλῖμαξ εἶναι ὑποδιῃρημένη εἰς mm καὶ εἰς ἴντζας. Διὰ χρησιμοποιήσεως



Σχ. 5. *Μικρόμετρον.*

τῶν ἐξωτερικῶν παρειῶν τῶν σιαγόνων τοῦ διαστημομέτρου, δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διάμετρος σωλήνων, ἐνῶ διὰ τῆς εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὀργάνου γλωσσίδος μετρεῖται τὸ βάθος ἐντομῶν κ.λ.

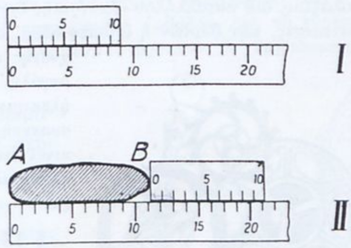


Σχ. 6. *Καθετόμετρον.*

Διὰ μετρήσεις μεγαλυτέρας ἀκριβείας (μέχρι 1/100 mm) χρησιμοποιεῖται τὸ ***μικρόμετρον*** *(σχ. 5).* Τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου εἶναι ἴσον πρὸς 1 mm καὶ τὸ τύμπανον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 μέρη. Οὕτω, δι᾿ ἑκάστην ὑποδιαίρεσιν τοῦ τυμπάνου ὁ *μικρομετρικὸς κοχλίας* S προχωρεῖ κατὰ 1/100 τοῦ χιλιοστομέτρου. Πρὸ ἑκάστης μετρήσεως πρέπει νὰ φέρωμεν τὸν κοχλίαν εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸν ἀπέναντι αὐτοῦ κύλινδρον P καὶ ἐλέγχωμεν τὴν θέσιν τοῦ μηδενός. Ἐπειδὴ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως ἐξαρτᾶται πολὺ ἀπὸ τὸ «σφίξιμο» τοῦ κοχλίου, προβλέπεται μία κινητὴ κεφαλὴ K, ἡ ὁποία, δι᾿ ἑνὸς ἐλατηρίου, πιέζεται ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ κοχλίου καὶ τὸν παρασύρει μόνον ἐφ᾿ ὅσον ἡ ὑπὸ τῆς χειρὸς μεταδιδομένη ῥοπὴ δὲν ὑπερβαίνει ὡρισμένην τιμήν. Ἐὰν ἡ ῥοπὴ γίνῃ μεγαλυτέρα, ἡ κεφαλὴ περιστρέφεται ἐλευθέρως χωρὶς νὰ παρασύρῃ εἰς περιστροφὴν τὸν κοχλίαν.

Διὰ τὴν μέτρησιν κατακορύφων ἀποστάσεων χρησιμοποιεῖται τὸ ***καθετόμετρον*** *(σχ. 6),* τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ κατακόρυφον ῥάβδον κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας μετακινεῖται σύρτης φέρων διόπτραν. Ἡ ἀπόστασις προκύπτει διὰ δύο διαδοχικῶν σκοπεύσεων τῶν δύο ἄκρων τῆς μετρουμένης ἀποστάσεως καὶ ἀναγνώσεως τῆς μετακινήσεως ἐπὶ τῆς κλίμακος τῆς χαραγμένης ἐπὶ τῆς ῥάβδου.

Βερνιέρος. Συνήθως, κατὰ τὰς μετρήσεις, τὸ ἄκρον τοῦ μετρουμένου μήκους δὲν συμπίπτει μὲ μίαν χαραγὴν τῆς κλίμακος καὶ τότε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως προκύπτει κατὰ προσέγγισιν, δι' ὑποκειμενικῆς ἐκτιμήσεως. Μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν ἔχομεν ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν ***βερνιέρον*** (Nonius, Vernier) *(σχ. 7)*.

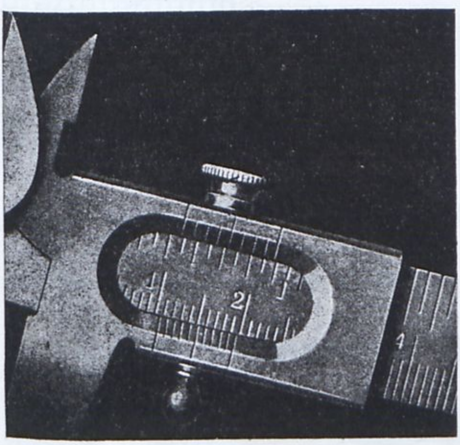


Σχ. 7. Τὸ μῆκος ΑΒ τοῦ σώματος εἶναι ἴσον πρὸς 11,2 mm.

Οὗτος εἶναι μικρὸς κανὼν τοῦ ὁποίου, συνήθως, 10 διαιρέσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς 9 ἀκριβῶς διαιρέσεις τῆς κλίμακος. Τότε ἑκάστη διαίρεσις τοῦ βερνιέρου εἶναι ἴση πρὸς τὰ 9/10 ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως τῆς κλίμακος, ἤτοι εἶναι μικροτέρα κατὰ τὸ 1/10 αὐτῆς.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μήκους διὰ τοῦ βερνιέρου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Θέτομεν τὸ πρὸς μέτρησιν μῆκος ΑΒ ἐπὶ τῆς κλίμακος, οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον Α νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος, καὶ μετακινοῦμεν τὸν βερνιέρον ἕως ὅτου ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ ἄκρον Β. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μηδὲν τοῦ βερνιέρου εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς 11ης καὶ 12ης ὑποδιαιρέσεως - συνεπῶς τὸ μετρούμενον μῆκος θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῶν 11 mm κατὰ κλάσμα τι τοῦ χιλιοστομέτρου. Ἡ ἀκριβὴς τιμὴ εὑρίσκεται διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν:



Σχ. 8. Ὁ βερνιέρος τοῦ διαστημομέτρου δεικνύει 10,6 mm.

Ἐὰν τὸ μηδὲν τοῦ βερνιέρου συνέπιπτεν ἀκριβῶς μὲ τὴν 11ην διαίρεσιν τοῦ κανόνος, τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου θὰ ἦτο 11,0 mm. Εἰς τὸ σχῆμα μας ὅμως συμπίπτει ἡ δ ε υ τ έ ρ α διαίρεσις τοῦ βερνιέρου μὲ τὴν 13ην τοῦ κανόνος. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη διαίρεσις τοῦ βερνιέρου ἰσοῦται μὲ 9/10 mm, ὑπολείπεται, δηλ., τοῦ 1 mm κατὰ τὸ $^1/_{10}$ mm, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Β ἀπέχει τῆς 11ης γραμμῆς τῆς κλίμακος κατὰ $2 \cdot {}^1/_{10}$ mm, ἐπομένως τὸ μῆκος τοῦ ἀντικειμένου ΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς 11,2 mm. Ἐὰν συνέπιπτεν ἡ 6η γραμμὴ τοῦ βερνιέρου, τὸ μῆκος θὰ ἦτο 11,6 mm κ.ο.κ.

§ 12. **Μέτρησις χρόνου.** Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ οἱονδήποτε περιοδικὸν φαινόμενον. Οὕτω, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ταλάντωσις ἑνὸς ἐκκρεμοῦς *(ὡρολόγιον μὲ ἐκκρεμὲς)* ἢ ἡ στροφικὴ ταλάντωσις μικροῦ τροχοῦ *(σχ. 9)* τὴν ὁποίαν οὗτος ἐκτελεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἑλικοειδοῦς ἐλατηρίου *(ὡρολόγιον τσέπης)*.

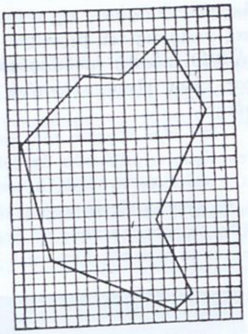
Μεγάλην ἀκρίβειαν παρέχουν τὰ ὡρολόγια μὲ χαλαζίαν. Εἰς ταῦτα ῥάβδος ἐκ χαλαζίου, διὰ καταλλήλου ἠλεκτρικῆς διεγέρσεως *, τίθεται εἰς ἐπιμήκεις ἐλαστικὰς ταλαντώσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἰδιοπερίοδος παραμένει ἐξόχως σταθερά. Ἐπειδὴ ἡ ἰδιοσυχνότης τῆς ταλαντώσεως τοιαύτης ῥάβδου εἶναι πολὺ μεγάλη, ὑποπολλαπλασιάζομεν ταύτην διὰ καταλλήλου ἠλεκτρικῆς συνδεσμολογίας. Τελικῶς, ἐκ τῆς ἐν λόγῳ συσκευῆς λαμβάνεται ἐναλλασσόμενον ῥεῦμα τὸ ὁποῖον κινεῖ ἕνα σύγχρονον ἠλεκτρικὸν κινητῆρα.

Σχ. 9. Μηχανισμὸς ὡρολογίου τσέπης. Τὸ ἓν ἄκρον τοῦ ἑλικοειδοῦς ἐλατηρίου εἶναι στερεωμένον ἐπὶ τοῦ α ἰ ω ρ η τ ο ῦ (δεξιά), ὅστις, οὕτω, ἐκτελεῖ στροφικὰς ταλαντώσεις. Ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένη ἐνέργεια παρέχεται ὑπὸ ἰσχυροῦ ἐλατηρίου (ἀριστερὰ) διὰ μέσου ὀδοντωτῶν τροχῶν, τοῦ τροχοῦ διαφυγῆς (μέσον ἄνω) καὶ τῆς ἀγκύρας (δεξιὰ ἄνω).

[Κατὰ Hahn-Henckel: Lehrbuch der Physik]

§ 13. Μέτρησις ἐμβαδοῦ καὶ ὄγκου.

Τὸ ἐ μ β α δ ὸ ν (ἐπιπέδων) ἐπιφανειῶν ἁπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος εὑρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Ὅταν ὅμως τὸ σχῆμα δὲν ἐπιτρέπῃ τοιοῦτον ὑπολογισμόν, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἑξῆς μέθοδοι:



Σχ. 10. Προσδιορισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐπιφανείας ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἁπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα.

α) Χαράσσεται ἐπὶ χιλιοστομετρικοῦ χάρτου τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας καὶ μετρεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων τετραγωνιδίων *(σχ. 10)*.

β) Ἀποκόπτεται ἀπὸ φύλλον ἰσοπαχοῦς χάρτου ἕνα τμῆμα τὸ ὁποῖον

Σχ. 11. Ἐμβαδόμετρον.

ἔχει ἀκριβῶς τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας καὶ ζυγίζεται. Ἐκ συγκρίσεως πρὸς τὸ βάρος ἄλλου τεμαχίου ἐκ τοῦ αὐτοῦ χάρτου ἔχοντος ἁπλοῦν γεωμε-

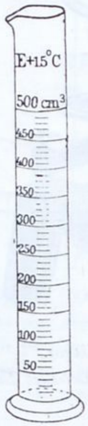
* Ἠλεκτρισμός, σελ. 40.

τρικὸν σχῆμα καί, συνεπῶς, γνωστὸν ἐμβαδόν, εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

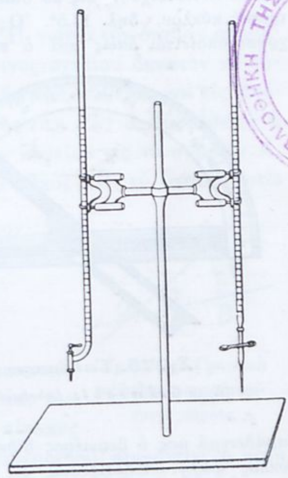
γ) Δι' **ἐμβαδομέτρου** (*σχ. 11*). Μετακινοῦμεν τὴν ἀκίδα τοῦ ὀργάνου ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς ἐπιφανείας ἕως ὅτου ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως. Ἐπὶ τυμπάνου παρέχεται ἔνδειξις ἀνάλογος πρὸς τὸ μετρούμενον ἐμβαδόν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ, βαθμολογοῦμεν τὸ ὄργανον δι' ἐμβαδομετρήσεως ἐπιφανείας γνωστοῦ ἐμβαδοῦ.

Ὁ ὄ γ κ ο ς στερεῶν σωμάτων ἁπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος εὑρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ. Ὅταν ὅμως, λόγῳ τοῦ σχήματος, δὲν εἶναι δυνατὸς τοιοῦτος ὑπολογισμός, ὁ ὄγκος δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐμμέσως ἐκ τῆς μάζης καὶ τῆς πυκνότητος τοῦ ὑλικοῦ ἢ δι' ἐμβαπτίσεως ἐντὸς ὑγροῦ τινος καὶ μετρήσεως τῆς φαινομενικῆς αὐξήσεως τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ.

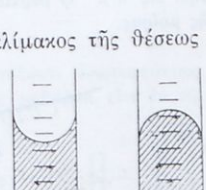
Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου ὑγρῶν χρησιμοποιοῦνται εἰδικοὶ *ὀγκομετρικοὶ κύλινδροι (σχ. 12)* ἢ *προχοΐδες (σχ. 13)*. Τὰ ὄργανα ταῦτα εἶναι βαθμολογημένα δι' ὡρισμένην θερμοκρασίαν, ἡ δὲ εὕρεσις τοῦ ὄγκου γίνεται δι' ἀναγνώσεως ἐπὶ τῆς κλίμακος τῆς θέσεως ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ σχηματιζομένου μηνίσκου (*σχ. 14*).



Σχ. 12. *Ὀγκομετρικὸς κύλινδρος.*



Σχ. 13. *Προχοΐδες.*



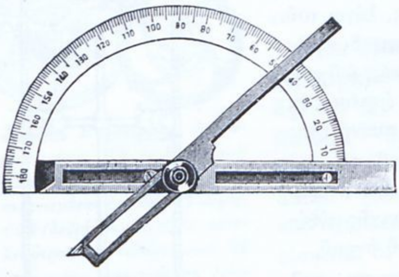
Σχ. 14. *Ἡ κλῖμαξ ἰσχύει δι' ἀνάγνωσιν εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ μηνίσκου.*

§ 14. Μέτρησις γωνιῶν. Διὰ τὴν μέτρησιν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται κύκλοι ***(γωνιομετρικοὶ κύκλοι, μοιρογνωμόνια)***, φέροντες ἐπὶ τῆς περιφερείας διαιρέσεις εἰς μοίρας, ἡμισείας μοίρας κ.λ., ἀναλόγως τῆς διαμέτρου των. Ὅταν πρόκειται νὰ μετρηθῇ δίεδρος γωνία, χρησιμοποιεῖται εἰδικὸς τύπος μοιρογνωμονίου (*σχ. 15*), τὸ ὁποῖον καλεῖται ***γωνιόμετρον ἐπαφῆς***.

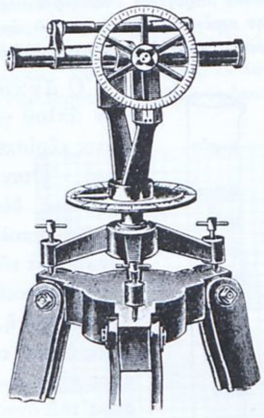
Ὅταν ζητῆται ἡ γωνία δύο διευθύνσεων, χρησιμοποιεῖται διάταξις ἀποτελουμένη ἀπὸ γωνιομετρικὸν κύκλον καὶ διόπτραν ***(θεοδόλιχος**, σχ. 16)*. Διὰ τῆς διόπτρας σκοπεύομεν διαδοχικῶς τὰς δύο διευθύνσεις, ὁπότε ἡ γωνία προκύπτει ὡς διαφορὰ τῶν ἐπὶ τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου δύο ἀναγνώσεων.

Κυκλικὸς βερνιέρος. Διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀνάγνωσιν τῆς ἐνδείξεως τῶν γωνιομετρικῶν κύκλων χρησιμοποιεῖται ὁ ***κυκλικὸς βερνιέρος.***

Οὗτος εἶναι κανὼν τοξοειδὴς *(σχ. 17)*, ὑποδιῃρημένος εἰς n - 1 ὑποδιαιρέσεις (συνήθως 20 ἢ 30) ἀντιστοιχούσας εἰς n ὑποδιαιρέσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου. Ὅταν ὁ γωνιομετρικὸς κύκλος φέρῃ διαιρέσεις εἰς ἡμισείας μοίρας, χρησιμοποιεῖται, συνήθως, βερνιέρος 30 διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς 29 διαιρέσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου, δηλ. 14,5°. Ὁ κυκλικὸς βερνιέρος χρησιμοποιεῖται ὅπως καὶ ὁ εὐθύγραμμος. Εἰς τὸ

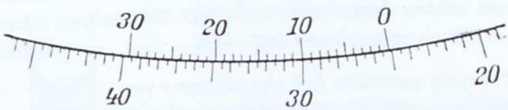


Σχ. 15. Γωνιόμετρον ἐπαφῆς.
[Κατὰ Grimsehl: Lehrbuch der Physik]



Σχ. 16. Θεοδόλιχος.
[Κατὰ Grimsehl: Lehrbuch der Physik]

παράδειγμά μας ὁ βερνιέρος δίδει τὸ 1/30 τῶν 0,5° δηλ. 1′. Ὅταν ὁ γωνιομετρικὸς κύκλος φέρῃ ὑποδιαιρέσεις εἰς τέταρτα τῆς μοίρας, χρησιμοποιεῖται βερνιέρος 25 διαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς 24 διαιρέσεις τοῦ γωνιομετρικοῦ κύκλου (δηλ. εἰς 6°). Ὁ βερνιέρος δίδει τώρα τὸ 1/25 τοῦ 1/4 τῆς μοίρας, δηλ. τὸ 1/100 τῆς μοίρας.



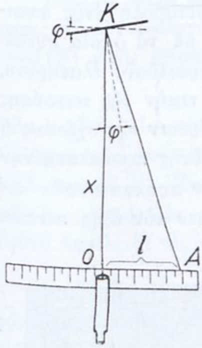
Σχ. 17. Κυκλικὸς βερνιέρος. Ἡ ἔνδειξις εἶναι 25°9′.

Κατοπτρικὴ μέθοδος. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις, διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη ἕνα σῶμα, προσαρμόζομεν εἰς τὸ στρεφόμενον σῶμα κάτοπτρον Κ καὶ θέτομεν ἀπέναντί του διόπτραν, τῆς ὁποίας ὁ ὀπτικὸς ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κλίμακα καὶ τὸ κάτοπτρον *(σχ. 18)*. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην παρατηρεῖται, διὰ τῆς διόπτρας, τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος. Ἂν τώρα τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν φ, κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν θὰ στραφῇ καὶ ἡ ἐπ᾽ αὐτὸ κάθετος, ὁπότε ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ΚΑ θὰ σχηματίζῃ μετὰ τοῦ ὀπτικοῦ ἄξονος τὴν γωνίαν 2φ καὶ διὰ τῆς διόπτρας θὰ ἴδωμεν τὴν διαίρεσιν Α τῆς κλίμακος.

Ἂν καλέσωμεν l τὴν ἀπόστασιν ΟΑ, ἔχομεν

$$\text{εφ}\, 2\varphi = \frac{l}{x}$$

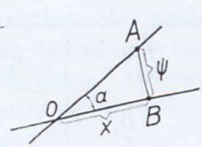
ἔνθα x εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κλίμακος ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι δυνατὴ ἡ μέτρησις πολὺ μικρῶν γωνιῶν, ἀρκεῖ ἡ ἀπόστασις x νὰ ληφθῇ ἀρκούντως μεγάλη.



Σχ. 18. *Ὅταν τὸ κάτοπτρον στραφῇ κατὰ τὴν γωνίαν φ, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ 2φ.*

Γραφικὴ μέθοδος. Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο εὐθεῖαι ἐπί τινος σχεδίου δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ γραφικῶς ἐὰν ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας καὶ εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς κορυφῆς *(σχ. 19)* ἀχθῇ κάθετος ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν τότε μετρήσωμεν τὸ μῆκος ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἔστω y, καὶ λάβωμεν τὸ πηλίκον $\frac{y}{x}$ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{y}{x} = \text{εφ}\, \alpha$$



Σχ. 19. *Γραφικὴ μέθοδος προσδιορισμοῦ γωνίας.*

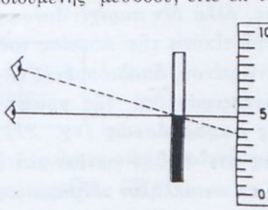
Ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ἐφαπτομένης τῆς γωνίας (τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ πίνακας τῶν *φυσικῶν τιμῶν* τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων) προκύπτει ἡ τιμὴ τῆς γωνίας α. Προφανῶς ἡ τιμὴ τῆς γωνίας προκύπτει καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\log \text{εφ}\, \alpha = \log y - \log x$$

τῇ βοηθείᾳ τῶν *λογαριθμικῶν πινάκων*.

§ **15. Σφάλματα μετρήσεων.** Αἱ μετρήσεις παρουσιάζουν, ἀναποφεύκτως, σφάλματα. Ταῦτα προέρχονται εἴτε ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης μεθόδου, εἴτε ἐκ τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων, εἴτε ἐξ ἀδεξιότητος τοῦ παρατηρητοῦ. Τὰ σφάλματα διαιροῦνται εἰς συστηματικὰ καὶ εἰς τυχαῖα.

Τὰ ***συστηματικὰ*** σφάλματα ὀφείλονται εἰς μόνιμον αἴτιον καὶ ἐπηρεάζουν πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν τὸ ἐξαγόμενον. Οὕτω, μετατόπισις τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος γαλβανομέτρου, ἀνακριβῆ σταθμά, κακῶς βαθμολογημένον θερμόμετρον κ. ἄ., ὑπεισάγουν συστηματικὰ σφάλματα εἰς τὰς μετρήσεις.



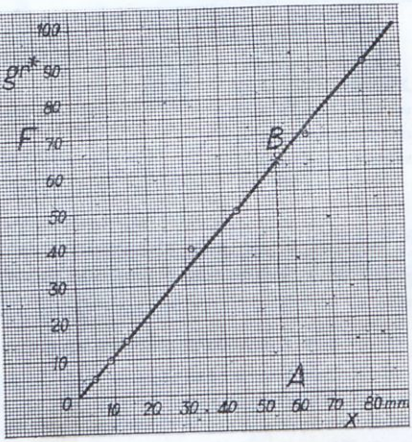
Σχ. 20. *Ἡ μέτρησις τοῦ ὕψους τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης στερεῖται σφάλματος ἐκ παραλλάξεως, ὅταν ἡ παρατήρησις γίνεται καθέτως πρὸς τὴν κλίμακα.*

Τὰ ***τυχαῖα*** σφάλματα προέρχονται ἐκ μὴ μονίμων αἰτίων καὶ ἐπιδροῦν ἐπὶ τοῦ ἀποτελέσματος ἀκανονίστως. Οὕτω, μετρῶντες, πολλάκις, ἕνα μῆκος, λαμβάνομεν ἑκάστοτε διαφόρους τιμάς, ἄλλοτε μεγαλυτέρας καὶ ἄλλοτε μικροτέρας τῆς πραγματικῆς. Τοῦτο δυνατὸν νὰ προέλθῃ ἐκ σφάλματος παραλλάξεως κατὰ τὴν μέτρησιν *(σχ. 20)*, ἐξ ἀκανονίστων μεταβολῶν τῆς τάσεως εἰς ἠλεκτρικὰς μετρήσεις κ.λ. *Ἑκάστη λοιπὸν μέτρη-*

σις συνοδεύεται ἀπὸ τυχαῖον σφάλμα. Ἐνῷ δὲ τὰ συστηματικὰ σφάλματα αἴρονται μόνον δι᾿ ἐξουδετερώσεως τοῦ προκαλοῦντος αὐτὰ αἰτίου, τὰ τυχαῖα ἐξουδετεροῦνται ἐν μέρει δι᾿ ἐπανειλημμένων μετρήσεων καὶ σχηματισμοῦ τοῦ μέσου ὅρου αὐτῶν ***(μέση τιμή)***. Ἡ μέση τιμὴ πλησιάζει τόσον περισσότερον πρὸς τὴν πραγματικὴν ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων αὐξάνει.

§ 16. Γραφικὴ παράστασις φαινομένου. Ἡ μεταβολὴ ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους προκαλεῖ μεταβολὰς καὶ εἰς ἄλλα μεγέθη μὲ τὰ ὁποῖα συνδέεται. Θεωρήσωμεν τὸ φαινόμενον τῆς μηκύνσεως σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, ὅταν τὸ ἐκτείνωμεν διά τινος δυνάμεως: Εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς τεινούσης δυνάμεως ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη μήκυνσις. Διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς σχέσεως ἡ ὁποία συνδέει τὴν τείνουσαν δύναμιν F καὶ τὴν δι᾿ αὐτῆς προκαλουμένην μήκυνσιν x ἐκτελοῦμεν σειρὰν πειραμάτων καὶ ἐκ τῶν προκυπτουσῶν τιμῶν τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἐπιμηκύνσεως κατασκευάζομεν τὸν ἑξῆς *πίνακα μετρήσεων*:

F gr*	x mm
0	0
5	4,8
10	9,0
15	13,8
40	31,5
50	44,0
70	63.8
90	80,0



Σχ. 21. Γραφικὴ παράστασις τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ἔναντι πίνακος.

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ ἀποδίδει μὲν ἀκριβῶς τὰς μετρήσεις, ἀλλὰ δὲν παρέχει ἀμέσως σαφῆ εἰκόνα τῆς πορείας τοῦ φαινομένου, ἀποδιδομένης εὐκρινέστερον διὰ τῆς ***γραφικῆς παραστάσεως*** *(σχ. 21)*. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν δύο ἄξονας τεμνομένους κατ᾿ ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς μὲν (π. χ. τοῦ ὁριζοντίου) χαράσσομεν κατάλληλον κλίμακα μηκῶν, ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δὲ (τοῦ κατακορύφου) κατάλληλον κλίμακα δυνάμεων. Προφανὲς ὅτι ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τοῦ πίνακος καθορίζει ἕνα σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου F, x. Ὅλα τὰ προκύπτοντα σημεῖα, ἑνούμενα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, παρέχουν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς μηκύνσεως καὶ τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως

$$x = \text{συνάρτησις τοῦ } F = f(F)$$

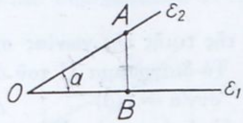
Ἀφοῦ ἤδη κατεσκευάσαμεν τὴν καμπύλην ταύτην, εὔκολον νὰ εὕρωμεν ποία δύναμις χρειάζεται διὰ νὰ προκληθῇ μήκυνσις 55 mm, π.χ. Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου Α (x = 55 mm) τοῦ ἄξονος τῶν μηκύνσεων φέρομεν εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν δυνάμεων, ἡ ὁποία τέμνει τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Β. Τὸ ὕψος ΑΒ παρέχει τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς δυνάμεως (F = 63,0 gr *).

Ἐπειδὴ κατὰ *τὸν νόμον τοῦ Hooke* (βλ. Κεφ. Ἐλαστικότητος), ἡ μήκυνσις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν δύναμιν, ἡ σχέσις $x = f(F)$ εἶναι ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ. Ἤτοι

$$x = k \cdot F$$

ἔνθα k εἶναι μία σταθερά. Θὰ πρέπει ἑπομένως ἡ σχέσις αὕτη ν' ἀποδίδεται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς διὰ τὴν ὁποίαν καὶ μόνην τὸ x θὰ εἶναι ἀνάλογον τοῦ F. Ἐν τούτοις εἰς τὸ σχῆμα 21 παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα μετρήσεως δὲν κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, ἀλλ' ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰ σφάλματα τὰ ὁποῖα ἔγιναν κατὰ τὰς μετρήσεις.

§ 17. Στοιχειώδεις γνώσεις ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας. Μία γωνία δύναται νὰ καθορισθῇ ὄχι μόνον διὰ τῆς εἰς μοίρας ἢ εἰς ἀκτίνια τιμῆς της, ἀλλὰ καὶ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς συναρτήσεων. Αἱ συνηθέστερον εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιούμεναι *τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις* εἶναι τὸ ἡμίτονον, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη. Ἔστω ἡ γωνία α τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο εὐθεῖαι ε_1 καὶ ε_2 *(σχ. 22)*. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τῆς γωνίας φέρομεν ἔκ τινος σημείου, τοῦ Β, π. χ., τῆς μιᾶς εὐθείας κάθετον ἐπ' αὐτὴν καί, οὕτω σχηματίζεται ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον.



Σχ. 22. Αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις τῆς γωνίας α ὁρίζονται τῇ βοηθείᾳ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.

Ὡς ***ἡμίτονον*** τῆς γωνίας α ὁρίζομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ΟΑ. Ἤτοι

$$\boxed{\text{ημ}\,\alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτεινούσης}}}$$

Τὸ ***συνημίτονον*** ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς ΟΒ πρὸς τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ΟΑ. Ἤτοι

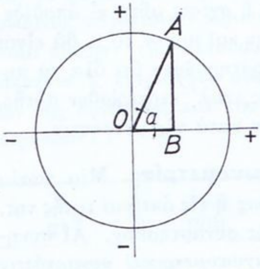
$$\boxed{\text{συν}\,\alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς ὑποτεινούσης}}}$$

Ἡ ***ἐφαπτομένη*** τῆς γωνίας α ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς ΑΒ πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου ΟΒ. Ἤτοι

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \frac{\text{μῆκος τῆς ἀπέναντι καθέτου}}{\text{μῆκος τῆς προσκειμένης καθέτου}}$$

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων προκύπτει ὅτι αὗται εἶναι καθαροὶ ἀριθμοί.

Μεταβολὴ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων μετὰ τῆς γωνίας. Ἐὰν μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας καὶ ἀκτίνα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου *(σχ. 23)* καὶ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ στρέφεται περὶ τὸ κέντρον Ο, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, αὐξανομένης τῆς γωνίας, τὸ ἡμίτονον εἶναι διαρκῶς ἀνάλογον πρὸς τὸ μῆκος ΑΒ, ἡ μεγίστη δὲ τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ εἶναι ἴση πρὸς τὴν μονάδα, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γωνίαν 90°. Ἐὰν ἡ γωνία ἐξακολουθήσῃ αὐξανομένη, τὸ ἡμίτονον ἀρχίζει ἐλαττούμενον διὰ νὰ μηδενισθῇ εἰς τὰς 180°. Ἀπὸ τῆς τιμῆς τῶν 180° ἕως 360° αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου εἶναι ἀρνητικαί.



Σχ. 23. Τριγωνομετρικὸς κύκλος.

Γραφικῶς ἡ μεταξὺ τοῦ ἡμιτόνου μιᾶς γωνίας καὶ τῆς τιμῆς τῆς γωνίας σχέσις $\eta\mu\,\alpha = f(\alpha)$ παρίσταται εἰς τὸ σχῆμα 24,I.

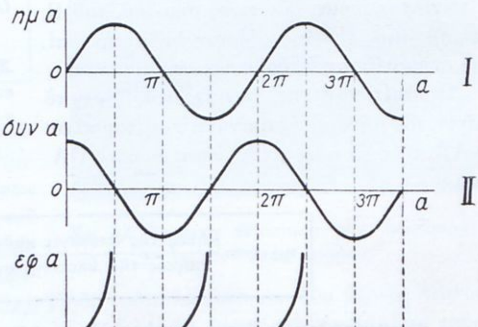
Τὸ διάγραμμα II τοῦ ἄνω σχήματος παριστᾷ τὴν σχέσιν

$$\sigma\upsilon\nu\,\alpha = f(\alpha)$$

τὸ δὲ διάγραμμα III τὴν σχέσιν

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = f(\alpha)$$

Ὅταν ἡ γωνία εἶναι μικρά, ἡ τιμή της εἰς ἀκτίνια ἰσοῦται, περίπου, πρὸς τὴν τιμὴν εἴτε τοῦ ἡμιτόνου της, εἴτε τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς. Οὕτω, ἡ γωνία 4,5° = 0,07854 rad ἔχει ἡμίτονον ἴσον πρὸς 0,07836 καὶ ἐφαπτομένην ἴσην πρὸς 0,07870. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν γωνίαν ταύτην, καὶ ἐφ' ὅσον δὲν χρειαζόμεθα ἀκρίβειαν μεγαλυτέραν τῶν 1 °/₀₀, δυνάμεθα ν' ἀντικαθιστῶμεν τὸ ἡμίτονον ἢ τὴν ἐφαπτομένην διὰ τῆς γωνίας. Προφανῶς, ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἡμιτόνου



***Σχ. 24.** Γραφικὴ παράστασις τῶν σχέσεων μεταξὺ τῆς γωνίας καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῆς συναρτήσεων.*

(ἢ ἐφαπτομένης) καὶ γωνίας ἐλαττοῦται ὅσον ἡ γωνία πλησιάζει πρὸς τὴν τιμὴν τῶν μηδὲν μοιρῶν.

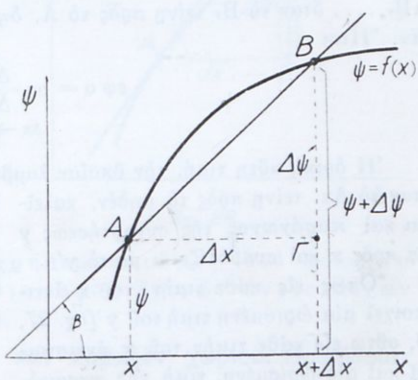
§ 18. Στοιχεῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν § 16, ἡ μήκυνσις x τὴν ὁποίαν προκαλεῖ δύναμις F, ἐξασκουμένη ἐπὶ σπειροειδοῦς ἐλατηρίου, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δύναμιν ταύτην, ἡ δὲ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο μεταβλητὰ μεγέθη παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$F = \frac{1}{k} \cdot x$$

Γενικῶς, ἐὰν δύο μεγέθη x καὶ y συνδέωνται διὰ μιᾶς σχέσεως $y = f(x)$, τὰ δύο ταῦτα μεγέθη καλοῦνται ***μεταβληταί***, ἡ μὲν x ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, ἡ δὲ y ***συνάρτησις τοῦ x***.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς διὰ μιᾶς γραμμῆς, ἡ ὁποία λέγεται καὶ *γραφικὴ παράστασις* τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$. Οὕτω, ἡ συνάρτησις $y = k \cdot x$ παρίσταται γραφικῶς διὰ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἡ συνάρτησις $y = k \cdot x^2$ διὰ *παραβολῆς*, ἡ συνάρτησις $y = \eta\mu\, x$ διὰ μιᾶς *ἡμιτονοειδοῦς* καμπύλης κ.ο.κ.

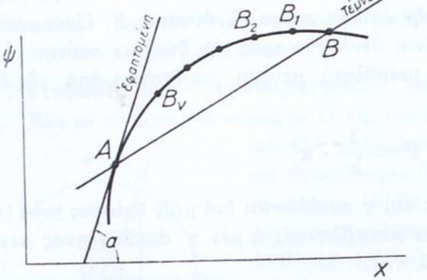
Τέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη. Θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῆς καμπύλης $y = f(x)$ μὲ τετμημένας x καὶ $x + \Delta x$, καὶ τεταγμένας y καὶ $y + \Delta y$ *(σχ. 25)*. Ἂν ἑνώσωμεν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι' εὐθείας γραμμῆς, θὰ προκύψῃ μία ***τέμνουσα*** τῆς καμπύλης. Φέρομεν τώρα ἀπὸ τὸ σημεῖον Α μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β μίαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι Δx καὶ Δy. Ὁ ***συντελεστὴς κατευθύνσεως*** τῆς τεμνούσης (δηλ. ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας β τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τέμνουσα μὲ τὸν ἄξονα τῶν x) εἶναι



Σχ. 25.

$$\varepsilon\varphi\, \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ἐάν, κρατοῦντες τὸ σημεῖον Α σταθερόν, ἐκλέξωμεν ἄλλα σημεῖα B_1, B_2, B_3 . . . . B_ν, ... *(σχ. 26)* διαρκῶς πλησιέστερον πρὸς τὸ Α εὑρισκόμενα (ὁπότε τὰ ἀντίστοιχα Δx λαμβάνουν διαρκῶς μικροτέραν τιμὴν) καὶ θεωρήσωμεν τὰς ἀντιστοίχους τεμνούσας $AB_1, AB_2, \ldots, AB_\nu, \ldots$, αἱ εὐθεῖαι αὗται ἔχουν μίαν ὁρικὴν θέσιν, ὅταν τὸ σημεῖον B_ν τείνῃ πρὸς τὸ A, ἡ ὁποία λέγεται ***ἐφαπτομένη*** καὶ ἡ ὁποία ἔχει μόνον ἓν σημεῖον—τὸ σημεῖον A—κοινὸν μὲ τὴν καμπύλην.



Σχ. 26.

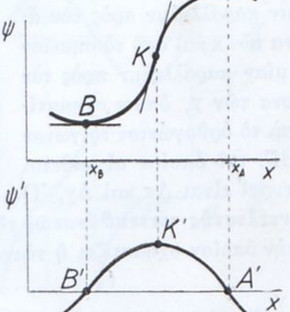
Ἐνῶ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως μιᾶς τεμνούσης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα A καὶ B, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ σημεῖον A.

Κλίσις καμπύλης καὶ παράγωγος συναρτήσεως. Ὁρίζομεν ὡς ***κλίσιν*** μιᾶς καμπύλης εἰς ἕνα σημεῖον αὐτῆς τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Κατὰ ταῦτα, ἡ κλίσις θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ὁρικὴν τιμὴν εφ α πρὸς τὴν ὁποίαν τείνουν αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ εφ β, εφ β_1, εφ $\beta_2, \ldots$, εφ $\beta_\nu \ldots$ τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως τῶν τεμνουσῶν $AB, AB_1, AB_2, \ldots AB_\nu, \ldots$ ὅταν τὸ B_ν τείνῃ πρὸς τὸ A, δηλ. ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἤτοι

$$\text{εφ}\ \alpha = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ἡ ὁρικὴ αὕτη τιμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως, ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, καλεῖται καὶ ***παράγωγος*** τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς x καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ y′.

Ὅπως εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ τοῦ y *(σχ. 27, I)*, οὕτω εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ὡρισμένη τιμὴ τῆς παραγώγου y′ *(σχ. 27, II)*. Ἡ οὕτω προκύπτουσα καμπύλη εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y' = f'(x)$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κλίσις y′ ἔχει διαφόρους τιμάς, ἀλλοῦ θετικὰς καὶ ἀλλοῦ ἀρνητικάς.



Σχ. 27.

Ἀκρότατα. Εἰς τὸ σημεῖον A τοῦ σχήματος 27, I ἡ μεταβλητὴ y λαμβάνει τὴν μεγίστην της τιμὴν καὶ εἰς τὸ σημεῖον B τὴν ἐλαχίστην. Τὰ σημεῖα ταῦτα, καλούμενα ***μέγιστον*** καὶ ***ἐλάχιστον*** τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$, χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ εἰς αὐτὰ ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις εἰς τὰ ***(ἀκρότατα)*** ταῦτα σημεῖα εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε διὰ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα A′, B′ τῆς καμπύλης τοῦ διαγράμματος II ἔχομεν

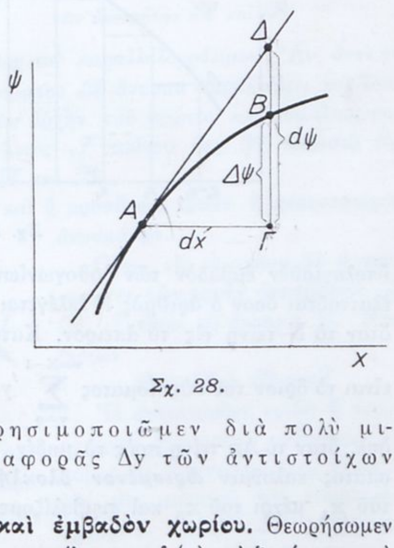
$$y'(x_A) = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad y'(x_B) = 0$$

Σημεῖα καμπῆς. Ἐξ ὅλων τῶν σημείων τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τοῦ A καὶ τοῦ B μεγίστην κλίσιν ἔχει ἡ καμπύλη εἰς τὸ σημεῖον K. Ἑπομένως καὶ ἡ καμπύλη τοῦ διαγράμματος II θὰ παρουσιάζῃ εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον K′ ἕνα μέγιστον. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον K τῆς καμπύλης τοῦ διαγράμματος I, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη τὴν ἀφίνει ἑκατέρωθέν της. Σημεῖα μὲ τοιαύτας ἰδιότητας καλοῦνται ***σημεῖα καμπῆς.***

Διαφορικόν. Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = f(x)$. ***Διαφορικὸν*** dy τῆς συναρτήσεως y διὰ τὴν αὔξησιν dx τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καλεῖται τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου y′ ἐπὶ τὴν αὔξησιν dx. Ἤτοι

$$dy = y' \cdot dx$$

Εἰς τὸ σχῆμα 28 τὸ διαφορικὸν dy παρίσταται ἀπὸ τὸ μῆκος ΓΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ Δy τῶν τιμῶν τοῦ y εἰς τὰς θέσεις x καὶ x + dx (εἰς τὸ σχῆμα 28 τὸ μῆκος ΒΓ) ἰσοῦται, περίπου, μὲ τὸ ἀντίστοιχον διαφορικὸν dy καὶ ἡ προσέγγισις εἶναι τόσον καλυτέρα ὅσον τὸ dx ἐκλεγεῖ μικρότερον. Συνεπείᾳ τούτου δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιῶμεν διὰ πολὺ μικρὸν dx, τὸ dy ἀντὶ τῆς διαφορᾶς Δy τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς συναρτήσεως y.



Σχ. 28.

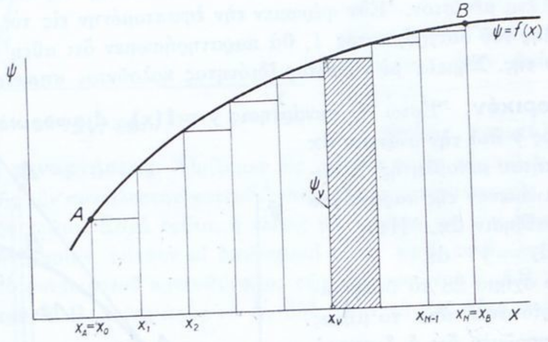
Ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα καὶ ἐμβαδὸν χωρίου. Θεωρήσωμεν ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου x y *(σχ. 29)* μίαν καμπύλην $y = f(x)$ καὶ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν S τοῦ χωρίου x_A, x_B, B, A τοῦ περιοριζομένου ἀφ' ἑνὸς μὲν ὑπὸ τῆς καμπύλης ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἀφ' ἑτέρου δὲ ὑπὸ δύο κατακορύφων ἀγομένων ἐκ δύο σημείων x_A καὶ x_B τοῦ ἄξονος τῶν x. Πρὸς τοῦτο χωρίζομεν τὸ διάστημα x_A ἕως x_B εἰς N ἴσα τμήματα, φέρομεν ἐκ τῶν προκυπτόντων σημείων $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ τὰς κατακορύφους μέχρι τῆς καμπύλης καί, διὰ καταλλήλων ὁριζοντίων γραμμῶν, σχηματίζομεν N ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἡ βάσις ἑκάστου τῶν ὀρθογωνίων εἶναι

$$\Delta x = \frac{x_B - x_A}{N}$$

Ἐὰν καλέσωμεν y_ν τὴν τιμὴν $y(x_\nu)$ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον x_ν, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γραμμοσκιασμένου ὀρθογωνίου εἶναι $y_\nu \cdot \Delta x$, τὸ δὲ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τῶν ὀρθογωνίων θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ἐμβαδῶν :

$$y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \ldots + y_\nu \cdot \Delta x + \ldots + y_{N-1} \Delta x = \sum_{\nu=0}^{\nu=N-1} y_\nu \cdot \Delta x$$

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸ οὕτως



Σχ. 29.

ὑπολογισθὲν ἐμβαδὸν τῶν ὀρθογωνίων, ἡ διαφορὰ ὅμως μεταξὺ τῶν δύο ἐλαττοῦται ὅσον ὁ ἀριθμὸς N ἐκλέγεται μεγαλύτερος, καὶ τείνει εἰς τὸ μηδὲν ὅταν τὸ N τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Κατὰ ταῦτα, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος $\sum\limits_{\nu=0}^{\nu=N-1} y_\nu \cdot \Delta x$ ὅταν τὸ N τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον δηλ. ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Τὴν ὁρικὴν ταύτην τιμὴν τοῦ ἀθροίσματος καλοῦμεν ***ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα*** τῆς συναρτήσεως $y(x)$ ἀπὸ τοῦ x_A μέχρι τοῦ x_B καὶ συμβολίζομεν μὲ τὸ

$$\int_{x_A}^{x_B} y(x) \cdot dx$$

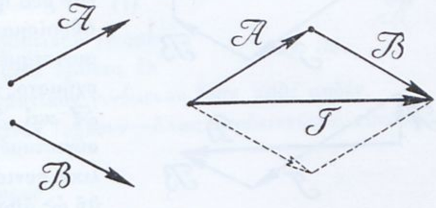
Κατὰ ταῦτα, τὸ ἐμβαδὸν S τοῦ χωρίου x_A, x_B, B, A δίδεται ἀπὸ τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$S = \int_{x_A}^{x_B} y(x) \cdot dx = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ}} \sum_{\nu=0}^{\nu=N-1} y_\nu \cdot \Delta x$$

§ 19. Στοιχειώδεις πράξεις ἐπὶ τοῦ ἀνυσματικοῦ λογισμοῦ.

Πρόσθεσις ἀνυσμάτων. Ὡς ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ **(*ἀνυσματικὸν* ἢ *γεωμετρικὸν ἄθροισμα*)** ὁρίζομεν τρίτον ἄνυσμα $\mathcal{T}$ τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐὰν φέρωμεν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἕνα ἄνυσμα παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ δεύτερον καὶ ἑνώσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου μὲ τὸ πέρας τοῦ δευτέρου *(σχ. 30)*.

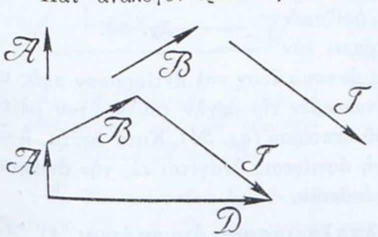
Τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἀνυσμάτων καλεῖται ***συνισταμένη*** αὐτῶν, τὰ δὲ ἀνύσματα ἐκ τῶν ὁποίων αὕτη προκύπτει ***συνιστῶσαι.*** Προφανὲς ὅτι ἡ πρόσθεσις δύο ἀνυσμάτων προϋποθέτει ἀνύσματα παριστῶντα τὸ αὐτὸ φυσικὸν μέγεθος.



Σχ. 30. Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{T}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.

Ἡ συνισταμένη δύο ἀνυσμάτων εὑρίσκεται καὶ διὰ τῆς *μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου:* Ἄν, ἀντὶ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ πέρας τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος $\mathcal{A}$ ἄνυσμα παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἄλλο, φέρωμεν τοῦτο εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ συμπληρώσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον, ἡ διαγώνιος $\mathcal{T}$ τούτου *(σχ. 30)* παριστᾷ τὴν συνισταμένην τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται καὶ ἡ πρόσθεσις τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων.



Σχ. 31. Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{D}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{T}$.

Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 31 ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{T}$ εἶναι τὸ ἄνυσμα $\mathcal{D}$. Ἤτοι ἔχομεν

$$\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{T}$$

Ἡ συνισταμένη τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων εὑρίσκεται, ὁμοίως, δι' ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου. Πρὸς τοῦτο συνθέτομεν τὰ δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὴν συνισταμένην των πρὸς τρίτον ἄνυσμα κ.ο.κ.

Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ὅταν τὰ πρὸς σύνθεσιν ἀνύσματα δὲν κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀλλ' εὑρίσκονται ὁπωσδήποτε εἰς τὸν χῶρον· πλὴν τότε ἡ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τῶν ἀνυσμάτων προκύπτουσα πολυγωνικὴ γραμμὴ δὲν κεῖται ὅλη ἐντὸς ἑνὸς ἐπιπέδου - εἶναι στρεβλή.

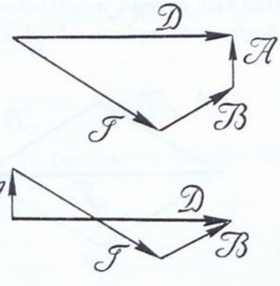
Κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀνυσμάτων εἶναι ἐντελῶς ἀδιάφορον ποίαν σειρὰν θ' ἀκολουθήσωμεν. Οὕτω, προκύπτει ἡ αὐτὴ συνισταμένη $\mathcal{D}$ ἀνεξαρτήτως τῆς σειρᾶς τῶν προσθετέων *(σχ. 32)*. Ἤτοι εἶναι

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{T} = \mathcal{A} + \mathcal{T} + \mathcal{B} = \mathcal{T} + \mathcal{B} + \mathcal{A}$$

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι εἰς τὴν ἀνυσματικὴν πρόσθεσιν ἰσχύει ὁ *κανὼν τῆς ἀντιμεταθέσεως*.

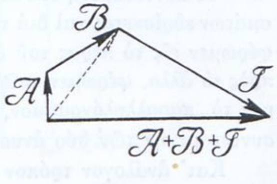
Ἄλλος κανὼν ἰσχύων κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀνυσμάτων εἶναι ὁ *συνδυαστικὸς κανών*. Κατ᾽ αὐτόν, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προσθέσεως δὲν μεταβάλλεται ἐὰν δύο ἢ καὶ περισσότερα ἀνύσματα τοῦ ἀθροίσματος ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῆς συνισταμένης των. Τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 33 εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ἀνύσματα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τῆς συνισταμένης των $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, ὁπότε ἡ τελικὴ συνισταμένη $\mathcal{D}$ δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ καὶ τοῦ $\mathcal{T}$. Ἤτοι

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{T}=(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{T}$$



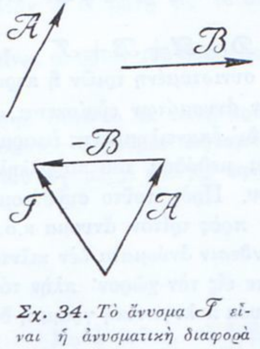
Σχ. 32. *Διάφοροι τρόποι εὑρέσεως τῆς συνισταμένης πολλῶν ἀνυσμάτων.*

Διὰ τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων, ἰσχύει ἡ πρότασις: «*Ἡ ἐπί τινος διευθύνσεως προβολὴ τῆς συνισταμένης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς*».



Σχ. 33.

Ἀφαίρεσις ἀνυσμάτων. Ὡς ***διαφορὰν*** $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ ὁρίζομεν τρίτον ἄνυσμα $\mathcal{T}$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐὰν εἰς τὸ πέρας τοῦ πρώτου φέρωμεν ἕνα ἄνυσμα ἴσον καὶ ἀντίρροπον πρὸς τὸ $\mathcal{B}$ καὶ ἑνώσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου μὲ τὸ πέρας τοῦ δευτέρου *(σχ. 34)*. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀνυσματικὴ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνυσματικὴν πρόσθεσιν.



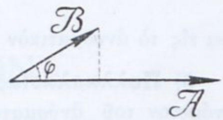
Σχ. 34. *Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{T}$ εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ διαφορὰ τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.*

Πολλαπλασιασμὸς ἀνυσμάτων. 1) *Ἀριθμητικὸν γινόμενον.* Ὡς ***ἀριθμητικὸν*** (ἢ ἐσωτερικὸν) ***γινόμενον*** δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, παριστώμενον διὰ τοῦ $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})$, ὁρίζομεν ἕνα μονόμετρον μέγεθος, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον Α · Β τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς δι᾽ αὐτῶν περικλειομένης γωνίας φ. Ἤτοι

$$\boxed{(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot \text{συν}\,\varphi}$$

Ἐπειδὴ τὸ Β · συν φ παριστᾷ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{B}$ ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{A}$ *(σχ. 35)*, δυνάμεθα τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον νὰ τὸ ὁρίσωμεν ὡς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος ἐπὶ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τοῦ ἄλλου. Τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον ἑνὸς ἀνύσματος $\mathcal{A}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, δεδομένου ὅτι ἡ μεταξύ των σχηματιζομένη γωνία φ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, εἶναι ἴσον πρὸς

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \cdot 1 = \mathrm{A}^2 \qquad (1)$$



Σχ. 35.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ γινομένου προκύπτει ὅτι δύο ἀνύσματα κάθετα ἐπ᾽ ἄλληλα (συν φ = 0) ἔχουν ἀριθμητικὸν γινόμενον ἴσον πρὸς μηδέν.

Διὰ τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον ἰσχύουν—ὅπως ἀποδεικνύεται εὐκόλως—οἱ ἑξῆς δύο κανόνες:

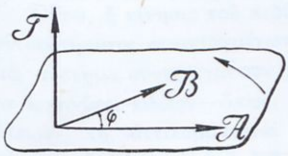
α) *Κανὼν τῆς ἀντιμεταθέσεως:*

$$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})$$

β) *Ἐπιμεριστικὸς κανών:*

$$\big((\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}) \cdot \mathcal{D}\big) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{D}) + (\mathcal{B} \cdot \mathcal{D}) + (\mathcal{C} \cdot \mathcal{D})$$

Ἀνυσματικὸν γινόμενον. Ὡς ***ἀνυσματικὸν*** (ἢ ἐξωτερικὸν) ***γινόμενον*** δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, παριστώμενον διὰ $[\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}]$, ὁρίζομεν ἕνα ἄνυσμα $\mathcal{C}$ (σχ. 36), τοῦ ὁποίου τὸ μέτρον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περικλειομένης γωνίας φ. Ἤτοι



Σχ. 36. *Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{C}$ εἶναι τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον τῶν ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$.*

$$\boxed{\Gamma = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \text{ημ}\,\varphi}$$

Τὸ ἄνυσμα τοῦτο ἔχει διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἀνυσμάτων $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ καὶ φορὰν τοιαύτην ὥστε, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ ἀνύσματα $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$, νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς τὴν προχώρησιν δεξιοστρόφου κοχλίου (σχ. 37)· δηλαδή, ἂν στρέψωμεν δεξιόστροφον κοχλίαν κατὰ τὴν φορὰν κατὰ τὴν ὁποίαν, στρεφόμενον τὸ ἄνυσμα $\mathcal{A}$, φθάνει διὰ τῆς συντομωτέρας ὁδοῦ εἰς τὸ ἄνυσμα $\mathcal{B}$, πρέπει τὸ ἄνυσμα $\mathcal{C}$ νὰ δεικνύῃ τὴν φορὰν καθ᾽ ἣν προχωρεῖ δεξιόστροφος κοχλίας. Τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\mathcal{C} = [\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}]}$$

Σχ. 37. *Ἡ προχώρησις δεξιοστρόφου κοχλίου παρέχει τὴν φορὰν τοῦ ἀνυσματικοῦ γινομένου.*

Ἐκ τοῦ ἄνω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν παραγόντων, θὰ προκύψῃ ἄνυσμα τοῦ αὐτοῦ μέτρου καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. Εἶναι, δηλαδή,

$$[\mathscr{A} \cdot \mathscr{B}] = -[\mathscr{B} \cdot \mathscr{A}]$$

ἄρα εἰς τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

3) **Πολλαπλασιασμὸς ἀνύσματος μὲ μονόμετρον μέγεθος.** Τὸ γινόμενον τοῦ ἀνύσματος $\mathscr{A}$ ἐπὶ μονόμετρον μέγεθος C εἶναι ἄνυσμα $\mathscr{B}$ ἔχον τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τοῦ πρώτου καὶ μέτρον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος $\mathscr{A}$ ἐπὶ τὸ μονόμετρον μέγεθος C. Ἤτοι

$$B = A \cdot C$$

Τὸ γινόμενον ἀνύσματος ἐπὶ μονόμετρον μέγεθος γράφεται, συμβολικῶς, ὡς ἑξῆς:

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} \cdot C$$

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

§ 20. Κίνησις. Ἕνα ὑλικὸν σημεῖον λέγομεν ὅτι κινεῖται, ὅταν ἀλλάσσῃ θέσιν ἐν σχέσει πρὸς ἄξονας συντεταγμένων τοὺς ὁποίους δεχόμεθα κατὰ συνθήκην ὡς ἀκινήτους. Συνήθως ἡ κίνησις ἀναφέρεται ὡς πρὸς τὴν Γῆν, θεωρουμένην ὡς ἀκίνητον· ἐπειδὴ ὅμως αὐτὴ πραγματικῶς κινεῖται, προκύπτει ὅτι ὅλαι αἱ κινήσεις εἶναι *σχετικαὶ κινήσεις*.

Οὕτω, ἡ κίνησις τοῦ πεδίλου ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι διάφορος ἀναλόγως τοῦ συστήματος συντεταγμένων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφέρομεν τὴν κίνησιν. Διὰ σύστημα συντεταγμένων μετακινούμενον μετὰ τοῦ ποδηλάτου τὸ πέδιλον διαγράφει κύκλον—ὅπως, ἄλλωστε, τὸ ἀντιλαμβάνεται καὶ ὁ ποδηλάτης—, ἐνῶ διὰ σύστημα συνδεδεμένον στερεῶς μετὰ τῆς Γῆς, τοῦτο διαγράφει μίαν κυματοειδῆ γραμμὴν *(σχ. 38)* - ὅπως ἀκριβῶς ἀντιλαμβάνεται ταύτην ἕνας ἀκινητῶν παρατηρητής. Ἀπόλυτος κίνησις, κίνησις, δηλ., ἡ ὁποία δὲν ἀναφέρεται εἰς ἄξονας, εἶναι διὰ τὴν Φυσικὴν ἄνευ σημασίας.

Σχ. 38. *Τὸ πέδιλον τοῦ ποδηλάτου διαγράφει ἐν τῷ χώρῳ κυματοειδῆ γραμμήν.*

Ἡ θέσις ἑνὸς κινουμένου ὑλικοῦ σημείου καθορίζεται εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν ἐκ τῶν τιμῶν τῶν τριῶν συντεταγμένων αὐτοῦ, μετρουμένων ὡς πρὸς τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ἀκίνητον.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν διαδοχικῶν θέσεων ἑνὸς κινητοῦ καλεῖται **τροχιὰ** αὐτοῦ. Ἀναλόγως τῆς μορφῆς της, αὕτη εἶναι εἴτε *εὐθύγραμμος*, εἴτε *καμπυλόγραμμος*. Ἐκ τῶν τελευταίων, ἄλλαι εἶναι *ἐπίπεδοι*, δηλ. κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, καὶ ἄλλαι *στρεβλαί*.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τροχιὰ εἶναι περιφέρεια κύκλου ἡ κίνησις λέγεται *κυκλική*.

Ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τροχιὰ ἑνὸς κινητοῦ, δὲν ἀπαιτοῦνται διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεώς του εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν τρεῖς συντεταγμέναι, ἀλλ᾽ ἀρκεῖ μία, π. χ. ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ ἕνα ἀκίνητον σημεῖον.

§ 21. Ταχύτης. Ἔστω κινητὸν τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς, εὑρίσκεται κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t εἰς τὸ σημεῖον A. Μετὰ χρόνον Δt, δηλ. τὴν χρονικὴν στιγμὴν t+Δt, τὸ κινητὸν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον B, θὰ ἔχῃ, δηλ., διατρέξει τὸ διάστημα AB, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἔστω Δs.

Ὁρίζομεν ὡς ***μέσην ταχύτητα*** $\overline{\upsilon}$ τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὸν χρόνον t ἕως τὸν χρόνον t+Δt τὸ πηλίκον

$$\overline{\upsilon}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

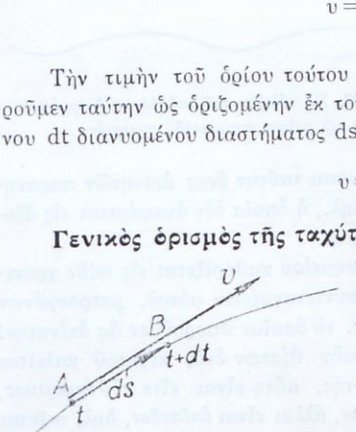
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μέση ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἐξαρτᾶται—ἐξ ὁρισμοῦ—καὶ ἀπὸ τὴν θεωρουμένην χρονικὴν στιγμὴν t καὶ ἀπὸ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t+Δt. Ἐπειδή, λοιπόν, κατὰ ταῦτα, αὕτη ἐξαρτᾶται ἀπὸ δύο τιμὰς τοῦ χρόνου, εἶναι πρακτικώτερον, κατὰ τὴν μελέτην τῶν κινήσεων, νὰ εἰσαγάγωμεν ἕνα νέον φυσικὸν μέγεθος, τὸ ὁποῖον νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ μίαν τιμὴν τοῦ χρόνου, νὰ ἔχῃ, δηλ., ὡρισμένην τιμὴν εἰς κάθε σημεῖον τῆς τροχιᾶς. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν διαρκῶς μικρότερα χρονικὰ διαστήματα Δt ὁπότε καὶ τὰ ἐντὸς τῶν χρόνων αὐτῶν διανυόμενα διαστήματα Δs γίνονται διαρκῶς μικρότερα. Ὅταν τὸ Δt, ἐλαττούμενον, τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ πηλίκον Δs/Δt τείνει πρὸς μίαν ὁρικὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ταχύτητα*** υ τοῦ κινητοῦ

$$\upsilon=\underset{\Delta t\to 0}{\text{ορ}}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Τὴν τιμὴν τοῦ ὁρίου τούτου συμβολίζομεν διὰ τοῦ ds/dt, δηλ. θεωροῦμεν ταύτην ὡς ὁριζομένην ἐκ τοῦ πηλίκου τοῦ ἐντὸς τοῦ ἀπειροστοῦ χρόνου dt διανυομένου διαστήματος ds διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἤτοι:

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}$$

Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ταχύτητος. Εἰς τὰ ἀνωτέρω ἐθεωρήσαμεν κίνησιν ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ τροχιὰ δὲν εἶναι εὐθύγραμμος, τότε τὴν χωρίζομεν εἰς μεγάλον ἀριθμὸν τμημάτων μήκους ds. Τὰ διαστήματα ταῦτα, λόγῳ τοῦ μικροῦ των μήκους, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν ὡς εὐθύγραμμα οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ μορφὴ τῆς τροχιᾶς. Δυνάμεθα, ἑπομένως, τώρα νὰ ὁρίσωμεν ἕνα ἄνυσμα $d\boldsymbol{s}$ μὲ μέτρον ἴσον πρὸς τὸ διάστημα ds



Σχ. 39. Τὰ ἀνύσματα $\boldsymbol{\upsilon}$ καὶ $d\boldsymbol{s}$ εἶναι συγγραμμικά.

καὶ μὲ φορὰν τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ *(σχ. 39)*.

Ὁρίζομεν ὡς **ταχύτητα** τοῦ κινητοῦ ἕνα ἄνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}$ τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος ds διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος ds. Ἤτοι:

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dt}}} \tag{1}$$

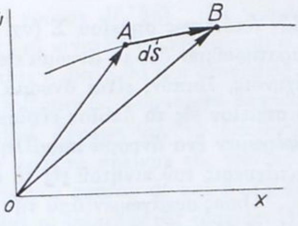
Ἡ ἐξίσωσις (1), ὡς ἀνυσματικὴ ἐξίσωσις, ἀποδίδει ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς ταχύτητος· διότι τὸ δεξιὸν μέλος, ὡς γινόμενον τοῦ μονομέτρου μεγέθους 1/dt ἐπὶ τὸ ἀνυσματικὸν μέγεθος ds, εἶναι, κατὰ τὴν § 19, ἀνυσματικὸν μέγεθος τῆς ἰδίας διευθύνσεως μὲ τὸ ἄνυσμα ds καὶ ἔχει μέτρον υ ἴσον πρὸς

$$\upsilon = \frac{1}{\mathrm{dt}} \cdot \mathrm{ds}$$

Κατὰ ταῦτα, ἡ ταχύτης εἰς κάθε σημεῖον τῆς τροχιᾶς ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης ἐπ' αὐτῆς.

Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρωμεν τὰς *ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας (σχ. 40)*, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἄνυσμα ds δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ἀνυσματικὴ διαφορὰ τῶν δύο ἐπιβατικῶν ἀκτίνων. Ἑπομένως ἡ ταχύτης εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ὡς πρὸς τὸν χρόνον.

Προφανὲς ὅτι τὸ ἄνυσμα ds εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἄγονται αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες - ἑπομένως καὶ ἡ παράγωγος αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον, δηλ. ἡ ταχύτης, εἶναι καὶ αὐτὴ ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου τούτου.



Σχ. 40. *Τὸ στοιχεῖον* ds *τῆς τροχιᾶς εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ διαφορὰ τῶν δύο ἐπιβατικῶν ἀκτίνων.*

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ταχύτητος. Ἡ ταχύτης ἔχει διαστάσεις

$$[\upsilon] = \frac{[\mathrm{s}]}{[\mathrm{t}]} = [\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S ἡ μονὰς ταχύτητος εἶναι τό:

1 cm/sec

εἰς δὲ τὸ τεχνικὸν σύστημα (Τ. Σ.), τὸ

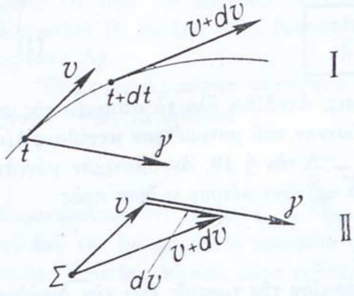
1 m/sec

Ἐκτὸς τῆς μονάδος ταύτης, χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλαι: π.χ. ἡ μονὰς 1 km/h, 1 κόμβος = 1 ναυτικὸν μίλλιον καθ' ὥραν = 1852/3600 m/sec.

Προβολαὶ τῆς ταχύτητος ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῶν συντεταγμένων. Ἐὰν λάβωμεν τὰς προβολὰς τοῦ ἀνύσματος ds ἐπὶ συστήματος ἀξόνων x καὶ y καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὰς dx καὶ dy, τότε αἱ προβολαὶ υ_x καὶ υ_y τῆς ταχύτητος ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῶν θὰ εἶναι

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon_y = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}$$

§ 22. Ἐπιτάχυνσις. Ἔστω κινητὸν τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του, ἔχει κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t ταχύτητα υ *(σχ. 41)*. Μετὰ χρόνον dt ἔστω ὅτι ἡ ταχύτης του ἔχει μεταβληθῆ (π. χ. ἔχει αὐξηθῆ) κατὰ dυ - θὰ εἶναι, ἄρα, αὕτη εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου dt ἴση πρὸς $\upsilon+d\upsilon$. Ὁρίζομεν ὡς ***ἐπιτάχυνσιν*** τοῦ κινητοῦ ἕνα ἄνυσμα γ τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου τοῦ ἀνύσματος dυ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος dυ. Ἤτοι:



Σχ. 41. Τὰ ἀνύσματα γ καὶ dυ *εἶναι συγγραμμικά.*

$$\boxed{\gamma=\frac{d\upsilon}{dt}} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου Σ *(σχ. 41, II)* φέρωμεν τὰ ἀνύσματα υ καὶ $\upsilon+d\upsilon$ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄνυσμα dυ εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ αὐτῶν διαφορά. Ἡ ἐπιτάχυνσις, λοιπόν, εἶναι ἄνυσμα συγγραμμικὸν μὲ τὸ ἄνυσμα dυ. Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ κινητὸν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t φέρωμεν ἕνα ἄνυσμα παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ γ, τοῦτο θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ὅπως συνάγωμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἡ ἀνυσματικὴ παράγωγος τῆς ταχύτητος ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴδομεν, ἡ ταχύτης εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος, ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος ὡς πρὸς τὸν χρόνον.

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἔχει διαστάσεις

$$[\gamma]=\frac{[\upsilon]}{[t]}=[L\cdot T^{-2}]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S., μονὰς ἐπιταχύνσεως εἶναι τὸ

$$1 \text{ cm/sec}^2$$

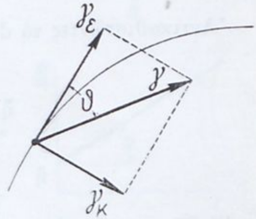
εἰς δὲ τὸ τεχνικὸν σύστημα τὸ

$$1 \text{ m/sec}^2$$

Προβολαὶ τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἐὰν λάβωμεν τὰς προβολὰς υ_x καὶ υ_y τοῦ ἀνύσματος υ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων x καὶ y, τότε αἱ προβολαὶ γ_x καὶ γ_y τῆς ἐπιταχύνσεως ἐπὶ τῶν ἀξόνων αὐτῶν θὰ εἶναι

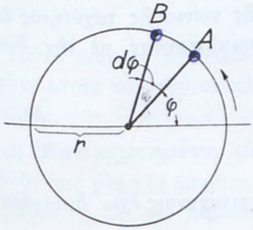
$$\gamma_x=\frac{d\upsilon_x}{dt} \quad \text{καὶ} \quad \gamma_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}$$

Ἐκτὸς τῆς ἀναλύσεως ταύτης κατὰ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ ὡς πρὸς ἄλλους ἄξονας. Ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ ἀνάλυσις κατὰ τὰς δύο διευθύνσεις, τὴν ἐφαπτομένην ἐπὶ τῆς τροχιᾶς καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν *(σχ. 42)*. Ἐκ τούτων, ἡ πρώτη καλεῖται ***ἐπιτρόχιος*** συνιστῶσα γ_ε, ἡ δὲ δευτέρα ***κεντρομόλος*** συνιστῶσα γ_κ. Προφανὲς ὅτι ἡ κάθετος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως — τὴν ὁποίαν ἐκαλέσαμεν κεντρομόλον — διευθύνεται πάντοτε πρὸς τὸ κοῖλον τῆς τροχιᾶς.



Σχ. 42. *Ἡ ἐπιτάχυνσις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς μίαν ἐπιτρόχιον καὶ μίαν κεντρομόλον συνιστῶσαν.*

§ 23. Γωνιακὴ ταχύτης. Ἔστω κινητόν, τὸ ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος r, *(σχ. 43)* εὑρίσκεται, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, εἰς τὸ σημεῖον A. Μετὰ χρόνον dt, δηλ. τὴν χρονικὴν στιγμὴν t+dt, τὸ κινητὸν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον B, ὁπότε ἡ ἀκτὶς θὰ ἔχῃ διαγράψῃ τὴν γωνίαν dφ. Ὁρίζομεν ὡς ***γωνιακὴν ταχύτητα*** τοῦ κινητοῦ ἕνα ἄνυσμα ω, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τῆς γωνίας dφ διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς. Ἤτοι



Σχ. 43.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

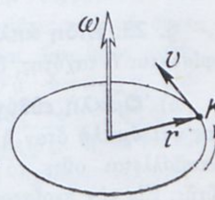
Ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος ω λαμβάνεται συμβατικῶς τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη μὲ τὴν φορὰν τῆς περιστροφῆς, ν' ἀποτελῇ κίνησιν δεξιοστρόφου κοχλίου *(σχ. 44)*.

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἔχει διαστάσεις

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = [T^{-1}]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S μονὰς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος εἶναι τὸ

1 ἀκτίνιον/sec (1 rad/sec).



Σχ. 44. *Τὸ ἄνυσμα ω εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς.*

Σχέσις ταχύτητος καὶ γωνιακῆς ταχύτητος. Κινητὸν κινούμενον μὲ ταχύτητα υ ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, διατρέχει ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διάστημα ds ἴσον πρὸς

$$ds = \upsilon \cdot dt \qquad (1)$$

Ἐπειδή, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 9, τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης αὐτὸ ἐπικέντρου γωνίας ἐπὶ τὴν ἀκτίνα, ἔχομεν

$$ds = d\varphi \cdot r$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ ds εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν

$$d\varphi \cdot r = \upsilon \cdot dt$$

ἢ $$\upsilon = \frac{d\varphi}{dt} . r$$

ἢ $$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ἀνυσματικῶς ὡς ἑξῆς :

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}]$$

§ 24. Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις. Ἔστω κινητόν, τὸν ὁποῖον, κινούμενον ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἔχει, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, γωνιακὴν ταχύτητα ω. Μετὰ χρόνον dt ἔστω ὅτι αὕτη ἔχει μεταβληθῇ κατὰ dω. Ὁρίζομεν ὡς ***γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν*** ἕνα ἄνυσμα $\boldsymbol{\omega}'$, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μέτρου dω τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου dt καὶ διεύθυνσιν συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος $d\boldsymbol{\omega}$. Ἤτοι :

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}$$

Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις ἔχει διαστάσεις

$$[\omega'] = \frac{[\omega]}{[t]} = [T^{-2}]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S μονὰς τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι τὸ

$$1 \text{ rad/sec}^2$$

§. 25. Εἴδη ἁπλῶν κινήσεων. Ἀναλόγως τῶν μεταβολῶν τὰς ὁποίας ὑφίσταται ἡ ταχύτης, διακρίνομεν τὰ ἑξῆς ἁπλᾶ εἴδη κινήσεων*:

α) **Ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις.** Μία κίνησις λέγεται ***εὐθύγραμμος*** καὶ ***ὁμαλὴ*** ὅταν ἡ ταχύτης παραμένῃ χρονικῶς σταθερά, δηλ. ὅταν δὲν μεταβάλλεται οὔτε τὸ μέτρον *(σχ. 45, Ι)*, οὔτε ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν ἀφοῦ ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ ταχύτης ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς

$$\upsilon = \frac{s}{t} \qquad (1)$$

χωρὶς νὰ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ληφθῇ ὁ χρόνος ἀπειροστός, ὅπως εἰς τὸν

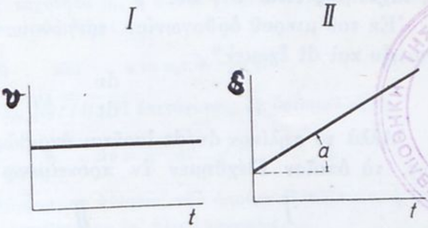
* Συνθετωτέρας κινήσεις (ταλαντώσεις κλ.), θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω εἰς τὰ Κεφάλαια Θ΄, Ι΄, ΙΑ΄.

ὁρισμὸν τῆς § 21, διότι ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου s/t διατηρεῖται σταθερά, ἀνεξαρτήτως τοῦ θεωρουμένου χρόνου.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν

$$\boxed{s = \upsilon \cdot t} \qquad (2)$$

Εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν, λοιπόν—εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά—, τὸ διάστημα s εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸν χρόνον t, ἐντὸς τοῦ ὁποίου διανύεται.



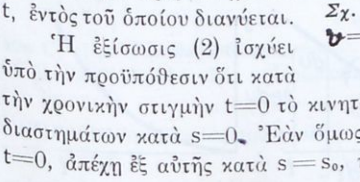
Σχ. 45. Γραφικὴ παράστασις τῶν σχέσεων $\upsilon = f(t)$ *καὶ* $s = f(t)$ *εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν.*

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t=0 τὸ κινητὸν ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἄξονος τῶν διαστημάτων κατὰ s=0. Ἐὰν ὅμως τὸ κινητόν, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t=0, ἀπέχῃ ἐξ αὐτῆς κατὰ $s = s_0$, ἡ ἐξίσωσις (2) θὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$s = s_0 + \upsilon t$$

Τοῦτο παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα II, τοῦ σχήματος 45. Ἡ κλίσις (ἢ συντελεστὴς κατευθύνσεως) τῆς εὐθείας δίδει, προφανῶς, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος. και ἐπιταχυνθῇ

Αν β) **Ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις.** Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην ἡ διεύθυνσις μὲν τῆς ταχύτητος παραμένει σταθερά, τὸ μέτρον ὅμως αὐτῆς μεταβάλλεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἄνυσμα $d\upsilon$ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος *υ (σχ. 46)*, ἑπομένως ἡ γωνία ϑ τοῦ σχήματος 42 ἔχει τιμὴν ἴσην πρὸς 0° ἢ 180°. Ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἄνυσμα $d\upsilon$ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος **υ**, ἡ κάθετος αὐτοῦ συνιστῶσα $d\upsilon_\kappa$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν καί, ἑπομένως, θὰ ὑπάρχῃ μόνον ἐπιτρόχιος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως, ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις θὰ διατηρῇ σταθερὰν τὴν διεύθυνσίν της.



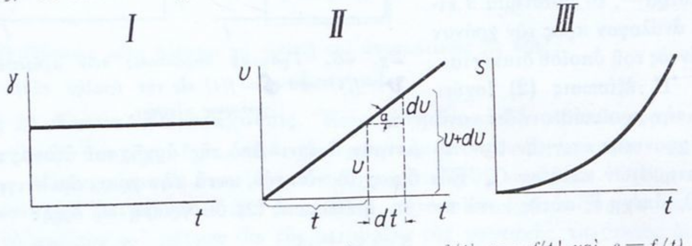
Σχ. 46. *Εἰς τὴν ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν ὑπάρχει μόνον ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις.*

Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις. γ=σταθ. Μία κίνησις εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ἡ διεύθυνσις καὶ τὸ μέτρον τῆς ἐπιταχύνσεως διατηροῦνται σταθερὰ *(σχ. 47, I)* καλεῖται ***ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη εὐθύγραμμος κίνησις.*** Κατωτέρω θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀνεύρωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ ταχύτης συναρτήσει τοῦ χρόνου καὶ ποία σχέσις συνδέει τὸ διανυόμενον διάστημα μὲ τὸν χρόνον. Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ σχέσις μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου ἀποδίδεται γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς *(σχ. 47, II)*. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι υ. Μετὰ χρόνον dt, δηλ. κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t + dt$, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι $\upsilon + d\upsilon$.

Ἐκ τοῦ μικροῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι dυ καὶ dt ἔχομεν *

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \varepsilon\varphi\, \alpha$$

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον dυ/dt ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸ μέτρον γ τῆς ἐπιταχύνσεως, τὸ ὁποῖον ἐδέχθημεν ἐν προκειμένῳ ὡς σταθερόν. Συνεπῶς ἡ εφ α



Σχ. 47. Γραφικὴ παράστασις τῶν σχέσεων $\gamma = f(t)$, $\upsilon = f(t)$ καὶ $s = f(t)$ εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν.

πρέπει νὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν, τοῦτο ὅμως ἐκπληροῦται μόνον ἐὰν ἡ γραμμὴ $\upsilon = f(t)$ εἶναι εὐθεῖα.

Συμπέρασμα: Ἡ ταχύτης εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ ταχύτητος καὶ χρόνου εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ λαμβάνομεν

$$\upsilon = t \cdot \varepsilon\varphi\, \alpha$$

ἐπειδὴ δὲ εὕρομεν

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \gamma$$

ἔχομεν

$$\boxed{\upsilon = \gamma \cdot t} \qquad (1)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὸ διανυόμενον διάστημα, συναρτήσει τοῦ χρόνου. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, αὕτη εἶναι

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\gamma t^2} \qquad (2)$$

* Εἰς τὸν τύπον τοῦτον διὰ τῆς ἐκφράσεως εφ α δὲν ἐννοοῦμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας α τῆς ἐμφανιζομένης εἰς τὸ σχῆμα 47, II, ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἐξ ἄλλου δὲν εἶναι καθαρὸς ἀριθμός, ἀλλ᾽ ἔχει διαστάσεις ἐπιταχύνσεως.

παρίσταται δὲ γραφικῶς ἀπὸ τὸ διάγραμμα III τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα παραβολῆς.

Ὅταν τὸ κινητὸν ἔχῃ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, ἡ ὁποία εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad (4)$$

Ἀπόδειξις τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4). Ἡ ἐπιτάχυνσις ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι

$$\gamma = \frac{d\upsilon}{dt} \qquad \text{ἢ} \qquad d\upsilon = \gamma \cdot dt$$

Εἰς τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν, ἡ ἐπιτάχυνσις γ εἶναι σταθερά, ἑπομένως λαμβάνομεν δι' ὁλοκληρώσεως

$$\upsilon = \gamma t + C_1 \quad (5)$$

ἔνθα C_1 εἶναι ἡ σταθερὰ ὁλοκληρώσεως. Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ταύτης προκύπτει ἐκ τῶν ὁρικῶν συνθηκῶν: Ἐὰν καλέσωμεν υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, ἔχομεν

$$\upsilon = \upsilon_0 \qquad \text{διὰ} \qquad t = 0$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν υ καὶ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5), λαμβάνομεν

$$\upsilon_0 = C_1$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$$

ἀπεδείχθη δηλ. ἡ ἐξίσωσις (3).

Ἡ ἐξίσωσις (4) εὑρίσκεται ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ υ διὰ τοῦ ἴσου του ds/dt. Ἤτοι:

$$\frac{ds}{dt} = \upsilon_0 + \gamma t$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης, λαμβάνομεν

$$s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 + C_2 \quad (6)$$

Τὴν σταθερὰν C_2 τῆς ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ὁρικῶν συνθηκῶν: Ἂν δεχθῶμεν ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου τὸ διάστημα s ἦτο ἴσον πρὸς μηδέν, θὰ λάβωμεν

$$s = 0 \qquad \text{διὰ} \qquad t = 0$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν (6), λαμβάνομεν

$$0 = 0 + 0 + C_2$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται

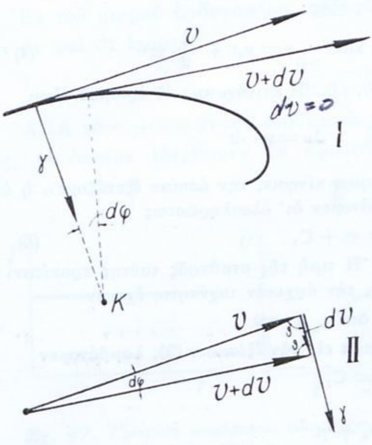
$$s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ἀπεδείχθη δηλ. ἡ ἐξίσωσις (4).

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2), ἐὰν θέσωμεν

$$\upsilon_0 = 0$$

γ) **Ὁμαλὴ καμπυλόγραμμος κίνησις.** Τοιαύτη εἶναι ἡ κίνησις ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διεύθυνσις μὲν τῆς ταχύτητος μεταβάλλεται, τὸ μέτρον ὅμως αὐτῆς παραμένει διαρκῶς σταθερόν, δηλ. τὸ κινητὸν διανύει εἰς ἴσους χρόνους ἴσα διαστήματα ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ἄνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}$ καὶ τὸ ἄνυσμα $\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον καί, συνεπῶς, τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον σχηματίζουν τὰ ἀνύσματα $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ καὶ $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ εἶναι ἰσοσκελὲς *(σχ. 48, II)*. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία dφ εἶναι ἀπειροστή, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ϑ αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσαι πρὸς 90°.



Σχ. 48. *Εἰς τὴν ὁμαλὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν ὑπάρχει μόνον κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.*

Ἐφ' ὅσον, λοιπόν, τὸ ἄνυσμα $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ εἶναι, περίπου, κάθετον ἐπὶ τὸ ἄνυσμα $\boldsymbol{v}$, ἕπεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ μόνον κεντρομόλος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως, δηλ. ἡ ἐπιτρόχιος συνιστῶσα εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

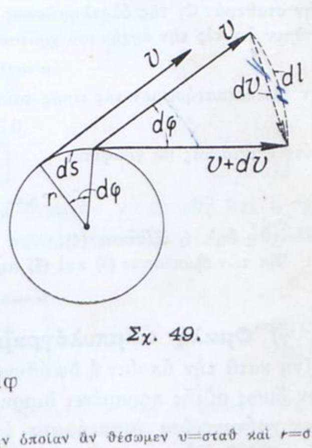
Τὸ μέτρον τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι — ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς ὁμαλῆς κυκλικῆς κινήσεως — ἴσον πρὸς υ^2/r, ἤτοι

$$\gamma_{\varkappa} = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{r}} \qquad (1)$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.

Ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις. Μία κυκλικὴ κίνησις λέγεται **ὁμαλὴ** ὅταν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος παραμένῃ σταθερόν. Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην τὸ μέτρον τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι σταθερὸν* καὶ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητος διὰ τοῦ μέτρου τῆς ἀκτῖνος. Ἤτοι:

$$\gamma_{\varkappa} = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{r}} \qquad (1)$$



Σχ. 49.

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (1). Ἐκ τοῦ σχήματος 49, προκύπτει ὅτι τὸ μῆκος dl τοῦ τόξου εἶναι ἴσον πρὸς $\upsilon \cdot \mathrm{d}\varphi$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία dφ εἶναι ἀπειροστή, τὸ μῆκος τοῦ τόξου θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος dυ τῆς χορδῆς. Ἔχομεν συνεπῶς

$$\mathrm{d}\upsilon = \upsilon \cdot \mathrm{d}\varphi$$

* Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1), εἰς τὴν ὁποίαν ἂν θέσωμεν υ=σταθ καὶ r=σταθ. λαμβάνομεν καὶ $\gamma_{\varkappa}$ = σταθ.

Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου εἶναι

$$ds = r \cdot d\varphi$$

λαμβάνομεν

$$d\upsilon = \frac{\upsilon \cdot ds}{r}$$

Τὸ διανυθὲν ὅμως διάστημα ds εἶναι

$$ds = \upsilon \cdot dt$$

ὁπότε

$$d\upsilon = \upsilon^2 \cdot \frac{dt}{r}$$

Ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ dt, λαμβάνομεν

$$\gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Περίοδος καὶ συχνότης. Εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν καλεῖται ***περίοδος*** T ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ κινητοῦ.

Συχνότης ν καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ τὸ κινητὸν ἐντὸς χρόνου τινὸς διὰ τοῦ χρόνου τούτου.

Ἐπειδὴ ἐντὸς τοῦ χρόνου T τὸ κινητὸν ἐκτελεῖ 1 στροφήν, ἔχομεν

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς συχνότητος. Ἡ συχνότης ἔχει διαστάσεις

$$[\nu] = \frac{1}{[T]} = [T^{-1}]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S μονὰς τῆς συχνότητος εἶναι τὸ

$$1\ \mathrm{sec}^{-1}$$

Ἡ μονὰς αὕτη καλεῖται καὶ 1 Hertz (1 Hz) ἢ καὶ 1 κύκλος κατὰ δευτερόλεπτον (1 c/sec). Χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης τὰ πολλαπλάσια αὐτῶν

$$1\ \mathrm{kHz} = 10^3\ \mathrm{Hz} \quad \text{καὶ} \quad 1\ \mathrm{MHz} = 10^6\ \mathrm{Hz}$$

Αἱ μονάδες αὗται καλοῦνται * καὶ

$$1\ \mathrm{kc/sec} \quad \text{καὶ} \quad 1\ \mathrm{Mc/sec}$$

Σχέσις γωνιακῆς ταχύτητος καὶ συχνότητος. Ἐξ ὁρισμοῦ (§ 23) ἔχομεν

$$\omega = d\varphi/dt.$$

Ἂν ὡς χρόνον λάβωμεν τὸν χρόνον μιᾶς περιόδου, τότε ἡ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου διαγραφομένη γωνία θὰ εἶναι ἴση πρὸς 2π ἀκτίνια καί, ἑπο-

* Καταχρηστικῶς αἱ μονάδες *c/sec*, *kc/sec* καὶ *Mc/sec* καλοῦνται καὶ κύκλος *(c)*, χιλιόκυκλος *(kc)* καὶ μεγάκυκλος *(Mc)*.

μένως, ἡ γωνιακὴ ταχύτης $\omega = 2\pi/T$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $T = 1/\nu$ λαμβάνομεν

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

δ) **Γενικὴ περίπτωσις. Καμπυλόγραμμος κίνησις.** Εἰς τὴν γενικὴν ταύτην περίπτωσιν ἡ ἐπιτάχυνσις ἔχει καὶ ἐπιτρόχιον καὶ κεντρομόλον συνιστῶσαν. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς

$$\gamma_\varepsilon = \frac{du}{dt}$$

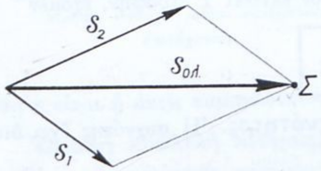
ἡ δὲ κεντρομόλος

$$\gamma_\kappa = \frac{u^2}{r}$$

Εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τὰ u καὶ r παριστοῦν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος καὶ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος. Ταῦτα δυνατὸν νὰ μεταβάλλωνται μετὰ τῆς θέσεως τοῦ κινητοῦ.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, πᾶσα καμπυλόγραμμος κίνησις (ὁμαλὴ ἢ μὴ) εἶναι ἐπιταχυνομένη κίνησις διότι θὰ ὑπάρχῃ πάντοτε κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, ἔστω καὶ ἂν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος παραμένῃ σταθερόν.

§ 26. Σύνθεσις κινήσεων. α) **Σύνθεσις διαστημάτων.** Ἔστω κινητὸν τὸ ὁποῖον, ἀφοῦ διανύσῃ τὸ εὐθύγραμμον διάστημα s_1 (σχ. 50), κινεῖται πρὸς ἄλλην διεύθυνσιν, διανῦον τὸ εὐθύγραμμον διάστημα s_2 καὶ καταλῆγον οὕτω εἰς τὸ σημεῖον Σ. Εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον θὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἐὰν διανύσῃ πρῶτον τὸ τμῆμα s_2 τῆς τροχιᾶς του καὶ κατόπιν τὸ s_1. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δύο κινήσεων εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν τὸ κινητόν, ἀντὶ νὰ κινηθῇ διαδοχικῶς κατὰ τὰ διαστήματα s_1 καὶ s_2, ἐκινεῖτο



Σχ. 50. *Παραλληλόγραμμον διαστημάτων.*

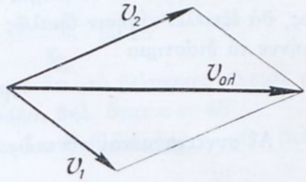
κατὰ τὴν διαγώνιον s τοῦ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν, ὁρίζεται ὡς ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἀνυσμάτων. Ἤτοι «Τὸ ὑπό τινος κινητοῦ διανυόμενον συνολικῶς διάστημα εὑρίσκεται ὡς τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν μερικῶν διαστημάτων».

Ἐὰν κινητὸν ἐκτελῇ τὰς δύο κινήσεις ταυτοχρόνως, ὡς ἀποδεικνύεται δι' ἁπλῶν συλλογισμῶν, ἡ διανυομένη τροχιὰ θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν συνισταμένην.

β) **Σύνθεσις ταχυτήτων.** Ἔστω κινητὸν τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο κινήσεις, μίαν μὲ ταχύτητα v_1 καὶ μίαν μὲ ταχύτητα v_2 (σχ. 51). (Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ, π.χ., πλοῖον κινούμενον μὲ ταχύτητα v_1 ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ποταμοῦ ῥέοντος μὲ ταχύτητα v_2).

Ἐπειδή, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὸ ἐντὸς χρόνου τινὸς πραγματικῶς διανυόμενον διάστημα δίδεται ὑπὸ τῆς συνισταμένης τῶν δύο διαστημάτων, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ταχύτης $v_{ολ}$, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν κινούμενον κατὰ τὴν συνισταμένην ταύτην, θὰ δίδεται ὡς ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων.

Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι ὅταν κινητὸν ἐκτελῇ συγχρόνως δύο εὐθυγράμμους καὶ ἰσοταχεῖς κινήσεις, ἡ πραγματικὴ ταχύτης δίδεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν δύο ταχυτήτων.



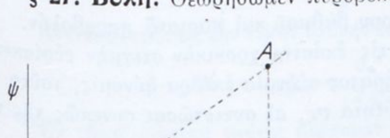
Σχ. 51. Παραλληλόγραμμον ταχυτήτων.

γ) **Σύνθεσις ἐπιταχύνσεων.** Ὅ,τι ἰσχύει διὰ τὴν σύνθεσιν διαστημάτων καὶ ταχυτήτων ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἐπιταχύνσεις.

Ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας. Ὅλα τ᾽ ἀνωτέρω λεχθέντα διατυποῦνται ὡς *ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας τῶν κινήσεων*: Τὸ ἀποτέλεσμα μιᾶς κινήσεως δὲν μεταβάλλεται ἐὰν τὸ κινητὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως καὶ ἄλλην κίνησιν.

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ κίνησις ἑνὸς κινητοῦ ἐκτελοῦντος ταυτοχρόνως δύο ἢ περισσοτέρας κινήσεις μελετᾶται ἐὰν ἐξετάσωμεν ἑκάστην κίνησιν χωριστὰ καὶ ἐπαλληλίσωμεν τ᾽ ἀποτελέσματα*.

§ 27. Βολή. Θεωρήσωμεν πυροβόλον ὅπλον τὸ ὁποῖον βάλλει ὑπὸ *γωνίαν βολῆς* α βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 *(σχ. 52)*. Τὸ πρόβλημα τῆς βολῆς συνίσταται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς τροχιᾶς τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ τὸ βλῆμα τοῦτο, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τῶν ἐξισώσεων αἱ ὁποῖαι θὰ παρέχουν εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν τὰς συντεταγμένας τοῦ κινητοῦ, καθὼς καὶ τὰς συνιστώσας τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.



Σχ. 52.

Ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἂν ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἐπέδρα δύναμις, τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο ἐπὶ τῆς ΟΑ εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς, θὰ διήνυε δὲ ἐντὸς τοῦ χρόνου t τὸ διάστημα $v_0 \cdot t$ καὶ θὰ εἶχε συντεταγμένας

* Τὸ περιεχόμενον τῆς παραγράφου ταύτης δικαιολογεῖ τὸν αὐθαιρέτως διατυπωθέντα εἰς τὴν § 19 κανόνα τῆς προσθέσεως δύο ἀνυσμάτων.

$$x = \upsilon_0 t \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha$$
$$y = \upsilon_0 t \cdot \eta\mu\, \alpha$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἂν τὸ βλῆμα ἔπιπτεν ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, θὰ ἐξετέλει κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐντὸς τοῦ χρόνου t θὰ διήνυε τὸ διάστημα

$$OB = \frac{1}{2} gt^2$$

Αἱ συντεταγμέναι συνεπῶς θὰ ἦσαν

$$x = 0$$
$$y = -\frac{1}{2} gt^2$$

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπαλληλίας, ἡ πραγματικὴ θέσις Γ τοῦ κινητοῦ εὑρίσκεται τῇ βοηθείᾳ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου, αἱ δὲ συντεταγμέναι του εὑρίσκονται διὰ προσθέσεως. Ἤτοι:

$$x = \upsilon_0 t \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha + 0 \qquad (1)$$
$$y = \upsilon_0 t \cdot \eta\mu\, \alpha - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς τροχιᾶς τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t εἶναι

$$y = \varepsilon\varphi\, \alpha \cdot x - \frac{g}{2\, \upsilon_0^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \alpha} \cdot x^2 \qquad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ παριστᾷ παραβολήν.

Ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος εἰς ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως: Ἂν ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἐπέδρα δύναμις, τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο διαρκῶς μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ_0, αἱ συνιστῶσαι συνεπῶς τῆς ταχύτητος θὰ ἦσαν

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha$$
$$\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\, \alpha$$

Ἂν ἀφ' ἑτέρου τὸ βλῆμα ἔπιπτεν ἐλευθέρως καὶ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος θὰ εἶχε ταχύτητα μὲ συνιστώσας

$$\upsilon_x = 0$$
$$\upsilon_y = -gt$$

Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπαλληλίας, αἱ συνιστῶσαι τῆς πραγματικῆς ταχύτητος θὰ εἶναι

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha + 0$$
$$\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\, \alpha - gt \qquad (4)$$

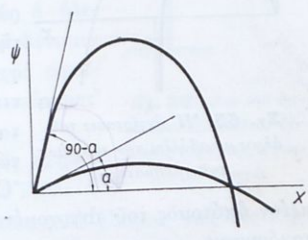
Βεληνεκές. Ἓν στοιχεῖον τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὴν Βλητικὴν εἶναι τὸ ***βεληνεκές***, ἡ ὁριζοντία δηλ. ἀπόστασις ΟΔ μεταξὺ τοῦ σημείου ἀναχωρήσεως Ο τοῦ βλήματος καὶ τοῦ σημείου Δ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ τροχιὰ συναντᾷ τὸ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Τὸ βεληνεκὲς εὑρίσκεται ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν $y=0$. Ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δίδει δύο λύσεις

$$x = 0$$

$$\text{καὶ} \qquad x = \frac{\upsilon_0^2}{g} \cdot 2\,\eta\mu\,\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g} \cdot \eta\mu\,2\alpha$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως βλέπομεν ὅτι τὸ βεληνεκὲς γίνεται μέγιστον ὅταν τὸ ημ 2α γίνῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, δηλ. ὅταν $\alpha = 45^\circ$.

Ἐπειδὴ $\eta\mu\,2\alpha = \eta\mu\,(180^\circ - 2\alpha)$, ἕπεται ὅτι τὸ βλῆμα ἔχει τὸ αὐτὸ βεληνεκὲς διὰ δύο γωνίας βολῆς α καὶ $90^\circ - \alpha$ (*σχ. 53*). Ἡ σκόπευσις ὑπὸ τὴν μικροτέραν γωνίαν ὀνομάζεται *εὐθύφορος*, ὑπὸ τὴν μεγαλυτέραν *ἐπισκηπτική*.



Σχ. 53. *Τὸ αὐτὸ σημεῖον εἶναι δυνατὸν νὰ βληθῇ ὑπὸ δύο γωνίας.*

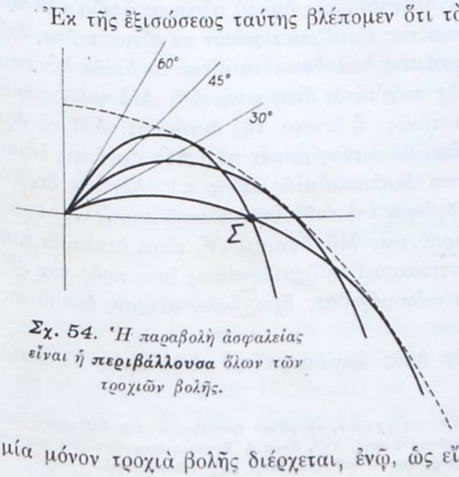
Μέγιστον ὕψος. Τὸ μέγιστον ὕψος $y_{\mu\varepsilon\gamma}$ εἰς τὸ ὁποῖον — ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν βολῆς — φθάνει τὸ βλῆμα εὑρίσκεται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τροχιᾶς ἡ ταχύτης ἔχει ὁριζοντίαν διεύθυνσιν καί, συνεπῶς, ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστῶσα υ_y θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐάν, λοιπόν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) θέσωμεν $\upsilon_y = 0$, λαμβάνομεν

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} \cdot \eta\mu\,\alpha$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), λαμβάνομεν

$$y_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2\,g} \cdot \eta\mu^2\alpha$$

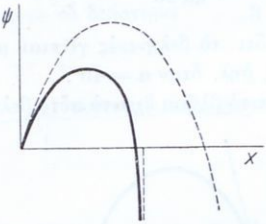
Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν ὅτι τὸ $y_{\mu\varepsilon\gamma}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν βολῆς καὶ λαμβάνει τὴν μεγίστην του τιμὴν ὅταν $\eta\mu\,\alpha = 1$, δηλ. ὅταν ἡ βολὴ γίνεται κατακορύφως.



Σχ. 54. *Ἡ παραβολὴ ἀσφαλείας εἶναι ἡ* ***περιβάλλουσα*** *ὅλων τῶν τροχιῶν βολῆς.*

Ὅπως ἀποδεικνύεται, τὰ σημεῖα τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα βάλλονται ἀπὸ τοῦ σημείου Ο μὲ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 χωρίζονται ἀπὸ τὰ ἀπρόσβλητα διὰ καμπύλης ἡ ὁποία εἶναι παραβολὴ καὶ καλεῖται ***παραβολὴ ἀσφαλείας*** (*σχ. 54*). Διὰ τῶν σημείων τῆς καμπύλης ταύτης μία μόνον τροχιὰ βολῆς διέρχεται, ἐνῷ, ὡς εἴδομεν προηγουμένως, δι' ἑκάστου τῶν ἐντὸς αὐτῆς εὑρισκομένων σημείων διέρχονται δύο τροχιαὶ βολῆς, ἡ εὐθύφορος καὶ ἡ ἐπισκηπτική.

Βολὴ ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ὅλα τὰ προεκτεθέντα ἰσχύουν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἐπὶ τοῦ βλήματος οὐδεμία ἄλλη δύναμις δρᾷ ἐκτὸς τοῦ βάρους του. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως δρᾷ καὶ ἡ *ἀντίστασις* τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία εἶναι, ὡς θὰ εἴδωμεν εἰς τὴν Ἀεροδυναμικήν, μία δύναμις ἔχουσα φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ταχύτητος. Ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως ταύτης τὸ βλῆμα δὲν διαγράφει παραβολήν, ἀλλ' ἄλλην τροχιὰν — τὴν ***βλητικὴν τροχιὰν*** — ἀσύμμετρον ὡς πρὸς τὸ ἀνώτατον σημεῖον της *(σχ. 55)*. Τὸ μέγιστον ὕψος τώρα εἶναι μικρότερον, τὸ βεληνεκὲς ἐπίσης. Ὁ κατερχόμενος κλάδος τῆς τροχιᾶς εἶναι πλέον ἀπότομος τοῦ ἀνερχομένου καὶ καταλήγει ἀσυμπτωτικῶς εἰς μίαν κατακόρυφον.



Σχ. 55. Ἡ *ἀντίστασις τοῦ ἀέρος μεταβάλλει τὴν τροχιὰν τοῦ βλήματος.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

§ 28. Δυνάμεις. Ἐνῶ εἰς τὴν Κινηματικὴν ἐξητάσαμεν τὴν κίνησιν αὐτὴν καθ' ἑαυτήν, χωρὶς νὰ ἐνδιαφερθῶμεν διὰ τὰ αἴτια τὰ ὁποῖα τὴν προκαλοῦν, εἰς τὴν ***Στατικὴν*** ἀντιθέτως ἐξετάζομεν μόνον τὰ αἴτια ταῦτα, δηλ. τὰς δυνάμεις. Κατὰ ταῦτα, ***δυνάμεις*** καλοῦνται τὰ αἴτια τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ προκαλέσουν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος ἑνὸς κινητοῦ*. Διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καθορίζεται μόνον ποιοτικῶς ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως. Διὰ νὰ ὁρισθῇ αὕτη καὶ ποσοτικῶς, πρέπει νὰ καθορίσωμεν πότε δύο δυνάμεις λέγονται ἴσαι, πότε μία δύναμις εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης κ.λ. Λέγομεν ὅτι δύο δυνάμεις εἶναι ἴσαι ὅταν, ἐπιδρῶσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ κατ' ἀντιθέτους φοράς, ἀλληλοαναιροῦνται. Μία δύναμις $\mathcal{F}_1$ εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης $\mathcal{F}_2$, ὅταν δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ δύο δυνάμεις ἴσας πρὸς τὴν $\mathcal{F}_2$.

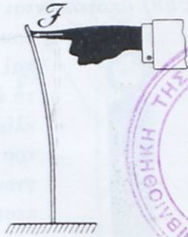
Ἡ δύναμις εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος, ἔχει, δηλ., μέτρον, διεύθυνσιν καὶ φοράν.

Αἱ μᾶλλον γνώριμοι εἰς ἡμᾶς δυνάμεις εἶναι αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι

---

* Ἐὰν τὸ κινητὸν εἶναι ὑ λ ι κ ὸ ν σ η μ ε ῖ ο ν, τὸ μόνον ἀποτέλεσμα τῆς ἐπ' αὐτοῦ δρώσης δυνάμεως εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητός του· ἐνῶ, ὅταν ἡ δύναμις ἐξασκῆται ἐπὶ σ ώ μ α τ ο ς, δύναται νὰ προκαλέσῃ καὶ παραμόρφωσιν αὐτοῦ (βλ. Κεφ. ΙΒ΄ *Ἐλαστικότης*).

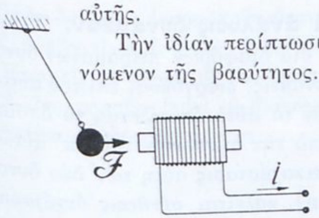
ἐξασκοῦνται ὑπὸ ἑνὸς σώματος ἐπὶ ἄλλου μὲ τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον εὑρίσκεται εἰς ἄμεσον ἐπαφήν, ὅπως, π.χ., ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ δάκτυλός μας ἐπὶ ἐλάσματος τὸ ὁποῖον πιέζομεν *(σχ. 56)*. Ὁμοίως ἅμαξα συρομένη ὑπὸ σχοινίου ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ σχοινίον.



Σχ. 56. *Διὰ τοῦ δακτύλου ἐξασκεῖται δύναμις παραμορφώνουσα τὸ ἔλασμα.*

Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται χωρὶς τὰ δύο σώματα νὰ εὑρίσκωνται εἰς ἐπαφήν. Οὕτω, ὁ ἠλεκτρομαγνήτης τοῦ σχήματος 57 ἐξασκεῖ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ ἐπὶ τῆς διὰ νήματος ἐξηρτημένης σιδηρᾶς σφαίρας, χωρὶς νὰ εὑρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μετ᾽ αὐτῆς.

Τὴν ἰδίαν περίπτωσιν ἔχομεν εἰς τὸ φαινόμενον τῆς βαρύτητος. Οὕτω, ὁ λίθος Λ τοῦ σχήματος 58 ἕλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς Γ χωρὶς νὰ εὑρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μετ᾽ αὐτῆς.



Σχ. 57. *Ὁ ἠλεκτρομαγνήτης ἐξασκεῖ δύναμιν ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς σφαίρας χωρὶς νὰ εὑρίσκεται εἰς ἐπαφὴν μὲ αὐτήν.*

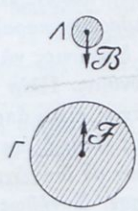
§ 29. Ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.

Εἰς τὸ σχῆμα 56 ὁ δάκτυλός μας ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐλάσματος μίαν δύναμιν. Ταυτοχρόνως ὅμως καὶ τὸ ἔλασμα ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δακτύλου μίαν δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν πρώτην. Τοιοῦτον φαινόμενον παρατηρεῖται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἁμάξης τῆς συρομένης ὑπὸ τοῦ σχοινίου. Ἐκτὸς τῆς δυνάμεως τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ σχοινίον, ἐξασκεῖ καὶ αὐτὴ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν ἐπὶ τοῦ σχοινίου καί, συνεπῶς, ἐπὶ τῆς χειρὸς τοῦ ἕλκοντος τὴν ἅμαξαν πειραματιστοῦ.

Ἡ ἐμφάνισις τῶν δυνάμεων ἐν τῇ φύσει ἀνὰ ζεύγη εἶναι φαινόμενον γενικὸν καὶ διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος εἰς ἀξίωμα, τὸ ***ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως***:

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

$$\text{δρᾶσις} = \text{ἀντίδρασις}$$



Σχ. 58. *Ἡ Γῆ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ λίθου τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$. Ἴσην δύναμιν $\mathcal{F}$ ἐξασκεῖ καὶ ὁ λίθος ἐπὶ τῆς Γῆς.*

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας, ἐπὶ τοῦ ὅτι ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἴσων δυνάμεων ἑκάστη ἐξασκεῖται ἐπὶ δ ι α φ ό ρ ο υ σώματος. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 58, ἡ μὲν Γῆ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ λίθου τὴν δύναμιν $\mathcal{B}$, ὁ δὲ λίθος ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς Γῆς τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}$.

§ 30. Δυναμόμετρα. Διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δυνάμεων, χρησιμοποιοῦνται τὰ ***δυναμόμετρα.*** Τὰ ἁπλούστερα τῶν δυναμομέτρων (κ. *κανταράκια,* *σχ. 59)* ἀποτελοῦνται ἀπὸ χαλύβδινον ἐλατήριον, ἐφωδιασμένον εἰς τὸ ἄκρον του μὲ δείκτην. Ἂν στερεώσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν ἄκρον καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄλλο τὴν πρὸς μέτρησιν δύναμιν, τὸ ἐλατήριον τείνεται καὶ ἡ θέσις τοῦ δείκτου ἐνώπιον τῆς κλίμακος παρέχει τὸ μέτρον τῆς δυνάμεως. Τὰ δυναμόμετρα βαθμολογοῦμεν ἂν ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄκρον δυνάμεις γνωστὰς καὶ σημειώσωμεν τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ δείκτου ἐπὶ τῆς κλίμακος.

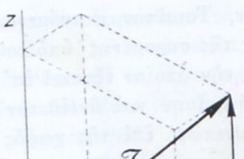
Σχ. 59. *Δυναμόμετρον.*

Ἐκτὸς τοῦ δυναμομέτρου τοῦ τύπου τούτου, ὑπάρχουν καὶ ἄλλων τύπων, οἱ ζυγοί, λ.χ., *(βλ. § 71).*

§ 31. Σύνθεσις καὶ ἀνάλυσις δυνάμεων. Ὅπως γνωρίζομεν ἐκ πείρας καὶ διὰ διαφόρων πειραμάτων δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου, προκαλοῦν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ἄλλη δύναμις, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν διαγώνιον τοῦ ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζομένου παραλληλογράμμου. Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη τῶν δύο δυνάμεων ***(συνιστῶσαι)*** διὰ μιᾶς ***(συνισταμένη),*** καλεῖται *σύνθεσις δυνάμεων.*

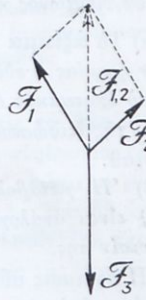
Διὰ νὰ συνθέσωμεν τρεῖς ἢ περισσοτέρας δυνάμεις, ἐφαρμόζομεν τὰ εἰς τὴν § 19 περιγραφέντα διὰ τὴν σύνθεσιν τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνυσμάτων.

Ἀνάλυσις δυνάμεων. Ὅπως δυνάμεθα δύο δυνάμεις νὰ τὰς ἀντικαταστήσωμεν διὰ μιᾶς, τῆς συνισταμένης των, οὕτω δυνάμεθα καὶ μίαν δύναμιν νὰ τὴν ἀντικαταστήσωμεν διὰ δύο συνιστωσῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ σχεδιάσωμεν παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἡ διδομένη δύναμις. Πλὴν τὸ πρόβλημα, οὕτω διδόμενον, εἶναι ἀπροσδιόριστον, διότι ἄπειρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραλληλογράμμων μὲ διαγώνιον ἐκπληροῦσαν τὸν ἄνω ὅρον. Συνήθως ἐπιζητεῖται ἡ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἰς δύο συνιστώσας, τῶν ὁποίων δίδονται οἱ φορεῖς. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν μόνον ὅταν οἱ δύο φορεῖς διέρχωνται διὰ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζόμενον ἐπίπεδον περιέχῃ τὴν δύναμιν.



Σχ. 60. *Πᾶσα δύναμις ἐν τῷ χώρῳ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς συνιστώσας.*

Ἄλλη περίπτωσις, συχνάκις παρουσιαζομένη, εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις ἀναλύεται εἰς τρεῖς συνιστώσας μὴ συνεπιπέδους. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δύναμις θὰ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν συνιστωσῶν σχηματιζομένου παραλληλεπιπέδου (σχ. 60).



Σχ. 61. *Αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_{1,2}$ καὶ $\mathcal{F}_3$ ἰσορροποῦν.*

§ **32. Ἰσορροπία δυνάμεων.** Δύο ἢ περισσότεραι δυνάμεις, ἐξασκούμεναι ἐπί τινος ὑλικοῦ σημείου, ἰσορροποῦν ὅταν ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἤτοι:

$\sum \mathcal{F} = 0$	Συνθήκη ἰσορροπίας δυνάμεων ἐξασκουμένων ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τριῶν δυνάμεων ἡ συνθήκη ἰσορροπίας δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς: Τρεῖς δυνάμεις ἰσορροποῦν ὅταν ἡ συνισταμένη δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 61 αἱ τρεῖς δυνάμεις $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ ἰσορροποῦν διότι ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{1,2}$ τῶν δύο πρώτων εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

§ **33. Θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς.** Ὅπως εἴδομεν, ἡ Κινηματικὴ ἐξετάζει τὰς ταχύτητας καὶ ἐπιταχύνσεις ἀνεξαρτήτως τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς δυνάμεων, ἐνῷ ἡ Στατικὴ ἐξετάζει μόνον τὰς δυνάμεις, ἀδιαφοροῦσα διὰ τὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα αὗται προκαλοῦν. Ἡ ***Δυναμική,*** τέλος, ἐξετάζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ αἰτίου — τῆς δυνάμεως — καὶ τοῦ ἀποτελέσματος — τῆς ἐπιταχύνσεως—.

Ἐὰν $\mathcal{F}$ εἶναι ἡ ἐπί τινος ὑλικοῦ σημείου ἐξασκουμένη δύναμις καὶ γ ἡ ὑπὸ ταύτης προκαλουμένη ἐπιτάχυνσις, ἰσχύει μεταξύ των ἡ σχέσις

$\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$	θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς	(1)

Ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας m (ὁ ὁποῖος εἶναι μονόμετρον μέγεθος), καλεῖται ***μᾶζα*** τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τῆς ἐπιταχύνσεως συμπίπτουν μὲ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ.

Ἡ ὡς ἄνω σχέσις φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα ***θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς,*** διότι, πράγματι, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀποτελεῖ τὸν μόνον νόμον τῆς Μηχανικῆς ἐκ τοῦ ὁποίου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν ὅλοι οἱ ἄλλοι νόμοι αὐτῆς.

Ὁ θεμελιώδης οὗτος νόμος περιλαμβάνει τὰ δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀξιωμάτων τοῦ Νεύτωνος καὶ δὴ

α) Τὸ **ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας**: *Ἕκαστον σῶμα ἐμμένει εἰς τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἐφ' ὅσον δὲν ἀναγκάζεται ἀπὸ ἐξωτερικὰς δυνάμεις εἰς μεταβολὴν τῆς καταστάσεως.* Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$, ἂν θέσωμεν $\mathcal{F} = 0$, ὁπότε $\gamma = 0$, ἄρα $v =$ σταθ.

β) *Ἡ μεταβολὴ τῆς* ὁ ρ μ ῆ ς (δηλ. τοῦ γινομένου μᾶζα · ταχύτης, βλ. *§ 36) εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δύναμιν ἥτις τὴν προκαλεῖ καὶ ἔχει τὴν* ἴσην καὶ *διεύθυνσίν της.*

Ἡ πρότασις αὕτη περιέχεται εἰς τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς γραμμένον ὑπὸ τὴν γενικωτέραν του μορφὴν *(§ 37)*.

Αἱ δύο πρῶται προτάσεις εἶναι, τῷ ὄντι, ἀξιώματα καὶ εἶναι πειραματικῶς ἀδύνατος ἡ ἀπόδειξις τῆς ὀρθότητός των. Διότι ἡ μὲν ἀπόδειξις τῆς πρώτης προσκρούει εἰς τὸ ὅτι δὲν δυνάμεθα ν' ἀπαλλάξωμεν ἀπολύτως ἕνα σῶμα ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Δεχόμεθα ἐν τούτοις τὴν ὀρθότητα τοῦ ἀξιώματος καθόσον ὅλα τὰ συμπεράσματα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐξ αὐτοῦ ἐπαληθεύονται πειραματικῶς.

Ὁμοίως καὶ ἡ δευτέρα πρότασις δὲν ἐλέγχεται πειραματικῶς καθόσον ἡ ἔννοια τοῦ φυσικοῦ μεγέθους «δύναμις» μόνον ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματά της καθορίζεται.

Ὅσον ἀφορᾷ τὸ τρίτον «ἀξίωμα» τοῦ Νεύτωνος, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἄλλο παρὰ ἡ εἰς τὴν § 29 ἀναφερθεῖσα ἀρχὴ «δρᾶσις = ἀντίδρασις», τοῦτο κακῶς χαρακτηρίζεται ὡς ἀξίωμα, δεδομένου ὅτι ἐπιδέχεται ἀπόδειξιν. Μίαν ἀπόδειξιν ἔχομεν εἰς τὸ *θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς (§ 69)*, τὸ ὁποῖον, κατὰ βάθος, δὲν εἶναι παρὰ μία ἄλλη διατύπωσις τῆς αὐτῆς προτάσεως.

§ 34. Μονάδες μάζης καὶ δυνάμεως. 1) **Εἰς τὸ σύστημα C.G.S.** Μ ο ν ὰ ς μ ά ζ η ς εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι τὸ ***γραμμάριον μάζης*** (1 gr), τοῦ ὁποίου ὁ ὁρισμὸς ἐδόθη εἰς τὴν § 6.

Ἡ μ ο ν ὰ ς δ υ ν ά μ ε ω ς εἰς τὸ σύστημα C.G.S εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς ἐκ τῶν μονάδων cm, gr, sec, δεδομένου ὅτι ἡ δύναμις εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι παράγωγον μέγεθος. Ἡ οὕτως ὁριζομένη μονὰς καλεῖται ***δύνη*** (1 dyn) καὶ ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν ἡ ὁποία, ἐπιδρῶσα ἐπὶ σώματος μάζης 1 gr, δίδει εἰς τοῦτο ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $1 \mathrm{~cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$. Ἤτοι

$$1 \mathrm{~dyn} = 1 \mathrm{~gr} \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-2}$$

2) **Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα.** Εἰς τοῦτο μ ο ν ὰ ς δ υ ν ά μ ε ω ς εἶναι τὸ ***χιλιόγραμμον βάρους*** (1 kgr*) τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ προτύπου χιλιογράμμου (δηλ. τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται τοῦτο ὑπὸ τῆς Γῆς). Ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν § 98, ἡ μονὰς αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τόπου εἰς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ μέτρησις. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἀπὸ τόπου εἰς τόπον μεταβολαὶ εἶναι μικραί, ἡ οὕτως ὁριζομένη μονὰς δυνάμεως δύναται νὰ θεωρηθῇ πρακτικῶς σταθερά.

Ἐκτὸς τῆς μονάδος 1 kgr* χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ χιλιοστὸν αὐτῆς, τὸ *γραμμάριον βάρους* (1 gr*).

Ἡ μονὰς μάζης εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου ἐκ τῶν μονάδων m, kgr *, sec, δεδομένου ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μᾶζα εἶναι παράγωγον μέγεθος. Ἡ οὕτως ὁριζομένη μονὰς ἰσοῦται πρὸς τὴν μᾶζαν ἐκείνην ἡ ὁποία ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr * λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-2}$, καλεῖται δὲ ἐνίοτε καὶ Newton (1 Nt). Εἶναι ἑπομένως

$$1\ \mathrm{Nt} = 1\ \mathrm{kgr}^{*}\cdot \mathrm{m}^{-1}\cdot \mathrm{sec}^{2}$$

Σχέσις μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων μονάδων εἰς τὰ δύο συστήματα. Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν μονάδων δυνάμεως εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς μονάδος 1 kgr *, σῶμα μὲ μᾶζαν 1 kgr ἕλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς μὲ δύναμιν ἴσην πρὸς 1 kgr *. Ἐπειδὴ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης τὸ σῶμα πίπτει, ὡς γνωστόν, μὲ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $981\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{sec}^{-2}$, προκύπτει, δι' ἐφαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς § 33, ἡ σχέσις

$$1\ \mathrm{kgr}^{*} = 1000\ \mathrm{gr}\cdot 981\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{sec}^{-2}$$

ἢ $$1\ \mathrm{kgr}^{*} = 981000\ \mathrm{gr}\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{sec}^{-2} = 981000\ \mathrm{dyn}$$

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν καὶ

$$\boxed{1\ \mathrm{gr}^{*} = 981\ \mathrm{dyn}}$$

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν μονάδων μάζης εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

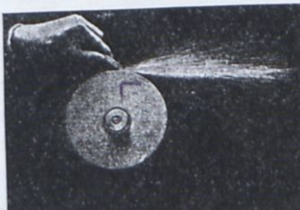
Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 33, ἡ μᾶζα εἶναι τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως. Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι σῶμα μάζης 1 kgr ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 1 kgr * λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-2}$. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), τὴν ὁποίαν γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $m = F/\gamma$, ἔχομεν

$$1\ \mathrm{kgr} = \frac{1\ \mathrm{kgr}^{*}}{9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-2}} = \frac{1}{9{,}81}\ \mathrm{kgr}^{*}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{sec}^{2} = \frac{1}{9{,}81}\ \mathrm{Nt}$$

ἄρα $$\boxed{1\ \mathrm{Nt} = 9{,}81\ \mathrm{kgr}}$$

§ 35. Διερεύνησις τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς.

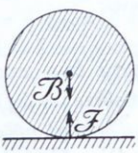
A. Ὅταν ἐπί τινος ὑλικοῦ σημείου οὐδεμία δύναμις ἐξασκῆται, ἀπὸ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως λαμβάνομεν $\gamma = 0$ δηλ. $v =$ σταθ. ἑπομένως τὸ κινητὸν διατηρεῖ τὴν ταχύτητά του σταθερὰν κατὰ μέτρον καὶ διεύθυνσιν, δηλ. ἐκτελεῖ ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ταχύτης αὕτη ἔχει τιμὴν μηδέν, δηλ. εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ὑλικὸν σημεῖον εὑρίσκεται ἐξ ἀρχῆς ἐν ἠρεμίᾳ, θὰ ἐξακολουθῇ καὶ μετέπειτα νὰ ἠρεμῇ. Παράδειγμα τῆς πρώτης περιπτώσεως συναντῶμεν εἰς τοὺς σπινθῆρας τοὺς ἐκπεμπομένους ἀπὸ τὸν σμυριδοτροχὸν *(σχ. 62)*: Τὰ πυρακτωμένα τεμαχίδια τοῦ μετάλλου, παρασύρονται κατ' ἀρχὰς ὑπὸ τοῦ τροχοῦ, ὅταν ὅμως τυχὸν ἐκτιναχθοῦν, κινοῦνται ἐφεξῆς εὐθυγράμμως καὶ κατὰ τὴν



Σχ. 62. *Οἱ σπινθῆρες ἐκτινασσόμενοι κινοῦνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης.*

διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον ἐκτινάξεως ἐκ τοῦ τροχοῦ ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐπί τινος ἠρεμοῦντος ὑλικοῦ σημείου ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, τοῦτο ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ταχύτητα μηδέν.



Σχ. 63. Ἐπὶ τῆς ἠρεμούσης σφαίρας ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι δυνάμεις.

Ἀντιστρέφοντες τὸν συλλογισμόν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι, ὅταν ἡ ταχύτης ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου διατηρῆται διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν, εἴτε δὲν ἐπιδρᾷ ἐπ' αὐτοῦ καμμία δύναμις, εἴτε ἂν ἐπιδροῦν δυνάμεις, ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Παράδειγμα τῆς ἐν λόγῳ περιπτώσεως ἔχομεν εἰς τὸ σχῆμα 63, τὸ ὁποῖον παριστᾷ σφαῖραν στηριζομένην ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, τὸ βάρος της $\mathscr{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathscr{F}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτῆς τὸ ἐν ἐπαφῇ εὑρισκόμενον ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ ἡ σφαῖρα ἠρεμεῖ, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον, ἡ συνισταμένη δύναμις θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἤτοι:

$$\mathscr{F} - \mathscr{B} = 0$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας μίαν δύναμιν, $\mathscr{F}$, ἀκριβῶς ἴσην πρὸς τὸ βάρος, $\mathscr{B}$, τῆς σφαίρας.

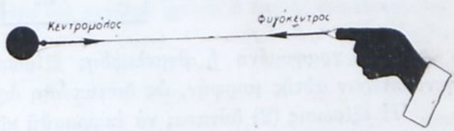
Σχ. 64. Κατὰ τὴν κάμψιν τῶν γονάτων ὁ ζυγὸς δεικνύει ἔνδειξιν μικροτέραν τοῦ βάρους τοῦ ἀνθρώπου· κατὰ τὴν ἔκτασιν δεικνύει μεγαλυτέραν.

Β. Θὰ διερευνήσωμεν τώρα περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, εἰς τὰς ὁποίας λοιπὸν τὸ σῶμα ἐπιταχύνεται. Ὡς πρῶτον παράδειγμα θεωρήσωμεν ἄνθρωπον, ὁ ὁποῖος ἱστάμενος ἐπὶ (καταλλήλου) ζυγοῦ *(σχ. 64)*, ἀφήνει τὸ κέντρον τοῦ βάρους του νὰ κατέλθῃ, κάμπτων τὰ γόνατά του· ἐνῷ πρὶν ἡ δύναμις, $\mathscr{F}$, ἡ ἐξασκουμένη ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου τοῦ ζυγοῦ, ἦτο ἀκριβῶς ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὸ βάρος $\mathscr{B}$, κατὰ τὴν κάμψιν ἐλαττοῦται ἡ δύναμις αὕτη καὶ οὕτως ἐμφανίζεται μία συνισταμένη δύναμις διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ μὲ φορὰν πρὸς τὰ κάτω. Τὴν ἐλάττωσιν τῆς δυνάμεως $\mathscr{F}$ κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως πιστοποιοῦμεν καὶ ἐκ τῆς ἐνδείξεως τοῦ ζυγοῦ, ἡ ὁποία τώρα εἶναι μικροτέρα τῆς κανονικῆς. Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος, ἀφοῦ ἀκινητήσῃ εἰς τὴν στάσιν εἰς τὴν ὁποίαν τώρα εὑρίσκεται, ἐκταθῇ ἀποτόμως, θὰ παρατηρήσωμεν ἔνδειξιν τοῦ ζυγοῦ μεγαλυτέραν τῆς κανονικῆς τιμῆς.

Ἄλλο παραστατικὸν πείραμα διὰ τοῦ ὁποίου δεικνύεται ὅτι μεγάλη ἐπιτάχυνσις ἀπαιτεῖ—κατὰ τὴν ἐξίσωσιν $\mathscr{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$—τὴν ἐξάσκησιν μεγάλης δυνάμεως εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἀπὸ τοῦ ἄκρου νήματος ἐξαρτῶμεν μίαν σφαῖραν μεγάλης μάζης. Τὴν σφαῖραν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ τὴν ὑψώσωμεν βραδέως καὶ βαθμιαίως νὰ τῆς δόσωμεν μεγάλην ταχύτητα. Ἐὰν ὅμως δοκιμάσωμεν νὰ τὴν ἐπιταχύνωμεν ἀποτόμως, ἕλκοντες αὐτὴν βιαίως, τὸ νῆμα κόπτεται διότι ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν μεγάλην ἐπιτάχυνσιν ὑπερβαίνει τὸ ὅριον ἀντοχῆς τοῦ νήματος.

Ἡ κίνησις τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ ἕνα κινητὸν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένην δύναμιν: Οὕτω, ἂν ἡ συνισταμένη τῶν ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι σταθερά, τότε καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ κινητὸν ἐκτελεῖ *ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην εὐθύγραμμον κίνησιν*. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ ἕνα σῶμα πῖπτον εἰς τὸ κενὸν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, εἶναι μία σταθερὰ δύναμις.

Ὅταν ἡ δύναμις εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα, ὑπάρχει διαρκῶς μόνον κεντρομόλος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως, ἡ δὲ κίνησις εἶναι *ὁμαλὴ καμπυλόγραμμος*. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ φορτισμένον σωμάτιον κινούμενον ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου, διότι, ὡς γνωστόν, ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις (δύναμις Laplace) ἡ ὁποία εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ταχύτητα τοῦ σωματίου. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ κάθετος αὕτη δύναμις ἔχει διαρκῶς σταθερὸν μέτρον, τότε καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προκαλουμένη (κεντρομόλος) ἐπιτάχυνσις ἔχει σταθερὸν μέτρον καὶ τὸ κινητὸν ἐκτελεῖ *ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν*. Τοιαύτην ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ σφαῖρα προσδεδεμένη διὰ νήματος καὶ περιστρεφομένη διὰ τῆς χειρὸς μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα *(σχ. 65)*. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς σφαίρας εἶναι υ^2/r. Συνεπῶς, διὰ νὰ δύναται νὰ ἐκτελῇ τὴν κίνησιν ταύτην, πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπ' αὐτῆς μία δύναμις, $\mathcal{F}$, κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιάν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς



Σχ. 65. *Ἐπὶ τῆς περιστρεφομένης σφαίρας ἐξασκεῖται (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ βάρος) μόνον μία δύναμις, ἡ κεντρομόλος.*

$$F = m \cdot \frac{\upsilon^2}{r}$$

Τὴν δύναμιν ταύτην, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***κεντρομόλον δύναμιν***, ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας τὸ νῆμα. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ὅμως «δρᾶσις = ἀντίδρασις», πρέπει τὸ σῶμα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ νήματος καί, συνεπῶς, ἐπὶ τῆς χειρὸς τοῦ κρατοῦντος τὸ νῆμα δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον. Τὴν δύναμιν ταύτην, ὡς ἔχουσαν φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κεντρομόλου, καλοῦμεν ***φυγόκεντρον δύναμιν.*** Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ μόνη πραγματικῶς δρῶσα ἐπὶ τῆς σφαίρας δύναμις εἶναι ἡ κεντρομόλος, ἐνῶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς χειρὸς καὶ ὄχι ἐπὶ τῆς σφαίρας.

§ 36. Ὁρμή. Ἄλλη μεγάλης σημασίας ἔννοια τῆς Μηχανικῆς εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ὁρμῆς (ἢ *ποσότητος κινήσεως*). Διὰ τοῦ ὅρου τούτου ἐννοοῦμεν ἕνα ἀνυσματικὸν μέγεθος $\mathcal{J}$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μάζης m τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ τὴν ταχύτητα v τούτου, ἤτοι

$$\boxed{\mathcal{J} = \mathrm{m} \cdot v}$$

§ 37. Γενικωτέρα μορφὴ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς. Ὁ θεμελιώδης νόμος

$$\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \frac{dv}{dt} \tag{1}$$

δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς

$$\mathcal{F} = \frac{d}{dt}(\mathrm{m} \cdot v)$$

Ἐπειδὴ $\mathrm{m} \cdot v$ παριστᾷ τὴν ὁρμήν, ἔχομεν

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}} \tag{2}$$

Οὕτω γραφομένη ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς κινήσεως, ἀποτελεῖ τὴν γενικωτέραν αὐτῆς μορφήν, ὡς διετυπώθη ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Newton *.

Ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ ταχύτης μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἴση μὲ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ.

§ 38. Ὤθησις δυνάμεως. Ἔστω ὅτι ἐπί τινος ὑλικοῦ σημείου ἐξασκεῖται μία δύναμις ἡ ὁποία μεταβάλλεται χρονικῶς ὅπως παριστᾷ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 66, δηλ., ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ μηδενός, αὐξάνεται μέχρι μιᾶς μεγίστης τιμῆς καὶ κατόπιν, ἐλαττουμένη, μηδενίζεται ἐκ νέου **.

Συμφώνως πρὸς τὴν γενικωτέραν μορφὴν τοῦ θεμελιώδους νόμου, ἡ ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἐπερχομένη μεταβολὴ dJ τῆς ὁρμῆς θὰ εἶναι

$$dJ = F \cdot dt$$

* Ἐνῷ ἡ ἰσχὺς τῆς ἐξισώσεως (1) περιορίζεται μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ μᾶζα εἶναι σταθερά, ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει καὶ ὅταν αὕτη μεταβάλλεται μετὰ τῆς ταχύτητος, ὅπως τὸ ἀπαιτεῖ ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ἔνθα $\beta = v/c$ (c=ταχύτης τοῦ φωτὸς ἐν τῷ κενῷ).

** Μία οὕτω μεταβαλλομένη δύναμις εἶναι ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ ἐλαστικῆς σφαίρας, ὅταν αὕτη συγκρούεται μὲ ἄλλο σῶμα.

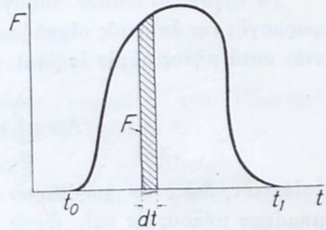
καὶ θὰ παρίσταται, ὡς γνωστόν, μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς γραμμοσκιασμένης ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ἀπὸ τὸν χρόνον t_0 ἕως τὸν χρόνον t_1, θὰ λάβωμεν

$$J_1 - J_0 = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt \qquad (1)$$

Ἡ παράστασις

$$\int F \cdot dt$$

ὀνομάζεται ***ὤθησις δυνάμεως***.



Σχ. 66.

Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁ θεμελιώδης νόμος δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Ἡ ὑπό τινος δυνάμεως προκαλουμένη μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ὤθησιν τῆς δυνάμεως.*

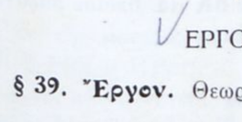
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ χρόνον τ, ἡ ὤθησις αὐτῆς εἶναι ἴση πρὸς $F \cdot \tau$.

Ἐφαρμογή. Μολυβδίνη σφαῖρα μάζης m, κινουμένη μὲ ταχύτητα υ, συναντᾷ κώλυμα, ὁπότε ἡ ταχύτης της μετὰ τὴν (πλαστικὴν) σύγκρουσιν θὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ μεταβολὴ τῆς ὁρμῆς τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς mυ. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) θὰ πρέπει ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς ὁρμῆς νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ὤθησιν $\int F \cdot dt$ τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία τὴν προεκάλεσεν. Ἀναλόγως τοῦ χρόνου ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἔγινεν ἡ μεταβολὴ αὕτη ἡ δύναμις F θὰ εἶναι μικρὰ ἢ μεγάλη, δεδομένου ὅτι τὸ $\int F \cdot dt$ ἔχει σταθερὰν τιμήν. Τοῦτο ἐξηγεῖ διατί ἂν ἡ σφαῖρα συναντήσῃ ἀ ν έ ν δ ο τ ο ν κώλυμα θὰ ὑποστῇ μεγάλην δύναμιν (ἱκανὴν καὶ νὰ τὴν καταστρέψῃ), ἐνῷ εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν ἡ δύναμις θὰ εἶναι μικρά, λόγῳ τοῦ μεγάλου χρόνου ὁ ὁποῖος διατίθεται διὰ τὴν ἐπιβράδυνσιν τῆς σφαίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΕΡΓΟΝ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΙΣΧΥΣ

§ 39. Ἔργον. Θεωρήσωμεν ἕνα ὑλικὸν σημεῖον τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ μετατίθεται ἐκ τοῦ σημείου Σ_1 εἰς τὸ σημεῖον Σ_2 *(σχ. 67)*. Ὁρίζομεν ὡς ***ἔργον*** dA τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ ἐπὶ τὸν δρόμον ds κατὰ τὸν ὁποῖον μετεκινήθη τὸ ὑλικὸν σημεῖον. Ἤτοι



Σχ. 67.

$$\boxed{dA = (\mathcal{F} \cdot ds)} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$(\mathcal{F} \cdot ds) = F \cdot ds \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha$$

ἕπεται ὅτι τὸ ἔργον dA ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δρόμου ds ἐπὶ τὴν προβολὴν $F \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha$ τῆς δυνάμεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ δρόμου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἔργου προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

Τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παράγεται ὅταν ἡ δύναμις μετακινῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ μιᾶς οἱασδήποτε τροχιᾶς ΚΛ ἢ ὅταν ἡ δύναμις μεταβάλλεται κατὰ μῆκος αὐτῆς ἰσοῦται μὲ

$$\mathrm{A} = \int_{\mathrm{K}}^{\Lambda} \mathrm{dA} = \int_{\mathrm{K}}^{\Lambda} (\mathscr{F} \cdot \mathrm{d}s)$$

εὑρίσκεται, δηλ., ἂν χωρίσωμεν τὸν ὅλον δρόμον ΚΛ εἰς μεγάλον ἀριθμὸν τμημάτων μήκους ds καί, ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον dA δι' ἕκαστον τμῆμα, ἀθροίσωμεν ὅλα τὰ στοιχειώδη ταῦτα ἔργα.

Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἡ δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ κινητὸν κινεῖται ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς, ὁπότε τὸ ὁλικὸν ἔργον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὸν δρόμον s καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς σχηματιζομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας α. Ἤτοι

$$\mathrm{A} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{s} \cdot \text{συν}\,\alpha$$

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, $v = \mathrm{d}s/\mathrm{dt}$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\mathrm{dA} = (\mathscr{F} \cdot v) \cdot \mathrm{dt} \tag{2}$$

§ 40. Ἰσχύς. Ὅπως εἴδομεν, ἡ ἔννοια τοῦ ἔργου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐννοίας τοῦ χρόνου. Εἰς πολλὰς ὅμως περιπτώσεις—ὡς, λ.χ., εἰς τὰς μηχανὰς—πρακτικὴν σημασίαν ἔχει ὄχι μόνον πόσον ἔργον παράγεται, ἀλλὰ καὶ εἰς πόσον χρόνον. Τοῦτο μᾶς ἄγει εἰς τὸν ὁρισμὸν ἑνὸς νέου φυσικοῦ μεγέθους, τῆς ἰσχύος.

Ἰσχὺς N καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἔργου dA τὸ ὁποῖον παράγεται ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἤτοι

$$\boxed{\mathrm{N} = \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}}}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου λαμβάνομεν διὰ τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν ἔκφρασιν

$$\mathrm{N} = (\mathscr{F} \cdot v)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσχὺς εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

§ 41. Μονάδες ἔργου καὶ ἰσχύος. 1) **C.G.S.** Ἡ μονὰς ἔργου εἰς τὸ σύστημα C.G.S καλεῖται ***ἔργιον*** (1 erg) καὶ εἶναι τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παράγει δύναμις ἴση πρὸς μίαν δύνην, μεταθέτουσα τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της κατὰ 1 cm. Ἤτοι εἶναι

$$1\ \mathrm{erg} = 1\ \mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm}$$

Μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ σύστημα C.G.S εἶναι τὸ 1 erg · sec^{-1}.

2) **Τ. Σ.** Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ μονὰς τοῦ ἔργου καλεῖται ***χιλιογραμμόμετρον*** (1 kgr* m).

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ kgr}^* \text{ m} = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

Μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα εἶναι τὸ 1 kgr* m/sec.

3) **Πρακτικὸν σύστημα** (χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς τὸν Ἠλεκτρισμόν). Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο μονὰς ἔργου εἶναι τὸ 1 *Joule* *.

$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$$

Ὡς μονὰς ἰσχύος χρησιμοποιεῖται τὸ 1 Joule/sec, τὸ ὁποῖον καλεῖται *Watt* (1 W). Ἤτοι

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$$

Πολλαπλάσιον τῆς μονάδος ταύτης εἶναι τὸ

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$$

Κατὰ ταῦτα, ἡ μονὰς Joule εἶναι ἴση πρὸς 1 W · sec. Πολλαπλάσιον τῆς μονάδος ταύτης εἶναι καὶ τὸ 1 ***κιλοβατώριον*** (1 kWh). Εἶναι δὲ

$$1 \text{ kWh} = 1000 \cdot 60 \cdot 60 = \text{W} \cdot \text{sec}$$

4) **Ἄλλαι μονάδες.** Διὰ τὴν ἰσχὺν μηχανῶν, κυρίως, χρησιμοποιεῖται ἡ μονὰς *ἀτμόϊππος* ἢ ἁπλῶς ***ἵππος*** (1 CV ἢ PS)**.

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kgr}^* \text{ m/sec} = 736 \text{ W}.$$

Ὁ εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας χρησιμοποιούμενος ἵππος (HP)** εἶναι κατά τι μεγαλύτερος τοῦ προηγουμένου. Ἤτοι

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$$

Ἐκ τῆς μονάδος ταύτης προκύπτει ἡ μονὰς ἔργου ***ὡριαῖος ἵππος*** (CVh ἢ PSh ἢ HPhr).

Ἄλλη μονὰς ἔργου, χρησιμοποιουμένη κυρίως διὰ τὴν μέτρησιν τῆς θερμικῆς ἐνεργείας, εἶναι ἡ ***θερμὶς*** (1 cal) καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτῆς ἡ ***χιλιοθερμὶς*** (1 kcal).

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ cal} = 4{,}19 \text{ Joule}$$

καὶ

$$1 \text{ kcal} = 426{,}8 \text{ kgr}^* \text{ m}$$

Εἰς τὴν Ἀτομικὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς ἔργου τὸ ***ἠλεκτρόνιον-βὸλτ*** (1 eV). Τοῦτο ἰσοῦται μὲ $1{,}59 \cdot 10^{-12}$ erg.

§ 42. Ἐνέργεια. ***Ἐνέργεια*** E ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου (ἢ σώματος) καλεῖται τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον τοῦτο δύναται νὰ παραγάγῃ. Ἡ ἐνέργεια παρου-

* Βλ. *Ἠλεκτρισμός*, σελ. 53.

** Ἀπὸ τοὺς ὅρους *cheval vapeur, Pferdestärke, horse power.*

σιάζεται ὑπὸ διαφόρους μορφάς, π. χ. ὡς δυναμική, κινητική, ἠλεκτρική, θερμικὴ κ.λ.

Τὴν Μηχανικὴν ἐνδιαφέρουν δύο ἐξ αὐτῶν: ἡ δυναμικὴ καὶ ἡ κινητική.

Ὡς ***δυναμικὴν ἐνέργειαν*** $E_{δυν}$ ὁρίζομεν τὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν ἔχει ἕνα ὑλικὸν σημεῖον (ἢ σῶμα), λόγῳ τῆς θέσεως ἢ τῆς καταστάσεως εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται. Κατὰ ταῦτα, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ νὰ ἔλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν ἢ κατάστασιν ταύτην.

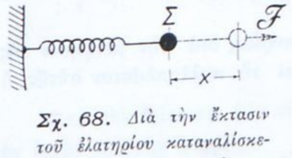
Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, φέρομεν δύο παραδείγματα:

Ὑλικὸν σημεῖον βάρους B εὑρισκόμενον εἰς ὕψος h ἀπὸ ἑνὸς ὡρισμένου ἐπιπέδου (διὰ τὸ ὁποῖον δεχόμεθα $E_{δυν}=0$) ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, διότι, ἂν τὸ ἀφίσωμεν νὰ πέσῃ, εἶναι ἱκανὸν νὰ παραγάγῃ ἔργον. Ἡ δυναμικὴ αὐτη ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{δυν} = B \cdot h$$

καὶ τοῦτο διότι, διὰ ν' ἀνέλθῃ τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἰς τὸ ὕψος h, ἐξησκήθη ἐπ' αὐτοῦ δύναμις ἴση πρὸς τὸ βάρος του B, ἡ ὁποία κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου παρήγαγε τὸ ἔργον $B \cdot h$. Τὸ ἔργον τοῦτο ἐναποθηκεύθη ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ὅπως εἴδομεν, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου μετρεῖται ἀπό τινος ὁριζοντίου ἐπιπέδου (π. χ. τοῦ δαπέδου τῆς αἰθούσης), διὰ τὸ ὁποῖον δεχόμεθα ὅτι αὕτη ἔχει τὴν τιμὴν μηδέν. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο μᾶς εἶναι ἀδιάφορον, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν καὶ ἀργότερον, εἰς τὰ διάφορα φυσικὰ φαινόμενα μόνον αἱ μεταβολαὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἐνδιαφέρουν καὶ ὄχι αἱ ἀπόλυτοι τιμαί της - ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ὅταν ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια λαμβάνῃ ἀρνητικὰς τιμάς, τοῦτο σημαίνει ἁπλῶς ὅτι αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς ἐνεργείας τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ὡς ἀφετηρία διὰ τὴν μέτρησιν.



Σχ. 68. *Διὰ τὴν ἔκτασιν τοῦ ἐλατηρίου καταναλίσκεται ἔργον τὸ ὁποῖον ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας.*

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἀναφέρομεν ἐλατήριον τὸ ὁποῖον ἐκτείνομεν οὕτως ὥστε τὸ μῆκος του ν' αὐξηθῇ κατὰ x *(σχ. 68)*. Εἰς τὴν κατάστασιν εἰς ἣν εὑρίσκεται τώρα τὸ ἐλατήριον περιέχει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν αὐτοῦ.

Τὸ ἔργον, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν του, εἶναι

$$\int (\mathcal{F} \cdot ds)$$

θὰ πρέπει, ἑπομένως, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔργου τοῦ ἀπαιτηθέντος διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου νὰ γνωρίζωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ δύναμις μετὰ τῆς μηκύνσεως. Ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ περὶ ἐλαστικότητος Κεφάλαιον, ἡ μήκυνσις x εἶναι ἀνάλογος τῆς παραγούσης αὐτὴν δυνάμεως. Ἤτοι

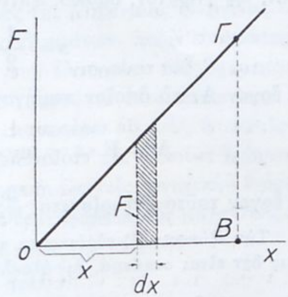
$$F = D \cdot x \tag{1}$$

ἔνθα D εἶναι μία σταθερά*. X

Τὴν σχέσιν ταύτην παριστᾷ γραφικῶς τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 69. Ἐπ' αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν τοῦ ἐλατηρίου κατὰ x χρειάζεται νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις ἴση πρὸς F. Διὰ τὴν περαιτέρω ἐπιμήκυνσιν κατὰ dx θὰ χρειασθῇ ἔργον

$$dA = F \cdot dx \tag{2}$$

Τὸ ἔργον τοῦτο dA παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ γραμμοσκιασμένου ἐμβαδοῦ. Ἑπομένως διὰ νὰ ἐπιμηκύνωμεν τὸ ἐλατήριον ἀπὸ $x = 0$ ἕως $x = OB = \lambda$ θὰ χρειασθῇ ἔργον A ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $\frac{1}{2}\lambda \cdot F_{\mu\varepsilon\gamma}$. Ἤτοι



Σχ. 69. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΒΓ παρέχει τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτηθὲν διὰ τὴν μήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου κατὰ ΟΒ.

$$A = \frac{1}{2}\lambda \cdot F_{\mu\varepsilon\gamma}$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $F_{\mu\varepsilon\gamma}$ διὰ τοῦ ἴσου του $D \cdot \lambda$ (κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1)), λαμβάνομεν

$$A = \frac{1}{2} D \cdot \lambda^2$$

Τὸ ἔργον τοῦτο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀποθηκευμένον ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ τεταμένου ἐλατηρίου, ἀποδίδεται ἐκ νέου κατὰ τὴν συσπείρωσιν αὐτοῦ.

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις προκύπτει εὐκόλως δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως (2). Ἤτοι

$$A = \int_{x=0}^{x=\lambda} dA = \int_{x=0}^{x=\lambda} F \cdot dx = \int_{x=0}^{x=\lambda} D \cdot x \cdot dx = \left| \frac{Dx^2}{2} \right|_0^{\lambda} = \frac{D \cdot \lambda^2}{2}$$

Κινητικὴ ἐνέργεια. Ὀνομάζομεν ***κινητικὴν ἐνέργειαν*** $E_{\kappa\iota\nu}$ ὑλικοῦ τινος σημείου τὴν ἐνέργειαν τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο λόγῳ τῆς ταχύτητός του. Αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον κατηναλώθη ὑπὸ τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία τὸ ἐπετάχυνε καὶ τοῦ ἔδωσε τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ὑλικοῦ σημείου μάζης m καὶ ταχύτητος υ εἶναι

* Ἡ σταθερὰ αὕτη, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀργότερα (§ 73), καλεῖται *κατευθύνουσα δύναμις* τοῦ ἐλατηρίου.

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δύναμις εἶναι σταθερά: Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ κίνησις εἶναι, ὡς γνωστόν, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύουν οἱ τύποι

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \gamma t$$

Τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον παρήγαγεν ἡ δύναμις ἐντὸς τοῦ χρόνου t, θὰ εἶναι

$$A = F \cdot s = m\gamma \cdot s = \frac{1}{2}\, m \cdot \gamma^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

Τὸ ἔργον τοῦτο ἀνευρίσκεται ὡς κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν, καὶ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δύναμις δὲν εἶναι σταθερά. Δι' ὁλοκληρώσεως, λαμβάνομεν

$$A = \int dA = \int (\mathcal{F} \cdot ds) = \int m \left(\frac{dv}{dt} \cdot v\right) \cdot dt = m \int (v \cdot dv) =$$
$$= \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

§ 43. Θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας.

Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὑλικὸν σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς ὕψος h ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν $B \cdot h$. Ἂν τώρα τὸ ἀφίσωμεν νὰ πέσῃ, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον μηδενικῆς δυναμικῆς ἐνεργείας θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει μίαν ταχύτητα υ, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται ἐκ τῶν τύπων $h = 1/2\, gt^2$ καὶ $\upsilon = gt$ εἰς $\upsilon = \sqrt{2gh}$, δεδομένου ὅτι ἡ πτῶσις εἶναι ἐπιταχυνομένη.

Ἡ κινητικὴ αὐτοῦ ἐνέργεια θὰ εἶναι, ἑπομένως, ἴση πρὸς

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\, m \cdot 2\, gh = mg \cdot h = B \cdot h$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀκριβῶς ἴση πρὸς τὴν τιμὴν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν εἶχε τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἰς τὸ ὕψος h.

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι κατὰ τὴν πτῶσιν ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια—δηλ. τὸ ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καὶ κινητικῆς ἐνεργείας—παρέμεινε σταθερά. Τὸ πόρισμα τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἰσχύει ὄχι μόνον διὰ τὴν πτῶσιν ἀλλὰ καὶ δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν μεταβολὴν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας εἰς κινητικὴν (ἢ καὶ ἀντιστρόφως) φέρεται ὑπὸ τὸ ὄνομα ***θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας*** καὶ διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

Κατὰ τὰς μετατροπὰς τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας εἰς κινητικὴν καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια (δηλ. τὸ ἄθροισμα τῆς δυναμικῆς καὶ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας) παραμένει σταθερά, ἐφ' ὅσον δὲν ἔχομεν μετατροπὴν αὐτῆς εἰς ἄλλην μορφὴν ἐνεργείας (π. χ. θερμότητα).

Τὸ θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις μιᾶς γενικωτάτης ἀρχῆς τῆς Φυσικῆς, τῆς γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα *ἀξίωμα τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας*. Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀξιώματος τούτου ἐπεκτείνεται εἰς ὅλας τὰς μορφὰς ἐνεργείας τὰς ὁποίας ἔχει ἕνα ἀποκεκλεισμένον σύστημα, π. χ. θερμότητα, ἐνέργειαν ἠλεκτρικοῦ πεδίου, χημικὴν ἐνέργειαν κ.λ.

Ἐφαρμογή. Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας δυνατὸν νὰ μᾶς δώσῃ τὴν λύσιν ὡρισμένων προβλημάτων πολὺ εὐκολώτερον ἢ ἄλλαι μέθοδοι: Εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου τοῦ σχήματος 68, προσαρμόζομεν μίαν σφαῖραν μάζης m καί, ἀφοῦ τὸ ἐκτείνομεν κατὰ λ, τὸ ἀφίνομεν ἐλεύθερον*. Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω *(§ 73)*, ἡ σφαῖρα θὰ ἐκτελέσῃ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ ἐλατηρίου θὰ μετατρέπεται περιοδικῶς εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῆς σφαίρας, καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράψωμεν διὰ κάθε χρονικὴν στιγμὴν

$$E_{\delta\upsilon\nu} + E_{\kappa\iota\nu} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς μεγίστης ἐπιμηκύνσεως τοῦ ἐλατηρίου, ὅλη ἡ ἐνέργεια ἔχει μετατραπῇ εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν § 42, εἶναι $1/2\ D \cdot \lambda^2$. Ἀντιστρόφως, κατὰ τὴν διάβασιν τῆς σφαίρας διὰ τῆς θέσεως ἰσορροπίας ὅλη ἡ ἐνέργεια ἔχει μετατραπῇ εἰς κινητικήν. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας ἔχομεν

$$\left(E_{\delta\upsilon\nu} + E_{\kappa\iota\nu}\right)_{\substack{\text{εἰς τὴν θέσιν με-}\\ \text{γίστης μηκύνσεως}}} = \left(E_{\delta\upsilon\nu} + E_{\kappa\iota\nu}\right)_{\substack{\text{εἰς τὴν θέσιν}\\ \text{ἰσορροπίας}}}$$

$$\frac{1}{2} D \cdot \lambda^2 + 0 \quad = \quad 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σφαῖρα κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διαβάσεώς της ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας.

---

* Ἐπὶ τοῦ συστήματος θεωροῦμεν ὅτι δὲν ἐπιδρᾷ ἡ βαρύτης.

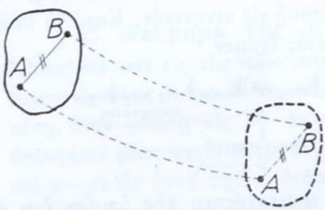
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

§ 44. Εἴδη κινήσεως. Ἡ ἁπλουστέρα ἐκ τῶν δυνατῶν κινήσεων ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ἡ ***μεταφορικὴ κίνησις***, ἡ κίνησις δηλ. ἐκείνη καθ' ἣν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα καί, συνεπῶς, διατρέχουν παραλλήλους τροχιάς. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην κάθε εὐθεῖα τοῦ σώματος παραμένει διαρκῶς παράλληλος πρὸς ἑαυτὴν *(σχ. 70)*.



Σχ. 70. Κατὰ τὴν μεταφορικὴν κίνησιν ἡ εὐθεῖα ΑΒ παραμένει παράλληλος πρὸς ἑαυτήν.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ τροχιὰ ἑκάστου σημείου τοῦ σώματος κεῖται διαρκῶς ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἡ κίνησις καλεῖται **ἐπίπεδος.** Εἰς τὴν κίνησιν αὐτὴν τὰ ἐπίπεδα τῶν τροχιῶν τῶν διαφόρων σημείων εἶναι παράλληλα μεταξύ των.

Ἄλλο εἶδος κινήσεως ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ἡ ***στροφικὴ κίνησις***. Αὕτη εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἐκείνη κίνησις καθ' ἣν ὅλα τὰ σημεῖα τὰ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον περιστροφῆς), τοῦ **ἄξονος,** παραμένουν ἀκίνητα, ἐνῷ τὰ διάφορα ἄλλα σημεῖα ἔχουν διαφόρους ταχύτητας, ἀναλόγως τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Ἤτοι

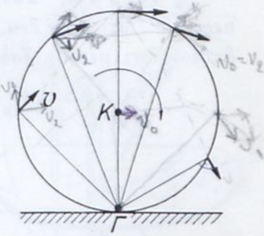
$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r}$$

Ὁ ἄξων δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σώματος· δύναται νὰ εὑρίσκεται καὶ ἔξω αὐτοῦ.

Ἄλλη ἁπλῆ κίνησις ἑνὸς στερεοῦ εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕνα σημεῖον αὐτοῦ παραμένει διαρκῶς ἀκίνητον. Τοιαύτην κίνησιν ἐκτελεῖ ὁ στρόβος (βλ. κατωτέρω *§ 67)*.

Ἐκτὸς τῶν ἁπλῶν αὐτῶν κινήσεων, ἕνα στερεὸν δύναται νὰ ἐκτελέσῃ καὶ πολυπλοκωτέρας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἐπαλληλία τῶν πρώτων.

Ὅπως ἀποδεικνύεται, πᾶσα ἐπίπεδος κίνησις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ περιστροφὴν περὶ ἄξονα καὶ ἀπὸ μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ ἄξονος τούτου. Οὕτω, ἡ κίνησις κυλίνδρου κυλιομένου ἐπὶ ἐπιπέδου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιστροφὴ τοῦ κυλίνδρου περὶ τὸν ἄξονα Κ *(σχ. 71)* μὲ ταυτόχρονον μεταφορὰν τοῦ ἄξονος. Ἡ αὐτὴ κίνησις δύναται νὰ περιγραφῇ καὶ ἄλλως: Ἡ ταχύτης ἑκάστου σημείου τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ταχύτητος τῆς προερχομένης λόγῳ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ταχύτητος λόγῳ τῆς περιστροφῆς περὶ αὐτόν. Δι' ὡρισμένα σημεῖα τοῦ σώματος ἡ συνισταμένη αὕτη ταχύτης θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τὰ σημεῖα ταῦτα ἀποτελοῦν τὸν **στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς**. Κατὰ ταῦτα, *πᾶσα ἐπίπεδος κίνησις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περιστροφὴ περὶ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα*, ὁ ὁποῖος δυνατὸν καὶ νὰ μετακινῆται ἐν τῷ χώρῳ.



Σχ. 71. *Κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ τροχοῦ τὸ σημεῖον Γ μένει πρὸς στιγμὴν ἀκίνητον.*

§ 45. Βαθμοὶ ἐλευθερίας. Ἡ θέσις ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου ἐλευθέρως εἰς τὸν χῶρον κινουμένου, καθορίζεται ἀπὸ τὰς τρεῖς συντεταγμένας του. Λέγομεν, λοιπόν, ὅτι τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἔχει *τρεῖς* βαθμοὺς ἐλευθερίας. Ἂν ἡ κίνησίς του περιορίζεται ἐπὶ ὡρισμένης ἐπιφανείας, ἔχομεν *δύο* βαθμοὺς ἐλευθερίας· ἂν ἐπὶ ὡρισμένης γραμμῆς, *ἕνα* βαθμὸν ἐλευθερίας *.

Ἕνα στερεὸν σῶμα ἔχει συνολικῶς ἓξ βαθμοὺς ἐλευθερίας: τρεῖς ἀντιστοιχοῦντας εἰς τὴν μεταφορικήν του κίνησιν ὡς ὅλου (τρεῖς συντεταγμέναι ταχύτητος) καὶ τρεῖς ἀντιστοιχοῦντας εἰς τὴν περιστροφικήν του κίνησιν (τρεῖς συντεταγμέναι γωνιακῆς ταχύτητος).

Ὅταν ἡ θέσις τοῦ σώματος ἢ ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος εἶναι καθωρισμέναι, τὸ στερεὸν ἔχει ὀλιγωτέρους βαθμοὺς ἐλευθερίας. Οὕτω, ὁ *σφόνδυλος* μηχανῆς στερεωμένης ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἔχει ἕνα μόνον βαθμὸν ἐλευθερίας, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν γωνιακὴν ταχύτητα, ἡ ὁποία ἔχει μόνον μίαν συνιστῶσαν συμπίπτουσαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς μηχανῆς.

---

* Παραδείγματα τῶν τριῶν αὐτῶν περιπτώσεων ἔχομεν εἰς ἀερόστατον τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης ἔχει τρεῖς συντεταγμένας, εἰς πλοῖον κινούμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο συντεταγμένας ταχύτητος καὶ εἰς σιδηρόδρομον κινούμενον ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν του, ὁ ὁποῖος ἔχει μίαν συντεταγμένην ταχύτητος.

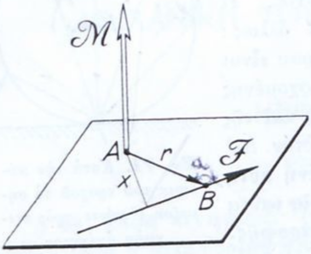
Σ(λιεχ2ε)1/ ι07

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ϛ'.

ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

§ 46. Ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. Ὡς *ῥοπὴν* μιᾶς δυνάμεως $\mathcal{F}$ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον Α *(σχ. 72)* ὁρίζομεν ἕνα ἄνυσμα $\mathcal{M}$ τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς x ἀπὸ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου. Ἤτοι

$$M = F \cdot x \qquad (1)$$



Σχ. 72. *Τὰ ἀνύσματα r, $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{M}$ ἀποτελοῦν δεξιόστροφον σύστημα.*

Ἡ διεύθυνσις τῆς ῥοπῆς λαμβάνεται ἐξ ὁρισμοῦ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως καὶ τοῦ σημείου, ἡ δὲ φορά της τοιαύτη ὥστε, συνδυαζομένη μὲ τὴν φορὰν τῆς στροφῆς τὴν ὁποίαν τείνει νὰ προσδόσῃ ἡ δύναμις, ν' ἀποτελῇ κίνησιν δεξιοστρόφου κοχλίου.

Τὴν ῥοπὴν δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου Α φέρωμεν τὴν ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα r πρὸς τυχὸν σημεῖον Β τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ῥοπὴν ὡς τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον τῶν ἀνυσμάτων r καὶ $\mathcal{F}$. Ἤτοι

$$\boxed{\mathcal{M} = [\, r \cdot \mathcal{F} \,]} \qquad (2)$$

Ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς παρέχει ὄντως τὸ αὐτὸ ἄνυσμα $\mathcal{M}$ ὅπως ὁ προηγούμενος. Διότι ἀπὸ τὴν ἀνυσματικὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτει ὅτι τὸ μὲν μέτρον εἶναι

$$M = F \cdot r \cdot \text{ημ}\, \alpha = F \cdot x$$

ἡ δὲ φορά, διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ὁποίας θεωροῦμεν τὸ ἄνυσμα r μετακινούμενον ἐπὶ τοῦ φορέως του ἕως ὅτου ἡ ἀρχή του ἔλθῃ εἰς τὸ σημεῖον Β, εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὡρίσαμεν προηγουμένως.

Ἡ ῥοπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον ἔχει, προφανῶς, τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ μετακινηθῇ ἐπὶ τοῦ φορέως της. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δύναμις εἶναι ὀλισθαῖνον ἄνυσμα.

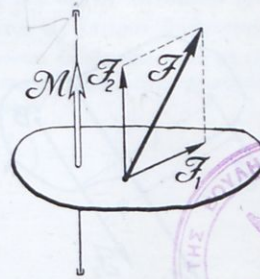
Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ῥοπῆς. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχομεν

$$[\,M\,] = [\,F\,] \cdot [\,x\,]$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S μονὰς ῥοπῆς εἶναι ἡ 1 dyn · cm, εἰς δὲ τὸ Τ. Σ. τὸ 1 kgr* m (χιλιογραμμόμετρον).

§ 47. Ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα. Ἔστω δύναμις κειμένη ἐντὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ ἕνα ἄξονα. Ὁρίζομεν ὡς ***ροπὴν*** τῆς δυνάμεως ταύτης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἕνα ἄνυσμα $\mathcal{M}$ τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ φορέα τὸν ἄξονα. Ἡ φορὰ εὑρίσκεται ὅπως καὶ προηγουμένως μὲ τὸν κανόνα τοῦ δεξιοστρόφου κοχλίου.

Ἐὰν ἡ δύναμις δὲν κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα *(σχ. 73)*, τότε ὡς ροπὴν αὐτῆς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ὁρίζομεν τὴν ροπὴν τῆς προβολῆς $\mathcal{F}_1$ τῆς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.



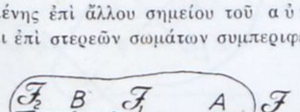
Σχ. 73. *Μόνον ἡ συνιστῶσα $\mathcal{F}_1$ ἔχει ροπὴν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.*

§ 48. Θεώρημα τῶν ροπῶν. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ . . . καὶ $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ . . . αἱ ροπαὶ τῶν δυνάμεων αὐτῶν ὡς πρὸς ἓν σημεῖον Σ (ἢ ἄξονα). Διὰ τὴν συνισταμένην $\mathcal{M}_{ολ}$ τῶν ροπῶν αὐτῶν ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης πολλῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν ***(θεώρημα τῶν ροπῶν).***

Κατὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην ροπὴν εἴτε ἀντικαθιστῶντες τὰς δυνάμεις διὰ τῆς συνισταμένης των καὶ εὑρίσκοντες τὴν ροπὴν ταύτης, εἴτε εὑρίσκοντες τὰς ροπὰς μιᾶς ἑκάστης δυνάμεως καὶ σχηματίζοντες τὸ ἀνυσματικόν των ἄθροισμα.

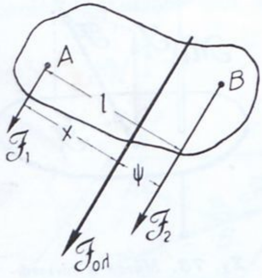
§ 49. Ἡ δύναμις ὡς ὀλισθαῖνον ἄνυσμα. Πᾶσα δύναμις ἐξασκουμένη εἴς τι σημεῖον στερεοῦ σώματος δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἴσης δυνάμεως ἐφηρμοσμένης ἐπὶ ἄλλου σημείου τοῦ α ὐ τ ο ῦ φορέως. Αἱ δυνάμεις, λοιπόν, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ στερεῶν σωμάτων συμπεριφέρονται ὡς ὀλισθαίνοντα ἀνύσματα. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι εὔκολος ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι δύο δυνάμεις ἐξασκούμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἰσορροποῦν ἐὰν εἶναι ἴσαι, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ φορέως καὶ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς. Ἔστω ἤδη ὅτι ἐπί τινος σώματος ἐξασκεῖται μία δύναμις $\mathcal{F}$ *(σχ. 74)*. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θεωροῦμεν ὅτι εἴς τι σημεῖον Β τοῦ φορέως της ἐξασκοῦνται δύο πρόσθετοι δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ ἴσαι μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν πρώτην, πρὸς δὲ καὶ ἀντίρροποι. Τοῦτο οὐδόλως μεταβάλλει τὴν κατάστασιν ἀφοῦ αἱ δύο αὗται δυνάμεις ἀλληλοαναιροῦνται. Ἐπειδὴ τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{F}_2$ ἰσορροπεῖ, αἱ δυνάμεις αὐταὶ δύνανται ν' ἀφαιρεθοῦν, ὁπότε ἀπομένει ἡ δύναμις $\mathcal{F}_1$, ἡ ὁποία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι ἡ $\mathcal{F}$ ἐφηρμοσμένη τώρα εἰς τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 74. *Πᾶσα δύναμις ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος δύναται νὰ μετατεθῇ κατὰ μῆκος τοῦ φορέως της.*

§ 50. Σύνθεσις δυνάμεων ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος. Εἰς τὴν § 31 ἠσχολήθημεν μὲ τὴν σύνθεσιν δυνάμεων ἐξασκουμένων ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν δυνάμεις μὲ διάφορα σημεῖα ἐφαρμογῆς. Ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ ἀντικατάστασις τῶν δυνάμεων διὰ μιᾶς συνισταμένης δὲν εἶναι δυνατὴ παρὰ μόνον εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις.

1) **Σύνθεσις δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων.** Ἔστω ὅτι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B *(σχ. 75)* ἑνὸς σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν *(§ 48)*, τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον (π.χ. τὸ σημεῖον A) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης $\mathcal{F}_{ολ}$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἤτοι



Σχ. 75.

$$F_2 \cdot 1 + F_1 \cdot 0 = F_{ολ} \cdot x$$

Τὸ αὐτὸ θεώρημα, ἐφαρμοζόμενον ὡς πρὸς τὸ σημεῖον B, δίδει

$$F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 0 = F_{ολ} \cdot y$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x}{y}$$

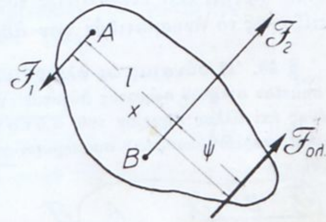
Διὰ προσθέσεως τῶν δύο ἐξισώσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$F_{ολ} = F_1 + F_2$$

(δεδομένου ὅτι $x + y = l$).

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν, ὁ δὲ φορεὺς αὐτῆς διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν l τῶν δύο δυνάμεων εἰς τμήματα x καὶ y ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν*.

2) **Σύνθεσις δυνάμεων παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων.** Ἔστω ὅτι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἑνὸς σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ *(σχ. 76)* παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι.



Σχ. 76.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ἔχομεν διὰ μὲν τὸ σημεῖον A

$$F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 1 = F_{ολ} \cdot x$$

διὰ δὲ τὸ σημεῖον B

$$F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 0 = F_{ολ} \cdot y$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

Δι' ἀφαιρέσεως δὲ

$$(F_2 - F_1) \cdot 1 = F_{ολ} \cdot (x - y)$$

Ἐπειδὴ $x - y = l$, ἔχομεν

$$F_{ολ} = F_2 - F_1 \qquad (2)$$

* Αὐτονόητον ὅτι ἡ συνισταμένη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δύο συνιστώσας διότι ἡ προβολή της ἐπὶ ἄξονος καθέτου πρὸς αὐτὰς θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

Ἡ συνισταμένη κεῖται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο συνιστωσῶν καθόσον ἡ ροπὴ αὐτῆς ὡς πρὸς ἄξονα, κείμενον ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δύο συνιστωσῶν, δηλ. ἴση πρὸς μηδὲν (ἀφοῦ αἱ δύο αὗται συνιστῶσαι τέμνουν τὸν ἄξονα).

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέτρον τῆς συνισταμένης ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μέτρων τῶν δύο συνιστωσῶν, ὁ δὲ φορεὺς αὐτῆς εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε αἱ ἀποστάσεις x καὶ y ἀπὸ τὰς δύο συνιστώσας νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μέτρων τῶν συνιστωσῶν.

3) **Ζεῦγος δυνάμεων.** ***Ζεῦγος δυνάμεων*** καλεῖται σύστημα δύο παραλλήλων δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἀλλ᾽ ἀντιθέτους φοράς. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ συνισταμένη τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς μηδέν, ὁ δὲ φορεύς της εὑρίσκεται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ταύτης ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς προηγουμένης περιπτώσεως. Διὰ ν᾽ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ x διὰ τοῦ $l + y$, ὁπότε λαμβάνομεν

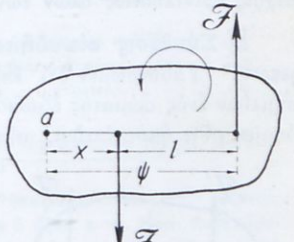
$$y = (l + y) \cdot \frac{F_1}{F_2} \qquad \text{καὶ} \qquad y\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right) = l \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως προκύπτει

$$y = l \cdot \frac{F_1}{F_2 - F_1}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης βλέπομεν ὅτι ἐπειδὴ εἰς τὸ ζεῦγος αἱ δύο δυνάμεις F_2 καὶ F_1 ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον ὁ παρανομαστὴς γίνεται ἴσος πρὸς μηδὲν καὶ ἡ ἀπόστασις y ἴση πρὸς ἄπειρον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τὸ ζεῦγος δυνάμεων δὲν εἶναι δυνατὸν ν᾽ ἀντικατασταθῇ διὰ μιᾶς δυνάμεως διότι τὸ ζεῦγος προκαλεῖ μίαν καθαρῶς στροφικὴν κίνησιν, ἡ ὁποία ὅμως δὲν δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ μιᾶς μόνης δυνάμεως.



Σχ. 77. Ἡ ῥοπὴ ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου ἀναφορᾶς.

Ἡ ῥοπὴ τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ δύο δυνάμεις τοῦ ζεύγους ὡς πρὸς οἱονδήποτε ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ* *(σχ. 77)* ἔχει μέτρον τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται εἰς

$$M = F \cdot y - F \cdot x = F\,(y - x)$$

ἢ

$$\boxed{M = F \cdot l} \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ῥοπὴ αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος, ἐξαρτωμένη μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}$ καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν l τούτων, ἡ ὁποία καὶ καλεῖται *βραχίων τοῦ ζεύγους*. Τὸ γινόμενον αὐτῶν $F \cdot l$ καλεῖται ***ῥοπὴ τοῦ ζεύγους.***

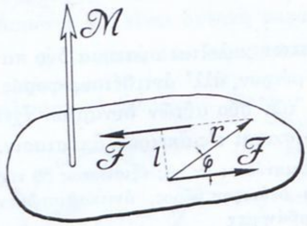
Ἀνυσματικῶς ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{M} = [\,r \cdot \mathcal{F}\,]$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ἡ φερομένη ἔκ τινος σημείου τῆς μιᾶς δυνάμεως εἰς

* Εἰς τὸ σχῆμα 77 τὸ σημεῖον a εἶναι ὁ πούς τοῦ ἄξονος.

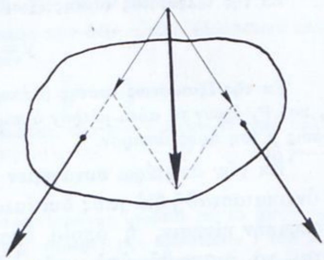
οἱονδήποτε σημεῖον τῆς ἄλλης *(σχ. 78)* καὶ $\mathcal{F}$ ἡ δύναμις εἰς τὴν ὁποίαν καταλήγει ἡ ἐπιβατικὴ αὐτὴ ἀκτίς. Πράγματι, τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον $[r \cdot \mathcal{F}]$ ἀποδίδει ὅλας τὰς ἰδιότητας τῆς ῥοπῆς τοῦ ζεύγους *, δηλαδὴ ἔχει μέτρον ἴσον πρὸς $r \cdot F \cdot \eta\mu\,\varphi = F \cdot l$, διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ζεύγους καὶ φορὰν καθοριζομένην ἀπὸ τὸν δεξιόστροφον κοχλίαν.



Σχ. 78.

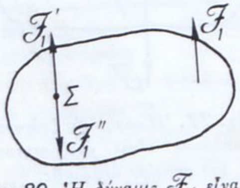
Ὡς ἀποδεικνύεται, ἐὰν ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἐξασκοῦνται πολλὰ ζεύγη δυνάμεων, ἡ συνολικὴ ῥοπὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ὅλων τῶν ζευγῶν.

4) **Σύνθεσις ὁμοεπιπέδων ἀλλὰ μὴ παραλλήλων δυνάμεων.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συνισταμένην δύο οἱωνδήποτε ὁμοεπιπέδων δυνάμεων *(σχ. 79)*, τὰς μετακινοῦμεν ἐπὶ τῶν φορέων των μέχρις ὅτου τμηθοῦν εἰς ἕνα σημεῖον, ὁπότε καὶ εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην διὰ τῆς μεθόδου τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐὰν πρόκειται περὶ περισσοτέρων δυνάμεων, εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὴν συνισταμένην δύο ἐξ αὐτῶν, ἔπειτα τὴν συνισταμένην αὐτῆς μετὰ τῆς τρίτης κ.ο.κ. μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δυνάμεων.



Σχ. 79. *Γραφικὸς τρόπος εὑρέσεως τοῦ φορέως τῆς συνισταμένης.*

5) **Σύνθεσις οἱωνδήποτε δυνάμεων.** Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ διαφόρων σημείων ἑνὸς σώματος ἐξασκοῦνται αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4 \ldots$ αἱ ὁποῖαι οὔτε ὁμοεπίπεδοι, οὔτε παράλληλοι εἶναι. Διὰ νὰ συνθέσωμεν ὅλας αὐτὰς τὰς δυνάμεις ἀνάγομεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν εἰς ἕνα σημεῖον κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ἂν εἰς ἕνα σημεῖον Σ *(σχ. 80)* φέρωμεν δύο δυνάμεις $\mathcal{F}_1'$, $\mathcal{F}_1''$ ἴσας μεταξύ των καὶ πρὸς τὴν $\mathcal{F}_1$ παραλλήλους δὲ καὶ ἀντιρρόπους — πρᾶγμα τὸ ὁποῖον οὐδόλως μεταβάλλει τὴν κατάστασιν — παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν μίαν δύναμιν $\mathcal{F}_1'$ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν $\mathcal{F}_1$ καὶ ἕνα ζεῦγος $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1''$. Τὴν ἀντικατάστασιν μιᾶς δυνάμεως διὰ μιᾶς ῥοπῆς καὶ διὰ μιᾶς ἄλλης δυνάμεως ἴσης πρὸς αὐτὴν ἀλλ' ἐφαρμοζομένης εἰς ἄλλο σημεῖον καλοῦμεν **ἀναγωγὴν τῆς δυνάμεως** ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας δυνάμεις $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \ldots$ διὰ



Σχ. 80. *Ἡ δύναμις $\mathcal{F}_1$ εἶναι ἰσότιμος μὲ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}_1'$ καὶ τὸ ζεῦγος $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1''$.*

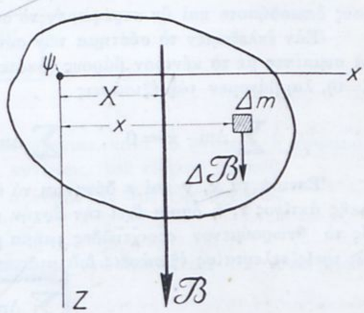
* Ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους εἶναι ἐλεύθερον ἄνυσμα *(§ 2)* διότι παραμένει ἀμετάβλητος ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος.

τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ, θὰ λάβωμεν τελικῶς ὡρισμένον ἀριθμὸν δυνάμεων, διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ, καὶ ὡρισμένον ἀριθμὸν ροπῶν. Τὰς δυνάμεις ταύτας καὶ τὰς ροπὰς συνθέτομεν κατὰ τὰ γνωστά, ὁπότε προκύπτει μία συνισταμένη δύναμις καὶ μία συνισταμένη ροπή.

Τὰ ἀνωτέρω ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἑξῆς προτάσεως:

Σύστημα οἱωνδήποτε δυνάμεων εἶναι δυνατὸν ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς (συνισταμένης) δυνάμεως καὶ μιᾶς (συνισταμένης) ροπῆς. Ἡ συνισταμένη δύναμις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου, ἐνῷ ἡ συνισταμένη ροπὴ προφανῶς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο*.

§ 51. Κέντρον βάρους. Ἕκαστον σῶμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλὰ μικρὰ τμήματα μάζης Δm *(σχ. 81)*, ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ πεδίον βαρύτητος ἐξασκεῖ τὴν δύναμιν Δ$\mathcal{B}$. Ἡ συνισταμένη $\mathcal{B}$ ὅλων αὐτῶν τῶν στοιχειωδῶν δυνάμεων ὀνομάζεται ***βάρος*** τοῦ σώματος. Ἐπειδὴ ὅλαι αἱ στοιχειώδεις αὗται δυνάμεις εἶναι κατακόρυφοι, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος, ὡς συνισταμένη αὐτῶν, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου.



Σχ. 81. *Ὁ φορεὺς τοῦ βάρους $\mathcal{B}$ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος.*

Διὰ τὸν φορέα τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$ ἰσχύει, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τὸ ἑξῆς χαρακτηριστικόν: Ὁπωσδήποτε καὶ ἂν στρέψωμεν τὸ σῶμα, ὁ φορεὺς τοῦ βάρους διέρχεται δι' ἑνὸς σημείου σταθεροῦ ὡς πρὸς τὸ σῶμα. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***κέντρον βάρους***.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν φορέα τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$, θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ σώματος τρισορθογώνιον σύστημα συντεταγμένων τοιοῦτον ὥστε ὁ ἄξων z νὰ εἶναι κατακόρυφος. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ἡ ροπὴ τοῦ βάρους ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτοῦ. Ἤτοι

$$B \cdot X = \sum \Delta B \cdot x$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ B καὶ ΔB διὰ τῶν ἴσων των Mg καὶ Δm · g, λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν X τοῦ φορέως ἀπὸ τὸν ἄξονα y τὴν τιμὴν

$$X = \frac{\sum \Delta m \cdot x}{M}$$

Ἐὰν τώρα ἐπαναλάβωμεν τὸν συλλογισμὸν διὰ τὸν ἄξονα x, θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Psi = \frac{\sum \Delta m \cdot y}{M}$$

* Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνισταμένη δύναμις προκύψῃ ἴση πρὸς μηδέν, ἡ συνισταμένη ροπὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ ἐκλεγέντος σημείου.

Ἐάν, τέλος, στρέψωμεν τὸ σῶμα κατὰ τρόπον ὥστε ἀλληλοδιαδόχως οἱ ἄξονες x καὶ y νὰ γίνουν κατακόρυφοι, θὰ ἔχωμεν διὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$\Psi = \frac{\sum \Delta m \cdot y}{M} \quad \text{καὶ} \quad Z = \frac{\sum \Delta m \cdot z}{M}$$

διὰ δὲ τὴν δευτέραν

$$X = \frac{\sum \Delta m \cdot x}{M} \quad \text{καὶ} \quad Z = \frac{\sum \Delta m \cdot z}{M}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ φορεὺς καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις διέρχεται δι᾽ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς συντεταγμένας X, Ψ, Z καὶ τὸ ὁποῖον ὡρίσαμεν ὡς κέντρον βάρους. Ὡς ἀποδεικνύεται, ὁ φορεὺς τοῦ βάρους διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους ὁπωσδήποτε καὶ ἂν στρέψωμεν τὸ σῶμα.

Ἐὰν ἐκλέξωμεν τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἀρχή των νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον βάρους (ὁπότε τοῦτο θὰ ἔχῃ συντεταγμένας X=0, Ψ=0, Z=0), λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

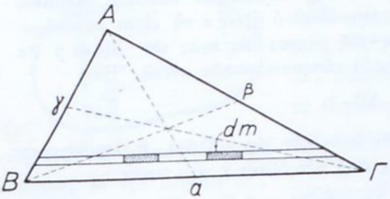
$$\sum \Delta m \cdot x = 0 \quad , \quad \sum \Delta m \cdot y = 0 \quad , \quad \sum \Delta m \cdot z = 0$$

Ἐπειδὴ τὰ x, y καὶ z δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ συντεταγμέναι μιᾶς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος r, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἀρχήν της εἰς τὸ κέντρον βάρους καὶ τὸ τέλος της εἰς τὸ θεωρούμενον στοιχειῶδες τμῆμα μάζης Δm, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰς τρεῖς τελευταίας ἐξισώσεις διὰ μιᾶς, τῆς ἑξῆς:

$$\boxed{\sum \Delta m \cdot r = 0}$$

Ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἐξαρτᾶται, κατὰ τὰς ἄνω ἐξισώσεις, μόνον ἀπὸ τὴν κατανομὴν τῆς μάζης ἐν τῷ χώρῳ, διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτὸν καὶ ὀνομάζεται, ἐνίοτε, *κέντρον μάζης*.

Ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἔχῃ ἁπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα, ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους δύναται νὰ καθορισθῇ εὐκόλως. Οὕτω, ὅταν τὸ σῶμα ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας, τὸ κέντρον βάρους θὰ κεῖται ἐπ᾽ αὐτοῦ.



Σχ. 82. *Τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς τριγώνου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν διαμέσων.*

Τὸ κέντρον βάρους ἐπιπέδου τριγωνικῆς ἐπιφανείας *(σχ. 82)* εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου Aα διότι ἂν χωρίσωμεν τὸ τρίγωνον δι᾽ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν BΓ εἰς ἀπείρως στενὰς λωρίδας, διὰ κάθε τμῆμα dm ἑκάστης ἐξ αὐτῶν ὑπάρχει ἄλλο τμῆμα ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῆς διαμέσου καί, συνεπῶς, τὸ κέντρον βάρους τῶν δύο κεῖται ἐπ᾽ αὐτῆς. Ἐπειδὴ δέ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ κέντρον βάρους θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διαμέσου Bβ καὶ ἐπὶ τῆς Γγ, ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἐπιπέδου τριγωνικῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν τριῶν διαμέσων.

§ 52. Εἰδικὸν βάρος - Πυκνότης. ***Εἰδικὸν βάρος*** ε καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους B ἑνὸς σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ. Ἤτοι

$$\boxed{\varepsilon = \frac{B}{V}}$$

Μονάδες α) **C.G.S.** 1 dyn/cm^3.
β) **Τ.Σ.** 1 kgr^*/m^3. Ἀντ' αὐτοῦ χρησιμοποιεῖται συνήθως τὸ 1 gr^*/cm^3.

Πυκνότης ϱ ἑνὸς σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς μάζης m διὰ τοῦ ὄγκου V τοῦ σώματος. Ἤτοι

$$\boxed{\varrho = \frac{m}{V}}$$

Μονάδες: C.G.S. 1 gr/cm^3.

Σημείωσις. Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα ἀποφεύγεται, κατὰ τὸ δυνατόν, ἡ χρησιμοποίησις τῆς πυκνότητος, χρησιμοποιουμένου, συνήθως, τοῦ εἰδικοῦ βάρους.

Ἡ πυκνότης καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

$$\varepsilon = \varrho \cdot g$$

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $B = m \cdot g$. Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ὄγκου V, λαμβάνομεν

$$\varepsilon = \frac{B}{V} = \frac{mg}{V} = \varrho \cdot g$$

505

§ 53. Συνθήκη ἰσορροπίας πολλῶν δυνάμεων ἐξασκουμένων ἐπὶ στερεοῦ σώματος. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἕνα σύστημα δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐπιδροῦν ὁπωσδήποτε ἐπὶ στερεοῦ σώματος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ συνισταμένη δύναμις καὶ ἡ συνισταμένη ροπὴ νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν. Τοῦτο ἀποδίδεται διὰ τῶν ἀνυσματικῶν ἐξισώσεων

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \mathcal{F} = 0 \\ \sum \mathcal{M} = 0 \end{array}}$$

§ 54. Εἴδη ἰσορροπίας. Ἔστω σῶμα τι εὑρισκόμενον ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν αὐτὸ ὀ λ ί γ ο ν ἐκ τῆς θέσεώς του, αἱ δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ἐπ' αὐτοῦ δυνατὸν νὰ μεταβληθοῦν καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη αὐτῶν δύναμις (ἢ ροπὴ) νὰ λάβῃ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Τὸ σῶμα πλέον δὲν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Καὶ ἂν μὲν ἡ συνισταμένη δύναμις (ἢ ροπή) εἶναι τοιαύτη ὥστε τὸ σῶμα νὰ ἐπανέλθῃ ἐκ νέου εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, ἡ ἰσορροπία εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο εὑρίσκεται θὰ ὀνομασθῇ ***εὐσταθής***, ἐνῶ, ἂν ἡ συνισταμένη δύναμις (ἢ ροπὴ) τείνῃ νὰ τὸ ἀπομακρύνῃ ἀκόμη περισσότερον, θὰ ὀνομασθῇ ***ἀσταθής***. Τρίτη περίπτωσις εἶναι ἡ τῆς ***ἀδια-***

φόρου ἰσορροπίας, ἐκείνης δηλ. καθ' ἥν, παρὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ σώματος ἐκ τῆς θέσεώς του, αἱ δυνάμεις ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσορροποῦν.

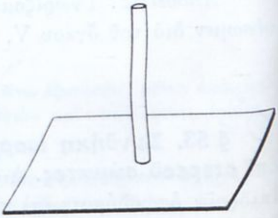
Σχ. 83. Αἱ τρεῖς περιπτώσεις ἰσορροπίας.

Οὕτω, ἐκ τῶν τριῶν σφαιρῶν τοῦ σχήματος 83, ἡ μὲν πρώτη εὑρίσκεται εἰς ἀδιάφορον, ἡ δευτέρα εἰς εὐσταθῆ καὶ ἡ τρίτη εἰς ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.

Τὰ τρία ταῦτα εἴδη ἰσορροπίας δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν καὶ ἄλλως, χρησιμοποιοῦντες τὴν ἔννοιαν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ σῶμα.

Ὅπως ἀνεφέραμεν ἀνωτέρω, κατὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν τοῦ σώματος ἀπὸ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἐμφανίζεται μία συνισταμένη δύναμις (ἢ ροπή), ἡ ὁποία εἴτε παράγει, εἴτε καταναλίσκει ἔργον. Καὶ ὅταν μὲν παράγῃ ἔργον, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος αὐξάνεται, ὅταν δὲ καταναλίσκῃ, ἐλαττοῦται. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι *εἰς τὰς θέσεις ἰσορροπίας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια λαμβάνει ἀκροτάτας τιμὰς καὶ δὴ εἰς μὲν τὴν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν γίνεται ἐλαχίστη, εἰς δὲ τὴν ἀσταθῆ μεγίστη.*

Κατὰ ταῦτα, τὸ εἶδος τῆς ἰσορροπίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φορὰν τῶν δυνάμεων (ἢ ροπῶν) αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται κατὰ μίαν π ο λ ὺ μ ι κ ρ ὰ ν μετακίνησιν τοῦ σώματος. Ὅταν ὅμως ἡ μετακίνησις εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη, εἶναι δυνατόν, ἐνῷ αἱ δυνάμεις ἀρχικῶς ἔτεινον νὰ ἐπαναφέρουν τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, νὰ μεταβληθῇ ἡ φορά των οὕτως ὥστε νὰ τὸ ἀπομακρύνουν ἀκόμη περισσότερον. Παράδειγμα τοιαύτης περιπτώσεως ἔχομεν εἰς τὴν κυλινδρικὴν ῥάβδον τοῦ σχήματος 84. Ἐὰν ὠθήσωμεν αὐτὴν ἐλαφρῶς, αὕτη ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν της, εὑρίσκεται δηλ. εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν. Ἐὰν ὅμως ἡ ὤθησις γίνῃ ἰσχυροτέρα, αὕτη ἀνατρέπεται. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ἡ εὐσταθὴς ἰσορροπία τῆς ῥάβδου ταύτης ἔχει μικρὸν ***βαθμὸν σταθερότητος,*** ἐν ἀντιθέσει πρὸς ἕνα κύβον, λ. χ., ὁ ὁποῖος ἀνατρέπεται μόνον ἐὰν ἐξασκήσωμεν ἐπ' αὐτοῦ ἀρκετὰ μεγάλας δυνάμεις.



Σχ. 84. Ἡ εὐσταθὴς ἰσορροπία τῆς ἀπεικονιζομένης ῥάβδου ἔχει μικρὸν βαθμὸν σταθερότητος.

ἔλα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

§ 55. Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος ἐκτελοῦντος μεταφορικὴν κίνησιν. Θεωρήσωμεν στερεὸν σῶμα μάζης m, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ μεταφορικὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα τῆς ὁποίας τὸ μέτρον ἔστω υ. Τὸ σῶμα τοῦτο ἔχει, λόγῳ τῆς κινήσεώς του ταύτης, κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{\kappa\iota\nu}$, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ὡς ἀκολούθως: Θεωροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μεγάλον ἀριθμὸν στοιχειωδῶν τμημάτων μάζης m_1, m_2, m_3 . . . καὶ ὑπολογίζομεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, ὁπότε ἡ συνολικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν τῶν στοιχειωδῶν αὐτῶν τμημάτων.

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς τμήματος μάζης m_i εἶναι $1/2\ m_i\, \upsilon_i^2$, ἐπομένως ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι

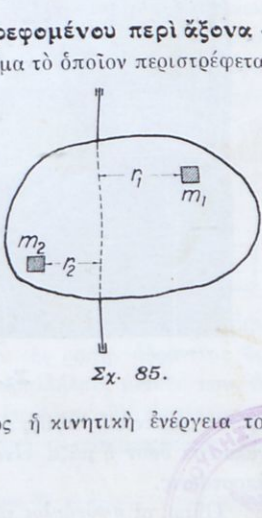
$$E_{\kappa\iota\nu} = \sum \frac{1}{2}\, m_i \cdot \upsilon_i^2$$

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης υ_i εἶναι ἡ αὐτὴ δι᾽ ὅλα τὰ στοιχειώδη τμήματα τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντ᾽ αὐτῆς υ, ὁπότε ἔχομεν

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, \upsilon^2 \sum m_i = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

ἔνθα τὸ $\sum m_i$ δίδει τὴν ὁλικὴν μᾶζαν m τοῦ σώματος.

§ 56. Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος στρεφομένου περὶ ἄξονα - Ροπὴ ἀδρανείας. Θεωρήσωμεν ἕνα στερεὸν σῶμα τὸ ὁποῖον περιστρέφεται περὶ μόνιμον ἄξονα μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα τῆς ὁποίας τὸ μέτρον ἔστω ω *(σχ. 85)*. Τὸ σῶμα τοῦτο ἔχει, λόγῳ τῆς κινήσεώς του ταύτης, κινητικὴν ἐνέργειαν $E_{\kappa\iota\nu}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν τῶν στοιχειωδῶν τμημάτων τὰ ὁποῖα τὸ ἀποτελοῦν. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ τμήματος μάζης m_1, εἶναι



Σχ. 85.

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, m_1 \upsilon_1^2$$

ἔνθα $\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης καὶ r_1 ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος. Ὁμοίως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ τμήματος μάζης m_2 εἶναι

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\, m_2 \upsilon_2^2$$

τοῦ τρίτου $1/2\ m_3 \upsilon_3^2$ κ. ο. κ.

Ἑπομένως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι

$$E_{\kappa\iota\nu} = \sum \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 r_i^2$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ σώματος, ἔχομεν

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 \qquad (1)$$

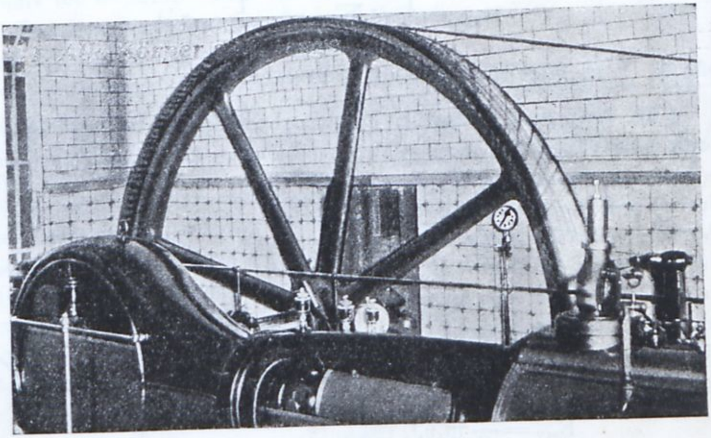
Ἂν ὀνομάσωμεν ***ῥοπὴν ἀδρανείας*** Θ τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα στροφῆς τὴν παράστασιν $\sum m_i \cdot r_i^2$, ἤτοι ἂν γράψωμεν

$$\boxed{\Theta = \sum m_i \cdot r_i^2} \qquad (2)$$

ἡ ἐξίσωσις (1), γράφεται

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας ἑνὸς σώματος ὡς πρὸς ἕνα ἄξονα ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν μᾶζαν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸν



Σχ. 86. Σφόνδυλος ἀτμομηχανῆς.

τρόπον κατανομῆς αὐτῆς περὶ τὸν θεωρούμενον ἄξονα. Αὕτη εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον ἡ μᾶζα εἶναι κατανεμημένη εἰς μεγαλυτέρας ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀποστάσεις.

Οὕτω, οἱ *σφόνδυλοι* τῶν μηχανῶν *(σχ. 86)* κατασκευάζονται μὲ τὴν μᾶζαν των συγκεντρωμένην εἰς τὴν περιφέρειαν, ἵνα, ὑπὸ δεδομένην μᾶζαν, ἔχουν τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν ῥοπὴν ἀδρανείας. Ἀκριβῶς δ' ἕνεκα τούτου εἶναι δυνατὸν νὰ διατηρῆται περίπου σταθερὰ ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἑνὸς κινητῆρος καὶ τῶν μετ' αὐτοῦ συνδεδεμένων μηχανῶν, ἔστω καὶ ἂν ἡ ὑπὸ τοῦ κινητῆρος παραγομένη συνολικὴ ῥοπὴ μεταβάλλεται κατὰ τὴν περιστροφήν.

Ὁμοίως ὁ ἄνθρωπος τοῦ σχήματος 87 δύναται, διὰ καταλλήλου συμπτύξεως τοῦ σώματός του, νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας αὐτοῦ.

Σχ. 87. Ὁ ἄνθρωπος μὲ ἀνατεταμένας τὰς χεῖρας (δεξιᾷ) ἔχει ῥοπὴν ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ λευκοῦ σημείου περίπου ἑξαπλασίαν τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας τὴν ὁποίαν ἔχει εἰς τὴν θέσιν συμπτύξεως (ἀριστερᾷ).

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας. Αἱ διαστάσεις τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας εἶναι

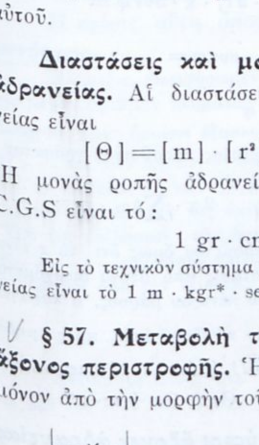
$$[\Theta] = [m] \cdot [r^2] = [ML^2]$$

Ἡ μονὰς ῥοπῆς ἀδρανείας εἰς τὸ σύστημα C.G.S εἶναι τό:

$$1 \text{ gr} \cdot \text{cm}^2$$

Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα μονὰς τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας εἶναι τὸ 1 m · kgr* · sec².

§ 57. Μεταβολὴ τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας μετὰ τῆς θέσεως τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. Ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας ἑνὸς σώματος θὰ ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ σώματος, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ἄξονος ὡς πρὸς τὸ σῶμα, θὰ μεταβάλλεται ἑπομένως ἂν μετακινήσωμεν τὸν ἄξονα παραλλήλως πρὸς ἑαυτόν. Μεταξὺ τῆς τιμῆς Θ_K τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους K τοῦ σώματος (*σχ. 88*) καὶ τῆς τιμῆς Θ_α ὡς πρὸς ἄλλον ἄξονα α παράλληλον πρὸς τὸν πρῶτον καὶ ἀπέχοντα ἐξ αὐτοῦ κατὰ x, ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις:



Σχ. 88. Ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους K εἶναι μικροτέρα παρὰ δι' οἱονδήποτε ἄλλον παράλληλον ἄξονα α.

$\Theta_\alpha = \Theta_K + m \cdot x^2$	Θεώρημα τοῦ Steiner

ἔνθα m εἶναι ἡ ὁλικὴ μᾶζα τοῦ σώματος. Ἐάν, λοιπόν, συγκρίνωμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας διὰ διαφόρους ἄξονας παραλλήλους μεταξύ των, θὰ εὕρωμεν ὅτι αὐτὴ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν δι' ἐκεῖνον τὸν ἄξονα ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος.

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Steiner. Εἰς τὸ σχῆμα 89 τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχεδίου θεωρεῖται κάθετον ἐπὶ τοὺς ἄξονας τοὺς διερχομένους διὰ τῶν σημείων K καὶ A.

Ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους εἶναι

$$\Theta_K = \sum \Delta m \cdot r_1^2 \quad \text{καὶ} \quad \Theta_A = \sum \Delta m \cdot r_2^2 \tag{1}$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ συνημιτόνου, ἔχομεν

$$r_2^2 = r_1^2 + x^2 - 2\, r_1 \cdot x \cdot \text{συν}\, \varphi$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντὶ τοῦ r_2^2 τὸ ἴσον του, ἔχομεν

$$\Theta_A = \sum \Delta m\ (r_1^2 + x^2 - 2\, r_1 \cdot x \cdot \text{συν}\, \varphi) =$$

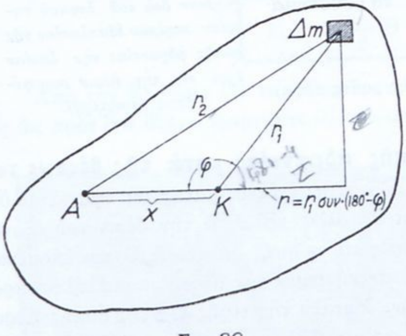
$$= \sum \Delta m \cdot r_1^2 + \sum \Delta m \cdot x^2 - \sum \Delta m \cdot 2\, r_1 \cdot x \cdot \text{συν}\, \varphi =$$

$$= \Theta_K + x^2 \cdot \sum \Delta m - 2\, x \cdot \sum \Delta m \cdot r_1 \cdot \text{συν}\, \varphi =$$

$$= \Theta_K + x^2 \cdot m - 2\, x \cdot \sum \Delta m \cdot r_1\ \text{συν}\, \varphi$$

Ἐπειδὴ $r = r_1\, \text{συν}\,(180^\circ - \varphi) = - r_1\, \text{συν}\, \varphi$, ὁ τελευταῖος προσθετέος γράφεται

$$2\, x \cdot \sum \Delta m \cdot r$$



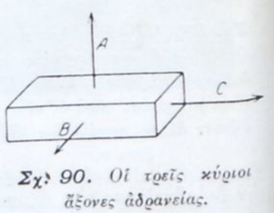
Σχ. 89.

Δεδομένου ὅμως ὅτι τὸ r εἶναι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους, ὁ παράγων $\sum \Delta m \cdot r$ εἶναι ἴσος πρὸς μηδὲν *(βλ. § 51)*, ὁπότε λαμβάνομεν τελικῶς

$$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot x^2$$

Κύριοι ἄξονες ἀδρανείας.

Ἂν συγκρίνωμεν τὰς ροπὰς ἀδρανείας ἑνὸς σώματος ὡς πρὸς διαφόρους ἄξονας οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ ροπὴ ἀδρανείας θὰ ἔχῃ μίαν μεγίστην καὶ μίαν ἐλαχίστην τιμήν. Ὡς ἀποδεικνύεται, οἱ δύο οὗτοι ἄξονες τέμνονται καθέτως. Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ ἕνα τρίτον ἄξονα διερχόμενον καὶ αὐτὸν ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων, θὰ λάβωμεν ἕνα τρισορθογώνιον σύστημα ἀξόνων, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ***κύριοι ἄξονες ἀδρανείας*** *(σχ. 90)*.



Σχ. 90. *Οἱ τρεῖς κύριοι ἄξονες ἀδρανείας.*

Οὕτω, ἐκ τῶν τριῶν κυρίων ἀξόνων ἀδρανείας μιᾶς ράβδου, ὁ ἄξων τῆς ἐλαχίστης ροπῆς ἀδρανείας συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῆς ράβδου, ἡ δὲ εἰς αὐτὸν ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς ροπῆς ἀδρανείας εἶναι πολὺ μικρά. Αἱ τιμαὶ διὰ τοὺς δύο ἄλλους κυρίους ἄξονας ἀδρανείας εἶναι σχετικῶς μεγάλαι καὶ ἴσαι μεταξύ των.

§ 58. Θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς στροφικῆς κινήσεως. Ὅπως μία δύναμις ἐξασκουμένη ἐπί τινος ὑλικοῦ σημείου ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐπιτάχυνσιν, οὕτω καὶ μία ῥοπὴ $\mathcal{M}$, ἐξασκουμένη ἐπὶ στερεοῦ σώματος στρεπτοῦ περὶ ἀκλόνητον ἄξονα, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν ω'. Μεταξὺ τοῦ αἰτίου—τῆς ῥοπῆς—καὶ τοῦ ἀποτελέσματος—τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως—ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις:

$$\boxed{\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'}$$

ἔνθα Θ εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς.

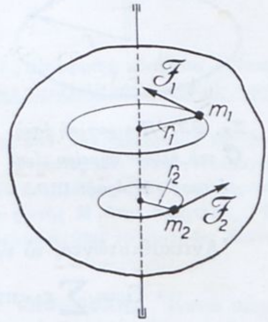
Ἡ σχέσις αὕτη ἀποτελεῖ τὴν ***θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς στροφικῆς κινήσεως.***

Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα ἔστω m, ὑποδιηρημένον εἰς μέγαν ἀριθμὸν τμημάτων μάζης $m_1, m_2 \ldots$, ἐπὶ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἐξασκοῦνται αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \ldots$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ καθοριζόμενον ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος καὶ τὰς ἀκτίνας $r_1, r_2 \ldots$ *(σχ. 91)*. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν, αἱ μᾶζαι $m_1, m_2 \ldots$ λαμβάνουν ἐπιταχύνσεις αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 = m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ v_1 διὰ τοῦ ἴσου του $\omega \cdot r_1$, λαμβάνομεν

$$F_1 = \frac{m_1 \cdot d(\omega \cdot r_1)}{dt}$$



Σχ. 91.

Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὴν περιστροφήν, ἡ μᾶζα m_1 διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν σταθερᾶς ἀκτίνος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς:

$$F_1 = \frac{m_1 \cdot r_1 \cdot d\omega_1}{dt}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη μὲ τὸ r_1, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot r_1^2 \cdot \frac{d\omega_1}{dt}$$

Ἀνάλογοι ἐξισώσεις ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς ἄλλας μᾶζας $m_2, m_3 \ldots$ Προσθέτοντες ἤδη ὅλας τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\sum F_i \cdot r_i = \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \frac{d\omega_i}{dt}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\sum F_i \cdot r_i$ παριστᾷ τὴν συνολικῶς ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκουμένην ῥοπὴν M καὶ τὸ $\frac{d\omega_i}{dt}$ εἶναι κοινὸς παράγων τοῦ ἀθροίσματος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$M = \frac{d\omega}{dt} \sum m_i \, r_i^2 = \omega' \cdot \Theta.$$

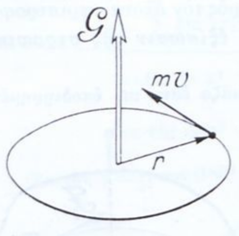
στροφορμη

§ 59. Στροφικὴ ὁρμή. Ἔστω ὑλικὸν σημεῖον μάζης m τὸ ὁποῖον περιστρέφεται μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος r. Ὡς γνωστόν, ἡ ὁρμὴ τοῦ ὑλικοῦ τούτου σημείου εἶναι ἴση πρὸς mv.

Καλοῦμεν ***στροφικὴν ὁρμὴν*** $\mathcal{G}$ τοῦ ὑλικοῦ τούτου σημείου τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον τῆς ὁρμῆς mv ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα r. Ἤτοι

$$\mathcal{G} = [r \cdot \mathrm{m}v]$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ στροφικὴ ὁρμὴ δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ὡς ἡ ῥοπὴ τῆς ὁρμῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Ἡ στροφικὴ ὁρμὴ εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος μὲ διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀνυσμάτων r καὶ mv, δηλ. κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς *(σχ. 92)*.



Σχ. 92. *Ἡ στροφικὴ ὁρμὴ $\mathcal{G}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἡ ῥοπὴ τῆς ὁρμῆς* mv.

Ἐν πλήρει ἀναλογίᾳ πρὸς τὸ ὑλικὸν σημεῖον, ὁρίζομεν ὡς ***στροφικὴν ὁρμὴν*** $\mathcal{G}$ ἑνὸς σώματος τὸ ἄθροισμα τῶν στροφικῶν ὁρμῶν τῶν ὑλικῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα τοῦτο ἀποτελεῖται. Ἤτοι

$$\mathrm{G} = \sum \mathrm{r}_i \cdot \mathrm{m}_i\, v_i$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ v_i διὰ τοῦ ἴσου του $\omega_i \cdot r_i$, λαμβάνομεν

$$\mathrm{G} = \sum \mathrm{r}_i \cdot \mathrm{m}_i \cdot \omega_i \cdot \mathrm{r}_i = \omega \cdot \sum \mathrm{m}_i \cdot \mathrm{r}_i^2 = \omega \cdot \Theta$$

ἢ ἀνυσματικῶς

$$\boxed{\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega}$$

Ἡ σχέσις αὐτὴ μεταξὺ στροφικῆς ὁρμῆς καὶ γωνιακῆς ταχύτητος ἰσχύει μόνον ἐφ' ὅσον ἡ περιστροφὴ γίνεται περὶ κύριον ἄξονα ἀδρανείας.

§ 60. Γενικωτέρα μορφὴ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς στροφικῆς κινήσεως. Ὅπως διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς ὁρμῆς ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς κινήσεως $\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{d}v/\mathrm{dt}$ ἔλαβε τὴν γενικωτέραν μορφὴν $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{J}/\mathrm{dt}$, οὕτω καὶ ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς στροφικῆς κινήσεως $\mathcal{M} = \Theta \cdot \mathrm{d}\omega/\mathrm{dt}$ δύναται, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς στροφικῆς ὁρμῆς, νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,(\Theta \cdot \omega)$$

ἢ

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{dt}}}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς στροφικῆς ὁρμῆς ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν προκαλοῦσαν αὐτὴν ῥοπήν.

Ἡ γενικωτέρα αὕτη μορφὴ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς στροφικῆς κινήσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: *Ἡ ταχύτης μεταβολῆς τῆς στροφικῆς ὁρμῆς ἑνὸς σώματος ἰσοῦται μὲ τὴν ῥοπὴν ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ.*

§ 61. Ὤθησις τῆς ῥοπῆς. Ἔστω ὅτι ἐπί τινος σώματος ἐξασκεῖται μία χρονικῶς μεταβαλλομένη ῥοπὴ M. Συμφώνως πρὸς τὴν γενικωτέραν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως τῆς στροφικῆς κινήσεως, ἡ ἐντὸς τοῦ χρονικοῦ διαστήματος dt ἐπερχομένη μεταβολὴ dG τῆς στροφικῆς ὁρμῆς θὰ εἶναι ἴση πρὸς M · dt. Ἤτοι

$$M \cdot dt = dG$$

Ἂν ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τοῦ χρόνου $t = t_0$ μέχρι τοῦ χρόνου $t = t_1$, θὰ λάβωμεν

$$\boxed{G_1 - G_0 = \int_{t_0}^{t_1} M \cdot dt} \qquad (1)$$

Ἡ παράστασις

$$\int M \cdot dt$$

ὀνομάζεται ***ὤθησις ῥοπῆς.***

Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς στροφικῆς κινήσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς: *Ἡ ὑπό τινος ῥοπῆς προκαλουμένη μεταβολὴ τῆς στροφικῆς ὁρμῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ὤθησιν τῆς ῥοπῆς.*

Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς στροφικῆς κινήσεως ὑπὸ τὴν τελευταίαν της διατύπωσιν χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν παρακολούθησιν τῆς κινήσεως τῶν *βαλλιστικῶν γαλβανομέτρων**. Τὸ κινητὸν πλαίσιον τῶν ὀργάνων αὐτῶν διαρρέεται ἐπὶ βραχὺ χρονικὸν διάστημα τ ὑπὸ ῥεύματος, προκαλουμένης οὕτω ῥοπῆς M ἴσης διαρκείας. Τὸ $\int M \cdot dt$ παρέχει τὴν στροφικὴν ὁρμὴν τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει τὸ (ἀρχικῶς ἀκίνητον) πλαίσιον μετὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ῥεύματος.

§ 62. Ἔργον καὶ ἰσχὺς παραγόμενα ὑπὸ ῥοπῆς. Ἔστω σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται ἡ ῥοπὴ M καὶ τὸ ὁποῖον στρέφεται ἐντὸς τοῦ χρόνου dt κατὰ τὴν γωνίαν dφ περὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ῥοπῆς. Τὸ ὑπὸ τῆς ῥοπῆς παραγόμενον στοιχειῶδες ἔργον dA δίδεται διὰ τοῦ τύπου

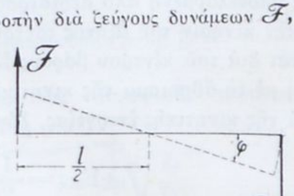
$$dA = M \cdot d\varphi$$

ἡ δὲ ἰσχὺς N διὰ τοῦ τύπου

$$N = M \cdot \omega$$

Ἀπόδειξις. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν ῥοπὴν διὰ ζεύγους δυνάμεων $\mathcal{F}, \mathcal{F}$ *(σχ. 93)*, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου περιστροφῆς καὶ ἀπέχουν ἀπὸ τὸν ἄξονα κατὰ ἴσας ἀποστάσεις l/2, τοιαύτας ὥστε ἡ ῥοπή των νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν ῥοπήν. Ἤτοι

$$M = F \cdot l$$



Σχ. 93.

Κατὰ τὴν στροφήν, ἡ δύναμις F μετακινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ l/2 · dφ. Τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον εἶναι

$$F \cdot \frac{1}{2} \cdot d\varphi$$

Ἐπειδὴ ἴσον ἔργον παράγει καὶ ἡ ἄλλη δύναμις, τὸ ὁλικὸν ἔργον θὰ εἶναι

* Ἠλεκτρισμός, § 125.

$$dA = 2 \cdot F \cdot \frac{1}{2} \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi$$

Ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν ἰσχὺν προκύπτει εὐκόλως διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τοῦ χρόνου dt ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ σῶμα ἐστράφη κατὰ τὴν γωνίαν dφ. Ἤτοι

$$N = \frac{dA}{dt} = M \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega$$

§ 63. Κίνησις στερεοῦ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν οἱωνδήποτε δυνάμεων. Ἔστω στερεὸν σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπιδροῦν οἱαιδήποτε δυνάμεις. Θὰ μελετήσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν κίνησιν αὐτοῦ τούτου τοῦ σώματος περὶ τὸ κέντρον βάρους. Πρὸς τοῦτο ἀνάγομεν ὅλας τὰς δυνάμεις τὰς ἐξασκουμένας ἐπὶ τοῦ σώματος εἰς τὸ κέντρον βάρους, ὁπότε, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ προκύψῃ μία συνισταμένη δύναμις καὶ μία συνισταμένη ροπή.

Διὰ τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους ἰσχύει τὸ ἑξῆς ***θεώρημα κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους***:

«Τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς σώματος κινεῖται ὡς θὰ ἐκινεῖτο ὑλικὸν σημεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει μᾶζαν ἴσην πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ σώματος ἐπιδρωσῶν δυνάμεων».

Διὰ τὴν στροφικὴν κίνησιν τοῦ σώματος περὶ τὸ κέντρον βάρους ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

«Τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης ροπῆς θὰ στρέφεται περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους, μὲ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν παρεχομένην ὑπὸ τῆς γνωστῆς ἐξισώσεως

$$\mathcal{M} = \Theta \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

§ 64. Κινητικὴ ἐνέργεια σώματος ἐκτελοῦντος ἐπίπεδον κίνησιν. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 44, κάθε ἐπίπεδος κίνησις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ περιστροφὴν περὶ ἕνα οἱονδήποτε ἄξονα καὶ μεταφορικὴν κίνησιν τοῦ ἄξονος τούτου. Ἂν θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ἄξων ~~οὗτος~~ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους K, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, λόγῳ τῆς στροφικῆς κινήσεως καὶ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, λόγῳ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως. Ἤτοι

$$\boxed{E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}\,\Theta_K \cdot \omega^2 + \frac{1}{2}\,m \cdot \upsilon_K{}^2}$$

ἔνθα Θ_K εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον καὶ υ_K ἡ ταχύτης τοῦ κέντρου βάρους.

§ 65. Ἀναλογίαι μεταφορικῆς καὶ στροφικῆς κινήσεως.

ΠΙΝΑΞ

ΜΕΤΑΦΟΡΑ	ΣΤΡΟΦΗ
Διάστημα s	Γωνία φ
ταχύτης $v = \frac{ds}{dt}$	γωνιακὴ ταχύτης $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
ἐπιτάχυνσις $\gamma = \frac{dv}{dt}$	γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$
$\boxed{v = \omega \cdot r}$	
δύναμις $\mathcal{F}$	ῥοπὴ $\mathcal{M}$
μᾶζα m	ῥοπὴ ἀδρανείας Θ
ὁρμὴ $\mathcal{J} = m \cdot v$	στροφικὴ ὁρμὴ $\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega$
$\mathcal{F} = m \cdot \gamma$	$\mathcal{M} = \Theta \cdot \omega'$
$\mathcal{F} = \frac{d\mathcal{J}}{dt}$	$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt}$
ὤθησις δυνάμεως $\int F \cdot dt$	ὤθησις ῥοπῆς $\int M \cdot dt$
ἔργον $dA = (\mathcal{F} \cdot ds)$	ἔργον $dA = M \cdot d\varphi$
ἰσχὺς $N = (\mathcal{F} \cdot v)$	ἰσχὺς $N = (\mathcal{M} \cdot \omega)$
κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m v^2$	κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$
* κατευθύνουσα δύναμις $D = -\frac{F}{x}$	* κατευθύνουσα ῥοπὴ $D^* = -\frac{M}{\varphi}$
* περίοδος εὐθυγράμμου ταλαντώσεως $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$	* περίοδος στροφικῆς ταλαντώσεως $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$

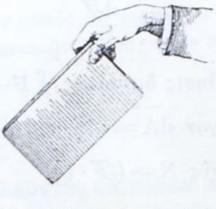
* Οἱ δι' ἀστερίσκου σημειούμενοι τύποι ἀναφέρονται κατωτέρω εἰς τὰς §§ 73 καὶ 81.

§ 66. Ἐλευθέρα στροφὴ τοῦ στερεοῦ σώματος. Εἰς τὴν § 56 ἐξητάσθη ἡ περιστροφὴ ἑνὸς σώματος περὶ μόνιμον ἄξονα τοῦ ὁποίου ἡ θέσις διετηρεῖτο σταθερὰ διὰ καταλλήλων ἑδράνων. Τὰ ἕδρανα ἐξήσκουν δυνάμεις ἐπὶ τοῦ σώματος, αἱ ῥοπαί των ὅμως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἦσαν ἴσαι πρὸς μηδὲν καί, ὡς ἐκ τούτου, οὐδεμία περὶ αὐτῶν ἐγένετο συζήτησις. Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θ᾿ ἀσχοληθῶμεν μὲ στροφικὰς κινήσεις κατὰ τὰς ὁποίας δὲν ἐμφανίζονται δυνάμεις εἰς τὰ ἕδρανα καὶ εἰς τὰς ὁποίας, συνεπῶς, ἡ στροφὴ εἶναι δυνατή, χωρὶς τὴν ὑλικὴν ὕπαρξιν ἀξόνων. Οἱ ἄξονες οὗτοι ὀνομάζονται ***ἐλεύθεροι ἄξονες.*** Οὕτω, περὶ ἐλεύθερον ἄξονα στρέφεται ὁ κολυμβητὴς τοῦ σχήματος 87, ὁ ἐκτελῶν περιστροφὴν εἰς τὸν ἀέρα κατὰ τὴν κατάδυσιν. Ἐπίσης περὶ ἐλεύθερον ἄξονα περιστρέφεται τὸ πινάκιον τοῦ σχήματος 94.

Σχ. 94. *Ἡ περιστροφὴ τοῦ πινακίου γίνεται περὶ ἐλεύθερον ἄξονα συμπίπτοντα μὲ τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ.*

Ὡς ἀποδεικνύεται, ἐλεύθεροι ἄξονες εἶναι μόνον οἱ κύριοι ἄξονες ἀδρανείας. Εἰς ὅλας ὅμως τὰς περιπτώσεις παρατηροῦμεν ὅτι μόνιμος στροφὴ περὶ ἐλεύθερον ἄξονα παρουσιάζεται πρακτικῶς μόνον ἐφ᾿ ὅσον τὸ σῶμα στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ἢ ἐλαχίστης ῥοπῆς ἀδρανείας. Οἱ δύο οὗτοι ἄξονες εἶναι ***εὐσταθεῖς ἐλεύθεροι ἄξονες,*** ἐνῶ ἡ στροφὴ περὶ τὸν τρίτον κύριον ἄξονα, δηλ. τὸν μέσης ῥοπῆς ἀδρανείας, εἶναι ***ἀσταθής.***

Τοῦτο δεικνύομεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐὰν ἐκσφενδονίσωμεν τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦ σχήματος 90 κατὰ τρόπον ὥστε νὰ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τῆς μεγίστης ῥοπῆς ἀδρανείας A *(σχ. 95)*, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τοῦτο ἐξακολουθεῖ στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον *. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον θὰ παρατηρήσωμεν ἐὰν προκαλέσωμεν στροφὴν τοῦ παραλληλεπιπέδου περὶ τὸν ἄξονα C τῆς ἐλαχίστης ῥοπῆς ἀδρανείας. Ἐὰν ὅμως θελήσωμεν νὰ τὸ περιστρέψωμεν περὶ τὸν ἄξονα B τῆς μέσης ῥοπῆς ἀδρανείας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν μόνιμον ἐλευθέραν περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον **, ἀλλ᾿ ἐμφανίζεται ἀντ᾿ αὐτῆς ἄλλη τις πολύπλοκος κίνησις.



Σχ. 95. *Τὸ παραλληλεπίπεδον ἐκσφενδονιζόμενον κατὰ τὸν ὑποδεικνυόμενον τρόπον θὰ περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ῥοπῆς ἀδρανείας.*

Ἕτερον σημεῖον τὸ ὁποῖον μᾶς ἐνδιαφέρει εἶναι ὁ ***βαθμὸς σταθερότητος.***

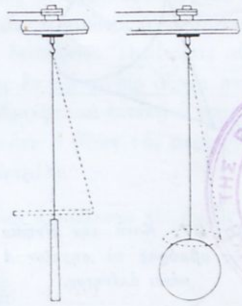
---

* Μόνιμος στροφὴ περὶ τὸν ἐν λόγῳ ἄξονα εἶναι δυνατὴ καὶ ὅταν ἀκόμη ἀρχικῶς ἡ στροφὴ δὲν ἐγένετο ἀκριβῶς παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα μεγίστης ῥοπῆς ἀδρανείας.

** Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι μόνιμος περιστροφὴ περὶ τὸν ἄξονα τῆς μέσης ῥοπῆς ἀδρανείας εἶναι κατ᾿ ἀρχὴν δυνατή, ἀλλ᾿ ἐὰν κατὰ τὴν περιστροφὴν ἐκφύγωμεν ὀλίγον τῆς διευθύνσεως ταύτης, ὁ ἄξων περιστροφῆς παύει νὰ εἶναι μόνιμος, δηλ. ἡ στροφὴ περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον εἶναι ἀσταθής.

Οὕτω, ὅταν ἡ ροπὴ ἀδρανείας διὰ τὸν ἄξονα ἐλαχίστης ροπῆς ἀδρανείας εἶναι πολὺ μικροτέρα ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν αὐτῆς διὰ τὸν ἄξονα μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας, ἡ ἐλευθέρα στροφὴ περὶ τὸν ~~τελευταῖον~~ διατηρεῖται μόνον ἐφ' ὅσον ἀρχικῶς ἡ ἀπόκλισις ἐκ τῆς ἰδανικῆς διευθύνσεως δὲν ἦτο σημαντική.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν λάβωμεν ράβδον καί, ἀφοῦ ἐξαρτήσωμεν αὐτὴν ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον, τὴν ἀναγκάσωμεν νὰ περιστραφῇ ταχέως περὶ τὸν γεωμετρικόν της ἄξονα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη δὲν ἐξακολουθεῖ νὰ περιστρέφεται ὡς πρότερον, ἀλλ' ἀνυψουμένη, περιστρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον *(σχ. 96, I)*. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς ράβδου εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς ροπῆς ἀδρανείας ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον καί, συνεπῶς, ὁ βαθμὸς σταθερότητος τοῦ ἄξονος τούτου εἶναι μικρός. Αἱ κατὰ τὴν περιστροφὴν ὑπὸ τοῦ νήματος ἐξασκούμεναι τυχαῖαι ὠθήσεις προκαλοῦν τὴν ἀπόκλισιν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπὸ τῆς ἰδανικῆς διευθύνσεως καὶ ἀναγκάζουν, οὕτω, τὴν ράβδον νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα μεγαλυτέρου βαθμοῦ σταθερότητος. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν λεπτοῦ δίσκου ἐξηρτημένου ἀπὸ σημεῖον τι τῆς περιφερείας του *(σχ. 96, II)*, ὁ ὁποῖος, κατὰ τὴν ταχεῖαν περιστροφήν, ἀνυψοῦται καὶ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας.



Σχ. 96. *Κατὰ τὴν περιστροφήν, ἡ ράβδος καὶ ὁ δίσκος, ἀνυψούμενοι, περιστρέφονται «σταθερῶς» περὶ τοὺς ἄξονας μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας.*

5.0.5

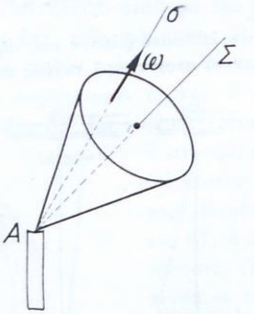
§ 67. Στρόβος. Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐμελετήθη ἡ στροφὴ στερεοῦ περὶ ἄξονα διὰ δύο περιπτώσεις: 1) ὅταν ὁ ἄξων ἦτο στερεῶς συνδεδεμένος μετὰ τοῦ σώματος καὶ ἐκρατεῖτο ὑπὸ ἑδράνων, 2) ὅταν, κατὰ τὴν στροφὴν περὶ ἐλεύθερον ἄξονα, δὲν ὑπῆρχον μὲν τὰ ἕδρανα, ἀλλ' ὁ νοητὸς ἄξων διετήρει σταθερὰν θέσιν καὶ ὡς πρὸς τὸ σῶμα καὶ ὡς πρὸς οἱονδήποτε ἀκίνητον σύστημα συντεταγμένων. Γενικωτέρα εἶναι ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄξων στροφῆς μεταβάλλει τὴν διεύθυνσίν του καὶ ὡς πρὸς τὸ σῶμα καὶ ἐν τῷ χώρῳ ἀλλὰ διέρχεται διαρκῶς δι' ἑνὸς ὡρισμένου ἀκινήτου σημείου. Σῶμα ἐκτελοῦν τοιαύτην κίνησιν καλεῖται ***στρόβος***. Ἡ μελέτη οἱουδήποτε στρόβου ἀποτελεῖ πρόβλημα δυσχερέστατον. Κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μόνην τεχνικῶς ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν τοῦ *συμμετρικοῦ* (ἐκ περιστροφῆς) *στρόβου*, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων συμμετρίας νὰ εἶναι ταυτοχρόνως ἄξων μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας. Κατὰ τὴν σπουδὴν τοῦ συμμετρικοῦ στρόβου διακρίνομεν τρεῖς ἄξονας, οἱ ὁποῖοι, ὡς εἶναι ἑπόμενον, τέμνονται εἰς τὸ ἀκίνητον σημεῖον:

α) τὸν ***ἄξονα συμμετρίας***·

β) τὸν ***στιγμιαῖον ἄξονα στροφῆς*** περὶ τὸν ὁποῖον στρέφεται τὸ σῶμα μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω·

γ) τὸν ***ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς.*** Οὗτος εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο προηγούμενοι.

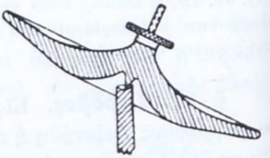
Διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, θεωρήσωμεν τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 97, δηλ. τὴν *σβοῦραν*. Ἔστω ὅτι, κατὰ τὴν θεωρουμένην χρονικὴν στιγμήν, τὸ σῶμα περιστρέφεται περὶ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα σ. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας Σ δὲν συμπίπτει μὲ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα, ἀλλὰ καὶ οἱ δύο τέμνονται εἰς τὸ ἀκίνητον σημεῖον Α. Ὁ ἄξων τῆς στροφικῆς ὁρμῆς κεῖται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων καί, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, μεταξὺ τῶν ἀξόνων σ καὶ Σ. Ὁ ἄξων οὗτος δὲν ὑποπίπτει εἰς τὴν ἄμεσον ἀντίληψίν μας. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸν στρόβον 1) ἐλεύθερον ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν) καὶ 2) ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοιούτων.



Σχ. 97. *Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς* ***σβούρας*** *τὸ σημεῖον Α μένει ἀκίνητον.*

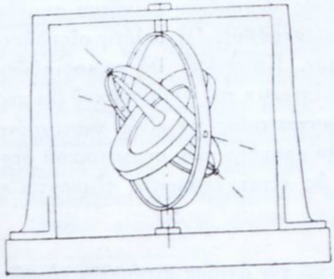
1) **Στρόβος ἐλεύθερος ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν).** Ἐφ᾽ ὅσον ἐπὶ τοῦ στρόβου δὲν ἐξασκοῦνται δυνάμεις, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ δὲν θὰ ἐπιταχύνεται, ἡ δὲ στροφικὴ ὁρμή του θὰ παραμένῃ σταθερά, ἀφοῦ καὶ ῥοπὴ δὲν ἐξασκεῖται ἐπ᾽ αὐτοῦ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ κέντρον βάρους συμπίπτει εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μὲ τὸ ἀκίνητον σημεῖον στηρίξεως.

Στρόβον ἐλεύθερον δυνάμεων καὶ ῥοπῶν παριστᾷ τὸ σχῆμα 98, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ σημεῖον στηρίξεως συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους καὶ συνεπῶς οὗτος ἰσορροπεῖ εἰς οἱανδήποτε θέσιν.



Σχ. 98. *Ὁ ἀπεικονιζόμενος στρόβος ἔχει τοιοῦτον σχῆμα, ἵνα τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον στηρίξεως.*

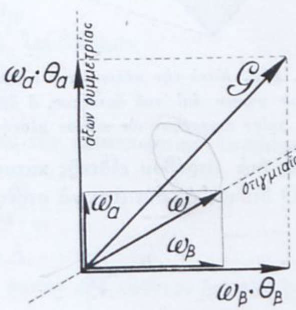
Τὸ αὐτὸ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐὰν ἡ ἐξάρτησις γίνῃ διὰ *συστήματος Cardano (σχ. 99)*, δηλ. ἂν ὁ ἄξων συμμετρίας κρατῆται ἐντὸς δακτυλίου, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον καὶ κρατούμενον, ὁμοίως, ὑπὸ δευτέρου δακτυλίου. Ὁ δεύτερος οὗτος δακτύλιος δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸν δεύτερον, κρατούμενον ὑπὸ ἀκινήτου πλαισίου. Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, τὸ κέντρον βάρους τοῦ στρόβου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν ἀξόνων, μένει ἀκίνητον κατὰ τὴν στροφὴν περὶ οἱονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν ἀξόνων. Προφανὲς ὅτι ὁ στρόβος μὲ στήριξιν Cardano ἰσορροπεῖ εἰς οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἀφεθῇ.



Σχ. 99. *Ἐξάρτησις στρόβου διὰ συστήματος Cardano.*

Ἂν ὁ ἐλεύθερος δυνάμεων ἢ ροπῶν στρόβος τεθῇ εἰς περιστροφὴν κατὰ τρόπον ὥστε ἀρχικῶς ὁ ἄξων συμμετρίας νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα τῆς στροφικῆς ὁρμῆς, ἡ διεύθυνσις τῶν ἐν λόγῳ ἀξόνων παραμένει σταθερὰ ἐν τῷ χώρῳ. Εἰς τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 98 τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἐὰν ὁ στρόβος, ἀφοῦ τεθῇ εἰς περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας, ἀφεθῇ μετὰ προσοχῆς ἐπὶ τοῦ στηρίγματος αὐτοῦ. Ἂν ὅμως ὁ ἄξων συμμετρίας δὲν συμπίπτῃ ἀρχικῶς μὲ τὸν τῆς στροφικῆς ὁρμῆς, τότε ὁ πρῶτος ἄξων διαγράφει, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, κῶνον περὶ τὸν δεύτερον. Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ ἄξονος συμμετρίας περὶ τὸν διαρκῶς σταθερὸν ἐν τῷ χώρῳ ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς καλεῖται **κλόνησις**. Οὕτω κλόνησιν ἀρχίζει νὰ ἐκτελῇ ὁ στρόβος τοῦ σχήματος 98 ὅταν ὑποστῇ μικρὰν ὤθησιν, ὁπότε ὁ ἄξων τῆς στροφικῆς ὁρμῆς θὰ παύσῃ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα συμμετρίας.

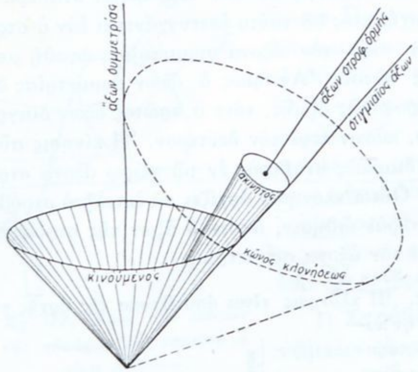
Διερεύνησις τῆς κλονήσεως. Ἡ κλόνησις εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς στροφικῆς ὁρμῆς. Τὴν πολύπλοκον ταύτην κίνησιν δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν ὡς ἑξῆς: Ὁ στιγμιαῖος ἄξων περιστροφῆς *(σχ. 100)*, ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, τὸν φορέα τῆς γωνιακῆς ταχύτητος. Ἀναλύομεν τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω εἰς δύο συνιστώσας, μίαν, τὴν ω_α, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος συμμετρίας (ὁ ὁποῖος εἶναι ταυτοχρόνως κύριος ἄξων ἀδρανείας) καὶ μίαν, τὴν ω_β, κάθετον πρὸς αὐτήν, ὁπότε αἱ δύο συνιστῶσαι τῆς στροφικῆς ὁρμῆς θὰ εἶναι $\omega_\alpha \cdot \Theta_\alpha$ καὶ $\omega_\beta \cdot \Theta_\beta$, ἔνθα Θ_α καὶ Θ_β εἶναι αἱ ροπαὶ ἀδρανείας διὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας καὶ διὰ τὸν κάθετον ἐπ' αὐτὸν ἄξονα. Ἐπειδὴ ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ_α διὰ τὸν ἄξονα συμμετρίας εἶναι εἰς τοὺς ὑφ' ἡμῶν θεωρουμένους στρόβους μεγαλυτέρα τῆς ροπῆς ἀδρανείας Θ_β, ἡ ὁλικὴ στροφικὴ ὁρμὴ $\mathcal{G}$ θὰ ἔχῃ φορέα μὴ συμπίπτοντα μὲ τὸν στιγμιαῖον ἄξονα, ἀλλ' εὑρισκόμενον μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. Τὸ ἄνυσμα τῆς στροφικῆς ὁρμῆς, ὡς ἀνεφέρθη ἤδη, θὰ παραμείνῃ ἀκίνητον ἐν τῷ χώρῳ, ἐνῷ οἱ ἄλλοι δύο ἄξονες—ὁ στιγμιαῖος ἄξων καὶ ὁ ἄξων συμμετρίας—, κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμήν, στρέφονται περὶ αὐτόν. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἄξονες κεῖνται, ὡς εἶναι προφανὲς ἐκ τοῦ σχήματος, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπειδὴ πρὸς τούτοις αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των μένουν διαρκῶς σταθεραί, ἕπεται ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας καὶ ὁ στιγμιαῖος ἄξων θὰ διαγράφουν περὶ τὸν ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς κώνους *(σχ. 101)*. Ὁ κῶνος τὸν ὁποῖον διαγράφει ὁ ἄξων συμμετρίας ὑποπίπτει ἀμέσως εἰς τὴν ἀντίληψιν τοῦ παρατηρητοῦ, καλεῖται δὲ **κῶνος κλονήσεως.** Ὁ στιγμιαῖος ἄξων διαγράφει ἕνα κῶνον, καλούμενον **ἀκίνητον πολικὸν κῶνον.**



Σχ. 100. Ἀνάλυσις τῶν ἀνυσμάτων ω καὶ $\mathcal{G}$ εἰς συνιστώσας ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας καὶ καθέτους πρὸς αὐτόν.

Ταῦτα ὡς πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δύο αὐτῶν ἀξόνων σχετικῶς πρὸς τὴν ἐν τῷ χώρῳ ἀκίνητον στροφικὴν ὁρμήν. Κατωτέρω θὰ διερευνήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ στιγμιαίου ἄξονος ἐν σχέσει πρὸς τὸν στρόβον καί, συγκεκριμένως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ. Λόγῳ τῆς σταθερότητος τῶν γωνιῶν, ὁ στιγμιαῖος ἄξων διαγράφει περὶ τὸ ἄξονα συμμετρίας ἕνα κῶνον καλούμενον ***κινούμενον πολικὸν κῶνον.*** Ὁ κῶνος οὗτος εἶναι ἀκίνητος ἐν σχέσει πρὸς τὸν στρόβον. Ἡ κίνησις, λοιπόν, τοῦ στιγμιαίου ἄξονος δύναται νὰ περιγραφῇ ὡς ἑξῆς: Ὁ κινούμενος πολικὸς κῶνος (ὁ ὁποῖος εἶναι στερεὰ συνδεδεμένος μετὰ τοῦ στρόβου) κυλίεται ἐπὶ τοῦ ἀκινήτου (ἐν τῷ χώρῳ) πολικοῦ κώνου, ἡ ἑκάστοτε δὲ κοινὴ γεννέτειρα καθορίζει τὸν στιγμιαῖον ἄξονα.

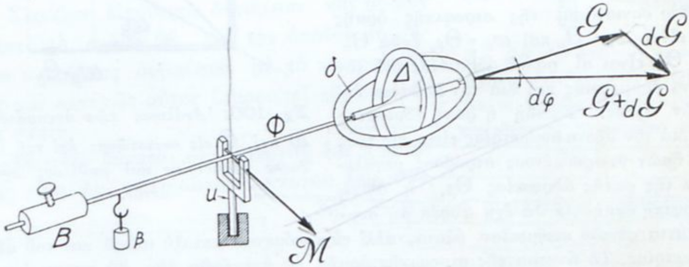
Ὅταν ὁ στιγμιαῖος ἄξων συμπίπτῃ ἐξ ἀρχῆς μὲ τὴν στροφικὴν ὁρμήν, ὅλαι αἱ γωνίαι μηδενίζονται καί, συνεπῶς, δὲν παρουσιάζεται κλόνησις τοῦ ἄξονος συμμετρίας.



Σχ. 101. *Κατὰ τὴν κύλισιν τοῦ κινουμένου πολικοῦ κώνου ἐπὶ τοῦ ἀκινήτου, ὁ ἄξων συμμετρίας διαγράφει τὸν κῶνον κλονήσεως.*

2) Στρόβος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς ροπῆς. Ἡ συμπεριφορὰ τοῦ στρόβου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς ροπῆς μελετᾶται εὐκόλως διὰ στρόβου εἰδικῆς κατασκευῆς *(σχ. 102).*

Ὁ δίσκος Δ, δύναται νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα, τοῦ ὁποίου τὰ ἕδρανα



Σχ. 102. *Στρόβος διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς μεταπτώσεως (Γυροσκόπιον).*

εἶναι στερεωμένα ἐπὶ τοῦ δακτυλίου δ. Ὁ δακτύλιος οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς φάλαγγος Φ, ἡ ὁποία δύναται νὰ στραφῇ περὶ κατακόρυφον καὶ ὁριζόντιον ἄξονα. Βάρος Β στερεούμενον ἐπὶ τῆς φάλαγγος ἐπιφέρει τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ὅλου συστήματος. Ἐὰν δώσωμεν καταλλήλως εἰς τὸν δίσκον Δ γωνιακὴν ταχύτητα ω καὶ ἀφήσωμεν τὸ σύστημα ἐλεύθερον, τοῦτο θὰ συμπεριφέρεται ὡς στρόβος ἐλεύθερος ἐξωτερικῶν ροπῶν, ὁ δὲ ἄξων συμμετρίας —ὁ ὁποῖος συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς—, θὰ παραμένῃ ἀκίνητος. Ἂν ἤδη ἐξαρτήσωμεν τὸ πρόσθετον βάρος β, τοῦτο θὰ ἐξασκήσῃ τὴν ροπὴν 𝓜, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ῥοπῆς ταύτης ὁ ἄξων τῆς στροφικῆς ὁρμῆς τοῦ στρόβου, ἀρχίζει νὰ στρέφεται περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα κ, ἐκτελῶν κίνησιν, τὴν καλουμένην ***μετάπτωσιν.*** Ἡ γωνιακὴ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν στρέφεται ὁ ἄξων στροφικῆς ὁρμῆς κατὰ τὴν μετάπτωσιν καλεῖται ***γωνιακὴ ταχύτης μεταπτώσεως*** $\omega_{\mu\epsilon\tau}$ καὶ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν

$$M = \frac{dG}{dt} \qquad (1)$$

ἡ ῥοπὴ M ἐντὸς τοῦ χρόνου dt προσδίδει εἰς τὸν στρόβον τὴν στροφικὴν ὁρμὴν dG. Τὸ ἄνυσμα d$\mathcal{G}$, συντιθέμενον μετὰ τοῦ ἀνύσματος $\mathcal{G}$, δίδει τὴν νέαν στροφικὴν ὁρμὴν $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ τοῦ στρόβου. Ἐπειδὴ τὸ d$\mathcal{G}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ $\mathcal{G}$ ἕπεται ὅτι τὸ νέον ἄνυσμα $\mathcal{G} + d\mathcal{G}$ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ ἀρχικὸν $\mathcal{G}$. Ἡ διεύθυνσις τῆς νέας στροφικῆς ὁρμῆς σχηματίζει μετὰ τῆς ἀρχικῆς τὴν γωνίαν dφ. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἔχομεν

ἐπειδὴ τὸ dG εἶναι ἀπειροστόν

$$dG = G \cdot d\varphi$$

Δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1), λαμβάνομεν

$$M = G \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

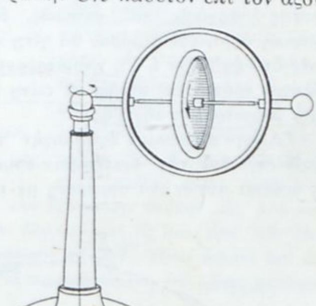
Ἐπειδὴ dφ/dt εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς μεταπτώσεως, λαμβάνομεν τελικῶς

$$\omega_{\mu\epsilon\tau} = \frac{M}{G} = \frac{M}{\Theta \cdot \omega}$$

ἔνθα Θ εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ δίσκου Δ.

Εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν ἐδέχθημεν τὴν ῥοπὴν $\mathcal{M}$ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφικῆς ὁρμῆς. Ἡ γενικωτέρα περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ῥοπὴ ἔχει οἱανδήποτε διεύθυνσιν, παραλείπεται ὡς πολύπλοκος.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν, λοιπόν, ἐξωτερικῆς ῥοπῆς ἡ κίνησις τοῦ στρόβου εἶναι διάφορος, ἀναλόγως τῆς ὑπάρξεως ἢ μὴ ἀρχικῆς στροφικῆς ὁρμῆς. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 103 ἂν μὲν ὁ στρόβος δὲν περιστρέφεται ($\mathcal{G} = 0$), τότε, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, θὰ «πέσῃ». Ἂν ὅμως περιστρέφεται ($\mathcal{G} = \Theta \cdot \omega$), τότε ἡ ῥοπὴ ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸ βάρος του θὰ ἐκτρέψῃ τὸν ἄξονα ὄχι πρὸς τὴν κατακόρυφον, ἀλλ᾽ ἐντὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου, θὰ παρατηρήσωμεν δηλ. ὅτι ὁ ἄξων κινεῖται ἐντὸς τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Καὶ γενικῶς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ῥοπῆς τινος, ὁ ἄξων συμμετρίας ἑνὸς στρόβου μετατί-

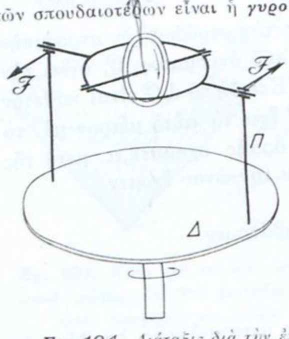


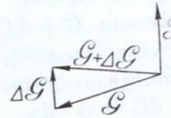
Σχ. 103. *Κατὰ τὴν μετάπτωσιν ὁ ἄξων τοῦ στρόβου διαγράφει ὁριζόντιον ἐπίπεδον.*

θεται πρὸς διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν ἐκ τῆς πείρας μας (ἐπὶ μὴ στρεφομένων σωμάτων) ἀναμενομένην.

Ἄλλη περίπτωσις εἰς τὴν ὁποίαν παρουσιάζεται τὸ φαινόμενον τῆς μεταπτώσεως εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς κοινῆς **σβούρας** στρεφομένης περὶ μὴ κατακόρυφον ἄξονα *(σχ. 97)*. Εἰς ταύτην ὅμως, λόγῳ τῆς σημαντικῆς σχετικῶς τριβῆς, ἡ κίνησις εἶναι μᾶλλον πολύπλοκος.

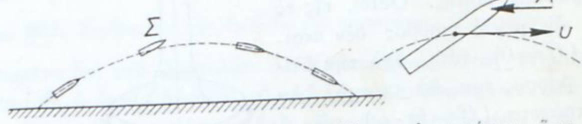
Ἐφαρμογαί. Αἱ ἰδιότητες τοῦ στρόβου τυγχάνουν πολλῶν ἐφαρμογῶν. Μία ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων εἶναι ἡ ***γυροσκοπικὴ πυξίς***. Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ἀρχῆς ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ λειτουργία τῆς πυξίδος θεωρήσωμεν τὸν στρόβον τοῦ σχήματος 104. Ὅταν ὁ δίσκος Δ ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται τὸ πλαίσιον Π τεθῇ εἰς περιστροφήν, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄξων τοῦ στρόβου ἀνορθοῦται καὶ τείνει νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὰς (ὁριζοντίας) δυνάμεις $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$, τὰς ὁποίας ἐξασκεῖ τὸ πλαίσιον καὶ τῶν ὁποίων ἡ ῥοπὴ $\mathcal{M}$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐὰν $\mathcal{G}$ εἶναι ἡ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ στρόβου πρὸ τῆς περιστροφῆς καὶ $\Delta\mathcal{G}$ ἡ ὑπὸ τῆς ῥοπῆς ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt προκαλουμένη μεταβολὴ αὐτῆς, τότε ἡ νέα στροφικὴ ὁρμὴ $\mathcal{G}+\Delta\mathcal{G}$ τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὁ στρόβος μετὰ τὸν χρόνον Δt θὰ ἔχῃ διεύθυνσιν πλησιάζουσαν περισσότερον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἢ ἀρχικῶς καί, συνεπῶς, ἐφ' ὅσον ἐξακολουθεῖ ἡ στροφὴ τοῦ δίσκου, ἡ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ στρόβου θὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Προφανὲς ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ Γῆ περιστρέφεται, θὰ πρέπει κάθε στρόβος, στηριγμένος κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐπ' αὐτῆς, νὰ τείνῃ νὰ κάμῃ τὸν ἄξονά του παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς Γῆς.





Σχ. 104. *Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀρχῆς τῆς λειτουργίας τῆς γυροσκοπικῆς πυξίδος.*

Ἄλλην σπουδαίαν ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ στρόβου εὑρίσκομεν εἰς τὴν *πυροβολικὴν* διὰ τὴν διατήρησιν ἐπιμήκων βλημάτων εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε διαρκῶς ὁ ἄξων αὐτῶν νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος υ, διότι ἄλλως ἡ

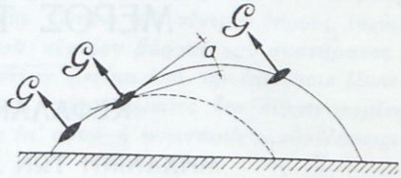


Σχ. 105. *Διὰ βραδείας μεταπτώσεως τοῦ βλήματος ἐπιτυγχάνεται ὥστε ὁ ἄξων αὐτοῦ νὰ διατηρῆται πάντοτε παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος.*

ἀντίστασις A τοῦ ἀέρος, δρῶσα πλαγίως, τείνει νὰ τὰ ἀνατρέψῃ. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ μεταδόσεως εἰς τὸ βλῆμα περιστροφικῆς κινήσεως περὶ τὸν γεωμετρικόν του ἄξονα. Τὴν κίνησιν ταύτην λαμβάνει τὸ βλῆμα κατὰ τὴν διαδρομήν του ἐντὸς τῆς κάνης, ἡ ὁποία φέρει ἐσωτερικῶς ἑλικοειδῆ ἐνσκαφήν.

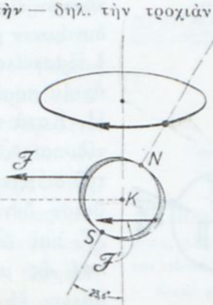
Ὅταν τὸ βλῆμα φθάσῃ εἰς σημεῖόν τι Σ τῆς τροχιᾶς *(σχ. 105)*, εἰς τὸ ὁποῖον λόγῳ τῆς κυρτότητος αὐτῆς, ὁ ἄξων παύει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ταχύτητα, ἡ ἀντίστασις Α τοῦ ἀέρος, δρῶσα πλαγίως *(ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος δεξιά)*, δὲν διέρχεται πλέον διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προκαλουμένη ῥοπὴ προκαλεῖ μετάπτωσιν τοῦ ἄξονος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁ ἄξων ἐπανέρχεται ἀφοῦ διαγράψῃ κῶνον εἰς τὴν ἐπιζητουμένην διεύθυνσιν.

Τρίτην ἐφαρμογὴν ἀνευρίσκομεν εἰς τὴν *δισκοβολίαν :* Εἰς τὸν δίσκον δίδεται περιστροφικὴ κίνησις περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ. Τὸ ἄνυσμα $\mathcal{G}$ τῆς στροφικῆς ὁρμῆς *(σχ. 106)* παραμένει σταθερὸν κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ δίσκου μὲ ἀποτέλεσμα νὰ παρουσιάζεται μία *γωνία προσπτώσεως* α, προκαλουμένης οὕτω *δυναμικῆς ἀνώσεως* (§ 67). Οὕτω, ὁ δίσκος, πίπτων βραδέως, διαγράφει βλητικὴν καμπύλην μεγαλυτέρου βεληνεκοῦς.



Σχ. 106. *Διὰ τῆς περιστροφῆς τοῦ δίσκου ἐπιτυγχάνεται μεγαλύτερον βεληνεκές.*

Μετάπτωσις καὶ κλόνησις τῆς Γῆς. Ἡ Γῆ ἔχει κατὰ προσέγγισιν σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς ***(γεωειδές)***, στρεφομένη δὲ περὶ τὸν ἄξονά της παριστᾷ στρόβον στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα μεγίστης ῥοπῆς ἀδρανείας. Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἄξων οὗτος μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ***ἐκλειπτικὴν*** — δηλ. τὴν τροχιὰν τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ κέντρον βάρους τῆς Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον—εἶναι ἴση πρὸς 23,5° *(σχ. 107)*. Τὸ πεπλατυσμένον σχῆμα τῆς Γῆς ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ ἐξασκοῦν αἱ ἑλκτικαὶ δυνάμεις τοῦ Ἡλίου ἐπὶ τῆς Γῆς μίαν ῥοπὴν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας αὕτη ἐκτελεῖ μετάπτωσιν. Τὴν ἐμφάνισιν τοιαύτης ῥοπῆς κατανοοῦμεν ἂν θεωρήσωμεν τὴν Γῆν ὡς ἀποτελουμένην ἀπὸ μίαν σφαῖραν περιβαλλομένην ὑπὸ δακτυλιοειδοῦς ἐξογκώσεως. (Εἰς τὸ σχῆμα 107 ἡ τομὴ τῆς ἐξογκώσεως ταύτης εἶναι γραμμοσκιασμένη). Τὸ ἐπίπεδον τῆς ἐκλειπτικῆς χωρίζει τὴν ἐξόγκωσιν ταύτην εἰς δύο συμμετρικὰ μέρη, τὰ ὁποῖα ὅμως, κατὰ μέσον ὅρον, δὲν ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ Ἡλίου. Αἱ ἐπ' αὐτῶν ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ἐξασκούμεναι δυνάμεις $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ εἶναι ἄνισοι καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐμφανίζεται ἡ προαναφερθεῖσα ῥοπή. Ἡ προκαλουμένη ὑπ' αὐτῆς μετάπτωσις εἶναι βραδεῖα ἔχουσα περίοδον 26000 ἐτῶν.



Σχ. 107. *Ἡ ἕλξις τοῦ Ἡλίου προκαλεῖ μετάπτωσιν τοῦ ἄξονος τῆς γῆς.*

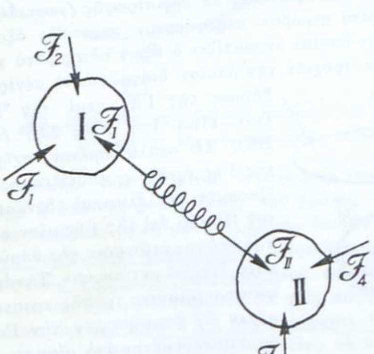
Ἡ ῥοπὴ αὕτη δὲν εἶναι σταθερά, λαμβάνουσα τὴν μεγίστην της τιμὴν κατὰ τὰς ***τροπάς***, μηδενιζομένη δὲ κατὰ τὰς ***ἰσημερίας***, ὅτε ἡ Γῆ ἔχει συμμετρικὴν θέσιν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΚΗ. Ἕνεκα τούτου καὶ τῆς ἐπιδράσεως τῆς Σελήνης ἡ κίνησις δὲν εἶναι ἁπλῆ μεταπτωτική, ἀλλ' ἐκτὸς τῆς μεταπτώσεως ὁ ἄξων τῆς Γῆς ἐκτελεῖ καὶ κλόνησιν.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ **68. Ἐσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαὶ δυνάμεις.** Θεωρήσωμεν σύστημα ἐκ δύο σωμάτων (*σχ. 108*) ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκοῦνται αἱ ***ἐξωτερικαὶ*** δυνάμεις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ (δηλ. δυνάμεις προερχόμεναι ἐκ σωμάτων μὴ ἀνηκόντων εἰς τὸ σύστημα). Ἐκτὸς τῶν δυνάμεων αὐτῶν ἐπὶ τοῦ σώματος Ι ἐξασκεῖται καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τοῦ σώματος ΙΙ. Κατὰ τὴν ἀρχὴν «δρᾶσις=ἀντίδρασις», τὸ σῶμα Ι ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος ΙΙ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$. Αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ καὶ $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ καλοῦνται ***ἐσωτερικαί***, ὡς μὴ ἐξασκούμεναι ὑπὸ σωμάτων ἔξω τοῦ συστήματος εὑρισκομένων. Ὅπως παρατηροῦμεν, αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις παρουσιάζονται πάντοτε ἀνὰ δύο.



Σχ. 108. Αἱ δυνάμεις $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ καὶ $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος τῶν δύο σωμάτων.

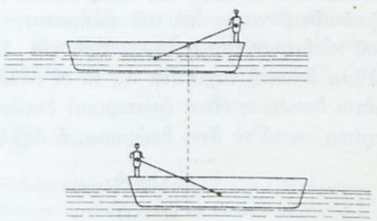
Κέντρον βάρους συστήματος. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος δύο σωμάτων εὑρίσκεται διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων πρὸς τοὺς ἐκτεθέντας εἰς τὴν § 51. Ὅπως εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος εὑρίσκεται εὐκόλως ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς ἑκάστου τῶν ἀπαρτιζόντων αὐτὸ σωμάτων, διότι τότε ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν ἕκαστον σῶμα ὡς ὑλικὸν σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς τὸ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κέντρον βάρους τῶν δύο τούτων σημείων.

§ **69. Κίνησις συστήματος ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων.** Ἔστω σύστημα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐπιδροῦν οἱαιδήποτε δυνάμεις. Θὰ μελετήσωμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος περὶ τὸ ἐν λόγῳ κέντρον. Πρὸς τοῦτο ἀνάγομεν ὅλας τὰς δυνάμεις εἰς τὸ κέντρον βάρους, ὁπότε, ὡς γνωστόν, θὰ προκύψῃ μία συνισταμένη δύναμις καὶ μία συνισταμένη ῥοπή.

Μεταφορικὴ κίνησις - Θεωρήματα κινήσεως κέντρου βάρους καὶ διατηρήσεως ὁρμῆς. Διὰ τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους, ἰσχύει τὸ ἑξῆς ***θεώρημα τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος :*** *Τὸ κέντρον βάρους συστήματος σωμάτων κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὡς ἐὰν ὅλη ἡ μᾶζα τοῦ συστήματος ἦτο συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον βάρους καὶ ἐξησκεῖτο ἐπ' αὐτοῦ ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.*

Προφανὲς ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις οὐδεμίαν ἐπιτάχυνσιν δίδουν εἰς τὸ κέντρον βάρους, ἀφοῦ, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, αὗται παρουσιαζόμεναι πάντοτε ἀνὰ δύο, ἰσορροποῦν.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς συστήματος εὑρισκομένου ἐν ἠρεμίᾳ δὲν δύναται νὰ μετακινηθῇ χωρὶς τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως. Οὕτω, τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος «ἄνθρωπος - λέμβος» τοῦ σχήματος 109 παραμένει ἀκίνητον, ὅταν ὁ ἐπὶ τῆς λέμβου ἄνθρωπος ἀλλάσσῃ θέσιν ἐντὸς αὐτῆς. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι ἂν ὁ ἄνθρωπος ἐξασκήσῃ ἐπὶ τῆς λέμβου ὤθησιν, οὐδεμίαν θὰ προκαλέσῃ ἐπιτάχυνσιν ταύτης, ἐφ' ὅσον ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ εἶναι ἐσωτερική.



Σχ. 109. *Τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος «λέμβος - ἄνθρωπος» δὲν μετακινεῖται οἱανδήποτε κίνησιν καὶ ἂν ἐκτελέσῃ ὁ ἐντὸς αὐτῆς εὑρισκόμενος ἄνθρωπος.*

Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς συστήματος συνάγομεν ὅτι, ὅταν ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ χρονικὴ παράγωγος (dJ/dt) τῆς ὁρμῆς τοῦ συστήματος παραμένει σταθερά. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ ***θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς,*** τὸ ὁποῖον διατυποῦται ὡς ἑξῆς: *Ἡ ὁρμὴ ἑνὸς μονωμένου συστήματος* (δηλ. συστήματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν ἐπιδροῦν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις) *διατηρεῖται σταθερά.*

Ἐφαρμογαί : Πρώτην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἑνὸς συστήματος ἔχομεν εἰς τὸ προαναφερθὲν πείραμα τοῦ συστήματος «λέμβος - ἄνθρωπος». Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἐλεύθερον ἐξωτερικῶν δυνάμεων διότι κατὰ μὲν τὸν ὁριζόντιον ἄξονα οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται (ἡ τριβὴ τοῦ ὕδατος θεωρεῖται ἀμελητέα), αἱ κατὰ τὸν κατακόρυφον δὲ ἄξονα ἐξασκούμεναι δυνάμεις βάρος καὶ ἄνωσις ἰσορροποῦν.

Ὅταν ὁ ἄνθρωπος κινηθῇ κατὰ μῆκος τῆς λέμβου κατὰ μίαν φοράν, ἡ λέμβος θὰ κινηθῇ ἀντιθέτως· μόλις σταματήσῃ αὐτός, θὰ σταματήσῃ καὶ ἡ λέμβος καὶ ὁ λόγος ἁπλοῦς: Ἐπειδὴ ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ὁρμῆς $m_\alpha \cdot v_\alpha$ τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῆς ὁρμῆς $m_\lambda \cdot v_\lambda$ τῆς λέμβου, τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς μᾶς παρέχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{Ὁρμὴ}_{(\text{πρὸ τῆς κινήσεως})} = \text{Ὁρμὴ}_{(\text{κατὰ τὴν κίνησιν})} = \text{Ὁρμὴ}_{(\text{μετὰ τὴν κίνησιν})}$$

$$0 + 0 \qquad = m_\alpha \cdot v_\alpha + m_\lambda \cdot v_\lambda \quad = 0 + 0$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα τῆς λέμβου

$$v_\lambda = -\frac{m_\alpha}{m_\lambda} \cdot v_\alpha$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως δηλοῖ ἀκριβῶς ὅτι ἡ λέμβος θὰ κινῆται ἀντιθέτως πρὸς τὸν ἄνθρωπον.

Ἑτέραν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς εὑρίσκομεν εἰς τὴν ***ἀνάκρουσιν*** τῶν πυροβόλων ὅπλων: Τὰ ἐκ τῆς ἀναφλέξεως ἀέρια ἐξασκοῦν δύναμιν ἐπὶ τοῦ βλήματος, ἴσην ὅμως δύναμιν ἐξασκοῦν καὶ ἐπὶ τοῦ *κλείστρου* τοῦ ὅπλου. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν τὸ μὲν βλῆμα ἀποκτᾷ ταχύτητα v_β, τὸ δὲ ὅπλον ταχύτητα v_o. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος «ὅπλον - βλῆμα», πρέπει, κατὰ τὸ ἄνω θεώρημα, ἡ ὁρμὴ αὐτοῦ νὰ παραμένῃ σταθερά. Ἤτοι

$$\text{Ὁρμὴ}_{(\text{πρὸ})} \qquad = \text{Ὁρμὴ}_{(\text{μετὰ})}$$

$$0 + 0 \qquad = m_\beta \cdot v_\beta + m_o \cdot v_o$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ταυτοχρόνως μὲ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος τὸ ὅπλον κινεῖται ἀντιθέτως ***(ἀνάκρουσις)*** μὲ ταχύτητα

$$v_o = -\frac{m_\beta}{m_o} \cdot v_\beta$$

Ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ ὅπλον εἶναι μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος διότι τὸ κλάσμα m_β / m_o ἔχει μικρὰν τιμήν.

Σχ. 110. *Κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τῶν σφαιρῶν πρὸς τὰ ὀπίσω, ἡ ἅμαξα κινεῖται πρὸς τὰ ἐμπρός.*

Τρίτην ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν εἰς τὸν ***πύραυλον.*** Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὴν ἀρχὴν τῆς λειτουργίας τοῦ πυραύλου περιγράφομεν τὸ ἑξῆς πείραμα: Ἐπὶ ἐλαφρᾶς ἁμάξης, δυναμένης νὰ κινῆται μὲ ἐλαχίστας τριβάς, ὑπάρχει σωρὸς μεταλλικῶν σφαιρῶν καὶ ἄνθρωπος *(σχ. 110)*. Ἡ ἅμαξα ἀκινητεῖ καὶ ὁ ἄνθρωπος ὁμοίως, ἐπομένως ἡ ὁρμὴ τοῦ συστήματος εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἐὰν τώρα ὁ ἄνθρωπος ἐκσφενδονίσῃ μίαν σφαῖραν πρὸς τὰ ὀπίσω μὲ ταχύτητα v_σ θὰ δώσῃ εἰς αὐτὴν ὁρμὴν ἴσην πρὸς $m_\sigma \cdot v_\sigma$ (ἔνθα m_σ εἶναι ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας). Κατὰ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ ἅμαξα θὰ κινηθῇ ἀντιθέτως μὲ ταχύτητα v_α

ὑπολογιζομένην ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\upsilon_\alpha = -\frac{m_\sigma}{m_\alpha} \cdot \upsilon_\sigma$$

Ἐὰν ρίψῃ καὶ δευτέραν σφαῖραν, ἡ ταχύτης τῆς ἁμάξης θὰ αὐξηθῇ πάλιν κατὰ υ_α ὥστε ἡ νέα ταχύτης θὰ γίνῃ ἴση πρὸς $2\upsilon_\alpha$. Οὕτω, μετὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τρίτης σφαίρας ἡ ταχύτης θὰ ἔχει γίνῃ $3\upsilon_\alpha$ κ.ο.κ. Ἐὰν ἐντὸς τοῦ χρόνου t ἐκσφενδονισθοῦν n σφαῖραι, ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης, ἡ ἐπιτάχυνσις γ_α, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ἅμαξα, ὑπολογίζεται ἴση πρὸς

$$\gamma_\alpha = \frac{n \cdot \upsilon_\alpha}{t}$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ ἅμαξα τὴν ἐπιτάχυνσιν ταύτην πρέπει ἡ δύναμις ἡ ὁποία τὴν προεκάλεσε νὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F = m_\alpha \cdot \gamma_\alpha = m_\alpha \cdot n \cdot \frac{\upsilon_\alpha}{t} = -m_\alpha n \cdot \frac{m_\sigma}{m_\alpha} \cdot \upsilon_\sigma \cdot \frac{1}{t} = -n \cdot m_\sigma \cdot \upsilon_\sigma \cdot \frac{1}{t}$$

ἢ

$$F = -\frac{n \cdot m_\sigma}{t} \cdot \upsilon_\sigma \qquad (1)$$

Τὸ πηλίκον $n \cdot m_\sigma / t$ παρέχει τὴν ὁλικὴν μᾶζαν τῶν σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι ἐξεσφενδονίσθησαν ἐντὸς τοῦ χρόνου t. Εἰς τὸν πύραυλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν συνεχῆ ροὴν ἀερίου μὲ ταχύτητα $\upsilon_{\alpha\epsilon\rho}$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν διὰ τὸ πηλίκον τῆς ὁλικῶς ἐκσφενδονιζομένης μάζης διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου, ἀντὶ $n \cdot m_\sigma / t$, τὸ dm/dt, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) μᾶς δίδει

$$F = -\frac{dm}{dt} \cdot \upsilon_{\alpha\epsilon\rho}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις προωθήσεως τοῦ πυραύλου εἶναι ἀνάλογος ἀφ' ἑνὸς μὲν πρὸς τὴν ἀνὰ μονάδα χρόνου ἐπιταχυνομένην πρὸς τὰ ὀπίσω μᾶζαν τοῦ ἀερίου, ἀφ' ἑτέρου δὲ πρὸς τὴν ταχύτητα αὐτοῦ.

Στροφικὴ κίνησις - Θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφικῆς ὁρμῆς. Κατὰ τὴν στροφικὴν κίνησιν τοῦ συστήματος, ἕκαστον τῶν σωμάτων ἀπὸ τὰ ὁποῖα τοῦτο ἀποτελεῖται ἔχει ὡρισμένην στροφικὴν ὁρμήν. Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ὁλικὴ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ συστήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν στροφικῶν ὁρμῶν ὅλων τῶν σωμάτων τῶν ἀποτελούντων τὸ σύστημα. Διὰ τὴν ὁλικὴν ταύτην στροφικὴν ὁρμὴν $\mathcal{G}$ ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα: *Τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης ροπῆς* $\mathcal{M}$ *μεταβάλλει τὴν στροφικήν του ὁρμὴν συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν*

$$\mathcal{M} = \frac{d\mathcal{G}}{dt} \ .$$

Προφανὲς ὅτι αἱ τυχὸν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐξασκούμεναι ἐσωτερικαὶ ροπαὶ δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἀφοῦ, κατὰ τὴν ἀρχὴν «δρᾶσις = ἀντίδρασις», αὗται ἀλληλοαναιροῦνται.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ὅτι, *ὅταν ἡ ἐπί τινος συστήματος ἐξασκουμένη (συνισταμένη) ροπὴ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ στροφικὴ ὁρμή του παραμένει σταθερά.* Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ ***θεώρημα διατηρήσεως τῆς στροφικῆς ὁρμῆς*** ἑνὸς συστήματος.

Ἐφαρμογαί. 1) Ἐπὶ τραπέζης δυναμένης νὰ στρέφεται μὲ ἐλαχίστας τριβὰς περὶ κατακόρυφον ἄξονα *(σχ. 111)* ἵσταται ἄνθρωπος μὲ ἐκτεταμένας τὰς χεῖρας καὶ κρατῶν δύο βάρη. Δι' ἐλαφρᾶς ὠθήσεως, τίθεται εἰς περιστροφήν. Ἔστω Θ_1 καὶ ω_1 ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης του. Ἐφ' ὅσον ἐπ' αὐτοῦ δὲν δρᾷ ἐξωτερικὴ ροπὴ ($\mathcal{M}=0$), οὗτος στρέφεται μὲ τὴν σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω_1. Ἂν τώρα πλησιάσῃ τὰ βάρη πρὸς τὸ σῶμα του, θὰ ἐλαττωθῇ ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ θὰ γίνῃ Θ_2. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ στροφικὴ ὁρμὴ πρέπει νὰ παραμένῃ σταθερὰ (ἀφοῦ $\mathcal{M}=0$), θ' ἀποκτήσῃ νέαν γωνιακὴν ταχύτητα ω_2 μεγαλυτέραν τῆς ω_1 καὶ τοιαύτην ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

Σχ. 111. *Κατὰ τὴν σύμπτυξιν τῶν χειρῶν ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐξάνεται.*

$$\text{στροφικὴ ὁρμὴ}_{(\text{πρὸ})} = \text{στροφικὴ ὁρμὴ}_{(\text{μετὰ})}$$
$$\Theta_1 \cdot \omega_1 = \Theta_2 \cdot \omega_2$$

2) Ἐπὶ καθίσματος δυναμένου νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα μὲ ἐλαχίστας τριβὰς κάθεται ἄνθρωπος κρατῶν διὰ τῆς μιᾶς χειρὸς τὸν ἄξονα ἑνὸς τροχοῦ κατακορύφως *(σχ. 112)*. Ἐὰν οὔτε ὁ ἄνθρωπος οὔτε ὁ τροχὸς στρέφωνται, ἡ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ ἀνθρώπου $\mathcal{G}_\alpha$ καὶ τοῦ τροχοῦ $\mathcal{G}_\tau$ εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν. Ἑπομένως καὶ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν στροφικῶν ὁρμῶν $\mathcal{G}_\alpha + \mathcal{G}_\tau$ τοῦ συστήματος εἶναι μηδέν. Ἂν τώρα ὁ ἄνθρωπος θέσῃ εἰς περιστροφὴν τὸν τροχὸν διὰ τῆς ἄλλης χειρὸς καὶ τοῦ προσδώσῃ γωνιακὴν ταχύτητα ω_τ, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἀρχίζει νὰ περιστρέφεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω_α. Καὶ τοῦτο διότι ἡ ὁλικὴ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ συστήματος «ἄνθρωπος - τροχός», λόγῳ τῆς μὴ ὑπάρξεως ἐξωτερικῆς ροπῆς, πρέπει νὰ παραμένῃ σταθερὰ δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

Σχ. 112. *Ἡ στροφὴ τοῦ τροχοῦ κατὰ μίαν φορὰν προκαλεῖ στροφὴν τοῦ ἀνθρώπου κατ' ἀντίθετον φοράν.*

$$\text{ὁλικὴ στροφικὴ ὁρμὴ}_{(\text{πρὸ})} = \text{ὁλικὴ στροφικὴ ὁρμὴ}_{(\text{μετὰ})}$$
$$0 + 0 = \Theta_\tau \cdot \omega_\tau + \Theta_\alpha \cdot \omega_\alpha$$

ἐξ οὗ προκύπτει διὰ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα τοῦ ἀνθρώπου

$$\omega_\alpha = -\frac{\Theta_\tau}{\Theta_\alpha} \cdot \omega_\tau$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ἀκριβῶς ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ ἀνθρώπου ἔχει ἀντίθετον φορὰν πρὸς τὴν γωνιακὴν ταχύτητα τοῦ τροχοῦ.

§ 70. Κροῦσις. Ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας καὶ τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς συναντῶμεν εἰς τὰ προβλήματα τῆς ***κρούσεως***. Ἐπειδὴ συνήθως τὸ φαινόμενον τῆς κρούσεως δύο οἱωνδήποτε σωμάτων διαρκεῖ τόσον ὀλίγον χρόνον ὥστε νὰ εἶναι δυσχερὴς ἡ παρακολούθησις τοῦ φαινομένου θὰ περιγράψωμεν ἐνταῦθα εἰδικὴν περίπτωσιν εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ὅροι εἶναι τοιοῦτοι ὥστε ἡ διάρκεια τῆς συγκρούσεως νὰ εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη: Ἐκ δύο ἁμαξίων ἐφωδιασμένων διὰ συγκρου-

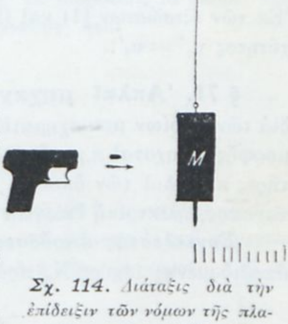
Σχ. 113. Διάταξις διὰ τὴν βραδεῖαν ἐπίδειξιν τῶν νόμων τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως.

στήρων *(σχ. 113)*, τὸ ἓν ἀκινητεῖ τὸ δὲ ἄλλο κινούμενον μὲ ὡρισμένην ταχύτητα συγκρούεται μὲ τὸ πρῶτον. Εὐθὺς ὡς οἱ δύο συγκρουστῆρες ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν τὰ ἐλατήριά των ἀρχίζουν παραμορφούμενα ἀφοῦ δὲ λάβουν μίαν μεγίστην παραμόρφωσιν ἀποκτοῦν βαθμιαίως τὸ ἀρχικόν των μῆκος. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς συγκρούσεως αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ὑπὸ τῶν ἐλατηρίων ἐπὶ τῶν δύο ἁμαξίων μεταβάλλονται χρονικῶς περίπου κατὰ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 66.

Ἡ ἐνέργεια ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν παραμόρφωσιν τῶν ἐλατηρίων λαμβάνεται ἀπὸ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν ἁμαξίων (ἕνεκα τοῦ ὁποίου ἀκριβῶς ἐπέρχεται καὶ ἡ παρατηρουμένη μεταβολὴ τῆς ταχύτητος). Μετὰ τὸ πέρας τῆς κρούσεως τὰ δύο ἁμάξια ἀποχωρίζονται καὶ κινοῦνται μὲ νέας ταχύτητας, ἡ δὲ δυναμικὴ ἐνέργεια τῶν ἐλατηρίων ἔχει μετατραπῇ ἐκ νέου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν ἁμαξίων.

Ἂν τὰ δύο ἐλατήρια ἦσαν τελείως ἐλαστικά, τότε ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια θὰ μετετρέπετο ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν ***(τελείως ἐλαστικὴ κροῦσις)***. Ἂν ὅμως ταῦτα δὲν εἶναι τελείως ἐλαστικά, τότε μέρος τῆς ἐνεργείας τῆς ἐλαστικῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἄν, τέλος, τὰ ἐλατήρια εἶναι τελείως πλαστικά, ὅλη ἡ ἐνέργεια τῆς παραμορφώσεως μετατρέπεται εἰς θερμότητα ***(τελείως πλαστικὴ κροῦσις)***.

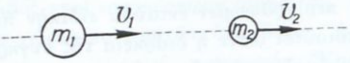
Τελείως πλαστικὴν κροῦσιν ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν, λ.χ., κατὰ τὴν ὁποίαν βλῆμα πυροβόλου εἰσχωρεῖ ἐντὸς σανίδος ἐξηρτημένης ἀπὸ τὸ ἄκρον νήματος *(σχ. 114)*. Μετὰ τὴν κροῦσιν ἡ σανὶς μετὰ τοῦ ἐντὸς αὐτῆς ἐνσφηνωθέντος βλήματος κινεῖται μὲ ὡρισμένην ταχύτητα.



Σχ. 114. Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῶν νόμων τῆς πλαστικῆς κρούσεως. Ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ σανὶς μετρεῖται ἐκ τοῦ πλάτους τῆς παραγομένης ταλαντώσεως.

Κατωτέρω θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ***κεντρικῆς κρούσεως*** *(σχ. 115)*, δύο σφαιρῶν, εἰς τὰς ἄκρας περιπτώσεις τῆς τελείως ἐλαστικῆς κρούσεως καὶ τῆς τελείως πλαστικῆς κρούσεως.

α) *Τελείως ἐλαστικὴ κροῦσις.* Αἱ δύο σφαῖραι μὲ μάζας m_1 καὶ m_2 κινοῦνται μὲ ταχύτητας $υ_1$ καὶ $υ_2$, συγκρουόμεναι δὲ κεντρικῶς ἀποχωρίζονται μὲ νέας ταχύτητας $υ'_1$ καὶ $υ'_2$. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς δύο αὐτὰς ταχύτητας: Μετὰ τὴν κροῦσιν, ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν πρὸ τῆς κρούσεως. Ἤτοι



Σχ. 115. *Κεντρικὴ κροῦσις δύο σφαιρῶν: Αἱ ταχύτητες αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο κέντρα των.*

$$\frac{1}{2}m_1υ_1^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1'^2 + \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 .$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἀπὸ τὸ θεώρημα διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς προκύπτει

$$m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1' + m_2 \cdot υ_2'$$

Ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων ὑπολογίζομεν τὰς δύο ἀγνώστους ταχύτητας $υ'_1$ καὶ $υ'_2$.

β) *Τελείως πλαστικὴ κροῦσις.* Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ σφαῖραι δὲν ἀποχωρίζονται μετὰ τὴν σύγκρουσιν ἀλλὰ κινοῦνται πλέον μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα

$$υ'_1 = υ'_2 \qquad (1)$$

Κατὰ ταῦτα δὲν ἐπιτρέπεται νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ἀφοῦ μέρος τῆς ἐνεργείας ταύτης μετετράπη εἰς θερμότητα. Τὸ θεώρημα ὅμως διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς ὁρμῆς θὰ εἶναι

$$m_1 \cdot υ_1 + m_2 \cdot υ_2 = m_1 \cdot υ_1' + m_2 \cdot υ_2' \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ τιμὴ τῆς ζητουμένης κοινῆς ταχύτητος $υ_1' = υ_2'$.

§ 71. Ἁπλαῖ μηχαναί. ***Μηχαναὶ*** καλοῦνται συστήματα σωμάτων διὰ τῶν ὁποίων μετασχηματίζεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς εἰς ἐνέργειαν ἄλλης μορφῆς. Μηχαναὶ π.χ. εἶναι οἱ *κινητῆρες* (βενζινοκινητῆρες, ἠλεκτρικοὶ κινητῆρες κ.λ.) διὰ τῶν ὁποίων μετατρέπεται ἐνέργεια μιᾶς μορφῆς (θερμότης καύσεως, ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια κ.λ.) εἰς μηχανικὸν ἔργον.

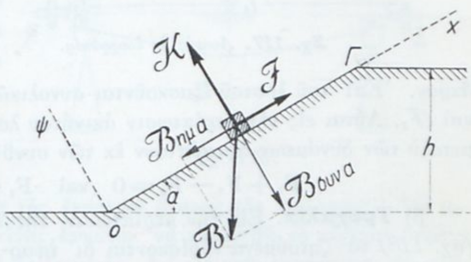
Συντελεστὴς ἀποδόσεως η μιᾶς μηχανῆς καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς ἀποδιδομένης ἰσχύος $N_α$ πρὸς τὴν προσφερομένην ἰσχὺν $N_π$. Ἤτοι:

$$\boxed{η = \frac{N_α}{N_π}}$$

Αἱ μηχαναὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ διάφορα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐκτελέσῃ καθωρισμένην μόνον κίνησιν. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς ἐκ τῶν ***ἁπλῶν μηχανῶν,*** εἰς τὰς ὁποίας τόσον ἡ προσφερομένη ὅσον καὶ ἡ ἀποδιδομένη ἐνέργεια εὑρίσκεται ὑπὸ μορφὴν μηχανικοῦ ἔργου.

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει, συνήθως, εἶναι ἡ ἀνεύρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς. Τὴν σχέσιν ταύτην εὑρίσκομεν συνήθως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας, εἰς πολυπλοκωτέρας ὅμως περιπτώσεις προτιμᾶται, ὡς θὰ εἴδομεν, ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέων τριβῶν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ πόρισμα ὅτι *κατὰ τὴν λειτουργίαν μιᾶς ἁπλῆς μηχανῆς τὸ ἔργον τῆς δρώσης δυνάμεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τῆς ἀνθισταμένης.*

1) **Κεκλιμένον ἐπίπεδον.** Διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν ἕνα σῶμα τῇ βοηθείᾳ δυνάμεως μικροτέρας τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Ἐπὶ τοῦ σώματος *(σχ. 116)* ἐπιδροῦν τρεῖς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος $\mathcal{B}$, 2) ἡ δύναμις $\mathcal{K}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ σώματος, καὶ 3) ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ μὲ τὴν ὁποίαν ἀνυψώνομεν τὸ σῶμα. Τὴν τριβὴν θεωροῦμεν ἐν προκειμένῳ ἀμελητέαν, ὁπότε ἡ δύναμις $\mathcal{K}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, διότι τότε τὸ ἐπίπεδον μόνον κάθετον δύναμιν πρὸς αὐτὸ δύναται νὰ μεταδώσῃ. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐπιδρῶσαι δυνάμεις νὰ ἰσορροποῦν, ἤτοι



Σχ. 116. *Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκοῦνται αἱ τρεῖς δυνάμεις $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}$ καὶ $\mathcal{F}$. (Ἡ τριβὴ θεωρεῖται ἐν προκειμένῳ ἀμελητέα).*

$$\sum \text{δυνάμεων} = 0$$

Διὰ τοὺς δύο ἄξονας x καὶ y γράφομεν

$$F - B\,\eta\mu\,\alpha = 0$$
$$K - B\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha = 0$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως συνάγομεν ὅτι ἡ δύναμις F ἡ ἀνυψοῦσα τὸ σῶμα εἶναι $F = B\,\eta\mu\,\alpha$, δηλαδὴ εἶναι *μικροτέρα* τοῦ βάρους B τοῦ σώματος.

Τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον καταναλίσκομεν διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος μέχρι τοῦ ὕψους h, εἶναι

$$A = F \cdot l = F \cdot \frac{h}{\eta\mu\,\alpha}$$

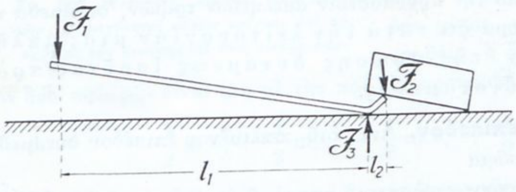
ἔνθα l εἶναι ἡ ἀπόστασις ΟΓ.

Ἀλλὰ $\dfrac{F}{\eta\mu\,\alpha} = B$, ὁπότε ἔχομεν

$$A = B \cdot h$$

Βλέπομεν δηλαδὴ ὅτι διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος κατηναλώθη τὸ αὐτὸ ἔργον B· h, τὸ ὁποῖον θὰ ἐχρειάζετο καὶ χωρὶς τὴν χρῆσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

2) **Μοχλός.** Εἰς τοὺς μοχλοὺς ἐξασκεῖται δύναμις εἰς ἓν σημεῖον διὰ δυνάμεως ἐξασκουμένης εἰς ἄλλο. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ ***λοστοῦ*** τοῦ σχήματος 117 ἐξασκοῦμεν τὴν δύναμιν $\mathcal{F}_1$ ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας εἶναι ἡ ἐμφάνισις τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}_2$ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Ἐπὶ τοῦ λοστοῦ ἐξασκοῦνται συνολικῶς τρεῖς δυνάμεις αἱ $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ καὶ $\mathcal{F}_3$. Αὗται εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκινήτου λοστοῦ ἰσορροποῦν. Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δυνάμεων προκύπτουν ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας



Σχ. 117. *Λοστὸς ἐν ἰσορροπίᾳ.*

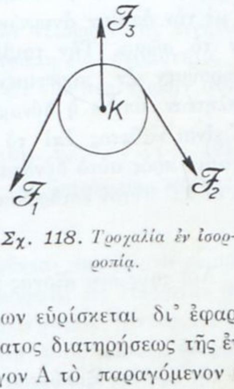
$$F_1 + F_2 - F_3 = 0 \quad \text{καὶ} \quad F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

3) **Τροχαλία.** Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπούσης τροχαλίας *(σχ. 118)* τὰ ζητούμενα εὑρίσκονται δι᾽ ἐφαρμογῆς τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας. Οὕτω, ἡ ἔκφρασις $\sum M = 0$, ἐφαρμοζομένη διὰ τὸ σημεῖον K, μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$F_1 \cdot r + F_3 \cdot 0 - F_2 \cdot r = 0$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν

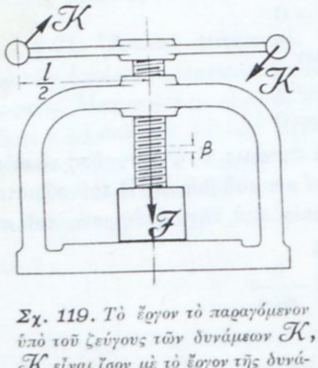
$$F_1 = F_2.$$



Σχ. 118. *Τροχαλία ἐν ἰσορροπίᾳ.*

4) **Κοχλίας.** Ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν δυνάμεων εὑρίσκεται δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας: Τὸ ἔργον A τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ *(σχ. 119)* κατὰ μίαν πλήρη στροφὴν τοῦ κοχλίου εἶναι

$$A = \text{ροπή} \cdot \text{γωνία} = K \cdot l \cdot 2\pi$$



Σχ. 119. *Τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$.*

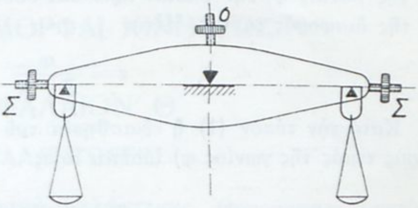
Κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην ὁ κοχλίας θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὸ διάστημα β, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***βῆμα*** τοῦ κοχλίου. Ἡ δύναμις F θὰ καταναλώσῃ ἔργον ἴσον πρὸς F · β. Συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$K \cdot l \cdot 2\pi = F \cdot \beta$$

ἡ ὁποία ἐξίσωσις μᾶς δίδει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο δυνάμεων.

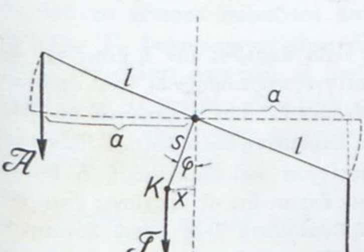
Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἄνω σχέσις ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέας τριβῆς. Ἐπειδὴ εἰς τὴν πραγματικότητα ὑπάρχει τριβή, δυνατὸν ὁ κοχλίας νὰ ἐξασκῇ τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ καὶ μετὰ τὴν ἄρσιν τῶν δυνάμεων $\mathcal{K}, \mathcal{K}$.

5) **Ζυγός.** Ὁ συνήθης ***ζυγὸς*** ἀποτελεῖται ἀπὸ φάλαγγα, στηριζομένην ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ἑνὸς πρίσματος, περὶ τὴν ὁποίαν δύναται ἐλευθέρως νὰ περιστρέφεται. Εἰς ἀποστάσεις κατὰ τὸ δυνατὸν ἴσας ἀπὸ τῆς ἀκμῆς ταύτης ἐξαρτῶνται δύο πλάστιγγες στηριζόμεναι καὶ αὗται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν δύο πρισμάτων. Ἐκ κατασκευῆς αἱ τρεῖς ἀκμαὶ εἶναι παράλληλοι καὶ κεῖνται ἐντὸς ἑνὸς ἐπιπέδου *(σχ. 120)*. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος εἶναι στερεωμένος δείκτης ὁ ὁποῖος κινεῖται ἐνώπιον κλίμακος καὶ ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἑκάστοτε θέσεως τῆς φάλαγγος. Διὰ μικρῶν κινητῶν βαρῶν σ, Σ, εἶναι δυνατὸν νὰ μετατεθῇ τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος κατακορύφως ἢ ὁριζοντίως. Δι' εἰδικοῦ συστήματος ἀνυψοῦται ἡ φάλαγξ ὅταν ὁ ζυγὸς δὲν λειτουργῇ διὰ ν' ἀποφεύγεται ἡ καταστροφὴ τῶν ἀκμῶν ἀπὸ τυχὸν ὑπερφορτίσεις (π.χ. ἀπὸ ἀπότομον τοποθέτησιν τῶν σταθμῶν κ.λ.).



Σχ. 120.

Λειτουργία τοῦ ζυγοῦ. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος ἰσορροποῦντος ζυγοῦ ἐξασκοῦνται, ἐκτὸς τῆς δυνάμεως τῆς προερχομένης ἐκ τοῦ κεντρικοῦ στηρίγματος, αἱ ἐξῆς τρεῖς δυνάμεις *(σχ. 121)*: Αἱ δυνάμεις $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ ἐκ τοῦ βάρους τῶν πλαστίγγων καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν εὑρισκομένων σωμάτων καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{G}$ ἐκ τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος (τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς δρῶσαν εἰς τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς Κ). Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ὡς πρὸς ἄξονα συμπίπτοντα μὲ τὴν ἀκμὴν στηρίξεως δίδει τὴν ἐξίσωσιν



Σχ. 121. Ὅταν αἱ δυνάμεις $\mathcal{A}$ καὶ $\mathcal{B}$ εἶναι ἄνισοι, ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὑπὸ κλίσιν.

$$\mathrm{A} \cdot \alpha + \Gamma \cdot \mathrm{x} = \mathrm{B} \cdot \alpha$$

Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$\alpha = \mathrm{l} \cdot \text{συν}\,\varphi \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{x} = \mathrm{s} \cdot \text{ημ}\,\varphi$$

ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{l} \cdot \text{συν}\,\varphi + \Gamma \cdot \mathrm{s} \cdot \text{ημ}\,\varphi = \mathrm{B} \cdot \mathrm{l} \cdot \text{συν}\,\varphi$$

ἢ
$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{B - A}{\Gamma} \cdot \frac{l}{s} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ δύο δυνάμεις A καὶ B δὲν εἶναι ἴσαι, ὁ ζυγὸς δὲν ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν τοῦ μηδενός, ἀλλ' εἰς ἄλλην εἰς τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ τελευταία ἐξίσωσις (1).

Εὐαισθησία τοῦ ζυγοῦ. ***Εὐαισθησία* ε** ἑνὸς ζυγοῦ καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς γωνίας φ, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ δοθεῖσα διαφορὰ δυνάμεων B—A, διὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης. Ἤτοι

$$\varepsilon = \frac{\varphi}{B - A}$$

Κατὰ τὸν τύπον (1) ἡ εὐαισθησία τοῦ ζυγοῦ (ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ) ἰσοῦται πρὸς

$$\varepsilon = \frac{l}{\Gamma \cdot s} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐαισθησία εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ μοχλοβραχίων l, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ βάρος Γ τῆς φάλαγγος καὶ ὅσον πλησιέστερον πρὸς τὸ σημεῖον στηρίξεως εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους K. Πρακτικῶς ἡ αὔξησις τῆς εὐαισθησίας ἐπιτυγχάνεται κυρίως δι' ἐλαττώσεως τοῦ βάρους τῆς φάλαγγος διότι αὔξησις τοῦ l ἢ ἐλάττωσις τοῦ s προκαλεῖ ταυτοχρόνως αὔξησιν τοῦ χρόνου αἰωρήσεως, ὁπότε ἡ μέτρησις διαρκεῖ ἐπὶ πολύ, δυσχεραίνουσα τὴν ἐργασίαν. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ εὐαισθησία εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φορτίσεως τῶν πλαστίγγων*.

Ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ. Ὁ ζυγὸς εἶναι ***ἀκριβὴς*** ἐὰν ἡ θέσις τοῦ δείκτου μένῃ ἀμετάβλητος ὅταν αἱ δύο πλάστιγγες φορτισθοῦν δι' ἴσων σταθμῶν.

Διὰ νὰ ἐλέγξωμεν τὴν ἀκρίβειαν θέτομεν ἐπὶ τῶν πλαστίγγων δύο βάρη τοιαῦτα ὥστε ἡ θέσις τοῦ δείκτου νὰ παραμείνῃ ἀμετάβλητος. Ἐὰν τώρα ἀνταλλάξωμεν τὰ δύο βάρη ἐπὶ τῶν πλαστίγγων καὶ ἐξακολουθῇ ὁ δείκτης νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν προτέραν του θέσιν ἕπεται ὅτι οἱ βραχίονες εἶναι ἴσοι καὶ τὰ βάρη εἶναι ἴσα. Κατὰ ταῦτα, ἡ ἀνακρίβεια ἑνὸς ζυγοῦ δύναται νὰ ἐξουδετερωθῇ διὰ ***διπλῆς ζυγίσεως.*** Δι' ἀκριβεῖς ζυγίσεις πρέπει πρὸς τούτοις νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ ἄνωσις τὴν ὁποίαν ὑφίστανται ἐντὸς τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος τὰ σώματα καὶ ἡ ὁποία εἶναι διάφορος διὰ δύο σώματα βάρους μὲν τοῦ αὐτοῦ, πυκνότητος ὅμως διαφόρου.

Μέγιστον φορτίον. Ὑπερβολικὴ φόρτισις τοῦ ζυγοῦ δύναται νὰ προκαλέσῃ μόνιμον κάμψιν τῆς φάλαγγος, διὰ τοῦτο ἕκαστος ζυγὸς χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸ ***μέγιστον φορτίον*** τὸ ὁποῖον δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνωμεν.

* Ὑπενθυμίζεται ὅτι τοῦτο ἰσχύει μόνον ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς ἀκμαὶ εὑρίσκονται ἐντὸς ἑνὸς ἐπιπέδου.

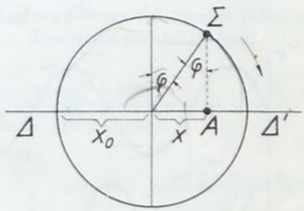
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

§ 72. Γραμμικὴ ἁρμονικὴ ταλάντωσις. Θεωρήσωμεν κινητὸν Σ *(σχ. 122)* κινούμενον ὁμαλῶς ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος x_0. Θὰ μελετηθῇ ἡ κίνησις τῆς προβολῆς Α τοῦ σημείου Σ ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ΔΔ΄. Ἡ κίνησις αὕτη, ἡ ὁποία εἶναι παλινδρομικὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων σημείων τῆς διαμέτρου, καλεῖται ***περιοδικὴ κίνησις***, διότι ἐπαναλαμβάνεται ἡ αὐτὴ μετὰ ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα, τὴν ***περίοδον*** Τ τῆς κινήσεως. Ἡ ἀπόστασις x τοῦ σημείου Α, ἀπὸ τὸ κέντρον ὀνομάζεται ***ἀπομάκρυνσις***. Ἡ ἀπομάκρυνσις εἶναι ἄλλοτε θετικὴ καὶ ἄλλοτε ἀρνητικὴ μὲ μεγίστην τιμὴν $\pm x_0$. Ἡ μεγίστη αὕτη τιμὴ x_0 καλεῖται ***πλάτος*** τῆς ταλαντώσεως.



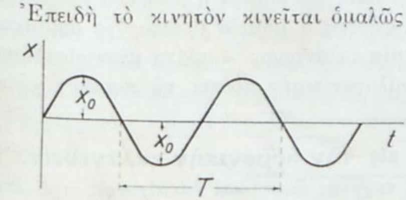
Σχ. 122. Τὸ σημεῖον Α ἐκτελεῖ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΔΔ΄ γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ σχήματος προκύπτει διὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ἡ ἐξίσωσις

$$x = x_0 \cdot \eta\mu\, \varphi$$

Ἐπειδὴ τὸ κινητὸν κινεῖται ὁμαλῶς ἡ γωνιακή του ταχύτης ω εἶναι $\omega = \varphi / t$ ὁπότε ἡ ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$\boxed{x = x_0 \cdot \eta\mu\, \omega t} \qquad (1)$$



Σχ. 123. Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $x = x_0\ \eta\mu\ \omega t$. (Τ εἶναι ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως).

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην βλέπομεν ὅτι τὸ x εἶναι «ἡμιτονοειδὴς» συνάρτησις τοῦ χρόνου. Γραφικῶς παρίσταται ἡ ἐξίσωσις αὕτη διὰ μιᾶς γραμμῆς καλουμένης ***ἡμιτονοειδοῦς*** *(σχ. 123)*. Ἡ γωνία ωt, ἡ ὁποία διαρκῶς αὐξάνεται, καλεῖται ***φάσις*** τῆς κινήσεως, τὸ δὲ ω τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ κυκλικῶς κινουμένου σημείου Σ, καλεῖται ***κυκλικὴ συχνότης*** αὐτῆς. Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$\omega = 2\pi\nu$$

(ἔνθα $\nu = 1/T$).

Ἡ περιγραφεῖσα κίνησις τοῦ σημείου Α εἶναι ἡ ἁπλουστάτη τῶν περιοδικῶν κινήσεων καὶ καλεῖται ***ἁρμονικὴ ταλάντωσις,*** δεδομένου δὲ ὅτι ἐκτελεῖται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, καλεῖται καὶ ***γραμμικὴ ἁρμονικὴ ταλάντωσις.***

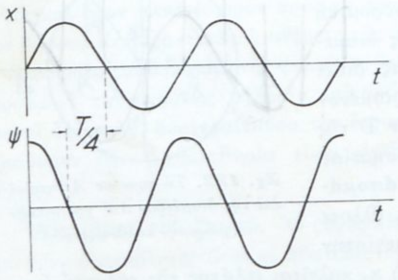
Διαφορὰ φάσεως. Θεωρήσωμεν τὰς δύο ἁρμονικὰς ταλαντώσεις

$$x = x_0 \cdot \eta\mu\,\omega t \quad \text{καὶ} \quad y = y_0 \cdot \eta\mu\,(\omega t + \delta)$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυκλικὴν συχνότητα, ἀλλὰ διάφορον πλάτος καὶ φάσιν. Ἡ διαφορὰ δ μεταξὺ τῆς φάσεως $\omega t + \delta$ τῆς μιᾶς ταλαντώσεως καὶ τῆς φάσεως ωt τῆς ἄλλης ταλαντώσεως, καλεῖται ***διαφορὰ φάσεως,*** εἶναι δὲ εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα χρονικῶς σταθερά.

Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρει ἡ περίπτωσις δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων μὲ σταθερὰν διαφορὰν φάσεως 90° *(σχ. 124)*:

$$x = x_0 \cdot \eta\mu\,\omega t$$
$$y = y_0 \cdot \eta\mu\,(\omega t + 90^\circ) = y_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\,\omega t.$$



Σχ. 124. *Αἱ δύο ταλαντώσεις παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως 90°.*

ΠΙΝΑΞ

Διὰ χρόνον:	$t = 0$	$t = \frac{T}{4}$
ἔχομεν	$x = 0$	$x = x_0$
	$y = y_0$	$y = 0$

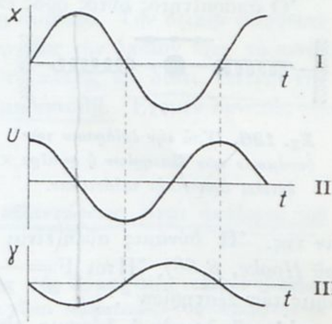
Ὅπως παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ πίνακος ἡ μία ταλάντωσις λαμβάνει τὴν μεγίστην ἀπομάκρυνσιν ἀκριβῶς τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἄλλη ἔχει ἀπομάκρυνσιν μηδέν. Καὶ γενικῶς, διαφορὰ φάσεως δ μοιρῶν μεταξὺ δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων σημαίνει ὅτι, ἂν ἡ μία ταλάντωσις λαμβάνῃ μίαν οἱανδήποτε τιμήν, διὰ νὰ λάβῃ ἡ ἄλλη τὴν ἀνάλογον τιμὴν πρέπει νὰ παρέλθῃ χρόνος ἀντιστοιχῶν εἰς γωνίαν δ μοιρῶν.

Ταχύτης καὶ ἐπιτάχυνσις εἰς τὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν. Ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τόσον ἡ ταχύτης ὅσον καὶ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἐκτελοῦντος τὴν ἁρμονικὴν κίνησιν σημείου Α μεταβάλλονται ἁρμονικῶς μετὰ τοῦ χρόνου.

Ὁ ὑπολογισμὸς δίδει διὰ τὴν ταχύτυτα υ τὴν ἐξίσωσιν

$$\upsilon = \upsilon_0 \cdot \eta\mu\,(\omega t + 90^\circ) \qquad (2)$$

Ἡ ταχύτης λοιπὸν λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν $υ_0$ (*πλάτος* τῆς ἁρμονικῶς μεταβαλλομένης ταχύτητος) κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀπομάκρυνσις λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδέν, δηλαδὴ ἔχει φάσιν διαφέρουσαν τῆς φάσεως τῆς ἀπομακρύνσεως κατὰ 90° *(σχ. 125)*.



Σχ 125. Κινητὸν ἐκτελοῦν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν (I) ἔχει ταχύτητα (II) καὶ ἐπιτάχυνσιν (III) ἁρμονικῶς μεταβαλλομένας.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$γ = γ_0 \cdot ημ(ωt + 180°) \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν δηλ. ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις καὶ ἡ ἀπομάκρυνσις παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως 180°. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ φορὰ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι πάντοτε ἀντίθετος τῆς φορᾶς τῆς ἀπομακρύνσεως.

Ἀπόδειξις τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3). Τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ἂν διαφορίσωμεν ὡς πρὸ τὸν χρόνον τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε προκύπτει

$$υ = \frac{dx}{dt} = x_0 \cdot ω \cdot συν\, ωt = x_0 \cdot ω \cdot ημ(ωt + 90°) \qquad (4)$$

Ἂν καλέσωμεν $υ_0$ τὸ πλάτος $x_0 \cdot ω$, λαμβάνομεν τὴν ἔκφρασιν

$$υ = υ_0 \cdot ημ(ωt + 90°).$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις εὑρίσκεται διὰ διαφορίσεως ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς ἐξισώσεως (4). Ἤτοι

$$γ = \frac{dυ}{dt} = -x_0 \cdot ω^2 \cdot ημ\, ωt = x_0 \cdot ω^2 \cdot ημ(ωt + 180°)$$

Ἂν καλέσωμεν $γ_0$ τὸ πλάτος $x_0 \cdot ω^2$ τῆς ἐπιταχύνσεως, λαμβάνομεν τὴν ἔκφρασιν

$$γ = γ_0 \cdot ημ(ωt + 180°)$$

§ 73. Ἀπαραίτητος ὅρος παραγωγῆς ἐλευθέρας ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Κατὰ τὴν προηγουμένην παράγραφον, ὑλικόν τι σημεῖον μάζης m ἐκτελοῦν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ἔχει ἐπιτάχυνσιν ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3). Διὰ νὰ ἔχῃ ὅμως τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπιτάχυνσιν, πρέπει νὰ δρᾷ ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, *διὰ νὰ παραχθῇ ἁρμονικὴ ταλάντωσις, πρέπει ἡ δύναμις αὕτη νὰ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν καὶ νὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρὸς αὐτὴν φοράν*, ἤτοι ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$\boxed{F = -D \cdot x}$$

Ἡ σταθερὰ D τῆς ἀναλογίας καλεῖται ***κατευθύνουσα δύναμις*** καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ὡς τὸ ἀρνητικὸν πηλίκον τῆς δυνάμεως F τῆς προκαλούσης τὴν ἀπομάκρυνσιν x διὰ τῆς ἀπομακρύνσεως ταύτης.

Ἡ δύναμις F, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας τὸ ὑλικὸν σημεῖον ἐκτελεῖ τὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν, καλεῖται **δύναμις ἐπαναφορᾶς** διότι τείνει πάντοτε νὰ φέρῃ τοῦτο εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του.

Ὁ ἀπαραίτητος οὗτος ὅρος ἐκπληροῦται εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 126. Σφαῖρα μάζης m κρατεῖται ὑπὸ δύο ὁμοίων ἐλατηρίων (θεωρουμένων ἄνευ μάζης). Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὴν σφαῖραν ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της κατὰ x, ἀναπτύσσεται ὑπὸ τῶν ἐλατηρίων δύναμις ἐπαναφορᾶς F, ἥτις τείνει νὰ τὴν ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν θέσιν της. Ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν *(νόμος τοῦ Hooke, § 86)*. Ἤτοι $F = -D \cdot x$ ἔνθα D εἶναι ἡ κατευθύνουσα δύναμις τῶν ἐλατηρίων*.

Σχ. 126. *Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων τῶν ἐλατηρίων ἡ σφαῖρα ἐκτελεῖ ἁρμονικὴν ταλάντωσιν.*

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως ἔπεται ὅτι, ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὴν σφαῖραν ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της καὶ κατόπιν τὴν ἀφήσωμεν ἐλευθέραν, θὰ ἐκτελέσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, ἁρμονικὴν ταλάντωσιν ***(ἐλευθέρα ἁρμονικὴ ταλάντωσις)***.

Ἡ κυκλικὴ συχνότης τῆς ἐλευθέρας ταύτης ταλαντώσεως ***(κυκλικὴ ἰδιοσυχνότης*** ω) παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad (1)$$

(Ὁ τύπος οὗτος ἀποδεικνύεται κατωτέρω).

Ἐκ τῆς κυκλικῆς ἰδιοσυχνότητος (τύπος 1) ὑπολογίζεται ἡ ***ἰδιοπερίοδος*** T καὶ ἡ ***ἰδιοσυχνότης*** ν διὰ τῶν τύπων

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\nu = \frac{1}{T}}$$

Ἐνέργεια ὑλικοῦ σημείου ἐκτελοῦντος γραμμικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν. Διὰ ν᾽ ἀπομακρύνωμεν τὸ κινητὸν ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του πρέπει, ὅπως ἴδωμεν, νὰ ἐξασκήσωμεν ἐπ᾽ αὐτοῦ δύναμιν, ἡ ὁποία κατὰ τὴν μετακίνησιν παράγει ἔργον. Τὸ ἔργον τοῦτο ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Οὕτω, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ παραμορφωθὲν ἐλατήριον τοῦ σχήματος 126, ὑπελογίσθη εἰς τὴν § 42 εἰς

$$E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

ἔνθα x εἶναι ἡ ἑκάστοτε τιμὴ τῆς ἀπομακρύνσεως.

* Αὕτη εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἂν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκήσωμεν τὴν δύναμιν F καὶ μετρήσωμεν τὴν προκαλουμένην ἀπομάκρυνσιν x, τότε τὸ πηλίκον F/x μᾶς δίδει τὴν κατευθύνουσαν δύναμιν τῶν ἐλατηρίων.

Ἐὰν τώρα τὸ κινητὸν ἀφεθῇ ἐλεύθερον, θὰ ἀρχίσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ἐπαναφορᾶς, κινούμενον πρὸς τὴν θέσιν ἰσορροπίας, μετατρεπομένης, οὕτω, τῆς δυναμικῆς του ἐνεργείας εἰς κινητικήν. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, θὰ πρέπει ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια ($E_{\delta\upsilon\nu} + E_{\kappa\iota\nu}$) τῆς ταλαντώσεως νὰ παραμένῃ σταθερά. Τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν ὑπολογίζομεν εὐκόλως ἐκ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ κινητὸν ὅταν ἡ ἀπομάκρυνσις x εἶναι ἴση μὲ τὸ πλάτος x_0, διότι ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμὴν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἔχει μηδενισθῇ. Ἔχομεν συνεπῶς

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} D \cdot x_0^2$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ *ὁλικὴ ἐνέργεια μιᾶς ταλαντώσεως εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους αὐτῆς*.

Θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς παραγωγῆς τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Θεωρήσωμεν ὑλικὸν σημεῖον μάζης m τὸ ὁποῖον εἶναι «ἐλαστικῶς» συνδεδεμένον μὲ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δηλ. δρᾷ μία δύναμις ἐπαναφορᾶς F ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπομάκρυνσιν x αὐτοῦ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης. Ἡ κίνησις τὴν ὁποίαν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς:

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ἢ} \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x \quad \text{ἢ} \quad m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0 \qquad (2)$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις εἶναι ἡ τυπικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως. Ἡ λύσις αὐτῆς εἶναι τῆς μορφῆς

$$x = x_0 \cdot \eta\mu\, \omega t \qquad (3)$$

Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ω εὑρίσκεται δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς τιμῆς τοῦ x καὶ τῆς τιμῆς τοῦ d^2x/dt^2, ὡς αὗται προκύπτουν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) καὶ τῆς ἐξ αὐτῆς διὰ δύο διαδοχικῶν διαφορίσεων προκυπτούσης ἐξισώσεως

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \eta\mu\, \omega t$$

ὁπότε λαμβάνομεν

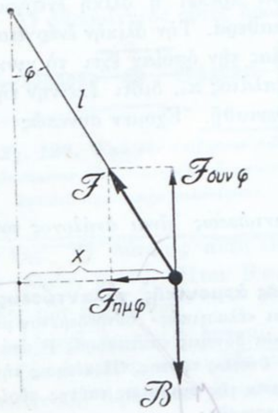
$$-m\omega^2 \cdot x_0 \cdot \eta\mu\, \omega t + D \cdot x_0 \cdot \eta\mu\, \omega t = 0$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν, δι' ἁπλοποιήσεως, τὴν ἐξίσωσιν

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

§ 74. Ἁπλοῦν (ἢ μαθηματικὸν) ἐκκρεμές. Ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ***μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς***. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ὑλικὸν σημεῖον μάζης m ἐξηρτημένον δι' ἀβαροῦς καὶ μὴ ἐκτατοῦ νήματος *(σχ. 127)*. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τοῦτο ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του κατὰ τὴν γωνίαν φ καὶ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐπιδροῦν ἐπ' αὐτοῦ δύο δυνάμεις: τὸ βάρος $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ νῆμα. Ἐκ τούτων δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ εἰς δύο συνιστώσας: μίαν — τὴν $\mathcal{F} \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi$ — κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου, καὶ τὴν ἄλλην — τὴν $\mathcal{F} \cdot$ ημ φ — καθέτως πρὸς αὐτήν, δηλ. ὁριζοντίαν.

Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς πολὺ μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ, τότε ἡ τροχιὰ τοῦ κινητοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι δὲν εἶναι τόξον, ἀλλ' ὁριζοντία εὐθεῖα γραμμή.



Σχ. 127. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\mathcal{F} \cdot$ ημ φ τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ ταλάντωσιν.

Ἡ συνιστῶσα γ_y τῆς ἐπιταχύνσεως καθέτως πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἐπομένως, κατὰ τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς, ἔχομεν

$$\mathcal{F} \cdot \text{συν}\,\varphi - \mathcal{B} = 0$$

καὶ ἐπειδὴ ἐδέχθημεν $\varphi \backsimeq 0$ εἶναι συν $\varphi \backsimeq 1$ καὶ ἐπομένως $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.

Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῶν x, ἡ μὲν δύναμις $\mathcal{B}$ ὡς κατακόρυφος δίδει προβολὴν ἴσην πρὸς μηδέν, ἡ δὲ δύναμις $\mathcal{F}$ τὴν $-$F $\cdot$ ημ φ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου τοῦ σχήματος 127 λαμβάνομεν ημ φ = x/l (ἔνθα l εἶναι τὸ μῆκος τοῦ νήματος) καί, συνεπῶς, ἀντὶ τοῦ $-\mathcal{F} \cdot$ ημ φ ἔχομεν $-\mathcal{F} \cdot$ x/l. Ἐπειδὴ δὲ $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιταχύνουσαν δύναμιν

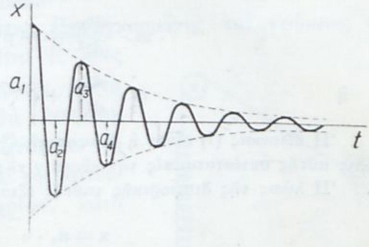
$$F = -\frac{\mathcal{B}}{l} \cdot x \qquad \frac{B}{l} = D$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει πάντοτε φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς ἀπομακρύνσεως x, εἶναι δηλ. μία *δύναμις ἐπαναφορᾶς*, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως. Ἡ κίνησις, ἐπομένως, ἐκκρεμοῦς ἐκτελοῦντος ταλαντώσεις μικροῦ πλάτους εἶναι ἁρμονική. Ὁ συντελεστὴς $\mathcal{B}$/l εἶναι ἡ κατευθύνουσα δύναμις D τοῦ ἐκκρεμοῦς. Τὴν περίοδον T τῆς ταλαντώσεως εὑρίσκομεν ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν γνωστὸν τύπον $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ τὸ D μὲ τὸ ἴσον του B/l, ὁπότε ἔχομεν

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος του l καὶ ἀπὸ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g.

§ 75. Ἀμείωτος καὶ φθίνουσα ταλάντωσις. Ἡ εἰς τὰ προηγούμενα περιγραφεῖσα ταλάντωσις θεωρεῖται ὅτι διατηρεῖ τὸ πλάτος της σταθερόν, ἕνεκα τοῦ ὁποίου καὶ καλεῖται **ἀμείωτος** ἢ **συντηρουμένη ταλάντωσις**. Ἐν τούτοις ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι τὸ πλάτος τῶν ταλαντώσεων ἐλαττοῦται συνεχῶς, ἐφ᾽ ὅσον αὗται δὲν διεγερθοῦν ἐκ νέου, μέχρις ὅτου γίνῃ μηδέν, διότι ἡ ἐνέργεια ταλαντώσεως μετατρέπεται ὀλίγον κατ᾽ ὀλίγον εἰς ἄλλας μορφὰς ἐνεργείας π.χ. θερμότητα. Αἱ τοιαῦται ταλαντώσεις καλοῦνται **φθίνουσαι** ἢ **ἀποσβεννύμεναι** *(σχ. 128)*. Ἡ ἐλάττωσις τοῦ πλάτους προέρχεται ἀπὸ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀντιτίθενται εἰς τὴν κίνησιν (λ.χ. τριβή, ἀντίστασις τοῦ ἀέρος κ.λ.), γίνεται δὲ κατὰ διαφόρους νόμους, ἀναλόγως τοῦ τύπου τῆς δυνάμεως τῆς ἀντιτιθεμένης εἰς τὴν κίνησιν. Μία πρακτικῶς σπουδαιοτάτη περίπτωσις εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ εἰς τὴν κίνησιν ἀντιδρῶσα δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ταχύτητος (π.χ. φθίνουσα ταλάντωσις γαλβανομέτρου λόγῳ ἐπαγωγικῶν ρευμάτων, κίνησις ἐκκρεμοῦς ἐντὸς ἀέρος κ.λ.). Κατὰ ταύτην, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, τὰ διαδοχικὰ πλάτη $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ τῶν αἰωρήσεων ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον. Ὁ σταθερὸς λόγος δύο μεγίστων ἀφισταμένων ἀπ᾽ ἀλλήλων κατὰ μίαν περίοδον καλεῖται **λόγος ἀποσβέσεως** k. Ἤτοι εἶναι

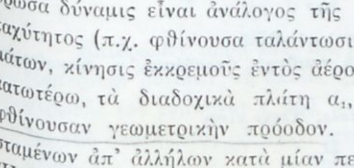


Σχ. 128. Φθίνουσα ταλάντωσις μὲ μικρὰν σχετικῶς ἀπόσβεσιν.

$$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+2}}$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ταλαντώσεων, μετὰ τὸν ὁποῖον ἡ ταλάντωσις ἔχει πρακτικῶς ἀποσβεσθῇ ἐντελῶς, ἐξαρτᾶται, προφανῶς, ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς ἀντιδρώσης δυνάμεως.

Ἀπεριοδικὴ ταλάντωσις. Ἂν αἱ ἀντιδρῶσαι εἰς τὴν κίνησιν δυνάμεις εἶναι πολὺ μεγάλαι ἡ ἀπόσβεσις γίνεται ὡσαύτως πολὺ μεγάλη καὶ τὸ κινητὸν ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας χωρὶς νὰ τὴν ὑπερβῇ *(σχ. 129)*. Ἡ ταλάντωσις καλεῖται τότε **ἀπεριοδική**. Τοιαύτην ταλάντωσιν π. χ. ἐκτελεῖ ἐκκρεμὲς κινούμενον ἐντὸς ὑγροῦ μεγάλου συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς.



Σχ. 129. Ἀπεριοδικὴ ταλάντωσις (ταλάντωσις μὲ πολὺ μεγάλην ἀπόσβεσιν).

Θεωρητικὴ διερεύνησις τῶν ταλαντώσεων μὲ ἀπόσβεσιν. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν ταλάντωσιν εἰς τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν τὴν εἰς τὴν κίνησιν ἀντιδρῶσαν δύναμιν K ἀνάλογον τῆς ταχύτητος. Ἤτοι

$$K = -p \cdot v = -p \cdot \frac{dx}{dt}$$

ἔνθα p εἶναι μία σταθερά, καλουμένη ***σταθερὰ ἀποσβέσεως.*** (Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι ἡ ἀντιδρῶσα δύναμις ἔχει φορὰν ἀντίθετον τῆς ταχύτητος). Ἐπὶ τοῦ κινητοῦ, ἑπομένως, δροῦν δύο δυνάμεις, ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς $-D \cdot x$ καὶ ἡ ἀντιδρῶσα δύναμις $-p \cdot \frac{dx}{dt}$. Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς Μηχανικῆς δίδει

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -p \cdot \frac{dx}{dt} - D \cdot x$$

ἤ

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + p \cdot \frac{dx}{dt} + D \cdot x = 0 \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς θεωρουμένης κινήσεως, ἡ δὲ λύσις αὐτῆς συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν x καὶ t.

Ἡ λύσις τῆς διαφορικῆς ταύτης ἐξισώσεως εἶναι

$$x = \alpha_1 \cdot e^{-\frac{p \cdot t}{2m}} \cdot \eta\mu\, \omega t$$

ἔνθα

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{p^2}{4m^2}}$$

(Τὸ e εἶναι ἡ βάσις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων: $e \simeq 2{,}72$).

Ἀναλόγως τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ σταθερὰ ἀποσβέσεως p, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1η *Περίπτωσις: Πολὺ μεγάλη ἀπόσβεσις.* Ὅταν εἶναι

$$\frac{p^2}{4m^2} > \frac{D}{m}$$

ἡ κυκλικὴ ἰδιοσυχνότης λαμβάνει φανταστικὰς τιμάς, ἡ ταλάντωσις δηλ. εἶναι ἀπεριοδική.

2α *Περίπτωσις: Μετρία ἀπόσβεσις.* Ὅταν εἶναι

$$\frac{p^2}{4m^2} < \frac{D}{m}$$

ἡ ταλάντωσις εἶναι περιοδική, τὸ δὲ πλάτος αὐτῆς $\alpha_1 \cdot e^{-\frac{p}{2m} \cdot t}$ ἐλαττοῦται ἐκθετικῶς μετὰ τοῦ χρόνου *(σχ. 128)*.

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο διαδοχικὰ πλάτη α_1 καὶ α_3, δηλ. δύο μεγίστας τιμὰς τοῦ x ἀφισταμένας ἀλλήλων κατὰ μίαν περίοδον, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος ἀποσβέσεως θὰ εἶναι σταθερός, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = e^{-\frac{p}{2m} \cdot T}$$

ἔνθα $T = 2\pi/\omega$ εἶναι ὁ μεσολαβήσας χρόνος, δηλ. ἡ περίοδος. Διὰ λογαριθμήσεως λαμβάνομεν τὴν ***λογαριθμικὴν μείωσιν*** Λ:

$$\Lambda = \ln k = -\frac{p}{2m} \cdot T$$

3η *Περίπτωσις: Ἄνευ ἀποσβέσεως:* Ὅταν $p = 0$ ἡ ἐξίσωσις (1) ἁπλουστεύεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

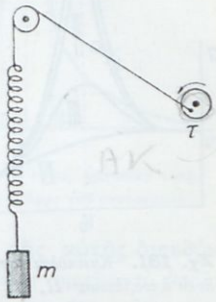
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0$$

ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, παριστᾷ ἀμείωτον ταλάντωσιν

§ 76. Ἐξηναγκασμένη ταλάντωσις. Ἔστω σύστημα τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ταλαντοῦται ἐλευθέρως. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ σύστημα τοῦτο ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ κατόπιν τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐκτελέσῃ, ὡς γνωστόν, ἐλευθέραν ταλάντωσιν τῆς ὁποίας ἡ κυκλικὴ ἰδιοσυχνότης ἔστω ω_0. Ἐὰν ἐπὶ τοιούτου συστήματος ἐπιδρᾷ π ε ρ ι ο δ ι κ ῶ ς ἐξωτερικὴ δύναμις κυκλικῆς συχνότητος ω, τοῦτο θὰ ἐκτελέσῃ μίαν ταλάντωσιν τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν***.

Μηχανικὸν παράδειγμα τοιαύτης ἐξηναγκασμένης ταλαντώσεως εἶναι τὸ ἑπόμενον: Ἡ μᾶζα m ἐξαρτᾶται ἐξ ἑνὸς ἐλατηρίου *(σχ. 130)*. Ἂν ἐκτείνωμεν τοῦτο καὶ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ ἐκτελέσῃ ἐλευθέραν ταλάντωσιν μὲ ἰδιοσυχνότητα ν_0 ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς μάζης m καὶ τῆς κατευθυνούσης δυνάμεως D τοῦ ἐλατηρίου, κατὰ τὸν τύπον

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}\,.$$



Σχ. 130. *Ἡ μᾶζα m, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν περιοδικῆς δυνάμεως, ἐκτελεῖ ἐξηναγκασμένην ταλάντωσιν.*

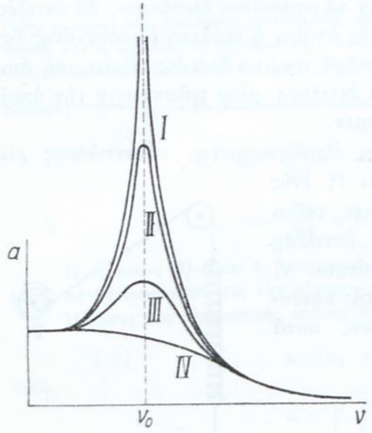
Ἐπιδρῶμεν τώρα ἐπὶ τοῦ συστήματος μὲ ἐξωτερικὴν δύναμιν, ἡ ὁποία, ἕνεκα τῆς περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου τ, δρᾷ π ε ρ ι ο δ ι κ ῶ ς* ἐπὶ τοῦ συστήματος μὲ συχνότητα ν, ρυθμιζομένην διὰ μεταβολῆς τοῦ ἀριθμοῦ στροφῶν τοῦ τυμπάνου. Ἡ ταλάντωσις τὴν ὁποίαν τώρα θὰ ἐκτελέσῃ ἡ μᾶζα m εἶναι ἐξηναγκασμένη. Θὰ ἐξετάσωμεν α) τὴν συχνότητα καὶ β) τὸ πλάτος αὐτῆς. Ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἡ μᾶζα m ταλαντοῦται μὲ τὴν συχνότητα ν τῆς ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως καὶ ὄχι πλέον μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα ν_0 τῆς ἐλευθέρας ταλαντώσεως. Ὅσον ἀφορᾷ τὸ πλάτος α, τοῦτο μεταβάλλεται μετὰ τῆς συχνότητος τῆς ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) **Ταλάντωσις χωρὶς ἀπόσβεσιν.** Ἂν ἡ συχνότης τῆς διεγειρούσης δυνάμεως εἶναι πολὺ μικροτέρα ἢ πολὺ μεγαλυτέρα τῆς ἰδιοσυχνότητος ν_0, τότε τὸ πλάτος α τῆς ἐξηναγκασμένης ταλαντώσεως εἶναι σχετικῶς μικρόν. Ἂν ὅμως ἡ συχνότης τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως λάβῃ τιμὴν προσεγγίζουσαν πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα ν_0, τότε τὸ πλάτος αὐξάνεται, διὰ νὰ γίνῃ ἄπειρον *(σχ. 131, I)* εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συχνότης ν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως γίνῃ ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα ν_0 τοῦ συστήματος ***(συντονισμός)***.

* Διὰ νὰ εἶναι ἡ δύναμις αὕτη ἁ ρ μ ο ν ι κ ὴ θὰ ἔπρεπε ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τροχαλιῶν νὰ εἶναι ἄπειρος.

2) Ταλάντωσις μὲ μετρίαν ἀπόσβεσιν. Ἂν ἡ ἀπόσβεσις εἶναι σχετικῶς μικρά, τότε εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ τὸ πλάτος δὲν γίνεται ἄπειρον, λαμβάνει ὅμως μίαν μεγίστην τιμὴν (καμπύλη II).

Ἂν ἡ ἀπόσβεσις αὐξηθῇ ἀκόμη περισσότερον, ὅλαι αἱ τιμαὶ τῶν πλατῶν διὰ τὰς διαφόρους συχνότητας παρουσιάζονται ἠλαττωμέναι, ἡ δὲ καμπύλη ὀλιγώτερον ὀξεῖα (III). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ συντονισμὸς δὲν εἶναι ὀξύς. Κατὰ ταῦτα, ὁ συντονισμὸς εἶναι ὀξὺς ὅταν, μεταβάλλοντες τὴν συχνότητα τῆς διεγειρούσης δυνάμεως κατ' ἐλάχιστον ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ συντονισμοῦ, τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως ἐλαττοῦται κατὰ πολύ. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὅσον ἡ ἀπόσβεσις εἶναι μικροτέρα τόσον ὁ συντονισμὸς εἶναι ὀξύτερος.



Σχ. 131. *Καμπύλαι συντονισμοῦ. I: ἄνευ ἀποσβέσεως· II, III καὶ IV: μὲ ἀπόσβεσιν.*

Θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς ἐξηναγκασμένης ταλαντώσεως. Ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου μάζης m ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: Ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς $-D \cdot x$, ἡ ἐξωτερικὴ περιοδικὴ δύναμις $F = F_0 \cdot \eta\mu\, \omega t$ καὶ ἡ τριβὴ $-p \cdot \frac{dx}{dt}$. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 73, ἡ κατευθύνουσα δύναμις D εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς μάζης m καὶ τῆς κυκλικῆς ἰδιοσυχνότητος ω_0 τὴν ὁποίαν θὰ εἶχε τὸ σύστημα ἐὰν ἐταλαντοῦτο ἐλευθέρως. Ἤτοι

$$D = m \cdot \omega_0^2$$

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς δίδει

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -p \cdot \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 \cdot x + F_0 \cdot \eta\mu\, \omega t$$

ἢ

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + p \cdot \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 \cdot x = F_0 \cdot \eta\mu\, \omega t$$

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς διαφορικῆς ταύτης ἐξισώσεως εἶναι πολύπλοκος. Ἐνταῦθα θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν μορφὴν τῆς σχέσεως $x = f(t)$ ἡ ὁποία παρουσιάζεται μετὰ πάροδον ἀρκετοῦ χρόνου ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιδράσεως τῆς ἐξωτερικῆς περιοδικῆς δυνάμεως, δηλ. ἀφοῦ ἐκλείψουν τὰ *φαινόμενα ἀποκαταστάσεως* *. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ἀπόσβεσις δὲν εἶναι πολὺ μεγάλη ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως ἔχει τὴν μορφὴν

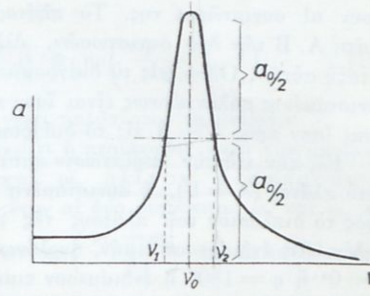
* Ἡ κίνησις κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως περιγράφεται ὡς μία συνάρτησις $x=f(t)$, ἀποτελουμένη ἀπὸ δύο προσθετέους. Ἐξ αὐτῶν ὁ εἷς εἶναι ἀρνητικὴ ἐκθετικὴ συνάρτησις τοῦ χρόνου καί, συνεπῶς, μετά τινα χρόνον, ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ p, ἐκλείπει καὶ ἀπομένει μόνον τὸ μόνιμον φαινόμενον τὸ ὁποῖον ἔχει σταθερὸν πλάτος.

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + p^2 \cdot \omega^2}} \cdot \eta\mu\,(\omega t - \varphi)$$

ἢ $x = \alpha \cdot \eta\mu\,(\omega t - \varphi)$. Ἡ διαφορὰ φάσεως φ παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{p \cdot \omega}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλάτος α λαμβάνει τὴν μεγίστην του τιμὴν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ ($\omega_0 = \omega$), γίνεται δὲ ἄπειρον ὅταν ἐπὶ πλέον ἡ ἀπόσβεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν (ὅταν δηλ. εἶναι $p = 0$). Χαρακτηριστικὸν μέτρον τῆς ὀξύτητος τοῦ συντονισμοῦ εἶναι τὸ ***εὖρος ἡμισείας τιμῆς***, δηλ. ἡ διαφορὰ συχνοτήτων $\nu_1 - \nu_2$, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς πλάτος ἴσον πρὸς $\alpha_0/2$, ἔνθα α_0 εἶναι τὸ πλάτος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντονισμοῦ *(σχ. 132)*.



Σχ. 132. *Ἀπὸ τὸ εὖρος ἡμισείας τιμῆς $\nu_1 - \nu_2$ κρίνεται ἡ ὀξύτης τοῦ συντονισμοῦ.*

§ 77. Σύνθεσις ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

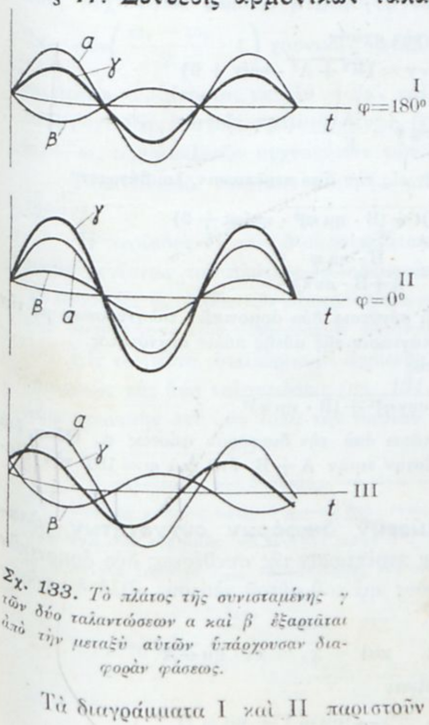
Ἔστω σημεῖον τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ταυτοχρόνως δύο γραμμικὰς ἁρμονικὰς ταλαντώσεις ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον. Ἡ μορφὴ τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως θὰ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἂν αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν συχνότητα, τὴν αὐτὴν φάσιν κ.λ.

α) **Σύνθεσις δύο ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος.** Θεωρήσωμεν δύο ἁρμονικὰς ταλαντώσεις τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ διαφόρου φάσεως

$$\alpha = A \cdot \eta\mu\,\omega t \qquad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \beta = B \cdot \eta\mu\,(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Τὴν συνισταμένην γ — ἡ ὁποία εἰς τὸ σχῆμα 133 παρίσταται διὰ παχυτέρας γραμμῆς — εὑρίσκομεν ἐὰν δι' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν προσθέσωμεν τὰς μερικὰς ἀπομακρύνσεις.



Σχ. 133. *Τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης γ τῶν δύο ταλαντώσεων α καὶ β ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν διαφορὰν φάσεως.*

Τὰ διαγράμματα I καὶ II παριστοῦν τὴν σύνθεσιν ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος, ἀλλὰ μὲ διαφορὰν φάσεως $\varphi = 180^\circ$ ἢ $\varphi = 0^\circ$, τὸ δὲ διάγραμμα III τὴν περίπτωσιν τυχούσης διαφορᾶς φάσεως.

Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἡ συνισταμένη ταλάντωσις εἶναι καὶ αὐτὴ ἁρμονική, ἔχει δὲ τὴν αὐτὴν συχνότητα τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ συνιστῶσαι της. Τὸ πλάτος αὐτῆς ἐξαρτᾶται ὄχι μόνον ἀπὸ τὰ πλάτη Α, Β τῶν δύο συνιστωσῶν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν φάσεως φ μεταξὺ αὐτῶν. Οὕτω, εἰς τὸ διάγραμμα I παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως εἶναι ἴσον πρὸς Α—Β, εἰς τὸ διάγραμμα II ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς Α + Β, εἰς τὸ διάγραμμα III ὅτι ἔχει ἐνδιάμεσον τιμήν.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ συνιστῶσαι ἔχουν τὸ αὐτὸ πλάτος (Α = Β), ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ ἔχει πλάτος εἴτε ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ πλάτους τῆς μιᾶς τῶν συνιστωσῶν, εἴτε ἴσον πρὸς μηδέν, εἴτε ἐνδιάμεσον τιμήν, ἀνολόγως τοῦ ἂν ἡ διαφορὰ φάσεως ἔχῃ τιμὴν $\varphi = 0^\circ$ ἢ $\varphi = 180^\circ$ ἢ ἐνδιάμεσον τιμήν.

Τ' ἀνωτέρω εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθοῦν καὶ διὰ μαθηματικῆς ἀναλύσεως: Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2), λαμβάνομεν

$$\gamma = \alpha + \beta = A \cdot \eta\mu\, \omega t + B \cdot \eta\mu\, (\omega t + \varphi) = A \cdot \eta\mu\, \omega t + B \cdot \eta\mu\, \omega t \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi + B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \omega t \cdot \eta\mu\, \varphi = (A + B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi) \cdot \eta\mu\, \omega t + B \cdot \eta\mu\, \varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\, \omega t.$$

Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$K \cdot \eta\mu\, y + \Lambda \cdot \sigma\upsilon\nu\, y = \sqrt{K^2 + \Lambda^2} \cdot \eta\mu(y + \vartheta)$$

ἔνθα

$$\varepsilon\varphi\, \vartheta = \frac{\Lambda}{K}$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν ταύτην εἰς τὴν ἄνω περίπτωσιν, λαμβάνομεν

$$\gamma = \sqrt{(A + B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi)^2 + (B \cdot \eta\mu\, \varphi)^2} \cdot \eta\mu(\omega t + \vartheta)$$

ἔνθα

$$\varepsilon\varphi\, \vartheta = \frac{B \cdot \eta\mu\, \varphi}{A + B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, πράγματι, ἡ σύνθεσις δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων μὲ τὴν αὐτὴν συχνότητα δίδει ἁρμονικὴν ταλάντωσιν τῆς αὐτῆς πάλιν συχνότητος.

Διὰ δεδομένα Α καὶ Β τὸ πλάτος

$$\sqrt{(A + B \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi)^2 + (B \cdot \eta\mu\, \varphi)^2}$$

τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διαφορὰν φάσεως φ. Οὕτω, διὰ $\varphi = 0$ ἡ ἔκφρασις λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν Α + Β, ἐνῶ διὰ $\varphi = 180^\circ$ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν Α — Β.

β) **Σύνθεσις δύο ταλαντώσεων διαφόρων συχνοτήτων - Διακροτήματα.** Θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς συνθέσεως δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀλλὰ διαφόρων συχνοτήτων

$$x_1 = x_0 \cdot \eta\mu\, \omega_1 t \qquad \text{καὶ} \qquad x_2 = x_0 \cdot \eta\mu\, \omega_2 t$$

Ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι

$$x_{o\lambda} = x_1 + x_2 = x_0 \cdot (\eta\mu\, \omega_1 t + \eta\mu\, \omega_2 t)$$

Ἐπειδὴ ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ημ}\,\alpha + \text{ημ}\,\beta = 2\,\text{συν}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot \text{ημ}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

ἡ ἄνω ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς:

$$x = 2x_0 \cdot \text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot \text{ημ}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right) \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστᾷ μίαν ἐν γένει πολύπλοκον ταλάντωσιν.

Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ κυκλικαὶ συχνότητες ω_1 καὶ ω_2 ὀλίγον διαφέρουν μεταξύ των. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ δύο συχνότητες ω_1 καὶ ω_2 εἶναι περίπου ἴσαι καί, συνεπῶς, ὁ παράγων ημ $\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)$ μεταβάλλεται ταχέως (καὶ συγκεκριμένως μὲ κυκλικὴν συχνότητα ἴσην πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν κυκλικῶν συχνοτήτων τῶν δύο συνιστωσῶν). Κατὰ ταῦτα, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ταλάντωσις τῆς αὐτῆς, περίπου, συχνότητος μὲ τὴν συχνότητα τῶν συνιστωσῶν, ἀλλὰ μὲ πλάτος $2x_0\cdot\text{συν}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)$ χρονικῶς μεταβλητόν. Αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει τοῦτο κυμαίνονται μεταξὺ $+2x_0$ καὶ $-2x_0$. Ἡ κύμανσις αὐτὴ τοῦ πλάτους *(σχ. 134, παχεῖα γραμμὴ)* εἶναι βραδεῖα λόγῳ τῆς μικρᾶς διαφορᾶς $\omega_1-\omega_2$ τῶν κυκλικῶν συχνοτήτων τῶν δύο ταλαντώσεων.

Ταλαντώσεις τοιαύτης μορφῆς καλοῦνται **διακροτήματα** *(ἢ συγκροτήσεις)*.

Ἡ περίοδος T_δ τῶν διακροτημάτων, δηλ. ὁ χρόνος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μεγίστων τοῦ πλάτους, ἀποδεικνύεται* ὅτι εἶναι ἴση πρὸς $1/\nu_1-\nu_2$. *Ἡ συχνότης* ν_δ, δηλ., *τῶν διακροτημάτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν $\nu_1-\nu_2$ τῶν συχνοτήτων τῶν συνιστωσῶν ταλαντώσεων.*

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἀγόμεθα καὶ γραφικῶς: Ἂν παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς δύο ταλαντώσεις *(σχ. 134, λεπταὶ γραμμαὶ)* καὶ θεωρήσωμεν μίαν χρονικὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο ταλαντώσεις εἶναι ἐν φάσει,

* Ἡ περίοδος T_δ τῶν διακροτημάτων εἶναι ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ πλάτος λαμβάνει δύο διαδοχικὰς μεγίστας τιμάς, ὁ χρόνος, δηλ., ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ τοῦ συν $\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)$ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $+1$ ἕως τὴν τιμὴν -1. Ὁ χρόνος οὗτος T_δ εἶναι, προφανῶς, ἴσος πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς περιόδου $T_{\text{συν}}$ τῆς μεταβολῆς τοῦ συν $\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t\right)$. Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$T_{\text{συν}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{συν}}} = \frac{2\pi\cdot 2}{\omega_1-\omega_2} = \frac{4\pi}{2\pi(\nu_1-\nu_2)} = \frac{2}{\nu_1-\nu_2}.$$

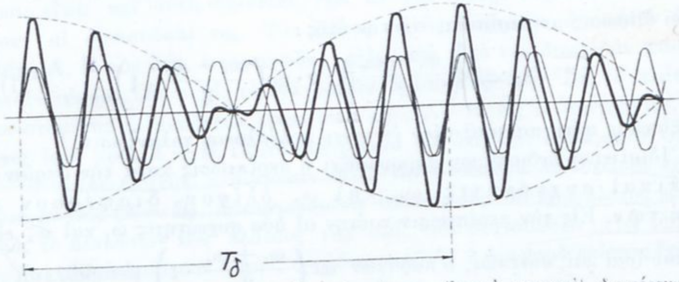
Ἑπομένως ἔχομεν

$$T_\delta = \frac{T_{\text{συν}}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\nu_1-\nu_2} = \frac{1}{\nu_1-\nu_2},$$

καὶ ἐκ τούτου

$$\nu_\delta = \nu_1-\nu_2.$$

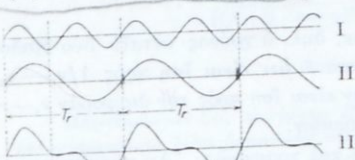
ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ ἔχῃ εἰς ἐκείνην τὴν χρονικὴν στιγμὴν τὸ μέγιστον πλάτος. Μετὰ πάροδον χρόνου τινὸς αἱ δύο ταλαντώσεις, λόγῳ τῆς διαφόρου συχνότητος αὐτῶν, θὰ παρουσιάζουν διαφορὰν φάσεως. Οὕτω, κατά

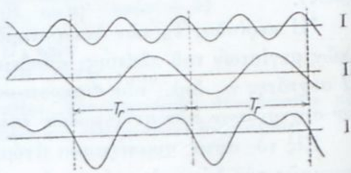


Σχ. 134. *Ὅταν αἱ περίοδοι δύο ταλαντώσεων (λεπταὶ γραμμαί) διαφέρουν ὀ λ ί γ ο ν μεταξύ των, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως αὐτῶν (παχεῖα γραμμή) εἶναι ἓν διακρότημα.*

τινα χρονικὴν στιγμὴν ἡ διαφορὰ φάσεως θὰ ἔχει γίνει ἴση πρὸς 180° καὶ τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης θὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.

§ 78. Ἀνάλυσις περιοδικῶν κινήσεων κατὰ *Fourier.* Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐξητάσαμεν τὴν σύνθεσιν δύο ταλαντώσεων διαφόρων συχνοτήτων. Εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν εἰδικῶς τὴν περίπτωσιν εἰς τὴν ὁποίαν αἱ πρὸς σύνθεσιν ταλαντώσεις ἔχουν συχνότητας τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἁπλοῦς ῥητὸς ἀριθμός. Οὕτω, τὰ διαγράμματα III τῶν σχημάτων





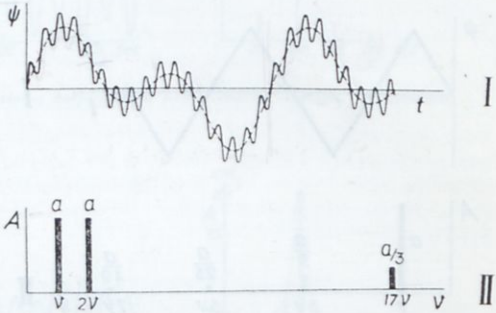
Σχ. 135. *Τὸ διάγραμμα III παριστᾷ τὴν ταλάντωσιν ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν δύο ταλαντώσεων I, II, τῶν ὁποίων ὁ λόγος συχνοτήτων εἶναι 2:1 (ἀρχικὴ διαφορὰ φάσεως ἴση πρὸς μηδέν).*

Σχ. 136. *Τὸ διάγραμμα III παριστᾷ τὴν συνισταμένην ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς συνθέσεως τῶν αὐτῶν ταλαντώσεων I καὶ II τοῦ προηγουμένου σχήματος ἀλλὰ μὲ ἀρχικὴν διαφορὰν φάσεως.*

135 καὶ 136 παριστοῦν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως δύο ταλαντώσεων τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες ἔχουν λόγον 2 : 1. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνισταμένη ταλάντωσις ἔχει μὲν πολύπλοκον μορφήν, ἀλλ' εἶναι περιοδική. Ἡ περίοδος T_r τῆς συνισταμένης ταύτης ταλαντώσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν περίοδον τῆς βραδυτέρας ταλαντώσεως (II), ἡ ὁποία, ὡς ἐκ τούτου, ὀνομάζεται ***θεμελιώδης***. Ἡ συνιστῶσα (I) μὲ τὴν διπλασίαν συχνότητα καλεῖται ***δευτέρα ἁρμονική.***

Ἡ συνισταμένη III τῶν σχημάτων 135 καὶ 136, μολονότι προκύπτει ἐκ συνθέσεως τῶν αὐτῶν ταλαντώσεων, ἔχει διάφορον ἑκάστοτε μορφήν, λόγῳ τοῦ ὅτι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ δύο συνιστῶσαι ἐν παρουσιάζουν ἀρχικῶς διαφορὰν φάσεως, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν ~~δὲν~~ παρουσιάζουν τοιαύτην.

Ἐὰν εἰς τὴν ταλάντωσιν τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ διάγραμμα III τοῦ σχήματος 135 (καὶ ἡ ὁποία προέκυψεν, ὅπως εἴδομεν, ἐκ συνθέσεως δύο ταλαντώσεων μὲ συχνότητας ν καὶ 2ν) ἐπιπροσθέσωμεν μίαν τρίτην ταλάντωσιν τῆς ὁποίας ἡ συχνότης νὰ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς θεμελιώδους (π.χ. ἴση πρὸς 17ν), θὰ προκύψῃ τὸ διάγραμμα I τοῦ σχήματος 137, τὸ ὁποῖον, ὅπως παρατηροῦμεν, παριστᾷ, ὁμοίως, περιοδικὴν ταλάντωσιν.



Σχ. 137. Ταλάντωσις προερχομένη ἐκ συνθέσεως τριῶν ἁρμονικῶν ταλαντώσεων μὲ συχνότητας ν, 2ν καὶ 17ν καὶ μὲ πλάτη α, α καὶ α/3.

Ἐπεκτείνοντες τοὺς συλλογισμοὺς τούτους εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνθέσεως πολλῶν ταλαντώσεων τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς θεμελιώδους συχνότητος, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συνισταμένη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι περιοδική.

Ἀντιστρέφοντες τοὺς συλλογισμοὺς τούτους, καταλήγομεν εἰς τὴν **ἀνάλυσιν κατὰ Fourier**: *Κάθε περιοδικὴ κίνησις εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄθροισμα πολλῶν ἁρμονικῶν προσθετέων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους συχνότητος.*

Ἡ περιοδική, ἑπομένως, κίνησις $y = f(t)$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν*

$$y = f(t) = A_1 \cdot \eta\mu\, \omega t + A_2 \cdot \eta\mu\, 2\omega t + A_3 \cdot \eta\mu\, 3\omega t + \ldots + =$$
$$= \sum A_n \cdot \eta\mu\, n \cdot \omega t.$$

Οὕτω, ἡ περιοδικὴ ταλάντωσις τοῦ σχήματος 137 δύναται νὰ περιγραφῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$y = A_1 \cdot \eta\mu\, \omega t + A_2 \cdot \eta\mu\, 2\omega t + 0 \cdot \eta\mu\, 3\omega t + 0 \cdot \eta\mu\, 4\omega t + \ldots$$
$$\ldots + A_{17} \cdot \eta\mu\, 17\omega t + 0 \cdot \eta\mu\, 18\omega t + \ldots$$

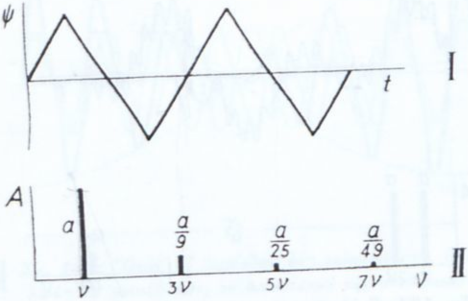
ἔνθα $$A_1 = \alpha\ ,\quad A_2 = \alpha \quad \text{καὶ} \quad A_{17} = \frac{\alpha}{3}$$

* Εἰς τὴν μορφὴν ταύτην τῆς ταλαντώσεως δεχόμεθα ὅτι ἀρχικῶς (διὰ χρόνον, δηλ., $t = 0$) ὅλαι αἱ ἁρμονικαὶ εἶχον τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν θεμελιώδη.

Ἐπίσης ἡ περιοδικὴ ταλάντωσις $y = f(t)$, τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ διάγραμμα I τοῦ σχήματος 138, δύναται, ὡς ἀποδεικνύεται, νὰ ἀναλυθῇ κατὰ Fourier εἰς τὸ ἄθροισμα

$$y = f(t) = a \cdot \eta\mu\, \omega t - \frac{a}{3^2} \cdot \eta\mu\, 3\,\omega t + \frac{a}{5^2} \cdot \eta\mu\, 5\,\omega t - \frac{a}{7^2}\, \eta\mu\, 7\,\omega t + \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχουν μόνον περιττῆς τάξεως ἀνώτεραι ἁρμονικαί.



Σχ. 138. Τὸ διάγραμμα II ἀποδίδει τὸ φάσμα συχνοτήτων τῆς ταλαντώσεως I.

Φάσμα συχνοτήτων. Ἐὰν θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄξων τῶν τετμημένων νὰ παριστᾷ συχνότητας (ν), ὁ δὲ ἄξων τῶν τεταγμένων πλάτη (α), τότε τὸ πλάτος ἑκάστου προσθετέου τῆς σειρᾶς Fourier θὰ παρίσταται ὑπὸ τμήματος εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν πλατῶν *(σχ. 137, II καὶ σχ. 138, II)*. Ἡ τοιαύτη ἀπεικόνισις τῆς ἀναλύσεως μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως καλεῖται ***φάσμα συχνοτήτων.*** Τὸ φάσμα τοῦτο εἶναι ***γραμμικόν,*** ἀποτελεῖται δηλ. ἀπὸ ὡρισμένον ἀριθμὸν γραμμῶν. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ φάσμα μιᾶς ἡμιτονοειδοῦς (ἢ συνημιτονοειδοῦς) ταλαντώσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν καὶ μόνην γραμμήν.

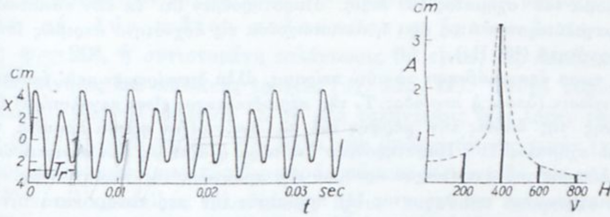
Ἀνάλυσις μὴ περιοδικῆς κινήσεως. Ὅπως ἀποδεικνύεται μαθηματικῶς, εἶναι δυνατὸν ν' ἀναλύσωμεν κατὰ Fourier καὶ ταλαντώσεις μὴ περιοδικάς, ὁπότε ὅμως αὗται θὰ περιγράφωνται ὡς ἀποτέλεσμα ἀθροίσεως ἀπείρων προσθετέων, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες δὲν εὑρίσκονται εἰς ὡρισμένας σχέσεις μεταξύ των. Τὸ προκῦπτον φάσμα εἶναι ***συνεχές.*** Οὕτω, ἡ ἀποσβεννυμένη ταλάντωσις τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 142 (ἀριστερᾷ) εἶναι μία μὴ περιοδικὴ ταλάντωσις *, ἀναλυομένη δὲ κατὰ Fourier, παρέχει ἕνα συνεχὲς φάσμα.

Παρεμπιπτόντως, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μέγιστον παρουσιάζεται εἰς ἐκείνην τὴν συχνότητα τὴν ὁποίαν θὰ εἶχεν ἡ ταλάντωσις αὕτη ἐὰν ἦτο ἀμείωτος.

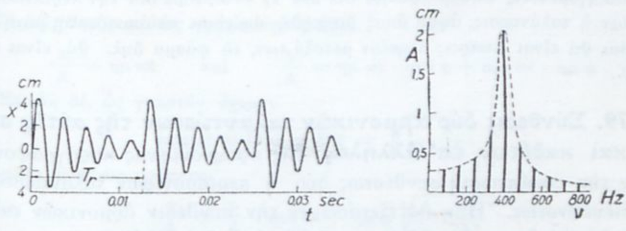
Ἡ ἀνάλυσις μὴ περιοδικῆς κινήσεως δυνατὸν νὰ κατανοηθῇ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν μίαν φθίνουσαν ταλάντωσιν μὲ ἰδιοσυχνότητα 400 Hz, ἡ ὁποία, διὰ καταλλήλου διεγέρσεως, νὰ ἐνισχύεται μεθ' ἑκάστην δευτέραν ταλάντωσιν εἰς τρόπον ὥστε νὰ προκύπτῃ μία κίνησις πολυπλόκου μορφῆς *(σχ. 139)*. Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ μορφὴ τῆς κινήσεως παρουσιάζει περιοδικότητα (μὲ περίοδον T_r), δυνάμεθα ἑπομένως νὰ τὴν ἀναλύσωμεν κατὰ Fourier, ὁπότε καὶ θὰ λάβω-

---

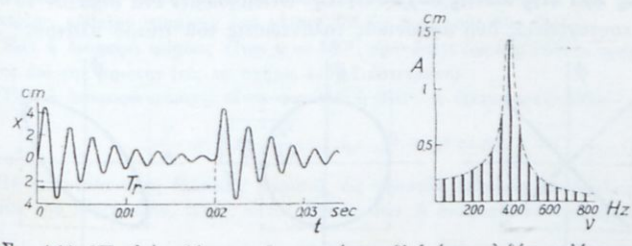
* Ἡ ἄνω ταλάντωσις τὴν ὁποίαν εἰς τὰ προηγούμενα ὠνομάσαμεν φθίνουσαν περιοδικὴν ταλάντωσιν, ἀπὸ αὐστηρῶς μαθηματικῆς ἀπόψεως ἐξεταζομένη, δὲν εἶναι περιοδικὴ διότι δὲν ἐπαναλαμβάνεται ἀκριβῶς ἡ αὐτή.



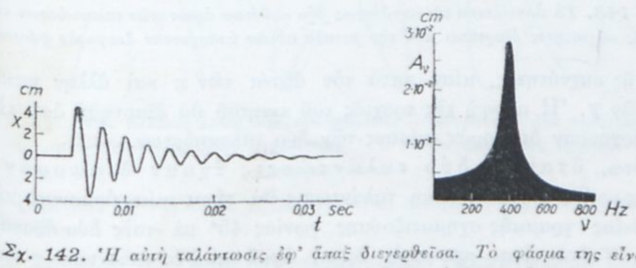
Σχ. 139. *Φθίνουσα ταλάντωσις διεγειρομένη μεθ' ἑκάστην δευτέραν ταλάντωσιν.*



Σχ. 140. *Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις διεγειρομένη μεθ' ἑκάστην πέμπτην ταλάντωσιν.*



Σχ. 141. *Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις διεγειρομένη μεθ' ἑκάστην ὀγδόην ταλάντωσιν.*



Σχ. 142. *Ἡ αὐτὴ ταλάντωσις ἐφ' ἅπαξ διεγερθεῖσα. Τὸ φάσμα της εἶναι συνεχὲς ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ τῶν προηγουμένων, τὰ ὁποῖα εἶναι γραμμικά.*

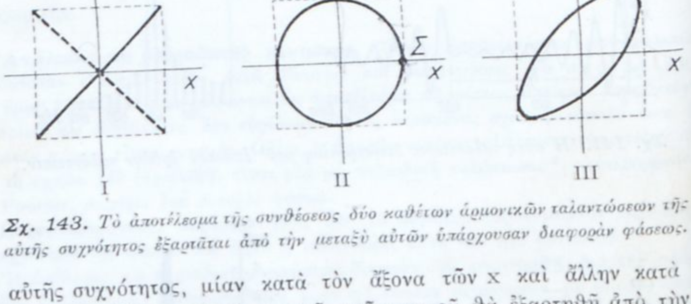
μεν τὸ φάσμα τοῦ σχήματος 139 δεξιᾷ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν συνιστωσῶν τῆς κινήσεως μεγαλύτερον πλάτος ἔχει ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς συχνότητα ἀκριβῶς ἴσην πρὸς τὴν ἰδιοσυχνότητα (400 Hz).

Ἐὰν τώρα ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ πείραμα, ἀλλὰ διεγείρωμεν μεθ' ἑκάστην πέμπτην ταλάντωσιν (ὁπότε ἡ περίοδος T_r τῆς περιοδικότητος εἶναι μεγαλυτέρα) θὰ προκύψῃ κίνησις τῆς ὁποίας τὴν μορφὴν καὶ τὸ ἀντίστοιχον φάσμα παριστᾷ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 140. Παρατηροῦμεν ὅτι τώρα ὁ ἀριθμὸς τῶν συνιστωσῶν εἶναι πολὺ μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως.

Τὰ διαγράμματα τοῦ σχήματος 141 παριστοῦν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διέγερσις γίνεται μεθ' ἑκάστην ὀγδόην ταλάντωσιν, ὁπότε ἡ περίοδος T_r εἶναι ἀκόμη μεγαλυτέρα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνιστωσῶν ἔχει αὐξηθῇ ἀκόμη περισσότερον χωρὶς ἡ μορφὴ τῆς ἐστιγμένης καμπύλης νὰ μεταβληθῇ. Ἐπεκτείνοντες τὸν συλλογισμὸν καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι διὰ $T_r = \infty$, δηλ. διὰ τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταλάντωσις, ἀφοῦ ἅπαξ διεγερθῇ, ἀφίνεται νὰ ἀποσβεσθῇ μόνη της, αἱ συνιστῶσαι θὰ εἶναι ἀπείρως πλησίον μεταξύ των, τὸ φάσμα δηλ. θὰ εἶναι συνεχὲς *(σχ. 142)*.

§ 79. Σύνθεσις δύο ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος καὶ καθέτων ἐπ' ἀλλήλας. Εἰς προηγουμένας παραγράφους ἐξητάσαμεν τὴν περίπτωσιν συνθέσεως δύο ἢ περισσοτέρων ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὴν σύνθεσιν ἁρμονικῶν ταλαντώσεων αἱ ὁποῖαι ἔχουν διευθύνσεις καθέτους ἐπ' ἀλλήλας.

α) **Σύνθεσις δύο καθέτων ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ τῆς αὐτῆς συχνότητος.** Θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ τουτοχρόνως δύο ἁρμονικὰς ταλαντώσεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους* Α καὶ



Σχ. 143. *Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνθέσεως δύο καθέτων ἁρμονικῶν ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς συχνότητος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν διαφορὰν φάσεως.*

τῆς αὐτῆς συχνότητος, μίαν κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἄλλην κατὰ τὸν ἄξονα τῶν y. Ἡ μορφὴ τῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ θὰ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν διαφορὰν φάσεως τῶν δύο ταλαντώσεων.

Οὕτω, ὅταν αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως $\varphi = 0°$, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι μία ἁρμονικὴ κίνησις ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς σχηματιζούσης γωνίας 45° μὲ τοὺς δύο ἄξονας *(σχ. 143, I)*. Τοῦτο εἶναι προφανὲς διότι, ἀφοῦ αἱ δύο ταλαντώσεις εἶναι ἐν

* Οἱ συλλογισμοὶ δὲν ἀλλάσσουν ἂν θεωρήσωμεν τὰς δύο ταλαντώσεις μὲ διάφορα πλάτη.

φάσει, θὰ λαμβάνουν ταυτοχρόνως τὴν τιμὴν μηδέν, τὴν μεγίστην τιμὴν κ.λ. Ὅταν αἱ δύο αὗται ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως $\varphi = 90^o$, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, κίνησις ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς *(σχ. 143, II)*. Τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ γραφικῶς: Εἰς τὸ σημεῖον Σ ἡ μία ταλάντωσις ἔχει λάβει τὴν μεγίστην τιμὴν ($x = A$), ἐνῶ ἡ ἄλλη ἔχει λάβει τὴν μηδενικήν της τιμὴν ($y = 0$) - χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τῆς διαφορᾶς φάσεως 90^o μεταξὺ δύο ταλαντώσεων.

Ἐάν, τέλος, αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν τυχοῦσαν διαφορὰν φάσεως, ἡ συνισταμένη ταλάντωσις θὰ εἶναι κίνησις ἐπὶ ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς (III).

Ἀπόδειξις: Θεωρήσωμεν δύο ταλαντώσεις μὲ διαφορὰν φάσεως φ, τὰς

$$x = A \cdot \text{ημ}\, \omega t \qquad \text{καὶ} \qquad y = A \cdot \text{ημ}\, (\omega t + \varphi)$$

Τὰς ἐξισώσεις ταύτας γράφομεν ὡς ἑξῆς

$$\frac{x}{A} = \text{ημ}\, \omega t \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{y}{A} = \text{ημ}\, \omega t \cdot \text{συν}\, \varphi + \text{συν}\, \omega t \cdot \text{ημ}\, \varphi$$

Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστόν, ἔχομεν

$$\text{συν}\, \omega t = \sqrt{1 - \text{ημ}^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται

$$\frac{y}{A} = \frac{x}{A} \cdot \text{συν}\, \varphi + \text{ημ}\, \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 0^o$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἁπλουστεύεται εἰς

$$y = x.$$

Ἡ τελευταία ὅμως αὕτη ἐξίσωσις παριστᾷ, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ὑπὸ κλίσιν 45^o ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας.

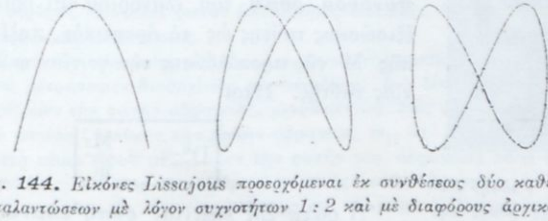
Ἐὰν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 180^o$, προκύπτει ὁμοίως εὐθεῖα γραμμὴ ἀλλὰ κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην (εἰς τὸ σχῆμα 143, I ἐστιγμένη).

Ἐὰν ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι $\varphi = 90^o$ ἢ 270^o, ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει

$$\frac{y}{A} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \qquad \text{ἢ} \qquad y^2 + x^2 = A^2$$

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις παριστᾷ, ὡς γνωστόν, περιφέρειαν κύκλου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, τέλος, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ φάσεως ἔχει τυχοῦσαν

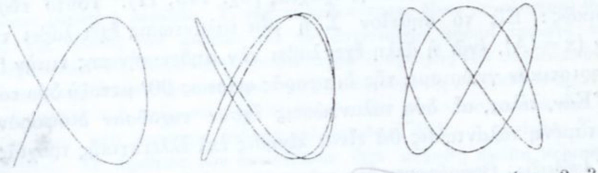


Σχ. 144. *Εἰκόνες Lissajous προερχόμεναι ἐκ συνθέσεως δύο καθέτων ταλαντώσεων μὲ λόγον συχνοτήτων 1 : 2 καὶ μὲ διαφόρους ἀρχικὰς διαφορὰς φάσεων.*

τιμήν, ἡ ἐξίσωσις (1) — ἡ ὁποία σημειωτέον εἶναι δευτέρου βαθμοῦ—παρέχει ὡς τροχιὰν ἔλλειψιν.

β) **Σύνθεσις δύο καθέτων ἁρμονικῶν ταλαντώσεων διαφόρων συχνοτήτων.** Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἡ προκύπτουσα τροχιὰ εἶναι πολύπλοκος, εἶναι δὲ κλειστὴ μόνον ἐφ᾽ ὅσον ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων εἶναι ῥητὸς ἀριθμός.

Ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο συχνοτήτων εἶναι ἐπὶ πλέον ἁπλὸς (π. χ. 1 : 2,



Σχ. 145. Εἰκόνες Lissajous δύο ταλαντώσεων μὲ λόγον συχνοτήτων 2 : 3.

2 : 3, 3 : 4 . . .), αἱ προκύπτουσαι καμπύλαι ἔχουν σχετικῶς ἁπλᾶς μορφὰς ***(εἰκόνες τοῦ Lissajous σχ. 144 καὶ 145).***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄

ΣΤΡΟΦΙΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

§ 81. Στροφικὴ ἁρμονικὴ ταλάντωσις. Θεωρήσωμεν σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα ἐπὶ τοῦ ὁποίου δρᾷ ἐπίπεδον σπειροειδὲς ἐλατήριον *(σχ. 146)*, οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ἰσορροπῇ εἰς ὡρισμένην θέσιν. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σῶμα κατά τινα γωνίαν φ, τὸ ἐλατήριον θὰ παραμορφωθῇ καὶ θὰ ἐξασκήσῃ μίαν ῥοπὴν $\mathcal{M}$, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἀνάλογον τῆς γωνίας. Ἤτοι

Σχ. 146. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ῥοπῆς τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου ἡ σφαῖρα θὰ ἐκτελέσῃ στροφικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν.

$$M = -D^* \cdot \varphi$$

Ἡ σταθερὰ D^* τῆς ἀναλογίας καλεῖται ***κατευθύνουσα ῥοπὴ*** τοῦ ἐλατηρίου καὶ ὁρίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὡς τὸ ἀρνητικὸν πηλίκον τῆς ῥοπῆς M τῆς προκαλούσης τὴν γωνίαν φ διὰ τῆς γωνίας ταύτης. Ἤτοι

$$\boxed{D^* = -\frac{M}{\varphi}}$$

Ἡ ῥοπὴ $\mathcal{M}$ καλεῖται ***ῥοπὴ ἐπαναφορᾶς*** διότι τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 73 περὶ τῆς γραμμικῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον ἡ ῥοπὴ ἐπαναφορᾶς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνίαν, τὸ σῶμα θὰ ἐκτελῇ στροφικὴν ἁρμονικὴν ταλάντωσιν μὲ ἰδιοπερίοδον παρεχομένην ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}} \qquad (1)$$

Τὴν κατευθύνουσαν ροπὴν τοῦ ἐλατηρίου, εὑρίσκομεν ἐὰν ἐξασκήσωμεν ἐπ᾿ αὐτοῦ γνωστὴν ροπὴν Μ καὶ μετρήσωμεν τὴν ὑπ᾿ αὐτῆς προκαλουμένην γωνίαν *(σχ. 147)*. Τὸ πηλίκον

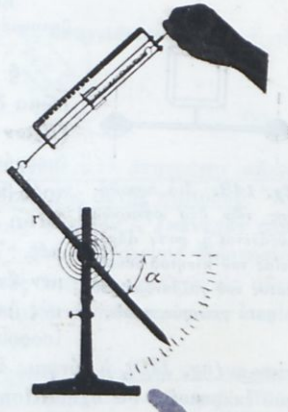
$$\frac{\text{ροπή}}{\text{γωνία}}$$

μᾶς παρέχει τὴν κατευθύνουσαν ροπὴν τοῦ ἐλατηρίου.

Μέτρησις τῆς ροπῆς ἀδρανείας διὰ τῆς μεθόδου τῶν στροφικῶν ταλαντώσεων. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν σφαῖραν, τῆς ὁποίας ἡ ροπὴ ἀδρανείας ἔστω Θ_1, τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 146, διὰ σώματος τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας Θ_2 καὶ μετρήσωμεν τὴν περίοδον T_2 τῆς ταλαντώσεως, λαμβάνομεν διὰ τὸν λόγον τῶν δύο ροπῶν ἀδρανείας

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

ἔνθα T_2 εἶναι ἡ περίοδος εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σφαίρας.



Σχ. 147. *Ἡ κατευθύνουσα ροπὴ τοῦ ἐλατηρίου μετρεῖται ἐκ τῆς δυνάμεως τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ δυναμόμετρον, τῆς ἀποστάσεως r καὶ τῆς γωνίας α.*

Ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ_1 μιᾶς σφαίρας εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ *, λόγῳ τοῦ ἁπλοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος αὐτῆς, ὁπότε ἐκ τῆς ἄνω ἐξισώσεως προκύπτει ἡ ἄγνωστος τιμὴ Θ_2.

Ἀντὶ τῆς διατάξεως ταύτης, τῆς χρησιμοποιούσης ἐλατήριον, εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἄλλη εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ σ ύ ρ μ α, τὸ ὁποῖον, ὑφιστάμενον στρέψιν, προκαλεῖ ροπὴν ἐπαναφορᾶς τοιαύτην, ὥστε τὸ σῶμα νὰ ἐκτελῇ ἁρμονικὰς στροφικὰς ταλαντώσεις.

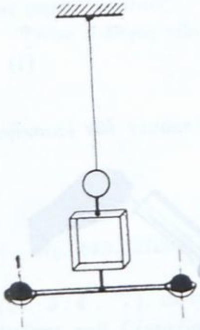
Παραλλαγὴ τῆς τελευταίας μεθόδου μετρήσεως τῆς ροπῆς ἀδρανείας εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν διαδοχικῶς τὰς περιόδους διὰ δύο σώματα, τοῦ ἑνὸς τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας, μετρῶμεν ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν τὴν περίοδον T_1 διὰ τὸ σῶμα τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας Θ_1, ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ τὴν περίοδον T_2 διὰ τὸ αὐτὸ σῶμα ἀφοῦ αὐξήσωμεν τὴν ροπήν του ἀδρανείας κατὰ γνωστὸν ποσὸν διὰ προσθήκης σώματος (ἢ σωμάτων) γνωστῆς ροπῆς ἀδρανείας.

Οὕτω, ἡ περίοδος T_1 τῆς ταλαντώσεως τοῦ πλαισίου ἑνὸς κατοπτρικοῦ γαλβανομέτρου *(σχ. 148)* θὰ εἶναι

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_1}{D^*}} \qquad (2)$$

* Ἡ ροπὴ ἀδρανείας μιᾶς σφαίρας ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου της εἶναι $\Theta = \frac{2}{5} \cdot m r^2$ ἔνθα r καὶ m εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας. και $\frac{mr^2}{2}$ διά κύλινδρον ως προς άξονα διερχόμενον διά τού κέντρου του.—

ἔνθα D^* εἶναι ἡ κατευθύνουσα ῥοπὴ τοῦ σύρματος ἐξαρτήσεως. Ἐὰν τώρα προσθέσωμεν δύο μικρὰς σφαίρας εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος, ἡ νέα τιμὴ τῆς περιόδου θὰ εἶναι



Σχ. 148. *Διὰ προσθήκης τῶν δύο σφαιρῶν αὐξάνεται ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ κινητοῦ συστήματος τοῦ γαλβανομέτρου κατὰ γνωστὸν ποσόν.*

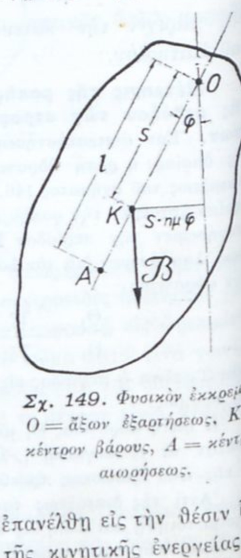
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{D^*}} \quad (3)$$

ἔνθα Θ_2 εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῶν δύο σφαιρῶν ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται εὐκόλως.

Ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ῥοπὴν ἀδρανείας Θ_1.

§ 82. Φυσικὸν ἐκκρεμές.

Κάθε στερεὸν σῶμα δυνάμενον νὰ στραφῇ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα ***(ἄξων ἐξαρτήσεως)*** μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ καλεῖται ***φυσικὸν ἐκκρεμές***. Ἂν ἀπομακρύνωμεν ἕνα φυσικὸν ἐκκρεμὲς ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν γωνίαν φ *(σχ. 149)*, ἡ δύναμις Β (τὸ βάρος, δηλ., τοῦ ἐκκρεμοῦς) θὰ σχηματίσῃ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως τὴν ῥοπὴν



Σχ. 149. *Φυσικὸν ἐκκρεμές. O = ἄξων ἐξαρτήσεως, K = κέντρον βάρους, A = κέντρον αἰωρήσεως.*

$$M = -B \cdot s\,\eta\mu\,\varphi$$

ἔνθα s εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως O ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους K. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τῆς ἐξισώσεως δηλοῖ ὅτι ἡ ῥοπὴ αὕτη τείνει νὰ ἐλαττώσῃ τὴν γωνίαν φ, εἶναι, δηλ., μία *ῥοπὴ ἐπαναφορᾶς*. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ῥοπῆς ταύτης, τὸ ἐκκρεμὲς τείνει νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας. Ὅταν ὅμως φθάσῃ εἰς αὐτήν, λόγῳ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν ἔχει ἀποκτήσει, τὴν ὑπερβαίνει καὶ ἐκτελεῖ οὕτω στροφικὰς ταλαντώσεις. Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς πολὺ μικρὰς τιμὰς τῆς γωνίας φ, θὰ ἔχωμεν ημ φ ≃ φ καὶ ἡ ἄνω ἐξίσωσις θὰ γράφεται

$$M = -B \cdot s \cdot \varphi$$

Ἡ ῥοπὴ ἐπαναφορᾶς, λοιπόν, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γωνίαν καί, κατὰ τὰ προηγούμενα, τὸ ἐκκρεμές, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ταύτην θὰ ἐκτελέσῃ ἁρμονικὴν στροφικὴν ταλάντωσιν.

Ἡ κατευθύνουσα ῥοπὴ τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι

$$D^* = \frac{B \cdot s \cdot \varphi}{\varphi} = B \cdot s = mg \cdot s$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 81, ἀντὶ τοῦ D^* τὸ ἴσ του $mg \cdot s$ λαμβάνομεν διὰ τὴν περίοδον τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς τὸν τύπον

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{mg \cdot s}} \qquad (1)$$

ἔνθα Θ_0 εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως O.

Ἂν ὀνομάσωμεν τὴν παράστασιν $\Theta_0/m \cdot s$ ***ἀνηγμένον μῆκος*** l τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, ἔχομεν

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέγεθος $\Theta_0/m \cdot s$ (δηλ. τὸ ἀνηγμένον μῆκος) ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος ἑνὸς μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς τῆς αὐτῆς περιόδου. Ἂν, λοιπόν, θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς σημεῖον A ***(κέντρον αἰωρήσεως)***, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν l ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως καὶ φαντασθῶμεν ὅλην τὴν μᾶζαν τοῦ ἐκκρεμοῦς συγκεντρωμένην εἰς αὐτό, θὰ προκύψῃ ἕνα μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς μὲ περίοδον ἴσην πρὸς τὴν περίοδον τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Θεώρημα 1ον. *«Αἱ περίοδοι ἑνὸς φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς ἐξηρτημένου ἀπὸ διαφόρους ἄξονας παραλλήλους καὶ ἴσον ἀπέχοντας ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους εἶναι αἱ αὐταί»*. Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), δεδομένου ὅτι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας Θ_0 ὡς πρὸς ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἄξονας εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Steiner, ἡ αὐτὴ καὶ ἐπὶ πλέον ἡ ἀπόστασις s αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους εἶναι ἐκ παραδοχῆς ἡ αὐτή.

Θεώρημα 2ον. *«Ἡ περίοδος ἑνὸς φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς δὲν μεταβάλλεται ἂν τοῦτο ἐξαρτηθῇ ἀπὸ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὸν ἀρχικὸν καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αἰωρήσεως»*.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ ἀνηγμένον μῆκος εἶναι τὸ αὐτό: Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸν ἄξονα O ἔχει, ὡς εἴδομεν, ἀνηγμένον μῆκος

$$l = \frac{\Theta_0}{m \cdot s}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Θ_0 κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Steiner *(§ 57)*, λαμβάνομεν

$$l = \frac{\Theta\kappa + ms^2}{m \cdot s} = \frac{\Theta\kappa}{m \cdot s} + s \qquad (3)$$

καὶ ἐκ τούτου

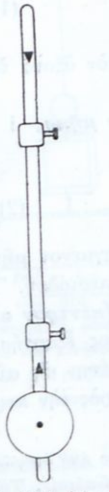
$$l - s = \frac{\Theta\kappa}{m \cdot s}.$$

Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸν ἄξονα τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αἰωρήσεως, ἡ ἀπόστασις τοῦ νέου ἄξονος ἐξαρτήσεως A ἀπὸ τοῦ κέντρου βάρους εἶναι $l - s$. Ἂν εἰς τὸν τύπον (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ s διὰ τῆς νέας του τιμῆς $l - s$, θὰ λάβωμεν διὰ τὸν νέον ἀνηγμένον μῆκος l' τὴν τιμὴν

$$l' = \frac{\Theta\kappa}{m \cdot (l-s)} + (l-s) = \frac{\Theta\kappa}{m \cdot \dfrac{\Theta\kappa}{m \cdot s}} + \frac{\Theta\kappa}{m \cdot s} = s + \frac{\Theta\kappa}{m \cdot s} = l$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τὸ νέον ἀνηγμένον μῆκος l' εἶναι ἴσον μὲ τὸ παλαιὸν l.

§ 83. Μέτρησις τοῦ g διὰ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐκ τοῦ τύπου (2) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ g, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίοδον T καὶ τὸ ἀνηγμένον μῆκος l ἑνὸς φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν ὅμως τοῦ l ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῶν τριῶν μεγεθῶν Θ_0, m καὶ s. Ἡ πολύπλοκος αὕτη μέθοδος ἁπλουστεύεται διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ ***ἀντιστρεπτοῦ ἐκκρεμοῦς:*** Τοῦτο *(σχ. 150)* εἶναι ἐκκρεμὲς φέρον δύο παραλλήλους ἄξονας ἀπὸ τῶν ὁποίων δύναται νὰ ἐξαρτηθῇ ἀλληλοδιαδόχως, εἶναι δέ, διὰ λόγους τοὺς ὁποίους θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἀσυμμέτρως κατεσκευασμένον ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονας. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ g ἐξαρτῶμεν τὸ ἐκκρεμὲς διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος καί, διὰ καταλλήλου μετακινήσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ κινητῶν μαζῶν, ἐπιτυγχάνομεν, ὥστε ἡ περίοδος νὰ καταστῇ ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις. Τότε εἴμεθα βέβαιοι ὅτι οἱ δύο ἄξονες εἶναι ἀντιστοίχως ἄξονες ἐξαρτήσεως καὶ αἰωρήσεως ἀφοῦ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (2), τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει καὶ ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονας τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἤδη, διὰ μετρήσεως τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀποστάσεως l (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς τὸ κοινὸν ἀνηγμένον μῆκος) καὶ τῆς περιόδου T εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ g.



Σχ. 150. Ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμές.

Τὸ ἐκκρεμὲς πρέπει νὰ κατασκευασθῇ οὕτως ὥστε ἡ μᾶζα του νὰ εἶναι ἀσυμμέτρως κατανεμημένη ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας διὰ τὸν ἑξῆς λόγον: Κατὰ τὸ θεώρημα (1), δύο σημεῖα συμμετρικῶς κείμενα ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους ἔχουν τὴν αὐτὴν περίοδον. Ἐκτὸς ὅμως αὐτῶν ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς δύο ἀκόμη σημεῖα μὲ τὴν αὐτὴν ὡς τὰ προηγούμενα περίοδον (ἕκαστον τῶν ὁποίων, κατὰ τὸ θεώρημα (2), ἀπέχει κατὰ τὸ ἀνηγμένον μῆκος l ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα). Ἂν, λοιπόν, τὸ κέντρον βάρους κεῖται συμμετρικῶς ὡς πρὸς δύο ἄξονας (κεῖται δηλ. εἰς ἴσην ἀπ' αὐτῶν ἀπόστασιν), αἱ περίοδοι θὰ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα (1), αἱ αὐταὶ χωρὶς ἐκ τούτου νὰ ἕπεται ὅτι οὗτοι θὰ εἶναι ἀμοιβαίως ἄξονες ἐξαρτήσεως καὶ αἰωρήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΑ΄

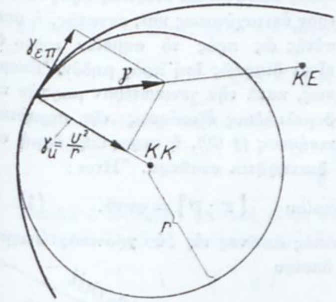
ΚΕΝΤΡΙΚΑΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

§ 84. Κεντρικὴ κίνησις. Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ μελετήσωμεν εἰδικὴν μορφὴν κινήσεως κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις διευθύνεται διαρκῶς πρὸς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***κέντρον ἐπιταχύνσεως*** *(σχ. 151)*. Πᾶσα κίνησις τοιαύτης μορφῆς καλεῖται ***κεντρικὴ κίνησις.***

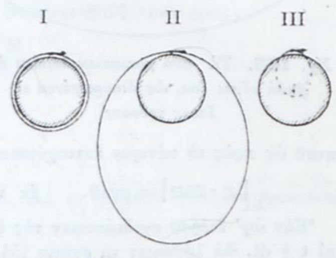
Ἡ γραμμὴ ἡ συνδέουσα τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως μὲ τὸ κινητὸν καλεῖται ***ἐπιβατικὴ ἀκτίς.*** Ἐπειδὴ ἡ δύναμις ἔχει πάντοτε τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιταχύνσεως, ἕπεται ὅτι κεντρικαὶ κινήσεις παράγονται ὅταν ἡ δύναμις ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος

Οὕτω, κεντρικὴν κίνησιν ἐκτελεῖ φορτισμένον σωμάτιον κινούμενον περὶ φορτισμένον κέντρον, οἱ πλανῆται κινούμενοι περὶ τὸν Ἥλιον κ.λ.

Εἰς τὰ δύο ἄνω παραδείγματα ἡ δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπιταχύνσεως, ὁπότε, ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ τροχιὰ εἶναι ἔλλειψις. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀπαραίτητος



Σχ. 151. Εἰς τὰς κεντρικὰς κινήσεις ἡ ἐπιτάχυνσις γ διευθύνεται διαρκῶς πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως ΚΕ.



Σχ. 152. Ἐλλειπτικαὶ τροχιαὶ περὶ τὸ κέντρον τῆς Γῆς τὰς ὁποίας θὰ ἐκτελέσῃ βλῆμα ἐκσφενδονιζόμενον ὁριζοντίως μὲ διαφόρους ἀρχικὰς ταχύτητας.

ὅρος, καθόσον δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν κεντρικὴν κίνησιν καθ᾿ οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν μεταβάλλεται ἡ δύναμις μετὰ τῆς ἀποστάσεως.

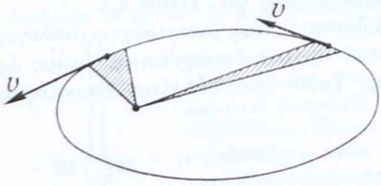
Διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, θεωρήσωμεν πυροβόλον βάλλον ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα υ. Ἐὰν ἡ ταχύτης εἶναι μικροτέρα μιᾶς τιμῆς* $υ_κ$, τὸ βλῆμα θὰ ἐκτελέσῃ κεντρικὴν κίνησιν, ἡ δὲ τροχιὰ τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ θὰ εἶναι ἔλλειψις *(σχ. 152, III)* τῆς ὁποίας ἡ ἀπωτέρα ἑστία συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Ἐὰν ἡ ταχύτης λάβῃ τὴν τιμὴν $υ_κ$, τὸ βλῆμα θὰ ἐκτελέσῃ κυκλικὴν τροχιὰν (I), ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, εἶναι ἔλλειψις μὲ ἴσους ἡμιάξονας. Ἐάν, τέλος, τὸ βλῆμα ἔχῃ ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς $υ_κ$, τότε θὰ διαγράψῃ ἔλλειψιν τῆς ὁποίας ἡ πλησιεστέρα ἑστία θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Εἰς τὰ συνήθη προβλήματα βολῆς ἡ ἀρχικὴ ταχύτης $υ_0$ εἶναι πολὺ μικρὰ καί, συνεπῶς, ἡ ἔλλειψις πολὺ πεπλατυσμένη. Δυνάμεθα, λοιπόν, νὰ θεωρήσωμεν τὸ κέντρον τῆς Γῆς ὡς ἀπείρως μακρὰν εὑρισκόμενον, ὁπότε ὅλαι αἱ ἐπιβατικαὶ ἀκτῖνες θὰ εἶναι παράλληλοι, ἡ δὲ ἔλλειψις θὰ ἔχῃ πρακτικῶς σχῆμα παραβολῆς *(§ 27)*.

Διὰ τὴν κεντρικὴν κίνησιν ἰσχύει τὸ εἰς τὰ κατωτέρω ἀποδεικνυόμενον **θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν**: *«Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς διαγράφει εἰς ἴσους χρόνους ἴσα ἐμβαδά.*

Ἄμεσον ἀποτέλεσμα τοῦ θεωρήματος τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἡ ταχύτης εἰς

* Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς 8 km/sec.

τὰ σημεῖα τῆς τροχιᾶς, τὰ πλησιέστερα πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως, νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα εἰς τὰ ἀπώτερα σημεῖα *(σχ. 153)*.



Σχ. 153. *Τὰ δύο γραμμοσκιασμένα ἐμβαδὰ εἶναι ἴσα, ὡς διαγραφέντα εἰς ἴσους χρόνους.*

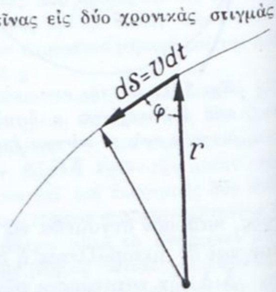
Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τῶν ἐμβαδῶν. Ἡ ἐπὶ τοῦ κινητοῦ ἐξασκουμένη δύναμις διευθύνεται διαρκῶς πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως καί, συνεπῶς, ἡ ῥοπὴ αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι διαρκῶς ἴση πρὸς μηδέν. Ἑπομένως, κατὰ τὴν γενικωτέραν μορφὴν τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς στροφικῆς κινήσεως *(§ 60)*, ἡ στροφικὴ ὁρμὴ τοῦ κινητοῦ ὡς πρὸς τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως θὰ διατηρῆται σταθερά. Ἤτοι :

$$[r \cdot mv] = \text{σταθ.} \qquad \text{ἐκ τοῦ ὁποίου} \qquad [r \cdot v] = \text{σταθ.} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀφ' ἑτέρου σχεδιάσωμεν τὰς ἐπιβατικὰς ἀκτῖνας εἰς δύο χρονικὰς στιγμὰς t καὶ t + dt, θὰ λάβωμεν τὸ σχῆμα 154, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι

$$\frac{r \cdot v \cdot dt \cdot \eta\mu\,\varphi}{2}$$

Ἐπειδὴ τὸ r · υ · ημ φ εἶναι, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), σταθερόν, ἕπεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος διαγραφόμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου.



Σχ. 154.

§ 85. Νόμοι τοῦ *Kepler*.

Ὁ Kepler, μελετῶν τὰς κινήσεις τῶν πλανητῶν, συνήγαγε τοὺς ἑξῆς νόμους :

1) *Αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐπίπεδοι, ἡ δὲ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ἡ συνδέουσα τὸν Ἥλιον πρὸς τὸν πλανήτην διαγράφει ἐμβαδὰ ἀνάλογα τοῦ χρόνου.*

2) *Αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι ἐλλείψεις τῶν ὁποίων τὴν μίαν ἑστίαν κατέχει ὁ Ἥλιος.*

3) *Οἱ κύβοι τῶν μεγάλων ἀξόνων τῶν τροχιῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν περιόδων τῆς περιφορᾶς περὶ τὸν Ἥλιον.*

Τοὺς τρεῖς ἐκ παρατηρήσεων προκύψαντας νόμους τοῦ Kepler ἐξήγησεν ὁ Newton διὰ τῆς *θεωρίας τῆς παγκοσμίας ἕλξεως* *, θεωρῶν τὴν κίνησιν τῶν πλανητῶν ὡς κεντρικήν. Ἐκ τούτων ὁ πρῶτος νόμος δὲν εἶναι εἰμὴ τὸ διὰ πᾶσαν κεντρικὴν κίνησιν ἰσχῦον θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν. Ὁ δεύτερος νόμος προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἐκ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ταχύτητος. Ὁ τρίτος, τέλος, νόμος συνάγεται καὶ αὐτὸς ἐκ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἕλξεως, ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν κυκλικῆς τροχιᾶς.

* Βλ. Κεφ. ΙΔ΄.

Ὡς γνωστόν, μεταξὺ τῆς περιόδου T, τῆς ταχύτητος υ καὶ τῆς ἀκτῖνος R ἰσχύει ἡ σχέσις $T = 2\pi R/\upsilon$. Ἀφ' ἑτέρου ἡ κεντρομόλος δύναμις ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται νὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ κινητοῦ διὰ νὰ ἐκτελῇ τοῦτο τὴν κυκλικὴν τροχιὰν εἶναι $F = m\upsilon^2/R$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν τοῦ υ, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν δευτέραν, ἔχομεν

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R \cdot m}{F}.$$

$\upsilon = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot R$

Ἡ δύναμις F εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Newton *(§ 97)*, ἴση πρὸς

$$F = k \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}.$$

$T = \frac{2\pi R}{\upsilon}$

$F = \frac{m \upsilon^2}{R}$

Ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k \cdot M} \cdot R^3.$$

Ἐπειδὴ ὁ παράγων $4\pi^2/kM$ εἶναι σταθερὸς διὰ τὸ ἡλιακὸν σύστημα, προκύπτει τελικῶς ὅτι τὸ T^2 εἶναι ἀνάλογον τοῦ R^3.

$T^2 = kR^3$

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΜΕΡΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ΄

ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΣ

§ 86. Ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις. Μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν τὰ στερεὰ σώματα ὡς μὴ παραμορφούμενα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν). Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως τὰ στερεὰ παραμορφοῦνται, θέμα δὲ τοῦ κεφαλαίου τούτου θὰ εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ ἐξέτασις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν προκαλουσῶν τὰς παραμορφώσεις δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν) καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν.

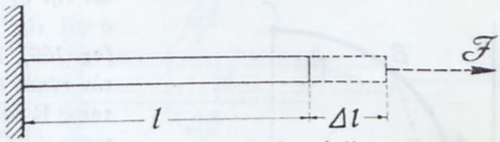
Αἱ παραμορφώσεις καλοῦνται ***ἐλαστικαί,*** ὅταν αἴρωνται μόλις παύσουν ἐπιδρῶσαι αἱ προκαλοῦσαι αὐτὰς δυνάμεις (ἢ ῥοπαί). Ὅπως εὑρίσκεται πειραματικῶς εἰς τὰ περισσότερα στερεά, ἐλαστικαὶ εἶναι αἱ παραμορφώσεις ἐφ᾽ ὅσον αὗται εἶναι μικραί. Ἐάν, τοὐναντίον, ὑπερβοῦν ὡρισμένον ὅριον —τὸ ***ὅριον ἐλαστικότητος***—αἱ παραμορφώσεις καθίστανται ***μόνιμοι (πλαστικαί)***, τὸ σῶμα, δηλ., δὲν ἀναλαμβάνει τὰς ἀρχικάς του διαστάσεις ὅταν ἀρθοῦν τὰ αἴτια τῆς παραμορφώσεως. Ὅταν, τέλος, αἱ παραμορφώσεις ὑπερβοῦν ἀρκετὰ τὸ ὅριον ἐλαστικότητος, τὸ σῶμα θραύεται ***(ὅριον θραύσεως)***.

Ἡ ἀνάγκη τῆς ἐπιδράσεως δυνάμεων διὰ τὴν παραμόρφωσιν δύναται νὰ ἐξηγηθῇ ὡς ἑξῆς: Ὡς γνωστόν, τὰ στερεὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ στοιχειώδεις δομικοὺς λίθους (ἰόντα, ἄτομα, μόρια), οἱ ὁποῖοι, συγκρατούμενοι μεταξύ των διὰ δυνάμεων, ἰσορροποῦν εἰς ὡρισμένας ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀποστάσεις. Κάθε παραμόρφωσις τοῦ στερεοῦ προκαλεῖ μεταβολὴν τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν μὲ ἀποτέλεσμα τὴν μεταβολὴν τῶν δυνάμεων καί, συνεπῶς, ἐξαφάνισιν τῆς ἰσορροπίας. Ἰσορροπία εἰς τὴν νέαν ταύτην κατάστασιν τῆς παραμορφώσεως εἶναι δυνατὴ μόνον ἐὰν ἐξασκηθοῦν πρόσθετοι δυνάμεις ἔξωθεν.

Πειραματικῶς εὑρίσκομεν ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον θεωροῦμεν μικρὰς παραμορφώσεις, *αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν προκαλουσῶν αὐτὰς ἐξωτερικῶν δυνάμεων (ἢ ῥοπῶν)*. Ἡ πρότασις αὕτη ἀποτελεῖ τὸν ***νόμον τοῦ Hooke,*** τοῦ ὁποίου ποσοτικὴν διατύπωσιν θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω.

Ἡ ἀνεύρεσις τῆς σχέσεως μεταξὺ δυνάμεων καὶ παραμορφώσεων εἶναι ἰδιαιτέρως ἁπλῆ εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις τὰς ὁποίας καὶ ἐξετάζομεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

§ 87. Ἑλκυσμός. Θεωρήσωμεν σύρμα μήκους l καὶ τομῆς S τεινόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}$ *(σχ. 155).* Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ δύναμις εἶναι ὁμοιομόρφως κατανεμημένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς διατομῆς, τότε τὸ σύρμα θὰ μηκυνθῇ ἀλλὰ θὰ διατηρήσῃ τὸ σχῆμα του. Τοιαύτην ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν καλοῦμεν ***ἑλκυσμόν.***



Σχ. 155. *Ἡ μήκυνσις Δl εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως $\mathcal{F}$.*

Ὅπως εὑρίσκωμεν πειραματικῶς, ἡ μήκυνσις αὕτη Δl εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως, ἀνάλογος τοῦ μήκους καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τομῆς. Ἤτοι:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \cdot l \tag{1}$$

Ἡ σταθερὰ E, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ὑλικὸν τοῦ σύρματος καὶ καλεῖται ***μέτρον ἐλαστικότητος*** ἢ ***μέτρον τοῦ Young.*** Ἂν καλέσωμεν ***τάσιν σ*** τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως F διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς τομῆς καὶ ***ἀνηγμένην μήκυνσιν ε*** τὸ πηλίκον τῆς μηκύνσεως Δl διὰ τοῦ ἀρχικοῦ μήκους l, δηλ. ἂν γράψωμεν

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}}$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon} \tag{2}$$

ἐκφράζει δὲ τὸν νόμον τοῦ Hooke διὰ τὸν ἑλκυσμόν.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι διὰ ε = 1 ἔχομεν σ = E. Τὸ μέτρον, δηλ., ἐλαστικότητος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τάσις ἡ ἀναγκαία διὰ τὸν διπλασιασμὸν (Δl/l = 1) τοῦ μήκους ἑνὸς σύρματος, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ νόμος τοῦ Hooke ἰσχύει καὶ διὰ τὰς μεγάλας αὐτὰς παραμορφώσεις.

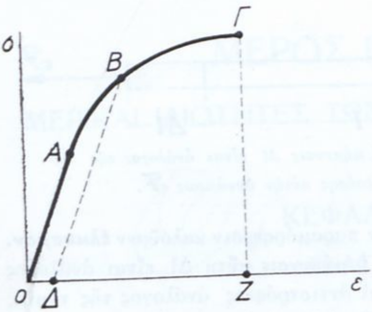
Διαστάσεις καὶ μονάδες. Ἡ τάσις ἔχει διαστάσεις δυνάμεως δι' ἐμβαδοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνηγμένη μήκυνσις εἶναι καθαρὸς ἀριθμός, τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ἔχει διαστάσεις τάσεως. Ἐν τῇ τεχνικῇ τοῦτο μετρεῖται εἰς kgr*/cm² (δηλ. εἰς τεχνικὰς ἀτμοσφαίρας, βλ. καὶ § 107), ἐνίοτε δὲ καὶ εἰς

ΠΙΝΑΞ

Μέτρα ἐλαστικότητος εἰς kgr*/cm²	
Χάλυψ	$2 \cdot 10^6$
Ξύλον	$5—12 \cdot 10^4$
Καουτσοὺκ	2—80

kgr*/mm². Εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα δίδονται αἱ τιμαὶ τοῦ E διὰ μερικὰ ὑλικά.

Διάγραμμα μηκύνσεως. Τὸ διάγραμμα μηκύνσεως ἑνὸς ὑλικοῦ δίδει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τάσεως σ καὶ τῆς ἀνηγμένης μηκύνσεως ε *(σχ. 156)*. Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὸν τύπον (2), τὸ μέτρον ἐλαστικότητος E ἐμφανίζεται εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο ὡς ἡ κλίσις τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OA τῆς καμπύλης $\sigma = f(\varepsilon)$.



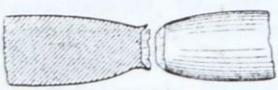
Σχ. 156 *Διάγραμμα μηκύνσεως.*
A=ὅριον ἐλαστικότητος· Γ=ὅριον θραύσεως.

Ἐὰν τείνωμεν τὸ σύρμα πέραν τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος A, π. χ. μέχρι τοῦ σημείου B, παρατηροῦμεν ὅτι διὰ μικρὰν αὔξησιν τῆς τάσεως ἡ μήκυνσις εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν προβλεπομένην ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Hooke, ἂν δὲ ἡ δύναμις ἀρθῇ, τὸ σύρμα διατηρεῖ τὴν μόνιμον παραμόρφωσιν OΔ· ἐάν, τέλος, ἡ ἐξασκουμένη τάσις ὑπερβῇ τὸ ὅριον θραύσεως Γ, τὸ σύρμα θραύεται, ἀφοῦ προηγουμένως ὑποστῇ ἐλάττωσιν τῆς διαμέτρου του *(σχ. 157)*. Εἰς τὸν παρακείμενον πίνακα δίδονται τὰ ὅρια θραύσεως δι' ὡρισμένα τεχνικῆς σημασίας ὑλικά.

ΠΙΝΑΞ

	Ὅρια θραύσεως εἰς kgr*/cm²
Χάλυψ	3000—5000
Χάλυψ ἀρίστης ποιότητος (κρᾶμα)	25000
Ὀρείχαλκος	3000
Ξύλον ἐλάτης	
α) παραλλήλως πρὸς τὰς ἶνας	730
β) καθέτως πρὸς τὰς ἶνας	125

Εἰς τὰς τεχνικὰς κατασκευὰς



Σχ. 157. *Ἡ θραῦσις τοῦ σύρματος συνοδεύεται ἀπὸ ἐλάττωσιν τῆς διαμέτρου του.*

λαμβάνεται πρόνοια ὥστε ἡ τάσις εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ὑλικοῦ νὰ εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος.

Θλίψις. Ἐὰν ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς ῥάβδου τοῦ σχήματος 155 εἶναι τοιαύτη ὥστε, ἀντὶ μηκύνσεως, νὰ προκαλῆται βράχυνσις ($\varepsilon < 0$), τότε λέγομεν ὅτι τὸ ὑλικὸν ὑφίσταται ***θλίψιν***.

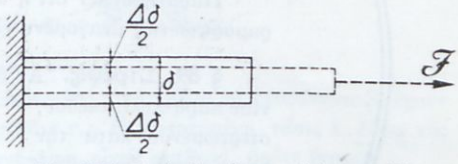
Ἐγκαρσία συστολή. Ἡ μήκυνσις ἑνὸς σύρματος συνοδεύεται ἀπὸ συστολὴν Δδ τῆς διαμέτρου δ αὐτοῦ *(σχ. 158)*. Ὀνομάζοντες ***ἀνηγμένην***

ἐγκαρσίαν συστολὴν τὸ πηλίκον $\Delta\delta/\delta$, εὑρίσκομεν πειραματικῶς ὅτι αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀνηγμένης μηκύνσεως. Ἤτοι

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \mu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

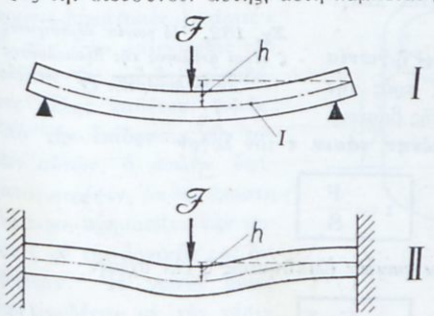
Ὁ συντελεστὴς μ καλεῖται ***ἀριθμὸς τοῦ Poisson***. Ὁ ἀριθμὸς τοῦ Poisson λαμβάνει τιμὰς μεταξὺ 0,2 καὶ 0,5.

Ὅπως θεωρητικῶς ἀποδεικνύεται, διὰ μ=0,5 ὁ ὄγκος τοῦ ὑλικοῦ παραμένει κατὰ τὸν ἑλκυσμὸν σταθερός, ἐνῶ αὐξάνεται διὰ μικροτέρας τιμὰς τοῦ μ. Τὰ ἀντίθετα ἰσχύουν διὰ τὴν θλίψιν.



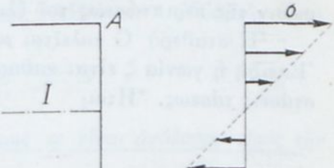
Σχ. 158. *Κατὰ τὴν μήκυνσιν ἐπέρχεται ἐλάττωσις τῆς διαμέτρου.*

§ 88. Κάμψις. Ὅταν ἐπὶ μιᾶς ῥάβδου ἐξασκηθῇ δύναμις καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς, αὕτη κάμπτεται *(σχ. 159)*. Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ῥάβδον ἀποτελουμένην ἐκ παραλλήλων ἰνῶν, τότε, κατὰ τὴν κάμψιν, ἄλλαι ἐξ αὐτῶν ἐπιμηκύνονται καὶ ἄλλαι ἐπιβραχύνονται. Μία ὅμως ὁμὰς ἰνῶν I διατηρεῖ τὸ ἀρχικόν της μῆκος ***(οὐδέτεραι ἶνες)***. Ἡ τάσις εἰς ἑκάστην ἶνα εἶναι ἀνάλογος τῆς παραμορφώσεως αὐτῆς, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τὰς οὐδετέρας ἶνας. Κατὰ ταῦτα, ἡ κατανομὴ τῶν τάσεων ἐντὸς μιᾶς τομῆς AB τῆς ῥάβδου εἶναι γραμμικὴ *(σχ. 160)*. Εἰς τὰς τεχνικὰς κατασκευὰς λαμβάνεται πρόνοια, ὥστε οὐδαμοῦ ἡ τάσις νὰ ὑπερβῇ τὸ ὅριον ἐλαστικότητος.



Σχ. 159. *Κάμψις δοκοῦ διὰ δύο τρόπους στηρίξεως.*

Ἡ μορφὴ τῆς οὐδετέρας ἰνὸς καὶ τὸ ***βέλος κάμψεως*** h ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ τρόπου στηρίξεως τῆς ῥάβδου, ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων αὐτῆς, ἐκ τῆς δυνάμεως καὶ ἐκ τοῦ μέτρου τοῦ Young. Οὕτω, ῥάβδος πακτωμένη καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα *(σχ. 159, II)* παρουσιάζει μικρότερον βέλος κάμψεως παρὰ ἐὰν στηρίζεται ἐλευθέρως (I).



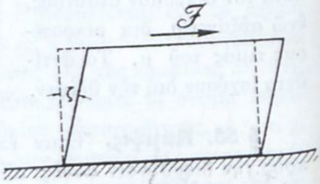
Σχ. 160. *Κατανομὴ τῆς τάσεως ἐντὸς μιᾶς τομῆς AB τῆς ῥάβδου ὑπὸ κάμψιν.*

Θλάσις. Θεωρήσωμεν λεπτὴν ῥάβδον στηριζομένην ἐλευθέρως εἰς τὸ ἕν ἄκρον της *(σχ. 161)* καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄλλο τὴν δύναμιν $\mathcal{F}$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός της οὕτως ὥστε αὕτη νὰ ὑφίσταται θλίψιν. Ὅταν ἡ δύναμις ὑπερβῇ ὡρισμένην τιμήν, ἡ ῥάβδος δὲν θὰ παραμείνῃ εὐθύγραμμος ἀλλὰ θὰ λάβῃ ἄλλο σχῆμα ***(θλάσις)***.

Σχ. 161. Θλάσις

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θλάσις εἶναι μία περίπτωσις παραμορφώσεως ἀναγομένη εἰς κάμψιν τῆς ῥάβδου.

§ 89. Στρέψις. Ἂν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ἕδρας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, στερεωμένου κατὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ, ἐξασκηθῇ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ παραλλήλως πρὸς μίαν τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεώς του *(σχ.162)*, τοῦτο παραμορφοῦται καὶ γίνεται πλαγιογώνιον ***(ὀλίσθησις)***.



Σχ. 162. *Ἡ γωνία ὀλισθήσεως ζ εἶναι ἀνάλογος τῆς προκαλούσης αὐτὴν δυνάμεως $\mathcal{F}$.*

Πειραματικῶς εὑρίσκεται ὅτι ἡ ***γωνία ὀλισθήσεως*** ζ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δύναμιν F καὶ τὸ ἐμβαδὸν S τῆς βάσεως.

Ἂν ὀνομάσωμεν ***ἐφαπτομένην τάσιν* τ** τὸν λόγον

$$\boxed{\tau = \frac{F}{S}}$$

ἔχομεν διὰ τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ὀλισθήσεως ζ τὴν σχέσιν

$$\boxed{\tau = G \cdot \zeta} \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ διατύπωσις τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὀλισθήσεως, μᾶς ὑπενθυμίζει δὲ τὴν ἐντελῶς ἀνάλογον ἐξίσωσιν τῆς περιπτώσεως τοῦ ἑλκυσμοῦ $\sigma = E \cdot \varepsilon$ *(§ 87)*.

Ἡ σταθερὰ G καλεῖται ***μέτρον ὀλισθήσεως*** (ἢ ***μέτρον στρέψεως***). Ἐπειδὴ ἡ γωνία ζ εἶναι καθαρὸς ἀριθμός, τὸ μέτρον ὀλισθήσεως ἔχει διαστάσεις τάσεως. Ἤτοι

$$[G] = \frac{[F]}{[S]}$$

Διὰ τὸν χάλυβα π. χ. εἶναι $G = 8000$ kgr*/mm².

Διὰ $\zeta = 1$ ἔχομεν $\tau = G$· συνεπῶς τὸ μέτρον ὀλισθήσεως εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τάσις, ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ προκαλέσῃ γωνίαν ὀλισθήσεως ἑνὸς ἀκτινίου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ παραμόρφωσις εἶναι ἐλαστική.

Στρέψις σωλῆνος. Περίπτωσις ὀλισθήσεως ἐμφανίζεται κατὰ τὴν *στρέψιν* σωλῆνος. Κατ' αὐτήν, εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ἑνὸς σωλῆνος μήκους l (σχ. 163) ἐφαρμόζεται ἡ ῥοπὴ $\mathcal{M}$, ἡ ὁποία μεταδίδεται εἰς τὸν σωλῆνα ὡς ἄθροισμα ῥοπῶν τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \ldots$, ὁμοιομόρφως κατανεμημένων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς ἄνω τομῆς τοῦ σωλῆνος.

Ἂν ἑκάστη δύναμις F_i, δρῶσα ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ S_i, ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης, ἔχομεν

$$M = \sum F_i \cdot r_i = \sum \tau_i \cdot S_i \cdot r_i$$

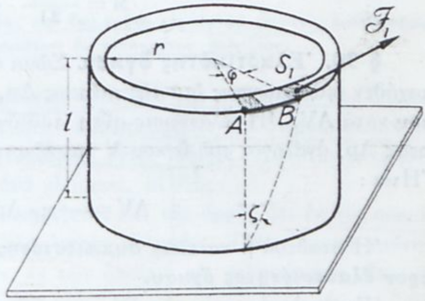
(διότι ἐξ ὁρισμοῦ: τάσις · ἐπιφάνεια = δύναμις).

Ὁ σωλὴν θεωρεῖται ὡς λεπτότοιχος, ὁπότε ὅλαι αἱ ἐπιφάνειαι S_i ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἀπόστασιν r. Ἡ ἐφαπτομένη τάσις τ, λόγῳ τῆς ὁμοιομόρφου κατανομῆς τῶν δυνάμεων, εἶναι σταθερά, ὁπότε ἔχομεν

$$M = \tau \cdot r \cdot \sum S_i = \tau \cdot r \cdot S$$

ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἄνω τομῆς τοῦ σωλῆνος.

Ἡ ῥοπή, λοιπόν, $\mathcal{M}$ παράγει ἐφαπτομένας τάσεις τ ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας τοῦ σωλῆνος ὡς καὶ ἐπὶ οἱασδήποτε ἄλλης καθέτου τομῆς. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τάσεων αὐτῶν, ὁ σωλὴν ὑφίσταται στρέψιν, ὁπότε ἑκάστη γενέτειρα σχηματίζει τὴν γωνίαν ζ μὲ τὴν ἀρχικήν της διεύθυνσιν. Ἡ γωνία ὅμως αὕτη συνδέεται μὲ τὴν τάσιν τ διὰ τῆς σχέσεως (1), ὁπότε, δι' ἀντικαταστάσεως, λαμβάνομεν



Σχ. 163.

$$M = \zeta \cdot G \cdot r \cdot S.$$

Ἡ γωνία ὀλισθήσεως ζ συνδέεται ἐπίσης μὲ τὴν ***γωνίαν στρέψεως*** φ τῆς ἄνω τομῆς τοῦ σωλῆνος διὰ τῆς σχέσεως $AB = \varphi \cdot r$. Ὁμοίως εἶναι $AB = \zeta \cdot l$, ἐπομένως ἔχομεν

$$M = \frac{\varphi \cdot r}{l} \cdot G \cdot r \cdot S = G \cdot r^2 \cdot \frac{S}{l} \cdot \varphi \qquad (2)$$

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι ἡ *γωνία στρέψεως φ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἐπιδρῶσαν ῥοπὴν M.*

Στρέψις σύρματος. Ἂν, ἀντὶ σωλῆνος, λάβωμεν σ ύ ρ μ α, τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ πολλοὺς λεπτοτάτους χιτῶνας, τότε ὁ ὑπολογισμὸς θὰ δώσῃ τὴν ἐξίσωσιν

$$M = G \cdot \frac{\pi r^4}{2l} \cdot \varphi$$

ἤ $$\boxed{M = D^* \cdot \varphi}$$

ἔνθα ἡ παράστασις $D^* = G\pi r^4/2l$ εἶναι ἡ *κατευθύνουσα ῥοπὴ* τοῦ σύρματος.

Ἀπόδειξις. Ἂν dr εἶναι τὸ πάχος ἑνὸς χιτῶνος καὶ r ἡ ἀκτίς, διὰ νὰ στραφῇ ὁ χιτὼν οὗτος κατὰ τὴν γωνίαν φ, χρειάζεται νὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ ἡ (στοιχειώδης) ῥοπὴ dM, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2), εἶναι ἴση πρὸς

$$dM = G \cdot r^2 \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{l} \cdot \varphi$$

Δι' ὅλους τοὺς χιτῶνας, ἡ γωνία στρέψεως φ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν, ὁπότε ἡ ὁλικὴ ῥοπὴ ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν στρέψιν τοῦ σύρματος θὰ εἶναι

$$M = \int dM = G \cdot \frac{2\pi}{l} \cdot \varphi \int_0^R r^3 \cdot dr$$

ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τοῦ σύρματος.

Ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης δίδει

$$M = \frac{G\pi r^4}{2l} \cdot \varphi.$$

§ 90. Ἐλαστικότης ὄγκου. Σῶμα στερεὸν ὄγκου V, πιεζόμενον πανταχόθεν ὁμοιομόρφως διὰ τῆς πιέσεως Δp, ὑφίσταται ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου τόυ κατὰ ΔV. Ἡ ἐλάττωσις αὕτη τοῦ ὄγκου εὑρίσκεται ἀνάλογος τῆς πιέσεως Δp, ἀνάλογος τοῦ ὄγκου V καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σώματος. Ἤτοι :

$$\Delta V = -\varkappa \cdot \Delta p \cdot V$$

Ἡ σταθερὰ κ καλεῖται ***συμπιεστότης***, τὸ δὲ ἀντίστροφόν της 1/κ ***μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου.***

Ἐν ἀναλογίᾳ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς § 87 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\Delta p = -\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

ἢ (πίεσις = μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου · ἀνηγμένη ἐλάττωσις ὄγκου).

Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις εἶναι ἡ διατύπωσις τοῦ νόμου τοῦ Hooke διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαστικότητος ὄγκου.

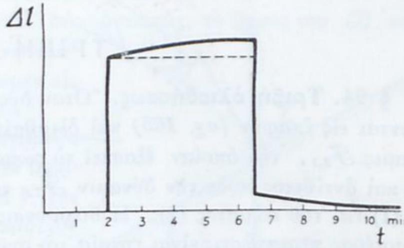
§ 91. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἐλαστικῶν σταθερῶν. Εἰς τὰ ὁμογενῆ* καὶ ἰσότροπα σώματα αἱ ἐλαστικαὶ σταθεραὶ (E, μ, G καὶ μέτρον ἐλαστικότητος ὄγκου 1/κ) συνδέονται μεταξύ των διὰ δύο σχέσεων κατὰ τρόπον, ὥστε, ὅταν γνωρίζωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, νὰ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς λοιπάς.

---

* Ἕνα σῶμα καλεῖται *ὁμογενὲς* ὅταν ὅλα τὰ τμήματα αὐτοῦ ἔχουν τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, π.χ. τὴν αὐτὴν πυκνότητα, τὴν αὐτὴν συμπιεστότητα κ.λ.

Ἕνα σῶμα καλεῖται *ἰσότροπον* ὅταν ἔχῃ πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, π.χ. τὴν αὐτὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ φωτός, τὴν αὐτὴν ἠλεκτρικὴν ἀγωγιμότητα, τὸ αὐτὸ μέτρον *Young* κ.λ.

§ 92. Ἐλαστικὴ ὑστέρησις. Εἰς τ' ἀνωτέρω ἐδέχθημεν ὅτι τὰ στερεὰ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς δυνάμεως λαμβάνουν ἀμέσως τὴν τελικήν των μορφήν. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως ἐπέρχεται κατ' ἀρχὰς ὡρισμένη παραμόρφωσις, ἡ ὁποία, ἐφ' ὅσον ἡ ἐξωτερικὴ αἰτία ἐξακολουθεῖ ἐπιδρῶσα, αὐξάνεται βραδέως καὶ τὸ σῶμα λαμβάνει τὴν τελικήν του μορφὴν ἀσυμπτωτικῶς (*σχ. 164*). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἐπάνοδον τοῦ σώματος εἰς τὴν ἀρχικήν του μορφὴν μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς δυνάμεως. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐλαστικὴ ὑστέρησις, καθίσταται τόσον ἐντονώτερον ὅσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ ὅριον ἐλαστικότητος. Ἰδιαιτέρως μικρὰν ἐλαστικὴν ὑστέρησιν παρουσιάζει ὁ χαλαζίας καὶ διὰ τοῦτο εἰς πολλὰ ὄργανα ἡ ἐξάρτησις στρεπτῶν συστημάτων γίνεται διὰ νημάτων ἐκ τετηγμένου χαλαζίου.



Σχ. 164. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς δυνάμεως, τὸ σῶμα δὲν λαμβάνει ἀμέσως τὰς τελικάς του διαστάσεις. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μετὰ τὴν ἄρσιν τῆς δυνάμεως.

§ 93. Σκληρότης. ***Σκληρότητα*** καλοῦμεν τὴν ἀντίστασιν τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν τὰ στερεὰ σώματα ὅταν προσπαθῶμεν νὰ διαχωρίσωμεν τὰ μέρη αὐτῶν ἢ ὅταν ἄλλο σῶμα διεισδύῃ ἐντὸς αὐτῶν. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς σκληρότητος εἶναι ἐν χρήσει δύο κλίμακες, αἱ ἑξῆς:

α) *Κλῖμαξ τοῦ Mohs.* Αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι ἐκ δύο σωμάτων τὸ σκληρότερον χαράσσει τὸ ὀλιγώτερον σκληρόν. Τὴν κλίμακα ταύτην ἀποτελεῖ ἡ σκληρότης 10 σωμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ σκληρότερον εἶναι ὁ ἀδάμας (10) καὶ τὸ μαλακώτερον ὁ τάλκης (1).

Σκληρομετρικὴ κλῖμαξ	
1. Τάλκης	6. Ἄστριος
2. Γύψος	7. Χαλαζίας
3. Ἀσβεστίτης	8. Τοπάζιον
4. Φθορίτης	9. Κορούνδιον
5. Ἀπατίτης	10. Ἀδάμας

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς σκληρότητος ἑνὸς σώματος γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ ἀδάμαντος, χαράσσομεν διαδοχικῶς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν σῶμα μὲ ὑλικὰ μικροτέρας σκληρότητος. Καὶ ἂν εὕρωμεν ὅτι τοῦτο χαράσσεται ἀπὸ τὸν ἀδάμαντα καὶ τὸ κορούνδιον, ἀλλὰ χαράσσει τὸ τοπάζιον, ἡ σκληρότης αὐτοῦ θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ 8 καὶ 9. Ἂν δὲ οὔτε χαράσσῃ τὸ τοπάζιον, οὔτε χαράσσεται ἀπὸ αὐτό, ἡ σκληρότης του θὰ εἶναι ἀκριβῶς 8. Οὕτω, ἡ σκληρότης τοῦ ἀνθρωπίνου ὄνυχος εὑρίσκεται ἴση πρὸς 2,5.

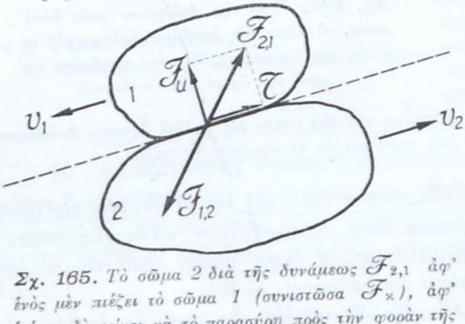
β) *Κλῖμαξ Brinell.* Τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν ὑλικὸν ὑποβάλλεται εἰς τὴν πίεσιν λίαν σκληρᾶς, χαλυβδίνης σφαίρας* καὶ μετρεῖται ἡ διάμετρος τοῦ προκαλουμένου κοιλώματος.

* Δύναμις 3 τόννων ἐπὶ σφαίρας διαμέτρου 1 cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΓ΄

ΤΡΙΒΗ

§ 94. Τριβὴ ὀλισθήσεως. Ὅταν δύο στερεὰ σώματα (1) καὶ (2) εὑρίσκωνται εἰς ἐπαφὴν *(σχ. 165)* καὶ ὀλισθαίνουν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, τότε ἡ δύναμις $\mathcal{F}_{2,1}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ σῶμα (2) ἐπὶ τοῦ σώματος (1), εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν $\mathcal{F}_{1,2}$ τὴν ἐξασκουμένην ὑπὸ τοῦ σώματος (1) ἐπὶ τοῦ σώματος (2). Ἡ διεύθυνσις τῶν δύο δυνάμεων εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις εἶναι τυχαία, μὴ συμπίπτουσα πρὸς τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ κοινὸν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον.



Σχ. 165. Τὸ σῶμα 2 διὰ τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}_{2,1}$ ἀφ' ἑνὸς μὲν πιέζει τὸ σῶμα 1 (συνιστῶσα $\mathcal{F}_{\varkappa}$), ἀφ' ἑτέρου δὲ τείνει νὰ τὸ παρασύρῃ πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεώς του (συνιστῶσα $\mathcal{T}$).

Τὴν δύναμιν $\mathcal{F}_{2,1}$ ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας, τὴν μίαν $\mathcal{F}_{\varkappa}$, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐπαφῆς, καὶ τὴν ἄλλην $\mathcal{T}$, ἐφαπτομένην.

Ἡ δύναμις $\mathcal{T}$, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος (1), ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ σώματος (1) καὶ λέγεται ***τριβὴ ὀλισθήσεως.***

Πειραματικῶς εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ μέτρον τῆς καθέτου συνιστώσης $F_{\varkappa}$ καὶ ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν δύο ἐπιφανειῶν, εἶναι δὲ ἀνεξάρτητος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ δύο σώματα ἐφάπτονται. Ἤτοι :

$$\boxed{T = \eta \cdot F_{\varkappa}}$$

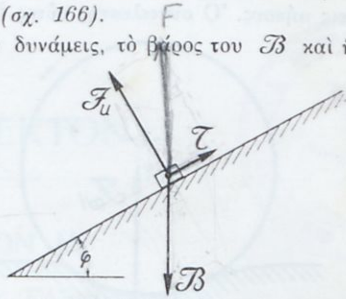
Ὁ συντελεστὴς η λέγεται ***συντελεστὴς τριβῆς.***

§ 95. Στατικὴ τριβή. Τριβὴ ἐμφανίζεται ὄχι μόνον ὅταν τὰ δύο σώματα ὀλισθαίνουν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἠρεμοῦν. Ἡ τριβὴ τότε — ἡ ὁποία καλεῖται ***στατικὴ τριβὴ*** $T_{\sigma\tau}$ — ὑπολογίζεται, ἀναλόγως τῆς παρουσιαζομένης περιπτώσεως, ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας, πάντως ὅμως εἶναι μικροτέρα μιᾶς ὁρικῆς τιμῆς $\eta \cdot F_{\varkappa}$ ἤ, τὸ πολύ, ἴση πρὸς αὐτήν. Εἶναι δηλ.

$$\boxed{T_{\sigma\tau} \leqslant \eta \cdot F_{\varkappa}}$$

Διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω, θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν σώματος ἠρεμοῦντος ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου *(σχ. 166)*.

Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος του $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, τὴν ὁποίαν ἀναλύομεν εἰς τὰς συνιστώσας αὐτῆς $\mathcal{F}_\varkappa$ καὶ $\mathcal{T}$.



Σχ. 166. *Ἡ ἰσορροπία εἶναι δυνατὴ μόνον ἐφ᾽ ὅσον ἡ γωνία φ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας τριβῆς.*

Τὰς δυνάμεις $F_\varkappa$ καὶ T δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας ὡς πρὸς δύο ἄξονας x καὶ y, τὸν ἕνα παράλληλον καὶ τὸν ἄλλον κάθετον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Ἤτοι:

$$B \cdot \eta\mu\,\varphi - T = 0 \qquad (1)$$

καὶ

$$F_\varkappa - B \cdot \sigma\upsilon\nu\,\varphi = 0 \qquad (2)$$

Γωνία τριβῆς. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου ἦτο μικρὰ καὶ τὸ σῶμα εὑρίσκετο ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἂν τώρα θεωρήσωμεν τὴν γωνίαν φ αὐξανομένην, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν αὐτῆς, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***γωνίαν τριβῆς*** $\varphi_{\tau\varrho}$, τὸ σῶμα θὰ ἀρχίσῃ ὀλισθαῖνον μὲ σταθερὰν ταχύτητα. Τὴν γωνίαν τριβῆς εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι, ἐφ᾽ ὅσον τώρα ἔχομεν ὀλίσθησιν, θὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις $T = \eta \cdot F_\varkappa$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰ T καὶ $F_\varkappa$, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἔχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\,\varphi_{\tau\varrho} = \eta}$$

Ἂν ἡ γωνία φ γίνῃ μεγαλυτέρα τῆς $\varphi_{\tau\varrho}$, τότε, ἐνῶ ἡ συνιστῶσα $B\,\eta\mu\,\varphi$ αὐξάνεται, ἡ τριβὴ T δὲν αὐξάνεται πλέον (μάλιστα δὲ ἐλαττοῦται) καὶ ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς ἐλλείψεως ἰσορροπίας, τὸ σῶμα κινεῖται ἐπιταχυνόμενον.

Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἐλαττοῦται ἂν μεταξὺ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν παρεντεθῇ στρῶμα ὑγροῦ (λιπαντικά).

Διαστάσεις: Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἔχει διαστάσεις

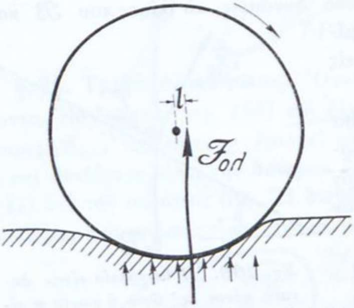
$$[\eta] = \frac{[T]}{[F]}$$

εἶναι δηλ. καθαρὸς ἀριθμός.

§ 96. Τριβὴ κυλίσεως. Ἐπὶ κυλίνδρου κυλιομένου ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου *(σχ. 167)* ἐμφανίζεται μία ῥοπὴ τείνουσα νὰ ἐπιβραδύνῃ τὴν κίνησιν. Πειραματικῶς εὑρίσκεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς ῥοπῆς ταύτης εἶναι ἀνάλογον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως $\mathcal{F}_{o\lambda}$ μὲ τὴν ὁποίαν ὁ κύλινδρος πιέζει τὸ ἐπίπεδον. Ἤτοι:

$$M_\varkappa = l \cdot F_{o\lambda}$$

Ἡ σταθερὰ l καλεῖται **συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως** καὶ ἔχει διαστάσεις μήκους. Ὁ συντελεστὴς οὗτος ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἀπὸ τὴν πλαστικότητα τῶν ὑλικῶν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω, ἡ τιμὴ τοῦ l διὰ τροχὸν ἐκ χάλυβος, κυλιόμενον ἐπὶ σιδηροτροχιᾶς, εἶναι ἴση πρὸς 0,05 mm.

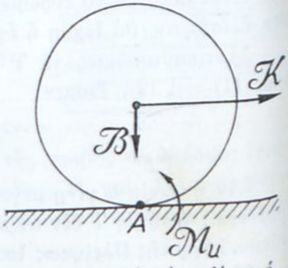


Σχ. 167. Ἡ ὑπὸ τοῦ ὑποστηρίγματος ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐξασκουμένη δύναμις $\mathcal{F}_{o\lambda}$ προκαλεῖ ροπὴν ἀντιτιθεμένην εἰς τὴν κύλισιν.

Ἡ ἐμφάνισις τῆς ροπῆς κυλίσεως ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Ἡ ἐπαφὴ τοῦ κυλίνδρου μετὰ τῆς ὑποστηριζούσης αὐτὸν ἐπιφανείας εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν γίνεται κατὰ μίαν γενέτειραν ἀλλά, λόγῳ τῆς παραμορφώσεως τοῦ ἐπιπέδου (καὶ τοῦ κυλίνδρου), κατὰ μίαν μικρὰν ἐπιφάνειαν. Ὅταν ὁ κύλινδρος κυλίεται, αἱ δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου λόγῳ ἐλαστικῆς ὑστερήσεως δὲν εἶναι συμμετρικῶς κατανεμημέναι καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη αὐτῶν $\mathcal{F}_{o\lambda}$ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνισιν τῆς ροπῆς $\mathcal{M}_\kappa$.

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, ἡ δύναμις $\mathcal{K}$ (σχ. 168) ἡ ἀναγκαία διὰ νὰ κυλίεται ὁ κύλινδρος μὲ σταθερὰν ταχύτητα πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ ροπὴ αὐτῆς νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν ροπὴν κυλίσεως $\mathcal{M}_\kappa$. Ὡς σημεῖον ἀναγωγῆς ἐκλέγομεν τὸν στιγμιαῖον ἄξονα A, ὁπότε ἔχομεν

$$K \cdot R = M_\kappa \qquad \text{ἢ} \qquad K = \frac{F_{o\lambda} \cdot l}{R}$$



Σχ. 168. Διὰ νὰ κυλίεται ὁ κύλινδρος μὲ σταθερὰν ταχύτητα, πρέπει νὰ ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὴν δύναμιν $\mathcal{K}$.

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ σταθερὰ τὰ $F_{o\lambda}$ κα l ἡ δύναμις ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν κύλισιν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος. Ἐκ τούτου ἐξηγεῖται διατὶ συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις τροχῶν μεγάλης διαμέτρου εἰς τὰ ὀχήματα.

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΙΣ

§ 97. Νόμος τοῦ Νεύτωνος. Τὰ φαινόμενα τῆς βαρύτητος καὶ αἱ κινήσεις τῶν οὐρανίων σωμάτων ἐξηγοῦνται ἂν δεχθῶμεν τὴν ὕπαρξιν ἑλκτικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ὑλικῶν σημείων καὶ αἱ ὁποῖαι ὑπακούουν εἰς τὸν ἑξῆς νόμον, τὸν ***νόμον τοῦ Νεύτωνος*** :

Δύο ὑλικὰ σημεῖα ἕλκονται ἀναλόγως τοῦ γινομένου τῶν μαζῶν των m_1 *καὶ* m_2 *καὶ ἀντιστρόφως ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως* r *αὐτῶν*. Ἤτοι :

$F = k \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	Νόμος τοῦ Νεύτωνος

ἔνθα k εἶναι παγκοσμία σταθερὰ ***(σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως)***, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τῶν ὑλικῶν.

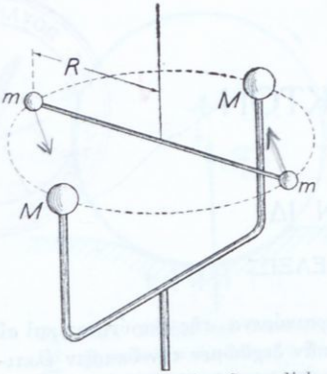
Ἂν αἱ ἑλκόμεναι μᾶζαι εἶναι σφαῖραι, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀπόστασις r εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των, τῶν μαζῶν θεωρουμένων ὡς συγκεντρωμένων εἰς τὰ κέντρα αὐτά.

Διαστάσεις τοῦ *k*. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Νεύτωνος προκύπτει ὅτι ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἔχει διαστάσεις

$$[k] = \frac{[F] \cdot [r^2]}{[m^2]}.$$

Μέτρησις τῆς σταθερᾶς *k*. Ἡ τιμὴ τοῦ k εὑρίσκεται κατ᾽ ἀρχὴν διὰ μετρήσεως τῆς δυνάμεως μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκονται δύο σφαῖραι γνωστῶν μαζῶν εὑρισκόμεναι εἰς γνωστὴν ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ δύναμις αὕτη εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ δὲν δύναται νὰ μετρηθῇ μετ᾽ ἀκριβείας χρησιμοποιοῦνται ἄλλαι μέθοδοι ἐκ τῶν ὁποίων ἡ δύναμις προκύπτει ἐμμέσως.

Μία ἀπὸ τὰς μεθόδους μετρήσεως τῆς σταθερᾶς k εἶναι ἡ ***μέθοδος τοῦ Cavendish*** : Διὰ λεπτοῦ σύρματος *(σχ. 169)* ἐξαρτᾶται ἐλαφρὸν στέλεχος φέρον εἰς τὰ ἄκρα δύο μικρὰς σφαίρας μάζης m, m καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἔστω 2 R. Δύο ἄλλαι σφαῖραι μεγάλης μάζης M, M στηρίζονται ἐπὶ καταλλήλου στηρίγματος οὕτως ὥστε τὰ κέντρα των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον μὲ τὰ κέντρα τῶν ἄλλων σφαιρῶν. Τὰ κέντρα τῶν μεγάλων σφαιρῶν M, M, ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων ἐπίσης κατὰ 2 R. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ ὑποστήριγμα οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα M — M νὰ γίνῃ κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν m — m, τότε, λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς διατάξεως, οὐδεμία ῥοπὴ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ στελέχους. Ἐὰν τώρα στρέψωμεν τὸ ὑποστήριγμα οὕτως ὥστε αἱ μεγάλαι σφαῖραι νὰ πλησιάσουν πρὸς τὰς μικράς, τότε αἱ τελευταῖαι αὗται, ἑλκόμεναι, θὰ ἰσορροπήσουν εἰς νέαν θέσιν. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην μετροῦμεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν γωνίαν φ κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ στέλεχος, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὴν ἀπόστασιν r τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν m, M. Ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ μεγάλη σφαῖρα M ἐπὶ τῆς μικρᾶς σφαίρας m εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. **169.** *Διάταξις Cavendich (ἀρχὴ) διὰ τὴν μέτρησιν τῆς σταθερᾶς τῆς παγκοσμίας ἕλξεως.*

$$F = k \cdot \frac{mM}{r^2}$$

Ἡ ῥοπή, ἑπομένως, ἡ δρῶσα ἐπὶ τοῦ στελέχους θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$2\,R \cdot F = 2\,R \cdot k \cdot \frac{mM}{r^2}$$

θὰ ἀντισταθμίζεται δὲ ἀπὸ τὴν ῥοπὴν $D^* \cdot \varphi$ τὴν ἀναπτυσσομένην ἐκ τῆς στρέψεως τοῦ σύρματος ἐξαρτήσεως. Ἔχομεν λοιπὸν

$$D^* \cdot \varphi = 2\,R \cdot k \cdot \frac{mM}{r^2} \qquad (1)$$

Τὴν κατευθύνουσαν ῥοπὴν D^* τοῦ σύρματος εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς § 81

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$$

ἐὰν μετρήσωμεν τὴν περίοδον T τῆς ταλαντώσεως τοῦ στρεπτοῦ συστήματος καὶ γνωρίζωμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας Θ αὐτοῦ (ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $2\,mR^2$). Ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς k.

Αἱ ἀκριβέστεραι μετρήσεις ἔδωσαν τὴν τιμὴν

$$\boxed{k = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\ dyn \cdot cm^2 \cdot gr^{-2}}$$

§ 98. Βάρος. Τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ Γῆ ἕλκει ἕνα ὑλικὸν σημεῖον (ἢ σῶμα) καλοῦμεν ***βάρος***. Τὸ βάρος B ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Νεύτωνος, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ m_1 διὰ τῆς μάζης M τῆς Γῆς, τὸ m_2 διὰ τῆς μάζης m τοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ τὸ r διὰ τῆς ἀκτῖνος R τῆς Γῆς. Ἤτοι

$$B = k \cdot \frac{M}{R^2} \cdot m$$

Ἡ σταθερὰ ποσότης $k \cdot M/R^2$, ὡς ἔχουσα διαστάσεις ἐπιταχύνσεως καλεῖται ***ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος*** καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ γράμματος g. Ἄρα ἔχομεν

$$\boxed{B = m \cdot g} \tag{1}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δεικνύει ὅτι σῶμα μάζης m, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του B, κινεῖται ἐν τῷ κενῷ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν g. Ἐκ μετρήσεων εὑρέθη διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος εἰς μέσα πλάτη ἡ τιμὴ $g = 981\ cm/sec^2$. Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς δὲν εἶναι σταθερά, λόγῳ τοῦ σχήματος αὐτῆς, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ g θὰ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους.

Διὰ μετρήσεων, λ. χ. διὰ τοῦ ἀντιστρεπτοῦ ἐκκρεμοῦς (§ 83), εὑρίσκεται ὅτι τὸ g κυμαίνεται μεταξὺ τῆς τιμῆς $978\ cm/sec^2$ (ἰσημερινὸς) καὶ $983\ cm/sec^2$ (πόλοι). Εἰς τὰς Ἀθήνας τὸ g ἔχει τὴν τιμὴν $980\ cm/sec^2$.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) προκύπτει ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν τόπον τὰ βάρη δύο σωμάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς μάζας των, δύναται, ἑπομένως, ἡ μέτρησις τῶν μαζῶν των νὰ ἀναχθῇ εἰς μέτρησιν τῶν βαρῶν αὐτῶν (π.χ. διὰ ζυγοῦ).

§ 99. Πεδίον βαρύτητος. Ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνος, ὅπως ἀνωτέρω διετυπώθη, θεωρεῖ τὴν βαρύτητα ὡς μίαν μακρόθεν ἐπίδρασιν. Τὸ ἕνα σῶμα δηλ. ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἄλλου, εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ εὑρισκομένου, δύναμιν χωρὶς νὰ ἐπέρχεται μεταβολή τις εἰς τὸν ἀναμεταξὺ χῶρον. Ἡ ἐπίδρασις αὕτη δὲν θ' ἀπαιτῇ χρόνον διὰ τὴν μετάδοσίν της, ἡ ταχύτης δηλ. τῆς μεταδόσεως θὰ εἶναι ἄπειρος. Ἄν, τοὐναντίον, ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἑνὸς σώματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου μεταδίδεται διὰ τοῦ διαμέσου περιβάλλοντος, ἡ μετάδοσις θὰ γίνεται μὲ πεπερασμένην ταχύτητα. Κατὰ τὴν θεωρίαν ταύτην, καλουμένην *θεωρίαν τοῦ πεδίου*, ὁ χῶρος περὶ ὑλικὸν σημεῖον ἀποκτᾷ τὴν ἰδιότητα νὰ ἐξασκῇ δύναμιν ἐπὶ ἄλλου τινὸς ὑλικοῦ σημείου ἐντὸς τοῦ χώρου τούτου τεθέντος. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ πεδίου, θὰ πρέπῃ κάθε μεταβολὴ εἰς τὸ αἴτιον τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητος νὰ χρειάζεται πεπερασμένον χρόνον διὰ νὰ μεταδοθῇ εἰς ἄλλο σημεῖον. Τὸ πηλίκον τῆς ἀποστάσεως διὰ τοῦ χρόνου τούτου παρέχει τὴν ταχύτητα τῆς μεταδόσεως τῆς ἐπιδράσεως. Διὰ τὸ πεδίον βαρύτητος δὲν κατωρθώθη νὰ εὑρεθῇ πειραματικὸς τρόπος μετρήσεως τῆς ταχύτητος μεταδόσεως*.

§ 100. Γενικὰ περὶ πεδίων. ***Πεδίον*** καλεῖται ὁ χῶρος εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ὁποίου ἕνα φυσικὸν μέγεθος ἔχει ὡρισμένην τιμήν. Ὅταν τὸ μέγεθος τοῦτο εἶναι ἀνυσματικόν, τὸ πεδίον καλεῖται ***ἀνυσματικὸν πεδίον.***

Πεδίον δυνάμεων καλεῖται ὁ χῶρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου, ἂν φέρωμεν κατάλληλον ὑπόθεμα, θὰ ἐξασκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ὑποθέματος. Τοιοῦτον πεδίον εἶναι τὸ ***πεδίον βαρύτητος,*** διότι

* Δι' ἄλλα πεδία, ὅπως, π. χ., τὸ ἠλεκτρικόν, τοῦτο ἔχει ἐπιτευχθῆ.

ἂν φέρωμεν ἐντὸς αὐτοῦ κατάλληλον ὑπόθεμα (μίαν μᾶζαν), θὰ ἐξασκηθῇ ἐπ᾽ αὐτοῦ δύναμις (τὸ βάρος).

Ἔντασις g τοῦ πεδίου βαρύτητος καλεῖται τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$ τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τῆς μάζης m διὰ τῆς μάζης ταύτης. Ἤτοι

$$\boxed{g = \frac{\mathcal{B}}{\mathrm{m}}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου βαρύτητος ἔχει διαστάσεις ἐπιταχύνσεως καὶ ὅτι συμπίπτει ἀκριβῶς μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος.

Ἐὰν τὴν ἐντὸς τοῦ πεδίου βαρύτητος εὑρισκομένην μᾶζαν m, μετακινήσωμεν κατὰ Δs, τὸ ἔργον ΔΑ, τὸ ὁποῖον παράγεται, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$\Delta \mathrm{A} = (\mathcal{F} \cdot \Delta s)$$

Τὸ ἔργον A_1^2, τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετακίνησιν ἀπὸ τοῦ σημείου 1 ἕως τὸ σημεῖον 2, εἶναι

$$\mathrm{A}_1^2 = \sum_1^2 (\mathcal{F} \cdot \Delta s)$$

Ὅπως ἀποδεικνύεται, τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον* τῆς τροχιᾶς ἐπὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ μετακίνησις, ἐξαρτώμενον μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν σημείων 1 καὶ 2. Τὸ ἔργον τοῦτο, συμφώνως μὲ τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης m.

Δυναμικὸν U_Σ τοῦ πεδίου βαρύτητος εἰς τὸ σημεῖον Σ καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ὑπὸ τοῦ πεδίου παραγομένου ἔργου A_Σ^∞, ὅταν ἡ μᾶζα m μετακινηθῇ ἀπὸ τοῦ σημείου Σ μέχρι τοῦ ἀπείρου, διὰ τῆς μάζης m. Ἤτοι

$$\boxed{\mathrm{U}_\Sigma = \frac{\mathrm{A}_\Sigma^\infty}{\mathrm{m}}}$$

Τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Δυναμικὸν τοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Σ καλεῖται ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ μονὰς τῆς μάζης ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἔργον A_Σ^∞ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου, ἀνεξάρτητον αὐτοῦ θὰ εἶναι καὶ τὸ δυναμικόν, ἐξαρτώμενον, ὅπως καὶ τὸ ἔργον, μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν (x, y, z) τοῦ σημείου Σ.

Διαφορὰ δυναμικοῦ $\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_2$ μεταξὺ τῶν σημείων 1 καὶ 2 καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ἔργου A_1^2 τὸ ὁποῖον παράγεται κατὰ τὴν μετακίνησιν τῆς μάζης m ἀπὸ τοῦ ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἄλλο διὰ τῆς μάζης ταύτης. Ἤτοι:

---

* Πεδία μὲ τοιαύτας ἰδιότητας καλοῦνται *ἀστρόβιλα πεδία* (βλ. καὶ Ἠλεκτρισμός, σελ. 16).

$$\boxed{U_1 - U_2 = \frac{A_1^2}{m}} \qquad (1)$$

Ὅταν ἡ μετακίνησις γίνεται ἐπὶ κλειστῆς καμπύλης, δηλ. ὅταν ἡ τροχιὰ ἀρχίζῃ καὶ καταλήγῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἔχομεν

$$U_1 = U_2 \qquad \text{καὶ συνεπῶς} \qquad A_{\bigcirc} = 0.$$

Τὸ σύμβολον $\bigcirc$ σημαίνει ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ ἔργου τοῦ παραγομένου κατὰ τὴν μετακίνησιν τῆς μάζης ἐπὶ κλειστῆς καμπύλης.

Ἰσοδυναμικαὶ ἐπιφάνειαι καλοῦνται αἱ ἐπιφάνειαι ἐπὶ τῶν ὁποίων τὸ δυναμικὸν ἔχει σταθερὰν τιμήν. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ ἐπὶ ἰσοδυναμικῆς ἐπιφανείας μετακίνησις μάζης τινὸς δὲν καταναλίσκει ἔργον, ἀφοῦ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ ὅλων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ δύναμις εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ χώρου (καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν δι᾽ αὐτοῦ διερχομένην ἰσοδυναμικὴν ἐπιφάνειαν, διότι ἄλλως κατὰ τὴν μετακίνησιν θὰ παρήγετο ἔργον.

ΜΕΡΟΣ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΚΙΝΟΥΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

§ 101. Δύναμις *d'Alembert.* Τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς Μηχανικῆς $\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{F} - \mathrm{m} \cdot \gamma = 0 \quad \text{ἢ} \quad \mathcal{F} + (-\mathrm{m}\gamma) = 0.$$

Ἡ μορφὴ αὕτη τῆς ἐξισώσεως ὑπενθυμίζει τὴν συνθήκην ἰσορροπίας ἐπὶ τῷ ὅρῳ νὰ θεωρηθῇ τὸ $-\mathrm{m} \cdot \gamma$ ὡς δύναμις. Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν πραγματικότητα (εἶναι δηλ. μία ὑποθετικὴ δύναμις), καλεῖται ***δύναμις d'Alembert.***

Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς δυνάμεως d'Alembert τὰ προβλήματα δυναμικῆς μετατρέπονται εἰς προβλήματα ἰσορροπίας. Λαμβάνοντες, λοιπόν, ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν δύναμιν ταύτην, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Εἰς ὅλας τὰς κινήσεις ἑνὸς σώματος — περιλαμβανομένης καὶ τῆς ὁρικῆς περιπτώσεως τῆς ἠρεμίας — τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων, πραγματικῶν καὶ ὑποθετικῶν, εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν.

Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σφενδόνης *(σελ. 47)*, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν:

«Ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἄρα ἐπιταχύνεται, τοῦτο δὲ εἶναι δυνατὸν μόνον ἐὰν ἐπιδρᾷ ἐπ' αὐτῆς μία δύναμις, ἡ δύναμις τοῦ νήματος»,

θεωροῦμεν ὅτι ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ λέγομεν:

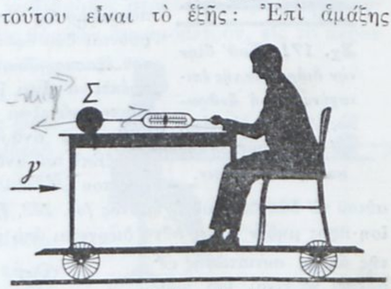
«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκουμένων δυνάμεων εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις, ἡ δύναμις τοῦ νήματος καὶ ἡ δύναμις d'Alembert».

§ 102. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς $\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$ ἐμελετήθη μέχρι τοῦδε καὶ εὑρέθη ἰσχύων εἰς σύστημα ἀναφορᾶς (βλ. *σελ. 25)* θεωρούμενον «ἀκίνητον». Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχουν καὶ ἄλλα συστήματα ἀναφορᾶς τὰ ὁποῖα κινοῦνται ὡς πρὸς τὸ πρῶτον τοῦτο σύστημα, τίθεται τὸ ἐρώτημα κατὰ πόσον ὁ θεμελιώδης οὗτος νόμος ἐξακολουθεῖ ἰσχύων καὶ διὰ τὰ ἄλλα ταῦτα συστήματα.

Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ὀρθὴ ἀπάντησις εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐὰν ὁ θεμελιώδης νόμος ἰσχύῃ δι' ἕνα σύστημα, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ πᾶν ἄλλο τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ὡς πρὸς τοῦτο μεταφορικὴν κίνησιν μὲ σταθερὰν ταχύτητα*. Ἐφαρμογὴν τούτου ἔχομεν, ὅταν παρατηρητὴς εὑρίσκεται ἐντὸς κλειστοῦ θαλάμου πλοίου κινουμένου ὁμαλῶς. Σῶμα ἀκίνητον ὡς πρὸς τὸ νέον τοῦτο σύστημα ἀναφορᾶς κινεῖται ὁμαλῶς ὡς πρὸς ἄλλον παρατηρητὴν μὴ συμμετέχοντα τῆς κινήσεως τοῦ πλοίου. Ἡ ταχύτης, λοιπόν, τοῦ σώματος εἶναι διάφορος διὰ τὰ δύο συστήματα ἀναφορᾶς.

Ἂν τὸ σῶμα κινηθῇ μὲ ἐπιτάχυνσίν τινα, ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἰδία καὶ ὡς πρὸς τὰ δύο συστήματα. Οὕτω, σῶμα ἰσορροποῦν ὡς πρὸς τὸν ἕνα παρατηρητὴν ($\gamma = 0$ καὶ $\omega' = 0$), ἰσορροπεῖ καὶ ὡς πρὸς τὸν ἄλλον. Τούτου ἕνεκα ὅλα τὰ φαινόμενα ἐξελίσσονται ὁμοίως καὶ διὰ τοὺς δύο παρατηρητὰς καὶ δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ἐξακρίβωσιν ποῖον τῶν δύο συστημάτων πραγματικῶς κινεῖται.

§ 103. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν. Παράδειγμα τούτου εἶναι τὸ ἑξῆς: Ἐπὶ ἁμάξης εἶναι στερεωμένα μία τράπεζα καὶ ἕνα κάθισμα *(σχ. 170)* ἐπὶ τοῦ ὁποίου κάθεται ἄνθρωπος κρατῶν δυναμόμετρον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται σφαῖρα μάζης m. Τὸ ὅλον σύστημα δύναται νὰ ἐπιταχυνθῇ δι' ἰσχυρᾶς ὠθήσεως μὲ ἐπιτάχυνσιν γ (πρὸς τὰ δεξιά). Τὸ δυναμόμετρον τείνεται καὶ δεικνύει δύναμιν $\mathcal{F} = \mathrm{m} \cdot \gamma$. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου εἶναι ἄλλη διὰ τὸν ἐπιταχυνόμενον παρατηρητὴν καὶ ἄλλη διὰ παρατηρητὴν εὑρισκόμενον ἔξω τοῦ συστήματος, διότι ἕκαστος τούτων ἔχει διάφορον ἀντίληψιν τοῦ φαινομένου.



Σχ. 170. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιταχύνσεως τὸ δυναμόμετρον δεικνύει μίαν δύναμιν.

α) *Ἀκίνητος παρατηρητής:* Ἡ σφαῖρα ἐπιταχύνεται πρὸς τὰ δεξιά. Τοῦτο προέρχεται ἀπὸ μίαν δύναμιν ἐξασκουμένην ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς χειρὸς διὰ μέσου τοῦ δυναμομέτρου καὶ ἴσην πρὸς $\mathrm{m} \cdot \gamma$.

β) *Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητής:* Ἡ σφαῖρα ἠρεμεῖ, συνεπῶς δὲν ἐπιταχύνεται. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένων δυνάμεων πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἐπομένως, ἐκτὸς τῆς ὑπὸ τῆς χειρὸς ἐξασκουμένης δυνάμεως, πρέπει νὰ δρᾷ ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ ἄλλη δύναμις, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρώτην, ἡ $\mathcal{F} = -\mathrm{m} \cdot \gamma$.

Τὴν δύναμιν ταύτην, ἡ ὁποία εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ὑπάρχει (διότι ὑπὸ οὐδενὸς σώματος ἐξασκεῖται) πρέπει νὰ δεχθῇ ὁ ἐπιταχυνόμενος

* Τὸ σύνολον τοιούτων συστημάτων ἀναφορᾶς ἀποτελεῖ ἕνα σύστημα ἀδρανείας.

παρατηρητής, ἂν θέλῃ νὰ ἐφαρμόσῃ τοὺς συνήθεις νόμους τῆς Μηχανικῆς διὰ σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

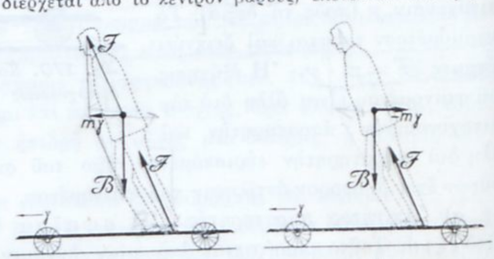
Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς εἰς σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ ἐπιτάχυνσιν γ πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἐπιδρῶσαν ἐπὶ ἑκάστης μάζης m μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν, ἴσην πρὸς $-m \cdot \gamma$. Ἡ ὑποθετικὴ αὕτη δύναμις ὀνομάζεται, συνήθως, **δύναμις ἀδρανείας.**

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς δυνάμεως ἀδρανείας, φέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ἐπὶ τροχιοδρομικοῦ ὀχήματος ἵσταται ἄνθρωπος χωρὶς νὰ κρατῆται. Κατὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὀχήματος, ἂν θέλῃ οὗτος νὰ μὴ πέσῃ, πρέπει νὰ λάβῃ τὴν στάσιν τὴν ὑποδεικνυομένην ὑπὸ τοῦ σχήματος 171. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου τούτου εἶναι διάφορος ἀναλόγως τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀνάγεται ἡ κίνησις.

Σχ. 171. *Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπιταχύνσεως ὁ ἄνθρωπος, διὰ νὰ μὴ πέσῃ, πρέπει νὰ διατηρῇ τὴν κεκλιμένην στάσιν.*

α) *Ἀκίνητος παρατηρητὴς* (εὑρισκόμενος δηλ. ἐπὶ τοῦ πεζοδρομίου). Διὰ νὰ μὴ ἀνατραπῇ ὁ ἄνθρωπος καὶ διὰ νὰ παρακολουθῇ τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος, πρέπει νὰ ἐκπληροῦνται δύο ὅροι: Ἡ συνισταμένη τῶν ῥοπῶν τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένων δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν καὶ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ ἀνθρώπου ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὀχήματος.

Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: τὸ βάρος του $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ τὸ δάπεδον τοῦ ὀχήματος *(σχ. 172, I)*. Ἐπειδὴ ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως $\mathcal{B}$ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν (διότι αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους) ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ῥοπὴ τῆς ἄλλης συνιστώσης $\mathcal{F}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ δηλ. πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἀνθρώπου.



Σχ. 172.

Ἐὰν ὁ ἄνθρωπος παρέμενε κατακόρυφος, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ὡς διερχομένη ἀναγκαστικῶς διὰ τοῦ κέντρου βάρους, θὰ ἦτο κατακόρυφος καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\mathcal{B}$ καὶ $\mathcal{F}$ δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ ἦτο ὁριζοντία, ἐνῷ τοῦτο εἶναι δυνατὸν ἐὰν ὁ ἄνθρωπος λάβῃ κεκλιμένην στάσιν.

Ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ δάπεδον ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας (μίαν κατακόρυφον καὶ μίαν ὁριζοντίαν), ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ὁριζοντία — τριβὴ — εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἴση πρὸς $m \cdot \gamma$.

β) *Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητὴς* (εὑρισκόμενος ἐντὸς τοῦ ὀχήματος). Ὁ ἄνθρωπος ἰσορροπεῖ, συνεπῶς αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι δυνάμεις, ἀναγόμεναι εἰς τὸ κέντρον βάρους, πρέπει νὰ δίδουν συνισταμένην δύναμιν καὶ συνισταμένην ῥοπὴν ἴσας πρὸς μηδέν. Ἐπὶ τοῦ ἀνθρώπου δροῦν τρεῖς δυνάμεις: τὸ βάρος του $\mathcal{B}$, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἐκ τοῦ δαπέδου καὶ ἡ δύναμις ἀδρανείας $-\mathrm{m}\cdot\gamma$ *(σχ. 172, II)*.

Αἱ δύο πρῶται διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους, ἑπομένως καὶ ἡ τρίτη πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ νὰ ἔχῃ τοιοῦτον μέτρον καὶ διεύθυνσιν ὥστε νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν συνισταμένην τῶν δύο πρώτων.

§ 104. Σύστημα ἀναφορᾶς στρεφόμενον μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς νόμους τῆς Μηχανικῆς καὶ εἰς ἐπιταχυνόμενον σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως, πρέπει νὰ δεχθῶμεν μίαν ἀνύπαρκτον δύναμιν ἀδρανείας. Τὸ αὐτὸ ἀναγκαζόμεθα νὰ πράξωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα ἀναφορᾶς περιστρέφεται. Ἀναλόγως τοῦ ἂν τὸ σῶμα ἀκινητῇ ἢ ὄχι ἐν σχέσει πρὸς τὸ σύστημα ἀναφορᾶς διακρίνομεν δύο δυνάμεις ἀδρανείας, τὴν φυγόκεντρον δύναμιν καὶ τὴν δύναμιν Coriolis.

Φυγόκεντρος δύναμις. Ἐπὶ καθίσματος στρεπτοῦ περὶ κατακόρυφον ἄξονα *(σχ. 173)* κάθεται ἄνθρωπος κρατῶν δυναμόμετρον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται μία σφαῖρα (μάζης m), στηριζομένη ἐπὶ τραπέζης, ἡ ὁποία εἶναι στερεωμένη ἐπὶ τοῦ καθίσματος οὕτως ὥστε νὰ δύναται νὰ περιστρέφεται μετ' αὐτοῦ. Θέτοντες τὸ ὅλον σύστημα εἰς περιστροφὴν (ἔστω δὲ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης αὐτοῦ), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δυναμόμετρον ἐκτείνεται καὶ δεικνύει μίαν δύναμιν τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς $\mathrm{m}\omega^2\cdot\mathrm{r}$. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου εἶναι ἄλλη δι' ἀκίνητον παρατηρητὴν καὶ ἄλλη διὰ τὸν στρεφόμενον ἄνθρωπον.

Σχ. 173. Κατὰ τὴν περιστροφήν, τὸ δυναμόμετρον δεικνύει μίαν δύναμιν.

α) *Ἀκίνητος παρατηρητής*: Ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἀκτῖνος r, συνεπῶς ἐπιταχύνεται. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη, ἀπαιτεῖται δύναμις $\mathrm{F}=\mathrm{m}\cdot\gamma=\mathrm{m}\upsilon^2/\mathrm{r}=-\mathrm{m}\omega^2\mathrm{r}$ μὲ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον περιστροφῆς - αὐτὴν δὲ ἀκριβῶς τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἄνθρωπος ἐπὶ τῆς σφαίρας μετρεῖ τὸ δυναμόμετρον.

β) *Στρεφόμενος παρατηρητής*: Ἡ σφαῖρα ἠρεμεῖ, συνεπῶς δὲν ἐπιταχύνεται. Τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι δροῦν ἐπ' αὐτῆς, πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ἑπομένως, ἐκτὸς τῆς ὑπὸ τῆς χειρός, διὰ τοῦ δυναμομέτρου, ἐξασκουμένης δυνάμεως, πρέπει νὰ δρᾷ ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ ἄλλη δύναμις, ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸ τὴν πρώτην, ἡ $\mathrm{F}_\varphi=\mathrm{m}\omega^2\mathrm{r}$.

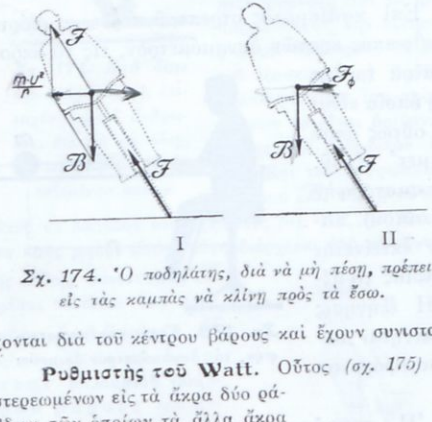
Τὴν δύναμιν ταύτην, ἡ ὁποία εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ὑπάρχει (διότι ὑπὸ οὐδενὸς σώματος ἐξασκεῖται), πρέπει νὰ δεχθῇ ὁ στρεφόμενος παρατηρητής, ἂν θέλῃ νὰ ἐφαρμόσῃ τοὺς συνήθεις νόμους τῆς Μηχανικῆς καὶ διὰ στρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς:

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς καὶ εἰς σύστημα ἀναφορᾶς στρεφόμενον μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα, πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἐπιδρῶσαν ἐπὶ ἑκάστης μάζης m μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν $F_φ = mω^2r$.

Ἡ ὑποθετικὴ αὕτη δύναμις $\mathcal{F}_φ$, ἡ ὁποία δρᾷ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος καὶ ἔχει φορὰν τὴν φορὰν τῆς ἀκτῖνος, ὀνομάζεται ***φυγόκεντρος δύναμις***.

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τρόπου τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, φέρομεν τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ὅταν ποδηλάτης κινῆται ἐπὶ καμπῆς, εἶναι ὑποχρεωμένος, διὰ νὰ μὴ πέσῃ, νὰ κλίνῃ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τροχιᾶς του. Ἡ ἐξήγησις τοῦ φαινομένου διαφέρει ἀναλόγως τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀνάγεται ἡ κίνησις.

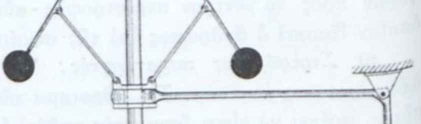
α) *Ἀκίνητος παρατηρητὴς* (εὑρισκόμενος, δηλ., ἐπὶ τοῦ πεζοδρομίου). Διὰ νὰ κινῆται ὁ ποδηλάτης ἐπὶ τῆς τροχιᾶς τῆς καθοριζομένης ὑπὸ τῆς ὁδοῦ χωρὶς νὰ ἀνατρέπεται, πρέπει νὰ ἐκπληροῦνται οἱ ἴδιοι ὅροι οἱ ὁποῖοι καὶ εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ σχήματος 171, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις ἐδῶ εἶναι κεντρομόλος καὶ ἴση πρὸς $υ^2/r$, ἔνθα υ ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου καὶ r ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς. Οἱ ὅροι οὗτοι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκπληρωθοῦν ἐὰν τὸ ποδήλατον δὲν ἐλάμβανε τὴν πρὸς τὰ ἔσω κλίσιν *(σχ. 174, I)*.



Σχ. 174. *Ὁ ποδηλάτης, διὰ νὰ μὴ πέσῃ, πρέπει εἰς τὰς καμπὰς νὰ κλίνῃ πρὸς τὰ ἔσω.*

β) *Ἐπιταχυνόμενος παρατηρητὴς* (εὑρισκόμενος ἐπὶ τοῦ ποδηλάτου). Τὸ ποδήλατον ἰσορροπεῖ, συνεπῶς, αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ καὶ $\mathcal{F}_φ$ *(σχ. 174, II)* διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους καὶ ἔχουν συνισταμένην ἴσην πρὸς μηδέν.

Ρυθμιστὴς τοῦ Watt. Οὗτος *(σχ. 175)* ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἴσων σφαιρῶν, στερεωμένων εἰς τὰ ἄκρα δύο ῥάβδων, τῶν ὁποίων τὰ ἄλλα ἄκρα εἶναι ἀρθρωτῶς συνδεδεμένα μὲ κατακόρυφον ἄξονα.



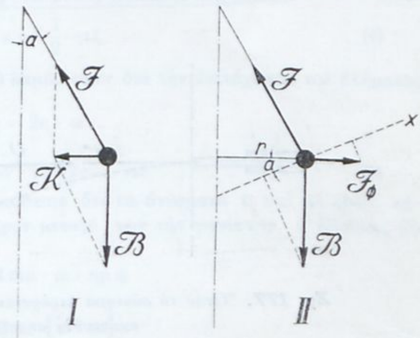
Σχ. 175. *Ρυθμιστὴς τοῦ Watt.*

Ὅταν τὸ σύστημα τεθῇ εἰς περιστροφήν, αἱ σφαῖραι ἀπομακρύνονται ἀπὸ τοῦ ἄξονος τόσον περισσότερον ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης. Κατὰ τὴν κίνησίν των ταύτην, παρασύρουν ἕνα δακτύλιον, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος. Ἡ κίνησις αὕτη, μεταδιδομένη εἰς καταλλήλους μοχλούς, ῥυθμίζει τὴν τροφοδότησιν μηχανῶν (ἀτμομηχανῶν, μηχανῶν ἐσωτερικῆς καύσεως), οὕτως ὥστε ἡ γωνιακή των ταχύτης νὰ παραμένῃ κατὰ προσέγγισιν σταθερά. Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς γωνίας α (σχ. 176, I) καὶ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ δύο τρόπους: Εἴτε ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν $\mathcal{F} = m \cdot \gamma$, εἴτε, παρὰ τὴν περιστροφήν, θεωροῦμεν τὸ σύστημα ἐν ἰσορροπίᾳ, ὁπότε ὅμως εἰσάγομεν ὑποχρεωτικῶς τὴν φυγόκεντρον δύναμιν.

1) Ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ἐπιδροῦν δύο δυνάμεις, τὸ βάρος της $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ τῆς ῥάβδου ἐπὶ τῆς ὁποίας αὕτη ἔχει στερεωθῆ. Ἐπειδὴ ἡ ῥάβδος εἶναι ἀρθρωτῶς συνδεδεμένη μὲ τὸν ἄξονα καὶ αἱ ἐκ τοῦ δακτυλίου προερχόμεναι δυνάμεις εἶναι ἀμελητέαι, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς ῥάβδου. Ἡ συνισταμένη $\mathcal{K}$ τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων θὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ σφαῖρα νὰ κινῆται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος

$$r = l \cdot \eta\mu\, \alpha$$

(ἔνθα l εἶναι τὸ μῆκος τῆς ῥάβδου). Ἡ δύναμις, δηλ., $\mathcal{K}$ θὰ εἶναι ὁριζοντία.



Σχ. 176.

Ἡ ἐξίσωσις $F = m\gamma$, ἐφαρμοζομένη ἐν προκειμένῳ, δίδει

$$K = m\omega^2 \cdot l \cdot \eta\mu\, \alpha$$

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{K}{B}$$

ὁπότε ἡ ἄνω ἐξίσωσις δίδει

$$\sigma\upsilon\nu\, \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot l}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε τιμὴν τοῦ ω ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ τοῦ συν α καὶ μάλιστα ὅτι, αὐξανομένης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, αὐξάνεται ἡ γωνία α, πρέπει, δηλ., αἱ σφαῖραι νὰ διαγράφουν κύκλον μεγαλυτέρας ἀκτῖνος.

2) Ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ἐξασκοῦνται τρεῖς ἰσορροποῦσαι δυνάμεις: τὸ βάρος $\mathcal{B}$, ἡ δύναμις $\mathcal{F}$, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τῆς ῥάβδου, καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις $\mathcal{F}_\varphi$ *(σχ. 176, II)*.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας κατὰ τὸν ἄξονα τῶν x δίδει

$$B \cdot \eta\mu\, \alpha + 0 - F_\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha = 0$$

Ἐπειδὴ ἡ φυγόκεντρος δύναμις F_φ εἶναι ἴση πρὸς $m\omega^2 \cdot r$ καὶ τὸ $r = l \cdot \eta\mu\, \alpha$, λαμβάνομεν

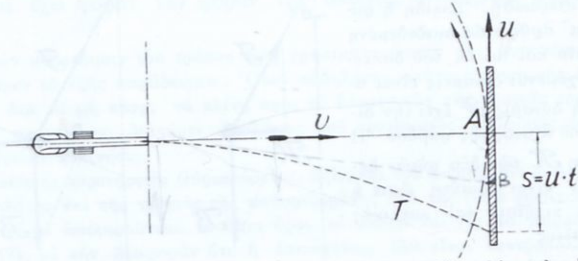
$$B \cdot \eta\mu\, \alpha = m\omega^2 \cdot l \cdot \eta\mu\, \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha$$

ἢ

$$\sigma\upsilon\nu\, \alpha = \frac{g}{\omega^2 \cdot l}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ὅπως καὶ προηγουμένως ἀποτέλεσμα, ὡς, ἄλλωστε, καὶ ἀνεμένετο.

Δύναμις *Coriolis*. Ἐπὶ σωμάτων κινουμένων σχετικῶς πρὸς στρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς ἐμφανίζεται, ἐκτὸς τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, καὶ μία ἄλλη δύναμις, ἡ δύναμις Coriolis. Διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ φαινομένου στερεοῦται ἐπὶ στρεπτῆς τραπέζης *(σχ. 177)* πιστόλιον μὲ τὸ στόμιον τῆς κάννης εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς καὶ ἐστραμμένον ὁριζοντίως πρὸς στόχον στερεωμένον κατακορύφως εἰς τὸ ἄκρον τῆς τραπέζης. Ἂν ὁ στρεφόμενος ἄνθρωπος πυροβολήσῃ, τὸ βλῆμα δ ὲ ν θ ὰ φ θ ά σ ῃ εἰς τὸ ὀπτικῶς σκοπευθὲν σημεῖον Α, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἔφθανεν ἂν ἡ τρά-



Σχ. 177. *Ὅταν τὸ σύστημα στρέφεται τὸ βλῆμα δὲν φθάνει εἰς τὸ σκοπευθὲν σημεῖον Α.*

πεζα δὲν περιεστρέφετο, ἀλλὰ εἰς ἄλλο σημεῖον, δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ αὐτοῦ, ἀναλόγως τῆς φορᾶς περιστροφῆς.

1) *Ἀκίνητος παρατηρητής:* Τ ὸ β λ ῆ μ α κ ι ν ε ῖ τ α ι ε ὐ θ υ γ ρ ά μ μ ω ς κ α ὶ ὁ μ α λ ῶ ς, δ ι ό τ ι ο ὐ δ ε μ ί α δ ύ ν α μ ι ς δ ρ ᾷ ἐ π' α ὐ τ ο ῦ (τὸ βάρος δὲν ἐνδιαφέρει).

Ἂν τὸ βλῆμα δὲν φθάνῃ εἰς τὸ σημεῖον Α, ἀλλὰ συναντᾷ τὸν στόχον εἰς ἄλλο σημεῖον, τοῦτο ὀφείλεται, ἁπλῶς, εἰς τὸ ὅτι, κατὰ τὸν χρόνον ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ βλῆμα τὴν μέχρι τοῦ στόχου ἀπόστασιν, οὗτος ἔχει μετατοπισθῆ.

2) *Στρεφόμενος παρατηρητής:* Τ ὸ β λ ῆ μ α ἐ κ τ ε λ ε ῖ κ α μ π υ λ ό γ ρ α μ μ ο ν τ ρ ο χ ι ά ν, σ υ ν ε π ῶ ς π ρ έ π ε ι ν ὰ ὑ φ ί σ τ α τ α ι μ ί α ν δ ύ ν α μ ι ν κ ά θ ε τ ο ν ἐ π ὶ τ ὴ ν τ α χ ύ τ η τ ά τ ο υ*. Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία καλεῖται ***δύναμις Coriolis***, εὑρίσκεται κατωτέρω ὅτι εἶναι ἴση πρὸς

$$\mathcal{F}_C = 2\,\mathrm{m} \cdot [v \cdot \omega] \tag{1}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ δύναμις Coriolis εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ καθοριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀνυσμάτων v καὶ ω.

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου (1). Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν Coriolis ὑπολογίζομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα τοῦτο ἐμφανίζεται ἔχον ὡς πρὸς τὸ στρεφόμενον σύστημα. Πρὸς τοῦτο κάμνομεν τοὺς ἑξῆς συλλογισμούς: Ὁ χρόνος t, ὅστις ἀπαιτεῖται ἵνα τὸ βλῆμα φθάσῃ εἰς τὸν στόχον, θὰ εἶναι

$$t = \frac{R}{v} \tag{2}$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ στόχου ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ υ ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος. Κατὰ τὸν χρόνον αὐτὸν ὁ στόχος, κινούμενος, λόγῳ τῆς στροφῆς τῆς τραπέζης, μὲ ταχύτητα u, μετακινεῖται κατὰ τὸ διάστημα $s = u \cdot t = \omega \cdot R \cdot t$ (διότι $u = \omega R$

* Ἂν δὲν ὑπῆρχε ἡ δύναμις Coriolis τὸ βλῆμα θὰ ἔφθανε εἰς τὸ σημεῖον Β, ...

εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ στόχου) καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ βλῆμα θὰ συναντήσῃ τὸν στόχον μετατοπισμένον κατὰ τὸ διάστημα

$$s = \frac{\omega R^2}{\upsilon}. \tag{3}$$

Διὰ τὸν στρεφόμενον παρατηρητὴν ἡ μετατόπισις αὐτὴ προῆλθε λόγῳ τῆς ἐξασκουμένης ἐπὶ τοῦ βλήματος δυνάμεως - ἑπομένως θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 \tag{4}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ βλήματος τὴν τιμὴν

$$\gamma = 2\upsilon \cdot \omega$$

καὶ ἑπομένως διὰ τὴν δύναμιν

$$F_c = m \cdot \gamma = 2m\upsilon \cdot \omega. \tag{5}$$

Ὁ τύπος οὗτος εὑρέθη ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ ἀνύσματα $\boldsymbol{\upsilon}$ καὶ $\boldsymbol{\omega}$ εἶναι κάθετα μεταξύ των. Ἐὰν ὅμως σχηματίζουν μεταξύ των τὴν γωνίαν φ, ἡ ἐξίσωσις (5) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$F_c = 2\, m\upsilon \cdot \omega \cdot \eta\mu\, \varphi$$

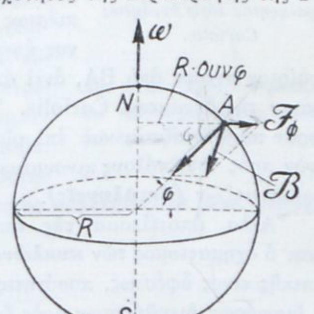
καὶ ἀνυσματικῶς

$$\mathcal{F}_c = 2m \cdot [\boldsymbol{\upsilon} \cdot \boldsymbol{\omega}].$$

§ 105. Ἡ Γῆ ὡς στρεφόμενον σύστημα ἀναφορᾶς. Μέχρι τοῦδε, κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν φαινομένων, παρεδέχθημεν τὰ συστήματα ἀναφορᾶς (τοῖχοι, δάπεδον τῆς αἰθούσης) ὡς ἀκίνητα. Λόγῳ ὅμως τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, τὰ ἄνω συστήματα ἀναφορᾶς στρέφονται καί, διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς νόμους τῆς Μηχανικῆς, πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὴν ὕπαρξιν ὑποθετικῶν δυνάμεων, τῆς φυγοκέντρου καὶ τῆς δυνάμεως Coriolis. Ἐν τούτοις, λόγῳ τῆς μικρᾶς γωνιακῆς ταχύτητος τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ τῆς μικρᾶς διαρκείας τῶν πλείστων πειραμάτων, ἡ ἐπίδρασις τῶν ἀνωτέρω δυνάμεων δὲν προκαλεῖ αἰσθητὴν μεταβολὴν ἐπὶ τῆς ἐκβάσεως τῶν πειραμάτων.

1) **Ἐπίδρασις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.** Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, γεωγραφικοῦ πλάτους φ *(σχ. 178)*, ἠρεμεῖ σῶμα μάζης m. Παρατηρητὴς εὑρισκόμενος ἐπὶ τῆς Γῆς, πρέπει νὰ δεχθῇ ὅτι, ἐκτὸς τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς, δρᾷ ἐπὶ τοῦ σώματος καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις

$$F_\varphi = m\omega^2 \cdot R\, \sigma\upsilon\nu\, \varphi.$$



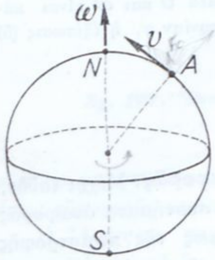
Σχ. 178. Διὰ τοὺς ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητὰς τὸ «βάρος» 𝓑 εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.

Ἡ συνισταμένη, λοιπόν, τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἀποτελεῖ τὸ «πραγματικὸν βάρος» $\mathcal{B}$ τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον δὲν διέρχεται ἀκριβῶς διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς.

Τούτου ἕνεκα καὶ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τῶν ἰσορροπούντων ὑγρῶν δὲν εἶναι ἀκριβῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς.

Ἡ ἀνάγκη τῆς παραδοχῆς τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, ὅταν γίνεται χρῆσις συστήματος ἀναφορᾶς στρεφομένου μετὰ τῆς Γῆς, προκύπτει καὶ ἐκ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἐνῷ πραγματικῶς (δηλ. διὰ παρατηρητὴν εὑρισκόμενον ἔξω τῆς Γῆς) τὸ σῶμα διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν (συνεπῶς ἔχει ἐπιτάχυνσιν), ὁ ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητὴς δέχεται ὅτι τὸ σῶμα ἠρεμεῖ, δηλ. δὲν ἔχει ἐπιτάχυνσιν. Τοῦτο ἐπιτρέπεται νὰ τὸ δεχθῇ ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ θεωρήσῃ ὡς ὑπάρχουσαν μίαν ὑποθετικὴν δύναμιν, ἀκριβῶς τὴν φυγόκεντρον.

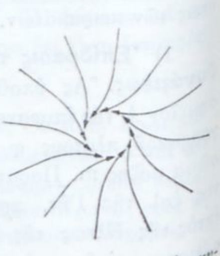
2) **Ἐπίδρασις τῆς δυνάμεως** *Coriolis.* Ἐπὶ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α *(σχ. 179)* ἔστω πυροβόλον βάλλον ὁριζοντίως καὶ ἀκριβῶς πρὸς βορρᾶν. Ἡ δύναμις Coriolis, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰ ἀνύσματα υ καὶ ω, προκαλεῖ ἀπόκλισιν τοῦ βλήματος ἀπὸ τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς καὶ δὴ πρὸς ἀνατολάς. Ἡ τροχιά, παρακολουθουμένη ἐπὶ τοῦ γεωγραφικοῦ χάρτου, δεικνύει στροφὴν πρὸς τὰ δεξιά. Ὁμοία ἀπόκλισις τῆς τροχιᾶς πρὸς τὰ δεξιὰ ἐμφανίζεται εἰς ὅλας τὰς ὁριζοντίας κινήσεις ἐπὶ τοῦ βορείου ἡμισφαιρίου. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ νότιον ἡμισφαίριον ἡ ἀπόκλισις γίνεται πρὸς τ' ἀριστερά.



Σχ. 179. *Τὸ ἀπὸ τοῦ σημείου Α βαλλόμενον βλῆμα ἀποκλίνει τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς διὰ τοὺς ἐπὶ τῆς Γῆς παρατηρητὰς λόγῳ δυνάμεως Coriolis.*

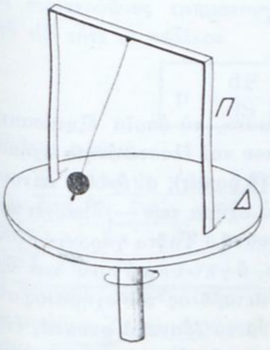
Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐμφανίζεται ἐπίσης καὶ εἰς τοὺς **ἀληγεῖς** ἀνέμους, οἱ ὁποῖοι εἶναι κίνησις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἀπὸ σημεῖα μεγαλυτέρας πιέσεως πρὸς τὰς εἰς τὸν ἰσημερινὸν ἐμφανιζομένας ὑφέσεις. Οἱ ἄνεμοι οὗτοι εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον πνέουν ἀπὸ ΒΑ, ἀντὶ ἀπὸ τοῦ βορρᾶ, ὡς θὰ ἔπνεον χωρὶς τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως Coriolis. Τὸ αὐτὸ φαινόμενον ἀλλὰ κατ' ἀντίθετον φορὰν παρουσιάζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν πρὸς τοὺς πόλους κινουμένων εἰς μεγάλα ὕψη ἀερίων μαζῶν ***(ἀνταληγεῖς)***.

Ἄλλο ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως Coriolis εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῶν ***κυκλώνων***: Ὅταν, λόγῳ τοπικῆς τινος ὑφέσεως, ποσότητες ἀέρος κινοῦνται ἐκ διαφόρων διευθύνσεων πρὸς ἕνα σημεῖον, ἡ δύναμις Coriolis προκαλεῖ κάμψιν τῶν τροχιῶν (σχ. *180)* μὲ ἀποτέλεσμα τὸν σχηματισμὸν κυκλῶνος ὁ ὁποῖος εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, εἰς δὲ τὸ νότιον ὁμόρροπον πρὸς αὐτήν.

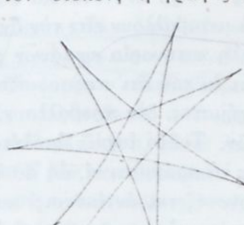

Σχ. 180. *Παραγωγὴ κυκλῶνος εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον.*

Ἡ δύναμις Coriolis ἐμφανίζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «φαινομένης» στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως ἑνὸς ἐκκρεμοῦς: Ἐπὶ αἰωρουμένου ἐκκρεμοῦς οὐδεμία πραγματικὴ δύναμις δρᾷ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως, τὸ ὁποῖον, οὕτω, δὲν πρέπει νὰ μεταβάλλεται. Καὶ πράγματι, τοῦτο θὰ ἐπιστοποίει παρατηρητὴς μὴ συμμετέχων τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς. Ἐπειδὴ ὅμως ὁ παρατηρητὴς ὁ εὑρισκόμενος ἐπὶ τῆς Γῆς κινεῖται μετ᾽ αὐτῆς καὶ ἀνάγει, κατ᾽ ἀνάγκην, τὰ φαινόμενα εἰς σύστημα ἀναφορᾶς συνδεδεμένον μετὰ τῆς Γῆς, θὰ παρατηρῇ στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως. Τοῦτο τὸ ἀποδίδει εἰς τὴν δύναμιν Coriolis. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως στρέφεται βραδέως. Τοῦτο ἀκριβῶς τὸ φαινόμενον ἐχρησιμοποίησεν ὁ Foucault, διὰ ν᾽ ἀποδείξῃ τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς περὶ ἄξονα.

Τὴν φαινομένην στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τῆς ἑξῆς συσκευῆς *(σχ. 181)*. Πλαίσιον Π στερεοῦται ἐπὶ δίσκου Δ δυναμένου νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Ἐκ τοῦ πλαισίου καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ ἄξονος ἔχει ἐξαρτηθῇ ἐκκρεμὲς φέρον γραφίδα εἰς τὸ ἄκρον. Ἐὰν θέσωμεν τὸ ἐκκρεμὲς εἰς ταλάντωσιν καὶ στρέψωμεν βραδέως τὸν δίσκον, ἡ γραφὶς θὰ διαγράψῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ τὰς εἰς τὸ σχῆμα 182 ἀποδιδομένας καμπύλας. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κατὰ μίαν ἁπλῆν αἰώρησιν γραφομένη γραμμὴ δὲν εἶναι εὐθεῖα, ἀλλὰ καμπύλη. Ὁ μετὰ τοῦ δίσκου στρεφόμενος παρατηρητὴς θὰ ἀπέδιδε τὴν καμπύλωσιν τῶν τροχιῶν εἰς τὴν δύναμιν Coriolis. Ἡ δύναμις αὕτη ἀλλάσσει φορὰν μεθ᾽ ἑκάστην ἡμιπερίοδον, διότι ἐνῷ ἡ φορὰ τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ω μένει σταθερά, ἡ φορὰ τῆς ταχύτητος v ἀλλάσσει.



Σχ. 181. *Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τοῦ πειράματος τοῦ Foucault.*



Σχ. 182. *Ἴχνη διαγραφόμενα ἐπὶ τῆς στρεφομένης τραπέζης τοῦ σχήματος 181 ὑπὸ τῆς γραφίδος.*

ΜΕΡΟΣ ΟΓΔΟΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙϚ΄

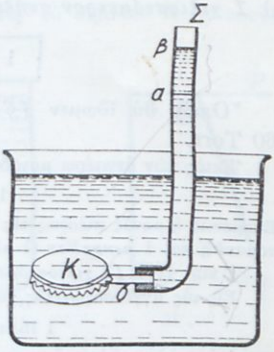
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 106. Εἰσαγωγή. Ἐνῶ τὰ (στερεὰ) σώματα, τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν μέχρι τοῦδε, παρουσιάζουν καὶ ἐλαστικότητα ὄγκου καὶ ἐλαστικότητα σχήματος — δηλ. ἀνθίστανται εἰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις (ἢ ροπάς), αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ μεταβάλλουν εἴτε τὸν ὄγκον αὐτῶν, εἴτε καὶ τὸ σχῆμα των —, ὑπάρχει καὶ ἄλλη κατηγορία σωμάτων τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ***ρευστά.*** Ταῦτα χαρακτηρίζονται ἐκ τοῦ ὅτι παρουσιάζουν ἐλαστικότητα ὄγκου μόνον καὶ ὄχι σχήματος, δὲν προβάλλουν, δηλ., ἀντίστασιν εἰς μεταβολὰς τοῦ σχήματος αὐτῶν. Τοῦτο ἰσχύει ἀπολύτως μόνον διὰ τὰ καλούμενα ***ἰδανικὰ ρευστά,*** ἐνῶ εἰς τὰ πραγματικά, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον τῆς Ὑδροδυναμικῆς, παρουσιάζεται ἀντίστασις κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ σχήματος αὐτῶν, αἰσθητὴ κυρίως εἰς ταχείας μεταβολάς.

Τὰ ρευστὰ διαιροῦμεν εἰς δύο κατηγορίας: Τὰ **ὑγρὰ** τὰ ὁποῖα ἔχουν ὄγκον ὡρισμένον καὶ τὰ **ἀέρια** τὰ ὁποῖα τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον ὄγκον.

Γενικῶς τὰ ὑγρὰ ἔχουν μικρὰν συμπιεστότητα - δύνανται, λοιπόν, συγκρινόμενα πρὸς τὰ ἀέρια, νὰ θεωρηθοῦν πρακτικῶς ἀσυμπίεστα, ἐνῶ, τοὐναντίον, τὰ ἀέρια εἶναι ἐξόχως συμπιεστά. Ἀκριβῶς δὲ ἕνεκα τούτου ἐξετάζομεν χωριστὰ τὰ ὑγρὰ καὶ χωριστὰ τὰ ἀέρια.

§ 107. Πίεσις. Θεωρήσωμεν ἐντὸς ὑγροῦ τινος τμῆμα ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου τὸ ἓν μέρος νὰ εὑρίσκεται εἰς ἐπαφὴν πρὸς τὸ ὑγρὸν καὶ τὸ ἄλλο νὰ εἶναι ἐλεύθερον (τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν ἐὰν τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς ἐπιφανείας ἀποτελῇ μέρος τῆς ἐπιφανείας κλειστοῦ δοχείου βυθισμένου ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ). Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἐξασκεῖται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ μία δύναμις ἡ ὁποία ἔχει φορὰν ἐκ τῶν ἔσω τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὰ ἔξω καὶ τὴν ὕπαρξιν τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τῆς ἑξῆς συσκευῆς: Κυλινδρικὴ κάψα Κ *(σχ. 183)*, τῆς ὁποίας ἡ μία βάσις ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐλαστικὴν μεμβράνην, συνδέεται, διὰ τοῦ σωληνίσκου σ, μὲ τὸν σωλῆνα Σ, φέροντα ὑποδιαιρέσεις. Πληροῦμεν δι᾿ ὕδατος τὴν κάψαν καὶ τὸν σωλῆνα Σ μέχρι τοῦ σημείου α καὶ βυθίζομεν τὴν συσκευὴν ἐντὸς ὑγροῦ. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως τῆς ἐξασκουμένης ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τῆς μεμβράνης, αὕτη παραμορφοῦται καὶ ἀναγκάζει τὸ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑγρὸν νὰ ἀνέλθῃ μέχρι τοῦ σημείου β.



Σχ. 183.

Ἐὰν dF εἶναι ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ dS τότε τὸ πηλίκον

$$\boxed{p = \frac{dF}{dS}}$$

καλεῖται ***πίεσις***.

Ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἕνα ὑγρὸν ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας εὑρίσκεται ὅτι εἶναι κάθετος ἐπ᾿ αὐτὴν καὶ ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας. Τὸ τελευταῖον τοῦτο δυνάμεθα ν᾿ ἀποδείξωμεν καὶ πειραματικῶς διὰ τῆς περιγραφείσης συσκευῆς: Κρατοῦντες ἀκίνητον τὸν σωλῆνα Σ, περιστρέφομεν τὴν κάψαν περὶ τὸν σωληνίσκον σ, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος εἰς τὸν σωλῆνα Σ δὲν μεταβάλλεται.

Ἐφ᾿ ὅσον ἡ πίεσις εἶναι πάντοτε ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἕπεται ὅτι ἡ πίεσις θὰ εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

Διαστάσεις καὶ μονάδες τῆς πιέσεως. Ἡ πίεσις ἔχει διαστάσεις

$$[p] = \frac{[F]}{[S]}.$$

Εἰς τὸ σύστημα C.G.S μονὰς πιέσεως εἶναι ἡ

$$1 \text{ dyn/cm}^2$$

εἰς δὲ τὸ Τεχνικὸν σύστημα τὸ 1 kgr*/m². Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως χρησιμοποιεῖται ἀντ᾿ αὐτῆς ἡ ***τεχνικὴ ἀτμόσφαιρα*** (1 at)

$$\boxed{1 \text{ at} = 1 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2}$$

Ἐκτὸς τῆς τεχνικῆς ἀτμοσφαίρας, εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ ***φυσικὴ ἀτμόσφαιρα*** (1 Atm), ὀλίγον διαφέρουσα τῆς πρώτης. Εἶναι δὲ

$$\boxed{1 \text{ Atm} = 1{,}033 \text{ kgr}^*/\text{cm}^2}$$

Ἡ μονὰς αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν κατὰ μέσον ὅρον ἐξασκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Ἄλλη μονὰς πιέσεως εἶναι τὸ *1 Torr,* τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν προκαλεῖ εἰς τὴν βάσιν της στήλη ὑδραργύρου ὕψους 1 mm, ὡς ἐκ τοῦ ὁποίου καλεῖται καὶ ***1 χιλιοστόμετρον στήλης ὑδραργύρου*** (1 mm Hg). Ἤτοι

$$\boxed{1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg}}$$

Ὅπως θὰ ἴδωμεν *(§ 123)*, μία φυσικὴ ἀτμόσφαιρα ἀντιστοιχεῖ εἰς 760 Torr.

1Atm - 760 Torr

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω μονάδων, χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, καὶ αἱ ἑξῆς:

$$1 \text{ Bar} = 10^6 \text{ dyn/cm}^2.$$

(Ἑπομένως ἡ μονὰς πιέσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. δηλ. ἡ 1 dyn/cm^2, ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ καὶ 1 ***μικρο****Bar* (1 μBar = 1 dyn/cm^2).

1 mm H_2O ***(1 χιλιοστόμετρον στήλης ὕδατος)*** = 1/13,6 Torr = 0,0736 Torr.

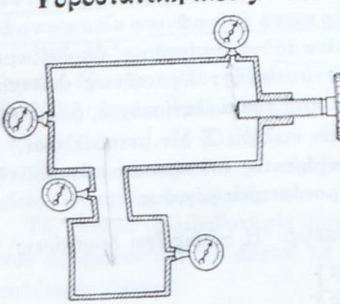
Εἰς τὰς ἀγγλοσαξωνικὰς χώρας ὡς μονὰς πιέσεως χρησιμοποιεῖται ἡ

$$1 \text{ lb/in}^2 = 51{,}7 \text{ Torr} = 0{,}0703 \text{ at}.$$

Διὰ πολὺ μικρὰς πιέσεις χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ μονὰς ***1 μικρὸν*** (1 μ). Εἶναι δὲ

$$1\ \mu = 10^{-3} \text{ Torr}.$$

Ὑδροστατικὴ πίεσις. Ὅταν ἐξετάζεται ἡ κατανομὴ τῆς πιέσεως ἐντὸς ὑγροῦ πρέπει νὰ γίνεται σαφὴς διάκρισις μεταξὺ τῶν ἑξῆς δύο ἄκρων περιπτώσεων:



Σχ. 184. *Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal: Διὰ τοῦ κοχλίου ἐξασκοῦμεν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ πίεσιν ἡ ὁποία μεταδίδεται ἡ αὐτὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα, ὅπως διαπιστοῦμεν ἀπὸ τὴν ἔνδειξιν τῶν μανομέτρων.*

α) Τὸ ὑγρὸν θεωρεῖται ὡς εὑρισκόμενον ἔξω τοῦ πεδίου βαρύτητος. Ἡ πίεσις προέρχεται ἀποκλειστικῶς ἀπὸ ἐξωτερικῶς πιεζόμενον ἔμβολον *(σχ. 184)*.

β) Ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύει ἡ **ἀρχὴ τοῦ *Pascal***, ἡ ὁποία διατυποῦται ὡς ἑξῆς: *Ὅταν ἐπὶ ἠρεμοῦντος ὑγροῦ δὲν ἐπιδρᾷ τὸ πεδίον βαρύτητος, ἡ πίεσις εἶναι καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ σταθερά.*

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ πίεσις p δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ὑγροῦ, ἀλλ' ἐξαρτᾶται, ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἐκ τοῦ βάθους h τοῦ θεωρουμένου σημείου κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\boxed{p = \varepsilon \cdot h + p_{\varepsilon\xi}} \qquad (1)$$

ἔνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ $p_{\varepsilon\xi}$ ἡ ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐξασκουμένη ἐξωτερικὴ πίεσις (εἰς τὸ σχῆμα 185, I π. χ. ἡ ἀτμοσφαιρική).

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἡ συνδέουσα τὰς μεταβλητὰς p καὶ h εἶναι πρώτου

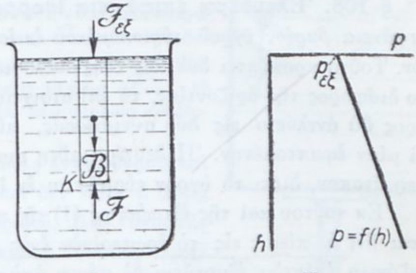
$2 = 1 + \varepsilon h$

$2 - 1 = h$

$h = 1$

βαθμοῦ, ἀποδίδεται, ἄρα, γραφικῶς ὑπὸ εὐθείας γραμμῆς *(σχ. 185, II)*. Τοῦτο, βεβαίως, ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ ε εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ὕψους - τὸ ὑγρόν, δηλ., θεωρεῖται ἀσυμπίεστον.

Ἀπόδειξις : Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πίεσιν εἰς τὸ σημεῖον Κ θεωροῦμεν κατακόρυφον κυλινδρικὴν στήλην ὑγροῦ βάσεως S καὶ ὕψους h (δηλ. ἴσου πρὸς τὸ βάθος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον). Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται αἱ ἑξῆς δυνάμεις : α) τὸ βάρος Β, β) ἡ δύναμις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τὸ ὑγρόν, γ) ἡ δύναμις $F_{\varepsilon\xi}$, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεώς του ἡ ἀτμόσφαιρα, καὶ δ) αἱ (οριζόντιοι) δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς στήλης. Ἀφοῦ θεωροῦμεν τὴν ὑγρὰν αὐτὴν στήλην ἐν ἰσορροπίᾳ, ἔχομεν ὡς συνθήκην ἰσορροπίας κατὰ κατακόρυφον ἄξονα τὴν ἑξῆς :



I II

Σχ. 185. Ἡ πίεσις ἐντὸς βαρέος ὑγροῦ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ βάθους.

$$B - F + F_{\varepsilon\xi} = 0$$

Τὸ βάρος Β εἶναι

$$B = \text{εἰδικὸν βάρος} \cdot \text{ὄγκος} = \varepsilon . S . h$$

Αἱ δυνάμεις F καὶ $F_{\varepsilon\xi}$ εἶναι

$$F = p \cdot S \quad \text{καὶ} \quad F_{\varepsilon\xi} = p_{\varepsilon\xi} \cdot S$$

Ἑπομένως ἔχομεν

$$\varepsilon \cdot S \cdot h - p \cdot S + p_{\varepsilon\xi} \cdot S = 0$$

ἢ

$$p = \varepsilon \cdot h + p_{\varepsilon\xi}$$

Ἐφαρμογαί : 1) Θὰ ἐξετάσωμεν ποία εἶναι ἡ πίεσις εἰς ἕνα σημεῖον τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν συσκευὴν τοῦ σχήματος 184, τὴν ὁποίαν ὅμως τώρα θεωροῦμεν ὡς εὑρισκομένην ἐ ν τ ὸ ς τοῦ πεδίου βαρύτητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ μανόμετρα θὰ δεικνύουν διαφορετικὰς πιέσεις. Εἰς τὸ πείραμα τοῦτο δὲν ὑπάρχει ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καὶ ἑπομένως τὸ μέγεθος $p_{\varepsilon\xi}$ εἶναι ἀκαθόριστον.

Ἐὰν ὁρίσωμεν ὡς $p_{\varepsilon\xi}$ τὴν πίεσιν ἐπὶ τοῦ κοχλίου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πίεσιν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ὑγροῦ ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πιέσεων δύο σημείων θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν αὐτῶν.

2) Ζητεῖται τὸ βάθος ἐντὸς ὕδατος εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πίεσις θὰ εἶναι κατὰ 1 Atm μεγαλυτέρα τῆς ἐξωτερικῆς.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τούτου ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον $p = \varepsilon \cdot h + p_{\varepsilon\xi}$

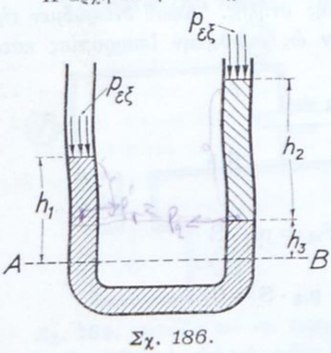
τὸ $p - p_{εξ}$ διὰ τοῦ ἴσου του $1\ Atm = 1033\ gr^*/cm^2$ καὶ τὸ ε διὰ τοῦ ἴσου του $1\ gr^*/cm^3$, ὁπότε διὰ τὸ h προκύπτει ἡ τιμὴ

$$h = 1033\ cm = 10{,}33\ m.$$

§ 108. Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἰσορροπούντων ὑγρῶν. *Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια βαρέος ὑγροῦ εὑρισκομένου ἐν ἰσορροπίᾳ εἶναι ἐπίπεδον ὁριζόντιον.* Τοῦτο προκύπτει διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Ἂν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἦτο διάφορος τῆς ὁριζοντίας, τὸ ἐπὶ στοιχειώδους τμήματος τοῦ ὑγροῦ δρῶν βάρος θὰ ἀνελύετο εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν καὶ μίαν ἐφαπτομένην. Ἡ δευτέρα αὕτη συνιστῶσα θὰ μετεκίνει τὸ ὑγρόν, ὅπερ ἄτοπον, διότι τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἐκ τούτου καὶ τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου συνάγεται ὅτι ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς ὑγροῦ εἶναι σταθερὰ δι᾽ ὅλα τὰ ὁριζόντια ἐπίπεδα, ἐξαρτᾶται δὲ μόνον ἀπὸ τὸ βάθος. Ἐπειδὴ τοῦτο ἰσχύει διὰ δοχεῖον οἱουδήποτε σχήματος, ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως καὶ τὴν ἀπόδειξιν τῆς γνωστῆς ***ἀρχῆς τῶν συγκοινωνούντων δοχείων.***

Ἡ ἀρχὴ αὕτη δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν συγκοινωνούντων δοχείων περιεχόντων μὴ μειγνύμενα ὑγρὰ μὲ διάφορα εἰδικὰ βάρη. Τὰ ὕψη τῶν ὑγρῶν εἰς τὰ συγκοινωνοῦντα δοχεῖα τοῦ σχήματος 186, εὑρίσκονται ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ, ὅτι ἐντὸς ἑ κ ά σ τ ο υ ἐξ αὐτῶν ἡ πίεσις εἶναι σταθερὰ δι᾽ οἱονδήποτε ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἡ πίεσις εἰς δύο σημεῖα τοῦ βαρυτέρου ἐκ τῶν δύο ὑγρῶν εὑρισκόμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AB εἶναι



Σχ. 186.

$$p_A = ε_1 \cdot h_1 + p_{εξ}$$

καὶ $$p_B = ε_1 \cdot h_3 + ε_2 \cdot h_2 + p_{εξ}$$

ἔνθα $ε_1$ καὶ $ε_2$ εἶναι τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν δύο ὑγρῶν.

Ἐπειδὴ εἶναι $p_A = p_B$, λαμβάνομεν

$$ε_1 \cdot h_1 = ε_1 \cdot h_3 + ε_2 \cdot h_2$$

καὶ ἐκ ταύτης

$$\boxed{ε_1 \cdot (h_1 - h_3) = ε_2 \cdot h_2.}$$

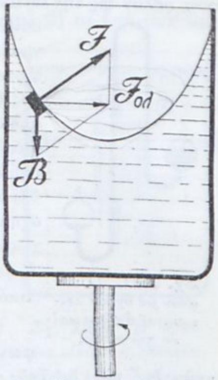
Ἂν τὸ ἐπίπεδον AB ἐκλεγῇ οὕτως ὥστε νὰ διέρχεται διὰ τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας τῶν δύο ὑγρῶν (ὁπότε $h_3 = 0$), τότε ἔχομεν

$$ε_1 \cdot h_1 = ε_2 \cdot h_2.$$

Τὰ ὕψη, δηλ., τῶν δύο ὑγρῶν ὑπὲρ τὴν διαχωριστικήν των ἐπιφάνειαν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν.

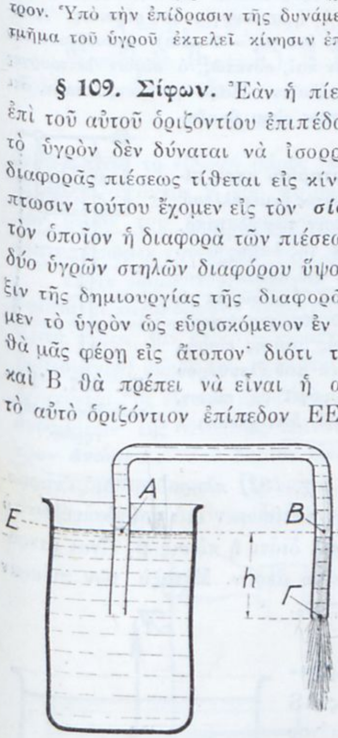
Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ μ ὴ ε ὑ ρ ι σ κ ο μ έ ν ο υ ἐ ν ἰ σ ο ρ ρ ο π ί ᾳ δὲν εἶναι ὁριζοντία, ἀλλὰ λαμβάνει σχῆμα ἐξαρτώμενον ἀπὸ τὴν ἐπιτάχυνσιν τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ὑγρόν. Οὕτω, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ εὑρισκομένου ἐντὸς δοχείου τὸ ὁποῖον ἔχει τεθῇ εἰς περιστροφὴν *(σχ. 187)*, λαμβάνει, ὡς ἀποδεικνύεται, σχῆμα *παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς*, δηλ. ἐπιφανείας τῆς ὁποίας μία τομὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα εἶναι παραβολή.

Ἐπὶ τμήματος ὑγροῦ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: Τὸ βάρος $\mathcal{B}$ καὶ ἡ δύναμις $\mathcal{F}$ ἡ προερχομένη ἐκ τῶν πιέσεων τοῦ περιβάλλοντος ὑγροῦ, ἡ ὁποία, διὰ λόγους συμμετρίας, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἶναι τοιοῦτον ὥστε ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν δύο δυνάμεων νὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ νὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως ταύτης $\mathcal{F}_{ολ}$, τὸ τμῆμα τοῦ ὑγροῦ ἐκτελεῖ κίνησιν ἐπὶ περιφερείας κύκλου.



Σχ. 187. *Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ ἐντὸς περιστρεφομένου δοχείου.*

§ 109. Σίφων. Ἐὰν ἡ πίεσις ἐντὸς ὑγροῦ καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου δὲν εἶναι ἡ αὐτή, τὸ ὑγρὸν δὲν δύναται νὰ ἰσορροπῇ, ἀλλὰ λόγῳ τῆς διαφορᾶς πιέσεως τίθεται εἰς κίνησιν. Τυπικὴν περίπτωσιν τούτου ἔχομεν εἰς τὸν ***σίφωνα*** *(σχ. 188)* εἰς τὸν ὁποῖον ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων δημιουργεῖται ἐκ δύο ὑγρῶν στηλῶν διαφόρου ὕψους. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς δημιουργίας τῆς διαφορᾶς πιέσεως θεωροῦμεν τὸ ὑγρὸν ὡς εὑρισκόμενον ἐν ἰσορροπίᾳ, ὁπότε ὅμως ἡ ὑπόθεσις αὕτη θὰ μᾶς φέρῃ εἰς ἄτοπον· διότι τότε ἡ πίεσις p_A καὶ p_B εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ (ἀφοῦ τὰ σημεῖα ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ΕΕ), ἡ δὲ πίεσις $p_Γ$ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἴση πρὸς $p_B + ε \cdot h$. Θὰ ἔχωμεν, συνεπῶς, $p_Γ = p_B + εh = p_A + εh$, ὅπερ ἄτοπον διότι αἱ πιέσεις p_A καὶ $p_Γ$ εἶναι αἱ αὐταὶ καὶ δὴ ἴσαι πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν $p_{εξ}$. Εἰς τὸ ἄτοπον τοῦτο κατελήξαμεν δεχθέντες ὅτι ἐντὸς τοῦ σίφωνος τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ*.



Σχ. 188. *Σίφων.*

Σχ. 189. *Μηχανικὸν ἀνάλογον διὰ τὴν κατανόησιν τῆς λειτουργίας τοῦ σίφωνος.*

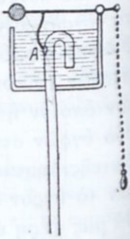
Διὰ τὴν καλυτέραν κατανόησιν τοῦ σίφωνος—ὁ ὁποῖος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λειτουργῶν καὶ λόγῳ τῆς διαφορᾶς τοῦ βάρους τῶν ὑγρῶν στηλῶν εἰς τὰ δύο σκέλη—φέρομεν καὶ τὸ ἑξῆς μηχανικὸν ἀνάλογον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ «σίφωνα δι' ἁλύσσου» *(σχ. 189)*: Ὅταν τὰ δύο ποτήρια, τὰ ὁποῖα περιέχουν μέρος τῆς ὅλης ἁλύσσου, τεθοῦν εἰς διάφορα ὕψη, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἅλυσσος «ρέει» ἐκ τοῦ ὑψηλότερον εὑρισκομένου ποτηρίου εἰς τὸ ἄλλο.

* *Λόγῳ τῆς ἐλλείψεως ἰσορροπίας τὸ ὑγρὸν ρέει διὰ τοῦ σίφωνος, ἡ παροχὴ τοῦ ὁποίου ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6) τῆς § 129, εἰς τὴν ὁποίαν r καὶ l παριστοῦν τὴν ἀκτίνα καὶ τὸ μῆκος τοῦ σίφωνος.*

Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ $p_{εξ}$ τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως δὲν παίζει κανένα ρόλον εἰς τὴν λειτουργίαν τοῦ σίφωνος. Ἑπομένως θὰ πρέπει οὗτος νὰ λειτουργῇ καὶ ἐν τῷ κενῷ, ὅταν, δηλ., τὸ $p_{εξ}$ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Καὶ πράγματι τοῦτο συμβαίνει, ὅπως δεικνύωμεν πειραματικῶς διὰ τοῦ σίφωνος τοῦ σχήματος 190, ὁ ὁποῖος περιέχει ὕδωρ ἀπηλλαγμένον ἀέρος (διὰ βρασμοῦ). Ἡ προφύλαξις αὕτη εἶναι ἀπαραίτητος διότι, ἄλλως, αἱ εἰς μικρὰς πιέσεις ἐντὸς τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ σχηματιζόμεναι φυσαλλίδες τοῦ ἀέρος διακόπτουν τὴν ὑγρὰν φλέβα· ὁπότε διακόπτεται ὁμοίως καὶ ἡ λειτουργία τοῦ σίφωνος. Ἀντιθέτως, μεγάλαι πιέσεις (π. χ. διὰ $p_{εξ} = 1$ Atm) ἐμποδίζουν τὸν σχηματισμὸν τῶν φυσαλλίδων καί, συνεπῶς, ὁ σίφων λειτουργεῖ χωρὶς καμμίαν εἰδικὴν προφύλαξιν. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι ὁ ρόλος τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως εἶναι βοηθητικός.

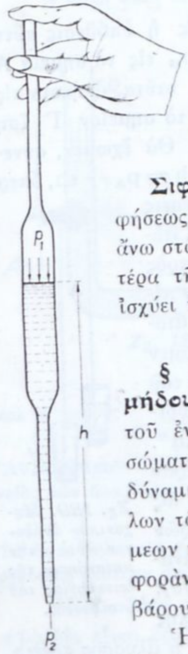
Σχ. 190. Ὁ σίφων μὲ ὑγρὸν λειτουργεῖ ἀκόμη καὶ ἐν τῷ κενῷ.

Ὑδαταποθήκη ἀφοδευτηρίου μετὰ σίφωνος. Τὴν ἀρχὴν τοῦ σίφωνος ἐκμεταλλευόμεθα διὰ τὴν δι' ἑνὸς χειρισμοῦ πλήρη ἐκκένωσιν τῶν ὑδαταποθηκῶν τῶν ἀφοδευτηρίων *(σχ. 191)*. Δι' ἕλξεως τῆς λαβῆς ἀνοίγει ἡ ὀπὴ Α καὶ τὸ ὕδωρ ἀρχίζει ἐκρέον διὰ τοῦ κατακορύφου σωλῆνος, τὸ ὁποῖον, οὕτω, δημιουργεῖ εἰς τὸ κεκαμμένον τμῆμα τοῦ σίφωνος ὑποπίεσιν. Λόγῳ τῆς ὑποπιέσεως ταύτης εἰσρέει εἰς τὸν σωλῆνα ὕδωρ ἐκ τοῦ ἐλευθέρου ἄκρου καὶ τὸ ὅλον λειτουργεῖ ὡς σίφων, ἔστω καὶ ἂν ἐν τῷ μεταξὺ ἔχει κλείσει ἡ ὀπὴ Α.



Σχ. 191. Ὑδαταποθήκη ἀφοδευτηρίου.

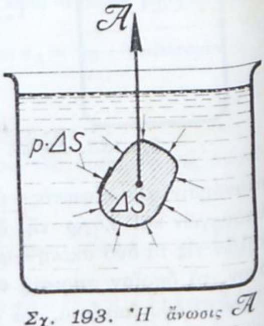
Σιφώνιον. Τὸ ***σιφώνιον*** *(σχ. 192)* πληροῦται δι' ἀναρροφήσεως διὰ τοῦ στόματος. Ἂν κλείσωμεν διὰ τοῦ δακτύλου τὸ ἄνω στόμιον, τὸ ὑγρὸν δὲν ἐκρέει διότι ἡ πίεσις p_1 εἶναι μικροτέρα τῆς πιέσεως p_2 εἰς τὸ κάτω ἄκρον. Μεταξὺ τῶν πιέσεων ἰσχύει ἡ σχέσις $p_1 + ε \cdot h = p_2$.



Σχ. 192. Σιφώνιον.

§ 110. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ΔS τοῦ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βυθισμένου σώματος *(σχ. 193)* ἐξασκεῖται ἡ δύναμις p · ΔS. Ἡ συνισταμένη ὅλων τῶν οὕτω προκυπτουσῶν δυνάμεων καλεῖται ***ἄνωσις*** $\mathcal{A}$ καὶ ἔχει φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τοῦ βάρους.



Σχ. 193. Ἡ ἄνωσις $\mathcal{A}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων p · ΔS.

Ἡ ἄνωσις ὑπολογίζεται εὐκόλως διὰ τὴν περίπτωσιν σώματος μὲ πρισματικὸν σχῆμα τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἔστω S *(σχ. 194)*. Ἐπὶ τοῦ πρίσματος ἐξασκοῦνται λόγῳ τῶν πιέσεων, αἱ ἑξῆς δυνάμεις: α) αἱ δυνάμεις αἱ δρῶσαι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀλληλοαναιροῦνται, καὶ β) αἱ ἐπὶ τῶν δύο βάσεων δυνάμεις F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι εἶναι

$$F_1 = p_1 \cdot S = \varepsilon \cdot h_1 \cdot S$$

καὶ

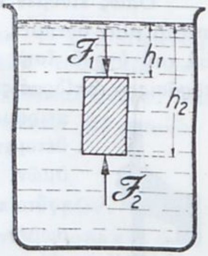
$$F_2 = p_2 \cdot S = \varepsilon \cdot h_2 \cdot S.$$

Ἡ συνισταμένη αὐτῶν, δηλ. ἡ ἄνωσις, εἶναι

$$A = F_2 - F_1 = \varepsilon \cdot (h_2 - h_1) \cdot S.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(h_2 - h_1) \cdot S$ εἶναι ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος, ἕπεται ὅτι

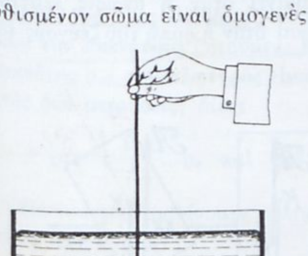
$$A = \varepsilon \cdot V$$



Σχ. 194. Ἡ ἄνωσις εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$.

ἔνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδή, ἐξ ἄλλου, ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Ἀρχιμήδους ὡς ἑξῆς:

«*Πᾶν σῶμα, εὑρισκόμενον ἐντὸς βαρέος ὑγροῦ, ὑφίσταται κατακόρυφον ἄνωσιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ*». Κατὰ ταῦτα, ἐὰν περιστρέψωμεν ὁπωσδήποτε τὸ (ἐντελῶς ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βυθισμένον) σῶμα τοῦ σχήματος, ἡ ἄνωσις δὲν θὰ μεταβληθῇ. Ὅπως ἀποδεικνύεται, οἱ εἰς τὰς διαφόρους αὐτὰς θέσεις ἀντιστοιχοῦντες φορεῖς τῶν ἀνυσμάτων τῆς ἀνώσεως τέμνονται πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον—**τὸ κέντρον ἀνώσεως**—, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ ὑπὸ τοῦ σώματος ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Προφανὲς ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βυθισμένον σῶμα εἶναι ὁμογενὲς τὸ κέντρον ἀνώσεως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος.



Σχ. 195. Ὅταν ὁ κύλινδρος ἐφάπτεται ἐντελῶς τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, δὲν ὑφίσταται ἄνωσιν.

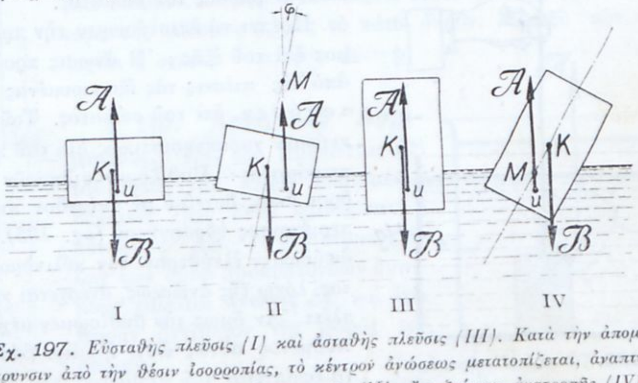
Πρέπει νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας ἐπὶ τοῦ ἑξῆς: Ἡ ἄνωσις προέρχεται ἀπὸ τὰς πιέσεις τὰς ἐξασκουμένας πανταχόθεν ἐπὶ τοῦ σώματος. Τοῦτο δεικνύομεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ κάτωθι πειράματος: Βυθίζομεν σιδηροῦν κύλινδρον ἐντὸς δοχείου μὲ ἐπίπεδον πυθμένα περιέχοντος ὑδράργυρον (σχ. 195). Ἐὰν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τὸν κύλινδρον, οὗτος, λόγῳ τῆς ἀνώσεως, ἀνέρχεται καὶ ἐπιπλέει. Ἂν ὅμως τὸν βυθίσωμεν μέχρι τοῦ πυθμένος οὕτως ὥστε ἡ κάτω βάσις του νὰ ἐφάπτεται τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, χωρὶς τὴν παρεμβολὴν ὑδραργύρου, καὶ τὸν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οὗτος δὲν ἀνέρχεται. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ἑξῆς: Ἐπειδὴ μεταξὺ τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου καὶ τοῦ κυλίνδρου δὲν ὑπάρχει ὑδράργυρος, ὄχι μόνον δὲν ὑπάρχει ἄνωσις ἀλλὰ ἡ ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεώς του ἐξασκουμένη πίεσις τὸν ὠθεῖ πρὸς τὰ κάτω.

Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ ἀνωτέρω, σῶμα βυθιζόμενον ἐντὸς ὑγροῦ ὑφίσταται μίαν δύναμιν, τὴν ἄνωσιν· θὰ πρέπει ὅμως καὶ τὸ σῶμα νὰ ἐξασκῇ ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα «δρᾶσις = ἀντίδρασις». Τοῦτο δεικνύομεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλάστιγγος ἑνὸς ζυγοῦ *(σχ. 196)* θέτομεν δοχεῖον πλῆρες ὑγροῦ καὶ τὸ ἰσορροποῦμεν διὰ σταθμῶν. Ἂν τώρα βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ ἕνα σῶμα χωρὶς τοῦτο νὰ ἐφάπτεται τοῦ πυθμένος τοῦ δοχείου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ καταστρέφεται καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ σώματος.

Σχ. 196. *Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἀντιδράσεως εἰς τὴν ἄνωσιν.*

§ 111. Πλεῦσις.

Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος καὶ ἡ ἐπ᾽ αὐτοῦ δρῶσα ἄνωσις ἔχουν, ὡς εἴδομεν, ἀντιθέτους φοράς. Καὶ ἂν μὲν τὸ βάρος εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα βυθίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἄνωσιν, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ ἀδιαφόρως ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Ὅταν δέ, τέλος, τὸ βάρος εἶναι μικρότερον τῆς ἀνώσεως, τὸ σῶμα, ἀνερχόμενον, ἐξέρχεται ἐν μέρει ἐκ τοῦ ὑγροῦ, ἰσορροπία δὲ θὰ ἐπέλθῃ ὅταν αἱ ἐπὶ τοῦ σώματος δρῶσαι δυνάμεις ἰσορροπήσουν **(πλεῦσις)**. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ ἄνωσις, ἐλαττουμένη, γίνῃ ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ ὅταν ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους τῶν



Σχ. 197. *Εὐσταθὴς πλεῦσις (I) καὶ ἀσταθὴς πλεῦσις (III). Κατὰ τὴν ἀπομάκρυνσιν ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας, τὸ κέντρον ἀνώσεως μετατοπίζεται, ἀναπτυσσομένου, οὕτω, εἴτε ζεύγους ἐπαναφορᾶς (II), εἴτε ζεύγους ἀνατροπῆς (IV).*

δύο αὐτῶν δυνάμεων γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν. Πρὸς τοῦτο πρέπει αἱ δύο δυνάμεις νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου.

Ἂν κλίνωμεν ἐπιπλέον σῶμα κατὰ γωνίαν φ *(σχ. 197)* ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, τότε τὸ κέντρον ἀνώσεως κ μετατοπίζεται, διότι πρέπει τοῦτο νὰ εὑρίσκεται πάντοτε εἰς τὸ κέντρον βάρους τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ. Ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ δύο δυνάμεων ῥοπὴ ἢ ἐπαναφέρει τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν ***(εὐσταθὴς πλεῦσις I, II)*** ἢ τὸ ἀνατρέπει ***(ἀσταθὴς πλεῦσις III, IV)***.

Ἡ εὐστάθεια καὶ ἡ ἀστάθεια τῆς πλεύσεως δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ καὶ ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ ***μετακέντρου M***, δηλ. τοῦ σημείου τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς ἀνώσεως καὶ τῆς ὑπὸ κλίσιν προηγουμένης κατακορύφου. Ἡ ἰσορροπία εἶναι εὐσταθής, ὅταν τὸ κέντρον βάρους εἶναι κάτω τοῦ μετακέντρου, ἄλλως εἶναι ἀσταθής.

§ 112. Μέτρησις τῆς πυκνότητος στερεῶν καὶ ὑγρῶν.

α) **Μέθοδος τῆς ἀνώσεως.** Σῶμα στερεόν, ἐμφανίζει, λόγῳ τῆς ἀνώσεως, φαινομένην ἐλάττωσιν τοῦ βάρους του, ὅταν βυθισθῇ ἐντὸς ὑγροῦ τινος, π. χ. ἀπεσταγμένου ὕδατος. Ἂν, λοιπόν, μετρήσωμεν τὸ βάρος B καὶ τὸ φαινόμενον βάρος B—A, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἄνωσιν A καί, ἐκεῖθεν, τὴν πυκνότητα ρ τοῦ σώματος: Ἡ ἄνωσις εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Ἤτοι:

$$A = \varepsilon_0 \cdot V = \rho_0 \cdot g\, V$$

ἔνθα ε_0, ρ_0 εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος καὶ V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος. Ἡ ζητουμένη πυκνότης ρ_x τοῦ σώματος θὰ εἶναι

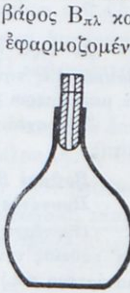
$$\rho_x = \frac{m}{V} = \frac{B/g}{A/\rho_0 \cdot g} = \frac{B}{A} \cdot \rho_0 \qquad (1)$$

Ἀνάλογος μέθοδος ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς πυκνότητος ἑνὸς ὑγροῦ: Μετροῦμεν τὴν ἄνωσιν A_0 καὶ A_x τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἕνα στερεὸν ὁ ***(πλωτήρ)*** ἀφ' ἑνὸς εἰς ὕδωρ ἀπεσταγμένον καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὸ ὑγρὸν τοῦ ὁποίου τὴν πυκνότητα ζητοῦμεν. Εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ βάρος $B_{\pi\lambda}$ καὶ ἡ πυκνότης $\rho_{\pi\lambda}$ τοῦ πλωτῆρος εἶναι σταθερά. Ἡ ἐξίσωσις (1), ἐφαρμοζομένη εἰς τὰς δύο μετρήσεις, δίδει

$$\rho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_0} \cdot \rho_0 \quad \text{καὶ} \quad \rho_{\pi\lambda} = \frac{B_{\pi\lambda}}{A_x} \cdot \rho_x$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν τελικῶς τὴν ζητουμένην πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ

$$\rho_x = \frac{A_x}{A_0} \cdot \rho_0$$



Σχ. 198. *Ἡ λήκυθος πληροῦται πάντοτε μέχρι τῆς χαραγῆς.*

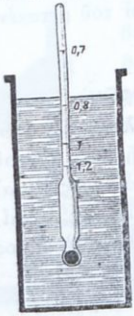
β) **Μέθοδος τῆς ληκύθου.** Πληροῦμεν τὴν *λήκυθον (σχ. 198)* πρῶτον δι' ἀπεσταγμένου ὕδατος καὶ κατόπιν διὰ τοῦ ὑγροῦ τοῦ ὁποίου τὴν πυκνότητα ζητοῦμεν. Διὰ ζυγίσεως, εὑρίσκομεν τὸ βάρος B_0 τοῦ ὕδατος καὶ τὸ βάρος B_x τοῦ ὑγροῦ. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος V καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι ὁ αὐτός, ἔχομεν $B_0 = \rho_0 \cdot g \cdot V$ καὶ $B_x = \rho_x \cdot g \cdot V$.

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην πυκνότητα

$$\varrho_x = \frac{B_x}{B_0} \cdot \varrho_0$$

Διὰ τῆς μεθόδου τῆς ληκύθου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν πυκνότητα στερεῶν σωμάτων.

γ) **Πυκνόμετρα - ἀραιόμετρα.** Διὰ τὴν ταχεῖαν εὕρεσιν τῆς πυκνότητος ὑγρῶν χρησιμοποιοῦνται ὄργανα τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***πυκνόμετρα*** ἢ ***ἀραιόμετρα***, ἀναλόγως τοῦ ἂν πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ μετρήσεις ὑγρῶν τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος. Ταῦτα εἶναι πλωτῆρες καταλλήλου σχήματος (*σχ. 199*), φέροντες εἰς τὸ κάτω μέρος ἕρμα. Ἡ λειτουργία των στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας τὰ σώματα ἔχουν βυθισθῇ ἐντὸς τῶν ὑγρῶν ἐπὶ τοσοῦτον ὀλιγώτερον ὅσον πυκνότερον εἶναι τὸ ὑγρόν.



Σχ. 199.

Πρακτικαὶ κλίμακες. Τὰ περιγραφέντα πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα ἔχουν βαθμολογηθῆ, οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν πυκνότητα τῶν ὑγρῶν. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως χρησιμοποιοῦνται, πολλάκις (π.χ. διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πυκνότητος τοῦ ἠλεκτρολύτου τῶν συσσωρευτῶν κ.λ.), πυκνόμετρα καὶ ἀραιόμετρα παρέχοντα τὴν πυκνότητα εἰς αὐθαιρέτους μονάδας.

Οὕτω, δι' ὑγρὰ π υ κ ν ό τ ε ρ α τ ο ῦ ὕ δ α τ ο ς χρησιμοποιοῦνται οἱ ***πυκνοὶ βαθμοὶ*** *Baumé* (°Bé). Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην τὸ μηδὲν (0°Bé) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πυκνότητα 1 gr/cm³, οἱ δὲ ὑπόλοιποι ἄνω τοῦ μηδενὸς βαθμοὶ εἰς πυκνότητας μεγαλυτέρας τοῦ 1 gr/cm³.

Μεταξὺ τῆς πυκνότητος ϱ καὶ τῶν πυκνῶν βαθμῶν Baumé b ἰσχύει ὁ τύπος

$$\varrho = \frac{146{,}8}{146{,}8 - b}.$$

Δι' ὑγρὰ ἀ ρ α ι ό τ ε ρ α τ ο ῦ ὕ δ α τ ο ς χρησιμοποιοῦνται οἱ ***ἀραιοὶ βαθμοὶ*** *Baumé*. Εἰς τὴν κλίμακα ταύτην 10°Bé ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πυκνότητα 1 gr/cm³, οἱ δὲ μεγαλύτεροι τοῦ 10 βαθμοὶ εἰς πυκνότητας μικροτέρας τοῦ 1 gr/cm³.

Τὴν σχέσιν μεταξὺ ἀραιῶν βαθμῶν Baumé καὶ πυκνότητος παρέχει ὁ ἑπόμενος πίναξ:

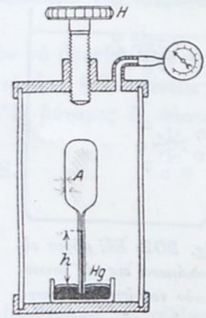
Βαθμοὶ *Baumé :*	10,0	17,4	25,6	34,7	45,0	56,7	70,0	85,4
Πυκνότης εἰς *gr/cm³ :*	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65

Πυκνόμετρα δι' εἰδικὰς μετρήσεις ἔχουν βαθμολογηθῆ οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν ἀπ' εὐθείας τὴν περιεκτικότητα ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον συστατικὸν (π. χ. οἰνοπνευματόμετρα κ.λ.).

§ 113. Συμπιεστότης τῶν ὑγρῶν. Τὰ ὑγρά, συγκρινόμενα πρὸς τὰ ἀέρια, ἔχουν, ὡς εἴδομεν, πολὺ μικρὰν συμπιεστότητα, ἀπαιτοῦνται, δηλ., πολὺ μεγάλαι πιέσεις διὰ νὰ προκληθῇ αἰσθητὴ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου των. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν πειραματικῶς διὰ τοῦ ***πιεσιμέτρου***, συσκευῆς τὴν ὁποίαν παριστᾷ τὸ σχῆμα 200.

Oersted

῾Ο παχύτοιχος ὑάλινος κύλινδρος, καθὼς καὶ τὸ ὑάλινον δοχεῖον Α πληροῦνται δι᾽ ὕδατος. Διὰ τοῦ κοχλίου Η συμπιέζεται τὸ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ὕδωρ. ῾Ο ὄγκος τοῦ δοχείου Α δὲν μεταβάλλεται, καθόσον ἐξωτερικῶς καὶ ἐσωτερικῶς ὑφίσταται τὴν αὐτὴν πίεσιν. ῾Η ἐλάττωσις τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ δοχείου Α ὕδατος δεικνύεται ἀπὸ τὴν ἀνύψωσιν τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου κατὰ h.



Σχ. 200. Πιεσίμετρον.

§ 114. Μεσομοριακαὶ δυνάμεις - Συνοχὴ τῶν ὑγρῶν. Μεταξὺ τῶν μορίων ἑνὸς ὑγροῦ ἐξασκοῦνται δυνάμεις καλούμεναι ***μεσομοριακαὶ δυνάμεις***. Αἱ δυνάμεις αὗται, ὡς ἀπεδείχθη, δὲν εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως, ὅπως αἱ δυνάμεις τῆς παγκοσμίας ἕλξεως, οὔτε μεταβάλλονται κατὰ τὸν ἀντίστροφον λόγον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως, ἀλλ᾽ εἶναι ἠλεκτρικῆς φύσεως, ὀφειλόμεναι εἰς τὰ ἠλεκτρικὰ πεδία τὰ ὁποῖα περιβάλλουν τὰ ἄτομα.

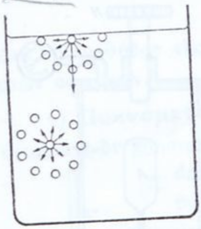
῞Ενεκα τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων μεταξὺ δύο ἐν ἐπαφῇ μαζῶν ὑγροῦ ἐμφανίζονται δυνάμεις συγκρατοῦσαι τὸ ὑγρὸν ὡς σύνολον. Συνεπῶς εἶναι δυνατὸν τὰ ὑγρὰ ν᾽ ἀντέχουν εἰς ἑλκυσμόν. Αὐταὶ ἀκριβῶς αἱ δυνάμεις εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι ἐπιτρέπουν τὴν λειτουργίαν τοῦ σίφωνος ἐν κενῷ *(σχ. 190)* χωρὶς ἡ ὑδατίνη φλὲψ νὰ θραύεται.

Σχ. 201. ᾿Από τὸ δοχεῖον Β ἔχει ἀφαιρεθῆ ὁ ἀήρ. Λόγῳ τῆς συνοχῆς, ἡ ὑγρὰ στήλη, προσφυομένη εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τοῦ σωλῆνος, κρέμεται ἐξ αὐτοῦ.

Μὲ τὰς αὐτὰς δυνάμεις ἐξηγεῖται καὶ τὸ φαινόμενον κατὰ τὸ ὁποῖον ὑδατίνη στήλη — ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἔχουν ἀφαιρεθῆ διὰ βρασμοῦ αἱ φυσαλλίδες τοῦ διαλελυμένου ἀέρος — προσφύεται (λόγῳ τῶν μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ ὕδατος καὶ τῶν μορίων τῆς ὑάλου ἐξασκουμένων δυνάμεων) εἰς τὸ ἄνω ἄκρον ὑαλίνου σωλῆνος *(σχ. 201)* καὶ κρέμεται ἐξ αὐτοῦ, παρὰ τὸ μεγάλον, σχετικῶς, μῆκος της.

Τὸ «ὅριον θραύσεως» τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ ἐπιμελῆ πειράματα εὑρίσκεται ἐκπληκτικῶς μεγάλον (π. χ. διὰ τὸ ὕδωρ 34 kgr*/cm²). ῎Αλλα ἀποτελέσματα τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων εἶναι ἡ ἐνδοπίεσις, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις, τὰ τριχοειδικὰ φαινόμενα κ.λ., μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολούμεθα κατωτέρω.

§ 115. ᾿Ενδοπίεσις. Αἱ μεσομοριακαὶ δυνάμεις αἱ ἐξασκούμεναι ἐπί τινος μορίου εὑρισκομένου εἰς τὸ ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν ἑνὸς ὑγροῦ *(σχ. 202)* ἀλληλοαναιροῦνται καί, ἑπομένως, ἡ συνισταμένη των θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. ᾿Αντιθέτως, μόριον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν στιβάδα, ἕλκεται μονοπλεύρως καί, ὡς ἐκ τούτου, παρουσιάζεται μία συνισταμένη δύναμις μὲ φορὰν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τῶν ἐξασκουμένων ἐπὶ τῶν μορίων τῶν εὑρισκομένων ἐντὸς ἐπιπέδου ἐπιφανειακῆς στιβάδος μὲ ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὴν μονάδα καλεῖται ***ἐνδοπίεσις***.

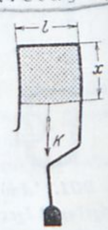


Σχ. 202. *Εἰς μόρια εὑρισκόμενα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ, ἡ συνισταμένη τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.*

Τὴν ἐνδοπίεσιν εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἀμέσου μετρήσεως διότι, οἱαδήποτε ὄργανα καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν, θὰ μεσολαβῇ πάντοτε μεταξὺ τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ ὀργάνου διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια. Ἐμμέσως ὅμως, π.χ. διὰ πειραματικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν σταθερῶν τῆς ἐξισώσεως Van der Waals, εὑρίσκεται ὅτι ἡ ἐνδοπίεσις εἶναι τῆς τάξεως μεγέθους πολλῶν χιλιάδων ἀτμοσφαιρῶν.

§ 116. Ἐπιφανειακὴ τάσις. Διὰ νὰ ἐξέλθῃ ἕνα μόριον ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ καὶ νὰ καταλάβῃ θέσιν ἐντὸς τῆς ἐπιφανειακῆς στιβάδος, πρέπει νὰ καταναλωθῇ ἔργον πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία τὸ ἕλκει πρὸς τὸ ἐσωτερικόν. Τούτου ἕνεκα κάθε μόριον, εὑρισκόμενον ἐντὸς τῆς ἐπιφανειακῆς στιβάδος, ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν. Ἑπομένως ἡ εἰς τὰς μεσομοριακὰς δυνάμεις ὀφειλομένη δυναμικὴ ἐνέργεια μιᾶς ποσότητος τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εὑρισκομένων μορίων, δηλ. ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας.

Εἰς τὴν κατάστασιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια εἶναι ἐλαχίστη, τὸ ἐμβαδόν, λοιπόν, τῆς ἐπιφανείας ἔχει τὴν μικροτέραν δυνατὴν τιμήν. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐξηγεῖ διατὶ σταγὼν ὑγροῦ, αἰωρουμένη ἐντὸς ἄλλου ὑγροῦ τῆς αὐτῆς πυκνότητος, λαμβάνει σφαιρικὸν σχῆμα, ἀφοῦ, ὡς γνωστόν, τὸ σχῆμα εἰς τὸ ὁποῖον, ὑπὸ δεδομένον ὄγκον, ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐλαχίστη ἐπιφάνεια εἶναι τὸ σχῆμα τῆς σφαίρας. Κατὰ προσέγγισιν σφαιρικὸν σχῆμα λαμβάνουν καὶ σταγόνες ὑδραργύρου ἠρεμοῦσαι ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας.



Σχ. 203. *Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κινητῆς πλευρᾶς μίαν δύναμιν ἡ ὁποία ἀντισταθμίζεται διὰ τῶν σταθμῶν Κ.*

Τὰ φαινόμενα ταῦτα δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν ποσοτικῶς διὰ τῆς ἑξῆς διατάξεως (σχ. 203). Ἐπὶ πλαισίου, τοῦ ὁποίου ἡ τετάρτη πλευρὰ εἶναι κινητή, σχηματίζομεν ὑμένιον ἀπὸ διάλυσιν σάπωνος. Ἂν ἡ κινητὴ πλευρὰ εἶναι ἐλαφρά, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη μετακινεῖται κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑμενίου νὰ ἐλαττοῦται. Ἡ δύναμις, μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται ἡ κινητὴ πλευρά, εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῇ ἐκ τοῦ βάρους Κ τῶν σταθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται πρὸς ἀντιστάθμισιν αὐτῆς.

Ἡ δύναμις Κ εὑρίσκεται ἀνάλογος πρὸς τὸ μῆκος l τῆς πλευρᾶς. Ἤτοι

$$K = 2\,\alpha \cdot l.$$

Ὁ συντελεστὴς α καλεῖται ***συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως*** καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν* τοῦ ὑγροῦ καὶ τὴν θερμοκρασίαν. (Ὁ παράγων 2 τίθεται διότι τὸ ὑμένιον ἔχει δύο ἐπιφανείας).

Ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον: Ἂν ἡ κινητὴ πλευρὰ μετακινηθῇ κατὰ dx, ἡ ἐπιφάνεια S τοῦ ὑγροῦ θὰ αὐξηθῇ ὁλικῶς κατὰ $dS = 2l \cdot dx$. Ἡ δύναμις K θὰ παραγάγῃ ἔργον

$$dA = K \cdot dx = 2\alpha \cdot l \cdot dx = \alpha \cdot dS.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

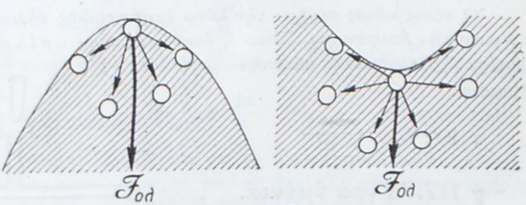
$$\boxed{\alpha = \frac{dA}{dS}}$$

ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἔργου τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ διὰ τῆς ἀντιστοίχου αὐξήσεως τῆς ἐπιφανείας.

Διαστάσεις: $[\alpha] = \frac{[F]}{[l]}$.

Μονάδες: C.G.S: 1 dyn/cm = 1 erg/cm².

Ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἰς καμπύλας ἐπιφανείας. Ἡ ἐνδοπίεσις ὡρίσθη εἰς τὰ ἀνωτέρω, ὡς ἡ πίεσις ἡ προερχομένη ἐκ τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐπίπεδος, ὡς ἡ τοῦ σχήματος 202. Ὅταν ὅμως ἡ ἐπιφάνεια εἶναι καμπύλη, ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν ἐπὶ ἑνὸς μορίου ἐξασκουμένων δυνάμεων θὰ εἶναι διάφορος τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα, ἀναλόγως τοῦ ἂν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κυρτὴ ἢ κοίλη *(σχ. 204)*. Ὥστε ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἐπιφανείας καὶ θὰ εἶναι ἄλλοτε μεγαλυτέρα καὶ ἄλλοτε μικροτέρα τῆς ἐνδοπιέσεως. Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἐνδοπίεσιν, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παρατηρηθῇ ἀμέσως, αἱ λόγῳ τοῦ σχήματος τῆς ἐπιφανείας προκαλούμεναι διαφοραὶ τῆς πιέσεως ἐπιδέχονται ἄμεσον πειραματικὴν παρατήρησιν.

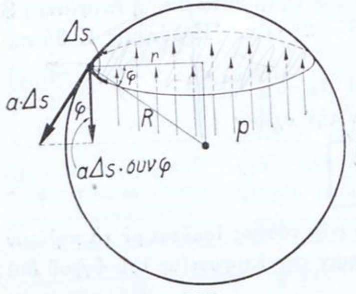


***Σχ. 204.** Ἡ συνισταμένη $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων τῶν ἐξασκουμένων ἐπὶ μορίου τῆς ἐπιφανειακῆς στιβάδος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἐπιφανείας.*

* Ἐλάχισται προσμίξεις δύνανται νὰ μεταβάλλουν πολὺ τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως.

Ὅπως θὰ συναγάγωμεν ἐξ ὑπολογισμοῦ κατωτέρω, ἡ εἰς τὸ ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν σφαιρικῆς σταγόνος λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως προκαλουμένη πίεσις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐνδοπιέσεως. Ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σταγόνος.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐντὸς σφαιρικῆς σταγόνος πιέσεως, θεωροῦμεν τμῆμα αὐτῆς *(σχ. 205)* καὶ ἐκφράζομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας. Ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου τῆς σταγόνος ἐξασκοῦνται ἀφ' ἑνὸς μὲν δυνάμεις προερχόμεναι ἐκ τῆς πιέσεως p εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σταγόνος, ἀφ' ἑτέρου δὲ δυνάμεις προερχόμεναι ἀπὸ τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν. Ἡ πίεσις p ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος r προκαλεῖ τὴν δύναμιν $p \cdot \pi r^2$. Ἐπὶ τμήματός τινος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μήκους Δs ἐξασκεῖται, λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, δύναμις $\alpha \cdot \Delta s$, τῆς ὁποίας ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα εἶναι ἴση πρὸς $\alpha \cdot \Delta s \cdot$ συν φ, προκαλουμένης, οὕτω, συνολικῶς τῆς δυνάμεως $\alpha \cdot 2\pi r \cdot$ συν φ. Ἡ



Σχ. 205.

ἐξίσωσις τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων δίδει $p \cdot \pi r^2 = \alpha \cdot 2\pi r \cdot$ συν φ.

Ἐπειδὴ συν φ $= r/R$, λαμβάνομεν διὰ τὴν πίεσιν

$$p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Ἡ πίεσις αὕτη λαμβάνει σημαντικὰς τιμάς, ὅταν ἡ ἀκτὶς γίνῃ πολὺ μικρά. Οὕτω, ἡ ἐπιφάνεια μικροσκοπικοῦ σταγονιδίου ὑδραργύρου ἀκτῖνος R = 0,1 μ ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ πίεσιν 100 at ! Ἡ πραγματικὴ τιμὴ τῆς πιέσεως εἶναι, βεβαίως, μεγαλυτέρα τῆς ὡς ἄνω τιμῆς κατὰ τὴν ἐνδοπίεσιν $p_{\epsilon\nu\delta}$, εἶναι, δηλ., ἴση πρὸς

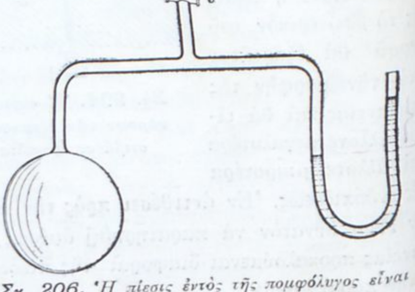
$$p = p_{\epsilon\nu\delta} + \frac{2\alpha}{R}.$$

Ὁ τύπος οὗτος παρέχει τὴν λόγῳ ἐπιφανειακῆς τάσεως πίεσιν εἰς τὴν περίπτωσιν κ υ ρ τ ῆ ς ἐπιφανείας. Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κ ο ί λ η, ἡ πίεσις θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἐνδοπιέσεως κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$p = p_{\epsilon\nu\delta} - \frac{2\alpha}{R}.$$

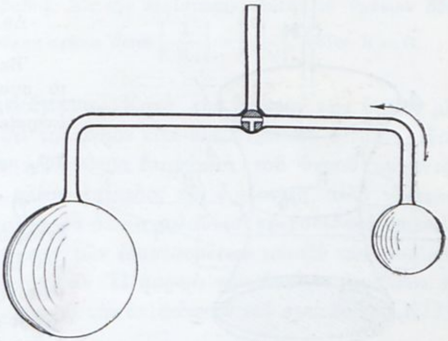
§ 117. Ὑγρὰ ὑμένια.

α) *Πομφόλυγες.* Λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, τὸ ἐντὸς πομφόλυγος ἀέριον συμπιέζεται, οὕτως ὥστε ἡ πίεσίς του νὰ εἶναι κατὰ Δp μεγαλυτέρα τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως.



Σχ. 206. Ἡ *πίεσις ἐντὸς τῆς πομφόλυγος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐξωτερικῆς.*

Τὴν ὕπαρξιν τῆς ὑπερπιέσεως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς πομφόλυγος δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 206. Ἐπὶ πλέον, διὰ τοῦ πειράματος τούτου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὑπερπίεσις Δp εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς πομφόλυγος. Τοῦτο, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ καὶ θεωρητικῶς. Χαρακτηριστικὸν πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἐξαρτήσεως τῆς ὑπερπιέσεως ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα εἶναι τὸ ἑξῆς: Εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς ὑαλίνης συσκευῆς τοῦ σχήματος 207, σχηματίζομεν ἐκ διαλύματος σάπωνος δύο πομφόλυγας διαφόρου ἀκτῖνος. Ἂν φέρωμεν διὰ τῆς στρόφιγγος εἰς συγκοινωνίαν τὰς δύο πομφόλυγας, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ μεγαλυτέρα αὐξάνεται εἰς βάρος τῆς μικροτέρας. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ὑπερπίεσις Δp εἰς τὴν μικρὰν πομφόλυγα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπερπιέσεως εἰς τὴν ἄλλην λόγῳ τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος τὴν ὁποίαν ἔχει.



Σχ. 207. *Ὅταν αἱ δύο πομφόλυγες ἔλθουν εἰς συγκοινωνίαν, ὁ ἀὴρ φεύγει ἀπὸ τὴν μικροτέραν καὶ πηγαίνει εἰς τὴν μεγαλυτέραν.*

Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ὑπερπιέσεως Δp καὶ τῆς ἀκτῖνος R εὑρίσκομεν διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν:

Ἐκ μὲν τῆς ἐξωτερικῆς κ υ ρ τ ῆ ς ἐπιφανείας τοῦ ὑμενίου ἔχομεν τὴν πίεσιν

$$p_{\kappa\upsilon\rho\tau} = p_{\;} + \frac{2\alpha}{R}$$

ἐκ δὲ τῆς ἐσωτερικῆς κ ο ί λ η ς ἐπιφανείας τὴν πίεσιν

$$p_{\kappa o\iota\lambda} = p_{\varepsilon\nu\delta} - \frac{2\alpha}{R}.$$

Ἡ ὑπερπίεσις Δp τοῦ ἐντὸς τῆς πομφόλυγος ἀερίου θὰ εἶναι, λοιπόν, ἴση πρὸς

$$\Delta p = p_{\kappa\upsilon\rho\tau} - p_{\kappa o\iota\lambda} = \frac{4\alpha}{R}. \qquad (1)$$

β) *Ὑμένια οἱουδήποτε σχήματος.* Ὡς εἴδομεν εἰς τὰ σ φ α ι ρ ι κ ὰ ὑμένια, ἡ ὑπερπίεσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀκτῖνος των. Ὅταν τὸ ὑμένιον ἔχῃ ο ἱ ο ν δ ή π ο τ ε σχῆμα, ἡ ὑπερπίεσις ἀποδεικνύεται ὅτι ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα καμπυλοτήτων

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

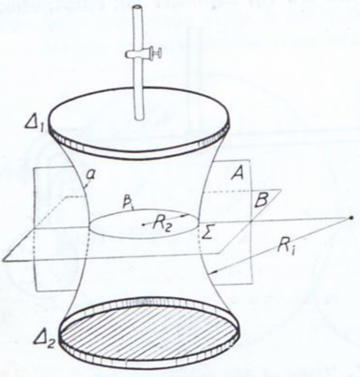
Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην R_1 καὶ R_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος δύο καμπύλων γραμμῶν α καὶ β *(σχ. 208)*, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς τομῆς τοῦ ὑμενίου διὰ δύο ἐπιπέδων Α, Β καθέτων ἐπ' ἄλληλα καὶ διερχομένων διὰ τῆς καθέτου εἰς οἱονδήποτε σημεῖον, π. χ. εἰς τὸ σημεῖον Σ τοῦ ὑμενίου*.

Εἰς τὰς *σαγματοειδεῖς ἐπιφανείας*—ὅπως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος 208—τὰ κέντρα καμπυλότητος δὲν εὑρίσκονται πρὸς τὴν αὐτὴν πλευρὰν τῆς ἐπιφανείας καί, ὡς

* Ὅπως ἀποδεικνύεται, τὸ ἄθροισμα καμπυλοτήτων εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν δύο καθέτων ἐπιπέδων, δὲν μεταβάλλεται, δηλαδή, ἐὰν περιστρέψωμεν ταῦτα περὶ τὴν κάθετον.

ἐκ τούτου, πρέπει νὰ λαμβάνεται ἡ μία ἀκτὶς καμπυλότητος μὲ ἀντίθετον σημεῖον ἀπὸ τὴν ἄλλην.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς ὑπερπιέσεως Δp καὶ τοῦ ἀθροίσματος καμπυλοτήτων εἶναι

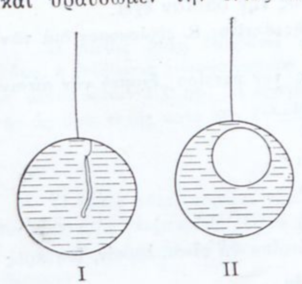


Σχ. 208. *Μεταξὺ τῶν δίσκων Δ_1 καὶ Δ_2 σχηματίζεται σαγματοειδὲς ὑμένιον.*

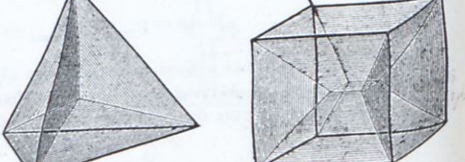
$$\Delta p = 2\alpha \cdot K = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σφαιρικὸν ὑμένιον ($R_1 = R_2 = R$) ἡ ὑπερπίεσις Δp θὰ εἶναι $\Delta p = 2\alpha \cdot \frac{2}{R} = \frac{4\alpha}{R}$ δηλ. προκύπτει ὁ προηγούμενος τύπος (1).

γ) *Ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ.* Ἐὰν ἐντὸς διαλύματος σάπωνος ἐμβαπτίσωμεν ἐπίπεδον πλαίσιον καὶ ἔπειτα τὸ ἀνασύρωμεν, θὰ σχηματισθῇ ἕνα ἐπίπεδον ὑμένιον. Ἐὰν κατόπιν ἀποθέσωμεν ἐπὶ τοῦ ὑμενίου λεπτὸν νῆμα, τοῦ ὁποίου ἔχομεν συνδέσει τὰ δύο ἄκρα, ὥστε ν' ἀποτελῇ βρόχον (*σχ. 209, I*) καὶ θραύσωμεν τὴν ἐντὸς αὐτοῦ ὑγρὰν μεμβράνην, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βρόχος λαμβάνει κυκλικὸν σχῆμα (II). Οὕτω, τὸ ὑμένιον ἔχει τώρα τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδὸν τὸ ὁποῖον δύναται νὰ λάβῃ ὑπὸ τὸ δεδομένον μῆκος τοῦ νήματος **(ὑμένιον ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ)**.



Σχ. 209. *Ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ.*



Σχ. 210. *Ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ.*

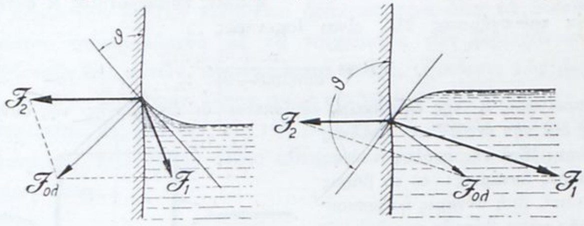
Ὑπὸ δεδομένον περίγραμμα σχηματίζεται ὑμένιον ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ ὁσάκις ἡ πίεσις ἑκατέρωθεν τοῦ ὑμενίου εἶναι ἡ αὐτὴ ($\Delta p = 0$). Εἰς τοιαύτην περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα καμπυλοτήτων θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2), ἴσον πρὸς μηδέν.

Εἰς τὸ πείραμα τοῦ σχήματος 209 τὸ ὑμένιον ἦτο ἐπίπεδον διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει πράγματι

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = 0.$$

Ὁμοίως σχηματισμὸν ἐ π ι π έ δ ω ν ὑμενίων ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ ἐπιτυγχάνομεν διὰ πλαισίων ἄλλου σχήματος (π. χ. κύβου ἢ πυραμίδος, σχ. 210), ἀρκεῖ ἡ πίεσις ἑκαρωθεν τῶν πλευρῶν τοῦ ὑμενίου νὰ εἶναι ἡ αὐτή. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ ὑμένια, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 208 καὶ ὅταν ἡ στρόφιγξ εἶναι ἀνοικτή, εἶναι ὑμένια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ὑμένιον δὲν εἶναι ἐπίπεδον, λαμβάνει ὅμως τοιοῦτον σχῆμα ὥστε $\left|\frac{1}{R_1}\right| = \left|\frac{1}{R_2}\right|$, ὁπότε $K = 0$.

§ 118. Τριχοειδικὰ φαινόμενα. Κατὰ τὴν ἐπαφὴν τῶν ὑγρῶν μὲ στερεὰ σώματα, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑγρὸν εἴτε *διαβρέχει* τὸ στερεόν, εἴτε ὄχι. Εἰς τὸ μέρος εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ συναντᾷ τὸ στερεὸν αὕτη δὲν παραμένει πλέον ἐπίπεδος καὶ ὁριζοντία, ἀλλὰ γίνεται κοίλη ἢ κυρτή. Τὰ φαινόμενα ταῦτα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ***τριχοειδικὰ φαινόμενα****, ἐξηγοῦνται διὰ τῶν δυνάμεων τῶν ἐξασκουμένων μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ τῶν μορίων τοῦ στερεοῦ. Ἡ μορφὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ ἐκεῖ ὅπου συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ *(σχ. 211)*



Σχ. 211.

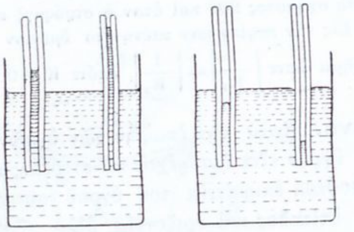
ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης $\mathcal{F}_{ολ}$ τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνισταμένη αὕτη, πρέπει, ἐφ᾿ ὅσον τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, νὰ εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐὰν καλέσωμεν $\mathcal{F}_1$ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπί τινος μορίου ὑπὸ τῶν ὑπολοίπων μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ $\mathcal{F}_2$ τὴν δύναμιν τὴν ὁποίαν ἐξασκοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μορίου τὰ μόρια τοῦ στερεοῦ, τότε, ἀναλόγως τῆς τιμῆς τῶν δύο αὐτῶν δυνάμεων, ἡ συνισταμένη αὐτῶν $\mathcal{F}_{ολ}$ εἴτε ἔχει διεύθυνσιν πρὸς τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ (I), εἴτε πρὸς τὸ μέρος τοῦ ὑγροῦ (II). Κατ᾿ αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται μία γωνία ϑ—ἡ ***γωνία συνεπαφῆς***—, ἡ ὁποία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, ἀναλόγως τοῦ ἂν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ ἢ ὄχι τὸ στερεόν.

Μεταβολὴ τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑγροῦ ἐντὸς στενοῦ σωλῆνος. Τὰ τριχοειδικὰ φαινόμενα προκαλοῦν μεταβολὴν τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἑνὸς ὑγροῦ ἐντὸς στενῶν σωλήνων. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ὑγρὸν διαβρέχῃ αὐτούς, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἀνέρχεται, σχηματίζουσα κοῖλον μηνίσκον *(σχ. 212, I)*, ἐνῷ ἀντιθέτως, ὅταν οἱ σωλῆνες

* Ἡ ὀνομασία ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ φαινόμενα ταῦτα ἐμελετήθησαν τὸ πρῶτον ἐντὸς σωλήνων πολὺ μικρᾶς διαμέτρου *(τριχοειδεῖς σωλῆνες)*.

δὲν διαβρέχονται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια κατέρχεται ἐντὸς αὐτῶν σχηματίζουσα κυρτὸν μηνίσκον (II).



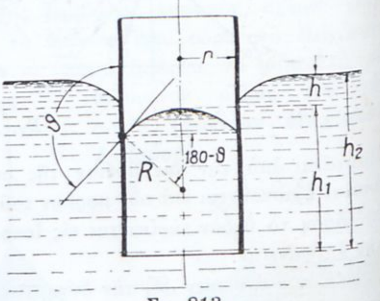
Σχ. 212. *Ἡ ἀνύψωσις ἢ ἡ ταπείνωσις τῆς στάθμης ἐντὸς σωλήνων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος.*

Ὅπως κατωτέρω ἀποδεικνύεται, ἡ ταπείνωσις ἢ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τοῦ σωλῆνος.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μεταβολῆς τοῦ ὕψους τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, δεχόμεθα τὴν ἀκτῖνα r τοῦ σωλῆνος τόσον μικρὰν ὥστε ὅλη ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ μηνίσκου νὰ εἶναι καμπύλη. Ἂν πρὸς τούτοις δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι σφαιρική, ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος R αὐτῆς, ὡς εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ σχήματος 213, εἶναι ἴση πρὸς

$$R = \frac{r}{\text{συν}(180^0 - \vartheta)}.$$

Ἡ ταπείνωσις h τῆς ἐπιφανείας εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς συνθήκης τῆς ἰσορροπίας διὰ τὴν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑγρὰν στήλην: Ἐπὶ τῆς στήλης ταύτης δροῦν τέσσαρες δυνάμεις: α) τὸ βάρος της $\varepsilon \cdot h_1 \cdot \pi r^2$, β) ἡ δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς κάτω βάσεώς της ὑπὸ τοῦ ὑπολοίπου ὑγροῦ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $(p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon \cdot h_2) \cdot \pi r^2$, γ) ἡ δύναμις $p_{\varepsilon\xi} \cdot \pi r^2$ ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ δ) ἡ δύναμις ἡ προερχομένη λόγῳ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως. Ἡ τελευταία αὕτη εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τμήματός τινος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου (μήκους ds), κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ μηνίσκος ἐφάπτεται τοῦ ἐσωτερικοῦ τοιχώματος τοῦ σωλῆνος, ἐξασκεῖται ἡ δύναμις α · ds, ἔνθα α εἶναι ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως. Ἡ κατακόρυφος αὐτῆς συνιστῶσα εἶναι ἴση πρὸς $\alpha \cdot ds \cdot \text{συν}(180^0 - \vartheta)$, ὁπότε ἡ συνολικῶς ἐξασκουμένη δύναμις θὰ εἶναι



Σχ. 213.

$$\alpha \cdot 2\pi r \cdot \text{συν}(180^0 - \vartheta).$$

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας, ἐκφραζομένη κατὰ κατακόρυφον ἄξονα, δίδει

$$-\varepsilon \cdot h_1 \cdot \pi r^2 + (p_{\varepsilon\xi} + \varepsilon \cdot h_2) \cdot \pi r^2 - p_{\varepsilon\xi} \cdot \pi r^2 - \alpha \cdot 2\pi r \cdot \text{συν}(180^0 - \vartheta) = 0$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὅτι ἡ ταπείνωσις $h = h_2 - h_1$ εἶναι ἴση πρὸς

$$h = \frac{2\alpha \cdot \text{συν}(180 - \vartheta)}{\varepsilon \cdot r} \qquad (1)$$

Ὅταν τὸ ὑγρὸν **διαβρέχῃ** τὸν σωλῆνα, ἡ γωνία συνεπαφῆς ϑ εἶναι ὀξεῖα, τὸ συνημίτονον τῶν $(180^0 - \vartheta)$ εἶναι ἀρνητικόν, ἐπομένως καὶ τὸ h ἀρνητικόν, δηλ. ἐπέρχεται **ἀνύψωσις** τῆς στάθμης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ΄

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

§ 119. Ἰδιότητες τῶν ἀερίων. Τὰ ἀέρια ἔχουν μικρὰν πυκνότητα ἐν σχέσει πρὸς τὰ ὑγρά. Οὕτω, ἐνῶ 1 m^3 ὕδατος ζυγίζει 1000 kgr*, ἕνα κυβικὸν μέτρον ἀέρος ζυγίζει ὑπὸ συνήθεις συνθήκας μόνον 1,2 kgr*, περίπου. Ἡ μικρὰ πυκνότης τῶν ἀερίων ὀφείλεται εἰς τὴν μεγάλην σχετικῶς ἀπόστασιν τῶν μορίων μεταξύ των. Λόγῳ τῆς μεγάλης ταύτης ἀποστάσεως αἱ μεταξὺ τῶν μορίων δυνάμεις εἶναι μικραὶ καί, ὡς ἐκ τούτου, τὰ ἀέρια δὲν σχηματίζουν ἐπιφανείας, ἀλλὰ τείνουν νὰ καταλάβουν διαρκῶς μεγαλύτερον ὄγκον.

Τὰ μόρια τῶν ἀερίων κινοῦνται ἀτάκτως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις καί, ὡς ἐκ τούτου, συγκρουόμενα μὲ τὰ τοιχώματα τῶν περιεχόντων αὐτὰ δοχείων, ἐξασκοῦν ἐπ᾽ αὐτῶν πίεσιν. Κατὰ ταῦτα, ἡ πίεσις τῶν ἀερίων ὀφείλεται εἰς ἐντελῶς διάφορον λόγον παρὰ εἰς τὰ ὑγρά. Καὶ εἰς μὲν τὰ ὑγρὰ ἡ πίεσις ὀφείλεται, ὡς εἴδομεν, εἰς τὴν βαρύτητα ἢ καὶ εἰς ἄλλας ἐξωτερικάς, τυχόν, δυνάμεις, ἐνῶ εἰς τὰ ἀέρια αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν θερμικὴν κίνησιν τῶν μορίων των.

§ 120. Κατανομὴ τῆς πιέσεως ἐντὸς ἀερίου. Ὅπως εἰς τὴν Ὑδροστατικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν Ἀεροστατικήν, κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς πιέσεως πρέπει νὰ γίνεται σαφὴς διάκρισις μεταξὺ δύο ἄκρων περιπτώσεων: 1) τὸ ἀέριον θεωρεῖται ὡς εὑρισκόμενον ἔξω τοῦ πεδίου βαρύτητος· 2) ἡ πίεσις ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύει ἡ ***ἀρχὴ τοῦ Pascal:***

Ἐφ᾽ ὅσον εἰς ἕνα ἠρεμοῦν ἀέριον δὲν ἐπιδρᾷ τὸ πεδίον βαρύτητος, ἡ πίεσις εἶναι καθ᾽ ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ σταθερά.

Πειραματικῶς ἀποδεικνύομεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal διὰ συσκευῆς ἀναλόγου πρὸς τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς αὐτῆς ἀρχῆς εἰς τὴν Ὑδροστατικήν.

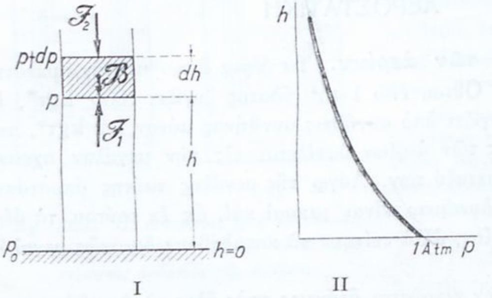
Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ πίεσις δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ καθ᾽ ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ἀερίου, ἀλλ᾽ ὅπως ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ὑψόμετρον h τοῦ θεωρουμένου σημείου κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\boxed{p_h = p_0 \cdot e^{-c \cdot h} \quad \text{βαρομετρικὸς τύπος}} \qquad (1)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ p_h παριστᾷ τὴν πίεσιν εἰς ὕψος h, τὸ p_0 τὴν πίεσιν εἰς ὕψος $h = 0$, τὸ δὲ e εἶναι ἡ βάσις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων ($e \simeq 2,72$).

Ἡ σταθερὰ c ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀερίου καὶ τοῦ τόπου τῆς παρατηρήσεως (ὡς ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὴν πυκνότητα ϱ_0 τοῦ ἀερίου εἰς ὕψος μηδὲν καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος g).

Ἡ ἐξίσωσις (1) δεικνύει ὅτι ἡ πίεσις εἰς τὰ ἀέρια εἶναι (ἀρνητικὴ) ἐκθετικὴ συνάρτησις τοῦ ὕψους, ὅπως δεικνύει γραφικῶς καὶ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 214. Παραβάλλοντες τὴν σχέσιν $p = f(h)$ μὲ τὴν ἀντίστοιχον τῶν ὑγρῶν (§ 107), παρατηροῦμεν εἰς μὲν τὴν μίαν περίπτωσιν γραμμικὴν σχέσιν, εἰς δὲ τὴν ἄλλην ἐκθετικήν. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ μὲν ὑγρὰ ἐθεωρήσαμεν ὡς ἀσυμπίεστα (πυκνότης σταθερά), ἐνῶ τὰ ἀέρια εἶναι συμπιεστὰ (πυκνότης μεταβλητὴ μετὰ τῆς πιέσεως).



Σχ. 214. *Ὁ βαρομετρικὸς τύπος (τὸν ὁποῖον παριστᾶ τὸ διάγραμμα ΙΙ) ὑπολογίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας τῆς γραμμοσκιασμένης στήλης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. ⟨Τὸ p—dp νὰ διορθωθῇ εἰς p+dp⟩.*

Ἀπόδειξις τῆς ἐξισώσεως (1). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πίεσιν εἰς σημεῖον εὑρισκόμενον εἰς ὕψος h, θεωροῦμεν κατακόρυφον κυλινδρικὴν στήλην τοῦ ἀερίου, μὲ τὴν μίαν βάσιν εἰς ὕψος h καὶ τὴν ἄλλην εἰς ὕψος $h + dh$ *(σχ. 214, I)*. Ἐπὶ τῆς στήλης ταύτης ἐξασκοῦνται αἱ ἑξῆς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος αὐτῆς $B = \varrho \cdot g \cdot S \cdot dh$ (ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως)· 2) ἡ δύναμις F_1, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $p \cdot S$ (ἔνθα p εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὴν κάτω βάσιν). 3) ἡ δύναμις $F_2 = (p + dp) \cdot S$, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως καὶ 4) αἱ (ὁριζόντιοι) δυνάμεις, αἱ ἐξασκούμεναι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς στήλης. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας, κατὰ κατακόρυφον ἄξονα ἐκφραζομένη, μᾶς δίδει

$$-\varrho \cdot g \cdot S \cdot dh + p \cdot S - (p + dp) \cdot S = 0.$$

ἢ

$$dp = -\varrho \cdot g \cdot dh \tag{2}$$

Ὅπως ὅμως προκύπτει ἐκ τοῦ γνωστοῦ *νόμου τῶν Boyle - Mariotte*, ἡ πυκνότης ϱ ἑνὸς ἀερίου εἶναι ἀνάλογος τῆς πιέσεως αὐτοῦ, ἤτοι

$$\frac{\varrho}{p} = \frac{\varrho_0}{p_0}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ ϱ διὰ τοῦ ἴσου του $p \cdot \varrho_0 / p_0$, λαμβάνομεν

$$dp = -\frac{p \cdot \varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot dh.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δι' ὁλοκληρώσεως, λαμβάνομεν

$$\ln p = -\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h + K$$

ἢ

$$p = e^{-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} \cdot e^{K} \tag{3}$$

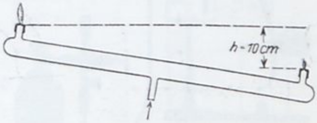
Τὴν σταθερὰν K τῆς ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ὁρικῆς συνθήκης, κατὰ τὴν ὁποίαν διὰ $h = 0$ εἶναι $p = p_0$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), λαμβάνομεν $e^K = p_0$, ὁπότε γράφομεν

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h} \tag{4}$$

ἢ

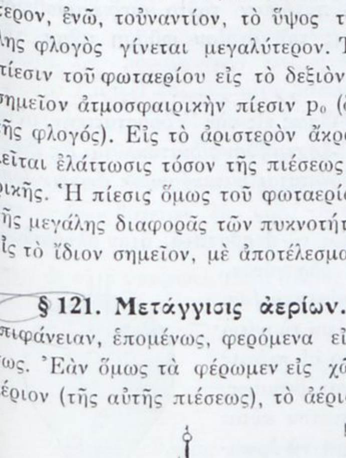
$$p = p_0 \cdot e^{-c \cdot h}.$$

Τὴν ἐλάττωσιν τῆς πιέσεως μετὰ τοῦ ὕψους δυνάμεθα νὰ δείξωμεν χαρακτηριστικῶς διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Διοχετεύομεν ἐντὸς σωλῆνος φωταέριον καὶ εἰς τὰ ἄκρα του ἀνάπτομεν δύο φλόγας *(σχ. 215)*. Ἐὰν ρυθμίσωμεν τὴν ροὴν τοῦ φωταερίου, οὕτως ὥστε αἱ φλόγες μόλις ν' ἀνάπτουν καὶ κλίνωμεν τὸν σωλῆνα, ὅπως δεικνύῃ τὸ σχῆμα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὕψος τῆς χαμηλότερον εὑρισκομένης φλογὸς γίνεται μικρότερον, ἐνῶ, τοὐναντίον, τὸ ὕψος τῆς ἄλλης φλογὸς γίνεται μεγαλύτερον. Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμεν τὴν πίεσιν τοῦ φωταερίου εἰς τὸ δεξιὸν ἄκρον περίπου ἴσην μὲ τὴν εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν p_0 (ὅπως φανερώνει καὶ τὸ πολὺ μικρὸν ὕψος τῆς φλογός). Εἰς τὸ ἀριστερὸν ἄκρον, λόγῳ τῆς διαφορᾶς ὕψους h, προκαλεῖται ἐλάττωσις τόσον τῆς πιέσεως τοῦ φωταερίου ὅσον καὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Ἡ πίεσις ὅμως τοῦ φωταερίου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τώρα, λόγῳ τῆς μεγάλης διαφορᾶς τῶν πυκνοτήτων, διάφορος τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως εἰς τὸ ἴδιον σημεῖον, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἐμφανίζεται σημαντικὴ ὑπερπίεσις.



Σχ. 215. *Πείραμα διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς ἐλαττώσεως τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως μετὰ τοῦ ὕψους.*

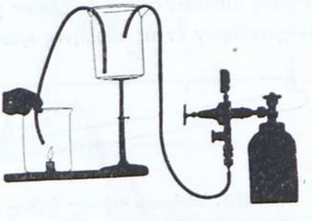
§ 121. Μετάγγισις ἀερίων. Ὡς εἴδομεν, τὰ ἀέρια δὲν σχηματίζουν ἐπιφάνειαν, ἑπομένως, φερόμενα εἰς κενὸν χῶρον, τὸν καταλαμβάνουν ἀμέσως. Ἐὰν ὅμως τὰ φέρωμεν εἰς χῶρον εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται ἕνα ἄλλο ἀέριον (τῆς αὐτῆς πιέσεως), τὸ ἀέριον διατηρεῖ τὸν ὄγκον του, διαχωριζόμενον, οὕτω, σαφῶς ἀπὸ τὸ ἄλλο.



Σχ. 216. *Οἱ ἀτμοὶ τοῦ αἰθέρος ὡς εἰδικῶς βαρύτεροι τοῦ ἀέρος συγκεντροῦνται εἰς τὸν πυθμένα τοῦ ποτηρίου.*

Ὅταν τὰ δύο ἀέρια ἔχουν διάφορον πυκνότητα, διατίθενται οὕτως ὥστε τὸ ἐλαφρότερον νὰ ὑπέρκειται τοῦ βαρυτέρου. Ἡ διάκρισις ὅμως τῶν δύο ἀερίων δὲν διαρκεῖ ἐπὶ πολύ, ἀλλά, λόγῳ τοῦ φαινομένου τῆς διαχύσεως, ἐπέρχεται, βαθμηδόν, ἀνάμιξις αὐτῶν, οὕτως ὥστε, τέλος, ἕκαστον τῶν δύο ἀερίων νὰ καταλαμβάνῃ ὅλον τὸν διαθέσιμον χῶρον. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν διὰ τοῦ ἑξῆς πειράματος: Ὑπεράνω ποτηρίου εὑρισκομένου εἰς τὴν μίαν πλάστιγγα ἰσορροποῦντος ζυγοῦ *(σχ. 216)* κλίνομεν φιάλην περιέχουσαν ποσότητα αἰθέρος. Οἱ ὑπεράνω τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ αἰθέρος εὑρισκόμενοι ἀτμοὶ ἐκρέουν ἐκ τῆς φιάλης ὡς ἔχοντες μεγαλυτέραν πυκνότητα ἀπὸ τὴν πυκνότητα τοῦ ἀέρος καὶ συγκεντροῦνται εἰς τὸν πυθμένα τοῦ ποτηρίου. Τοῦτο πιστοποιοῦμεν καὶ ἐκ τῆς προκαλουμένης διαταραχῆς τῆς ἰσορροπίας τοῦ ζυγοῦ.

Ἡ διαφορὰ τῆς πυκνότητος ἑνὸς ἀερίου ὡς πρὸς τὸ περιβάλλον ἀέριον δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν *μετάγγισιν* αὐτοῦ ἀπὸ ἑνὸς δοχείου εἰς ἄλλο διὰ σίφωνος. Οὕτω, εἰς τὴν διάταξιν τοῦ σχήματος 217, πληροῦμεν ἕνα ποτήριον διὰ διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, εἶναι βαρύτερον τοῦ ἀέρος. Τὸ ἀέριον τοῦτο δυνάμεθα νὰ μεταγγίσωμεν διὰ σίφωνος εἰς ἄλλο ποτήριον χαμηλότερον τοῦ πρώτου εὑρισκόμενον. Ὅταν ἡ εἰς τὸ ποτήριον τοῦτο συγκεντρωθεῖσα ποσότης τοῦ ἀερίου φθάσῃ μέχρι τῆς φλογὸς τοῦ κηρίου, τοῦτο σβέννυται.

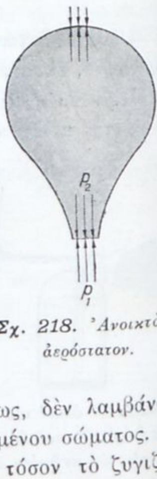


Σχ. 217. Μετάγγισις διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος διὰ σίφωνος.

§ 122. 'Αρχὴ τοῦ 'Αρχιμήδους. Ὅπως εἰς τὴν Ὑδροστατικήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν 'Αεροστατικήν, ἡ ***ἀρχὴ τοῦ 'Αρχιμήδους*** διατυποῦται ὡς ἑξῆς: *«Πᾶν σῶμα εὑρισκόμενον ἐντὸς ἀερίου ὑφίσταται κατακόρυφον ἄνωσιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀερίου».*

Λόγῳ τῆς ἀνώσεως ταύτης ἀνέρχονται τὰ ***ἀερόστατα,*** ὅταν πληρωθοῦν μὲ ἀέριον ἐλαφρότερον τοῦ ἀέρος (π. χ. ὑδρογόνον, ἥλιον, φωταέριον). Εἰς τὰ ***ἀνοικτὰ ἀερόστατα*** *(σχ. 218)* ἐμφανίζεται ἀνυψωτικὴ δύναμις, καίτοι τὸ κάτω ἄκρον εἶναι ἀνοικτόν: Εἰς τὸ ἄκρον τοῦτο αἱ πιέσεις p_1 τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ p_2 τοῦ ἀερίου εἶναι, βεβαίως, ἴσαι. Εἰς τὴν κορυφὴν ὅμως τοῦ ἀεροστάτου αὗται δὲν ἔχουν ἐλαττωθῇ ἐξ ἴσου μὲ ἀποτέλεσμα νὰ ἐμφανισθῇ διαφορὰ πιέσεως, ἡ ὁποία καὶ προκαλεῖ τὴν ἀνυψωτικὴν δύναμιν.

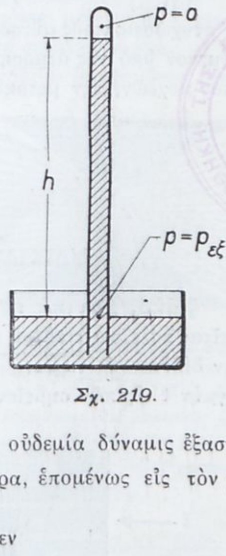
'Εὰν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχῃ ὀπή, προφανὲς ὅτι, λόγῳ τῆς διαφορᾶς ταύτης τῶν πιέσεων, τὸ ἀέριον θὰ ἐξέρχεται ἀπὸ αὐτήν.



Σχ. 218. 'Ανοικτὸν ἀερόστατον.

'Επίδρασις τῆς ἀνώσεως ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ζυγίσεως. Λόγῳ, ἀκριβῶς, τῆς ἀνώσεως, δὲν λαμβάνομεν κατὰ τὰς ζυγίσεις τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος. Καὶ κατὰ μὲν τὴν ζύγισιν διὰ ζυγοῦ ὑφίστανται ἄνωσιν τόσον τὸ ζυγιζόμενον σῶμα ὅσον καὶ τὰ σταθμά, ἐπειδὴ ὅμως τὰ εἰδικὰ βάρη αὐτῶν συνήθως δὲν εἶναι ἴσα καὶ αἱ ἀνώσεις αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, ὡς ἐκ τούτου δὲ θὰ προκύπτουν σφάλματα *, ἐκτὸς ἐὰν γίνουν διορθώσεις. Εἰς τὴν ζύγισιν διὰ δυναμομέτρου τὸ σφάλμα εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς τὴν ἄνωσιν.

§ 123. Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις. Ὁ ἀὴρ ὁ περιβάλλων τὴν Γῆν, λόγῳ τοῦ πεδίου βαρύτητος, εὑρίσκεται ὑπὸ πίεσιν, καλουμένην ***ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν,*** ἡ ὁποία μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς κατὰ τὸν βαρομετρικὸν τύπον (1) τῆς § 120. Τὸ γνωστὸν ***πείραμα τοῦ Torricelli*** *(σχ. 219)* ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπιτρέπει τὴν μέτρησιν αὐτῆς. Τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως καὶ τοῦ ὕψους h τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης, εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς στήλης ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις, τὸ βάρος αὐτῆς B, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $\varepsilon \cdot S \cdot h$ (ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου) καὶ ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς κάτω βάσεως τῆς στήλης ὁ ὑπόλοιπος ὑδράργυρος, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς $p_{\varepsilon\xi} \cdot S$ (καὶ τοῦτο διότι ἡ πίεσις εἰς τὴν κάτω βάσιν εἶναι, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν $p_{\varepsilon\xi}$). Ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως τῆς στήλης οὐδεμία δύναμις ἐξασκεῖται, ἀφοῦ ὁ ὑπεράνω αὐτῆς χῶρος δὲν περιέχει ἀέρα, ἑπομένως εἰς τὸν χῶρον αὐτὸν ἡ πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.



Σχ. 219.

Ἀφοῦ ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη ἰσορροπεῖ, ἔχομεν

$$-\varepsilon \cdot S \cdot h + p_{\varepsilon\xi} \cdot S = 0$$

ἢ

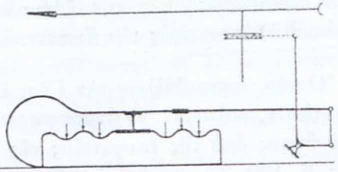
$$p_{\varepsilon\xi} = \varepsilon \cdot h.$$

Ἐὰν τὸ πείραμα γίνῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, τὸ ὕψος h τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι, κατὰ μέσον ὅρον, ἴσον πρὸς 760 mm. Γνωστοῦ δὲ ὄντος καὶ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑδραργύρου ($\varepsilon = 13{,}6$ gr*/cm³), εὑρίσκομεν τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν ἴσην πρὸς 1,033 kgr*/cm². Τὴν πίεσιν ταύτην, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν § 107, χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδα πιέσεως εἰς τὰς μετρήσεις τῆς Φυσικῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα ***φυσικὴ ἀτμόσφαιρα*** (Atm).

§ 124. Βαρόμετρα. Τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν μετροῦμεν δι' ὀργάνων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ***βαρόμετρα***. Τούτων ὑπάρχουν δύο τύποι, τὰ ὑδραργυρικὰ καὶ τὰ μεταλλικά. Τὰ ***ὑδραργυρικὰ βαρόμετρα*** εἶναι, κατὰ βάθος,

* Κατὰ τὴν ζύγισιν ὕδατος διὰ σταθμῶν ἐξ ὀρειχάλκου τὸ ἐξ ἀνώσεως σφάλμα ἀνέρχεται εἰς 1 ‰ περίπου.

ἁπλῶς σωλῆνες Torricelli, ἐφωδιασμένοι μὲ κλίμακα διὰ τὴν ἀνάγνωσιν τοῦ ὕψους τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης.



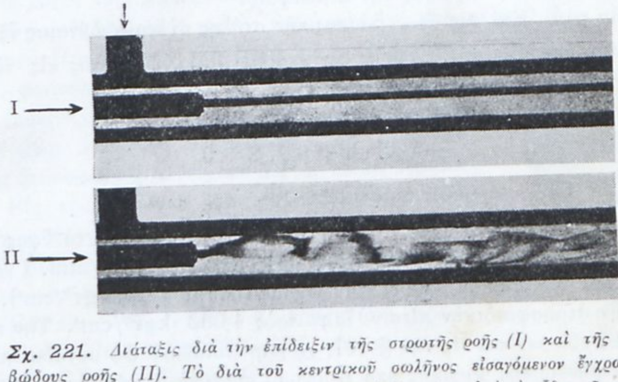
Σχ. 220. *Μεταλλικὸν βαρόμετρον (ἀρχή).*

Διὰ μετρήσεις ὄχι μεγάλης ἀκριβείας χρησιμοποιοῦνται τὰ ***μεταλλικὰ βαρόμετρα*** *(σχ. 220)*, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται, κατ' ἀρχήν, ἀπὸ ἀερόκενον κυλινδρικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου ὁ ἄνω πυθμὴν ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν μετάλλινον ἔλασμα, φέρον πτυχώσεις πρὸς αὔξησιν τῆς εὐκαμψίας του. Τὸ ἔλασμα τοῦτο, παραμορφούμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, μεταδίδει, διὰ καταλλήλου συστήματος μοχλῶν, τὴν μετακίνησιν εἰς δείκτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

§ 125. Γενικὰ περὶ ροῆς. Ὁ χῶρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἕνα ρευστὸν κινεῖται καλεῖται ***πεδίον ροῆς***. Τὸ πεδίον ροῆς εἶναι ἐντελῶς καθωρισμένον, ὅταν δίδεται ἡ ταχύτης v τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ρευστὸν εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν t εἰς πᾶν σημεῖον x, y, z τοῦ χώρου. Κατὰ ταῦτα, εἰς κάθε πεδίον

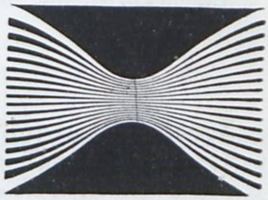


Σχ. 221. *Διάταξις διὰ τὴν ἐπίδειξιν τῆς στρωτῆς ροῆς (I) καὶ τῆς τυρβώδους ροῆς (II). Τὸ διὰ τοῦ κεντρικοῦ σωλῆνος εἰσαγόμενον ἔγχρωμον ὕδωρ σχηματίζει φλέβα τῆς ὁποίας ἡ μορφὴ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς ροῆς. Τὸ διαυγὲς ὕδωρ εἰσάγεται διὰ τοῦ πλευρικοῦ σωλῆνος.*

ροῆς ἀντιστοιχεῖ ἕνα *ἀνυσματικὸν πεδίον* (§ 100), τὸ ὁποῖον καλεῖται ***πεδίον ταχυτήτων***.

Τὸ πεδίον ροῆς εἶναι εἰς ἄλλας περιπτώσεις ***μόνιμον*** ἢ ***στρωτὸν*** καὶ εἰς ἄλλας ***μὴ μόνιμον***, ἀναλόγως τοῦ ἂν ἡ ταχύτης εἰς δεδομένον σημεῖον τοῦ χώρου μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου ἢ ὄχι. Ὡς θὰ γνωρίσωμεν εἰς τὰ κατωτέρω (βλ. *τυρβώδης ροὴ* § 129), ὑπάρχουν πολλαὶ περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ ταχύτης δὲν διατηρεῖται ἐντελῶς σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται ὀλίγον, κυμαινομένη περὶ μέσην τινὰ τιμὴν ***(ἡμιμόνιμος ροή)***. Τὸ σχῆμα 221, II παριστᾷ τὴν μορφὴν τυρβώδους ροῆς ὑγροῦ ἐντὸς σωλῆνος, ἐνῷ τὸ σχῆμα 221, I παριστᾷ τὴν μορφὴν στρωτῆς ροῆς.

§ 126. Γενικὰ περὶ στρωτῆς ροῆς. Εἰς τὴν στρωτὴν ροήν, ὡς εἴδομεν, ἡ ταχύτης ,τοῦ ρευστοῦ εἰς δεδομένον σημεῖον ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν (x, y, z) αὐτοῦ. ***Ρευματικὴ γραμμὴ*** καλεῖται ἡ τροχιὰ τὴν ὁποίαν διαγράφει κατὰ τὴν κίνησίν του ἕνα ὡρισμένον μόριον τοῦ ρευστοῦ. Προφανὲς ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος εἰς κάθε σημεῖον πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένης ρευματικῆς γραμμῆς. Εἰς τὸ σχῆμα 222 ἀποδίδεται ἡ μορφὴ τῶν ρευματικῶν γραμμῶν, ὡς αὗται σχηματίζονται ἐντὸς σωλήνων εἰς σημεῖα στενώσεως.

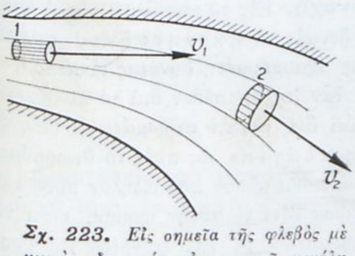


Σχ. 222. *Μορφὴ τῶν ρευματικῶν γραμμῶν εἰς στένωσιν σωλῆνος. Ἡ εἰκὼν λαμβάνεται διὰ συσκευῆς μὲ σειρὰν ὀπῶν διὰ τῶν ὁποίων ἐκρέει διαυγὲς καὶ ἔγχρωμον ὕδωρ.*

Ἂν θεωρήσωμεν στοιχειῶδες τμῆμα ἐπιφανείας καὶ ἐξ ἑκάστου σημείου τοῦ περιγράμματος αὐτῆς φέρωμεν τὴν ἀντίστοιχον ρευματικὴν γραμμὴν *(σχ. 223)*, σχηματίζεται ἡ ὑγρὰ ***φλέψ***.

Ἀφοῦ ἡ ταχύτης εἶναι ἐφαπτομένη τῶν ρευματικῶν γραμμῶν, τὸ περιεχόμενον μιᾶς φλεβὸς δὲν ἐξέρχεται ποτὲ ταύτης, οὔτε τὸ ρευστὸν γειτονικῆς φλεβὸς εἰσέρχεται ἐντὸς αὐτῆς, τὸ ρευστόν, δηλαδή, ρέει ἐντὸς μιᾶς φλεβὸς ἀκριβῶς ὡς ἐὰν τὰ τοιχώματά της ἦσαν στερεά.

Παροχὴ Π μιᾶς φλεβὸς καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ ὄγκου dV τοῦ διερχομένου διά τινος τομῆς τῆς φλεβὸς ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διὰ τοῦ χρόνου τούτου. Ἤτοι



Σχ. 223. *Εἰς σημεῖα τῆς φλεβὸς μὲ μικρὰν διατομήν, ἀντιστοιχεῖ μεγάλη ταχύτης τοῦ ρευστοῦ καὶ ἀντιστρόφως.*

$$\boxed{\Pi = \frac{dV}{dt}}$$

Διὰ τὴν ροὴν μιᾶς φλεβὸς καὶ ἐφ᾽ ὅσον θεωροῦμεν τὸ ρευστὸν ὡς ἀσυμπίεστον ἰσχύει ὁ ἑξῆς ***νόμος τῆς συνεχείας:***

«*Ἡ παροχὴ μιᾶς φλεβὸς εἶναι σταθερὰ δι᾽ οἱανδήποτε τομὴν αὐτῆς*».

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ νόμου τούτου θεωρήσωμεν δύο τομὰς 1 καὶ 2 μιᾶς φλεβός. Ἐφ᾽ ὅσον τὸ ρευστὸν θεωρεῖται ἀσυμπίεστον καὶ ἡ ροὴ μόνιμος, θὰ πρέπει, ἐντὸς δεδομένου χρόνου, νὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν δύο τομῶν ὁ αὐτὸς ὄγκος τοῦ ρευστοῦ.

Τὴν παροχὴν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς γινόμενον τῆς ταχύτητος υ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν S τῆς διατομῆς. Ἤτοι:

$$\boxed{\Pi = S \cdot \upsilon}$$

Τὴν σχέσιν ταύτην λαμβάνομεν ἐὰν τὸν ἐντὸς τοῦ χρόνου dt διά τινος τομῆς διερχόμενον ὄγκον dV τοῦ ρευστοῦ (γραμμοσκιασμένον εἰς τὸ σχῆμα 223) γράψωμεν ὡς γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς τομῆς ἐπὶ τὸν δρόμον ds τὸν ὁποῖον διανύει τὸ ρευστὸν ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου, ὁπότε θὰ ἔχομεν

$$\Pi = \frac{dV}{dt} = \frac{S \cdot ds}{dt} = S \cdot \upsilon.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς συνεχείας διὰ τὰς δύο τομὰς 1 καὶ 2, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2}$$

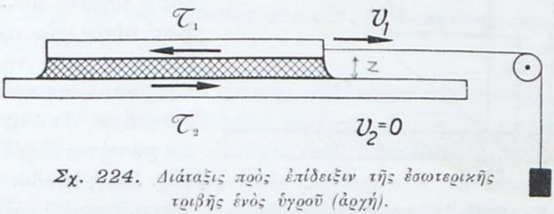
Συνεπῶς εἰς μικρὰν διατομὴν ἀντιστοιχεῖ μεγάλη ταχύτης τοῦ ρευστοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

Βασικὴ προϋπόθεσις διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ νόμου τῆς συνεχείας, ὡς καὶ διὰ πάντα τὰ εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο περιγραφόμενα, εἶναι τὸ ἀσυμπίεστον τοῦ ρευστοῦ. Καὶ εἰς μὲν τὰ ὑγρὰ ὁ ὅρος οὗτος ἐκπληροῦται πάντοτε μὲ μεγίστην προσέγγισιν—ἀφοῦ ταῦτα πρακτικῶς εἶναι ἀσυμπίεστα—, εἰς τὰ ἀέρια ὅμως, λόγῳ τῆς μεγάλης των συμπιεστότητος, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐμφανισθοῦν μεγάλαι μεταβολαὶ πυκνότητος. Μ' ὅλα ταῦτα εἰς τὰ συνήθη προβλήματα ἀερίων αἱ μεταβολαὶ αὗται εἶναι τόσον μικραί, ὥστε νὰ δύνανται νὰ παραμεληθοῦν. Μὲ περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας παρατηροῦνται μεγάλαι μεταβολαὶ τῆς πυκνότητος, ὅπως, λ. χ., κατὰ τὴν ἐκτόνωσιν ἀερίων ἐντὸς *ἀκροφυσίων* (εἰς τοὺς ἀτμοστροβίλους), εἰς τὴν ἀεροπλοΐαν τῶν μεγάλων ταχυτήτων (μεγαλυτέρων τῆς ταχύτητος τοῦ ἤχου) κ.λ., δὲν θ' ἀσχοληθῶμεν ἐνταῦθα.

§ 127. Ἐσωτερικὴ τριβὴ καὶ συνοχή. Εἰς τὰ κεφάλαια τῆς Ὑδροστατικῆς καὶ τῆς Ἀεροστατικῆς εἴδομεν ὅτι εἰς τὰ ἀκινητοῦντα ρευστὰ ἡ ἐπὶ οἱουδήποτε τμήματος ἐπιφανείας ἐξασκουμένη δύναμις εἶναι πάντοτε κάθετος ἐπ' αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ δὲν ἰσχύει πλέον διὰ τὰ κινούμενα ρευστά. Εἰς ταῦτα ἡ παρατήρησις δεικνύει ὅτι μεταξὺ στρωμάτων διαφόρου ταχύτητος ἐξασκοῦνται δυνάμεις πλάγιαι ὡς πρὸς τὸ θεωρούμενον τμῆμα ἐπιφανείας, δυνάμεις, δηλ., μὲ συνιστῶσαν παράλληλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ παράλληλος αὐτὴ συνιστῶσα ἔχει τοιαύτην φοράν, ὥστε νὰ τείνῃ νὰ ἐξισώσῃ τὰς ταχύτητας τῶν στρωμάτων δι' ἐπιταχύνσεως τοῦ βραδυτέρου στρώματος καὶ ἐπιβραδύνσεως τοῦ ταχυτέρου. Κατὰ τὴν διερεύνησιν, λοιπόν, τῆς κινήσεως τὴν ὁποίαν ἐκτελεῖ ἕνα ὡρισμένον τμῆμα ρευστοῦ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων τὰς ὁποίας ἐξασκοῦν ἐπ' αὐτοῦ τὰ γειτονικὰ τμήματα τοῦ ρευστοῦ, θὰ πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὄχι μόνον ἡ πίεσις—ἡ ὁποία παρέχει τὴν κάθετον συνιστῶσαν—, ἀλλὰ καὶ αἱ πλάγιαι συνιστῶσαι.

Ἄλλο φαινόμενον ἐπεμβαῖνον εἰς τὰ ζητήματα τῆς ροῆς εἶναι ἡ ***συνοχὴ*** μεταξὺ τῶν ρευστῶν καὶ τῶν στερεῶν σωμάτων μὲ τὰ ὁποῖα τὰ πρῶτα εὑρίσκονται εἰς ἐπαφήν. Λόγῳ τῆς συνοχῆς, τὸ ρευστὸν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς ἔχει πάντοτε τὴν ταχύτητα τοῦ στερεοῦ.

Ἐσωτερικὴ τριβή. Δυνάμεις μὲ πλαγίας συνιστῶσας ἐμφανίζονται εἰς τὸ ἑξῆς πείραμα: Θεωροῦμεν δύο ἐπιπέδους καὶ παραλλήλους πλάκας εὑρισκομένας εἰς ἀπόστασιν Z, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ποσότης ὑγροῦ *(σχ. 224)*. Ἂν κρατήσωμεν τὴν μίαν πλάκα ἀκίνητον ($v_2 = 0$) καὶ θελήσωμεν νὰ κινήσωμεν τὴν ἄλλην μὲ ταχύτητα v_1, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι θ' ἀπαιτηθῇ πρὸς τοῦτο μία δύναμις $\mathcal{T}_1$, ἔχουσα φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν ταχύτητα. Ἡ δύναμις αὕτη εὑρίσκεται ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ S τῆς κινουμένης πλακός, ἀνάλογος τῆς ταχύτητος $υ_1$ αὐτῆς, ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως Z καί, τέλος, ἀνάλογος ἑνὸς συντελεστοῦ η ***(συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς)*** χαρακτηριστικοῦ τοῦ ὑγροῦ *. Ἤτοι



Σχ. 224. *Διάταξις πρὸς ἐπίδειξιν τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς ἑνὸς ὑγροῦ (ἀρχή).*

$$T_1 = \eta \cdot S \cdot \frac{υ_1}{Z}. \quad (1)$$

Ἡ δύναμις αὕτη, ἡ ὁποία καλεῖται ***ἐσωτερικὴ τριβή,*** ἐξασκεῖται ἐπὶ τῆς κινουμένης πλακὸς ὑπὸ τῆς ἀκινήτου τοιαύτης διὰ μέσου τοῦ ὑγροῦ. Λόγῳ τῆς ἀρχῆς «δρᾶσις = ἀντίδρασις», καὶ ἡ κινουμένη πλὰξ ἐξασκεῖ ἴσην δύναμιν T_2 ἐπὶ τῆς ἀκινήτου, τείνουσαν νὰ παρασύρῃ αὐτήν.

Κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἄνω πλακός, ἡ δύναμις τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς παράγει ἔργον, τὸ ὁποῖον, μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα, προκαλεῖ θέρμανσιν τοῦ ὑγροῦ.

Διαστάσεις καὶ μονάδες τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς. Ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς η ἔχει διαστάσεις

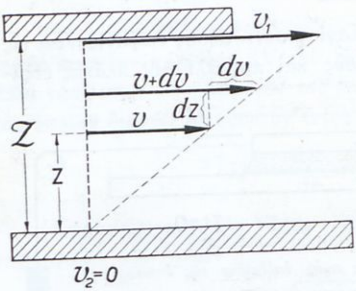
$$[\eta] = \frac{[F] \cdot [Z]}{[S] \cdot [υ]}.$$

* Ὁ συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς ἐξαρτᾶται πολὺ ἐκ τῆς θερμοκρασίας, ἐλαττούμενος, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, μετ' αὐτῆς.

Ὡς μονὰς συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς* εἰς τὸ σύστημα C.G.S χρησιμοποιεῖται τὸ

$$1\ \mathrm{gr}\cdot\mathrm{cm}^{-1}\cdot\mathrm{sec}^{-1}=1\ \mathrm{Poise}\ (1\ \mathrm{P})\qquad \text{(ἀπὸ τὸν Poiseuille).}$$

Κατανομὴ ταχυτήτων. Λόγῳ τῆς συνοχῆς τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ μὲ τὰ μόρια τοῦ τοιχώματος, τὸ ὑγρὸν τὸ εὑρισκόμενον εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μετὰ τῆς κινουμένης πλακὸς κινεῖται καὶ αὐτὸ μὲ τὴν ταχύτητα $υ_1$. Κατ᾽ ἀναλογίαν, εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κάτω πλακὸς ἡ ταχύτης τοῦ ὑγροῦ εἶναι μηδέν. Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, αἱ ταχύτητες αὐξάνουν μετὰ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς κάτω πλακός. Ἂν παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι γραμμικὴ *(σχ. 225)*, λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὁμοιότητος τοῦ μικροῦ καὶ τοῦ μεγάλου τριγώνου τὴν σχέσιν



Σχ. 225. *Ἐντὸς τοῦ στρώματος τοῦ ὑγροῦ τοῦ εὑρισκομένου μεταξὺ τῶν πλακῶν τοῦ προηγουμένου σχήματος δεχόμεθα ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι γραμμική.*

$$\frac{υ_1}{Z}=\frac{dυ}{dz},$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{T=η\cdot S\cdot\frac{dυ}{dz}}$$

Τὸ πηλίκον $dυ/dz$ καλεῖται ***πτῶσις ταχύτητος.***

Ἡ ἐμφάνισις ἐσωτερικῆς τριβῆς εἰς περιοχὰς εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχει πτῶσις ταχύτητος, δηλ. ἡ ἐμφάνισις δυνάμεων μεταξὺ στρωμάτων διαφόρων ταχυτήτων, ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι μόρια, προερχόμενα ἀπὸ στρώματα μεγάλης ταχύτητος, εἰσέρχονται ἐντὸς γειτονικῶν στρωμάτων μικροτέρας ταχύτητος, μεταδίδοντα εἰς αὐτὰ τὴν ὁρμήν των καὶ προκαλοῦντα, οὕτω, ἐπιτάχυνσιν αὐτῶν. Ἀντιθέτως, ἡ μετάβασις μορίων ἀπὸ στρώματα μικρᾶς εἰς στρώματα μεγάλης ταχύτητος προκαλεῖ ἐπιβράδυνσιν τῶν τελευταίων.

Πραγματικὰ καὶ ἰδανικὰ ρευστά. Ἀφοῦ ἐγνωρίσαμεν τὰς δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐξασκοῦνται ἐπὶ οἱουδήποτε τμήματος ἑνὸς ρευστοῦ, θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι δυνατὸς ὁ ὑπολογισμὸς τῆς κινήσεως αὐτοῦ ὑπὸ δεδομένας ἐξωτε-

* Εἰς τὴν βιομηχανίαν, ἀντὶ τῆς μονάδος *Poise*, χρησιμοποιεῖται ὁ βαθμὸς *Engler* E. Ἡ σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς η εἰς μονάδας *Poise* καὶ τοῦ E εἰς μονάδας *Engler* δίδεται ὑπὸ τοῦ πρακτικοῦ τύπου :

$$100\frac{η}{ρ}=7{,}24\ \mathrm{E}-\frac{6{,}25}{\mathrm{E}}$$

ἔνθα ρ εἶναι ἡ πυκνότης εἰς μονάδας *gr/cm³*.

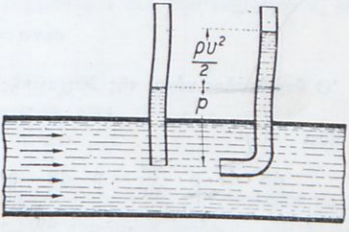
ρικὰς συνθήκας, δι' ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς. Ἐν τούτοις παρουσιάζονται τοιαῦται μαθηματικαὶ δυσχέρειαι, ὥστε τὰ προβλήματα τῆς ροῆς εἰς ἐλαχίστας μόνον περιπτώσεις νὰ ἔχουν λυθῆ. Ἡ θεωρητικὴ μελέτη τῆς ροῆς ἁπλουστεύεται ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ρευστὸν ὡς τελείως ἀσυμπίεστον, ἀπηλλαγμένον ἐσωτερικῆς τριβῆς καὶ μὴ παρουσιάζον συνοχὴν μὲ τὰ στερεὰ μὲ τὰ ὁποῖα ἔρχεται εἰς ἐπαφήν. Ἕνα ρευστὸν μὲ τοιαύτας ἰδιότητας καλεῖται ***ἰδανικὸν ρευστόν.*** Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοῦτο, τὰ ἐν τῇ φύσει παρουσιαζόμενα ρευστὰ καλοῦνται ***πραγματικά.*** Εἰς τὰς προσεχεῖς παραγράφους θὰ ἐρευνήσωμεν κατὰ πρῶτον τοὺς νόμους τῆς ροῆς τῶν ἰδανικῶν ρευστῶν καὶ κατόπιν τὴν ροὴν τῶν πραγματικῶν ρευστῶν δι' ὡρισμένας τεχνικῶς ἐνδιαφερούσας περιπτώσεις.

§ 128. Ροὴ ἰδανικοῦ ρευστοῦ. Ἐκτὸς τοῦ νόμου τῆς συνεχείας (*§ 126*), τοῦ παρέχοντος τὴν ταχύτητα εἰς κάθε σημεῖον μιᾶς φλεβός, ἰσχύει εἰς τὴν ροὴν τῶν ἰδανικῶν ρευστῶν καὶ ὁ ***νόμος τοῦ Bernoulli***, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν πίεσιν κατὰ μῆκος τῆς φλεβός. Ἐὰν καλέσωμεν p τὴν πίεσιν, υ τὴν ταχύτητα καὶ h τὸ ὑψόμετρον, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

$p + \varrho \cdot \frac{\upsilon^2}{2} + \varepsilon \cdot h = \text{σταθ.}$	Νόμος τοῦ Bernoulli	(1)

Εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τὸ p παριστᾷ τὴν πίεσιν, ὡς αὕτη μετρεῖται διὰ μανομέτρου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως τὸ ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ ἄκρον νὰ μὴ μεταβάλλῃ τὴν ροὴν (*σχ. 226, α*), καὶ τὴν ὁποίαν εἰς τὰ κατωτέρω θὰ ὀνομάζωμεν ***στατικὴν πίεσιν.***

Τὸ μονώνυμον $\varrho\upsilon^2/2$ καλοῦμεν ***δυναμικὴν πίεσιν,*** τὸ δὲ μονώνυμον $\varepsilon \cdot h$ ***ὑψομετρικὴν πίεσιν.*** Κατόπιν τῶν ὁρισμῶν αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸν νόμον τοῦ Bernoulli ὡς ἑξῆς :



Σχ. 226. *Τὸ μανόμετρον α μετρεῖ τὴν στατικὴν πίεσιν, ἐνῶ τὸ μανόμετρον β τὴν πίεσιν εἰς σημεῖον ἀνακοπῆς.*

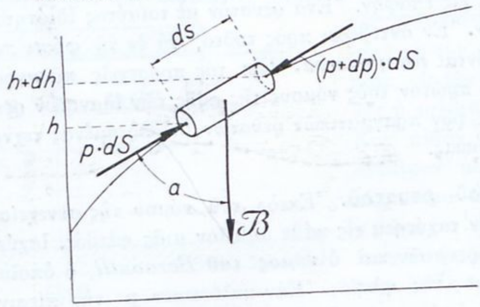
«Κατὰ μῆκος μιᾶς φλεβὸς τὸ ἄθροισμα τῆς στατικῆς, τῆς δυναμικῆς καὶ τῆς ὑψομετρικῆς πιέσεως εἶναι σταθερόν».

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ φλὲψ εἶναι ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί α, τὸ ὑψόμετρον h παραμένει σταθερὸν κατὰ τὴν ροὴν καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) ἁπλουστεύεται εἰς τὴν ἑξῆς :

$p + \varrho \cdot \frac{\upsilon^2}{2} = \text{σταθ.}$	Νόμος τοῦ Bernoulli δι' ὁριζοντίαν φλέβα.	(2)

Ὅπως εἶναι δυνατὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὁ νόμος τοῦ Bernoulli ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πρότασιν ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια δεδομένου τμήματος τοῦ ρευστοῦ —δηλ. ἡ ἐνέργεια ἡ προερχομένη ἀπὸ τὴν πίεσιν, ἡ κινητικὴ ἐνέργεια καὶ ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, λόγῳ τοῦ πεδίου βαρύτητος—παραμένει σταθερὰ καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς φλεβός.

Ἀπόδειξις τῆς ἐξισώσεως (1). Θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν στοιχειώδους τμήματος τοῦ ρευστοῦ ἔχοντος σχῆμα κυλίνδρου μὲ ὕψος ds, *(σχ. 227)* μὲ ἐμβαδὸν βάσεως dS καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Ἐπὶ τοῦ τμήματος τούτου τοῦ ρευστοῦ ἐξασκοῦνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς τρεῖς δυνάμεις: α) ἡ δύναμις p · dS, ἡ ἐξασκουμένη ἐκ τῆς πιέσεως τοῦ περιβάλλοντος ὑγροῦ ἐπὶ τῆς μιᾶς βάσεως, β) ἡ δύναμις (p + dp) · dS, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης βάσεως καὶ γ) ἡ συνιστῶσα τοῦ βάρους κατὰ τὴν διεύθυνσιν ταύτην, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς



Σχ. 227.

$$\text{εἰδικὸν βάρος} \cdot \text{ὄγκος} \cdot \text{συν}\,\alpha = \varepsilon \cdot dS \cdot ds \cdot \text{συν}\,\alpha.$$

Τὸ συν α εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ὕψους ds τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς ὑψομετρικῆς διαφορᾶς dh τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ἤτοι

$$\text{συν}\,\alpha = \frac{dh}{ds}.$$

Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς

$$\text{μᾶζα} \cdot \text{ἐπιτάχυνσις} = \text{δύναμις}$$

μᾶς δίδει

$$dS \cdot ds \cdot \varrho \cdot \frac{dv}{dt} = p \cdot dS - (p + dp) \cdot dS - \varepsilon \cdot dS \cdot ds \cdot \frac{dh}{ds}$$

ἢ

$$ds \cdot \varrho \cdot \frac{dv}{dt} = - dp - \varepsilon \cdot dh.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

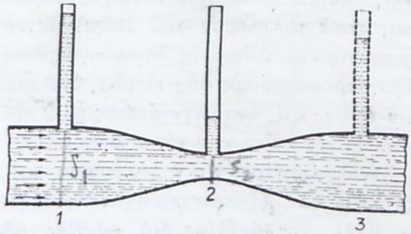
$$\varrho \cdot v \cdot dv + dp + \varepsilon \cdot dh = 0.$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν τύπον (1):

$$\varrho \cdot \frac{v^2}{2} + p + \varepsilon \cdot h = \text{σταθ}.$$

Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου τοῦ ***Bernoulli.*** Ἐὰν παρακολουθήσωμεν τὴν στατικὴν πίεσιν κατὰ μῆκος μιᾶς φλεβός, θὰ εὕρωμεν ὅτι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, εἰς σημεῖα μὲν μεγάλης ταχύτητος αὕτη εἶναι ἠλαττωμένη, εἰς σημεῖα δὲ μικρᾶς ταχύτητος ηὐξημένη. Ὁ συλλογισμὸς οὗτος, ἐφαρμοζόμενος εἰς τὴν ροὴν τοῦ σχήματος 222, δεικνύει ὅτι εἰς τὴν στένωσιν τοῦ σωλῆνος, εἰς τὴν ὁποίαν, κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας, ἡ ταχύτης εἶναι μεγάλη, ἡ πίεσις θὰ εἶναι μικρά.

Τὸ ἀνωτέρω φαινόμενον ἐκμεταλλευόμεθα εἰς τὸ ***βεντουρίμετρον*** — ὄργανον χρησιμοποιούμενον διὰ τὴν μέτρησιν τῆς παροχῆς ἑνὸς σωλῆνος —, ἀνάγοντες μετρήσεις ταχύτητος εἰς μετρήσεις πιέσεως. Τὸ ὄργανον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁριζόντιον σωλῆνα φέροντα στένωσιν *(σχ. 228)* καὶ εἰς τὸν ὁποῖον, διὰ καταλλήλου διατάξεως, μετροῦμεν τὰς στατικὰς πιέσεις εἰς δύο τομὰς 1, 2 διαφορετικοῦ ἐμβαδοῦ. Ἐὰν γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς συνεχείας καὶ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ τὰς δύο ταύτας τομάς, λαμβάνομεν



Σχ. 228. *Βεντουρίμετρον. Ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς πιέσεως εἰς τὰ σημεῖα 1 καὶ 2 εὑρίσκεται ἡ παροχή.*

$$S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2$$

καὶ

$$p_1 + \varrho \cdot \frac{\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \varrho \cdot \frac{\upsilon_2^2}{2}.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα υ_1 εἰς τὴν τομὴν 1 τὴν τιμὴν

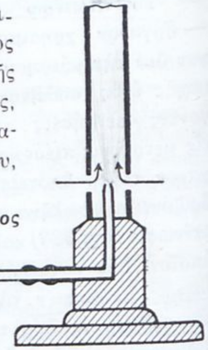
$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}.$$

Ἐὰν λοιπὸν μετρήσωμεν τὴν διαφορὰν $p_1 - p_2$ τῶν πιέσεων καὶ γνωρίζωμεν τὰ ϱ, S_1 καὶ S_2, εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα ροῆς υ_1 καὶ ἐκ ταύτης τὴν παροχήν.

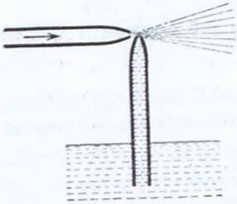
Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν θέσωμεν ἕνα μανόμετρον εἰς τὴν θέσιν 3, τοῦτο θὰ δεικνύῃ τὴν αὐτὴν πίεσιν τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ μανόμετρον εἰς τὴν θέσιν 1. Παρατηροῦμεν, δηλ., ὅτι, κατὰ τὴν ροὴν ἑνὸς ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ πίεσις ἑκατέρωθεν μιᾶς στενώσεως εἶναι ἡ αὐτή. Τοῦτο ὅμως δὲν ἰσχύει κατὰ τὴν ροὴν τῶν πραγματικῶν ὑγρῶν, εἰς τὰ ὁποῖα, λόγῳ τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς, ἡ πίεσις, ὡς θὰ ἴδωμεν, θὰ εἶναι μετὰ τὴν στένωσιν μικροτέρα τῆς πιέσεως τῆς πρὸ τῆς στενώσεως, ὅπως ἀκριβῶς δεικνύουν τὰ σχήματα 228 καὶ 240.

Ἄλλας ἐφαρμογὰς τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli εὑρίσκομεν εἰς τὴν λειτουργίαν τοῦ ***λύχνου Bunsen*** *(σχ. 229)*: Τὸ φωταέριον ἐξέρχεται διὰ τοῦ στομίου τοῦ κεντρικοῦ σωληνίσκου—τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἀκροφύσιον*—μὲ μεγάλην ταχύτητα. Ἀκολούθως ῥέει εἰς τὸν κύριον σωλῆνα μὲ μικροτέραν ταχύτητα, λόγῳ τῆς μεγαλυτέρας αὐτοῦ διατομῆς. Ἡ πίεσις εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ κυρίου σωλῆνος εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικήν, ὁπότε ἡ πίεσις εἰς περιοχὰς μεγάλης ταχύτητος εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, μικροτέρα τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Λόγῳ τῆς δημιουργουμένης ὑποπιέσεως, ὁ ἔξω ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ εἰσρέει, διὰ καταλλήλων πλαγίων ὀπῶν, καί, ἀναμειγνυόμενος μετὰ τοῦ φωταερίου, προκαλεῖ τὴν καλυτέραν αὐτοῦ καῦσιν.

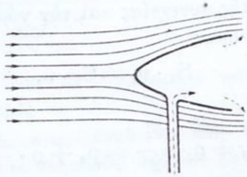
Ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ λειτουργία τοῦ **ψεκαστῆρος** *(σχ. 230)* τῶν **ἐξαεριστήρων** τῶν ὀχημάτων *(σχ. 231)*, τῆς **ἀντλίας διὰ φλεβὸς ὕδατος** *(§ 142, σχ. 316)*, τῆς **ἀντλίας διὰ φλεβὸς ἀτμῶν ὑδραργύρου** *(§ 142, σχ. 317) κ.λ.*



Σχ. 229. *Λύχνος τοῦ Bunsen.*



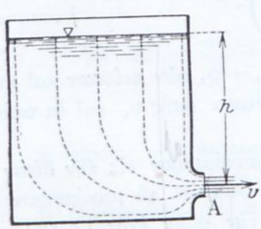
Σχ. 230. *Ψεκαστὴρ (ἀρχή).*



Σχ. 231. *Ἐξαεριστὴρ ὀχημάτων.*

Θεώρημα τοῦ *Torricelli*. *«Ὑγρὸν ῥέον, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, δι᾽ ὀπῆς εὑρισκομένης εἰς βάθος h ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας, ἔχει ταχύτητα ἴσην μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν θὰ ἐλάμβανεν ἐὰν ἔπιπτεν ἐλευθέρως ἀπὸ τοῦ ὕψους τούτου».*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ὀπὴ ἔχει ἐμβαδὸν πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας *(σχ. 232)*, καὶ τοῦτο διότι θέλομεν τὸ ὑγρὸν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας νὰ διατηρῇ κατὰ τὴν ῥοὴν ταχύτητα ἴσην πρὸς μηδέν.



Σχ. 232.

Ὁ νόμος τοῦ Bernoulli δίδει

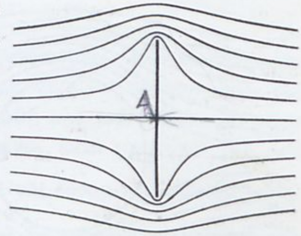
$$p_0 + \varrho \cdot \frac{v_0^2}{2} + \varepsilon \cdot h_0 = p_A + \varrho \cdot \frac{v_A^2}{2} + \varepsilon \cdot h_A$$

ἔνθα οἱ δεῖκται 0 καὶ A ἀνάγονται εἰς σημεῖα τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ τῆς ὀπῆς.

Ἐπειδὴ αἱ πιέσεις p_0 καὶ p_A εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν καὶ ἡ ταχύτης v_0 ἴση πρὸς μηδέν, λαμβάνομεν

$$v_A = \sqrt{2\,g \cdot (h_0 - h_A)} = \sqrt{2\,g\,h}.$$

Ῥοὴ περὶ πλάκα κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ῥοῆς. Σημεῖα ἀνακοπῆς. Ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ διερεύνησις τῆς ῥοῆς περὶ ἐπίπεδον πλάκα καθέτως τεθεῖσαν πρὸς τὸ ρεῦμα *(σχ. 233)*. Ἡ μορφὴ τῶν ρευματικῶν γραμμῶν δεικνύει ὅτι πλησίον τῶν ἀκμῶν τῆς πλακὸς ἡ ταχύτης εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐπειδὴ δὲ ἐκεῖ καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητος εἶναι ὁμοίως μεγάλη, ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχει ἐξαιρετικῶς μεγάλας τιμάς. Εἰς τὸ κέντρον τῆς πλακὸς καὶ εἰς ἀμφοτέρας αὐτῆς τὰς πλευράς, ὑπάρχουν σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τοῦτο εἶναι προφανὲς διότι εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν τὸ ἄνυσμα τῆς ταχύτητος εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ εἶχε διεύθυνσιν εἴτε πρὸς τὰ ἄνω εἴτε πρὸς τὰ κάτω, ὅπερ ἄτοπον διότι ἐκεῖ ἡ ροὴ εἶναι συμμετρική. Σημεῖα μὲ τοιαύτας ἰδιότητας, καλοῦνται ***σημεῖα ἀνακοπῆς.***



Σχ. 233. *Ροὴ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ ἐπίπεδον πλάκα.*

Ἡ στατικὴ πίεσις p_A εἰς σημεῖον ἀνακοπῆς ὑπολογίζεται ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ φλέβα διερχομένην ἀπείρως πλησίον τοῦ σημείου τούτου. Ἐκλέγομεν πρὸς τοῦτο δύο σημεῖα, τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖον, εὑρισκόμενον εἰς τόσον μεγάλην ἀπὸ τῆς πλακὸς ἀπόστασιν, ὥστε ἐκεῖ ἡ πίεσις p_∞ καὶ ἡ ταχύτης υ_∞ νὰ μὴ ἔχουν μεταβληθῇ ἐκ τῆς παρουσίας τῆς πλακός ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$p_\infty + \frac{\varrho \upsilon_\infty^2}{2} = p_A + \frac{\varrho \upsilon_A^2}{2}.$$

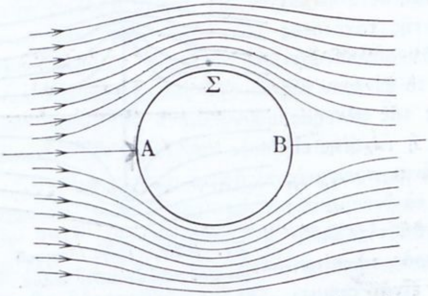
Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης υ_A εἰς τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, λαμβάνομεν

$$\left| \; p_A = p_\infty + \frac{\varrho \upsilon_\infty^2}{2} . \right| \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πίεσις λαμβάνει τὴν μεγίστην της τιμὴν εἰς τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς.

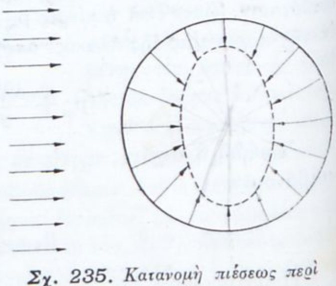
Ἐκ τῆς συμμετρίας τῆς εἰκόνος τῆς ροῆς ἕπεται ὅτι αἱ πιέσεις εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς πλακὸς θὰ εἶναι ἴσαι καί, συνεπῶς, ἡ συνισταμένη δύναμις θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν: Ἡ πλὰξ δὲν παρουσιάζει ἀντίστασιν ἐντὸς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ. Τὸ παράδοξον τοῦτο πόρισμα, καθὼς καὶ αἱ αἰτούμεναι ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς ροῆς ἐξαιρετικῶς μεγάλαι ἐπιταχύνσεις εἰς ὡρισμένα σημεῖα μᾶς ἄγουν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ θεωρία τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ πλάκα δὲν δίδει ἀποτελέσματα χρησιμοποιήσιμα διὰ τὰ πραγματικὰ ρευστά. Τὴν πραγματικὴν ροὴν περὶ πλάκα θὰ γνωρίσωμεν εἰς ἑπομένην παράγραφον.

Ροὴ περὶ σφαῖραν. Ἄλλη ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις εἶναι ἡ ροὴ περὶ σφαῖραν *(σχ. 234)*. Ἐὰν παρακολουθήσωμεν μίαν οἱανδήποτε φλέβα, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ διατομὴ αὐτῆς παρουσιάζει διακυμάνσεις. Οὕτω, ἡ διερχομένη πλησίον τοῦ σημείου Σ φλέψ, ἔχει εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο μικροτέραν διατομὴν ἀπὸ ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἔχει μακρὰν τῆς σφαίρας, εἰς τὰ σημεῖα δηλ. εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ροὴ δὲν ἔχει ἐπηρεασθῆ ἐκ τῆς παρουσίας αὐτῆς καὶ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης ἔστω υ_∞. Κατὰ τὸν νόμον τῆς συνεχείας, ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον Σ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα* τῆς ταχύτητος υ_∞. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, δηλ. τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι σημεῖα ἀνακοπῆς.



Σχ. 234. Ροὴ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ σφαῖραν.

Ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς φλεβὸς ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli, ἡ πίεσις. Εἰς τὸ σχῆμα 235 ἀποδίδεται γραφικῶς ἡ κατανομὴ τῆς πιέσεως περὶ τὴν σφαῖραν διὰ τμημάτων εὐθείας φερομένων ἀπὸ κάθε σημεῖον αὐτῆς πρὸς τὸ κέντρον καὶ ἀναλόγων πρὸς τὴν πίεσιν. Ἡ συμμετρία τῆς σχηματιζομένης καμπύλης δεικνύει ὅτι ἡ συνισταμένη δύναμις ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἄρα σφαῖρα εὑρισκομένη ἐντὸς ἰδανικοῦ ρευστοῦ οὐδεμίαν ἀντίστασιν ὑφίσταται. Τὸ θεωρητικὸν τοῦτο συμπέρασμα, τὸ ὁποῖον ἀνεύρομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πλακός, εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται, κοινὸν τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ σῶμα οἱασδήποτε μορφῆς. Τοῦτο, βεβαίως, δὲν παρατηρεῖται εἰς τὴν πραγματικότητα, διότι, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἡ πίεσις εἰς τὸ ὄπισθεν τμῆμα τοῦ σώματος παρουσιάζεται πάντοτε μικροτέρα τῆς εἰς τὸ ἔμπροσθεν.



Σχ. 235. Κατανομὴ πιέσεως περὶ σφαῖραν εὑρισκομένην ἐντὸς ροῆς ἰδανικοῦ ρευστοῦ.

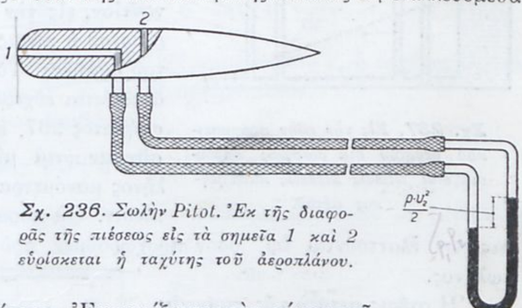
Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ θεωρία τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ δίδει, συχνά, ἀποτελέσματα τελείως ἀπέχοντα τῆς πραγματικότητος. Αἱ διαφοραὶ αὗται ὀφείλονται, κυρίως, εἰς τὸ φαινόμενον τῆς συνοχῆς μεταξὺ τῶν ρευστῶν καὶ τῶν στερεῶν μὲ τὰ ὁποῖα ταῦτα εὑρίσκονται εἰς ἐπαφήν, ὡς καὶ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβήν. Παρὰ τὰς διαφορὰς ὅμως ταύτας, ἡ διερεύνησις

* Ὅπως εὑρίσκεται δι' ὑπολογισμοῦ αὕτη ἰσοῦται μὲ 3/2 υ_∞.

τῆς ροῆς τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ δὲν εἶναι ἐντελῶς ἄσκοπος, διότι εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις *(βλ. §§ 131, 132 καὶ 137)*, παρέχει ἀποτελέσματα κατὰ προσέγγισιν ἐπαληθευόμενα.

Μέτρησις τῆς πιέσεως εἰς σημεῖα ἀνακοπῆς. Ἐὰν εἰσαγάγωμεν ἐντὸς τῆς ροῆς σωλῆνα τοῦ ὁποίου τὸ στόμιον νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς *(σχ. 226, β)*, θὰ σχηματισθῇ πρὸ τοῦ στομίου σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος πίεσις θὰ εἶναι, κατὰ τὸν τύπον (3), ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς στατικῆς πιέσεως p_∞ καὶ τῆς δυναμικῆς πιέσεως $\varrho\frac{\upsilon_\infty^2}{2}$.

Τὴν διαφορὰν μεταξὺ στατικῆς καὶ δυναμικῆς πιέσεως ἐκμεταλλευόμεθα εἰς τὸν ***σωλῆνα Pitot*** διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τῶν ἀεροπλάνων. Οὗτος ἀποτελεῖται ἀπὸ κύλινδρον «ἀεροδυναμικοῦ» σχήματος *(σχ. 236)*, φέροντα εἰς τὰ σημεῖα 1 καὶ 2 δύο ὀπάς, εἰς τὰς ὁποίας καταλήγουν, διὰ σωληνώσεως, τὰ ἄκρα ἀνοικτοῦ μανομέτρου. Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Bernoulli διὰ τὰ σημεῖα 1 καὶ 2, ἔχομεν



Σχ. 236. *Σωλὴν Pitot. Ἐκ τῆς διαφορᾶς τῆς πιέσεως εἰς τὰ σημεῖα 1 καὶ 2 εὑρίσκεται ἡ ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου.*

$$p_1 = p_2 + \varrho \cdot \frac{\upsilon_2^2}{2}.$$

(Ἡ ταχύτης υ_1 εἰς τὸ σημεῖον 1 εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σημεῖον ἀνακοπῆς).

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα υ_2 τὴν τιμὴν

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}}$$

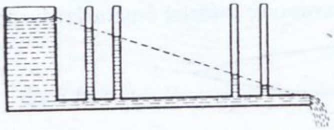
(ἔνθα ϱ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος).

Ἡ μετρουμένη ταχύτης υ_2 διαφέρει κατά τι τῆς ζητουμένης ταχύτητος υ_∞ διότι ἡ παρουσία τοῦ ὀργάνου προκαλεῖ στένωσιν τῶν φλεβῶν εἰς τὸ σημεῖον 2. Ἕνεκα τούτου οἱ σωλῆνες Pitot πρέπει νὰ βαθμολογοῦνται οὕτως ὥστε νὰ παρέχουν τὴν ταχύτητα υ_∞.

§ 129. Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ ἐντὸς σωλῆνος. Θεωρήσωμεν πραγματικὸν ρευστὸν κινούμενον ἐντὸς σωλῆνος. Ἐὰν ἡ ταχύτης εἶναι μικρά, ἡ ροὴ θὰ γίνεται ἐντὸς τακτικῶς διατεταγμένων φλεβῶν, θὰ εἶναι δηλ. στρωτή. Τοῦτο δεικνύεται πειραματικῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 221, I, εἰς τὴν ὁποίαν μία τῶν φλεβῶν ἔχει καταλλήλως χρωματισθῇ. Ἐὰν αὐξήσωμεν ἐπαρκῶς τὴν ταχύτητα, ἡ ροὴ μεταπίπτει εἰς τὴν τυρβώδη μορφὴν καὶ αἱ τροχιαὶ τῶν διαφόρων τμημάτων τοῦ ρευστοῦ γίνονται ἀκανόνιστοι καὶ διαρκῶς περιπλέκονται (II). Ἡ ταχύτης εἰς ἕκαστον σημεῖον δὲν εἶναι μὲν πλέον χρονικῶς σταθερά, κυμαίνεται ὅμως περὶ μέσην τινὰ τιμήν· ὁμοίως κυμάνσεις παρουσιάζει καὶ ἡ τιμὴ τῆς πιέσεως.

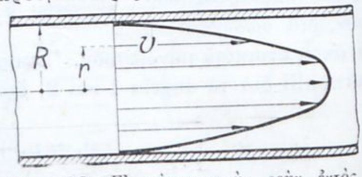
Οἱ νόμοι οἱ διέποντες τὴν ροὴν εἰς τὰς δύο ταύτας μορφὰς εἶναι διάφοροι καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἐξετασθοῦν ἰδιαιτέρως.

Στρωτὴ ροή. Εἰς τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ δι' ὁριζοντίου σωλῆνος σταθερᾶς τομῆς ἡ πίεσις κατὰ μῆκος αὐτοῦ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Bernoulli, σταθερά. Τοὐναντίον, εἰς τὴν ροὴν πραγματικοῦ ρευστοῦ ἡ πίεσις ἐλαττοῦται κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐπιδεικνύεται εὐχερῶς διὰ τῆς διατάξεως τοῦ σχήματος 237, εἰς τὴν ὁποίαν προσηρμόσθησαν κατὰ μῆκος τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος μανόμετρα μετρῶντα τὴν στατικὴν πίεσιν. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αἱ ἐνδείξεις των ἐλαττοῦνται ἐφ' ὅσον προχωροῦμεν πρὸς τὸ ἄκρον ἐκροῆς τοῦ σωλῆνος.

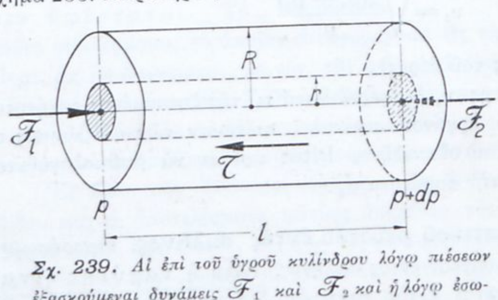


Σχ. 237. Εἰς τὴν ροὴν πραγματικοῦ ρευστοῦ διὰ σωλῆνος παρουσιάζεται πτῶσις πιέσεως κατὰ μῆκος αὐτοῦ.

Ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς παροχῆς τοῦ σωλῆνος καὶ τῆς διαφορᾶς πιέσεως εἰς τὰ ἄκρα του, ὑπελογίσθη ὑπὸ τοῦ Poiseuille. Οἱ ὑπολογισμοί του ὁδηγοῦν ἀρχικῶς εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ νόμου κατανομῆς τῶν ταχυτήτων ἐντὸς μιᾶς διατομῆς, τὸ διάγραμμα τοῦ ὁποίου καὶ ἀποδίδεται εἰς τὸ σχῆμα 238. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ φλέβες αἱ εὑρισκόμεναι εἰς διαφόρους ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἔχουν διαφόρους ταχύτητας, τῆς μεγίστης ταχύτητος ἐμφανιζομένης ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Λόγῳ τῆς συνοχῆς τοῦ ρευστοῦ μετὰ τῶν τοιχωμάτων, αἱ πλησίον αὐτῶν εὑρισκόμεναι φλέβες ἔχουν ταχύτητα ἴσην πρὸς μηδέν.



Σχ. 238. Εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων εἶναι παραβολική.



Σχ. 239. Αἱ ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ κυλίνδρου λόγῳ πιέσεων ἐξασκούμεναι δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$ καὶ ἡ λόγῳ ἐσωτερικῆς τριβῆς δύναμις $\mathcal{T}$ ἰσορροποῦν.

Τὸν νόμον τῆς κατανομῆς τῆς ταχύτητος ἐντὸς μιᾶς διατομῆς εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς:

Θεωρήσωμεν κυλινδρικὸν τμῆμα ρευστοῦ ἀκτῖνος r καὶ μήκους l *(σχ. 239)* καὶ ἔστωσαν p_1 καὶ p_2 αἱ πιέσεις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὑγροῦ τούτου κυλίνδρου. Κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου δροῦν αἱ ἑξῆς δυνάμεις: α) αἱ λόγῳ τῶν πιέσεων δυνάμεις $\mathcal{F}_1$ καὶ $\mathcal{F}_2$, καὶ β) ἡ ἐσωτερικὴ τριβὴ $\mathcal{T}$ ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν μονίμου ροῆς πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι μηδέν. Ἤτοι

$$\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 - \mathcal{T} = 0.$$

Αἱ δυνάμεις αὗται ἀφ' ἑτέρου ἰσοῦνται πρὸς

$$F_1 = p_1 \cdot \pi r^2 \quad , \quad F_2 = p_2 \cdot \pi r^2$$

καὶ

$$T = \eta \cdot S \cdot \frac{d\upsilon}{dz} = -\eta \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \frac{d\upsilon}{dr}.$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι, αὐξανομένου τοῦ r, ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται, δηλ. ὅτι διὰ θετικὸν dr, τὸ dυ εἶναι ἀρνητικόν.

Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\pi r^2 \cdot (p_1 - p_2) + \eta \cdot 2\pi r \cdot l \cdot \frac{d\upsilon}{dr} = 0.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν διαφορικὴν ταύτην ἐξίσωσιν, χωρίζομεν τὰς μεταβλητάς, ὁπότε ἔχομεν

$$d\upsilon = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} \cdot r dr.$$

Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, θὰ λάβωμεν τὴν ἑξῆς:

$$\upsilon = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta \cdot l} \cdot \frac{r^2}{2} + C \qquad (1)$$

Τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς C τῆς ὁλοκληρώσεως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς συνθήκης ὅτι διὰ r = R, δηλ. εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ σωλῆνος, ἡ ταχύτης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν

$$0 = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} \cdot R^2 + C.$$

Τὴν ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ C θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε λαμβάνομεν

$$\upsilon = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot (R^2 - r^2). \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν συνάγομεν ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν ταχυτήτων ἐντὸς τοῦ σωλῆνος εἶναι παραβολική.

Ἐκ τῆς γνωστῆς πλέον σχέσεως μεταξὺ τῆς ταχύτητος καὶ τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν παροχὴν τοῦ σωλῆνος, ἂν θεωρήσωμεν μίαν τομὴν ὡς ἀποτελουμένην ἀπὸ πολλοὺς συγκεντρικοὺς δακτυλίους, ὑπολογίσωμεν τὴν παροχὴν dΠ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν καὶ ἀθροίσωμεν τὰς ἐπὶ μέρους ταύτας παροχάς: Ἡ παροχὴ ἑνὸς δακτυλίου μὲ ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα r καὶ ἐξωτερικὴν r+dr θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$d\Pi = \text{ταχύτης} \cdot \text{ἐμβαδὸν} = \upsilon \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ τὴν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, θὰ ἔχομεν:

$$d\Pi = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης μεταξὺ τῶν τιμῶν $r = 0$ καὶ $r = R$ λαμβάνομεν

$$\Pi = \frac{(p_1 - p_2) \cdot 2\pi}{4\eta l} \cdot \left\{ R^2 \int_{r=0}^{r=R} r \cdot dr - \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr \right\} =$$

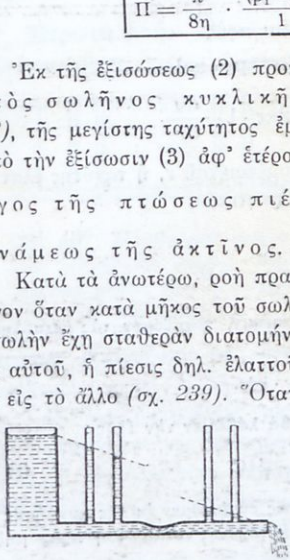
$$= \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4\eta l} \cdot \left\{ R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right\}$$

ἢ

$$\boxed{\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} \cdot R^4 \quad \text{Τύπος τοῦ } \textit{Poiseuille}} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) προκύπτει ὅτι ἡ κατανομὴ ταχυτήτων ἐντὸς σωλῆνος κυκλικῆς τομῆς εἶναι παραβολικὴ *(σχ. 238)*, τῆς μεγίστης ταχύτητος ἐμφανιζομένης ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ σωλῆνος. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀφ' ἑτέρου συνάγομεν ὅτι ἡ παροχὴ εἶναι ἀνάλογος τῆς πτώσεως πιέσεως $\left(\frac{p_1 - p_2}{l}\right)$ καὶ τῆς τετάρτης δυνάμεως τῆς ἀκτῖνος.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ διὰ σωλῆνος εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος ὑπάρχῃ πτῶσις πιέσεως. Καὶ ὅταν μὲν ὁ σωλὴν ἔχῃ σταθερὰν διατομήν, ἡ πτῶσις πιέσεως εἶναι σταθερὰ κατὰ μῆκος αὐτοῦ, ἡ πίεσις δηλ. ἐλαττοῦται γραμμικῶς ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον τοῦ σωλῆνος εἰς τὸ ἄλλο *(σχ. 239)*. Ὅταν ὅμως ὁ σωλὴν παρουσιάζῃ εἴς τι σημεῖον στένωσιν, ἡ πτῶσις πιέσεως ἐντὸς τῆς στενώσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πτώσεως τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὰ ὑπόλοιπα τμήματα τοῦ σωλῆνος καί, ὡς ἐκ τούτου, μετὰ τὴν στένωσιν ἡ πίεσις παρουσιάζεται δυσαναλόγως ἠλαττωμένη *(σχ. 240)*.



Σχ. 240. *Εἰς τὰς στενώσεις αἱ πτώσεις πιέσεως εἶναι μεγάλαι.*

Στρωτὴ ροὴ ἐντὸς μὴ ὁριζοντίων σωλήνων. Ἂν ὁ σωλὴν δὲν εἶναι ὁριζόντιος, ἀντὶ τοῦ τύπου (3), ἔχομεν τὸν ἑξῆς:

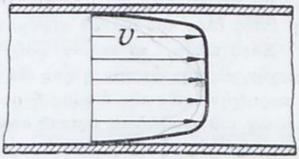
$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{l} + \frac{\varrho g h}{l} \right) \cdot R^4 \qquad (4)$$

ἔνθα p_1 εἶναι ἡ πίεσις εἰς τὸ ἀνώτατον ἄκρον τοῦ σωλῆνος καὶ p_2 εἰς τὸ κατώτατον, τὸ δὲ g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.

Ἂν πρὸς τούτοις τὸ ὑγρὸν ἔχῃ τὴν αὐτὴν στατικὴν πίεσιν εἰς τὰ δύο ἄκρα τοῦ σωλῆνος — ὅπως, π.χ., εἰς σωλῆνα ἀνοικτὸν εἰς τὰ δύο ἄκρα, ὁπότε $p_1 = p_2 = 1$ Atm — ὁ τύπος (4) ἁπλουστεύεται εἰς τὸν ἑξῆς:

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\varrho g h}{l} \cdot R^4. \qquad (5)$$

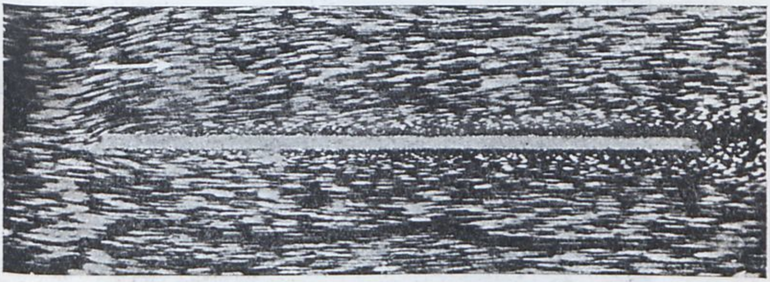
Τυρβώδης ροή. Εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ μεταβάλλονται διαρκῶς ἀκανονίστως, παρουσιάζουσαι καὶ τμήματα μὴ παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σωλῆνος. Ἡ ταχύτης εἰς ἕκαστον σημεῖον δὲν εἶναι πλέον χρονικῶς σταθερὰ ἀλλὰ μεταβάλλεται, κυμαινομένη περὶ μίαν τιμὴν τὴν ὁποίαν καλοῦμεν *μέσην ταχύτητα* εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον. Ἐνῶ εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἡ ταχύτης τῶν διαφόρων σημείων μιᾶς διατομῆς ἔχει, ὡς εἴδομεν, παραβολικὴν κατανομήν, εἰς τὴν τυρβώδη ἡ κατανομὴ τῆς μέσης ταχύτητος εἶναι ὅλως διάφορος *(σχ. 241)*. Παρατηροῦμεν ὅτι πλησίον τῶν τοιχωμάτων λαμβάνει χώραν μεγάλη πτῶσις τῆς μέσης ταχύτητος, ἐνῶ εἰς τὴν «ψυχὴν» τοῦ σωλῆνος αὕτη εἶναι περίπου σταθερά.



Σχ. 241. *Κατανομὴ τῆς μέσης ταχύτητος εἰς τὴν τυρβώδη ροήν.*

Τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζεται ἡ παροχὴ ἑνὸς σωλῆνος ὅταν ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω εἰς τὴν § 134.

§ 130. Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ κατὰ μῆκος πλακός. Θεωρήσωμεν πλάκα κρατουμένην ἀκίνητον ἐντὸς ροῆς καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Λόγῳ τῆς συνοχῆς, ἡ ταχύτης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς πλακὸς θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, θὰ αὐξάνεται δὲ μετὰ τῆς ἀποστάσεως ἀπ' αὐτῆς διὰ νὰ λάβῃ ταχέως τὴν τιμὴν



Σχ. 242. *Τὸ πάχος τοῦ ὁρικοῦ στρώματος αὐξάνεται ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ προσθίου ἄκρου τῆς πλακός.*

v_∞, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ρευστὸν εἰς ἀπομεμακρυσμένα σημεῖα. Ἡ πτῶσις ταχύτητος λαμβάνει χώραν κυρίως πλησίον τῆς πλακός, τὸ δὲ στρῶμα ἐντὸς τοῦ ὁποίου συμβαίνει τοῦτο καλεῖται ***ὁρικὸν στρῶμα***. Εἰς τὸ σχῆμα 242 φαίνεται σαφῶς τὸ στρῶμα τοῦτο, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ πάχος αὐτοῦ αὐξάνεται ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ προσθίου ἄκρου τῆς πλακός. Κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν § 127 περὶ τοῦ φαινομένου τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς, τὸ ρευστὸν θὰ ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς πλακὸς δυνάμεις ἐφαπτομενικάς, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν ἀντίστασιν αὐτῆς.

Σχ. 243. *Κατανομὴ τῆς ταχύτητος ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος.*

Ἐνῶ εἰς πολὺ μικρὰς ταχύτητας τὸ πάχος δ *(σχ. 243)* τοῦ ὁρικοῦ στρώματος εἶναι πολὺ μεγάλον, ἐλαττοῦται ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ταχύτης. Μὲ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ πάχους τοῦ ὁρικοῦ στρώματος, αὐξάνεται ἡ ἐντὸς αὐτοῦ πτῶσις ταχύτητος καὶ ἀντιστοίχως ἡ ἀντίστασις.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὴν ταχύτητα αὐξανομένην πέραν ὡρισμένου ὁρίου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος καὶ πρὸς τὸ οὐραῖον ἄκρον τῆς πλακὸς ἡ ροὴ θὰ μεταπέσῃ ἀπὸ τὴν στρωτὴν μορφὴν εἰς τὴν τυρβώδη. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν ταχύτητα ἀκόμη περισσότερον, τὸ σημεῖον μεταπτώσεως θὰ μετακινηθῇ πρὸς τὸ πρόσθιον ἄκρον, ἀπό τινος δὲ ταχύτητος καὶ πέραν ἡ ροὴ ἐντὸς ὅλου τοῦ ὁρικοῦ στρώματος θὰ εἶναι τυρβώδης.

Κατὰ ταῦτα, τὸ πεδίον ροῆς ὑποδιαιρεῖται τώρα εἰς τὴν μακρὰν τῆς πλακὸς περιοχήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ροὴ θὰ εἶναι στρωτὴ καὶ τὴν ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος περιοχὴν ἐντὸς τῆς ὁποίας ἡ ροὴ θὰ εἶναι τυρβώδης. Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τυρβώδους ὁρικοῦ στρώματος θὰ αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος ταχύτερον παρὰ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ στρωτοῦ ὁρικοῦ στρώματος.

§ 131. Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ πλάκα κάθετον ἐπὶ τὸ ρεῦμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ροὴ εἶναι στρωτὴ μόνον ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι ἐξόχως μικρά, ἐνῷ εἰς μεγαλυτέρας ταχύτητας μεταπίπτει ταχέως εἰς τὴν τυρβώδη μορφήν.

Σχ. 244. Ὄπισθεν τῆς πλακὸς καὶ ἐντὸς τῆς ***αὔλακος*** *ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης.*

Εἰς τὰς ἀκμὰς τῆς πλακὸς καὶ πρὸς τὴν ὀπισθίαν αὐτῆς πλευρὰν σχηματίζονται ἰσχυροὶ στρόβιλοι, οἱ ὁποῖοι ἀποσπῶνται περιοδικῶς καὶ ἀπομακρύνονται αὐτῆς ἐντὸς τῆς καλουμένης **αὔλακος** *(σχ. 244)*.

Εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς πλακὸς ἡ ροὴ δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς ἐκείνης ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ *(σχ. 233)*. Ἐπίσης ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον ἀνακοπῆς εὑρίσκεται ἴση πρὸς τὴν ὑπολογιζομένην κατὰ τὸν τύπον τοῦ Bernoulli. Ἀντιθέτως, εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τῆς πλακὸς δὲν σχηματίζεται σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ πίεσις ἐκεῖ εἶναι πολὺ μικρὰ μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐμφάνισιν σημαντικῆς ἀντιστάσεως.

§ 132. Ροὴ πραγματικοῦ ρευστοῦ περὶ σφαῖραν. Ἡ ροὴ περὶ σφαῖραν εἶναι στρωτή, μόνον εἰς μικρὰς ταχύτητας μεταπίπτουσα εἰς τὴν τυρβώδη διὰ μεγαλυτέρας. Ἐπειδὴ οἱ νόμοι εἶναι διάφοροι εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις, θὰ ἐξετάσωμεν ἑκάστην χωριστά.

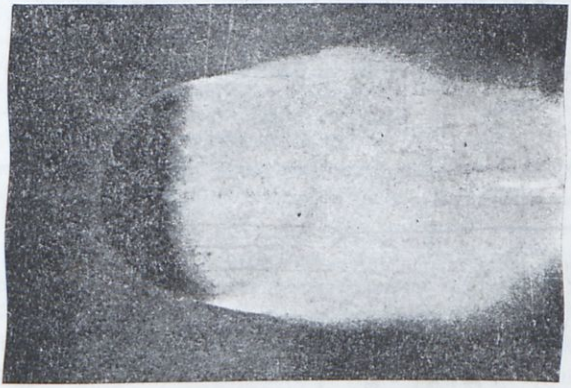
Στρωτὴ ροή. Τὴν ἀντίστασιν διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς στρωτῆς ροῆς ὑπελόγισεν ὁ Stokes εἰς

$T = 6\pi r \eta \cdot \upsilon_\infty$	Τύπος τοῦ Stokes

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ υ_∞ ἡ σχετικὴ ταχύτης τοῦ ὑγροῦ ὡς πρὸς τὴν σφαῖραν. Ἄξιον προσοχῆς εἶναι ὅτι κατὰ τὴν στρωτὴν ροὴν ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν πρώτην δύναμιν τῆς ταχύτητος.

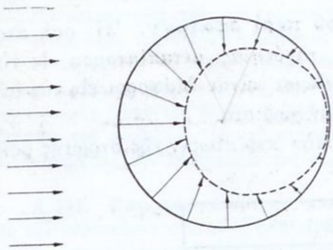
Ὅσον ἀφορᾶ τὴν κατανομὴν τῆς ταχύτητος περὶ τὴν σφαῖραν σημειοῦνται διαφοραὶ ἔναντι τῆς ἀντιστοίχου περιπτώσεως εἰς τὰ ἰδανικὰ ρευστά. Οὕτω, εἰς τὸ σημεῖον Σ τοῦ σχήματος 234, εἰς τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ροὴν τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ ἡ ταχύτης ἦτο μεγίστη, ἡ ταχύτης εἶναι τώρα, λόγῳ τῆς συνοχῆς, ἴση πρὸς μηδέν. Ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τὴν σφαῖραν, ἡ ταχύτης αὐξάνεται διὰ νὰ λάβῃ, τέλος, εἰς μεγάλην ἀπόστασιν τὴν τιμὴν υ_∞.

Τυρβώδης ροή. Ἡ μορφὴ τῆς τυρβώδους ροῆς ἀποδίδεται εἰς τὸ



Σχ. 245. Τυρβώδης ροὴ περὶ σφαῖραν.

σχῆμα 245. Εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς σφαίρας ἡ ροὴ εἶναι ἀκριβῶς ὁμοία μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ δὲ πίεσις εὑρίσκεται πειραματικῶς ἔχουσα ἐκεῖ ἀκριβῶς τὴν τιμὴν τὴν ὑπολογιζομένην ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli. Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη πρὸς τὴν ροὴν τῶν ἰδανικῶν ρευστῶν ἰσχύει δι' ὅλην τὴν περιοχὴν εἰς τὴν ὁποίαν αἱ φλέβες γίνονται στενότεραι· εἰς τὸ ὄπισθεν ὅμως μέρος, ἀντὶ ἡ διατομὴ τῶν φλεβῶν νὰ αὐξηθῇ ἐκ νέου, αὗται ἀπομακρύνονται ἀπὸ τὴν σφαῖραν ὑπὸ ταυτόχρονον σχηματισμὸν ἰσχυρῶν στροβίλων, οἱ ὁποῖοι, περιοδικῶς ἀποσπώμενοι, ἀπομακρύνονται τῆς σφαίρας ἐντὸς τῆς **αὔλακος**. Εἰς τὸ ὄπισθεν μέρος τῆς σφαίρας δὲν σχηματίζεται σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ἡ πίεσις ἐκεῖ εἶναι πολὺ μικρὰ *(σχ. 246)*. Λόγῳ, ἀκριβῶς, τῆς ἀσυμμετρίας τῆς κατανομῆς τῆς πιέσεως ἐμφανίζεται σημαντικὴ ἀντίστασις.



Σχ. 246. *Κατανομὴ τῶν πιέσεων εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν περὶ σφαῖραν.*

§ 133. Κριτήριον ἐμφανίσεως τῶν διαφόρων μορφῶν ροῆς - Ἀριθμὸς *Reynolds*. Ὡς εἴδομεν, ἡ στρωτὴ ροὴ μεταπίπτει εἰς τὴν τυρβώδη ἐὰν ἡ ταχύτης ροῆς ὑπερβῇ ὡρισμένην τιμὴν $υ_{κρ}$, τὴν ***κρίσιμον ταχύτητα.*** Ἡ τιμὴ τῆς κρισίμου ταχύτητος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μορφὴν καὶ τὰς διαστάσεις τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ ρευστοῦ. Οὕτω, διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος κυκλικῆς τομῆς εὑρέθη ὅτι ἡ κρίσιμος ταχύτης εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος r τοῦ σωλῆνος καὶ τῆς πυκνότητος ρ τοῦ ρευστοῦ, εὐθέως δὲ ἀνάλογος τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς η. Ἤτοι

$$υ_{κρ} = R_{κρ} \cdot \frac{η}{ρ \cdot r}. \tag{1}$$

Ὁ συντελεστὴς $R_{κρ}$ εἶναι, ὡς ἀποδεικνύει ὁ τύπος,

$$[R_{κρ}] = \frac{[ρ] \cdot [r] \cdot [υ_{κρ}]}{[η]}$$

καθαρὸς ἀριθμὸς καὶ ὀνομάζεται ***κρίσιμος ἀριθμὸς τοῦ Reynolds.*** Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $R_{κρ}$ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ἐκ πειραμάτων *. Κατὰ ταῦτα, ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι μικροτέρα τῆς κρισίμου ταχύτητος, ἡ ροὴ εἶναι στρωτή, μεταπίπτει δὲ εἰς τυρβώδη ὅταν τὴν ὑπερβῇ. Ἡ τιμὴ αὕτη ἀποτελεῖ ἕνα ἀνώτερον ὅριον διὰ τὴν εὐστάθειαν τῆς στρωτῆς ροῆς. Ὅταν ἡ ταχύτης ὑπερβῇ τὴν τιμὴν ταύτην, δυνατόν, ὑπὸ ὡρισμένους ὅρους, νὰ ἐξακολουθῇ ἡ ροὴ νὰ εἶναι στρωτή, ἀλλ' ἡ κατάστασις εἶναι ἀσταθὴς καὶ μεταπίπτει μὲ τὴν μικροτέραν διαταραχὴν εἰς τυρβώδη. Ἡ μετάπτωσις αὕτη ὑποβοηθεῖται εἴτε ἐκ τῆς παρουσίας ἀνωμαλιῶν εἰς τὰ τοιχώματα τοῦ σωλῆνος, εἴτε ἐξ ἄλλης τινὸς διαταραχῆς, εἶναι δὲ τόσον εὐκολωτέρα ὅσον ὁ ἀριθμὸς Reynolds ἔχει ὑπερβῇ τὴν κρίσιμον τιμήν.

* Διὰ σωλῆνα κυκλικῆς τομῆς εὑρίσκεται $R_{κρ} = 1160$.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τὰς κρισίμους ταχύτητας ἐντὸς σωλήνων μὲ μὴ κυκλικὰς διατομὰς γεωμετρικῶς ὅμως ὁμοίας (π.χ. τετραγωνικήν, τριγωνικὴν τομὴν κ. λ.), θὰ εὕρωμεν ὅτι ἰσχύει τύπος ἀνάλογος πρὸς τὸν τύπον (1). Ἤτοι

$$\upsilon_{\varkappa\varrho} = R_{\varkappa\varrho} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot l}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀκτὶς r ἀντικατεστάθη ὑπὸ μιᾶς ἄλλης ἐκ τῶν γραμμικῶν διαστάσεων τῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος, π. χ. τοῦ μήκους l τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν. Ἡ τιμὴ τοῦ $R_{\varkappa\varrho}$ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ εἶναι, προφανῶς, διάφορος τῆς τιμῆς διὰ σωλῆνα κυκλικῆς τομῆς *.

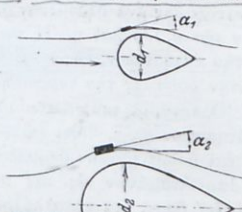
Διὰ τὴν ροὴν περὶ σφαῖραν εὑρίσκεται διὰ τὴν κρίσιμον ταχύτητα τύπος ἀνάλογος πρὸς τὸν τύπον (1). Ἤτοι

$$\upsilon_{\varkappa\varrho} = R_{\varkappa\varrho} \cdot \frac{\eta}{\varrho \cdot d} \qquad (2)$$

ἔνθα d εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας. Ἡ κρίσιμος τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds εὑρίσκεται διὰ πειραμάτων **.

Ἐάν, ἀντὶ σφαίρας, ἔχωμεν σῶμα ἄλλης μορφῆς, εὑρίσκεται ἰσχύων ὁ τύπος (2), ἀλλὰ διὰ τοῦ d θὰ συμβολίζεται γραμμική τις διάστασις τοῦ σώματος, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ $R_{\varkappa\varrho}$ θὰ πρέπη νὰ προσδιορισθῇ εἰδικῶς διὰ τὸ σῶμα τῆς ἐν λόγῳ μορφῆς.

Διὰ τὴν ταξινόμησιν τῶν διαφόρων εἰδῶν ροῆς εἶναι χρήσιμος ἡ ἔννοια τῆς ***μηχανικῆς ὁμοιότητος***. Ὅπως εἰς τὴν Γεωμετρίαν δύο σχήματα λέγονται γεωμετρικῶς ὅμοια ὅταν ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ἀντιστοίχων μηκῶν εἶναι σταθερός, οὕτω εἰς τὴν Μηχανικὴν δύο φαινόμενα λέγονται μηχανικῶς ὅμοια ὅταν ὁ λόγος δύο οἱωνδήποτε ἀντιστοίχων μηχανικῶν μεγεθῶν ἔχει σταθερὰν τιμήν. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ γεωμετρικὴ ὁμοιότης εἶναι ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν μηχανικὴν ὁμοιότητα, ἀφοῦ τὸ μῆκος εἶναι καὶ αὐτὸ μηχανικὸν μέγεθος.



Σχ. 247. Εἰς τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ εἶναι ὅμοιαι.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν αἱ δύο ροαὶ τοῦ σχήματος 247 εἶναι μηχανικῶς ὅμοιαι, θὰ πρέπει ὁ λόγος, π.χ., υ_1/υ_2, τῶν ταχυτήτων εἰς δύο ἀντίστοιχα σημεῖα νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἀνεξαρτήτως τῆς θέσεως τοῦ θεωρουμένου σημείου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸν λόγον ϱ_1/ϱ_2 δύο ἀντιστοίχων πυκνοτήτων ἢ τὸν λόγον F_1/F_2 δύο ἀντιστοίχων δυνάμεων (π. χ. τῶν δυνάμεων τῶν ἐξασκουμένων ἐπὶ τῶν δύο μελανωμένων τμημάτων τοῦ ρευστοῦ τοῦ σχήματος 247). Ἡ σταθερότης τοῦ λόγου S_1/S_2 δύο ἀντιστοίχων ἐμβαδῶν ἕπεται ἤδη ἐκ τῆς γεωμετρικῆς ὁμοιότητος.

Ἐπειδὴ αἱ διαστάσεις τῆς δυνάμεως, τῆς πυκνότητος, τῆς ταχύτητος καὶ τῆς ἐπιφανείας συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

$$[F] = [\varrho] \cdot [\upsilon^2] \cdot [S]$$

τὸ σταθερὸν πηλίκον δύο ἀντιστοίχων δυνάμεων F_1 καὶ F_2 θὰ εἶναι (συμφώνως πρὸς

---

* Ὅταν ἡ διατομὴ ἔχῃ σχῆμα ἰσοπλεύρου τριγώνου ἢ τετραγώνου πλευρᾶς *l*, ὁ κρίσιμος ἀριθμὸς *Reynolds* εἶναι 4100 καὶ 2100.

** Εἰς τὴν σφαῖραν ἡ τυρβώδης ροὴ ἀρχίζει διὰ $R_{\varkappa\varrho} = 10$.

τὰ ἐκτιθέμενα εἰς τὴν προσθήκην περὶ διαστάσεων τὴν περιεχομένην εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου) ἴσον πρὸς

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\varrho_1 \cdot \upsilon_1^2 \cdot S_1}{\varrho_2 \cdot \upsilon_2^2 \cdot S_2} \tag{3}$$

Ἐὰν εἰς τὰς δύο ροὰς ἐμφανίζωνται δυνάμεις ἐσωτερικῆς τριβῆς, τότε, δεδομένου ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S] \cdot \frac{[\upsilon]}{[l]}} \tag{§ 127}$$

(ἔνθα l εἶναι μία γραμμικὴ διάστασις χαρακτηριστικὴ τῆς ροῆς — εἰς τὸ σχῆμα 247 ἡ διάμετρος d —) θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ πηλίκον η_1/η_2 — κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ F_1/F_2 διὰ τοῦ ἴσου του ἐκ τοῦ τύπου (3) — τὴν σχέσιν

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\varrho_1 \cdot \upsilon_1 \cdot l_1}{\varrho_2 \cdot \upsilon_2 \cdot l_2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$\frac{\varrho_1 \cdot \upsilon_1 \cdot l_1}{\eta_1} = \frac{\varrho_2 \cdot \upsilon_2 \cdot l_2}{\eta_2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\varrho \cdot \upsilon \cdot l/\eta$ εἶναι σταθερὰ δι᾽ ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροάς. Ὁ λόγος

$$\boxed{R = \frac{\varrho \cdot \upsilon \cdot l}{\eta}}$$

εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς καὶ καλεῖται ***ἀριθμὸς τοῦ** Reynolds*.

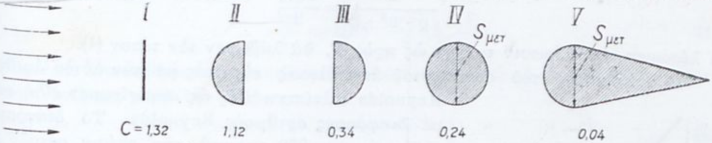
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds διὰ σταθερὰ ϱ, l καὶ η αὐξάνεται μετὰ τῆς ταχύτητος. Ἐὰν ἀφ᾽ ἑτέρου κρατήσωμεν σταθερὰ τὰ ϱ, υ καὶ η καὶ αὐξάνωμεν τὸ l, ὁ ἀριθμὸς Reynolds αὐξάνεται. Δυνάμεθα λοιπόν, ὡς βλέπομεν, νὰ ἐπιτύχωμεν ἕνα δεδομένον ἀριθμὸν Reynolds κατὰ πολλοὺς τρόπους ἀναλόγως τῶν τιμῶν τῶν ϱ, l, υ καὶ η. Ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ ἀριθμὸς Reynolds δι᾽ ἐκείνην τὴν κατάστασιν τῆς ροῆς κατὰ τὴν ὁποίαν παρατηρεῖται μετάπτωσις ἀπὸ τὴν στρωτὴν ροὴν εἰς τὴν τυρβώδη καλεῖται, ὡς εἴδομεν, *κρίσιμος ἀριθμὸς Reynolds* $R_{\kappa\varrho}$.

Ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds εἶναι μεγίστης σημασίας διὰ τὴν διερεύνησιν τῶν προβλημάτων ροῆς, διότι ἐπιτρέπει μετρήσεις ἐπὶ ὁμοιωμάτων μικροτέρων διαστάσεων (π.χ. ἐπὶ ὑποδειγμάτων ἀεροπλάνων ἐντὸς *ἀεροδυναμικῶν σηράγγων*) καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ἀποτελεσμάτων εἰς τὰς πραγματικὰς διαστάσεις. Ἡ ἀναγωγὴ αὕτη ἐπιτρέπεται μόνον ἐφ᾽ ὅσον, διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς ταχύτητος (καὶ τῆς πυκνότητος), ἐπιτύχομεν ὥστε εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς Reynolds νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμήν.

§ 134. Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν τυρβώδη ροήν. Ἡ ἀντίστασις T τὴν ὁποίαν συναντοῦν σώματα οἱασδήποτε μορφῆς ἐντὸς τυρβώδους ροῆς, εὑρίσκεται θεωρητικῶς καὶ πειραματικῶς ὅτι εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς σχετικῆς ταχύτητος, ἀνάλογος πρὸς τὸ ἐμβαδὸν $S_{\mu\varepsilon\tau}$ τῆς μεγίστης διατομῆς καθέτως πρὸς τὸ ρεῦμα ***(μετωπικῆς ἐπιφανείας)*** καὶ ἀνάλογος πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ρευστοῦ. Ἤτοι:

$$\boxed{T = c_{\alpha\nu\tau} \cdot S_{\mu\varepsilon\tau} \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot \upsilon_x^2} \tag{1}$$

Ὁ ***συντελεστὴς ἀντιστάσεως*** $c_{\alpha\nu\tau}$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ σώματος καὶ κυρίως—ὅπως προκύπτει ἐκ συγκρίσεως τῶν τιμῶν αὐτοῦ διὰ τὰ εἰς τὸ σχῆμα 275 ἀπεικονιζόμενα σώματα—ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ ὄπισθεν αὐτοῦ τμήματος. Τοῦτο εἶναι εὐνόητον διότι ἕκαστος παραγόμενος στρόβιλος πε-

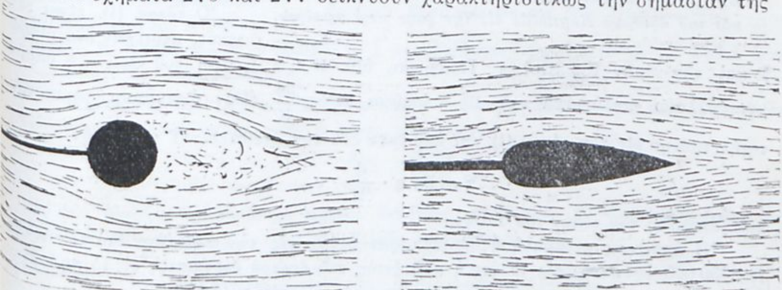


Σχ. 275. Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως ἐξαρτᾶται κυρίως ἀπὸ τὴν διαμόρφωσιν τοῦ ὄπισθεν τμήματος τοῦ σώματος.

ριέχει κινητικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἀπὸ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως τῆς ἀνθισταμένης εἰς τὴν ροήν, δηλ. τῆς ἀντιστάσεως.

Ἐάν, ἑπομένως, διὰ καταλλήλου διαμορφώσεως τοῦ ὄπισθεν μέρους τοῦ σώματος, ἐλαττωθῇ ἡ παραγωγὴ στροβίλων, θὰ ἐλαττωθῇ ἀντιστοίχως καὶ ἡ ἀντίστασις καί, κατ' ἐπέκτασιν, ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Ἐξαιρετικῶς μικρὸν συντελεστὴν ἀντιστάσεως ἔχει τὸ *ἰχθυοειδὲς* σχῆμα· τὸ κοινῶς καλούμενον «*ἀεροδυναμικὸν*» (σχ. 275, V).

Τὰ σχήματα 276 καὶ 277 δεικνύουν χαρακτηριστικῶς τὴν σημασίαν τῆς



Σχ. 276 καὶ 277. Ἡ δημιουργία στροβίλων ἀναστέλλεται διὰ καταλλήλου διαμορφώσεως τοῦ ὄπισθεν τμήματος τοῦ σώματος.

διαμορφώσεως τοῦ ὄπισθεν τμήματος. Ἐνῷ εἰς τὴν σφαῖραν παρατηρεῖται ἔντονος σχηματισμὸς στροβίλων, εἰς τὸ ἰχθυοειδὲς ἡ ροὴ εἶναι πρακτικῶς ἀπηλλαγμένη αὐτῶν.

Εἰς τ' ἀνωτέρω ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως σώματος μὲ δεδομένον γεωμετρικὸν σχῆμα ἐθεωρήθη, χάριν ἁπλότητος, σταθερός, ὁπότε ἡ ἀντίστασις, κατὰ τὸν τύπον (1), εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος. Τοῦτο ἰσχύει μὲ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν μόνον ἐφ' ὅσον συγκρίνομεν εἴδη ροῆς μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds. Ὄντως, ἐὰν γράψωμεν τὸν τύπον (3) τῆς § 133 ὡς ἑξῆς:

$$\frac{F_1}{\varrho_1 \cdot \upsilon_1^2 \cdot S_1} = \frac{F_2}{\varrho_2 \cdot \upsilon_2^2 \cdot S_2}$$

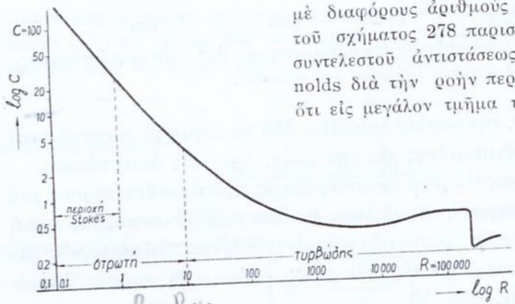
ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου τούτου θὰ εἶναι σταθερὰ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροάς,

διὰ τὸ αὐτὸ σῶμα μόνον [illegible] Reynolds (διὰ μικρὰς ταχυθὰ ἐξαρτᾶται, δηλ., μόνον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν Reynolds. Ἐὰν τὴν σταθερὰν τιμὴν τοῦ πηλίκου συμβολίσωμεν διὰ τοῦ $\frac{C_{\alpha\nu\tau}}{2}$, δηλ. ἐὰν γράψωμεν

$$\frac{F}{\varrho \cdot \upsilon^2 \cdot S} = \frac{C_{\alpha\nu\tau}}{2}$$

καὶ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς F, θὰ λάβωμεν τὸν τύπον (1).

Ἡ σταθερότης τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως εἰς ῥοὰς μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Reynolds ἐκλείπει εὐθὺς ὡς συγκρίνωμεν εἴδη ῥοῆς μὲ διαφόρους ἀριθμοὺς Reynolds. Τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 278 παριστᾷ τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds διὰ τὴν ῥοὴν περὶ σφαῖραν. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μεγάλον τμῆμα τῆς περιοχῆς τῆς τυρβώδους ῥοῆς — μεταξὺ R=200 ἕως R=150 000—ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως ἐλάχιστα μεταβάλλεται. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1), περίπου ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος.



Σχ. 278. Σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds εἰς τὴν ῥοὴν περὶ σφαῖραν.

Ὁ τύπος (1) εἶναι γενικός, περιέχων διὰ μικρὰ R καὶ τὸν νόμον τοῦ Stokes. Πράγματι, διὰ $R < 1$ ἡ τιμὴ τοῦ $C_{\alpha\nu\tau}$ — ἡ ὁποία μεταβάλλεται πολὺ μετὰ τοῦ R — ἰσοῦται πρὸς $\frac{24}{R}$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὸν τύπον (1), θὰ λάβωμεν διὰ τὴν ἀντίστασιν T τὴν τιμὴν

$$T = 6\pi\,\eta \cdot \frac{d}{2} \cdot \upsilon_\infty$$

δηλ. ἀκριβῶς τὸν τύπον τοῦ Stokes.

Ἡ ἀπότομος μεταβολὴ ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τὴν καμπύλην διὰ τὴν τιμὴν R=150 000 ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἡ ῥοὴ ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος εἰς τὸ πρόσθιον μέρος τῆς σφαίρας μεταπίπτει ἀπὸ τὴν στρωτὴν εἰς τὴν τυρβώδη.

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις δύναται γενικῶς νὰ χωρισθῇ εἰς τὴν ***ἀντίστασιν ἐκ τριβῆς*** καὶ τὴν ***ἀντίστασιν ἐκ πιέσεως.*** Ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη μᾶς εἶναι ἤδη γνωστὴ ἐκ τῆς στρωτῆς (ἢ καὶ τῆς τυρβώδους) ῥοῆς περὶ πλάκα παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ῥοῆς, δύναται δέ, ὡς εἴδομεν, νὰ θεωρηθῇ τυπικῶς ὅτι προέρχεται ἐκ δυνάμεων ἐξασκουμένων ἐπὶ τῶν στοιχειωδῶν τμημάτων τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης. Ἡ δευτέρα εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τῶν ἐξασκουμένων ἐκ τῶν πιέσεων τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς στερεὰ κινούμενα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑγρῶν ἐμφανίζεται καὶ τρίτος προσθετέος εἰς τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν - ἡ ***ἀντίστασις ἐκ κυμάτων.*** Ἡ πρόσθετος αὐτὴ ἀντίστασις, ἡ ὁποία ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὰ πλοῖα, εἶναι ἀντίστασις ἐκ πιέσεων, ὀφειλομένη εἰς τὰς διαφορὰς τῆς στάθμης τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ περὶ τὸ πλοῖον διάφορα σημεῖα. Ἡ ἐκ τῆς προσθέτου ταύτης δυνάμεως καταναλισκομένη ἐνέργεια διαδίδεται εἰς τὸ περιβάλλον διὰ τῶν ὑπὸ τοῦ πλοίου δημιουργουμένων κυμάτων.

§ 135. Ὑπολογισμὸς τῆς παροχῆς ἑνὸς σωλῆνος διὰ τὴν τυρβώδη ῥοήν. Πειραματικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ἐὰν συγκρίνωμεν ῥοὰς ἐντὸς σωλῆνος μὲ διαφόρους ταχύτητας υ, ἀκτῖνας r, συντελεστὰς ἐσωτερικῆς τριβῆς η, ἀλλὰ μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Reynolds $R = \frac{\varrho r \upsilon}{\eta}$, δηλ. ἐὰν συγκρίνωμεν «μηχανικῶς ὁμοίας» ροάς, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

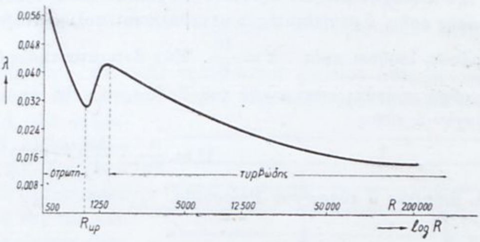
$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda(R) \cdot \frac{\varrho \overline{\upsilon}^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \qquad (1)$$

ἔνθα λ(R) εἶναι ἀδιάστατος συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἀπὸ τὸ R καὶ $\overline{\upsilon}$ ἡ ταχύτης, ἡ ὁποία ὁρίζεται κατὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\Pi = \pi r^2 \cdot \overline{\upsilon} \qquad (2)$$

ὡς τὸ πηλίκον τῆς παροχῆς Π διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος.

Ἐὰν τώρα συγκρίνωμεν ροὰς μὲ διαφόρους τιμὰς τοῦ R, θὰ εὕρωμεν διὰ κάθε R ἄλλην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ λ(R). Εἰς τὸ σχῆμα 279 ἀποδίδεται ἡ σχέσις μεταξὺ λ καὶ τοῦ logR.



Σχ. 279. Σχέσις μεταξὺ τοῦ συντελεστοῦ λ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Reynolds εἰς τὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος.

Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τυρβώδους ροῆς παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ λ δὲν μεταβάλλεται πολὺ μετὰ τοῦ R. (Οὕτω, μεταξὺ R = 4000 καὶ R = 200 000 τὸ λ μεταβάλλεται μόνον κατὰ 65 %). Τοῦτο κατὰ

Σημείωσις 1η. Ὁ τύπος (1) προκύπτει καὶ θεωρητικῶς ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ ὅτι εἰς δύο μηχανικῶς ὁμοίας ροὰς ὁ λόγος τῶν πιέσεων

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{F_1/S_1}{F_2/S_2}$$

εἰς δύο οἱαδήποτε ἀντίστοιχα σημεῖα θὰ εἶναι σταθερός. Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ λόγου F_1/F_2 ἀπὸ τὸν τύπον (3) τῆς § 133, λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{\varrho_1 \cdot \upsilon_1^2}{\varrho_2 \cdot \upsilon_2^2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\Delta p_1}{\varrho_1 \cdot \upsilon_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\varrho_2 \cdot \upsilon_2^2}.$$

Τὴν τιμὴν τοῦ ἀδιαστάτου μονωνύμου $\frac{\Delta p}{\varrho \cdot \upsilon_2}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροάς, συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\lambda \cdot \frac{1}{2r}$, ἔνθα l καὶ r εἶναι τὸ μῆκος καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ σωλῆνος — μεγέθη τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἰς ὁμοίας ροὰς θὰ εἶναι σταθερὸς — καὶ λ μία ἀδιάστατος σταθερά. Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ μονώνυμον $\frac{\Delta p}{\varrho \cdot \upsilon^2}$ ἔχει τὴν σταθερὰν τιμὴν $\lambda \cdot \frac{1}{2r}$ δι' ὅλας τὰς μηχανικῶς ὁμοίας ροάς, ἐξ οὗ προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (1).

Σημείωσις 2α. Ὁ τύπος (1) ἰσχύει ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ δύο ἄκρα τοῦ σωλῆνος εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος - πρόκειται δηλ. περὶ ὁριζοντίου ροῆς. Ἐὰν ὁ σωλὴν δὲν εἶναι ὁριζόντιος καὶ τὰ δύο ἄκρα του παρουσιάζουν ὑψομετρικὴν διαφορὰν Δh, ἰσχύει ὁ τύπος

$$\frac{\Delta p}{l} + \frac{\varrho \cdot g \cdot \Delta h}{l} = \lambda(R) \cdot \frac{\varrho \overline{\upsilon}^2}{2} \cdot \frac{1}{r}.$$

τὸν τύπον (1) σημαίνει ὅτι ἡ πτῶσις πιέσεως εἶναι περίπου ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος $\bar{\upsilon}$.

Ἡ παροχὴ ἑπομένως, ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\Pi = \pi r^2 \cdot \bar{\upsilon} = \pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{2r}{\varrho \cdot \lambda}} = \pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{l}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varrho \cdot \lambda}} \cdot r^{2,5}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν ὅτι, ὑπὸ δεδομένην πτῶσιν πιέσεως, καὶ ἐφ' ὅσον ἡ ροὴ εἶναι τυρβώδης (δηλ. $\lambda \simeq$ σταθ.), ἡ παροχὴ δὲν εἶναι πλέον ἀνάλογος τῆς τετάρτης δυνάμεως τῆς ἀκτῖνος, ὅπως εἰς τὸν νόμον τοῦ Poiseuille, ἀλλὰ ἀνάλογος μικροτέρας δυνάμεως.

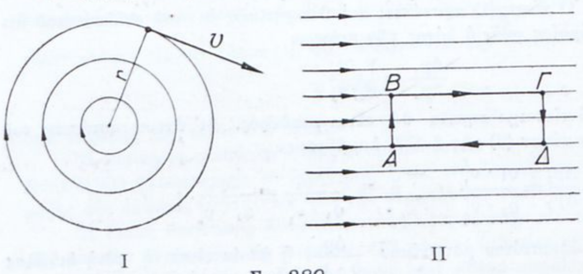
Ὁ τύπος (1) εἶναι γενικός, περιέχων καὶ τὸν νόμον τοῦ Poiseuille. Πράγματι, εἰς τὴν περιοχὴν μικρῶν ἀριθμῶν Reynolds ($R < 1160$), δηλ. εἰς τὴν περιοχὴν τῆς στρωτῆς ροῆς, ὁ συντελεστὴς λ μεταβάλλεται πολύ, μεταβαλλομένου τοῦ R, καί, συγκεκριμένως, ἰσοῦται πρὸς $\lambda = \frac{16}{R}$. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τοῦτο εἰς τὸν τύπον (1) καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ $\bar{\upsilon}$ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (2), προκύπτει διὰ τὴν παροχὴν ὁ τύπος

$$\Pi = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot r^4$$

δηλ. ἀκριβῶς ὁ τύπος τοῦ Poiseuille.

§ 136. Στρόβιλοι. Εἰς τὴν τυρβώδη ροὴν ἐμφανίζονται συχνὰ περιοχαὶ εἰς τὰς ὁποίας τὸ ρευστὸν ἐκτελεῖ ἐμφανῆ περιστροφικὴν κίνησιν. Τοιαῦται περιοχαὶ καλοῦνται ***στρόβιλοι.***

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τοῦ στροβίλου δὲν εἶναι ἐντελῶς ἀκριβής. Τὸν στρόβιλον ὁρίζομεν διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν: Θεωρήσωμεν τὸ πεδίον ταχυτήτων τοῦ σχήματος 280 Ι, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ εἶναι κυκλικαί. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int(v \cdot ds)$ κατὰ μῆκος τῆς κυκλικῆς ρευματικῆς γραμμῆς ἀκτῖνος r, θὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν



Σχ. 280.

$$\int(v \cdot ds) = \upsilon \cdot 2\pi r$$

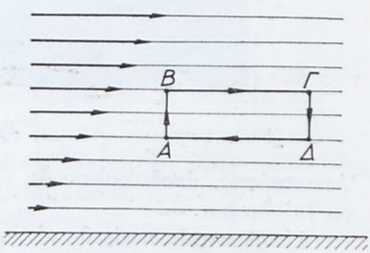
δηλ. τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος $\Gamma = \int(v \cdot ds)$ καλεῖται ***κυκλοφορία*** κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς καὶ χαρακτηρίζει τὴν ἔντασιν μὲ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ περιστροφὴ τοῦ ρευστοῦ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ταύτης.

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν τὸ πεδίον ταχυτήτων τοῦ σχήματος 280, II καὶ ὑπολογίσωμεν τὴν κυκλοφορίαν διὰ τὴν κλειστὴν γραμμὴν ΑΒΓΔ, θὰ λάβωμεν $\Gamma = 0$ διότι τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσον πρὸς μηδὲν (ἀφοῦ τὸ ἄνυσμα v εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν δρόμον), τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ εἶναι ἴσον καὶ ἀντίθετον τοῦ ὁλοκληρώματος ἐπὶ τοῦ τμήματος ΔΑ. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὸ πεδίον αὐτὸ τῶν ταχυτήτων ἡ κυκλοφορία ἐπὶ οἱασδήποτε κλειστῆς γραμμῆς ἀνεξαρτήτως τοῦ σχήματός της εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ χαρακτηρίζει μεγάλην καὶ ἐνδιαφέρουσαν κατηγορίαν πεδίων ταχυτήτων, τὴν κατηγορίαν τῶν **ἀστροβίλων πεδίων** ἢ **δυναμικῶν πεδίων**. Τοιαῦτα εἶναι καὶ τὰ πεδία τῶν σχημάτων 233 καὶ 234. Ἀντιθέτως, πεδία ταχυτήτων ὅπως τὸ πεδίον τοῦ σχήματος 280, I λέγονται **στροβιλά**. Γενικῶς, ὅταν εἰς πεδίον ταχυτήτων ἡ κυκλοφορία ἐπὶ οἱασδήποτε κλειστῆς καμπύλης εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, τὸ πεδίον καλεῖται ἀστρόβιλον, ὅταν δὲ ὑπάρχῃ καμπύλη ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ κυκλοφορία εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ πεδίον καλεῖται στροβιλόν. Ἤτοι

$\Gamma = 0$	ἀστρόβιλον πεδίον ταχυτήτων
$\Gamma \neq 0$	στροβιλὸν πεδίον ταχυτήτων

Περιοχὴ ρευστοῦ εἰς τὴν ὁποίαν τὸ πεδίον ταχυτήτων εἶναι στροβιλὸν καλεῖται **στρόβιλος**.

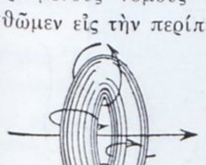
Ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος τῆς ροῆς πραγματικοῦ ρευστοῦ ὑπάρχουν στρόβιλοι. Τοῦτο εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς κυκλοφορίας κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς γραμμῆς ΑΒΓΔ τοῦ σχήματος 281 εἰς τὴν ὁποίαν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int(v \cdot ds)$ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ δὲν ἀναιρεῖται πλέον ὁλοσχερῶς ἀπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα ἐπὶ τοῦ τμήματος ΔΑ, ἀφοῦ ἐπὶ τῶν δύο ρευματικῶν γραμμῶν αἱ ταχύτητες εἶναι διάφοροι. Ὁμοίως εὑρίσκεται ὅτι ὑπάρχουν στρόβιλοι καὶ εἰς τὴν στρωτὴν ροὴν ἐντὸς σωλῆνος.



Σχ. 281.

Παρατηροῦμεν ὅτι στρόβιλοι ὑπάρχουν καὶ εἰς ροὰς εἰς τὰς ὁποίας ἐκ πρώτης ὄψεως δὲν εἶναι ἐμφανὴς ἡ περιστροφικὴ κίνησις.

Νόμοι τῶν στροβίλων. Οἱ στρόβιλοι ἀκολουθοῦν, ὡς ἀποδεικνύεται, ὡρισμένους νόμους τῶν ὁποίων ἡ διατύπωσις εἶναι εὐχερής, ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ἰδανικοῦ ρευστοῦ. Οἱ αὐτοὶ νόμοι ἰσχύουν, κατὰ προσέγγισιν, καὶ διὰ τὰ πραγματικὰ ρευστά.


Σχ. 282. *Δακτυλιοειδὴς στρόβιλος.*

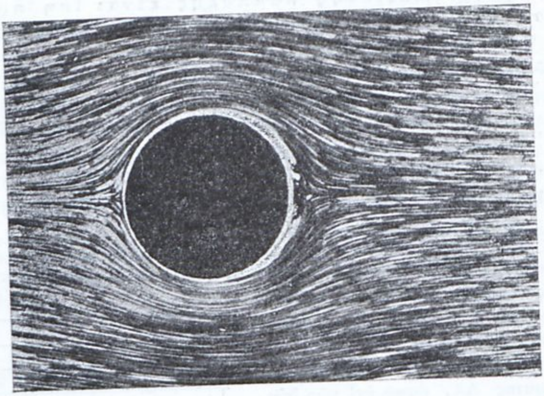
1ος Νόμος. Ἕκαστος στρόβιλος πρέπει ν' ἀποτελῇ ἕνα δακτύλιον *(δακτυλιοειδὴς στρόβιλος) (σχ. 282)*, δὲν δύναται, δηλαδή, νὰ ἀρχίζῃ ἢ νὰ τελειώνῃ ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ.

Ὁ δακτυλιοειδὴς στρόβιλος δύναται, κατὰ τὴν κίνησίν του, νὰ παραμορφοῦται, ἀλλὰ θὰ παραμένῃ πάντοτε κλειστός.

Ὅταν τὸ ρευστὸν εἶναι πεπερασμένων διαστάσεων, περιορίζεται π. χ. διὰ δοχείου, τότε δύναται ὁ δακτύλιος νὰ περατοῦται ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου.

Ὁ νόμος οὗτος εἶναι, ὡς ἀποδεικνύεται, ἀποτέλεσμα τοῦ θεωρήματος διατηρήσεως τῆς στροφικῆς ὁρμῆς.

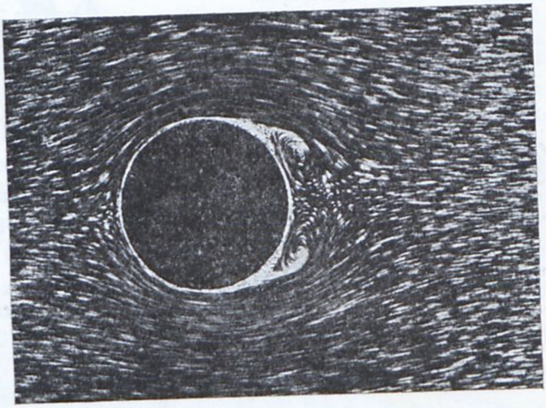
2ος Νόμος. Τὰ μόρια τοῦ ρευστοῦ τὰ ἀποτελοῦντα τὸν στρόβιλον, εἶναι πάντοτε τὰ αὐτά, δὲν ἐναλλάσσονται, δηλαδή, μετὰ τῶν μορίων τοῦ ὑπολοίπου ρευστοῦ. Εἰς τὰ ἰδανικὰ ρευστά, λόγῳ τοῦ ἀδυνάτου τῆς ἐξασκήσεως ἐφαπτομενικῶν τάσεων, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθοῦν στρόβιλοι.



Σχ. 283.

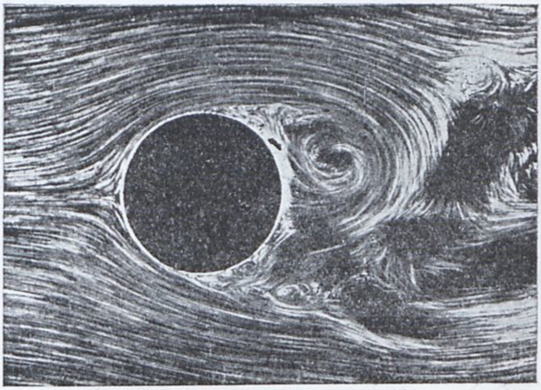
Ἀντιστρόφως, ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ τυχὸν ὑπάρχοντες στρόβιλοι διατηροῦνται ἐπ' ἄπειρον.

Πειραματικῶς δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν δακτυλιοειδεῖς στροβίλους διὰ



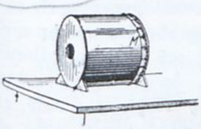
Σχ. 283α.

τῆς ἑξῆς διατάξεως *(σχ. 284)*: Ἡ μία βάσις κυλινδρικοῦ τυμπάνου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν μεμβράνην Μ, ἡ δὲ ἄλλη φέρει ὀπὴν εἰς τὸ κέντρον. Ἂν πληρώσωμεν τὸ τύμπανον διὰ νέφους (τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ παραγάγωμεν δι' εἰσαγωγῆς ἐντὸς τοῦ τυμπάνου σταγόνων τινῶν ἀμμωνίας καὶ ὑδροχλω-

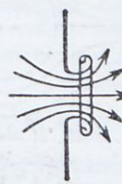


Σχ. 283 β. *Ἡ εἰκὼν αὕτη καὶ αἱ δύο προηγούμεναι παριστοῦν τρεῖς διαδοχικὰς φάσεις τῆς δημιουργίας καὶ ἀποσπάσεως στροβίλου ἅμα τῇ ἐνάρξει τῆς ροῆς περὶ κύλινδρον.*

ρικοῦ ὀξέος) καὶ κτυπήσωμεν ἀποτόμως τὴν μεμβράνην, ἐξέρχεται ἐκ τῆς ὀπῆς λευκὴ φλέψ, τῆς ὁποίας τὸ τμῆμα τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ χείλους τῆς ὀπῆς ἀναδιπλοῦται *(σχ. 285)* καὶ σχηματίζεται, οὕτω, δακτυλιοειδὴς στρόβιλος. Ὁ στρόβιλος οὗτος, ἀπομακρυνόμενος, διατηρεῖται σχετικῶς ἐπὶ μακρόν, θὰ διετηρεῖτο δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐὰν τὸ ρευστὸν δὲν εἶχεν ἐσωτερικὴν τριβήν.



Σχ. 284. *Συσκευὴ διὰ τὴν παραγωγὴν δακτυλιοειδῶν στροβίλων.*



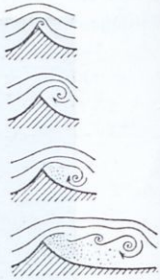
Σχ. 285. *Σχηματισμὸς δακτυλιοειδοῦς στροβίλου κατὰ τὴν ἐκροὴν δι' ὀπῆς.*

Μηχανισμὸς παραγωγῆς καὶ ἀποσπάσεως στροβίλων. Εἰς τὰ πραγματικὰ ρευστὰ οἱ στρόβιλοι παράγονται ἐντὸς τοῦ ὁρικοῦ στρώματος, λόγῳ τοῦ φαινομένου τῆς συνοχῆς ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν ἐσωτερικὴν τριβήν, ἀποσπώμενοι δὲ ἐκ τῶν στερεῶν σωμάτων παραμένουν ἐντὸς τῆς αὔλακος, ὡς ἐμφανῶς περιστρεφόμεναι μᾶζαι τοῦ ρευστοῦ. Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πλακὸς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ροὴν *(σχ. 283)*, τὸ ὁρικὸν στρῶμα τὸ ὁποῖον λείχει τὴν προσθίαν ἐπιφάνειαν, ἀποσπᾶται ἀπὸ τὴν πλάκα εἰς τὰς ἀκμὰς καὶ συσσωρεύεται ὄπισθεν αὐτῶν. Ἡ συσσώρευσις αὕτη τῶν στροβιλιζομένων μαζῶν τοῦ ρευστοῦ ἄγει τελικῶς εἰς τὸν σχηματισμὸν ἰσχυροῦ στροβίλου, ὁ ὁποῖος, ὅταν αὐξηθῇ ἐπαρκῶς, ἀπομακρύνεται τῆς πλακός.

Ἐμφανεῖς στρόβιλοι σχηματίζονται γενικῶς εἴτε εἰς σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα, λόγῳ τῆς ἀσυνεχείας τῆς ροῆς, ἐπέρχεται ἀπόσπασις καὶ συσσώρευσις τοῦ ὁρικοῦ στρώματος (ὅπως εἰς τὰς ἀνωμαλίας τῆς στερεᾶς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος 287), εἴτε εἰς περιοχὰς εἰς τὰς ὁποίας τὸ ρευστὸν τὸ ὁποῖον λείχει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ κινεῖται ἀπὸ σημεῖα μικροτέρας πιέσεως εἰς σημεῖα μεγαλυτέρας (ὅπως τὰ τμήματα τοῦ ρευστοῦ τὰ κινούμενα ἀπὸ τὸ σημεῖον b πρὸς τὸ σημεῖον c τοῦ σχήματος 288).

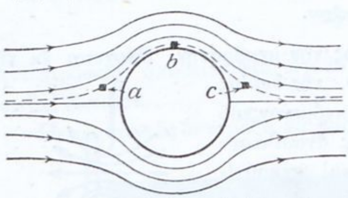
Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ τελευταίου τούτου φαινομένου θεωροῦμεν τὴν φλέβα

Σχ. 286.



Σχ. 287. Διαδοχικαὶ εἰκόνες τῆς ροῆς περὶ ἀνωμαλίας μιᾶς ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων a, b, c. Εἰς τὰ ἰδανικὰ ρευστὰ τὸ περιεχόμενον τῆς φλεβὸς ταύτης ἐπιταχύνεται μεταξὺ τῶν σημείων a καὶ b καὶ ἡ πίεσις ἐλαττοῦται ἀντιστοίχως. Ἀντιθέτως, μεταξὺ τῶν σημείων b καὶ c ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται ἐκ νέου, αὐξανομένης ἀντιστοίχως τῆς πιέσεως. Εἰς τὰ πραγματικὰ ρευστὰ ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον b εἶναι, λόγῳ τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς, μικροτέρα τῆς ὑπὸ τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli προβλεπομένης, ὁπότε καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ποσότητός τινος τοῦ ρευστοῦ, εὑρισκομένης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, θὰ εἶναι ἀνεπαρκὴς διὰ νὰ φθάσῃ ἡ ποσότης αὕτη εἰς τὸ σημεῖον c. Ὡς ἐκ τούτου τὸ ρευστὸν ἀναδιπλοῦται καὶ ἐμφανίζεται εἷς ἰσχυρὸς στρόβιλος.



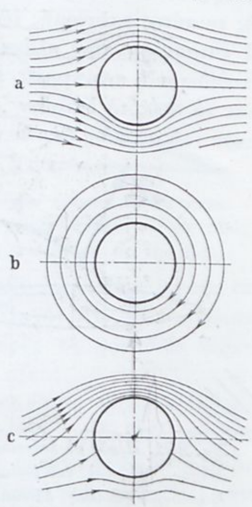
Σχ. 288. Ἡ πίεσις εἰς τὸ σημεῖον c εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πιέσεως εἰς τὸ σημεῖον b. Τοῦτο διευκολύνει τὴν παραγωγὴν στροβίλου.

§ 137. Δυναμικὴ ἄνωσις. Μέχρι τοῦδε ἐγνωρίσαμεν δυνάμεις ἐξασκουμένας ὑπὸ τῶν ρευστῶν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, ἤτοι ἀντιστάσεις. Ἐνταῦθα θὰ γνωρίσωμεν τοὺς ὅρους ὑπὸ τοὺς ὁποίους ἐμφανίζονται δυνάμεις πλαγίως ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, δηλ. δυνάμεις μὲ συνιστῶσαν κάθετον ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Τὴν κάθετον ταύτην συνιστῶσαν, καλοῦμεν ***δυναμικὴν ἄνωσιν***. Τοιαύτη ἁπλῆ περίπτωσις ἐμφανίζεται εἰς τὸ φαινόμενον Magnus.

Φαινόμενον *Magnus*. Ὅταν ἰδανικὸν ρευστὸν ρέῃ περὶ ἀκίνητον κύλινδρον, αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ θὰ παρίστανται ὑπὸ τοῦ σχήματος 289, a. Ἐὰν ἀφ' ἑτέρου τὸ ρευστὸν ἐκτελῇ μόνον περιφορὰν περὶ τὸν κύλινδρον θὰ προκύψουν αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ τοῦ σχήματος 289, b. Ἐὰν τώρα τὸ ρευστὸν ἐκτελῇ ταυτοχρόνως καὶ τὰς δύο κινήσεις ἡ συνισταμένη κίνησις (c) θὰ προκύψῃ δι᾽ ἐπαλληλίας τῶν κινήσεων (a) καὶ (b). Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἄλλας μὲν περιοχὰς ἡ ταχύτης ἐκ τῆς ροῆς καὶ ἡ ταχύτης ἐκ περιφορᾶς ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη ταχύτης θὰ εἶναι μεγάλη (συμπύκνωσις τῶν ρευματικῶν γραμμῶν), ἐνῶ εἰς ἄλλας αἱ ταχύτητες ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ συνισταμένη θὰ ἔχῃ μικρὰν τιμὴν (ἀραίωσις τῶν ρευματικῶν γραμμῶν).

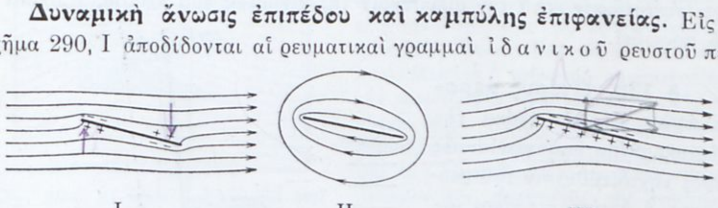
Τὰ σημεῖα ἀνακοπῆς δὲν εὑρίσκονται τώρα εἰς σημεῖα ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα ἀλλὰ μετατοπίζονται καὶ πλησιάζουν. Ἡ διαφορὰ τῶν ταχυτήτων εἰς τὴν ἄνω καὶ κάτω ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δίδει, κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ Bernoulli, διαφορὰς πιέσεως, ἀποτέλεσμα τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἐμφάνισις δυνάμεως καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, δηλ. δυναμικῆς ἀνώσεως.

Τὸ φαινόμενον Magnus δυνάμεθα νὰ ἐπιδείξωμεν δίδοντες εἰς κύλινδρον εὑρισκόμενον ἐντὸς ρεύματος περιστροφικὴν κίνησιν, ὁπότε οὗτος, λόγῳ τῆς συνοχῆς, συμπαρασύρει τὸ ρευστὸν καὶ δημιουργεῖ περιφορὰν αὐτοῦ*. Εἰς τὸ φαινόμενον Magnus ὀφείλεται καὶ ἡ ἰδιάζουσα τροχιὰ τὴν ὁποίαν διαγράφει μία ἐκσφενδονιζομένη σφαῖρα, ἡ ὁποία ταυτοχρόνως καὶ περιστρέφεται («κομμένη» σφαῖρα εἰς τὴν ἀντισφαίρισιν, τὸ ποδόσφαιρον κ.λ.).



Σχ. 289. *Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ τῆς εἰκόνος (c) εὑρίσκονται δι᾽ ἐπαλληλίας τῶν γραμμῶν τῶν εἰκόνων (a) καὶ (b).*

Δυναμικὴ ἄνωσις ἐπιπέδου καὶ καμπύλης ἐπιφανείας. Εἰς τὸ σχῆμα 290, I ἀποδίδονται αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ ἰδανικοῦ ρευστοῦ περὶ

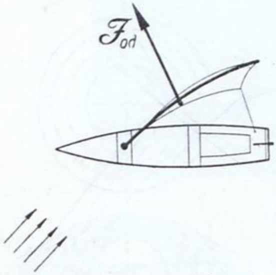


Σχ. 290. *Ρευματικαὶ γραμμαὶ περὶ ἐπίπεδον πλάκα ἀπείρου μήκους. Ἡ ροὴ τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ (I) εὑρίσκεται δι᾽ ἐπαλληλίας τῶν σχημάτων (II) καὶ (III).*

ἐπίπεδον πλάκα σχηματίζουσαν μικρὰν γωνίαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν τῆς πλακὸς σχηματίζονται δύο σημεῖα ἀνακοπῆς καὶ ὅτι εἰς ἄλλα σημεῖα ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ

* Ἡ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐμφανιζομένη ροὴ διαφέρει κατά τι τῆς εἰς τὸ σχῆμα 289, *c* ἀπεικονιζομένης ἰδανικῆς ροῆς: Ἐνῶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἰδανικοῦ ρευστοῦ ἐμφανίζεται, ὡς εἴδομεν, μόνον δυναμικὴ ἄνωσις, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πραγματικοῦ ρευστοῦ παρουσιάζεται καὶ ἀντίστασις.

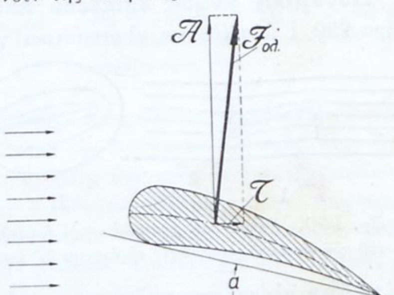
παρουσιάζεται ηὐξημένη καὶ εἰς ἄλλα ἠλαττωμένη εἰς τρόπον, ὥστε νὰ δημιουργοῦνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς ὑπερπιέσεις (+) καὶ ὑποπιέσεις (—). Λόγῳ τῆς τοιαύτης κατανομῆς τῶν πιέσεων δημιουργεῖται ζεῦγος δυνάμεων τεῖνον νὰ καταστήσῃ τὴν πλάκα κάθετον ἐπὶ τὸ ρεῦμα. Εἰς τὸ σχῆμα 290, III ἀποδίδεται ἡ περίπτωσις π ρ α γ μ α τ ι κ ο ῦ ρευστοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐξέλιπε τὸ πρὸς τὰ ὄπισθεν σημεῖον ἀνακοπῆς καὶ ὅτι τὸ ρευστὸν ἀπομακρύνεται τοῦ *οὐραίου ἄκρου* ὁμαλῶς χωρὶς νὰ τὸ παρακάμπτῃ. Εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πλακὸς ὑπάρχει τώρα παντοῦ ὑπερπίεσις, εἰς δὲ τὴν ἄνω παντοῦ ὑποπίεσις. Ἀποτέλεσμα: Ἐπὶ τῆς πλακὸς ἐξασκεῖται συνολικῶς ἐκτὸς τῆς ροπῆς καὶ δύναμις ἡ ὁποία εἶναι π λ α γ ί α ὡς πρὸς τὸ ρεῦμα, δυναμένη, οὕτω, νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας, τὴν ἀντίστασιν καὶ τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ροὴ (III) ὁμοιάζει πολὺ* μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἐπαλληλίας τῆς ροῆς (I) καὶ μιᾶς ροῆς (II) κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὑγρὸν περιφέρεται περὶ τὴν πλάκα.



Σχ. 291. *Πλοῦς μὲ ἐνάντιον ἄνεμον. Ἡ ἐπὶ τοῦ ἱστίου ἐξασκουμένη ὁλικὴ δύναμις $\mathcal{F}_{o\lambda}$ προέρχεται ἐκ συνθέσεως μιᾶς δυνάμεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνέμου (ἀντιστάσεως) καὶ μιᾶς καθέτου πρὸς αὐτὸν (ὀφειλομένης εἰς τὴν περιφοράν).*

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν διὰ κ υ ρ τ ῆ ς, ἡ περιφορὰ γίνεται ἐντατικωτέρα καί, συνεπῶς, ἡ δυναμικὴ ἄνωσις μεγαλυτέρα. Τοῦτο ἐκμεταλλευόμεθα εἰς τὴν ἱστιοπλοΐαν, δίδοντες εἰς τὰ ἱστία κατάλληλα σχήματα. Εἰς τὸ σχῆμα 291 παρατηροῦμεν ὅτι ἂν καὶ ὁ ἄνεμος εἶναι ἐνάντιος, ἡ δύναμις $\mathcal{F}_{o\lambda}$ ἔχει συνιστῶσαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ πλοίου, ἡ ὁποία καὶ τὸ προωθεῖ.

§ 138. Πτέρυξ ἀεροπλάνου. Εἰς τὴν πλάκα τὴν εὑρισκομένην ὑπὸ γωνίαν ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος, ἡ ἀντίστασις εἶναι μεγάλη σχετικῶς πρὸς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Σημαντικὴν καλυτέρευσιν ἔχομεν εἰς τὴν **πτέρυγα** τῶν ἀεροπλάνων *(σχ. 292)* εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίστασις εἶναι πολὺ μικροτέρα.

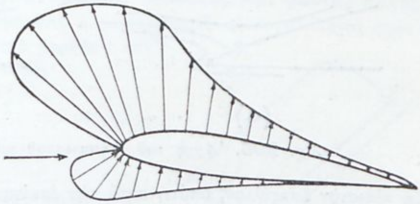


Σχ. 292. *Τομὴ πτέρυγος ἀεροπλάνου. A=δυναμικὴ ἄνωσις, T=ἀντίστασις, α=γωνία προσβολῆς.*

Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν κατανομὴν τῶν πιέσεων *(σχ. 293)*, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας

* Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται κυρίως εἰς τὸ ὁρικὸν στρῶμα τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται εἰς τὴν ροὴν πραγματικῶν ρευστῶν.

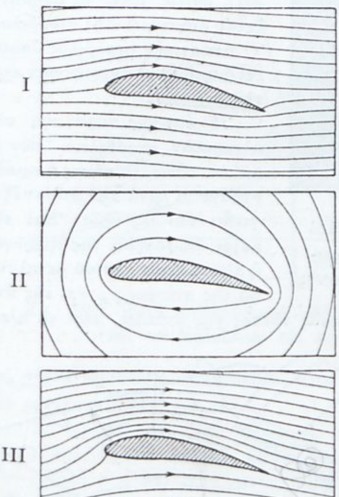
αἱ ὑποπιέσεις εἰς τὴν ἄνω ἐπιφάνειαν δὲν προκαλοῦν μόνον ἄνωσιν ἀλλὰ συγχρόνως (λόγῳ τῆς διαμορφώσεως τοῦ προσθίου ἄκρου) καὶ προωστικὴν συνιστῶσαν μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐλάττωσιν τῆς ἀντιστάσεως.



Σχ. 293. *Κατανομὴ τῶν πιέσεων περὶ πτέρυγα. Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δηλοῖ ὑπερπιέσεις εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν καὶ ὑποπιέσεις εἰς τὴν ἄνω.*

Τὴν τοιαύτην κατανομὴν τῶν πιέσεων κατανοοῦμεν ἐὰν μελετήσωμεν τὴν μορφὴν τῶν ρευματικῶν γραμμῶν *(σχ. 294, III)*. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειαν τῆς πτέρυγος ἐπικρατοῦν ταχύτητες μικρότεραι τῆς ταχύτητος υ_∞, εἰς τὴν ἄνω δὲ ἐπιφάνειαν, καὶ κυρίως πρὸς τὸ πρόσθιον ἄκρον, μεγαλύτεραι αὐτῆς.

Ὡς ἀποδεικνύεται, ἡ ροὴ (III) ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ ἡ ὁποία προκύπτει δι᾽ ἐπαλληλίας τῆς ροῆς (I) καὶ μιᾶς ροῆς (II) κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ρευστὸν περιφέρεται περὶ τὴν πτέρυγα.

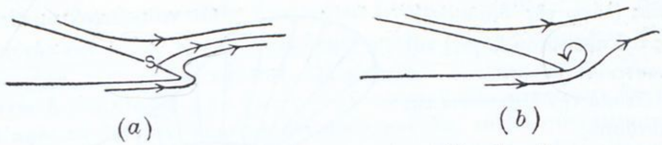


Σχ. 294. *Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ περὶ πτέρυγα (III) εἶναι ἐπαλληλία μιᾶς περιφορᾶς (II) καὶ μιᾶς ἰδανικῆς ροῆς (I).*

Προέλευσις τῆς περιφορᾶς. Ὅπως εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, τόσον εἰς τὸ φαινόμενον Magnus, ὅσον καὶ εἰς τὴν ροὴν περὶ πλάκα ἢ πτέρυγα ὑπάρχει περιφορὰ εἰς τὴν ὁποίαν καὶ ὀφείλονται αἱ ὑποπιέσεις καὶ ὑπερπιέσεις αἱ προκαλοῦσαι τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν. Καὶ εἰς μὲν τὸ φαινόμενον Magnus ἡ περιφορὰ προήρχετο ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυλίνδρου, εἰς τὴν πλάκα ὅμως ἢ τὴν πτέρυγα ἡ περιφορὰ δημιουργεῖται αὐτομάτως ὡς ἐκ τῆς μορφῆς των. Ἐνταῦθα θὰ ἐξηγήσωμεν τὸν μηχανισμὸν τῆς παραγωγῆς τῆς περιφορᾶς εἰς τὴν πτέρυγα:

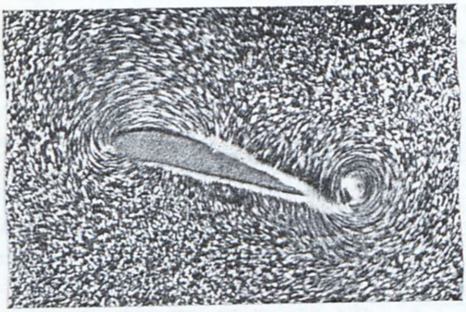
Ἐνῶ εἰς τὴν ροὴν ἰδανικοῦ ρευστοῦ ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας καὶ πρὸς τὸ οὐραῖον ἄκρον ἕνα σημεῖον ἀνακοπῆς S *(σχ. 295, a καὶ 294, I)* καὶ συνεπῶς τὸ ρευστὸν παρακάμπτει τὴν ἀκμὴν μὲ μεγάλας ταχύτητας καὶ μεγάλας ἐπιταχύνσεις, εἰς τὸ πραγματικὸν ρευστὸν τοῦτο εἶναι δυνατὸν μόνον εἰς πολὺ μικρὰς ταχύτητας. Αὐξανομένης τῆς ταχύτητος, τὸ ρευστὸν δὲν κατορθώνει νὰ παρακάμψῃ τὴν ἀκμὴν καὶ ἀποσπᾶται ἐξ αὐτῆς. Τοῦτο ὅμως συνοδεύεται ἀπὸ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς στροβίλου *(σχ. 295, b καὶ σχ. 296)*, ὁ ὁποῖος ἀπομακρύνεται τῆς πτέρυγος. Ὁ στρόβιλος οὗτος, ὡς σχηματιζόμενος κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, καλεῖται ***στρόβιλος ἐκκινήσεως***.

Κατὰ τὸν πρῶτον ὅμως νόμον τῶν στροβίλων, κάθε στρόβιλος πρέπει νὰ σχημα-



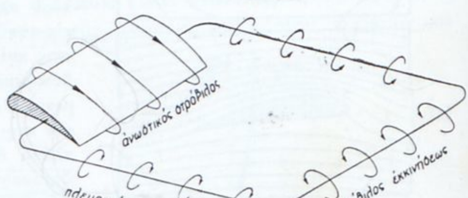
Σχ. 295. *Ἀρχὴ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως.*

τίζῃ κλειστὸν δακτύλιον, ὁπότε, κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, ἐκτὸς τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως, θὰ σχηματίζεται καὶ δεύτερος — ὁ ***ἀνωστικὸς στρόβιλος*** — ἀντιθέτου φορᾶς, ὁ ὁποῖος συνδέεται μετὰ τοῦ πρώτου διὰ τῶν ***πλευρικῶν στροβίλων*** *(σχ. 297)*, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζεται δακτυλιοειδὴς στρόβιλος. Ὁ ἀνωστικὸς στρόβιλος ἀποτελεῖ ἀκριβῶς τὴν περιφορὰν περὶ τὴν πτέρυγα.



Σχ. 296. *Κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ἀποσπᾶται ἀπὸ τὴν πτέρυγα ὁ στρόβιλος ἐκκινήσεως, ἐνῶ δημιουργεῖται ταυτοχρόνως ὁ ἀνωστικὸς στρόβιλος.*

Ἡ συνεχὴς παραγωγὴ τῶν πλευρικῶν στροβίλων, τῶν ὁποίων, οὕτω, τὸ μῆκος διαρκῶς αὐξάνεται κατὰ τὴν πτῆσιν ἐξηγεῖται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος ἡ πίεσις εἶναι παντοῦ μεγαλυτέρα τῆς πιέσεως p_∞· ἐπὶ τῆς ἄνω ἐπιφανείας παντοῦ μικροτέρα. Λόγῳ τῆς διαφορᾶς ταύτης τῆς πιέσεως, περὶ τὰ πλευρικὰ ἄκρα τῆς πτέρυγος σχηματίζεται ροὴ ἀέρος ἐκ τῆς κάτω πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄνω, μὲ ἀποτέλεσμα τὸν σχηματισμὸν τῶν πλευρικῶν στροβίλων.



Σχ. 297. *Ὁ στρόβιλος ἐκκινήσεως, οἱ πλευρικοὶ στρόβιλοι καὶ ὁ ἀνωστικὸς στρόβιλος σχηματίζουν κλειστὸν δακτύλιον.*

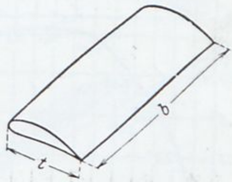
Ὅπως παρατηροῦμεν εἰς τὸ σχῆμα 294, III, ὄπισθεν μιᾶς πτέρυγος ἡ ταχύτης τοῦ ἀέρος εἶναι διάφορος τῆς ἀρχικῆς, κατευθυνόμενη τώρα πρὸς τὰ κάτω. Τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον καὶ διὰ τὴν ἐκπλήρωσιν τοῦ θεμιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς, καθόσον, κατὰ τὴν ἀρχὴν «δρᾶσις = ἀντίδρασις», ἡ πτέρυξ ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ ἀέρος κατακόρυφον δύναμιν ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν, μὲ ἀποτέλεσμα τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτοῦ πρὸς τὰ κάτω *.

* Ἀσθενῆ ἀνερχόμενα ρεύματα *(ἀνοδικὰ ρεύματα)* ἐμφανίζονται πέριξ τῆς περιοχῆς τὴν ὁποίαν διαγράφει ἡ πτέρυξ λόγῳ τῶν πλευρικῶν στροβίλων. Ὡρισμένα ἀποδημητικὰ πτηνὰ ἐκμεταλλεύονται τοιαῦτα ἀνοδικὰ ρεύματα, τὰ ὁποῖα παράγονται κατὰ τὴν πτῆσιν των σχηματίζοντα σμήνη εἰς σχῆμα V, ὁπότε κάθε πτηνὸν πετᾷ ἐντὸς τοῦ ἀνερχομένου ρεύματος τοῦ προηγουμένου του.

Σχέσις μεταξὺ ἀντιστάσεως, δυναμικῆς ἀνώσεως καὶ γωνίας προσβολῆς. Τόσον ἡ δυναμὴ ἄνωσις A, ὅσον καὶ ἡ ἀντίστασις T εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος. Διὰ πτέρυγα ***χορδῆς*** t καὶ πλάτους b *(σχ. 298)* εὑρίσκονται οἱ τύποι

$$A = c_{\alpha} \cdot \frac{\varrho\, \upsilon^2}{2} \cdot b \cdot t$$

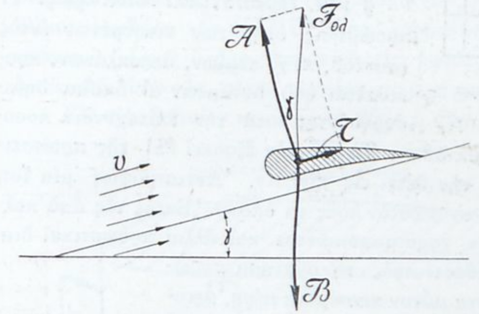
$$T = c_{\alpha\nu\tau} \cdot \frac{\varrho\, \upsilon^2}{2} \cdot b \cdot t.$$



Σχ. 298.

Οἱ συντελεσταὶ c_{α} καὶ $c_{\alpha\nu\tau}$ καλοῦνται ***συντελεσταὶ ἀνώσεως*** καὶ ***ἀντιστάσεως*** καὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν ***γωνίαν προσβολῆς*** α *(βλ. σχ. 292)* καὶ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν Reynolds (βλ. § 133). Ἡ μεταξὺ τῶν δυνάμεων $\mathcal{F}_{o\lambda}$ καὶ $\mathcal{A}$ σχηματιζομένη γωνία γ *(σχ. 299)* καλεῖται ***γωνία ὀλισθήσεως***, ἡ δὲ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ταύτης ***ἀριθμὸς ὀλισθήσεως***. Εἶναι δὲ

$$\varepsilon\varphi\, \gamma = \frac{T}{A}.$$

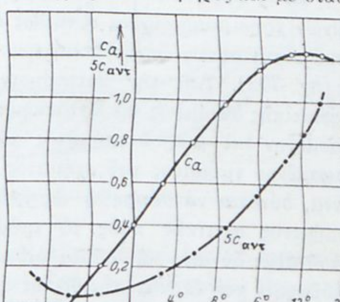


Σχ. 299. *Κατὰ τὴν πτῶσιν ὀλισθήσεως ἐξασκοῦνται ἐπὶ τοῦ ἀεροπλάνου δύο δυνάμεις.*

Εἰς τὰς συνήθεις πτέρυγας, ὁ ἀριθμὸς ὀλισθήσεως ἔχει τιμὴν μεταξὺ $\frac{1}{30}$ καὶ $\frac{1}{50}$.

Ἡ ὀνομασία γωνία ὀλισθήσεως ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ἐλαχίστη γωνία ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὴ μόνιμος *πτῆσις ὀλισθήσεως*, δηλ. πτῆσις ἄνευ τῆς λειτουργίας τοῦ κινητῆρος καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα ($\mathcal{B} = \mathcal{F}_{o\lambda}$).

Τὰ διαγράμματα τοῦ σχήματος 300, δίδουν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν c_{α} καὶ $c_{\alpha\nu\tau}$ καὶ τῆς γωνίας προσβολῆς α. Ὅπως παρατηροῦμεν, ὁ συντελεστὴς ἀνώσεως λαμβάνει θετικὰς τιμὰς ἤδη δι' ἀρνητικὰς γωνίας προσβολῆς, ἐφ' ὅσον αὗται εἶναι μικρότεραι τῶν 6, περίπου, μοιρῶν. Τὴν μεγαλυτέραν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ ἀνώσεως ἐπιτυγχάνομεν διὰ γωνίαν α περίπου 12°, ἐνῶ διὰ μεγαλυτέρας τιμὰς τῆς γωνίας οὗτος ἐλαττοῦται ἐκ νέου.

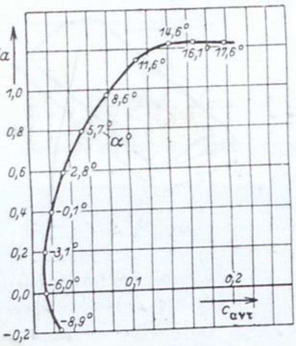


Σχ. 300. *Σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν c_{α}, $c_{\alpha\nu\tau}$ καὶ τῆς γωνίας προσβολῆς α. (Ἡ καμπύλη τοῦ $c_{\alpha\nu\tau}$ ἐσχεδιάσθη ὑπὸ πενταπλασίαν κλίμακα).*

Ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως ἐφ' ἑτέρου αὐξάνεται μονοτόνως μετὰ τῆς γωνίας. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ἡ πτέρυξ παρουσιάζῃ μεγάλην γωνίαν προσβολῆς, ναὶ μὲν ὑφίσταται μεγάλην ἄνωσιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀντίστασις εἶναι ἐξαιρετικῶς μεγάλη. Ἡ ἀρίστη—ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομίας καυσίμων—γωνία $\alpha_{\alpha\rho}$ διὰ τὴν πτῆσιν εἶναι ἐκείνη διὰ τὴν ὁποίαν ὁ λόγος τῶν

* Διά μικράς ταχύτητας, μικρότερας της ταχύτητος του έχει

συντελεστῶν ἀντιστάσεως καὶ ἀνώσεως, δηλ. ὁ ἀριθμὸς ὀλισθήσεως, εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερος. Τὴν γωνίαν ταύτην εὑρίσκομεν ἂν κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 301 *(διάγραμμα Lilienthal)*, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐὰν διὰ κάθε τιμὴν τῆς γωνίας α λάβωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν c_α καὶ $c_{\alpha\nu\tau}$. Ἐὰν φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀξόνων ἐφαπτομένην ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς θὰ μᾶς δόσῃ τὴν ζητουμένην γωνίαν $\alpha_{\alpha\rho}$ διότι διὰ τὴν γωνίαν ταύτην ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως ὁ ὁποῖος παρέχει τὸν λόγον $c_\alpha / c_{\alpha\nu\tau}$ ἔχει τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν τιμήν.



Σχ. 301. *Πολικὸν διάγραμμα Lilienthal.*

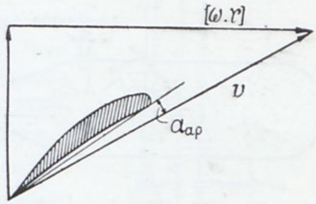
§ 139. Προωστικαὶ διατάξεις.

Ἡ προώθησις ὀχημάτων κινουμένων ἐντὸς ρευστοῦ, π. χ. πλοίων, ἀεροπλάνων, προκαλεῖται ὑπὸ δυνάμεων αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται κατὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν ποσοτήτων τοῦ ρευστοῦ πρὸς τὰ ὄπισθεν: Τὸ ρευστὸν ἐξασκεῖ ἐπὶ τῆς προωστικῆς διατάξεως δύναμιν καὶ τὴν θέτει εἰς κίνησιν. Ἀντιστρόφως, μία ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις ὠθεῖ τὸ ρευστὸν πρὸς τὰ ὀπίσω. Ἐκτὸς τῆς ἀπὸ πολλοῦ γνωστῆς ἕλικος, σήμερον χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλαι προωστικαὶ διατάξεις, αἱ ὁποῖαι, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ σύστημα προώσεως δι᾽ ἕλικος, ἔχουν ἐλάχιστα μόνον κινούμενα μέρη, μειονεκτοῦν ὅμως λόγῳ τοῦ ὅτι συμφέρουν οἰκονομικῶς μόνον εἰς μεγάλας ταχύτητας.

Ἕλιξ ἀεροπλάνου. Διὰ τὴν προώθησιν τῶν ἀεροπλάνων χρησιμοποιοῦνται συνήθως ***ἕλικες*** αἱ ὁποῖαι κατασκευάζονται οὕτως ὥστε ἡ τομή των νὰ ἔχῃ μορφὴν πτέρυγος *(σχ. 302)*. Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς παραγωγῆς τῆς προωστικῆς δυνάμεως θὰ ἐξετάσωμεν τὴν δύναμιν τὴν ἐξασκουμένην ἐπὶ μικροῦ τμήματος τῆς ἕλικος (τοῦ γραμμοσκιασμένου τμήματος τοῦ σχήματος 302), τὸ ὁποῖον, κατὰ ταῦτα, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τμῆμα πτέρυγος. Ὁ ἀήρ, κινούμενος σχετικῶς πρὸς τὸ τμῆμα τοῦτο, ἐξασκεῖ ἐπ᾽ αὐτοῦ μίαν δύναμιν, ἡ ὁποία δίδει συνιστῶσαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῆς ἕλικος προκαλοῦσαν τὴν προώθησιν. Ταυτοχρόνως ὑπάρχει καὶ συνιστῶσα ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου περιστροφῆς, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν περιστροφήν, ἀντισταθμίζεται ὅμως ὑπὸ τοῦ κινητῆρος.


Σχ. 302. *Ἕλιξ ἀεροπλάνου.*

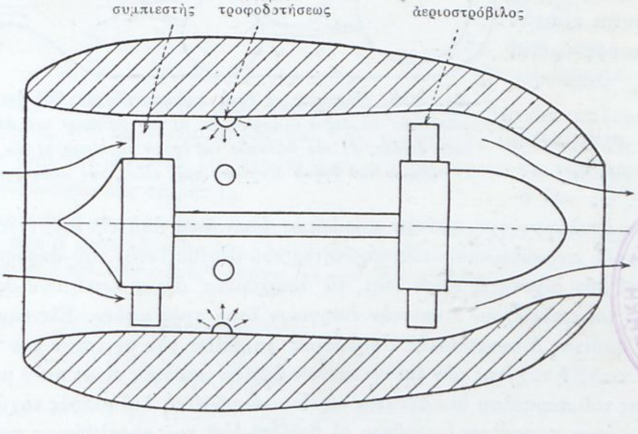
Ἡ ἕλιξ ἐκτελεῖ δύο κινήσεις: α) μεταφορικὴν μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν ταχύτητα u τοῦ ἀεροπλάνου καὶ β) περιστροφικὴν μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω. Δι᾽ ἕκαστον τμῆμα τῆς ἕλικος ἡ ταχύτης u *(σχ. 302, α)* εἶναι ἡ αὐτή, ἐνῷ ἡ ἐκ τῆς περιστροφῆς ταχύτης $\omega \cdot r$ μεταβάλλεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως r τοῦ θεωρουμένου τμήματος ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς ἕλικος. Ἡ ταχύτης v τοῦ τμήματος τούτου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εὑρίσκεται διὰ συνθέσεως τῶν δύο ταχυτήτων u καὶ $\omega \cdot r$ καὶ θὰ πρέπει νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν χορδὴν τῆς πτέρυγος τὴν ἀρίστην γωνίαν προσβολῆς $\alpha_{\alpha\rho}$. Ἀφοῦ ἡ ταχύτης $\omega \cdot r$ αὐξάνεται μετὰ τῆς ἀποστάσεως r, θὰ πρέπει ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς καὶ τῆς ταχύτητος u — δηλ. ἡ γωνία τῆς χορδῆς μὲ τὸν ἄξονα τῆς ἕλικος — νὰ αὐξάνεται. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δίδεται εἰς τὴν ἕλικα τὸ γνωστὸν στρεβλὸν σχῆμα.



Σχ. 302, α.

Κινητὴρ ἀεριοπροωθουμένου ἀεροπλάνου (turbine-jet). Εἰς τὴν διάταξιν ταύτην, ἀντὶ ὁ ἀὴρ νὰ ἐπιταχύνεται διὰ τοῦ συστήματος κινητῆρος-ἕλικος, λαμβάνει τὴν πρὸς τὰ ὀπίσω ταχύτητα ἀπ' εὐθείας κατ' ἀμεσώτερον τρόπον: Ἀφοῦ ὁ ἀὴρ θερμανθῇ εἰς ὑψηλὴν θερμοκρασίαν, ἀφίνεται νὰ ἐκτονωθῇ, ἀποκτῶν, οὕτω, μεγάλην ταχύτητα.

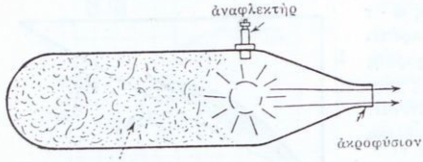
Εἰς τὴν διάταξιν ταύτην *(σχ. 303)*, ὁ ἀήρ, εἰσερχόμενος ἀπὸ τὸ πρόσθιον



Σχ. 303. Κινητὴρ ἀεριοπροωθουμένου ἀεροπλάνου (ἀρχή).

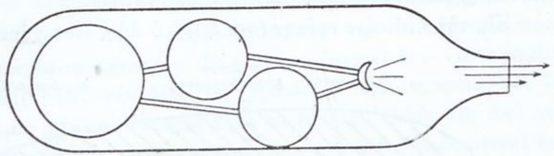
στόμιον, συμπιέζεται διὰ συμπιεστοῦ εἰς πίεσιν τετραπλασίαν, περίπου, τῆς ἀτμοσφαιρικῆς. Ὁ ἀὴρ οὗτος χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν καῦσιν ὑγροῦ καυσίμου (πετρελαίου), ἀποκτῶν, οὕτω, ὑψηλὴν θερμοκρασίαν. Ἀκολούθως ἐκτονοῦται ἐντὸς ***ἀκροφυσίου*** εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ λαμβάνει, οὕτω, μεγάλην ταχύτητα. Πρὸ τῆς ἐξόδου του, παρέχει μικρὸν ποσοστὸν τῆς κινητικῆς του ἐνεργείας εἰς ἕνα ἀεριοστρόβιλον, ὁ ὁποῖος κινεῖ τὸν συμπιεστήν.

Πύραυλοι. Εἰς τοὺς ***πυραύλους*** αἱ ἀπαραίτητοι ποσότητες ἀερίων παράγονται ἐντὸς αὐτοῦ τούτου τοῦ πυραύλου. Τὸ σχῆμα 304 παριστᾷ σχηματικῶς πύραυλον χρησιμοποιοῦντα αὐτόκαυστον οὐσίαν, δηλ. μῖγμα τοῦ καυσίμου μετὰ τοῦ διὰ τὴν καῦσιν ἀπαιτουμένου ὀξυγόνου. Τὸ παραχθὲν ἀέριον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὑπὸ ὑψηλὴν θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν, ἐξερχόμενον διὰ τοῦ ἀκροφυσίου, ἐκτονοῦται, μετατρεπομένης, οὕτω, τῆς ἐνεργείας του εἰς κινητικήν. Τοιοῦτοι πύραυλοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐκκίνησιν ἀεροπλάνων.



Σχ. 304. *Πύραυλος μὲ αὐτόκαυστον οὐσίαν (ἀρχή).*

Πολὺ εὐκολώτερον ἐπιτυγχάνεται ἡ ρύθμισις τῆς καύσεως ὅταν τὸ καύσιμον εἶναι ὑγρόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀποθηκεύεται χωριστὰ τὸ καύσιμον καὶ χωριστὰ τὸ ὀξειδωτικόν, π. χ., οἰνόπνευμα καὶ ὑγρὸν ὀξυγόνον *(σχ. 305)*. Ἐνίοτε προστίθεται εἰς τὸ καύσιμον καὶ ἀδρανές τι ἀέριον, χάρις εἰς τὸ ὁποῖον ἐλαττοῦνται κατά τι αἱ δημιουργούμεναι ὑψηλαὶ θερμοκρασίαι.



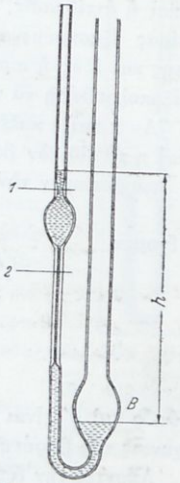
Σχ. 305. *Πύραυλος μὲ ὑγρὰ καύσιμα (ἀρχή). Ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ διακρίνομεν α) τὸν θάλαμον τοῦ ἀδρανοῦς ἀερίου, β) τὸν θάλαμον τοῦ ὑγροῦ καυσίμου, γ) τὸν θάλαμον τοῦ ὑγροῦ ὀξυγόνου καί, τέλος, τὸν καυστῆρα.*

Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῶν πυραύλων, ὡς καὶ ὅλων τῶν ἀναλόγων συστημάτων προώσεως, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σχέσιν τῆς ταχύτητος τοῦ πυραύλου καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ ἀκροφυσίου. Ὅταν αἱ δύο ταχύτητες εἶναι ἴσαι, τὰ ἐξερχόμενα ἀέρια ἀκινητοῦν ὡς πρὸς τὴν γῆν, συνεπῶς ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην του τιμήν.

Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τῶν ἐκτονουμένων ἀερίων καύσεως εἶναι πολὺ μεγάλη, ἡ χρῆσις τοῦ πυραύλου δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀποδοτικὴ διὰ μικρὰς ταχύτητας. Διὰ τοιούτων πυραύλων ἐκινοῦντο αἱ βολίδες V 2 τοῦ παρελθόντος πολέμου, χρησιμοποιοῦνται δὲ καὶ σήμερον δι' ἔρευναν τῆς στρατοσφαίρας, δεδομένου ὅτι διὰ τὴν λειτουργίαν των δὲν ἔχουν ἀνάγκην τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος.

§ 140. Μέθοδοι μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς ὑγρῶν. α) Ἰξοδόμετρον τοῦ *Ostwald*. Κατὰ τὸν τύπον (5), τῆς § 129, ἡ παροχὴ ἑνὸς κατακορύφου σωλῆνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ρέει ἕνα ὑγρὸν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ βάρους του, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πυκνότητα ρ καὶ τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς αὐτοῦ. Ἡ παρουσία τῆς πυκνότητος τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν τύπον τῆς παροχῆς, πρέπει νὰ ἀναμένεται, καθόσον εἶναι ἑπόμενον εἰς δύο ὑγρὰ τοῦ αὐτοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς ἀλλὰ διαφόρου πυκνότητος νὰ ρέῃ ταχύτερον ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει μεγαλυτέραν πυκνότητα. Κατὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η_{I} ἑνὸς ὑγροῦ παραβάλλοντες τὸν χρόνον ἐκροῆς t_{I} ὡρισμένου ὄγκου V αὐτοῦ ἐκ δεδομένου κατακορύφου σωλῆνος πρὸς τὸν χρόνον ἐκροῆς t_{II} ἴσου ὄγκου ἄλλου ὑγροῦ γνωστοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς η_{II} τὸ ὁποῖον ρέει διὰ τοῦ αὐτοῦ σωλῆνος. Πρὸς τοῦτο πληροῦμεν τὸ δοχεῖον Β *(σχ. 306)* δι' ὡρισμένης ποσότητος τοῦ ὑγροῦ Ι καὶ κατόπιν, δι' ἀναρροφήσεως, φέρομεν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἄνωθεν τῆς χαραγῆς 1. Ἀφίνομεν ἀκολούθως τὸ ὑγρὸν νὰ ρέῃ καὶ μετροῦμεν τὸν χρόνον t_{I} τὸν ἀπαιτούμενον νὰ φθάσῃ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἰς τὴν χαραγὴν 2. Κατόπιν ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα μὲ ἴσην ποσότητα τοῦ ὑγροῦ ΙΙ. Οἱ δύο χρόνοι ἐκροῆς t_{I} καὶ t_{II} συνδέονται μὲ τὰς πυκνότητας ϱ_{I} καὶ ϱ_{II} καὶ τοὺς συντελεστὰς ἐσωτερικῆς τριβῆς η_{I} καὶ η_{II} τῶν δύο ὑγρῶν διὰ τῆς σχέσεως

$$\frac{t_{I}}{t_{II}} = \frac{\eta_{I} \cdot \varrho_{II}}{\eta_{II} \cdot \varrho_{I}}.$$



Σχ. 306. Ἰξωδόμετρον τοῦ Ostwald.

Γνωρίζοντες λοιπὸν τὰς πυκνότητας τῶν δύο ὑγρῶν, τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η_{II} τοῦ προτύπου ὑγροῦ καὶ τοὺς χρόνους t_{I} καὶ t_{II} οἱ ὁποῖοι προέκυψαν ἀπὸ τὴν μέτρησιν εὑρίσκομεν κατὰ τὸν ἄνω τύπον τὸν ζητούμενον συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η_{I}.

Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις οἱ ὄγκοι V τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι ἴσοι καὶ τὰ ἑκάστοτε ὕψη h εἶναι καὶ αὐτὰ ἴσα. Ἀφ' ἑτέρου κατὰ τὰς δύο μετρήσεις, ἡ ἀκτὶς R καὶ τὸ μῆκος l τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος διὰ τοῦ ὁποίου ρέουν τὰ δύο ὑγρὰ εἶναι τὰ αὐτά.

Διὰ τὰς δύο μετρήσεις ἰσχύουν οἱ τύποι

$$\Pi_{I} = \frac{V}{t_{I}} = \frac{\pi}{8\eta_{I}} \cdot \frac{\varrho_{I} \cdot gh}{l} \cdot R^{4}$$

$$\Pi_{II} = \frac{V}{t_{II}} = \frac{\pi}{8\eta_{II}} \cdot \frac{\varrho_{II} \cdot gh}{l} \cdot R^{4}.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{t_{I}}{t_{II}} = \frac{\eta_{I} \cdot \varrho_{II}}{\eta_{II} \cdot \varrho_{I}}.$$

β) **Μέθοδος τῆς πτώσεως μικρῶν σφαιρῶν.** Ἄλλη μέθοδος μετρήσεως τοῦ συντελεστοῦ ἐσωτερικῆς τριβῆς εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς ἀφίνομεν νὰ καταπίπτῃ μ ι κ ρ ὰ* σφαῖρα. Ἐπ' αὐτῆς ἐξασκοῦνται, ἐκτὸς τοῦ βάρους της, καὶ

* Ἡ σφαῖρα πρέπει νὰ εἶναι μικρά, διότι ἄλλως ἡ ροὴ περὶ αὐτὴν δὲν εἶναι στρωτή, ὡς γνωστὸν δέ, ὁ τύπος τοῦ Stokes ἰσχύει μόνον διὰ τὴν στρωτὴν ροήν.

δύο ἄλλαι δυνάμεις, ἡ ἄνωσις καὶ ἡ ἀντίστασις Stokes (§ 132). Ἡ σφαῖρα πίπτει κατ' ἀρχὰς ἐπιταχυνομένη. Αὐξανομένης ὅμως τῆς ταχύτητος αὐξάνεται καὶ ἡ ἀντίστασις, θὰ φθάσῃ δὲ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις θὰ ἰσορροπήσουν. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης καὶ ἑξῆς ἡ σφαῖρα θὰ ἀποκτήσῃ ὁρικὴν ταχύτητα $\upsilon_{o\varrho}$ μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ κινῆται.

Ἂν r καὶ ε καλέσωμεν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς σφαίρας, ε' καὶ η τὸ εἰδικὸν βάρος καὶ τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὑγροῦ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας κατὰ τὴν ὁποίαν

$$\text{βάρος} = \text{ἀντίστασις} + \text{ἄνωσις}$$

θὰ ἔχομεν

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varepsilon = 6\,\pi\eta r \cdot \upsilon_{o\varrho} + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varepsilon'$$

ἢ

$$\frac{2}{9} r^2 (\varrho - \varrho') \cdot g = \eta \cdot \upsilon_{o\varrho}$$

(ἔνθα ϱ καὶ ϱ' εἶναι αἱ πυκνότητες τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος).

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς η λαμβάνομεν

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot (\varrho - \varrho')}{\upsilon_{o\varrho}} \cdot g.$$

Ἐὰν μετρήσωμεν τώρα τὴν ὁρικὴν ταχύτητα $\upsilon_{o\varrho}$ καὶ τὴν ἀκτῖνα r, γνωρίζωμεν δὲ τὰς πυκνότητας ϱ καὶ ϱ', δυνάμεθα ἐκ τοῦ τύπου τούτου νὰ εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ ὑγροῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ'

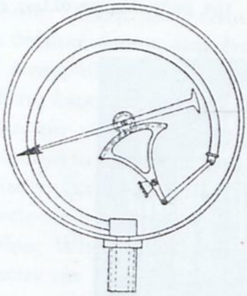
ΟΡΓΑΝΑ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

§ 141. Μανόμετρα. Τὴν πίεσιν ὑγρῶν ἢ ἀερίων μετροῦμεν διὰ τῶν ***μανομέτρων.*** Τούτων ὑπάρχουν διάφοροι τύποι ἀναλόγως τῆς ἀρχῆς τῆς λειτουργίας των καὶ τοῦ μεγέθους τῆς μετρουμένης πιέσεως.

Τὰ μανόμετρα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται εἰδικῶς διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, καλοῦνται *βαρόμετρα*, περιεγράφησαν δὲ ἀνωτέρω εἰς τὴν § 124.

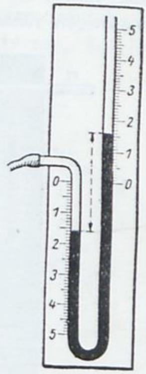
α) ***Μεταλλικὰ μανόμετρα*** *(σχ. 307).* Ἡ πίεσις μετρεῖται ἐκ τῆς παραμορφώσεως καμπύλου μεταλλικοῦ σωλῆνος ἐλλειπτικῆς τομῆς. Ὅταν ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ σωλῆνος αὐξάνῃ, ἡ μὲν τομὴ τοῦ σωλῆνος τείνει νὰ γίνῃ κυκλική, ὁ δὲ καμπύλος σωλὴν εὐθύς.

Τὰ μεταλλικὰ μανόμετρα χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τὴν βιομηχανίαν διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πιέσεως ὑγρῶν ἢ ἀερίων μεγαλυτέρας εἴτε μικροτέρας τῆς ἀτμοσφαιρικῆς.



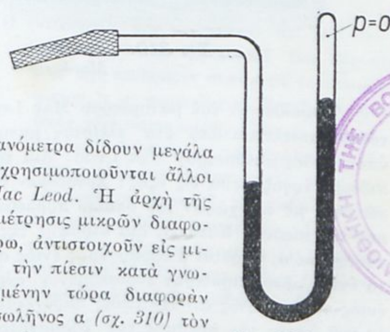
Σχ. 307. Μεταλλικὸν μανόμετρον.

β) ***Ἀνοικτὰ μανόμετρα.*** Ταῦτα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὑάλινον σωλῆνα κεκαμμένον μὲ κατακόρυφα σκέλη *(σχ. 308)* καὶ περιέχοντα ὑγρὸν γνωστῆς πυκνότητος (Hg ἢ H_2O). Τὸ ἕνα σκέλος συνδέεται μὲ τὸν χῶρον τοῦ ὁποίου ἡ πίεσις πρόκειται νὰ μετρηθῇ· τὸ ἄλλο εἶναι ἀνοικτόν. Ἡ πίεσις μετρεῖται ἐκ τῆς διαφορᾶς τοῦ ὕψους τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν ἀπ᾿ εὐθείας εἰς χιλιοστὰ στήλης ὑδραργύρου, ὕδατος κ.λ.



Σχ. 308. Ἀνοικτὸν μανόμετρον μὲ ὑδράργυρον. Ἡ μετρουμένη ὑπερπίεσις εἶναι ἴση πρὸς 32 Torr.

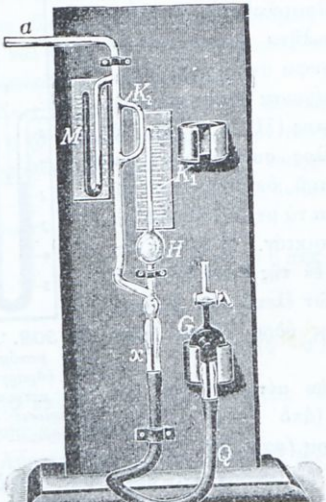
γ) ***Κλειστὰ μανόμετρα.*** Διὰ τὴν μέτρησιν πιέσεων μικροτέρων τῆς ἀτμοσφαιρικῆς (ἀπὸ 1—100 Torr) χρησιμοποιοῦνται τὰ κλειστὰ μανόμετρα *(σχ. 309)*. Ταῦτα εἶναι κλειστὰ εἰς τὸ ἕνα ἄκρον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον καὶ ἔχει ἀφαιρεθῇ ὁ ἀήρ. Ὅταν ἡ μετρουμένη πίεσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος.



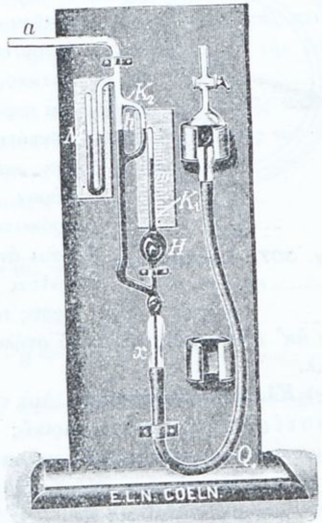
Σχ. 309. Κλειστὸν μανόμετρον.

δ) ***Μανόμετρον*** *Mac Leod.* Διὰ πιέσεις μικροτέρας τοῦ 1 Torr τὰ κλειστὰ μανόμετρα δίδουν μεγάλα σφάλματα. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας χρησιμοποιοῦνται ἄλλοι τύποι μανομέτρων, ὡς τὸ ***μανόμετρον*** *Mac Leod*. Ἡ ἀρχὴ τῆς λειτουργίας του εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἐπειδὴ ἡ μέτρησις μικρῶν διαφορῶν στάθμης—αἱ ὁποῖαι, κατὰ τ᾿ ἀνωτέρω, ἀντιστοιχοῦν εἰς μικρὰς πιέσεις—εἶναι ἀνακριβής, αὐξάνομεν τὴν πίεσιν κατὰ γνωστὸν παράγοντα καὶ μετροῦμεν τὴν ηὐξημένην τώρα διαφορὰν στάθμης. Πρὸς τοῦτο συνδέομεν διὰ τοῦ σωλῆνος α *(σχ. 310)* τὸν χῶρον τοῦ ὁποίου τὴν πίεσιν p_1 πρόκειται νὰ μετρήσωμεν μὲ δοχεῖον H γνωστοῦ ὄγκου V_1 καὶ κατόπιν, δι᾿ ἀνυψώσεως τοῦ δοχείου G, ἀναγκάζομεν τὴν στάθμην τοῦ ὑδραργύρου νὰ ἀνέλθῃ *(σχ. 311)*, ὁπότε τὸ ἀέριον περιορίζεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος K_1 καὶ καταλαμβάνει τὸν πολὺ μικρὸν ὄγκον V_2. Ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου προκαλεῖ, κατὰ τὸν γνωστὸν νόμον Boyle - Mariotte, αὔξησιν τῆς πιέσεως εἰς τὴν τιμὴν p_2 Μετροῦντες τὴν πίεσιν ταύτην καὶ τοὺς ὄγκους V_1 καὶ V_2, ἔχομεν τὴν ζητουμένην πίεσιν ἐκ τῆς σχέσεως $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$. Συνήθως τὸ δοχεῖον G ἀνυψοῦται ἕως ὅτου ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἰς τὸν σωλῆνα K ἔλθῃ εἰς τὸ ὡρισμένον ὕψος h, ἐπὶ δὲ τῆς κλίμακος m ἀναγιγνώσκομεν τὰς εἰς ἕκαστον ὕψος τῆς στήλης τοῦ σωλῆνος K_1 ἀντιστοιχούσας πιέσεις.

Τὸ μανόμετρον Mac Leod χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν πιέσεων ἀπὸ 1 ἕως 10^{-5} Torr. Ὁ περιγραφεὶς τύπος μανομέτρου Mac Leod ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι ἀπαιτεῖ μεγάλην ποσότητα ὑδραργύρου καὶ ὅτι ἑκάστη μέτρησις διαρκεῖ ἀρκετόν, σχετικῶς, χρόνον. Δι' αὐτὸ καὶ χρησιμοποιεῖται μόνον διὰ τὴν βαθμολογίαν ἄλλων εὐχρηστοτέρων τύπων.



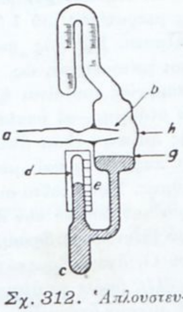
Σχ. 310.



Σχ. 311.

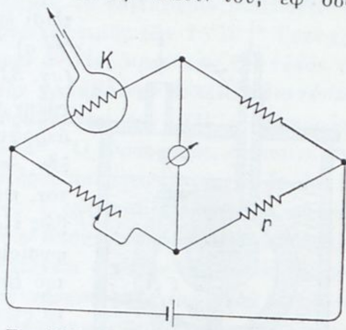
Μανόμετρον Mac Leod.

Παραλλαγὴν τοῦ μανομέτρου Mac Leod παριστᾷ τὸ σχῆμα 312. Τὸ μανόμετρον τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κλειστὸν μανόμετρον καὶ ἕνα ὑποτυπῶδες μανόμετρον Mac Leod. Διὰ τὴν μέτρησιν τῆς πιέσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Συνδέομεν τὸν ἐσμυρισμένον κῶνον α μὲ τὸν χῶρον τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ μετρήσωμεν τὴν πίεσιν. Κατόπιν, διὰ στροφῆς τῆς συσκευῆς περὶ τὸν ἄξονα α, φέρεται ὁ ὑδράργυρος ἐντὸς σωλῆνος c, ὁπότε τὸ ἐντὸς αὐτοῦ πρότερον εὑρισκόμενον ἀέριον συμπιέζεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος d. Ἡ πίεσις παρέχεται ἐπὶ κλίμακος e ἐκ τοῦ ὕψους τῆς στάθμης τοῦ ὑδραργύρου. Διὰ τοιούτου μανομέτρου δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν πιέσεις μέχρι 10^{-2} Torr. Διὰ στροφῆς τοῦ μανομέτρου κατὰ 180^{0} φέρεται ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸ κλειστὸν μανόμετρον, ὁπότε μετροῦνται πιέσεις ἀπὸ 1—50 Torr.



Σχ. 312. *Ἁπλουστευμένον μανόμετρον Mac Leod.*

ε) ***Μανόμετρον Pirani.*** Ἡ λειτουργία τοῦ μανομέτρου τούτου στηρίζεται ἐπὶ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τῶν ἀερίων μετὰ τῆς πιέσεως. Τὸ μανόμετρον Pirani ἀποτελεῖται, κατ' ἀρχήν, ἀπὸ λεπτὸν σύρμα εὑρισκόμενον ἐντὸς ὑαλίνου κώδωνος Κ *(σχ. 313)* καὶ τὸ ὁποῖον θερμαίνεται δι' ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος καί, συνεπῶς, ἡ ἀντίστασις αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θερμικὴν ἀγωγιμότητα τοῦ ἀερίου τοῦ περιεχομένου ἐντὸς τοῦ κώδωνος. Ὅπως ὅμως εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν κινητικὴν θεωρίαν τῶν ἀερίων, ἡ θερμικὴ ἀγωγιμότης ἑνὸς ἀερίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν πίεσίν του, ἐφ᾽ ὅσον ἡ πίεσις αὕτη εἶναι ἀρκούντως χαμηλή. Ἐάν, λοιπόν, φέρωμεν εἰς συγκοινωνίαν τὸν κώδωνα Κ μὲ τὸν χῶρον τὸν περιέχοντα τὸ ἀέριον τοῦ ὁποίου τὴν πίεσιν ζητοῦμεν καὶ μετρήσωμεν τὴν ἀντίστασιν τοῦ σύρματος (π.χ. διὰ γεφύρας Wheatstone), δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου. Τὸ ὄργανον τοῦτο βαθμολογεῖται διὰ συγκρίσεως πρὸς μανόμετρον Mac Leod.

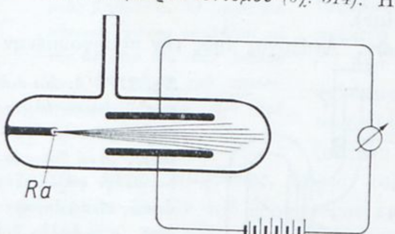


Σχ. 313. *Μανόμετρον Pirani (ἀρχή).*

Ἡ εὐαισθησία τῆς διατάξεως διπλασιάζεται ἐὰν ἡ ἀντίστασις r εὑρίσκεται καὶ αὐτὴ ἐντὸς τοῦ κώδωνος, διότι ἡ μεταβολὴ τῆς ἀντιστάσεως δύο ἀπέναντι κλάδων τῆς γεφύρας διαταράσσει τὴν ἰσορροπίαν της κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.

Αἱ μετρήσεις διὰ μανομέτρου Pirani ἔχουν τὸ πλεονέκτημα ὅτι διὰ αὐτοῦ ἡ μέτρησις πιέσεως ἀνάγεται εἰς μέτρησιν ἀντιστάσεως, ἔχουν ὅμως καὶ τὸ μειονέκτημα ὅτι εἶναι ἐφικταὶ μόνον εἰς ὡρισμένην περιοχὴν πιέσεων (10^{-1} ἕως 10^{-4} Torr) καὶ ὅτι ἡ κλῖμαξ τοῦ ὀργάνου ἰσχύει δι᾽ ὡρισμένον μόνον ἀέριον.

ϛ) ***Μανόμετρον ἰονισμοῦ*** *(σχ. 314)*. Ἡ λειτουργία του στηρίζεται ἐπὶ τοῦ *ἰονισμοῦ* τὸν ὁποῖον ὑφίσταται ἕνα ἀέριον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθεροῦ ἰονιστικοῦ αἰτίου, π. χ. *σωματίων α*. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων ἰόντων εἶναι ἀνάλογος τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου, ἡ μέτρησις πιέσεως ἀνάγεται εἰς μέτρησιν τοῦ *ρεύματος ἰονισμοῦ*. Εἰς παλαιοτέρους τύπους τοιούτων μανομέτρων ἀντὶ σωματίων α ἐχρησιμοποιεῖτο ὡς ἰονιστικὸν αἴτιον ἀκτὶς ἠλεκτρονίων, ἐκπεμπομένων ὑπὸ θερμῆς καθόδου.

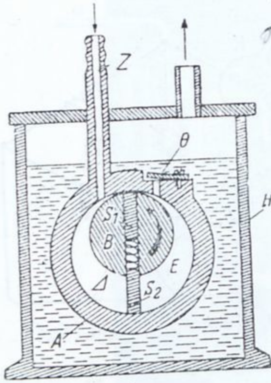


Σχ. 314. *Μανόμετρον ἰονισμοῦ (ἀρχή).*

§ 142. Ἀεραντλίαι. Διὰ τῶν ἀεραντλιῶν εἴτε ἐλαττοῦμεν ***(ἀντλίαι κενοῦ)***, εἴτε αὐξάνομεν ***(συμπιεσταί)*** τὴν πίεσιν εἰς ἕνα χῶρον, ἐνῷ διὰ τῶν ***ἀνεμιστήρων*** ἁπλῶς προσδίδομεν ταχύτητα εἰς ἀέρια. Σπουδαιότεροι τύποι ἀντλιῶν κενοῦ εἶναι οἱ ἑξῆς:

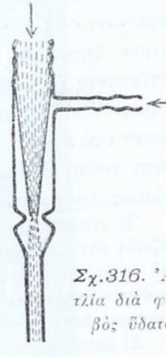
α) ***Περιστροφικὴ ἀντλία.*** Ἐντὸς κοίλου κυλινδρικοῦ τυμπάνου Α *(σχ. 315)* στρέφεται μεταλλικὸς κύλινδρος Β περὶ ἄξονα μὴ συμπίπτοντα μὲ τὸν ἄξονα τοῦ τυμπάνου. Δύο σύρται S_1, S_2 πιέζονται δι᾽ ἐλατηρίου οὕτως ὥστε νὰ ἐφάπτωνται διαρκῶς τῶν τοιχωμάτων τοῦ τυμπάνου. Κατὰ τὴν περιστροφὴν παρασύρεται ἀέριον ἀπὸ τὸ στόμιον Ζ καὶ ἐκδιώκεται διὰ τῆς βαλβίδος Θ. Διὰ τὴν ἐπίτευξιν καλῆς στεγανότητος τῆς βαλβίδος καὶ τῶν ἑδράνων τοῦ ἄξονος ἡ ἀντλία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς ἐλαίου περιεχομένου εἰς τὸ δοχεῖον Η.

Διὰ περιστροφικῆς ἀντλίας ἐπιτυγχάνομεν κενὸν μέχρι 2.10^{-3} Torr. Διὰ τὴν ἐπίτευξιν καλυτέρου κενοῦ, συνδυάζονται ἐνίοτε δύο τοιοῦται ἀντλίαι ἐν σειρᾷ.



Σχ. 315. Περιστροφικὴ ἀντλία κενοῦ.

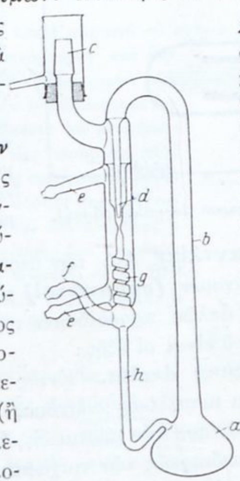
β) ***Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος.*** Εἰς ταύτην *(σχ. 316)* ῥέει ὕδωρ μὲ μεγάλην ταχύτητα διὰ στενοῦ ἀκροφυσίου. Ἄλλος σωλήν, περιβάλλων τὸ πρῶτον, φέρει στένωμα ἀκριβῶς εἰς τὸ ὕψος τοῦ ἀκροφυσίου. Κατὰ τὸν *νόμον τοῦ Bernoulli* (§ 128), εἰς τὸ στένωμα ἡ πίεσις εἶναι ἠλαττωμένη ἐν σχέσει πρὸς τὴν πίεσιν εἰς τὸ ἐλεύθερον στόμιον (ἔνθα p=1 Atm). Ἡ ἠλαττωμένη πίεσις προκαλεῖ ῥοὴν τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν πρὸς ἐκκένωσιν χῶρον ἀερίου, τὸ ὁποῖον παρασύρεται ὑπὸ τοῦ ὕδατος. Τὸ διὰ τοιαύτης ἀντλίας ἐπιτυγχανόμενον κενὸν φθάνει, περίπου, τὰ 15 Torr (τάσις ἀτμῶν ὕδατος εἰς συνήθη θερμοκρασίαν).



Σχ. 316. Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὕδατος.

γ) ***Ἀντλία διὰ φλεβὸς ὑδρατμῶν.*** Ἀνάλογος πρὸς τὴν προηγουμένην εἶναι καὶ ἡ κατασκευὴ τῆς ἀντλίας μὲ φλέβα ὑδρατμῶν (ejector). Διὰ τοιαύτης ἀντλίας ἐπιτυγχάνεται κενὸν μέχρι 2 Torr.

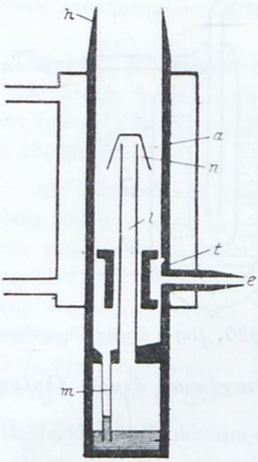
δ) ***Ἀντλία διὰ φλεβὸς ἀτμῶν ὑδραργύρου.*** Ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀρχῆς στηρίζεται καὶ ἡ λειτουργία τῆς ἀντλίας διὰ φλεβὸς ἀτμῶν ὑδραργύρου. Οἱ ἀτμοὶ τοῦ ὑδραργύρου παράγονται διὰ θερμάνσεως ὑδραργύρου, εὑρισκομένου ἐντὸς βραστῆρος α *(σχ. 317)*, ἐκρέοντες δὲ δι' ἀκροφυσίου d φέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὅπως καὶ ἡ φλὲψ ὕδατος (ἢ ὑδρατμῶν). Οἱ ἀτμοί, ὑγροποιούμενοι ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ ὀφιοειδοῦς ψυκτῆρος g, ἐπανέρχονται εἰς τὸν βραστῆρα διὰ τοῦ σωλῆνος h.



Σχ. 317. Ἀντλία διὰ φλεβὸς ἀτμῶν ὑδραργύρου (ἀντλία Volmer). α = βραστήρ. b=σωλὴν φέρων τοὺς ἀτμοὺς εἰς τὸ ἀκροφύσιον. c = σωλὴν διὰ τὴν σύνδεσιν μὲ τὸν πρὸς ἐκκένωσιν χῶρον. d = ἀκροφύσιον. e=προσαγωγὴ καὶ ἀπαγωγὴ τοῦ ὕδατος ψύξεως. f = σωλὴν πρὸς τὸ προκαταρκτικὸν κενόν. g=ὀφιοειδὴς ψυκτήρ. h=σωλὴν ἐπιστροφῆς ὑδραργύρου.

Τὸ διὰ τοιαύτης ἀντλίας ἐπιτυγχανόμενον κενὸν φθάνει τὸ $1 \cdot 10^{-5}$ Torr. Διὰ τὴν λειτουργίαν τῆς ἀντλίας ταύτης ἀπαιτεῖται ὅπως ὁ πρὸς ἐκκένωσιν χῶρος ἔχῃ προηγουμένως ἐκκενωθῇ μερικῶς (*προκαταρκτικὸν* κενὸν π. χ. μέχρι 20 Torr). Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται συνήθως διὰ περιστροφικῆς ἀντλίας συνδεομένης διὰ τοῦ σωλῆνος f.

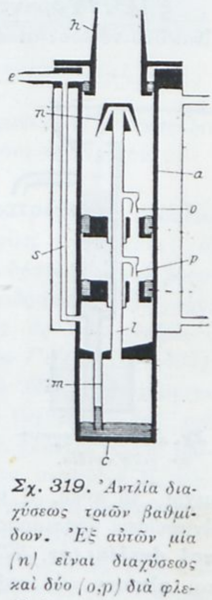
ε) ***Ἀντλίαι διαχύσεως.*** Ὅταν θέλωμεν νὰ ἐπιτύχωμεν ἐλάττωσιν τῆς πιέσεως κάτω τῆς τιμῆς τῶν $1 \cdot 10^{-8}$ Torr χρησιμοποιοῦμεν ἀντλίας διαχύσεως, ἕνα τύπον τῶν ὁποίων—τὴν ***χαλυβδίνην ἀντλίαν διαχύσεως ἀτμῶν ὑδραργύρου*** *(σχ. 318)* — περιγράφομεν κατωτέρω*. Ὁ ὑδράργυρος, θερμαινόμενος ἐντὸς βραστῆρος παράγει ἀτμοὺς οἱ ὁποῖοι διὰ τοῦ σωλῆνος l φέρονται εἰς τὸν ἄνω τοῦ βραστῆρος χῶρον ὅπου, διὰ τοῦ κωνικοῦ καλύμματος n, ὑφίστανται ἀλλαγὴν τῆς φορᾶς τῆς ροῆς των, κατευθυνόμενοι πρὸς τὰ ψυχρὰ τοιχώματα a ἐπὶ τῶν ὁποίων καὶ ὑγροποιοῦνται. Ὁ ὑγρὸς ὑδράργυρος ἐπανέρχεται ἐκ νέου εἰς τὸν βραστῆρα διὰ τοῦ σωλῆνος m.



Σχ. 318. *Ἀντλία διαχύσεως μιᾶς βαθμίδος. Ὁ πρὸς ἐκκένωσιν χῶρος συνδέεται μὲ τὴν ἀντλίαν διὰ τοῦ κώνου h, ὁ δὲ χῶρος τοῦ προκαταρκτικοῦ κενοῦ διὰ τοῦ κώνου e.*

Διὰ νὰ μὴ εἰσέρχωνται οἱ τυχὸν μὴ πλήρως ὑγροποιηθέντες ἀτμοὶ τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν χῶρον τοῦ προκαταρκτικοῦ κενοῦ προβλέπεται ὁ δακτύλιος t.

Διὰ τοῦ μεταξὺ τοῦ καλύμματος n καὶ τῶν τοιχωμάτων a σχηματιζομένου διακένου εἰσέρχονται, λόγῳ διαχύσεως, μόρια τοῦ ἀερίου εἰς τὸ ρεῦμα τῶν ἀτμῶν τοῦ ὑδραργύρου καὶ παρασύρονται ὑπ᾽ αὐτοῦ. Τὸ ἀέριον συγκεντροῦται εἰς τὸν χῶρον τοῦ προκαταρκτικοῦ κενοῦ τοῦ ὁποίου ἡ πίεσις δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ $1 \cdot 10^{-1}$ Torr. Συνήθως αἱ ἀντλίαι διαχύσεως κατασκευάζονται οὕτως ὥστε νὰ περιέχουν καὶ μίαν ἢ περισσοτέρας βαθμίδας προπαρασκευῆς τοῦ προκαταρκτικοῦ κενοῦ, λειτουργούσας κατὰ τὸ σύστημα τῶν ἀντλιῶν διὰ φλεβός. Αἱ τοιαῦται ***ἀντλίαι πολλῶν βαθμίδων*** *(σχ. 319)* ἔχουν τὸ πλεονέκτημα νὰ μὴ χρειάζωνται προκαταρκτικὸν κενὸν $1 \cdot 10^{-1}$ Torr ἀλλὰ νὰ ἀρκῇ κενὸν τῶν 20 Torr, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν εὐκόλως ἀκόμη καὶ μὲ ὄχι καλὰς περιστροφικὰς ἀντλίας.

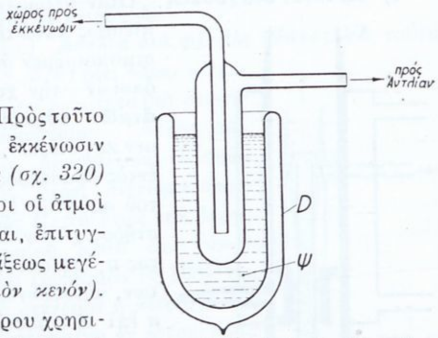


Σχ. 319. *Ἀντλία διαχύσεως τριῶν βαθμίδων. Ἐξ αὐτῶν μία (n) εἶναι διαχύσεως καὶ δύο (o,p) διὰ φλεβὸς ἀτμῶν ὑδραργύρου.*

Ἡ δι᾽ ἀντλίας διαχύσεως ἀτμῶν ὑδραργύρου ἐπιτυγχανομένη ἐλαχίστη

* Ἐκτὸς τοῦ τύπου τούτου ὑπάρχει καὶ ὁ ὑάλινος τύπος.

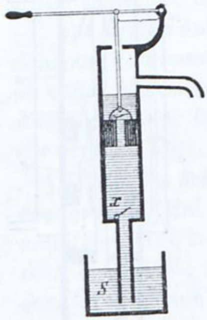
πίεσις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατέλθῃ κάτω τῆς τάσεως τῶν ἀτμῶν τοῦ ὑδραργύρου τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ψυκτῆρος. Ἡ τάσις τῶν ἀτμῶν τοῦ ὑδραργύρου εἰς συνήθη θερμοκρασίαν εἶναι, περίπου, 10^{-3} Torr. Ἐάν, λοιπόν, ἐπιζητῆται μικροτέρα πίεσις, πρέπει νὰ δεσμευθοῦν οἱ ἀτμοί. Πρὸς τοῦτο παρεντίθεται μεταξὺ τοῦ πρὸς ἐκκένωσιν χώρου καὶ τῆς ἀντλίας ***παγὶς*** *(σχ. 320)* ἐντὸς τῆς ὁποίας, ὑγροποιούμενοι οἱ ἀτμοὶ τοῦ ὑδραργύρου, κατακρατοῦνται, ἐπιτυγχανομένου, οὕτω, κενοῦ τῆς τάξεως μεγέθους $p=1 \cdot 10^{-6}$ Torr *(ὑψηλὸν κενόν)*.



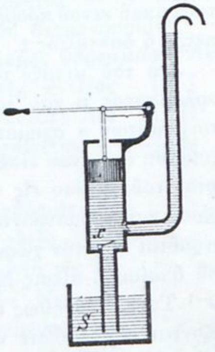
Σχ. 320. *Παγὶς ἀτμῶν ὑδραργύρου.*

Τελευταίως, ἀντὶ ὑδραργύρου χρησιμοποιεῖται εἰδικὸν ἔλαιον τοῦ ὁποίου ἡ τάσις ἀτμῶν εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ χρῆσις παγίδος περιττεύει ***(ἀντλίαι διαχύσεως ἀτμῶν ἐλαίου).***

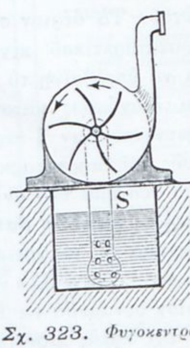
§ 143. Ὑδραντλίαι. Αἱ συνηθέστερον χρησιμοποιούμεναι ὑδραντλίαι εἶναι δύο τύπων: αἱ ἐμβολοφόροι καὶ αἱ φυγοκεντρικαί. Ἡ ἁπλουστάτη ἐκ τῶν ἀντλιῶν τοῦ πρώτου τύπου εἶναι ἡ ***ἀναρροφητικὴ ἀντλία*** *(σχ. 321)*. Ἐπειδὴ ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὕδατος γίνεται τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως, εἶναι ἑπόμενον αἱ ἀντλίαι αὗται νὰ ἀντλοῦν τὸ ὕδωρ πρακτικῶς μέχρι, τὸ πολύ, 8 μέτρων. Διὰ μεγαλυτέρας ἀνυψώσεις χρησιμοποιοῦνται αἱ ***καταθλιπτικαὶ ἀντλίαι*** *(σχ. 322)*, αἱ ὁποῖαι τοποθετοῦνται πλησίον τῆς στάθμης τοῦ ὕδατος.



Σχ. 321. *Ἀναρροφητικὴ ἀντλία.*



Σχ. 322. *Καταθλιπτικὴ ἀντλία.*

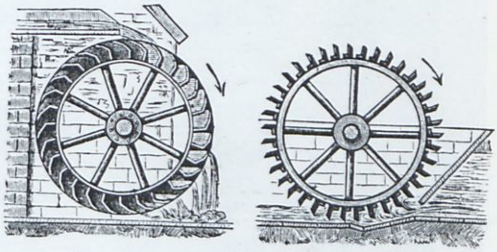


Σχ. 323. *Φυγοκεντρικὴ ἀντλία.*

Φυγοκεντρικὴ ἀντλία. Ἐπὶ ἄξονος ὑπάρχουν πολλὰ πτερύγια *(σχ. 323)*, τὰ ὁποῖα, περιστρεφόμενα, ἀναγκάζουν τὸ ὑγρὸν νὰ κινῆται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς. Ἡ τοιαύτη κίνησις ἀπαιτεῖ, ὡς γνωστόν, κεντρομόλον δύναμιν τὴν ὁποίαν ἐν προκειμένῳ ἐξασκεῖ τὸ τοίχωμα τῆς ἀντλίας. Οὕτω, εἰς τὴν περιφέρειαν δημιουργεῖται ὑπερπίεσις καί, ἀντιστοίχως, εἰς τὸ κέντρον ὑποπίεσις. Ἡ ὑποπίεσις αὕτη προκαλεῖ εἰσροὴν νέου ὑγροῦ διὰ τοῦ πλευρικῶς προσηρτημένου σωλῆνος ἀναρροφήσεως S.

§ 144. Ὑδροκινητῆρες. Οἱ ὑδροκινητῆρες χρησιμεύουν διὰ τὴν μετατροπὴν τῆς δυναμικῆς ἢ κινητικῆς ἐνεργείας ποσοτήτων ὕδατος εἰς ὠφέλιμον ἔργον. Ὑδροκινητήρων ὑπάρχουν δύο τύποι: οἱ ὑδραυλικοὶ τροχοὶ καὶ οἱ ὑδροστρόβιλοι.

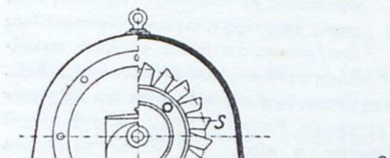
α) **Ὑδραυλικοὶ τροχοί.** Εἰς ἕνα τύπον ἐξ αὐτῶν—εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ὕδωρ προσάγεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ τροχοῦ (*σχ. 324*)—ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι μεγάλος, φθάνων τὰ 85 °/₀, ἔχει ὅμως τὸ μειονέκτημα ν' ἀπαιτῇ τροχὸν μεγάλης διαμέτρου.



Σχ. 324 καὶ 325. Ὑδραυλικοὶ τροχοί.

Εἰς ἄλλον τύπον (*σχ. 325*), διὰ καταλλήλου φράκτου, σχηματίζεται ὑδατίνη φλὲψ μεγάλης ταχύτητος, ἡ ὁποία καὶ προσκρούει εἰς τὰ σκαφίδια τοῦ κάτω μέρους τοῦ τροχοῦ.

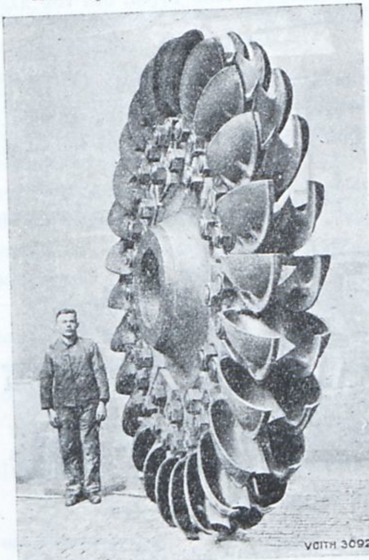
β) **Ὑδροστρόβιλοι.** Τούτων ὑπάρχουν κυρίως δύο τύποι: οἱ ὑδροστρόβιλοι δράσεως καὶ οἱ ὑδροστρόβιλοι ἀντιδράσεως. Εἰς τοὺς *ὑδροστροβίλους δράσεως* ἀνήκει ὁ **ὑδροστρόβιλος** *Pelton* (*σχ. 326*). Εἰς αὐτὸν τὸ ὕδωρ, ἐξερχόμενον μετὰ μεγάλης ταχύτητος, διὰ τοῦ ἀκροφυσίου D, πλήττει τὰ ἐπὶ τροχοῦ στερεωμένα σκαφίδια S, τῶν ὁποίων ἡ πραγματικὴ μορφὴ φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 327.



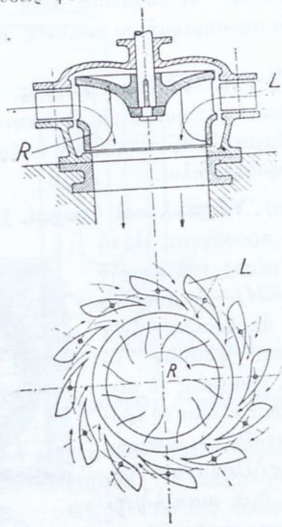
Σχ. 326. Ὑδροστρόβιλος Pelton. Διὰ τοῦ ρυθμιστοῦ N ρυθμίζεται ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος.

Ἐὰν τὰ σκαφίδια ταῦτα εἶναι ἀκίνητα, τὸ ὕδωρ, προσπῖπτον ἐπ' αὐτῶν, ἀλλάσσει, ἁπλῶς, τὴν φορὰν τῆς ταχύτητός του κατὰ 180° περίπου (*σχ. 326, κάτω*), ἐξασκουμένης, οὕτω, μιᾶς δυνάμεως ἐπὶ τοῦ τροχοῦ. Ἐὰν ὅμως τὰ σκαφίδια μετατίθενται μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ταχύτητος τοῦ ὕδατος, ἡ ἀνακαμφθεῖσα ἀκτὶς ἔχει, ὡς ἀποδεικνύεται, ταχύτητα περίπου ἴσην πρὸς μηδέν· ἡ κινητική της, δηλ., ἐνέργεια ἔχει μεταδοθῇ εἰς τὸν τροχόν. Οἱ ὑδροστρόβιλοι Pelton χρησιμοποιοῦνται ἐκεῖ ὅπου διατίθενται μεγάλαι διαφοραὶ στάθμης τοῦ ὕδατος.

Ἐνῶ εἰς τοὺς ὑδροστροβίλους δράσεως τὸ ὕδωρ φθάνει εἰς τὰ σκαφίδια ἀπο-

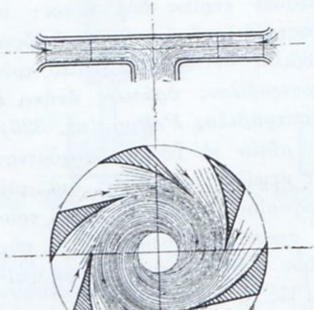


Σχ. 327. Φωτογραφία τοῦ τροχοῦ ἑνὸς ὑδροστροβίλου Pelton.



Σχ. 328. Ὑδροστρόβιλος Francis.

κλειστικῶς μὲ κινητικὴν ἐνέργειαν, δηλ. χωρὶς ὑπερπίεσιν, εἰς τοὺς *ὑδροστροβίλους ἀντιδράσεως*, ἀντιθέτως, τὸ ὕδωρ προσάγεται μὲ μικρὰν μὲν ταχύτητα ἀλλὰ μὲ τὴν πλήρη σχεδὸν αὐτοῦ πίεσιν, χωρίς, δηλ., νὰ ἔχῃ μετατρέψῃ τὴν δυναμικήν του ἐνέργειαν εἰς κινητικήν. Κατὰ τὴν ροὴν διὰ τοῦ τροχοῦ ἐλαττοῦται ἡ πίεσις τοῦ ὕδατος τὸ ὁποῖον, οὕτω, ἐπιταχύνεται ἀντιστοίχως. Ἀκριβῶς δὲ ἡ ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος προκαλουμένη ἀντίδρασις κινεῖ τὸν τροχόν.

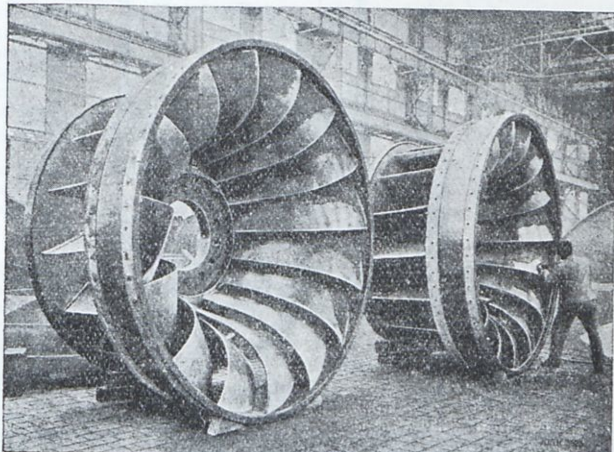


Σχ. 329. Ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ μεριστοῦ. (Ὁ τροχὸς δὲν ἔχει σχεδιασθῆ).

Εἰς τοὺς ὑδροστροβίλους ἀντιδράσεως ἀνήκει ὁ **ὑδροστρόβιλος** *Francis* (*σχ. 328*), ἡ ἀρχὴ τῆς λειτουργίας τοῦ ὁποίου εἶναι ἡ ἑξῆς: Περὶ τὸν περιστρεφόμενον τροχὸν R εὑρίσκεται ὁ ἀκίνητος **μεριστής**, ἀριθμός, δηλ., πτερυγίων L τὰ ὁποῖα κατευθύνουν τὸ ὕδωρ ἐκ τῶν πλαγίων, οὕτως ὥστε τοῦτο κατὰ τὴν ροήν του πρὸς τὸν ἄξονα ν' ἀποκτᾷ καὶ περιδίνησιν (*σχ. 329*).

Κατόπιν τὸ ὕδωρ προσβάλλει τὰ πτερύγια τοῦ τροχοῦ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τοιαύτην μορφὴν ὥστε νὰ προκαλοῦν ἀλλαγὴν τῆς φορᾶς τῆς ροῆς, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ τίθεται ὁ τροχὸς εἰς περιστροφήν.

Οἱ ὑδροστρόβιλοι ἀντιδράσεως χρησιμοποιοῦνται εἰς μικρὰς πτώσεις εἰς τὰς ὁποίας οἱ ὑδροστρόβιλοι δράσεως θὰ ἦσαν ἀσύμφοροι διότι ἡ μικρὰ ταχύτης τοῦ ὕδατος ἡ ὀφειλομένη εἰς τὴν μικρὰν πτῶσιν ἀπαιτεῖ μικρὰν ταχύ-



Σχ. 330. Τροχοὶ ὑδροστροβίλων Francis.

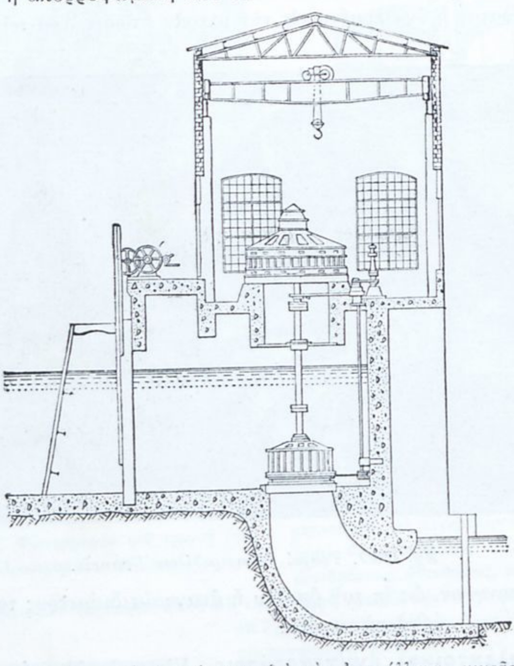
τητα τῶν πτερυγίων, ὥς ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ ἀναγκαία διάμετρος τοῦ τροχοῦ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ὑπερβολικὰ μεγάλη.

Ὑδροηλεκτρικαὶ ἐγκαταστάσεις. Εἰς τοὺς *ὑδροηλεκτρικοὺς σταθμοὺς* μετατρέπεται ἡ ἐνέργεια κινουμένων ὑδάτων εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦνται ὑδροστρόβιλοι οἱ ὁποῖοι συνδεόμενοι καταλλήλως μὲ ἠλεκτρικὰς γεννητρίας θέτουν αὐτὰς εἰς κίνησιν ἡ δὲ παραγομένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται ὑπὸ ὑψηλὴν τάσιν εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως. Μία ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις, ἐκμεταλλευομένη τὰ ὕδατα ἑνὸς ποταμοῦ καὶ ὑπὸ μεγάλην ὑψομετρικὴν διαφοράν, ἔχει ἐν γενικαῖς γραμμαῖς, ὡς ἑξῆς:

Ἐντὸς τοῦ ποταμοῦ κατασκευάζεται φράγμα, τὸ ὁποῖον ἀνακόπτει τὸ ρεῦμα, τὰ δὲ ὕδατα παροχετεύονται ἐντὸς διώρυγος ἢ σήραγγος ὑπὸ μικρὰν κλίσιν ἕως ὅτου φθάσουν εἰς σημεῖον εὑρισκόμενον πλησίον τοῦ σταθμοῦ καὶ ὑπερκείμενον αὐτοῦ. Ἐκεῖθεν φέρονται ἐντὸς *σωλῆνος πιέσεως* εὑρισκομένου ὑπὸ μεγάλην κλίσιν καὶ καταλήγοντος εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον. Μετὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τοῦ ὑδροστροβίλου τὰ ὕδατα ἐπαναφέρονται εἰς τὸν ποταμὸν διὰ τῆς *διώρυγος φυγῆς*.

Ὅταν ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ εἶναι μικρὰ καὶ ἡ παροχὴ εἶναι μεγάλη τὸ ὕδωρ φέρεται ἀπ᾽ εὐθείας εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον—δηλ. χωρὶς τὴν παρεμβολὴν σωλήνων—ὁ ὁποῖος μάλιστα εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι βυθισμένος ἐντὸς τοῦ ὕδατος *(σχ. 331)*.

Ἐπειδὴ ἡ ἀπορροφωμένη ὑπὸ τῶν καταναλατῶν ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς πα-



Σχ. 331. *Ὑδροηλεκτρικὴ ἐγκατάστασις διὰ τὴν ἐκμετάλλευσιν μικρᾶς πτώσεως. Διακρίνομεν τὸν ὑδροστρόβιλον—βυθισμένον ἐντὸς τοῦ ὕδατος—διὰ τοῦ ὁποίου κι- νεῖται ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος συνδεδεμένη γεννήτρια. Δεξιᾶ τῆς γεννητρίας εὑρί- σκεται ρυθμιστὴς τοῦ Watt, ὁ ὁποῖος, διὰ τῆς κατακορύφου ράβδου, ρυθμίζει τὸν μεριστήν. Ἀριστερᾶ διακρίνονται ἐσχάραι καθαρισμοῦ τοῦ ὕδατος, καθὼς καὶ κινητὸν φράγμα.*

ρουσιάζει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ εἰκοσιτετραώρου *αἰχμὰς* ὑπερβαινούσας τὴν μεγίστην ἰσχὺν τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ παράσχουν τὰ ὕδατα τοῦ ποταμοῦ κατασκευάζεται *ὑδαταποθήκη* ἐντὸς τῆς ὁποίας ἀποταμιεύεται τὸ ὕδωρ κατὰ τὰς φάσεις μικρᾶς ζητήσεως καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὰς φάσεις τῶν αἰχμῶν.

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΝ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ

[Θὰ ζητηθῇ τὸ W μετὰ τὸ Β, τὸ G εἰς τὸ Γ, τὸ J εἰς τὸ Ι, τὸ C εἰς τὸ Κ, τὸ H εἰς τὸ Χ, τὸ U, Y εἰς τὸ Υ].

Τ

Υ

Φ

Χ

Ψ

Ω