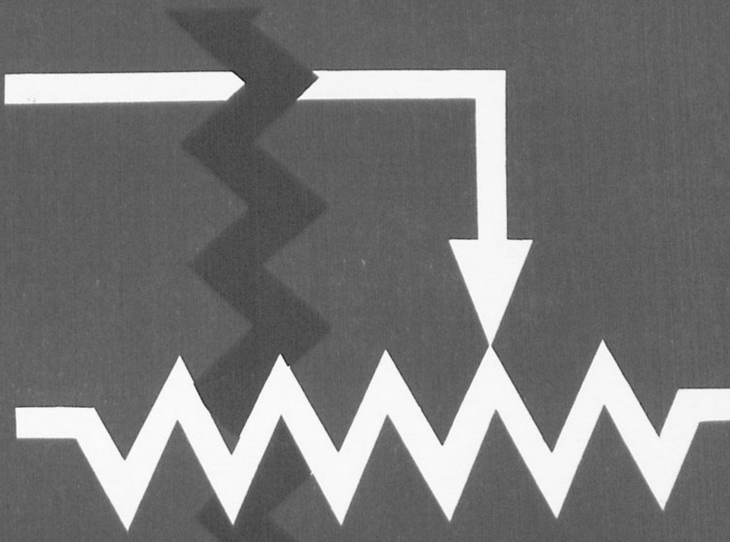
γ. α. πνευματικου



μεθοδοι

επιλυσεως ασκησεων

φυσικης

β . ηλεκτρισμος

γ. α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΥ

Ασκήσεις φυσικής

μεθοδοι επιλυσεως ασκησεων φυσικης

β΄. ηλεκτρισμος

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν μου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ Α'. ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο δὲν ἐπεχειρήθη ἡ συγκέντρωσις ἀσκήσεων ὑπὸ τύπον συλλογῆς θεμάτων εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων.

Τοιαῦται συλλογαὶ ὑπάρχουν πολλαὶ τόσον εἰς τὴν ξένην ὅσον καὶ εἰς τὴν ἡμετέραν βιβλιογραφίαν.

Δὲν ὑπῆρχε ὅμως ἕνα βιβλίον τὸ ὁποῖον ὄχι μόνον νὰ ὁδηγῇ τοὺς σπουδαστὰς εἰς τὴν ὑπερπήδησιν τῶν δυσκολιῶν τὰς ὁποίας οὗτοι ἀντιμετωπίζουν ὅταν κατὰ πρῶτον ἐφαρμόζουν τὴν θεωρίαν εἰς τὴν πρᾶξιν ἀλλὰ καὶ νὰ τοὺς διδάσκῃ μεθόδους πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν προβλημάτων.

Βεβαίως ὑπάρχουν γενικαὶ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι ἐκτίθενται εἰς ὡρισμένα βιβλία, ἀλλὰ διεπιστώθη ὅτι κατὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τίθενται θέματα ἁπλουστευμένα μὲν ἀλλὰ περιπτώσεις γενικῶν θεμάτων τὰ ὁποῖα ἐκτίθενται εἰς τὴν βιβλιογραφίαν τῆς ἀνωτάτης βαθμίδος ἐκπαιδεύσεως.

Ἀπεφάσισα λοιπὸν ἐκτὸς τῶν γενικῶν μεθόδων ἐπιλύσεως προβλημάτων τοῦ ἠλεκτρισμοῦ νὰ συμπεριλάβω καὶ τὰς λύσεις τῶν γενικῶν αὐτῶν θεμάτων ἀντιμετωπίζων ταῦτα στοιχειωδῶς.

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὰ γενικὰ αὐτὰ προβλήματα προκύπτει μεγάλη κατηγορία ἀσκήσεων, πιθανῶν θεμάτων, διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν Πολυτεχνείων ὡς καὶ τῶν Πανεπιστημίων μας ἀπεφάσισα νὰ χαρακτηρίσω τὴν λύσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος ὡς μέθοδον διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξ αὐτοῦ προκυπτουσῶν ἀσκήσεων.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐκτὸς τῶν γενικῶν μεθόδων τῶν ὁποίων ἡ ὁρολογία ὑπάρχει καὶ εἶναι κοινὴ δι' ὅλους τοὺς συγγραφεῖς προέκυψε διὰ τὰς δημιουργηθείσας μεθόδους ἡ ἀνάγκη ὀνομασίας των.

Οὕτως προέκυψε μία ὁρολογία διὰ τὴν ὁποίαν ὑπεύθυνος εἶναι ὁ συγγραφεὺς καὶ οὐδεὶς ἄλλος οὕτως ὥστε ἂν καμμία ἀπὸ αὐτὰς ἤθελε θεωρηθῇ ἀνεπιτυχὴς θὰ πρέπῃ νὰ κατηγορηθῇ ὁ συγγραφεὺς καὶ μόνον.

Τέλος ἑκάστη μέθοδος ἐξαντλεῖται δι' ὅλων τῶν πιθανῶν περιπτώσεων ἐφαρμογῆς καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δημιουργεῖται μεγάλη συλλογὴ ἀσκήσεων αἱ ὁποῖαι ἐὰν ἀντιμετωπίζοντο κεχωρισμένως θὰ ἤθελον θεωρηθῇ ὡς ἀρκούντως δυσεπίλυτα προβλήματα.

Σκοπὸς λοιπὸν τοῦ βιβλίου τούτου εἶναι ἡ πλήρης μεθόδευσις καὶ ὀργάνωσις τοῦ συλλογισμοῦ εἰς τὸν ἠλεκτρισμὸν καὶ θὰ ἐθεώρουν τὸν ἑαυτόν μου εὐτυχῆ ἐὰν ὄντως συνέβαλον εἰς τοῦτο.

Ἰανουάριος 1970

ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ

στατικὸς ἠλεκτρισμὸς

1. ἠλεκτροστατικὸν πεδίον

● Ὡς ἠλεκτροστατικόν πεδίον χαρακτηρίζομεν τόν χῶρον:

α. Ἐντός τοῦ ὁποίου ἀσκοῦνται ἐπί ἠλεκτρικῶν φορέων, εἰς τό αὐτό σημεῖον χρονικῶς σταθεραί δυνάμεις καί

β. Ἔχει ἠλεκτρικήν ἀγωγιμότητα μηδέν.

Τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον εἶναι ἕνα διανυσματικόν ἀστρόβιλον δυναμικόν πεδίον.

Διά νά παραχθῇ ἕν ἠλεκτροστατικόν πεδίον πρέπει νά ὑπάρχῃ μία τουλάχιστον "πηγή" δηλαδή ἕνα φορτίον Q. Ἐάν τό φορτίον Q δύναται νά θεωρηθῇ σημειῶδες τό πεδίον χαρακτηρίζεται τότε ὡς πεδίον COULOMB.

Διά νά γίνῃ ἀντιληπτόν τό πεδίον πρέπει νά εἰσαχθῇ ἐντός αὐτοῦ ὁ κατάλληλος "φορεύς", ἐπί τοῦ ὁποίου θά ἀσκηθῇ, ἡ δύναμις. Ὁ "φορεύς" εἶναι φορτισμένον σωματίδιον.

1.1. βασικαὶ ἔννοιαι

● Ὁρίζομεν ὡς ἔντασιν τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου εἰς ἕν σημεῖον Α αὐτοῦ, ἕν διανυσματικόν μέγεθος τό ὁποῖον ἔχει μέτρον τό σταθερόν πηλῖκον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως F, ἥτις ἀσκεῖται ἐπί τινος ἠλεκτρικοῦ φορέως φερομένου εἰς τό σημεῖον Α, διά τοῦ φορτίου τούτου, θεωρουμένου ἀπείρως μικροῦ. Διεύθυνσις τῆς ἐντάσεως ὁρίζεται ἡ διεύθυνσις τοῦ διανύσματος τῆς δυνάμεως καί φορά τῆς ἐντάσεως, συμβατικῶς, ὁρίζεται ἡ φορά τῆς δυνάμεως πού ἀσκεῖται ἐπί θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορέως.

"Ητοι: $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{+q}$$

● Καλοῦμεν 'Ηλεκτρικάς δυναμικάς γραμμάς, τάς γραμμάς μέ τάς κάτωθι ἰδιότητας:

α. (ΒΑΣΙΚΗ). Εἰς κάθε σημεῖον αὐτῶν, τό διάνυσμα τῆς ἐντάσεως ἔχει φορέα τήν ἐφαπτομένην των εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον.

β. Εἶναι ἀνοικταί, δηλ. ἔχουν ἀρχήν καί πέρας. 'Αναβλύζουν ἤ καταδύονται εἰς ἠλεκτρόδια* χωρίς νά συνεχίζωνται ἐντός αὐτῶν.

γ. 'Αναβλύζουν καί καταδύονται καθέτως εἰς τά ἠλεκτρόδια.

δ. Ἔχουν φοράν. 'Αναβλύζουν ἀπό θετικά ἠλεκτρόδια καί καταδύονται εἰς ἀρνητικά (ἐκπηγάζουν ἀπό θετικά φορτία καί ἀπολήγουν εἰς ἀρνητικά).

'Εκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων ἀπορρέει ὅτι:

α. Αἱ ἠλεκτρικαί δυναμικαί γραμμαί οὐδέποτε τέμνονται.

β. Αἱ ἠλεκτρ. δυναμικαί γραμμαί παρέχουν τήν διεύθυνσιν καί τήν φοράν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου E.

'Εάν δέ συμφωνήσωμεν καί δεχόμεθα ὅτι: Δι'ἐπιφανείας ἐμβαδοῦ ἴσου πρός τήν μονάδα, λαμβανομένης καθέτως πρός τήν ἔντασιν τοῦ πεδίου, νά διέρχωνται τόσαι δυναμικαί γραμμαί, ὅσον τό μέτρον τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου, ἡ ἀπεικόνισις τοῦ πεδίου διά τῶν δυναμικῶν γραμμῶν, παρέχει καί τό μέτρον τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ.

* 'Ηλεκτρόδιον: Καλεῖται κάθε ἀγώγιμον σῶμα κείμενον ἐντός ἠλεκτρικοῦ πεδίου.
Κάθε ἠλεκτρόδιον ἐντός ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου εἶναι ἰσοδυναμικός χῶρος (Δηλ. ἐντός αὐτοῦ E=0).

● Δυναμικόν U εἰς ἕν σημεῖον Α τοῦ πεδίου καλεῖται: τό σταθερόν πηλῖκον τοῦ ἔργου W_∞ τό ὁποῖον παράγεται ἤ δαπανᾶται κατά τήν μετακίνησιν τοῦ τυχόντος σημειώδους φορτίου q ἀπό τό σημεῖον Α μέχρι τοῦ ἀπείρου, διά τοῦ φορτίου τούτου, θεωρουμένου ἀπείρως μικροῦ. $U = \frac{W_\infty}{q}$

Τό ἔργον W_∞ θεωρεῖται θετικόν ἐφ'ὅσον τό q ἀπωθεῖται ὑπό τοῦ πεδίου πρός τό ἄπειρον*.

Τό δυναμικόν εἶναι μονόμετρον μέγεθος.

Περίπτωσις Ι: Τό πεδίον ὀφείλεται εἰς ἕν σημειῶδες φορτίον Q.

Τυχόν σημειῶδες φορτίον φερόμενον εἰς τό σημεῖον Α	Ἔργον W_∞ παραγόμενον ἤ δαπανόμενον	Δυναμικόν $U = \frac{W_\infty}{q}$	Φορτίον εἰς ὅ ὀφείλεται τό πεδίον: Q
+	+	+	+
+	−	−	−
−	+	−	−
−	−	+	+

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ἐξάγεται ὅτι:

α. Τό δυναμικόν U_A εἰς κάθε σημεῖον τοῦ πεδίου ἔχει τό πρόσημον τοῦ φορτίου Q.

β. Τό δυναμικόν U_A δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό μέγεθος ἤ τό πρόσημον τοῦ q, ἀρκεῖ τοῦτο νά θεωρῆται πολύ μικρόν.

Τό δυναμικόν εἰς σημεῖον Α πεδίου, ὀφειλομένου εἰς σημειῶδες φορτίον Q δίδεται ἀπό τάς σχέσεις:

---

* Ἀναφέροντες "ἄπειρον" νοοῦμεν τήν ἀπομεμακρυσμένην ἐκ τοῦ φορτίου περιοχήν ἐντός τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου τείνει νά μηδενισθῇ.

$$U_A = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r} \quad (\text{ΗΣΣΜ}) \qquad U_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r} \quad (\text{MKSAr})$$

Περίπτωσις ΙΙ: Τό πεδίον ὀφείλεται εἰς περισσότερα τοῦ ἑνός φορτία.

Τό δυναμικόν εἰς σημεῖον Α θά εἶναι τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν ἐξ ἑνός ἑκάστου τῶν φορτίων (Βλέπε ἐφαρμογήν εἰς 1.2).

● "Πυκνωτής καλεῖται σύστημα δύο ἀγωγῶν, ἐντός μονωτικοῦ μέσου, μεταξύ τῶν ὁποίων ἐμφανίζεται ὁλική ἠλεκτροστατική ἐπίδρασις.

Διά κάθε πυκνωτήν ἰσχύει ἡ πειραματική σχέσις: $Q = C.V$ ὅπου C σταθερά ἀναλογίας, χαρακτηριστική τῆς διατάξεως, καλουμένη "χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ" καί ἐξαρτωμένη ἐκ τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων τῆς διατάξεως καί τάς φυσικάς ἰδιότητας τοῦ ἐνδιαμέσου χώρου.

● Καλοῦμεν σχετικήν διηλεκτρικήν σταθεράν ἑνός διηλεκτρικοῦ τόν σταθερόν λόγον τῶν χωρητικοτήτων πού παρουσιάζει ἐπίπεδος πυκνωτής ὅταν ὁ μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν χῶρος πληροῦται ὑπό τοῦ διηλεκτρικοῦ καί ὅταν εἶναι κενός. Ἤτοι: $\varepsilon = \frac{C}{C_0}$

● Καλεῖται ἰσοδύναμος χωρητικότης συστήματος πυκνωτῶν, ἡ χωρητικότης ἑνός πυκνωτοῦ ὁ ὁποῖος ὑπό τήν τάσιν τοῦ συστήματος συγκρατεῖ ἴσον μέ αὐτό φορτίον.

● Ἀρχή ἀφθαρσίας τοῦ φορτίου:

"Τό ὁλικόν φορτίον ἠλεκτρικῶς μεμονωμένου συστήματος παραμένει σταθερόν".

"Ἠλεκτρικῶς μεμονωμένον" θά ὀνομάζωμεν τό σύστημα πού δέν ἐπιδέχεται οὐδεμίαν ἀνταλλαγήν φορτίου μέ τό περιβάλλον του.

ΠΙΝΑΞ 1. ΜΕΓΕΘΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ
ΣΥΜΒΟΛΑ - ΜΟΝΑΔΕΣ - ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α/Α	ΜΕΓΕΘΟΣ	ΣΥΜΒΟΛΟΝ	ΤΥΠΟΣ ΟΡΙΣΜΟΥ		ΜΟΝΑΔΕΣ		Σχέσεις μονάδων	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	
			ΗΣΣΜ	MKSA r	ΗΣΣΜ	MKSA r	* * *	ΗΣΣΜ	MKSA r
1	Ἠλεκτρικόν φορτίον	Q, q	$F = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$	Q = i t	1ΗΣΜ - Φ	1 Cb	$1Cb \Rightarrow 3.10^9$ ΗΣΜ - Φ	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1$	0, 0, 1, 1
2	Δυναμικόν, ἠλεκ. τάσις	U,V,E	$V = \frac{W}{q}$	$V = \frac{W}{q}$	1ΗΣΜ - δ.δ	1 V	$1V \Rightarrow \frac{1}{300}$ ΗΣΜ-δ.δ	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	2, 1,-3,-1
3	Ἔντασις ἠλεκ. πεδίου	E	$E = \frac{F}{q}$	$E = \frac{V}{l}$	1ΗΣΜ-έντ.π.	$1\frac{V}{m}$	$1\frac{V}{m} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot10^{-4}$ ΗΣΜ-έν.π.	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	1, 1,-3,-1
4	Ἠλεκτρική ροή	Φ	Φ=ESσυνφ	Φ = Q	1ΗΣΜ- Ροῆς	$1\ Cb_\rho$	$1Cb_\rho \Rightarrow 12\pi.10^9$ ΗΣΜ-ρ.	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1$	0, 0, 1, 1
5	Χωρητικότης	C	$C = \frac{Q}{V}$	$C = \frac{Q}{V}$	1ΗΣΜ - Χ	1 F	$1F \Rightarrow 9\cdot10^{11}$ ΗΣΜ - Χ	1, 0, 0	-2,-1,4,2
6	Ἔντασις ρεύμ.	I, i		*		1 A			0, 0, 0, 1
7	Ἀντίστασ. ἀγωγ.	R, r		$R = \frac{V}{i}$		1 Ω			2, 1,-3,-2
8	Εἰδ. ἀντίστασ.	ρ		$R = \rho\frac{l}{S}$		1 Ω.m			3, 1,-3,-2
9	Σχετική διηλ. σταθερά	ε	$\varepsilon = \frac{C}{C_o}$	$\varepsilon = \frac{C}{C_o}$				0, 0, 0	0, 0, 0, 0
10	Θεμελ. διηλ. στ. τοῦ κενοῦ	ε_o	**	$\varepsilon_o = 8,86\cdot10^{-12}$		$\frac{Cb}{V.m}$		0, 0, 0	-3,-1,4, 2

MKSAr : Τό ὀρθολογισμένον MKSA.

* : Ἡ ἔντασις ρεύματος εἰς τό M.K.S.A.r εἶναι θεμελιῶδες μέγεθος.

**: Ἡ θεμελιώδης διηλεκτρική σταθερά τοῦ κενοῦ εἰς τό ΗΣΣΜ (cgs-e.s.u) εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἀδιάστατον μέγεθος καί χάριν ἁπλότητος ἴσον πρός 1.

***: Εἰς τήν στήλην "Σχέσεις μονάδων" ἀντί τοῦ συμβόλου = ἐτέθη τό σύμβολον ⇒ ἀφοῦ τά ἀντίστοιχα μεγέθη δέν ἔχουν εἰς τά δύο συστήματα τίς ἴδιες διαστάσεις.

ΠΙΝΑΞ 2. ΤΥΠΟΙ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ

Αἰτιολογία τύπου	Τύπος ἀνεξάρτητος συστήματος	Τύποι ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ συστήματος: ΗΣΣΜ	Τύποι ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ συστήματος: MKSAr	Παρατηρήσεις
Νόμος Coulomb		$F = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$	σφαιρική συμμετρία
*Ἔντασις ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου εἰς ἕν σημεῖον Α αὐτοῦ	$E_A = \frac{F}{q}$			
*Ἔντασις ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν r ἀπό κεντρικόν φορτίον Q		$E = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$	σφαιρική συμμετρία
Ἠλεκτρική ροή δι' ἐπιπέδου ἐπιφανείας εἰς ὁμογενές πεδίον		$\Phi = ES\sigma\upsilon\nu\varphi$	$\Phi = \varepsilon_0 ES\sigma\upsilon\nu\varphi$	
Δυναμικόν εἰς σημεῖον Α τοῦ πεδίου	$U_A = \frac{W_{A,\infty}}{q}$			
*Ἔργον κατά τήν μετακίνησιν φορτίου	$W = q(U_1 - U_2)$			
Δυναμικόν εἰς ἀπόστασιν r ἀπό κεντρικόν φορτίον Q		$U = \frac{1}{\varepsilon} \frac{Q}{r}$	$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$	σφαιρική συμμετρία
Ἔντασις ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου	$E = \frac{V}{l}$			
Χωρητικότης ἀγωγοῦ	$C = \frac{Q}{U}$			
Χωρητικότης σφαίρας		$C = \varepsilon R$	$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$	σφαιρική συμμετρία
Χωρητικότης πυκνωτοῦ	$C = \frac{Q}{V}$			
Χωρητικότης ἐπιπέδου πυκνωτοῦ		$C = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{S}{l}$	$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{l}$	
Χωρητικότης σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ		$C = \varepsilon \frac{R r}{R - r}$	$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R r}{R - r}$	σφαιρική συμμετρία
Ἐνέργεια πυκνωτοῦ	$W = \frac{1}{2} QV$			
Παράλληλος σύνδεσις πυκνωτῶν	$U_0 = U_1 = U_2 =$ $Q_0 = Q_1 + Q_2 + ..$ $C_0 = C_1 + C_2 + ..$			
Σύνδεσις πυκνωτῶν ἐν σειρᾷ	$Q_0 = Q_1 = Q_2 =$ $U_0 = U_1 + U_2 + ..$ $\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ..$			

* Ἐάν εἰς τούς τύπους τοῦ MKSAr μέ τόν παράγοντα 4π θέσωμεν ὅπου ε_0 τό $\frac{1}{4\pi}$ προκύπτουν ἀμέσως οἱ ἀντίστοιχοι τύποι τοῦ ΗΣΣΜ.

** Ἐκ τῶν τύπων τοῦ ΗΣΣΜ πού περιέχουν τήν διηλεκτρικήν σταθεράν ε προκύπτουν οἱ ἀντίστοιχοι τοῦ MKSAr διά πολλαπλασιασμοῦ

1.2. βασικὰ πεδιακὰ θέματα

☆ 'Εντός κοίλης σφαίρας R = 10cm ἐχούσης ὀπήν ἄνωθεν πίπτουν σταγόνες ἠλεκτρισμέναι εἰς δυναμικόν 600 Volts. 'Η ἀκτίς ἑκάστης σταγόνος εἶναι r = 2 mm . Νά εὑρεθῇ τό δυναμικόν τῆς σφαίρας ὅταν αὕτη πληρωθῇ.

Γεωπ. Σχ . Θεσ/νίκης

"Εστω η ὁ ἀριθμός τῶν σταγόνων, ὁ ἀπαιτούμενος διά τήν πλήρωσιν τῆς σφαίρας

$$\eta = \frac{\Theta}{\vartheta} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3} \qquad (1)$$

ὅπου Θ καί ϑ, οἱ ὄγκοι τῆς σφαίρας καί τῆς σταγόνος ἀντιστοίχως. Τό ὁλικόν φορτίον τῆς σφαίρας θά εἶναι τότε:

$$Q = \eta . q \qquad (2)$$

ὅπου q τό φορτίον τῆς σταγόνος μέ

$$q = C_{\sigma\tau.} \cdot U_{\sigma\tau.} = r \cdot U_{\sigma\tau.} \qquad (3)$$

ἀλλά
$$U_{\sigma\varphi.} = \frac{Q}{R} \qquad (4)$$

ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται:

$$U_{\sigma\varphi.} = \frac{R^2}{r^2} \cdot U_{\sigma\tau.} = 1500KV = 1,5MV$$

☆ Δύο σφαιρικοί ἀγωγοί ἔχουν ὁ μέν Α , r_1 = 10 cm καί U_1 = 500 V ὁ δέ Β, r_2 = 15 cm καί U_2 = 1500 V . Συνδέονται διά σύρματος καί ζητοῦνται:

α) Ἡ κοινή τιμή τοῦ δυναμικοῦ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀγωγῶν.

β) Ἡ συνολική ἐνέργεια τῶν ἀγωγῶν πρό καί μετά τήν σύνδεσιν διά τοῦ σύρματος.

γ) Πῶς ἐξηγεῖται ἡ μεταβολή ἐνεργείας.

Ε.Μ.Π. 51

α) Ἔστω U_K ἡ κοινή τιμή τοῦ δυναμικοῦ

$$U_K = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2} \qquad (1)$$

ἀλλά $C_1 = r_1$ καί $C_2 = r_2$ (2)

κατά τήν ἀρχή διατηρήσεως τοῦ φορτίου

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2 = r_1 U_1 + r_2 U_2 \qquad (3)$$

ἐκ τῶν (1), (2), (3)

$$U_K = \frac{r_1 U_1 + r_2 U_2}{r_1 + r_2} = 1100 \text{ V}$$

β) $W_{o\lambda} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2}\left[r_1 U_1^2 + r_2 U_2^2 \right] = 201\text{erg}$

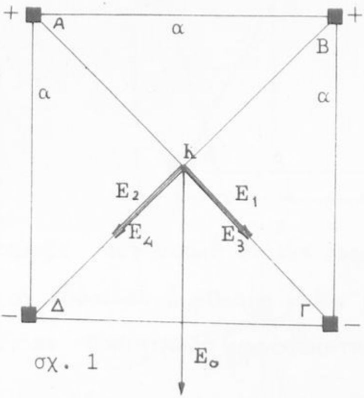
$$W'_{o\lambda} = W_1' + W_2' = \frac{1}{2}C_1 U_k^2 + \frac{1}{2}C_2 U_k^2 = \frac{1}{2}U_k^2 \cdot (C_1 + C_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(r_1 U_1 + r_2 U_2)^2}{r_1 + r_2} = 168 \text{ erg}$$

γ) Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας $\Delta W = W_{o\lambda} - W'_{o\lambda} = 33$ erg εἶναι ἡ παραχθεῖσα θερμότης.

☆ Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α = 4 cm. Εἰς τάς κορυφάς αὐτοῦ Α, Β, Γ, Δ ὑπάρχουν φορτία +100,+100,-100 καί -100 ΗΣΜ-φορ.

Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τό κέντρον τοῦ τετραγώνου.



σχ. 1

Μαθηματική 58.

Τό πεδίον εἰς τό Κ ὀφείλεται εἰς τά τέσσαρα φορτία. Ἡ ὁλική ἔντασις E_O εἶναι τό διανυσματικόν ἄθροισμα τῶν E_1, E_2, E_3 καί E_4 ἀλλά $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{2Q}{\alpha^2}$

Συνεπῶς:

$$E_O = \frac{4\sqrt{2}Q}{\alpha^2} = 25\sqrt{2} \text{ ΗΣΜ - ἐντ. πεδ. (σχ. 1)}$$

☆ Εἰς τάς κορυφάς Α καί Β ἰσοπλεύρου τριγώνου εὑρίσκονται τά φορτία $q_1 = 10^{-8}$ Cb καί $q_2 = -10^{-8}$ Cb.

Ἡ πλευρά τοῦ τριγώνου εἶναι 6 cm.

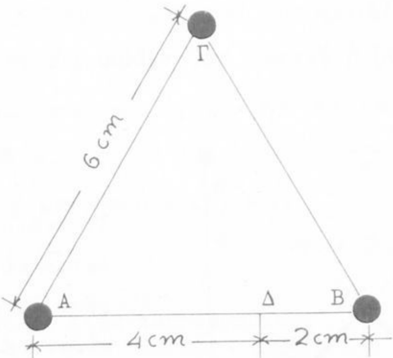
α) Ποῖον τό δυναμικόν εἰς τό Γ.

β) Ποῖον τό καταναλισκόμενον ἔργον ἵνα φορτίον $q_3 = 10^{-9}$Cb μεταφερθῇ ἀπό τό Γ εἰς τό Δ (σχ. 2). Εἶναι (ΑΔ) = 4cm.

α) $U_\Gamma = \frac{q_1}{(\mathrm{A\Gamma})} - \frac{q_2}{(\mathrm{\Gamma B})} = 0$

β) $U_\Delta = \frac{q_1}{(\mathrm{A\Delta})} - \frac{q_2}{(\mathrm{\Delta B})} = -7{,}5 \cdot \text{ΗΣΜ-Δ} = -2{,}25 \cdot 10^3$ V.

$$W_{\Gamma\Delta} = q_3 \cdot (U_\Gamma - U_\Delta) = 2,25\cdot10^{-6} \text{ Joules}$$



σχ. 2

Ἐκκρεμές μήκους l φέρει εἰς τό ἄκρον του σφαίραν μάζης m μέ ἠλεκτρικόν φορτίον q . Νά εὑρεθῇ ἡ περίοδός του, ὅταν αἰωρῆται ἐντός ὁμογενοῦς κατακορύφου ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐντάσεως E διευθυνομένου :

α) Ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω καί

β) Ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω (σχ. 3)

α) Ἐπί τοῦ φορτισμένου σφαιριδίου ἀσκεῖται ἡ $F = E\cdot q$
Ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς εἶναι:

$$F_\varepsilon = (B-F)\ \eta\mu\varphi = \frac{B-E\cdot q}{l}\cdot x = D\cdot x$$

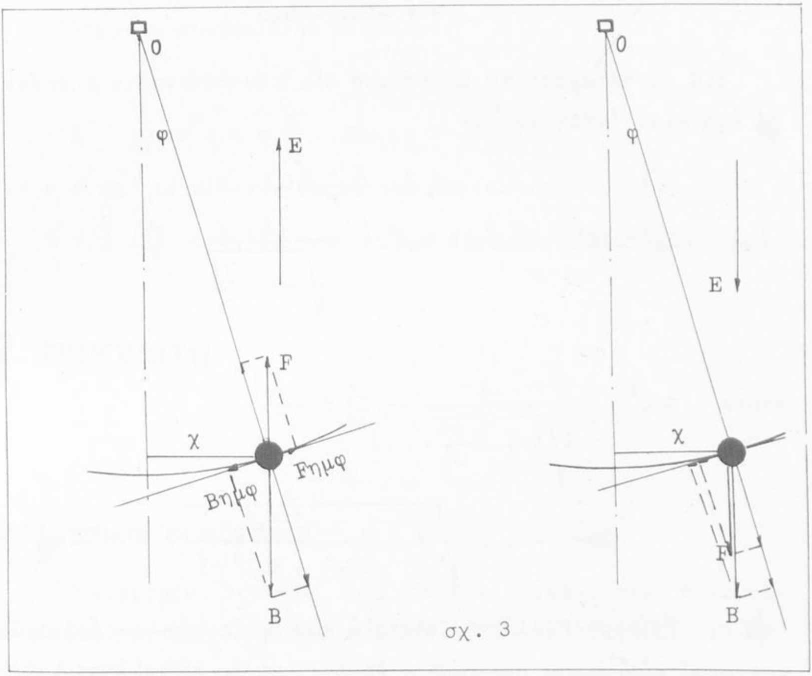
καί διά $\varphi \leq 4^\circ$ τό σφαιρίδιον ἐκτελεῖ γραμ. ἁρμ. ταλάντωσιν μέ περίοδον T:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{ml}{mg-E\cdot q}}$$

β) Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς εἶναι:

$$F'_\varepsilon = (B+F)\ \eta\mu\varphi = \frac{B+F}{l}\cdot x = D'x$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D'}} = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{mg+E\cdot q}}$$



σχ. 3

☆ Ποίαν ταχύτητα πρέπει νά ἔχη πρωτόνιον ὥστε εἰς κεντρικήν κροῦσιν μέ ἄτομον οὐρανίου (Z = 92) νά δύναται νά πλησιάση εἰς ἀπόστασιν $r = 4\cdot 10^{-10}$ cm ἀπό τοῦ πυρῆνος.

Στοιχειῶδες ἠλ. φορτίον e, μᾶζα ἠρεμίας πρωτονίου m_0, ταχύτης φωτός C.

Τό δυναμικόν τοῦ πεδίου περί τόν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου τοῦ οὐρανίου εἰς τήν ἀπόστασιν r εἶναι:

$$U_1 = \frac{Z\cdot e}{r} \text{ (εἰς ΗΣΣΜ)}$$

Ἐνῷ εἰς πολύ μεγάλην ἀπόστασιν εἶναι $U_\infty = 0$.

Τό πεδίον κατά τήν μετακίνησιν αὐτήν δαπανᾶ ἔργον:

$$W = e(U_1 - U_\infty)$$

Διά νά πλησιάση τό πρωτόνιον εἰς τήν ἀπόστασιν r πρέπει νά ἔχη κιν. ἐνέργειαν.

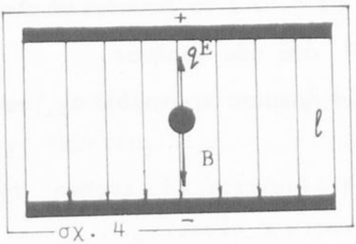
$$E_k \geq \frac{Z \cdot e^2}{r}$$

ἀλλά $$E_k = mC^2 - m_oC^2 = m_oC^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - 1 \right)$$

ὁπότε $$m_oC^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}} - 1 \right) \geq \frac{Z \cdot e^2}{r}$$

$$v \geq C \cdot \sqrt{1 - \frac{m_o^2 C^4 r^2}{(Ze^2 + m_oC^2 r)^2}}$$

Πείραμα Millikan. Μεταξύ τῶν ὁριζοντίων ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ εἰσάγονται σταγονίδια ἐλαίου, τά ὁποῖα λόγῳ βάρους πίπτουν βραδέως. "Φωτίζομεν" δι'ἀκτίνων Röntgen καί ἰονίζομεν τόν ἀέρα. Τά ἰόντα, προσκολλώμενα ἐπί τῶν σταγονιδίων, τά φορτίζουν. Ἐφαρμόζοντες συνεχῆ τάσιν V εἰς τούς ὁπλισμούς τοῦ πυκνωτοῦ ἀναπτύσσομεν πεδίον τό



σχ. 4

ὁποῖον θά ἐξασκήση δύναμιν F ὥστε ἕν σταγονίδιον νά αἰωρηθῆ (σχ. 4). Ἄν ἐκ μετρήσεων εἶναι γνωστή ἡ ἀκτίς τοῦ σταγονιδίου καί ἡ ἀπόστασις l τῶν ὁπλισμῶν, νά εὑρεθῆ τό φορτίον q τοῦ σταγονιδίου *

Ὅταν τό σταγονίδιον αἰωρῆται:

$$B = F^* \quad \text{ἤ} \quad \theta \cdot \varepsilon = q \cdot E$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \varepsilon = q\frac{V}{l} \quad \blacktriangleright \quad q = \frac{4\pi r^3 \varepsilon l}{3 \cdot V} \quad {**}$$

μέ $\varepsilon = dg$ τό εἰδικόν βάρος τοῦ ἐλαίου καί

$\theta = \frac{4}{3}\pi r^3$ ὁ ὄγκος τοῦ σταγονιδίου, θεωρουμένου σφαιρικοῦ.

2. πυκνωταὶ

2.1. τυπικαὶ συνδέσεις

Ὀνομάζομεν "**τυπικάς**" τάς συνδέσεις ἀφορτίστων πυκνωτῶν εἰς τάς ὁποίας ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης προσδιορίζεται ἀπ' εὐθείας διά τῶν σχέσεων:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \qquad (1)$$

$$C_0 = C_1 + C_2 + \ldots \qquad (2)$$

Τήν (1) ἐφαρμόζομεν εἰς σύστημα πυκνωτῶν συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ καί τήν (2) εἰς σύστημα πυκνωτῶν μέ παράλληλον σύνδεσιν.

---

* Ἡ ἄνωσις θεωρεῖται ἀμελητέα

** Αἱ διάφοροι μετρήσεις ἔδωσαν διά τό q διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι εὑρέθησαν ὅλαι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς. Ἡ τιμή αὐτή e εἶναι τό φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου.

2.2. μέθοδος ἰσοδυνάμων συνδέσεων

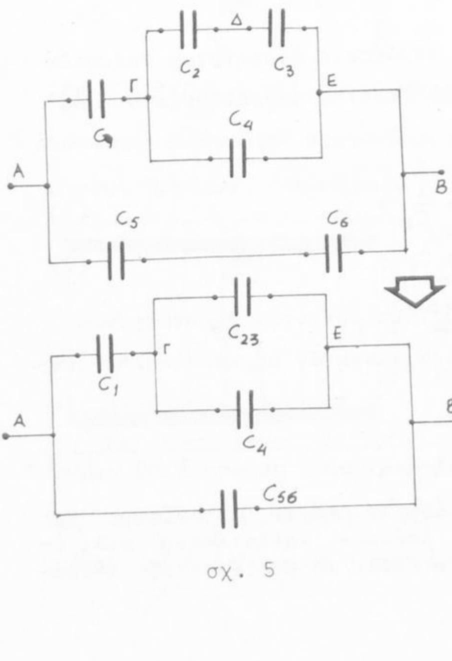
Κατ'αὐτήν τό δοθέν σύστημα μετασχηματίζεται διαδοχικῶς εἰς ἄλλα ἁπλούστερα ἰσοδύναμα μέσῳ τῶν (1) καί (2). Συνιστᾶται διά κάθε μετασχηματισμόν ἐκτέλεσις νέου σχήματος.

☆ Νά ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης μεταξύ Α καί Β καθώς καί τό φορτίον ἑκάστου πυκνωτοῦ εἰς τήν δοθεῖσαν συνδεσμολογίαν, (σχ. 5), ἄν ἡ μεταξύ Α καί Β τάσις γίνῃ V_o.

Ἡ δοθεῖσα συνδεσμολογία μετασχηματίζεται διαδοχικῶς εἰς τάς (Α), (Β), (Γ) καί (Δ).

Ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ προκύπτει ὅτι:

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \tag{1}$$



σχ. 5

$$C_{56} = \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6} \tag{2}$$

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = $$

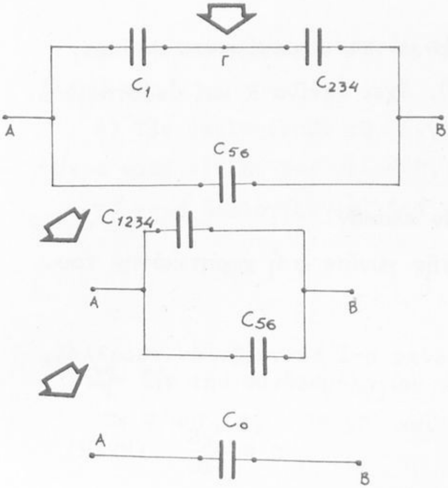
$$= \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_4 \tag{3}$$

$$C_{1234} = \frac{C_{234} \cdot C_1}{C_1 + C_{234}}$$

ἤ $C_{1234} =$

$$= \frac{\left(\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_4\right) \cdot C_1}{C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} + C_4} \tag{4}$$

$$C_o = C_{1234} + C_{56}$$



$$\text{ή } C_0 = \frac{\left(\frac{C_2 . C_3}{C_2 + C_3} + C_4\right) C_1}{C_1 + \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} + C_4} + \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6} \quad (5)$$

Αἱ τάσεις καί τά φορτία ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ τέλους πρός τήν ἀρχήν.

$$Q = C_0 V_0 \quad (6)$$

$$Q_{56} = C_{56} \cdot V_0 \quad (7)$$

καί $Q_{1234} = C_{1234} \cdot V_0$ (8)

ἀλλά $Q_5 = Q_6 = Q_{56}$ (9)

καί $Q_{1234} = Q_1 = Q_{234}$ 10)

τότε: $V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$ (11)

καί $V_{234} = V_{23} = V_4 = V_0 - V_1$ (12)

Συνεπῶς: $Q_4 = (V_0 - V_1) C_4$ (13)

Εἶναι ὅμως καί

$$V_{23} = V_{234} = V_0 - V_1$$

ὁπότε $Q_{23} = Q_2 = Q_3 = V_{23} \cdot C_{23}$ (14)

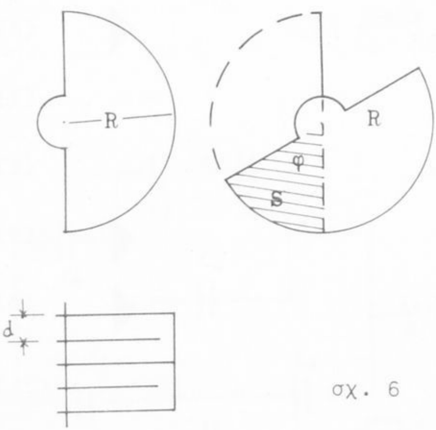
Ἡμικυκλικός πυκνωτής μέ περιστρεφόμενες πλάκες, (μεταβλητός πυκνωτής ἐπιλογῆς), ἔχει ἀκτῖνα R καί ἀπόστασιν ὁπλισμῶν d (σχ. 6).

Ἔστω ἀκόμη η ὁ ἀριθμός τῶν πλακῶν.

Νά ὑπολογισθῆ συναρτήσει τῆς γωνίας φ ἡ χωρητικότης του.

Τό σύστημα θεωρεῖται σύνδεσις η-1 πυκνωτῶν ἐν παραλλήλῳ μέ χωρητικότητα ἑκάστου:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \quad \text{(ΗΣΣΜ)}$$



σχ. 6

καί ἐπειδή ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ σχήματος:

$$S = \frac{R^2 \varphi}{2}$$

$$C = \frac{\varepsilon R^2 \varphi}{8\pi d}$$

ὁπότε $C_o = (\eta - 1)C =$

$$= \frac{\varepsilon R^2 \varphi}{8\pi d}\cdot(\eta - 1)$$

διά $\varphi = \pi$, ἡ C_o γίνεται μεγίστη.

2.3. ἀναλυτική μέθοδος

Ἡ μέθοδος συνίσταται εἰς:

α) Τόν διαχωρισμόν τῶν πυκνωτῶν εἰς ὁμάδας κατά τρόπον συνδέσεως.

β) Τήν διάταξιν τῶν στοιχείων C,Q,V ἑκάστης ὁμάδος κατά σειράς καί στήλας.

Ἐκ τῆς διατάξεως αὐτῆς προκύπτουν οἱ ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

γ) Τήν συμπλήρωσιν τῶν πινάκων μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος.

δ) Τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀγνώστων καί συμπλήρωσιν τῶν πινάκων κατά στήλην καί σειράν*, ἐκ τοῦ τέλους πρός τήν ἀρχήν.

Τά κενά ὑπολογίζονται διά τῶν σχέσεων:

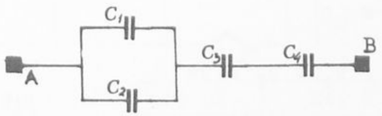
$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

$$C_0 = C_1 + C_2 + \ldots$$

$$Q = C \cdot V$$

Εἰς τήν συνδεσμολογίαν τοῦ σχ. 7 δίδονται $C_1 = 6\ \mu F$, $C_2 = 4\mu F$, $C_3 = 10\ \mu F$ καί $C_4 = 20\ \mu F$.

Τό φορτίον τοῦ C_3 **εἶναι** 1200 μ Cb. **Νά ὑπολογισθοῦν αἱ τάσεις καί τά φορτία τῶν πυκνωτῶν.**



σχ.7

Διακρίνομεν τάς ὁμάδας:

C_1, C_2 μέ παράλληλον σύνδεσιν καί ἰσοδύναμον χωρητικότητα C^*

C_3, C_4 καί C^* ἐν σειρᾷ μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C_0.

Εἰς τούς ἐν τῇ ἑπομένῃ σελίδι πίνακας, δι'ὑπογραμμῆς τονίζομεν τά δεδομένα.

---

* Δεικνύομεν διά βέλους τό κοινόν μέγεθος. Τοῦτο εἶναι τό φορτίον εἰς τάς ἐν σειρᾷ συνδέσεις καί ἡ τάσις εἰς τάς ἐν παραλλήλῳ. Εἰς τάς ἐν σειρᾷ συνδέσεις πυκνωτῶν ἡ ὁλική τάσις εἶναι ἄθροισμα τῶν μερικῶν τάσεων δηλ. εἰς τήν στήλην τῶν τάσεων ἡ τάσις τοῦ ἰσοδυνάμου (ὁλική) εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ἄνωθεν αὐτῆς (μερικῶν). Ἀνάλογον ἰσχύει διά τό φορτίον εἰς τήν ἐν παραλλήλῳ σύνδεσιν.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

A

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$C_1 = 6$	$V_1 = 120$	$Q_1 = 720$
$C_2 = 4$	$V_2 = 120$	$Q_2 = 480$
$C^* = 10$	$V^* = 120$	$Q^* = 1200$

B

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$C^* = 10$	$V^* = 120$	$Q^* = 1200$
$C_3 = 10$	$V_3 = 120$	$Q_3 = 1200$
$C_4 = 20$	$V_4 = 60$	$Q_4 = 1200$
$C_0 = 4$	$V_0 = 300$	$Q_0 = 1200$

Διά τήν κατανόησιν τῆς μεθόδου ὑποδεικνύομεν τόν τρόπον συμπληρώσεως.

α. $C^* = C_1 + C_2 \blacktriangleright C^*$

β. $\dfrac{1}{C_0} = \dfrac{1}{C^*} + \dfrac{1}{C_3} + \dfrac{1}{C_4} \blacktriangleright C_0$

γ. $Q_0 = Q^* = Q_3 = Q_4$ $\qquad V_1 = V_2 = V^*$

δ. Ἐκ τῶν : $C^*, Q^* \blacktriangleright V^*$ $\qquad$ $C_2, V_2 \blacktriangleright Q_2$

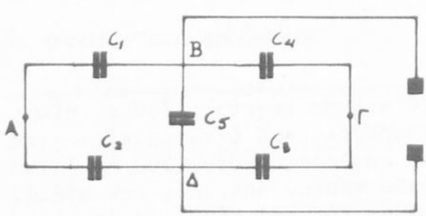
$C_3, Q_3 \blacktriangleright V_3$ $\qquad$ $C_1, V_1 \blacktriangleright Q_1$

$C_4, Q_4 \blacktriangleright V_4$

$C_0, Q_0 \blacktriangleright V_0$

✫ Δίδεται ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχ. 8 μέ $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 20$ μF, $C_5 = 10$ μF καί $V_{A\Gamma} = 400$ V.

Νά ἐπιλυθῇ.



Σχ. 8

Διακρίνομεν τάς ὁμάδας:

C_1, C_2 ἐν σειρᾷ μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C^*

C_3, C_4 ἐν σειρᾷ μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C^{**}

C^*, C^{**}, C_5 μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C_o

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Α

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$\underline{C_1 = 20}$	$V_1 = x$	$Q_1 = 20x$
$\underline{C_2 = 20}$	$V_2 = x$	$Q_2 = 20x$
$C^* = 10$	$V^* = 2x$	$Q^* = 20x$

Β

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$C^* = 10$	$V^* = 2x$	$Q^* = 20\ x$
$\underline{C_5 = 10}$	$V_5 = 2x$	$Q_5 = 20\ x$
$C^{**} = 10$	$V^{**} = 2x$	$Q^{**} = 20\ x$
$C_o = 30$	$V_o = 2x$	$Q_o = 60\ x$

Γ

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$\underline{C_3 = 20}$	$V_3 = x$	$Q_3 = 20x$
$\underline{C_4 = 20}$	$V_4 = x$	$Q_4 = 20x$
$C^{**} = 10$	$V^{**} = 2x$	$Q^{**} = 20x$

Δι'ὑπογραμμῆς τονίζομεν τά δοθέντα:

Χρησιμοποιοῦμεν διά τήν συμπλήρωσιν τῶν ἀνωτέρω πινάκων βοηθητικόν ἄγνωστον. Ἔστω $V_2 = x$ Volts

Προσδιορίζονται ἀμέσως τά: V_1, Q_2, Q_1, C^*, V^*, Q^* καί ἐν συνεχείᾳ τά:

$$V_5 = V^*,\ V^{**} = V^*,\ C^*,\ Q^{**} = Q_4 = Q_3,\ V_3,\ V_4$$

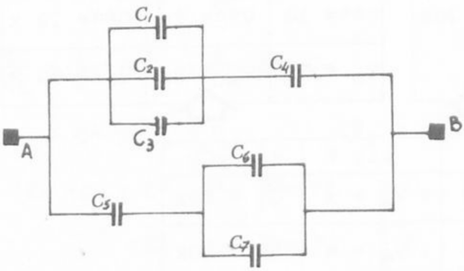
Ἐκ τῶν δεδομένων ἔχομεν $V_2 + V_3 = 400V$ ἤ $2x = 400V$ καί $x = 200$ V.

ὁπότε ἐκ τῶν συμπληρωθέντων πινάκων προκύπτει:

$$C_o = 30\ \mu F,\ Q_o = 12\cdot10^3\ \mu\ Cb,\ V_o = 400\ V$$

Παρατήρησις: Ἀναφερόμενα ἀθροίσματα, γινόμενα κλπ. εἰσάγουν βοηθητικούς ἀγνώστούς καί ἀλγεβρικάς προσθέτους σχέσεις.

Εἰς τό σχ. 9 οἱ πυκνωταί ἔχουν εἰς μ F χωρητικότητας: $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$, $C_4 = 3$, $C_5 = 3$, $C_6 = 4$, $C_7 = 2$.



σχ.9

Ποία ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης, τό φορτίον καί ἡ τάσις ἑκάστου πυκνωτοῦ, ἄν ἡ ὁλική τάσις V_o μεταξύ τῶν Α καί Β εἶναι 100 V.

Διακρίνομεν τάς ὁμάδας:

C_1, C_2 καί C_3 μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C^*

C^*, C_4 μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C^{**}

C_6, C_7 μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα C'

C', C_5 " " " C'

C^{**}, C'' " " " C_o

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Α

εἰς μF	εἰς V	εἰς μ Cb
$C_1 = 1$	$V_1 = 33,3$	$Q_1 = 33,3$
$C_2 = 2$	$V_2 = 33,3$	$Q_2 = 66,7$
$C_3 = 3$	$V_3 = 33,3$	$Q_3 = 100$
$C^* = 6$	$V^* = 33,3$	$Q^* = 200$

Β

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$C^* = 6$	$V^* = 33,3$	$Q^* = 200$
$C_4 = 3$	$V_4 = 66,7$	$Q_4 = 200$
$C^{**} = 2$	$V^{**} = 100$	$Q^{**} = 200$

Γ

Εἰς μF	εἰς V	εἰς μ Cb
$C_6 = 4$	$V_6 = 33,3$	$Q_6 = 133,3$
$C_7 = 2$	$V_7 = 33,3$	$Q_7 = 66,7$
$C' = 6$	$V' = 33,3$	$Q' = 200$

Δ

εἰςμF	εἰς V	εἰς μ Cb
$C' = 6$	$V' = 33,3$	$Q' = 200$
$C_5 = 3$	$V_5 = 66,7$	$Q_5 = 200$
$C'' = 2$	$V'' = 100$	$Q'' = 200$

Ε

εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$C^{**} = 2$	$V^{**} = 100$	$Q^{**} = 200$
$C'' = 2$	$V'' = 100$	$Q'' = 200$
$C_0 = 4$	$V_0 = 100$	$Q_0 = 400$

2.4. μὴ τυπικαὶ συνδέσεις

᾿Ονομάζομεν "**μή τυπικάς**" τάς συνδέσεις εἰς τάς ὁποίας δέν δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν ἀμέσως οἱ τύποι:

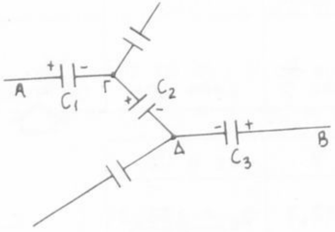
$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots \text{ καί } C_0 = C_1 + C_2 + \ldots$$

Διά τήν ἐπίλυσιν συστήματος πυκνωτῶν "μή τυπικῆς συνδέσεως" πρέπει νά γνωρίζωμεν ὅτι:

● Εἰς κάθε ἀνοικτόν σύστημα φορτισμένων πυκνωτῶν ἰσχύει:

$$V_0 = \Sigma V_j$$

ἤ $V_0 = V_1 + V_2 + \ldots$ (ἀλγεβρικόν ἄθροισμα)



σχ.10

π.χ. εἰς τήν σύνδεσιν τοῦ σχ. 10 ἰσχύει:

$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3$ (ἀλγεβρικόν ἄθροισμα)

ἤ $U_A - U_B = (U_A - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_\Delta) + (U_\Delta - U_B)$

δηλ. ἄν στό παράδειγμα τοῦ σχ. 10 εἶναι $V_1 = 20V$, $V_2 = 30V$ & $V_3 = 10V$ θά εἶναι:

$$V_{AB} = 20V + 30V - 10V = 40V$$

● Εἰς κάθε κλειστόν σύστημα ἰσχύει:

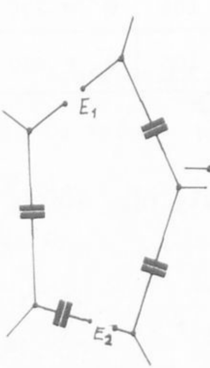
$\Sigma V_j = 0$ (ἀλγεβρικόν ἄθροισμα)

ἤ $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$

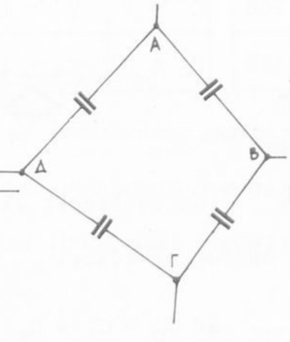
ἐφ'ὅσον ὁ βρόχος δέν περιέχει πηγάς (σχ. 11) καί

$\Sigma E_i = \Sigma V_j$ (ἀλγεβρικόν ἄθροισμα),

ἐφ'ὅσον ὁ βρόχος περιέχει πηγάς (σχ. 12).

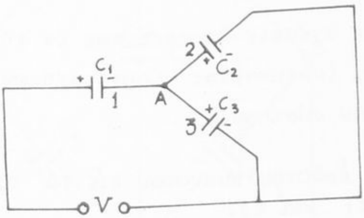


σχ. 12



σχ. 11

● "Αν Α τό σημεῖον συνδέσεως πυκνωτῶν σχ. 13, C_1, C_2 καί C_3 τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:



σχ . 13

1. Τό φορτίον τῶν ὁπλισμῶν 1,2 καί 3 πρό τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τάσεως V ἦτο μηδέν:

δηλαδή: $\Sigma Q = 0$

2. Τό φορτίον ἐξ ἐπιδράσεως τῶν ὁπλισμῶν 1,2 καί 3 μετά τήν ἐφαρμογήν τῆς τάσεως εἶναι μηδέν:

$$\delta\eta\lambda.\ \Sigma Q' = 0$$

Τά ἀνωτέρω εἶναι, προφανῶς, συνέπεια τῆς "ἀρχῆς τῆς ἀφθαρσίας τοῦ φορτίου".

2.5. μέθοδος τοῦ σταθεροῦ φορτίου

Εἰς τήν μέθοδον αὐτήν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

α. Ἐφαρμόζομεν εἰς κάθε κόμβο συνδέσεως πυκνωτῶν τήν ἀρχήν ἀφθαρσίας τοῦ φορτίου:

$$\Sigma Q = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

(Δι'ἀφόρτιστον σύστημα: $\Sigma Q = 0$).

β. Ἐφαρμόζομεν εἰς κάθε βρόχον τάς:

$$\Sigma V_j = 0 \quad \text{ἤ} \quad \Sigma E_i = \Sigma V_j$$

ἀναλόγως τοῦ ἐάν εἰς τόν βρόχον, ὑπάρχουν ἤ ὄχι πηγαί.

Ἐκ τῶν α καί β λαμβάνομεν η ἐξισώσεις ὥστε νά εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι, ἔνθα η ὁ ἀριθμός τῶν κλάδων τοῦ συστήματος.

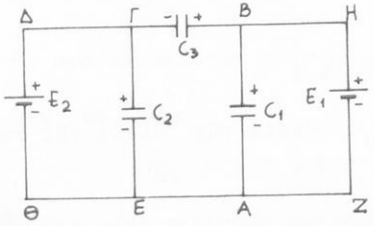
γ. Γράφομεν περιοριστικάς σχέσεις ἀπορρεούσας ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως (λόγους, ἀθροίσματα, ἰσοδυναμίας χωρητικοτήτων κλπ)

δ. Ἐπιλύομεν τό προκῦπτον σύστημα.

Νά εὑρεθῇ τό φορτίον ἑκάστου πυκνωτοῦ εἰς τό σχῆμα 14. Δίδονται τά C_1, C_2, C_3, E_1 καί E_2.

Ἐκ τοῦ βρόχου ΑΒΓΕΑ προκύπτει:

$$(U_E - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_B) + (U_B - U_A) = 0$$



σχ. 14

ἤ $- E_2 + (U_\Gamma - U_B) + E_1 = 0$

καί $U_B - U_\Gamma = E_1 - E_2$

ἀλλά $Q_1 = C_1 \cdot E_1$

$Q_2 = C_2 \cdot E_2$

$Q_3 = C_3 \cdot (E_1 - E_2)$

Δίδεται τό σύστημα τοῦ σχήματος 15.

Νά εὑρεθῇ σχέσις μεταξύ τῶν C_1, C_2, C_3 καί C_4 ὥστε τό φορτίον τοῦ C_5 νά εἶναι μηδέν διά οἱανδήποτε τιμήν τῆς Ε.

Ἐκ τοῦ κόμβου Γ:

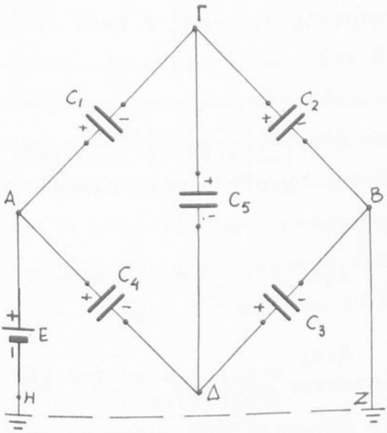
$$Q_1 = Q_2 + Q_5 \qquad (1)$$

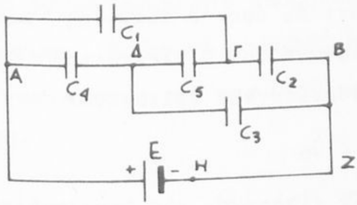
Ἐκ τοῦ κόμβου Δ:

$$Q_5 + Q_4 = Q_3 \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ βρόχου ΑΓΔΑ:

$$V_1 + V_5 = V_4 \qquad (3)$$





σχ. 15

'Εκ τοῦ βρόχου ΒΓΔΒ:

$$V_3 + V_5 = V_2 \quad (4)$$

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΔΒΖΗΑ :

$$E = V_4 + V_3 \quad (5)$$

'Εκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος καί δεδομένου ὅτι: $Q = CV$, προκύπτει:

$$Q_5 = \frac{C_5(C_1C_3 - C_2C_4)E}{k}, \quad (6)$$

$$k = (C_1+C_2)(C_3+C_4) + C_5(C_1+C_2+C_3+C_4)$$

καί διά νά εἶναι: $Q_5 = 0$

$$C_1C_3 = C_2C_4$$

ἤ $$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_4}{C_3}$$

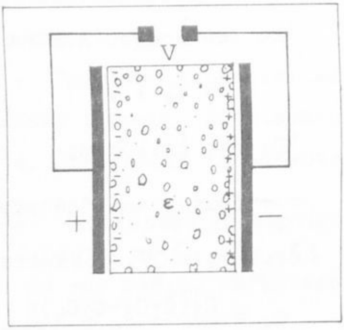
Διαπιστώσατε τήν ὁμοιότητα τῶν ἀνωτέρω σχημάτων.

2.6. εἰδικὰ θέματα πυκνωτῶν

Εἰσαγωγὴ διηλεκτρικοῦ ἐντὸς πυκνωτοῦ

☆ 'Εντός ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εὑρισκομένου ὑπό σταθεράν τάσιν εἰσάγεται φύλλον διηλεκτρικοῦ διηλ. σταθερᾶς ε. Ποῖον τό φορτίον καί ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ;

'Από τόν ὁρισμόν τῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε ἑνός διηλεκτρικοῦ, ἔχομεν:



$$\varepsilon = \frac{\text{χωρητικότης πυκνωτοῦ με διηλεκτρικόν}}{\text{χωρητικότης πυκνωτοῦ χωρίς διηλεκτρικόν}}$$

$$\text{δηλ. } \varepsilon = \frac{C}{C_o} = \frac{\frac{Q}{V}}{\frac{Q_o}{V}} = \frac{Q}{Q_o}$$

ἤτοι:

$$\varepsilon = \frac{\text{φορτίον πυκνωτοῦ μέ διηλεκτρικόν}}{\text{φορτίον πυκνωτοῦ χωρίς διηλεκτρικόν}}$$

'Εκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἐφ'ὅσον ὁ πυκνωτής παραμένει ὑπό σταθεράν τάσιν, ἡ εἰσαγωγή τοῦ διηλεκτρικοῦ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τήν αὔξησιν τοῦ φορτίου τῶν ὁπλισμῶν:

$$Q = \varepsilon . Q_o$$

● Τοῦτο ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Τήν εἰσαγωγήν τοῦ διηλεκτρικοῦ ἀκολουθεῖ ἡ πόλωσις τῶν μορίων του μέ ἀποτέλεσμα νά ἐμφανισθῇ ἔναντι τοῦ θετικοῦ ὁπλισμοῦ ἀρνητικόν καί ἔναντι τοῦ ἀρνητικοῦ ὁπλισμοῦ,θετικόν φορτίον πολώσεως.

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον "ἀναιρεῖται ἡ δρᾶσις" τῶν φορτίων τῶν ὁπλισμῶν δηλ. ἐλαττοῦται τό "ἐνεργόν φορτίον" αὐτῶν καί διά τήν ἀποκατάστασιν τῆς σταθερᾶς τάσεως, ἡ πηγή προσδίδει νέα φορτία $(\varepsilon-1)Q_o$, ἴσα πρός τά ἀναπτυσσόμενα ἐκ τῆς πολώσεως ἐπί ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ διηλεκτρικοῦ

"Ωστε: $C = \varepsilon C_o$ καί $Q = \varepsilon Q_o$

Θεωρεῖται σκόπιμον εἰς τό σημεῖον αὐτό νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τόνμεταξύ τῶν ὁπλισμῶν χῶρον.

'Ο ὑπολογισμός τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου γίνεται μέ τήν σχέσιν : $E = \frac{V}{l}$

Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι ἡ εἰσαγωγή τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑπό σταθεράν τάσιν δέν μεταβάλλει τό μέγεθος τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου. Πράγματι καίτοι ηὐξήθησαν τά φορτία τῶν ὁπλισμῶν & ἕνεκα τούτου καί ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου πού ὀφείλεται εἰς τά φορτία τῶν ὁπλισμῶν, συγχρόνως ἀνεπτύχθη ἀντίθετον πεδίον λόγω τῶν φορτίων πολώσεως τοῦ διηλεκτρικοῦ οὕτως ὥστε τό ὁλικόν πεδίον νά παραμένη τό ἴδιον.

'Εντός ἐπιπέδου πυκνωτοῦ φορτισμένου μέ φορτίον Q εἰσάγεται διηλεκτρικόν σταθερᾶς ε. 'Ο πυκνωτής κατά τήν εἰσαγωγήν τοῦ διηλεκτρικοῦ ἦτο ἀποσυνδεδεμένος ἐκ τῆς πηγῆς ἥτις τόν ἐφόρτισεν. Ποῖον τό φορτίον, ἡ τάσις, ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου καί ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ μετά τήν εἰσαγωγήν τοῦ διηλεκτρικοῦ;

Ἔστω C_o, Q_o, V_o καί E_o ἡ χωρητικότης, τό φορτίον, ἡ τάσις καί ἡ ἔντασις ἀντιστοίχως πρό τῆς εἰσαγωγῆς.

'Η χωρητικότης, ἀνεξαρτήτως τῆς ὑπάρξεως ἤ μή φορτίων ἐπί τῶν ὁπλισμῶν θά εἶναι:

$$C = \varepsilon C_o$$

Τό φορτίον εἰς τούς ὁπλισμούς, ἐφ'ὅσον δέν ὑπάρχει παροχή ἤ ἀπώλεια, εἶναι τό αὐτό ἴσον πρός Q_o. Κατά συνέπειαν ἡ νέα τάσις V θά εἶναι:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q_o}{\varepsilon C_o} = \frac{V_o}{\varepsilon}$$

δηλ. ἡ νέα τάσις εἶναι ε φοράς μικροτέρα. Τοῦτο ἐξηγεῖται θεωρητικῶς ὡς ἑξῆς:

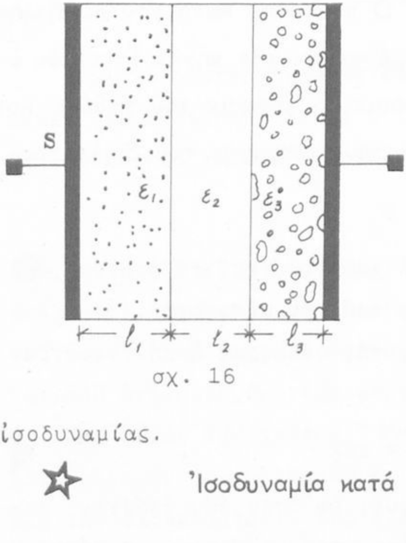
Μέ τήν εἰσαγωγήν τοῦ διηλεκτρικοῦ ἐμφανίζονται εἰς αὐτό φορτία πολώσεως τά ὁποῖα "δεσμεύουν" φορτία ἐκ τῶν ὁπλισμῶν μέ ἀποτέλεσμα τά ἐλεύθερα, ἐνεργά, φορτία αὐτῶν νά εἶναι τώρα $\frac{Q_o}{\varepsilon}$.

Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου μετά τήν εἰσαγωγήν εἶναι:

$$E = \frac{V}{l} = \frac{V_o}{\varepsilon l} = \frac{E_o}{\varepsilon}$$

Πυκνωταὶ μὲ πολλὰ διηλεκτρικὰ

☆ Ἰσοδυναμία κατά φορτίον. Νά εὑρεθῇ ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης εἰς τήν διάταξιν τοῦ σχ. 16.



σχ. 16

Ἡ εἰκονιζομένη διάταξις θεωρεῖται σύνδεσις πυκνωτῶν ἐν σειρᾷ.

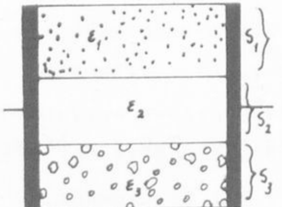
$$\frac{1}{C^*} = \frac{4\pi}{S}\cdot\left(\frac{l_1}{\varepsilon_1} + \frac{l_2}{\varepsilon_2} + \frac{l_3}{\varepsilon_3}\right) \text{(ΗΣΣΜ)}$$

Τό ἄθροισμα:

$$\frac{l_1}{\varepsilon_1} + \frac{l_2}{\varepsilon_2} + \frac{l_3}{\varepsilon_3}$$

εἶναι τό ἀνηγμένον μῆκος τῆς ἰσοδυναμίας.

☆ Ἰσοδυναμία κατά τάσιν. Νά εὑρεθῇ ἡ ἰσοδύναμος χωρητικότης εἰς τήν διάταξιν τοῦ σχ. 17.

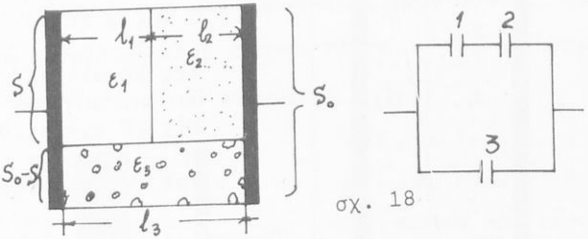


σχ. 17

Ἡ εἰκονιζομένη διάταξις θεωρεῖται σύνδεσις πυκνωτῶν ἐν παραλλήλῳ μέ ἰσοδύναμον χωρητικότητα.

$$C_* = \frac{1}{4\pi l}(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3) \text{ (ΗΣΣΜ)}$$

Τό ἄθροισμα $\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2 + \varepsilon_3 S_3$ ἀποτελεῖ τήν ἀνηγμένην ἐνεργόν ἐπιφάνειαν τῆς ἰσοδυναμίας.



σχ. 18

Μικταί ἰσοδυναμίαι. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἰσοδύναμοι χωρητικότητες εἰς τάς διατάξεις τῶν σχημάτων 18, 19, 20.

Ἡ εἰκονιζομένη διάταξις σχ. 18 θεωρεῖται μικτή σύνδεσις μέ:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_2} \qquad C = \frac{\varepsilon_3}{4\pi} \cdot \frac{(S_0 - S)}{l_3}$$

καί συνεπῶς:
$$C^* = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

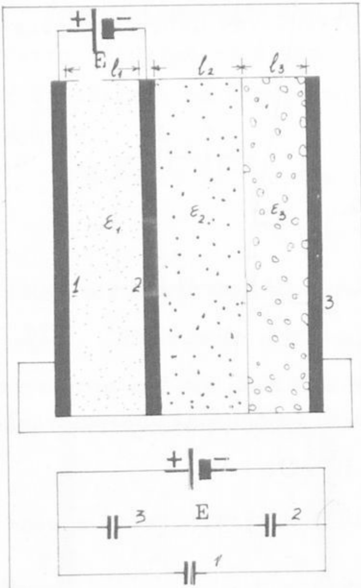
Εἰς τό σύστημα τοῦ σχήματος 19, οἱ ὁπλισμοί 1, 2 καί 3 εἶναι παράλληλες μεταλλικές πλάκες ἐμβαδοῦ S καί οἱ ὁπλισμοί 1 καί 3 εἶναι βραχυκυκλωμένοι.

Τό σύστημα ἔχει τό εἰκονιζόμενον ἰσοδύναμον.

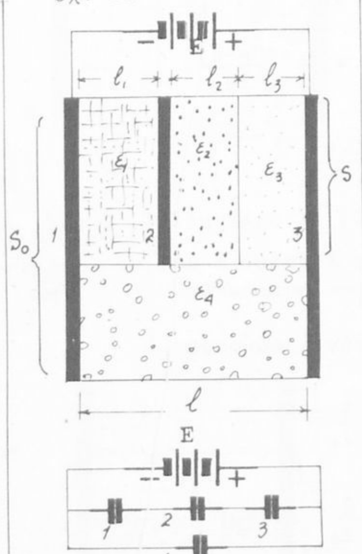
$$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_2} \qquad \text{(ΗΣΣΜ)}$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_3}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_3}$$



σχ. 19



σχ. 20

Εἰς τό σύστημα τοῦ σχήματος 20 οἱ ὁπλισμοί 1, 2 καί 3 εἶναι παράλληλες μεταλλικές πλάκες. Εἰς τό σχῆμα 20 φαίνεται τό ἰσοδύναμόν του.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_2}$$

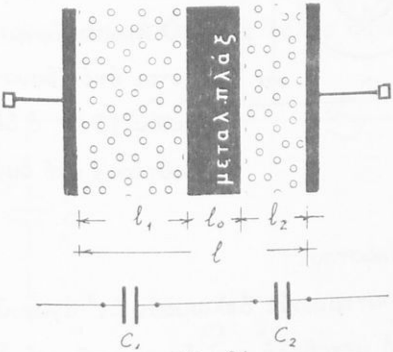
(ΗΣΣΜ)

$$C_3 = \frac{\varepsilon_3}{4\pi} \cdot \frac{S}{l_3}$$

$$C_4 = \frac{\varepsilon_4}{4\pi} \cdot \frac{S_0 - S}{l}$$

εἰσαγωγὴ μεταλλικῆς πλακὸς μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν

☆ Ἐπίπεδος πυκνωτής ἔχει χωρητικότητα $C = 720$ pF. Μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του καί παραλλήλως πρός αὐτούς, τοποθετεῖται λεπτή μεταλλική πλάξ ἔχουσα πάχος $l_0 = \frac{l}{3}$. Πόση γίνεται τότε ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ; σχ. 21.



σχ. 21

Ἐπί τῶν παρειῶν τῆς μεταλλικῆς πλακός ἐπάγονται φορτία καί οὕτω τό σύστημα ἰσοδυναμεῖ πρός σύνδεσιν δύο πυκνωτῶν μέ μήκη l_1 καί l_2 ἐν σειρᾷ.

$$C_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{S}{l_1} \qquad \text{(ΗΣΣΜ)}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{S}{l_2}$$

Ἀλλά τότε $\quad C^* = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{S}{l-l_0}$

εἰς τόν ἀρχικόν πυκνωτήν $\quad C = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{S}{l}$

$$\frac{C^*}{C} = \frac{l}{l - l_0} \Longrightarrow C^* = C\,\frac{l}{l - l_0} = C\,\frac{l}{l - \frac{l}{3}} = 1080\text{pF}$$

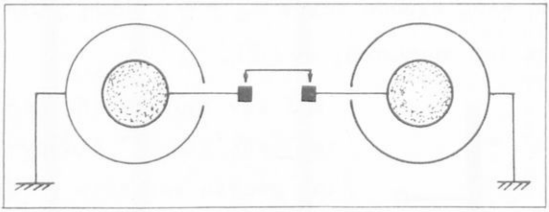
Εἶναι προφανές ὅτι ἡ χωρητικότης C^* δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν θέσιν τῆς μεταλλικῆς πλακός.

παράλληλος σύνδεσις φορτισμένων πυκνωτῶν

● Ἰσχύει:

"Μετά τήν παράλληλον σύνδεσιν φορτισμένων πυκνωτῶν, τό ὁλικόν φορτίον παραμένει ἴσον πρός τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν φορτίων αὐτῶν πρό τῆς συνδέσεως" (ἀρχή ἀφθαρσίας φορτίου). Ἤτοι ἄν οἱ πυκνωταί συνδεθοῦν διά τῶν ὁμωνύμων ὁπλισμῶν: $Q_0 = Q_1 + Q_2$ καί διά τῶν ἑτερωνύμων: $Q_0 = Q_1 - Q_2$.

☆ Ἔχομεν δύο σφαιρικούς συμπυκνωτάς τῶν ὁποίων οἱ ἐξωτερικοί ὁπλισμοί εἶναι συνδεδεμένοι μέ τό ἔδαφος σχ.22.



σχ. 22

Ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνός εἶναι 0,3 μF τοῦ δέ ἑτέρου 0,8 μF. Ὁ πρῶτος φορτίζεται ὑπό δυναμικόν 15V, ὁ δέ δεύτερος ὑπό δυναμικόν 26V.

i. Νά εὑρεθῇ τό φορτίον ἑκάστου.

ii. Ἐάν συνδέσωμεν τούς ἐσωτερικούς ὁπλισμούς δι' ἀγωγοῦ ἄνευ χωρητικότητος νά εὑρεθῇ ἡ μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ καί ἡ μεταβολή τοῦ φορτίου.

Φαρμακευτική 55

i. $Q_1 = C_1V_1 = 4{,}5\cdot10^{-6}$ Cb $= 4{,}5\cdot$ μCb

$Q_2 = C_2V_2 = 20{,}8\cdot10^{-6}$ Cb $= 20{,}8$ μCb

ii. Μετά τήν σύνδεσιν τῶν ἐσωτερικῶν ὁπλισμῶν τό σύστημα ἀποτελεῖ παράλληλον συνδεσμολογίαν πυκνωτῶν.

ΠΡΟ ΤΗΣ ΣΥΝΔΕΣΕΩΣ*			ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΣΥΝΔΕΣΙΝ		
εἰς μF	εἰς V	εἰς μ Cb	εἰς μF	εἰς V	εἰς μCb
$\underline{C_1 = 0{,}3}$	$\underline{V_1 = 15}$	$Q_1 = 4{,}5$	$C_1 = 0{,}3$	$V_1' = 23$	$Q_1' = 6{,}9$
$\underline{C_2 = 0{,}8}$	$\underline{V_2 = 26}$	$Q_2 = 20{,}8$	$C_2 = 0.8$	$V_2' = 23$	$Q_2' = 18{,}4$
		$Q_0 = 25{,}3$	$C_0 = 1{,}1$	$V_0 = 23$	$Q_0 = 25{,}3$

* Δι' ὑπογραμμῆς τονίζονται τά δεδομένα μεγέθη.

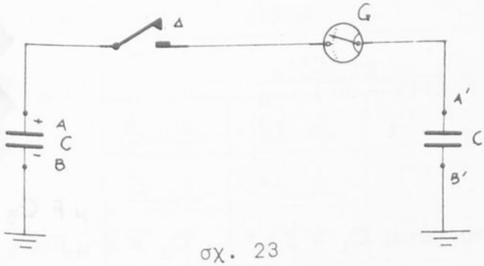
Ἄρα $\Delta V_1 = 8\ V$

$\Delta V_2 = -\ 3V$

$\Delta Q_1 = 2{,}4\ \mu\ Cb$

$\Delta Q_2 = -2{,}4\ \mu\ Cb$

✩ Φορτίζεται πυκνωτής, ἀγνώστου χωρητικότητος C καί τοῦ ὁποίου ὁ ὁπλισμός Β εἶναι προσγειωμένος, διά συσσωρευτοῦ τάσεως V τοῦ ὁποίου ὁ θετικός πόλος συνδέεται μέ τόν ὁπλισμόν Α.



σχ. 23

Ὁμοίως φορτίζεται ὁ πυκνωτής C΄ διά συσσωρευτοῦ τάσεως V΄. Ἀκολούθως οἱ ὁπλισμοί Α καί Α΄ συνδέονται διά ἀγωγοῦ περιέχοντος διακόπτην Δ καί βαλλιστικόν γαλβανόμετρον G. Ὅταν κλείσωμεν τόν διακόπτην τό βαλλιστικόν γαλβανόμετρον δεικνύει διέλευσιν qCb.

Νά εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης C. σχ. 23.

Ἀρ. Ἐφαρμογή: $C' = 0{,}5\ \mu F$, $q = 40\ \mu\ Cb$, $V = 110\ V$,

$V' = 10\ V$.

Ἐφ' ὅσον ὁ διακόπτης εἶναι κλειστός οἱ πυκνωταί εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ (βλέπε: "σύνδεσις φορτισμένων πυκνωτῶν").

ΠΡΟ ΤΗΣ ΣΥΝΔΕΣΕΩΣ

C	$Q = CV$	V
C'	$Q' = C'V'$	V'
	$Q_o = CV + C'V'$	

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΣΥΝΔΕΣΙΝ

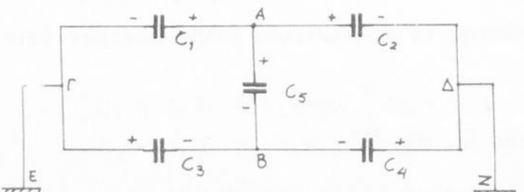
C	$Q_1 = C\dfrac{CV+C'V'}{C+C'}$	$V_1 = \dfrac{CV+C'V'}{C+C'}$
C'	$Q_2 = C'\dfrac{CV+C'V'}{C+C'}$	$V_2 = \dfrac{CV+C'V'}{C+C'}$
$C_o = C + C'$	$Q_o = CV + C'V'$	$V_o = \dfrac{CV+C'V'}{C+C'}$

'Αλλά $q = Q - Q_1 = CV - C\dfrac{CV + C'V'}{C + C'}$

$$C = \frac{q \cdot C'}{C'(V - V') - q}$$

'Αρ. 'Εφαρμ. $C = 2\ \mu F$

☆ 4 ἀφόρτιστοι πυκνωταί $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ $C_3 = 2\ \mu F$, $C_4 = 1\ \mu F$ συνδέονται ὡς εἰς τό σχ. 24.



σχ. 24

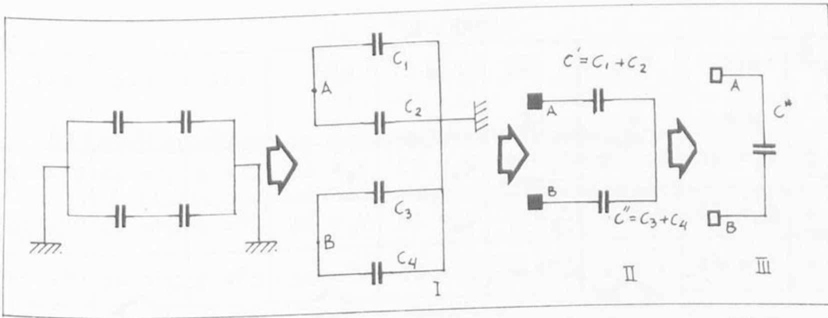
Συνδέομεν ἐν συνεχείᾳ εἰς τά Α καί Β τόν $C_5 = 3\ \mu F$ φορτισμένον μέ $Q_5 = 120\ \mu Cb$.

Νά εὑρεθοῦν:

. Τά φορτία

. Αἱ τάσεις μετά τήν σύνδεσιν.

Πρό τῆς συνδέσεως τοῦ C_5 ὑφίσταται ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχ. 25α μετασχηματιζομένη διαδοχικῶς εἰς τάς Ι, ΙΙ καί ΙΙΙ.



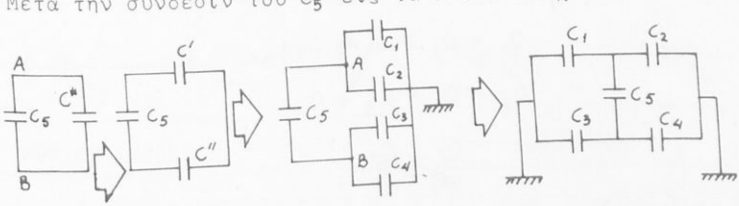
σχ. 25 α

ΠΙΝΑΞ Α *

εἰς μ F		
C_1 2	C_3 2	C' 6
C_2 4	C_4 1	C'' 3
C' 6	C'' 3	C* 2

* Δι'ὑπογραμμῆς τονίζομεν τά δεδομένα.

Μετά τήν σύνδεσιν τοῦ C_5 εἰς τά Α καί Β ἔχομεν:



σχ. 25 β

ΠΡΟ ΤΗΣ ΣΥΝΔΕΣΕΩΣ C* & C_5		
εἰς μF	εἰς μCb	εἰς V
C* = 2	$Q^*_{αρχ} = 0$	$V^*_{αρχ} = 0$
$C_5 = 3$	$Q_{5αρχ} = 120$	$V_{5αρχ} = 40$
	$Q^*_{αρχ} + Q_5 = 120$	

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΣΥΝΔΕΣΙΝ C* & C_5		
εἰς μF	εἰς μCb	εἰς V
C* = 2	Q* = 48	V* = 24
$C_5 = 3$	$Q_5 = 72$	$V_5 = 24$
$C_o = 5$	$Q_o = 120$	$V_o = 24$

ΠΙΝΑΞ Β

εἰς μF	εἰς μCb	εἰς V	εἰς μF	εἰς μCb	εἰς V	εἰς μF	εἰς μCb	εἰς V
$\underline{C_1 = 2}$	$Q_1 = 16$	$V_1 = 8$	$\underline{C_3 = 2}$	$Q_3 = 32$	$V_3 = 16$	$C' = 6$	$Q' = 48$	$V' = 8$
$\underline{C_2 = 4}$	$Q_2 = 32$	$V_2 = 8$	$\underline{C_4 = 1}$	$Q_4 = 16$	$V_4 = 16$	$C'' = 3$	$Q'' = 48$	$V'' = 16$
$C' = 6$	$Q' = 48$	$V' = 8$	$C'' = 3$	$Q'' = 48$	$V'' = 16$	$C^* = 2$	$Q^* = 48$	$V^* = 24$

Τό ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται ἁπλούστερον διά τῆς μεθόδου τοῦ σταθεροῦ φορτίου".

Ἐκ τοῦ κόμβου Α: $Q_1 + Q_2 + Q_5 = Q_{5\,\text{ἀρχ}}$ (1)

Ἐπειδή τά Γ καί Δ εἶναι συνδεδεμένα διά τοῦ "ἀγωγοῦ ΓΗ"

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 \tag{2}$$

Ἐκ τοῦ βρόχου ΕΓΒΔΖΕ: $V_3 - V_4 = 0$ (3)

Ἐκ τοῦ βρόχου ΕΓΑΔΖΕ: $V_1 - V_2 = 0$ (4)

Ἐκ τοῦ βρόχου ΓΑΒΓ : $V_1 + V_3 - V_5 = 0$ (5)

Ἐπειδή $Q = CV$ τό ἀνωτέρω σύστημα γίνεται:

$$Q_1 + Q_2 + Q_5 = Q_{5\,\text{ἀρχ}}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

$$\frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_4}{C_4}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_5}{C_5}$$

ἀπό τήν ἐπίλυσιν τοῦ ὁποίου προκύπτει:

$$Q_1 = 16 \ \mu Cb$$

$$Q_2 = 32 \ \mu Cb$$

$$Q_3 = 32 \ \mu Cb$$

$Q_4 = 16\ \mu\ Cb$

$Q_5 = 72\ \mu\ Cb$

ἀλλαγὴ συνδέσεως φορτισμένων πυκνωτῶν

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ παρόντος προβλήματος ἐπιτελεῖται εἰς δύο φάσεις:

1η φάσις : ἀποσύνδεσις

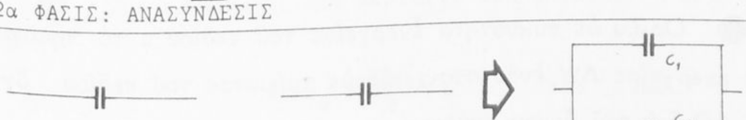
2α φάσις : ἀνασύνδεσις

✰ Δύο πυκνωταί $C_1 = 2\ \mu F$ καί $C_2 = 8\ \mu F$ συνδέονται ἐν σειρᾷ καί φορτίζεται τό σύστημα ὑπό τάσιν $V^* = 100\ V$. Ἀκολούθως ἀποσυνδέονται καί ἀνασυνδέονται ἐν παραλλήλῳ διά τῶν ὁμωνύμων ὁπλισμῶν. Νά εὑρεθῇ τό φορτίον ἑκάστου μετά τήν ἀνασύνδεσιν.

1η ΦΑΣΙΣ: ΑΠΟΣΥΝΔΕΣΙΣ

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΔΕΣΙΣ			ΑΠΟΣΥΝΔΕΣΙΣ		
$C_1 = 2\ \mu F$	$Q_1 = 160\ \mu Cb$	$V_1 = 80\ V$	$C_1 = 2\mu F$	$Q_1 = 160\mu Cb$	$V_1 = 80V$
$C_2 = 8\ \mu F$	$Q_2 = 160\ \mu Cb$	$V_2 = 20\ V$	$C_2 = 8\mu F$	$Q_2 = 160\mu Cb$	$V_2 = 20V$
$C^* = 1{,}6\mu F$	$Q^* = 160\ \mu Cb$	$V^* = 100V$	$Q_1 + Q_2 = 320\ \mu Cb$		

2α ΦΑΣΙΣ: ΑΝΑΣΥΝΔΕΣΙΣ



ΠΡΟ ΑΝΑΣΥΝΔΕΣΕΩΣ			ΤΕΛΙΚΗ ΣΥΝΔΕΣΙΣ		
$C_1 = 2\mu F$	$Q_1 = 160\mu Cb$	$V_1 = 80V$	$C_1 = 2\mu F$	$Q_1' = 64\mu Cb.$	$V_1' = 32\ V$
$C_2 = 8\mu F$	$Q_2 = 160\mu Cb$	$V_2 = 20V$	$C_2 = 8\mu F$	$Q_2' = 256\mu Cb$	$V_2' = 32\ V$
				$Q^* = Q_1' + Q_2' =$ $= Q_1 + Q_2 =$ $= 320\ \mu Cb$	$V^* = 32\ V$

$$V^* = V_1' = V_2' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_1' + Q_2'}{C_1 + C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{320\ \mu Cb}{10\mu F} = 32\ V$$

ἐνέργεια πυκνωτοῦ καὶ δυνάμεις ἐπὶ τῶν ὁπλισμῶν

● Ἔστω ἐπίπεδος πυκνωτής φορτισμένος μέ φορτίον Q. Θεωρῶ εἰς τά ἑπόμενα τόν πυκνωτήν ἀποσυνδεδεμένον ἐκ τῆς πηγῆς ἥτις τόν ἐφόρτισεν.

Ἐκ τοῦ $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ μέ $C = \varepsilon C_0$ καί $C_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{l}$

$$W = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{\varepsilon\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{S}{l}} \qquad W = \frac{2\,Q^2}{\varepsilon S}\pi.l \qquad W = K.l \qquad K = \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon\ S}$$

Ἐκ τοῦ σχ. 26 $\Longrightarrow$ $\quad \varepsilon\varphi\omega = K$

Ἐπειδή $Q = CV$ $\qquad V = E.l$

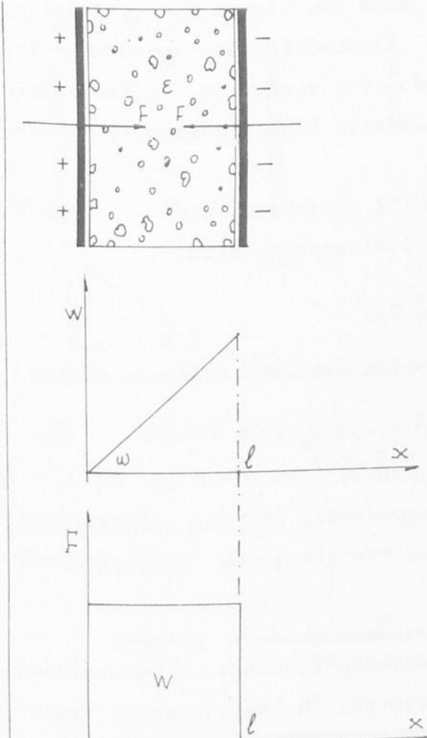
$$K = \frac{2\pi\cancel{\varepsilon^2}}{16\pi^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{S^2}}{\cancel{l^2}}\cdot\frac{E^2\cdot\cancel{l^2}}{\cancel{\varepsilon S}} = \frac{\varepsilon S E^2}{8\pi} \quad \text{ὁπότε καί } W = \frac{\varepsilon S E^2}{8\pi}.l$$

● Ὁρίζω ὡς πυκνότητα ἐνεργείας τοῦ πεδίου u τό πηλῖκον τῆς ἐνεργείας ΔW ἑνός στοιχειώδους τμήματος τοῦ πεδίου ὄγκου ΔΩ διά τοῦ ὄγκου τούτου.

$$\text{ἤτοι:} \qquad u = \frac{\Delta W}{\Delta \Omega}$$

'Επειδή τό πεδίον εἶναι ὁμογενές: $u = \frac{W}{\Omega} = \frac{W}{Sl} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$

Τό μέγεθος u θά τό χρησιμοποιήσωμεν τώρα διά τόν ὑπολογισμόν τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν.



σχ. 26

'Ο ὑπολογισμός θά γίνη διά τῆς μεθόδου τῶν ΔΥΝΑΤΩΝ ΕΡΓΩΝ. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν στοιχειώδη μετατόπισιν Δx τοῦ ἑνός ὁπλισμοῦ ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς ζητουμένης δυνάμεως F. 'Εφ'ὅσον ὁ πεδιακός χῶρος ἐλαττοῦται κατά S.Δx ἐλαττοῦται ἀντιστοίχως καί ἡ ἠλεκτροστατική ἐνέργεια τοῦ πεδίου κατά ποσόν ἴσον πρός τό παραγόμενον ἔργον, ἤτοι:

$$F.\Delta x = S\Delta x.u$$

$$\text{ἢ } F = Su$$

$$\text{ἢ } \quad F = \frac{\varepsilon E^2 S}{8\pi} = \text{σταθερά}$$

'Εάν ὁ πυκνωτής δέν περιεῖχε διηλεκτρικόν ἡ ἐνέργεια θά ἦτο:

$$W_0 = \frac{2\pi Q^2}{S}.l \qquad \text{στό} \quad \text{ΗΣΜ}$$

'Ενῷ μετά τήν εἰσαγωγήν του ἡ ἐνέργεια γίνεται

$$W = \frac{2\pi Q^2 l}{\varepsilon S} \qquad \text{στό ΗΣΣΜ}$$

δηλ. $\qquad W_o = \varepsilon W$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι κατά τήν εἰσαγωγήν διηλεκτρικοῦ φύλλου ἐντός φορτισμένου ἀποσυνδεδεμένου πυκνωτοῦ ἡ ἐνέργειά του ἐλαττοῦται εἰς τό $\frac{1}{\varepsilon}$ τῆς τιμῆς της. 'Η ἀπωλεσθεῖσα ἐνέργεια μετετράπη εἰς θερμότητα ἤ ἠλεκτρομαγνητικήν ἀκτινοβολίαν.

● Ἔστω τώρα ὅτι ὁ πυκνωτής εὑρίσκεται ὑπό σταθεράν τάσιν. 'Η ἐνέργειά του χωρίς διηλεκτρικόν εἶναι:

$$W_o = \frac{1}{2} C_o V^2$$

ἐνῷ ἡ ἐνέργεια τοῦ ἰδίου πυκνωτοῦ ἀφοῦ παρεμβάλωμεν φύλλον διηλεκτρικοῦ θά εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \varepsilon C_o V^2$$

δηλ. $W = \varepsilon W_o$. 'Εκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ χωρητικότης πυκνωτοῦ ὑπό σταθεράν τάσιν μέ τήν εἰσαγωγήν διηλεκτρικοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπί ε.

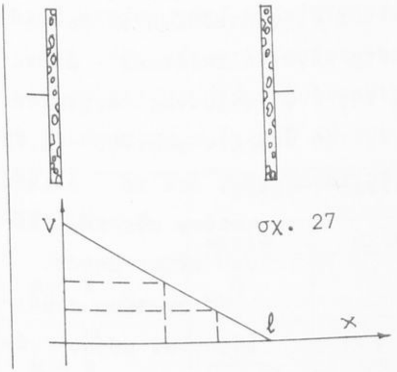
● Ἔστω πηγή ΗΕΔ Ε τροφοδοτοῦσα πυκνωτήν χωρητικότητος C. Ἔστω Q τό φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ. 'Η ὑπό τῆς πηγῆς παρεχομένη ἐνέργεια εἶναι:

$$W_\pi = Q \cdot E$$

'Εκ τῆς ἐνεργείας αὐτῆς τό ἥμισυ $W_\eta = \frac{1}{2} Q \cdot E$ ἀποταμιεύεται ἐντός τοῦ πεδιακοῦ χώρου ὡς ἠλεκτροστατική, ἐνῷ ἡ διαφορά: $W_\pi - W_\eta = \frac{1}{2} Q \cdot E$ μετατρέπεται εἰς θερμότητα καί ἠλεκτρομαγνητικήνἀκτινοβολίαν.

πτῶσις δυναμικοῦ ἐντός πυκνωτοῦ

☆ Φορτίον Q εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως l τῶν ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εὑρισκομένου ὑπό τάσιν V. Ποῖον τό παραγόμενον ἔργον κατά τήν μετακίνησιν τοῦ Q κατά $\frac{l}{4}$ πρός τόν ἕνα ὁπλισμόν σχ. 27.

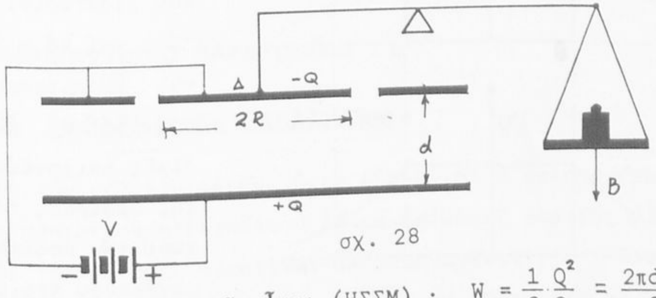


σχ. 27

Εἰς τό διάγραμμα φαίνεται ἡ μεταβολή τοῦ δυναμικοῦ ἀπό τόν ἕνα ὁπλισμό πρός τόν ἄλλον.

Ἀλλά $W = Q \cdot \Delta V = \frac{V}{4} \cdot Q$ ◀

☆ Εἰς τό εἰκονιζόμενον ἠλεκτρόμετρον σχ. 28 δίδεται R = 10 cm καί d = 4 mm. Ἡ δύναμις μέ τήν ὁποίαν ἕλκονται οἱ ὁπλισμοί εἶναι B = 20 gr* . Νά εὑρεθοῦν τά V, Q.



σχ. 28

Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι (ΗΣΣΜ) : $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{2\pi d}{\varepsilon S} Q^2$

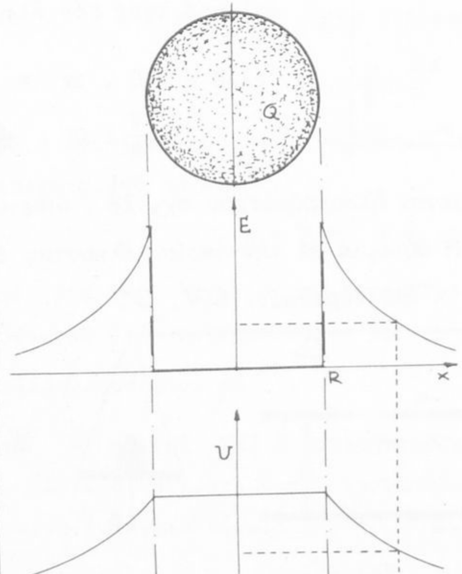
$$W = F \cdot d = \frac{2\pi d}{\varepsilon S} \cdot Q^2 \qquad Q = \sqrt{\frac{\varepsilon S F}{2\pi}}$$ ◀

μέ $S = \pi R^2$ καί $V = \frac{Q}{C} = \sqrt{\frac{8\pi F}{\varepsilon S}}\, d$ ◀

3. σφαιρικὰ ἠλεκτρόδια

3.1. φορτισμένη σφαῖρα

Λέγομεν: "Ἔστω σφαῖρα ἀκτῖνος R, φορτισμένη μέ θετικόν φορτίον Q". Καί νοοῦμεν ὅτι: αὕτη εἶναι ἠλεκτρικῶς ἀποκεκλεισμένη ἐκ τοῦ περιβάλλοντός της ἐνῷ συγχρόνως δεχόμεθα, μέσα είς τόν περιβάλλοντα χῶρον, τήν ὕπαρξιν φορτίου - Q. Τό φορτίον -Q δικαιολογεῖται ἐκ τῆς παραδοχῆς, ὅτι τό ὁλικόν φοτίον είς τήν φύσιν εἶναι μηδέν.



σχ. 29

Τά ἀνωτέρω συμβιβάζονται μόνον ἄν τό - Q εἶναι ἰσοκατανεμημένον είς ἄπειρον ἀπό τήν σφαῖραν ἀπόστασιν. Ἀλλά τότε καί τό + Q εἶναι ἰσοκατανεμημένον ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τό δέ περί τήν σφαίραν παραγόμενον πεδίον εἶναι ἀκτινικόν, συμμετρικόν καί τελείως ὅμοιον, ἀπό τήν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ καί πέραν, πρός τό παραγόμενον ὑπό σημειώδους φορτίου +Q εὑρισκομένου εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας. Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἔχει, λόγῳ τῆς συμμετρίας, συνιστῶσα μόνον κατά τήν ἀκτῖνα.

Τά διαγράμματα τοῦ σχ. 29 ἀποδίδουν τάς συναρτήσεις $E = f(x)$ καί $U = f(x)$, μέ x τήν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ πεδίου, ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας.

Εἰς τούς κάτωθι πίνακας ἀναγράφονται αἱ τιμαί τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου καί τοῦ δυναμικοῦ διά τάς διαφόρους τιμάς τῆς ἀποστάσεως x ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

ἀπόστασις x	Ἔντασις πεδίου		Δυναμικόν	
	MKSAr	ΗΣΣΜ	MKSAr	ΗΣΣΜ
$x < R$	0	0	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$	$\frac{Q}{R}$
$x = R$	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$	$\frac{Q}{R^2}$	$\frac{Q}{4\pi_0 R}$	$\frac{Q}{R}$
$x > R$	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$	$\frac{Q}{x^2}$	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$	$\frac{Q}{x}$

3.2. ὁμοκεντρικὰ ἠλεκτρόδια

3.2.1. μέθοδος τῆς ἐπαλληλίας

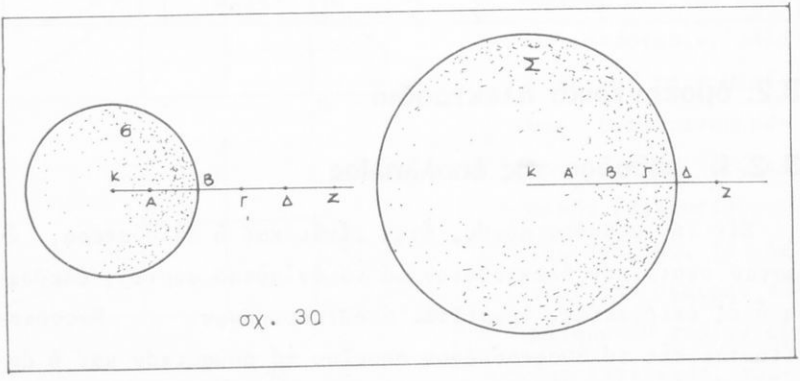
Εἰς τήν μέθοδον αὐτήν, ἥτις εἶναι καί ἡ ἁπλουστέρα, ἕκαστον σφαιρικόν ἠλεκτρόδιον μέ τά ἐπ'αὐτοῦ φορτία, ἐλεύθερα ἤ ἐξ ἐπιδράσεως, θεωρεῖται ἀπομεμονωμένον. Προσδιορίζονται εἰς τό ἀναφερόμενον σημεῖον τό δυναμικόν καί ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου πού ὀφείλονται εἰς τό ἠλεκτρόδιον αὐτό καί μόνον.

Ἡ ὁλική ἔντασις καί τό ὁλικόν δυναμικόν εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον εὑρίσκονται δι'ἀλγεβρικῆς ἀθροίσεως.

Συνιστᾶται ἡ σχεδίασις ἰδιαιτέρου σχήματος δι' ἑκάστην φορτισμένην σφαιρικήν ἐπιφάνειαν καί ἡ τοποθέτησις τοῦ ἀναφερομένου σημείου εἰς τό σχῆμα ὥστε νά φαίνεται ἀμέσως ἡ θέσις του ὡς πρός τήν φορτισμένην σφαιρικήν ἐπιφάνειαν.

☆ Δίδονται δύο ὁμοκεντρικά σφαιρικά ἠλεκτρόδια ἀμελητέου πάχους μέ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως R_1 = 10 καί R_2 = 20 cm. Τό ἐσωτερικόν φορτίζεται μέ φορτίον Q_1 = 20 ΗΣΜ-φ ἐνῷ τό ἐξωτερικόν μέ φορτίον Q_2 = - 40 ΗΣΜ-φ. Ποῖον τό δυναμικόν καί ἡ ἔντασις εἰς σημεῖα ἀπέχοντα: r = 5, 10, 15, 20 καί 25 cm ἀπό τό κέντρον τοῦ συστήματος:

Κατ'ἀρχάς σχεδιάζομεν μεμονωμένας τάς δύο φορτισμένας σφαιρικάς ἐπιφανείας. Τοποθετοῦμεν ἐν συνεχείᾳ τά ἀναφερόμενα σημεῖα ὡς πρός αὐτάς καί προσδιορίζομεν τήν ἔντασιν & τό δυναμικόν εἰς κάθε σημεῖον ἀπό ἑκάστην σφαῖραν. Προσθέτομεν τέλος ἀλγεβρικῶς.



σχ. 30

Τό σημεῖον Α: εἶναι ἐσωτερικόν καί διά τάς δύο σφαιρικάς ἐπιφανείας. Τό δυναμικόν εἰς τό Α λόγω τῆς σ θά εἶναι ὅσον καί έπί τῆς έπιφανείας της $U_A' = \frac{Q_1}{R_1} = 2$ ΗΣΜ.δ καί λόγῳ τῆς Σ όμοίως ἴσον πρός $U_A'' = \frac{Q_2}{R_2} = -\ 2$ ΗΣΜ-δ.

όλικῶς $U_A = 0$

Ἡ ἔντασις είς τό Α λόγω τῆς σ εἶναι $E_A' = 0$ έφ'ὅσον εἶναι έσωτερικόν καί λόγῳ τῆς Σ όμοίως $E_A'' = 0$

όλικῶς $E_A = 0$

<u>Τό σημεῖον Β</u>: εἶναι έπί τῆς σ ἄρα λόγῳ αὐτῆς:

$$U_B' = \frac{Q_1}{R_1} = 2 \text{ ΗΣΜ-δ}, \quad E_B' = \frac{Q_1}{R_1^2} = 0{,}2 \text{ ΗΣΜ- έν.πεδ.}$$

καί έσωτερικόν τῆς Σ όπότε θά ἔχη λόγῳ αὐτῆς τό δυναμικόν της καί ἔντασιν μηδέν ἤτοι

$$U_B'' = \frac{Q_2}{R_2} = -\ 2 \text{ ΗΣΜ - δ} \quad \text{καί } E_B'' = 0$$

όλικῶς: $U_B = 0$

$E_B = 0{,}2$ ΗΣΜ - έν. πεδ.

<u>Τό σημεῖον Γ</u>: εἶναι έξωτερικόν διά τήν σ:

$$U_\Gamma' = \frac{Q_1}{r} = 1{,}33 \text{ ΗΣΜ -δ}, \quad E_\Gamma' = \frac{Q_1}{r^2} = 0{,}09 \text{ ΗΣΜ-έν.πεδ.}$$

καί έσωτερικόν διά τήν Σ:

$$U_\Gamma'' = \frac{Q_2}{R_2} = -\ 2 \text{ ΗΣΜ-δ} \quad \text{καί } E_\Gamma'' = 0$$

όλικῶς $U_\Gamma = -0{,}66$ ΗΣΜ δ, $E_\Gamma = 0{,}09$ ΗΣΜ -Εν.πεδ.

<u>Τό σημεῖον Δ</u>: εἶναι έξωτερικόν διά τήν σ:

$$U_\Delta' = \frac{Q_1}{R_2} = 1 \text{ ΗΣΜ-δ}, \quad E_\Delta' = \frac{Q_1}{R_2^2} = 0{,}05 \text{ ΗΣΜ-Εν.πεδ}$$

καί ἐπί τῆς Σ :

$$U''_{\Delta} = \frac{Q_2}{R_2} = -\ 2\ \text{ΗΣΜ-δ}, \quad E''_{\Delta} = \frac{Q_2}{R_2^2} = -\ 0{,}1\ \text{ΗΣΜ -Εν.π.}$$

ὁλικῶς $\qquad U_{\Delta} = -\ 1\text{ΗΣΜ-δ}\ , \qquad E_{\Delta} = -0{,}05\ \text{ΗΣΜ-Εν.π.}$

<u>Τό σημεῖον Ζ</u>: εἶναι ἐξωτερικόν διά τήν σ:

$$U'_{z} = \frac{Q_1}{r} = 0{,}8\ \text{ΗΣΜ - δ}, \quad E'_{z} = \frac{Q_1}{r^2} = 0{,}032\ \text{ΗΣΜ- Εν.π.}$$

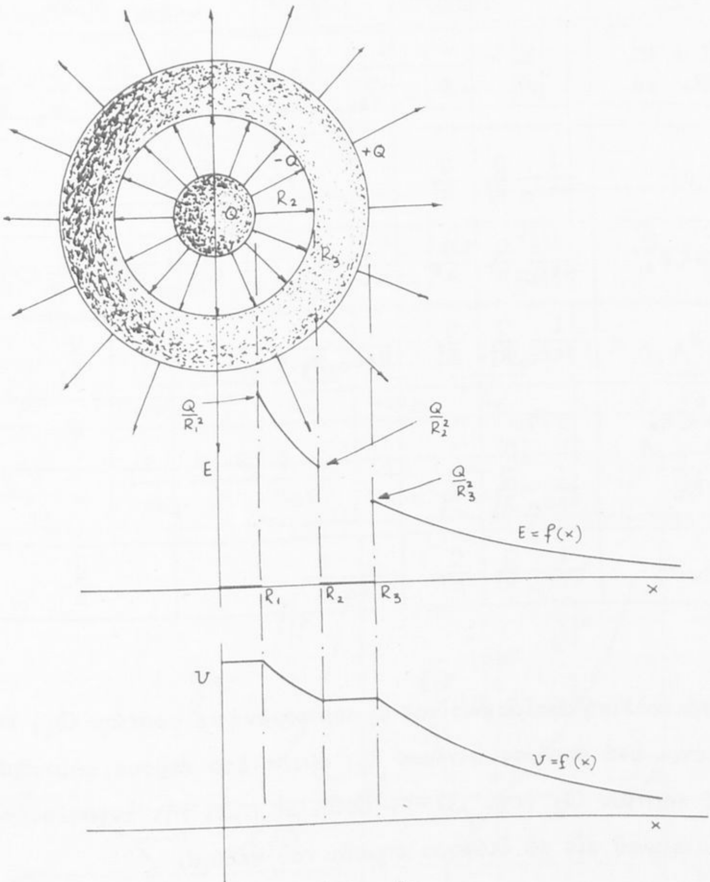
καί ἐξωτερικόν διά τήν Σ:

$$U''_{z} = \frac{Q_2}{r} = -\ 1{,}6\ \text{ΗΣΜ - δ}\ , \quad E''_{z} = -\ 0{,}064\ \text{ΗΣΜ- Εντ.π.}$$

ὁλικῶς $\qquad U_{z} = -\ 0{,}8\ \text{ΗΣΜ - δ} \qquad E_{z} = -0{,}032\ \text{ΗΣΜ Εν.π.}$

☆ Μεταλλική σφαῖρα ἀκτῖνος R_1 καί φορτίου Q περιβάλλεται ὑπό ὁμοκέντρου κοίλης σφαίρας ἐσωτερικῆς ἀκτῖνος R_2 καί ἐξωτερικῆς R_3. Ἡ ἐξωτερική σφαῖρα εἶναι ἀφόρτιστος (σχῆμα 31). Νά ὑπολογισθοῦν ἔντασις καί δυναμικόν εἰς τά διάφορα σημεῖα τοῦ σχηματιζομένου πεδίου.

Ἡ ἐσωτερική σφαῖρα θά ἠλεκτρίσῃ ἐξ ἐπιδράσεως τήν κοίλη. Οὕτω θά ἐμφανισθῇ ἐπί τῆς ἐσωτερικῆς της ἐπιφανείας φορτίον - Q καί ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς της φορτίον + Q. Τό πεδίον ἐντός τῆς ὕλης τῶν σφαιρῶν θά εἶναι μηδέν.



Σχῆμα 31

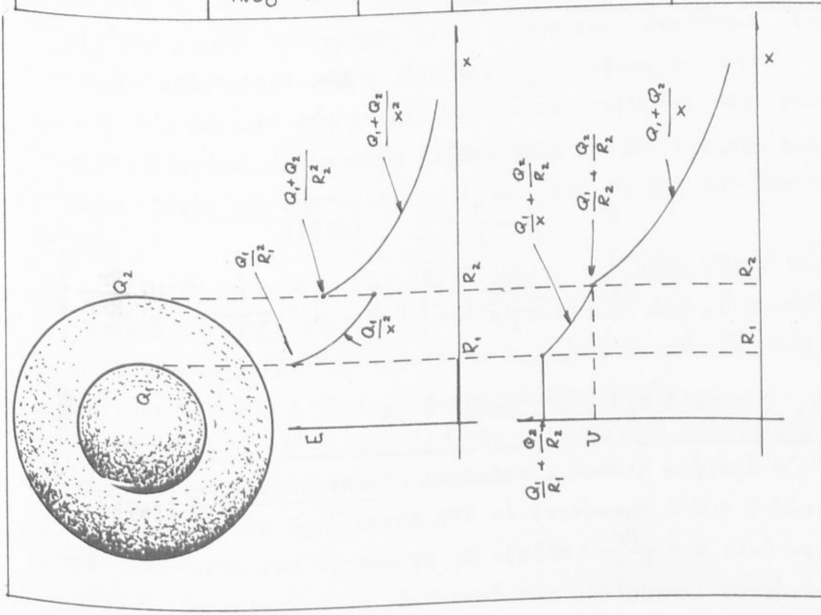
Αἱ δυναμικαί γραμμαί δέν συνεχίζονται ἐντός τῶν μεταλλικῶν σφαιρῶν.

'Απόστασις x	"Εντασ. πεδίου		Δυναμικόν	
	MKSAr	ΗΣΣΜ	MKSAr	ΗΣΣΜ
$x < R_1$	0	0	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right]$	$Q\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right]$
$x = R_1$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_1^2}$	$\frac{Q}{R_1^2}$	"	"
$R_1 < x < R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x^2}$	$\frac{Q}{x^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Q\left[\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{x}\right]$	$Q\left[\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{x}\right]$
$x = R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_3}$	$\frac{Q}{R_3}$
$R_2 < x < R_3$	0	0	"	"
$x = R_3$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_3^2}$	$\frac{Q}{R_3^2}$	"	"
$x > R_3$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x^2}$	$\frac{Q}{x^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x}$	$\frac{Q}{x}$

☆ Μεταλλική σφαῖρα ἀκτῖνος R_1 φορτισμένη μέ φορτίον Q_1, περιβάλλεται ὑπό σφαίρας ἀκτῖνος R_2, ἀμελητέου πάχους, φορτισμένης μέ φορτίον Q_2 (σχ. 32). Ποῖαι αἱ τιμαί τῆς ἐντάσεως καί τοῦ δυναμικοῦ εἰς τά διάφορα σημεῖα τοῦ πεδίου;

Εἰς τόν ὄπισθεν πίνακα ἐμφαίνονται αἱ τιμαί τῆς ἐντάσεως καί τοῦ δυναμικοῦ διά τάς διαφόρους τιμάς τῆς ἀποστάσεως x.

	"Εντασις πεδίου		Δυναμικόν	
'Απόστασις x	MKSAr	ΗΣΜ	MKSAr	ΗΣΣΜ
$x < R_1$	0	0	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}\right]$	$\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}$
$x = R_1$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{R_1^2}$	$\frac{Q_1}{R_1^2}$	"	"
$R_1 < x < R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{x^2}$	$\frac{Q_1}{x^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{Q_1}{x}+\frac{Q_2}{R_2}\right]$	$\frac{Q_1}{x}+\frac{Q_2}{R_2}$
$x = R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1+Q_2}{R_2^2}$	$\frac{Q_1+Q_2}{R_2^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1+Q_2}{R_2}$	$\frac{Q_1+Q_2}{R_2}$
$x > R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1+Q_2}{x^2}$	$\frac{Q_1+Q_2}{x^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1+Q_2}{x}$	$\frac{Q_1+Q_2}{x}$

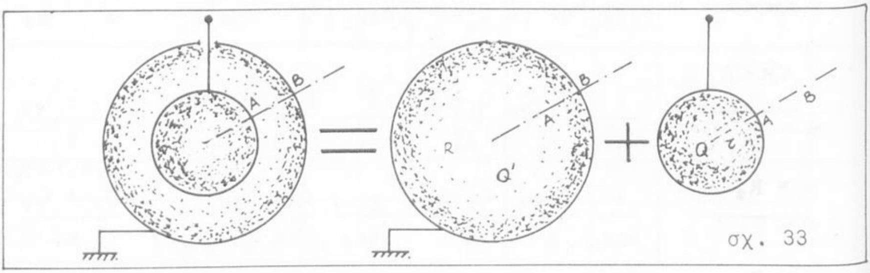


σχ. 32

☆ Μονωμένη μεταλλική σφαῖρα, ἀκτῖνος 26cm περιβάλλεται ὑπό συγκεντρικῆς μεταλλικῆς σφαίρας ἀκτῖνος 30 cm προσγειωμένης. Νά ὑπολογισθῇ τό φορτίον τό ὁποῖον πρέπει νά λάβῃ ἡ πρώτη σφαῖρα, ὥστε νά ἀποκτήσῃ δυναμικόν 30 ΗΣΜ-δ.

Ἔστω Q΄ τό ἐξ ἐπιδράσεως φορτίον τῆς ἐξωτερικῆς. Τότε:

Ἐπειδή $$U_B = U_B' + U_B'' = 0$$



σχ. 33

ἤ $$\frac{Q'}{R} + \frac{Q}{R} = 0 \quad \blacktriangleright \quad Q' = -Q$$

Ἀλλά τότε: $$U_A = U_A' + U_A'' = U$$

ἤ $$\frac{Q}{r} - \frac{Q}{R} = U \qquad \text{(ΗΣΣΜ)}$$

ἤ $$Q\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] = U \qquad Q = \frac{U}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} = U\cdot\frac{Rr}{R-r} \; *$$

δηλ. $Q = 5850$ ΗΣΜ-φ $= 1{,}95\cdot 10^{-6}$ Cb

---

* Ἡ ἀνωτέρω διάταξις καλεῖται "σφαιρικός πυκνωτής" καί ἐπειδή $Q = U\cdot C$ προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως μέ τόν ἐξαχθέντα τύπον ὅτι: $C = \frac{Rr}{R-r}$ (ΗΣΣΜ). Οἱ σφαιρικοί πυκνωταί δέν παρουσιάζουν "ἀνωμαλίας τῶν ἄκρων" ὡς οἱ ἐπίπεδοι καί συνεπῶς τό πεδίον παραμένει ἀκτινικόν.

☆ Φορτισμένη σφαῖρα μέ φορτίον Q ἔχει ἀκτῖνα R_1 καί περιβάλλεται ὑπό σφαιρικοῦ διηλεκτρικοῦ διηλ. σταθερᾶς ε. Νά ὑπολογισθοῦν ἔντασις πεδίου καί δυναμικόν, εἰς κάθε χαρακτηριστικόν σημεῖον εἰς τόν περιβάλλοντα χῶρον. Νά παρασταθοῦν γραφικῶς καί νά γίνῃ ἀριθμητική ἐφαρμογή μέ Q = 20 ΗΣΜ-φ, R_1 = 10 cm, R_2 = 20cm καί ε = 2.

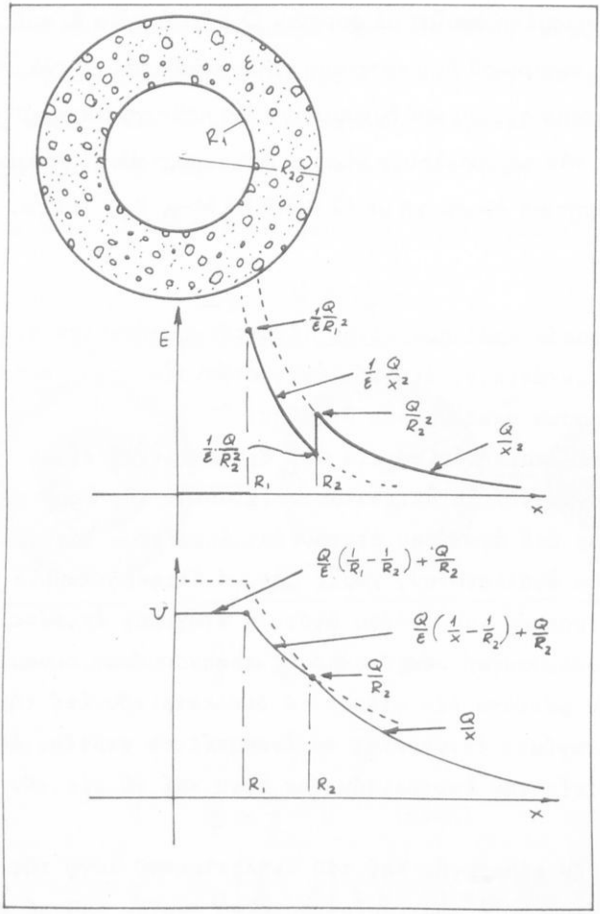
Τό παρόν πρόβλημα εἶναι ἰδιαιτέρως δύσκολον διά στοιχειώδη ἀντιμετώπισιν. Διά τήν ἀντιμετώπισίν του καταφεύγομεν εἰς τέχνασμα σκεπτόμενοι ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἐξωτερική ἐπιφάνεια τοῦ διηλεκτρικοῦ εἶναι ὁπωσδήποτε ἰσοδυναμική. Ἡ ἀντικατάστασις αὐτῆς τῆς ἰσοδυναμικῆς ἐπιφανείας ὑπό ἀγωγίμου ἐπιφανείας,ἀμελητέου πάχους,διατηρεῖ τό πεδίον ἀναλλοίωτον, χωρίς δηλ.νά ἐπιφέρῃ καμμία μεταβολήν εἰς τήν μορφήν τοῦ πεδίου διότι ἡ ἀγώγιμος ἐπιφάνεια παραμένει ἰσοδυναμική μέ τό αὐτό,ὡς προηγουμένως,δυναμικόν.

Ἐάν μάλιστα δέν ὑπῆρχε τό διηλεκτρικόν ἐπί τῆς ὑποθετικῆς ἀγωγίμου ἐπιφανείας θά ἐνεφανίζετο φορτίον ἐξ ἐπιδράσεως -Q εἰς τήν ἐσωτερικήν της ὄψιν καί +Q εἰς τήν ἐξωτερικήν.

Μέ τήν εἰσαγωγήν καί τοῦ διηλεκτρικοῦ λόγῳ τῆς πολώσεως τῶν μορίων του ἡ φορτισμένη δοθεῖσα σφαῖρα δρᾶ μέ φορτίον $\frac{Q}{\varepsilon}$ ἡ ἐσωτερική ὄψις τῆς ὑποθετικῆς ἀγωγίμου ἐπιφανείας δρᾶ μέ φορτίον $-\frac{Q}{\varepsilon}$ ἐνῷ ἡ ἐξωτερική της μέ φορτίον Q.

Κατ'αὐτόν τόν τρόπον διά τῆς μεθόδου τῆς ἐπαλληλίας λαμβάνονται τά ἀκόλουθα διαγράμματα.



σχ. 34

ἀριθμητική ἐφαρμογή: Στό ΗΣΣΜ

$x < R_1$	$E = 0$,	$V = 1,5$
$x = R_1$	$E = 0,1$,	$V = 1,5$
$x = {}^{\leftarrow}R_2$	$E = 0,025$,	$V = 1$
$x = R_2^{\rightarrow}$	$E = 0,05$,	$V = 1$

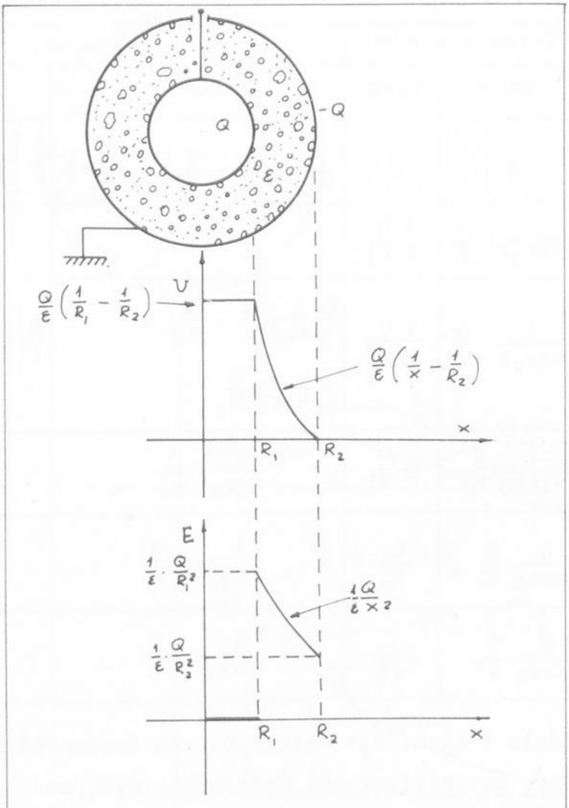
Ἀπόστασις x	Ἔντασις πεδίου		Δυναμικόν	
	MKSAr	ΗΣΣΜ	MKSAr	ΗΣΣΜ
$x < R_1$	0	0	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}$	$\frac{Q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]+\frac{Q}{R_2}$
$x = R_1$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{Q}{R_1^2}$	$\frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{R_1^2}$	"	"
$R_1 < x < R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{Q}{x^2}$	$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{x^2}$	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)+$ $+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2}$	$\frac{Q}{\varepsilon}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right]+\frac{Q}{R_2}$
$x = \leftarrow R_2$ *	$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2}$	$\frac{Q}{R_2}$
$x = R_2\rightarrow$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{Q}{R_2^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R_2}$	$\frac{Q}{R_2}$
$x > R_2$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x^2}$	$\frac{Q}{x^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x}$	$\frac{Q}{x}$

* Τά σύμβολα $\leftarrow R_2$ καί $R_2\rightarrow$ ὑποδηλοῦν τήν ἐσωτερική καί τήν ἐξωτερικήν ὄψιν ἀντιστοίχως τῆς ὑποθετικῆς ἀγωγίμου ἐπιφανείας.

3. 2. 2. σφαιρικός πυκνωτής μέ διηλεκτρικόν

Ἀποτελεῖται ἀπό δύο σφαιρικά ὁμόκεντρα ἠλεκτρόδια, μεταξύ τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται στρῶμα διηλεκτρικοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἐξωτερικόν γειοῦται (σχ. 35).

Ἐκ τοῦ παρατιθεμένου διαγράμματος σχ. 35 φαίνεται ὅτι λόγῳ τῆς πολώσεως τοῦ διηλεκτρικοῦ τά ἠλεκτρόδια συμπεριφέρονται ὡς ἔχοντα φορτίον $\frac{Q}{\varepsilon}$. Διά τήν καλυτέραν ἀντιμετώπισιν τοῦ παρόντος θέματος μελετήσατε καί τό τελευταῖον πρόβλημα τῆς παραγράφου 3.2.1 λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν γείωσιν.



σχ. 35

$$\Delta U = U_1 - U_2 = V = \frac{Q}{\varepsilon}\cdot\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon\cdot R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (\text{ΗΣΣΜ})$$

$$\text{ἤ} \quad C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_o \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \, (\text{MKSAr})$$

Τό πεδίον είς τό έσωτερικόν εἶναι ἀκτινικόν χωρίς ἀνωμαλίας ἐνῷ είς τό ἐξωτερικόν δέν ὑπάρχει.

3. 2. 3. γραφική μέθοδος

Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων ἐπί τῶν φορτισμένων σφαιρικῶν ἠλεκτροδίων ἁπλουστεύεται ἄν:

α. θεωρηθῇ ἕκαστον σφαιρικόν κέλυφος μέ τά ἐπ'αὐτοῦ φορτία μεμονωμένον.

β. Κατασκευασθῇ δι'ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τό διάγραμμα ἐν.πεδίου - ἀποστάσεως καί δυναμικοῦ - ἀποστάσεως.

γ. Δι'ἐπαλληλίας προσδιορίσωμεν εἰς δεδομένην ἀπόστασιν τάς τιμάς τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου καί τοῦ δυναμικοῦ.

☆ Τρεῖς ὁμόκεντροι μεταλλικαί σφαῖραι ἀμελητέου πάχους ἔχουν ἀκτίνας καμπυλότητος 4 cm, 6 cm καί 10 cm ἀντιστοίχως, φέρουν δέ φορτία 20 ΗΣΜ-φ, 30 ΗΣΜ-φ καί 40 ΗΣΜ-φ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ

α. Τό δυναμικόν ἑκάστης

β. Τό φορτίον τῆς μεσαίας μετά τήν γείωσίν της.

γ. Τά δυναμικά ἑκάστης τῶν ἄλλων μετά τήν γείωσιν τῆς μεσαίας.

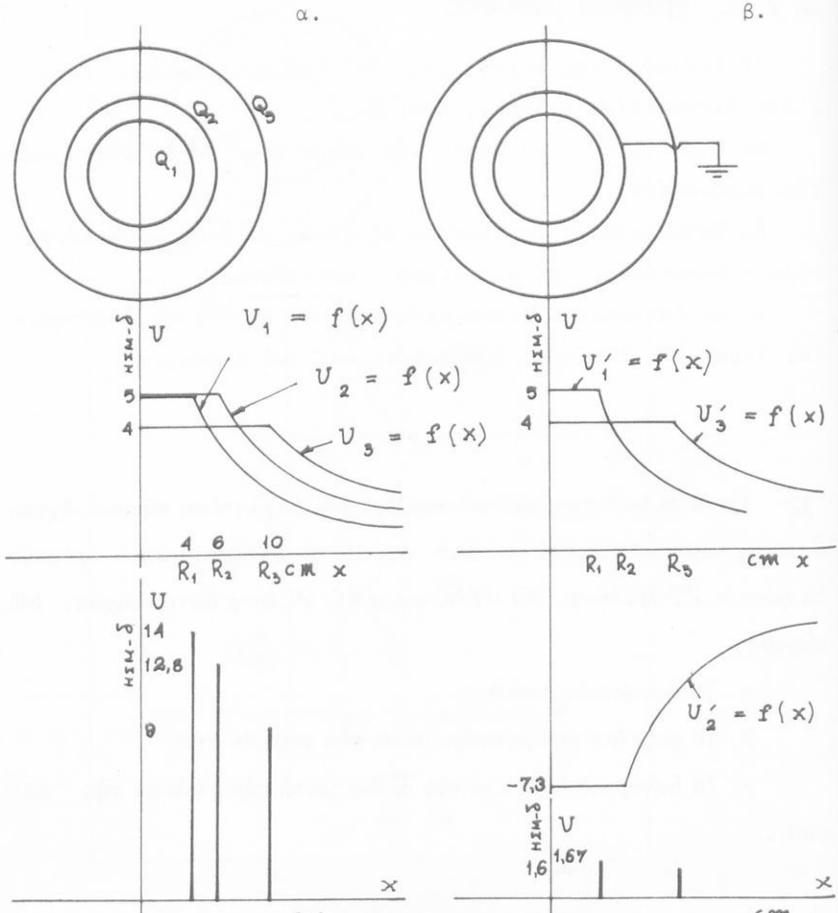
Εἰς τό σχῆμα 36 φαίνονται τά διαγράμματα U = f(x) πρό καί μετά τήν γείωσιν τοῦ μεσαίου ἠλεκτροδίου, ἐπί τοῦ αὐτοῦ συστήματος ἀξόνων.

α.

$$U_1 = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} = 14 \text{ ΗΣΜ-δ}$$

$$U_2 = \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} = 12,3 \text{ ΗΣΜ-δ}$$

$$U_3 = \frac{Q_1}{R_3} + \frac{Q_2}{R_3} + \frac{Q_3}{R_3} = 9 \text{ ΗΣΜ-δ}$$



σχ. 36

β. $$U_2' = \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_2'}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} = 0 \quad \text{(λόγῳ γειώσεως)}$$

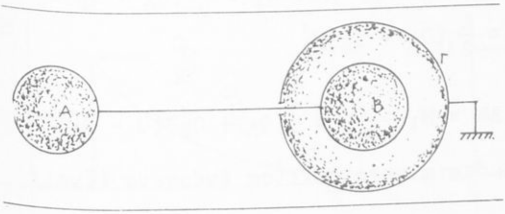
ἀλλά τότε $$Q_2' = -R_2\frac{R_2Q_3 + Q_1R_3}{R_2R_3} = -44 \text{ ΗΣΜ-φ}$$

γ. $$U_1' = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2'}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3} = 1{,}67 \text{ ΗΣΜ-δ}$$

$$U_3' = \frac{Q_1}{R_3} + \frac{Q_2'}{R_3} + \frac{Q_3}{R_3} = 1{,}6 \text{ ΗΣΜ-δ}$$

☆ Δύο μονωμέναι μεταλλικαί σφαῖραι A καί B ἔχουν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀκτίνας r καί δυναμικόν U. Συνδέομεν τάς σφαίρας μέ λεπτόν σύρμα. Περιβάλλομεν τήν B διά κοίλου ἀγωγοῦ ἀκτῖνος R (ὁμοκέντρως). Ὁ ἀγωγός Γ γειοῦται. Νά εὑρεθοῦν τότε:

Τά δυναμικά καί τά φορτία τῶν A καί B καθώς καί ἡ μεταβολή τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος.



σχ. 37

Λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἀγωγῶν A καί B εἶναι $Q_A = Q_B$ ἀλλά

$$Q_A = CU = rU$$

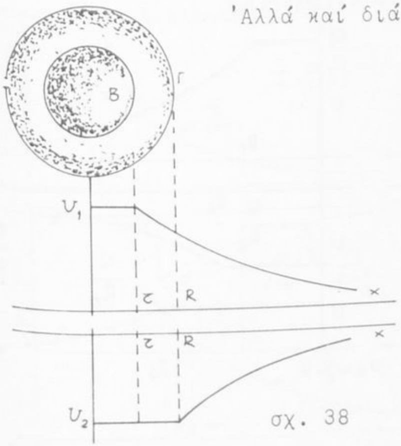
Μετά τήν σύνδεσιν σχ. 37 ὁ B θά ἀποκτήσῃ φορτίον Q_1 καί θά ἠλεκτρίσῃ ἐξ ἐπιδράσεως τόν Γ μέ φορτίον $-Q_1$

Διότι: $$U_\Gamma = 0 = \frac{Q_1}{R} + \frac{Q_\Gamma}{R} \Rightarrow Q_\Gamma = -Q_1$$

Ἐκ τοῦ διαγράμματος σχῆμα 38 φαίνεται ὅτι:

$$U_B' = \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{R} = \frac{R-r}{Rr} Q_1 \quad (1)$$

Ἀλλά καί διά τήν A $$U_A' = U_B' = \frac{Q_2}{r} \quad (2)$$



σχ. 38

Ἐκ τῶν (1) καί (2):

$$\frac{Q_2}{r} = \frac{Q_1}{\frac{Rr}{R-r}} = \frac{Q_1 + Q_2}{r + \frac{Rr}{R-r}} =$$

$$= \frac{Q_A + Q_B}{r + \frac{Rr}{R-r}} = \frac{2rU}{r + \frac{Rr}{R-r}}$$

$$Q_2 = 2U \frac{r}{1 + \frac{R}{R-r}}$$

$$Q_1 = 2U\frac{R\cdot r}{2R-r}$$

$$U_A' = U_B' = \frac{2U}{1+\dfrac{R}{R-r}} = \frac{2U(R-r)}{2R-r}$$

Ἡ ἀρχική ἐνέργεια τοῦ συστήματος ἦτο: $W_1 = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B)U$

Ἡ τελική εἶναι: $W_2 = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B)U_A'$

Ἄρα ἡ μεταβολή εἶναι: $\Delta W = W_1 - W_2 = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B)(U - U_A')$

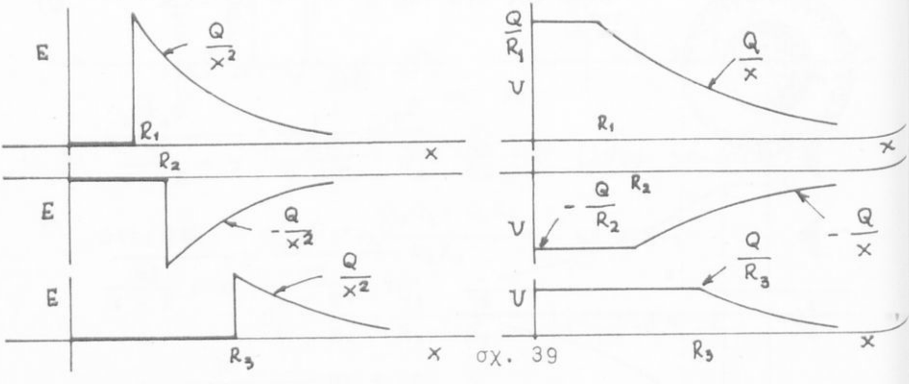
ἤτοι τελικῶς, ἡ εἰς θερμότητα μετατραπεῖσα ἐνέργεια εἶναι:

$$\Delta W = \frac{r^2U^2}{2R-r}$$

Ὡς ἐφαρμογάς τῆς μεθόδου ἀναφέρομεν καί τά παραδείγματα τῆς παραγράφου 3-2-1 λελυμένα ἤδη διά τῆς μεθόδου τῆς ἐπαλληλίας.

Πρῶτον παράδειγμα τῆς παραγράφου 3-2-1.

Εἰς τό σχῆμα 39 φαίνονται αἱ συναρτήσεις $E = f(x)$ καί $U = f(x)$ δι' ἑκάστην φορτισμένην ἐπιφάνειαν.

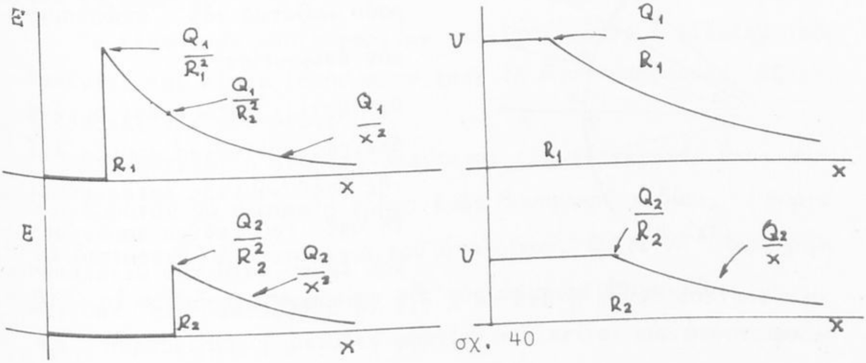


σχ. 39

'Εκ τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν λαμβάνονται τά διαγράμματα τοῦ σχήματος 31.

Δεύτερον παράδειγμα τῆς παραγράφου 3-2-1.

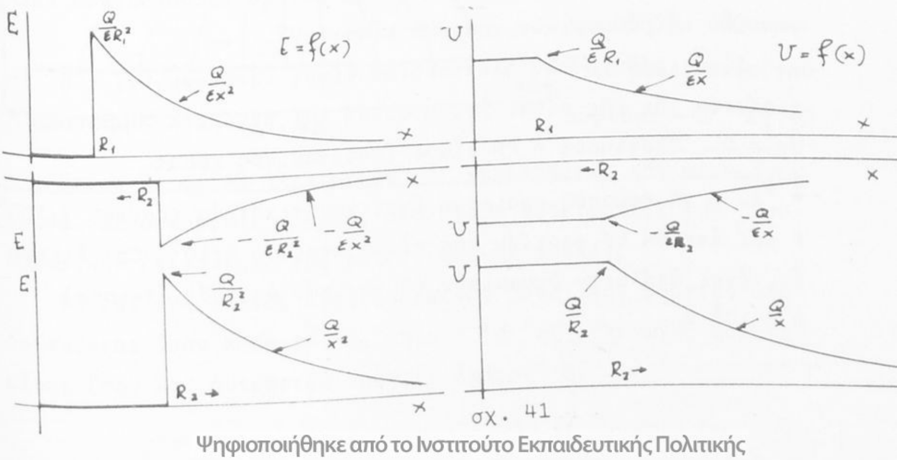
Τά διαγράμματα τοῦ σχήματος 40 ἀποδίδουν τάς συναρτήσεις E = f(x) καί U = f(x) δι'ἑκάστην φορτισμένην σφαίραν. 'Εκ τῆς προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν προκύπτουν τά διαγράμματα τοῦ σχ. 32.



σχ. 40

Τέταρτον παράδειγμα τῆς παραγράφου 3-2-1.

Εἰς τό κάτωθι σχῆμα φαίνονται τά διαγράμματα U =f (x) καί E = f (x) διά τήν περίπτωσιν σφαίρας περιβαλλομένης ὑπό σφαιρικοῦ διηλεκτρικοῦ.

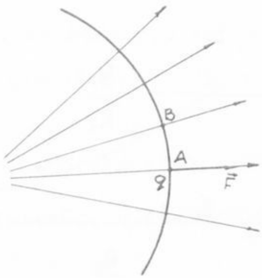


σχ. 41

4. κατοπτρισμὸς

4.1. γενικὰ

Κάθε ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἔχουν τό αὐτό δυναμικόν, καλοῦμεν ἰσοδυναμικήν.



σχ. 42

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι:

"Αἱ δυναμικαί γραμμαί διαπεροῦν καθέτως τάς ἰσοδυναμικάς ἐπιφανείας".

Πράγματι: Ἔστω A καί B δύο ἀπείρως γειτονικά σημεῖα ἐπί τῆς ἰσοδυναμικῆς ἐπιφανείας. Τό ὑπό τοῦ πεδίου παραγόμενον ἔργον κατά τήν μετακίνησιν φορτίου τινός q ἀπό τό A εἰς τό B δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$W = q(U_A - U_B) = F(AB)\text{συν}\varphi$$

καί ἐπειδή $U_A = U_B$ θά εἶναι $W = 0$. Ἀλλά διά νά ἰσχύῃ ἡ τελευταία, πρέπει συν$\varphi = 0$, δηλ. ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\vec{F}$ καί $\vec{AB}$ νά εἶναι 90^o, ἤτοι, ἡ γωνία μεταξύ ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν καί δυναμικῶν γραμμῶν εἶναι 90^o.

Αἱ ἐπιφάνεια τῶν ἠλεκτροδίων εἶναι ἰσοδυναμικαί. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι ἰσοδυναμική καί δεχόμεθα **συμβατικῶς*** $U_Γ = 0$. Ὁλόκληρος ἡ Γῆ εἶναι ἰσοδυναμικός χῶρος.

* Ἄν ἡ γῆ θεωρηθῇ σφαιρική ἔχει χωρητικότητα περίπου $7 \cdot 10^{-4}$ F καί ἐπειδή τό φορτίον της εἶναι περίπου $6 \cdot 10^5$ Cb ἔπεται ὅτι ἔχει ἀπόλυτον δυναμικόν (δυναμικόν ὡς πρός ἄπειρον) $8{,}6 \cdot 10^8$ V.

4.2. μέθοδος τοῦ κατοπτρισμοῦ

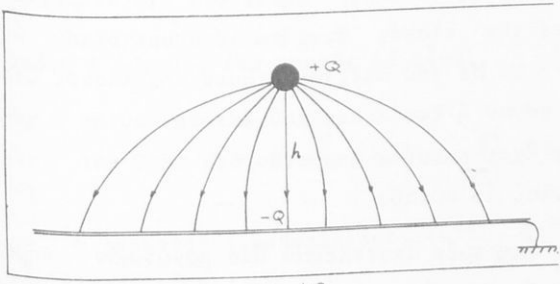
Ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται εἰς περιπτώσεις ἀλληλεπιδράσεως φορτίου - ἀγωγοῦ καί συνίσταται εἰς:

Τήν ἀναζήτησιν τοῦ μεγέθους καί τῆς θέσεως δευτέρου εἰκονικοῦ φορτίου τό ὁποῖον θά ἐσχημάτιζε μέ τό δοθέν, πεδίον εἰς τό ὁποῖον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ θά ἀποτελῇ ἰσοδυναμικήν ἐπιφάνειαν.

Τό εἰκονικόν τοῦτο φορτίον καλεῖται εἰκών ἤ εἴδωλον τοῦ δοθέντος καί εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἀναπτυσσόμενον ἐξ ἐπιδράσεως ἐπί τοῦ ἀγωγοῦ.

Οὐσιαστικῶς ἡ μέθοδος βασίζεται εἰς τό γεγονός ὅτι: εἶναι δυνατόν νά ἀφαιρεθῇ τμῆμα ἑνός δυναμικοῦ πεδίου, χωρίς νά διαταραχθῇ ἡ λειτουργία τοῦ ὑπολοίπου, ἀρκεῖ νά διατηρηθοῦν αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας εἰς τάς ὁριακάς ἐπιφανείας.

Παράδειγμα: Σημειῶδες φορτίον +Q κεῖται εἰς ἀπόστασιν h ὑπεράνω ὑπεραγωγίμου μεταλλικῆς γειωμένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Νά ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἥτις ἀσκεῖται ἐπί τοῦ φορτίου + Q. Σχ.43



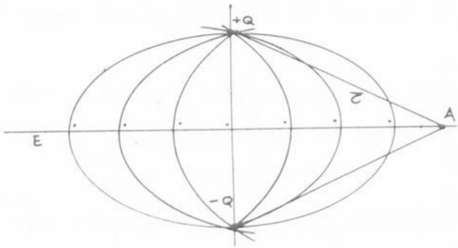
σχ. 43

Προφανῶς τό +Q ἠλεκτρίζει ἐξ ἐπιδράσεως τήν γειωμένην πλάκα. Αἱ δυναμικαί γραμμαί ἀπολήγουν καθέτως εἰς τήν ἰσοδυναμικήν ἐπιφάνειαν τῆς προσγειωμένης πλακός.

Τό ἐπί τῆς πλακός ἀναπτυσσόμενον ἀρνητικόν φορτίον ἀποδεικνύεται ἴσον πρός τό -Q. Δηλαδή τό ἐξ ἐπαγωγῆς φορτίον εἶναι ἴσον καί ἀντίθετον πρός τό ἐπάγον Q.

Διά τήν δύναμιν Coulomb δέν δύναται νά έφαρμοσθῆ ὁ νόμος Coulomb ἐφ'ὅσον +Q καί -Q δέν εἶναι σημειακά.

'Η ἀναζήτησις φορτίου, τιθεμένου είς κατάλληλον θέσιν, τοιούτου ὥστε νά διατηρῆ τήν μορφήν τοῦ πεδίου μεταξύ πλακός - φορτίου +Q, ὁδηγεῖ είς τήν τοποθέτησιν τοῦ φορτίου -Q είς συμμετρικήν τοῦ + Q ὡς πρός τήν πλάκα,θέσιν,(σχῆμα 44).



σχ. 44

"Εστω σημεῖον A κείμενον ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τό ὁποῖον κατελάμβανε ἡ πλάξ.

$$V_A = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r} = 0$$

Δηλαδή καί πάλιν ἡ E εἶναι ἰσοδυναμική μέ V = 0.

"Ωστε:τό πεδίον, μεταξύ πλακός - φορτίου + Q,διατηρεῖται ἀναλλοίωτον ἄν, ἀντί τῆς πλακός θεωρήσω τό συμμετρικόν ὡς πρός αὐτήν φορτίον - Q. Μέ τήν ἀντικατάστασιν τῆς πλακός ὑπό τοῦ -Q καταργεῖται μόνον ἡ θωράκισις τοῦ κάτωθεν αὐτῆς χώρου. Τοῦτο ὅμως δέν ἔχει καμμίαν σημασίαν διά τό Q καί τίς δυνάμεις πού ἀσκοῦνται ἐπ'αὐτοῦ.

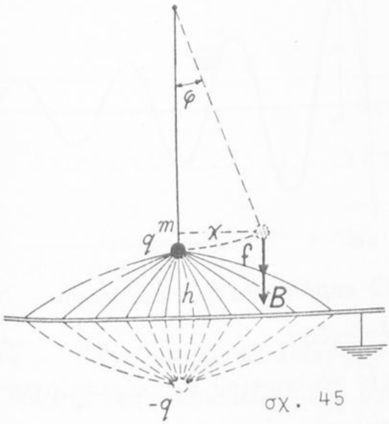
☆ 'Ηλεκτρικόν ἐκκρεμές ἀποτελεῖται ἀπό μονωτικόν νῆμα, μήκους l , οὗτινος τό ἕν ἄκρον προσδένεται εἰς ἀκλόνητον σημεῖον , τό δέ ἕτερον φέρει σφαιρίδιον μάζης m.

'Επί τοῦ σφαιριδίου φέρεται φορτίον q σταθερόν. Τό ὅλον σύστημα εὑρίσκεται ἐντός ὁμογενοῦς πεδίου βαρύτητος.

'Εκτρέπομεν ἐλαφρῶς τό ἐκκρεμές ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας του καί ἀφήνομεν αὐτό νά αἰωρηθῆ.

Περιγράψατε καί δικαιολογήσατε τό εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς καί σχεδιάσατε κατά προσέγγισιν τήν γραφικήν παράστασιν αὐτῆς, ὅταν κάτωθεν τοῦ ἐκκρεμοῦς καί εἰς μικράν σχετικῶς ἀπόστασιν ἀπ'αὐτοῦ, τοποθετῆται μία χαλκίνη πλάξ, ἀπείρου ἐκτάσεως, προσγειωμένη.

Φυσικόν 'Αθηνῶν 1960



σχ. 45

Θεωρῶ τό φορτίον εἴδωλον -q σχῆμα 45. Ἄν τό ἐκκρεμές ἐκτελῇ αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους ἡ ἀπόστασις h δέν μεταβάλλεται αἰσθητῶς.

'Επί τοῦ φορτισμένου σφαιριδίου ἀσκεῖται τότε δύναμις:

$$f = \frac{q^2}{4\,h^2}$$

ὁπότε ἡ δύναμις ἐπαναφορᾶς θά εἶναι:

$$F = (f + B)\ \eta\mu\varphi = \left(\frac{q^2}{4h^2} + mg\right)\cdot \frac{x}{l}$$

'Η περίοδος αἰωρήσεως ἀφορτίστου ἤ ἄνευ τῆς παρουσίας τῆς πλακός εἶναι:

$$T_\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

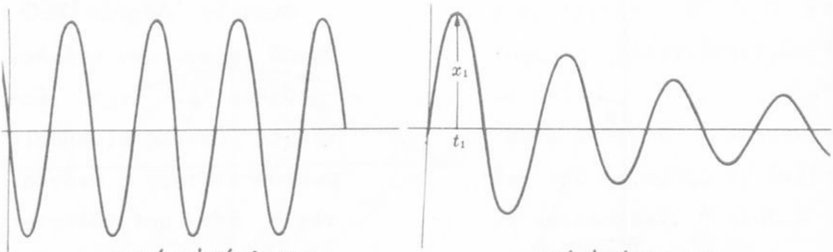
'Ενῷ φορτισμένου παρουσίᾳ τῆς πλακός γίνεται:

$$T_\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\frac{q^2}{4h^2} + mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{q^2}{4h^2m} + g}} \qquad (2)$$

'Εκ τῆς συγκρίσεως τῶν (1) καί (2) προκύπτει:

$$T_{\varphi} < T_{\alpha}$$

ἤτοι τό ἐκκρεμές αἰωρεῖται ταχύτερον λόγῳ τῆς ἀλληλεπιδράσεως φορτίου - πλακός.



χωρίς ἀπόσβεσιν σχ. 46 μέ ἀπόσβεσιν

☆ Ἕν σημειῶδες φορτίον Q εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν h ἀπό ἕν ἀπεριόριστον γειωμένον ἐπίπεδον.

Ποία ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τό σημεῖον B, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν h ἀπό τό ἐπίπεδον καί l ἐκ τοῦ q.

Θεωρῶ τό "φορτίον εἴδωλον" -q, σχ. 47

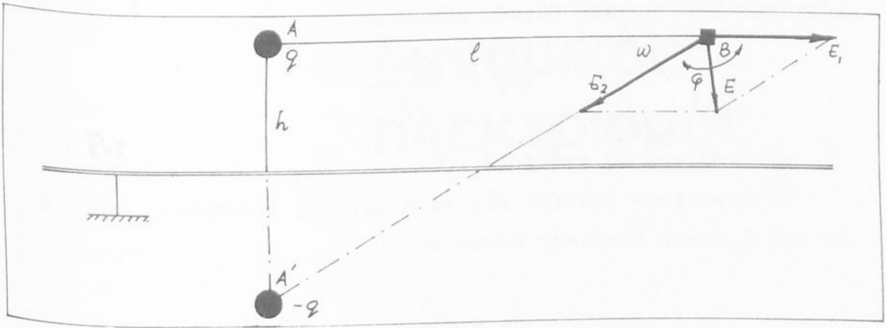
'Η ἔντασις εἰς τό B ὀφείλεται εἰς τά φορτία q καί -q.

$$E_1 = \frac{q}{l^2} \tag{1}$$

$$E_2 = \frac{q}{4h^2 + l^2} \tag{2}$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} \tag{3}$$

μέ
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{l}{\sqrt{4h^2 + l^2}} \tag{4}$$



σχ. 47

'Εκ τῶν (1), (2), (3), (4) προκύπτει:

$$E = \frac{q}{l^2(4h^2+l^2)} \cdot \sqrt{16h^4 + 2l^4 + 8h^2l^2 - 2l^3\sqrt{4h^2+l^2}}$$

☆ 'Υποθέσατε τά ἐπίπεδα xy, yz, zx ἑνός τρισορθογωνίου συστήματος κατασκευασμένα ἀπό μέταλλον καί συγκεκολλημένα εἰς τάς τομάς.

'Υποθέσατε ἐπίσης ἕν σημειῶδες φορτίον Q εἰς ἀπόστασιν d ἐξ ἑκάστου.

Ποία ἡ διεύθυνσις καί τό μέτρον τῆς δυνάμεως ἥτις ἀσκεῖται ἐπί τοῦ Q;

Δι'ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τοῦ κατοπτρισμοῦ ἐμφανίζονται 7 "φορτία εἴδωλα" ὡς εἰς τό σχῆμα 48.

Τά τρία ἀρνητικά φορτία εἴδωλα Α, Β, Γ εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν 2d ἐκ τοῦ Q ἀσκοῦν ὁλικήν δύναμιν:

$$F_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{Q^2}{d^2}$$ μέ στήριγμα ΟQ καί φοράν πρός τό Ο.

Τά τρία θετικά φορτία εἴδωλα Δ, Ε, Ζ εὑρισκόμενα εἰς ἀπόστασιν $2\sqrt{2}d$ άσκοῦν ὁλικήν δύναμιν:

$$F_2 = \frac{\sqrt{3}\, Q^2}{4\,\sqrt{2}\, d^2}$$

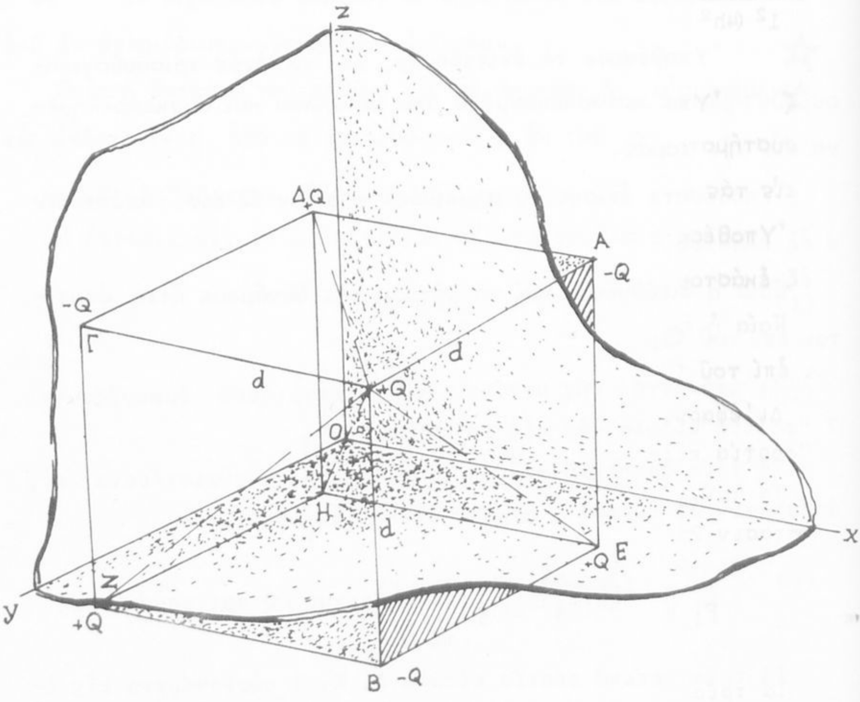
μέ στήριγμα OQ καί φοράν OQ.

Τό ἀρνητικόν φορτίον εἰς τό Η καί εἰς ἀπόστασιν $2\sqrt{3} \cdot d$ ἐκ τοῦ Q, ἀσκεῖ ἑλκτικήν δύναμιν:

$$F_3 = \frac{Q^2}{12d^2}$$

Ἡ ὁλική δύναμις ἔχει φοράν πρός τό Ο καί μέτρον

$$F = \frac{Q^2}{d^2}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{12}\right)$$



σχ. 48

δυναμικὸς ἠλεκτρισμὸς

5. κυκλώματα συνεχοῦς

5.1. βασικαὶ ἔννοιαι

- Ρεῦμα: καλεῖται ἡ προσανατολισμένη κίνησις ἠλεκτρικῶν φορέων.
- Συνεχές ρεῦμα: καλεῖται γενικῶς ἐκεῖνο τό ὁποῖον διατηρεῖ ὡρισμένην φοράν.
- Ἔντασις ρεύματος: διερχομένου διά τινος διατομῆς ἀγωγοῦ κατά τυχοῦσαν χρονικήν στιγμήν t, ὁρίζεται τό ὅριον πρός τό ὁποῖον τείνει τό πηλῖκον τῆς ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ ΔQ, ἥτις διέρχεται διά τῆς διατομῆς μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν t καί t + Δ t, πρός τό χρονικόν διάστημα Δ t, τοῦ Δt τείνοντος πρός τό μηδέν.

ἤτοι: $$I = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Ἡ ἔντασις ρεύματος ἐκφράζει τήν "ΠΑΡΟΧΗΝ" ἠλ. φορτίου
Εἰς περιπτώσεις σταθερᾶς ἐντάσεως γράφομεν:

$$I = \frac{Q}{t}$$

● Διαφορά δυναμικοῦ ἤ ἠλεκτρική τάσις ἤ ἁπλῶς τάσις: ἔχει μηχανικόν ἀντίστοιχον τήν διαφοράν πιέσεως. Προκαλεῖ τήν κίνησιν τῶν ἠλεκτρικῶν φορέων.

● Ἠλεκτρική ἀντίστασις: καλεῖται ὁ συντελεστής ἀναλογίας R εἰς τήν σχέσιν:

$$I = \frac{1}{R} \cdot V$$

Χαρακτηρίζει τήν "ΠΟΙΟΤΗΤΑ" τοῦ ἀγωγοῦ. Ἄριστος ἀγωγός ἔχει ἠλεκ. ἀντίστασιν μηδέν.

● Τάσις E ἤ ἠλεκτρεγερτική δύναμις πηγῆς: ὁρίζεται τό ἄθροισμα E τῶν πτώσεων τάσεως RI καί rI εἰς τό ἐκτός καί ἐντός τῆς πηγῆς τμῆμα τοῦ κυκλώματος, ἤτοι:

$$E = I(R + r)$$

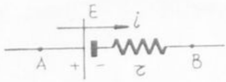
ἐκφράζει δέ τήν τάσιν εἰς τούς πόλους πηγῆς μή διαρρεομένης ὑπό ρεύματος.

● Τάσις E΄ ἤ ἀντιηλεκτρεγερτική δύναμις ἀποδέκτου: ὁρίζεται ἡ διαφορά E΄ τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως V διά τήν λειτουργίαν τοῦ ἀποδέκτου καί τῆς πτώσεως τάσεως Ir' ἐντός τοῦ ἀποδέκτου, ἤτοι:

$$E' = V - Ir'$$

Ἄς σημειωθῇ ἀκόμη ἐδῶ ὅτι ἐφ'ὅσον τό ρεῦμα πού διαρρέει μίαν πηγήν ἔχει τήν

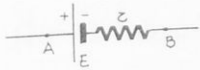
σχ. 49



εἰκονιζομένην φοράν, ἡ πηγή δρᾶ ὡς ἀποδέκτης μέ Ε΄ ἴσον πρός Ε. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν:

$$V_{AB} = E + Ir$$

● Σύμβολον ἠλεκτρικῆς πηγῆς Σ.Ρ.: Παρ'ὅτι ἐν τοῖς ἐπομένοις χρησιμοποιοῦμεν διά τάς πηγάς Σ.Ρ. τό σύμβολον



ἀναγνωρίζομεν ὡς καλύτερον τό σύμβολον

τό ὁποῖον εἰσήχθη προσφάτως εἰς τήν ξένην βιβλιογραφίαν καί τοῦτο διότι:

α. Διακρίνεται σαφῶς ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις r.

β. 'Αποδίδει τήν συνέχειαν τοῦ κυκλώματος εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς πηγῆς.

γ. Δέν ἀφήνει ἀμφιβολίας ὡς πρός τήν θέσιν τῶν πόλων τῆς πηγῆς.

● Πτῶσις τάσεως, ἐπί τινος ἀντιστάσεως R διαρρεομένης ὑπό ρεύματος I, καλεῖται τό γινόμενον IR.

● Φορά ρεύματος. Εἰς τό παρόν σύγγραμμα ἔχει καθιερωθῆ ἡ συμβατική φορά διά τό συνεχές ρεῦμα.

● Κύκλωμα: καλεῖται ὁ οἱοσδήποτε συνδυασμός συνδεδεμένων πηγῶν καί ἀγωγῶν. Διακρίνεται εἰς κλειστόν καί ἀνοικτόν.

'Ορισμοί ἐπί τοῦ κυκλώματος.

● Κόμβος: καλεῖται τό κοινόν σημεῖον τριῶν ἤ περισσοτέρων ἀγωγῶν.

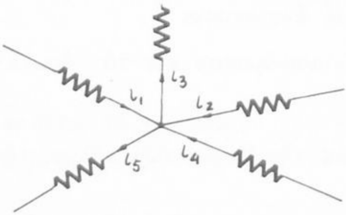
- Βρόχος: καλεῖται κάθε ἀγώγιμος κλειστή ἀκολουθία πηγῶν καί ἀντιστάσεων.
- Κλάδος ἤ ρεῖθρον: καλεῖται ἀγώγιμος ἀκολουθία πηγῶν καί ἀντιστάσεων, περατουμένη εἰς δύο κόμβους.

5.2. κανόνες kirchhoff

5. 2. 1. πρῶτος κανών $\Sigma I = 0$

"Τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν συνερχομένων, εἰς ἕνα κόμβον, ρευμάτων ἰσοῦται πρός μηδέν", ἤ

"Τό ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν προσερχομένων εἰς ἕνα κόμβον ρευμάτων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ἀπερχομένων τοῦ κόμβου, ρευμάτων"



Ἤτοι: $i_1 + i_2 + i_4 =$

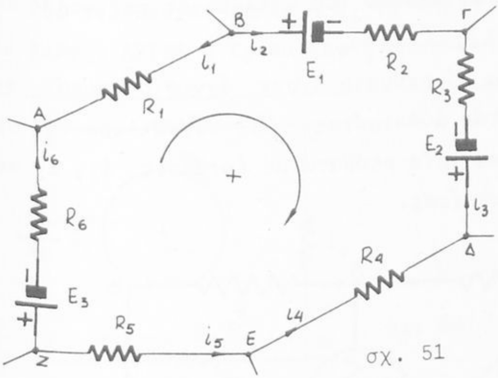
$= i_3 + i_5$

σχ. 50

Ἡ πρότασις αὐτή ἀπορρέει λογικῶς ἐκ τῆς ἀρχῆς "ἀφθαρσίας τοῦ φορτίου".

5. 2. 2. δεύτερος κανών $\Sigma E = \Sigma IR$

"Εἰς ἕκαστον τῶν βρόχων ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν τάσεων Ε (ΗΕΔ) ἰσοῦται πρός τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν πτώσεων τάσεως ἐπί τῶν κλάδων τοῦ βρόχου τούτου".



σχ. 51

Διά τόν βρόχον τοῦ σχ. 51 ἰσχύει:

$$E_2 - E_1 - E_3 = i_2R_2 + i_6R_6 - (i_1R_1 + i_4R_4 + i_5R_5 + i_3R_3)$$

5. 2. 3. ἀπόδειξις τῆς ΣΕ = ΣΙR

'Εκ τοῦ σχήματος 51 καί ἐκ τῶν δοθέντων ὁρισμῶν, προκύπτει:

$$U_A - U_B = -i_1R_1$$

$$U_B - U_\Gamma = i_2R_2 + E_1$$

$$U_\Gamma - U_\Delta = - i_3R_3 - E_2$$

$$U_\Delta - U_E = - i_4R_4$$

$$U_E - U_Z = - i_5R_5$$

$$U_Z - U_A = i_6R_6 + E_3$$

Διά προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν:

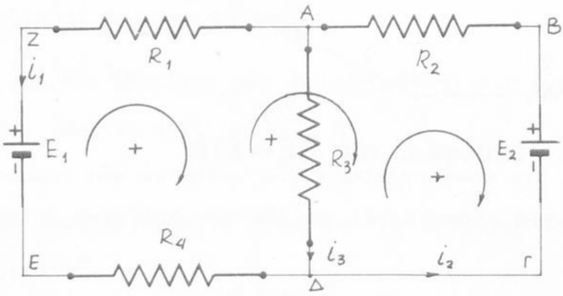
$$E_2-E_1-E_3 = i_2R_2+i_6R_6-(i_1R_1+i_3R_3+i_4R_4+i_5R_5)$$

5. 2. 4. ἐφαρμογή τῆς ΣΕ = ΣΙR

Διά τήν ἐφαρμογήν τῆς ΣΕ = ΣΙR ἔστω τό κύκλωμα τοῦ σχ. 52 μέ τάς ἀναγραφομένας τιμάς τῶν στοιχείων του (R_j εἰς Ω καί V_i εἰς Volts).

α. Σημειοῦμεν ἐπί τῶν κλάδων τοῦ κυκλώματος τάς φοράς τῶν ρευμάτων.

Ἐάν τινά ἤ καί ὅλα τά ρεύματα ἔχουν ἄγνωστον φοράν καί ἐντάσεις, ὁρίζομεν αὐτάς αὐθαιρέτως. Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 52, ὁρίζονται αὐθαιρέτως τρία ρεύματα μέ ἐντάσεις i_1, i_2 καί i_3 καί φοράς τάς σημειωθείσας.



σχ. 52

β. Καθορίζομεν δι'ἕκαστον βρόχον μίαν θετικήν φοράν περιγραφῆς.

Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 52 ὑπάρχουν τρεῖς βρόχοι ΑΒΓΔΑ, ΑΔΕΖΑ καί ΒΓΕΖΒ, διά τούς ὁποίους ἐλήφθη ὡς θετική φορά ἡ καθοριζομένη ἐκ τῆς διαδοχῆς τῶν γραμμάτων.

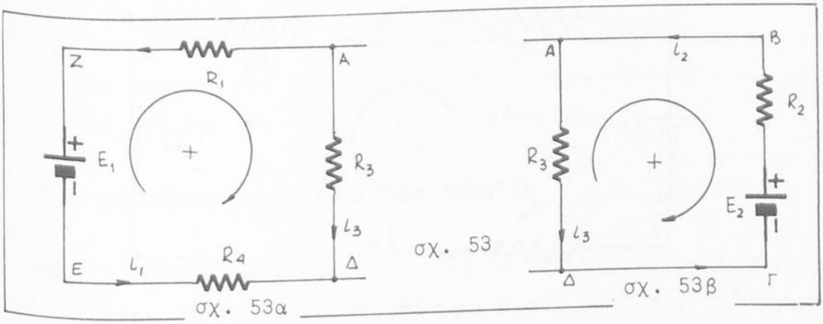
γ. Μορφοῦμεν τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα ΣΕ. Ἀρχίζοντες ἐξ ἑνός κόμβου διαγράφομεν κατά τήν ὁρισθεῖσαν θετικήν φοράν , τόν βρόχον.

Ἄν κατά τήν περιγραφήν τοῦ βρόχου συναντῶμενπρῶτον τόν ΑΡΝΗΤΙΚΟΝ ΠΟΛΟΝ πηγῆς Ε καί μετά τόν ΘΕΤΙΚΟΝ (- → +). ἡ Ε λογίζεται ὡς ΘΕΤΙΚΗ*.

---

* Παρατήρησις: ΜΙΑ ΗΕΔ Ε θεωρεῖται θετική ὅταν ΔΡΩΣΑ ΜΟΝΗ ΠΡΟΣΔΙΔΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΛΑΔΟΝ ΡΕΥΜΑ, ΜΕ ΦΟΡΑΝ ΤΗΝ ΘΕΤΙΚΗΝ ΦΟΡΑΝ ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ ΤΟΥ.

Εἰς τόν βρόχον ΑΔΕΖΑ ἡ E_1 θά ληφθῇ θετική σχ. 53α. Εἰς τόν βρόχον ΑΒΓΔΑ ἡ E_2 θά ληφθῇ ἀρνητική, σχ. 53β.



σχ. 53α σχ. 53 σχ. 53β

Τέλος, εἰς τόν βρόχον ΖΒΓΕΖ, ἡ E_1 λογίζεται θετική καί ἡ E_2 ἀρνητική: σχ. 53γ.

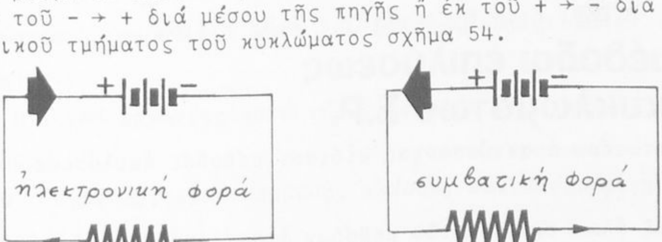
δ. Μορφοῦμεν τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα ΣIR. Μία πτῶσις τάσεως $V_j = R_i I_k$ λογίζεται θετική ὅταν τό ρεῦμα I_k, διαρρέῃ τήν Ri κατά τήν θετικήν φοράν περιγραφῆς τοῦ βρόχου: σχῆμα 55α.

Παρατήρησις.

Δέν πρέπει νά συγχέεται τό ρεῦμα τό ὁποῖον διαρρέει τήν πηγήν, μέ τό ρεῦμα τό ὁποῖον προκαλεῖ ἡ πηγή χωρίς τήν παρουσία, ἐν τῷ κυκλώματι, τῶν ἄλλων πηγῶν (βλέπε θεώρημα ὑπερθέσεως).

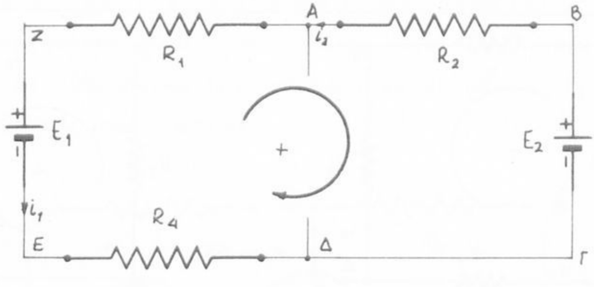
Τό ρεῦμα τό ὁποῖον διαρρέει ἕνα κλάδον εἰς κύκλωμα πολλῶν πηγῶν, εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς συνεργασίας ὅλων τῶν πηγῶν.

Τό ρεῦμα τό ὁποῖον προκαλεῖ μία πηγή ἔχει, συμβατικῶς φοράν ἐκ τοῦ - → + διά μέσου τῆς πηγῆς ἤ ἐκ τοῦ + → - διά τοῦ ἐξωτερικοῦ τμήματος τοῦ κυκλώματος σχῆμα 54.



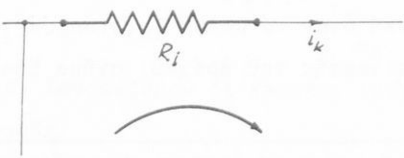
σχ. 54

'Αντιθέτως ἡ $V_j = R_i I_k$, λογίζεται ἀρνητική ἄν ἡ φορά τοῦ I_k δέν συμπίπτη μέ τήν φοράν περιγραφῆς τοῦ βρόχου: σχημ.55β.

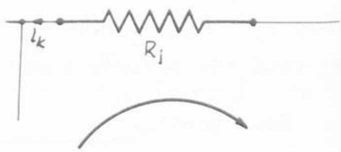


σχ. 53γ

Είς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 52 εἶναι: $V_3 = R_3 I_3$ θετική διά τόν βρόχον ΑΔΕΖΑ καί ἀρνητική διά τόν ΑΒΓΔΑ.



σχ. 55α



σχ. 55β

Συνοψίζοντες ἔχομεν διά τό παράδειγμά μας:

βρόχος ΑΒΓΔΑ: $-E_2 = -I_2 R_2 - I_3 R_3$

" ΑΔΕΖΑ: $E_1 = -I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_1 R_4$

" ΒΓΕΖΒ: $E_1 - E_2 = -I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4$

6. μέθοδοι ἐπιλύσεως κυκλωμάτων Σ.Ρ.

Κατωτέρω ἀναπτύσσονται εἰδικαί μέθοδοι ἐπιλύσεως κυκλώματος Σ.Ρ.

'Εξ ὅλων τῶν δυνατῶν μεθόδων ἀναφέρονται μετά παραδειγμάτων αἱ κυριώτεραι καί περισσότερον προσιταί εἰς τόν ὑποψήφιον σπουδαστήν τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, πρός τόν ὁποῖον κυρίως ἀπευθύνεται τό παρόν.

Μεταξύ τῶν μεθόδων αὐτῶν περιλαμβάνονται:

Ἡ μέθοδος διά τῶν ρευμάτων τῶν βρόχων (Maxwell)

Ἡ μέθοδος τῆς ἐπαλληλίας (Helmoltz)

6.1. μέθοδος ρευμάτων (kirchhoff)

● Ἡ μέθοδος αὕτη βασίζεται εἰς τό γεγονός ὅτι, ὁσονδήποτε πολύπλοκον καί ἄν εἶναι ἕν ἠλεκτρικόν κύκλωμα, δι'ἐφαρμογῆς τῶν ἐξισώσεων Kirchhoff, δύνανται νά γραφοῦν ἐξισώσεις τόσαι, ὅσαι ἀπαιτοῦνται διά τόν προσδιορισμόν τῶν ρευμάτων ὅλων τῶν κλάδων.

Ἐάν μέ κ παρασταθῇ ὁ ἀριθμός τῶν κόμβων ἑνός κυκλώματος καί μέ λ ὁ ἀριθμός τῶν κλάδων του, ὑπάρχουν πάντοτε κ - 1 κόμβοι ἀπό τούς ὁποίους, δι'ἐφαρμογῆς τῆς ΣΙ = 0, θά λάβωμεν κ - 1 ἀνεξαρτήτους ἐξισώσεις καί λ - κ + 1 βρόχοι, ἀπό τούς ὁποίους, δι'ἐφαρμογῆς τῆς ΣΕ = ΣIR θά λάβωμεν λ - κ + 1 ἀνεξαρτήτους ἀκόμη ἐξισώσεις.

Ὥστε τελικῶς νά ἔχωμεν:

$$(\kappa - 1) + (\lambda - \kappa + 1) = \lambda$$

ἐξισώσεις, ἰσαρίθμους πρός τόν ἀριθμόν τῶν ρευμάτων τοῦ κυκλώματος.

Ἡ σειρά ἐργασίας κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἑξῆς:

α. Ἀναγνωρίζομεν κόμβους, κλάδους καί βρόχους τοῦ κυκλώματος.

β. Καθορίζομεν αὐθαιρέτως φοράς ἀγνώστων ρευμάτων εἰς τούς διαφόρους κλάδους.

γ. Καθορίζομεν αύθαιρέτως, θετικήν φοράν διαγραφής τῶν βρόχων.

δ. Δι'έφαρμογῆς τῆς $\Sigma I = 0$ είς $\kappa - 1$ κόμβους λαμβάνομεν καταλλήλως, ίσαρίθμους, γραμμικῶς άνεξαρτήτους, έξισώσεις.

ε. Δι'έφαρμογῆς τῆς $\Sigma E = \Sigma IR$ είς $\lambda - \kappa + 1$ βρόχους* λαμβάνομεν ίσαρίθμους γραμ. άνεξαρτήτους έξισώσεις.

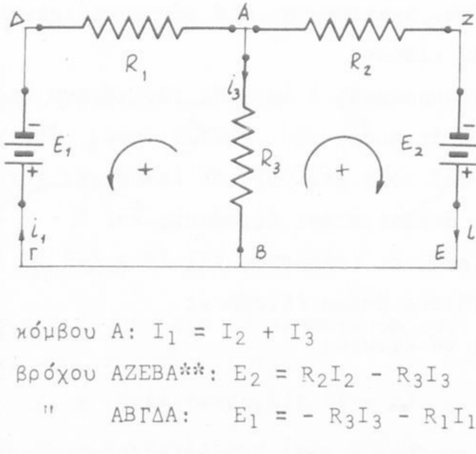
στ. 'Επιλύομεν τό προκῦπτον σύστημα.

Νά ἐπιλυθῇ τό κύκλωμα τοῦ σχ. 56.

Δίδονται $E_1 = 10V$, $E_2 = 20V$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ καί $R_3 = 5\ \Omega$.

$k = 2$

$\lambda = 3$



σχ. 56

'Εκ τοῦ κόμβου Α: $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΖΕΒΑ**: $E_2 = R_2I_2 - R_3I_3$ (2)

" " " ΑΒΓΔΑ: $E_1 = -R_3I_3 - R_1I_1$ (3)

Παρατηρήσεις:

* Παρατήρησις: Οί $\lambda - \kappa + 1$ βρόχοι πρέπει:

I. Νά περιέχουν ὅλας τάς πηγάς.

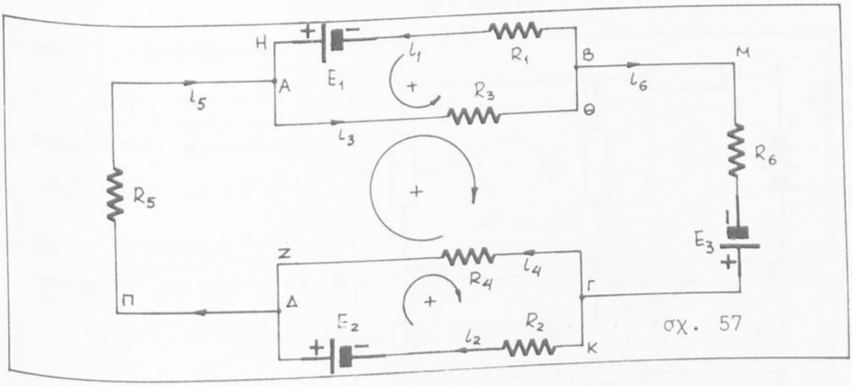
II. Νά περιέχουν ἕκαστος τούλάχιστον ἕνα νέον κλάδον.

**Τούς βρόχους ΑΒΓΔΑ καί ΑΖΕΒΑ οί όποῖοι έν τῷ σχήματι περικλείονται άπό κλάδους άνήκοντας είς τό περίγραμμά των καί μόνον, όνομάζομεν τοῦ λοιποῦ "άπλούς". 'Εξ αύτῶν προκύπτουν πάντοτε έξισώσεις τῆς μορφῆς ΣΕ=ΣΙR, γραμμικῶς άνεξάρτητοι.

'Εκ τοῦ συστήματος προκύπτει:

$$I_1 = -0{,}4\ A^*$$
$$I_2 = 1{,}2\ A$$
$$I_3 = -1{,}6\ A$$

☆ Νά ἐπιλυθῇ τό κύκλωμα τοῦ σχ. 57 .



σχ. 57

Δίδονται: $E_1 = 8V$, $E_2 = 16V$, $E_3 = 12V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 2\Omega$ καί $R_6 = 4\Omega$.

"Εχομεν $\kappa = 4$ καί $\lambda = 6$

'Εκ τοῦ κόμβου Α: $I_3 = I_1 + I_5$ (1)

" " " Β: $I_3 = I_6 + I_1$ (2)

" " " Γ: $I_6 = I_4 + I_2$ (3)

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΗΒΘΑ : $E_1 = I_1R_1 + I_3R_3$ (4)

" " " ΔΖΓΚΔ : $E_2 = I_2R_2 - I_4R_4$ (5)

" " "ΑΘΒΜΓΖΔΠΑ: $E_3 = I_4R_4 + I_5R_5 + I_3R_3 + I_6R_6$ (6)

---

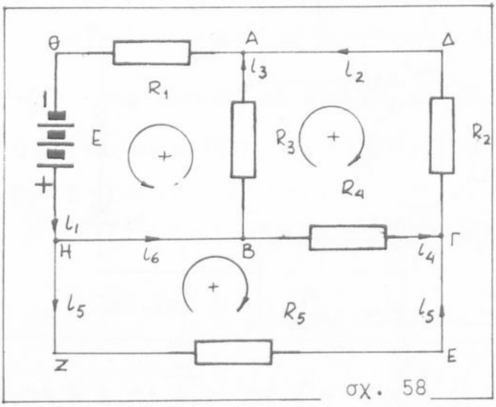
* Τό ἀρνητικόν πρόσημον τῶν I_1 καί I_3 δηλοῖ ὅτι: ἡ φορά τῶν ρευμάτων αὐτῶν εἶναι ἀντίθετος τῆς αὐθαιρέτως ληφθείσης.

'Εκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος προκύπτει:

$I_1 = 0{,}113\ A \quad I_3 = 1{,}943\ A \quad I_5 = 1{,}830\ A$

$I_2 = 2{,}698\ A \quad I_4 = -0{,}868\ A \quad I_6 = 1{,}830\ A$

Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 58 δίδονται αἱ ἀντιστάσεις καί τό ρεῦμα τό ὁποῖον διαρρέει τήν R_1.



σχ. 58

α) 'Υπολογίσατε τήν ΗΕΔ Ε τῆς πηγῆς. 'Η ἐσωτερική ἀντίστασις τῆς πηγῆς εἶναι ἀμελητέα.

β) Τό ρεῦμα πού διαρρέει ἕκαστον κλάδον.

"Εχομεν κ = 4 λ = 6

'Εκ τοῦ κόμβου Β: $I_6 = I_3 + I_4$ (1)

" " " Γ: $I_4 + I_5 = I_2$ (2)

'Εκ τοῦ κόβμου Η*: $I_1 = I_6 + I_5$ (3)

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΒΗθΑ: $E = I_3R_3 + I_1R_1$ (4)

" " " ΑΒΓΔΑ: $0 = I_3R_3 - I_2R_2 - I_4R_4$ (5)

" " " ΗΓΕΖΗ: $0 = I_4R_4 - I_5R_5$ (6)

'Εκ τῆς (6) ➤ $I_5 = I_4 \cdot \frac{R_4}{R_5}$

" " (2) ➤ $I_2 = I_4 \cdot (1 + \frac{R_4}{R_5})$

* Παρατήρησις: Ἦτο δυνατόν νά θεωρηθοῦν τά σημεῖα Β καί Η ὡς ἕν, ὁπότε θά περιωρίζετο ὁ ἀριθμός τῶν ἀγνώστων

'Εκ τῆς (5) ► $I_3 = \dfrac{I_4 (R_2R_5 + R_2R_4 + R_4R_5)}{R_3R_5}$

" " (1) ► $I_1 = \dfrac{R_3R_5+R_3R_4+R_2R_5+R_2R_4+R_4R_5}{R_3R_5} I_4$

" " (3) ► $I_6 = I_4 \cdot \dfrac{R_2R_5 + R_2R_4 + R_4R_5 + R_3R_5}{R_3R_5}$

Τέλος ἐκ τῆς (4)

$$E = \frac{I_4}{R_3R_5}(R_1R_2R_5 + R_1R_3R_5 + R_1R_4R_5 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_3R_2R_5 + R_3R_4R_5)$$

● Διερεύνησις

α. Ρεύματα: Ἄν $I_j > 0$. Ἡ φορά τοῦ ρεύματος I_j συμπίπτει μέ τήν αὐθαιρέτως ληφθεῖσαν.
Ἄν $I_j < 0$. Ἡ φορά τοῦ ρεύματος I_j εἶναι ἀντίθετος τῆς ληφθείσης αὐθαιρέτως.

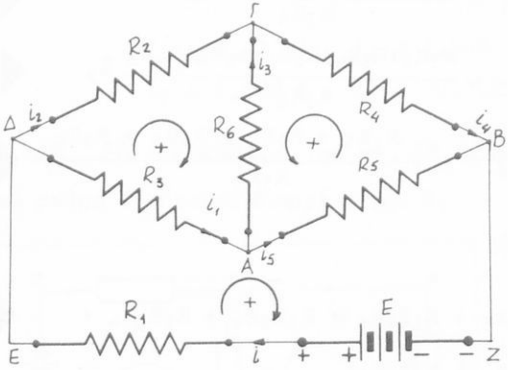
β. ΗΕΔ : Ἄν $E_j > 0$. Ἡ πηγή ἔχει τήν σχεδιασθεῖσαν αὐθαιρέτως πολικότητα*.
Ἄν $E_j < 0$. Ἡ πηγή ἔχει, τήν ἀντίθετον τῆς αὐθαιρέτου, πολικότητα.

γ. Ἀντιστάσεις: Αἱ ὠμικαί ἀντιστάσεις δικαιολογοῦν μόνον θετικάς τιμάς.

---

* Παρατήρησις: Ἀναφερόμεθα εἰς τάς περιπτώσεις προσδιορισμοῦ ΗΕΔ πηγῆς, τῆς ὁποίας εἶναι ἄγνωστος καί ἡ θέσις τῶν πόλων.

✡ Νά ἐπιλυθῆ τό κύκλωμα τοῦ σχ. 59.



σχ. 59

κ = 4 καί

λ = 6

Ἐκ τοῦ βρόχου	ΑΒΓΑ	: $I_5R_5 - I_4R_4 - I_3R_6 = 0$	(1)
" " "	ΑΔΓΑ	: $I_2R_2 - I_3R_6 - I_1R_3 = 0$	(2)
" " "	ΑΒΓΔΑ	: $I_4R_4 + I_2R_2 - I_5R_5 - I_1R_3 = 0$	(3)
" " "	ΑΒΖΕΔΑ	: $E = IR_1 + I_1R_3 + I_5R_5$	(4)
" " "	ΑΒΖΕΔΓΑ	: $E = IR_1 + I_2R_2 - I_3R_6 + I_5R_5$	(5)
" " "	ΔΑΓΒΖΕΔ	: $E = IR_1 + I_1R_3 + I_3R_6 + I_4R_4$	(6)
" " "	ΔΓΒΖΕΔ	: $E = IR_1 + I_2R_2 + I_4R_4$	(7)

Παρατηρῶ ὅτι: ἄν ἀπό (2) ἀφαιρεθῆ ἡ (1) προκύπτει ἡ (3) δηλ. αἱ (1), (2) καί (3) δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι. Ὁμοίως ἄν εἰς (7) προστεθῆ ἡ (3) προκύπτει ἡ (5) κ.ο.κ.

Διά τοῦ παραδείγματος δικαιολογεῖται ἡ εἰσαγωγή καί ἡ χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ "ἁπλοῦ βρόχου".

Εἰς τό παράδειγμά μας ἁπλοῖ βρόχοι εἶναι οἱ ΑΒΓΑ, ΑΓΔΑ, ΑΒΖΕΔΑ ἀπό τούς ὁποίους ἐλάβαμεν τάς (1), (2) καί (4).

Ἐκ τοῦ κόμβου	Γ: $I_2 + I_3 = I_4$	(8)
" " "	A: $I_1 = I_5 + I_3$	(9)
" " "	B: $I = I_5 + I_4$	(10)

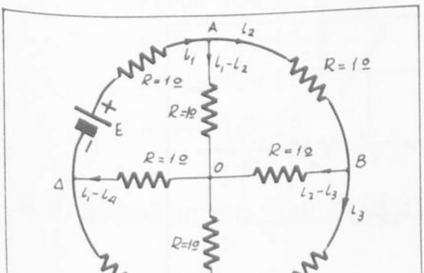
'Εκ τῶν (1), (2), (4), (8), (9) καί (10) ὑπολογίζονται τά: I, I_1, I_2, I_3, I_4 καί I_5.

παρατήρησις ἐπὶ τῆς μεθόδου τῶν ρευμάτων

Εἰς μερικάς περιπτώσεις καί κυρίως ὅταν τό πρός ἐπίλυσιν πρόβλημα περιέχει μίαν μόνον πηγήν, δυνάμεθα νά περιορίσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν ἐξισώσεων δι'ἀπ'εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος $\Sigma I = 0$, τοῦ Kirchhoff. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον ὁ ἀριθμός τῶν ἐξισώσεων θά εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμόν τῶν ἁπλῶν βρόχων τοῦ κυκλώματος.

Ἔστω τό ἀκόλουθον παράδειγμα.

☆ Κυκλικόν σύρμα ἔχει ἀντίστασιν 4Ω. Τά σημεῖα Α, Β, Γ καί Δ χωρίζουν αὐτό εἰς τέσσαρα ἴσα τμήματα. Συνδέομεν τά Α, Γ καθώς καί τά Β, Δ δι'ἀγωγῶν ἀντιστάσεως 2Ω συνδεομένων κατά τό μέσον των Ο. Διακόπτομεν τήν συνέχειαν εἰς τι σημεῖον μεταξύ Α καί Δ παρεμβάλλοντες πηγήν ΗΕΔ 30V. Ποῖα τά ρεύματα εἰς τούς διαφόρους κλάδους;



σχ. 60

Δι'ἀπ'εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ $\Sigma I=0$ ἔχομεν διά τούς διαφόρους κλάδους τά ἑξῆς ρεύματα ἀντιστοίχως:

κλάδος ΑΒ	ρεῦμα I_2
κλάδος ΒΓ	ρεῦμα I_3
κλάδος ΟΒ	ρεῦμα I_2-I_3
κλάδος ΓΔ	ρεῦμα I_4
κλάδος ΟΓ	ρεῦμα I_3-I_4
κλάδος ΔΑ	ρεῦμα I_1
κλάδος ΟΔ	ρεῦμα I_1-I_4
κλάδος ΟΑ	ρεῦμα I_1-I_2

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΒΟΑ $I_2 + (I_2 - I_3) - (I_1 - I_2) = 0$

" " " ΒΓΟΒ $I_3 + (I_3 - I_4) - (I_2 - I_3) = 0$

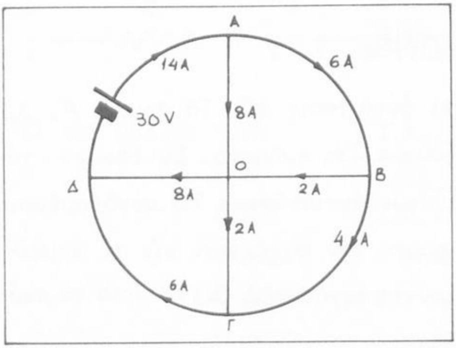
" " " ΓΔΟΓ $I_4 - (I_1 - I_4) - (I_3 - I_4) = 0$

" " " ΔΑΟΔ $E = I_1 \cdot R + (I_1 - I_2)R + (I_1 - I_4)R$

μέ $R = 1\Omega$ καί $E = 30$ V

'Εκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος προκύπτει:

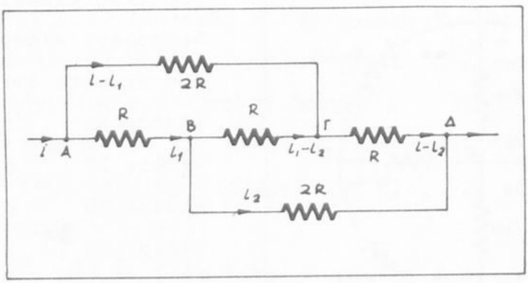
$I_1 = 14$ A, $I_2 = 6$A, $I_3 = 4$A, $I_4 = 6$A



Εἰς τό παραπλεύρως σχῆμα φαίνονται τά ρεύματα εἰς τούς διαφόρους κλάδους

σχ. 61

Δίδεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος. Ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ εἶναι ἴση πρός R ἐνῷ ἑκάστη τῶν ΑΓ καί ΒΔ εἶναι 2R.



σχ. 62

Νά εὑρεθῇ σχέσις μεταξύ τῶν ρευμάτων πού διαρρέουν ἑκάστην ἀντίστασιν καί τοῦ ὁλικοῦ Ι.

Δι'ἐφαρμογῆς τῆς παρατηρήσεως ἐπί τῆς μεθόδου τῶν ρευμάτων, λαμβάνομεν τήν ἀκόλουθον ἀντιστοιχίαν ἀγωγῶν - ρευμάτων.

ἀγωγός ΑΒ	ρεῦμα I_1
ἀγωγός ΑΓ	ρεῦμα $I - I_1$
ἀγωγός ΒΔ	ρεῦμα I_2
ἀγωγός ΒΓ	ρεῦμα $I_1 - I_2$
ἀγωγός ΓΔ	ρεῦμα $I - I_2$

Δι'ἐφαρμογῆς, ἐν συνεχείᾳ, τοῦ ΣΕ = ΣΙR λαμβάνομεν:

βρόχος ΑΒΓΑ

$$I_1R + (I_1 - I_2)R - (I - I_1)2R = 0 \Rightarrow 4I_1 - I_2 = 2I \quad (1)$$

βρόχος ΒΓΔΑ

$$(I_1 - I_2)R + (I - I_2)R - I_2 2R = 0 \Rightarrow 4I_2 = I_1 + I \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$I_1 = 0{,}6 \cdot I$$

$$I_2 = 0{,}4 \cdot I$$

ἄρα:

ρεῦμα τοῦ ΑΒ	0,6 I
ρεῦμα τοῦ ΑΓ	0,4 I
ρεῦμα τοῦ ΒΓ	0,2 I
ρεῦμα τοῦ ΒΔ	0,4 I
ρεῦμα τοῦ ΓΔ	0,6 I

6.2. μέθοδος διά τῶν ρευμάτων τῶν βρόχων

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται κυρίως διά τόν ὑπολογισμόν ρευμάτων καί προσφέρεται ἰδιαίτερα εἰς τήν θεωρητικήν ἔρευναν τῶν κυκλωμάτων.

'Ανεφέρθη ὅτι εἰς κάθε κύκλωμα ὑπάρχουν πάντοτε λ - κ + + 1 βρόχοι ἐκ τῶν ὁποίων δι'ἐφαρμογῆς τῆς ΣΕ = ΣIR λαμβάνονται ἰσάριθμοι, γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων, ἐξισώσεις.

Τούς βρόχους αὐτούς ὀνομάζομεν :"'Ανεξαρτήτους"*.

Διακρίνομεν δύο κατηγορίας κυκλωμάτων: κυκλώματα "ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων" ἤ "ἐπίπεδα" καί "κυκλώματα μετά διασταυρουμένων κλάδων".

Ἡ πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει κυκλώματα δυνάμενα νά σχεδιασθοῦν ἐπί ἐπιπέδου οὕτως ὥστε οὐδείς κλάδος αὐτῶν νά τέμνῃ ἄλλον.

Καί ἐνῷ διά τά κυκλώματα τῆς πρώτης κατηγορίας ἡ ἀνεύρεσις τῶν ἀνεξαρτήτων βρόχων εἶναι εὔκολος,διά τά κυκλώματα τῆς δευτέρας εἶναι δυσχερής, ἀπαιτοῦσα, πρός τοῦτο, σχετικήν πεῖραν.

Διά τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου πρέπει:

α. Νά ἀναγνωρίσωμεν καί νά ἀριθμήσωμεν τούς ἀνεξαρτήτους βρόχους** διά τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 ... η.

β. Νά καθορίσωμεν δι'ἕκαστον ἀνεξάρτητον βρόχον ἕν ὑποθετικόν ρεῦμα J_λ εἰς τό ὁποῖον νά προσδόσωμεν μίαν αὐθαίρετον φοράν, ἔστω τήν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

γ. Νά ἐφαρμόσωμεν εἰς ἕκαστον ἀνεξάρτητον βρόχον τόν κανόνα ΣΕ = ΣIR, οὕτως ὥστε νά λάβωμεν λ - κ + 1 ἐξισώσεις.***

---

* Παρατήρησις: Οἱ "ἁπλοί βρόχοι" εἶναι ἀνεξάρτητοι. Κάθε ἀνεξάρτητος βρόχος, εἰς τά "ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων" κυκλώματα, δύνανται νά γίνῃ ἁπλός.

** Εἰς τά κυκλώματα ἄνευ διασταυρουμένων κλάδων σκόπιμον εἶναι οἱ ἀνεξάρτητοι βρόχοι νά ἐκλέγωνται οὕτωςὥστε ἕκαστος τῶν κλάδων νά ἀνήκῃ εἰς ἕνα μόνον βρόχον ἤ νά εἶναι κοινός εἰς δύο τό πολύ βρόχους.

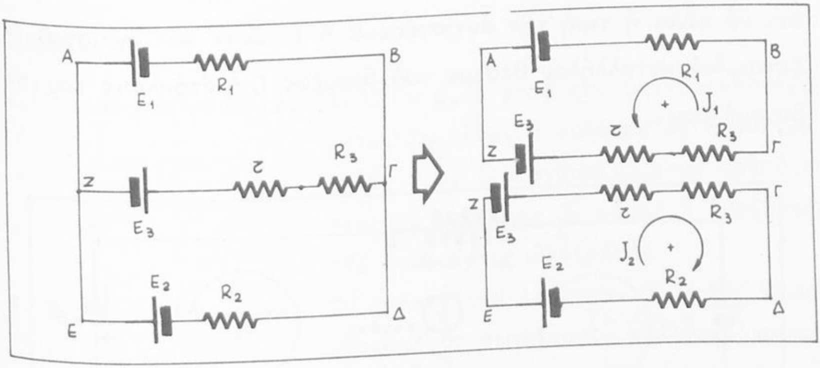
*** Παρατήρησις: Κλάδοι ἀνήκοντες εἰς δύο βρόχους διαρρέονται ὑπό δύο ὑποθετικῶν ρευμάτων J_λ καί J_κ.

'Εάν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κλάδου, ἡ πτῶσις τάσεως εἶναι εἰς αὐτόν ἀλγεβρικῶς: $RJ_\lambda + RJ_\kappa$

δ. Νά ἐπιλύσωμεν τό σύστημα καί νά προβῶμεν εἰς διόρθωσιν τῆς φορᾶς τῶν ρευμάτων.

Τό πλεονέκτημα τῆς μεθόδου εἶναι ὅτι: ἀπαιτοῦνται κ - 1 ὀλιγώτεραι, τῆς προηγουμένης μεθόδου, ἐξισώσεις.

Νά εὑρεθοῦν τά ρεύματα εἰς τούς κλάδους τοῦ κυκλώματος σχ. 63. Δίδονται $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$, $r = 2\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $E_1 = E_2 = 20V$, $E_3 = 10\ V$.



σχ. 63

Ἐκ τοῦ ἀνεξαρτήτου βρόχου ΑΒΓΖΑ λαμβάνομεν:

$$E_1 + E_3 = J_1(R_1 + R_3 + r) + J_2(R_3 + r) \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ἀνεξαρτήτου βρόχου ΓΔΕΖΓ λαμβάνομεν:

$$E_3 + E_2 = J_2(R_2 + r + R_3) + J_1(R_3 + r) \qquad (2)$$

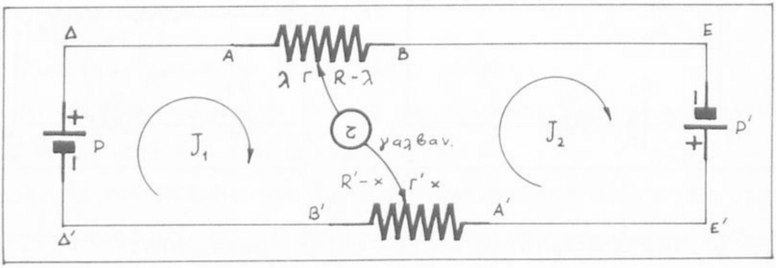
Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως προκύπτει:

$$J_1 = 1{,}5\ A \quad J_2 = 1{,}5\ A$$

Ρεῖθρον	ὑποθετικά ρεύματα		πραγματικά ρεύματα εἰς Α	
ΑΒ	J_1		$J_1 = 1{,}5$	←
ΖΓ	J_1	J_2	$J_1 + J_2 = 3$	→
ΕΔ	J_2		$J_2 = 1{,}5$	←

☆ Κύκλωμα περιλαμβάνει δύο στήλας P καί P΄, συνδεσμολογημένας ἐν σειρᾷ, τῶν ὁποίων αἱ ΗΕΔ εἶναι 2V καί 4V ἀντιστοίχως καί τῶν ὁποίων αἱ ἀντιστάσεις εἶναι ἀμελητέαι. Ἐπί πλέον τό κύκλωμα περιλαμβάνει δύο ἀντιστάσεις ΑΒ = 2000 Ω καί Α΄Β΄ = 4000 Ω.

Δύο δρομεῖς Γ καί Γ΄, συνδεδεμένοι πρός γαλβανόμετρον, δύνανται νά μετατοπισθοῦν ἐπί τῶν ἀντιστάσεων τούτων. Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως Α΄Γ΄ ὥστε νά ἀντισταθμίζεται, διά καταλλήλου θέσεως τοῦ δρομέως Γ, ἡ ἀπόκλισις τοῦ γαλβανομέτρου.



σχ. 64

θέτω: $R_{A\Gamma} = \lambda$ ➤ $R_{\Gamma B} = R - \lambda$

$R_{\Gamma' A'} = x$ ➤ $R_{B'\Gamma'} = R' - x$

$R_{\gamma\alpha\lambda.} = r$

Ἐκ τοῦ ἀνεξαρτήτου βρόχου ΓΓ'Δ'ΔΓ :

$$P = J_1(\lambda + r + R' - x) - J_2 r \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ἀνεξαρτήτου βρόχου ΓΕΕ'Γ'Γ:

$$P' = J_2(x + r + R - \lambda) - J_1 r \qquad (2)$$

Κατά τήν ἐκφώνησιν :

$$J_1 = J_2 \tag{3}$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καί (3) :

$$\frac{P}{P'} = \frac{\lambda + R' - x}{x + R - \lambda} \Rightarrow x = \frac{P'(\lambda+R') + P(\lambda-R)}{P + P'} \tag{4}$$

Ἐκ τῆς (4) διά $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ $x = 2000\ \Omega$

" " " $\lambda = 2000$ $\Rightarrow$ $x = 4000\ \Omega$

ὥστε $2000 \leq x \leq 4000$

Διερεύνησις

α. Ὑποθετικά ρεύματα. Ἄν $J_\lambda > 0$, ἡ φορά τοῦ ὑποθετικοῦ ρεύματος J_λ εἶναι ἡ αὐθαιρέτως ληφθεῖσα.
Ἄν $J_\lambda > 0$, ἡ πραγματική φορά τοῦ ὑποθετικοῦ ρεύματος J_λ εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς ληφθείσης αὐθαιρέτως.

β. Πραγματικά ρεύματα. Τά πραγματικά ρεύματα, τά ὁποῖα διαρρέουν τούς διαφόρους κλάδους, προκύπτουν δι'ἀλγεβρικῆς ἀθροίσεως τῶν ὑποθετικῶν, τῶν διαρρεόντων αὐτούς.
Ἡ φορά τῶν πραγματικῶν ρευμάτων καθορίζεται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος.

6.3. μέθοδος τῶν ἰσοδυνάμων κυκλωμάτων

Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται, κυρίως, εἰς κυκλώματα μιᾶς ΗΕΔ.

Διά τῆς μεθόδου αὐτῆς, ἐφ'ὅσον δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν οἱ τύποι:

$$R_o = R_1 + R_2 + \ldots, \quad \frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$

χωρίς είδικούς μετασχηματισμούς, έπιτυγχάνεται σύντομος λύσις.

'Η μέθοδος άπαιτεῖ:

α. 'Αναγνώρισιν τοῦ τρόπου συνδέσεως τῶν άντιστάσεων τοῦ κυκλώματος μεταξύ των καί κατάταξιν αὐτῶν είς "όμάδας" άναλόγως τοῦ τρόπου συνδέσεως.

β. 'Αντικατάστασιν έκάστης "όμάδος" διά τῆς "ίσοδυνάμου" άντιστάσεως*.

γ. 'Επανάληψιν τῆς προηγουμένης έργασίας, μέχρις ὅτου τό δοθέν κύκλωμα λάβη τήν άπλουστέραν δυνατήν μορφήν.

Συνιστᾶται ή κατασκευή νέου σχήματος διά κάθε μετασχηματισμόν.

δ. 'Εφαρμογήν τοῦ νόμου τοῦ Ohm (ἤ τοῦ Kirchhoff) διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ρευμάτων καί τῶν διαφορῶν δυναμικοῦ είς τούς διαφόρους κλάδους.

'Ο ὑπολογισμός γίνεται,έπαγωγικῶς,έκ τοῦ τελικοῦ πρός τό άρχικόν κύκλωμα.

☆ Τρεῖς ἀντιστάσεις R_1 = 10 Ω, R_2 = 20 Ω καί R_3= 60 Ω συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καί τό προκῦπτον σύστημα συνδέεται ἐν σειρᾷ πρός ἄλλην ἀντίστασιν R_4 = 16 Ω. 'Ολόκληρον τό σύστημα τροφοδοτεῖται ὑπό πηγῆς ΗΕΔ = 220 V, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως σχ. 65. Ζητοῦνται:

α) 'Η ὁλική ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τό κύκλωμα.

β) 'Η ἔντασις εἰς ἑκάστην ἀντίστασιν.

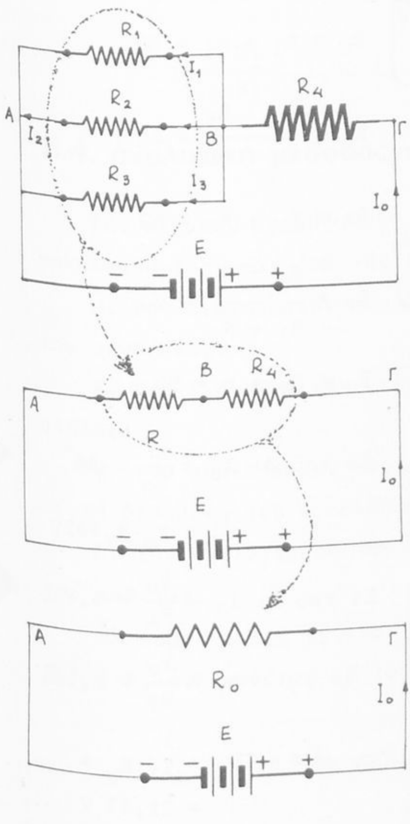
γ) 'Η πτῶσις τάσεως ἐπί τοῦ συστήματος τῶν R_1, R_2 καί R_3

---

*Παρατήρησις: Εἶναι δυνατόν αἱ "όμάδες" νά διαμορφωθοῦν κατόπιν ὡρισμένων μετασχηματισμῶν π.χ. τριγώνου είς άστέρα.

καί ἐπί τῆς R_4.

Διά τόν εἰκονιζόμενον (σχῆμα 65) μετασχηματισμόν:



σχ. 65

$$R = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} = 6\ \Omega$$

$$R_o = R + R_4 = 22\ \Omega,$$

$$I_o = \frac{E}{R_o} = 10\ A$$

$$V_{B\Gamma} = I_o \cdot R_4 = 160\ V,$$

$$V_{AB} = I_o \cdot R = 60\ V$$

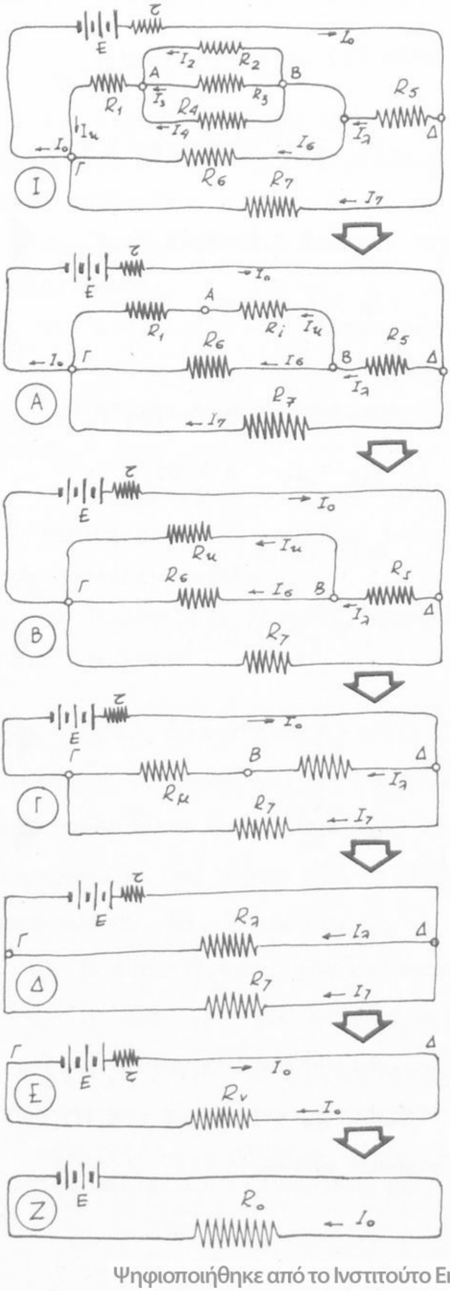
ἀλλά τότε:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = 6\ A,$$

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = 3\ A,$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = 1\ A$$

Δίδεται τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 66, μέ $E = 40V$, $R_1 = R_5 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 9\Omega$, $R_6 = 20\Omega$, $R_7 = 12\Omega$ καί $r = 1\Omega$. Νά ὑπολογισθοῦν τά ρεύματα τῶν διαφόρων κλάδων.



$$R_i = \frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3+R_3R_4+R_2R_4} = 3\Omega$$

$$R_u = R_1 + R_i = 5\Omega$$

$$R_\mu = \frac{R_u \cdot R_6}{R_u + R_6} = 4\Omega$$

$$R_\lambda = R_\mu + R_5 = 6\Omega$$

$$R_v = \frac{R_\lambda \cdot R_7}{R_\lambda + R_7} = 4\Omega$$

$$R_o = R_v + r = 5\Omega$$

Ἐκ τοῦ Ζ: $I_o = \frac{E}{R_o} = 8A$

$$V_v = I_o \cdot R_v = 32V$$

Ἐκ τοῦ Δ: $I_\lambda = \frac{V_v}{R_\lambda} = 5,33A$

$$I_7 = \frac{V_v}{R_7} = 2,66A$$

Ἐκ τοῦ Γ: $V_\mu = I_\lambda \cdot R_\mu = 21,33\ V$

Ἐκ τοῦ Β: $I_6 = \frac{V_\mu}{R_6} = 1,07\ A$

$$I_u = \frac{V_\mu}{R_u} = 4,26$$

σχ. 66

'Εκ τοῦ Α: $V_i = I_u \cdot R_1 = 12{,}8$ V

'Εκ τοῦ δοθέντος κυκλώματος:

$$I_2 = \frac{V_i}{R_2} = 1{,}42\ A,\ I_3 = 1{,}42\ A,\quad I_4 = 1{,}42\ A$$

6.4. ἀναλυτική μέθοδος

Τήν μέθοδον ἐφαρμόσαμεν ἐπιτυχῶς εἰς τούς πυκνωτάς. 'Επαναλαμβάνομεν καί ἐδῶ τήν ἰδίαν ἐργασίαν, ἤτοι:

α. Τόν διαχωρισμόν τῶν ἀντιστάσεων εἰς ὁμάδας κατά τρόπον συνδέσεως.

β. Τήν διάταξιν τῶν στοιχείων R, I, V κατά σειράς καί στήλας.

γ. Τήν συμπλήρωσιν τῶν προκυπτόντων ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος.

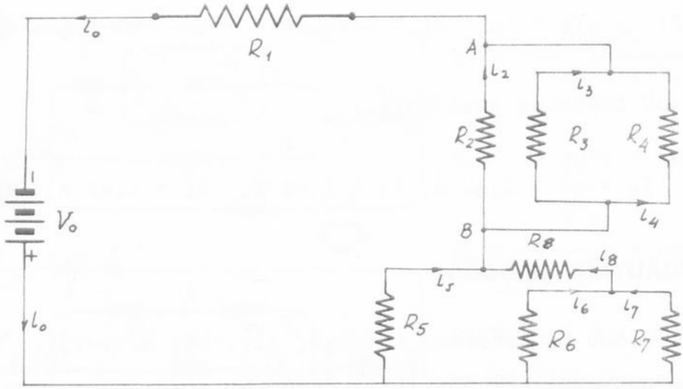
δ. Τόν ὑπολογισμόν τῶν ἀγνώστων στοιχείων, ὁριζοντίως καί καθέτως.

'Η συμπλήρωσις γίνεται ὁριζοντίως μέ τόν νόμον τοῦ Ohm $V = I \cdot R$, ἐνῷ καθέτως μέ τούς τύπους:

$$R_o = R_1 + R_2 + \ldots,\quad \frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$$

'Η ἐπιτυγχανομένη ἐπίλυσις εἶναι τόσον σύντομος ὅσον καί κομψή.

☆ Νά ἐπιλυθῇ τό εἰκονιζόμενον κύκλωμα μέ τάς ἀκολούθους τιμάς: $V_o = 180V$, $I_4 = 5$ A, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $V_{AB} = 60V$, $I_5 = 10A$, $R_5 = 6\ \Omega$, $R_8 = 1\Omega$ καί $R_7 = 6\Omega$



σχ. 67

Διαχωρισμός ὁμάδων:

1. R_2, R_3 καί R_4 ἐν παραλλήλῳ μέ ἰσοδύναμον R'
2. R_6, R_7 ἐν παραλλήλῳ μέ ἰσοδύναμον R"
3. R" καί R_8 ἐν σειρᾷ μέ ἰσοδύναμον R*
4. R* καί R_5 ἐν παραλλήλῳ, μέ ἰσοδύναμον R**
5. R_1, R' καί R** ἐν σειρᾷ μέ ἰσοδύναμον R_o

Πίνακες στοιχείων καί συμπλήρωσις.

Διά τήν συμπλήρωσιν τῶν πινάκων τονίζομεν ὅτι: εἰς τάς ἐν σειρᾷ συνδέσεις ἀντιστάσεων ἔχομεν κοινήν ἔντασιν ρεύματος καί προστιθεμένην τάσιν, ἐνῷ εἰς τάς ἐν παραλλήλῳ κοινήν τάσιν καί προστιθεμένην ἔντασιν (κανών kirchhoff).

Τό κοινόν μέγεθος δηλοῦται διά βέλους. Εἰς τήν στήλην τοῦ μή κοινοῦ μεγέθους τό ὁλικόν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω.

εἰς Ω	εἰς V	εἰς A
R_2 = 4	V_2 = 60	I_2 = 15
R_3 = 6	V_3 = 60	I_3 = 10
R_4 = 12	V_4 = 60	I_4 = 5
R' = 2	V' = 60	I' = 30

εἰς Ω	εἰς V	εἰς A
R'' = 2	V'' = 40	I'' = 20
R_8 = 1	V_8 = 20	I_8 = 20
R* = 3	V* = 60	I* = 20

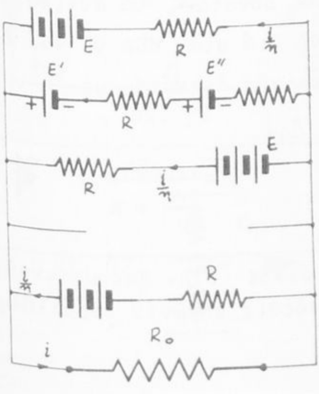
εἰς Ω	εἰς V	εἰς A
R_6 = 3	V_6= 40	I_6 = 13,3
R_7 = 6	V_7 = 40	I_7 = 6,7
R'' = 2	V'' = 40	I'' = 20

εἰς Ω	εἰς V	εἰς A
R* = 3	V* = 60	I* = 20
R_5 = 6	V_5 = 60	I_5 = 10
R**= 2	V**= 60	I**= 30

εἰς Ω	εἰς V	εἰς A
R_1 = 2	V_1 = 60	I_1 = 30
R' = 2	V' = 60	I' = 30
R**= 2	V**= 60	I**= 30
R_o = 6	V_o =180	I_o = 30

Δι'ὑπογραμμῆς τονίζομεν τά δεδομένα μεγέθη.

★ Παρατήρησις: Ἔστω τό κύκλωμα τοῦ σχ. 68 εἰς τό ὁποῖον ὑπάρχουν η παράλληλοι κλάδοι ἕκαστος τῶν ὁποίων περιέχει ὁλικήν ΗΕΔ E καί ἰσοδύναμον ἀντίστασιν R. Τό σύστημα τροφοδοτεῖ ἀντίστασιν R_o, μέρευμα i .



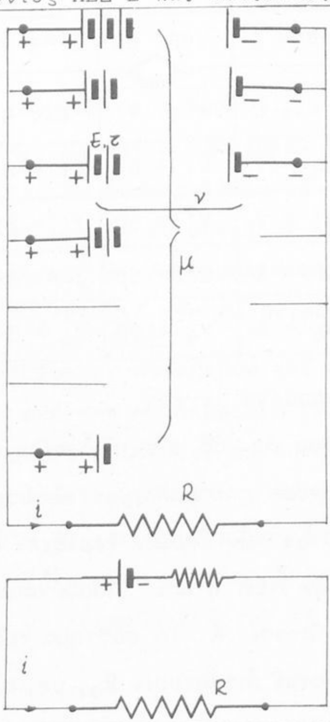
σχ. 68

Ἐκ τοῦ κανόνος τοῦ Kirchnoff προκύπτει:

$$i = \frac{E}{R_o + \frac{R}{\eta}} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) φαίνεται ὅτι: τό ρεῦμα τό ὁποῖον διαρρέει τήν R_o, δύναται νά θεωρηθῇ προερχόμενον ἐκ μιᾶς πηγῆς, ΗΕΔ Ε καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $\frac{R}{\eta}$, ἴσης πρός τήν ἰσοδύναμον τῶν η κλάδων, θεωρουμένων ἐν παραλλήλῳ.

Ὥστε, ἐν συμπεράσματι, "η παράλληλοι κλάδοι τῆς αὐτῆς ΗΕΔ καί ὁλικῆς ἀντ. R, δύνανται νά ἀντικατασταθοῦν δι' ἑνός ἔχοντος ΗΕΔ Ε καί ἀντίστασιν $\frac{R}{\eta}$ ".



σχ. 69

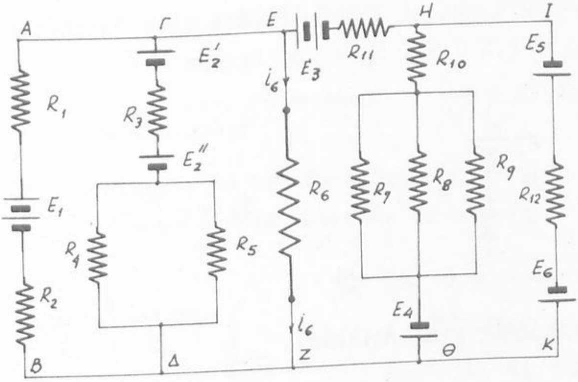
Τό σχῆμα 69 παριστᾶ μ παραλλήλους κλάδους περιέχοντας ν ἠλεκτρικά στοιχεῖα ΗΕΔ Ε καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r. Τό σύστημα τροφοδοτεῖ ἐξωτερικήν ἀντίστασιν R. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τήν R.

Ἕκαστος κλάδος ἔχει $E_{ο\lambda} = \nu E$ καί $r_{ο\lambda} = \nu r$. Τό σύστημα τῶν πηγῶν δύναται νά ἀντικατασταθῇ διά μιᾶς ΗΕΔ νΕ καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $\frac{\nu r^{*}}{\mu}$.

ἄρα

$$i = \frac{\nu E}{\frac{\nu r}{\mu} + R}$$

*Βλέπε: ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ, μαθήματα Φυσικῆς Γ.Α. Πνευματικοῦ. (ἀπόδειξις καί γενίκευσις: § Σύνδεσις πηγῶν ἐν παραλλήλῳ).



σχ. 70

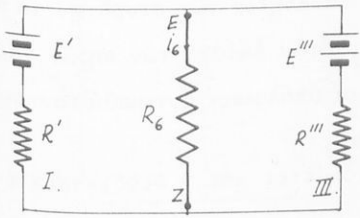
Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 70 ἔχομεν:

$R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 8{,}5\Omega$, $R_7 = R_8 = R_9 = 9\Omega$, $R_{10} = 2\Omega$, $R_{11} = 0{,}5\Omega$, $R_{12} = 5\Omega$. $E_1 = 20V$, $E_2' = E_2'' = 10V$, $E_3 = 25V$, $E_4 = 5V$, $E_5 = 3V$, $E_6 = 2V$.

Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I_6 πού διαρρέει τήν R_6. *

Παρατηρῶ ὅτι οἱ κλάδοι ΑΒ καί ΓΔ δύνανται νά ἀντικατασταθοῦν, ὑπό ἑνός, I, ἔχοντος E' = 20V καί R΄ = 3Ω. Ὁμοίως οἱ ΗΘ καί ΙΚ ἰσοδυναμοῦν πρός ἕνα κλάδον II, ἔχοντος E΄΄ = 5V καί R΄΄ = 2,5 Ω.

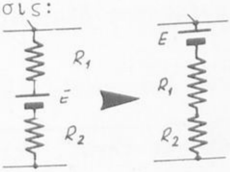
Ἀλλά ὁ II καί ὁ ΕΗ ἰσοδυναμοῦν πρός ἕνα III, ὅστις θά ἔχῃ ΗΕΔ E''' = 20 V καί R''' = 3Ω (σχῆμα 71).



σχ. 71

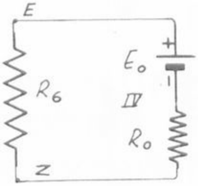
* Παρατήρησις:

σχ. 72



Αἱ ἐπί τοῦ αὐτοῦ κλάδου ἀντιστάσεις εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ.

'Αλλά τότε καί οἱ I καί III ἰσοδυναμοῦν πρός ἕνα IV ἔχοντος R_o = 1,5 Ω καί E_o = 20 (σχῆμα 73)



σχ. 73

ὁπότε τελικῶς:

$$I_6 = \frac{E_o}{R_o + R_6} = 2A$$

6.5. μέθοδος ἐπαλληλίας

'Η μέθοδος ἐφαρμόζεται εἰς περιπτώσεις κυκλωμάτων μέ περισσοτέρας τῆς μιᾶς πηγάς.

"Εἰς ἕν γραμμικόν κύκλωμα μέ περισσοτέρας τῆς μιᾶς πηγάς, τό ρεῦμα εἰς ἕκαστον κλάδον, εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς συνεργασίας ὅλων τῶν πηγῶν".

'Ισχύει, ἐν προκειμένῳ, ἡ κάτωθι πρότασις, γνωστή ὡς θεώρημα τῆς ΥΠΕΡΘΕΣΕΩΣ ἤ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ.

"Εἰς ἕν γραμμικόν δίκτυον μέ δύο ἤ περισσοτέρας πηγάς, τό ρεῦμα εἰς ἕκαστον κλάδον εἶναι· ἡ ἐπαλληλία τῶν ρευμάτων τά ὁποῖα διαρρέουν τόν κλάδον τοῦτον, ὅταν ἑκάστη τῶν πηγῶν δρᾶ μεμονωμένως εἰς τό κύκλωμα, ἐνῷ αἱ ὑπόλοιποι ἀντικαθίστανται ὑπό τῶν ἐσωτερικῶν των ἀντιστάσεων".

'Εκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει καί ἡ διαδικασία ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου:

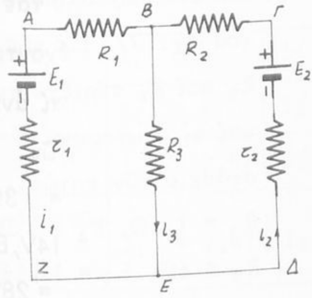
α. Τό δοθέν κύκλωμα σχεδιάζεται πάλιν, μέ μίαν μόνον πηγήν. Δηλ. θεωροῦμεν ὅτι μηδενίζονται ὅλαι αἱ ΗΕΔ πλήν μιᾶς*.

* Παρατήρησις: Αἱ παραλειπόμεναι πηγαί, μετέχουν διά τῶν ἐσωτερικῶν των ἀντιστάσεων.

β. Προσδιορίζεται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἕκαστον κλάδον.

γ. Ἐπαναλαμβάνονται αἱ ἐργασίαι α καί β δι'ὅλας τάς πηγάς.

δ. Προσδιορίζεται τό ὁλικόν ρεῦμα εἰς ἕκαστον κλάδον δι' ἐπαλληλίας, τῶν ἐν αὐτῷ, μερικῶν ρευμάτων.



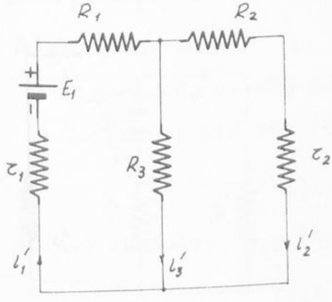
σχ. 74

☆ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 74 δίδονται:

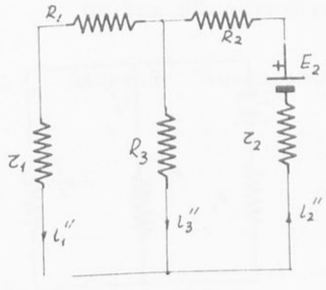
$R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $E_1 = 12$ V, $E_2 = 24$V.

Νά ἐπιλυθῇ.

Τό κύκλωμα τοῦ σχ. 74 δίδει συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω τάσχ.75καίσχ. 76



σχ. 75



σχ. 76

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ κυκλώματος,σχῆμα 75 ,προκύπτει:

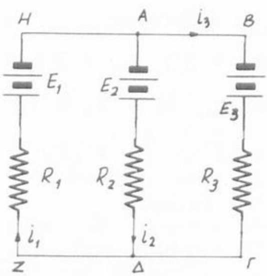
$i_1' = 2$ A $\qquad i_2' = 1$ A καί $\qquad i_3' = 1$ A

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ κυκλώματος σχ.76 προκύπτει:

$i_1'' = 2$ A $\qquad i_2'' = 4$ A $\qquad i_3'' = 2$ A

μερικά ρεύματα εἰς Α	$i_1' = 2 \uparrow$	$i_2' = 1 \downarrow$	$i_3' = 1 \downarrow$
	$i_1'' = 2 \downarrow$	$i_2'' = 4 \uparrow$	$i_3'' = 2 \downarrow$
ὁλικόν εἰς Α	$i_1 = 0$	$i_2 = 3 \uparrow$	$i_3 = 3 \downarrow$

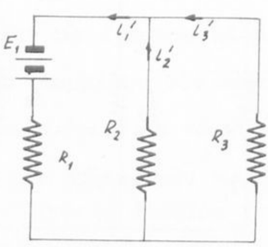
☆ Νά ἐπιλυθῇ τό κύκλωμα τοῦ σχ. 77 Εἰς τάς R_1 R_2 καί R_3 περιέχονται καί αἱ ἐσωτερικαί ἀντιστάσεις τῶν πηγῶν.



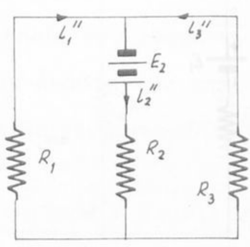
σχ. 77

$R_1 = 1,5\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $E_1 = 14V$, $E_2 = 21V$, $E_3 = 28V$.

Ἐκ τοῦ δοθέντος κυκλώματος λαμβάνομεν τά κυκλώματα τοῦ σχήματος 78 καί 79.



σχ. 78



σχ. 79

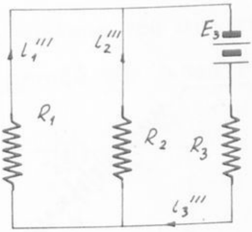
Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ σχ.78 προκύπτει:

$i_1' = 4A$, $\quad i_2' = 2,67\ A$, $\quad i_3' = 1,33\ A$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ σχ.79 προκύπτει:

$$i_1'' = 4A, \quad i_2'' = 5A, \quad i_3'' = 1A$$

σχ. 80



Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ κυκλώματος, σχ. 80, προκύπτει:

$i_1''' = 2,67$ A,

$i_2''' = 1,33$ A,

$i_3''' = 4$ A

μερικά ρεύματα εἰς A	$i_1' = 4 \downarrow$	$i_2' = 2,67 \uparrow$	$i_3' = 1,33 \uparrow$
	$i_1'' = 4 \uparrow$	$i_2'' = 5 \downarrow$	$i_3'' = 1 \uparrow$
	$i_1''' = 2,67 \uparrow$	$i_2''' = 1,33 \uparrow$	$i_3''' = 4 \downarrow$
ὁλικόν ρεῦμα εἰς A	$i_1 = 2,67 \uparrow$	$i_2 = 1 \downarrow$	$i_3 = 1,67 \downarrow$

7. ἠλεκτρική τάσις, δυναμικόν, διαγράμματα δυναμικοῦ

7.1. ἠλεκτρική τάσις

Ἡ ὑφισταμένη, μεταξύ δύο σημείων, διαφορά δυναμικοῦ $V_{1,2}$ ὑπολογίζεται διά τῆς ἐξισώσεως:

$$V_{1,2} = \Sigma_1^2 IR - \Sigma_1^2 E$$

Διά τό σύμβολον $V_{1,2}$ ἰσχύουν:

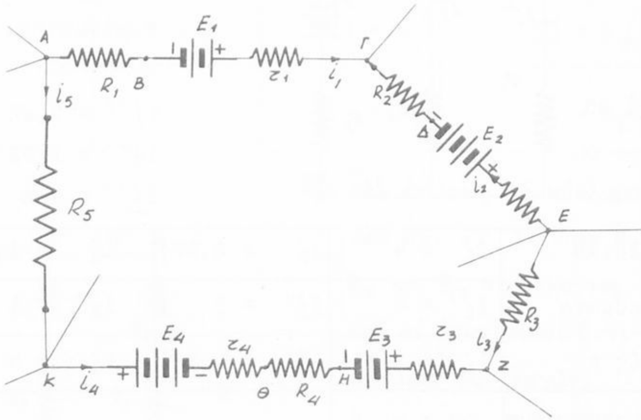
$$V_{1,2} = V_1 - V_2$$

καί $\quad V_{1,2} = - V_{2,1}$

7.2. ἀπόδειξις τῆς $V_{1,2} = \Sigma_1^2 IR - \Sigma_1^2 E$

Ἔστω τυχόν κύκλωμα σχ. 81 εἰς τό ὁποῖον ἔχομεν ὑπολογίσει τά ρεύματα εἰς ὅλους τούς κλάδους καί ὅτι θέλομεν νά προσδιορίσωμεν τήν διαφοράν δυναμικοῦ μεταξύ τῶν σημείων Α καί Η.

σχ. 81



Ἐκ τῶν ὁρισμῶν πού ἐδόσαμεν εἰς τάς βασικάς ἐννοίας προκύπτει:

$$U_A - U_B = I_1R_1$$

$$U_B - U_\Gamma = -(E_1 - I_1r_1)$$

$$U_\Gamma - U_\Delta = - I_2R_2$$

$$U_\Delta - U_E = - (E_2 + I_2r_2)$$

$$U_E - U_Z = I_3R_3$$

$$U_Z - U_H = E_3 - I_4r_3$$

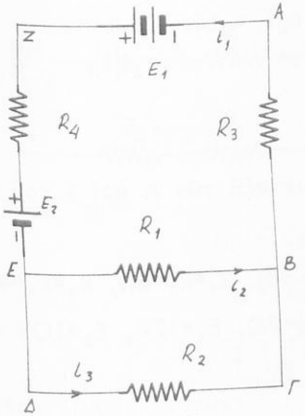
Διά προσθέσεως κατά μέλη προκύπτει:

$$U_A - U_H = I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 + I_3r_3 - I_4r_3 - (E_1 + E_2 - E_3)$$

ἤ
$$V_{A,H} = \Sigma_{AH}\ IR - \Sigma_{AH}E$$

7.3. ἐφαρμογὴ τῆς $V_{1,2} = \Sigma_1^2 IR - \Sigma_1^2 E$

Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 82 νά ὑπολογισθῇ ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν Α καί Ε. Δίδονται: $E_1 = 30V$, $E_2 = 6V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 5\Omega$.



σχ. 82

Ἐφ᾽ὅσον ζητεῖται ἡ διαφορά $V_{AE} = V_A - V_E$, θεωροῦμεν κίνησιν μεταξύ τῶν ἀναφερομένων σημείων Α καί Ε, μέ φοράν ἐκ τοῦ Α πρός τό Ε(Α → Ε), ἥτις καί λαμβάνεται ὡς ΘΕΤΙΚΗ.

Εἰς τό δοθέν παράδειγμα ἡ κίνησις γίνεται ἔστω, ἐπί τοῦ ΑΓΩΓΙΜΟΥ δρόμου ΑΖΕ. Σχῆμα 82.

* **Ρεύματα:** Ἡ ἐφαρμογή τῆς ἐξισώσεως τάσεως προϋποθέτει γνωστά τά ρεύματα εἰς ὅλους τούς μεταξύ τῶν σημείων 1 καί 2 κλάδους ἐπί τοῦ ἐπιλεγέντος δρόμου. Εἰς τό παράδειγμα τοῦ σχήματος 82 ὁ ὑπολογισμός δίδει: $i_1 = 2A$, $i_2 = 1A$, $i_3 = 1A$.

* **Πτώσεις τάσεως:** $\Sigma_1^2 IR$ εἶναι τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν πτώσεων τάσεως ἐπί τοῦ ἐπιλεγέντος δρόμου.

Ἐάν ρεῦμα I_j διαρρέει ἀντίστασιν R_i μέ φοράν 1 → 2, ἡ πτῶσις τάσεως $R_i I_j$ λαμβάνεται θετική.

Εἰς τό παράδειγμα τοῦ σχ. 82 : $\Sigma_A^E IR = i_1 R_4$.

* **Τάσεις Ε (ΗΕΔ):** $\Sigma_1^2 E$ εἶναι τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν τάσεων Ε, τῶν μεταξύ τῶν σημείων 1 καί 2.

Ἐάν κινούμενοι ἐκ τοῦ 1 πρός τό 2 συναντῶμεν πρῶτον τόν ἀρνητικόν πόλον τῆς πηγῆς Ε, αὕτη λαμβάνεται θετική.

Εἰς τό δοθέν παράδειγμα: $\Sigma_A^E E = E_1 - E_2$

* Πρόσημον τῆς $V_{1,2}$: Ἄν $V_{1,2} > 0$ ➤ $U_1 > U_2$

Ἄν $V_{1,2} < 0$ ➤ $U_1 < U_2$

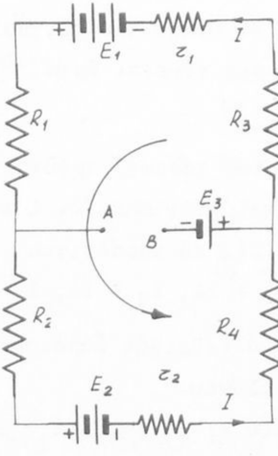
Τελικῶς εἰς τό δοθέν παράδειγμα:

$$V_{A,E} = I_1 R_4 - (E_1 - E_2) = -14V$$

ἄρα $U_E - U_A = 14\ V$*

Νά εὑρεθῇ ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν Α καί Β τοῦ κυκλώματος, σχ. 83

Δίδονται: $R_1=R_2=6\Omega$, $R_3=R_4=4\Omega$, $r_1=r_2=2\Omega$, $E_1=12V$, $E_2=10V$ καί $E_3 = 8V$.



σχ. 83

Ὑπολογισμός ρεύματος:

Ἐξίσωσις Kirchhoff:

$$E_1 - E_2 = I(R_1+R_2+R_3+R_4+r_1+r_2)$$

$$I = 1/12\ A$$

Ὑπολογισμός τάσεως:

Ἐξίσωσις $V_{1,2} = \Sigma_1^2 IR - \Sigma_1^2 E$

$$V_{AB} = i(R_2+R_4+r_2) - (-E_2-E_3)$$

ἀπό ὅπου:

$$V_{AB} = 19\ V$$

---

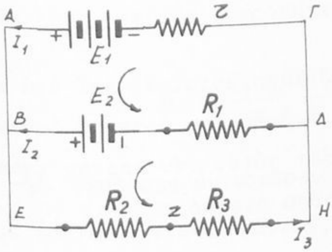
* Παρατήρησις. Ἐργαζόμενοι ἐπί τοῦ δρόμου ΑΒΕ εὑρίσκομεν:

$$V_{A,E} = -I_1R_3 - I_2R_1 = -14V$$

ὁμοίως ἐπί τοῦ ΑΓΔΕ:

$$V_{A,E} = -I_1R_3 - I_3R_2 = -14\ V$$

☆ Νά ἐπιλυθῆ τό κύκλωμα τοῦ σχ. 84 καί νά ὑπολογισθῆ ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ Ε καί Ζ ὡς καί μεταξύ Β καί Δ.



σχ. 84

Δίδονται:

$E_1 = 50V$, $E_2 = 20V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$ καί $r = 2\Omega$.

'Επίλυσις κυκλώματος:

'Εξισώσεις Kirchhoff:

$$E_1 - E_2 = I_1 r - I_2 R_1 \quad (1)$$

$$E_2 = I_3 (R_2 + R_3) + I_2 R_1 \quad (2)$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (3)$$

ὑπολογισμός τάσεων:

$$V_{E,Z} = I_3 R_2 \quad (4)$$

$$V_{B,\Delta} = - I_2 R_1 + E_2 \quad (5)$$

'Εκ τοῦ συστήματος προκύπτει:

$$I_1 = \frac{215}{41} \text{ A}$$

$$I_2 = - \frac{80}{41} \text{ A} \text{ (διόρθωσις φορᾶς)*}$$

Παρατήρησις:

'Η σχέσις (5) προέκυψεν μέ βάσιν τήν σχεδιασθεῖσαν φοράν τοῦ I_2, ὁπότε διά τόν ὑπολογισμόν τῆς $V_{B,\Delta}$ εἰς αὐτήν θά ἀντικατασταθῆ μέ τήν ἀλγεβρικήν του τιμή:

$$\left(I_2 = - \frac{80}{41} \text{ A}\right)$$

"Αν ὅμως προηγηθῆ ἡ διόρθωσις τῆς φορᾶς τοῦ I_2 τότε, ἀντί τῆς (5) προκύπτει ἡ:

$$V_{B,\Delta} = E_2 + I_2 R_1 = 39,5 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{134}{41}\ A$$

$$V_{E,Z} = 26{,}14V\ ,\quad V_{B,\Delta} = 39{,}5\ V$$

Παρατήρησις

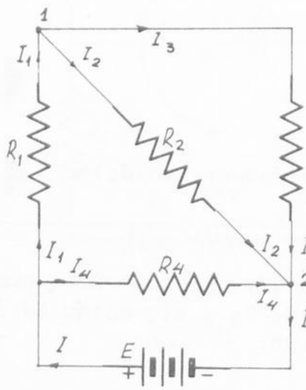
'Η ἐξίσωσις τάσεως δύναται νά χρησιμοποιηθῇ καί διά τήν ἐπίλυσιν κυκλώματος, κυρίως ὅταν ἀναφέρεται διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ δύο σημείων 1 καί 2. Κατ'αὐτόν τόν τρόπον προκύπτει ἡ **μέθοδος τῶν τάσεων** ἀποτελοῦσα διαφοροποίησιν τῆς μεθόδου τῶν ρευμάτων.

Κατά τήν μέθοδον τῶν τάσεων ἐφαρμόζεται:

α) 'Η ἐξίσωσις ΣΙ = 0 καί κ - 1 κόμβους.

β) 'Η ἐξίσωσις τάσεως λ - κ + 1 φορές μεταξύ τῶν ἀναφερομένων σημείων 1 καί 2 ἐπί ἰσαρίθμων δρόμων (βλέπε μέθοδον δυναμικῶν τῶν κόμβων).

✰ Εἰς τό σχῆμα 85 δίδονται τά I, R_1, R_2, R_3 καί $V_{1,2}$ Προσδιορίσατε τήν R_4.



σχ. 85

"Εχομεν κ = 3, λ = 5

'Εκ τοῦ κόμβου 2:

$$I = I_2 + I_3 + I_4 \qquad (1)$$

'Εκ τοῦ κόμβου 1:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (2)$$

'Εκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς $V_{1,2} = \Sigma_1^2 IR - \Sigma_1^2 E$ μεταξύ τῶν 1 καί 2, λ - κ + 1 = 3 φορές, ἔχομεν:

$$V_{1,2} = I_3 R_3$$

$$V_{1,2} = I_2R_2 \qquad (4)$$

$$V_{1,2} = I_4R_4 - I_1R_1 \qquad (5)$$

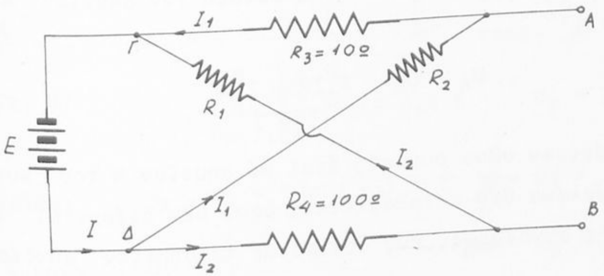
Ἐκ τοῦ συστήματος προκύπτει:

$$R_4 = \frac{V_{1,2}(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)}{R_3R_2I - V_{1,2}(R_2 + R_3)}$$

Τέσσαρες ἀντιστάσεις καί εἷς συσσωρευτής 6V, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, εἶναι συνδεδεμένα ὡς εἰς τό σχῆμα 86. Ὑπολογίσατε:

α. Τήν σχέσιν μεταξύ τῶν R_1 καί R_2 ὅταν ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν Α καί Β εἶναι μηδέν.

β. Τήν τιμήν τῆς R_1 ἐάν ἡ R_2 εἶναι 20Ω καί τό δυναμικόν τοῦ Α κατά 3 V ὑψηλότερον τοῦ Β.



σχ. 86

α. Ἐξισώσεις τάσεως: $U_\Delta - U_B = I_2R_4$ (1)

$U_\Delta - U_A = I_1R_2$ (2)

$U_B - U_\Gamma = I_2R_1$ (3)

$U_A - U_\Gamma = I_1R_3$ (4)

μέ $U_A = U_B$ προκύπτει ἀπό (1) καί (2):

$I_1R_2 = I_2R_4$

καί ἀπό (3), (4), $I_1R_3 = I_2R_1$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_4}{R_1}$$ (βλ. κύκλωμα γεφύρας)

$$ή\ R_1R_2 = 1000\ \Omega^2$$

β. Ἐξισώσεις τάσεως μεταξύ Α καί Β.

$$V_{A,B} = I_2R_4 + I_1R_3 - E \qquad (1)$$

$$V_{A,B} = I_2R_4 - I_1R_2 \qquad (6)$$

$$V_{A,B} = I_1R_3 - I_2R_1 \qquad (7)$$

ὁπότε: $$R_1 = \frac{ER_3R_4 - V_{A,B}R_3R_4 - V_{A,B}\cdot R_2R_4}{ER_2 + V_{A,B}\cdot R_3 + V_{A,B}\cdot R_2} = 500\ \Omega$$

7.4. ἠλεκτρικὸν δυναμικὸν

Ὁ ὑπολογισμός τοῦ δυναμικοῦ ἑνός σημείου Α τοῦ κυκλώματος δύναται νά γίνῃ μόνον, ἐφ'ὅσον εἶναι γνωστόν τό δυναμικόν ἑνός ἄλλου* σημείου Β ἐπ'αὐτοῦ. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωσις τάσεως μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β.

$$U_A - U_B = \Sigma_A^B IR - \Sigma_A^B E$$

Ἄν ἀγώγιμον σῶμα συνδεθῇ ἅπαξ μέ σημεῖον Μ τοῦ κυκλώματος, τό κύκλωμα δέν μεταβάλλεται, ἀφοῦ δέν διέρχεται φορτίον διά τῆς συνδέσεως, ἐνῷ συγχρόνως τό σημεῖον συνδέσεως

Παρατήρησις.

* Ἀναφέρεται ὑπό τινων συγγραφέων ὅτι τό δυναμικόν τοῦ θετικοῦ πόλου πηγῆς εἶναι +V/2 καί τοῦ ἀρνητικοῦ πόλου αὐτῆς $-\frac{V}{2}$ (ὥστε $\frac{V}{2} - (-\frac{V}{2}) = V$)
ὅπου V = E - Ir, ἡ πολική τάσις τῆς πηγῆς. Τό συμπέρασμα τοῦτο εἶναι αὐθαίρετον, χωρίς θεωρητικόν στήριγμα, δυνάμενον νά ὁδηγήσῃ τούς ὑποψηφίους σπουδαστάς είς ἐσφαλμένα ἀποτελέσματα.

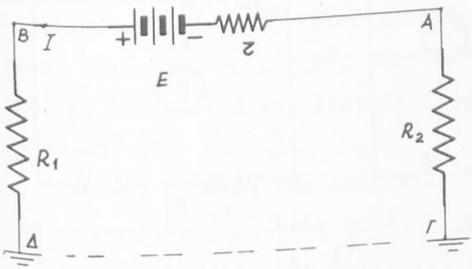
καί τό ἀγώγιμον σῶμα ἀποκτοῦν κοινόν δυναμικόν.

'Εάν τό ἀγώγιμον σῶμα εἶναι ἡ Γῆ, τότε λέγομεν ὅτι τό κύκλωμα εἶναι "**προσγειωμένον**".

'Εάν $U_Γ$ τό δυναμικόν τῆς γῆς, δεχόμεθα, κατόπιν κοινῆς συμφωνίας, ὅτι $U_Γ = 0$.

Καί ἐπειδή διά τοῦ ἀγωγοῦ συνδέσεως δέν διέρχεται ρεῦμα, $U_Γ - U_M = 0$ ἤτοι $U_Γ = U_M$.

☆ Νά ὑπολογισθῇ, εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 87, τό δυναμικόν τοῦ σημείου Α. Δίδονται $E = 7{,}5V$, $r = 2\ \Omega$, $R_1 = 5\ \Omega$ καί $R_2 = 8\ \Omega$.



Τό κύκλωμα εἶναι κλειστόν, μέσῳ τῆς ἀγωγίμου γῆς.

'Ο ἀγωγός "Γῆ" θεωρεῖται ἀμελητέας ἀντιστάσεως. 'Αλλά τότε:

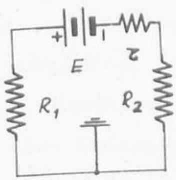
σχ. 87

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} = 0{,}5\ A \qquad U_Γ = U_Δ = 0$$

Συνεπῶς: $U_A - U_Δ = I(r + R_1) - E$ ► $U_A = -4V$

ἤ καί: $U_A - U_Γ = -IR_2$ ► $U_A = -4V$ ◄

Τό δοθέν κύκλωμα σχεδιάζεται καί ὡς:



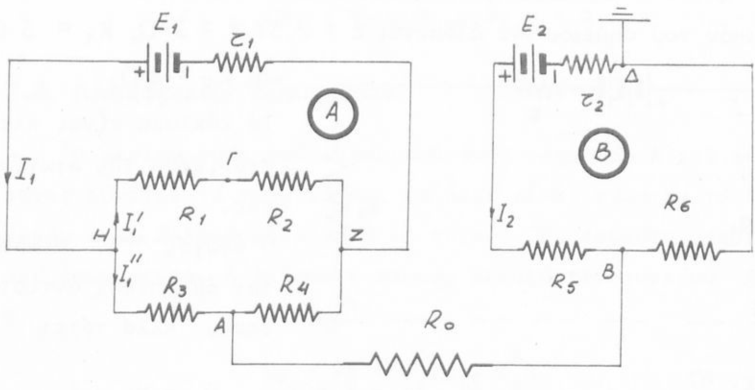
σχ. 88

☆ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 89 συνδέομεν τό σημεῖον Β τοῦ κυκλώματος (Β) μέ τό σημεῖον Α τοῦ (Α) μέσῳ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R_o.

Ποῖον τό δυναμικόν τοῦ σημείου Γ τοῦ κυκλώματος (Α).

" Τά κυκλώματα (Α) καί (Β) δέν μεταβάλλονται κατόπιν τῆς συνδέσεως μέσῳ τῆς R_o. Ἡ R_o δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ὁδός ἐπιστροφῆς καί ἄρα $U_A = U_B$".

Μετά τήν σύνδεσιν ἀποκαθίστανται νέα δυναμικά εἰς τά διάφορα σημεῖα ἐνῷ διατηροῦνται αἱ διαφοραί δυναμικοῦ.



σχ. 89

Ρεῦμα διαρρέει τήν R_o ἐφ'ὅσον συνδέσωμεν ἀγωγίμως καί δύο ἄλλα σημεῖα τοῦ κυκλώματος.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, γράφομεν:

$$U_\Gamma - U_A = I_1' R_2 - I_1'' R_4 \quad (1)$$

$$E_1 = I_1 r_1 + I_1' (R_1 + R_2) \quad (2)$$

$$I_1' (R_1 + R_2) = I_1'' (R_3 + R_4) \quad (3)$$

$$I' + I_1'' = I_1 \quad (4)$$

$$U_A = U_B \quad (5)$$

$$U_B - U_\Delta = R_6 I_2 \quad (6)$$

$$E_2 = I_2(R_5 + R_6 + r_2) \quad (7)$$

$$U_\Delta = 0 \quad (8)$$

Ἀπό τήν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος προκύπτει:

$$U_\Gamma = \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{r_1\cdot(R_1+R_2+R_3+R_4) + (R_1+R_2)\cdot(R_3+R_4)}E_1 + \frac{R_6}{R_5+R_6+r_2}E_2$$

7.5. διαγράμματα δυναμικοῦ

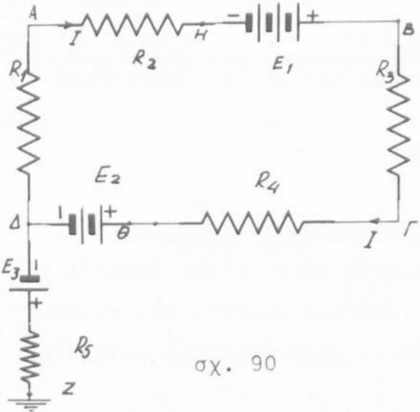
Παρουσιάζεται συχνά τό πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ ἰσοδυναμικῶν σημείων. Ὁ προσδιορισμός αὐτός εἶναι δυνατός δι' ἁπλῆς παρατηρήσεως εἰς τάς περιπτώσεις συμμετρικῶν κυκλωμάτων. Δι'ὅλας τάς ἄλλας περιπτώσεις χαράσσομεν τά διαγράμματα δυναμικοῦ.

Ἀγωγός συνδέων δύο ἰσοδυναμικά σημεῖα δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος καί συνεπῶς δύναται νά ἀφαιρεθῆ.

Διά τήν χάραξιν τῶν διαγραμμάτων δυναμικοῦ, προσδιορίζομεν κατ'ἀρχάς τά ρεύματα εἰς ὅλους τούς κλάδους, καί ἐν συνεχείᾳ τά δυναμικά τῶν σημείων συνδέσεως, πηγῶν-ἀντιστάσεων, τῶν σημείων συνδέσεως ἀντιστάσεων ἐν γένει, καί τῶν πόλων τῶν πηγῶν, ὡς πρός τυχόν σημεῖον τοῦ κυκλώματος, τοῦ ὁποίου τό δυναμικόν λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἴσον πρός μηδέν.

Τοποθετοῦμεν ἐπί ἄξονος τεταγμένων τάς εὑρεθείσας τιμάς καί ἐπί ἄξονος τετμημένων λαμβάνομεν αὐθαιρέτως τάς ἀποστάσεις μεταξύ τῶν σημείων. Αἱ ὁριζόντιοι ἀποστάσεις δέν ἔχουν καμμία σημασίαν, ἁπλῶς βοηθοῦν εἰς τήν διάκρισιν τῶν κλάδων τοῦ διαγράμματος. Σημεῖα εὑρισκόμενα μεταξύ τῶν πόλων πηγῆς ἐνίοτε τοποθετοῦνται ἐπί παραλλήλου πρός τόν ἄξονα τῶν τεταγμένων. Συνδέομεν ὅλα τά σημεῖα τοῦ διαγράμματος τά όποῖα εἶναι συνδεδεμένα άπ'εὐθείας ἐν τῷ κυκλώματι.

☆ Νά χαραχθῆ τό διάγραμμα δυναμικοῦ διά τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 90, ἄν:



σχ. 90

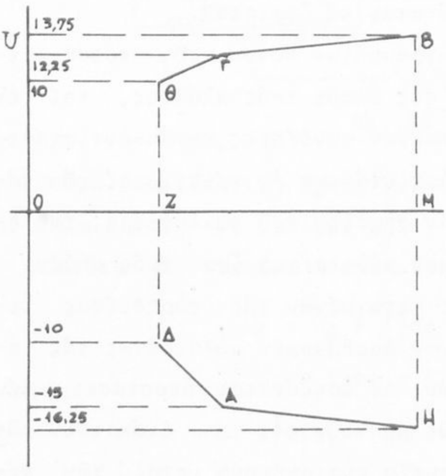
$E_1 = 30\,V$, $E_2 = 20\,V$, $E_3 = 10V$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 9\Omega$ καί $R_5 = 10\,\Omega$.

Ἐκ τῶν δεδομένων προκύπτει:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 0{,}25A$$

Ὁ κλάδος ΔΖ δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος.

Χαράσσομεν τό διάγραμμα δυναμικοῦ.



σχ. 91

Ὁ ὑπολογισμός τῶν δυναμικῶν τῶν διαφόρων σημείων ἔδωσε:

$U_Z = 0$

$U_\Delta = -10\ V$

$U_\Gamma = 12{,}25\ V$

$U_B = 13{,}75\ V$

$U_A = -15\ V$

$U_H = -16{,}25V$

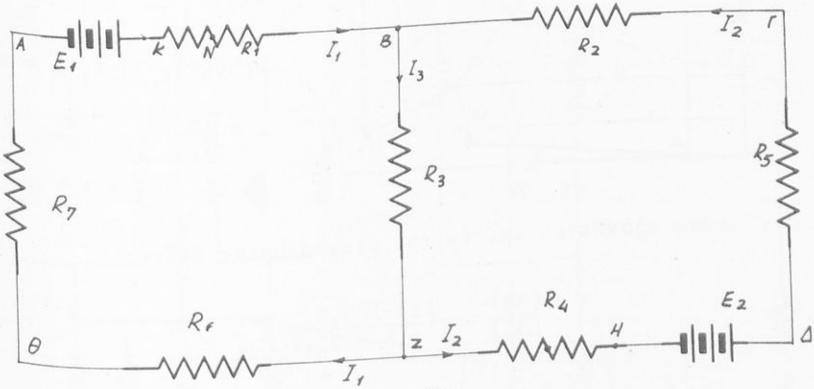
$U_\Theta = 10\ V$

Τό διάγραμμα δυναμικοῦ ἀποδίδει τό σχῆμα 91

Παρατηροῦμεν ὅτι:

1. Δέν ὑπάρχουν ἰσοδυναμικά σημεῖα εἰς τό κύκλωμα.
2. Τά σημεῖα τῶν παραλλήλων ΘΔ καί ΒΗ (σχ. 91) δέν ἀντιστοιχοῦν εἰς προσιτά σημεῖα τοῦ κυκλώματος.
3. Ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις δύο σημείων μετρᾶ τήν διαφοράν δυναμικοῦ μεταξύ αὐτῶν.

☆ Νά εὑρεθῇ σημεῖον ἐπί τοῦ κυκλώματος τοῦ σχ. 92 τό ὁποῖον ἄν συνδεθῇ ἀγωγίμως μέ τό σημεῖον Γ, νά μή διέρχεται ρεῦμα διά τοῦ ἀγωγοῦ συνδέσεως.



σχ. 92

Δίδονται: $E_1 = 110$ V, $E_2 = 110$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 15\Omega$ $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 15\ \Omega$, $R_5 = 20\ \Omega$, $R_6 = 10\ \Omega$, $R_7 = 5\ \Omega$.

Ὁ ὑπολογισμός τῶν ρευμάτων δίδει:

$$I_1 = 1{,}76\ A, \quad I_2 = 0{,}88\ A, \quad I_3 = 2{,}64\ A$$

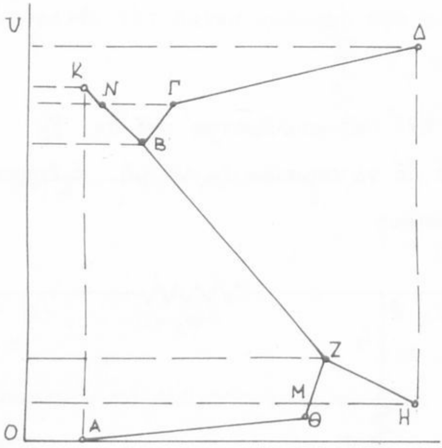
ὁ προσδιορισμός τῶν δυναμικῶν ὡς πρός τό Α, τοῦ ὁποίου τό δυναμικόν θεωρεῖται αὐθαιρέτως μηδέν, δίδει:

$$U_A = 0, \quad U_B = 92{,}4\ V, \quad U_\Gamma = 105{,}6\ V$$

$$U_{\Delta} = 123{,}2V, \quad U_H = 13{,}2V, \quad U_Z = 26{,}4V$$

$$U_{\Theta} = 8{,}8\ V, \quad U_K = 110\ V$$

Εἰς τό σχῆμα 93 φαίνεται τό διάγραμμα δυναμικοῦ διά τό δοθέν κύκλωμα.



σχ. 93

Παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχει σημεῖον N ἐπί τοῦ τμήματος KB, ἰσοδυναμικόν τοῦ Γ. Ἔστω x ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος NB. Τότε:

$$U_{\Gamma} - U_N = I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot x = 0$$

$$x = \frac{I_2}{I_1} \cdot R_2 = \frac{R_2}{2}$$

$$x = 7{,}5\ \Omega$$

Τοῦτο προκύπτει καί ἐκ τοῦ διαγράμματος διότι:

$$\frac{(KN)}{(NB)} = \frac{110-105{,}6}{105{,}6 - 92{,}4} = \frac{1}{3}$$

ἤ

$$\frac{x}{R_1} = \frac{3}{4} \quad \text{ἤ} \quad x = \frac{3}{4} R_1 = 7{,}5\ \Omega$$

8. ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις

Ἡ ἠλεκτρική ἀντίστασις μεταξύ δύο σημείων A καί B κυκλώματος, ὑπολογίζεται πάντοτε.

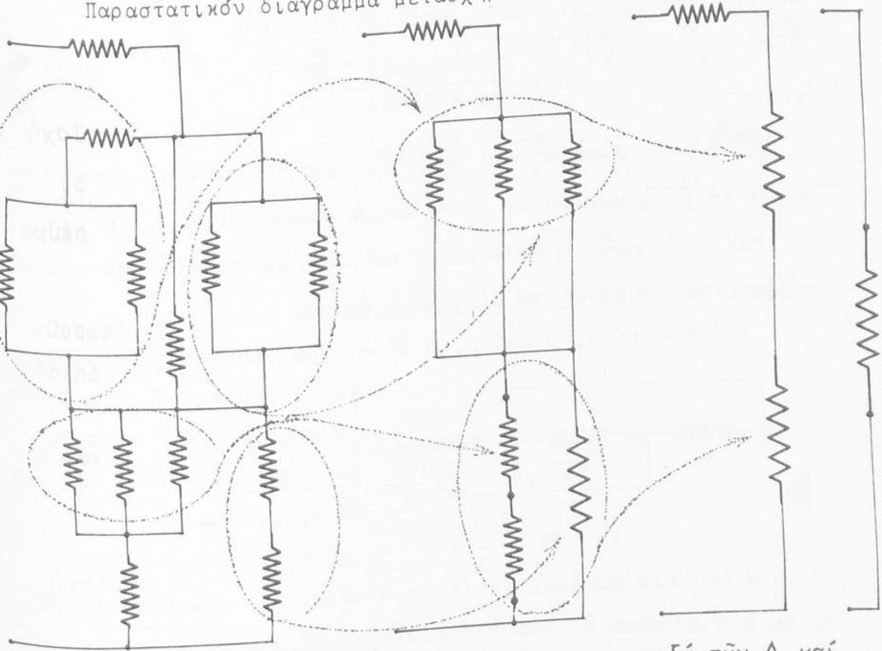
Διακρίνομεν τάς ἀκολούθους περιπτώσεις:

8.1. τυπικαὶ συνδέσεις

Αἱ ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος χωρίζονται εἰς ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ἀντιστάσεις συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ ἢ ἐν παραλλήλῳ, ὁπότε τό σύστημα μετασχηματίζεται εἰς ἄλλο ἁπλούστερον μέσῳ τῶν τύπων:

$$R_o = R_1 + R_2 + \dots \qquad \frac{1}{R_o} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

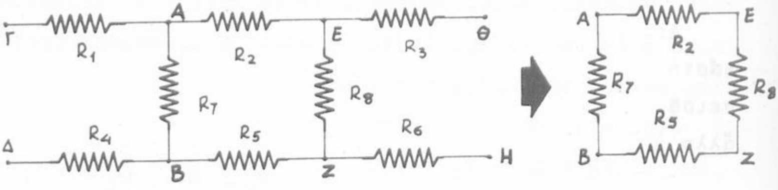
Παραστατικόν διάγραμμα μετασχηματισμοῦ: σχ. 94



Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις μεταξύ τῶν Α καί Β εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 95.

Παρατηροῦμεν ὅτι μεταξύ τῶν Γ καί Δ ὡς καί μεταξύ τῶν Θ καί Η τό κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν.

Οἱ δρόμοι* ΑΓΔΒ καί ΕΘΗΖ ἔχουν ἄπειρον ἀντίστασιν καί ἐφ'ὅσον συνδέονται παράλληλα πρός τούς ΑΒ καί ΕΖ ἀντιστοίχως, παραλείπονται.



Σχ. 95

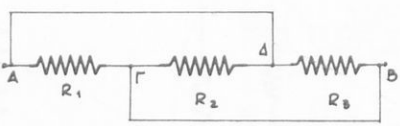
Ἐκ τοῦ σχήματος 95β, τότε, λαμβάνομεν:

$$R_{AB} = \frac{R_7(R_2 + R_5 + R_8)}{R_2 + R_5 + R_7 + R_8}$$

☆ Εἰς τό σύστημα τῶν τριῶν ἐν σειρᾷ ἀντιστάσεων τοῦ σχήματος 96 βραχυκυκλοῦμεν τά Α καί Δ καθώς καί τά Γ καί Β.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ συστήματος ὅταν τό ρεῦμα εἰσέρχεται εἰς τό Α καί ἐξέρχεται ἐκ τοῦ Β.

Ἐφ'ὅσον τά Α, Δ καί Γ, Β εἶναι βραχυκυκλωμένα, θεωροῦνται ἰσοδυναμικά. Δηλαδή τά σημεῖα Α καί Δ νοοῦνται ὡς ἕν. Τό αὐτό καί διά τά Γ, Β.



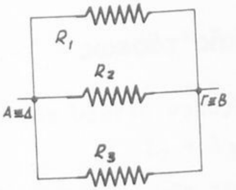
Σχ. 96

Ἡ δοθεῖσα συνδεσμολογία ἰσοδυναμεῖ μέ συνδεσμολογίαν τριῶν ἀντιστάσεων ἐν παραλλήλῳ, σχῆμα 97.

---

* Παρατήρησις: Οἱ δρόμοι ΑΓΔΒ καί ΕΘΗΖ δέν ἀποτελοῦν κλάδους τοῦ κυκλώματος καθ'ὅσον, κλάδος εἶναι κάθε ἀγώγιμος (κλειστός) δρόμος μεταξύ δύο κόμβων.

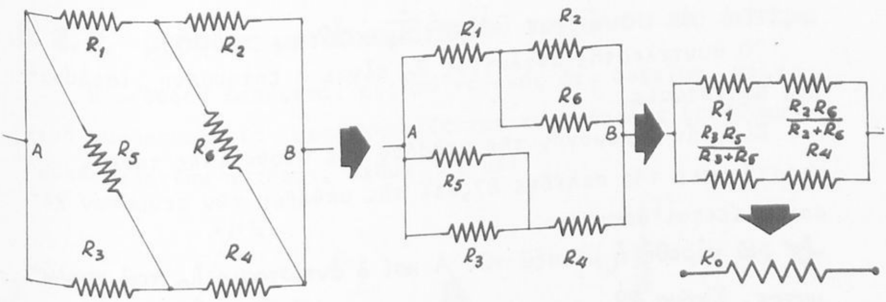
Σχ. 97



Συνεπῶς:

$$R_{o\lambda} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ μεταξύ τῶν Α καί Β ἰσοδύναμος ἀντί-στασις τοῦ συστήματος. (Σχῆμα 98).



Σχ. 98

Τό δοθέν κύκλωμα μετασχηματίζεται διαδοχικῶς εἰς τά:σχ. 98α, σχ. 98β, σχ.98γ.

Τελικῶς:

$$R_o = \frac{\left(R_1 + \dfrac{R_2R_6}{R_2+R_6}\right)\left(R_4 + \dfrac{R_3R_5}{R_3+R_5}\right)}{R_1 + R_4 + \dfrac{R_2R_6}{R_2+R_6} + \dfrac{R_3R_5}{R_3+R_5}}$$

8.2. μή τυπικαί συνδέσεις

Εἰς περιπτώσεις μή τυπικῶν συνδέσεων ὁ μετασχηματισμός τοῦ κυκλώματος γίνεται δι'εἰδικῶν μεθόδων, ὡς αἱ κάτωθι:

8. 2. 1. μέθοδος τῆς ὑποθετικῆς τάσεως

Εἰς τήν μέθοδον αὐτήν ἐφαρμόζομεν μεταξύ τῶν ἀναφερομένων σημείων αὐθαίρετον τάσιν V_o.

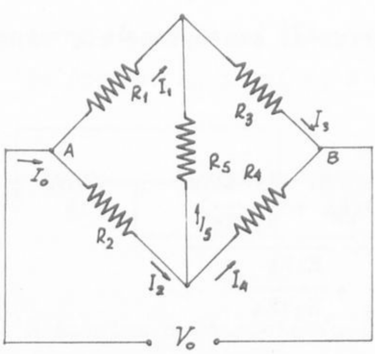
Ἐν συνεχείᾳ δι'ἐφαρμογῆς μιᾶς τῶν γνωστῶν μεθόδων, ἔστω τοῦ Kirchhoff, ὑπολογίζομεν τό ὁλικόν ρεῦμα, τό ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον τῆς ἐφαρμοζομένης τάσεως V_o. Ἤτοι:

$$I_o = \frac{1}{R_o} \cdot V_o$$

Ὁ συντελεστής ἀναλογίας R_o εἶναι ἡ ζητουμένη ἰσοδύναμος ἀντίστασις.

Εἰς τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου τῆς ὑποθετικῆς τάσεως ἡ παρατήρησις τῆς σελίδος 87,ἐπί τῆς μεθόδου τῶν ρευμάτων χαρακτηρίζεται βασική.

Νά εὑρεθῇ ἡ μεταξύ τῶν Α καί Β ἀντίστασις R_o τοῦ κυκλώματος. Σχῆμα 99.*



Σχ. 99

Δίδονται:

$R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 1\Omega$ καί $R_5 = 10\Omega$.

Δι'ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τοῦ Kirchhoff προκύπτουν:

$$I_1R_1 = I_5R_5 + I_2R_2 \quad (1)$$

$$I_5R_5 + I_3R_3 = I_4R_4 \quad (2)$$

* Παρατήρησις: Τό δοθέν κύκλωμα εἶναι κύκλωμα γεφύρας. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\frac{R_1}{R_2} \neq \frac{R_3}{R_4}$$

δηλαδή ἡ γέφυρα δέν ἰσορροπεῖ. Βλέπε: γέφυρα Wheatstone.

$$V_o = I_2R_2 + I_4 . R_4 \tag{3}$$

$$I_o = I_1 + I_2 \tag{4}$$

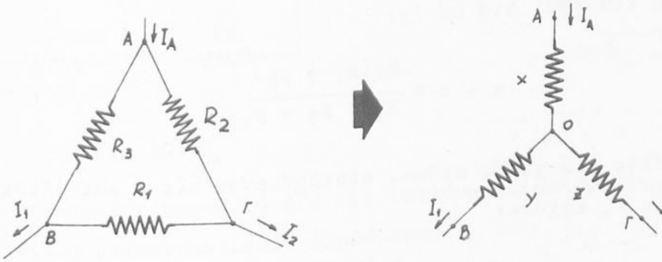
$$I_o = I_3 + I_4 \tag{5}$$

$$I_2 = I_5 + I_4 \tag{6}$$

'Εξ ἄλλου $R_o = \frac{V_o}{I_o}$. 'Εκ τῆς ἐπιλύσεως ἕπεται $R_o = 3\Omega$.

8. 2. 2. μέθοδος μετασχηματισμοῦ τριγώνου εἰς ἀστέρα

'Η μέθοδος βασίζεται εἰς τό γεγονός ὅτι δοθεῖσα τριγωνική συνδεσμολογία μετασχηματίζεται πάντοτε εἰς ἰσοδύναμον συνδεσμολογίαν ἀστέρος, σχῆμα 100, μέ:



Σχ. 100

$$x = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad y = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$z = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{A}$$

<u>'Απόδειξις:</u>

"Εστω ρεῦμα I_A εἰσερχόμενον εἰς τό Α. 'Εάν I_1 καί I_2 εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν ἐξερχομένων εἰς τά Β καί Γ, ἀντιστοίχως ἰσχύει:

$$I_A = I_1 + I_2$$

Τό I_1 κατά τήν δίοδόν του διά τοῦ τριγώνου, μέσῳ τῶν παραλλήλων δρόμων R_3 καί R_1+R_2, συνήντησεν ὁλικήν ἀντίστασιν R' :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1+R_2} \qquad R' = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}$$

Τό ἴδιο ρεῦμα I_1 εἰς τόν ἰσοδύναμον ἀστέρα διέρχεται διά τῶν x καί y καί συναντᾶ ὁλικήν ἀντίστασιν: $R'' = x + y$. Διά τήν ἰσοδυναμίαν τῶν δρόμων, πρέπει $R' = R''$, ἤ

$$x + y = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{1}$$

ὁμοίως ἐξάγεται διά τό I_2:

$$x + z = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{2}$$

Τέλος διά τυχόν ρεῦμα, εἰσερχόμενον εἰς Β καί ἐξερχόμενον εἰς Γ, ἰσχύει:

$$y + z = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{3}$$

Διά προσθέσεως τῶν (1), (2) καί (3) κατά μέλη προκύπτει:

$$x + y + z = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{4}$$

Δι'ἀφαιρέσεως ἐκ τῆς (4), διαδοχικῶς, τῶν (1), (2) καί (3) προκύπτουν αἱ (Α).

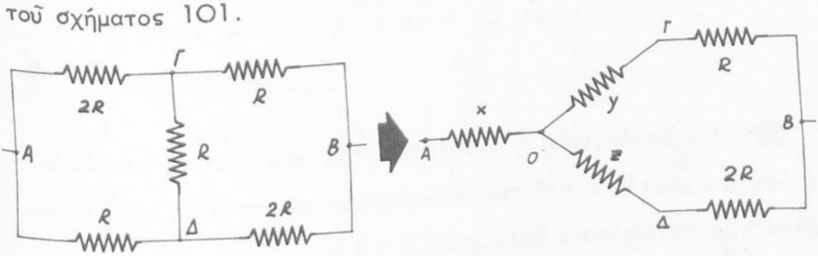
<u>'Αντιστρόφως:</u> δοθείσης τῆς ἀστεροειδοῦς τρικλάδου συνδεσμολογίας x, y καί z, ὑπολογίζονται αἱ ἀντιστάσεις τῆς

τριγωνικῆς R_1, R_2 καί R_3, ἴσαι πρός*:

$$R_1 = \frac{xy + yz + zx}{x}, \quad R_2 = \frac{xy + yz + zx}{y}, \quad R_3 = \frac{xy + yz + zx}{z} \qquad (B)$$

Τό ἀντίστροφον πρόβλημα λύεται πάντοτε, δι'οἱονδήποτε ἀριθμόν κλάδων ἐνῷ τό εὐθύ μόνον εἰς τήν περίπτωσιν τριγώνου.

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις R_o μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β τοῦ σχήματος 101.



Σχ. 101

Μετασχηματίζομεν τό ΑΓΔ εἰς ἰσοδύναμον ἀστέρα Oxyz. 'Εκ τῶν τύπων μετασχηματισμοῦ λαμβάνομεν:

---

* 'Η λύσις ὡς πρός R_1, R_2 καί R_3 ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς: Διά διαιρέσεως τῶν (Α) ἀνά δύο λαμβάνομεν:

$$\frac{x}{y} = \frac{R_2}{R_1} \qquad R_1 = \frac{y}{x} \cdot R_2 \qquad (5)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{R_3}{R_2} \qquad R_3 = \frac{y}{z} \cdot R_2 \qquad (6)$$

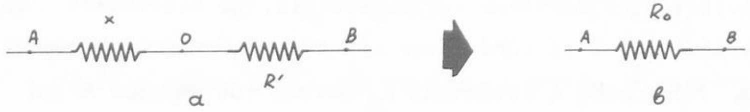
ἀντικαθιστῶμεν τάς (5) καί (6) εἰς μίαν ἐκ τῶν (Α):

$$x = \frac{R_2 \frac{y}{z} R_2}{\frac{y}{x} R_2 + R_2 + \frac{y}{z} R_2} \qquad R_2 = \frac{xy+yz+zx}{y}$$

'Ομοίως προκύπτουν αἱ ἄλλαι τῶν (Β)

$$x = \frac{R}{2} \quad , \qquad y = \frac{R}{2} \quad , \qquad z = \frac{R}{4}$$

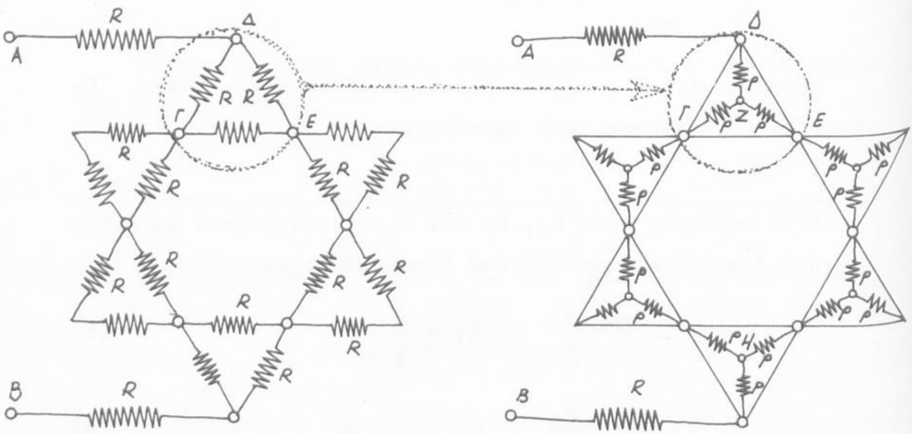
Τό κύκλωμα τοῦ σχ.101β μετασχηματίζεται διαδοχικῶς εἰς τά: σχήματα 102α καί 102β.



Σχ. 102

με $R' = 0{,}9\ R$ καί $R_0 = 1{,}4\ R$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, μεταξύ τῶν Α καί Β σχῆμα 103. Διά τήν ἁπλοποίησιν τῶν πράξεων λαμβάνομεν ὅλας τάς ἀντιστάσεις ἴσας πρός R = 3 Ω.



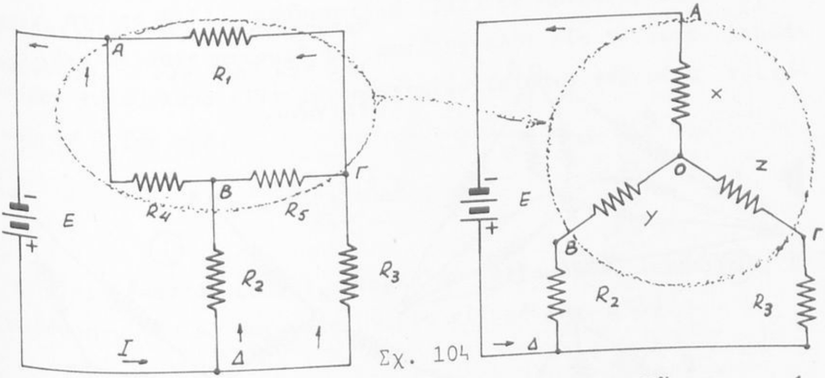
Σχ. 103

Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν τριγώνων λαμβάνομεν τό ἰσοδύναμον κύκλωμα: σχῆμα 103β. Οἱ κλάδοι τῶν ἀστέρων εἶναι ἴσης ἀντιστάσεως ρ μέ:

$$\rho = \frac{R^2}{3R} = 1\ \Omega$$

Μεταξύ τῶν Ζ καί Η προκύπτουν δύο παράλληλοι κλάδοι μέ ἀντιστάσεις τῶν 6Ω, ὁπότε ἡ μεταξύ τῶν Α καί Β, ἀντίστασις ἐξάγεται, τότε, ἀμέσως ἴση πρός 11Ω.

Εἰς τό συνεχοῦς ρεύματος κύκλωμα τοῦ σχ.104 εἶναι: $E = 10\ V$, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 5\Omega$, $R_4 = R_5 = 3\ \Omega$.



Σχ. 104

Ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τῆς πηγῆς ἀμελητέα: Εὕρατε τό ὁλικόν ρεῦμα καί τήν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος.

Αἱ ἀντιστάσεις R_1, R_4 καί R_5 καθώς καί αἱ R_2, R_3 καί R_5 εἶναι συνδεδεμένες κατά τρίγωνον.

Μετασχηματίζω τήν συνδεσμολογίαν τῶν R_1, R_4 καί R_5 εἰς ἰσοδύναμον ἀστέρα.

$$x = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + R_5} = 1\Omega, \quad y = \frac{R_4 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} = 1\Omega$$

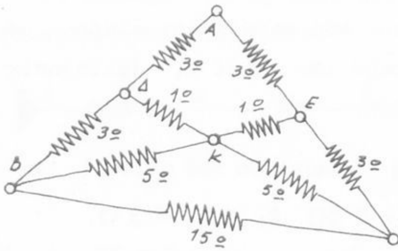
$$z = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} = 1\Omega$$

Οἱ κλάδοι ΟΒΔ καί ΟΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ὥστε τελικῶς: $R_o = 4\Omega$

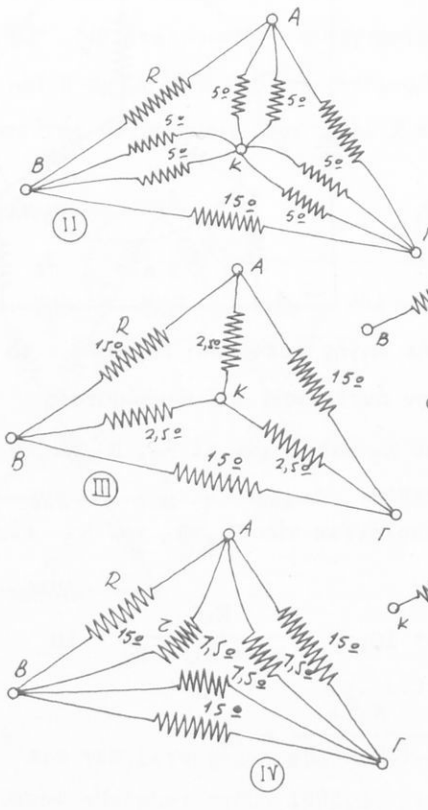
$$I_0 = \frac{E}{R_0} = 2,5 \quad A$$

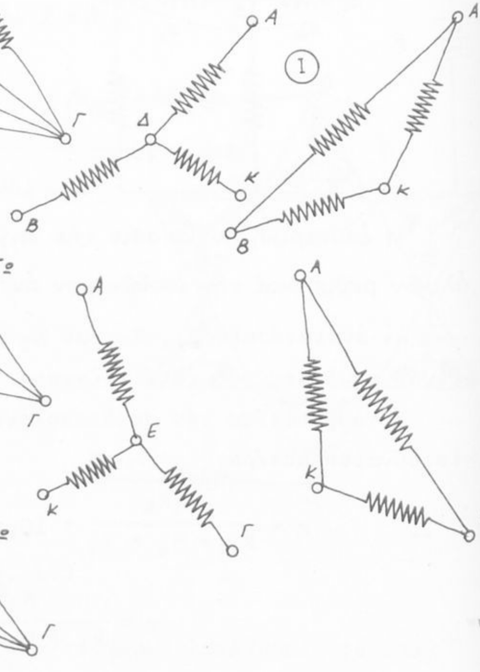
☆ Δίδεται ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος. Οἱ ἀγωγοί ἔχουν ἀντιστάσεις: ΔΚ = ΚΕ = 1Ω ΑΔ = ΑΕ = ΔΒ = ΕΓ = 3Ω ΒΚ = ΚΓ = 5Ω καί ΒΓ = 15Ω. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις μεταξύ τῶν σημείων Α, Γ.



Σχ. 105

Μετασχηματίζω τόν ἀστέρα ΔΑΒΚ καί τόν ΕΚΑΓ εἰς ἰσοδύναμα τρίγωνα.





Εὐκόλως προκύπτουν διά τοῦ τύπου μετασχηματισμοῦ ἀστέρος εἰς τρίγωνον $R_1 = \frac{xy+yz+zx}{x}$ αἱ τιμαί τῶν ἀντιστάσεων σέ Ω.

$AK = \frac{3.3+3.1+3.1}{3} = 5$ $BK = \frac{3.3+3.1+3.1}{3} = 5$

$AB = \frac{3.3+3.1+3.1}{1} = 15$ ὁμοίως ΚΓ = 5 καί ΑΓ = 15

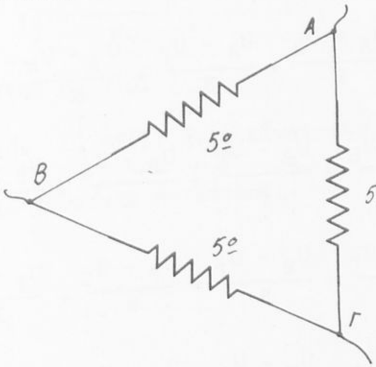
Συνεπῶς τό κύκλωμα τοῦ (σχ.105) διά τῶν μετασχηματισμῶν (I) δίδει τό κύκλωμα (II).

Ἀπό τό (II) λαμβάνεται τό (III) μέ ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ=2,5

Διά μετασχηματισμοῦ τοῦ ἀστέρος ΚΑΒΓ εἰς τρίγωνον λαμβάνομεν τό κύκλωμα (IV) μέ ἑκάστην ἀντίστασιν τοῦ νέου τριγώνου σέ Ω ἴση πρός:

$$r = \frac{3.2,5.2,5}{2,5} = 7,5$$

Ἀπό ἕκαστον ζεῦγος παραλλήλων ἀντιστάσεων λαμβάνομεν ἰσοδύναμον τῶν 5Ω καί καταλήγομεν εἰς τό (σχ. 106).

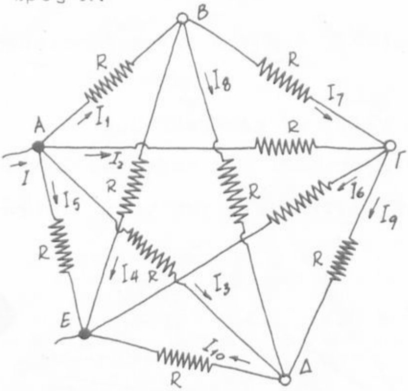


Σχ. 106

Ἡ ἀντίστασις μεταξύ τῶν Α καί Γ εὑρίσκεται ἴση πρός 3,5Ω.

8. 2. 3. μέθοδος τῶν δυναμικῶν τῶν κόμβων

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀντίστασις μεταξύ τῶν σημείων A καί B τοῦ εἰκονιζομένου δικτύου, σχῆμα 107 (μή ἐπιπέδου ἤ μετά διασταυρουμένων κλάδων), εἰς τό ὁποῖον, διά τήν εὐκολίαν τῶν πράξεων καί μόνον, αἱ ἀντιστάσεις ἐλήφθησαν ὅλαι ἴσαι πρός R.



Σχ. 107

Ἐκ τοῦ κόμβου A λαμβάνομεν:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_5 \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ B λαμβάνομεν:

$$I_1 = I_4 + I_8 + I_7 \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ Γ:

$$I_2 + I_7 = I_6 + I_9 \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ Δ:

$$I_3 + I_8 + I_9 = I_{10} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) καί (4) προκύπτουν:

$$I = \frac{U_A - U_B}{R} + \frac{U_A - U_\Gamma}{R} + \frac{U_A - U_\Delta}{R} + \frac{U_A - U_E}{R} \qquad (5)$$

$$\frac{U_A - U_B}{R} = \frac{U_B - U_E}{R} + \frac{U_B - U_\Delta}{R} + \frac{U_B - U_\Gamma}{R} \qquad (6)$$

$$\frac{U_A - U_\Gamma}{R} + \frac{U_B - U_\Gamma}{R} = \frac{U_\Gamma - U_E}{R} + \frac{U_\Gamma - U_\Delta}{R} \qquad (7)$$

$$\frac{U_A - U_\Delta}{R} + \frac{U_B - U_\Delta}{R} + \frac{U_\Gamma - U_\Delta}{R} = \frac{U_\Delta - U_E}{R} \qquad (8)$$

Ἄν θέσωμεν $U_E = 0$ καί ἐπιλύσωμεν τό σύστημα τῶν (5),(6), (7) καί (8) λαμβάνομεν:

$$U_A = \frac{2}{5} \cdot I.R$$

ἀλλά:

$$R_o = \frac{U_A - U_E}{I} = \frac{U_A}{I} = \frac{2}{5} R^*$$

Ὥστε κατά τήν ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου διά τόν ὑπολογισμόν ἀντιστάσεως R_o μεταξύ τῶν A καί B.

α. Ἐφαρμόζομεν τήν ἐξίσωσιν Kirchhoff $\Sigma I = 0$ εἰς κ-1 κόμβους (κ = ὁ ἀριθμός τῶν κόμβων).

β. Δι'ἕκαστον μερικόν ρεῦμα ἐφαρμόζομεν τόν νόμον τοῦ Ohm.

$$i_j = \frac{U_\kappa - U_\lambda}{R_\nu}$$

γ. Δεχόμεθα αὐθαιρέτως $U_B = 0$.

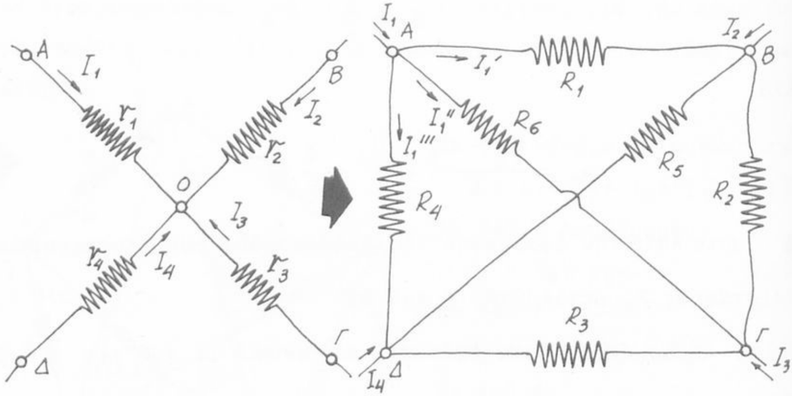
δ. Προσδιορίζομεν τήν $U_A = f(I)$ ἥτις εἶναι τῆς μορφῆς $U_A = R_o \cdot I$, μέ R_o ἡ ζητουμένη ἀντίστασις.

---

* Παρατήρησις:

Ἡ δοθεῖσα ἄσκησις δύναται νά λυθῇ καί διά διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν τριγώνων εἰς ἀστέρας ἤ διά προσδιορισμοῦ ἰσοδυναμικῶν σημείων (βλ. κατωτέρω).

☆ Διά τῆς μεθόδου τῶν δυναμικῶν τῶν κόμβων νά μετασχηματισθῇ ἀστήρ τεσσάρων κλάδων εἰς ἰσοδύναμον πλήρη τετραγωνικήν συνδεσμολογίαν: (σχῆμα 108)



Σχ. 108

Ἔστω ὅτι διά τῶν A,B,Γ καί Δ εἰσέρχονται εἰς τόν ἀστέρα τά ρεύματα I_1, I_2, I_3 καί I_4 ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ κόμβου O:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \qquad (1)$$

ἤ $$\frac{U_A - U_o}{r_1} + \frac{U_B - U_o}{r_2} + \frac{U_\Gamma - U_o}{r_3} + \frac{U_\Delta - U_o}{r_4} = 0 \qquad (2)$$

ἤ $$\frac{U_A}{r_1} + \frac{U_B}{r_2} + \frac{U_\Gamma}{r_3} + \frac{U_\Delta}{r_4} - U_o\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) = 0$$

Ἀπό τήν τελευταίαν λαμβάνομεν:

$$U_o = r_o\left(\frac{U_A}{r_1} + \frac{U_B}{r_2} + \frac{U_\Gamma}{r_3} + \frac{U_\Delta}{r_4}\right) \qquad (3)$$

με $$r_o = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}} \qquad (4)$$

'Αλλά $$I_1 = \frac{U_A - U_o}{r_1}$$ καί λόγῳ τῆς (3)

$$I_1 = U_A \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_o}{r_1^2} \right) - U_B \frac{r_o}{r_1 r_2} - U_\Gamma \frac{r_o}{r_3 r_1} - U_\Delta \frac{r_o}{r_4 r_1} \qquad (5)$$

'Εάν τώρα ἡ συνδεσμολογία τοῦ ἀστέρος εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν πολυγωνικήν τοῦ σχήματος θά ἰσχύῃ:

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1'''$$

ἤ $$I_1 = \frac{U_A - U_B}{R_1} + \frac{U_A - U_\Gamma}{R_2} + \frac{U_A - U_\Delta}{R_3} =$$

$$= U_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - U_B \frac{1}{R_1} - U_\Gamma \frac{1}{R_2} - U_\Delta \frac{1}{R_3} \qquad (6)$$

Διά τῆς συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν τῶν (5) καί (6) λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{r_1} - \frac{r_o}{r_1^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{r_o}{r_1 r_2} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{r_o}{r_1 r_4} = \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{r_0}{r_1\ r_3} = \frac{1}{R_2}$$

'Επαναλαμβάνομεν τόν συλλογισμόν διά τά I_2, I_3, I_4, ὁπότε τελικῶς:

$$R_1 = \frac{r_1 r_2}{r_0}\ ,\ R_2 = \frac{r_2 r_3}{r_0}\ ,\ R_3 = \frac{r_3 r_4}{r_0}\ ,\ R_4 = \frac{r_1 r_4}{r_0}\ ,$$

$$R_5 = \frac{r_2 r_4}{r_0}\ ,\ R_6 = \frac{r_1 r_3}{r_0}$$

Τό ἀντίστροφον πρόβλημα ἔχει λύσιν μόνον εἰς τήν περίπτωσιν τριγωνικῆς συνδεσμολογίας, διότι θά πρέπῃ νά ἐπιλυθῇ σύστημα $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ἐξισώσεων μέ ν ἀγνώστους.

($\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ = ἄθροισμα πλευρῶν καί διαγωνίων πολυγώνου)

Διά νά ὑπάρχῃ λύσις $\frac{\nu(\nu-1)}{2} = \nu$ ὅθεν $\nu = 3$.

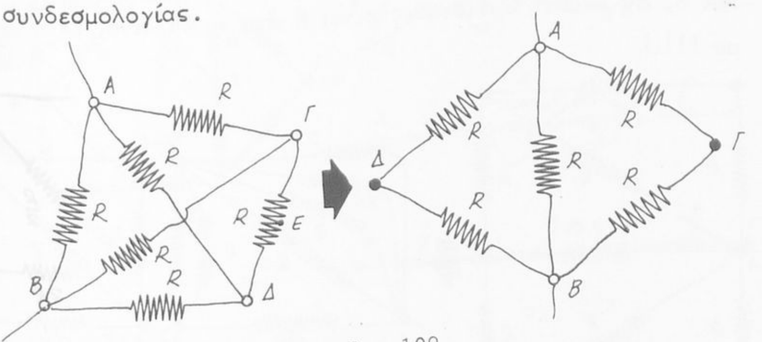
9. συμμετρικὰ κυκλώματα

'Η συμμετρική τοποθέτησις τῶν ἀντιστάσεων ἠλεκτρικοῦ δικτύου, ὡς πρός ἄξονα ἤ ἐπίπεδον, ὁδηγεῖ εἰς σύντομον ἐπίλυσιν χωρίς ἐκτεταμένον ἀλγεβρικόν λογισμόν διά τῶν μεθόδων τῶν ἰσοδυναμικῶν σημείων ἤ τῶν τάσεων.

9.1. μέθοδος τῶν ἰσοδυναμικῶν σημείων

'Εφ'ὅσον τό δίκτυον εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός ἄξονα ἤ ἐπίπεδον, ὑπάρχουν σημεῖα μέ τό αὐτό δυναμικόν (ἰσοδυναμικά). Ἀγωγοί συνδέοντες ἰσοδυναμικά σημεῖα, δέν διαρρέονται ἀπό ρεῦμα καί δύνανται νά παραληφθοῦν. Ἀνεξάρτητα ἰσοδυναμικά σημεῖα δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς ἕν.

☆ Ἕξ ἴσαι ἀντιστάσεις R διατάσσονται ὡς αἱ ἀκμαί τετραέδρου σχ. 109. Νά εὑρεθῇ ἡ μεταξύ δύο κορυφῶν ἀντίστασις τῆς συνδεσμολογίας.

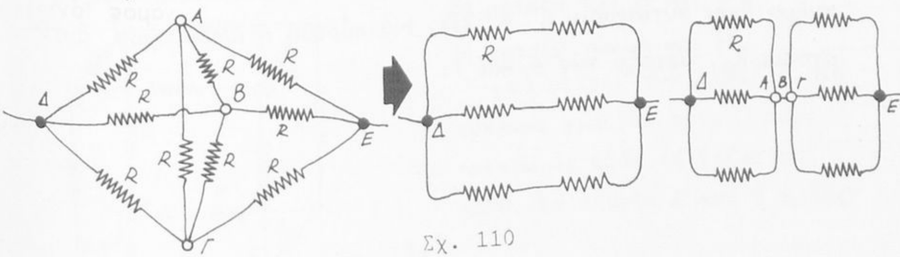


Σχ. 109

Ἡ διάταξις εἶναι συμμετρική ὡς πρός τό ἐπίπεδον τό ὁ-
ριζόμενον ἐκ τῶν Α, Β καί τό μέσον Ε τῆς ἀντιστάσεως ΓΔ. Ὅ-
θεν τά Γ καί Δ εἶναι ἰσοδυναμικά. Παραλείποντες τήν ΓΔ, προ-
σδιορίζομεν ἀμέσως ἐκ τῆς παραλλήλου διατάξεως, $R_o = \frac{R}{2}$

☆ 9 σύρματα ἀντιστάσεως R διατάσσονται ὡς εἰς τό σχ. 110 Ποία ἡ μεταξύ τῶν Δ καί Ε ἀντίστασις R_o;

Λόγῳ τῆς συμμετρίας πού παρουσιάζει ἡ διάταξις τά σημεῖα Α, Β καί Γ εἶναι ἰσοδυναμικά.

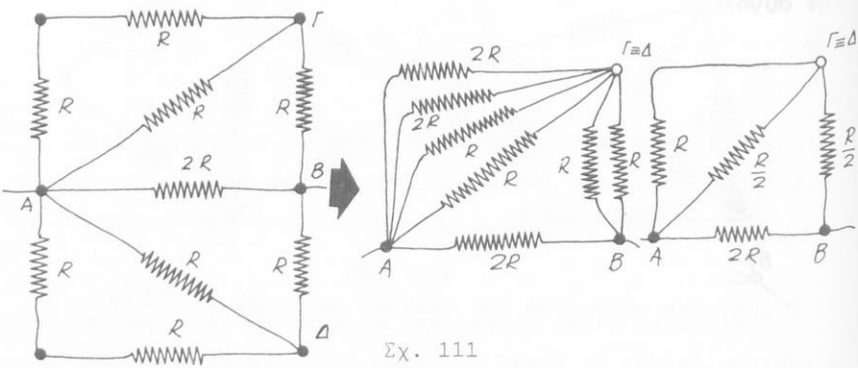


Σχ. 110

Ἐκ τῶν ἰσοδυνάμων διατάξεων προκύπτει:

$$R_0 = \frac{2\,R}{3}$$

☆ Νά εὑρεθῇ ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_o μεταξύ τῶν A καί B, ἄν ἑκάστη ἀντίστασις εἶναι R ἐνῷ ἡ AB εἶναι 2R (σχῆμα 111.).



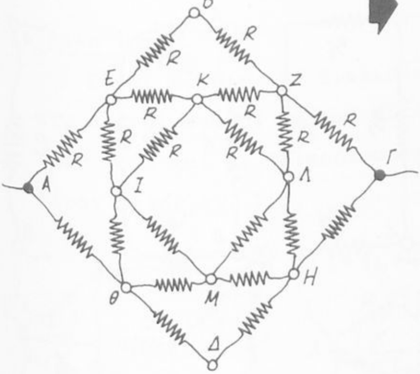
Σχ. 111

Τά σημεῖα Γ καί Δ ὡς ἰσοδυναμικά, ταυτίζονται ὁπότε τελικῶς προκύπτει:

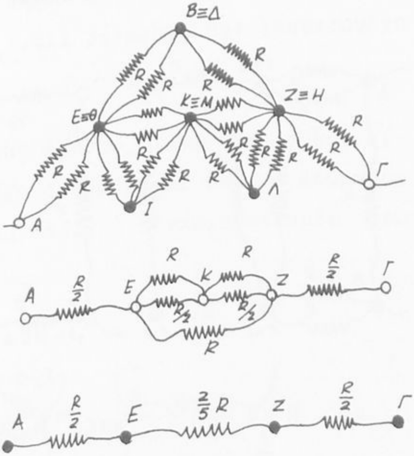
$$R_o = \frac{10}{17}\,.\;R$$

☆ Εἰς τό δίκτυον τοῦ σχήματος 112 ἕκαστον εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει ἀντιστασιν R = 2Ω. Νά εὑρεθῇ ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις R_o, μεταξύ τῶν A καί Γ.

Τά ζεύγη τῶν ἰσοδυναμικῶν σημείων (Θ, Ε), (Μ,Κ),(Ζ,Η) , (Β,Δ) ἐπιτρέπουν τήν ἀντικατάστασιν τοῦ δοθέντος κυκλώματος



σχ.112



σχ. 113

μέ τά ἐν τοῖς σχ.113 α,β,γ διαδοχικῶς. Τοῦτο δέ διότι τό δοθέν εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός ἄξονα ΑΓ.

Τελικῶς:

$$R_o = \frac{7}{5} R = 2{,}8\ \Omega$$

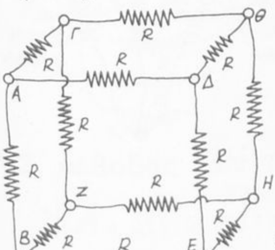
12 ἴσα σύρματα ἀντιστάσεως R συνδέονται ὡς αἱ ἀκμαί κύβου, σχῆμα 114.

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις:

α) μεταξύ Α καί Β ('Ακαδημαϊκόν 1969)

β) μεταξύ τῶν Α καί Θ

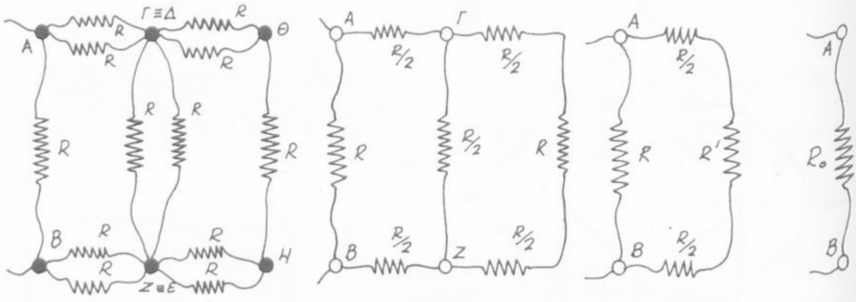
γ) μεταξύ τῶν Α καί Η



Σχ. 114

α) μεταξύ τῶν Α καί Β. Τό κύκλωμα γίνεται τότε συμμετρικόν ὡς πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΗΘ. Τά σημεῖα Γ καί Δ καθώς καί τά Ζ καί Ε, εἶναι ἰσοδυναμικά.

'Εκ τῆς παρατηρήσεως αὐτῆς προκύπτουν οἱ διαδοχικοί μετασχηματισμοί τοῦ σχήματος 115.



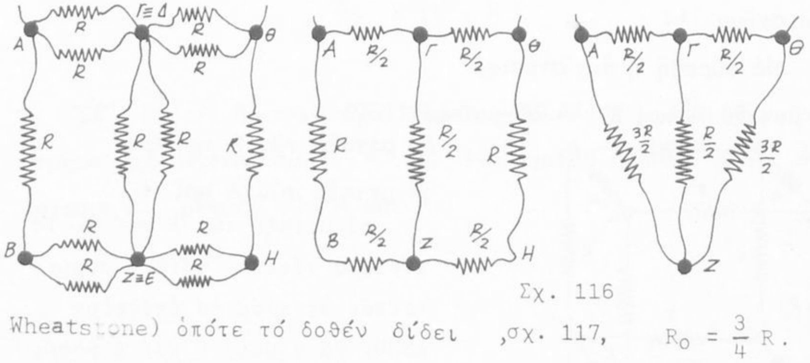
Σχ. 115

μέ $R' = \frac{2R}{5}$ καί $R_o = \frac{7}{12}.R$

β) μεταξύ τῶν Α καί Θ. Τά σημεῖα Γ,Δ καί Ζ,Ε εἶναι πάλιν ἰσοδυναμικά. 'Εξ αὐτοῦ ἕπονται οἱ μετασχηματισμοί τοῦ σχ.116. 'Επειδή

$$\frac{R_{A\Gamma}}{R_{AZ}} = \frac{R_{\Theta\Gamma}}{R_{\Theta Z}}$$

τά σημεῖα Γ καί Ζ εἶναι ἰσοδυναμικά (βλ. κύκλωμα Γεφύρας



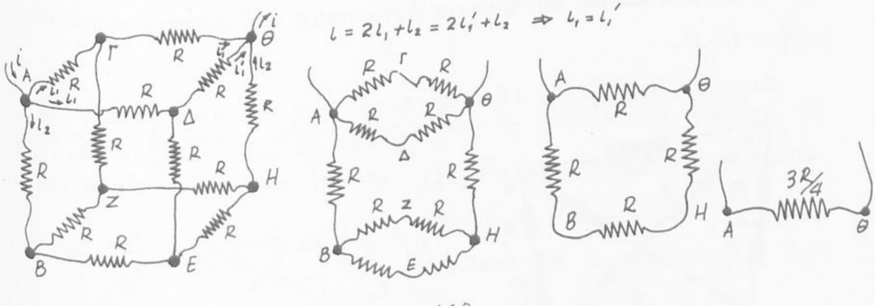
Σχ. 116

Wheatstone) ὁπότε τό δοθέν δίδει ,σχ. 117, $R_o = \frac{3}{4}R$.

Σχ. 117

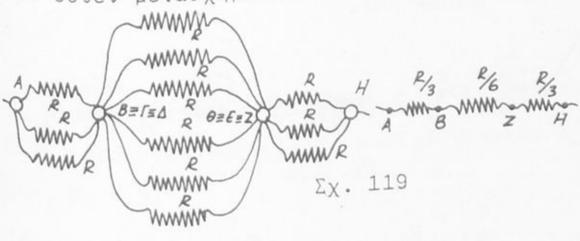
"Αλλη λύσις.

Εἶναι εὔκολον νά διαπιστωθῆ ἀμέσως, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ὅτι οἱ ἀγωγοί ΓΖ καί ΔΕ δέν διαρρέονται ὑπό ρεύματος δηλ. Γ, Ζ καί Δ, Ε ἰσοδυναμικά ὁπότε ὁ μετασχηματισμός του εἶναι ἁπλός, σχ. 118.



Σχ. 118

γ) Μεταξύ τῶν Α καί Η. Παρατηροῦμεν ὅτι λόγῳ τῆς ἰσοτιμίας τῶν δρόμων πού συνδέουν τά Α καί Η, ὑπάρχουν δύο τριάδες ἰσοδυναμικῶν σημείων: αἱ Β, Γ, Δ καί Ε, Ζ, Θ. Συνεπῶς τό δοθέν μετασχηματίζεται εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 119.



Σχ. 119

μέ $R' = \frac{R}{3}$

καί $R'' = \frac{R}{6}$

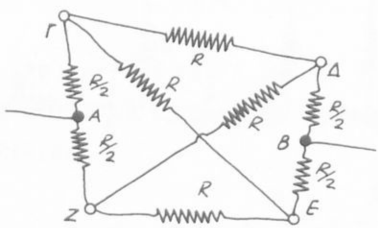
ὁπότε $R_o = \frac{5}{6}R$

9.2. μέθοδος τῶν τάσεων

"Εστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀντίστασις R_o μεταξύ δύο σημείων Α καί Β. Ἔστω ἀκόμη ὅτι εἶναι γνωστά τά ρεύματα πού διαρρέουν τούς διαφόρους κλάδους ἐπί ἑνός δρόμου συνδέοντος τά Α καί Β, ἤ ὅτι τά ρεύματα αὐτά εὑρίσκονται εἰς γνωστήν σχέσιν πρός τό εἰσερχόμενον εἰς τό Α καί ἐξερχόμενον εἰς Β, ὁλικόν ρεῦμα I_o. Τότε δι'ἐφαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως τάσεως $V_{AB} = \Sigma_A^B IR$, προσδιορίζομεν τήν τάσιν V_{AB}. Ὁ Ὑπολογισμός θά δώσῃ $V_{AB} = R_o \cdot I_o$ μέ R_o τήν ζητουμένην ἀντίστασιν.

☆ **Ἕξ ἴσα σύρματα ἀντιστάσεως R συνδέονται ὡς αἱ ἀκμαί τετραέδρου. Ἐάν Α καί Β τά μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ, ποία ἡ μεταξύ αὐτῶν ἰσοδύναμος ἀντίστασις τοῦ συστήματος; (σχῆμα 120).**

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ΑΓ διαρρέεται ὑπό ρεύματος $\frac{I_o}{2}$, ἐνῷ ὁ ΓΔ ὑπό $\frac{I_o}{4}$ καί ὁ ΔΒ ὑπό $\frac{I_o}{2}$, ἄρα:



Σχ. 120

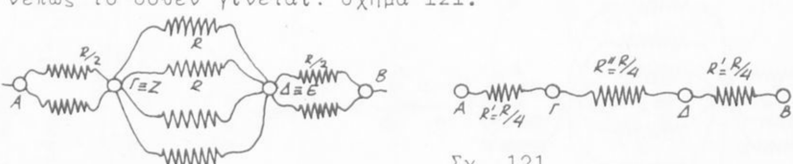
$$V_{AB} = \frac{R}{2} \cdot \frac{I_o}{2} + R \cdot \frac{I_o}{4} + \frac{R}{2} \cdot \frac{I_o}{2} = \frac{3}{4} \cdot R \cdot I_o$$

ἀπό ὅπου:

$$R_o = \frac{3}{4} R$$

<u>Ἄλλη λύσις.</u>

Τά ζεύγη τῶν σημείων Γ, Ζ καί Δ,Ε εἶναι ἰσοδυναμικά. Συνεπῶς τό δοθέν γίνεται: σχῆμα 121.



Σχ. 121

Εἰς τό σχῆμα 121:

$$R' = \frac{R}{4}, \quad R'' = \frac{R}{4}$$

ὁπότε:

$$R_o = \frac{3}{4} R$$

☆ Ὡς ἐφαρμογήν ἀναφέρομεν καί τό παράδειγμα τοῦ κύβου, σελίς 137 περίπτωσις γ.

Ὁ ἀγωγός ΑΓ διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως $\frac{I_o}{3}$. Ὁ ἀγωγός ΓΖ διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως $\frac{I_o}{6}$ καί ὁ ΖΗ ὑπό ρεύματος ἐντάσεως $\frac{I_o}{3}$:

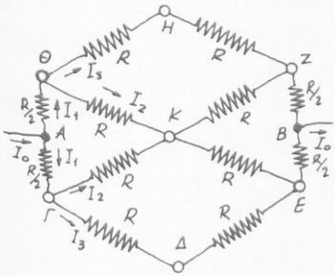
Ἄρα:

$$V_{AH} = R \cdot \frac{I_o}{3} + R\frac{I_o}{6} + R\frac{I_o}{3} = \frac{5}{6} \cdot R \cdot I_o$$

Συνεπῶς:

$$R_o = \frac{5}{6} R$$

☆ Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R_o μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχ. 122 ἄν κάθε τμῆμα ἔχει ἀντίστασιν R.



Σχ. 122

Ἐκ τοῦ Α: $I_o = 2I_1$ (1)

Ἐκ τοῦ Γ: $I_1 = I_2 + I_3$ (2)

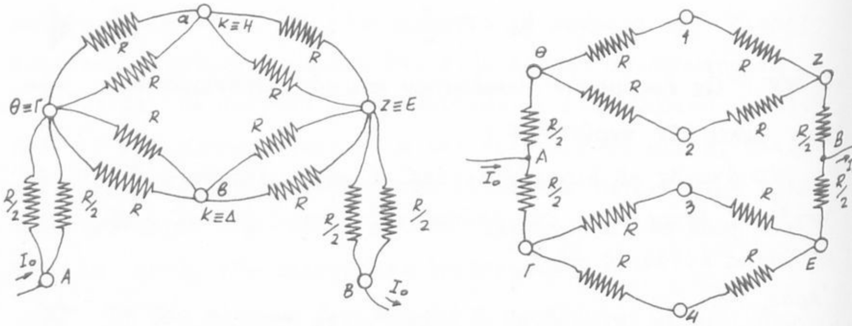
$$V_{AB} = \frac{R}{2} I_1 + RI_3 + RI_3 + \frac{R}{2} I_1 \quad (3)$$

$$V_{AB} = \frac{R}{2} I_1 + RI_2 + RI_2 + \frac{R}{2} I_1 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καί (4) ► $I_2 = I_3$ καί λόγῳ τῆς (2) $I_1 = 2I_2$ ὁπότε ἐκ τῆς (1) $I_o = 4I_3$. Ἐκ τῆς (3) ► $V_{AB} = RI_o$ δηλ. $R_o = R$.

Ἄλλη λύσις.

Λόγῳ τῆς συμμετρίας τῆς διατάξεως τό δοθέν κύκλωμα δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἕν ἐκ τῶν εἰκονιζομένων εἰς τό σχ. 123.

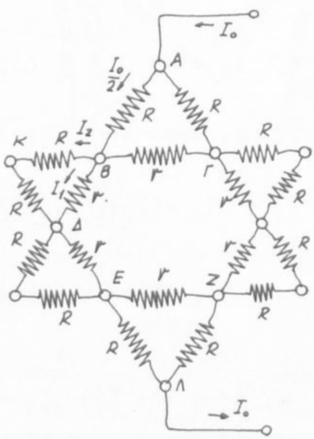


Σχ. 123

Ἐν τῷ σχήματι 123 τά σημεῖα α, β καί τά 1, 2, 3, 4 εἶναι ἰσοδυναμικά.

Εἰς τόν ἀστέρα τοῦ σχήματος 124 αἱ ἐξωτερικαί ἀντιστάσεις εἶναι ἴσαι πρός R καί αἱ ἐσωτερικαί r.

Ποία ἡ μεταξύ Α καί Λ ἀντίστασις R_o;



Σχ. 124

Λόγῳ συμμετρίας οἱ ΒΓ καί ΕΖ δέν διαρρέονται ὑπό ρεύματος.

Ἐκ τοῦ βρόχου ΒΚΔΒ:

$$2RI_2 = rI_1 \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ κόμβου Β:

$$\frac{I_o}{2} = I_1 + I_2 \qquad (2)$$

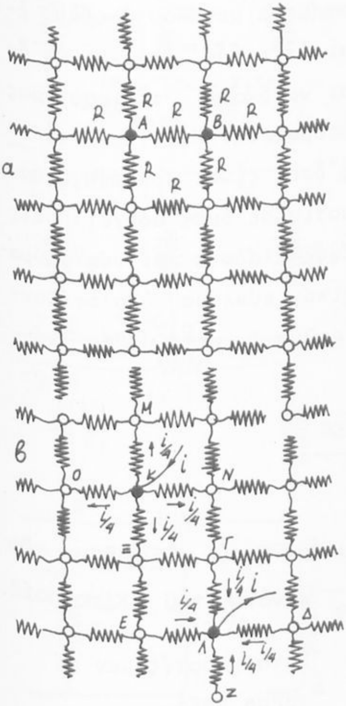
Ἐκ τῶν (1) καί (2)

$$I_1 = \frac{R}{2R+r} I_o \qquad (3)$$

$$V_{A\Lambda} = R\frac{I_o}{2} + rI_1 + rI_1 + R\frac{I_o}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$V_{A\Lambda} = R\left(1 + \frac{2r}{2R+r}\right)I_o \quad \text{ἄρα} \quad R_o = R\left(1 + \frac{2r}{2R+r}\right)$$

☆ Τό πλέγμα σχ. 125α ἀποτελεῖται ἀπό ἴσας ἀντιστάσεις R καί ἔχει ἄπειρον ἔκτασιν. Ζητεῖται ἡ ἀντίστασις μεταξύ τῶν δύο σημείων Α καί Β.



Σχ. 125

Τό δύσκολον αὐτό πρόβλημα ἐπιλύεται μέ τό ἀκόλουθον λογικόν τέχνασμα.

Ἔστω ὅτι εἰς τυχόν σημεῖον Κ εἰσέρχεται ρεῦμα i. Τό ρεῦμα τοῦτο λόγῳ συμμετρίας θά μοιρασθῇ εἰς τέσσερα ἴσα ρεύματα εἰς τούς ἀγωγούς ΚΝ, ΚΜ, ΚΟ, ΚΞ καί τά όποῖα ρεύματα τελικῶς θά ἐξέλθουν διά τῶν εἰς ἄπειρον ἄκρων τῶν ἀγωγῶν τοῦ πλέγματος.

Ἔστω τώρα ὅτι ρεῦμα i εἰσέρχεται εἰς τό δικτύωμα, διά τῶν εἰς ἄπειρον ἄκρων τῶν ἀντιστάσεων καί ἐξέρχεται διά τινος σημείου Λ. Λόγῳ συμμετρίας ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν ΛΓ, ΛΔ, ΛΕ, ΛΖ διαρρέεται ὑπό ρεύματος i/4.

Ἔστω, ὅτι οἱ κόμβοι εἰσόδου καί ἐξόδου τοῦ ρεύματος εἶναι οἱ διαδοχικοί Α καί Β:σχ.125α, τότε ὁ ἀγωγός ΑΒ θά διαρρέεται ὑπό ρεύματος i/2 (i/4 διά τήν μετάβασιν καί i/4 διά τήν ἐπιστροφήν ἀπό τό ἄπειρον καί μέ τήν αὐτήν φοράν).

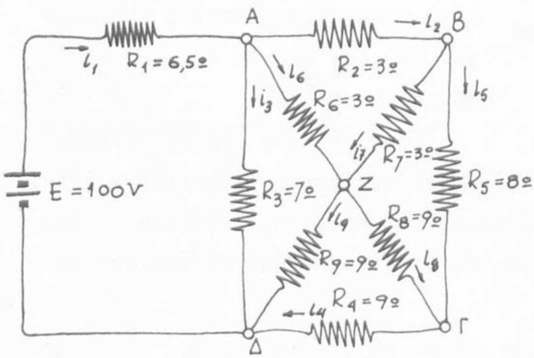
$$\text{Ἄρα} \quad V_{AB} = \frac{i}{2} \cdot R \qquad \text{ἤτοι} \quad R_{AB} = \frac{R}{2}$$

Ἐπίλυσις κυκλώματος διά μετασχηματισμοῦ.

Παρ'ὅτι ἡ μέθοδος τῶν ρευμάτων τοῦ Kirchhoff ἐπιλύει ὅλα τά προβλήματα τῶν κυκλωμάτων, δέν εἶναι πάντοτε καί ἡ συμφεροτέρα ὅλων, διότι ὁδηγεῖ εἰς συστήματα μεγάλου ἀριθμοῦ ἐξισώσεων τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις εἶναι ἐπίπονος. Γενικῶς ἐφ'ὅσον ἡ μέθοδος τῶν ρευμάτων πρόκειται νά δώση περισσοτέρας τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων, θεωρεῖται ἀσύμφορος. Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς εἶναι προτιμότερος, ἐφ'ὅσον εἶναι δυνατός, οἱοσδήποτε μετασχηματισμός. Ὁ μετασχηματισμός ὅμως ὁδηγεῖ εἰς κύκλωμα διάφορον τοῦ δοθέντος μέ νέους κλάδους καί νέα ρεύματα. Τά ζητούμενα ρεύματα εἰς τό ἀρχικόν κύκλωμα ὑπολογίζονται διά τῆς μεθόδου τῶν τάσεων. Τό ρεῦμα I_j μεταξύ δύο κόμβων A καί B θά εἶναι:

$$I_j = \frac{V_{AB}}{R_j} = \frac{\Sigma_A^B I_o R}{R_j}$$

Νά ἐπιλυθῆ τό κύκλωμα τοῦ σχήματος χωρίς τήν χρῆσιν τῶν κανόνων τοῦ Kirchhoff.



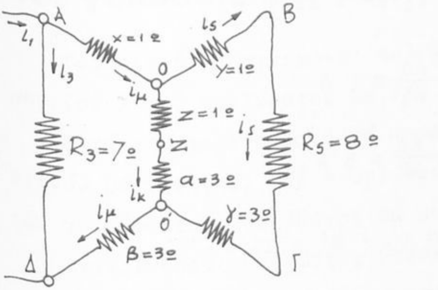
Σχ. 126

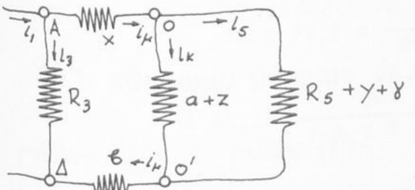
Μετασχηματίζομεν τό τμῆμα ΑΒΓΔ.

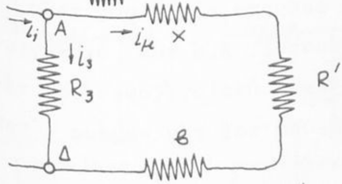
Ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ τριγώνου ABZ λαμβάνομεν:

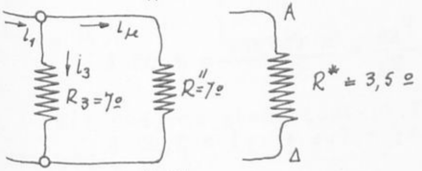
$$x = \frac{R_2 R_6}{R_2+R_6+R_7} = 1\ \Omega$$

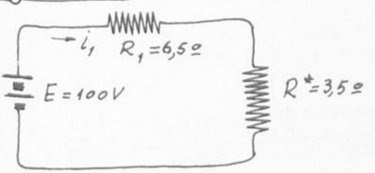
$$y = \frac{R_2 R_7}{R_2+R_6+R_7} = 1\ \Omega$$

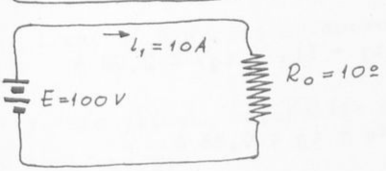












$$z = \frac{R_6 R_7}{R_2+R_6+R_7} = 1\ \Omega$$

'Εκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ τριγώνου ΓΔΖ λαμβάνομεν:

$$\alpha = \frac{R_8 R_9}{R_8+R_9+R_4} = 3\ \Omega$$

$$\beta = \frac{R_4 R_9}{R_4+R_8+R_9} = 3\ \Omega$$

$$\gamma = \frac{R_4 R_8}{R_4+R_8+R_9} = 3\ \Omega$$

Διά τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν λαμβάνομεν:

$$R' = \frac{(R_5+y+\gamma)(\alpha+z)}{\alpha+\gamma+y+z+R_5} = 3\Omega$$

$$R'' = R' + x + \beta = 7\ \Omega$$

$$R^* = \frac{R_3 \cdot R''}{R_3+R''} = 3{,}5\ \Omega$$

$$R_o = R^* + R_1 = 10\ \Omega$$

'Ακολούθως, κινούμενοι ἀντιστρόφως, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς:

$$\iota_1 = \frac{E}{R_o} = 10\ A$$

$$V_{A\Delta} = \iota_1 \cdot R^* = 35 \text{ V}$$

$$\iota_3 = \frac{V_{A\Delta}}{R_3} = 5 \text{ A}$$

$$\iota_\mu = \frac{V_{A\Delta}}{R''} = 5 \text{ A}$$

$$V_{oo'} = \iota_\mu \cdot R' = 15 \text{ V}$$

$$\iota_\kappa = \frac{V_{oo'}}{\alpha + z} = 3{,}75 \text{ A}$$

$$\iota_5 = \frac{V_{oo'}}{R_5 + y + \gamma} = 1{,}25 \text{ A}$$

Τώρα ἤδη ἔχομεν ὑπολογίσει τά ρεύματα είς ὅλους τούς κλάδους τοῦ μετασχηματισμένου κυκλώματος. Διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ρευμάτων είς τό ἀρχικόν κύκλωμα ὑπολογίζομεν τάς τάσεις καί ἐφαρμόζομεν τόν νόμον τοῦ Ohm καί τόν κανόνα τοῦ Kirchhoff: $\Sigma I = 0$.

$$\iota_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{x \cdot \iota_\mu + y\iota_5}{R_2} = 2{,}08 \text{ A}$$

$$\iota_6 = \iota_1 - (\iota_3 + \iota_2) = 2{,}92 \text{ A}$$

$$\iota_7 = \iota_2 - \iota_5 = 1{,}83 \text{ A}$$

$$\iota_9 = \frac{V_{Z\Delta}}{R_9} = \frac{\iota_\kappa . \alpha + \iota_\mu \cdot \beta}{R_9} = 2{,}92 \text{ A}$$

$$\iota_4 = \iota_1 - (\iota_3 + \iota_9) = 2{,}08 \text{ A}$$

$$\iota_8 = \iota_4 - \iota_5 = 0{,}83 \text{ A}$$

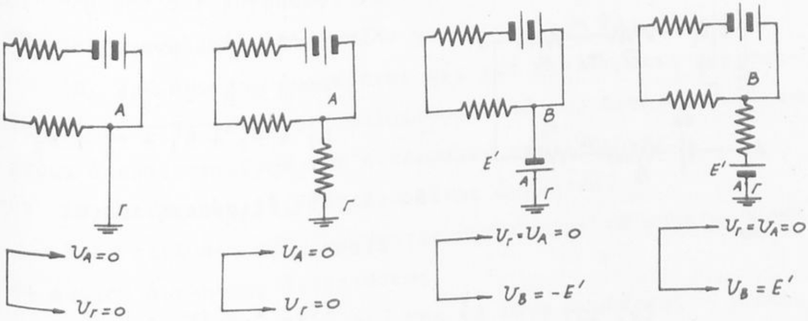
10. γειώσεις καὶ πυκνωταὶ

Γείωσις ἤ προσγείωσις: καλεῖται ή, μέσῳ άγωγοῦ, σύνδεσις σημείου Α τοῦ κυκλώματος μέ τήν γῆν.

Μετά τήν προσγείωσιν τό σημεῖον Α θά άποκτήσῃ δυναμικόν κοινόν μέ τήν γῆν, ($U_A' = U_\Gamma$) καί έπομένως τά δυναμικά ὅλων τῶν σημείων τοῦ κυκλώματος θά μεταβληθοῦν κατά $U_A - U_A'$.

Διακρίνομεν: "γειώσεις ἀσφαλείας" καί
"γειώσεις λειτουργίας"

10.1. κύκλωμα μὲ μίαν γείωσιν



Είς έκάστην είκονιζομένην περίπτωσιν γειωθέν σημεῖον εἶναι μόνον τό Α.

Είς τήν περίπτωσιν μιᾶς γειώσεως αί κάτωθι προτάσεις εἶναι ίσοδύναμοι:

α. Διά τοῦ άγωγοῦ προσγειώσεως δέν διέρχεται ρεῦμα.

β. Μέ τήν γείωσιν τοῦ κυκλώματος δέν μεταβάλλονται τά $R_{ολ}$, i καί αί διαφοραί δυναμικοῦ μεταξύ τῶν διαφόρων σημείων.

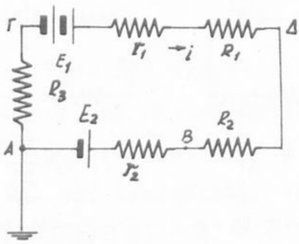
γ. Μία γείωσις μεταβάλλει μόνον τά δυναμικά τῶν σημείων τοῦ κυκλώματος.

'Αμελοῦντες τήν γείωσιν ὑπολογίζομεν κατά τά γνωστά ρεύματα, τάσεις καί ἀντιστάσεις.

'Η γείωσις λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν μόνον στόν ὑπολογισμόν τῶν δυναμικῶν.

'Εφαρμογή

Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 127 δίδονται: $R_3 = 8\,\Omega$, $R_1 = R_2 = 12\Omega$, $E_1 = 100V$ καί $E_2 = 20V$ αἱ ἐσωτερικαί ἀντιστάσεις εἶναι 4Ω. Νά ὑπολογισθοῦν τά δυναμικά τῶν σημείων Α, Β, Γ καί Δ.



Σχ. 127

α. Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τοῦ Kirchhoff λαμβάνομεν :

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} = 2A$$

β. 'Εκ τῆς ἐξισώσεως τάσεως εὑρίσκομεν:

$$V_{AB} = -\,ir_2 - E_2$$

$$V_{A\Gamma} = iR_3 \qquad V_{B\Delta} = -iR_2$$

γ. Σχέσεις δυναμικῶν:

$$V_{AB} = U_A - U_B \qquad V_{A\Gamma} = U_A - U_\Gamma \qquad V_{B\Delta} = U_B - U_\Delta$$

ἀλλά $U_A = 0$

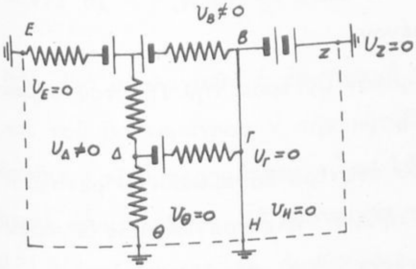
ὁπότε: $U_B = 28$ V, $U_\Gamma = -16$ V, $U_\Delta = 52$ V

10.2. κύκλωμα μέ περισσοτέρας τῆς μιᾶς γειώσεις

Αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

1. Διά τῶν ρείθρων γειώσεως διέρχεται ἐν γένει ρεῦμα.

2. Ἡ ὁλική ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος $R_{ολ}$, τά ρεύματα i_j, αἱ διαφοραί δυναμικοῦ $V_{1,2}$ καί τά δυναμικά U_j τῶν σημείων μεταβάλλον - ται.



Παρατήρησις.

Εἰς τό σχῆμα φαίνεται ὅτι μηδέν εἶναι τά δυναμικά (ἀπόλυτα) τῶν σημείων "Γῆ" (θ, Η, Ζ, Ε) καί ὄχι πάντοτε τῶν γειωθέντων σημείων.

● Ἐπίλυσις κυκλώματος μέ ν γειώσεις ($ν \geqq 2$)

Ὡς καί ἀνωτέρω ἀναφέρεται εἰς τάς περιπτώσεις περισσοτέρων τῆς μιᾶς γειώσεων, τά ρεῖθρα γειώσεως διαρρέονται ἀπό ρεῦμα ἀποκαθισταμένων τῶν κυκλωμάτων μέσῳ τῆς γῆς.

Ἡ ἀντίστασις τῆς Γῆς θεωρεῖται ἀμελητέα.

Πρός ἐπίλυσιν τοῦ κυκλώματος συνδέονται τά σημεῖα "Γῆ" δι'ἀγωγοῦ ἀμελητέας ἀντιστάσεως.

Νά ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι διά τῆς ἐν λόγῳ συνδέσεως πρέπει νά προκύψῃ ὁ μικρότερος ἀριθμός βρόχων.

Πρός τοῦτο: Συνδέονται ὅλα τά σημεῖα "Γῆ" δι'ἀγωγοῦ, ἀμελητέας ἀντιστάσεως διερχομένου ἅπαξ ἐξ ἑκάστου σημείου "Γῆ".

Οὕτω εἰς τό σχῆμα ὁ ἀγωγός θά συνδέσῃ τά σημεῖα Ζ, Η, θ, Ε ὅπως δεικνύει ἡ διακεκομένη γραμμή.

Ὁ ἀγωγός ΖΗθΕ εἶναι "ἀνοικτός". Τοῦτο σημαίνει ὅτι δέν ἀποτελεῖ μόνος του κλειστόν βρόχον.

✡ Ἠλεκτρικόν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπό στήλην Ρ ΗΕΔ 24 V τῆς ὁποίας ὁ εἷς πόλος καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἀμελητέας (ὁ ἀρνητικός) εἶναι προσγειωμένος, καί ἀπό δύο ἐν σειρᾷ συνδεδεμένας ἀντιστάσεις R = 20 Ω καί R΄ = 18 Ω, Τό ἕτερον ἄκρον τῆς R΄ εἶναι προσγειωμένον.

α) Νά ὑπολογισθῇ τό δυναμικόν ὡς πρός τήν Γῆν τοῦ σημείου A, κειμένου μεταξύ R καί R΄.

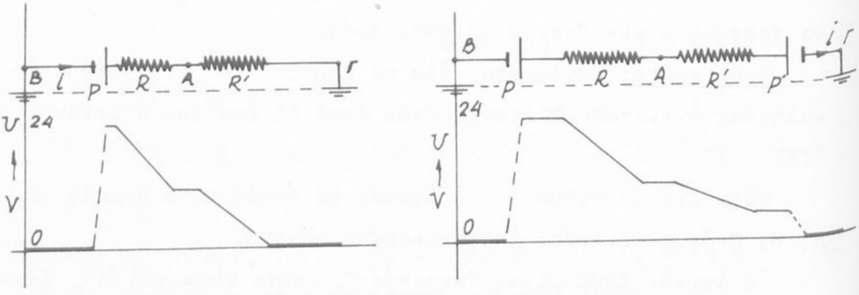
β) Πόση γίνεται ἡ τιμή τοῦ ἀνωτέρω δυναμικοῦ ἄν μεταξύ R΄ καί γῆς παρεμβληθῇ δευτέρα στήλη P΄ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 5 volts καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἀμελητέας, τῆς ὁποίας ὁ ἀρνητικός πόλος εἶναι προσγειωμένος καί ὁ θετικός συνδέεται πρός τήν R΄.

Ε.Μ.Π. 1958

α) Τό κύκλωμα εἶναι κλειστόν. Τά B καί Γ συνδέονται διά τοῦ ἀγωγοῦ "Γῆ".

$$i = \frac{P}{R + R'} \qquad V_{BA} = -P + iR \qquad V_{BA} = U_B - U_A$$

καί $U_B = 0$ ἄρα τελικῶς $U_A = 11,36V$



Σχ. 128

β) $P - P' = i(R + R')$, $V_{BA} = -P + iR$, $V_{BA} = U_B - U_A$

$$U_B = 0$$

$$U_A = P - \frac{P - P'}{R + R'} \quad R = 14\ V$$

Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου A καί τοῦ βολτομέτρου V τῆς κάτωθι συνδεσμολογίας ὅπου ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι 1A καί ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου εἶναι 160V. Ἡ συστοιχία τῶν συσσωρευτῶν ἔχει τάσιν 171 V καί ἐσωτερικήν ἀντίστασιν πρακτικῶς μηδέν. Σχ. 129.

E.M.Π. 1951

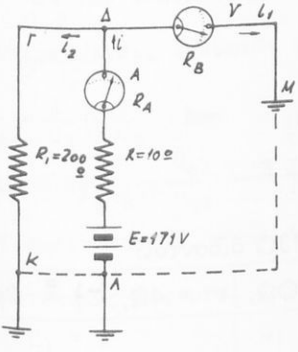
Ὁ ἀγωγός "γῆ" κλείει τό κύκλωμα δι'ἀμελητέας ἀντιστάσεως μεταξύ τῶν K, Λ καί M. (διακεκομένη γραμμή).

$$E = i(R + R_A) + i_2 \cdot R_1$$

$$E = i(R + R_A) + i_1 . R_B$$

Kirchhoff

$$i = i_1 + i_2$$



Σχ. 129

$$V_{\Delta\Lambda} = E - i(R + R_A)$$

$$V_{\Delta\Lambda} = R_1 i_2$$

τάσεως

$$V_{\Delta\Lambda} = R_B i_1$$

ἀλλά δίδονται:

$$V_{\Delta\Lambda} = 160V,\ i = 1A,\ R_1 = 200\Omega$$

$$R = 10\Omega\ ,\ E = 171V$$

Τελικῶς προκύπτει: $R_A = 1\Omega$

$$i_1 = i - \frac{V_{\Delta\Lambda}}{R_1} \qquad R_B = \frac{V_{\Delta\Lambda}}{i - \frac{V_{\Delta\Lambda}}{R_1}} = 800\ \Omega$$

10.3. κύκλωμα Σ.Ρ. μὲ πυκνωτὰς

● Ὁ πυκνωτής παρεμβάλλει διακοπήν είς τό συνεχές ρεῦμα. Τό γεγονός τοῦτο ἐπιτρέπει τήν ἀντιμετώπισιν τοῦ συστήματος τῶν πυκνωτῶν τοῦ κυκλώματος ἀνεξάρτητα ἀπό αὐτό. Δηλαδή διά τόν ὑπολογισμόν τῶν στοιχείων τῶν πυκνωτῶν (C, Q, V):

α. Ἐπιλύομεν τό κύκλωμα χωρίς τούς πυκνωτάς. Ὑπολογίζομεν τά ρεύματα.

β. Ὑπολογίζομεν τάς τάσεις μεταξύ τῶν σημείων συνδέσεως πυκνωτῶν διά τῆς:

$$V_{1,2} = \sum_1^2 I - \sum_1^2 E$$

γ. Ἀντιμετωπίζομεν τούς πυκνωτάς ἀνεξαρτήτως κυκλώματος: Καταρτίζομεν πίνακα στοιχείων. Ἐκφράζομεν τήν τάσιν είς τά ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν πυκνωτῶν διά τῆς:

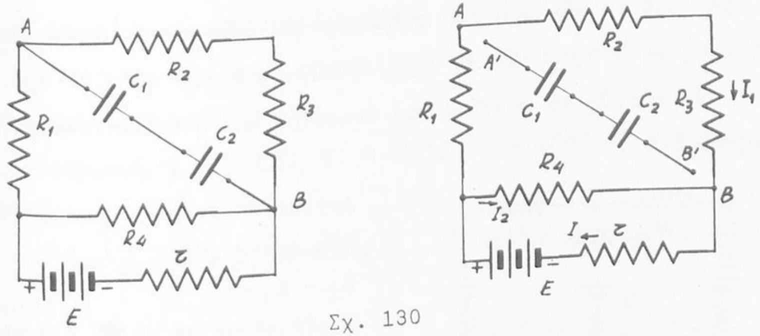
$$V_{1,2} = \frac{Q_{ολ}}{C_{ολ}}$$

δ. Ἐξισώνομεν τάς τάσεις:

$$\frac{Q_{ολ}}{C_{ολ}} = \sum_1^2 IR - \sum_1^2 E$$

☆ Είς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 130 δίδονται: $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $r = 4\Omega$, $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 8\mu F$ καί $E = 56V$.

Νά ἐπιλυθῆ καί νά ὑπολογισθῆ τό φορτίον καί ἡ τάσις ἑκάστου πυκνωτοῦ.



Σχ. 130

'Αντιμετώπισις κυκλώματος χωρίς πυκνωτάς:

$$I = I_1 + I_2$$

$$E = Ir + I_2R_4 \qquad \text{Kirchhoff}$$

$$I_1(R_1 + R_2 + R_3) = I_2R_4$$

$V_{AB} = I_1(R_2 + R_3)$ τάσις μεταξύ Α καί Β.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει $V_{AB} = 16V$

'Αντιμετώπισις πυκνωτῶν χωρίς κύκλωμα:

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_{o\lambda} = 1{,}6 \ \mu F$$

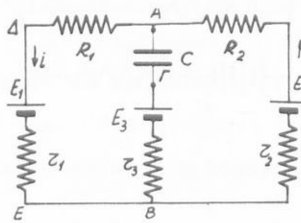
καί $V_{A'B'} = \dfrac{Q_{o\lambda}}{C_{o\lambda}}$

'Εξίσωσις τάσεων, συμπλήρωσις πίνακος στοιχείων:

Χωρητικότης εἰς μF	Φορτίον εἰς μCb	Τάσις εἰς V
$C_1 = 2$	$Q_1 = 25{,}6$	$V_1 = 12{,}8$
$C_2 = 8$	$Q_2 = 25{,}6$	$V_2 = 3{,}2$
$C_{o\lambda} = 1{,}6$	$Q_{o\lambda} = 25{,}6$	$V_{o\lambda} = V_{AB} = V_{A'B'} = 16V$

☆ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 131 δίδονται $E_1 = 8V$, $E_2 = 12V$, $r_1 = r_2 = 1\Omega$, $R_1 = R_2 = 3\Omega$, $E_3 = 16V$ καί $C = 4\mu F$.

Νά εὑρεθῇ τό φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ καί ἡ πολική τάσις τῆς πηγῆς E_1.



Σχ. 131

Ἀντιμετώπισις κυκλώματος ἄνευ πυκνωτοῦ:

$E_2 - E_1 =$
$= i(R_1+R_2+r_1+r_2)$ ● Kirchhoff

$V_{A\Gamma} = E_1 - E_3 + i(R_1+r_1)$

$V_{\Delta E} = E_1 + ir_1$ ● τάσεως

Ἀντιμετώπισις πυκνωτοῦ ἄνευ κυκλώματος:

$$Q = C \cdot V_{A\Gamma}$$

Ἐκ τοῦ συστήματος προκύπτει:

$$V_{\Delta E} = 8{,}5\ V$$
$$Q = 24\mu Cb = 24.10^{-6}\ Cb$$

☆ Δύο ἀγωγοί ἀντιστάσεων R καί R΄ συνδέονται διά τῶν ἄκρων των πρός τούς πόλους μιᾶς συστοιχίας συσσωρευτῶν, ὁλικῆς ΗΕΔ Ε καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως ἀμελητέας.

Ὁ εἷς τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ χωρητικότητος C, συνδέεται δι'ἀγωγοῦ μέ τό μέσον τῆς ἀντιστάσεως R καί ὁ ἄλλος ὁπλισμός μέ σημεῖον, τό ὁποῖον διαιρεῖ τήν ἀντίστασιν R΄ εἰς δύο τμήματα τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι x.

Ζητοῦνται:

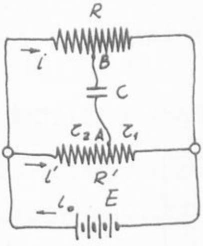
α) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις i καί i΄ τῶν ρευμάτων, τά ὁποῖα διατρέχουν τούς δύο ἀγωγούς.

β) Νά μελετηθῆ πῶς μεταβάλλεται τό φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ συναρτήσει τοῦ x.

Ἐφαρμογή: R = 100Ω, R΄ = 150Ω, E = 40V, C = 1μF, x = 3/4

Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις i , i΄ καί τό φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ.

Ε.Μ.Π. 1956



Σχ. 131α

$$\alpha.\quad i = \frac{E}{R}\ ,\quad i' = \frac{E}{R'} \qquad (1)$$

$$\beta.\quad V_{AB} = i\frac{R}{2} - i' \cdot r_2 \qquad (2)$$

ἀλλά: $r_1 + r_2 = R'$

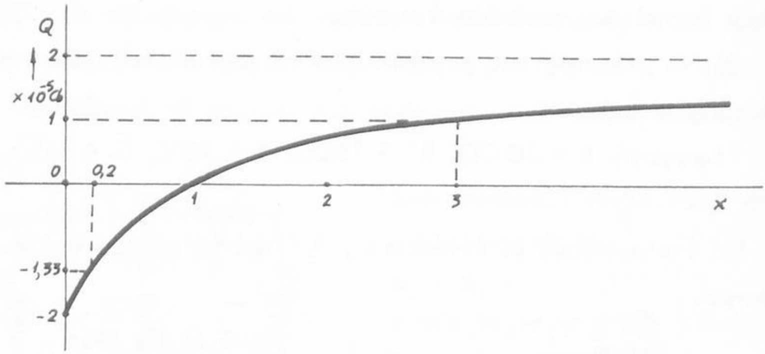
$$\frac{r_1}{r_2} = x \quad \blacktriangleright \quad r_2 = \frac{R'}{x+1} \qquad (3)$$

Ἀπό (3) καί (2) προκύπτει:

$$V_{AB} = i\frac{R}{2} - i' \cdot \frac{R'}{x+1} \qquad (4)$$

ἀλλά $$Q = C \cdot V_{AB} = C\left(i\frac{R}{2} - i'\frac{R'}{x+1}\right)$$

καί ἐκ τῶν (1) $\blacktriangleright$ $$Q = C\,E\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) \qquad (5)$$



Σχ. 132

'Εκ τῆς (5) συμπληροῦται ὁ πίναξ:

x	Q εἰς Cb
0	$-2 \cdot 10^{-5}$
0,2	$-1{,}33 \cdot 10^{-5}$
1	0
3	10^{-5}
∞	$2 \cdot 10^{-5}$

'Εκ τοῦ διαγράμματος φαίνεται ὅτι ὅταν ὁ δρομεύς A διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς R΄ ἡ πολικότης τοῦ πυκνωτοῦ ἀντιστρέφεται καί ὅτι τό μέγιστον φορτίον του εἶναι:

$$Q = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Cb}$$

'Εφαρμογή: $i = 0{,}4$ A $i' = 0{,}206$A $Q = -2{,}857 \cdot 10^{-6}$ Cb

11. ἠλεκτρικαὶ μετρήσεις

11.1. βολτόμετρον

Τιθέμενον παράλληλα πρός τόν ἀγωγόν παρέχει τήν διαφορά δυναμικοῦ εἰς τά σημεῖα συνδέσεως:

Χαρακτηριστικόν του εἶναι ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις $R_{εσ}$ ἡ ὁποία δύναται νά εἶναι:

α) ἄπειρος.

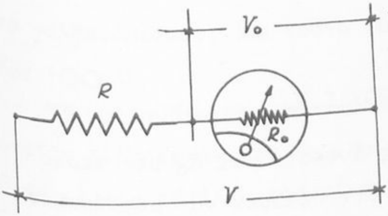
β) πεπερασμένη.

Βολτόμετρον ἀπείρου ἀντιστάσεως δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος καί συνεπῶς ἀμελεῖται ὡς στοιχεῖον τοῦ κυκλώματος.

Βολτόμετρον πεπερασμένης ἀντιστάσεως $R_{εσ}$ μετέχει ἐνεργῶς τοῦ κυκλώματος ὡς ὠμική ἀντίστασις $R_{εσ}$.

ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ ΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟΥ Σ.Ρ.

Ἔστω βολτόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως R_o καί περιοχῆς μετρήσεως $0 \ldots \longrightarrow V_o$ Volts.



Διά τοῦ βολτομέτρου τούτου θέλομεν νά μετρήσωμεν τάσιν $V > V_o$. Πρός τοῦτο συνδέομεν ἐν σειρᾷ πρός τό ὄργανον ἀντίστασιν R ἡ ὁποία πρέπει νά ἐξασφαλίζῃ:

α) ἀσφάλειαν τοῦ ὀργάνου.

β) εὐαισθησίαν μετρήσεως.

Τό μέγιστον ἐπιτρεπόμενον ρεῦμα διά τοῦ ὀργάνου εἶναι:

$$i_o = \frac{V_o}{R_o} \tag{1}$$

ἀλλά τότε ἡ πρός μέτρησιν τάσις V θά εἶναι:

$$V = i_o(R + R_o) \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{V}{V_o} = 1 + \frac{R}{R_o} \quad ἤ \; ἄν \quad \frac{V}{V_o} = η$$

Τελικῶς $R = R_o(\eta - 1)$

Διά $\eta = 10, 100...$ προκύπτει $R = 9\ R_o,\ 99R_o\ ...$

11.2. ἀμπερόμετρον

● Τιθέμενον ἐν σειρᾷ εἰς κλάδον τοῦ κυκλώματος παρέχει τήν ἔντασιν τοῦ διερχομένου ρεύματος.

Χαρακτηριστικόν του εἶναι ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις ἡ ὁποία δύναται νά εἶναι:

α) μηδέν.

β) πεπερασμένη.

Ἀμπερόμετρον μέ ἐσωτερικήν ἀντίστασιν μηδέν ἀποτελεῖ ἰδανικήν διάταξιν τῆς ὁποίας ἡ παρουσία εἰς τό κύκλωμα οὐδόλως ἐπιδρᾶ ἐπ'αὐτοῦ

Ἀμπερομετρον μέ ἐσωτερικήν ἀντίστασιν,μετέχει ἐνεργῶς τοῦ κυκλώματος δι'αὐτῆς.

ΕΠΕΚΤΑΣΙΣ ΚΛΙΜΑΚΟΣ ΑΜΠΕΡΟΜΕΤΡΟΥ Σ.Ρ.

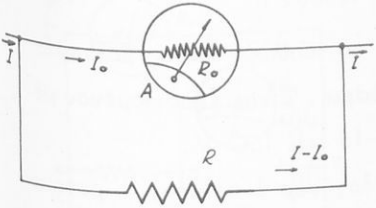
Ἔστω ἀμπερόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως R_o μέ περιοχήν μετρήσεως $0... \longrightarrow I_o$ A καί ὅτι θέλομεν νά μετρήσωμεν ρεῦμα $I > I_o$.

Πρός τοῦτο φέρομεν <u>παραλλήλως</u> πρός τό ὄργανον ἀντίστασιν R τήν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς:

I_o εἶναι τό μέγιστον ρεῦμα τό ὁποῖον διέρχεται ἀσφαλῶς διά τοῦ ὀργάνου. Συνεπῶς τό ἐπί πλέον $I - I_o$ θά διέλθῃ διά τῆς ἐν παραλλήλῳ ἀντιστάσεως.

Ἐκ τοῦ εἰκονιζομένου βρόχου προκύπτει:

$$(I-I_o)R = R_oI_o \quad \text{ἤ} \quad \frac{I}{I_o} = 1 + \frac{R_o}{R} \qquad (1)$$



Ἄν $\frac{I}{I_o} = \eta$

τότε $R = \frac{R_o}{\eta - 1}$

Διά $\eta = 10,\ 100,\ \ldots$

προκύπτει: $R = \frac{R_o}{9},\ \frac{R_o}{99},\ \ldots$

11.3. γαλβανόμετρον

Ὅρος ἀναφερόμενος εἰς ὄργανον χρησιμοποιούμενον εἰς μετρήσεις ἀσθενῶν τάσεων καί ρευμάτων.

Γαλβανόμετρον παρουσιάζει ἀντίστασιν $R_{\varepsilon\sigma} = 200\Omega$ καί δύναται νά μετρήσῃ ρεῦμα μέχρι 0,2 mA.

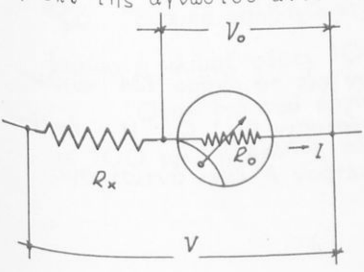
Ζητεῖται πόση ἀντίστασις πρέπει νά συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρός τό γαλβανόμετρον, ἵνα τοῦτο δύναται νά μετρᾷ τάσεις ἀπό 0V ἕως 100 V.

Ε.Μ.Π. 1957

Τό γαλβανόμετρον δέν καταστρέφεται ὅταν τό ρεῦμα ἀπό τό ὁποῖον διαρρέεται δέν ὑπερβαίνει τήν τιμήν τῶν 0,2 mA. Τότε ἡ τάσις εἰς τά ἄκρα του εἶναι:

$$V_o = I.R_{\varepsilon\sigma} = 2.10^{-4}\,.200 = 4.10^{-2}\ \text{Volts}$$

Συνεπῶς διά νά μετρήσῃ μέ ἀσφάλειαν τάσιν V = 100 Volts, πρέπει τό ὑπόλοιπον τῆς τάσεως $V - V_o = 99{,}96$ Volts, νά πέσῃ ἐπί τῆς ἀγνώστου ἀντιστάσεως Rx.



$$V - V_o = I.\,R_x$$

$$R_x = \frac{V - V_o}{I}$$

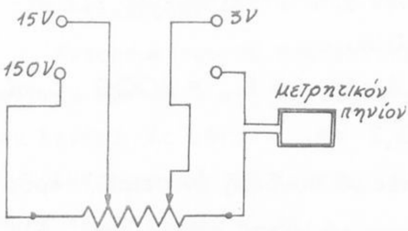
$$R_x = \frac{V - IR_{\varepsilon\sigma}}{I} = \frac{V}{I} - R_{\varepsilon\sigma}$$

τελικῶς: $R_x = 499800\ \Omega$

Εἰς τό σχῆμα 133 δεικνύεται τό κύκλωμα ἑνός βολτομέτρου. Ἡ κλῖμαξ ἔχει 150 ὑποδιαιρέσεις. Εἶναι ἐφοδιασμένον μέ 4 ἀκροδέκτας διά μετρήσεις μέχρι 3–15 καί 150 V.

Ὅταν 1 mA διέρχεται διά τοῦ ὀργάνου ὁ δείκτης μετακινεῖται κατά 50 ὑποδιαιρέσεις. Ποία ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τοῦ βολτομέτρου στίς διάφορες κλίμακες.

Ἡ κλῖμαξ τοῦ ὀργάνου φέρει 150 ὑποδιαιρέσεις.



Σχ. 133

Συνεπῶς τό μέγιστον διά τοῦ βολτομέτρου ρεῦμα εἶναι 3 mA. Εἰς τήν κλίμακα τῶν 3V ἀντιστοιχεῖ ἐσωτερική ἀντίστασις:

$$R_3 = \frac{3V}{3.10^{-3}\ A} = 1000\ \Omega$$

Εἰς τήν κλίμακα τῶν 15V ἀντιστοιχεῖ ἐσωτερική ἀντίστασις:

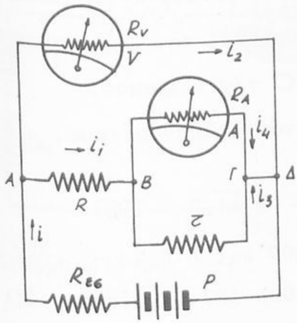
$$R_{15} = \frac{15\ V}{3.10^{-3}\ A} = 5000\ \Omega$$

καί εἰς τήν κλίμακα τῶν 150 V ἀντιστοιχεῖ ἐσωτερική ἀντίστασις:

$$R_{150} = \frac{150V}{3.10^{-3}\ A} = 50.000\ \Omega$$

Θεωρήσωμεν τό εἰκονιζόμενον εἰς τό σχῆμα 134 κύκλωμα. Ἡ στήλη P ἔχει ἐσωτερικήν ἀντίστασιν 0,1 Ω. Ἡ ἀντίστασις r εἶναι 0,01 Ω. Τό ἀμπερόμετρον A ἔχει ἀντίστασιν

0,015 Ω καί δεικνύει 10 A.



Σχ. 134

Τό βολτόμετρον V ἔχει ἀντίστασιν 200 Ω καί δεικνύει 2,65 V. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς ἀντιστάσεως R, ὡς καί ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμις E τῆς στήλης.

Ε.Μ.Π. 1960

$$P = iR_{εσ} + i_1R + i_3r$$

$$R_A \cdot i_4 = i_3 \cdot r$$

$$i_4R_A + i_1R = i_2 \cdot R_V$$

● Kirchhoff

$$V_{AΔ} = P - iR_{εσ}$$

$$V_{AΔ} = i_2 \cdot R_V$$

$$V_{AΔ} = Ri_1 + i_4R_A$$

$$V_{AΔ} = Ri_1 + i_3r$$

● τάσεως

Ἀπό τήν ἐπίλυσιν προκύπτει:

$P = 5{,}15$ V $R = 0{,}1$ Ω

☆ Ἔχομεν γαλβανόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $R_{εσ}$, τοῦ ὁποίου ἡ κλῖμαξ φέρει 100 ἴσας ὑποδιαιρέσεις.

Ὅταν διά τοῦ ὀργάνου τούτου διέρχεται ρεῦμα, εντάσεως 100 μA, ἡ βελόνη εὑρίσκεται εἰς τήν ὑποδιαίρεσιν 100.

Κατόπιν συνδέσεως ἐν παραλλήλῳ μιᾶς ἀντιστάσεως R=1Ω, (Shunt) παρατηροῦμεν ὅτι ρεῦμα ἐντάσεως 1A προκαλεῖ τήν μετακίνησιν τῆς βελόνης εἰς τήν ὑποδιαίρεσιν 50 τῆς κλίμακος.

Ζητεῖται ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου.

Ε.Μ.Π. 1953

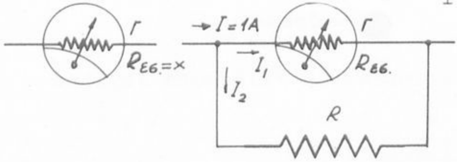
'Εφ'ὅσον αἱ ὑποδιαιρέσεις εἶναι 100 καί ἡ βελόνη εὑρίσκεται εἰς τήν ὑποδιαίρεσιν 100 μέ ρεῦμα 100 μA, ἕπεται ὅτι ἑκάστη ὑποδιαίρεσις ἀντιστοιχεῖ εἰς μεταβολήν ρεύματος 1μA.

Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τοῦ Kirchhoff εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 135 λαμβάνομεν:

$$0 = I_1 R_{\varepsilon\sigma} - I_2 . R$$

ἐκ τῆς ὁποίας:

$$R_{\varepsilon\sigma} = \frac{I_2}{I_1} . R \qquad (1)$$



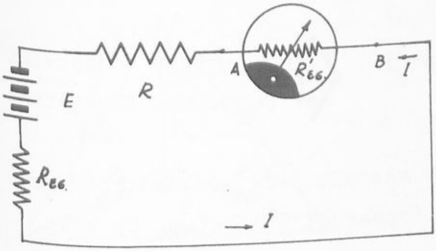
Σχ. 135

'Αλλά I_1 = 50 μA καί $I_2 = I - I_1$ = 999950 μA. Ὅθεν ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$R_{\varepsilon\sigma} = 19.999 \ \Omega$$

☆ Στήλη Η.Ε.Δ. E = 2 Volts καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $R_{\varepsilon\sigma}$ = 8 Ω συνδέεται πρός κύκλωμα περιλαμβάνον ἀντίστασιν R καί βολτόμετρον ἀντιστάσεως $R'_{\varepsilon\sigma}$ = 300 Ω, συνδεσμολογημένα ἐν σειρᾷ. Νά ὑπολογισθῇ ποία πρέπει νά εἶναι ἡ R, ὥστε τό βολτόμετρον νά δείξῃ 1,5 Volts

Ε.Μ.Π. 1958



Σχ. 136

'Εξισώσεις Kirchhoff

$E = I(R + R_{εσ} + R'_{εσ})$ (1)

'Εξισώσεις τάσεως μεταξύ A καί B.

$V = I \cdot R'_{εσ}$ (2)

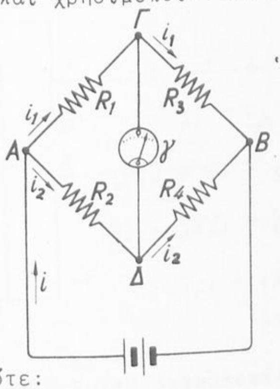
Διαιρῶ (1) καί (2)

$$\frac{E}{V} = \frac{R + R_{εσ} + R'_{εσ}}{R'_{εσ}}$$ δίδονται E, V, $R_{εσ}$, $R'_{εσ}$

Τελικῶς R = 92 Ω.

11.4. γέφυρα wheatstone

'Η είκονιζομένη διάταξις σχῆμα 137 καλεῖται γέφυρα Wheatstone καί χρησιμοποιεῖται κυρίως διά τήν μέτρησιν άντιστάσεων:



Σχ. 137

'Η άντίστασις R_1 εἶναι ἡ πρός μέτρησιν ἄγνωστος ἐνῷ αἱ R_2, R_3, R_4 γνωσταί.

Λέγομεν ὅτι ἡ γέφυρα ἰσορροπεῖ, ὅταν διά τοῦ άγωγοῦ ΓΔ δέν διέρχεται ρεῦμα ἤτοι ὅταν:

$U_Γ = U_Δ$ (1)

'Αλλά τότε:

$U_A - U_Γ = i_1 \cdot R_1$ (2) ➤ $i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2$

$U_A - U_Δ = i_2 \cdot R_2$ (3)

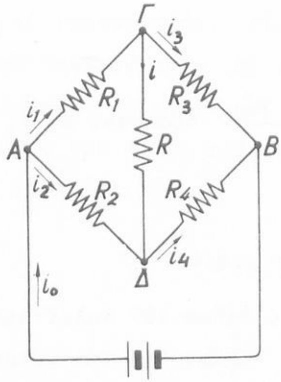
$U_Γ - U_B = i_1 \cdot R_3$ (4) ➤ $i_1 \cdot R_3 = i_2 \cdot R_4$

$U_Δ - U_B = i_2 \cdot R_4$ (5)

ἤτοι: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ ⇦ Συνθήκη ἰσορροπίας γεφύρας Wheatstone

'Αντιστρόφως:

'Εάν μεταξύ τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνός κυκλώματος γεφύρας ἰσχύει $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ ἡ γέφυρα ἰσορροπεῖ δηλ. εἶναι $U_\Gamma = U_\Delta$.



Σχ. 138

'Εκ τοῦ κόμβου Γ ► $\iota_1 = \iota + \iota_3$ (1)

'Εκ τοῦ κόμβου Δ ► $\iota + \iota_2 = \iota_4$ (2)

'Εκ τοῦ βρόχου ΑΓΔΑ ► $\iota_2 R_2 = \iota R + \iota_1 R_1$ (3)

'Εκ τοῦ βρόχου ΓΒΔΓ ► $\iota_3 R_3 = \iota_4 R_4 + \iota R$ (4)

ἀκόμη $V_{\Gamma\Delta} = \iota_3 R_3 - \iota_4 R_4$ (5)

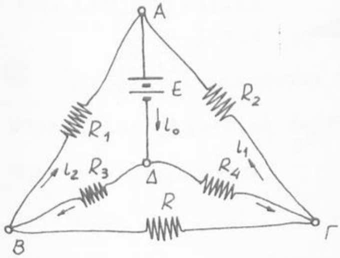
καί δίδεται ὅτι: $R_1 R_4 = R_2 R_3$ (6)

'Εκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος προκύπτει $V_{\Gamma\Delta} = 0$ ► $U_\Gamma = U_\Delta$

✰ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 139 δίδονται:

$R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 12.000\ \Omega$, $R = 18.000\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_4 = 24.000\ \Omega$, $E = 90$ V.

Νά εὑρεθῇ τό ρεῦμα πού διαρρέει τήν R καί τό ρεῦμα πού διαρρέει τόν ΑΔ.



Σχ. 139

Τό δοθέν κύκλωμα εἶναι μία γέφυρα Wheatstone καί ἐφ'ὅσον:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

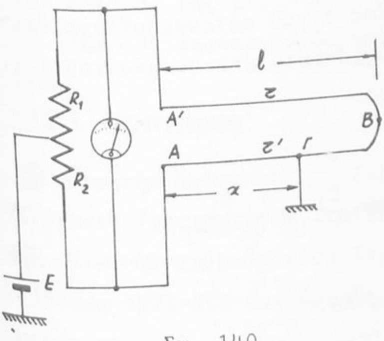
"Ητοι τά B καί Γ εἶναι ἰσοδυναμικά σημεῖα: $U_B = U_\Gamma$ καί ἡ R δέν διαρρέεται ὑπό ρεύματος.

'Από τόν βρόχον ΑΓΔΑ ► $i_1 = \dfrac{E}{R_2 + R_4} = \dfrac{90V}{36000\Omega} = 0{,}0025A$

" " " ΑΔΒΑ ► $i_2 = \dfrac{E}{R_1 + R_3} = \dfrac{90V}{90\Omega} = 1\ A$

'Από τόν κόμβον Δ ► $i_o = i_1 + i_2 = 1{,}0025\ A$

11.5. βρόχος τοῦ Murray



Σχ. 140

Διά τοῦ βρόχου Murray προσδιορίζεται ἡ θέσις Γ, φθορᾶς ἤ γειώσεως καλωδίου. 'Ο βρόχος δημιουργεῖται ὡς ἑξῆς: σχῆμα 140 Διά βοηθητικοῦ ἀγωγοῦ A'B συνδέομεν τό σημεῖον B τοῦ ὑπό ἔλεγχον ἀγωγοῦ AB. (Τό Γ νά κεῖται μεταξύ τῶν A καί B).

Εἰς τά σημεῖα A καί A' πραγματοποιοῦμεν τήν συνδεσμολογίαν τοῦ σχήματος ὥστε ἡ ὅλη διάταξις νά εἶναι μία γέφυρα Wheatstone.

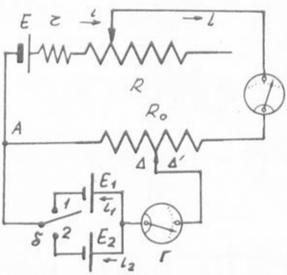
"Αν r, r' εἶναι αἱ ἀνά μονάδα μήκους ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν A'B καί AB ἀντιστοίχως, τότε αἱ 4 ἀντιστάσεις τῆς γεφύρας εἶναι: R_1, R_2, $rl + (l-x)r'$, $r'x$ καί κατά τήν ἰσορροπίαν της ἰσχύει:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{rl + (l-x)r'}{r'x} \blacktriangleright \quad x = l\,\frac{1+\frac{r}{r'}}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

"Αν $r = r'$: $$x = \frac{2l}{1+R_1/R_2}$$

11.6. μέθοδος ἀντισταθμίσεως

Τό σχῆμα 141 παριστᾶ ἀντισταθμιστικήν διάταξιν διά τήν μέτρησιν ΗΕΔ πηγῆς.



Σχ. 141

Πραγματοποιοῦμεν τήν συνδεσμολογίαν τοῦ σχήματος. Ἡ E_2 εἶναι ἡ ἄγνωστος ΗΕΔ, ἡ E_1 εἶναι πρότυπος ΗΕΔ ἐνῷ ἡ E εἶναι ἄγνωστος ἀλλά σταθερά. Φέρομεν τόν διακόπτην δ εἰς 1 καί διά μετακινήσεως τοῦ δρομέως Δ τοῦ ποτενσιομέτρου ἐπιτυγχάνομεν μηδενισμόν τοῦ i_1. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἰσχύουν:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= R_1 \cdot i \\ E &= (R_o + R + r)i \end{aligned}\right\} \blacktriangleright \quad \frac{E_1}{E} = \frac{R_1}{(R_o+R+r)} \qquad (1)$$

ὅπου R_1 ἡ ἀντίστασις τοῦ τμήματος ΑΔ.

Φέρομεν τόν δ εἰς θέσιν 2. Ἔστω Δ΄ ἡ νέα θέσις τοῦ δρομέως τοῦ ποτενσιομέτρου εἰς τήν κατάστασιν ἀντισταθμίσεως. θέτω R_2 τήν ἀντίστασιν τοῦ ΑΔ΄.

Ἰσχύουν τότε:
$$\left.\begin{aligned} E_2 &= R_2 \cdot i \\ E &= (R_o + R + r)i \end{aligned}\right\} \blacktriangleright \quad \frac{E_2}{E} = \frac{R_2}{(R_o + R + r)} \qquad (2)$$

Διά διαιρέσεως τῶν (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} \blacktriangleright \quad E_2 = E_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

12. ἀντί-ΗΕΔ

● Ἀποδέκται καλοῦνται ἠλεκτρικαί διατάξεις εἰς τάς ὁποίας ἡ παρεχομένη ἠλεκτρική ἐνέργεια μετατρέπεται καί εἰς ἄλλην μορφήν πλήν θερμότητος.

Ἔστω V ἡ τάσις ὑπό τήν ὁποίαν τροφοδοτεῖται ὁ ἀποδέκτης, r' ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις, Ε΄ ἡ ΑΝΤΙ-ΗΕΔ αὐτοῦ.

Ἡ ΑΝΤΙ-ΗΕΔ ἀποδέκτου ὁρίζεται ἀπό τάς :

$$E' = V - ir' \qquad (1)$$

$$E' = \frac{W'}{Q} \qquad (2)$$

$$E' = \frac{P'}{i} \qquad P' = \frac{W'}{t} \qquad (3)$$

W' = Ἐνέργεια ἄλλης πλήν θερμότητος μορφῆς.

Q = Τό διερχόμενον φορτίον.

P' = Ἰσχύς ἀποδέκτου

t = Χρόνος

Ἑκάστη τῶν (1), (2) καί (3) δύναται νά χρησιμοποιηθῇ διά τόν ὁρισμόν τῆς Ε'.

Ἐκ τῶν ἀποδεκτῶν θά γνωρίσωμεν: κινητῆρας καί βολτάμετρα.

12.1. κινητῆρες

● **Κινητήρ ἀκίνητος** : Συμπεριφέρεται ὡς νεκρά (ὠμική) ἀντίστασις ἴση πρός τήν ἐσωτερικήν του.

● **Κινητήρ στρεφόμενος**: Στρεφόμενος κινητήρ ἰσοδυναμεῖ πρός σύστημα ΑΝΤΙ-ΗΕΔ καί ὠμικῆς ἀντιστάσεως ἴσης πρός τήν ἐσωτερικήν του.

Ἡ ἀντί ΗΕΔ κινητῆρος δέν παραμένει σταθερά ἀλλά μεταβάλλεται μετά τῆς γωνιακῆς ταχύτητος περιστροφῆς, γενικῶς αὐξανομένη μετ᾽αὐτῆς, τείνουσα πρός τήν ΗΕΔ τῆς τροφοδοτούσης πηγῆς.

Σημειοῦμεν ἀκόμη ὅτι:

1. Ἡ ἀπόδοσις κινητῆρος αὐξάνει μετά τῆς γωνιακῆς ταχύτητος.

2. Αὐξανομένης τῆς γωνιακῆς ταχύτητος περιορίζονται αἱ ἀπώλειαι.

3. Διά ταχύτητα περιστροφῆς μεγαλυτέρα μιᾶς ὁρικῆς ω_0 ἔχομεν αὐτόματον πέδησιν τοῦ κινητῆρος.

12.2. βολτάμετρα

● **Βολτάμετρον μέ χημικῶς συμμετρικά ἠλεκτρόδια** : (ΜΗ ΠΟΛΟΥΜΕΝΟΝ). Συμπεριφέρεται ὡς ὠμική ἀντίστασις ἴση πρός τήν ἐσωτερικήν του $R_{\varepsilon\sigma}$.

● **Βολτάμετρον μέ χημικῶς ἀσύμμετρα ἠλεκτρόδια** (ΠΟΛΟΥΜΕΝΟΝ) Συμπεριφέρεται ὡς σύστημα ΑΝΤΙ-ΗΕΔ καί ἀντιστάσεως ἴσης πρός τήν ἐσωτερικήν του $R_{\varepsilon\sigma}$.

Βολτάμετρον ὑπό τάσιν μικροτέραν τῆς Ε΄ δρᾶ ὡς διακόπτης.

12.3. προβλήματα βολταμέτρων

Προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τά βολτάμετρα λόγῳ τῆς φύσεώς των ἀντιμετωπίζονται καί ἐπιλύονται εἰς τρεῖς φάσεις:

1η ΦΑΣΙΣ: ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ

Ἀναλόγως τῆς φύσεώς του (ΠΟΛΟΥΜΕΝΟΝ ἤ ΜΗ) τό βολτάμετρον μετέχει ἐνεργῶς ἠλεκτρικοῦ κυκλώματος (διά τῆς Ε΄ καί $R_{\varepsilon\sigma}$ ἤ μόνον τῆς $R_{\varepsilon\sigma}$). Τό κύκλωμα τοῦτο ἐπιλύεται διά μίας τῶν ἤδη γνωστῶν μεθόδων.

2α ΦΑΣΙΣ: ΧΗΜΙΚΗ

Γράφονται αἱ λαμβάνουσαι χώραν ἐντός τοῦ βολταμέτρου χημικαί ἀντιδράσεις καί γίνεται χημικός συσχετισμός τῶν ἀναφερομένων σωμάτων πρός τά ἰόντα των.

3η ΦΑΣΙΣ: ΗΛΕΚΤΡΟΧΗΜΙΚΗ

Διά τῆς $m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{\eta} \cdot i \cdot t$ (1) ἤ ἄλλης ἰσοδυνάμου συνδεονται τά χημικά καί ἠλεκτρικά δεδομένα.

Παρατήρησις

* Ἡ (1) ἰσχύει μόνον διά ΙΟΝΤΑ καί ἐκφράζει τόν νόμον τοῦ Faraday. Εἰς αὐτόν: A = ἀτομικόν βάρος, η = σθένος, F = = σταθ. τοῦ Faraday.

Συσσωρευτής 3 V συνδέεται ἐν σειρᾷ μέ βολτάμετρον Α περιέχον διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καί μέ ἕτερον βολτάμετρον Β περιέχον ὀξυνισμένον ὕδωρ. Ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμις πολώσεως τῆς συσκευῆς Β εἶναι 1,5 V, τῆς δέ Α εἶναι μηδέν. Ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι ἐντός χρόνου 4 ὡρῶν ἡ μᾶζα τῆς ἐκ χαλκοῦ καθόδου τῆς συσκευῆς Α ηὐξήθη κατά 20 gr, ζητοῦνται:

α. Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος.

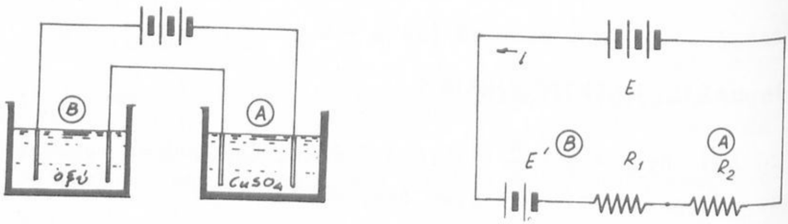
β. Ἡ μᾶζα m τοῦ ἠλεκτρολυομένου ὕδατος ἐντός τοῦ βολταμέτρου Β.

γ. Ἡ ὁλική ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος.

Ὑπενθυμίζονται ἡ σταθερά τοῦ Faraday 96500 gr./γραμμοϊσοδύναμον καί τά ἀτομικά βάρη χαλκοῦ = 64, ὑδρογόνου = 1 καί ὀξυγόνου = 16.

Ἀνωτάτη Γεωπονική Ἀθηνῶν 1959

Ε.Μ.Π. 1961



Σχ. 142

1. Ἠλεκτρική ἄποψις: $E - E' = i(R_1 + R_2)$ (1)

2. Χημική ἄποψις: $2H_2O \rightleftharpoons 2H_2 + O_2$ (2)

3. Ἠλεκτροχημική ἄποψις:

διά τόν χαλκόν: $m_1 = \frac{A_1}{F} \cdot \frac{it}{n_1}$ (3)

διά τό ὑδρογόνον : $m_2 = \frac{A_2}{F} \cdot \frac{it}{n_2}$ (4)

Ἐκ τῆς (3) ➤ $i = 4{,}18$ A

Ἀπό τάς (3) καί (4)

➤ $\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{n_2}{n_1}$ $m_2 = m_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 0{,}625 grH_2$

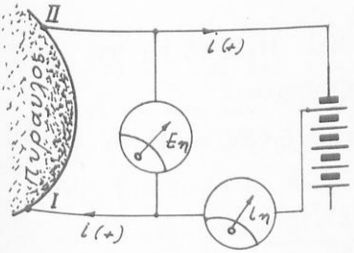
Ἐκ τῆς (2) $\frac{2.18}{x} = \frac{2 \cdot 2}{0{,}625}$ ➤ $x = 5{,}62 gr\ H_2O$

Ἐκ τῆς (1) ➤ $R_1 + R_2 = 0{,}358\ \Omega$

☆ Κατά τόν καθιερωμένον πολύωρον ἔλεγχον πρό τῆς ἐκτοξεύσεως ἑνός πυραύλου ἐφηρμόσθησαν, ἐπί δύο ἐξωτερικῶν ἀκροδεκτῶν I καί II αὐτοῦ, διαδοχικῶς διάφοροι τάσεις Eη καί ἐμετρήθησαν αἱ ἑκάστοτε ἐμφανιζόμεναι ἐντάσεις ρεύματος ιη ὡς ἀναγράφονται αὗται εἰς τόν πίνακα. Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν μετρήσεων ἀριθ. 4 ἕως 8 τῆς περιοχῆς Α τοῦ πίνακος, δύνανται νά ἐξαχθοῦν ὡρισμένα συμπεράσματα ὡς πρός τό εἶδος καί τάς τιμάς τῶν ἠλεκτρικῶν ὀργάνων, τῶν συνδεδεμένων ἐντός τοῦ πυραύλου, μετά τῶν ἀκροδεκτῶν Ι καί ΙΙ, ὁπότε ἡ συνδεσμολογία αὕτη δύναται νά συμπληρωθῇ καί διά τοῦ πορίσματος τῆς ἐξετάσεως τῶν μετρήσεων ἀριθ. 1 ἕως 3 (περιοχή Β τοῦ πίνακος).

Ζητεῖται ἡ ἐσωτερική ἠλεκτρική συνδεσμολογία μεταξύ Ι καί ΙΙ, ὁμοῦ μετά τῶν σχετικῶν τιμῶν καί σημείων.

Ε.Μ.Π. 1962



Σχ. 143

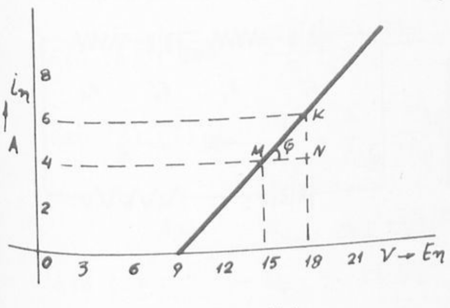
	A			B				
Αὔξ.ἀριθ.	1	2	3	4	5	6	7	8
En Volts	0	3	6	9	12	15	18	21
In Ampers	0	0	0	0	2	4	6	8

Ἐκ τοῦ διαγράμματος προκύπτει ὅτι:

$$\sigma\varphi\ \varphi = \frac{(MN)}{(KN)} = \frac{3}{2} = 1,5$$

σχῆμα 144.

Ἀλλά εἰς τό διάγραμμα $i_\eta = f(E_\eta)$ ἡ σφ φ ἐκφράζει τήν ὠμικήν ἀντίστασιν, ἤτοι: Ἡ μεταξύ τῶν ἀκροδεκτῶν Ι καί ΙΙ ἀντίστασις εἶναι R_0=1,5Ω, ἥτις παραμένει σταθερά. Ἀλλά ἐκ τῆς μετρήσεως 4 φαίνεται ὅτι διά E_η = = 9V, i_η = 0. Τοῦτο σημαίνει ὅτι μεταξύ τῶν Ι καί ΙΙ ἐμφανίζεται ἀντι-ΗΕΔ Ε΄ = 9 V.



Σχ. 144

Ἐκ τῶν μετρήσεων 1 ἕως 4 συμπεραίνομεν ὅτι αὐξανομένης τῆς E_η αὐξάνει ἡ E' μέχρι τῆς τιμῆς τῶν 9V ὥστε νά εἶναι διαρκῶς $E = E'$.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι μεταξύ τῶν I καί II ὑπάρχει βολτάμετρον μέ ἀντι - ΗΕΔ $E' = 9V$.

Δύο βολτάμετρα B_1 καί B_2 συνδέονται ἐν σειρᾷ. Τό B_1 περιέχει H_2SO_4 καί τό B_2 $AgNO_3$. Τό σύστημα τροφοδοτεῖται ὑπό πηγῆς ΗΕΔ E = 20 V. Κατά τήν διάρκειαν Δt τοῦ πειράματος συλλέγονται ἐπί τῆς καθόδου τοῦ B_2 27 gr Ag μέ ρεῦμα ἐντάσεως 1A, σχῆμα 145.

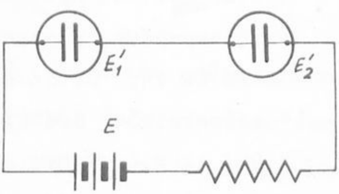
Δίδεται ὅτι κατά τήν σύνθεσιν 1 Mol H_2O ἐξ H_2 καί O_2 ἐκλύεται ἐνέργεια ἴση πρός 290.000 Joules.

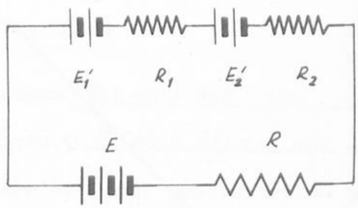
Παρατηρεῖται ὅτι ὅταν ἡ E λάβῃ τιμή $E < 3V$ παύει τό φαινόμενον τῆς ἠλεκτρολύσεως.

Δίδονται: $F = 96.500 \dfrac{\text{Cb}}{\text{γραμμοϊσοδύναμον}}$

σθένος ἀργύρου 1, Α. βαρ. N = 14, O = 16, Ag = 108.

Νά εὑρεθοῦν: Αἱ ἀντιηλεκτρεγερτικαί δυνάμεις E_1' καί E_2' τῶν B_1 καί B_2, τό ποσόν τοῦ διασπασθέντος H_2O καί $AgNO_3$ ἡ διάρκεια Δt πειράματος, ἡ ὁλική ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος.





Σχ. 145

1. Ἠλεκτρική ἄποψις:

$$E - E_1' - E_2' = iR_o \quad (1) \qquad R_o = R_1 + R_2 + R \quad (2)$$

2. Χημική ἄποψις:

$$H_2O \rightleftharpoons H_2 + \frac{1}{2} O_2 + W \quad (3) \qquad AgNO_3 \rightleftharpoons NO_3^- + Ag^+ \quad (4)$$

$$\text{μέ} \quad W = E'_1 \cdot Q \quad (5)$$

3. Φυσικοχημική ἄποψις:

$$m_{Ag} = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_{Ag}}{n_{Ag}} \cdot i \cdot \Delta t \quad (6) \qquad m_H = \frac{1}{F} \cdot \frac{A_H}{n_H} \cdot i \cdot \Delta t \quad (7)$$

Παρατηρήσεις:

α. Εἰς τό δοθέν παράδειγμα κατά τήν σύνθεσιν 1 mol H_2O ἐλευθεροῦται ἐνέργεια W = 290.000 Joules. Ἄρα κατά τήν ἀποσύνθεσιν ἑνός mol H_2O ἀπορρροφᾶται ποσόν ἐνεργείας W = = 290.000 Joules.

β. Ἡ ἀναφερομένη ἐνέργεια W εἶναι χημική καί συνεπῶς W = $= E'_1 \cdot Q$ μέ Q = 2.96500 Cb, ἀφοῦ τό 1 mol H_2O περιέχει δύο γραμμοϊσοδύναμα H_2 ἤ O_2.

γ. Ἀφοῦ ρεῦμα δέν διέρχεται μέ E < 3V ἕπεται ὅτι:

$$E'_1 + E'_2 = 3V \quad (8)$$

Ἀπό (5) ► $E'_1 = \frac{W}{Q} = 1,5$ V

Ἀπό (8) ► $E'_2 = 1,5$ V

Ἀπό (6) ► $\Delta t = 24.125$ sec

Ἀπό (4) ► $\frac{170 \text{ gr } AgNO_3}{m\ AgNO_3} = \frac{108}{28}$ $\qquad m_{AgNO_3} = 42,5$ gr

Ἀπό (6).(7) ► $\frac{m_H}{m_{Ag}} = \frac{A_H \cdot n_{Ag}}{A_{Ag} \cdot n_H}$ $\qquad m_H = 0,25$ gr

ἄρα $\quad m_{H_2O} = 2,25$ gr

Ἀπό (1) $\quad R_o = 17\ \Omega$

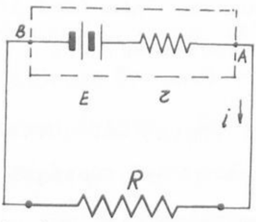
13. ἰσχὺς

13.1. ὁρισμοί

'Ισχύς νεκρᾶς ἀντιστάσεως , ἀποδίδουσα τήν θερμότητα Joule:

$$P_{\Theta} = V_{AB} \cdot i = i^2 \cdot R$$

'Ισχύς πηγῆς, παρεχούσης ἠλεκτρικήν ἐνέργειαν εἰς κύκλωμα.



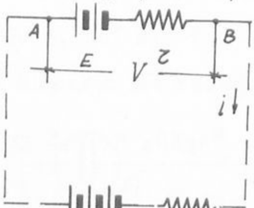
ὁλική : $P_o = E \cdot i$

ἀπωλειῶν*: $P_\alpha = (E-V_{AB})i = i^2 \cdot r$

'Ενέργεια παρεχομένη ὑπό τῆς γεννητρίας = θερμότης ἐντός τῆς r + παρεχομένη ἐνέργεια εἰς τό ἐξωτερικόν κύκλωμα.

$$\text{ἤ} \quad Eit = i^2rt + V_{AB}\, it$$

Ισχυς τροφοδοτουμένης (φορτιζομένης) πηγῆς:



ὠφέλιμος: $P_\omega = Ei$

ὁλική : $P_o = V_{AB} \cdot i$

ἀπωλειῶν: $P_\alpha = i^2r$

---

*Οἱ ὅροι "καταναλισκομένη", "δαπανωμένη" διά τήν ἰσχύν εἶναι ἀνεπιτυχεῖς ἀφοῦ τό μέγεθος "ἰσχύς εἶναι μή καταναλισκόμενον.

'Η ἀναφερομένη ὡς "καταναλισκομένη" ἰσχύς ἀποδίδει τήν "καταναλισκομένην" ἐνέργειαν.

Παρεχομένη εἰς τήν πηγήν ὁλική ἐνέργεια = θερμότης ἐντός τῆς r + ὠφέλιμος ἐνέργεια.

$$ή \quad V_{AB}.it = i^2 rt + Eit$$

'Ισχύς ἀποδέκτου : ἰσχύει ὅτι καί διά τήν φορτιζομένην πηγήν:

ὠφέλιμος: $P_\omega = E'i$

ὁλική : $P_o = V_{AB}i$

ἀπωλειῶν: $P_\alpha = i^2 . r$

Μέ E΄ τήν ἀντι-ΗΕΔ τοῦ ἀποδέκτου

Βαθμός ἀποδόσεως α: καλεῖται ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἐνεργείας W_ω πρός τήν καταναλισκομένην ἐνέργειαν W_κ ἤτοι:

$$\alpha = \frac{W_\omega}{W_\kappa}$$

☆ Πηγή E = 12V καί ἀμελητέας r, τροφοδοτεῖ μέσῳ δύο ἀγωγῶν, ἑκάστου ἀντιστάσεως R = 0,5 Ω, ἠλεκτρομαγνήτην μέ περιέλιξιν ἀντιστάσεως R΄= 5Ω. Ζητοῦνται: α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ κυκλώματος. β) Ἡ ἰσχύς τῆς πηγῆς. γ) ἡ ὑπό τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου καταναλισκομένη ἰσχύς καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τά ἄκρα τῆς περιελίξεώς του. δ) ἡ ἐνέργεια πού θά δώση ἡ πηγή εἰς KWh ἐπί 3 ὥρας καί ε) τό ποσόν τοῦ ἠλεκτρισμοῦ πού θά διέλθη διά τοῦ κυκλώματος.

Τοπογράφοι Ε.Μ.Π.

α) $i = \dfrac{E}{R_o} = 2$ A   γ) $P_\eta = i^2.R' = 20$Watts

β) $P_o = Ei = 24$ Watts   δ) $W = Eit = 0{,}072$ KWh

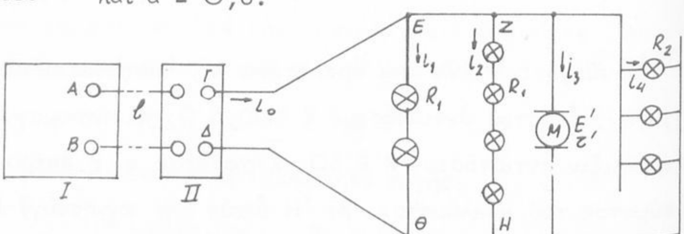
ε) $Q = it = 21600$ Cb

☆ Κεντρικός πίναξ διανομῆς (Ι) συνδέεται πρός δευτερεύοντα (ΙΙ), σχῆμα 146 , μέσω ἀγωγῶν μήκους l καί ἀντιστάσεως ρ Ω ἀνά m . Ὁ (ΙΙ) τροφοδτεῖ τό σύστημα τῶν λυχνιῶν καί τοῦ κινητῆρος Μ.

R_1 καί R_2 εἶναι αἱ ἀντιστάσεις τῶν λυχνιῶν, Ε΄ ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος, r΄ ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις αὐτοῦ καί α ὁ βαθμός ἀποδόσεώς του. Ὁ κινητήρ ἀνυψώνει Β kgr* ὕδατος εἰς ὕψος h m ἐντός χρόνου t sec.

Νά εὑρεθοῦν: τά ρεύματα εἰς τούς διαφόρους κλάδους, Ε΄, r΄ R_1, R_2 καί ἡ ἰσχύς τῶν λαμπτήρων.

Δίδονται: $V_{AB} = 220V$, $\rho = 0{,}02\Omega/m$, $l = 250$ m, $V_{\Gamma\Delta} = 120V$, $i_2 = 1A$, $B = 128$ Kgr*, $h = 6m$, $t = 20$ sec, $g = 10\ m/sec^2$ καί $\alpha = 0{,}8$.



Σχ. 146

α) Ἡ ὁλική ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν ΑΓ καί ΒΔ εἶναι:

$$R_0 = 2l\rho = 10\Omega$$

β) $$i_0 = \frac{V_{AB} - V_{\Gamma\Delta}}{R_0} = 10\ A$$

γ) Διά τόν κινητῆρα: $P_{\omega,\kappa} = \frac{Bh}{t} = 384$ Watts , $P_{\kappa,\kappa} = \frac{P_{\omega,\kappa}}{\alpha} = 480$ Watts, ἀλλά $P_{\kappa,\kappa} = V_{\Gamma\Delta} \cdot i_3$ ➤ $i_3 = 4A$.

Τότε : $P_{\kappa.\kappa} = P_{\omega.\kappa} + i_3^2 \cdot r'$ ► $r' = 6\Omega$

καί $P_{\omega.\kappa.} = E'.i_3$ ► $E' = 96V$

δ) $V_{\Gamma\Delta} = 4R_1 i_2$ ► $R_1 = 30\ \Omega$

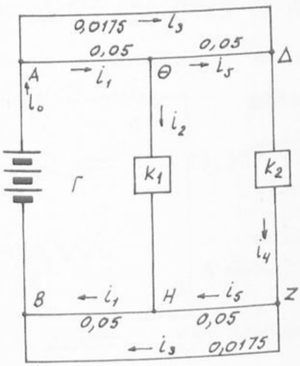
ε) Ἐκ τοῦ βρόχου ΕΖΗΘΕ: $2i_1R_1 = 4R_1i_2$ ► $i_1 = 2A$

στ) Εἶναι: $i_o = i_1 + i_2 + i_3 + 3i_4$ ► $i_4 = 1\ A$

ζ) $V_{\Gamma\Delta} = R_2 i_4$ ► $R_2 = 120\ \Omega$

η) $P_\lambda = V_{\Gamma\Delta} \cdot i_o - P_{\kappa.\kappa} = 720$ Watts

Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος ἡ ὑπό τῆς γεννητρίας Γ ἀναπτυσσομένη μεταξύ τῶν κόμβων Α καί Β τάσις εἶναι 125 V. Ἡ τάσις εἰς τά ἄκρα τοῦ καταναλωτοῦ K_1 εἶναι 120V, μεταξύ δέ τῶν ἄκρων τοῦ καταναλωτοῦ K_2 εἶναι 118V. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν τροφοδοτήσεως ἀναγράφονται εἰς τό σχῆμα ἐκπεφρασμέναι εἰς Ὦμ.



Σχ. 147

Νά εὑρεθοῦν:

α) ἡ ὑφ' ἑκάστου καταναλωτοῦ καταναλισκομένη ἰσχύς,

β) ὁ βαθμός ἀποδόσεως τοῦ συστήματος τροφοδοτήσεως.

Ἐκμεταλευόμενοι τήν ὑπάρχουσαν συμμετρίαν τοῦ κυκλώματος θέτομεν τά ἑξῆς ρεύματα:

ΑΒ ⇒ i_o ΑΘ καί ΗΒ ⇒ i_1 ΑΔ καί ΖΒ ⇒ i_3

$\Theta H \Longrightarrow i_2 \qquad \Delta Z \Longrightarrow i_4 \qquad \Theta\Delta$ καί $ZH \Longrightarrow i_5$

Δίδονται: $U_A - U_B = 125V$ (1)

$U_\Theta - U_H = 120V$ (2)

$U_\Delta - U_Z = 118V$ (3)

ἀλλά λόγῳ τῆς συμμετρίας:

$U_A - U_\Theta = U_H - U_B$ (4)

$U_A - U_\Delta = U_Z - U_B$ (5)

$U_\Theta - U_\Delta = U_Z - U_H$ (6)

Δι'ἀφαιρέσεως (1) καί (2) καί λόγῳ τῆς (4) $\Longrightarrow U_A - U_\Theta = 2{,}5$ V

ἄρα: $i_1 = \frac{2{,}5}{0{,}05}$ A = 50A

Δι'ἀφαιρέσεως (1) καί (3) καί λόγῳ τῆς (5) $\Longrightarrow U_A - U_\Delta = 3{,}5$ V.

ἄρα: $i_3 = \frac{3{,}5}{0{,}0175}$ A = 200 A

Δι'ἀφαιρέσεως (2) καί (3) καί λόγω τῆς (6) $\Longrightarrow U_\Theta - U_\Delta = 1$ V.

ἄρα: $i_5 = \frac{1}{0{,}05}$ A = 20 A

Συνεπῶς:

$i_o = 250$ A

$i_4 = 220$ A

$i_2 = 30$ A

Ἔχομεν διά τήν ἰσχύν ἑκάστου καταναλωτοῦ:

$$P_1 = V_{\Theta H} \cdot i_2 = 3,6 \text{ KW}$$

$$P_2 = V_{\Delta Z} \quad i_4 = 25,96 \text{ KW}$$

Ἡ παρεχομένη εἰς τό σύστημα ἰσχύς εἶναι:

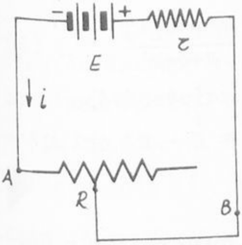
$$P_\pi = V_{AB} \cdot i_o = 32,25 \text{ KW}$$

ὁπότε ὁ βαθμός ἀποδόσεως τοῦ συστήματος τροφοδοτήσεως εἶναι:

$$\alpha = \frac{P_1 + P_2}{P_\pi} = \frac{29,56}{32,25} \blacktriangleright \alpha = 91,6\%$$

13.2. μεγίστη ἰσχὺς

☆ Εἰς τό σχῆμα 148 τό κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή ΗΕΔ E ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r καί ἐξωτερικόν καταναλωτήν R. Προσδιορίσατε τήν τιμήν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ καταναλωτοῦ διά τήν ὁποίαν ἡ ἰσχύς του γίνεται μεγίστη. (Θ. μεγίστης ἰσχύος).



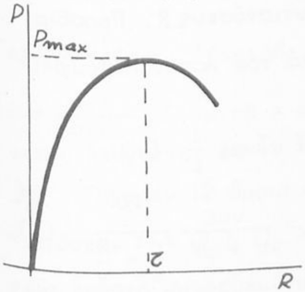
Σχ. 148

Ἐκ τοῦ κυκλώματος προκύπτει: $i = \dfrac{E}{R+r}$ (1)

Ἡ ἰσχύς τοῦ καταλωτοῦ εἶναι $P = i^2.R$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) συνάγεται ὅτι:

$$P = \frac{E^2 \ . \ R}{(R + r)^2} \qquad (3)$$



Σχ. 149

Ἡ P γίνεται μεγίστη ὅταν τό

$$y = \frac{R}{(R+r)^2} \qquad (4)$$

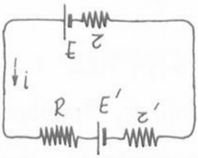
γίνῃ μέγιστον. Ἐκ τῆς (4) λαμβάνεται: $yR^2 + (2yr - 1)R + yr^2 = 0$. Ἐπειδή ἡ R εἶναι πραγματικός ἀριθμός πρέπει $\Delta \geq 0$, ἤ (2yr -

$-1)^2 - 4y^2 \cdot r^2 \geq 0$. ὥστε ἡ ζητουμένη τιμή τοῦ y εἶναι $y = \frac{1}{4r}$.
ὁπότε ἐκ τῆς (4):

$$\frac{1}{4r} = \frac{R}{(R+r)^2} \blacktriangleright \quad R = r$$

Τό διάγραμμα τοῦ σχήματος 149 ἀποδίδει τήν $P = f(R)$

☆ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος 150 ἡ πηγή ΗΕΔ Ε τροφοδοτεῖ ἀποδέκτην ἀντι-ΗΕΔ Ε΄ μέσῳ σταθερᾶς ἀντιστάσεως R. Ποία ἡ τιμή τῆς Ε΄ ὥστε ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς τοῦ ἀποδέκτου νά εἶναι μεγίστη.



Σχ. 150

Διά τόν ἀποδέκτην: $P_\omega = E'i$ (1)

μέ $i = \frac{E-E'}{R+r+r'}$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2):

$$\blacktriangleright \quad P_\omega = \frac{E'(E-E')}{R+r+r'} \qquad (3)$$

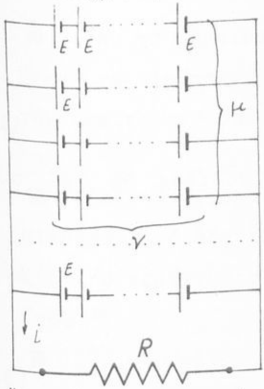
Παρατηρῶ εἰς τήν (3) ὅτι: $E' + (E-E') = E$ =σταθερόν ἄρα τό γινόμενον $E'(E-E')$ γίνεται μέγιστον ἄν $E' = E - E'$ δηλ. $E' = \frac{E}{2}$.

☆ μ.ν. στοιχεῖα ΗΕΔ Ε καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r διατάσσονται εἰς μ σειράς τῶν ν στοιχείων ἑκάστη σχῆμα 151. Τό ὅλον σύστημα τροφοδοτεῖ καταναλωτήν ἀντιστάσεως R. Προσδιορίσατε τά μ καί ν ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ διά τοῦ καταναλωτοῦ ρεύματος νά εἶναι μεγίστη.

Τό ρεῦμα πού διαρρέει ἑκάστην σειρά εἶναι $\frac{i}{\mu}$ ἐνῶ:

$$\nu . r \frac{i}{\mu} + iR = \nu E \quad \blacktriangleright \quad i = \frac{\nu\mu E}{\nu r + \mu R} = \frac{\nu E}{\frac{r}{\mu} + \frac{R}{\nu}} \qquad (1)$$

ὁπότε διά νά εἶναι τό i μέγιστον πρέπει ἡ $y = \frac{r}{\mu} + \frac{R}{\nu}$ νά εἶναι ἐλαχίστη ἤ ἐπειδή $\mu\nu = C$



Σχ.151

$$y = \frac{r\nu}{C} + \frac{R}{\nu} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνωπρώτην καί δευτέραν παράγωγον ὡς πρός ν:

$$y' = \frac{r}{C} - R\nu^{-2},$$

$$y'' = 2R\nu^{-3}$$

Ἀφοῦ $y'' > 0$, διότι $R, \nu > 0$, ἡ y ἔχει ἐλάχιστον διά ν ρίζα τῆς

$$y' = 0 \quad \blacktriangleright \quad \nu = \sqrt{C \cdot \frac{R}{r}} \quad (3) \text{ ἤ διά } \nu r = \mu R^{*}(4)$$

Ἐκ τῆς (3) φαίνεται ὅτι ἄν τό $C \cdot \frac{R}{r}$ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ τότε καί ν ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐάν τό $C.\frac{R}{r}$ δέν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὡς λύσις λαμβάνεται ἡ τιμή τοῦ ἀκεραίου, ἥτις πλησιάζει περισσότερον πρός τόν $\sqrt{C \cdot \frac{R}{r}}$

Τέλος ἡ τιμή τοῦ i_{max} ὑπολογίζεται ἐκ τῆς (1):

$$i_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\nu}{R.r}} \cdot E \quad \blacktriangleleft$$

Ἄλλος τρόπος: Ἐπειδή

$i = \frac{\nu\mu E}{\nu r + \mu R}$ μέ $\nu\mu . rR$ = σταθερόν ἀφοῦ καί $\nu\mu = C$, τό $\nu r + \mu R$ γίνεται ἐλάχιστον ἄν $\nu r = \mu R$.

✡ Ἔχομεν 12 ὅμοια στοιχεῖα ΗΕΔ = 5 V καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0,5\ \Omega$. Χωρίζομεν αὐτά εἰς ν ὁμάδας μέ μ στοιχεῖα ἑκάστη συνδεδεμένα ἐν σειρᾷ. Τάς ὁμάδας συνδέομεν ἐν παραλλήλῳ καί μέ τό σύστημα τροφοδοτοῦμεν ἀντίστασιν R =

= 1,5 Ω. Ποιά τά μ καί ν ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ διά τῆς R ρεύματος εἶναι μεγίστη; Ποία ἡ ἔντασις αὔτη;

Κατά τό πρόβλημα θά εἶναι:

$$\mu \cdot \nu = 12 \tag{1}$$

Κατά τήν παρατήρησιν, ἐξ ἄλλου τῆς σελίδος 99 τό σύστημα ἰσοδυναμεῖ μέ πηγήν ΗΕΔ:

$$E_o = \mu E \tag{2}$$

καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως

$$r_o = \frac{\mu}{\nu} r \tag{3}$$

Συνεπῶς, τό διά τῆς R ρεῦμα θά εἶναι:

$$I = \frac{E_o}{R_{o\lambda}} = \frac{E_o}{R + r_o} \tag{4}$$

Ἡ (4) λόγῳ τῶν (2) καί (3) γίνεται:

$$I = \frac{\mu E}{R + \frac{\mu}{\nu} \cdot r} \tag{5}$$

Ἡ (5) γράφεται καί $I = \frac{\mu\nu E}{\nu R + \mu r}$ (6)

Διά νά γίνῃ ὅμως τό I μέγιστον, πρέπει τό ἄθροισμα $\nu R + \mu r$, νά γίνῃ ἐλάχιστον.

Ἐφ' ὅσον τό γινόμενον $\nu\mu Rr$ εἶναι σταθερόν τό ἄθροισμα $\nu R + \mu r$ γίνεται ἐλάχιστον ὅταν:

$$\nu R = \mu r \tag{7}$$

Ἐκ τῶν (1) καί (7) λαμβάνομεν:

$$\mu = 6$$
$$\nu = 2$$

καί ἐκ τῆς (6) I = 10A.

Τέσσαρα χρήσιμα θεωρήματα διά τά μέγιστα καί ἐλάχιστα.

■ Ἄν τό ἄθροισμα ν μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν τό γινόμενόν των ἐπιδέχεται μίαν μεγίστην τιμήν, εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ὅλοι οἱ ἀριθμοί δύνανται νά γίνουν ἴσοι.

■ Ἄν τό γινόμενον ν μεταβλητῶν, θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τό ἄθροισμά των ἐπιδέχεται μίαν ἐλαχίστην τιμήν, εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ὅλοι οἱ ἀριθμοί δύνανται νά γίνουν ἴσοι.

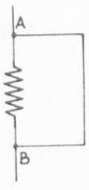
■ Τό γινόμενον δυνάμεων (μέ ἐκθέτας φυσικούς ἀριθμούς)δύο μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν σταθερόν ἄθροισμα, ἐπιδέχεται μίαν μεγίστην τιμήν εἰς τήν περίπτωσιν καθ' ἥν οἱ ἀριθμοί δύνανται νά γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των.

■ Ἄν τό γινόμενον δυνάμεων (μέ ἐκθέτας φυσικούς ἀριθμούς) δύο μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν, τότε τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπιδέχεται μίαν ἐλαχίστην τιμήν, εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν οἱ ἀριθμοί δύνανται νά γίνουν ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν των.

βραχυκύκλωμα

Μέ τόν ὅρον "βραχυκύκλωμα" ἐννοοῦμεν τήν δι'ἀγωγοῦ ἀμελητέας ἀντιστάσεως σύνδεσιν δύο σημείων.

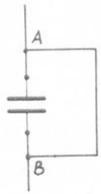
■ ἀντιστάσεως



Τά ἄκρα Α καί Β τῆς ἀντιστάσεως συνδέονται μέ ἀγωγόν τοῦ ὁποίου τήν ἀντίστασιν ἀμελοῦμεν.

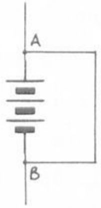
Τά σημεῖα Α καί Β ἀποκτοῦν τό αὐτό δυναμικόν, ἐνῷ ἡ R δέν διαρρέεται ἀπό ρεῦμα. Ἡ ἀντίστασις R θεωρεῖται τότε ὡς μή ὑπάρχουσα ἐν τῷ κυκλώματι.

■ πυκνωτοῦ



Τά σημεῖα Α καί Β τοῦ πυκνωτοῦ συνδέονται μέ ἀγωγόν ἀμελητέας ἀντιστάσεως. Ὁ πυκνωτής ἐκφορτίζεται μέσῳ τοῦ ἀγωγοῦ ἐνῷ τά Α καί Β ἔχουν μονίμως κοινόν δυναμικόν.
Ὁ πυκνωτής θεωρεῖται τότε ὡς μή ὑπάρχων.

■ πηγῆς



Οἱ πόλοι Α καί Β συνδέονται μέ ἀγωγόν ἀμελητέας ἀντιστάσεως. Ἡ πηγή προκαλεῖ μέσῳ αὐτοῦ ρεῦμα μεγάλης ἐντάσεως μέχρις ὅτου καταστραφῇ. Τά σημεῖα Α καί Β ἔχουν τό αὐτό δυναμικόν. Ἡ πηγή οὐδένα ρόλον παίζει εἰς τό κύκλωμα καί παραλείπεται.

ΠΟΡΕΙΑ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ Σ.Ρ.	
1ον βῆμα:	Σχεδίασις κυκλώματος
2ον βῆμα:	Σύνδεσις σημείων "γῆ"
3ον βῆμα:	Ἐφαρμογή καταλλήλου μεθόδου διά τήν ἐπίλυσιν τοῦ κυκλώματος
4ον βῆμα:	Προσδιορισμός ἀναφερομένων μεγεθῶν (π.χ. τάσεων, ἰσχύος κ.λ.π.)
5ον βῆμα:	Μόρφωσις περιοριστικῶν σχέσεων (π.χ. λόγων , ἀθροισμάτων κ.λ.π.) ἀπορρεουσῶν ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως.
6ον βῆμα:	Ἐπίλυσις προκύπτοντος συστήματος
7ον βῆμα:	Διόρθωσις φορᾶς ρευμάτων καί πολικότητος πηγῶν.

ἠλεκτρομαγνητισμός ἐπαγωγή

14. μαγνητικόν πεδίον

● Καλεῖται μαγνητικόν πεδίον ὁ χῶρος εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ὁποίου ἀσκεῖται ἐπί κινουμένου φορτισμένου σωματιδίου δύναμις F, ὀφειλομένη εἰς τήν κίνησιν καί μόνον, ἑτέρου φορτισμένου σωματιδίου. Ἀνήκει εἰς τά στροβιλά δυναμικά πεδία.

14.1. βασικαί ἔννοια

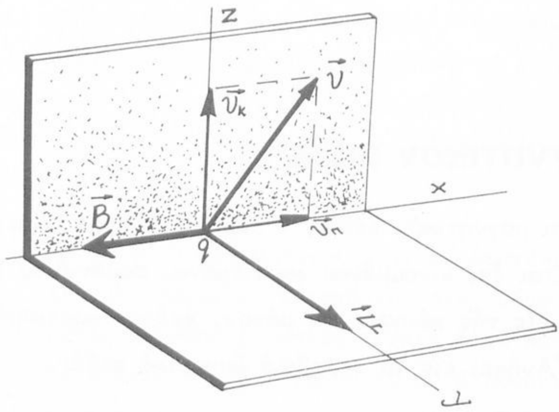
● Καλοῦμεν μαγνητικήν ἐπαγωγήν B εἰς ἕν σημεῖον τοῦ πεδίου ἕν διανυσματικόν μέγεθος, χαρακτηρίζον τό πεδίον, τό ὁποῖον ἔχει μέτρον: Τό σταθερόν πηλῖκον τοῦ μέτρου τῆς δυνάμεως F ἥτις ἀσκεῖται ἐπί κινουμένου φορτισμένου σωματιδίου πρός τό φορτίον τοῦτον q, πρός τό μέτρον τῆς ταχύτητός του υ καί πρός τό ημφ. Ἡ γωνία φ εἶναι ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\vec{B}$ καί $\vec{υ}$. Ἤτοι:

$$B = \frac{F}{q \cdot υ \cdot ημφ} = \frac{F}{q υ_κ}$$

Τό q θεωρεῖται ἄπειρως μικρόν.

Ἡ διεύθυνσις τῆς B εἶναι ἐκείνη κατά τήν ὁποίαν κινούμενον τό φορτισμένον σωματίδιον δέν ὑφίσταται δύναμιν ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἔστω τώρα ὅτι $υ_κ$ εἶναι ἡ κάθετος πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου, συνιστῶσα τῆς υ. Ἡ φορά τῆς B εἶναι ἐκείνη κατά τήν ὁποίαν προχωρεῖ δεξιόστροφος κοχλίας στρεφόμενος κατά τήν φοράν κατά τήν ὁποίαν τό $\vec{F}$ συμπίπτει μέ τό $\vec{\upsilon}_\kappa$ στρεφομένη κατά 90° .



Εἰς τό κεφάλαιον τοῦ στατικοῦ ἠλεκτρισμοῦ ἐχρησιμοποιήσαμεν τό ὁμογενές ἠλεκτρικόν πεδίον ἑνός πυκνωτοῦ διά τόν ὁρισμόν τῆς σχετικῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε ἑνός ὑλικοῦ. Διά τόν ὁρισμόν τώρα τῆς σχετικῆς μαγνητικῆς διαπερατότητος μ ἑνός ὑλικοῦ χρησιμοποιοῦμεν ἕνα δακτυλιοειδές πηνίον.

Ἐάν B_o εἶναι τό μέτρον τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πηνίου τούτου κενοῦ ὕλης καί B τό μέτρον αὐτῆς ὅταν περιέχεται ὑλικόν, τότε ὁ λόγος

$$\mu = \frac{B}{B_o}$$

εἶναι καθαρός ἀριθμός καί καλεῖται σχετική μαγνητική διαπερατότης τοῦ ὑλικοῦ. Διά τό κενόν μ = 1.

Εἶναι πειραματικόν δεδομένον τό ὅτι τά $\vec{\upsilon}_\kappa$ καί $\vec{F}$ εἶναι κάθετα.

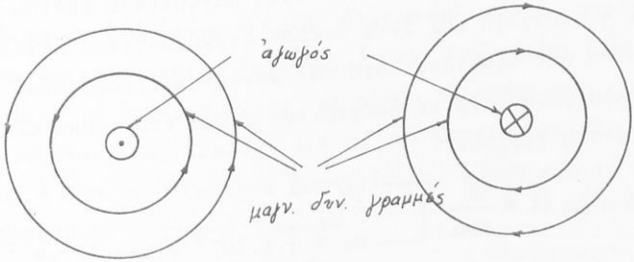
● Ὀνομάζομεν μαγνητικάς δυναμικάς γραμμάς τάς γραμμάς μέ τάς κάτωθι ἰδιότητας.

α. (ΒΑΣΙΚΗ) Εἰς κάθε σημεῖον αὐτῶν τό διάνυσμα τῆς B ἔχει στήριγμα τήν ἐφαπτομένην των εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον.

β. Εἶναι κλεισταί δηλ. δέν ἔχουν ἀρχήν καί πέρας.

γ. Εἶναι πεπλεγμέναι μέ τάς τροχιάς τῶν φορτισμένων σωματιδίων ἤ τά ρεύματα εἰς τά ὁποῖα ὀφείλεται τό μαγνητικόν πεδίον .

δ. Ἡ ἐμπλοκή μέ τούς ρευματοφόρους ἀγωγούς ἤ τάς τροχιάς τῶν σωματιδίων εἶναι δεξιόστροφος.



● Μαγνητική ροή διά τινος ἐπιπέδου ἐπιφανείας S ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς B ὁρίζομεν ἕν μονόμετρον μέγεθος ἴσον πρός τό γινόμενον τῆς ἐπιφανείας S ἐπί τό μέτρον B_κ τῆς καθέτου πρός τήν ἐπιφάνειαν συνιστώσης

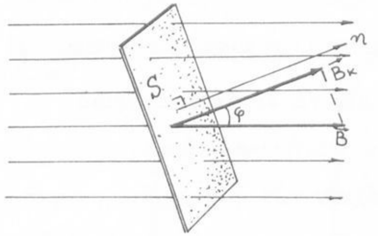
---

* Παρατήρησις ἐπί τοῦ συμβολισμοῦ:

Τό σύμβολον ⊗ παριστᾶ διάνυσμα ἤ ρεῦμα κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τῆς σελίδος μέ φοράν πρός τά μέσα.

Τό σύμβολον ⊙ παριστᾶ διάνυσμα ἤ ρεῦμα κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τῆς σελίδος μέ φοράν πρός τά ἔξω.

τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς Β ἤτοι : $\Phi = SB_\kappa$ ἤ $\Phi = BS$ συνφ.



Ἀναλόγως τοῦ μεταβαλλομένου μεγέθους προκύπτει διά τήν μεταβολήν τῆς μαγν. ροῆς ἀντιστοίχως $\Delta\Phi = B.\Delta S$ συνφ ἤ $\Delta\Phi = BS(\text{συν}\varphi_2 - \text{συν}\varphi_1)$ ἤ καί $\Delta\Phi = \Delta B.S.$συνφ

Ἡ μαγνητική ἐπαγωγή Β ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὁλικόν ρεῦμα πού δημιουργεῖ τό πεδίον καί ἀπό τάς μαγνητικάς ἰδιότητας τῆς ὕλης ἐντός τῆς ὁποίας σχηματίζεται τό πεδίον.

Διά τήν πλήρη περιγραφήν ἑνός μαγνητικοῦ πεδίου ἀπαιτεῖται ἡ εἰσαγωγή καί ἑνός ἑτέρου διανυσματικοῦ μεγέθους, τό ὁποῖον νά μήν ἐξαρτᾶται ἀπό τάς μαγνητικάς ἰδιότητας τῆς ὕλης, ἀλλά μόνον ἀπό τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα πού προκαλεῖ τήν ἐμφάνισιν τοῦ πεδίου.

● Διά τῆς: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$ → $\mu_0 = 1$ (ΗΜΣΜ) → $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ V.sec.$A^{-1}.m^{-1}$ (MKSAr)

ὁρίζεται τό διανυσματικόν μέγεθος Η τό ὁποῖον καλοῦμεν ἔν - τασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἕν σημεῖον Α αὐτοῦ".

Ἐκ τῆς $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$ φαίνεται ὅτι τά $\vec{H}$ καί $\vec{B}$ εἰς τό αὐτό σημεῖον ἔχουν τήν αὐτήν κατεύθυνσιν.

● Ἡ μετατροπή τῶν μονάδων μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς καί ἐντάσεως μαγνητικοῦ πεδίου.

Εἰς τόν κάτωθι πίνακα δίδονται αἱ μονάδες τῶν B καί H εἰς τά συστήματα ΗΜΣΜ καί MKSAr.

Μέγεθος	MKSAr	ΗΜΣΜ	ἀντιστοιχία μονάδων
H	$\frac{\text{A-στρ.}}{\text{m}}$	Oe	$1\ \frac{\text{A-στρ.}}{\text{m}} \Rightarrow \frac{4\pi}{10^3}\ \text{Oe}$
B	Tesla	Gauss	$1\ \text{Tesla} \Rightarrow 10^4\ \text{Gauss}$

Συχνά ἀναφέρεται ὅτι: 1 Oe = 1 Gauss

Πράγματι, τοῦτο εἶναι ἀληθές διότι ἡ μονάς 1 Gauss ὁρίζεται ἐκ τῆς $B = \mu H$ διά $\mu = 1$ καί $H = 1$ Oe ἤτοι: 1 Gauss εἶναι ἡ μαγνητική ἐπαγωγή ἐντός ὑλικοῦ μέ $\mu = 1$ φερομένου ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1 Oe. Ἐπί πλέον, ἀφοῦ μ ἀδιάστατος, τά B καί H ἔχουν τάς αὐτάς διαστάσεις.

Χρειάζεται ὅμως προσοχή διά νά μήν ὑποπέσωμεν εἰς σφάλμα, ἀφοῦ ἡ ἰσότης 1 Oe = 1 Gauss ἰσχύει μόνον εἰς τό ΗΜΣΜ.

Γράφομεν: 1 Oe = 1 Gauss

ἀντικαθιστῶ ἀριστερά καί δεξιά:

$\frac{10^3}{4\pi}$ A στρ./m $= 10^{-4} \cdot$ Tesla καί $1\ \frac{\text{A στρ.}}{\text{m}} \doteq 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tesla

Ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι σοβαρόν σφάλμα ἀφοῦ τά μεγέθη B καί H εἰς τό MKSAr δέν ἔχουν τάς ἰδίας διαστάσεις καί δέν ἔχει νόημα ἰσοδυναμία μονάδων.

Ἐάν ἡ τελευταία ἦτο ἀληθής θά ἦτο καί:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Tesla}}{\text{A}\cdot\text{m}} = 1$$

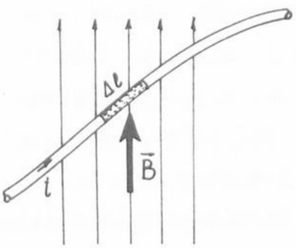
δηλαδή διά τό MKSAr $\mu_o = 1$ καί καθαρός ἀριθμός ὡς συμβαίνει εἰς ΗΜΣΜ.

14.2. ὁ νόμος τοῦ Laplace

■ Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς B προκύπτει ὅτι $F = q.v.B.ημφ$

Ἔστω τώρα στοιχεῖον ρευματοφόρου ἀγωγοῦ μήκους Δl καί διατομῆς S ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἐάν φ εἶναι ἡ γωνία τοῦ ἀγωγοῦ καί τῆς B καί ἐάν z εἶναι ὁ ἀνά μονάδα ὄγκου ἀριθμός τῶν ἐλευθέρων ἠλεκτρονίων, τότε ἐντός τοῦ στοιχειώδους τμήματος εὑρίσκονται ἐν κινήσει $S.\Delta l.z$ ἐλεύθερα ἠλεκτρόνια καί κατά συνέπειαν ἀσκεῖται ἐπί τοῦ στοιχειώδους τμήματος ἡ μαγνητική δύναμις ΔF:



$$\Delta F = S.\Delta l.z.v.B.ημφ \cdot e \qquad (1)$$

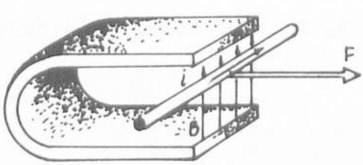
Ἔστω ἀκόμη Δt ὁ χρόνος ἐντός τοῦ ὁποίου ἠλεκτρόνιον κινούμενον ὑπό τήν ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μέ τήν ὁρικήν ταχύτηταν υ διανύει διάστημα Δl.

Εἰς τόν αὐτόν χρόνον θά ἔχουν διέλθη διά τῆς βάσεως τοῦ στοιχειώδους τμήματος τά $S.\Delta l.z$ ἠλεκτρόνια, δηλ. φορτίον $S.v.\Delta t.z.e$ ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$i = S.v.z.e \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἕπεται ὅτι: $\Delta F = i.\Delta l.B.ημφ$

Διά εὐθύγραμμον ἀγωγόν μήκους l : $F = ilBημφ$



14.3. ὁ θεμελιώδης νόμος τῶν Biot καί Savart

■ Ἀγωγός διαρρεόμενος ὑπό ρεύματος παράγει εἰς τό περιβάλλον του μαγνητικόν πεδίον.

Ἔστω $\vec{\Delta l}$ ἕν στοιχειῶδες τμῆμα τοῦ ἀγωγοῦ ἀπείρως μικρόν, καί i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος πού τόν διαρρέει.

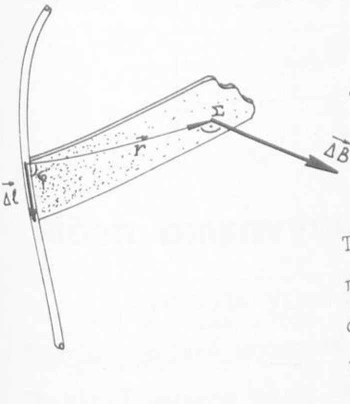
Ἐκ τοῦ στοιχειώδους τούτου τμήματος δημιουργεῖται εἰς τό τυχόν σημεῖον Σ τοῦ περιβάλλοντος χώρου μαγνητικόν πεδίον μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς ΔΒ τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι: ἀνάλογον τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος i, ἀνάλογον τοῦ μέτρου Δl τοῦ στοιχειώδους τμήματος, ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος r πού ἄγεται ἀπό τό στοιχειῶδες τμῆμα πρός τό Σ καί ἐξαρτᾶται ἀπό τήν γωνίαν φ τῶν $\vec{\Delta l}$ καί $\vec{r}$

ἤτοι: $$\Delta B = k_o \frac{i\Delta l}{r^2} \eta\mu\varphi$$

Ἡ σταθερά ἀναλογίας k_o ἐξαρτᾶται ἀπό τό σύστημα τῶν μονάδων καί τό περιβάλλον μέσον καί ἔχει τιμήν:

$$k_o = \frac{\mu\mu_o}{4\pi} \text{ εἰς τό MKSAr μέ } \mu_o = \frac{4\pi}{10^7}\frac{\text{V}\cdot\text{sec}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

καί $k_o = \mu$ εἰς τό ΗΜΣΜ



Ὥστε: $$\Delta B = \frac{\mu\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{i\Delta l}{r^2}\eta\mu\varphi \text{ εἰς MKSAr}$$

καί $$\Delta B = \mu \frac{i\Delta l}{r^2}\eta\mu\varphi \text{ εἰς ΗΜΣΜ}$$

Τό διάνυσμα $\vec{\Delta B}$ εἶναι κάθετον στό ἐπίπεδον τῶν διανυσμάτων $\vec{\Delta l}$ καί $\vec{r}$. Ἐάν τώρα θεωρήσωμεν δεξιόστροφον κοχλίαν κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τῶν

$\Delta\vec{l}$ καί $\vec{r}$, νά προχωρῇ στρεφόμενος μέ φοράν κατά τήν ὁποίαν πρέπει νά στρέφωμεν καί τό $\Delta\vec{l}$ κατά γωνίαν φ, ὥστε νά συμπέσῃ μέ τό $\vec{r}$, θά ἔχωμεν καί τήν φοράν τοῦ $\Delta\vec{B}$.

Παρατήρησις.

1. Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς ὁλικῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς $\vec{B}$ εἰς τό σημεῖον Σ, πρέπει νά προσθέσωμεν διανυσματικῶς ὅλα τά $\Delta\vec{B}$ πού παράγονται εἰς τό Σ ἐξ ὅλων τῶν στοιχειωδῶν τμημάτων τοῦ ρευματοφόρου ἀγωγοῦ.

2. Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου προκύπτει διά τό σημεῖον Σ ὅτι:

$$\Delta H = k\,\frac{i\Delta l}{r^2}\,\text{ημφ}$$

ὅπου k συντελεστής ἀναλογίας ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ συστήματος μονάδων, ἔχων τιμήν:

$$k = \frac{1}{4\pi} \text{ εἰς τό MKSAr}$$

$$k = 1 \text{ εἰς τό ΗΜΣΜ}$$

Ὥστε: $\Delta H = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{i\Delta l}{r^2}\,\text{ημφ}$ εἰς τό MKSAr

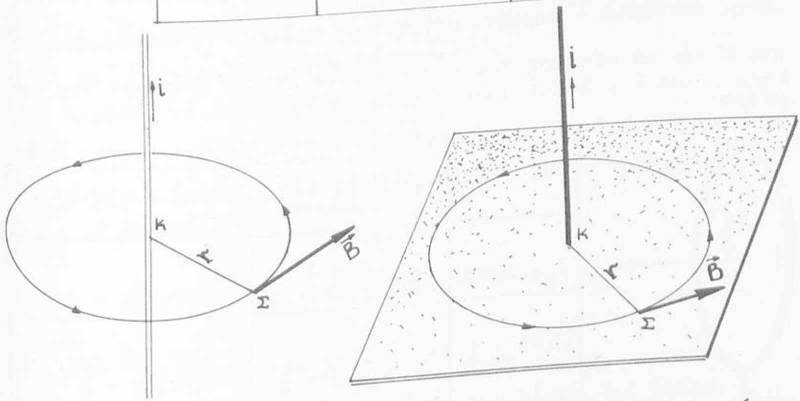
καί $\Delta H = \frac{i\Delta l}{r^2}\,\text{ημφ}$ εἰς τό ΗΜΣΜ

15. ἐφαρμογαὶ εἰς ἁπλᾶ μαγνητικὰ πεδία

1. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΑΓΩΓΟΥ.

★ Ἐφ'ὅσον εὐθύγραμμος ἀγωγός θεωρεῖται ἀπείρου μήκους τό μέτρον τῶν διανυσμάτων $\vec{B}$ καί $\vec{H}$ εἰς τυχόν σημεῖον Σ εἰς ἀπόστασιν r ἀπ'αὐτοῦ δίδεται ἀπό τάς σχέσεις:

	μαγνητική ἐπαγωγή	ἔντασις μαγν. πεδίου
MKSAr	$B = \frac{\mu\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$	$H = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{r}$
ΗΜΣΜ	$B = \mu \frac{2i}{r}$	$H = \frac{2i}{r}$



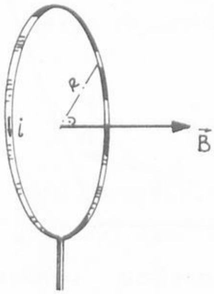
★ 'Εάν ὁ εὐθύγραμμος ἀγωγός θεωρηθῇ ἡμιαπείρου μήκους καί τό σημεῖον Σ ληφθῇ ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τόν ἀγωγόν, διερχόμενον ἐκ τῆς ἀρχῆς του, ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου καί ἡ μαγνητική ἐπαγωγή δίδονται ἀπό τάς σχέσεις.*

	Μαγνητική ἐπαγωγή	"Εντασις μαγν. πεδίου
MKSAr	$B = \frac{\mu\mu_o}{4\pi} \frac{i}{r}$	$H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{i}{r}$
ΗΜΣΜ	$B = \mu \cdot \frac{i}{r}$	$H = \frac{i}{r}$

*Οἱ ἀνωτέρω τύποι ἀπορρέουν ἀμέσως ἐκ τῶν τύπων τοῦ ἀγωγοῦ ἀπείρου μήκους. 'Η μαγνητική ἐπαγωγή εἶναι τώρα ὑποδιπλασία ἀφοῦ ὁ ἀγωγός ἔχει τό ἥμισυ τοῦ μήκους του καί τό μέτρον τῆς B εἶναι κατά τόν νόμον Biot-Savart ἀνάλογον τοῦ μήκους τοῦ ἀγωγοῦ.

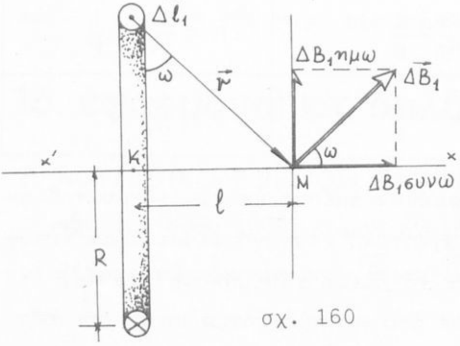
2. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ.

★ Ἁπλός κυκλικός ἀγωγός ἀκτῖνος R διαρρεόμενος ὑπό ρεύματος ἐντάσεως i παράγει μαγνητικόν πεδίον. Τά διανύσματα $\vec{B}$ καί $\vec{H}$ εἰς τό κέντρον του εἶναι κάθετα ἐπί τό ἐπίπεδόν του μέ μέτρα:



	Μαγν. ἐπαγωγή	Ἔντασις μαγν. πεδίου
MKSAr	$B = \frac{\mu\mu_0}{2}\cdot\frac{i}{R}$	$H = \frac{1i}{2R}$
ΗΜΣΜ	$B = 2\pi\mu\cdot\frac{i}{R}$	$H = 2\pi\cdot\frac{i}{R}$

★ Νά εὑρεθῆ ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον M εὑρισκόμενον ἐπί τοῦ ἄξονος κυκλικῆς σπείρας ἀκτῖνος R διαρρεομένης ὑπό ρεύματος i, εἰς ἀπόστασιν l ἀπό τό κέντρον της (σχ. 160).



σχ. 160

Εἰς τό σημεῖον M δημιουργεῖται πεδίον τοῦ ὁποίου ἡ μαγνητική ἐπαγωγή B ἤ ἡ ἔντασις H προσδιορίζονται ἀπό τόν νόμον τῶν Biot-Savart ὡς ἑξῆς:

Θεωρῶ ἐπί τοῦ ἀγωγοῦ

στοιχειῶδες τμῆμα Δl_1. 'Εξ αὐτοῦ παράγεται εἰς τό Μ στοιχειῶδες πεδίον μέτρου:

$$\Delta B_1 = k_o \frac{\iota \cdot \Delta l_1}{r^2}$$

(ἀφοῦ ἡ γωνία τῶν $\vec{\Delta l_1}$ καί $\vec{r}$ εἶναι 90^o).

Τό $\overrightarrow{\Delta B_1}$ προβάλλεται εἰς τόν ἄξονα xx' τῆς σπείρας καί στόν yy' κάθετον πρός τόν ἄξονα.

Λαμβάνω τά στοιχειώδη τμήματα συμμετρικά ἀνά δύο. 'Αλλά τότε αἱ συνιστῶσαι ΔBjημω ἀλληλοαναιροῦνται ἀνά δύο καί ἡ ὁλική μαγν. ἐπαγωγή εἰς τό Μ θά εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ΔBj.συνω μέ μέτρον B.

$$B = \Delta B_1 \sigma\upsilon\nu\omega + \Delta B_2 \sigma\upsilon\nu\omega + \Delta B_3 \sigma\upsilon\nu\omega + \ldots + \Delta B_\eta \sigma\upsilon\nu\omega$$

ἤ $$B = \frac{k_o i}{r^2}(\Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_\eta) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$$

Τό ἐντός τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα εἶναι $2\pi R$ ὁπότε:

$$B = k_o \frac{iR2\pi}{r^2}\sigma\upsilon\nu\omega = k_o \frac{2\pi i R^2}{r^3} = k_o \frac{2\pi i R^2}{\sqrt{R^2+l^2}^3} \qquad (1)$$

ἀφοῦ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{R}{r}$

'Επειδή στό MKSAr $\quad k_o = \frac{\mu\mu_o}{4\pi}$

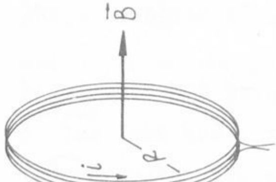
$$B = \mu\mu_o \frac{iR^2}{2\sqrt{R^2 + l^2}^3} \qquad (2)$$

καί στό ΗΜΣΜ $\quad k_o = \mu$

$$B = \mu \frac{2\pi\iota R^2}{\sqrt{R^2 + l^2}^3} \qquad (3)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἐκ τῶν (2) ἤ (3) διά $l = 0$ λαμβάνονται οἱ τύποι τῆς προηγουμένης περιπτώσεως.

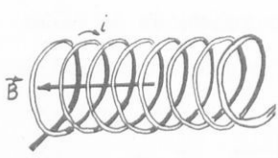
★ Πολλαπλός κυκλικός ἀγωγός μέ N σπείρας τοῦ ὁποίου τό πάχος ἀμελεῖται ὡς πρός τήν διάμετρον τῶν σπειρῶν (= λεπτόν κυκλικόν πηνίον), διαρρεόμενον ὑπό ρεύματος παράγει μαγνητικόν πεδίον. Εἰς τό κέντρον του τό μέτρον τοῦ πεδίου εἶναι:



	Μαγνητική ἐπαγωγή	Ἔντασις μαγ. πεδίου
MKSAr	$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \cdot \frac{i}{R} \cdot N$	$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{R} \cdot N$
ΗΜΣΜ	$B = 2\pi\mu \frac{i}{R} \cdot N$	$H = 2\pi \cdot \frac{i}{R} \cdot N$

3. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΟΥΣ

★ Εἰς σωληνοειδές ἀπείρου μήκους δηλ. μέ μῆκος πολύ μεγαλύτερον τῆς διαμέτρου τῶν σπειρῶν του, ἀποδεικνύεται ὅτι τό πεδίον εἶναι ὁμογενές μέ διεύθυνσιν τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ σωληνοειδοῦς καί μέτρον:



	Μαγνητική ἐπαγωγή	Ἔντασις μαγν. πεδίου
MKSAr	$B = \mu\mu_0 i \frac{N}{l}$	$H = i \frac{N}{l}$
ΗΜΣΜ	$B = 4\pi\mu i \frac{N}{l}$	$H = 4\pi i \frac{N}{l}$

Παρατήρησις:

Ἐάν θεωρήσωμεν γενικούς τούς τύπους τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς στό MKSAr καί θέσωμεν εἰς αὐτούς $\mu_0 = 4\pi$ προκύπτουν ἀμέσως οἱ τύποι τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς στό ΗΜΣΜ. Ἀκολούθως λαμβάνονται οἱ τύποι τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγν. πεδίου ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \cdot \vec{B}$$

16. σύνθετον μαγνητικὸν πεδίον

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΤΩΝ $\vec{B}$ καί $\vec{H}$

Τό σύνθετον πεδίον θά εἶναι:

- 'Ο συνδιασμός ἁπλῶν πεδίων ρευματοφόρων ἀγωγῶν
- 'Ο συνδιασμός ἁπλῶν πεδίων ρευματοφόρων ἀγωγῶν καί τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου.

Περίπτωσις α. 'Εφ'ὅσον τό ὁλικόν πεδίον εἶναι συνδιασμός ἁπλῶν πεδίων ρευματοφόρων ἀγωγῶν, προβάλλονται τά διανύσματα $\vec{B}$ ἤ $\vec{H}$ ἐπί καταλλήλου συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων.

'Η ἐπιλογή τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ἐξαρτᾶται ἀπό τήν μορφήν τοῦ προβλήματος. Τό σύστημα τοῦτο, ὀρθογώνιον ἤ τρισορθογώνιον, πρέπει νά εἶναι κατά τοιοῦτον τρόπον συνδεδεμένον μέ τούς ἀγωγούς ὥστε νά προσδιορίζωνται ὅλα τά γωνιακά στοιχεῖα πού ἀπαιτεῖ ἡ προβολή τῶν $\vec{B}$ ἤ $\vec{H}$.

Περίπτωσις β. 'Εφ'ὅσον τό ὁλικόν πεδίον εἶναι συνδιασμός ἁπλῶν πεδίων ρευματοφόρων ἀγωγῶν καί τοῦ γηΐνου ἡ προβολή τῶν $\vec{B}$ καί $\vec{H}$ γίνεται ἐπί τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ ἤ τοῦ ὁρίζοντος τοῦ ἀναφερομένου τόπου.

Εἰδικώτερα, ἐάν εἰς τό πρόβλημα ἀναφέρεται:

1. Πυξίς ἐφαπτομένων, πηνίον ἤ σωληνοειδές μέ ἄξονα κάθετον πρός τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.
2. Μαγνητική βελόνη ἀποκλίσεως

'Η προβολή γίνεται ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου καί ὡς xx' λαμβάνεται ἡ τομή ὁρίζοντος καί μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.

'Εάν εἰς τό πρόβλημα ἀναφέρεται

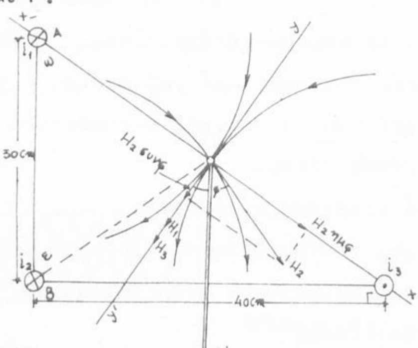
1. Πηνίον ἤ σωληνοειδές μέ ἄξονα κατακόρυφον
2. Μαγνητική βελόνη ἐγκλίσεως

ἡ προβολή γίνεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ μέ xx' τήν τομή του μέ τόν ὁρίζοντα.

Διά νά άποκτήση ό άναγνώστης μίαν σχετικήν έμπειρίαν στό πρόβλημα τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ παραθέτομεν μίαν σειράν χαρακτηριστικῶν, ὑποδειγματικῶς λελυμένων, παραδειγμάτων μετά τῶν σχετικῶν παρατηρήσεων.

Πιστεύομεν γενικῶς ὅτι ἕνα πρόβλημα στήν περιοχήν αὐτήν ἀπαιτεῖ ἐξοικείωσιν μέ τόν χῶρον καί τά ἁπλά μαγνητικά πεδία τῆς προηγουμένης παραγράφου.

☆ Τρεῖς παράλληλοι εὐθύγραμμοι ἀγωγοί Α, Β καί Γ διαρρέονται ὑπό ρευμάτων $\iota_1 = 25A$, $\iota_2 = 12,5A$ καί $\iota_3 = 37,5A$ ὡς εἰς τό σχῆμα 163 . Ἡ ἀπόστασις τῶν Α καί Β εἶναι 30 cm τῶν Β καί Γ 40 cm καί τῶν Α καί Γ 50 cm . Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τό μέσον Μ τῆς ἀποστάσεως τῶν Α καί Γ.



σχ. 163

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Τά $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ καί $\vec{H}_3$κεῖνται ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τούς ἀγωγούς. Ἡ τομή τῶν ἀγωγῶν ὑπό τοῦ ἐπιπέδου δίδει ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (μήκη πλευρῶν 30, 40 καί 50 cm ἀντιστοίχως).

Ὑπολογισμοί εἰς τό ΗΜΣΜ

Ἐάν $\vec{H}_1$ ἡ ἔντασις λόγω τοῦ ι_1, εἶναι: $H_1 = \dfrac{2\iota_1}{(AM)} = 0,2$ Oe

Ἐάν $\vec{H}_2$ ἡ ἔντασις λόγω τοῦ ι_2, εἶναι: $H_2 = \dfrac{2\iota_2}{(BM)} = 0,1$ Oe

Ἐάν $\vec{H}_3$ ἡ ἔντασις λόγω τοῦ ι_3, εἶναι: $H_3 = \dfrac{2\cdot\iota_3}{(\Gamma M)} = 0,3$ Oe

'Εκ τῆς γεωμετρίας τοῦ σχήματος φαίνεται:

$$\sphericalangle \varphi = \sphericalangle BMA \quad (\text{πλευραί κάθετοι})$$

$$\text{ἄρα} \quad \sphericalangle \varphi = \pi - 2 \sphericalangle \omega$$

καί $\quad \text{συν}\varphi = \text{συν}(\pi - 2\omega) = -\text{συν}2\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1$

'Η προβολή τῶν $\vec{H}_1$ $\vec{H}_2$ καί $\vec{H}_3$ γίνεται εἰς τό σύστημα xMy (ὁ xx΄ συμπίπτει μέ τήν ΑΓ).

Τότε $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma H_x = H_2 \eta\mu\varphi$

$$+\downarrow \Sigma H_y = H_1 + H_3 + H_2 \text{συν}\varphi$$

$$\text{συν}\omega = \frac{3}{5}$$

καί $\quad H_{ολ} = \sqrt{\Sigma^2 H_x + \Sigma^2 H_y} = 0,48 \ \text{Oe}$

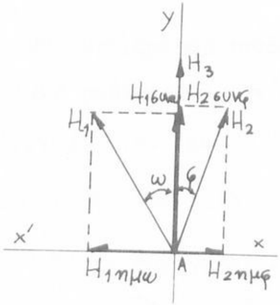
☆ Δύο ἀσύμβατοι ἀγωγοί, μεγάλου μήκους, Α καί Β σχηματίζουν γωνίαν 60° καί διαρρέονται ὑπό ρευμάτων $\iota_1 = 10A$ καί $\iota_2 = 5A$ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῆ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον Μ κείμενον ἐπί τῆς κοινῆς καθέτου καί ἀπέχον 10 cm ἐκ τοῦ Α καί 20 cm ἐκ τοῦ Β. Τό σημεῖον Μ νά εὑρίσκεται:

α. Μεταξύ τῶν ἀγωγῶν

β. 'Εκτός καί πρός τό μέρος τοῦ Α.

'Η ἀπόστασις τῶν ἀγωγῶν νά ληφθῆ εἰς τήν περίπτωσιν α 30 καί εἰς τήν β 10 cm.

Τό σύμβολον $\Sigma^2 H_x$ συμφωνοῦμεν νά παριστᾶ τό : $(H_{1x} + H_{2x} + H_{3x} + \ldots)^2$



σχ. 166α

$$H_{ολ} = \sqrt{(H_3 + H_1 συνω + H_2 συνφ)^2 + (H_1 ημω - H_2 ημφ)^2}$$

$$H_{ολ} = H_1 \sqrt{6 + 4(συνω + συνφ) + 2συν(φ+ω)}$$

ἡ δέ ∢ τ τήν ὁποίαν σχηματίζει τό διάνυσμα $\vec{H}_{ολ}$ μέ τόν xx΄ προσδιορίζεται ἐκ τῆς:

$$εφ\ τ = \frac{ημω - ημφ}{2 + συνω + συνφ}$$

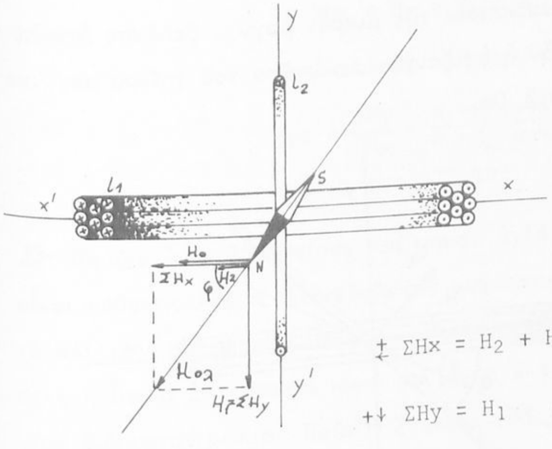
✩ Λεπτόν πηνίον ἀποτελεῖται ἀπό N σπείρας μέσης ἀκτῖνος $\bar{R}$ καί εἶναι τοποθετημένον ἐπί τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ τόπουμέ ὁριζοντίανσυνιστῶσα γηίνου μαγν. πεδίου H_o.

Κυκλική σπείρα ἀκτῖνος R εἶναι τοποθετημένη καθέτως πρός τόν μαγνητικόν μεσημβρινόν οὕτως ὥστε τό κέντρον της νά εἶναι τό κέντρον τοῦ πηνίου.

Πηνίον καί σπείρα διαρρέονται ἀπό ρεύματα $ι_1$ καί $ι_2$ ἀντιστοίχως. Εἰς τό κέντρον τοῦ συστήματος ἔχει τοποθετηθῆ μικρή μαγνητική βελόνη ἀποκλίσεως ἥτις στρέφεται ἀπό τήν θέσιν ἰσορροπίας της κατά γωνίαν φ. Εὕρατε τήν H_o (σχ. 167).

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Τό σύστημα προβάλλεται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντος & ὡς ἄξονα x λαμβάνομεν τήν τομήν ὁρίζοντος καί μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.



σχ. 167

$\overset{+}{\leftarrow}$ $\Sigma Hx = H_2 + H_o$ μέ $H_2 = \dfrac{2\pi\iota_2}{R}$

$+\downarrow$ $\Sigma Hy = H_1$ μέ $H_1 = \dfrac{2\pi\iota_1 N}{R}$

ἀλλά $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{H_1}{H_2 + H_o}$

Ἡ συνιστῶσα H_1 ὀφείλεται εἰς τό πηνίον καί ἡ H_2 εἰς τήν σπεῖραν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει: $H_o = 2\pi\left(\dfrac{\iota_1 N}{R\varepsilon\varphi\varphi} - \dfrac{\iota_2}{R}\right)$

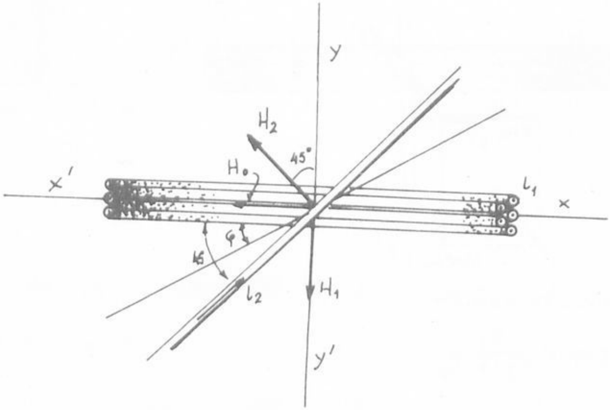
Πυξίς ἐφαπτομένων ἔχει 5 σπείρας μέσης ἀκτῖνος R = 3,14 cm καί εἶναι τοποθετημένη μέ τό ἐπίπεδον τῶν σπειρῶν της ἐπί τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ ἑνός τόπου.

Ἡ πυξίς ἔχει ἀντίστασιν 4Ω καί συνδέεται μέ τάσιν 16 V.

Ὑπεράνω τῆς πυξίδος καί εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπό τό κέντρον της διέρχεται ὁριζόντιος ἀγωγός σχηματίζων μέ τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ γωνίαν 45° καί διαρρεόμενος ὑπό ρεύματος $\iota_2 = 40$ A.

Ὁ ἀγωγός θεωρεῖται ἀπείρου μήκους καί τέμνει τόν μαγνητικόν μεσημβρινόν εἰς σημεῖον κείμενον ἐπί τῆς αὐτῆς κατακορύφου μέ τό κέντρον τῆς πυξίδος σχ. 168 .

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόκλισις τῆς μικρᾶς μαγν . βελόνης ἀποκλί - σεως τῆς πυξίδος ἄν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηΐνου μαγν.πε- δίου εἶναι H_0 = 0,2 Oe.



Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Ἡ πυξίς διαρρεομένη ὑπό ρεύματος παράγει μαγνητικόν πε- δίον. Εἰς τό κέντρον της ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἔχει μέτρον H_1 καί κατεύθυνσιν ὡς εἰς τό σχῆμα 168

$$H_1 = \frac{2\pi i}{\bar{R}} N \qquad (1)$$

Ὁ εὐθύγραμμος ἀγωγός διαρρεόμενος ὑπό ρεύματος παράγει εἰς τό κέντρον πεδίον ἐντάσεως $\vec{H_2}$ μέτρου:

$$H_2 = \frac{2\iota_2}{r} \qquad (2)$$

Τά $\vec{H_1}$ καί $\vec{H_2}$ προβάλλονται εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον καί λαμβάνομεν ὡς ἄξονα x τήν τομήν ὁρίζοντος καί μαγνητικοῦ με- σημβρινοῦ.

Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι:

$$\overset{+}{\leftarrow}\ \Sigma Hx = H_o + H_2 \sigma\upsilon\nu 45$$

$$+\downarrow\ \Sigma Hy = H_1 - H_2 \eta\mu 45$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\Sigma Hy}{\Sigma H_x} = \frac{H_1 - H_2 \eta\mu 45}{H_o + H_2 \sigma\upsilon\nu 45} = 0{,}76$$

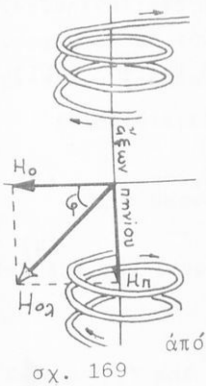
$$\text{καί} \quad \varphi = 37^o.10'$$

Πηνίον ἔχει 25 σπείρας καί μῆκος 3,14 cm . Ὁ ἄξων του εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τό κέντρον τοῦ πηνίου ὑπάρχει μικρά μαγνητική βελόνη ἀποκλίσεως ἡ ὁποία ἐκτρέπεται κατά γωνίαν $\varphi = 45^o$ ὅταν διά τοῦ πηνίου διέρχεται ρεῦμα. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τούτου. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γ.μαγ.πεδίου εἶναι $H_o = 0{,}2$ Oe.

σχ. 169.

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Θεωρῶ τήν προβολήν τῆς ὅλης διατάξεως ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Λαμβάνω ὡς ἄξονα xx΄ τήν τομήν ὁρίζοντος καί μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ:



$$\overset{\leftarrow}{+}\ \Sigma Hx = H_o$$

$$+\downarrow\ \Sigma Hy = H_\pi$$

$$\mu\acute{\varepsilon} \quad H_\pi = 4\pi i \frac{N}{l}$$

Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{H_\pi}{H_o} = \frac{4\pi i N}{H_o l} \ \text{ἤ} \ i = \frac{H_o . l \varepsilon\varphi\varphi}{4\pi N}$$

ἀπό ὅπου $i = 0{,}002$ ΗΜΜ ἐντ. ρεύματος $= 0{,}02$ A.

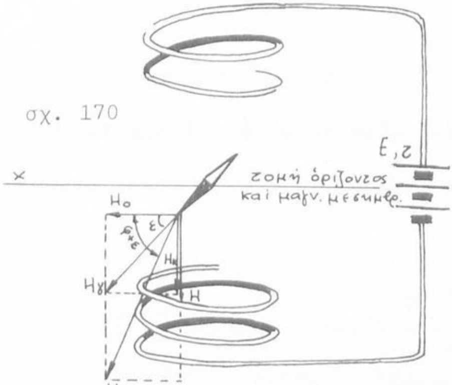
σχ. 169

☆ Πηνίον ἔχει N σπείρας καί μῆκος l. Τό πηνίον παρουσιάζει ἀντίστασιν R. Ὁ ἄξων τοῦ πηνίου διατηρεῖται κατακόρυφος. Εἰς τό κέντρον τοῦ πηνίου ὑπάρχει μικρά μαγν. βελόνη ἐγκλίσεως. Τό πηνίον εὑρίσκεται εἰς τόπον ὅπου ἡ ἔγκλισις εἶναι ε καί ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γ.μ.πεδίου H_o. Ὅταν τό πηνίον συνδέεται μέ τούς πόλους πηγῆς ΗΕΔ E καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατά γωνίαν φ. Νά εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ E.

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Ἡ διάταξις προβάλλεται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου. Ὡς ἄξων xx΄ λαμβάνεται ἡ τομή ὁρίζοντος καί μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ:

σχ. 170



$$\overset{\leftarrow}{+}\ \Sigma H_x = H_o$$

$$+\!\downarrow\ \Sigma H_y = H + H_K$$

Ὅπου H ἡ συνιστῶσα ἡ ὀφειλομένη εἰς τό πηνίον.

$$H = 4\pi i\,\frac{N}{l} \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως :

$$\varepsilon\varphi(\varepsilon+\varphi) = \frac{H_K + H}{H_o} \quad (2), \qquad H_K = H_o\,\varepsilon\varphi\varepsilon \quad (3)$$

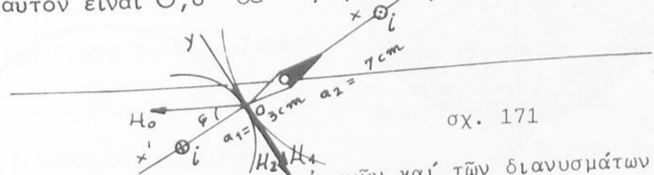
καί

$$i = \frac{E}{R+r} \qquad (4)$$

ἐκ τῶν (1) (2) (3) καί (4) προκύπτει:

$$E = \frac{l\cdot H_o(R+r)\,\varepsilon\varphi\varphi(1+\varepsilon\varphi\varepsilon)}{4\pi N(1-\varepsilon\varphi\varphi\,\varepsilon\varphi\varepsilon)}$$

☆ Δύο κατακόρυφοι εὐθύγραμμοι ἀγωγοί εἶναι παράλληλοι και εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 10 cm, ὁ εἷς ἀπό τόν ἄλλον ἐπί ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν 30° μετά τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεώς των θέτομεν κατακόρυφον ἄξονα, περί τόν ὁποῖον δύναται νά στρέφεται μικρά μαγνητική βελόνη, μήκους 4 cm. Διαβιβάζομεν ἐν συνεχεία διά τῶν δύο ἀγωγῶν αντίρροπα καί τῆς αὐτῆς ἐντάσεως ρεύματα καί βλέπομεν ὅτι ἡ βελόνη στρέφεται καί ἰσορροπεῖ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἀγωγῶν. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τούς δύο ἀγωγούς, ἐάν ἡ ἔντασις τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τόν τόπον αὐτόν εἶναι 0,8 Oe, ἡ δέ μαγνητική ἔγκλισις 60°



σχ. 171

Θεωρῶ τήν προβολήν τῶν ἀγωγῶν καί τῶν διανυσμάτων H, H_1 καί H_2 εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Θεωρῶ ὡς ἄξονα xOx' τόν διερχόμενον ἐκ τῶν προβολῶν τῶν ἀγωγῶν καί ὡς ἄξονα yOy' τήν κοινήν ἐφαπτομένην τῶν δύο μαγνητικῶν δυναμικῶν γραμμῶν πού διέρχονται ἐκ τοῦ βορείου πόλου τῆς μαγνητικῆς βελόνης, εἰς τήν θέσιν ἰσορροπίας της.

Ἀλλά τότε εἶναι: εἰς τό ΗΜΣΜ

$$H_o = H\sigma\upsilon\nu\varepsilon, \quad H_1 = \frac{2i}{\alpha_1} \quad \kappa\alpha\acute{\iota} \quad H_2 = \frac{2i}{\alpha_2} \tag{1}$$

καί διά τήν ἰσορροπίαν:

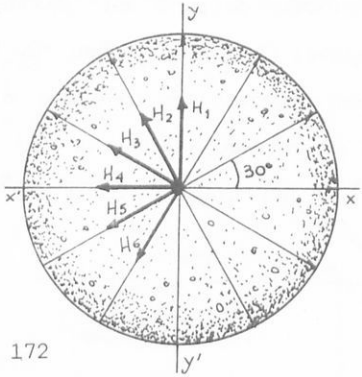
$$H_o\eta\mu\varphi = H_1 + H_2 \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔπεται:

$$i = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1} \cdot H\sigma\upsilon\nu\varepsilon.\eta\mu\varphi = 0{,}21 \text{ ΗΜΜ-έντ.ρεύματος}$$

☆ Ξυλίνη σφαῖρα ἀκτῖνος R περιβάλλεται ὑπό ἕξ σπειρῶν ἐκ σύρματος διατεταγμένων κατά μεγίστους κύκλους. Αἱ σπεῖραι τέμνονται εἰς τά ἄκρα A, B διαμέτρου τῆς σφαίρας καί σχηματίζουν ἀνά δύο γωνίαν 30°.

Ρεῦμα I κυκλοφορεῖ διά τῶν σπειρῶν. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγν. πεδίου εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας.



σχ. 172

Αἱ σπεῖραι προβάλλονται ἐπί ἐπιπέδου μεγίστου κύκλου καί καθέτου πρός τά ἐπίπεδα αὐτῶν.

Λαμβάνομεν τό σύστημα xky ὡς εἰς τό σχ. 172

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Προφανῶς $H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = H_6 = H = \dfrac{2\pi i}{R}$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma Hx = H_4 + 2H_3 συν30 + 2H_2\, συν60 = H(2+\sqrt{3})$$

$$+\uparrow\ \Sigma Hy = H_1 + H_2 συν30 + H_3 συν60 - H_5 συν60 - H_6 συν30 = H$$

$$H_o = \sqrt{\Sigma^2 Hx + \Sigma^2 Hy}$$

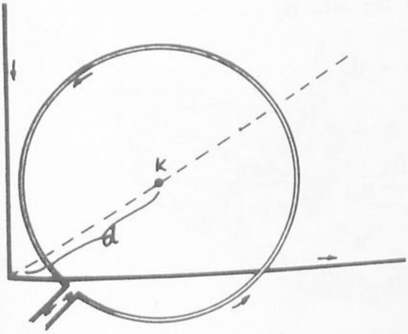
$$H_o = \sqrt{H^2(2+\sqrt{3})^2 + H^2} = 2H\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$H_o = \frac{4\pi i}{R}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

☆ Λεπτόν κυκλικόν πηνίον ἀποτελεῖται ἀπό 4 σπεῖρες μέσης ἀκτῖνος $\bar{R}$ = 3,14 cm.

Τό ἐπίπεδόν του ταυτίζεται μέ τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.

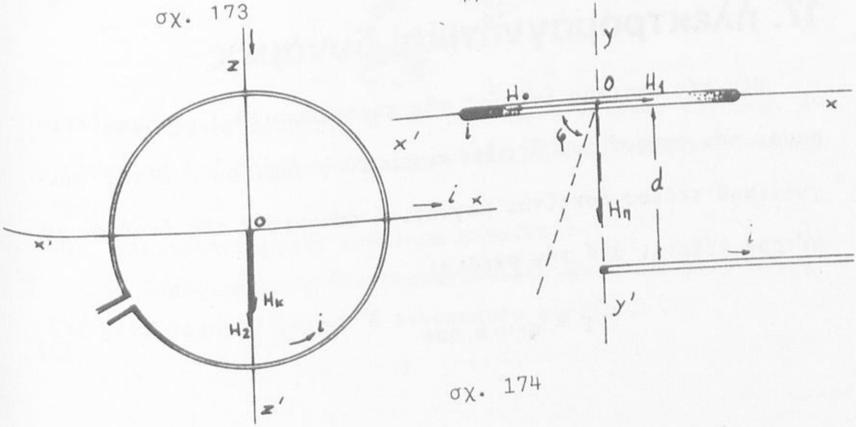
Παραλλήλως πρός τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ τοποθετεῖται ἀγωγός κεκαμένος κατ'ὀρθήν γωνίαν μέ τό ἐπίπεδόν του σέ ἀπόστασιν d = 30 cm ἀπό τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ὁ ἀγωγός ἔχει τήν μίαν τῶν πλευρῶν ὁριζοντίαν καί τήν ἄλλην κατακόρυφον ἐνῷ ἡ ὀρθή γωνία κεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος τοῦ πηνίου. Εἰς τό κέντρον τοῦ πηνίου εὑρίσκεται μικρά μαγνητική βελόνη ἀποκλίσεως. Ἐάν εἶναι H_o = 0,2 Oe. ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος πού πρέπει νά διαβιβάσωμεν συγχρόνως εἰς πηνίον καί εὐθύγραμμον ἀγωγόν ὥστε νά ἔχωμεν ἀπόκλισιν βελόνης 45^o , (σχ. 173).



σχ. 173

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ:

Θεωρῶ τάς προβολάς τῶν ἀγωγῶν καί τῶν $\vec{H}$ στό ἐπίπεδον τοῦ ὁρίζοντος καί στό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, σχ. 174 .



σχ. 174

Διά τό πεδίον εἰς τό O ἔχομεν τάς ἑξῆς συνιστώσας:

1. H_o = ὁριζοντία συνιστῶσα γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου
2. H_k = κατακόρυφος συνιστῶσα γηΐνου μαγν. πεδίου
3. H_π = συνιστῶσα ἐκ τοῦ πηνίου
4. H_1 = συνιστῶσα ἐκ τοῦ κατακορύφου τμήματος τοῦ ἀγωγοῦ.
5. H_2 = συνιστῶσα ἐκ τοῦ ὁριζοντίου τμήματος τοῦ ἀγωγοῦ.

καί εἶναι $H_\pi = \frac{2\pi i}{\bar{R}} N$, $H_1 = \frac{i}{d}$ $\quad H_2 = \frac{i}{d}$(τύποι ἡμίσεως)

Ἐπειδή ἡ βελόνη εἶναι ἀποκλίσεως ἐπιρεάζεται μόνον ἀπό τάς ὁριζοντίας συνιστώσας H_o, H_π καί H_1

$$\xleftarrow{+} \Sigma Hx = H_o - H_1$$

$$+\downarrow \ \Sigma Hy = H_\pi$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\Sigma Hy}{\Sigma Hx} = \left(\frac{H_\pi}{H_o - H_1}\right) = \frac{2\pi\, iN}{\bar{R}\left(H_o - \frac{i}{d}\right)}$$

$$i = \frac{\bar{R} d H_o \ \varepsilon\varphi\varphi}{2\pi d N + \bar{R}\varepsilon\varphi\varphi}$$

ἀπό ὅπου $i = 0{,}24$ HMM - Εντ. ρεύματος ἤ $i = 2{,}4$ A

17. ἠλεκτρομαγνητικαί δυνάμεις

Εἰς τάς βασικάς ἐννοίας τῆς παραγράφου 14.1. εἴδομεν (πειραματικόν δεδομένον) ὅτι ἐπί κινουμένου φορτίου ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου ἀσκεῖται μαγνητική δύναμις F τῆς ὁποίας τό μέτρον δίδεται ἀπό τήν σχέσιν:

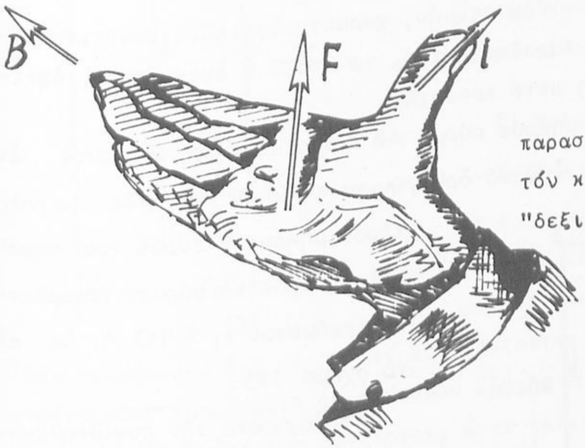
$$F = q \cdot \upsilon \cdot B \ \eta\mu\varphi \qquad (1)$$

'Η (1) ἀπορρέει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς Μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς.

Εἰς τήν ἰδίαν παράγραφον ἀπεδείξαμεν διά θεωρητικῶν συλλογισμῶν ὅτι ἐπί εὐθυγράμμου ρευματοφόρου ἀγωγοῦ ἀσκεῖται ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου ἠλεκτρομαγνητική δύναμις $\vec{F}$ τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι:

$$F = l\,i\,B\;\eta\mu\varphi \qquad (2)$$

'Η κατεύθυνσις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως προσδιορίζεται συντόμως, διά τοῦ κανόνος τῆς δεξιᾶς χειρός, ὡς ἐν τῷ σχήματι:



παραστατικόν διά τόν κανόνα τῆς "δεξιᾶς χειρός"

Γενικῶς τά προβλήματα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων ἐπιλύονται διά μεθόδων τῆς μηχανικῆς (βλέπε "ΜΕΘΟΔΟΙ" τόμος πρῶτος).

■ 'Ηλεκτροδυναμικόν πρόβλημα σημαίνει:

α. Προσδιορισμός ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως ἀσκουμένης ἐπί ρευματοφόρου ἀγωγοῦ ἤ κινουμένου φορτίου.

β. Προσδιορισμός τῆς ροπῆς ζεύγους ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων ἐπί ρευματοφόρου πλαισίου.

Τό πρόβλημα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων ἐξετάζεται ἀπό δύο ἀπόψεις:

α. Ἠλεκτρομαγνητική ἄποψις

β. Μηχανική ἄποψις

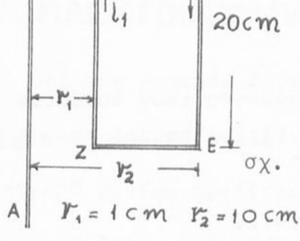
Ἀπό ἠλεκτρομαγνητικήν ἄποψιν μᾶς ἐνδιαφέρει ὁ προσδιορισμός:

1. Τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κατά μέτρον καί κατεύθυνσιν
2. Τοῦ ρεύματος πού διαρρέει τόν ἀγωγόν ἤ τό πλαίσιον
3. Τό μέτρον καί ἡ κατεύθυνσις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως.

Δίδομεν κατωτέρω σειράν, χαρακτηριστικῶν ὑποδειγματικῶς, λελυμένων παραδειγμάτων, τά ὁποῖα ὁ ἀναγνώστης ὀφείλει νά ἀναγνώσῃ μετά προσοχῆς.

☆ Τό μεγάλου μήκους σύρμα ΑΒ διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως ι = 20Α ἐνῶ τό ὀρθογώνιον πλαίσιον ἔχον τάς μεγαλυτέρου μήκους πλευράς του παραλλήλους πρός τό σύρμα, διαρρέεται ὑπό ρεύματος ι_1 = 10 Α, ὡς εἰς τό σχῆμα 175.

Ὑπολογίσατε τήν συνισταμένην δύναμιν τήν ἀσκουμένην, ὑπό τοῦ σύρματος, ἐπί τοῦ πλαισίου, κατά μέτρον διεύθυνσιν καί φοράν.



σχ. 175

Λύσις εἰς τό MKSAr. Ὁ ΑΒ διαρρεόμενος ὑπό τοῦ ρεύματος ι παράγει γύρω του μαγνητικόν πεδίον. Τό πεδίον αὐτό κατά μῆκος τοῦ ΓΖ καί τοῦ ΔΕ μπορεῖ νά θεωρηθῇ ὁμογενές.

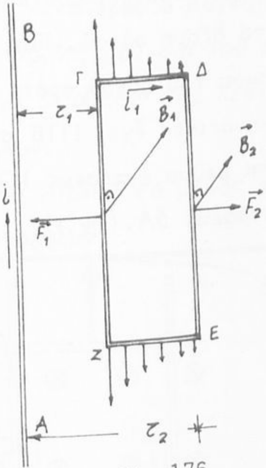
Τό μέτρον τῆς $\vec{B}$ κατά μῆκος τοῦ ΓΖ εἶναι:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\iota}{r_1} \tag{1}$$

ἐνῷ κατά μῆκος τοῦ ΔΕ ἡ $\vec{B}$ ἔχει μέτρον

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\iota}{r_2} \tag{2}$$

Αἱ κατευθύνσεις τῶν $\vec{B}_1$ καί $\vec{B}_2$ εἶναι κάθετοι πρός τό ἐπίπεδον τῆς σελίδος μέ φορά πρός τά μέσα.



σχ. 176

Μέ τόν κανόνα τῆς δεξιᾶς χειρός προσδιορίζομεν τάς κατευθύνσεις τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων $\vec{F}_1$ καί $\vec{F}_2$ τῶν ὁποίων τά μέτρα εἶναι:

$$F_1 = \iota_1(\Gamma Z)B_1 \tag{3}$$

$$F_2 = \iota_1(\Delta E)\cdot B_2 \tag{4}$$

Αἱ δυνάμεις πού ἀσκοῦνται ἐπί τῶν ΓΔ καί ΖΕ μποροῦν νά ὑπολογισθοῦν. Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι οἱ ΓΔ καί ΖΕ χωρίζονται εἰς ἴσον πλῆθος στοιχειωδῶν τμημάτων διαπιστώνομεν εὔκολα ὅτι αἱ ἐπ' αὐτῶν δυνάμεις εἶναι ἀνά δύο ἀντίθετοι, ὥστε τελικῶς ἡ ὁλική δύναμις ἐπί τοῦ πλαισίου εἶναι:

$$F = F_1 - F_2 \tag{5}$$

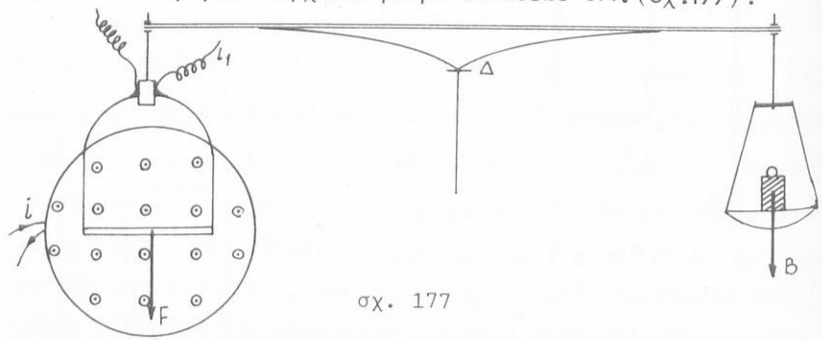
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει:

$$F = \frac{\mu_o}{2\pi}\, ii_1(\Gamma Z)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\text{ἤ} \quad F = 7{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{Nt}$$

Εὐθύς ἀγωγός, μήκους 8 cm , ἐξαρτᾶται ὁριζοντίως ἐκ τῆς φάλαγγος ζυγοῦ διά δύο κατακορύφων συρμάτων, τά ὁποῖα συνδέονται πρός πηγήν, χωρίς ἐκ τούτου νά ἐμποδίζωνται αἱ κινήσεις τοῦ ζυγοῦ.

Ὁ ἀγωγός τίθεται ἐν συνεχείᾳ εἰς τό μέσον ὁριζοντίου ἐπιμήκους σωληνοειδοῦς, καθέτως πρός τό ἄξονα αὐτοῦ. Ποῖον βάρος πρέπει νά τεθῇ ἐπί τοῦ ἑτέρου δίσκου τοῦ ζυγοῦ πρός ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας, ἐάν τό σωληνοειδές ἔχει 1118 σπείρας ἀνά 60 cm καί δι'αὐτοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 A, ἐνῷ διά τοῦ ἀγωγοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 5A.(σχ.177).



σχ. 177

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ.

Διά τήν ἰσορροπίαν πρέπει:

$$B = F$$

$$B = \iota_1 \cdot H \cdot l$$

$$B = 4\pi \iota \iota_1 \cdot \frac{N}{L} \cdot l$$

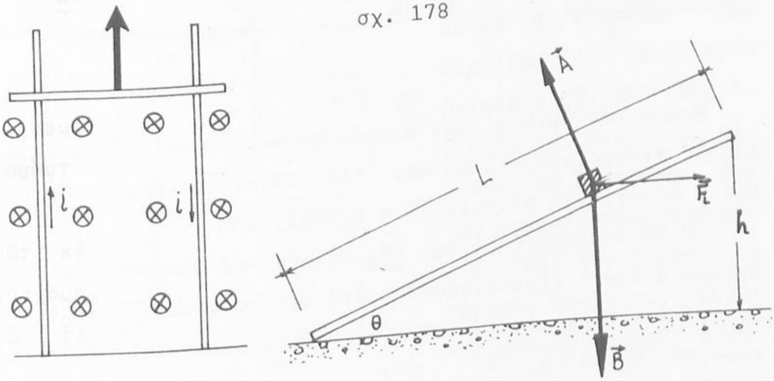
καί μετά τήν ἀντικατάστασιν: $B = 936$ dynes

☆ Δύο ἰσομήκεις μεταλλικαί ράβδοι τοποθετοῦνται παραλλήλως ὡς αἱ ἀπέναντι πλευραί ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου. Αἱ ράβδοι στηρίζονται κατά τό ἕν ἄκρον ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου καί κατά τό ἕτερον ἐπί κατακορύφου τοίχου εἰς ὕψος h . σχ. 178 'Επί τῶν δύο ράβδων τοποθετεῖται λεπτή μεταλλική ράβδος βάρους B καθέτως πρός τάς παραλλήλους ράβδους. 'Η ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ράβδων εἶναι l . Τό ὅλον σύστημα εὑρίσκεται ἐντός ὁμογενοῦς κατακορύφου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H.

Διαβιβάζομεν διά τοῦ συστήματος ρεῦμα ι καί παρατηροῦμεν ἰσοταχῆ ὀλίσθησιν τῆς λεπτῆς μεταλλικῆς ράβδου ἐπί τῶν δύο παραλλήλων.

Νά εὑρεθῇ τό μῆκος ἑκάστης τῶν παραλλήλων ράβδων. Τριβαί δέν ὑπάρχουν.

σχ. 178



Λύσις εἰς MKSAr

'Εφ' ὅσον ἡ ράβδος ἀνέρχεται μέ σταθεράν ταχύτητα εἶναι:

$$B\ \eta\mu\vartheta = F_L \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

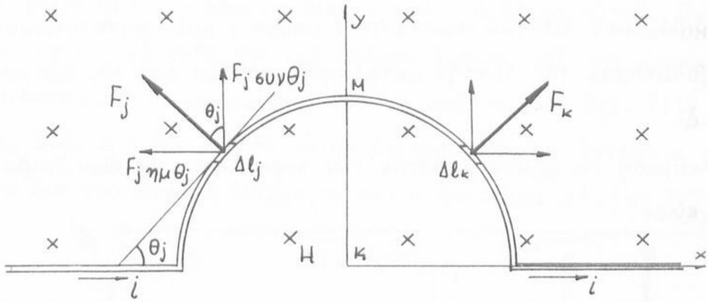
$$\text{ἤ}\quad B\ \eta\mu\vartheta = \mu_0 H l i\ \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\text{ἀλλά} \quad ημθ = \frac{h}{L}$$

$$\text{ὁπότε} \quad L = \sqrt{\left(\frac{B}{\mu_0 H l i}\right)^2 + 1}\cdot h$$

☆ Ἡμικυκλικός ἀγωγός ἀκτῖνος R διαρρέεται ὑπό ρεύματος ι καί τοποθετεῖται μέ τό ἐπίπεδόν του καθέτως πρός τάς δυναμικάς γραμμάς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η. Ὑπολογίσατε τήν δύναμιν Laplace ἥτις ἀσκεῖται ἐπί τοῦ ἀγωγοῦ.

Λύσις εἰς τό MKSAr



σχ. 179

Θεωρῶ τόν ἡμικυκλικόν ἀγωγόν χωρισμένον εἰς ἄπειρον πλῆθος στοιχειωδῶν τμημάτων. Ἐπί τοῦ στοιχειώδους τμήματος j ἀσκεῖται ἡ δύναμις $Fj = \mu_0 iH\Delta lj\, ημθj$

Ἡ Fj ἀναλυομένη δίδει τάς Fjημθj καί Fjσυνθj ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἐξουδετεροῦται ἀπό τήν συνιστῶσαν $F_k ημθ_k$ τῆς F_k πού ἀσκεῖται εἰς τό τμῆμα Δl_k συμμετρικόν τοῦ Δlj ὡς πρός τόν ἄξονα ky.

Οὕτω:

$$F = F_1 συνθ_1 + F_2 συνθ_2 + \ldots + F_\nu συνθ_\nu$$

$$\text{ἤ} \quad F = \mu_0 iH(\Delta l_1 συνθ_1 + \Delta l_2 συνθ_2 + \ldots + \Delta l_\nu\, συνθ_\nu)$$

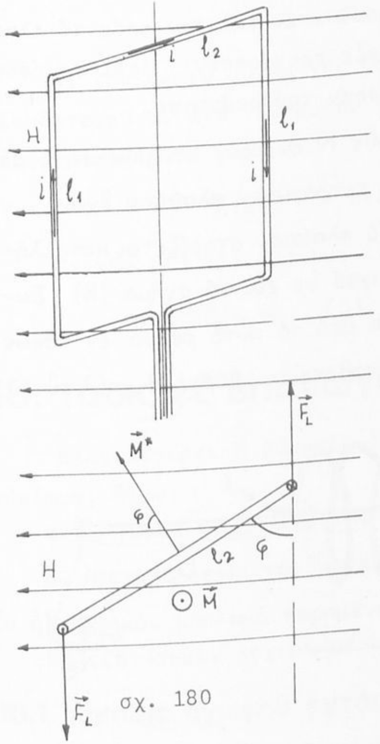
$$ή \quad F = 2\mu_o i H \cdot R$$

ἀφοῦ τό ἐντός τῆς παρενθέσεως ἄθροισμα εἶναι ἡ προβολή τοῦ ἡμικυκλικοῦ ἀγωγοῦ στόν ἄξονα xx΄. Σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς F εἶναι τό μέσον M τοῦ ἀγωγοῦ.

☆ Ὀρθογώνιον πλαίσιον εὑρίσκεται ἐντός ὁριζοντίου ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H μέ τάς δύο ἀπέναντι πλευράς του κατακορύφους. σχ. 180.

Τό πλαίσιον διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως ι.

Ὑπολογίσατε τήν ροπήν ἥτις ἀσκεῖται ἐπί τοῦ πλαισίου.



σχ. 180

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ.

Θεωρῶ τήν προβολήν τοῦ πλαισίου ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου σχ. 180 καί ἐξετάζω τάς δυνάμεις Laplace πού ἀσκοῦνται ἐπί τῶν ρευματοφόρων πλευρῶν

α. Ἐπί τῶν ὁριζοντίων πλευρῶν ἀσκοῦνται κατακόρυφοι ἀντίθετοι δυνάμεις.

β. Ἐπί ἑκάστης τῶν κατακορύφων πλευρῶν ἀσκεῖται δύναμις $\vec{F}_1$ μέτρου:

$$F_L = i l_1 \cdot H$$

Αἱ δύο δυνάμεις μέτρου F_L ἀποτελοῦν ζεῦγος. Τό μέτρον τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι:

$$M = F_L \cdot l_2 \cdot ημφ$$

ἤ $$M = Hil_1l_2ημφ$$

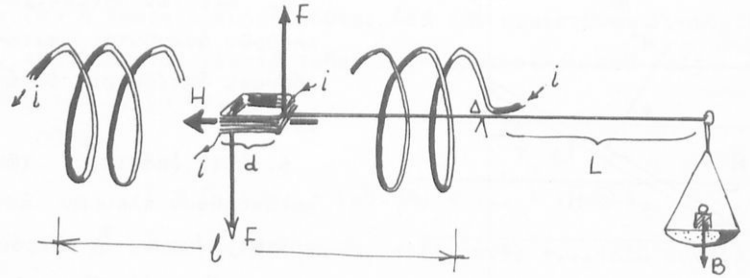
ἀλλά: $l_1l_2 = S$ (ἐμφαδόν πλαισίου)

συνεπῶς: $M = HiSημφ$

Ὑπό τήν δρᾶσιν τοῦ ζεύγους τούτου τό πλαίσιον τείνει νά προσανατολισθῇ μέ τό ἐπίπεδόν του κάθετον πρός τάς δυναμικάς γραμμάς.

■ Ὁρίζομεν ὡς μαγνητικήν ροπήν ἑνός ρευματοφόρου πλαισίου ἕν διανυσματικόν μέγεθος τό ὁποῖον παρίσταται διά ἀνύσματος $\vec{M}^*$ μέτρου $M^* = Si$ μέ διεύθυνσιν κάθετον πρός τό πλαίσιον καί φοράν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς προχώρησιν δεξιοστρόφου κοχλίου στρεφομένου κατά τήν φοράν τοῦ ρεύματος.

☆ Εἰς τό ἐσωτερικόν σωληνοειδοῦς N σπειρῶν καί μήκους l μέ τόν ἄξονά του ὁριζόντιον τίθεται τετράγωνον πλαίσιον ἔχον ν σπείρας καί ἐμβαδόν σπείρας S. Τό πλαίσιον στηρίζεται καταλλήλως εἰς τό ἄκρον τῆς φάλαγγος ζυγοῦ ὡς εἰς τό σχῆμα 181 Σωληνοειδές καί πλαίσιον διαρρέονται ἀπό τό αὐτό ρεῦμα ἐντάσεως i . Ἐπί τοῦ δίσκου τοῦ ζυγοῦ τοποθετεῖται βάρος B καί οὕτω



σχ. 181

ἐπιτυγχάνεται ἡ ὁριζοντίωσις τοῦ πλαισίου. Ὁ πρός τόν δίσκον βραχίων τοῦ ζυγοῦ ἔχει μῆκος L.

Νά εὑρεθῇ σχέσις μεταξύ τῶν ι, S, L, N, ν, L.

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ.

Τό σωληνοειδές διαρρεόμενον ὑπό ρεύματος παράγει εἰς τό ἐσωτερικόν του ὁμογενές μαγνητικόν πεδίον ἐντάσεως H:

$$H = 4\pi i N \qquad (1)$$

Ἐπί τοῦ πλαισίου ἐμφανίζεται ζεῦγος δυνάμεων τοῦ ὁποίου ἡ ροπή ἔχει μέτρον M:

$$M = F.d \qquad (2)$$

$$\text{μέ} \quad F = \nu \cdot i \cdot H \cdot d \qquad (3)$$

Εἰς τήν θέσιν αὐτήν τῆς ἰσορροπίας ἡ ροπή τοῦ ζεύγους ἐξουδετεροῦται ἀπό τήν ροπήν τοῦ βάρους B ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς Δ.

$$\text{ἤτοι:}\ M = B.L \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) (2) (3) καί (4) συνάγεται:

$$4\pi\nu i^2 NS = BL \quad (5) \quad \text{ἀφοῦ} \quad d^2 = S$$

18. τάσις ἐξ ἐπαγωγῆς

Ἠλεκτρεγερτική δύναμις ἐξ ἐπαγωγῆς ἐμφανίζεται εἰς ἕν κύκλωμα, ὅταν:

α. Ἀγωγός κινεῖται ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου.

β. Μεταβάλλεται τό "μέγεθος" τοῦ πεδίου ἐντός τοῦ ὁποίου ἕν ἠλεκτρικόν κύκλωμα παραμένει ἀκίνητον.

Θά ἐξετάσωμεν κεχωρισμένως τάς δύο περιπτώσεις.

18.1. κίνησις ἀγωγοῦ ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου

18.1.1. κίνησις εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ

'Ισχύει ὁ γενικός τύπος $E_{επ} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Εἰς τήν περίπτωσιν κινήσεως εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ τό $\Delta\Phi$ εἶναι ἡ μαγνητική ῥοή ἡ ὁποία διέρχεται διά τοῦ ἐμβαδοῦ ΔS τό ὁποῖον "σαρώνει" ἤ "διαγράφει" ὁ ἀγωγός εἰς χρόνον Δt.

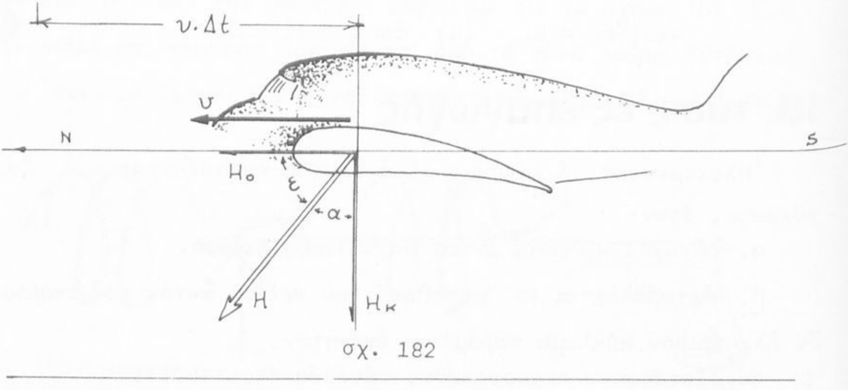
Τό πρόσημον, μεῖον, εἰς τόν ἀνωτέρω τύπον ὑπενθυμίζει μόνον τήν ἰσχύν τοῦ νόμου τοῦ LENZ*.

Εἰς τά προβλήματα τῆς περιοχῆς αὐτῆς ὁ προσδιορισμός τῆς σχέσεως $\Delta\Phi = f(t)$ ἀποτελεῖ καί τήν λύσιν των.

☆ 'Αεροπλάνον τοῦ ὁποίου αἱ πτέρυγες ἔχουν ἄνοιγμα l ἵπταται ὁριζοντίως ἀπό νότου πρός βορρᾶν μέ ταχύτητα $υ$ ἄνωθεν ἑνός τόπου ὅπου ἡ μέν ἔντασις τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι Η ἡ δέ ἔγκλισις ε. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξ ἐπαγωγῆς ἀναπτυσσομένη ΗΕΔ εἰς τά ἄκρα τῶν πτερύγων του.

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ.

Θεωρῶ τάς προβολάς εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ.



σχ. 182

---

* Τό πρόσημον μεῖον (-) τοῦ τύπου $E_ε = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} N$ λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν μόνον ἐφ'ὅσον πρόκειται νά ἐφαρμόσωμεν τούς κανόνας τοῦ Kirchhoff.

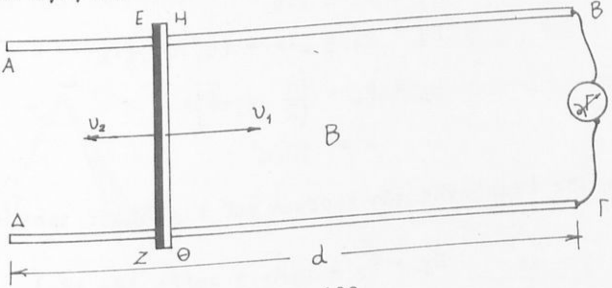
'Εκ τοῦ $E_{\epsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ προκύπτει:

$$E_{\epsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S\sigma\upsilon\nu\alpha}{\Delta t} = -\frac{\mu H l \upsilon . \Delta t \sigma\upsilon\nu\alpha}{\Delta t} = -\mu H \upsilon l \sigma\upsilon\nu\alpha$$

καί ἐπειδή $H\sigma\upsilon\nu\alpha = H\eta\mu\epsilon = Hk$

$E_{\epsilon\pi} = -\mu H l \upsilon \eta\mu\epsilon$ μέ $\mu = 1$ διά τόν ἀέρα.

Οἱ ὁδηγοί ΑΒ καί ΓΔ μήκους $d = 2m$ ἀπέχουν μεταξύ των
0,8 m. Οἱ ἀγωγοί ΕΖ καί ΗΘ εὑρίσκονται ἀρχικῶς εἰς τό μέσον
τῆς διατάξεως ὁπότε ἀρχίζουν νά κινοῦνται ἀντιθέτως μέ ταχύ-
τητας $\upsilon_1 = 6$ cm/sec καί $\upsilon_2 = 4$ cm/sec. Τό γαλβανόμετρον Γ ἔ-
χει ἀντίστασιν $R_\Gamma = 9{,}2\Omega$. 'Η ὅλη διάταξις εὑρίσκεται ἐντός
πεδίου μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς Β = 500 Gauss εἰς τρόπον ὥστε
τό $\vec{B}$ νά σχηματίζῃ γωνίαν $\varphi = 30^\circ$ μέ τό ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.
'Εάν οἱ ὁδηγοί καί οἱ ἀγωγοί παρουσιάζουν ἀντίστασιν 1Ω
ἀνά τρέχον μέτρον νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔνδειξις τοῦ γαλβανομέτρου
μετά πάροδον χρόνου t = 10 sec ἀπό τῆς ἐνάρξεως τῆς κινή-
σεως τῶν ἀγωγῶν.



σχ. 183

'Από τήν προβολήν ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τό ἐπίπε-
δον τῶν παραλλήλων ὁδηγῶν λαμβάνομεν.

$$V_1 - V_3 = -\frac{B\cdot l_1^2 \Delta\varphi}{2\Delta t} \quad \text{καί ἐπειδή} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$$

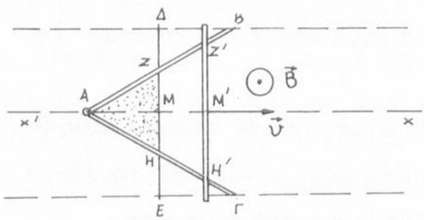
$$V_1 - V_3 = -\frac{1}{2} B l_1^2 \omega \tag{4}$$

$$V_2 - V_3 = -\frac{1}{2} B l_2^2 \omega \tag{5}$$

Ἐκ τῶν (4) καί (5) δι᾽ἀφαιρέσεως

$$V_1 - V_2 = -\frac{1}{2} B\omega \,(l_1^2 - l_2^2)$$

Δύο σύρματα ΑΒ καί ΑΓ, μήκους $l = 50$ cm , σχηματίζουν γωνίαν 60^o εἰς τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Τρίτον σῦρμα ΔΕ ἀπολύτως ὅμοιον μέ τά ΑΒ καί ΑΓ μετατοπίζεται μέ σταθεράν ταχύτητα $\sqrt{3}\ \frac{m}{sec}$ παραλλήλως πρός ἑαυτό καί καθέτως πρός τάς δυναμικάς γραμμάς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου 0,1 Tesla Σχ. 186 Ἡ διεύθυνσις ΔΕ εἶναι κάθετος πρός τήν διχοτόμον Αx τῆς γωνίας ΒΑΓ. Ὑπολογίσατε:



σχ. 186

α) Τήν Η.Ε.Δ. ἐξ ἐπαγωγῆς εἰς τήν βάσιν ΒΓ.

β) Τό ἐξ ἐπαγωγῆς ρεῦμα, ἄν ἡ ἀντίστασις ἑκάστου σύρματος εἶναι 1 Ω ἀνά m μήκους ($\rho = \Omega/_m$).

Λύσις εἰς τό MKSAr

α) Εἶναι $E_{\varepsilon\pi} - \underset{\Delta t\to 0}{o\rho} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (1) ἀλλά $\Delta\Phi = BS_2 - BS_1 = B\Delta S$ (2)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (AZ'H') - (AZH) = \frac{1}{2}(Z'H')(AM') - \frac{1}{2}(ZH).(AM)$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (AM')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(AM)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[(AM')^2 - (AM)^2\right]$$

$$\Delta S = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\upsilon^2(t+\Delta t)^2 - \upsilon^2 t^2\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\upsilon^2 t\Delta t + \upsilon^2 \cdot \Delta t^2\right] \quad (3)$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καί (3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{\varepsilon\pi} = - \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{\frac{B\left[2\upsilon^2 t . \Delta t + \upsilon^2 \Delta t^2\right]}{\sqrt{3}}}{\Delta t}$$

$$E_{\varepsilon\pi} = - \underset{\Delta t \to 0}{\text{ορ}} \frac{B}{\sqrt{3}}(2\upsilon^2 t + \upsilon^2 \Delta t)$$

$$\text{ἤ} \quad E_{\varepsilon\pi} = -\frac{2}{\sqrt{3}} B\upsilon^2 t \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $E_{\varepsilon\pi}$ εἶναι γραμμική συνάρτησις τοῦ χρόνου.

β) $\iota = \dfrac{E_{\varepsilon\pi}}{R}$ μέ $R = 3(ZH) \cdot \rho$ ἀλλά $(ZH) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\upsilon \cdot t$

ὁπότε: $\iota = \dfrac{B\upsilon}{3\rho} = \dfrac{\sqrt{3}}{30} A = 0{,}0577\ A$

18.1.2. Κίνησις πλαισίου

Ἰσχύει ὁ γενικός τύπος $E_{\varepsilon\pi} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot N$

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ μεταβολή τῆς ροῆς ΔΦ δυνατόν νά ὀφείλεται:

α. Εἰς στροφήν τοῦ πλαισίου ἐντός τοῦ πεδίου

β. Εἰς μετατόπισιν τοῦ πλαισίου (π.χ. ταχεία ἔξοδος ἐκ τοῦ πεδίου).

Κατωτέρω ἐπιλύονται ὑποδειγματικῶς τά ἀντιπροσωπευτικώτερα προβλήματα τῆς περιοχῆς αὐτῆς.

Πηνίον περιλαμβάνει 800 σπείρας ἐμβαδοῦ 50 cm^2 . Ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 10Ω. Τά ἄκρα του συνδέονται πρός γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 90Ω.

Τό πηνίον τοῦτο τοποθετεῖται ἐντός ὁμογενοῦς μαγν. πεδίου ἐντάσεως 800 Oe. ὥστε ὁ ἄξων του νά εἶναι ὁριζόντιος καί παράλληλος πρός τάς δυναμικάς γραμμάς τοῦ πεδίου. Στρέφομεν τό πηνίον κατά 180^o περί κατακόρυφον ἄξονα. Ποῖον φορτίον διῆλθε διά τοῦ γαλβανομέτρου.

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ

Ἡ ΗΕΔ ἥτις προεκάλεσε τήν ροήν τοῦ φορτίου δίδεται ὑπό τοῦ :

$$E_\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (1)$$

μέ $\Delta\Phi = [\Phi_2 - \Phi_1] = [HSN\sigma\upsilon\nu 180^o - HSN\sigma\upsilon\nu 0^o] = 2HSN$

Ἀλλά $I_\varepsilon = \frac{E_\varepsilon}{R_{o\lambda}}$ (2) καί $Q_\varepsilon = I_\varepsilon \cdot \Delta t$ (3)

Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν (1) (2) καί (3)

Προκύπτει:

(4) $Q_\varepsilon = -\frac{2HSN}{R_{o\lambda}}$ (Τό μεῖον ὑπενθυμίζει τήν ἰσχύν τοῦ νόμου τοῦ LENZ)

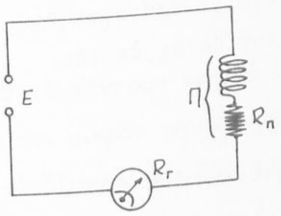
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν $Q_\varepsilon = 6{,}4 \cdot 10^{-5}$ ΗΜΜ-φορ.

ἤ $Q_\varepsilon = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$ Cb $= 640$ μCb.

"Ενα πηνίον ἔχει 2000 σπείρας ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 10 cm^2. Ἡ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 5Ω. Τό πηνίον εὑρίσκεται εἰς μαγνητικόν πεδίον μέ τάς σπείρας του καθέτους πρός τάς δυναμικάς γραμμάς.

Ἐξάγομεν ταχέως τό πηνίον ἀπό τό πεδίον καί παρατηροῦμεν ὅτι τό γαλβανόμετρον τό ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 15Ω, δεικνύει δίοδον ἠλεκτρικοῦ φορτίου 0,1 Cb. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγν. πεδίου;

Τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα ὀφείλεται εἰς ἐπαγωγικήν ΗΕΔ καί διαρρέει τάς ἀντιστάσεις τοῦ πηνίου καί τοῦ γαλβανομέτρου



$$E = I(R_\pi + R_\Gamma) \qquad (1)$$

$$\text{ἀλλά} \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (2)$$

σχ. 187

Ἐντός τοῦ χρόνου Δt τό πηνίον ἐξῆλθε ἐκ τοῦ πεδίου
Ἡ μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἰς ἑκάστην σπεῖραν εἶναι:

$$\Delta\Phi = |\Phi_2 - \Phi_1|$$

ἤ $\Delta\Phi = HS$ (ἀπολύτως) ἀφοῦ $\Phi_2 = 0$ καί $\Phi_1 = HS$

καί διά N σπείρας (3)

$$\Delta\Phi_{o\lambda} = HSN$$

Ἀλλά $E = -\dfrac{\Delta\Phi_{o\lambda}}{\Delta t}$ (4)

Ἐκ τῶν (1) (2) (3) & (4) ► $H = \dfrac{\Delta Q(R_\pi + R_\Gamma)}{SN}$

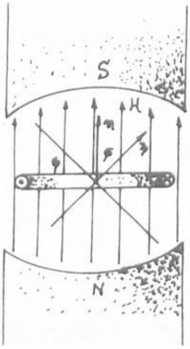
Ἐργαζόμενοι εἰς τό ΗΜΣΜ εὑρίσκομεν $H = 10^4$ Oe.

★ 'Ορθογώνιον πλαίσιον ἐμβαδοῦ S περιστρέφεται περί ἄξονα κάθετον πρός τήν διεύθυνσιν ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H καί παράλληλον πρός μίαν τῶν πλευρῶν του ὡς εἰς τό σχῆμα. Ἡ περιστροφή γίνεται μέ σταθεράν γωνιακήν ταχύτητα. Νά εὑρεθοῦν:

α) Ἡ τάσις ἥτις ἐπάγεται εἰς τό πλαίσιον συναρτήσει τοῦ χρόνου.

β) Ἡ μεγίστη τιμή τῆς ἐπαγομένης τάσεως

γ) Ἡ μέση τιμή τῆς τάσεως εἰς μίαν ἡμιπερίοδον.



'Εφ' ὅσον τό πλαίσιον περιστρέφεται ἐντός τοῦ ὁμογενοῦς πεδίου ἐπάγεται εἰς αὐτό τάσις ἥτις ὑπολογίζεται ἐκ τῆς:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (1)$$

ἥτις γράφεται γενικώτερα ὡς:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad ἤ \quad E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (2)$$

Δηλαδή ἡ ἐπαγομένη τάσις προκύπτει ἐκ τῆς παραγωγίσεως τῆς ροῆς: $\Phi = HS\sigma\upsilon\nu\varphi$ (3) μέ $\varphi = \omega t$ (4).

Ἤτοι: $$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{HSd\sigma\upsilon\nu\omega t}{dt} = -\frac{HS\omega d\sigma\upsilon\nu\omega t}{d\omega t} = -HS\omega(-\eta\mu\omega t)$$

Δηλαδή $$E_{\varepsilon\pi} = HS\omega\eta\mu\omega t = E_o\eta\mu\omega t \qquad (5)$$

1. Στιγμιαία τιμή τάσεως: $E_{\varepsilon\pi} = E_o\eta\mu\omega t$
2. Μεγίστη τιμή τάσεως: $E_{max} = E_o = HS\omega$
3. Μέση τιμή εἰς χρόνον ἡμιπεριόδου: Δίδεται ἀπό τήν σχέσιν

$$\vec{E} = \frac{2}{\pi}\cdot E_o$$

18.2. μεταβολή τοῦ "μεγέθους" τοῦ πεδίου

Ἡ μεταβολή τοῦ "μεγέθους" τοῦ πεδίου δυνατόν νά ὀφείλεται:

Ι. Εἰς μεταβολήν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος.

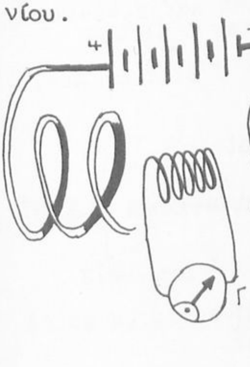
ΙΙ. Εἰς εἰσαγωγήν ὑλικοῦ ἐντός τοῦ πεδίου.

18.2.1. μεταβολή τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος

Γενικῶς ἐκ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος Δi προσδιορίζομεν τήν μεταβολήν ΔH ἤ ΔB τοῦ πεδίου καί ἐξ αὐτῆς τήν μεταβολήν $\Delta\Phi_{o\lambda}$ τῆς μαγνητικῆς ροῆς.

Ἰσχύει ὁ γενικός τύπος $E_{\varepsilon\pi} = -\dfrac{\Delta\Phi_{o\lambda}}{\Delta t}$ μέ τόν ὁποῖον συσχετίζομεν τά μεγέθη τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μέ τά μεγέθη τοῦ μαγνητικοῦ.

✡ Εἰς τό κέντρον πηνίου μήκους 40 cm καί 500 σπειρῶν τοποθετεῖται μικρόν πηνίον φέρον 10 σπείρας διατομῆς 8 cm^2. Ἀρχικῶς οἱ ἄξονες τῶν δύο πηνίων συμπίπτουν καί τό ἐξωτερικόν διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως 10Α. Ἐντός χρόνου 10 sec μεταβάλλομεν τήν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τοῦ ἐξωτερικοῦ πηνίου εἰς 20Α. Ποία ἡ ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς εἰς τά ἄκρα τοῦ μικροῦ πηνίου.



σχ. 189

Λύσις εἰς τό ΗΜΣΜ

Εἰς τά ἄκρα τοῦ μικροῦ πηνίου ἐμφανίζεται ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς

$$E_{\varepsilon} = -\frac{\Delta\Phi_{II}}{\Delta t} \qquad (1)$$

$$\Delta\Phi_{II} = S.n.\Delta H \quad (2)$$

$$\Delta H = 4\pi\Delta I \cdot \frac{N}{l} \quad (3)$$

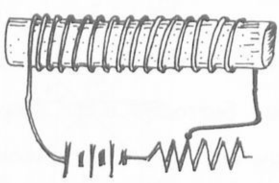
Ἐκ τῶν (1) (2) καί (3) προκύπτει:

$$E_\varepsilon = \frac{4\pi\eta NS\Delta I}{\Delta t} \text{ (ἀπολύτως)} \quad (4)$$

Μετά τήν μετατροπήν τῶν μονάδων καί τήν ἀντικατάστασιν εἰς τήν (4) προκύπτει:

$$E_\varepsilon = 160\cdot\pi \ \mu V$$

Ὑπολογισμός συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς πηνίου.



σχ. 190

Ἔστω πηνίον μήκους l διατομῆς S φέρον N σπείρας καί πυρῆνα σχετικῆς μαγνητικῆς διαπερατότητος μ.

Θεωρῶ τό πηνίον διαρρεόμενον ὑπό ρεύματος.

Ὁ Ὑπολογισμός γίνεται στό ΗΜΣΜ:

Ἄν ι_1 εἶναι ἡ ἀρχική καί ι_2 ἡ τελική τιμή τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος τότε $B_1 = \mu 4\pi\iota_1\frac{N}{l}$ ἡ ἀρχική καί $B_2=\mu 4\pi\iota_2 \frac{N}{l}$ ἡ τελική τιμή τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς.

Συνεπῶς:

$$\Delta B = B_2 - B_1 = 4\pi\mu\frac{N}{l}\Delta i$$

ἀλλά

$$\Delta\Phi_{o\lambda} = \Delta BSN$$

καί ἐπειδή $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi_{o\lambda}}{\Delta t}$ ἔπεται ὅτι:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{4\pi\mu SN^2}{l}\cdot\frac{\Delta i}{\Delta t} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

ἤτοι: $L = \frac{4\pi\mu S N^2}{l}$

Εἰς τόν ἀνωτέρω τελικόν τύπον τό S μετρεῖται εἰς cm^2 καί τό l εἰς cm ὁπότε τό L ἐξάγεται εἰς HMM συντελ. αὐτεπαγωγῆς.

Ὁ ὑπολογισμός γίνεται στό MKSAr

Ἄν i_1 εἶναι ἡ ἀρχική καί i_2 ἡ τελική τιμή τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τότε:

$$B_1 = \mu\mu_o i_1 \frac{N}{l} \quad \text{καί} \quad B_2 = \mu\mu_o i_2 \frac{N}{l}$$

ἀπό ὅπου δι'ἀφαιρέσεως κατά μέλη

$$\Delta B = \mu\mu_o \frac{N}{l} \Delta i$$

Συνεπῶς $\Delta\Phi_{o\lambda} = \Delta B \cdot SN$

καί ἐπειδή

$$E_{\varepsilon\pi} = - \frac{\Delta\Phi_{o\lambda}}{\Delta t} \text{ ἕπεται ὅτι:}$$

$$E_{\varepsilon\pi} = - \frac{\mu\mu_o N^2 \cdot S}{l} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

ἤ $$E_{\varepsilon\pi} = - L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

μέ $$L = \frac{\mu\mu_o N^2 \cdot S}{l}$$

Ἐάν τό S μετρεῖται σέ m^2 καί τό l σέ m ἐνῶ τό $\mu_o = 4\pi\, 10^{-7}$ $V.s.A^{-1}m^{-1}$ τό L ἐξάγεται σέ Henrys.

$$1H = 10^9 \text{ HMM - συντ. αὐτεπαγωγῆς}$$

18.2.2. εἰσαγωγή ὑλικοῦ ἐντός τοῦ πεδίου

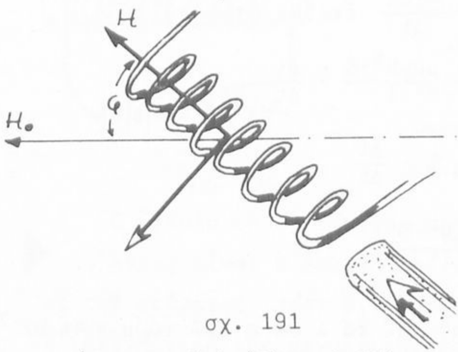
Εἰσαγωγή ἤ ἐξαγωγή ὑλικοῦ, σχετικῆς μαγνητικῆς διαπερατότητος μ, εἰς τό πεδίον προκαλεῖ μεταβολήν ΔΒ τοῦ "μεγέθους" τοῦ πεδίου καί συνεπῶς μεταβολήν ΔΦ τῆς μαγνητικῆς ροῆς.

Ὁ γενικός τύπος $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N$* ἰσχύει ἀνεπιφυλάκτως καί ἐδῶ.

Πηνίον φέρει N σπείρας διατομῆς S καί τοποθετεῖται μέ τόν ἄξονα του ὁριζόντιον ἐντός ὁριζοντίου μαγν. πεδίου ἐντάσεως H_0 Ὁ ἄξων τοῦ πηνίου σχηματίζει γωνίαν φ μέ τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. Πυρήν ὑλικοῦ μαγν. διαπερατότητος μ εἰσάγεται εἰς χρόνον Δt ἐντός τοῦ πηνίου.

Ποία ἡ ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς ἡ ἐμφανιζομένη εἰς τά ἄκρα τοῦ πηνίου.

Ἐφαρμογή διά: H_o = 120 Oe., Δt = 0,2 sec , φ = 60^o
S = 36 cm^2 , μ = 801.



σχ. 191

Λύσις εἰς ΗΜΣΜ

$\Delta\Phi = |\Phi - \Phi_0| = |BS - B_oS|$

$\Delta\Phi = |\mu HS - HS| = HS\,(\mu - 1)$ (1)

μέ $H = H_o$συνφ (2)

ἀλλά $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (3)

Ἐκ τῶν (1) (2) καί (3) προκύπτει:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{H_oS(\mu-1)\sigma\upsilon\nu\varphi}{\Delta t}$$

$$E_{\varepsilon\pi} = 8{,}64\cdot 10^5 \text{ HMM - τάσεως} = 8{,}64 \text{ mV}$$

---

* Ὁ τύπος $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot N$ γράφεται καί $E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi_{o\lambda}}{\Delta t}$
Ἀνεξαρτήτως τοῦ τρόπου γραφῆς τό σύμβολον $\Delta\Phi_{o\lambda}$ ἐκφράζει ὅπως καί τό ΔΦ.Ν τήν ὁλικήν μεταβολήν τῆς ροῆς.

ΠΙΝΑΞ 3. ΤΥΠΟΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

Αἰτιολογία τύπου	Τύποι ἀνεξάρτητοι συστήματος	Τύποι ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ συστήματος		Παρατηρήσεις
		ΗΜΣΜ	MKSAr	
Νόμος Biot-Savart		$\Delta B = \mu . i \frac{\Delta l}{r^2} \eta\mu\varphi$	$\Delta B = \frac{\mu\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{i\Delta l}{r^2} \eta\mu\varphi$	
Νόμος Coulomb		$F = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\mu\mu_o} \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$	σφαιρική συμμετρία
Σωληνοειδές		$H = 4\pi i \frac{N}{l}$	$H = i \frac{N}{l}$	
Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς B		$H = \frac{1}{\mu} B$	$H = \frac{1}{\mu\mu_o} B$	
Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου εἰς σημεῖον A αὐτοῦ	$H = \frac{F}{m}$			
Μαγνητική ροή	$\Phi = BS\sigma\upsilon\nu\varphi$			
Νόμος Laplace	$F = ilB\eta\mu\varphi$			
Ἀλληλεπίδρασις εὐθυγράμμων ρευματοφόρων ἀγωγῶν		$F = \frac{2i_1 i_2}{r} l$	$F = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2}{r} l$	Κυλινδρική συμμετρία
ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς	$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} N$			
ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς	$E_\alpha = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$			
Ἐνέργεια μαγν. πεδίου σωληνοειδοῦς	$W = \frac{1}{2} Li^2$			

* Τύποι τοῦ MKSAr ἀπορρέοντες ἐκ τοῦ νόμου Biot-Savart δίδουν τούς ἀντιστοίχους τοῦ ΗΜΣΜ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ μ_o μέ 4π.

** Τύποι τοῦ ΗΜΣΜ ἀπορρέοντες ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Biot-Savart περιέχοντες τό μ δίδουν τούς ἀντιστοίχους τοῦ MKSAr διά πολλαπλασιασμοῦ τοῦ μ μέ $\frac{\mu_o}{4\pi}$.

ΠΙΝΑΞ 4. ΜΕΓΕΘΗ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ
ΣΥΜΒΟΛΑ - ΜΟΝΑΔΕΣ - ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α/Α	ΜΕΓΕΘΗ	Σύμβολον	Τύπος ὁρισμοῦ		Μονάδες		Σχέσεις μονάδων	Διαστάσεις	
			ΗΜΣΜ	MKSAr	ΗΜΣΜ	MKSAr		ΗΜΣΜ	MKSAr
1	Ποσότης μαγνητισμοῦ	m	$F = \frac{1}{\mu}\frac{m_1 m_2}{r^2}$		1ΗΜΜ-ποσοτ. μαγνητισμοῦ				
2	Ἔντασις ρεύματος	I, i, ι	$H = \frac{2\pi}{R} i$	*	1ΗΜΜ-Εντ. ρεύματος	1 A	1A ⇒ 10^{-1} ΗΜΜ.ἔντ. ρεύματος	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	0, 0, 0, 1
3	Ἠλεκτρικόν φορτίον	Q, q	$Q = i \cdot t$	$Q = i \cdot t$	1ΗΜΜ-φ	1 Cb	1Cb ⇒ 10^{-1} ΗΜΜ-φ.	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$	0, 0, 1, 1
4	Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου	H	$H = \frac{F}{m}$	$H = i\,\frac{N}{l}$	1 Oe	$\frac{1\text{Αστρ}}{m}$	$1\,\frac{\text{Αστρ}}{m} \Rightarrow \frac{4\pi}{10^3}$ Oe	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	-1,0, 0, 1
5	Μαγνητική ἐπαγωγή	B	$B = \mu H$	F=Bilημφ	1 Gauss	$1\,\frac{\text{Weber}}{m^2}$ = 1Tesla	1 Tesla ⇒ 10^4 Gauss	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	0, 1,-2,-1
6	Ἠλεκτρική τάσις	U,V,E	$V = \frac{W}{q}$	$V = \frac{W}{q}$	1ΗΜΜ-Τασ.	1 V	1 V ⇒ 10^8ΗΜΜ-τάσεως	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -2$	2, 1,-3,-1
7	Ἠλεκτρική ἀντίστασις	R, r	$R = \frac{V}{i}$	$R = \frac{V}{i}$	1ΗΜΜ-ἀντισ.	1 Ω	1 Ω ⇒ 10^9ΗΜΜ-ἀντισ.	1, 0, -1	2, 1,-3,-2
8	μαγνητική ροή τοῦ $\vec{B}$	Φ	$\Phi = \mu HS$	$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$	1 Mx	1 Weber	1 Weber ⇒ 10^8MX	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1$	2, 1,-2,-1
9	Συντελεστής αὐτεπαγωγῆς	L	$E = -L\,\frac{\Delta i}{\Delta t}$	$E = -L\,\frac{\Delta i}{\Delta t}$	1ΗΜΜ-συντ. αὐτεπαγ.	1 H	1 H ⇒ 10^9 ΗΜΜ-συντ. αὐτεπαγ.	1, 0, 0	2, 1, -2,-2

* "Ampere, εἶναι ἡ ἔντασις ἀμεταβλήτου ρεύματος, διαρρέοντος δύο παραλλήλους ἀγωγούς, ἀπείρου μήκους καί ἀμελητέας διατομῆς, ἀπέχοντας κατά 1m, εἰς τό κενόν, τό ὁποῖον προκαλεῖ δύναμιν μεταξύ τῶν ἀγωγῶν τούτων ἴσην πρός 2×10^{-7} Nt ἀνά μέτρον μήκους".

δυναμική τοῦ ἠλεκτρονίου

19. γενικά

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον ἐξετάζεται ἡ συμπεριφορά ἑνός ἐλευθέρου ἠλεκτρονίου μέσα σέ διάφορα ἠλεκτρικά καί μαγνητικά πεδία. 'Επειδή ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου θεωρεῖται ἀμελητέα, εἰς τά ἑπόμενα, ἡ δρᾶσις τοῦ πεδίου βαρύτητος δέν λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν.

'Η κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου μελετᾶται:

α. ἐντός ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου

β. ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου.

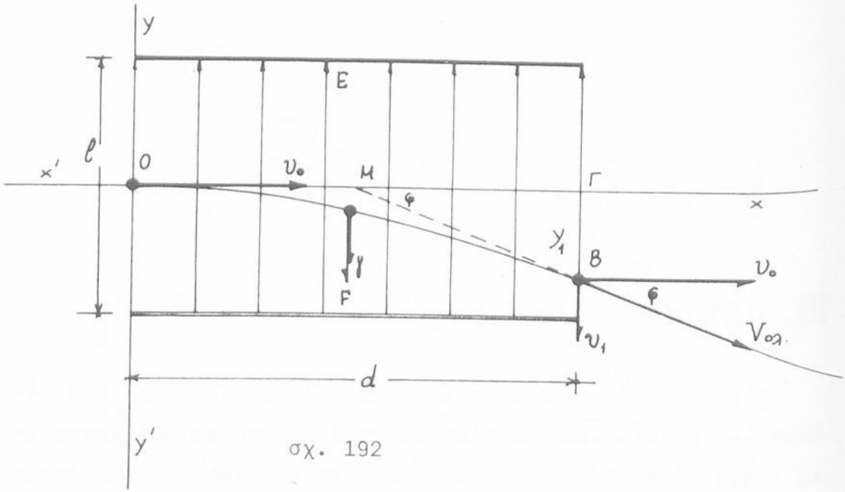
γ. ἐντός συνδεδιασμένου ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου.

Εἰς τά ἑπόμενα τό σύμβολον e παριστᾶ τό φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου ἐνῶ τό σύμβολον m παριστᾶ τήν μᾶζαν του.

'Η ἐπεξεργασία τῶν θεμάτων γίνεται στό ΗΜΣΜ καί θεωροῦμεν τό ἠλεκτρόνιον κινούμενον εἰς τό κενόν.

19.1 κίνησις e ἐντὸς ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου

★ Ἠλεκτρόνιον κινούμενον μέ ταχύτητα $υ_ο$ εἰσέρχεται ἐντός ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθέτως πρός τήν διεύθυνσίν του.



σχ. 192

Τό πεδίον ἀσκεῖ ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου δύναμιν, τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι $F = E \cdot e$ καί ἡ διεύθυνσις συμπίπτει μέ τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.

Ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τό ἠλεκτρόνιον ἐπιτάχυνσιν, συγγραμμικήν μέ τήν δύναμιν, τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι:

$$γ = \frac{Ee}{m}$$

Τό ἠλεκτρόνιον τώρα ἐκτελεῖ σύνθετον κίνησιν, ἡ ὁποία εἶναι σύνθεσις:

α. Μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῆς κατά τόν ἄξονα x μέ ταχύτητα $υ_ο$.

β. Μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης, χωρίς ἀρχικήν ταχύτητα κατά τόν ἄξονα Y, μέ σταθεράν ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{Ee}{m}$$

Διά τάς κινήσεις α καί β ἰσχύουν.

$$x = \upsilon_0 \cdot t \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (2)$$

Δι'ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου t μεταξύ τῶν (1) καί (2) προκύπτει:

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{Ee}{m}\,\frac{x^2}{\upsilon_0^2} \qquad (3)$$

'Η (3) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς '"παραβολικῆς"' τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου

Παρατηρήσεις:

α. 'Εκ τοῦ (3) διά x = d λαμβάνομεν:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot E\,\frac{d^2}{\upsilon_0^2}$$

β. Μετά τήν ἔξοδον ἐκ τοῦ πεδίου τό ἠλεκτρόνιον θά ἔχη κίνησιν ὁμαλήν εὐθύγραμμον μέ ταχύτητα $\upsilon_{0\lambda}$, ἥτις θά εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς υ_0 καί τῆς συνιστώσης υ_1, κατά τήν διεύθυνσιν Oy, τήν ὁποίαν ἀπέκτησε εἰς χρόνον t_1:

$$t_1 = \frac{d}{\upsilon_0}$$

μέχρις ὅτου ἐξέλθη ἐκ τοῦ πεδίου.

γ. Ἡ συνιστῶσα $υ_1$ εἶναι:

$$υ_1 = γt_1 = \frac{eEd}{mυ_o} \qquad (5)$$

δ. Ἡ γωνία ἐκτροπῆς δίδεται ἐκ τῆς:

$$εφφ = \frac{υ_1}{υ_o} = \frac{eEd}{mυ_o^2} \qquad (6)$$

ε. Ἐφ' ὅσον τό πεδίον εἶναι ὁμογενές ἰσχύει:

$$E = \frac{V}{l}$$

στ. Τό μέτρον τῆς $υ_{oλ}$ εἶναι:

$$υ_{oλ} = \sqrt{υ_0^2 + υ_1^2} \qquad (7)$$

ζ. Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι:

$$εφφ = \frac{y_1}{(MΓ)}$$

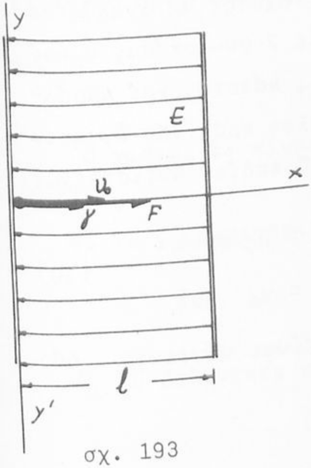
ἀλλά $εφφ = \dfrac{eEd}{mυ_0^2}$ καί $y_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}\cdot\dfrac{d^2}{υ_0^2}$

ἐξ αὐτῶν προκύπτει:

$$(MΓ) = \frac{d}{2} \qquad (8)$$

Ἤτοι: Ἡ ἐφαπτομένη τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τό σημεῖον ἐξόδου του ἐκ τοῦ πεδίου, προεκτεινομένη διέρχεται ἀπό τό μέσον Μ τῆς ΟΓ.

★ Ἠλεκτρόνιον μέ ταχύτητα $υ_o$ εἰσέρχεται ἐντός ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐντάσεως Ε καί κινεῖται παράλληλα πρός τάς δυναμικάς γραμμάς.



σχ. 193

Τό πεδίον ἀσκεῖ ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου τήν δύναμιν:

$$F = E.e$$

ἡ ὁποία τοῦ προσδίδει ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \pm \frac{e}{m}E$$

Συνεπῶς, ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου, ἐντός τοῦ πεδίου, εἶναι κίνησις εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη (ἐπιταχυνομένη ἤ ἐπιβραδυνομένη ἀνάλογα μέ τήν φοράν τοῦ πεδίου, ἐν σχέσει πρός τήν φοράν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος).

Συνεπῶς:

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ἤ

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\frac{e}{m}Et^2 \qquad (9)$$

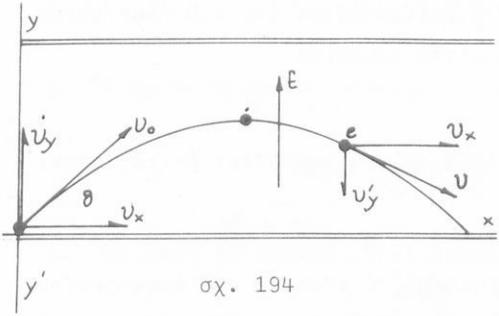
Παρατήρησις:

Ἐδόθη ἀνωτέρω ὅτι:

$$\gamma = \pm \frac{e}{m}E.$$

Τό πρόσημον (+) ἰσχύει διά τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ ὁπλισμοῦ. Τό (-) ἰσχύει διά τήν περίπτωσιν καθ'ἥν τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐκ τοῦ θετικοῦ ὁπλισμοῦ.

★ Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται εἰς τό ὁμογενές ἠλεκτρικόν πεδίον, μέ ταχύτητα $υ_0$ τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις σχηματίζει γωνίαν θ μέ τήν κάθετον πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου



σχ. 194

Ἡ ταχύτης $υ_0$ ἀναλύεται εἰς 2 συνιστώσας $υ_x$ καί $υ_y$, κάθετον καί παράλληλον πρός τήν ἔντασιν τοῦ πεδίου ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} υ_x &= υ_0 \ συνθ \\ υ_y &= υ_0 \ ημθ \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Συνεπῶς ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι σύνθεσις δύο κινήσεων.

α. μιᾶς ὁμαλῆς κατά τόν ἄξονα x

β. μιᾶς ἐπιβραδυνομένης, κατά τόν y

Διά τάς κινήσεις α καί β ἰσχύουν:

$$x = υ_0 t \ συνθ \qquad (11)$$

$$y = υ_0 t ημθ - \frac{1}{2} γt^2 \qquad (12)$$

$$μέ \ γ = \frac{eE}{m}$$

Ἐκ τῶν (11) καί (12) δι'ἀπαλοιφῆς τοῦ χρόνου λαμβάνεται:

$$y = x \ εφθ - \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{x^2}{υ_0^2 \cdot συν^2θ} \qquad (13)$$

Ἡ (13) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς "παραβολικῆς" τροχιᾶς.

Παρατηρήσεις:

α. Ἡ σχέσις (13) εἶναι τῆς ἰδίας μορφῆς μέ τήν ἐξίσωσιν τῆς τροχιᾶς βλήματος εἰς τήν πλαγίαν βολήν, χωρίς ἀντίστασιν ἀέρος.

β. Τό βέλος τῆς τροχιᾶς εὑρίσκεται ἐκ τῆς (12) διά $t_1 = \frac{m\upsilon_o}{eE}$ ημθ, ἴσον πρός:

$$y_\mu = \frac{m\upsilon_o^2}{2eE}\,\eta\mu^2\vartheta \tag{14}$$

'Ο χρόνος t_1 εἶναι ὁ χρόνος ἐντός τοῦ ὁποίου μηδενίζεται ἡ υ_y.

γ. Τό y_μ ἀντιστοιχεῖ εἰς x_μ :

$$x_\mu = \frac{m\upsilon_o^2}{eE}\,\eta\mu\vartheta\ \sigma\upsilon\nu\vartheta$$

δ. Τό βεληνεκές εἶναι $2x_\mu$:

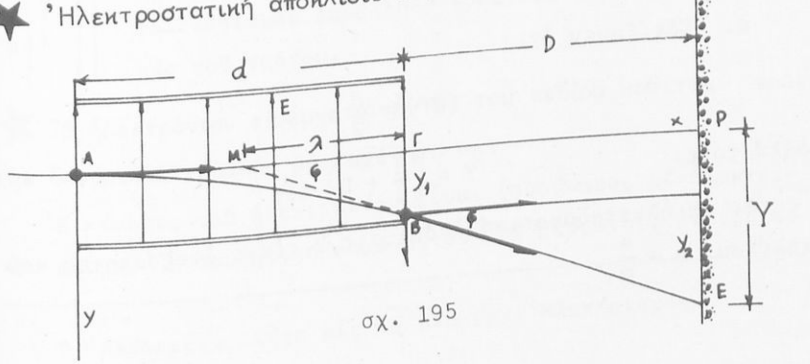
$$2x_\mu = \frac{m\upsilon_o^2}{eE}\,\eta\mu 2\vartheta \tag{15}$$

τό ὁποῖον γίνεται μέγιστον, διά σταθερά υ_o & E ὅταν $\vartheta = 45^o$.

ε. Διά μικράς ἀποκλίσεις ἀπό τήν γωνίαν τῶν 45^o δέν ἔχομεν οὐσιώδη ἐπίδρασιν ἐπί τοῦ μεγίστου βεληνεκοῦς.

Συνεπῶς ἠλεκτρόνια, τά ὁποῖα ἐκκινοῦν μέ γωνίας ἐλαφρῶς διαφερούσας τῶν 45^o "ἑστιάζουν" εἰς τό αὐτό βεληνεκές.

★ 'Ηλεκτροστατική ἀπόκλισις εἰς καθοδικόν σωλῆνα.



σχ. 195

Τό ἠλεκτρόνιον ἐπιταχυνόμενον εἰς τόν, μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου, χῶρον ἀποκτᾶ ταχύτητα $υ_o$, μέ τήν ὁποίαν εἰσέρχεται ἐντός τοῦ πεδίου καθέτως πρός τάς δυναμικάς γραμμάς αὐτοῦ.

Τό ἠλεκτρόνιον ἔχει ταχύτητα $υ_o$, τήν ὁποίαν ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ ἔργου πού παράγει τό πεδίον καθόδου καί ἀνόδου.

$$\frac{1}{2}\, mυ^2 = eV_0 \tag{16}$$

Ἡ V_0 εἶναι ἡ μεταξύ καθόδου καί ἀνόδου τάσις.

Εἴδαμεν ὅτι:

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\frac{eE\,d^2}{m\,υ_0^2}$$

καί
$$εφφ = \frac{eEd}{mυ_0^2}$$

Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι:

$$y_2 = Dεφφ = \frac{eEDd}{mυ_0^2} \tag{17}$$

Ἄρα
$$Y = y_1 + y_2$$

$$Y = \frac{1}{2}\,\frac{eEd}{mυ_0^2}\,(2D + d) \tag{18}$$

Παρατήρησις:

α. Ἐδείξαμεν ὅτι:

$$(MΓ) = \frac{d}{2}$$

ἀλλά τότε:
$$Y = \left(\frac{d}{2} + D\right) εφφ$$

β. Ἡ ἠλεκτροστατική ἀπόκλισις Y εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ πηλίκου, $η = \frac{e}{m}$.

19.2. κίνησις e ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου

'Ηλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου μέ ταχύτητα $υ_o$, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις σχηματίζει γωνίαν φ μέ τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου. 'Επί τοῦ ἠλεκτρονίου ἀσκεῖται τότε, δύναμις Laplace, τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι:

$$F_L = \mu H e υ_o \eta\mu\varphi \quad \text{εἰς τό ΗΜΣΜ} \qquad (1)$$

ἤ

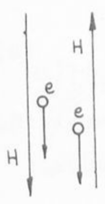
$$F_L = \mu\mu_o H e υ_o \eta\mu\varphi \quad \text{εἰς τό MKSAr*} \qquad (2)$$

★ **Τό ἠλεκτρόνιον εὑρίσκεται ἀκίνητον ἐντός τοῦ πεδίου.**

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν οὐδεμία δύναμις ἀσκεῖται, ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἰς τό ἠλεκτρόνιον. Τό ἠλεκτρόνιον παραμένει ἀκίνητον. Τοῦτο ἐξάγεται εἴτε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἴτε ἐκ τῶν (1) καί (2)

★ **Τό ἠλεκτρόνιον κινεῖται κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.**

Καί στήν περίπτωσιν αὐτήν δέν ἀσκεῖται, ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου, δύναμις ἀπό τό μαγνητικόν πεδίον. Τοῦτο ἀπορρέει εἴτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων διά φ = 0° ἤ φ = 180°, εἴτε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διευθύνσεως τοῦ πεδίου.



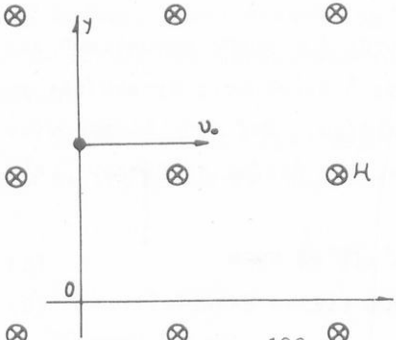
Συνεπῶς τό ἠλεκτρόνιον θά ἐξακολουθῇ νά κινῆται ἰσοταχῶς παράλληλα πρός τάς δυναμικάς γραμμάς τοῦ πεδίου.

★ **Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐντός τοῦ πεδίου καθέτως πρός τάς δυναμικάς γραμμάς μέ ταχύτητα $υ_o$.**

'Η κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἰσοδύναμος μέ ἠλεκτρικόν ρεῦμα. 'Η συμβατική φορά αὐτοῦ τοῦ ρεύματος, ἐπειδή τό

---

* 'Απόδειξιν βλέπε εἰς τό βιβλίον: 'Ηλεκτρισμός Γ. Πνευματικοῦ.



σχ. 196

φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἀρνητικόν, εἶναι ἀντίθετος πρός τήν φοράν κινήσεώς του. Ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου ἀσκεῖται ἡ μαγνητική δύναμις:

$$F_\mu = \mu . e . \upsilon_0 . H \qquad (3)$$

(μ = 1 διά τό κενόν ἤ τόν ἀέρα)

Ἡ δύναμις F_μ εἶναι διαρκῶς κάθετος πρός τήν ταχύτητα. Συνεπῶς:

α. Τό μέτρον τῆς ταχύτητος παραμένει σταθερόν.

β. Τό ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου παραμένει κάθετον πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.

γ. Μεταβάλλεται μόνον, ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τό ἐπίπεδον τῆς τροχιᾶς του.

δ. Τό ἠλεκτρόνιον **ἀποκτᾶ σταθεράν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν**, τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι:

$$\gamma_K = \frac{\upsilon_0^2}{R} \qquad (4)$$

Τό ἠλεκτρόνιον λοιπόν κινεῖται ὁμαλῶς ἐπί κυκλικῆς τροχιᾶς, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτίς R ὑπολογίζεται ὡς ἀκολούθως:

Μαγνητική δύναμις = Κεντρομόλος δύναμις

$$e\upsilon_0 H = m\frac{\upsilon_0^2}{R}$$

$$R = \frac{m\upsilon_0}{eH} \qquad (5)$$

Παρατηρήσεις

α. Ἡ γωνιακή ταχύτης περιστροφῆς εἶναι:

$$\omega = \frac{\upsilon_0}{R} = \frac{e}{m} \cdot H \qquad (6)$$

'Εκ τῆς (6) φαίνεται ὅτι διά τό ὁμογενές πεδίον εἶναι καί ω = σταθερά.

'Η γωνιακή ταχύτης ω καλεῖται "Συχνότης κύκλοτρον".

β. Σταθερά εἶναι ἐπίσης ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καί ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος, ἴση πρός:

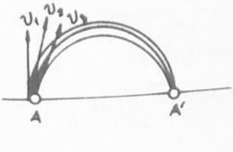
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eH} \qquad (7)$$

'Εξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι:

'Ηλεκτρόνια τά ὁποῖα ἐκπέμπονται συγχρόνως ὑπό πηγῆς μέ διαφόρους ταχύτητας ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τήν διεύθυνσιν ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐπανέρχονται συγχρόνως εἰς τήν πηγήν.

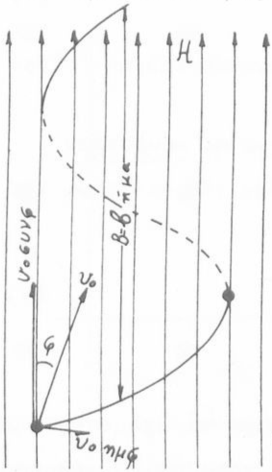
γ. 'Ομοιόμορφον μαγνητικόν πεδίον, παρουσιάζει δυνατότητα **ἑστιάσεως** δέσμης ἠλεκτρονίων.

Πράγματι ἠλεκτρόνια εἰσερχόμενα ἐντός πεδίου εἰς ἕν σημεῖον αὐτοῦ, μέ ταχύτητας τοῦ αὐτοῦ μέτρου ἀλλά μέ διευθύνσεις διαφερούσας κατά πολύ μικράς γωνίας συγκλίνουν εἰς τό αὐτό σημεῖον, ἀντιδιαμετρικόν τοῦ σημείου εἰσόδου.



★ **Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται εἰς τό πεδίον μέ ταχύτητα υ_0 τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις σχηματίζει τυχοῦσαν γωνίαν φ μέ τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.**

'Αναλύομεν τήν ταχύτητα υ_0 εἰς δύο συνιστῶσας, κάθετον καί παράλληλον πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.



σχ. 197

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_\kappa &= \upsilon_o \eta\mu\varphi \\ \upsilon_\pi &= \upsilon_o \sigma\upsilon\nu\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι:

α. Ἡ υ_κ προκαλεῖ μαγνητικήν δύναμιν

$$F_\mu = e\upsilon_o H\eta\mu\varphi$$

καί τό ἠλεκτρόνιον θά διαγράφη κυκλικήν τροχιάν ἀκτῖνος

$$R = \frac{m\upsilon_o \eta\mu\varphi}{eH}$$

ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου.

β. Ἡ συνιστῶσα $\upsilon_\pi = \upsilon_o\sigma\upsilon\nu\varphi$ παραμένει σταθερά, ἀφοῦ δέν ἀσκεῖται δύναμις, ἐκ τοῦ πεδίου κατά τήν διεύθυνσίν της, καί τό ἠλεκτρόνιον κινεῖται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς.

Ἡ σύνθεσις τῶν κινήσεων α καί β δίδει **ἑλικοειδή σταθεροῦ βήματος**.

Παρατηρήσεις

α. Τό βῆμα B τῆς ἕλικος εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο διαδοχικῶν σημείων αὐτῆς, ἐπί τῆς αὐτῆς γενετείρας.

Τό βῆμα B διανύεται μέ ταχύτητα υ_π σέ χρόνον μιᾶς περιόδου T.

$$B = \upsilon_\pi \cdot T = T\upsilon_o\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ἀλλά

$$T = \frac{2\pi R}{\upsilon_\kappa} = \frac{2\pi m}{eH}$$

ὅθεν

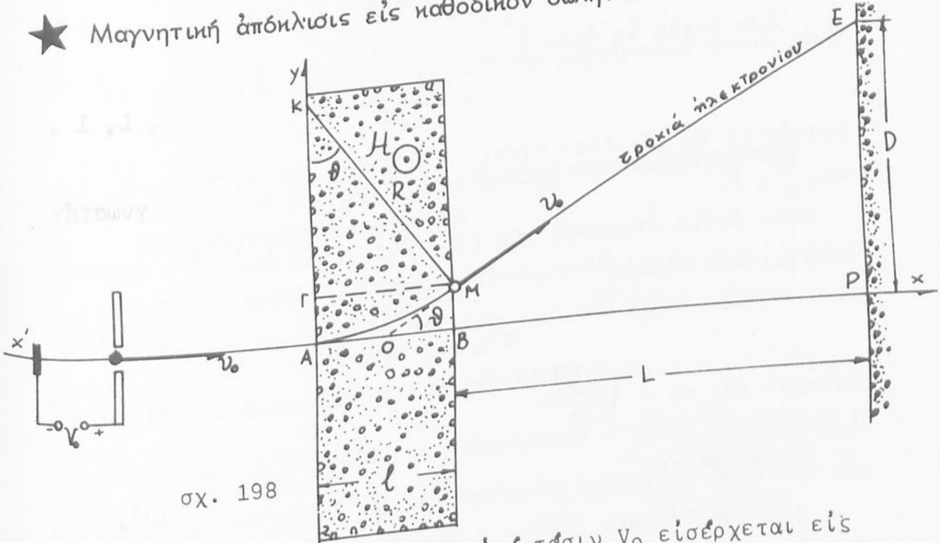
$$B = \frac{2\pi m}{eH}\upsilon_o \ \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (9)$$

β. Ἄν $\varphi \ll$ τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi \simeq 1$ καί ἄρα,

$$B = \frac{2\pi m}{eH}\upsilon_o$$

'Εξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι, ὅλα τά ἠλεκτρόνια τά ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τό πεδίον καί εἰς τό αὐτό σημεῖον Α, μέ τό αὐτό μέτρον ταχύτητος καί διευθύνσεις διαφερούσας κατά μικράς γωνίας, ἑστιάζουν εἰς τό αὐτό σημεῖον.

★ Μαγνητική ἀπόκλισις εἰς καθοδικόν σωλῆνα.



σχ. 198

Τό ἠλεκτρόνιον ἐπιταχυνθέν ὑπό τάσιν V_o εἰσέρχεται εἰς τό πεδίον, καθέτως πρός τάς δυναμικάς γραμμάς, μέ ταχύτητα υ_o.

'Εκ τῆς γεωμετρίας τοῦ σχήματος διακρίνεται ὅτι:

$$(OA) = (OM), \quad (KA) = (KM) = R$$

Τό ΚΑΟΜ ἐγγράψιμον, ἄρα $\sphericalangle$ ΑΚΜ = $\sphericalangle$ ΕΟΡ = $\sphericalangle\,\theta$ καί ἐκ τοῦ ΚΓΜ, ημθ $= \dfrac{l}{R}$.

Τριγωνομετρικῶς προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1}{\sqrt{R^2-l^2}}, \quad \varepsilon\varphi\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1}{l^2}-1} - \sqrt{\frac{R^2}{l^2}-1}, \; \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\sqrt{R^2-l^2}}{R}$$

Εἶναι ὅμως: $(OP) = L + l - (AO) = L + l - R\varepsilon\varphi\frac{\vartheta}{2}$

ἀλλά $\quad \varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{D}{(OP)}$

ἄρα: $$D = (OP)\,\varepsilon\varphi\vartheta = \left(L + l - R\,\varepsilon\varphi\,\frac{\vartheta}{2}\right)\varepsilon\varphi\vartheta \qquad (10)$$

'Εάν ληφθῇ ὑπ'ὄψιν ὅτι:

$$R = \frac{m\upsilon_0}{eH}$$

προκύπτει ἐκ τῆς (10) σχέσις συνδέουσα τά μεγέθη D, L, l, υ_0, $\frac{e}{m}$, H.

Μίαν ἀκόμη ἔκφρασιν τῆς (10) ἔχομεν ἄν ἀπό τήν γνωστήν ἐνεργειακήν σχέσιν

$$eV_0 = \frac{1}{2}\,m\upsilon_0^2$$

λάβωμεν τό $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2eV_0}{m}}$

Παρατηρήσεις:

α. 'Εάν θέσωμεν $(OP) = d$ προκύπτει, ἀντί τῆς (10), ἡ ἔκφρασις:

$$D = \frac{dl\eta H}{\sqrt{2\eta V_0 - l^2H^2}} \qquad (11)$$

μέ $\eta = \dfrac{e}{m}$

β. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τό $\eta\mu\vartheta = \dfrac{l}{R}$ εἶναι πολύ μικρόν, τότε $\eta\mu\vartheta \simeq \vartheta$ σέ rad, καί ἡ (10) δίδει:

$$D = d\;\varepsilon\varphi\vartheta = d\;\frac{l}{\sqrt{R^2-l^2}} \simeq d\cdot\frac{l}{R}$$

$$ή \qquad D = \frac{dlnH}{\upsilon_0}$$

καί τελικῶς:

$$D = \frac{dl\eta H}{\sqrt{2\eta V_0}} \qquad (12)$$

γ. 'Εκ τῆς (12) προκύπτει:

$$\frac{D}{H} = \sqrt{\frac{\eta}{2V_0}} \cdot dl$$

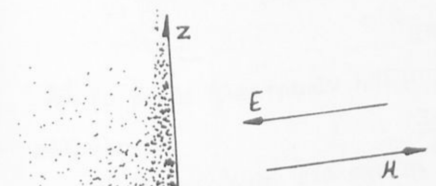
Τό πηλῖκον $\frac{D}{H}$ καλεῖται "εὐαισθησία μαγνητικῆς ἀποκλίσεως".

19.3. κίνησις e ἐντὸς συνδεδιασμένου ἠλεκτρικοῦ καὶ μαγνητικοῦ πεδίου

Τό παρόν πρόβλημα, ἀναμφιβόλως, πολύπλοκον εἰς στοιχειώδη ἀντιμετώπισιν, ἐξετάζεται εἰς τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

19·3.1. πεδία ὁμογενῆ καὶ παράλληλα

★ Τά πεδία - ἠλεκτρικόν καί μαγνητικόν - εἶναι παράλληλα. Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται εἰς τόν πεδιακόν χῶρον μέ ταχύτητα υ_0, κατά τήν διεύθυνσιν τῶν πεδίων.



σχ. 199

'Εξ ὅσων ἀνεφέρθησαν εἰς τά προηγούμενα, συμπεραίνομεν ὅτι:

α. Τό ἠλεκτρικόν πεδίον ἐπιταχύνει τήν εὐθύγραμμον κίνησιν τοῦ ἠλεκτρονίου. 'Η ἐπιτάχυνσις ἴση πρός:

$$\gamma = \frac{eE}{m}$$

εἶναι σταθερά δι'ὁμογενές ἠλεκτρικόν πεδίον.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως $S = f(t)$ εἶναι:

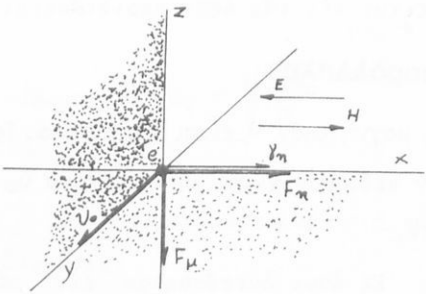
$$S = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\frac{eE}{m} t^2 \qquad (1)$$

β. Τό μαγνητικόν πεδίον οὐδόλως ἐπιδρᾶ ἐπί τῆς κινήσεως.

Παρατήρησις:

Ἐάν ἡ ταχύτης υ_o καί ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου E ἔχουν τήν αὐτήν φοράν ἡ κίνησις, θά εἶναι ἐπιβραδυνομένη.

Τά πεδία - ἠλεκτρικόν καί μαγνητικόν - εἶναι παράλληλα. Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται εἰς τόν πεδιακόν χῶρον μέ ταχύτητα υ_o, καθέτως πρός τήν διεύθυνσιν τῶν πεδίων.



σχ. 200

Εὔκολα συμπεραίνομεν ὅτι:

α) Τό ἠλεκτρικόν πεδίον ἀσκεῖ κατά τήν διεύθυνσίν του, ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου δύναμιν:

$$F_\eta = eE$$

ἥτις προσδίδει ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma_\eta = \frac{eE}{m}$$

ἥτις εἶναι σταθερά δι'ὁμογενές ἠλεκτρικόν πεδίον.

Συνεπῶς τό ἠλεκτρόνιον μετέχει εὐθυγράμμου, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Ἡ ἐξίσωσις, $S = f(t)$, τῆς κινήσεως εἶναι:

$$x = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \tag{2}$$

β. Τό μαγνητικόν πεδίον ἀσκεῖ ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου δύναμιν:

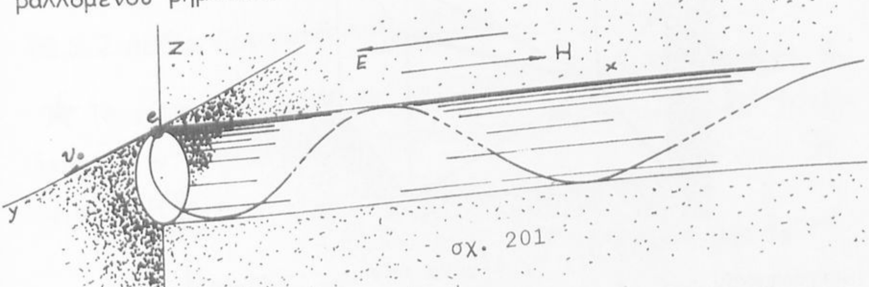
$$F_{\mu} = e\upsilon_o H$$

ἥτις προσδίδει κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν, σταθεράν δι' ὁμογενές πεδίον:

$$\gamma_{\kappa} = \frac{\upsilon_o^2}{R} \quad \mu\acute{\varepsilon} \quad R = \frac{m\upsilon_o}{eH}$$

καί τό ἠλεκτρόνιον θά γράφῃ κυκλικήν τροχιάν.

γ. Τελικῶς, ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου θά εἶναι σύνθεσις τῶν κινήσεων α καί β. Δηλαδή τό ἠλεκτρόνιον διαγράφει **ἕλικα, ἑλισσομένη ἐπί κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἀκτίνος R, μεταβαλλομένου βήματος.**



σχ. 201

★ **Τά πεδία ἠλεκτρικόν καί μαγνητικόν εἶναι ὁμογενῆ καί παράλληλα.**

Τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται εἰς τόν πεδιακόν χῶρον μέ ταχύτητα υ_o, τυχούσης διευθύνσεως.

Ἡ υ_o περιέχει τάς συνιστώσας υ_x, υ_y, υ_z.

Ἐκ τοῦ σχήματος 202 προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}_o = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y + \vec{\upsilon}_z$$

$$\vec{\upsilon}_{xy} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y \qquad (3)$$

$$\vec{\upsilon}_{yz} = \vec{\upsilon}_y + \vec{\upsilon}_z$$

$$\vec{\upsilon}_{zx} = \vec{\upsilon}_z + \vec{\upsilon}_x$$

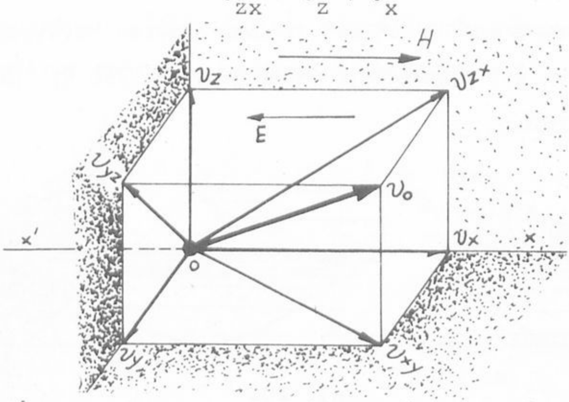
ἤ ἀναλυτικῶς:

$$\upsilon_o^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$$

$$\upsilon_{xy}^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \qquad (4)$$

$$\upsilon_{yz}^2 = \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$$

$$\upsilon_{zx}^2 = \upsilon_z^2 + \upsilon_x^2$$



σχ. 202

Αἱ συνιστῶσαι υ_z, υ_y δίδουν τήν υ_{zy} κάθετον πρός τό μαγνητικόν καί τό ἠλεκτρικόν πεδίον.

Εὔκολα συμπεραίνομεν ὅτι:

α. Τό ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται κατά τόν ἄξον x'ox ὑπό τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

Τό μέτρον τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι:

$$\gamma_x = \frac{eE}{m} \qquad (5)$$

καί ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$x = \upsilon_x t + \frac{1}{2}\,\frac{eE}{m}\,t^2 \qquad (6)$$

β. Τό ἠλεκτρόνιον ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς μαγνητικῆς δυνάμεως,

$$F_\mu = e.\upsilon yz.H \qquad (7)$$

ἐκτελεῖ κυκλικήν κίνησιν ἀκτῖνος

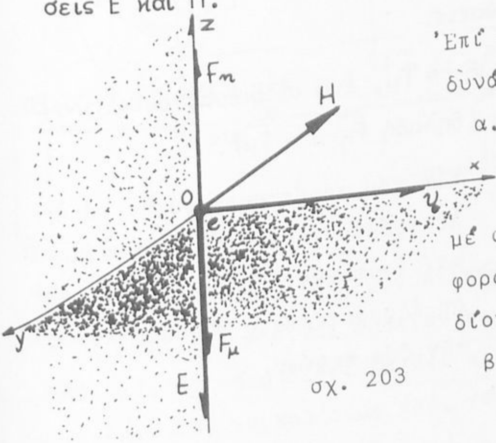
$$R = \frac{m\sqrt{\upsilon_y^2 + \upsilon_x^2}}{eH} \qquad (8)$$

γ. Ἡ σύνθεσις τῶν δύο ἀνωτέρω κινήσεων, εἶναι **ἑλικοειδής μεταβαλλομένου βήματος.**

Ἡ προβολή τῆς τροχιᾶς ἐπί τό ἐπίπεδον yOz εἶναι περιφέρεια ἀκτῖνος R.

19.3.2 πεδία ὁμογενῆ καί κάθετα

★ **Τά πεδία ἠλεκτρικόν καί μαγνητικόν εἶναι κάθετα καί τό ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται μέ ταχύτητα υ_0 καθέτως πρός τάς ἐντάσεις Ε καί Η.**



σχ. 203

Ἐπί τοῦ ἠλεκτρονίου ἀσκοῦνται δυνάμεις:

α. ἐκ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου

$$F_\eta = eE \qquad (1)$$

μέ φοράν ἀντίθετον πρός τήν φοράν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλ.πεδίου.

β. ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου

$$F_\mu = e\upsilon_o H \qquad (2)$$

Ἡ F_μ εἶναι διαρκῶς κάθετος πρός τήν ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου.

Εἰς τήν θέσιν Ο αἱ Fη καί Fμ ἔχουν τήν αὐτήν ἤ ἀντίθετον φοράν, ἀναλόγως τῆς σχετικῆς φορᾶς τῶν Η καί Ε.

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου, ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῶν Fη καί Fμ θά εἶναι σύνθεσις:

α. Ἐπιπέδου κινήσεως, παραβολικῆς τροχιᾶς, λόγῳ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τῆς μορφῆς

$$z = \frac{1}{2}\ \frac{eE}{m\upsilon_o^2}\cdot x^2 \qquad (3)$$

β. Κυκλικῆς κινήσεως ἀκτῖνος R:

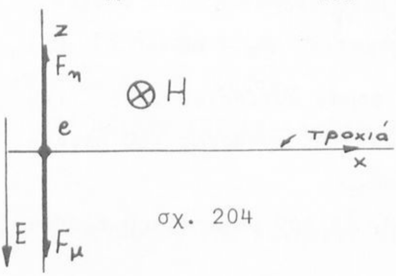
$$R = \frac{m\upsilon_o}{eH} \qquad (4)$$

λόγω τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἡ σύνθεσις τῶν κινήσεων α καί β δίδει, ἐν γένει πολύπλοκον ἐπίπεδον κίνησιν, τῆς ὁποίας ἡ στοιχειώδης ἀντιμετώπισις δέν εἶναι πάντοτε δυνατή.

Διακρίνω τάς ὑποπεριπτώσεις.

Ἄν $\upsilon_o = \frac{E}{H}$, δηλαδή ἄν Fη = Fμ, ἐνῷ αἱ διευθύνσεις τῶν Ε καί Η ἔχουν ὡς εἰς τό σχῆμα (δηλαδή $\vec{F_\eta} = -\vec{F_\mu}$).



σχ. 204

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό ἠλεκτρόνιον κινεῖται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς, διότι ἔχομεν πλήρη ἐξουδετέρωσιν τῶν ἀποκλίσεων τῶν δύο πεδίων.

■ "Αν $υ_ο < \frac{E}{H}$ δηλαδή ἄν $F_μ < F_η$:

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ἀφοῦ $F_η > F_μ$, ἡ τροχιά καμπυλοῦται ἀρχικῶς πρός τά ἄνω.

'Η μαγνητική δύναμις $F_μ$ εἶναι κάθετος ἐπί τήν τροχιάν, καί ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

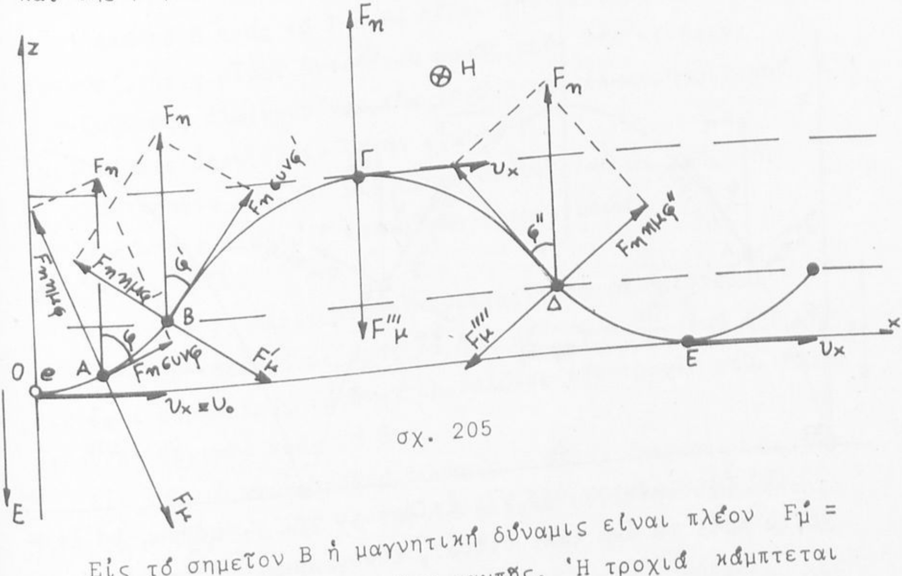
'Η $F_η$ περιέχει ἐπιτρόχιον,

$$F_η \cdot συνφ \tag{5}$$

καί κεντρομόλον, συνιστῶσα,

$$F_η \cdot ημφ \tag{6}$$

"Αρα ἔχομεν αὔξησιν τῆς γραμμικῆς ταχύτητος συνεπῶς καί τῆς μαγνητικῆς δυνάμεως $F_μ$.



σχ. 205

Εἰς τό σημεῖον Β ἡ μαγνητική δύναμις εἶναι πλέον $F'_μ$ = $F_η$ ημφ'. Τό Β εἶναι σημεῖον καμπῆς. 'Η τροχιά κάμπτεται ἤδη πρός τά κάτω διότι ἰσχύει πλέον $F''_μ > F_η$ ημφ'.

Λόγω τῆς καμπυλώσεως πρός τά κάτω ἐλαττοῦται ἡ ἐπιτρόχιος συνιστῶσα τῆς Fη, ἄρα καί ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου,ὁπότε ἐλαττοῦται καί ἡ μαγνητική δύναμις.

Οὕτω εἰς τό Γ ἡ ταχύτης λαμβάνει πάλιν τήν τιμήν $υ_0$ ἀλλά ἡ $F'''μ$ ἐξακολουθεῖ νά εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Fη.

Εἰς τό Γ ἔχομεν ἕνα "μέγιστον".

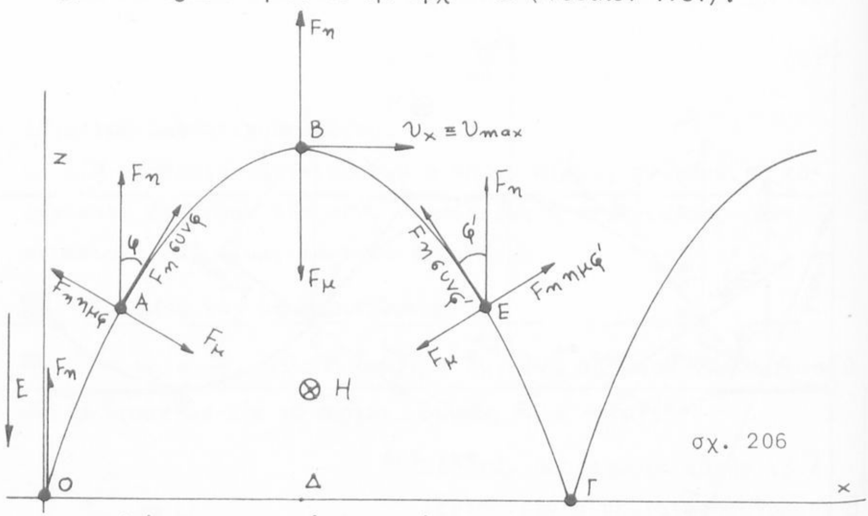
Ἀπό τό Γ πρός τό Δ ἡ ἐπιτρόχιος συνιστῶσα τῆς Fη ἀλλάσσει φορ ἀν, ὁπότε ἐλαττοῦται καί ἡ μαγνητική δύναμις.

Εἰς τό Δ ἰσχύει: $F_μ'''' = F_η\ ημφ''$. Τό Δ εἶναι σημεῖον καμπῆς.

Ἀπό τό Δ πρός τό Ε, ἡ Fμ ἐλαττουμένη ἀποκτᾶ εἰς τό Ε τήν τιμήν τήν ὁποίαν εἶχεν εἰς τό Ο.

Ἡ κίνησις ἐπαναλαμβάνεται ὁμοίως.

■ Ἄν $υ_0$ = Ο ἤτοι ἄν Fμ-αρχ = Ο (Φυσικόν 1961).



σχ. 206

Τό ἠλεκτρόνιον ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς Fη μόνον, θά ἐκινεῖτο πρός τά ἄνω (βλ. σχῆμα), εὐθυγράμμως μέ ἐπιτάχυνσιν:

$$γ = \frac{eE}{m}$$

Μέ τήν ἔναρξιν, ὅμως, τῆς κινήσεως ἐμφανίζεται μαγνητική δύναμις ἡ ὁποία καμπυλώνει τήν τροχιάν του πρός τά δεξιά.

Εἰς τό σημεῖον Α ἡ F_η δίδει τήν ἐπιτρόχιον συνιστῶσα F_ησυνφ καί τήν κεντρομόλον F_η ημφ.

'Η F_μ εἶναι διαρκῶς κάθετος πρός τήν τροχιάν.

'Από τό Ο πρός τό Β ἡ ἐπιτρόχιος συνιστῶσα F_ησυνφ ἐλαττοῦται συνεχῶς, ἐνῶ αὐξάνει τό μέτρον τῆς γραμμικῆς ταχύτητος μέ ἀποτέλεσμα τήν αὔξησιν τῆς δυνάμεως Laplace F_μ.

Συνεπῶς ἡ τροχιά καμπυλοῦται. Εἰς τό Β ἐμφανίζεται "ἕνα μέγιστον". Εἰς τό Β ἡ ταχύτης λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμήν υ_{max} ἐνῷ ἡ κεντρομόλος δύναμις

$$F_\kappa = F_\mu - F_\eta$$

γίνεται μεγίστη καί ἡ στιγμιαία ἀκτίς καμπυλότητος ἐλαχίστη.

'Από τό Β πρός τό Γ ἡ F_η δίδει τήν ἐπιτρόχιον συνιστῶσα F_ησυνφ΄, ἥτις εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς πρός τήν κίνησιν.

Συνεπῶς, ἐλαττουμένης τῆς ταχύτητος, ἐλαττοῦται καί ἡ F_μ, μέχρις ὅτου μηδενίζεται εἰς τό Γ.

Τά τμήματα ΟΑΒ καί ΒΕΓ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ΒΔ.

'Η κίνησις ἀπό τό Γ ἐπαναλαμβάνεται ὁμοίως.

■ Ἄν $\upsilon_0 < 0$

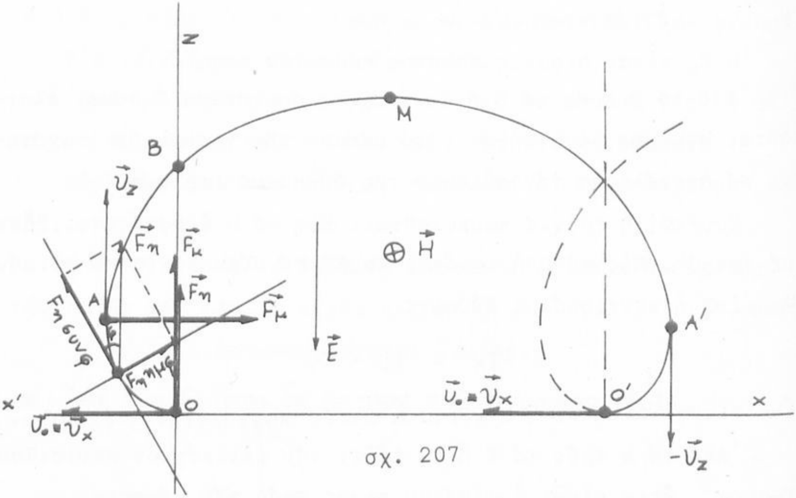
Εἰς τό Ο τό ἠλεκτρόνιον κινεῖται πρός τά ἀριστερά.

'Η F_η τό ἐπιταχύνει πρός τά ἄνω μέ $\gamma = \frac{eE}{m}$ ἐνῷ ἡ F_μ, ἥτις ἔχει φοράν πρός τά ἄνω, καμπυλώνει τήν τροχιά τοῦ ἠλεκτρονίου ἀρχικῶς πρός τά ἄνω.

Εἰς τό Ο ἡ κεντρομόλος δύναμις ἔχει μεγίστην τιμήν: $F_\kappa = F_\eta + F_\mu$, ἄρα καί ἡ τροχιά ἀποκτᾶ μεγίστην καμπυλότητα (R ἐλαχίστη).

'Από τό Ο πρός τό Α ἡ ταχύτης αὐξάνει διότι αὐξάνει καί ἡ ἐπιτρόχιος συνιστῶσα F_ησυνφ. Εἰς τό Α ἡ F_μ γίνεται ὁριζοντία ἐνῷ ἡ ταχύτης δέν ἔχει συνιστῶσα κατά τόν x'ox.

Τό τόξον ΑΜΑ' εἶναι ὅμοιον πρός τό τόξον ΟΒΓ τῆς προηγουμένης περιπτώσεως, σχ. 206 , ἀλλά μετατοπισμένον



σχ. 207

πρός τά ἄνω, λόγω τῆς ταχύτητος $υ_Z$. Εἰς τό Α' ἡ ταχύτης λαμβάνει τιμήν $- υ_Z$ καί διαγράφεται πλέον τό τόξον Α'Ο' ἴσον καί συμμετρικόν τοῦ τόξου ΟΑ.

Εἰς τό Ο' ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι πάλιν $υ_o$ καί τό ἠλεκτρόνιον ἐπαναλαμβάνει τήν ἰδίαν τροχιάν.

ἐναλλασσόμενα ρεύματα

20. κυκλώματα ἐναλλασσομένου

20.1. βασικαί ἔννοιαι

● 'Εναλλασσομένη τάσις, καλεῖται, κάθε διαφορά δυναμικοῦ,τῆς ὁποίας τό μέγεθος καί ἡ φορά μεταβάλλονται περιοδικῶς συναρτήσει τοῦ χρόνου.

● 'Εναλλασσόμενον ρεῦμα, καλεῖται, τό ρεῦμα πού ὀφείλεται εἰς ἐναλλασσομένην τάσιν.

'Η ἔντασις τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, καλεῖται, ἐναλλασσομένη ἔντασις.

● Διαφορά φάσεως. 'Η διαφορά φάσεως μεταξύ δύο ἐναλλασσομένων μεγεθῶν ἐκφράζει τήν καθυστέρησιν τοῦ ἑνός ὡς πρός τό ἄλλο. Μέ ἄλλα λόγια, ἐκφράζει τόν χρόνον, σέ κλάσμα τῆς περιόδου, πού μεσολαβεῖ μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν, εἰς τάς ὁποίας τά δύο μεγέθη λαμβάνουν τήν αὐτήν χαρακτηριστικήν τιμήν καί κατά τήν αὐτήν φοράν, (π.χ. τήν μεγίστην θετικήν).

Μετρεῖται ὡς γωνία ἀπό 0° ἕως 360°, ἤ ἀπό μηδέν ἕως 2π ἀκτίνια.

Σέ χρόνον μιᾶς περιόδου ἀντιστοιχεῖ γωνία 2π ἀκτινίων.

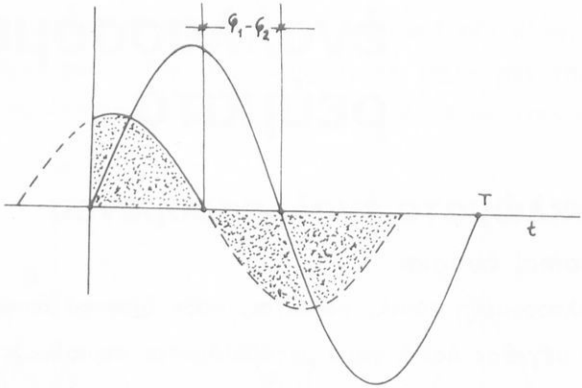
● Ἔστω δύο ἐναλλασσόμενα μεγέθη:

$$A = A_o \eta\mu(\omega t + \varphi_1)$$

$$B = B_o \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

ἡ διαφορά φάσεως μεταξύ αὐτῶν εἶναι:

$$(\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$



● 'Ενεργός ἔντασις, ἑνός ἐναλλασσομένου ρεύματος, καλεῖται, ἡ ἔντασις ἑνός ὑποθετικοῦ συνεχοῦς ,τό ὁποῖον ἀποδίδει τό αὐτό ποσόν θερμότητος, διαρρέον τήν αὐτήν ἀντίστασιν, εἰς τόν αὐτόν χρόνον μέ τό ἐναλλασσόμενον.

● 'Ενεργός τάσις, καλεῖται, ἡ ὑποθετική συνεχής τάσις, ἡ ὁποία παρέχει ρεῦμα ἐνεργοῦ ἐντάσεως.

● 'Αντιστάσεις εἰς τό ἐναλλασσόμενον ρεῦμα.

α. ΩΜΙΚΗ

Σύμβολον

'Ισοῦται μέ $R = \rho \frac{l}{S}$ καί ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὑλικόν, τά γεωμετρικά στοιχεῖα τοῦ ἀγωγοῦ, καί τήν θερμοκρασίαν του.

β. ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ

Σύμβολον

'Ισοῦται μέ $R_L = \omega L$ καί ἐξαρτᾶται ἀπό τάς αὐτεπαγωγάς τοῦ κυκλώματος καί τήν συχνότητα τῆς ἐναλλασσομένης τάσεως.

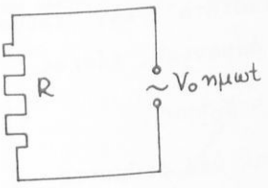
γ. ΧΩΡΗΤΙΚΗ

Σύμβολον

'Ισοῦται μέ $R_C = \frac{1}{C\omega}$ καί ἐξαρτᾶται ἀπό τάς χωρητικότητας τοῦ κυκλώματος καί τήν συχνότητα τῆς ἐναλλασσομένης τάσεως

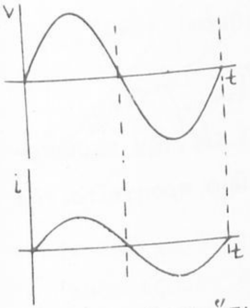
Τά στοιχεῖα R, L, C εἰς τό ἐναλλασσόμενον ρεῦμα.

α. Ἡ ὠμική ἀντίστασις R.



Ἐφ᾽ ὅσον τό κύκλωμα περιέχει, καθαρῶς, ὠμικήν ἀντίστασιν R καί τροφοδοτεῖται ὑπό ἁρμονικῆς τάσεως,

$$V = V_0 ημωt$$



θά διαρρέεται ὑπό ρεύματος:

$$I = I_0 ημωt,$$

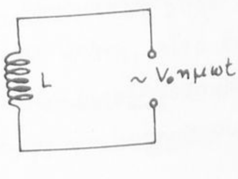
μέ

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, ρεῦμα καί τάσις εὑρίσκονται ἐν φάσει.

β. Ἡ ἐπαγωγική ἀντίστασις R_L

Ἐφ᾽ ὅσον τό κύκλωμα περιέχει, μόνον, αὐτεπαγωγήν L καί τροφοδοτεῖται ὑπό ἁρμονικῆς τάσεως



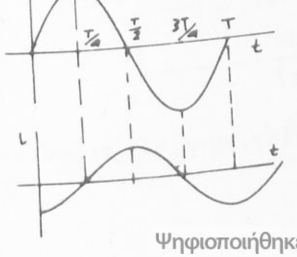
$$V = V_0 ημωt,$$

θά διαρρέεται ὑπό ρεύματος:

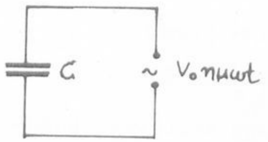
$$I = I_0 ημ(ωt - 90)$$

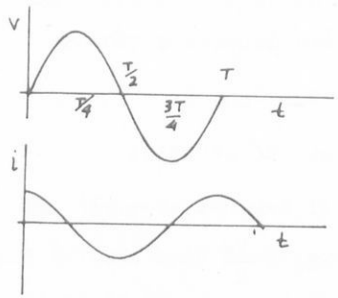
μέ

$$I_0 = \frac{V_0}{ωL}$$



Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, τό ρεῦμα ὑστερεῖ τῆς τάσεως κατά 90°





Ἡ χωρητική ἀντίστασις RC.

Ἐφ'ὅσον τό κύκλωμα περιέχει, μόνον, χωρητικότητα C καί τροφοδοτεῖται ὑπό ἁρμονικῆς τάσεως

$$V = V_o \eta\mu\omega t,$$

θά διαρρέεται ὑπό ρεύματος

$$I = I_o \eta\mu(\omega t + 90)$$

μέ $\quad I_o = V_o \cdot C\omega.$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, τό ρεῦμα προηγεῖται τῆς τάσεως κατά 90^o.

21. μέθοδοι

21.1. γεωμετρική μέθοδος

Βάσις τῆς μεθόδου εἶναι ἡ δυνατότης παραστάσεως τῶν ἐναλλασσομένων μεγεθῶν, διά στρεφομένων διανυσμάτων (δεικτῶν).

Τό μέτρον τοῦ δείκτου λαμβάνεται ἴσον πρός τό πλάτος τοῦ ἐναλλασσομένου μεγέθους.

Οἱ δεῖκται στρέφονται περί σταθερόν σημεῖον ἐφαρμογῆς O τό ὁποῖον λαμβάνεται ὡς ἀρχή ὀρθογωνίου συστήματος συντεταγμένων xoy.

Ἔστω,ἐπί παραδείγματι, δύο ἐναλλασσόμενα μεγέθη

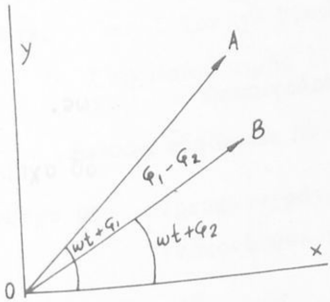
$$A = A_o\ \eta\mu(\omega t + \varphi_1)$$
$$B = B_o\ \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$$

Τά δύο μεγέθη A καί B ἔχουν τήν αὐτήν κυκλικήν συχνότητα ω καί διαφοράν φάσεως, $\varphi_1 - \varphi_2$

ἥτις παραμένει σταθερά.

'Εάν τά μεγέθη Α καί Β παρασταθοῦν διά δεικτῶν, ἡ σχετική θέσις αὐτῶν καθορίζεται τελείως διά τῆς γωνίας

$$\varphi_1 - \varphi_2$$



Δυνάμεθα, τότε, νά λάβωμεν τό ἕνα διάνυσμα ἐπί τοῦ ἄξονος x'Ox. (Σχῆμα)

Τό διάνυσμα αὐτό θά καλῆται στό ἑξῆς, **διάνυσμα ἀναφορᾶς.**

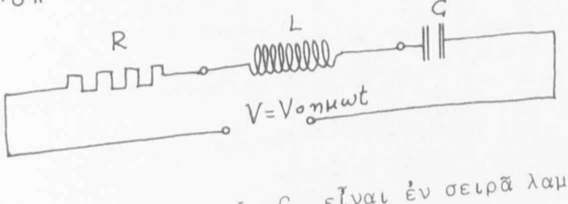
Ὥστε:

'Επιλέγομεν τό διάνυσμα ἀναφορᾶς καί χαράσσομεν τό ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων xOy.

Καθορίζομεν τάς διαφοράς φάσεως μεταξύ τῶν ἀναφερομένων μεγεθῶν καί τοῦ διανύσματος ἀναφορᾶς. Σχεδιάζομεν τούς δείκτας, ὑπό κατάλληλον κλίμακα. Προσδιορίζομεν, ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ σχήματος, ἄγνωστα στοιχεῖα ἐνῷ ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm, ὑπολογίζομεν τά ὑπόλοιπα.

Ἔχομεν πάντοτε ὑπ'ὄψιν, ὅτι ὁ νόμος τοῦ Ohm ἰσχύει εἴτε διά τά πλάτη, εἴτε διά τάς ἐνεργούς τιμάς.

Νά ἐπιλυθῇ κύκλωμα R, L, C ἐν σειρᾷ, τροφοδοτούμενον ὑπό τῆς $V = V_0 \eta\mu\omega t$



σχ. 213

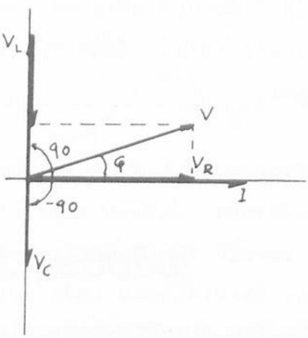
'Εφ' ὅσον τά στοιχεῖα R, L, C, εἶναι ἐν σειρᾷ λαμβάνομεν ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς, τό διάνυσμα πού παριστᾶ τό κοινόν ρεῦμα.

'Ακολούθως σχεδιάζομεν τά διανύσματα τῶν μερικῶν τάσεων V_R, V_L, V_C, ἐπί συστήματος συντεταγμένων xoy.

'Εκ τῆς προηγηθείσης θεωρίας, προκύπτουν ἀμέσως αἱ διαφοραί φάσεως, μεταξύ V_R καί I, μεταξύ V_L καί I καί μεταξύ V_C καί I.

'Υπολογισμοί:

α. Διαφορᾶς φάσεως.



'Εκ τῆς γεωμετρίας τοῦ σχήματος λαμβάνομεν:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R}$$

ἀλλά: $V_L = I\cdot\omega L$

$$V_C = I\cdot\frac{1}{C\omega}$$

$$V_R = I\cdot R$$

ἄρα $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R} \qquad (1)$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τάσις προηγεῖται τῆς ἐντάσεως.

β. Συνθέτου ἀντιστάσεως.

'Εκ τοῦ σχήματος εἶναι:

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

ἀλλά
$$V = IZ_o$$
$$V_R = IR$$
$$V_L = I\cdot\omega L$$
$$V_C = I\cdot\frac{1}{C\omega}$$

ἄρα $$Z_o = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

γ. πλάτους ἐντάσεως

Νόμος Ohm: $\text{πλάτος ἐντάσεως} = \dfrac{\text{πλάτος τάσεως}}{\text{Σύνθετος ἀντίστασις}}$

$$I_o = \frac{V_o}{Z_o} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{C\omega})^2}} \qquad (3)$$

δ. Στιγμιαίας τιμῆς ἐντάσεως

$$I = I_o \, \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

$$\text{ἤ} \qquad I = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{C\omega})^2}} \, \eta\mu(\omega t - \varphi) \qquad (4)$$

ε. Ἐνεργῶν τιμῶν

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \quad \text{καί} \quad V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

στ. Πλατῶν τάσεων

$$V_{oR} = I_o \cdot R$$

$$V_{oL} = I_o \omega L \qquad (6)$$

$$V_{oC} = I_o \frac{1}{C\omega}$$

ζ. Στιγμιαίων τιμῶν τάσεων

Ἡ V_R εἶναι ἐν φάσει πρός τό I

$$V_R = I_o R \, \eta\mu(\omega t - \varphi) \qquad (7\alpha)$$

Ἡ V_L προηγεῖται τοῦ ρεύματος κατά 90^o

$$V_L = I_o \cdot \omega L \, \eta\mu(\omega t + 90 - \varphi) \qquad (7\beta)$$

Ἡ V_C ἕπεται τοῦ ρεύματος κατά 90^o

$$V_C = I_o \frac{1}{C\omega} \eta\mu(\omega t - 90 - \varphi) \qquad (7\gamma)$$

Παρατηρήσεις

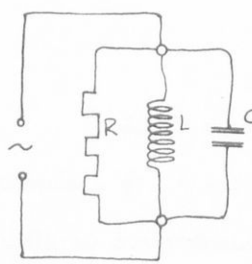
α. Είς τό πρόβλημα ἐλήφθη $V_L > V_C$, δι'αὐτό καί ἡ διαφορά φάσεως φ εἶναι θετική.

Γενικῶς ἡ φ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν R, L, C καί ω.

β. 'Εάν δέν ὑπάρχει ἕν τῶν στοιχείων R, L, C οἱ ὑπολογισμοί ἁπλουστεύονται. Οἱ προκύπτοντες τύποι λαμβάνονται καί ἀμέσως ἐκ τῶν ἀνωτέρω, διά τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ μή ὑπάρχοντος στοιχείου.

γ. Τό στοιχεῖον ἀναφορᾶς εἶναι μόνον βοηθητικόν, χωρίς νά λαμβάνῃ μέρος εἰς τάς διανυσματικάς προσθέσεις.

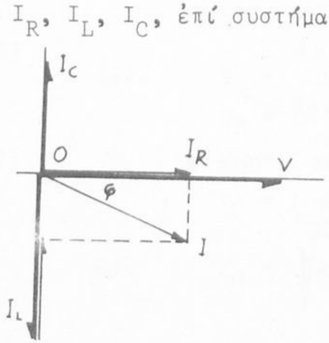
Νά ἐπιλυθῇ κύκλωμα R, L, C ἐν παραλλήλῳ, τροφοδοτούμενον ὑπό ἐναλλασσομένης τάσεως, $V = V_o \eta\mu\omega t$.



σχ. 214

'Εφ'ὅσον τά στοιχεῖα R, L, C εἶναι ἐν παραλλήλῳ, λαμβάνομεν ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς, τό διάνυσμα πού παριστᾶ τήν κοινήν τάσιν.

'Ακολούθως σχεδιάζομεν τά διανύσματα τῶν μερικῶν ρευμάτων I_R, I_L, I_C, ἐπί συστήματος συντεταγμένων xoy.



Τό I_R καί ἡ V εἶναι ἐν φάσει.

Τό I_L ἕπεται κατά 90° τῆς V

Τό I_C προηγεῖται κατά 90° τῆς V.

'Υπολογισμοί:

α. Διαφορᾶς φάσεως

'Εκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R}$$

ἀλλά

$$I_R = \frac{V}{R}$$

$$I_L = \frac{V}{\omega L}$$

$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}}$$

ἄρα

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - C\omega}{\frac{1}{R}} \qquad (1)$$

'Εκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι, ὡς ἐλήφθησαν τά I_L καί I_C ἡ ἔντασις ἕπεται τῆς τάσεως κατά φ. 'Η φ μπορεῖ νά εἶναι μηδέν, θετική ἤ ἀρνητική.

β. Συνθέτου ἀντιστάσεως

'Εκ τοῦ σχήματος φαίνεται:

$$I^2 = (I_L - I_C)^2 + I_R^2$$

ἀλλά

$$I = \frac{V}{Z_o}$$

$$I_L = \frac{V}{\omega L}$$

$$I_C = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}}$$

$$I_R = \frac{V}{R}$$

ἄρα

$$\frac{1}{Z_o} = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - C\omega\right)^2 + \frac{1}{R^2}} \qquad (2)$$

γ. 'Εντάσεως ρεύματος

$$\text{πλάτος εντάσεως} = \frac{\text{πλάτος τάσεως}}{\text{σύνθετος αντίστασις}}$$

$$I_o = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L\omega} - C\omega)^2}$$

καί ἐπειδή $I = I_o ημ(\omega t - \varphi)$

$$I = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L\omega} - C\omega)^2}\ ημ(\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

δ. Ἐνεργῶν τιμῶν

$$I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \quad καί \quad V_{εν} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

ε. Πλατῶν ἐντάσεων

$$I_{oR} = \frac{V_o}{R}$$

$$I_{oL} = \frac{V_o}{\omega L} \qquad (5)$$

$$I_{oC} = V_o C\omega$$

στ. Στιγμιαίων τιμῶν ἐντάσεων.

Ἐπειδή I_R καί V εἶναι ἐν φάσει:

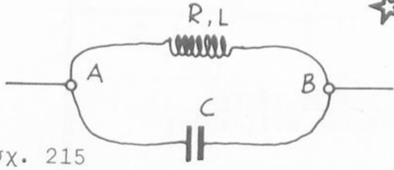
$$I_R = \frac{V_o}{R}\ ημ\omega t \qquad (6α)$$

Ἐπειδή τό I_L ὑστερεῖ τῆς V κατά 90^o

$$I_L = \frac{V_o}{\omega L}\ ημ(\omega t - 90^o) \qquad (6β)$$

Ἐπειδή τό I_C προηγεῖται τῆς V κατά 90^o

$$I_C = V_o \omega C\ ημ(\omega t + 90^o) \qquad (6γ)$$

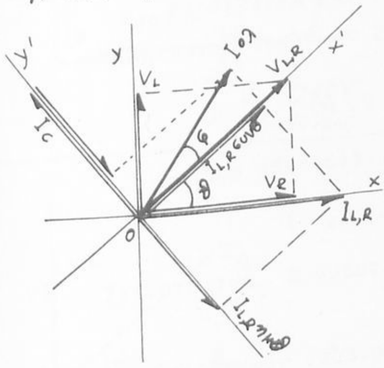


σχ. 215

☆ Εἰς τό κύκλωμα τοῦ σχήματος τό πηνίον ἔχει συντελεστήν αὐτεπαγωγῆς L καί ὠμικήν ἀντίστασιν R α) Ποία ή σύνθετος ἀντίστασις τῆς διατάξεως

β) Ποία ή διαφορά φάσεως μεταξύ τάσεως - ἐντάσεως;

γ) Πότε ή διάταξις συμπεριφέρεται ὡς ὠμική ἀντίστασις;



α) Θεωρῶ πρῶτον, τά στοιχεῖα R, L τά ὁποῖα συνδέονται ἐν σειρᾷ, μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό ρεῦμα $I_{L,R}$.

'Επειδή τά στοιχεῖα πηνίον καί πυκνωτής συνδέονται ἐν παραλλήλῳ λαμβάνεται ὡς νέον διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $V_{L,R}$ καί τοποθετεῖται εἰς τό διάγραμμα τό I_C. 'Αναλύω ἀκολούθως τό $I_{L,R}$ εἰς τούς ἄξονας xOx' καί yOy' καί προσδιορίζω τό ὁλικόν ρεῦμα:

$$I_{o\lambda} = \sqrt{(I_C - I_{L,R}\eta\mu\vartheta)^2 + I_{L,R}^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} \qquad (1)$$

εἶναι ὅμως: $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{V_L}{V_R} = \dfrac{\omega L}{R}$ $\qquad \eta\mu\vartheta = \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ $\qquad (2)$

ἐπειδή $I_{o\lambda} = \dfrac{V_{o\lambda}}{Z_{o\lambda}}$ καί $I_{L,R} = \dfrac{V_{o\lambda}}{Z_{L,R}}$ καί $Z_{L,R} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

ἕπεται ἐκ τῆς (1):

$$Z_{o\lambda} = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + [C\omega(R^2 + \omega^2 L^2) - L\omega]^2}} \qquad (3)$$

β) $$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I_C - I_{L,R}\eta\mu\vartheta}{I_{L,R}\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{C\omega(R^2 + L^2\omega^2) - L\omega}{R} \qquad (4)$$

γ) θά πρέπῃ $\varphi = 0^o$ δηλαδή $\varepsilon\varphi\varphi = 0$ καί ἐκ τῆς (4)

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}(1 - \omega^2 LC)}$$

21.2. μέθοδος τάσεων - ρευμάτων

Εἰς τήν μέθοδον αὐτήν, διά κάθε στοιχεῖον ἤ ὁμάδα στοιχείων R, L, C γράφομεν:

α. Τόν νόμο Ohm, διά πλάτη ἤ ἐνεργούς τιμάς.

$$\text{πλάτος ἐντάσεως} = \frac{\text{πλάτος τάσεως}}{\text{σύνθετος ἀντίστασις}}$$

$$\text{ἐνεργός ἔντασις} = \frac{\text{Ἐνεργός τάσις}}{\text{σύνθετος ἀντίστασις}}$$

β. Τήν σχέσιν ὑπολογισμοῦ τῆς συνθέτου ἀντιστάσεως.

$$Z = f(R, L, C, \omega)$$

γ. Τήν σχέσιν ὑπολογισμοῦ τῆς διαφορᾶς φάσεως

$$\varepsilon\varphi\varphi = f(R, L, C, \omega)$$

δ. Εἰς ἑκάστην σύνθετον ἀντίστασιν Z ἀντιστοιχεῖ ἕν διάγραμμα ἀντιστάσεων.

Τό διάγραμμα ἀντιστάσεων, ἑρμηνεύει γεωμετρικῶς, τάς σχέσεις:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

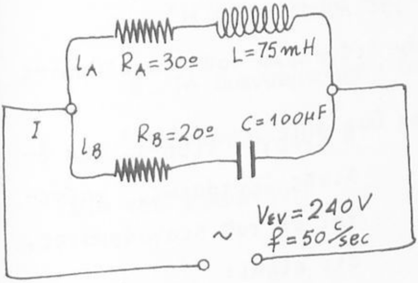
καί

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - C\omega\right)^2}$$

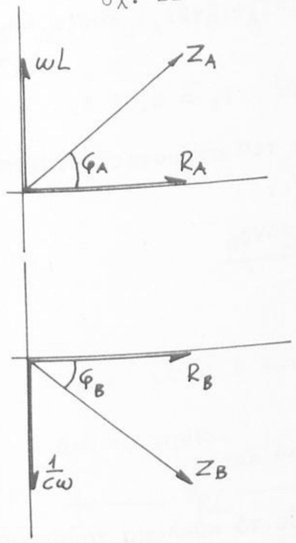
Εἰς τό κατωτέρω κύκλωμα νά ὑπολογισθοῦν:

1. Ἡ ἔντασις εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν κλάδων (Ἐνεργοί τιμαί).
2. Ὁ συνολικός συντελεστής ἰσχύος
3. Ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς
4. Νά χαραχθῇ τό ἀνυσματικόν διάγραμμα τῶν ἐντάσεων μέ βάσιν τήν τάσιν $V_{\varepsilon\nu} = 240$ V.

(ΜΗΧ.-ΗΛ. Φεβρουάριος 1967)



σχ. 21΄



Διά τό ρεῦμα I_A:

$$I_{\varepsilon A} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z_A} \qquad (1)$$

$$Z_A = \sqrt{R_A^2 + (\omega L)^2} \qquad (2)$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_A = \frac{\omega L}{R_A} \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ διαγράμματος φαίνεται ὅτι προηγεῖται ἡ τάσις.

Διά τό ρεῦμα I_B

$$I_{\varepsilon B} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z_B} \qquad (4)$$

$$Z_B = \sqrt{R_B^2 - \frac{1}{(C\omega)^2}} \qquad (5)$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_B = -\frac{\frac{1}{C\omega}}{R_B} \qquad (6)$$

Ἐκ τοῦ διαγράμματος φαίνεται ὅτι ἕπεται ἡ τάσις

Εἶναι ὅμως:

$$\omega L = 2\pi.f.L = 2\pi.50.75.10^{-3} = 23{,}5\ \Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi.fC} = \frac{1}{2\pi.50.100.10^{-6}} = 31{,}8\ \Omega$$

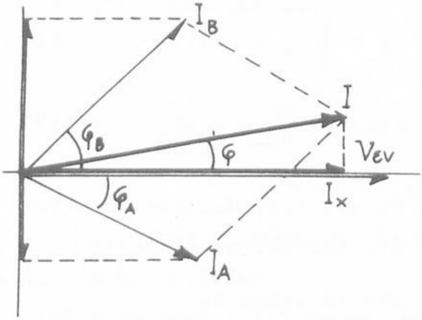
ἄρα ἐκ τῆς (2) $\Rightarrow$ $Z_A = 38{,}2\ \Omega$

καί ἐκ τῆς (5) $\Rightarrow$ $Z_B = 37{,}86\ \Omega$

Ἐκ τῆς (1) $\Rightarrow$ $I_{\varepsilon A} = 6{,}3\ A$

καί ἐκ τῆς (4) $\Rightarrow$ $I_{\varepsilon B} = 6{,}35$ A.

Χαράσσομεν τό διανυσματικόν διάγραμμα τοῦ κυκλώματος μέ διάνυσμα ἀναφορᾶς τό $V_{\varepsilon\nu}$.



Ἡ ἐνεργός τιμή I_ε τῆς ὁλικῆς Ἐντάσεως, φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος, ὅτι εἶναι:

$$I_\varepsilon^2 = I_A^2 + I_B^2 + 2I_AI_B\sigma\upsilon\nu(\varphi_A + \varphi_B) \quad (7)$$

ἄρα $I_\varepsilon = 8{,}55$ A.

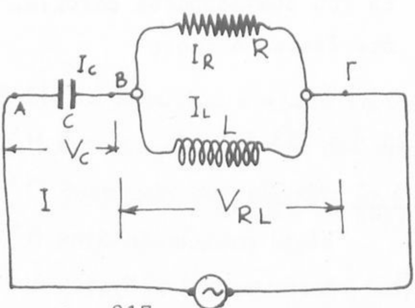
Ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{I_x}{I} = \frac{I_A\sigma\upsilon\nu\varphi_A + I_B\sigma\upsilon\nu\varphi_B}{I}$$

ἄρα: $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}975$

Ἡ ὁλική ἰσχύς εἶναι:

$$P_o = V_\varepsilon \cdot I_\varepsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2040 \text{ Watts.}$$



σχ. 217

✡ Εἰς τό κύκλωμα τοῦσχήματος 217 δίδονται: R = 15Ω, C = 100μF, L = 0,1 H καί f = 100 c/sec.

Ζητοῦνται:

α. Ἡ ἔντασις καί ἡ τάσις εἰς ἕκαστον τμῆμα ὡς καί ἡ ὁλική ἔντασις.

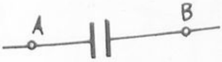
β. Ὁ συνολικός συντελεστής ἰσχύος.

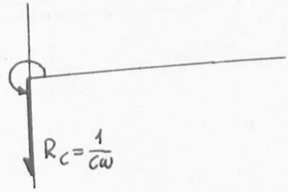
γ. Ἡ μέση ἰσχύς τοῦ κυκλώματος.

δ. Τό διανυσματικόν διάγραμμα.

Ἡ ἐνεργός τιμή τοῦ ρεύματος εἰς τό πηνίον εἶναι 2A.

Διά τόν πυκνωτήν:





$$I_C = \frac{V_C}{R_C} \qquad (1)$$

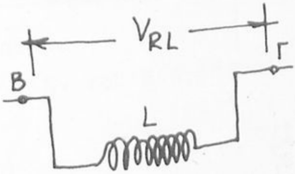
$$R_C = \frac{1}{C\omega} \qquad (2)$$

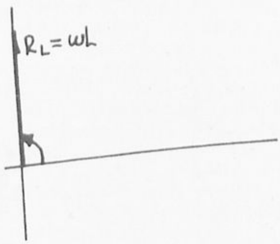
$$\varepsilon\varphi\varphi_C = \frac{-\ R_C}{R'} \qquad (3)$$

$$R' \to 0$$

Ἡ R' εἶναι ἡ ὠμική ἀντίστασις τοῦ κλάδου AB.

Διά τό πηνίον





$$I_L = \frac{V_{RL}}{R_L} \qquad (4)$$

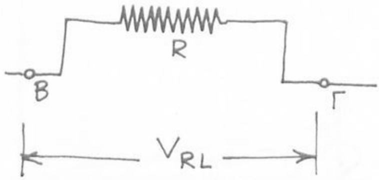
$$R_L = \omega L \qquad (5)$$

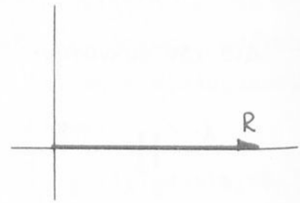
$$\varepsilon\varphi\varphi_L = \frac{\omega L}{R''} \qquad (6)$$

$$R'' \to 0$$

'Η R'' εἶναι ἡ ὠμική ἀντίστασις τοῦ πηνίου.

Διά τήν ἀντίστασιν:

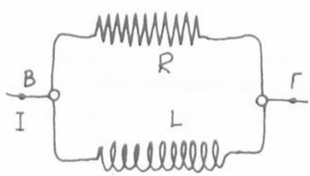


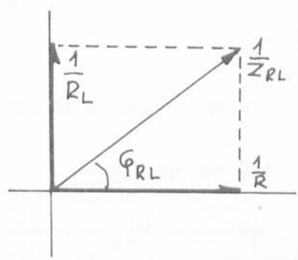


$$I_R = \frac{V_{RL}}{R} \tag{7}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_R = \frac{0}{R} \tag{8}$$

Διά τό σύστημα, πηνίον - ἀντίστασις:





$$I = \frac{V_{RL}}{Z_{RL}} \tag{9}$$

$$\frac{1}{Z_{RL}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_L^2} \tag{10}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_{RL} = \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R}} \tag{11}$$

'Εκ τῆς (2) $\Rightarrow$ $R_C = 15{,}92\ \Omega$

'Εκ τῆς (5) $\Rightarrow$ $R_L = 62{,}87\ \Omega$

'Εκ τῆς (4) $\Rightarrow$ $V_{RL} = 125{,}74\ V$

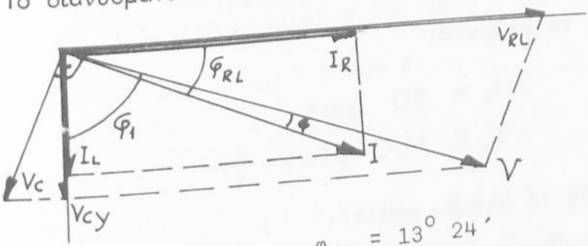
'Εκ τῆς (7) $\Rightarrow$ $I_R = 8,38$ A

'Εκ τῶν (9) καί (10) $\Rightarrow$ $I = 8,81$ A

'Αλλά ἐπειδή $I = I_C$,

'Εκ τῆς (1) $\Rightarrow$ $V_C = 13,7$ V

Τό διανυσματικόν διάγραμμα.



'Εκ τῆς (11) $\Rightarrow$ $\varphi_{RL} = 13^\circ\ 24'$

'Εκ τοῦ διαγράμματος προκύπτει:

$$V^2 = V_{RL}^2 + V_C^2 + 2V_C V_{RL} \cdot \text{συν}(90+\varphi_{RL})$$

καί $V = 123$ V

Συντελεστής ἰσχύος:

'Ο συντελεστής ἰσχύος εἶναι: συνφ.

'Η φ εἶναι ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\vec{I}$ καί $\vec{V}$ εἰς τό διάγραμμα.

'Εκ τοῦ διαγράμματος φαίνεται:

$$V_{cy} = V_C\ \text{συν}\varphi_{RL}$$

καί $V_{cy} = V\ \text{συν}\varphi_1$

$\Rightarrow$ $\varphi_1 = 83^\circ\ 48'$

ἀλλά

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_{RL} - 90 = 7^\circ\ 12'$$

$\Rightarrow$ $\text{συν}\varphi = 0,994$

Μέση ἰσχύς.

$$P_\mu = I_{\varepsilon\nu} \cdot V_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\varphi = 8,61 \cdot 123 \cdot 0,994 \text{ watts.}$$

$$P_\mu = 1052 \text{ Watts}$$

21.3. τριγωνομετρική μέθοδος

Ἡ τριγωνομετρική μέθοδος χρησιμοποιεῖ μόνον τριγωνομετρικόν λογισμόν καί δέν εἶναι γενική.

Δίδονται τά ρεύματα:

$$I_1 = 50\ \eta\mu\omega t$$

$$I_2 = 100\ \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

Νά εὑρεθῇ τό ὁλικόν ρεῦμα.

Ἐάν τό ρεῦμα τοῦτο διαρρέει ἀγωγόν ὠμικῆς ἀντιστάσεως 10 Ω, νά ὑπολογισθῇ τό ποσόν τῆς ἐκλυομένης θερμότητος εἰς χρόνον 20 min.

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 50\eta\mu\omega t + 100\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$I = 50\left[\eta\mu\omega t + 2\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{4})\right]$$

$$I = 50\left[\eta\mu\omega t + 2(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \eta\mu\frac{\pi}{4}\ \sigma\upsilon\nu\omega t)\right]$$

$$I = 50\left[\eta\mu\omega t + 2\eta\mu\omega t\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$I = 50\left[\eta\mu\omega t(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$I = 50(1 + \sqrt{2})\left[\eta\mu\omega t + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

θέτω $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \varepsilon\varphi\varphi$ $\qquad \varphi = 30^\circ\ 20'$

ὁπότε:

$$I = 50(1 + \sqrt{2})\left[\eta\mu\omega t + \varepsilon\varphi\varphi\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$I = 50(1 + \sqrt{2})\left[\eta\mu\omega t + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$I = \frac{50(1+\sqrt{2})}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\left[\eta\mu\omega t\ \sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$I = \frac{50(1+\sqrt{2})}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\eta\mu(\omega t + \varphi)$$

$$I = \frac{50 \cdot 2{,}41}{0{,}863} \cdot \eta\mu(\omega t + 30^{o}\ 20')$$

$$I = 139{,}6\ \eta\mu(\omega t + 30^{o}\ 20')$$

$$\Rightarrow \quad I_o = 139{,}6\ A$$

$$\Rightarrow \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = 99\ A$$

$$Q = 0{,}24\ I_{\varepsilon\nu}^2\ R \cdot t$$

$$Q = 28.200\ kcal$$

☆ Τρεῖς πηγαί ΗΕΔ:

$$E_1 = 20\ \eta\mu\omega t$$

$$E_2 = 30\ \eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

$$E_3 = 40\ \sigma\upsilon\nu(\omega t - \frac{\pi}{6})$$

εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σειρᾷ.

Ποία ἡ ὁλική ΗΕΔ, Ε;

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = E' + E_3$$

$$E' = E_1 + E_2 = 20\eta\mu\omega t + 30\eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

$$E' = 20\eta\mu\omega t + 30(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t)$$

$$E' = 20\eta\mu\omega t + 30\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\eta\mu\omega t - 30\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$E' = \eta\mu\omega t(20 + 15\sqrt{2}) - 15\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$E' = (20 + 15\sqrt{2})\left[\eta\mu\omega t - \frac{15\sqrt{2}}{20 + 15\sqrt{2}}\,\sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

καλῶ $\quad \varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{15\sqrt{2}}{10 + 15\sqrt{2}} = 0{,}512$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle\, \alpha = 27^{\circ}\ 10'$$

ὁπότε: $E' = 41,1\left[\eta\mu\omega t - \varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$

$$E' = \frac{41,1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\left[\eta\mu\omega t\ \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

$$E' = \frac{41,1}{0,889}\,\eta\mu(\omega t - \alpha)$$

$$E' = 46,2\ \eta\mu(\omega t - 27^{\circ}\ 10')$$

Τώρα: $E = E' + E_3$

$$E = 46,2\eta\mu(\omega t - 27^{\circ}10') + 40\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$E = 46,2\left[\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu(27^{\circ}10') - \eta\mu(27^{\circ}10')\sigma\upsilon\nu\omega t\right] +$$
$$+ 40(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \eta\mu\frac{\pi}{3}\ \sigma\upsilon\nu\omega t)$$

$$E = 46,2(\eta\mu\omega t\cdot 0,889 - 0,456\sigma\upsilon\nu\omega t) +$$
$$+ 40(\eta\mu\omega t\cdot 0,5 + 0,866\ \sigma\upsilon\nu\omega t)$$

$$E = 41,1\eta\mu\omega t - 21,1\sigma\upsilon\nu\omega t + 20\eta\mu\omega t + 34,6\sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$E = 61,1\ \eta\mu\omega t + 13,5\ \sigma\upsilon\nu\omega t$$

$$E = 61,1\left[\eta\mu\omega t + \frac{13,5}{61,1}\ \sigma\upsilon\nu\omega t\right]$$

καλῶ $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{13,5}{61,1} = 0,219$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle\, \varphi = 12^{\circ}\ 25'$$

ὁπότε: $E = 61,1(\eta\mu\omega t + \varepsilon\varphi\varphi\sigma\upsilon\nu\omega t)$

$$E = \frac{61,1}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\ (\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega t)$$

$$E = \frac{61,1}{0,976}\ \eta\mu(\omega t + \varphi)$$

$$E = 62,7\ \eta\mu(\omega t + 12^{\circ}\ 25')$$

22. γενικαὶ ἀσκήσεις

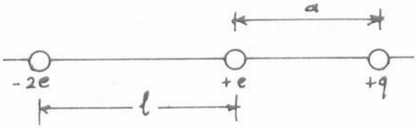
1 Τρία μεταλλικά σφαιρίδια ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει βά-ρος β κρέμανται διά μονωτικῶν νημάτων ἴσου μήκους λ ἀπό τοῦ αὐτοῦ σημείου καί φέρουν ἕκαστον φορτίον Q. Ταῦτα ἀπωθούμε-να ἰσορροποῦν ἐπί ὁριζοντίας περιφερείας ἀκτῖνος R. Νά εὑ-ρεθῇ ἡ σχέσις ἥτις ὑφίσταται μεταξύ τῶν β,λ,Q καί R.

2 Δύο πρωτόνια, ἀπέχοντα κατά ἄρχονται κινούμενα λό-γῳ τῆς ἀμοιβαίας των ἀπώσεως. Ποία θά εἶναι ἡ κινητική των ἐνέργεια, ὅταν ταῦτα ἀπομακρυνόμενα ἀλλήλων φθάσουν εἰς με-γάλην ἀπόστασιν. Ὑποθέτομεν ὅτι τό ἕν τῶν πρωτονίων εἶναι σταθερόν. Ποία ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ ἑτέρου εἰς μεγάλην ἀπόστασιν ἀπό τοῦ πρώτου.

3 Φορτίον $16\cdot10^{-9}$ coul. εἶναι τοποθετημένον εἰς τήν ἀρ-χήν ἑνός συστήματος συντεταγμένων. Δεύτερον ἀγνώστου τιμῆς φορτίον εἶναι τοποθετημένον εἰς τό σημεῖον (3,0) . Ἐνῷ ἕνα τρίτον φορτίον $12\cdot10^{-9}$ coul εἰς σημεῖον (6,0). Ποῖον τό ἄ-γνωστον φορτίον ἐάν ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς τό σημεῖον(8,0) εἶναι +20,25Nt/coul καί παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x.

4 Εἰς τό πρώτυπον κατά Bohr ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου ἕνα ἠλεκτρόνιον περιφέρεται περί ἑνός πρωτονίου σέ κυκλική τρο-χιάν ἀκτῖνος $5,28\cdot10^{-9}$ cm α) Ποία ἡ ἠλεκτροστατική δυναμι-κή ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου; β) Ποία ἡ ὁλική ἐνέργεια αὐ-τοῦ; γ) Μεταξύ ποίας διαφορᾶς δυναμικοῦ θά πρέπη νά ἐπιτα-χυνθῇ τό ἠλεκτρόνιον ἵνα ἀποκτήση τήν ἀνωτέρω δυναμικήν ἐ-νέργειαν;

5 Ἓν σημειακόν φορτίον ἴσον πρός -2e καί ἕνα θετικόν φορτίον +e τοποθετοῦνται σταθερῶς εἰς σημεῖα ἀπέχοντα κατά l. Εἰς ποίαν θέσιν ἐπί τῆς εὐθείας πού συνδέει τά φορτία πρέπει νά τοποθετηθῇ ἕνα φορτίον +q, ὥστε τοῦτο νά ἰσορροπῇ; Ποία ἡ φύσις τῆς ἰσορροπίας τοῦ φορτίου +q διά μίαν κατά μῆκος μετατόπισιν αὐτοῦ; Σχεδιάσατε μίαν καμπύλην τῆς δυνάμεως τῆς ἐνεργούσης ἐπί τοῦ φορτίου +q συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπό τοῦ φορτίου +e.



6 Εἰς τά διαδοχικά σημεῖα Α, Β καί Γ μιᾶς εὐθείας εὑρίσκονται τά κεντρικά φορτία Q_A = 15 nCb, Q_B = -12 nCb καί $Q_Γ$ = 20nCb ἀντιστοίχως, εἶναι δέ (ΑΒ) = 9 cm καί (ΒΓ)=16cm. Ζητοῦνται:

α. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τό σχηματιζόμενον πεδίον ὑπάρχουν δύο τεμνόμεναι σφαῖραι, μέ κέντρα τά σημεῖα Α καί Γ, ἀποτελοῦσαι μίαν ἰσοδυναμικήν ἐπιφάνειαν. Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις, τό μέγεθος καί τό δυναμικόν τῶν σφαιρῶν τούτων. Εἶναι $ε_0$ = 8,8542 pFm^{-1}.

β. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ὑπό τήν ὁποίαν τέμνονται αἱ σφαῖραι εἶναι ὀρθή καί

γ. Νά εὑρεθῇ, ἄνευ ἑτέρων μαθηματικῶν πράξεων, ὁ τόπος τῶν σημείων εἰς τά ὁποῖα ἡ πεδιακή ἔντασις εἶναι μηδέν. Δεδομένου ὅτι ὁ τόπος οὗτος εἶναι περιφέρεια κύκλου νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ κέντρου της καί ἡ ἀκτίς της.

7 Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τό ἐσωτερικόν ἀγωγοῦ φορτισμένης σφαίρας δέν ὑφίσταται ἠλεκτροστατικόν πεδίον. Ἡ σφαῖρα εἶναι στατικῶς φορτισμένη.

8 Ποία ἡ ἀπαιτουμένη ἐνέργεια, ἵνα τρία φορτία Q_1, Q_2 καί Q_3 τοποθετηθοῦν εἰς τάς κορυφάς Α Β καί Γ τριγώνου μέ πλευράς α, β καί γ ἀντιστοίχως.

9 Ἀγωγός χωρητικότητος C_1 ἔχει δυναμικόν U. Φέρομεν αὐτόν εἰς ἐπαφήν μέ ἄλλον ἀγωγόν, χωρητικότητος C_2, ἀφόρτιστον μετά τόν ἀπομακρύνομεν καί τόν ἐκφορτίζομεν. Τό πείραμα ἐπαναλαμβάνεται ν φοράς. Ποῖον τότε τό δυναμικόν τοῦ πρώτου ἀγωγοῦ;

10 Μεταξύ δύο παραλλήλων, καί ἐπιπέδων μεταλλικῶν πλακῶν, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν $l(l = 4$ cm$)$ ἀπ' ἀλλήλων, ἔχει ἐφαρμοσθῆ διαφορά δυναμικοῦ ἴση πρός $U(U = 1600$ V$)$. Κατά τήν στιγμήν $t(t = 0)$ ἕν ἠλεκτρόνιον, ἐκκινοῦν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἔκ τινος σημείου τῆς ἐπιφανείας τῆς μιᾶς πλακός, ἄρχεται κινούμενον ὑπό τήν ἐπίδρασιν τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Συγχρόνως ἐκ τῆς ἑτέρας πλακός, ἄρχεται κινούμενον πρωτόνιον. Νά εὑρεθοῦν: α) Ἡ κοινή ἀπόστασις τῶν δύο σωματίων ἐκ τῆς θετικῆς πλακός κατά τήν χρονικήν στιγμήν, καθ' ἥν ταῦτα διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου πρός τάς πλάκας ἐπιπέδου.

β) Ὁ λόγος τῶν μέτρων τῶν ταχυτήτων τάς ὁποίας κέκτηνται τό ἠλεκτρόνιον καί τό πρωτόνιον κατά τήν στιγμήν τῆς προσκρούσεως των ἐπί τῶν πλακῶν.

γ) Ὁ λόγος τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν, τάς ὁποίας κέκτηνται τά δύο σωματίδια κατά τήν στιγμήν τῆς προσκρούσεως. Τό στοιχειῶδες ἠλεκτρικόν φορτίον εἶναι ἴσον πρός $e(e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-q$)$. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου m_e $(m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}gr)$. Μᾶζα τοῦ πρωτονίου, $m_{\pi\rho}(m_{\pi\rho} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr$)$.

11 Σφαιρική πομφόλυγξ σάπωνος ἀρχικῶς ἀφόρτιστος φορτίζεται μέ φορτίον Q. Ἄν ἡ ἀρχική ἀκτίς τῆς σφαίρας ἦτο

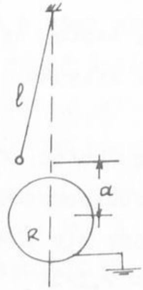
R_0 καί ή τελική $R(R_0 < R)$, νά ύπολογισθῆ τό τοποθετηθέν φορτίον έπί τῆς πομφόλυγος, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι: P.

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \cdot P \cdot R \cdot R_0 (R_0^2 + R_0 R + R^2)}$$

12 Ἡ ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταβάλλεται γραμμικῶς μετά τῆς ἀποστάσεως. Μεταξύ δύο σημείων ἐντάσεως μηδέν καί E_0 ἀντιστοίχως, μετακινεῖται φορτίον Q. Ἡ ἀπόστασις AB τῶν δύο σημείων εἶναι l. Εὕρατε τό ἔργον τοῦ πεδίου κατά τήν μετακίνησιν τοῦ φορτίου Q ἀπό A εἰς B.

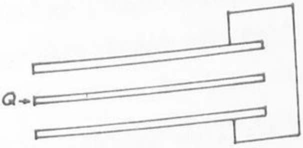
13 Κοίλη μεταλλική σφαῖρα, ἀπομεμακρυσμένη παντός ἑτέρου σώματος, φέρει φορτίον Q(Q = +200 ΗΣΜ-q). Ἐάν ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας εἶναι r(r = 2 cm), νά ὑπολογισθῆ τό ἔργον τό ὁποῖον θά καταναλωθῆ κατά τήν μετακίνησιν ἑνός θετικοῦ φορτίου, ἴσου πρός q(q = 1 ΗΣΜ-q), ἀπό ἕν σημεῖον ἀπέχον κατά l(l = 50 cm) ἀπό τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἰς ἕν ἄλλο, τό ὁποῖον ἀπέχει κατά d(d = 10 cm) ἀπό τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

14 Εἰς τήν εἰκονιζομένην διάταξιν τό σφαιρίδιον τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχει μᾶζα m καί θετικόν φορτίον Q, ἐνῷ ἡ ἀγωγός σφαῖρα εἶναι γειωμένη.



Ποία ἡ περίοδος ταλαντώσεων μικροῦ πλάτους, τοῦ ἐκκρεμοῦς;

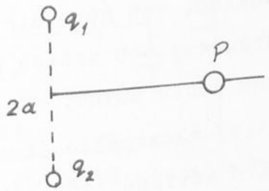
15 Τρεῖς ἴσαι μεταλλικαί πλάκες τοποθετοῦνται παραλλήλως ὡς εἰς τό σχῆμα. Οἱ ἐξωτερικές πλάκες συνδέονται διά



σύρματος. Ἡ ἐσωτερική φέρει φορτίον μέ ἐπιφανειακήν πυκνότητα 10 $\frac{\text{ΗΣΜ-φ}}{cm^2}$ Ποία ἡ κατανομή φορτίου εἰς τάς διαφόρους ἐπιφανείας;

16 Δύο ὅμοια θετικά φορτία ἴσα πρός Q τοποθετοῦνται εἰς τήν αὐτήν ἀπόστασιν d ἀπό πλακός μεγάλης ἐπιφανείας & πρός τήν αὐτήν πλευράν. Ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν φορτίων εἶναι 2d. Εὕρατε τήν ἔντασιν τοῦ πεδίου εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο φορτίων.

17 Δύο σημειακά φορτία q τοποθετοῦνται εἰς ἀπόστασιν 2α. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου εἰς σημεῖον P εὑρισκόμενον ἐπί τῆς καθέτου εἰς τό μέσον τῆς εὐθείας πού συνδέει τά δύο φορτία & καί εἰς ἀπόστασιν 2α ἐξ αὐτῆς; Ποῦ πρέπει νά τοποθετηθῇ ἕν φορτίον ἴσον πρός $\sqrt{5}q$, ὥστε ἡ ἔντασις εἰς τό σημεῖον P νά γίνῃ μηδέν;



18 Θέσατε μία μονάδα θετικοῦ φορτίου εἰς τό κέντρον ἑνός κύκλου καί N μονάδες ἀρνητικοῦ φορτίου, ὁμοιομόρφως κατανεμημένες ἐπί τοῦ κύκλου. Ὑπολογίσατε τήν συνισταμένην δύναμιν εἰς ἕν τῶν ἀρνητικῶν φορτίων. Ἀπαντήσατε διά N=3,4 καί 5. Ὑπολογίσατε τήν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος διά N = 4.

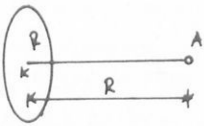
19 Πυρήν ἡλίου διέρχεται ταχέως διά τοῦ κέντρου ἑνός μορίου H_2 κινούμενος ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς διακέντρου τῶν ἀτόμων τοῦ ὑδρογόνου. Ἡ ἀπόστασις τῶν πυρήνων τοῦ ὑδρογόνου εἶναι b. Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἐπί τοῦ πυρῆνος τοῦ ἡλίου ... εἶναι μεγίστη;

Τό πρόβλημα νά λυθῇ μέ τάς ἑξῆς προϋποθέσεις:

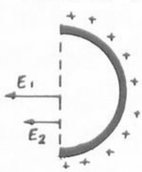
α. Οἱ πυρῆνες τοῦ ὑδρογόνου εἶναι πρός στιγμήν ἀκίνητοι

β. δέν λαμβάνεται ὑπ'ὄψιν τό πεδίον τῶν ἠλεκτρονίων τοῦ μορίου τοῦ ὑδρογόνου.

20 Μεταλλικός ἀγωγός σχήματος δακτυλίου ἀκτίνος R φέρει φορτίον q. Ὑπολογίσατε τήν ἔντασιν τοῦ πεδίου (α) εἰς τό κέντρον τοῦ δακτυλίου Κ καί (β) εἰς σημεῖον Α εὑρισκόμενον ἐπί τοῦ ἄξονος τοῦ δακτυλίου καί εἰς ἀπόστασιν R ἀπό τοῦ κέντρου Κ.



21 Λεπτός ἡμισφαιρικός ἀγωγός εἶναι φορτισμένος ὁμοιόμορφως. Δείξατε ὅτι σέ κάθε σημεῖον τῆς βάσεως, μεγίστου κύκλου, τοῦ ἡμισφαιρίου ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου εἶναι κάθετος πρός τήν βάσιν αὐτήν.



22 Δίδεται κοῖλο σφαιρικό μεταλλικό ἠλεκτρόδιο ἐξωτερικῆς ἀκτῖνος R_3 καί ἐσωτερικῆς R_2. Στό κέντρον του ἔχει τοποθετηθῇ ἕνα ἄλλο σφαιρικό ἠλεκτρόδιο ἀκτῖνος R_1(R_1<R_2 < R_3).

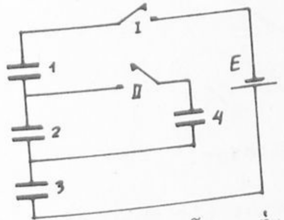
Ὁ ἐνδιάμεσος χῶρος τῶν δύο ἠλεκτροδίων πληροῦται μέ ἰσότροπον καί ὁμοιογενές ὑλικόν διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε.Ἐάν στό ἐσωτερικό ἠλεκτρόδιο προσάγεται φορτίον Q_1 καί στό ἐξωτερικόν Q_2 νά παρασταθῇ γραφικῶς συναρτήσει τῆς ἀποστάσεως ἀπό τό κέντρον τοῦ συστήματος ἡ ἔντασις καί τό δυναμικόν μέ συγκεκριμένες τιμές σέ χαρακτηριστικά σημεῖα.

23 Ἔστωσαν, ἐντός δοχείου παραφινελαίου, οἱ δύο ὁπλισμοί, διαμέτρου d = 5cm, ἑνός πυκνωτοῦ , οἵτινες ἀπέχουν μεταξύ των 0,5 mm. Ὁ εἷς ὁπλισμός προσγειοῦται,ἐνῷ ὁ

ἕτερος συνδέεται μέσω σύρματος ἀμελητέας χωρητικότητος, μέ μεταλλικήν σφαίραν ἀκτῖνος 1 cm, εὑρισκομένην ἐκτός τοῦ δοχείου τοῦ παραφινελαίου.

Δίδονται: ὁ τύπος τῆς χωρητικότητος C ἑνός πυκνωτοῦ: $C = \kappa\frac{S}{4\pi l}$, ὅπου S τό ἐμβαδόν ἑνός ὁπλισμοῦ, l ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν δύο ὁπλισμῶν καί κ ὁ συντελεστής τοῦ διηλεκτρικοῦ (παραφινελαίου: κ = 2,3). Ζητεῖται τό ἠλεκτρικόν φορτίον, εἰς μονάδας c.g.s καί εἰς Coulomb, τό ὁποῖον πρέπει νά δοθῇ εἰς τήν σφαίραν, ἵνα τό δυναμικόν ταύτης γίνῃ ἴσον πρός 500 μονάδας c.g.s

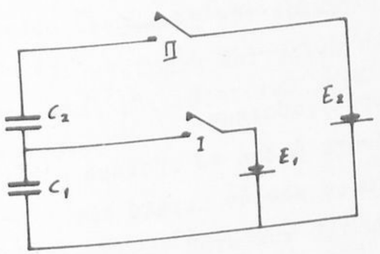
24 Τέσσαρες ὅμοιοι πυκνωταί εἶναι συνδεδεμένοι ὡς εἰς τό σχῆμα καί τό σύστημα τροφοδοτεῖται ὑπό πηγῆς ΗΕΔ Ε.



Ὁ διακόπτης ΙΙ στήν ἀρχή εἶναι ἀνοικτός καί ὁ διακόπτης Ι κλειστός. Ἀκολούθως ἀνοίγει ὁ Ι καί κλείνει ὁ ΙΙ.

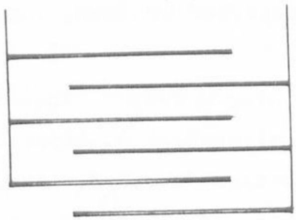
Ποία θά εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς ἕκαστον πυκνωτήν ἐάν Ε = 9V.

25



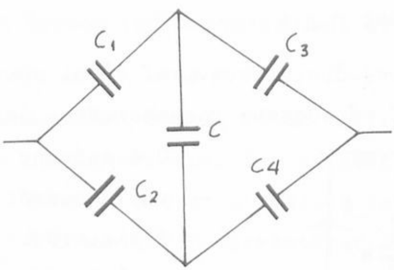
Ἡ φόρτισις τῶν C_1 καί C_2 γίνεται ὡς ἀκολούθως. Ὁ Ι κατ' ἀρχάς εἶναι κλειστός καί ὁ ΙΙ ἀνοικτός. Ἀκολούθως ἀνοίγει ὁ Ι καί κλείνει ὁ ΙΙ. Ἐάν αἱ ΗΕΔ εἶναι E_1 καί E_2 (σχῆμα) εὕρατε τήν τάσιν εἰς ἕκαστον πυκνωτήν.

26 Ὁ ἐν σχήματι πυκνωτής ἀποτελεῖται ἀπό ἕξ παραλλη-



λους πλάκας ἐξ ἀργιλλίου. Ἐάν τό διηλεκτρικόν εἶναι μίκα ($\varepsilon = 4$) αἱ ἀποστάσεις τῶν πλακῶν ἴσαι πρός 0,2 χιλιοστά καί ἡ ἐνέργός ἐπιφάνεια ἑκάστης πλακός εἶναι 50 cm^2, νά ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἰς pF.

27 Προσδιορίσατε τήν συνθήκην μεταξύ τῶν C_1, C_2, C_3 καί



C_4 τοῦ σχήματος ἵνα ὁ C παραμένει ἀφόρτιστος.

28 Εἰς ἑκάστην ἀκμήν κύβου εὑρίσκεται εἷς πυκνωτής χωρητικότητος C.

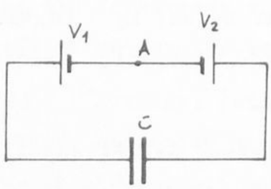
Ποία ἡ ὁλική χωρητικότης:

α) μεταξύ δύο διαδοχικῶν κορυφῶν του

β) μεταξύ τῶν ἄκρων μιᾶς διαγωνίου τῆς βάσεως

γ) μεταξύ τῶν ἄκρων μιᾶς διαγωνίου τοῦ κύβου.

29 Μελετήσατε τό εἰκονιζόμενον σύστημα.

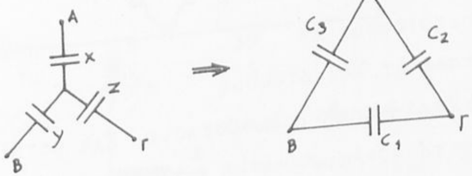


Μελετήσατε ἀκόμη τό σύστημα εἰς περίπτωσιν καθ'ἥν μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ τοποθετεῖται μεταλλική πλάξ πάχους d, παραλλήλως πρός τούς ὁπλισμούς καί ἡ ὁποία συνδέεται ἀγωγίμως μέ τό A.

30 Πέντε ἴσης χωρητικότητος πυκνωταί συνδέονται οὕτως ὥστε νά σχηματίζωνται δύο παράλληλοι κλάδοι, ἀποτελούμενοι ἀπό τήν ἐν σειρᾷ σύνδεσιν 2 πυκνωτῶν ὁ πρῶτος καί 3 πυκνωτῶν ὁ δεύτερος. Τό σύστημα τίθεται ὑπό τάσιν 18.000 V, εἶτα δέ, μετά τήν ἀποσύνδεσιν τῆς πηγῆς, ὁ ἀγωγός συνδέσεως τῶν δύο πυκνωτῶν τοῦ πρώτου κλάδου συνδέεται ἀγωγίμως μέ τόν ἀγωγόν συνδέσεως δύο πυκνωτῶν τοῦ δευτέρου κλάδου.

Διά τῆς ἀγωγίμου ταύτης συνδέσεως ἡ ἐνέργεια τοῦ ὅλου συστήματος τῶν 5 πυκνωτῶν μειοῦται κατά 0,375 Joul. Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης ἑκάστου πυκνωτοῦ;

31 Νά προσδιορισθοῦν τά C_1, C_2, C_3 συναρτήσει τῶν x, y



καί z εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο συνδέσεις νά εἶναι ἰσοδύναμοι.

32 Δίδεται, ὅτι ὑπάρχουν z* ἐλεύθερα ἠλεκτρόνια ἀνά μονάδα ὄγκου μετάλλου τινός καί ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὑπό τήν ἐπίδρασιν ἠλεκτρικοῦ πεδίου σταθερᾶς ἐντάσεως E, κινεῖται ἐντός τῆς μάζης τοῦ μετάλλου μέ ταχύτητα διδομένην ἀπό τόν τύπον

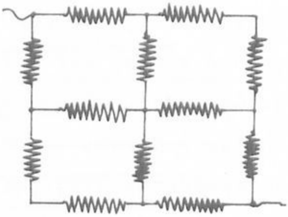
$$v = \tau \cdot E \qquad (1)$$

ἔνθα τ σταθερά καλουμένη εὐκινησία ἠλεκτρονίου.

Ζητοῦνται:

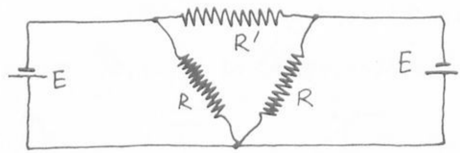
1. Νά ἀποδειχθῇ θεωρητικῶς ὁ νόμος τοῦ Ohm
2. Νά ἐξαχθῇ ὁ τύπος $R = \rho\cdot(l/S)$.

33 Αἱ πλευραί ὅλων τῶν τετραγώνων εἶναι ἀντιστάσεις ἴσαι πρός R.



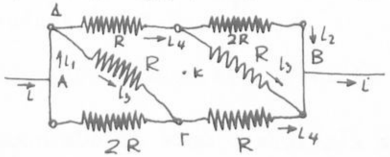
Ποία ἡ ὁλική ἀντίστασις μεταξύ τῶν Α καί Β.

34 Νά ἐπιλυθῇ τό κύκλωμα καί νά ἐξαχθοῦν χρήσιμα συμ-

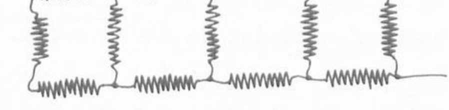


περάσματα.

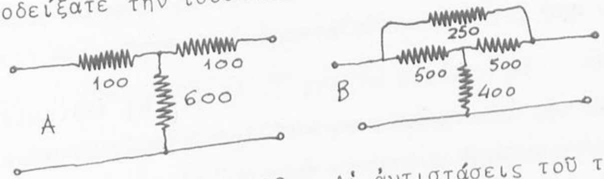
35 Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις R_{AB} μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β εἰς τό κύκλωμα.

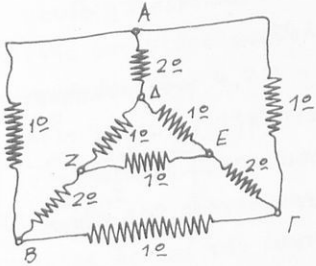


36 Ἕκαστον τῶν τετραγώνων τοῦ κυκλώματος ἔχει πλευράν μήκους 40 cm καί εἶναι ἐκ τοῦ ἰδίου ἰσοπαχοῦς σύρματος. Ἐάν τό ρεῦμα εἰσέρχεται καί ἐξέρχεται ὡς εἰς τό σχῆμα ὑπολογίσατε τήν ὁλική ἀντίστασιντοῦ κυκλώματος σέ ἰσοδύναμον μῆκος ἐκ τοῦ ἰδίου σύρματος.

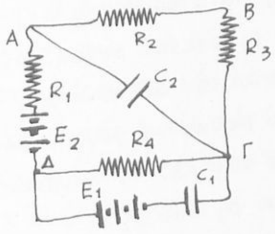


37 'Αποδείξατε τήν ἰσοδυναμίαν τῶν διατάξεων Α καί Β.



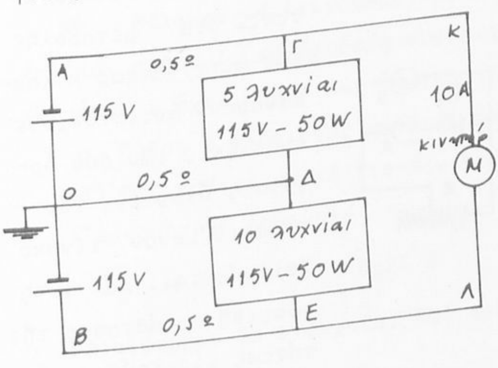


38 Αἱ ἀντιστάσεις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὅλαι τοῦ 1Ω. Αἱ ἀντιστάσεις τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι ὅλαι τοῦ 1 Ω. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν κλάδων ΑΔ ΕΓ καί ΒΖ εἶναι ὅλαι τῶν 2Ω. Ποία ἡ ἀντίστασις μεταξύ τῶν Α καί Γ.



39 Νά προσδιορισθοῦν τά ρεύματα καί τά φορτία τῶν πυκνωτῶν εἰς τό εἰκονιζόμενον κύκλωμα.

40 Εἰς τό σχῆμα παρίσταται διανομή ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας διά 3 ἀγωγῶν. Ζητοῦνται:



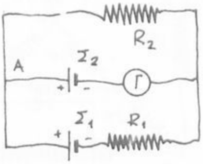
α) Ποῖον τό ρεῦμα δι' ἑκάστου τῶν ἀγωγῶν.

β) Ποία ἡ τάσις εἰς τά ἄκρα ἑκάστου φορτίου, (καταναλωτοῦ).

γ) 'Εάν κοπῆ ἡ μεσαία γραμμή, ποία θά εἶναι ἡ τάσις εἰς τά ἄκρα ἑκάστου φορτίου.

Σημ.: Κατά τόν ὑπολογισμόν θά ύποτεθῆ ὅτι αἱ λυχνίαι ἔχουν σταθεράν ἀντίστασιν καί ὅτι ὁ κινητήρ ἀπορροφᾶ σταθερῶς 10A.

41 Τό κύκλωμα στήλης Σ_1 ήλ.γ.δ.E_1 περιλαμβάνει δύο μεταβλητάς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2. Μεταξύ δύο σημείων Α καί Β τοῦ κυκλώματος τούτου παρεμβάλομεν διακλάδωσιν περιέχουσαν στήλην Σ_2 καί γαλβανόμετρον Γ. Ἡ στήλη Σ_2 εἶναι κατ' ἀντίθεσιν ὡς πρός τήν Σ_1. Ἐκτελοῦμεν τά ἀκόλουθα δύο πειράματα:



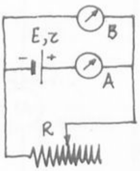
α) Δίδομεν εἰς τάς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 τιμάς, ὥστε διά τοῦ ρεύθρου τοῦ γαλβανομέτρου νά μή διέρχεται ρεῦμα

β) Αὐξάνομεν τήν ἀντίστασιν R_1 κατά ποσότητα ρ_1, ὁπότε διά τοῦ ρεύθρου τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται ρεῦμα. Δίδομεν τότε εἰς τήν ἀντίστασιν R_2 μίαν τοιαύτην αὔξησιν ρ_2, ὥστε καί πάλιν τό διά τοῦ γαλβανομέτρου ρεῦμα νά γίνῃ μηδέν.

Ζητεῖται νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν ήλ. γ. δυνάμεων τῶν δύο στηλῶν, συναρτήσει τῶν αὐξήσεων ρ_1 καί ρ_2.

42 Τό βολτόμετρον Β τοῦ σχήματος ἔχει πολύ μεγάλην ἀντίστασιν καί τό ἀμπερόμετρον Α εἶναι ἀμελητέας ἀντιστάσεως. Διά μεταβολῆς τῆς ἀντιστάσεως R λαμβάνομεν ἀντιστοίχους ἐνδείξεις τῶν δύο ὀργάνων, ὅπως εἰς τόν παρατιθέμενον πίνακα δεικνύονται. Νά γίνῃ γραφική παράστασις τῆς τάσεως εἰς τούς πό-

V Volts	I A
1,8	1
1,6	1,33
1,2	2
0,6	3
0,4	3,33



λους τῆς πηγῆς συναρτήσει τῆς δι' αὐτῆς διερχομένης ἐντάσε-
ως καί ἐκ τοῦ διαγράμματος τούτου νά εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ τῆς πη-
γῆς καθώς καί ἡ ἐσωτερική της ἀντίστασις.

43 'Επιθυμοῦμεν νά καθορίσωμεν πειραματικῶς τήν τάσιν εἰς τούς πόλους γεννητρίας, διαθέτοντες ἕνα ἀμπερόμετρον , μίαν μεταβλητήν ἀντίστασιν καί ἕνα βολτόμετρον μεγάλης ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Αἱ μετρήσεις ἔδωσαν τά ἀκόλουθα:

'Αμπερόμετρον: 4,7 A - 3,5 A - 2,15 A - 0A

Βολτόμετρον : 13,1V - 16,45V - 17,85V - 20V.

1ον) Κατασκευάσατε διάγραμμα δεικνύον τήν σχέσιν U = = f(I). 'Εκ τοῦ διαγράμματος ὑπολογίσατε τήν Η.Ε.Δ. τῆς γεννητρίας ὡς καί τήν ἐσωτερικήν της ἀντίστασιν.

2ον) Συνδέομεν τήν γεννήτριαν μέ κινητῆρα ἐν σειρᾷ & μέ ἀντίστασιν R = 5Ω.

'Εμποδίζοντες τήν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος παρατηροῦ - μεν ὅτι ἐντός 5 min ἐπί τῆς R ἀναπτύσσονται 1440 cal.

Ὅταν λειτουργῇ ὁ κινητήρ, ἐντός τοῦ ἰδίου χρόνου ἐπί τῆς R ἀναπτύσσονται 90 cal. 'Υπολογίσατε τήν Α.Η.Ε.Δ. καί τήν ἐσωτερικήν ἀντίστασιν τοῦ κινητῆρος.

(Baccalaureat)

44 Θέλομεν νά ἐπιτύχωμεν ὥστε διά ἀντιστάσεως R νά διέρχεται ρεῦμα I, τῇ βοηθείᾳ συστοιχίας συσσωρευτῶν ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ΗΕΔ E καί ἐσωτερικήν ἀντίστασιν r.

α) Ποῖος ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός ἀπαιτουμένων στοιχείων.

β) Πῶς πρέπει νά τά διατάξωμεν;

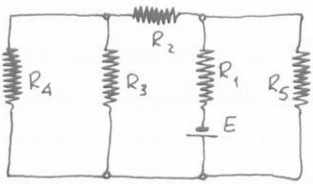
'Αριθμητική ἐφαρμογή

E = 3V r = 0,25 Ω R = 5 Ω I = 8 A.

Διαθέτομεν 90 στοιχεῖα. Πῶς πρέπει νά τά συνδέσωμεν ὥστε νά ἐπιτύχωμεν τό μέγιστον ρεῦμα εἰς τήν ἀντίστασιν R τοῦ προηγουμένου ἐρωτήματος. Θέτομεν τήν συνθήκην ὅτι τό ρεῦμα ἀνά στοιχεῖον τῆς συστοιχίας δέν πρέπει νά ὑπερβῇ τά 0,5 A.

Πόσα στοιχεῖα θά ἀπαιτηθοῦν καί πῶς θά πρέπη νά συνδεθοῦν αὐτά ἵνα ἐπιτύχωμεν ἔντασιν 8 A διά μιᾶς ἀντιστάσεως 5 Ω.

45 Νά εὑρεθῇ τό διά τῆς R_5 ρεῦμα εἰς τό κατωτέρω κύκλωμα.



'Απάντησις:

$$I_5 = \frac{E - R_1 I}{R_5} \qquad I = \frac{E}{R_1 + Ri}$$

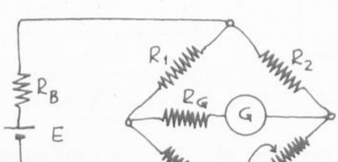
$$\text{μέ} \quad Ri = \frac{R_5(R_2 + R_4 \,//\, R_3)}{R_2 + R_5 + R_4//R_3}$$

'Ο ἐκτελεστής // σημαίνει τήν ἐν παραλλήλῳ σύνδεσιν τῶν δύο στοιχείων π.χ.

$$R_4 \,//\, R_3 = \frac{R_4 R_3}{R_4 + R_3}$$

46 Παραπλεύρως δίδεται τό κύκλωμα τῆς γεφύρας τοῦ Wheatstone.

α) Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἡ διερχομένη διά τοῦ γαλβανομέτρου G.



β) 'Εάν E=1,5V, R_1=40Ω, R_2=100Ω, R_4=400Ω, R_G= 250Ω καί R_B εἶναι ἀμελητέα, νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς R_3 διά τήν ὁποίαν ἡ γέφυρα ἰσορροπεῖ.

γ) Διά νά προκληθῇ αἰσθητή ἀπόκλισις εἰς τό γαλβανόμετρον G, ἀπαιτεῖται ἔντασις ρεύματος 0,1 μA. Διά ποίαν ἐλαχίστην μεταβολήν τῆς μεταβλητῆς ἀντιστάσεως R_3, ἀπό τήν θέσιν ἰσορροπίας, εἶναι δυνατόν νά διαπιστωθῇ διέλευσις ρεύματος διά τοῦ γαλβανομέτρου.

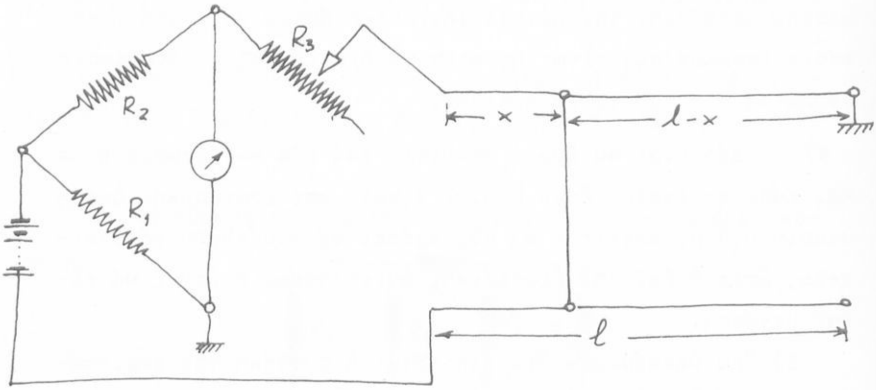
47 Δίδονται 40 ὅμοια στοιχεῖα καί μία ἀντίστασις R = 4Ω. Κάθε στοιχεῖον ἔχει Η.Ε.Δ. 2 volt καί ἐσωτερικήν ἀντίστασιν 0,4 Ω. Ζητεῖται α) Πῶς πρέπει νά συνδεθοῦν τά στοιχεῖα, ὥστε ἡ ἐπί τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R ἰσχύς νά εἶναι μεγίστη.

β) Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη τῆς περιπτώσεως α καί ὅτι ἡ R εἶναι ἡ ἀντίστασις θερμοσίφωνος συντελεστοῦ ἀποδόσεως 0,8 , ποῖος ὁ συντελεστής ἀποδόσεως ὁλοκλήρου τοῦ κυκλώματος καί ποία ἰσχύς καταναλίσκεται εἰς τό ἐσωτερικόν ἑκάστου στοιχείου.

48 Διαθέτομεν πολλούς λαμπτῆρας δύο μορφῶν. Ἕκαστος λαμπτήρ $Λ_1$ τῆς πρώτης μορφῆς φέρει τάς ἐνδείξεις: 110volt-60 watt, ἐνῷ ἕκαστος λαμπτήρ $Λ_2$ τῆς δευτέρας μορφῆς χαρακτηρίζεται ὑπό τῶν ἐνδείξεων: 110 volt-150 watt. Συνδέομεν x_1 λαμπτῆρας τῆς μορφῆς $Λ_1$ ἐν παραλλήλῳ, καθώς ἐπίσης x_2 λαμπτῆρας τῆς μορφῆς $Λ_2$ πάλιν ἐν παραλλήλῳ, καί τά συγκροτήματα τούτων ἑνοῦμεν ἐν σειρᾷ. Εἰς τά ἄκρα τοῦ ὅλου συστήματος ἐφαρμόζομεν τήν τάσιν τῶν 220 volt. Ποῖαι αἱ ἐλάχισται τιμαί τῶν x_1 καί x_2, ἵνα ἕκαστος λαμπτήρ λειτουργῇ κανονικῶς;

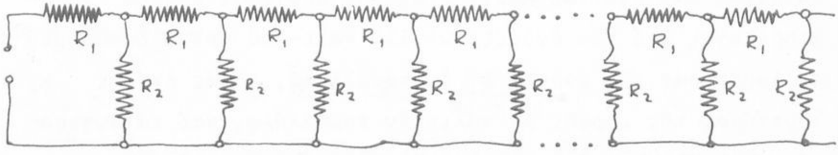
49 Τό εἰκονιζόμενον κύκλωμα χρησιμοποιεῖται διά τόν προσδιορισμόν τῆς θέσεως βραχυκυκλώματος ζεύγους τηλεφωνι-

κῶν καλωδίων ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 30 km. Ἑκάστη τῶν R_1 καί R_2 εἶναι 300 Ω καί ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς εἶ-



ναι 40 Ω/km. Εὕρατε τήν ἀπόστασιν x τοῦ βραχυκυκλώματος ἄν στήν θέση ἰσορροπίας ἡ R_3 εἶναι 440 Ω.

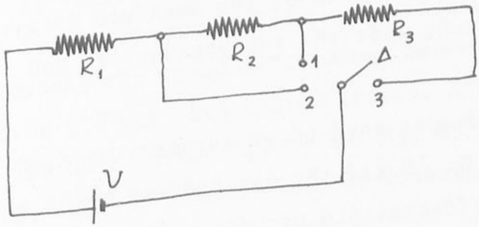
50 Εἰς τό ἀκόλουθον δικτύωμα αἱ ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 ἐπαναλαμβάνονται ὁμοίως ἄπειρες φορές.



Προσδιορίσατε τήν ἀντίστασίν του μεταξύ τῶν Α καί Β.

51 Ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος παριστᾶ τάς χρησιμοποιουμένας ἀντιστάσεις εἴς τινα ἠλεκτρικήν ἐγκατάστασιν.

Ἡ ἐγκατάστασις λειτουργεῖ ὑπό συνεχῆ τάσιν 440 V. Ὅταν ὁ διακόπτης εὑρίσκεται εἰς τήν θέσιν 1, ἡ δαπανωμένη ἰσχύς εἶναι 1,2 KW, εἰς τήν θέσιν 2 ἡ δαπανωμένη ἰσχύς αὐξάνεται κατά 10%, ἐνῷ εἰς τήν θέσιν 3 ἐλαττοῦται κατά 10%.



Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3.

52 Βαροῦλκον λειτουργεῖ μέ ἠλεκτρικόν κινητῆρα, ὁ ὁποῖος τροφοδοτεῖται μέ τάσιν 220 V καί ἀποδίδει μηχανικήν ἰσχύν 10 HP. 'Εάν ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 80% ζητοῦνται:

α) 'Η ἔντασις τοῦ ρεύματος, τό ὁποῖον διαρρέει τόν κινητῆρα κατά τήν λειτουργίαν του,

β) "Αν ἡ ἀπόδοσις τοῦ βαρούλκου εἶναι 75% εἰς ποῖον ὕψος δύναται νά μεταφερθῇ δι' αὐτοῦ ὕδωρ μάζης 10 tn ἐντός χρόνου 200 sec; ($g = 10\ m/sec^2$).

53 'Ηλεκτρική γεννήτρια τροφοδοτεῖται ὑπό ὑδατοπτώσεως ὕψους 200 m καί παροχῆς ὕδατος $1 m^3/sec$. 'Η παραγομένη ἠλεκτρική ἐνέργεια διατίθεται ἐξ ὁλοκλήρου πρός ἐξάτμισιν ὕδατος ἀρχικῆς θερμοκρασίας 20^oC. Ζητεῖται ἡ ἀνά sec παραγωγή ἀτμοῦ ἐφ' ὅσον ὁ γενικός συντελεστής ἀποδόσεως εἶναι $\eta = 0,40$.

54 'Ο ὑδροστρόβιλος κινεῖ ἐναλλακτῆρα μέ ἀπόδοσιν n_2 ($n_2 = 90\%$) ἐνεργοῦ τάσεως $U_{εν}$ ($U_{εν} = 2500$ V). 'Η παρεχομένη ἐνέργεια ὑπό τοῦ ἐναλλακτῆρος μεταβιβάζεται εἰς τήν κα-

τανάλωσιν μέσῳ γραμμῆς ἀντιστάσεως R(R = 2Ω). 'Ο συντελεστής ἰσχύος τῆς γραμμῆς εἶναι n_3(n_3 = 85%). Νά ὑπολογισθοῦν ἡ δαπανωμένη ἐπί τῆς γραμμῆς ἐνέργεια συνεπείᾳ τοῦ φαινομένου Joule καί ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἐνεργείας εἰς τά ἄκρα τῆς γραμμῆς πρός τήν παρεχομένην ὑπό τοῦ ἐναλλακτῆρος ἐνέργειαν.

55 'Ισοδύναμος πηγή μέ χαρακτηριστικά E, r τροφοδοτεῖ ἀντίστασιν 10 Ω. 'Η ἐπί τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς καταναλισκομένη ἰσχύς εὑρίσκεται διά μετρήσεως ἴση πρός 3,620 W. 'Εν συνεχείᾳ ἡ ἀντίστασις τῶν 10Ω ἀντικαθίσταται δι'ἀντιστάσεως 20Ω καί μετρᾶται ἡ ἐσωτερική κατανάλωσις (ἀπώλειαι) τῆς πηγῆς εὑρισκομένης ἴση πρός 47,65W. Ζητοῦνται τά E καί r τῆς ἰσοδυνάμου πηγῆς.

56 Εἰς τόπον A διατίθεται τάσις 220 Volt. Αὕτη τροφοδοτεῖ κινητῆρα, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τόπον B ἀπέχοντος τοῦ A κατά 800 m, διά σύρματος ἔχοντος ἀντίστασιν 0,01 Ω/m. 'Ο κινητήρ οὗτος περιστρέφει ἕνα τροχόν, ὅστις ὑπόκειται εἰς τήν ἐπενέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως F = 80 kg* ἐνεργούσης ἐφαπτομενικῶς καί ἀντιτιθεμένης εἰς τήν κίνησιν τοῦ τροχοῦ εἰς τρόπον ὥστε ἡ γραμμική ταχύτης τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ νά εἶναι υ = 0,12 m/sec. "Αν ὁ κινητήρ ἔχῃ ἐσωτερικήν ἀντίστασιν 2Ω, νά ὑπολογισθοῦν: α) 'Η ἔντασις τοῦ ρεύματος. β) 'Η ΑΗΕΔ τοῦ κινητῆρος, γ) ὁ συντελεστής ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος καθώς καί ὁλοκλήρου τῆς γραμμῆς καί δ) 'Η ὁλικῶς καταναλισκομένη ἰσχύς.

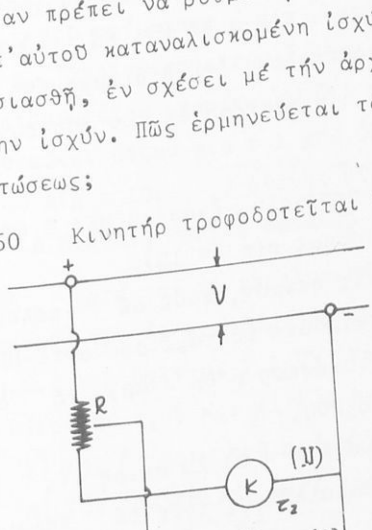
57 Δευτερεύων πίναξ διανομῆς B ἀπέχει ἀπό κεντρικόν A 200 m καί τροφοδοτεῖ 50 λυχνίας τῶν 100 W καί κινητῆρα ἰσχύος 10 CV. 'Η τάσις εἶναι 230 V εἰς τό A καί ἐπιτρέπεται πτῶσις τάσεως 5% ἕως τόν B. Νά εὕρετε τήν διατομήν τοῦ χαλκίνου ἀγωγοῦ μεταξύ A καί B καί τήν κατανάλωσιν εἰς τόν πίνακα A διά δεκάωρον λειτουργίαν (ρx = 0,018 $\Omega mm^2 . m^{-1}$).

58 Τρεῖς ἀντιστάσεις R_1, R_2 καί R_3 ἐκ χαλκοῦ, συνδέονται ἐν σειρᾷ καί ἀκολούθως διαβιβάζεται δι'αὐτῶν ρεῦμα ἐντάσεως 20Α. Αἱ τομαί αὐτῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καί 4, ὁ δέ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ ἑκάστης ἀντιστάσεως 1 cm^3. 'Επί τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀντιστάσεων ἀναφαίνεται συνολικῶς θερμότης 600 cal ἀνά πρῶτον λεπτόν. Ζητεῖται α) 'Η τιμή ἑκάστης τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2 καί R_3. β) Τό μῆκος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν καί γ) 'Η ἰσοδύναμος ἀντίστασις. Δίδεται εἰδ. ἀντίστασις χαλκοῦ $1,5 \cdot 10^{-6}$ Ω.cm.

59 Οἱ πόλοι πηγῆς ἠλ.γ.δυνάμεως Ε καί ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 4,5Ω$ συνδέονται μέ τούς ἀκροδέκτας ροοστάτου. 'Αρχικῶς ρυθμίζομεν τήν ἀντίστασιν τοῦ ροοστάτου εἰς τήν τιμήν τῶν 0,5Ω.

α) Νά εὑρεθῇ ἄν ὑφίσταται ἄλλη τιμή τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ροοστάτου διά τήν ὁποίαν ἡ ἐπ'αὐτοῦ καταναλισκομένη ἰσχύς διατηρεῖται ἡ αὐτή. β) Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή εἰς τήν ὁποίαν πρέπει νά ρυθμισθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου, ἵνα ἡ ἐπ'αὐτοῦ καταναλισκομένη ἰσχύς 1) διπλασιασθῇ καί 2) τριπλασιασθῇ, ἐν σχέσει μέ τήν ἀρχικῶς ἐπ'αὐτοῦ καταναλισκομένην ἰσχύν. Πῶς ἑρμηνεύεται τό ἀποτέλεσμα τῆς δευτέρας περιπτώσεως;

60 Κινητήρ τροφοδοτεῖται ὑπό τάσεως $U = 240$ V καί ἀποδίδει ἰσχύν $N = 14.616$W. 'Η βιομηχανική του ἀπόδοσις εἶναι 84%, ἡ δέ ἠλεκτρική του 91% καί ἡ ἀπώλεια εἰς τήν ἀντίστασιν r_1 4% τῆς ὁλικῆς ἀπορροφωμένης ἰσχύος. Ζητοῦνται: 1ον) Τό ρεῦμα διά τοῦ ὁποίου διαρρέ-



εται. 2ον) Τά ρεύματα ι_1 καί ι_2 είς τούς κλάδους (I) καί (II) καί αί άντιστάσεις R_1 καί R_2 τῶν κλάδων. 3ον) Ποία ή έλαχίστη άντίστασις R ἵνα μή στρεφομένου τοῦ κινητῆρος ἔχομεν μέγιστον ρεῦμα 75 A.

61 Νά εὑρεθῇ ὁ άριθμός τοῦ Loschmidt, ὅταν γνωρίζομεν τό φορτίον τοῦ ήλεκτρονίου, e καί τήν σταθεράν Faraday, F.

62 Βολτάμετρον μέ ήλεκτρόδια έκ χαλκοῦ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καί ἔχει άντίστασιν R(R = 15Ω). Ὅταν δι'αὐτοῦ διέλθη έπί τι χρονικόν διάστημα ρεῦμα έντάσεως i (i = 10A), έπί τῆς καθόδου άποτίθεται μᾶζα χαλκοῦ m (m = = 113,2 gr). Νά ὑπολογισθῇ ή μᾶζα τοῦ άποτιθεμένου είς τήν κάθοδον χαλκοῦ, έάν παραλλήλως πρός τό βολτάμετρον συνδεθῇ κινητήρ έσωτερικῆς άντιστάσεως r(r = 5Ω), τοῦ ὁποίου έμποδίζεται ή λειτουργία. Ἔντασις ρεύματος καί χρόνος διελεύσεως αὐτοῦ παραμένουν τά αὐτά. Νά ὑπολογισθῇ ή μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, ή ὁποία συνολικῶς άποτίθεται κατά τόν αὐτόν χρόνον έάν ὁ κινητήρ έργάζεται ὑπό ίσχύν N(N = 70 W). Νά εὑρεθῇ ή άντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος. Ὑποθέτομεν, ὅτι ή διερχομένη ἔντασις διά τοῦ κινητῆρος εἶναι ή μικροτέρα έκ τῶν δύο δυνατῶν τιμῶν.

63 Διαθέτομεν N (N = 12) στοιχεῖα, ἕκαστον ΗΕΔ E (E = = 1,5 V) καί έσωτερικῆς άντιστάσεως r(r = 1Ω).

α) Συνδέομεν τά στοιχεῖα είς σειράν, τούς δέ πόλους τῆς στήλης συνδέομεν μέ τά ήλεκτρόδια βολταμέτρου άντι-ΗΕΔ E'(E' = 2V) καί έσωτερικῆς άντιστάσεως r'(r'= 4Ω), τό ὁποῖον περιέχει άραιόν διάλυμα H_2SO_4.

β) Συνδέομεν τά στοιχεῖα άνά λ(λ = 2) έν σειρᾷ είς μ (μ = 6) στήλας καί τάς στήλας παραλλήλως, τούς δέ πόλους τῆς στήλης μέ τά ἠλεκτρόδια τοῦ ἀναφερθέντος βολταμέτρου

Νά εὑρεθῆ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ὁ ἀναγκαῖος χρόνος διά νά λάβωμεν μᾶζαν m(m = 1 gr) ὑδρογόνου καί ἡ μᾶζα τοῦ Zn . Ἀτομικόν βάρος A_{Zn} = 66 , ἡ καταναλισκομένη κατά τόν χρόνον αὐτόν ἐντός ὅλων τῶν στοιχείων.

64 Ἀφήνομεν νά διέλθη ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως διά τριῶν βολταμέτρων τοποθετημένων ἐν σειρᾷ: Τό πρῶτον περιλαμβάνει H_2SO_4 (ἠλεκτρόδια ἐκ γραφίτου), τό δεύτερον NaCl (ἠλεκτρόδια ἐκ γραφίτου) καί τό τρίτον $AgNO_3$ (ἠλεκτρόδια ἐξ ἀργύρου). Εἰς τό κύκλωμα τίθεται ροοστάτης διά τήν ρύθμισιν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος.

1. Σχεδιάσατε τό κύκλωμα.
2. Τί συμβαίνει εἰς τά δύο πρῶτα βολτάμετρα; Πῶς ἀναγνωρίζομεν τά προϊόντα; Δικαιολογήσατε τάς ἀπαντήσεις.
3. Μετά χρόνον t(t = 50 min) ἡ μᾶζα τῆς καθόδου τοῦ τρίτου βολταμέτρου ηὐξήθη κατά m(m = 16,78 gr). Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος;
4. Ὑπολογίσατε τήν ἔκλυσιν ἀερίου εἰς τό πρῶτον βολτάμετρον, ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι φορτίον F(F = 96500 Cb) ἐλευθερώνει μᾶζαν μ(μ = 1 gr) ὑδρογόνου. Ἀτομικόν βάρος ἀργύρου A(A = 108) σθένος n(n = 1).

(B.E.P.C., Paris, session de Juin 1964).

65 Κατά τήν ἠλεκτρολυτικήν παρασκευήν Al ἐκ τοῦ Al_2O_3 ἡ μεταξύ τῶν ἠλεκτροδίων ἐφηρμοσμένη τάσις εἶναι 5V, ἡ δέ Α.Η.Ε.Δ τοῦ βολταμ. 2,8 V. Ὑπό τάς συνθήκας αὐτάς παρασκευάζονται 4,05 Kgr Al ἀνά h. Ὑπολογίσατε

α) τήν ἔντασιν τοῦ ρεύματος

β) Τήν ἐσωτερικήν ἀντίστασιν τοῦ βολταμέτρου

γ) τήν ἠλεκτοικήν ἰσχύν, ἥτις μετατρέπεται εἰς χημικήν δ) τήν δαπανωμένην ἐνέργειαν εἰς KWh, δι'ἕκαστον τόνον, Al X.I. τοῦ Al = 9.

66 Δύο συσσωρευταί (E = 2 volt καί r = 0, ἕκαστος)τοποθετοῦνται κατ'ἀρχήν ἐν σειρᾷ καί κατόπιν ἐν παραλλήλῳ,ἑκάστην δέ φοράν ἡ πηγή τροφοδοτεῖ ἀντίστασιν R = 8Ω. Ποία, εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἡ διάρκεια τῆς ἐκφορτίσεως, ἄν ἕκαστος τῶν συσσωρευτῶν ἔχει χωρητικότητα 15 Ah.

67 Γεννήτρια E = 19V καί r = 6Ω, τροφοδοτεῖ δύο κλάδους συνδεδεμένους παράλληλα, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς περιλαμβάνει R_1 = 10Ω καί βολταμ. Pt//$CuSO_4$//Pt ἀντιστάσεως 7Ω & ὁ ἕτερος R_2 = 10Ω βυθισμένην εἰς θερμιδόμετρον ὁλικῆς θερμοχωρητικότητος 500 cal/grad. Ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομ. ἀνυψοῦται κατά 3^o εἰς 10 min καί 27 sec. Ζητοῦνται:

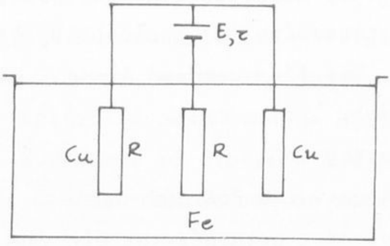
α) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἕκαστον βραχίονα

β) Τό ἀνά λεπτόν ἀποτιθέμενον βάρος Cu καί

γ) Ἡ Α.Η.Ε.Δ. τοῦ βολταμέτρου.

68 Ἠλεκτρικόν στοιχεῖον περιέχει διάλυμα H_2SO_4 καί φέρει βυθισμένα δύο ἠλεκτρόδια, ἕν ἐκ Zn καί ἕν ἐκ Cu. Κατά τήν ἀντίδρασιν 1gr Zn μετά τοῦ H_2SO_4 ἀποδίδονται 1620 cal, ἐνῷ κατά τήν ἀντίδρασιν 1grCu ἀπορροφῶνται 880 cal. Νά εὑρεθῇ ἡ Ε τοῦ στοιχείου.

69 Συσκευή ἀμφιπλεύρου ἐπιχαλκώσεως ἀποτελεῖται ἀπό



τήν πρός ἐπιχάλκωσιν σιδηρᾶ πλάκα, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν κάθοδον, ἑκατέρωθεν τῆς ὁποίας εὑρίσκονται δύο πλάκες χαλκοῦ συνδεδεμέ-

ναι μέ τόν θετικόν πόλον τῆς πηγῆς. Ἡ Ε = 12V καί r=0,5Ω.
Αἱ τρεῖς πλάκες ἔχουν τό αὐτό ἐμβαδόν εἶναι παράλληλοι καί ἰσαπέχουν. Τό βολτάμετρον περιέχει διάλυμα $CuSO_4$ καί ἡ ἀντίστασις τοῦ διαλύματος μεταξύ τῶν πλακῶν εἶναι R = 5Ω. Νά ὑπολογισθῇ ἡ αὔξησις τοῦ βάρους τῆς σιδηρᾶς πλακός ἐντός χρόνου 10 h. Ἀτομικόν βάρος χαλκοῦ 63,54.

70 Δεδομένου ὅτι κατά τήν σύνθεσιν 1 mol ὕδατος ἀπό H_2 καί O_2 ἐκλύονται 69 kcal, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀντιηλεκτρεγερτική δύναμις βολταμέτρου περιέχοντος ὀξυνισμένον ὕδωρ (μέ H_2SO_4) καί ἠλεκτρόδια ἀπρόσβλητα (ἐκ Pt).

71 Συρμάτινο ὀρθογώνιον πλαίσιον ἐκ χαλκοῦ εὑρίσκεται τοποθετημένον μέ τίς μικρότερες πλευρές του παραλλήλους πρός τάς δυναμικάς γραμμάς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η. Τό πλαίσιον ἔχει διαστάσεις α x β(α > β)καί διαρρέεται ὑπό ρεύματος ι. Ζητεῖται ἡ μηχανική ροπή ἐπί τοῦ πλαισίου, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται

α) Εἰς τήν περιγραφεῖσαν θέσιν καί

β) Ἐάν στραφῇ εἰς νέαν θέσιν εἰς γωνίαν $\varphi = 45^o$ ὡς πρός τήν ἀρχικήν.

72 Αἱ συνιστῶσαι τοῦ γ.μ. πεδίου εἶναι H_o = 0,18Gauss καί Ηκ = 0,6 Gauss. Ὁριζόντιος ἀγωγός διαρρεόμενος ὑπό ρεύματος 10Α διευθύνεται πρός δυσμάς. Ποία ἡ ὁριζοντία καί ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἀνά cm σύρματος ἀσκουμένης δυνάμεως.

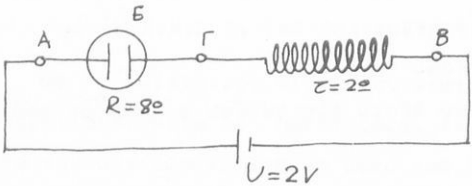
73 Τά ἄκρα πλαισίου, φέροντος 1000 περιελίξεις, εἶναι συνδεδεμένα μέ γαλβανόμετρον, ἀντιστάσεως 50Ω, Τό πλαίσιον εὑρίσκεται μεταξύ τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου μέ τό ἐπίπεδόν του κάθετον πρός τάς δυναμικάς γραμμάς. Ὅταν κλείσωμεν τό

κύκλωμα τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου, διά τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται φορτίον 2 Cb. Δεδομένου ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου εἶναι 30Ω, νά εὑρεθῇ ἡ μαγνητική ροή ἡ διερχομένη δι'αὐτοῦ.

74 'Ωκεάνιον ρεῦμα σταθ. διατομῆς κινεῖται μέ σταθεράν ταχύτητα υ = 1 m/sec εἰς περιοχήν ἔνθα ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγν. πεδίου εἶναι H = = 0,35 Gauss . 'Η εἰδική ἀγωγιμότης τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἰς τήν ἐν λόγῳ περιοχήν εἶναι $1/\rho$ = 0,04 Ω^{-1} cm^{-1}.

'Υπολογίσατε τήν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ἀνά μονάδα ἐπιφανείας εἰς τήν ἐν λόγῳ περιοχήν.

75 Δίδεται ἡ συνδεσμολογία τοῦ σχήματος: Τό σωληνοειδές ἔχει ἐμβαδόν σπείρας 25 cm^2 καί φέρει 10 σπ/cm. 'Η μαγνητική ροή μιᾶς σπείρας τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι $14{,}2\cdot 10^{-8}\cdot\pi$ Weber, Ζητοῦνται:



α) 'Η ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τό κύκλωμα

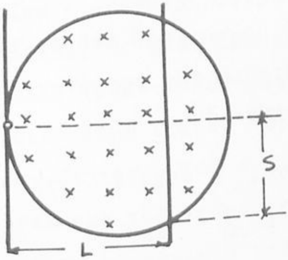
β) Αἱ τάσεις $U_{A\Gamma}$ & $U_{B\Gamma}$ καί

γ) 'Η Α.Η.Ε.Δ. τοῦ βολταμέτρου

76 Σωληνοειδές ἀντιστάσεως R(R = 4000 Ω) δημιουργεῖ εἰς τό ἐσωτερικόν του ὁμογενές μαγνητικόν πεδίον ἐντάσεως H(H = 1 Oe) ὅταν τό διερχόμενον ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν i(i= 0,1 A). 'Ο ἄξων τοῦ σωληνοειδοῦς εἶναι κάθετος πρός τόν μαγνητικόν μεσημβρινόν. Εἰς τό κέντρον αὐτοῦ εἶναι τοποθετημένη

μικρά όριζοντία μαγνητική βελόνη ἐξηρτημένη διά νήματος.Αὕ-
τη φέρει κατακόρυφον ἐπίπεδον κάτοπτρον, ἐπί τοῦ ὁποίου πί-
πτει λεπτή, φωτεινή δέσμη, ἀνακλᾶται καί προσπίπτει ἐπί κα-
νόνος ἀπέχοντος κατά l(l = 1m) ἀπό τῆς βελόνης παραλλήλου
πρός τόν γήινον μαγνητικόν μεσημβρινόν. Εἰς τά δύο ἄκρα τοῦ
σωληνοειδοῦς ἐφαρμόζεται τάσις U(U = 2m). Νά ὑπολογισθῇ ἡ
μετατόπισις τῆς φωτεινῆς δέσμης ἐπί τοῦ κανόνος. (H_o=0,2 Oe).

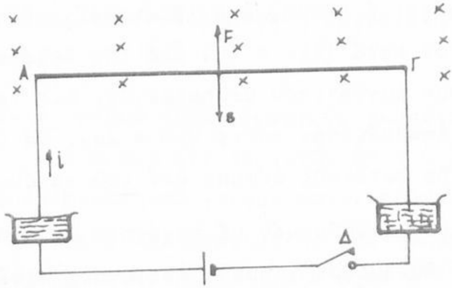
77 'Ηλεκτρόνιον κινούμενον μέ ταχύτητα 3,6·10^9 cm/sec κα-
θέτως πρός τά δυναμικάς γραμμάς ὁμογενοῦς πεδίου παρουσιά-
ζει ἀπόκλισιν s = 2,4 cm, ἐπί ὁ-
θόνης, ἡ ὁποία ἀπέχει τοῦ σημεί-
ου εἰσόδου κατά L = 33 cm.
'Υπολογίσατε τήν ἔντασιν τοῦ μα-
γνητικοῦ πεδίου.



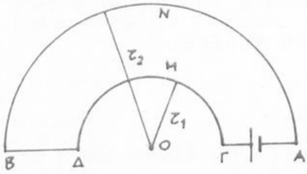
78 Πηνίον μήκους l(l = 1,20m) καί τομῆς S(S = 50,3 cm^2)φέ-
ρει N(N = 750) σπείρας. Μικρόν πηνίον, τομῆς σ(σ = 4,91cm^2)
μέ n(n = 30) σπείρας, τοποθετεῖται ὁμοαξονικῶς εἰς τό μέσον
τοῦ πηνίου. 'Υπολογίσατε τήν μέσην ΗΕΔ τήν ἐπαγομένην εἰς
τό μικρόν πηνίον, ὅταν ἡ φορά τοῦ ρεύματος, ἐντάσεως i (i =
= 4A), τοῦ διαρρέοντος τό πρῶτον πηνίον, ἀναστρέφεται ἐντός
χρόνου dt(dt = 0,2 sec).

79 'Ελαφρά μεταλλική ράβδος ΑΓ μήκους l καί μάζης m
συνδέεται ὡς εἰς τό σχῆμα μέ δύο δοχεῖα Hg καί πηγήν συνε-
χοῦς τάσεως. Τό σῦρμα εὑρίσκεται τοποθετημένον καθέτως πρός
τάς δυναμικάς γραμμάς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως
Η. Κλείοντες τόν διακόπτην Δ ἐπί χρόνον Δt μόνον, ἐκινήθη
εἰς τό κύκλωμα φορτίον Q. Εἰς ποῖον ὕψος θά ἀνέλθῃ ἐκ τῆς

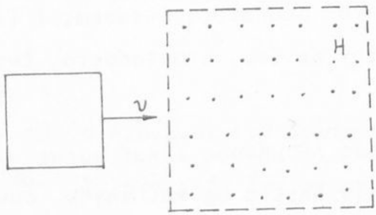
ἀρχικῆς της θέσεως ἡ ράβδος, ὑποθέτοντες ὅτι ὁ χρόνος Δt εἶναι πολύ μικρότερος ἀπό τόν χρόνον κινήσεως τῆς ράβδου.



80 'Υπολογίσατε τήν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου είς τό σημεῖον O τοῦ σχήματος ἄν ἡ ἀντίστασις τῶν συρμάτων ΓΜΔ καί ANB εἶναι $\frac{2}{\pi}$ Ω/cm, $E = 20$ V, $r_1 = 5$ cm καί $r_2 = 8$ cm.



81 Τετράγωνον πλαίσιον, πλευρᾶς 50 cm, εἰσέρχεται ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 1600 Oersted, μέ τό ἐπίπεδον κάθετον πρός τάς δυναμικάς γραμμάς, κινούμενον κατά διεύθυνσιν παράλληλον πρός μίαν πλευράν αὐτοῦ μέ σταθεράν ταχύτητα 100 cm/sec. 'Εάν ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου εἶναι 0,4 Ω, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος.



82 Πέριξ σιδηροῦ πυρῆνος μαγνητικῆς διαπερατότητος μ

(μ = 1700) περιτυλίσσεται πηνίον, μήκους l(l = 20 cm) μέ N
(N = 180) σπείρας ἐμβαδοῦ S(S = 25 cm^2).

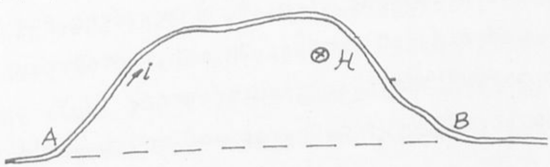
α) Νά εὑρεθῇ ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς L τοῦ πηνίου

β) Τό πηνίον τοῦτο διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως i
(i = 10A). 'Εάν διακόψωμεν τό ρεῦμα εἰς χρόνον dt(dt =
= 0,01 sec), ποία ἡ ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς;

83 Κυκλικόν πηνίον ἐκ N(N = 50) σπειρῶν καί μέσης ἀ-
κτῖνος r(r = 12 cm) τοποθετεῖται μέ τό ἐπίπεδον του κάθε-
τον ἐπί τόν μαγνητικόν μεσημβρινόν. Εἰς τό κέντρον τοῦ πη-
νίου εὑρίσκεται μικρά μαγνητική βελόνη δυναμένη νά ταλαν-
τοῦται. Μέ μίαν ὡρισμένην ἔντασιν ρεύματος ὁ μαγνήτης ἐκ-
τελεῖ ταλαντώσεις συχνότητος ν_1(ν_1 = 0,3 Hz), ἐάν ὅμως τό
αὐτό ρεῦμα διέλθῃ ἀντιθέτως ὁ μαγνήτης ἐκτελεῖ ταλαντώσεις
συχνότητος ν_2(ν_2 = 0,15 Hz). Εὕρατε τάς δυνατάς τιμάς τῆς
ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. Δίδεται ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ
γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου H_o(H_o = 0,2 cm).

84 Δίσκος ἐκ χαλκοῦ ἀκτῖνος r(r = 10 cm) περιστρέφε -
ται μέ συχνότητα ν(ν = 20 Hz) μέ τό ἐπίπεδόν του κάθετον
εἰς ὁμογενές μαγνητικόν πεδίον. 'Εάν ἡ ἐπαγομένη ΗΕΔ μετα-
ξύ κέντρου καί τοῦ ἄκρου τοῦ δίσκου εἶναι E(E = 3,14 mV),
ποία ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου;

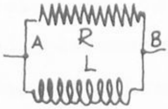
85 Δείξατε ὅτι εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἀγωγόν διαρ-
ρεόμενον ὑπό ρεύματος ἐντάσεως i καί εὑρισκόμενον ἐντός ὁ-
μογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου μέ τό ἐπίπεδόν του κάθετον πρός



τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου ἡ δύναμις Laplace εἶναι F = iH(AB).

86 Μικρά σφαῖρα, κινουμένη ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου, φωτογραφεῖται ἐπί πλακός κειμένης παραλλήλως καί ὑπεράνω τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἡ σφαῖρα φωτίζεται διά λυχνίας πυρακτώσεως, ἐλαχίστης θερμικῆς ἀδρανείας, τροφοδοτουμένης διά μονοφασικοῦ ρεύματος, συχνότητος 50 Hz. Ἐπί τῆς φωτογραφικῆς πλακός ἡ τροχιά τῆς σφαίρας, μήκους 52,5 mm, ἐμφανίζει 35 διακοπάς ὀφειλομένας εἰς τήν περιοδικήν μεταβολήν τῆς ἐντάσεως τοῦ φωτισμοῦ. Ἡ ἑστιακή ἀπόστασις τοῦ φακοῦ τῆς φωτογραφικῆς μηχανῆς εἶναι 65 mm καί ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπό τοῦ πρός φωτογράφησιν ἐπιπέδου εἶναι 910 mm. Ζητεῖται ἡ μέση ταχύτης τῆς σφαίρας κατά τήν διάρκειαν τοῦ πειράματος.

87 Εἰς κύκλωμα ἐναλλασσομένου ρεύματος παρεμβάλλονται μία ὠμική ἀντίστασις R = 20 Ω ἡνωμένη παραλλήλως μέ πηνίον αὐτεπαγωγῆς L = 300 μH καί ἀμελητέας ὠμικῆς ἀντιστάσεως. Ἡ ἐνεργός τάσις μεταξύ τῶν A καί B εἶναι 100 Volt τῶν 1000 c/sec. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν ἐνεργῶν ἐντάσεων τῶν ρευμάτων, τά ὁποῖα διατρέχουν τήν R καί τήν L καθώς καί ἡ ἐνεργός ἔντασις τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος.



88 Ἡ ὀνομαστική ἰσχύς μετασχηματιστοῦ εἰς τό δευτερεῦον εἶναι 10 KVA μέ τάσιν 1200 V.

Ἐάν ἡ σχέσις μεταφορᾶς εἶναι 6, ἡ συχνότης f = 100 Hz καί ἡ μεγίστη ροή διά τοῦ πυρῆνος 24 mWb, ζητοῦνται:

1) Ἡ ὀνομαστική τάσις τοῦ πρωτεύοντος.

2) Ἡ ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος καί τοῦ πρωτεύοντος ὑ-

πό πλῆρες φορτίον.

3) Ὁ ἀριθμός τῶν ἑλιγμάτων εἰς τό δευτερεῦον καί πρωτεῦον.

89 Ὁ ἀριθμός τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος μετασχηματιστοῦ εἶναι $N_1 = 3600$ τοῦ δέ δευτερεύοντος $N_2 = 100$. Εἰς τό πρωτεῦον ἐφαρμόζεται τάσις $U_{1,\varepsilon\nu} = 200\sqrt{2}$ volt. Τά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος συνδέονται μέ πυκνωτήν χωρητικότητος $C = 1\mu F$, ὁ ὁποῖος ἐκφορτίζεται ἀποτόμως (διά σχηματισμοῦ τόξου) μόλις ἡ τάσις εἰς τό δευτερεῦον φθάσῃ τήν μεγίστην της τιμήν. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπελευθερουμένη ἐνέργεια εἰς ἑκάστην ἐκφόρτισιν.

90 Εἰς σταθμόν ἠλεκτροπαραγωγῆς Α, ἕνας μετασχηματιστής M_1 (ἀνυψωτής τάσεως) ἀπορροφᾷ ἰσχύν $P_1 = 80$ KW ὑπό ἐνεργόν τάσιν $U_{1\varepsilon\nu.} = 1000$ volt. Τό δευτερεῦον τοῦ M_1 παρέχει $I_{\varepsilon\nu} = 5A$ εἰς γραμμήν μεταφορᾶς, ἥτις καταλήγει εἰς τά ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος μετασχηματιστοῦ M_2, τοῦ ὁποίου τό δευτερεῦον τροφοδοτεῖ τήν κατανάλωσιν σταθμοῦ Β ὑπό ἐνεργόν τάσιν $U'_{2\varepsilon\nu} = 150$ volt. Ἡ ὁλική ἀπώλεια ἐνεργείας εἶναι 10% μέ συντελεστάς ἀποδόσεως τῶν μετασχηματιστῶν, τοῦ μέν M_1 0,95 καί τοῦ M_2 0,96. Ἡ διαφορά φάσεως τάσεως-ἐντάσεως εἰς τά ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος τοῦ M_1 καί τοῦ πρωτεύοντος τοῦ M_2 εἶναι τοιαύτη ὥστε: $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}76$. Ὑπολογίσατε τήν ἀντίστασιν (R) τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς καί τόν λόγον τῶν σπειρῶν, δευτερεύοντος-πρωτεύοντος, εἰς ἕκαστον τῶν μετασχηματιστῶν.

91 Εἰς τούς πόλους γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος, ἐφαρμόζεται τάσις 80 V ὅταν αὕτη παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως I. Ἐάν ἡ ΗΕΔ αὐτῆς εἶναι 140 V καί ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις 3Ω, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ παρεχομένου ρεύματος καί ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας.

92 Ζητεῖται νά ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς καί ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις κινητῆρος συνεχοῦς ρεύματος, ὅταν οὗτος λειτουργῇ ὑπό τάσιν 120 V, ἔχῃ ἀπόδοσιν 75% καί διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως 15Α.

Αἱ ἀπώλειαι εἰς τήν γραμμήν συνδέσεως τοῦ κινητῆρος μέ τήν γεννήτριαν εἶναι 300 W. Ἀπώλειαι ἐντός τοῦ κινητῆρος μόνον λόγῳ θερμότητος.

93 Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς συνδέσεως γεννητρίας καί κινητῆρος συνεχοῦς ρεύματος, ὥστε ἡ ἀπώλεια ἐπ'αὐτῆς νά εἶναι τά 0,20 τῆς ἰσχύος τῆς παρεχομένης ὑπό τῆς γεννητρίας.

Πόση εἶναι τότε ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τούς πόλους τοῦ κινητῆρος;

Δίδεται ὅτι ἡ τάσις εἰς τούς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 110 V καί ἡ παρεχομένη ὑπ'αὐτῆς ἔντασις εἶναι 64Α.

94 Εἰς μηχανήν συνεχοῦς ρεύματος, ἡ μέση ἐπαγομένη τάσις μεταξύ τῶν ψηκτρῶν αὐτῆς εἶναι 120V , ἔχει δέ εἰς τό τύμπανον αὐτῆς 150 ἀγωγούς συνδεδεμένους ἐν σειρᾷ. Ἐάν ἡ ροή τοῦ πεδίου εἶναι 25 mWb νά εὑρεθῇ πόσας φοράς ἀνά λεπτόν ἕκαστος ἀγωγός κόπτει τό μαγνητικόν πεδίον τῶν P πόλων.

95 Γεννήτρια ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 20Ω συνδέεται μέσῳ ἀγωγῶν ἀντιστάσεως 12Ω μέ κινητῆρα, εἰς τούς πόλους τοῦ ὁποίου ἡ τάσις εἶναι 80V. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ΗΕΔ τῆς γεννητρίας καί ἡ ἀντι-ΗΕΔ τοῦ κινητῆρος ἐάν ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος εἶναι 8 Ω καί ἡ τάσις εἰς τούς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 110 V.

FOTO - OFFSET
Σ. ΛΕΟΥΣΗΣ - Δ. ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΗΣ
ΝΟΤΑΡΑ 39 ΑΘΗΝΑΙ - ΤΗΛ. 88.26.862