ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ
ΚΑΙ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΗΤΟΙ:
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ 1270 ΕΚΛΕΚΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ
ΕΝ ΤΗ ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΩ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ$^{\text{ΙΑΣ}}$ Α.Ε.
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 38 — ΑΘΗΝΑΙ — ΤΗΛ. 223-136

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩ ΣΧΟΛΕΙΩ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΚΑΙ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΗΤΟΙ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ 1270 ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ
ΕΝ ΤΗ ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΩ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ

ΙΔΚ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ$^{\text{ΙΑΣ}}$ Α. Ε.
ΤΣΩΡΤΣΙΛ 38 – ΑΘΗΝΑΙ – ΤΗΛ. 23.136

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον ἔχει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΟΣΩΝ

Νὰ τραποῦν εἰς ἀκτίνια, ὡς κλασματικὰ πολλαπλάσια τοῦ π:

1. 150°. **2.** 270°. **3.** $143^\circ 27'$. **4.** $355^\circ 45'$.

Λύσεις. Ἐπειδὴ $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ (§ 6) εὑρίσκομεν:

(1) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ (2) $270^\circ = 270 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$

(3) $143^\circ 27' = 143^\circ,45 = \frac{143,45\pi}{180} = \frac{2869\pi}{3600}$

(4) $355^\circ 45' = 355^\circ,75 = \frac{355,75\pi}{180} = \frac{1423\pi}{720}$

Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας:

5. $\frac{2\pi}{3}$ ἀκτ. **6.** $\frac{5\pi}{3}$ ἀκτ. **7.** $\frac{7\pi}{4}$ ἀκτ. **8.** $\frac{5\pi}{11}$ ἀκτ.

Λύσεις. Ἐπειδὴ π ἀκ. $= 180^\circ$ εὑρίσκομεν:

(5) $\frac{2\pi}{3} = 180^\circ \cdot \frac{2}{3} = 120^\circ$. (6) $\frac{5\pi}{3}$ ἀκ. $= 180^\circ \cdot \frac{5}{3} = 300^\circ$.

(7) $\frac{7\pi}{4}$ ἀκ. $= 180^\circ \cdot \frac{7}{4} = 315^\circ$. (8) $\frac{5\pi}{11}$ ἀκ. $= 180^\circ \cdot \frac{5}{11} = 81^\circ 49' 5'' \frac{5}{11}$.

Νὰ τραποῦν εἰς βαθμούς:

9. 81°. **10.** $247^\circ 30'$. **11.** $\frac{3\pi}{5}$ ἀκτ. **12.** $\frac{7\pi}{6}$ ἀκτ.

Ἐπειδὴ (§ 6) $1^\circ = \frac{10}{9}\beta$ καὶ 1 ἀκτ. $= \frac{200}{\pi}\beta$ εὑρίσκομεν:

(9) $81^\circ = 81 \cdot \frac{10}{9} = 90\beta$. (10) $247^\circ,5 \cdot \frac{10}{9} = 275\beta$.

(11) $\frac{3\pi}{5}$ ἀκ. $= \frac{200}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 120\beta$. (12) $\frac{7\pi}{6} \cdot \frac{200}{\pi} = 233,33\beta$.

Νὰ τραποῦν εἰς μοίρας:

13. 100 m. **14.** 64 m. **15.** 340 m. **16.** 6000 m.

Ἐπειδὴ (§ 6) $1\text{m} = \frac{9}{160}$ τῆς μοίρας, ἔπεται ὅτι:

(13) $100\text{m} = \frac{900^\circ}{160} = 5^\circ 37' 30''$. (14) $64\text{m} = \frac{576}{160} = 3^\circ 36'$.

(15) $340\text{m} = \frac{340 \cdot 9}{160} = 19^\circ 15'$. (16) $6000\text{m} = 337^\circ 30'$.

Νὰ τραποῦν εἰς mils:

17. 18°. **18.** $145^\circ 24'$. **19.** $\frac{3\pi}{2}$ ἀκτ. **20.** $\frac{\pi}{3}$ ἀκτ.

Ἐπειδὴ (§ 6) $1^\circ = \frac{160}{9}$ m καὶ 1 ἀκτ. $= \frac{3200}{\pi}$ m ἔπεται:

(17) $18^\circ = 18 \cdot \frac{160}{9} = 320$ m. (18) $145^\circ 24' = 145^\circ,4 = 145,4 \cdot \frac{160}{9} = 1473 \frac{7}{9}$ m.

(19) $\frac{3\pi}{2}$ ἀκ. $= \frac{3200}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} = 4800$ m. (20) $\frac{\pi}{3}$ ἀκ. $= \frac{3200}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = 1066 \frac{2}{3}$ m.

21. Τριγώνου ἡ μία γωνία εἶναι $48^\circ 37'$ καὶ ἡ ἄλλη $\frac{5\pi}{12}$ ἀκτ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη γωνία εἰς μοίρας ἢ εἰς ἀκτίνια.

Ἐπειδὴ $\frac{5\pi}{12}$ ἀκτ. $= 75^\circ$ καὶ $48^\circ 37' = \frac{2917\pi}{10800}$, ἕπεται ὅτι ἡ τρίτη γωνία εἰς μοίρας εἶναι $180^\circ - (75^\circ + 48^\circ 37')$ καὶ εἰς ἀκτίνια εἶναι $\pi - \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2917\pi}{10800}\right)$.

22. Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν διαφορὰν $\frac{3\pi}{10}$ ἀκτ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι αὐταὶ εἰς μοίρας.

Ἐπειδὴ $\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$, $\chi + \psi = 90^\circ$ καὶ $\chi - \psi = 54^\circ$, εὑρίσκομεν ὅτι $\chi = 72^\circ$ καὶ $\psi = 18^\circ$

23. Ἐπίκεντρος γωνία 3,4 ἀκτινίων βαίνει ἐπὶ τόξου κύκλου μήκους 25,50 μέτρων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

Ἐπειδὴ $\frac{25,50}{\varrho} = 3,4$, ὅπου ϱ ἡ ζητουμένη ἀκτίς, ἕπεται ὅτι $\varrho = \frac{25,50}{3,4} = 7,50$ μέτρα.

24. Πόσων ἀκτινίων γωνίαν γράφει ὁ ὡροδείκτης ὡρολογίου εἰς 20 πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας;

Εἰς 12 ὥρας, ἤτοι εἰς 720 πρῶτα λεπτά, γράφει 2π ἀκτίνια· ἐπομένως εἰς 20 πρῶτα λεπτὰ γράφει $\frac{2\pi.20}{720} = \frac{\pi}{18}$ ἀκτ.

25. Ποίαν γωνίαν σχηματίζουν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης ὡρολογίου, ὅταν δεικνύουν $3 \frac{1}{2}$ ὥρας;

Ὅταν οἱ δεῖκται δεικνύουν 3 ὥρας, ἡ γωνία των εἶναι 90° καὶ καταλαμβάνει αὕτη 15 διαιρέσεις τῆς πλακός. Ἐπομένως 1 διαίρεσις $= \frac{90^\circ}{15} = 6^\circ$. Ἀλλὰ διὰ νὰ δείξουν ἔπειτα οἱ δεῖκται $3 \frac{1}{2}$ ὥρας, ὁ μὲν λεπτοδείκτης θὰ διατρέξῃ 30 διαιρέσεις, ὁ δὲ ὡροδείκτης ὅστις ἔχει ταχύτητα 12 φορὰς μικροτέραν θὰ διατρέξῃ $\frac{30}{12} = 2 \frac{1}{2}$ διαιρέσεις. Ὥστε τότε ἡ γωνία τῶν δεικτῶν θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ $15 - 2 \frac{1}{2} = 12 \frac{1}{2}$ διαιρέσεις τῆς πλακός, ἤτοι θὰ εἶναι $6^\circ \cdot 12 \frac{1}{2} = 75^\circ$.

26. Γωνία $110^\circ 20'$ νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο γωνίας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ ἔχῃ τόσα δεύτερα λεπτὰ τῆς μοίρας, ὅσα τοιαῦτα τοῦ βαθμοῦ θὰ ἔχῃ ἡ ἄλλη.

Ἐὰν τὸ ἓν τόξον εἰς μοίρας εἶναι χ, τὸ ἄλλο τόξον εἰς βαθμοὺς θὰ εἶναι $(110 \frac{1}{3} - \chi) \cdot \frac{10}{9}$. Ὥστε κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι $60 \cdot 60\chi = 100 \cdot 100 \cdot (110 \frac{1}{3} - \chi) \cdot \frac{10}{9}$ ἤτοι $\chi = 83^\circ 20'$ καὶ $110^\circ \frac{1}{3} - 83^\circ \frac{1}{3} = 27^\circ$.

27. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν πλευρῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων ἔχουν λόγον 2 : 3 καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν τῆς γωνίας τοῦ πρώτου πολυγώνου, πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν τῆς γωνίας τοῦ δευτέρου, ἔχει λόγον ἴσον μὲ 5 : 6. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑκάστου τῶν πολυγώνων τούτων.

Ἔστω 2ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου πολυγώνου καὶ 3ν ὁ ἀριθμὸς τοῦ δευτέρου. Τότε ἡ γωνία τοῦ πρώτου πολυγώνου εἰς βαθμοὺς εἶναι $\frac{4\nu - 4}{2\nu} \cdot 100$· ἡ δὲ γωνία τοῦ δευτέρου εἰς μοίρας εἶναι $\frac{6\nu - 4}{3\nu} \cdot 90$. Ὥστε εἶναι $\frac{(4\nu - 4) \cdot 100}{2\nu} : \frac{(6\nu - 4) \cdot 90}{3\nu} = 5 : 6$ ἤτοι $\nu = 2$. Τὸ πρῶτον λοιπὸν πολύγωνον εἶναι τετράγωνον, τὸ δὲ δεύτερον κανονικὸν ἑξάγωνον.

28. Ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα δύο τόπους διευθύνεται ἀπὸ Ν πρὸς Β καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 160 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν γεωγραφικῶν πλατῶν αὐτῶν. (Τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς τὴν λαμβάνομεν ἴσην μὲ 6400 χιλιόμετρα).

Ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι τόξον ἴσον μὲ $\frac{160\rho}{6400}$, ἤτοι ἴσον μὲ $\frac{\rho}{40}$. Τὸ μέτρον λοιπὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{\rho}{40} : \rho = \frac{1}{40}$ ἀκτίνια ἢ $\frac{1}{40} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1}{40} \cdot \frac{180}{3{,}1416} = 1^\circ\, 25'\, 56''$.

30. Τροχὸς ἀκτῖνος 0,8 μ. διέτρεξεν εἰς 4δ διάστημα 7,6 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ τροχοῦ.

Ἐὰν υ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ τροχοῦ (ἄσκ. 29), εἶναι $4\upsilon = 7{,}6$, ἤτοι $\upsilon = 7{,}6 : 4 = 1{,}9$ μ. Ὥστε ἡ γωνιακὴ ταχύτης ω τοῦ τροχοῦ ἰσοῦται μὲ $\omega = \frac{\upsilon}{0{,}8} = \frac{1{,}9}{0{,}8} = \frac{19}{8}$ ἀκτίνια.

31. Τροχὸς διαμέτρου 1,2μ κινούμενος δι᾽ ἱμάντος κάμνει εἰς 1δ 6 ὁλοκλήρους στροφάς. Ποία εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ ἱμάντος;

Ὁ ἱμὰς ἔχει τὴν αὐτὴν ταχύτητα μὲ τὴν ταχύτητα σημείου τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ. Οὕτως εἶναι $\omega = 6 \cdot 2\pi = 12\pi$ καὶ $\upsilon = \frac{1{,}2}{2} \cdot 12\pi = 7{,}2\pi = 7{,}2 \cdot 3{,}1416 = 22{,}62$ μέτρα.

32. Δύο τροχοὶ μὲ ἀκτῖνας $\rho = 0{,}5$ μ. καὶ $\rho' = 0{,}3$ μ. κινοῦνται δι᾽ ἱμάντος. Ὁ μικρότερος τούτων κάμνει 300 περιστροφὰς εἰς 1π. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ ἱμάντος εἰς δεύτερα λεπτά· καὶ ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ μεγαλυτέρου τροχοῦ ἐκφραζομένη εἰς περιστροφὰς κατὰ πρῶτον λεπτόν.

Ὁ μικρότερος τροχὸς κάμνει $\frac{300}{60} = 5$ περιστροφὰς εἰς 1δ. Ὥστε εἶναι $\omega = 5 \cdot 2\pi = 10\pi$ καὶ $\upsilon = 0{,}3 \cdot 10\pi = 9{,}4248$ εἰς 1δ. Ὁ μεγαλύτερος τροχὸς διατρέχει $300 \cdot 2\pi\rho' = 180\pi$ μέτρα εἰς 1π ἤτοι κάμνει $\frac{180\pi}{2\rho\pi} = \frac{180\pi}{2 \cdot 0{,}5\pi} = 180$ περιστροφὰς εἰς 1 πρῶτον λεπτόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν θ καὶ ω (σχ. 3) ὅταν εἶναι:

33. $\alpha=25$, $\beta=7$ Ἀπ. $\eta\mu\theta = \frac{7}{25}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{25^2-7^2}}{25} = \frac{24}{25}$, $\eta\mu\omega = \frac{24}{25}$, κλπ.

34. $\gamma=24$, $\alpha=25$ Ἀπ. ἐπειδὴ $\beta = \sqrt{25^2-24^2} = 7$, βλέπε ἄσκ. 33.

35. $\beta=5$, $\gamma=12$ Ἀπ. $\alpha = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ καὶ $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$, $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ κλπ.

36. $\beta=2$, $\gamma=2$ Ἀπ. $\alpha = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\omega$ κλπ.

37. $\alpha=3,\ \beta=2$ 'Απ. $\gamma=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, $\eta\mu\vartheta=\frac{2}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{5}}{3}$ κλπ.

38. $\alpha=2k,\ \beta=k$ 'Απ. $\gamma=\sqrt{4k^2-k^2}=k\sqrt{3}$, $\eta\mu\vartheta=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sigma\varphi\vartheta=\sqrt{3}$ κλπ.

39. $\alpha=\sqrt{2},\ \beta=1$ 'Απ. $\gamma=\sqrt{2-1}=1$, $\eta\mu\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ κλπ. (ἄσκ.36).

40. $\gamma=k,\quad \beta=k\sqrt{3}$ · 'Απ. $\alpha=\sqrt{3k^2+k^2}=2k$, $\eta\mu\vartheta=\frac{k\sqrt{3}}{2k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ κλπ.

41. $\beta=\sqrt{3}-1,\ \gamma=\sqrt{3}+1$ 'Απ. $\alpha=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$,

$$\eta\mu\vartheta=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},\quad \varepsilon\varphi\vartheta=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=2-\sqrt{3},\quad \sigma\varphi\vartheta=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3},\quad \eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\ \text{κλπ.}$$

Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία θ ὅταν εἶναι :

42. $\varepsilon\varphi\vartheta=\frac{5}{12}$. **43.** $\sigma\varphi\vartheta=\frac{4}{3}$. **44.** $\tau\varepsilon\mu\vartheta=5$.

45. $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta.=\frac{5}{3}$. **46.** $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{15}{25}$. **47.** $\eta\mu\vartheta=\frac{10}{24}$.

48. $\eta\mu\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **49.** $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων τούτων θὰ ἐργασθῶμεν, ὡς εἰς τὰ παραδείγματα τῆς § 10. Εἰδικῶς δὲ διὰ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων 48, 49, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων 39 καὶ 40. Οὕτω διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως 48 θὰ κατασκευάσωμεν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, διὰ δὲ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως 49, θὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα νὰ εἶναι διπλασία τῆς καθέτου πλευρᾶς τῆς ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ.

Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

50. $\sigma\upsilon\nu^4\vartheta-\eta\mu^4\vartheta+1=2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta$

Τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ

$$(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta)(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\eta\mu^2\vartheta)+1=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta+1=$$
$$=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)+1=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-1+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+1=2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta.$$

51. $\tau\varepsilon\mu^4\vartheta-\tau\varepsilon\mu^2\vartheta=\varepsilon\varphi^4\vartheta+\varepsilon\varphi^2\vartheta$.

Τὸ α' μέλος ἰσοῦται μέ :

$$\tau\varepsilon\mu^2\vartheta(\tau\varepsilon\mu^2\vartheta-1)=(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta).\varepsilon\varphi^2\vartheta=\varepsilon\varphi^2\vartheta+\varepsilon\varphi^4\vartheta.$$

52. $\sigma\varphi^4\chi+\sigma\varphi^2\chi=\sigma\upsilon\nu\tau^4\chi-\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi$.

Τὸ α' μέλος ἰσοῦται μέ :

$$\sigma\varphi^2\chi(\sigma\varphi^2\chi+1)=(\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi-1)\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi=\sigma\upsilon\nu\tau^4\chi-\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi.$$

53. $\varepsilon\varphi^2\chi - \eta\mu^2\chi = \eta\mu^4\chi\tau\varepsilon\mu^2\chi.$

Εἶναι $\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \eta\mu^2\chi = \dfrac{\eta\mu^2\chi(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi)}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \dfrac{\eta\mu^2\chi.\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \eta\mu^4\chi.\tau\varepsilon\mu^2\chi$

54. $\varepsilon\varphi\omega - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \eta\mu^2\omega\varepsilon\varphi\omega.$

Εἶναι $\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\eta\mu\omega(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \varepsilon\varphi\omega\eta\mu^2\omega.$

55. $\sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\tau^2\omega} = \varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega.$

Εἶναι $\tau\varepsilon\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\tau^2\omega = 1+\varepsilon\varphi^2\omega+1+\sigma\varphi^2\omega = \varepsilon\varphi^2\omega+2+\sigma\varphi^2\omega =$

$= \varepsilon\varphi^2\omega + 2\varepsilon\varphi\omega\sigma\varphi\omega + \sigma\varphi^2\omega = (\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega)^2.$

56. $\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\varphi^2\omega} = \varepsilon\varphi^2\omega - \eta\mu^2\omega.$

Εἶναι $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\varphi^2\omega} = \dfrac{1}{\sigma\varphi^2\omega} - \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\varphi^2\omega} = \varepsilon\varphi^2\omega - \eta\mu^2\omega$

57. $\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega = \dfrac{\sigma\varphi^2\omega-1}{\sigma\varphi^2\omega+1}.$

Τὸ α' μέλος γράφεται ὡς ἑξῆς: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου διὰ τοῦ ημ²ω, εὑρίσκομεν τὸ δεύτερον μέλος.

58. $(\eta\mu^2\vartheta - \sigma\upsilon\nu^2\vartheta)^2 = \dfrac{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta - 4}{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta}.$

Εἶναι $(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)^2 = (1-2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)^2 = 1+4\sigma\upsilon\nu^4\vartheta - 4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = 1+4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta.$
$.(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-1) = 1-4\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = 1-\dfrac{4}{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta} = \dfrac{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta-4}{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta}.$

59. $(\sigma\varphi^2\vartheta - \sigma\upsilon\nu^2\vartheta)^2 = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^4\vartheta}{\varepsilon\varphi^4\vartheta}.$

Εἶναι $\left(\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\vartheta} - \sigma\upsilon\nu^2\vartheta\right)^2 = \left(\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}\right)^2 = \left(\dfrac{1-\eta\mu^2\vartheta}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}\right)^2 = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^4\vartheta}{\varepsilon\varphi^4\vartheta}.$

60. $\varepsilon\varphi^4\chi(\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi-1) = \tau\varepsilon\mu^2\chi - 1.$

Εἶναι $\varepsilon\varphi^4\chi(1+\sigma\varphi^2\chi-1) = \varepsilon\varphi^4\chi\cdot\sigma\varphi^2\chi = \varepsilon\varphi^2\chi = \tau\varepsilon\mu^2\chi - 1.$

61. $2+\sigma\varphi^2\chi = \tau\varepsilon\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi - \varepsilon\varphi^2\chi.$

Ἐπειδὴ $\tau\varepsilon\mu^2\chi - \varepsilon\varphi^2\chi = 1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi - \sigma\varphi^2\chi = 1$ τὸ α' μέλος ἰσοῦται μέ:
$\tau\varepsilon\mu^2\chi - \varepsilon\varphi^2\chi + \sigma\upsilon\nu\tau^2\chi - \sigma\varphi^2\chi + \sigma\varphi^2\chi = \tau\varepsilon\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\tau^2\chi - \varepsilon\varphi^2\chi = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} + \dfrac{1}{\eta\mu^2\chi} - \varepsilon\varphi^2\chi =$
$= \dfrac{\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi\,\eta\mu^2\chi} - \varepsilon\varphi^2\chi = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}\cdot\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi} - \varepsilon\varphi^2\chi = \tau\varepsilon\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu\tau^2\chi - \varepsilon\varphi^2\chi.$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας θ, ὅταν ἔχῃ:

62. $\eta\mu\vartheta = \dfrac{60}{61}$. Ἀπ. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sqrt{1-\dfrac{60^2}{61^2}} = \sqrt{1-\dfrac{3600}{3721}} = \sqrt{\dfrac{121}{3600}} = \dfrac{11}{60}$,

$\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{60}{61} : \dfrac{11}{61} = \dfrac{60}{11}$ κλπ.

63. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{40}{41}$. Ἀπ. $\eta\mu\vartheta = \sqrt{1-\dfrac{40^2}{41^2}} = \dfrac{9}{41}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{9}{40}$ κλπ.

64. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{8}{11}$. Ἀπ. $\eta\mu\vartheta = \sqrt{1-\dfrac{8^2}{11^2}} = \dfrac{\sqrt{57}}{11}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{\sqrt{57}}{8}$ κλπ.

65. $\eta\mu\vartheta = \frac{\sqrt{11}}{6}$. 'Απ. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\sqrt{11}}{5}$.

66. $\varepsilon\varphi\vartheta = 3$. 'Απ. $\eta\mu\vartheta = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ κλπ.

67. $\sigma\varphi\vartheta = \frac{15}{8}$. 'Απ. $\eta\mu\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{15^2}{8^2}}} = \frac{8}{17}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{1+\frac{15^2}{8^2}}} = \frac{15}{17}$.

68. $\tau\varepsilon\mu\vartheta = \frac{41}{9}$. 'Απ. $\eta\mu\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{41^2}{9^2}-1}}{\frac{41}{9}} = \frac{40}{41}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{9}{11}$ κλπ.

69. $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta = \frac{\sqrt{29}}{2}$. 'Απ. $\eta\mu\vartheta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{29}{4}-1}}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ κλπ

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί :

70. $\eta\mu\vartheta$, ὅταν $2\eta\mu\vartheta = 1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta$.

$$\text{Ἔχομεν } 2\eta\mu\vartheta - 1 = \sqrt{1-\eta\mu^2\vartheta}, \quad (2\eta\mu\vartheta-1)^2 = (1-\eta\mu^2\vartheta),$$
$$4\eta\mu^2\vartheta - 4\eta\mu\vartheta + 1 = 1 - \eta\mu^2\vartheta, \quad \eta\mu\vartheta(5\eta\mu\vartheta - 4) = 0$$
$$\text{καὶ } \eta\mu\vartheta = 0 \ \text{ ἢ } \ 5\eta\mu\vartheta - 4 = 0 \ \text{ ἤτοι } \eta\mu\vartheta = \frac{4}{5}$$

71. $\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὅταν $2\eta\mu\vartheta = 2 - \sigma\upsilon\nu\vartheta$.

$$\text{Λαμβάνομεν } 4\eta\mu^2\vartheta = (2-\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2, \ 4(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta) = 4 - 4\sigma\upsilon\nu\vartheta + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta,$$
$$\sigma\upsilon\nu\vartheta(5\sigma\upsilon\nu\vartheta - 4) = 0 \quad \text{καὶ } \sigma\upsilon\nu\vartheta = 0 \text{ ἢ } \frac{4}{5}.$$

72. $\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὅταν $\sigma\varphi\vartheta + \sigma\upsilon\nu\tau\vartheta = \frac{3}{2}$

$$\text{Εἶναι } \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta} + \frac{1}{\eta\mu\vartheta} = \frac{3}{2}, \quad \frac{(\sigma\upsilon\nu\vartheta+1)^2}{\eta\mu^2\vartheta} = \frac{9}{4}, \quad \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} = \frac{9}{4},$$
$$\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}{(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)} = \frac{9}{4}, \quad \frac{1+\sigma\upsilon\nu\vartheta}{1-\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{9}{4} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{5}{13}.$$

73. $\sigma\varphi\vartheta$, ὅταν $\tau\varepsilon\mu^2\vartheta + 2\varepsilon\varphi^2\vartheta = 4$

$$\text{Εἶναι } \tau\varepsilon\mu^2\vartheta + 2(\tau\varepsilon\mu^2\vartheta - 1) = 4, \ \tau\varepsilon\mu^2\vartheta = 2 \ \text{ καὶ}$$
$$\sigma\varphi\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta - 1}} = 1$$

74. $\varepsilon\varphi\vartheta$, ὅταν $2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + 4\eta\mu^2\vartheta = 3$

Εἶναι $2(1 - \eta\mu^2\vartheta) + 4\eta\mu^2\vartheta = 3$, $\eta\mu^2\vartheta = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta + 4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\vartheta) = 3$,
$\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$.

75. $\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καὶ $\eta\mu\vartheta$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta + \sigma\varphi\vartheta = 2$.

$$\text{Εἶναι } \frac{1}{\eta\mu\vartheta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta} = 2, \quad \frac{1+\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}} = 2, \quad \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} = 4$$
$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\vartheta}{1-\sigma\upsilon\nu\vartheta} = 4, \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{3}{5} \text{ καὶ } \eta\mu\vartheta = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

76. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $\chi = \varrho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega$, $\psi = \varrho\eta\mu\vartheta\eta\mu\omega$ καὶ $z = \varrho\sigma\upsilon\nu\vartheta$, θὰ εἶναι $\frac{\chi}{\psi} = \sigma\varphi\omega$, $\frac{\chi^2+\psi^2}{z^2} = \varepsilon\varphi^2\vartheta$ καὶ $\chi^2+\psi^2+z^2 = \varrho^2$.

$$\text{Εἶναι } \frac{x}{y} = \frac{\varrho\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega}{\varrho\eta\mu\vartheta\eta\mu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \sigma\varphi\omega.$$

$$\frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{\varrho^2\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\omega+\varrho^2\eta\mu^2\vartheta\eta\mu^2\omega}{\varrho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} = \frac{\varrho^2\eta\mu^2\vartheta(\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega)}{\varrho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} = \varepsilon\varphi^2\vartheta.$$

$$\text{καὶ } x^2+y^2+z^2=\varrho^2\eta\mu^2\vartheta(\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega)+\varrho^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=\varrho^2(\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)=\varrho^2$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

77. $3\eta\mu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὅταν $\varepsilon\varphi\vartheta = 1$.

$$\text{Εὑρίσκομεν } 3\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{3+1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

78. $\dfrac{\varepsilon\varphi\vartheta + \sigma\varphi\vartheta}{\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta}$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{3}{5}$.

Εἶναι
$$\varepsilon\varphi\vartheta + \sigma\varphi\vartheta = \frac{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{25} \text{ καὶ } \frac{\varepsilon\varphi\vartheta+\sigma\varphi\vartheta}{\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{25}{12} : \frac{12}{25} = \frac{625}{144}.$$

79. $\dfrac{\sigma\varphi\vartheta + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta}{\tau\varepsilon\mu\vartheta + 3\varepsilon\varphi\vartheta}$, ὅταν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{1}{2}$.

Εἶναι
$$\sigma\varphi\vartheta + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} + 2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot 2 = 3\sqrt{3}.$$

$$\tau\varepsilon\mu\vartheta + 3\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{2}{\sqrt{3}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ καὶ } 3\sqrt{3} : \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{9}{5}.$$

80. $\eta\mu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu\vartheta\,\eta\mu\omega$, ὅταν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{3}{5}$ καὶ $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$.

Εἶναι
$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5},\ \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13} \text{ καὶ}$$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}.$$

81. $\sigma\upsilon\nu\vartheta\,\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\vartheta\eta\mu\omega$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{4}{5}$ καὶ $\eta\mu\omega = \dfrac{40}{41}$.

Εἶναι
$$\eta\mu\vartheta = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5},\ \sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1-\frac{1600}{1681}} = \frac{9}{41} \text{ καὶ}$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{41} + \frac{3}{5}\cdot\frac{40}{41} = \frac{36+120}{205} = \frac{156}{205}.$$

Μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι αἱ γωνίαι τῶν κάτωθι ἀσκήσεων εἶναι ὀξεῖαι, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας θ, διὰ νὰ εἶναι :

82. $\eta\mu 23^\circ = \sigma\upsilon\nu\vartheta$. Λ. $\vartheta = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$ (§ 15)

83. $\varepsilon\varphi\vartheta = \sigma\varphi 34^\circ 30'$. Λ. $\vartheta = 90^\circ - 34^\circ 30' = 55^\circ 30'$.

84. $\tau\varepsilon\mu\dfrac{\pi}{12} = \sigma\upsilon\nu\tau\vartheta$. Λ. $\vartheta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$.

85. $\varepsilon\varphi\vartheta = \sigma\varphi\vartheta$. Λ. $\vartheta + \vartheta = 90^\circ$ καὶ $\vartheta = 45^\circ$.

86. $\eta\mu\vartheta = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} + \vartheta\right)$. Λ. $\vartheta + \dfrac{\pi}{4} + \vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ καὶ $\vartheta = \dfrac{\pi}{8}$.

87. συντ2ϑ = τεμ3ϑ. Λ. $2\vartheta + 3\vartheta = \frac{\pi}{2}$ καὶ $\vartheta = \frac{\pi}{10}$.

Ἂν εἶναι 1ον) $0^0 < \theta < 45^0$ καὶ 2ον) $45^0 < \theta < 90^0$, νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί :

88. ημϑ καὶ συνϑ. **89.** εφϑ καὶ σφϑ. **90.** τεμϑ καὶ συντϑ.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν § 17 συνάγομεν ὅτι εἶναι :

1ον) ημϑ < συνϑ, εφϑ < σφϑ καὶ τεμϑ < συντϑ.

2ον) ημϑ > συνϑ, εφϑ > σφϑ καὶ τεμϑ > συντϑ.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

91. συν30^0συν60^0 + ημ30^0ημ60^0.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

92. ημ60^0συν30^0 + ημ30^0συν60^0.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3+1}{4} = 1.$$

93. συν45^0συν0^0 + συν0^0ημ45^0.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

94. συν60^0συν0^0 + ημ60^0ημ90^0.

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅταν $B = 60^0$, θὰ εἶναι :

95. $\text{ημ}B = 2\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{συν}\frac{B}{2}$.

Πρέπει νὰ δειχθῇ ὅτι ημ60^0 = 2 · ημ30^0 · συν30^0. Καὶ πράγματι διότι εἶναι :

$$\text{ημ}60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad 2\text{ημ}30^0\text{συν}30^0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

96. $\text{συν}B = \text{συν}^2\frac{B}{2} - \text{ημ}^2\frac{B}{2}$.

Διότι $\text{συν}60^0 = \frac{1}{2}$ καὶ $\text{συν}^2 30^0 - \text{ημ}^2 30^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

97. $$\text{εφ}B = \frac{2\text{εφ}\frac{B}{2}}{1 - \text{εφ}^2\frac{B}{2}}.$$

Διότι $\text{εφ}60^0 = \sqrt{3}$ καὶ $\frac{2\text{εφ}30^0}{1 - \text{εφ}^2 30^0} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} : \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3} =$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

98. $$\text{σφ}B = \frac{\text{σφ}^2\frac{B}{2} - 1}{2\text{σφ}\frac{B}{2}}$$

Διότι $\sigma\varphi 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ καὶ $\frac{\sigma\varphi^2 30^\circ - 1}{2\sigma\varphi 30^\circ} = [(\sqrt{3})^2 - 1] : 2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅταν $\Gamma = 30^\circ$, θὰ εἶναι :

99. $\eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$. (Βλέπε ἄσκησιν 95).

100. $\sigma\upsilon\nu 2\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu^2\Gamma - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\Gamma$

Διότι $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, $2\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ - 1 = 2.\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$, $1 - 2\eta\mu^2\Gamma = 1 - 2 . \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

101. $\sigma\upsilon\nu 3\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu^3\Gamma - 3\sigma\upsilon\nu\Gamma$

Διότι $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$, $4\sigma\upsilon\nu^3 30^\circ - 3\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 . \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 . \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$

102. $\eta\mu 3\Gamma = 3\eta\mu\Gamma - 4\eta\mu^3\Gamma$

Διότι, $\eta\mu 90^\circ = 1$, $3\eta\mu 30^\circ - 4\eta\mu^3 30^\circ = 3 . \frac{1}{2} - 4 . \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} - 4 . \frac{1}{8} = 1.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

103. $\eta\mu 29^\circ 50' = 0{,}49748$

104. $\sigma\varphi 56^\circ 32' = 0{,}66106$

105. $\sigma\upsilon\nu 43^\circ 52',7 = 0{,}72081$

106. $\eta\mu 55^\circ 45' 27'' = 0{,}82666$

107. $\tau\epsilon\mu 24^\circ 57' = 1{,}1030$

108. $\sigma\upsilon\nu\tau 7^\circ 53' = 7{,}2916$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία θ, ὅταν εἶναι :

109. $\epsilon\varphi\vartheta = 3{,}3052$. $\vartheta = 73^\circ 10'$

110. $\eta\mu\vartheta = 0{,}21218$. $\vartheta = 12^\circ 15'$

111. $\sigma\varphi\vartheta = 0{,}55000$. $\vartheta = 61^\circ 11' 21''$

112. $\tau\epsilon\mu\vartheta = 1{,}0451$. $\vartheta = 16^\circ 53' 20''$

113. $\epsilon\varphi \frac{\vartheta}{2} = 0{,}2$. $\frac{\vartheta}{2} = 11^\circ 18' 36'',5$ καὶ $\vartheta = 22^\circ 37' 13''$

114. $4(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta) = 4{,}5$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = 0{,}12500$ καὶ $\vartheta = 82^\circ 49' 10''$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ :

115. $\lambda o\gamma\eta\mu 30^\circ 24' = \overline{1},70418$

116. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 49^\circ 53' = \overline{1},80912$

117. $\lambda o\gamma\eta\mu 29^\circ 14' 32'' = \overline{1},68887$

118. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 16^\circ 27' 47'' = \overline{1},98182$

119. $\lambda o\gamma\epsilon\varphi 22^\circ 37' 22'' = \overline{1},61985$

120. $\lambda o\gamma\sigma\varphi 17^\circ 45'' = 0{,}51432$

121. $\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu 65^\circ 24' 37'' = -\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 65^\circ 24' 37'' = -\overline{1},61922 = 0{,}38078$

122. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\tau 57^\circ 45' 28'' = -\lambda o\gamma\eta\mu 57^\circ 45' 28'' = -\overline{1},92727 = 0{,}07273$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι θ διὰ τὰς ὁποίας δίδεται :

123. $\lambda o\gamma\eta\mu\vartheta = \overline{1},41745$, $\vartheta = 15^\circ 9' 30''$

124. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\vartheta = 1{,}25807$, $\vartheta = 79^\circ 33' 45''$

125. $\lambda o\gamma\epsilon\varphi\vartheta = 0{,}31370$, $\vartheta = 64^\circ 5' 52'',5$

126. $\lambda o\gamma\sigma\varphi\vartheta = \overline{1},05490$, $\vartheta = 83^\circ 31' 34''$

127. $\lambda o\gamma\tau\epsilon\mu\vartheta = 0{,}02292$, $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\vartheta = -0{,}02292 = \overline{1},97708$ καὶ $\vartheta = 18^\circ 3'$

128. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta = 0{,}22172$, $\lambda o\gamma\eta\mu\vartheta = -0{,}22172 = \overline{1}{,}77828$ καὶ $\vartheta = 36^\circ 52' 56'',5$

Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ ὀξεῖαι γωνίαι θ, διὰ τὰς ὁποίας δίδεται:

129. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{3}{8}$, $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 8 = 0{,}47712 - 0{,}90309 = -0{,}42597 = \overline{1}\,57403$

καὶ $\vartheta = 22^\circ 1' 27''$

130. $\eta\mu\vartheta = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $\lambda o\gamma\eta\mu\vartheta = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 5 - \lambda o\gamma 4 = 0{,}34949 - 0{,}60206 = \overline{1}{,}74743$

καὶ $\vartheta = 33^\circ 59' 19''$

131. $\varepsilon\varphi\omega = 2\frac{1}{4}$, $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\omega = \lambda o\gamma 9 - \lambda o\gamma 4 = 0{,}95424 - 0{,}60206 = 0{,}35218$

καὶ $\omega = 66^\circ 2' 14''$

132. $\sigma\varphi\vartheta = 0{,}3$, $\lambda o\gamma\sigma\varphi\vartheta = \overline{1}{,}47712$ καὶ $\vartheta = 73^\circ 18' 2'',6$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

133. Ἀπ. 28,812. **134.** Ἀπ. 4737,3. **135.** Ἀπ. 91,544.
136. Ἀπ. 10569,3. **137.** Ἀπ. 241,57. **138.** Ἀπ. 1247.09
139. Ἀπ. 34,986. **140.** Ἀπ. 80,666.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (διὰ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν) ὅταν εἶναι:

141. $\alpha = 50\mu$. $B = 33^\circ 20'$. Λ. $\Gamma = 90^\circ - 33^\circ 20' = 56^\circ 40'$

$\beta = 50.\eta\mu 33^\circ 20' = 50.0{,}54951 = 27{,}58\mu$.

$\gamma = 50.\sigma\upsilon\nu 33^\circ 20' = 50.0{,}83549 = 41{,}77\mu$.

142. $\alpha = 12{,}5\mu$. $\Gamma = 15^\circ 40'$. Λ. $B = 90^\circ - 15^\circ 40' = 74^\circ 20'$

$\beta = 12{,}5\sigma\upsilon\nu 15^\circ 40' = 12{,}5.0{,}96285 = 12{,}036\mu$.

$\gamma = 12{,}5\eta\mu 15^\circ 40' = 12{,}5 \,.\, 0{,}27004 = 3{,}376\mu$.

143. $\beta = 2{,}3\mu$. $B = 29^\circ 32'$. Λ. $\Gamma = 60^\circ 28'$, $\alpha = 2{,}3\sigma\upsilon\nu\tau 29^\circ 32' = 2{,}3.2{,}0287 = 4{,}666$

καὶ $\gamma = 2{,}3\sigma\varphi 29^\circ 32' = 3{,}2.1{,}7651 = 3{,}648\mu$.

144. $\gamma = 0{,}015\mu$. $B = 52^\circ 21'$. Λ. $\Gamma = 37^\circ 39'$, $\alpha = \gamma\tau\varepsilon\mu B = 0{,}015.1{,}6371 = 0{,}027$

καὶ $\beta = \gamma\varepsilon\varphi B = 0{,}015.1{,}2963 = 0{,}019\mu$.

145. $\beta = 1{,}6\mu$. $\gamma = 3{,}5\mu$. Λ. $\varepsilon\varphi B = \frac{1{,}6}{3{,}5} = 0{,}45714$, $B = 24^\circ 34' 11''$ $\Gamma = 65^\circ 25' 29'$

καὶ $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\tau B = 1{,}6.2{,}4053 = 3{,}848\mu$.

146. $\alpha = 72\mu$. $\beta = 42\mu$. Λ. $\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \sqrt{114{,}30} = 58{,}48$

$\eta\mu B = \frac{42}{72} = 0{,}58333$, $B = 35^\circ 41' 6''$, $\Gamma = 54^\circ 18' 54''$

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον (διὰ τῶν λογαρίθμων), ὅταν εἶναι:

147. $\alpha = 482{,}7\mu$. $B = 72^\circ 26'$. Λ. $\Gamma = 17^\circ 34'$, $\beta = \alpha\eta\mu B$, $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B$

$\beta = 482{,}7\eta\mu 72^\circ 26'$, $\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma 482{,}7 + \lambda o\gamma\eta\mu 72^\circ 26'$

$\lambda o\gamma\beta = 2,68368 + \bar{1},97926 = 2,66294$ καὶ $\beta = 460,19\mu$.

$\gamma = 482,7\sigma\upsilon\nu 72^\circ 26'$, $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma 482,7 + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 72^\circ 26'$

$\lambda o\gamma\gamma = 2,68368 + 1,47974 = 145,69\mu$.

148. $\alpha = 0,5379\mu$. $\Gamma = 63^\circ 47' 30''$. Λ. $B = 26^\circ 12' 30''$, $\beta = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\gamma = \alpha\eta\mu\Gamma$

$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma 0,5379 + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 63^\circ 47' 30'' = \bar{1},73070 + \bar{1},64507$

$\lambda o\gamma\beta = \bar{1},37577$ καὶ $\beta = 0,23756$.

$\lambda o\gamma\gamma = \bar{1},73070 + 1,95289 = \bar{1},68359$ καὶ $\gamma = 0,4826$.

149. $\gamma = 58,75\mu$, $\Gamma = 47^\circ 48'$. Λ. $B = 42^\circ 12'$, $\alpha = \gamma : \eta\mu\Gamma$, $\beta = \gamma\sigma\varphi\Gamma$

$\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma 58,75 - \lambda o\gamma\eta\mu 47^\circ 48' = 1,76901 - \bar{1},86970 = 1,89931$ καὶ $\alpha = 79,307\mu$

$\lambda o\gamma\beta = 1,76901 + \bar{1},95748 = 1,72699$ καὶ $\beta = 53,271\mu$.

150. $\gamma = 459,8\mu$. $\beta = 706,4\mu$. Λ. $\varepsilon\varphi B = \beta : \gamma$, $\Gamma = 90^\circ - B$, $\alpha = \beta : \eta\mu B$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi B = 2,84905 - 2,66257 = 0,18648$, $B = 56^\circ 56' 22''$, $\Gamma = 33^\circ 3' 38''$

$\lambda o\gamma\alpha = 2,84905 - \bar{1},92329 = 2,92579$ καὶ $\alpha = 842,92$

151. $\alpha = 404\mu$. $\beta = 125\mu$. Λ. $\gamma = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$, $\eta\mu B = \beta : \alpha$

$\lambda o\gamma\gamma = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 529 + \lambda o\gamma 279) = 2,58453$ καὶ $\gamma = 348,17$

$\lambda o\gamma\eta\mu B = \lambda o\gamma 125 - \lambda o\gamma 404 = \bar{1},49053$, $B = 18^\circ 1' 25''$, $\Gamma = 71^\circ 58' 35''$

152. $\alpha = 450\mu.$, $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{3}{4}$.

Ἔχομεν $\beta^2 = \frac{9}{16}\gamma^2$, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = \frac{9}{16}\gamma^2 + \gamma^2 = \frac{25}{16}\gamma^2$ ἤτοι

$\alpha = \frac{5}{4}\gamma$, $450 = \frac{5}{4}\gamma$, $\gamma = \frac{4.450}{5} = 360\mu.$ καὶ $\beta = \frac{3}{4}.360 = 270\mu.$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{4} = 0,75$, $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi B = \bar{1},87506$, $B = 36^\circ 52' 12''$ καὶ $\Gamma = 53^\circ 8' 48''$

153. Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν (ΒΓ)=890 μ. καὶ τὴν ἀπέναντί της γωνίαν Α ἴσην μὲ 18°.

Εἶναι $B = \Gamma = (180^\circ - 18^\circ) : 2 = 81^\circ$. Ἤδη ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $(B\Delta) = \gamma\eta\mu\frac{A}{2}$, ἤτοι $\gamma = \frac{445}{\eta\mu 9^\circ}$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma 445 - \lambda o\gamma\eta\mu 9^\circ = 2,64826 - \bar{1},19433 = 3,45403$ καὶ $\gamma = \beta = 2844,67\mu$.

154. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3μ. 4μ. 5μ.

Ἐπειδὴ $5^2 = 3^2 + 4^2$, τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὅθεν $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{4}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β καὶ ἔπειτα Γ.

155. Ρόμβου ἡ πλευρὰ εἶναι 39μ. καὶ ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος 72μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος καὶ ἡ γωνία του.

Ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης διαγωνίου, αἱ δὲ ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν τοῦ ρόμβου. Ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὴν 4ην περίπτωσιν (§ 28).

156. Χορδὴ τόξου ἔχει μῆκος 180 μ. καὶ ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 100 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ τόξου.

'Εὰν ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΟΓ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο, ἡ ζητουμένη ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς γωνίας $ΑΟΓ = \frac{ΑΟΒ}{2}$, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΓ εἰς ὃ εἶναι (ΑΓ)=90μ. καὶ (ΟΓ)=100 μ.

157. Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι τετραπλασία τοῦ ὕψους του ἐπ' αὐτήν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του.

Ἔστω ΑΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ἀλλὰ τότε εἶναι ΒΓ=4 · ΑΔ. Ἤδη ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ λαμβάνομεν (ΒΔ)=(ΑΔ)σφΒ, (ΔΓ)=(ΑΔ) σφΓ=(ΑΔ) · εφΒ. Ἑπομένως εἶναι (ΒΔ+ΔΓ)=(ΑΔ)(σφΒ+εφΒ), ἤτοι (ΒΓ)=(ΑΔ) · (σφΒ+ +εφΒ), 4(ΑΔ)=(ΑΔ)(σφΒ+εφΒ), 4=σφΒ+εφΒ, $4 = \frac{1}{εφΒ} + εφΒ$ καὶ τελικῶς λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $εφ^2Β-4εφΒ+1=0$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι $εφΒ=2+\sqrt{3}$ καὶ $εφΒ= =2-\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\sqrt{3}=1,73205$, ἔχομεν εφΒ=3,7321 καὶ Β=75° ἢ εφΒ=0,26795 καὶ Β=15°.

158. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν του εἶναι διπλασία τῆς βάσεώς του ΒΓ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του.

Ἐὰν ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν θὰ εἶναι $ΒΔ = \frac{ΑΒ}{4}$. Ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν $(ΒΔ) = (ΑΒ)ημ\frac{Α}{2}$, ἤτοι $ημ\frac{Α}{2} = \frac{1}{4}$ κλπ.

159. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι $α=γ+βεφ\frac{Β}{2}= =β+γεφ\frac{Γ}{2}$.

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, προεκτείνομεν δὲ τὴν ΒΑ, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τέλος φέρομεν τὰς χορδὰς ΓΔ καὶ ΓΕ. Ἀλλὰ τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΓΔΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας Β, ἤτοι εἶναι $γωνΓΔΕ = \frac{Β}{2}$. Ἀλλ' ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΓΕ καὶ ΓΑΔ εἶναι ὀρθαί, αἱ πλευραὶ τῆς ὀξείας γωνίας ΓΔΕ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀξείας γωνίας ΑΓΕ. Ὅθεν ἕπεται $γωνΓΔΕ = γωνΑΓΕ = \frac{Β}{2}$. Κατόπιν τούτων ἔχομεν ΒΕ=ΒΑ+ΑΕ, ἤτοι α=γ+(ΑΕ). Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΕ λαμβάνομεν $(ΑΕ)=(ΑΓ)εφΑΒΕ = βεφ\frac{Β}{2}$. Ὥστε εἶναι $α=γ+βεφ\frac{Β}{2}$. Ἡ δευτέρα ἰσότης $α=β+γεφ\frac{Γ}{2}$, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ἐναλλάσσοντες τὰ γράμματα Β καὶ Γ.

160. Ἀπὸ σημείου Γ περιφερείας κύκλου φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι (ΔΒ)=(ΑΒ)ημΓΑΒσυνΓΒΑ.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΓΒΔ καὶ ΑΓΒ λαμβάνομεν (ΔΒ)=(ΓΒ)συνΓΒΑ καὶ (ΓΒ)=(ΑΒ)ημΓΑΒ. Ὥστε εἶναι (ΔΒ)=(ΑΒ)ημΓΑΒσυνΓΒΑ.

161. Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ, ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΔ)(ΒΓ)=(ΑΓ)(ΑΒ).

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν (ΑΔ)=(ΑΓ)ημΓ καὶ $(ΒΓ) = \frac{(ΑΒ)}{ημΓ}$. Ὥστε εἶναι $(ΑΔ) \cdot (ΒΓ)=(ΑΓ) \cdot ημΓ \cdot \frac{(ΑΒ)}{ημΓ} = (ΑΓ)(ΑΒ)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

162. Αἱ γωνίαι ὕψους τῆς κορυφῆς Δ πύργου ΒΔ τὴν ὁποίαν βλέπομεν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἑκατέρωθεν τοῦ πύργου καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου εὐθείας μετὰ τοῦ Β, εἶναι ἀντιστοίχως 25^0 καὶ 40^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ΒΔ τοῦ πύργου, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ ἔχει μῆκος 300 μέτρα.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΓΔΒ λαμβάνομεν $(ΑΒ)=(ΒΔ)σφ25^0$ καὶ $(ΒΓ)=(ΒΔ)σφ40^0$. Ὅθεν εἶναι $(ΑΒ+ΒΓ)=(ΒΔ)\cdot(σφ25^0+σφ40^0)$ καὶ $(ΒΔ)=\dfrac{300}{σφ25^0+σφ40^0}$ $=\dfrac{300}{2{,}1445+1{,}918}=89{,}92$ μ.

163. Ὅταν ὁ ἥλιος ἔχῃ ὕψος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα 30^0, πύργος ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ρίπτει σκιὰν κατὰ 64 μέτρα μεγαλυτέραν τῆς σκιᾶς ἣν ρίπτει, ὅταν τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου εἶναι 60^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν σκιῶν καὶ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

Ἔστω τὸ ζητούμενον ὕψος $(ΑΔ)=x$ καὶ ἡ μικροτέρα σκιὰ $(ΑΒ)=y$. Οὕτως ἡ μεγαλυτέρα σκιὰ ΑΓ θὰ εἶναι $y+64$ καὶ ἐξ ἄλλου θὰ εἶναι $ΑΒΔ=60^0$ καὶ $ΑΓΔ=30^0$. Ἀλλὰ τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ λαμβάνομεν:

$$(ΑΒ)=(ΑΔ)σφ60^0 \quad ἤτοι \quad y=xσφ60^0$$
$$(ΑΓ)=(ΑΔ)σφ30^0 \quad ἤτοι \quad y+64=xσφ30^0.$$

Ὅθεν εἶναι $\dfrac{y+64}{y}=\dfrac{σφ30^0}{σφ60^0}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=3$, $y=32$ μ. $y+64=96$ μ. καὶ $x=\dfrac{y}{σφ60^0}=$ $=32\cdot\sqrt{3}=32\cdot1{,}732=55{,}424$ μ.

164. Ἡ κορυφὴ λόφου ὕψους 150 μέτρων καὶ ἡ διεύθυνσις πορείας πλοίου εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου. Κατά τινα δὲ στιγμὴν βλέπομεν τὸ πλοῖον ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ λόφου ὑπὸ γωνίαν βάθους $7^0\,18'$ καὶ μετ᾽ ἄλλην τὸ βλέπομεν ὑπὸ γωνίαν βάθους $21^0\,7'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα ποὺ διέτρεξε τὸ πλοῖον ἀπὸ τῆς μιᾶς παρατηρήσεως ἕως τὴν ἄλλην.

Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος τοῦ λόφου (Δ ἡ κορυφή του) καὶ Β καὶ Γ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκετο τὸ πλοῖον κατὰ τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν παρατήρησιν ἀντιστοίχως. Ὥστε ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΓΒ (ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας) ἥτις προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ Α. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων λοιπῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, εὑρίσκομεν $(ΑΒ)=(ΑΔ)$ $σφ7^0\,18'$, $(ΑΓ)=(ΑΔ)σφ21^0\,7'$ καὶ $(ΑΒ-ΑΓ)=(ΓΒ)=150(σφ7^0\,18'-σφ21^0\,7')=150$ $(7{,}8069-2{,}5893)=782{,}64$ μ.

165. Ἀπὸ τῆς μιᾶς ὄχθης ποταμοῦ, βλέπομεν δένδρον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ὄχθης ὑπὸ γωνίαν 20^0. Ἂν βαδίσωμεν δὲ ὄπισθεν 40 μ. θὰ ἴδωμεν τὸ δένδρον ὑπὸ γωνίαν ὕψους 10^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου καὶ τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ.

Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου (Δ ἡ κορυφή του) ΑΒ τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ καὶ $(ΒΓ)=40$ μ. (ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους). Τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ ἔχομεν $(ΑΓ)=(ΑΔ)σφ10^0$, $(ΑΒ)=(ΑΔ)σφ20^0$ καὶ $(ΑΓ)-(ΑΒ)=40=(ΑΔ)$ $(σφ10^0-σφ20^0)$. Ὅθεν εἶναι $(ΑΔ)=\dfrac{40}{σφ10^0-σφ20^0}$ καὶ $(ΑΒ)=\dfrac{40σφ20^0}{σφ10^0-σφ20^0}$.

166. Εἷς ἵσταται ἐπὶ τῆς κορυφῆς γηλόφου ἀκτῖνος 50 μέτρων. Τί γωνίαν βάθους ἔχει τὸ πλέον μακρυνὸν σημεῖον τοῦ γηλόφου τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἴδῃ ὅταν τὸ ὕψος τῶν ὀφθαλμῶν του ἀπὸ τῆς κορυφῆς εἶναι 1,50μ.;

Ἔστω A ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ, O τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποὺ ἀνήκει ὁ γήλοφος καὶ B τὸ πλέον μακρυνὸν σημεῖον τοῦ γηλόφου, τὸ ὁποῖον βλέπει ὁ παρατηρητής. Ἀλλὰ τότε ἡ AB εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Ὅθεν τὸ τρίγωνον ABO εἶναι ὀρθογώνιον, οὗ ἡ γωνία BOA εἶναι ἴση μὲ τὴν ζητουμένην γωνίαν βάθους. Διότι, ἐὰν νοήσωμεν τὴν AE ὁριζόντιον, ἡ γωνία βάθους EAB καὶ ἡ BOA εἶναι συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας BAO. Ὅθεν εἶναι συνEAB=συνBOA$=\frac{(OB)}{(OA)}=\frac{50}{50+1,5}$ $=\frac{50}{51,5}=0,97087$ καὶ EAB $=13^0 51' 51''$.

167. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι τοποθετημένον κάτοπτρον εἰς ἀπόστασιν 264 μ. ἀπὸ πύργου ὕψους 20 μ. Ἡλιακὴ δὲ ἀκτὶς ἀνακλωμένη ὑπὸ τοῦ κατόπτρου τούτου, ὅταν ὁ Ἥλιος ἔχει ὕψος 45^0, διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ πύργου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς μετὰ τοῦ κατόπτρου.

Ἡ ἀνακλωμένη ἀκτίς, τὸ ὕψος τοῦ πύργου καὶ ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις 264 μέτρων σχηματίζουν ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ ἡ ὀξεῖα γωνία, ἔστω ἡ B, ἡ ἀπέναντι τοῦ ὕψους (τοῦ πύργου) ἔχει εφB$=\frac{20}{264}=0,07575$. Ὅθεν B$=4^0 19' 54''$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κατόπτρου ἦτο ὁριζόντιον, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς θὰ ἐσχημάτιζε μετ' αὐτοῦ γωνίαν 45^0, διότι ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως, ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῆς προσπτώσεως εἶναι 45^0. Ἀλλ' ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς, ἐὰν ἡ προσπίπτουσα ἀκτὶς μένει σταθερά, τὸ δὲ κάτοπτρον στραφῇ καθ' ὡρισμένην γωνίαν, ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς στρέφεται κατὰ γωνίαν διπλασίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἐνταῦθα ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐστράφη κατὰ γωνίαν $45^0-4^0 19' 54''=40^0 40' 6''$, ἔπεται ὅτι τὸ κάτοπρον ἐστράφη κατὰ $40^0 40' 6'' : 2 = 20^0 20' 3''$. Ὥστε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι $20^0 20' 3''+4^0 19' 54''=24^0 39' 59''$.

168. Ἐκ δύο πύργων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ὁ μικρότερος ἔχει ὕψος 20μ. καὶ ἀπὸ τῆς βάσεώς του καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς του, βλέπομεν τὴν κορυφὴν τοῦ ὑψηλοτέρου πύργου, ὑπὸ γωνίας ὕψους 60^0 καὶ 45^0 ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου πύργου καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο πύργων ἀπόστασις.

Ἐὰν x εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος καὶ y ἡ ζητουμένη ἀπόστασις, εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ x=yεφ60^0, x—20=yεφ45^0 ἤτοι x—20=y καὶ κατὰ συνέπειαν $\frac{x}{x-20}=$ εφ60^0 $\sqrt{3}$. Ὅθεν εἶναι $x=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{20\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=10(3+\sqrt{3})$ καὶ $y=10(3+\sqrt{3})-20$.

169. Φάρος πρὸς νότον, ρίπτει φωτεινὰς ἀκτίνας ἐκτεινομένας ἀπὸ τὰ ΝΔ ὡς τὰ ΝΑ. Πλοῖον δὲ τότε μὲ ΔΑ διεύθυνσιν, εἰσέρχεται ἐντὸς τῆς φωτισμένης περιοχῆς, ὅταν εἶναι εἰς ἀπόστασιν 5 μιλίων ἀπὸ τοῦ φάρου καὶ ἐξέρχεται ταύτης μετὰ ἡμίσειαν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου.

Ἔστω Φ ὁ φάρος καὶ E καὶ E′ αἱ δύο θέσεις τοῦ πλοίου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς εἰσόδου εἰς τὴν φωτισμένην περιοχὴν καὶ τῆς ἐξόδου ἐξ αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι ΦE = ΦE′ = 5 μίλια καὶ γων. EΦE′ $=90^0$ εἶναι (ΦE) = (EE′)ημ45^0, ἤτοι (EE′) = (ΦE)συντ$45^0=5\sqrt{2}$ μίλ. Ἤδη διαιροῦντες τὸ διάστημα, διὰ τοῦ χρόνου εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καθ' ὥραν εἶναι $5\sqrt{2}:\frac{1}{2}=10\sqrt{2}$ μίλ.

170. Εἰς πόσον χρόνον θὰ περάσῃ ἱστιοφόρον ἀπὸ τὴν μίαν πλευρὰν διώρυγος πλάτους 1000 μ., ὡς τὴν ἄλλην, ὅταν ἔχῃ ταχύτητα 4 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς πορείας του σχηματίζει μετὰ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς διώρυγος γωνίαν 30^0.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι $\frac{1000}{4000}$. συντ$30^0=\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας.

171. Βαδίζων εἷς πρὸς βορρᾶν, εἶδε κατά τινα στιγμὴν ἀνατολικά του ἓν μπαλόνιον, κινούμενον ὁριζοντίως μὲ ΒΔ κατεύθυνσιν, ὑπὸ γωνίαν ὕψους 68^0. Ὅταν ὅμως προυχώρησε 200 μέτρα, εἶδε τὸ μπαλόνιον κατακορύφως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ μπαλονίου.

Ἔστω Β ἡ πρώτη θέσις τοῦ παρατηρητοῦ, Γ ἡ τοῦ μπαλονίου καὶ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Γ κατακόρυφος συναντᾷ τὸ ἔδαφος εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ δίδει $(ΑΓ)=υ=(ΑΒ)εφ68^0$.

Ἤδη ἔστω Β′ ἡ δευτέρα θέσις τοῦ παρατηρητοῦ καὶ Γ′ ἡ τοῦ μπαλονίου. Ὅθεν εἶναι $(Β'Γ')=υ$, τὸ δὲ τρίγωνον ΓΒΒ′ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΓ′ εἶναι ὁριζοντία καὶ αἱ ΓΑ καὶ Γ′Β′ κατακόρυφοι, ἡ εὐθεῖα ΑΒ′ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΓ′, ἥτις ἔχει ΒΔ κατεύθυνσιν. Οὕτως ἡ ΑΒ′ σχηματίζει μετὰ τῆς ΒΒ′ γωνίαν 45^0 καὶ ἑπομένως τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΒ′ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΒ′ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι $(ΑΒ)=(ΒΒ')=200$ μ. καὶ $υ=200εφ68^0=200\cdot 2{,}4751=$ $=495{,}02$ μ. $=495$ μ.

172. Ἱστάμενοι μεταξὺ δύο δένδρων καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις τὰ συνδέει βλέπομεν τὰς κορυφάς των ὑπὸ γωνίας ὕψους 30^0 καὶ 60^0. Ὅταν ὅμως πλησιάσωμεν τὸ πρῶτον κατὰ 60 μ. βλέπομεν καὶ τὰς δύο κορυφὰς ὑπὸ γωνίας ὕψους 45^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῶν δένδρων καὶ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις.

Ἔστω ΑΒ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ὑπὸ γωνίαν 30^0, ΓΔ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου δένδρου, Ε ἡ πρώτη θέσις τοῦ παρατηρητοῦ καὶ Ζ ἡ δευτέρα θέσις αὐτοῦ, ἀπὸ τῆς ὁποίας βλέπει τὰ δύο δένδρα ὑπὸ γωνίας ὕψους 45^0. Τότε κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχομεν:

$(ΕΑ)=(ΑΒ)\,σφ30^0$, $(ΖΑ)=(ΑΒ)\,σφ45^0$, $(ΕΑ)-(ΖΑ)=(ΑΒ)\,(σφ30^0-σφ45^0)$ ἤτοι $60=(ΑΒ)(\sqrt{3}-1)$ ἢ $(ΑΒ)=\dfrac{60}{\sqrt{3}-1}=30(\sqrt{3}+1)=30\cdot 2{,}732=81{,}96$ μ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν: $(ΖΓ)=(ΓΔ)σφ45^0$, $(ΕΓ)=(ΓΔ)σφ60^0$. Ὅθεν εἶναι $(ΕΖ)=(ΓΔ)(σφ45^0-σφ60^0)$ ἤτοι $60=$ $=(ΓΔ)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ἢ $(ΓΔ)=\dfrac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=30\,(3+\sqrt{3})=141{,}96$ μ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόστασις $ΑΓ=ΑΖ+ΖΓ$ τῶν δύο δένδρων, ἰσοῦται μὲ τὴν $ΑΒ+ΓΔ$ εἶναι $ΑΓ=81{,}96$ μ. $+141{,}96=223{,}92$ μ.

173. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων, ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἶναι 4 χιλιόμετρα καὶ ἀπὸ ἀεροπλάναυ εὑρισκομένου κατακορύφως ὑπὲρ τὸ ἓν σημεῖον, βλέπομεν τὰ δύο σημεῖα ὑπὸ γωνίαν $32^030'$: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου ἀπὸ τῆς Γῆς.

Τὸ ζητούμενον ὕψος ἰσοῦται μὲ $4σφ32^030'=4\cdot 1{,}5697=6{,}2788$ χιλ.

174. Ἀπὸ ἀεροπλάνου, τὸ ὁποῖον ἵπταται εἰς ὕψος 1000 μέτρων ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, βλέπομεν περισκόπιον ὑποβρυχίου ὑπὸ γωνίαν βάθους $24^016'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις τοῦ ὑποβρυχίου ἀπὸ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ ἀεροπλάνου.

Εἶναι $α=1000σφ24^016'=1000\cdot 2{,}2182=2218{,}2$ μ.

175. Ἐκ δύο σημείων ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους φαίνεται τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἀεροπλάνον ὑπὸ γωνίας ὕψους 60^0 καὶ 45^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του, ὅταν ἡ μεταξὺ τῶν δύο σημείων ἀπόστασις εἶναι 1000 μ. (Τὰ δύο σημεῖα καὶ τὸ ἀεροπλάνον ὑποτίθενται ἐν τῷ αὐτῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ).

Ἔστω Α καὶ Β τὰ δύο σημεῖα καὶ Γ ἡ θέσις τοῦ ἀεροπλάνου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς παρατηρήσεως. Ἐὰν τὸ ὕψος ΓΔ πίπτῃ ἐντὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, τότε κατὰ τὴν ἄσκησιν 162 ἔχομεν:

$$(ΓΔ)=\frac{1000}{σφ45^0+σφ60^0}=\frac{1000}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1000\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{1000\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}=500\,(3-\sqrt{3})=500\cdot$$
$$\cdot(3-1{,}732)=634 \text{ μ.}$$

Ἐὰν ὅμως τὸ ὕψος ΓΔ πίπτῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ, θὰ ἔχωμεν:

$$(\Gamma\Delta)=\frac{1000}{\sigma\varphi 45^0-\sigma\varphi 60^0}=500(3+1.732)=2366 \ \mu.$$

176. Ἐπὶ τῆς κορυφῆς πύργου ὕψους υ, ἔχει στερεωθῇ κοντὸς σημαίας ὕψους υ′. Ἀπὸ δὲ σημείου Α δυτικῶς τοῦ πύργου ἡ γωνία ὕψους τῆς κορυφῆς τοῦ πύργου εἶναι φ καὶ ἀπὸ σημείου Β βορείως τοῦ Α ἡ γωνία ὕψους τῆς κορυφῆς τοῦ κοντοῦ εἶναι ω. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

Ἔστω ΓΔ ὁ πύργος καὶ ΔΕ ὁ κοντὸς τῆς σημαίας. Τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΒΓΕ εὑρίσκομεν ὅτι $(\mathrm{A}\Gamma)=(\Gamma\Delta)\sigma\varphi\varphi=\upsilon\sigma\varphi\varphi$ καὶ $(\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{BE})\sigma\varphi\omega=(\upsilon+\upsilon')\sigma\varphi\omega$. Τέλος ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν $(\mathrm{AB})=\sqrt{(\mathrm{B}\Gamma)^2-(\mathrm{A}\Gamma)^2}=$ $=\sqrt{(\upsilon+\upsilon')^2\cdot\sigma\varphi^2\omega-\upsilon^2\sigma\varphi^2\varphi}$.

177. Ἐκκρεμὲς μήκους μ, ἔχει πλάτος ω καὶ μέγιστον ὕψος ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας υ. Ἐὰν ὅμως διπλασιασθῇ τὸ μῆκος του καὶ τὸ μέγιστον ὕψος ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας εἶναι ἴσον μὲ υ, τὸ πλάτος γίνεται θ. Ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι τότε εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega=2\sigma\upsilon\nu\vartheta-1$.

Ἔστω ΟΑ ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας καὶ ΟΒ ἡ θέσις ἥτις μετὰ τῆς ΟΑ σχηματίζει γωνίαν ω. Ἤδη ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ τέμνῃ αὐτὴν εἰς τὸ Γ θὰ εἶναι $(\mathrm{A}\Gamma)=\upsilon=(\mathrm{OA})-(\mathrm{O}\Gamma)=\mu-\mu\sigma\upsilon\nu\omega=\mu(1-\sigma\upsilon\nu\omega)$.

Ἂν τώρα τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς γίνῃ 2μ καὶ ἡ θέσις τῆς ἰσορροπίας εἶναι ΟΑ′, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ τῆς θέσεως ΟΒ′ γωνίαν θ καὶ Β′Γ′ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Β′ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ′, θὰ εἶναι $(\mathrm{A}'\Gamma')=\upsilon=(\mathrm{OA}')-(\mathrm{O}\Gamma')=2\mu-2\mu\sigma\upsilon\nu\vartheta=2\mu(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$.

Ὅθεν: $\mu(1-\sigma\upsilon\nu\omega)=2\mu(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega=2\sigma\upsilon\nu\vartheta-1$.

178. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ δύο θέσεις εἰς τὸ μέγιστον ὕψος ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἔχουν ἀπόστασιν μεταξύ των ἴσην μὲ $2\mu(\eta\mu\vartheta-\sqrt{\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta})$.

Ἐὰν ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β′Γ′ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι ἡ $\mathrm{B}'\Gamma'-\Delta\Gamma'=$ $=\mathrm{B}'\Delta=\mathrm{B}'\Gamma'-\mathrm{B}\Gamma$. Ἀλλ᾿ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒ′Γ′ ἔχομεν $(\mathrm{B}'\Gamma')=(\mathrm{OB}')\eta\mu\vartheta=$ $=2\mu\eta\mu\vartheta$· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ ἔχομεν $(\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{OB})\eta\mu\omega=\mu\eta\mu\omega$. Ὥστε εἶναι $(\mathrm{B}'\Delta)=2\mu\eta\mu\vartheta-\mu\eta\mu\omega$ ἢ ἐπειδὴ $\eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\sqrt{1-(2\sigma\upsilon\nu\vartheta-1)^2}$ εἶναι $(\mathrm{B}'\Delta)$ $=2\mu\eta\mu\vartheta-\mu\sqrt{1-(2\sigma\upsilon\nu\vartheta-1)^2}=2\mu(\eta\mu\vartheta-\sqrt{\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta})$.

179. Πλοῖον κινούμενον ἐπὶ περιφερείας παραλλήλου κύκλου γεωγραφικοῦ πλάτους 30^0, ἔφθασεν ἀπὸ τῆς θέσεως Α εἰς τὴν θέσιν Β. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ναυτικὰ μίλια διήνυσε τὸ πλοῖον, ὅταν τὰ γεωγραφικὰ μήκη τῶν Α καὶ Β διαφέρουν κατὰ $1^0\,50'\,30''$.

Ἐπειδὴ $1^0\,5'\,30''=110\,\frac{1}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἔπεται (§ 36) ὅτι τὰ ζητούμενα ναυτικὰ μίλια εἶναι $\frac{221}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{221\cdot 1{,}732}{4}=95{,}693$.

180. Πλοῖον ἀναχωροῦν ἀπὸ τῆς θέσεως Α βορείου πλάτους 32^0 καὶ δυτικοῦ μήκους 58^0, φθάνει εἰς τὴν θέσιν Β βορείου πλάτους 35^0 καὶ δυτικοῦ μήκους 54^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς πορείας τοῦ πλοίου.

Φέρομεν τοὺς μεσημβρινοὺς ΠΑΠ′ καὶ ΠΒΠ′, καὶ τὸν παράλληλον διὰ τοῦ Α, ὅστις ἔστω ὅτι τέμνει τὸν μεσημβρινὸν ΠΒΠ′ εἰς τὸ Γ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, ὅπερ ἐν τῇ πράξει τὸ λαμβάνομεν ὡς ἐπίπεδον (λόγῳ τῶν μικρῶν ἀποστάσεων), ἔχει τὴν γωνίαν Γ ὀρθήν, εἰς αὐτὸ δὲ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ εἶναι 180 ναυτικὰ μίλια (διότι $35^0-32^0=$ $=3^0=180'$) ἡ δὲ ΑΓ, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εἶναι $4\cdot 60\cdot\sigma\upsilon\nu 32^0=4\cdot 60\cdot 0{,}84805=$ $=203{,}532$ μίλια (διότι $58^0-54^0=4^0$). Ὅθεν: $\varepsilon\varphi\mathrm{BA}\Gamma=\frac{180}{203{,}532}$ καὶ $\mathrm{BA}\Gamma=41^0\,29'\,22''$. Ὥστε τὸ Β κεῖται ἀνατολικώτερον τοῦ Γ, βορείως τοῦ Γ, ἡ δὲ ΑΒ σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΠ γωνίαν $90^0-41^0\,29'\,22''=48^0\,30'\,38''$.

181. Πλοῖον ἀναχωροῦν ἀπὸ σημείου Λ διατρέχει 50 μίλια μὲ ΒΑ κατεύθυνσιν. Κατόπιν κάμνον στροφὴν 75^0, διατρέχει μὲ τὴν νέαν κατεύθυνσιν 30 μίλια φθάνον εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΜΛ.

Ἂν τὸ σημεῖον Λ εἶναι ἀριστερὰ τοῦ Α (σημείου πρὸς ἀνατολάς), ἡ ΛΑ σχηματίζει μὲ τὴν βορειοανατολικὴν κατεύθυνσιν ΛΤ τοῦ πλοίου γων. $ΤΛΑ=45^0$. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ΛΤ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΛΡ ἴσον μὲ 50 μίλια εἶναι γων. $ΤΡΜ=75^0$. Ἤδη φέρομεν ἐκ τῶν σημείων Ρ καὶ Μ, τὰς ΡΠ καὶ ΜΣ καθέτους ἐπὶ τὴν ΛΑ καὶ ἐκ τοῦ Μ παράλληλον πρὸς τὴν ΛΑ τέμνουσαν τὴν ΠΡ εἰς τὸ Κ. Ἀλλ' οὕτως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΡΚΜ εἶναι γων.$Μ=30^0$. Ὅθεν $(ΚΜ)=$ $=(ΡΜ)συν30^0=30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}=(ΠΣ)$ καὶ $(ΚΡ)=(ΡΜ)ημ30^0=30\cdot\frac{1}{2}=15$.

Ἐξ ἄλλου διὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΛΠΡ εὑρίσκομεν $(ΛΠ)=(ΛΡ)συν45^0=$ $=50\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}=(ΠΡ)$. Οὕτως ἔχομεν $(ΛΣ)=(ΛΠ)+(ΠΣ)=25\sqrt{2}+15\sqrt{3}$ καὶ $(ΣΜ)=$ $=(ΠΚ)=(ΠΡ)-(ΚΡ)=25\sqrt{2}-15$. Ὅθεν ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΛΜ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΛΜΣ ἰσοῦται μέ:

$$(ΛΜ)=\sqrt{(ΛΣ)^2+(ΣΜ)^2}=\sqrt{(25\sqrt{2}+15\sqrt{3})^2+(25\sqrt{2}-15)^2}.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

182. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ΄χ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε οὕτως ὥστε τὸ ἓν νὰ ἀπέχῃ τοῦ ἑπομένου του 1 μέτρον. Νὰ εὑρεθῇ τότε ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΕΑ}$, $\overrightarrow{ΔΑ}$ καὶ $\overrightarrow{ΒΔ}$.

Εἶναι $\overline{ΑΔ} = +3$, $\overline{ΕΑ} = -4$, $\overline{ΔΑ} = -3$ καὶ $\overline{ΒΔ} = +2$.

183. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον (ἀλγεβρικὸν) τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{ΑΒ}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος χΟχ΄ καὶ οὗ αἱ τετμημέναι τῶν ἄκρων του εἶναι α) 3,5 καὶ 5, β) —7 καὶ $2\frac{1}{4}$ καὶ γ) — 4 καὶ 4,8.

Εἶναι α) $\overline{ΟΒ} - \overline{ΟΑ} = 5 - 3{,}5 = 1{,}5$ β) $2\frac{1}{4} + 7 = 9\frac{1}{4}$ καὶ γ) 8,8.

184. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ΟΜ, ὅταν τὸ σημεῖον Μ πρὸς τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας χ΄Οχ καὶ y΄Oy ἔχει συντεταγμένας α) (—3,4), β) (6,—2), γ) (2,5) καὶ δ) ($\sqrt{3}$, — 1).

α) $\sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$, β) $2\sqrt{10}$ γ) $\sqrt{29}$ καὶ δ) 2.

185. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων 1) τετμημένην α) 4, β) —2, γ) 0 καὶ 2) τεταγμένην α) —3, β) 6, γ) 0.

1) α) καὶ β) εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ψ΄Οψ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ 4 καὶ —2 ἀντιστοίχως, γ) ὁ ἄξων ψ΄Οψ.

2) α) καὶ β) εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα χ΄Οχ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ —3 καὶ 6 ἀντιστοίχως, γ) ὁ ἄξων χ΄Οχ.

186. Νὰ εὑρεθῇ τὸ τεταρτημόριον εἰς ὃ κεῖνται τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα συντεταγμένας α) (0,5), β) (—6,0), γ) (0, —10) ὡς καὶ ἡ ἀκτίς των.

Κεῖνται α) ἐπὶ τοῦ ἄξονος ψ΄Οψ καὶ εἰς ἀπόστασιν 5.

β) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ΄οχ εἰς ἀπόστασιν 6. γ) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος ψ΄Οψ εἰς ἀπόστασιν 10.

187. Ποία εἶναι ἡ τετμημένη σημείου ἔχοντος τεταγμένην 7 καὶ ἀκτῖνα 9;

Ἀπ. $\pm\sqrt{9^2-7^2} = \pm 4\sqrt{2}$

188 Ποία εἶναι ἡ τεταγμένη σημείου ἔχοντος τετμημένην —5 καὶ ἀκτῖνα 6;

Ἀπ. $\pm\sqrt{6^2-5^2} = \pm\sqrt{11}$

189. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συντεταγμέναι σημείων εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο ἔχουν μεταξύ των λόγους ἴσους.

Ἔστω $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, δύο τυχόντα σημεῖα εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων καὶ $M_1Γ_1$, $M_2Γ_2$ αἱ ἐκ τῶν σημείων τούτων κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα χ΄Οχ. Τότε ἐκ τῶν σχηματιζομένων ὁμοίων τριγώνων ἔχομεν $\frac{\overline{Γ_1M_1}}{\overline{ΟΓ_1}} = \frac{\overline{Γ_2M_2}}{\overline{ΟΓ_2}}$ ἤτοι

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

190. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β, ὅταν αἱ συντεταγμέναι των πρὸς τοὺς αὐτοὺς ἄξονας εἶναι Α(1,4) καὶ Β(8,3).

Ἀπ. $\sqrt{(8-1)^2+(3-4)^2} = \sqrt{50}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑ ΤΟΞΑ

191. Δίδεται τόξον $\widehat{AM}$ ἀρχῆς Α καὶ πέρατος Μ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\widehat{AM}}{\nu}$ (ν ἀκέραιος θετικὸς μεγαλύτερος τοῦ 2) ἀρχῆς Α, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς.

Ἔστω α τὸ μέτρον τοῦ θετικοῦ γεωμετρικοῦ τόξου ΑΜ, ὁπότε $\widehat{AM}=\alpha+2k\pi$ καὶ $\frac{\widehat{AM}}{\nu}=\frac{\alpha}{\nu}+k\cdot\frac{2\pi}{\nu}$. Ἤδη διὰ νὰ λάβωμεν τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\widehat{AM}}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν εἰς τὸν k τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3 . . . . (ν—1), ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰ τόξα $\frac{\alpha}{\nu}$, $\frac{\alpha}{\nu}+\frac{2\pi}{\nu}$, $\frac{\alpha}{\nu}+2\cdot\frac{2\pi}{\nu}$, $\frac{\alpha}{\nu}+3\cdot\frac{2\pi}{\nu}$, ... $\frac{\alpha}{\nu}+(\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}$ τῶν ὁποίων τὰ πέρατα, σημειοῦμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων M_1, M_2, M_3...$M_{\nu-1}$, M_ν.

Διότι διὰ $k=\nu$ θὰ λάβωμεν τὸ τόξον $\frac{\alpha}{\nu}+2\pi$, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας μὲ τὸ τόξον $\frac{\alpha}{\nu}$, ἤτοι θὰ λάβωμεν ἐκ νέου τὸ σημεῖον M_1. Ὁμοίως διὰ $k=\nu+1$, θὰ λάβωμεν τὸ τόξον $\frac{\alpha}{\nu}+\frac{2\pi}{\nu}+2\pi$, ἤτοι θὰ λάβωμεν ἐκ νέου τὸ σημεῖον M_2. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ k, θὰ λάβωμεν ἓν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ν σημείων Μ.

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τόξα M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4.....$M_{\nu-1}M_\nu$ εἶναι μεταξύ των ἴσα, ὡς ἔχοντα ἕκαστον μέτρον $\frac{2\pi}{\nu}$. Ὥστε τὰ σημεῖα M_1, M_2 κλπ. πέρατα τῶν τόξων $\frac{\widehat{AM}}{\nu}$ εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς.

192. Δίδεται τόξον $\widehat{AM}=\frac{\pi}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ τίνος σχήματος κορυφαὶ εἶναι τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\widehat{AM}}{8}$ ἀρχῆς Α.

Διὰ τὰ τόξα $\frac{\widehat{AM}}{8}$ ἀρχῆς Α, ἔχομεν ὡς ἄνω $\frac{\widehat{AM}}{8}=\frac{\pi}{32}+k\cdot\frac{2\pi}{8}$. Ἤτοι τὰ ἐν λόγῳ πέρατα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

193. Δίδεται τόξον $\widehat{AM}=-\frac{\pi}{6}$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\widehat{AM}}{2}$, ἀρχῆς Α.

Ὅλα τὰ τόξα $\frac{\widehat{AM}}{2}$ ἀρχῆς Α δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $-\frac{\pi}{12}+K\cdot\frac{2\pi}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ εὑρίσκομεν διὰ $k=0$, $-\frac{\pi}{12}$ καὶ διὰ $k=1$, $-\frac{\pi}{12}+\pi$, συνάγομεν ὅτι τὰ ζητούμενα πέρατα εἶναι ἄκρα τῆς αὐτῆς διαμέτρου, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος τοῦ τόξου $-\frac{\pi}{12}$.

194. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμιάθροισμα δύο τόξων ἀρχῆς Α.

Ἔστω δύο τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{A\Gamma}$, Μ δὲ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ. Τότε κατὰ τὴν σχέσιν τοῦ Chasles ἔχομεν:

$$\widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{BM} + 2\lambda\pi,\quad \widehat{AM} = \widehat{A\Gamma} + \widehat{\Gamma M} + 2\lambda'\pi.$$

$$\text{ἤτοι,}\quad 2 \cdot \widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{A\Gamma} + \widehat{BM} + \widehat{\Gamma M} + 2(\lambda + \lambda')\pi$$

$$\text{ἢ (ἐπειδὴ } \widehat{BM} + \widehat{\Gamma M} = 0 + 2\lambda''\pi)\ 2 \cdot \widehat{AM} = \widehat{AB} + \widehat{A\Gamma} + 2(\lambda + \lambda' + \lambda'')\pi$$

ἢ $\widehat{AM} = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{A\Gamma}}{2} + k\pi$, ὅπου $k = \lambda + \lambda' + \lambda''$ ($\lambda, \lambda', \lambda''$ ἀκέραιοι ἀλγ. ἀριθμοί).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ Ἢ ΤΟΞΟΥ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀλγεβρικὰ σημεῖα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων τριγωνομετρικοῦ κύκλου ὧν τὰ μέτρα εἶναι:

195. 225^0. **196.** 275^0. **197.** 480^0. **198.** 1020^0

Ἀπ. (195). Θετ. μόνον ἡ ἐφ. καὶ ἡ σφ. (III). (196) Θ. μόνον τὸ συν. καὶ ἡ τεμ. (IV) (197) Θ. μόνον τὸ ημ. καὶ ἡ συντ. (II) (198). Θ. μόνον τὸ συν. καὶ ἡ τεμ. (IV).

Εἰς ποῖον τεταρτημόριον τελειώνει τόξον θ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ὅταν ἔχῃ:

199. ημθ>0 καὶ εφθ<0. **200.** τεμθ>0 καὶ εφθ<0

201. συνθ<0 καὶ σφθ>0. **202.** συντθ>0 καὶ σφθ<0.

Ἀπ. (199) II. (200) IV (201). III (202). II.

Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

203. $\text{συν}^2x - \text{ημ}^2x = 1 - 2\text{ημ}^2x = 2\text{συν}^2x - 1$

Εἶναι α) $\text{συν}^2x - \text{ημ}^2x = (1 - \text{ημ}^2x) - \text{ημ}^2x = 1 - 2\text{ημ}^2x$

β) $\text{συν}^2x - \text{ημ}^2x = \text{συν}^2x - (1 - \text{συν}^2x) = 2\text{συν}^2x - 1.$

204. $\text{συντ}^2y\,\text{εφ}^2y = \text{εφ}^2y + 1.$ Α. $\dfrac{1}{\text{ημ}^2y} \cdot \dfrac{\text{ημ}^2y}{\text{συν}^2y} = \dfrac{1}{\text{συν}^2y} = \text{τεμ}^2y = \text{εφ}^2y + 1$ (τ. 7)

205. $(\text{σφ}y + 1)^2 = \text{συντ}^2y + 2\text{σφ}y.$ Ἀπ. $\text{σφ}^2y + 1 + 2\text{σφ}y = \text{συντ}^2y + 2\text{σφ}y$ (τ. 8).

206. $(\text{συντ}\vartheta - \text{σφ}\vartheta)(\text{συντ}\vartheta + \text{σφ}\vartheta) = 1.$ Ἀπ. $\text{συντ}^2\vartheta - \text{σφ}^2\vartheta = 1 + \text{σφ}^2\vartheta - \text{σφ}^2\vartheta = 1.$

207. $(\text{ημ}x + \text{συν}x)(\text{σφ}x + \text{εφ}x) = \text{τεμ}x + \text{συντ}x$

Ἀπ. Εἶναι $(\text{ημ}x + \text{συν}x)\left(\dfrac{\text{συν}x}{\text{ημ}x} + \dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right) = (\text{ημ}x + \text{συν}x)\left(\dfrac{1}{\text{ημ}x\,\text{συν}x}\right) =$

$$= \text{ημ}x \cdot \frac{1}{\text{ημ}x\,\text{συν}x} + \text{συν}x \cdot \frac{1}{\text{ημ}x\,\text{συν}x} = \frac{1}{\text{συν}x} + \frac{1}{\text{ημ}x} = \text{τεμ}x + \text{συντ}x.$$

208. $\dfrac{\text{ημ}\omega + \text{συν}\omega}{\text{ημ}\omega - \text{συν}\omega} = \dfrac{\text{εφ}\omega + 1}{\text{εφ}\omega - 1} = \dfrac{1 + \text{σφ}\omega}{1 - \text{σφ}\omega}.$

Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους πρῶτον διὰ συνω καὶ ἔπειτα δι' ημω.

209. $\text{συντ}^2B + \text{τεμ}^2B = \dfrac{\text{τεμ}^2B}{\text{ημ}^2B}$

Ἀπ. $\dfrac{1}{\text{ημ}^2B} + \dfrac{1}{\text{συν}^2B} = \dfrac{1}{\text{ημ}^2B\,\text{συν}^2B} = \dfrac{1}{\text{συν}^2B} \cdot \dfrac{1}{\text{ημ}^2B} = \dfrac{\text{τεμ}^2B}{\text{ημ}^2B}$

210. $\dfrac{1+\varepsilon\varphi^2 B}{1+\sigma\varphi^2 B}=\dfrac{\eta\mu^2 B}{\sigma\upsilon\nu^2 B}$. 'Απ. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 B}:\dfrac{1}{\eta\mu^2 B}=\dfrac{\eta\mu^2 B}{\sigma\upsilon\nu^2 B}$ (τύπ. 7 καὶ 8).

211. $\dfrac{1}{\sigma\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma}=\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

'Απ. $1:\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma}+\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}\right)=1:\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma}{\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=1:\dfrac{1}{\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

212. $\dfrac{1}{\tau\varepsilon\mu\Gamma-\varepsilon\varphi\Gamma}=\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma$.

'Απ. $\dfrac{\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma}{(\tau\varepsilon\mu\Gamma-\varepsilon\varphi\Gamma)(\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma)}=\dfrac{\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma}{\tau\varepsilon\mu^2\Gamma-\varepsilon\varphi^2\Gamma}=\dfrac{\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma}{1+\varepsilon\varphi^2\Gamma-\varepsilon\varphi^2\Gamma}=\tau\varepsilon\mu\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma$ (τ. 7).

213. $\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

'Απ. $\eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta)-(1-\eta\mu^2\alpha)\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta$.

214. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1$.

'Απ. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)=\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta=$ $=\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1$.

215. $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\eta\mu\alpha\varepsilon\varphi\alpha$. 'Απ. $\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\eta\mu\alpha\cdot\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\eta\mu\alpha\varepsilon\varphi\alpha$.

216. $\dfrac{\varepsilon\varphi\beta-1}{\varepsilon\varphi\beta+1}=\dfrac{1-\sigma\varphi\beta}{1+\sigma\varphi\beta}$. 'Απ. $\left(\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta}-1\right):\left(\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta}+1\right)=\dfrac{1-\sigma\varphi\beta}{1+\sigma\varphi\beta}$.

217. $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\vartheta}{\tau\varepsilon\mu^2\vartheta}+\dfrac{\sigma\varphi^2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta}=1$. 'Απ. $\varepsilon\varphi^2\vartheta:\tau\varepsilon\mu^2\vartheta=\varepsilon\varphi^2\vartheta:(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta)$

καὶ $\sigma\varphi^2\vartheta:\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}:(1+\sigma\varphi^2\vartheta)=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}:\left(1+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\vartheta}\right)=1:$ $:(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta)$. Ὅθεν τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ $(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta):(1+\varepsilon\varphi^2\vartheta)=1$.

218. $\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi}=1-2\eta\mu^2\chi$. 'Απ. $\left(1-\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}\right):\left(1+\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}\right)=$

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi}=\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi=1-\eta\mu^2\chi-\eta\mu^2\chi=1-2\eta\mu^2\chi$.

219. $\dfrac{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{2\eta\mu^2\chi-1}=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\chi-\sigma\varphi\chi}$. 'Απ. Τὸ α' μέλος (ἄσκ. 203) ἰσοῦται μέ:

$\dfrac{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi-\sigma\upsilon\nu^2\chi}=\dfrac{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}:\left(\dfrac{\eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}\right)=1:\left(\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\right)=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\chi-\sigma\varphi\chi}$.

220. $\tau\varepsilon\mu\chi+\varepsilon\varphi\chi=\dfrac{\eta\mu^2\chi+\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$. 'Απ. $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}+\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}=\dfrac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.

221. $\dfrac{\varepsilon\varphi\chi-\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\varphi\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\tau\varepsilon\mu\chi}$.

'Απ. $\dfrac{\varepsilon\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}-\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}=\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\varphi\chi}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\tau\varepsilon\mu\chi}$, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\tau\chi=\dfrac{1}{\eta\mu\chi}$, ἤτοι $\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}=\eta\mu\chi:\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau\chi}=\sigma\upsilon\nu\chi:\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.

222. $\dfrac{\sigma\varphi\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sigma\varphi\vartheta+\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\dfrac{\sigma\varphi\vartheta-\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sigma\varphi\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}$.

$$\text{'Απ. } \frac{σφθσυνθ(σφθ-συνθ)}{σφ^2θ-συν^2θ}=\frac{σφθσυνθ(σφθ-συνθ)}{σφ^2θ\cdot συν^2θ}=\frac{σφθ-συνθ}{σφθσυνθ}$$

διότι $σφ^2θ-συν^2θ=\frac{συν^2θ}{ημ^2θ}-συν^2θ=\frac{συν^2θ(1-ημ^2θ)}{ημ^2θ}=\frac{συν^2θ}{ημ^2θ}\cdot συν^2θ=σφ^2θ\cdot συν^2θ.$

223. $\frac{τεμα-εφα}{τεμα+εφα}=1-2τεμαεφα+2εφ^2α.$

'Απ. $\frac{(τεμα-εφα)^2}{τεμ^2α-εφ^2α}=\frac{τεμ^2α-2τεμαεφα+εφ^2α}{1+εφ^2α-εφ^2α}=1+εφ^2α-2τεμα\cdot εφα+εφ^2α.$

224. $\frac{εφα}{1-σφα}+\frac{σφα}{1-εφα}=τεμασυντα+1.$

'Απ. $\frac{εφα}{1-σφα}=\frac{ημα}{συνα}:\left(1-\frac{συνα}{ημα}\right)=\frac{ημ^2α}{(ημα-συνα)συνα}, \frac{σφα}{1-εφα}=\frac{συν^2α}{(συνα-ημα)ημα}.$

Ὅθεν τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ $\left(\frac{ημ^3α-συν^3α}{ημα-συνα}\right)\cdot\frac{1}{συναημα}=(ημ^2α+ημασυνα+συν^2α)$

$\frac{1}{συναημα}=\frac{1}{συνα}\cdot\frac{1}{ημα}+1=τεμασυντα+1.$

225. $σφβ-εφβ=2συνβσυντβ-τεμβσυντβ.$

'Απ. $\frac{συνβ}{ημβ}-\frac{ημβ}{συνβ}=\frac{συν^2β-ημ^2β}{ημβσυνβ}=\frac{2συν^2β-1}{ημβσυνβ}=2συνβ\cdot\frac{1}{ημβ}-\frac{1}{συνβ}\cdot\frac{1}{ημβ}.$

226. $\frac{1+συνθ}{1-συνθ}=(συντθ+σφθ)^2.$

'Απ. $\frac{(1+συνθ)^2}{1-συν^2θ}=\frac{1+2συνθ+συν^2θ}{ημ^2θ}=\frac{1}{ημ^2θ}+2\cdot\frac{1}{ημθ}\cdot\frac{συνθ}{ημθ}+\frac{συν^2θ}{ημ^2θ}=συντ^2θ+2συντθσφθ$
$+σφ^2θ=(συντθ+σφθ)^2.$

227. $σφ^2χ-σφ^2ψ=\frac{ημ^2ψ-ημ^2χ}{ημ^2χημ^2ψ}.$

'Απ $\frac{συν^2χ}{ημ^2χ}-\frac{συν^2ψ}{ημ^2ψ}=\frac{συν^2χημ^2ψ-ημ^2χσυν^2ψ}{ημ^2χημ^2ψ}=\frac{ημ^2ψ-ημ^2χ}{ημ^2χημ^2ψ}$ (ἄσκ. 213).

228. $(1+σφθ-συντθ)(1+εφθ+τεμθ)=2.$

'Απ. $\left(1+\frac{συνθ}{ημθ}-\frac{1}{ημθ}\right)\left(1+\frac{ημθ}{συνθ}+\frac{1}{συνθ}\right)=\frac{[(ημθ+συνθ)-1]\cdot[(ημθ+συνθ)+1]}{ημθσυνθ}=$

$$=\frac{(ημθ+συνθ)^2-1}{ημθσυνθ}=\frac{ημ^2θ+συν^2θ+2ημθσυνθ-1}{ημθσυνθ}=\frac{2ημθσυνθ}{ημθσυνθ}=2.$$

229. $(τεμθ-συνθ)(συντθ-ημθ)(εφθ+σφθ)=1.$

'Απ. $\left(\frac{1}{συνθ}-συνθ\right)\left(\frac{1}{ημθ}-ημθ\right)\left(\frac{ημθ}{συνθ}+\frac{συνθ}{ημθ}\right)=\frac{1-συν^2θ}{συνθ}\cdot\frac{1-ημ^2θ}{ημθ}\cdot\frac{ημ^2θ+συν^2θ}{συνθημθ}=$

$$=\frac{ημ^2θ}{συνθ}\cdot\frac{συν^2θ}{ημθ}\cdot\frac{1}{συνθημθ}=1.$$

230. $συν^6θ-ημ^6θ=(1-ημ^2θσυν^2θ)(1-2ημ^2θ).$

'Απ. 'Επειδὴ $χ^3-y^3=(x-y)(χ^2+xy+y^2)$, ὅταν θέσωμεν $συν^2θ=x$ καὶ $ημ^2θ=y$, λαμβάνομεν $συν^6θ-ημ^6θ=(συν^2θ-ημ^2θ)(συν^4θ+συν^2θημ^2θ+ημ^4θ)$. 'Αλλ' εἶναι $συν^2θ-$ $-ημ^2θ=1-2ημ^2θ$ καὶ $συν^4θ+συν^2θημ^2θ+ημ^4θ=συν^2θ(1-ημ^2θ)+(1-ημ^2θ)ημ^2θ+ημ^4θ=$ $=συν^2θ-ημ^2θσυν^2θ+ημ^2θ-ημ^4θ+ημ^4θ=1-ημ^2θσυν^2θ.$

231. $συν^6θ+ημ^6θ=1-3ημ^2θσυν^2θ.$

'Απ. 'Επειδὴ $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$ λαμβάνομεν: $συν^6θ+ημ^6θ=(συν^2θ+$ $+ημ^2θ)(συν^4θ+ημ^4θ-συν^2θημ^2θ)=συν^4θ+ημ^4θ-συν^2θημ^2θ=συν^2θ(1-ημ^2θ)+ημ^2θ(1-$ $-συν^2θ)-συν^2θημ^2θ=συν^2θ-συν^2θημ^2θ+ημ^2θ-ημ^2θσυν^2θ-συν^2θημ^2θ=1-3ημ^2θσυν^2θ.$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς τιμῆς τοῦ θ.

232. $\eta\mu^4\vartheta(3-2\eta\mu^2\vartheta)+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta(3-2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)$.

Ἀπ. Γράφεται $3(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)-2(\eta\mu^6\vartheta+\sigma\upsilon\nu^6\vartheta)$. Ἀλλ' εἶναι $\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta=(\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)^2-2\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=1-2\eta\mu^2\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\vartheta$ ὅθεν: δοθεῖσα παράστασις$=1$ (ἄσκ. 231).

233. $\eta\mu^6\vartheta+\sigma\upsilon\nu^6\vartheta+3\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=1$ (ἄσκ. 231).

234. $\eta\mu^8\vartheta+\sigma\upsilon\nu^8\vartheta+6\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta+4\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)$.

Ἀπ. Γράφεται $(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)^2+4\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta+4\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)=(\eta\mu^4\vartheta+$ $+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)\,[\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta+4\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta]+4\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta=[1-2\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta][1+2\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta]+$ $4\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta$ (ἄσκ. 232) $=1-4\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta+4\eta\mu^4\vartheta\sigma\upsilon\nu^4\vartheta=1$.

235. $3(\eta\mu^8\vartheta-\sigma\upsilon\nu^8\vartheta)+4(\sigma\upsilon\nu^6\vartheta-2\eta\mu^6\vartheta)+6\eta\mu^4\vartheta$.

Ἀπ. Εἶναι $\eta\mu^8\vartheta-\sigma\upsilon\nu^8\vartheta=(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)(\eta\mu^4\vartheta-\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)=(\eta\mu^4\vartheta+\sigma\upsilon\nu^4\vartheta)(\eta\mu^2\vartheta-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)=$ $=\eta\mu^6\vartheta-\sigma\upsilon\nu^6\vartheta+\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta)=\eta\mu^6\vartheta-\sigma\upsilon\nu^6\vartheta+\eta\mu^2\vartheta(1-\eta\mu^2\vartheta)\,(1-2\eta\mu^2\vartheta)=-\eta\mu^2\vartheta$ $-3\eta\mu^4\vartheta+3\eta\mu^6\vartheta-\sigma\upsilon\nu^6\vartheta$.

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μέ:

$3\eta\mu^2\vartheta-3\eta\mu^4\vartheta+\eta\mu^6\vartheta+\sigma\upsilon\nu^6\vartheta=3\eta\mu^2\vartheta-3\eta\mu^4\vartheta+1-3\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=3\eta\mu^2\vartheta-3\eta\mu^4\vartheta+1-3\eta\mu^2\vartheta$ $(1-\eta\mu^2\vartheta)=1$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου θ.

236. Ἐκ τῆς σφθ. ***237.*** Ἐκ τῆς τεμθ. ***238.*** Ἐκ τῆς συντθ.

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ π.δ. τῆς § 67 θὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενα ὡς τὰ εἰς τὸν πίνακα τῆς σελίδος 14 τῆς Τριγωνομετρίας μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ θὰ θέσωμεν τὰ σημεῖα $\pm$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξου θ, ὅταν περατοῦται εἰς τὸ τεταρτημόριον ποὺ σημειοῦται ἐντὸς παρενθέσεως καὶ ἔχῃ:

239. $\eta\mu\vartheta=\dfrac{12}{13}$ (I).

Λ. $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\sqrt{1-\dfrac{12^2}{13^2}}=\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\dfrac{5}{13}$, $\varepsilon\varphi\vartheta=\dfrac{12}{13}:\dfrac{5}{13}=\dfrac{12}{5}$, $\sigma\varphi\vartheta=\dfrac{5}{12}$, $\tau\varepsilon\mu\vartheta=\dfrac{13}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta=\dfrac{13}{12}$.

240. $\sigma\upsilon\nu\vartheta=-\dfrac{13}{17}$ (III). Λ. $\eta\mu\vartheta=-\sqrt{1-\dfrac{13^2}{17^2}}=-\dfrac{2\sqrt{30}}{17}$, $\varepsilon\varphi\vartheta=\dfrac{2\sqrt{30}}{13}$ κλπ.

241. $\varepsilon\varphi\vartheta=-\dfrac{7}{19}$ (II). Λ. $\sigma\varphi\vartheta=-\dfrac{19}{7}$, $\eta\mu\vartheta=\dfrac{7}{19}:\sqrt{1+\dfrac{7^2}{19^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{410}}$ κλπ.

242. $\sigma\varphi\vartheta=-\dfrac{9}{14}$ (IV). Λ. $\varepsilon\varphi\vartheta=-\dfrac{14}{9}$, $\eta\mu\vartheta=-\left(1:\sqrt{1+\dfrac{7^2}{14^2}}\right)=-\dfrac{14}{\sqrt{277}}$ (ἄσκ. 79) κλπ.

243. $\tau\varepsilon\mu\vartheta=-3$ (II). Λ. $\eta\mu\vartheta=\dfrac{\sqrt{9-1}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=-\dfrac{1}{3}$ (ἄσκ. 80) κλπ.

244. $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta=\dfrac{41}{40}$ (II). Λ. $\eta\mu\vartheta=\dfrac{40}{41}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=-\left(\sqrt{\dfrac{41^2}{40^2}-1}:\dfrac{41}{40}\right)=-\dfrac{9}{41}$ κλπ.

245. $\tau\varepsilon\mu\vartheta=\dfrac{25}{7}$ καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta<0$. Λ. (IV), $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\dfrac{7}{25}$, $\eta\mu\vartheta=-\left(\sqrt{\dfrac{25^2}{7^2}-1}:\dfrac{25}{7}\right)=-\dfrac{24}{25}$

246. $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta=\dfrac{61}{60}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta<0$. Λ. (II), $\eta\mu\vartheta=\dfrac{60}{61}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta=-\dfrac{11}{61}$ κλπ.

247. $\eta\mu\vartheta = -\dfrac{3}{4}$ καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta > 0$. Λ. (III), $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$ κλπ.

248. $\varepsilon\varphi\vartheta = -\dfrac{3}{5}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta > 0$. Λ. (IV), $\eta\mu\vartheta = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ κλπ.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

249. $\dfrac{3\eta\mu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\vartheta}{2 + \varepsilon\varphi\vartheta\eta\mu\vartheta}$, ὅταν $\varepsilon\varphi\vartheta = -\dfrac{7}{24}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta < 0$.

Λ. Πέρας τοῦ ϑ εἰς τὸ II. Ὅθεν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{7}{25}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -\dfrac{24}{25}$, ἡ δὲ ζητουμένη τιμή, ἣν παριστῶμεν διὰ y, εἶναι $y = \left(3 \cdot \dfrac{7}{25} - \dfrac{24}{25}\right) : \left(2 - \dfrac{7}{24} \cdot \dfrac{7}{25}\right) = -\dfrac{72}{1151}$.

250. $\dfrac{\varepsilon\varphi\vartheta}{\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta}$, ὅταν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{5}{13}$ καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta < 0$.

Λ. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -\dfrac{12}{13}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = -\dfrac{5}{12}$ καὶ $y = \dfrac{5}{12} : \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{169}{144}$.

251. $\dfrac{2\eta\mu\vartheta\tau\varepsilon\mu\vartheta - \varepsilon\varphi\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta + 3\sigma\varphi\vartheta}$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu\vartheta = -\dfrac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu\vartheta < 0$.

Λ. $\eta\mu\vartheta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi\vartheta = \sqrt{3}$, $\sigma\varphi\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tau\varepsilon\mu\vartheta = -2$, $\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ καὶ

$$y = \left[2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2) - \sqrt{3}\right] : \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 3.$$

252. $\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὅταν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{3}{5}$ (I) καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{40}{41}$ (I).

Λ. $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{4}{5}$, $\eta\mu\omega = \dfrac{9}{41}$ καὶ $y = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{40}{41} - \dfrac{9}{41} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{84}{205}$.

253. $\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\vartheta\eta\mu\omega$, ὅταν $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{15}{8}$ (I) καὶ $\varepsilon\varphi\omega = -\dfrac{5}{12}$ (II).

Λ. $\eta\mu\vartheta = \dfrac{15}{8} : \sqrt{1 + \dfrac{225}{64}} = \dfrac{15}{17}$, $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \dfrac{8}{17}$, $\eta\mu\omega = \dfrac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = -\dfrac{12}{13}$ καὶ

$$y = \frac{8}{17} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{171}{221}.$$

254. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ $\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καὶ ἡ $\varepsilon\varphi\vartheta$, ὅταν $\eta\mu\vartheta = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 + \nu^2}$.

Λ. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \pm\sqrt{1 - \dfrac{(\mu^2-\nu^2)^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{\mu^4+\nu^4+2\mu^2\nu^2-\mu^4-\nu^4+2\mu^2\nu^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}} =$

$$= \pm\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} \text{ καὶ } \varepsilon\varphi\vartheta = \pm\frac{\mu^2-\nu^2}{2\mu\nu}.$$

255. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ $\eta\mu\vartheta$ καὶ τὸ $\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ὅταν $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{2\mu(\mu+1)}{2\mu+1}$, $\vartheta < \dfrac{\pi}{2}$ καὶ $\mu > 0$

Λ. Ἐπειδὴ $\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta} = \sqrt{1 + \dfrac{4\mu^2(\mu+1)^2}{(2\mu+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{(2\mu+1)^2+4\mu^2(\mu+1)^2}}{2\mu+1} =$

$$= \frac{\sqrt{4\mu^4+8\mu^3+8\mu^2+4\mu+1}}{2\mu+1} = \frac{\sqrt{(4\mu^4+4\mu^2+1)+(8\mu^3+4\mu)+4\mu^2}}{2\mu+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{(2\mu^2+1)^2+2\cdot(2\mu^2+1)\cdot 2\mu+(2\mu)^2}}{2\mu+1} = \frac{2\mu^2+2\mu+1}{2\mu+1}, \text{ ἕπεται ὅτι}$$

$$ημθ = \frac{εφθ}{\sqrt{1+εφ^2θ}} = \frac{2μ(μ+1)}{2μ^2+2μ+1} \quad καὶ \quad συνθ = \frac{2μ+1}{2μ^2+2μ+1}.$$

Νὰ ἐπαληθευθοῦν δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν αἱ ἰσότητες:

256. $5ημ90^0 = 10ημ45^0συν45.$ Λ. $5.1 = 5$ καὶ $10 . \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.$

257. $2ημ^2 30^0 — 2συν^2 30^0 = συν180^0.$ Λ. $2. \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1$ καὶ $συν180^0 = -1$

258. $\frac{1—συν^2 18^0}{συν18^0} = ημ18^0 εφ18^0.$ Λ. $ημ18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (§ 68), $συν18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

καὶ $εφ18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Ὅθεν τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ $\left(1 - \frac{10+\sqrt{5}}{16}\right):$

$: \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$ μὲ $\frac{\sqrt{5}-1}{4} . \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ (= β' μέλος)

259. $\frac{1+συν36^0}{1—συν36^0} = \left(\frac{1+συν36^0}{ημ36^0}\right)^2.$ Λ. Ἡ δοθεῖσα ἰσότης εἶναι ταυτότης (ἄσκ. 226).

Ἑπομένως ἀληθεύει αὕτη καὶ διὰ $θ=36^0$.

260. $1+εφ^2 \frac{π}{3} = 3συντ^2 \frac{π}{3}.$ Λ. $1+ (\sqrt{3})^2 = 4$ καὶ $3 . \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4.$

261. $2\,σφ \frac{π}{3} = εφ \frac{π}{3} : \left(1 + συν\frac{π}{3}\right)$ Λ. $2 . \frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $\sqrt{3} : \left(1+\frac{1}{2}\right) = 2 . \frac{\sqrt{3}}{3}$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

262. $2ημ^2 30^0 + 2συν^2 30^0.$ Λ. $2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 . \frac{1}{4} + 2 . \frac{3}{4} = \frac{8}{4}.$

263. $\frac{4}{3} σφ^2 30^0 — 2συντ^2 60^0 — 3τεμ^2 30^0.$ Λ. $\frac{4}{3} . 3 - 2 . \frac{4}{3} - 3 . \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$

264. $\left(1+τεμ\frac{π}{6}\right) : \left(εφ\frac{π}{4} + 2εφ\frac{π}{6}\right).$ Λ. $\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right) : \left(1+2 . \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$

265. $4ημ60^0 : \left(2συν\frac{π}{3} + ημ\frac{π}{4}\right).$ Λ. $4 . \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(2 . \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}.$

266. $\left(εφ\frac{π}{4} + εφ\frac{π}{6}\right) : \left(1—εφ\frac{π}{4}\,εφ\frac{π}{6}\right).$ Λ. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) : \left(1 - 1 . \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2+\sqrt{3}.$

267. $\frac{2τεμ\,^{π}/_{6}}{συντ30^0} — \frac{1—συν2π}{εφ45^0}.$ Λ. $\frac{2+2/\sqrt{3}}{2} - \frac{1-1}{1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$

268. $εφ\frac{π}{3}\,συνπ — ημ\frac{π}{6} συν\frac{π}{3}$.Λ. $\sqrt{3}(-1) - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = -\left(\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right).$

269. $\sigma\upsilon\nu\tau^2\frac{\pi}{4}\,\tau\varepsilon\mu^2\frac{\pi}{6}\,\eta\mu^2\,\frac{\pi}{2}\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}$. Λ. $2\cdot\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί :

270. $\eta\mu(-30^0)=-\frac{1}{2}$. **271.** $\tau\varepsilon\mu(-45^0)=\sqrt{2}$. **272.** $\sigma\upsilon\nu 144^0=-\sigma\upsilon\nu 36^0$

$=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

273. $\eta\mu 1200^0=\eta\mu(360^0\cdot 3+120^0)=\eta\mu 120^0=\eta\mu 60^0=\sqrt{3}:2$.

274. $\eta\mu(-870^0)=-\eta\mu 870^0=-\eta\mu 150^0=-\eta\mu 30^0=-\frac{1}{2}$.

275. $\sigma\upsilon\nu\frac{23\pi}{5}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot 2+\frac{3\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{5}=-\eta\mu\frac{\pi}{10}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (τύπ. 15 καὶ § 68,4).

276. $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{49\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{49\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot 4+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

277. $\sigma\upsilon\nu\tau\frac{31\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\tau\left(2\pi\cdot 3+\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\tau\frac{7\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\tau\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$.

Ἂν Α+Β+Γ=180° νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι :

278. $\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$. **279.** $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}$. **280.** $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A+B}{2}$

Διότι $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$ (§ 69,5).

281. $\eta\mu A=-\eta\mu(2A+B+\Gamma)$.

Διότι $(2A+B+\Gamma)-A=A+B+\Gamma=180^0$ (§ 69,3).

282. $\sigma\upsilon\nu B=-\sigma\upsilon\nu(2B+A+\Gamma)$.

Διότι $2B+A+\Gamma-B=A+B+\Gamma=180^0$ (§ 69,3).

283. $\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{B+2A}{2}=\eta\mu\frac{B+2\Gamma}{2}$.

Ἐπειδὴ $90^0+\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{A+B+\Gamma}{2}+\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{B+2A}{2}$,

ἕπεται $\eta\mu\left(90^0+\frac{A-\Gamma}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{B+2A}{2}\right)$. Ἀλλὰ (§ 69,6) εἶναι καὶ

$\eta\mu\left(90^0+\frac{A-\Gamma}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{B+2A}{2}$.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ $\frac{B+2A}{2}+\frac{B+2\Gamma}{2}=A+B+\Gamma=180^0$, ἕπεται (§ 69,2)

$\eta\mu\frac{B+2A}{2}=\eta\mu\frac{B+2\Gamma}{2}$. Ὅθεν: $\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{B+2A}{2}=\eta\mu\frac{B+2\Gamma}{2}$

Ν' ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις :

284. $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\vartheta\right)\varepsilon\varphi(\pi-\vartheta)=-\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\varepsilon\varphi(-\vartheta)=\eta\mu\vartheta$ (σελ. 62 σημ. καὶ § 69,2).

285. $\tau\varepsilon\mu\,(\pi+\vartheta)\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\vartheta\right)=-\,\tau\varepsilon\mu\vartheta\cdot(-\sigma\upsilon\nu\vartheta)=1$ (σελ. 62 σημ. καὶ § 69,3).

286. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\vartheta)}{\tau\varepsilon\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\vartheta\right)}=-\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\eta\mu\vartheta$ (§ 69,2 καὶ σημ. σελ. 62).

287. $\dfrac{\sigma\varphi(2\pi-\vartheta)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)}=\dfrac{-\sigma\varphi\vartheta}{\varepsilon\varphi\vartheta}=-\,\sigma\varphi^2\vartheta.$

288. $\dfrac{\eta\mu\,(\pi-\vartheta)\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+\vartheta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)\varepsilon\varphi(\pi+\vartheta)}=\dfrac{\eta\mu\vartheta\cdot(-\sigma\varphi\vartheta)}{\sigma\upsilon\nu\vartheta\cdot\varepsilon\varphi\vartheta}=-\,\sigma\varphi\vartheta.$

289. $\dfrac{\eta\mu(\pi+\vartheta)\sigma\upsilon\nu(\pi-\vartheta)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\vartheta\right)+\varepsilon\varphi(-\vartheta)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}=\dfrac{-\eta\mu\vartheta\cdot(-\sigma\upsilon\nu\vartheta)}{\varepsilon\varphi\vartheta-\varepsilon\varphi\vartheta+\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\eta\mu\vartheta.$

Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου Α νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων :

290. $A-90^0$. **291.** $A-180^0$. **292.** $A-270^0$. **293.** $A-360^0$.

Λ. Ἐπειδὴ $A-90^0=-(90^0-A)$ εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu(A-90^0)=\eta\mu[-(90^0-A)]=-\,\eta\mu(90^0-A)=-\sigma\upsilon\nu A$, $\sigma\upsilon\nu(A-90^0)=\sigma\upsilon\nu[-(90^0-A)]=\sigma\upsilon\nu(90^0-A)=\eta\mu A$, $\varepsilon\varphi(A-90^0)=-\sigma\varphi A$ κλπ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$\eta\mu(A-180^0)=-\,\eta\mu(180^0-A)=-\eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu(A-180^0)=\sigma\upsilon\nu(180^0-A)=-\,\sigma\upsilon\nu A$ κλπ.
$\eta\mu(A-270^0)=-\,\eta\mu(270^0-A)=\sigma\upsilon\nu A$, $\sigma\upsilon\nu(A-270^0,=\sigma\upsilon\nu(270^0-A)=-\,\eta\mu A$ κλπ.
$\eta\mu(A-360^0)=-\,\eta\mu(360^0-A)=\eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu(A-360^0)=\sigma\upsilon\nu\,(360^0-A)=\sigma\upsilon\nu A$ κλπ.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

294. $\dfrac{\sigma\varphi30^0+\varepsilon\varphi210^0+\varepsilon\varphi120^0+\varepsilon\varphi330^0}{\tau\varepsilon\mu240^0\cdot\tau\varepsilon\mu60^0-\varepsilon\varphi240^0\cdot\varepsilon\varphi120^0}.$

Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi210^0=\varepsilon\varphi30^0$, $\varepsilon\varphi120^0=-\,\sigma\varphi30^0$ καὶ $\varepsilon\varphi330^0=-\,\varepsilon\varphi30^0$ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι ἴσον μὲ 0. Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ ἰσοῦται μὲ 0.

295. $\dfrac{\eta\mu390^0-\sigma\varphi690^0\varepsilon\varphi150^0\sigma\upsilon\nu(-150^0)}{\sigma\upsilon\nu(-300^0)+\sigma\upsilon\nu\tau840^0\eta\mu(-210^0)\varepsilon\varphi300^0}.$

Εἶναι $\dfrac{\eta\mu30^0-(-\sigma\varphi30^0)\,(-\varepsilon\varphi30^0)\,(-\sigma\upsilon\nu30^0)}{\eta\mu30^0+\tau\varepsilon\mu30^0\eta\mu30^0\,(-\sigma\varphi30^0)}=\dfrac{\eta\mu30^0+\sigma\upsilon\nu30^0}{\eta\mu30^0-1}=$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)=-(1+\sqrt{3}).$$

296. $\left(\varepsilon\varphi\dfrac{4\pi}{3}-\eta\mu\dfrac{7\pi}{3}\,.\,\tau\varepsilon\mu\dfrac{10\pi}{3}\right):\left[\sigma\varphi\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\tau\dfrac{5\pi}{6}\;\eta\mu\dfrac{5\pi}{3}\right].$

Εἶναι, $2\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}:\left(\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6}-\sigma\varphi\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}:\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}.$

297. $\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4}\,.\,\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right).\,\eta\mu\dfrac{5\pi}{4}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{10\pi}{3}\;\eta\mu\;\dfrac{13\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\tau\dfrac{5\pi}{4}.$

Εἶναι $-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\cdot\left(-\,\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\,\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\right):\left(-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(-\,\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\tau\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων, διὰ τὰς μεταβολὰς τοῦ θ ἀπὸ 0 ἕως 2π.

298. $y=1+\eta\mu\vartheta$. ***299.*** $y=2+\sigma\upsilon\nu\vartheta$. ***300.*** $y=1-\varepsilon\varphi\vartheta$. ***301.*** $y=1+3\tau\varepsilon\mu\vartheta$.

302. $y=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta$. ***303.*** $y=2\sigma\upsilon\nu\vartheta$. ***304.*** $y=\sigma\upsilon\nu(\vartheta+45^0)$. ***305.*** $y=\eta\mu 4\vartheta$.

306. $y=\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$. ***307.*** $y=\varepsilon\varphi 3\vartheta$. ***308.*** $y=\tau\varepsilon\mu 4\vartheta$. ***309.*** $y=\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$.

310. $y=2\eta\mu\frac{\vartheta}{3}$. ***311.*** $y=\sigma\upsilon\nu\tau\frac{\vartheta}{3}$. ***312.*** $y=\tau\varepsilon\mu\frac{\vartheta}{4}$.

Ἐργαζόμεθα ὡς δεικνύουν τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Π.χ. διὰ τὴν συνάρτησιν $y=1+\eta\mu\vartheta$ (ἄσκ. 298) λαμβάνομεν τὸν πίνακα :

τοξ. θ	0^0	αὐξ.	90^0	αὐξ.	180^0	αὐξ.	270^0	αὐξ.	360^0
ημθ	0	αὐξ.	1	ἐλατ.	0	ἐλατ.	-1	αὐξ.	0
$y=1+\eta\mu\vartheta$	1	αὐξ.	2	ἐλατ.	1	ἐλατ.	0	αὐξ.	1

Ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $y=\eta\mu 4\vartheta$ (ἄσκ. 305) παρατηροῦμεν ὅτι ἔχει περίοδον $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ἢ $\frac{360^0}{4}=90^0$. Ὥστε εἰς αὐτὴν ἀρκεῖ νὰ συνδυάσωμεν τὰς μεταβολὰς διὰ τὰς τιμὰς τοῦ θ ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὸν πίνακα :

τοξ. θ	0^0		$22^0\,30'$		45^0		$67^0\,30^0$		90^0
τοξ. 4θ	0^0		90^0		180^0		270^0		360^0
$y=\eta\mu 4\vartheta$	0	αὐξ.	1	ἐλατ.	0	ἐλατ.	-1	αὐξ.	0

Ἡ συνάρτησις $y=\varepsilon\varphi 3\vartheta$ (ἄσκ. 307) ἔχει περίοδον $\frac{180^0}{3}=60^0$. Ὅθεν δι' αὐτὴν θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

τοξθ	0^0		30^0		60^0
τοξ3θ	0^0		90^0		180^0
$y=\varepsilon\varphi 3\vartheta$	0	αὐξ.	$\frac{+\infty}{-\infty}$	αὐξ.	0

Ἡ συνάρτησις $y=2\eta\mu\frac{\vartheta}{3}$ (ἄσκ. 310) ἔχει περίοδον $360^0:\frac{1}{3}=1080^0$. Ὥστε δι' αὐτὴν θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

τόξθ	0°	270°	540°	810°	1080°
τόξ $\frac{\theta}{3}$	0°	90°	180°	270°	360°
$y=2\eta\mu\frac{\theta}{3}$	0 αὐξ.	2 ἐλατ.	0 ἐλατ.	-2 αὐξ.	0

Ὁμοίως θὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ καὶ τῶν ἄλλων συναρτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΝΙΚΑΙ ΤΙΜΑΙ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ ΤΩΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΔΟΘΕΝΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ τιμὴ τοῦ τόξου θ ὅταν ἔχῃ :

313. $\eta\mu\theta=1$. $\theta=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2}$. ***314***. $\eta\mu\theta=-1$. $\theta=k\pi-(-1)^k\cdot\frac{\pi}{2}$.
315. $\eta\mu\theta=0$. $\theta=k\pi$. ***316***. $\sigma\upsilon\nu\theta=1$. $\theta=2k\pi$. ***317***. $\sigma\upsilon\nu\theta=-1$. $\theta=2k\pi+\pi$.
318. $\sigma\upsilon\nu\theta=0$. $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$. ***319***. $\varepsilon\varphi\theta=0$. $\theta=k\pi$. ***320***. $\sigma\varphi\theta=0$. $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

321. $\varepsilon\varphi\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\theta=k\pi+\frac{\pi}{6}$. ***322***. $\sigma\varphi\theta=1$. $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

323. $\tau\varepsilon\mu\theta=-2$. $\theta=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

324. $\sigma\upsilon\nu 3x=-\eta\mu 3x$. Λ. Ἂν $\sigma\upsilon\nu 3x=0$ θὰ ἦτο καὶ $\eta\mu 3x=0$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι $\eta\mu^2 3x+\sigma\upsilon\nu^2 3x=1$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως διὰ $\sigma\upsilon\nu 3x\neq 0$ ὁπότε λαμβάνομεν $\frac{\eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu 3x}=-1$, ἤτοι $\varepsilon\varphi 3x=-1$, $3x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ καὶ $x=k\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$ (ι).

Σημείωσις. Ἀντὶ τοῦ πρώτου τόξου $-\frac{\pi}{4}$, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον τὸ ἔχον ἐφαπτομένην -1, ἤτοι τὸ $\frac{3\pi}{4}$. Τότε δὲ ἡ γενικὴ λύσις θὰ ἦτο $3x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$ καὶ $x=k\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ (ι'). Φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι ἑκάστη τῶν μορφῶν (ι) καὶ (ι') περιέχει ὅλας τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

325. $3\sigma\varphi\,|\chi|-\sqrt{3}=0$. Λ. Θέτοντες $|x|=y$, ἔχομεν $\sigma\varphi y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $y=k\pi+\frac{\pi}{3}$ ἤτοι $|x|=k\pi+\frac{\pi}{3}$. ἐκ τῶν λύσεων δὲ τούτων θὰ διατηρήσωμεν μόνον τὰς θετικάς.

326. $2-\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\tau\,|x|=0$. Λ. Θέτοντες $|x|=y$ λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu\tau y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ καὶ $y=|x|=k\,.\,180^\circ+(-1)^k\,.\,60^\circ$. Ἐκ τῶν λύσεων δὲ τούτων θὰ διατηρήσωμεν τὰς θετικάς.

327. $\eta\mu\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu 7x$. Λ. Ἐκ ταύτης ἔχομεν τὰς λύσεις:

$$9x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+7x \qquad\qquad 9x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-7x$$
$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \qquad\qquad 16x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$
$$x=k\pi+\frac{\pi}{6} \qquad\qquad x=k\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}$$

328. $\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$ Λ. Ἐπειδὴ $\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $=\frac{\pi}{2}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\sigma\upsilon\nu\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὰς λύσεις:

$$3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+x-\frac{\pi}{4} \qquad\qquad 3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$2x=2k\pi-\frac{7\pi}{12} \qquad\qquad 4x=2k\pi-\frac{\pi}{12}$$
$$x=k\pi-\frac{7\pi}{24} \qquad\qquad x=k\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{48}.$$

329. $\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{5}+60^0\right)=\sigma\varphi(135^0-x)$. Λ. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{5}+60^o\right)=\varepsilon\varphi\,(x-45^o)$ καὶ $\frac{2x}{5}+60^o=k\,.\,180^o+x-45^o$ ἤτοι $x=-k\,.\,300^o+175^o$.

330. $\eta\mu^2x=\frac{1}{4}$. Λ. $\eta\mu x=\pm\frac{1}{2}$ καὶ $x=k\,.\,180^o\pm30^o$.

331. $\eta\mu^2x=1$. Λ. $x=k\,.\,180^o\pm90^o$. **332.** $\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{4}$. Λ. $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

333. $\sigma\varphi^2x=1$. Λ. $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$. **334.** $\varepsilon\varphi^2x=3$. Λ. $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

335. $\sigma\upsilon\nu\tau^2x=\frac{4}{3}$. Λ. $\sigma\upsilon\nu\tau x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ καὶ $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

336. $\tau\varepsilon\mu^2x=4$. Λ. α) $\tau\varepsilon\mu x=2$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ β) $\tau\varepsilon\mu x=-2$, $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

337. $2\sigma\varphi^2x=\sigma\upsilon\nu\tau^2x$. Λ. Ἀγόμεθα εἰς τὴν ἐξ. 333, διότι $\sigma\upsilon\nu\tau^2x=1+\sigma\varphi^2x$ (τ. 8).

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

338. $\eta\mu x=-\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Λ. Τόξα ἀπὸ 0° ἕως 360° ἅτινα ἔχουν 1) ἡμίτονον ἴσον μὲ $-\frac{1}{2}$ εἶναι τὰ 210° καὶ 330° καὶ 2) ἐφαπτομένην $\frac{\sqrt{3}}{3}$ εἶναι τὰ 30° καὶ 210°. Ὥστε ἐκ τῶν ἀνωτέρω τόξων τὸ 210° ἐπαληθεύει τὸ σύστημα, οὗ ἡ γενικὴ λύσις εἶναι

$$x=k\,.\,360^o+210^o\left(\text{ἢ } 2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right).$$

339. συνx $=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, εφx $=1$. Λ. Τόξα ἀπὸ 0^o ἕως 360^o ἔχοντα 1) συνημίτονον ἴσον μὲ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ εἶναι τὰ 135^o καὶ 225^o καὶ 2) ἐφαπτομένην ἴσην μὲ 1 εἶναι τὰ 45^o καὶ 225^o. Ὥστε τὸ σύστημα ἔχει τὴν γενικὴν λύσιν $x=k\,.\,360^o+225^o$ $\left(\text{ἢ } 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$.

340. συνx $=\frac{\sqrt{3}}{2}$, σφx $=-\sqrt{3}$. Λ. Τὰ μικρότερα θετικὰ τόξα μὲ συνημίτονον $\frac{\sqrt{3}}{2}$ εἶναι τὰ 30^o καὶ 330^o καὶ μὲ συνεφαπτομένην $-\sqrt{3}$ εἶναι τὰ 150^o καὶ 330^o. Ὥστε

εἶναι $x=k\,.\,360^o+330^o$ $\left(\text{ἢ } 2k\pi+\frac{11\pi}{6}\right)$.

341. σφx $=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, συντx $=-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Λ. Τὰ μικρότερα θετικὰ τόξα μὲ συνεφαπτομένην $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ εἶναι τὰ 120^o καὶ 300^o καὶ μὲ συντέμνουσαν $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ εἶναι τὰ 240^o καὶ

300^o. Ὥστε εἶναι $x=k\,.\,360^o+300^o$ $\left(\text{ἢ } 2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$.

342. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ δύο τόξων φ καὶ ω, ἵνα εἶναι συνφ $=$ —ημω.

Ἡ συνφ$=-$ημω, γράφεται: συνφ $=$ ημ$(\pi+\omega)$ ἢ ημ$\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=$ ημ$(\pi+\omega)$.

Ὥστε μεταξὺ τῶν τόξων $\frac{\pi}{2}-\varphi$ καὶ $\pi+\omega$ πρέπει νὰ ὑπάρχουν αἱ ἑξῆς σχέσεις $\frac{\pi}{2}-\varphi=2k\pi+\pi+\omega$ καὶ $\frac{\pi}{2}-\varphi=(2k+1)\pi-\pi-\omega$. Ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ πρώτη δίδει τὴν

$\omega+\varphi=-(4k+1)\frac{\pi}{2}$ καὶ ἡ δευτέρα δίδει τὴν $\omega-\varphi=(4k-1)\frac{\pi}{2}$.

343. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἔχουν συνεφαπτομένην ἴσην μὲ τὴν εφω.

Ἐὰν θ εἶναι ἓν τῶν ζητουμένων τόξων θὰ ἔχωμεν σφθ $=$ εφω ἤτοι εφ$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=$ $=$ εφω. Ἀλλὰ τότε μεταξὺ τῶν τόξων ω καὶ $\frac{\pi}{2}-\theta$ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις:

$\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}-\theta$ ἤτοι ἡ $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}-\omega$.

344. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ μικρότεραι θετικαὶ τιμαὶ τῶν τόξων φ καὶ ω, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις συν $(\varphi-\omega)=\frac{1}{2}$, εφ$(\varphi+\omega)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ καὶ κατόπιν αἱ γενικαὶ τιμαὶ αὐτῶν.

Εἶναι συν$(\varphi-\omega)=\frac{1}{2}=$ συν $\frac{\pi}{3}$ ἤτοι $\varphi-\omega=\frac{\pi}{3}$ (ι), εφ$(\varphi+\omega)=\frac{1}{\sqrt{3}}=$ $=$ εφ $\frac{\pi}{6}=$ εφ $\frac{4\pi}{3}$ ἤτοι $\varphi+\omega=\frac{4\pi}{3}$ (ι΄) διότι πρέπει νὰ εἶναι $\varphi+\omega>\varphi-\omega$. Ἑπομένως αἱ ζητούμεναι μικρότεραι τιμαὶ εἶναι $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ καὶ $\omega=\frac{\pi}{2}$, αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (ι) καὶ (ι΄).

Διὰ τὰς ζητουμένας γενικὰς τιμὰς εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi-\omega=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\\ \varphi+\omega=k'\pi+\frac{\pi}{6}\end{array}\right\}\text{ ἤτοι }\begin{array}{l}\varphi=\left(\frac{k'}{2}+k\right)\pi+\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{6}.\\ \omega=\left(\frac{k'}{2}-k\right)\pi+\frac{\pi}{12}\mp\frac{\pi}{6}.\end{array}$$

345. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις $(2k-1)\frac{\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}$ καὶ $2k\pi+$
$\pm\frac{\pi}{6}$, ὅπου k ἀκέραιος ἀριθμὸς θετικός, ἀρνητικὸς ἢ καὶ μηδέν, περιέχουν τὰς τιμὰς τῶν αὐτῶν τόξων.

Ἔστω $\vartheta=(2k-1)\frac{\pi}{2}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}$. Τότε θὰ εἶναι $\vartheta+\frac{\pi}{2}=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}$.

Οὕτως ἔχομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως:

ημ $\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)=$ ημ $\frac{\pi}{3}$ ἤτοι τῆς συν$\vartheta=$ συν $\frac{\pi}{6}$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ γενικὴ λύσις $\vartheta=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

346. Νὰ δειχθῇ ὁμοίως ὡς ἄνω διὰ τὰς παραστάσεις:

$$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad \text{καὶ} \quad k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}.$$

Ἐκ τῆς α′ παραστάσεως διὰ k=0 καὶ ἐκ τῆς β′ διὰ k=0 καὶ k=1 εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς τιμὰς $\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}$. Διότι $\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ καὶ $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς α′ διὰ k=1 καὶ ἐκ τῆς β′ διὰ k=2 καὶ k=3 εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς τιμὰς $\frac{5\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}$. Διότι $2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ καὶ $3\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$. Ἐξακολουθοῦντες οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι διὰ k=0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . αἱ δοθεῖσαι παραστάσεις, δίδουν τὰς αὐτὰς σειρὰς τιμῶν.

347. Νὰ δειχθῇ ὅτι, τῆς ἐξισώσεως συν$\lambda x+$συν$\mu x=0$, αἱ διάφοροι τιμαὶ τοῦ x αἵτινες τὴν ἐπαληθεύουν ἀποτελοῦν δύο ἀριθμητικὰς προόδους.

Εἶναι συν$\lambda x=-$συνμx, ἤτοι συν$\lambda x=$συν$(\pi-\mu x)$. Ὅθεν ἔχομεν τὰς λύσεις:

$$\lambda x=2k\pi+\pi-\mu x \ (1) \quad \text{καὶ} \quad \lambda x=2k\pi-\pi+\mu x \ (2).$$

Αἱ λύσεις (1) $x=\frac{(2k+1)\pi}{\lambda+\mu}$ διὰ k=0, 1, 2, 3 κλπ. δίδουν διὰ τὸ x τὰς τιμὰς $\frac{\pi}{\lambda+\mu}$, $\frac{3\pi}{\lambda+\mu}$, $\frac{5\pi}{\lambda+\mu}$, αἵτινες ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\frac{2\pi}{\lambda+\mu}$. Ὁμοίως αἱ λύσεις (2) $x=\frac{(2k-1)\pi}{\lambda-\mu}$, διὰ k=0, 1, 2 κλπ. δίδουν διὰ τὸ x τὰς τιμὰς $-\frac{\pi}{\lambda-\mu}$, $\frac{\pi}{\lambda-\mu}$, $\frac{3\pi}{\lambda-\mu}$, αἱ ὁποῖαι καὶ αὗται ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\frac{2\pi}{\lambda-\mu}$.

348. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον α_1συν$2x+\alpha_2$ημ$2x+\alpha_3$συν$\chi+\alpha_4$ημ$x+\alpha_5$ εἰς ὃ αἱ σταθεραὶ α_1, α_2 κλπ. εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x, εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἑκάστη τῶν σταθερῶν τούτων εἶναι μηδέν.

Ἀφοῦ τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, θὰ εἶναι μηδὲν καὶ $x=0$, π, $\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}$. Ἀλλὰ τότε εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=0 \qquad \alpha_1-\alpha_3+\alpha_5=0$$
$$-\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5=0 \qquad -\alpha_1-\alpha_4+\alpha_5=0$$

Ἐκ τῶν τεσσάρων δὲ τούτων ἐξισώσεων, αἱ δύο πρῶται δίδουν $\alpha_3=0$ καὶ $\alpha_1+\alpha_5=0$ καὶ αἱ ἄλλαι δύο δίδουν $\alpha_4=0$ καὶ $\alpha_1-\alpha_5=0$.

Ἀλλὰ πάλιν τὸ σύστημα $\alpha_1+\alpha_5=0$ καὶ $\alpha_1-\alpha_5=0$ δίδει $\alpha_1=0$ καὶ $\alpha_5=0$. Ὥστε τὸ δοθὲν πολυώνυμον ἀνάγεται εἰς τὴν παράστασιν α_2ημ$2x$. Ἀλλ' ἤδη εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ νὰ εἶναι αὕτη μηδὲν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι $\alpha_2=0$.

349. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha_1 \sigma\upsilon\nu 2x + \alpha_2 \eta\mu 2x + \alpha_3 \sigma\upsilon\nu x + \alpha_4 \eta\mu x + \alpha_5}{\beta_1 \sigma\upsilon\nu 2x + \beta_2 \eta\mu 2x + \beta_3 \sigma\upsilon\nu x + \beta_4 \eta\mu x + \beta_5}$$

ἔχῃ τιμὴν ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ x διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα λαμβάνει τὴν σταθερὰν τιμὴν k ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ x διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ἐξισοῦντες λοιπὸν τὸ κλάσμα μὲ k καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha_1-\beta_1 k)\sigma\upsilon\nu 2x+(\alpha_2-\beta_2 k)\eta\mu 2x+(\alpha_3-\beta_3 k)\sigma\upsilon\nu x+(\alpha_4-\beta_4 k)\eta\mu x+(\alpha_5-\beta_5 k)=0.$$

Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, πρέπει κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν αἱ σταθεραὶ $\alpha_1-\beta_1 k$, $\alpha_2-\beta_2 k$ κλπ. νὰ εἶναι μηδέν, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$(1) \quad \alpha_1-\beta_1 k=0, \quad \alpha_2-\beta_2 k=0, \quad \alpha_3-\beta_3 k=0 \text{ κλπ., ἤτοι}$$

$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=k$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}=k$ κλπ. (1) Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἵνα τὸ δοθὲν κλάσμα ἔχῃ τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ x διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\frac{\alpha_4}{\beta_4}=\frac{\alpha_5}{\beta_5} \; (=k)$$

ἤτοι οἱ συντελεσταὶ α_1, β_1 κλπ. πρέπει νὰ εἶναι ἀνάλογοι. Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ· διότι ἐὰν ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (1) θὰ εἶναι $\alpha_1=\beta_1 k$, $\alpha_2=\beta_2 k$, $\alpha_3=\beta_3 k$ κλπ. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ δοθὲν κλάσμα ἀντικαταστήσωμεν τὰ α_1, α_2, α_3, κλπ. διὰ τῶν ἴσων των $\beta_1 k$, $\beta_2 k$, $\beta_3 k$ κλπ. καὶ ἁπλοποιήσωμεν ἔπειτα θὰ εὕρωμεν ὅτι τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μὲ k.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Α΄. ΟΡΘΑΙ ΠΡΟΒΟΛΑΙ

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι παραστάσεων:

350. $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$ (ι)

Αἱ γωνίαι x, $x+\frac{2\pi}{3}$, $x+\frac{4\pi}{3}$ ἀποτελοῦν ἀριθ. πρόοδον μὲ λόγον $\frac{2\pi}{3}$. Ἀλλ' ἡ $\frac{2\pi}{3}$ εἶναι ἐξ. γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὰ δὲ συνx, $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ὀρθῶν προβολῶν τριῶν διανυσμάτων μὲ μέτρον ἕκαστον τὴν μονάδα 1 καὶ σχηματίζουν μὲ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος προβολῆς γωνίας x, $x+\frac{2\pi}{3}$ καὶ $x+\frac{4\pi}{3}$ ἀντιστοίχως. Ἤδη τὰ διανύσματα αὐτὰ τὰ καθιστῶμεν πλευρὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΟΑΒ μὲ τὴν κορυφὴν Ο ἐπὶ τοῦ ἄξονος προβολῆς Ζ'ΟΖ, οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ ΟΑ νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν θετικὴν διεύθυνσιν ΟΖ γωνίαν x. Τότε αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΒΟ θὰ σχηματίζουν μετὰ τῆς ΟΖ γωνίας $x+\frac{2\pi}{3}$ καὶ $x+\frac{4\pi}{3}$. Οὕτω τὸ ἄθροισμα (ι) τῶν μέτρων τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν, αἵτινες ἀποτελοῦν κλειστὴν πολυγωνικὴν γραμμήν, ἰσοῦται μὲ 0 (§ 82).

351. $\eta\mu x+\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$ (ί).

Προβάλλομεν τὴν κλειστὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν ΟΑΒ (ἄσκ. 350) ἐπὶ ἄξονα y'oy κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα z'oz, καὶ οὕτως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ παράστασις (ί) ἰσοῦται μὲ 0.

352. $\alpha[\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{8\pi}{5}\right)$.

Καὶ ἡ παράστασις αὕτη ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι ἰσοῦται μὲ 0. Μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐδῶ ἡ κλειστὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἥτις προβάλλεται ἐπὶ τὸν ἄξονα z'oz, εἶναι ἡ περίμετρος κανονικοῦ πενταγώνου, οὗ ἡ πλευρὰ ἔχει μέτρον α.

353. Δύο δυνάμεις $\overline{OA} = 36$ χιλιογράμμων καὶ $\overline{OB} = 15$ χλ/μμων ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου ὑπὸ γωνίαν 90^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν ὡς καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ μιᾶς τῶν συνιστωσῶν.

Ἡ ζητουμένη συνισταμένη εἶναι ἡ διαγώνιος $\overrightarrow{O\Gamma}$ τοῦ ὀρθογωνίου ΟΑΓΒ. Ἑπομένως εἶναι $\overline{O\Gamma} = \sqrt{36^2+15^2} = 39$ χλ)μμα καὶ εφ $A O \Gamma = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0{,}41667$ καὶ $A O \Gamma = 22^0\ 37'\ 13''$.

354. Δύο δυνάμεις 10 καὶ 6 χλ)μων ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου ὑπὸ γωνίαν 60^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη αὐτῶν, ὡς καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ μιᾶς τῶν συνιστωσῶν.

Ἔστω $\overline{OA} = 10$ χλ)μα καὶ $\overline{OB} = 6$ χλ)μα. Ἤδη φέρομεν σύστημα δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων x'Ox καὶ y'Oy ὧν ἡ ἀρχὴ νὰ εἶναι τὸ σημεῖον Ο καὶ ὁ θετικὸς ἡμιάξων Ox νὰ διέρχεται διὰ τοῦ $\overrightarrow{OA}$. Κατόπιν δὲ φέρομεν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ὁμορρόπως ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{OB}$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν συνισταμένη εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$. Τότε ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἐπὶ τοὺς ληφθέντας ὀρθογωνίους ἄξονας εἶναι ἀντιστοίχως

$$\overline{O\Gamma}\text{συν}\Gamma O A = \overline{OA}\text{συν}0^0 + \overline{A\Gamma}\text{συν}60^0 = 10+6\,.\,\frac{1}{2} = 13.$$

$$\overline{O\Gamma}\text{ημ}\Gamma O A = \overline{OA}\text{ημ}0^0 + \overline{A\Gamma}\text{ημ}30^0 = 0+6\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Ἑπομένως εἶναι $\overline{O\Gamma} = \sqrt{13^2+(3\sqrt{3})^2} = 14$ χλ)μα καὶ εφ$\Gamma O A = \frac{3\sqrt{3}}{13} = 0{,}39970$ καὶ $\Gamma O A = 21^0 47' 8''$.

355. Ἐκ τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐντάσεως 4, 3, 2 καὶ 1 χλ)μων ἀντιστοίχως, σχηματίζουν γωνίας, ἡ πρώτη μετὰ τῆς δευτέρας 30^0, ἡ δευτέρα μετὰ τῆς τρίτης 90^0 καὶ ἡ τρίτη μετὰ τῆς τετάρτης 120^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν τεσσάρων αὐτῶν δυνάμεων καὶ ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς πρώτης.

Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἤτοι θέτομεν τὸ $\overrightarrow{OA}$ ἐπὶ τὸν ἡμιάξονα Ox. Οὕτως τὰ $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, καὶ $\overrightarrow{O\Delta}$ σχηματίζουν μὲ τὸν ἡμιάξονα Ox γωνίας 30^0, 120^0 καὶ 240^0 ἀντιστοίχως. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν τὴν ζητουμένην συνισταμένην μὲ Σ καὶ τὴν γωνίαν αὐτῆς μετὰ τοῦ $\overrightarrow{OA}$ μὲ θ αἱ συντεταγμέναι τῆς Σ, θὰ εἶναι

$$\Sigma\text{συν}\theta = 4+3\text{συν}30^0+2\text{συν}120^0+1\,.\,\text{συν}240^0.$$
$$\Sigma\text{ημ}\theta = 0+3\text{ημ}30^0+2\text{ημ}120^0+1\,.\,\text{ημ}240^0 \quad \text{ἤτοι}$$

$$\Sigma\text{συν}\theta = 4+3\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\,.\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Sigma\text{ημ}\theta = 3\,.\,\frac{1}{2} + 2\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Sigma = \sqrt{\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 5{,}62 \text{ χλ)μα}.$$

$$\text{εφ}\theta = \frac{3+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}} \quad \text{κλπ.}$$

356. Αἱ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ καὶ $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἐντάσεως 7, 8 καὶ 13 χλ)μων ἀντιστοίχως ἰσορροποῦν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία $(\overline{OA, OB}) = \vartheta$.

Αἱ δυνάμεις $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ἔχουν συνισταμένην ἀντίθετον τῆς $\overrightarrow{O\Gamma}$, καὶ ἴσην μὲ 13 χλ)μα. Οὕτως εἶναι $13^2 = (7+8\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2 + (8\eta\mu\vartheta)^2$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{1}{2}$ (§ 88 καὶ ἄσκ. 355) καὶ $\vartheta = 60^\circ$.

357. Δύναμις 20 χλ)μων ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο δυνάμεις καθέτους πρὸς ἀλλήλας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς δοθείσης γωνίαν 60^0.

Ἡ δοθεῖσα δύναμις ἀναλύεται (§ 87) εἰς τὰς δυνάμεις $20\sigma\upsilon\nu60^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ χιλιογράμμων καὶ $20\eta\mu60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}32$ χλ)μων.

358. Δύο δυνάμεις, κάθετοι μεταξύ των, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου, ἰσορροποῦνται ὑπὸ τρίτης δυνάμεως, ἥτις σχηματιζει μετὰ μιᾶς τούτων γωνίαν 150^0. Ἡ μεγαλυτέρα τῶν δύο δυνάμεων εἶναι 3 χλ)μων. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι δύο.

Ἔστω $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ αἱ δύο δυνάμεις αἱ μεταξύ των κάθετοι καὶ $\overrightarrow{O\Gamma}$ ἡ τρίτη δύναμις ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς $\overrightarrow{OB}$ γωνίαν 150°. Ἔστω δὲ πάλιν ὅτι $\overline{OB} = 3$ χλ)μα.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις $\overrightarrow{O\Gamma'}$ ἀντίθετος τῆς $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ καὶ ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς $\overrightarrow{OB}$ γωνίαν 30°. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΟΒΓ′ λαμβάνομεν $\overline{B\Gamma'} = \overline{OA} = OB\varepsilon\varphi30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Ἐπομένως εἶναι $\overline{O\Gamma'} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

359. Πέντε δυνάμεις, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ ὑλικοῦ σημείου ἰσορροποῦν. Αἱ τέσσαρες δὲ ἐξ αὐτῶν, ἐντάσεως 4, 4, 1 καὶ 3 χλ)μων ἀντιστοίχως, σχηματίζουν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην γωνίαν 60^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πέμπτη δύναμις καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτῆς.

Ἡ πέμπτη δύναμις εἶναι ἀντίθετος τῆς συνισταμένης Σ τῶν τεσσάρων δυνάμεων. Αἱ συντεταγμέναι δὲ προβολαὶ αὐτῆς, εἶναι (ἄσκ. 355).

$$\Sigma\sigma\upsilon\nu\vartheta = 4+4\sigma\upsilon\nu60^\circ+1 \cdot \sigma\upsilon\nu120^\circ+3\sigma\upsilon\nu180^\circ = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\Sigma\eta\mu\vartheta = 0+4\eta\mu60^\circ+1 \cdot \eta\mu120^\circ+3\eta\mu180^\circ = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Ὅθεν εἶναι $\Sigma = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 5$ χλ)μων καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta = \sqrt{3}$ ἤτοι $\vartheta = 60^\circ$.

Ἡ πέμπτη λοιπὸν δύναμις εἶναι 5 χλ)μων καὶ διευθύνεται ἀντιθέτως πρὸς τὴν δευτέραν δύναμιν 4.

Β΄. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ

1. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ κάτωθι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῶν τύπων 19—26:

360. $\eta\mu15^0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu15^0$. Ἐπειδὴ $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, εἶναι:

$$\eta\mu15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\sigma\upsilon\nu15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

361. εφ165°. Ἐπειδὴ $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$, εἶναι·

$$\text{εφ}165^\circ = \frac{\text{εφ}180^\circ - \text{εφ}15^\circ}{1+\text{εφ}180^\circ \,.\, \text{εφ}15^\circ} = -\text{εφ}15^\circ = (\text{ἄσκ. } 360) = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-2.$$

362. σφ285°. Ἐπειδὴ $285^\circ = 270^\circ + 15^\circ$ καὶ $\text{σφ}270^\circ = 0$ εἶναι:

$$\text{σφ}285^\circ = \frac{\text{σφ}270^\circ \text{σφ}15^\circ - 1}{\text{σφ}270^\circ + \text{σφ}15^\circ} = -\frac{1}{\text{σφ}15^\circ} = -\text{εφ}15^\circ = \sqrt{3}-2.$$

363. τεμ255°. Ἐπειδὴ $255^\circ = 270^\circ - 15^\circ$ καὶ $\text{τεμ}255^\circ = \dfrac{1}{\text{συν}(270^\circ - 15^\circ)}$ εἶναι:

$$\text{τεμ}255^\circ = \frac{1}{\text{ημ}270^\circ \cdot \text{ημ}15^\circ} = -\frac{4}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)} = -\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1).$$

364. εφ255°. Εἶναι αὕτη ἴση μὲ $\dfrac{\text{εφ}180^\circ + \text{εφ}75^\circ}{1-\text{εφ}180^\circ \text{εφ}75^\circ} = \text{εφ}75^\circ = \text{σφ}15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$

$= 2+\sqrt{3}$ (ἄσκ. 360).

365. ημ285°. Εἶναι αὕτη ἴση μὲ $\text{ημ}(270^\circ + 15^\circ) = \text{ημ}270^\circ \text{συν}15^\circ + \text{συν}270^\circ \text{ημ}15^\circ = -$

$-\text{συν}15^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (ἄσκ. 360).

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

366. $\text{ημ}25^\circ \text{συν}65^\circ + \text{συν}25^\circ \text{ημ}65^\circ = \text{ημ}(25^\circ + 65^\circ) = \text{ημ}90^\circ = 1.$

367. $\text{συν}15^\circ \text{συν}60^\circ - \text{ημ}15^\circ \text{ημ}60^\circ = \text{συν}(15^\circ + 60^\circ) = \text{ημ}15^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$

368. $\text{ημ}298^\circ \text{συν}58^\circ - \text{συν}298^\circ \text{ημ}58^\circ = \text{ημ}(298^\circ - 58^\circ) = \text{ημ}240^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

369. $\text{ημ}105^\circ + \text{συν}105^\circ = \text{ημ}(90^\circ + 15^\circ) + \text{συν}(90^\circ + 15^\circ) = \text{συν}15^\circ - \text{ημ}15^\circ =$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ν' ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

370. $\text{ημ}(30^\circ - \text{A})\text{συν}(30^\circ + \text{A}) - \text{συν}(30^\circ - \text{A})\text{ημ}(30^\circ + \text{A}).$

Εἶναι ἴση μὲ $\text{ημ}(30^\circ - \text{A} - 30^\circ - \text{A}) = \text{ημ}(-2\text{A}) = -\text{ημ}2\text{A}.$

371. $\text{συν}40^\circ \text{συν}(40^\circ - \text{A}) + \text{ημ}40^\circ \text{ημ}(40^\circ - \text{A}) = \text{συν}(40^\circ - 40^\circ + \text{A}) = \text{συν}\text{A}.$

372. $\text{ημ}(60^\circ + \text{A}) - \text{συν}(30^\circ + \text{A}).$

$$\begin{aligned} \text{ημ}(60^\circ + \text{A}) &= \text{ημ}60^\circ \text{συνA} + \text{συν}60^\circ \text{ημA} \\ -\text{συν}(30^\circ + \text{A}) &= -\text{συν}30^\circ \text{συνA} + \text{ημ}30^\circ \text{ημA} \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= \quad 0 \qquad + 2\text{ημ}30^\circ \text{ημA} = \text{ημA} \end{aligned}$$

373. $\text{ημ}(30^\circ + \text{A}) + \text{ημ}(30^\circ - \text{A}).$

$$\begin{aligned} \text{ημ}(30^\circ + \text{A}) &= \text{ημ}30^\circ \text{συνA} + \text{συν}30^\circ \text{ημA} \\ \text{ημ}(30^\circ - \text{A}) &= \text{ημ}30^\circ \text{συνA} - \text{συν}30^\circ \text{ημA} \\ \hline \text{ἄθροισμα} &= 2\text{ημ}30^\circ \text{συνA} = \text{συνA}. \end{aligned}$$

374. $\text{εφ}(45^\circ + \text{A}) \cdot \text{εφ}(135^\circ + \text{A}).$

$$= \frac{\text{εφ}45^\circ + \text{εφA}}{1-\text{εφ}45^\circ \text{εφA}} \cdot \frac{\text{εφ}135^\circ + \text{εφA}}{1-\text{εφ}135^\circ \cdot \text{εφA}} = \frac{1+\text{εφA}}{1-\text{εφA}} \cdot \frac{-1+\text{εφA}}{1+\text{εφA}} = -1$$

375. $\text{σφ}(45^\circ + \text{A})\text{σφ}(45^\circ - \text{A}) = \dfrac{\text{σφA}-1}{1+\text{σφA}} \cdot \dfrac{\text{σφ}45^\circ + 1}{\text{σφA}-1} = 1.$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ κάτωθι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὅταν καθὲν τῶν τόξων α καὶ β τελειώνει εἰς τὸ ἐν παρενθέσει τεταρτημόριον.

376. ημ(α+β) ὅταν $\eta\mu\alpha = \frac{1}{3}$ (II) καὶ $\eta\mu\beta = -\frac{2}{5}$ (IV).

Λ. $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{\sqrt{21}+4\sqrt{2}}{15}.$$

377. συν(α+β), ὅταν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$ (IV) καὶ $\sigma\upsilon\nu\tau\beta = -5$ (III).

Λ. $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, $\eta\mu\alpha = -\sqrt{1-\frac{60}{225}} = -\frac{\sqrt{165}}{15}$

$\eta\mu\beta = -\frac{1}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\sqrt{1-\frac{1}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \frac{2\sqrt{15}}{15}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) - \left(-\frac{\sqrt{165}}{15}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) =$$

$$= -\frac{4\sqrt{90}+\sqrt{165}}{75} = -\frac{12\sqrt{10}+\sqrt{165}}{75}.$$

378. ημ(α—β), ὅταν $\varepsilon\varphi\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ (II) καὶ $\tau\varepsilon\mu\beta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$ (III).

$\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} : \sqrt{1+\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{2}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\eta\mu\beta = -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\left(-\frac{5\sqrt{34}}{34}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3\sqrt{34}}{34}\right) = -\frac{\sqrt{34}(5\sqrt{21}+6)}{170}.$$

379. εφ(α—β), ὅταν $\varepsilon\varphi\alpha = -\frac{3}{4}$ (IV) καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (III).

$\varepsilon\varphi\beta = -\sqrt{1-\frac{3}{4}} : -\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \left(-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) : \left(1-\frac{3\sqrt{2}}{12}\right) =$

$$= -\frac{9+4\sqrt{3}}{12-3\sqrt{3}}.$$

380. εφ(α+β), ὅταν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{8}{17}$ (IV) καὶ $\sigma\upsilon\nu\tau\beta = -\frac{13}{5}$ (III).

$\varepsilon\varphi\alpha = -\frac{15}{8}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{5}{12}$, $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \left(-\frac{15}{8}+\frac{5}{12}\right) : 1 + \frac{15}{8}\cdot\frac{5}{12} = -\frac{140}{171}.$

381. σφ(α+β), ὅταν $\eta\mu\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ (II) καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{\sqrt{41}}$ (III).

$\sigma\varphi\alpha = -\frac{3}{2}$, $\sigma\varphi\beta = \frac{5}{4}$, $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}-1\right) : \left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right) = \frac{23}{2}.$

382. σφ(α—β), ὅταν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{5}{6}$ (I) καὶ $\eta\mu\beta = \frac{3}{5}$ (II).

$\sigma\varphi\alpha = \frac{6}{5}$, $\sigma\varphi\beta = -\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi(\alpha-\beta) = \left[\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1\right] : \left[-\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right] = \frac{9}{38}.$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ εφα, ὅταν :

383. $\alpha+\beta=45^0$ καὶ $\varepsilon\varphi\beta=3/7$. Λ. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi 45^0$.

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=1,\ \varepsilon\varphi\alpha+\frac{3}{7}=1-\frac{3}{7}\ \varepsilon\varphi\alpha \text{ καὶ } \varepsilon\varphi\alpha=\frac{2}{5}.$$

384. $\alpha+\beta=120^0$ καὶ $\varepsilon\varphi\beta=2/5$. Λ. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi 120^0=-\sqrt{3}$.

$\varepsilon\varphi\alpha+2/5=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha=(2+5\sqrt{3}):5(\sqrt{3}-1)$.

Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες :

385. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^2\beta}$.

Εἶναι $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^2\beta}$.

386. $\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta):\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta$.

Εἶναι $\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\dfrac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\dfrac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.

$$\frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta}.$$

387. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma-\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)$.

Εἶναι $(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma-(\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\eta\mu\gamma)\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\beta(\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu\alpha)=$

$=\eta\mu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)$.

388. $\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu(\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu\beta\eta\mu(\gamma-\alpha)=\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\beta-\alpha)$. Ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 387.

389. $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma=\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}$.

Εἶναι $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\gamma}-\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}$.

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν ὡς ἀριθμητὴν τὸν τύπον (27), ἤτοι εὑρίσκομεν $\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}$.

390. $\varepsilon\varphi(\varphi-\omega)+\varepsilon\varphi(\omega-\vartheta)+\varepsilon\varphi(\vartheta-\varphi)=\varepsilon\varphi(\varphi-\omega)\varepsilon\varphi(\omega-\vartheta)\varepsilon\varphi(\vartheta-\varphi)$.

Προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἰς ἣν θέτομεν $\alpha=\varphi-\omega$, $\beta=\omega-\vartheta$, $\gamma=\vartheta-\varphi$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma=\varphi-\omega+\omega-\vartheta+\vartheta-\varphi=0$ καὶ ἑπομένως $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)=0$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάτωθι δύο παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς τιμῆς τοῦ x.

391. $\sigma\upsilon\nu^2(\alpha-x)+\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)$.

Αὕτη ἰσοῦται μὲ $\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)[(\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x]+\sigma\upsilon\nu^2x$

$=\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\alpha\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x)+\sigma\upsilon\nu^2x$

$=(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\alpha\eta\mu x)(-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\alpha\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu^2x$

$=\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x(1-\eta\mu^2\alpha)+\sigma\upsilon\nu^2x$

$=\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2x=\eta\mu^2\alpha(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)=\eta\mu^2\alpha$.

392. $\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$.

Εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)=\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2\dfrac{2\pi}{3}\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\dfrac{2\pi}{3}\eta\mu x$

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2\frac{2\pi}{3}\eta\mu^2x+2\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{2\pi}{3}\eta\mu x$$

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν παράστασις ἰσοῦται μὲ

$$\sigma\upsilon\nu^2x+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{3}\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu^2\frac{2\pi}{3}\eta\mu^2x \quad \text{ἢ}$$

ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ καὶ $\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ἰσοῦται μὲ $\sigma\upsilon\nu^2x+\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{2}+\frac{3}{2}\eta\mu^2x=\frac{3}{2}(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)=\frac{3}{2}$.

393. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἂν $\sigma\varphi x+\sigma\varphi y+\sigma\varphi z=0$ θὰ εἶναι:
$\varepsilon\varphi x\eta\mu x\eta\mu(y+z)=\varepsilon\varphi y\eta\mu y\eta\mu(z+x)=\varepsilon\varphi z\eta\mu z\eta\mu(y+x)=-\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z$

Ἐκ τῆς $\sigma\varphi x+\sigma\varphi y+\sigma\varphi z=0$ εὑρίσκομεν $\frac{\sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y}+\frac{\sigma\upsilon\nu z}{\eta\mu z}=-\frac{1}{\varepsilon\varphi x}$. Ὅθεν:

$$\frac{\eta\mu z\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu z}{\eta\mu y\eta\mu z}=-\frac{1}{\varepsilon\varphi x}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta\mu x\eta\mu(y+z)}{\eta\mu y\eta\mu z}=-\frac{\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x} \quad \text{ἢ}$$

$$\varepsilon\varphi x\eta\mu x\eta\mu(y+z)=-\eta\mu x\eta\mu y\eta\mu z \quad \text{κ.ο.κ.}$$

394. Δίδεται ὅτι αἱ εφα καὶ εφβ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\mu x+\lambda=0$. Ζητεῖται δὲ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:
$\eta\mu^2(\alpha+\beta)+\mu\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\lambda\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta)$, συναρτήσει τῶν συντελεστῶν μ καὶ λ.

Ἐπειδὴ $\eta\mu(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2(\alpha+\beta)}}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2(\alpha+\beta)}}$, ἡ δοθεῖσα παράστασις μετασχηματίζεται εἰς τήν: $\frac{\varepsilon\varphi^2(\alpha+\beta)+\mu\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)+\lambda}{1+\varepsilon\varphi^2(\alpha+\beta)}$. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι, $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$, δίδεται δὲ ὅτι, $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=-\mu$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta=\lambda$. Ἑπομένως εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{-\mu}{1-\lambda}$, $\varepsilon\varphi^2(\alpha+\beta)=\frac{\mu^2}{(1-\lambda)^2}$, ἡ δὲ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει οὕτω τὴν τιμὴν $\frac{\mu^2-\mu^2(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^2}{\mu^2+(1-\lambda)^2}$.

395. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν $\lambda^2\eta\mu^2(\alpha+\beta)=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$ θὰ εἶναι, $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}=\frac{1\pm\lambda}{1\mp\lambda}$.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις καὶ διαιρέσωμεν ἔπειτα τὰ μέλη διὰ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta$, μετασχηματίζομεν τὴν δοθεῖσαν ἰσότητα εἰς τήν:

$$\lambda^2(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)^2=\varepsilon\varphi^2\alpha(1+\varepsilon\varphi^2\beta)+\varepsilon\varphi^2\beta(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)-2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta(1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta)$$

ἢ $\lambda^2(\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta)^2=(\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta)^2$. Ὅθεν εἶναι $\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}=\pm\lambda$.

Ἤδη ἐφαρμόζοντες τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{1}$, $\frac{B+A}{B-A}=\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$, εὑρίσκομεν $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}=\frac{1\pm\lambda}{1\mp\lambda}$.

2. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ2α, ὅταν:

396. $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{4}{5}$. ***397.*** $\eta\mu\alpha=\frac{5}{13}$. ***398.*** $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{9}{40}$.

Λ. 1) $\eta\mu2\alpha=\pm2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\pm\frac{24}{25}$. 2) $=\pm2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13}=\pm\frac{120}{169}$.

$$3) = \pm 2 \cdot \frac{9}{41} \cdot \frac{40}{41} = \pm \frac{720}{1681}.$$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν2α, ὅταν :

399. $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{8}{17}$. ***400.*** $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$. ***401.*** $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{8}{15}$.

Α. 1) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2 \cdot \left(\frac{8}{17}\right)^2 - 1 = \frac{161}{289}$. 2) $= 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$. 3) $= 2 \cdot \frac{225}{289} - 1 = \frac{161}{289}$.

Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες :

402. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$. Α. $\frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha.$

403. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$. Α. $\frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-(1-2\eta\mu^2\alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha.$

404. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = 2\varepsilon\varphi 2\alpha.$

Α. $\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-(1-\varepsilon\varphi\alpha)^2}{(1-\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\alpha)} = 2 \cdot \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha.$

405. $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\tau 2\alpha = \sigma\upsilon\nu\tau\alpha$ Α. $2 \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\tau\alpha.$

406. $\sigma\varphi 2\vartheta = \frac{\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta - 2\eta\mu\vartheta}{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}$. Α. $\frac{\sigma\varphi^2\vartheta-1}{2\sigma\varphi\vartheta} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\eta\mu^2\vartheta} - 1\right) : 2 \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta} =$

$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta}{\eta\mu^2\vartheta} \cdot \frac{\eta\mu\vartheta}{2\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{1-2\eta\mu^2\vartheta}{\eta\mu\vartheta} \cdot \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \left(\frac{1}{\eta\mu\vartheta} - 2\eta\mu\vartheta\right) \cdot \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\vartheta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta - 2\eta\mu\vartheta}{2\sigma\upsilon\nu\vartheta}.$

407. $\tau\varepsilon\mu 2\vartheta = \frac{\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta}{\sigma\varphi^2\vartheta-1}$. Α. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\vartheta} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta} = \frac{1}{\eta\mu^2\vartheta} : \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}{\eta\mu^2\vartheta} - 1\right).$

408. $\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x} = \frac{1-\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$. Α. $\left(1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) : \left(1 + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} =$

$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x} = \frac{1-\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}.$

409. $\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{4\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 2x}$. Α. $\frac{1}{4\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{1}{\eta\mu^2 2x}.$

410. $\tau\varepsilon\mu 2x = \frac{\tau\varepsilon\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x - \tau\varepsilon\mu x}$. Α. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} : \left(2\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right).$

411. $\frac{1+\sigma\varphi x}{\sigma\varphi x - 1} = \frac{1+\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$. Α. $\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x} = \frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x} = \frac{1+\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x}$ (ἄσκ. 408).

412. $\tau\varepsilon\mu 3\alpha\eta\mu 6\alpha = 2\varepsilon\varphi 3\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha$. Α. $2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha : \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\varepsilon\varphi 3\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha.$

413. $\eta\mu 6\alpha\varepsilon\varphi 3\alpha = 2\eta\mu^2 3\alpha$. Α. $2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha \cdot \eta\mu 3\alpha : \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\eta\mu^2 3\alpha.$

414. $2\sigma\varphi 4\alpha = \sigma\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha$. Α. $2 \cdot \frac{\sigma\varphi^2 2\alpha - 1}{2\sigma\varphi 2\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha - \frac{1}{\sigma\varphi 2\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha.$

415. $2\sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$. Α. $2\left(\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) : 2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}.$

416. $\frac{1+συν\vartheta}{1-συν\vartheta}+1=συντ^2\frac{\vartheta}{2}$. Α. $\frac{2}{1+2ημ^2\frac{\vartheta}{2}-1}=\frac{2}{2ημ^2\frac{\vartheta}{2}}=συντ^2\frac{\vartheta}{2}$.

417. $\frac{1+ημ\vartheta-συν\vartheta}{1+ημ\vartheta+συν\vartheta}=εφ\frac{\vartheta}{2}$. Α. $\frac{1+2ημ\frac{\vartheta}{2}\,συν\frac{\vartheta}{2}+2ημ^2\frac{\vartheta}{2}-1}{1+2ημ\frac{\vartheta}{2}\,συν\frac{\vartheta}{2}+2συν^2\frac{\vartheta}{2}-1}=$

$$=2ημ\frac{\vartheta}{2}\left(συν\frac{\vartheta}{2}+ημ\frac{\vartheta}{2}\right):2συν\frac{\vartheta}{2}\left(ημ\frac{\vartheta}{2}+συν\frac{\vartheta}{2}\right)=εφ\frac{\vartheta}{2}.$$

418. $\frac{ημ\vartheta}{τεμ2\vartheta}+\frac{συν\vartheta}{συντ2\vartheta}=ημ3\vartheta$. Α. $ημ\vartheta συν2\vartheta+συν\vartheta ημ2\vartheta=$

$$=ημ\vartheta(1-2ημ^2\vartheta)+2ημ\vartheta(1-ημ^2\vartheta)=3ημ\vartheta-4ημ^3\vartheta.$$

419. $\frac{συν2\vartheta}{τεμ\vartheta}-\frac{ημ\vartheta}{συντ2\vartheta}=συν3\vartheta$. Α. $συν2\vartheta συν\vartheta-ημ\vartheta ημ2\vartheta$ κλπ. ὡς ἄνω.

420. $σφ\vartheta+σφ\left(\frac{\pi}{3}+\vartheta\right)-σφ\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)=3σφ3\vartheta$.

$$\frac{1}{εφ\vartheta}+\frac{1}{εφ\left(\frac{\pi}{3}+\vartheta\right)}-\frac{1}{εφ\left(\frac{\pi}{3}-\vartheta\right)}=\frac{1}{εφ\vartheta}+\frac{1-\sqrt{3}εφ\vartheta}{\sqrt{3}+εφ\vartheta}-\frac{1+\sqrt{3}εφ\vartheta}{\sqrt{3}-εφ\vartheta}=$$

$$=\frac{1}{εφ\vartheta}-\frac{8εφ\vartheta}{3-εφ^2\vartheta}=3\cdot\frac{1-3εφ^2\vartheta}{3εφ\vartheta-εφ^3\vartheta}=3\cdot\frac{1}{εφ3\vartheta}=3σφ3\vartheta.$$

421. $εφ3\vartheta εφ2\vartheta εφ\vartheta=εφ3\vartheta-εφ2\vartheta-εφ\vartheta$. Α. $εφ3\vartheta=\frac{εφ\vartheta+εφ2\vartheta}{1-εφ\vartheta εφ2\vartheta}$, ἤτοι

$$εφ3\vartheta-εφ3\vartheta εφ\vartheta εφ2\vartheta=εφ\vartheta+εφ2\vartheta,\qquad εφ3\vartheta-εφ2\vartheta-εφ\vartheta=εφ3\vartheta εφ2\vartheta εφ\vartheta.$$

422. $\frac{ημ8\vartheta}{ημ\vartheta}=8συν4\vartheta συν2\vartheta συν\vartheta$. Α. $\frac{2ημ4\vartheta συν4\vartheta}{ημ\vartheta}=\frac{4ημ2\vartheta συν2\vartheta συν4\vartheta}{ημ\vartheta}=$

$$=8ημ\vartheta συν\vartheta συν2\vartheta συν4\vartheta:ημ\vartheta=8συν4\vartheta συν2\vartheta συν\vartheta.$$

423. $\frac{2συν8\vartheta+1}{2συν\vartheta+1}=(2συν\vartheta-1)(2συν2\vartheta-1)(2συν4\vartheta-1)$. (ι)

Ἐκ τῆς $2συν^2\vartheta=1+συν2\vartheta$, εὑρίσκομεν $4συν^2\vartheta=2+2συν2\vartheta$, $4συν^2\vartheta-1=1+2συν2\vartheta$, ἤτοι $(2συν\vartheta+1)(2συν\vartheta-1)=1+2συν2\vartheta$ (1). Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(2συν2\vartheta+1)(2συν2\vartheta-1)=1+2συν4\vartheta$ (2) καὶ $(2συν4\vartheta+1)\cdot(2συν4\vartheta-1)=1+2συν8\vartheta$ (3). Πολλαπλασιάζοντες ἤδη τὰς ταυτότητας (1), (2), (3), ἁπλοποιοῦντες ἔπειτα καὶ διαιροῦντες τέλος διὰ $1+2συν\vartheta$, εὑρίσκομεν τὴν (ι).

424. $εφ^2\vartheta+εφ^2\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)+εφ^2\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right)=9εφ^2 3\vartheta+6$.

Ἐπειδὴ $εφ\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{εφ\vartheta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}εφ\vartheta}$ καὶ $εφ\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{εφ\vartheta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}εφ\vartheta}$,

τὸ α΄·μέλ. ἰσοῦται μὲ $εφ^2\vartheta+\left[εφ\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)+εφ\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2-2εφ\left(\vartheta+\frac{\pi}{3}\right)εφ\left(\vartheta+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=εφ^2\vartheta+\left[\frac{εφ\vartheta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}εφ\vartheta}+\frac{εφ\vartheta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}εφ\vartheta}\right]^2-2\cdot\frac{εφ\vartheta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}εφ\vartheta}\cdot\frac{εφ\vartheta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}εφ\vartheta}=$$

$$=\frac{45εφ^2\vartheta+9εφ^6\vartheta+6}{(1-3εφ^2\vartheta)^2}=\frac{81εφ^2\vartheta-54εφ^4\vartheta+9εφ^6\vartheta+6+54εφ^4\vartheta-36εφ^2\vartheta}{(1-3εφ^2\vartheta)^2}=$$

$$= 9\left(\frac{3\varepsilon\varphi\vartheta-\varepsilon\varphi^3\vartheta}{1-3\varepsilon\varphi^2\vartheta}\right)^2+\frac{6(1-3\varepsilon\varphi^2\vartheta)^2}{(1-3\varepsilon\varphi^2\vartheta)^2}=9\varepsilon\varphi^2 3\vartheta+6$$

425. Ἐὰν τὸ $\eta\mu\frac{A}{3}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $3x-4x^3=\eta\mu A$, τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι ῥίζαι καὶ τὰ $\eta\mu\frac{180^0-A}{3}$ καὶ $-\eta\mu\frac{180^0+A}{3}$.

Ἀφοῦ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει διὰ $x=\eta\mu\frac{A}{3}$, ἔχομεν

$3\eta\mu\frac{A}{3}-4\eta\mu^3\frac{A}{3}=\eta\mu\left(3\,.\,\frac{A}{3}\right)=\eta\mu A$. Ἀλλ' εἶναι $3\eta\mu\frac{180^0-A}{3}-4\eta\mu^3\frac{180^0-A}{3}=$

$=\eta\mu\left(3.\frac{180^0-A}{3}\right)=\eta\mu(180^0-A)=\eta\mu A$ καὶ $3\eta\mu\left[\frac{-(180^0+A)}{3}\right]-4\eta\mu^3\left[\frac{-(180^0+A)}{3}\right]=$

$$=\eta\mu\left(3.\frac{-180^0-A}{3}\right)=\eta\mu[-(180^0+A)]=-\eta\mu(180^0+A)=\eta\mu A.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει καὶ διὰ $x=\eta\mu\frac{180^0-A}{3}$ καὶ $x=-\eta\mu\frac{180^0+A}{3}$.

426. Ἐὰν τὸ $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{3}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $4x^3-3x=\sigma\upsilon\nu A$, τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι ῥίζαι καὶ τὰ $\sigma\upsilon\nu\frac{360^0-A}{3}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{360^0+A}{3}$.

Ἀποδεικνύεται ὡς ἡ προηγουμένη ἄσκησις.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί :

427. $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu A=\frac{3}{5}$ καὶ $270^0<A<360^0$.

Εἶναι $135^0<\frac{A}{2}<180^0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=-\frac{2}{\sqrt5}$, $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=-\left(\sqrt{1-\frac{3}{5}}:\sqrt{1+\frac{3}{5}}\right)=$

$=-\frac{1}{2}$.

428. $\eta\mu\frac{A}{2}$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu A=-\frac{4}{5}$ καὶ $90^0<A<180^0$.

Λ. $\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\left(1+\frac{4}{5}\right):2}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

429. $\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$, ὅταν $\sigma\upsilon\nu A=\frac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu B=\frac{12}{13}$ καὶ $0^0<A<90^0$ καὶ $0^0<B<90^0$.

Λ. $\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\eta\mu\frac{B}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{17}{13\sqrt2}.$$

430. $\eta\mu157^0\frac{1}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu157^0\frac{1}{2}$ ἐκ τοῦ $\eta\mu315^0$.

$$2\eta\mu157^030'=-\sqrt{1-\sqrt{2}/2}+\sqrt{1+\sqrt{2}/2}=\sqrt{2-\sqrt2},$$

$$2\sigma\upsilon\nu157^030'=-\sqrt{1-\sqrt{2}/2}-\sqrt{1+\sqrt{2}/2}=-\sqrt{2+\sqrt2}.$$

431. ημ105° καὶ συν105° ἐκ τοῦ ημ210°.

$$2\eta\mu105^{\circ}=\sqrt{1-1/2}+\sqrt{1+1/2}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\quad 2\sigma\upsilon\nu105^{\circ}=\sqrt{1-1/2}-\sqrt{1+1/2}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

432. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, ὅταν $\varepsilon\varphi A=-\frac{5}{12}$ καὶ $90^{\circ}<A<180^{\circ}$.

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\left(-1-\sqrt{1+\frac{25}{144}}\right):-\frac{5}{12}=5.$$

433. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, ὅταν $\eta\mu A=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}:\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ \text{ἢ}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}:\frac{1}{3}\right)=3-2\sqrt{2}.$$

434. ημA, συνA, εφA καὶ σφA, ὅταν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=2-\sqrt{3}$ (Παν. Ἀθηνῶν).

$$\eta\mu A=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})}=\frac{1}{2},\quad \sigma\upsilon\nu A=\frac{1-(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{κλπ.}$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι :

435. $\sigma\upsilon\nu7^{\circ}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu7^{\circ}\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu15^{\circ}}{2}}$ καὶ

$$\sigma\upsilon\nu15^{\circ}=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu30^{\circ}}{2}}.$$

436. $\eta\mu9^{\circ}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$.

Ἐπειδὴ $2\eta\mu9^{\circ}=\sqrt{1+\eta\mu18^{\circ}}-\sqrt{1-\eta\mu18^{\circ}}$ καὶ $\eta\mu18^{\circ}=(\sqrt{5}-1):4$.

437. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\varphi-\omega}{2}$, ὅταν εἶναι $\eta\mu\varphi+\eta\mu\omega=\alpha$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu\omega=\beta$.

Ὑψοῦντες τὰ δοθέντα ἀθροίσματα εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν $2\sigma\upsilon\nu(\varphi-\omega)=\alpha^2+\beta^2-2$. Ὅθεν εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\frac{\varphi-\omega}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu(\varphi-\omega)}{1+\sigma\upsilon\nu(\varphi-\omega)}}=\pm\sqrt{\frac{2-(\alpha^2+\beta^2-2)}{2+(\alpha^2+\beta^2+2)}}=\pm\sqrt{\frac{4-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

438. $$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2\alpha}}{\varepsilon\varphi2\alpha}\ \text{ἢ}\ \varepsilon\varphi\alpha=\frac{-1-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2\alpha}}{\varepsilon\varphi2\alpha}$$

ἂν εἶναι $\alpha=200^{\circ}$ ἢ 100° ἀντιστοίχως.

1) Ἐπειδὴ εφα καὶ εφ2α θετικαὶ ἡ $\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2\alpha}$, θὰ λάβῃ τὸ σημ. +.

2) Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\alpha<0$ καὶ $\varepsilon\varphi2\alpha>0$ ἡ $\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2\alpha}$ θὰ λάβῃ τὸ σημ. −.

439. $\varepsilon\varphi2\alpha=\varepsilon\varphi\beta$, ἂν $\varepsilon\varphi\alpha=(1-\sigma\upsilon\nu\beta):\eta\mu\beta$.

Ἐπειδὴ $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}=\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}$ εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}$. Ἀλλ' ἐξ ἄλλου εἶναι :

$$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\beta}{2}}=\varepsilon\varphi\beta.$$

Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες :

440. ημχσυντ $\frac{x}{2} = 2$συν $\frac{x}{2}$. $\quad 2$ημ$\frac{x}{2}\cdot$ συν $\frac{x}{2}$: ημ $\frac{x}{2} = 2$συν $\frac{x}{2}$.

441. $\frac{1+\text{συν}x}{1-\text{συν}x} =$ συντ$^2 \frac{x}{2} - 1$. Ἐπειδὴ συνx$=2$συν$^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 -$ -2ημ$^2 \frac{x}{2}$ τὸ α′ μέλος ἰσοῦται μὲ σφ$^2 \frac{x}{2}$ ἤτοι μὲ συντ$^2 \frac{x}{2} - 1$ (τύπ. 8).

442. $\frac{1+\text{ημ}x}{\text{συν}x} = \left(\text{εφ}\frac{x}{2}+1\right):\left(1-\text{εφ}\frac{x}{2}\right)$. Ἐπειδὴ $1+$ ημx $=$ $=\left(\text{ημ}\frac{x}{2}+\text{συν}\frac{x}{2}\right)^2$ καὶ συνx$=$συν$^2\frac{x}{2} -$ ημ$^2\frac{x}{2} = \left(\text{συν}\frac{x}{2}+\text{ημ}\frac{x}{2}\right)\left(\text{συν}\frac{x}{2}-\right.$ $\left.-\text{ημ}\frac{x}{2}\right)$ τὸ α′ μέλος ἰσοῦται μὲ $\left(\text{συν}\frac{x}{2}+\text{ημ}\frac{x}{2}\right):\left(\text{συν}\frac{x}{2}-\text{ημ}\frac{x}{2}\right)$, ὁπότε διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ὅρων διὰ συν $\frac{x}{2}$ εὑρίσκομεν τὸ β′ μέλος.

443. $\frac{\text{συντ}x-1}{\text{συν}x\text{συντ}x} = \left(1-\text{εφ}\frac{x}{2}\right):\left(1+\text{εφ}\frac{x}{2}\right)$. Τὸ α′ μέλος ἰσοῦται μὲ $\frac{1-\text{ημ}x}{\text{συν}x}$. Ἔπειτα δὲ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

444. $\frac{\text{τεμ}^2\frac{x}{2}}{2} - \frac{\text{συν}2x}{1+\text{συν}x} = 4$ημ$^2\frac{x}{2}$. Ἐπειδὴ τεμ$^2\frac{x}{2} = \frac{1}{\text{συν}^2\frac{x}{2}}$, συν2x$=1-$ -2ημ^{2}x καὶ $1+$ συνx $= 2$συν$^2\frac{x}{2}$, τὸ α′ μέλος ἰσοῦται μὲ ημ^{2}x : συν$^2\frac{x}{2} =$

$$=\left(2\text{ημ}\frac{x}{2}\,\text{συν}\frac{x}{2}\right)^2 : \text{συν}^2\frac{x}{2} = 4\text{ημ}^2\frac{x}{2}.$$

445. εφ$^2\left(45^0+\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\text{ημ}x}{1-\text{ημ}x}$.

$$\text{Λ. εφ}\left(45^0+\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\text{εφ}\frac{x}{2}}{1-\text{εφ}\frac{x}{2}} = \frac{\text{συν}\frac{x}{2}+\text{ημ}\frac{x}{2}}{\text{συν}\frac{x}{2}-\text{ημ}\frac{x}{2}}$$

$$\text{καὶ εφ}^2\left(45^0+\frac{x}{2}\right) = \frac{\left(\text{συν}\frac{x}{2}+\text{ημ}\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\text{συν}\frac{x}{2}-\text{ημ}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1+2\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}}{1-2\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}} = \frac{1+\text{ημ}x}{1-\text{ημ}x}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

446. Ἐὰν εφθ$=\frac{\beta}{\alpha}$, θὰ εἶναι ασυν2θ$+\beta$ημ2θ $= \alpha$.

$$\text{συν}2\theta = \frac{1-\text{εφ}^2\theta}{1+\text{εφ}^2\theta} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\quad \text{ημ}2\theta = \frac{2\text{εφ}\theta}{1+\text{εφ}^2\theta} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

$$\text{Ὅθεν ασυν}2\theta+\beta\text{ημ}2\theta = \frac{(\alpha^2-\beta^2)\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{2\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2} = \alpha.$$

447. Ἂν εφθ $= \frac{\text{εφ}x+\text{εφ}y}{1+\text{εφ}x\text{εφ}y}$ θὰ εἶναι ημ2θ $= \frac{\text{ημ}2x+\text{ημ}2y}{1+\text{ημ}2x\text{ημ}2y}$.

Εἰς τὴν $ημ2θ = \frac{2εφθ}{1+εφ^2θ}$ ἀντικαθιστῶντες τὴν εφθ εὑρίσκομεν

$$\frac{2(εφx+εφy)(1+εφxεφy)}{(1+εφxεφy)^2+(εφx+εφy)^2} = \frac{2[εφx(1+εφ^2y)+εφy(1+εφ^2x)]}{(1+εφ^2x)(1+εφ^2y)+4εφxεφy} =$$

$$= \frac{2(εφxτεμ^2y+εφyτεμ^2x)}{τεμ^2xτεμ^2y+4εφxεφy} = \frac{ημ2x+ημ2y}{1+ημ2xημ2y}.$$

448. Ἐὰν $συν^3 2θ+συν^2 2θ+μ^2 συν2θ = μ^2$, θὰ εἶναι $μεφ^3θ+εφ^2θ+μεφθ = 1$.

$$συν^2 2θ(συν2θ+1) = μ^2(1-συν2θ), \quad (2συν^2θ-1)^2 . 2συν^2θ = 2μ^2ημ^2θ$$

$2συν^2θ-1 = μεφθ$ ἤτοι $\frac{2}{1+εφ^2θ}-1 = μεφθ$ ἢ τέλος $1 = μεφ^3θ+εφ^2θ+μεφθ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἀθροίσματα τὰ γινόμενα :

449. $ημ75^0συν15^0 = \frac{ημ90^0+ημ60^0}{2}$ **450.** $συν260^0συν130^0 = \frac{συν390^0+συν130^0}{2}$.

451. $συν\frac{2π}{5}ημ\frac{3π}{5} = \frac{ημπ+ημπ/5}{2}$. **452.** $2ημ\frac{3π}{10}ημ\frac{11π}{30} = συν\frac{π}{15}-συν\frac{2π}{3}$.

453. $4ημ10^0ημ20^0ημ30^0 = (2ημ10^0ημ20^0) . 2ημ30^0 = (συν10^0 - συν30^0) . 2ημ30^0 =$

$$= 2ημ30^0συν10^0-2ημ30^0συν30^0 = ημ40^0+ημ20^0-ημ60^0.$$

Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις :

454. $ημ60^0+ημ30^0 = 2ημ45^0συν15^0$. **455.** $ημ60^0-ημ20^0=2συν40^0ημ20^0$.

456. $συν40^0+συν140^0= 2συν90^0συν50^0$. **457.** $συν40^0-συν80^0= 2ημ60^0ημ20^0$.

458. $ημ120^0-συν30^0= ημ120^0-ημ60^0$. **459.** $συν60^0-ημ110^0=ημ30^0-ημ110^0$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

460. $ημ100^0-ημ20^0-ημ40^0= 2συν60^0ημ40^0-ημ40^0=0$.

461. $ημ50^0-ημ70^0+ημ10^0 = - ημ10^0+ημ10^0=0$.

462. $συν5^0+ συν65^0+ συν125^0+ συν185^0+ συν245^0+ συν305^0$. Ἰσοῦται μὲ $2συν30^0(συν35^0+συν155^0+συν275^0) = \sqrt{3}(συν35^0+2συν215^0συν60^0)=\sqrt{3}(συν35^0+συν215^0)=$ $= \sqrt{3}(συν35^0-συν35^0)=0$.

463. $ημ15^0ημ105^0 + ημ45^0ημ165^0 = \frac{συν90^0-συν120^0}{2} + \frac{συν120^0-συν210^0}{2} =$

$$= \frac{συν90^0-συν210^0}{2} = - \frac{συν210^0}{2} = \frac{συν30^0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

464. $συν24^0συν6^0-συν36^0συν54^0= \frac{συν30^0+συν18^0-συν90^0-συν18^0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι :

465. $\dfrac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}$. Διότι εἶναι $\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$
καὶ $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}$.

466. $\dfrac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A}=\sigma\varphi\dfrac{A-B}{2}$. Ὡς ἄνω. **467.** $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}$. Ὁμοίως.

468. $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A}=\sigma\varphi\dfrac{A+B}{2}$. Ὁμ. **469.** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A}=\varepsilon\varphi\dfrac{A+B}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}$. Ὁμ.

470. $\dfrac{\eta\mu 2A+\eta\mu 2B}{\eta\mu 2A-\eta\mu 2B}=\dfrac{\varepsilon\varphi(A+B)}{\varepsilon\varphi(A-B)}=\varepsilon\varphi(A+B)\sigma\varphi(A-B)=\dfrac{\varepsilon\varphi(A+B)}{\varepsilon\varphi(A-B)}$.

471. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2A}{\sigma\upsilon\nu 2B-\sigma\upsilon\nu 2A}=\sigma\varphi(A+B)\sigma\varphi(A-B)$. Ὁμοίως ὡς ἄνω.

472. $\dfrac{\varepsilon\varphi A-\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}=\dfrac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}$ (τύπ. 51). **473.** $\dfrac{\varepsilon\varphi A-\sigma\varphi B}{\varepsilon\varphi A+\sigma\varphi B}=-\dfrac{\sigma\upsilon\nu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu(A-B)}$ (τύπ. 53).

474. $\dfrac{\eta\mu A-\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{A+B}{2}-45^0\right)\varepsilon\varphi\left(45^0-\dfrac{A-B}{2}\right)$.

$$\frac{\eta\mu A-\eta\mu(90^0-B)}{\eta\mu A+\eta\mu(90^0-B)}=\frac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{A+90^0-B}{2}\eta\mu\dfrac{A-90^0+B}{2}}{2\eta\mu\dfrac{A+90^0-B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-90^0+B}{2}}=$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A-B}{2}+45^0\right)\eta\mu\left(\dfrac{A+B}{2}-45^0\right)}{2\eta\mu\left(\dfrac{A-B}{2}+45^0\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A+B}{2}-45^0\right)}=\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}-45^0\right).\sigma\varphi\left(\frac{A-B}{2}+45^0\right)=$$

$$=\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}-45^0\right)\varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{A-B}{2}\right).$$

Διότι $\dfrac{A-B}{2}+45^0+45^0-\dfrac{A-B}{2}=90^0$.

475. $\eta\mu^2A-\eta\mu^2B=\eta\mu(A+B)\eta\mu(A-B)=\sigma\upsilon\nu^2B-\sigma\upsilon\nu^2A$.

$$\eta\mu^2A-\eta\mu^2A\eta\mu^2B-\eta\mu^2B+\eta\mu^2A\eta\mu^2B=\eta\mu^2A(1-\eta\mu^2B)-\eta\mu^2B(1-\eta\mu^2A)=$$
$$=\eta\mu^2A\sigma\upsilon\nu^2B-\sigma\upsilon\nu^2A\eta\mu^2B=(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B)(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B)=\eta\mu(A+B)\eta\mu(A-B)$$

ἐξ ἄλλου εἶναι $\eta\mu^2A-\eta\mu^2B=(1-\sigma\upsilon\nu^2A)-(1-\sigma\upsilon\nu^2B)=\sigma\upsilon\nu^2B-\sigma\upsilon\nu^2A$.

476. $\sigma\upsilon\nu^2A-\eta\mu^2B=\sigma\upsilon\nu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B)=\sigma\upsilon\nu^2B-\eta\mu^2A$.

$$\sigma\upsilon\nu^2A-\eta\mu^2B=\sigma\upsilon\nu^2A-\sigma\upsilon\nu^2A\eta\mu^2B-\eta\mu^2B+\sigma\upsilon\nu^2A\eta\mu^2B=$$
$$=\sigma\upsilon\nu^2A(1-\eta\mu^2B)-\eta\mu^2B(1-\sigma\upsilon\nu^2A)=\sigma\upsilon\nu^2A\sigma\upsilon\nu^2B-\eta\mu^2A\eta\mu^2B=$$
$$=(\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\eta\mu B)(\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu A\eta\mu B)=\sigma\upsilon\nu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B).$$

Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2A-\eta\mu^2B=(1-\eta\mu^2A)-(1-\sigma\upsilon\nu^2B)=\sigma\upsilon\nu^2B-\eta\mu^2A$.

477. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)=4\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma+A}{2}$.

$$2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A+B}{2}\right)\eta\mu\left(-\frac{A+B}{2}\right)\ \text{ἤτοι}$$

$$2\eta\mu\frac{A+B}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma+\frac{A+B}{2}\right)\right]=4\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}.$$

478. $1 - \sigma\upsilon\nu^2 A - \sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma =$

$$= 4\eta\mu\frac{A+B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{-A+B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{A-B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{A+B-\Gamma}{2}.$$

Λ. Ἐπειδὴ $2\sigma\upsilon\nu^2 B = 1+\sigma\upsilon\nu 2B$ καὶ $2\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$, τὸ πρῶτον μέλος γράφεται:

$$2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma - \frac{\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu^2 A$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu^2 A$$

$$= \sigma\upsilon\nu A[\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu^2 A$$

$$= \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$$

$$= [\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)][\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu A]$$

$$= 4\eta\mu\frac{A+B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{-A+B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{A-B+\Gamma}{2}\cdot\eta\mu\frac{A+B-\Gamma}{2}.$$

479. $\eta\mu(A+B+\Gamma+\Delta) + \eta\mu(A+B-\Gamma-\Delta) + \eta\mu(A+B-\Gamma+\Delta) + \eta\mu(A+B+\Gamma-\Delta) = 4\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Delta.$

$$2\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu(\Gamma+\Delta) + 2\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu(\Delta-\Gamma) =$$

$$2\eta\mu(A+B)[\sigma\upsilon\nu(\Gamma+\Delta)+\sigma\upsilon\nu(\Delta-\Gamma)] = 4\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Delta.$$

480. Ἡ παράστασις $1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον, ὅπερ ἔπειτα νὰ γραφῇ ὡς τετράγωνον ἀθροίσματος δύο συνημιτόνων (Σχ. Εὐελπίδων).

$$(1+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x) = (1+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$= [1+\sigma\upsilon\nu(90^\circ - x)]\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} =$$

$$= \left[2\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right]^2 = [\sigma\upsilon\nu 45^\circ + \sigma\upsilon\nu(45^\circ - x)]^2.$$

Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις :

481. $\Sigma = \eta\mu 8\alpha - \eta\mu 6\alpha - \eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 8\alpha$ (Σχ. Εὐελπίδων).

$$\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 8\alpha = \frac{\eta\mu 10\alpha - \eta\mu 6\alpha}{2},\quad \Sigma = \frac{2\eta\mu 8\alpha - 2\eta\mu 6\alpha - \eta\mu 10\alpha + \eta\mu 6\alpha}{2} =$$

$$= \frac{2\eta\mu 8\alpha - (\eta\mu 6\alpha + \eta\mu 10\alpha)}{2} = \frac{2\eta\mu 8\alpha(1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{2} = 2\eta\mu 8\alpha\eta\mu^2\alpha.$$

482. $\Sigma = -1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma.$

Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\beta+1+\sigma\upsilon\nu 2\gamma}{2} = 1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\beta+\sigma\upsilon\nu 2\gamma}{2} =$

$= 1+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)$ καὶ $2\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = \sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)$

ἔχομεν $\Sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha[\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)] + \sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)[\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)] =$

$$= [\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)]\,.\,[\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)] =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

483. $\Sigma = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-\gamma)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\gamma-\beta)\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma-\alpha).$

$$\Sigma = 2\sigma\upsilon\nu\gamma[\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)] = 4\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma.$$

484. $\Sigma = \eta\mu(\beta+\gamma-\alpha)+\eta\mu(\alpha+\gamma-\beta)+\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)-\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma).$

$$\Sigma = 2\eta\mu\gamma[\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)] = 4\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma.$$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα ἐκ ν ὅρων θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἐναλλάξ.

485. $\Sigma = \eta\mu\alpha - \eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha+2\beta)-\eta\mu(\alpha+3\beta)+\dots$

Ἐπειδὴ $\eta\mu(\alpha+\beta+\pi) = -\eta\mu(\alpha+\beta)$, $\eta\mu(\alpha+2\beta+2\pi) = \eta\mu(\alpha+2\beta)$

$\eta\mu(\alpha+3\beta+3\pi) = -\eta\mu(\alpha+3\beta)$, $\eta\mu(\alpha+4\beta+4\pi) = \eta\mu(\alpha+4\beta)$

εἶναι $\Sigma = \eta\mu\alpha + \eta\mu[\alpha+(\beta+\pi)] + \eta\mu[\alpha+2(\beta+\pi)] + \eta\mu[\alpha+3(\beta+\pi)] + \dots$

$$\Sigma = \frac{\eta\mu\left[\alpha + \frac{\nu-1}{2}(\beta+\pi)\right]\eta\mu\frac{\nu(\beta+\pi)}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\pi}{2}\left(=\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\right)} \quad (\tau.\ 55).$$

486. $\Sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+2\beta) - \dots$

Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\Sigma = \sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{\nu-1}{\beta}(\beta+\pi)\right]\eta\mu\frac{\nu(\beta+\pi)}{2} : \sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}$ (τ. 54).

487. $\Sigma = \eta\mu\alpha - \eta\mu3\alpha + \eta\mu5\alpha - \eta\mu7\alpha + \dots$

$$\Sigma = \eta\mu\left(\frac{\nu+1}{2}\alpha + \frac{\nu-1}{2}\pi\right)\eta\mu\frac{\nu(\alpha+\pi)}{2} : \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \quad (\text{ἄσκ. } 485).$$

488. $\Sigma = \sigma\upsilon\nu2\alpha - \sigma\upsilon\nu4\alpha + \sigma\upsilon\nu6\alpha - \sigma\upsilon\nu8\alpha + \dots$

$$\Sigma = \sigma\upsilon\nu\left[(\nu+1)\alpha + \frac{\nu-1}{2}\cdot\pi\right]\eta\mu\frac{\nu(2\alpha+\pi)}{2} : \sigma\upsilon\nu\alpha \quad (\text{ἄσκ. } 486).$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης.

489. $\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu2x + 3\sigma\upsilon\nu3x + \dots + \nu\sigma\upsilon\nu(\nu x) = S =$

$$= \left[\nu\eta\mu\frac{x}{2}\eta\mu(2\nu+1)\frac{x}{2} - \eta\mu^2\left(\frac{\nu x}{2}\right)\right] : 2\eta\mu^2\frac{x}{2} \quad (\text{Πολ)χνεῖον}).$$

$$2\eta\mu\frac{x}{2}\cdot S = 2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu x + 2\cdot2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu2x + \dots + \nu\cdot2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu(\nu x) =$$

$$= \eta\mu\frac{3x}{2} - \eta\mu\frac{x}{2} + 2\eta\mu\frac{5x}{2} - 2\eta\mu\frac{3x}{2} + \dots + \nu\eta\mu\frac{2\nu+1}{2}x - \nu\eta\mu\frac{2\nu-1}{2}x =$$

$$= \nu\eta\mu\frac{2\nu+1}{2}x - \left(\eta\mu\frac{x}{2} + \eta\mu\frac{3x}{2} + \eta\mu\frac{5x}{2} + \dots \eta\mu\frac{2\nu-1}{2}x\right) =$$

$$= \nu\eta\mu\frac{2\nu+1}{2}x - \left[\eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\nu-1}{2}x\right)\eta\mu\left(\frac{\nu x}{2}\right)\right] : \eta\mu\frac{x}{2} =$$

$$= \nu\eta\mu\frac{2\nu+1}{2}x - \left[\eta\mu^2\left(\frac{\nu x}{2}\right) : \eta\mu\frac{x}{2}\right].$$ Ὅθεν S = βον μέλος.

Ὁμοίως ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

490. $\eta\mu x + 2\eta\mu2x + 3\eta\mu3x + \dots + \nu\eta\mu(\nu x) = S =$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu x}{2}\eta\mu\frac{\nu x}{2} - \nu\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu+1}{2}x\right] : 2\eta\mu^2\frac{x}{2}.$$

$$2\eta\mu\frac{x}{2}\cdot S = \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2} - 2\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{2} + \dots + \nu\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu-1}{2}x - \nu\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu+1}{2}x =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{5x}{2} + \dots + \sigma\upsilon\nu\frac{2\nu-1}{2}x\right) - \nu\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu+1}{2}x =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} + \frac{\nu-1}{2}x\right)\eta\mu\frac{\nu x}{2} : \eta\mu\frac{x}{2}\right] - \nu\sigma\upsilon\nu\frac{2\nu+1}{2}x.$$ Ὅθεν S = β' μέλος.

491. $\varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{4} + \dots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\varepsilon\varphi\frac{1}{2^{\nu-1}} = S =$

$$= \frac{1}{2^{\nu-1}}\cdot\sigma\varphi\frac{\alpha}{2^{\nu-1}} - 2\sigma\varphi2\alpha.$$

Ἐπειδὴ $\sigma\varphi2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha} = \frac{1}{2}\sigma\varphi\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon\varphi\alpha$, προκύπτει ὅτι:

$\varepsilon\varphi\alpha = \sigma\varphi\alpha - 2\sigma\varphi 2\alpha, \quad \frac{1}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \sigma\varphi\alpha, \frac{1}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}\,\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$

κ.ο.κ. Ὅθεν S = β′ μέλος.

492. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\alpha} =$

$$= S = [\varepsilon\varphi(\nu+1)\alpha - \varepsilon\varphi[\nu\alpha)] : \eta\mu\alpha$$

Ἐπειδὴ (τ. 51) $\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu(2\alpha-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ προκύπτει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{\eta\mu\alpha}, \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 3\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi 3\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha}{\eta\mu\alpha}, \ldots$$

$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi(\nu+1)\alpha - \varepsilon\varphi(\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha}$. Ὅθεν S = β′ μέλος.

493. $\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha\eta\mu 3\alpha + \ldots + \eta\mu(\nu\alpha)\eta\mu(\nu+1)\alpha =$

$$= S = [(\nu+1)\eta\mu 2\alpha - \eta\mu(2\nu+2)] : 4\eta\mu\alpha.$$

$2\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha$, $2\eta\mu 2\alpha\eta\mu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha$. Ὥστε $2S = \nu\sigma\upsilon\nu\alpha - (\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \ldots)$ $= \nu\sigma\upsilon\nu\alpha - [\sigma\upsilon\nu(\nu+2)\alpha\eta\mu(\nu\alpha)] : \eta\mu\alpha = \frac{\nu\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha} - \frac{2\sigma\upsilon\nu(\nu+2)\alpha\eta\mu(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha}$. Ὅθεν S = β′ μέλος, διότι

$$2\sigma\upsilon\nu(\nu+2)\alpha\eta\mu(\nu\alpha) = \eta\mu(2\nu+2)\alpha - \eta\mu 2\alpha.$$

Ν' ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

494. $\frac{\eta\mu 5\vartheta - \eta\mu 3\vartheta}{\sigma\upsilon\nu 5\vartheta + \sigma\upsilon\nu 3\vartheta} = \varepsilon\varphi\vartheta.$

495. $\frac{\eta\mu 7\vartheta + \eta\mu 5\vartheta}{\sigma\upsilon\nu 7\vartheta - \sigma\upsilon\nu 5\vartheta} = -\sigma\varphi\vartheta.$

496. $\frac{\eta\mu 2x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}.$

497. $\frac{\sigma\upsilon\nu 5x + \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 5x + \eta\mu 2x} = \sigma\varphi\frac{7x}{2}.$

498. $\frac{\eta\mu 9x\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 7x\sigma\upsilon\nu 4x}{\sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 3x\eta\mu 4x} = \frac{(\eta\mu 11x + \eta\mu 7x) - (\eta\mu 11x + \eta\mu 3x)}{(\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x) - (\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 7x)} =$

$$= \frac{\eta\mu 7x - \eta\mu 3x}{\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 7x} = \varepsilon\varphi 2x.$$

499. $\frac{\eta\mu 46^0 + 2\eta\mu 72^0 + \eta\mu 98^0}{\eta\mu 10^0 + 2\eta\mu 36^0 + \eta\mu 62^0} = \frac{2\eta\mu 72^0(\sigma\upsilon\nu 26^0 + 1)}{2\eta\mu 36^0(\sigma\upsilon\nu 26^0 + 1)} = \frac{2\eta\mu 36^0\sigma\upsilon\nu 36^0}{\eta\mu 36^0}.$

500. $\frac{2\eta\mu 46^0\sigma\upsilon\nu 26^0 - \eta\mu 20^0}{2\eta\mu 10^0\sigma\upsilon\nu 26^0 + \eta\mu 16^0} = \frac{\eta\mu 20^0 + \eta\mu 72^0 - \eta\mu 20^0}{-\eta\mu 16^0 + \eta\mu 36^0 + \eta\mu 16^0} = 2\sigma\upsilon\nu 36^0.$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι:

501. $16\eta\mu 10^0\sigma\upsilon\nu 20^0\eta\mu 30^0\sigma\upsilon\nu 40^0 = 1$. Ἐπειδὴ $\eta\mu 30^0 = 1:2$ εἶναι

$8\eta\mu 10^0\sigma\upsilon\nu 20^0\sigma\upsilon\nu 40^0 = 4\eta\mu 10^0(\sigma\upsilon\nu 60^0 + \sigma\upsilon\nu 20^0) = 4\eta\mu 10^0\left(\frac{1}{2} + 1 - 2\eta\mu^2 10^0\right) =$

$= 2(3\eta\mu 10^0 - 4\eta\mu^3 10^0) = 2\eta\mu(3.10^0) = 2\eta\mu 30^0 = 1$ (τ. 35).

502. $16\sigma\upsilon\nu 20^0\sigma\upsilon\nu 40^0\sigma\upsilon\nu 60^0\sigma\upsilon\nu 80^0 = 1$. Ἔχομεν ὡς ἄνω

$4\sigma\upsilon\nu 20^0(\sigma\upsilon\nu 120^0 + \sigma\upsilon\nu 40^0) = 4\sigma\upsilon\nu 20^0 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 2\sigma\upsilon\nu^2 20^0 - 1\right) =$

$= 2(4\sigma\upsilon\nu^3 20^0 - 3\sigma\upsilon\nu 20^0) = 2\sigma\upsilon\nu(3 \cdot 20^0) = 2\sigma\upsilon\nu 60^0 = 1$ (τ. 34).

503. $\sigma\varphi 84^0\sigma\varphi 48^0\sigma\varphi 24^0\sigma\varphi 12^0 = 1.$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu 84^0\sigma\upsilon\nu 48^0 \cdot 2\sigma\upsilon\nu 24^0\sigma\upsilon\nu 12^0}{2\eta\mu 84^0\eta\mu 48^0 \cdot 2\eta\mu 24^0\eta\mu 12^0} = \frac{(\sigma\upsilon\nu 108^0 + \sigma\upsilon\nu 60^0)(\sigma\upsilon\nu 60^0 + \sigma\upsilon\nu 36^0)}{(\sigma\upsilon\nu 60^0 + \eta\mu 18^0)(\sigma\upsilon\nu 36^0 - \sigma\upsilon\nu 60^0)} =$$

$$= \frac{(-ημ18^0+συν60^0)(συν60^0+συν36^0)}{(συν60^0+ημ18^0)(συν36^0-συν60^0)} = \frac{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = 1 \quad (\S\ 68)$$

504. $2συνθ - συν3θ - συν5θ = 16συν^3θημ^2θ.$

$$2συνθ - 2συν4θσυνθ = 2συνθ(1-συν4θ) = 2συνθ\,.\,2ημ^2 2θ =$$
$$= 4συνθ\,.\,(2ημθσυνθ)^2 = 16συν^3θημ^2θ.$$

505. $2+συν2θ - 2συν4θ - συν6θ = 32συν^4θημ^2θ.$

$$2(1-συν4θ) + 2ημ4θημ2θ = 4ημ^2 2θ + 4ημ^2 2θσυν2θ =$$
$$= 4ημ^2 2θ(1+συν2θ) = 16ημ^2θσυν^2θ\,.\,2συν^2θ.$$

506. $$\frac{ημ10^0+ημ20^0+ημ30^0+ημ40^0+ημ50^0}{συν10^0+συν20^0+συν30^0+συν40^0+συν50^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Θέτοντες $α=10^0$, $β=10^0$ καὶ $ν=5$, ἔχομεν (τ. 55 καὶ 54)

$$\frac{ημ30^0ημ25^0}{ημ5^0} : \frac{συν30^0ημ25^0}{ημ5^0} = \frac{ημ30^0}{συν30^0} = εφ30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

507. $$\frac{ημ5^0+ημ15^0+ημ25^0+ημ35^0+ημ45^0+ημ55^0}{συν5^0+συν15^0+συν25^0+συν35^0+συν45^0+συν55^0} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Θέτομεν $α = 5^0$, $β = 2α = 10^0$, $ν = 6$ κλπ. ὡς ἄνω.

508. $ημ^2θ+ημ^2 2θ+ημ^2 3θ+ημ^2 4θ = 2-(ημ4θσυν5θ : 2ημθ).$

Ἐπειδὴ $2ημ^2θ = 1-συν2θ$ κλπ. τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ

$$\frac{4}{2} - \frac{συν2θ+συν4θ+συν6θ+συν8θ}{2} = 2 - \frac{συν5θημ4θ}{2ημθ} \quad (τ.\ 54).$$

509. $συν^2θ+συν^2 2θ+συν^2 3θ+συν^2 4θ = 2 + (ημ4θσυν5θ : 2ημθ).$

Διότι $2συν^2θ = 1+συν2θ$, $2συν^2 2θ = 1+συν4θ$ κλπ. ὡς ἄνω.

510. $S = ημ^3θ + ημ^3 2θ + ημ^3 3θ + ημ^3 4θ =$

$$= \frac{3}{4}ημ\frac{5θ}{2}\,ημ2θσυν\frac{θ}{2} - \frac{1}{4}ημ\frac{15θ}{2}\,ημ6θσυν\frac{3θ}{2}.$$

Ἐπειδὴ (τ. 35) $4ημ^3θ = 3ημθ - ημ3θ$, $4ημ^3 2θ = 3ημ2θ - ημ6θ$ κλπ. εἶναι

$$4S = 3(ημθ+ημ2θ+ημ3θ+ημ4θ)-(ημ3θ+ημ6θ+ημ9θ+ημ12θ) \quad ἢ \quad (τ.\ 55).$$

$$4S = 3\left[\frac{ημ\left(θ+\frac{3θ}{2}\right)ημ\frac{4}{2}\,.\,θ}{ημ\frac{θ}{2}}\right] - \frac{ημ\left(3θ+\frac{3}{2}\,.\,3θ\right)ημ\frac{4}{2}\,.\,3θ}{ημ\frac{3θ}{2}}.$$ Ὅθεν $S =$ β' μέλος.

Ταυτότητες ὑπὸ περιορισμούς.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $Α+Β+Γ = 180^0$, θὰ εἶναι:

511. $ημΑ+ημΒ+ημΓ = 4συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}.$

$$α'\ μέλος = 2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} + 2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2} =$$
$$= 2συν\frac{Γ}{2}\,.\,συν\frac{Α-Β}{2} + 2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Γ}{2} =$$
$$= 2συν\frac{Γ}{2}\left(συν\frac{Α-Β}{2} + συν\frac{Α+Β}{2}\right) = 4συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}.$$

512. $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$. Ὡς ἡ ἄσκ. 511.

513. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1+4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

$2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\left(1-2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}\right)=2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right)+1=\beta'$ μέλ.

514. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma = -1+4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Ὡς ἡ ἄσκ. 513.

515. $\eta\mu 2A+\eta\mu 2B-\eta\mu 2\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma$. Ὡς ἡ ἐφαρ. 3 § 97.

516. $\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1-4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

$2\sigma\upsilon\nu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B)+(2\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-1) = -2\sigma\upsilon\nu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu(A+B)]-1 = \beta'$ μέλ.

517. $\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B-\sigma\upsilon\nu 2\Gamma = 1-4\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὡς ἡ ἄσκ. 516.

518. $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma = 2+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ἐπειδὴ $2\eta\mu^2 A = 2(1-\sigma\upsilon\nu^2 A) = 2-2\sigma\upsilon\nu^2 A = 2+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$ καὶ

$2\eta\mu^2 B = 1-\sigma\upsilon\nu 2B$, $2\eta\mu^2\Gamma = 1-\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$, τὸ α΄ μέλος γράφεται

$$\frac{1}{2}[2+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+2-(\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma)] =$$

$$\frac{1}{2}[4+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)-2\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)] =$$

$$= 2+\sigma\upsilon\nu A[\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] = 2+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

519. $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B-\eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2A+1-\sigma\upsilon\nu 2B-1+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}=\frac{1-(\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B-\sigma\upsilon\nu 2\Gamma)}{2}=\beta'$ μέλ. (ἄσκ. 517).

520. $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

$\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2A+1+\sigma\upsilon\nu 2B+1+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}=\frac{3+(\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma)}{2}=\beta'$ μέλ. (ἄσκ. 516).

521. $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B-\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1-2\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὡς ἡ ἄκ. 520 καὶ 517.

522. $\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}+\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1-2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$.

$\frac{1-\sigma\upsilon\nu A+1-\sigma\upsilon\nu B+1-\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2}=\frac{3-(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)}{2}=\beta'$ μέλ. (ἄσκ. 513).

523. $\eta\mu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{B}{2}-\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1-2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Ὡς ἡ ἄσκ. 522 καὶ 514.

524. $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi\Gamma$.

εἶναι (τ. 23) $\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} = -\varepsilon\varphi\Gamma$ καὶ $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B = -\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$

ἤτοι $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$.

525. $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

$\sigma\varphi\frac{A+B}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 1 : \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ (τ. 25).

526. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=1$. $\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}=1:\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$ κλπ.

527. $\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A+\sigma\varphi A\sigma\varphi B=1$. $\sigma\varphi(A+B)=-\sigma\varphi\Gamma$ κλπ. (τ. 25).

528. $\eta\mu(B+2\Gamma)+\eta\mu(\Gamma+2A)+\eta\mu(A+2B)=4\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma-A}{2}\eta\mu\frac{A-B}{2}$.

Ἐπειδὴ $(B+2\Gamma)+(A-\Gamma)=180^\circ$ κλπ. τὸ α' μέλος ἰσοῦται μέ:

$$\eta\mu(A-\Gamma)+\eta\mu(B-A)+\eta\mu(\Gamma-B)=2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2A-B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\right)=$$

$$=2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}\eta\mu\frac{B-A}{2}=4\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma-A}{2}\eta\mu\frac{A-B}{2}.$$

529. $\eta\mu(B+\Gamma-A)+\eta\mu(\Gamma+A-B)+\eta\mu(A+B-\Gamma)=4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$.

Ἐπειδὴ $(B+\Gamma-A)+2A=180^\circ$ κλπ. τὸ α' μέλος ἰσοῦται μέ:

$\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ (§ 97, ἐφαρ. 3).

530. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=4\cdot\dfrac{1+\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}$.

Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{A}{2}:\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$ κλπ. τὸ α' μέλος ἰσοῦται μὲ $(\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ + δύο ἀκόμη ὅροι) : $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ (ἀσκ. 514 καὶ 511) $=\frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma+3):\frac{1}{4}(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=$ μὲ τὸ β' μέλος (ἄσκ. 513).

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $A+B+\Gamma=360^\circ$, θὰ εἶναι:

531. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Ὡς ἡ ἄσκ. 511, διότι:

$$\eta\mu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}.$$

532. $\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma=-1+4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὡς ἡ ἄσκ. 516, διότι $\sigma\upsilon\nu(A+B)=\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

533. $\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Βλέπε ἀσκ. 520 καὶ 531.

534. $S=\eta\mu^3A+\eta\mu^3B+\eta\mu^3\Gamma=3\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}-\eta\mu\frac{3A}{2}\eta\mu\frac{3B}{2}\eta\mu\frac{3\Gamma}{2}$.

(τ. 35) $4S=3(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)-(\eta\mu 3A+\eta\mu 3B+\eta\mu 3\Gamma)$.

Ἀλλὰ $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ (ἄσκ. 531)

$\eta\mu 3A=2\eta\mu\frac{3A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3A}{2}=-2\eta\mu\frac{3A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3(B+\Gamma)}{2}$ καὶ

$\eta\mu 3B+\eta\mu 3\Gamma=2\eta\mu\frac{3(B+\Gamma)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3(B-\Gamma)}{2}=2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3(B-\Gamma)}{2}$. Ὅθεν

$4S=12\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}-2\eta\mu\frac{A}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3B-3\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{3B+3\Gamma}{2}\right)$ καὶ $S=$ β' μέλος.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν $A+B+\Gamma=90^\circ$, θὰ εἶναι:

535. $\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi A=1$. (Σχ. Εὐελπ.). Ὡς ἡ ἄσκ. 526.

536. $\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma$. Διότι $\sigma\varphi(A+B)=1:\sigma\varphi\Gamma$ (τ. 25).

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἄν Α+Β+Γ+Δ=360°, θὰ εἶναι :

537. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Delta=-4\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Delta}{2}$.

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+\Delta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-\Delta}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-\Delta}{2}\right)$$

$$=-4\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\cdot\left[\eta\mu\frac{(A+\Gamma)-(B+\Delta)}{4}\,\eta\mu\frac{(A+\Delta)-(B+\Gamma)}{4}\right]$$

$$=-4\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\left[\eta\mu\frac{2(A+\Gamma)-360^0}{4}\cdot\eta\mu\frac{2(A+\Delta)-360^0}{4}\right]$$

$$=-4\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\cdot\eta\mu\left(\frac{A+\Gamma}{2}-90^0\right)\eta\mu\left(\frac{A+\Delta}{2}-90^0\right)=\text{τὸ β' μέλος.}$$

538. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Delta=4\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma+A}{2}$.

Προκύπτει ἐκ τῆς προηγουμένης, διότι $\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Delta}{2}$.

539. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma+\eta\mu\Delta=4\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{A+\Delta}{2}$. Ὡς ἡ 537.

540. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma+\eta\mu\Delta=4\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}$.

Διότι $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A+\Delta}{2}$ (ἄσκ. 539).

541. $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\Delta=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Delta)$.

Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi(A+B)=-\varepsilon\varphi(\Gamma+\Delta)$ ἤτοι $\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}=-\frac{\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi\Delta}{1-\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta}$ τὸ α' μέλος ἰσοῦται

μὲ $\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta+\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma+\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Delta=$

$=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta\,.\,\varepsilon\varphi B\sigma\varphi B+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi\Delta\,.\,\varepsilon\varphi A\sigma\varphi A+\ldots=$ τὸ β' μέλος

542. Ἄν $A+B=\Gamma$, θὰ εἶναι: $\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$.

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2A}{2}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2B}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-[\sigma\upsilon\nu(A+B)+\sigma\upsilon\nu(A-B)]\sigma\upsilon\nu\Gamma=$$

$$=1+\sigma\upsilon\nu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-[\sigma\upsilon\nu(A+B)+\sigma\upsilon\nu(A-B)]\sigma\upsilon\nu\Gamma=$$

$$=1+\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-[\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu(A-B)]\sigma\upsilon\nu\Gamma=1.$$

543. Ἄν $A+B=-\Gamma$ θὰ εἶναι

$\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=2(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)(1+\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)$.

$$2\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B)+2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=-2\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B)-\sigma\upsilon\nu(A+B)]=$$

$$=-4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=-8\,.\,2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\,.\,2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=-8\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right)\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right]\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\right]=$$

$$=8\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2}+\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\right)=$$

$$=8\left(\frac{\eta\mu A-\eta\mu(-B)}{2}+\frac{\eta\mu\Gamma}{2}\right)\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma+1}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}{2}\right)=\text{τὸ β' μέλ.}$$

Ἄν $\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$ θὰ εἶναι :

544. $\eta\mu\frac{x+y}{2}:\alpha=\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}:\beta=2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}:(\alpha^2+\beta^2)$.

'Αφοῦ $2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha$ καὶ $2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta$ εἶναι:

$$\alpha^2+\beta^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}\left(\eta\mu^2\frac{x+y}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}\right)=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}$$ καὶ

$\eta\mu\frac{x+y}{2}:\alpha=\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}:\beta=\left(\eta\mu\frac{x+y}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\right):(\alpha+\beta)$. 'Αλλ' ὁ 3ος λόγος ἰσοῦται μὲ

$$1:2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}:4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}:(\alpha^2+\beta^2).$$

545. $\eta\mu(x+y)=2\alpha\beta:(\alpha^2+\beta^2)$. Διότι (ἄσκ. 544).

$$2\alpha\beta=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}.\ 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=(\alpha^2+\beta^2)\eta\mu(x+y).$$

Τὰ κάτωθι ἀθροίσματα νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι $A+B+\Gamma=180^\circ$ καὶ k ἀκέραιος ἀριθμός.

546. $S=\eta\mu 2kA+\eta\mu 2kB+\eta\mu 2k\Gamma$.

$$S=2\eta\mu(kA+kB)\sigma\upsilon\nu(kA-kB)+2\eta\mu k\Gamma\sigma\upsilon\nu k\Gamma$$
$$=2\eta\mu(k\pi-k\Gamma)\sigma\upsilon\nu(kA-kB)+2\eta\mu k\Gamma\sigma\upsilon\nu[k\pi-k(A+B)]$$
$$=2(-1)^{k-1}\eta\mu k\Gamma[\sigma\upsilon\nu(kA-kB)-\sigma\upsilon\nu(kA+kB)]=4(-1)^{k-1}.\ \eta\mu kA\eta\mu kB\eta\mu k\Gamma.$$

547. $S=\sigma\upsilon\nu(4k+1)A+\sigma\upsilon\nu(4k+1)B+\sigma\upsilon\nu(4k+1)\Gamma-1$.

$$S=2\sigma\upsilon\nu\frac{(4k+1)(A+B)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{(4k+1)(A-B)}{2}-2\eta\mu^2.\ \frac{(4k+1)\Gamma}{2}=$$
$$=2\eta\mu\frac{(4k+1)\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{(4k+1)(A-B)}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{(4k+1)(A+B)}{2}\right]=$$
$$=4\eta\mu\frac{(4k+1)A}{2}\ \eta\mu\frac{(4k+1)B}{2}\ \eta\mu\frac{(4k+1)\Gamma}{2}.$$

548. $S=\sigma\upsilon\nu(4k+3)A+\sigma\upsilon\nu(4k+3)B+\sigma\upsilon\nu(4k+3)\Gamma-1$.

Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $S=-2\eta\mu\frac{(4k+3)A}{2}\eta\mu\frac{(4k+3)B}{2}\eta\mu\frac{(4k+3)\Gamma}{2}$.

549. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $S=\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x (Σχ. Ἰκάρων).

$$S=\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)\cdot[\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)]=\sigma\upsilon\nu^2x-[(\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2x):2]=$$
$$=(2\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu 2\alpha-2\sigma\upsilon\nu^2x+1):2=\eta\mu^2\alpha$$ (ἀνεξ. τοῦ x).

550. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$S=\sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu^2y+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+y+x)+2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu y\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)-2\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha+y+x)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x καὶ y.

$$S=\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu y[2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)-\sigma\upsilon\nu y]+\sigma\upsilon\nu(\alpha+y+x)[\sigma\upsilon\nu(\alpha+y+x)-2\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)\cdot\sigma\upsilon\nu x]$$

ἀλλὰ $2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)=\sigma\upsilon\nu(2\alpha+y)+\sigma\upsilon\nu y$

καὶ $2\sigma\upsilon\nu(\alpha+y)\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu(\alpha+y+x)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+y-x)$. Ὅθεν

$$S=\sigma\upsilon\nu^2x+\sigma\upsilon\nu y\sigma\upsilon\nu(2\alpha+y)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+y+x)\sigma\upsilon\nu(\alpha+y-x)=$$
$$=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu(2\alpha+2y)}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu(2\alpha+2y)+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}=\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τόξα :

551. $τοξημ\left(-\frac{1}{2}\right)=-30^o$. **552.** $τοξσυν\frac{\sqrt{3}}{2}=30^o$

553. $τοξεφ\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-30^o$. **554.** $τοξσφ\infty=0^o$.

555. $τοξτεμ(-2)=120^o$. **556.** $τοξσυντ\infty=0^o$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων δι' ἃ δίδεται :

557. $ϑ=τοξημ\frac{3}{5}$ **558.** $ϑ=τοξσυν\frac{3}{4}$ **559.** $ϑ=τοξεφ3$.

$ημϑ=\frac{3}{5}$, $συνϑ=\frac{4}{5}$ κλπ. $συνϑ=\frac{3}{4}$, $ημϑ=\frac{\sqrt{7}}{4}$ κλπ. $εφϑ=3$, $ημϑ=\frac{4}{\sqrt{10}}$ κλπ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί :

560. $εφ\left(τοξημ\frac{4}{5}\right)$. **561.** $συν\left[τοξημ\left(-\frac{1}{5}\right)\right]$. **562.** $ημ\left(τοξεφ\frac{3}{4}\right)$.

$ημϑ=\frac{4}{5}$, $εφϑ=\frac{4}{3}$ $ημϑ=-\frac{1}{5}$, $συνϑ=\frac{\sqrt{24}}{5}$, $εφϑ=\frac{3}{4}$, $ημϑ=\frac{3}{5}$.

563. $ημ\left(τοξσυν\frac{1}{2}+τοξημ\frac{3}{5}\right)$. Θέτοντες $ϑ=τοξσυν\frac{1}{2}$ καὶ $ω=$

$=τοξημ\frac{3}{5}$, ἔχομεν $συνϑ=\frac{1}{2}$, $ημω=\frac{3}{5}$, $ημϑ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συνω=\frac{4}{5}$,

ὁπότε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μὲ $ημ(ϑ+ω)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$.

564. $εφ\left[τοξημ\frac{1}{3}-τοξσυν\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω ἔχομεν

$$ημϑ=\frac{1}{3},\quad συνω=-\frac{1}{2} \text{ καὶ } εφ(ϑ-ω)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right):\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$=(1-2\sqrt{6}):(2\sqrt{2}+2\sqrt{6}).$$

565. $εφ(τοξεφ1+τοξεφ2+τοξεφ3)$. Ἔχομεν ὁμοίως $εφx=1$, $εφy=2$, $εφz=3$ καὶ (τύπ. 29) $εφ(x+y+z)=(1+2+3-1\cdot2\cdot3):(1-1\cdot2-2\cdot3-3\cdot1)=0$.

566. $εφ[τοξσφ(-3)+τοξσφ(-7)+τοξσφ2]$. Ἔχομεν ὁμοίως $σφx=-3$, $σφy=-7$, $σφz=2$ ἤτοι $εφx=-\frac{1}{3}$, $εφy=-\frac{1}{7}$, $εφz=\frac{1}{2}$ καὶ $εφ(x+y+z)=0$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι :

567. $τοξημx+τοξσυνx=\frac{\pi}{2}$. Θέτομεν $y=τοξημx$ καὶ $φ=τοξσυνx$

ἤτοι $x = ημy$ καὶ $x = συνφ$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἀφοῦ τὸ y μεταβάλλεται ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$, τὸ $\frac{\pi}{2} - y$ μεταβάλλεται ἀπὸ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, ἕως $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Ἀπὸ 0 δὲ ἕως π μεταβάλλεται καὶ τὸ τόξον φ. Ἀλλ' ἐξ ἄλλου εἶναι $συν\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = ημy$ ἤτοι $συν\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$. Ἐκ τούτων λοιπὸν ἕπεται ὅτι τὰ τόξα $\frac{\pi}{2} - y$ καὶ φ [ἀνήκοντα εἰς τὸ διάστημα (0,π)] εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τόξων ἐχόντων τὸ αὐτὸ συνημίτονον. Τὰ τόξα λοιπὸν αὐτὰ εἶναι ἴσα· ἤτοι εἶναι

$$\frac{\pi}{2} - y = φ, \quad y + φ = \frac{\pi}{2} \text{ ἢ } τοξημx + τοξσυνx = \frac{\pi}{2}.$$

568. $τοξεφx + τοξσφx = \frac{\pi}{z}$. Ἀποδ. ὁμοίως ὡς ἄνω.

569. $τοξσφx = τοξεφ\frac{1}{x}$, ὅταν $x > 0$.

570. $τοξσφx = \pi + τοξεφ\frac{1}{x}$, ὅταν $x < 0$.

Ἂν θέσωμεν $y = τοξεφx$ ἤτοι $x = εφy$ θὰ εἶναι

$$εφ\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = σφy = \frac{1}{x} \text{ ἤτοι } τοξεφ\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y + k\pi$$

ὅπου k ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ τοιοῦτος ὥστε τὸ $\frac{\pi}{2} = y + k\pi$ νὰ περιέχεται μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ $+\frac{\pi}{2}$. Ὥστε ἂν $x > 0$, τὸ y ὡς καὶ τὸ $\frac{\pi}{2} - y$ περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, τὸ δὲ k θὰ ληφθῇ ἴσον μὲ 0. Ἀλλὰ τότε εἶναι $τοξεφx + τοξεφ\frac{1}{x} = y + \frac{\pi}{2} - y =$

$$= \frac{\pi}{2}, \text{ ἤτοι } τοξσφx = τοξεφ\frac{1}{x}.$$

Ἂν ὅμως εἶναι $x < 0$, τὸ y περιέχεται μεταξὺ $-\frac{\pi}{2}$ καὶ 0, τὸ $\frac{\pi}{2} - y$ μεταξὺ $\frac{\pi}{2}$ καὶ π, τὸ δὲ k θὰ ληφθῇ ἴσον μὲ −1. Ἀλλὰ τότε εἶναι $τοξεφx + τοξεφ\frac{1}{x} = y + \frac{\pi}{2} - y$

$$- \pi = -\frac{\pi}{2}, \text{ ἤτοι εἶναι } τοξσφx = \pi + τοξεφ\frac{1}{x}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

571. $τοξεφ5 - τοξεφ2 = τοξεφ\frac{3}{11}$. Θέτοντες $τοξεφ5 = θ$, $τοξεφ2 = ω$ καὶ $τοξεφ\frac{3}{11} = φ$, ἔχομεν $εφθ = 5$, $εφω = 2$, $εφφ = \frac{3}{11}$ καὶ $θ - ω = φ$. Οὕτω θὰ εἶναι καὶ $εφ(θ-ω) = εφθ$. Καὶ πράγματι, διότι $εφ(θ-ω) = \frac{εφθ - εφω}{1 + εφθεφω} = \frac{5-2}{1+5\cdot 2} = \frac{3}{11} = εφφ$.

572. $τοξημ\frac{45}{53} + τοξημ\frac{33}{65} = τοξσυν\frac{83}{3445}$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω ἔχομεν

$$ημθ = \frac{45}{53}, \; ημω = \frac{33}{65}, \; συνφ = \frac{83}{3445}, \; συνθ = \frac{28}{53}, \; συνω = \frac{56}{65}$$

$$\text{καὶ συν}(\vartheta+\omega)=\frac{28}{53}\cdot\frac{56}{65}-\frac{45}{53}\cdot\frac{33}{65}=\frac{83}{3445}=\text{συν}\varphi.$$

573. $\text{τοξημ}\,\frac{4}{5}+\text{τοξσυν}\,\frac{12}{13}=\text{τοξεφ}\,\frac{63}{16}$. Ἔχομεν ὡς ἄνω:

$$\text{ημ}\vartheta=\frac{4}{5},\ \text{συν}\omega=\frac{12}{13},\ \text{εφ}\vartheta=\frac{4}{3},\ \text{εφ}\omega=\frac{5}{12},\ \text{εφ}\varphi=\frac{63}{16}$$

$$\text{καὶ εφ}(\vartheta+\omega)=\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{12}\right):\left(1-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{12}\right)=\frac{63}{16}=\text{εφ}\varphi.$$

574. $\text{τοξσυν}\,\frac{4}{5}+\text{τοξεφ}\,\frac{3}{5}=\text{τοξεφ}\,\frac{27}{11}$. Ἔχομεν ὡς ἄνω:

$$\text{συν}\vartheta=\frac{4}{5},\ \text{εφ}\vartheta=\frac{3}{4}\ \text{καὶ εφ}(\vartheta+\omega)=\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right):\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{27}{11}.$$

575. $\text{τοξεφ}\,\frac{3}{4}+\text{τοξεφ}\,\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$. Ἔχομεν ὡς ἄνω $\text{εφ}\vartheta=\frac{3}{4},\ \text{εφ}\omega=\frac{1}{7}$

$$\text{καὶ εφ}(\vartheta+\omega)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\right):\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}\right)=1=\text{εφ}\,\frac{\pi}{4}.$$

576. $\text{τοξσυν}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\text{τοξεφ}\,(-\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}$. Ἔχομεν $\text{συν}\vartheta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{εφ}\omega=$ $=-\sqrt{3},\ \text{ημ}\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\text{συν}(\vartheta+\omega)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0=\text{συν}\,\frac{\pi}{2}.$

577. $\text{τοξεφ}\,\frac{16}{63}+2\text{τοξεφ}\,\frac{1}{5}=\text{τοξεφ}\,\frac{3}{4}$. Ἔχομεν $\text{εφ}\vartheta=\frac{16}{63},\ \text{εφ}\omega=\frac{1}{5},$ $\text{εφ}2\omega=\frac{5}{12},\ \text{εφ}\varphi=\frac{3}{4}$ καὶ $\text{εφ}(\vartheta+2\omega)=\left(\frac{16}{63}+\frac{5}{12}\right):\left(1-\frac{16}{63}\cdot\frac{5}{12}\right)=\frac{3}{4}=\text{εφ}\varphi.$

578. $\text{τοξεφ}\,\frac{240}{161}=2\text{τοξημ}\,\frac{8}{17}$. Ἔχομεν $\text{εφ}\varphi=\frac{260}{161},\ \text{ημ}\omega=\frac{8}{17},\ \text{εφ}\omega=\frac{8}{15}$

$$\text{καὶ εφ}2\omega=2\cdot\frac{8}{15}:\left(1-\frac{64}{225}\right)=\frac{240}{161}=\text{εφ}\varphi,\ \text{ἤτοι}\ 2\omega=\varphi.$$

579. $2\text{τοξεφ}\,\frac{2}{3}+\text{τοξεφ}\,\frac{63}{16}+\text{τοξεφ}\,\frac{3}{4}=\pi$. Ἔχομεν

$$\text{εφ}\vartheta=\frac{2}{3},\ \text{εφ}2\vartheta=\frac{12}{5},\ \text{εφ}\omega=\frac{63}{16}\ \text{καὶ εφ}\varphi=\frac{3}{4}.\ \text{Ὅθεν}:$$

$$\text{εφ}(2\vartheta+\omega+\varphi)=\text{εφ}\,[(2\vartheta+\varphi)+\omega]=\frac{\text{εφ}(2\vartheta+\varphi)+\text{εφ}\omega}{1-\text{εφ}2\vartheta\,\text{εφ}\omega}\ \text{ἢ ἐπειδὴ}$$

$$\text{εφ}(2\vartheta+\varphi)=\frac{\text{εφ}2\vartheta+\text{εφ}\varphi}{1-\text{εφ}2\vartheta\,\text{εφ}\varphi}=-\frac{63}{16},\ \text{εἶναι εφ}(2\vartheta+\omega+\varphi)=\left(-\frac{63}{16}+\frac{63}{16}\right):$$

$$:\left(1+\frac{63}{16}\cdot\frac{63}{16}\right)=0=\text{εφ}\pi.$$

580. $2\text{τοξσφ}5+\text{τοξσφ}7+2\text{τοξσφ}8=\frac{\pi}{4}$.

$$\text{σφ}\vartheta=5,\ \text{σφ}2\vartheta=\frac{12}{5},\ \text{σφ}\omega=7,\ \text{σφ}\varphi=8,\ \text{σφ}2\varphi=\frac{63}{16},\ \text{σφ}(2\vartheta+\omega)=\frac{79}{47}.$$

$$\text{Ὅθεν σφ}[(2\vartheta+\omega)+\varphi]=\left(\frac{79}{47}\cdot\frac{63}{16}-1\right):\left(\frac{79}{47}+\frac{63}{16}\right)=1=\text{σφ}\,\frac{\pi}{4}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

581. $2ημ^2x - 3ημx + 1 = 0$. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι $ημx = 1$ ἢ $\frac{1}{2}$.

$$\text{Ὅθεν } x = kπ + \frac{π}{2} \text{ ἢ } kπ + (-1)^k \cdot \frac{π}{6}.$$

582. $4συν^2x - 2\sqrt{3}συνx = 0$. Εὑρίσκομεν $συνx = 0$ ἢ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{καὶ } x = kπ + \frac{π}{2} \text{ ἢ } 2kπ \pm \frac{π}{6}.$$

583. $2συν^2x - 3συνx - 2 = 0$. Δεκτὴ ρίζα ἡ $συνx = -\frac{1}{2}$. Ὅθεν $x = 2kπ \pm \frac{2π}{3}$.

584. $4ημ^2x + 2ημx - 1 = 0$. $ημx = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ἢ $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

$$\text{καὶ } x = kπ + (-1)^k \cdot \frac{π}{10} \text{ ἢ } kπ + (-1)^k \cdot \left(-\frac{3π}{10}\right) = kπ - (-1)^k \cdot \frac{3π}{10}.$$

585. $εφ^2x - (1+\sqrt{3})\,εφx + \sqrt{3} = 0$. $εφx = 1$ ἢ $\sqrt{3}$ καὶ $x = kπ + \frac{π}{4}$ ἢ $kπ + \frac{π}{3}$.

586. $\sqrt{3}\,σφ^2x + 4σφx + \sqrt{3} = 0$. $σφx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ἢ $-\sqrt{3}$ καὶ $x = kπ + \frac{2π}{3}$ ἢ $kπ + \frac{5π}{6}$.

587. $16ημ^4x - 16ημ^2x + 3 = 0$. $ημx = \pm\frac{1}{2}$ ἢ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $x = kπ \pm \frac{π}{6}$ ἢ $kπ \pm \frac{π}{3}$.

588. $εφ^4x - 2εφ^2x + 1 = 0$. $εφx = \pm 1$ καὶ $x = kπ \pm \frac{π}{4}$.

589. $ημx + συνx = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ἐπειδὴ $εφ\frac{π}{4} = 1$, ἔχομεν $ημx + εφ\frac{π}{4}\,συνx = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$ημ\left(x + \frac{π}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot συν\frac{π}{4}$, $x + \frac{π}{4} = kπ + (-1)^k \cdot \frac{π}{6}$ καὶ $x = kπ + (-1)^k \cdot \frac{π}{6} - \frac{π}{4}$.

590. $\sqrt{3}ημx - συνx = \sqrt{2}$. Αὐτὴ γράφεται $ημx - \frac{1}{\sqrt{3}}συνx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ἤτοι

$ημx - εφ\frac{π}{6}συνx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ὅθεν εἶναι $ημ\left(x - \frac{π}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}συν\frac{π}{6}$ ἤτοι $ημ\left(x - \frac{π}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{καὶ } x = kπ + (-1)^k \cdot \frac{π}{4} + \frac{π}{6}.$$

591. $2ημx + 4συνx = \sqrt{3}$. Ἔχομεν $ημx + 2συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ ἐὰν θέσωμεν $2 = εφω$,

$ημ(x+ω) = \frac{\sqrt{3}}{2}συνω$ (ι). Ἀλλ' ἐκ τῆς $εφω = 2$ εὑρίσκομεν $ω = 63^\circ 26' 6''$. Ἐπειδὴ δὲ

$\frac{\sqrt{3}}{2} = ημ60^\circ$, ἡ ἐξίσωσις (ι) γράφεται :

$$ημ(x+ω) = ημ60^\circ \cdot ημ63^\circ 26' 6''$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον $x + ω = 22^\circ 47' 10''$. Ὅθεν

$$x + ω = k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot 22^\circ 47' 10'' \text{ καὶ}$$

$$x = k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot 22^\circ 47' 10'' - 63^\circ 26' 6''.$$

592. $5\sigma\upsilon\nu x+8\eta\mu x=6$. Θέτοντες $\varepsilon\varphi\omega=\frac{8}{5}$, εὑρίσκομεν $\omega=57^\circ\ 59'\ 41''$ ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\sigma\upsilon\nu(x-\omega)=\frac{6\sigma\upsilon\nu\omega}{5}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x-\omega=k\cdot 360^\circ \pm 50^\circ 30'\ 24''$ καὶ $x=k\cdot 360^\circ+57^\circ\ 59'\ 41'' \pm 50^\circ\ 30'\ 24''$.

593. $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=2$. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi x=1:\varepsilon\varphi x$ λαμβάνομεν:

$$\varepsilon\varphi^2 x-2\varepsilon\varphi x+1=0,\ \varepsilon\varphi x=1 \text{ καὶ } x=k\cdot 180^\circ+45^\circ.$$

594. $\sigma\varphi x-2\varepsilon\varphi x=1$. Ἐδῶ λαμβάνομεν $\sigma\varphi^2 x-\sigma\varphi x-2=0$, $\sigma\varphi x=-1$ ἢ 2. Ὅθεν $x=k\cdot 180^\circ+\tau o\xi\varepsilon\varphi(-1)=k\cdot 180^\circ-45^\circ$ ἢ $x=k\cdot 180^\circ+\tau o\xi\sigma\varphi 2$ ἤτοι $x=k\cdot 180^\circ+26^\circ\ 33'\ 54''$.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

595. $15\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu^2 x=9$.. Ἔχομεν $15\eta\mu x+2(1-\eta\mu^2 x)=9$, $2\eta\mu^2 x-15\eta\mu x+7=0$ καὶ δεκτὴν ρίζαν $\eta\mu x=\frac{1}{2}$. Ὅθεν $x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$.

596. $9(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x)=11$. Ἔχομεν $9(1-\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x)=11$, $9\sigma\upsilon\nu^2 x-9\sigma\upsilon\nu x+2=0$ $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{2}{3}$ καὶ $x=k\cdot 360^\circ\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{1}{3}=k\cdot 360^\circ\pm 72^\circ\ 32'\ 43''$ ἢ $x=k\cdot 36^\circ\pm$ $\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{2}{3}=k\cdot 360^\circ\pm 48^\circ\ 11'\ 21''$.

597. $\sigma\varphi x+3\varepsilon\varphi x=5\sigma\upsilon\nu\tau x$. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\tau x=$ $=\frac{1}{\eta\mu x}$, ἔχομεν $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-5\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=0$, ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu^2 x+5\sigma\upsilon\nu x-3=0$, $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$

$$\text{καὶ } x=2k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

598. $\sigma\upsilon\nu 2x+3\sigma\upsilon\nu x=0$. Ἔχομεν $2\sigma\upsilon\nu^2 x-1+3\sigma\upsilon\nu x=0$,

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{17}-3}{4}=\frac{4{,}1231-3}{4}=0{,}28085$ καὶ $\chi=k\,.\,360^\circ\pm 74^\circ\ 41'\ 21''$.

599. $5\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta-4=4\sigma\varphi\vartheta\sigma\upsilon\nu\tau\vartheta$. Εὑρίσκομεν $5-4\eta\mu^2\vartheta=4\sigma\upsilon\nu\vartheta$, ἤτοι

$$5-4(1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)=4\sigma\upsilon\nu\vartheta \text{ ἢ } 4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-4\sigma\upsilon\nu\vartheta+1=0. \text{ Ὅθεν}$$

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{1}{2} \text{ καὶ } \vartheta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

600. $\varepsilon\varphi\vartheta=4\sigma\upsilon\nu 2\vartheta-\sigma\varphi 2\vartheta$. Ἔχομεν διαδοχικῶς $\varepsilon\varphi\vartheta=4\sigma\upsilon\nu 2\vartheta-\frac{\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{\eta\mu 2\vartheta}$ $\varepsilon\varphi\vartheta\,.\,\eta\mu 2\vartheta=4\eta\mu 2\vartheta\sigma\upsilon\nu 2\vartheta-\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$, $\varepsilon\varphi\vartheta\,.\,2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta=2\eta\mu 4\vartheta-\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$, $2\eta\mu^2\vartheta+1-2\eta\mu^2\vartheta=$

$$=2\eta\mu 4\vartheta, \text{ ἤτοι } 1=2\eta\mu 4\vartheta \text{ ἢ } \eta\mu 4\vartheta=\frac{1}{2}. \text{ Ὅθεν:}$$

$$4\vartheta=k\pi+(-1)^k\,.\,\frac{\pi}{6} \text{ καὶ } \vartheta=k.\frac{\pi}{4}+(-1)^k\,.\,\frac{\pi}{24}.$$

601. $2\eta\mu\vartheta-\eta\mu 2\vartheta=2(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2$. Εὑρίσκομεν διαδοχικῶς

$$2\eta\mu\vartheta-2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta=2(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2,\quad \eta\mu\vartheta(1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)=(1+\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2 \quad (\iota).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\eta\mu\vartheta=2\eta\mu\frac{\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}$, $1-\sigma\upsilon\nu\vartheta=2\eta\mu^2\frac{\vartheta}{2}$ καὶ $1+\sigma\upsilon\nu\vartheta=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2}$, ἡ ἐξίσωσις (ι) δίδει τὴν ἐξίσωσιν $4\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}\left(\eta\mu^3\frac{\vartheta}{2}-\sigma\upsilon\nu^3\frac{\vartheta}{2}\right)=0$. Ἑπομένως θὰ εἶναι ἢ $\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}=0$, ὁπότε $\frac{\vartheta}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ $\vartheta=2k\pi+\pi=(2k+1)\pi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}=\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$

$$\text{ἤτοι } \sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right), \text{ ὁπότε } \vartheta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

602. $\varepsilon\varphi 7y = \sigma\varphi 2y$. $\varepsilon\varphi 7y = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$, $7y = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2y$

$$\text{καὶ } y = k\cdot\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{18}.$$

603. $\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 7x = \eta\mu 4x$. Λαμβάνομεν $2\eta\mu 4x\eta\mu 3x = \eta\mu 4x$,

$\eta\mu 4x(2\eta\mu 3x - 1) = 0$. Ὅθεν ἢ $\eta\mu 4x = 0$, ὁπότε $4x = k\pi$ ἤτοι $x = k\cdot\frac{\pi}{4}$.

ἢ $\eta\mu 3x = \frac{1}{2}$, ὁπότε $3x = k\pi + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$ ἤτοι $x = k\cdot\frac{\pi}{3} + (-1)^k\cdot\frac{\pi}{18}$.

604. $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x = 2\sigma\upsilon\nu 2x$. Λαμβάνομεν κατὰ σειράν,

$2\sigma\upsilon\nu 2x.\sigma\upsilon\nu x = 2\sigma\upsilon\nu 2x$, $2\sigma\upsilon\nu 2x(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$. Ὅθεν θὰ εἶναι

ἢ $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$, ὁπότε $x = k\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu x = 1$, ὁπότε $x = 2k\pi$.

605. $\sigma\upsilon\nu 9x + \sigma\upsilon\nu 7x = \eta\mu 5x + \eta\mu 3x$. Ἔχομεν

$2\sigma\upsilon\nu 8x\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu 4x\sigma\upsilon\nu x$, $2\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 8x) = 0$. Ὅθεν ἢ $\sigma\upsilon\nu x = 0$, ὁπότε $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ἢ $\eta\mu 4x - \sigma\upsilon\nu 8x = 0$. Ἀλλ' ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) - \sigma\upsilon\nu 8x = 0$

ἢ $2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right).\eta\mu\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$ ὁπότε

$\frac{\pi}{4} + 2x = k\pi$ καὶ $x = k\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ἢ $\eta\mu\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ὁπότε

$$6x - \frac{\pi}{4} = k\pi \text{ καὶ } x = k\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24}.$$

606. $\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi 3x = 1$. Ἔχομεν

$\eta\mu x\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 3x$, $\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 4x = \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x$, καὶ

$\sigma\upsilon\nu 4x = 0$. Ὅθεν: $4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ $x = k\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$.

607. $\eta\mu 7\vartheta\eta\mu 5\vartheta = \eta\mu 3\vartheta\eta\mu\vartheta$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$\sigma\upsilon\nu 2\vartheta - \sigma\upsilon\nu 12\vartheta = \sigma\upsilon\nu 2\vartheta - \sigma\upsilon\nu 4\vartheta$, $\sigma\upsilon\nu 4\vartheta - \sigma\upsilon\nu 12\vartheta = 0$, $2\eta\mu 8\vartheta\,.\,\eta\mu 4\vartheta = 0$.

Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu 8\vartheta = 0$, ὁπότε $\vartheta = k\cdot\frac{\pi}{8}$ ἢ $\eta\mu 4\vartheta = 0$, ὁπότε $\vartheta = k\cdot\frac{\pi}{4}$

608. $\sigma\upsilon\nu 11\vartheta\sigma\upsilon\nu 9\vartheta = \sigma\upsilon\nu 7\vartheta\sigma\upsilon\nu 5\vartheta$. Ἔχομεν

$\sigma\upsilon\nu 20\vartheta + \sigma\upsilon\nu 2\vartheta = \sigma\upsilon\nu 12\vartheta + \sigma\upsilon\nu 2\vartheta$, $\sigma\upsilon\nu 12\vartheta - \sigma\upsilon\nu 20\vartheta = 0$, $2\eta\mu 16\vartheta\eta\mu 4\vartheta = 0$.

Ὅθεν εἶναι ἢ $\eta\mu 16\vartheta = 0$, ὁπότε $\vartheta = k\cdot\frac{\pi}{16}$ ἢ $\eta\mu 4\vartheta = 0$, ὁπότε $\vartheta = k\cdot\frac{\pi}{4}$.

609. $\sqrt{3}\tau\varepsilon\mu\varphi = \sqrt{3}\varepsilon\varphi\varphi + 1$. Ἔχομεν

$$\tau\varepsilon\mu\varphi - \varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1 - \eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \sigma\varphi\frac{\pi}{3}, \quad \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \sigma\varphi\frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \sigma\varphi\frac{\pi}{3}, \quad \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3}.$$

Όθεν : $\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}$ καὶ $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$.

610. $\etaμ2\varphi-συν2\varphi=\sqrt{2}\,(2ημ^2\varphi-1)$. Λαμβάνομεν διαδοχικῶς $ημ2\varphi-$
$-ημ\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=-\sqrt{2}\,συν2\varphi,\ 2συν\frac{\pi}{4}ημ\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,ημ\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)$

$$ημ\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+ημ\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=0,\ 2ημ\frac{\pi}{4}συν\left(2\varphi-\frac{3\pi}{8}\right)=0.$$

Όθεν $συν\left(2\varphi-\frac{3\pi}{8}\right)=0,\ 2\varphi-\frac{3\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ $=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{16}$.

611. $ημx=2εφx:(1+εφ^2x)$. Λαμβάνομεν:

$$\frac{εφx}{\pm\sqrt{1+εφ^2x}}=\frac{2εφx}{1+εφ^2x},\quad \frac{εφ^2x}{1+εφ^2x}=\frac{4εφ^2x}{(1+εφ^2x)^2}$$

$εφ^2x(1+εφ^2x)-4εφ^2x=0,\ εφ^2x(εφ^2x-3)=0$. Όθεν ἢ $εφx=0$, ὁπότε $x=k\pi$ ἢ $εφx=\pm\sqrt{3}$, ὁπότε $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

612. $εφ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3ημ2x}{2-6ημ^2x}$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$\frac{εφx+1}{1-εφx}=\frac{6ημxσυνx}{2-6ημ^2x}$ ἢ ἐπειδὴ $ημx=\frac{εφx}{\sqrt{1+εφ^2x}}$ καὶ $συνx=\frac{1}{\sqrt{1+εφ^2x}}$

$$\frac{εφx+1}{1-εφx}=\frac{3εφx}{1-2εφ^2x},\ (εφx+1)(1-2εφ^2x)=3εφx(1-εφx)$$

$$2εφ^3x-εφ^2x+2εφx-1=0,\quad 2εφx(εφ^2x+1)-(εφ^2x+1)=0,$$

$(εφ^2x+1)(2εφx-1)=0$. Όθεν ἢ $εφ^2x+1=0$, ὁπότε ἔχομεν ρίζας φανταστικὰς ἢ $2εφx-1=0$ ἤτοι $εφx=0{,}5$ καὶ $x=k\,.\,180^\circ+26^\circ33'54''$.

613. $εφx+εφ2x+εφ3x=0$ (Χημικὴ Σχολή). Ἔχομεν

$$\frac{ημxσυν3x+συνxημ3x}{συνxσυν3x}+\frac{ημ2x}{συν2x}=0,\ \frac{ημ4x}{συνxσυν3x}+\frac{ημ2x}{συν2x}=0$$

$$ημ4xσυν2x+ημ2xσυνxσυν3x=0,\quad ημ2x(2συν^22x+συνxσυν3x)=0.$$

Όθεν ἢ $ημ2x=0$, ὁπότε $x=k\,.\,\frac{\pi}{2}$ ἢ $2συν^22x+συνxσυν3x=0$ ἢ (ἐπειδὴ $2συν^22x=$ $=1+συν4x$ καὶ $2συνxσυν3x=συν4x+συν2x$) $3συν4x+συν2x+2=0$.
ἢ $3(2συν^22x-1)+συν2x+2=0$ ἢ τέλος $6συν^22x+συν2x-1=0$ Όθεν
$συν2x=-\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{1}{3}$ καὶ $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$ ἢ $k\pi+$τοξσυν$\frac{1}{3}$.

614. $σφx+\sqrt{3}=συντx$. Ἔχομεν $σφx+εφ\frac{\pi}{3}=συντx$ ἤτοι

$συνxσυν\frac{\pi}{3}+ημxημ\frac{\pi}{3}=συν\frac{\pi}{3},\ συν\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cdot\ \frac{\pi}{3}$ καὶ $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$.

615. $σφx+συντx=-συν2xσυντx$. Ἔχομεν $\frac{συνx+1}{ημx}=\frac{1-2συν^2x}{ημx}$ ἢ

$συνx(1+2συνx)=0$. Όθεν $συνx=0$ καὶ $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ἢ $συνx=-\frac{1}{2}$
καὶ $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

616. $(1+\varepsilon\varphi x)(1-\eta\mu 2x)=1-\varepsilon\varphi x$. Ἐπειδὴ (ἄσκ. 612) $1-\eta\mu 2x=1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ $=1-\dfrac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μετασχηματίζεται οὕτως:

$(1+\varepsilon\varphi x)(1-2\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x)=(1-\varepsilon\varphi x)(1+\varepsilon\varphi x)$, ἢ [ἐπειδὴ $1-2\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x=(1-\varepsilon\varphi x)^2$]

$(1-\varepsilon\varphi x)[(1-\varepsilon\varphi^2 x)-(1+\varepsilon\varphi^2 x)]=0$ ἢ $-2\varepsilon\varphi^2 x(1-\varepsilon\varphi x)=0$. Ὅθεν

$\varepsilon\varphi x=0$ καὶ $x=k\pi$ ἢ $\varepsilon\varphi x=1$ καὶ $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$.

617. $3\eta\mu^2 x+\sqrt{3}\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu^2 x=3$. Ἔχομεν (ἄσκ. 612).

$3\varepsilon\varphi^2 x+2\sqrt{3}\varepsilon\varphi x+1=3+3\varepsilon\varphi^2 x$, $\sqrt{3}\varepsilon\varphi x=1$ καὶ $x=k\,.\,180^\circ+30^\circ$.

618. $4\eta\mu^2 x+3\sqrt{3}\eta\mu 2x-2\sigma\upsilon\nu^2 x=4$. $x=k\,.\,180^\circ+30^\circ$ (ὡς ἄνω).

619. $\sqrt{3}(1+\eta\mu^2 x)=5\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$. Ἔχομεν

$\sqrt{3}(2+2\eta\mu^2 x)=5\,.\,2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $\sqrt{3}(2+1-\sigma\upsilon\nu 2x)=5\eta\mu 2x$

$\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x+5\eta\mu 2x=3\sqrt{3}$ (ι) $\sigma\upsilon\nu(2x-\omega)=3\sigma\upsilon\nu\omega$ (§ 100, πδ. 4)

ὅταν θέσωμεν εἰς τὴν (ι) $\varepsilon\varphi\omega=5:\sqrt{3}$ (ί). Ἀλλ' ἐπειδὴ τότε (§ 67,3) $\sigma\upsilon\nu\omega=3:\sqrt{28}$, ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu(2x-\omega)=?\sigma\upsilon\nu\omega$ γράφεται $\sigma\upsilon\nu(2x-\omega)=3\sqrt{84}:28=\sigma\upsilon\nu 10^\circ\,53'\,40''$, διότι ἐκ τῆς (ι') εὑρίσκομεν $\omega=70^\circ\,53'\,37''$. Ὅθεν εἶναι $2x-70^\circ\,53'\,37''=$ $=k\,.\,360^\circ\pm 10^\circ\,53'\,40''$ ἤτοι $x=k\,.\,180^\circ+35^\circ\,26'\,49''\pm 5^\circ\,26'\,50''$.

620. $2\tau\varepsilon\mu x+\varepsilon\varphi x=2$. Ἐπειδὴ $\tau\varepsilon\mu x=1:\sigma\upsilon\nu x$ καὶ $\varepsilon\varphi x=\eta\mu x:\sigma\upsilon\nu x$ λαμβάνομεν, $2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=2$, ἢ (θέτοντες $\varepsilon\varphi\omega=1:2$) $\sigma\upsilon\nu(x-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(x-26^\circ\,33'\,54'')=\sigma\upsilon\nu 26^\circ\,33'\,54''$. Ὅθεν $x-26^\circ\,33'\,54''=k\,.\,360^\circ\pm 26^\circ\,33'\,54''$ κλπ.

621. $\sigma\upsilon\nu\tau x=\sigma\varphi x+\sqrt{3}$. Λαμβάνομεν $(1-\sigma\upsilon\nu x):\eta\mu x=\sqrt{3}$, $2\eta\mu^2\dfrac{x}{2}:$

$2\eta\mu\dfrac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}=\sqrt{3}$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}=\sqrt{3}$. Ὅθεν $\dfrac{x}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ καὶ $x=2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$.

622. $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}=\varepsilon\varphi x$. Ἔχομεν $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\sigma\varphi x}$ ἤτοι $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}=2\sigma\varphi\dfrac{x}{2}:$

$:\left(\sigma\varphi^2\dfrac{x}{2}-1\right)$, ἤτοι $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}\left(\sigma\varphi^2\dfrac{x}{2}-3\right)=0$. Ὅθεν $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}=0$ καὶ $x=2k\pi$

ἢ $\sigma\varphi\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{3}$ καὶ $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

623. $(2+\sqrt{3})\varepsilon\varphi(x-15^\circ)=\varepsilon\varphi(x+15^\circ)$. Ἔχομεν (ἐξ. 7 § 105).

$\eta\mu 2x=\dfrac{2+\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}-1}\eta\mu 30^\circ$, $\eta\mu 2x=\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $x=k\,.\,90^\circ+(-1)^k\,30^\circ$.

624. $(\sqrt{3}+1)\eta\mu(x-15^\circ)=2\eta\mu(x+15^\circ)$. Ἔχομεν (ἐξ. 8, § 105).

$\varepsilon\varphi x=\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1}\,.\,\varepsilon\varphi 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-1}\,.\,(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}$ καὶ $x=k\,.\,180^\circ+60^\circ$.

625. $\varepsilon\varphi(x+25^\circ)=4\varepsilon\varphi x$. Εὑρίσκομεν (ἐξ. 7, § 105).

$\dfrac{\eta\mu(x+25^\circ)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(x+25^\circ)}=4$, $\dfrac{\eta\mu(2x+45^\circ)+\eta\mu 25^\circ}{\eta\mu(2x+25^\circ)-\eta\mu 25^\circ}=\dfrac{4}{1}$, $\eta\mu(2x+25^\circ)=\dfrac{4+1}{4-1}\eta\mu 25^\circ=$

$=\eta\mu(2x+25^\circ)=\dfrac{5}{3}\,.\,0{,}42262=0{,}70437=\eta\mu 44^\circ\,46'\,43''$. Ὅθεν

$2x+25^\circ=k\,.\,180^\circ+(-1)^k\,.\,44^\circ\,46'\,43''$ καὶ $x=k\,.\,90^\circ-12^\circ\,30'+(-1)^k\,.\,22^\circ\,23'\,52''$.

626. $2\eta\mu(x+52^0) = 3\eta\mu(x+28^0)$. Εὑρίσκομεν (ἐξ. 8, § 105)

$$\varepsilon\varphi(x+40^0) = 5\varepsilon\varphi 12^0 = 5 \,.\, 0{,}21256 = 1{,}0628 = \varepsilon\varphi 46^0\, 44'\, 41''$$

Ὅθεν $x+40^0 = k\,.\,180^0+46^0\,44'\,41''$ καὶ $x = k\,.\,180^0+6^0\,44'\,41''$.

Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

627. $\varepsilon\varphi^2\vartheta-8\eta\mu^2\vartheta+3=0$. Ἐνταῦθα ἔχομεν $\varepsilon\varphi^2\vartheta-8\,.\,\dfrac{\varepsilon\varphi^2\vartheta}{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta}+3=0$,

$\varepsilon\varphi^4\vartheta-4\varepsilon\varphi^2\vartheta+3=0$, $\varepsilon\varphi^2\vartheta=1$ ἢ 3, $\varepsilon\varphi\vartheta=\pm 1$ ἢ $\pm\sqrt{3}$ καὶ $\vartheta = k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ ἢ $k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

628. $3\varepsilon\varphi^2\vartheta+8\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-7=0$. Ἐδῶ ἔχομεν $3\varepsilon\varphi^2\vartheta+8\,.\,\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\vartheta}-7=0$,

$3\varepsilon\varphi^4\vartheta-4\varepsilon\varphi^2\vartheta+1=0$, $\varepsilon\varphi\vartheta=\pm 1$ ἢ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ καὶ $\vartheta=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ ἢ $k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$.

629. $\eta\mu^2 2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta=\dfrac{1}{2}$. Ἐδῶ ἔχομεν

$$(\eta\mu 2\vartheta+\eta\mu\vartheta)(\eta\mu 2\vartheta-\eta\mu\vartheta)=\frac{1}{2},\quad 2\eta\mu\frac{3\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\vartheta}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\eta\mu\frac{3\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{3\vartheta}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}=\frac{1}{2},\qquad \eta\mu 3\vartheta\,.\,\eta\mu\vartheta=\frac{1}{2}$$

$$(3\eta\mu\vartheta-4\eta\mu^3\vartheta)\,.\,\eta\mu\vartheta=\frac{1}{2},\qquad 8\eta\mu^4\vartheta-6\eta\mu^2\vartheta+1=0 \text{ καὶ}$$

τέλος $\eta\mu\vartheta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ἢ $\pm\dfrac{1}{2}$. Ὅθεν $\vartheta=k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ ἢ $k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$.

630. $\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x-60^0}{2}+\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x+60^0}{2}=1$. Ἐπειδὴ

$\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x-60^0}{2}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu(x-60^0)}{2}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x+60^0}{2}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu(x+60^0)}{2}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις

γράφεται, $\sigma\upsilon\nu(x-60^0)+\sigma\upsilon\nu(x+60^0)=0$ ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu 60^0\sigma\upsilon\nu x=0$.

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu x=0$ καὶ $x=k\,.\,180^0+90^0$.

631. $\eta\mu^2(\vartheta+30^0)=-2\sigma\upsilon\nu 2\vartheta$.. Ἐνταῦθα λαμβάνομεν

$$\eta\mu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2 30^0+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\eta\mu^2 30^0+2\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta\eta\mu 30^0\sigma\upsilon\nu 30^0=-2(2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-1)$$

$$\frac{3}{4}\eta\mu^2\vartheta+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta=-4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+2$$

$$\frac{3}{4}\eta\mu^2\vartheta+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta=-4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+2(\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)$$

$$\frac{3}{4}\varepsilon\varphi^2\vartheta+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\varphi\vartheta=-2+2\varepsilon\varphi^2\vartheta,\quad 5\varepsilon\varphi^2\vartheta-2\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\vartheta-1=0$$

καὶ $\varepsilon\varphi\vartheta=\sqrt{3}$ ἢ $-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$. Ὅθεν $\vartheta=k\cdot 180^0+60^0$ ἢ $k\cdot 180^0+\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}\right)$.

632. $(3\eta\mu^2x-1)(3\eta\mu^2 2x-1)=1$. Ἐπειδὴ $\eta\mu 2x=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, ἔχομεν :

$$36\eta\mu^4x\sigma\upsilon\nu^2x-12\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x-3\eta\mu^2x=0$$

$$3\eta\mu^2x[12(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\sigma\upsilon\nu^2x-4\sigma\upsilon\nu^2x-1]=0$$

$3\eta\mu^2x(12\sigma\upsilon\nu^4x-8\sigma\upsilon\nu^2x+1)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu x=0$,

ὁπότε $x=k\cdot 180^0$ ἢ $12\sigma\upsilon\nu^4x-8\sigma\upsilon\nu^2x+1=0$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν

$\sigma\upsilon\nu x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ἢ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, ὁπότε $x=k\cdot 360^0\pm 45^0$ ἢ $k\cdot 360^0\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

633. $2\eta\mu^2 3x + 3\eta\mu^2 6x = 4$. Θέτοντες $3x=y$ ἔχομεν:

$$2\eta\mu^2 y + 3\eta\mu^2 2y = 4, \quad 2\eta\mu^2 y + 12\eta\mu^2 y(1-\eta\mu^2 y) = 4,$$

$$6\eta\mu^4 y - 7\eta\mu^2 y + 2 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ἢ} \ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ὅθεν} \quad 3x = k\cdot 180^\circ \pm 45^\circ \quad \text{ἤτοι} \quad x = k\cdot 60^\circ \pm 15^\circ$$

$$\text{καὶ} \quad 3x = k\cdot 180^\circ \pm \text{τοξημ}\sqrt{\frac{2}{3}} \ \text{ἤτοι} \ x = \frac{1}{3}\left(k\cdot 180^\circ \pm \text{τοξημ}\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

634. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 5:8$. Ἐκ τῆς $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ λαμβάνομεν:

$$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = 1^2, \quad \text{ἤτοι} \quad 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$

$$4\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4}, \quad (2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^2 = \frac{3}{4}, \quad \eta\mu^2 2x = \frac{3}{4} \quad \text{καὶ τέλος}$$

$$\eta\mu 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \ \text{Ὅθεν} \ 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ \text{ἤτοι} \ x = k\cdot\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

635. $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$. Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω:

$$\eta\mu^2 2x + 2\eta\mu 2x - 2 = 0, \quad \eta\mu 2x = \sqrt{3} - 1 = 0{,}73205, \quad \text{καὶ} \quad 2x = k.180^\circ + (1-)^k\cdot \text{τοξημ}0{,}73205.$$

636. $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = \dfrac{1}{4}$. Ἔχομεν $(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^3 = 1$,

$$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x\,.\,\sigma\upsilon\nu^2 x(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 1, \quad \text{ἤτοι}$$

$$3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4}, \quad 4\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \quad \eta\mu^2 2x = 1 \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu 2x = \pm 1.$$

$$\text{Ὅθεν} \ 2x = k\cdot\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad x = k\cdot\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4} = (2k\pm 1)\cdot\frac{\pi}{4}.$$

637. $\sigma\upsilon\nu\vartheta(\eta\mu\vartheta + \sqrt{\eta\mu^2\vartheta + 1}) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu^2\vartheta = \frac{2+\sqrt{3}}{2}(\eta\mu^2\vartheta + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta) - (1+\sqrt{3})\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\vartheta$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2}\epsilon\varphi^2\vartheta - (1+\sqrt{3})\epsilon\varphi\vartheta + \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1 = 0, \ \epsilon\varphi\vartheta = \frac{1+\sqrt{3}\pm 1}{2+\sqrt{3}}. \ \text{Ὅθεν} \ \epsilon\varphi\vartheta = 1, \ \text{ἢ} \ \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\text{ὁπότε} \quad \vartheta = k.180^\circ + 45^\circ \quad \text{ἢ} \quad \vartheta = k.180^\circ + \text{τοξεφ}(2\sqrt{3} - 3).$$

638. $\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} = 1$. Ἔχομεν $(\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x})^2 = 1^2$ ἤτοι

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = 1, \quad 2\sqrt{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = 1 - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$$

$$4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1 + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \quad \text{ἤτοι}$$

$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1$. Αὕτη δὲ μετασχηματίζεται διαδοχικῶς οὕτω:

$$\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{2}\eta\mu 2x = 1, \quad 2\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$$

$$2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \left[2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1\right] = 2, \ 2\sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0.$$

Δεκτὴ ῥίζα τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $\sigma\upsilon\nu\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ὁπότε

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{ἤτοι} \quad x = 2k\pi \quad \text{καὶ} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

639. $(\sqrt{1+\eta\mu x} - 1)(\sqrt{1-\eta\mu x} + 1) = \sqrt{2} - 1$. Ἔχομεν

$\sqrt{1-\eta\mu^2 x} + \sqrt{1+\eta\mu x} - \sqrt{1-\eta\mu x} - 1 = \sqrt{2} - 1$. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ $\sqrt{1+\eta\mu x} - \sqrt{1-\eta\mu x}$

είναι (τύπ. 42) ἴση μὲ $2ημ\frac{x}{2}$ $\left(ἢ μὲ 2συν\frac{x}{2}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{1-ημ^2x} = συνx =$ $= 1-2ημ^2\frac{x}{2}$, ἡ ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν $2ημ^2\frac{x}{2} - 2ημ\frac{x}{2} + \sqrt{2}-1 = 0$,

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $ημ\frac{x}{2} = \frac{1\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2} = \frac{1\pm(\sqrt{2}-1)}{2}$ [1], ἤτοι $ημ\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ὁπότε $x = 2k\pi+(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2}$ ἢ $ημ\frac{x}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, ὁπότε $x = 2\left[k\pi+(-1)^k τοξημ\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

640. $συν2x+συνx+ημx=0$ (ι). Θέτοντες $εφ\frac{x}{2} = t$, ἔχομεν (τύπ. 46 καὶ 47) $ημx = \frac{2t}{1+t^2}$, $συνx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ καὶ $συν2x = 2συν^2x-1 = \frac{1-6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (ι) δίδει τὴν $\frac{2(t^3-3t^2+t+1)}{(1+t^2)^2} = 0$, ἤτοι τὴν $t^3-3t^2+t+1 = 0$ (ί). Ἀλλ' αὕτη ἐπειδὴ ἔχει τὴν ρίζαν $t=1$, ἤτοι ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ $τ-1$, γίνεται $(t-1)(t^2-2t-1)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $t-1=0$ ἤτοι $εφ\frac{x}{2}=1$, ὁπότε $x=k \cdot 360^0+90^0$ ἢ $t^2-2t-1=0$ ὁπότε $t=εφ\frac{x}{2}=1+\sqrt{2}$ ἢ $1-\sqrt{2}$. Ὅθεν $\frac{x}{2} = k \cdot 180^0+67^0\ 30'$ ἢ $k \cdot 180^0-22^0\ 30'$, ἤτοι $x = k \cdot 360^0+135^0$ ἢ $k \cdot 360^0-45^0$.

641. $ημ2\vartheta+συν\vartheta+ημ\vartheta=1$ (ι). Θέτοντες $εφ\vartheta = t$ ἔχομεν ὡς ἄνω $ημ2\vartheta = 2 \cdot ημ\vartheta συν\vartheta = 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2}\ \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (ι) δίδει τὴν $\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}=1$ ἤτοι τὴν $2t(t^3+t^2+t-3)=0$, ἤτοι $2t(t-1)(t^2+2t+3) = 0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $t = εφ\frac{\vartheta}{2} = 0$, ὁπότε $\vartheta = 2k\pi$ ἢ $t = εφ\frac{\vartheta}{2} = 1$ ὁπότε $\vartheta = 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ ἢ $t^2+2t+3 = 0$. Ἀλλ' αὕτη ἔχει ρίζας φανταστικάς.

642. $2συν3x+4συν2x+6συνx+3 = 0$. Ἔχομεν (τύπ. 34 καὶ 30')

$8συν^3x+8συν^2x-1 = 0$ ἢ (θέτοντες $2συνx = y$) $y^3+2y^2-1 = 0$, ἤτοι $(y+1)(y^2+y-1) = 0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $y = -1$, δηλαδὴ $συνx = -\frac{1}{2}$ ὁπότε

$x = 2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ἢ $y^2+y-1 = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, δηλαδὴ

$συνx = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ἢ $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Ὅθεν $x = 2k\pi\pm\frac{2\pi}{5}$ ἢ $2k\pi\pm\frac{4\pi}{5}$.

643. $ημ2x+συν2x = ημx-συνx$. Λαμβάνομεν

$$συν\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+συν2x = συν\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-συνx \quad ἤτοι$$

$$2συν\frac{\pi}{4}συν\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = 2ημ\frac{\pi}{4}ημ\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad ἢ$$

$$συν\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)-ημ\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad ἢ \quad ημ\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-ημ\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$ἢ \quad 2συν\frac{3x}{2}ημ\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad Ὅθεν \ ἢ \ συν\frac{3x}{2} = 0, \ ὁπότε$$

1. Βλέπε «Στοιχεῖα Ἀλγέβρας» Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 183 σημ. β' ἀσκήσεως 549.

$$\frac{3x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad x=k\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$\text{ὁπότε} \quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi \quad \text{ἤτοι} \quad x=2k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

644. $\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 2x=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1$. Ἔχομεν

$2\sigma\upsilon\nu^2 x-1-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+1=0$ ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)-(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=0$

ἢ $(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)(2\sigma\upsilon\nu x-1)=0$. Ὅθεν ἢ $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$, ὁπότε $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

ἢ $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ ἤτοι

$-2\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ ἤτοι $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, ὁπότε $x-\frac{\pi}{4}=k\pi$ καὶ $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

645. $\tau\epsilon\mu 4x-\tau\epsilon\mu 2x=2$. Ἔχομεν $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x}=2$

ἤτοι $\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 4x=2\sigma\upsilon\nu 4x\sigma\upsilon\nu 2x$, $\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu 6x+\sigma\upsilon\nu 2x$

ἢ $\sigma\upsilon\nu 6x+\sigma\upsilon\nu 4x=0$ ἢ $2\sigma\upsilon\nu 5x\sigma\upsilon\nu x=0$. Ὅθεν

ἢ $\sigma\upsilon\nu 5x=0$, ὁπότε $5x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ἤτοι $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{10}$

ἢ $\sigma\upsilon\nu x=0$, ὁπότε $x=k\pi+\frac{\pi}{2}=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$.

646. $\epsilon\varphi 2x+\sigma\varphi x=8\sigma\upsilon\nu^2 x$. Λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\frac{2\epsilon\varphi x}{1-\epsilon\varphi^2 x}+\frac{1}{\epsilon\varphi x}=\frac{8}{1+\epsilon\varphi^2 x}, \quad \epsilon\varphi^4 x+8\epsilon\varphi^3 x+2\epsilon\varphi^2 x-8\epsilon\varphi x+1=0.$$

Διαιροῦντες ἤδη τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως δι' $\epsilon\varphi^2 x$, εὑρίσκομεν:

$\left(\epsilon\varphi x^2+\frac{1}{\epsilon\varphi^2 x}\right)+8\left(\epsilon\varphi x-\frac{1}{\epsilon\varphi x}\right)+2=0$ (ι), ἐὰν δὲ θέσωμεν $\epsilon\varphi x-\frac{1}{\epsilon\varphi x}=y$ (ι'),

ὁπότε θὰ εἶναι $\epsilon\varphi^2 x+\frac{1}{\epsilon\varphi^2 x}=y^2+2$ ἡ ἐξίσωσις (ι) γίνεται $y^2+8y+4=0$. Ἤδη αὕτη δίδει τὸ y, ἡ δὲ (ι') δίδει τὴν εφx. (1) Ἐκ δὲ τῆς εφx εὑρίσκομεν τὰ τόξα x.

647. $\eta\mu 3x=4\eta\mu x\eta\mu 2x\eta\mu 4x$. Ἔχομεν

$$\eta\mu 3x=2\eta\mu x\cdot 2\eta\mu 2x\eta\mu 4x, \quad \eta\mu 3x=2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu 2x-\sigma\upsilon\nu 6x)$$

$$\eta\mu 3x=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 6x, \quad \eta\mu 3x=\eta\mu 3x-\eta\mu x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 6x$$

ἤτοι $\eta\mu x(1+2\sigma\upsilon\nu 6x)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu x=0$, ὁπότε $x=k\pi$

ἢ $\sigma\upsilon\nu 6x=-\frac{1}{2}$, ὁπότε $6x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ἤτοι $x=\frac{3k\pm 1}{9}\cdot\pi$.

648. $\epsilon\varphi x+\epsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\epsilon\varphi\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=3$. Ἔχομεν

$$\epsilon\varphi x+\frac{\epsilon\varphi x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\epsilon\varphi x}+\frac{\epsilon\varphi x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,\epsilon\varphi x}=3 \quad \text{ἤτοι}$$

$$\frac{3(3\epsilon\varphi x-\epsilon\varphi^3 x)}{1-3\epsilon\varphi^2 x}=3 \quad \text{ἤτοι} \quad \epsilon\varphi 3x=1. \text{ Ὅθεν εἶναι } x=\frac{4k+1}{12}\cdot\pi.$$

649. $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\epsilon\varphi^3\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. Ἔχομεν

1. Βλέπε «Στοιχεῖα Ἀλγέβρας» Χρ. Μπαρμπαστάθη ἄσκ. 799 σελ. 222.

$$\frac{1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}=\left(\frac{-1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}\right)^3, \quad \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-\eta\mu\frac{x}{2}}=\left(\frac{-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\eta\mu\frac{x}{2}}\right)^3$$

Ὑψοῦντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}=\frac{(1-\eta\mu x)^3}{(1+\eta\mu x)^3} \text{ ἢ } \frac{(1+\eta\mu x)-(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)+(1-\eta\mu x)}=\frac{(1-\eta\mu x)^3-(1+\eta\mu x)^3}{(1-\eta\mu x)^3+(1+\eta\mu x)^3} \text{ ἤτοι}$$

$\eta\mu x=-\dfrac{3\eta\mu x+\eta\mu^3x}{1+3\eta\mu^2x}$, ἢ $4\eta\mu x(1+\eta\mu^2x)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\eta\mu x=0$, ὁπότε $x=k\pi$ ἢ $1+\eta\mu^2x=0$ (ρίζαι φανταστικαί). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις $x=k\pi$, δὲν ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἀλλ' εἰς τὴν

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=-\varepsilon\varphi^3\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

650. $\eta\mu(\pi\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu(\pi\eta\mu x)$ (Πολυτεχνεῖον).

Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sigma\upsilon\nu x\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi\eta\mu x)$. Ἑπομένως εἶναι $\frac{\pi}{2}-\pi\sigma\upsilon\nu x=2k\pi\pm$ $\pm\pi\eta\mu x$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu x\pm\eta\mu x=\frac{1}{2}-2k$, $\sigma\upsilon\nu x\pm\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\eta\mu x=\frac{1}{2}-2k$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\frac{1-4k}{2\sqrt{2}}$ (ι). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἵνα ἡ ἐξίσωσις (ι) ἔχῃ λύσιν πρέπει ὁ ἀκέραιος k νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Διότι ἄλλως ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\sigma\upsilon\nu\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος 1. Οὕτως εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ἤδη ἡ εὕρεσις τοῦ x εἶναι εὔκολος.

651. $\eta\mu(\pi\sigma\varphi x)=\sigma\upsilon\nu(\pi\varepsilon\varphi x)$. Ἐδῶ ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu(\pi\varepsilon\varphi x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sigma\varphi x\right)$ καὶ $\pi\varepsilon\varphi x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sigma\varphi x\right)$. Ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=2k+\frac{1}{2}$ (ι) καὶ $\varepsilon\varphi x-$ $\sigma\varphi x=2k-\frac{1}{2}$ (ί). Οὕτως ἐκ τῆς (ι) εὑρίσκομεν $\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}=\frac{1}{2}+2k$, $\frac{1}{\eta\mu 2x}=\frac{1}{4}$ $+k$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\tau x=\frac{1}{4}+k$ (η), ἐκ δὲ τῆς (ί) εὑρίσκομεν $\frac{-2(\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x)}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{1}{2}+2k$, $-\frac{2\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}=-\frac{1}{2}+2k$ ἤτοι $\sigma\varphi 2x=\frac{1}{4}-k$ (η′). Ἤδη αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὐκόλως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (η) καὶ (η′).

652. $\varepsilon\varphi(\pi\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\varphi(\pi\eta\mu x)$. Ἐδῶ ἔχομεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\pi\eta\mu x\right)=\varepsilon\varphi(\pi\sigma\upsilon\nu x)$, $\frac{\pi}{2}$ $-\pi\eta\mu x=k\pi+\pi\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\frac{1}{2}-k$, $\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\eta\mu x=\frac{1}{2}-k$, $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\left(\frac{1}{2}-k\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$, $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-2k}{2\sqrt{2}}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἵνα ἡ τελευταία αὐτὴ ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν πρέπει ὁ ἀκέραιος k νὰ εἶναι ἴσος μὲ 0 ἢ 1. Διότι ἄλλως ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος 1. Οὕτως εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ καὶ $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

653. $\eta\mu|x|+\sigma\upsilon\nu|x|+\varepsilon\varphi|x|+\sigma\varphi|x|+\tau\varepsilon\mu|x|+\sigma\upsilon\nu\tau|x|$ $+3=0$. (Π]χνεῖον). Θέτοντες $|x|=y$ εὑρίσκομεν διαδοχικῶς:

$$\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu y+\frac{1}{\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y}+\frac{\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y}+3=0 \qquad (\alpha)$$

$$(\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu y)\left(1+\frac{1}{\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y}\right)+\frac{1}{\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y}+3=0$$

$$(\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu y)(\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+1)+3\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+1=0 \qquad (\iota)$$

'Αλλ' ἐπειδὴ $(\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu y)^2=1+\eta\mu 2y$, ἤτοι $\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+1=\frac{2\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+2}{2}=\frac{\eta\mu 2y+2}{2}$ καὶ

$$3\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+1=\frac{3.2\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y+2}{2}=\frac{3\eta\mu 2y+2}{2}, \quad \text{ἡ } (\iota)$$

γράφεται: $\pm\sqrt{1+\eta\mu 2y}\,(\eta\mu 2y+2)=-(3\eta\mu 2y+2)$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν:

$(1+\eta\mu 2y)(\eta\mu 2y+2)^2=(3\eta\mu 2y+2)^2$ ἤτοι $\eta\mu 2y(\eta\mu^2 2y-4\eta\mu 2y-4)=0$. Ὅθεν ἢ $\eta\mu 2y=0$ (ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται ὡς μηδενίζουσα τὸν παρονομαστὴν $\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y$ τῆς α) ἢ $\eta\mu^2 2y-4\eta\mu 2y-4=0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\eta\mu 2y=2-2\sqrt{2}=$

$$=-0{,}82842. \quad \text{Ὅθεν: } 2y=k\,.\,180^\circ+(-1)^k\,.\,\tau o\xi\eta\mu(-0{,}82842)=$$

$$=k\,.\,180^\circ-(-1)^k\,\tau o\xi\eta\mu 0{,}82842, \text{ ἤτοι } |\,x\,|=[k\,.\,180^\circ-(-1)^k\,.\,55^\circ\,56'\,12'']:2.$$

'Εκ τῶν λύσεων ὅμως τούτων θὰ διατηρήσωμεν μόνον τὰς θετικάς.

654. $2\,.\,[\eta\mu\,|\,x\,|+\sigma\upsilon\nu\,|\,x\,|\,]+4\eta\mu\,|\,x\,|\,\sigma\upsilon\nu\,|\,x\,|=2\sqrt{3}+1.$

'Εργαζόμενοι ὡς ἄνω καὶ ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 638 εὑρίσκομεν $4\sigma\upsilon\nu^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+$

$$+2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-(3+2\sqrt{3})=0, \text{ ἐξ ἧς } \sigma\upsilon\nu\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}.$$

Ὅθεν $|\,x\,|=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}$. 'Εκ τῶν ριζῶν δὲ αὐτῶν θὰ λάβωμεν μόνον τὰς θετικάς

655. $2[\sigma\upsilon\nu\,|\,x\,|-\eta\mu\,|\,x\,|\,]-4\eta\mu\,|\,x\,|\,\sigma\upsilon\nu\,|\,x\,|+\sqrt{2}+1=0$ (ι).

Θέτοντες πρῶτον $|\,x\,|=y$, παρατηροῦμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu y=\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=$

$$=2\eta\mu\frac{\pi}{4}\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(y+\frac{\pi}{4}\right) \text{ καὶ } -\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y=-\frac{\eta\mu 2y}{2}=\frac{\eta\mu(-2y)}{2}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+2y\right)}{2}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}+y\right)-1}{2}.$$ Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (ι) δίδει τὴν

$$4\sigma\upsilon\nu^2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)+2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}-1=0, \text{ ἐξ ἧς } \sigma\upsilon\nu\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{4}=\frac{-\sqrt{2}\pm(2-\sqrt{2})}{4}, \text{ ἤτοι } \sigma\upsilon\nu\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \text{ ἢ } \frac{1-\sqrt{2}}{2}. \text{ Ὅθεν}$$

$$\text{εἶναι } |\,x\,|=2k\pi-\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3} \text{ ἢ } |\,x\,|=2k\pi-\frac{\pi}{4}\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

'Εκ τῶν λύσεων δὲ τούτων θὰ λάβωμεν μόνον τὰς θετικάς.

656. $\alpha(\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu 2\vartheta)=\beta(\eta\mu\vartheta-\eta\mu 2\vartheta)$. Ἔχομεν:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{\eta\mu\vartheta-\eta\mu 2\vartheta}=\frac{\beta}{\alpha} \text{ ἤτοι } \frac{2\eta\mu\frac{3\vartheta}{2}\,\eta\mu\frac{\vartheta}{2}}{-2\sigma\upsilon\nu\frac{3\vartheta}{2}\,\eta\mu\frac{\vartheta}{2}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἤδη ἁπλοποιοῦντες τὸ α' μέλος δι' $\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$, ἀφαιροῦμεν τὴν λύσιν $\eta\mu\frac{\vartheta}{2}=0$, ὁπότε $\vartheta=2k\pi$. Ὥστε ἀπομένει ἡ λύσις $\varepsilon\varphi\frac{3\vartheta}{2}=-\frac{\beta}{\alpha}$ ὁπότε $\frac{3\vartheta}{2}=k\pi-\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\vartheta=\frac{2}{3}\left(k\pi-\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

657. $\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta=\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega$. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\vartheta-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)+\eta\mu\omega$ ἤτοι $-2\eta\mu\frac{\pi}{4}\eta\mu\left(\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\omega\right)$ ἤτοι $\eta\mu\left(\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)$ ἢ $\eta\mu\left(\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(-\omega-\frac{\pi}{4}\right)$. Ὅθεν εἶναι $\vartheta-\frac{\pi}{4}=2k\omega-\omega-\frac{\pi}{4}$ ἤτοι $\vartheta=2k\pi-\omega$ ἢ $\vartheta-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi+\omega+\frac{\pi}{4}$, ἤτοι $\vartheta=\frac{4k+3}{2}.\pi+\omega$.

658. $\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma=\sigma\upsilon\nu(3x-\alpha)\sigma\upsilon\nu(3x-\gamma)$. Λαμβάνομεν:

$$2\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\gamma)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\gamma)=\sigma\upsilon\nu[6x-(\alpha+\gamma)]+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\gamma)$$

$$2\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu\beta-[\sigma\upsilon\nu[6x-(\alpha+\gamma)]+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\gamma)]=0$$

$$2\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu\beta-2\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu(3x-\alpha-\gamma)=0,\quad 2\sigma\upsilon\nu3x[\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu(3x-\alpha-\gamma)]=0$$

$$4\sigma\upsilon\nu3x\cdot\eta\mu\frac{3x-(\alpha+\gamma-\beta)}{2}\cdot\eta\mu\frac{3x-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=0.$$

Ὅθεν ἢ $\sigma\upsilon\nu3x=0$, ὁπότε $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{6}$

ἢ $\eta\mu\frac{3x-(\alpha+\gamma-\beta)}{2}=0$ » $x=\frac{2k\pi+\alpha+\gamma-\beta}{3}$

ἢ $\eta\mu\frac{3x-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}=0$ » $x=\frac{2k\pi+\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

659. $\varepsilon\varphi(x+\alpha)\varepsilon\varphi(x+\beta)+\varepsilon\varphi(x+\beta)\varepsilon\varphi(x+\gamma)+\varepsilon\varphi(x+\gamma)\varepsilon\varphi(x+\alpha)=1$.

Ἔχομεν (τύπ. 29) $\varepsilon\varphi(x+\alpha+x+\beta+x+\gamma)=\infty=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{2}$. Ὅθεν εἶναι

$$3x+\alpha+\beta+\gamma=k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ καὶ } x=\frac{1}{3}\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta-\gamma\right).$$

660. $\sigma\varphi(x+\alpha)+\sigma\varphi(x+\beta)=\sigma\upsilon\nu\tau(x+\alpha)+\sigma\upsilon\nu\tau(x+\beta)$.

Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\tau(x+\alpha)-\sigma\varphi(x+\alpha)+\sigma\upsilon\nu\tau(x+\beta)-\sigma\varphi(x+\beta)=0$ ἤτοι $\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x+\alpha)}{\eta\mu(x+\alpha)}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu(x+\beta)}{\eta\mu(x+\beta)}=0$ (ι). Ἀλλ' ἐπειδὴ $1-\sigma\upsilon\nu(x+\alpha)=2\eta\mu^2\frac{x+\alpha}{2}$, $\eta\mu(x+\alpha)=2\eta\mu\frac{x+\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+\alpha}{2}$ κλπ. ἡ (ι) δίδει $\varepsilon\varphi\frac{x+\alpha}{2}+\varepsilon\varphi\frac{x+\beta}{2}=0$ ἤτοι $\varepsilon\varphi\frac{x+\alpha}{2}=\varepsilon\varphi\left(-\frac{x+\beta}{2}\right)$. Ὅθεν $\frac{x+\alpha}{2}=k\pi-\frac{x+\beta}{2}$ καὶ $x=k\pi-\frac{(\alpha+\beta)}{2}$.

661. $\eta\mu^2(\nu x)-\eta\mu^2(\nu-1)x=\eta\mu^2x$. Ἔχομεν, ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 629,

$$\eta\mu x\eta\mu(2\nu-1)x=\eta\mu^2x,\quad \eta\mu x[\eta\mu(2\nu-1)x-\eta\mu x]=0,$$

$2\eta\mu x\eta\mu(\nu-1)x\sigma\upsilon\nu x=0$, ἐξ ἧς $\eta\mu x=0$ καὶ $x=k\pi$ ἢ $\eta\mu(\nu-1)x=0$ καὶ $x=\frac{k\pi}{\nu-1}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu(\nu x)=0$ καὶ $x=k.\frac{\pi}{\nu}+\frac{\pi}{2\nu}$.

661α. $\sigma\upsilon\nu\tau(\nu\alpha)-\sigma\upsilon\nu\tau(\nu x)=\sigma\varphi(\nu\alpha)-\sigma\varphi(\nu x)$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\tau(\nu\alpha)=1:\eta\mu(\nu\alpha)$, $\sigma\varphi(\nu\alpha)=\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha):\eta\mu(\nu\alpha)$ κλπ. εὑρίσκομεν $\eta\mu(\nu x)-\eta\mu(\nu\alpha)=\eta\mu.\nu(x-\alpha)$ ἤτοι

$$2\eta\mu\frac{\nu(x-\alpha)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(x+\alpha)}{2}=2\eta\mu\frac{\nu(x-\alpha)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(x-\alpha)}{2}$$

$$2\,\text{ημ}\frac{\nu(x-\alpha)}{2}\left[\text{συν}\frac{\nu(x-\alpha)}{2}-\text{συν}\frac{\nu(x+\alpha)}{2}\right]=0,\qquad 4\,\text{ημ}\frac{\nu(x-\alpha)}{2}\,\text{ημ}\frac{\nu x}{2}\,\text{ημ}\frac{\nu\alpha}{2}=0$$

ὁπότε ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 661 εὑρίσκομεν τὰς λύσεις $\frac{\nu(x-\alpha)}{2}=k\pi$, ἤτοι

$$x=\frac{2k\pi}{\nu}+\alpha \quad \text{ἢ} \quad \frac{\nu x}{2}=k\pi,\ \text{ἤτοι}\ x=\frac{2k\pi}{\nu}.$$

662. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ημ $\frac{\pi}{5}$ καὶ ημ $\frac{2\pi}{5}$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$5\,\text{ημ}x-20\,\text{ημ}^3x+16\,\text{ημ}^5x=0.$$

Αὕτη γράφεται $\text{ημ}x(5-20\,\text{ημ}^2x+16\,\text{ημ}^4x)=0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\text{ημ}x=0$ ἢ $16\,\text{ημ}^4x-20\,\text{ημ}^2x+$ $+5=0$. Τῆς τελευταίας ὅμως αὐτῆς ἐξισώσεως ρίζαι εἶναι αἱ $+\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}=+\,\text{ημ}\frac{2\pi}{5}$ καὶ $+\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}=\pm\,\text{ημ}\frac{\pi}{5}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\text{ημ}\frac{\pi}{5}>0$, $\text{ημ}\frac{2\pi}{5}>0$ καὶ $\text{ημ}\frac{2\pi}{5}>$ $>\text{ημ}\frac{\pi}{5}$, ἔχομεν $\text{ημ}\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$ καὶ $\text{ημ}\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$.

663. Ἐὰν αἱ τιμαὶ x_1 καὶ x_2 τοῦ τόξου x ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\text{Α}\,\text{εφ}x+$ $+\text{Β}\,\text{τεμ}x=\Gamma$, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν δὲν εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ π, θὰ εἶναι $\frac{\text{συν}(x_1+x_2)}{\Gamma^2-\text{Α}^2}=\frac{\text{συν}(x_1-x_2)}{2\text{Β}^2-\Gamma^2-\text{Α}^2}=\frac{1}{\Gamma^2+\text{Α}^2}$.

Ἐπειδὴ εφx=ημx : συνx καὶ τεμx = 1 : συνx λαμβάνομεν (τύπ. 46 καὶ 47) τὴν ἐξίσωσιν $(\text{Β}+\Gamma)\,\text{εφ}^2\frac{x}{2}+2\text{Α}\,\text{εφ}\frac{x}{2}+(\text{Β}-\Gamma)=0$, ἧς τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν εἶναι $\text{εφ}\frac{x_1}{2}+\text{εφ}\frac{x_2}{2}=-\frac{2\text{Α}}{\text{Β}+\Gamma}$, $\text{εφ}\frac{x_1}{2}\cdot\text{εφ}\frac{x_2}{2}=\frac{\text{Β}-\Gamma}{\text{Β}+\Gamma}$ καὶ $\text{εφ}\frac{x_1}{2}-$ $-\text{εφ}\frac{x_2}{2}=\frac{2\sqrt{\text{Α}^2-\text{Β}^2+\Gamma^2}}{\text{Β}+\Gamma}$. Ἀλλὰ (τύπ. 23) $\text{εφ}\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2\text{Α}}{\text{Β}+\Gamma}:\left(1-\frac{\text{Β}-\Gamma}{\text{Β}+\Gamma}\right)$ $=-\frac{\text{Α}}{\Gamma}$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν $\text{εφ}^2\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{\text{Α}^2-\text{Β}^2+\Gamma^2}{\text{Β}^2}$. Ὅθεν (§ 67,3) $\text{συν}^2\frac{x_1+x_2}{2}=$ $=\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\text{Α}^2}$ καὶ $\text{συν}^2\frac{x_1-x_2}{2}=\frac{\text{Β}^2}{\Gamma^2+\text{Α}^2}$ καθὼς καὶ $\text{συν}(x_1+x_2)=2\,\text{συν}^2\frac{x_1+x_2}{2}-1=\frac{\Gamma^2-\text{Α}^2}{\Gamma^2+\text{Α}^2}$, $\text{συν}(x_1-x_2)=\frac{2\text{Β}^2-\Gamma^2-\text{Α}^2}{\Gamma^2+\text{Α}^2}$. Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουν αἱ ἀποδεικτέαι σχέσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου μ, αἱ ἐξισώσεις:

664. $4\,\text{ημ}^2x-4\mu\cdot\text{ημ}x+6\mu-9=0$. Ἐκ τῶν ριζῶν αὐτῆς δεκτὴ εἶναι ἡ $\text{ημ}x=\frac{2\mu-3}{2}$, ἂν $\left(\frac{2\mu-3}{2}\right)^2\leqq1$, ἤτοι ἂν $4\mu^2-12\mu+5\leqq0$ (ι), δηλαδὴ ἂν $\frac{1}{2}\leqq\mu\leqq\frac{2}{5}$, ὅπου $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{5}$ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου (ι).

665. $4\,\text{συν}^2x-2\mu\,\text{συν}x+\mu-1=0$. Ἐκ τῶν ριζῶν της ἡ $\text{συν}x=\frac{1}{2}$ εἶναι δεκτὴ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς μ, ἡ δὲ $\text{συν}x=\frac{1-\mu}{2}$ ὅταν $\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2\leqq1$ ἤτοι ὅταν $-1\leqq\mu\leqq3$.

666. $(\mu+1)\,\text{ημ}^2x+2\mu.\text{ημ}x-(\mu+2)=0$. Ἡ διακρίνουσα αὐτῆς $2\mu^2+3\mu+2$ εἶναι θετική, ἐπειδὴ ἔχει ρίζας φανταστικάς. Αἱ ρίζαι λοιπὸν ϱ_1, ϱ_2 $(\varrho_1<\varrho_2)$ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἣν παριστῶμεν διὰ φ(ημx) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ δεκταὶ ἂν εὑρίσκωνται εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἴδωμεν διὰ ποίας τιμὰς τῆς μ συμβαίνει τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὰ γινόμενα $(\mu+1)\varphi(-1) = (\mu+1).[-(2\mu+1)] = -(2\mu^2+3\mu+1)$ (ι) καὶ $(\mu+1)\varphi(+1) = (\mu+1)(2\mu-1) = 2\mu^2+\mu-1$ (ι′)

καὶ κατόπιν τὰς ρίζας τῶν τριωνύμων (ι) καὶ (ι′), αἵτινες εἶναι $-1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$. Τότε

α′) Ἂν $\mu<-1$, θὰ εἶναι $(\mu+1)\varphi(-1)<0$ καὶ $(\mu+1)\varphi(+1)>0$, ἤτοι εἶναι $\varrho_1<-1<\varrho_2<1$. Ὅθεν ἐκ τῶν ριζῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2 ἁρμόζει ἡ ϱ_2.

β′) Ἂν $-1<\mu<-\frac{1}{2}$, ἁρμόζει ἡ ϱ_1 διότι $(\mu+1)\varphi(-1)>0$ καὶ $(\mu+1)\varphi(+1)<0$.

γ′) Ἂν $-\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}$, ἁρμόζουν καὶ αἱ δύο ρίζαι διότι $(\mu+1)\varphi(-1)<0$ καὶ $(\mu+1)\varphi(+1)<0$.

δ′) Ἂν $\mu>\frac{1}{2}$ ἁρμόζει ἡ ϱ_2 (περίπτ. α′).

667. $5\mu\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x-\mu=0$. Ρίζαι πραγματικαὶ διότι $\varrho_1\varrho_2=-1:5$ $(\varrho_1<\varrho_2)$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἄνω εὑρίσκομεν: $\mu\cdot\varphi(-1)=\mu(4\mu+3)$ (ι), $\mu\cdot\varphi(+1)=\mu(4\mu-3)$ (ί) καὶ ρίζαι τῶν (ι) καὶ (ί) εἶναι αἱ $-\frac{3}{4}$, 0, $\frac{3}{4}$. Οὕτως:

α′) Ἂν $\mu<-\frac{3}{4}$ εἶναι $\mu\cdot\varphi(-1)>0$, $\mu\cdot\varphi(+1)>0$ καὶ $\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=\frac{3}{10\mu}$. Ἐπειδὴ δὲ $\mu<-\frac{3}{4}$, θὰ εἶναι $-\frac{2}{5}<\frac{3}{10\mu}<0$. Ὅθεν αἱ ϱ_1, ϱ_2 δεκταί, διότι $-1<\varrho_1<\varrho_2<+1$.

β′) Ἂν $-\frac{3}{4}<\mu<0$ ἢ $0<\mu<\frac{3}{4}$ θὰ εἶναι $\varphi(-1)\cdot\varphi(+1)=(4\mu+3)(4\mu-3)<0$, καὶ δεκτὴ ρίζα ἡ ϱ_2 εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, καὶ ἡ ϱ_1 εἰς τὴν 2αν.

γ′) Ἂν $\mu>\frac{3}{4}$ λαμβάνομεν τὰ συμπεράσματα τῆς α′, διότι καὶ $0<\frac{3}{10\mu}<\frac{2}{5}$.

668. $\sigma\upsilon\nu x\sigma\varphi x+5\eta\mu x=\mu$. Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $4\eta\mu^2x-\mu\eta\mu x+1=0$ καὶ $\eta\mu x=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-16}}{8}$. Θὰ ἔχῃ δὲ αὕτη ρίζας ϱ_1, ϱ_2 $(\varrho_1<\varrho_2)$ πραγματικὰς ἂν $\mu^2>16$ ἤτοι ἂν $4\leq\mu\leq-4$ καὶ εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$ θὰ ἔχῃ:

α′) Μίαν ρίζαν ἂν $\varphi(-1)\varphi(+1)=(5+\mu)(5-\mu)<0$, ἤτοι ἂν $\mu>5$, ὁπότε ἁρμόζει ἡ ϱ_1 ἢ ἂν $\mu<-5$, ὁπότε ἁρμόζει ἡ ϱ_2.

β′) Δύο ρίζας, ἂν $5+\mu>0$, $5-\mu>0$, $\mu^2-16>0$ καὶ $\left(\frac{\mu}{8}-1\right)\left(\frac{\mu}{8}+1\right)<0$, ὅπου $\frac{\mu}{8}=\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}$. Ὥστε διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύο ρίζας εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$ πρέπει νὰ εἶναι $4\leq|\mu|\leq5$.

669. $\eta\mu3x=\mu\eta\mu x(1+2\sigma\upsilon\nu x)$. Εὑρίσκομεν (τ. 35) τὴν ἐξίσωσιν $\eta\mu x[3-4\eta\mu^2x-$ $-\mu(1+2\sigma\upsilon\nu x)]=0$, ἤτοι $\eta\mu x=0$ ἢ $3-4(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-\mu(1+2\sigma\upsilon\nu x)=0$, ἤτοι $4\sigma\upsilon\nu^2x-2\mu\sigma\upsilon\nu x-$ $-(1+\mu)=0$. Ἀλλ' ἐκ τῶν ριζῶν αὐτῆς ἡ $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$, ἁρμόζει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς μ, ἡ δὲ $\sigma\upsilon\nu x=\frac{\mu+1}{2}$, ὅταν $\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2\leq1$, ἤτοι ὅταν $-3\leq\mu\leq1$.

670. $\varepsilon\varphi3x+\mu\varepsilon\varphi x=0$. Εὑρίσκομεν (τ. 36) τὴν ἐξίσωσιν: $\varepsilon\varphi x\left(\frac{3-\varepsilon\varphi^2x}{1-3\varepsilon\varphi^2x}+\mu\right)=0$, ἐξ ἧς $\varepsilon\varphi x=0$ ἢ $\varepsilon\varphi x=\pm\sqrt{\frac{\mu+3}{3\mu+1}}$. Αἱ ρίζαι ὅμως αὗται εἶναι πραγματικαὶ ἂν $(\mu+3)(3\mu+1)\geq0$, ἤτοι ἂν $-\frac{1}{3}\leq\mu\leq-3$.

671. $3\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2 x = \mu$. Εὑρίσκομεν (§ 105, π.δ. 6): $(\mu-2)\varepsilon\varphi^2 x + 2\varepsilon\varphi x - (3-\mu) = 0$. Θὰ εἶναι δὲ αἱ ῥίζαι αὐτῆς πραγματικαὶ ἂν ἡ διακρίνουσα εἶναι $1+(\mu-2)(3-\mu) \geqq 0$, ἤτοι ἂν $2 \leqq \mu \leqq 3$.

672. $(3-\mu)\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + (2+\mu)\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$. Λαμβάνομεν ὡς ἄνω $(3-\mu)$ $\varepsilon\varphi^2 x - 5\varepsilon\varphi x + (2+\mu) = 0$, καὶ $\varepsilon\varphi x = \dfrac{5 \pm (2\mu-1)}{2(3-\mu)}$ Ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ῥίζας διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς μ.

673. $\eta\mu^2 x + \varepsilon\varphi^2 x = \mu$. Ἐπειδὴ $\eta\mu^2 x = \varepsilon\varphi^2 x : (1+\varepsilon\varphi^2 x)$, εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi^4 x - (\mu-2)$ $\varepsilon\varphi^2 x - \mu = 0$, ἢ $y^2 - (\mu-2)y - \mu = 0$ (ι), ὅπου $y = \varepsilon\varphi^2 x$. Ὅθεν ἂν $\mu > 0$, θὰ εἶναι $y_1 \cdot y_2 = -\mu$ < 0 ὁπότε ἐκ τῶν 4 ῥιζῶν τῆς διτετραγώνου, δύο θὰ εἶναι δεκταί, προερχόμεναι ἐκ τῆς θετικῆς ῥίζης τῆς (ι). Ἂν ὅμως $\mu < 0$, θὰ εἶναι $-\mu > 0$, $-(\mu-2) > 0$. Ὅθεν αἱ ῥίζαι τῆς (ι) ἀρνητικαὶ διότι $\varrho_1 + \varrho_2 = \mu - 2 < 0$ καὶ συνεπῶς οὐδεμία ῥίζα τῆς διτετραγώνου εἶναι δεκτή. Τέλος ἂν $\mu = 0$, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi^4 x + 2\varepsilon\varphi^2 x = 0$ ἤτοι $\varepsilon\varphi^2 x(\varepsilon\varphi^2 x + 2) = 0$, ὁπότε δεκτὴ λύσις εἶναι ἡ $\varepsilon\varphi x = 0$.

674. $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\varphi^2 x = \mu$. Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\mu\varepsilon\varphi^4 x + (\mu-2)\varepsilon\varphi^2 x - 1 = 0$ καὶ ἐκ τῶν ῥιζῶν της δεκταὶ εἶναι δύο ἂν $\mu > 0$, οὐδεμία ἂν $\mu < 0$, καὶ μία ἂν $\mu = 0$.

675. $\eta\mu x \eta\mu 3x = \mu$. Εὑρίσκομεν (τ. 35), $4\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^2 x + \mu = 0$ καὶ ἐκ τῶν ῥιζῶν της, θὰ ἔχωμεν:

α´) Δύο ῥίζας δεκτὰς ἂν $\varphi(0).\varphi(1) < 0$, ἤτοι ἂν $-1 < \mu < 0$.

β´) Τέσσαρας ῥίζας δεκτάς, ἂν 1) εἶναι ἡ διακρίνουσα $9 - 16\mu \geqq 0$ ἤτοι $\mu \leqq 9:16$ 2) $\varphi(0) > 0$, ἤτοι $\mu > 0$, 3) $\varphi(1) > 0$ ἤτοι $\mu > -1$ καὶ 4) ἂν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ῥιζῶν $\dfrac{3}{8}$ εἶναι > 0 καὶ $< +1$. Ὥστε θὰ ἔχωμεν 4 ῥίζας δεκτὰς ἂν $0 < \mu \leqq 3:8$.

676. $\varepsilon\varphi^2 x = \mu\varepsilon\varphi(x+\alpha)\varepsilon\varphi(x-\alpha)$. Ἐκ ταύτης (τ. 23 καὶ 24) εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^4 x -$ $(1-\mu)\varepsilon\varphi^2 x - \mu\varepsilon\varphi^2\alpha = 0$ καὶ ἐκ τῶν ῥιζῶν της θὰ εἶναι δεκταὶ δύο ἂν $\mu > 0$ καὶ τέσσαρες, ἂν $\mu < 0$ καὶ (ἡ διακρίνουσα) $(1-\mu)^2 + 4\mu\varepsilon\varphi^4\alpha \geqq 0$.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

677. $\tau o\xi\varepsilon\varphi x - \tau o\xi\varepsilon\varphi(2-x) = \dfrac{\pi}{4}$. Θέτοντες $\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \alpha$ καὶ $\tau o\xi\varepsilon\varphi(2-x) = \beta$ ἔχομεν $\varepsilon\varphi\alpha = x$, $\varepsilon\varphi\beta = 2-x$, $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$ καὶ $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = 1$. Ὅθεν εἶναι

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = 1, \text{ ἤτοι } \frac{x-(2-x)}{1+x(2-x)} = 1,\ x^2 = 3 \text{ καὶ } x = \pm\sqrt{3}.$$

678. $\tau o\xi\sigma\varphi\dfrac{x-2}{x-1} + \tau o\xi\sigma\varphi\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{\pi}{4}$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω ἔχομεν

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4},\quad \sigma\varphi(\alpha+\beta) = 1 \text{ καὶ (τ. 25) } \left(\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1}\right):$$

$$:\left(\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x+1} - 1\right) = 1,\ x^2 = \frac{1}{2} \text{ καὶ } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

679. $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\sqrt{1-x^2} = \tau o\xi\eta\mu x$. Θέτοντες $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\sqrt{1-x^2} = \alpha$ καὶ $\tau o\xi\eta\mu x = \beta$, ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\eta\mu\alpha = x$, $\eta\mu\beta = x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\beta = \sqrt{1-x^2}$. Οὕτως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\alpha - \beta = 0$. Ὅθεν $\eta\mu(\alpha-\beta) = 0$, ἤτοι $x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} = 0$ καὶ $x = 0$.

680. $\tau o\xi\varepsilon\varphi x + 2\tau o\xi\sigma\varphi x = \dfrac{2\pi}{3}$. Θέτοντες $\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \alpha$, ἔχομεν

$τοξσφx = \frac{π}{2} - α$, $2τοξσφx = π - 2α$, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξ. γίνεται

$α + π - 2α = \frac{2π}{3}$, ἐξ ἧς $α = \frac{π}{3}$, $εφα = x = εφ\frac{π}{3}$, ἤτοι $x = \sqrt{3}$.

681. $τοξσφ\frac{1}{x+2} - τοξσφ\frac{1}{x} = 15^0$. Θέτοντες $τοξσφ\frac{1}{x+2} = α$ καὶ $τοξσφ\frac{1}{x} = β$, ἔχομεν $εφα = x+2$, $εφβ = x$, $α - β = 15^0$, $εφ(α-β) = εφ15^0$, ἤτοι (τ. 24 καὶ ἄσκ. 360) $\frac{(x+2)-x}{1+(x+2)x} = 2 - \sqrt{3}$, $(x+1)^2 = \frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4-3} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$. Ὅθεν $x+1 = \pm(\sqrt{3}+1)$ ἤτοι $x = \sqrt{3}$ ἢ $-(\sqrt{3}+2)$.

682. $σφ(τοξημx) = συν\left(τοξεφ\frac{1}{2}\right)$. Θέτοντες $τοξημx = α$ καὶ $τοξεφ\frac{1}{2} = β$, ἔχομεν $ημα = x$, $σφα = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $εφβ = \frac{1}{2}$ καὶ $συνβ = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ὅθεν, $σφα = συνβ$ ἤτοι $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν (§ 101) $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

687. $2ημx - \sqrt{3} > 0$. ***688***. $2συνx - \sqrt{2} < 0$. ***689***. $\sqrt{3}εφx - 1 > 0$.

Κατὰ τὰ πδ. 1, 2, 3 τῆς § 106 εὑρίσκομεν α) $\frac{π}{3} + kπ < x < \frac{2π}{3} + 2kπ$ β) $\frac{π}{4} + 2kπ < x < 2π - \frac{π}{4} + 2kπ$ καὶ γ) $\frac{π}{6} + kπ < x < -\frac{π}{2} + kπ$.

690. $ημx - \sqrt{3}συνx + 1 < 0$ $(0 < x < 2π)$. Θέτοντες $\sqrt{3} = εφ\frac{π}{3}$, ἔχομεν (§ 104,γ) $ημ\left(x - \frac{π}{3}\right) + \frac{1}{2} < 0$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ α΄ μέλος γίνεται 0 διὰ $x = \frac{π}{6}$ ἢ $x = \frac{3π}{2}$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $x=0$, ἔχομεν τὰς λύσεις $0 < x < \frac{π}{6}$ καὶ $\frac{3π}{2} < x < 2π$.

691. $συνx + \sqrt{3}ημx - 1 > 0$, $(0 < x < 2π)$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν:

$$συν\left(x - \frac{π}{3}\right) - \frac{1}{2} > 0 \text{ καὶ } 0 < x < \frac{2π}{3}.$$

692. $\sqrt{2}(ημ2x + συν2x) + \sqrt{3} > 0$, $(0 < x < 2π)$. Ἂν γράψωμεν $ημ2x + συν2x + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ ἔχομεν (§ 104,γ) $ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ (ι). Ἀλλ' ἐπειδὴ $ημ\left(2x + \frac{π}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = ημ\left(-\frac{π}{3}\right)$, ἔχομεν $2x + \frac{π}{4} = 2kπ - \frac{π}{3}$ ἤτοι $x = kπ - \frac{7π}{24}$ ἢ $2x + \frac{π}{4} = 2k'π + π + \frac{π}{3}$ ἤτοι $x = k'π + \frac{13π}{14}$. Ἀλλ' αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 2π αἱ μηδενίζουσαι τὸ α' μέλος τῆς ἀνισότητος (ι) διὰ $k=1, 2$ εἶναι $\frac{17\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}$ καὶ διὰ $k'=0, 1$ εἶναι $\frac{13\pi}{24}$ καὶ $\frac{37\pi}{24}$. Ὅθεν αἱ ζητούμεναι λύσεις εἶναι : $0<x<\frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{24}<x<\frac{37\pi}{24}$ καὶ $\frac{41\pi}{14}<x<2\pi$.

693. $2\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x+1<0$, $(0<x<2\pi)$. Ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ α' μέλους εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ 1 ἔχομεν τὰς λύσεις $\frac{1}{2}<\sigma\upsilon\nu x<1$ ἤτοι τὰς $0<x<\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

694. $2\eta\mu^2x+7\eta\mu x+3>0$ $(0^0<x<360^0)$. Τὸ α' μέλος εἶναι >0 διὰ $\eta\mu x<-3$ (ἀδύνατον) καὶ $\eta\mu x>-\frac{1}{2}$. Ὅθεν αἱ λύσεις εἶναι $0<x<210^0$ καὶ $330^0<x<360^0$.

695. $\sqrt{5}\,\varepsilon\varphi^2x-(1+\sqrt{3})\varepsilon\varphi x+1>0$, $(0<x<\pi)$. Ἀπ. $0<x<\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}<x<\pi$.

696. $\varepsilon\varphi 3x-1<0$, $(0<x<\pi)$. Εὑρίσκομεν, ὡς εἰς τὸ π.δ. 7, § 106, τὰς λύσεις $0<x<\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}<x<\frac{9\pi}{12}$.

697. $2\sigma\upsilon\nu 4x-1>0$, $(0^0<x<360^0)$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu 4x=1/2=\sigma\upsilon\nu 60^0$, ἔχομεν $4x=k.360^0-60^0$, $x=k.90^0-15^0$ καὶ $4x=k'.360^0+60^0$, $x=k.90^0+15^0$.
Ἀλλ' αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 αἱ μηδενίζουσαι τὸ διώνυμον $2\sigma\upsilon\nu 4x-1$, διὰ $k=1, 2, 3, 4$ εἶναι $x=75^0, 165^0, 255^0, 345^0$ καὶ διὰ $k'=0,1,2,3$ εἶναι $x=15^0, 105^0, 195^0, 285^0$.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ $x=0$ εἶναι $2\sigma\upsilon\nu 4x-1>0$ συνάγομεν τὰς λύσεις

$$0<x<15^0,\quad 75^0<x<105^0,\quad 165^0<x<195^0,\quad 255^0<x<285^0.$$

698. $\frac{\varepsilon\varphi^2x-3}{2\sigma\upsilon\nu^2x-1}>0$, $(0<x<2\pi)$. Ἀντ' αὐτῆς θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἰσοδύναμόν της $(\varepsilon\varphi^2x-3)(2\sigma\upsilon\nu x^2-1)>0$, ἤτοι τὴν

$$(\varepsilon\varphi x-\sqrt{3})(\varepsilon\varphi x+\sqrt{3})(\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x-1)(\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x+1)>0$$

Ἀλλὰ (π.δ. 6 § 106), οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες διέρχονται διὰ τοῦ ∞, διὰ $x=\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}$ καὶ διὰ τοῦ 0, ὁ μὲν α' τούτων διὰ $x=\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{4\pi}{3}$, ὁ δὲ β' διὰ $x=\frac{2\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{3}$. Ἐκ τῶν ἄλλων δὲ παραγόντων διέρχονται διὰ τοῦ 0, ὁ γ' διὰ $x=\frac{\pi}{4}$ καὶ $\frac{7\pi}{4}$, καὶ ὁ δ' διὰ $x=\frac{3\pi}{4}$ καὶ $\frac{5\pi}{4}$. Οὕτως, ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ π.δ. 6 § 106 συνάγομεν τὰς λύσεις

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3},\quad \frac{2\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{4},\quad \frac{5\pi}{4}<x<\frac{4\pi}{3} \text{ καὶ } \frac{5\pi}{3}<x<\frac{7\pi}{4}.$$

699 $\frac{\varepsilon\varphi^2x-2}{\varepsilon\varphi^2x-1}<\frac{1}{2}$, $(0<x<\pi)$. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $2(\varepsilon\varphi x-\sqrt{3})(\varepsilon\varphi x+\sqrt{3})(\varepsilon\varphi x-1)(\varepsilon\varphi x+1)<0$ καὶ τὰς λύσεις

$$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3} \text{ καὶ } \frac{2\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{4}.$$

700. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\varepsilon\varphi x>0$, $(0<x<2\pi)$. Ἰσοδύναμος αὐτῆς εἶναι ἡ $(1+\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x>0$.
Ἐπειδὴ δὲ πάντοτε εἶναι $1+\eta\mu x>0$, διότι $|\eta\mu x|<1$, αἱ λύσεις εἶναι

$$0<x<\frac{\pi}{2} \text{ καὶ } \frac{3\pi}{2}<x<2\pi, \text{ διὰ ἃς } \sigma\upsilon\nu x>0.$$

701. $\sqrt{1+\frac{\eta\mu x}{2}} > \sigma\upsilon\nu x$, $(0<x<2\pi)$. Τόξα ἀπὸ 0 ἕως 2π μὲ συν<0 ἢ 0 ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα. Ὅθεν ἔχομεν τὰς λύσεις $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Ὥστε ὑπολείπεται νὰ ἐξετάσωμεν τὰ τόξα ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ καὶ ἀπὸ $\frac{3\pi}{2}$ ἕως 2π. Πρὸς τοῦτο ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς δοθείσης εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε ἔχομεν $1+\frac{\eta\mu x}{2} > 1-\eta\mu^2 x$, ἤτοι $\eta\mu x\left(\eta\mu x+\frac{1}{2}\right)>0$, ἥτις ἐπαληθεύεται διὰ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ὡς καὶ ὑπὸ τῶν τόξων ἀπὸ $\frac{3\pi}{2}$ ἕως 2π τὰ ὁποῖα ἔχουν $\eta\mu.<-\frac{1}{2}$ ἤτοι ὑπὸ τῶν τόξων $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi-\frac{\pi}{6}$ $\left(=\frac{11\pi}{6}\right)$. Ὅθεν αἱ ζητ. λύσεις εἶναι $0<x<\frac{11\pi}{6}$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 2π.

702. $y=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x+\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x+1}$. Ἔχομεν (§ 104,γ) $y=\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(x-45^\circ)-1}{2\eta\mu(x+60^\circ)+1}$.

Ἤδη βλέπομεν ὅτι $y=0$ διὰ $x=90^\circ$ καὶ 180°,

$y<0$ διὰ $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}<x<\pi$ καὶ $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, $y>0$ διὰ $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{6}$ καὶ $\pi<x<\frac{2\pi}{3}$.

703. $y=\varepsilon\varphi x-4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$. Ἐπειδὴ $y=\eta\mu x(1-4\sigma\upsilon\nu^2 x):\sigma\upsilon\nu x$, θὰ ἐξετάσωμεν τὰ σημεῖα τοῦ γινομένου $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(1-2\sigma\upsilon\nu x)(1+2\sigma\upsilon\nu x)$ ὁπότε θὰ εὕρωμεν:

$y<0$ διὰ $0<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}$, $\pi<x<\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{3}$

$y>0$ » $\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$, $\frac{4\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

Ἐξ ἄλλου διὰ $x=0$, π καὶ 2π εἶναι $y=0$ καὶ διὰ $x=\frac{\pi}{2}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}$ εἶναι $y=+\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

704. $x+y=\alpha$, $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$. Θέτοντες $y=\frac{\pi}{2}-y'$, λαμβάνομεν τὸ σύστημα $x-y'=\alpha-\frac{\pi}{2}$, $\eta\mu x+\eta\mu y'=\beta$ (§ 109,I).

705. $x-y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=\beta$. Ἡ β′ ἐξίσωσις δίδει τὴν $-2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{x+y}{2}=$ $=\beta$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ $\frac{x+y}{2}$. Ἐξ αὐτοῦ δὲ καὶ ἐκ τοῦ $x-y=\alpha$, εὑρίσκομεν τὰ τόξα x καὶ y.

706. $x+y=2k\pi$, $\eta\mu x+\eta\mu y=\beta$. Τοῦτο λύεται εὐκόλως.

707. $x-y=60^\circ$, $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y}=1$. Ἐκ τῆς β′ λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu y=0$,

$-2\eta\mu\, 30^\circ \eta\mu \frac{x+y}{2}=0$, $\eta\mu \frac{x+y}{2}=0$, ἤτοι $\frac{x+y}{2}=k\cdot 180^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $x-y=60^\circ$, εὑρίσκομεν $x=k\cdot 180^\circ+30^\circ$ καὶ $y=k\cdot 180^\circ-30^\circ$.

708. $x-y=\frac{\pi}{3}$, $\eta\mu x-\eta\mu y=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Λαμβάνομεν $2\eta\mu\frac{\pi}{6}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ $\frac{x+y}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Κατόπιν εὑρίσκομεν $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+$ $+2k\pi$ ἢ $x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $y=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$.

709. $x-y=\frac{2\pi}{3}$, $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=-\frac{1}{2}$. Ἔχομεν (§ 109, II) $\sigma\upsilon\nu(x+y)=$ $=-1-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ καὶ $x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. Ὅθεν $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$,

$$y=k\pi \;\; ἢ \;\; x=k\pi,\;\; y=-\frac{2\pi}{3}+k\pi.$$

710. $x+y=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\eta\mu x}{\eta\mu y}=2+\sqrt{3}$. Ἔχομεν (§ 109, III) $\varepsilon\varphi\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3}\cdot$ $\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ὅθεν $\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+k\pi$.

711. $x+y=\frac{\pi}{4}$, $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=1$. Εὑρίσκομεν (§ 109, IV) $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=$ $=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ καὶ ἔπειτα (§ 109, II) $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{2}{\sqrt{2}}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ὅθεν $x-y=$

$$=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ καὶ } x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\;\; y=-k\pi \;\; ἢ \;\; x=k\pi,\;\; y=\frac{\pi}{4}-k\pi.$$

712. $x-y=\frac{5\pi}{6}$, $\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=4\sqrt{3}-7$. Ἔχομεν (§ 109, V) $\frac{\sigma\upsilon\nu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu(x+y)}=$ $=\frac{4\sqrt{3}-6}{8-4\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu(x+y)=$

$$=-1, \text{ ἤτοι } x+y=\pi+2k\pi. \text{ Ὅθεν } x=\frac{11\pi}{12}+k\pi,\; y=\frac{\pi}{12}+k\pi.$$

713. $x+y=30^\circ$, $\sigma\varphi x\sigma\varphi y=15$. Ἐπειδὴ ἡ β' ἐξ. δίδει τὴν $\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=$ $=\frac{1}{15}$, εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $x-y=\pm 6^\circ 8'+k.360^\circ$

$$x=18^\circ 4'+k\,.\,180^\circ,\;\; y=11^\circ 56'+k\,.\,180^\circ.$$

714. $x-y=\frac{\pi}{6}$, $\eta\mu^2 x-\eta\mu^2 y=\frac{1}{2}$. Ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως $(\eta\mu x+\eta\mu y)$. $.(\eta\mu x-\eta\mu y)=\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν διαδοχικῶς $2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}\,.\,2\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=.\frac{1}{2}$

$$2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}.2\eta\mu\frac{x-y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}, \text{ ἤτοι}$$

$$\eta\mu(x+y)\eta\mu(x-y)=\frac{1}{2},\;\; \eta\mu(x+y)\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\;\; \eta\mu(x+y)=1.$$

$$\text{Ὅθεν } x+y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\; \text{καὶ} \;\; x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\;\; y=\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

715. $x+y=\frac{\pi}{4}$, $ημ^2x+ημ^2y=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$. Εἶναι $ημ^2x+ημ^2y=$

$$\frac{1-συν2x}{2}+\frac{1-συν2y}{2}=\frac{2-(συν2x+συν2y)}{2}=\frac{2-2συν(x+y)συν(x-y)}{2}=$$

$=1-συν\frac{\pi}{4}συν(x-y)$. Ὥστε $1-συν\frac{\pi}{4}συν(x-y)=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ καὶ $συν(x-y)=$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=συν\frac{\pi}{12}$ ἤτοι $x-y=\pm\frac{\pi}{12}+2k\pi$. Ὅθεν $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{12}-k\pi$ ἢ

$$x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\quad y=\frac{\pi}{6}-k\pi.$$

716. $x-y=\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{3}(ημx-ημy)=ημx+ημy$. Ἐκ τῆς β′ εὑρίσκομεν

$\sqrt{3}\,ημ\frac{x-y}{2}συν\frac{x+y}{2}=συν\frac{x-y}{2}\,ημ\frac{x+y}{2}$; $\sqrt{3}\cdot ημ\frac{\pi}{6}συν\frac{x+y}{2}=συν\frac{\pi}{6}\,ημ\frac{x+y}{2}$ ἤτοι

$εφ\frac{x+y}{2}=1$. Ὅθεν $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+k\pi$.

717. $x+y=\pi:2$, $-\sqrt{2}(ημx+ημy)=4\sqrt{3}\,ημxημy$. Ἐκ τῆς β′ εὑρίσκομεν

$$-2\sqrt{2}\,ημ\frac{x+y}{2}συν\frac{x-y}{2}=2\sqrt{3}\,[συν(x-y)-συν(x+y)]$$

$-συν\frac{x-y}{2}=\sqrt{3}\left(2συν^2\frac{x-y}{2}-1\right)$, $\quad 2\sqrt{3}\,συν^2\frac{x-y}{2}+συν\frac{x-y}{2}-\sqrt{3}=0$,

ἐξ ἧς $συν\frac{x-y}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ὅθεν $\frac{x-y}{2}=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ἢ $\pm\left(τοξσυν\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2k\pi$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστά.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

718. $ημx+ημy=\frac{1}{2}$, $συνx+συνy=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Εὑρίσκομεν (π.δ. 1, § 110)

$εφ\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=εφ\frac{\pi}{12}$ καὶ $συν\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=συν\frac{\pi}{12}$. Ὅθεν:

$$\frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{12},\quad \frac{x-y}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{12}\ \text{κλπ.}$$

719. $ημx+ημy=0$, $συνxσυνy=1:2$. Ἔχομεν $ημx=-ημy=ημ(-y)$. Ὅθεν $x=-y+2k\pi$ (1) ἢ $x=(2k+1)\pi+y$ (2). Ἤδη ἐκ τῆς β′ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν α′) $συν(-y+2k\pi)συνy=\frac{1}{2}$, ἤτοι $συν(-y)συνy=\frac{1}{2}$, $συν^2y=\frac{1}{2}$ καὶ $συνy=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ὁπότε

$y=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ἢ $y=2k\pm\frac{3\pi}{4}$ καὶ β′) $συν[(2k+1)\pi+y]συνy=-συνyσυνy=\frac{1}{2}$,

ἤτοι $συν^2y=-\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει ῥίζας. Ὥστε τιμὰς τοῦ x θὰ δώσῃ ἡ περίπτωσις β′) ὅταν τὰς τιμὰς ταύτης τοῦ y τὰς θέσωμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

720. $συνx+συνy=(\sqrt{3}+1):2$, $συν2x+συν2y=0$. Ἐκ τῆς β′ εὑρίσκομεν

$συν2x=-συν2y=συν(\pi-2y)$, καὶ $x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+k\pi$ (ι). Ὅθεν $συνx=$

$\pm συν\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$, ὁπότε ἡ α′ ἐξίσωσις γίνεται $συνy\pm συν\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ἢ 1)

$\sigma\upsilon\nu\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$, ὁπότε $y=2k\pi+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}$ καὶ 2) $\eta\mu\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=\eta\mu\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, ὁπότε $y=k\pi+\frac{\pi}{4}-(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{12}$. Οὕτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως (ι) εὑρίσκομεν τὸ x.

721. $\sigma\upsilon\nu(2x+y)=\eta\mu(2y-x)$, $\sigma\upsilon\nu(2x-y)=\eta\mu(2y+x)$. Μεταφέροντες τὰ δεύτερα μέλη εἰς τὰ πρῶτα καὶ μετασχηματίζοντες ἔπειτα εἰς γινόμενα εὑρίσκομεν ἐκ τούτων τὰς ἐξισώσεις $\frac{3x-y}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi$ (1), $\frac{3y+x}{2}-\frac{\pi}{4}=k'\pi$(2), $\frac{x-3y}{2}+\frac{\pi}{4}=$ $=\lambda\pi$ (3), $\frac{3x+y}{2}-\frac{\pi}{4}=\lambda'\pi$ (4). Οὕτως ἀπομένει νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα α΄) (1) καὶ (3) β΄) (1) καὶ (4) γ΄) (3) καὶ (2) καὶ δ΄) (2) καὶ (4). Οὕτως ἐκ τοῦ συστήματος α΄) εὑρίσκομεν $x=(3k-\lambda)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}$ καὶ $y=(k-3\lambda)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$.

722. $2\sigma\upsilon\nu^2(x+y)=\eta\mu(x+y)+1$, $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu y$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu^2(x+y)=$ $=1-\eta\mu^2(x+y)$ ἡ α΄ ἐξ. γίνεται $2\eta\mu^2(x+y)+\eta\mu(x+y)-1=0$, ἐξ ἧς $\eta\mu(x+y)=\frac{1}{2}$ ἢ -1, ἤτοι $x+y=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$ (1) ἢ $x+y=2k'\pi-\frac{\pi}{2}$ (2). Ἐξ ἄλλου ἡ β΄ ἐξ. δίδει $\eta\mu x-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0$, ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Ὅθεν $x-y=2\lambda\pi+\frac{\pi}{2}$ (3) καὶ $x+y=2\lambda'\pi+\frac{\pi}{2}$ (4). Ἤδη θὰ εὕρωμεν τὰ x καὶ y ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (3) καὶ (2), (3), διότι αἱ (1) καὶ (2) εἶναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς τὴν (4).

723. $\sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)=(\sqrt{3}+1):2\sqrt{2}$, $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=2$. Εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}$, $\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=2$, ἐξ οὗ $\eta\mu(x+y)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=$ $=\eta\mu\frac{5\pi}{12}$. Ὅθεν $x+y=2k\pi+\frac{5\pi}{12}$ (1) ἢ $x+y=(2k+1)\pi-\frac{5\pi}{12}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(x+y)=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (2) ἢ $\sigma\upsilon\nu(x+y)=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (3). Οὕτως ἡ α΄ ἐξ. ἐκ τῶν τιμῶν (2) καὶ (3) δίδει τὴν δεκτὴν τιμὴν $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ἐξ ἧς $x-y=2k'\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (4). Οὕτως τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (4) δίδει $x=\frac{\pi}{3}+(k+k')\pi$, $y=\frac{\pi}{12}+(k-k')\pi$ καὶ $x=\frac{\pi}{12}+(k+k')\pi$ $y=\frac{\pi}{3}+(k-k')\pi$.

724. $\sqrt{3}\,\eta\mu 2x=\eta\mu 2y$, $\sqrt{3}\,\eta\mu^2x+\eta\mu^2y=(\sqrt{3}-1):2$. Ἐκ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 2y=\sqrt{1-3\eta\mu^2 2x}=\sqrt{1-3(1-\sigma\upsilon\nu^2 2x)}=\sqrt{3\sigma\upsilon\nu^2 2x-2}$ (1) καὶ ἐκ τῆς β΄, (ἐπειδὴ $2\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu 2x$ κλπ.) $\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=2$, ἤτοι $\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu 2x+\sqrt{3\sigma\upsilon\nu^2 2x-2}=2$, ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ἤτοι $2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$. Κατόπιν ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu 2y=\frac{1}{2}$, ἤτοι $2y=$ $=2k'\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

725. $\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y=2\sqrt{2}\,\eta\mu(x-y)$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=(1+\sqrt{2}):2$. Ἐκ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $\frac{\eta\mu(x-y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y} = 2\sqrt{2}\,\eta\mu(x-y)$, ἤτοι $\eta\mu(x-y)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y} - 2\sqrt{2}\right) = 0$. Οὕτω θὰ λύσωμεν τὰ συστήματα $\eta\mu(x-y)=0$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=(1+\sqrt{2}):2$ (1) καὶ $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=1:2\sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=(1+\sqrt{2}):2$ (2). Ἀλλ' ἡ α' ἐξ. τοῦ συστήματος (1) δίδει $x-y=k\pi$. Οὕτως ἡ β' δίδει τὴν ἐξίσωσιν $2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{k\pi}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, ἥτις διὰ $k=1, 3, 5, 7$ κλπ.

δὲν ἔχει λύσιν, ἐνῷ διὰ $k=2, 6, 10$ κλπ. ἔχει τὴν λύσιν $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} = -\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

καὶ διὰ $k=0, 4, 8$ κλπ. ἔχει τὴν λύσιν $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

Αὗται δὲ μετὰ τῆς $x-y=k\pi$, δίδουν τὰς λύσεις τοῦ συστήματος (1).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ συνx καὶ συνy τοῦ συστήματος (2) εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\varphi+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\left(\text{ἢ } \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\sigma\upsilon\nu y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{ἢ } \frac{1}{2}\right)$ κλπ.

726. $\varepsilon\varphi 3x+\varepsilon\varphi 3y=2$, $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y=4$. Ἡ α' ἐξ (π.δ. 3, § 110) δίδει τὴν $(\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y)^2+6(\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y)-7=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον εφxεφy· ἐξ αὐτοῦ δὲ καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi x=4$ εὐκόλως λύομεν τὸ δοθὲν σύστημα.

727. $\sigma\upsilon\nu y:\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}$, $2\eta\mu\,|x|+\eta\mu\,|y|=1$. (Πολ]χνεῖον).

728. $\sigma\upsilon\nu y:\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{\alpha}$, $\alpha\eta\mu\,|x|+\eta\mu\,|y|=\alpha-1$.

729. $\eta\mu\,|y|:\eta\mu\,|x|=\sqrt{\alpha}$, $\alpha\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\alpha-1$.

Ταῦτα λύονται ὡς τὸ 728. Εἰς τοῦτο δὲ παρατηροῦμεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu y=\sigma\upsilon\nu\,|y|$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\,|x|$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\,|y|:\sigma\upsilon\nu\,|x|=\sqrt{\alpha}$, ἐξ ἧς θέτοντες $|y|=\omega$ καὶ $|x|=\varphi$, λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\alpha\sigma\upsilon\nu^2\varphi$, $1-\eta\mu^2\omega=\alpha-\alpha\eta\mu^2\varphi$ καὶ $\eta\mu^2\omega=1-\alpha+\alpha\eta\mu^2\varphi$ (1). Οὕτως ἡ β' ἐξ. τοῦ συστήματος δίδει τὴν $\eta\mu\omega=\alpha-1-\alpha\eta\mu\varphi$. Ἐξ αὐτῆς δὲ ἧς τὰ μέλη ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν:

$$\alpha(\alpha-1)\eta\mu^2\varphi-2\alpha(\alpha-1)\eta\mu\varphi+\alpha(\alpha-1)=0, \text{ ἐξ ἧς}$$

$\eta\mu\varphi=1=\eta\mu\,|x|$, ἤτοι $\eta\mu x=\pm 1$ καὶ $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Κατόπιν τούτων

ἐκ τῆς $\alpha\eta\mu\varphi+\eta\mu\omega=\alpha-1$, εὑρίσκομεν $\eta\mu\omega=-1=\eta\mu\,|y|$, $|y|=$

$=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Ὅθεν $y=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ἢ $\frac{\pi}{2}-2k\pi$.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα:

730: $\sigma\varphi x+\sigma\varphi y=\alpha$, $x+y=\beta$. Ἡ α η ἐξίσωσις γράφεται,

$$\frac{\eta\mu(x+y)}{\eta\mu x\eta\mu y}=\alpha,\quad \frac{2\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)}=\alpha, \text{ ἤτοι } \frac{2\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu\beta}=\alpha.$$

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{2\eta\mu\beta}{\alpha}+\sigma\upsilon\nu\beta$. Ἐὰν δὲ ω εἶναι τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον

δι' ὃ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{2\eta\mu\beta}{\alpha}+\sigma\upsilon\nu\beta$, ἔχομεν τὰς λύσεις $x-y=2k\pi\pm\omega$

καὶ ἑπομένως εἶναι $x=\frac{\beta}{2}+k\pi+\frac{\omega}{2}$ καὶ $y=\frac{\beta}{2}-k\pi\pm\frac{\omega}{2}$.

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ σύστημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι:

$-1\leqq\sigma\upsilon\nu(x-y)\leqq 1$ ἤτοι $-1\leqq\frac{2\eta\mu\beta}{\alpha}+\sigma\upsilon\nu\beta\leqq 1$, ἢ $-(1+\sigma\upsilon\nu\beta)\leqq\frac{2\eta\mu\beta}{\alpha}\leqq 1-\sigma\upsilon\nu\beta$

ἤ $-2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\beta}{2} \leqq \frac{4}{\alpha}\eta\mu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2} \leqq 2\eta\mu^2\frac{\beta}{2}$ ἤτοι $-\sigma\varphi\frac{\beta}{2} \leqq \frac{2}{\alpha} \leqq \epsilon\varphi\frac{\beta}{2}$.

Σημείωσις. Εὑρίσκομεν τὸ τόξον ω καθιστῶντες τὴν παράστασιν $\frac{2\eta\mu\beta}{\alpha}+\sigma\upsilon\nu\beta$ λογαριθμικήν. Πρὸς τοῦτο δὲ θέτοντες $\frac{2}{\alpha}=\sigma\varphi\varphi$, εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu(x-y)=\sigma\varphi\varphi\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{\eta\mu(\varphi+\beta)}{\eta\mu\varphi}.$$

731. $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y=2\beta$. Ἐκ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $2\sigma\upsilon\nu^2 x-1+2\sigma\upsilon\nu^2 y-1=2\beta$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y=\beta+1$. Ἀλλ' εἶναι $2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=$ $=(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y)^2-(\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 y)=\alpha^2-\beta-1$. Γνωρίζοντες λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y$, καὶ τὸ γινόμενον $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y$, συνάγομεν ὅτι τὰ $\sigma\upsilon\nu x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu y$, εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $X^2-\alpha X+\frac{\alpha^2-\beta-1}{2}=0$ (1), ἐξ ἧς $X=\frac{\alpha\pm\sqrt{2\beta+2-\alpha^2}}{2}$.

Διερεύνησις. Ἵνα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχῃ λύσιν πρέπει αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) νὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $2\beta+2\geqq\alpha^2$ καὶ $-2<\alpha$ καὶ $2\beta<2$. Ὅθεν τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{\alpha}{2}$, τῶν ριζῶν τῆς (1) πρέπει νὰ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$ καὶ πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $\varphi(-1)>0$ καὶ $\varphi(+1)>0$ ἤτοι $\beta\leqq(\alpha+1)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $2\beta+2\geqq\alpha^2$ ἤτοι $\beta\geqq\frac{\alpha^2}{2}-1$ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\alpha^2}{2}-1\leqq\beta\leqq(\alpha\pm1)^2$ ἤτοι $\frac{\alpha^2}{2}-1\leqq(\alpha+1)^2$ ἤτοι τέλος $(\alpha\pm2)^2\geqq0$.

Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει πάντοτε.

732. $\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$. Εὑρίσκομεν $2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\alpha$, $2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta$ (1). Ὅθεν $\epsilon\varphi\frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἂν δὲ ω εἶναι τὸ τόξον ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$ δι' ὃ εἶναι $\epsilon\varphi\omega=\frac{\alpha}{\beta}$, ἔχομεν τὴν λύσιν

$\frac{x+y}{2}=k\pi+\omega$ (ι). Ἂν δὲ $k=0$ ἢ ἄρτιον, αἱ ἐξισώσεις (1)

δίδουν $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{\beta}{2\sigma\upsilon\nu\omega}$. Ἀλλὰ $\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega}=\frac{\beta\epsilon\varphi\omega}{2\eta\mu\omega}=\frac{\beta}{2\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Ὥστε ἂν φ εἶναι τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον δι' ὃ $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega}$,

θὰ εἶναι $\frac{x-y}{2}=2k\pi\pm\varphi$. Αὕτη δὲ μετὰ τῆς (ι), δίδουν τὰς δύο λύσεις

$$\left.\begin{array}{ll} x=\omega+\varphi+2k\pi, & y=\omega-\varphi+2k\pi \\ x=\omega-\varphi+2k\pi, & y=\omega+\varphi+2k\pi \end{array}\right\} (\iota').$$

Ἤδη, ἂν k εἶναι περιττὸν αἱ ἐξισώσεις (1), δίδουν τὰς ἴσας τιμὰς $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=-\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=-\frac{\beta}{2\sigma\upsilon\nu\omega}$. Ὅθεν $\frac{x-y}{2}=2k\pi+\pi-\varphi$ ἢ $2k\pi-\pi+\varphi$. Ἀλλὰ καὶ οὕτω, θὰ εὕρωμεν τὰς αὐτὰς τιμὰς (ί).

Διερεύνησις. Τὸ ω ὑπάρχει πάντοτε, ἐνῷ τὸ φ, ὅταν

$$-1<\frac{\alpha}{2\eta\mu\omega}<1, \text{ ἤτοι } \frac{\alpha^2}{4\eta\mu^2\omega}<1 \text{ ἢ } \alpha^2<\frac{4\epsilon\varphi^2\omega}{1+\epsilon\varphi^2\omega} \text{ δηλαδὴ}$$

$$\text{ὅταν } \alpha^2<\frac{4\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}, \text{ ἤτοι ὅταν } \alpha^2+\beta^2<4.$$

733. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπὸ 0 ἕως 2π, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἀνισότητας :

$$(\text{εφ}x+1)(\text{ημ}x+1)<0, \quad 4\text{ημ}^2x-2(\sqrt{3}+1)\text{ημ}x+\sqrt{3}>0.$$

Ἐπειδὴ πάντοτε ημx+1>0, ἡ αη ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τριώνυμον τῆς βας ἀνισότητος ἔχει ῥίζας $\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}$, αὕτη γράφεται $4\left(\text{ημ}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\text{ημ}x-\frac{1}{2}\right)>0$ καὶ ἑπομένως ἐπαληθεύεται

διὰ $0<x<\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$.

Ὅθεν αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}$.

734. Ὁμοίως καὶ διὰ τὰς ἀνισότητας:

$$(\text{εφ}x-1)(2\text{ημ}^2x-1)<0, \quad 2\sqrt{2}\text{συν}^2x+(2-\sqrt{6})\text{συν}x-\sqrt{3}>0.$$

Ἡ αη ἀνισότης γράφεται $(\text{εφ}x-1)(\sqrt{2}\,\text{ημ}x-1)(\sqrt{2}\,\text{ημ}x+1)<0$.

Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι εἶναι ἀρνητικὴ διὰ $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$ καὶ $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}$.

Ἡ βα ἀνισότης γράφεται $2\sqrt{2}\left(\text{συν}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\text{συν}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$. Εἶναι δὲ αὕτη θετικὴ διὰ $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ καὶ $\frac{11\pi}{6}<x<2\pi$. Ὥστε ἐδῶ οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.

Ν' ἀπαλειφθῇ τὸ x ἐκ τῶν ἐξισώσεων :

735. $$\frac{\alpha}{\beta}\,\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\gamma}{\delta}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{\pi}\right)=\text{συν}\,\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\gamma}{\delta}\,\text{συν}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Ὑψοῦντες τὰς ἐξισώσεις εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέτοντες θὰ εὕρωμεν τὴν ἀπαλείφουσαν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

736. $\alpha=\beta\text{συν}x$, $\gamma=\delta\text{ημ}x$. Ἐδῶ εἶναι $\text{συν}x=\frac{\alpha}{\beta}$, $\text{ημ}x=\frac{\gamma}{\delta}$. Ὥστε ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=1$.

737. $\text{συν}x-\text{ημ}x=\alpha$, $\text{συν}2x=\beta$. Ἐπειδὴ $\text{συν}2x=\text{συν}^2x-\text{ημ}^2x$, εἶναι $(\text{συν}x+\text{ημ}x)\cdot(\text{συν}x-\text{ημ}x)=\beta$ ἤτοι $\text{συν}x+\text{ημ}x=\frac{\beta}{\alpha}$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη μετὰ τῆς α' δίδουν $2\text{συν}x=\frac{\beta}{\alpha}+\alpha$, $2\text{ημ}x=\frac{\beta}{\alpha}-\alpha$. Ὅθεν, $4(\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x)=\left(\frac{\beta}{\alpha}+\alpha\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}-\alpha\right)^2$ καὶ $2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\alpha^2$.

738. $\alpha\text{συν}2x=\beta\text{ημ}x$, $\gamma\text{ημ}2x=\delta\text{συν}x$. Ἐδῶ ἔχομεν $\alpha(1-2\text{ημ}^2x)=\beta\text{ημ}x$ καὶ $2\gamma\text{ημ}x\text{συν}x=\delta\text{συν}x$ ἤτοι $\text{ημ}x=\frac{\delta}{2\gamma}$. Ὅθεν ἡ 1η δίδει $\alpha\left(1-\frac{\delta^2}{2\gamma^2}\right)=\frac{\beta\delta}{2\gamma}$ ἤτοι $\alpha(2\gamma^2-\delta^2)=\beta\gamma\delta$.

739. $\alpha\sigma\upsilon\nu(\omega-3x)=2\beta\sigma\upsilon\nu^3x$, $\alpha\eta\mu(\omega-3x)=2\beta\eta\mu^3x$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς α′ ἐπὶ συν3x, καὶ τῆς β′ ἐπὶ ημ3x καὶ ἔπειτα ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $2\alpha\sigma\upsilon\nu\omega-\beta=3\beta\sigma\upsilon\nu4x$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu4x=\dfrac{2\alpha\sigma\upsilon\nu\omega-\beta}{3\beta}$ (1). Ὑψοῦντες δὲ τὰς δοθείσας ἐξισώσεις εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔπειτα προσθέτοντες εὑρίσκομεν $\alpha^2=4\beta^2(\sigma\upsilon\nu^6x+\eta\mu^6x)$ ἢ $\alpha^2=4\beta^2(\sigma\upsilon\nu^4x-\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2x+\eta\mu^4x)(\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x)$ ἤτοι $\alpha^2=4\beta^2(1-3\sigma\upsilon\nu^2x\eta\mu^2x)$ ἢ τέλος $\alpha^2=\dfrac{\beta^2}{2}.(5+3\sigma\upsilon\nu4x)$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu4x=\dfrac{2\alpha^2-5\beta^2}{3\beta^2}$ (2). Οὕτως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δίδουν τὴν ἀπαλείφουσαν $\alpha^2-2\beta^2=\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\omega$.

740. $\alpha=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\tau x$, $\beta=\sigma\upsilon\nu x-\tau\epsilon\mu x$. Ἐδῶ ἔχομεν

$$\alpha=\eta\mu x-\frac{1}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^2x-1}{\eta\mu x}=-\frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x} \text{ καὶ } \beta=-\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Ὥστε εἶναι $\alpha\beta=\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x$ καὶ $\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^{\frac{4}{3}}x}{\eta\mu^{\frac{2}{3}}x}+\dfrac{\eta\mu^{\frac{4}{3}}x}{\sigma\upsilon\nu^{\frac{2}{3}}x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2\beta}{(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{2}{3}}}$,

καὶ ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι ἡ $\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}=\alpha\beta^{-\frac{2}{3}}$.

741. $\alpha=3\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu3x$, $\beta=3\eta\mu x-\eta\mu3x$. Εἶναι $\alpha=3\sigma\upsilon\nu x+4\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu x$ ἢ $\alpha=4\sigma\upsilon\nu^3x$, $\beta=4\eta\mu^3x$. Ὅθεν, $\alpha^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\sigma\upsilon\nu^2x$, $\beta^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\eta\mu^2x$ καὶ $\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$.

Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ x καὶ y ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

742. $\dfrac{\alpha\sigma\upsilon\nu x}{\beta}+\dfrac{\gamma\eta\mu x}{\delta}=1$, $\dfrac{\alpha\sigma\upsilon\nu y}{\beta}+\dfrac{\gamma\eta\mu y}{\delta}=1$, $x-y=2\omega$.

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu x\eta\mu y}=\frac{\eta\mu x-\eta\mu y}{\eta\mu(x-y)},\quad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu(x-y)}. \text{ Ὅθεν}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}:(\eta\mu x-\eta\mu y)=\frac{\gamma}{\delta}:(\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu x)=1:\eta\mu2\omega. \text{ Ὥστε}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\frac{(\eta\mu x-\eta\mu y)^2+(\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu^2 2\omega}=\frac{2-2(\eta\mu x\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y)}{\eta\mu^2 2\omega}=$$

$$=\frac{2(1-\sigma\upsilon\nu2\omega)}{\eta\mu^2 2\omega}=\frac{4\eta\mu^2\omega}{4\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}, \text{ ἤτοι } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}.$$

743. $\epsilon\varphi x+\epsilon\varphi y=\alpha$, $\sigma\varphi x+\sigma\varphi y=\beta$, $x+y=\omega$. Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις δίδουν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\epsilon\varphi x\epsilon\varphi y$ καὶ ἡ τρίτη δίδει $\epsilon\varphi\omega=\epsilon\varphi(x+y)=\alpha:\left(1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$, ἤτοι $\alpha\beta=(\alpha-\beta)\epsilon\varphi\omega$.

744. $\eta\mu x+\eta\mu y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$, $\epsilon\varphi\dfrac{x}{2}\,\epsilon\varphi\dfrac{y}{2}=\gamma$. Αἱ δύο πρῶται δίδουν $2[1+\sigma\upsilon\nu(x-y)]=\alpha^2+\beta^2$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4}$. Αὕτη δὲ καὶ ἡ δευτέρα δίδουν $\dfrac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{x+y}{2}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{x-y}{2}$. Τέλος ἡ τρίτη ἐξίσωσις δίδει,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}:\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}. \text{ Ὅθεν } \frac{2\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

745. $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \alpha$, $\sigma\varphi x + \sigma\varphi y = \beta$, $\sigma\upsilon\nu\tau x + \sigma\upsilon\nu\tau y = \gamma$. Εὑρίσκομεν $2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} = \alpha$ (1), $\eta\mu(x+y) = \beta\eta\mu x\eta\mu y$ (2), $\eta\mu x + \eta\mu y = \gamma\eta\mu x\eta\mu y$ (3).

Ἤδη λαμβάνομεν ἐκ τῶν (2) καὶ (3) $2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2} : 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} = \frac{\beta}{\gamma}$ (4)

καὶ ἐκ τῶν (1) καὶ (4), $1+\sigma\upsilon\nu(x+y) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ (5) καὶ $1+\sigma\upsilon\nu(x-y) = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Αὗται δὲ δίδουν,

$2\eta\mu x\eta\mu y = \frac{\alpha}{\beta\gamma}(\gamma^2-\beta^2)$. Οὕτως ἡ (2) γίνεται $\eta\mu(x+y) = \frac{\alpha}{2\gamma}(\gamma^2-\beta^2)$· ἐπειδὴ δὲ ἡ (5) γράφεται $\sigma\upsilon\nu(x+y) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}-1$, ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι $1 = \left[\frac{\alpha}{2\gamma}(\gamma^2-\beta^2)\right]^2 + \left[\frac{\alpha\beta}{\gamma}-1\right]^2$, ἤτοι

$$8\beta\gamma = \alpha[4\beta^2+(\beta^2-\gamma^2)].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΑΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εὑρεθοῦν:

746. Αἱ δύο μικρότεραι γωνίαι, ὅταν $\gamma = \sqrt{6}$, $\beta = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 3+\sqrt{3}$ μ. Εἶναι (τ. 57) $\sigma\upsilon\nu B = 1 : \sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sqrt{3} : 2$. Ὅθεν $B = 45^\circ$ καὶ $\Gamma = 30^\circ$.

747. Τὰ $\eta\mu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ καὶ ἡ $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ὅταν $\alpha=13$, $\beta=14$, $\gamma=15$ μ.

Εἶναι (τ. § 116) $\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} = \frac{7}{\sqrt{65}}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

748. Τὰ ημΑ, ημΒ, ημΓ, ὅταν $\alpha=9$, $\beta=12$ καὶ $\gamma=15$ μ.

Εἶναι (τ. 62) $\eta\mu A = 3 : 5$, $\eta\mu B = 4 : 5$ καὶ $\eta\mu\Gamma = 1$ (γωνία ὀρθή).

749. Αἱ εφΑ, εφΒ, εφΓ, ὅταν $\alpha=25$, $\beta=52$ καὶ $\Gamma=63$ μ.

Εἶναι (τ. 61) $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \frac{1}{5}$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{9}{7}$ καὶ (τ. 32)

$$\varepsilon\varphi A = \frac{5}{12},\quad \varepsilon\varphi B = \frac{4}{3},\quad \varepsilon\varphi\Gamma = -\frac{63}{16}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι:

750. $\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \varepsilon\varphi\frac{B}{2}$. Εἶναι (§ 24) $\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{\alpha\eta\mu B}{\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu B} = \frac{2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{B}{2}$.

751. $\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2} = \varepsilon\varphi 2B$. $\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2} = \frac{2\alpha\eta\mu B\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu B}{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 B-\alpha^2\eta\mu^2 B} = \frac{\eta\mu 2B}{\sigma\upsilon\nu 2B} = \varepsilon\varphi 2B$.

752. $\sigma\upsilon\nu 2B = \frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$. $\sigma\upsilon\nu 2B = \sigma\upsilon\nu^2 B - \eta\mu^2 B = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$.

753. $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$ Ἐκ τῆς σχέσεως $\eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν $\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}=2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\eta\mu 45^\circ=2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ ἤτοι $\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$.

754. $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha\sqrt{2}}$. Ἐκ τῆς σχέσεως $\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$, εὑρίσκομεν $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=2\eta\mu 45^\circ\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ κλπ.

755. $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}$. Εἶναι $\frac{2\beta\gamma}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu^2 B-\sigma\upsilon\nu^2 B}=\frac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B^2\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-\eta\mu^2\Gamma}$

756. $2\beta\gamma=\alpha^2\eta\mu 2B$. Εἶναι $2\beta\gamma=2\alpha\eta\mu B\cdot\alpha\sigma\upsilon\nu B=\alpha^2\eta\mu 2B$.

757. $\beta^2\eta\mu 2\Gamma+\gamma^2\eta\mu 2B=2\beta\gamma$. Τὸ α΄ μέλος γίνεται $2\beta^2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma+2\gamma^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B=$
$=2\beta^2\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B+2\gamma^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B(\beta^2+\gamma^2)=2\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\alpha^2=2\beta\gamma$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τρίγωνον ΑΒΓ:

758. Ἐὰν δὲν εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ εἶναι $\varepsilon\varphi B:\varepsilon\varphi\Gamma=\eta\mu^2 B:\eta\mu^2\Gamma$, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον.

Λαμβάνομεν $\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B$ ἤτοι $\eta\mu 2\Gamma=\eta\mu 2B$. Ὅθεν ἡ $2\Gamma=2B$ ὅπερ ἀποκλείεται, ἢ $2B+2\Gamma=180^\circ$ ἤτοι $B+\Gamma=90^\circ$.

759. Θὰ εἶναι ὀρθογώνιον, ἐὰν $\sigma\upsilon\nu A=\eta\mu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu B$, ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$. Ἤτοι, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\frac{A+\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{B}{2}\neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$. Ὅθεν $\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{B}{2}$ ἤτοι $A=B+\Gamma$ ἢ $\frac{A-\Gamma}{2}=-\frac{B}{2}$, ἤτοι $\Gamma=A+B$. Ὥστε ἡ γωνία Α ἢ ἡ Γ εἶναι ὀρθή.

760. Θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἐὰν εἶναι $1+\sigma\varphi(45^\circ-B)=\frac{2}{1-\sigma\varphi\Gamma}$ καὶ $2\beta\gamma=\alpha^2$. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi(45^\circ-B)=\varepsilon\varphi(45^\circ+B)$, ἡ αη σχέσις γράφεται $1+\frac{\varepsilon\varphi 45^\circ+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi 45^\circ\varepsilon\varphi B}=\frac{2\varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi\Gamma-1}$ ἐξ ἧς $\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma=1$. Οὕτως εἶναι $\varepsilon\varphi(B+\Gamma)=\frac{\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma}{1-\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma}=\infty$. Ὅθεν $B+\Gamma=90^\circ$ καὶ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2$, ἤτοι $\beta^2+\gamma^2=2\beta\gamma$, $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma=0$,

$$(\beta-\gamma)^2=0 \quad \text{καὶ} \quad \beta=\gamma.$$

761. Θὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἂν $\beta:\gamma=\sigma\upsilon\nu B:\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Διότι $\beta:\gamma=\alpha\eta\mu B:\alpha\eta\mu\Gamma=\eta\mu B:\eta\mu\Gamma$, ἤτοι $\eta\mu B:\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu B:\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
ἢ $\eta\mu B:\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu\Gamma:\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\varepsilon\varphi B=\varepsilon\varphi\Gamma$ καὶ $B=\Gamma$.

762. Θὰ εἶναι ἰσοσκελές, ἂν $\eta\mu A=2\eta\mu B\eta\mu\frac{A}{2}$.

Εἶναι $2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=2\eta\mu B\eta\mu\frac{A}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu B$, $\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu B$, $\frac{B+\Gamma}{2}=B$,

$$B+\Gamma=2B \quad \text{καὶ} \quad \Gamma=B.$$

Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι:

763. $\alpha=\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\sigma\upsilon\nu B$, $\beta=\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\gamma=\alpha\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu A$.

Ἂν Β καὶ $\Gamma<90^\circ$, καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ θὰ εἶναι
$B\Gamma=B\Delta+\Delta\Gamma$, ἤτοι $\alpha=\gamma\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ κ.ο.κ. ὁμοίως.

764. $(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A+(\gamma+\alpha)\sigma\upsilon\nu B+(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha+\beta+\gamma.$

Τὸ 1ον μέλος $=(\beta\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu B)+(\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma)+\ldots=\alpha+\beta+\gamma$ (ἄσκ. 763).

765. $\gamma^2(\varepsilon\varphi A-\varepsilon\varphi B)=(\alpha^2-\beta^2)(\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B)$. Ἐκ τῶν τύπων (1′) καὶ (2′) § 115 εὑρίσκομεν $\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)=\left(\frac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}\right)\left(\frac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}\right)$ ἤτοι

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\eta\mu^2A-\eta\mu^2B}{\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\eta\mu(A-B)\eta\mu(A+B)}{\eta\mu^2(A+B)}=\frac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}=\frac{\varepsilon\varphi A-\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}$$ (ἄσκ. 472).

766. $\gamma^2\eta\mu 2A+\alpha^2\eta\mu 2\Gamma=2\alpha\gamma\eta\mu B$. Τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μέ:

$$2\gamma^2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A+2\alpha^2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\gamma^2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A+2\alpha\gamma\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\gamma\eta\mu A(\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma)=$$
$$=2\beta\gamma\eta\mu A=2\alpha\gamma\eta\mu B.$$

767. $\beta^2\sigma\upsilon\nu 2B+\gamma^2\sigma\upsilon\nu 2\Gamma+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma).$

α′ μέλος $=\frac{\alpha^2}{2\eta\mu^2A}\,[2\eta\mu^2B\sigma\upsilon\nu 2B+2\eta\mu^2\Gamma\sigma\upsilon\nu 2\Gamma+4\eta\mu B\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)]$.

Ἀλλ' ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν ποσότης γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma)+1-(\sigma\upsilon\nu^2 2B+\sigma\upsilon\nu^2 2\Gamma)=\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma)-\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 4B+\sigma\upsilon\nu 4\Gamma)=$$
$$=\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma)\,[1-\sigma\upsilon\nu 2(B+\Gamma)]=\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma)\,(1-\sigma\upsilon\nu 2A)=2\eta\mu^2A\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma).$$

Ὥστε 1ον μέλος $=\alpha^2\sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma)$.

768. $(\gamma^2-\beta^2)\sigma\upsilon\nu^2A+(\alpha^2-\gamma^2)\sigma\upsilon\nu^2B+(\beta^2-\alpha^2)\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=0.$

Ἐπειδὴ (τ. 56) $\alpha=2P\eta\mu A$ κλπ. τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μέ:

$$4P^2[\eta\mu^2A(\sigma\upsilon\nu^2B-\sigma\upsilon\nu^2\Gamma)+\eta\mu^2B(\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-\sigma\upsilon\nu^2A)+\eta\mu^2\Gamma(\sigma\upsilon\nu^2A-\sigma\upsilon\nu^2B)]=$$
$$=4P^2[\eta\mu^2A(\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2B)+\eta\mu^2B(\eta\mu^2A-\eta\mu^2\Gamma)+\eta\mu^2\Gamma(\eta\mu^2B-\eta\mu^2A)]=0$$

769. $\alpha\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\eta\mu(A-B)=0.$

Ἐπειδὴ (τ. 56) $\alpha=2P\eta\mu A=2P\eta\mu(B+\Gamma)$ καὶ $\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)=\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma$ κ.ο.κ. εἶναι α′ μέλος $=2P(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2A+\eta\mu^2A-\eta\mu^2B)=0.$

770. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)+2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu(\Gamma+A)+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(A+B)=0.$

Διότι $+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2$ (τ. 57) κ.ο.κ.

771. $\frac{\alpha\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{\beta\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\gamma\eta\mu(A-B)}{\alpha^2-\beta^2}$. Λαμβάνομεν (ἄσκ. 769)

$$\frac{\alpha\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2-\gamma^2}=\frac{2P\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)}{4P^2(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma)}=\frac{1}{2P}=\frac{\beta\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2-\alpha^2}=\frac{\gamma\eta\mu(A-B)}{\alpha^2-\beta^2},$$ ὁμοίως.

772. $\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\sigma\varphi A}=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{\sigma\varphi B}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\sigma\varphi\Gamma}$. Καθεὶς τῶν λόγων (τ. 57) ἰσοῦται ἀντιστοίχως μέ:

$$2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A:\sigma\varphi A=2\beta\gamma\eta\mu A,\quad 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B:\sigma\varphi B=2\gamma\alpha\eta\mu B,\quad 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma:\sigma\varphi\Gamma=2\alpha\beta\eta\mu\Gamma.$$

Εἶναι δὲ (§ 118) $2\beta\gamma\eta\mu A=2\gamma\alpha\eta\mu B=2\alpha\beta\eta\mu\Gamma=4E$.

773. $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\upsilon\nu\tau(A-B)$. Τὸ α′ μέλος (τ. 58) ἰσοῦται

μέ, $\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}+\left(1:\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\right)=\left(1+\varepsilon\varphi^2\frac{A-B}{2}\right):\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=\tau\varepsilon\mu^2\frac{A-B}{2}:$

$:\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=1:\sigma\upsilon\nu^2\frac{A-B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}=1:\eta\mu\frac{A-B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}=2:\eta\mu(A-B).$

774. $\alpha^2=(\beta+\gamma)^2\eta\mu^2\frac{A}{2}+(\beta-\gamma)^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$. Διότι εἶναι (τ. 57)

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=(\beta^2+\gamma^2)\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}+\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)-2\beta\gamma\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)\eta\mu^2\frac{A}{2}+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\beta' \text{ μέλος.}$$

775. $\alpha\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)=(\beta+\gamma)\eta\mu\frac{A}{2}$. Διότι (§ 115, τ. 1΄)

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu(A+\Gamma)+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\frac{2\eta\mu\left(\Gamma+\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}.$$

776. $\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\dfrac{\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}$. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi A=\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}=\dfrac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}{2\beta\gamma\eta\mu A}=$

$=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4E}$ καὶ ὁμοίως $\sigma\varphi B=\dfrac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{4E}$ κλπ. εὑρίσκομεν

$\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4E}$. Ἐξ ἄλλου (ἄσκ. 536) $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=$

$=\sigma\varphi\frac{A}{2}\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\dfrac{\tau^2}{E}$ (τ. 61). Ὅθεν τὸ 2ον μέλος τῆς δοθείσης

σχέσεως ἰσοῦται μὲ $\dfrac{4\tau^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

777. $\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{\epsilon\varphi A}+\dfrac{\gamma^2-\alpha^2}{\epsilon\varphi B}+\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\epsilon\varphi\Gamma}=0$. Κατὰ τὴν ἄσκ. 776, τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται

μὲ $\dfrac{1}{4E}[(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)]=0$.

778. Ἂν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι 60^0 θὰ εἶναι

$$(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)-3\beta\gamma=0.$$

Εἶναι (τ. 57) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$, ἐπειδὴ ἐδῶ $\sigma\upsilon\nu A=1:2$. Ὅθεν

$\alpha^2-\alpha^2=-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta-\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha\gamma+2\beta\gamma-3\beta\gamma$ ἤτοι

$0=-\alpha(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)-3\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)-3\beta\gamma.$

779. Ἂν ἐν τριγώνῳ εἶναι $\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma=2\sigma\varphi B$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^2+\gamma^2=2\beta^2$.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\dfrac{\eta\mu(A+\Gamma)}{\eta\mu A\eta\mu\Gamma}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B}$ ἤτοι $\dfrac{\eta\mu B}{\eta\mu A\eta\mu\Gamma}=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B}$,

$\eta\mu^2 B=2\eta\mu A\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B$, ἤτοι $\beta^2=2\alpha^2\dfrac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}.\sigma\upsilon\nu B$, ἢ

$\beta^2=2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B=\alpha^2+\gamma^2-\beta^2$ (τ. 57). Ὅθεν $2\beta^2=\alpha^2+\gamma^2$.

780. Ἂν ἐν τριγώνῳ εἶναι $\alpha^2+\gamma^2=2\beta^2$, θὰ εἶναι καὶ $\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma=$ $=2\sigma\varphi B$.

Ἐπειδὴ $\alpha^2-\beta^2=\beta^2-\gamma^2$, εἶναι $\eta\mu^2 A-\eta\mu^2 B=\eta\mu^2 B-\eta\mu^2\Gamma$ ἤτοι

$\dfrac{\eta\mu(A+B)\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$ ἢ $\dfrac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A\eta\mu B}=\dfrac{\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$ ἤτοι

(τ. 52) $\sigma\varphi A-\sigma\varphi B=\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma$ δηλαδὴ $\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma=2\sigma\varphi B$.

781. Ἂν ἐν τριγώνῳ εἶναι $3\epsilon\varphi\frac{A}{2}\,\epsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=1$, αἱ πλευραί του α, β, γ θὰ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

Εἶναι (τ. 61) $3.\dfrac{\tau-\beta}{\tau}=1$, $3.\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=1$ ἤτοι $\alpha+\gamma=2\beta$.

782. Ἂν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ καὶ τὰ $ημ^2\frac{A}{2}$, $ημ^2\frac{B}{2}$, $ημ^2\frac{Γ}{2}$ θὰ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ.

Τὰ $ημ^2\frac{A}{2}$ κλπ. θὰ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ ἂν

$$\frac{1}{ημ^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{ημ^2\frac{Γ}{2}}=2\cdot\frac{1}{ημ^2\frac{B}{2}} \text{ ἤτοι (τ. 59) ἂν } \frac{βγ}{(τ-β)(τ-γ)}+\frac{αβ}{(τ-α)(τ-β)}=$$

$$=2\cdot\frac{γα}{(τ-γ)(τ-α)} \text{ δηλαδὴ ἂν } \frac{1}{γ}+\frac{1}{α}=\frac{2}{β}\text{ (1)}.$$

783. Ἂν αἱ γωνίαι δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ $A_1 B_1 Γ_1$ συνδέωνται διὰ τῶν σχέσεων $A_1=180^0-A$, $B_1=90^0-B$ καὶ $Γ_1=90^0-Γ$, θὰ εἶναι $α_1^2(γ^2-β^2)=$ $=α^2(β_1^2-γ_1^2)$.

$$\text{Θὰ εἶναι (τ. 56) } \frac{γ^2-β^2}{β_1^2-γ_1^2}=\frac{P^2(ημ^2Γ-ημ^2B)}{P_1^2(ημ^2B_1-ημ^2Γ_1)}=\frac{P^2(ημ^2Γ-ημ^2B)}{P_1^2(συν^2B-συν^2Γ)}=$$

$$=\frac{P^2(ημ^2Γ-ημ^2B)}{P_1^2(1-ημ^2B-1+ημ^2Γ)}=\frac{P^2}{P_1^2}=\frac{α^2ημ^2A}{α_1^2ημ^2A_1}=\frac{α^2}{α_1^2} \text{ ἤτοι } \frac{γ^2-β^2}{β_1^2-γ_1^2}=\frac{α^2}{α_1^2}.$$

784. Ἂν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ αἱ μὲν γωνίαι Β καὶ Β′ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ Α καὶ Α′ παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι $αα'=ββ'+γγ'$.

Εἶναι $Γ'=180^0-A'-B'=180^0-(180^0-A)-B=A-B$ καὶ $ημΓημ(A-B)=$ $=ημ(A+B)ημ(A-B)=ημ^2A-ημ^2B$. Ὅθεν $ημΓημΓ'=ημ(A+B)ημ(A-B)=$ $=ημAημA'-ημBημB'$ ἤτοι $\frac{γγ'}{αα'}\cdot ημAημA'=ημAημA'-ημBημB'$ ἢ $\frac{γγ'}{αα'}=1-\frac{ημBημB'}{ημAημA'}=1-\frac{ββ'}{αα'}$. Ὥστε $γγ'=αα'-ββ'$ ἤτοι $αα'=ββ'+γγ'$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἄνευ λογαρίθμων, ὅταν δίδωνται:

785. $β=250$ μ., $A=120^0$, $Γ=30^0$. $B=30^0$, $α=βημA:ημB=250\sqrt{3}$, $γ=250$.

786. $γ=\sqrt{6}$, $A=45^0$, $B=75^0$. $Γ=60^0$, $α=2$. $β=\sqrt{3}+1$.

787. $γ=30, α=60$, $B=60^0$. $εφ\frac{A-Γ}{2}=\frac{30}{90}σφ30^0=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{A-Γ}{2}=30^0$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{A+Γ}{2}=90^0-\frac{B}{2}=60^0$, εἶναι $A=90^0$, $Γ=30^0$ καὶ $β=\frac{αημB}{ημA}=30\sqrt{3}$.

788. $β=\sqrt{3}$ $α=1$, $Γ=30^0$. Εἶναι (ἄσκ. 787) $B=120^0$, $A=30^0$, $γ=1$.

---

1. Βλέπε «Στοιχεῖα Ἀλγέβρας» Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 315 § 289.

789. $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{6}$, $B=75^0$. Εἶναι (§ 114) $\beta=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$, $A=45^0$, $\Gamma=60^0$.

790. $\alpha=\sqrt{3}$, $\gamma=\sqrt{2}$, $A=60^0$. $\Gamma=45^0$, $A=75^0$, $\beta=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1):2$.

791. $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{3}$, $\gamma=1$. συν$A=(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2):2\beta\gamma=0$, $A=90^0$, $B=60^0$, $\Gamma=30^0$.

792. $\alpha=2$, $\beta=\sqrt{6}$, $\gamma=\sqrt{3}-1$. συν$A=1:\sqrt{2}$, $A=45^0$, συν$B=-(1:2)$, $B=120^0$, $\Gamma=15^0$.

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν δίδωνται:

793. $\alpha=145\mu.$, $B=74^0\ 40'$, $\Gamma=38^0\ 25'$. $A=66^0\ 55'$, $\beta=152{,}01\mu.$, $\gamma=97{,}94\mu.$

794. $\beta=12{,}5\,\mu.$, $A=18^0$, $\Gamma=98^0\ 12'$. $B=63^0\ 48'$, $\alpha=4{,}305\ \mu.$, $\gamma=13{,}789\ \mu.$

795. $\gamma=63\mu.$, $\alpha=130\mu.$, $B=42^0\ 15'\ 30''$. Περίπτ. 2α (§ 120).

796. $\alpha=5374{,}5\mu.$, $\gamma=1586\mu.$, $B=15^0\ 11'$. Περίπτ. 2α.

797. $\alpha=1542{,}7\mu.$, $\beta=894{,}3\mu.$, $A=118^0\ 42'$. Περ. 3η. Μία λύσις.

798. $\beta=16\mu.$, $\gamma=25\mu.$, $B=33^0\ 15'$. Περ. 3η. Δύο λύσεις.

799. $\alpha=56\mu.$, $\beta=65\mu.$, $\gamma=33\mu.$ Περ. 4η (§ 122).

800. $\alpha=1{,}723\mu.$, $\beta=0{,}985\mu.$ $\gamma=0{,}816\mu.$ Περ. 4η.

801. Ἡ μία γωνία τριγώνου εἶναι 128^0 καὶ ἐκ τῶν πλευρῶν της ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι του.

Ἐὰν $A=128^0$ καὶ $2\beta=\gamma$, ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-B}{2}=\frac{2\beta-\beta}{2\beta+\beta}.\sigma\varphi\frac{A}{2}=\frac{1}{3}\sigma\varphi 64^0$ κλπ.(2α περ.)

802. Αἱ γωνίαι τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 9, 13, 14, ἡ δὲ πλευρὰ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας εἶναι 150μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί.

Ἂν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι $9x^0$, $13x^0$, $14x^0$ θὰ εἶναι $9x^0+13x^0+14x^0=180^0$, ἤτοι $x^0=5^0$. Ὥστε αἱ γωνίαι εἶναι 45^0, 65^0 70^0 κλπ. (1η περ.).

803. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι $287\mu.$, $816\mu.$, καὶ 865μ. Θὰ εὑρεθῇ μὲ τὸν τύπον 65.

804. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ ὅταν εἶναι $\alpha=\frac{2}{3}\beta$ καὶ $\gamma=\frac{5}{6}\beta$.

Εἶναι (τ. 57) $\sigma\upsilon\nu A=\left(\beta^2+\frac{25}{36}\beta^2-\frac{4}{9}\beta^2\right):2\beta.\frac{5}{6}\beta=\frac{3}{4}$, $\sigma\upsilon\nu B=\frac{1}{8}$ κλπ.

805. Ἂν ἐν τῇ ἐπιλύσει τριγώνου, οὗ δίδονται τὰ στοιχεῖα γ, β, B εὕρωμεν διὰ τὴν πλευρὰν α δύο τιμὰς α_1, α_2 θὰ εἶναι $\alpha_1+\alpha_2=2\gamma\sigma\upsilon\nu B$.

Ἔστω αἱ λύσεις τὰ τρίγωνα $AB\Gamma_1$ καὶ $AB\Gamma_2$, ὅπου $(B\Gamma_1)=\alpha_1$, $(B\Gamma_2)=\alpha_2$ καὶ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Gamma_1\Gamma_2$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $B\Gamma_1=B\Delta-\Gamma_1\Delta$, $B\Gamma_2=B\Delta+\Delta\Gamma_2$. Ὅθεν $(B\Gamma_1)+(B\Gamma_2)=2(B\Delta)$ ἤτοι $\alpha_1+\alpha_2=2\gamma\sigma\upsilon\nu B$ (ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΑΒΔ).

806. Ἐν τῇ ἐπιλύσει τριγώνου ἐκ τῶν στοιχείων του $A=30^0$, $\beta=75$, $\alpha=25\sqrt{3}$, αἱ δύο λύσεις θὰ εἶναι ἓν τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ τὸ ἄλλο ἰσοσκελές.

$\eta\mu B=\beta\eta\mu A:\alpha=\sqrt{3}:2$, $B=60^0$ ἢ 120^0 καὶ $\Gamma=90^0$ ἢ 30^0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

807. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἔχῃ πλευρὰς 13 μ., 14 μ. καὶ 15 μ. νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες $Ρ$, $ϱ$, $ϱ_α$, $ϱ_β$, $ϱ_γ$.

$Ρ=\frac{65}{8}$ μ., $ϱ=4$μ., $ϱ_α=\frac{84}{8}$, $ϱ_β=\frac{84}{7}$, $ϱ_γ=\frac{84}{6}$ (τ. § 123 - 125).

808. Ἐὰν ἐν τῇ ἐπιλύσει τοῦ τριγώνου, ἐκ τῶν στοιχείων α, β, Β, εὕρωμεν δύο τρίγωνα, οἱ περὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ περιγεγραμμένοι κύκλοι εἶναι ἴσοι, ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων των ἰσοῦται μὲ $\sqrt{β^2συντ^2Β-α^2}$.

Οἱ δύο περιγεγραμμένοι κύκλοι εἶναι ἴσοι διότι ὁ λόγος $\frac{β}{2ημΒ}$ $(=Ρ)$ εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.

Ἤδη ἐὰν τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων εἶναι $Ο_1$ καὶ $Ο_2$, ἡ $Ο_1Ο_2$ καὶ ἡ ΒΓ εἶναι μεταξύ των κάθετοι καὶ διχοτομοῦνται. Οὕτως εἶναι $\left(\frac{Ο_1Ο_2}{2}\right)^2=Ρ^2-\frac{α^2}{4}$, $(Ο_1Ο_2)^2=4\left(Ρ^2-\frac{α^2}{4}\right)$ $=4\left(\frac{β^2}{4ημ^2Β}-\frac{α^2}{4}\right)=β^2συντ^2Β-α^2$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι :

809. $ϱ=Ρ(συνΑ+συνΒ+συνΓ-1)$. Ἐκ τοῦ τ. 70 καὶ τῆς ἀσκ. 513.

810. $2(ϱ+Ρ)=ασφΑ+βσφΒ+γσφΓ$. Εἶναι (ἄσκ. 809) $2(ϱ+Ρ)=2ΡσυνΑ+$ $+2ΡσυνΒ+2ΡσυνΓ=α\frac{συνΑ}{ημΑ}+β\frac{συνΒ}{ημΒ}+γ\frac{συνΓ}{ημΓ}$.

811. $ϱ\,ϱ_α\,ϱ_β\,ϱ_γ=Ε^2$. α' μέλ.$=\frac{Ε}{τ}\cdot\frac{Ε}{τ-α}\cdot\frac{Ε}{τ-β}\cdot\frac{Ε}{τ-γ}=\frac{Ε^4}{Ε^2}=Ε^2$ (τ. 67, 71, 65).

812. $ϱ_α+ϱ_β+ϱ_γ=4Ρ+ϱ$. Εἶναι (τ. 73) $ϱ_α+ϱ_β=4Ρσυν\frac{Γ}{2}ημ\frac{Α+Β}{2}=$ $=4Ρσυν^2\frac{Γ}{2}$. Ὅθεν α' μέλος $=4Ρ\left(1-ημ^2\frac{Γ}{2}+ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}\right)=4Ρ\left[1+ημ\frac{Γ}{2}\cdot\right.$ $\left.\cdot\left(συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}-συν\frac{Α+Β}{2}\right)\right]=4Ρ+4Ρημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2}ημ\frac{Γ}{2}=4Ρ+ϱ$ (τ. 70).

813. $\frac{ϱ\,ϱ_α}{ϱ_β\,ϱ_γ}=εφ^2\frac{Α}{2}$. α' μέλ.$=\frac{Ε}{τ}\cdot\frac{Ε}{τ-α}:\frac{Ε}{τ-β}\cdot\frac{Ε}{τ-γ}=\frac{(τ-β)(τ-γ)}{τ(τ-α)}=εφ^2\frac{Α}{2}$.

814. $ϱ_α\,ϱ_β\,ϱ_γ=ϱ^3σφ^2\frac{Α}{2}σφ^2\frac{Β}{2}σφ^2\frac{Γ}{2}$. Εἶναι (τ. 71, 67) $\frac{ϱ_α\,ϱ_β\,ϱ_γ}{ϱ^3}=$ $=\frac{τ^3}{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}=\frac{τ(τ-α)}{(τ-β)(τ-γ)}\cdot\frac{τ(τ-β)}{(τ-γ)(τ-α)}\cdot\frac{τ(τ-γ)}{(τ-α)(τ-β)}=σφ^2\frac{Α}{2}σφ^2\frac{Β}{2}σφ^2\frac{Γ}{2}$.

815. $ϱ_β\,ϱ_γ+ϱ_γ\,ϱ_α+ϱ_α\,ϱ_β=τ^2$. α' μέλ.$=Ε^2\cdot\left[\frac{3τ-(α+β+γ)}{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}\right]=τ(3τ-2τ)=τ^2$.

816. $\frac{1}{ϱ_α}+\frac{1}{ϱ_β}+\frac{1}{ϱ_γ}-\frac{1}{ϱ}=0$. α' μ.$=\frac{τ-α}{Ε}+\frac{τ-β}{Ε}+\frac{τ-γ}{Ε}-\frac{τ}{Ε}=\frac{3τ-2τ-τ}{Ε}=0$

817. $\frac{2Ρ+ϱ-ϱ_α}{2Ρ}=συνΑ$. Εἶναι (τ. 70, 73) $ϱ-ϱ_α=-4Ρημ\frac{Α}{2}\cdot συν\frac{Β+Γ}{2}=$ $=-4Ρημ^2\frac{Α}{2}$. Ὅθεν, $\frac{2Ρ+ϱ-ϱ_α}{2Ρ}=\frac{2Ρ-4Ρημ^2\frac{Α}{2}}{2Ρ}=1-2ημ^2\frac{Α}{2}=συνΑ$.

818. $\dfrac{2\varrho_\alpha\sqrt{\varrho_\beta\varrho_\gamma+\varrho_\gamma\varrho_\alpha+\varrho_\alpha\varrho_\beta}}{(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho_\alpha+\varrho_\gamma)}=\eta\mu A.$ α' μέλ (§ 125 καὶ ἄσκ. 815) =

$$=\frac{2E\tau}{\tau-\alpha}:\left(\frac{E}{\tau-\alpha}+\frac{E}{\tau-\beta}\right)\left(\frac{E}{\tau-\alpha}\cdot\frac{E}{\tau-\gamma}\right)=\frac{2E\tau}{\tau-\alpha}:\frac{E^2\beta\gamma}{(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=$$

$$=\frac{2}{\beta\gamma}\cdot E=\eta\mu A \quad (\tau.\ 63').$$

819. $\dfrac{\varrho_\alpha(\varrho_\beta+\varrho_\gamma)}{\sqrt{\varrho_\alpha\varrho_\beta+\varrho_\beta\varrho_\gamma+\varrho_\gamma\varrho_\alpha}}=\alpha.$ α' μέλ.$=\dfrac{E}{\tau-\alpha}\left(\dfrac{E}{\tau-\beta}+\dfrac{E}{\tau-\gamma}\right):\tau=$

$$=E^2(\tau-\gamma+\tau-\beta):\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=E^2\alpha:E^2=\alpha.$$

820. $(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)\,\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=(\varrho_\gamma-\varrho)\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\gamma.$ Εἶναι 1ον) $=\left(\dfrac{E}{\tau-\alpha}+\dfrac{E}{\tau-\beta}\right)\cdot$

$$\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}=\frac{E(2\tau-\alpha-\beta)}{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}=\frac{E\gamma}{E}=\gamma.\ 2\text{ον})\left(\frac{E}{\tau-\gamma}-\frac{E}{\tau}\right)\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}=$$

$$=\frac{E\gamma}{E}=\gamma.$$

821. $\left(\dfrac{\varrho_\alpha}{\varrho}-1\right)\left(\dfrac{\varrho_\beta}{\varrho}-1\right)\left(\dfrac{\varrho_\gamma}{\varrho}-1\right)=\dfrac{4P}{\varrho}.$ Εἶναι $\dfrac{\varrho_\alpha}{\varrho}-1=\dfrac{E}{\tau-\alpha}\cdot\dfrac{\tau}{E}-1=$

$$=\frac{\alpha}{\tau-\alpha},\ \frac{\varrho_\beta}{\varrho}-1=\frac{\beta}{\tau-\beta},\ \frac{\varrho_\gamma}{\varrho}-1=\frac{\gamma}{\tau-\gamma}.\ \text{"Οθεν α' μέλ.}=\frac{\alpha\beta\gamma\cdot\tau}{E^2}=\frac{4EP\cdot\tau}{E^2}=$$

$$=4P:\frac{E}{\tau}=\frac{4P}{\varrho}.$$

822. $\varrho_\gamma=\varrho\sigma\varphi\dfrac{A}{2}\sigma\varphi\dfrac{B}{2}.$ Ἐκ τοῦ τ. 69 λαμβάνομεν $\gamma=\varrho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}:\eta\mu\dfrac{A}{2}\eta\mu\dfrac{B}{2}.$

"Οθεν (τ. 72) $\varrho_\gamma=\varrho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\,\eta\mu\dfrac{B}{2}\,\eta\mu\dfrac{A}{2}=2$ον μέλ.

823. $E^2\left(\dfrac{1}{\varrho^2}+\dfrac{1}{\varrho_\alpha^2}+\dfrac{1}{\varrho_\beta^2}+\dfrac{1}{\varrho_\gamma^2}\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$ Τὸ 1ον μέλ. ἰσοῦται μὲ

$$E^2\left[\frac{\tau^2}{E^2}+\frac{(\tau-\alpha)^2}{E^2}+\frac{(\tau-\beta)^2}{E^2}+\frac{(\tau-\gamma)^2}{E^2}\right]=\tau^2+(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2=$$

$$=4\tau^2-2\tau(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

824. $(\beta-\gamma)\varrho_\beta\varrho_\gamma+(\gamma-\alpha)\varrho_\gamma\varrho_\alpha+(\alpha-\beta)\varrho_\alpha\varrho_\beta=0.$ 1ον μέλ. =

$$(\beta-\gamma)\tau^2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}+(\gamma-\alpha)\tau^2\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\ldots=(\beta-\gamma)\tau^2\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)\tau(\tau-\beta)}}+\ldots$$

$$=[(\beta-\gamma)(\tau-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\tau-\beta)+(\alpha-\beta)(\tau-\gamma)]:\tau=0.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

825. Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀρθοκεντρικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδὸν

$$E=\frac{1}{2}P^2\eta\mu 2A\eta\mu 2B\eta\mu 2\Gamma.$$

Εἶναι (§ 118 καὶ § 128) $E=\dfrac{1}{2}(Z\Delta).(E\Delta)\eta\mu\Delta=\dfrac{1}{2}\beta\gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma.$

$.\ \eta\mu(180^\circ-2A)=\dfrac{1}{2}.2P\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B.2P\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma.\eta\mu 2A=\dfrac{1}{2}P^2\eta\mu 2A\eta\mu 2B\eta\mu 2\Gamma.$

826. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, θὰ εἶναι:

$$(ΟΗ) = Ρ.\sqrt{1-8συνΑσυνΒσυνΓ}.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΗ ἔχομεν $(ΟΗ)^2 = (ΟΑ)^2+(ΑΗ)^2-2(ΟΑ)(ΑΗ)συνΟΑΗ$. Ἀλλὰ $ΟΑΗ = (90^0-Β)-(90^0-Γ)=Γ-Β$, $(ΟΑ) = Ρ$ καὶ $(ΗΑ) = 2ΡσυνΑ$. Ὅθεν, $(ΟΗ)^2 =$

$$Ρ^2+4Ρ^2συν^2Α-4Ρ^2συνΑσυν(Γ-Β) = Ρ^2-4Ρ^2συνΑ[συν(Β+Γ)+συν(Β-Γ)] =$$
$$= Ρ^2.(1-8συνΑσυνΒσυνΓ).$$

827. Ἡ ἀκτὶς Ρ′ τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀρθοκεντρικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\frac{1}{2}Ρ$.

Εἶναι (σχ. 64 § 127) $Ρ' = \frac{(ΖΕ)}{2ημΔ} = \frac{ασυνΑ}{2ημ(180^0-2Α)} =$

$$= \frac{ασυνΑ}{2ημ2Α} = \frac{ασυνΑ}{4ημΑσυνΑ} = \frac{α}{4ημΑ} = \frac{1}{2}Ρ.$$

828. Ἡ ἀκτὶς ρ′ τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ ὡς ἄνω **τρίγωνον** ΔΕΖ εἶναι ἴση μὲ 2ΡσυνΑσυνΒσυνΓ.

Εἶναι (§ 124, τ. 70) $ρ' = 4Ρ'ημ\frac{Δ}{2}ημ\frac{Ε}{2}ημ\frac{Ζ}{2} = 2ΡσυνΑσυνΒσυνΓ.$

829. Ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΒΗΓ, ΓΗΑ, ΑΗΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι.

Ὁ περὶ τὸ τρίγ. ΒΗΓ κύκλος ἔχει ἀκτῖνα, $\frac{(ΒΓ)}{2ημΒΗΓ} = \frac{α}{2ημ(Β+Γ)} = \frac{α}{2ημΑ} = Ρ$

κ.ο.κ. ὁμοίως.

830. Ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου καὶ Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, εἶναι

$$(ΟΚ)^2 = Ρ^2-\frac{1}{9}(α^2+β^2+γ^2).$$

Ἂν Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, εἶναι $(ΟΚ) = \frac{1}{3}(ΟΗ)$. Ὥστε (ἄσκ. 826) $(ΟΚ)^2 = \frac{1}{9}(ΟΗ)^2 = \frac{1}{9}Ρ^2(1-8συνΑσυνΒσυνΓ)$. Ἀλλ' ἡ ἐντὸς παρενθέσεως ποσότης ἰσοῦται μὲ $1-4[συν(Α+Β)+συν(Α-Β)]συνΓ = 1+4συν^2Γ+4συν(Α-Β)συν(Α+Β) = 1+2(1+συν2Γ)+$

$$+2(συν2Α+συν2Β) = 9-2(1-συν2Α)-2(1-συν2Β)-2(1-συν2Γ).$$

Ὅθεν, $(ΟΚ)^2 = Ρ^2-\frac{4Ρ^2}{9}(ημ^2Α+ημ^2Β+ημ^2Γ) = Ρ^2-\frac{1}{9}(α^2+β^2+γ^2)$ (§ 113).

831. Ἂν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ δύο διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΖ ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὸ Κ, θὰ εἶναι $εφΒΚΓ = \frac{12(ΑΒΓ)}{β^2+γ^2-5α^2}$.

Εἶναι $ημΒΚΓ = \frac{2(ΒΚΓ)}{(ΒΚ)(ΓΚ)}$ (§ 118), $συνΒΚΓ = \frac{(ΒΚ)^2+(ΚΓ)^2-α^2}{2(ΒΚ)(ΓΚ)}$ (§ 114). Ὅθεν, $εφΒΚΓ = \frac{4(ΒΚΓ)}{(ΒΚ)^2+(ΚΓ)^2-α^2}$. Ἀλλὰ $(ΒΚΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$, $(ΒΚ)^2 = \frac{4}{9}(ΒΕ)^2 = \frac{1}{9}\cdot[2(γ^2+α^2)-β^2]$ καὶ $(ΓΚ)^2 = \frac{4}{9}(ΓΖ)^2 = \frac{1}{9}\cdot[2(α^2+β^2)-γ^2]$ (§ 129). Ὥστε, $εφΒΚΓ = \frac{12(ΑΒΓ)}{β^2+γ^2-5α^2}$.

832. Ἂν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι μεταξύ των κάθετοι, θὰ εἶναι συν$A > \frac{4}{5}$.

Εἶναι (ἄσκ. 831) $\beta^2+\gamma^2=5\alpha^2$ καὶ συν$A=\frac{4\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\beta^2+\gamma^2>2\beta\gamma$ εἶναι $2\beta\gamma<$

$$<5\alpha^2 \text{ καὶ συν}A>\frac{4}{5}.$$

833. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\frac{1}{\beta\delta_\beta\delta'_\beta}+\frac{1}{\gamma\delta_\gamma\delta'_\gamma}-\frac{1}{\alpha\delta_\alpha\delta'_\alpha}=0.$

Εὑρίσκομεν (τ. 84, 85), $\delta_\alpha\delta'_\alpha=\frac{2\beta^2\gamma^2\eta\mu A}{\gamma^2-\beta^2}=\frac{4\beta\gamma E}{\gamma^2-\beta^2}$, $\delta_\beta\delta'_\beta=\frac{4\alpha\gamma E}{\gamma^2-\alpha^2}$ καὶ $\delta_\gamma\delta'_\gamma=$ $=\frac{4\alpha\beta E}{\alpha^2-\beta^2}$. Κατόπιν δὲ πολλαπλασιάζομεν τὰς τρεῖς εὑρεθείσας ἰσότητας ἐπὶ α, β, γ ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν ἔπειτα τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν καὶ ἐκτελοῦμεν τέλος τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμά των.

834. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\delta_\alpha\delta_\beta\delta_\gamma=\frac{8\alpha\beta\gamma\tau E}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)}$.

Πολλαπλασιάζομεν ἀντιστοίχως τὰς σχέσεις 84. § 131.

835. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\delta'_\alpha\delta'_\beta\delta'_\gamma=\frac{8\alpha\beta\gamma E^2}{\tau(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}$.

Ὁμοίως ὡς ἄνω μὲ τὰς σχέσεις 85 § 131.

836. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν αἱ διχοτόμοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, τῶν γωνιῶν αὐτοῦ σχηματίζουν μὲ τὰς πλευρὰς α, β, γ ἀντιστοίχως τὰς γωνίας ω, ω′, ω″ θὰ εἶναι: $\Sigma=\alpha\eta\mu2\omega+\beta\eta\mu2\omega'+\gamma\eta\mu2\omega''=0$.

Εἶναι $\omega=B+\frac{A}{2}$, $2\omega=2B+A=180^\circ+(B-\Gamma)$ καὶ $\alpha\eta\mu2\omega=-\alpha\eta\mu(B-\Gamma)$.

Ὁμοίως εἶναι $\beta\eta\mu2\omega'=-\beta\eta\mu(\Gamma-A)$ καὶ $\gamma\eta\mu2\omega''=-\gamma\eta\mu(A-B)$.

Ὅθεν, $\Sigma=-[\alpha\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\eta\mu(A-B)]=0$ (ἄσκ. 769).

837. Ἂν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ, Ι, τὸ τρίγωνον ΗΘΙ, ἔχει ἐμβαδὸν ΡΕ : 2ρ.

Τὸ τρίγωνον ΗΘΙ ἔχει γωνίας $90^\circ-\frac{A}{2}$, $90^\circ-\frac{B}{2}$, $90^\circ-\frac{\Gamma}{2}$, καὶ πλευρὰς $2P\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$,

$2P\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ καὶ $2P\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$. Ὅθεν $(H\Theta I)=2P^2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$ ἢ (ἄσκ. 511)

$$(H\Theta I)=\frac{1}{2}P^2(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=\frac{1}{4}P(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{P\tau}{2}=\frac{PE}{2\varrho} \quad (\tau.\ 67).$$

838. Ἂν ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ Ε, θὰ εἶναι $(\Gamma E):(\Delta E)=(\alpha+\beta)^2:\gamma^2$.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΕΔΒ καὶ ΕΒΓ δίδουν $(E\Delta)(E\Gamma)=(EB)^2$. Ὅθεν, $\frac{(E\Delta)}{(\Gamma E)}=\left(\frac{EB}{\Gamma E}\right)^2=$

$\frac{\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A-B}{2}}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\eta\mu B}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-A}{2}}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$ ἕπεται $\frac{(\Gamma E)}{(\Delta E)}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2}$.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΙΣ ΑΛΛΑΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α = 90°) ἐκ τῶν δεδομένων:

839. 1) Β, υ_α. Ἂν (ΑΔ) $= \upsilon_\alpha$, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, λαμβάνομεν $\upsilon_\alpha = \gamma \eta\mu B$. Ὅθεν, $\beta = \gamma \varepsilon\varphi B = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu B}.\varepsilon\varphi B = \dfrac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu B}$, $\alpha = \dfrac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu B} = \dfrac{\upsilon}{\eta\mu B \sigma\upsilon\nu B} =$

$$= \frac{2\upsilon}{\eta\mu 2B} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = 90^\circ - B.$$

2) Β, ρ. Βλέπε § 124. 3) Β, 2τ. Βλέπε § 134.

840. Β, Ε. Εἶναι $\Gamma = 90^\circ - B$, $\beta\gamma = 2E$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = \dfrac{2\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2} = \dfrac{4E}{\alpha^2}$, ἤτοι $\alpha^2 = \dfrac{4E}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν α καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

841. Β, β+γ. Εἶναι $\Gamma = 90^\circ - B$, $\beta+\gamma = \alpha(\eta\mu B + \eta\mu\Gamma) = 2\alpha\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν α καὶ κατόπιν τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

842. Β, β−γ. Ὁμοίως ὡς ἄνω. ***843.*** α, β+γ. Ὡς εἰς τὴν § 132.

844. α, ρ. Εἶναι (τ. 69) $\alpha = \rho\eta\mu 45^\circ : \eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = \rho\sqrt{2} : 2\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = \rho\sqrt{2} : \left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}\right) = \rho\sqrt{2} : \left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{2}(2\rho+\alpha)}{2\alpha}$ $(B>\Gamma)$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\dfrac{B-\Gamma}{2} = \Delta$ καὶ κατόπιν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα Β, Γ, β καὶ γ ὡς εἰς τὴν § 132.

845. υ_α, Δ_β. Εἶναι (τ. 82) $\Delta_\beta^2 = \gamma^2 + \dfrac{\beta^2}{4} = \gamma^2\left(1 + \dfrac{\beta^2}{\gamma^2}\cdot\dfrac{1}{4}\right) = \gamma^2\left(1 + \dfrac{\varepsilon\varphi^2 B}{4}\right)$ (1). Ἂν δὲ $\upsilon_\alpha = (A\Delta)$, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνομεν $\gamma = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\eta\mu B}$ (2). Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει τὴν $\upsilon_\alpha^2\, \varepsilon\varphi^4 B - (4\Delta_\beta^2 - 5\upsilon_\alpha^2)\varepsilon\varphi^2 B + 4\upsilon_\alpha^2 = 0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Β, κατόπιν τὴν πλευρὰν γ ἐκ τῆς ἐξισ. (2) κλπ. εὐκόλως.

846. α, δ'_α. Εὑρίσκομεν $2\alpha\eta\mu^2\dfrac{B-\Gamma}{2} + 2\delta'_\alpha\,\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2} - \alpha = 0$ κλπ. (§ 133).

847. Δ_α, ρ. Εἶναι $\alpha = 2\Delta_\alpha$, $\beta+\gamma = \alpha + 2\rho$, ἢ (ἐπειδὴ $\dfrac{\beta+\gamma}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = \dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \alpha$, καὶ $\eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu\dfrac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2} = 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sigma\acute{\upsilon}\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}$) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha+2\rho}{\alpha\sqrt{2}}$, $\dfrac{B-\Gamma}{2} = \Delta$ κλπ.

848. Ρ, ρ. Εἶναι $\rho = (\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2} = (\tau-\alpha)$, $2\rho = 2(\tau-\alpha) = \beta+\gamma-\alpha$ ἢ (ἐπειδὴ $\alpha = 2P$) $\beta+\gamma = 2(P+\rho)$ κλπ. ὡς ἡ ἄσκ. 843.

849. ρ, β : γ. Εὑρίσκομεν τὴν Β ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi B = \beta : \gamma$, ἔπειτα τὴν Γ, κατόπιν τὸ τ, ἐκ τῶν τ−α, τ−β, τ−γ διότι $\rho = \tau-\alpha = (\tau-\beta)\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2} = (\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$ καὶ τέλος τὰς πλευρὰς ἐκ τῶν $\alpha = \tau-(\tau-\alpha)$, $\beta = \tau-(\tau-\beta)$, $\gamma = \tau-(\tau-\gamma)$.

850. ϱ, δ_α. Εἶναι (τ. 84) $\delta_\alpha = \beta\gamma\sqrt{2} : (\beta+\gamma)$ (1) καὶ (ἄσκ. 848) $\beta + \gamma = 2\varrho + \alpha$. Ὥστε, $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma = 4\varrho^2+4\alpha\varrho+\alpha^2$, ἤτοι $\beta\gamma = 2\varrho(\varrho+\alpha)$. Οὕτω θὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν α ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ἥτις γράφεται $\delta_\alpha = 2\sqrt{2}\,\varrho(\varrho+\alpha) : (2\varrho+\alpha)$ κλπ. εὐκόλως.

851. α, $\delta_\beta\,\delta_\gamma$. Ἔχομεν $\delta_\beta\,\delta_\gamma = \dfrac{4\alpha^2\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)} \text{συν}\dfrac{B}{2}\,\text{συν}\dfrac{\Gamma}{2} =$

$$= \frac{4\alpha^2.\alpha\text{συν}\Gamma.\alpha\text{συν}B}{\alpha^2(1+\text{συν}B)(1+\text{συν}\Gamma)}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2} = \alpha^2 \,.\, 2\text{συν}B\text{συν}\Gamma : 2\text{συν}\frac{B}{2}\,\text{συν}\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= \alpha^2\text{συν}(B-\Gamma) : \left(\text{συν}\frac{B+\Gamma}{2}+\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \alpha^2\left(2\text{συν}^2\frac{B-\Gamma}{2}-1\right) : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}\right).$$

Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\dfrac{B-\Gamma}{2} = \Delta$ κλπ. εὐκόλως.

852. 2τ, υ_α. Ἐκ τῆς $\beta+\gamma = 2\tau-\alpha$, ἔχομεν $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma = 4\tau^2+\alpha^2-4\alpha\tau$. Ἀλλὰ $\beta^2+\gamma^2 = \alpha^2$ καὶ $\beta\gamma = \alpha\upsilon_\alpha$. Ὅθεν, $\alpha\upsilon_\alpha = 2\tau^2-2\alpha\tau$ καὶ $\alpha = \dfrac{2\tau^2}{2\tau+\upsilon_\alpha}$.

Ἤδη εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν B ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\eta\mu 2B = \dfrac{2\upsilon_\alpha}{\alpha}$, διότι $\upsilon_\alpha{}^2 = \gamma\eta\mu B.\beta\text{συν}B$ $= \alpha\upsilon_\alpha\,\eta\mu B\text{συν}B = \alpha\upsilon_\alpha\,\eta\mu 2B : 2$. Οὕτω τὰ λοιπὰ στοιχεῖα εὑρίσκονται εὐκόλως.

853. B, $\alpha+\upsilon_\alpha = \varkappa$. Ἔχομεν $\Gamma = 90^0 - B$ καὶ $\upsilon_\alpha = \gamma\eta\mu B = \alpha\eta\mu B\text{συν}B$. Ὅθεν $\varkappa = \alpha + \alpha\eta\mu B\text{συν}B$ καὶ $\alpha = \varkappa : (1+\eta\mu B\text{συν}B) = \varkappa : \left(1+\dfrac{1}{2}\eta\mu 2B\right)$ ἢ ἂν θέσωμεν $\varepsilon\varphi^2\omega = \dfrac{1}{2}\eta\mu 2B$, $\alpha = \varkappa : (1+\varepsilon\varphi^2\omega) = \varkappa\text{συν}^2\omega$. Ἤδη τὰ λοιπὰ στοιχεῖα εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά.

854. B, $\alpha-\upsilon_\alpha = \mu$. Εὑρίσκομεν ὁμ. $\alpha = \mu : (1-\eta\mu B\text{συν}B) = \mu : \text{συν}^2\omega$ κλπ.

855. Ἐκ τῶν δύο τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ ὑποτείνουσα ὑπὸ τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτήν.

Ἔστω ΑΔ τὸ ὕψος καὶ $(\Delta B) = \mu$, $(\Delta\Gamma) = \nu$. Τότε εἶναι $\mu = (A\Delta)\sigma\varphi B$, $\nu = (A\Delta)\sigma\varphi\Gamma =$ $= (A\Delta)\varepsilon\varphi B$ καὶ $\nu : \mu = \varepsilon\varphi^2 B$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν B, ἔπειτα τὴν Γ καὶ τέλος τὰς πλευρὰς $\beta = (\mu+\nu)\eta\mu B$ καὶ $\gamma = (\mu+\nu)\text{συν}B$.

856. Ἐκ τῆς β καὶ ἐκ τῆς γωνίας ω ἣν σχηματίζει ἡ Δ_β μετὰ τῆς α.

Ἂν ΒΔ ἡ διάμεσος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχομεν $\gamma = \beta : \varepsilon\varphi B$ καὶ $\gamma = \dfrac{\beta}{2} :$ $: \varepsilon\varphi(B-\omega)$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi B = 2\varepsilon\varphi(B-\omega) = 2\,.\,\dfrac{\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\omega}$ ἤτοι $\varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi^2 B - \varepsilon\varphi B + 2\varepsilon\varphi\omega = 0$, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὴν B κλπ. εὐκόλως.

857. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται $\gamma = 2\mu\nu$ καὶ $\beta = \mu^2-\nu^2$. Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει τῶν μ καὶ ν, αἱ $\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$.

Ἐπειδὴ $\alpha^2 = (\mu^2-\nu^2)^2+(2\mu\nu)^2 = (\mu^2+\nu^2)^2$, εἶναι $\alpha = \mu^2+\nu^2$. Ὅθεν $\tau = \mu^2+\mu\nu$, $\varrho = \tau-\alpha = \mu\nu-\nu^2$, $\tau-\beta = \nu(\mu+\nu)$ καὶ (τ. 68) $\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2} = \dfrac{\varrho}{\tau-\beta} = \dfrac{\mu-\nu}{\mu+\nu}$

$$\text{καὶ } \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{\varrho}{\tau-\gamma} = \frac{\nu}{\mu}.$$

858. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ β καὶ γ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἐκ τῆς α καὶ ἐκ τῆς σχέσεως $\eta\mu B = 2\eta\mu\Gamma$.

Ἐπειδὴ $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$, $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἡ δοθεῖσα σχέσις δίδει τὴν $\frac{\beta}{\alpha} = 2 \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$ ἤτοι $\beta = 2\gamma$. Ὥστε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 4\gamma^2 + \gamma^2 = 5\gamma^2$ ἤτοι $\gamma = \alpha : \sqrt{5}$ καὶ $\beta = 2\alpha : \sqrt{5}$.

Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν δεδομένων :

859. α, Β καὶ υ_α. Ἂν $\upsilon_\alpha = (\text{ΑΔ})$, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εὑρίσκομεν τὴν $(\text{ΒΔ}) = \upsilon_\alpha\, \sigma\varphi B$ καὶ κατόπιν τὴν $(\text{ΑΒ}) = \upsilon_\alpha : \eta\mu B$ καὶ οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν β′ περ.

860. υ_α, υ_β, υ_γ. Ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἔχομεν $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma$ ἤτοι $\alpha : \frac{1}{\upsilon_\alpha} = \beta : \frac{1}{\upsilon_\beta} = \gamma : \frac{1}{\upsilon_\gamma}$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha : \eta\mu A = \beta : \eta\mu B = \gamma : \eta\mu\Gamma$, ἕπεται $\eta\mu A : \frac{1}{\upsilon_\alpha} = \eta\mu B : \frac{1}{\upsilon_\beta} = \eta\mu\Gamma : \frac{1}{\upsilon_\gamma}$. Ὥστε αἱ Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι $\frac{1}{\upsilon_\alpha} = \mu$, $\frac{1}{\upsilon_\beta} = \nu$, $\frac{1}{\upsilon_\gamma} = \sigma$, εὑρισκόμεναι κατὰ τὴν δ′ περ. ὁπότε ἂν $\mu + \nu + \sigma = 2\lambda$, θὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ′ τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐκ τοῦ τύπου 67, καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ ἐκ τῶν τύπων 68. Κατόπιν δὲ θὰ εὕρωμεν τὰς πλευρὰς α, β, γ.

861. Γ, $\gamma + \alpha = \varkappa$, $\gamma + \beta = \lambda$. Ἂν $\varkappa > \lambda$ ἔχομεν (τ. 1′ καὶ 2′, § 115) $\frac{\varkappa + \lambda}{\gamma} = \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2}\right) : \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$ (1), $\frac{\varkappa - \lambda}{\gamma} = \eta\mu \frac{A-B}{2} : \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$ (2). Ὅθεν $\eta\mu \frac{A-B}{2} : \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{\varkappa - \lambda}{\varkappa + \lambda}\, \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}$ ($= \varepsilon\varphi\omega$). Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν $\frac{A-B}{2}$ καὶ ἐκ τῆς $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{\Gamma}{2}$, εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Α καὶ Β. Ἔπειτα δὲ τὴν πλευρὰν γ ἐκ τῆς ἐξισ. (2) καὶ τέλος τὰς πλευρὰς $\alpha = \varkappa - \gamma$ καὶ $\beta = \lambda - \gamma$.

862. β, γ καὶ δ_α. Ἂν $(\text{ΑΔ}) = \delta_\alpha$, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ λαμβάνομεν $\frac{\eta\mu B}{\delta_\alpha} = \frac{\eta\mu \text{ΑΔΒ}}{\beta}$ (1) καὶ $\frac{\eta\mu\Gamma}{\delta_\alpha} = \frac{\eta\mu \text{ΑΔΓ}}{\gamma}$ ἤτοι $\frac{\eta\mu\Gamma}{\delta_\alpha} = \frac{\eta\mu \text{ΑΔΒ}}{\gamma}$. Οὕτως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\delta_\alpha} = \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\eta\mu \text{ΑΔΒ}$, $2\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\delta_\alpha(\beta+\gamma)}{\beta\gamma}\eta\mu \text{ΑΒΔ}$ (3). Ἀλλ' ἐπειδὴ $\eta\mu \text{ΑΒΔ} = \eta\mu\left(B + \frac{A}{2}\right) = \eta\mu\left(\Gamma + \frac{A}{2}\right)$, ἕπεται $2\eta\mu \text{ΑΒΔ} = \eta\mu\left(B + \frac{A}{2}\right) + \eta\mu\left(\Gamma + \frac{A}{2}\right) = 2\eta\mu \frac{A+B+\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} = 2\sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2}$, ὁπότε ἡ (3) δίδει $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\delta_\alpha(\beta+\gamma)}{\beta\gamma}$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α. Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς τὴν β′ περ.

863. α, Α καὶ δ_α. Ἂν $(\text{ΑΔ}) = \delta_\alpha$ εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\delta_\alpha = \frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\mu\left(B + \frac{A}{2}\right)}$

$$(\text{ΒΔ}) = \delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2} : \eta\mu B, \quad (\text{ΓΔ}) = \delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2} : \eta\mu\Gamma \text{ καὶ } (\text{ΒΔ}+\text{ΔΓ}) = \alpha = \delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\eta\mu B} + \frac{1}{\eta\mu\Gamma}\right) =$$

$$= \delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2}\left(\frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\eta\mu B \eta\mu\Gamma}\right) = 4\delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B+\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} : [\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] =$$

$$= 4\delta_\alpha \eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B-\Gamma}{2} : [\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) + \sigma\upsilon\nu A] (B > \Gamma).$$ Οὕτως εὑρίσκομεν

$\alpha\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2}-1+\sigma\upsilon\nu A\right)=4\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ ἤτοι $\alpha\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2}-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)=$

$=2\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ τέλος $\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{B-\Gamma}{2}-2\delta_\alpha\,\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\alpha\eta\mu^2\frac{A}{2}$

$=0$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προσδιορίζομεν τὸ $\frac{B-\Gamma}{2}$ κλπ. εὐκόλως.

864. β, A καὶ $\delta_\alpha:\delta'_\alpha=1$. Ἂν $(A\Delta)=\delta_\alpha$ καὶ $(A\Delta')=\delta'_\alpha$ τὸ τρίγωνον $A\Delta\Delta'$ εἶναι ὀρθογώνιον ($\Delta A\Delta'=90^0$) καὶ ἰσοσκελὲς ($A\Delta\Delta'=A\Delta'\Delta=45^0$).

Ὅθεν $B=135^0-\frac{A}{2}$, $\Gamma=45^0-\frac{A}{2}$ καὶ (τ. 56) $\alpha=\frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu\left(135^0-\frac{A}{2}\right)}=\frac{\beta\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu\left(45^0-\frac{A}{2}\right)}$,

$$\gamma=\frac{\beta\eta\mu\left(45^0-\frac{A}{2}\right)}{\eta\mu\left(135^0-\frac{A}{2}\right)}=\beta\varepsilon\varphi\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\ (\tau.\ 15).$$

865. A, δ_α καὶ υ_α. Ἂν $(AE)=\upsilon_\alpha$ καὶ $(A\Delta)=\delta_\alpha$ εἶναι $\eta\mu A\Delta E=\upsilon_\alpha:\delta_\alpha$. Οὕτω γνωρίζοντες τὴν $A\Delta E$ (ἑπομένως καὶ τὴν $A\Delta\Gamma$), τὴν $\frac{A}{2}$ καὶ τὴν πλευρὰν $A\Delta$, ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον $A\Delta\Gamma$ καὶ ἀκολούθως τὸ $AB\Gamma$ (1η περ.).

866. A, δ_α καὶ Δ_α. Ἂν $(A\Delta)=\delta_\alpha$, $(AZ)=\Delta_\alpha$ καὶ $(AE)=\upsilon_\alpha$, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. AEZ λαμβάνομεν $\eta\mu Z=\frac{\upsilon_\alpha}{\Delta_\alpha}$. Ἀλλὰ γων. $EAZ=$ γων. $\frac{B-\Gamma}{2}(B>\Gamma)$. [1]

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\delta_\alpha}=\frac{\Delta_\alpha\eta\mu Z}{\delta_\alpha}$ ἤ, ἂν θέσωμεν $B-\Gamma=\omega$, $\frac{\Delta_\alpha\eta\mu Z}{\delta_\alpha}=\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$ (1).

Ἀλλὰ (§ 130, σημ.) $\varepsilon\varphi Z=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\omega}$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Z, ἔπειτα τὸ υ_α κλπ. ὡς εἰς τὸ πρόβλ. 865.

867. Δ_α, δ_α καὶ υ_α. Ὁμοίως ὡς ἄνω. Θὰ εὕρωμεν δὲ $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}=\frac{\upsilon_\alpha}{\delta_\alpha}$, $\eta\mu Z=\frac{\upsilon_\alpha}{\Delta_\alpha}$, καὶ $\varepsilon\varphi Z=\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu A=-\sigma\upsilon\nu\frac{(Z+\omega)}{\sigma\upsilon\nu Z}$ κλπ. ὡς ἄνω.

868. α, $\beta-\gamma=\delta$ καὶ $B-\Gamma=\Delta$. Ἔχομεν $\frac{\eta\mu A}{\alpha}=\frac{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}{\beta-\gamma}$ ἤτοι

$2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}:\alpha=2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}:(\beta-\gamma)$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\alpha\eta\mu\frac{\Delta}{2}:\delta$.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν A κατόπιν τὰς B καὶ Γ κλπ. (1η περ.).

869. α, β καὶ $A:B=2$. Ἐπειδὴ $\alpha:\eta\mu A=\beta:\eta\mu B$, ἤτοι $\alpha:\eta\mu 2B=\beta:\eta\mu B$, εὑρίσκομεν $\alpha\eta\mu B=2\beta\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu B=\alpha:2\beta$ κλπ. (2α περ.).

870. E, A καὶ B. Εὑρίσκομεν $\Gamma=180^0-(A+B)$, καὶ $\alpha=2P\eta\mu A$, $\beta=2P\eta\mu B$, $\gamma=2P\eta\mu\Gamma$, ὅπου τὸ P προσδιορίζεται ἐκ τοῦ τύπου $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}.2P\eta\mu B.2P\eta\mu\Gamma$
$.\eta\mu A=2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$.

---

1. Βλέπε «Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας» Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελ. 11, § 24.

871. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, Α καὶ Β. Ὡς ἄνω, διότι $4P^2=\frac{\alpha^2}{\eta\mu^2 A}=\frac{\beta^2}{\eta\mu^2 B}=\frac{\gamma^2}{\eta\mu^2\Gamma}=$ $=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2(1+\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma)}$ (ἄσκ. 518).

872. α, Α καὶ υ_α. Ἐπειδὴ $\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\alpha\upsilon_\alpha$ $(=2E)$, εὑρίσκομεν $\eta\mu B\eta\mu\Gamma=$ $=\upsilon_\alpha\,\eta\mu A:\alpha$, $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=2\upsilon_\alpha\,\eta\mu A:\alpha$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=(2\upsilon_\alpha\,\eta\mu A-\alpha\sigma\upsilon\nu A):\alpha$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν $B-\Gamma$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστὰ (τύπ. $B+\Gamma=180^0-A$ καὶ 56).

873. Α, υ_α καὶ $\beta+\gamma=\varkappa$. (Σχ. Εὐελπίδων). Ἔχομεν $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma=\varkappa^2$ καὶ (§ 114) $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A=\alpha^2$. Ὅθεν $2\beta\gamma(1+\sigma\upsilon\nu A)=\varkappa^2-\alpha^2$ ἤτοι $4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\varkappa^2-\alpha^2$ (1). Ἀλλὰ $2\beta\gamma\eta\mu A=2\alpha\upsilon_\alpha$ ἤτοι $4\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=2\alpha\upsilon_\alpha$. Ὅθεν ἡ (1) δίδει τὴν πλευρὰν $\alpha=(\varkappa^2-\alpha^2)$. $\cdot\varepsilon\varphi\frac{A}{2}:2\upsilon_\alpha$. Κατόπιν ἐπειδὴ $\beta\gamma=\frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\eta\mu A}$ καὶ $\beta+\gamma=\varkappa$, αἱ β καὶ γ εὑρίσκονται ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\varkappa x+\frac{\alpha\upsilon_\alpha}{\eta\mu A}=0$. Τέλος εὑρίσκομεν τὰς γωνίας ἐκ τῶν τύπων $\eta\mu B=$ $=\frac{\upsilon_\alpha}{\gamma}$, $\eta\mu\Gamma=\frac{\upsilon_\alpha}{\beta}$ (ι).

874. Α, υ_α καὶ $\beta-\gamma=\delta$. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἄνω.

875. Α, υ_α καὶ $\beta\gamma=\sigma^2$. Ἐκ τῶν τύπων (ι) τῆς ἀσκ. 873 εὑρίσκομεν $\eta\mu B\eta\mu\Gamma=$ $=\upsilon_\alpha^2:\sigma^2$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰς Β καὶ Γ ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 872 κλπ.

876. Α, υ_α καὶ $\beta:\gamma=\lambda$. Ὡς ἄνω (ἐδῶ εἶναι $\beta:\gamma=\lambda=\eta\mu B:\eta\mu\Gamma$).

877. 2τ, α καὶ Ε. Ἐκ τῶν $\varrho=\frac{E}{\tau}$, $\varrho=(\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$ καὶ $E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὸ ϱ, τὴν Α καὶ τὸ υ_α κλπ. ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 872.

878. α, ϱ καὶ υ_α. Ὡς ἄνω, διότι $2\varrho\tau=\alpha\upsilon_\alpha(=2E)$ ἤτοι $\tau=\alpha\upsilon_\alpha:2\varrho$.

879. α, υ_α καὶ $B-\Gamma=\Delta$. Ἐπειδὴ $\alpha\upsilon_\alpha=\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma:\eta\mu A$ $(=2E)$ εὑρίσκομεν (ἄσκ. 872) $\upsilon_\alpha=\alpha[\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)]:2\eta\mu(B+\Gamma)$, ἤτοι $2\upsilon_\alpha\,\eta\mu(B+\Gamma)+\alpha\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=$ $=\alpha\sigma\upsilon\nu\Delta$, ἐξ ἧς (ἥτις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\gamma$) εὑρίσκομεν τὸ $B+\Gamma$ κλπ. (1η περ.).

880. α, Δ_α καὶ $B-\Gamma=\Delta$. Κατὰ τὸν τύπον 58′, ἔχομεν $(\beta-\gamma):(\beta+\gamma)=$ $=\varepsilon\varphi\frac{\Delta}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$. Οὕτως ἂν θέσωμεν $\beta-\gamma=\delta$, $\beta+\gamma=\varkappa$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{\Delta}{2}=\mu$, ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=$ $=\frac{\delta}{\varkappa\mu}$. Ὅθεν (τ. 47) $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\varkappa^2\mu^2-\delta^2}{\varkappa^2\mu^2+\delta^2}$. Ἀλλὰ (τ. 82 καὶ 57) εἶναι $\beta^2+\gamma^2=\frac{\alpha^2}{2}+2\Delta_\alpha^2$ καὶ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu A=\frac{4\Delta_\alpha^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}=\frac{4\Delta_\alpha^2-\alpha^2}{(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2}=\frac{4\Delta_\alpha^2-\alpha^2}{\varkappa^2-\delta^2}$ καὶ συνεπῶς $\frac{4\Delta_\alpha^2-\alpha^2}{\varkappa^2-\delta^2}=\frac{\varkappa^2\mu^2-\delta^2}{\varkappa^2\mu^2+\delta^2}$, ἐξ ἧς, ὅταν ἀντὶ δ^2 θέσωμεν τὸ ἴσον του $\alpha^2+4\Delta_\alpha^2$ $-\varkappa^2$, εὑρίσκομεν τὸ κ, κατόπιν τὸ δ καὶ τέλος τὰς πλευρὰς $\beta=(\varkappa+\delta):2$ καὶ $\gamma=$ $=(\varkappa-\delta):2$.

881. α, $\alpha+\beta-\gamma=\varkappa$ καὶ $\Gamma=2B$. Εἶναι $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\gamma-\beta}{\eta\mu\Gamma-\eta\mu B}$ ἤτοι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\alpha-\varkappa}{\eta\mu 2B-\eta\mu B}\ \text{ἢ}\ \frac{\alpha}{\eta\mu 3B}=\frac{\alpha-\varkappa}{\eta\mu 2B-\eta\mu B}\quad(1)$$

ἢ (τ. 35) $\dfrac{\alpha}{3\eta\mu B-4\eta\mu^3 B}=\dfrac{\alpha-\varkappa}{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu B}$ ἢ $\dfrac{\alpha}{\eta\mu B(2\sigma\upsilon\nu B+1)(2\sigma\upsilon\nu B-1)}=\dfrac{\alpha-\varkappa}{\eta\mu B(2\sigma\upsilon\nu B-1)}$ (2).

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\varkappa}{2(\alpha-\varkappa)}$ κλπ. (1η περ.).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀφαιρεθέντες παράγοντες ημB καὶ 2συνB−1 δίδουν τὰς μὴ δεκτὰς λύσεις $B=0$ (διότι $\eta\mu B=0$) καὶ $B=60^0$ (διότι $\sigma\upsilon\nu B=1:2$).

882. Γ, Ε καὶ $\alpha+\beta-\gamma=\varkappa$. Ἐπειδὴ $\alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$ εἶναι $\tau-\gamma=\dfrac{\varkappa}{2}$ ἢ $\tau=\gamma+\dfrac{\varkappa}{2}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $E=\tau\varrho$ καὶ $\varrho=(\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$. Ὅθεν $E=\tau(\tau-\gamma)\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\left(\gamma+\dfrac{\varkappa}{2}\right)\cdot\dfrac{\varkappa}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$ ἤτοι $\gamma=\dfrac{2E}{\varkappa\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}}-\dfrac{\varkappa}{2}$ (1). Κατόπιν

ἐπειδὴ $\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\dfrac{\alpha+\beta}{\eta\mu A+\eta\mu B}=\dfrac{\varkappa+\gamma}{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}}$ εὑρίσκομεν

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\varkappa+\gamma}{\gamma}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}$ ἐξ ἧς τὴν $\dfrac{A-B}{2}$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστά.

883. Α, υ_α καὶ Ρ. Εὑρίσκομεν $\alpha=2P\eta\mu A$ καὶ (τ. 76) $\eta\mu B\eta\mu\Gamma=\upsilon_\alpha:2P$ κλπ ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 872.

884. Α, ϱ καὶ 2τ. Ἐκ τοῦ τύπου (67) $\varrho=E:\tau=\tau^2\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}:\tau$ (§ 134) ἤτοι $\varrho=\tau\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$ (ι) εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}=\varrho:\tau\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$ ἢ ἂν θέσωμεν $\varrho:\tau\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}=\mu$, $\eta\mu\dfrac{B}{2}\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}=\mu$, ἢ (τ. 48) $\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}\right):$ $:\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{B+\Gamma}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}\right)=\mu:1$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{1+\mu}{1-\mu}\eta\mu\dfrac{A}{2}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν $\dfrac{B-\Gamma}{2}$ καὶ κατόπιν τὰς γωνίας Β καὶ Γ. Τέλος εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς ἐκ τῶν τύπων $\tau-\alpha=\varrho\sigma\varphi\dfrac{A}{2}$, $\tau-\alpha=\varrho\sigma\varphi\dfrac{B}{2}$, $\tau-\gamma=\varrho\sigma\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$.

885. ϱ, ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ. Εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Α, Β, Γ ἐκ τῶν τύπων (ἄσκ. 813) $\dfrac{\varrho\varrho_\alpha}{\varrho_\beta\varrho_\gamma}=\varepsilon\varphi^2\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{\varrho\varrho_\beta}{\varrho_\alpha\varrho_\gamma}=\varepsilon\varphi^2\dfrac{B}{2}$ κλπ., κατόπιν τὸ τ ἐκ τοῦ τύπου (ι) τῆς ἀσκ. 884 κλπ.

886. ϱ, ϱ_α καὶ $\beta:\gamma=1$. Ἐπειδὴ $B=\Gamma$ εἶναι (§ 124,3 καὶ 125,2) $\alpha=2\varrho\sigma\varphi\dfrac{B}{2}$, $\alpha=2\varrho_\alpha\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}$ ἐξ ὧν $\alpha^2=4\varrho\varrho_\alpha$ ἤτοι $\alpha=2\sqrt{\varrho\varrho_\alpha}$. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ $A=180^0-2B$, $\dfrac{A}{2}=90^0-$ $-B$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}=\eta\mu B=2\eta\mu\dfrac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}$ ἔχομεν (τ. 72) $\varrho_\alpha=\dfrac{\alpha}{2}\sigma\varphi\dfrac{B}{2}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν Β, κλπ. εὐκόλως.

887. α, $\beta+\gamma=\varkappa$ καὶ ἐκ τῆς γωνίας ω τῆς δ_α μετὰ τῆς α. Ἂν $(A\Delta)=\delta_\alpha$, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $(B\Delta)=\gamma\eta\mu\dfrac{A}{2}:\eta\mu\omega$, $(\Gamma\Delta)=$ $=\beta\eta\mu\dfrac{A}{2}:\eta\mu\omega$ καὶ $(B\Delta+\Gamma\Delta)=\alpha=\varkappa\eta\mu\dfrac{A}{2}:\eta\mu\omega$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α, ἔπειτα τὴν $B=\omega-\dfrac{A}{2}$ καὶ $\Gamma=180^0-\dfrac{A}{2}-\omega$ κλπ. εὐκόλως.

888. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία Β ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεώς του α καὶ ἐκ τῆς δ_β.

Ἂν $(Β\Delta) = \delta_\beta$, ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, εἰς ὃ εἶναι $\text{γων}Β\Delta Γ = 180^0 - \left(\frac{B}{2} + Γ\right) =$ $= 180^0 - \left(\frac{B}{2} + B\right)$, λαμβάνομεν $\frac{\delta_\alpha}{\text{ημ}B} = \frac{\alpha}{\text{ημ}\left(\frac{B}{2} + B\right)}$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$\text{ημ}B = 2\text{ημ}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{B}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}\left(\frac{B}{2} + B\right) = \text{ημ}\frac{B}{2}\text{συν}B + \text{συν}\frac{B}{2}\text{ημ}B =$$

$= \text{ημ}\frac{B}{2}\left(2\text{συν}^2\frac{B}{2} - 1\right) + 2\text{ημ}\frac{B}{2}\text{συν}^2\frac{B}{2}$ ἡ (1), ὅταν ἐξαγάγωμεν τὸν κοινὸν παράγοντα $\text{ημ}\frac{B}{2}$ δίδει τὴν ἐξίσωσιν $4\delta_\alpha\,\text{συν}^2\frac{B}{2} - 2\alpha\,\text{συν}\frac{B}{2} - \delta_\alpha = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ $\text{συν}\frac{B}{2}$, ἔπειτα τὴν γωνίαν $\frac{B}{2}$ καὶ συνεπῶς τὴν Β.

Ἡ λύσις $\text{ημ}\frac{B}{2} = 0$ δὲν ἁρμόζει εἰς τὸ πρόβλημα.

889. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ α τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς Δ_α καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν ω καὶ φ τῆς Δ_α μετὰ τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως.

Ἂν $(Α\Delta) = \Delta_\alpha$ καὶ ὀξ. γων. $Α\Delta Β = υ$, ἐκ τοῦ τριγ. ΑΔΒ λαμβάνομεν $(Β\Delta) : \text{ημ}φ =$

$$= (Α\Delta) : \text{ημ}B, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha}{2} : \text{ημ}φ = \Delta_\alpha : \text{ημ}(υ + φ).$$

Ὅθεν $\text{ημ}(υ+φ) = \text{ημ}υ\,\text{συν}φ + \text{συν}υ\,\text{ημ}φ = 2\Delta_\alpha\,\text{ημ}φ : \alpha$ (1). Ὁμοίως ἐκ τοῦ τριγ. ΑΔΓ, εἰς ὃ $Γ = υ - ω$, εὑρίσκομεν $\text{ημ}υ\,\text{συν}ω - \text{συν}υ\,\text{ημ}ω = 2\Delta_\alpha\,\text{ημ}ω : \alpha$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\text{ημ}υ = \frac{4\Delta_\alpha\,\text{ημ}ω\,\text{ημ}φ}{\alpha\,\text{ημ}(ω+φ)}$ (3) καὶ $\text{συν}υ = \frac{2\Delta_\alpha\,\text{ημ}(ω-φ)}{\alpha\,\text{ημ}(ω+φ)}$ (4). Ἂν ἤδη ὑψώσωμεν τὰς (3) καὶ (4) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προσθέσωμεν λαμβάνομεν $4\Delta_\alpha\,[4\text{ημ}^2ω\,\text{ημ}^2φ + \text{ημ}^2(ω-φ)] =$

$$= \alpha^2\text{ημ}^2(ω+φ), \text{ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν } \alpha.$$

Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς ὃ εἶναι:

890. $Α = 55^0\,30'$, $Β = 100^0\,12'$, $Ρ = 5{,}5$ μ. $Γ = 180^0 - (Α + Β)$, $\alpha = 2Ρ\,\text{ημ}Α$ κλπ.

891. $\beta = 10$, $Β = 44^0$, $Α - Γ = 12^0$. Ἐκ τοῦ $Α - Γ = 12^0$ καὶ $Α + Γ = 180^0 - Β = 136^0$ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Α καὶ Γ. Κατόπιν ἐκ τῶν τύπων 56 εὑρίσκομεν

$$\frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\alpha+\gamma}{\text{ημ}Α + \text{ημ}Γ} = \frac{\alpha-\gamma}{\text{ημ}Α - \text{ημ}Γ} \text{ καὶ ἐκ τῶν τύπων 49 λαμβάνομεν}$$

$\alpha + \gamma = \frac{20\,\text{συν}22^0\,\text{συν}6^0}{2\,\text{ημ}22^0\,\text{συν}22^0}$, $\alpha - \gamma = \frac{20\,\text{ημ}22^0\,\text{ημ}6^0}{2\,\text{ημ}22^0\,\text{συν}22^0}$ καὶ ἐκ τούτων εὑρίσκομεν τὰς α καὶ γ.

892. $\alpha = 13$, $\varrho = 5$, $\tau - \beta = 6$. Εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $\text{εφ}\frac{B}{2} = \frac{\varrho}{\tau - \beta} = \frac{5}{6}$ τὴν $\frac{B}{2}$ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΟΒΔ (σχ. 62) τὴν ΒΔ καὶ τὴν $(\Delta Γ) = 13 - (Β\Delta)$ καὶ τὴν $\frac{Γ}{2}$ ἐκ τῆς $\text{εφ}\frac{Γ}{2} = \frac{\varrho}{(\Delta Γ)} = \frac{\varrho}{\tau - \gamma}$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστά.

893. $\alpha = 12$, $\beta : \gamma = 5 : 8$, $\tau - \beta = 9$. Εἶναι (§ 116) $\alpha - \beta + \gamma = 18$ ἤτοι $12 - (5\gamma : 8) + \gamma = 18$ ἐξ ἧς $\gamma = 16$. Ὅθεν $\beta = 10$ κλπ. (4 περ.).

894. $\beta = 7$, $\gamma = 3$, $Β - Γ = 90^0$. Εὑρίσκομεν (τ. 58') $\text{εφ}\frac{Β - Γ}{2} = 1 = \frac{2}{5}\,\text{σφ}\frac{Α}{2}$, $\frac{Α}{2} = 21^0\,48'\,49''$, $Α = 43^0\,37'\,38''$ κλπ. εὐκόλως.

895. $\alpha=5$, $A=60^0$, $\beta\gamma=24$. Ἐπειδὴ $\beta=24:\gamma$ εὑρίσκομεν (τ. 57) $5^2=\beta^2+\gamma^2-$ $-48\text{συν}60^0$ ἤτοι $\gamma^4-49\gamma^2+576=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν γ κλπ.

896. $\alpha=1$, $A=3\theta^0$, $\beta^2+\gamma^2=4$. Εἶναι (τ. 57) $1=4-\sqrt{3}\,\beta\gamma$, ἤτοι $\beta\gamma=\sqrt{3}$. Ὅθεν $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma=(\beta+\gamma)^2=4+2\sqrt{3}$, $(\beta-\gamma)^2=4-2\sqrt{3}$ ἤτοι $\beta+\gamma=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $\beta-\gamma=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, ἐξ ὧν $\beta=\sqrt{3}$, $\gamma=1$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\Gamma=A=30^0$ καὶ $B=120^0$.

897. $\gamma=\sqrt{6}$, $\Gamma=60^0$, $\beta^2-\alpha^2=2\sqrt{3}$. Εἶναι (τ. 56) $\beta^2-\alpha^2=\gamma^2(\text{ημ}^2B-\text{ημ}^2A):$ $:\text{ημ}^2\Gamma=2\sqrt{3}$. Ὅθεν $\text{ημ}^2B-\text{ημ}^2A=\sqrt{3}:4$ ἤτοι (ἄσκ. 475) $\text{ημ}(B+A)\text{ημ}(B-A)=\text{ημ}\Gamma\,.$ $.\text{ημ}(B-A)=\sqrt{3}:4$. Ὅθεν $\text{ημ}(B-A)=1:2$ ἤτοι $B-A=30^0$. Ἐπειδὴ δὲ $B+A=120^0$, εἶναι $B=75^0$, $A=45^0$ καὶ $\alpha=\gamma\text{ημ}A:\text{ημ}\Gamma=2$, $\beta=\gamma\text{ημ}B:\text{ημ}\Gamma=1+\sqrt{3}$.

898. $A=60^0$, $P=6$, $\varrho=(10\sqrt{3}-9):3$. Εἶναι $\alpha=2P\text{ημ}A=6\sqrt{3}$.

Ἐκ δὲ τοῦ τ. 69, εὑρίσκομεν $\varrho\,\text{συν}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\alpha}{2}\left(\text{συν}\dfrac{B-\Gamma}{2}-\text{ημ}\dfrac{A}{2}\right)$ ἐξ ἧς

$\text{συν}\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{2\varrho}{\alpha}\text{συν}\dfrac{A}{2}+\text{ημ}\dfrac{A}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ καὶ $\dfrac{B-\Gamma}{2}=15^0\,37'\,30''$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{B+\Gamma}{2}=60^0$, εὑρίσκομεν $B=75^0\,37'\,30''$, $\Gamma=44^0\,22'\,30''$ ὡς καὶ (ἄσκ. 897) $\beta=11{,}625$ καὶ $\gamma=8{,}392$.

899. $P=3$, $\alpha+\gamma=6$, $B-\Gamma=90^0$. Εἶναι $B=90^0+\Gamma$, $A=90^0-2\Gamma$. Ὅθεν $\alpha=2P\text{συν}2\Gamma$, $\beta=2P\text{συν}\Gamma$ καὶ $\gamma=2P\text{ημ}\Gamma$. Οὕτως εἶναι $\beta^2+\gamma^2=4P^2=36$ (1) καὶ $\beta^2-\gamma^2=$ $=4P^2\text{συν}2\Gamma=2P\alpha$ ἤτοι $\beta^2=\gamma^2+6(6-\gamma)$. Ὥστε ἡ (1) γίνεται $2\gamma(\gamma-3)=0$, ἐξ ἧς $\gamma=3$. Ὅθεν

$\alpha=3$, $\beta=3\sqrt{3}$ κλπ.

900. Τριγώνου ΑΒΓ τὸ ὕψος $\upsilon_\alpha=20$ μ. χωρίζει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ἔχοντα λόγον $3:1$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις ὅταν $A=45^0$.

Ἂν $(A\Delta)=\upsilon_\alpha$, $\Gamma A\Delta=\omega$ καὶ $(\Gamma\Delta)=x$, θὰ εἶναι $(\Delta B)=3x$, $x=(A\Delta)\text{εφ}\omega$, (1) $3x=(A\Delta)\text{εφ}(45^0-\omega)$ (2). Ὅθεν ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται $3\text{εφ}\omega=(1-\text{εφ}\omega):(1+\text{εφ}\omega)$

ἤτοι $3\text{εφ}^2\omega+4\text{εφ}\omega-1=0$ ἐξ ἧς $\text{εφ}\omega=(\sqrt{7}-2):3=0{,}21525$. Ὅθεν

$x=20\,.\,0{,}21525=4{,}305$ καὶ $4x=\alpha=17{,}22$.

901. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ $\delta_\alpha=(A\Delta)=11$μ., χωρίζει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο τμήματα $(B\Delta)=9$ μ. καὶ $(\Delta\Gamma)=6$μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ.

Γνωρίζομεν ὅτι $\gamma:\beta=9:6$ ἤτοι $\gamma^2:\beta^2=9^2:6^2$. Ἐὰν δὲ ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, ὅταν θέσωμεν $A\Delta\Gamma=\omega<90^0$, εὕρωμεν τὰ γ^2 καὶ β^2 ἐκ τῶν τύπων 57, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ λόγου $\gamma^2:\beta^2$ ὅτι $\text{συν}\omega=11:36$, ἤτοι $\gamma^2=262{,}5$, $\gamma=16{,}2$μ. καὶ $\beta=10{,}8$μ.

902. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ δ_α τέμνει τὴν περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου, ὅταν εἶναι $P=$ $=15$ μ. $(B\Gamma)=18$μ. καὶ $(A\Delta)=16$ μ.

Εἶναι $\text{ημ}A=\alpha:2P=3:5$ καὶ $A=36^0\,52'\,10''$. Ἐκ δὲ τοῦ τριγ. ΒΓΔ$(B\Delta=\Delta\Gamma)$ λαμβάνομεν (τ. 57) $(B\Gamma)^2=2(B\Delta)^2-2(B\Delta)^2\text{συν}B\Delta\Gamma$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ $(B\Delta\Gamma)=180^0-A$ καὶ $\text{συν}A=4:5=0{,}8$ ἡ (1) γίνεται $18^2=2(B\Delta)^2+2(B\Delta)^2\,.\,0{,}8$ ἐξ ἧς $(B\Delta)=3\sqrt{10}$.

Ἤδη ἐκ τοῦ τριγ. ΑΔΓ λαμβάνομεν $\text{ημ}\Delta\Gamma A:(A\Delta)=\text{ημ}\dfrac{A}{2}:(\Delta\Gamma)$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$\text{ημ}\Delta\Gamma A=0{,}53337$ καὶ $\Delta\Gamma A=32^0\,10'$. Ὅθεν $A\Delta\Gamma=B=180^0-\left(\dfrac{A}{2}+\Delta\Gamma A\right)=$

$=129^0\,19'\,55''$ καὶ $\Gamma=13^0\,47'\,55''$.

903. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς ὃ εἶναι $B=44^0$, $\Gamma=72^0$ καὶ ἡ κάθετος ΗΔ ἐκ τοῦ ὀρθοκέντρου Η ἐπὶ τὴν ΒΓ εἶναι 10 μ.

Ἐπειδὴ $2P = \gamma : \eta\mu\Gamma$ εἶναι (τ. 77) $(H\Delta) = \gamma\sigma\upsilon\nu B\sigma\varphi\Gamma$. Ὅθεν $\gamma = 10 : \sigma\upsilon\nu 44^\circ \sigma\varphi 72^\circ =$
$= 42{,}785$ μ. κλπ. κατὰ τὰ γνωστά.

904. Ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλος ἔχουν ἀκτίνας 4 μ. καὶ 9 μ. ἀντιστοίχως, ἡ δὲ κορυφὴ Α ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο τοῦ πρώτου κύκλου 10 μ. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ γωνία Α καὶ ἡ πλευρὰ α.

Ἐκ τοῦ τριγ. ΑΟΖ (σχ. 62) εὑρίσκομεν $\eta\mu \frac{A}{2} = \frac{4}{10}$, $\frac{A}{2} = 23^\circ 34' 41''$ καὶ $A = 47^\circ 9' 22''$.
Οὕτως εἶναι $\alpha = 2P\eta\mu A = 18\eta\mu 47^\circ 9' 22'' = 13{,}198$ μ.

905. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $A < 90^\circ$, $\alpha = 5$ μ., $P = 3$ μ. καὶ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι 4μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ.

Εἶναι $\eta\mu A = \alpha : 2P = 5 : 6$ καὶ $A = 56^\circ 26' 33''$. Ἂν δὲ ἡ διάμετρος ΑΖ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Θ, τὸ τρίγ. ΑΘΖ εἶναι ὀρθογώνιον. Ὅθεν $\eta\mu A Z\Theta = 4 : 6$ καὶ $AZ\Theta = 41^\circ 48' 39'' = AE\Delta$, διότι αἱ ΒΓ καὶ ΘΖ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΘ εἶναι παράλληλοι. Οὕτω δὲ καὶ $\chi o\rho\delta BZ = \chi o\rho\delta\Theta\Gamma$ καὶ $\gamma\omega\nu\Theta A\Gamma =$
$= \gamma\omega\nu BAZ (= \gamma\omega\nu BAE)$. Ἐπειδὴ δὲ $EA\Delta = 48^\circ 11' 21''$, ἕπεται ὅτι $BA\Theta = (BA\Gamma - EA\Delta) :$
$: 2 = 4^\circ 7' 36''$, $B = 90^\circ - BA\Theta = 85^\circ 52' 24''$ καὶ $\Gamma = 37^\circ 41' 3''$. Οὕτω,

$$\beta = \alpha\eta\mu B : \eta\mu A = 5{,}9844 \text{ καὶ } \gamma = 3{,}6678.$$

906. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $E = 57{,}20$ τ.μ., $\alpha = 8$ μ. καὶ $\varrho_\alpha = 10$ μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma$.

Εἶναι (τ. 71) $\varrho_\alpha = E : (\tau - \alpha) = 2E : (\beta + \gamma - \alpha)$ (§ 116). Ὅθεν $\beta + \gamma = (2E + \alpha\varrho_\alpha) : \varrho_\alpha =$
$= (114{,}40 + 80) : 10 = 19{,}44$ μ.

907. Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 3$ μ., $P = 2$ μ. καὶ αἱ γωνίαι του ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ.

Εἶναι $\eta\mu A = \alpha : 2P = 3 : 4$ καὶ $A = 48^\circ 35' 25''$. Ἂν δὲ ω ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι

$$A + (A + \omega) + (A + 2\omega) = 180^\circ. \text{ Ὅθεν } \omega = (180^\circ - 3A) : 3 = 11^\circ 24' 35'', \quad B = 60^\circ,$$
$$\Gamma = 71^\circ 24' 35'' \text{ καὶ (τ. 56) } \beta = 2\sqrt{3}, \quad \gamma = 3{,}79.$$

908. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραὶ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ καὶ ἡ περίμετρος ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου Α΄Β΄Γ΄. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγαλυτέρα γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν εἶναι $(AB\Gamma) : (A'B'\Gamma') = 3 : 5$.

Ἐκ τῶν πλευρῶν $x - y$, x καὶ $x + y$ τοῦ τριγ. ΑΒΓ ἔχομεν $2\tau = 3x$. Ὅθεν τοῦ τριγ. Α΄Β΄Γ΄ εἰς ὃ εἶναι $2\tau' = 3x$ ἡ πλευρά του εἶναι x. Ἐπειδὴ δὲ

$$E = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2} + y\right) \times \left(\frac{x}{2} - y\right)} = \frac{x}{4}\sqrt{3(x^2 - 4y^2)} \text{ καὶ } E' = \frac{1}{2}x^2\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{5} \quad \text{ἔχομεν}$$

$$\frac{x}{4}\sqrt{3(x^2 - 4y^2)} : \frac{\sqrt{3}\,x^2}{5} = \frac{3}{5} \text{ ἐξ ἧς } x = \frac{5y}{2}. \text{ Ὥστε τὸ ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς } \frac{3y}{2}, \frac{5y}{2} \text{ καὶ } \frac{7y}{2}.$$

Οὕτως τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 3, 5, 7 εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ. Ὅθεν τὸ συν. τῆς μεγαλυτέρας γωνίας εἶναι $\frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$, ἤτοι ἡ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι 120°.

909. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $E = 108$ τ.μ., $A = 45^\circ$ καὶ τὰς εφΑ, εφΒ, εφΓ ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

Εἶναι $\varepsilon\varphi A = 1$, $\varepsilon\varphi B = 1 + \lambda$ καὶ $\varepsilon\varphi\Gamma = 1 + 2\lambda$. Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma = 135^\circ - B$ εἶναι

$$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{-1 - \varepsilon\varphi B}{1 - \varepsilon\varphi B} \text{ ἤτοι } 1 + 2\lambda = \frac{-1 - 1 - \lambda}{1 - 1 - \lambda}. \text{ Ὅθεν } \lambda = 1,\ \varepsilon\varphi B = 2,\ \varepsilon\varphi\Gamma = 3,\ \eta\mu A = 1 :$$
$$: \sqrt{2} \text{ καὶ (§ 67,3) } \eta\mu B = 2 : \sqrt{5} \text{ καὶ } \eta\mu\Gamma = 3 : \sqrt{10}. \text{ Οὕτως, ἐπειδὴ (τ. 64)}$$

$$108 = \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν α καὶ κατόπιν τὰς β καὶ γ.}$$

910. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα καὶ περιμέτρους ἴσας. Τοῦ πρώτου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς $\alpha=50$ μ., $\beta=34$ μ., $\gamma=28$ μ. Νὰ ἐπιλυθῇ τότε τὸ δεύτερον τρίγωνον οὗ εἶναι $\alpha'=40$ μ.

Ἂν τὸ δεύτερον τρίγωνον ἔχει πλευρὰς $\alpha'=40$ μ., $\beta'=x-y$ καὶ $\gamma'=y$, θὰ εἶναι $40+x-y+y=112$ ἤτοι $x=72$ καὶ $\beta'=72-y$. Ἀλλ' ἐκ τῶν (ἴσων) ἐμβαδῶν $56\cdot 6\cdot 22\cdot 28=56\cdot 16\cdot (y-16)(56-y)$ εὑρίσκομεν $y^2-72y+1127=0$ καὶ $y=49$ ἢ 23. Ὅθεν τὸ Α'Β'Γ' ἔχει πλευρὰς $\alpha'=40$, $\beta'=23$ ἢ 49, $\gamma'=49$ ἢ 23 καὶ γωνίας αἵτινες εὐκόλως εὑρίσκονται.

911. Οἱ παρεγγεγραμμένοι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλοι ἔχουν κέντρα O_α, O_β, O_γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $O_\alpha O_\beta O_\gamma$, ὅταν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\tau=10$ μ. καὶ $P=8$ μ.

Εἶναι $(O_\alpha O_\beta O_\gamma)=\frac{1}{2}(O_\beta O_\gamma)(AO_\alpha)$. Ἀλλὰ (σχ. 63)$(O_\alpha E)=\varrho_\alpha=(O_\alpha A)$ ημ$\frac{A}{2}$.
Ἐὰν δὲ ἡ περιφέρεια κέντρου O_β ἔχῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ κοινὸν σημεῖον τὸ E_β εἶναι

$$(AO_\beta)=(AE_\beta)\ :\ \text{συν}O_\beta AE_\beta\ =\ (AE_\beta)\ :\ \text{συν}\left(90^0-\frac{A}{2}\right)=(\tau-\gamma):\text{ημ}\frac{A}{2}.$$

Ὁμοίως δὲ $(AO_\gamma)=(\tau-\beta):\text{ημ}\frac{A}{2}$. Ὅθεν $(AO_\beta)+(AO_\gamma)=(O_\beta O_\gamma)=(2\tau-\beta-\gamma):$ $:\text{ημ}\frac{A}{2}$ καὶ $(O_\alpha O_\beta O_\gamma)=\alpha\varrho_\alpha:2\text{ημ}^2\frac{A}{2}=\alpha\tau\text{εφ}\frac{A}{2}:2\text{ημ}^2\frac{A}{2}=\alpha\tau:\text{ημ}A=2P\tau=160$ τ.μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

ΚΥΡΤΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἔχει πλευράς :

912. 3, 5, 6 καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του.

$A=99^0\,36'$, $B=111^0\,52'$, $\Gamma=80^0\,24'$ καὶ $\Delta=68^0\,8'$ (περίπου).

913. 4, 5, 7 καὶ 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του. $S=4\sqrt{70}$ τ. μ.

914. 3, 5, 7, 10 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ x, y καὶ ἡ R. 9,6· 7,4. 5 μ.

915. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ πλευρὰς 5, 5, 12 καὶ 12 μ. εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες R καὶ r (ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου).

Ἂν $\alpha=5$, $\beta=5$, $\gamma=12$ καὶ $\delta=12$, εἶναι $\sqrt{\alpha^2+\delta^2}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}=13$. Ὅθεν $B\Delta=13$ μ. = διάμετρος τοῦ περ/μμένου κύκλου, ἤτοι $R=13:2=6{,}5$ μ. καὶ $S=\frac{1}{2}.12.5.2=60$ τ.μ. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον. Ἂν δὲ τὸ κέντρον του εἶναι Ο, εἶναι $S=$ εμ . ΟΑΒ + εμ . ΟΒΓ + εμ . ΟΓΔ + + εμ . ΟΔΑ $=\frac{r}{2}(5+5+12+12)$. Ὅθεν $r=2.60:34=60:17$ μ.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μέ :

916. $\frac{1}{2}xy$ημφ, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων x καὶ y.

Ἂν αἱ $x=(A\Gamma)$ καὶ $y=(B\Delta)$ τέμνωνται εἰς τὸ Ε καὶ γωνΑΕΔ = φ = γωνΒΕΓ εἶναι

$(\text{ΑΔΓ}) = (\text{ΑΕΔ}) + (\text{ΓΕΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΔΕ})(\text{ΑΕ})\eta\mu\varphi + \frac{1}{2}(\text{ΔΕ})(\text{ΓΕ})\eta\mu(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}(\text{ΔΕ}) \cdot x\eta\mu\varphi$. Ὁμοίως, $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΒΕ})x\eta\mu\varphi$. Ὅθεν $(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2}x(\text{ΒΕ} + \text{ΕΔ})\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}xy\eta\mu\varphi$.

917. $\frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)\,\varepsilon\varphi\varphi$, ὅπου ἡ ἄνω γωνία φ εἶναι ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς β ἢ τῆς δ.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν:

$\alpha^2 = (\text{ΑΕ})^2 + (\text{ΒΕ})^2 + 2(\text{ΑΕ})(\text{ΒΕ})\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\quad \beta^2 = (\text{ΒΕ})^2 + (\text{ΓΕ})^2 - 2(\text{ΒΕ})(\text{ΓΕ})\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\gamma^2 = (\text{ΓΕ})^2 + (\text{ΔΕ})^2 + 2(\text{ΓΕ})(\text{ΔΕ})\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\quad \delta^2 = (\text{ΔΕ})^2 + (\text{ΑΕ})^2 - 2(\text{ΔΕ})(\text{ΑΕ})\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ἀλλὰ $\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = (\alpha^2 + \gamma^2) - (\beta^2 + \delta^2) =$

$= 2[(\text{ΑΕ})(\text{ΒΕ}) + (\text{ΓΕ})(\text{ΔΕ}) + (\text{ΒΕ})(\text{ΓΕ}) + (\text{ΔΕ})(\text{ΑΕ})]\sigma\upsilon\nu\varphi =$

$= 2[(\text{ΑΕ})(\text{ΒΕ} + \text{ΔΕ}) + (\text{ΓΕ})(\text{ΒΕ} + \text{ΔΕ})]\sigma\upsilon\nu\varphi = 2(\text{ΑΓ})(\text{ΒΔ})\sigma\upsilon\nu\varphi = 2xy\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Ὅθεν (ἄσκ. 916) $S = \frac{1}{2}xy\eta\mu\varphi = \frac{1}{4}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)\varepsilon\varphi\varphi$.

918. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - (\beta^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2)^2}$. Εἶναι (ἄσκ. 916) $S^2 = \frac{1}{4}x^2y^2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi)$

$= \frac{1}{16}(4x^2y^2 - 4x^2y^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi) = \frac{1}{16}[4x^2y^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)^2]$.

919. $\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\omega}$, ὅπου $\omega = (\text{Β} + \text{Δ}) : 2$.

Ἐπειδὴ $S = (\text{ΑΒΓ}) + (\text{ΑΓΔ})$ εἶναι $4S = 2\alpha\beta\eta\mu\text{Β} + 2\gamma\delta\eta\mu\text{Δ}$ (1). Εἶναι δὲ (141, ἐξ. 1) $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 = 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\text{Β} - 2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\text{Δ}$ (2). Οὕτω δὲ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $16S^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 = 4\alpha^2\beta^2 + 4\gamma^2\delta^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu 2\omega = 4\alpha^2\beta^2 + 4\gamma^2\delta^2 - 8\alpha\beta\gamma\delta(2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1) = 4(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\omega$. Ὅθεν $16S^2 = 4(\alpha\beta + \gamma\delta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) - 16\alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\omega$ ἤτοι

(§ 141) $S^2 = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\omega$ (ι).

920. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,\eta\mu\omega$, ὅπου $\omega = (\text{Β} + \text{Δ}) : 2$.

Ἐδῶ εἶναι $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, ἤτοι $\tau = \alpha + \gamma = \beta + \delta$. Ὅθεν $\tau - \alpha = \gamma$, $\tau - \beta = \delta$, $\tau - \gamma = \alpha$ καὶ $\tau - \delta = \beta$ καὶ ἑπομένως ἡ σχέσις (ι) τῆς ἄσκ. 919 γίνεται $S^2 = \alpha\beta\gamma\delta - \alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\omega =$

$= \alpha\beta\gamma\delta(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \alpha\beta\gamma\delta\eta\mu^2\omega$.

921. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον εἶναι $S = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$ καὶ $r = 2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} : (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$.

1) Ἐδῶ εἶναι $2\omega = 180^\circ$, ἤτοι $\eta\mu\omega = 1$. Ὅθεν (ἄσκ. 920) $S = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$. 2) Εὑρίσκομεν (ἄσκ. 915) $r = 2S : (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} : (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$.

922. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον εἶναι

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - (\alpha\gamma - \beta\delta)^2}.$$

Ἐπειδὴ (ἄσκ. 920) $(\alpha + \gamma)^2 = (\beta + \delta)^2$, ἤτοι $\beta^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = 2(\alpha\gamma - \beta\delta)$

εἶναι (ἄσκ. 918) $S = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2y^2 - 4(\alpha\gamma - \beta\delta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - (\alpha\gamma - \beta\delta)^2}$.

923. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς περιγεγραμμένον περὶ κύκλον τετράπλευρον ΑΒΓΔ

εἶναι $(\text{ΑΒ})\eta\mu\frac{\text{Α}}{2}\eta\mu\frac{\text{Β}}{2} = (\text{ΓΔ})\eta\mu\frac{\text{Γ}}{2}\eta\mu\frac{\text{Δ}}{2}$.

Ἂν Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, αἱ ἐξ αὐτοῦ μέχρι τῶν κορυφῶν εὐθεῖαι διχοτομοῦν τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου. Ἂν δὲ Ε εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΕ καὶ ΟΒΕ, ἔχομεν $(\mathrm{AE}) = r\sigma\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}$, $(\mathrm{EB}) = r\sigma\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}$ καὶ $(\mathrm{AB}) =$

$r\left(\sigma\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}+\sigma\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = r\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} : \eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}$ ἤτοι $(\mathrm{AB})\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2} = r\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$. Ὁμοίως δὲ $(\Gamma\Delta)\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Delta}{2} = r\eta\mu\frac{\Gamma+\Delta}{2}$. Ἀλλὰ $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}+\frac{\Gamma+\Delta}{2} = 180^0$ ἤτοι $\eta\mu\frac{\Gamma+\Delta}{2} = \eta\mu\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}$, καὶ οὕτως ἕπεται ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης.

924. Τετραπλεύρου δίδονται αἱ πλευραὶ α, β, γ ὡς καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθοῦν ἡ πλευρὰ δ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ.

Ἂν αἱ πλευραὶ $(\mathrm{BA})=\alpha$ καὶ $(\Gamma\Delta)=\gamma$ προεκτεινόμεναι τέμνωνται εἰς τὸ Ε, εἶναι $\mathrm{E}=180^0-(\mathrm{B}+\Gamma)$ καὶ ἂν $(\mathrm{AE})=x$, $(\Delta\mathrm{E})=y$, ἐκ τοῦ τριγ. ΕΒΓ, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις: $(\alpha+x) : \eta\mu\Gamma = (\gamma+y) : \eta\mu\mathrm{B} = \beta : \eta\mu\mathrm{E}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $x = (\beta\eta\mu\Gamma - \alpha\eta\mu\mathrm{E}) : \eta\mu\mathrm{E}$, $y = (\beta\eta\mu\mathrm{B}-\gamma\eta\mu\mathrm{E}) : \eta\mu\mathrm{E}$ (1). Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγ. ΕΑΔ λαμβάνομεν $(\Delta\mathrm{A})^2=\delta^2=x^2+y^2-2xy\sigma\upsilon\nu\mathrm{E}$ ἤτοι (1) $\delta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{E}+\frac{\beta^2}{\eta\mu^2\mathrm{E}}(\eta\mu^2\mathrm{B}-\eta\mu^2\Gamma-2\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{E})-\frac{2\beta}{\eta\mu\mathrm{E}}[\gamma(\eta\mu\mathrm{B}-\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{E})+\alpha(\eta\mu\Gamma-\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\mathrm{E})]$. Ἀλλ' εἶναι $\eta\mu\mathrm{B}=\eta\mu(\mathrm{E}+\Gamma)$, ἤτοι $\eta\mu\mathrm{B}-\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{E}=\eta\mu\mathrm{E}\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκεται ὅτι $\eta\mu\Gamma-\eta\mu\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\mathrm{E}=\eta\mu\mathrm{E}\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}$. Ὅθεν $\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{E}-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $\mathrm{A}=\mathrm{E}\Delta\mathrm{A}+\mathrm{E}$ καὶ $\Delta=\mathrm{E}\mathrm{A}\Delta+\mathrm{E}$. Ἀλλ' ἡ μὲν Ε εἶναι γνωστὴ αἱ δὲ γωνίαι ΕΑΔ καὶ ΕΔΑ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου ΕΑΔ.

925. Τετραπλεύρου αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 3, 4, 7, 6 μ. καὶ $\mathrm{B}=90^0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $(\mathrm{A}\Gamma)=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΓΑΔ καὶ τὴν $\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{AB}+\Gamma\mathrm{A}\Delta$, ὁπότε $(\mathrm{B}\Delta)=\sqrt{3^2+6^2-2\cdot3\cdot6\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}$.

926. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου, ὅταν εἶναι $\mathrm{B}=40^0$ καὶ αἱ πλευραί του εἶναι κατὰ σειρὰν 4, 5, 6 καὶ 7 μ.

Εἶναι $(\mathrm{A}\Gamma)=\sqrt{4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\sigma\upsilon\nu40^0}=3{,}22$μ. $(\mathrm{B}\Delta)=10{,}55$ μ. (ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 925).

927. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τετραπλεύρου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 3, 4, 5, 6 μ. καὶ δύο ἀπέναντι γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 120^0.

Εἶναι (ἄσκ. 919) $S=\sqrt{6\cdot5\cdot4\cdot3-3\cdot4\cdot5\cdot6\sigma\upsilon\nu^2 60^0}=3\sqrt{30}$ τ.μ.

928. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, οὗ αἱ πλευραὶ εἶναι 3, 4, 5, 6μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν $3\sqrt{30}$ τ.μ.

Εἶναι $3\sqrt{30}=\sqrt{6\cdot5\cdot4\cdot3-3\cdot4\cdot5\cdot6\sigma\upsilon\nu^2\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=1:2$, $\omega=60^0$, ἤτοι $\mathrm{B}+\Delta=120^0$. Ἐκ δὲ τῆς σχέσεως $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=\gamma^2+\delta^2-2\gamma\delta\sigma\upsilon\nu\Delta$, εὑρίσκομεν $5\sigma\upsilon\nu\Delta-2\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=3$ ἤτοι $5\sigma\upsilon\nu(120^0-\mathrm{B})-2\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}=3$. Οὕτω δὲ ἀγόμεθα εἰς ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\beta\eta\mu\mathrm{B}=\gamma$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν Β καὶ ἔπειτα τὴν Δ. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Α καὶ Γ δι' ἃς εἶναι $\mathrm{A}+\Gamma=240^0$.

929. Τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 5 μ. αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι 3, 4 καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του καὶ ἡ τετάρτη πλευρά.

Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ἔστω αἱ γωνίαι $\Gamma\mathrm{A}\Delta=\varphi$, $\Delta\mathrm{BA}=\omega$, $\mathrm{A}\Gamma\mathrm{B}=\upsilon$ καὶ $\mathrm{B}\Delta\Gamma=\sigma$, ὁπότε $\Gamma\mathrm{B}\Delta=\varphi$, $\mathrm{A}\Gamma\Delta=\omega$, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=\upsilon$ καὶ $\mathrm{BA}\Gamma=\sigma$. Ἀλλ' ἐκ τῶν τριγώνων ΑΔΓ, ΑΓΒ, ΒΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\eta\mu\varphi=\frac{(\Delta\Gamma)}{2\mathrm{R}}=\frac{6}{10}$, $\eta\mu\upsilon=\frac{(\mathrm{AB})}{2\mathrm{R}}=\frac{3}{10}$

καὶ ημσ $= \frac{(ΒΓ)}{2R} = \frac{4}{10}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰς γωνίας φ, υ, σ καὶ τὰς $Α = φ + σ'$

$Δ = υ + σ$, $Β = 180^0 - Δ$, $Γ = 180^0 - Α$. Ἤδη εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ $δ = 2Rημω$, διότι $ω = Β - φ$.

930. Τετραπλεύρου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτῖνος (3 : 2) μ. αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ πλευραὶ εἶναι 6, 4 καὶ 3 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι του καὶ ἡ τετάρτη πλευρά.

Ἐπειδὴ (ἄσκ. 915) $6+3 = 4+δ$, εἶναι $δ = 5$. Ἀλλ' ἂν Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ Ε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ΑΒ, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΕ καὶ ΟΕΒ εὑρίσκομεν $σφ\frac{Α}{2} + σφ\frac{Β}{2} = \frac{α}{r}$.

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν, $σφ\frac{Β}{2} + σφ\frac{Γ}{2} = \frac{β}{r}$, $σφ\frac{Γ}{2} + σφ\frac{Δ}{2} = \frac{γ}{r}$ καὶ $σφ\frac{Δ}{2} + σφ\frac{Α}{2} = \frac{δ}{r}$. Εἶναι δὲ καὶ $\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} + \frac{Δ}{2} = 180^0$. Ὅθεν, $σφ\frac{Β}{2} = 4 - σφ\frac{Α}{2}$ (1), $σφ\frac{Γ}{2} = -\frac{4}{3} + σφ\frac{Α}{2}$ (2), $σφ\frac{Δ}{2} = \frac{10}{3} - σφ\frac{Α}{2}$ (3) καὶ $σφ\left(\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2}\right) + σφ\left(\frac{Γ}{2} + \frac{Δ}{2}\right) = 0$.

Ἐξ αὐτῆς δὲ (τ. 25) καὶ ἐκ τῶν ἄλλων εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(α+γ)r^2σφ^2\frac{Α}{2} - 2αδrσφ\frac{Α}{2} + (α+γ)r^2 - αδ(β-α) = 0$, ἤτοι τὴν $27σφ^2\frac{Α}{2} - 120σφ\frac{Α}{2} + 107 = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν $σφ\frac{Α}{2}$, τὴν γωνίαν $\frac{Α}{2}$ καὶ κατόπιν τὰς ἄλλας γωνίας ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3).

931. Νὰ ἐπιλυθῇ τετράπλευρον ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον ἐκ τῆς πλευρᾶς του α καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν του Α καὶ Β.

Ὡς ἐγγράψιμον εἶναι $Γ = 180^0 - Α$, $Δ = 180^0 - Β$ καὶ ὡς περιγράψιμον εἶναι (ἄσκ. 923)

$$r = αημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2} : ημ\frac{Α+Β}{2}.$$ Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν r, ἔπειτα τὴν πλευρὰν

$$β = rημ\frac{Β+Γ}{2} : ημ\frac{Β}{2}ημ\frac{Γ}{2}$$ κλπ. εὐκόλως.

932. Τραπεζίου ΑΒΓΔ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι αἱ (ΑΒ)=α καὶ (ΓΔ)=γ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) $x^2+y^2=β^2+δ^2+2αγ$ καὶ 2) $\frac{x^2-y^2}{δ^2-β^2} = \frac{α+γ}{α-γ}$.

Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους (ΑΓ)=x καὶ (ΒΔ)=y, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως·

$$x^2=α^2+β^2-2αβσυνΒ, \qquad y^2=α^2+δ^2-2αδσυνΑ$$
$$x^2=γ^2+δ^2+2γδσυνΑ. \qquad y^2=β^2+γ^2+2βγσυνΒ.$$ Ἐξ ὧν
$$αx^2+γy^2=(α+γ)(δ^2+αγ), \qquad γx^2+αy^2=(α+γ)(β^2+αγ).$$

Ἂν δὲ τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη θὰ εὕρωμεν $x^2+y^2=β^2+δ^2+2αγ$. Ἂν δὲ τὰς ἀφαιρέσωμεν θὰ εὕρωμεν $(α-γ)(x^2-y^2)=(α+γ)(δ^2-β^2)$.

933. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν του.

Αἱ ἐξισώσεις 1) καὶ 2) τῆς ἀσκ. 932 δίδουν $x^2=(αγ-βδ)+(αδ-βγ)\frac{β+δ}{α-γ}$ καὶ

$$y^2 = (αγ - βδ)+(αβ-γδ)\frac{β+δ}{α-γ}.$$

934. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παραλληλογράμμῳ ΑΒΓΔ εἶναι

$$x^2-y^2=4αβσυν(ΑΓ, ΒΔ),\quad α^2-β^2 = xyσυν(ΑΓ; ΒΔ)$$

ὅπου αἱ σημειούμεναι γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι καὶ ὅταν α>β καὶ x>y.

Ἐπειδὴ $(ΒΓ)=β=(ΑΔ)$ καὶ $Β+Α=180^\circ$, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ λαμβάνομεν

$$(ΑΓ)^2=x^2=α^2+β^2+2αβσυν(ΑΒ, ΒΓ) \qquad (ΒΔ)=y^2=α^2+β^2-2αβσυν(ΑΒ, ΒΓ).$$

Ὅθεν $x^2-y^2=2αβσυν(ΑΒ, ΒΓ)$. Ἂν δὲ αἱ x καὶ y τέμνωνται εἰς τὸ Ο, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ λαμβάνομεν

$$α^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\,συν\,(ΑΓ, ΒΔ)$$

$$β^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\,συν\,(ΑΓ, ΒΔ).$$

Ἑπομένως εἶναι $α^2-β^2=xyσυν(ΑΓ, ΒΔ)$.

935. Ἐὰν φ εἶναι ἡ γωνία τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, θὰ εἶναι:

$$εφφ=\frac{2αβ}{α^2-β^2} \quad καὶ \quad εφ\frac{φ}{2}=\frac{β}{α}.$$

Ὁ β΄ τύπος τῆς ἀσκ. 934, ἐπειδὴ $x=y$, γίνεται $α^2-β^2=x^2συνφ$. Ἀλλὰ $x^2=α^2+β^2$. Ὥστε $συνφ=\dfrac{α^2-β^2}{α^2+β^2}$, $ημφ=\sqrt{1-συν^2φ}=\dfrac{2αβ}{α^2+β^2}$, $εφφ=\dfrac{2αβ}{α^2-β^2}$ καὶ (τ. 44) $εφ\dfrac{φ}{2}=\dfrac{β}{α}$.

936. Νὰ ἐπιλυθῇ ῥόμβος ἐκ τῆς πλευρᾶς του α καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος r τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἔχομεν $E=2αr$, ἐὰν δὲ Ο εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ λαμβάνομεν $(ΟΑ)=ασυν\dfrac{Α}{2}$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΔ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΕΑ λαμβάνομεν $r=(ΟΑ).ημ\dfrac{Α}{2}$. Ἑπομένως εἶναι $2r=2αημ\dfrac{Α}{2}συν\dfrac{Α}{2}$ ἤτοι $2r=αημΑ$ καὶ $ημΑ=\dfrac{2r}{α}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν Α καὶ κατόπιν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα εὐκόλως.

937. Νὰ ἐπιλυθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν γωνιῶν του καὶ ἐκ τῶν διαγωνίων του.

Ἔστω ω καὶ φ αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων $(ΑΓ)=x$ καὶ $(ΒΔ)=y$ $(ΑΓ>ΒΔ)$ μετὰ τῆς βάσεως ΑΒ. Τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΑΓΒ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως, $\dfrac{ημ(Α-ω)}{(ΔΓ)}=$

$$=\frac{ημΔ(=ημΑ)}{x} \quad καὶ \quad \frac{ημ(Β-φ)}{(ΔΓ)}=\frac{ημΓ(=ημΒ)}{y}. \quad Ὅθεν$$

$$\frac{ημ(Α-ω)}{yημΑ}=\frac{ημ(Β-φ)}{xημΒ} \quad ἤτοι \quad \frac{ημ(Α-ω)+ημ(Β-φ)}{yημΑ+xημΒ}=\frac{ημ(Α-ω)-ημ(Β-φ)}{yημΑ-xημΒ}.$$

Ὅθεν:
$$εφ\frac{Α+Β-ω-φ}{2}:εφ\frac{Α-Β+φ-ω}{2}=\frac{yημΑ+xημΒ}{yημΑ-xημΒ} \quad (yημΑ>xημΒ).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $εφ\dfrac{φ+ω}{2}:εφ\dfrac{φ-ω}{2}=(x+y):(x-y)$. Ἤδη ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὰς $εφ\dfrac{φ+ω}{2}$, $εφ\dfrac{φ-ω}{2}$, καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς γωνίας ω καὶ φ καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα κατὰ τὰ γνωστά.

938. Κανονικοῦ δωδεκαγώνου πλευρᾶς 5 μ. νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες r, R καὶ τὸ ἐμβαδὸν S.

$r=2,5σφ15^\circ=2,5\,.\,3,7321$, $\quad R=2,5\,.\,συντ15^\circ=2,5\,.\,3,8637$ καὶ $S=12.5,2.2,5.3,7321$

939. Ἐκ δύο κανονικῶν ὀκταγώνων τὸ μὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον, τὸ δὲ εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των καὶ ὁ τῶν περιμέτρων των.

Ἂν ϱ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἔχομεν 1) ἐμβ. ἐγγ. ὀκτ. $= \frac{8\varrho^2}{2}\text{ημ}\frac{2\pi}{8}$, ἐμβ. περιγ. ὀκτ. $=$

$= 8\varrho^2\text{εφ}\frac{\pi}{8}$. Ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν $= \text{ημ}\frac{2\pi}{8} : 2\text{εφ}\frac{\pi}{8} = 2\text{ημ}\frac{\pi}{8}\text{συν}\frac{\pi}{8} : 2\text{εφ}\frac{\pi}{8} =$

$= 2\text{συν}^2\frac{\pi}{8} : 2 = \left(1+\text{συν}\frac{\pi}{4}\right) : 2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, 2) πλ. ἐγγ. ὀκτ. $= 2\varrho\text{ημ}\frac{\pi}{8}$, πλ. περ. ὀκτ. $=$

$= 2\varrho\text{εφ}\frac{\pi}{8}$ Ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν $= 2\text{συν}\frac{\pi}{8} : 2 = \sqrt{2+2\text{συν}\frac{\pi}{4}} : 2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

940. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ἰσοπεριμέτρων κανονικῶ πολυγώνων μὲ ν πλευρὰς τὸ ἓν καὶ 2ν τὸ ἄλλο ἰσοῦται μὲ $2\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : \left(1+\text{συν}\frac{\pi}{\nu}\right)$.

Ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ 1ου εἶναι α, ἡ τοῦ 2ου εἶναι $\alpha : 2$. Ὅθεν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των $=$

$\frac{\nu\alpha^2}{4}\text{σφ}\frac{\pi}{\nu} : \frac{\nu\alpha^2}{8}\text{σφ}\frac{\pi}{2\nu} = 2\text{σφ}\frac{\pi}{\nu} : \text{σφ}\frac{\pi}{2\nu} = 2\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : \text{σφ}\frac{\pi}{2\nu}\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{\nu} = 2\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : 2\text{συν}^2\frac{\pi}{2\nu} =$

$$= 2\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : \left(1+\text{συν}\frac{\pi}{\nu}\right).$$

941. Δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ ν καὶ 2ν πλευρὰς εἶναι περιγεγραμμένα περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁ δὲ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι 3 : 2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ν.

Εἶναι $\nu r^2\text{εφ}\frac{\pi}{\nu} : 2\nu r^2\text{εφ}\frac{\pi}{2\nu} = 3 : 2$ ἤτοι $3\text{εφ}\frac{\pi}{2\nu} = \text{εφ}\frac{\pi}{\nu}$, ἢ $3\text{εφ}\frac{\pi}{2\nu} =$

$= 2\text{εφ}\frac{\pi}{2\nu} : \left(1-\text{εφ}^2\frac{\pi}{2\nu}\right)$. Ὅθεν, $\text{εφ}\frac{\pi}{2\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2\nu} = \frac{\pi}{6}$ καὶ $\nu = 3$.

942. Ἐκ τριῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 2ν, ν καὶ ν πλευράς, τὰ δύο πρῶτα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, ἐνῷ τὸ τρίτον εἶναι περιεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον. Ἐὰν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν αὐτῶν πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως S_1, S_2, S_3 ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι $S_2 : S_1 = S_1 : S_3$.

Ἔχομεν $S_1 = \nu r^2\text{ημ}\frac{2\pi}{2\nu}$, $S_2 = \frac{\nu}{2} r^2\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$ καὶ $S_3 = \nu r^2\text{εφ}\frac{\pi}{\nu}$. Ὅθεν, $S_2 : S_1 =$

$= \frac{\nu}{2} r^2 2\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}\text{συν}\frac{\pi}{\nu} : \nu r^2\text{ημ}\frac{\pi}{\nu} = \text{συν}\frac{\pi}{\nu}$ καὶ $S_1 : S_3 = \nu r^2\text{ημ}\frac{\pi}{\nu} : \nu r^2\cdot\frac{\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}}{\text{συν}\frac{\pi}{\nu}} = \text{συν}\frac{\pi}{\nu}$.

943. Ἐὰν ἐκ δύο κανονικῶν πολυγώνων μὲ ν πλευρὰς ἕκαστον, τὸ ἓν εἶναι περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον $1 : \text{συν}^2\frac{\pi}{\nu}$, ἐνῷ ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου πολυγώνου, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου καὶ ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου πυλυγώνου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, $\frac{\pi}{\nu}$ συντ $\frac{\pi}{\nu}$ καὶ τεμ$\frac{\pi}{\nu}$.

Ἐὰν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τὰ ἐμβαδὰ ἔχουν λόγον $\nu\varrho^2\text{εφ}\frac{\pi}{\nu} : \frac{\nu}{2}\varrho^2\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu} =$

$= \nu\varrho^2\cdot\frac{\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}}{\text{συν}\frac{\pi}{\nu}} : \frac{2\nu}{2}\varrho^2\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}\text{συν}\frac{\pi}{\nu} = 1 : \text{συν}^2\frac{\pi}{\nu}$. Ἤδη αἱ περίμετροι εἶναι ἀντιστοίχως

$2\nu\varrho\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}$, $2\pi\varrho$, $2\nu\varrho\text{εφ}\frac{\pi}{\nu}$. Ἑπομένως ἐὰν διαιρέσωμεν αὐτὰς διὰ $2\nu\varrho\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}$, εὑρίσκομεν

1, $\frac{\pi}{\nu}\cdot\frac{1}{\text{ημ}\frac{\pi}{\nu}}$ καὶ $\frac{1}{\text{συν}\frac{\pi}{\nu}}$ ἤτοι 1, $\frac{\pi}{\nu}$ συντ$\frac{\pi}{\nu}$ καὶ τεμ$\frac{\pi}{\nu}$.

944. Ἐκ δύο κύκλων μὲ ἀκτῖνας R καὶ r, ὁ πρῶτος εἶναι περιγεγραμμένος, ἐνῷ ὁ δεύτερος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ αὐτὸ κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $R+r=\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}$, ὅπου α εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πολυγώνου.

$$\text{Εἶναι } R+r=\left(\alpha:2\eta\mu\frac{\pi}{\nu}\right)+\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\pi}{\nu}=\frac{\alpha}{2}\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\nu}\right):\eta\mu\frac{\pi}{\nu}=$$

$$=\frac{\alpha}{2}.\,2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2\nu}\ :\ 2\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\nu}=\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\pi}{2\nu}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

ΜΙΚΡΑΙ ΓΩΝΙΑΙ. ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΙ ΜΟΡΦΑΙ

Νὰ εὑρεθοῦν μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία αἱ τιμαὶ τῶν:

945. $\eta\mu 14'=\eta\mu\frac{14^0}{60}=\eta\mu\left(\frac{14}{60}\cdot\frac{\pi}{180}\right)=\frac{7.3{,}14159}{180.30}=0{,}00408$ (§ 6,148).

946. $\eta\mu 15''=\eta\mu\frac{15'}{60}=\eta\mu\frac{1^0}{4.60}=\frac{\pi}{180.4.60}=0{,}00007.$

947. $\sigma\upsilon\nu\tau 8''$. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\tau 8''=1:\eta\mu 8''$ καὶ $\eta\mu 8''=8\pi:60.60.180$ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\tau 8''=450.180:\pi=25783{,}10077.$

948. $\sigma\upsilon\nu 89^0\,69'=\eta\mu 1'=\pi:180.60=0{,}00029.$

949. $\sigma\varphi 89^0\,56'\,12''=\varepsilon\varphi 3'\,48''=228\pi:60.60.180=0{,}00110.$

950. $\tau\varepsilon\mu 88^0\,48'=\sigma\upsilon\nu\tau 1^0\,12'=1:\eta\mu 1^0\,12'=6\pi:5.180.$

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ:

951. $\lambda o\gamma\eta\mu 20'\,15''=\bar{3},77015$ [1]. ***952***. $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi 1^0\,30'=\bar{2},11806.$

953. $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu 89^0\,57'\,50'',4=\lambda o\gamma\eta\mu 2'\,9'',6=\bar{4},79818.$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία α δι' ἣν δίδεται:

954. $\lambda o\gamma\eta\mu\alpha=\bar{3},52012=\lambda o\gamma\eta\mu 11'\,23'',2.$ ***955***. $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\alpha=\bar{2},11123=$ $=\lambda o\gamma\varepsilon\varphi 44'\,24'',6.$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία α δι' ἣν δίδεται:

956. $\eta\mu\alpha=0{,}005=0{,}005$ ἀκ. $=0{,}005.180:\pi=0{,}005.206265''=17'\,11''.$

957. $\varepsilon\varphi\alpha=0{,}0055.\quad \alpha=0{,}0055\,.\,206265''=18'\,54''.$

958. $\sigma\upsilon\nu\alpha=0{,}9998$. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\alpha>1-\frac{\alpha^2}{2}$, ὅπου α εἶναι τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια γωνίας $<90^0$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδῶ ἡ γωνία εἶναι πολὺ μικρὰ θὰ λάβωμεν ἀντὶ τοῦ συνα τὸ $1-\frac{\alpha^2}{2}=0{,}9998$, ἐξ ἧς $\alpha^2=0{,}0004$ ἤτοι $\alpha=0{,}02$ ἀκτ. $=0{,}02.$ $206265''=1^0\,8'\,45''.$

959. Ἡ γωνία ὕψους πύργου τὸν ὁποῖον βλέπομεν ἐξ ἀποστάσεως 3000 μέτρων εἶναι 50'. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

1. Βλέπε «Πίνακας λογαρίθμων» (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 169—170.

Εἶναι $\upsilon = 3000\varepsilon\varphi 50'$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $50' = \frac{5^0}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{180}$ εἶναι $\varepsilon\varphi 50' = \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}01455$ καὶ $\upsilon = 3000 \cdot 0{,}01455 = 43{,}65$ μ.

960. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ὕψους βλέπομεν πύργον ὕψους 24 μέτρων ἐξ ἀποστάσεως 3000 μέτρων;

Ἂν α ἡ ζητουμένη γωνία, εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha = 24 : 3000 = 0{,}008$. Ὅθεν $\alpha = 0{,}008 \cdot 206265'' = 27'\,30'', 12$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

961. $y = \eta\mu\frac{x}{2} : x$, ὅταν $x = 0$. Ἐπειδὴ $\eta\mu\frac{x}{2} : x = \frac{1}{2}\eta\mu\frac{x}{2} : \frac{x}{2}$ εἶναι

$$ὅρy = \frac{1}{2}ὅρ\left(\eta\mu\frac{x}{2} : \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (\S\ 148).$$

962. $y = \frac{3\eta\mu 2x}{4x}$, ὅταν $x = 0$. $ὅρy = \frac{3}{2}ὅρ\frac{\eta\mu 2x}{2x} = \frac{3}{2}$.

963. $y = \eta\mu\frac{1}{\alpha}(x - x_1) : (x - x_1)$, ὅταν $x = x_1$.

$$Ὅρy = \frac{1}{\alpha}ὅρ\left[\eta\mu\frac{1}{\alpha}(x - x_1)\right] : \frac{1}{\alpha}(x - x_1) = \frac{1}{\alpha}.$$

964. $y = \frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}$, ὅταν $x = 0$. $Ὅρy = \frac{\alpha}{\beta}ὅρ\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x} : \frac{\eta\mu\beta x}{\beta x}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$.

965. $y = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 3x}$, ὅταν $x = 0$. $y = \eta\mu^2 x : \eta\mu^2\left(3 \cdot \frac{x}{2}\right) = 4\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} :$

$$: \left(3\eta\mu\frac{x}{2} - 4\eta\mu^3\frac{x}{2}\right)^2 = 4\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} : \left(9\eta\mu^2\frac{x}{2} - 24\eta\mu^4\frac{x}{2} + 16\eta\mu^6\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} : \left(9 - 24\eta\mu^2\frac{x}{2} + 16\eta\mu^4\frac{x}{2}\right).$$ Ὅθεν $ὅρy = 4 : 9$.

966. $y = \frac{\eta\mu x - 4\eta\mu 2x}{4\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi 2x}$, ὅταν $x = 0$. $y = \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 8 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x}\right) :$

$$: \left(4 \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - 2 \cdot \frac{\varepsilon\varphi 2x}{x}\right)$$ καὶ $ὅρy = (1 - 8) : (4 - 2) = -\frac{7}{2}$.

967. $y = \frac{\eta\mu 2x}{2x + 2x\sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x}$, ὅταν $x = 0$. $y = \frac{\eta\mu 2x}{2x(1 + \sigma\upsilon\nu 2x) + \eta\mu 2x}$

$$= \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{4\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} = 2\sigma\upsilon\nu x : \left(\frac{x}{\eta\mu x} \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x\right)$$ καὶ $ὅρy = \frac{1}{3}$.

968. $y = \tau\varepsilon\mu x - \varepsilon\varphi x$, ὅταν $x = \frac{\pi}{2}$. $y = \frac{1 - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$$ καὶ $ὅρy = 0$.

969. $y = \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi 3x}$, ὅταν $x = \frac{\pi}{2}$. $y = \frac{\varepsilon\varphi x(1 - 3\varepsilon\varphi^2 x)}{3\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi^3 x} = \frac{1 - 3\varepsilon\varphi^2 x}{3 - \varepsilon\varphi^2 x} =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu^2 x}{3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}$$ καὶ $ὅρy = \frac{-3}{-1} = 3$.

970. $y = \text{τοξημ}\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha} : \sqrt{\alpha^2-x^2}$. Ἂν $\text{τοξημ}\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha} = \omega$, εἶναι

$\text{ημ}\omega = \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha}$, ἤτοι $\alpha\,\text{ημ}\omega = \sqrt{\alpha^2-x^2}$. Ὅθεν $y = \frac{\omega}{\alpha\,\text{ημ}\omega} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\omega}{\text{ημ}\omega}$ καὶ ὅρ$y = \frac{1}{\alpha}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVIII

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΡΕΙΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

971. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς ἐπιπέδου σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος τούτου, ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὀξείας γωνίας, ἣν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς προβολῆς.

Βλέπε ἀπόδειξιν: «Μέθοδοι καὶ ὁδηγίαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας, Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελ. 166, 167, §§ 548—549.

972. Κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α εὑρεῖν 1) τὸ ὕψος 2) τὴν γωνίαν δύο ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ 3) τὴν γωνίαν μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ μετὰ τῆς ἀκμῆς, ἥτις τὴν τέμνει.

Βλέπε: Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι κλπ.», σελὶς 197 § 645.

973. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, πλευρᾶς α, καὶ εἰς τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτοῦ Κ ὑψοῦμεν κάθετον τοιαύτην, ὥστε (ΚΔ) : (ΑΒ) $=\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Νὰ εὑρεθῇ 1) ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΔΑΒ, 2) ἡ δίεδρος γωνία ΔΑΒΚ καὶ 3) ἡ δίεδρος γωνία ΒΔΑΓ.

Βλέπε «Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι κλπ.», σελὶς 181, § 565.

974. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τετραγώνου ΑΒΓΔ εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο ὑψοῦμεν κάθετον ΟΕ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου του. Εὑρεῖν, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ 2α, τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ καὶ τὰς διέδρους γωνίας ΕΑΒΟ καὶ ΓΕΑΒ.

Βλέπε: Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι κλπ.», σελὶς 176 § 566.

975. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἡ ΟΕ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου, νὰ εὑρεθοῦν αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΔΟ καὶ ΑΕΔΓ.

Βλέπε: «Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι κλπ.», σελὶς 177 § 567.

976. Κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν τετράγωνον γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως καὶ τὴν παράπλευρον ἀκμήν. Εὑρεῖν τὴν γωνίαν τῆς βάσεως μὲ μίαν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Ἔστω Ο, ΑΒΓΔ ἡ πυραμίς, Ε τὸ κέντρον τῆς βάσεως καὶ Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἔστω δὲ ἐπίσης (ΑΒ)=α καὶ (ΟΑ)=β. Τότε ἡ ΑΕ ὡς ἥμισυ τῆς διαγωνίου τετραγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Ὅθεν, $(ΟΕ)=\sqrt{(ΟΑ)^2-(ΑΕ)^2}=\sqrt{\frac{2\beta^2-\alpha^2}{2}}$ καὶ $\text{εφ}ΟΖΕ=\frac{(ΟΕ)}{(ΟΖ)}=\sqrt{\frac{2\beta^2-\alpha^2}{2}}:\frac{\alpha}{2}=$

$=\sqrt{\frac{2(2\beta^2-\alpha^2)}{\alpha^2}}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ΟΖΕ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

977. Κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν ἑξάγωνον τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Εὑρεῖν τὴν γωνίαν μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν μετὰ τῆς βάσεως, ὡς καὶ τὴν γωνίαν δύο διαδοχικῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Ἔστω Ο,ΑΒΓΔΕΖ ἡ πυραμίς, ΟΕ τὸ ὕψος της καὶ Μ τὸ μέσον τῆς (ΑΒ)=α. Τότε ἂν ϑ ἡ γωνία μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν μὲ τὴν βάσιν, ἔχομεν $\varepsilon\varphi\vartheta = \dfrac{(OE)}{(EM)} =$

$= \dfrac{\alpha}{\alpha\eta\mu 60^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ (ΟΕ)=(ΕΒ) εἶναι ΟΒΕ=45°. Ὥστε ἂν φέρωμεν τὴν ΑΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ τὴν ΑΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΒ, ἡ ΗΘ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΘ. Ὥστε, ἐὰν φ ἡ γωνία δύο διαδοχικῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος, θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2} = \varepsilon\varphi AH\Theta = \frac{(A\Theta)}{(H\Theta)} = \frac{\alpha\eta\mu 60^\circ}{(B\Theta)\eta\mu 45^\circ} = \alpha\eta\mu 60^\circ : \frac{\alpha}{2}\eta\mu 45^\circ = \alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}.$$

978. Ἐκ τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου Α ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο σφαίρας καὶ ἐκ τῆς γωνίας ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἀπὸ τοῦ σημείου, εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Α τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Ἂν δὲ εἰς τὴν περιφέρειάν του ἀχθοῦν ἐκ τοῦ Α ἐφαπτόμεναι, αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ, ἡ γωνία ΜΑΝ $= \omega$, εἶναι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ἡ σφαῖρα ἐκ τοῦ Α. Ἑπομένως εἶναι $OAM = \dfrac{\omega}{2}$ καὶ $(OM) = (AO)\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$.

979. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α περιστρέφεται περὶ ἄξονα Αx κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὑπὸ τοῦ τριγώνου γραφομένου στερεοῦ, ὅταν ἡ πλευρὰ ΑΒ σχηματίζῃ μὲ τὸν ἄξονα Αx, ὀξεῖαν γωνίαν ω.

Ὁ ζητούμενος ὄγκος $O = (\text{ἐπιφ. } \Gamma B)\cdot\dfrac{1}{3}(A\Delta)$, ὅπου ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ἀλλ' ἐὰν ΔΗ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Αx καὶ ω ἡ γωνία ΒΑx, ἔχομεν $(\text{ἐπιφ. } B\Gamma) = (B\Gamma)\,.\,2\pi(\Delta H) = \alpha\,.\,2\pi(A\Delta)\eta\mu(\Delta AH) = 2\alpha\pi\,.\,(A\Delta)\eta\mu(30^\circ+\omega)$. Ὥστε

$$\text{εἶναι } O = \frac{2\alpha\pi}{3}\,.\,(A\Delta)^2\eta\mu(30^\circ+\omega) = \frac{2\alpha\pi}{3}\cdot\frac{3\alpha^2}{4}\eta\mu(30^\circ+\omega) = \frac{1}{2}\pi\alpha^3\eta\mu(30^\circ+\omega).$$

980. Ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, οὗ δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι α καὶ β περιστρέφεται περὶ ἄξονα Αx κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου γραφομένου στερεοῦ, ὅταν ἡ πλευρὰ ΑΒ σχηματίζῃ μὲ τὸν ἄξονα Αx ὀξεῖαν γωνίαν ω.

Ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Αx, τὰς Ββ', Γγ', Δδ' καὶ Κκ'. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ὄγκος Ο εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ἤτοι εἶναι:

$$O = \pi[(B\beta')+(\Gamma\gamma')]\beta\cdot\frac{1}{3}\alpha + \pi[(\Gamma\gamma')+(\Delta\delta')]\alpha\cdot\frac{1}{3}\beta = \frac{1}{3}\alpha\beta\pi[2(\Gamma\gamma')+(B\beta')+(\Delta\delta')].$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓγ' ἔχομεν $2(\Gamma\gamma')=4(K\kappa')$· ἐκ δὲ τοῦ τραπεζίου δ'ΔΒβ' ἔχομεν $(B\beta')+(\Delta\delta')=2(K\kappa')$. Ὅθεν, $O=\alpha\beta\cdot 2\pi(K\kappa') = \alpha\beta\cdot 2\pi(AK)\eta\mu K A\kappa'$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $(AK) = \dfrac{(A\Gamma)}{2} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$ καὶ $KA\kappa' = KAB + BA\Gamma = \omega + \varphi$, ἔχομεν $O = \alpha\beta\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\eta\mu(\omega+\varphi)$. Σημειωτέον δὲ ὅτι ἡ γωνία φ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi\varphi = \beta : \alpha$.

981. Ἡμικύκλιον ΑΟΓΒ στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΑΟΓ ὁλόκληρον περιστροφὴν καὶ ὁ κυκλικὸς τομεὺς αὐτοῦ ΑΟΒ γράφει σφαιρικὸν τομέα, οὗ ὁ ὄγκος ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ὄγκου τῆς γραφομένης σφαίρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ.

Ἂν ἐκ τοῦ B φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν OA, τὴν BΔ, ἔχομεν ὄγκ. σφαιρ. τομ. AOB$=$ $=$(ζων. AB) $\cdot \frac{1}{3}$ (OA) $= 2\pi$(OA)(AΔ) $\cdot \frac{1}{3}$ (OA) $= \frac{2}{3}\pi\varrho^2 \upsilon$, ὅπου (OA)$=\varrho$ καὶ (AΔ)$=\upsilon$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ὄγκον σφαίρας $= \frac{4}{3}\pi\varrho^3$. Ὥστε εἶναι $\frac{4}{3}\pi\varrho^3 = 4 \cdot \frac{2}{3}\pi\varrho^2\upsilon$, ἤτοι $\varrho=$ $=2\upsilon$, ἢ ἐπειδὴ $\upsilon=$(OA)$-$(OΔ)$=$(OA)$-$(OB)συνAOB $= \varrho(1-$συνAOB), ἔχομεν $\varrho = 2\varrho(1-$ $-$συν AOB) ἤτοι συνAOB $= \frac{1}{2}$ καὶ AOB$=60^0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIX

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

982. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς x ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 ἡ συνάρτησις συν$(x+11^0)+$ $+$συν$(x-63^0)$ γίνεται μεγίστη.

Αὕτη, ἥτις γράφεται 2συν$(x-26^0)$συν37^0 γίνεται μεγίστη. ὅταν τὸ συν$(x-26^0)$ γίνῃ μέγιστον, ἤτοι ὅταν συν$(x-26^0)=1=$συν0^0, ἤτοι $x-26^0=0^0$ καὶ $x=26^0$.

983. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς x ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0 ἡ συνάρτησις ημ$(x+20^0)+$ $+$ημ$(x+40^0)$ γίνεται ἐλαχίστη.

Αὕτη, ἥτις γράφεται 2ημ$(x+30^0)$συν10^0 γίνεται ἐλαχίστη, ὅταν ημ$(x+30^0)=-1$. Ὅθεν $x+30^0=270^0$ καὶ $x=240^0$.

984. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς x ἀπὸ 0 ἕως π, ἡ συνάρτησις συν^{2}x$-$2ημ^{2}x ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν.

Ἐπειδὴ συν^{2}x$-$2ημ^{2}x$=$συν^{2}x$-2(1-$συν^{2}x$)=3$συν^{2}x-2, τὴν μεγίστην τιμὴν 1 τὴν δίδουν αἱ τιμαὶ $x=0$ ἢ π.

985. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς x ἡ συνάρτησις 3ημx$+$2συνx γίνεται μεγίστη.

Ἂν θέσωμεν εφω$=2:3$, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις μετασχηματίζεται (§ 104,γ) εἰς τὴν $\frac{3\text{ημ}(x+\omega)}{\text{συν}\omega}$. Γίνεται δὲ αὕτη μεγίστη, ὅταν ημ$(x+\omega)=1$, ἤτοι ὅταν $x+\omega=\frac{\pi}{2}$. Ὥστε, $\omega=$ $=\frac{\pi}{2}-x$, εφω$=$εφ$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $2:3=$σφx, εφx $=3:2$ καὶ $x=56^0\,18'\,36''$ καὶ γενικῶς $x=k\cdot 180^0+56^0\,18'\,36''$.

986. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς x, ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0, ἡ συνάρτησις ημ^{2}2x$+$ημ^{2}x γίνεται μεγίστη.

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται 4ημ^{2}xσυν^{2}x$+$ημ^{2}x $= 4(1-$συν^{2}x)συν^{2}x $+ 1-$συν^{2}x$=$ $=4$συν^{2}x-4συν$^4+1-$συν^{2}x$=1-(4$συν^{3}x-3συνx)συνx$=1-$συν3xσυνx. Ἀλλ' ἐπειδὴ 2συν3x συνx$=$συν4x$+$συν2x$=2$συν^{2}2x$-1+$συν2x, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γίνεται $1-\frac{1}{2}$(2συν^{2}2x $+$συν2x-1), ἥτις θὰ εἶναι μεγίστη ὅταν τὸ τριώνυμον 2συν^{2}2x$+$συν2x-1 γίνῃ ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ῥίζαι τούτου εἶναι -1 καὶ $\frac{1}{2}$, γίνεται ἐλάχιστον ὅταν συν2x $=\left(-1+\frac{1}{2}\right)$ $:2=-\frac{1}{4}$. Οὕτως εἶναι $2x=104^0\,28'$ ἢ $360^0-104^0\,28'=255^0\,32'$ καὶ $x=52^0\,14'$ ἢ $127\,46'$.

987. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς x ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0, ἡ συνάρτησις ημ^{2}x $-\frac{1}{3}$. .ημ^{2}3x γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\frac{1-\text{συν}2x}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\text{συν}6x}{2}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ συν6x=συν(3 · 2x)=4συν^{3}2x—3συν2x, ἔχομεν $\frac{1-\text{συν}2x}{2}-\frac{1-4\text{συν}^3 2x+3\text{συν}2x}{6}$

$=\frac{1}{3}-\text{συν}2x\left(1-\frac{2}{3}\text{συν}^2 2x\right)$. Ἐκ τῆς γραφικῆς δὲ παραστάσεως τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν, ὅτι αὕτη γίνεται μεγίστη διὰ $x = 67^0\ 30'$ ἢ $112^0\ 30'$ καὶ ἐλαχίστη διὰ $x=22^0\ 30'$ ἢ $157^0\ 30'$.

988. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς x, ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0, ἡ συνάρτησις εφαεφx+σφασφx γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη $(0^0<α<90^0)$.

Ἐπειδὴ διὰ $0^0<x<90^0$ οἱ ὅροι τῆς συναρτήσεως εἶναι θετικοὶ καὶ ἔχουν γινόμενον εφαεφxσφασφx=1 (σταθερόν), αὕτη θὰ εἶναι ἐλαχίστη, ὅταν εφαεφx=1, ἤτοι εφx=σφα= =εφ$(90^0-α)$. Ὅθεν ἡ συνάρτησις θὰ εἶναι ἐλαχίστη ὅταν $x=90^0-α$.

Διὰ $90^0<x<180^0$, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται —[εφαεφ(180^0-x)+σφασφ(180^0-x)]. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ὅροι ἔχουν γινόμενον 1 (σταθερόν), ἡ συνάρτησις γίνεται μεγίστη ὅταν εφ(180^0-x)=εφ$(90^0-α)$ ἤτοι ὅταν $180^0-x=90^0-α$ ἤτοι ὅταν $x=90^0+α$.

989. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως y=(εφ3x—εφ^{3}x) : εφx.

Εἶναι $y=\frac{\text{εφ}3x}{\text{εφ}x}-\text{εφ}^2x=\frac{3-\text{εφ}^2x}{1-3\text{εφ}^2x}-\text{εφ}^2x$. Ὅθεν. $3\text{εφ}^4x-(2-3y)\text{εφ}^2x+3-y=0$.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ῥίζας πραγματικὰς ὅταν $3<y<-4\sqrt{2}:3$. Ὅθεν τὸ μέγιστον εἶναι $-4\sqrt{2}:3$ καὶ τὸ ἐλάχιστον 3.

990. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως $y=\frac{5\text{ημ}x+6\text{συν}x+7}{3\text{ημ}x+4\text{συν}x+5}$.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ ημx καὶ συνx μὲ τὰς τιμάς των τῶν τύπων 46 καὶ 47, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις τὸ τριώνυμον $(1-y)\text{εφ}^2\frac{x}{2}+2(5-3y)\text{εφ}\frac{x}{2}+(19-3y)$ μὲ μέγιστον 3 : 2.

991. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως ημx+ημy, ὅταν τὰ τόξα x καὶ y εἶναι θετικά, μεταβλητὰ καὶ ἔχουν ἄθροισμα x+y = A σταθερὸν καὶ μικρότερον τοῦ π.

Ἐπειδὴ $\text{ημ}x+\text{ημ}y=2\text{ημ}\frac{x+y}{2}\text{συν}\frac{x-y}{2}=2\text{ημ}\frac{A}{2}\cdot\text{συν}\frac{x-y}{2}$, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις θὰ εἶναι μεγίστη, ὅταν $|x-y|$ εἶναι ἐλάχιστον.

Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τοὺς αὐτούς, ὡς προηγουμένως ὅρους τὸ μέγιστον τῶν συναρτήσεων :

992. ημxημy. *993*. συνx+συνy $\left(A<\frac{\pi}{2}\right)$. *994*. συνxσυνy $\left(A<\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύομεν τὰς τρεῖς αὐτὰς ἀσκήσεις, ὡς τὴν ἄσκησιν 991.

995. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως σφxσφyσφω, ὅταν x+y+ω = π.

Τὸ μέγιστον αὐτῆς εἶναι τὸ μέγιστον τοῦ τετραγώνου της. Ἐπειδὴ ὅμως (ἄσκ. 527) σφxσφy+σφyσφω+σφωσφx = 1 (σταθερόν), ἔχομεν μέγιστον ὅταν σφx = σφy = σφω. Οὕτω τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\text{σφ}^3\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

996. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως εφxεφyεφω ὅταν $x+y+ω=(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω μέγιστον ἴσον μὲ $\text{εφ}^3\frac{(4k+1)\pi}{6}$.

997. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, μὲ τὴν αὐτὴν διαγώνιον δ, εὑρεῖν τὸ ἔχον τὴν μεγίστην περίμετρον.

Ἐὰν ω ἡ γωνία τῆς διαγωνίου μετὰ τῆς βάσεως, αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦνται μὲ δσυνω καὶ δημω, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν, ἤτοι ἡ ἡμιπερίμετρος τ, ἰσοῦται μὲ $\tau = \delta(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) = \delta[\eta\mu\omega + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = 2\delta\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ἡ τ εἶναι μεγίστη, ὅταν τὸ $\sigma\upsilon\nu\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$ εἶναι μέγιστον, ἤτοι ὅταν $\omega = \frac{\pi}{4}$. Ἀλλὰ τότε τὸ σχῆμα εἶναι τετράγωνον.

998. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, μὲ τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν α, ποῖον ἔχει τὸν λόγον $\alpha : 2\tau$ ἐλάχιστον.

Ὁ λόγος $\frac{\alpha}{2\tau} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha + \alpha\eta\mu B + \alpha\sigma\upsilon\nu B} = \frac{1}{1 + \eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B}$ εἶναι ἐλάχιστος, ὅταν τὸ $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B$ εἶναι μέγιστον, ἤτοι ὅταν (ἄσκ. 997) $B = 45^0$.

999. Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον δοθείσης ἀκτῖνος Ρ, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

Ἔχομεν $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = 2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$. Ἀλλ' ἐὰν Α εἶναι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς, θὰ εἶναι $B = \Gamma = \frac{180^0 - A}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$. Ὥστε εἶναι $E = 2P^2\eta\mu A \,.\, \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = 4P^2\eta\mu\frac{A}{2}$. $.\sigma\upsilon\nu^3\frac{A}{2}$. Ὥστε τὸ Ε εἶναι μέγιστον, όταν τὸ $\left(\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)^1\left(1 - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right)^3$ εἶναι μέγιστον. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu^2\frac{A}{2} + 1 - \eta\mu^2\frac{A}{2} = 1$, συμβαίνει τοῦτο ὅταν $\eta\mu^2\frac{A}{2} : 1 = \left(1 - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right) : 3$

ἤτοι ὅταν $\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\frac{A}{2} = 30^0$ καὶ $A = 60^0$.

1000. Ποῖον ἐκ τῶν τριγώνων μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν α καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$. Ἀλλὰ τὸ μέγιστον τῆς $\frac{A}{2}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$, οὗ οἱ παράγοντες ἔχουν ἄθροισμα $2\tau - (\beta+\gamma)$ σταθερόν. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει, ὅταν $\tau - \beta = \tau - \gamma$, ἤτοι ὅταν $\beta = \gamma$.

1001. Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κυκλικὸν τομέα δοθείσης ἀκτῖνος Ρ.

Ἔστω ΟΑΒ ὁ κυκλικὸς τομεὺς κέντρου Ο καὶ ΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον οὗ ἡ πλευρὰ ΓΔ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου ΑΒ. Ἔστω δὲ ἐπίσης Μ καὶ Η τὰ μέσα τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ ἀντιστοίχως. Τότε δὲ ἔχομεν $S = (\Gamma\Delta)(\Gamma Z) = 2(\Gamma H)(\Gamma Z)$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $\Gamma OM = x$ καὶ $AZ\Gamma = \alpha$ (σταθερὸν) εἶναι $(\Gamma H) = (O\Gamma)\eta\mu x = P\eta\mu x$ καὶ $\frac{(\Gamma Z)}{\eta\mu ZO\Gamma} = \frac{(O\Gamma)}{\eta\mu OZ\Gamma}$, ἤτοι $(\Gamma Z) = \frac{P\eta\mu(\alpha - x)}{\eta\mu\alpha}$. Ἑπομένως εἶναι $S = \frac{2P^2\eta\mu x\eta\mu(\alpha - x)}{\eta\mu\alpha}$. Τὸ δὲ μέγιστον τοῦ S συμβαίνει, ὅταν τὸ $\eta\mu x\eta\mu(\alpha - x)$ γίνῃ μέγιστον, ἤτοι, ἐπειδὴ $x + \alpha - x = \alpha$, ὅταν εἶναι $\alpha - x = x$, ἤτοι $x = \alpha : 2$. Ἑπομένως ἡ κορυφὴ Γ πρέπει νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΜ.

1002. Εὑρεῖν τὸ μέγιστον τῶν τετραπλεύρων τῶν ἐχόντων δοθείσας πλευρὰς α, β, γ, δ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο γίνεται μέγιστον ὅταν (ἄσκ. 919) τὸ αβγδσυνω γίνῃ ἐλάχιστον, ἤτοι ὅταν $\omega = 90^0$.

1003. Ἐκ τῶν τραπεζίων μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον δοθείσης ἀκτῖνος Ρ, εὑρεῖν τὸ μέγιστον.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ βάσεις τοῦ μεγίστου τραπεζίου, ἔστω αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ θὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο. Ἐὰν δὲ τότε Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν βάσεων τούτων ἀντιστοίχως καὶ α καὶ β αἱ γωνίαι ΛΟΕ καὶ ΔΟΖ, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΕ καὶ ΔΟΖ λαμβάνομεν $(ΑΕ) = (ΑΟ)ημα = Ρημα$, $(ΟΕ) = Ρσυνα$, $(ΔΖ) = Ρημβ$ καὶ $(ΟΖ) = Ρσυνβ$. Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μὲ $S = Ρ^2(ημα+ημβ)(συνα+συνβ)$. Γίνεται δὲ τοῦτο μέγιστον, ὅταν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων γίνῃ μέγιστον. Ἑπομένως ὅταν καὶ τὸ γινόμενον $(ημα+ημβ)^2(συνα+συνβ)^2 = 2.[1+συν(α-β)]$ γίνῃ μέγιστον. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει ὅταν $α = β$, ὁπότε τὸ μέγιστον τραπέζιον εἶναι ὀρθογώνιον.

1004. Δοθεῖσα γωνία Α μικροτέρα τῶν 90^0 νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο γωνίας x καὶ y τοιαύτας, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων των νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

Εἶναι $εφx + εφy = \frac{ημ(x+y)}{συνxσυνy} = \frac{2ημΑ}{2συνxσυνy} = \frac{2ημΑ}{συνΑ+συν(x-y)}$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον παρατηρεῖται ὅταν τὸ $συν(x-y)$ γίνεται μέγιστον, ἤτοι ὅταν $x=y=\frac{Α}{2}$.

1005. Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος Ρ, εὑρεῖν τὸν ἔχοντα τὴν μεγαλυτέραν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.

Ἐὰν x εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ 2y τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν $Ε=2πx^2+4πxy$. Ἀλλ' ἐὰν ω εἶναι ἡ γωνία τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας μετὰ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως εἶναι $x=Ρσυνω$ καὶ $y=Ρημω$. Ὅθεν, $Ε=2πΡ^2συν^2ω+4πΡ^2ημωσυνω=2πΡ^2(συν^2ω+ημ2ω)$ καὶ τὸ ζητούμενον μέγιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ $συν^2ω+ημ2ω=2συν^2ω+2ημ2ω=1+συν2ω+2ημ2ω$, δηλαδὴ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ $συν2ω+2ημ2ω$. Ἀλλ' ἐὰν θέσωμεν $εφθ=2$ θὰ ἔχωμεν $συν2ω+2ημ2ω=συν(2ω-θ):συνθ$. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον μέγιστον συμβαίνει ὅταν $συν(2ω-θ)=1$, ἤτοι ὅταν $ω=\frac{θ}{2}$.

1006. Ἐκ τῶν (ὀρθῶν) κώνων τῶν περιγεγραμμένων περὶ σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος ϱ εὑρεῖν τὸν ἔχοντα τὸν ἐλάχιστον ὄγκον.

Ἂν x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἔχομεν $Ο=\frac{1}{3}πx^2υ$. Ἀλλ' ἂν ω τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ἔχομεν $υ=ϱ+\frac{ϱ}{ημω}=\frac{ϱ(1+ημω)}{ημω}$ καὶ $x=υεφω=\frac{ϱ(1+ημω)}{συνω}$. Ὥστε $Ο=\frac{1}{3}πϱ^3\cdot\frac{(1+ημω)^3}{συν^2ωημω}=\frac{1}{3}πϱ^3\cdot\frac{(1+ημω)^2}{ημω(1-ημω)}$ καὶ τὸ ἐλάχιστον τοῦ ὄγκου Ο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλάχιστον τοῦ $\frac{(1+ημω)^2}{ημω(1-ημω)}=y$. Ἀλλὰ τότε εὑρίσκομεν $(y+1)ημ^2ω-(y-2)ημω+1=0$ καὶ $ημω=\frac{(y-2)\pm\sqrt{y(y-8)}}{2(y+1)}$. Ὥστε ἵνα τὸ ημω εἶναι πραγματικὸν πρέπει νὰ εἶναι $y\leqq0$ ἢ $y\geqq8$. Ἐὰν δὲ εἶναι $y=8$, ὁπότε θὰ εἶναι $ημω=\frac{1}{3}$, θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον..

1007. Εἰς σφαιρικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ ὁ μέγιστος κύλινδρος.

Εὑρίσκομεν (ἄσκ. 1001), ὄγκος κυλίνδρου $=πΡ^3\cdot\frac{ημ^2xημ(α-x)}{ημα}$. Γίνεται δὲ μέγιστος ὅταν $\frac{x}{2}=\frac{α-x}{1}$, ἤτοι ὅταν $x=\frac{2}{3}α$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XX

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1008. Εὐθεῖα ΒΓΔΕ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους ἄρχεται ἀπὸ τῆς βάσεως Β πύργου ΒΑ, αἱ δὲ γωνίαι ὕψους τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Α ἀπὸ τῶν σημείων Ε, Δ, Γ εἶναι φ, 2φ καὶ 3φ ἀντιστοίχως. Εὑρεῖν τὸ ὕψος (ΒΑ)=υ καὶ τὴν ἀπόστασιν (ΒΓ) =α, ὅταν (ΕΔ)=25 μ. καὶ (ΔΓ)=10 μ.

Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΒΕ, ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν $\sigma\varphi\varphi = \dfrac{35+\alpha}{\upsilon}$ (1), $\sigma\varphi 2\varphi = \dfrac{10+\alpha}{\upsilon}$ (2) καὶ $\sigma\varphi 3\varphi = \dfrac{\alpha}{\upsilon}$ (3). Εὑρίσκομεν δὲ (τ. 33 καὶ 37) ἐκ τῆς (2) τὴν ἐξίσωσιν $2(10+\alpha)(35+\alpha)=(35+\alpha)^2-\upsilon^2$ καὶ ἐκ τῆς (3) τὴν $\alpha(45+2\alpha)=(35+\alpha)(10+\alpha)-\upsilon^2$. Οὕτως ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\alpha=8,75$ μ. καὶ $\upsilon=16,53$ μ.

1009. Τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἥτις δὲν διέρχεται διὰ τῆς βάσεως Δ πύργου ΔΕ. Ἐκ τῶν σημείων δὲ τούτων αἱ γωνίαι ὕψους τῆς κορυφῆς Ε τοῦ πύργου εἶναι ἀντιστοίχως θ, φ, ω. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου ὅταν (ΑΒ)=(ΒΓ)=α.

Ἡ ΔΒ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΔΓ. Ὅθεν, $(\mathrm{A\Delta})^2+(\Gamma\Delta)^2=2(\mathrm{B\Delta})^2+2\alpha^2$ (1). Ἀλλ᾽ ἂν (ΔΕ)=υ, ἔχομεν (ΑΔ)=υσφθ, (ΒΔ)=υσφφ καὶ (ΓΔ)=υσφω. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\upsilon^2\sigma\varphi^2\theta+\upsilon^2\sigma\varphi^2\omega=2\upsilon^2\sigma\varphi^2\varphi+2\alpha^2,\quad \text{ἐξ ἧς}\quad \upsilon=\alpha\sqrt{2}:\sqrt{\sigma\varphi^2\theta+\sigma\varphi^2\omega-2\sigma\varphi^2\varphi}.$$

1010. Ἂν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς §172 εἶναι $x+\varphi=y+\omega$, θὰ εἶναι $(\Gamma\Delta)=\alpha\eta\mu(x-y):\eta\mu(x+\varphi)$.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΓΑΒ καὶ ΔΑΒ ἔχομεν $x+\varphi+\mathrm{A\Gamma B}=y+\omega+\mathrm{A\Delta B}$, ἤτοι ΑΓΒ = ΑΔΒ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α, Β, Δ, Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ὅθεν ΓΒΑ = ΓΔΑ ἤτοι φ = ΓΔΑ. Ἤδη ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ λαμβάνομεν $\dfrac{(\Gamma\Delta)}{\eta\mu(x-y)}=\dfrac{(\mathrm{A}\Gamma)}{\eta\mu\varphi}$. Ὥστε

$$(\Gamma\Delta)=\frac{(\mathrm{A}\Gamma)\eta\mu(x-y)}{\eta\mu\varphi}=\frac{\alpha\eta\mu(x-y)}{\eta\mu(x+\varphi)}.$$

1011. Λόφος ἔχει τὸ σχῆμα σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν κειμένην ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ λόφου συναντᾷ τὸ ἔδαφος ὑπὸ γωνίαν ω, παρατηρητὴς δὲ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τῆς περιφερείας, ἥτις εἶναι τομὴ τοῦ λόφου καὶ τοῦ ἐδάφους, βλέπει τὸ ὑψηλότερον ὁρατὸν σημεῖον τοῦ λόφου ὑπὸ γωνίαν φ. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος τοῦ λόφου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους ἰσοῦται μὲ $\alpha\eta\mu\varphi\eta\mu^2\dfrac{\omega}{2}:\eta\mu^2\dfrac{\omega-\varphi}{2}$.

Ἔστω Β ὁ παρατηρητὴς καὶ α = (ΒΑ). Ὑποθέτομεν δὲ τὸ Β ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας ἀκτῖνος ρ. Ἔστω δὲ Γ τὸ ὑψηλότερον σημεῖον αὐτοῦ καὶ Ν ἡ τομὴ τῆς ΟΓ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ. Τότε ἂν φέρωμεν τὴν ΑΙ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου εἰς τὸ Α, θὰ εἶναι ΙΑΝ = ω = ΑΟΝ. Ἂν δὲ φέρωμεν τὴν ΒΠ ἐφαπτομένην τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας τέμνουσαν τὴν ΑΙ εἰς τὸ Ι, θὰ εἶναι ΙΒΑ = φ = ΠΟΓ. Οὕτως ἐκ τοῦ τριγ. ΙΑΒ ἔχομεν (ΒΑ) : ημΒΙΑ = (ΑΙ) : ημφ(1). Ἀλλ᾽ ὡς ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΙΑΟ εὑρίσκομεν, εἶναι ΒΙΑ = ω − φ, καὶ $(\mathrm{IA})=(\mathrm{AO})\varepsilon\varphi\mathrm{AOI}=\varrho\varepsilon\varphi\dfrac{\omega-\varphi}{2}$. Ὅθεν ἡ (1) γράφεται $\alpha:\eta\mu(\omega-\varphi)=\varrho\varepsilon\varphi\dfrac{\omega-\varphi}{2}:\eta\mu\varphi$, ἐξ ἧς $\varrho=\alpha\eta\mu\varphi:\eta\mu(\omega-\varphi)\,.\,\varepsilon\varphi\dfrac{\omega-\varphi}{2}=\alpha\eta\mu\varphi:2\eta\mu^2\dfrac{\omega-\varphi}{2}$. Ἀλλὰ τὸ ζητ. ὕψος $\mathrm{N\Gamma}=\mathrm{O\Gamma}-\mathrm{ON}=\varrho-\varrho\sigma\upsilon\nu\omega=\varrho(1-\sigma\upsilon\nu\omega)=2\varrho\eta\mu^2\dfrac{\omega}{2}$. Ὅθεν

$$(\text{ΝΓ}) = \alpha\,\etaμ\varphi\,\etaμ^2\frac{\omega}{2} : \etaμ^2\frac{\omega-\varphi}{2}.$$

1012. Ἐκ σημείου Α εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους βλέπει τις δύο ἀντικείμενα Μ καὶ Ν ὑπὸ γωνίας ΜΑΒ $=\omega$ καὶ ΝΑΒ $=\varphi(\omega>\varphi)$. Κατόπιν βαδίζων ἐπὶ τῆς εὐθείας πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β φθάνει εἰς σημεῖον Γ ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπει τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΜΝ, ὅταν (ΑΓ) $=\alpha$ καὶ ΜΓΑ $=\vartheta$.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΝΓ καὶ ΑΜΓ λαμβάνομεν $\dfrac{(\text{ΓΝ})}{\etaμ\varphi} = \dfrac{(\text{ΑΓ})}{\etaμ(\varphi+\vartheta)}$ καὶ $\dfrac{(\text{ΓΜ})}{\etaμ\omega} =$

$= \dfrac{(\text{ΑΓ})}{\etaμ(\omega+\vartheta)}$. Ὅθεν, $(\text{ΓΜ}-\text{ΓΝ}) = (\text{ΜΝ}) = \alpha\left[\dfrac{\etaμ\omega}{\etaμ(\omega+\vartheta)} - \dfrac{\etaμ\varphi}{\etaμ(\varphi+\vartheta)}\right] =$

$$= \alpha.\frac{\sigmaυν(\varphi+\vartheta-\omega)-\sigmaυν(\omega+\vartheta-\varphi)}{2\etaμ(\omega+\vartheta)\etaμ(\varphi+\vartheta)} = \alpha.\frac{\etaμ(\omega-\varphi)\etaμ\vartheta}{\etaμ(\omega+\vartheta)\etaμ(\varphi+\vartheta)}.$$

1013. Βαδίζων τις ἐπ' εὐθείας ΑΒ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ Α βλέπει δύο ἀντικείμενα Μ καὶ Ν ὑπὸ τὴν μεγίστην γωνίαν ΜΑΝ$=\omega$, ὅταν δὲ εὑρίσκεται εἰς τὸ Β βλέπει ταῦτα ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΜΝ, ὅταν (ΑΒ)$=\alpha$ καὶ ΜΒΑ$=\varphi$.

Ἡ περιφέρεια ΑΜΝ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὅθεν, ΑΜΒ $=$ ΝΑΒ $=\vartheta=90^0-$ $-\dfrac{\omega+\varphi}{2}$. Ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΜΑΝ καὶ ΝΑΒ λαμβάνομεν

$$\frac{(\text{ΜΝ})}{\etaμ\omega} = \frac{(\text{ΑΝ})}{\etaμ\vartheta} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(\text{ΑΝ})}{\etaμ\varphi} = \frac{(\text{ΑΒ})}{\etaμ(\vartheta+\omega)}.$$

$$\text{Ὥστε, } (\text{ΜΝ}) = \alpha\,.\frac{\etaμ\omega\etaμ\varphi}{\etaμ\vartheta\etaμ(\vartheta+\omega)} = \alpha\cdot\frac{\etaμ\omega\etaμ\varphi}{\sigmaυν\dfrac{\omega+\varphi}{2}\,\sigmaυν\dfrac{\omega-\varphi}{2}}.$$

1014. Ἀεροπλάνον διαγράφει περιφέρειαν ὁριζοντίου κύκλου ἀκτῖνος ϱ, παρατηρητὴς δὲ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἐνῷ τὸ ἀεροπλάνον ἵπταται πέριξ αὐτοῦ σημειώνει ὅτι ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη γωνία ὕψους τοῦ ἀεροπλάνου εἶναι ω καὶ φ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους.

Ἂν ἡ κατακόρυφος διὰ τοῦ παρατηρητοῦ τέμνῃ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου εἰς δύο τμήματα α καὶ β, ἔχομεν $\alpha=\upsilon\sigmaφ\omega$, $\beta=\upsilon\sigmaφ\varphi$ καὶ $\upsilon=2\varrho\etaμ\omega\etaμ\varphi : \etaμ(\omega+\varphi)$.

1015. Ἀεροπλάνον ἱπτάμενον κατ' εὐθεῖαν γραμμήν, διῆλθε κατακορύφως ὑπεράνω δύο σημείων Α καὶ Β ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Τὸ ἀεροπλάνον ὅταν εὑρέθη ὑπεράνω τοῦ Α ἐφάνη ἐκ τοῦ Β ὑπὸ γωνίαν 75^0, ὅταν δὲ εὑρέθη ὑπεράνω τοῦ Β ἐφάνη ἐκ τοῦ Α ὑπὸ γωνίαν 60^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τοῦ σημείου Γ τῆς προσγειώσεώς του, ὅταν (ΑΒ)$=3000$ μ.

Ἐὰν Κ καὶ Λ εἶναι αἱ θέσεις τοῦ ἀεροπλάνου ὑπεράνω τῶν Α καὶ Β, εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ σημεῖα Κ, Λ, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὡς καὶ τὰ Α, Β, Γ. Οὕτω δὲ εἶναι ΚΒΑ$=75^0$ καὶ ΛΑΒ$=60^0$. Ἤδη ἂν ἡ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ τέμνῃ τὴν κατακόρυφον ΚΑ εἰς τὸ Δ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΛΒΓ καὶ ΚΔΛ λαμβάνομεν:

$$\frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΛ})} = \frac{(\text{ΔΛ})}{(\text{ΔΚ})} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{(\text{ΒΓ})}{(\text{ΒΛ})} = \frac{(\text{ΑΒ})}{(\text{ΑΚ})-(\text{ΒΛ})}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (ΒΛ)$=$(ΑΒ)εφ60^0 καὶ (ΑΚ)$=$(ΑΒ)εφ75^0, εὑρίσκομεν:

$$(\text{ΒΓ})=(\text{ΑΒ})\cdot\frac{\text{εφ}60^0}{\text{εφ}75^0-\text{εφ}60^0}=(\text{ΑΒ})\cdot\frac{\etaμ60^0\cdot\sigmaυν75^0}{\etaμ15^0}=(\text{ΑΒ})\etaμ60^0=3000\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2598\ \text{μ}.$$

Ὅθεν (ΑΓ) $=3000$ μ. $+$ 2598 μ. $=5598$ μ.

1016. Ἡ συνισταμένη Σ δύο δυνάμεων F_1 καὶ F_2 ἰσοῦται μὲ $F_2\sqrt{3}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν δυνάμεων τούτων, ὅταν $F_1=2F_2$.

Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2 \sigma\upsilon\nu\alpha}$ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{\Sigma^2-F_1^2-F_2^2}{2F_1F_2}=$

$$=\frac{3F_2^2-4F_2^2-F_2^2}{4F_2^2}=-\frac{1}{2} \text{ καὶ } \alpha=120^\circ.$$

1017. Σῶμα βάρους B ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἠρεμεῖ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σχέσεις μεταξὺ τοῦ βάρους B, τῆς ἀντιδράσεως K τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς δυνάμεως F, ἥτις διατηρεῖ τὸ σῶμα ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ σχηματίζει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου γωνίαν ϑ.

Ἔστω α ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τριβὴ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, ἡ ἀντίδρασις K εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Τότε, ἀφοῦ αἱ τρεῖς δυνάμεις B, K καὶ F εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἔχομεν, κατὰ γνωστὸν θεώρημα τῆς στατικῆς, $\dfrac{B}{\eta\mu(F,K)}=\dfrac{K}{\eta\mu(B,F)}$

$=\dfrac{F}{\eta\mu(K,B)}$ ἢ $\dfrac{B}{\eta\mu(90^\circ-\vartheta)}=\dfrac{K}{\eta\mu(90^\circ+\alpha+\vartheta)}=\dfrac{F}{\eta\mu(180^\circ-\alpha)}$ ἢ $\dfrac{B}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}=\dfrac{K}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\vartheta)}=\dfrac{F}{\eta\mu\alpha}$.

Ὥστε εἶναι $K=B\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\vartheta)}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$ καὶ $F=B\cdot\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$.

1018. Τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2, F_3 ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι $(F_1, F_2)=\alpha$, $(F_2, F_3)=\beta$ καὶ $(F_3, F_1)=\gamma$.

Γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν δυνάμεις ὡς ἄνω εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἑκάστη τούτων καὶ ἡ συνισταμένη τῶν ἄλλων εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι. Ἑπομένως εἶναι $F_3^2=F_1^2+2F_2^2+$ $+2F_1F_2\sigma\upsilon\nu\alpha$ κ.ο.κ. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ συνα, συνβ καὶ συνγ καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς γωνίας α, β, γ. Αἱ δὲ λαμβανόμεναι τιμαὶ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις $\dfrac{F_1}{\sigma\upsilon\nu\beta}=\dfrac{F_2}{\sigma\upsilon\nu\gamma}=$ $=\dfrac{F_3}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$.

1019. Τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2, F_3 ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων ὡς καὶ αἱ γωνίαι της μεθ' ἑκάστης τῶν συνιστωσῶν.

Ἡ συνισταμένη Σ, ὡς διαγώνιος τοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν δυνάμεων εἶναι $\Sigma=\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $\sigma\upsilon\nu(\Sigma, F_1)=F_1:\Sigma$, $\sigma\upsilon\nu(\Sigma, F_2)=F_2:\Sigma$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(\Sigma, F_3)=F_3:\Sigma$.

1020. Πυροβόλον βάλλει ἐκ τῆς θέσεως A ἐναντίον στόχου Σ, ὅστις δὲν φαίνεται ἐκ τοῦ A. Παρατηρητὴς εἰς τὴν θέσιν B, μεταξὺ A καὶ Σ καὶ ἀριστερὰ τοῦ A, πληροφορεῖ διὰ τοῦ τηλεφώνου τὸν διευθύνοντα τὴν βολὴν ὅτι ἓν βλῆμα ἔπεσεν εἰς τὸ σημεῖον T δεξιὰ τοῦ Σ καὶ ὅτι $T B\Sigma=1^\circ\ 50'$ καὶ $T\Sigma A=90^\circ$. Ποίαν διόρθωσιν πρέπει νὰ κάμῃ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς βολῆς, ὁ διευθύνων αὐτήν, ἵνα τὸ ἑπόμενον βλῆμα πέσῃ ἐπὶ τοῦ στόχου; Γνωρίζει δὲ οὗτος ὅτι $(B\Sigma)=5200$ μ., $AB\Sigma=104^\circ\ 40'$ καὶ $BA\Sigma=44^\circ\ 30'$.

Ἐδῶ ζητεῖται ἡ γωνία ΣΑΤ, δι' ἣν ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΤΣΑ λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\Sigma AT=$ $=\dfrac{(\Sigma T)}{(A\Sigma)}$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΣΒ εὑρίσκομεν:

$$\frac{(A\Sigma)}{\eta\mu 104^\circ 40'}=\frac{(B\Sigma)}{\eta\mu 44^\circ 30'}, \text{ ἤτοι } (A\Sigma)=\frac{5200\eta\mu 75^\circ 20'}{\eta\mu 44^\circ 30'}=7177{,}17 \text{ μ.}$$

Ἐκ δὲ τοῦ ΣΤΒ εἰς ὃ εἶναι $\Sigma T B=119^\circ$, εὑρίσκομεν $(\Sigma T)=\dfrac{5200\eta\mu 1^\circ 50'}{\eta\mu 61^\circ}=190{,}19$. Ὥστε $\varepsilon\varphi\Sigma AT=\dfrac{190{,}19}{7177{,}17}$ καὶ $\Sigma AT=1^\circ\ 31'\ 5''$, διόρθωσις πρὸς τ' ἀριστερά.

1021. Πυροβόλον βάλλον ὑπὸ γωνίαν 30^0 ἐξακοντίζει βλῆμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 200 μέτρων εἰς 1 δ. Νὰ εὑρεθῇ 1) τὸ μέγιστον ὕψος εἰς ὃ θὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα, 2) τὸ βεληνεκὲς καὶ 3) ὁ χρόνος πτήσεως τοῦ βλήματος.

1) Τὸ μέγιστον ὕψος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $v=\frac{\upsilon_0^2}{2g}$ ημ$^2\vartheta=\frac{200^2}{2\cdot 9{,}81}$ημ$^2 30^0=$ $=509{,}68$ μ.

2) Τὸ βεληνεκὲς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $K=\frac{\upsilon_0^2}{g}$ημ$2\vartheta=\frac{200^2}{9{,}81}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3531$ μ.

3) Ἂν t ὁ χρόνος τῆς πτήσεως εἰς δευτερόλεπτα, ἤτοι ὁ χρόνος ὅστις παρῆλθεν ἵνα τὸ βλῆμα φθάσῃ ἀπὸ τῆς θέσεως Ο τῆς ἀναχωρήσεώς του, ἕως τὴν θέσιν Χ τῆς πτώσεώς του εἰς τὸ ἔδαφος, ἡ τεταγμένη τοῦ βλήματος εἰς τὴν θέσιν Χ, ἤτοι μετὰ χρόνον t, (εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, ἐξ ὧν ὁ ἄξων τῶν τετμημένων εἶναι ὁ ΟΧ) εἶναι 0, ἤτοι εἶναι $0=\upsilon_0 t$ημθ $-\frac{1}{2}gt^2$. Τότε ὅμως εἶναι $t=\frac{2\upsilon_0\text{ημ}\vartheta}{g}=\frac{200}{9{,}81}=20{,}4$δ.

1022. Πυροβόλον ἐξακοντίζει βλῆμα μὲ ταχύτητα 600 μ. εἰς 1δ ἐναντίον στόχου εὑρισκομένου εἰς ὁριζόντιον ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ 10000 μ. Νὰ εὑρεθῇ (παραλειπομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος) ὑπὸ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ βάλλῃ τὸ πυροβόλον διὰ νὰ ἐπιτύχῃ τὸν στόχον 1) ἐὰν τὸ ἔδαφος εἶναι ὁριζόντιον καὶ 2) ἐὰν μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ στόχου παρεμβάλλεται ὄρος ὕψους 1500 μ.

Εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην γωνίαν α 1) ἐκ τοῦ τύπου $K=\frac{\upsilon_0^2}{g}$ημ2α, ὅπου $k=10000$, $\upsilon_0=600$ καὶ $g=9{,}81$ καὶ 2) ἐκ τοῦ τύπου $v=\frac{\upsilon_0^2}{2g}$ημ$^2\alpha$, ὅπου $v=1500$ κλπ.

1023. Πυροβόλον βάλλει ἐκ τῆς κορυφῆς λόφου ὕψους 150 μ. ὑπὸ γωνίαν 30^0 μετὰ τοῦ ὁρίζοντος μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 250 μ. εἰς 1 δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζόντιος ἀπόστασις ἀπὸ τῆς κατακορύφου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ πυροβόλου, μέχρι τοῦ σημείου ὅπου τὸ βλῆμα θὰ πλήξῃ τὸ ἔδαφος.

Ἡ ὁριζόντιος συνιστῶσα τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος εἰς 1δ. εἶναι 250συν$30^0=125\sqrt{3}$ μ. καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα αὐτῆς εἶναι 250ημ$30^0=125$ μ. Ἐὰν δὲ t εἶναι ὁ χρόνος τῆς πτήσεως τοῦ βλήματος, οὗτος εἶναι ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ βλῆμα ρίπτεται μὲ κατακόρυφον ταχύτητα 125 μ. καὶ διανύει μὲ ἐπιτάχυνσιν $-g$, ἀπόστασιν -150 μ. Ἑπομένως εἶναι $-150=125t-\frac{1}{2}gt^2$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ t. Ἀλλὰ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἡ ὁριζόντιος ταχύτης παραμένει σταθερὰ καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ἰσοῦται μὲ $125t\sqrt{3}$.

1024. Σφαῖρα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ἥτις ἐξακοντίζεται ὑπὸ γωνίαν 45^0 διέρχεται διὰ σημείου ὅπερ εὑρίσκεται εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 90 μ. ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως αὐτῆς καὶ εἰς ὕψος 3,60 μ. ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐδάφους. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας (Πολυτεχνεῖον).

Ἡ ζητουμένη ἀρχικὴ ταχύτης υ_0 θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου [1] $y=x$εφθ $-\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2\text{συν}\vartheta}$ ὅπου $y=3{,}60$, $x=90$ καὶ $\vartheta=45^0$.

1025. Δύο σφαῖραι μάζης m_1 καὶ m_2 ἀντιστοίχως εἶναι προσδεδεμέναι εἰς τὰ ἄκρα νήματος ἀβαροῦς διαπερῶντος τὸν αὔλακα τροχαλίας κειμένης εἰς τὴν κορυφὴν κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας ω. Ἐκ τῶν σφαιρῶν τούτων ἡ μὲν μάζης m_2

---

1. Βλέπε «Πίνακες Λογαρίθμων» (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη § 17,δ, σελὶς 208.

κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ δὲ μάζης m_1 κρέμαται κατακορύφως. Ἐὰν ἤδη ἡ m_1 κατέρχεται, νὰ εὑρεθῇ ἡ συνισταμένη τῆς κινήσεως (ἄνευ τριβῆς).

Ἡ συνιστῶσα τοῦ βάρους m_2g κατὰ τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τούτου, ἡ δὲ συνιστῶσα κατὰ τὴν παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἶναι m_2gημω. Ἤδη ἂν T εἶναι ἡ τάσις τοῦ νήματος καὶ γ ἡ παραγομένη ἐπιτάχυνσις θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν κίνησιν τοῦ m_2 τὴν ἐξίσωσιν $T-m_2g$ημω$=m_2$γ (1). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ m_2 εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ταχύτητα καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ m_1, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν κίνησιν τοῦ m_1 τὴν ἐξίσωσιν $m_1g-T=m_1$γ (2). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\gamma=\dfrac{m_1-m_2\eta\mu\omega}{m_1+m_2}g$ καὶ $T=\dfrac{m_1m_2(1+\eta\mu\omega)}{m_1+m_2}g$.

1026. Ὑλικὸν σημεῖον κινεῖται μὲ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν πλάτους 0,2μ. καὶ περιόδου 0,8δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτοῦ καθ' ἣν στιγμὴν ἔχει παρέλθει 0,1δ ἀπὸ τῆς διόδου του ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τροχιᾶς του.

Ἐπειδὴ (1) $\dfrac{2\pi}{\omega}=0{,}8\delta$ εἶναι $\omega=\dfrac{5\pi}{2}$ καὶ $x=0{,}2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{5\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{10}\right)=0{,}2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}=$ $=0{,}2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0{,}1414$ μ.

1027. Ὑλικὸν σημεῖον κινεῖται μὲ ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν πλάτους 2 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου καὶ περιόδου 2δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος καθ' ὃν τὸ σημεῖον ἀναχωροῦν ἀπὸ τῆς θέσεως τῆς ἠρεμίας φθάνει εἰς ἀπόστασιν 1 ἑκατοστοῦ τοῦ μέτρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τροχιᾶς του ὡς καὶ ἡ ταχύτης ἣν ἔχει, ὅταν φθάσῃ εἰς τὴν ἀπόστασιν αὐτήν.

Ἐπειδὴ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=2\delta$ εἶναι $\sqrt{\mu}=\pi$. Ὅθεν ζητούμενος χρόνος εἶναι $t=\dfrac{1}{\pi}\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{2}=$ $=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{3}\delta$, ἡ δὲ ταχύτης εἶναι $\upsilon=2\pi\eta\mu\dfrac{\pi}{3}=\pi\sqrt{3}$ εἰς 1δ.

ΑΝΑΜΕΙΚΤΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

1028. $\eta\mu x\varepsilon\varphi x>2(1-\sigma\upsilon\nu x)$, ἂν $0^0<x<90^0$. Εἶναι $\eta\mu x\varepsilon\varphi x=\eta\mu^2x:\sigma\upsilon\nu x=$ $=(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\sigma\upsilon\nu x=(1-\sigma\upsilon\nu x)(\tau\varepsilon\mu x+1)$. Ἐπειδὴ δὲ ἐδῶ $\tau\varepsilon\mu x>1$ εἶναι $\tau\varepsilon\mu x+1>2$. Ὅθεν $\eta\mu x\varepsilon\varphi x>2(1-\sigma\upsilon\nu x)$.

1029. $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu \Gamma\leq 1:8$, ἂν $A+B+\Gamma=180^0$. Ἂν μία τῶν A, B, Γ εἶναι ἀμβλεῖα τὸ συνAσυνBσυνA ὡς ἀρνητικὸν εἶναι $<1:8$. Ἔστω λοιπὸν αἱ τρεῖς αὐταὶ γωνίαι ὀξεῖαι. Καὶ ἂν 1ον) $A=B=\Gamma$, εἶναι $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=1:8$. καὶ 2ον) ἂν μία τούτων ἔστω ἡ Γ εἶναι σταθερά, αἱ δὲ ἄλλαι μεταβληταί, θὰ εἶναι $2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu(A+B)+$ $+\sigma\upsilon\nu(A-B)$. Ὅθεν τὸ συνAσυνB εἶναι μέγιστον ἂν $A=B$, ἤτοι τὸ συνAσυνBσυνΓ αὐξάνει καὶ τείνει πρὸς τὸ 1:8, ὅταν αἱ γωνίαι A, B, Γ τείνουν νὰ γίνουν ἴσαι.

1030. $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}+\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}+\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}\geq\sqrt{3}$, ἂν $A+B+\Gamma=180^0$.

Ἂν $A=B=\Gamma$, εἶναι 1ον μέλος $=\sqrt{3}$. Ἂν ὅμως ὄχι, ὑποθέσωμεν δὲ Γ = σταθερά, τὸ ἄθροισμα $\varepsilon\varphi\dfrac{A}{2}+\varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}=\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2}:\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{B}{2}$ γίνεται ἐλάχιστον ὅταν A=B

---

1. Βλέπε «Πίνακες Λογαρίθμων» (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη § 20 σελὶς 209.

(ἄσκ. 1029). Ὅθεν τὸ ἄθροισμα $εφ\frac{A}{2}+εφ\frac{B}{2}+εφ\frac{Γ}{2}$ ἐλαττοῦται καὶ τείνει πρὸς τὴν $\sqrt{3}$, ὅταν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ τείνουν νὰ γίνουν ἴσαι.

1031. $εφAεφBεφΓ \geqq 3\sqrt{3}$, ἂν Α, Β, Γ γωνίαι ὀξεῖαι καὶ $A+B+Γ=180^0$.

Ἕπεται ἐκ τῆς ἀσκ. 1030 καὶ ἐκ τῆς 524.

1032. σφ3x : σφx οὐδέποτε κεῖται μεταξὺ 3 καὶ 1 : 3.

Εἶναι $\frac{σφ3x}{σφx}=\frac{εφx}{εφ3x}=\frac{εφx(1-3εφ^2x)}{3εφx-εφ^3x}=3-\frac{8}{3-εφ^2x}$. Οὕτως ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν, ἂν κάμωμεν πίνακα ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ $3-εφ^2x$ διὰ x ἀπὸ 0^0-60^0, ἀπὸ 60^0-90^0, ἀπὸ 90^0-120^0 καὶ ἀπὸ 120^0-180^0, αἱ ὁποῖαι ἐπαναλαμβάνονναι περιοδικῶς.

1033. $συνx+συν2x+συν4x+συν8x=1:2$, ἂν $x=2\pi:15(=24^0)$.

Τὸ 1ον μέλος γράφεται $συνx+συν2x+συν4x+συν6x+συν8x-συν6x$ καὶ ἰσοῦται (τ. 54) μὲ $συνx+\frac{συν5xημ4x}{ημx}-συν6x$ ἢ $\left(\text{ἐπειδὴ } συν5x=συν\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\right)$

$$-\frac{ημ4x-ημ2x}{2ημx}-συν6x=-συν3x-συν6x=-συν\frac{2\pi}{5}+συν\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}+$$
$$+\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{1}{2}.$$

134. $ημxημ3xημ5x=1:8$, ἂν $x=\pi:14$.

Εἶναι $4ημxσυνxημ3xημ5x=2ημ2xημ3xημ5x=ημ3x(συν3x-συν7x)=ημ3xσυν3x-ημ3x$ $συν7x=\frac{1}{2}ημ6x-ημ3xσυν7x=\frac{1}{2}ημ\frac{6\pi}{14}-ημ\frac{3\pi}{14}συν\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}ημ\frac{6\pi}{14}=\frac{1}{2}συν\frac{\pi}{14}=$ $=\frac{1}{2}συνx$. Ὅθεν 1ον μέλος$=\frac{1}{2}συνx:4συνx=\frac{1}{8}$.

1035. $συνxσυν2xσυν4xσυν7x=1:16$, ἂν $x=\pi:15$.

Εἶναι $2συνxσυν4x\cdot 2συν2xσυν7x=(συν5x+συν3x)(συν5x+συν9x)=$

$$=\left(συν\frac{\pi}{3}+συν\frac{\pi}{5}\right)\left(συν\frac{\pi}{3}+συν\frac{3\pi}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}.\ \text{Ὅθεν 1ον μέλος}=\frac{1}{4}:4=\frac{1}{16}.$$

1036. $εφxεφ2xεφ3xεφ4x=3$, ἂν $x=20^0$.

1ον μέλος$=\frac{ημ20^0ημ40^0ημ60^0ημ80^0}{συν20^0συν40^0συν60^0συν80^0}$. Ἀλλὰ $2ημ20^0ημ40^0=συν20^0-συν60^0$, $2ημ60^0$. $.ημ80^0=συν20^0-συν140^0$ καὶ $2(συν20^0-συν60^0)(συν20^0-συν140^0)=2συν^220^0-2συν20^0συν60^0-$ $-2συν20^0συν140^0+2συν60^0συν140^0$. Ἐπειδὴ δὲ $2συν^220^0=1+συν40^0$, $-2συν20^0συν60^0=-συν80^0$ $-συν40^0$ εἶναι $-2συν20^0συν140^0=-συν160^0-συν120^0=συν20^0+συν60^0$ καὶ $2συν60^0συν$ $140^0=συν200^0+συν80^0=-συν20^0+συν80^0$, ἕπεται ὅτι, $ημ20^0ημ40^0ημ60^0ημ80^0=(1+συν60^0):$ $:8=3:16$. Ἀλλὰ (ἄσκ. 502) $συν20^0συν40^0συν60^0συν80^0=1:16$. Ὅθεν 1ον μέλος=3.

1037. $συν6^0συν42^0συν66^0συν78^0=1:16$ (Παν. Θεσ)νίκης).

1ον μέλ. $=2συν6^0συν66^0 . 2συν42^0συν78^0:4=(συν72^0+συν60^0)(συν120^0+συν36^0):4=$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}:4=\frac{1}{4}:4=\frac{1}{16}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

1038. $4ημxημ(x-60^0)ημ(x-120^0)=ημ3x$. 1ον μέλος $=2ημx[συν60^0-$ $-συν(2x-180^0)]=2ημx\left(\frac{1}{2}+συν2x\right)=2ημx\left(\frac{1}{2}+1-2ημ^2x\right)=3ημx-4ημ^3x=ημ3x$.

1039. $\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}\right):\left(\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{2}\right)=\sigma\varphi\frac{x}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{3x}{2}$. (Παν. Θεσ)νίκης).

$1\text{ον μέλος}=\frac{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\eta\mu x(2\sigma\upsilon\nu x-1)}=\frac{\eta\mu 2x+\eta\mu x}{\eta\mu 2x-\eta\mu x}=\sigma\varphi\frac{x}{2}\varepsilon\varphi\frac{3x}{2}$ (τύπ. 49).

1040. $(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y)^2+(\eta\mu x+\eta\mu y)^2=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}$.

$1\text{ον μέλος}=2+2\sigma\upsilon\nu(x-y)=2[1+\sigma\upsilon\nu(x-y)]=4\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}$.

1041. $(\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y)^2+(\eta\mu x-\eta\mu y)^2=4\eta\mu^2\frac{x-y}{2}$.

$1\text{ον μέλος}=2-2\sigma\upsilon\nu(x-y)=2[1-\sigma\upsilon\nu(x-y)]=4\eta\mu^2\frac{x-y}{2}$.

1042. $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu z+\sigma\upsilon\nu(x+y+z)=4\sigma\upsilon\nu\left(\upsilon-\frac{x}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\upsilon-\frac{y}{2}\right)$ $\sigma\upsilon\nu\left(\upsilon-\frac{z}{2}\right)$, ὅπου $2\upsilon=x+y+z$. $1\text{ον μέλος}=2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y+2z}{2}$ $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{x+y+2z}{2}\right)=4\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{y+z}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{z+x}{2}=2\text{ον μέλ.}$

1043. $2\eta\mu^2 y+4\sigma\upsilon\nu(x+y)\eta\mu x\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu 2(x+y)=\sigma\upsilon\nu 2x$. Ἐπειδὴ $2\eta\mu^2 y=1-\sigma\upsilon\nu 2y$ καὶ $4\sigma\upsilon\nu(x+y)\eta\mu x\eta\mu y=2\sigma\upsilon\nu(x+y)[\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)]=$ $=2\sigma\upsilon\nu(x+y)\sigma\upsilon\nu(x-y)-2\sigma\upsilon\nu^2(x+y)=\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 2y-1-\sigma\upsilon\nu 2(x+y)$ εἶναι 1ον μέλος $=$ $=\sigma\upsilon\nu 2x$.

1044. $\frac{1+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{1-\eta\mu\beta}=\frac{2\eta\mu\alpha-2\eta\mu\beta}{\eta\mu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}$. Ἐπειδὴ $\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{1-\eta\mu\beta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta(1+\eta\mu\beta)}{1-\eta\mu^2\beta}=\frac{1+\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}$, τὸ $1\text{ον μέλος}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$ (1).

Ἀλλὰ $\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu(\alpha+\beta)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}+2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}=$

$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}+\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}+\eta\mu\frac{\beta}{2}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}+\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sigma\upsilon\nu^2\frac{\beta}{2}-\eta\mu^2\frac{\beta}{2}\right)$. Οὕτω τὸ κλάσμα (1) γράφεται

$2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}:\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}-\eta\mu\frac{\beta}{2}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}-\eta\mu\frac{\alpha}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}:\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}-\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Ἤδη, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἐπὶ $2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}$, ὁ μὲν 1ος ὅρος θὰ γίνῃ $2\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}=2(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)=2\eta\mu\alpha-2\eta\mu\beta$ (τ. 48) ὁ δὲ 2ος ὅρος θὰ γίνῃ

$2\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2}-2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}=\eta\mu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta$. Ὅ.ἔ.δ.

1045. $4[\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu^3\alpha+\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu^3\beta+\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu^3\gamma]=$ $=\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu 3\beta+\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu 3\gamma$.

Ἐκ τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu 3x=4\sigma\upsilon\nu^3x-3\sigma\upsilon\nu x$ εὑρίσκομεν

$$4\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu^3\alpha=\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu 3\alpha+3\eta\mu(\beta-\gamma)\sigma\upsilon\nu\alpha$$
$$4\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu^3\beta=\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu 3\beta+3\eta\mu(\gamma-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta$$
$$4\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu^3\gamma=\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu 3\gamma+3\eta\mu(\alpha-\beta)\sigma\upsilon\nu\gamma.$$

Ἤδη, ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὸ 2ον μέλος διότι

$$ημ(β-γ)συνα+ημ(γ-α)συνβ+ημ(α-β)συνγ=0 \quad (\text{ἄσκ. } 388).$$

1046. $4[ημ(β-γ)ημ^3α+ημ(γ-α)ημ^3β+ημ(α-β)ημ^3γ]=$
$=-[ημ(β-γ)ημ3α+ημ(γ-α)ημ3β+ημ(α-β)ημ3γ].$

Ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὡς ἄνω.

1047. Ἐὰν $εφ(α+x)=νεφ(α-x)$, θὰ εἶναι $\frac{ημ2x}{ημ2α}=\frac{ν-1}{ν+1}$ (Παν. Θεσ/νίκης).

Εἶναι $\frac{ημ(α+x)συν(α-x)}{συν(α+x)ημ(α-x)}=\frac{ημ2α+ημ2x}{ημ2α-ημ2x}=\frac{ν}{1}$. Ὅθεν $\frac{ημ2x}{ημ2α}=\frac{ν-1}{ν+1}$.

1048. Ἐὰν $συνα(1-ημβημγ)=συνβσυνγ$ θὰ εἶναι

$$1-τεμ^2α-τεμ^2β-τεμ^2γ+2τεματεμβτεμγ=0.$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{1}{συνβσυνγ}-\frac{1}{συνα}=\frac{ημβ}{συνβ}\cdot\frac{ημγ}{συνγ}$ καὶ συνεπῶς :

$$\frac{1}{συν^2βσυν^2γ}+\frac{1}{συν^2α}-\frac{2}{συνασυνβσυνγ}=\frac{1-συν^2β}{συν^2β}\cdot\frac{1-συν^2γ}{συν^2γ}=$$

$$=\left(\frac{1}{συν^2β}-1\right)\left(\frac{1}{συν^2γ}-1\right)=\frac{1}{συν^2βσυν^2γ}-\frac{1}{συν^2β}-\frac{1}{συν^2γ}+1. \text{ Ὅθεν}$$

$$1-\frac{1}{συν^2α}-\frac{1}{συν^2β}-\frac{1}{συν^2γ}+\frac{2}{συνασυνβσυνγ}=0 \text{ Ὅ.ἔ.δ.}$$

1049. Ἂν $συνα - συνβ = μ$ καὶ $ημα - ημβ = ν$ θὰ εἶναι $συντ(α+β) =$
$=-\frac{μ^2+ν^2}{2μν}$.

Εἶναι $(συνα - συνβ)^2 + (ημα - ημβ)^2 = μ^2 + ν^2$ ἤτοι $2[1 - συν(α - β)] = μ^2 + ν^2$ (1)
καὶ $2(συνα - συνβ)(ημα - ημβ) = 2μν$ ἤτοι $2ημ(α + β)[συν(α - β) - 1] = 2μν$ (2)
Διαιροῦντες δὲ τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{1}{ημ(α+β)}=-\frac{μ^2+ν^2}{2μν}$.

1050. Ἂν $x-y=y-z=A$ καὶ $ημx-ημy=ημy-ημz+kημy$, θὰ εἶναι $k=2(συνA-1)$.

Εἶναι $ημx+ημz-2ημy=kημy$, ἤτοι $2ημ\frac{x+z}{2}συν\frac{x-z}{2}-2ημy=kημy$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ $x+z=2y$ καὶ $x=2y-z$ ἤτοι $\frac{x-z}{2}=y-z$, ἡ (1) γίνεται $2ημyσυνA-2ημy=kημy$ ἤτοι $2(συνA-1)=k$.

1051. Ἂν $εφ(B-Γ)=3ημ2Γ : (5-3συν2Γ)$, θὰ εἶναι $εφB=4εφΓ$.

Ἐπειδὴ $ημ2Γ=2εφΓ : (1+εφ^2Γ)$ καὶ $συν2Γ=(1-εφ^2Γ) : (1+εφ^2Γ)$ (τ. 47) ἡ δοθεῖσα σχέσις γίνεται $(εφB-εφΓ) : (1+εφBεφΓ)=3εφΓ : (1+4εφ^2Γ)$ ἥτις δίδει $εφB=4εφΓ$.

1052. Ἂν $x+y+z=xyz$, θὰ εἶναι:

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

Ἂν θέσωμεν $x=εφA$, $y=εφB$, $z=εφΓ$, ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $εφA+εφB+εφΓ=$ $=εφAεφBεφΓ$. Ὅθεν, $\frac{εφA+εφB}{1-εφAεφB}=-εφΓ$, $εφ(A+B)=εφ(180^\circ-Γ)$ καὶ συνεπῶς $A+B+$ $+Γ=180^\circ$. Ὥστε τὸ 1ον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ἰσοῦται μὲ:

$$\frac{2εφA}{1-εφ^2A}+\frac{2εφB}{1-εφ^2B}+\frac{2εφΓ}{1-εφ^2Γ}=εφ2A+εφ2B+εφ2Γ.$$

Τοῦτο δὲ τὸ ἄθροισμα ἀποδεικνύεται ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 524, ὅτι ἰσοῦται μὲ:

$$\varepsilon\varphi 2\mathrm{A}\varepsilon\varphi 2\mathrm{B}\varepsilon\varphi 2\Gamma = \frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.\ \text{῞Ο.ἔ.δ.}$$

1053. ῎Αν $\varepsilon\varphi\left(45^0+\frac{x}{2}\right)=\varepsilon\varphi^3\left(45^0+\frac{y}{2}\right)$ θὰ εἶναι $\eta\mu x=\eta\mu y.\frac{3+\eta\mu^2 y}{1+3\eta\mu^2 y}$.

᾿Επειδὴ $\varepsilon\varphi\left(45^0+\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1-\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-\eta\mu\frac{x}{2}}$ κλπ. ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως ἧς τὰ μέλη ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}=\frac{(1+\eta\mu y)^3}{(1-\eta\mu y)^3}$ ἐξ ἧς $\eta\mu x=\frac{(1+\eta\mu y)^3-(1-\eta\mu y)^3}{(1+\eta\mu y)^3+(1-\eta\mu y)^3}=\frac{3\eta\mu y+\eta\mu^3 y}{1+3\eta\mu^2 y}=\eta\mu y\cdot\frac{3+\eta\mu^2 y}{1+3\eta\mu^2 y}$

1054. ῎Αν $\varepsilon\varphi(x-y)=\frac{k^2\eta\mu 2x}{1+k^2\sigma\upsilon\nu 2x}$ καὶ $\varepsilon\varphi(45^0-x)=\eta\mu(y-\alpha)\sigma\upsilon\nu\tau(y+\alpha)$

θὰ εἶναι $$\varepsilon\varphi\alpha=\frac{1-k^2}{1+k^2}\varepsilon\varphi^2 x.$$

᾿Εκ τῆς 1ης σχέσεως εὑρίσκομεν $\frac{1}{k^2}=\frac{\eta\mu 2x}{\varepsilon\varphi(x-y)}-\sigma\upsilon\nu 2x=\frac{\eta\mu 2x-\varepsilon\varphi(x-y)\sigma\upsilon\nu 2x}{\varepsilon\varphi(x-y)}$.

῞Οθεν $\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{\eta\mu 2x-\varepsilon\varphi(x-y)(\sigma\upsilon\nu 2x+1)}{\eta\mu 2x-\varepsilon\varphi(x-y)(\sigma\upsilon\nu 2x-1)}$ ἢ ἂν ἀντὶ τῶν ημ2x καὶ συν2x θέσωμεν τὰ ἴσα των ἐκ τῶν τύπων 46 καὶ 47, $\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi(x-y)}{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi^2 x\varepsilon\varphi(x-y)}=\frac{\varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x}$. ῞Οθεν

$\varepsilon\varphi y=\frac{1-k^2}{1+k^2}\varepsilon\varphi x$ (1). ῎Ηδη ἐκ τῆς 2ας τῶν δοθεισῶν σχέσεων εὑρίσκομεν $\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}=$

$=\frac{\eta\mu(y-\alpha)}{\eta\mu(y+\alpha)}$, ἤτοι $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu(y+\alpha)-\eta\mu(y-\alpha)}{\eta\mu(y+\alpha)+\eta\mu(y-\alpha)}=\sigma\varphi y\varepsilon\varphi\alpha$. ῞Οθεν

$$\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=\frac{1-k^2}{1+k^2}\varepsilon\varphi^2 x\ [\text{ἐκ τῆς (1)}].$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

1055. $2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\alpha\sigma\upsilon\nu x}{\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu x}\right)$.

῎Αν παραστήσωμεν τὸ 1ον μέλος μὲ 2ω, θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}.\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$, καὶ (τ. 47)

$\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{1-\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$. ᾿Επειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}$, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς εφ²ω καὶ τὰς πράξεις, $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta}{\beta\sigma\upsilon\nu x+\alpha}$. ῞Οθεν $2\omega=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta+\alpha\sigma\upsilon\nu x}{\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu x}\right)$.

1056. $2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}\right]=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)$.

῎Εχομεν ὡς ἄνω $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi x}\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}}$.

῞Οθεν $\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varphi-\eta\mu 2x+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\varphi+\eta\mu 2x+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\varphi}$ καὶ

(τ. 47) $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\varphi}$ ἤτοι $2\omega=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1+\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)$.

1057. $\text{τοξσφ}\frac{\alpha\beta+1}{\alpha-\beta}+\text{τοξσφ}\frac{\beta\gamma+1}{\beta-\gamma}+\text{τοξσφ}\frac{\gamma\alpha+1}{\gamma-\alpha}=0.$

Είναι $\text{τοξεφ}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}+\text{τοξεφ}\frac{\beta-\gamma}{1+\beta\gamma}+\text{τοξεφ}\frac{\gamma-\alpha}{1+\gamma\alpha}$. Ἀλλὰ $\text{τοξεφ}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\text{τοξεφ}\alpha-\text{τοξεφ}\beta$ (1). Διότι ἂν θέσωμεν $\text{τοξεφ}\alpha=x$, $\text{τοξεφ}\beta=y$ καὶ $\text{τοξεφ}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=z$, θὰ ἔχωμεν $\text{εφ}x=\alpha$, $\text{εφ}y=\beta$ καὶ $\text{εφ}z=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ σχέσις (1) γράφεται $x-y=z$, θὰ ἔχωμεν $\text{εφ}(x-y)=\frac{\text{εφ}x-\text{εφ}y}{1+\text{εφ}x\text{εφ}y}=\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}=\text{εφ}z$. Ὁμοίως εἶναι $\text{τοξεφ}\frac{\beta-\gamma}{1+\beta\gamma}=$ $=\text{τοξεφ}\beta-\text{τοξεφ}\gamma$ (2) καὶ $\text{τοξεφ}\frac{\gamma-\alpha}{1+\gamma\alpha}=\text{τοξεφ}\gamma-\text{τοξεφ}\alpha$ (3). Ἤδη ἂν προσθέσωμεν τὰς (1), (2) καὶ (3) κατὰ μέλη, θὰ εὕρωμεν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ 0. Ὅ.ἔ.δ.

1058. $\text{τοξεφ}\frac{2}{11}+2\text{τοξεφ}\frac{1}{7}=\text{τοξεφ}\frac{1}{2}$. Θέτοντες $\text{τοξεφ}\frac{2}{11}=\varphi$, καὶ $\text{τοξεφ}\frac{1}{7}=\vartheta$, ἔχομεν $\text{εφ}\varphi=\frac{2}{11}$, $\text{εφ}\vartheta=\frac{1}{7}$, $\text{εφ}2\vartheta=\frac{7}{24}$ καὶ $\text{εφ}(\varphi+2\vartheta)=$

$$=\frac{\text{εφ}\varphi+\text{εφ}2\vartheta}{1-\text{εφ}\varphi\text{εφ}2\vartheta}=\frac{1}{2}.\quad \text{Ὅθεν}\quad \varphi+2\vartheta=\text{τοξεφ}\frac{1}{2}.$$

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

1059. Ἂν $\text{τοξσυν}\frac{\alpha}{\beta}+\text{τοξσυν}\frac{\gamma}{\delta}=\omega$ θὰ εἶναι :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{2\alpha\gamma}{\beta\delta}\text{συν}\omega+\frac{\gamma^2}{\delta^2}=\text{ημ}^2\omega.$$

Θέτοντες $\text{τοξσυν}\frac{\alpha}{\beta}=x$ καὶ $\text{τοξσυν}\frac{\gamma}{\delta}=y$, ἔχομεν $\text{συν}x=\frac{\alpha}{\beta}$, $\text{συν}y=\frac{\gamma}{\delta}$, $x+y=\omega$ καὶ $x=\omega-y$. Ὅθεν $\text{συν}x=\text{συν}(\omega-y)=\text{συν}\omega\text{συν}y+\text{ημ}\omega\text{ημ}y$ ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\text{συν}\omega+\text{ημ}\omega\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\delta^2}}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\text{συν}\omega=\text{ημ}\omega\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\delta^2}}$ Ἤδη ἂν τὰ μέλη αὐτῆς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν.

1060. Ἂν $x^2=\text{ημ}2y$, θὰ εἶναι $y=\text{τοξεφ}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Ἤτοι θὰ εἶναι $\text{εφ}y=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$ Ἀλλ' ἡ δοθεῖσα σχέσις δίδει

$x^2=\frac{2\text{εφ}y}{1+\text{εφ}^2y}$ (τ. 46) ἤτοι $x^2\text{εφ}^2y-2\text{εφ}y+x^2=0$ ἐξ ἧς $\text{εφ}y=\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$.

1061. Ἂν $xy=\alpha^2+1$, θὰ εἶναι $\text{τοξεφ}\frac{1}{\alpha+x}+\text{τοξεφ}\frac{1}{\alpha+y}=\text{τοξεφ}\frac{1}{\alpha}$.

Ἤτοι θὰ εἶναι $\text{εφ}(\varphi+\vartheta)=\frac{1}{\alpha}$, ὅπου $\varphi=\text{τοξεφ}\frac{1}{\alpha+x}$ καὶ $\vartheta=\text{τοξεφ}\frac{1}{\alpha+y}$.

Ἀλλ' $\text{εφ}(\varphi+\vartheta)=\frac{\text{εφ}\varphi+\text{εφ}\vartheta}{1-\text{εφ}\varphi\text{εφ}\vartheta}=\left(\frac{1}{\alpha+x}+\frac{1}{\alpha+y}\right):\left(1-\frac{1}{\alpha+x}\cdot\frac{1}{\alpha+y}\right)=$

$$=\frac{2\alpha+x+y}{\alpha^2+\alpha(x+y)+xy-1}=\frac{2\alpha+x+y}{\alpha^2+\alpha(x+y)+\alpha^2}=\frac{(2\alpha+x+y)}{\alpha(2\alpha+x+y)}=\frac{1}{\alpha}.$$

1062. Ἂν $\varphi = \text{τοξεφ}\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2k-\alpha}$ καὶ $\vartheta = \text{τοξεφ}\dfrac{2\alpha-k}{k\sqrt{3}}$, μία τιμὴ τοῦ $\varphi-\vartheta$ θὰ εἶναι 30^0.

$$\text{Διότι } \text{εφ}(\varphi-\vartheta) = \frac{3k\alpha-(2k-\alpha)(2\alpha-k)}{\sqrt{3}\,(2\alpha^2-2k\alpha+2k^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{εφ}30^0.$$

1063. Ἂν τοξεφα $=$ τοξσυντα $=$ τοξσυνβ, μία τιμὴ τοῦ β θὰ εἶναι $(\sqrt{5}-1):2$.

Ἂν x=τοξεφα=κλπ. θὰ εἶναι εφx=α, συντx=α καὶ συνx=β. Ὅθεν εφx=συντx, ἤτοι ημ^2x=συνx, $1-$συν^2x=συνx καὶ συν$^2x+$συν$x-1=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν ρίζαν συν$x = \beta = (\sqrt{5}-1):2$.

Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις :

1064. $1+\text{εφ}^4\alpha$ (Σχ. Εὐελπίδων). Θέτοντες $\text{εφ}^2\alpha=\text{εφ}\omega$ (ὅπου ἡ γωνία ω δίδεται διὰ τῶν λογεφω=2λογ | εφα |) ἔχομεν $1+\text{εφ}^4\alpha = 1+\text{εφ}^2\omega = \text{τεμ}^2\omega$.

1065. $(\sqrt{5}-1):2$. Ἂν γράψωμεν $(\sqrt{4+1}-1):2$ καὶ θέσωμεν $4=\text{εφ}^2\omega$, θὰ ἔχομεν $(\sqrt{1+\text{εφ}^2\omega}-1):2 = (\text{τεμ}\omega-1):2 = (1-\text{συν}\omega):2\text{συν}\omega = \text{ημ}^2\dfrac{\omega}{2}:\text{συν}\omega$.

1066. $\dfrac{2\alpha^2}{\beta^2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}\right)$. Θέτοντες $\dfrac{\beta}{\alpha}=\text{εφ}\omega$, ἔχομεν $\dfrac{2}{\text{εφ}^2\omega}\left(1+\dfrac{1}{\text{συν}\omega}\right)=$ $=\dfrac{2\text{συν}^2\omega}{\text{ημ}^2\omega}\cdot\dfrac{1+\text{συν}\omega}{\text{συν}\omega} = \dfrac{2\text{συν}\omega}{\text{ημ}^2\omega}\cdot(1+\text{συν}\omega) = \text{συν}\omega:\text{ημ}^2\dfrac{\omega}{2}$, διότι $\text{ημ}^2\omega = 4\text{ημ}^2\dfrac{\omega}{2}\text{συν}^2\dfrac{\omega}{2}$ καὶ $1+\text{συν}\omega = 2\text{συν}^2\dfrac{\omega}{2}$.

1067. $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\text{συν}\varphi$ (§ 100). $=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha\beta(1+\text{συν}\varphi) = (\alpha+\beta)^2$ $-4\alpha\beta\text{συν}^2\dfrac{\varphi}{2} = (\alpha+\beta)^2\text{συν}^2\omega$, ὅταν θέσωμεν $4\alpha\beta\text{συν}^2\dfrac{\varphi}{2} = (\alpha+\beta)^2\text{ημ}^2\omega$.

Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

1068. ημxεφ$x+2$συν$x=\mu$. Αὐτη γράφεται ημ$^2x+2$συν$^2x=\mu$συνx ἤτοι συν$^2x-$ $-\mu$συν$x+1=0$ ἐξ ἧς $\text{συν}x = \dfrac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-4}}{2} = \dfrac{\mu}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{\mu^2}}\right)$ Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $\dfrac{4}{\mu^2}=\text{ημ}^2\omega$, ἔχομεν $\text{συν}x = \dfrac{\mu}{2}(1\pm\text{συν}\omega)$, ἤτοι $\text{συν}x = \mu\text{συν}^2\dfrac{\omega}{2}$ ἢ $\mu\text{ημ}^2\dfrac{\omega}{2}$.

1069. ημ$2x=\mu$ημ^3x ($\mu>0$). Λαμβάνομεν $2\text{ημ}x\text{συν}x-\mu\text{ημ}^3x=0$, ἤτοι ημ$x$. $.[2\text{συν}x-\mu(1-\text{συν}^2x)]=0$. Ὅθεν ημ$x=0$ ἢ $\mu\text{συν}^2x+2\text{συν}x-\mu=0$, ἧς δεκτὴ ρίζα ἡ $\text{συν}x = \dfrac{-1+\sqrt{\mu^2+1}}{\mu}$, ἢ ἂν θέσωμεν $\mu^2=\text{εφ}^2\omega$, $\text{συν}x = \dfrac{-1+\text{τεμ}\omega}{\mu} = \dfrac{1-\text{συν}\omega}{\mu\text{συν}\omega} =$ $=2\text{ημ}^2\dfrac{\omega}{2}:\mu\text{συν}\omega$.

1070. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\text{σφ}^2\vartheta-\text{συν}^2\vartheta}$, ὅταν $(\alpha+\beta)\text{ημ}\vartheta=(\alpha-\beta)$.

$$\sqrt{\text{σφ}^2\vartheta-\text{συν}^2\vartheta} = \sqrt{\text{συντ}^2\vartheta-1-1+\text{ημ}^2\vartheta} = \sqrt{\text{συντ}^2\vartheta+\text{ημ}^2\vartheta-2} =$$
$$= \sqrt{(\text{συντ}\vartheta-\text{ημ}\vartheta)^2} = \text{συντ}\vartheta-\text{ημ}\vartheta = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}.$$

1071. Νὰ εὑρεθῇ ἡ εφ15^0 ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3εφx - εφ^3x = 1 - 3εφ^2x$, ὡς καὶ εἰς ποίας γωνίας ἀντιστοιχοῦν αἱ δύο ἄλλαι ρίζαι.

Λαμβάνομεν $\frac{3εφx - εφ^3x}{1 - 3εφ^2x} = 1$, ἤτοι $εφ3x = 1$. Ὅθεν $3x = k.180^0 + 45^0$, $x = k.60^0 + 15^0$ καὶ διὰ $k = 0$, 1 καὶ -1 εἶναι $x = 15^0$, 75^0, -45^0 ἀντιστοίχως. Ὥστε εἰς αὐτὰς τὰς γωνίας ἀντιστοιχοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται $(εφx + 1)\cdot(εφ^2x - 4εφx + 1) = 0$, ἔχομεν τὰς λύσεις $εφx = -1$ (ἐκ τῆς $εφx + 1 = 0$) καὶ $x = 2 + \sqrt{3}$, ἢ $2 - \sqrt{3}$ (ἐκ τῆς $εφ^2x - 4εφx + 1 = 0$). Ἀλλ' ἐπειδὴ $εφ15^0 < 1$, ἕπεται

ὅτι $εφ15^0 = 2 - \sqrt{3}$ καὶ $εφ75^0 = 2 + \sqrt{3}$.

1072. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $εφ\frac{x}{2}$, ὅταν $συνx = \frac{συνα - συνβ}{1 - συνασυνβ}$

$$Εἶναι\ εφ\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - συνx}{1 + συνx}} = \pm\sqrt{\frac{1 - συνασυνβ - συνα + συνβ}{1 - συνασυνβ + συνα - συνβ}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1 - συνα)(1 + συνβ)}{(1 + συνα)(1 - συνβ)}} = \pm\sqrt{\frac{1 - συνα}{1 + συνα}}\sqrt{\frac{1 + συνβ}{1 - συνβ}} = \pm\ εφ\frac{α}{2}σφ\frac{β}{2}.$$

1073. Ἐὰν $(1 + \sqrt{1 + x})εφA = 1 + \sqrt{1 - x}$, ν' ἀποδειχθῇ α') ὅτι $x = ημ4A$ καὶ β') ὅτι διὰ $0 < x < 1$, ὑπάρχουν τέσσαρες τιμαὶ τοῦ A εἰς τὰ δύο πρῶτα τεταρτημόρια. Τέλος ἐκ τῶν α') καὶ β') νὰ εὑρεθῇ ἡ $εφ7^0\,30'$.

α') Ἔχομεν $\sqrt{1 + x}\,.\,εφA - \sqrt{1 - x} = 1 - εφA$ καὶ ἐξ αὐτῆς $(1 + x)εφ^2A - 2\sqrt{1 - x^2}εφA + 1 - x = (1 - εφA)^2$ ἤτοι $x(εφ^2A - 1) + 2εφA = 2\sqrt{1 - x^2}εφA$ καὶ $x^2(εφ^2A + 1)^2 = 4x(1 - εφ^2A)εφA$, ἐξ ἧς $x = 0$ ἢ

ἂν $x \neq 0$, $x = \frac{4(1 - εφ^2A)εφA}{(1 + εφ^2A)^2} = 2\,.\,\frac{2εφA}{1 + εφ^2A}\,.\,\frac{1 - εφ^2A}{1 + εφ^2A} = 2ημ2Aσυν2A = ημ4A$ (ι)

Διὰ $x = 0$, ἂν λάβωμεν ἀμφότερα τὰ ριζικὰ θετικά, ἔχομεν $εφA = 1$ καὶ $ημ4A = 0$.

β') Ἤδη ἂν ω εἶναι ἡ μικροτέρα θετικὴ γωνία, δι' ἣν $ημω = x$, ἔχομεν $ημ4A = ημω$, $4A = 2λ\cdot180^0 + ω$ ἢ $(2λ + 1)180^0 - ω$, ἤτοι $A = λ\cdot90^0 + \frac{ω}{4}$ ἢ $λ\cdot90^0 + 45^0 - \frac{ω}{4}$. Καὶ διὰ $λ = 0$ καὶ 1 λαμβάνομεν τιμὰς τοῦ A εἰς τὰ δύο πρῶτα τεταρτημόρια, αἵτινες εἶναι τέσσαρες.

Τέλος ἂν $A = 7^0\,30'$, εἶναι $ημ4A = ημ30^0 = \frac{1}{2} = x$ καὶ $εφ7^030' = \frac{1 - \sqrt{1 - ημ30^0}}{1 + \sqrt{1 + ημ30^0}} =$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

1074. Ἂν $συν4x = α$, εἶναι $εφx = (\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + α}) : \pm\sqrt{1 - α}$.

Εἶναι $συν2x = \pm\sqrt{\frac{1 + α}{2}}$, $συνx = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + α}}{2\sqrt{2}}}$. Ὅθεν, $ημx = \pm\sqrt{1 - συν^2x} =$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \mp \sqrt{1 + α}}{2\sqrt{2}}}\ καὶ\ εφx = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + α}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + α}}} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + α}}{\pm\sqrt{1 - α}}.$$

Ν' ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

1075. $ημ(π + φ)\,συν\left(\frac{3π}{2} - φ\right)εφ\left(\frac{3π}{2} + φ\right) : ημ(2π - φ)$ (Παν. Ἀθ.).

Εἶναι $-ημφ\cdot(-ημφ)\cdot(-σφφ) : -ημφ = συνφ$.

1076. $\dfrac{\varepsilon\varphi(90^0+A)\eta\mu(-A)\eta\mu 225^0}{\sigma\upsilon\nu 600^0\eta\mu(180^0+A)\sigma\upsilon\nu\tau(270^0-A)}$.

Εἶναι $\dfrac{-\sigma\varphi A\cdot(-\eta\mu A)\cdot(-\eta\mu 45^0)}{-\sigma\upsilon\nu 60^0\cdot(-\eta\mu A)\cdot(-\tau\varepsilon\mu A)}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sigma\varphi A}{\tau\varepsilon\mu A}=\sqrt{2}\,\sigma\varphi A\sigma\upsilon\nu A.$

1077. $4\eta\mu\dfrac{A}{3}\,\eta\mu\dfrac{180^0+A}{3}\,\eta\mu\dfrac{180^0-A}{3}$. Εἶναι (ἄσκ. 475).

$$4\eta\mu\frac{A}{3}\left(\eta\mu^2 60^0-\eta\mu^2\frac{A}{3}\right)=3\eta\mu\frac{A}{3}-4\eta\mu^3\frac{A}{3}=\eta\mu A \quad (\tau.\ 35).$$

1078. $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{1}{2}\,\tau o\xi\eta\mu\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\dfrac{1}{2}\,\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)$. Ἂν θέσωμεν

$\alpha=\varepsilon\varphi x$ καὶ $\beta=\varepsilon\varphi y$, εἶναι $\tau o\xi\eta\mu\,\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}=\tau o\xi\eta\mu\dfrac{2\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=\tau o\xi\eta\mu(\eta\mu 2x)=$

$=2x$ (τ. 46) καὶ $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2 y}{1+\varepsilon\varphi^2 y}=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu 2y)=2y$. Ὅθεν, ἡ δοθεῖσα παράστασις $=$

$$=\varepsilon\varphi(x+y)=\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}.$$

1079. Ἐκ τῆς εφω νὰ εὑρεθῇ ἡ $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\omega}{2}\right)$ ὡς καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς, ὅταν τὸ ω περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $\dfrac{\pi}{2}$ ἢ $\dfrac{\pi}{2}$ καὶ π, ἢ π καὶ $\dfrac{3\pi}{2}$ ἢ $\dfrac{3\pi}{2}$ καὶ 2π.

Ἂν θέσωμεν $x=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\omega}{2}\right)=\left(1-\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}\right):\left(1+\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}\right)$, θὰ εἶναι

$\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}=\dfrac{1-x}{1+x}$ (1). Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi\omega=2\varepsilon\varphi\dfrac{\omega}{2}:\left(1-\varepsilon\varphi^2\dfrac{\omega}{2}\right)$, ἡ (1) δίδει $x^2+2\varepsilon\varphi\omega.x-1=0$, ἐξ ἧς $x=-\varepsilon\varphi\omega\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$. Ἀλλ' ἂν τὸ ω μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $\dfrac{\pi}{2}$, ἢ ἀπὸ $\dfrac{3\pi}{2}$ ἕως 2π τὸ πέρας τοῦ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\omega}{2}$ θὰ κεῖται εἰς τὸ I ἢ III τεταρτημόριον· τότε δὲ θὰ εἶναι $x=\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}-\varepsilon\varphi\omega$ καὶ $-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}-\varepsilon\varphi\omega$ εἰς τὰς δύο ἄλλας περιπτώσεις. Διότι εἰς ταύτας τὸ πέρας τοῦ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\omega}{2}$, θὰ κεῖται εἰς τὸ IV τεταρτημόριον.

1080. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γενικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, ἵνα εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$ (1).

Ἡ σχέσις (1) ἀληθεύει (ἄσκ. 520), ὅταν $A+B+\Gamma=180^0$. Δυνάμεθα ὅμως νὰ γράψωμεν τὴν (1) οὕτω:

$\sigma\upsilon\nu^2 A+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu^2 B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1-\sigma\upsilon\nu^2 B-\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\sigma\upsilon\nu^2 B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma$, ἤτοι

$(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma)^2=(1-\sigma\upsilon\nu^2 B)(1-\sigma\upsilon\nu^2\Gamma)=\eta\mu^2 B\eta\mu^2\Gamma$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=$

$=\pm\eta\mu B\eta\mu\Gamma$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu(B\pm\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu(\pi-A)$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν σχέσις

εἶναι $B\pm\Gamma=2k\pi\pm(\pi-A)$, ἤτοι $B\pm\Gamma\pm A=(2k-1)\pi$.

1081. Ἐὰν σχέσις τις συνδέουσα τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, ἀληθεύῃ, ὅταν $A+B+\Gamma=180^0$, ἡ σχέσις αὐτὴ θὰ ἀληθεύῃ καὶ ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὰς γωνίας αὐτὰς ἀντιστοίχως διὰ τῶν γωνιῶν $90^0-\dfrac{A}{2}$, $90^0-\dfrac{B}{2}$, $90^0-\dfrac{\Gamma}{2}$ ἢ διὰ τῶν 180^0-2A, 180^0-2B, $180^0-2\Gamma$.

Διότι 1) $90^\circ - \frac{A}{2} + 90^\circ - \frac{B}{2} + 90^\circ - \frac{\Gamma}{2} = 270^\circ - \frac{A+B+\Gamma}{2} = 180^\circ$ καὶ

2) $180^\circ - 2A + 180^\circ - 2B + 180^\circ - 2\Gamma = 540^\circ - 2(A+B+\Gamma) = 180^\circ$.

1082. Ἐὰν τρεῖς θετικαὶ γωνίαι A, B, Γ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$ θὰ εἶναι $A+B+\Gamma > 90^\circ$.

Τοῦτο ἀληθεύει, ἂν $\Gamma > 90^\circ$ ἢ $A+B > 90^\circ$. Ἂν ὅμως $\Gamma < 90^\circ$ καὶ $A+B < 90^\circ$, ἡ ταυτότης $\eta\mu^2(A+B) = \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + 2\eta\mu A \eta\mu B \,.\, \sigma\upsilon\nu(A+B)$, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu(A+B) > 0$, δεικνύει ὅτι $\eta\mu^2(A+B) > \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B$, ἤτοι $\eta\mu^2(A+B) > 1 - \eta\mu^2\Gamma$. Ὅθεν $\eta\mu^2(A+B) > \sigma\upsilon\nu^2\Gamma$, $\eta\mu(A+B) > \sigma\upsilon\nu\Gamma$, ἤτοι $A+B > 90^\circ - \Gamma$, δηλαδὴ $A+B+\Gamma > 90^\circ$.

Ἐὰν $A+B+\Gamma = 180^\circ$, θὰ εἶναι:

1083. $\eta\mu^3 A \eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu^3 B \eta\mu(\Gamma - A) + \eta\mu^3\Gamma \eta\mu(A-B) = 0$.

Εἶναι (τύπ. 35) $8\eta\mu^3 A \eta\mu(B-\Gamma) = 6\eta\mu A \eta\mu(B-\Gamma) - 2\eta\mu 3A \eta\mu(B-\Gamma) = 3[\sigma\upsilon\nu(A-B+\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(A+B-\Gamma)] - [\sigma\upsilon\nu(3A-B+\Gamma) - \sigma\upsilon\nu(3A+B-\Gamma)] = 3(\sigma\upsilon\nu 2\Gamma - \sigma\upsilon\nu 2B) + \sigma\upsilon\nu 2(A-B) - \sigma\upsilon\nu 2(A-\Gamma)$. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ εἰς τοὺς δύο ἄλλους ὅρους θὰ εὕρωμεν $3(\sigma\upsilon\nu 2A - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma) + \sigma\upsilon\nu 2(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu 2(B-A)$ καὶ $3(\sigma\upsilon\nu 2B - \sigma\upsilon\nu 2A) + \sigma\upsilon\nu 2(\Gamma - A) - \sigma\upsilon\nu 2(\Gamma - B)$. Προσθέτοντες ἤδη τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα θὰ εὕρωμεν ἄθροισμα 0.

1084. $\Sigma \eta\mu^3 A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 3\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma$.

Εἶναι (τύπ. 35) $8\eta\mu^3 A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 2(3\eta\mu A - \eta\mu 3A)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 3[\eta\mu(A+B-\Gamma) + \eta\mu(A-B+\Gamma)] - [\eta\mu(3A+B-\Gamma) + \eta\mu(3A-B+\Gamma)] = 3(\eta\mu 2\Gamma + \eta\mu 2B) + \eta\mu 2(A-\Gamma) + \eta\mu 2(A-B)$. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εἰς τοὺς δύο ἄλλους ὅρους $\eta\mu^3 B \sigma\upsilon\nu(\Gamma - A)$ καὶ $\eta\mu^3\Gamma \sigma\upsilon\nu(A-B)$ καὶ προσθέσωμεν θὰ εὕρωμεν $6(\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma) = 24(\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma)$ (§ 97 π. δ. 3). Ὥστε, $\Sigma \eta\mu^3 A \sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 3\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu\Gamma$.

1085. $2(\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma)(\sigma\upsilon\nu\tau 2B - \sigma\upsilon\nu\tau 2\Gamma) = \varepsilon\varphi^2 B - \varepsilon\varphi^2\Gamma$.

1ον μέλος (ἄσκ. 524) $= 2\varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi\Gamma \cdot \frac{\eta\mu 2\Gamma - \eta\mu 2B}{4\eta\mu B \sigma\upsilon\nu B \eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma+B)\eta\mu(\Gamma-B)}{\sigma\upsilon\nu^2 B \sigma\upsilon\nu^2\Gamma} =$

$$= \frac{\eta\mu A \cdot \eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2 B \sigma\upsilon\nu^2\Gamma} = \frac{\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu^2 B \sigma\upsilon\nu^2\Gamma} = \varepsilon\varphi^2 B - \varepsilon\varphi^2\Gamma$$ (ἄσκ. 386).

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1086. $\varepsilon\varphi(\alpha+x)\varepsilon\varphi(\alpha-x) = (1-2\sigma\upsilon\nu 2\alpha) : (1+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha)$. (Σχ. Εὐελπίδων).

Αὕτη γράφεται $\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2 x}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{3\varepsilon\varphi^2\alpha - 1}{3-\varepsilon\varphi^2\alpha}$. Ὅθεν, $3(1-\varepsilon\varphi^4\alpha)\varepsilon\varphi^2\alpha = 1 - \varepsilon\varphi^4\alpha$ καὶ ἂν $1-\varepsilon\varphi^4\alpha \neq 0$ εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$ καὶ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$. Ἂν δὲ $1-\varepsilon\varphi^4\alpha = 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀπροσδιόριστος.

1087. $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = 1$ (Πολ]χνεῖον. Χημ. Μηχανικῶν).

Εἶναι $\eta\mu 2x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1$, $2\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ καὶ $2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$. Ὥστε $2x = 2k\pi$ καὶ $x = k\pi$ ἢ $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ἤτοι $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

1088. $\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{2}\eta\mu x$. Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω, $2\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu x$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Ὅθεν:

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{καὶ} \quad x = k\,.\,\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ἢ} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

1089. $ημ5x = 16ημ^5x$ (1). Ἐκ τοῦ τύπου $ημ(3x+2x) = ημ3xσυν2x + ημ2xσυν3x$ εὑρίσκομεν $ημ5x = 16ημ^5x - 20ημ^3x + 5ημx$. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $5ημx(1-4ημ^2x) = 0$. Ὅθεν $ημx = 0$, ἤτοι $x = kπ$ ἢ $ημx = \pm\frac{1}{2}$ ἤτοι $x = kπ \pm \frac{π}{6}$.

1090. $σφx - συνx = εφx - ημx$. Ἐξ αὐτῆς ἣν γράφομεν $σφx - εφx = συνx - ημx$, εὑρίσκομεν $συν^2x - ημ^2x = (συνx - ημx)ημxσυνx$, ἤτοι $(συνx-ημx)[(συνx+ημx) - ημxσυνx] = 0$. Ὅθεν $συνx - ημx = 0$ ἐξ ἧς $εφx = 1$ καὶ $x = kπ + \frac{π}{4}$ ἢ $συνx + ημx = ημxσυνx$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $2(συνx+ημx) = ημ2x$, $4(συν^2x + ημ^2x) + 8ημxσυνx = ημ^2 2x$, $4 + 4ημ2x = ημ^2 2x$ ἢ τέλος $ημ^2 2x - 4ημ2x - 4 = 0$. Ἤδη ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι εὔκολος.

1091. $2συν2x = (1-\sqrt{3})(συνx+ημx)$. Ἔχομεν $(συνx+ημx)(συνx-ημx) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(συνx+ημx)$. Ὥστε ἢ $συνx + ημx = 0$, ὁπότε $συνx = -ημx = ημ(-x)$ καὶ $x = -45^0$ κλπ. ἢ $συνx - ημx = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι (§ 104,γ)

$$συν(45^0+x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.συν45^0 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = -συν75^0 = συν105^0$$ ἤτοι $45^0 + x = 105^0$ καὶ $x = 60^0$. κλπ.

1092. $εφ^3x + σφ^3x = -2$. Αὕτη γράφεται $(εφx+σφx)^3 - 3εφxσφx(εφx+σφx) = -2$. Ὅθεν, $(εφx+σφx)^3 - 3(εφx+σφx) + 2 = 0$, ἢ $y^3 - 3y + 2 = 0$ (1) ὅπου $y = εφx + σφx$. Ἀλλ' ἡ (1) γίνεται $(y-1)(y^2+y-2) = 0$. Ὥστε θὰ εἶναι $y = 1$ ἢ $y^2 + y - 2 = 0$, ἐξ ἧς $y = 1$ καὶ $y = -2$. Ἀλλ' ἡ λύσις $y = 1$ ἤτοι ἡ $εφx + σφx = 1$ ἥτις δίδει $ημxσυνx = 1$, $2ημxσυνx = 2$, ἤτοι $ημ2x = 2$ δὲν εἶναι δεκτή. Ἡ δὲ $y = -2$, δίδει $ημ2x = -1$ ἤτοι $2x = -90^0$, καὶ $x = -45^0$.

1093. $εφx = \sqrt{3συν^2x - ημ^2x}$. (Πολ)νεῖον). Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $εφ^2x = 3συν^2x - ημ^2x$ ἤτοι (§ 67,3), $εφ^2x(1+εφ^2x) = 3 - εφ^2x$ ἢ τέλος $εφ^4x + 2εφ^2x - 3 = 0$, ἐξ ἧς, ἐπειδὴ ἐδῶ πρέπει νὰ εἶναι $εφx > 0$, εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $εφx = 1$. Ὅθεν $x = k.180^0 + 45^0$, ἢ $k.180^0 + 225^0$.

1094. $2συνx(ημx + \sqrt{ημ^2x + ημ^2 2x}) = 3ημ2x$. Λαμβάνομεν διαδοχικῶς $2ημxσυνx + 2συνx\sqrt{ημ^2x + ημ^2 2x} = 3ημ2x$, $2συνx\sqrt{ημ^2x + ημ^2 2x} = 2ημ2x$, $\sqrt{ημ^2x + ημ^2 2x} = 2ημx$, $ημ^2x + ημ^2 2x = 4ημ^2x$, $ημ^2x + 4ημ^2xσυν^2x = 4ημ^2x$, ἤτοι $ημ^2x(4συν^2x - 3) = 0$. Ὅθεν $ημx = 0$, ὁπότε $x = kπ$ ἢ $συνx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ὁπότε $x = 2kπ \pm \frac{π}{6}$.

1095. $εφ3x + εφx = 0$. Εὑρίσκομεν (τ. 36) $(3εφx - εφ^3x) + (1 - 3εφ^2x)εφx = 0$, ἤτοι $εφx(1 - εφ^2x) = 0$. Ὅθεν $εφx = 0$ καὶ $x = k.180^0$ ἢ $εφx = \pm 1$ καὶ $x = k.180^0 \pm 45^0$.

1096. $ημ\left(3x - \frac{π}{8}\right) = 2ημ\left(\frac{3π}{8} - x\right)$. Ἐπειδὴ $\left(3x - \frac{π}{8}\right) + \left(3.\frac{3π}{8} - 3x\right) = π$, εἶναι $ημ\left(3x - \frac{π}{8}\right) = ημ.3\left(\frac{3π}{8} - x\right)$ καὶ ἑπομένως $ημ.3\left(\frac{3π}{8} - x\right) =$

$= 2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$ ἢ ἂν θέσωμεν $\frac{3\pi}{8} - x = y$, $\eta\mu 3y = 2\eta\mu y$ ἢ (τ. 35) $\eta\mu y(4\eta\mu^2 y - 1) = 0$. Ὅθεν $\eta\mu y = 0$ ἢ $\eta\mu y = \pm\frac{1}{2}$. Οὕτω δὲ ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $\frac{3\pi}{8} - x = k\pi$ ἤτοι $x = \frac{3\pi}{8} - k\pi$ καὶ ἐκ τῆς 2ας, $\frac{3\pi}{8} - x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ἤτοι

$$x = \frac{3\pi}{8} \mp \frac{\pi}{6} - k\pi.$$

1097. $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = \frac{\varepsilon\varphi x - 2}{\varepsilon\varphi x}$. Ἤτοι $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = 1 - \frac{2}{\varepsilon\varphi x}$. Ἐξ αὐτῆς δέ, ἐπειδὴ (τ. 32) $\varepsilon\varphi x = 2\varepsilon\varphi\frac{x}{2} : \left(1 - \varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}\right)$, εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2} = \varepsilon\varphi\frac{x}{2} - 1 + \varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = 1$.

Ὅθεν $\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$ καὶ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

1098. $4\eta\mu|x|\sigma\upsilon\nu|x| - 3\sqrt{2}[\eta\mu|x| + \sigma\upsilon\nu|x|] + 4 = 0$.

Ἂν θέσωμεν $|x| = y$, ἔχομεν $4\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y - 3\sqrt{2}(\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y) + 4 = 0$ (1). Ἀλλὰ $2\eta\mu y \sigma\upsilon\nu y = \eta\mu 2y$, καὶ $(\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y)^2 = 1 + \eta\mu 2y$, ἤτοι $\eta\mu y + \sigma\upsilon\nu y = \pm\sqrt{1 + \eta\mu 2y}$. Οὕτως ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \eta\mu 2y} = 2 + \eta\mu 2y$, ἤτοι $\frac{9}{2}(1 + \eta\mu 2y) = (2 + \eta\mu 2y)^2$, ἢ $2\eta\mu^2 2y - \eta\mu 2y - 1 = 0$, ἐξ ἧς $\eta\mu 2y = 1$ ἢ $-\frac{1}{2}$. Ὅθεν $2y = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, ἤτοι $|x| = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ἢ $2y = k\pi + (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ἤτοι $|x| = k \cdot \frac{\pi}{2} - (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12}$. Ἐκ τῶν λύσεων ὅμως τούτων θὰ διατηρήσωμεν μόνον τὰς θετικάς.

1099. $2\sqrt{2}\eta\mu 2|x| - 2(\sqrt{3} - 1)\sigma\upsilon\nu|x| - 2\sqrt{2}\eta\mu|x| + \sqrt{3} - 1 = 0$.

Ἔχομεν ὡς ἄνω, $4\sqrt{2}\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y - 2(\sqrt{3} - 1)\sigma\upsilon\nu y - 2\sqrt{2}\eta\mu y + \sqrt{3} - 1 = 0$, $(2\sigma\upsilon\nu y - 1) \cdot [2\sqrt{2}\eta\mu y - (\sqrt{3} - 1)] = 0$, $4\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu y - \frac{1}{2}\right)\left(\eta\mu y - \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right) = 0$, ἤτοι (ἄσκ. 360)

$4\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu 60^\circ)(\eta\mu y - \eta\mu 15^\circ) = 0$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu y = \sigma\upsilon\nu 60^\circ$, ἤτοι $|x| = k \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$, ἢ $\eta\mu y = \eta\mu 15^\circ$, ἤτοι $|x| = k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot 15^\circ$. Ἐκ τῶν λύσεων ὅμως τούτων θὰ διατηρήσωμεν μόνον τὰς θετικάς.

1100. $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x + 1) + \tau o\xi\varepsilon\varphi(x - 1) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{8}{31}$.

Ἂν θέσωμεν $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x + 1) = \alpha$, $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x - 1) = \beta$ καὶ $\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{8}{31} = \gamma$ θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi\alpha = x + 1$ $\varepsilon\varphi\beta = x - 1$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{8}{31}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\alpha + \beta = \gamma$, θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi\gamma$, ἤτοι (τ. 23) $\frac{(x + 1) + (x - 1)}{1 - (x + 1)(x - 1)} = \frac{8}{31}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $4x^2 + 31x - 8 = 0$, ἥτις δίδει τὴν δεκτὴν λύσιν $x = \frac{1}{4}$.

1101. $\tau o\xi\eta\mu x + \tau o\xi\eta\mu 2x = \pi : 3$ (1). Θέτοντες $\tau o\xi\eta\mu x = y$ καὶ $\tau o\xi\eta\mu 2x = \varphi$, ἔχομεν $\eta\mu y = x$, $\sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1 - x^2}$, $\eta\mu\varphi = 2x$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{1 - 4x^2}$. Ὅθεν ἐκ τῆς (1) ἥτις γράφεται $y + \varphi = \frac{\pi}{3}$, λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu(y + \varphi) = \frac{1}{2}$, ἤτοι $\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - 4x^2} - x \cdot 2x = \frac{1}{2}$, καὶ $\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - 4x^2} = 2x^2 + \frac{1}{2}$. Ἂν ἤδη τὰ μέλη αὐτῆς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις, $7x^2=\frac{3}{4}$, ἥτις δίδει τὴν δεκτὴν λύσιν $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

1102. $τοξημ\frac{5}{x}+τοξημ\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$. Ἔχομεν ὡς ἄνω $ημy=\frac{5}{x}$, $ημφ=\frac{12}{x}$, $y+φ=\frac{\pi}{2}$, ἤτοι $ημφ=συνy$. Ὅθεν $ημ^2φ=συν^2y$, $ημ^2φ=1-ημ^2y$, $\frac{144}{x^2}=1-\frac{25}{x^2}$, $x^2=169$ καὶ $x=13$.

1103. $τοξεφ2x+τοξεφ4x=τοξεφ3$. Ἔχομεν ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 1100 $(2x+4x):(1-2x\cdot 4x)=3$, $8x^2+2x-1=0$ καὶ $x=1:4$.

1104. $2τοξεφ(συνx)=τοξεφ(2συντx)$. Ἂν $τοξεφ(συνx)=y$ καὶ $τοξεφ(2συντx)=φ$, αὕτη γράφεται $2y=φ$. Ὅθεν $εφ2y=εφφ$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ $εφy=συνx$ καὶ $εφφ=2συντx=$ $=2:ημx$, ἡ (1) γράφεται (τ. 32) $\frac{2συνx}{1-συν^2x}=\frac{2}{ημx}$, ἤτοι $\frac{συνx}{ημ^2x}=\frac{1}{ημx}$. Ὅθεν $ημx=0$ καὶ $x=k\pi$ ἢ $συνx=ημx$ ἤτοι $εφx=1$ καὶ $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$.

1105. $εφ(τοξσυνx)=ημ\left(τοξσφ\frac{1}{2}\right)$ (1). Ἂν $τοξσυνx=y$, εἶναι $συνy=x$ καὶ $εφy=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Ἂν δὲ $τοξσφ\frac{1}{2}=φ$, εἶναι $σφφ=\frac{1}{2}$ καὶ $ημφ=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Οὕτως ἡ (1) δίδει $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $5(1-x^2)=4x^2$ ἤτοι $9x^2=5$ καὶ $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

1106. $τοξσυν\left(x+\frac{1}{2}\right)+τοξσυνx+τοξσυν\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$ (1).

Ἂν $τοξσυν\left(x+\frac{1}{2}\right)=y$, $τοξσυν\left(x-\frac{1}{2}\right)=φ$ καὶ $τοξσυνx=ω$, ἔχομεν $συνy=$ $=x+\frac{1}{2}$, $ημy=\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$, $συνφ=x-\frac{1}{2}$, $ημφ=\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$, $συνω=x$, $ημω=\sqrt{1-x^2}$. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (1), ἣν γράφομεν $y+φ=\frac{3\pi}{2}-ω$, δίδει τὴν $συν(y+φ)=$ $=-ημω$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $(4x^2-1)-\sqrt{(3-4x^2)^2-16x^2}=-4\sqrt{1-x^2}$. Αὕτη δὲ ἀνάγεται εἰς τὴν $x^2(16x^4-20x^2+13)=0$, ἡ ὁποία ἔχει πραγματικὴν ρίζαν τὴν $x=0$.

1107. $τοξεφ\frac{α}{x}+τοξεφ\frac{β}{x}+τοξεφ\frac{γ}{x}+τοξεφ\frac{δ}{x}=\frac{\pi}{2}$.

Ἔχομεν, ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 1100, $τοξεφ\frac{\frac{α}{x}+\frac{β}{x}}{1-\frac{αβ}{x^2}}+τοξεφ\frac{\frac{γ}{x}+\frac{δ}{x}}{1-\frac{γδ}{x^2}}=\frac{\pi}{2}$. Οὕτω δὲ (§ 69,5) εἶναι $\frac{(α+β)x}{x^2-αβ}=\frac{x^2-γδ}{(γ+δ)x}$ ἤτοι $x^4-(αβ+αγ+αδ+βγ+βδ+γδ)x^2+αβγδ=0$.

1108. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $τεμx+συντx=α$, ἔχει δύο ρίζας ἀπὸ 0 ἕως 2π, ἂν $α^2<8$ καὶ τέσσαρας ρίζας, ἂν $α^2>8$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται $\sqrt{1+εφ^2x}+\sqrt{1+σφ^2x}=α$. Ἐξ αὐτῆς δέ, ἂν θέσωμεν $εφ^2x=β$, εὑρίσκομεν $(β^2+1)(β^2+2β+1)=α^2β^2$, ἤτοι $(β^2+β+1)^2=(α^2+1)β^2$ καὶ ἐπομένως $β^2+β+1\mp\sqrt{α^2+1}.β=0$ (1). Ἀλλ' ἐκ τούτων ἡ μὲ τὸ $-$, ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἂν $(1-\sqrt{\alpha^2+1})^2>4$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν διαδοχικῶς $2\sqrt{\alpha^2+1}<\alpha^2-2$, $4(\alpha^2+1)<(\alpha^2-2)^2$, $\alpha^2(\alpha^2-8)>0$ καὶ $\alpha^2>8$. Ἐξ ἄλλου ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (1) ἔχει πάντοτε ρίζας πραγματικάς, διότι πάντοτε εἶναι $(1+\sqrt{\alpha^2+1})^2>4$. Ὅ.ἔ.δ.

1109. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi\left(\pi\cdot\frac{x-2}{x-1}\right)=\varepsilon\varphi\left(\pi\cdot\frac{x-3}{x+1}\right)$, ἡ δὲ διακρίνουσα ν᾽ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων παραγόντων.

Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, λαμβάνομεν τὴν $\pi\cdot\frac{x-2}{x-1}=\pi\cdot\frac{x-3}{x+1}+k\pi$, ὅπου $x\neq\pm1$ καὶ ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἡ $kx^2-3x+5-k=0$ (1). ἧς αἱ ρίζαι εἶναι $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4k(5-k)}}{2k}$.

Ἀλλ᾽ ἡ διακρίνουσα $9-4k(5-k)=4k^2-20k+9$, εἶναι τριώνυμον, ὅπερ ὡς ἔχον ρίζας $k_1=\frac{9}{2}$ καὶ $k_2=\frac{1}{2}$ ἰσοῦται μὲ $(2k-9)(2k-1)$. Θὰ εἶναι δὲ τοῦτο θετικὸν ἂν $\frac{9}{2}<k<\frac{1}{2}$. Ὥστε αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ 1, 2, 3, 4 τοῦ k ἀποκλείονται.

1110. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου μ, ἡ ἐξίσωσις $\mu\eta\mu^2x-2(\mu-2)\eta\mu x+\mu+2=0$, ἔχει δύο ρίζας δεκτάς, μίαν, ἢ οὐδεμίαν.

Ἐπειδὴ ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $4-6\mu$, αὕτη θὰ δώσῃ διὰ τὸ ημx ρίζας πραγματικάς, ἂν $\mu\leq2:3$, καὶ περιέχωνται εἰς τὸ διάστημα $(-1,\ 1)$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\varphi(\eta\mu x)=\varphi(1)=6$ καὶ $\varphi(\eta\mu x)=\varphi(-1)=4\mu-2$, ἡ μία τῶν ριζῶν τούτων θὰ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $(-1,\ 1)$, ἂν $\mu<\frac{1}{2}$, διότι τότε $\varphi(1)\varphi(-1)<0$, ἤτοι $6(4\mu-2)<0$. Εὐκόλως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι διὰ τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ μ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας.

1111. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου μ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(4\mu+1)\eta\mu^2x-(6\mu-1)\eta\mu x+3\mu-6=0$, εἶναι τὰ ἡμίτονα δύο συμπληρωματικῶν τόξων; Ποῖαι εἶναι τότε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως;

Ἂν αἱ ρίζαι εἶναι $\eta\mu\varphi=\alpha$, καὶ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sigma\upsilon\nu\varphi=\alpha_1$, θὰ εἶναι $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\alpha^2+\alpha_1^2=1$ (1). Ἀντιστρόφως δὲ ἂν $\alpha^2+\alpha_1^2=1$ τὰ α καὶ α_1 εἶναι ἡμίτονα δύο συμπληρωματικῶν τόξων. Ἤδη ἡ (1) γράφεται $(\alpha+\alpha_1)^2-2\alpha\alpha_1=1$ ἤτοι $\left(\frac{6\mu-1}{4\mu+1}\right)^2-2\left(\frac{3\mu-6}{4\mu+1}\right)=1$ $\left(\text{ὅπου } \mu\neq-\frac{1}{4}\right)$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $2\mu^2-11\mu-6=0$ καὶ $\mu=6$ ἢ $-\frac{1}{2}$. Οὕτω διὰ $\mu=6$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $25\eta\mu^2x-35\eta\mu x+12=0$ καὶ δίδει ρίζας $\eta\mu x_1=\frac{4}{5}$ καὶ $\eta\mu x_2=\frac{3}{5}$. Εἶναι δὲ $\eta\mu^2x_1+\eta\mu^2x_2=1$. Οὕτω αἱ συμπληρωματικαὶ γωνίαι x_1 καὶ x_2 εἶναι γωνίαι ὀρθ. τριγώνου μὲ πλευρὰς 3, 4 καὶ 5. Διὰ $\mu=-\frac{1}{2}$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $2\eta\mu^2x-8\eta\mu x+15=0$, ἥτις δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς.

1112. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $4(\sigma\upsilon\nu^3x+\eta\mu^3x)-2\sqrt{2}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ (1). Ἐὰν x εἶναι ἓν τόξον ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τιμὴ $y=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ ἐπαληθεύει τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν $(2y-1)(2y^2+y-2)=0$. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης τὰ τόξα x τὰ ἐπαληθεύοντα τὴν ἐξίσωσιν (1) (Πολ]χνεῖον).

Ἐπειδὴ $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, ἡ (1) γράφεται διαδοχικῶς οὕτω:

$$4[(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^3+3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)]-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$4\left[2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$8\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-6\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-2-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[8\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-6\eta\mu 2x-1\right]-2=0 \qquad (2).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=1+\eta\mu 2x$ (3) ἡ (2) γράφεται $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(3-2\eta\mu 2x)-2=0$ (4). Ἤδη θέτοντες $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=y$, ἔχομεν ἐκ τῆς (3) $\eta\mu 2x=2y^2-1$, ὁπότε ἡ (4) γράφεται $y(3-4y^2+2)-2=0$, ἐξ ἧς $4y^3-5y+2=0$, ἤτοι $(2y-1)(2y^2+y-2)=0$. Ὅθεν ἢ $2y-1=0$, ἤτοι $y=\frac{1}{2}$ ἢ $2y^2+y-2=0$, ἤτοι $y=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Οὕτως ἐκ τῆς $y=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}=$ $=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$, εὑρίσκομεν $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, ὁπότε $x=2k\pi+\frac{7\pi}{12}$ καὶ $x=2k\pi-\frac{\pi}{12}$. Ἐκ δὲ τῆς ἄλλης τιμῆς τοῦ y εὑρίσκομεν $x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

1113. Τῆς ἐξισώσεως $1+\sigma\upsilon\nu x=\mu+\mu\eta\mu x$ ἔστω x_1 μία τῶν λύσεων διὰ $\mu=\mu_1$ καὶ x_2 μία τῶν λύσεων τούτων διὰ $\mu=\mu_2$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $\mu_1\mu_2=1$ θὰ εἶναι $x_1+x_2=\pi:2$.

Ἐπειδὴ $1+\sigma\upsilon\nu x_1=\mu_1(1+\eta\mu x_1)$ καὶ $1+\sigma\upsilon\nu x_2=\mu_2(1+\eta\mu x_2)$ θὰ εἶναι $(1+\sigma\upsilon\nu x_1)(1+\sigma\upsilon\nu x_2)=$ $=\mu_1\mu_2(1+\eta\mu x_1)(1+\eta\mu x_2)$. Ὅθεν ἂν $\mu_1\mu_2=1$ θὰ εἶναι $1+\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\sigma\upsilon\nu x_1\sigma\upsilon\nu x_2=$ $=1+\eta\mu x_1+\eta\mu x_2+\eta\mu x_1\eta\mu x_2$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu x_1-\eta\mu x_2+\sigma\upsilon\nu x_2-\eta\mu x_1+\sigma\upsilon\nu(x_1+x_2)=0$ (1). Ἀλλὰ διὰ $x_1+x_2=\pi:2$, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu x_1=\eta\mu x_2$, $\sigma\upsilon\nu x_2=\eta\mu x_1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(x_1+x_2)=0$. Ὅθεν ἡ σχέσις (1) ἐπαληθεύεται.

1114. Νὰ εὑρεθῇ τόξον τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομένη νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν χορδήν του δοθέντα λόγον μ.

Ἔστω x τὸ ζητούμενον τόξον. Ὥστε (θεώρ. § 68) ἡ χορδή του ἰσοῦται μὲ $2\eta\mu\frac{x}{2}$ καὶ συνεπῶς εἶναι $\varepsilon\varphi x:2\eta\mu\frac{x}{2}=\mu$ ἤτοι $\varepsilon\varphi x=2\mu\eta\mu\frac{x}{2}$ (1). Ἐπειδὴ μὲ $\varepsilon\varphi x=\eta\mu x:\sigma\upsilon\nu x=$

$$=2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}:\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-1\right),\ \text{ἡ (1) γίνεται}\ \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\mu\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-1\right)\ \text{ἤτοι}$$

$$2\mu\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-\mu=0\ (2)\quad\text{καὶ}\quad \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8\mu^2}}{4\mu}.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους δι' οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ μ. Καὶ ἂν $\varphi(+1)\varphi(-1)<0$, ἤτοι $(\mu+1)(\mu-1)<0$, δηλαδὴ ἂν $-1<\mu<1$ μία τῶν ριζῶν θὰ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $(-1, 1)$, ἤτοι μία τῶν ριζῶν θὰ εἶναι δεκτή. Θὰ εἶναι δὲ καὶ αἱ δύο ρίζαι δεκταὶ ἂν $2\mu\varphi(+1)>0$, $2\mu\varphi(-1)>0$ καὶ $-1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}<+1$ ἤτοι ἂν $2\mu(\mu+1)>0$, $2\mu(\mu-1)>0$ καὶ $-1<\frac{1}{4\mu}<+1$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἂν $1<\mu<-1$.

1115. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἡ ἐξίσωσις $συνϑ=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$ ἔχει ρίζας;

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $-1\leq συνϑ<1$, ἢ $συν^2ϑ\leq 1$ ἤτοι $\frac{(x^2-5x+4)^2}{(x^2-4)^2}\leq 1$ ἢ

$\frac{(x^2-5x+4)^2-(x^2-4)^2}{(x^2-4)^2}\leq 0$. Ὅθεν πρέπει νὰ εἶναι $(x^2-5x+4)^2-(x^2-4)^2\leq 0$ ἢ

$(2x^2-5x)(-5x+8)\leq 0$ ἤτοι $x(2x-5)(5x-8)\geq 0$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι τοῦ 1ου μέλους εἶναι 0, $\frac{8}{5}$ καὶ $\frac{5}{2}$, συνάγομεν ὅτι ἡ τελευταία ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\frac{5}{2}<x<\infty$ ἢ $0<x<\frac{8}{5}$.

1116. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἡ ἐξίσωσις $συν3ϑ=\frac{x^2-5x-2}{x^2-3x+2}$ ἔχει ρίζας; Ἐὰν δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη καταστῇ ἀκεραία πρὸς x, τοῦ ϑ θεωρουμένου ὡς παραμέτρου, διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ϑ τὸ γινόμενον x_1x_2 τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ -2.

α) Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$(x^2-5x-2)^2-(x^2-3x+2)^2\leq 0, \quad \text{ἤτοι} \quad x(2x-5)(5x-8)\geq 0 \quad \text{κλπ.}$$

β) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίαν γράφεται

$$(1-συν3ϑ)x^2-(5-3συνϑ)x-2(1+συν3ϑ)=0,$$

τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ὁποίας εἶναι $\frac{2(1+συν3ϑ)}{1-συν3ϑ}=2$. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας τιμὰς τοῦ ϑ.

1117. Ἐὰν εφα καὶ εφβ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+px+q=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ p καὶ q, ἵνα $α+β=π:3$.

Εἶναι $εφ(α+β)=\sqrt{3}$, ἤτοι $\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}=\sqrt{3}$. Ἀλλὰ $εφα+εφβ=-p$ καὶ $εφαεφβ=q$

Οὕτως ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι $\frac{p}{q-1}=\sqrt{3}$.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1118. $εφxεφ3x=μ$. Εὑρίσκομεν διαδοχικῶς (ἄσκ.606) $συν2x-συν4x=μ(συν2x+συν4x)$, $(1-μ)συν2x=(1+μ)συν4x$, $(1-μ)συν2x=(1+μ)(2συν^22x-1)$ ἢ τέλος $2(1-μ)συν^22x-(1+μ)συν2x-(1-μ)=0$. Ἡ λύσις αὐτῆς καὶ ἡ διερεύνησις γίνεται κατὰ τὰ γνωστά.

1119. $ημ3x=μημ^3x$. Ἔχομεν (τ. 35) $3ημx-4ημ^3x=μημ^3x$ ἤτοι $ημx[(4+μ)ημ^2x-3]=0$. Οὕτως ἡ λύσις $ημx=0$, δίδει $x=kπ$, ἡ δὲ $(4+μ)ημ^2x-3=0$, λύεται καὶ διερευνᾶται εὐκόλως.

1120. $ημ3x=μημ^2x$. Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω τὴν ἐξίσωσιν $ημx(4ημ^2x+μημx-3)=0$, ἐξ ἧς $ημx=0$ καὶ $x=kπ$ ἢ $4ημ^2x+μημx-3=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἑτεροσήμους, αἵτινες ὅμως πρέπει νὰ περιέχωνται εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$. Θὰ ἔχωμεν δὲ μίαν ρίζαν δεκτὴν ἂν $φ(-1)φ(+1)<0$, ἤτοι $(1-μ)(1+μ)<0$ ἢ $1<μ<-1$ καὶ δύο ρίζας δεκτὰς ἂν $φ(-1)>0$, $φ(+1)>0$ καὶ $-1\leq\frac{ρ_1+ρ_2}{2}\leq 1$, ἤτοι ἐπειδὴ $\frac{ρ_1+ρ_2}{2}=\frac{μ}{8}$, ἂν $-1<μ<1$.

1121. $συν2x=μ(ημx+συνx)$. Αὕτη γράφεται $συν^2x-ημ^2x=μ(ημx+συνx)$, $(συνx+ημx)(συνx-ημx)=μ(ημx+συνx)$, ἤτοι $(συνx+ημx)(συνx-ημx-μ)=0$. Ὅθεν $συνx+ημx=0$ ἢ $συνx-ημx=μ$. Καὶ ἡ μὲν 1η τούτων δίδει $ημx=-συνx=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ $x=kπ-$

$-\frac{\pi}{4}$. Ἐκ δὲ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $συν^2x+ημ^2x-2ημxσυνx=μ^2$ ἤτοι $-ημxσυνx=\frac{μ^2-1}{2}$.
Οὕτω τὰ $-ημx$ καὶ $συνx$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2ω^2-2μω+μ^2-1=0$, αἵτινες ὅμως πρέπει νὰ περιέχωνται εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$. Πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διακρίνουσα $μ^2-2(μ^2-1)\geqq 0$, ἤτοι $-\sqrt{2}\leqq μ\leqq\sqrt{2}$. Ἀκόμη δὲ νὰ εἶναι $φ(-1)>0$ καὶ $φ(+1)>0$, ἤτοι $(μ+1)^2:2>0$ καὶ $(μ-1)^2:2>0$. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται ἀνισότητες ἐπαληθεύονται πάντοτε.

1122. $(μ-1)συν^2x-3μσυνx+2μ=0$. Αὕτη λύεται καὶ διερευνᾶται κατὰ τὰ γνωστὰ εὐκόλως.

1123. $ημxεφx+2συνx=μ$. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $ημ^2x+2συν^2x=μσυνx$, $1-συν^2x+2συν^2x=μσυνx$, $συν^2x-μσυνx+1=0$ καὶ $συνx=\frac{μ\pm\sqrt{μ^2-4}}{2}$ (1). Αἱ ρίζαι δὲ αὗται θὰ εἶναι πραγματικαὶ ἂν $μ^2-4\geqq 0$, ἤτοι ἂν $μ>2$ καὶ $μ<-2$. Ἀλλ' ἂν $μ>2$ ἐκ τῶν ριζῶν (1) δεκτὴ εἶναι ἡ μικροτέρα, ἂν δὲ $μ<-2$ δεκτὴ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα.

Ἤδη ἂν θέσωμεν $4:μ^2=ημ^2ω$, θὰ ἔχωμεν $συνx=\frac{μ}{2}(1\pm συνω)$, ἤτοι $συνx=$ $=μσυν^2\frac{ω}{2}$ ἢ $μημ^2\frac{ω}{2}$.

1124. $ημxσυνx-μ(ημx+συνx)+1=0$.

Ἔχομεν (ἄσκ. 1112) $ημx+συνx=\sqrt{2}συν\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ καὶ $2συν^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+ημ2x$ ἤτοι $ημxσυνx=συν^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\frac{1}{2}$. Οὕτως ἂν θέσωμεν $συν\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=συνy$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $2συν^2y-2μ\sqrt{2}συνy+1=0$ (1), ἧς αἱ ρίζαι πρέπει νὰ περιέχωνται εἰς τὸ $(-1, +1)$. Θὰ ἔχωμεν δὲ μίαν ρίζαν, ἂν $φ(-1)φ(+1)<0$ ἤτοι ἂν $(3+2μ\sqrt{2})$. $.(3-2μ\sqrt{2}))<0$ ἤτοι ἂν $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}<μ<-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right.$ καὶ δύο ρίζας, ἂν ἡ διακρίνουσα $2(μ^2-1)\geqq 0$, ἀκόμη δὲ ἂν $φ(1)>0$, $φ(-1)>0$, καὶ $-1<\frac{ρ_1+ρ_2}{2}<1$, ἤτοι ἂν τὸ μ εἶναι ἐντὸς ἑνὸς τῶν διαστημάτων $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, -1\right)$, $\left(+1, +\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$. Ἤδη ἂν ω εἶναι τὸ μικρότερον τῶν τόξων, δι' ἃ ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται ἔχομεν τὰς λύσεις $x-\frac{\pi}{4}=2κ\pi\pm ω$ ἤτοι $x=2κ\pi+\frac{\pi}{4}\pm ω$.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων.

1125. $y=εφ3x:εφ^3x$, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $\pi:2$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη γράφεται (τ. 36) $y=\frac{3-εφ^2x}{εφ^2x(1-3εφ^2x)}$ ἐξ ἧς $3yεφ^4x-$ $-(y+1)εφ^2x+3=0$ καὶ $εφ^2x=17\pm 12\sqrt{2}$, εἶναι δὲ $y=0$, ὅταν $εφx=\sqrt{3}$ καὶ $y=\infty$, ὅταν $1-3εφ^2x=0$, ἤτοι ὅταν $εφx=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ὥστε, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $\frac{\pi}{2}$, ἡ y ἀναχωροῦσα ἀπὸ τοῦ $+\infty$ ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ ἐλαχίστου $17+12\sqrt{2}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνει καὶ τείνει εἰς τὸ $+\infty$, ὅταν ἡ εφx τείνῃ εἰς τὸ $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μεταπηδᾷ δὲ ἔπειτα ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ αὐξάνῃ. Μηδενίζεται διὰ $\text{εφ}x=\sqrt{3}$ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μεγίστου $17-12\sqrt{2}$ τείνουσα πρὸς τὸ 0 ὅταν τὸ x τείνῃ πρὸς τὸ $\pi:2$.

1126. $y=\text{ημ}^2x-2\text{ημ}x$, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x=-\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2}$ εἶναι $\text{ημ}x=-1, 0, 1$ ἀντιστοίχως καὶ $y=3, 0, -1$. Οὕτως ἂν $\text{ημ}x<1$, ἡ συνάρτησις y εἶναι φθίνουσα καὶ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν -1, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τὴν τιμὴν $\frac{\pi}{2}$.

1127. $y=\text{ημ}(\alpha-x)\text{ημ}(\alpha+x)$, ὅταν τὸ α σταθερόν, τὸ δὲ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\frac{\pi}{2}$ ἕως $+\frac{\pi}{2}$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη γράφεται $y=\frac{1}{2}(\text{συν}2x-\text{συν}2\alpha)$. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι διὰ $x=-\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2}$, εἶναι ἀντιστοίχως $y=\frac{1}{2}\cdot(-1-\text{συν}2\alpha)=-\frac{1}{2}(1+\text{συν}2\alpha)=-\text{συν}^2\alpha$, ἢ $y=\frac{1}{2}(1-\text{συν}2\alpha)=\text{ημ}^2\alpha$. ἢ $y=-\text{συν}^2\alpha$. Ὅθεν ἡ y εἶναι ἐλαχίστη διὰ $2x=\mp\pi$ καὶ μεγίστη διὰ $2x=0$.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

1128. $x+y=\alpha$, $\text{ημ}^2x-\text{ημ}^2y=\beta$. Ἡ 2α ἐξίσωσις γράφεται (ἄσκ. 475) $\text{ημ}(x+y)\cdot\text{ημ}(x-y)=\beta$ ἤτοι $\text{ημ}(x-y)=\beta:\text{ημ}\alpha$. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $x-y$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡ $x+y$ εἶναι γνωστή, εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς x καὶ y, αἵτινες εἶναι δεκταὶ ὅταν $\beta:\text{ημ}\alpha\leqq 1$.

1129. $x+y=\alpha$, $(\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y):(1-\text{συν}\alpha)=1$. Ἔχομεν $2\text{ημ}^2x=1-\text{συν}2x$, καὶ $2\text{ημ}^2y=1-\text{συν}2y$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}2x+\text{συν}2y=2\text{συν}(x+y)\cdot(\text{συν}(x-y)=2\text{συν}\alpha\text{συν}(x-y)$, ἡ 2α ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται $1-\text{συν}\alpha\text{συν}(x-y)=1-\text{συν}\alpha$, ἤτοι $\text{συν}\alpha\text{συν}(x-y)=\text{συν}\alpha$. Ὅθεν ἂν $\text{συν}\alpha\neq 0$, εἶναι $\text{συν}(x-y)=1$ καὶ $x-y=2k\pi$. Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς $x+y=\alpha$, εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha}{2}+k\pi$ καὶ $y=\frac{\alpha}{2}-k\pi$. Ἀλλὰ ἂν $\text{συν}\alpha=0$, ἔχομεν $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ καὶ ὅταν $k=0$, εἶναι $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Ὥστε τότε τὰ x καὶ y εἶναι συμπληρωματικὰ τόξα, ὁπότε

$$\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2y=1=\text{ημ}^2x+\text{ημ}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

1130. $\text{συν}x\text{ημ}y=-\frac{1}{2}$, $\text{ημ}x+\text{συν}y=0$. Ἡ 2α ἐξίσωσις γράφεται $\text{συν}y=-\text{ημ}x=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. Ὅθεν $y=2k\pi\pm\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (1). Οὕτως ἡ 1η ἐξίσωσις γίνεται $+\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\text{συν}x=-\frac{1}{2}$, ἤτοι $\pm\text{συν}^2x=-\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ἐξ αὐτῶν ἡ $-\text{συν}^2x=-\frac{1}{2}$ δίδει διὰ τὸ συνx πραγματικὰς τιμάς. Ὅθεν $\text{συν}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (1) τὰς τιμὰς τοῦ y.

1131. $\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y = 6, \quad \frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi y} + \frac{\varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x} = -6,$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Ἡ 2α ἐξίσωσις ἥτις γράφεται $\frac{\varepsilon\varphi^2 x + \varepsilon\varphi^2 y}{\varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y} = -6$, δίδει τὴν $\varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y = -1$ ἤτοι $2\varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y = -2$. Ἤδη προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη ταύτην καὶ τὴν 1ην εὑρίσκομεν $(\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y)^2 = 4$, $(\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y)^2 = 8$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = \pm 2$ καὶ $\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi y = \pm 2\sqrt{2}$. Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$, εὑρίσκομεν $\frac{\pi}{8}$ καὶ $-\frac{3\pi}{8}$ ἢ $\frac{3\pi}{8}$ καὶ $-\frac{\pi}{8}$.

1132. $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu y, \quad \varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi 2y = -1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}.$

Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\eta\mu x \eta\mu 2y = -\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu 2y$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu(2y - x) = 0$, $2y - x = \frac{\pi}{2}$, ἤτοι $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$. Οὕτως ἡ 1η γίνεται $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Ὅθεν $2x = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $x = \frac{\pi}{10}$ καὶ $y = \frac{3\pi}{10}$.

1133. $\sigma\upsilon\nu(x + 2y)\sigma\upsilon\nu(x - y) + \sigma\upsilon\nu y = 0, \quad \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = 2.$

Θέτοντες $\varepsilon\varphi x = \alpha$ καὶ $\varepsilon\varphi y = \beta$ ἔχομεν τὸ σύστημα $(1 - \alpha\beta)(1 + \beta^2) + (1 - \beta^2)(1 + \alpha^2) = 0$ καὶ $\alpha + \beta = 2$. Ἐξ αὐτοῦ δὲ εὑρίσκομεν $(1-\alpha)^2(5 - 4\alpha + \alpha^2) = (1 + \alpha^2)(3 - 4\alpha + \alpha^2)$ ἤτοι $(1 - \alpha)(1 - 4\alpha + \alpha^2) = 0$.

Ὅθεν $\begin{matrix}\alpha = 1\\ \beta = 1\end{matrix}$ καὶ $\begin{matrix}\alpha = 2 - \sqrt{3}\\ \beta = \sqrt{3}\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}\alpha = 2 + \sqrt{3}\\ \beta = -\sqrt{3}\end{matrix}$ καὶ συνεπῶς

$\begin{matrix}x = k\pi + \frac{\pi}{4}\\ x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}\end{matrix}$ καὶ $\begin{matrix}x = k\pi + \frac{\pi}{12}\\ y = \lambda\pi + \frac{\pi}{3}\end{matrix}$ ἢ $\begin{matrix}x = k\pi + \frac{5\pi}{12}\\ y = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}.\end{matrix}$

1134. $\sigma\upsilon\nu(3x + y) = \eta\mu(3y - x), \quad \sigma\upsilon\nu(3x - y) = \eta\mu(y + 3x).$

Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu(3x + y) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x - 3y\right) = 0$ ἤτοι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + 2x - y\right)\eta\mu\left(x + 2y - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sigma\upsilon\nu(3x - y) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - y - 3x\right) = 0$ ἤτοι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x - 2y\right)\eta\mu\left(2x + y - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Ὅθεν $2x - y = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (1) ἢ $x + 2y = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ (2)

καὶ $x - 2y = k'\pi - \frac{\pi}{4}$ (3) ἢ $2x + y = \lambda'\pi + \frac{\pi}{4}$ (4)

Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ x καὶ y ἐκ τῆς λύσεως τῶν συστημάτων (1, 3), (1, 4), (2, 3) καὶ (2, 4).

1135. $\eta\mu x = \eta\mu\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\eta\mu^2\frac{y}{2} + \sigma\upsilon\nu\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$

Ἐπειδὴ $2\eta\mu^2\frac{y}{2} = 1 - \sigma\upsilon\nu y$, ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu y + \sigma\upsilon\nu\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \left[\sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 - \sqrt{2}\eta\mu\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$. Ἤτοι (ἐκ τῆς 1ης) εἶναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$

$= 1-\sqrt{2}\eta\mu x$. Ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=\sqrt{2}-2\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\sqrt{2}$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}$, $2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ καὶ τέλος $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ καὶ $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$.

1136. $\eta\mu 2x+\eta\mu 2y=\eta\mu(x+y)=1$. Ἐκ τῆς $\eta\mu(x+y)=1$ εὑρίσκομεν $x+y=$ $=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ καὶ ἐκ τῆς $\eta\mu 2x+\eta\mu 2y=1$ ἤτοι ἐκ τῆς $2\eta\mu(x+y)\sigma\upsilon\nu(x-y)=1$, εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{1}{2}$ ἤτοι $x-y=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$ κλπ.

1137. $x+y+z=\pi$, $\frac{\eta\mu x}{\alpha}=\frac{\eta\mu y}{\beta}=\frac{\eta\mu z}{\gamma}$.

Ἐκ τῆς 1ης σχέσεως λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu(y+z)$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu^2x=\sigma\upsilon\nu^2(y+z)$. Ὅθεν $1-\eta\mu^2x=(1-\eta\mu^2y)(1-\eta\mu^2z)-2\eta\mu y\eta\mu z\sqrt{(1-\eta\mu^2y)(1-\eta\mu^2z)}+\eta\mu^2y\eta\mu^2z$. Οὕτως ἂν ἀπομονώσωμεν τὸν ὅρον μὲ τὸ ριζικὸν καὶ ὑψώσωμεν ἔπειτα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $4\eta\mu^2y\eta\mu^2z(1-\eta\mu^2y)(1-\eta\mu^2z)=(\eta\mu^2x-\eta\mu^2y-\eta\mu^2z+2\eta\mu^2y\eta\mu^2z)^2$ (1). Ἤδη ἂν ρ εἶναι ἡ τιμὴ τῶν ἴσων λόγων τῆς 2ας ἐξισώσεως, ἔχομεν $\eta\mu x=\alpha\rho$, $\eta\mu y=\beta\rho$, $\eta\mu z=\gamma\rho$ (2) ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν μελῶν της διὰ ρ^4, δίδει τὴν ἐξίσωσιν $4\beta^2\gamma^2-4\beta^2\gamma^2\rho^2(\beta^2+\gamma^2)=(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2+4\beta^2\gamma^2(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\rho^2$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸν λόγον ρ καὶ κατόπιν τὰ ημx, ημy, ημz ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) κλπ.

1138. $x+y+z=\pi$, $\frac{\varepsilon\varphi x}{\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi y}{\beta}=\frac{\varepsilon\varphi z}{\gamma}$. Ἂν λ εἶναι ἡ τιμὴ τῶν ἴσων λόγων, ἔχομεν $\varepsilon\varphi x=\alpha\lambda$, $\varepsilon\varphi y=\beta\lambda$, $\varepsilon\varphi z=\gamma\lambda$ καὶ $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y+\varepsilon\varphi z=(\alpha+\beta+\gamma)\lambda$ ἤτοι (ἄσκ. 524) $(\alpha+\beta+\gamma)\lambda=\alpha\beta\gamma\lambda^3$. Ἀφαιροῦντες δὲ τὴν λύσιν $\lambda=0$, ἔχομεν $\lambda^2=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$ καὶ $\lambda=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}}$. Ἤδη ἡ εὕρεσις τῶν εφx, εφy, εφz γίνεται εὐκόλως. Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}>0$.

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα:

1139. $\eta\mu x\eta\mu y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$.

Ἡ 1η ἐξίσωσις γράφεται $\sigma\upsilon\nu(x-y)-\sigma\upsilon\nu(x+y)=2\alpha$ ἤ, ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu(x-y)=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}-1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu(x+y)=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}-1$, $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}-\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}=\alpha$ (1). Ἡ δὲ 2α γράφεται $2\sigma\upsilon\nu\frac{y+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta$ (2). Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $4\sigma\upsilon\nu^4\frac{x+y}{2}+4\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}-\beta^2=0$ (ι), ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}=\pm\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$ (3) καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (2) $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\beta:\pm2\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$ (4). Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ $\frac{x+y}{2}$ καὶ $\frac{x-y}{2}$ κλπ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἂν $\beta>0$, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα τῆς (3) καὶ τῆς $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}=\pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$ (ἐκ τῆς 4), ἂν δὲ $\beta<0$, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα τῆς

(3) καὶ τῆς $\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} = \mp\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$. Ἀλλ' ἵνα ἐκ τῶν συστημάτων τούτων ὑπάρχουν λύσεις πρέπει νὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}<1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x-y}{2}<1$. Ὅθεν πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\beta^2}{4}<\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}<1$, (ἐκ τῆς 2), ἡ δὲ ἐξίσωσις (ι), εἰς ἣν ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}$ διὰ τοῦ 1 καὶ τοῦ $\frac{\beta^2}{4}$ πρέπει νὰ δώσῃ $\frac{4\alpha-(\beta^2-4)}{4}\cdot\frac{4\alpha-(4-\beta^2)}{4}<0$ καὶ ὅπου $\beta^2<4$. Οὕτω δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\beta^2-4}{4}<\alpha<\frac{4-\beta^2}{4}$.

1140. $x\eta\mu(\omega-y)=\alpha$, $x\eta\mu(\varphi-y)=\beta$. Ἔχομεν $\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu y=\alpha:x$, $\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu y-\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu y=\beta:x$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο, ὡς σύστημα α]θμίων ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu y=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\omega-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}{x\eta\mu(\varphi-\omega)}(1),\ \eta\mu y=\frac{\beta\eta\mu\omega-\alpha\eta\mu\varphi}{x\eta\mu(\varphi-\omega)}\ (2).\ \text{Ὅθεν }\epsilon\varphi y=\frac{\beta\eta\mu\omega-\alpha\eta\mu\varphi}{\beta\sigma\upsilon\nu\omega-\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi}.$$

Ἤδη εὑρίσκομεν τὸ x ἐκ τῆς σχέσεως $\eta\mu^2y+\sigma\upsilon\nu^2y=1$ ἥτις ὅταν θέσωμεν τὰς τιμὰς (1) καὶ (2) δίδει μετὰ τὰς πράξεις $x^2=\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(\varphi-\omega)}{\eta\mu^2(\varphi-\omega)}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x^2 εἶναι πάντοτε θετικὴ εὑρίσκομεν δύο τιμὰς τοῦ x ἀντιθέτους.

1141. Δοθεῖσα γωνία $\alpha<90^0$ νὰ μερισθῇ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τῶν δύο μερῶν νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν 2μ. Νὰ γίνῃ ἡ διερεύνησις τοῦ προβλήματος.
Ἐφαρμογή, ὅταν $\alpha=75^0$ καὶ $2\mu=(1+\sqrt{3}):\sqrt{3}$.

Ἂν τὰ μέρη εἶναι x καὶ y ἔχομεν $x+y=\alpha$ καὶ $\epsilon\varphi x+\epsilon\varphi y=2\mu$ ἤτοι $\frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}=2\mu(1)$. Ἀλλὰ $2\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y=\sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)$. Ὅθεν $\eta\mu(x+y)=\mu[\sigma\upsilon\nu(x+y)+\sigma\upsilon\nu(x-y)]$, ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{\eta\mu\alpha}{\mu}-\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἂν δὲ ω εἶναι τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον δι' ὃ εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\eta\mu\alpha}{\mu}-\sigma\upsilon\nu\alpha$, ἔχομεν $x-y=2k\pi\pm\omega$. Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς $x+y=\alpha$, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν τόξων $x=k\pi+\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\omega}{2}$ καὶ $y=-k\pi+\frac{\alpha}{2}\mp\frac{\omega}{2}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἵνα ἔχωμεν λύσεις πρέπει, νὰ εἶναι $-1<\frac{\eta\mu\alpha}{\mu}-\sigma\upsilon\nu\alpha<1$, ἤτοι $-(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)<$ $<\frac{\eta\mu\alpha}{\mu}<(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος ἔχομεν

$$\sigma\upsilon\nu(x-y)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sigma\upsilon\nu15^0.\quad \text{Ὅθεν } x-y=15^0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $x+y=75^0$, εὑρίσκομεν $x=45^0$ καὶ $y=30^0$.

1142. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ω ἡ παράστασις x^2+y^2 γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη, ὅπου x καὶ y εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων

$$x\sigma\upsilon\nu\omega+y\eta\mu\omega=\alpha\sigma\upsilon\nu3\omega$$
$$x\eta\mu\omega-y\sigma\upsilon\nu\omega=3\alpha\eta\mu3\omega.$$

Εὑρίσκομεν $x=\alpha(\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu3\omega+3\eta\mu\omega\eta\mu3\omega)$, $y=\alpha(\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu3\omega-3\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu3\omega)$ καὶ $x^2+y^2=$ $=\alpha^2(\sigma\upsilon\nu^23\omega+9\eta\mu^23\omega)$ ἤτοι $x^2+y^2=\alpha^2(1+8\eta\mu^23\omega)$. Οὕτως ἡ παράστασις x^2+y^2 εἶναι μεγίστη, ὅταν $\eta\mu^23\omega=1$, ἤτοι ὅταν $\omega=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$, καὶ ἐλαχίστη ὅταν $\eta\mu^23\omega=0$, ἤτοι ὅταν $\omega = \frac{k\pi}{3}$.

1143. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ω τὸ σύστημα εφx+εφy=εφω, σφx+σφy=σφω, περιέχει λύσιν ἐπαληθεύουσαν τὴν σχέσιν x+y = 3π : 4.

Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\frac{1}{\varepsilon\varphi x}+\frac{1}{\varepsilon\varphi y}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$ εὑρίσκομεν $\frac{\varepsilon\varphi y+\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$, $\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$ καὶ $\varepsilon\varphi^2\omega=\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$. Ἀλλ' εἶναι $\varepsilon\varphi(x+y)=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}=-1$, ἤτοι $\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=-1$, $\frac{\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi^2\omega}=-1$ καὶ $\varepsilon\varphi^2\omega-\varepsilon\varphi\omega-1=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{1\pm2{,}23603}{2}=1{,}61803$ ἢ $-0{,}61803=\varepsilon\varphi 58^\circ\,16'\,59''$ ἢ $\varepsilon\varphi(-31^\circ\,43'\,1'')$, καὶ $\omega=k\,.\,180^\circ+58^\circ\,16'59''$ ἢ $\omega=k\,.\,180^\circ-31^\circ\,43'\,1''$.

1144. Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ ω καὶ φ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις x+y = π : 3, εφx+εφy = εφω καὶ σφx+σφy = σφφ ἔχουν κοινὴν λύσιν.

Ἡ 3η σχέσις (ἄσκ. 1143) γράφεται $\frac{\varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi}$, ἐξ ἧς $\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y=\varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\varphi$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi(x+y)=\sqrt{3}$, ἔχομεν $\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}=\sqrt{3}$ ἤτοι $\frac{\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\omega\varepsilon\varphi\varphi}=\sqrt{3}$. Οὕτως ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}:(1+\sqrt{3}\varepsilon\varphi\varphi)$.

Ν' ἀπαλειφθῇ τὸ x μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

1145. αημxεφx+βσυνx = γ, ασυνxσφx+βημx = δ.

Ἔχομεν $\alpha\eta\mu^2x+\beta\sigma\upsilon\nu^2x=\gamma\sigma\upsilon\nu x$, $\alpha\sigma\upsilon\nu^2x+\beta\eta\mu^2x=\delta\eta\mu x$ (1) καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\alpha+\beta=\gamma\sigma\upsilon\nu x+\delta\eta\mu x$ (2). Ἀλλ' ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $(\alpha-\beta)\eta\mu^2x+\delta\eta\mu x-\alpha=0$ (3) καὶ ἐκ τῆς (2) $(\alpha+\beta-\delta\eta\mu x)^2=\gamma^2(1-\eta\mu^2x)$ (4). Ἤδη ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ημx μεταξὺ τῶν (3) καὶ (4) γίνεται εὐκόλως.

1146. ασυνx+βσυν2x = γ, αημx+βημ2x = δ.

Ἔχομεν $\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta(2\sigma\upsilon\nu^2x-1)=\gamma$, ἤτοι $\beta+\gamma=\sigma\upsilon\nu x(\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu x)$ (1) καὶ $\alpha\eta\mu x+2\beta\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\delta$, ἤτοι $\delta=\eta\mu x(\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu x)$ (2). Οὕτω δὲ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $(\beta+\gamma)^2+\delta^2=(\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu x)^2$. Ἀλλὰ $\gamma^2+\delta^2-\beta^2=\alpha(\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu x)$. Ὅθεν ἡ ἀπαλείφουσα εἶναι

$$(\gamma^2+\delta^2-\beta^2)^2=\alpha^2[(\beta+\gamma)^2+\delta^2].$$

Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ θ καὶ φ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

1147. αημθ=βημφ ασυνθ+βσυνφ=γ, x=yεφ(θ+φ).

Ἐκ τῆς 1ης ἔχομεν $\alpha\eta\mu\vartheta-\beta\eta\mu\varphi=0$ καὶ $\alpha^2\eta\mu^2\vartheta+\beta^2\eta\mu^2\varphi-2\alpha\beta\eta\mu\vartheta\eta\mu\varphi$ (1). Ὁμοίως ἐκ τῆς 2ας ἔχομεν $\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi=\gamma^2$ (2). Προσθέτοντες ἤδη κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\alpha^2+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu(\vartheta+\varphi)+\beta^2=\gamma^2$ (3), ἐξ ἧς $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\vartheta+\varphi)}=\tau\epsilon\mu(\vartheta+\varphi)=\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi(\vartheta+\varphi)=\frac{x}{y}$ καὶ $\varepsilon\varphi^2(\vartheta+\varphi)=\tau\epsilon\mu^2(\vartheta+\varphi)-1$, ἔχομεν τὴν ἀπαλείφουσαν $\frac{x^2}{y^2}=\frac{4\alpha^2\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}-1$, ἥτις μετὰ τὰς πράξεις κλπ. λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{x^2}{y^2}=\frac{[\gamma^2-(\alpha-\beta)^2][(\alpha-\beta)^2-\gamma^2]}{(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)^2}$.

1148. $x\sigma\upsilon\nu\vartheta+y\eta\mu\vartheta=2\alpha$, $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi=2\alpha$, $2\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}=1$.

Προσθέτοντες τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη κλπ. εὑρίσκομεν $x\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta+\varphi}{2}+y\eta\mu\frac{\vartheta+\varphi}{2}$

$=2\alpha\tau\epsilon\mu\frac{\vartheta-\varphi}{2}$ (1). Ἐξισοῦντες δὲ τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν κλπ. εὑρίσκομεν $\chi\eta\mu\frac{\vartheta+\varphi}{2}\eta\mu\frac{\vartheta-\varphi}{2}=$ $=y\eta\mu\frac{\vartheta-\varphi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta+\varphi}{2}$, ἐξ ἧς $\epsilon\varphi\frac{\vartheta+\varphi}{2}=\frac{y}{x}$ (2). Τέλος ἐκ τῆς 3ης ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta+\varphi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta-\varphi}{2}=1$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta-\varphi}{2}=1-\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta+\varphi}{2}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (3). Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\frac{\vartheta+\varphi}{2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ καὶ $\tau\epsilon\mu\frac{\vartheta-\varphi}{2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-x}}$, ἡ ἐξίσωσις (1) μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν δίδει τὴν ἀπαλείφουσαν $y^2=4\alpha(x+\alpha)$.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες: ($0\leq x\leq 2\pi$).

1149. $\sigma\varphi 3x-1>0$. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi 3x=1=\sigma\varphi\frac{\pi}{4}$, διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν τὸ διώνυμον ἀλλάζει σημεῖον. Ὅθεν $3x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ἤτοι $x=\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{3}$. Ὁμοίως τὸ διώνυμον ἀλλάζει σημεῖον καὶ ὅταν ἡ σφ3x αὐξάνει ἀπεριορίστως, δηλαδὴ διὰ $3x=\lambda\pi$ ἤτοι $x=\lambda\cdot\frac{\pi}{3}$. Ὅταν λοιπὸν δώσωμεν εἰς τὰ k καὶ λ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 0, 1, 2 κλπ. μέχρις ὅτου εὕρομεν διὰ τὸ x τιμὰς μέχρι τοῦ 2π, εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 106), ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ

$$0<x<\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{12},\ \frac{2\pi}{3}<x<\frac{9\pi}{12},\ \pi<x<\frac{13\pi}{12},\ \frac{4\pi}{3}<x<\frac{17\pi}{12},\ \text{καὶ}\ \frac{5\pi}{3}<x<\frac{17\pi}{12}.$$

1150. $\epsilon\varphi^2x-(\sqrt{3}-1)\epsilon\varphi x-\sqrt{3}>0$. Βλέπε § 106 πδ. 5.

1151. $\frac{\epsilon\varphi^3x-3}{1-2\eta\mu^2x}<0$. Ἔχομεν (πδ. 6 § 106)

$$(\epsilon\varphi x-\sqrt{3})(\epsilon\varphi x+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}\,\eta\mu x)(1+\sqrt{2}\,\eta\mu x)<0 \text{ καὶ}$$

$$0<x<\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4},\ \frac{4\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{2},$$

$$\frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{3} \text{ καὶ } \frac{7\pi}{4}<x<2\pi.$$

1152. $\frac{1-2\eta\mu x}{1+3\eta\mu x}>\frac{1+5\eta\mu x}{1-9\eta\mu^2x}$ (Π]χνεῖον). Εἶναι $\frac{1-2\eta\mu x}{1+3\eta\mu x}-\frac{1+5\eta\mu x}{1-3^2\eta\mu^2x}>0$,

$$\frac{(1-2\eta\mu x)(1-3\eta\mu x)-(1+5\eta\mu x)}{1-3^2\eta\mu^2x}>0,\ \frac{6\eta\mu^2x-10\eta\mu x}{1-3^2\eta\mu^2x}>0, \text{ ἢ τέλος}$$

$$2\eta\mu x(3\eta\mu x-5)(1-3\eta\mu x)(1+3\eta\mu x)>0.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παράγων ημx γίνεται 0 διὰ $x=0^0$, 180^0, 360^0. Ὅθεν $\eta\mu x>0$, διὰ $0^0<x<180^0$ καὶ $\eta\mu x<0$, διὰ $180^0<x<360^0$. Ὁμοίως ὁ παράγων $3\eta\mu x-5$, γίνεται 0 διὰ $\eta\mu x=\frac{3}{5}$, οἱ δὲ λοιποὶ δύο παράγοντες γίνονται 0 διὰ $\eta\mu x=\frac{1}{3}$ καὶ $\eta\mu x=-\frac{1}{3}$. Ἤδη λύομεν τὰς τρεῖς αὐτὰς ἐξισώσεις, ἐργαζόμενοι δὲ ὡς εἰς τὸ πδ. 6 τῆς § 106 εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ x, δι' ἃς ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται.

1153. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x+\sqrt{2})}>\frac{2\eta\mu x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$. Ἐξ αὐτῆς προκύπτει

$$\frac{\sqrt{3}\,\epsilon\varphi x+1}{(2\eta\mu x-\sqrt{2})(2\eta\mu x+\sqrt{2})}>0, \text{ ἤτοι } (\sqrt{3}\,\epsilon\varphi x+1)(2\eta\mu x-\sqrt{2})(2\eta\mu x+\sqrt{2})>0.$$

Ἐργαζόμενοι δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{6}<x<2\pi.$

1154. $\frac{\sqrt{2}\,\text{συν}x}{2\eta\mu x-\sqrt{3}}<\frac{2\eta\mu x+\sqrt{3}}{4\text{συν}^2x-1}$. Ἐξ αὐτῆς προκύπτει $\frac{\sqrt{2}\,\text{συν}x+1}{4\eta\mu^2x-3}<0$

ἤτοι $(\sqrt{2}\,\text{συν}x+1)(2\eta\mu x+\sqrt{3})(2\eta\mu x-\sqrt{3})<0$. Ὅθεν $0<x<\frac{\pi}{3}$.

1155. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2\eta\mu^2\omega-4x\eta\mu\omega+4\eta\mu^2\omega-1=0$, τὸ x εἶναι ἄγνωστον καὶ τὸ ω παράμετρος. Νὰ διερευνηθῇ διὰ ποίας τιμὰς τῆς ω ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ῥίζας πραγματικὰς ὡς καὶ τί σημεῖα ἔχουν αἱ ῥίζαι αὗται.
Ἡ ἐξέτασις θὰ γίνῃ δι' ω ἀπὸ 0 ἕως 2π, διότι ἡ περίοδος τοῦ ημω εἶναι 2π καὶ δι' $\eta\mu\omega\neq0$, διότι δι' $\eta\mu\omega=0$, ἤτοι διὰ $\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$, λαμβάνομεν $-1=0$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\Delta=4\eta\mu^2\omega-2\eta\mu^2\omega(4\eta\mu^2\omega-1)=2\eta\mu^2\omega(3-4\eta\mu^2\omega)$. Θὰ εἶναι δὲ $\Delta>0$, ἂν $3-4\eta\mu^2\omega>0$, ἤτοι ἂν $(\sqrt{3}-2\eta\mu\omega)(\sqrt{3}+2\eta\mu\omega)>0$.
Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta>0$, διὰ $0<\omega<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}<\omega<\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}<\omega<2\pi$, καὶ $\Delta<0$, διὰ $\frac{\pi}{3}<\omega<\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}<\omega<\frac{5\pi}{3}$. Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν $\varrho_1\varrho_2=\frac{4\eta\mu^2\omega-1}{2\eta\mu^2\omega}$ καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\varrho_1+\varrho_2=\frac{\eta\mu\omega}{2\eta\mu^2\omega}$, εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ $4\eta\mu^2\omega-1=(2\eta\mu\omega-1)$. $(2\eta\mu\omega+1)$ καὶ τοῦ ημω, διότι $2\eta\mu^2\omega>0$. Εἶναι δὲ $\varrho_1\varrho_2>0$ διὰ $\frac{\pi}{6}<\omega<\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}<\omega<\frac{11\pi}{6}$, $\varrho_1\varrho_2<0$, διὰ $0<\omega<\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}<\omega<\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}<\omega<2\pi$, $\varrho_1+\varrho_2>0$, διὰ $0<\omega<\pi$ καὶ $\varrho_1+\varrho_2<0$, διὰ $\pi<\omega<2\pi$. Οὕτω δὲ καταρτίζοντες πίνακα τιμῶν τοῦ ω καὶ τῶν σημείων τῶν Δ, $\varrho_1\varrho_2$ καὶ $\varrho_1+\varrho_2$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅ,τι ζητοῦμεν. Π.χ. διὰ $0<\omega<\frac{\pi}{6}$, εἶναι $\Delta>0$, $\varrho_1<0<\varrho_2$, διὰ δὲ $\frac{\pi}{6}<\omega<\frac{\pi}{3}$, εἶναι $\Delta>0$, $0<\varrho_1<\varrho_2$ κ.ο.κ.

1156. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2\text{συν}^2\omega-4x\text{συν}\omega+4\text{συν}^2\omega-1=0$.
Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἄνω. Οὕτω π.χ. εὑρίσκομεν, ὅτι ἂν $\frac{\pi}{6}<\omega<\frac{\pi}{3}$, θὰ εἶναι $\Delta>0$, $\varrho_1\varrho_2>0$, $\varrho_1+\varrho_2>0$ καὶ $0<\varrho_1<\varrho_2$ κ.ο.κ.

1157. Νὰ λυθῇ πρὸς x ἡ ἀνισότης $(x-1)[x^4-2(1+\text{συν}^2\omega)x^2+\eta\mu^4\omega]>0$.
Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου τοῦ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν εἶναι $\pm(1\pm\text{συν}\omega)$. Ὥστε τὸ 1ον μέλος τῆς δοθείσης ἀνισότητος γράφεται $(x-1)[x+(1+\text{συν}\omega)][x-(1+\text{συν}\omega)][x+(1-\text{συν}\omega)][x-(1-\text{συν}\omega)]$ (ι). Ὑποθέτοντες δὲ τὴν γωνίαν ω ὀξεῖαν, θὰ εἶναι συνω>0, αἱ δὲ ῥίζαι τῆς (ι) εἶναι κατὰ τάξιν μεγέθους $-(1+\text{συν}\omega)$, $-(1-\text{συν}\omega)$, $1-\text{συν}\omega$, 1 καὶ $1+\text{συν}\omega$. Οὕτω ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $-(1+\text{συν}\omega)<x<-(1-\text{συν}\omega)$, $1-\text{συν}\omega<x<1$ καὶ $1+\text{συν}\omega<x<+\infty$.

1158. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $\left|\frac{\text{συν}\vartheta}{\eta\mu\varphi}\right|<1$, $\left|\frac{\text{συν}\varphi}{\eta\mu\vartheta}\right|<1$ καὶ $|\,\text{σφ}\vartheta\,\text{σφ}\varphi\,|<1$, ἐὰν ἰσχύῃ ἡ μία, θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ ἄλλαι δύο. (Παν. Ἀθ.).

Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ $\left|\frac{\text{συν}\vartheta}{\eta\mu\varphi}\right|<1$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $|\,\text{συν}\vartheta\,|<|\,\eta\mu\varphi\,|$ καὶ $\text{συν}^2\vartheta<\eta\mu^2\varphi$. Ἀλλὰ $\text{συν}^2\vartheta+\eta\mu^2\vartheta=\text{συν}^2\varphi+\eta\mu^2\varphi$. Ὅθεν $\text{συν}^2\varphi<\eta\mu^2\vartheta$, ἤτοι $|\,\text{συν}\varphi\,|<|\,\eta\mu\vartheta\,|$

καὶ $\left|\frac{συνφ}{ημφ}\right|<1$. 'Αλλ' ἂν $συν^2φ<ημ^2θ$ (ἐκ τῆς 2ας ἀνισότητος), τότε θὰ εἶναι $συν^2θ<ημ^2φ$, ἤτοι $|συνθ|<|ημφ|$ καὶ $\left|\frac{συνθ}{ημφ}\right|<1$. Τέλος ἂν ἰσχύῃ ἡ 3η ἀνισότης, ἤτοι ἂν $\left|\frac{συνθ}{ημφ}\right|\cdot\left|\frac{συνφ}{ημθ}\right|<1$, τότε θὰ εἶναι ἢ $\left|\frac{συνθ}{ημφ}\right|<1$, ὁπότε $\left|\frac{συνφ}{ημθ}\right|<1$ ἢ $\left|\frac{συνφ}{ημθ}\right|<1$, ὁπότε $\left|\frac{συνθ}{ημφ}\right|<1$. Ὅ.ἔ.δ.

1159. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἔχομεν $\frac{1-ημx}{1-2ημx}\leqslant\frac{1+ημx}{1-4ημ^2x}$.

Ἂν μεταφέρωμεν τὸ 2ον μέλος εἰς τὸ 1ον εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $\frac{-2ημ^2x}{1-4ημ^2x}\leqq 0$, $-2ημ^2x(1-4ημ^2x)\leqq 0$, ἢ $2ημ^2x(1-4ημ^2x)\geqq 0$. 'Αλλ' ἂν $ημ^2x=0$, θὰ ἔχωμεν διὰ $x=kπ$, $\frac{1-ημx}{1-2ημx}=\frac{1+ημx}{1-4ημ^2x}$, ἂν δὲ $ημ^2x\neq 0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν $1-4ημ^2x>0$, ἐξ ἧς $-\frac{1}{2}<ημx<\frac{1}{2}$, ἤτοι $2kπ-\frac{π}{6}<x<2kπ+\frac{π}{6}$ ἢ $(2k+1)π-\frac{π}{6}<x<(2k+1)π+\frac{π}{6}$. 'Αλλ' αἱ δύο αὗται λύσεις δίδουν τὴν $kπ-\frac{π}{6}<x<kπ+\frac{π}{6}$.

'Εὰν θ εἶναι τὸ μέτρον εἰς ἀκτίνια γωνίας θετικῆς, μικροτέρας τῆς ὀρθῆς, θὰ εἶναι:

1160. $ημθ>θ-\frac{θ^3}{4}$ ***1161.*** $1-\frac{θ^2}{2}<συνθ<1-\frac{θ^2}{2}+\frac{θ^4}{16}$.

α) 'Επειδὴ (§ 147) $εφ\frac{θ}{2}>\frac{θ}{2}$, εἶναι $ημ\frac{θ}{2}>\frac{θ}{2}συν\frac{θ}{2}$. 'Αλλὰ $ημθ=2ημ\frac{θ}{2}συν\frac{θ}{2}$. Ὅθεν $ημθ>θσυν^2\frac{θ}{2}$, ἤτοι $ημθ>θ\left(1-ημ^2\frac{θ}{2}\right)$ (ι). 'Αλλ' ἐπειδὴ (§ 147) $ημ\frac{θ}{2}<\frac{θ}{2}$ εἶναι $1-ημ^2\frac{θ}{2}>1-\left(\frac{θ}{2}\right)^2$, ἤτοι $1-ημ^2\frac{θ}{2}>1-\frac{θ^2}{4}$. Οὕτως ἡ (ι) δίδει $ημθ>θ-\frac{θ^3}{4}$.

β) Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἀνωτέρω, καὶ ὅτι $συνθ=1-2ημ^2\frac{θ}{2}$, ἔχομεν $ημ^2\frac{θ}{2}<\frac{θ^2}{4}$, $1-2ημ^2\frac{θ}{2}>1-2\cdot\frac{θ^2}{4}$, ἤτοι $συνθ>1-\frac{θ^2}{2}$. 'Εξ ἄλλου ἐπειδὴ $συνθ=1-2ημ^2\frac{θ}{2}$ καὶ $ημ\frac{θ}{2}>\frac{θ}{2}-\frac{θ^3}{32}$ εἶναι $συνθ<1-2\left(\frac{θ}{2}-\frac{θ^3}{32}\right)^2\left[=1-2\left(\frac{θ^2}{4}-\frac{θ^4}{32}+\frac{θ^6}{(32)^2}\right)=1-\frac{θ^2}{2}+\frac{θ^4}{16}-\frac{2θ^6}{(32)^2}\right]$. Ὅθεν $συνθ<1-\frac{θ^2}{2}+\frac{θ^4}{16}$.

1162. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς ἀκτίνια τὰ τόξα δι' ἃ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες
$\frac{4x^2-9}{2ημ^2x-συνx-1}<0$ καὶ $-2π\leqslant x<π$ (Πολ]χνεῖον).

'Επειδὴ $2ημ^2x-συνx-1=2(1-συν^2x)-συνx-1=-(2συν^2x+συνx-1)=-(συνx+1)\cdot(2συνx-1)$, ἡ δοθεῖσα 1η ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν $(2x+3)(2x-3)(συνx+1)(2συνx-1)>0$ (1'). 'Αλλ' ἀφαιρουμένου τοῦ παράγοντος $συνx+1$, ὅστις διὰ $x=-π$ εἶναι 0, καὶ >0 διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς 2ας ἀνισότητος, μένει ἡ $(2x+3)(2x-3)\cdot(2συνx-1)>0$ (2'), τὸ πρῶτον μέλος τῆς ὁποίας ἔχει τὰς ῥίζας $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ καὶ $2kπ\pm\frac{π}{3}$.

Ἀλλ' ἐκ τῶν τελευταίων λύσεων δεκταὶ εἶναι αἱ $+\frac{\pi}{3}$ καὶ $-2\pi+\frac{\pi}{3}$. Ὅθεν αἱ δεκταὶ ῥίζαι τῆς (2') εἶναι $-2\pi+\frac{\pi}{3}$; $-\frac{3}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$. Ἐπαληθεύεται δὲ αὕτη διὰ $-2\pi \leq x < -2\pi+\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{2}$.

1163. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς γωνίας ω ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0 ἡ ἐξίσωσις $9x^2-24x\eta\mu\omega+8\eta\mu\omega+3=0$ ἔχει πάντοτε τὰς ῥίζας της πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ εἶναι θετική, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $12^2\eta\mu^2\omega-9(8\eta\mu\omega+3)>0$, ἤτοι $16\eta\mu^2\omega-8\eta\mu\omega-3>0$. Ἀλλὰ τὸ τριώνυμον τοῦ 1ου μέλους ἔχει ῥίζας $-\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$. Οὕτω προκύπτουν αἱ ἀνισότητες $-1<\eta\mu\omega<-\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}<\eta\mu\omega<1$ (ι), ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι $-1<\eta\mu\omega<1$. Ἀλλ' ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (ι) δεκτὴ εἶναι ἡ δευτέρα, διότι ἐδῶ πρέπει νὰ εἶναι $\eta\mu\omega>0$. Οὕτως ἂν α εἶναι ἡ μικροτέρα θετικὴ γωνία δι' ἣν εἶναι $\eta\mu\alpha=\frac{3}{4}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει πάντοτε ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὅταν $180^0-\alpha>\omega>\alpha$.

1164. Ποῦ πρέπει νὰ περατοῦται τόξον x τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἵνα τὸ ἡμίτονόν του ἐπαληθεύῃ τὴν ἀνισότητα

$$\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\eta\mu x-\sqrt{6}+1}{4\eta\mu^2x-1}<1.$$

Ἂν μεταφέρωμεν τὸ 2ον μέλος εἰς τὸ 1ον εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $\frac{-4\eta\mu^2x+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\eta\mu x+2-\sqrt{6}}{4\eta\mu^2x-1}<0$. (ι). Ἀλλ' ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἀνισότητος (ι) $\Delta=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+4(2-\sqrt{6})=13-8\sqrt{6}$, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ τριώνυμον τοῦτο εἶναι ἀρνητικόν. Οὕτως ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται ἂν $4\eta\mu^2x-1>0$. Συμβαίνει δὲ τοῦτο ἂν τὸ ημx εἶναι ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν $-\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}$ τοῦ διωνύμου τοῦ πρώτους μέλους. Οὕτως ἕπονται αἱ ἀνισότητες $-1<\eta\mu x<-\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}<\eta\mu x<1$. Ἤδη ἂν λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος B'B τῶν ἡμιτόνων τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ διανύσματα $\overline{OP}=\frac{1}{2}$ καὶ $\overline{OP'}=-\frac{1}{2}$ καὶ ἐκ τῶν σημείων P καὶ P', φέρωμεν τὰς παραλλήλους MPM' καὶ M''P'M''' πρὸς τὸν ἄξονα AA' (ὡς εἰς τὸ σχῆμα 38), εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζητούμενα τόξα περατοῦνται εἰς ἓν τῶν τόξων MBM' ἢ M''B'M'''. Ὥστε διὰ τὰ τόξα $x<360^0$ ἔχομεν $30^0<x<150^0$ ἢ $210^0<x<330^0$.

Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐν παντὶ τριγώνῳ ΑΒΓ εἶναι :

1165. $(\beta+\gamma-\alpha)\left(\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)=2\alpha\sigma\varphi\frac{A}{2}$

Τὸ 1ον μέλος εἶναι : $=2(\tau-\alpha).\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=2(\tau-\alpha).\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}:\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\alpha\gamma}}.$

$$.\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}=2(\tau-\alpha).\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}:\frac{\tau-\alpha}{\alpha}\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}=2\alpha\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}=$$

$$=2\alpha\sigma\varphi\frac{A}{2}\quad \text{(τύποι 59—61).}$$

1166. $\dfrac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}+\dfrac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu\Gamma+\eta\mu A}+\dfrac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A+\eta\mu B}=0.$

Ἔχομεν (τ. 56). $\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)=4P^2\eta\mu^2A\eta\mu(B-\Gamma)=4P^2\eta\mu A\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)=4P^2\eta\mu A\cdot$ $\cdot(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma)=4P^2\eta\mu A(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως καὶ εἰς τοὺς ἄλλους ἀριθμητὰς εὑρίσκομεν ὅτι τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μέ:

$$4P^2[\eta\mu A(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)+\eta\mu B(\eta\mu\Gamma-\eta\mu A)+\eta\mu\Gamma(\eta\mu A-\eta\mu B)]=0.$$

1167. $\dfrac{2\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}{\sigma\varphi A-\sigma\varphi B+2\sigma\varphi\Gamma}=\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta^2-\gamma^2}.$

Ἐκ τῶν τύπων $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$ καὶ $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=E$, προκύπτει ὅτι $\sigma\varphi A=$ $=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4E}$ κλπ. Οὕτω τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μέ:

$$\frac{2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha^2+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2-2\gamma^2}==\frac{2\beta^2+2\gamma^2}{4\beta^2-2\gamma^2}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta^2-\gamma^2}.$$

1168. $\dfrac{\alpha\eta\mu A+\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma.$

Ἐπειδὴ (τ. 56) $\eta\mu A=\alpha:2P$ κλπ. ὁ ἀριθμητὴς τοῦ 1ου μέλους ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2R}$, ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ $P(\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma)=4P\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$ (§ 97, ἐφ. 3)$=$ $=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2P^2}=\dfrac{2E}{P}$, ἐπειδὴ $\alpha\beta\gamma=4PE$. Οὕτω τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4E}=$ $=\dfrac{\alpha^2}{4E}+\dfrac{\beta^2}{4E}+\dfrac{\gamma^2}{4E}$ (ι). Ἀλλὰ (τ. 64) $E=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu(B+\Gamma)}$. Ὅθεν $\dfrac{\alpha^2}{4E}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\eta\mu(B+\Gamma)}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}=$ $=\dfrac{1}{2}(\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi B)$ κτλ. Οὕτως τὸ ἄθροισμα (ι) ἰσοῦται μέ:

$$\frac{\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi B}{2}+\frac{\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma}{2}+\frac{\sigma\varphi B+\sigma\varphi A}{2}=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma.$$

1169. $\alpha^3\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\beta^3\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A)+\gamma^3\sigma\upsilon\nu(A-B)=3\alpha\beta\gamma.$

Ἐπειδὴ (τ. 56) $\alpha^3=8P^3\eta\mu^3A$ κλπ. τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μὲ $8P^3[\eta\mu^3A\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+$ $+\eta\mu^3B\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A)+\eta\mu^3\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B)]$ ἤτοι (ἄσκ. 1084) ἰσοῦται μέ:

$$8P^3.3\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma==8P^3.3.\frac{\alpha}{2P}\cdot\frac{\beta}{2P}\cdot\frac{\gamma}{2P}=3\alpha\beta\gamma.$$

1170. $E=2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$. (Παν. Ἀθηνῶν. Τμῆμα Χημικόν).

Εἶναι (τύπ. 64). $E=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\dfrac{1}{2}.4P^2\eta\mu^2A.\dfrac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma.$

1171. $\dfrac{\beta^2-\gamma^2}{2}\cdot\dfrac{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu(B-\Gamma)}=E$. Ἐπειδὴ $\beta^2-\gamma^2=4P^2(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma)=4P^2\cdot$ $\cdot\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma)=4P^2\eta\mu A\eta\mu(B-\Gamma)$, τὸ 1ον μέλος ἰσοῦται μὲ $2P^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=E$.

1172. $\varrho\varrho_\alpha\sigma\varphi\dfrac{A}{2}=E.$

$$1\text{ον μέλ.}=\frac{E}{\tau}\cdot\frac{E}{\tau-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}=\frac{E^2}{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}=\frac{E^2}{E}=E.$$

1173. $\Sigma\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=4E(P-2\varrho)$. Τὸ 1ον μέλος$=3\alpha\beta\gamma-\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)-\beta\cdot$ $\cdot(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)-\gamma(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)=3\alpha\beta\gamma-2\alpha\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A-2\alpha\beta\gamma\sigma\upsilon\nu B-2\alpha\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\alpha\beta\gamma[3-2(\sigma\upsilon\nu A+$

$+συνB+συνΓ)]$ (ι). Ἀλλ' εἶναι $αβγ=4PE$, καὶ (ἄσκ. 513) $συνA+συνB+συνΓ=1+4ημ\frac{A}{2}\cdot$
$\cdot ημ\frac{B}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2}$. Ἀλλ' ἐξ ἄλλου (τ. 69) εἶναι $ημ\frac{B}{2}\,ημ\frac{Γ}{2}=ρσυν\frac{A}{2}:α$. Ὅθεν $4ημ\frac{A}{2}\cdot$
$\cdot ημ\frac{B}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2}=4ρσυν\frac{A}{2}ημ\frac{A}{2}:α=2ρημA:α=\frac{ρ}{P}$. Οὕτως ἡ παράστασις (1) γίνεται
$4PE\cdot\left(1-\frac{2ρ}{P}\right)=4E(2P-ρ)$.

1174. $α(ρρ_α+ρ_β\,ρ_γ)=β(ρρ_β+ρ_γ\,ρ_α)=γ(ρρ_γ+ρ_α\,ρ_β)$. Εἶναι:
$α(ρρ_α+ρ_β\,ρ_γ)=α\left[\frac{E^2}{τ(τ-α)}+\frac{E^2}{(τ-β)(τ-γ)}\right]=α[(τ-β)(τ-γ)+τ(τ-α)]=α(2τ^2-2τ^2+βγ)=$
$=αβγ$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $β(ρρ_β+ρ_γ\,ρ_γ)=αβγ$ κλπ.

1175. $συν^2\frac{A}{2}+συν^2\frac{B}{2}+συν^2\frac{Γ}{2}=\frac{4P+ρ}{2P}$. Τὸ 1ον μέλος (ἄσκ. 1173) $=$
$\frac{1}{2}(3+συνA+συνB+συνΓ)=\frac{1}{2}\left(4+4ημ\frac{A}{2}\,ημ\frac{B}{2}\,ημ\frac{Γ}{2}\right)=2+\frac{2ρE}{αβγ}=\frac{4P+ρ}{2P}$.

1176. $ασυν^2\frac{A}{2}+βσυν^2\frac{B}{2}+γσυν^2\frac{Γ}{2}=τ+\frac{E}{P}$. Τὸ 1ον μέλος $=$
$=\frac{1}{2}(α+β+γ+ασυνA+βσυνB+γσυνΓ)=τ+\frac{E}{P}$ (ἄσκ. 1168).

1177. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν γωνίαι τριγώνου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ δὲν δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἐν ἀριθμητικῇ ἢ γεωμετρικῇ προόδῳ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

Ἂν $A-λ$, A, $A+λ$ αἱ γωνίαι, θὰ εἶναι $A-λ+A+A+λ=180^0$ ἤτοι $A=60^0$, ὁπότε:

1) Ἂν $α-μ$, $α$, $α+μ$ αἱ πλευραί, θὰ εἶναι (τύπ. 57) $α^2=(α-μ)^2+(α+μ)^2-2(α-μ)\cdot$
$\cdot(α+μ)συνA=α^2+3μ^2$, ἤτοι $3μ^2=0$, δηλαδὴ $μ=0$.

2) Ἂν $\frac{α}{μ}$, $α$, $αμ$ αἱ πλευραί, θὰ εἶναι $α^2=\frac{α^2}{μ^2}+α^2μ^2-2\cdot\frac{α}{μ}\cdot αμ\cdot συνA$, ἤτοι
$2α^2=\frac{α^2}{μ^2}+α^2μ^2$ καὶ $μ^4-2μ^2+1=0$, ἐξ ἧς ἡ δεκτὴ ῥίζα $μ=1$. Ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο αὐτὰς περιπτώσεις ἔχομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον. Ὅ.ἔ.δ.

1178. Ἂν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ αἱ $εφ\frac{A}{2}$, $εφ\frac{B}{2}$, $εφ\frac{Γ}{2}$ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, ἐν τοιαύτῃ προόδῳ θὰ εἶναι καὶ τὰ $συνA$, $συνB$, $συνΓ$.

Δίδεται ὅτι $εφ\frac{A}{2}+εφ\frac{Γ}{2}=2εφ\frac{B}{2}$. Ὅθεν $ημ\frac{A+Γ}{2}συν\frac{B}{2}=2ημ\frac{B}{2}συν\frac{A}{2}συν\frac{Γ}{2}$ ἤτοι $1+$
$+συνB=2ημ\frac{B}{2}\left(ημ\frac{B}{2}+συν\frac{A-Γ}{2}\right)=1-συνB+2συν\frac{A+Γ}{2}συν\frac{A-Γ}{2}$ καὶ συνεπῶς
$2συνB=συνA+συνΓ$. Ὅ.ἔ.δ.

1179. Ἂν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, θὰ εἶναι ἐν τοιαύτῃ προόδῳ καὶ τὰ γινόμενα $συνAσφ\frac{A}{2}$, $συνBσφ\frac{B}{2}$, $συνΓσφ\frac{Γ}{2}$.

Εἶναι $συνAσφ\frac{A}{2}=\left(1-2ημ^2\frac{A}{2}\right)σφ\frac{A}{2}=σφ\frac{A}{2}-ημA$ κτλ. Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι θὰ εἶναι τὰ δοθέντα γινόμενα ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, ἂν

$$\left(σφ\frac{A}{2}-ημA\right)+\left(σφ\frac{B}{2}-ημB\right)=2\left(σφ\frac{Γ}{2}-ημΓ\right)\text{ ἢ}$$

ἐπειδὴ ὅταν αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, καὶ τὰ ημΑ, ημΒ, ημΓ εἶναι ἐν τοιαύτῃ προόδῳ, ἂν $σφ\frac{Α}{2}+σφ\frac{Β}{2}=2σφ\frac{Γ}{2}$, ἤτοι ἂν $\sqrt{\frac{τ(τ-α)}{(τ-β)(τ-γ)}}+\sqrt{\frac{τ(τ-β)}{(τ-γ)(τ-α)}}=2\sqrt{\frac{τ(τ-γ)}{(τ-α)(τ-β)}}$, δηλαδὴ ἂν $(τ-α)+(τ-β)=2(τ-γ)$ ἢ $α+β=2γ$.

1180. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $4xy$, $3x^2+y^2$, $3x^2+2xy-y^2$, αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ καὶ ἐὰν $2θ$ εἶναι ὁ λόγος τῆς προόδου θὰ εἶναι $εφθ=\sqrt{3}(x-y):(3x+y)$.

Εἶναι $τ=3x(x+y)$, $τ-α=x(3x-y)$, $τ-β=y(3x-y)$, $τ-γ=y(x+y)$. Οὕτως, (τ. 61, 61′) $εφ\frac{Α}{2}=\frac{y}{x\sqrt{3}}$ καὶ $εφ\frac{Β}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ὅθεν $Β=60^0$, $Α+Γ=180^0-Β=120^0$, $\frac{Α+Γ}{2}=Β$ $Α+Γ=2Β$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $εφθ=εφ\frac{Β-Α}{2}=\frac{\sqrt{3}(x-y)}{3x+y}$.

1181. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, ἡ δὲ διαφορὰ τῆς μικροτέρας γωνίας αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας εἶναι ω, αἱ πλευραί του εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $1-x$, 1 καὶ $1+x$, ὅπου $x=\sqrt{\frac{1-συνω}{7-συνω}}$.

Ἔστω $Γ-Α=ω$. Ἂν δὲ αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $1-x$, 1 καί $1+x$, θὰ εἶναι αἱ α, β, γ, τ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $1-x$, 1, $1+x$, $\frac{3}{2}$.

Τότε δὲ θὰ εἶναι $συν\frac{ω}{2}=συν\left(\frac{Γ-Α}{2}\right)=συν\frac{Γ}{2}συν\frac{Α}{2}+ημ\frac{Γ}{2}ημ\frac{Α}{2}$ ἤτοι (τ. 59 καὶ 60)

$$συν\frac{ω}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right):(1-x)}\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+x\right):(1+x)}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+x\right):(1-x)}.$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right):(1+x)}=\sqrt{\frac{1-4x^2}{1-x^2}}.\ \text{Ὅθεν}\ συνω=2συν^2\frac{ω}{2}-1=\frac{1-7x^2}{1-x^2}$$

καὶ $x=\sqrt{\frac{1-συνω}{7-συνω}}$.

1182. Ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, εἶναι δὲ x, ἡ μικροτέρα ἢ ἡ μεγαλυτέρα ἐφαπτομένη, τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $x^2(x^2+9)$, $(3+x^2)^2$ καὶ $9(1+x^2)$.

Ἔστω $εφΑ=x$. Ὥστε ἐπειδὴ $2εφΒ=εφΑ+εφΓ$, εἶναι $2εφΒ-εφΓ=x$ (ι). Οὕτως ἐκ τῆς (ι) καὶ ἐκ τῆς $εφΑ+εφΒ+εφΓ=εφΑεφΒεφΓ$ (ἄσκ. 524), ἔπεται $3εφΒ=x.εφΒ.(2εφΒ-x)$. Ὅθεν $εφΒ=\frac{3+x^2}{2x}$ καὶ $εφΓ=\frac{3}{x}$. Οὕτως ἔχομεν $ημ^2Α=\frac{x^2}{1+x^2}$ (α′), $ημ^2Β=\frac{(3+x^2)^2}{4x^2+(3+x^2)^2}=\frac{(3+x^2)^2}{(1+x^2)(9+x^2)}$ (β′) καὶ $ημ^2Γ=\frac{9}{x^2+9}$ (γ′).

Ἐπειδὴ δὲ τὰ $α^2$, $β^2$, $γ^2$ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ $ημ^2Α$, $ημ^2Β$, $ημ^2Γ$, δηλαδὴ πρὸς τοὺς (α′), (β′), (γ′), εἶναι ἀνάλογα καὶ πρὸς τοὺς $x^2(x^2+9)$, $(3+x^2)^2$ καὶ $9(1+x^2)$.

1183. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ θὰ εἶναι :

$$συνΑ+συνΓ-συνΑσυνΓ+\frac{1}{3}ημΑημΓ=1.$$

Ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἄσκησιν 781, ἔχομεν $ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Γ}{2}=\frac{1}{3}συν\frac{Α}{2}συν\frac{Γ}{2}$

ἤτοι $4\eta\mu^2\frac{A}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}\eta\mu A\eta\mu\Gamma$ ἢ $(1-\sigma\upsilon\nu A)(1-\sigma\upsilon\nu\Gamma)=\frac{1}{3}\eta\mu A\eta\mu\Gamma$ καὶ

τελικῶς $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu\Gamma-\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\Gamma+\frac{1}{3}\eta\mu A\eta\mu\Gamma=1.$

1184. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ὑπὸ τῶν τριῶν ὑψῶν εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ α, β, γ αἱ πλευραί. Τότε θὰ εἶναι $\beta^2=\alpha\gamma$. Ἀλλὰ $\upsilon_\alpha=\frac{2E}{\alpha}$, $\upsilon_\beta=\frac{2E}{\beta}$ καὶ $\upsilon_\gamma=\frac{2E}{\gamma}$. Οὕτως ἂν τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰ ὕψη εἶναι τὸ $A_1B_1\Gamma_1$, ἔχομεν (τ. 57) $\sigma\upsilon\nu A_1=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right):\frac{2}{\beta\gamma}=\frac{\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)-\beta^2\gamma^2}{2\alpha^2\beta\gamma}=$

$=\frac{\alpha\gamma(\alpha^2-\gamma^2)+\alpha^2\gamma^2}{2\alpha^2\beta\gamma}=\frac{\alpha^2-\gamma^2+\alpha\gamma}{2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}=\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ὅθεν $A_1=\Gamma$.

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν $\Gamma_1=A$ καὶ $B_1=B$. Ὅ.ἔ.δ.

1185. Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\eta\mu^2A=\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. (Σχ. Εὐελπίδων).

Εἶναι (τ. 56) $\frac{\alpha^2}{\eta\mu^2A}=\frac{\beta^2}{\eta\mu^2B}=\frac{\gamma^2}{\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma}$. Ὅθεν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$.

1186. Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\alpha^2:2E$, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. (Σχ. Ἰκάρων).

1ον μέλ.$=\frac{\eta\mu(B+\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}$ καὶ 2ον μέλ.$=\alpha^2:\frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$ (τ.64)

Ὅθεν $\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=\eta\mu B\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=0$ καὶ $B+\Gamma=90^\circ$.

1187. Ἐὰν εἰς τρίγωνον εἶναι $\varepsilon\varphi B=\frac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma-B)}{\eta\mu A+\eta\mu(\Gamma-B)}$ τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπειδὴ $\eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)$, ἔχομεν $\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu\Gamma\eta\mu B}{2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}$ ἐξ ἧς $\eta\mu\Gamma\eta\mu B=$ $=\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu B$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\Gamma\varepsilon\varphi B=1$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi B=1:\varepsilon\varphi\Gamma=\sigma\varphi\Gamma$ καὶ $B+\Gamma=90^\circ$.

1188. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, β_1 καὶ γ_1 εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν β καὶ γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς α, εἶναι δὲ $\beta^2:\gamma^2=\beta_1:\gamma_1$, τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές. (Πολ]χνεῖον).

Εἶναι $\frac{\beta_1}{\gamma_1}=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma\sigma\upsilon\nu B}$, ἤτοι $\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma\sigma\upsilon\nu B}$, ἐξ ἧς $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\beta}{\gamma}=$ $=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}$ εἶναι $\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B}$. Ὅθεν $\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B=\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$, ἤτοι $\eta\mu 2B=\eta\mu 2\Gamma$ καὶ κατὰ συνέπειαν, θὰ εἶναι ἢ $2B+2\Gamma=180^\circ$, ἤτοι $B+\Gamma=90^\circ$ ἢ $2B=2\Gamma$, ἤτοι $B=\Gamma$.

1189. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $(\tau-\beta)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\tau\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\tau-\beta=\tau\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$. Ἀλλὰ (τ. 61 καὶ 61') εἶναι $\tau-\beta=$ $=\tau\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ καὶ $A=B$.

1190. Ὁμοίως τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν εἶναι:

$$\alpha\varepsilon\varphi A+\beta\varepsilon\varphi B=(\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}.$$

Ἔχομεν $\alpha\left(\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}\right)=\beta\left(\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}-\varepsilon\varphi B\right)$ (ι). Ὅθεν 1ον μέλος τῆς (ι)

$=\alpha\left(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}-\sigma\upsilon\nu A\eta\mu\frac{A+B}{2}\right):\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}=\alpha\eta\mu\frac{A-B}{2}:\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$.

Ὁμοίως 2ον μέλος τῆς (ι) $=\beta\eta\mu\frac{A-B}{2}:\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$.

Ὅθεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B}$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$, ἔχομεν $\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}=\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B}$, ἤτοι

$$\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}=\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B},\ \varepsilon\varphi A=\varepsilon\varphi B \text{ καὶ } A=B.$$

1191. Ἂν εἰς τρίγωνον εἶναι $\frac{\beta^3+\gamma^3-\alpha^3}{\beta+\gamma-\alpha}=\alpha^2$ καὶ $\eta\mu B\eta\mu\Gamma=\frac{3}{4}$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

Ἐκ τῆς πρώτης σχέσεως εὑρίσκομεν $\beta^3+\gamma^3=(\beta+\gamma)\alpha^2$ ἐξ ἧς $\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma=\alpha^2$. Ὅθεν (τ. 57) $\sigma\upsilon\nu A=\frac{1}{2}$, $A=60^0$ καὶ $(B+\Gamma)=120^0$. Ἀλλ' ἡ δευτέρα σχέσις δίδει $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=3:2$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)=-1:2$, εἶναι $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=1$, $B-\Gamma=0$, $B=\Gamma=(180^0-A):2=120^0:2=60^0$.

1192. Ἂν αἱ γωνίαι τριγώνου εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, εἶναι δὲ καὶ $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma=2$, τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος ἕπεται $1-\eta\mu^2A+1-\eta\mu^2B+1-\eta\mu^2\Gamma=1$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu^2A+$ $+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1$. Οὕτως ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκ. 520, εἶναι $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma=0$. Ἀλλὰ τότε εἷς τῶν παραγόντων, π.χ. τὸ συνA θὰ εἶναι 0, ὁπότε $A=90^0$, καὶ κατὰ συνέπειαν $B=60^0$ καὶ $\Gamma=30^0$, διότι αἱ γωνίαι εἶναι ἐν ἀρ. προόδῳ.

1193. Τριγώνου δίδονται ἡ πλευρὰ α, ἡ ἀπέναντι γωνία A καὶ τὸ ὕψος υ ἐπὶ τὴν α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, δι' ἧς εὑρίσκομεν τὰς πλευρὰς β καὶ γ, ὡς καὶ ἡ σχέσις, ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δεδομένων, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Εἶναι $\alpha\upsilon=\beta\gamma\eta\mu A=2E$ καὶ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$. Ὅθεν $\beta^2\gamma^2=\alpha^2\upsilon^2:\eta\mu^2A$ καὶ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+2\alpha\upsilon\sigma\varphi A$ καὶ συνεπῶς τὰ β^2 καὶ γ^2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\eta\mu^2A.x^2-\eta\mu^2A(\alpha^2+2\alpha\upsilon\sigma\varphi A)x+\alpha^2\upsilon^2=0 \quad (1).$$

Ἤδη, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, π.χ. μὲ τὴν B ὀρθήν, πρέπει νὰ εἶναι $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2$ ἤτοι $\beta^2-\gamma^2=\alpha^2$. Ἀλλὰ τὸ 1ον μέλος ταύτης εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς (1). Ὅθεν τότε θὰ εἶναι $\alpha^2(\alpha+2\upsilon\sigma\varphi A)^2\eta\mu^2A-4\alpha^2\upsilon^2=\alpha^2\eta\mu A$, ἐξ ἧς $\alpha=\upsilon\varepsilon\varphi A$.

1194. Τριγώνου δίδονται αἱ πλευραὶ β καὶ γ, ὡς καὶ ἡ γωνία αὐτῶν A. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις αἵτινες συναρτήσει τῶν δεδομένων δίδουν τὰς εφB καὶ εφΓ, ὡς καὶ ἡ σχέσις, ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β, γ καὶ A, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔχομεν $\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, ἤτοι $\beta\eta\mu(A+B)=\gamma\eta\mu B$, $\beta(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B)=\gamma\eta\mu B$, $\beta(\eta\mu A+\sigma\upsilon\nu A\varepsilon\varphi B)=\gamma\varepsilon\varphi B$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi B=\beta\eta\mu A:(\gamma-\beta\sigma\upsilon\nu A)$ (1). Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\Gamma=$ $=\gamma\eta\mu A:(\beta-\gamma\sigma\upsilon\nu A)$ (2).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς ἂν $\alpha=\beta$ ἢ $\alpha=\gamma$ (ἐκτὸς ἂν δοθῇ $\beta=\gamma$). Καὶ ἂν $\alpha=\beta$, ἤτοι $A=B$, ἡ σχέσις (1), ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi B=\eta\mu A:\sigma\upsilon\nu A$, δίδει τὴν $\gamma=2\beta\sigma\upsilon\nu A$. Ἂν δὲ $\alpha=\gamma$, ἡ σχέσις (2) δίδει τὴν $\beta=2\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

1195. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἵνα τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z εἶναι ἴσοι μὲ τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἡμίσεων γωνιῶν τριγώνου, πρέπει νὰ εἶναι $xy+yz+zx=1$. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀντίστροφος πρότασις καὶ νὰ διερευνηθῇ, ἂν αὕτη ἀληθεύῃ ἄνευ περιορισμοῦ διὰ τὰ x, y, z ἢ ὑπὸ περιορισμοὺς καὶ ποίους. (Πολ]χνεῖον).

Ἂν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=x$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=y$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=z$ (1) ἡ σχέσις $xy+yz+zx=1$ (2) προκύπτει ἐκ τῆς ἀσκ. 526.

Ἀντιστρόφως δὲ ἂν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (2), εἶναι $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=$ $=1-\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right):\left(1-\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)=1$, $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot$ $\cdot\,\varepsilon\varphi\frac{A+\Gamma}{2}=1$, $\varepsilon\varphi\frac{A+\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{B}{2}=\varepsilon\varphi\left(90^0-\frac{B}{2}\right)$. Ὅθεν $\frac{A+\Gamma}{2}=90^0-\frac{B}{2}+k.180^0$, ἤτοι $\frac{A+B+\Gamma}{2}=90^0+k\cdot180^0$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι τὰ ἡμίση γωνιῶν τριγώνου, ἀλλὰ μόνον ἂν $k=0$.

1196. Ἂν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τριγώνου καὶ λα, λβ, λγ αἱ πλευραὶ ὁμοίου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πρῶτον καὶ ϑ ἡ γωνία μεταξὺ τῶν πλευρῶν α καὶ λα, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι $2\lambda\sigma\upsilon\nu\vartheta=1$.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ πρῶτον τρίγωνον καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ τὸ ὅμοιον ἐγγεγραμμένον οὕτως, ὥστε $(B_1\Gamma_1)=\lambda\alpha$, $(\Gamma_1A_1)=\lambda\beta$, $(A_1B_1)=\lambda\gamma$ καὶ $A_1=A$, $B_1=B$, $\Gamma_1=\Gamma$. Τότε εἶναι γων.$BA_1\Gamma_1=\Gamma_1+$ $+\vartheta=\Gamma+\vartheta$ καὶ γων.$B_1A_1\Gamma=180^0-(A_1+BA_1\Gamma_1)=180^0-A-\Gamma-\vartheta=B-\vartheta$. Ὅθεν $\alpha=$ $=(BA_1+A_1\Gamma)=\frac{(A_1\Gamma_1)\eta\mu A_1\Gamma_1B}{\eta\mu B}+\frac{(A_1B_1)\eta\mu A_1B_1\Gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\lambda\beta\eta\mu(B+\Gamma+\vartheta)}{\eta\mu B}+\frac{\lambda\gamma\eta\mu(B+\Gamma-\vartheta)}{\eta\mu\Gamma}=$ $=\frac{(\lambda\alpha)\eta\mu(B+\Gamma+\vartheta)}{\eta\mu A}+\frac{(\lambda\alpha)\eta\mu(B+\Gamma-\vartheta)}{\eta\mu A}$. Οὕτως εἶναι $\eta\mu A=\lambda[\eta\mu(B+\Gamma+\vartheta)+\eta\mu(B+\Gamma-\vartheta)]=$ $=2\lambda\eta\mu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καὶ $1=2\lambda\sigma\upsilon\nu\vartheta$.

1197. Ἂν Ο εἶναι σημεῖον ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι δὲ γων$OAB=$ $=$γων$OB\Gamma=$γων$O\Gamma A=\vartheta$, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\varphi\vartheta=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta=\sigma\upsilon\nu\tau^2A+\sigma\upsilon\nu\tau^2B+\sigma\upsilon\nu\tau^2\Gamma.$$

Ἐπειδὴ γων$OB\Gamma=$γων$O\Gamma A$, ἕπεται γων$BO\Gamma=180^0-O\Gamma B-O\Gamma A=180^0-\Gamma$. Ὁμοίως δὲ γων$\Gamma OA=180^0-A$ καὶ γων$AOB=180^0-B$. Οὕτως ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ ἔχομεν $\frac{(OA)}{\gamma}=\frac{\eta\mu(B-\vartheta)}{\eta\mu B}$, $\frac{\beta}{(OA)}=\frac{\eta\mu A}{\eta\mu\vartheta}$ καὶ ἐξ αὐτῶν $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\eta\mu(B-\vartheta)}{\eta\mu\vartheta}\cdot\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B}$, ἤτοι $\frac{\eta\mu B\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}=\frac{\eta\mu(B-\vartheta)}{\eta\mu\vartheta}$ καὶ ἐπομένως $\frac{\eta\mu(A+\Gamma)\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}=\eta\mu B\sigma\varphi\vartheta-\sigma\upsilon\nu B$, $\sigma\varphi\vartheta=\sigma\varphi B+$ $+\frac{\eta\mu(A+\Gamma)}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}=\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma$ (ι). Ἐξ ἄλλου εἶναι $\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta=1+\sigma\varphi^2\vartheta$, ὅταν δὲ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὴν (ι) καὶ τὴν ἄσκ. 527 εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\tau^2\vartheta=1+\sigma\varphi^2A+1+\sigma\varphi^2B+1+\sigma\varphi^2\Gamma=\sigma\upsilon\nu\tau^2A+\sigma\upsilon\nu\tau^2B+\sigma\upsilon\nu\tau^2\Gamma.$$

1198. Ἂν Ο εἶναι σημεῖον ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι δὲ γων$AOB=$ $=$ γων$BO\Gamma=$ γων$\Gamma OA=120^0$, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2(y-z)+\beta^2(z-x)+\gamma^2(x-y)=0, \text{ ὅπου } x=(OA),\ y=(OB) \text{ καὶ } z=(O\Gamma).$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΟΓ λαμβάνομεν $\alpha^2=y^2+z^2-2yz\sigma\upsilon\nu120^0=y^2+z^2+yz$, ἢ ἐπειδὴ $y^2+z^2+yz=(y^3-z^3):(y-z)$, $\alpha^2(y-z)=y^3-z^3$ (1). Ὁμοίως δὲ ἐκ τῶν τριγώνων ΓΟΑ καὶ ΑΟΒ λαμβάνομεν $\beta^2(z-x)=z^3-x^3$ (2) καὶ $\gamma^2(x-y)=x^3-y^3$ (3). Προσθέτοντες ἤδη τὰς (1), (2) καὶ (3) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν.

1199. Ἂν ἐκ σημείου Ο ἐντὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ φαίνονται κατὰ σειρὰν ὑπὸ τὰς γωνίας α, β, γ, δ, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\gamma}+\frac{1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\delta}=1.$$

Εἶναι γωνΑΟΒ $=\alpha$, γωνΒΟΓ $=\beta$ κτλ. Ἔστω δὲ OA_1, OB_1, $O\Gamma_1$, $O\Delta_1$ αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ Ο κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ κλπ. τοῦ τετραγώνου καὶ ω καὶ σ αἱ γωνίαι εἰς ἃς διαιρεῖ τὴν γων.ΑΟΒ$=\alpha$ ἡ κάθετος OA_1. Τότε ἐκ τῶν τριγώνων OAA_1, καὶ OBA_1, λαμβάνομεν $\varepsilon\varphi\omega=\frac{(AA_1)}{(OA_1)}$, καὶ $\varepsilon\varphi\sigma=\frac{(A_1B)}{(OA_1)}$. Οὕτως εὑρίσκομεν $\sigma\varphi\alpha=\sigma\varphi(\omega+\sigma)=$ $=\left[1-\frac{(AA_1)(A_1B)}{(OA_1)^2}\right]:\frac{(AA_1)+(A_1B)}{(OA_1)}=\frac{(OA_1)^2-(AA_1)(A_1B)}{(AB)(OA_1)}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\sigma\varphi\gamma=\frac{(O\Gamma_1)^2-(AA_1)(A_1B)}{(AB)(O\Gamma_1)}$. Ὅθεν $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\gamma=\frac{(OA_1)(O\Gamma_1)-(AA_1)(A_1B)}{(OA_1)(O\Gamma_1)}$. Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον εὑρίσκομεν $\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\delta=\frac{(OB_1)(O\Delta_1)-(OA_1)(O\Gamma_1)}{(OB_1)(O\Delta_1)}$ καὶ συνεπῶς εἶναι $\frac{1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\gamma}+\frac{1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\delta}=1$.

1200. Ἂν α καὶ β ($\alpha>\beta$) εἶναι αἱ πρόσκείμεναι πλευραὶ παραλληλογράμμου, ϑ δὲ καὶ φ αἱ ὀξεῖαι γωνίαι μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ μεταξὺ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἀντιστοίχως, ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\varphi=\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\varphi},\quad \text{ὡς καὶ } \sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta},\ \text{ἂν } \vartheta=\varphi.$$

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον, ἐπειδὴ δὲ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἀπέναντι τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν ϑ καὶ 180—ϑ, τὰ τετράγωνά των εἶναι $\delta^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta$ καὶ $\delta_1^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\vartheta$. Ἀλλ᾽ ἂν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΔΕ, λαμβάνομεν $\alpha^2=\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2+2.\frac{\delta}{2}.\frac{\delta_1}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$ καὶ $\beta^2=$ $=\left(\frac{\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2-2.\frac{\delta}{2}.\frac{\delta_1}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$. Ὅθεν $\alpha^2-\beta^2=\delta\delta_1\sigma\upsilon\nu\varphi$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\delta\delta_1}$, ὁπότε $\eta\mu\varphi=\frac{2\alpha\beta\eta\mu\vartheta}{\delta\delta_1}$ καὶ $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{2\alpha\beta\eta\mu\vartheta}{\alpha^2-\beta^2}$. Οὕτως εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon\varphi\varphi-\eta\mu\vartheta=$ $=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.\eta\mu\vartheta$. Ἐπειδὴ δὲ $\tau\varepsilon\mu^2\varphi-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right)^2\eta\mu^2\vartheta$, εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\varphi=\eta\mu\vartheta\sigma\upsilon\nu\varphi\pm$ $\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$. Ἂν δὲ $\vartheta=\varphi$ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς εφφ, ὅτι $\sigma\upsilon\nu\vartheta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$.

1201. Δίδεται σημεῖον Γ ἐπὶ διαμέτρου ΑΒ κύκλου Κ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τέμνουσαν κινητὴν ΓΔΕ. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον εφΔΒΑ.εφΕΒΑ εἶναι σταθερὸν δι᾽ ὅλας τὰς τεμνούσας τῆς περιφερείας τὰς ἀγομένας ἐκ τοῦ Γ, ὡς καὶ ὅτι ἡ πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ἡ τέμνουσα καταστῇ ἐφαπτομένη.

Εἶναι $\varepsilon\varphi\Delta BA=\frac{(A\Delta)}{(B\Delta)}$ καὶ $\varepsilon\varphi EBA=\frac{(AE)}{(BE)}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\Delta BA.\varepsilon\varphi EBA=\frac{(A\Delta)}{(B\Delta)}.\frac{(AE)}{(BE)}$. Ἀλλ᾽ ἐκ τῶν τριγώνων ΔΑΕ καὶ ΔΒΕ, εἰς ἃ γωνΑ=γωνΒ, ἔχομεν $\frac{(\Delta AE)}{(\Delta BE)}=\frac{(A\Delta)}{(B\Delta)}.\frac{(AE)}{(BE)}$. Ἐξ ἄλλου ταῦτα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ εἶναι ὡς τὰ ὕψη των, ΑΖ καὶ ΒΘ, ἤτοι εἶναι $\frac{(\Delta AE)}{(\Delta BE)}=\frac{(AZ)}{(B\Theta)}=\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}$, διότι τὰ τρίγωνα ΓΑΖ καὶ ΓΒΘ εἶναι ὅμοια. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\Delta BA\varepsilon\varphi EBA=\frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}=$ σταθερόν. Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ τέμνουσα γίνεται ἐφαπτομένη εἰς τὸ Δ καὶ ἔστω ἡ ΔΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τότε εἶναι $\varepsilon\varphi\Delta BA=\frac{(A\Delta)}{(B\Delta)}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi^2\Delta BA=$

$=\frac{(\text{ΑΔ})^2}{(\text{ΒΔ})^2}=\frac{(\text{ΑΜ})}{(\text{ΜΒ})}$. Ἀλλὰ $\frac{(\text{ΓΚ})}{(\text{ΚΔ})}=\frac{(\text{ΚΔ})}{(\text{ΚΜ})}$ καὶ συνεπῶς $\frac{(\text{ΓΚ}+\text{ΚΔ})}{(\text{ΓΚ}-\text{ΚΔ})}=\frac{(\text{ΚΔ}+\text{ΚΜ})}{(\text{ΚΔ}-\text{ΚΜ})}$, ἤτοι $\frac{(\text{ΓΚ}+\text{ΚΒ})}{(\text{ΓΚ}-\text{ΚΑ})}=\frac{(\text{ΚΒ}+\text{ΚΜ})}{(\text{ΚΑ}-\text{ΚΜ})}$, ἤτοι $\frac{(\text{ΓΒ})}{(\text{ΓΑ})}=\frac{(\text{ΜΒ})}{(\text{ΑΜ})}$. Οὕτως εἶναι $\text{εφ}^2\text{ΔΒΑ}=\frac{(\text{ΑΜ})}{(\text{ΜΒ})}=\frac{(\text{ΓΑ})}{(\text{ΓΒ})}$.

1202. Δίδεται περιφέρεια κύκλου Κ ἀκτῖνος ϱ καὶ σημεῖον Γ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τέμνουσαν ΓΔΕ. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\text{εφ}\frac{\text{ΔΚΓ}}{2}\text{εφ}\frac{\text{ΕΚΓ}}{2}$ εἶναι σταθερόν. (Πολ]χνεῖον).

Διότι (προηγουμένη ἄσκ.) ΔΒΑ = ΔΚΓ : 2 καὶ ΕΒΑ = ΕΚΓ : 2.

1203. Τριγώνου δίδονται αἱ πλευραὶ α, γ καὶ ἡ γωνία Γ. Ἐὰν δὲ ἡ τρίτη πλευρὰ ἔχῃ δύο τιμὰς β_1, β_2 καὶ ϱ_1, ϱ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν εἰς τὰ δύο τρίγωνα ἐγγεγραμμένων κύκλων, νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\varrho_1\varrho_2$ συναρτήσει τῶν δεδομένων.

Ἂν τὰ τρίγωνα εἶναι τὰ $\text{ΓΑ}_1\text{Β}$ καὶ $\text{ΓΑ}_2\text{Β}$ εὑρίσκομεν $\varrho_1\left(\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}+\text{σφ}\frac{\text{Α}_1}{2}\right)=\beta_1$ καὶ $\varrho_2\left(\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}+\text{σφ}\frac{\text{Α}_2}{2}\right)=\beta_2$. Οὕτως εἶναι $\varrho_1\varrho_2=\beta_1\beta_2\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}\,\text{ημ}\frac{\text{Α}_1}{2}\,\text{ημ}\frac{\text{Α}_2}{2}:\text{ημ}\frac{\text{Α}_1+\Gamma}{2}$. $\cdot\text{ημ}\frac{\text{Α}_2+\Gamma}{2}=\frac{\beta_1\beta_2\text{ημΑ}_1}{\text{ημΑ}_1+\text{ημΓ}}\cdot\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}$ (1), διότι $\text{Α}_1+\text{Α}_2=180^\circ$. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ $\gamma^2=\alpha^2+\beta_1^2-2\alpha\beta_1$. $\cdot\text{συνΓ}$, ἤτοι $\beta_1^2-2\alpha\beta_1\text{συνΓ}+(\alpha^2-\gamma^2)=0$ καὶ $\beta_2^2-2\alpha\beta_2\text{συνΓ}+(\alpha^2-\gamma^2)=0$ συνάγομεν ὅτι αἱ β_1 καὶ β_2 εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\beta^2-2\alpha\beta\text{συνΓ}+(\alpha^2-\gamma^2)=0$. Ὅθεν $\beta_1\beta_2=\alpha^2-\gamma^2$, ἐπειδὴ δὲ $\text{ημΑ}_1=\frac{\alpha}{2\text{Ρ}}$ καὶ $\text{ημΓ}=\frac{\gamma}{2\text{Ρ}}$ ἡ (1) δίδει $\varrho_1\varrho_2=(\alpha^2-\gamma^2)\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}=\alpha(\alpha-\gamma)\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2}$.

1204. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Δ τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφομεν τεταρτημόριον ΑΜΓ ἔχον ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον Μ τοῦ τεταρτημορίου ἰσχύει ἡ σχέσις $\text{συν}(\alpha+\varphi)=\sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία φ, ὅταν α=π : 6 καὶ ὅπου α=γωνΜΒΓ καὶ φ=γωνΜΔΓ (Πολ]χνεῖον).

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΜΒ λαμβάνομεν $\frac{(\text{ΜΔ})}{\text{ημΜΒΔ}}=\frac{(\text{ΒΔ})}{\text{ημΒΜΔ}}$ (1). Ἀλλὰ (ΒΔ) = (ΔΑ). $\cdot\sqrt{2}=(\text{ΔΜ})\sqrt{2}$, $\text{ΜΒΔ}=\text{ΜΒΓ}-\text{ΔΒΓ}=\alpha-\frac{\pi}{4}$, $\text{ΜΔΒ}=\varphi-\frac{\pi}{4}$ καὶ $\text{ΒΜΔ}=\pi-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}-(\alpha+\varphi)$. Οὕτως ἡ σχέσις (1) γίνεται $\frac{\alpha}{\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{\text{συν}(\alpha+\varphi)}$, ἐξ ἧς $\text{συν}(\alpha+\varphi)=\sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ ἢ $\text{συν}\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\sqrt{2}\,\text{συν}\frac{5\pi}{12}$, ὅταν $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Οὕτως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ $\frac{\pi}{6}+\varphi$ καὶ κατόπιν τὸ φ.

1205. Δίδεται τετράγωνον περιγεγραμμένον περὶ περιφέρειαν. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ 8. Ποία δὲ πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τῶν ὡς ἄνω γωνιῶν εἶναι ἐλάχιστον;

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράγωνον, Ο τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἀκτῖνος ϱ καὶ (ΜΕ)=α καὶ (ΜΖ) = β, αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ. Ἔστω δὲ ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΜΓ = ω, ΒΜΔ = φ, ΑΜΕ=υ καὶ ΓΜΕ = σ. Τότε δὲ εἶναι $\text{εφω}=\text{εφ}(\upsilon+\sigma)=\frac{\text{εφυ}+\text{εφσ}}{1-\text{εφυεφσ}}$. Ἀλλ᾽ $\text{εφυ}=\frac{(\text{ΑΕ})}{(\text{ΜΕ})}=\frac{(\text{ΑΚ})-(\text{ΕΚ})}{(\text{ΜΕ})}=\frac{(\text{ΑΚ})-(\text{ΜΖ})}{(\text{ΜΕ})}=\frac{\varrho\sqrt{2}-\beta}{\alpha}$ καὶ εφσ =

$=\dfrac{\varrho\sqrt{2}+\beta}{\alpha}$. Ὅθεν εφω $= -\dfrac{2\alpha\sqrt{2}}{\varrho}$. Ὁμοίως δὲ εφφ$=-\dfrac{2\beta\sqrt{2}}{\varrho}$ καὶ εφ²ω+εφ²φ$=\dfrac{8(\alpha^2+\beta^2)}{\varrho^2}$ $=8$. Ἤδη ἔστω εφω+εφφ $=\mu$. Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν εφ²ω+(μ—εφω)²=8, ἐξ ἧς εφω $=\dfrac{\mu+\sqrt{16-\mu^2}}{2}$. Οὕτω τὸ ἐλάχιστον μ ἰσοῦται μὲ —4 καὶ κατὰ συνέπειαν εφω = εφφ = —2, ὁπότε εφ(180°—ω) = 2. Ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ, ἵνα τὸ μ εἶναι ἐλάχιστον, εἶναι ἓν τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς περιφερείας καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, διότι τότε ἐκ τοῦ τριγ. ΜΒΓ (τὸ Μ μέσον τῆς ΑΒ), ἔχομεν εφΒΜΓ $=\dfrac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{BM})}=2$, εἶναι δὲ ΒΜΓ+ΑΜΓ = ΒΜΓ+ω = 180° ἤτοι ΒΜΓ = 180°—ω.

1206. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α″, Β″, Γ″. 1) Νὰ ἐκφρασθοῦν τὰ μήκη $\overline{\mathrm{AA'}}$, $\overline{\mathrm{BB'}}$, $\overline{\Gamma\Gamma'}$, $\overline{\mathrm{AA''}}$, $\overline{\mathrm{BB''}}$, $\overline{\Gamma\Gamma''}$ συναρτήσει τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. 2) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $\dfrac{\overline{\mathrm{AA''}}}{\overline{\mathrm{AA'}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{BB''}}}{\overline{\mathrm{BB'}}}+\dfrac{\overline{\Gamma\Gamma''}}{\overline{\Gamma\Gamma'}}$ εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα τὰ τρίγωνα. (Πολ]χνεῖον).

1) Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΑ′Β, ἔχομεν $\overline{\mathrm{AA'}}$ = (ΑΒ)ημΒ = γημΒ = 2RημΒημΓ (1).
Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\overline{\mathrm{BB'}}$ = 2RημΓημΑ (2) καὶ $\overline{\Gamma\Gamma'}$ = 2RημΑημΒ (3).
Ἤδη, ἂν ΑΔ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΑΑ″Δ ἔχομεν $\overline{\mathrm{AA''}}$ = 2RημΑΔΑ″ (4). Ἀλλὰ ΑΔΑ″ = ΑΒΑ″ = Β+ΓΒΑ″ = Β+ΓΑΑ′ = Β+90°—Γ= 90°+Β—Γ. Οὕτως ἡ (4) δίδει $\overline{\mathrm{AA''}}$=2Rσυν(Β—Γ). Ὁμοίως, $\overline{\mathrm{BB''}}$ = 2Rσυν(Γ—Α) καὶ $\overline{\Gamma\Gamma''}$ = 2Rσυν(Α—Β).

2) Ἤδη τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ὅπερ παριστῶμεν διὰ Σ εἶναι μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν, $\Sigma=\dfrac{\text{συν}(\mathrm{B}-\Gamma)}{\text{ημΒημΓ}}+\dfrac{\text{συν}(\Gamma-\mathrm{A})}{\text{ημΓημΑ}}+\dfrac{\text{συν}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\text{ημΑημΒ}}$ = σφΒσφΓ+1+σφΓσφΑ+1 + σφΑσφΒ+ +1=4 (ἄσκ. 527).

1207. Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Α′ ἐπὶ περιφερείρας κύκλου Ο ἀκτῖνος R. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ $\overline{\mathrm{OA}}$=α καὶ $\overline{\mathrm{OA'}}$=α′, ἵνα ὁ λόγος $\dfrac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MA'}}}$ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Α′ εἶναι σταθερός. 2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\dfrac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{\overline{\mathrm{MA'}}^2}$ συναρτήσει τῆς γωνίας θ, ἣν σχηματίζει ἡ ΟΜ μετὰ τῆς ΟΑ καὶ νὰ ζητηθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα ὁ λόγος οὗτος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θ.

Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ εὑρίσκομεν $\overline{\mathrm{MA}}^2$ = R²+α²—2αRσυνθ, $\overline{\mathrm{MA'}}^2$ = = R²+α′²—2α′Rσυνθ. Ὅθεν $\dfrac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{\overline{\mathrm{MA'}}^2}=\dfrac{R^2+\alpha^2-2\alpha R\,\text{συνθ}}{R^2+\alpha'^2-2\alpha' R\,\text{συνθ}}$. Ἀλλ' ἵνα ὁ λόγος οὗτος εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θ, πρέπει νὰ εἶναι $\dfrac{R^2+\alpha^2}{R^2+\alpha'^2}=\dfrac{2\alpha R}{2\alpha' R}$, ὁπότε, R²=αα′ (α≠α′).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Α′ πρέπει νὰ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ (ἄκρα τῆς διαμέτρου Β′ΟΑΒ). Διότι τότε ἡ περιφέρεια Ο εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ διὰ $\dfrac{\overline{\mathrm{MA}}}{\overline{\mathrm{MA'}}}$ = σταθερόν.

1208. Δοθέντος τριγώνου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸ κύκλου, ἄγομεν τρεῖς ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον τοῦτον παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Οὕτω δὲ σχηματίζονται τρία νέα τρίγωνα ἐντὸς τοῦ δοθέντος. Ν' ἀποδειχθῇ 1) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρία νέα τρίγωνα ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον, 2) ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὴν ὀγδόην δύναμιν τῆς ἀκτῖνος ϱ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον. (Πολ]χνεῖον).

Ἔστωσαν αἱ ἐφαπτόμεναι ΔΕ, ΖΗ, ΘΙ παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ. Ἔστω δὲ ἐπίσης ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΖΗ, ΓΘΙ ἀντιστοίχως, ὧν τὰ ἐμβαδὰ παριστῶμεν διὰ E_1, E_2, E_3 καὶ διὰ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1) Ἡ περιφέρεια ἀκτῖνος ϱ εἶναι παρεγγεγραμμένη εἰς τὰ τρία ἄλλα τρίγωνα. Ὅθεν (τ. 72 καὶ 69) $\frac{\varrho_1}{\varrho}=\text{εφ}\frac{B}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$, $\frac{\varrho_2}{\varrho}=\text{εφ}\frac{A}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$, $\frac{\varrho_3}{\varrho}=\text{εφ}\frac{A}{2}\,\text{εφ}\frac{B}{2}$ καὶ $\frac{\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3}{\varrho}=$ $=\text{εφ}\frac{A}{2}\,\text{εφ}\frac{B}{2}+\text{εφ}\frac{B}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}+\text{εφ}\frac{A}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}=1$ (ἄσκ. 526). Οὕτως εἶναι $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3=\varrho$.

2) Ἤδη εἶναι $E=\varrho^2\text{σφ}\frac{A}{2}\text{σφ}\frac{B}{2}\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}$ (§ 135), $E_1=\varrho_1\tau_1=\varrho\,\text{εφ}\frac{B}{2}\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}.\tau_1=$ $=\varrho^2\text{σφ}\frac{A}{2}\text{εφ}\frac{B}{2}\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$. Διότι ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ἀκτῖνος ϱ καὶ Λ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΒ μετ' αὐτῆς, εἶναι ΑΛ$=\tau_1$ (1) καὶ $\tau_1=\varrho\,\text{σφ}\frac{A}{2}$ (ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΑΟΛ). Ὁμοίως εἶναι $E_2=\varrho^2\text{σφ}\frac{B}{2}\,\text{εφ}\frac{A}{2}\,\text{εφ}\frac{\Gamma}{2}$ καὶ $E_3=\varrho^2\text{σφ}\frac{\Gamma}{2}\text{εφ}\frac{A}{2}\text{εφ}\frac{B}{2}$. Οὕτως εἶναι $EE_1E_2E_3=\varrho^8$.

1209. Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρία νέα τρίγωνα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι R_1, R_2, R_3, αἱ δὲ ἀκτῖνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον εἶναι R, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$R_1+R_2+R_3=R \quad \text{καὶ} \quad R_1R_2R_3=\frac{R^3\varrho^3}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}.$$

Ἔστω υ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τότε εἶναι $\frac{(\Delta E)}{(B\Gamma)}=\frac{\upsilon-2\varrho}{\upsilon}=$ $=1-\frac{\alpha\varrho}{E}=\frac{\tau-\alpha}{\tau}$, ἤτοι $(\Delta E)=\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{\tau}$. Οὕτως εἶναι $R_1=R.\frac{\tau-\alpha}{\tau}$. Ὁμοίως, $R_2=$ $=R.\frac{\tau-\beta}{\tau}$, $R_3=R.\frac{\tau-\gamma}{\tau}$. Ὅθεν $R_1+R_2+R_3=R.\frac{3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)}{\tau}=R$ καὶ $R_1R_2R_3=$ $=R^3.\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^3}=\frac{R^3\varrho^3}{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$.

1210. Τὰ ὕψη τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμετροι τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΒΔΖ καὶ ΓΔΕ εἶναι ασφΑ, βσφΒ, καὶ γσφΓ ἀντιστοίχως, αἱ δὲ περίμετροι τῶν τριγώνων ΔΕΖ καὶ ΑΒΓ ἔχουν λόγον ϱ : R.

Εἶναι (ΑΕ) = γσυνΑ, (ΑΖ) = βσυνΑ καὶ γωνΖΕΑ=Α. Οὕτως αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΕΖ, (ὁμοίου πρὸς τὸ ΑΒΓ), εἶναι ασυνΑ, βσυνΑ καὶ γσυνΑ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς αὐτὸ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι $R\text{συν}A=\frac{\alpha\,\text{συν}A}{2\,\text{ημ}A}$ καὶ ἑπομένως ἡ διάμετρός του ασφΑ. Ὁμοίως καὶ αἱ δύο ἄλλαι διάμετροι εἶναι βσφΒ, γσφΓ. Ἤδη, ἡ περίμετρος $2\tau_1$, τοῦ τρι-

---

1. Βλέπε «Μέθοδοι καὶ Ὁδηγίαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας» § 19

γώνου ΔΕΖ είναι $\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$. 'Αλλ' ἐπειδὴ $\alpha=2R\eta\mu A$, $\alpha\sigma\upsilon\nu A=2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A=R\eta\mu 2A$, κλπ. εἶναι $2\tau_1=R(\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma)=4R\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma=\frac{2E}{R}$. Ὅθεν $2\tau_1:2\tau=\frac{2E}{R}:2\tau=\frac{E}{\tau}:R=\varrho:R$.

1211. Ἐὰν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ εἶναι :

$$2\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}:\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}.$$

Εἶναι $(AB'\Gamma')=\frac{1}{2}(AB')(A\Gamma')\eta\mu A=\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta\gamma}{\gamma+\alpha}\cdot\frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}\cdot\eta\mu A=\frac{\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}(AB\Gamma)$.

Ὁμοίως $(A'B\Gamma')=\frac{\gamma\alpha}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}(AB\Gamma)$ καὶ $(A'\Gamma B')=\frac{\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$. Ὅθεν $(A'B'\Gamma')$ $=(AB\Gamma)-[(AB'\Gamma')+(A'B\Gamma')+(A'\Gamma B')]=(AB\Gamma)\left[\frac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}\right]$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\frac{(A'B'\Gamma')}{(AB\Gamma)}=\frac{2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)(\eta\mu\Gamma+\eta\mu A)(\eta\mu A+\eta\mu B)}$. Ἤδη ἀποδεικνύομεν τὴν πρότασιν ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\eta\mu A=2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, $\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$ κλπ.

1212. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ Κ΄ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(KK')^2=R^2\cdot(\sigma\upsilon\nu 2A\sigma\upsilon\nu 2B\sigma\upsilon\nu 2\Gamma+8\sigma\upsilon\nu^2 A\sigma\upsilon\nu^2 B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma) \qquad (1)$$

Ἂν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ, εὐκόλως δεικνύεται (§ 127, 128) ὅτι $(K\Delta)=2R\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $(K'\Delta)=-R\sigma\upsilon\nu 2A$ καὶ $\gamma\omega\nu K\Delta K'=\Gamma-B$. Εἶναι δὲ $(KK')^2=(K\Delta)^2+(K'\Delta)^2-2(K\Delta)(K'\Delta)\sigma\upsilon\nu K\Delta K'$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὰ $(K\Delta)$, $(K'\Delta)$ κλπ. εὑρίσκομεν $(KK')^2=R^2[8\sigma\upsilon\nu^2A\sigma\upsilon\nu^2B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+\sigma\upsilon\nu 2A(\sigma\upsilon\nu 2A+\eta\mu 2B\eta\mu 2\Gamma)]=2$ον μέλ. τῆς (1) ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu 2A=\sigma\upsilon\nu 2(B+\Gamma)$.

1213. Ἡ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς κορυφῆς Α, διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας τῶν ὁποίων αἱ συνεφαπτομέναι εἶναι $2\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma$ καὶ $2\sigma\varphi A+\sigma\varphi B$, ἡ δὲ συνεφαπτομένη τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ διάμεσος μετὰ τῆς ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν συνεφαπτομένων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

Εἶναι (σχ. 65) $\frac{(BM)}{(MA)}=\frac{(M\Gamma)}{(MA)}$ ἤτοι $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$, $\frac{\eta\mu(A-\gamma)}{\eta\mu\gamma}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu(\Gamma+A)}{\eta\mu\Gamma}$ ἢ $\eta\mu A\sigma\varphi\gamma-\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\varphi\Gamma\eta\mu A$ καὶ $\sigma\varphi\gamma=2\sigma\varphi A+\sigma\varphi\Gamma$. Ὁμοίως δὲ $\sigma\varphi\beta=2\sigma\varphi A+\sigma\varphi B$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\sigma\varphi\vartheta=\frac{(ME)}{(AE)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{BE-\Gamma E}{AE}=\frac{1}{2}(\sigma\varphi B-\sigma\varphi\Gamma)$.

1214. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ κύκλου τῶν ἐννέα σημείων [1] τριγώνου εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ἢ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς ἢ θὰ ἔχῃ τὰς πλευράς του ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

Ἔστω ΚΛ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς τομῆς ἀπὸ τοῦ Γ εἶναι $\tau-\gamma$. Ὅθεν $\frac{\alpha}{2}+\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma=2(\tau-\gamma)$ ἤτοι $\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\alpha+2\beta-2\gamma$ ἢ $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=\alpha(\alpha+2\beta-2\gamma)$ ἢ $\beta^2-\gamma^2=2\alpha(\beta-\gamma)$ ἢ τέλος $(\beta-\gamma).(\beta+\gamma-2\alpha)=0$. Ὅθεν ἢ $\beta-\gamma=0$ ἤτοι $\beta=\gamma$ ἢ $\beta+\gamma-2\alpha=0$, ἤτοι $\beta+\gamma=2\alpha$.

1. Βλέπε «Μέθοδοι καὶ ὁδηγίαι διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας», Χρ. Μπαρμπαστάθη § 32.

1215. Νὰ σημειώσητε ἐπὶ ἄξονος καὶ ἐπὶ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις: $-180^0 \leqslant x \leqslant 180^0$ (1), $\varepsilon\varphi x \leqslant |\eta\mu x|$ (2) $\eta\mu x + \eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) \leqslant 0$ (3). $8\eta\mu x\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) \leqslant 1$ (4) (Πολ]χνεῖον).

Ἡ σχέσις (3) (ἄσκ. 351) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς x· ἄρα καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς (1). Ἡ σχέσις (2) δίδει τὴν $[\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \,|\eta\mu x|\,]\sigma\upsilon\nu x \leqq 0$ ἐξ ἧς διὰ $0^0 < x \leqq 180^0$ (ἐπειδὴ $\eta\mu x = |\eta\mu x|$ ἔχομεν $\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)\sigma\upsilon\nu x \leqq 0$ (5) καὶ διὰ $-180^0 < x < 0^0$ (ἐπειδὴ $\eta\mu x = -|\eta\mu x|$) ἔχομεν $|\eta\mu x|(1+\sigma\upsilon\nu x)\sigma\upsilon\nu x \geqq 0$ (6). Οὕτως ἀφαιρουμένης τῆς $|\eta\mu x| = 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς (5), $2\eta\mu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu x \leqq 0$, ὁπότε $\sigma\upsilon\nu x \leqq 0$, ἤτοι $90^0 < x \leqq 180^0$ καὶ ἐκ τῆς (6) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu x \geqq 0$, ὁπότε $\sigma\upsilon\nu x \geqq 0$, ἤτοι $-90^0 \leqq x < 0$.

Τέλος ἐκ τῆς (4) εὑρίσκομεν $4\eta\mu x\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu(2x+\pi)\right] \leqq 1$ ἤτοι $2\eta\mu x + 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2x \leqq 1$, $2\eta\mu x + 2\eta\mu 3x - 2\eta\mu x \leqq 1$, $\eta\mu 3x \leqq \frac{1}{2}$, ἤτοι $\eta\mu 3x - \eta\mu\frac{\pi}{6} \leqq 0$. Ἀλλ' ἐκ τῆς $\eta\mu 3x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, εὑρίσκομεν $3x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$ ἤτοι $x = k \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{18}$, ὁπότε διὰ $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ εὑρίσκομεν τιμὰς τῆς x ἀπὸ $-\pi$ ἕως $+\pi$ αἵτινες εἶναι $-\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}$. Οὕτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι αἱ δοθεῖσαι τέσσαρες σχέσεις συναληθεύουν διὰ $-70^0 \leqq x \leqq 0^0$, $90^0 < x \leqq 130^0$, $170^0 < x \leqq 180^0$.

1216. Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν ἀκτίνων r καὶ R τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐν συνεχείᾳ δὲ νὰ δειχθῇ ὅτι $(OI) = \sqrt{R(R-2r)}$. (Σχ. Ἰκάρων).

1) Ἂν Β καὶ Γ εἶναι αἱ ἴσαι γωνίαι ἔχομεν, ὡς ἐκ τοῦ σχ. 62 συνάγομεν, $r = \frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = R\eta\mu A\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = R\eta\mu 2B\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = 2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$. Οὕτως ἐκ τῶν τύπων 46 καὶ 47 εὑρίσκομεν $r\left(1+\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\right)^2 = 4R\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\left(1-\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\right)$, ἤτοι $(r+4R)\varepsilon\varphi^4\frac{B}{2} + 2(r-2R)\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2} + r = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν Β, ὁπότε ἡ εὕρεσις τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ τριγώνου εἶναι εὔκολος.

2) Ἤδη ἔστω Ο καὶ Ι τὰ κέντρα τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου ἀντιστοίχως. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι ἡ ΟΙ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, ἡ δὲ ΑΙ τὴν τέμνει εἰς τὸ Η. Τότε εἶναι (ΕΙ)(ΙΖ)=(ΑΙ)(ΙΗ) (1). Ἀλλὰ $(EI)(IZ) = (R+OI)(R-OI) = R^2 - (OI)^2$ (2). Ὁμοίως διὰ τὰς γωνίας ἔχομεν $\cdot H\hat{I}\Gamma = I\Gamma A + IA\Gamma = I\Gamma B + HAB = I\Gamma B + H\Gamma B = H\Gamma I$. Ὅθεν $HI = H\Gamma = 2R\eta\mu\frac{A}{2}$ (τ. 56). Ὁμοίως ἂν Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς πλευρᾶς ΑΓ μετὰ τῆς περιφερείας Ι, ἔχομεν $(AI) = (I\Delta) : \eta\mu\frac{A}{2} = r : \eta\mu\frac{A}{2}$. Οὕτως ἡ ἄνω σχέσις (1) δίδει $R^2 - (OI)^2 = 2Rr$, ἤτοι $(OI)^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r)$.

1217. Νὰ ἐπιλυθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν ἀκτίνων r καὶ r_1 τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω ΒΓ ἡ βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ι, I_1 τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων. Τότε εἰς τὸ τρίγωνον IBI_1 εἶναι Β = 1 ὀρθὴ καὶ (ΒΓ) : 2 = ὕψος τούτου. Ὥστε $\frac{\alpha^2}{4} = rr_1$ ἤτοι $\alpha = 2\sqrt{rr_1}$. Ἐξ ἄλλου ἂν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ΑΓ (προεκτεινομένης) μετὰ τῶν περιφερειῶν Ι καὶ I_1 τὰ τρίγωνα ΑΕΙ καὶ AZI_1 εἶναι ὅμοια. Ὅθεν $(AE) : (AZ) = (IE) : (I_1Z)$, ἤτοι $\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) : \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = r : r_1$. $2\beta : \alpha = (r_1 + r) : (r_1 - r)$ καὶ ἑπομένως $\beta = \gamma = \frac{r_1 + r}{r_1 - r}\sqrt{rr_1}$. Τέλος ἐκ τῶν τύπων 72 καὶ 69, ἕπεται $\sigma\varphi\frac{B}{2}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = \frac{r_1}{r}$ ἢ ἐπειδὴ Β=Γ, $\sigma\varphi^2\frac{B}{2} = \frac{r_1}{r}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{r}{r_1}}$. Ἐκ δὲ τοῦ τριγ. ΙΕΑ ἔχομεν $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = (IE) : (AE) = r : \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_1 - r}{2\sqrt{rr_1}}$.

1218. Τὸ ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ὑποτείνουσα ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου αὐτῆς καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

Ἂν υ τὸ ὕψος καὶ λ ὁ λόγος, αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι $\upsilon\lambda$, $\upsilon\lambda^2$ καὶ $\upsilon\lambda^3$. Ὅθεν $(\upsilon\lambda^3)^2 = (\upsilon\lambda)^2 + (\upsilon\lambda^2)^2$, ἤτοι $\upsilon^2\lambda^6 = \upsilon^2\lambda^2 + \upsilon^2\lambda^4$, $\lambda^6 = \lambda^2 + \lambda^4$ καὶ τέλος $\lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$, ἐξ $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Ἤδη λύοντες τὸ σύστημα $B + \Gamma = 90^0$, $\eta\mu\Gamma : \eta\mu B = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\lambda^2} = \lambda$ (§ 109, III) εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Γ καὶ Β.

1219. Νὰ ἐπιλυθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοί, ἡ δὲ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας. (Σχ. Εὐελπίδων).

Ἔστωσαν $x-1$, x, $x+1$ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ ω ἡ μικροτέρα γωνία, ὁπότε ἡ μεγαλυτέρα εἶναι 2ω. Ἀλλὰ τότε εἶναι (τ. 56) $\frac{x-1}{\eta\mu\omega} = \frac{x+1}{\eta\mu 2\omega}$, $\frac{x-1}{\eta\mu\omega} = \frac{x+1}{2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}$ ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x+1}{2(x-1)}$ (1). Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι (τ. 57) $(x-1)^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\sigma\upsilon\nu\omega$, ἐξ ἧς, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (1) εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $(x-1)^3 = x^2(x-1) - (x+1)^2$. Αὕτη δὲ γίνεται $x(x-5) = 0$. Ἐπειδὴ δὲ $x \neq 0$, εὑρίσκομεν $x = 5$. Ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 4, 5 καὶ 6. Ἤδη αἱ γωνίαι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά.

1220. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου εἰς τὸ Α. Διὰ τοῦ Β ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β, ἐὰν (ΒΓ)=4(ΒΔ). (Σχ. Εὐελπίδων).

Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως (ΑΒ)=(ΒΓ)συνΒ, (ΒΔ)=(ΑΒ)συνΒ καὶ ἐξ αὐτῶν $(B\Delta) = (B\Gamma)\sigma\upsilon\nu^2 B$, $(B\Delta) = 4(B\Delta)\sigma\upsilon\nu^2 B$ ἤτοι $1 = 4\sigma\upsilon\nu^2 B$, ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu B = \pm\frac{1}{2}$ καὶ ἡ δεκτὴ λύσις $B = 60^0$.

1221. Δύο κύκλοι ἀκτίνων α_1 καὶ α_2 τέμνονται ὑπὸ γωνίαν ω. Νά εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς κοινῆς αὐτῶν χορδῆς.

Ἂν Α εἶναι ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς, ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων μὲ κέντρα τὰ Κ καὶ K_1 εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας KAK_1 εἶναι κάθετοι εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων καὶ ἴσης μὲ ω, εἶναι $KAK_1 = 180^0 - \omega$. Ἀλλὰ (τ. 57) εἶναι $(KK_1)^2 = (KA)^2 + (K_1A)^2 + 2(KA)(K_1A)\sigma\upsilon\nu\omega$. Ἂν δὲ x εἶναι τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς εἶναι $(KK_1A) = \frac{1}{2}\cdot(KK_1)\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{4}(KK_1)$. Ἐπειδὴ

$(KK_1\Lambda)=\frac{1}{2}(KA)(K_1A)\eta\mu KAK_1=\frac{1}{2}(KA)(KA_1)\eta\mu\omega$. εὑρίσκομεν $x=\frac{2(KA)(K_1A)\eta\mu\omega}{(KK_1)}$.

1222. Τριγώνου εἶναι $E=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2145$ τ.μ., $2\tau=143$ μ. καὶ $A=60^0$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ. (Πολ]χνεῖον).

Εἶναι (τ. 67 καὶ 68) $\frac{E}{\tau}=(\tau-\alpha)\varepsilon\varphi\frac{A}{2}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\alpha=49$. Ὅθεν $\beta+\gamma=143-$ $-49=94$. Ἐπειδὴ δὲ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{\sqrt{3}}{4}\beta\gamma$, εἶναι $\beta\gamma=2145$. Οὕτως αἱ πλευραὶ β καὶ γ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-94x+2145=0$, ἐξ ἧς $\beta=55$ μ. καὶ $\gamma=39$ μ.

1223. Τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Γ τὴν διαφορὰν δ τῶν προβολῶν ΔΒ καὶ ΑΔ τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ, ἐπίσης καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta=\mu$, ὅπου $(B\Gamma)=\alpha$ καὶ $(A\Gamma)=\beta$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι Α καὶ Β. (Πολ]χνεῖον)

Ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΓΔΒ καὶ ΓΔΑ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $(\Delta B)=\alpha\sigma\upsilon\nu B=$ $2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B$ καὶ $(A\Delta)=\beta\sigma\upsilon\nu A=2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A$, ἐξ ὧν $(\Delta B-A\Delta)=\delta=2R\eta\mu(A-B)=4R$. $.\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$ (1). Ἐξ ἄλλου εἶναι $\mu=2R\eta\mu A+2R\eta\mu B=4R\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\frac{\delta}{\mu}=\eta\mu\frac{A-B}{2}:\eta\mu\frac{A+B}{2}=\eta\mu\frac{A-B}{2}:\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν $\frac{A-B}{2}$ καὶ κατόπιν τὰς Α καὶ Β διότι $\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{\Gamma}{2}$.

1224. Διὰ τῆς κορυφῆς Α ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 2μ ἄγομεν εὐθεῖαν ἐντὸς αὐτοῦ καὶ ἐπὶ ταύτην προβάλλομεν τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῆς ἀχθείσης εὐθείας μετὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβαλλουσῶν ἰσοῦται μὲ $3\mu^2$.

Ἐὰν ω εἶναι ἡ γωνία τῆς ἀχθείσης εὐθείας μετὰ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τῆς ἄλλης πλευρᾶς εἶναι $A-\omega=60^0-\omega$. Οὕτως αἱ προβάλλουσαι ἰσοῦνται μὲ $\alpha\eta\mu\omega$ καὶ $\alpha\eta\mu(60^0-\omega)$ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $\alpha^2\eta\mu^2\omega+\alpha^2\eta\mu^2(60^0-\omega)=3\mu^2$, ἤτοι $5\alpha^2\eta\mu^2\omega+3\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\omega-2\alpha^2\sqrt{3}\,\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega=12\mu^2$, ἐξ ἧς (§ 105, πδ. 6) $(5\alpha^2-12\mu^2)\varepsilon\varphi^2\omega-2\alpha^2\sqrt{3}$. $.\varepsilon\varphi\omega+3\alpha^2-12\mu^2=0$ κλπ.

1225. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ δίδονται ἐκ τῶν στοιχείων $A=x+\frac{x}{2}$, $\Gamma=2x+\frac{x}{2}$, ὅπου x εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $\sigma\upsilon\nu 2x=$ $=\sigma\upsilon\nu^2\left(x+\frac{x}{2}\right)$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ, ὡς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅταν $\alpha=10\sqrt{2}$ μ. (Μαθημ. Σχολὴ Ἀθηνῶν)

Εἶναι $\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu^2\frac{3x}{2}$ ἤτοι $2\sigma\upsilon\nu^2x-1=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 3x}{2}$ ἢ (τ. 34) $4\sigma\upsilon\nu^3x-4\sigma\upsilon\nu^2x-$ $-3\sigma\upsilon\nu x+3=0$, $(\sigma\upsilon\nu x-1)(4\sigma\upsilon\nu^2x-3)=0$ καὶ ἑπομένως $\sigma\upsilon\nu x=1$, ὁπότε $x=0$ ἢ $4\sigma\upsilon\nu^2x=3$, δηλαδὴ $\sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ὁπότε $x=30^0$ ἢ 150^0. Ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ $x=30^0$. Ὅθεν $A=45^0$, $\Gamma=75^0$ καὶ $B=60^0$.

Ἤδη εἶναι $\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}=10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{3}$ καὶ $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=10\sqrt{2}$. $.\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}}{2}=10\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Τέλος εἶναι $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}10\sqrt{3}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=25\cdot\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=225+25\sqrt{3}$ τ.μ.

1226. Αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ δίδονται ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha=x^2+x+1$, $\beta=2x+1$, $\gamma=x^2-1$, ὅπου $x>1$. 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι $A=120^\circ$. 2) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι, τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὴν πλευρὰν α, ὅταν τὸ x εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^3-2x^2-x+2=0.$$

1) Εἶναι (τ. 57) $(x^2+x+1)^2=(2x+1)^2+(x^2-1)^2-2(2x+1)(x^2-1)\text{συν}A$, ἐξ ἧς $\text{συν}A=-(1:2)$. Ὅθεν $A=120^\circ$.

2) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἥτις γράφεται $(x-1)(x^2-x-2)=8$, ἔχει ρίζας 1, −1 καὶ 2. Ὅθεν $\alpha=4+2+1=7$, $\beta=5$ καὶ $\gamma=3$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἐκ τοῦ τύπου $\text{εφ}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\text{σφ}\frac{A}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$ ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἐκ τοῦ τύπου $\frac{B+\Gamma}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=30^\circ$. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν ἐκ τοῦ τύπου $E=\sqrt{7{,}5\,.\,0{,}5\,.\,2{,}5\,.\,3{,}5}=2{,}5\sqrt{21}$ τ.μ.

Ἤδη ἡ ἀκτὶς ϱ_α εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\varrho_\alpha=\frac{E}{\tau-\alpha}=2{,}5\sqrt{21}:0{,}5=5\sqrt{21}$.

1227. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ οὗ τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι 250 μ., ἡ δὲ γωνία x τῆς ΑΔ μετὰ τῆς ΑΓ συνδέεται μὲ τὴν γωνίαν Γ διὰ τῆς σχέσεως $\text{ημ}2x=\text{ημ}\Gamma$. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ τρίγωνον, ἂν $\gamma:\beta=\sqrt{2}:2$. (Σχ. Φυσικῶν Ἀθ.)

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $x=90^\circ-\Gamma$. Ὅθεν $2x=180^\circ-2\Gamma$, $\text{ημ}2x=\text{ημ}2\Gamma=2\text{ημ}\Gamma\text{συν}\Gamma$, ἤτοι $\text{ημ}\Gamma=2\text{ημ}\Gamma\text{συν}\Gamma$. Οὕτως ἐπειδὴ $\text{ημ}\Gamma\neq0$, εἶναι $1=2\text{συν}\Gamma$, $\text{συν}\Gamma=1:2$ καὶ $\Gamma=60^\circ$. Ἐξ ἄλλου ἡ 2α σχέσις γίνεται $\text{ημ}\Gamma:\text{ημ}B=\sqrt{2}:2$, ἐξ ἧς $\text{ημ}B=2\text{ημ}\Gamma:\sqrt{2}=2\text{ημ}60^\circ:\sqrt{2}$, ἤτοι $\text{ημ}B=\sqrt{3}:\sqrt{2}=\sqrt{1{,}5}$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν Β. Ὁμοίως ἐκ τοῦ τριγ. ΑΔΓ λαμβάνομεν $(A\Delta)=(A\Gamma)\text{ημ}\Gamma$, ἤτοι $250=\beta\text{ημ}60^\circ$ καὶ $\beta=250:\text{ημ}60^\circ=500\sqrt{3}:3$. Ὅθεν $\gamma=\beta\sqrt{2}:2=250\sqrt{6}:3$. Τέλος ἡ πλευρὰ α καὶ τὸ Ε εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά.

1228. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ στοιχεῖα τριγώνου ΑΒΓ οὗ ὁ λόγος δύο πλευρῶν εἶναι $\lambda=(3+\sqrt{3}):3$, ἡ τρίτη πλευρὰ 100 μ. καὶ ἡ ἔναντι αὐτῆς γωνία x δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\text{ημ}2x+\text{συν}2x=\sqrt{2}\,\text{ημ}x$. (1) (Μαθ. Σχ. Ἀθ.)

Ἐκ τῆς (1) (ἄσκ. 1088) εὑρίσκομεν $x=k.\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ ἢ $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$. Ἐκ τῶν λύσεων δὲ τούτων διὰ τὸ τρίγωνον εἶναι δεκταὶ αἱ $x=\frac{\pi}{4}$ (διὰ k=0) καὶ $x=\frac{11\pi}{12}$ (διὰ k=1)

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\frac{\beta}{\gamma}=\lambda$ ἤτοι $\frac{\text{ημ}B}{\text{ημ}\Gamma}=\lambda$, $\frac{\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}B-\text{ημ}\Gamma}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ ἢ $\text{σφ}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\text{εφ}\frac{A}{2}$. Οὕτως ἐκ τοῦ λ καὶ ἐκ τῆς $A=x$ εὑρίσκομεν τὴν $\frac{B-\Gamma}{2}$ καὶ ἐκ τῆς $\frac{B+\Gamma}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς Β καὶ Γ καὶ κατόπιν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα κατὰ τὰ γνωστά.

1229. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ ὅταν :

$$\text{συν}\frac{A}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta}{\gamma}=2+\sqrt{3}.$$

Ἐπειδὴ $\text{συν}15^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, εἶναι $A=60^\circ$ καὶ $B+\Gamma=120^\circ$. Ἐκ δὲ τοῦ λόγου $\frac{\beta}{\gamma}$ εὑρίσκομεν ὡς ἄνω $\text{εφ}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\text{εφ}\frac{B+\Gamma}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.\sqrt{3}=1$. Ὅθεν $\frac{B-\Gamma}{2}=45^\circ$, $B=105^\circ$ καὶ $\Gamma=15^\circ$.

1230. Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται $(ΓΒ)=88,1$, $(ΓΑ)=177,284$ καὶ $Γ=69^0\,10'\,12''$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα. (Πολ]χνεῖον).

Ἂν ΜΔ εἶναι ἡ κάθετος, ἔχομεν $(ΑΒΓ):(ΓΜΔ)=2$. Ἀλλὰ $(ΑΒΓ):(ΓΜΔ)=(ΓΑ)(ΓΒ):(ΓΜ)(ΓΔ)$, διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν τὴν γωνίαν Γ κοινήν. Ὅθεν $(ΓΑ)(ΓΒ):(ΓΜ)(ΓΔ)=2$ (1), ἢ ἐπειδὴ $συνΓ=(ΓΔ):(ΓΜ)$, ἡ (1) δίδει $(ΓΜ)^2=(ΓΑ)(ΓΒ):2συνΓ$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ΓΜ καὶ συνεπῶς τὸ Μ.

1231. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδονται $(ΑΓ)=3μ.$, $(ΑΒ)=4μ.$ Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης ὡς καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς καθέτου ΑΒ σημεῖον Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ΑΓ σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ἂν ἡ ΔΕ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΓΖ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι $(ΑΔ)=3(ΑΒ)$.

Λαμβάνομεν ὡς ἄγνωστον τὴν γων. $ΕΔΑ=ω$· ἂν δὲ θέσωμεν $(ΑΔ)=υ$, ἔχομεν (τ. 64) $(ΕΓΖ)=\frac{1}{2}(ΕΓ)^2.\frac{ημΓημΕ}{ημΖ}$. Ἀλλὰ $Ε=90^0+ω$, $Ζ=Β-ω$ καὶ $ΕΓ=ΑΓ-ΑΕ=ΑΓ-(ΑΔ)εφω$. Ὥστε $(ΕΓΖ)=\frac{1}{2}(β-υεφω)^2.\frac{ημΓσυνω}{ημ(Β-ω)}=\frac{1}{2}.\frac{β^2-2βυεφω+υ^2εφ^2ω}{σφΓ-εφω}$.

Ἐπειδὴ δὲ $(ΕΓΖ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)=\frac{1}{4}βγ$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $2υ^2εφ^2ω-β(4υ-γ)εφω+\beta^2=0$), ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν ω κτλ. κατὰ τὰ γνωστά.

1232. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ γωνίαι $(Α<Β<Γ)$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον λόγου φ. α′) Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσις $(α+γ)^2=β^2+3αγ$. β′) Νὰ εὕρητε τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλληται ἡ γωνία φ. γ′) Νὰ εὕρητε ἐκ τῆς πλευρᾶς β καὶ τῆς περιμέτρου 2τ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς φ, ὡς καὶ τὰς ἀγνώστους πλευρὰς α καὶ γ. Διερεύνησις. (Πολ]χνεῖον]

α′) Ἂν θέσωμεν $Α=Β-φ$ καὶ $Γ=Β+φ$, ἔχομεν $(Β-φ)+Β+(Β+φ)=180^0$ (1) ἤτοι $Β=60^0$ Ὅθεν (τ. 57) $β^2=α^2+γ^2-αγ=(α+γ)^2-3αγ$ ἤτοι $(α+γ)^2=β^2+3αγ$ (2).

β′) Εἶναι (σχέσις 1) $Β+Β+φ<180^0$, ἤτοι $φ<60^0$ καὶ $Β<Γ$, ἤτοι $Β<Β+φ$ καὶ $φ>0^0$.

γ′) Ἔχομεν (τ. 56) $\frac{α+γ}{ημΑ+ημΓ}=\frac{β}{ημΒ}$ (3). Ἀλλὰ $α+γ=2τ-β$ (4) καὶ $ημΑ+ημΓ=ημ(60^0-φ)+ημ(60^0+φ)=2ημ60^0συνφ$. Οὕτως ἡ (3) δίδει $συνφ=\frac{2τ-β}{2β}$ καὶ ἑπομένως τὴν γωνίαν φ. Ἐξ ἄλλου ἡ (2) καὶ ἡ (4) δίδουν $3αγ=(2τ-β)^2-β^2=4τ(τ-β)$ ἤτοι $αγ=4τ(τ-β):3$. Οὕτως αἱ πλευραὶ α καὶ γ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-3(2τ-β)x+4τ(τ-β)=0$ (5). Ἀλλ' ἵνα αὗται εἶναι πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαὶ πρέπει νὰ εἶναι ἡ διακρίνουσα $9(2τ-β)^2-48τ(τ-β)>0$, ἤτοι $3β^2>2τ\,.\,2(τ-β)$ ἢ $3β^2>(α+β+γ).(α-β+γ)$, $3β^2>(α+γ)^2-β^2$, ἤτοι $2β>α+γ$. Ἀκόμη δὲ πρέπει νὰ εἶναι $τ-β>0$, διότι τότε $αγ>0$ καὶ $α+γ>0$, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5).

1233. Τριγώνου ΑΒΓ τὸ ὕψος ΑΔ τέμνεται εἰς τὸ μέσον του Μ ὑπὸ τοῦ ὕψους ΓΕ. α′) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $εφΒεφΓ=2$. β′) Ἐκ τῆς γωνίας Α νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ. γ′) Νὰ γίνῃ ἡ διερεύνησις καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μεταβάλληται ἡ γωνία Α.

α′) Αἱ γωνίαι ΓΜΔ καὶ Β, ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ $εφΓΜΔ=εφΒ=\frac{(ΔΓ)}{(ΔΜ)}=\frac{2(ΔΓ)}{2(ΔΜ)}=\frac{2(ΔΓ)}{(ΑΔ)}$ καὶ $εφΓ=\frac{(ΑΔ)}{(ΔΓ)}$, ἕπεται $εφΒεφΓ=2$.

β′) Ἐπειδὴ $εφ(Β+Γ)=-εφΑ$, εἶναι $\frac{εφΒ+εφΓ}{1-εφΒεφΓ}=-εφΑ$, ἤτοι $εφΒ+εφΓ=εφΑ$.

Οὕτως αἱ εφΒ καὶ εφΓ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως x^2—εφΑ . x+2=0, αἵτινες διὰ νὰ εἶναι πραγματικαὶ πρέπει νὰ εἶναι $\varepsilon\varphi^2 A-8 \geqq 0$, ἤτοι $\varepsilon\varphi A > 2\sqrt{2}$. Τότε δὲ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι θετικαὶ καὶ μικρότεραι τῶν 180^0.

1234. α΄) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $\eta\mu^2 A-\eta\mu^2 B=\eta\mu(A+B)\eta\mu(A-B)$. β΄) Συναρτήσει τοῦ λόγου $(\alpha^2-\beta^2):\gamma^2=\lambda$, τῆς πλευρᾶς γ καὶ τῆς διαφορᾶς $A-B=\Delta$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ τριγώνου καὶ νὰ γίνῃ ἡ διερεύνησις μὲ τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι $0<\Delta<\pi:2$. (Πολ]χνεῖον)

α΄) Βλέπε ἄσκ. 475. β΄) Εἶναι (τ. 56) $(\alpha^2-\beta^2):\gamma^2=(\eta\mu^2 A-\eta\mu^2 B):\eta\mu^2\Gamma=\lambda$, $\eta\mu(A+B)\cdot$ $\cdot\eta\mu(A-B)=\lambda\eta\mu^2\Gamma$, ἢ ἐπειδὴ $\eta\mu\Gamma=\eta\mu(A+B)\neq 0$, $\eta\mu\Delta=\lambda\eta\mu\Gamma$ καὶ $\eta\mu\Gamma=\eta\mu\Delta:\lambda$ (1). Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν Γ, κἀτόπιν τὸ $A+B=180^0-\Gamma$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστά. Ἀλλ᾽ ἵνα ἔχωμεν λύσιν πρέπει $\eta\mu^2\Gamma \leqq 1$, ἤτοι $\eta\mu^2\Delta:\lambda^2 \leqq 1$ ἢ ἐπειδὴ $\eta\mu\Delta>0$, $\eta\mu\Delta \leqq |\lambda|$.

1235. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῆς γωνίας Α καὶ ἐκ τοῦ λόγου $\lambda=\upsilon_\beta:\upsilon_\gamma$. (Πολ]χνεῖον)

Εἶναι $\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma$, ἤτοι $\upsilon_\beta:\upsilon_\gamma=\gamma:\beta$ καὶ συνεπῶς $\lambda=\eta\mu\Gamma:\eta\mu B$, $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}=\dfrac{\eta\mu\Gamma+\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma-\eta\mu B}$ $=\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma+B}{2}:\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma-B}{2}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma-B}{2}=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\sigma\varphi\dfrac{A}{2}$ (1). Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν $\dfrac{\Gamma-B}{2}$. Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς $\dfrac{B+\Gamma}{2}=90^0-\dfrac{A}{2}$ εὑρίσκομεν τὰς Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ εἶναι >0 καὶ $<180^0$. Πρὸς τοῦτο ἂν $\lambda>1$, θὰ εἶναι $\dfrac{\Gamma-B}{2}>0$, ἤτοι $\Gamma>B$. Θὰ εἶναι δὲ $B>0$ ἂν $90^0-\dfrac{A}{2}>\dfrac{\Gamma-B}{2}>0$, ὁπότε αἱ Β καὶ Γ εἶναι καὶ $<180^0$ καὶ $\sigma\varphi\dfrac{A}{2}>$ $>\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma-B}{2}>0$. Ἀλλὰ τότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει $0<\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}<1$, ὅπερ συμβαίνει, ἀφοῦ ὑπετέθη $\lambda>1$. Ἂν $\lambda<1$, θὰ εἶναι $B>\Gamma$ καὶ ἂν $\lambda=1$ θὰ εἶναι $B=\Gamma=90^0-\dfrac{A}{2}$.

1236. Τριγώνου ΑΒΓ νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ β, γ καὶ τὸ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$ ἐκ τῆς πλευρᾶς α, τῆς γωνίας Α καὶ τοῦ ἀθροίσματος $\kappa^2=\beta^2+\gamma^2$ (1). Μεταξὺ ποίων ὁρίων πρέπει νὰ μεταβάλληται τὸ κ^2, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν;

Εἶναι (τ. 57) $2\beta\gamma=\dfrac{\kappa^2-\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu A}$ (2). Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν,

$$\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma=(\beta+\gamma)^2=\kappa^2+\frac{\kappa^2-\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu A}=\frac{\kappa^2(1+\sigma\upsilon\nu A)-\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu A}=\left(2\kappa^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-\alpha^2\right):\sigma\upsilon\nu A \ (3).$$

Ὁμοίως δὲ $(\beta-\gamma)^2=\left(\alpha^2-2\kappa^2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}\right):\sigma\upsilon\nu A$ (4). Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ $\beta+\gamma$, $\beta-\gamma$ καὶ ἐξ αὐτῶν τὰς β καὶ γ καὶ τὸ $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$, ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\dfrac{A}{2}$. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει $\left|\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}\right|<1$ καὶ αἱ (3) καὶ (4) νὰ δίδουν ῥίζας πραγματικάς. Πρὸς τοῦτο δέ: ἂν $90^0<A<180^0$, θὰ εἶναι $\sigma\upsilon\nu A<0$, ὁπότε οἱ ἀνωτέρω ὅροι δίδουν τὰς σχέσεις $2\kappa^2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}\geqq\alpha^2$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2}\left(\alpha^2-2\kappa^2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}\right)\geqq\alpha^2\sigma\upsilon\nu A$ ἤτοι τὰς $\alpha^2:2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}\leqq$ $\leqq\kappa^2\leqq\alpha^2:2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2}$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι ἂν $0^0<A<90^0$ πρέπει νὰ εἶναι

$\alpha^2:2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{A}{2}\leqq\kappa^2\leqq\alpha^2:2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}$.

1237. Ἐν ἐπιπέδῳ μὲ κέντρα ὧν ἡ ἀπόστασις εἶναι 4μ, χαράσσομεν δύο περιφερείας κύκλων ἀκτίνων 6 μ. καὶ 8 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν: 1) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου μὲ βάσιν τὴν διάκεντρον καὶ ἀπέναντι κορυφὴν ἓν ἐκ τῶν σημείων τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν. 2) Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς χορδῆς. 3) Τὰ μέτρα τῶν τόξων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν καὶ 4) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κύκλων. (Πολ]χνεῖον)

Ἔστω ΚΚ′ ἡ διάκεντρος, ΑΒ ἡ κοινὴ χορδὴ καὶ Γ, Δ, Ε τὰ σημεῖα εἰς ἃ ἡ ΚΚ′, τέμνει τὰς περιφερείας Κ, Κ′ καὶ τὴν ΑΒ ἀντιστοίχως. Τότε 1) Ἐπειδὴ (ΚΚ′) = 4, (ΚΑ) = 6 (Κ′Α) = 8, εἶναι $(ΚΚ'Α) = \sqrt{9.5.3.1} = 3\sqrt{15}$ τ. μ. 2) Τὸ τρίγωνον ΚΚ′Α μὲ βάσιν τὴν ΚΚ′, ἔχει ὕψος ΑΕ = ΑΒ : 2. Οὕτως $(ΚΚ'Α) = \frac{1}{2}(ΚΚ').\frac{(ΑΒ)}{2}$, ἐξ ἧς $(ΑΒ)=3\sqrt{15}$ μ.

3) Τὰ τόξα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν κοινὴν χορδὴν εἶναι τὰ ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ, ὧν τὰ μέτρα, εἶναι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ΑΚΒ καὶ ΑΚ′Β, αἵτινες εἶναι διπλάσιαι τῶν γωνιῶν ΑΚΕ καὶ ΑΚ′Κ ἀντιστοίχως, ἐξ ὧν ἡ ΑΚΕ, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΑΚΚ′. Οὕτως ἐκ τοῦ τριγώνου ΚΚ′Α εὑρίσκομεν $εφ\frac{ΑΚΚ'}{2} = \sqrt{\frac{3.5}{9.1}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ καὶ $εφ\frac{ΑΚ'Κ}{2} = \sqrt{\frac{1.5}{3.9}} = \frac{\sqrt{15}}{9}$ καὶ κατόπιν τὰ ζητούμενα μέτρα εὐκόλως. 4) Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων τῶν κύκλων Κ καὶ Κ′ ἀντιστοίχως, ἅτινα εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά.

1238. Δύο κύκλοι κέντρων Κ καὶ Κ′ καὶ ἀκτίνων 25 μ. καὶ 4,5 μ. εἶναι ὁ εἷς ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ σχηματιζόμενον τρίγωνον ὑπὸ τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾶς τῶν ἐσωτερικῶν εἶναι ἰσοσκελές. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάκεντρος ΚΚ′.

Ἔστω ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ ἐφάπτονται τῆς μικροτέρας περιφερείας Κ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τῆς μεγαλυτέρας Κ′ εἰς τὰ Ζ καὶ Η. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη ΒΓ, ἥτις ἐφάπτεται τῆς Κ′ εἰς τὸ Ι, σχηματίζει μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ(ΑΓ=ΒΓ). Κατόπιν τούτων φέρομεν τὴν ΑΚΚ′ καὶ παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἐκ τοῦ Δ τὴν ΔΙΘ τέμνουσαν τὴν ἀκτῖνα Κ′Ζ εἰς τὸ Θ. Τότε $γων\frac{Α}{2} = γωνΖΑΚ' = ω$, ὁπότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΘΖ λαμβάνομεν ημΖΔΘ = $= ημω = \frac{(ΘΖ)}{(ΔΘ)} = \frac{R'-R}{(Κ'Κ)} = \frac{25-4,5}{(Κ'Κ)} = \frac{20,5}{(Κ'Κ)}$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ (ΕΓ)=(ΒΙ)=(ΒΖ), ἐκ τοῦ τριγώνου ΓΚΕ λαμβάνομεν (ΕΓ) = Rεφ2ω καὶ ἐκ τοῦ Κ′ΒΖ λαμβάνομεν (ΒΖ) = R′εφω. Ὅθεν Rεφ2ω=R′εφω, ἐξ ἧς (τ. 32) $εφ^2ω = \frac{R'-2R}{R'} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$ καὶ $εφω = \frac{4}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ $ημω = εφω : \sqrt{1+εφ^2ω} = \frac{4}{5} : \sqrt{1+\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$, ἡ (1) δίδει (ΚΚ′) = 20,5. $ημω = 5\sqrt{41}$.

1239. Κύκλος ἀκτῖνος ρ=1 μ. κινεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ τὸ κέντρον του γράφει εὐθεῖαν ΜΝ μετὰ σταθερᾶς ταχύτητος υ=1μ. κατὰ 1δ. Ἐν τῇ κινήσει του δὲ αὐτῇ ἐφάπτεται ἄλλου κύκλου κέντρου Κ′ ἀκινήτου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἀκτῖνος x, εἰς τὰ σημεῖα Α, α, α′ καὶ Α′. Ἐὰν δίδωνται αἱ χρονικαὶ διάρκειαι 2t = 30δ καὶ 2t′ = 20δ μεταξὺ τῶν ἐξωτερικῶν καὶ τῶν ἐσωτερικῶν ἐπαφῶν, νὰ εὑρεθοῦν: 1) Ἡ ἀκτὶς x. 2) Ἡ ἀπόστασις y τοῦ κέντρου Κ′ ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ καὶ 3) Ἡ θέσις τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐφ' ἑκάστου τῶν δύο κύκλων.

Ἔστω $Κ_1$, $Κ_2$, $Κ_3$, $Κ_4$ αἱ θέσεις τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου, ὅταν ἐφάπτεται τοῦ κύκλου Κ′. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι Κ′Γ ἡ κάθετος ἐκ τοῦ Κ′ ἐπὶ τὴν ΜΝ. Ἀλλὰ τότε εἶναι $Κ_1Γ = (Κ_1Κ_4) : 2 = υt = 1 . 15 = 15$ καὶ $(Κ_2Γ) = (Κ_2Κ_3) : 2 = υt' = 1 . 10 = 10$. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $K_1K'Γ$ καὶ $K_2K'Γ$ λαμβάνομεν $(x+ρ)^2=υ^2t^2+y^2$ καὶ $(x-ρ)^2=υ^2t'^2+$ $+y^2$, ἤτοι $(x+1)^2=225+y^2$ καὶ $(x-1)^2=100+y^2$, $(x+1)^2-(x-1)^2=225$, $4x=125$. Οὕτως εὑρίσκομεν 1) $x=31{,}25$ μ. καὶ 2) $y=28{,}54$ μ. 3) Ἤδη θὰ προσδιορίσωμεν τὰς θέσεις τῶν σημείων ἐπαφῆς ἐκ τῶν γωνιῶν $K_1KΓ$ καὶ $K_2KΓ$, δι' ἃς εὑρίσκομεν $ημK_1KΓ=\frac{(K_1Γ)}{(K_1K')}=$

$$\frac{υt}{x+ρ}=\frac{15}{32{,}25} \text{ καὶ } ημK_2KΓ=\frac{(K_2Γ)}{(K_2K')}=\frac{υt'}{x-ρ}=\frac{10}{30{,}25}.$$

1240. 1) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν Α, Β, Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου καὶ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $συν^2\frac{A}{2}+συν^2\frac{B}{2}-ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}=1$ (α), τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον. 2) Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἄγνωστον γωνίαν x τοῦ τύπου συνα = = συνβσυνx+ημβημxσυνA (1) εἰσάγομεν βοηθητικὴν γωνίαν φ οὕτως, ὥστε ὁ τύπος (1) νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν συν(x—φ) = συνασυνφ : συνβ (2). Ζητεῖται: α') Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔκφρασις τῆς εφφ καὶ β') νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία x ἐκ τοῦ τύπου (2), ὅταν $A=45^0$, $εφβ=\sqrt{2}$ καὶ $συνα=\sqrt{2}:3$. (Χημ. Σχολὴ Ἀθ.).

1) Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται $\frac{1+συνA}{2}+\frac{1+συνB}{2}-ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}=1$, ἐξ ἧς $συνA+συνB-2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}=0$, ἤτοι $2ημ\frac{Γ}{2}\left(συν\frac{A-B}{2}-συν\frac{Γ}{2}\right)=0$, ἢ $\left(\text{ἐπειδὴ } ημ\frac{Γ}{2}\neq 0\right)$, $συν\frac{A-B}{2}=συν\frac{Γ}{2}$ καὶ ἐπομένως $A-B=Γ$ ἤτοι $A=B+Γ$ καὶ $A=90^0$. 2) Ἂν ἤδη προσθέσωμεν τὰ μέλη τῆς (2) μὲ τὰ μέλη τῆς (1) πολλαπλασιασθείσης προηγουμένως ἐπὶ —συνφ, εὑρίσκομεν ημx(συνβημφ—ημβσυνAσυνφ) = 0. Καὶ ἂν $ημx\neq 0$, τότε συνφημφ—ημβσυνAσυνφ = 0, ἐξ ἧς εφφ = εφβσυνA. Ἂν δὲ ημx=0, ὁπότε συνx = 1, ἡ (1) δίδει συνα = συνβ, ὁπότε ἡ (2) γίνεται συν(x—φ) = συνφ. Ἐπαληθεύεται δὲ αὕτη διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς φ. 3) Ἔχομεν εφφ = εφβσυνA = $\sqrt{2}.\sqrt{2}:2=1=εφ45^0$ καὶ $συνβ=\pm(1:\sqrt{3})$. Οὕτως ἡ (2) δίδει $συν(x-φ)=\pm 1$, ἐξ ἧς ὑπολογίζομεν τὴν x—φ καὶ ἐπομένως τὴν x.

1241. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμεσος ΓΔ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν αὕτη σχηματίζῃ μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 60^0 καὶ διαιρῇ τὴν γωνίαν Γ εἰς δύο μέρη ὧν τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου. Δίδεται δὲ καὶ ἡ (ΑΒ) = 2α.

Ἂν θέσωμεν (ΓΔ)=δ, καὶ γωνΑΓΔ=ω, γωνΔΓΒ=2ω, γωνΓΔΒ=σ, θὰ εἶναι Α=σ—ω καὶ $B=180^0-(σ+2ω)$. Οὕτως, ἐπειδὴ (ΑΔ)=(ΔΒ)=α, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως $\frac{δ}{α}=\frac{ημ(σ-ω)}{ημω}$, $\frac{δ}{α}=\frac{ημ(σ+2ω)}{ημ2ω}$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν

$$\frac{ημσσυνω-ημωσυνσ}{ημω}=\frac{ημσσυν2ω+ημ2ωσυνσ}{ημ2ω},$$ ημσσφω — συνσ = ημσσφ2ω + συνσ (1).

Ἀλλ' ἐπειδὴ $σφω=\frac{1}{εφω}$ καὶ $σφ2ω=\frac{1}{εφ2ω}=\frac{1-εφ^2ω}{2εφω}$, ἡ (1) δίδει $εφσεφ^2ω-4εφω+$ $+εφσ=0$ (2). Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ἡ γωνια ΑΓΒ μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 180^0, ἡ ω μεταβάλλεται ἀπὸ 0^0 ἕως 60^0. Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (2) δίδει ῥίζας πραγματικάς, ὅταν ἡ εφω περιέχεται μεταξὺ $0=εφ0^0$ καὶ $\sqrt{3}=εφ60^0$. Καὶ ἂν $φ(0)φ(\sqrt{3})<0$, ἤτοι ἂν εφσ . 4. .(εφσ $-\sqrt{3}$) <0, θὰ ἔχωμεν μίαν ῥίζαν. Πρὸς τοῦτο δὲ ἐπειδὴ εφσ >0, πρέπει νὰ εἶναι εφσ $<\sqrt{3}$. Θὰ ἔχωμεν δὲ δύο ῥίζας, ἂν ἡ διακρίνουσα τῆς (2) $Δ\geq 0$, καὶ ἂν $φ(0)>0$ $φ(\sqrt{3})>0$ καὶ $0<\frac{ρ_1+ρ_2}{2}<\sqrt{3}$, ἤτοι ἂν $\sqrt{3}<$ εφσ $\leq\sqrt{2}$.

1242. Ἂν ἡ διάμεσος $Δ_α$ τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν θ καὶ μετὰ τῆς ΑΓ γωνίαν φ, ν' ἀποδειχθῇ: 1) ὅτι συν(Β+2Γ+φ)=2συν(Β+φ)—συν(Β—φ) καὶ 2) ὅτι, ἂν δίδωνται ἡ Δ_α καὶ αἱ Β καὶ φ, θὰ ὑπάρχουν λύσεις τοῦ τριγώνου καὶ αὗται δύο μόνον, ὅταν σφφ> $(2\sqrt{2} - 3\sigma\upsilon\nu B) : \eta\mu B$.

1) Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ λαμβάνομεν $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = \dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ καὶ $\dfrac{\beta}{\eta\mu\vartheta} = \dfrac{\alpha}{2\eta\mu\varphi}$.

Οὕτως εὑρίσκομεν $\dfrac{\eta\mu\vartheta}{\eta\mu\varphi} = \dfrac{2\eta\mu B}{\eta\mu A}$ καὶ ἑπομένως $2\eta\mu\vartheta\eta\mu(B+\Gamma) = 4\eta\mu B\eta\mu\varphi$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma-\vartheta) - \sigma\upsilon\nu(B+\Gamma+\vartheta) = 2[\sigma\upsilon\nu(B-\varphi) - \sigma\upsilon\nu(B+\varphi)]$ (1). Ἀλλ' ἐπειδὴ $\vartheta = 180^0 - \Gamma - \varphi$ ἡ (1) δίδει τὴν ἀποδεκτέαν ἰσότητα. 2) Αὕτη δὲ γράφεται $\sigma\upsilon\nu 2\Gamma\sigma\upsilon\nu(B+\varphi) - \eta\mu 2\Gamma\eta\mu(B+\varphi) = 2\sigma\upsilon\nu(B+\varphi) - \sigma\upsilon\nu(B-\varphi)$, ἤτοι $(\sigma\varphi^2\Gamma - 1)\sigma\upsilon\nu(B+\varphi) - 2\sigma\varphi\Gamma\eta\mu(B+\varphi) = (\sigma\varphi^2\Gamma+1)[2\sigma\upsilon\nu(B+\varphi) - \sigma\upsilon\nu(B-\varphi)]$, ἢ $\sigma\varphi^2\Gamma - (\sigma\varphi B + \sigma\varphi\varphi)\sigma\varphi\Gamma + (2 - 2\sigma\varphi B\sigma\varphi\varphi) = 0$ (2), ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν Γ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θὰ εἶναι πραγματικαὶ ἂν $(\sigma\varphi B + \sigma\varphi\varphi)^2 - 4(2 - \sigma\varphi B\sigma\varphi\varphi) \geqq 0$. Αἱ ῥίζαι δὲ τοῦ πρώτου μέλους πρὸς συνφ, εἶναι $-\dfrac{3\sigma\upsilon\nu B + 2\sqrt{2}}{\eta\mu B}$ καὶ $\dfrac{2\sqrt{2} - 3\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B}$. Οὕτω δὲ εὐκόλως πλέον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) θὰ ἔχῃ δύο λύσεις πραγματικὰς ἂν συνφ$>\dfrac{2\sqrt{2} - 3\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B}$.

1243. Πολυγώνου ἐκ ν πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, αἱ ν πλευραί του ὑποτείνουν τόξα ὧν τὰ μέτρα εἶναι 2α, 4α, 6α, ... 2να. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου τούτου, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ἐκ ν πλευρῶν.

Εἶναι $2\pi = 2\alpha + 4\alpha + \ldots + 2\nu\alpha = \nu(1+\nu)\alpha$. Ὅθεν $\alpha = 2\pi : \nu(\nu+1)$, ὁ δὲ ζητούμενος λόγος ἰσοῦται μὲ $\dfrac{1}{2}\rho^2(\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha + \ldots + \eta\mu 2\nu\alpha) : \dfrac{1}{2}\rho^2\nu.\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu} = \eta\mu(2\alpha+\nu-\alpha)\eta\mu\nu\alpha : \eta\mu\alpha.\nu.\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu}$ $= \eta\mu(\nu+1)\alpha\eta\mu\nu\alpha : \nu\eta\mu\alpha\eta\mu(\nu+1)\alpha = \eta\mu\nu\alpha : \nu\eta\mu\alpha$.

1244. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ διὰ τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ σχηματίζομεν τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ ἔπειτα διὰ τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ νέου τριγώνου, σχηματίζομεν ἄλλο τρίγωνον $A_2B_2\Gamma_2$ καὶ ἐξακολουθοῦμεν ὁμοίως. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ νυοστοῦ τριγώνου καὶ νὰ εὑρεθῇ ποὺ τείνουν αὗται, ὅταν τὸ ν αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Τὰ οὕτω σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι τὰ ἔχοντα κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. Ὅθεν ἐν τῷ πρώτῳ τριγώνῳ $A_1B_1\Gamma_1$, ἡ γωνία ἡ ἀπέναντι τῆς Α ἔχει μέτρον $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, ἡ δὲ ἀπέναντι ταύτης ἐν τῷ τριγώνῳ $A_2B_2\Gamma_2$ ἔχει μέτρον $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{A}{4}$, ἡ δὲ ἐν τῷ τρίτῳ τριγώνῳ ἔχει μέτρον $\pi\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) - \dfrac{A}{8}$ ἡ δὲ ἐν τῷ νυοστῷ τριγώνῳ ἔχει μέτρον $\pi\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \ldots \pm \dfrac{1}{2^\nu}\right) \mp \dfrac{A}{2^\nu} = \pi\left[\dfrac{1}{2}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^\nu\right) : \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\right] + \dfrac{A}{2^\nu} = \dfrac{\pi}{3}\left(1 \pm \dfrac{1}{2^\nu}\right) \mp \dfrac{A}{2^\nu}$. Ὁμοίως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ νυοστοῦ τριγώνου εἶναι $\dfrac{\pi}{3}\left(1 \pm \dfrac{1}{2^\nu}\right) \mp \dfrac{B}{2^\nu}$, καὶ $\dfrac{\pi}{3}\left(1 \pm \dfrac{1}{2^\nu}\right) \mp \dfrac{\Gamma}{2^\nu}$. Διὰ δὲ ὅρν $= \infty$, ἑκάστη τῶν τριῶν αὐτῶν γωνιῶν ἔχει ὅριον τὸ $\dfrac{\pi}{3}$.

1245. Τεθλασμένης γραμμῆς $A_0A_1A_2\ldots A_\nu$ κάθε πλευρά της $A_{\kappa-1}A_{\kappa+1}$ (διὰ κ=1, 2, 3...ν) εἶναι λ καὶ κάθε γωνία της $A_{\kappa-1}A_\kappa A_{\kappa+1}$ (διὰ κ=1, 2, 3...ν) εἶναι π—θ, ἔνθα θ σταθερόν. Νὰ δειχθῇ ὅτι: 1) Τὸ μῆκος τῆς A_0A_ν εἶναι

$\lambda\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$. 2) $1+\sigma\upsilon\nu\vartheta+\sigma\upsilon\nu2\vartheta+..+\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\vartheta=\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\frac{\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$, $\eta\mu\vartheta+\eta\mu2\vartheta+...+\eta\mu(\nu-1)\vartheta=\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}\eta\mu(\nu-1)\frac{\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$. 3) Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ μεταξὺ 0 καὶ 2π λύσεις τῆς ἐξισώσεως $1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu2x+$ $+\sigma\upsilon\nu3x=0$.

(Πολ]χνεῖον).

1) Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι κανονική. Ἔστω δὲ O τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κύκλου ἀκτῖνος ρ. Τότε ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς γων. A_0OA_1 εἶναι $\pi-\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}+\frac{\pi-\vartheta}{2}\right)=\vartheta$, τὸ μέτρον τῆς γων. A_0OA_ν εἶναι $\nu\vartheta$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου A_0OA_ν λαμβάνομεν $\frac{(A_0A_\nu)}{2}=\rho\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}$, ἤτοι $(A_0A_\nu)=2\rho\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}$. Ὁμοίως δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου A_0OA_1 λαμβάνομεν $(A_0A_1)=\lambda=2\rho\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$ ἤτοι $\rho=\lambda:2\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$. Οὕτως εἶναι $(A_0A_\nu)=\lambda\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}$. 2) Φέρομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας, ἐξ ὧν ὁ ἄξων Ox νὰ διέρχηται διὰ τῆς πλευρᾶς A_0A_1. Τότε αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς $A_0A_1...A_\nu$, ἐπὶ τοὺς ἄξονας Ox καὶ Oy ἔχουν (§ 87) ἀθροίσματα ἀντιστοίχως

$$\lambda[\sigma\upsilon\nu0+\sigma\upsilon\nu\vartheta+\sigma\upsilon\nu2\vartheta+..+\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\vartheta]=\lambda\left[\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\frac{\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}\right] \quad (\tau.\ 54)$$

$$\lambda[\eta\mu\vartheta+\eta\mu2\vartheta+..+\eta\mu(\nu-1)\vartheta]=\lambda\left[\eta\mu\frac{\nu\vartheta}{2}\eta\mu(\nu-1)\frac{\vartheta}{2}:\eta\mu\frac{\vartheta}{2}\right] \quad (\tau.\ 55).$$

3) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται (τ. 54) $\eta\mu2x\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}:\eta\mu\frac{x}{2}=0$, ἤτοι $\eta\mu2x\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}=0$. Ὅθεν $\eta\mu2x=0$, ὁπότε $x=k.\frac{\pi}{2}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\frac{3x}{2}=0$ ὁπότε $x=k.\frac{\pi}{3}$. Ἀλλ' ἐδῶ τὸ x θὰ λάβῃ τὰς τιμὰς $0<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}<2\pi$.

1246. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος πύργου AB, ὅταν δίδωνται ἡ ἀπόστασις (ΓΔ)=α δύο παρατηρητῶν καὶ αἱ γωνίαι ΑΓΔ=ω, ΑΔΓ=φ καὶ ΒΔΑ=θ.

(Πολ]χνεῖον)

Ἐκ τοῦ τριγ. ΑΓΔ ἔχομεν (ΑΔ) : ημω=(ΓΔ) : ημ(ω+φ), ἤτοι (ΑΔ)=αημω : ημ(ω+φ). Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΑΒΔ λαμβάνομεν (ΑΒ)=(ΑΔ)ημθ=αημωημθ : ημ(ω+φ).

1247. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους λόφου ΓΣ λαμβάνομεν πλευρὰν (ΑΒ)=225μ. Ἐκ τοῦ Α σκοπεύοντες τὴν κορυφὴν τοῦ λόφου εὑρίσκομεν γωνίαν $42^0\ 26'\ 16''$, ἐκ δὲ τοῦ Β, γωνίαν $53^0\ 21'\ 16''$. Ἡ εἰς τὸ Β κατακόρυφος τοῦ τόπου σχηματίζει μετὰ τῆς ΓΒ γωνίαν $45^0\ 33'\ 19''$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ λόφου.

(Ἀνωτ. Γεωπονική)

Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω (ΓΣ)=(ΑΒ)ημωημθ : ημ(ω+φ), ὅπου $\omega=42^0\ 26'\ 16''$, $\varphi=53^0\ 21'\ 16''$ καὶ $\vartheta=90^0-45^0\ 33'\ 19''$.

1248. Δύο πύργοι ΑΒ καὶ ΓΔ ἵστανται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους. Ἐκ τῆς βάσεως τοῦ δευτέρου πύργου ἡ κορυφὴ Β τοῦ πρώτου φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὕψους α, ἐκ δὲ τῆς βάσεως Α τοῦ πρώτου πύργου φαίνεται ἡ κορυφὴ Δ τοῦ δευτέρου πύργου ὑπὸ γωνίαν ὕψους 2α. Ἀλλ' ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς εὐθείας ΑΓ αἱ γωνίαι ὕψους τῶν δύο κορυφῶν εἶναι συμπληρωματικαί. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν δύο πύργων.

Τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΓΔ, δίδουν τὰ ζητούμενα ὕψη (ΑΒ)=μεφα καὶ (ΓΔ)=μεφ2α, ὅπου μ=(ΑΓ). Ὅθεν (ΑΒ)(ΓΔ)=μ^2εφαεφ2α, ἤτοι (ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΓΔΕ)

$\mu^2 : 4 = \mu^2$εφαεφ2α, ἐξ ἧς 4εφαεφ$2\alpha=1$, 4εφα $\cdot \dfrac{2\text{εφα}}{1-\text{εφ}^2\alpha}=1$, εφα $=\dfrac{1}{3}$, ὁπότε εφ$2\alpha=$ $=\dfrac{3}{4}$. Οὕτως εἶναι (ΑΒ)$=\dfrac{\mu}{3}$ καὶ (ΓΔ) $=\dfrac{3\mu}{4}$.

1249. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τετραέδρου ΑΒΓΔ ἰσοῦται μὲ τὸ 1 : 6 τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὴν βραχυτέραν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν καὶ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας των.

Ἔστω ΕΖ ἡ βραχυτέρα ἀπόστασις. Ἤδη φέρομεν τὴν ΓΓ' παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν ΑΔ. Τότε τὰ τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΓ'Δ εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΔ καὶ ὕψη ἴσα, διότι ἡ ΓΓ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ. Ἀλλ' ἂν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓ'Δ λάβωμεν ὡς βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ', ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου μὲ διαδοχικὰς πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ' (ἢ ΑΒ καὶ ΔΓ) τὸ ὕψος του θὰ εἶναι ἴσον μὲ ΕΖ. Ὥστε ὄγκ. ΑΒΓΔ=ὄγκ. ΑΒΓ'Δ $=\dfrac{1}{3}$ (ΑΒΓ') . (ΕΖ). Ἀλλ' (ΑΒΓ') $=$ $=\dfrac{1}{2}$ (ΑΒ) . (ΑΓ')ημΒΑΓ'$=\dfrac{1}{2}$ (ΑΒ)(ΓΔ)ημ$(\widehat{\text{ΑΒ, ΓΔ}})$. Ὥστε ὄγκ. ΑΒΓΔ$=\dfrac{1}{6}$(ΑΒ)(ΓΔ)(ΕΖ) ημ$(\widehat{\text{ΑΒ, ΓΔ}})$.

1250. Ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ διέδρου γωνίας, ἧς τὸ μέτρον εἶναι $55^0\ 14'$ δίδεται εὐθεῖα Ε σχηματίζουσα μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄλλης ἕδρας Ρ' γωνίαν $35^0\ 47'\ 33''$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν ἡ Ε σχηματίζει μὲ τὴν ἀκμὴν ΑΒ τῆς δευτέρας γωνίας. (Πολ]χνεῖον)

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα Ε τέμνει τὴν ἀκμὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Ἂν τότε φέρωμεν ἐκ σημείου Δ τῆς Ε κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν Ρ', τὴν ΔΖ καὶ τὴν ΖΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι γωνΔΗΖ=φ=$55^0\ 14'$, γωνΔΓΖ=ω=$35^0\ 47'\ 33''$, ἡ δὲ γωνΔΓΗ=x εἶναι ἡ ζητουμένη. δι' ἣν εἶναι ημx $=\dfrac{(\text{ΔΗ})}{(\text{ΔΓ})}$ ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγ. ΔΓΗ. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθ. τριγώνων ΔΖΗ καὶ ΔΓΖ λαμβάνομεν (ΔΗ)=(ΔΖ) : ημφ καὶ (ΔΓ)=(ΔΖ) : ημω, ἐξ ὧν $\dfrac{(\text{ΔΗ})}{(\text{ΔΓ})}=\dfrac{\text{ημω}}{\text{ημφ}}$. Οὕτως εἶναι ημx=ημω : ημφ, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὴν x.

1251. Δίδεται κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΒ γωνίας 30^0 καὶ στρέφεται περὶ διάμετρον ΓΟΔ τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι γωνΓΟΑ=30^0 καὶ γωνΓΟΒ=60^0. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τὸ ὁποῖον προκύπτει. (Παν. Ἀθ. Χημικὴ Σχολὴ)

Ἔστω $(\text{ΑΑ}_1)=\alpha$ καὶ $(\text{ΒΒ}_1)=\beta$ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα (ΟΓ)=ϱ, καὶ ἔστω ἐπίσης $(\text{Β}_1\text{Α}_1)=\upsilon$ Τότε ὁ ζητούμενος ὄγκ.ΑΟΒ = ὄγκ.ΟΒΒ_1+ὄγκ.$\text{ΑΒΒ}_1\text{Α}_1$ — — ὄγκ.$\text{ΟΑΑ}_1=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\beta^2(\text{ΟΒ}_1)+\dfrac{1}{2}\pi(\beta^2+\alpha^2)\upsilon+\dfrac{1}{6}\pi\upsilon^3-\dfrac{1}{3}\pi\alpha^2(\text{ΟΑ}_1)$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ὄγκ.(ΑΟΒ) ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $(\text{ΟΒ}_1)=\varrho$συν60^0, $(\text{ΟΑ}_1)=\varrho$συν30^0, $\beta=\varrho$ημ60^0, $\alpha=\varrho$ημ30^0 καὶ $\upsilon=(\text{ΟΑ}_1)-(\text{ΟΒ}_1)$.

1252. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς μίαν κορυφὴν καὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται ἀνὰ δύο. (Πολ]χνεῖον).

Ἔστωσαν αἱ συντρέχουσαι ἀκμαὶ (ΟΑ) = α, (ΟΒ) = β, (ΟΓ)=γ, καὶ αἱ γωνίαι ΒΟΓ=x, ΑΟΓ = y, ΑΟΒ'= z. Ἔστω δὲ ἐπίσης ΟΒΔΓ ἡ βάσις τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΔ καὶ ΑΕ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τότε εἶναι ὄγκ. ΑΔ = (ΟΒΔΓ).(ΑΕ) = βγημω.(ΑΕ) (1). Ἀλλ' ἂν αἱ ΑΖ καὶ ΑΗ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ἔχομεν $(\text{ΑΕ})^2=(\text{ΟΑ})^2-(\text{ΟΕ})^2$ (2). Ἀλλὰ τοῦ τετραπλεύρου ΟΖΕΗ αἱ γωνίαι Ζ καὶ Η εἶναι ὀρθαί, ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΟΖΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον μὲ διάμετρον τὴν ΟΕ. Ὅθεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΖΗ ἔχομεν (ΖΗ):ημx= $=2\varrho=$(ΟΕ) (τ. 56). Οὕτως ἡ (1) δίδει $(\text{ΑΕ})^2=\alpha^2-\dfrac{(\text{ΖΗ})^2}{\text{ημ}^2\text{x}}$ (2). Ἀλλὰ (τ. 57) $(\text{ΖΗ})^2=$

$=(OH)^2+(OZ)^2-2(OH)(OZ)συνx$ (3), $(OH)=ασυνy$ καὶ $(OZ)=ασυνz$ (4). Οὕτως ἂν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις (2), (3) καὶ (4), εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως (1) μετὰ τὰς πράξεις, ὅτι ὄγκ. $ΑΔ=αβγ\sqrt{1-συν^2x-συν^2y-συν^2z+2συνxσυνyσυνz}$ ἢ ἂν θέσωμεν $x+y+z=2ω$ (ἄσκ. 478) ὄγκ. $ΑΔ=2αβγ\sqrt{ημωημ(ω-x)ημ(ω-y)ημ(ω-z)}$.

1253. Νὰ τμηθῇ σφαῖρα Ο οὕτως, ὥστε ὁ κῶνος μὲ βάσιν τὴν τομὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον, νὰ ἔχῃ ὄγκον τριπλάσιον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ὁ κῶνος. (Πολ]χνεῖον).

Ἔστω ὅτι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς σφαίρας τέμνει τὴν τομὴν κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Γ καὶ τὸ μικρότερον τόξον ΑΒ εἰς τὸ Δ. Τότε θὰ εἶναι ὄγκ. κώνου ΟΑΒ = 3 . ὄγκ. σφ. τμ. ΑΒΔ ἤτοι $\frac{1}{3}.π(ΑΓ)^2.(ΟΓ)=3\left[\frac{1}{6}π(ΓΔ)^3+\frac{1}{2}π(ΑΓ)^2.(ΓΔ)\right]$, ἐξ ἧς $2(ΑΓ)^2(ΟΓ)=3(ΓΔ)^3+9(ΑΓ)^2(ΓΔ)$ (1). Ἀλλ' ἂν θέσωμεν γων. ΑΟΔ=x=γων. ΔΟΒ, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΟΓ, εὑρίσκομεν $(ΟΓ)=(ΟΑ)συνx=ρσυνx$, $(ΑΓ)=ρημx$ καὶ $(ΓΔ)=(ΟΔ-ΟΓ)=ρ(1-συνx)$. Οὕτως ἡ (1) γίνεται $2ρ^2ημ^2x.ρσυνx=3.ρ^3(1-συνx)^3+9.ρ^2ημ^2x.ρ(1-συνx)$, ἤτοι $2ρ^3(1-συν^2x)συνx=3ρ^3(1-συνx)\cdot$ $\cdot[(1-συνx)^2+3(1-συν^2x)]$ ἢ $(1-συνx)(2συν^2x+2συνx-3)=0$. Ὅθεν $συνx=1$ ἢ $2συν^2x+2συνx-3=0$, ἐξ ἧς $συνx=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$. Ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ $συνx=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$, διότι $0^0<x<90^0$. Οὕτω προσδιορίζομεν τὸ x καὶ συνεπῶς τὴν γωνίαν $2x=ΑΟΒ$.

1254. Διὰ σημείου ἐντὸς σφαίρας ἀκτῖνος 5 μέτρων ἄγεται ἐπίπεδον τέμνον αὐτήν, ἐπὶ δὲ τῆς τομῆς κατασκευάζεται κῶνος περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ ἑνὸς τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται ἡ σφαῖρα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ΓΑΒ ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτὴν κῶνος. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι τὸ ἐπίπεδον τὸ διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Ο τέμνει τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἡ ΟΓ τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Δ, τὸ δὲ τόξον ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν γωνΑΓΟ=x=γωνΒΑΟ, ἔχομεν ὄγκ. κων. ΓΑΒ=2 ὀγκ. σφαιρ. τμημ. ΑΒΕ ἤτοι $\frac{1}{3}π(ΑΔ)^2(ΓΔ)=2\left[\frac{1}{6}π(ΔΕ)^3+\frac{1}{2}π(ΑΔ)^2(ΔΕ)\right]$ (1). Ἀλλ' εἶναι $(ΑΔ)=ρσυνx$, $(ΓΔ)=(ΑΓ)\cdot$ $\cdot συνx=ρσφxσυνx=\frac{ρσυν^2x}{ημx}$ καὶ $(ΔΕ)=ρ-(ΟΔ)=ρ(1-ημx)$ (ὅταν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΕ εἶναι τὸ μικρότερον). Ὅθεν ἡ (1), ἂν ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, δίδει $\frac{συν^4x}{ημx}=$ $(1-ημx)^2(2+ημx)$ (2). Ἀλλὰ $συν^2x=1-ημ^2x=(1-ημx)(1+ημx)$. Ὅθεν ἡ (2) γράφεται $=2(1-ημx)^2(1+ημx)^2=2ημx(1-ημx)^2(2+ημx)$ ἤτοι $(1-ημx)^2[(1+ημx)^2-2ημx(2+ημx)]$. Ὅθεν ἢ $ημx=1$, ὁπότε $x=90^0$ ἢ $(1+ημx)^2-2ημx(2+ημx)=0$, ἤτοι $ημx=-1\pm\sqrt{2}$. Ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων ἡ $ημx=\sqrt{2}-1$ εἶναι δεκτή. Οὕτως ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΟΔ ἰσοῦται μὲ $(ΟΔ)=ρημx=ρ(\sqrt{2}-1)$. Ἀλλ' εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΕ εἶναι τὸ μεγαλύτερον θὰ ἔχωμεν $(ΔΕ)=ρ+(ΟΔ)=ρ(1+ημx)$, ὁπότε ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω θὰ εὕρωμεν $ημx=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$ καὶ $(ΟΔ)=ρ\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{3}$.

1255. Ἐν ἡμικυκλίῳ ἀκτῖνος Ρ φέρομεν δύο χορδὰς ΒΑ καὶ ΒΓ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΓ, τὸ δὲ σχῆμα περιστρέφομεν ὁλόκληρον περιστροφὴν περὶ τὴν διάμετρον ταύτην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία ω τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ σχηματίζῃ ἡ χορδὴ ΑΒ μετὰ τῆς διαμέτρου, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ ὑπὸ τοῦ τμήματος ὅπερ ἔχει χορδὴν τὴν ΑΒ εἶναι 1) τὸ $\frac{1}{16}$ τοῦ ὄγκου τῆς ὑπὸ τῆς περιστροφῆς γεννωμένης σφαίρας καὶ 2) τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ ὄγκου τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ, ὑπὸ τοῦ τμήματος, ὅπερ ἔχει χορδὴν τὴν ΓΒ.

Ἔστω T_1 ὁ ὄγκος ὁ προκύπτων ὑπὸ τοῦ τμήματος μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ T_2 ὁ ὄγκος ὁ προκύπτων ὑπὸ τοῦ τμήματος μὲ χορδὴν τὴν ΓΒ. Ἔστω δὲ ΒΔ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Τότε θὰ εἶναι: 1) $\frac{1}{6}\pi(AB)^2.(A\Delta)=\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{3}.\pi\varrho^3$. (1) Ἀλλὰ $(AB)=2P\sigma\upsilon\nu\omega$, καὶ $(A\Delta)=$ $=(AB)\sigma\upsilon\nu\omega=2P\sigma\upsilon\nu^2\omega$. Οὕτως ἡ (1) δίδει $16\sigma\upsilon\nu^4\omega=1$, ἐξ ἧς $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{4}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=60^0$. 2) $\frac{1}{6}\pi(AB)^2.(A\Delta)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}.\pi.(B\Gamma)^2.(\Delta\Gamma)$. (2). Ἀλλὰ $(B\Gamma)=2P\eta\mu\omega$ καὶ $(\Delta\Gamma)=(B\Gamma)\sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)=(B\Gamma)\eta\mu\omega=2P\eta\mu^2\omega$. Ὅθεν ἡ (2) δίδει $\varepsilon\varphi^4\omega=9$, $\varepsilon\varphi^2\omega=$ $=3$, $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}$ καὶ $\omega=60^0$.

1256. Δίδεται τὸ μῆκος λ τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου καὶ ἡ γωνία αὐτῶν ω. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις προκύπτει διὰ μιᾶς πλήρους περιστροφῆς περὶ τὴν μίαν τῶν διαγωνίων, ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ ὀρθογωνίου, τῆς κειμένης πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς.

Ἔστωσαν $(AB)=x$, $(B\Gamma)=y$ αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. ΒΖ ἡ κάθετος ἐκ τῆς Β ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ γων. ΒΕΓ$=\omega$. Τότε ἡ ζητουμένη ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἄθροισμα Σ, τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων, τὰς ὁποίας γράφουν αἱ x καὶ y. Οὕτως εἶναι $\Sigma=\pi(BZ)x+\pi(BZ)y=\pi(BZ)(x+y)$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΒΖΕ ἔχομεν $(BZ)=$ $=(BE)\eta\mu\omega=\frac{\lambda}{2}\eta\mu\omega$. Ἂν δὲ ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΒΑ καὶ ΒΓ θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{2}=\frac{\lambda}{2}\eta\mu\frac{\omega}{2}$ καὶ $\frac{y}{2}=\frac{\lambda}{2}\eta\mu\frac{180^0-\omega}{2}=\frac{\lambda}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$. Ὅθεν εἶναι $\Sigma=\pi\frac{\lambda}{2}\eta\mu\omega.$ $\cdot\left(\lambda\eta\mu\frac{\omega}{2}+\lambda\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\pi\lambda^2}{2}\eta\mu\omega\left(\eta\mu\frac{\omega}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)$.

1257. Εἰς τὰ ἄκρα Α, Β διαμέτρου $(AB)=2\varrho$ ἡμικυκλίου, φέρομεν ἐφαπτομένας καὶ κατόπιν τρίτην ἐφαπτομένην εἰς σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας, τέμνουσαν τὰς δύο πρώτας εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Νὰ ὑπολογισθῇ, ἐκ τῆς ἀκτῖνος ϱ καὶ ἐκ τῆς γωνίας ω, ἣν σχηματίζει ἡ ἀκτὶς ΟΜ μετὰ τῆς ΑΒ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, ὅστις προκύπτει διὰ μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τῆς γραμμῆς ΑΑ′Β′Β περὶ τὴν ΑΒ.

Ἔχομεν 1) Ἐμβ. $=\pi[(AA')+(BB')](A'B')$ καὶ 2) ὄγκ. $=\frac{1}{3}\pi(AB)[(AA')^2+(BB')^2+$ $+(AA')(BB')]=\frac{1}{3}\pi(AB)[(AA'+BB')^2-(AA')(BB')]$. Ἀλλ' ἂν γων ΑΟΜ $=\omega$ καὶ ἡ Α′Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΒ′, ἔχομεν $AA'=A'M$ καὶ $BB'=B'M$. Ὅθεν $A'M+MB'=A'B'=$ $=(A'H):\sigma\upsilon\nu(90^0-\omega)=(AB):\eta\mu\omega$, καὶ $(A'M).(B'M)=\varrho^2$. Οὕτως εἶναι 1) Ἐμ. $=\pi.\frac{4\varrho^2}{\eta\mu^2\omega}$ καὶ ὄγκ. $=\frac{1}{3}\pi.2\varrho\left[\left(\frac{2\varrho}{\eta\mu\omega}\right)^2-\varrho^2\right]=\frac{2}{3}\pi\varrho^3.\frac{4-\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}$.

1258. Κόλουρος κῶνος οὗ τὰ κέντρα τῶν βάσεων εἶναι Α καὶ Β τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ τομὴ εἶναι τὸ τραπέζιον ΖΓΔΗ. Ἡ διάμεσος ΘΟΕ=4 μέτρα τοῦ τραπεζίου, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ο, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ γωνΟΕΓ=60^0. Νὰ ὑπολογισθῇ 1) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΖΓΔΗ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΟΔ. 2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου καὶ 3) Ποία θὰ ἦτο ἡ γωνΟΕΓ, ἂν ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ἰσοῦτο μὲ τὸν ὄγκον σφαίρας ἀκτῖνος 3μ.;

Διὰ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ τέμνουσαν τὰς ΒΔ καὶ ΑΓ (τὴν προέκτασίν της) εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Ι ἀντιστοίχως. 1) Τότε τὸ ὀρθογώνιον ΑΙΚΒ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ τραπέζιον ΑΓΔΒ, ἥμισυ τοῦ τραπεζίου ΖΓΔΗ. Ἐπειδὴ δὲ (ΟΑ)=(ΟΒ)= =(ΟΕ)=4 : 2=2μ. καὶ (ΑΓ)=(ΟΑ)=2μ., ἕπεται ὅτι (ΖΓΔΗ)=2 . 4 . 2=16τ.μ. Ἐξ ἄλλου εἶναι (ΓΟΔ)=(ΓΟΕ)+(ΕΟΔ). Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΓΟΕ καὶ ΕΟΔ ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΟΕ καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα, εἶναι (ΓΟΔ)=2(ΓΟΕ)=4τ.μ. 2) Ἐμβ. Κυρ. ἐπιφ. κολ. κώνου = 2π(ΟΕ)(ΓΔ). Ἀλλὰ (ΓΔ)=2 . (ΓΕ). Ἂν δὲ ἡ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνῃ τὴν ΟΕ εἰς τὸ Λ καὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ Μ, ἔχομεν (ΓΔ)=(ΓΜ) : ημ60^0=8 : $\sqrt{3}$. Ὅθεν Ἐμβ. = 2π . 2 . 8 : $\sqrt{3}$ =32π:$\sqrt{3}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι ὄγκ. κολ. κώνου = $\frac{1}{3}$ π . (ΑΒ) [$(ΑΓ)^2$+$(ΒΔ)^2$+(ΑΓ)(ΒΔ)]. Ἀλλ' (ΑΓ) = (ΟΛ) = (ΟΕ)−(ΛΕ) = (ΟΕ)−(ΓΛ)σφ60^0 = (ΟΕ). .(1−σφ60^0) καὶ (ΒΔ)=(ΟΕ)(1+σφ60^0). Ὅθεν ὄγκ.= $\frac{2}{3}$ π . 2^3 . (3+σφ$^2 60^0$) = $\frac{16\pi}{3}$(3+3)= $=\frac{96\pi}{3}$. 3) Ἂν γωνΟΕΓ = ω θὰ ἦτο $\frac{16}{3}$ π . (3+σφ^{2}ω)= $\frac{4}{3}$ π . 3^3 ἤτοι σφ^{2}ω= $\frac{15}{4}$ ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὴν ω.

1259. Δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι ἀκτίνων ρ καὶ ρ′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, αἱ δὲ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι, αἵτινες ἄγονται ἔκ τινος σημείου Α, ἐφάπτονται τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ′, Ν, Ν′. Νὰ ὑπολογισθῇ 1) Τὸ ημ., τὸ συν. καὶ ἡ εφ. τῆς γωνίας ἣν σχηματίζει ἡ διάκεντρος μετὰ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων. 2) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΜΜ′ΝΝ′ καὶ 3) Ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ὅστις προκύπτει ὑπὸ τοῦ ὡς ἄνω τραπεζίου, ὅταν τὸ σχῆμα περιστραφῇ πλήρως περὶ τὴν διάκεντρον.

Ἔστω Ο καὶ Ο′ τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν καὶ γων. ΟΑΜ = ω. Ἔστω δὲ ἐπίσης ὅτι ἡ παράλληλος ἐκ τοῦ κέντρου Ο′ τῆς μικροτέρας περιφερείας πρὸς τὴν ΑΜ τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΟΜ = ρ εἰς τὸ Β. Τότε εἶναι 1) ημω = (ΟΒ) : (ΟΟ′) = (ρ−ρ′) : (ρ+ρ′), συνω = = $\sqrt{1-ημ^2ω}$ = 2$\sqrt{ρρ'}$: (ρ+ρ′) καὶ εφω=(ρ−ρ′) : 2$\sqrt{ρρ'}$. 2) Ἔστω ὅτι αἱ ΜΝ καὶ Μ′Ν′ τέμνουν τὴν ΟΑ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′ ἀντιστοίχως. Τότε εἶναι (ΜΓ) = ρσυνω, (Μ′Γ′) = ρ′συνω. Ἂν δὲ Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι, ΓΔ = ΔΓ′, διότι ὡς γνωρίζομεν ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Δ, διχοτομεῖ τὰς ΜΜ′ καὶ ΝΝ′. Ὅθεν (ΓΔ) = (ΟΔ)−(ΟΓ) = ρ−ρημθ = ρ(1−ημθ) καὶ (ΔΓ′) = (Ο′Δ)+(ΟΓ′) = ρ(1+ημθ) καὶ (ΓΓ′) = 2(ΓΔ) = 2ρ(1−ημθ). Οὕτως εἶναι ἐμβ. τραπ. ΜΜ′ΝΝ′ = (ΜΝ+Μ′Ν′).(ΓΓ′) : 2 = = (ΓΜ+Γ′Μ′).(ΓΓ′) = (ρ+ρ′)συνω.2ρ.(1−ημω)=2ρ(ρ+ρ′)συνω(1−ημω). 3) Ὄγκ. κολ. κώνου = $\frac{1}{3}$π.(ΓΓ′)[$(ΜΓ)^2$+$(Μ'Γ')^2$+(ΜΓ)(Μ′Γ′)] = $\frac{2\pi ρ}{3}$ (1−ημω)συν^{2}ω($ρ^2$+$ρ'^2$+ρρ′).

1260. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος μὲ ν παραπλεύρους ἕδρας ἔχουν κοινὸν μῆκος λ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι μέγιστος.

Ἔστω Ο ἡ κορυφὴ τῆς πυραμίδος, ΟΚ τὸ ὕψος αὐτῆς, ΑΒ μία πλευρὰ τῆς βάσεως καὶ (ΚΑ)=ρ (ἀκτὶς τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως). Τότε ἐμβ. βάσεως=(ἐμβ. ΚΑΒ).ν= $\frac{νρ^2}{2}$.

$\cdot \eta\mu AKB = \frac{\nu\varrho^2}{2}\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$. Ἐπειδὴ δὲ $(OK)=\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}$, εἶναι ὄγκ. πυραμ.$= \frac{\nu\varrho^2}{6}\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}$. Θὰ εἶναι δὲ οὗτος μέγιστος ὅταν τὸ $\varrho^2\sqrt{\lambda^2-\varrho^2}$ ἢ τὸ $(\varrho^2)^2(\lambda^2-\varrho^2)$ εἶναι μέγιστον. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ παράγοντες ϱ^2 καὶ $\lambda^2-\varrho^2$ εἶναι θετικοὶ καὶ ἔχουν ἄθροισμα $\varrho^2+\lambda^2-\varrho^2=\lambda^2$ (σταθερὸν) τὸ γινόμενόν των εἶναι μέγιστον ὅταν $\frac{\varrho^2}{2}=\frac{\lambda^2-\varrho^2}{1}$, ἤτοι ὅταν $3\varrho^2=2\lambda^2$ καὶ ἐπομένως ὅταν $\varrho=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι $\lambda^2>\varrho^2$. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει διότι $\varrho^2=\frac{2\lambda^2}{3}<\lambda^2$.

1261. Δοθείσης τριέδρου γωνίας, νὰ ληφθοῦν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν αὐτῆς τρία μήκη $(OA)=x$, $(OB)=y$ καὶ $(O\Gamma)=z$, τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ νὰ ἰσοῦται μὲ $3\lambda^2$ καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος αὐτῆς νὰ εἶναι μέγιστος.

Ἂν γων$BO\Gamma=\omega$, γων$\Gamma OA=\varphi$ καὶ γων$AOB=\sigma$, θὰ εἶναι Ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ.$=$ $=(xy\eta\mu\sigma+yz\eta\mu\omega+zx\eta\mu\varphi):2=3\lambda^2$ (1) καὶ ὄγκ. $OAB\Gamma=xyz\,.\,v$, ὅπου v εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑ′Β′Γ′, αἱ δὲ ἀκμαὶ ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ λαμβάνονται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ ἴσαι μὲ 1. Ἀλλὰ ὁ ὄγκ. ΟΑΒΓ εἶναι μέγιστος ὅταν τὸ γινόμενον xyz εἶναι μέγιστον, ἢ ὅταν τὸ γινόμενον $(xy\eta\mu\sigma)(yz\eta\mu\omega)(zx\eta\mu\varphi)(=x^2y^2z^2\eta\mu\omega\eta\mu\varphi\eta\mu\sigma)$ εἶναι μέγιστον. Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου τούτου εἶναι θετικοὶ καὶ ἔχουν ἄθροισμα $6\lambda^2$ (σταθερόν), τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ εἶναι μέγιστον ὅταν $xy\eta\mu\sigma=yz\eta\mu\omega=zx\eta\mu\varphi=2\lambda^2$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $x=\lambda\sqrt{\frac{2\eta\mu\omega}{\eta\mu\varphi\eta\mu\sigma}}$, $y=\lambda\sqrt{\frac{2\eta\mu\varphi}{\eta\mu\sigma\eta\mu\omega}}$, $z=\sqrt{\frac{2\eta\mu\sigma}{\eta\mu\omega\eta\mu\varphi}}$.

1262. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ὄγκου τοῦ στερεοῦ τοῦ προκύπτοντος διὰ μιᾶς πλήρους περιστροφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, περὶ ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α, ὅταν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν σταθερὸν μῆκος α, ἡ δὲ γωνία Α μεταβάλλεται.

Ἔστω 2β ἡ βάσις, υ τὸ ὕψος καὶ $A:2=\omega$. Τότε εἶναι ὄγκος $v=\frac{4}{3}\pi\beta^2\upsilon=\frac{4}{3}\pi.$ $.\,(\alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2\,.\,(\alpha\eta\mu\omega)=\frac{4}{3}\pi\alpha^3\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$. Οὕτω τὸ μέγιστον τοῦ v ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ $\eta\mu\omega\,.\,\sigma\upsilon\nu^2\omega=(1-\eta\mu^2\omega)\eta\mu\omega$ ἢ εἰς τὸ μέγιστον τοῦ $(1-\eta\mu^2\omega)^2\,.\,\eta\mu^2\omega$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $1-\eta\mu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1$, τοῦτο συμβαίνει ὅταν $\frac{1-\eta\mu^2\omega}{2}=\frac{\eta\mu^2\omega}{1}$, ἤτοι ὅταν $1-\eta\mu^2\omega=2\eta\mu^2\omega$, ἤτοι ὅταν $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}=\eta\mu 35^0\,16'\,8''$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν $\omega=0$ εἶναι $v=0$. Ὅταν ἡ ω αὐξάνῃ καὶ γίνῃ $\omega=30^0$, τότε καὶ ὁ ὄγκος v αὐξάνει καὶ γίνεται $v=\frac{1}{2}\pi\alpha^3$, γίνεται δὲ μέγιστος, ὅταν $\omega=35^0\,16'\,8''$, ἤτοι $v=\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi\alpha^3$. Ὅταν ἡ ω ἐξακολουθῇ νὰ αὐξάνῃ, ὁ ὄγκος v ἐλαττοῦται καὶ διὰ $\omega=45^0$, 60^0 καὶ 90^0, ὁ v γίνεται ἀντιστοίχως $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\alpha^3$, $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\alpha^3$ καὶ 0.

1263. Σφαῖρα ἐκ μολύβδου, βάρους 50 γραμμαρίων, εἶναι προσδεδεμένη εἰς τὸ ἄκρον Μ νήματος, οὗ τὸ βάρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ οὗ τὸ ἄλλο ἄκρον Ο εἶναι εἰς σταθερὰν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζόντιος δύναμις F, ἥτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν σφαῖραν, ἵνα τὸ νῆμα σχηματίσῃ μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν 1) 30^0, 2) 45^0 καὶ 3) 60^0. Νὰ ἐξετασθῇ δὲ ἐὰν τὸ νῆμα δύναται νὰ λάβῃ ὁριζοντίαν θέσιν.

Ἡ συνισταμένη ΜΓ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΟΜ. Ἂν δὲ αἱ συνιστῶσαι αὐτῆς εἶναι αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ, εἶναι 1) $F=(ΒΓ)=50\,\text{εφ}30^\circ=50\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$, 2) $F=50\,\text{εφ}45^\circ=50$ καὶ 3) $F=50\cdot\text{εφ}60^\circ=50\sqrt{3}$. Ἀλλ' ὅταν τὸ νῆμα εἶναι εἰς ὁριζοντίαν θέσιν θὰ ἔχωμεν $F=50\,\text{εφ}90^\circ=\infty$. Ὥστε τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

1264. Ὑλικὸν σημεῖον βάρους P τηρεῖται ἐν ἰσορροπίᾳ ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπὸ δύο δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ τὸ ἀνυψώσουν. Ἐκ τῶν δυνάμεων τούτων, τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶναι P : 2 καὶ αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐν τῷ αὐτῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, ἡ μία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν γραμμὴν τῆς μεγαλυτέρας κλίσεως, ἡ δὲ ὁριζοντία. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου.

Αἱ τρεῖς δυναμεις ἔχουν βάρος P : 2, P : 2 καὶ P. Ἐὰν δὲ ω εἶναι ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου, αἱ προβολαὶ των ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς μεγαλυτέρας κλίσεως ὡς εὑρισκόμεναι εἰς ἰσορροπίαν, ἔχουν ἄθροισμα $P\,\text{ημ}\omega-\frac{P}{2}\text{συν}\omega-\frac{P}{2}=0$, ἤτοι $2\,\text{ημ}\omega=1+\text{συν}\omega$, $4\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}\cdot\text{συν}\frac{\omega}{2}=1+1-2\,\text{ημ}^2\frac{\omega}{2}$, $2\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}\text{συν}\frac{\omega}{2}=\text{συν}^2\frac{\omega}{2}$ καὶ $\text{συν}\frac{\omega}{2}\left(\text{συν}\frac{\omega}{2}-2\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}\right)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι $\text{συν}\frac{\omega}{2}=0$, ὁπότε $\frac{\omega}{2}=90^\circ$ καὶ $\omega=180^\circ$ (ἀδύνατον) ἢ $\text{συν}\frac{\omega}{2}-2\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}=0$ ἤτοι $\text{εφ}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}$, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὴν $\frac{\omega}{2}$ καὶ συνεπῶς τὴν ω.

1265. Ὑλικὸν σημεῖον βάρους P τηρεῖται ἐν ἰσορροπίᾳ ὑπὸ τριῶν δυνάμεων ἐντάσεων P : 3, κειμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη διευθύνεται ὁριζοντίως, ἡ δευτέρα κατὰ τὴν γραμμὴν τῆς μεγαλυτέρας κλίσεως καὶ ἡ τρίτη κατακορύφως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω ω ἡ ζητουμένη γωνία. Ἂν ω=0, τὸ ἐπίπεδον θὰ ἦτο ὁριζόντιον. Ἂν $\omega\neq0$ καὶ ἡ κατακόρυφος δύναμις διευθύνεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, αὕτη καὶ τὸ βάρος P ἔχουν συνισταμένην $P-\frac{P}{3}=\frac{2P}{3}$ καὶ ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην. Ἂν ὅμως ἡ κατακόρυφος δύναμις διευθύνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, αὕτη καὶ τὸ βάρος P ἔχουν συνισταμένην $P+\frac{P}{3}=\frac{4P}{3}$. Οὕτως ἔχομεν τρεῖς δυνάμεις, ἤτοι τὴν $\frac{4P}{3}$ κατὰ τὴν κατακόρυφον, τὴν $\frac{P}{3}$ ὁριζοντίως καὶ τὴν $\frac{P}{3}$ κατὰ τὴν γραμμὴν τῆς μεγαλυτέρας κλίσεως. Οὕτως ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἔχομεν $\frac{4P}{3}\text{ημ}\omega-\frac{P}{3}-\frac{P}{3}\cdot\text{συν}\omega=0$, $4\,\text{ημ}\omega=2\left(1-\text{ημ}^2\frac{\omega}{2}\right)$ ἤτοι $4\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}\text{συν}\frac{\omega}{2}=\text{συν}^2\frac{\omega}{2}$. Ὅθεν $\text{συν}\frac{\omega}{2}=0$ (λύσις μὴ δεκτὴ) ἢ $4\,\text{ημ}\frac{\omega}{2}=\text{συν}\frac{\omega}{2}$, ἤτοι $\text{εφ}\frac{\omega}{2}=\frac{1}{4}$, ἐξ ἧς προσδιορίζομεν τὴν ω.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1266. (ημθ—ημφ) : (θ—φ), ὅταν θ=φ. Εἶναι $\text{ὅρ}\left[\text{ημ}\frac{\vartheta-\varphi}{2}:\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right]\cdot\text{ὅρ}\,\text{συν}\frac{\vartheta+\varphi}{2}=\text{συν}\frac{2\varphi}{2}=\text{συν}\varphi$.

1267. εφθ : εφ3θ, ὅταν θ=π : 2. Θέτοντες $\vartheta=\varphi+\frac{\pi}{2}$, θὰ ἔχωμεν $\text{ὅρ}\frac{\text{εφ}3\varphi}{\text{εφ}\varphi}$, ὅταν φ=0. Τοῦτο δὲ ἰσοῦται μὲ $\text{ὅρ}\frac{3-\text{εφ}^2\varphi}{1-3\,\text{εφ}^2\varphi}=3$.

1268. $\dfrac{2}{\eta\mu^2\varphi} - \dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}$, ὅταν $\varphi=0$. Εἶναι ὅρ$\dfrac{1}{2\eta\mu^2\dfrac{\varphi}{2}} \cdot \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\varphi}{2}} =$

$= $ὅρ$\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\varphi}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

1269. $\sigma\upsilon\nu 2\varphi : \left(\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}\right)$, ὅταν $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Εἶναι ὅρ$\dfrac{2(2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-1)}{2\sigma\upsilon\nu\varphi - \sqrt{2}} =$

$= $ὅρ$\dfrac{(2\sigma\varphi\varphi + \sqrt{2})(2\sigma\upsilon\nu\varphi - \sqrt{2})}{2\sigma\upsilon\nu\varphi - \sqrt{2}} = $ὅρ$(2\sigma\upsilon\nu\varphi + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

1270. $\dfrac{\varepsilon\varphi\vartheta + \tau\varepsilon\mu\vartheta - 1}{\varepsilon\varphi\vartheta - \tau\varepsilon\mu\vartheta + 1}$, ὅταν $\vartheta=0$. Εἶναι ὅρ$\dfrac{\eta\mu\vartheta + (1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)}{\eta\mu\vartheta - (1-\sigma\upsilon\nu\vartheta)} = $ὅρ$\left[\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\vartheta}{2} -\right.\right.$

$\left.\left. - \eta\mu\dfrac{\vartheta}{2}\right) : \left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\vartheta}{2} + \eta\mu\dfrac{\vartheta}{2}\right)\right] = 1$.

ΤΕΛΟΣ

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

Προοριζόμενα διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν ἀνωτέρων γυμνασιακῶν τάξεων, καὶ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

1) ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Περὶ τοῦ βιβλίου τούτου ὑποβληθέντος πρὸς κρίσιν εἰς τὸ Ὑπουργεῖον Παιδείας, ὁ ἁρμόδιος εἰσηγητής, Ἐκπαιδευτικὸς Σύμβουλος, γράφει μεταξὺ ἄλλων τὰ ἑξῆς:

«Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου τούτου διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Εἰς τὸ α' μέρος, ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθῶν τὴν βασικὴν ἀρχὴν τῆς ἐν χρήσει «Τριγωνομετρίας» τοῦ Ο.Ε.Σ.Β. διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τμημάτων κλασσικῆς κατευθύνσεως, ἀσχολεῖται μὲ τὴν Τριγωνομετρίαν τῆς ὀξείας γωνίας. Ἡ διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης γίνεται κατὰ τρόπον ἐπαγωγὸν καὶ μεθοδικὸν καὶ μὲ αὐστηράν, ἐπιστημονικὴν ἀκριβολογίαν. Δι' ὃ τὸ μέρος τοῦτο **ἔχει μόνον πλεονεκτήματα καὶ ἐγγίζει τὰ ὅρια τῆς ἀρτιότητος.**

Εἰς τὸ β' μέρος ὁ συγγραφεὺς διαπραγματεύεται τὴν ὕλην τῆς Γωνιομετρίας καὶ τῆς κυρίως Τριγωνομετρίας. Ὅπως δὲ εἰς τὸ α', οὕτω καὶ εἰς τὸ β' μέρος παρατηρεῖται ἡ αὐτὴ ἐπιστημονικὴ ἀκριβολογία καὶ ἡ αὐτὴ μεθοδικὴ καὶ ἐπαγωγὸς διαπραγμάτευσις τῆς ὕλης. **Χαρακτηριστικὸν δὲ πλεονέκτημα τοῦ βιβλίου τούτου εἶναι ἡ παράθεσις πολλῶν ἐφαρμογῶν καὶ ἀσκήσεων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου κεφαλαίου. Αἱ ἀσκήσεις αὗται ἔχουν ἐπιμελῶς ἐκλεγεῖ.** Ἡ παρεμβολὴ δὲ ἀσκήσεων δοθεισῶν κατὰ καιροὺς εἰς τοὺς διὰ τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς διαγωνισμοὺς εἶναι ὑποβοηθητικὴ διὰ τὴν παρασκευὴν τῶν μαθητῶν.

Κατὰ ταῦτα, τὸ βιβλίον τοῦτο παρουσιάζει μόνον πλεονεκτήματα καὶ ἀποτελεῖ ὡς ἐκ τούτου **«πολύτιμον βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν τμημάτων Πρακτικῆς Κατευθύνσεως καὶ διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν».**

Κατόπιν τῆς εἰσηγήσεως ταύτης γενομένης ἀποδεκτῆς ὑπὸ τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Συμβουλίου, τὸ Ὑπουργεῖον Παιδείας, δι' ἐγκυκλίου του **συνιστᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς «Μεγάλης Ἐπιπέδου Τριγωνομετρίας» τοῦ κ. Χρ. Μπαρμπαστάθη, ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῶν τμημάτων τῆς πρακτικῆς κατευθύνσεως τῶν Σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, ὡς βιβλίον χρησιμώτατον δι' αὐτούς.**

2) ΜΕΓΑΛΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. **Μέρος πρῶτον:** Ἐπιπεδομετρία. **Μέρος δεύτερον:** Στερεομετρία. Περιέχουν πλήρη τὴν ὕλην τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος συμπληρουμένην διὰ νεωτέρας ὕλης ἀπαραιτήτου καὶ 1961 ἐκλεκτὰς ἀσκήσεις.

3) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ μὲ τὰς ἀποδείξεις καὶ λύσεις αὐτῶν. **Τεύχη τρία.** Περιέχουν τὰς 1961 ἀσκήσεις τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου μέρους τῆς ὡς ἄνω Μεγάλης Θ. Γεωμετρίας.

4) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Ἢ ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ. Περιέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολάς.

5) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

6) ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ (νέα ἔκδοσις) τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Ἐκτὸς τούτων περιέχει καὶ 29 ἄλλους χρησίμους πίνακας καὶ μέγαν ἀριθμὸν τύπων ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας (ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς), Μηχανικῆς, Φυσικῆς καὶ Κοσμογραφίας. Ἀκόμη δὲ περιέχει παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

7) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ. ΧΡ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ - Α. ΣΤΑΥΡΑΚΑ. Πρὸς χρῆσιν τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς σχολάς, Γεωπονικήν, Ἀνωτάτην Ἐμπορικήν, Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, Ἐμποροπλοιάρχων, διὰ τὰς Τραπέζας, τὸ Ι.Κ.Α. κ.λ.π.

8) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ. ΧΡ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ - Α. ΣΤΑΥΡΑΚΑ.