ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

15 ΤΕΥΧΗ

ΤΕΥΧΟΣ 1ον

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΑΘ. Φ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ
ΦΥΣΙΚΟΣ

ΣΤΡ. Π. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

(5 ΤΕΥΧΗ)

ΤΕΥΧΟΣ 1ον

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ

ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ — ΜΑΘΗΤΑΣ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ — ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (ΕΡΓΟΔΗΓΟΥΣ — ΡΑΔΙΟΤΕΧΝΙΤΑΣ)

Έκδοσις Α΄

ΑΘΗΝΑΙ 1957

ΑΘ. Φ. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ — ΣΤΡ. Π. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ
ΦΥΣΙΚΟΣ — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ

ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ — ΜΑΘΗΤΑΣ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
(ΚΥΡΙΩΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ) ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΜΗΧΑΝΟΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (ΕΡΓΟΔΗΓΟΥΣ ΚΑΙ ΡΑΔΙΟΤΕΧΝΙΤΑΣ)

ΑΘΗΝΑΙ 1956

Διευθύνσεις :

1) Στράτης Παπαδόπουλος
Καθηγητὴς Μαθηματικῶν
Ἑρμοῦ 5. Ν. Ἡράκλειον Ἀττικῆς
Τηλέφωνον 89.170

2) Ἀθ. Φ. Παπαγεωργίου
Καθηγητὴς Φυσικῶν
Λεωφ. Ἐλευθερίας (κτῆμα Γκρόμαν)
ΕΔΕΜ (Ἀθῆναι)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αἱ δυσκολίαι ποὺ συναντοῦν οἱ μαθηταὶ καὶ οἱ ὑποψήφιοι κατὰ τὴν μελέτην τῆς Φυσικῆς, εἶναι γνωσταὶ εἰς ὅλους. Τοῦτο ὀφείλεται κατ' ἀρχὴν εἰς τὴν φύσιν τοῦ μαθήματος. Πολὺ περισσότερον ὅμως, νομίζομεν, εἰς τὴν ἔλλειψιν καταλλήλου βοηθήματος. Χωρὶς νὰ ὑπολείπεται ἕνα καλὸ βιβλίον, τῶν ἀπαιτήσεων διὰ τὰς ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καὶ τοῦ αἰτήματος τοῦ συγχρονισμοῦ, πρέπει νὰ ἐξασφαλίζῃ, μὲ τὸν μεθοδικὸν τρόπον διατάξεως τῆς ὕλης καὶ τὸν περιορισμὸν τοῦ ὄγκου εἰς τὰ ἀπαραίτητα πλαίσια, τὴν στερεὰν γνῶσιν τῶν ἀναγκαίων στοιχείων τῆς Φυσικῆς. Ἡ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς ἐπὶ πολλὰ ἔτη εἰς Γυμνάσια καὶ Φροντιστήρια ὑποψηφίων, μᾶς προσεκόμισεν ἀρκετὴν πεῖραν διὰ τὰς ἀνάγκας καὶ ἀπαιτήσεις τῶν μαθητῶν καὶ ὑποψηφίων.

Πολλὰ ἔχομεν διδαχθῆ ἀπὸ τοὺς μαθητάς μας. Τὸ κέρδος αὐτό, νομίζομεν, ὅτι τὸ ἐπιστρέφομεν σήμερον εἰς τοὺς ἰδίους, μὲ τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν.

Ἰδιαιτέρα προσπάθεια κατεβλήθη διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν θεμελίωσιν καὶ ἀνάπτυξιν τῶν λεπτῶν σημείων. Ἀπεφύγαμεν παντελῶς τὸν δογματικὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτίθενται συνήθως πολλὰ ἐκ τῶν θεμάτων.

Εἰς κάθε ἑνότητα δίδομεν παραδείγματα καὶ ἐφαρμογὰς μὲ θέματα, ποὺ ἐδόθησαν κατὰ τὸ παρελθὸν εἰς τὰς ἐξετάσεις διαφόρων Σχολῶν. Αἱ ἀσκήσεις τοῦ βιβλίου μας ἔχουν κατανεμηθῆ εἰς τρεῖς κατηγορίας ἀπὸ τὰς πλέον ἁπλᾶς πρὸς τὰς πλέον δυσκόλους. Τὰ περιεχόμενα μὲ μικρὰ στοιχεῖα ἐνδιαφέρουν κυρίως τοὺς μαθητὰς πρακτικῆς κατευθύνσεως καὶ τοὺς ὑποψηφίους.

Ἀθῆναι Φεβρουάριος 1956

Στρ. Π. Παπαδόπουλος — Ἀθ. Φ. Παπαγεωργίου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἀντικείμενον τῆς Φυσικῆς. — Ὁ καθορισμὸς τῆς περιοχῆς καὶ τοῦ ἀντικειμένου τῆς Φυσικῆς, δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ τρόπον γενικὸν καὶ ἀπόλυτον. Αἱ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι σπουδάζουν τὰ γενικὰ καὶ εἰδικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν σωμάτων, τὰς δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτῶν καὶ τὰ φαινόμενα ποὺ προκύπτουν ἐξ αὐτῶν. Μὲ αὐτὸν ὅμως τὸν ὁρισμόν, περιλαμβάνομεν ὅ,τι εἰδικώτερον ὀνομάζομεν ***Φυσικὴν*** καὶ ***Χημείαν***. Ἕνας σαφὴς διαχωρισμὸς μεταξὺ Φυσικῆς καὶ Χημείας εἶναι λεπτὸς καὶ δύσκολος. Ὁ ὁρισμὸς τῆς Φυσικῆς ὡς τῆς ἐπιστήμης ἡ ὁποία ἐρευνᾷ τὰ γενικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα δὲν ἀφοροῦν μεταβολὰς τῆς μοριακῆς συγκροτήσεως τῶν σωμάτων, δὲν ἀποσαφηνίζει ἐντελῶς τὰ ὅρια τῆς Φυσικῆς. Ὑπάρχουν φαινόμενα τὰ ὁποῖα δὲν δυνάμεθα νὰ κατατάξωμεν τυπικῶς εἰς τὴν Φυσικὴν ἢ τὴν Χημείαν καὶ τὰ ὁποῖα ἐξετάζει ἡ ***Φυσικοχημεία***. Μὲ τὴν ἀνάπτυξιν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη τῆς ***ἐπιστήμης τοῦ ἀτόμου***, ἀκόμη περισσότερον συγχέονται τὰ ὅρια Φυσικῆς καὶ Χημείας. Ἐκ τῶν προηγουμένων προκύπτει ὅτι, ἡ Φυσικὴ καὶ ἡ Χημεία κατ' οὐσίαν ἀποτελοῦν ἑνιαίαν ἐπιστήμην καὶ ὁ χωρισμὸς γίνεται κυρίως διὰ τὴν ἀνετωτέραν μελέτην τῶν φαινομένων.

2. Φαινόμενα — Παρατήρησις — Πείραμα. — ***«Φαινόμενον ὀνομάζομεν κάθε μεταβολὴν ἡ ὁποία συμβαίνει εἰς τὴν κατάστασιν ἢ τὴν μορφὴν τοῦ ὑλικοῦ κόσμου».*** Ἀπὸ ἀπόψεως μεθόδου διὰ τὴν σπουδὴν τῶν φυσικῶν φαινομένων διαθέτομεν κατ' ἀρχὴν δύο μέσα, ***τὴν παρατήρησιν*** καὶ τὸ ***πείραμα***.

α) Ἡ ***παρατήρησις*** συνίσταται εἰς τὴν προσεκτικὴν ἐξέτασιν τῶν φαινομένων, ὅπως αὐτὰ παράγονται εἰς τὴν φύσιν, χωρὶς τὴν προσωπικὴν ἐπέμβασιν τοῦ παρατηρητοῦ.

β) Τὸ ***πείραμα*** εἶναι ἡ ἀναπαραγωγὴ ἑνὸς φαινομένου, ὑπὸ συνθήκας αἱ ὁποῖαι ἀποκλείουν κατὰ τὸ δυνατὸν τὴν ἐπίδρασιν παραγόντων ξένων πρὸς τὸ φαινόμενον. Διὰ τοῦ πειράματος ἐπιτυγχάνομεν: 1) τὸν διαχωρισμὸν τῶν φαινομένων καὶ τὴν ἄνετον παρακολούθησίν των· 2) μεταβολὴν τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐκτελεῖται τὸ πείραμα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς αἰτίας ποὺ προκαλοῦν τὸ φαινόμενον· 3) μετρήσεις.

3. Φυσικὸς νόμος. — Ὅταν διὰ τῶν παρατηρήσεών μας καὶ τῶν πειραμάτων ἀναγνωρίσωμεν ὅτι φαινόμενα ἢ ἰδιότητες ἐμφανίζονται κανονικὰ ὑπὸ καθωρισμένας συνθήκας, σχηματίζομεν ἐκφράσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **φυσικοὺς νόμους**. Π.χ. «ὁ ἦχος διαδίδεται μόνον διὰ τῶν ὑλικῶν σωμάτων», «ὅλα τὰ στερεὰ σώματα ἠλεκτρίζονται διὰ τριβῆς» κ. λ. π. Ἕνας φυσικὸς νόμος ἐπιτρέπει νὰ προβλέψωμεν τὰ φαινόμενα τὰ ὁποῖα θὰ παραχθοῦν, ὅταν πραγματοποιηθοῦν ὡρισμέναι προϋποθέσεις.

Εἰς τὰ φαινόμενα, ὅπου ἠμποροῦμε νὰ ἐπιτύχωμεν μετρήσεις, οἱ νόμοι παρίστανται διὰ μαθηματικῶν τύπων. Τοὺς τύπους αὐτοὺς διαμορφώνομε μὲ τὴν μαθηματικὴν ἐπεξεργασίαν τῶν φυσικῶν μεγεθῶν ποὺ λαμβάνουν μέρος εἰς τὸ φαινόμενον. Π. χ. ὁ νόμος τῶν Boyle-Mariotte, «τὸ γινόμενον τῆς πιέσεως ἐπὶ τὸν ὄγκον ὡρισμένης μάζης ἀερίου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, εἶναι σταθερόν», παρίσταται διὰ τοῦ τύπου $P.V =$ σταθ.

Συχνὰ ἀναγκαζόμεθα νὰ τροποποιοῦμεν τοὺς τύπους τῶν ποσοτικῶν νόμων, διὰ νὰ αὐξάνωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως τῶν μεγεθῶν καὶ νὰ προσεγγίζωμεν ὅλο καὶ περισσότερον τὰς τιμὰς τῶν τελειοποιουμένων συνεχῶς μετρήσεων. Π.χ. ὁ προηγούμενος τύπος $P.V. =$ σταθ. τῶν Boyle-Mariotte, ἀντεκατεστάθη ἀπὸ ἄλλον ἀκριβέστερον, τοῦ Van der Waals κ. λ. π.

4. Ὑπόθεσις—Θεωρία. — Τὸ πλῆθος τῶν φυσικῶν νόμων τακτοποιοῦμεν εἰς ὁμάδας καὶ διατυπώνομεν διὰ τὴν ἑρμηνείαν των τὰς λεγομένας ***ὑποθέσεις*** καὶ ***θεωρίας***. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ὑποθέσεως καὶ θεωρίας δὲν εἶναι βασική. ***Θεωρία*** λέγεται συνήθως μία ὑπόθεσις, ἡ ὁποία ἔχει ἐπ' ἀρκετὸν ὑποβληθῆ εἰς τὴν δοκιμασίαν τῆς μελέτης καὶ τοῦ πειράματος. Δεχόμενοι π.χ. ὅτι τὸ φῶς ὀφείλεται εἰς κυματικὸν φαινόμενον, ἠμποροῦμεν νὰ ἑρμηνεύσωμεν ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν ὀπτικῶν φαινομένων διὰ τῆς θεωρίας τῶν κυμάνσεων.

Μία θεωρία εἶναι παραδεκτή, ὅταν ἐπιτρέπῃ νὰ ἐξηγήσωμεν ἐπαρκῶς ὅλα τὰ γνωστὰ φαινόμενα ὡρισμένης κατηγορίας καὶ ν' ἀνακαλύψωμεν νέα. Πολλαὶ θεωρίαι μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου ἐξελίσσονται ὥστε νὰ προσαρμόζωνται εἰς τὰς προόδους τῆς ἐπιστήμης καὶ ἄλλαι ἐγκαταλείπονται.

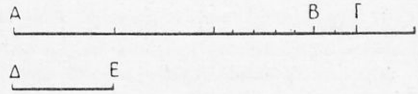
5. Ἡ Ὕλη—Καταστάσεις.— Ἡ ὕλη ἀπὸ τὴν ὁποίαν συγκροτοῦνται τὰ διάφορα σώματα δὲν παρουσιάζεται συνεχής, διότι συνίσταται ἀπὸ πολὺ μικρὰ σωματίδια τὰ λεγόμενα ***μόρια*** καὶ ***ἄτομα***. Αὐτὰ δὲν εὑρίσκονται εἰς ἐπαφήν, ἀλλὰ εἰς ἀποστάσεις ἀρκετὰ μεγάλας ἐν σχέσει μὲ τὰς ἰδίας των διαστάσεις καὶ ἀσκοῦνται μεταξύ των ἑλκτικαὶ δυνάμεις.

Λόγῳ τῆς μοριακῆς των συγκροτήσεως τὰ σώματα παρουσιάζονται εἰς τάς αἰσθήσεις μας ὑπὸ τρεῖς καταστάσεις: ὡς ***στερεά, ὑγρὰ*** καὶ ***ἀέρια***.

6. Φυσικὰ ποσὰ — Μετρήσεις. — Τὰ ποσὰ τὰ ὁποῖα συναντῶμεν εἰς τὴν μελέτην τῶν φαινομένων, λέγονται ***φυσικὰ ποσά***· π.χ. τὸ μῆκος, ἡ μᾶζα, ἡ θερμότης, ἡ ταχύτης κ.λ.π.

Μέτρησις ποσοῦ ὀνομάζεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὸ ὁποῖον κατὰ συνθήκην λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Διὰ τὴν μέτρησιν ἑνὸς ποσοῦ στηριζόμεθα εἰς τὴν ***ἔννοιαν τῆς ἰσότητος*** καὶ ***τῆς προσθέσεως*** δύο μεγεθῶν τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Προϊὸν τῆς συγκρίσεως τοῦ θεωρουμένου ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα, εἶναι τὸ ***μέτρον*** τοῦ ποσοῦ, δηλ. ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ***τὸν λόγον τοῦ ποσοῦ πρὸς τὴν μονάδα του***. Π. χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 1) εἶναι 3 ἐν σχέσει πρὸς τὸ ΔΕ (μονάς), σημαίνει ὅτι τὸ ΑΒ εἶναι τὸ ἄθροισμα τριῶν τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ ΔΕ· καὶ γράφομεν : $\frac{AB}{\Delta E} = 3.$



Σχ. 1.

Ὁμοίως, ὅταν λέγωμεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ ΑΓ ὡς πρὸς τὸ ΔΕ εἶναι $3\frac{2}{5}$, σημαίνει ὅτι τὸ ΑΓ εἶναι τὸ ἄθροισμα τριῶν τμημάτων ἴσων πρὸς τὸ ΔΕ καὶ δύο τμημάτων ἴσων ἕκαστον πρὸς τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ΔΕ· καὶ γράφομεν : $\frac{A\Gamma}{\Delta E} = 3\ \frac{2}{5}$

Τὸ μέτρον ἑνὸς ποσοῦ ἐξαρτᾶται προφανῶς ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τῆς μονάδος. Π.χ. λέγομεν ὅτι τὸ σῶμα Α εἶναι 3 ὀκάδες (μονὰς ἡ ὀκὰ) ἢ 3.840 γραμμάρια (μονὰς τὸ γραμμάριον).

Ἡ μέτρησις τῶν φυσικῶν ποσῶν ἐπιτρέπει νὰ δημιουργήσωμεν εἰς τὰ φαινόμενα ***ποσοτικὰς σχέσεις σπουδαιοτάτης σημασίας***. Ἡ ποιοτικὴ μόνον μελέτη τῶν φαινομένων εἶναι σχεδὸν χωρὶς πραγματικὴν ἀξίαν, ἂν δὲν ἀκολουθῆται καὶ ἀπὸ τὴν μελέτην τῆς ποσοτικῆς ἐξελίξεως αὐτῶν. Δὲν ἀρκεῖ π.χ. νὰ γνωρίζωμεν ὅτι μία σιδηρᾶ ῥάβδος θερμαινομένη ἐπιμηκύνεται, ἀλλὰ πολὺ περισσότερον ἐνδιαφέρει νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐπιμηκύνσεως μετὰ τῆς θερμοκρασίας, διὰ νὰ συναγάγωμεν τοὺς νόμους τῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου.

7. *Θεμελιώδεις καὶ παράγωγοι μονάδες.* — Ἠμποροῦμε διὰ κάθε ποσὸν νὰ ἐκλέξωμεν αὐθαιρέτως τὴν μονάδα του. Λόγῳ ὅμως τοῦ μεγάλου πλήθους τῶν μεγεθῶν καὶ τῆς μεταξύ των ἐξαρτήσεως κατὰ τὴν παραγωγὴν καὶ ἐξέλιξιν τῶν φαινομένων, ἐπιβάλλεται ὁ περιορισμὸς τῶν αὐθαιρέτως ἐκλεγομένων μονάδων. Τὰ ποσὰ τῶν ὁποίων ἡ ἐκλογὴ τῆς μονάδος γίνεται αὐθαιρέτως, λέγονται ***θεμελιώδη*** καὶ αἱ μονάδες αὐτῶν ***θεμελιώδεις μονάδες***. Αἱ μονάδες τῶν ὑπολοίπων ποσῶν καθορίζονται ἀκριβῶς ἐκ τοῦ τρόπου συσχετίσεως αὐτῶν πρὸς τὰ θεμελιώδη καὶ δι' αὐτὸ ὀνομάζονται ***παράγωγοι μονάδες***.

8. *Συστήματα μονάδων.* — Εἶναι φανερὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς θεμελιώδη ποσά, ὅποια θέλομεν. Ἀπὸ τὰς ἐφαρμογὰς ὅμως, ἀπεδείχθη συμφέρον τὰ ἐκλεγόμενα ποσὰ ὡς θεμελιώδη, νὰ εἶναι τρία. Συνήθως εἰς τὴν φυσικὴν ὡς θεμελιώδη ποσὰ λαμβάνομεν τὸ ***Μῆκος*** L (Longueur), τὴν ***Μᾶζαν*** M (Masse) καὶ τὸν ***Χρόνον*** T (Temps). Αἱ μονάδες αὐτῶν ἀντιστοίχως εἶναι : τὸ ***ἑκατοστόμετρον*** (Centimètre), τὸ ***γραμμάριον μάζης*** (Gramme) καὶ τὸ ***δευτερόλεπτον*** (Seconde).

Τὸ σύστημα τῶν μονάδων αὐτῶν συμβολίζεται μὲ τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ἀναφερομένων μονάδων, δηλ. ὡς C.G.S καὶ εἰσήχθη τὸ 1881 ἀπὸ τὸ διεθνὲς συνέδριον Ἠλεκτρολόγων.

Τὸ ***ἑκατοστόμετρον*** (cm) κατὰ τὸν ἀρχικὸν ὁρισμόν, εἶναι τό $\frac{1}{100}$ τοῦ $\frac{1}{40.000.000}$ ***ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς Γῆς***· ἀκριβῶς ὅμως, τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ προτύπου μέτρου τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ ***Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν*** εἰς τὸ Παρίσι.

Ὁμοίως τὸ ***γραμμάριον μάζης*** κατὰ τὸν ἀρχικὸν ὁρισμόν εἶναι ἡ ***μᾶζα ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου, θερμοκρασίας 4°C***· εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως τό $\frac{1}{1000}$ τοῦ προτύπου χιλιογράμμου τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ Δ. Γ. Μ. & Σ.

Τὸ ***δευτερόλεπτον*** (sec) εἶναι τὸ $\frac{1}{86400}$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας.

9. *Ἐξάρτησις ποσῶν ἀπὸ τὰ θεμελιώδη.* — Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ γίνῃ ἀντιληπτόν, πῶς συσχετίζονται τὰ διάφορα ποσὰ μὲ τὰ θεμελιώδη. Ἐπίσης, πῶς παράγονται αἱ μονάδες αὐτῶν ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις. Ἀναφέρομεν μερικὰ παραδείγματα.

α) Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν ὅτι, τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου δίδεται ἐκ τοῦ τύπου, $E = \alpha \cdot \beta$, ὅπου α καὶ β τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του· ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι, $E = \pi\varrho^2 = \pi \cdot \varrho \cdot \varrho$, ὅπου ρ ἡ ἀκτίς ($\pi = 3{,}14$)· τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, $E = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\upsilon$, ὅπου α, β τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ υ τὸ ὕψος κ.λ.π. Ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων συμπεραίνομεν ὅτι, ἀνεξαρτήτως τῶν ἀριθμητικῶν συντελεστῶν 1, π, $\frac{1}{2}$ κ.λ.π., ἡ ἐπιφάνεια ὡς φυσικὸν ποσὸν παράγεται ἀπὸ τὸ γινόμενον μήκους ἐπὶ μῆκος. Ἡ συσχέτισις αὐτὴ γράφεται:

Ἐπιφάνεια = Μῆκος × Μῆκος ἢ $E = L \cdot L. = L^2$ (1).

Ἡ σχέσις (1) $E = L^2$, λέγεται ***ἐξίσωσις διαστάσεων τοῦ ποσοῦ ἐπιφάνεια*** καὶ σημαίνει τὸν τρόπον ἐξαρτήσεως τῆς Ε ἀπὸ τὸ θεμελιῶδες ποσὸν L. Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) καὶ τὸν τύπον τῆς Γεωμετρίας $E = \alpha \cdot \beta$, προκύπτει ὅτι, εἰς τὸ σύστημα C.G.S ***«μονὰς ἐπιφανείας εἶναι τὸ τετράγωνον μὲ πλευρὰν*** 1 cm ***καὶ σημειοῦται*** $1 cm^2$».

β) Ὁμοίως διὰ τὸν ὄγκον τῶν σωμάτων ἔχομεν:

Ὄγκος = Μῆκος × Μῆκος × Μῆκος ἢ $V = L \cdot L \cdot L = L^3$ (2).

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ἡ ὁποία ἐπίσης καλεῖται ***ἐξίσωσις διαστάσεων τοῦ ποσοῦ ὄγκος*** καὶ ἀπὸ τὸν τύπον τῆς Γεωμετρίας $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις α, β, γ, προκύπτει ὅτι, εἰς τὸ σύστημα C.G.S ***«μονὰς ὄγκου εἶναι κύβος μὲ πλευρὰν 1*** cm ***καὶ σημειοῦται*** $1 cm^3$».

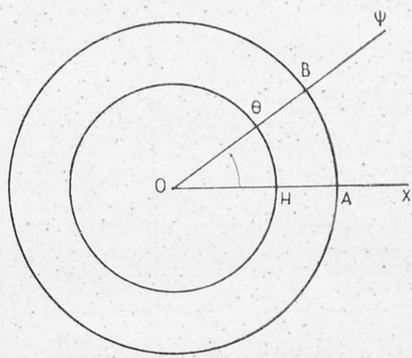
γ) Ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς δυναμικῆς τὸ ποσὸν δύναμις ἔχει τὴν ἑπομένην ἐξίσωσιν διαστάσεων:

$$F = L \cdot M \cdot T^{-2}$$

10. Μονάδες γωνιῶν. — Τὸ μέτρον ἑνὸς τόξου εἶναι καὶ μέτρον τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας. Τὸ μέτρον τῆς γωνίας πρέπει νὰ εἶναι ***ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος*** τοῦ κύκλου καὶ πράγματι αὐτὸ συμβαίνει.

Ὡς γνωστόν, χωρίζομε τὴν περιφέρεια εἰς ***360 ἴσα μέρη*** καὶ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὸ ὀνομάζομεν ***μοῖρα***. Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ ($1^\circ = 60'$), τὸ δὲ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα ($1' = 60''$). Ἡ εἰς μοίρας ἔκφρασις τῶν τόξων δὲν μᾶς δίδει τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἀλλὰ ***τί μέρος εἶναι τὸ τόξον τῆς περιφερείας του*** καὶ ἡ γωνία ***τί μέρος τῶν 4 ὀρθῶν εἶναι.*** Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ γωνία x O ψ (σχ. 2) εἶναι 36,5 μοιρῶν, σημαίνει ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὰ $\frac{36,5}{360}$ τῆς περιφερείας του, ἀλλὰ καὶ τὸ τόξον ΗΘ εἶναι τὰ $\frac{36,5}{360}$ τῆς περιφερείας του.

Ἐὰν μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΒ ***μὲ μονάδα μήκους τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας του,*** ὁ ἀριθμὸς ποὺ θὰ προκύψη δίδει τὸ μέτρον τοῦ τόξου καὶ τῆς γωνίας εἰς ***ἀκτίνια. Θὰ ὀνομάζωμεν λοιπὸν ἀκτίνιον, τόξον μήκους ἴσου πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας του.*** Συμπεραίνομεν ἄρα ὅτι, καὶ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον μετρήσεως, τὸ μέτρον τόξων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας, ***εἶναι τὸ αὐτὸ*** ἀνεξαρτήτως τοῦ μήκους τῶν ἀκτίνων· διότι : $\frac{\text{τοξ ΑΒ}}{\text{Ο Α}} = \frac{\text{τοξ ΗΘ}}{\text{ΟΗ}}$



Σχ. 2.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι ἡ γωνία xOψ εἶναι ω ἀκτινίων, σημαίνει ὅτι, τόξον κέντρου Ο (καὶ οἱασδήποτε ἀκτῖνος) εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει ἡ xOψ, ἰσοῦται μὲ ω ἀκτίνας του.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τόξου π.χ. εἰς cm, εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν ω ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς cm. Π.χ. ἂν $\omega = \frac{7}{5}$ ἀκτίνια καὶ $\varrho = 25$ cm, τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου τόξου εἰς cm, θὰ εἶναι : $\omega.\varrho = \frac{7}{5} . 25 \text{ cm} = 35 \text{ cm}$. Γενικῶς λοιπὸν ἔχομεν τὴν σχέσιν : $\boxed{\upsilon = \omega.\varrho}$ (1), ὅπου υ τὸ μῆκος τοῦ τόξου εἰς cm, m, km κ.λ.π. ***ἀναλόγως τῆς μονάδος μετρήσεως τῆς ἀκτῖνος.***

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἰσοῦται μὲ 2 πρ cm ἢ m ἢ km κ.λ.π. καὶ κατὰ τὸν τύπον (1) συνάγομεν ὅτι ***ἡ περιφέρεια ἰσοῦται μὲ 2 π ἀκτίνια.***

Σημείωσις. Ἐπειδὴ μία καλὴ γνῶσις τῆς φυσικῆς προϋποθέτει εὐχερῆ χρῆσιν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων φυσικῶν ποσῶν, διὰ τοῦτο συνιστῶμεν εἰς τοὺς σπουδαστὰς ὅπως μὲ ὅλως ἰδιαιτέραν ὑπομονὴν ἐξοικειωθοῦν μὲ τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας εἰς τὴν πορείαν τῆς μελέτης των θὰ συναντοῦν.

ΠΙΝΑΞ ΜΟΝΑΔΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ

	Ὀνομασία	*Συμβολισμὸς*	*Σχέσις μὲ τὴν μονάδα CGS*
Μονάδες μήκους	Χιλιόμετρον	Km	1000 μέτρα $=10^5$ cm
	Μέτρον	m	1 μέτρον $=10^2$ cm
	Δεκατόμετρον (παλάμη)	dm	$\frac{1}{10}$ μέτρου $=10$ cm
	Ἑκατοστόμετρον (πόντος)	cm	$\frac{1}{100}$ μέτρου $=1$ cm
	Χιλιοστόμετρον	mm	$\frac{1}{1000}$ μέτρου $=10^{-1}$ cm
	Μικρὸν	μ	$\frac{1}{1000}$ mm $=10^{-4}$ cm
	Χιλιοστομικρὸν	mμ	$\frac{1}{1000}$ μ $=10^{-7}$ cm
	Ångström	Å	$\frac{1}{10}$ mμ $=10^{-8}$ cm
Μονάδες μάζης	Γραμμάριον μάζης	gr	$\frac{1}{1000}$ χιλιογράμμου $=1$gr
	Χιλιόγραμμον »	Kg	1000 γραμ. μάζης $=10^3$ gr
	Τόννος »	ton	1000 Kg $=10^6$ gr
Μονάδες χρόνου	Δευτερόλεπτον	sec	$\frac{1}{86400}$ μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας
	Πρῶτον λεπτὸν	min	60 sec
	Ὥρα	h	60 min $=3600$ sec
Μονάδες δυνάμεως	Δύνη	dyn	1 δύνη $=1$gr. 1cm. 1sec^{-2}
	Γραμμάριον δυνάμεως	gr*	1 gr* $=981$ dyn.
	Χιλιόγραμμον »	Kg*	1 Kg* $=1000$ gr* $=981000$ dyn
	Τόννος »	ton*	1 ton* $=1000$ kg* $=981\cdot10^6$ dyn
Μονάδες ἐπιφανείας	Τετραγωνικὸν χιλιόμετρον	Km^2	1 km^2 $=10^6$ m^2 $=10^{10}$ cm^2
	» μέτρον	m^2	1 m^2 $=100$ dm^2 $=10^4$ cm^2
	» δεκατόμετρον	dm^2	1 dm^2 $=100$ cm^2
	» ἑκατοστόμετρον	cm^2	1 cm^2
	» χιλιοστόμετρον	mm^2	1 mm^2 $=\frac{1}{100}$ cm^2 $=10^{-2}$ cm^2
Μονάδες ὄγκου	Κυβικὸν χιλιόμετρον	Km^3	1 Κυβ. χιλ. $=10^9$ m^3 $=10^{15}$ cm^3
	» μέτρον	m^3	1 κυβ. μέτ. $=1000$ dm^3 $=10^6$ cm^3
	» δεκατόμετρον ἢ λίτρον	dm^3 ἢ lit	1 » παλ. $=1000$ cm^3 $=10^3$ cm^3
	» ἑκατοστόμετρον	cm^3	1 cm^3
	» χιλιοστόμετρον	mm^3	1κ. χιλιοστ. $=\frac{1}{1000}$ cm^3 $=10^{-3}$cm^3

Ἀσκήσεις.

1) Πόσα cm εἶναι: α) 2,5 dm, β) 3,43 m, γ) 1.009 km.
2) 22 cm νὰ μετατραποῦν εἰς dm, m, km.
3) Πόσα mm^2 εἶναι: α) $7cm^2$ β) $34,8m^2$ γ) 1 km^2
4) 5034 cm^2 νὰ μετατραποῦν εἰς dm^2 καὶ m^2
5) Πόσα cm^2 εἶναι: α) 3,5 m^2 β) 682 lit.
6) 18423 lit νὰ μετατραποῦν εἰς m^3 καὶ cm^3
7) Πόσα gr εἶναι: α) 2,4 kg καὶ β) 242 ton.
8) $74 \cdot 10^5$ gr νὰ μετατραποῦν εἰς kg καὶ ton.
9) Πόσα sec ἔχει μία ἑβδομάς.
10) $133582 \cdot 10^5$ sec, πόσα ἔτη εἶναι (1 ἔτος = 365 ἡμ.).
11) Πόσαι dyn εἶναι: α) 2,3 gr* β) 1033,6 gr* γ) 10 ton*.
12) 4905 dyn νὰ μετατραποῦν εἰς gr* καὶ kg*.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

11. Γενικά. — ***Μηχανική*** εἶναι ἡ ἐπιστήμη ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς κινήσεις καὶ τοὺς μετασχηματισμοὺς ποὺ παθαίνουν τὰ σώματα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν διαφόρων αἰτίων (δυνάμεων).

Τὰ ὑλικὰ σώματα ἔχουν πάντοτε ἔκτασιν. Ἐν τούτοις διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ζητημάτων εἰς τὴν Μηχανικήν, θεωροῦμεν στοιχειώδη ὑλικὰ σώματα τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις ἐν σχέσει μὲ τὴν περιοχὴν ἐντὸς τῆς ὁποίας ἐξετάζομεν τὴν κίνησιν, νὰ μὴν λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν. Τὰ στοιχειώδη αὐτὰ σώματα ἐξομοιώνομεν ***πρὸς σημεῖα,*** εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν συγκεντρωμένην ὁλόκληρον τὴν ὕλην των καὶ τὰ ὀνομάζομεν ***ὑλικὰ σημεῖα.*** Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἔννοια τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι σχετική. Π.χ. ἡ Γῆ, εἰς ἀστρονομικὰ ζητήματα ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς ὑλικὸν σημεῖον, ὅπως καὶ ὅλα τὰ οὐράνια σώματα.

Κάθε σῶμα ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς ἄθροισμα ὑλικῶν σημείων καὶ ἑπομένως ἡ ***μηχανικὴ τῶν ὑλικῶν σωμάτων*** ἠμπορεῖ νὰ προκύψη διὰ καταλλήλου ἐπεκτάσεως τῆς ***μηχανικῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου.***

Τὴν Μηχανικὴν διαιροῦμεν συνήθως εἰς τρία μέρη: ***Στατικήν, Κινητικήν, Δυναμικήν.***

α) Ἡ ***Στατικὴ*** εἶναι τὸ μέρος τῆς μηχανικῆς τὸ ὁποῖον ἀσχολεῖται μὲ τὰς συνθήκας ἰσορροπίας τῶν σωμάτων, δηλ. μὲ τὰς προϋποθέσεις ὑπὸ τὰς ὁποίας τὰ σώματα εὑρίσκονται εἰς ἠρεμίαν.

β) Ἡ ***Κινητικὴ*** ἐξετάζει τὰς κινήσεις (ἀλλαγὴν θέσεως τῶν σωμάτων εἰς τὸν χῶρον) ἀνεξαρτήτως τῶν αἰτίων ποὺ προκαλοῦν αὐτάς.

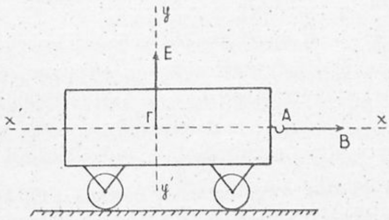
γ) Ἡ ***Δυναμικὴ*** μελετᾶ τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν κινήσεων καὶ τῶν αἰτίων τὰ ὁποῖα τὰς προκαλοῦν.

ΣΤΑΤΙΚΗ

Δυνάμεις

12. Ἔννοια τῆς δυνάμεως. — Ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως ἀποκτᾶται ἀπὸ τὴν καθημερινὴ πεῖρα. Π. χ. ὅταν ἕνα ἱστιοφόρον πλαίη εἰς τὴν θάλασσαν, λέγομεν ὅτι «ἡ δύναμις τοῦ ἀνέμου» τὸ κάνει νὰ κινεῖται πρὸς κάποια διεύθυνσιν. Ὅταν ἕλκωμεν ἕνα μικρὸ ἁμαξάκι (σχ. 3), καταβάλλομεν κάποια προσπάθεια ἡ ὁποία προέρχεται «ἀπὸ τὴν μυϊκήν μας δύναμιν»·

παρατηροῦμεν συγχρόνως, ὅτι τὸ ἁμαξάκι μετατοπίζεται κατὰ τὴν φορὰν τῆς ἕλξεώς μας ΑΒ.



Σχ. 3.

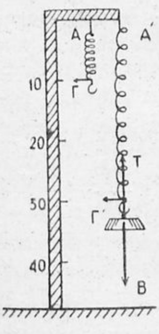
Τὸ ἐλατήριον ΑΓ, παραμορφώνεται ἀπὸ «τὸ βάρος» τοῦ σώματος Β (σχ. 4) κ.λ.π.

Γενικῶς, ἀπὸ τὰς διαφόρους παρατηρήσεις μας, ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως.

«***Δύναμις εἶναι κάθε αἰτία ἱκανὴ νὰ δημιουργήση κίνησιν εἰς τὰ σώματα, νὰ μετατρέψη τὴν κίνησιν αὐτῶν ἢ νὰ ἀλλάξη τὸ σχῆμα των***». Αἱ δυνάμεις ἄφθονοῦν εἰς τὴν φύσιν˙ π. χ. ***ἡ μυϊκή μας δύναμις, τὸ βάρος τῶν σωμάτων, αἱ ἠλεκτρικαὶ δυνάμεις, αἱ μαγνητικαὶ δυνάμεις, αἱ δυνάμεις τριβῆς κ.λ.π.***

13. Γνωρίσματα καὶ παράστασις δυνάμεως. — Ἂν π.χ. διὰ τὴν ἕλξιν δέκα ὀχημάτων ἀπαιτεῖται μία ἀτμομηχανή, διὰ τὴν ἕλξιν εἴκοσι ὁμοίων ὀχημάτων χρειαζόμεθα δύο ἀτμομηχανὰς τῆς αὐτῆς ἱκανότητος. Λέγομεν ὅτι ἡ ἑλκτικὴ δύναμις τῶν δύο ἀτμομηχανῶν, εἶναι διπλασία τῆς δυνάμεως τῆς μιᾶς.

Ἂν ἀποπειραθῶμεν νὰ ἀνυψώσωμε τὸ ἁμαξάκι (δύναμις ΓΕ, σχ. 3), δὲν θὰ τὸ ἐπιτύχωμεν (ἐφ' ὅσον εἶναι ἀρκετὰ βαρὺ) καὶ λέγομεν ὅτι ἡ δύναμίς μας ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὸ βάρος του.



Σχ. 4.

Τὸ βάρος τοῦ σώματος Β (σχ. 4), παραμορφώνει τὸ ἐλατήριον ΑΓ καὶ εἰς τὴν θέσιν Γ' ἐπέρχεται ἰσορροπία.

Πλῆθος ὁμοίων παραδειγμάτων καὶ περιστατικῶν, μᾶς πείθουν ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τῶν διαφόρων δυνάμεων ἢ καὶ μιᾶς δυνάμεως προερχομένης ἐκ τῆς αὐτῆς πηγῆς, (ἄνθρωπος, ἀτμομηχανή, κ.λ.π), εἶναι ***διάφορα*** καὶ ἐξαρτῶνται ***ἀπὸ τὸν τρόπον ἐνεργείας αὐτῶν.***

Δὲν ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν μόνον τὸ μέγεθος μιᾶς δυνάμεως, (π. χ. ὁ ἄνθρωπος Α ἔχει διπλασίαν δύναμιν τοῦ Β ἢ 3αν τοῦ Γ), ἀλλὰ ἐπὶ πλέον νὰ γνωρίζωμεν ***τὸ σημεῖον*** τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζει, τὴν ***εὐθεῖαν*** κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ καὶ ἀκόμη ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας, τὴν ***φορὰν*** πρὸς τὴν ὁποίαν τείνει νὰ κινήση τὸ σῶμα.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω λόγους λέγομεν ὅτι τὰ χαρακτηριστικὰ κάθε δυνάμεως εἶναι τέσσαρα:

α) ***Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως***, δηλ. τὸ σημεῖον τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐξασκεῖται (σημεῖα Α,Γ σχ. 3).

β) ***Τὸ στήριγμά της,*** δηλ. ἡ εὐθεῖα κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ (εὐθεῖα x΄x, y΄y).

γ) ***Ἡ φορά της*** (π.χ. ἀπὸ Α πρὸς Β, ἀπὸ Γ πρὸς Ε).

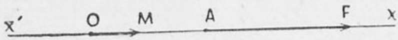
δ) ***Ἡ ἔντασίς της,*** δηλ. τὸ μέτρον της ἐν σχέσει μὲ μίαν δύναμιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ στηρίγματος τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Κατόπιν τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων συμφωνοῦμεν νὰ παριστάνωμεν μίαν δύναμιν δι ἑνὸς ***εὐθυγράμμου τμήματος***, μὲ ***ὡρισμένην*** ἀρχὴν καὶ ***ὡρισμένον*** τέλος· ὅπως δύναμις $\overrightarrow{ΓΕ}$, δύναμις $\overrightarrow{ΑΒ}$. Τὸ τμῆμα τοῦτο καθορίζει : α) τὸ στήριγμα τῆς δυνάμεως β) τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς (ἡ ἀρχὴ) γ) τὴν φορὰν (ἐκ τῆς ἀρχῆς πρὸς τὸ τέλος) καὶ δ) τὸ μέτρον (τὴν ἔντασιν) ἴσον μὲ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος.

14. Δ ι α ν ύ σ μ α τ α. — Ἀπὸ τὴν παράστασιν τῆς δυνάμεως ἐδημιουργήθη τὸ ***διάνυσμα*** διὰ τὸ ὁποῖον δίδομεν ἐδῶ ὀλίγα στοιχεῖα.

«Διάνυσμα ὀνομάζομεν εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται ἀπὸ τρία στοιχεῖα : διεύθυνσιν, φορὰν καὶ μέτρον».

Π. χ. τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AF}$ (σχ. 5). Ἡ εὐθεῖα x΄x καὶ κάθε παράλληλός της λέγεται ***διεύθυνσις*** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AF}$. ***Φορὰ*** τοῦ διανύσματος εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ F· ἂν κατὰ συνθήκην θεωρήσωμεν αὐτὴν ὡς θετικήν, τὸ διάνυ-



Σχ. 5.

σμα $\overrightarrow{FA}$ θὰ ἔχῃ ἀρνητικὴν φοράν. Ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x λαμβάνομεν ἕνα διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{OM}$ (μὲ θετικὴν φορὰν) ὡς μονάδα καὶ τὸ λέγομεν ***μοναδιαῖον διάνυσμα.*** Ἀπὸ τὴν μέτρησιν ἑνὸς διανύσματος μὲ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, προκύπτει ἕνας ἀριθμός, ***τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος.*** Ἂν πρὸ αὐτοῦ θέσωμεν τὸ σημεῖον + ἢ — καθ' ὅσον τοῦτο δίδει τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν, ἔχομεν μαζὶ μὲ τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος καὶ τὴν φορὰν αὐτοῦ (ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς) π. χ. $\dfrac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{OM}} = 3$ καὶ

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{OM}} = -3.$$

Διανύσματα μὲ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (δηλ. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν), λέγονται ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καθ' ὅσον ἔχουν τὴν αὐτὴν ἢ ἀντίθετον φοράν.

Διανύσματα ὁμόρροπα μὲ τὸ αὐτὸ μέτρον λέγονται ἴσα· ἀντίρροπα μὲ τὸ αὐτὸ μέτρον λέγονται ἀντίθετα. Τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AF}$ θὰ παριστάνωμεν μὲ AF. ***Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα θὰ λέγωνται διαδοχικά, ἐὰν τὸ τέλος τοῦ κάθε ἑνὸς ἀπὸ τοῦ 2ου καὶ ἐφε-***

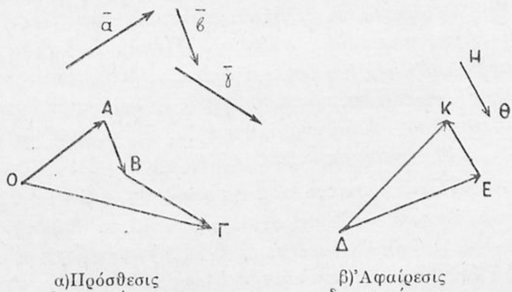
ξῆς, συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ προηγουμένου : ὅπως τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{O A}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{B \Gamma}}$, (σχ. 6α).

Ἂν προσέξωμεν τοὺς προηγουμένους ὁρισμούς, θὰ κατανοήσωμεν ὅτι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ***δὲν δύναται νὰ γίνῃ σύγκρισις δύο διανυσμάτων ἐφ᾽ ὅσον δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν,*** ἀφ᾽ ἑτέρου, ***δυνάμεθα νὰ μετατοπίσωμεν ἕνα διάνυσμα κατὰ μῆκος τοῦ στηρίγματός του ἢ καὶ παραλλήλως πρὸς ἑαυτό.*** Ἂν τὴν ἀρχὴν τοῦ διανύσματος τὴν θέλωμεν σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου, τὸ διάνυσμα τὸ ὀνομάζομεν ***ἐφαρμοστόν.*** Ἂν ἕνα διάνυσμα μετατοπίζεται κατὰ μῆκος τοῦ στηρίγματός του, λέγεται ***ὀλισθαῖνον*** καὶ ἂν ἠμπορῇ νὰ μεταφέρεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, λέγεται ***ἐλεύθερον.***

Ἀπὸ τὴν θεωρίαν τοῦ διανύσματος προκύπτει ὅτι τὰ βασικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ εἶναι: α) ***τὸ μέτρον του,*** (ἀριθμητικὸν στοιχεῖον) καὶ β) ***ἡ διεύθυνσίς του*** (γεωμετρικὸν στοιχεῖον). Ἡ φορὰ τοῦ διανύσματος παρουσιάζεται ὡς ἐπικουρικὸν στοιχεῖον, ὅταν πρόκειται διὰ διανύσματα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

15. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις διανυσμάτων. — α) Ὀνομάζομεν ***«γεωμετρικὸν ἄθροισμα ἢ ἁπλῶς ἄθροισμα διαδοχικῶν διανυσμάτων, τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου».*** Π. χ. $\overrightarrow{\mathrm{O A}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B \Gamma}}=\overrightarrow{\mathrm{O \Gamma}}$ (σχ. 6α). Ἂν τὰ διανύσματα δὲν εἶναι διαδοχικά, ὅπως τὰ $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$, τότε λαμβάνομεν σημεῖον O τοῦ χώρου καὶ φέρομεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{\alpha}$, τὸ $\overrightarrow{\mathrm{A B}}$ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{\beta}$, τὸ $\overrightarrow{\mathrm{B \Gamma}}$ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{\gamma}$. Τὸ $\overrightarrow{\mathrm{O \Gamma}}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, καὶ $\overrightarrow{\gamma}$, δηλ. $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\gamma}=\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}$.

β). Ὀνομάζομεν ***«διαφορὰν δύο διανυσμάτων, τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν εἰς τὸ πρῶτον προσθέσωμεν διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ δευτέρου».*** Π.χ. $\overrightarrow{\Delta \mathrm{E}}-\overrightarrow{\mathrm{H\Theta}}=\overrightarrow{\Delta \mathrm{E}}+\overrightarrow{\mathrm{E K}}=\overrightarrow{\Delta \mathrm{K}}$(σχ. 6β).

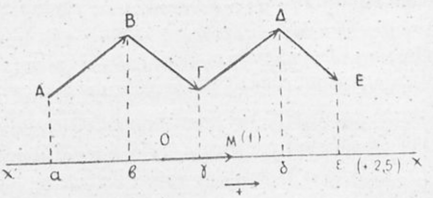


α)Πρόσθεσις διανυσμάτων

β)'Αφαίρεσις διανυσμάττων

Σχ. 6.

16. Ἄξων. Προβολαί. — α) Ἂν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας π.χ. τῆς x'x (σχ. 7) ἔχωμεν καθορίσει τὸ ***μοναδιαῖον διάνυσμα*** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ὅπως καὶ ἕν σημεῖον αὐτῆς O ὡς ἀρχήν, τότε ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ***προσανατολισμένος ἄξων*** ἢ ἁπλῶς **ἄξων**. Κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα καὶ μόνον θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν (ἡ ἀρχὴ εἰς τὸ 0), ὁ ὁποῖος λέγεται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου· π. χ. τὸ σημεῖον ε, ἔχει τετμημένην $+ 2,5$, δηλ. $O\varepsilon = + 2,5$. Ἀντιστρόφως, κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα καὶ μόνον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Ἐπίσης ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ τοῦ ἄξονος εἶναι διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ λέγεται καὶ ***τετμημένη τοῦ διανύσματος***.



Σχ. 7·

β) Ὀνομάζομεν ***«προβολὴν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x, τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\alpha\beta}$, ὅπου α εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Α καὶ β ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τὸν ἄξονα»***. Ἂν ρ, σ, τ, υ καί χ αἱ προβολαὶ ἀντιστοίχως τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}$ καὶ $\overrightarrow{AE}$, εὐκόλως συνάγεται ὅτι, $\rho+\sigma+\tau+\upsilon=\chi$. Δηλ. ***«τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν προβολῶν διανυσμάτων ἐπὶ ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν διανυσμάτων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα»***.

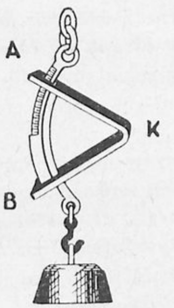
17. Μονόμετρα καὶ διανυσματικὰ ποσά. — Τὰ διάφορα ποσὰ γενικῶς ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν (καὶ ἐκφράζονται) μὲ ἀριθμούς. Τὸ ἐμβαδὸν π. χ. ἐπιπέδου σχήματος, ἡ μᾶζα σώματος, τὸ ἔργον δυνάμεως, εἶναι ποσὰ τὰ ὁποῖα ἐκφράζονται μὲ ἕνα καὶ μόνον ἀριθμόν. Τὰ ποσὰ αὐτὰ ὀνομάζονται ***μονόμετρα*** ἢ ***ἀριθμητικὰ*** ποσά. Ὑπάρχουν ὅμως ποσὰ διὰ τὰ ὁποῖα ἕνας ἀριθμὸς δὲν ἐπαρκεῖ νὰ τὰ χαρακτηρίσῃ. Π.χ. ἡ δύναμις, ἡ ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ, ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον κλπ., εἶναι ποσὰ διὰ τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ γνωρίζωμεν «κατὰ βάσιν» καὶ τὴν ***διεύθυνσίν*** των (νέον στοιχεῖον). Ποσὰ τὰ ὁποῖα ἐκτὸς ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν χαρακτηρίζονται κυρίως καὶ ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν (γεωμετρικὸν στοιχεῖον), ὀνομάζονται ***διανυσματικὰ ποσά***. Κάθε λοιπὸν διανυσματικὸν ποσὸν συντίθεται ἀπὸ δύο ἑτερογενῆ στοιχεῖα, τὸ ἕνα ***ἀριθμητικῆς*** φύσεως (ἀριθμὸς) καὶ τὸ ἄλλο ***γεωμετρικῆς*** (διεύθυνσις).

18. Στατικὴ μέτρησις τῶν δυνάμεων. Δυναμόμετρα. — Ἕνας κατάλληλος τρόπος διὰ τὴν πρακτικὴν μέτρησιν τῆς ἐντάσεως τῶν δυνάμεων, εἶναι ***ἡ συσχέτισις τοῦ μεγέθους αὐτῶν μὲ τὸ μέγεθος τῆς παραμορφώσεως ἐλαστικῶν σωμάτων*** (χάλυψ κλπ.). Ἀπὸ τὸ πείραμα βεβαιούμεθα ὅτι, αἱ παραμορφώσεις τῶν σωμάτων ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, ὅταν αἱ δυνάμεις ***δὲν ὑπερβαίνουν ἕνα ὅριον, εἶναι ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων***. Τὰ διάφορα ὄργανα τὰ ὁποῖα στηρίζονται ἐπὶ τῆς προηγουμένης διαπιστώσεως διὰ τὴν μέτρησιν τῶν δυνάμεων, ὀνομάζονται ***δυναμόμετρα***.

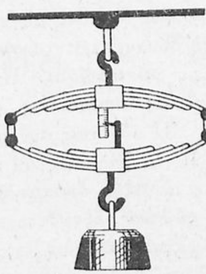
Τὸ σχ. 4 σελ. 13 παριστάνει ἕνα εἶδος δυναμομέτρου. Ἂν π.χ. δύναμις (ἔστω βάρος Β), ἡ ὁποία μετέφερε τὸν δείκτην Γ τοῦ ἐλατηρίου ἀπὸ τὴν ὑποδιαίρεσιν 10 τοῦ βαθμολογημένου στελέχους εἰς τὴνὑποδιαίρεσιν 30, θεωρηθῆ ἴση πρὸς 20 μονάδας δυνάμεως, ἔχομεν ἀμέσως ἕνα τρόπον μετρήσεως. Διότι, δύναμις ἱκανὴ νὰ αὐξήσῃ τὸ μῆκος τοῦ ἐλατηρίου κατὰ μίαν ὑποδιαίρεσιν, θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν δυνάμεων.

Εἰς τὰ σχήματα 8, 9 καὶ 10 εἰκονίζονται τὰ πλέον συνήθη δυναμόμετρα.

Σχ. 8.
Κανταράκι



Σχ. 9.
Ἡ γωνία ΑΚΒ ἐκ χάλυβος ὡς ἐλαστικὴ ἀνοιγοκλείνει

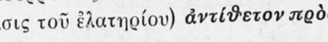


Σχ. 10.
Εἶδος δυναμομέτρου διὰ μεγάλας δυνάμεις

19. Ἀρχὴ ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.— Ὅταν εἰς τὸ ἄγκιστρον τοῦ δυναμομέτρου (σχ. 4) ἐνεργήσῃ μία δύναμις π.χ. τὸ βάρος Β, τὸ ἐλατήριον ἀναπτύσσεται μέχρις ὡρισμένου σημείου ὅπου καὶ ***ἰσορροπεῖ.*** Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας τὸ ἐλατήριον ***ἀναπτύσσει μίαν ἐλαστικὴν δύναμιν Τ*** (ἀντίδρασις τοῦ ἐλατηρίου) ***ἀντίθετον πρὸς τὸ βάρος,*** τὸ ὁποῖον καὶ ἐξουδετερώνει.

Ὅμοια παραδείγματα ἠμπορεῖ νὰ ἀναφέρῃ κανεὶς πολλὰ ἀπὸ τὴν καθημερινήν μας πεῖραν. Π.χ. τὸ βάρος μας ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ δαπέδου. Ἕνας κλάδος δένδρου κάμπτεται μέχρις ἑνὸς ὁρίου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς μυϊκῆς μας δυνάμεως, ὁπότε αἱ ἐλαστικαὶ δυνάμεις κάμψεως τοῦ κλάδου ἐξουδετερώνουν τὴν καταβαλομένην δύναμιν κ.λ.π.

Αἱ παρατηρήσεις αὐταὶ μᾶς ὁδηγοῦν νὰ διατυπώσωμεν μίαν γενικὴν ἀρχὴν ἡ ὁποία ἰσχύει εἰς κάθε περίπτωσιν ὅπου δύναμις δρᾷ ἐπὶ ἑνὸς σώματος· τὴν ***ἀρχὴν ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως:***



Σχ. 11.

«Ὅταν ἕνα ὑλικὸν σημεῖον Α (ἢ σῶμα) ἐξασκῇ ἐπὶ ἄλλου ὑλι-

κοῦ σημείου Β (ἢ σώματος) δύναμιν $\overrightarrow{F}$ ***κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τότε καὶ τὸ Β ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ Α δύναμιν*** $\overrightarrow{F'}$ ***ἀντίθετον πρὸς τὴν*** F (σχ. 11)».

Κατανοοῦμεν λοιπὸν ὅτι πουθενὰ εἰς τὴν φύσιν δὲν παρουσιάζεται μεμονωμένη δύναμις.

Ἡ προηγουμένη ἀρχὴ διετυπώθη διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος.

Δυνάμεις ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου

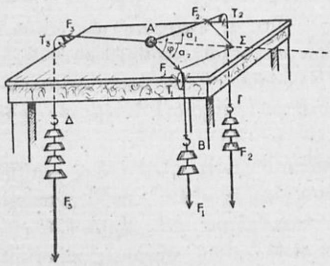
20. Θεμελιώδεις ἀρχαί. — Εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν ἕνα πλῆθος (σύστημα) δυνάμεων, τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου ἢ σώματος, νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ μιᾶς μόνον δυνάμεως ἡ ὁποία ***προκαλεῖ τὸ αὐτὸ μηχανικὸν ἀποτέλεσμα μὲ τὸ σύστημα.*** Ἡ μοναδικὴ αὐτὴ δύναμις λέγεται ***συνισταμένη*** καὶ αἱ ἀντικαθιστώμεναι ὑπ᾽ αὐτῆς δυνάμεις ***συνιστῶσαι.*** Ἡ ἐργασία διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς συνισταμένης λέγεται ***σύνθεσις δυνάμεων.***

Ἡ σύνθεσις δυνάμεων ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν βοήθειαν δύο βασικῶν ἀρχῶν τῆς Στατικῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ***καθαρὰ προϊόντα*** τοῦ πειράματος.

α) «***Δύο δυνάμεις ἀντίθετοι*** [1], ***αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως δηλ. ἰσορροποῦν***». Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ προκύπτει εὐκόλως ἀπὸ τὰ παραδείγματα καὶ ἀπὸ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.

Ἄμεσος συνέπεια αὐτῆς τῆς ἀρχῆς εἶναι ὅτι ***κάθε δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ στερεοῦ, ἐπιτρέπεται νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ἐνεργείας της.***

β) ***Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων.*** «***Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, δίδεται ἀπὸ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ὁριζομένου ὑπ᾽ αὐτῶν τῶν δυνάμεων (δηλ. ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τῶν δυνάμεων)***».



Σχ. 12.

Τὴν ἀρχὴν αὐτὴν διετύπωσεν ὑπὸ τὴν ὁριστικήν της μορφὴν ὁ S. Stevin (1548 — 1620), ἀποδεικνύεται δὲ πειραματικῶς διὰ τοῦ ἑπομένου πειράματος τοῦ Varignon (1654 — 1722). Ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίου τραπέζης (σχ. 12) θέτομεν σφαιρί-

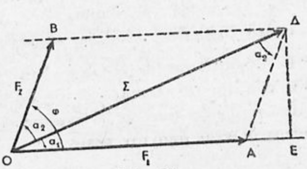
(1). (Δηλ. δυνάμεις μὲ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν κι᾽ ἔντασιν, ἀλλ᾽ ἀντιθέτου φορᾶς. Βλέπε σελ. 14 παραγρ. 14, περὶ διανυσμάτων).

διον Α ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι προσδεδεμένα τὰ ἄκρα τῶν τριῶν νημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Τὰ τμήματα AT_1, AT_2, AT_3, ὁρίζουν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς τραπέζης. Εἰς τὰ ἐλεύθερα ἄκρα Β, Γ, Δ, τῶν τριῶν νημάτων, ἀναρτῶνται τὰ βάρη F_1, F_2, F_3. Τὰ νήματα διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς τροχαλίας T_1, T_2, T_3, αἱ ὁποῖαι στηρίζονται κατακορύφως εἰς τὴν περίμετρον τῆς τραπέζης. Ὅταν τὸ σφαιρίδιον Α, εὑρισκόμενον εἰς κατάλληλον θέσιν ἐπὶ τῆς τραπέζης, ἠρεμῇ, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Sigma}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AF_3}$ τοῦτο συμπίπτει μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου τῶν $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{AF_2}$. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ***ἡ ἔννοια τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος δύο διανυσμάτων προέκυψεν ἀπὸ τὴν φυσικὴν συμπεριφορὰν τῶν δυνάμεων, ὅπως τὸ πείραμα τοῦτο καὶ ἄλλα ὅμοια ἀποδεικνύουν.***

21. Ἔντασις καὶ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης.—α) Ἡ ἔντασις Σ (σχ. 13) τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$\boxed{\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}\, \varphi} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΕ ἔχομεν: $(O\Delta)^2 = \Sigma^2 = (OE)^2 + (E\Delta)^2 = [(OA) + (AE)]^2 + (E\Delta)^2$ ἢ $\Sigma^2 = (OA)^2 + 2(OA)(AE) + (AE)^2 + (E\Delta)^2$ ἢ $\Sigma^2 = (OA)^2 + (A\Delta)^2 + 2\,(OA)\,(A\Delta)$ συνφ [τὸ $(AE)^2 + (E\Delta)^2 = (A\Delta)^2$ καὶ $(AE) = (A\Delta)$ συνφ] καὶ τελικὰ $\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1\, F_2$ συνφ (γων. ΔΑΕ=φ).



Σχ. 13.

β) Ἐπίσης ***ἡ διεύθυνσις τῆς Σ*** καθορίζεται ἀπὸ τὰς σχέσεις (2) τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΔ, ἔχομεν:

$$\frac{O\Delta}{\text{ημ}(OA\Delta)} = \frac{OA}{\text{ημ}(O\Delta A)} = \frac{A\Delta}{\text{ημ}(AO\Delta)} \text{ ἢ } \frac{\Sigma}{\text{ημ}\varphi} = \frac{F_1}{\text{ημ}\alpha_2} = \frac{F_2}{\text{ημ}\alpha_1} \quad (\text{ημ } OA\Delta = \text{ημ}\varphi) \text{ καὶ}$$

$$\boxed{\text{ημ}\alpha_1 = \frac{F_2}{\Sigma}\,\text{ημ}\varphi\ ,\ \text{ημ}\sigma_2 = \frac{F_1}{\Sigma}\,\text{ημ}\varphi} \qquad (2)$$

Μερικαὶ περιπτώσεις.

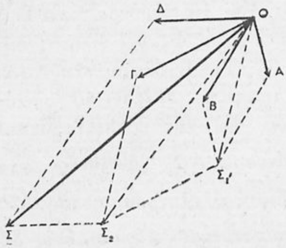
α) Ἂν $\varphi = 90^0$, ὁ τύπος (1) γίνεται $\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2$ (συν $90^0 = 0$)

β) Ἂν $\varphi = 0^0$, τότε $\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1\, F_2 = (F_1 + F_2)^2$ καὶ $\Sigma = F_1 + F_2$

γ) Ἂν $\varphi = 180^0$, τότε $\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\, F_1\, F_2 = (F_1 - F_2)^2$ καὶ $\Sigma = F_1 - F_2$ ἢ $\Sigma = F_2 - F_1$ καθ' ὅσον $F_1 > F_2$ ἢ $F_2 > F_1$.

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις β καὶ γ συμπεραίνομεν ὅτι, ἡ ***ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δίδεται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν.***

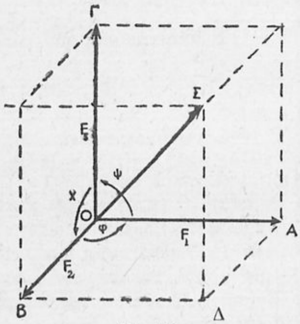
22. Σύνθεσις πολλῶν δυνάμεων μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς.— Ἐὰν ἔχωμεν δυνάμεις περισσοτέρας τῶν δύο μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν ἐφαρμόζοντες διαδοχικῶς τὸν νόμον τοῦ παραλληλογράμου. Συνθέτομεν π.χ. τὴν $\overrightarrow{OA}$ καὶ τὴν $\overrightarrow{OB}$ (σχ. 14) καὶ εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν $\overrightarrow{O\Sigma_1}$· ἀκολούθως τὴν $\overrightarrow{O\Sigma_1}$ μὲ τὴν $\overrightarrow{O\Gamma}$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν $\overrightarrow{O\Sigma_2}$, κ. ο. κ.



Σχ. 14.

Εὐκολώτερον εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην ἂν μὲ ἀρχὴν τὸ Ο λάβωμεν τὰ διαδοχικὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{A\Sigma_1}$, $\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2}$ $\overrightarrow{\Sigma_2\Sigma}$, ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$· τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα $\overrightarrow{O\Sigma}$ αὐτῶν εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $OA\Sigma_1\Sigma_2\Sigma$ λέγεται ***δυναμοπολύγωνον***. Ἐπειδὴ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξιν κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνονται, συνάγεται ὅτι καὶ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνονται αἱ δυνάμεις.

Μερικὴ περίπτωσις. Ἂν ἔχωμε τρεῖς δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, (σχ. 15) ($AOB = \varphi$, $BO\Gamma=\chi$, $\Gamma OA=\psi$), αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ ***αὐτὸ ἐπίπεδον***, εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνισταμένη των $\overrightarrow{O\Sigma}$ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπ' αὐτῶν τῶν δυνάμεων. Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:



Σχ. 15.

$$\boxed{\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2+2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi+2F_2F_3\,\sigma\upsilon\nu\chi+2F_3F_1\,\sigma\upsilon\nu\psi} \quad (1)$$

ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $O\Delta\Sigma\Gamma$ ἔχομεν, $\Sigma^2=(O\Delta)^2+F_3^2+2F_3(O\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma O\Delta)= F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi+F_3^2+2F_3\,(O\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma O\Delta)$, $(O\Delta^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi)$ Ἀλλά, $(O\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma O\Delta)$ ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴν τοῦ $\overrightarrow{O\Delta}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα $\overrightarrow{O\Gamma}$. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{O\Delta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν $\overrightarrow{OB}$ καὶ $\overrightarrow{OA}$ ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΓ, δηλ. $(O\Delta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma O\Delta)=F_2\,\sigma\upsilon\nu\chi+F_1\,\sigma\upsilon\nu\psi$. Ἄρα: $\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2+2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi+2F_3\,(F_2\,\sigma\upsilon\nu\chi+F_1\,\sigma\upsilon\nu\psi)=F_1^2+F_2^2+F_3^2+2F_1F_2\,\sigma\upsilon\nu\varphi+2F_2F_3\sigma\upsilon\nu\chi+2F_3F_1\,\sigma\upsilon\nu\psi$. Ἂν $\varphi=\chi=\psi=90^0$ (ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον) τότε:

$$\boxed{\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+F_3^2} \quad (2)$$

23. *Συνθῆκαι ἰσορροπίας δυνάμεων μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς.* — α) Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν πρώτην ἀρχὴν τῆς Στατικῆς (§ 20), δύο δυνάμεις ἀντίθετοι αἵ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἰσορροποῦν, δηλ. ***ἡ συνισταμένη των ἰσοῦται μὲ μηδέν.*** Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ θὰ ἠμποροῦσε νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς πόρισμα τῆς ἀρχῆς τοῦ παραλληλογράμμου, ὅταν $\varphi=180^0$ καὶ $F_1=F_2$, ὁπότε $\Sigma=F_1-F_2=0$. Εἶναι ὅμως προτιμώτερον νὰ διατυπώνεται ὡς ἀνεξάρτητος ἀρχή, ὅπως καὶ ἔγινε. Διότι, ἂν καὶ κριτήριον διὰ τὴν θεμελίωσιν τῆς ἐπιστήμης θεωρεῖται ὁ περιορισμὸς τῶν βασικῶν ἀρχῶν (ἀξιωμάτων), τοῦτο δὲν πρέπει νὰ γίνεται εἰς βάρος τῆς καλῆς κατανοήσεως ὅταν ἕνας νόμος ἀπορρέῃ ἁπλούστερον ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν.

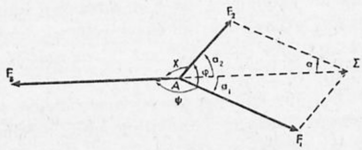
β) Γενικώτερον, «***ἕνα σύστημα δυνάμεων μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ μηδέν***».

Ἡ πρᾶγμα τὸ ἴδιον, ὅταν τὸ δυναμοπολύγωνον αὐτῶν εἶναι κλειστόν, δηλ. ὅταν ἡ ἀρχὴ O καὶ τὸ πέρας Σ (σχ. 14) συμπίπτουν.

Ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων. Ἂν ἔχωμεν τρεῖς δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ ποὺ ἰσορροποῦν, ἡ μία ἀπ' αὐτὰς π.χ. ἡ $\overrightarrow{F_3}$ θὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἄλλων (σχ. 16). Ἡ ἀναλογία

$$\frac{\Sigma}{\eta\mu\varphi}=\frac{F_1}{\eta\mu\alpha_2}=\frac{F_2}{\eta\mu\alpha_1},$$ ἐπειδὴ $\Sigma=F_3$ καὶ $\eta\mu\alpha_2=\eta\mu\chi$, $\eta\mu\alpha_1=\eta\mu\psi$ ($\alpha_2+\chi=180^0$, $\alpha_1+\psi=180^0$) γίνεται :

$$\frac{F_3}{\eta\mu\varphi}=\frac{F_1}{\eta\mu\chi}=\frac{F_2}{\eta\mu\psi} \qquad (1).$$



Σχ. 16.

Δηλ : «*ἡ ἔντασις ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῶν δύο ἄλλων*».

Παράδειγμα. «Τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2 καὶ F_3 ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἰσορροποῦν. Ἂν $F_1=F_2$, $F_3=80kg^*$ καὶ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ F_1 καὶ F_2 εἶναι 60^0, νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2» ***(Φυσικὸν τμῆμα Ἀθηνῶν 1950).***

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2$ συνφ, ἐπειδὴ $\Sigma=F_3=80kg^*$, $F_1=F_2$ καὶ $\varphi=60^0$, ἔχομεν :

$$80^2=2F_1^2+2F_1^2 \text{ συν } 60^0 \text{ ἢ } 80^2=2F_1^2+2F_1^2\cdot\frac{1}{2} \text{ καὶ } F_1=\frac{80\sqrt{3}}{3}\text{ kg}^*=F_2$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν : $$\frac{80}{\eta\mu 60}=\frac{\frac{80\sqrt{3}}{3}}{\eta\mu\chi} \text{ ἢ } 80\,\eta\mu\chi=\frac{80\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=40 \text{ καὶ}$$

$\eta\mu\chi=\frac{1}{2}$ · ἄρα $\chi=\psi=150^0$.

24. Ἀνάλυσις δυνάμεως εἰς συνιστώσας.— Ὅπως μία δύναμις ἠμπορεῖ ν' ἀντικαταστήσῃ ἄλλας αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζουν εἰς τὸ αὐτὸ ὑλικὸν σημεῖον, καθ' ὅμοιον τρόπον ἠμπορεῖ μία δύναμις ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἄλλων αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτὴν ὡς συνισταμένην. Τὸ πρόβλημα ὅμως τῆς ἀναλύσεως δυνάμεως εἰς συνιστώσας γίνεται ὡρισμένον ὅταν ἔχουν δοθῇ ἐπαρκῆ στοιχεῖα ὡς πρὸς τὰς συνιστώσας. Εὐκόλως γίνεται ἡ ἀνάλυσις ***δεδομένης δυνάμεως*** εἰς δύο συνιστώσας μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις.

α) Ὅταν δίδωνται αἱ διευθύνσεις τῶν συνιστωσῶν.

β) Ὅταν δίδωνται αἱ ἐντάσεις τῶν συνιστωσῶν.

γ) Ὅταν δίδεται ἡ διεύθυνσις, ἡ φορὰ καὶ ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς συνιστώσης.

δ) Ὅταν δίδεται ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς καὶ ἡ διεύθυνσις καὶ ἡ φορὰ τῆς ἄλλης.

Σημείωσις. Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῶν ὡς ἄνω περιπτώσεων ἀνάγεται εἰς τὰς 4 περιπτώσεις κατασκευῆς τριγώνου, ὅταν μᾶς ἔχουν δοθῆ τρία κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ: α) μία πλευρὰ (συνισταμένη) καὶ δύο γωνίαι (διευθύνσεις συνιστωσῶν)—β) αἱ τρεῖς πλευραί (συνισταμένη καὶ συνιστῶσαι)— γ) δύο πλευραὶ (ἡ συνισταμένη καὶ ἡ μία συνιστῶσα) καὶ ἡ περιεχομένη γωνία - δ) δύο πλευραὶ καὶ μία τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.

Ἀσκήσεις

I.

1) Νὰ εὑρεθῆ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $F_1 = 1{,}5$ kg* καὶ $F_2 = 2$kg* μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἐὰν σχηματίζουν γωνίαν: α) 0^0 ἢ 180^0 β) 90^0

2) Δύο δυνάμεις $\Delta_1 = 5$gr* καὶ $\Delta_2 = 10$gr* ἐνεργοῦν εἰς τι σημεῖον ὑπὸ γωνίαν 120^0. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ συνισταμένη των. Τὸ αὐτὸ διὰ γωνίας 30^0, 60^0, 45^0 ***(Σχολὴ Ἰκάρων 1949).***

3) Δύο δυνάμεις ἴσαι ἐνεργοῦν ἐπὶ σημείου. Εὕρετε τὴν συνισταμένην αὐτῶν ἐὰν σχηματίζουν γωνίαν: α) 0^0 β) 60^0 γ) 120^0 δ) 180^0 ***(Σχολὴ Ἰκάρων 1948).***

4) Ποίαν γωνίαν σχηματίζουν δύο δυνάμεις ἐντάσεων 4kg* καὶ 6kg* μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἂν ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἔχει ἔντασιν $\sqrt{76}$ kg*.

5) Ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου ἐπενεργοῦν αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2 καὶ ἔχουν συνισταμένην 12 kg*. Ἂν $F_1 = 5$kg* καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν συνισταμένην, νὰ ὑπολογισθῆ ἡ F_2.

6) Ἐπὶ δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν καὶ εἰς τὸ σημεῖον τομῆς των Ο, ἐνεργοῦν τέσσαρες δυνάμεις: α) ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας, $OF_1 = 3$kg*, $OF_2 = 5$kg* ὁμόρροποι β) ἐπὶ τῆς ἄλλης, $OF_3 = 10$kg*, $OF_4 = 4$kg* ἀντίρροποι. Νὰ εὑρεθῆ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

7) Δύο δυνάμεις $F_1 = 5{,}5$kg* καὶ $F_2 = 6{,}8$kg* ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ὑπὸ γωνίαν $125^0\ 30'$. Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης ὡς καὶ αἱ γωνίαι αὐτῆς μὲ τὰς συνιστώσας.

8) Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ $F_1 = 9{,}5$ kg* καὶ ἡ συνισταμένη των $\Sigma = 19$kg*. Νὰ εὑρεθῆ ἡ F_2 καὶ αἱ γωνίαι τῆς Σ μετὰ τῶν F_1 καὶ F_2.

II.

9) Ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα ὀροφῆς προσδένομε τὰ ἄκρα σχοινίου ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὁποίου κρέμεται βάρος 20kg*. Ἐὰν ἡ γωνία τῶν δύο ἴσων κλάδων τοῦ σχοινίου εἶναι 60^0, νὰ εὑρεθῆ ἡ τάσις ἑκάστου κλάδου τοῦ σχοινίου.

10) Νὰ ἀναλυθῆ δύναμις 13 kg* εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των ἂν: α) ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς εἶναι 12kg* β) αἱ ἐντάσεις καὶ τῶν δύο εἶναι ἴσαι.

11) Νὰ ἀναλυθῆ δύναμις 30kg* εἰς δύο ἄλλας αἱ ὁποῖαι μετὰ τῆς συνισταμένης σχηματίζουν ἀντιστοίχως γωνίας 45^0 καὶ 30^0.

12) Νὰ ἀναλυθῆ δύναμις 18,4kg* εἰς δύο συνιστώσας μ' ἐντάσεις 12,4 kg* ἡ μία καὶ 18 kg* ἡ ἄλλη.

13) Νὰ ἀναλυθῆ δύναμις 24 kg* εἰς δύο συνιστώσας ἂν ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς εἶναι 8,5 kg* καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς συνισταμένης εἶναι 30^0.

14) Νὰ ἀναλυθῆ μία δύναμις εἰς δύο ἄλλας ἴσης ἐντάσεως πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

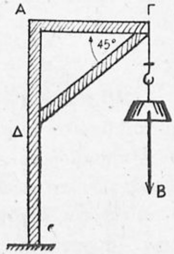
15) Νὰ ἀναλυθῆ μία δύναμις F εἰς δύο δυνάμεις τῆς αὐτῆς ἐντάσεως αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν φ.

16) Ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ σχηματίζουν αἱ δυνάμεις $F_1 = 6$kg* καὶ $F_2 = 8$kg*, ὅταν ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης των εἶναι 10kg*.

17) Ἐκ τοῦ σημείου Γ ὑποστηρίγματος κρέμεται βάρος $B=60$ kg* (σχ. 17). Νὰ εὑρεθῇ ποίαν ἀντίδρασιν παρουσιάζει τὸ ὁριζόντιον στέλεχος ΑΓ καὶ ποίαν τὸ στέλεχος ΓΔ, τὸ ὁποῖον σχηματίζει γωνίαν 45^0 μετὰ τοῦ ΑΓ.

18) Τρεῖς δυνάμεις $F_1 = F_2 = 5$kg* καὶ $F_3 = 5\sqrt{2-\sqrt{3}}$ kg*, ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ γωνίας $(F_1, F_2) = 30^0$ καὶ $(F_3,F_2) = 75^0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν.

19) Αἱ δυνάμεις ἐντάσεων 1kg*, 2kg*, 3kg*, 4kg*, 5kg* καὶ 6kg* ἐνεργοῦν εἰς τὸ κέντρον δοθέντος κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἂν αἱ δυνάμεις διευθύνονται πρὸς τὰς ἓξ κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου, ποία ἡ συνισταμένη αὐτῶν.



Σχ. 17.

20) Τρεῖς δυνάμεις ἐντάσεων 9kg*, 15kg* καὶ 21kg* ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἂν ἰσορροποῦν νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξύ των γωνίαι.

21) Δύο δυνάμεις σχηματίζουν γωνίαν 120^0. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων αὐτῶν εἶναι 13kg* καὶ τὸ γινόμενον 42kg*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη των.

22) Δύο δυνάμεις $F_1 = \sqrt{3}$ kg*, $F_2 = 2$kg* ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ 1kg* ποίαν γωνίαν σχηματίζουν.

23) Ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ ἔχουν αἱ ἐντάσεις F_1, F_2, δύο δυνάμεων μὲ γωνίαν 135^0, ὥστε ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης των νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μικροτέραν.

III.

24) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δυνάμεις ποὺ παρίστανται ἀπὸ τὰς διαμέσους τυχόντος τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν σημεῖον ἐφαρμογῆς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, ἰσορροποῦν.

25) Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 6m, 10m, 14m. Εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν ***(ὀρθόκεντρον)*** ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις μὲ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεών των 60kg*. Ἑκάστη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ μὲ φορὰν πρὸς αὐτήν. Ἂν αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν. νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων.

26) Τέσσαρες ὁμοεπίπεδοι δυνάμεις ἔχουν ἄθροισμα ἐντάσεων 90kg* καὶ ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Γωνία $(F_1,F_2) = 30^0$, $(F_2,F_3) = 90^0$, $(F_3,F_1) = 120^0$ Ἐὰν $\frac{F_3}{F_2} = \sqrt{3}$ καὶ αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις κάθε δυνάμεως.

27) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τριῶν δυνάμεων $F_1 = 3$kg*, $F_2 = 5$kg* καὶ $F_3 = 5\sqrt{6}$ kg*, ἂν ἐφαρμόζουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι: α) ἀνὰ δύο κάθετοι β) σχηματίζουν ἀνὰ δύο γωνίαν 60^0. (Δυνάμεις μὴ συνεπίπεδοι).

28) Τρεῖς δυνάμεις ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἡ $F_1 = F_2 = 20$kg* καὶ $(F_1,F_2) = 120^0$. Ἡ $F_3 = 16$kg* σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς δύο πρώτας καὶ γωνίαν 60^0 μὲ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν. Νά εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη.

29) Νὰ ἀναλυθῇ δύναμις 28kg* εἰς δύο συνιστώσας καθέτους μεταξύ των ἂν α) ἡ μία ἔχει ἔντασιν 2-πλασίαν τῆς ἄλλης β) τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεών των εἶναι 36kg* γ) ἡ διαφορὰ τῶν ἐντάσεων εἶναι 20kg* δ) τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων νὰ εἶναι μέγιστον.

30) Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν καὶ μετὰ τῆς συνισταμένης ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο δυνάμεων.

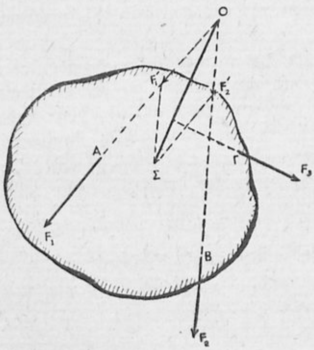
31) Δύναμις 100kg* νὰ ἀναλυθῇ εἰς τρεῖς συνιστώσας ἀνὰ δύο καθέτους μεταξύ των καὶ ἀναλόγους πρὸς τοὺς ἀριθμούς, 3, 4 καὶ 5.

Δυνάμεις ἐπὶ ὑλικοῦ στερεοῦ

25. *Ἀναλλοίωτον στερεόν.* — Ἕνα φυσικὸν στερεὸν ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ἢ μετατοπίζεται εἰς τὸν χῶρον ἢ παραμορφώνεται. Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις, αἱ παραμορφώσεις τῶν στερεῶν ἐν σχέσει πρὸς τὰς διαστάσεις των, εἶναι πολὺ μικραί. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν μελέτην τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ***μόνον*** ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Τοῦτο συμβαίνει διότι αἱ δυνάμεις συνοχῆς τῶν μορίων των εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυραί. Συνεπῶς τὰ στερεὰ παρουσιάζουν μεγάλην ἀντίστασιν εἰς τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις ποὺ τείνουν νὰ τὰ παραμορφώσουν καὶ δι' αὐτὸ ἔχουν σταθερὸν σχῆμα.

Ἕνα τελείως ἀμετάβλητον στερεὸν ***(ἰδανικὸν στερεόν)***, πρὸς τὸ ὁποῖον προσεγγίζουν ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον τὰ διάφορα φυσικὰ στερεά, ὀνομάζεται ***ἀναλλοίωτον στερεόν.*** Τὰ πιὸ κάτω θὰ ἀναφέρωνται εἰς ἀναλλοίωτα στερεά.

26. *Σύνθεσις δυνάμεων τεμνομένων διευθύνσεων.* — Ἂς θεωρήσωμεν τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$ καὶ $\overrightarrow{BF_2}$ αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν εἰς διαφορετικὰ σημεῖα A καὶ B στερεοῦ σώματος (σχ. 18) καὶ τῶν ὁποίων αἱ εὐθεῖαι ἐνεργείας τέμνονται εἰς τὸ O. Μεταφέρομεν αὐτὰς ὥστε νὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ O. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην των $\overrightarrow{O\Sigma}$ κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ παραλληλογράμμου.



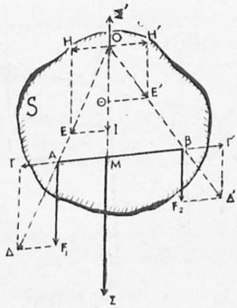
Σχ. 18.

Ἐὰν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι δυνάμεις ποὺ ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, συνθέτομεν τὴν $\overrightarrow{O\Sigma}$ μὲ μίαν τρίτην, τὴν νέαν συνισταμένην μὲ τετάρτην κ.ο.κ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐνεργοῦμεν, ἂν ἡ $\overrightarrow{F_3}$ δὲν εὑρίσκεται μὲν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ἀλλὰ ἡ εὐθεῖα ἐνεργείας της τέμνει τὴν εὐθεῖαν ἐνεργείας τῆς συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$, κ.ο.κ.

Ἐὰν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ σώματος συμφώνως πρὸς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, εὑρεθῇ ἴση μὲ μηδέν, λέγομεν τότε ὅτι τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων ἰσορροπεῖ καὶ ἀντιστρόφως.

27. Σύνθεσις δύο παραλλήλων δυνάμεων.— α) **ὁμόρροποι.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{BF_2}$, παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους (σχ. 19) ποὺ ἐφαρμόζουν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ στερεοῦ S. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι: ***δύναμις ὁμόρροπος πρὸς τὰς συνιστώσας, μὲ ἔντασιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων αὐτῶν*** $(\Sigma = F_1 + F_2)$ ***καὶ ἔχει εὐθεῖαν ἐνεργείας ἡ ὁποία τέμνει τὸ τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν προσκειμένων δυνάμεων*** $\left(\text{δηλ. } \frac{AM}{MB} = \frac{F_2}{F_1}\right)$



Σχ. 19.

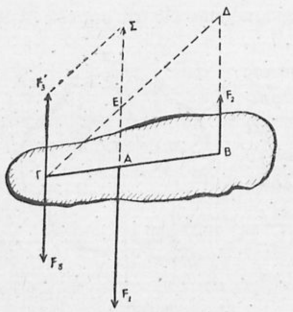
Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ τὰς ἀντιθέτους δυνάμεις $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma'}$. Τὸ σύστημα $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{\Gamma}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{\Gamma'})$ (διότι αἱ $\overrightarrow{\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma'}$ ὡς ἀντίθετοι ἐξουδετεροῦνται) καὶ τέλος ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα $(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Delta'})$ ὅπου Δ ἡ συνισταμένη τῶν F_1, Γ καὶ Δ' ἡ συνισταμένη τῶν Γ' καὶ F_2. Μεταφέρομεν τὰς Δ, Δ' εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Ο. Τὰς ΟΕ, ΟΕ' ἀναλύομεν κατὰ τὰς διευθύνσεις ΑΒ καὶ AF_1 εἰς τὰς Η, Ι καὶ Η', Θ. Αἱ Η, Η', ὡς ἀντίθετοι ἐξουδετεροῦνται, αἱ δὲ ΟΘ, ΟΙ, ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς F_1, F_2, ἔχουν συνισταμένην τὴν ΜΣ (ὅπου $\Sigma = F_1 + F_2$, διότι $OI + O\Theta = F_1 + F_2$). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΜ, ΟΕΙ, ἔχομεν: $\frac{AM}{EI} = \frac{OM}{OI}$ (1). Ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΜΒ, ΟΘΕ', ἔχομεν: $\frac{MB}{\Theta E'} = \frac{OM}{O\Theta}$ (2). Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) καὶ ἔχομεν:

$$\frac{AM}{EI} : \frac{MB}{\Theta E'} = \frac{OM}{OI} : \frac{OM}{O\Theta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{O\Theta}{OI} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία τοῦ σώματος S, ***πρέπει νὰ ἐνεργῇ καὶ τρίτη δύναμις*** $\overrightarrow{M\Sigma'}$ ***ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην*** $\overrightarrow{M\Sigma}$ τῶν $\overrightarrow{F_1}$ ***καὶ*** $\overrightarrow{F_2}$.

β) ***Ἀντίρροποι.*** Ἂν λάβωμεν τὰς ἀντιρρόπους δυνάμεις AF_1, BF_2 (σχ. 20) (ὅπου F_1 διάφορος τῆς F_2) ἀποδεικνύεται ὅτι: ***ἡ συνισταμένη*** ΓF_3 ***εἶναι δύναμις ὁμόρροπος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, μὲ ἔντασιν τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων*** $(F_3 = F_1 - F_2)$ ***καὶ εὐθεῖαν ἐνεργείας ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας εἰς σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον ὁρίζει μετὰ τῶν Α καὶ Β τμήματα ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἐντάσεων τῶν προσκειμένων δυνάμεων*** $\left(\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{F_2}{F_1}\right)$.

'Απόδειξις. "Ας θεωρήσωμεν τὴν δύναμιν $\overrightarrow{ΑΣ}$ ἀντίθετον τῆς $\overrightarrow{F_1}$. "Αν ἀναλύσωμεν αὐτὴν εἰς δύο ὁμορρόπους συνιστώσας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ εἶναι ἡ $\overrightarrow{F_2}$, θὰ λάβωμεν τὴν $\overrightarrow{F'_3}$ μὲ ἔντασιν $F'_3 = ΑΣ - F_2 = F_1 - F_2$ καὶ $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{F_2}{F'_3}$ (3).



Σχ. 20.

Ἡ F_1 ὡς ἀντίθετος τῆς Σ ἰσορροπεῖ τὰς F_2, F'_3, συνεπῶς καὶ ἡ F'_3 ἰσορροπεῖ τὰς F_1, F_2, δηλ. ἡ συνισταμένη $\overrightarrow{F_3}$ τῶν $\overrightarrow{F_1}$ $\overrightarrow{F_2}$, πρέπει νὰ εἶναι ἀντίθετος τῆς $\overrightarrow{F'_3}$, ὁπότε ἔχομεν: $F_3 = F'_3 = Σ - F_2 = F_1 - F_2$ καὶ ἀπὸ τὴν (3)

$$\frac{ΑΓ}{ΑΓ + ΑΒ} = \frac{F_2}{F_2 + F'_3} \quad ἢ \quad \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{F_2}{F_1}$$

Παράδειγμα. «Δύο παράλληλοι δυνάμεις $F_1 = 12kg^*$, $F_2 = 8kg^*$ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β στερεοῦ σώματος, ὅπου ΑΒ=20cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη των: α) ἂν εἶναι ὁμόρροποι καὶ β) ἂν εἶναι ἀντίρροποι».

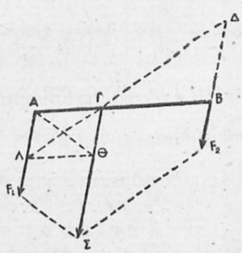
Λύσις. α) ***ὁμόρροποι*** (σχ. 19). $Σ = F_1 + F_2$ ἢ $Σ = 20$ kg*, $ΑΜ = χ$, $ΜΒ = (20 - χ)$ ἄρα:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{ΜΒ}{ΑΜ} \quad ἢ \quad \frac{12kg^*}{8kg^*} = \frac{20 - χ}{χ} \quad ἢ \quad χ = 8cm = ΑΜ$$

β) ***ἀντίρροποι*** (σχ. 20). $F_3 = F_1 - F_2 = 4kg^*$

ὁμοίως, $\frac{F_1}{F_2} = \frac{ΓΒ}{ΓΑ}$, $(ΓΑ = χ)$ ἢ $\frac{12kg^*}{8kg^*} = \frac{χ + 20cm}{χ}$ καὶ $χ = 40cm = ΓΑ$

28. Γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων δυνάμεων.— α) ***ὁμορρόπων.*** Ἐπὶ τῆς $\overrightarrow{F_1}$ λαμβάνομεν τμῆμα $ΑΛ = F_2$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $\overrightarrow{F_2}$, $ΒΔ = F_1$ (σχ. 21). Φέρομεν τὴν ΛΔ ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Λ φέρομεν τὴν ΛΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Γ, παράλληλον πρὸς τὴν $ΑF_1$. Ἀκολούθως ἐκ τοῦ F_2 παράλληλον πρὸς τὴν ΛΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΘ εἰς τὸ Σ. Ἡ $\overrightarrow{ΓΣ}$ εἶναι ἡ συνισταμένη, διότι: $ΓΣ = ΓΘ + ΘΣ = ΑΛ + ΑF_1 = F_1 + F_2$ καὶ λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΓΛ, ΒΓΔ, $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{ΑΛ}{ΒΔ}$ ἢ $\frac{ΑΓ}{ΓΒ} = \frac{F_2}{F_1}$. β) ***ἀντιρρόπων*** (σχ. 20). Ἐπὶ τῆς τῆς BF_2 λαμβάνομεν $ΒΔ = F_1$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΣ, $ΑΕ = F_2$. Φέρομεν τὴν ΔΕ ἡ ὁποία τέμνει τὴν



Σχ. 21.

ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΕ, ΓΒΔ, ἔχομεν: $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΑΕ}{ΒΔ}$ ἢ $\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{F_2}{F_1}$ "Αρα διὰ τοῦ Γ διέρχεται ἡ συνισταμένη. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $\overrightarrow{ΑF_1}$ καὶ ἐκ τοῦ Σ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ· ὁπότε $ΓF'_3 = ΕΣ = ΑΣ - ΑΕ = F_1 - F_2$.

Ἀσκήσεις

I.

1) Δύο δυνάμεις παράλληλοι εἶναι $F_1 = 4{,}5$kg* καὶ $F_2 = 6$kg*. Ἂν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των ἀπέχουν 40 cm νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη των ἐὰν εἶναι: α) ὁμόρροποι καὶ β) ἀντίρροποι.

2) Δύο ἐργάται ἐπὶ τῶν ὤμων των μεταφέρουν μὲ ράβδον μήκους 1,20m ἕνα βάρος. Ὁ πρῶτος καταπονεῖται μὲ βάρος 58kg* καὶ ὁ ἄλλος μὲ βάρος 62kg*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μεταφερόμενον βάρος καὶ τὸ σημεῖον τῆς ράβδου εἰς τὸ ὁποῖον κρέμεται τοῦτο (βάρος τῆς ράβδου ἀμελητέον).

3) Ἡ συνισταμένη δύο παραλλήλων κι' ὁμορρόπων δυνάμεων εἶναι 24gr* καὶ τὸ σημ. ἐφαρμογῆς της ἀπέχει ἀπὸ τὸ σημ. ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς 30cm καὶ τῆς ἄλλης 90cm. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνιστῶσαι.

II.

4) Ἡ ἀπόστασις τῶν σημ. ἐφαρμογῆς δύο παραλλήλων κι' ὁμορρόπων δυνάμεων εἶναι 3 πλασία τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ παριστάνει τὴν ἔντασιν τῆς μικροτέρας. Ἂν αὐτὴ εἶναι 5kg* καὶ ὁ λόγος $\frac{F_1}{F_2} = 4$, νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη (ἔντασις καὶ σημ. ἐφαρμογῆς).

5) Δύο δυνάμεις $F_1 = 4$kg* καὶ $F_2 = 10$kg* παράλληλοι κι' ὁμόρροποι ἐνεργοῦν ἡ πρώτη εἰς τὸ 0 μιᾶς κλίμακος, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 30 τῆς κλίμακος. Εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 20 τῆς κλίμακος ἐνεργεῖ μία τρίτη $F_3 = 4$kg* παράλληλος ἀλλ' ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν αὐτῶν δυνάμεων. ***(Τμῆμα Φυσικὸν 1948).***

6) Ράβδος ἔχει μῆκος l καὶ ὑποστηρίζεται κατὰ τὸ ἕν ἄκρον ἐπὶ σταθεροῦ στηρίγματος. Εἰς ἀπόστασιν $\frac{1}{4}$ τοῦ μήκους της ἀπὸ τοῦ στηρίγματος κρέμεται βάρος 100kg*. Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσον βάρος καταπονεῖται ὁ ὦμος ἐργάτου ὁ ὁποῖος ὑποβαστάζει τὴν ράβδον κατὰ τὸ ἄλλον ἄκρον (βάρος ράβδου νὰ μὴ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν).

7) Δύο δυνάμεις παράλληλοι κι' ὁμόρροποι ἔχουν συνισταμένην 120kg* καὶ τὸ σημ. ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπέχει 25,4 cm ἀπὸ τὸ σημ. ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς συνιστώσης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι 3.

III.

8) Δίδεται ράβδος ΑΓ, Β τὸ μέσον αὐτῆς. Εἰς τὸ Α ἐνεργεῖ βάρος $P_1 = 3$kg*, εἰς τὸ Β, $P_2 = 4$kg* καὶ εἰς τὸ Γ, $P_3 = 8$kg*. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποβαστάζεται ἡ ΑΓ διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως;

9) Τρία βάρη B_1, B_2 καὶ B_3 κρέμονται ἀπὸ τρία σημεῖα δοθείσης περιφερείας. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα εἰς τρόπον ὥστε ἡ περιφέρεια ὑποβασταζομένη εἰς τὸ κέντρον της νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως.

10) Εἰς τὰς κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς α ἐφαρμόζουν τὰ βάρη κατὰ σειράν: 1, 2, 3, 4, 5, 6, kg*. Ποῦ πρέπει νὰ ὑποβαστάζεται τὸ ἑξάγωνον διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως.

11) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἐντάσεις τριῶν παραλλήλων κι' ὁμορρόπων δυνάμεων μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὰς κορυφάς, ὥστε τὸ κέντρον αὐτῶν νὰ εἶναι: α) ἡ τομὴ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου β) τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας γ) τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ δ) τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου.

12) Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς δοθέντος παραλληλογράμμου ἐφαρμόζουν τρεῖς ὁμόρροποι παράλληλοι δυνάμεις ἴσης ἐντάσεως F καὶ εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν ἐφαρμόζει δύναμις παράλληλος ἐντάσεως F, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῶν τεσσάρων αὐτῶν δυνάμεων.

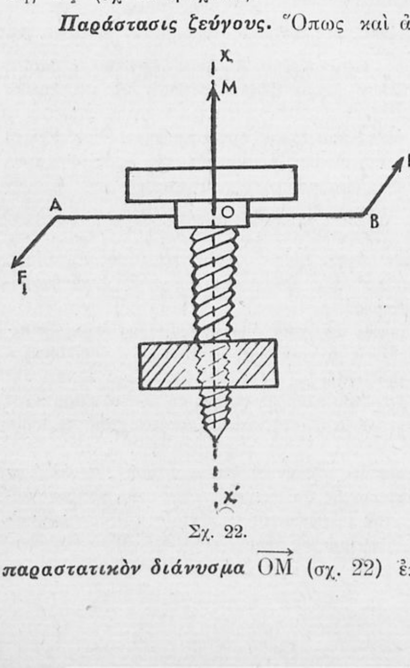
29. Ζεῦγος δυνάμεων.—Ὁ κοχλίας (σχ. 22) στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά του χχ΄ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἀντιθέτων δυνάμεων F_1 καὶ F_2. Μολονότι ἡ συνισταμένη τῶν F_1 καὶ F_2 εἶναι μηδέν, ἐν τούτοις ἰσορροπία δὲν ὑπάρχει. Ὁμοίως, ὅταν ἐνεργήσωμεν διὰ τῆς δυνάμεως AF ἐπὶ τοῦ στροφάλου τοῦ βαρούλκου (σχ. 23), τοῦτο περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα α β. Ἡ περιστροφὴ αὐτὴ δὲν ὀφείλεται εἰς μόνην τὴν δύναμιν $\overrightarrow{AF}$ διότι εὐθὺς ἀμέσως ἐμφανίζεται καὶ δευτέρα δύναμις BF_2 ἀντίθετος τῆς AF, ἡ ἀντίδρασις τοῦ ὑποστηρίγματος.

Γενικῶς δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ἀντίθετοι, τείνουν νὰ περιστρέψουν τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν, ***περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.***

Ἕνα σύστημα δύο παραλλήλων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων ὀνομάζεται ζεῦγος.

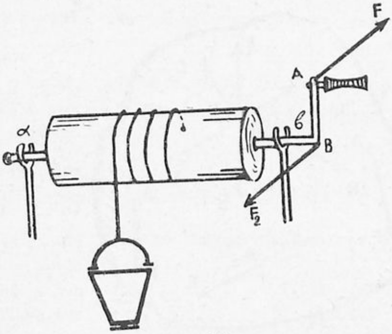
Βραχίων ζεύγους ὀνομάζεται ἡ κοινὴ κάθετος AB τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ (σχ. 22 ἢ σχ. 23).

Παράστασις ζεύγους. Ὅπως καὶ ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν, τὰ γνωρίσματα ἑνὸς ζεύγους εἶναι: α) ***τὸ ἐπίπεδον τοῦ ζεύγους*** (ἐπίπεδον τῶν δύο δυνάμεων) ἐκ τοῦ ὁποίου καθορίζεται ὁ ἄξων περιστροφῆς τοῦ σώματος β) ***ἡ φορὰ τοῦ ζεύγους*** δηλ. ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν τείνει νὰ περιστραφῇ τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπενέργειάν του γ) ***ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους*** (M), δηλ. τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως μιᾶς τῶν δυνάμεων ἐπὶ τὸν βραχίονα τοῦ ζεύγους, ἀπὸ τὸ ὁποῖον γινόμενον καθορίζεται τὸ μέγεθος τοῦ ἀποτελέσματος, $M = F \cdot (AB)$. Ὅλα αὐτὰ τὰ στοιχεῖα ἠμποροῦν νὰ δοθοῦν μὲ ἕνα



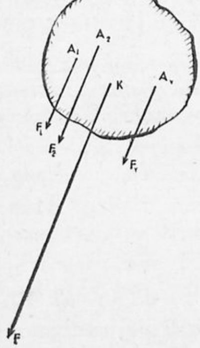
Σχ. 22.

παραστατικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (σχ. 22) ἐπὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς, τὸ ὁποῖον ἔχει ***μέτρον*** τὴν ***ροπὴν τοῦ ζεύγους*** καὶ ***φορὰν*** ἐκείνην πρὸς τὴν ὁποίαν μετακινεῖται ὁ κοχλίας (ἀποκοχλίωσις σχ. 22). Τὸ παραστατικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ὀνομάζεται ***ἄξων τοῦ ζεύγους.***



Σχ. 23.

30. Κέντρον παραλλήλων δυνάμεων.— Ἄν, εἰς τὰ διάφορα σημεῖα $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, ὑλικοῦ σώματος, ἐφαρμόζουν αἱ παράλληλοι κι' ὁμόρροποι δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \ldots \overrightarrow{F_\nu}$, (σχ. 24), ἡ συνισταμένη αὐτῶν θὰ εὑρεθῇ, ἂν συνθέσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, τὴν συνισταμένην των μὲ μίαν ἄλλην κ.ο.κ, μέχρις ἐξαντλήσεως ὅλων τῶν δυνάμεων. Ἡ τελικὴ συνισταμένη, καθὼς προκύπτει ἀπὸ τὸν τρόπον τῆς συνθέσεως, θὰ ἔχῃ ἕνα ***τελείως ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς K***, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων.*** Τὸ σημεῖον αὐτὸ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς θέσεις τῶν σημείων A_1, $A_2 \ldots$ A_ν καὶ ἀπὸ τὰς ἐντάσεις τῶν συνιστωσῶν· συνεπῶς ἡ ἀλλαγὴ τῆς διευθύνσεως ***ὅλων*** τῶν συνιστωσῶν (ὥστε νὰ παραμένουν πάλιν παράλληλοι μεταξύ των), δὲν ἐπηρεάζει τὸ κέντρον K.

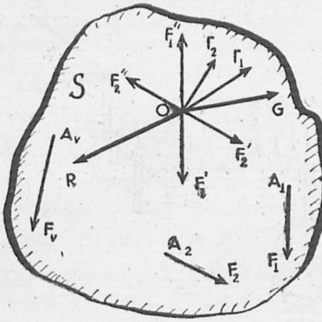


Σχ. 24.

Ἐπίσης εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ K δὲν μεταβάλλεται ἂν αἱ ἐντάσεις ὅλων τῶν δυνάμεων πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διότι οἱ λόγοι διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ K τῶν παραλλήλων δυνάμεων παραμένουν ἀναλλοίωτοι.

Σημ. Ἂν ὅλαι αἱ παράλληλοι δυνάμεις δὲν εἶναι ὁμόρροποι, συνθέτομεν χωριστὰ τὰς δύο ὁμάδας ὁμορρόπων καὶ τελικῶς ἔχομεν νὰ συνθέσωμεν δύο ἀντιρρόπους δυνάμεις.

31. Γενικὸν πρόβλημα συνθέσεως δυνάμεων ἐπὶ ὑλικοῦ στερεοῦ.— Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐννοίας τοῦ ζεύγους καὶ τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ στερεοῦ, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας δυνάμεων, ποὺ ἐνεργοῦν ***εἰς διάφορα σημεῖα*** τοῦ σώματος ***μὲ οἱασδήποτε διευθύνσεις.*** Ἂν π.χ. ἐπὶ τοῦ στερεοῦ S (σχ. 25) ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{A_1F_1}$, $\overrightarrow{A_2F_2} \ldots$ $\overrightarrow{A_\nu F_\nu}$ καὶ λάβωμεν ἓν σημεῖον αὐτοῦ O, ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ O ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1'}$, $\overrightarrow{OF_1''}$ ἀντίθετοι καὶ τῆς αὐτῆς ἐντάσεως μὲ τὴν $\overrightarrow{A_1F_1}$. Αἱ $\overrightarrow{OF_1'}$, $\overrightarrow{OF_1''}$, κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν τῆς Στατικῆς, ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως, ἄρα ἡ $\overrightarrow{A_1F_1}$ καὶ αἱ τρεῖς δυνάμεις $\overrightarrow{A_1F_1}$, $\overrightarrow{OF'_1}$, $\overrightarrow{OF_1''}$ ἀποτελοῦν συστήματα ἰσοδύναμα. Αἱ δυνάμεις ὅμως $\overrightarrow{A_1F_1}$, $\overrightarrow{OF_1''}$, ἀποτε λοῦν ζεῦγος· ἄρα ἡ δύναμις $\overrightarrow{A_1F_1}$, ἠμπορεῖ ν' ἀντικατασταθῇ εἰς τὸ O διὰ τοῦ ζεύγους (,, $\overrightarrow{OF_1''}$) καὶ τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{OF_1'}$. ος ($\overrightarrow{A_1F_1}$, $\overrightarrow{OF_1''}$), παρίσταται μὲ τὸν ἄξονά του $\overrightarrow{O\Gamma_1}$. Καθ' ὅμοιον τρόπον διὰ τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{A_2F_2}$,... $\overrightarrow{A_\nu F_\nu}$ ἔχομεν εἰς τὸ O τοὺς ἄξονας $\overrightarrow{O\Gamma_2}$... $\overrightarrow{O\Gamma_\nu}$ καὶ τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{OF_2'}$... $\overrightarrow{OF'_\nu}$. Αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1'}$, $\overrightarrow{OF_2'}$,.. $\overrightarrow{OF'_\nu}$, ἔχουν μίαν συνισταμένην OR, ἀνεξάρτητον προφανῶς, ὅσον ἀφορᾶ τὴν διεύθυνσιν φορὰν καὶ ἔντασιν, ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ σημείου O. Ὁμοίως τὰ ζεύγη εἰς τὸ O ἀντικαθίστανται ἀπὸ ἕνα συνιστάμενον ζεῦγος τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀξόνων. ***Τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα*** $\overrightarrow{OG}$ ***τῶν ἀξόνων τῶν ζευγῶν θὰ εἶναι ὁ ἄξων τοῦ συνισταμένου ζεύγους.*** Ἀπὸ τὸν τρόπον ἐργασίας μας προκύπτει ὅτι, ***ἕνα πλῆθος δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν εἰς σημεῖα ὑλικοῦ στερεοῦ ἠμπορεῖ νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ μίαν γενικὴν συνισταμένην*** R ***καὶ ἕνα συνιστάμενον ζεῦγος*** G, ***εἰς ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ στερεοῦ (ἄρα κατ' ἀπείρους τρόπους).*** Ἡ ἀντικατάστασις αὐτὴ λέγεται συνήθως ***ἀναγωγὴ συστήματος δυνάμεων εἰς μίαν συνισταμένην δύναμιν καὶ ἕνα συνιστάμενον ζεῦγος.***



Σχ. 25.

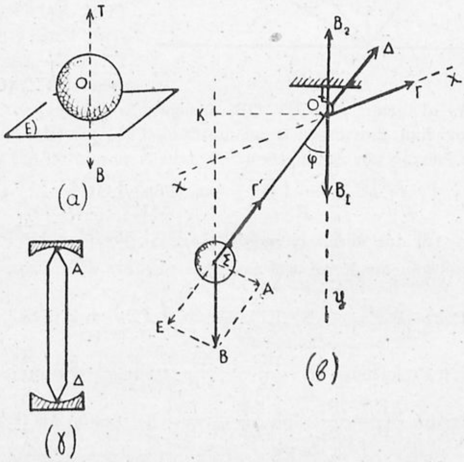
Ἀφοῦ τυχὸν σύστημα δυνάμεων ἀντικαθίσταται γενικῶς ἀπὸ μίαν δύναμιν καὶ ἕνα ζεῦγος, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν, ἐκτελεῖ συγχρόνως μεταφορικὴν καὶ περιστροφικὴν κίνησιν.

Συνθῆκαι ἰσορροπίας. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα εὐκόλως συνάγομεν τὰς συνθήκας ἰσορροπίας. ***Διὰ νὰ μὴν ὑπόκειται οὔτε εἰς μετατόπισιν ἕνα σῶμα, οὔτε εἰς περιστροφήν, πρέπει ἡ συνισταμένη δύναμις καὶ ὁ ἄξων τοῦ συνισταμένου ζεύγους νὰ ἰσοῦνται μὲ τὸ μηδέν, δηλ.*** $\overrightarrow{OR} = 0$ ***καὶ*** $\overrightarrow{OG} = 0$·

Ροπαὶ Δυνάμεων

31. Ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. α) Ὑλικοὶ σύνδεσμοι. — Ὅταν ἕνα στερεὸν σῶμα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετατοπισθῇ ἐλευθέρως εἰς τὸν χῶρον, λέγομεν ὅτι τὸ στερεὸν ***ὑπόκειται εἰς ὑλικοὺς συνδέσμους.*** Ἂν π. χ. ἡ σφαῖρα O εὑρίσκεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου E (σχ. 26α), ἢ εἶναι προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον Σ τοῦ νήματος (σχ. 26β), ἡ σφαῖρα ὑπόκειται εἰς συνδέσμους. Τὸ σῶμα ἐπίσης ΑΔ (σχ. 26γ) ὑπόκειται εἰς συνδέσμους εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Δ. Διὰ τὴν γενικὴν μελέτην τῶν συνθηκῶν ἰσορροπίας καὶ τῆς κινητικότητος ἀναλλοιώτου στερεοῦ, ἀντικαθιστῶμεν τοὺς συνδέσμους μὲ δυνάμεις τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***ἀντιδράσεις τῶν συνδέσμων,*** π. χ. ἡ OT. Τὸ ὑλικὸν σύστημα, σφαίρας Σ+νῆμα ΟΣ, ἠμπορεῖ νὰ περιστραφῇ περὶ οἱονδήποτε ὁριζόντιον ἄξονα x′ x, ἐνῷ τὸ σῶμα ΑΔ (σχ. 26 γ) ἠμπορεῖ νὰ περιστραφῇ μόνον περὶ τὸν ἄξονα ΑΔ.

β) ***Ἔννοια τῆς ροπῆς.*** Κατὰ τὴν ταλάντωσιν τῆς σφαίρας Σ, διὰ κάθε θέσιν ΟΣ (σχ. 26β), εἰς τὸ σημεῖον Ο θεωροῦμεν τὴν δύναμιν $\overrightarrow{OB_1}$ ἴσην μὲ τὴν $\overrightarrow{\Sigma B}$ καὶ τὴν $\overrightarrow{OB_2}$ (ἀντίδρασιν τοῦ συνδέσμου Ο) ἀντίθετον τῆς $\overrightarrow{OB_1}$. Ἡ δύναμις $\overrightarrow{\Sigma B}$ ***εἶναι ἰσοδύναμος*** μὲ τὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{\Sigma B}, \overrightarrow{OB_2})$ καὶ τὴν δύναμιν $\overrightarrow{OB_1}$. Ἡ OB_1 ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ σημείου Ο· συνεπῶς τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως ΣΒ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ζεύγους (ΣΒ, OB_2). Τὸ παραστατικὸν διάνυσμα ΟΓ τοῦ ζεύγους (ΣΒ, OB_2), λέγεται ροπὴ τῆς δυνάμεως ΣΒ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Δηλαδή : ***«ροπὴ δυνάμεως ΣΒ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο, λέγεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ τὸ ὁποῖον : α) εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΣΒ β) ἔχει φορὰν τὴν φορὰν προωθήσεως κοχλίου, ὅταν περιστρέφεται κατὰ τὴν φορὰν περιστροφῆς τοῦ σώματος (σφαῖρα Σ περὶ σημεῖον Ο) γ) μέτρον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς ΣΒ ἐπὶ τὴν ΟΚ ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπ᾽ αὐτήν, δηλ. $B \cdot (OK) = 2$ ἐμβ. τριγώνου ΟΣΒ».***

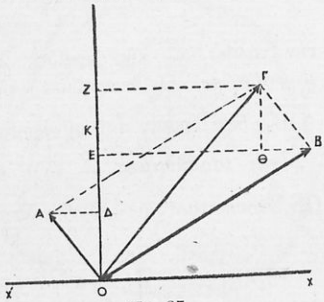


Σχ. 26 (α), (β), (γ)

32. Θεώρημα ροπῶν. — Ἂς θεωρήσωμεν δυνάμεις ποὺ ἀνήκουν ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Αἱ ροπαὶ αὐτῶν, ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των, εἶναι διανύσματα τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ἑπομένως ἠμποροῦμεν ἐδῶ νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν ροπῶν καὶ θ᾽ ἀποδείξωμεν τὸ ἀκόλουθον σημαντικὸν θεώρημα :

«Τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν πολλῶν δυνάμεων, ποὺ ἐνεργοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἰσοῦται μὲ τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης ὡς πρὸς αὐτὸ τὸ σημεῖον» (ἀποδεικνυόμενον διὰ δύο δυνάμεις ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρας τῶν δύο).

Ἀπόδειξις. α) ***Δύο δυνάμεις μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς.*** Ἂς θεωρήσωμεν τὰς δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ (σχ. 27) καὶ τὴν συνισταμένην των $\overrightarrow{O\Gamma}$. Τὰ μέτρα τῶν ροπῶν των ὡς πρὸς σημεῖον ροπῆς Κ, εἶναι τῆς $\overrightarrow{OA}$, 2 εμβ (ΟΑΚ) = (ΟΚ) · (ΑΔ)· τῆς $\overrightarrow{OB}$, 2 εμβ (ΟΒΚ) = (ΟΚ) (ΒΕ) καὶ τῆς ΟΓ, 2 εμβ. (ΟΓΚ) = (ΟΚ) (ΓΖ). Ἂν ἡ εὐθεῖα x'οx εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΚ, τότε ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΘΒ, ΑΔΟ, θὰ ἔχωμεν ΒΘ = ΑΔ· ἄρα θὰ εἶναι ΓΖ = ΘΕ καὶ ΒΕ−ΒΘ=ΒΕ−ΑΔ δηλ. ΓΖ=ΒΕ−ΑΔ.. Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ ΟΚ, ἔχομεν : (ΓΖ) (ΟΚ)=(ΒΕ) (ΟΚ)−(ΑΔ) (ΟΚ) (1).



Σχ. 27.

Ἂν αἱ ροπαὶ τῶν ΟΓ, ΟΒ, θεωρηθοῦν θετικαί, τότε ἡ ροπὴ τῆς ΟΑ θὰ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ συνεπῶς οἱ ἀριθμοὶ (ΓΖ) (ΟΚ), (ΒΕ) (ΟΚ), — (ΑΔ) (ΟΚ), ἐκφράζουν τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων μὲ τὰ σημεῖα των καὶ ἡ (1) γράφεται :

$$\text{Ροπ}_K\left(\overrightarrow{O\Gamma}\right) = \text{Ροπ}_K\left(\overrightarrow{OB}\right) + \text{Ροπ}_K\left(\overrightarrow{OA}\right).$$

β) ***Δύο δυνάμεις παράλληλοι.*** Αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{BF_2}$, εἶναι παράλληλοι καὶ ἔστω σημεῖον Κ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των (σχ. 28). Ἔχομεν : $\text{Ροπ}_K\ F_1 = F_1\ (K\Delta)$,

$\text{Ροπ}_K\ F_2 = -\ F_2\ (KZ)$, $\text{Ροπ}_K\left(\Gamma\Sigma\right) = \Sigma\ (KE)$.

Γνωρίζομεν ὅτι : $\dfrac{\Delta E}{EZ} = \dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}$ (εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν)

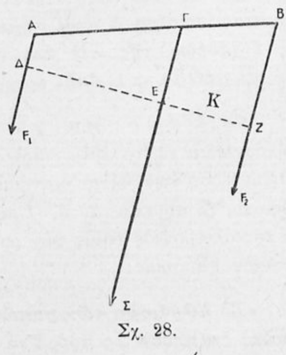
Ἐπειδή, $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B} = \dfrac{F_2}{F_1}$, ἄρα $\dfrac{\Delta E}{EZ} = \dfrac{F_2}{F_1}$. Κι' ἐπειδὴ ΔΕ = ΚΔ − ΚΕ καὶ ΕΖ = ΚΕ + + ΚΖ, ἔχομε : $\dfrac{K\Delta - KE}{KE + KZ} = \dfrac{F_2}{F_1}$ ἢ $(K\Delta)\ F_1 - (KE)\ F_1 = (KE)\ F_2 + (KZ)\ F_2$ ἢ $(K\Delta)\ F_1 - (KZ)\ F_2 = (KE)\ F_2 + (KE)\ F_1$ ἢ $(K\Delta)\ F_1 - (KZ)\ F_2 = KE\,(F_1 + F_2) = (KE)\Sigma$ ἢ

$$\text{Ροπ}_K\ \overrightarrow{F_1} + \text{Ροπ}_K\ \overrightarrow{F_2} = \text{Ροπ}_K\ \overrightarrow{\Sigma}$$

Καθ' ὅμοιον ἀκριβῶς τρόπον ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα ἂν αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντίρροποι.

Ἂν αἱ ἀντίρροποι δυνάμεις ἀποτελοῦν ***ζεῦγος***, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι ***«ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου των».***

Γενικῶς ἂν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχωμεν δυνάμεις $F_1, F_2 ..., F_\nu$, τότε δι' ἓν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι :



Σχ. 28.

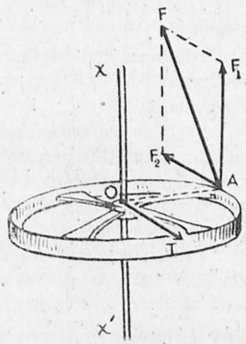
$\text{Ροπ}_K\ F_1 + \text{Ροπ}_K\ F_2 + \text{Ροπ}_K\ F_3 + ... + \text{Ροπ}_K\ F_\nu = \text{Ροπ}_K\ \Sigma$ (Σ = συνισταμένη των).

Συνθήκη ἰσορροπίας. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία εἰς σῶμα μὲ σταθερὸν σημεῖον, ὅπου ἐνεργοῦν δυνάμεις εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, πρέπει ***«τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ σταθερὸν σημεῖον νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν· δηλ.*** $Ροπ_K \overrightarrow{\Sigma} = O$**»**. Ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης Σ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν: α) ὅταν ἡ Σ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ καὶ β) ὅταν ἡ Σ εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

Ἐφαρμογὰς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν θὰ συναντήσωμεν κατὰ τὴν μελέτην ἰσορροπίας τῶν ἁπλῶν μηχανῶν.

33. ***Ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα.*** — Ὁ τροχὸς Τ (σχ. 29) ἠμπορεῖ νὰ περιστραφῇ περὶ τὸν ἄξονά του x΄x.

Κάθε δύναμις $\overrightarrow{AF}$, μὴ παράλληλος πρὸς τὸν x΄x καὶ μὴ διερχομένη διὰ τοῦ ἄξονος x΄x, ἀναλύεται εἰς τὴν $\overrightarrow{AF_2}$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΤ τοῦ τροχοῦ καὶ εἰς τὴν $\overrightarrow{AF_1}$ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x΄x. Ἡ $\overrightarrow{AF_1}$ ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἄξονος καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς $\overrightarrow{AF}$ (περιστροφὴ τοῦ τροχοῦ), εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο τοῦ ζεύγους (AF_2, ΟΤ). ***Τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς ροπῆς τῆς*** $\overrightarrow{AF_2}$ ***ὡς πρὸς τὸ Ο, ὀνομάζομεν καὶ ροπὴν τῆς*** AF ***ὡς πρὸς τὸν ἄξονα*** x΄x. Ἡ $Ροπ_{x'x} \overrightarrow{AF} = Ροπ_O \overrightarrow{AF_2} = F_2 \cdot (OA)$.



Σχ. 29.

Σημείωσις. Λόγῳ τοῦ σταθεροῦ ἄξονος, ἡ διεύθυνσις τῆς περιστροφῆς μένει ἀμετάβλητος (δι' οἱανδήποτε δύναμιν) καὶ εἶναι ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένη. Διὰ τοῦτο δὲν λέγομεν ὅτι ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι διάνυσμα (ἀπαραίτητον ὅταν χρειάζεται ὁ προσδιορισμὸς διευθύνσεως), ἀλλὰ μιὰ καὶ ἡ διεύθυνσις εἶναι πάντα ἡ ἰδία (ὁ σταθερὸς ἄξων περιστροφῆς), ἀναφέρομεν μόνον ἀλγεβρικὴν τιμήν.

Συνθήκη ἰσορροπίας. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα αὐτὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

Διαστάσεις Ροπῆς. Τὸ μέτρον τῆς ροπῆς εἶναι: Ροπὴ=(Δύναμις) x (ἀπόστασιν) $= F \cdot s$. Ἄρα Ροπὴ $= M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$.

(Ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὸ ἔργον, τὸ μέτρον τῆς ροπῆς ἔχει τὰς αὐτὰς διαστάσεις μ' ἐκεῖνο· ἀλλὰ ἡ μὲν ροπὴ εἶναι ***διανυσματικὸν ποσόν***, ἐνῶ τὸ ἔργον ***μονόμετρον***).

Τὸ μέτρον τῆς ροπῆς σημειοῦμεν: π. χ. Ροπὴ = 5 kg* · 40cm, Ροπὴ = 200 gr*· 1m κ.λ.π.

Παράδειγμα. «Δύο παιδιὰ βάρους ἀντιστοίχως F_1 καὶ F_2 κάθονται εἰς τὰ ἄκρα δοκοῦ μήκους ΑΒ. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ ἡ δοκὸς ὥστε νὰ παραμένῃ ὁριζοντία;»

Λύσις. Ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Γ ὅτι πρέπει νὰ ὑποστηρίζεται ἡ δοκὸς (σχ. 28). Ἐκεῖ δροῦν δύο κατακόρυφοι δυνάμεις ἀντίθετοι, ἡ Σ συνισταμένη τῶν F_1 καὶ F_2 καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ ὑποστηρίγματος. Κατὰ συνέπειαν ἔχομεν ἰσορροπίαν τῆς δοκοῦ.

Μὲ βάσιν τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν ἔχομεν:

$$\text{Ροπ}_\Gamma\, F_1 + \text{Ροπ}_\Gamma\, F_2 = \text{Ροπ}_\Gamma\, \Sigma$$

Ὑπολογίζομεν τὰς ῥοπάς:

$\text{Ροπ}_\Gamma\, F_1 = F_1\,(\text{ΑΓ})$, $\quad \text{Ροπ}_\Gamma\, F_2 = -\,F_2\,(\text{ΓΒ})$ καὶ $\text{Ροπ}_\Gamma\, \Sigma = \Sigma \cdot 0 = 0\cdot$

$$\text{ἄρα}\quad F_1\,(\text{ΑΓ}) - F_2\,(\text{ΓΒ}) = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΑΓ}}$$

Εὑρίσκομεν δηλ. τὴν σχέσιν τὴν καθορίζουσαν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Γ τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων κι' ὁμορρόπων δυνάμεων.

Ἀσκήσεις

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης δύο παραλλήλων ἀντιρρόπων δυνάμεων διὰ τοῦ θεωρήματος τῶν ῥοπῶν.

2) Δοκὸς ἔχει βάρος 30 kg* καὶ μῆκος 2,60 m. Εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς κάθονται δύο παιδιὰ βάρους 30 kg* καὶ 34 kg*. Ποῦ πρέπει νὰ στηρίζεται ἡ δοκὸς διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως.

3) Ἐπὶ τῆς περιφερείας τροχοῦ ἀκτῖνος 0,4 m ἐνεργεῖ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην δύναμις 5 kg*. Εἰς σημεῖον ἀπέχον 20cm ἀπὸ τὸ κέντρον ἐνεργεῖ δύναμις ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τροχοῦ γωνίαν 60^0 καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τροχοῦ τὴν διερχομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις καὶ ἡ φορὰ αὐτῆς τῆς δυνάμεως διὰ νὰ μὴ στρέφεται ὁ τροχός.

4) Σῶμα Σ ἔχει σταθερὸν σημεῖον Ο. Ἐπὶ τοῦ Σ ἐνεργεῖ δύναμις $\overrightarrow{AF}$ ἐντάσεως 8 kg*. Ἂν γων. ΟΑF = 30^0 καὶ γων. ΟFΑ = 60^0 καὶ ἡ γωνία τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΟΑF εἶναι 45^0, νὰ εὑρεθῇ ἡ ῥοπὴ τῆς $\overrightarrow{AF}$ ὡς πρὸς τὸ Ο.

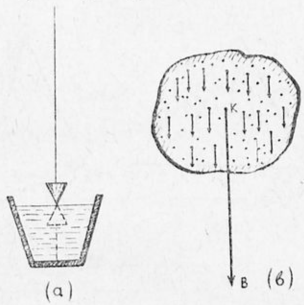
5) Ἐπὶ μεταλλικῆς ῥάβδου ΑΔ, ἡ ὁποία σχηματίζει γωνίαν 30^0 μὲ τὸν ὁρίζοντα, ἐνεργοῦν 4 δυνάμεις εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ὅπου ΑΒ=0,4m, ΒΓ=0,3m καὶ ΓΔ=0,25m. Αἱ δύο πρῶται εἶναι κατακόρυφοι καὶ αἱ δύο δεύτεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ῥάβδον. Ἡ δευτέρα ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω καὶ ἔντασιν 1kg*. Ἂν εἰς τὴν ἄνω θέσιν ἡ ῥάβδος ἰσορροπῇ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι δυνάμεις.

Βάρος — Ἰσορροπία βαρέων σωμάτων

34. *Βαρύτης.* — Ὅλα τὰ ὑλικὰ σώματα ὅταν εὑρεθοῦν ἐλεύθερα (δηλ. δὲν ὑπόκεινται εἰς συνδέσμους) ***πίπτουν*** πρὸς τὴν Γῆν. Ἂν εἰς μερικὰς περιπτώσεις συμβαίνει τὸ ἀντίθετον, τοῦτο ὀφείλεται εἰς εἰδικοὺς λόγους (ἀντίστασις ἀέρος, ἄνωσις). Ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων μᾶς ὁδηγεῖ νὰ δεχθῶμεν ὅτι μεταξὺ Γῆς καὶ κάθε ἄλλου σώματος ἀσκοῦνται ἑλκτικαὶ δυνάμεις. ***Τὴν ἰδιότητα τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ Γῆ νὰ ἕλκῃ τὰ διάφορα σώματα, ὀνομάζομεν βαρύτητα καὶ τὰς δυνάμεις ποὺ ἀσκοῦνται ἐπὶ τῶν σωμάτων δυνάμεις βαρύτητος.*** Ὁ χῶρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐκδηλοῦνται καὶ δροῦν αἱ δυνάμεις τῆς βαρύτητος, ὀνομάζεται ***δυναμικὸν πεδίον βαρύτητος.***

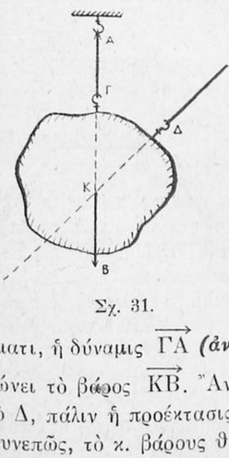
Βάρος. Ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται ἕνα ὑλικὸν σημεῖον ὑπὸ τῆς Γῆς, λέγεται βάρος τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους εὑρίσκομεν ἐὰν ἀναρτήσωμεν ἕνα μικρὸν σῶμα (σχ. 30 α) μὲ λεπτὸν νῆμα ***(νῆμα τῆς στάθμης)***. Τὸ τεταμένον νῆμα δεικνύει τὴν διεύθυνσιν, ἡ ὁποία λέγεται ***κατακόρυφος.*** Ἡ προέκτασις τῆς κατακορύφου διέρχεται περίπ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. ***Κάθε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυφον ὀνομάζεται ὁριζόντιον ἐπίπεδον.*** Ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι π.χ. ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὑδραργύρου ἢ οἱουδήποτε ὑγροῦ μέσα εἰς δοχεῖον.



Σχ. 30

35. Κέντρον Βάρους. — Ἐπειδὴ κάθε ὑλικὸν σῶμα ἠμποροῦμεν νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἄθροισμα ὑλικῶν σημείων, τὸ ***βάρος τοῦ σώματος*** θὰ εἶναι ἡ ***συνισταμένη*** ὅλων τῶν δυνάμεων μὲ τὰς ὁποίας ἡ Γῆ ἕλκει τὰ ὑλικὰ σημεῖα τοῦ σώματος. Αἱ δυνάμεις αὐταὶ ὡς κατακόρυφοι, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἀποστάσεις εἶναι ἀπείρως μικραί, ἐν σχέσει μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σώματος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς Γῆς (μέση ἀκτὶς τῆς Γῆς 6370 km), αἱ δυνάμεις λαμβάνονται ὡς παράλληλοι. Ἄρα τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Κ τῆς συνισταμένης (τοῦ βάρους τοῦ σώματος) (σχ. 30 β), εἶναι τὸ κέντρον παραλλήλων δυνάμεων καὶ λέγεται ***κέντρον βάρους*** τοῦ σώματος. Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων συμπεραίνομεν ὅτι, τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς σώματος εἶναι ***σταθερὸν σημεῖον αὐτοῦ, ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸν προσανατολισμὸν τοῦ σώματος.***



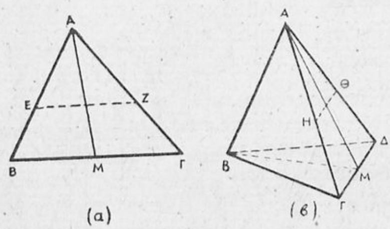
Σχ. 31.

36. Προσδιορισμὸς κ. βάρους τῶν σωμάτων. — Ὅταν ἀνηρτημένον σῶμα (σχ. 31) εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ προέκτασις τοῦ νήματος διέρχεται ἀπὸ τὸ κ. βάρους του. Πράγματι, ἡ δύναμις $\overrightarrow{\Gamma A}$ ***(ἀντίδρασις τοῦ νήματος*** ἢ ***τάσις*** αὐτοῦ) ἐξουδετερώνει τὸ βάρος $\overrightarrow{KB}$. Ἂν ἐξαρτήσωμεν τὸ σῶμα ἀπὸ ἄλλο ἄγκιστρον π. χ. τὸ Δ, πάλιν ἡ προέκτασις τοῦ νήματος θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κ. βάρους. Συνεπῶς, τὸ κ. βάρους θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο εὐθειῶν ΓΒ καὶ Δ Κ.

Διὰ σώματα ὁμογενῆ (δηλ. σώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ κατανομὴ τῆς ὕλης εἶναι ὁμοιόμορφος) ἠμποροῦμεν ***θεωρητικῶς*** νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κ. βάρους αὐτῶν στηριζόμενοι εἰς τὰ ἑπόμενα *βασικὰ θεωρήματα.*

1) «*Ἐὰν γραμμή, ἐπιφάνεια ἢ στερεὸν ἔχῃ κέντρον ἢ ἄξονα ἢ ἐπίπεδον συμμετρίας, τότε τὸ κ. β. εἶναι τὸ κέντρον συμμετρίας ἢ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας*».

2) «*Ὅταν ἐπίπεδον σχῆμα ἔχῃ διάμετρον, τότε τὸ κ. β. τοῦ σχήματος εὑρίσκεται ἐπ' αὐτῆς τῆς διαμέτρου*». Λέγομεν ὅτι ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα ἔχει ***διάμετρον δ***, ὅταν κάθε χορδὴ παράλληλος πρὸς μίαν διεύθυνσιν διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς δ. Π. χ. ἡ διάμεσος ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 32α), εἶναι διάμετρος, διότι εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων ὅλων τῶν χορδῶν ΕΖ τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΒΓ.



Σχ. 32.

3) «*Ὅταν στερεὸν ἔχῃ διαμετρικὸν ἐπίπεδον, τὸ κ. β. αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου*». Λέγομεν ὅτι ἕνα στερεὸν ἔχει ***διαμετρικὸν ἐπίπεδον*** Ε, ὅταν κάθε χορδὴ παράλληλος πρὸς μίαν διεύθυνσιν, διχοτοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Ε. Π. χ. τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ (σχ. 32β) ἔχει τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ (Μ τὸ μέσον τῆς ΓΔ) διαμετρικόν, διότι τοῦτο εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων ὅλων τῶν χορδῶν ΗΘ ποὺ ἄγονται παράλληλοι πρὸς τὴν ΓΔ.

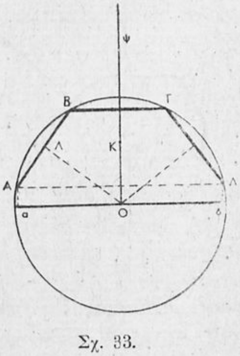
37. Κ. βάρους μερικῶν σχημάτων. — 1) Τὸ κέντρον βάρους ὁμογενοῦς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ.

2) Τὸ κ. β. κύκλου εἶναι τὸ γεωμετρικὸν κέντρον αὐτοῦ.

3) » » » σφαίρας » » » » αὐτῆς.

4) Τὸ κέντρον βάρους ὁμογενοῦς ἐπιφανείας τριγώνου εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

5) Τὸ κ. β. κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ (σχ. 33) εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας Οψ. Ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸ Ο δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον, $OK = \frac{\kappa \cdot \mu}{\lambda}$, ὅπου κ= ΟΛ τὸ ἀπόστημα τῆς γραμμῆς, μ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΔ, καὶ λ τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης ΑΒΓΔ.



Σχ. 33.

6) Τὸ κ. β. ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ μέσον τοῦ ἄξονός του.

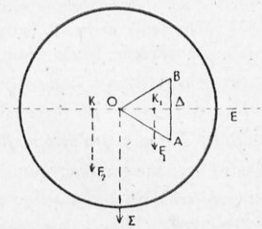
7) Τὸ κ. β. κώνου εἶναι σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονός του, ἀπέχον ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τὰ $^3/_4$ τοῦ ὕψους του.

8) Τὸ κέντρον βάρους τετραέδρου εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἑνώνουν τὰς κορυφὰς μὲ τὰ κ. βάρους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν.

Παράδειγμα. «Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. β. κυκλικοῦ δίσκου διαμέτρου 200 cm ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφηρέθη ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς $10\sqrt{3}$ cm ἔχον μίαν τῶν κορυφῶν του εἰς τὸ κέντρον τοῦ δίσκου». ***(Σχολὴ Μηχανολόγων 1948).***

Λύσις. Ἔστω ΟΣ τὸ βάρος τοῦ πλήρους δίσκου· $K_1 F_1$ τὸ βάρος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ KF_2 τὸ βάρος τοῦ ὑπολοίπου μέρους τοῦ δίσκου. Ἀπὸ τὴν σύνθεσιν παραλλήλων δυνάμεων ἔχομεν: $\Sigma = F_1 + F_2$ καὶ

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{KO}{OK_1} \qquad (1)$$



Σχ. 34.

Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δίσκου $= \pi\rho^2 = \pi\cdot 100^2 = 10^4\cdot\pi$ cm². Ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου $(OAB) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}$ cm². Παρατηροῦμεν ὅτι, ***τὰ βάρη ὁμογενῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐμβαδά των·*** συνεπῶς θὰ ἔχωμεν: $F_1 = \sigma\cdot 75\sqrt{3}$, $F_2 = \Sigma - F_1 = \sigma\cdot(10^4\cdot\pi - 75\sqrt{3})$, (σ εἶναι τὸ βάρος τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας). Τὸ κέντρον βάρους K_1 τοῦ ΟΑΒ εἶναι εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψ υς ΟΔ ἀπὸ τοῦ Ο, (τὸ ΟΔ εἶναι καὶ διάμεσος)· ἄρα $OK_1 = \frac{2}{3}\cdot O\Delta = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 10$cm. Ἀντικαθιστῶντες τὰ προσδιορισθέντα στοιχεῖα εἰς τὸν τύπον (1) ἔχομεν: $\frac{\sigma\cdot 75\sqrt{3}}{\sigma(10^4\,\pi - 75\sqrt{3})} = \frac{\chi}{10}$ $(OK = \chi)$ καὶ $\chi = \frac{750\sqrt{3}}{10^4\,\pi - 75\sqrt{3}}$ cm.

Ἀσκήσεις.

I.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. βάρους ὁμογενοῦς περιμέτρου καὶ ἐπιφανείας παραλληλογράμμου.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. βάρους ὁμογενοῦς περιμέτρου α) κανονικοῦ ἡμιεξαγώνου πλευρᾶς 3 m. καὶ β) ἡμιοκταγώνου πλευρᾶς 2 m.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. βάρους ὁμογενοῦς τόξου α) 60° β) 120° γ) 90° ἀκτῖνος 2,4 cm.

II.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. β. ὁμογενοῦς περιμέτρου τραπεζίου τὸ ὁποῖον προκύπτει ὅταν ἑνώσωμε τὰ μέσα 2 πλευρῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 2 m.

5) Εἰς τὰ ἄκρα ἰσοπαχοῦς καὶ ὁμογενοῦς ῥάβδου μήκους 1 m καὶ βάρους 10kg* προσαρμόζονται δύο μεταλλικοὶ κύβοι καὶ εἰς τὰ κέντρα μιᾶς ἕδρας, βάρους 30kg* καὶ 40kg* ἀντιστοίχως. Ἡ ἀκμὴ τοῦ πρώτου κύβου εἶναι 1,5 dm καὶ τοῦ δευτέρου 1,72 dm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ.β. τοῦ συστήματος.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. β. ὁμογενοῦς κυκλικοῦ τομέως γωνίας α) 60° β) 300° γ) 180° ἀκτῖνος 4,6 m.

III.

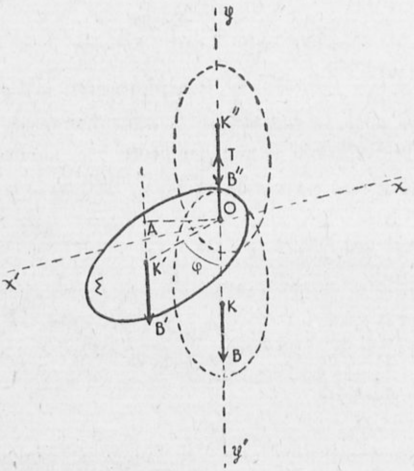
7) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. β. ὁμογενοῦς περιμέτρου α) τριγώνου καὶ β) τραπεζίου.

8) Δίδονται σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζονται ἴσα

βάρη. Ἂν Κ εἶναι τὸ κ. β. τοῦ συστήματος ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{K\Gamma}$, $\overrightarrow{K\Delta}$, ἰσορροποῦν.

9) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κ. β. ὁμογενοῦς περιμέτρου τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου τὰ βάρη τῶν πλευρῶν του εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τοῦ μήκους αὐτῶν.

38. ***Ἰσορροπία βαρέων σωμάτων.***— Τὰ πλέον ἁπλᾶ παραδείγματα ἰσορροπίας σωμάτων ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐνεργοῦν δυνάμεις, εἶναι αἱ περιπτώσεις ἰσορροπίας ***ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων***, ὅταν τοῦτο ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν καταλλήλων συνδέσμων.



Σχ. 35.

α) ***Σῶμα μὲ σταθερὸν σημεῖον ἢ στρεπτὸν περὶ ἄξονα.*** Διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα Σ (σχ. 35) εἰς τὸ ὁποῖον τὸ σημεῖον Ο εἶναι σταθερόν, ἢ τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα x΄x, πρέπει, ἡ ἀντίδρασις ΟΤ τοῦ συνδέσμου Ο καὶ τὸ βάρος ΚΒ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου y y΄ νὰ ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως. Ἢ πρᾶγμα τὸ αὐτό, ἡ ῥοπὴ τοῦ βάρους Β ὡς πρὸς τὸ Ο νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδὲν ($\text{Ροπ}_O \overrightarrow{B} = 0$).

1) Ὅταν τὸ κ. βάρους εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου y΄y καὶ κάτω τοῦ σημείου Ο, τότε ἡ ***ἰσορροπία λέγεται εὐσταθής.*** Διότι, ἐὰν ἐκτρέψωμεν τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτήν, ἡ δημιουργουμένη ῥοπὴ τοῦ βάρους ὡς πρὸς τὸ Ο, τείνει νὰ τὸ ἐπαναφέρῃ εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν. Π.χ. εἰς τὴν θέσιν ΟΚ΄ τὸ ζεῦγος (Κ΄Β΄, ΟΤ) ἢ τὸ αὐτὸ ἡ Ροπ_O Β΄ τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς κατακορύφου yy΄. Εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας τὸ κ. βάρους εὑρίσκεται εἰς τὴν χαμηλοτέραν στάθμην ὡς πρὸς τὸ Ο.

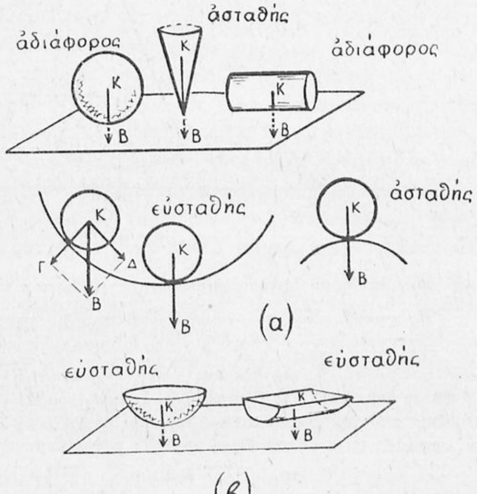
2) Ὅταν τὸ κ. β. εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου yy΄ ὑπεράνω τοῦ Ο π.χ. εἰς τὸ Κ΄΄, τότε ἡ ***ἰσορροπία εἶναι ἀσταθής.*** Διότι ἡ ἐλαχίστη ἐκτροπὴ τοῦ σώματος Σ δημιουργεῖ ῥοπήν, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ τὸ σῶμα εἰς τὴν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κ. β. εὑρίσκεται εἰς τὴν ὑψηλοτέραν δυνατὴν στάθμην ὡς πρὸς τὸ Ο.

3) Ἂν τὸ Ο συμπίπτῃ μὲ τὸ κ. βάρους, ἢ ὁ ἄξων διέρχεται δι' αὐτοῦ, τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ εἰς οἱανδήποτε θέσιν· ἡ ἰσορροπία δηλ. εἶναι ὅπως

λέγομεν **ἀδιάφορος** (ἀντίθετοι δυνάμεις Τ καὶ Β μὲ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο).

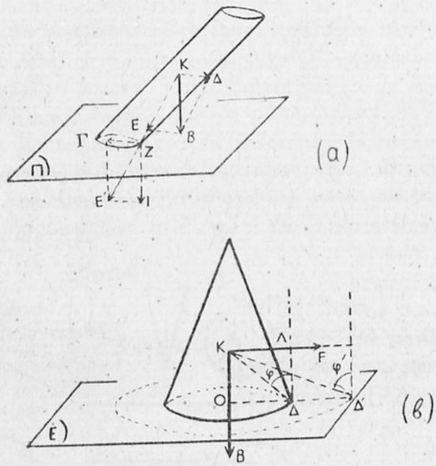
β) ***Ἰσορροπία σωμάτων στηριζομένων δι᾿ ἑνὸς σημείου ἢ δι᾿ εὐθείας ἐπὶ ἐπιφανείας.***— Ὅταν στερεὸν σῶμα στηρίζεται δι᾿ ἑνὸς σημείου ἢ δι᾿ εὐθείας ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας, εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν καὶ τὰ τρία εἴδη ἰσορροπίας. Τὰ σχήματα 36α καὶ 36β παρουσιάζουν διαφόρους περιπτώσεις σωμάτων στηριζομένων ἐπὶ ἐπιπέδων καὶ καμπύλων ἐπιφανειῶν.

γ) ***Ἰσορροπία σώματος στηριζομένου διὰ βάσεως (ἢ τριῶν καὶ ἄνω σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας) ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.***— α) Ἐὰν στερεὸν σῶμα (σχ. 37α) στηρίζεται διὰ τῆς βάσεως ΓΖ εἰς ἐπίπεδον Π, διὰ νὰ ἰσορροπῆ τοῦτο, προφανῶς ἡ κατακόρυφος τοῦ κ. βάρους ***πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τῆς βάσεως ΓΖ.*** Ἂν τοῦτο δὲν συμβαίνη, ἰσορροπία δὲν ὑπάρχει.



Σχ. 36.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ β΄ρος $\overrightarrow{KB}$, τὸ ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας τὴν μίαν $\overrightarrow{KE}$ διερχομένην διὰ τοῦ Ζ (τὸ Ζ ἐγγύτερον σημεῖον τοῦ περιγράμματος ΓΖΓ) καὶ τὴν ἄλλην $\overrightarrow{K\Lambda}$ παράλ λ η λ ο ν πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἡ $\overrightarrow{K\Lambda}$ δημιουργεῖ ροπὴν ἀνατροπῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ζ. Ἡ $\overrightarrow{KE}$ μεταφερομένη εἰς τὸ Ζ ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας, τὴν $\overrightarrow{ZI}$ κάθετον ἐπὶ τὸ Π καὶ τὴν $\overrightarrow{Z\Gamma}$ κειμένην εἰς τὸ Π. Ἐκ τούτων ἡ $\overrightarrow{ZI}$ ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ Π, ἡ δὲ $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ἐξαναγκάζει τὸ σῶμα νὰ ὀλισθήση κατὰ τὴν διεύθυνσίν της· ὥστε κατὰ τὴν ἀνατροπὴν θὰ ἔχωμεν καὶ ὀλίσθησιν. — Εἰς τὸ (σχ. 37 β) ἡ κατακόρυφος $\overrightarrow{KB}$ διέρχεται διὰ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ὑπάρχει εὐσταθὴς ἰσορροπία. Ὁ ***βαθμὸς ἰσορροπίας*** ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ κ. βάρους καὶ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς βάσεως τοῦ κώνου, δηλ. ἀπὸ τὴν γωνίαν $\varphi = \widehat{K\Delta\Lambda}$ $(\Delta\Lambda | E)$ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στρέψωμεν τὸν κῶνον περὶ τὸ Δ, διὰ νὰ εὑρεθῆ εἰς τὴν ***ὁρικὴν θέσιν ΔΛ τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας,*** πέραν τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀνατροπήν. Ἐπειδὴ $\varphi = \widehat{\Delta KO}$ καὶ $\varphi' = \Delta'\widehat{KO}$ εἶναι δὲ $\varphi' > \varphi$, συμπεραίνομεν ὅτι αὐξανομένης τῆς βάσεως αὐξάνεται ὁ βαθμὸς ἰσορροπίας. Ἐπίσης τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐὰν τὸ κ. β. εὑρίσκεται χαμηλότερα, διότι ἡ γωνία φ, κατερχομένου τοῦ Κ, αὐξάνει. Ἐπιτυγχάνομεν λοιπὸν μεγαλυτέραν εὐστάθειαν ὅταν ἡ βάσις στηρίξεως εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη καὶ τὸ κ. βάρους εὑρίσκεται ὅσον τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον τῆς βάσεως. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν



Σχ. 37.

λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν εἰς τὴν κατασκευὴν ἀντικειμένων καθημερινῆς χρήσεως.

Ἐφαρμογή. «Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις $\overrightarrow{KF}$ (σχ. 37β) διὰ τὴν ἀνατροπὴν τοῦ κώνου ἂν θεωροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζει εἰς τὸ κ. β. αὐτοῦ».

Ἔστω ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{KF}$ καὶ $\overrightarrow{KB}$, διέρχεται ἀπὸ τὸ ἀκραῖον σημεῖον Δ τῆς βάσεως. Τότε ἔχομεν ἰσορροπίαν διότι ἡ συνισταμένη ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ σημείου Δ. Συνεπῶς κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν, ἔχομεν:

$$\text{Ροπ}_{\Delta}\left(\overrightarrow{KF}\right) + \text{Ροπ}_{\Delta}\left(\overrightarrow{KB}\right) = 0.$$

ἢ $B\,(O\Delta) - F\,(\Delta\Lambda) = 0$ ἢ $B\,(K\Lambda) = F\,(\Delta\Lambda)$ καὶ $F = B \cdot \dfrac{K\Lambda}{\Delta\Lambda}$ ἢ

$F = B \cdot \text{εφ}\,\varphi$, $\left(\dfrac{K\Lambda}{\Delta\Lambda} = \text{εφ}\varphi\right)$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις ἀνατροπῆς πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ B. εφφ καὶ ἐξαρτᾶται (διὰ σταθερὸν βάρος) μόνον ἀπὸ τὴν γωνίαν φ.

Ἀσκήσεις

1. Ὀρθὸς κῶνος ἔχει βάρος 500kg*. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του εἶναι 1m καὶ τὸ ὕψος του 4m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις ἀνατροπῆς ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ κ. β. τοῦ κώνου, ὅταν αὐτὸς στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

2. Κυλινδρικὸν βαρέλι βάρους 200kg* στηρίζεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως 10%. Ποία ἡ δύναμις ἀνατροπῆς ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸ κ. β. α) ὅταν ὠθοῦμε πρὸς τὰ κάτω καὶ β) ὅταν ὠθοῦμε πρὸς τὰ πάνω.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

39. *Ἔννοια καὶ στοιχεῖα τῆς κινήσεως.*— Ὅταν αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων ἑνὸς σώματος Α (π.χ. ἑνὸς ἀνθρώπου μέσα εἰς δωμάτιον) ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῶν ἀντικειμένων τοῦ περιβάλλοντος (δωματίου) δὲν ***μεταβάλλονται***, λέγομεν ὅτι τὸ σῶμα Α (ἄνθρωπος) ***ἠρεμεῖ*** μέσα εἰς τὸ περιβάλλον του. Ἂν ὅμως καὶ ἑνὸς μόνον σημείου τοῦ Α ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἕνα σημεῖον ἄλλου σώματος ***μεταβάλλεται***, λέγομεν ὅτι τὸ Α ***κινεῖται***. Σῶμα ἢ σώματα τὰ ὁποῖα ὡς πρὸς ἕνα περιβάλλον ἠρεμοῦν, δυνατὸν νὰ κινοῦνται ὡς πρὸς ἕνα ἄλλο. Π. χ. καθήμενος ἐπιβάτης κινουμένης ἁμαξοστοιχίας ἠρεμεῖ μέσα εἰς τὸ ὄχημα, ἀλλὰ κινεῖται ὡς πρὸς ἕνα παρατηρητὴν εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

Ὅλα τὰ σώματα τῆς Γῆς συμμετέχουν εἰς τὴν κίνησιν αὐτῆς περὶ τὸν ἥλιον καὶ ἑπομένως κινοῦνται ὡς πρὸς τὸν ἥλιον, ἔστω καὶ ἂν εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν ἐπὶ τῆς Γῆς. Ἐπειδὴ καὶ ὁ ἥλιος κινεῖται ὡς πρὸς ἄλλα οὐράνια σώματα, κ.ο.κ., συμπεραίνομεν ὅτι ***ἀπόλυτος ἠρεμία δὲν ὑπάρχει***. Πράγματι, ὅπως μᾶς διδάσκει ἡ Ἀστρονομία διὰ τὰ οὐράνια σώματα καὶ ἡ Φυσικοχημεία διὰ τὰ μόρια καὶ τὰ ἄτομα ὅλων τῶν σωμάτων, ***ἡ κίνησις εἶναι γενικὴ ἰδιότης τῆς ὕλης***. Δηλ. «***ὕλη χωρὶς κίνησιν δὲν νοεῖται, οὔτε καὶ τὸ ἀντίστροφον***».

Ἐπειδὴ τὰ διάφορα μέρη ἑνὸς στερεοῦ σώματος εἶναι δυνατὸν νὰ κινοῦνται κατὰ διαφόρους τρόπους, ἐξετάζομεν πρῶτον τοὺς τρόπους κινήσεως ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου καὶ προκειμένου διὰ τὴν κίνησιν ὁλοκλήρου στερεοῦ, ἐξετάζομεν τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ.

Ὅταν λοιπὸν σπουδάζωμεν τὴν κίνησιν ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου ἢ σώματος, ***ἀναφερόμεθα πάντοτε μέσα εἰς ἕνα ὡρισμένον περιβάλλον***, εἰς τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν τὰ ἄλλα του ἀντικείμενα ἢ σημεῖα εἰς ἠρεμίαν.

Τροχιά. Αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τὰς ὁποίας καταλαμβάνει ἕνα ὑλικὸν σημεῖον τὸ ὁποῖον κινεῖται μέσα εἰς τὸ περιβάλλον του, ἀπαρτίζουν μίαν συνεχῆ γραμμήν, ἡ ὁποία ὀνομάζεται τροχιά. Ἡ τροχιὰ εἶναι βασικώτατον στοιχεῖον τῆς κινήσεως ἑνὸς κινουμένου ὑλικοῦ σημείου.

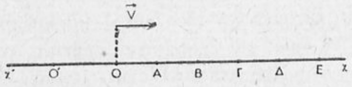
Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τροχιὰν ἑνὸς κινητοῦ, ἐνδιαφερόμεθα ἐπὶ πλέον νὰ γνωρίζωμεν κάθε φορὰν τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἐπ' αὐτῆς· δηλ. ***συνδέομεν τὴν θέσιν τοῦ κινητοῦ μὲ τὸν χρόνον.***

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς τροχιᾶς λαμβάνομεν σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν (σχ. 38) καὶ ἀναζητοῦμεν ***πότε*** τὸ κινητὸν θὰ εὑρεθῇ εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, κ.λ.π, δηλ. ***μετὰ πόσον χρόνον*** ἀπὸ τῆς ἀρχῆς θὰ ἔχῃ διανύσει τὰς ἀποστάσεις (διαστήματα), ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κ.λ.π.

Διὰ τοῦτο ἀπὸ τοὺς νόμους ποὺ διέπουν τὴν κίνησιν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἕνα μαθηματικὸν τύπον ὁ ὁποῖος θὰ μᾶς δίδῃ τὰ διαστήματα ΟΑ, ΟΒ, κ.λ.π, διὰ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ χρόνου. Τὸν τύπον αὐτὸν ὀνομάζομεν ***ἐξίσωσιν τῆς κινήσεως*** καὶ εἶναι τὸ δεύτερον βασικὸν στοιχεῖον τῆς κινήσεως.

Ὥστε τὰ βασικὰ στοιχεῖα μιᾶς κινήσεως εἶναι ἡ τροχιὰ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως.

10. ***Ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις.*** — Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι ἕνα ὑλικὸν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x καὶ ὅτι παρουσιάζει τὸν ἑξῆς τρόπον κινήσεως: Μετὰ 1 sec ἀπὸ τὴν στιγμὴν ποὺ εὑρίσκετο εἰς τὸ Ο (ἀρχὴ διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαστημάτων) νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ Α, μετὰ 1 sec ἀκόμη εἰς τὸ Β, μετὰ ἀπὸ ἄλλο 1 sec εἰς τὸ Γ, κ.ο.κ. Ἔστω δὲ ὅτι εἶναι ΟΑ $=$ΑΒ$=$ΒΓ$=$ΓΔ$=\cdots=$5 cm.



Σχ. 38.

Ὅταν ὁ τρόπος κινήσεως εἶναι ὁ αὐτός, ὄχι μόνον διὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ,..., ὅταν δηλ. εἰς $\frac{1}{2}$ sec μετὰ τὴν ἐκκίνησίν του ἐκ τοῦ Ο τὸ κινητὸν εἶναι εἰς τὸ μέσον τοῦ ΟΑ, εἰς $\frac{1}{3}$ sec εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ΟΑ, εἰς $\frac{2}{3}$ sec εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ΟΑ, ὅταν δηλ. ***πάντοτε τὸ διανυόμενον διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου***, τότε ἡ κίνησις λέγεται ***ὁμαλὴ εὐθύγραμμος.*** Ἡ κίνησις αὐτὴ εἶναι ἡ ἁπλουστέρα καὶ μὲ αὐτὴν συγκρίνομεν ὅλα τὰ ἄλλα εἴδη κινήσεως τὰ ὁποῖα θὰ μελετήσωμεν.

Ταχύτης. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\overline{v}$ (ἢ καὶ κάθε ἴσον του $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$...), τὸ ὁποῖον διανύει τὸ κινητὸν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, λέγεται ***ταχύτης τῆς ὁμαλῆς εὐθυγράμμου κινήσεως.*** Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος εὑρίσκεται ὅταν διαιρέσωμεν τὸ διάστημα s διὰ τοῦ χρόνου t τὸν ὁποῖον ἐχρειάσθη τὸ κινητὸν διὰ νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τοῦτο, δηλ. $\upsilon=\frac{s}{t}$

Ὥστε, ***«ταχύτης εἰς τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν, λέγεται τὸ σταθερὸν διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ κινητὸν ὑλικὸν σημεῖον, διεύθυνσιν τὴν τροχιάν, φορὰν τὴν φορὰν τῆς κινήσεως καὶ μέτρον ἴσον μὲ τὸ μῆκος ποὺ διανύει τὸ κινητὸν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου».*** Σημειοῦμεν τὴν ταχύτητα ὡς ἑξῆς: υ=5cm/sec, υ=50km/h κλπ.

Ἐξίσωσις τῆς ὁμαλῆς κι' εὐθυγράμμου κινήσεως. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\upsilon=\frac{s}{t}$, ἔχομεν $s=\upsilon\cdot t$. Ἂν ὡς ἀρχὴν τῶν διαστημάτων ἔχωμεν λάβει ἕνα ἄλλο σημεῖον, π.χ. τὸ Ο′ (κι' ὄχι τὸ Ο εἰς τὸ ὁποῖον ἐσημειώσαμεν τὴν ἀρχὴν μετρήσεως τοῦ χρόνου), τότε τὸ ὁλικὸν διάστημα μὲ ἀρχὴν τὸ Ο′ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον: $\boxed{s=s_0+\upsilon t}$ ($s_0=$ Ο′Ο). Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι ***ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως.***

Παράδειγμα. Δύο αὐτοκίνητα μὲ ταχύτητας 30km/h καὶ 50km/h ἀντιστοίχως ἐκκινοῦν συγχρόνως πρὸς συνάντησιν ἐκ δύο πόλεων αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 400 km. Νὰ εὑρεθῇ πότε καὶ ποῦ θὰ συναντηθοῦν».

Λύσις. Ἔστω ΑΒ ἡ ἀπόστασις τῶν πόλεων καὶ Γ τὸ σημεῖον συναντήσεώς των, εἰς τὸ ὁποῖον φθάνουν μετὰ χρόνον t.

Τὸ 1ον αὐτοκίνητον διανύει διάστημα, $ΑΓ = υ_1 t$ ἢ $ΑΓ = 30\ \frac{km}{h} \cdot t$

Τὸ 2ον διανύει, $ΓΒ = υ_2 t$ ἢ $ΓΒ = 50\ \frac{km}{h} \cdot t$

Ἐπειδὴ $ΑΓ + ΓΒ = 400$ km, ἔχομεν:

$400\ km = 30\ \frac{km}{h} \cdot t + 50\ \frac{km}{h} \cdot t$ ἢ $t = 5h$

Κατὰ συνέπειαν θὰ συναντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν:

$ΑΓ = 30\ \frac{km}{h} \cdot 5h = 150\ km$ καὶ $ΓΒ = 250\ km$.

Ἀσκήσεις

I

1) Αὐτοκίνητον διέτρεξεν ἀπόστασιν 210 km μὲ κίνησιν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον εἰς 3h. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης α) εἰς m/h καὶ β) εἰς m/sec.

2) Δύο ποδηλάται ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μὲ σταθερὰς ταχύτητας $υ_1=10$ km/h καὶ $υ_2=12$ km/h. Νὰ εὑρεθῇ α) πόσον ἀπέχουν μεταξύ των μετὰ 2h ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως. β) Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἀπόστασις μεταξύ των θὰ εἶναι 36 km, ὅταν κινοῦνται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀντιθέτως.

3) Δύο ὠτομοτρὶς κινοῦνται ἐπὶ παραλλήλων γραμμῶν ὁμαλῶς κι' εὐθυγράμμως μὲ ταχύτητας $υ_1=34$km/h, $υ_2=16$km/h κατ' ἀντιθέτους φοράς. Ἐπὶ τῆς βραδυτέρας παρατηρητὴς διεπίστωσεν ὅτι ἐπέρασεν χρόνος 0,7sec διὰ νὰ διέλθῃ παραπλεύρως ἡ ταχυτέρα. α) Ποῖον τὸ μῆκος τῆς ταχυτέρας β) πόσος χρόνος θὰ διέρρεεν ὅταν θὰ ἐκινοῦντο πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

II

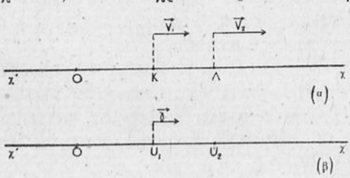
4) Δύο ὑλικὰ σημεῖα Α, Β ἔχουν ἐπὶ παραλλήλων εὐθυγράμμων τροχιῶν κίνησιν ὁμαλὴν μὲ ταχύτητας $υ_1$ καὶ $υ_2$. Ποία ἡ κίνησις τοῦ μέσου Μ τῆς εὐθείας ΑΒ.

5) Ἐκ τοῦ σημείου Α ἀναχωρεῖ πεζὸς διανύων 32 km εἰς 4 h. Μετὰ 3 h ἐκ τοῦ Α ἐκκινεῖ δεύτερος πεζὸς μὲ ταχύτητα 10 km/h πρὸς συνάντησιν τοῦ Α. Μετὰ πόσας ὥρας θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α.» ***(Σχολὴ Ἰκάρων 1950).***

6) Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ εὐθείας ΟΑ ἕνα σημεῖον Μ (ΟΜ=χ) εἰς τρόπον ὥστε, κινητὸν ποὺ ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Ο καὶ διανύει τὴν τροχιὰν ΟΑ μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ Μ συγχρόνως μὲ δεύτερον κινητὸν τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ συγχρόνως μὲ τὸ πρῶτον καὶ μὲ ταχύτητα $\frac{1}{2}$ υ, ἀπὸ σημεῖον Γ ἐκτὸς τοῦ ΟΑ διανῦον τὴν εὐθεῖαν ΓΜ. Ἐὰν ὑπάρχουν δύο δρόμοι ΓΜ ποῖος εἶναι ὁ συντομώτερος (γων. ΓΟΜ = φ)

41. *Εὐθύγραμμος μεταβαλλομένη.* — α) Ἂν συγχρόνως μὲ τὸ κινητὸν τῆς προηγουμένης κινήσεως § 40, ἀνεχώρει ἐκ τοῦ Ο δεύτερον κινητὸν καὶ ἔφθανεν π.χ. εἰς τὸ Δ πάλιν συγχρόνως μὲ τὸ πρῶτον, χωρὶς καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως νὰ συμβαδίζῃ μὲ αὐτό, ἀλλὰ ***ἄλλοτε νὰ προηγῆται καὶ ἄλλοτε νὰ ἕπεται τοῦ πρώτου***, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κίνησις τοῦ 2ου κινητοῦ ***δὲν εἶναι ὁμαλή, διότι δὲν διανύει ἴσα διαστήματα εἰς ἴσους χρόνους***. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει βεβαίως σταθερὰ ταχύτης καὶ τὸ πηλῖκον τοῦ διαστήματος ΟΔ διὰ τοῦ χρόνου t $\left(\frac{ΟΔ}{t}\right)$ ἐκφράζει ἁπλῶς τὴν ταχύτητα τοῦ ἄλλου (τῆς § 40) κινητοῦ κινουμένου ὁμαλῶς καὶ τὸ ὁποῖον μόνον εἰς τὰ ἄκρα Ο καὶ Δ τοῦ διαστήματος συμπίπτει μὲ τὸ θεωρούμενον κινητόν μας. Τὸ πηλῖκον αὐτὸ λέγεται μέση ταχύτης διὰ τὸ ἀντίστοιχον διάστημα. Ἂν π. χ. τὸ κινητόν μας διήνυσε ἐπὶ τῆς εὐθείας xx′ διάστημα 20 cm εἰς 5 sec, ἡ μέση ταχύτης δι' αὐτὸ τὸ διάστημα εἶναι 4 cm/sec· ἂν ὅμως τὰ πρῶτα 10cm τὰ διήνυσε εἰς 2 sec, τότε ἡ μέση ταχύτης διὰ τὸ ἐν λόγῳ διάστημα εἶναι 5 cm/sec καὶ διὰ τὸ ὑπόλοιπον $^{10}/_{3}$ cm/sec.

β) Γενικῶς, ἔστω ὅτι κινητὸν ἐπὶ χρόνον t_1 διήνυσε τὸ διάστημα s_1=ΟΚ (σχ. 39α) καὶ ἐπὶ χρόνον t_2 τὸ διάστημα s_2=ΟΛ. Τότε τὸ διάστημα ΚΛ= =ΟΛ — ΟΚ = $s_2 - s_1$, τὸ διήνυσε εἰς χρόνον $t_2 - t_1$ καὶ ἡ μέση ταχύτης διὰ τὸ διάστημα ΚΛ εἶναι:



Σχ. 39.

$υ_μ = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Ὅταν τὸ σημεῖον Λ τὸ λαμβάνωμεν ὅλο καὶ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Κ, τότε αἱ διαφοραὶ $s_2 - s_1$ καὶ $t_2 - t_1$ πλησιάζουν ὅλο καὶ περισσότερον πρὸς τὸ μηδέν, ἀλλὰ ὁ λόγος $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ τείνῃ νὰ λάβῃ μίαν ***ὁριακὴν τιμήν***. ***Ἡ ὁριακὴ αὐτὴ τιμὴ τῆς μέσης ταχύτητος μᾶς δίδει τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος*** $\overline{v}_1$ ***εἰς τὸ σημεῖον Κ.*** Ὥστε, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μὴ ὁμαλῆς κινήσεως, ὁμιλοῦμεν διὰ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ ***εἰς ἓν σημεῖον*** τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς του.

Λέγομεν ***«ταχύτητα εἰς ἓν σημεῖον εὐθυγράμμου τροχιᾶς, τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχὴν αὐτὸ τὸ σημεῖον, διεύθυνσιν τὴν τροχιάν, φορὰν τὴν φορὰν κινήσεως καὶ μέτρον τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς μέσης ταχύτητος εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον»***. Ἡ ταχύτης αὐτὴ ἰσοῦται μὲ τὴν σταθερὰν ταχύτητα τὴν ὁποίαν θὰ εἶχε τὸ κινητόν, ἂν ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ πέραν ἐκινεῖτο ὁμαλῶς.

Διαστάσεις ταχύτητος. — Ἐπειδὴ $υ_μ = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, ἔχομεν:

$$\text{Ταχύτης} = \frac{\text{διάστημα} - \text{διάστημα}}{\text{χρόνος} - \text{χρόνος}} = \frac{\text{μῆκος}}{\text{χρόνος}} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \text{ ἢ}$$

$V = LT^{-1}$ (ἐξίσωσις διαστάσεων ταχύτητος).

«*Μονὰς ταχύτητος εἰς τὸ σύστημα* C.G.S *εἶναι τὸ 1*cm·sec^{-1}».

42. Μεταβολὴ τῆς ταχύτητος. Ἐπιτάχυνσις.— α) Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ταχύτητες ἑνὸς κινητοῦ εἰς τοὺς χρόνους:

1 sec	2 sec	3 sec	4 sec	εἶναι:
10 cm/sec	20cm/sec	40cm/sec	70cm/sec	καὶ ἑνὸς ἄλλου:
10 cm/sec	8cm/sec	5cm/sec	4cm/sec	

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ταχύτης αὐξάνεται, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν ἐλαττοῦται. Ἡ συνολικὴ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος κατὰ τὴν διάρκειαν 3 sec εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι 60cm/sec,(70—10), εἰς δὲ τὴν δευτέραν —6cm/sec, (4—10). Ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος τῆς πρώτης περιπτώσεως ἔχει ὡς ἑξῆς: ἀπὸ τὸ πρῶτον ἕως τὸ δεύτερον sec, εἶναι 10 cm/sec, ἀπὸ τὸ δεύτερον ἕως τὸ τρίτον sec, 20 cm/sec, καὶ ἀπὸ τὸ τρίτον ἕως τὸ τέταρτον sec, 30cm/sec. Ἑπομένως ἡ μέση μεταβολὴ τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι:

$$\text{μέση μεταβολὴ ταχ.} = \frac{70-10}{3} = 20 \text{ cm/sec κατὰ 1 sec.}$$

Ὁμοίως καὶ διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$\text{μέση μεταβολὴ ταχ.} = \frac{4-10}{3} = -2\text{cm/sec κατὰ 1 sec.}$$

β) Γενικῶς, ἂν εἰς χρόνον t_1 ἔχωμεν ταχύτητα $υ_1$ καὶ εἰς χρόνον t_2, ταχύτητα $υ_2$, τότε ἡ μέση μεταβολὴ ταχύτητος $γ_μ$ (σχ. 39β), θὰ εἶναι:

$$\boxed{γ_μ = \frac{υ_2 - υ_1}{t_2 - t_1}}$$

Ἡ κατὰ μονάδα χρόνου μέση μεταβολὴ (αὔξησις ἢ ἐλάττωσις) τῆς ταχύτητος, εἶναι ἕνα διάνυσμα ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον τῆς ταχύτητος, τὸ ὁποῖον λέγεται ***διάνυσμα ἐπιταχύνσεως,*** ἢ ἁπλῶς ***ἐπιτάχυνσις.***

Διαστάσεις ἐπιταχύνσεως.— Τὸ μέτρον τῆς ἐπιταχύνσεως θὰ τὸ παριστῶμεν γενικῶς μὲ τὸ γράμμα γ. Ἔχομεν:

$$γ = \frac{\text{ταχύτης} - \text{ταχύτης}}{\text{χρόνος} - \text{χρόνος}} = \frac{\text{ταχύτης}}{\text{χρόνος}} = \frac{\frac{\text{Διάστημα}}{\text{χρόνος}}}{\text{χρόνος}} = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$

ἄρα $γ = LT^{-2}$ (ἐξίσωσις διαστάσεων ἐπιταχύνσεως). Ὡς ἐκ τούτου, «***μονὰς ἐπιταχύνσεως εἰς τὸ σύστημα*** C.G.S ***εἶναι 1*** cm·sec^{-2}».

Τὸ μέτρον μιᾶς δοθείσης ἐπιταχύνσεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S. τὸ σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς, π.χ. $γ=7$ cm·sec^{-2}, $γ=10$m·sec^{-2} κ.λ.π.

43). Εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη— Ἂν τὸ διάνυσμα τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ***σταθερόν,*** ἡ ταχύτης αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ σταθερὸν ποσὸν εἰς ἑκάστην μονάδα χρόνου, δηλ. εἰς ἴσους χρόνους ἔχομεν ἴσας μεταβολὰς τῆς ταχύτητος. Ἡ μεταβολὴ βέβαια τῆς ταχύτητος εἶναι συνεχής, μεταβάλλεται δηλ. ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμήν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μικρῶν μεταβολῶν εἰς ἴσα χρονικὰ διαστήματα νὰ εἶναι τὸ αὐτό.

Ὅταν εἰς μίαν εὐθύγραμμον κίνησιν τὸ μέτρον τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι σταθερὸν, δηλ. ὅταν μὲ ἄλλα λόγια ἡ ἐπιτάχυνσις παραμένει σταθερὰ κατὰ διεύθυνσιν καὶ μέγεθος, ἡ κίνησις λέγεται εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

α) Ἂν εἰς χρόνον 0 τὸ κινητὸν ἠρεμῇ, τὸ μέτρον υ τῆς ταχύτητος $\bar{v}$ μετὰ χρόνον t, ὅπως εὐκόλως συμπεραίνομεν ἀπὸ τὰ προηγούμενα, δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$υ = γt \qquad (1)$$

Ἂν εἰς τὸν χρόνον μηδὲν εἶχε μίαν ταχύτητα $υ_0$ ***(ἀρχικὴ ταχύτης)*** ὁ τύπος (1) γίνεται :

$υ = υ_0 + γt$ (2) [κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, $\overrightarrow{γ}$ ὁμόρ. μὲ $\overrightarrow{v_0}$]

$υ = υ_0 - γt$ (3) [ἂν ἡ $\overrightarrow{γ}$ εἶναι ἀντίρροπος τῆς $\overrightarrow{v_0}$ καὶ συνεπῶς κίνησις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη]

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τύποι (1), (2), (3), οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, εἶναι ***πρωτοβάθμια πολυώνυμα ὡς πρὸς τὸν χρόνον*** t.

β) Τὰ διανυόμενα διαστήματα εἰς χρόνον t, δίδονται ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τύπους.

[χωρὶς $υ_0$, $s = \frac{1}{2} γt^2$ (4)

ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη : [μὲ $υ_0$, $s = υ_0 t + \frac{1}{2} γt^2$ (5)

ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη : [$s = υ_0 t - \frac{1}{2} γt^2$ (6)

Γενικῶς, ὅταν ὑπάρχῃ ἀρχικὸν διάστημα τότε ὁ τύπος :

$$s = s_0 + υ_0 t \pm \frac{1}{2} γ t^2 \qquad (7)$$

εἶναι ἡ ***γενικὴ ἐξίσωσις τῆς εὐθυγράμμου ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως***. Παρατηροῦμεν ὅτι, οἱ τύποι οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸ διάστημα εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, εἶναι ***πολυώνυμα 2ου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν χρόνον*** t.

Παράδειγμα. «Κινητὸν ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0 = 10$ m sec^{-1} κινεῖται εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $γ = 8 m/sec^2$. Ἐάν, μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως, διήνυσε διάστημα 500 m, νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν ἀπέκτησε εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου».

Λυσις. Ἐκ τοῦ τύπου $s = υ_0 t + \frac{1}{2} γ t^2$ εὑρίσκομεν τὸν χρόνον t.

$500 \text{ m} = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot t + \frac{1}{2} 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} t^2$ ἔχομεν :

$t_1 = 10$ sec καὶ $t_2 = -12{,}5$ sec

(ἡ t_2 ἀπορρίπτεται).

Ἐκ τοῦ τύπου $\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$, ἔχομεν:

$$\upsilon = 10\,\frac{m}{sec} + 8\,\frac{m}{sec^2}\cdot 10\,sec = 90\,\frac{m}{sec}$$

ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\upsilon = 90\,\frac{m}{sec}$

Μέγιστον διάστημα — μέγιστος χρόνος. α) Εἴδομεν ὅτι ὅταν ἡ $\overrightarrow{\gamma}$ εἶναι ἀντίρροπος τῆς ταχύτητος, ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη. Ἂν εἰς τὸν τύπον (3) θέσωμεν $\upsilon = o$, εὑρίσκομεν: $o = \upsilon_0 - \gamma t$ καὶ

$$\boxed{t = \frac{\upsilon_0}{\gamma}} \qquad (8)$$

Εὑρίσκομεν δηλ. τὸν χρόνον κατὰ τὸν ὁποῖον μηδενίζεται ἡ ταχύτης (θὰ ἠρεμήσῃ τὸ κινητὸν) καὶ τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***μέγιστον χρόνον.***

β) Ἂν θέσωμεν $t = \frac{\upsilon_0}{\gamma}$ εἰς τὸν τύπον (6), ἔχομεν:

$$\boxed{s = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma}} \qquad (9)$$

δηλ. τὸ ***μέγιστον διάστημα*** (τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διανύει τὸ κινητὸν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐνάρξεως τῆς ἐπιβραδυνομένης κινήσεώς του, μέχρι τότε ποὺ σταματᾷ).

Παράδειγμα. «Εἰς ἀπόστασιν 104 m ὁ μηχανοδηγὸς ἁμαξοστοιχίας βλέπει ἐμπόδιον ἐπὶ τῶν γραμμῶν κι' ἐνῷ ἡ ἁμαξοστοιχία τρέχει εὐθυγράμμως μὲ ταχύτητα 36km/h, ἐνεργεῖ ἀμέσως ἐπὶ τῶν φρένων καὶ κατορθώνει νὰ σταματήσῃ ἡ ἁμαξοστοιχία 4m πρὸ τοῦ ἐμποδίου. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἐσταμάτησε ἡ ἁμαξοστοιχία».

Λύσις. Μετὰ τὴν πέδησιν (φρενάρισμα) ἡ ἁμαξοστοιχία ἐσταμάτησεν εἰς (μέγιστον) διάστημα 100m, (104—4), κινηθεῖσα ἐν τῷ μεταξὺ μὲ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν. Συνεπῶς:

$$s = \frac{\upsilon_0^2}{2\gamma} \quad \text{ἢ} \quad 100m = \frac{(10m/sec)^2}{2\gamma}$$

$$\left(\upsilon_0 = 36\,\frac{km}{h} = \frac{36000m}{3600sec} = 10\ {}^{m}/sec\right) \text{ καὶ } \gamma = 0{,}5m/sec^2$$

Ἄρα θὰ σταματήσῃ εἰς (μέγιστον) χρόνον:

$$t = \frac{\upsilon_0}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad t = \frac{10\,m/sec}{0{,}5m/sec^2} = 20\ sec$$

44. Ἀπόδειξις τοῦ τύπου $s = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$. Χωρίζομεν τὸν χρόνον t εἰς μ ἴσα χρονικὰ διαστήματα:

$$0 \ldots\ldots \frac{t}{\mu} \ldots\ldots \frac{2t}{\mu} \ldots\ldots \frac{3t}{\mu} \ldots\ldots \frac{(\mu-1)t}{\mu} \ldots\ldots \frac{\mu t}{\mu} = t.$$

Εἰς τοὺς χρόνους αὐτοὺς ἀντιστοιχοῦν αἱ ταχύτητες

$$\upsilon_0 \ldots \upsilon_0 + \frac{\gamma t}{\mu} \ldots\ldots \upsilon_0 + \frac{2\gamma t}{\mu} \ldots\ldots \upsilon_0 + \frac{(\mu-1)\gamma t}{\mu} \ldots \upsilon_0 + \frac{\mu\gamma t}{\mu} = \upsilon_0 + \gamma t$$

Θεωροῦμεν τώρα ὅτι, ἕνα κινητὸν κινεῖται εἰς καθένα ἀπὸ τὰ μερικὰ αὐτὰ χρονικὰ διαστήματα μὲ σταθερὰν ταχύτητα κατὰ δύο τρόπους.

α) Θεωροῦμεν εἰς κάθε διάστημα $\frac{t}{\mu}$ τὴν κίνησιν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον μὲ ταχύτητα ἐκείνην ποὺ ἔχει τὸ κινητὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ κάθε χρόνου $\frac{t}{\mu}$. Τὰ διανυόμενα διαστήματα θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$s_1 = \upsilon_0 \frac{t}{\mu},\ s_2 = \left(\upsilon_0 + \frac{\gamma t}{\mu}\right)\frac{t}{\mu},\ s_3 = \left(\upsilon_0 + \frac{2\gamma t}{\mu}\right)\frac{t}{\mu} \ldots\ldots s_\mu = \left[\upsilon_0 + \frac{\gamma(\mu-1)t}{\mu}\right]\frac{t}{\mu}$$

β) Θεωροῦμεν πάλιν τὴν κίνησιν ὁμαλὴν εἰς κάθε $\frac{t}{\mu}$, ἀλλὰ μὲ ταχύτητα ἐκείνην ποὺ ἔχει τὸ κινητὸν εἰς τὸ τέλος κάθε $\frac{t}{\mu}$. Τὰ διαστήματα θὰ εἶναι τότε

$$s'_1 = \left(\upsilon_0 + \frac{\gamma t}{\mu}\right)\frac{t}{\mu},\ s'_2 = \left(\upsilon_0 + \frac{2\gamma t}{\mu}\right)\frac{t}{\mu} \ldots\ldots s_\mu = \left(\upsilon_0 + \frac{\gamma\mu t}{\mu}\right)\frac{t}{\mu}.$$

Εἰς τὴν α' περίπτωσιν τὸ συνολικὸν διάστημα θὰ εἶναι:

$$s' = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_\mu = \left[\upsilon_0 + \upsilon_0 + \frac{\gamma t}{\mu} + \upsilon_0 + \frac{2\gamma t}{\mu} + \ldots \upsilon_0 + \frac{\gamma(\mu-1)t}{\mu}\right]\cdot$$

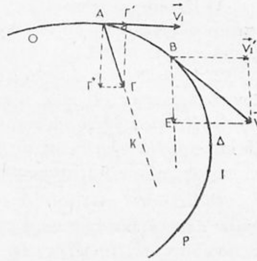
$$\frac{t}{\mu} = \left[\mu\upsilon_0 + \frac{\gamma t}{\mu}\cdot\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right]\cdot\frac{t}{\mu} = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\cdot\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right).\left(\frac{\mu(\mu-1)}{2} = 1+2+3+\ldots (\mu-1),\right.$$ ἄθροισμα ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου).

Εἰς τὴν β' περίπτωσιν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἔχομεν:

$$s'' = s'_1 + s'_2 + \ldots s'_\mu = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)$$

Τὸ πραγματικὸν διάστημα s προφανῶς θὰ περιέχεται μεταξὺ s' καὶ s'' δηλ $s' < s < s''$. Ἂν τὸ πλῆθος μ τῶν διαστημάτων αὐξάνῃ ἀπεριορίστως καὶ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα ἐλαττώνεται ἀπεριορίστως, τότε τὰ s' καὶ s'' τείνουν νὰ πάρουν τὴν ἰδίαν τιμὴν s, διότι οἱ παράγοντες $\frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\mu} = 1 + \frac{1}{\mu}$ συγκλίνουν πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν τὸ μ τείνει νὰ ὑπερβῇ κάθε ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μεγάλον (ὁρ. $\mu = \infty$, τότε ὁρ. $\frac{1}{\mu} = 0$). Ἡ κοινὴ αὐτὴ τιμὴ τῶν s' καὶ s'' εἶναι τὸ s, δηλ. $s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$. Μὲ τὴν αὐτὴν σκέψιν ἔχομε διὰ τὴν ἐπιβραδυνομένην κίνησιν $s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$.

45. *Καμπυλόγραμμος κίνησις. — Γενικὴ ἔννοια τῆς ταχύτητος καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως.* — α) ***Ταχύτης.*** Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Ο εἶναι ἡ ἀρχὴ διὰ τὴν μέτρησιν διαστημάτων καὶ ὅτι ἕνα κινητὸν κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς t_1, t_2, t_3, . . . εὑρίσκεται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Δ, . . . Ρ τῆς καμπύλης τροχιᾶς ΟΡ (σχ. 40). Τὸ κινητὸν θὰ ἠμποροῦσε νὰ διαβῇ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Δ, . . . Ρ διανῦον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ ΒΔ, ΔΙ . . . καὶ συνεπῶς ***θ' ἀλλάζῃ κάθε φορὰν διεύθυνσιν κινήσεως.*** Ὅσον περισσότερα (πυκνότερα) σημεῖα λάβωμεν, τόσον ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΔΙ . . . Ρ θὰ πλησιάζῃ τὴν καμπύλην τροχιάν· παρατηροῦμεν δὲ συγχρόνως ὅτι τὸ κινητὸν μεταβαίνει εἰς κάθε ἑπόμενον σημεῖον ἀλλάζοντας διεύθυνσιν κινήσεως. Ἡ χορδὴ π. χ. ΑΒ, ὅταν τὸ Β εὑρίσκεται ἐγγύτατα τοῦ Α, τείνει νὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Α. Συμπεραίνομεν ὅτι τὸ κινητὸν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_1 τείνει νὰ κινηθῇ ***κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον Α.*** Τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τῆς τροχιᾶς.



Σχ. 40.

«Ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς τροχιᾶς, λέγεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AV_1}$ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς εἰς τὸ Α, τὸ ὁποῖον παριστᾷ κατὰ διεύθυνσιν, φορὰν (ἡ φορὰ τῆς κινήσεως εἰς τὸ Α) καὶ μέγεθος, τὴν ταχύτητα ποὺ θὰ εἶχε τὸ κινητὸν ἂν ἀπὸ τοῦ σημείου Α κι' ἐφεξῆς ἡ κίνησίς του ἐγίνετο ὁμαλὴ εὐθύγραμμος».

Τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AV_1}$ εἶναι ἡ ὁρικὴ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{OB - OA}{t_2 - t_1}$, ὅταν τὸ Β εἶναι ἀπείρως γειτονικὸν τοῦ Α.

β) *Ἐπιτάχυνσις.* Ἂν ἡ ταχύτης εἰς τὸ σημεῖον Β εἶναι $\overrightarrow{BV_2}$, παρατηροῦμεν ὅτι αὐτὴ εὑρίσκεται ***προσθέτοντες γεωμετρικῶς*** εἰς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BV_1'} = \overrightarrow{AV_1}$ (ταχύτης εἰς τὸ Α) τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BV_2} - \overrightarrow{AV_1}$ *(διανυσματικὴ διαφορὰ τῶν δύο ταχυτήτων).* Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BE}$ εἶναι ἡ ***συνολικὴ μεταβολὴ*** τῆς ταχύτητος ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β. Ἂν τὸ Β λαμβάνεται ὅλο κι' ἐγγύτερα τοῦ Α, ὁ λόγος $\frac{BE}{t_2 - t_1}$ τείνει νὰ πάρῃ μίαν ὁρικὴν τιμὴν καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΕ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν ΑΚ.

«Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ποὺ ἔχει διεύθυνσιν τὴν ΑΚ καὶ μέτρον τὴν ὁριακὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{BE}{t_2 - t_1}$, ὅταν τὸ ΒΕ καὶ ἡ διαφορὰ $t_2 - t_1$ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν, λέγεται ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α».

Ἡ ἐπιτάχυνσις $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον προστίθεται γεωμετρικῶς εἰς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AV_1}$ καὶ μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα εἰς τὸ ἑπόμενον σημεῖον Β.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, διὰ τὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν εἰς κάθε σημεῖον τῆς τροχιᾶς, τὸ διάνυσμα ἐπιτάχυνσις ἔχει ***διαφορετικὴν διεύθυνσιν ἀπὸ ἐκείνην τοῦ διανύσματος ταχύτης*** καὶ συνεπῶς ἡ νέα ταχύτης εἰς ἑπόμενον σημεῖον τῆς τροχιᾶς ἀλλάζει διεύθυνσιν.

Σημαντικὰ συμπεράσματα. Ἐξ ὅλων τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς :

1) ***Ἐπιτάχυνσις μὲ μόνον σταθερὰν διεύθυνσιν σημαίνει εὐθύγραμμος κίνησις.*** 2) ***Ἐπιτάχυνσις μὲ κάθε φορὰν νέαν διεύθυνσιν σημαίνει καμπυλόγραμμος κίνησις.*** 3) ***Ἐπιτάχυνσις μὲ σταθερὰν διεύθυνσιν καὶ σταθερὸν μέτρον σημαίνει εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις.*** 4) ***Ἐπιτάχυνσις μηδὲν σημαίνει ὁμαλὴ εὐθύγραμμος κίνησις ἢ ἠρεμία.***

Ἀσκήσεις

I.

1) Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 8 m/sec^2$. Νὰ εὑρεθῇ α) πόσον διάστημα (s) διήνυσεν εἰς 10 sec κ ὶ β) π ία ἡ ταχύτης του (υ) εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ.

2) Κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 12 m/sec$ καὶ $\gamma = 5 m/sec^2$. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον τὸ διάστημα καὶ ποία ἡ ταχύτης μετὰ 9 se·.

3) Κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχ. $\upsilon_0 = 60 m/sec$ καὶ κινεῖται μὲ ἐπιβράδυνσιν $\gamma = 8 m/sec^2$. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ ἡ ταχύτης του μετὰ 5 sec β) μετὰ πόσον χρόνον θὰ σταματήσῃ καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν.

4) Κινητὸν κινεῖται ἀρχικῶς ὁμαλῶς καὶ μὲ ταχύτητα 8 m/sec. Εἰς μίαν στιγμὴν ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν 4 m/sec^2 καὶ διανύει ἀκόμη ἀπόστασιν 64 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τῶν 64 m.

5) Κινητὸν κινούμενον ἐπὶ 20 sec διανύει διάστημα 12.000 m μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20οῦ sec. ***(Σχολὴ Εὐελπίδων 1947).***

II.

6) Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα 200 km/h, ὁπότε αὐξάνει τὴν ταχύτητά του καὶ εἰς 30 sec αὕτη γίνεται 300 km/h. Εὕρετε τὸ διανυθὲν διάστημα ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ηὔξησεν τὴν ταχύτητα, μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἀπέκτησεν τὴν ταχύτητα 300 km/h. ***(Σχολὴ Ἰκάρων 1950).***

7) Κινητ ν ἔχει σταθερὰν ταχύτητα 60 m/sec. Ἄλλο κινητὸν μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 6\ m \cdot sec^{-2}$ καὶ ἐπὶ χρόνον $t = 12$ sec διανύει τὸ αὐτὸ διάστημα μὲ τὸ πρῶτον. Ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα εἶχε τὸ δεύτερον.

8) Κινητὸν κινεῖται εὐθυγράμμως μὲ ἐπιβράδυνσιν $5\ m \cdot sec^{-2}$ καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα $200\ m \cdot sec^{-1}$. Μετὰ χρόνον 6 sec ἐκκινεῖ, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, δεύτερον κινητόν. Ζητοῦνται ἡ υ_0 καὶ ἡ γ τοῦ δευτέρου ἵνα ἠρεμήσῃ συγχρόνως μετὰ τοῦ πρώτου καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

9) Κινητὸν ἔχον $\upsilon_0 = 20\ m \cdot sec^{-1}$ καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 10\ m \cdot sec^{-2}$ κινεῖται εὐθυγράμμως. Ἄλλο κινητὸν μὲ τὴν αὐτὴν γ ἀναχωρεῖ μετὰ 5 sec ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν. Νὰ εὑρεθῇ α) ποίαν υ_0 πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ δεύτερον διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 10 sec. β) Πόσον ἀπέχουν μετὰ 3 sec ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεώς των.

10) Ποίαν ἐπιτάχυνσιν πρέπει νὰ ἔχῃ κινητὸν μὲ $\upsilon_0 = 15 m/sec$ ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 5ου sec νὰ διανύσῃ διάστημα 60 m. Πόσον διάστημα θὰ διανύσῃ τοῦτο κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 13ου sec.

III.

11) Ποία εἶναι ἡ κίνησις του μέσου Μ εὐθείας, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο κινητὰ κινούμενα ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἐπὶ παραλλήλων εὐθυγράμμων τροχιῶν μὲ σταθερὰς ἐπιταχύνσεις γ_1 καὶ γ_2.

12) Κινητὸν ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς ἠρεμίας μὲ ἐπιτάχυνσιν γ καὶ διήνυσεν τὰ $\frac{5}{9}$ τοῦ ὁλικοῦ διαστήματος κατὰ τὸ τελευταῖον sec τῆς κινήσεώς του. Νὰ εὑρεθοῦν α) ὁ χρόνος κινήσεως β) ἡ τελικὴ ταχύτης καὶ γ) τὸ ὁλικὸν διάστημα.

13) Εἰς μίαν εὐθύγραμμον κίνησιν ἔχομεν: $\upsilon = 7 - 2t$. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτῆς καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὸν χρόνον ἀπὸ $t_1 = 2$ sec ἕως $t_2 = 3{,}5$ sec.

14) Σημεῖον κινεῖται ἐπὶ εὐθείας καὶ τὰ διανυόμενα διαστήματα παρέχονται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $s=t^3-12t^2+48t$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ταχύτης α) μεταξὺ 1ου καὶ 2ου sec, β) μεταξὺ 2ου καὶ 5ου καὶ γ) μεταξὺ 1ου καὶ 6ου.

15) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν ἡ μέση ταχύτης ἀπὸ χρόνον t_1 εἰς t_2 εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ταχυτήτων κατὰ τὰς στιγμὰς t_1 καὶ t_2.

16) Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ εὐθείας ΟΧ μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ. Ζητεῖται: α) σχέσις ἐκφράζουσα τὴν τετμημένην τοῦ κινητοῦ συναρτήσει τοῦ χρόνου t, ὅταν εἰς χρόνους 0, 1, 2 sec ἡ τετμημένη εἶναι 3, 6, 19 cm β) πῶς μεταβάλλεται ἡ ταχύτης μετὰ τοῦ χρόνου t.

17) Ἡ ταχύτης κινητοῦ εἶναι 10 m/sec. Μετὰ ἀπὸ 8 sec γίνεται $90\mathrm{m}\cdot\mathrm{sec}^{-1}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ καθὼς καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα χωρὶς τὴν χρῆσιν τῶν γνωστῶν τύπων τῆς κινήσεως.

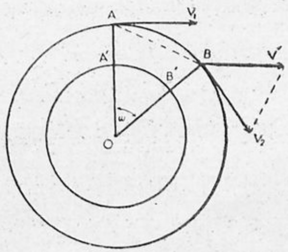
18) Σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως εἰς τὸ κενὸν διανύει κατὰ τὸ 1ον sec διάστημα 4,9 m, κατὰ τὸ 2ον, 3ον, 4ον, κ.λ.π. διανύει 3πλάσιον, 5πλάσιον, 7πλάσιον κ.λ.π. διάστημα τῶν 4,9m. Πόσον διάστημα διανύει κατὰ τὰ πρῶτα 10 sec τῆς πτώσεώς του

19) Σφαῖρα πίπτει ἐλευθέρως εἰς τὸ κενὸν ἔκ τινος σημείου Ο. Κατὰ τοὺς χρόνους $t_1=5{,}4$sec, $t_2=5{,}5$sec, $t_3=5{,}6$sec, τῶν ὁποίων ἡ ἀρχὴ εἶναι αὐθαίρετος (δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν Ο), περνᾶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 ὥστε $A_1 A_2 = 34{,}3$ cm, $A_2 A_3=44{,}1$cm. Καλοῦμεν h_1 τὸ διάστημα OA_1, h_2 τὸ $A_1 A_2$, h_3 τὸ $A_2 A_3$. Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν h_2, h_3, t_1, t_2 καὶ t_3 τὰ ἑξῆς: α) ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος καὶ β) τὸ ὕψος h_1 καὶ ὁ χρόνος διὰ νὰ διανύσῃ τὸ h_1.

46. *Ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις.* — Ἂς ἀναλύσωμε τὴν ἐπιτάχυνσιν $\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. 40) εἰς δύο συνιστώσας, τὴν $\overrightarrow{A\Gamma'}$ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α καὶ τὴν $\overrightarrow{A\Gamma''}$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\overrightarrow{A\Gamma'}$. Ἡ συνιστῶσα $\overrightarrow{A\Gamma'}$ μεταβάλλει ***τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος*** καὶ γι' αὐτὸ λέγεται ***ἐφαπτομενικὴ ἢ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις***. Ἡ ἄλλη συνιστῶσα $\overrightarrow{A\Gamma''}$ μεταβάλλει τὴν ***διεύθυνσιν*** καὶ λέγεται ***κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις.***

Ἂν ἡ $\overrightarrow{A\Gamma''}=0$, τότε ἔχομεν εὐθύγραμμον μεταβαλλομένην κίνησιν· ἂν ὅμως ἡ $\overrightarrow{A\Gamma'}=0$ τότε ἔχομεν ὁμαλὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν.

Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ ***ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις***, δηλ. ὅταν τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ περιφερείας κύκλου καὶ ὑπάρχῃ ***μόνον*** κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις ΑΓ''. Ἡ κεντρομόλος αὐτὴ ἐπιτάχυνσις ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας θὰ ἔχῃ διεύθυνσιν διερχομένην ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (σχ. 41). ***Ἐπειδὴ δὲ δὲν ὑπάρχει ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις $\overrightarrow{A\Gamma'}$, τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι σταθερόν, δηλ. τὸ κινητὸν διατρέχει εἰς ἴσους χρόνους ἴσα διαστήματα (τόξα).***



Σχ. 41.

1) ***Γραμμικὴ - γωνιώδης ταχύτης.*** Ἂν εἶναι υ τὸ μέτρον τοῦ τό-

ξου ποὺ διέγραψεν τὸ κινητὸν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, π. χ. τοῦ Α Β (σχ 41) τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως θὰ εἶναι: $s = υt$ (1).

«Τὸ μέτρον υ *τοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διαγραφέντος τόξου ὑπὸ τοῦ κινητοῦ, δὲν εἶναι παρὰ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος* $\overrightarrow{v_1}$, *τὸ ὁποῖον λέγεται γραμμικὴ ταχύτης* (σχ. 41)».

«Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ω (μετρημένη εἰς ἀκτίνια), ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον υ λέγεται γωνιώδης ταχύτης τοῦ κινητοῦ».

Ἡ γωνιώδης ταχύτης ω ἔχει ἐνδιαφέρον ὅταν συγκρίνωμε κινητὰ κινούμενα ἐπὶ διαφορετικῶν (ὁμοκέντρων) περιφερειῶν. Π. χ. τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄ τοῦ (σχ. 41) ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιώδη ταχύτητα ω, ὄχι ὅμως καὶ τὴν αὐτὴν γραμμικήν, διότι προφανῶς τὸ τόξον ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ Α΄ Β΄.

Ὅπως γνωρίζωμεν (μέτρησις γωνιῶν σελ. 9 παραγρ. 10) μεταξὺ τόξου υ καὶ ἀντιστοίχου ἐπικέντρου ω ὑπάρχει ἡ σχέσις: $\boxed{υ = ω . R}$ (2) (R = ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας). Συνεπῶς ἡ σχέσις (2) συνδέει τὰ μέτρα τῆς γραμμικῆς ταχ. υ καὶ τῆς γωνιώδους ω.

2) ***Περίοδος — συχνότης.*** α) *«Ὁ χρόνος T μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τοῦ κινητοῦ λέγεται περίοδος».*

Μὲ βάσιν τὸν τύπον, $s = υ \cdot t$, ἔχομεν:

$2\pi R = υ \cdot T$, ($s = 2\pi R$ μία περιφέρεια καὶ $t = T$) ἢ

$$\boxed{υ = \frac{2\pi}{T} R} \qquad (3)$$

Βάσει καὶ τῆς $υ = ω \cdot R$ ἔχομεν:

$$\boxed{ω = \frac{2\pi}{T}} \qquad (4)$$

β) *«Ὁ ἀριθμὸς ν τῶν περιστροφῶν ἑνὸς κινητοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου λέγεται συχνότης».*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν συχνότητα ν, εὐνόητον εἶναι ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διὰ τῆς περιόδου T.

Δηλ: $\boxed{ν = \frac{1}{T}}$ (5)

Κατὰ συνέπειαν ἡ συχνότης ν εἶναι ἀντίστροφος τῆς περιόδου T.
Οἱ τύποι (3) καὶ (4) γίνονται εὐκόλως:

$\boxed{υ = 2\pi R \cdot ν}$ (6) καὶ $\boxed{ω = 2\pi \cdot ν}$ (7)

γ) ***Μονάδες συχνότητος.*** 1) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $ν = \frac{1}{T}$ θέσωμεν $T = 1$ sec, τότε: $ν = 1$. Συνεπῶς εἰς τὸ σύστημα C.G.S, *«ὡς μονὰς συχνότητος εἶναι* ἡ *συχνότης κινήσεως ἡ ὁποία ἔχει περίοδο*ν *1* sec *καὶ ὀνομάζεται* hertz (Hz) *ἢ κύκλος* (c) = 1sec^{-1}». Πολλαπλάσια τῆς μονάδος αὐτῆς (ἰδιαίτερα εἰς τὴν ραδιοηλεκτρολογίαν χρησιμοποιούμενα) εἶναι:

1) ***Ὁ χιλιόκυκλος*** (Kc) $= 1000c = 10^3$ c.
2) ***Ὁ μεγάκυκλος*** (Mc) $= 1000$ Kc $= 10^6$ c.

δ) *Ὑπολογισμὸς τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως.* Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον γ τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἂν $\overrightarrow{V_1}$ καὶ $\overrightarrow{V_2}$ αἱ ταχύτητες εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 41), φέρωμεν δὲ τὴν $\overrightarrow{BV'} = \overrightarrow{AV_1}$, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ $V'\,BV_2$ εἶναι ὅμοια. Ἄρα:

$$\frac{V'V_2}{AB} = \frac{BV_2}{OA} \quad \text{ἢ} \quad \frac{V'V_2}{AB} = \frac{\upsilon}{R}$$

Ὅταν τὸ Β εὑρίσκεται πολὺ κοντὰ εἰς τὸ Α, ἡ χορδὴ ΑΒ σχεδὸν ἰσοῦται μὲ τὸ τόξον ΑΒ. Ἂν t εἶναι ὁ χρόνος εἰς τὸν ὁποῖον διήνυσεν τὸ κινητὸν τὸ τόξον ΑΒ, θὰ εἶναι: τοξ $AB = \upsilon \cdot t =$ χορδὴ ΑΒ. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν σχέσις γίνεται: $\dfrac{V'V_2}{\upsilon \cdot t} = \dfrac{\upsilon}{R}$. Ὁ λόγος ὅμως $\dfrac{V'V_2}{t}$, ὅταν τὸ Β τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, λαμβάνει τὴν τιμὴν γ, $\left(\text{ορ}\,\dfrac{V'V_2}{t} = \gamma\right)$. Συνεπῶς:

$$\frac{V'V_2}{t} \cdot \frac{1}{\upsilon} = \frac{\upsilon}{R}, \ \gamma \cdot \frac{1}{\upsilon} = \frac{\upsilon}{R} \ \text{ἢ} \ \frac{\gamma}{\upsilon} = \frac{\upsilon}{R} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\gamma = \frac{\upsilon^2}{R}} \qquad (8)$$

Ἡ σχέσις (8) δίδει τὸ μέτρον τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν.

Παράδειγμα. «Σημεῖον τροχοῦ ἀπέχον ἐκ τοῦ ἄξονος 40 cm, περιστρέφεται μὲ γωνιώδη ταχ. $\omega = 270^0$/sec. Ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ υ, ποία ἡ συχνότης ν καὶ ποία ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ».

Λύσις. Ἡ ω πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ εἰς ἀκτίνια. Ὡς γνωστόν:

360^0 2π ἀκτίνια
270^0 χ

$$\chi = 2\pi \cdot \frac{270}{360} = \frac{3\pi}{2} \ \text{ἀκτίνια.}$$

Ἄρα, $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ rad./sec

Ἐκ τοῦ τύπου $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, εὑρίσκομεν:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dfrac{3\pi}{2\text{sec}}} = \frac{4}{3}\ \text{sec.}$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ τύπου $\upsilon = \omega \cdot R$ εὑρίσκομεν:

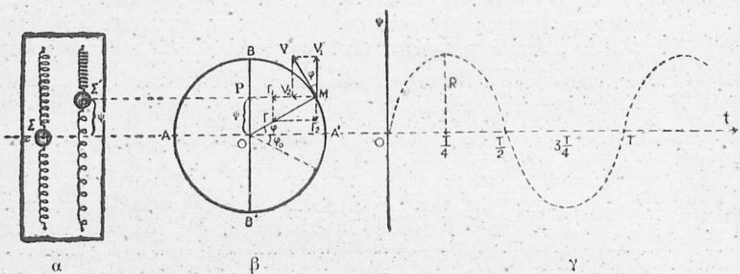
$$\upsilon = \frac{3\pi}{2\text{sec}} \cdot 40\text{cm} = 60\pi\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 60 \cdot \pi \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

Ἐκ τοῦ τύπου $\nu = \dfrac{1}{T}$, ἔχομεν: $\nu = \dfrac{1}{\dfrac{4}{3}\text{sec}} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{\text{sec}} = \dfrac{3}{4}\,\text{sec}^{-1} =$

$$= \frac{3}{4}\,c \left(\frac{3}{4}\ \text{στροφὲς/sec}\right)$$

Καὶ ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = \dfrac{\upsilon^2}{R}$ λαμβάνομεν: $\gamma = \dfrac{\left(60\pi\,\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2}{40\text{cm}} = 90\pi^2\,\dfrac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$

47. *Ἁπλῆ ἁρμονικὴ κίνησις.*— Ὅταν ἕνα κινητὸν εὑρίσκεται εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ***ἀνὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα,*** ὅπως τοῦτο γίνεται εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν, λέγομεν ὅτι ***ἡ κίνησίς του εἶναι περιοδική.*** Ἂν ἡ τροχιὰ μιᾶς περιοδικῆς κινήσεως δὲν εἶναι κλειστὴ γραμμὴ τότε ἡ κίνησις λέγεται εἰδικώτερον ***παλμικὴ κίνησις.*** Ἡ κίνησις π. χ. τοῦ ἐμβόλου μιᾶς ἀτμομηχανῆς εἶναι παλμικὴ κίνησις (τροχιὰ εὐθύγραμμον τμῆμα)· ὁμοίως ἡ κίνησις ἑνὸς ἐκκρεμοῦς (τροχιὰ τόξον περιφερείας) κ. λ. π. Θὰ μελετήσωμεν ἐδῶ τὴν ἁπλουστέραν καὶ σπουδαιοτέραν τῶν παλμικῶν κινήσεων, ***τὴν ἁπλῆν παλμικὴν (ἁρμονικὴν) κίνησιν*** (σχ. 42).



Σχ. 42.

Φυσιογνωμία τῆς κινήσεως. Ἁπλῆ παλμικὴ κίνησις εἶναι ἡ κίνησις τοῦ σημείου P ***ἐπὶ τῆς διαμέτρου BB'*** (σχ. 42β), τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς ***προβολὴν*** τοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας κινητοῦ M κινουμένου μὲ ὁμαλὴν κίνησιν. Τέτοια ὁμοία ἀκριβῶς κίνησις ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἡ κίνησις τῆς σφαίρας Σ (σχ. 42α) ἡ ὁποία συγκρατεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου πλαισίου μὲ δύο ἐλατήρια, ἀρκεῖ νὰ τὴν ὠθήσωμεν ἀποτόμως πρὸς τὰ κάτω ἢ πρὸς τὰ ἄνω Δηλ. τὸ κ. βάρους τῆς Σ ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ταυτόσημον κίνησιν μὲ τὸν πόδα P ἐπὶ τῆς BB'. Ἂς παρακολουθήσωμεν τὸν πόδα P (ἄρα καὶ τὸ κ. βάρους τῆς Σ) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸ κινητὸν M διὰ μίαν περίοδον T.

Ὅταν τὸ M εὑρίσκεται εἰς τὸ A', ἡ προβολή του P συμπίπτει μὲ τὸ O τῆς περιφερείας, ἡ δὲ σφαῖρα Σ εὑρίσκεται εἰς ***τὴν θέσιν ἰσορροπίας της.*** Ἂν τὸ M προχωρῇ πρὸς τὸ B, διαγράφον τὸ τόξον AB, τὸ P διαγράφει τὴν ἀκτῖνα OB εἰς χρόνον $\frac{T}{4}$ καὶ εἰς τὸ B ἔχουν ἀποκτήσει τὸ P καὶ ἡ Σ τὴν ***μεγίστην ἀπομάκρυνσιν*** ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας O. Ὅταν τὸ M διαγράφει τὸ τόξον BA, τὸ P κινεῖται ἐπὶ τῆς OB κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ μετὰ χρόνον $\frac{T}{2}$ τὸ μὲν M εἶναι εἰς τὸ A, τὰ δὲ P καὶ Σ ἐπανέρχονται εἰς τὸ O. Ἂν τὸ M διαγράφῃ τὸ τόξον AB', τὸ P κινεῖται ἐπὶ τῆς OB' καὶ μετὰ χρόνον ἀπὸ τῆς ἀρχῆς $3\frac{T}{4}$, τὸ M εὑρίσκεται εἰς τὸ B' καθὼς καὶ τὸ P. Ὅταν τέλος τὸ M διαγράφῃ τὸ τόξον B'A', τὸ P κινεῖται ἐπὶ τῆς B'O καὶ μετὰ χρόνον T (ἀπὸ τῆς ἀρχῆς) ἐπανέρχεται εἰς τὸ κέντρον O. Εἰς κάθε ἑπομένην περίοδον ἐπαναλαμβάνονται ἀκριβῶς τὰ αὐτὰ φαινόμενα.

Ἀπὸ τὸν τρόπον αὐτὸν κινήσεως τοῦ Ρ (ἑπομένως καὶ τῆς Σ) συμπεραίνομεν ὅτι: «***ἄλλοτε ἡ ταχύτης τοῦ Ρ (καὶ τῆς Σ) εἶναι θετικὴ καὶ ἄλλοτε ἀρνητική. Εἰς τὰ σημεῖα Β,Β′ γίνεται μηδὲν εἰς δὲ τὸ Ο μεγίστη δύο φορὰς ἐντὸς μιᾶς περιόδου Τ***».

«***Ἡ μεγίστη ἀπομάκρυνσις τοῦ Ρ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, καθὼς καὶ τῆς σφαίρας Σ ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, λέγεται πλάτος τῆς κινήσεως***». Καθὼς βλέπομε τὸ πλάτος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΟΒ.

Ἐξίσωσις τῆς κινήσεως. Ἔστω ὅτι τὸ Μ εἰς χρόνον t διέγραψεν τόξον Α′Μ μὲ σταθερὰν γων. ταχύτητα ω, (ἀρχὴ μετρήσεως τοῦ χρόνου νὰ ληφθῇ ἡ στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Μ εὑρίσκεται εἰς τὸ Α′, τὰ δὲ Ρ καὶ Σ εἰς τὴν θέσιν ἰσορροπίας Ο)· τότε θὰ ἔχωμεν: $\varphi = \omega \cdot t$, $(\varphi = \mathrm{A}'\widehat{\mathrm{O}\mathrm{M}})$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΡΟΜ, ἔχομεν, $(\mathrm{OP}) = (\mathrm{OM})\ \eta\mu\varphi$ ἢ

$$\boxed{\psi = \mathrm{R}\ \eta\mu\varphi \text{ ἢ } \psi = \mathrm{R}\ \eta\mu\omega t \text{ ἢ } \psi = \mathrm{R}\ \eta\mu \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t} \qquad (1)$$

ὅπου $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$ καὶ $\mathrm{R} = \mathrm{OM} =$ πλάτος τῆς κινήσεως.

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἀποτελεῖ ***τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως***, διότι μᾶς δίδει τὴν ἀπομάκρυνσιν ψ τοῦ ποδὸς Ρ (καὶ τοῦ κ. βάρους τῆς Σ) ἀπὸ τὸ Ο, συναρτήσει τοῦ χρόνου t.

Ἂν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν χρόνον (t+T) θὰ ἔχωμεν:

$$\psi_1 = \mathrm{R}\eta\mu\omega(t+\mathrm{T}) = \mathrm{R}\eta\mu\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mathrm{R}\eta\mu(\omega t + 2\pi) = \mathrm{R}\eta\mu\omega t = \psi.$$

Δηλ. μετὰ χρόνον Τ (μετὰ μίαν περίοδον), τὰ Ρ καὶ Σ θὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν.

Φάσις. «***Τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν φ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς θέσεις Α′ καὶ Μ τοῦ κινητοῦ μετὰ ἕνα χρόνον*** t, ***τὴν ὀνομάζομεν φάσιν τῆς κινήσεως***». Ὅπως βλέπομεν, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ Ρ ἄρα καὶ τῆς Σ, δὲν ὑπάρχει τέτοια γωνία. Συνεπῶς ἡ φάσις ἐκφράζει εἰς τὴν ἁρμονικὴν κίνησιν τὴν κατάστασιν τῆς κινήσεως ***μετὰ χρόνον*** t ***ὡς μέρος τῆς περιόδου Τ***. Π. χ. λέγομεν ὅτι ἡ φάσις εἶναι 90°, ὅταν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως ἔχει διαρρεύσει χρόνος $t = \frac{\mathrm{T}}{4}$ (δηλ. τρόπος ἰσοδυναμίας γωνιῶν πρὸς χρόνους t μέρη τῆς περιόδου Τ).

Ἂν ἡ ἀρχὴ μετρήσεως τοῦ χρόνου δὲν συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴ μετρήσεως τῆς ἀπομακρύνσεως τοῦ Ρ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, τότε εἰς τὴν γωνίαν $\varphi = \mathrm{A}'\widehat{\mathrm{O}\mathrm{M}} = \omega t$, θὰ προσθέσωμεν καὶ τὴν γωνίαν φ_0 ἡ ὁποία θὰ πραγματοποιηθῇ ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως μετρήσεως τοῦ χρόνου μέχρι τοῦ σημείου Α′. Δηλ. ἡ ὁλικὴ φάσις εἶναι: $\varphi_0 + \omega t$. ***Ἡ γωνία φ_0 λέγεται ἀρχικὴ φάσις.***

Ὁ τύπος (1) παίρνει τότε τὴν γενικωτέραν μορφήν:

$$\boxed{\psi = \mathrm{R}\ \eta\mu(\varphi_0 + \omega t) = \mathrm{R}\ \eta\mu\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{\mathrm{T}} t\right)} \qquad (2)$$

Ταχύτης—ἐπιτάχυνσις ἁρμονικῆς κινήσεως. α) Ἀναλύομεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{MV}$ ταχύτητα τοῦ Μ εἰς δύο: τὸ $\overrightarrow{MV_2}$ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ΄ καὶ $\overrightarrow{MV_1}$ κάθετον ἐπὶ τὸ πρῶτον (σχ. 42β). Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{MV_1}$ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ Ρ (ἢ τῆς σφαίρας Σ). Ἀπὸ τὸ τρίγωνον MV_1V ἔχομεν: $V_1 = V\,\sigma\upsilon\nu\varphi = \omega R\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$ ($V = \omega\cdot R$, $\varphi = \omega t$).

Ἡ ταχύτης $\overrightarrow{V_1}$ τοῦ Ρ ἢ τῆς Σ λέγεται συνήθως *ταχύτης τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως*, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἶναι:

$$\boxed{V_1 = \omega R\,\sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (3)$$

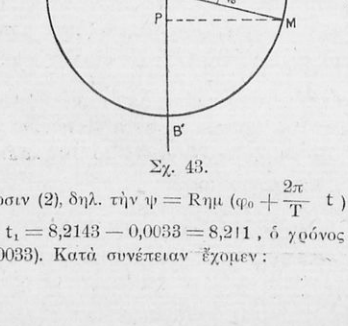
Συγκρίνοντες τοὺς τύπους (1) καὶ (3) συμπεραίνομεν τὰ ἑξῆς: 1) Ὅταν τὸ Ρ εἶναι εἰς τὸ Ο, ὅταν δηλ. $\varphi = 0$ ἢ π, ἡ ταχύτης v_1 ἔχει τὴν μεγίστην ἀπόλυτον τιμὴν ἴσην πρὸς $v_1 = \omega R$ (δηλ. ὅση ἡ V τοῦ Μ). 2) Εὐκόλως φαίνεται ὅτι εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β΄ (ὅπου $\sigma\upsilon\nu\omega t = 0$) ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν. Ἐπίσης ὅταν αὐξάνη ἡ ἀπομάκρυνσις ψ ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται (κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν). 3) Μετὰ χρόνον (t+T) ἡ ἡ ταχύτης γίνεται: $V_1' = \omega R\ \sigma\upsilon\nu\omega(t+T) = \omega\cdot R\ \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}\right) = \omega R\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + 2\pi) = \omega R\cdot\sigma\upsilon\nu\,\omega t = V_1$. Δηλ. μετὰ μίαν περίοδον Τ τὸ Ρ (ἢ ἡ Σ) θὰ ἔχη τὴν αὐτὴν ταχύτητα.

Ἀφοῦ λοιπὸν μετὰ ἀπὸ κάθε χρονικὴν περίοδον Τ τὸ κινητὸν Ρ ἢ ἡ σφαῖρα Σ ἐπανέρχεται εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν κι᾽ ἔχει τὴν ἰδίαν ταχύτητα (κατὰ φορὰν καὶ μέτρον), ἡ ἁπλῆ ἁρμονικὴ κίνησις εἶναι πράγματι περιοδική.

β) Ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ Ρ μεταβάλλεται, συνάγομεν ὅτι *ὑπάρχε ἐπιτάχυνσις*. Τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ Ρ εὑρίσκομεν ἂν ἀναλύσωμεν τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν $\overrightarrow{M\Gamma}$ τοῦ Μ (σχ. 42β) εἰς τὰ κάθετα μεταξύ των διανύσματα $\overrightarrow{M\Gamma_1}$ καὶ $\overrightarrow{M\Gamma_2} = \overrightarrow{\gamma_\varrho}$. ***Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M\Gamma_2}$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ Ρ ἢ τῆς σφαίρας Σ*** καὶ εἶναι ἀντίρροπον πρὸς τὴν ταχύτητα $\overrightarrow{MV_1}$ μὲ τὸ ἑξῆς μέτρον:

$$\gamma_\varrho = -\gamma\eta\mu\varphi = -\gamma\eta\mu\omega t \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\gamma_\varrho = -\frac{\upsilon^2}{R}\quad \eta\mu\omega t} \quad (4) \qquad \left(\gamma = \frac{\upsilon^2}{R}\right)$$

Παράδειγμα. «Ὑλικὸν σημεῖον Ρ πάλλεται ἐπὶ τῆς ΒΒ΄ μὲ κίνησιν ἁπλῆν ἁρμονικὴν συχνότητος ν=50 c καὶ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μετρήσεως τοῦ χρόνου ἔχει ἤδη διανύσει $PO = \frac{1}{10}$ τοῦ πλάτους R ἴσου μὲ 50 cm. Νὰ καθορισθῇ ἡ κίνησις μετὰ χρόνον t΄ = 8,2143sec».



Σχ. 43.

Λύσις. α) Ἡ ἀρχικὴ φάσις εἶναι ἡ φ_0 ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΟΜΡ. (ΟΡ) = (ΟΜ) ημφ ἢ 5 cm = 50 cm · $\eta\mu\varphi_0$ καὶ $\eta\mu\varphi_0 = 0{,}1$ καὶ τελικά, $\varphi_0 = 5^0\,45'$ ἢ ἂς βάλωμε περίπου $\varphi_0 = 6^0$.

β) Μετὰ t΄= 8,2143 sec θὰ εὑρεθῇ τὸ Ρ εἰς θέσιν καθοριζομένην ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2), δηλ. τὴν $\psi = R\eta\mu\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{T}\ t\right) = R\eta\mu\,(\varphi_0 + 2\pi\nu\cdot t)$ $\left(\nu = \frac{1}{T}\right)$, (ὅπου $t = t' - t_1 = 8{,}2143 - 0{,}0033 = 8{,}211$, ὁ χρόνος ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ φ_0 εἶναι $t_1 = 0{,}0033$). Κατὰ συνέπειαν ἔχομεν:

$\psi = 50$ ημ $(6^0 + 2\pi \cdot 50 \cdot 8{,}211) = 50$ ημ $(6^0 + 360^0 \cdot 50 \cdot 8{,}211) = 50$ ημ $(6^0 + 147798^0) = 50$ ημ. $\frac{147804}{360} = 50$ ημ (410 περιφ.$+ 204^0) = 50$ ημ $204^0 = -50$ημ$24^0 = -50 \cdot 0{,}407 = -20{,}35$cm. Θὰ εὑρεθῇ τὸ P εἰς ἀπόστασιν 20,35 cm κάτω τοῦ O (ἀρνητικὴ ἡ τιμὴ τοῦ ψ).

γ) Ἡ ταχύτης μετὰ $t = 8{,}211$ sec. θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου (3) $v_1 = \omega R \cdot$συν$\omega t = 2\pi\nu \cdot R \cdot$συν$2\pi\nu \cdot t$ καὶ ἔχομεν : $v_1 = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot$συν $2\pi \cdot 50 \cdot 8{,}211 = 2 \cdot 3{,}4 \cdot 2500 \cdot$συν $204^0 = -15700 \cdot 0{,}912 = -14318$cm/sec $= -143{,}1$m/sec. Συνεπῶς τὸ κινητὸν διευθύνεται πρὸς τὰ κάτω (σημεῖον —), μὲ $v_1 = 143{,}1$ m·sec^{-1} κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν 8,211sec.

Ἀσκήσεις.

I.

1) Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 50 cm μὲ ταχύτητα 2m·sec^{-1}. Νὰ εὑρεθοῦν : α) ἡ γωνιώδης ταχύτης β) ἡ περίοδος καὶ γ) ἡ συχνότης τῆς κινήσεως.

2) Ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 20 cm, σημεῖον διαγράφει τόξον 90^0 εἰς 1sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης του καὶ ἡ περίοδος αὐτοῦ.

3) Κινητὸν ἔχει ταχύτητα 8m/sec. Κινούμενον ἐπὶ περιφερείας διαγράφει εἰς 1 sec τόξον 270^0. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἀκτὶς περιστροφῆς β) ἡ περίοδος καὶ γ) ἡ συχνότης.

4) Σταθμὸς ἐκπέμπει εἰς 6,2 Mc. Ποία ἡ συχνότης εἰς Kc καὶ εἰς c. Ὁμοίως ποία εἶναι ἡ περίοδος ἐκπομπῆς τῶν Ἑρτζιανῶν κυμάτων.

II.

5) Ἡ μέση ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι 6730 km. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν ταχύτητα ἔχει ὑλ. σημεῖον ἐπὶ τοῦ 30οῦ παραλλήλου, (περίοδος $T = 24$h).

6) Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημέρι. Πότε ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν θὰ εἶναι κάθετος τοῦ δείκτου τῶν ὡρῶν διὰ πρώτην φοράν. ***(Σχολὴ Ἀεροπορίας 1952).***

7) Αὐτοκίνητον διήνυσε 120 m, ὁπότε οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἔκαναν 6 περιστροφὰς περισσοτέρας ἀπὸ τοὺς ὀπισθίους. Ἐὰν ἡ περιφέρεια κάθε ἐμπροσθίου τροχοῦ ἦτο κατὰ τὸ $^1/_4$ αὐτῆς μεγαλυτέρα, ἡ δὲ τοῦ ὀπισθίου κατὰ τὸ $^1/_5$ αὐτῆς, τότε κάθε ἐμπρόσθιος τροχὸς θὰ ἔκαμνε 4 στροφὰς περισσοτέρας. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν τροχῶν.

8) Πεζὸς καὶ ἱππεὺς διατρέχουν περιφέρειαν κατὰ τὴν ἰδίαν φορὰν ἐκκινοῦντες συγχρόνως ἔκ τινος σημείου αὐτῆς O. Ὁ πεζὸς ἔχει ταχύτητα α, ὁ ἱππεὺς 3α καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 12α. Εἰς κάθε ἐπάνοδον τοῦ ἱππέως εἰς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως O, ἡ ταχύτης τοῦ πεζοῦ αὐξάνει κατὰ α/5 καὶ συμβαίνει μετὰ 3 πλήρεις διαδρομάς του ὁ πεζὸς νὰ συναντᾷ τὸν ἱππέα εἰς τὴν ἀφετηρίαν O. Πόσας πλήρεις στροφὰς θὰ ἔχῃ ἐκτελέσει ὁ ἱππεύς. ***("Αλγεβρα, Μαθηματικὸν τμῆμα 1954).***

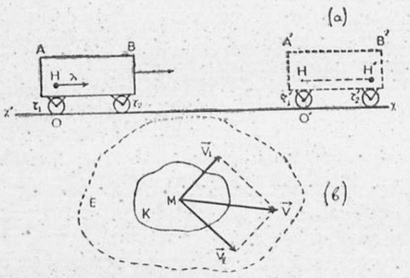
9) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ χρονικαὶ στιγμαὶ συμπτώσεως ὡροδείκτου καὶ λεπτοδείκτου ἀκριβοῦς ὡρολογίου ἀπὸ τὸ μεσονύκτιον μέχρι τῆς μεσημβρίας τῆς ἄλλης ἡμέρας. ***(Σχολὴ Ἠλεκτρολόγων—Μηχανολόγων 1952).***

10) Κινητὸν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ὁμαλῶς μὲ συχνότητα $\nu = 200$ sec^{-1}. Ποῦ θὰ εὑρίσκεται ἡ προβολὴ τοῦ κινητοῦ ἐπὶ διάμετρον κάθετον πρὸς τὴν διάμετρον, τὴν διερχομένην ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως καὶ ποία ἡ ταχύτης αὐτοῦ τοῦ σημείου εἰς χρόνον $\frac{1}{800}$ sec.

48. Σύνθεσις ταχυτήτων. Ἀρχὴ ἀνεξαρτησίας κινήσεων.—α) Ἔστω ὅτι τὸ ὄχημα ΑΒ (σχ. 44) κινεῖται ἐπὶ τοῦ δρόμου x'x μὲ σταθερὰν ταχύτητα π.χ. 20 m/sec καὶ ὅτι ἐντὸς τοῦ ὀχήματος κινεῖται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τὸ σῶμα Η (π. χ. ἕνας ἄνθρωπος) μὲ ταχύτητα ἔστω 2 m/sec. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίσης ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο τροχῶν εἶναι 8 m, ($τ_1τ_2$=8m), καὶ ἀφετηρία ἐκκινήσεως τὸ Ο τῆς x'x δι' ἀμφότερα τὰ κινητά.

Μετὰ ἀπὸ κάποιο χρόνον π.χ. 4 sec, ὁ τροχὸς $τ_1$ θὰ ἔχη διανύσει τὸ διάστημα ΟΟ' = 20 m/sec · 4 sec=80m. Τὸ σῶμα Η εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τῶν 4 sec θὰ εὑρίσκεται ὑπεράνω τοῦ τροχοῦ $τ'_2$, διότι θὰ ἔχη διανύσει ***ἐντὸς τοῦ ὀχήματος*** διάστημα: 2 m/sec · 4 sec=8 m=$τ_1'τ_2'$. Ἑπομένως τὸ κινητὸν Η, θ' ἀπέχη ἀπὸ τὸ σημ. Ο, ἐντὸς 4 sec, ἀπόστασιν $Oτ_2'=Oτ_1'+τ_1'τ_2'$=80+8=88m.

Τὸ σῶμα Η ἔχει ***δύο κινήσεις***: 1) τὴν μίαν ἐντὸς τοῦ ὀχήματος καὶ 2) τὴν κίνησιν τοῦ ὀχήματος ΑΒ ἐπὶ τοῦ δρόμου x'x.



Σχ. 44.

Τὴν κίνησιν τοῦ Η μέσα εἰς τὸ ὄχημα (δηλ. ὡς πρὸς τὰ τοιχώματα τοῦ ὀχήματος), ὀνομάζομεν ***σχετικὴν κίνησιν***. Ἡ κίνησις τοῦ ὀχήματος ὡς πρὸς τὸ σημ. Ο (δηλ. ὡς πρὸς τὸ ἔδαφος) ὀνομάζεται ***μετοχική***, ἐνῶ ἡ κίνησις τοῦ Η ὡς πρὸς τὸ Ο λέγεται ***ἀπόλυτος κίνησις.***

Εἴδομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις μετακινήσεως τοῦ Η ἀπὸ τὸ Ο εἶναι ἡ $Oτ'_2$ = 88m. Τὰ 88m = 20·4 + 2·4 = (20+2)·4. Τὴν ἀπόστασιν $Oτ'_2$ ***ἠμπορούσαμε νὰ εὕρωμεν ἀπ' εὐθείας, πολλαπλασιάζοντες τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων τῆς μετοχικῆς κινήσεως 20*** m/sec ***καὶ τῆς σχετικῆς 2*** m/sec ἤτοι, ***τὸ (20+2)***, ἐπὶ τὸν χρόνον 4 sec. Δηλ. ἠμποροῦμεν νὰ μελετήσωμε τὴν κίνησιν τοῦ Η ὡς πρὸς τὸ Ο, ἂν θεωρήσωμεν ***ὡς ταχύτητά του τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων.***

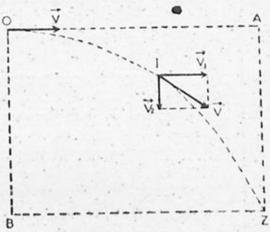
β) Γενικῶς: Ἔστω ὅτι ἕνα σημεῖον (ἢ σῶμα) Μ (σχ. 44β) κινεῖται μέσα εἰς ἕνα χῶρον Κ (π.χ. ἕνα τραῖνο ἐπὶ τῆς γῆς) καὶ ὁλόκληρος ὁ χῶρος Κ ὡς πρὸς ἕνα ἄλλον Ε (π.χ καὶ ἡ Γῆ περὶ τὸν ἥλιον). Τὴν κίνησιν τοῦ Μ, μὲ ταχύτητα $\overrightarrow{V_1}$ μέσα εἰς τὸν χῶρον Κ, τὴν ***ὀνομάζομεν σχετικὴν κίνησιν***. Τὴν κίνησιν τοῦ χώρου Κ μὲ ταχύτητα $\overrightarrow{V_2}$ ὡς πρὸς τὸν χῶρον Ε τὴν ὀνομάζομεν ***μετοχικήν***. Ἐνῷ τὴν κίνησιν τοῦ Μ ***ὡς πρὸς τὸν χῶρον*** Ε, τὴν ὀνομάζομεν ***ἀπόλυτον κίνησιν***. Ἡ ἀπόλυτος κίνησις τοῦ Μ ***εἶναι ἡ σύνθεσις τῶν δύο, σχετικῆς καὶ μετοχικῆς.*** Κατὰ συνέπειαν, ***«ἡ ταχύτης***

$\overrightarrow{V}$ τῆς ἀπολύτου κινήσεως τοῦ Μ εἰς τὸ σημεῖον Μ, εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων $\overrightarrow{MV_1}$ (σχετικῆς) καὶ $\overrightarrow{MV_2}$ (μετοχικῆς), δηλ. $\overrightarrow{MV}=\overrightarrow{MV_1}+\overrightarrow{MV_2}$»

Ἀρχὴ ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομε τὴν ἑπομένην ἀρχήν. «***Ὅταν ἕνα κινητὸν μετέχει δύο ἢ περισσοτέρων κινήσεων, ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει τοῦτο μετὰ ἀπὸ κάποιον χρόνον t, εὑρίσκεται εἴτε θεωρήσωμεν ὅτι καὶ αἱ δύο κινήσεις πραγματοποιοῦνται συγχρόνως, εἴτε κάθε μία χωριστά***».

Ἡ τροχιὰ τῆς συνθέτου κινήσεως (δηλ. τῆς ἀπολύτου) εἶναι ἐν γένει ***διάφορος τῆς τροχιᾶς*** τῶν συνιστωσῶν κινήσεων (σχετικῆς καὶ μετοχικῆς).

Παράδειγμα. Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως ἔστω μὲ σταθερὰν ταχύτητα $V_1 = 40 m/sec$ (ἢ 144km/h) (σχ. 45) Ἐξαπολύει εἰς τὸ σημεῖον Ο βόμβαν ἡ ὁποία διαγράφει τὴν τροχιὰν ΟΙΖ. Ἡ τροχιὰ αὐτὴ εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δύο ταχυτήτων τῆς βόμβας: τῆς μιᾶς σταθερᾶς τοῦ ἀεροπλάνου δηλ. τῆς $\overrightarrow{IV_1} = \overrightarrow{OV}$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως (ὁριζοντίας) καὶ τῆς ἄλλης $\overrightarrow{IV_2}$ λόγῳ τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς κατακορύφου ἀλλὰ ***μεταβλητῆς*** (κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη). Ἂν τὸ ὕψος ΟΒ (κατακόρυφος ἀπόστασις ἀεροπλάνου καὶ στόχου Ζ) εἶναι π. χ. 125 m, τότε ἡ βόμβα πρέπει ν' ἀφεθῇ εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν ΟΑ = 200m πρὸ τοῦ στόχου Ζ διὰ τὸν ἑξῆς λόγον. Διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος λόγῳ μόνον τῆς βαρύτητος ἡ βόμβα θὰ χρειασθῇ χρόνον $t = 5$ sec ($125 = \frac{1}{2} 10\, t^2$, $g = 10 m\ sec^{-2}$, κίν. ὁμ. ἐπιταχυνομένη). Εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον 5sec τὸ ἀεροπλάνον θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν $40 \cdot 5 = 200 m$ (κίνησις εὐθύγ. ὁμαλὴ) δηλ. θὰ εὑρίσκεται ὑπεράνω τοῦ στόχου Ζ.



Σχ. 45.

Ἀσκήσεις

1) Πλοῖον χρειάζεται ἡμίσειαν ὥραν νὰ διανύσῃ μῆκος 20 km ἐντὸς ποταμοῦ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος καὶ 40 min κατ' ἀντίθετον φορὰν πρὸς τὸ ρεῦμα τοῦ ποταμοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος.

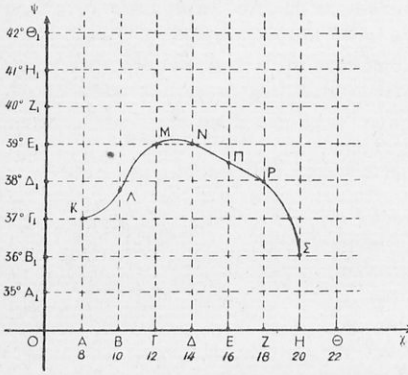
2) Κολυμβητὴς πλέει ἐντὸς ποταμοῦ μὲ ταχύτητα 1,5 m/sec καὶ θέλει νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὴν μίαν ὄχθην εἰς τὴν ἄλλην εἰς σημεῖον τὸ ὁποῖον μὲ τὴν ἀφετηρίαν ὁρίζει διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος. Τὸ ρεῦμα ἔχει ταχύτητα 2 m/sec. Κατὰ ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ πλεύσῃ.

3) Μία λέμβος διασχίζει ποταμὸν πλάτους 50m ἔχουσα διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὸ ρεῦμα. Ἡ ταχύτης τῆς λέμβου εἶναι 2 m/sec καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος 0,5 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ 1) εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ἀπέναντι ὄχθης θὰ φθάσῃ. 2) πρὸς ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ κινῆται ἡ λέμβος ἵνα διασχίσῃ καθέτως τὸν ποταμὸν καὶ πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ.

4) Ἀεροπλάνον κατευθύνεται πρὸς ἀνατολὰς μὲ ταχύτητα 360km/h, ἐνῶ ρεῦμα ἀέρος μὲ ταχύτητα 30 m/sec πνέει ἀπὸ Βορρᾶ πρὸν Νότον. Τί γωνία πρέπει νὰ σχη-

ματίζη ἡ ἄτρακτος τοῦ ἀεροπλάνου μὲ τὴν διεύθυνσιν Βορρᾶς—Νότος, ἵνα διατηρήση τὴν πρὸς ἀνατολὰς πορείαν του.

49. Διαγράμματα.— Εἰς ἕνα τετραγωνισμένον χαρτί, ἂς θεωρήσωμεν τὰς εὐθείας Οχ καὶ Οψ (σχ. 46). Ἐπὶ τῆς Οχ ἂς σημειώσωμε χρονικὰ διαστήματα καὶ ἐπὶ τῆς Οψ τοὺς βαθμοὺς θερμοκρασίας ἑνὸς ἀσθενοῦς. Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, τῆς Οχ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ὥρας 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, μιᾶς ἡμέρας· ὁμοίως τὰ A_1, B_1, Γ_1, Δ_1, E_1, Z_1, H_1, Θ_1 τῆς Οψ εἰς τοὺς βαθμοὺς θερμοκρασίας 35^0, 36^0, 37^0, 38^0, 39^0, 40^0, 41^0, 42^0. Ἔστω ὅτι κατὰ τὰς ἀνωτέρω ὥρας αἱ ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι ἑνὸς ἀσθενοῦς ἦσαν: 37^0, 37,°6 39^0, 39^0, 38^0,5, 38^0, 36^0. Αἱ διαδοχικαὶ αὐταὶ καταστάσεις δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, Π, Ρ, Σ ἐπὶ τοῦ χαρτιοῦ. Ἂν ἑνώσωμε τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ μίαν συνεχῆ γραμμή, τότε ἡ δημιουργουμένη καμπύλη ***δίδει γραφικὴν παράστασιν τῆς θερμομετρικῆς πορείας τοῦ ἀσθενοῦς*** κατὰ τὸν ὡς ἄνω χρόνον.



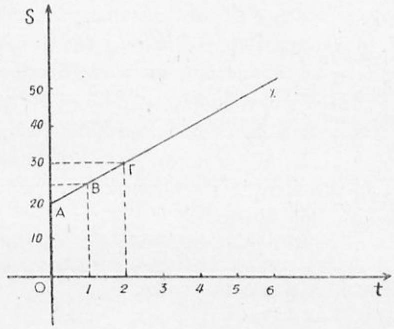
Σχ. 46.

Ἡ πρακτικὴ ἀξία αὐτῆς τῆς καμπύλης ΚΛ...ΡΣ, ἡ ὁποία δεικνύει τὴν πορείαν καὶ τὸν τρόπον ἀνόδου ἢ πτώσεως τῆς θερμοκρασίας, εἶναι ὅτι ὁ ἰατρὸς ἠμπορεῖ να συναγάγη συμπεράσματα διὰ την ἐξέλιξιν τῆς ἀσθενείας.

Ἐπίπεδον καρτεσίου. Διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς μεταβολῆς ἑνὸς ποσοῦ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἀπὸ κἄποιο ἄλλο, λαμβάνομε δύο καθέτους ἄξονας οἱ ὁποῖοι ὡς τεμνόμενοι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ λέγεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν ***ἐπίπεδον τοῦ Καρτεσίου*** ἢ ***σύστημα δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων.*** Π. χ. τὸ σύστημα Οχ καὶ Οψ τοῦ σχ. 46.

Ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἄξονος συνήθως τοῦ Οχ (ὁριζοντίου) λαμβάνομε σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τιμὰς ***(τετμημέναι)*** ἑνὸς ποσοῦ, ποὺ θεωροῦνται αὐθαιρέτως, (π. χ. τοῦ χρόνου εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ ἀσθενοῦς) καὶ τὸ ὁποῖον λέγεται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή.*** Ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἄξονος Οψ λαμβάνομε σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς ***(τεταγμέναι)*** ἑνὸς δευτέρου ποσοῦ (π.χ. τῆς θερμοκρασίας), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐξηρτημέναι ἀπὸ ἐκείνας τοῦ πρώτου. ***Τὸ δεύτερον ποσὸν λέγεται συνάρτησις τοῦ πρώτου.*** Π.χ. ἡ θερμοκρασία εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου. Ἀπὸ τὰ σημεῖα κάθε ἄξονος φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτούς. Τὰ σημεῖα τομῆς (ὅπως τὰ Κ, Λ, Μ...Ρ) τῶν ἀντιστοίχων καθέτων ἑνούμενα μὲ συνεχῆ γραμμήν, μᾶς δίδουν τὴν παραστατικὴν καμπύλην μεταβολῆς τοῦ δευτέρου ποσοῦ (π.χ. τῆς θερμοκρασίας) συναρτήσει τοῦ πρώτου (χρόνου). Ὅσα περισσότερα σημεῖα λάβωμεν τόσον ἀκριβεστέρα θὰ εἶναι ἡ παράστασίς μας. ***Τὴν παραστατικὴν αὐτὴν καμπύλην τῆς μεταβολῆς ἑνὸς ποσοῦ ὀνομάζομεν διάγραμμα τοῦ ποσοῦ.***

Παραδείγματα διαγραμμάτων. α) Ἔστω ὅτι ἡ ταχύτης ***μιᾶς ὁμαλῆς καὶ εὐθυγράμμου κινήσεως*** (σχ. 47) εἶναι π. χ. $\upsilon = 5\text{cm}\cdot\text{sec}^{-1}$· ὁμοίως τὸ διάστημα ποὺ εἶχεν διανύσει τὸ κινητὸν μέχρι χρόνου μηδὲν ἦτο $s_0 = 20$ cm. Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι: $s = s_0 + \upsilon t$ (τὸ s εἶναι ἡ συνάρτησις ὁ δὲ t ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή). ***Τὸ διάγραμμα μεταβολῆς τοῦ*** s ***συναρτήσει τοῦ χρόνου*** t ***εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ Αχ.***



Σχ. 47.

β) Ἂν ἡ ἐπιτάχυνσις ***μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως*** εἶναι, $\gamma = 5\text{cm}\cdot\text{sec}^{-2}$ καὶ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ κινητοῦ $\upsilon_0 = 20\text{cm}\cdot\text{sec}^{-1}$, τότε ὁ τύπος τῆς ταχύτητος θὰ εἶναι: $\upsilon = 20 + 5 \cdot t$. ***Ἡ εὐθεῖα Αχ (σχ. 47) θὰ παριστάνῃ ἐπίσης τὸ διάγραμμα τῆς ταχύτητος (συνάρτησις) συναρτήσει τοῦ χρόνου*** (ἀνεξάρτητος μεταβλητή).

Σχ. 48.

γ) Ἔστω $\gamma = 4\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-2}$ μιᾶς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως καὶ $\upsilon_0 = 0$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ διαστήματος θὰ εἶναι:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 = 2t^2$$

Τὸ διάγραμμα μεταβολῆς τοῦ s ***(συνάρτησις) βάσει τοῦ χρόνου*** t ***(ἀνεξ. μεταβλητὴ) εἶναι ἡ καμπύλη ΟΓ*** (σχ. 48), ἡ ὁποία εἰς τὴν Γεωμετρίαν λέγεται ***παραβολή.***

δ) Εἰς τὴν σελ. 54 σχ. 42γ ἔχομε ὡς διάγραμμα μεταβολῆς τῆς ψ τῆς ἁπλῆς ἁρμονικῆς κινήσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου t τὴν ἡμιτονοειδῆ καμπύλην τοῦ σχήματος.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

50. Σκοπὸς τῆς Δυναμικῆς. — Ὅπως εἴδομεν ἡ Δυναμικὴ ἐξετάζει τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν κινήσεων καὶ τῶν δυνάμεων αἱ ὁποῖαι τὰς προκαλοῦν. Ἐπιδιώκεται δηλαδὴ ἡ λύσις τῶν ἑπομένων δύο ἀντιστρόφων προβλημάτων. α) ***«Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν εἰς ἕνα ὑλικὸν σύστημα νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως· δηλ. ἡ τροχιὰ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως».*** ***β) «Ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως νὰ προσδιορίσωμεν τὰς δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν».***

Διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν αὐτῶν τῶν προβλημάτων διατυπώνομεν μερικὰς ἁπλὰς ἀλλὰ θεμελιώδεις ὑποθέσεις αἱ ὁποῖαι πηγάζουν ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν. Αἱ ὑποθέσεις αὐταὶ λόγῳ τῆς συστηματικῆς αὐτῶν ἐπαληθεύσεως καὶ τῆς γενικότητός των, ἀπέκτησαν τὸν τίτλον τοῦ ἀξιώματος ἢ ἀρχῆς εἰς τὴν κλασσικὴν Μηχανικήν.

Αἱ ἀρχαὶ αὐταὶ ὑποτυπωδῶς διετυπώθησαν ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τοῦ Leonardo Da - Vinci. Τὴν τελικήν των μορφὴν ἔλαβον ὑπὸ τοῦ Γαλλιλαίου καὶ κυρίως ὑπὸ τοῦ Νεύτωνος.

Θεμελιώδεις Νόμοι

51. Ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας.— *Παρατήρησις α΄.* Ὅλοι ἔχομε τὴν πεῖραν ὅτι ἕνα σῶμα τὸ ὁποῖον ἠρεμεῖ σχετικῶς μὲ τὸ περιβάλλον του ***οὐδέποτε τίθεται εἰς κίνησιν, ἂν δὲν ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις.***

Παρατήρησις β΄. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις ὅπου παρατηροῦμεν κίνησιν σωμάτων ***χωρὶς νὰ ἐνεργῇ κάποια δύναμις ἐπ' αὐτῶν.*** Π.χ., ἐὰν ὠθήσωμεν μίαν σφαῖραν ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίου ἐπιφανείας λείας καὶ σκληρῆς (π.χ. παγοτερέν), ἡ σφαῖρα κυλίεται ἐπ' ἀρκετὸν χρονικὸν διάστημα μετὰ τὴν ὤθησιν καὶ ἀκολουθεῖ εὐθύγραμμον δρόμον. Ἡ δύναμις βάρος ἐξ ἄλλου τῆς σφαίρας ὡς συνεχῶς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐξουδετεροῦται ὑπ' αὐτοῦ. Ἑπομένως οὐδεμία δύναμις ἐνεργεῖ μετὰ τὴν ὤθησιν ἡ ὁποία νὰ δικαιολογῇ τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας. Βεβαίως μετὰ κάποιον χρόνον ἡ κίνησις ἐπιβραδύνεται αἰσθητῶς καὶ τέλος ἡ σφαῖρα σταματᾷ. Προσεκτικαὶ παρατηρήσεις ὅμως μᾶς πείθουν ὅτι, δὲν θὰ συνέβαινε ἐπιβράδυνσις ἂν δὲν ὑπῆρχον ὡρισμένα αἴτια ἀνασταλτικὰ τῆς κινήσεως, ὅπως ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καὶ αἱ δυνάμεις τριβῆς. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν ὡς λογικὴν συνέπειαν ὅτι, ἐὰν δὲν ὑπῆρχον οἱ προηγούμενοι ἀνασταλτικοὶ παράγοντες, ἡ κίνησις τῆς σφαίρας θὰ συνεχίζετο ἀπεριορίστως κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα.

Ἡ ἐμπειρία λοιπὸν μᾶς παρέχει τὸ δικαίωμα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑπομένην ἀρχήν, γνωστὴν ὡς ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας: ***«Ἐὰν ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ***

σημείου ἢ σώματος οὐδεμία ἐξωτερικὴ δύναμις ἐνεργεῖ, τοῦτο διατηρεῖται εἰς κατάστασιν ἠρεμίας ἢ κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς».
Ἄρα: α) ***Μόνον μὲ ἐπενέργειαν δυνάμεων ἕνα σῶμα μεταβαίνει ἀπὸ τὴν ἠρεμίαν εἰς τὴν κίνησιν καὶ ἐπανέρχεται εἰς αὐτήν.*** β) ***Μόνον μὲ τὴν ἐπενέργειαν δυνάμεων ἕνα σῶμα ἐγκαταλείπει τὴν ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν τὴν ὁποίαν ἐπανακτᾶ ὅταν παύσουν αἱ δυνάμεις.***

Ἀδράνεια. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα βλέπομεν ὅτι, δι' οἱανδήποτε μεταβολὴν τῆς κινητικῆς καταστάσεως ὑλικοῦ σώματος, εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως ἐνεργήσουν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Ἡ ὕλη δηλαδὴ παρουσιάζει κατὰ κάποιον τρόπον «***ἀντίστασιν***» εἰς κάθε κινητικὴν μεταβολήν. «Ἡ ***ἀντίστασις***» αὐτὴ τῆς ὕλης εἶναι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης αὐτῆς καὶ λέγεται ***ἀδράνεια.*** Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ προηγουμένη ἀρχὴ ἀναφέρεται ὡς ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας. Τὰς ἐκδηλώσεις τῆς ἀδρανείας τὰς συναντῶμεν εἰς ἀρκετὰς περιπτώσεις τῆς ζωῆς μας καὶ τόσον ἐντονώτερα, ὅσον περισσότερον ἀπότομος εἶναι ἡ προσπάθεια μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως. Π.χ. κατὰ τὴν ἀπότομον ἐκκίνησιν ἑνὸς αὐτοκινήτου οἱ ἐπιβάται κλείνουν ὅλοι πρὸς τὰ ἐμπρός. Ἀντιθέτως, ἂν ἡ μεταβολὴ ἐπιφέρεται βαθμιαίως, τότε παρουσιάζεται ἀνεπαίσθητος ἀντίστασις. Π.χ. ἠμποροῦμεν μὲ συνεχῆ προοδευτικὴ προσπάθεια νὰ θέσωμεν εἰς κίνησιν ἕνα ἁμάξι, ἐνῷ ἐὰν ἐπιπέσωμεν ἀποτόμως ἐπ' αὐτοῦ δὲν τὸ ἐπιτυγχάνομεν.

52. ***Ἀναλογία δυνάμεων καὶ ἐπιταχύνσεων.***— Ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας μαθαίνομεν ὅτι, ὅταν εἰς ἕνα σῶμα εὑρισκόμενον εἰς κίνησιν δὲν ἐνεργεῖ δύναμις, ἐπιτάχυνσις δὲν ὑπάρχει. Ἀντιθέτως, ἂν ἐνεργῇ κάποια δύναμις τὸ σῶμα ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνσιν, ἡ ὁποία μεταβάλλει τὴν διεύθυνσιν ἢ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος ἢ καὶ τὰ δύο.

Ἀπὸ τὰ διάφορα πειράματα καὶ κυρίως ἀπ' αὐτὰ ποὺ ἀφοροῦν τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων (Γαλλιλαίου, Νεύτωνος) δεχόμεθα καὶ διατυπώνομεν τὴν ἑπομένην σπουδαίαν βασικὴν ἀρχὴν τῆς Δυναμικῆς διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ δυνάμεως καὶ ἐπιταχύνσεως.

«Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως ὑλικοῦ σημείου (ἢ σώματος) ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως καὶ εἶναι ἀνάλογος πρὸς αὐτήν».

α) Ἂν εἰς ἕνα σῶμα ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις F_1 F_2 . . . . F_ν, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς ἐπιταχύνσεις γ_1, γ_2, . . . γ_ν κλπ. (ὅπου κάθε μία ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀντιστοίχου δυνάμεως). Θὰ ἔχωμεν δέ: $\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \ldots$ κλπ. Ἂν δὲ $F_1 = F_2 = \ldots$ τότε καὶ $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$ Δηλαδὴ προκύπτει ἡ ἔκφρασις, «***δύναμις σταθερὰ κατὰ διεύθυνσιν καὶ ἔντασιν ἐνεργοῦσα ἐπὶ ἑνὸς σώματος, προσδίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν σταθερὰν κατὰ διεύθυνσιν καὶ ἔντασιν (εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις)***».

β) Ἂν εἰς ἓν ὑλικὸν σημεῖον (ἢ σῶμα) ἐνεργοῦν περισσότεραι τῆς μιᾶς δυνάμεις τότε ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως ἔχει διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων καὶ εἶναι ἀνάλογος αὐτῆς. «***Δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτή, ἀνεξαρτήτως τῆς καταστάσεως κινήσεως, εἶναι ἴση πρὸς τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἐπιταχύνσεων τῶν ἐπὶ μέρους δυνάμεων***». Ἡ ἔκφρασις αὐτὴ χαρακτηρίζεται ἐνίοτε ὡς ἀρχὴ ἀνεξαρτησίας τῶν δυνάμεων (διαλυτικὸν ἀξίωμα).

γ) Ἡ θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς δυναμικῆς, ἀναλογίας δυνάμεων πρὸς ἐπιταχύνσεις, περιλαμβάνει ὡς μερικὴν περίπτωσιν τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας, ὅπου διὰ $F=0$ καί $\gamma=0$.

53. Ἀδράνεια καὶ Μᾶζα.—α) Εἴδομεν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκει αὐτὸ ἡ γῆ. Μὲ εὐπαθῆ δυναμόμετρα ἠμποροῦμε νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος εἶναι διάφορον ἀπὸ τόπου εἰς τόπον καὶ διάφορον εἰς διάφορα ὕψη ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Συνεπῶς τὸ βάρος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὴν Γῆν. Π. χ. ἔχει εὑρεθῆ ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος αὐξάνεται εἰς τοὺς πόλους κατὰ τὸ 1/200 τῆς τιμῆς του εἰς τὸν ἰσημερινὸν καὶ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ $1/10^6$ δι' ἀνύψωσιν κατὰ 3m. Διὰ τοῦτο δὲν ἠμποροῦμε ***διὰ τὴν μέτρησιν δυνάμεων νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τὸ βάρος ἑνὸς σώματος, ἀφοῦ δὲν μένει ἀνεξάρτητον τοῦ τόπου, ἐκτὸς ἂν ὁμιλοῦμεν δι' ἕνα περιωρισμένον τόπον.*** Ἀπὸ τὰ πειράματα διαπιστώνομεν ὅμως ὅτι, ἂν καὶ τὰ βάρη B_1, B_2 δύο σωμάτων εἶναι μεταβλητὰ ἀπὸ θέσιν εἰς θέσιν, ***ὁ λόγος των*** $\frac{B_1}{B_2}$ ***παραμένει σταθερὸς εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς Γῆς καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ ποσὸν τῆς ὕλης τοῦ κάθε σώματος.*** Ἀπὸ τὴν σταθερότητα τοῦ λόγου $\frac{B_1}{B_2}$ δημιουργοῦμεν τὴν δυνατότητα μετρήσεως τῆς ποσότητος τῆς ὕλης ἑνὸς σώματος. Πράγματι, ἂν τὸ σῶμα B_2 τὸ λάβωμεν ὡς πρότυπον καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν Ἀθήνα ὁ λόγος $\frac{B_1}{B_2}=2$, τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σῶμα B_1 κατέχει διπλασίαν ποσότητα ὕλης ἀφ' ὅτι τὸ B_2. Τὸν ἴδιον λόγον 2 θὰ συναγάγωμεν ἂν προσδιορίσωμεν τὸν λόγον τῶν βαρῶν, π. χ. εἰς τὸ Παρίσι. Ὥστε, ἂν τὸ ποσὸν τῆς ὕλης τοῦ B_2 τὸ λάβωμεν ὡς μονάδα, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἀνεξάρτητον τοῦ τόπου ποσὸν τῆς ὕλης οἱουδήποτε σώματος ἀπὸ τὸν λόγον τῶν βαρῶν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον λέγομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν βαρῶν δύο σωμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μαζῶν, δίδοντες εἰς τὴν ***ἔννοιαν μᾶζαν ὀντότητα φυσικοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὸ ποσὸν τῆς ὕλης ποὺ κατέχει ἕνα σῶμα.*** Ὥστε : $\frac{B_1}{B_2}=\frac{M_1}{M_2}$ (1). Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν $\frac{B_1}{M_1}=\frac{B_2}{M_2}=g$. ***Ὁ σταθερὸς λόγος*** g ***τοῦ βάρους B πρὸς τὴν μᾶζαν***

m ***ἑνὸς σώματος λέγεται ἔντασις τοῦ πεδίου βαρύτητος εἰς ἕνα περιωρισμένον τόπον*** καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν ποὺ προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν m ἢ σταθερὰ δύναμις B (βάρος) εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

β) Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν τῆς ἀναλογίας δυνάμεων καὶ ἐπιταχύνσεων ***δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα,*** ἔχομεν: $\frac{F_1}{\gamma_1} = \frac{F_2}{\gamma_2} = \ldots = j$. ***Ὁ σταθερὸς αὐτὸς λόγος j, ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τὸ σῶμα, λέγεται ἀδράνεια τοῦ σώματος.*** Διὰ τὸ βάρος B τοῦ σώματος θὰ ἔχωμε:

$$\frac{B}{g} = m, \text{ ἀλλὰ } j = \frac{F}{\gamma} = \frac{B}{g} = m \text{ καὶ συνεπῶς } j = m \qquad (2).$$

Ὥστε ἡ ἀδράνεια ἑνὸς σώματος ταυτίζεται μὲ τὴν μᾶζαν αὐτοῦ. Μὲ ἄλλα λόγια ὅταν λέγωμεν ἀδράνειαν ἐννοοῦμεν μᾶζαν καὶ ὅταν λέγωμεν μᾶζαν ἐννοοῦμεν ἀδράνειαν.

Ἡ σχέσις (2) ἀποκαθιστᾶ μίαν ἐσωτερικὴν ἑνότητα μεταξὺ δύο φυσικῶν ὀντοτήτων κατ' ἀρχὴν φαινομενικῶς διαφορετικῶν. Διότι, ἡ μὲν μᾶζα διαμορφώνει τὴν δύναμιν βαρύτητος (ἕλξεως) εἰς τὴν ὁποίαν ὑπόκειται ἕνα σῶμα ἐξ αἰτίας τῆς παρουσίας ἑνὸς ἄλλου (τῆς Γῆς), ἡ δὲ ἀδράνεια χαρακτηρίζει κατὰ κάποιον τρόπον τὴν ἀντίστασιν ποὺ προβάλλει τὸ σῶμα εἰς κάθε ἐπίδρασιν ἡ ὁποία ἐπιδιώκει νὰ τὸ μεταθέσῃ, ἢ ἀκριβέστερον τὸ ἔργον ποὺ πρέπει νὰ καταναλώσωμεν διὰ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ σῶμα μίαν ταχύτητα.

54. Ἰδιότητες τῆς μάζης.— Ἀπὸ τὴν ὅλην μελέτην εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας ἰδιότητας.

α) ***Ἡ μᾶζα ἑνὸς σώματος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τόπου καὶ γενικώτερον τῆς φυσικῆς καταστάσεως τοῦ σώματος*** (θερμοκρασίας, πιέσεως κ.λ.π).

β) ***Ἔχει τὴν προσθετικὴν ἰδιότητα***· δηλ. ἂν δύο σώματα μὲ μάζας m_1 καὶ m_2 ἑνωθοῦν εἰς ἕν, τοῦτο θὰ ἔχῃ μᾶζαν $m = m_1 + m_2$. Πράγματι, ἂν B_1 καὶ B_2 τὰ βάρη τῶν μαζῶν m_1 καὶ m_2, τὸ βάρος B ὡς συνισταμένη παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων θὰ εἶναι: $B = B_1 + B_2$, ὁπότε $\frac{B_1}{m_1} =$

$$= \frac{B_2}{m_2} = \frac{B_1 + B_2}{m_1 + m_2} = \frac{B}{m} \text{ καὶ ἐπειδὴ } B = B_1 + B_2, \text{ ἄρα } m = m_1 + m_2.$$

Αἱ δύο προηγούμεναι ἰδιότητες τῆς μάζης εἶναι κατὰ βάσιν ἡ ἁπλοποιημένη ἔκφρασις μιᾶς θεμελιακῆς ἀρχῆς τῆς κλασικῆς Φυσικῆς καὶ Χημείας, ***τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης,*** κατὰ τὴν ὁποίαν: ***«ἡ μᾶζα τοῦ συνόλου τῶν σωμάτων παραμένει σταθερά, παρ' ὅλα τὰ φυσικὰ καὶ χημικὰ φαινόμενα ποὺ γίνονται εἰς αὐτά».***

Νεώτεραι διαπιστώσεις. Τὴν ἀρχὴν αὐτὴν διετύπωσεν ὁ Lavoisier τὸ 1776 καὶ ἐπιδέχεται ἐπαλήθευσιν μὲ τὰ πλέον ἀκριβῆ μέσα μετρήσεως. Ὁ ἀκριβέστερος ὅμως ζυγὸς δὲν διαπιστώνει τὴν ὕπαρξιν μάζης κάτω τοῦ 0,000001 gr. Τί γίνεται συνεπῶς πέραν αὐτοῦ τοῦ ὁρίου; Διὰ τὴν κλασικὴν Φυσικὴν καὶ τὴν Χημείαν ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης ἀποδίδει τὰ πράγματα μὲ μίαν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν.

Ἡ νεωτέρα ὅμως Ἀτομικὴ Φυσικὴ καὶ Χημεία ἀπέδειξεν ὅτι ἡ μᾶζα δὲν εἶναι σταθερὰ εἰς τὸν κόσμον. Ὑπάρχουν φαινόμενα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ μᾶζα ἐλαττοῦται καὶ παρουσιάζεται αὔξησις τῆς ἐνεργείας καὶ ἀντιστρόφως ἄλλα εἰς τὰ ὁποῖα ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς μᾶζαν. Π. χ. ὡς γνωστὸν κατὰ τὰς ἐξωθέρμους χημικὰς ἀντιδράσεις ἐμφανίζεται θερμότης. Ἡ θερμότης αὐτὴ ὀφείλεται εἰς τὴν μετατροπὴν ἐλαχίστου μέρους τῆς μάζης τῶν ἀντιδρώντων σωμάτων εἰς ἐνέργειαν· (τὸ ποσὸν τοῦτο τῆς μάζης δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ ζυγίσεως). Κατὰ τὰς ἐνδοθέρμους ἀντιδράσεις ἡ ἐξαφανιζομένη θερμότης μετατρέπεται εἰς μᾶζαν (ὑλοποίησις ἐνεργείας). Κατὰ τὰς ἀτομικὰς ἐκρήξεις ἔχομεν ἐπίσης μετατροπὴν μάζης εἰς ἐνέργειαν (ἀφυλοποίησις). Ὁ Einstein εἰς τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος μᾶς δίδει τὸν ἑπόμενον τύπον διὰ τὴν αὔξησιν τῆς μάζης μετὰ τῆς ταχύτητος, $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, ὅπου m_0 εἶναι ἡ μᾶζα σώματος μὲ ταχύτητα μηδέν, υ ἡ ταχύτης τοῦ σώματος καὶ c ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς (300.000 km/sec).

Ὁμοίως, πειράματα ἐπὶ τῶν ἠλεκτρονίων τῶν ἐκπεμπομένων ὑπὸ τοῦ ραδιενεργοῦ στοιχείου ραδίου, τὰ ὁποῖα ἔγιναν ὑπὸ τῶν Kaufman καὶ Bucherer, ἔδειξαν ὅτι:

διὰ	ταχύτητα	210.000	km/sec	ἔχομεν	αὔξησιν	μάζης	κατὰ	0,40
»	»	270.000	km/sec	»	»	»	»	1,29
»	»	294.000	km/sec	»	»	»	»	4,02

Οἱ ἀστρονόμοι ἔχουν ἀποδείξει ὅτι ἡ μᾶζα τῆς Γῆς αὐξάνει ἐτησίως σημαντικῶς ἀπὸ τὴν ἐνέργειαν ὑπὸ μορφὴν ἀκτινοβολίας ποὺ δέχεται ἀπὸ τὸν Ἥλιον. Εἰς τὸ διάστημα καινούργιοι κόσμοι παρουσιάζονται ἐκεῖ ποὺ μέχρι χθὲς δὲν ἐφαίνετο τίποτε· δηλ. τεράστια ποσὰ ἐνεργείας ἀρχίζουν νὰ ὑλοποιοῦνται. Ὁ μετασχηματισμὸς τῆς ἐνεργείας εἰς ὕλην ***(ὑλοποίησις ἐνεργείας)*** ἀπεδείχθη καὶ ἐργαστηριακῶς διὰ τῶν πειραμάτων τοῦ ζεύγους Zoliot - Curie, τοῦ Thibaut, Meitner κ. ἄ.

55. Θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς. — Διετυπώσαμεν προηγουμένως τὴν σχέσιν ἀναλογίας μεταξὺ δυνάμεως καὶ ἐπιταχύνσεως $\left(\dfrac{\vec{F}}{\vec{\gamma}} = j\right)$ καὶ συνέχεια ἀπεκαταστήσαμεν ἰσότητα μεταξὺ ἀδρανείας καὶ μάζης (j = m). Τὰς δύο αὐτὰς ἐκφράσεις δυνάμεθα νὰ τὰς συνοψίσωμεν εἰς μίαν μόνον ποὺ ἀποτελεῖ τὸν ***θεμελιώδη νόμον τῆς Δυναμικῆς.*** Ὅτι, ***«ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνὸς κινουμένου ὑλικοῦ σημείου (ἢ σώματος) εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν δρῶσαν δύναμιν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν μᾶζαν του»*** · δηλ. $\dfrac{\vec{F}}{\vec{\gamma}} = j = m$, ἢ $\vec{\gamma} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ ἢ ἀκόμη

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}} \qquad (1).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) λέγεται θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς.

56. Μονάδες δυνάμεως. — Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ δηλ. δύναμις = μᾶζα × ἐπιτάχυνσις, ἔχομε: $F = M \cdot L \cdot T^{-2}$ (ἐξίσωσις διαστάσεων).

α) ***Δύνη*** (dyn). Ἂν θέσωμεν m = 1 gr. καὶ $\gamma = 1\ cm/sec^2$ θὰ ἔχωμε τὴν μονάδα τῆς δυνάμεως εἰς τὸ σύστημα C.G.S, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν δύνη. «***Δύνη λέγεται ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐνεργοῦσα ἐπὶ μάζης 1** gr **προσδίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν 1***cm/sec^2», δηλ. $dyne = 1gr \cdot 1cm \cdot sec^{-2} = 1gr \cdot cm \cdot sec^{-2}$.

β) ***Γραμμάριον δυνάμεως*** (gr*). Ἡ δύναμις β μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται 1 gr μάζης εἰς τὸ Παρίσι εἶναι, $\beta = 1\,gr \cdot 981 cm/sec^2$ (διότι εἰς τὸ Παρίσι $g = 981\,cm \cdot sec^{-2}$), δηλ. $\beta = 981\,dyn$. Ἡ δύναμις β λέγεται γραμμάριον δυνάμεως. Ὥστε $1\,gr^* = 981\,dyn$.

γ) ***Χιλιόγραμμον δυνάμεως*** $(kg^*) = 1000\,gr^* = 1000.981 = 981000\,dyn$.

δ) ***Στὲν*** (sthène) $= 10^8 dyn$˙ δηλ. ἡ δύναμις ἡ ὁποία εἰς μᾶζαν 1000 kg δίδει ἐπιτάχυνσιν $1m/sec^2$.

ε) ***Τόννος δυνάμεως*** (ton*). Ὁ ton* εἶναι ἴσος πρὸς $1000kg^* = 10^6 gr^*$.

Παρατήρησις.— Δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχυσις μεταξὺ γραμμαρίου δυνάμεως καὶ γραμμαρίου μάζης. ***Τὸ γραμμάριον δυνάμεως*** (gr*) ***εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς γραμμαρίου μάζης. Τὸ βάρος ὅμως εἶναι δύναμις.***

Ἡ μᾶζα εἶναι ***ποσὸν μονόμετρον***. Τὸ βάρος (δύναμις) εἶναι ***διανυσματικὸν ποσὸν*** καὶ παράγωγον εἰς τὸ σύστημα C.G.S. Βεβαίως, ὅταν ὡς μονάδα δυνάμεως λαμβάνωμε τὸ βάρος ἑνὸς γραμ. μάζης, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος θὰ ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται καὶ ἡ μᾶζα του εἰς γραμμάρια, ἀλλὰ γραμμάρια δυνάμεως. Π.χ. σῶμα 5 gr. μάζης ἕλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς μὲ δύναμιν 5 μονάδων˙ ἀφοῦ λοιπὸν εἰς κάθε μονάδα μάζης ἀντιστοιχεῖ μία μονὰς δυνάμεως, τὸ βάρος 5 gr μάζης εἶναι 5 gr*, δηλ. $5 \cdot 981 = 4905\,dyn$.

Παράδειγμα. «Σῶμα βάρους 30 gr* ὠθεῖται ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως 20 gr*. Ἂν ἐξεκίνησε ἀπὸ τὴν ἠρεμίαν, τί διάστημα θὰ διανύσῃ εἰς 5 sec.» ($g = 981cm/sec^2$).

Λύσις. Ἐκ τῆς ἀναλογίας δυνάμεως καὶ ἐπιταχύνσεως δηλ. $\frac{B}{g} = \frac{F}{\gamma}$ ἔχομε:

$\frac{30\,gr^*}{981cm/sec^2} = \frac{20gr^*}{\gamma}$ ἢ $\gamma = \frac{20gr^*}{30gr^*} \cdot 981\,cm/sec^2$ καὶ $\gamma = 654\,cm/sec^2$. Ἄρα $s = \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2} \cdot 654 \frac{cm}{sec^2} \cdot 25\,sec^2 = 8175\,cm$.

Ἀσκήσεις.

I.

1) Σῶμα μάζης 200gr. κινεῖται εὐθυγράμμως μὲ ἐπιτάχυνσιν $3m/sec^2$. Ποία εἶναι ἡ δύναμις ποὺ ἐνεργεῖ;

2) Σῶμα μάζης 10gr. κινεῖται μὲ κίνησιν εὐθύγραμμον ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην χωρὶς ἀρχικὴν ταχύτητα καὶ διήνυσε διάστημα 48 m. εἰς 4 sec. Ποία ἡ κινοῦσα δύναμις;

3) Ἐπὶ σώματος ἐνεργεῖ δύναμις 100.000 dyn ἡ ὁποία ἀναγκάζει αὐτὸ νὰ κινηθῇ καὶ κατὰ τὰ πρῶτα 2 sec νὰ διανύσῃ διάστημα 25 m. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ σώματος;

4) Δύναμις 50 dyn ἐφαρμόζεται ἐπὶ σώματος μάζης 100 gr κινουμένου ἰσοταχῶς. Ἡ δύναμις ἐνεργεῖ κατ' ἀντίθετον φορὰν τῆς κινήσεως καὶ συνεπῶς ἐπιβραδύνει αὐτήν. Μετὰ πόσα sec θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν ταχύτητα μηδέν, ἐὰν ἡ ταχύτης του ἦτο 20 m/sec τὴν στιγμὴν ποὺ ἐνήργησεν ἡ δύναμις. ***(Σχολὴ Εὐελπίδων 1952)***

5) Αὐτοκίνητον βάρους 3 ton* κινεῖται μὲ ταχύτητα 72 km/h. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν φρένων του σταματᾷ εἰς ἀπόστασιν 50 m ἀπὸ τὸ σημεῖον ὅπου ἤρχισαν νὰ ἐνεργοῦν τὰ φρένα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιβράδυνσις, ὡς καὶ ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐνήργησε διὰ νὰ σταματήσῃ τὸ αὐτοκίνητον. ($g=10 m/sec^2$). ***(Μαθηματικὸν Τμῆμα Ἀθηνῶν 1951).***

II.

6) Ἐπὶ ἀκινήτου σώματος μάζης 12240 gr ἐνεργεῖ ἐπὶ 6 sec δύναμις 30kg*. Εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου αὐτοῦ παύει ἡ δύναμις αὐτὴ καὶ ἐνεργεῖ δευτέρα ἐντάσεως 4kg* ἀντιθέτου φορᾶς τῆς πρώτης, ἐπὶ 24 sec. Ποῖον τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὴν διάρκειαν ἐνεργείας τῶν δυνάμεων;

7) Δύο δυνάμεις ἔχουν λόγον ἐντάσεων $\frac{F_1}{F_2}=5$. Ἡ F_1 ἐνεργεῖ ἐπὶ ἠρεμοῦντος σώματος τὸ ὁποῖον διήνυσεν διάστημα 40,5m εἰς 3 sec. Ἡ F_2 ἐνεργεῖ ἐπὶ ἄλλου σώματος τὸ ὁποῖον διήνυσεν εἰς 5 sec διπλάσιον διάστημα τοῦ πρώτου. Ἂν ἡ μᾶζα τοῦ πρώτου εἶναι 60 gr νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ μᾶζα τοῦ δευτέρου καὶ β) αἱ δυνάμεις F_1 καὶ F_2.

8) Σῶμα κινεῖται ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα 10 m/sec. Κατά τινα στιγμὴν ἐνεργεῖ δύναμις 60.000 dyn καὶ τὸ σῶμα διανύει διάστημα 9 m κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 5ου δευτερολέπτου. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ σώματος.

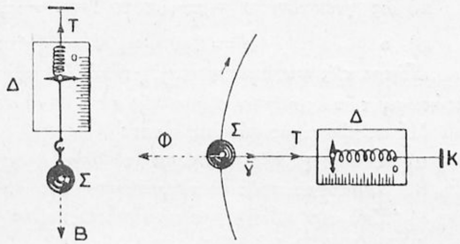
9) Δύο δυνάμεις $F_1=40gr^*$ καὶ $F_2=70gr^*$ ἐνεργοῦν ὑπὸ γωνίαν 60^0 ἐπὶ σώματος μάζης 400gr. Νὰ εὑρεθοῦν: α) τὸ διανυθὲν διάστημα ἐπὶ 10 sec ἐνεργείας τῶν δυνάμεων· β) ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τοῦ 10ου sec, ἂν τὸ σῶμα εἶχεν ἀρχικὴν ταχύτητα 6 m/sec.

10) Σωλὴν πυροβόλου ἔχει μῆκος 1,6 m. Ἀπὸ τὸ στόμιον τοῦ σωλῆνος ἐξέρχεται βλῆμα μάζης 3kg μὲ ταχύτητα 600 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις τῶν ἀερίων τῆς ἐκρήξεως ἂν θεωρηθῇ σταθερὰ κατὰ μῆκος τοῦ σωλῆνος.

11) Διὰ καλωδίου ἐφηρμοσμένου ἐπὶ ἀνελκυστῆρος βάρους 5 ton* ἐξασκοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ δύναμιν 5,5 ton* κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Πόση εἶναι ἡ μεταδιδομένη ἐπιτάχυνσις ὡς καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα μετὰ πάροδον 5 sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως. Νὰ ληφθῇ g=10m/sec. ***(Χημικῶν Μηχανικῶν 1951).***

57. Δυνάμεις ἀδρανείας (D' Alembert).— α) Γνωρίζομεν ὅτι, ἀδράνεια παρουσιάζεται μόνον εἰς τὰς κινήσεις ὅπου ἔχομεν ἐπιτάχυνσιν· δηλ. κατὰ τὴν ***μεταβολὴν τοῦ μέτρου*** τῆς ταχύτητος (π.χ. εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη) ἢ τὴν ***μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως*** (π. χ. ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις) ἢ καὶ τῶν δύο. Διὰ νὰ ὑπάρξῃ ὅμως μεταβολὴ τῆς ταχύτητος (δηλ. ἐπιτάχυνσις), ***πρέπει ἐπὶ τοῦ σώματος νὰ ἐνεργήσουν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις.*** Αἱ δυνάμεις αὐταὶ ἔχουν ὡς ἀντιστάθμισμα (ἀρχὴ ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως) τὰς δυνάμεις ἀδρανείας τῶν ὁποίων ἕδρα εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ τῆς ἀντιδράσεως δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὴν στατικὴν ἰσορροπίαν τῶν δυνάμεων, ἀλλὰ ἠμπορεῖ νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν κίνησιν, ὁπότε ἔχομεν ***τὴν δυναμικὴν ἰσορροπίαν.*** β) Ἐὰν ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς $\vec{F}=m\cdot\vec{\gamma}$ γραφῇ, $\vec{F}-\overrightarrow{m\gamma}=0$ ἢ $\vec{F}+(-\overrightarrow{m\gamma})=0$, τότε ἐκφράζει ***σχέσιν ἰσορροπίας*** μεταξὺ τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ (ἐξωτερικῆς) καὶ τῆς $-m\overrightarrow{\gamma}$ (δυνάμεως ἀδρανείας) ἀντιθέτου τῆς $\overrightarrow{F}$. Ἠμποροῦμε λοιπὸν νὰ ἐκφράσωμεν τὸν θεμελιώδη νόμον τῆς δυναμικῆς ὡς ἑξῆς: ***«Εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν ὑπάρχει ἰσορροπία μεταξὺ ὅλων τῶν δυνάμεων ποὺ ἐφαρμόζουν εἰς ἕνα σῶμα (ἀναλλοίωτον στερεόν), δηλαδὴ τῶν ἐξωτερικῶν καὶ τῶν δυνάμεων ἀδρανείας».*** Ἡ ἔκφρασις αὐτὴ ὀνομάζεται ***ἀρχὴ τοῦ*** D' Alembert. Ἡ ἀξία της ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι τὰ προβλήματα τῆς Δυναμικῆς ἀνάγονται εἰς προβλήματα τῆς Στατικῆς· εἶναι τρόπον τινὰ ἐπέκτασις τῆς ἀρχῆς ἰσότητος δράσεως καὶ ἀντιδράσεως. Τὴν σπουδαιοτέραν ἐφαρμογὴν αὐτῆς τῆς ἀρχῆς ἔχομεν εἰς τὴν φυγόκεντρον δύναμιν.

58. ***Φυγόκεντρος δύναμις.*** — Ἀπὸ τὴν Στατικήν, γνωρίζομεν ὅτι τὸ βάρος Β τῆς σφαίρας Σ (σχ. 49α) ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν Τ τοῦ ἐλατηρίου. Ἐδῶ ἔχομεν στατικὴν ἰσορροπίαν. Ὅταν ὅμως περιστρέφωμεν (σχ. 49β) τὸ σύστημα σφαίρας — δυναμομέτρου ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου περὶ τὸ κέντρον Κ, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δείκτης τοῦ δυναμομέτρου Δ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ τόσον περισσότερον ὅσον ταχυτέρα εἶναι ἡ περιστροφή. Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΚΣ ἐνεργεῖ δύναμις ΣΦ, ἡ ὁποία προφανῶς ***ὀφείλεται*** εἰς τὴν περιστροφικὴν κίνησιν τῆς σφαίρας. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις τῆς Σ εἶναι κυκλική, ὑπάρχει κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις $\overrightarrow{\gamma}$ καὶ ἑπομένως δύναμις $\overrightarrow{\Sigma T}$ ***(κεντρομόλος)*** μὲ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν πρὸς τὴν $\overrightarrow{\gamma}$ (ἀντίδρασις τοῦ ἐλατηρίου). Ἡ δύναμις Τ εἶναι ἐδῶ ἡ ἐπιταχύνουσα δύναμις (ἐξωτερικὴ διὰ τὴν σφαίραν Σ), ἐνῶ ἡ ἐμφανιζομένη $\overrightarrow{\Sigma\Phi}$, κάθε φορὰ ἀντίθετος τῆς Τ, εἶναι ἡ δύναμις ἀδρανείας ἡ ὁποία λέγεται ***φυγόκεντρος*** (ὡς τείνουσα νὰ ἀπομακρύνη τὸ σῶμα ἀπὸ τὸ κέντρον περιστροφῆς). Αἱ δύο δυνάμεις Τ καὶ Φ εἰς κάθε καμπυλόγραμμον κίνησιν δημιουργοῦν τὴν δυναμικὴν ἰσορροπίαν διὰ τὴν ὁποίαν ὁμιλεῖ ἡ ἀρχὴ τοῦ D' Alembert.



α Σχ. 49. β

Δι' ἕνα παρατηρητήν, ὁ ὁποῖος παρακολουθεῖ π.χ. ἕνα ὄχημα διερχόμενον ἀπὸ μίαν στροφὴν (καμπυλόγραμμος κίνησις) ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι μία ***δύναμις συμβατική.*** Ὁ παρατηρητὴς αὐτὸς ἐξ ὅσων γνωρίζει διὰ τὴν καμπυλόγραμμον κίνησιν θὰ ἀποφανθῆ ὅτι ἐπὶ τοῦ ὀχήματος ἐνεργεῖ ἡ **κεντρομόλος** δύναμις· θὰ δεχθῆ δὲ «κατὰ σύμβασιν» τὴν φυγόκεντρον **ἂν** θέλη ν' ἀναγάγη τὸ πρόβλημά του εἰς πρόβλημα Στατικῆς. Ἐὰν ὅμως ὁ παρατηρητὴς εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὀχήματος, αἰσθάνεται ὡς πραγματικὴν τὴν φυγόκεντρον δύναμιν (δύναμιν ἀδρανείας) ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων της (κλίσις δεξιὰ - ἀριστερά), ὅπως ἀκριβῶς αἰσθάνεται τὰς δυνάμεις ἀδρανείας καὶ κατὰ τὴν στάσιν ἢ ἐκκίνησιν ὀχήματος (κλίσις ἐμπρὸς - πίσω).

Τύπος τῆς φυγ. δυνάμεως. Ἐπειδὴ εἰς τὴν ὁμαλὴν κυκλικὴν κίνησιν ἔχομεν $\gamma = \frac{\upsilon^2}{R}$ (σελ. 53), ἡ ἔντασις τῆς φυγοκέντρου (καὶ κεντρομόλου) θὰ εἶναι: $\Phi = m\gamma$ καὶ $\Phi = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R}$ (1). Ἢ ἐπειδὴ $\upsilon = \omega \cdot R$ ἔχομεν $\Phi = m\omega^2 R$ (2). Διὰ τὴν διευκόλυνσιν εἰς τὴν λύσιν σχετικῶν προβλημάτων μετασχηματίζομε τὸν τύπον (2) ὡς ἑξῆς:

α) ὡς γνωστὸν $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ὁπότε $\Phi = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$

β) » » $\omega = 2\pi\nu$ » $\Phi = 4\pi^2 m \nu^2 R$

Νόμοι τῆς φυγοκέντρου. Οἱ τύποι (1) καὶ (2) μᾶς ὁδηγοῦν εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν ἑπομένων νόμων τῆς φυγ. δυνάμεως.

Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι:

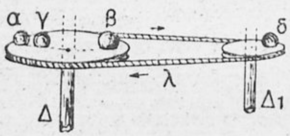
α) ***Ἀνάλογος τῆς μάζης*** m (τὰ ἄλλα στοιχεῖα σταθερά).

β) ***Ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος υ ἢ ω.***

γ) ***Ὑπὸ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν ταχύτητα υ, ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος*** R (τύπος 1).

δ) ***Ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω, ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος*** R (τύπος 2).

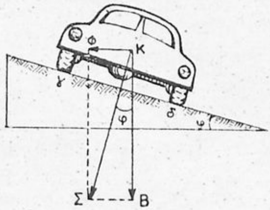
Πειραματικαὶ διαπιστώσεις. Διὰ τὴν πειραματικὴν ἀπόδειξιν τῶν νόμων παίρνομεν δύο δίσκους Δ καὶ Δ_1 ποὺ ἠμποροῦν νὰ περιστρέφωνται συγχρόνως μὲ τὴν βοήθειαν ἱμάντος λ (σχ. 50). Τὰ σφαιρίδια α, β, γ, δ εὑρίσκονται ἐντὸς ἐνσκαφῶν. α) Ἂν ἡ μᾶζα τοῦ β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μάζης τοῦ α, εὑρίσκωνται δὲ εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον, παρατηροῦμεν ὅτι, αὐξανομένης τῆς ταχύτητος περιστροφῆς, ἐκφεύγει πρῶτον ἡ β καὶ κατόπιν ἡ α. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς πείθει ὅτι εἰς μεγαλυτέραν μᾶζαν μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ ἀκτῖνα, ἡ Φ. Δ. εἶναι μεγαλυτέρα. Δὲν μᾶς δίδει μίαν ἄμεσον ἀπόδειξιν τῆς ἀναλογίας μεταξὺ δυνάμεως καὶ μάζης. β) Τὰ σφαιρίδια α, δ, (μὲ τὴν αὐτὴν μᾶζαν) ἔχουν τὴν αὐτὴν γραμμικὴν ταχύτητα· παρατηροῦμεν ὅτι πρῶτον ἐκφεύγει τὸ δ (μικροτέρα ἀκτίς). γ) Τὰ σφαιρίδια α καὶ γ (μὲ τὴν αὐτὴν μᾶζαν) ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα· παρατηροῦμεν ὅτι πρῶτον ἐκφεύγει τὸ α (μεγαλυτέρα ἀκτίς).



Σχ. 50.

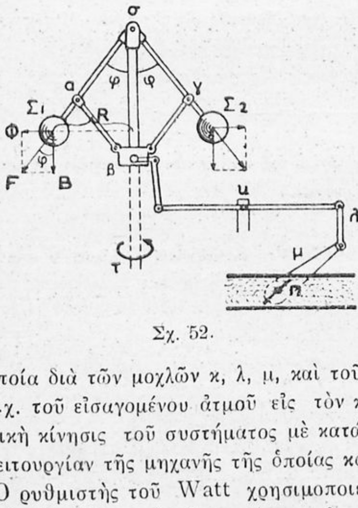
59. *Ἐφαρμογαὶ τῆς Φυγ. Δυνάμεως. α) Κλίσις δρόμου.* Ὅταν ἕνα ὄχημα διατρέχη στροφὴν ἑνὸς δρόμου, ἀναπτύσσεται φυγόκεντρος δύναμις ΚΦ (σχ. 51). Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν ἀνατροπὴν ἢ ὀλίσθησιν πρὸς τὰ ἔξω τοῦ ὀχήματος πρέπει νὰ ἐπιτύχωμεν ἡ συνισταμένη ΚΣ τῆς Φ καὶ τοῦ βάρους Β ***νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν περιοχὴν γδ***

στηρίξεως τοῦ ὀχήματος καὶ ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ κατάστρωμα τοῦ δρόμου (ἀποφυγὴ ὀλισθήσεως). Πρὸς τοῦτο δίδομεν εἰς τὸ κατάστρωμα τῆς ὁδοῦ μικρὰν κλίσιν φ. Ἡ κλίσις φ (τρίγωνον ΣΒΚ) δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $\text{εφ}\ \varphi = \frac{\Phi}{B} = \frac{m\upsilon^2/R}{mg} = \frac{\upsilon^2}{gR}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν, διὰ μίαν δεδομένην φ καὶ R, ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κατάλληλον ταχύτητα υ. Ἐν γένει διὰ νὰ ἀποφύγωμεν μεγάλην φυγόκεντρον δύναμιν κατὰ τὰς στροφάς, ἐλαττώνομε τὴν ταχύτητα· ἐπὶ πλέον ἐπιδιώκομεν κατὰ τὸ δυνατὸν ἡ ἀκτὶς R τοῦ καμπύλου δρόμου νὰ εἶναι μεγάλη (φυγόκεντρος δύναμις ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος).



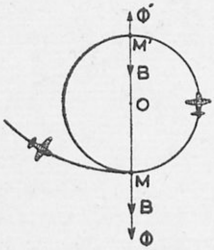
Σχ. 51.

β) ***Ρυθμιστὴς τοῦ*** Watt. Ἀποτελεῖται ἀπὸ κατακόρυφον στέλεχος στ (σχ. 52), ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει στερεωθῆ ἓν ἀρθρωτὸν παραλληλόγραμμον. Ἡ μία κορυφὴ (σ) εἶναι παγίως στερεωμένη, ἐνῶ ἡ ἄλλη (β) ἠμπορεῖ νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ στελέχους. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν ράβδων σα, σγ, εἶναι προσηρμοσμέναι δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι $\Sigma_1\ \Sigma_2$. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ στελέχους στ, ὅταν ἡ γωνιώδης ταχύτης αὐξάνῃ αἱ σφαῖραι ἀπομακρύνονται, ὅταν ἐλαττοῦται πλησιάζουν. Ἡ μετακίνησις αὐτὴ τῶν σφαιρῶν δημιουργεῖ παλινδρομικὴν κίνησιν τοῦ σύρτου β (ἄνω - κάτω) ἡ ὁποία διὰ τῶν μοχλῶν κ, λ, μ, καὶ τοῦ πτερυγίου π ρυθμίζει τὴν ποσότητα π.χ. τοῦ εἰσαγομένου ἀτμοῦ εἰς τὸν κύλινδρον ἀτμομηχανῆς. Ἡ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ συστήματος μὲ κατάλληλον σύνδεσιν παράγεται ἀπὸ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς τῆς ὁποίας καὶ τὴν ταχύτητα ρυθμίζει αὐτομάτως. Ὁ ρυθμιστὴς τοῦ Watt χρησιμοποιεῖται καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις ὅπως διὰ τὴν εἰσαγωγὴν ἀντιστάσεως εἰς κύκλωμα, διὰ τὴν αὐτόματον λειτουργίαν τροχοπέδης κλπ. Ἡ γωνία φ μὲ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω τῶν Σ_1, Σ_2 (τριγ. Σ_1 BF) συνδέεται μὲ τὴν σχέσιν : $\text{εφ}\ \varphi = \frac{\Phi}{B} = \frac{m\omega^2 R}{m \cdot g} = \omega^2 R/g$ (1)· διότι θὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία ὅταν ἡ συνισταμένη τοῦ βάρους Β καὶ τῆς φυγοκέντρου Φ εὑρίσκεται κατὰ μῆκος τῆς ράβδου $\sigma\Sigma_1$. Ἂν $\sigma\Sigma_1 = \varrho$ καὶ ἐπειδὴ $R = \varrho \cdot \text{ημ}\varphi$ ἡ (1) γίνεται: $\text{εφ}\varphi = \frac{\omega^2 . \varrho . \text{ημ}\varphi}{g}$ ἢ $\text{συν}\varphi = \frac{g}{\omega^2 \varrho}$.



Σχ. 52.

γ) Εἰς τὰ ποδηλατοδρόμια ἡ κίνησις ἐπὶ κυκλικῶν κατακορύφων (ἀνακύκλησις) δρόμων καὶ ἐπὶ κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν (γύρος τοῦ θανάτου) ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως.



Σχ. 53.

Παράδειγμα. «Ἀεροπλάνον καθέτου ἐφορμήσεως ἔχει ταχύτητα 720km/h τὴν στιγμὴν ποὺ ἀρχίζει νὰ ἐκτελῇ κατακόρυφον ἀνακύκλησιν ἀκτῖνος 600m. Ἐὰν ὁ πιλότος ἔχει βάρος 70 kg*, πόση ἡ συνολικὴ δύναμις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ οὗτος ἐπὶ τοῦ καθίσματός του. α) Εἰς τὴν βάσιν M τῆς ἀνακυκλήσεως καὶ β) εἰς τὴν κορυφὴν M′ αὐτῆς, ὅπου ἡ ταχύτης ἔχει ἐλαττωθεῖ εἰς τὸ $^1/_4$ τῆς ἀρχικῆς ($g=10m/sec^2$)».

(Σχολὴ Χημικῶν Πολυτεχνείου 1952).

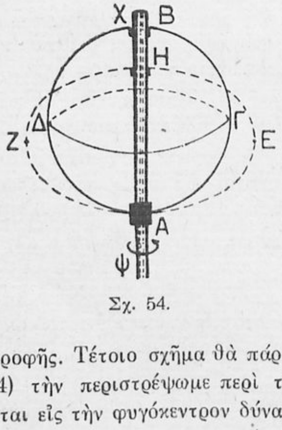
Λύσις. α) Ἡ φυγόκεντρος εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον M τῆς ἀνακυκλήσεως (σχ. 53), εἶναι: $\Phi = m \cdot \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{70000gr\,(20000cm/sec)^2}{60000cm} = \frac{14\cdot 10^8}{3}\,dyn = \frac{14\cdot 10^8}{3}$: $: 10^6 kg^* = 466{,}66 kg^*$ $\left(\upsilon = 720\,\frac{km}{h} = 20.000\,\frac{cm}{sec}\right)$. Συνεπῶς εἰς τὴν βάσιν M τῆς ἀνακυκλήσεως ἡ ὁλικὴ δύναμις εἶναι: $F = MB + M\Phi = 70 + 466{,}66 = 536{,}66 kg^*$.

β) Εἰς τὴν κορυφὴν M′ τῆς ἀνακυκλήσεως ἡ φυγόκεντρος εἶναι:

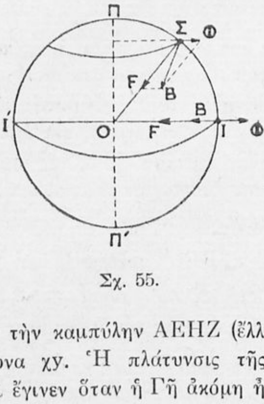
$$\Phi = m\,\frac{\upsilon^2}{R} = \frac{70.000gr\,(5000cm/sec)^2}{60.000cm} = \frac{175}{6}\cdot 10^6\ dyn = 29{,}17\ kg^*$$

$\left(\upsilon = \frac{20.000cm\cdot sce^{-1}}{4} = 5000\ cm\cdot sec^{-1}\right)$ καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ καθίσματος ἀσκουμένη δύναμις εἶναι, $F = M'B - M'\Phi' = 70kg^* - 29{,}17kg^* = 40{,}83kg^*$.

60. Ἀποτελέσματα τῆς Φ. Δυνάμεως.—α) ***Πλάτυνσις τῆς Γῆς.*** Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σχῆμα τῆς Γῆς εἶναι ἐλλειψοειδὲς ἐκ



Σχ. 54.



Σχ. 55.

περιστροφῆς. Τέτοιο σχῆμα θὰ πάρωμε ἂν τὴν καμπύλην ΑΕΗΖ (ἔλλειψις) (σχ. 54) τὴν περιστρέψωμε περὶ τὸν ἄξονα χυ. Ἡ πλάτυνσις τῆς Γῆς ὀφείλεται εἰς τὴν φυγόκεντρον δύναμιν καὶ ἔγινεν ὅταν ἡ Γῆ ἀκόμη ἦτο εἰς ρευστὴν κατάστασιν. Πράγματι, ὅταν ὁ ἄξων χy μὲ τὸ κυκλικὸ χαλύβδινον ἔλασμα ΑΓΒΔ στρέφεται παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Β πλησιάζει πρὸς τὸ Α καὶ τὸ ἔλασμα μᾶς δίδει τὴν εἰκόνα ἐλλειψοειδοῦς ΑΕΗΖ καὶ ὄχι σφαίρας. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ΑΕΗΖ στρέφονται μὲ τὴν αὐτὴ γωνιώδη ταχύτητα ἀλλὰ ἐπὶ περιφερειῶν μὲ διαφορετικὰς ἀκτίνας. Τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἔχουν τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα περιφορᾶς καὶ συνεπῶς τὴν μεγαλυτέραν φυγόκεντρον δύναμιν.

β) ***Ἐκτροπὴ τῆς κατακορύφου.*** Ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως ΣF ἕλξεως τοῦ σώματος Σ ὑπὸ τῆς Γῆς (σχ. 55) εἶναι ἡ ἀκτὶς ΣΟ τῆς Γῆς. Ἐπὶ τοῦ Σ ἐνεργεῖ καὶ ἡ φυγόκεντρος ΣΦ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς ΠΠ΄. Συνεπῶς ἡ διεύθυνσις τοῦ φαινομένου βάρους εἶναι ἡ συνισταμένη ΣΒ τῶν ΣΦ καὶ ΣF. Ὥστε ἡ κατακόρυφος τῶν σωμάτων δὲν συμπίπτει μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς, παρὰ μόνον εἰς τὸν Ἰσημερινόν.

Ἀσκήσεις

I

1) Σῶμα μάζης 300gr κινεῖται ὁμαλῶς ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 60cm μὲ ταχύτητα 1m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις.

2) Ὑλικὸν σημεῖον βάρους 10gr* κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος 2,5m, μὲ σταθερὰν ταχύτητα 2m/sec. Ποία ἡ φυγόκεντρος δύναμις. ***(Μαθηματικὴ Σχολὴ 1948).***

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ὑλικοῦ σημείου μάζης 1gr εὑρισκομένου εἰς τὸν ἰσημερινὸν τῆς Γῆς. (μέση ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι $R=6370Km$)

4) Κινητὸν ἔχει μᾶζαν 220gr καὶ κινεῖται ἐπὶ περιφερείας μὲ $\omega=2$ rad/sec. Ἂν ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος εἶναι 8400 dyn, νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ἀκτὶς περιστροφῆς β) ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καὶ γ) ἡ συχνότης.

5) Μᾶζα 1kg κινεῖται ἐπὶ περιφερείας ἀκτῖνος 0,6m καὶ ἐκτελεῖ μίαν στροφὴν εἰς 2 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις μὴ ἐνεργούσης ἑτέρας δυνάμεως. ***(Σχολὴ Εὐελπίδων 1947).***

II

6) Μᾶζα 5kg προσδεδεμένη εἰς σχοινίον περιστρέφεται ἐν εἴδει σφενδόνης ἐκτελοῦσα μίαν στροφὴν ἀνὰ sec. Ποῖον τὸ μέγιστον δυνατὸν μῆκος τοῦ σχοινίου ἂν τοῦτο ἀντέχῃ εἰς τάσιν 1000 μονάδων χωρὶς νὰ θραυσθῇ. ***(Σχολὴ Πολ. Μηχανικῶν 1947).***

7) Ἀτμάμαξα μάζης 7000kg κινεῖται ἐπὶ καμπύλου τμήματος τῆς σιδηροτροχιᾶς ἀκτῖνος καμπυλότητος $R=100m$, μὲ ταχύτητα $v=7m/sec$. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σιδηροτροχιῶν εἶναι 1,435m. Λόγῳ τῆς ἀναπτυσσομένης φυγοκέντρου δυνάμεως ἡ ἐξωτερικὴ τροχιὰ τοποθετεῖται ὑψηλότερον τῆς ἐσωτερικῆς. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ ὕψους εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ τῆς τροχιᾶς ἵνα ἐξουδετερωθῇ ἡ ἐπίδρασις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. ***(Στρατιωτικὴ Ἰατρικὴ 1952).***

8) Δοχεῖον πλῆρες ὑγροῦ εἶναι προσδεδεμένον εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου μήκους 1,2m. Ζητεῖται ἡ γωνιακὴ ταχύτης ὑπὸ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στρέφεται ἐπὶ κατακορύφου κύκλου ἵνα μὴ πίπτῃ τὸ ὑγρόν. ***(Σχ. Πολ. Μηχανικῶν 1950).***

III

9) Βαρὺ σφαιρίδιον μάζης m εὑρίσκεται ἐντὸς κοίλης σφαίρας ἀκτῖνος R, ἡ

ὁποία στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα μὲ περίοδον Τ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ σφαιριδίου (δηλαδὴ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν τῆς σφαίρας) καὶ ἡ πίεσις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ σφαιρίδιον ἐπὶ τῆς σφαίρας. Ἐφαρμογή : m = 5gr. R = =40cm, ω = 6 rad/sec. (*Πολυτεχνεῖον 1933).*

10) Εἰς τόπον κείμενον ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς ἐκσφενδονίζεται βλῆμα μὲ διεύθυνσιν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ ἰσημερινοῦ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης ἐκσφενδονήσεως οὕτως ὥστε νὰ κινῆται περὶ τὴν Γῆν ἰσοταχῶς. ($g = 980 m/sec^2$, R = 6370km, ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

11) Ποία θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἡ ταχύτης περιφορᾶς τῆς Γῆς ὑποτιθεμένης σφαιρικῆς, ἵνα τὸ βάρος σώματος, εἰς τόπον πλάτους 45°, εἶναι μηδέν ; Τί θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ σῶμα τοῦτο ἂν εὑρίσκετο εἰς τὸν ἰσημερινόν ; (Ἰσημερινὸς=40000km, g εἰς τὸ ἰσημερινὸν $979 m/sec^2$).

Πτῶσις τῶν σωμάτων.

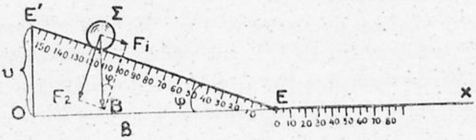
61. *Πτῶσις τῶν σωμάτων εἰς τὸ κενόν. Τὸ φαινόμενον τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων λόγῳ τοῦ βάρους των πρὸς τὴν Γῆν, ὅταν ἀφεθοῦν ἀπὸ ἕνα ὕψος, λέγεται πτῶσις.* Ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων γίνεται μέσα εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπηρεάζεται ἀπ' αὐτήν. Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὰ ἀποτελέσματα τῆς βαρύτητος μόνον, πρέπει νὰ δημιουργήσωμεν περιοχὴν κενὴν ἀπὸ ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα ἢ τοὐλάχιστον νὰ λάβωμεν σώματα εἰς τὰ ὁποῖα λόγῳ τοῦ σχήματος (π.χ. σφαιρικὸν) καὶ λόγῳ τῆς πυκνότητος (π.χ. μεταλλικὰ σώματα), ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἀέρος κατὰ τὴν πτῶσιν των καὶ διὰ μικρὸν ὕψος εἶναι ἀνεπαίσθητος.

Ἀπὸ τὴν πειραματικὴν μελέτην τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς βαρύτητος, ὅπως καὶ προηγουμένως ἀναφέραμεν εἰς τὴν παράγραφον 52, συμπεραίνομεν ὅτι, ***ὁ λόγος τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος πρὸς τὴν μᾶζαν του δηλ. ἡ ἐπιτάχυνσις*** g $\left(\frac{B}{m} = g\right)$, ***εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σώματα εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον καὶ δι' ἕνα σχετικῶς περιωρισμένον ὕψος, μὲ διεύθυνσιν τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου*** $\left(\frac{B_1}{m_1} = \frac{B_2}{m_2} = \ldots = g\right)$. ***Συνεπῶς ἡ πτῶσις εἶναι κίνησις εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.***

62. *Πειραματικὰ ἐξαγόμενα.* — α) ***Σωλὴν τοῦ Νεύτωνος.*** Μέσα εἰς ἕνα ὑάλινον σωλῆνα κλειστὸν καὶ εἰς τὰ δύο του ἄκρα θέτομεν διάφορα σώματα π. χ. κομματάκια σιδήρου, χαρτιοῦ κλπ. Ἀφαιροῦμε τὸν ἀέρα ἀπὸ τὸν σωλῆνα δι' ἀεραντλίας καὶ ἀναστρέφομεν τὸν σωλῆνα. Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σώματα φθάνουν συγχρόνως εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο συμπεραίνομεν ὅτι : ***«ὅλα τὰ σώματα εἰς τὸ κενόν, ἂν ἀφεθοῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, πίπτουν συγχρόνως».*** Τὸ ἐξαγόμενον ὅμως αὐτὸ δὲν μᾶς καθορίζει τὸ εἶδος τῆς κινήσεως κατὰ τὴν πτῶσιν.

β) ***Τὸ εἶδος τῆς κινήσεως*** (ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη) ἀποδεικνύομεν πειραματικῶς διὰ διαφόρων μεθόδων ὅπως : τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἡ μηχανή τοῦ Atwood, ἡ μηχανὴ τοῦ Morin, ἡ φωτογραφικὴ μέθοδος. Εἰς ὅλας αὐτὰς τὰς περιπτώσεις ἐπιτυγχάνομεν μετρήσεις. Μὲ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὴν μηχανὴν τοῦ Atwood ἐλαττώνομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν, ἡ ὁποία κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη καὶ ἔτσι αἱ μετρήσεις γίνονται εὔκολα. Ὅταν δὲν κάνωμε μετρήσεις ἁπλῶς διαπιστώνομεν ὅτι ἡ πτῶσις εἶναι μία κίνησις εὐθύγραμμος, ἡ ὁποία γίνεται κατὰ τὴν κατακόρυφον (νῆμα τῆς στάθμης).

63. Κεκλιμένον ἐπίπεδον.—***Κάθε ἐπίπεδον Ε΄Ε τὸ ὁποῖον σχηματίζει μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μίαν γωνίαν φ διάφορον τῆς ὀρθῆς, λέγεται κεκλιμένον ἐπίπεδον*** (σχ. 56). Ἀφήνομεν ἀπὸ μίαν θέσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου Ε΄ Ε, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι τελείως λεῖον, νὰ κυλίεται μία μεταλλικὴ σφαῖρα Σ.



Σχ. 56.

α) Ἔστω ὅτι εἰς τὸ Ε ἡ σφαίρα φθάνει εἰς 1 sec καὶ ὅτι τὸ διάστημα ποὺ διήνυσε εἶναι 20cm. Ἂν τοποθετήσωμεν τὴν σφαῖραν εἰς ἀπόστασιν 80cm ἀπὸ τοῦ Ε, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι φθάνει εἰς τὸ Ε εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου sec· εἰς ἀπόστασιν 180cm εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου sec κ.ο.κ. Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι : ***τὰ διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων*** $\left(s = \frac{1}{2}\gamma t^2\right)$. Πράγματι :

$$t = 1 sec \qquad s_1 = 20 \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 1^2 = 20 cm$$

$$t = 2 sec \qquad s_2 = 20 \cdot 2^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2^2 = 80 cm$$

$$t = 3 sec \qquad s_3 = 20 \cdot 3^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 3^2 = 180 cm$$

. . . .

β) Ἀκολούθως παρακολουθοῦμεν τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου Εx ἐπὶ τοῦ ὁποίου κινεῖται ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως, διότι οὐδεμία δύναμις ἐνεργεῖ (τὸ βάρος ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ Εx).

Ἂν εἰς τὸ σημεῖον Ε φθάσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου sec, ***τότε ἐπὶ τοῦ*** Εx ***εἰς 1*** sec ***διανύει διάστημα 40*** cm. Ἂν φθάσῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου sec, τότε ἐπὶ τοῦ Εx εἰς 1 sec ***διανύει διάστημα 80*** cm, εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἐπὶ 1 sec ***διανύει διάστημα 120*** cm κλπ. Τὰ διαστήματα ὅμως ἐπὶ τοῦ Εx, 40, 80, 120 cm κλπ. εἶναι αἱ ταχύτητες, ποὺ εἶχεν ἀποκτήσει ἡ σφαῖρα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς τὸ τέλος τοῦ 1ου, 2ου, 3ου κλπ.

sec. Ἄρα ***αἱ ταχύτητες ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων*** ($\upsilon = \gamma \cdot t$).

$t = 1$ sec $\qquad \upsilon_1 = 40 \cdot 1 = 40$ cm
$t = 2$ sec $\qquad \upsilon_2 = 40 \cdot 2 = 80$ cm
$t = 3$ sec $\qquad \upsilon_3 = 40 \cdot 3 = 120$ cm

. . . .

Συμπέρασμα: Ἀπὸ τὰ προηγούμενα πειράματα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κίνησις ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 40$ cm/sec. ***Ἑπομένως ἡ κινοῦσα δύναμις*** F_1 ***εἶναι σταθερά.***

γ) Ἂς ἀναλύσωμεν τὴν δύναμιν ***(βάρος)*** ΣΒ (σχ. 56) εἰς τὴν ΣF_2 κάθετον ἐπὶ τὸ Ε΄Ε καὶ τὴν ΣF_1 παράλληλον πρὸς τὸ ΕΕ΄. Ἡ ΣF_2 ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν τοῦ ΕΕ΄ καὶ συνεπῶς ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι ἡ F_1. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Sigma F_1 B$, Ε΄ΟΕ, ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma F_1}{\Sigma B} = \frac{OE'}{EE'} = \lambda \text{ καὶ}$$

$$F_1 = \lambda \cdot B \text{ ἢ } F_1 = B\,\eta\mu\,\varphi \quad (1) \quad [\eta\mu\,\varphi = \lambda]$$

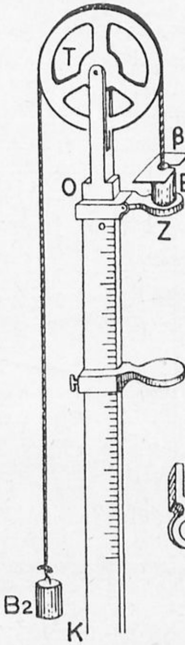
Ἐπειδὴ ἡ F_1 ***εἶναι σταθερὰ καὶ τὸ βάρος Β θὰ εἶναι δύναμις σταθερά.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ g, γνωρίζομεν ὅτι: $F_1 = m\gamma$ καὶ $B = mg$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται $m \cdot \gamma = \lambda \cdot m.g$ ἢ $m \cdot \gamma = mg\eta\mu\varphi$ καὶ $\gamma = \lambda g$ ἢ $\gamma = g\eta\mu\varphi$ (2).

Σημείωσις. Εἰς τὸ πείραμά μας χρησιμοποιοῦμε σφαῖραν, διότι παρουσιάζει τὴν μικροτέραν τριβήν. Ἡ μέτρησις τοῦ χρόνου γίνεται διὰ καταλλήλου χρονομέτρου (μετρονόμος).

Παράδειγμα «Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κυλίεται σφαῖρα ἡ ὁποία διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τρίτου δευτερολέπτου τῆς κινήσεώς της διάστημα 0,5 m. Ποῖον διάστημα διήνυσε εἰς τὸ 2ον δευτερόλεπτον καὶ ποῖος ὁ λόγος ὕψους καὶ μήκους τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου» ***(Μαθηματικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν 1949).***

Λύσις: Ἂν S_3 τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὰ τρία δευτερόλεπτα καὶ S_2 τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς τὰ δύο δευτερόλεπτα θὰ ἔχωμε: $S_3 = {}^1/_2\, \gamma \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\gamma$ καὶ $S_2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot 2^2 = 2\gamma$. Τὸ διάστημα ποὺ διήνυσε κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τρίτου δευτερολέπτου εἶναι $S_3 - S_2 = \frac{9}{2}\gamma - 2\gamma = \frac{5\gamma}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $\frac{5\gamma}{2} = 0{,}5$ m, ἔχομε $\gamma = 0{,}2\text{m/sec}^2$. Τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον εἶναι $S_2 - S_1 = 2 \cdot 0{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$m. Ἀπὸ τὸν τύπον $\gamma = \lambda \cdot g$ ἔχομε $\lambda = \frac{\gamma}{g}$ ἄρα ὁ λόγος ὕψους πρὸς μῆκος εἶναι $\lambda = \frac{0{,}2}{g}$.

64. Μηχανὴ τοῦ Atwood. α) Ἡ μηχανὴ αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ τροχαλίαν Τ ἐλαφράν, ποὺ περιστρέφεται περὶ ὁριζόντιον ἄξονα μ' ἐλαχίστην τριβήν. Ἡ τροχαλία εἶναι τοποθετημένη εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον βαθμολογημένης δοκοῦ ΟΚ ἡ ὁποία εἶναι κατακόρυφος (σχ. 57). Ἀπὸ τὴν αὔλακα τῆς τροχαλίας περνᾶ λεπτὸν νῆμα μετάξινον εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ἔχουν προσδεθῆ δύο ἴσα βάρη B_1, B_2. Τὰ δύο ἴσα βάρη B_1, B_2, ἰσορροποῦν εἰς οἱανδήποτε θέσιν. Ἂν εἰς τὸ ἕνα βάρος π. χ. εἰς τὸ B_1 θέσωμεν μικρὸν πρόσθετον βάρος β, τὸ σύστημα τῶν σωμάτων B_1, B_2, β κινεῖται ὑπὸ τὴν ***ἐπενέργειαν δυνάμεως ἴσης πρὸς τὸ β***. Εἰς τὸ 0 τῆς βαθμολογίας τῆς δοκοῦ, ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον ἀφετηρίας κινήσεως. Τὸ σύστημα κινεῖται ὅταν ἀποσπάσωμε τὸ μικρὸν ὑποστήριγμα Ζ. Κατὰ μῆκος τῆς δοκοῦ κοχλιώνομεν τὸν πλήρη δίσκον Δ, διὰ νὰ δεχώμεθα τὸ κινούμενον σύστημα B_1, β εἰς τὰς θέσεις ποὺ θέλομεν. Χρησιμοποιοῦμεν ἐπίσης καὶ τὸν δακτύλιον Δ' τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ὀλίγον μεγαλυτέρα τῶν βαρῶν B_1 καὶ B_2, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἐλευθέρως ἐνῷ τὸ β δὲν διέρχεται. Πέραν τοῦ Δ' κινεῖται μόνον τὸ σύστημα B_1, B_2 χωρὶς ἐπενέργειαν δυνάμεως, ***μὲ ὁμαλὴν εὐθύγραμμον κίνησιν.***



Σχ. 57.

β) Ἡ κινοῦσα δύναμις $\beta = \mu \cdot g$ (μ = ἡ μᾶζα τοῦ β) ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης $2m+\mu$ τῶν B_1, B_2 καὶ β. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν $F = m \cdot \gamma$ ἔχομεν: $\beta = (2m+\mu)\cdot\gamma$ ἢ $\mu \cdot g = (2m+\mu)\gamma$ καὶ $\gamma = g \cdot \dfrac{\mu}{2m+\mu}$ (1).

Ἡ πειραματικὴ ἐργασία ἐπὶ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood εἶναι ἡ αὐτὴ ὅπως καὶ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν τύπων $\gamma = g\eta\mu\varphi$ καὶ $\gamma = g \cdot \dfrac{\mu}{2m+\mu}$ προσδιορίζομεν διὰ μετρήσεως τοῦ γ τὴν τιμὴν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g. Ὅσον λεπτὰ ὅμως καὶ ἂν εἶναι τὰ πειράματα, διὰ διαφόρους λόγους (τριβαὶ κ. ἄ.), αἱ λαμβανόμεναι τιμαὶ δὲν εἶναι ἀκριβεῖς. Ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ g λαμβάνομεν διὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς.

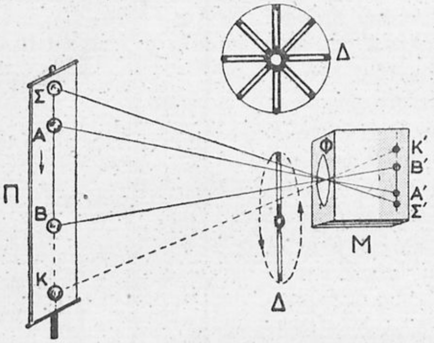
Παράδειγμα. «Ἕκαστον τῶν ἴσων βαρῶν τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood εἶναι 49gr*. Πρόσθετον βάρος 2gr* ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐπὶ 2 sec, εἰς τὸ τέλος τῶν ὁποίων συγκρατεῖται ὑπὸ τοῦ δακτυλίου Δ'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁλικὸν διάστημα ἐπὶ συνολικὸν χρόνον κινήσεως 5 sec, $g = 10 m/sec^2$».

Λύσις. Ἡ ἐπιτάχυνσις ἐπὶ τῆς μηχανῆς, κατὰ τὸν τύπον (1) εἶναι:

$$\gamma = 10 m/sec^2 \cdot \frac{2gr}{(2\cdot 49+2)gr} = \frac{1}{5}\ m/sec^2$$

Κατὰ τὰ 2 πρῶτα sec τῆς κινήσεως τὸ διάστημα εἶναι $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2^2 =$ $= 0{,}4m$. Εἰς τὰ ἑπόμενα 3sec ἡ κίνησις εἶναι ὁμαλὴ μὲ ταχύτητα ἐκείνην ποὺ ἀπέκτησεν εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου sec· δηλ. $\upsilon = 2 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}4m/sec$· ἄρα τὸ διάστημα εἰς τὰ 3 αὐτὰ sec εἶναι $S' = 0.4 \cdot 3 = 1{,}2m$ καὶ τὸ ὁλικὸν διάστημα $S = S_2 + S' = 0{,}4 + + 1{,}2 = 1{,}6m$.

65. Φωτογραφικὴ μέθοδος. Ἔμπροσθεν ἑνὸς μαύρου κατακορύφου πετάσματος Π ἀφήνομεν νὰ πέσῃ λευκὴ μεταλλικὴ σφαῖρα Σ (σχ. 58). Μὲ τὴν φωτογραφικὴ μηχανὴ Μ λαμβάνομεν φωτογραφίας τῆς Σ κατὰ τὴν πτῶσιν της ἀνὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα ὡς ἑξῆς: Πρὸ τοῦ φακοῦ τῆς μηχανῆς στρέφεται ἰσοταχῶς δίσκος ἀδιαφανής, ὁ ὁποῖος φέρει ἀκτινοειδῶς σχισμὰς ἰσαπεχούσας. Ἂν π.χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν σχισμῶν εἶναι 8 καὶ ἡ συχνότης περιστροφῆς εἶναι $4\,sec^{-1}$, τότε θὰ λαμβάνωμεν φωτογραφίαν τῆς Σ ἀνὰ $\frac{1}{32}$ τοῦ sec. Ἂν Σ, Α, Β, ... Κ εἶναι αἱ θέσεις τῆς σφαίρας ὅταν λαμβάνωμεν τὰς φωτογραφίας, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως τὰ εἴδωλα Σ′, Α′, Β′ . . . . . Κ′. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΣΦ, Α′Σ′Φ κ. λ. π. ἔχομεν:

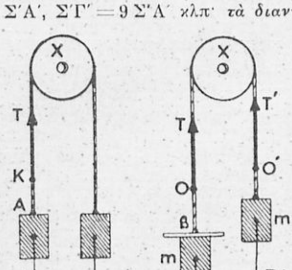


Σχ. 58.

$$\frac{Σ'A'}{ΣA} = \frac{Σ'B'}{ΣB} = \dots = \varrho \text{ και } Σ'A' = \varrho \cdot ΣA,\ Σ'B' = \varrho \cdot ΣB, \cdots$$

Ἀπὸ τὴν μέτρησιν τῶν διαστημάτων Σ′Α′, Σ′Β′, ··· τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνάλογα τῶν ΣΑ, ΣΒ κλπ. διαπιστώνομεν ὅτι Σ′Β′ = 4 Σ′Α′, Σ′Γ′ = 9 Σ′Α′ κλπ· ***τὰ διανυόμενα δηλ. διαστήματα ὑπὸ τοῦ εἰδώλου εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων***· τὸ αὐτὸ συνεπῶς συμβαίνει καὶ διὰ τὰ διαστήματα ΣΑ, ΣΒ, . . . Ἄρα ἡ πτῶσις τῆς σφαίρας εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Ἀπὸ τὸ πείραμα τοῦτο εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τῆς σφαίρας.

66. Τάσις νήματος. Ἂν ἀπὸ τὰ ἄκρα Α τοῦ νήματος τοῦ διερχομένου διὰ τῆς τροχαλίας Χ (σχ. 59α) ἔχουν ἐξαρτηθῇ δύο ἴσα βάρη, π.χ. 10kg* ἕκαστον, λέγομεν ὅτι τὸ νῆμα ὑφίσταται μίαν τάσιν 10kg*, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετος τοῦ βάρους. Ἂν θεωρήσωμεν τὸ νῆμα ἀποκοπτόμενον ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Κ, διὰ νὰ μὴ κινηθῇ π. χ. τὸ Α πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ δύναμις ΚΤ ἀντίθετος τοῦ βάρους Β. ***Ἡ δύναμις αὐτή, ἡ ὁποία διατηρεῖ τὴν προηγουμένην κατάστασιν ἰσορροπίας, εἶναι ἡ τάσις τοῦ νήματος.*** Μὲ τὴν προσθήκην τοῦ βάρους β



(α) Σχ. 59. (β)

εἰς τὸ Β (σχ. 59β) τὸ σύστημα $B+B_1+\beta$ τίθεται εἰς κίνησιν. Ἂς ἐκτιμήσωμεν τὰς δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν π. χ. εἰς τὸ κατερχόμενον σύστημα $B+\beta$. α) Ἡ δύναμις ἀδρανείας εἶναι $(m+\mu)\gamma$ ὅπου γ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως (m καὶ μ μᾶζαι τῶν Β καὶ β). β) Ἡ κινοῦσα δύναμις F εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ βάρους $B+\beta$ καὶ τῆς τάσεως ΘΤ. Ἐπειδὴ $F=(m+\mu)\gamma$ θὰ ἔχωμεν :

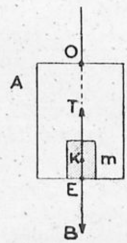
$$(m+\mu)\gamma=B+\beta-T \quad \text{ἢ} \quad T=B+\beta-(m+\mu)\gamma=$$
$$=(m+\mu)g-(m+\mu)\gamma. \text{ Καὶ } T=(m+\mu)(g-\gamma) \qquad (1)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ διὰ τὴν ἀνερχομένην μᾶζαν m_1 εὑρίσκομεν $m_1\cdot\gamma=$ $=T'-B_1$ ἢ $T'=m_1\gamma+B_1$ καὶ (2) $T'=m_1(g+\gamma)=m(g+\gamma)$ (διότι $m=m_1$).

Γνωρίζομεν ὅτι $\gamma=\dfrac{\mu g}{2m+\mu}$, ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν, $T=\dfrac{2m(m+\mu)g}{2m+\mu}=T'$: ***δηλαδὴ αἱ τάσεις καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ νήματος εἶναι ἴσαι.***

Καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ***ἡ τάσις ἰσοῦται μὲ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ σημεῖον π. χ. Ο διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ προηγουμένη κατάστασις κινήσεως τοῦ συστήματος Β+β ἂν θεωρήσωμεν τὸ νῆμα ἀποκοπτόμενον εἰς τὸ Ο.***

Ἐφαρμογή : Κινούμενον ἀσανσέρ. Ἂν ὁ ἀνελκυστὴρ Α (σχ. 60) κινῆται μὲ μίαν ἐπιτάχυνσιν γ (θεωροῦμεν θετικὰς τὰς ἐπιταχύνσεις μὲ φορὰν πρὸς τὰ κάτω) θὰ ὑπολογίσωμεν τὰς δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος Κ. α) Ἡ δύναμις ἀδρανείας εἶναι mγ. β) Τὸ σῶμα Κ κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως F διαφορᾶς τῶν δυνάμεων τοῦ βάρους Β καὶ τῆς ἀντιδράσεως ΕΤ τοῦ δαπέδου τοῦ ἀνελκυστῆρος. Ἄρα $m\gamma=B-T$ καὶ $T=B-m\gamma=m(g-\gamma)$. (3). Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ μᾶς παρέχει τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν καταπονεῖται τὸ δάπεδον, διότι ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι ἀντίθετος τῆς ΕΤ.



Σχ. 60.

Περιπτώσεις. 1. Ἂν $\gamma=0$ δηλ. ἂν ὁ ἀνελκυστὴρ ἠρεμῇ ἢ κινῆται ὁμαλῶς, ἔχομεν ἀπὸ τὴν (3) $T=B$ δηλ. τὸ δάπεδον καταπονεῖται μὲ δύναμιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος τοῦ Κ.

2. α) Ἂν $0<\gamma<g$, δηλ. ἂν ὁ ἀνελκυστὴρ κατέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν μικροτέραν τοῦ g ἔχομεν $0<B-m\gamma=T<B$, δηλαδὴ τὸ δάπεδον καταπονεῖται μὲ δύναμιν μικροτέραν τοῦ βάρους.

β) Ἂν $g\leq\gamma$, τότε $T\leq 0$ καὶ τὸ δάπεδον οὐδόλως καταπονεῖται.

3) Ἂν $\gamma<0$ δηλ. ἂν ὁ ἀνελκυστὴρ ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $|\gamma|$, τότε $T>B$ δηλ. ἡ καταπόνησις εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ βάρους.

Παράδειγμα. «Ἄνθρωπος βάρους 70 kg* εὑρίσκεται ἐντὸς ἀνελκυστῆρος. Ποίαν δύναμιν (καταπόνησιν) ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ δαπέδου τοῦ ἀνελκυστῆρος εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις : α) ὅταν ὁ ἀνελκυστὴρ κινῆται μὲ σταθερὰν ταχύτητα. β) Ὅταν ἀνερχόμενος μὲ σταθερὰν ταχύτητα ὑφίσταται ἐπιβράδυνσιν $2m/sec^2$. γ) Ὅταν κατέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $11m/sec^2$ ($g=10m/sec^2$). δ) Ὅταν ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma=-2m/sec^2$.

Λύσις. α) Ὅταν κινῆται μὲ σταθερὰν ταχύτητα ἔχομεν $\gamma=0$ καὶ ἑπομένως $T=B=70kg^*$. β) Ἡ ἐπιβράδυνσις κατὰ τὴν ἄνοδον ἔχει φορὰν πρὸς τὰ κάτω, ἄρα εἶναι θετική, ἑπομένως $T=70-70\cdot\dfrac{2}{10}=56$ kg*. γ) $T=70-70\cdot\dfrac{11}{10}=-7kg^*$ ἄρα οὐδόλως καταπονεῖται τὸ δάπεδον καὶ ὁ ἄνθρωπος ἐν σχέσει μὲ τὸν ἀνελκυστῆρα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἐπιτάχυνσιν $11-10=1m/sec^2$. δ) Ἐπειδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀρνητικὴ θὰ ἔχωμεν : $T=70+70\cdot\dfrac{2}{10}=84kg^*$.

Ἀσκήσεις

I

1) Σφαῖρα κυλίεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ g. Ζητεῖται ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου.

2) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου μὲ βάσιν 12m καὶ ὕψος 9m κινεῖται σφαῖρα· εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ αὕτη τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ($g=980cm/sec^2$).

3) Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood ἔχομεν $B_1=B_2=20$ gr.* Προστίθεται βάρος β ὁπότε τὸ σύστημα διανύει εἰς 4 sec διάστημα 12m. Ποῖον τὸ βάρος β ($g=980cm/sec^2$).

4) Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως καὶ εἰς ἓν σημεῖον Α τῆς τροχιᾶς του ἔχει ταχύτητα 14,70 m/sec καὶ εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον Β 26,46 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

5) Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood ἔχομεν $B_1=28gr^*$, $B_2=30gr^*$, θέτομεν δὲ ἐπὶ τοῦ B_1 βάρος $\beta=4gr^*$ καὶ ἀφήνομεν τὸ σύστημα νὰ κινηθῇ ἐπὶ 4 sec, ὁπότε ἀφαιροῦμε τὸ β. Μετὰ πόσον χρόνον τὸ σύστημα θὰ ἠρεμήσῃ καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.

6) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30^0 εὑρίσκεται σφαῖρα. Ἐπ' αὐτῆς ἐφαρμόζεται δύναμις 100 gr* σχηματίζουσα μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον γωνίαν 60^0. Ἂν ἡ σφαῖρα ἰσορροπῇ ποῖον τὸ βάρος της.

7) Ἀπὸ τὰ ἄκρα νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας κρέμονται δύο ἴσα βάρη ἕκαστον 580 gr.* Τὰ δύο αὐτὰ βάρη εὑρίσκονται ἀρχικῶς εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἀκολούθως θέτομεν εἰς τὸ ἓν πρόσθετον βάρος 18 gr*. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο σώματα θὰ ἀπέχουν μεταξύ των 180cm ;

8) Ἀνελκυστὴρ βάρους 5 ton* ἀνέρχεται κατακορύφως μὲ ἐπιτάχυνσιν $2m/sec^2$. Ζητεῖται πόση εἶναι ἡ τάσις τοῦ συρματοσχοίνου τοῦ ἀνελκυστῆρος εἰς kg* ($g=10m/sec^2$). ***(Σχολὴ Πολιτ. Μηχανικῶν Ἀθηνῶν 1954).***

II

9) Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood αἱ δύο ἴσαι μᾶζαι εἶναι 230 gr. ἑκάστη ἡ δὲ πρόσθετος μᾶζα εἶναι 10 gr. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διανυόμενον διάστημα κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ τετάρτου sec καὶ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα ἡ ταχύτης γίνῃ g/5 ($g=980 cm/sec^2$). ***(Φαρμακευτικὴ Ἀθηνῶν 1955).***

10) Εἰς τὰ ἄκρα νήματος μηχανῆς τοῦ Atwood εὑρίσκονται δύο μᾶζαι Μ καὶ Μ′ διαφορετικαί. Πρὸς τὸ μέρος τῆς δευτέρας καὶ εἰς μίαν ἀρχικὴν ἀπόστασιν l ἀπὸ τοῦ ἄνω ἄκρου τῆς τροχαλίας, τὸ νῆμα φέρει πρόσθετον σῶμα μάζης m, ἀρκετὰ μικρὸν ὥστε αὐτὸ νὰ μὴ διαταράσσῃ τὴν κίνησιν ὅταν διέρχεται ἀπὸ τὴν τροχαλίαν. Ἀφήνομε τὸ σύστημα νὰ κινηθῇ. Ἡ μᾶζα Μ σείρει τὸ σύστημα οὕτως ὥστε ἡ m ἀφοῦ ἀνέλθῃ μέχρι τῆς τροχαλίας περνᾷ ἀπὸ τὴν ἄλλην πλευράν.

Ζητεῖται μετὰ πόσον χρόνον ἡ μᾶζα m θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξεκίνησεν. Ἐφαρμογὴ $M=60gr$, $M'=30gr$, $m=10$ gr, $l=40cm$.

11) Ποδηλάτης μαζὶ μὲ τὸ ποδήλατον ἔχει βάρος 120 kgr* κινεῖται δὲ ἐπὶ 5 sec ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου ὑπὸ σταθερᾶς δυνάμεως 20 kgr*. Μετὰ τὸ πέμπτον δευτερόλεπτον εἰσέρχεται εἰς κατηφορικὸν δρόμον μὲ κλίσιν 1/150 καὶ κινεῖται ἐπ' αὐτοῦ ἐπὶ 10 sec. Ποῖον τὸ ὁλικὸν διάστημα καὶ ἡ τελικὴ ταχύτης. ($g=980cm/sec^2$).

12) Ἀνελκυστὴρ μὲ τὸ φορτίον του ζυγίζει 8,5 τόννους καὶ κατέρχεται μὲ ταχύτητα 4m/sec. Ἂν τὸ ὅριον θραύσεως τοῦ καλωδίου εἶναι 16 τόννοι, πόσον εἶναι τὸ βραχύτερον διάστημα, ποὺ πρέπει νὰ διανύσῃ μὲ ἐπιβράδυνσιν διὰ νὰ σταματήσῃ.

13) Σῶμα βάρους $B_1=270$ gr* ὀλισθαίνει ἄνευ τριβῆς ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ τίθεται εἰς κίνησιν ὑπὸ βάρους $B_2=40$ gr* ἐξηρτημένου ἀπὸ τὸ ἄκρον νήματος,

τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον συνδέεται μέσῳ τροχαλίας μὲ τὸ B_1. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος.

14) Σῶμα βάρους $B_1=360$ gr* ὀλισθαίνει ἄνευ τριβῆς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30^0. Τὸ B_1 συνδέεται διὰ νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας μὲ βάρος $B_2=160$ gr* ποὺ ἐνεργεῖ κατακορύφως. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ ἡ τάσις τοῦ νήματος.

15) Δύο κεκλιμένα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα μεταξύ των. Ἐπὶ τοῦ Π ὀλισθαίνει σφαῖρα Α συνδεδεμένη διὰ νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας, μετὰ σφαίρας Β ἴσης μάζης ἡ ὁποία ὀλισθαίνει ἐπὶ τοῦ Ρ. α) Ποία ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου Π ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος εἶναι $2{,}5\ m/sec^2$ (τριβὴ ἀμελητέα). β) Ποία ἡ τάσις τοῦ νήματος (Dijon).

16) Δοχεῖον ἔχει τὸ ἑξῆς σχῆμα. Ὁ ὁριζόντιος πυθμὴν αὐτοῦ ΒΓ ἔχει μῆκος 20 m. Τὰ πλάγια τοιχώματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι τοῦ αὐτοῦ μήκους 20 m, ἀλλὰ σχηματίζουν ἕκαστον μετὰ τοῦ ὁριζοντίου τμήματος γωνίαν 60^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς κινήσεως σφαίρας ἀφιεμένης ἐκ τοῦ σημείου Α εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ. Ἐπίσης νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος ἵνα ἡ σφαῖρα ἀφιεμένη ἐλευθέρα εἰς τὸ Α ἐπανέλθῃ εἰς αὐτὸ (τριβὴ ἀμελητέα). (***Μαθηματικὸν τμῆμα Ἀθηνῶν 1954***).

17) Σταθερὰ τροχαλία ἀμελητέας μάζης περιβάλλεται διὰ σχοινίου καὶ εἰς ἓν ἄκρον αὐτοῦ ἐξαρτᾶται σῶμα βάρους 5 kg*. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἄκρου τοῦ σχοινίου ἵνα τὸ σῶμα ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $2 m/sec^2$ ($g=10\ m/sec^2$) (***Σχ. Χημ. Μηχανικῶν 1955***).

18) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ χρόνοι οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται, ἵνα πῖπτον σῶμα διατρέξῃ τὴν κατακόρυφον διάμετρον ΑΓ ἑνὸς κύκλου καθὼς καὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, ὅταν ἡ χορδὴ ΒΓ σχηματίζῃ τυχοῦσαν γωνίαν φ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

(***Φυσικὸν τμῆμα Ἀθηνῶν 1954***)

19). Ἀπὸ ἀερόστατον τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται κατακορύφως μὲ ταχύτητα 90 m/min ἀφίεται νὰ πέσῃ βόμβα ἡ ὁποία φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἐκρήγνυται. Ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος παρέρχεται ἀπὸ τῆς στιγμῆς ποὺ γίνεται ἀντιληπτὸς ὁ κρότος εἰς τὸ ἀερόστατον εἶναι 11,5 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροστάτου ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 338 m/sec καὶ $g=9{,}81\ m/sec^2$. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ταχύτης τῆς βόμβας τὴν στιγμὴν τῆς ρίψεως εἶναι μηδέν.

20) Ἐπὶ τοῦ δαπέδου ἀνελκυστῆρος ὑφίσταται φορτίον 100 kg*. Ὁ ἀνελκυστὴρ κατὰ τὴν ἐκκίνησιν ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν $1\ m/sec^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη φόρτισις τοῦ δαπέδου τοῦ ἀνελκυστῆρος: α) εἰς περίπτωσιν ἀνόδου β) εἰς περίπτωσιν καθόδου. (***Σχ. Πολ. Μηχανικῶν 1955***).

21) Ἀνελκυστὴρ εὑρίσκεται εἰς βάθος 588 m ἐντὸς φρέατος ἔνθα $g=980$ C.G.S. Ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος ἐνεργεῖ δύναμις ἥτις προσδίδει ἐπιτάχυνσιν $\gamma=g/20$. Μετὰ παρέλευσιν χρόνου t ἡ τάσις τοῦ νήματος μεταβάλλεται ὥστε ἡ κίνησις νὰ εἶναι ἐπιβραδυνομένη μὲ ἐπιβράδυνσιν $\gamma'=g/10$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ χρόνος t ἵνα ὁ ἀνελκυστὴρ φθάσῃ εἰς τὸ στόμιον τοῦ φρέατος ἄνευ ταχύτητος.

(***Χημικὴ Σχολὴ Θεσσαλονίκης 1953***).

22) Σφαῖρα βάρους 10 kg* ἐξαρτᾶται διὰ λεπτοῦ νήματος ὁρίου θραύσεως 15 kg*. Σύρομεν τὴν σφαῖραν πρὸς τὰ ἄνω ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τοῦ ἄκρου τοῦ νήματος δύναμιν F μεταβλητῆς ἐντάσεως συναρτήσει τοῦ χρόνου $F=0{,}1t$. Ζητοῦνται: α) ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ θραυσθῇ τὸ νῆμα. β) τὸ ὕψος μέχρι τοῦ ὁποίου θὰ ἀνέλθῃ ἡ σφαῖρα ὅταν θραυσθῇ τὸ νῆμα. (***Σχ. Ἀρχιτεκτόνων 1951***).

23) Τροχαλία μηχανῆς τοῦ Adwood, τῆς ὁποίας ἡ μᾶζα θεωρεῖται συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειαν ἔχει ἀκτῖνα 10 cm καὶ μᾶζα 10 gr. Οἱ δύο κύλινδροι τῆς μηχανῆς ἔχουν μᾶζαν ἕκαστος 50 gr. Ἡ πρόσθετος μᾶζα κειμένη ἐπὶ τοῦ ἑνὸς κυλίν-

δρου εἶναι 10gr. α) Τὸ σύστημα τίθεται εἰς κίνησιν καὶ ζητεῖται ἡ γωνιώδης ταχύτης τῆς τροχαλίας, κατὰ τὴν στιγμὴν κατὰ την ὁποίαν ὁ κύλινδρος ποὺ φέρει τὴν πρόσθετον μᾶζαν θὰ ἔχη διανύσει 1m. Νὰ λυθῇ τὸ ζήτημα πρῶτον μὲν χωρὶς τὸν ὑπολογισμὸν καὶ ἀκολούθως μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μάζης τῆς τροχαλίας. β) Ὁ ἀνερχόμενος κύλινδρος ἀντικαθίσταται τώρα μὲ ἕνα καροτσάκι κινούμενον χωρὶς τριβὴν ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΒ γωνίας 30^{o}. Τὸ καροτσάκι ἔχει μᾶζαν 50gr καὶ τὸ νῆμα ποὺ τὸ σύρει διατηρεῖ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸ ΑΒ καὶ ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς τροχαλίας. Ζητοῦνται τὰ αὐτὰ τῆς περιπτώσεως α. (Montpellier).

67. Βολὴ σώματος. — *Λέγομεν ὅτι ἕνα σῶμα βάλλεται ὅταν δίδοντες εἰς αὐτὸ μίαν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, κινῆται ὑπὸ τὴν ἐπενέργειαν αὐτῆς καὶ τοῦ βάρους του* (βλῆμα πυροβόλου, ἀκόντιον, μπάλλα κ.λ.π.). Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

1. ***Κατακόρυφος βολὴ πρὸς τὰ ἄνω.*** α) Ὅταν ρίψωμεν βλῆμα πυροβόλου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ μίαν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, τοῦτο θὰ ἔχῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, διότι ἡ ἐπιτάχυνσις g τῆς βαρύτητος εἶναι ἀντίρροπος τῆς ταχύτητος. Κατὰ συνέπειαν θὰ ἰσχύσουν οἱ τύποι :

$h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ καὶ $\upsilon = \upsilon_0 - gt$. Τὸ μέγιστον ὕψος ἀνόδου θὰ εἶναι : $h_\mu = \upsilon_0^2/2g$ καὶ ὁ μέγιστος χρόνος $t\mu = \upsilon_0/g$.

β) Ὅταν τὸ βλῆμα φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον ἀνόδου, θ' ἀρχίσῃ νὰ κατέρχεται μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν ἐπὶ τῆς ἰδίας κατακορύφου καὶ θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἐκτοξεύσεως μετὰ χρόνον εὑρισκόμενον ἐκ τῆς σχέσεως: $h\mu = gt^2/2$ ἢ $\upsilon_0^2/2g = gt^2/2$ καὶ $t = \upsilon_0/g = t\mu$. Δηλ. ***ὁ χρόνος τῆς καθόδου ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον ἀνόδου.***

Ἐφαρμογή. « Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ταχύτης κατὰ τὴν ἄνοδον καὶ κάθοδον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς κατακορύφου εἶναι ἡ αὐτή».

Λύσις. Κατὰ τὴν ἄνοδον ἡ ταχύτης εἰς ἕνα ὕψος s δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gs}$. Κατὰ τὴν κάθοδον ἡ ταχύτης θὰ εἶναι : $\upsilon' = \sqrt{2gs'}$. Ἀλλὰ $s' = s_\mu - s = \upsilon_0^2/2g - s$. Ἄρα : $\upsilon' = \sqrt{2g\,(\upsilon_0^2/2g - s)} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gs} = \upsilon$.

Παράδειγμα. « Πυροβόλον βάλλει κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ βλῆμα κατερχόμενον θὰ εὑρίσκεται εἰς ὕψος 2.375 m ($g=10m/sec^2$)». ***(Ἰατρικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν 1952).***

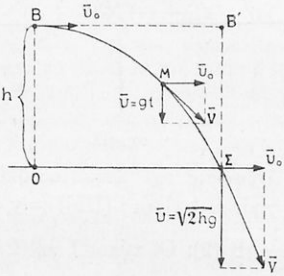
α) Τὸ μέγιστον ὕψος εἶναι : $s\mu = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{(500m/sec)^2}{2 \cdot 10m/sec^2} = 12.500\,m$ καὶ ὁ μέγιστος χρόνος $t_\mu = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{500m/sec}{10m/sec^2} = 50$ sec. Διὰ νὰ εὑρεθῇ εἰς ὕψος 2.375 m πρέπει κατὰ τὴν κάθοδον νὰ διανύσῃ διάστημα 10.125 (12.500 — 2.375). Τοῦτο διανύεται εἰς χρόνον, $10.125 = {}^1/_2 \cdot 10 \cdot t_1^2$, $t_1 = 45$ sec. Ἄρα ὁ χρόνος ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς εἶναι $t = t_\mu + t_1 = 95$ sec.

β) Συντομώτερον εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2$, ὅπου $s = 2375m$, $\upsilon_0 = 500m/sec$. Δηλ. $2375 = 500\,t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$ ἢ $t^2 - 100t$

$+ 475 = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας $t = 50 \pm 45$. Ὁ χρόνος $t_1 = 5$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἄνοδον καὶ ὁ $t_2 = 95$ εἰς τὴν κάθοδον.

2. ***Ὁριζοντία βολή.*** Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν σελίδα 59 ὅταν ἐξαπολύεται βόμβα ἀπὸ ἀεροπλάνον κινούμενον ὁριζοντίως πρέπει νὰ ἀφήνεται ἡ βόμβα ὄχι ἀκριβῶς ὑπεράνω τοῦ στόχου ἀλλὰ πιὸ ἐμπρός· δηλ. εἰς ἀπόστασιν τέτοια, ὥστε ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται τὸ βλῆμα διὰ νὰ φθάση εἰς τὸ ἔδαφος λόγῳ βαρύτητος νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται τὸ ἀεροπλάνον διὰ νὰ φθάση εἰς τὴν κατακόρυφον τοῦ στόχου, μὲ τὴν σταθερὰν ταχύτητα ποὺ ἔχει.

Ἡ τροχιὰ ποὺ ἀκολουθεῖ ἡ βόμβα μετὰ τὴν ἐξαπόλυσίν της δὲν εἶναι οὔτε ἡ ΒΒ′ (τοῦ ἀεροπλάνου), οὔτε ἡ ΒΟ (κατακόρυφος), ἀλλὰ ἡ ΒΜΣ. Αὐτὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν σύνθεσιν δύο κινήσεων, μιᾶς ὁμαλῆς καὶ εὐθυγράμμου (ἀεροπλάνου) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΒΒ′ καὶ μιᾶς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κατακορύφου λόγῳ τῆς βαρύτητος. Ἡ ταχύτης V τῆς βόμβας εἰς κάθε σημεῖον Μ τῆς τροχιᾶς ΒΣ θὰ εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ταχυτήτων τῆς μιᾶς σταθερᾶς υ_0 τοῦ ἀεροπλάνου καὶ τῆς μεταβλητῆς $\upsilon = gt$ λόγω τῆς βαρύτητος. Ἡ τροχιὰ ΒΜΣ τῆς κινήσεως τῆς βόμβας εἶναι μία καμπύλη, ποὺ λέγεται ***παραβολή***.



Σχ. 61.

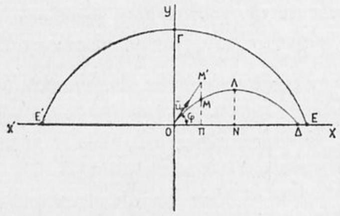
Παράδειγμα. «Ἀεροπλάνον ἵπταται εἰς σταθερὸν ὕψος h καὶ βομβαρδίζει στόχον μὲ βόμβας τὰς ὁποίας ρίπτει μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = 100 \text{m/sec}$. Πόσον χρόνον θὰ κάνη ἡ βόμβα ἕως ὅτου κτυπήση τὸν στόχον, πόσον θὰ ἀπέχη (ὁριζοντίως) τὸ ἀεροπλάνον ἀπὸ τὸν στόχον τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς καὶ ποία ἡ ταχύτης τῆς βόμβας κατὰ τὴν κροῦσιν ἐπὶ τοῦ στόχου». ***(Φυσικὸν τμῆμα Ἀθηνῶν 1952).***

Λύσις. α) Ὁ χρόνος διὰ νὰ φθάση ἡ βόμβα ἐπὶ τοῦ στόχου ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον τῆς κατακορύφου πτώσεως ΒΟ (σχ. 61)· ἄρα $h = \frac{1}{2} gt^2$ καὶ $t = \sqrt{2h/g}$.

β) Ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις ΒΒ′ τοῦ ἀεροπλάνου, ἀπὸ τὸ σημεῖον ρίψεως, μέχρι τῆς κατακορύφου τοῦ στόχου, ἰσοῦται μὲ τὴν ὁριζοντίαν μετατόπισιν τῆς βόμβας μὲ τὴν σταθερὰν ταχύτητα $\upsilon_0 = 100 \text{m/sec}$. Ἄρα $BB' = 100t = 100 \sqrt{2h/g}$

γ) Ἡ ταχύτης V κατὰ τὴν κροῦσιν θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ταχυτήτων, τῆς $\upsilon = gt = g\sqrt{2h/g} = \sqrt{2hg}$ (κατακορύφου) καὶ τῆς $\upsilon_0 = 100 \text{m/sec}$ (ὁριζοντίας), δηλ. $V = \sqrt{100^2 + 2hg}$ m/sec καὶ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης ΒΣ εἰς τὸ Σ (σχ. 61).

3. Βολὴ ὑπὸ γωνίαν. Ὅταν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ_0 ἑνὸς βλήματος σχηματίζη γωνίαν φ (σχ. 62) ὡς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, τότε ἡ τροχιά του θὰ εἶναι πάλιν παραβολή. Ἂν μελετήσωμεν χωριστὰ κάθε μίαν ἐκ τῶν δύο κινήσεων τοῦ βλήματος εὑρίσκομεν τὰς θέσεις αὐτοῦ κατὰ τοὺς διαφόρους χρόνους ὡς ἑξῆς. Ἂν δὲν ὑπῆρχε βαρύτης τὸ βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0$ καὶ εἰς κάποιον χρόνον t θὰ ἔφθανε εἰς τὸ σημεῖον Μ΄, δηλ. θὰ διήνυε τὸ διάστημα $ΟΜ' = υ_0 t$ (κίνησις ὁμαλὴ εὐθύγραμμος). Ἐπειδὴ ὅμως ἐπιδρᾷ ἡ βαρύτης, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t θὰ κατέλθῃ κατὰ τὸ Μ΄Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι, $ΜΜ' = \frac{1}{2} gt^2$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΜ΄Π ἔχομεν: $(ΟΠ) = χ = (ΟΜ')\,συνφ = υ_0 t\,συνφ$ (1), καὶ $(ΠΜ') = υ_0 t\,ημφ$. ***Ἡ χ εἶναι ἡ ὁριζοντία μετατόπισις τοῦ βλήματος ἀπὸ τῆς ἀρχῆς Ο εἰς χρόνον t.***



σχ. 62.

Ἡ ἀνύψωσις τοῦ βλήματος ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον χ΄Οχ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t εἶναι: $(ΠΜ) = y = (ΠΜ') - (ΜΜ')$· δηλ. $y = υ_0\, tημφ - \frac{1}{2} gt^2$ (2). Οἱ τύποι 1 καὶ 2 μᾶς προσδιορίζουν τὴν θέσιν τοῦ βλήματος συναρτήσει τοῦ χρόνου.

α) ***Βεληνεκές.*** Ὁ τύπος (2) μᾶς δίδει τὸ ὕψος τοῦ βλήματος ὑπεράνω τοῦ χ΄Οχ εἰς διαφόρους χρόνους, συνεπῶς ὅταν μετὰ χρόνον ἔστω Τ θὰ ἔχῃ ἐπανέλθει εἰς τὸ χ΄Οχ θὰ ἔχωμεν:

$$υ_0\, Tημφ - \frac{1}{2} g\, T^2 = 0 \quad ἢ \quad T \cdot (υ_0 ημφ - \frac{1}{2} gT) = 0 \quad ἄρα$$

$$T_1 = 0 \text{ (ἀρχὴ τῆς κινήσεως) καὶ } T_2 = \frac{2υ_0 ημφ}{g}$$ εἶναι ὁ χρόνος

κατὰ τὸν ὁποῖον ἐπανέρχεται τὸ βλῆμα εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Θέτοντες εἰς τὸν (1) τὴν τιμὴν T_2 εὑρίσκομεν:

$$χ = (ΟΔ) = \frac{2υ_0^2\, ημφσυνφ}{g} = \frac{υ_0^2 ημ2φ}{g} \quad (3).$$

Ἡ μεγίστη αὐτὴ ὁριζοντία μετατόπισις ΟΔ τοῦ βλήματος ῥιπτομένου ὑπὸ γωνίαν φ λέγεται βεληνεκές.

Ἀπὸ τὸν τύπον (3) παρατηροῦμεν ὅτι μὲ τὴν αὐτὴν $υ_0$ θὰ ἔχωμεν τὴν μεγαλυτέραν μετατόπισιν (μέγιστον βεληνεκὲς) ὅταν $ημ2φ = 1$, δηλ. ***ὑπὸ γωνίαν $φ = 45^\circ$.***

β) ***Βέλος τροχιᾶς.*** Τοῦτο εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀνύψωσις ΛΝ τοῦ βλήματος ὑπεράνω τοῦ χ΄Οχ. Εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον Λ θὰ ἔχῃ φθάση τὸ βλῆμα κατὰ τὸν χρόνον $\frac{T_2}{2} = \frac{υ_0 ημφ}{g}$. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) τὴν τιμὴν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ βέλος $y_μ = \frac{υ_0^2}{g} ημ^2 φ - \frac{1}{2} g \cdot \frac{υ_0^2}{g^2} ημ^2 φ$ ἢ $y_μ =$

$= \frac{\upsilon_0^2 \eta\mu^2\varphi}{2g}$ (4). Ἂν ἡ γωνία βολῆς γίνη $\omega = 90 - \varphi$ θὰ ἔχωμεν: $2\omega = 180 - 2\varphi$ καὶ $\eta\mu 2\omega = \eta\mu\,(180 - 2\varphi) = \eta\mu 2\varphi$. Συνεπῶς, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (3), συμπεραίνομεν ὅτι αἱ βολαὶ ***μὲ γωνίας συμπληρωματικὰς ἔχουν τὸ αὐτὸ βεληνεκές.*** Ἐκ τῶν δύο τροχιῶν μὲ τὸ αὐτὸ βεληνεκές, ἐκείνη μὲ τὸ μικρότερον βέλος λέγεται ***εὐθύφορος*** καὶ ἡ ἄλλη μὲ τὸ μεγαλύτερον βέλος ***ἐπισκηπτική.***

Σημείωσις 1. Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2), αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τὰς συντεταγμένας x καὶ y τῶν διαφόρων σημείων τῆς τροχιᾶς (θέσεων τοῦ βλήματος) συναρτήσει τοῦ χρόνου, λέγονται εἰς τὰ μαθηματικὰ *παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης ΟΔΔ* (σχ. 62).

Σημείωσις 2. Εὑρίσκεται ὅτι ἂν μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0 καὶ μὲ οἱανδήποτε γωνίαν γίνῃ ἡ βολὴ ἐντὸς ἑνὸς κατακορύφου ἐπιπέδου, σημεῖα εὑρισκόμενα ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ΕΓΕ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ βληθοῦν. Διὰ τοῦτο ἡ ΕΓΕ λέγεται *παραβολὴ ἀσφαλείας* (ΟΕ=μέγιστον βεληνεκὲς διὰ μίαν ὡρισμένην υ_0).

Παρατήρησις. Εἰς τὰς τρεῖς προηγουμένας περιπτώσεις δὲν ἐλάβομεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία εἶναι ἀρκετὰ σημαντική. Κατ' οὐσίαν ἐμελετήσαμεν τὴν βολὴν εἰς τὸ κενόν. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος συνεπάγεται τὴν ἐλάττωσιν τοῦ μεγίστου ὕψους κατὰ τὴν κατακόρυφον βολὴν καὶ ὑπὸ γωνίαν. Ὁμοίως συνεπάγεται ἀλλοίωσιν τῆς τροχιᾶς καὶ ἐλάττωσιν τοῦ βεληνεκοῦς (μέχρι 50 %).

Παράδειγμα. «Σφαῖρα εὑρισκομένη ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ρίπτεται πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν 45°. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτῆς ὥστε νὰ διέλθη διὰ σημείου εὑρισκομένου εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 90 m ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως τῆς σφαίρας καὶ εἰς ὕψος 3,60 m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους». ***(Σχολὴ Μηχανολόγων 1947).***

Λύσις. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi = \upsilon_0 t \sigma\upsilon\nu\varphi$ ἔχομεν, $90 = \upsilon_0 t\,\sigma\upsilon\nu 45$ ἢ $90 = \upsilon_0 t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $t = \frac{180}{\upsilon_0\sqrt{2}}$. τὴν τιμὴν αὐτὴν θέτομεν εἰς τὴν $y = \upsilon_0 t\eta\mu\varphi - \frac{1}{2}gt^2$ καὶ λαμβάνομεν:

$$3{,}60 = \upsilon_0 \frac{180}{\upsilon_0\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{180}{\upsilon_0\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$\upsilon_0 = 90\sqrt{\frac{g}{86{,}40}}\ \text{m/sec}$$

Ἀσκήσεις

I

1) Βλῆμα ἐκσφενδονίζεται κατακορύφως εἰς ὕψος 8000m. Νὰ εὑρεθοῦν: α ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ β) ὁ χρόνος ἀνόδου. ***(Σχολὴ Εὐελπίδων 1950)***

2) Σῶμα ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ φθάνει εἰς ὕψος 18m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ ὡς καὶ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον ἐχρειάσθη νὰ ἀνέλθη. ***(Μαθηματικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν 1952)***

3) Ἄνθρωπος εὑρισκόμενος ἐπὶ κωδωνοστασίου ὕψους 80m βάλλει λίθον κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα 40 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ, ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου, ὁ χρόνος τῆς καθόδου μέχρι τῆς γῆς καὶ ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν εἶχεν καθ' ἣν στιγμὴν ἤγγιζεν τὴν γῆν. ***(Ὀδοντιατρικὴ 1949)***

4) Σφαῖρα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 12,4

m/sec ἀπὸ τῆς κορυφῆς οὐρανοξύστου εὑρισκομένης εἰς ὕψος 110m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητοῦνται α) εἰς ποῖον ὕψος ἀπὸ τοῦ ἐδάφους θὰ ἀνέλθῃ ἡ σφαῖρα. β) Μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ διέλθῃ ἡ σφαῖρα κατὰ τὴν κάθοδον ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ οὐρανοξύστου. γ) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας ὅταν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. δ) Ἐπὶ πόσον χρόνον διαρκεῖ ἡ κίνησις τῆς σφαίρας. $g = 10m/sec^2$ (τὸ φαινόμενον εἰς τὸ κενόν). *(Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν 1954)*

5) Δύο σώματα Α καὶ Β εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι 150m. Τὸ Α ποὺ εἶναι χαμηλότερον βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 20m/sec, ἐνῶ τὸ Β ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 30m/sec. Ζητεῖται ὁ χρόνος συναντήσεώς των καὶ ἡ θέσις τῆς συναντήσεως. *(Σχολὴ Εὐελπίδων 1954)*

II

6) Ὀβὶς ριπτομένη ὑπὸ γωνίαν 30^0 ὡς πρὸς τὸν ὁρίζοντα ἐπαναπίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς ἀπόστασιν 1800μ. Ζητεῖται ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς ὀβίδος καὶ τὸ ἀνώτατον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασεν, ὅταν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καὶ τὸ ὕψος τοῦ τηλεβόλου. *(Σχ. Πολ. Μηχ. 1947)*

7) Εἶναι γνωστὸν ὅτι βλῆμα ριφθὲν εἰς τὸ κενὸν κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ταχύτητα $υ_0$ φέρεται εἰς χρόνον t μὲ ταχύτητα $υ = υ_0 - gt$ καὶ διανύει διάστημα $x = υ_0\, t - \frac{1}{2} gt^2$. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ πρέπῃ νὰ ριφθῇ ἕτερον βλῆμα ἐκ τῆς αὐτῆς θέσεως καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα ἵνα συναντηθοῦν εἰς τὸ μέσον τοῦ μεγίστου ὕψους, ἔνθα εἶχε φθάσει τὸ πρῶτον. *(Σχ. Ἀρχιτεκτόνων 1949).*

8) Ἀπὸ ὕψους 150m βάλλεται λίθος ὑπὸ ὁριζοντίαν βολήν. Τὸ βλῆμα ἄρχεται κινούμενον μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 50m/sec. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, ποῖον ὁριζόντιον διάστημα θὰ ἔχῃ διανύσει καὶ ποία ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος ($g = 10m/sec^2$). *(Σχ. Μηχανολ. 1950)*

9) Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Β μὲ ταχύτητα σταθερὰν $υ_0$. Τὴν αὐτὴν στιγμὴν ρίπτεται κινητὸν ἐκ τοῦ Α ὑπὸ γωνίαν $φ = 45^0$ καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα υ. Ταῦτα δὲ συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Προσδιοριστέα ἡ ταχύτης υ γνωστῆς τῆς $υ_0$, τῆς ἀποστάσεως ΒΑ = α καὶ τοῦ βεληνεκοῦς ΑΓ. *(Θέμα Ἀλγ. Ἀρχιτ. 1950)*

10) Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως εἰς σταθερὸν ὕψος 1.000m καὶ βομβαρδίζει στόχον μὲ βόμβας τὰς ὁποίας ρίπτει μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 120m/sec. α) Πόσον χρόνον κάμῃ ἡ βόμβα ἕως ὅτου κτυπήσῃ τὸν στόχον β) πόσον θ' ἀπέχῃ τὸ ἀεροπλάνον τοῦ στόχου τὴν στιγμὴν τῆς βολῆς καὶ γ) ποία ἡ ταχύτης τῆς βόμβας κατὰ τὴν κροῦσιν ἐπὶ τοῦ στόχου.

11) Ἀεροπλάνον κινεῖται ὁριζοντίως εἰς ὕψος 1200m ὑπὸ ταχύτητα 200km/h. Κατά τινα στιγμὴν ἀφίνει βόμβαν καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ποὺ σχηματίζει ἡ κατακόρυφος διεύθυνσις μετὰ τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὸ ἀεροπλάνον μετὰ τοῦ στόχου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ κτυπήσῃ ἡ βόμβα ($g = 981$ cm/sec^2). *(Μαθηματικὸν Τμῆμα Ἀθηνῶν 1955)*

12) Κατά τινα στιγμὴν θεωρουμένην ὡς ἀρχὴν τῶν χρόνων ἀεροπλάνον ἐξομοιούμενον πρὸς σημεῖον διέρχεται ἀκριβῶς διὰ τῆς κατακορύφου τῆς ἀγομένης διὰ τῆς θέσεως ἀντιαεροπορικοῦ τηλεβόλου καὶ εἰς ὕψος h ἀπ' αὐτοῦ. Τὸ ἀεροπλάνον βαίνει ὁριζοντίως μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ καὶ ἐντὸς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ πυροβόλου. Τὴν χρονικὴν στιγμὴν Ο, τὸ τηλεβόλον βάλλει ὑπὸ γωνίαν α σχηματιζομένην ὑπὸ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ καὶ τῆς κατακορύφου του. Ἂν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι $υ_0$ ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g, ὑπολο-

γίσατε τὴν γωνίαν διὰ τὴν ὁποίαν τὸ βλῆμα θὰ ἐπιτύχῃ τὸ ἀεροπλάνον καθὼς καὶ τὰς χρονικὰς στιγμὰς καὶ τὰς προϋποθέσεις ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ συμβῇ τοῦτο.

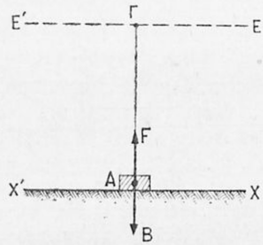
13) Κεκλιμένου ἐπιπέδου ἡ βάσις εὑρίσκεται εἰς ὕψος 15m ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους σχηματίζει δὲ μὲ τὴν βάσιν του (ὁριζόντιον ἐπίπεδον) γωνίαν 30^0. Τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 60m. Σφαῖρα ἀφίεται νὰ κυλίσῃ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Πότε καὶ εἰς ποίαν θέσιν θὰ συναντήσῃ τὸ ἔδαφος.

14) Τηλεβόλον ἐστραμμένον πρὸς Νότον βάλλει βλῆμα ὑπὸ γωνίαν 60^0 καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 500m/sec. Μετὰ t sec, ἕτερον τηλεβόλον εἰς ἀπόστασιν 25km ἀπὸ τοῦ πρώτου ἐστραμμένον πρὸς Βορρᾶν βάλλει βλῆμα ὑπὸ γωνίαν $36^0\ 52'$ καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα 312,5m/sec. Τὰ δύο βλήματα συναντῶνται εἰς σημεῖον ἀπέχον x μέτρα ἀπὸ τοῦ πρώτου τηλεβόλου καὶ y ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Ζητοῦνται αἱ τιμαὶ t, x καὶ y. Διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς λάβετε: $g=9{,}8m/sec^2$, ημ. $60^0=0{,}866$, συν. $60^0=0{,}5$, ημ. $36^0\ 52'=0{,}6$, συν. $36^0\ 52'=0{,}8$. ***(Σχ. Μηχανολόγων 1948)***

Ἔργον — Ἐνέργεια

68. Ὁρισμὸς καὶ ἔκφρασις τοῦ ἔργου. — Ὅπως ἡ γνῶσις τῆς δυνάμεως προκύπτει ἐμμέσως ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν δηλ. ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματά της εἰς τὸν φυσικὸν κόσμον, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον προκύπτει καὶ ἡ γνῶσις τοῦ ἔργου.

Ὅταν π. χ. ἕνας ἄνθρωπος ἀνυψώνῃ ἕνα βάρος Β ἀπὸ τὸ ἔδαφος κατὰ ἕνα ὕψος ΑΓ, (σχ. 63), ἀποφαινόμεθα ὅτι ἐξετέλεσεν ***ἕνα ἔργον.*** Προσεκτικωτέρα παρατήρησις μᾶς πείθει ὅτι ὁ ἐργάτης κατέβαλεν δύναμιν F ἴσην κατ' ἔντασιν πρὸς τὸ βάρος Β, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς καὶ ὅτι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς F μετεκινήθη κατὰ τὸ ὕψος ΑΓ. Ἡ δύναμις λοιπὸν γίνεται «χρήσιμος» ποσότης ὅταν παράγῃ ἔργον, ὅταν δηλ. θέσῃ εἰς κίνησιν (μεταθέσῃ) τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της. Ὥστε, ***ἔργον εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεως ἡ ὁποία μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της.*** Τὴν ἔννοιαν λοιπὸν τοῦ ἔργου τὴν ἀπαρτίζουν δύο ποσά: ἡ δύναμις καὶ ἡ μετατόπισις (διάστημα).



Σχ. 63.

α) ***Ὑπολογισμὸς τοῦ ἔργου.*** Ἂν το βάρος Β τὸ ἀνεβάσωμεν εἰς 2πλάσιον, 3πλάσιον κλπ. ὕψος θὰ ἐκτελέσωμεν ἔργον 2πλάσιον, 3πλάσιον... Ἐπίσης 2πλάσιον, 3πλάσιον κλπ. ἔργον θὰ ἐκτελέσωμεν ἂν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΓ ἀνυψώσωμεν βάρη 2Β, 3Β... Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ***«τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι ἀνάλογον τῆς δυνάμεως κι' ἀνάλογον τοῦ διαστήματος».*** Ὅταν λοιπὸν ἡ δύναμις μετατοπίζῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, ***«τὸ ἔργον*** W ***ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως*** F ***ἐπὶ τὸ μῆκος*** s ***τοῦ διανυθέντος διαστήματος»*** δηλ.

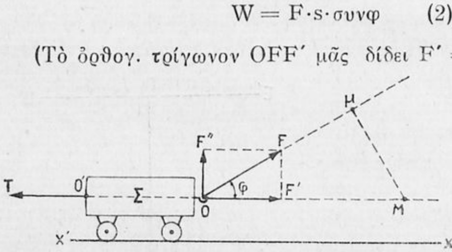
$$W = F \cdot s \qquad (1)$$

Τὸ ἔργον συνεπῶς δὲν εἶναι διανυσματικὸν ποσόν. Ἠμπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι ***θετικὸν*** ἢ ***ἀρνητικὸν*** καθ' ὅσον ἡ δύναμις καὶ ἡ μετατόπισις ἔχουν τὴν ***αὐτὴν*** ἢ ***ἀντίθετον φοράν***. Π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ ἔργον τοῦ ἐργάτου εἶναι θετικὸν ἢ (ὅπως ἀκόμη λέγεται κινητήριον ἢ δαπανώμενον), διότι ἡ F ἔχει τὴν αὐτὴν φορὰν τῆς μετατοπίσεως ΑΓ. Τὸ βάρος ὅμως Β εἶναι δύναμις ἀντίρροπος πρὸς τὴν μετατόπισιν ΑΓ τοῦ κ. βάρους τοῦ σώματος καὶ συνεπῶς μᾶς δίδει ἔργον ἀρνητικὸν (παρογόμενον ἢ μερικὲς φορὲς ὠφέλιμον). Τὰ δύο ἔργα τῶν F καὶ Β εἶναι προφανῶς ἴσα κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

β) Γενικωτέρα ἔκφρασις τοῦ ἔργου. Εἶναι δυνατὸν ἡ F νὰ μὴν ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν μετακινήσεως. Τότε τὸ ἔργον W δὲν ἰσοῦται μὲ F. (OM) (σχ. 64), διότι, ἂν τὴν OF ἀναλύσωμεν εἰς τὰς συνιστώσας, OF′ ἐπὶ τῆς xx′ καὶ τὴν OF″ καθέτως ἐπὶ τὴν xx′, ***τότε ἔργον δίδει μόνον ἡ*** OF′ (ἡ OF″ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸν δρόμον ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὸ βάρος τοῦ σώματος Σ). Ἄρα, τὸ ἔργον τῆς F ἰσοῦται πρὸς τὸ τῆς F′, ἡ ὁποία εἶναι προβολὴ τῆς F ἐπὶ τὸν δρόμον xx′. Δηλ. $W = F'(OM) = F' \cdot s$, $(OM = s)$ ἢ

$$W = F \cdot s \cdot \text{συν}\varphi \qquad (2)$$

(Τὸ ὀρθογ. τρίγωνον OFF′ μᾶς δίδει $F' = F \cdot \text{συν}\varphi$.). Ὁ τύπος (2) ἀποτελεῖ γενικωτέραν ἔκφρασιν τοῦ ἔργου. Κατὰ τὸν τύπον λοιπὸν (2) λέγομεν ὅτι: ***«Τὸ ἔργον δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ διανυθέντος διαστήματος ἐπὶ τὸ μέτρον τῆς προβολῆς τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν κινήσεως ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν μετατόπισιν καὶ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας των»***.



Σχ. 64.

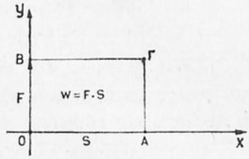
Συμπεράσματα: 1) ***Τὸ ἔργον δυνάμεως συνεχῶς καθέτου ἐπὶ τὴν μετακίνησιν (ὅπως τῆς*** OF″***) εἶναι μηδέν***· συμπέρασμα ἄλλωστε ποὺ βγαίνει ἀπὸ τὸν τύπον (2) ἂν θέσωμεν $\varphi = 90^\circ$, ὁπότε $\text{συν}\varphi = 0$.

2) ***Ἂν ἡ γωνία φ εἶναι ὀξεία*** $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, ***ὁπότε ὁ ἀριθμὸς*** $\text{συν}\varphi > 0^\circ$ ***(θετικός), τότε τὸ ἔργον εἶναι θετικόν.***

3) Ἂν ἡ γωνία φ εἶναι ἀμβλεῖα $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, ***ὁπότε ὁ ἀριθμὸς*** $\text{συν}\varphi < 0^\circ$ ***(ἀρνητικός), τότε τὸ ἔργον εἶναι ἀρνητικόν.***

γ) Ἐπειδή, (σχ. 64), (Oμ) = (OM) · συνφ, ὅπου Oμ ἡ προβολὴ τοῦ OM ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ γράψωμεν W = F·(Oμ)· δηλ. ***«τὸ ἔργον ἰσοῦται καὶ μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς μετακινήσεως ἐπάνω εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως».***

δ) ***Γεωμετρικὴ ἔκφρασις τοῦ ἔργου.*** Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox ὀρθογωνίου συστήματος ἀξόνων, (σχ. 65), σημειώνωμεν τὰ μήκη τῆς μετατοπίσεως s καὶ ἐπὶ τοῦ Oy τὰ μήκη τῶν προβολῶν τῆς δυνάμεως F, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου OAΓB παριστάνει τὸ δαπανώμενον ἢ παραγόμενον ἔργον.



Σχ 65

69. ***Μονάδες ἔργου.***—Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν W = F·S ἔχομεν $W = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν καταρτίζομεν τὰς μονάδας τοῦ ἔργου.

1) ***Ἔργιον*** (erg). Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. μονὰς ἔργου εἶναι τὸ ***«ἔργιον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἔργον μιᾶς*** dyn ***διὰ μετατόπισιν κατὰ 1***cm ***τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς διευθύνσεώς της»***· δηλ. 1erg = 1dyn·1cm = $1gr \cdot cm^2/sec^2$, (1dyn = $1gr \cdot cm/sec^2$).

2) ***Πρακτικὴ μονὰς*** ἔργου εἶναι τὸ joule, ***τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ*** 0,001 ***τοῦ ἔργου ποὺ παράγει δύναμις 1***sthéne (***10^8*** dyn) ***διὰ μετατόπισιν τοῦ σημ. ἐφαρμογῆς κατὰ 1***m»· δηλ 1 Joule = $0{,}001 \cdot 10^8$ dyn·100cm= = $0{,}001 \cdot 10^{10}$ erg = 10^7 erg. Τὸ ἔργον 10^{10} erg λέγεται kilojoule δηλ. 1kj = 1000 joule.

3) Ἄλλη μονὰς ἔργου εἶναι τὸ ***«χιλιογραμμόμετρον*** (kilogrammétre, kg*m), ***τὸ ὁποῖον εἶναι ἔργον 1***kg* ***διὰ μετατόπισιν κατὰ 1***m» Συνεπῶς, 1 kg*m = 1kg* · 1m = 1000gr*·100cm = 98. 100.000 erg= = 9,81 joule.

Παράδειγμα: « Πηγὴ παρέχει ὕδωρ 120m³ ἀνὰ 1min, τὸ ὁποῖον πίπτει ἀπὸ ὕψος 2m ἐπὶ ὑδραυλικοῦ τροχοῦ. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον ἐντὸς 10h».

(Ἰατρικὴ Σχολὴ Ἀθηνῶν 1949).

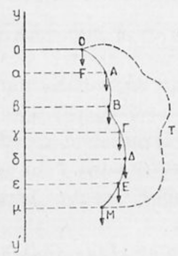
Λύσις: Τὸ ποσὸν τοῦ ὕδατος ποὺ πίπτει ἐπὶ 10h = 600 min εἶναι $120 \times 600 = 72.000 m^3$ τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶναι 72.000 ton* = 72.000×1000kg* Ἄρα τὸ συνολικῶς παραγόμενον ἔργον εἶναι: W = F.s = 72.000.000 kg*·2m = = 144.000.000 kg*m = 144.000.000×9,81 Joule = 1.412.640.000 Joule = 1.412. 640 kilojoule = $1.412.640.000 \times 10^7$ erg = 141264×10^{11} erg.

70. ***Σπουδὴ περιπτώσεων ἔργου.***—α) ***Ἔργον σταθερᾶς δυνάμεως*** (κατὰ διεύθυνσιν κι᾽ ἔντασιν). Ἔστω ὅτι ἕνα ὑλικὸν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ μιᾶς καμπύλης OAM (σχ. 66) κι᾽ ἐνεργεῖ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἡ δύναμις $\overrightarrow{OF}$ ***πάντοτε παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν ψψ´*** καὶ σταθερᾶς ἐντάσεως F. Εὑρίσκομεν τὸ ὁλικὸν ἔργον κατὰ τὴν διαδρομὴν OABΓΔE ἂν τὴν χωρίσωμεν εἰς πολὺ μικρὰ διαστήματα, OA, AB, BΓ, ΓΔ, ΔE τὰ ὁποῖα ἐξομοιώνομεν μὲ εὐθύγραμμα τμήματα. Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, τὰ παραγόμενα ἔργα θὰ εἶναι: F (οα), F (αβ), F (βγ), F (γδ), F (δε) (τὰ οα, αβ, βγ, γδ, δε εἶναι προβολαὶ ἐπὶ τῆς ψψ′ τῶν ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ). Τὸ ὁλικὸν ἔργον θὰ εἶναι:

$$W = F\,(οα) + F(αβ) + F(βγ) + F(γδ) + F(δε) =$$
$$= F(οα + αβ + βγ + γδ + δε) = F.(οε)$$

Ὥστε γενικῶς ***«τὸ ἔργον σταθερᾶς δυνάμεως κατ᾽ ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ δρόμου εἰς εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δύναμιν»***.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ ἔργον ***σταθερᾶς δυνάμεως δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς τροχιᾶς τοῦ κινουμένου ὑλικοῦ σημείου, ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὴν μετατόπισιν τοῦ σημείου παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως.***



Σχ. 66

Ἐφαρμογή. Ἔργον βαρύτητος. Περίπτωσις δυνάμεως σταθερᾶς εἶναι το βάρος ἑνὸς σώματος εἰς ἕνα περιωρισμένον χῶρον. Ἂν λοιπὸν ἕνα ὑλικὸν σημεῖον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους πέσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο εἰς τὸ Μ, εἴτε κατακορύφως, εἴτε ἀκολουθώντας τὸν δρόμον ΟΑΒ.... Μ, ἢ οἱονδήποτε ἄλλον π. χ. τὸν ΟΤΜ. τὸ ἔργον θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος ἐπὶ τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν ομ, δηλ. $W = B.\,h.\ (ομ = h)$.

Παράδειγμα. «ἐργάτης ἀνυψώνει κατὰ 3,5m βάρος 50 kg* διὰ τῆς σκάλας οἰκοδομῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ παραγόμενον ἔργον».

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $W = B.h = 50kg^{*}\cdot 3{,}5m = 175kg^{*}\,m$.

β) ***Ἔργον ἕλξεως.*** Ὅταν ἐπὶ ὁριζοντίου κι᾽ εὐθυγράμμου δρόμου (σχ. 64) αὐτοκίνητον ἢ ἄλλο ὄχημα ἔχῃ κίνησιν ὁμαλὴν ($υ =$ σταθ.) τότε ***ἡ κινητήριος δύναμις*** ΟF′ τοῦ ὀχήματος ἐξουδετεροῦται ἀπὸ δύναμιν ἀντίθετον Ο′Τ συνισταμένην τῶν δυνάμεων τριβῆς τροχῶν — ἐδάφους, ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος κ.λ.π. ***Τὸ ἔργον τῆς κινητηρίου δυνάμεως*** F′ ***λέγεται ἔργον ἕλξεως,*** τὸ ὁποῖον διὰ κάποιαν μετακίνησιν $OM = s$ εἶναι: $W = F\cdot s$ ἢ $W = F.\,υ.\,t$, διότι $s = υ.\,t.$. (Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ βάρος τοῦ ὀχήματος δὲν παράγει ἔργον διότι εἶναι δύναμις συνεχῶς κάθετος ἐπὶ τὸν ὁριζόντιον δρόμον). Τὸ ἔργον ἕλξεως εἶναι ἴσον κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς τὸ τῶν ἀντιστάσεων.

γ) ***Ἔργον ἐπιταχύνσεως.*** Ἂν ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου μάζης m θεωρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζει σταθερὰ δύναμις F, χωρὶς ἐπὶ τοῦ σημείου νὰ δροῦν ἄλλαι δυνάμεις (π. χ. τριβῆς, ἀντιστάσεως ἀέρος κ.λ.π.), τότε ἡ μᾶζα m ἀποκτᾶ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ. Ἐπειδὴ εἰς κἄποιον χρόνον t τὸ διάστημα s θὰ εἶναι, $s = \frac{1}{2}γt^2$ καὶ ἡ ταχύτης $υ = γt$, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον θὰ εἶναι:

$$W = F.\,s = mγ\cdot\ \frac{1}{2}\,γt^2 = \frac{1}{2}\,m\ (γt)^2 = \frac{1}{2}\,mυ^2 \text{ ὥστε } w = \frac{1}{2}\,mυ^2.$$

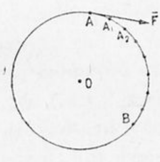
Δηλ., ***«τὸ ἔργον ἐπιταχύνσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς μάζης ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος τὴν ὁποίαν ἀπέκτησεν ἡ μᾶζα μετὰ χρόνον t.»***.

Παράδειγμα : «Σῶμα βάρους 200 gr* εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Κατά τινα στιγμὴν ἄρχεται ἐνεργοῦσα ἐπ' αὐτοῦ δύναμις 100 gr* ἐπὶ 10 sec. Ποῖον τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, τὸ διανυθὲν διάστημα εἰς 10 sec καὶ τὸ παραχθὲν ἔργον κατὰ τὸ χρονικὸν αὐτὸ διάστημα». ***(Σχολὴ Μηχανολόγων 1950)***

Λύσις. 1) Ἡ κίνησις θὰ εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = \frac{F}{m} = \frac{100 \cdot 980 \text{dyn}}{200 \text{gr}} = 460 \text{ cm/sec}^2$. 2) Τὸ διάστημα εἰς 10 sec εἶναι $s = \frac{1}{2} \cdot 490 \cdot 10^2 = 24500 \text{cm} = 245 \text{m}$. 3) Τὸ παραχθὲν ἔργον ὡς ἔργον ἐπιταχύνσεως εἶναι $W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 4900^2 = 2401 \cdot 10^6 \text{erg} = 240{,}1 \cdot 10^7 \text{erg} = 240{,}1 \text{Joule}$.
$(\upsilon = \gamma \cdot t = 490 \text{ cm/sec}^2 \cdot 10 \text{sec} = 4900 \text{ cm/sec})$.

δ) ***Ἔργον δυνάμεως σταθερᾶς ἐντάσεως μὲ διεύθυνσιν τὴν ἐφαπτομένην περιφερείας.*** Ὅταν ὑλικὸν σημεῖον κινῆται ἐπὶ περιφερείας κύκλου (σχ. 67) καὶ ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ δύναμις σταθερᾶς ἐντάσεως F ***μὲ διεύθυνσιν κάθε φορὰ τὴν ἐφαπτομένην***, τότε ***«τὸ παραγόμενον ἔργον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸ τόξον ποὺ ἔχει διαγράψει τὸ σημεῖον»***. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ πολὺ μικρὸν τόξον AA_1, τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ ἐξομοιωθῇ μὲ εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης AF· ἄρα τὸ ἔργον κατὰ τὴν μικρὰν μετατόπισιν AA_1 τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***στοιχειῶδες ἔργον***, ἰσοῦται μὲ $F.(AA_1)$. Συνεπῶς τὸ ὁλικὸν ἔργον διαδρομῆς AB ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν ἔργων δηλ.

$$W = F(AA_1) + F(A_1A_2) + F(A_2A_3) + \ldots + F(A_\nu B) =$$
$$= F(AA_1 + A_1A_2 + \ldots A_\nu B) = F.(AB).$$



Σχ. 67

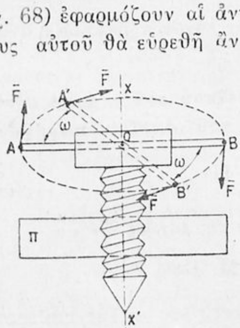
ε) ***Ἔργον ζεύγους.*** Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μοχλοῦ AB τοῦ κοχλίου (σχ. 68) ἐφαρμόζουν αἱ ἀντίθετοι δυνάμεις $\overrightarrow{AF}$ καὶ $\overrightarrow{BF}$, τὸ ἔργον τοῦ ζεύγους αὐτοῦ θὰ εὑρεθῇ ἂν προσθέσωμεν τὰ ἔργα τῶν δύο δυνάμεων. Δηλ.

$$W = F(AA') + F(BB') = 2F(AA')$$

Ἂν ἡ γωνία περιστροφῆς εἶναι ω (εἰς ἀκτίνια) θὰ ἔχωμεν :

$W = 2F\,\omega.R$ $(AA' = \omega.R$, ὅπου $R = OA$ ἀκτίς)· ἀλλὰ 2R.F εἶναι ἡ ροπὴ M τοῦ ζεύγους καὶ συνεπῶς : $W = M.\omega$.

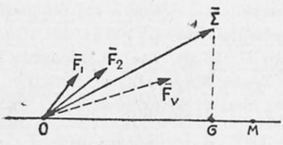
Δηλ. ***«τὸ ἔργον ζεύγους δυνάμεων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ροπῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν γωνίαν κατὰ τὴν ὁποίαν περιστρέφεται τὸ σῶμα»***.



Σχ. 68

στ) ***Ἔργον συνισταμένης.*** Ἐὰν ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου O ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{OF_1}, \overrightarrow{OF_2}, \overrightarrow{OF_3}, \ldots \overrightarrow{OF_\nu}$, τὸ δὲ O μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς εὐθείας OM, (σχ. 69), τὸ ὁλικὸν ἔργον θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν δυνάμεων διὰ κἄποιαν μετατόπισιν OM = s.

Δηλ· $W o\lambda = s.\pi\varrho.\ (\overrightarrow{F_1}) + s.\ \pi\varrho.\ (\overrightarrow{F_2}) + \ldots + s\cdot\pi\varrho.(\overrightarrow{F\nu}) =$
$= s\ [\pi\varrho.\ (\overrightarrow{F_1}) + \pi\varrho.(\overrightarrow{F_2}) + \ldots\ldots\pi\varrho.(\overrightarrow{F\nu})].$



Σχ. 69.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος διανυσμάτων ἐπὶ ἕνα ἄξονα ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων. Συνεπῶς, ***τὸ ἄθροισμα τῆς ἀγκύλης*** θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν προβολὴν Οσ τῆς συνισταμένης $\overrightarrow{O\Sigma}$ τῶν δυνάμεων. Ἄρα, $W o\lambda. = s.\pi\varrho.\ (\overrightarrow{O\Sigma})$. Δηλ. « ***τὸ ἔργον τῆς συνισταμένης πολλῶν δυνάμεων ποὺ ἐφαρμόζουν εἰς τὸ αὐτὸ ὑλικὸν σημεῖον ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν συνιστωσῶν***».

71. Ἰ σ χ ύ ς.—Ἔστω ὅτι ἐργάτης ἀναβιβάζει εἰς οἰκοδομὴν βάρος π.χ. 30kg* εἰς ὕψος 10m ἐντὸς 60 sec. Μικρὸν ἠλεκτροκίνητον ἀσανσὲρ ἀναβιβάζει εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ αὐτὸ βάρος ἐντὸς 5 sec. Ὅπως βλέπωμεν τὰ δύο ἔργα ἐργάτου καὶ ἀσανσὲρ εἶναι ἴσα (30.10 = 300kg*m), ἀλλὰ ἀξίζει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ χρόνοι εἰς τοὺς ὁποίους πραγματοποιοῦν τὸ αὐτὸ ἔργον αἱ δύο μηχαναὶ εἶναι ***διάφοροι***. Συνεπῶς διὰ νὰ ἠμποροῦμε νὰ κάνωμεν σύγκρισιν μεταξὺ τῶν διαφόρων μέσων παραγωγῆς (π. χ. ἄνθρωπος μηχαναὶ κ.λ.π.), ὡς ***πρὸς τὴν ἱκανότητα παραγωγῆς ἔργου***, πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ ***τὸν χρόνον***. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἂν κάνωμε ἀναγωγὴ τοῦ ἔργου εἰς τὴν μονάδα χρόνου (sec), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἱκανότης τοῦ ἀσανσὲρ $\left(\frac{300}{5} = 60\ \text{kg*m/sec}\right)$ εἶναι 12πλασία τῆς τοῦ ἀνθρώπου $\left(\frac{300}{60} = 5\ \text{kg*m/sec}\right)$. Ἀπ' αὐτὸν τὸν λόγον προκύπτει ἡ ἀνάγκη τῆς ἰσχύος:

«***Ἰσχὺς P (μιᾶς μηχανῆς) λέγεται τὸ πηλῖκον τοῦ παραγομένου ἔργου*** W ***διὰ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου*** t ***ἐντὸς τοῦ ὁποίου παρήχθη***»

Δηλ. $$\boxed{P = \frac{W}{t}} \qquad (1)$$

Μονάδες ἰσχύος. Ἡ ἐξίσωσις διαστάσεων τῆς ἰσχύος εἶναι:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{L.^2\ M.\ T^{-2}}{T} = L.^2\ M.\ T^{-3}$$

1) Ἡ μονὰς ἰσχύος εἰς τὸ C. G. S. εἶναι: 1erg/sec = $1\text{gr}\cdot\text{cm}^2\text{sec}^{-3}$

2) Τὸ watt (βάτ) εἶναι «***ἡ ἰσχὺς μηχανῆς ἡ ὁποία ἀποδίδει ἔργον 1***Joule ***εἰς 1***sec»· δηλ. 1watt = 1Joule/sec. (Πρὸς τιμὴν τοῦ Ἄγγλου φυσικοῦ James watt, 1736 — 1819, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ πρώτη ἀτμομηχανή).

3) Τὸ kilowatt (κιλοβὰτ) = 1000watt.

4) ***Ὁ ἀτμόϊππος ἢ ἁπλῶς ἵππος*** (cv) ὁ ὁποῖος εἶναι «***ἡ ἰσχὺς κατὰ τὴν ὁποίαν ἀποδίδεται ἔργον*** *75* kg* m ***εἰς*** *1*sec» 1cv = 75 kg*m/sec = 75·9,81 Joule/sec = 736 Joule/sec = 736watt. (Ὁ Ἀγγλικὸς ἀτμόϊππος (HP) εἶναι ἴσος πρὸς 745,7 watt).

Παρατήρησις. Ὅταν ἡ κίνησις ἑνὸς σώματος γίνεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ (ἡ κινητήριος δύναμις εἶναι τότε ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν ἀντιστάσεων), τότε παράγεται ἔργον ἕλξεως: w = F.υ.t.

κατὰ συνέπειαν ἡ ἰσχὺς εἶναι: $P = \frac{w}{t} = F.\upsilon$

Παράδειγμα: «Ἵππος σύρει ἁμάξιον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους μὲ σταθερὰν ταχύτητα 5km/h. Ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ ἵππος εἶναι 36kg*. Πόση ἡ ἰσχὺς εἰς cv τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει ὁ ἵππος». ***(Σχ. Ἀρχιτεκτόνων καὶ Τοπογράφων 1954)***

Λύσις: $\upsilon = \frac{5000\text{m}}{3600\text{sec}} = \frac{25}{18}$ m/sec. Συνεπῶς: $P = F.\upsilon = 36\text{kg}^* \frac{25}{18}$ m/sec=

= 50kg*m/sec καὶ εἰς cv, $P = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$ cv

Σημείωσις. Ἡ μονὰς ἀτμόϊππος προέκυψεν ὡς ἑξῆς: Ὁ ἀτμόϊππος ἀντιστοιχεῖ περίπου πρὸς τὴν ἰσχὺν ἑνὸς γεροῦ ἀλόγου. Ὅταν ἤρχισεν ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὰ πρῶτα μέσα κινήσεως ἔκαναν ἐκτίμησιν τῆς ἰσχύος ἰδίᾳ τῶν ἀτμομηχανῶν μὲ τὸ πόσα ἄλογα ἠμποροῦσε ν' ἀντικαταστήσῃ ἡ μηχανή.

Πίναξ μερικῶν συνηθισμένων ἰσχύων

ἄνθρωπος	ἀπὸ	1/30	ἕως	1/10	CV
Ἵππος	»	1/2	»	2/3	»
Κινητῆρες αὐτοκινήτων	»	2	»	200	»
Μηχαναὶ σιδηροδρόμων	»	1000	»	6000	»
Κινητῆρες ἀεροπλάνων			μέχρι	5500	»
Μηχαναὶ κεντρικῶν ἠλεκτρ. ἐργοστασίων			»	500.000	»
Ἐργοστάσιον Ἀλιβερίου				80.000	»

Μεγάλαι μονάδες ἔργου. Πολὺ μεγάλα ποσὰ ἔργου μετροῦνται μὲ μονάδας αἱ ὁποῖαι στηρίζονται εἰς τὰς μονάδας ἰσχύος.

1) ***Βαττώριον*** (wh) εἶναι «***τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον ἀποδίδει μηχανὴ ἰσχύος*** *1* watt ***ἐπὶ μίαν ὥραν***». Δηλ. 1 wh = 3.600 joule.

2) ***Κιλοβαττώριον*** (kh). Κατ' ἀντιστοιχίαν εἶναι ἔργον 3.600.000 Joule.

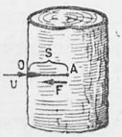
3) ***Ὡριαῖος ἵππος*** (cvh) = 75×3.600 = 736 × 3.600 = 2.649.600 joule.

72. ***Ἐ ν έ ρ γ ε ι α.*** — Τὸ νερὸ ἑνὸς φράγματος ποὺ θέτει εἰς κίνησιν ἕναν ὑδραυλικὸν τροχόν, ὁ ἠλεκτρικὸς κινητὴρ ποὺ κινεῖ διαφόρους μηχανάς, ὁ ἀτμὸς ποὺ κινεῖ τὸ ἔμβολον ἀτμομηχανῆς κ.λ.π., λέγομεν ὅτι ***παράγουν ἔργον***. Γενικώτερον, διαπιστώνομεν ὅτι ὅλα τὰ ὑλικὰ σώματα ἠμποροῦν νὰ δώσουν ἔργον. Ὀνομάζομεν «***ἐνέργειαν ἑνὸς σώματος τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀποδώσῃ τοῦτο***». Τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας σώματος μετρεῖται μὲ τὸ ἔργον ποὺ ἀποδίδεται ἀπ' αὐτό. Ἡ ἐνέργεια, βασικὸν στοιχεῖον ἢ ἔκφρασις τοῦ ὑλικοῦ κόσμου, θεωρεῖται ὡς παγκοσμία όντότης καὶ παρουσιάζεται μὲ διαφόρους μορφάς. Αἱ διάφοροι μορφαὶ ἐνεργείας (μηχανική, θερμική, ἠλεκτρική, ἀτομική, χημικὴ κ.λ.π.) μετατρέπονται μεταξύ των καὶ κατὰ τὰς μετατροπὰς παράγονται διάφορα φαινόμενα, τὰ ὁποῖα ἀλλάσσουν γενικῶς τὴν κατάστασιν τῶν ὑλικῶν σωμάτων.

Μηχανικὴ ἐνέργεια. Ὅταν θεωροῦμεν τὴν ἱκανότητα παραγωγῆς ἔργου τῶν σωμάτων, λόγῳ τῆς ***θέσεως*** ἢ ***κινήσεως*** αὐτῶν, τότε ὁμιλοῦμεν διὰ ***μηχανικὴν ἐνέργειαν τῶν σωμάτων***. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια διακρίνεται εἰς δύο μορφάς.

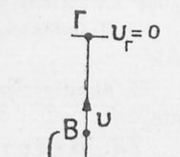
α) ***Δυναμικὴ ἢ ἐνέργεια θέσεως.*** Εἰς τὴν § 68 εἴδομεν ὅτι, διὰ νὰ ἀνέλθῃ κατὰ τὸ ὕψος ΑΓ τὸ σῶμα βάρους Β καταβάλλομεν ἔργον $w = B.h$. Εἰς τὴν θέσιν Γ τὸ σῶμα ἀπέκτησεν ἐνέργειαν ἴσην μὲ τὸ καταβληθὲν ἔργον $B.h$.· λέγομεν δὲ ὅτι τοῦτο κατέχει ***δυναμικὴν ἐνέργειαν*** $B \cdot h$ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον x'x· διότι κατερχόμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον xx' ἀποδίδει ἔργον $B \cdot h$.

β) ***Κινητικὴ ἐνέργεια.*** 1) Ὅταν βλῆμα ἑνὸς ὅπλου εἰσδύῃ ἐντὸς τοῦ κορμοῦ δένδρου (σχ. 70), ἐκτελεῖ ἔργον ἐναντίον τῶν δυνάμεων F συνοχῆς τοῦ ξύλου. Τὸ ἔργον προφανῶς ὀφείλεται εἰς τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος. Λέγομεν λοιπὸν ***«κινητικὴν ἐνέργειαν ἑνὸς σώματος τὴν ἱκανότητα παραγωγῆς ἔργου, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς κίνησιν».*** Εἴδομεν ὅτι, ἂν κατὰ τὴν πρόσκρουσιν τοῦ βλήματος ἡ ταχύτης εἶναι υ, τὸ ἔργον ἐπιταχύνσεως αὐτοῦ (ρύμη), εἶναι $\frac{1}{2}m\upsilon^2$. Ἂν τὸ βλῆμα εἰσέδυσε κατὰ μῆκος s καὶ ἡ μέση ἀντίστασις τοῦ ξύλου εἶναι F, παρήχθη ἔργον $w = F \cdot s$. Ἑπομένως $F \cdot s = \frac{1}{2} m\upsilon^2$· ὥστε κινητικὴ ἐνέργεια $\frac{1}{2} \cdot m\upsilon^2 = F.s$, δηλαδὴ ***«ἡ κινητικὴ ἐνέργεια σώματος δίδεται ἀπὸ τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτοῦ ἔργον, ὅταν ἀνακόπτεται ἡ κίνησίς του».***



Σχ. 70

2) Τὸ βλῆμα εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 71) ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν $w_A = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$, ἐνῶ εἰς τὸ σημεῖον Β ἔχει, $w_B = \frac{1}{2}m\upsilon^2$. Ἡ μεταβολὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ἀπὸ τὸ Α ἕως τὸ Β εἶναι, $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ παραχθὲν ἔργον βαρύτητος βχ τοῦ βάρους β τοῦ βλήματος διὰ τὴν ἀνύψωσιν $\chi = AB$. Πράγματι



Σχ. 71

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m(\upsilon^2 - \upsilon_0^2) = \frac{1}{2}m\left[(\upsilon_0 - gt)^2 - \upsilon_0^2\right] = \frac{1}{2}m(\upsilon_0^2 + g^2t^2 - 2\upsilon_0 gt - \upsilon_0^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m(g^2t^2 - 2\upsilon_0 gt) = \frac{gm}{2}(gt^2 - 2\upsilon_0 t) = \frac{gm}{2}\left(\frac{2gt^2}{2} - 2\upsilon_0 t\right) =$$

$= mg\left(\frac{gt^2}{2} - \upsilon_0 t\right) = -mg\chi = -\beta\chi \cdot \left(\chi = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)$. Γενικῶς :
«ἡ μεταβολὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας σώματος ἰσοῦται πρὸς τὸ παραγόμενον** ($\upsilon_0 > \upsilon$) **ἢ δαπανώμενον** ($\upsilon_0 < \upsilon$) **ἔργον τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως»,

δηλ. $\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = F \cdot s.$

3) Ὅταν ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά, εὐνόητον εἶναι ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ κινουμένου σώματος παραμένει σταθερά.

73. Διατήρησις τῆς Μηχανικῆς ἐνεργείας.— Εἰς τὸ σημεῖον Α (σχ. 71) ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος εἶναι $w_A = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ καὶ ἡ δυναμική του $w = o$. Εἰς μίαν θέσιν Β ὅπου ΑΒ $= x < h$ (h = μέγιστον ὕψος) θὰ ἔχῃ ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gx}$, συνεπῶς ἡ κινητική του ἐνέργεια εἰς τὸ Β θὰ εἶναι : $w = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\upsilon_0^2 - 2gx) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mgx$. Ἐπίσης εἰς τὸ Β θὰ ἔχῃ δυναμικὴν ἐνέργειαν $w = \beta \cdot x = mgx$, ἄρα προσθέτοντες τὴν κινητικὴν καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν εἰς τὸ Β ($w_B < w_A$) ἔχομεν : $w_B + w = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - mgx + mgx = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = w_A$. Εἰς τὴν θέσιν Γ ὅπου $\upsilon_\Gamma = o$, ἔχομεν κινητ. ἐνέργειαν $w_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 = 0$ καὶ δυναμικὴν ἐνέργειαν $w = \beta h = mg \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = w_A$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι, ὅταν ἐλαττοῦται ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται μὲν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἀλλὰ συγχρόνως αὐξάνει ἡ δυναμικὴ καὶ τόσον ὥστε, ***τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐνεργειῶν εἰς κάθε στιγμὴν νὰ παραμένῃ σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὴν ἀρχικὴν τιμήν.*** Τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ κατὰ τὴν κάθοδον, ὅπου θὰ ἐλαττοῦται μὲν ἡ δυναμική, ἀλλὰ ἰσοτίμως θὰ αὐξάνῃ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια.

α) Τὸ προηγούμενον συμπέρασμα ἰσχύει ὄχι μόνον διὰ τὴν πτῶσιν, ἀλλὰ καὶ δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τῆς μηχανικῆς, ὅπου ἔχομεν μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυναμικὴν ἢ καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ἀκολούθου ἀρχῆς ***τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας,*** ἡ ὁποία ἀφορᾷ σύστημα σωμάτων, ποὺ δὲν ἀνταλλάσσει ἐνέργειαν μὲ τὸ ἐξωτερικὸν περιβάλλον (μεμονωμένον σύστημα).

« Καθ' οἱανδήποτε μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυναμικὴν καὶ ἀντιστρόφως, εἰς ἓν μεμονωμένον σύστημα σωμάτων, ἡ ὁλικὴ μηχανικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ παραμένει σταθερά».

β) Ἀπὸ τὴν μελέτην τῶν διαφόρων φαινομένων διαπιστώνομεν ὅτι, ἡ προηγουμένη ἀρχὴ ἠμπορεῖ νὰ γενικευθῆ διὰ κάθε μεταβολὴν τῶν διαφόρων μορφῶν ἐνεργείας, ποὺ κατέχει ἕνα μεμονωμένον σύστημα σωμάτων καὶ λέγομεν, *«ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια (δηλ. τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μορφῶν ἐνεργείας) ἑνὸς μεμονωμένου συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερά»*

Ἰσοδυναμία μάζης καὶ ἐνεργείας. Ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας εἶναι ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ κλασσικὴ Φυσική, ὅπως ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς μάζης εἶναι ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ Χημεία. Ὅπως εἴδομεν ὅμως εἰς τὴν § 54 ὑπάρχουν περιπτώσεις, ὅπου μᾶζα μετατρέπεται ὡς ἐνέργειαν καὶ ἐνέργεια εἰς μᾶζαν. Κατὰ συνέπειαν κάθε μία χωριστὰ ἐκ τῶν προηγουμένων ἀρχῶν δὲν ἀποδίδει πλήρως τὴν πραγματικότητα. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ μᾶζα καὶ ἡ ἐνέργεια πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ὡς δύο μορφαὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς φυσικῆς ὀντότητος. Ἡ θεωρία μάλιστα τῆς σχετικότητος κατέληξεν εἰς τὸ σπουδαῖον συμπέρασμα *τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας*, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: *«Μᾶζα* m *ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν* $W = mc^2$ *καὶ ἀντιστρόφως ἐνέργεια* W *παρουσιάζει ἀδράνειαν* $m = \frac{W}{c^2}$»· (ὅπου c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός).

Παράδειγμα. Μᾶζα 10gr κινεῖται μὲ ταχύτητα 10m/sec. Ἐπὶ τῆς μάζης ταύτης ἐπενεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος σταθερὰ δύναμις ἡ ὁποία ἐντὸς 4sec αὐξάνει τὴν ταχύτητα εἰς 50m/sec. Νὰ εὑρεθῆ ποία ἡ δύναμις, πόσον ἔργον κατεβλήθη διὰ τὴν αὔξησιν τῆς ταχύτητος καὶ ποῖον τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸν ὡς ἄνω χρόνον». *(Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων)*

Λύσις. $\upsilon = \upsilon_0 + \gamma t$ καὶ $\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{40}{4} = 10\text{m/sec}^2$. Ἡ $F = m\gamma = 10\text{gr}\cdot 1000\text{cm/sec}^2 = 10^4$ dyn. Τὸ καταβληθὲν ἔργον εἶναι ἡ *διαφορὰ κινητικῆς ἐνεργείας*

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} 10\text{gr} \, (5000^2 - 1000^2) = 12\cdot 10^7\text{erg} = 12\text{joule}$$

Ὁμοίως $w = F\cdot s$ καὶ $s = \frac{W}{F} = \frac{12\cdot 10^7}{10^4} = 120\text{m}$.

Ἀσκήσεις

I

1) Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν βάρους 125 kgr* εἰς ὕψος 15m.

2) Ροὴ ὕδατος παρέχει 150 κυβικὰ μέτρα ὕδατος κατὰ πρῶτον λεπτὸν καὶ ἐνεργεῖ ἐπὶ ὑδρομύλου ἀπὸ ὕψος 12μ. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον εἰς 16 ὥρας.

3) Πόσον εἶναι τὸ ἔργον ἐπιταχύνσεως ἐπὶ ἀνελκυστῆρος βάρους 5ton* ἀνερχομένου μὲ ἐπιτάχυνσιν. $0{,}5\text{m/sec}^2$ ἐπὶ 6 sec ($g = 980\text{ms/ec}^2$).

4) Ἵππος σύρει ἅμαξαν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους καταβάλλων δύναμιν 40kgr* μὲ σταθερὰν ταχύτητα 6 km/h. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει;

5) Λίθος βάρους 10kg* πίπτει ἀπὸ ὕψους h κατακορύφως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 10m/sec ἡ δὲ πτῶσις διαρκεῖ $t = 15$ sec. Ὑπολογίσατε τὸ ὕψος h, τὴν ταχύτητα καὶ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν αὐτοῦ καθ' ἣν στιγμὴν φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος. *(Σχ. Πολ. Μηχ. 1949)*

6) Σῶμα βάρους 200gr* εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Κατά τινα στιγμὴν ἄρχεται ἐνεργοῦσα ἐπ' αὐτοῦ δύναμις 100gr* ἐπὶ 10 sec. Ζητεῖται τὸ εἶδος τῆς κινήσεως, τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὰ 10 sec καὶ ἡ κτηθεῖσα κιν. ἐνέργεια κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα. *[Σχ. Μηχανολόγων 1950]*

7) Ποία ἡ ἰσχὺς μηχανῆς ἡ ὁποία παράγει ἔργον 750kg*m εἰς 0,5h.

8) Ἡ ἰσχὺς μηχανῆς εἶναι 2 kw. Ποῖον ἔργον παράγει εἰς 2 min.

9) Μηχανὴ ἰσχύος 5cv, πόσον ἔργον δίδει εἰς erg, joule καὶ wh ἐργαζομένη ἐπὶ 3h.

10) Ὁ φοῦρνος ἠλεκτρικῆς κουζίνας ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως 2400 watt. Πόσον ἔργον καταναλίσκει εἰς 1h.

11) Μᾶζα 200gr πίπτει μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 2 m/sec ἐπὶ 8 sec. Ποία ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος ($g=10m/sec^2$).

12) Βλῆμα ὅπλου μάζης 20gr ἐκφεύγει ἀπὸ τὴν κάννην μὲ ταχύτητα 600m/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἰς erg, k*gm, wh καὶ kwh.

13) Ἐργάτης βάρους 72kg* φέρει ἐπὶ τῶν ὤμων του βάρος 30kg*, τὸ ὁποῖον ἀνεβάζει διὰ σκάλας εἰς οἰκοδομὴν κατὰ ὕψος 9m. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον καὶ ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐργάτου διὰ χρόνον ἀνόδου 2min.

14) Σῶμα μάζης 200gr κινούμενον ἐπὶ 10sec, ἀποδίδει ἔργον 60joule. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ἐπιτάχυνσις β) τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ γ) ἡ κινοῦσα δύναμις.

15) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30^0 κινεῖται σφαῖρα μάζης 1000gr. Ἐπὶ πόσον χρόνον κινεῖται ὅταν τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι 20joule.

16) Ἡμίονος ἐνεργεῖ σταθερῶς εἰς τὸ ἄκρον στροφάλου μήκους 4m μὲ δύναμιν 30kg*. α) Τί ἔργον παράγει εἰς μίαν στροφήν. β) Ἂν ἐκτελῇ 10 στροφὰς εἰς 4min, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον εἰς 1min καὶ εἰς 1h.

II

17) Σῶμα μάζης 400gr ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 8m/sec κινεῖται ἐπὶ 20sec εἰς τὸ τέλος τῶν ὁποίων ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν 80joule. Παρήχθη ἢ κατηναλώθη ἔργον καὶ πόσον.

18) Αὐτοκίνητον μάζης 2,94 ton κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας εὐθυγράμμου ὁδοῦ μὲ ταχύτητα 30km/h ἄνευ τριβῆς. Ἡ ταχύτης του αὐξάνει ἐντὸς 4min ἀπὸ 30km/h εἰς 80km/h. Ζητεῖται τὸ διανυθὲν διάστημα κατὰ τὸν χρόνον τῶν 4min, ἡ ἐνεργοῦσα δύναμις καὶ ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς ἵππους. ***(Σχ. Τοπογρ. 1950).***

19) Σφύρα βάρους Β καταφέρεται ἅπαξ ἐπὶ καρφίου μὲ ταχύτητα 4m/sec. Τὸ καρφὶ εἰσχωρεῖ κατὰ 2,4cm ἐντὸς ξυλίνου δοκοῦ τοῦ ὁποίου ἡ μέση ἀντίστασις εἶναι 120kg*. Ποῖον τὸ βάρος Β τῆς σφύρας.

20) Ὁ λόγος τοῦ ὕψους πρὸς τὴν βάσιν κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 3/4. Ἀπὸ τὴν κορυφήν του ἀφίεται σφαῖρα βάρους 200gr*, ἡ ὁποία κυλίεται ἄνευ τριβῆς ἐπὶ 5sec. Νὰ εὑρεθοῦν: α) τὸ διανυθὲν διάστημα β) ἡ τελικὴ ταχύτης καὶ γ) τὸ παραχθὲν ἔργον.

21) Σῶμα μάζης 50gr ἀφίνεται νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος 200m. Ποία ἡ κιν. ἐνέργεια εἰς ὕψος 150m καὶ ποία εἰς ὕψος 50m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους. Τί ἔργον παρήχθη μεταξὺ τῶν δύο σημείων ($g=10m/sec^2$, ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα).

22) Κινητὴρ ἰσχύος 6cv ἐργάζεται ἐπὶ 10min καὶ παράγει τὸ αὐτὸ ἔργον μὲ δύναμιν 20.000 dyn, ποὺ ἐνεργεῖ σταθερῶς ἐπὶ μάζης 100gr. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διανυθὲν διάστημα.

23) Ἀφίνεται νὰ πίπτῃ σῶμα βάρους 50gr*. Κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ ἔχει ταχύτητα 10m/sec, ἐπικάθεται ἐπ' αὐτοῦ πρόσθετον βάρος 4000dyn. Τὸ σύστημα τῶν δύο σωμάτων κινεῖται ἐπὶ 6sec ἀκόμη. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ κιν. ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἰς τὸ τέλος τῶν 6sec. β) τὸ ὁλικὸν παραχθὲν ἔργον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ σώματος ($g=9,8m/sec^2$, ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα).

24) Ὁριζόντιος ὑδραγωγὸς ἔχει τομὴν $4cm^2$ διὰ τοῦ ὁποίου ῥέει ὕδωρ μὲ ταχύτητα 8m/sec. Τὸ στόμιον τοῦ ἀγωγοῦ εὑρίσκεται εἰς ὕψος 10m ἀπὸ τοῦ ἐδά-

φους. Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως β) τὸ παραγόμενον ἔργον ἐπὶ 2h καὶ γ) εἰς ποῖον σημεῖον τοῦ ἐδάφους θὰ κτυπᾶ ἡ ὑδάτινη παραβολικὴ φλέψ.

25) Ὄχημα βάρους 60ton* κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ ταχύτητα 72 km/sec. α) Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον ἕλξεως ἐπὶ 0,5 h. β) Ποία ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς ποὺ κινεῖ τὸ ὄχημα. γ) Ποία πρόσθετος σταθερὰ δύναμις πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ὥστε μετὰ χρόνον 15min ἡ ταχύτης νὰ γίνῃ 108km/h.

26) Σφαῖρα ὅπλου μάζης 12,8gr ἐξέρχεται ἐκ τῆς κάννης μὲ ταχύτητα 720m/sec. Ζητοῦνται: α) ἡ κιν. ἐνέργεια τῆς σφαίρας β) ἂν ἡ κάννη ἔχῃ μῆκος 80cm καὶ ἡ δύναμις τῶν ἀερίων εἶναι σταθερά, ποῖος ὁ χρόνος διαδρομῆς ἐντὸς τῆς κάννης καὶ γ) κατὰ πόσον εἰσδύει ἐντὸς κορμοῦ δένδρου τοῦ ὁποίου ἡ μέση ἀντίστασις εἶναι 200 kg*. ***(Χημικὸν Τμῆμα Ἀθηνῶν 1954)***

III

27) Ὑδατόπτωσις ὕψους 50m παρέχει ἐπὶ ὑδροστροβίλου 100m³ ἀνὰ min. Ὁ ὑδροστρόβιλος μετασχηματίζει εἰς χρήσιμον ἔργον τὰ 50 % τῆς παρεχομένης ἐνεργείας ὑπὸ τῆς ὑδατοπτώσεως. α) Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ ὑδροστροβίλου καὶ β) πόσον ἔργον δίδει εἰς 4 h.

28) Πύραυλος βάρους 5 ton* ἀνέρχεται κατακορύφως μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν 20m/sec² τὰ πρῶτα 600m τῆς ἀτμοσφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ μέση ἀντίστασις εἶναι 500kg*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ πυραύλου.

29) Βλῆμα βάρους 200gr* βάλλεται ὑπὸ γωνίαν 60° μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 600 m/sec. α) Ποῖον ἔργον βαρύτητος ἀποδίδεται δι' ἀνύψωσιν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ὅσον τὸ βέλος τῆς τροχιᾶς καὶ β) ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος ὅταν ἐπανευρίσκῃ τὸν ὁρίζοντα.

30) Ὄχημα βάρους 30 ton* κινούμενον ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ ταχύτητα 72km/h σταματᾶ μετὰ 20 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς διακοπῆς τῆς λειτουργίας τῆς μηχανῆς. Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ συνισταμένη τῶν ἐν γένει ἀντιστάσεων (ἀέρος, τριβῶν) β) τὸ ἔργον αὐτῆς καὶ γ) εἰς πόσην ἀπόστασιν θὰ σταματήσῃ τὸ ὄχημα.

31) Ὁ ὀδοντωτὸς σιδηρόδρομος Καλαβρύτων ἔχει βάρος συνολικὸν 40 ton*. Κατά τινα διαδρομὴν ἀνέρχεται ὑψομετρικῶς κατὰ 2m ὅταν διατρέχῃ 20m τῆς διαδρομῆς του. Νὰ εὑρεθοῦν: α) πόση ἡ δύναμις ἕλξεως τῆς μηχανῆς. β) ποῖον τὸ ἔργον ἕλξεως ἐπὶ 20m καὶ γ) ποία ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς ὅταν ἀνεβαίνῃ μὲ σταθερὰν ταχύτητα 3 m/sec (τριβὴ ἀμελητέα).

32) Ἀνελκυστήρ, ὁ ὁποῖος μετὰ τοῦ φορτίου του ἔχει συνολικὸν βάρος 1200 kgr*, ἐκκινεῖ ἐκ τοῦ πρώτου ὀρόφου οἰκοδομῆς καὶ μετὰ πάροδον $^1/_2$ min διέρχεται διὰ τοῦ πέμπτου ὀρόφου εὑρισκομένου εἰς ὕψος 18 m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως ὑπὸ ταχύτητα 9m/sec. Ζητεῖται ἡ μέση ἰσχὺς ἡ καταναλισκομένη ἐπὶ τοῦ ἀνελκυστῆρος (g=10m/sec²). ***(Σχ. Πολ. Μηχ. 1952).***

33) Δίδονται δύο κεκλιμένα ἐπίπεδα ΑΒ γωνίας 30° καὶ ΒΓ γωνίας 45° συγκοινωνοῦντα εἰς τὸ Β διὰ μικροῦ κυκλικοῦ τμήματος. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἀρχίζει νὰ κυλίεται σφαῖρα βάρους 10kg* ἡ ὁποία μετά τινα χρόνον φθάνει εἰς τὸ Γ. Ἂν τὸ ΑΒ ἔχῃ μῆκος 1150m καὶ τὸ ΒΓ 1400 m νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας εἰς τὸ Α καὶ β) ποῖον τὸ πραγματοποιούμενον ἔργον ὅταν ἡ σφαῖρα διανύῃ τὸ μῆκος ΑΒ (g=10m/sec²). ***(Σχ. Εὐελπίδων 1935).***

34) Νῆμα μήκους 80 cm φέρει εἰς τὸ κάτω ἄκρον σφαιρίδιον βάρους 20gr*. Ἐκτρέπομεν τοῦτο ἐκ τῆς κατακορύφου κατὰ 45° καὶ τὸ ἀφίνομεν ἐλεύθερον. Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ταχύτης τοῦ σφαιριδίου (γραμμικὴ καὶ γωνιώδης) ὅταν τὸ νῆμα σχηματίζῃ γωνίαν 22°30′ μετὰ τῆς κατακορύφου β) ποῖον ἔργον βαρύτητος ἀπεδόθη γ) ἂν τὴν στιγμὴν αὐτὴν κοπῇ τὸ νῆμα, ποῦ θὰ πέσῃ τὸ σφαιρίδιον ὅταν τὸ σημ.

ἐξαρτήσεως τοῦ νήματος ἀπέχη 6,20m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους καὶ δ) ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σφαιριδίου τὴν στιγμὴν κρούσεως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ($g=10m/sec^2$ ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα).

35) Κατά τινα ἔκκρηξιν ἀτομικῆς βόμβας τὰ 18‰ τῆς γομώσεώς της, μάζης 15kg οὐρανίου, μετετράπησαν εἰς καταστροφικὴν ἐνέργειαν. Ζητοῦνται: α) ποία ἡ ἀποδοθεῖσα ἐνέργεια β) πόσον ἀνθρακίτην θὰ ἔπρεπε νὰ καύσωμε διὰ νὰ πάρωμε τὴν ὡς ἄνω ἐνέργειαν ὑπὸ μορφὴν θερμότητος (1gr ἀνθρακίτου καιόμενον δίδει $8000 \times 4{,}81$ joule).

36) Κατὰ μίαν προσπάθειαν καταρρίψεως τοῦ παγκοσμίου ρεκὸρ ἐπιδόσεως εἰς τὸν δρόμον τῶν 800 m εἷς ἀθλητὴς ὑπολογίσας νὰ καλύψη τὴν ἀπόστασιν ἰσοταχῶς εἰς 1 min καὶ 45 sec ἠδυνήθη νὰ διατηρήση τὴν ἀντίστοιχον ταχύτητα μόνον μέχρι σημείου τινός, ὀλίγας δεκάδας μέτρων ἀπέχοντος ἀπὸ τὸ τέρμα. Ἐπιμένων νὰ ὁλοκληρώση τὴν προσπάθειάν του, συνέχισεν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκείνου μὲ ταχύτητα ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην μέχρι $\upsilon = 0$, (δηλ. μέχρι μηδενισμοῦ τῆς ταχύτητος), τερματίζων εἰς χρόνον 1 min καὶ 50 sec. Ζητεῖται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ δρομέως βάρους 65kgr* ὅτε εὑρίσκετο οὗτος εἰς ἀπόστασιν 20 m ἀπὸ τὸ τέρμα.

(Γεωπονικὴ Σχολὴ 1949)

37) Ἀνυψωτικὴ μηχανὴ κινουμένη διὰ τετραχρόνου κινητῆρος, ἀνυψώνει κατὰ 20m φορτίον 500kgr* σκυροδέματος εἰς τὴν ταράτσαν μιᾶς ὑπὸ ἐκτέλεσιν πολυκατοικίας ἐντὸς χρονικοῦ διαστήματος ἑνὸς πρώτου λεπτοῦ. Ζητεῖται ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ δαπάνη μιᾶς ἀναβάσεως εἰς καύσιμον μόνον ὕλην (βενζίνην) ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι κατὰ τὴν καῦσιν ἑνὸς kg βενζίνης παράγονται 9000 μεγάλες θερμίδες. Δίδονται: ἡ θερμικὴ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος $\kappa=0{,}20$ καὶ ἡ τιμὴ κατὰ kg* βενζίνης 2 δρ, 1 μεγ. θερμ.=425 kg*m. Δεχόμεθα ἐπὶ πλέον ὅτι 60% τῆς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος ἀπορροφῶνται πρὸς ὑπερνίκησιν τῶν τριβῶν κλπ. ἐντὸς τῆς ἀνυψωτικῆς ἐγκαταστάσεως.

(Σχ. Ἀρχιτεκτόνων 1956)

38) Σφόνδυλος μηχανῆς ἔχει διάμετρον 1,50m τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα 3000 kg θεωρεῖται συγκεντρωμένη ὁμοιομόρφως εἰς τὴν περιφέρειάν του. α) Ποῖον ἔργον εἰς kg*m πρέπει νὰ προσδώσωμεν εἰς τὸν σφόνδυλον ἵνα ἀποκτήση 300 στροφὰς εἰς 1min· β) πόσην ἐνέργειαν λαμβάνομεν ὅταν ἡ περιστροφή του πίπτει εἰς 294 στροφὰς ἀνὰ 1min· ποία εἶναι ἡ παρεχομένη ἰσχὺς κατ' αὐτὴν τὴν μείωσιν τῶν στροφῶν ἡ ὁποία διαρκεῖ 5 sec (Nancy).

39) Κατά τινα ἔκκρηξιν ἀτομικῆς βόμβας τὰ 15‰ τῆς μάζης τῆς γομώσεως μετατρέπονται εἰς ἐκρηκτικὴν ἐνέργειαν. Νὰ εὑρεθῆ ἡ παραχθεῖσα ἐνέργεια ὅταν ἡ γόμωσις εἰς οὐράνιον ἦτο 28kg καὶ ἡ ἰσχύς, ἂν ἡ διάρκεια τῆς ἐκρήξεως ἦτο $2 \cdot 10^{-6}$ sec.

40) Ἡ ἡμερησία κατανάλωσις Ἀθηνῶν — Πειραιῶς εἶναι περίπου 2.000.000 kwh. Πόσα γραμμάρια οὐρανίου ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ὡς ἄνω ἐνεργείας.

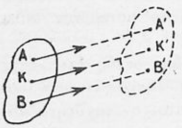
Κίνησις Στερεοῦ

74. Μεταφορὰ — Περιστροφή. — Ὅταν ἕνα στερεὸν σῶμα κινῆται ἐλευθέρως εἰς τὸν χῶρον (π. χ. ἡ Γῆ) ἡ μετατόπισίς του ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῆ εἰς δύο ἁπλουστέρας κινήσεις, μίαν ***μεταφορὰν*** καὶ μίαν ***περιστροφήν***.

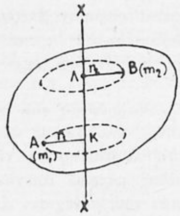
α) Μεταφορὰν ὀνομάζομεν τὴν κίνησιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλα τὰ ὑλικὰ σημεῖα ἑνὸς σώματος κινοῦνται παραλλήλως καὶ διανύουν ἴσα

διανύσματα. Ἡ μελέτη τῆς μεταφορικῆς κινήσεως ἑνὸς σώματος γίνεται μὲ τὴν κίνησιν τοῦ κέντρου μάζης αὐτοῦ (σχ. 72 α')

β) Περιστροφή. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς σώματος περὶ ***στιγμιαῖον ἄξονα*** (π. χ. σβοῦρα, Γῆ) ἢ ***περὶ σταθερὸν*** (π. χ. τροχὸς μιᾶς μηχανῆς), ὅλα τὰ σημεῖα του ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιώδη ταχύτητα καὶ διαγράφουν κυκλικὰς τροχιὰς ἐπὶ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα xx' (σχ. 72β).



Σχ. 72 α'.



Σχ. 72 β'

γ) Ροπὴ ἀδρανείας. Τὸ ὑλικὸν σημεῖον A (σχ. 72β) μάζης m_1 καὶ ἀκτῖνος τ_1 θὰ ἔχῃ γωνιώδη ταχύτητα ω καὶ γραμμικὴν $\upsilon_1 = \omega\tau_1$· ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ θὰ εἶναι $w_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \tau_1^2 \omega^2$. Ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θεωρουμένου ὡς συνόλου ὑλικῶν σημείων μὲ μᾶζας $m_1, m_2, \dots m_\nu$ καὶ ἀποστάσεις ἀπὸ τὸν ἄξονα $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_\nu$, θὰ εἶναι $W = \frac{1}{2} m_1 \tau_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \tau_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2} m_\nu \tau_\nu^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (m_1 \tau_1^2 + m_2 \tau_2^2 + \dots\dots + m_\nu \tau_\nu^2)\omega^2$. Τὸ ἄθροισμα S τῆς παρενθέσεως λέγεται ***ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς ἄξονα*** xx' καὶ παρίσταται συμβολικῶς μέ: $Sm\tau^2 = I$. Ὥστε $W = \frac{1}{2} I . \omega^2$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια σώματος στρεφομένου περὶ ἄξονα, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ροπὴν ἀδρανείας I καὶ ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς γωνιώδους ταχύτητος.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ἡ ροπὴ ἀδρανείας εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, ὅταν εἰς τὰς μηχανὰς θέλωμεν νὰ ἀποταμιεύωμεν ἐνέργειαν εἰς τὰς στιγμὰς τῆς μικρᾶς καταναλώσεως διὰ νὰ ἀποδίδεται αὕτη εἰς τὰς στιγμὰς τῆς ηὐξημένης καταναλώσεως, ἐφοδιάζομεν αὐτὰς μὲ σφόνδυλον· δηλ. μὲ τροχὸν μεγάλης ἀκτῖνος, ὁ ὁποῖος φέρει ὁμοιομόρφως διατεταγμένην μεγάλην μᾶζαν εἰς τὴν περιφέρειάν του.

Παράδειγμα. «Σφόνδυλος μηχανῆς ἔχει μᾶζαν 800kgr καὶ μέσην ἀκτῖνα 60cm, ἐκτελεῖ δὲ 12 στροφὰς κατὰ sec· ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια αὐτοῦ».

Λύσις. Ἔχομεν $I = m \cdot \tau^2 = 8 \cdot 10^5 gr \cdot 60^2 \cdot cm^2 = 288 \cdot 10^7 gr \cdot cm^2$

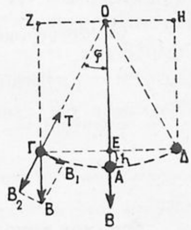
καὶ $\omega = 2\pi\nu = 6{,}28 \cdot 12\ sec^{-1} = 75{,}36 rad \cdot sec^{-1}$

ἄρα $W = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 288 \cdot 10^7 \cdot (75,\ 36)^2 = 817794{,}72 \cdot 10^7$ erg

75. ***Ἐκκρεμές.***— Ἐκκρεμὲς ὀνομάζομεν κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ ὁριζόντιον ἄξονα μὴ διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος. Τὸ σῶμα Σ (σχ. 35) στρεφόμενον περὶ τὸν ὁριζόντιον ἄξονα xx' εἶναι ἕνα ἐκκρεμές. Ἂν ἐκτρέψωμεν τὸ Σ ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας OK, θὰ κινῆται ἑκατέρωθεν αὐτῆς στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xx'. ***Ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι μία περιοδικὴ κίνησις καὶ ἐνδιαφέρει νὰ προσδιορίζωμεν τὴν περίοδόν του.***

Ἁπλοῦν ἐκκρεμές. Ἀντὶ ἑνὸς οἱουδήποτε σώματος διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς μελέτης μας, θεωροῦμεν ἕνα σῶμα πολὺ μικρῶν διαστάσεων, ὥστε τὰ ἐξομοιώνεται μὲ ὑλικὸν σημεῖον, ἐξηρτημένον μὲ νῆμα μὴ ἐλαστικὸν καὶ ἀμελητέου βάρους. Αὐτὸ τὸ ἐκκρεμὲς τὸ ὀνομάζομεν ***ἁπλοῦν ἢ μαθηματικὸν ἐκκρεμές.***

Ἂς θεωρήσωμεν λοιπὸν τὸ ὑλικὸν σημεῖον Α (σχ. 73), τὸ ὁποῖον ἐκτρέπομεν ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας ΟΑ καὶ τὸ φέρομεν εἰς θέσιν ἔστω Γ. Εἰς τὴν θέσιν Γ τὸ βάρος Β ἀναλύεται εἰς τὰς συνιστώσας B_1 καὶ B_2. Ἡ B_2 ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν ΓΤ τοῦ νήματος καὶ ἡ B_1 κινεῖ τὸ σημεῖον πρὸς τὴν θέσιν Α ὅπου καὶ μηδενίζεται. Εἰς τὴν θέσιν Γ τὸ σημεῖον ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν (ἐν σχέσει μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἰς τὸ Α) Β·(ΕΑ) καὶ εἰς τὴν θέσιν Α κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{1}{2}mu^2 = B\,(EA)$, ὅπου υ ἡ ταχύτης (μεγίστη) τοῦ σημείου εἰς τὸ Α. Τὸ ἐκκρεμὲς συνεχίζει τὴν κίνησίν του πέραν τοῦ Α μὲ ἐλαττουμένην ταχύτητα καὶ φθάνει εἰς τὸ Δ, ὅπου ἡ κινητική του ἐνέργεια ἔχει μετατατραπεῖ εἰς δυναμικήν. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Ἐκ τοῦ Δ τὸ ἐκκρεμὲς θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ Γ, ἐκ τοῦ Γ πάλιν εἰς τὸ Δ κ.ο.κ.· δηλ. ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι μία περιοδικὴ κίνησις. Ἡ προηγουμένη κίνησις θὰ συνεχίζετο ἀπεριορίστως ἂν δὲν ὑπῆρχε ἀπώλεια ἐνεργείας λόγῳ τριβῶν καὶ ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος.



Σχ. 73.

Ἡ διαδρομὴ ΓΑΔ λέγεται ***ἁπλῆ αἰώρησις*** καὶ ἡ ΓΑΔΑΓ ***πλήρης αἰώρησις.*** Ὁ χρόνος διὰ μίαν πλήρη αἰώρησιν εἶναι ἡ ***περίοδος.*** Ἡ γωνία ΓΟΑ = φ λέγεται ***πλάτος*** τῆς αἰωρήσεως. Ἡ περίοδος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς διὰ μικρὸν πλάτος ($\varphi < 3^0$) δίδεται ἐκ τοῦ τύπου, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ὅπου $\pi = 3{,}14...$, l = τὸ μῆκος ΟΑ, g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.

Νόμοι τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου συνάγομεν τοὺς ἑπομένους νόμους.

1) ***Αἱ αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους εἶναι ἰσόχρονοι.*** Ἐπειδὴ τὸ πλάτος δὲν περιέχεται εἰς τὸν τύπον θὰ ἔπρεπε νὰ διατυπώσωμεν, ὅτι ἡ περίοδος (διὰ τὸ αὐτὸ μῆκος) εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ πλάτους. Τοῦτο συμβαίνει κατὰ μεγάλην προσέγγισιν ὅταν τὸ πλάτος εἶναι πολὺ μικρὸν ($\varphi < 3^0$).

2) ***Ἡ περίοδος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μάζης τοῦ ἐκκρεμοῦς.***

3) ***Ἡ περίοδος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ μήκους*** l ***τοῦ ἐκκρεμοῦς.***

4) ***Ἡ περίοδος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἐπιταχύνσεως*** g ***τῆς βαρύτητος.***

Εὕρεσις τοῦ τύπου. Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια εἰς τὴν θέσιν Γ εἶναι mgh, (ΕΑ = h) καὶ ἡ κινητικὴ εἰς τὴν Α, $\frac{1}{2}mu^2$. Ἄρα, $mgh = {}^1/_2 mu^2$ καὶ $u = \sqrt{2gh}$, ἀλλὰ h =

$=OA-OE=l-l\,\text{συν}\,\varphi=l\,(1-\text{συν}\,\varphi)=2l\,\text{ημ}^2\dfrac{\varphi}{2}$ καὶ ἐπομένως $\upsilon=\sqrt{4gl\,\text{ημ}^2\varphi/_2}=$ $=2\,\text{ημ}\,\varphi/2\sqrt{gl}$. Ἄς θεωρήσωμεν ὅτι συγχρόνως μὲ τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ΖΗ ὑλικὸν σημεῖον μὲ τὴν αὐτὴν περίοδον (ἁρμονικὴ κίνησις). Ἡ ταχύτης αὐτοῦ εἰς τὸ Ο θὰ εἶναι $\upsilon_1=R\omega=(ZO)\cdot\omega=\omega l\,\text{ημ}\varphi$. Διὰ μικρὰν γωνίαν φ ἠμποροῦμεν νὰ ἐξομοιώσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ Α μὲ ἁρμονικὴν κίνησιν ἐπὶ τῆς χορδῆς ΓΔ καὶ συνεπῶς νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἰσότητα $\upsilon=\upsilon_1$, δηλ. $\omega l\,\text{ημ}\varphi=2\,\text{ημ}\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{gl}$

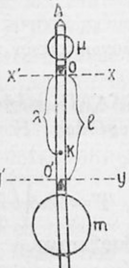
$$\text{ἢ}\quad \frac{2\pi}{T}\cdot l\,\text{ημ}\varphi=2\,\text{ημ}\frac{\varphi}{2}\sqrt{gl}\quad\text{ἢ}\quad \frac{2\pi}{T}l\cdot 2\,\text{ημ}\frac{\varphi}{2}\cdot\text{συν}\frac{\varphi}{2}=2\,\text{ημ}\frac{\varphi}{2}\sqrt{gl}\,\cdot$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{2\pi}{T}l\,\text{συν}\varphi/2=\sqrt{gl}\left(\text{καὶ ἐπειδὴ } \varphi/2\leq 1{,}5^0,\ \text{συν}\,\varphi/2=1\right),\quad \frac{2\pi}{T}\cdot l=\sqrt{gl}$$

$$\text{καὶ}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Φυσικὸν ἐκκρεμές. Κάθε στερεὸν σῶμα στρεφόμενον περὶ ὁριζόντιον ἄξονα μὴ διερχόμενον ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους του, λέγεται συνήθως ***φυσικὸν ἐκκρεμές,*** πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸ ἁπλοῦν.

Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα φυσικὸν ἐκκρεμὲς (σχ. 74), ποὺ δύναται νὰ περιστρέφεται περὶ δύο παραλλήλους ἄξονας χ΄χ, ψ΄ψ. Κατὰ μῆκος τοῦ στελέχους ΑΓ ὀλισθαίνουν δύο μᾶζαι m, μ. Κατ᾽ ἀρχὴν εὑρίσκομεν τὴν περίοδον αἰωρήσεως μὲ ἄξονα τὸν χ΄χ καὶ ἀκολούθως ἐπιτυγχάνομεν μὲ ἄξονα αἰωρήσεως τὸν ψ΄ψ τὴν αὐτὴν περίοδον μετακινοῦντες καταλλήλως τὰς μάζας m, μ. Ἕνα τέτοιο ἐκκρεμὲς λέγεται συνήθως ***ἀνάστροφον ἐκκρεμές.*** Ἡ ἀπόστασις ΟΟ΄$=l$ τῶν ἀξόνων ἀποδεικνύεται ὅτι ***ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς***, ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν περίοδον καὶ λέγεται ***ἀνηγμένον μῆκος*** τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς. Τὸ ἀνηγμένον μῆκος ἰσοῦται μὲ $l=\dfrac{I}{M\cdot\lambda}$, ὅπου Ι ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν χρησιμοποιούμενον ἄξονα, Μ ἡ ὁλικὴ μᾶζα καὶ λ ἡ ἀπόστασις τοῦ κ. βάρους ἀπὸ τὸν ἄξονα.



Σχ. 74.

Ἐφαρμογαὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς. α) ***Προσδιορισμὸς τοῦ*** g. Μὲ τὸ ἀνάστροφον ἐκκρεμὲς ἠμποροῦμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ g εἰς ἕνα τόπον, διότι, ἂν l τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐκ τοῦ τύπου τῆς περιόδου ἔχομεν:

$g=\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$. Τὸ ἐκκρεμὲς μᾶς παρέχει τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τοῦ g, π. χ.

διὰ τὸν ἰσημερινὸν	$g=978\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-2}$
διὰ γεωγραφικὸν πλάτος 45°	$g=981\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-2}$
διὰ τοὺς πόλους	$g=983\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-2}$

β) ***Μέτρησις τοῦ χρόνου.*** Ἐπειδὴ αἱ μικροῦ πλάτους αἰωρήσεις ἑνὸς ἐκκρεμοῦς εἶναι ἰσόχρονοι, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς χρονόμετρον. Αἱ αἰωρήσεις, λόγῳ τῶν ἀντιστάσεων, γίνονται ***φθίνουσαι,*** διὰ τοῦτο εἰς τὰ ὡρολόγια ὑπάρχει κατάλληλος μηχανισμὸς (ἐλατήρια, ἠλεκτρομαγνῆται κ.λ.π), ὁ ὁποῖος συντηρεῖ σταθερὸν τὸ πλάτος.

γ) ***Προσδιορισμὸς ῥοπῆς ἀδρανείας.*** Ἀφοῦ προσδιορίσωμεν πειραματικῶς τὸ ἀνηγμένον μῆκος l, ἐκ τοῦ τύπου $l = \frac{I}{M \cdot \lambda}$ εὑρίσκομεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας τοῦ σώματος.

δ) ***Ἀπόδειξις τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς.*** Ἀποδεικνύεται πειραματικῶς ὅτι τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς μένει παράλληλον πρὸς ἑαυτὸ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην κίνησιν καὶ ἂν συμμετέχῃ τὸ ἐκκρεμές. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἐκμεταλλευόμεθα διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς περὶ ἄξονα (πείραμα Foucault).

Παράδειγμα. «Εἰς τόπον ὅπου $g = 980 \frac{cm}{sec^2}$ ἡ περίοδος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι 2 sec. Πόσον θὰ ὑστερῇ τοῦτο ὅταν μεταφερθῇ εἰς τόπον ὅπου $g = 976 cm/sec^2$ καὶ πόσον τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς;»

Λύσις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ ἔχωμε $2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$ καὶ εἰς τὴν δευτέραν $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}}$. Διαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν $T/2 = \sqrt{g_1/g_2} = \sqrt{980/976} = 1{,}002$ sec. Ὥστε ἡ ἡμιπερίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὸν δεύτερον τόπον θὰ εἶναι 1,002 καὶ ἐφ' ὅσον εἰς κάθε ἁπλῆν αἰώρησιν μετρῶμεν δευτερόλεπτα θὰ ὑπολειπώμεθα εἰς χρόνον 1,002sec κατὰ 0,002 sec. καὶ εἰς 1 sec θὰ ἔχωμεν καθυστέρησιν $\frac{0{,}002}{1{,}002}$ sec $= 0{,}001996$ sec. Ἡ καθυστέρησις εἰς 24 ὥρας θὰ εἶναι $0{,}01996 \times 86400 = 172{,}45$ sec. Τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς θὰ εἶναι $l = \frac{980}{(3{,}14)^2} = \frac{980}{9{,}86} = 0{,}882$ m.

Ἀσκήσεις

I

1) Ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς εἶναι T=2sec, τὸ δὲ μῆκος αὐτοῦ $l = 99{,}0103$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ g. ***(Σχ. Ἰκάρων 1949)***

2) Ποία ἡ περίοδος T ἐκκρεμοῦς ὅταν ἔχῃ μῆκος 1m καὶ αἰωρῆται εἰς τὸ Παρίσι ἔνθα $g = 981$ $cm.sec^{-2}$.

3) Ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 2,90m καὶ αἰωρεῖται εἰς τόπον ἔνθα $g = 980 cm.sec^{-2}$. Πόσας πλήρεις αἰωρήσεις ἐκτελεῖ εἰς 1 min.

4) Ἐκκρεμὲς μήκους 25cm ἔχει περίοδον πλήρους αἰωρήσεως T=1sec. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις g τοῦ τόπου.

5) Εἰς τὰς Ἀθήνας ἔνθα $g = 980$ cm/sec^2, ἐκκκρεμὲς ἔχει περίοδον πλήρους αἰωρήσεως T=1sec. Τί περίοδον ἔχει εἰς τοὺς πόλους ὅπου $g = 983 cm/sec^2$ καὶ ποίαν εἰς τὸν ἰσημερινὸν ἔνθα $g = 978 cm/sec^2$.

6) Ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος πλήρους αἰωρήσεως εἶναι T=2sec, αὐξάνομεν τὸ μῆκος του κατὰ 10 cm. Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ περίοδος;

7) Ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος 1,5m καὶ πλάτος αἰωρήσεως 60^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καθ' ἣν στιγμὴν διέρχεται διὰ τῆς θέσεως τῆς κατακορύφου.

(Σχολὴ Φυσικῶν Ἀθηνῶν 1950)

8) Ἐκκρεμὲς μήκους 2m ἐκτελεῖ 180 ταλαντώσεις εἰς 6 min. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον τὸ μῆκος ἑτέρου ἐκκρεμοῦς τοῦ ὁποίου ἡ T=1sec.

(Σχολὴ Φυσικῶν Ἀθηνῶν 1951).

9) Μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς δίδον 60 αἰωρήσεις ἀνὰ min, θέλομεν νὰ μᾶς δίδη 70 αἰωρήσεις ἀνὰ min. Ἐρωτῶμεν: θ' αὐξηθῇ ἢ θὰ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος του καὶ κατὰ πόσον;

10) Σφαῖρα βάρους 1kg* ἐξαρτᾶται διὰ νήματος μήκους 1m. α) Κατὰ πόσον ἀνυψοῦται ἡ σφαῖρα ὅταν ἐκτρέπωμεν αὐτὴν τῆς κατακορύφου κατὰ $\varphi=45^0$. β) Ποία ἡ τάσις τοῦ νήματος εἰς τὴν θέσιν $\varphi=45^0$. γ) Πόσην γραμμικὴν ἢ γωνιώδη ταχύτητα θὰ ἔχῃ ἡ σφαῖρα, ὅταν ἀφιεμένη ἐλευθέρα ἐκ τῆς θέσεως $\varphi=45^0$, διέρχεται ἀπὸ τὴν κατακόρυφον.

11) Ἐκκρεμὲς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἔχει περίοδον πλήρους αἰωρήσεως T=2sec. Ὅταν τοῦτο αἰωρῆται ἐντὸς ἀεροστάτου εἰς ὕψος 5000m ἀπὸ τοῦ ἐδάφους, τί περίοδον θὰ ἔχῃ (ἀκτὶς τῆς Γῆς R=6370 km).

II

12) Ἐκκρεμὲς ἔχει περίοδον T=2sec εἰς ἕνα σημεῖον Α τόπου εἰς τὸν ὁποῖον ἐλέγχεται τὸ ὑπέδαφος. Εἰς παρακείμενον σημεῖον Β παρετηρήθη περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς κατὰ 0,0002sec μικροτέρα ἀπὸ τοῦ Α, ἄρα αἱ μεταλλικαὶ μᾶζαι τοῦ σημείου Β ἐπηρεάζουν τὸ ἐκκρεμές. Πόση εἶναι ἡ πρόσθετος ἑλκτικὴ δύναμις τῶν μεταλλικῶν μαζῶν τοῦ Β ὅταν τὸ σφαιρίδιον τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχει μᾶζαν 2 gr.

13) Ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς μήκους 25cm ταλαντοῦται εἰς τόπον ἔνθα $g=980cm/sec^2$ μὲ πλάτος $\varphi=2^0$ καὶ τὸ σφαιρίδιόν του ἔχει βάρος 3gr*. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ταχύτης τοῦ σφαιριδίου ὅταν διέρχεται τὴν κατακόρυφον. β) Ποία κατακόρυφος ἐκ τῶν κάτω ἑλκτικὴ δύναμις ἠλεκτρομαγνήτου πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς ἐκείνην τῆς βαρύτητος ὥστε ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς νὰ γίνῃ 10 φορὰς μικροτέρα. γ) Ποία ἡ τάσις τοῦ νήματος εἰς θέσιν $\varphi=1^0$ μετὰ καὶ ἄνευ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου. δ) Τί θὰ συμβῇ ἂν ὁ ἠλεκτρομαγνήτης ἐνεργῇ πρὸς τὰ ἄνω.

14) Φυσικὸν ἐκκρεμὲς ἔχει ἀνηγμένον μῆκος 9,8m καὶ σφαῖραν μεγάλης μάζης. Εἰς ἀπόστασιν ὁριζοντίαν 500m εὑρίσκεται τὸ στόμιον κάννης πυροβόλου. Ζητοῦνται: α) Ποίαν κλίσιν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος πρέπει νὰ σχηματίζῃ ὁ ἄξων τῆς κάννης ἵνα τὸ βλῆμα τοῦ πυροβόλου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0=100m/sec$ κτυπήσῃ τὴν ἠρεμοῦσαν σφαῖραν τοῦ ἐκκρεμοῦς. β) Μετὰ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ριφθῇ ἕτερον βλῆμα ὑπὸ τοῦ πυροβόλου (ἡ αὐτὴ προηγουμένη θέσις του καὶ γωνία βολῆς) ὥστε ἀφοῦ ἡ σφαῖρα ἔχει κάνει 2 πλήρεις αἰωρήσεις, νὰ τὴν κτυπήσῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς κατακορύφου ($g=10cm/sec^2$, φαινόμενον ἐν τῷ κενῷ).

15) Ἐκκρεμὲς μήκους 4 m αἰωρεῖται μὲ πλάτος αἰωρήσεως $\varphi=0,1$ radian εἰς τόπον ἔνθα $g=980cm/sec^2$. Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ περίοδος T ($\pi=22/7$) β) ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν διέρχεται τὴν κατακόρυφον γ) κόπτομεν τὸ νῆμα τὴν στιγμὴν ποὺ τὸ ἐκκρεμὲς διέρχεται τὴν κατακόρυφον· νὰ μελετηθῇ ἡ περαιτέρω κίνησις τοῦ σφαιριδίου (ἀντίστασις ἀέρος ἀμελητέα). Ὕψος ἐκ τοῦ ἐδάφους 19,6m.

16) Κατακορύφως ἐξαρτᾶται ἐλατήριον τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ αὐξάνῃ τὸ μῆκος του κατὰ 2cm ὅταν εἰς τὸ ἐλεύθερον κάτω ἄκρον του κρεμῶμεν βάρος 1kg*. Ἐξαρτῶμεν μίαν σφαῖραν βάρους 10kg* ἀπὸ τὸ κάτω ἄκρον τοῦ ἐλατηρίου καὶ ἀφήνομεν τὸ σύστημα χωρὶς ἀρχικὴν ταχύτητα. Ζητοῦμεν: α) τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως β) τὸ ἔργον βαρύτητος ὅπερ ἀποδίδεται ἐκ τῆς ἀνωτέρας θέσεως μέχρι τῆς κατωτέρας γ) τὴν μεγίστην ταχύτητα τῆς σφαίρας κατὰ τὴν ταλάντωσιν.

δ) Τὴν περίοδον ταλαντώσεως (εἰς τὸ κενόν, $g=980cm/sec^2$). (Σημ. Νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος $T=2\pi\sqrt{m/c}$, ὅπου m = μάζα τῆς σφαίρας καὶ c ὁ λόγος δυνάμεως πρὸς ἐπιμήκυνσιν· ἐδῶ $c=\frac{1kg^*}{5cm}$)

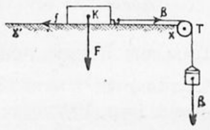
17) Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει λόγον ὕψους πρὸς βάσιν του 3/4. Ἀφήνομεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς του νὰ κυλίεται σφαῖρα βάρους 50gr* ἡ ὁποία διατρέχει τὸ μῆκος του εἰς τόσον χρόνον ὅσον χρειάζεται ἐκκρεμὲς διὰ νὰ κάμη 10 αἰωρήσεις. Νὰ εὑρεθῇ: α) τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς. β) ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου τούτου ($g=980cm/sec^2$, $\pi=22/7$).

18) Εἰς τόπον ὅπου $g=980cm/sec^2$ ἔχομεν δύο ἐκκρεμῆ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν ἔχει T=1sec καὶ τὸ ἄλλο μῆκος 1,4m. Νὰ καθορισθῇ: α) μετὰ πόσον χρόνον τὸ ἓν θὰ ἔχῃ κάμει μίαν περίοδον περισσοτέραν ἀπὸ τὸ ἄλλο. β) νὰ εὑρεθῇ πόσας αἰωρήσεις θὰ κάνῃ ἕκαστον εἰς 1h.

Τριβή.

76. ***Τριβὴ ὀλισθήσεως.*** — Κατὰ τὴν κίνησιν διαφόρων σωμάτων τὰ ὁποῖα ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν μὲ ἄλλα σώματα, ἀναπτύσσονται δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἀντιδροῦν εἰς τὴν κίνησιν καὶ λέγονται ***δυνάμεις τριβῆς.***

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μὲ τὴν τροχαλίαν T καὶ τὸ βάρος β ἐπιτυγχάνομεν τὴν ***συντήρησιν σταθερᾶς ταχύτητος*** τοῦ σώματος K. Τὸ σῶμα K κινεῖται ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας τραπέζης x΄x καὶ ἡ βάσις του εὑρίσκεται εἰς συνεχῆ ἐπαφὴν μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης. Ἐπειδὴ ἡ ταχύτης του εἶναι σταθερά, ἡ δύναμις β δὲν προσδίδει ἐπιτάχυνσιν· συνεπῶς ἐξουδετεροῦται ἀπὸ μίαν ἀντίθετον δύναμιν ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη δύναμις τριβῆς μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ K καὶ τῆς τραπέζης. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω κίνησιν τὰ αὐτὰ πάντοτε μόρια τοῦ K ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης· ***τὴν κίνησιν αὐτὴν ὀνομάζομεν ὀλίσθησιν*** καὶ τὴν τριβήν, ***τριβὴν ὀλισθήσεως.***



Σχ. 75.

Νόμοι τριβῆς. Ἀπὸ τὰ διάφορα πειράματα ἐξακριβώνομεν ὅτι ἡ δύναμις τριβῆς:

α) ***εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐφαπτομένης ἐπιφανείας***

β) ***εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος***

γ) ***ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν καὶ***

δ) ***εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν κάθετον δύναμιν ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ὀλισθαίνει τὸ σῶμα.***

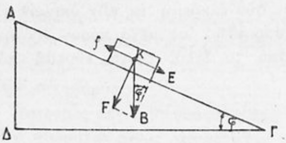
Συντελεστὴς τριβῆς. Ἔστω ὅτι τὸ βάρος τοῦ K εἶναι F = 100 kg* καὶ ἡ τριβὴ f=β=20kg*· ἂν ἐπὶ τοῦ K θέσωμεν πρόσθετον βάρος 100kg*, ἡ τριβὴ κατὰ τὸν δ νόμον, θὰ γίνῃ 40kg*. ***Ὁ σταθερὸς λόγος η τῆς τριβῆς f πρὸς τὴν κάθετον δύναμιν*** F, $\eta=\frac{20}{100}=\frac{40}{200}=\;....\;=\frac{f}{F}$

λέγεται συντελεστὴς τριβῆς. Ἑπομένως ἡ δύναμις τριβῆς εἶναι, $f = \eta \cdot F$.

Μερικοὶ συντελεσταὶ τριβῆς ὀλισθήσεως.

Διὰ τὰ μέταλλα ἀπὸ		$\eta = 0,15$ ἕως $\eta = 0,50$.
» » »	μὲ παρεμβολὴν λιπαντικῶν ὑγρῶν μειώνεται μέχρι 0,05.	
Δρῦς ἐπὶ δρυὸς		$\eta = 0,40$
» » »	μὲ λιπαντικὸν ὑγρὸν	$\eta = 0,16$
Σίδηρος ἐπὶ πάγου		$\eta = 0,02$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΓ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα Κ ***ὀλισθαίνει μὲ σταθερὰν ταχύτητα***, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ συνιστῶσα ΚΕ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δύναμιν τριβῆς f. Ὁ συντελεστὴς τριβῆς θὰ εἶναι: $\eta = \dfrac{f}{F} = \dfrac{KE}{F} = \dfrac{B \cdot \eta\mu\varphi}{B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} = \varepsilon\varphi\varphi$



Σχ. 76.

δηλ. ***ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας φ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.*** Ἡ γωνία αὐτὴ φ λέγεται ***γωνία τριβῆς*** (σχ. 76).

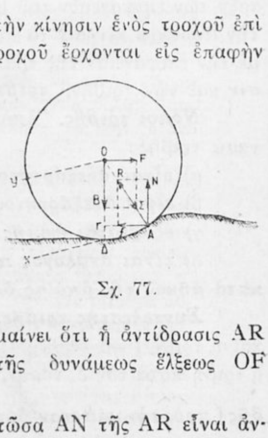
Παράδειγμα. «Σῶμα κυβικοῦ σχήματος ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30°. Ἄρχεται κινούμενον μὲ ἀρχικὴν τυχύτητα 0 καὶ μετὰ 2sec διανύει διάστημα 6m. Ζητεῖται ὁ συντελεστὴς τριβῆς». ***(Σχολὴ Μηχανολόγων 1947).***

Λύσις. Ἂν δὲν ὑπῆρχε τριβὴ ἡ γ θὰ ἦτο $\gamma = g\eta\mu\varphi = 980 \cdot \frac{1}{2} = 490 \mathrm{cm/sec^2}$

Τώρα ποὺ ὑπάρχει τριβὴ ἡ γ′ εἶναι: $s = \frac{1}{2}\gamma' t^2$ ἢ $\gamma' = 300 \mathrm{cm/sec^2}$. Δημιουργεῖται ἐλάττωσις τῆς γ κατὰ $190 \mathrm{cm/sec^2}$ καὶ ὀφείλεται εἰς τὴν δύναμιν τριβῆς f ἡ ὁποία εἶναι: $f = m \cdot 190 \mathrm{cm/sec}$ (m = μᾶζα τοῦ σώματος). Ὁ συντελεστὴς τριβῆς θὰ εἶναι

$$\eta = \frac{f}{F} = \frac{190m}{mg\sigma\upsilon\nu\, 30^0} = \frac{190}{490\sqrt{3}} = 0,22.$$

77. Τριβὴ κυλίσεως. — Κατὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς τροχοῦ ἐπὶ ἑνὸς δρόμου (σχ. 77) διαρκῶς νέα σημεῖα τοῦ τροχοῦ ἔρχονται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὸ κατάστρωμα τοῦ δρόμου. ***Τὴν κίνησιν αὐτὴν ὀνομάζομεν κύλισιν.*** Κατὰ τὴν κύλισιν δημιουργεῖται παραμόρφωσις τοῦ καταστρώματος ὁσονδήποτε σκληρὸν κι' ἂν εἶναι τοῦτο, διότι ὅλα τὰ ὑλικὰ παρουσιάζουν μίαν μεγάλην ἢ μικρὰν πλαστικότητα. Λόγῳ τῆς παραμορφώσεως ἀναπτύσσεται ἡ ἀντίδρασις AR τοῦ ὑποστηρίγματος, ἡ ὁποία τείνει νὰ ἐξουδετερώσῃ τὴν κίνησιν τοῦ τροχοῦ. Ὅταν



Σχ. 77.

ὁ τροχὸς κυλίεται ***μὲ σταθερὰν ταχύτητα*** σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίδρασις AR ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν συνισταμένην ΟΣ τῆς δυνάμεως ἕλξεως OF καὶ τοῦ βάρους OB.

Ῥοπὴ κυλίσεως. Ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα AN τῆς AR εἶναι ἀντίθετος τοῦ βάρους ΟΒ. Ἂν ΑΓ=λ τότε ἡ ροπὴ Μ τῆς ΑΝ ὡς πρὸς τὸν στιγμιαῖον ἄξονα περιστροφῆς Δχ (παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Οψ τοῦ τροχοῦ) θὰ εἶναι, Μ=λ·(ΑΝ)=λ·Β. Ἡ ροπὴ αὐτὴ ὀνομάζεται ***ροπὴ κυλίσεως.*** Διὰ νὰ κυλίεται ὁ τροχὸς μὲ σταθερὰν ταχύτητα πρέπει ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως ἕλξεως F ὡς πρὸς ἄξονα Δχ νὰ ἰσοῦται μὲ Μ : δηλ. $F \cdot (O\Delta) = \lambda \cdot B$ ($O\Delta = \rho$, ἀκτὶς τροχοῦ). Ὥστε, $F = \frac{\lambda}{\rho} \cdot B$ (1). Ὁ μοχλοβραχίων λ τῆς ροπῆς Μ λέγεται ***παράμετρος τριβῆς κυλίσεως*** καὶ ἔχει διαστάσεις μήκους· δεικνύει δὲ κατὰ πόσον μετατοπίζεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιδράσεως R ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ ὅπου αὐτὴ θὰ ἐφήρμοζε εἰς περίπτωσιν ἀναλλοιώτων στερεῶν.

Μερικαὶ παράμετροι τριβῆς κυλίσεως.

Ξύλινος τροχὸς ἐπὶ ξυλίνου καταστρώματος	ἀπὸ 0,5 ἕως 1,5 mm
Τροχὸς σιδηροδρόμου ἐπὶ σιδηροτροχιᾶς	» 0,5 » 1 mm.
Τροχὸς σιδηροῦς ἐπὶ ἀσφαλτοστρωμένου δρόμου	» 18 » 25 mm.

Ὁ λόγος $\alpha = \frac{\lambda}{\rho}$ λέγεται ***συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως*** καὶ εἶναι μέγεθος ἀδιάστατον ὅπως καὶ ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως, ἐξαρτᾶται δὲ ὅπως βλέπομεν ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ τροχοῦ (ἀντιστρόφως ἀνάλογος).

Ἐπειδὴ $\alpha = \frac{F}{B}$, ***ὁ συντελεστὴς τριβῆς κυλίσεως δίδεται ἀπὸ τὸν λόγον τῆς δυνάμεως ἕλξεως πρὸς τὸ βάρος.***

Ἀπὸ τὸν τύπον (1) συνάγομεν ὅτι ἡ δύναμις ἕλξεως F εἶναι: 1) ***ἀνάλογος τῆς καθέτου δυνάμεως B*** 2) ***ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ τροχοῦ*** 3) ***ἀνάλογος τῆς παραμέτρου λ*** (ἐξαρτωμένης ἐκ τῆς πλαστικότητος τῶν ὑλικῶν).

Συσχετισμὸς τριβῆς κυλίσεως καὶ ὀλισθήσεως. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μεταφέρωμεν βάρος Β καὶ χρησιμοποιοῦμεν ξύλινον τροχὸν ἀκτῖνος 20cm ἐπὶ ξυλίνου καταστρώματος, ὅπου ἡ παράμετρος κυλίσεως εἶναι 1mm. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ὁ συντελεστὴς α εἶναι 1mm/20cm = 1mm/200mm = 0,005. Ἄρα ἡ δύναμις ἕλξεως θὰ εἶναι F = 0,005Β. Ἐὰν ἡ μεταφορὰ ἐγένετο δι' ὀλισθήσεως (η=0,40) τότε ἡ δύναμις ἕλξεως θὰ ἦτο $F' = 0{,}40B$: ὥστε $F'/F = \frac{0{,}40}{0{,}005} = 80$· δηλ. $F = F'/80$. Ἐκ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος καταφαίνεται πόσον σημαντικὴ ὑπῆρξεν διὰ τὸν ἄνθρωπον ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τροχοῦ, διότι αἱ δυνάμεις ἕλξεως κατὰ τὴν κύλισιν εἶναι πολὺ μικρότεραι ἐκείνων κατὰ τὴν ὀλίσθησιν. Ὁμοίως προτιμῶμεν τὴν κύλισιν ἄξονος ἐντὸς τῶν ἑδράνων του (κουζινέτα) διὰ τῆς παρεμβολῆς μικρῶν χαλυβδίνων σφαιρῶν (κυλιόμενοι τριβεῖς, ρουλεμάν) κ.λ.π.

Παρατήρησις. Γενικῶς αἱ δυνάμεις τριβῆς παίζουν ἀξιόλογον ρόλον κατὰ τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις αἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι ἐπιζήμιοι· π. χ. προκαλοῦν θερμότητα, μειώνουν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐνδείξεων ὀργάνων κ.λ.π. Δι' αὐτὸ προσπαθοῦμεν νὰ μειώσωμεν τὴν δρᾶσιν των μὲ διάφορα μέσα π. χ. μὲ λιπαντικὰ ὑγρά, μὲ ἀνθεκτικὰ ὑλικὰ κ. λ. π. Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσει αἱ δυνάμεις τριβῆς εἶναι ἀπαραίτητοι π. χ. εἰς τὰ μηχανικὰ φρένα, εἰς τὴν κύλισιν τροχῶν, κατὰ τὸ βάδισμά μας ὅπου ἀποκαθιστοῦν σταθερότητα τοῦ πέλματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κ.λ.π.

Ἀσκήσεις.

I

1) Ποία ἡ δύναμις τριβῆς ὅταν σῶμα βάρους 80kg* ὀλισθαίνη ἰσοταχῶς ἐπὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας. Συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως $\eta=0{,}05$.

2) Ὁ συντελεστὴς τριβῆς ὀλισθήσεως σώματος βάρους 50 kg* καὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας εἶναι $\eta=0{,}18$. Ἐὰν δύναμις 10kg* ἐνεργήση ὁριζοντίως ἐπὶ τοῦ σώματος, θὰ τὸ κινήση ; Ἐὰν τὸ κινήση ποία ἡ κίνησις ;

3) Θέλομεν νὰ ὀλισθήση ὁριζοντίως δρύϊνον κιβώτιον βάρους 100kg* ἐπὶ δρυΐνου καταστρώματος μὲ σ αθερὰν ταχύτητα εἰς ἀπόστασιν 2m. Ποῖον ἔργον θὰ καταβάλωμεν ; ($\eta=0{,}40$).

4) Σῶμα ὀλισθαίνει ἰσοταχῶς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὅταν τοῦτο σχηματίζη γωνίαν μετὰ τοῦ ὁρίζοντος 20^0. Ποῖος ὁ συντελεστὴς τριβῆς ;

5) Ποία ἰσχὺς καταβάλλεται ὅταν σῶμα βάρους 60kg* ὀλισθαίνη ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ σταθερὰν ταχύτητα 4cm/sec ($\eta=0{,}16$).

II

6) Σῶμα 20kg* ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ_0. Κατά τινα στιγμὴν παύει νὰ ἐνεργῆ ἡ ἐξουδετερώνουσα τὴν τριβὴν δύναμις καὶ τὸ σῶμα σταματάει εἰς ἀπόστασιν 5m. Ζητοῦνται α) ἡ δύναμις τριβῆς καὶ β) ἡ ταχύτης υ_0 ($\eta=0{,}02$).

7) Πόση πρέπει νὰ εἶναι μία δύναμις F διὰ νὰ ἀναγκάση νὰ ὀλισθήση ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου σῶμα βάρους 100kg* μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma=1\text{m/sec}^2$ (συντελεστὴς τριβῆς $\eta=0{,}4$) α) ὅταν ἡ δύναμις F εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν δρόμον καὶ β) ὅταν σχηματίζη ἡ F γωνίαν 30^0 μετὰ τοῦ δρόμου.

8) Τὸ σῶμα Κ τοῦ σχ. 75 καὶ βάρους 10kg* σύρεται μέσῳ τῆς τροχαλίας Τ διὰ τοῦ βάρους β ὁμοίως 10kg*. Ὅταν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $\eta=0{,}30$ καὶ τὸ σύστημα κινεῖται, ποία ἡ διανυομένη ἀπόστασις εἰς τὸ πρῶτον sec.

9) Κινητὸν ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου διανύον τὸ μῆκος του 35m. Ἐὰν ἡ βασις τοῦ ἐπιπέδου εἶναι 18m καὶ $\eta=0{,}20$ πόσον χρόνον θὰ χρειασθῆ διὰ νὰ διανύση τὸ κινητὸν τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου.

10) Σῶμα βάρους 400kg* ὀλισθαίνει κατὰ μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας $\omega=30^0$ ὑπὸ δυνάμεως παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐξαναγκάζει νὰ ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν ἐκ τῆς ἠρεμίας. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις αὐτὴ διὰ νὰ διανύση 20m εἰς 5sec ($\eta=0{,}10$).

11) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας 30^0 ἐκσφενδονίζομεν πρὸς τὰ ἄνω σῶμα βάρους 2kg* μὲ ταχύτητα 10m/sec ($\eta=0{,}40$). Ποίαν ἀπόστασιν θὰ διανύση ἕως ὅτου σταματήση.

12) Δύναμις $F=5\cdot10^6$dyn ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑλκύθρου μάζης 20kg καὶ ἀναγκάζει τοῦτο νὰ κινηθῆ ὀλισθαῖνον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Τὸ ἕλκυθρον ἀποκτᾶ ταχύτητα $\upsilon=600$cm/sec ἀφοῦ διανύση 20m. Νὰ εὑρεθῆ ἂν ὑπάρχη τριβὴ καὶ ἂν ναὶ νὰ ὑπολογισθῆ. ***(Σχολὴ Πολ. Μηχανικῶν 1951).***

13) Ὁριζόντιος δίσκος δύναται νὰ περιστραφῆ περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Θέτομεν ἐπὶ τοῦ δίσκου εἰς ἀπόστασιν 0,15m ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς ἀντικείμενον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο τίθεται εἰς κίνησιν ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιστροφῶν

τοῦ δίσκου ὑπερβαίνῃ τὰς 40 στροφὰς ἀνὰ min. Ζητεῖται τὸ ὅριον τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς μεταξὺ τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ δίσκου ($g=9{,}8 m/sec^2$).

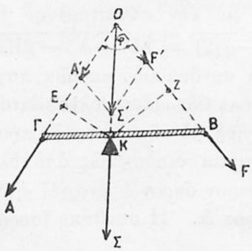
(Σχολὴ Χημικῶν Μηχ. 1948).

Ἁπλαῖ Μηχαναὶ

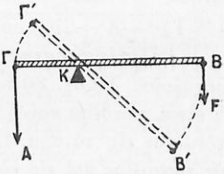
78. ***Ὁ ρ ι σ μ ο ί.*** — Λέγομεν μηχανὴν ἐν γένει κάθε σύστημα σωμάτων, διὰ τοῦ ὁποίου μετατρέπομεν μίαν μορφὴν ἐνεργείας εἰς μίαν ἄλλην· π. χ. θερμικὴν ἐνέργειαν εἰς κινητικὴν (ἀτμομηχανή), ἠλεκτρικὴν εἰς κινητικὴν (ἠλεκτροκινητήρ). ***Ἁπλῆ μηχανὴ*** εἰδικώτερον εἶναι σύστημα σωμάτων, εἰς τὸ ὁποῖον προσφέρεται μηχανικὴ ἐνέργεια καὶ ἀποδίδεται πάλιν μηχανικὴ ἐνέργεια. Εἰς κάθε ἁπλῆν μηχανὴν ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, ἡ ***κινητήριος δύναμις*** καὶ ἡ ***ἀνθισταμένη*** (ἀντίστασις).

Συνθήκη ἰσορροπίας μιᾶς μηχανῆς εἶναι ***ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς κινητηρίου δυνάμεως καὶ τῆς ἀντιστάσεως ὅταν τὰ τμήματα τῆς μηχανῆς ἰσορροποῦν ἢ κινοῦνται ἰσοταχῶς.*** Τὴν συνθήκην ἰσορροπίας εὑρίσκομεν κατὰ δύο τρόπους. 1) Εἰς περίπτωσιν ***στατικῆς ἰσορροπίας*** διὰ καταλλήλου ἐφαρμογῆς τοῦ ***θεωρήματος τῶν ροπῶν***. 2) Εἰς περίπτωσιν ***κινήσεως,*** δι᾽ ἐφαρμογῆς ***τῆς ἀρχῆς τῶν δυνατῶν ἔργων,*** συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν, ***«διὰ κάθε μικρὴν δυνατὴν μετατόπισιν τὸ ἔργον τῆς κινητηρίου δυνάμεως (κινητήριον) ἰσοῦται μὲ τὸ ἔργον τῆς ἀνθισταμένης δυνάμεως (ἀνθιστάμενον)».***

79. ***Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί.*** — 1) ***Μοχλὸς*** λέγεται κάθε στερεὸν σῶμα, ποὺ δύναται νὰ στρέφεται περὶ σταθερὸν ἄξονα ἢ σημεῖον (ὑπομόχλιον) π. χ. ἡ ῥάβδος ΓΒ (σχ. 78α΄) στρεφομένη περὶ τὸ Κ. Τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τῶν δυνάμεων F, A εὑρίσκομεν μὲ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν· ἔχομεν: $A \cdot (KE) = F \cdot (KZ)$. Ἡ καταπόνησις τοῦ



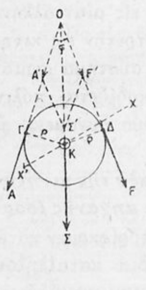
Σχ. 78 α΄.



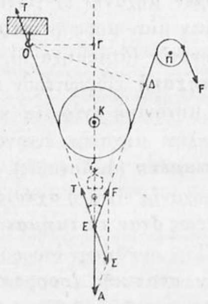
Σχ. 78 β΄.

ὑποστηρίγματος Κ ἰσοῦται μὲ τὴν συνισταμένη ΚΣ τῶν Α΄ καὶ F΄. Εἰς τὴν περίπτωσιν δυνατῶν μετατοπίσεων ΓΓ΄ καὶ ΒΒ΄ εὑρίσκομεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας δι᾽ ἐξισώσεως τῶν ἔργων. Ἔργον τῆς Α : $W_1 = A \cdot (\Gamma\Gamma')$, ἔργον τῆς F : $W_2 = F \cdot (BB')$, ἄρα $A \cdot (\Gamma\Gamma') = F \cdot (BB')$ ἢ $\frac{A}{F} = \frac{BB'}{\Gamma\Gamma'}$ (σχ. 78β)· δηλ.: ***«οἱ δρόμοι, τοὺς ὁποίους διατρέχουν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων, ἢ κατ᾽ ἄλλην ἔκφρασιν ὅ,τι κερδίζομεν εἰς δύναμιν τὸ χάνομεν εἰς δρόμον».***

2) ***Τροχαλίαι.*** Τροχαλία εἶναι κυκλικὸς δίσκος στρεφόμενος περὶ ἄξονα κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδόν του καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του. Εἰς τὴν περιφέρειαν ὁ δίσκος φέρει αὔλακα διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται σχοινίον. Διακρίνομεν τὴν ***παγίαν*** ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα xx′ (σχ. 79α′) καὶ τὴν ***ἐλευθέραν*** τῆς ὁποίας ὁ ἄξων μετατοπίζεται (σχ. 79β′).



Σχ. 79 α′

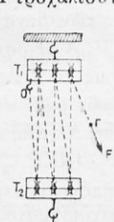


Σχ. 79 β′

α) ***Εἰς τὴν παγίαν*** ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι, $F=A$ (ἡ τροχαλία δὲν στρέφεται). Ἡ σχέσις αὐτὴ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ροπῶν τῶν A καὶ F ὡς πρὸς τὸν x′x, δηλ. $A \cdot \rho = F \cdot \rho$. Ἡ καταπόνησις Σ τοῦ ἄξονος ἰσοῦται μὲ τὴν συνισταμένην τῶν (F,A): $\Sigma=\sqrt{F^2+A^2+2FA\,\text{συν}\varphi}$ $=\sqrt{2F^2+2F^2\text{συν}\varphi}=$ $=\sqrt{2F^2(1+\text{συν}\varphi)}=$ $=\sqrt{2F^2\cdot 2\text{συν}^2\varphi/2}=2F\,\text{συν}\varphi/2$

β) ***Εἰς τὴν ἐλευθέραν τροχαλίαν*** ἡ συνθήκη ἰσορροπίας, εἶναι ἡ $A=2F\cdot\text{συν}\varphi/2$. Διότι: $\text{Ροπ}_O(F)=F\cdot(O\Delta)=F\cdot(OE)\cdot\text{ημ}\varphi$ καὶ $\text{Ροπ}_O(A)=$ $=A\cdot(O\Gamma)=A\cdot(OE)\cdot\text{ημ}\varphi/2$ καὶ ἐπειδὴ $\text{Ροπ}_O(F)=\text{Ροπ}_O(A)$ θὰ ἔχωμεν, $F(OE)\,\text{ημ}\varphi=A\,(OE)\,\text{ημ}\varphi/2$ ἢ $F\,(OE)\cdot 2\text{ημ}\varphi/2\cdot\text{συν}\,\varphi/2=A\,(OE)\text{ημ}\,\varphi/2$ καὶ $A=2F\text{συν}\,\varphi/2$. Ἂν $\varphi=0$ (νήματα παράλληλα) τότε $A=2F$. Ἡ καταπόνησις OT τοῦ O ἰσοῦται μὲ τὴν συνισταμένην EΣ τῶν A καὶ F, $\Sigma=\sqrt{F^2+A^2+2FA\,\text{συν}(180-\varphi/2)}=\sqrt{F^2+A^2-2FA\,\text{συν}\,\varphi/2}$.

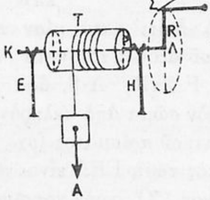
γ) ***Πολύσπαστον.*** Εἶναι συνδυασμὸς πολλῶν παγιῶν καὶ ἐλευθέρων τροχαλιῶν. Τὸ σχ. 80 παριστάνει ἕνα εἶδος πολυσπάστου. Ἡ τροχαλιοθήκη T_1 εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ T_2 κινητή· τὸ νῆμα στερεῶς προσδεδεμένον εἰς τὸ σημ. O, διέρχεται διαδοχικῶς ἀπὸ ὅλας τὰς τροχαλίας καὶ εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον Γ ἐνεργεῖ ἡ δύναμις F ἀνυψώνουσα τὸ βάρος A. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι $F=\frac{A}{\nu}$, ὅπου ν τὸ πλῆθος τῶν τροχαλιῶν· διότι ἂν τὸ σημεῖον Γ μετακινηθῇ κατὰ μῆκος ἔστω x, ἕκαστος κλάδος (ἐκ τῶν ν τὸ πλῆθος) τοῦ νήματος βραχύνεται κατὰ $\frac{x}{\nu}$· τὸ ἔργον τῆς F θὰ εἶναι $F\cdot x$ καὶ τῆς A $A\cdot\frac{x}{\nu}$, ἄρα: $Fx=A\frac{x}{\nu}$ καὶ $F=\frac{A}{\nu}$.



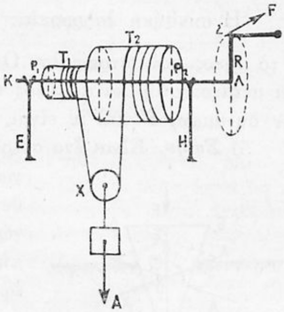
Σχ. 80.

3) ***Βαροῦλκον.*** Εἶναι ἕνα τύμπανον T κυλινδρικὸν στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονά του (σχ. 81α′). Ὁ ἄξων KΛ στηρίζεται ἐπὶ τῶν ὑποστηριγμάτων E, H καὶ στρέφεται διὰ τοῦ στροφάλου ΛΣ. Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι

$F = A \cdot \frac{\rho}{R}$ ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ τυμπάνου καὶ R τὸ μῆκος ΛΣ τοῦ στροφάλου· διότι τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως F (ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας ποὺ γράφει τὸ Σ) κατὰ μίαν περιστροφὴν θὰ εἶναι $F \cdot 2\pi R$ καὶ τὸ ἔργον τοῦ βάρους Α, $A \cdot 2\pi\rho$· ἄρα, $F \cdot 2\pi R = A \cdot 2\pi\rho$ καὶ $F \cdot R = A \cdot \rho$. Ἂν συνδυάσωμεν δύο ὁμοαξονικὰ τύμπανα (σχ. 81 β΄) T_1 καὶ T_2 διαφορετικῶν ἀκτίνων ρ_1 καὶ ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$), κατὰ τὴν περιστροφὴν μὲ τὴν βοήθειαν τῆς τροχαλίας χ θὰ ἐκτυλίσσεται τὸ νῆμα ἐκ τοῦ T_1 καὶ θὰ περιτυλίσσεται εἰς τὸ T_2. Κατὰ μίαν περιστροφὴν θὰ ἔχῃ τυλιχθῆ νῆμα μήκους $2\pi\rho_2 - 2\pi\rho_1 = 2\pi(\rho_2 - \rho_1)$ καὶ τὸ βάρος θὰ ἔχῃ ἀνέλθη κατὰ $\pi(\rho_2 - \rho_1)$· ἐξισώνοντες τὰ ἔργα τῶν δυνάμεων F καὶ Α ἔχομε:



Σχ. 81α΄

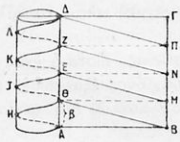


Σχ. 81β΄

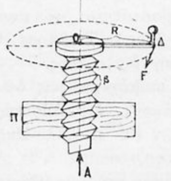
$$F \cdot 2\pi R = A\pi(\rho_2 - \rho_1) \text{ καὶ } F = A \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{2R}.$$

Τὸ βαροῦλκον αὐτὸ λέγεται συνήθως ***διαφορικὸν βαροῦλκον***.

4) ***Κοχλίας***. Ἂς θεωρήσωμεν ὀρθὸν κυκλικὸν κύλινδρον ἀκτῖνος ρ ὕψους ΑΔ καὶ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶναι $2\pi\rho$ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ = υ. Χωρίζομεν τὸ ὕψος ΑΔ π. χ. εἰς 4 ἴσα τμήματα ΑΘ = ΘΕ = ΕΖ = = ΖΔ. Ὅταν περιτυλίξωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ περὶ τὸν κύλινδρον μέχρις ὅτου ἡ ΓΒ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΔ, αἱ ὑποτείνουσαι ΘΒ, ΕΜ, ΖΝ, ΔΠ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΘΒ, ΘΕΜ, ΕΖΝ καὶ ΖΔΠ θὰ γράφουν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου μίαν συνεχῆ καμπύλην ΑΗ ΘΙ ΕΚΖ ΛΔ ***ἡ ὁποία ὀνομάζεται στερεὰ ἕλιξ.*** Τὸ μῆκος ΑΗΘ τῆς ἕλικος ἴσον μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ΘΒ λέγεται ***σπεῖρα*** καὶ ἡ ἀπόστασις $A\Theta = \frac{\upsilon}{4} = \beta$ δύο διαδοχικῶν σημείων τῆς ἕλικος ἐπὶ τῆς αὐτῆς γενετείρας λέγεται ***βῆμα*** (σχ. 82 α΄).



Σχ. 82α΄.

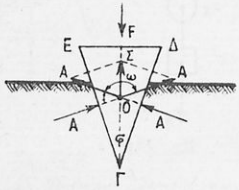


Σχ. 82β΄.

Ἂν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου χαράξωμεν μίαν στερεὰν ἕλικα καὶ σκάψωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἐκτὸς μιᾶς λεπτῆς ζώνης κατὰ μῆκος τῆς ἕλικος, τὸ λαμβανόμενον σῶμα λέγεται ***κοχλίας*** (σχ. 82 β΄). Διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ κοχλίας ὡς ἁπλῆ μηχανὴ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τὸ ***περικόχλιον Π*** (παξιμάδι), εἷς κοῖλος κύλινδρος ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου ἔχει χαραχθῆ στερεὰ ἕλιξ μὲ τὸ αὐτὸ βῆμα τοῦ κοχλίου καὶ εἶναι σκαμμένη εἰς τόσον βάθος ὅση ἡ ἐξοχὴ τῆς ἕλικος τοῦ κοχλίου.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι $F = A \cdot \frac{\beta}{2\pi R}$ ὅπου β τὸ βῆμα καὶ R τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου ΟΔ· διότι κατὰ μίαν περιστροφὴν ὁ κοχλίας ἔχει μετατοπισθῆ κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονός του κατὰ ἓν βῆμα β καὶ τὰ ἔργα τῶν δυνάμεων F καὶ A εἶναι, $F \cdot 2\pi R$, $A \cdot \beta$, ἄρα $F \cdot 2\pi R = A \cdot \beta$.

5) ***Σφήν.*** Εἶναι ἕνα στερεὸν σῶμα ἀπὸ σκληρὸν ὑλικὸν σχήματος τριγωνικοῦ πρίσματος (σχ. 83) τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ ΓΕΔ εἶναι συνήθως ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ὁ σφὴν χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν κοπὴν στερεῶν σωμάτων. Ἐπὶ τῆς ἕδρας ΕΔ ἐφαρμόζεται ἡ κάθετος δύναμις F ἡ ὁποία κατανικᾷ τὴν συνισταμένην ΟΣ τῶν ἀντιστάσεων A καὶ A καθέτων ἐπὶ τὰς ἕδρας ΓΔ καὶ ΓΕ.



Σχ. 83.

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἶναι $F = 2A\eta\mu\,\varphi/2$ διότι, $\Sigma = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A\,A\sigma\upsilon\nu\omega} = \sqrt{2A^2 - 2A^2\sigma\upsilon\nu\,\varphi} = \sqrt{2A^2(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}$ $= 2A\eta\mu\,\frac{\varphi}{2}$ ἄρα $\Sigma = F = 2A\eta\mu\,\frac{\varphi}{2}$.

Ἀσκήσεις

I

1) Μοχλὸς μήκους 1,6m ὑποβαστάζεται εἰς ἀπόστασιν 1m ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον του εἰς τὸ ὁποῖον κρέμεται βάρος 30kg*. Τί βάρος θὰ ἐξαρτηθῇ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ μοχλοῦ διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως.

2) Μοχλὸς χωρίζεται ἀπὸ τὸ ὑπομόχλιον εἰς δύο βραχίονας ὥστε ὁ ἕνας νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ἄλλου. Εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μικροτέρου βραχίονος ἐξαρτῶμεν βάρος 30kg* Τί βάρος θὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ μοχλοῦ διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως.

3) Μοχλὸς ὁμογενὴς καὶ ἰσοπαχὴς μήκους 90cm ἔχει βάρος 2kg*. Ὑποστηρίζεται εἰς ἓν σημεῖον Γ ἀπέχον ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον 20cm ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται βάρος 100kg*. α) Τί βάρος θὰ ἐξαρτήσωμεν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως. β) Τί καταπόνησιν δέχεται τὸ ὑπομόχλιον.

4) Εἰς τὰ ἄκρα εὐθυγράμμου μοχλοῦ ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις F=10kg* καὶ A=20kg*. Νὰ εὑρεθῇ ἡ καταπόνησις τοῦ ὑπομοχλίου ὅταν αἱ δυνάμεις σχηματίζουν μεταξύ των γωνίας α) 60^0 β) 90^0 καὶ γ) 180^0.

5) Ἀνυψώνομεν βάρος 60kg* τῇ βοηθείᾳ σχοινίου διερχομένου διὰ παγίας τροχαλίας. Ποία εἶναι ἡ καταπόνησις τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας ὅταν οἱ κλάδοι τοῦ σχοινίου εἶναι : α) παράλληλοι β) σχηματίζουν γωνίαν 60^0 καὶ γ) τὸ σχοινὶ περιβάλλει τὸ $^1/_4$ τῆς περιφερείας τῆς τροχαλίας.

6) Εἰς παγίαν τροχαλίαν ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία τῶν διευθύνσεων δυ-

νάμεως καὶ ἀντιστάσεως ἵνα ἡ ἐπὶ τοῦ ὑπομοχλίου καταπόνησις εἶναι α) ἴση πρὸς τὴν δύναμιν β) διπλασία τῆς δυνάμεως καὶ γ) μηδέν.

7) Εἰς ἐλευθέραν τροχαλίαν αἱ διευθύνσεις δυνάμεως καὶ ἀντιστάσεως σχηματίζουν γωνίαν 60° ἢ 90°. α) Ποία ἡ ἀντίστασις καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις διὰ νὰ ἐξουδετερώσωμεν ταύτην μὲ δύναμιν 50kg*. β) Ποία ἡ καταπόνησις ἐπὶ τοῦ ὑπομοχλίου.

8) Πολύσπαστον ἔχει 6 τροχαλίας καὶ ἀνυψώνομεν βάρος 100kg*. Νὰ εὑρεθῇ ποία ἡ καταβαλλομένη δύναμις ἵνα ἡ μηχανὴ ἰσορροπήσῃ.

9) Βαροῦλκον ἔχει μῆκος στροφάλου 50cm καὶ ἀκτῖνα τυμπάνου 10cm. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ καταβάλωμεν ἵνα ἰσορροπήσωμεν βάρος 20kg*.

10) Διαφορικὸν βαροῦλκον ἔχει μῆκος στροφάλου 60cm καὶ ἀκτῖνας τυμπάνων 10cm καὶ 5cm. Θέλομεν νὰ ἰσορροπήσωμεν βάρος 120kg*. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις.

11) Μὲ τὸ προηγούμενον βαροῦλκον ἀντλοῦμε νερὸ ἐκ φρέατος βάθους 8m μὲ δοχεῖον χωρητικότητος 12lit. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἑξῆς: α) ποῖον ἔργον θὰ καταβάλωμεν διὰ τὴν ἄντλησιν 80lit νεροῦ β) ποία ἡ ἀπαιτουμένη ἰσχὺς ἀντλήσεως τῶν 80lit νεροῦ εἰς χρόνον 10min καὶ γ) τὰ 30% τῆς καταβαλλομένης ἐνεργείας ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῶν τριβῶν. Ποία ἡ ἀπόδοσις τοῦ ἐργάτου.

12) Ἐπὶ σφηνὸς ἐνεργεῖ δύναμις F ἡ ὁποία δὲν κατορθώνει ὥστε νὰ εἰσδύῃ περισσότερον ἡ σφὴν ἐντὸς ξύλου. Ποία ἡ γωνία τῆς σφηνός.

13) Τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου κοχλίου εἶναι 40cm καὶ ἀσκεῖται δύναμις 1/500 τῆς ἀντιστάσεως. Κατὰ πόσον θὰ εἰσδύσῃ ὁ κοχλίας εἰς μίαν περιστροφήν.

14) Εἰς τὸ ἄκρον στροφάλου κοχλίου ἐνεργεῖ δύναμις $F=5$kg*. α) Ποῖον τὸ ἔργον εἰς μίαν στροφὴν ὅταν τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου εἶναι 30cm· β) κατὰ πόσον θὰ εἰσδύσῃ ὁ κοχλίας εἰς τὸ περικόχλιον, ὅταν ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 100kg*, εἰς 10 περιστροφὰς τοῦ κοχλίου.

15) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία κεκλιμένου ἐπιπέδου ὅταν δύναμις 10kg* ἰσορροπῇ βάρος 20kg* εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις: α) ἡ δύναμις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον β) ὁριζοντία καὶ γ) σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον γωνίαν διπλασίαν τῆς γωνίας τοῦ ἐπιπέδου.

II

16) Εὐθύγραμμος ὁμογενὴς μοχλὸς μήκους 60cm καὶ βάρους 450gr* δέον νὰ διατηρῆται ὁριζόντιος ὅταν εἰς τὰ ἄκρα του κρέμανται βάρη 500gr* καὶ 1200gr*. Ποῦ πρέπει νὰ ὑποστηριχθῇ.

17) Εἰς εὐθύγραμμον ἰσοπαχῆ μοχλὸν ΑΟΒΓ μὲ ὑπομόχλιον εἰς τὸ Ο, ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $\Gamma F_1=2$kg* καὶ $BF_2=1$kg* παράλληλοι κι' ἀντίρροποι. Ὅταν αἱ ἀποστάσεις εἶναι $AO=0{,}1$m, $OB=0{,}2$m καὶ $B\Gamma=0{,}1$m, νὰ εὑρεθοῦν: α) ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ Α σχηματίζουσα μετὰ τοῦ μοχλοῦ γωνίαν 135° διὰ νὰ διατηρῆται ὁ μοχλὸς ὁριζόντιος β) ποία ἡ καταπόνησις τοῦ ὑπομοχλίου Ο.

18) Τὸ πάχος εὐθυγράμμου μοχλοῦ ΑΒ μήκους 1m βαίνει ἐλαττούμενον ἀπὸ τοῦ ἄκρου Α πρὸς τὸ Β. Ὅταν ἰσορροπῇ ὁριζοντίως τότε ὑποστηρίζεται εἰς σημεῖον ἀπέχον 1/3 τοῦ μήκους του ἀπὸ τὸ Α. Ὅταν ἐξαρτήσωμεν βάρος 2kg* ἀπὸ τὸ Β, τότε πρέπει τὸ σημεῖον ὑποστηρίξεως νὰ μετατοπισθῇ κατὰ 5cm. Ποῖον τὸ βάρος τοῦ μοχλοῦ.

19) Εἰς βαροῦλκον τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου εἶναι R καὶ περιστρέφεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἀνυψουμένου βάρους ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ τυμπάνου εἶναι ρ.

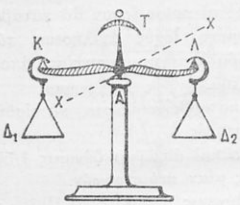
20) Εὐθύγραμμος ἰσοπαχὴς ράβδος ΑΒ βάρους 2kg* καὶ μήκους 1,10m, εἶναι στρεπτὴ περὶ τὸ ἄκρον Α καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° μετὰ τοῦ ὁρίζοντος. Ἐὰν εἰς σημεῖον Γ ἀπέχον 50cm ἀπὸ τοῦ Α ἐξαρτήσωμεν βάρος 20kg*, ποία δύναμις πρέπει νὰ

ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Β τῆς ῥάβδου καθέτως πρὸς αὐτήν, ἵνα ἡ ῥάβδος ἰσορροπήσῃ εἰς τὴν ἀνωτέρω θέσιν.

21) Σχοινίον ζυγίζει 0,4gr* κατὰ μέτρον, ἔχει μῆκος 12m καὶ εἰς τὰ δύο ἄκρα του κρέμανται βάρη 7gr* καὶ 10gr*. Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστου κλάδου τοῦ σχοινίου ὅταν τοῦτο περιβάλον τὸν λαιμὸν παγίας τροχαλίας ἀκτῖνος 2cm, ἰσορροπῇ (τριβὴ ἀμελητέα).

Σημείωσις. Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν μηχανῶν μέρος τῆς παρεχομένης μηχανικῆς ἐνεργείας μετατρέπεται λόγῳ τριβῶν εἰς θερμότητα. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἀποδιδομένη ἐξ αὐτῶν μηχανικὴ ἐνέργεια εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς προσφερομένης. Τὸ ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἀποδιδόμενον ἔργον λέγομεν ***ὠφέλιμον*** καὶ τὸν λόγον τοῦ ὠφελίμου ἔργου πρὸς τὸ προσφερόμενον ἔργον, ***συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς μηχανῆς.***

80. Ζυγός.—Ὁ ζυγὸς χρησιμοποιεῖται ὡς γνωστὸν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων. Ἡ ζύγισις σώματος γίνεται διὰ συγκρίσεως τοῦ βάρους αὐτοῦ πρὸς γνωστὰ βάρη τὰ ὁποῖα λέγονται ***σταθμά.*** Τὸ κύριον μέρος ἑνὸς ζυγοῦ εἶναι ἡ ***φάλαγξ,*** δηλ. ἐλαφρὰ ἐπιμήκης μεταλλικὴ ῥάβδος ΚΛ (σχ. 84). Ἡ φάλαγξ στηρίζεται εἰς τὸ μέσον της μὲ τὴν πρισματικὴν ἀκμὴν Α πρίσματος ἀπὸ σκληρὸν ὑλικὸν (π. χ. ἀχάτης, χάλυψ κ.λ.π.), ἐπὶ σταθερᾶς ὁριζοντίου πλακός. Εἰς τὰ δύο ἄκρα τῆς φάλαγγος ἐπὶ προσηρμοσμένων πρισμάτων μὲ ἀκμὰς Κ, Λ



Σχ. 84

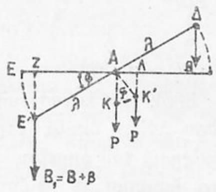
παραλλήλους πρὸς τὴν Α, ἐξαρτῶνται δύο ἰσοβαρεῖς δίσκοι Δ_1 καὶ Δ_2. Ὑπεράνω τοῦ πρίσματος Α εἶναι προσηρμοσμένος δείκτης, στρεφόμενος ἔμπροσθεν βαθμολογημένου τόξου Τ. Ὅταν ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως ὁ δείκτης εὑρίσκεται εἰς τὸ μηδὲν τῆς κλίμακος. Τὸ ὅλον σύστημα τοῦ ζυγοῦ ἀποτελεῖ σῶμα στρεφόμενον περὶ τὸν ὁριζόντιον ἄξονα xx'. Ὅταν ἐπὶ τῶν δίσκων Δ_1 καὶ Δ_2 τεθοῦν ἴσα βάρη, ἐπειδὴ αἱ ῥοπαί των ὡς πρὸς τὸν ἄξονα xx' εἶναι ἴσαι, ἡ φάλαγξ θὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως· εἰς αὐτὴν τὴν κατάστασιν ἐκ τοῦ γνωστοῦ βάρους τῶν σταθμῶν συνάγεται τὸ βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος.

Γνωρίσματα καλοῦ ζυγοῦ. Ἕνας καλὸς ζυγὸς πρέπει νὰ εἶναι κυρίως: α) ***ἀκριβὴς*** καὶ β) ***εὐπαθής.*** Ἐπίσης πρέπει νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ εὐστάθεια τοῦ ζυγοῦ καὶ τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἐφ' ὅσον τὸ κέντρον βάρους τοῦ συστήματος εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς ἀκμῆς Α. Αἱ ἀκμαὶ Κ, Λ, Α εἶναι παράλληλοι διὰ νὰ μὴ ἐξαρτᾶται ἡ ζύγισις ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν σωμάτων ἐπὶ τῶν δίσκων.

α) ***Ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ.*** Ἕνας ζυγὸς λέγομεν ὅτι εἶναι ***ἀκριβὴς*** ἂν ἡ φάλαγξ παραμένῃ ὁριζοντία καὶ ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι ἀφόρτιστοι καὶ ὅταν εἶναι φορτισμένοι μὲ ἴσα βάρη. Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἱκανοποιεῖται ἐφ' ὅσον ***οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος εἶναι ἴσοι, οἱ δίσκοι εἶναι ἰσοβαρεῖς καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος χ'χ.***

β) ***Εὐπάθεια τοῦ ζυγοῦ.*** Ἐὰν εἰς τὸν ἕνα δίσκον ζυγοῦ (σχ. 85), τοῦ ὁποίου οἱ δύο δίσκοι φέρουν ἀρχικῶς δύο ἴσα βάρη Β ἢ εἶναι ἀφόρτιστοι, θέσωμεν τὸ πρόσθετον (μικρὸν) βάρος β, τότε ἡ φάλαγξ στρέφεται κατὰ μίαν γωνίαν φ καὶ ἰσορροπῆ εἰς τὴν θέσιν Ε΄Δ. Ἕνας ζυγὸς εἶναι τόσον εὐπαθέστερος ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνία φ ὑπὸ μίαν δεδομένην διαφορὰν βαρῶν β εἰς τοὺς δύο δίσκους.

Τὸ μέτρον συνεπῶς τῆς εὐπαθείας ἑνὸς ζυγοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν γωνίαν φ διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τῆς διαφορᾶς $B_1 - B = \beta$. Εἰς τὴν νέαν θέσιν ἰσορροπίας Ε΄Δ ἐκ τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων B_1, Β καὶ Ρ(βάρος τοῦ συστήματος τοῦ ζυγοῦ) ἔχομεν: $(B+\beta)\cdot(AZ) = P\cdot(A\Lambda) + B(AZ)$, ἢ $(B+\beta)\cdot\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi = P\cdot\alpha\eta\mu\varphi + B\cdot\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi$ ($AE = A\Delta = \lambda$, $AK = \alpha$, Κ=κέντρον βάρους τοῦ ζυγοῦ) ἢ $\beta\lambda\sigma\upsilon\nu\varphi = P\alpha\eta\mu\varphi$ καὶ $\varepsilon\varphi\varphi = \beta\cdot\frac{\lambda}{P\alpha}$. Ὁ λόγος $\frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\beta} = \frac{\lambda}{P\alpha}$ μετρᾶ τὴν εὐπάθειαν τοῦ ζυγοῦ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐπάθεια εἶναι: α) ***ἀνάλογος τοῦ μήκους 2λ τῆς φάλαγγος*** β) ***ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ βάρους Ρ τοῦ ζυγοῦ καὶ*** γ) ***ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ζυγοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς.*** Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀποφεύγεται ἡ ὑπέρμετρος αὔξησις τοῦ μήκους λ διότι κατὰ τὰς ζυγίσεις σχετικῶς μεγάλων βαρῶν ἡ φάλαγξ κάμπτεται καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ ζυγοῦ κατέρχεται· ἐπίσης ἀποφεύγεται ἡ ὑπέρμετρος ἐλάττωσις τῆς ἀποστάσεως α, διότι αὐξάνεται ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς φάλαγγος. Ἐξασφαλίζομεν μεγάλην εὐπάθειαν μὲ τὴν χρησιμοποίησιν ***ἐλαφρῶν ἀνθεκτικῶν φαλάγγων*** καὶ τὴν ***ἐλάττωσιν τῶν τριβῶν*** εἰς τοὺς ἄξονας ἐξαρτήσεως τῶν διαφόρων τμημάτων. Ὑπάρχουν σήμερον ζυγοὶ διὰ τῶν ὁποίων ἐλέγχεται διαφορὰ βάρους 10^{-5}gr* διὰ ζυγιζόμενον βάρος 1kg*.

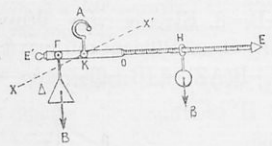


Σχ. 85

Ζύγισις μὲ μὴ ἀκριβῆ ζυγόν. α) ***Μέθοδος διπλῆς ζυγίσεως.*** Ἂν οἱ βραχίονες τῆς φάλαγγος λ_1 καὶ λ_2 εἶναι ἄνισοι καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς βάρος ἔστω χ ἑνὸς σώματος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Θέτομεν τὸ βάρος χ εἰς τὸν δίκον Δ_1 καὶ ἰσορροποῦμεν τὴν φάλαγγα ὁριζοντίως μὲ σταθμὰ βάρους β_1 εἰς τὸν δίσκον Δ_2 (σχ. 84), ὁπότε ἔχομεν $\chi\cdot\lambda_1 = \beta_1\cdot\lambda_2$ (1)· ἀκολούθως θέτομεν τὸ βάρος χ εἰς τὸν δίσκον Δ_2 καὶ ἰσορροποῦμεν τὴν φάλαγγα ὁριζοντίως μὲ σταθμὰ β_2 εἰς τὸν δίσκον Δ_1, ὁπότε $\chi\cdot\lambda_2 = \beta_2\cdot\lambda_1$ (2). Πολλαπλασιάζομεν τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν, $\chi^2\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2 = \beta_1\ \beta_2\cdot\lambda_1\ \lambda_2$ ἢ $\chi^2 = \beta_1\beta_2$ καὶ $\chi = \sqrt{\beta_1\cdot\beta_2}$.

β) ***Μέθοδος τῆς ἀντισταθμίσεως.*** Θέτομεν εἰς τὸν δίσκον Δ_1 τὸ βάρος χ καὶ εἰς τὸν Δ_2 ἕνα οἱονδήποτε σῶμα μέχρις ὅτου ἡ φάλαγξ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως· ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν τὸ βάρος χ ἀπὸ τὸν δίσκον Δ_1 καὶ τὸ ἀντικαθιστῶμεν μὲ σταθμὰ οὕτως ὥστε ἡ φάλαγξ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν. Συμπεραίνομεν τότε ὅτι τὸ βάρος χ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τῶν σταθμῶν.

81. Ζυγοὶ τοῦ ἐμπορίου.—α) ***Ρωμαΐκὸς ζυγὸς ἢ στατὴρ (σχ. 86α).*** Ἡ σιδηρὰ ράβδος Ε′ Ε, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας μετατοπίζεται τὸ βάρος β, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄγκιστρον Α καὶ ἠμπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα x′x εἰς τὸ Κ. Τὸ σῶμα Β τιθέμενον εἰς τὸν δίσκον Δ ἰσορροπεῖται ὑπὸ τοῦ κινητοῦ βάρους β ὥστε ἡ ράβδος Ε′Ε νὰ παραμένῃ ***ὁριζοντία***· τότε, $B(\Gamma K) = \beta(KH)$ καὶ $B = \beta\,\frac{(KH)}{(K\Gamma)}$. Τὸ βάρος λοιπὸν Β εἶναι ***ἀνάλογον τοῦ μήκους ΚΗ*** (ΓΚ=σταθ.).

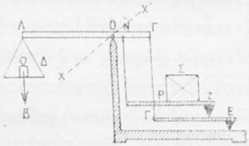


Σχ. 86α.

β) ***Πλάστιγξ ἢ δεκαπλασιαστικὸς ζυγὸς*** (σχ. 86β). Ἐκ κατασκευῆς ἔχει ληφθῆ (ΟΛ)=10·(ΟΝ) ἐπὶ τῆς σιδηρᾶς ράβδου ΛΓ, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ ἄξονα x′x εἰς τὸ σημεῖον Ο. Μικρὰ μετακίνησις τοῦ σημείου Ν προκαλεῖ 10 πλασίαν τοιαύτην τοῦ Λ. Διὰ τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ ζυγίζωμεν σώματα μὲ σταθμὰ κατὰ 10 φορὰς μικροτέρου βάρους· π. χ. βάρος 250kg*ἰσορροπεῖται μὲ βάρος σταθμῶν 25kg*.

Διὰ νὰ παραμένῃ ὁριζόντιον τὸ βάθρον Ρ τῆς πλάστιγγος κατὰ τὰς ζυγίσεις, ἔχει ληφθῆ ΖΕ : ΖΓ′=ΟΝ : ΟΓ.

Ὑπάρχουν ζυγοὶ τοῦ ἐμπορίου καὶ ἄλλων τύπων, ὅπως ***ὁ ζυγὸς τοῦ Ρόμπερβαλ*** (ζυγαριὰ τοῦ μπακάλη) καὶ ***οἱ αὐτόματοι ζυγοί.***



Σχ. 86β.

Ἀσκήσεις

1) Οἱ δύο βραχίονες φάλαγγος ἑνὸς ζυγοῦ ἔχουν μῆκος 24cm καὶ 26cm. Ἐὰν εἰς τὸν δίσκον τοῦ μικροτέρου βραχίονος ἄγνωστον βάρος Β ἰσορροπῆται ὑπὸ 100gr* εἰς τὸν ἄλλον δίσκον, ποῖον τὸ βάρος Β.

2) Ζυγίζομεν σῶμα καὶ ἐξακριβώνομεν ὅτι, ὅταν τὸ θέτωμεν εἰς τὸν ἕνα δίσκον τοῦ ζυγοῦ πρέπει νὰ τοποθετοῦμε σταθμὰ 1kg* ἐπὶ τοῦ δευτέρου δίσκου κι' ὅταν τὸ τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ δευτέρου δίσκου, πρέπει νὰ τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ πρώτου δίσκου σταθμὰ 1, 10kg*. α) Ποῖος ὁ λόγος τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγος καὶ β) ποῖον τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σωματος.

3) Ἔμπορος ἐπώλησεν ἐμπόρευμα 128 kg* ζυγίσας αὐτὸ μὲ μὴ ἀκριβῆ ζυγόν, τοῦ ὁποίου ὁ εἷς βραχίων ἦτο 22cm καὶ ὁ ἕτερος 24cm, θέσας πρῶτον τὸ ἥμισυ εἰς τὸν ἕνα δίσκον καὶ κατόπιν τὸ ἕτερον ἥμισυ εἰς τὸν ἄλλον. Ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη;

(Ὀδοντιατρικὴ 1948)

4) Ζυγίζομεν σῶμα μὲ εὐπαθὲς δυναμόμετρον εἰς τὸν ἰσημερινὸν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 100kg*. Τί θὰ δεικνύῃ τὸ δυναμόμετρον: α) εἰς τοὺς πόλους β) εἰς γεωγραφικὸν πλάτος 60^0 καὶ γ) εἰς ὕψος 5km εἰς τὸν ἰσημερινόν.

5) Τὸ βάρος τῆς φάλλαγγος ἀκριβοῦς ζυγοῦ εἶναι 80gr*, τὸ δὲ μῆκος ἑκάστου βραχίονος τῆς φάλαγγος εἶναι 20cm. Ζητεῖται ποίαν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ μετὰ

τοῦ ὁρίζοντος ὅταν εἰς τὸν ἕνα δίσκον τεθῇ βάρος 2gr* καὶ τὸ κ. βάρους τῆς φάλαγγος εἶναι κατὰ 2cm χαμηλότερον τοῦ ἄξονος αἰωρήσεως τῆς φάλαγγος.

6) Κατὰ τὴν ζύγισιν βάρους 2kgr* μὲ μὴ ἀκριβῆ ζυγὸν τὰ χρησιμοποιηθέντα σταθμὰ ἔχουν ἄθροισμα $F_1+F_2=5$kgr* Νὰ εὑρεθοῦν: α) τὰ βάρη F_1 καὶ F_2 τῶν σταθμῶν καὶ β) ὁ λόγος τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγος.

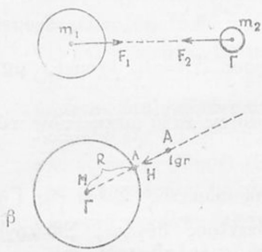
7) Τὸ βαρίδιον ρωμαϊκοῦ στατῆρος ἔχει βάρος 0,5kg* καὶ τὸ μῆκος τοῦ βραχίονος ἀπὸ τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐξαρτῶμεν μέγιστον βάρος 5kg*, εἶναι 5cm. Ποῖον τὸ μῆκος τοῦ μακροῦ βραχίονος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὀλισθαίνει τὸ βαρίδιον.

8) Σῶμα βάρους 40kg* τὸ χωρίζομεν εἰς 4 τμήματα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν ὡς σταθμά. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ ζυγίζωμεν ὅλα τὰ ἀκέραια βάρη ἀπὸ 1kgr* ἕως 40kgr*. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τμήματος.

Παγκόσμιος ἕλξις — βαρύτης

82. Νόμος τοῦ Νεύτωνος. Ἀπὸ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον, ὁ Νεύτων ἐσκέφθη καὶ διετύπωσεν τὸν νόμον τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, κατὰ τὸν ὁποῖον: ***«Δύο ὑλικὰ σώματα, μὲ μάζας m_1 καὶ m_2, ἕλκονται ἀμοιβαίως μὲ δυνάμεις ἀντιθέτους ἐπὶ τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν μαζῶν. Ἡ ἔντασις τῆς ἕλξεως εἶναι ἀνάλογος τῶν μαζῶν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων».***

Ὁ Ἥλιος Η μάζης m_1 (σχ. 87α) ἕλκει τὴν Γῆν Γ μάζης m_2 μὲ δύναμιν F_2, ἀλλὰ καὶ ἡ Γῆ ἕλκει τὸν Ἥλιον μὲ δύναμιν F_1 οὕτως ὥστε, $F_1=F_2=K\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$ (1)



Σχ. 87.

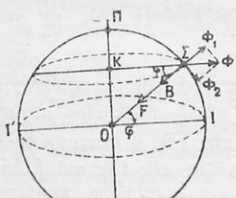
ὅπου r ἡ ἀπόστασις ΗΓ τῶν κέντρων καὶ Κ μία σταθερὰ ἐξαρτωμένη ἀπὸ τὸ σύστημα μονάδων καὶ ἡ ὁποία καλεῖται ***σταθερὰ τῆς παγκοσμίου ἕλξεως.*** Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ἡ σταθερὰ Κ εἶναι $6{,}670\cdot10^{-8}$ C.G.S. καὶ ἐκφράζει, ***«τὴν δύναμιν εἰς δύνας μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκονται δύο μάζαι ἑκάστη ἑνὸς*** gr ***τιθέμεναι εἰς ἀπόστασιν 1***cm»

Βαρύτης. Ὁ νόμος τῆς παγκοσμίου ἕλξεως ἔχει τὴν ἐφαρμογήν του καὶ μεταξὺ τῆς Γῆς καὶ οἱουδήποτε σώματος ἐπ' αὐτῆς ἢ εἰς τὴν περιοχήν της. Τὰ διάφορα σώματα, ποὺ παραμένουν ἐπὶ τῆς Γῆς ἢ πίπτουν ἐπ' αὐτῆς, ἔχουν πολὺ μικρὰν μᾶζαν ἐν σχέσει μὲ τὴν μᾶζαν τῆς Γῆς καὶ ἡ δύναμις ἕλξεως ἐπ' αὐτῶν εἶναι αἰσθητή· συνεπῶς δημιουργεῖται ἡ ἐντύπωσις ὅτι μόνον ἡ Γῆ ἕλκει τὰ διάφορα σώματα. Τὴν ἰδιότητα τῆς Γῆς νὰ ἕλκῃ τὰ διάφορα ὑλικὰ σώματα ὠνομάσαμεν βαρύτητα (§ 34).

83. Πεδίον βαρύτητος τῆς Γῆς. Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι εἰς ἓν σημεῖον Α (σχ. 87β) εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Γῆς ἔχομεν θέσει τὴν μονάδα μάζης (1gr)· τότε κατὰ τὸν τύπον (1) ἡ δύναμις $\overline{H}$ μὲ τὴν ὁποίαν ἡ Γῆ ἕλκει εἰς τὴν θέσιν Α τὸ 1gr θὰ εἶναι : $H = K \cdot \frac{M}{r^2}$ (Μ ἡ μᾶζα τῆς Γῆς καὶ ΓΑ $= r$). ***Τὴν δύναμιν Η λέγομεν ἔντασιν τοῦ πεδίου βαρύτητος τῆς Γῆς εἰς τὸ σημεῖον Α.*** Ἐφ' ὅσον αἱ Κ καὶ Μ εἶναι σταθεραὶ ἡ ἔντασις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. Δεδομένου ὅμως ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι σημαντικῶς μεγάλη ἐν σχέσει μὲ τὰ συνήθη ὕψη ὑπεράνω αὐτῆς, θεωροῦμεν τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος ***διὰ μικρὰ ὕψη,*** σταθεράν. Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος, εἰς μονάδας C. G. S., ἔχει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς πτώσεως g εἰς μονάδας C.G.S. Ἐκ τῶν προηγουμένων κατανοοῦμεν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος μάζης m, δηλ. ἡ δύναμις F μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται ὑπὸ τῆς Γῆς, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως Η ἐπὶ τὴν μᾶζαν m· δηλ. $F = H \cdot m = mg$.

Μεταβολὴ τῆς g. α) Μετὰ τοῦ ὕψους. Ὅπως καὶ πειραματικῶς διεπιστώθη εἰς τὴν παράγραφον 53, τὸ βάρος ἑνὸς σώματος μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους, κατὰ συνέπειαν μεταβάλλεται καὶ ἡ Η, ἡ ὁποία εἶναι ἴση κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν πρὸς τὴν g ($H = g$). Ἡ ἐπιτάχυνσις g' εἰς ἕνα ὕψος h ὑπὲρ τὸ ἔδαφος εὑρίσκεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου : $g' = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ (α) (ὅπου g = ἐπιτάχυνσις εἰς τὸ ἔδαφος καὶ R = ἀκτὶς τῆς Γῆς). Ὁ τύπος (α) εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς : Εἰς σημεῖον Λ τοῦ ἐδάφους διὰ μᾶζαν μ ἔχομεν $F = K\frac{M\mu}{R^2} = \mu g$ ἢ $g = K\frac{M}{R^2}$ (1). Εἰς σημ. Α ὕψους ΛΑ = h ἔχομεν, $\mu g' = K\frac{M\mu}{(R+h)^2}$ ἢ $g' = K\frac{M}{(R+h)^2}$ (2). Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν τύ- (1) καὶ (2) καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον (α).

β) ***Μὲ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος.*** Ἐπὶ ἑνὸς σώματος Σ ἐπὶ τῆς Γῆς δὲν ἐνεργεῖ μόνον ἡ ἕλξις ΣF, ἀλλὰ καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις ΣΦ λόγω τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς (σχ. 88). Τὴν φυγόκεντρον $\Phi = m\omega^2 \cdot (K\Sigma) = m\omega^2 \cdot R\sigma\upsilon\nu\varphi$, ($R = O\Sigma$ ἀκτὶς τῆς γῆς) ἀναλύομεν εἰς τὰς συνιστώσας Φ_1 (κατακόρυφον) καὶ Φ_2 (ὁριζοντίαν). Τὸ ἐμφανιζόμενον συνεπῶς βάρος τοῦ σώματος θὰ εἶναι $B = F - \Phi_1$ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις g', λόγω τῆς δυνάμεως Β θὰ εἶναι $g' = \frac{B}{m} = \frac{F - \Phi_1}{m} = \frac{mg - \Phi_1}{m} = g - \frac{\Phi_1}{m}$, ὅπου g ἡ ἔντασις τοῦ



Σχ. 88.

πεδίου βαρύτητος· ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὸ τρίγωνονν $\Phi_1\Sigma\Phi$ ἔχομεν $\Phi_1 = \Phi\sigma\upsilon\nu\varphi = m\omega^2 \cdot R\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, ἄρα $g' = g - \omega^2 R\sigma\upsilon\nu^2\varphi$. Ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος φ τοῦ τόπου καὶ ἔχει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $g-\omega^2R$ εἰς τὸν ἰσημερινὸν ὅπου $\varphi=0^\circ$ καὶ τὴν μεγίστην g εἰς τοὺς πόλους ὅπου $\varphi=90^\circ$.

γ) ***Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς Γῆς.*** Τὸ ποσὸν ω^2R ὑπολογίζεται εἰς 3,4cm/sec²· συνεπῶς ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιταχύνσεων ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸν εἰς τοὺς πόλους θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι 3,4cm/sec². Ἀπὸ ἀκριβεῖς ὅμως μετρήσεις εὑρέθη ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιταχύνσεων φθάνει τὰ 5cm /sec². Ἡ ηὐξημένη αὐτὴ διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὸ σχῆμα τῆς Γῆς, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σφαιρικὸν ἀλλὰ ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς (μικροτέρα ἡ ἀκτὶς εἰς τοὺς πόλους ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸν ἰσημερινόν).

δ) ***Ἐκ τῆς κατανομῆς τῶν μαζῶν τῆς Γῆς.*** Εἰς δύο γειτονικοὺς τόπους τοῦ αὐτοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους μὲ καταλλήλους λεπτὰς μετρήσεις εὑρίσκομεν μικρὰς διαφορὰς τῆς g, ποὺ ὀφείλονται εἰς τὴν πυκνότητα τοῦ ὑπεδάφους καὶ τὴν ἐν γένει κατανομὴν τῶν μαζῶν τῆς περιοχῆς. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς μεταβολῆς εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνακάλυψις κοιτασμάτων οἰκονομικοῦ ἐνδιαφέροντος.

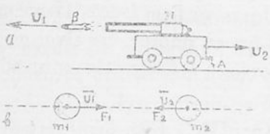
Ποσότης κινήσεως—κροῦσις

84. Ποσότης κινήσεως. Ὡς γνωστὸν ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς εἶναι $F=m\gamma$ (1). Ἂν ἡ F ἐνεργῇ ἐπὶ χρόνον t, ἡ μᾶζα m εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου θὰ ἔχῃ ταχύτητα $\upsilon=\gamma t$. Πολλαπλασιάζοντες τὴν (1) ἐπὶ t ἔχωμεν, $Ft=m\gamma t$ ἢ $Ft=m\upsilon$ (2). Τὸ γινόμενον Ft χαρακτηρίζει τὴν χρονικὴν δρᾶσιν τῆς δυνάμεως καὶ λέγεται ***ὤθησις τῆς δυνάμεως.*** Τὸ γινόμενον $m\upsilon$ χαρακτηρίζει τὸ ἀποτέλεσμα ἐναντίον τῆς ἐξ' ἀδρανείας ἀντιδράσεως τῆς μάζης m καὶ λέγεται ***ποσότης κινήσεως ἢ ὁρμή.*** Ἡ ποσότης κινήσεως βοηθεῖ εἰς τὴν μελέτην τῆς κινήσεως ὑλικῶν σωμάτων καὶ τοῦ μικροκόσμου (μόρια, ἄτομα, ἠλεκτρόνια κ.λ.π) καὶ τοῦ μακροκόσμου (σώματα μεγάλων διαστάσεων, οὐράνια σώματα).

Μεταβολαὶ ποσότητος κινήσεως. Μία μᾶζα εἰς ἠρεμίαν ($\upsilon=o$) ἔχει ποσότητα κινήσεως μηδέν. Ἂν κατὰ μίαν στιγμὴν μᾶζα m ἔχει ταχύτητα υ_0 θὰ ἔχῃ ποσότητα κινήσεως $m\upsilon_0$· ἂν μετὰ χρόνον t ἡ ταχύτης γίνῃ υ, λόγῳ ἐπιταχύνσεως, ἡ ποσότης κινήσεως θὰ εἶναι $m\upsilon$ καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος κινήσεως, $m\upsilon-m\upsilon_0$, θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ὤθησιν Ft. Διότι $\frac{m\upsilon-m\upsilon_0}{t}=m\cdot\frac{\upsilon-\upsilon_0}{t}=m\gamma=F$ καὶ $m\upsilon-m\upsilon_0=Ft$ (3). Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) συνάγομεν τὸ γενικὸν συμπέρασμα ὅτι, «***ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος κινήσεως ἰσοῦται μὲ τὴν ὤθησιν τῆς δυνάμεως***».

Ἀρχὴ διατηρήσεως ποσότητος κινήσεως. Ἐπὶ τοῦ ἁμαξιδίου Α εὑρίσκεται πυροβόλον Π (σχ. 89α) τὸ ὁποῖον ἐκσφεδονίζει βλῆμα β μάζης m_1 μὲ ταχύτητα υ_1. Ἂν ἡ μᾶζα πυροβόλου—ἁμαξιδίου εἶναι m_2, κατὰ τὴν ἐκπυρσοκρότησιν θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ἁμαξίδιον θὰ κινηθῇ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τοῦ βλήματος καὶ μὲ ταχύτητα v_2, οὕτως ὥστε, $-m_2v_2=m_1v_1$ ἢ $m_1v_1+m_2v_2=0$. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα (ἀλγεβρικὸν) τῆς ὁρμῆς ἁμαξιδίου—πυροβόλου καὶ τῆς ὁρμῆς τοῦ βλήματος εἶναι μηδὲν κατὰ τὴν ἐκπυρσοκρότησιν, ὅπως ἦτο μηδὲν καὶ πρὸ αὐτῆς.

Ἂς θεωρήσωμεν γενικῶς τὰ σώματα Α καὶ Β μὲ μᾶζας ἀντιστοίχως m_1 καὶ m_2 (σχ. 89β) καὶ τὰ ὁποῖα ἐνεργοῦν μὲ τὰς ἀμοιβαίας ἕλξεις $F_1=F_2=F$. Μετὰ χρόνον t τὰ Α καὶ Β θὰ ἔχουν ἀποκτήση ταχύτητα v_1 καὶ v_2 οὕτως ὥστε $F\cdot t=m_1v_1$ καὶ $Ft=-m_2v_2$ (αἱ φοραὶ τῶν v_1, v_2 εἶναι ἀντίθετοι). Ἄρα $m_1v_1=-m_2v_2$ καὶ $m_1v_1+m_2v_2=0$ (4). Τὸ σύστημα τῶν σωμάτων Α,Β, ἐπὶ τῶν ὁποίων δὲν ἐνεργεῖ ἐξωτερικὴ δύναμις, εἶχε πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων F_1 F_2 ὁρμὴν μηδὲν καὶ μετὰ τὴν ἐφαρμογὴν ὅμως τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων F_1 F_2, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρμῶν τῶν δύο σωμάτων ***ἰσοῦται μὲ μηδέν***, καθὼς συνάγεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (4). Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐκφράζει τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος κινήσεως· δηλ.: ***«ἡ ποσότης κινήσεως ἑνὸς μεμονωμένου συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερὰ ἐφ' ὅσον δὲν ἐνεργοῦν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις»***.

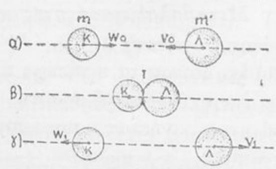


Σχ. 89.

Παράδειγμα. «Σῶμα βάρους 2,5 kg* κινεῖται μὲ ταχύτητα 12m/sec ἡ ὁποία μετὰ 10sec αὐξάνεται καὶ γίνεται υ. Ἂν ἡ ἐνεργήσασα δύναμις ἦτο 1kg* ποία ἡ υ».

Λύσις: Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $mv-mv_0=F\cdot t$ ἔχομεν $mv=F\cdot t+mv_0$ καὶ $v=\frac{Ft+mv_0}{m}=\frac{1.000.000dyn\cdot 10sec+2500gr\cdot 1200m/sec}{2500gr}=52m/sec$

85. Κροῦσις.—***Κροῦσις*** λέγεται τὸ φαινόμενον κατὰ τὸ ὁποῖον δύο σώματα κινούμενα ἐπιπίπτουν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Ἂς θεωρήσωμεν (σχ. 90α) δύο σφαίρας μὲ μάζας m καὶ m', αἱ ὁποῖαι συγκρούονται καὶ ἔστω w_0 καὶ v_0 αἱ ταχύτητες τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν σφαιρῶν, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΛ, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς κρούσεως. Ἂν w_1 καὶ v_1 εἶναι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν εἰς τὸ τέλος τῆς κρύσεως, (σχ. 90γ), ἐπειδὴ τὸ σύστημα τῶν σφαιρῶν δὲν ὑφίσταται ἐξωτερικὴν ὤθησιν, ἡ ὁλικὴ ποσότης κινήσεως παραμένει σταθερὰ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $mw_0+m'v_0=mw_1+m'v_1$ ἢ $m(w_0-w_1)=m'(v_1-v_0)$ (1). (Αἱ ταχύτητες w_0, v_0, w_1, v_1 ἐπὶ τῆς εὐθείας ΚΛ, λαμβάνονται μὲ ἀλγεβρικὰς τιμάς).



Σχ. 90.

Ἡ ἐξίσωσις (1) μόνη δὲν παρέχει ἐν γένει τὰς τιμὰς τῶν w_1 καὶ v_1, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς w_0 καὶ v_0, διὰ τοῦτο ἔχομεν ἀνάγκην μιᾶς δευτέρας ἐξισώσεως, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων τῆς κρούσεως.

Εἰς τὴν κροῦσιν διακρίνομεν τὰς τρεῖς ἑπομένας περιπτώσεις, τὴν κροῦσιν: 1) *τελείως ἐλαστικῶν σωμάτων* 2) *τελείως μὴ ἐλαστικῶν* (πλήρως πλαστικῶν) καὶ 3) *τῶν πραγματικῶν ὑλικῶν σωμάτων.* Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις εἶναι ἰδανικαί, διότι οὔτε τελείως ἐλαστικὰ σώματα ὑπάρχουν, οὔτε τελείως ἐστερημένα ἐλαστικότητος.

1) ***Κροῦσις τελείως ἐλαστικῶν σωμάτων.*** Κατὰ τὴν κροῦσιν τῶν σφαιρῶν Κ καὶ Λ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ι ἐπέρχεται παραμόρφωσις αὐτῶν (σχ. 90β), δηλ. μετατροπὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυναμικὴν ἐνέργειαν παραμορφώσεως (ἐξουδετέρωσις ἐλαστικῶν δυνάμεων). Ἐφ' ὅσον τὰ σώματα εἶναι τελείως ἐλαστικά, αἱ ἐλαστικαὶ δυνάμεις αὐτῶν θὰ τὰ ἐπαναφέρουν εἰς τὸ ἀρχικόν των σχῆμα, δηλ. θὰ ἔχωμεν ἀντίστροφον μετατροπὴν τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας παραμορφώσεως εἰς κινητικὴν πάλιν ἐνέργειαν. Ἐξ' αὐτῶν τῶν συλλογισμῶν συνάγομεν ὅτι ἡ συνολικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος πρὸ καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν παραμένει σταθερὰ καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{1}{2}mw_0^2 + \frac{1}{2}m'v_0^2 = \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}m'v_1^2$, ἢ $m(w_0^2 - w_1^2) = m'(v_1^2 - v_0^2)$ (2). Διαιροῦντες τὰς (2) καὶ (1) κατὰ μέλη ἔχομεν: $w_0 + w_1 = v_1 + v_0$ (3). Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰς νέας ταχύτητας: $w_1 = \frac{(m-m')w_0 + 2m'v_0}{m+m'}$ καὶ $v_1 = \frac{(m'-m)v_0 + 2mw_0}{m+m'}$ (4)

Εἰδικαὶ περιπτώσεις. α) Ἂν $m = m'$ τότε $w_1 = v_0$ καὶ $v_1 = w_0$ δηλ. τὰ σώματα ἐναλλάσσουν τὰς ταχύτητάς των.

β) Ἂν $m' = \infty$ καὶ $v_0 = 0$, π. χ. ἀκλόνητος χαλυβδίνη ὁριζοντία πλὰξ ἐπὶ τῆς ὁποίας προσπίπτει κατακορύφως χαλυβδίνη σφαῖρα, (ὁ χάλυξ, τὸ ἐλεφαντοστοῦν, κ. ἄ. ἔχουν μεγάλην ἐλαστικότητα καὶ προσεγγίζουν τὰ τελείως ἐλαστικά), τότε εὑρίσκομεν $w_1 = -w_0$ καὶ $v_1 = 0$.

γ) Ἂν $m = m'$ καὶ $v_0 = 0$ (ἡ σφαῖρα m' ἠρεμεῖ), τότε εὑρίσκομεν $w_1 = 0$ καὶ $v_1 = w_0$, δηλ. ἡ σφαῖρα m ἀκινητεῖ καὶ ἡ m' κινεῖται μὲ τὴν ταχύτητα τῆς m.

2) ***Κροῦσις πλήρως πλαστικῶν σωμάτων.*** Ἂν τὰ σώματα m καὶ m' εἶναι πλήρως πλαστικὰ (στεροῦνται τελείως ἐλαστικότητος), μετὰ τὴν κροῦσιν δὲν ἀποχωρίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἑνιαῖον σῶμα κινούμενον μὲ ταχύτητα ἔστω v· τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $mw_0 + m'v_0 = (m + m')\cdot v$ (5).

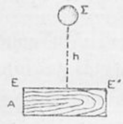
3) ***Κροῦσις πραγματικῶν σωμάτων.*** Ἡ κατάστασις τῶν ὑλικῶν σωμάτων μετὰ τὴν κροῦσιν κυμαίνεται μεταξὺ τῶν δύο ὁριακῶν περιπτώσεων, ποὺ ἐμελετήσαμεν προηγουμένως. Τὴν ἐξίσωσιν (3) δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν $w_1 - v_1 = -(w_0 - v_0)$ (6). Τὴν διαφορὰν τῶν ταχυτήτων τῶν σωμάτων m, m' ὀνομάζομεν ***σχετικὴν ταχύτητα*** καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν κροῦσιν τελείως ἐλαστικῶν σωμάτων, αἱ σχετικαὶ ταχύτητες πρὸ καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν εἶναι ἀπολύτως ἴσαι (ἀντίθετοι). Ἂν τὴν σχέσιν (6)

γράφωμεν $\frac{w_1-v_1}{w_0-v_0}=-1$, τότε λέγομεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν σχετικῶν ταχυτήτων ἰσοῦται μὲ (-1).

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν κροῦσιν τῶν πλήρως πλαστικῶν σωμάτων ἔχομεν $w_1=v_1=v$ καὶ $w \neq v_0$, ἕπεται ὅτι ὁ λόγος $\frac{w_1-v_1}{w_0-v_0}=0$

Κατὰ τὴν κροῦσιν τῶν πραγματικῶν σωμάτων ὁ λόγος $\frac{w_1-v_1}{w_0-v_0}=k$, (7), κυμαίνεται μεταξὺ -1 καὶ 0. ***Ὁ λόγος** k **λέγεται συντελεστὴς κρούσεως*** καὶ εἶναι χαρακτηριστικὸς τῶν συγκρουομένων σωμάτων· εἶναι ***δὲ ἀνεξάρτητος τῆς ἀρχικῆς σχετικῆς ταχύτητος*** w_0-v_0. Τὰ προηγούμενα συμπεράσματα προκύπτουν ἀπὸ τὸ πείραμα.

Ἐφαρμογή. Ἀφήνομεν τὴν σφαῖραν Σ νὰ πέσῃ ἀπὸ ὕψος h ἐπὶ τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας ΕΕ΄ τοῦ ἠρεμοῦντος σώματος Α ($v_0=0$) πολὺ μεγάλης μάζης ($m'=\infty$). Κατὰ τὴν κροῦσιν ἡ ταχύτης τῆς Σ θὰ εἶναι $w_0=\sqrt{2gh}$· μετὰ τὴν κροῦσιν ἡ σφαίρα ἀναπηδᾶ μὲ ταχύτητα $w_1=Kw_0$, διότι τὸ Α καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν παραμένει πρακτικῶς ἐν ἠρεμίᾳ ($v_1=0$), καὶ φθάνει εἰς ὕψος h_1 ὅπου $w_1=\sqrt{2gh_1}$. Ἄρα $k=-\frac{w_1}{w_0}=-\frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}}=-\sqrt{\frac{h_1}{h}}$.



Σχ. 91.

Ἀσκήσεις

I

1) Πόση εἶναι ἡ ὁρμὴ βλήματος μάζης 10 gr ὅταν κινῆται μὲ ταχύτητα 450 m/sec ($g=980cm/sec^2$).

2) Ὅπλον μάζης 4 kg* βάλλει σφαῖραν μάζης 8 gr ὑπὸ ταχύτητα 700 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως πυροβόλου.

3) Κινητόν, ἔχον ἀρχικὴν ταχύτητα 10m/sec, αὐξάνει τὴν ταχύτητά του εἰς 20 m/sec ἐντὸς χρόνου 4 sec. Ποία ἡ ἐνεργήσασα δύναμις.

4) Αὐτοκίνητον μάζης 3 ton κινεῖται μὲ ταχύτητα 8 km/h καὶ συγκρουόμενον μὲ ἄλλον ἀκίνητον μάζης 5 ton ἑνοῦται μὲ αὐτό. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κοινὴ ταχύτης τῶν δύο ὀχημάτων.

5) Δύο σφαῖραι Α καὶ Β ἔχουν μάζας ἀντιστοίχως 2 καὶ 3 kgr καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων των κατ' ἀντιθέτοος φορὰς καὶ μὲ ταχύτητα ἀντιστοίχως 10m/sec καὶ 8m/sec. Αἱ σφαῖραι θεωροῦνται α) τελείως ἐλαστικαί· β) τελείως πλαστικαί. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

II

6) Αὐτοκίνητον μάζης 2ton κινεῖται μὲ ταχύτητα 72km/h. Νὰ εὑρεθοῦν: α) ἡ ὁρμὴ τοῦ αὐτοκινήτου β) ἡ ἀπαιτουμένη δύναμις διὰ νὰ τὸ ἀκινητοποιήσῃ εἰς χρόνον 3sec καὶ γ) τὸ διάστημα ποὺ θὰ διανύσῃ τοῦτο μέχρις ὅτου ἠρεμήσῃ ($g=10m/sec^2$).

7) Πολυβόλον βάλλει 10 σφαίρας κατά sec. Ἑκάστη σφαῖρα ἔχει μᾶζαν 12gr καὶ ἐξέρχεται μὲ ταχύτητα 720m/sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν συγκράτησιν τοῦ πολυβόλου ($g=10 m/sec^2$).

8) Χαλυβδίνη σφαῖρα μάζης 100gr προσπίπτει κατακορύφως ἐπὶ ἀκλονήτου χαλυβδίνης πλακὸς πρὸς τὴν ὁποίαν μένει εἰς ἐπαφὴν ἐπὶ χρόνον 0,02sec. Ἡ σφαῖρα ἀκολούθως ἀναπηδᾷ μὲ ταχύτητα 72m/sec. Πόση ἡ ὁρμή, τὴν ὁποίαν μεταδίδει ἡ χαλυβδίνη πλὰξ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ πόση ἡ μέση δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ἡ πλὰξ ἐπὶ τῆς σφαίρας.

9) Ἐλαστικὴ σφαῖρα πίπτει ἀπὸ ὕψος 1m ἐπί σκληρᾶς ἐπιφανείας καὶ ἀναπηδᾷ εἰς ὕψος 64cm. Νὰ εὑρεθοῦν α) ὁ συντελεστὴς κρούσεως β) τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ κατὰ τὴν 5ην ἀναπήδησιν καὶ γενικῶς τὴν νην.

10 Σφαῖρα μάζης 200gr κινεῖται μὲ ταχύτητα 48m/sec καὶ συναντᾷ ἄλλην σφαῖραν μάζης 480gr καὶ κινουμένην ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (εὐθεῖα τῶν κέντρων) μὲ ταχύτητα 20m/sec καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἂν ὁ συντελεστὴς κρούσεως εἶναι 0,68 νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν δύο σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν καὶ ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας κατὰ τὴν κροῦσιν.

11) Πύραυλος ἔχει βάρος 14ton* καὶ κατὰ την ἐκκίνησίν του προωθεῖται κατακορύφως ὑπὸ δυνάμεως 28ton*. Τὰ ἀέρια τῆς καύσεως ἐξέρχονται μὲ ταχύτητα 1500m/sec. Ζητοῦνται : α) τὸ βάρος τῶν ἀνὰ sec ἐξερχομένων καυσαερίων β) ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ πυραύλου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως.

(Σχολὴ Μηχανολόγων 1953).

86. Συστήματα μονάδων. Εἰς τὴν § 8 ἐλάβομεν ὡς θεμελιώδη ποσὰ τὸ μῆκος, τὴν μᾶζαν καὶ τὸν χρόνον καὶ ὡς μονάδας αὐτῶν ἀντιστοίχως τὸ ἑκατοστόμετρον, τὸ γραμμάριον μάζης καὶ τὸ δευτερόλεπτον καὶ ἐδημιουργήσαμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ σύστημα C.G.S. Ἠμποροῦμεν βεβαίως νὰ ἐκλέξωμεν ἄλλα ποσὰ ὡς θεμελιώδη καὶ νὰ ὁρίσωμεν καὶ τὰς μονάδας αὐτῶν· δηλαδὴ ἠμποροῦμεν νὰ δημιουργήσωμεν ἓν ἄλλο σύστημα θεμελιωδῶν μονάδων καὶ ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν νὰ καθορίζωμεν ἐκ τῶν διαφόρων τύπων τὰς μονάδας τῶν ἄλλων ποσῶν. Ἐκτὸς τοῦ συστήματος C.G.S. συνήθως χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸ σύστημα M. K*. S. ἢ ***τεχνικὸν σύστημα.*** Εἰς αὐτὸ ***θεμελιώδη ποσὰ*** εἶναι τὸ ***μῆκος,*** ἡ ***δύναμις*** καὶ ὁ ***χρόνος*** καὶ ***θεμελιώδεις μονάδες*** ἀντιστοίχως, τὸ ***μέτρον*** (m), τὸ ***χιλιόγραμμον βάρους*** (kg*) καὶ τὸ ***δευτερόλεπτον*** (sec). Κατὰ τὸ τεχνικὸν σύστημα π. χ. μονὰς ταχύτητος θὰ εἶναι 1 m/sec, μονὰς ἐπιταχύνσεως 1 m/sec², μονὰς μάζης $1\frac{kgr^*}{m/sec^2}$ κ. ο. κ.

Διὰ τὴν μετά βασιν ἀπὸ τὸἓν σύστημα εἰς τὸ ἄλλο πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ποία σχέσις συνδέει τὰς μονάδας ἑνὸς φυσικοῦ μεγέθους εἰς τὰ δύο συστήματα. Π. χ. εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα ἡ μᾶζα εἶναι παράγωγον ποσὸν καὶ ἡ μονὰς προκύπτει ἀπὸ τὴν θεμ. ἐξίσωσιν τῆς δυναμικῆς $m=\frac{F}{\gamma}$ ὅπου $F=1kg^*$ καὶ $\gamma=1\ m/sec^2$. Δηλ. μία τεχνικὴ μονὰς μάζης (1Newton)= $=1kg^*\cdot m^{-1}\cdot sec^2$, εἶναι ἡ μάζα ἐπὶ τῆς ὁποίας δύναμις 1kg* προσδίδει ἐπιτάχυνσιν 1m/sec². ἔχομεν δὲ $1Nt=\frac{1kg^*}{1m/see^2}=\frac{1000gr.981cm/sec^2}{100cm/sec^2}=$

$=9810$ gr ἢ $1N=9{,}81$ kg ($g=9{,}81$ m/sec^2). Ὥστε διὰ νὰ μετατρέψωμεν τεχνικὰς μονάδας μάζης εἰς kg μάζης ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος ἐκπεφρασμένην εἰς m/sec^2.

Ἐφαρμογαὶ 1) *πόσα* kg *εἶναι* ***2,5Nt*** *ἂν* $g=9{,}78$ m/sec^2. Ἔχομεν: $2{,}5\text{Nt}=2{,}5\cdot 9{,}78=24{,}45$kg.

2) ***Πόσα Nt*** *εἶναι* 2 gr *ἂν* $g=10$ m/sec^2. Ἔχομεν 2gr=0,002 kg$=0{,}002:10=2\cdot 10^{-4}$Nt.

3) ***Ἡ*** *ταχύτης σώματος εἶναι* ***125*** cm/sec *καὶ ἡ μᾶζα του* ***100*** gr. ***Νὰ*** *εὑρεθῇ ἡ κινητικὴ του ἐνέργεια εἰς τεχνικὰς μονάδας* ($g=10$ m/sec^2). Ἡ τεχνικὴ μονὰς ἔργου εἶναι τὸ χιλιογραμμόμετρον καὶ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν $E=\frac{m\upsilon^2}{2}$ εἰς τεχνικὰς πρέπει νὰ δώσωμεν τὴν μᾶζαν εἰς Nt καὶ τὴν ταχύτηνα εἰς m/sec. Ἑπομένως 100gr$=$ $=0{,}1$kg$=0{,}01$Nt, 125cm/sec$=1{,}25$m/sec καὶ $E=\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\text{Nt}.(1{,}25)^2\cdot \text{m}^2/\text{sec}^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\text{kg}^*\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{sec}^2\cdot 1{,}5625\cdot\text{m}^2\text{sec}^{-2}=0{,}0078125\ \text{kg}^*\cdot\text{m}$ (χιλιογραμμόμετρα).

Γενικαὶ ἀσκήσεις

1) Βλῆμα ἔχει διάμετρον διατομῆς 16 mm καὶ βάρος 30gr*. Κατὰ τὴν ἔξοδον ἐκ τῆς κάννης ὅπλου ἔχει ταχύτητα 500m/sec. Ἂν ὁ χρόνος διαδρομῆς τῆς κάννης ἦτο 0,001sec νὰ εὑρεθῇ ἡ πίεσις τῶν ἀερίων τῆς πυρίτιδος, ἂν αὕτη θεωρῆται σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διαδρομὴν τῆς κάννης (πίεσις=δύναμις πρὸς ἐπιφάνειαν).

2) Σχοινίου Σ τὸ ἓν ἄκρον εἶναι προσδεδεμένον μὲ τὸ ἓν ἄκρον ὁμοιομόρφου δοκοῦ μήκους 8m καὶ βάρους 60kgr*· τὸ ἄλλον ἄκρον τοῦ σχοινίου εἶναι προσδεδεμένον ἐπὶ κατακορύφου τοίχου ἐπὶ τοῦ ὁποίου προσαρμόζεται καὶ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς δοκοῦ. Ἡ δοκὸς εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ὁποίας ἔχει ἀναρτηθῇ βάρος 840 kgr* ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως ὅταν τὸ σχοινίον σχηματίζῃ μετὰ τῆς δοκοῦ γωνίαν 30^0. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ τάσις τοῦ σχοινίου καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ τοίχου ἐπὶ τῆς δοκοῦ.

3) Ἀεροπλάνον ἐκτελεῖ βύθισιν μὲ ταχύτητα 360km/h καὶ ὑπὸ γωνίαν 30^0 ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἐλαχίστη ἀκτὶς καμπυλότητος μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐπανέλθῃ τὸ ἀεροπλάνον εἰς ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, ἐφ' ὅσον ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 8g (g=980m/sec β) ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ ἀεροπλάνον καὶ τὸ ὕψος ποὺ ἔχασε.

4) Τὸ κάτω ἄκρον μιᾶς ὑπὸ κλίσιν 30^0 μὲ τὸν ὁρίζοντα στέγης, εὑρίσκεται εἰς ὕψος 20m ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, ἐνῶ τὸ ἄνω ἄκρον τῆς στέγης ἀπέχει 25m ἀπὸ τὸ ἔδαφος. Θέτομεν λίθον 1kg* ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς στέγης καὶ τὸν ἀφήνομεν νὰ ὀλισθήσῃ ἐλευθέρως κατὰ μῆκος αὐτῆς. Ζητεῖται ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις χ τοῦ σημείου πτώσεως τοῦ λίθου ἀπὸ τὴν πρόσοψιν τοῦ κτιρίου, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ λίθου καὶ στέγης εἶναι 0,3 ($g=9{,}8$m/sec^2).

(Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων 1953)

5) Εἰς τὸ τύμπανον βαρούλκου ἀκτῖνος 8cm ἑλίσσεται καλώδιον διαμέτρου 2cm ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται βάρος 100kgr*. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ τυμπάνου σφηνοῦται στρόφαλος ἀκτῖνος 50cm εἰς τὸν ὁποῖον δρᾶ ἐφαπτομενικῶς δύναμις 24 kgr*

καὶ δίδει εἰς τὸν ἄξονα 40 στροφὰς κατὰ sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἀνόδου τοῦ βάρους καὶ ὁ μηχανικὸς βαθμὸς ἀποδόσεως τῆς λειτουργίας.

(Σχολὴ Μηχανολόγων 1953)

6) Δύο ὀχήματα Α καὶ Β εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 100m ἀπ' ἀλλήλων ἐκκινοῦν ταὐτοχρόνως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ ἐπιταχύνσεις $\gamma_\alpha = 0{,}16 m/sec^2$ $\gamma_B = 8 cm/sec^2$. Ἐπὶ τοῦ ὀχήματος Α εὑρίσκεται μυῖγα Μ θεωρουμένη ὡς ὑλικὸν σημεῖον στερούμενον μάζης, ἡ ὁποία ἅμα τῇ ἐκκινήσει τοῦ Α πετᾷ εὐθυγράμμως πρὸς τὸ Β διὰ νὰ ἐπιστρέψη, μόλις φθάση εἰς τὸ Β, πάλιν εἰς τὸ Α κ. ο. κ μέχρι τῆς συνθλίψεώς της μεταξὺ τῶν ὀχημάτων Α καὶ Β· ἡ κίνησις τῆς Μ εἶναι ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\mu = 20 cm/sec^2$. Ζητεῖται ἡ μεγίστη ὑπὸ τῆς μυίγας ἀναπτυχθεῖσα ταχύτης *(Γεωπονικὴ Ἀθηνῶν 1953)*

7) Μετεωρίτης μάζης Μ περιφέρεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα υ πέριξ τῆς Γῆς εἰς ὕψος h=1730 km ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς. Δίδονται: ἡ μέση ἀκτὶς τῆς Γῆς R=6366km καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸ ὕψος h ἴση μὲ $6{,}16 m/sec^2$. Ζητοῦνται α) ὁ χρόνος Τ μιᾶς περιφορᾶς τοῦ Μετεωρίτου ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ βάρος του ἀντισταθμίζεται ὑπὸ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. β) Ὁμοίως, ἄνευ ὅμως τῆς χρήσεως τῆς ἐννοίας τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως· πρὸς τοῦτο νὰ θεωρηθῇ πρὸς στιγμὴν ὅτι ὁ μετεωρίτης ὀλισθαίνει ἰσοταχῶς καὶ ἄνευ τριβῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὑποθετικοῦ κοίλου στερεοῦ ὁδηγοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ ὕψος h καὶ παραλλήλως πρὸς αὐτήν. γ) Διερευνήσατε τὰς περιπτώσεις ὅπου ἡ ταχύτης τῆς περιφορᾶς τοῦ μετεωρίτου εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ υ. Ποῖον ὑποθετικὸν συμπέρασμα δύναται νὰ ἐξαχθῇ ὅσον ἀφορᾷ τὸν ὑποθετικὸν στερεὸν ὁδηγόν. δ) Θεωρήσατε τὸν μετεωρίτην, πρὸς στιγμὴν ὡς εἶδος «τεχνητοῦ δορυφόρου» ἐπὶ τοῦ ὁποίου προτίθεται νὰ ἀφιχθῇ ἔξωθεν τῆς Γῆς προερχόμενον, ξένον ἀντικείμενον, μάζης $M' = M : 10$. Ὑποδείξατε τὸν μόνον ἐπιτρεπόμενον τρόπον προσγειώσεως τοῦ ὑποθετικοῦ διαστημοπλοίου τούτου ἐπὶ τοῦ τεχνητοῦ δορυφόρου, ἵνα ἀποτραπῇ ἡ πτῶσις ἀμφοτέρων ἐπὶ τῆς Γῆς. *(Σχολὴ Μηχανολόγων 1955)*

8) Ὁριζοντία ράβδος μήκους l εἶναι πακτωμένη εἰς τὸ μέσον της ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος στρεφομένου μὲ 3000 στροφὰς κατὰ min καὶ φέρει εἰς τὰ ἄκρα της ἀνὰ μίαν σφαῖραν ἀμελητέας διαμέτρου καὶ μάζης m. Κατά τινα στιγμὴν αἱ σφαῖραι μετατοπίζονται ἄνευ ἀπωλείας κινητικῆς ἐνεργείας ἐπὶ τῆς ράβδου πρὸς τὸν ἄξονα καὶ σταματοῦν εἰς ἀπόστασιν $l/4$ ἀπ' αὐτοῦ. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ἄξων καὶ ἡ ράβδος ἔχουν ἀμελητέαν μᾶζαν, νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα γωνιακὴ ταχύτης τοῦ ἄξονος.

(Σχολὴ Ἀρχιτεκτόνων 1955)

9) Ἄνθρωπος βάρους 65kgr* προτίθεται νὰ ἐγκαταλείψη φλεγόμενον κτίριον ἐξ' ἑνὸς παραθύρου εὑρισκομένου εἰς ὕψος 30m ὑπεράνω τοῦ πεζοδρομίου. Διὰ νὰ σωθῇ δύναται νὰ χρησιμοποιήση καλώδιον ἐπαρκοῦς μὲν μήκους ἀλλ' ἀνεπαρκοῦς ἀντοχῆς, καθ' ὅσον τὸ φορτίον θραύσεως αὐτοῦ ἀνέρχεται εἰς 63kgr*. Ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη ταχύτης υ μετὰ τῆς ὁποίας ὁ ἄνθρωπος ὀλισθαίνων κατὰ μῆκος τοῦ κατακορύφου καλωδίου δύναται νὰ φθάση εἰς τὸ πεζοδρόμιον εἰς τρόπον ὥστε ἡ κροῦσις τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον ($g = 980 m/sec^2$).

(Γεωπονικὴ Ἀθηνῶν 1955)

10) Κοχλίας μήκους 36cm ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας. Εἰς τὴν κεφαλὴν τοῦ κοχλίου προσαρμόζεται μετάλλινος βραχίων μήκους 1,80m. α) Ποία δύναμις πρέπει νὰ ἐνεργῇ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ βραχίονος ὥστε νὰ μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ κοχλίου βάρος 600kgr*. β) Ποῖον τὸ καταβαλλόμενον ἔργον δι' ἀνύψωσιν τοῦ βάρους κατὰ 14cm.

11) Σῶμα βάρους Β εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἀκτῖνος r, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εἶναι ὁριζόντιος. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι η, ποία θὰ

εἶναι ἡ θέσις τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἐκ τῆς ὁποίας μόλις θὰ ἀρχίσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ.

12) Σῶμα ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐξ' ὕψους 380m. Νὰ διαιρεθῇ τὸ ὕψος τοῦτο εἰς 8 τμήματα διανυόμεεα ὑπὸ τοῦ σώματος εἰς ἴσους χρόνους.

13) Ἐπὶ δύο κεκλιμένων ἐπιπέδων συνδεδεμένων μὲ τὰ ἄνω ἄκρα καὶ γωνιῶν φ καὶ ω κινοῦνται ἄνευ τριβῆς αἱ μᾶζαι m_1 καὶ m_2, αἱ ὁποῖαι συνδέονται διὰ νήματος διερχομένου διὰ τροχαλίας προσηρμοσμένης εἰς τὸ σημεῖον συνδέσεως τῶν ἐπιπέδων. Νὰ καθορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος καὶ αἱ τάσεις εἰς τὰ τμήματα τοῦ νήματος συνδέσεως (ἐφαρμογὴ $m_1=80gr$, $\varphi=60^0$, $m_2=60gr$, $\omega=30^0$).

14) Νῆμα ΑΒΓ ἀνέρχεται μὲ ἐπιτάχυνσιν $6m/sec^2$. Εἰς τὸ σημεῖον Β φέρει μᾶζαν 4kgr καὶ εἰς τὸ Γ μᾶζαν 6kg. Τὸ νῆμα θεωρεῖται ἀμελητέου βάρους. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τάσεις εἰς τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς καὶ ἡ μεγίστη ἐπιτρεπομένη ἐπιτάχυνσις ἂν ἡ δύναμις θραύσεως τοῦ νήματος εἶναι 40kgr* ($g=10m/sec^2$).

15) Ἐπὶ τῆς ἀριστερᾶς πλάστιγγος ἑνὸς ζυγοῦ τοποθετεῖται ἓν ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον ἰσορροπεῖται ὑπὸ σταθμῶν βάρους 100mgr* τεθέντων ἐπὶ τῆς δεξιᾶς πλάστιγγος. Εἶτα τὸ ἀντικείμενον μεταφέρεται ἐπὶ τῆς δεξιᾶς πλάστιγγος καὶ τότε ἰσορροπεῖται ὑπὸ σταθμῶν βάρους 95mgr* ἐπὶ τῆς ἀριστερᾶς πλάστιγγος. Μῆκος τῆς φάλλαγγος $l=10cm$. Ζητοῦνται: α) τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ ἀντικειμένου β) ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου στηρίξεως τῆς φάλαγγος ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς.

(Σχ. Μηχανολόγων 1954)

16) Δρομεὺς ἐκκινεῖ ἐξ Ἀθηνῶν πορευόμενος πρὸς Κόρινθον, ἐνῷ συγχρόνως ἄλλος ἐκκινεῖ ἀπὸ Κόρινθον πρὸς Ἀθήνας. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεώς των ὁ πρῶτος εἶχε διανύσει 12km περισσότερα τοῦ δευτέρου. Μετὰ τὴν συναντησίν των συνεχίζουν τὴν πορείαν των χωρὶς νὰ μεταβάλλουν ταχύτητας καὶ ὁ μὲν πρῶτος φθάνει εἰς Κόρινθον μετὰ $4\frac{2}{3}$ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος εἰς Ἀθήνας μετὰ $7\frac{5}{7}$ ὥρας ἀπὸ τῆς συναντήσεώς των. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις Ἀθηνῶν — Κορίνθου.

17) Ἀεροπλάνον συνολικοῦ βάρους 12ton* διαθέτει κινητηρίους μηχανὰς ἱκανὰς ὥστε ἐντὸς 20sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκκινήσεως νὰ προσδώσουν εἰς αὐτὸ ταχύτητα $v=50m/sec$, ἐπαρκῆ ἵνα ἐπιτύχῃ τὴν ἀπογείωσίν του. Ζητοῦνται: α) ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως καὶ β) τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν μῆκος τοῦ διαδρόμου προσγειώσεως. *(Σχολὴ Ἰκάρων 1954)*

18) Ἐπὶ σώματος βάρους 4kgr* εὑρισκομένου ἀρχικῶς ἐν ἠρεμίᾳ ἐπενεργεῖ δύναμις 180gr* ἐπὶ 14sec. Εἰς μεταγενεστέραν στιγμὴν τὸ σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 81,9m ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἐκκινήσεως. Ζητεῖται νὰ περιγραφῇ ποσοτικῶς ἡ ὅλη κίνησις τοῦ σώματος ($g=10m/sec^2$) *(Σχ. Πολ. Μηχανικῶν 1956)*

19) Σιδηρόδρομος ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν καὶ φθάνει εἰς Λεβαδείαν μετὰ 4h. Καθ' ὁδὸν κάμνει δύο σταθμεύσεις εἰς Τανάγραν καὶ εἰς Θήβας διαρκείας ἡμισείας ὥρας ἑκάστην. Ἀποδώσατε γραφικῶς α) τὸ διανυθὲν διάστημα συναρτήσει τοῦ χρόνου (μετὰ τῆς σχετικῆς δικαιολογίας) καὶ β) τὴν ταχύτητα συναρτήσει τοῦ χρόνου.

(Φυσικὸν τμῆμα Ἀθ. 1956)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΣΤΑΤΙΚΗ

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελ. 36	στίχ.	17	ἀντὶ ἐμπρὸς νὰ γραφῇ ὀπίσω.
» 66	»	21	ἡ λέξις σημαντικῶς νὰ παραλειφθῇ.
» 76	»	9	ἀντὶ 40cm/sec νὰ γραφῇ $40\,cm/sec^2$

Ἡ τεχνικὴ ἐπίβλεψις καὶ ἐκτέλεσις τοῦ Α΄ τόμου τοῦ παρόντος βιβλίου ἔγινε ἀπὸ τὸν τυπογράφον Ζόμπολα Ἰωάννην.

Ἐξεδόθη καὶ ἐκυκλοφόρησεν:

ΣΤΡ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

(Πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν Γυμνασίων καὶ ἄριστον βοήθημα τῶν ὑποψηφίων Σχολῆς Δοκίμων—Ἀνωτάτης Ἐμπορικῆς καὶ ἄλλων Σχολῶν)
