ΑΡ. Α. ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στεφανίδης (Αρ. Α.)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ (ΤΥΠΟΥ Α' & Β') ΤΟΥ 1966

99

ΠΟΛΥΓΡΑΦΗΣΕΙΣ
ΝΙΚ. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 6 (ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΣΤΟΑΣ
ΑΘΗΝΑΙ ΤΗΛ. 533.885 -534.933

ΑΡ. Α. ΣΤΕΦΑΝΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΟΥ
(ΤΥΠΟΥ Α' & Β')
ΤΟΥ 1966

ΠΟΛΥΓΡΑΦΗΣΕΙΣ
ΝΙΚ. ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΥ
ΑΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 6 (ΕΝΤΟΣ ΤΗΣ ΣΤΟΑΣ
ΑΘΗΝΑΙ ΤΗΛ. 533.885 - 534.933

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Ἀκαδημαϊκόν Ἀπολυτήριον τύπου Β΄ (Παρασκευή, 2 Σ/βρίου 1966, ὧραι 8–11.30 π.μ.).

Θέμα 1. (Ἐκ τῆς θεωρίας).

Διερευνήσατε σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους, ὅταν τόσον οἱ συντελεσταί τῶν ἀγνώστων, ὅσον καί οἱ γνωστοί ὅροι εἶναι τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἀπάντησις. Ἄν ὀνομάσωμεν α, α' καί β, β' τούς συντελεστάς τῶν ἀγνώστων χ καί ψ ἀντιστοίχως, τούς δέ γνωστούς ὅρους τῶν δευτέρων μελῶν γ καί γ' ἀντιστοίχως, ἡ γενική μορφή τοῦ συστήματος θά εἶναι:

$$
(1) \quad \begin{aligned} \alpha\chi + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha'\chi + \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}
$$

Ὡς πρός τάς τιμάς τῶν συντελεστῶν $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ εἶναι δυνατόν νά γίνουν δύο μόνον ὑποθέσεις: ἤ ὅτι εἶναι ἅπαντες διάφοροι τοῦ μηδενός ἤ ὅτι δέν εἶναι (ἅπαντες) διάφοροι τοῦ μηδενός.

Περίπτωσις 1: $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$ (Ἅπαντες οἱ συντελεσταί τῶν ἀγνώστων εἶναι $\neq 0$)

Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά μέλη τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἐπί β' καί τῆς δευτέρας ἐπί $-\beta$, προσθέσωμεν δέ τά ἐξαγόμενα κατά μέλη, εὑρίσκομεν:

$$
(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\chi = \beta'\gamma - \beta\gamma' \qquad (2)
$$

Ἀναλόγως, εὑρίσκομεν:

$$
(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \qquad (3)
$$

A_1) Ἔστω $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ (4) (τό ὁποῖον συνεπάγεται $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$).(5)

<u>Τότε δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν τά μέλη τῶν (2) καί (3) διά τοῦ $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ καί εὑρίσκομεν:</u>

$$\chi = \frac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad \text{καί} \quad \phi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \qquad (5)$$

Αἱ τιμαί εἶναι ἐντελῶς ὡρισμέναι. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, τό σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν.

A_2) Ἔστω $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ (6)

Τοῦτο συνεπάγεται:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \qquad (7)$$

<u>Τότε, μία τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1) δύναται νά μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλην ἰσοδύναμόν της, ἔχουσαν ὡς πρῶτον μέλος, τό αὐτό μέ τό πρῶτον μέλος τῆς ἄλλης,</u> ὁπότε δέν μένει παρά νά ἐξετάσωμεν καί τά δεύτερα μέλη αὐτῶν.

Ἄν πολλαπλασιάσωμεν τά μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τοῦ (1) ἐπί β, εὑρίσκομεν:

$$\alpha'\beta\chi + \beta\beta'\phi = \beta\gamma'$$

Ἀντικαθιστῶμεν τό $\alpha'\beta$ μέ τό ἴσον του $\alpha\beta'$ καί ἔχομεν:

$$\alpha\beta'\chi + \beta\beta'\phi = \beta\gamma'$$

ἤ

$$\alpha\chi + \beta\phi = \frac{\beta\gamma'}{\beta'} \qquad (8)$$

Ὑπό τάς συνθήκας ταύτας, τό σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τό κατωτέρω:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\chi + \beta\phi &= \gamma \\ \alpha\chi + \beta\phi &= \frac{\beta\gamma'}{\beta'} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ὁπότε, ἄν μέν εἶναι

$$\gamma \neq \frac{\beta\gamma'}{\beta'} \qquad (10)$$

(δηλαδή $\frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$, ἤτοι, λόγω τῆς (7) $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$) τότε τό σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἄν δέ εἶναι $\gamma = \frac{\beta\gamma'}{\beta'}$ (11)

(δηλαδή $\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ ἤτοι, λόγω τῆς (7), $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$)

τότε τό σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν μέ δύο ἀγνώστους, τήν ὁποίαν ἱκανοποιοῦν ἄπειρα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἄρα εἶναι <u>ἀόριστον</u>.

<u>Συμπέρασμα πρώτης περιπτώσεως.-</u>

<u>Ὑπό τάς συνθήκας $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$</u>,

ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'}$, τό σύστημα εἶναι <u>ὡρισμένον</u> (<u>ἔχει μοναδικήν λύσιν</u>)

ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$, τό σύστημα εἶναι <u>ἀδύνατον</u>

ἄν εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$, τό σύστημα εἶναι <u>ἀόριστον</u>.

<u>Περίπτωσις Β' Μερικοί ἤ ἅπαντες οἱ συντελεσταί $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ εἶναι μηδέν.</u>

Διακρίνομεν 6 ὑποπεριπτώσεις, τάς ἑξῆς:

B_1) Ἄν $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τό σύστημα γίνεται:

$$0.\chi + 0.\psi = \gamma$$
$$0.\chi + 0.\psi = \gamma'$$

Ὁπότε, ἄν εἶναι $\gamma = \gamma' = 0$, τότε ἀληθεύει διά πᾶν χ καί ψ (<u>ἀόριστον</u>), ἄν δέ γ ἤ $\gamma' \neq 0$, εἶναι <u>ἀδύνατον</u>.

B_2) Ἄν $\alpha = \alpha' = \beta = 0$ καί $\beta' \neq 0$, τότε τό σύστημα γίνεται

$$0.\chi + 0.\psi = \gamma$$
$$0.\chi + \beta'\psi = \gamma'$$

$\psi = \frac{\gamma'}{\beta'}$, χ = πᾶς ἀριθμός, ἐφ' ὅσον $\gamma = 0$ (<u>ἀόριστον</u>) καί

$\psi = \frac{\gamma'}{\beta'}$, χ = οὐδείς ἀριθμός, ἐφ' ὅσον $\gamma \neq 0$ (ἀδύνατον)

B_3) Ἄν $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$, τό σύστημα γίνεται

$$0.\chi + 0.\psi = \gamma$$
$$\alpha'\chi + \beta'\psi = \gamma'$$

Ἐφ' ὅσον $\gamma = 0$, τό σύστημα ἀνάγεται εἰς τήν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἀληθεύει δι' ἄπειρον πλῆθος ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ἀόριστον). Ἄν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τότε τό σύστημα εἶναι <u>ἀδύνατον</u>.

B_4) Ἄν $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta \neq 0$, $\beta' \neq 0$ τό σύστημα γίνεται

$$0.\chi + \beta\phi = \gamma$$
$$0.\chi + \beta'\phi = \gamma'$$

$$\phi = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{καί} \quad \phi = \frac{\gamma'}{\beta'}$$

Ἄν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, τότε τό σύστημα ἔχει μίαν ὡρισμένην τιμήν μόνον διά τό ϕ, τό δέ χ = πᾶς ἀριθμός (<u>ἀόριστον</u>)

Ἄν ὅμως εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} \neq \frac{\gamma'}{\beta'}$, τό σύστημα εἶναι <u>ἀδύνατον</u>.

B_5) Ἄν $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' \neq 0$, τό σύστημα γράφεται:

$$\alpha.\chi + 0.\phi = \gamma$$
$$0.\chi + \beta'.\phi = \gamma'$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \phi = \frac{\gamma'}{\beta'}.$$ Ἄρα, τό σύστημα εἶναι <u>ὡρισμένον</u> (ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν).

B_6) Ἄν $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$, τό σύστημα γράφεται:

$$\alpha\chi + 0.\phi = \gamma$$
$$\alpha'\chi + \beta'\phi = \gamma'$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad \alpha'.\frac{\gamma}{\alpha} + \beta'\phi = \gamma' \qquad \alpha'\gamma + \alpha\beta'\phi = \alpha\gamma'$$

$$\phi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta'}$$ (<u>σύστημα ὡρισμένον</u>).

Πίναξ ἀποτελεσμάτων δευτέρας περιπτώσεως

Ὑποπερίπτωσις	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
Πόσοι συντελεσταί ἀγνώστων εἶναι $\neq 0$	Οὐδείς	Ἕνας	Δύο ὁριζοντίως	Δύο κατακορύφως	Δύο διαγωνίως	Τρεῖς
Πῶς εἶναι τό σύστημα	Ἀόριστον διά $\gamma=\gamma'=0$ Ἀδύνατον διά $\gamma\neq 0$ ἤ $\gamma'\neq 0$	Ἀόρ. $\gamma=0$ Ἀδύν. $\gamma\neq 0$	$\gamma' = 0$ ἀόρ. $\gamma = 0$ ἀδύν.	$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$ ἀόρ. $\frac{\gamma}{\beta} \neq \frac{\gamma'}{\beta'}$ ἀδύν.	Ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν	Ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν.

Παρατήρησις ἐπί του θέματος 1

Διά νά ὁλοκληρωθῆ τό θέμα τῆς διερευνήσεως τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μέ δύο ἀγνώστους, πρέπει τοῦτο νά μελετηθῆ καί ἀντιστρόφως. Θά περιορισθῶμεν εἰς τήν περίπτωσιν $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$

1) Ἔστω ὅτι τό σύστημα $\alpha\chi + \beta\chi = \gamma$, $\alpha'\chi + \beta'\psi = \gamma'$ (1) εἶναι ἀδύνατον. Τοῦτο συνεπάγεται, ὅτι ἄν ἐκ τῆς πρώτης π.χ. συναγάγωμεν τό ψ:

$$\psi = \frac{\gamma-\alpha\chi}{\beta} \qquad (2)$$

καί ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν δευτέραν, θά προκύψη ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστον ἀναγκαστικῶς ἀδύνατος, ἤτοι

$$\alpha'\chi + \beta' \cdot \frac{\gamma-\alpha\chi}{\beta} = \gamma'$$

$$(\alpha'\beta - \alpha\beta')\chi = \beta\gamma' - \beta'\gamma \quad (3)$$

Αὕτη δέ θά εἶναι ἀδύνατος, ἄν ἔχωμεν:

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0 \text{ καί } \beta\gamma' - \beta'\gamma \neq 0$$

τά ὁποῖα γράφονται:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad (4)$$

II) Ἄν τό σύστημα (1) εἶναι ἀόριστον, ἀναγκαστικῶς καί ἡ (3) θά εἶναι ὁμοίως ἀόριστος, πρᾶγμα τό ὁποῖον συνεπάγεται:

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$$

$$\beta\gamma' - \beta\gamma' = 0$$

τά ὁποῖα γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \quad (5)$$

III) Ἄν τό σύστημα δέν εἶναι οὔτε ἀδύνατον, οὔτε ἀόριστον, κατ'ἀνάγκην θά ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν (σύστημα ὡρισμένον). Διά νά ἀποκλείσωμεν τάς δύο πρώτας περιπτώσεις, πρέπει νά μήν ἀληθεύη ἡ ἰσότης τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\alpha'}$ καί $\frac{\beta}{\beta'}$, πρᾶγμα τό ὁποῖον εἶναι τό κοινόν γνώρισμα τῶν περιπτώσεων αὐτῶν.

Ἄρα εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'} \qquad (6)$$

Ἐδείχθη, λοιπόν, ὅτι αἱ συνθῆκαι (4),(5),(6) εἶναι ἀναγκαῖαι καί ἐπαρκεῖς, διά τήν περίπτωσιν $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$.

Θέμα 2

Ὁ ἐμπρόσθιος τροχός ποδηλάτου, διανύσαντος τροχιάν 1732,5 μ., ἔκαμε 165 περιστροφάς περισσοτέρας ἀπό τάς τοῦ ὀπισθίου. Ἐάν ἑκάστη τῶν περιφερειῶν τῶν δύο τροχῶν ηὐξάνετο κατά 3/4 τοῦ μέτρου, τότε διά τήν αὐτήν ἀπόστασιν ὁ ἐμπρόσθιος τροχός θά ἔκαμε 112 περισσοτέρας περιστροφάς ἀπό ἐκείνας τοῦ ὀπισθίου. Ποῖον εἶναι τό μῆκος τῶν περιφερειῶν τῶν δύο τροχῶν;

Λύσις

Ἄν χ καί φ μέτρα εἶναι τά μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν δύο τροχῶν, τοῦ ἐμπροσθίου καί τοῦ ὀπισθίου ἀντιστοίχως, καί ω + 165 καί ω οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοί τῶν στροφῶν θά ἔχωμεν:

$$\chi(\omega+165) = 1732,5 \ \mu.$$
$$\varphi\omega = 1732,5 \ \mu.$$

Ἄρα:

$$\omega + 165 = \frac{1732,5}{\chi} \quad \text{καί} \quad \omega = \frac{1732,5}{\varphi}$$

(Ἄρα $\chi < \varphi$ - Οἱ δύο τροχοί ἔχουν διαφορετικόν μέγεθος. Εἶναι δέ προφανῶς $\chi, \varphi > 0$).

Θά εἶναι, λοιπόν $(\omega + 165) - \omega = 165$ ἤτοι:

$$\frac{1732,5}{\chi} - \frac{1732,5}{\varphi} = 165 \qquad (1)$$

Ἀναλόγως, εὑρίσκομεν:

$$\frac{1732,5}{\chi + \frac{3}{4}} - \frac{1732,5}{\varphi + \frac{3}{4}} = \frac{112}{1}$$

Διά νά προκύψουν ἁπλούστεροι συντελεσταί, πολ/ζομεν τά μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων ἐπί 10, τούς δέ παρανομαστάς τῶν δύο μελῶν τῆς δευτέρας ἐπί 4 καί ἔχομεν:

$$\frac{17325}{\chi} - \frac{17325}{\phi} = 1650 \qquad (2)$$

$$\frac{17325}{4\chi+3} - \frac{17325}{4\phi+3} = 280$$

Διά τόν αὐτόν λόγον ἀναλύομεν τούς συντελεστάς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων. Εὑρίσκομεν: $17325 = 3^2.5^2.7.11$, $1650 = 2.3.5^2.11$, $28 = 2^2.7$. Διαιροῦμε τά δύο μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως μέ τό γινόμενον $3.5^2.11$ (δηλ. μέ τόν ΜΚΔ τῶν ἀριθμητῶν της) καί ἔχομεν:

$$\frac{21}{\chi} - \frac{21}{\phi} = 2 \quad (3) \quad \text{ἤ} \quad \chi\phi = 10,5(\phi-\chi)$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι:

$$\frac{1732,5}{\chi+\frac{3}{4}} - \frac{1732,5}{\phi+\frac{3}{4}} = 112 \Longrightarrow \frac{17325}{4\chi+3} - \frac{17325}{4\phi+3} = \frac{1120}{4} = 280$$

<u>Απλ. μέ τό 7</u>

$$\frac{2475}{4\chi+3} - \frac{2475}{4\phi+3} = 40 \Longrightarrow 2475(4\phi+\cancel{3}-4\chi-\cancel{3}) = 40\ (4\chi+3)(4\chi+3)$$

$$2475.\cancel{4}(\phi-\chi) = \underset{10}{\cancel{4}0}\ (4\chi+3)(4\phi+3) \Longrightarrow 2475(\phi-\chi) = 160\chi\phi + 120\chi + 120\phi + 90$$

$$160\chi\phi = 2475\phi - 2475\chi - 120\chi - 120\phi - 90$$

$$160\chi\phi = 2355\phi - 2595\chi - 90 \qquad \chi\phi = \frac{2355\phi - 2595\chi - 90}{160}$$

$$\chi\phi = 10,5\ (\phi-\chi)$$

$$\Longrightarrow \frac{2355\phi - 2595\chi - 90}{160} = 10,5\ (\phi-\chi)$$

$$\Longrightarrow 1680\phi - 1680\chi = 2355\phi - 2595\chi - 90$$

$$\Longrightarrow 2355\phi - 1680\phi + 1680\chi - 2595\chi = 90$$

$$675\phi - 915\chi = 90$$

Ἀπλ. μέ τό 15:

$$45\phi - 61\chi = 6 \qquad (5)$$

Τό σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} 21\phi - 21\chi = 2\chi\phi \\ 45\phi - 61\chi = 6 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Λύομεν τήν δευτέραν ὡς πρός τό φ:

$$\phi = \frac{6+61\chi}{45}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν πρώτην:

$$21\,\frac{6+61\chi}{45} - 21\phi = 2\chi\,\frac{6+61\chi}{45}$$

Ἀπαλ. παρανομαστῶν:

$$21(6+61\chi) - 945\chi = 2\chi(6+61\chi)$$

$$126 + 1281\chi - 945\chi = 12\chi + 122\chi^2$$

$$122\chi^2 + 12\chi + 945\chi - 1281\chi - 126 = 0$$

$$122\chi^2 - 324\chi - 126 = 0$$

Ἀπλ. μέ τό 2

$$61\chi^2 - 162\chi - 63 = 0$$

$$\chi = \frac{81 \pm \sqrt{6561+3843}}{61} = \frac{81 \pm 102}{61}$$

$$\chi_1 = \frac{183}{61} = 3$$

$$\chi_2 = -\frac{21}{61} \quad (\text{ἀπαράδεκτον διότι πρέπει } \chi > 0$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν:

$$45\phi - 183 = 6$$

$$45\phi = 189$$

$$\phi = \frac{189}{45} = \frac{21}{5} = \frac{42}{10} = 4,2$$

Ὥστε:

$$\boxed{\begin{array}{l} \chi = 3 \\ \phi = 4,2 \end{array}}$$

Θέμα 3

Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\chi^3 - 1}{\chi^2} + \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} < 0$$

Λ ύ σ ι ς

Ὑποτίθεται $\chi \neq 0$. Ἀπαλείφομεν τούς παρανομαστάς:

$$2\chi^3 + 3\sqrt[3]{2}\,\chi^2 - 2 < 0 \quad (1)$$

Ἀναλύομεν εἰς ἄθροισμα τόν μεσαῖον ὅρον:

$$2\chi^3 + 2\sqrt[3]{2}\chi^2 + \sqrt[3]{2}\chi^2 - 2 < 0$$

Θέτομεν: $2 = \sqrt[3]{2}^3$ καί συναθροίζομεν καθ' ὁμάδας:

$$(2\chi^3 + 2\sqrt[3]{2}\chi^2) + \sqrt[3]{2}\chi^2 - (\sqrt[3]{2})^3 < 0$$

Ἐξάγομεν κοινούς παράγοντας καθ' ὁμάδας:

$$2\chi^2(\chi + \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2}\left[\chi^2 - (\sqrt[3]{2})^2\right] < 0$$

Ἀναλύομεν εἰς γινόμενον τήν διαφοράν τετραγώνων:

$$2\chi^2(\chi + \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2}(\chi + \sqrt[3]{2})(\chi - \sqrt[3]{2}) < 0$$

Ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα:

$$(\chi + \sqrt[3]{2})\left[2\chi^2 + \sqrt[3]{2}(\chi - \sqrt[3]{2})\right] < 0$$

ἤ

$$(\chi + \sqrt[3]{2})(2\chi^2 + \sqrt[3]{2}\chi - \sqrt[3]{4}) < 0$$

Ἀναλύομεν τό τριώνυμον εἰς γινόμενον. Λαμβάνομεν:

$$(\chi + \sqrt[3]{2}).2(\chi + \sqrt[3]{2}).(\chi - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}) < 0$$

ἤ

$$(\chi + \sqrt[3]{2})^2(2\chi - \sqrt[3]{2}) < 0$$

Δεχόμεθα ὅτι: $\chi \neq -\sqrt[3]{2}$ καί ἐπειδή εἶναι $(\chi + \sqrt[3]{2})^2 > 0$ διά πᾶσαν πραγματικήν τιμήν τοῦ χ προκύπτει:

$$2\chi - \sqrt[3]{2} < 0 \quad \text{ἤ} \quad \chi < \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ἀκαδημαϊκόν Ἀπολυτήριον τύπου Β΄(Τετάρτη 7.9.66

ὧραι 8 - 11

Ζήτημα 1ον (Θεωρία)

Διατυπώσατε τόν ὁρισμόν τῆς ἐννοίας τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καί ἀναφέρατε παραδείγματα γ τόπων.

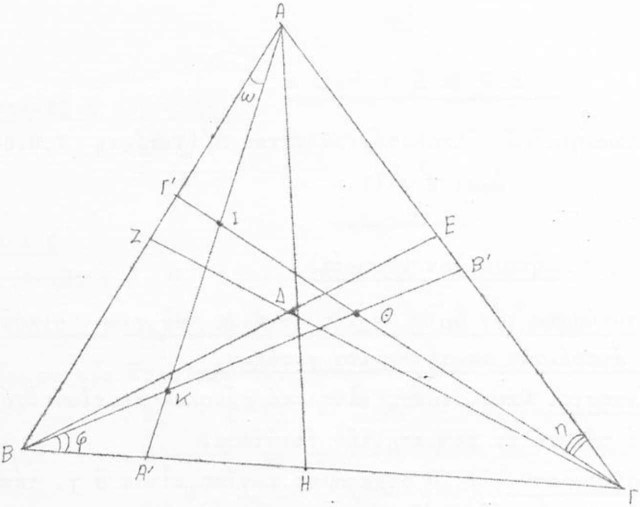
Ἀπάντησις. Γεωμ. τόπος εἶναι τό σύνολον σημείων ἐχόντων μίαν καί τήν αὐτήν γεωμετρικήν ἰδιότητα.

Παραδείγματα. 1) Ἡ διχοτόμος γωνίας εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τάς πλευράς αὐτῆς. 2) Ἡ μεσοκάθετος εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων αὐτοῦ κ.λ.π. (ἴδε τά διδακτικά βιβλία).

Ζήτημα 2ον

Δίδονται τρία διάφορα ἀλλήλων καί μή κείμενα ἐπ' εὐθείας σημεῖα Α,Β,Γ. Θεωροῦμεν τό τρίγωνον ΑΒΓ καί παριστῶμεν τά μέτρα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ διά $\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τώρα ἐπί τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τοιαῦτα ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄ νά σχηματίζῃ μετά τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἐσωτερικήν γωνίαν ἴσην πρός $\frac{A}{4}$, ἡ εὐθεῖα ΒΒ΄ νά σχηματίζῃ μετά τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἐσωτερικήν γωνίαν ἴσην πρός $\frac{3B}{7}$ καί ἡ ΓΓ΄ νά σχηματίζῃ μετά τῆς πλευρᾶς ΓΑ ἐσωτερικήν γωνίαν ἴσην πρός $\frac{5\Gamma}{11}$. Ζητεῖται νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ δέν διέρχονται διά κοινοῦ σημείου.

Λύσις. Φέρομεν τάς διχοτόμους ΑΗ, ΒΕ, ΓΖ τοῦ τριγώ-



νου ΑΒΓ καί ἔστω Δ τό σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν.

Ἐπειδή $\hat{\varphi} = \frac{3\hat{B}}{7} < \frac{3,5}{7}\hat{B}$ ἤ $\hat{\varphi} < \frac{1}{2}.\hat{B}$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ΒΒ΄κεῖται κάτωθι τῆς διχοτόμου ΒΕ.

Ἀναλόγως συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ΑΑ΄κεῖται <u>ἀριστερά</u> τῆς διχοτόμου ΑΗ, ἡ δέ ΓΓ΄ἄνωθι τῆς διχοτόμου ΓΖ.

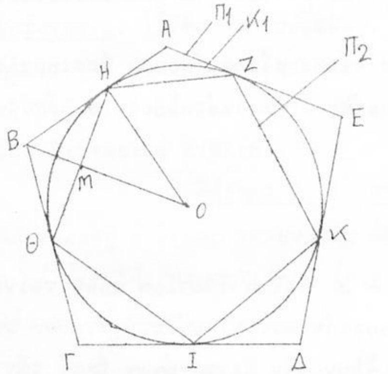
Κατά συνέπειαν, ἡ τομή Κ τῶν ΑΑ΄καί ΒΒ΄κεῖται ἐντός τοῦ τριγώνου ΒΔΗ, ἡ τομή Θ τῶν ΒΒ΄καί ΓΓ΄ἐντός τοῦ τριγώνου ΔΕΓ καί ἡ τομή Ι τῶν ΑΑ΄καί ΓΓ΄ἐντός τοῦ τριγώνου ΑΔΖ. Ἄρα τά σημεῖα Κ,Ι,Θ, εἶναι κορυφαί ἑνός τριγώνου ΚΙΘ, τό ὁποῖον πάντοτε ὑφίσταται, μέ τάς δοθείσας συνθήκας τοῦ προβλήματος, οἷον δήποτε καί ἄν εἶναι τό τρίγωνον ΑΒΓ.

<u>Ζήτημα 3ον</u>

Θεωροῦμεν ἀκολουθίαν κανονικῶν πενταγώνων Π_1, Π_2, Π_3...... καί ἀκολουθίαν κύκλων $K_1, K_2 K_3$... ὁριζομένων ὡς ἑξῆς: Τό Π_1 εἶναι αὐθαιρέτως ληφθέν κανονικόν πεντάγωνον, καί διά τόν τυχόντα φυσικόν $\nu \geqslant 1$ ὁ κύκλος K_ν εἶναι ἐγγεγραμμένος στό Π_ν, ἐνῶ τό $\Pi_{\nu+1}$ ἔχει ὡς κορυφάς τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ K_ν καί τοῦ Π_ν.

Ζητεῖται: 1ον) Νά εὑρεθῆ σημεῖον τό ὁποῖον νά περιέχεται εἰς ὅλα τά Π_ν καί 2ον) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι δέν ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνός σημεῖα περιεχόμενα εἰς ὅλα τά Π_ν..

<u>Ὁδηγίαι.</u> Ἀκολουθία μαθηματικῶν ἀντικειμένων καλεῖται διαδοχή τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν κατά τήν τάξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1,2,3... (ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπό τοῦ β΄ καί ἑξῆς γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του κατά τινα ὡρισμένον τρόπον).



<u>Λ ύ σ ι ς.</u>

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΒΗΟ καί ΗΜΟ, ἔχομεν (εἶναι δέ ταῦτα ὅμοια διότι εἶναι ὀρθογώνια καί ἔχουν τήν γωνίαν $\widehat{O}$ κοινήν):

$$\frac{(BH)}{(HM)}=\frac{(OH)}{(OM)} \Longrightarrow \frac{Z(BH)}{Z(HM)}=\frac{(OH)}{(OM)} \quad 1$$

Ἄν δέ λ_1, α_1 καί λ_2, α_2 εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν καί τῶν ἀποστημάτων τῶν δύο πρώτων πενταγώνων Π_1 καί Π_2, ἡ(1) γράφεται:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad (2)$$

Ὁμοίως θά εἶναι

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \qquad (3)$$

Ἔστω θ ἡ κοινή τιμή τῶν λόγων αὐτῶν, ὅπου προφανῶς $\theta > 1$

Προκύπτει $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\theta}$, $\lambda_3 = \frac{\lambda_2}{\theta} = \frac{\lambda_1}{\theta^2}$, $\lambda_4 = \frac{\lambda_1}{\theta^3}$, $\lambda^5 = \frac{\lambda_1}{\theta^4}$ ....

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\theta} , \alpha_3 = \frac{\alpha_2}{\theta} = \frac{\alpha_1}{\theta^2} , \alpha_4 = \frac{\alpha_1}{\theta^3} \ \ldots\ldots\ldots$$

Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν τῶν πενταγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots\ldots \Pi_\nu \ldots\ldots$

$$\frac{5\lambda_1\alpha_1}{2}, \frac{5\lambda_2\alpha_2}{2}, \frac{5\lambda_3\alpha_3}{2} \ldots\ldots \frac{5\lambda_\nu\alpha_\nu}{2} \ldots\ldots$$

ἤ, ἄν ἀντικαταστήσωμεν τά λ καί τά α μέ τάς ἀνωτέρω τιμάς:

$$\frac{5\lambda_1\alpha_1}{2}, \frac{5\lambda_1\alpha_1}{2\Theta^2}, \frac{5\lambda_1\alpha_1}{2\Theta^4}, \frac{5\lambda_1\alpha_1}{2\Theta^6} \ldots\ldots \frac{5\lambda_1\alpha_1}{2\Theta^{2\nu}} \ldots\ldots$$

Ἡ ἀπέραντος αὐτη ἀκολουθία εἶναι μία φθίνουσα ἀπειροπληθής γεωμετρική πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ γενικός ὅρος (ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{\Theta^2} < 1$) εἶναι:

$$5\,\frac{\lambda_1\alpha_1}{2\Theta^{2\nu}}$$

Ὅταν $\nu \longrightarrow \infty$, ἔχομεν $\Theta^{2\nu} \longrightarrow \infty$ καί ὁ ἀνωτέρω ὅρος τείνει πρός τό μηδέν. Ἤτοι τό ἀπειροστόν κανονικοῦ πενταγώνου συμπίπτει μέ τό κοινόν κέντρον 0 ὅλων τῶν πενταγώνων (καί τῶν κύκλων) τῆς ἀκολουθίας.

Τοῦτο λοιπόν θά εἶναι τό ζητούμενον κοινόν σημεῖον, τό ὁποῖον θά εἶναι καί τό μοναδικόν, διότι ἄν ὑπῆρχε καί δεύτερον σημεῖον 0΄ κοινόν ὅλων τῶν πενταγώνων Π_ν, ὅταν $\nu \longrightarrow \infty$, τοῦτο θά ἦτο ἐσωτερικόν τοῦ Π_∞, καί ἐφ᾽ὅσον τοῦτο ἀνάγεται εἰς τό 0, θά συνέπιπτε μέ τό 0.

Ἀκαδημαϊκόν Ἀπολυτήριον τύπου Α΄

8 Σ/βρίου 1966

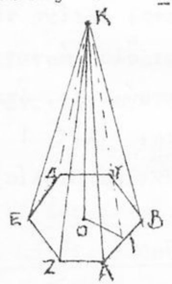
Ζήτημα 1_A (Θεωρία Γεωμετρίας)

Ποῖοι γεωμετρικοί τύποι συνδέουν τά στοιχεῖα παντός ὀρθογωνίου τριγώνου; Διατυπώσατε αὐτούς χωρίς ἀπόδειξι.

Ἀπάντησις. 1) Τό Πυθαγόρειον, 2) Τά πορίσματά του, 3) Τά θεωρήματα τοῦ μέσου ἀναλόγου καί 4) $\beta+\gamma = \alpha+2\rho$, ὅπου α=ὑποτείνουσα, β,γ = αἱ δύο κάθετοι καί ρ = ἡ ἀκτίς ἐγγεγρ. περιφερείας (ἴδε διδακτικά βιβλία).

Ζήτημα 1_B ("Ασκησις Γεωμετρίας)

Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας τό ἐμβαδόν παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι Ε, ἡ δέ πλευρά τῆς βάσεως εἶναι α.



Λύσις. Ἐξ ὑποθέσεως, ἔχομεν:

$$E_{(\Pi\Lambda P)} = \frac{(KI).(AB)}{2}.6 = E \quad \text{ἤ} \quad (KI).3\alpha = E$$

$$(KI) = \frac{E}{3\alpha} \quad (1),$$ ὅπου KI=τό ἀπόστημα τῆς πυραμίδος.

Ἄν KO = ὕψος τῆς πυραμίδος, ἔχομεν εἰς τό ὀρθογ. τρίγ. KOI:

$(KO)^2 = (KI)^2 - (OI)^2$ ἤ $(KO) = \sqrt{\frac{E^2}{9\alpha^2} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ διότι (OI)=ἀπόθεμα βάσεως $= \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ἄρα } (KO) = \sqrt{\frac{E^2}{9\alpha^2} - \frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\sqrt{4E^2 - 27\alpha^4}}{6\alpha} \qquad (2)$$

Ὁ ζητούμενος ὄγκος V θά εἶναι:

Στεφανίδης. Θέματα Ακαδ. Απολυτ. 1966.

$$V = (\text{ἐμβαδόν βάσεως}) . \frac{KO}{3} = \frac{6\alpha . \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{2} . \frac{(KO)}{3} \quad \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{4E^2-27\alpha^4}}{6\alpha}$$

ἤ $$V = \frac{\alpha\sqrt{3} . \sqrt{4E^2-27\alpha^4}}{12} .$$

Ζήτημα 2_A

(Θεωρία Ἀλγέβρας)

<u>Τί καλεῖται φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος;</u> –

Νά εὑρεθῇ ὁ τύπος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

<u>Ἀπάντησις</u> α) Φθίνουσα γεωμ. πρόοδος μέ ὅλους τούς ὅρους θετικούς λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι. Ὁπότε ὁ λόγος λ εἶναι θετικός καί μικρότερος τοῦ 1, ἤτοι $o < \lambda < 1$.

"Ἀπολύτως φθίνασα" γεωμετρική πρόοδος λέγεται ἐκείνη τῆς ὁποίας οἱ ὅροι δέν εἶναι (ὅλοι) θετικοί ἤ εἶναι ὅλοι ἀρνητικοί, αἱ δέ ἀπόλυτοι τιμαί τῶν ὅρων βαίνουν ἐλαττούμεναι, ὁπότε ὁ λόγος εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τοῦ 1, ἤτοι $|\lambda| < 1$

β) Ὁ τύπος εἶναι $\Sigma = \frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$ ("Ἰδε διδακτικά βιβλία).

Ζήτημα 2_B

"Ἀσκησις Ἀλγέβρας

<u>Θεωροῦμεν δύο προόδους, μίαν ἀριθμητικήν 2,β,γ,δ.... καί ἄλλην γεωμετρικήν 2,Β,Γ,Δ....</u>

<u>Νά προσδιορισθοῦν οἱ λόγοι τῶν προόδων,</u> ὥστε νά ἔχωμεν: $\gamma = \Gamma$ καί $\delta = \Delta$.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>. "Εστω λ ὁ λόγος τῆς πρώτης καί ω, τῆς δευτέρας.

"Εχομεν : $\gamma = 2 + 2\lambda$ | $\delta = 2 + 3\lambda$

$\Gamma = 2\omega^2$ | $\Delta = 2 . \omega^3$

καί λόγῳ τῶν ὑποθέσεων:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^2 &= 2 + 2\lambda \\ 2\omega^2 &= 2 + 3\lambda \end{aligned}\right) \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{aligned} \omega^2 &= 1 + \lambda \\ 2\omega^3 &= 2 + 3\lambda \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἄρα $\lambda = \omega^2 - 1$ καί $2\omega^3 = 2 + 3(\omega^2 - 1)$ ἤ, μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, διάταξιν κ.λ.

$$2\omega^3 - 3\omega^2 + 1 = 0$$

ἤ $\quad 2\omega^3 - 2\omega^2 - \omega^2 + 1 = 0$ ἤ $2\omega^3 - 2\omega^2 - (\omega^2 - 1) = 0$

Τοῦτο συνεπάγεται $\omega - 1 = 0$ ἤτοι $\omega = 1$, τό ὁποῖον δίδει $\lambda = 0$. Αἱ λύσεις αὗται δέν παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον, διότι τό τε αἱ "πρόοδοι" καταντοῦν:

$\div$ 2,2,2,2....

$\because$ 2,2,2,2....

Ἡ ἐξίσωσις $2\omega^2 - \omega - 1 = 0$

δίδει $\omega = 1$ καί $\omega = -\frac{1}{2}$

Ἀντικαθιστῶμεν τήν δευτέραν τιμήν εἰς τό σύστημα (1), ἔστω εἰς τήν πρώτην, καί λαμβάνομεν $\lambda = -\frac{3}{4}$.

Ζήτημα 3$_\lambda$ (Θεωρία Τριγωνομετρίας)

Νά ἐκφρασθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί / συναρτήσεις τοῦ ημχ. Νά ἐξετασθοῦν καί διερευνηθοῦν ὅλαι αἱ περιπτώσεις διά $0 \leq \chi \leq 360^0$.

Ἀπάντησις. Ἔχομεν: $\sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2\chi}$, $\varepsilon\varphi\chi = \pm\dfrac{\eta\mu\chi}{\sqrt{1-\eta\mu^2\chi}}$

$$\sigma\varphi\chi = \pm\frac{\sqrt{1-\eta\mu^2\chi}}{\eta\mu\chi}$$

Εἰς τό α΄ τεταρτημόριον $(0 < \chi < 90^0)$, ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi > 0$, $\varepsilon\varphi\chi > 0$, $\sigma\varphi\chi > 0$ δηλαδή: $\sigma\upsilon\nu\chi = +\sqrt{1-\eta\mu^2\chi}$ κ.τ.λ.

Εἰς τό β΄: $\sigma\upsilon\nu\chi < 0$, $\varepsilon\varphi\chi < 0$, $\sigma\varphi\chi < 0$

Είς τό γ': συνχ <0, εφχ >0, σφχ >0

Είς τό δ' τεταρτημόριον ($270^0 < \chi < 360^0$), έχομεν συνχ >0, εφχ <0, σφχ <0

Έπιπροσθέτως, συν $0^0 = 1$, εφ$0^0 = 0$, σφ$0^0 = +\omega$

συν $90^0 = 0$, εφ$90^0 = \pm\omega$, σφ$90^0 = 0$

συν$180^0 = -1$, εφ$180^0 = 0$, σφ $180^0 = \pm\omega$

συν$270^0 = 0$, εφ$270^0 = \pm\omega$ σφ.$270^0 = 0$

συν$360^0 = 1$, εφ$360^0 = 0$, σφ $360^0 = \pm\omega$

<u>Ζήτημα 3_B (άσκησις τριγωνομετρίας)</u>

<u>Νά ύπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί δι' ὅλα</u> τά τόξα χ (ὅπου $0 < \chi < 360^0$), διά τά ὁποῖα εἶναι ημχ$= -\dfrac{4}{5}$

<u>Λύσις</u>. Ἐφ' ὅσον δίδεται ημχ <0, συνεπάγεται ὅτι τό χ εἶναι τόξον τοῦ γ' ἤ τοῦ δ' τεταρτημορίου.

Ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \text{συνχ} &= -\sqrt{1-\text{ημ}^2\chi} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5} \\ \text{εφχ} &= \frac{\text{ημχ}}{\text{συνχ}} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{διά } 180^0 < \chi < 270^0$$

$$\text{σφχ} = \frac{1}{\text{εφχ}} = \frac{3}{4}$$

<u>Ἐπίσης:</u>

$$\left.\begin{aligned} \text{συνχ} &= +\sqrt{1-\text{ημ}^2\chi} = \frac{3}{5} \\ \text{εφχ} &= \frac{\text{ημχ}}{\text{συνχ}} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \\ \text{σφχ} &= \frac{1}{\text{εφχ}} = -\frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \text{διά } 270^0 < \chi < 360^0$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΤΥΠΟΥ

(Σάββατον, 10 Σ/βρίου 1966, ὧραι 8 - 11 π.μ.)

Ζήτημα 1ον (θεωρία)

Ἄν α,β,γ πραγματικοί ἀριθμοί $\neq 0$, νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ὑπό τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\chi + \beta\eta\mu\chi + \gamma = 0 \quad (1)$$

δέν ἐπιδέχεται λύσιν.

Ὑπό ποίας συνθήκας διά τά α,β,γ ἡ (1) δέχεται λύσεις τῆς μορφῆς $\chi = (2K \pm 1)\Pi$, ὅπου $K = 0,1,2,3....$

Λύσις. Γνωρίζομεν ὅτι διά τῶν ἀντικαταστάσεων:

$$\eta\mu\chi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \quad \kappa.\lambda.$$

πᾶσα τριγωνομετρική ἐξίσωσις δύναται νά γίνη ἀλγεβρική("Ἴδε "Ρητή παράστασις τριγ. ἀριθμῶν τόξου χ διά τῆς εφ $\frac{\chi}{2} = \lambda$").

Ὁπότε, ἡ (1) γίνεται:

$$\alpha.\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} + \beta.\frac{2\omega}{1+\omega^2} + \gamma = 0$$

καί μετά τήν ἀπαλοιφήν τῶν παρανομαστῶν καί τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων:

$$(\gamma-\alpha)\omega^2 + 2\beta\omega + \alpha + \gamma = 0 \qquad (2)$$

Ἡ δευτεροβάθμιος αὕτη ἐξίσωσις δέν ἐπιδέχεται λύσιν πραγματικήν, ἄν ἡ διακρίνουσα εἶναι ἀρνητική, ἤτοι:

$$\beta^2 - (\gamma^2 - \alpha^2) < 0$$

ἡ ὁποία γράφεται $\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2$ καί αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη συνθήκη.

Λύσις β. Θέτομεν $\sigma\upsilon\nu\chi = \omega$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\alpha\omega \pm \beta\sqrt{1-\omega^2} + \gamma = 0$$

Απομονώνομεν τό ριζικόν

$$\pm\beta\sqrt{1-\omega^2} = -(\alpha\omega+\gamma)$$

Τετραγωνίζομεν:

$$\beta^2(1-\omega^2) = (\alpha\omega+\gamma)^2$$

Μεταφέρομεν είς τό πρῶτον μέλος, ἀναπτύσσομεν, διατάσσομε:

$$(\alpha^2+\beta^2)\omega^2 + 2\alpha\gamma\omega + \gamma^2 - \beta^2 = 0$$

Διά νά ἔχωμε φανταστικάς ρίζας, πρέπει καί ἀρκεῖ:

$$4\alpha^2\gamma^2 - 4(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2-\beta^2) < 0$$

ἤ $\quad \alpha^2+\beta^2 < \gamma^2$

Ἄν $\chi = (2K+1)\Pi$, τότε συνεπάγεται $\eta\mu\chi = 0$, $\sigma\upsilon\nu\chi = -1$. Ἄρα ἡ (1) γίνεται: $-\alpha+\gamma = 0 \qquad \alpha = \gamma$

Ζήτημα 2ον

Α) Χρησιμοποιοῦντες γνωστόν τύπον, δείξατε ὅτι ἄν $-\frac{\Pi}{2} \leqslant \chi \leqslant \frac{\Pi}{2}$ καί $\frac{\Pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\Pi}{2}$, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\psi) \leqslant \sigma\upsilon\nu\,\frac{\chi+\psi}{2} \qquad (1)$$

Είς ποίαν περίπτωσιν ἰσχύει ἡ ἰσότης;

Β) Λάβατε τώρα ὡς γνωστόν σας ὅτι, ἄν Η τό ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ τότε εἶναι $HB = \sigma_2 = 2R\sigma\upsilon\nu B$ καί $H\Gamma = \sigma_3 = 2R\sigma\upsilon\nu\Gamma$, ὅπου R ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ ΗΒΓ. Μέ τήν βοήθειαν τῆς (1) δείξατε ὅτι είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις.

$$\frac{\sigma_2+\sigma_3}{R} \leqslant 4\eta\mu\,\frac{A}{2} \qquad (2)$$

Πότε ἰσχύει ἡ ἰσότης;

Λύσις. Τό α΄ μέλος τῆς (1) γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\chi+\psi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{\chi-\psi}{2} \qquad (3)$$

Γνωρίζομεν, ὅτι διά πᾶν χ καί φ ἀπεριορίστως, ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\ \frac{\chi-\phi}{2} \leq 1$$

Ἄρα, ἄν τόν δεύτερον παράγοντα τοῦ γινομένου (3) ἀντικαταστήσωμεν μέ τήν μεγίστην τιμήν του 1, ἡ τιμή του αὐξάνεται.

Ἄρα εἶναι: $\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\phi}{2}.\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\phi}{2} \leq \sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\phi}{2}\ .\ 1$ πρᾶγμα, τό ὁποῖον ἀποδεικνύει τήν σχέσιν (1). Ἰσότητα δυνατόν νά ἔχωμεν, ἄν εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\phi}{2} = 1 \Longrightarrow \chi-\phi = 0 \Longrightarrow \chi = \phi$ ἤ ἄν εἶναι

$\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\phi}{2} = 0 \Longrightarrow \frac{\chi+\phi}{2} = (2K+1).\frac{\Pi}{2}$ ὅπου Κ φυσικός ἀριθμός ἤ μη δέν. Διά Κ = 0, λαμβάνομεν $\chi+\phi = \Pi$ αὕτη δέ εἶναι ἡ μοναδική παραδεκτή τιμή τοῦ Κ ὡς δίδουσα ἄθροισμα περιλαμβανόμενον εἰς τούς δοθέντας περιορισμούς τῶν χ καί φ.

Β΄) Ἄν τά σ_2 καί σ_3 ἀντικαταστήσωμεν μέ τά ἴσα των, τό πρῶτον μέλος τῆς (2) γράφεται διαδοχικῶς:

$$2(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 4\ \frac{1}{2}\ (\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma)$$

Λόγῳ τῆς (1), τοῦτο εἶναι

$$4.\sigma\upsilon\nu\ \frac{B+\Gamma}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad 4.\eta\mu\ \frac{A}{2}$$

ἀφοῦ τό $\frac{A}{2}$ εἶναι συμπληρωματικόν τοῦ $\frac{B+\Gamma}{2}$.

Ἰσότητα θά ἔχωμεν, ἄν εἶναι χ = φ, δηλαδή Β = Γ.

Ζήτημα 3ον

Ἄν εἶναι $0 < \chi < 2\Pi$, νά λυθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\sigma\upsilon\nu2\chi} > 2 \qquad (1)$$

Λύσις. Μεταφέρομεν τό 2 εἰς τό α΄ μέλος. Πρέπει $\sigma\upsilon\nu2\chi \neq 0$

Ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 - 2\sigma\upsilon\nu2\chi}{\sigma\upsilon\nu2\chi} > 0 \qquad (2)$$

καί ἐπειδή $\sigma\upsilon\nu\, 2\chi = 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1$, ἡ (2) γίνεται τελικῶς:

$$\phi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi.(1-2\sigma\upsilon\nu\chi)}{\sigma\upsilon\nu 2\chi} > 0 \qquad (3)$$

Εἰς τόν κάτωθι πίνακα παραθέτομεν τά πρόσημα ἑκάστου τῶν παραγόντων καθώς καί τοῦ φ:

χ	0^0	45^0	60^0	90^0	135^0	225^0	270^0	300^0	315^0	360^0
$\sigma\upsilon\nu\chi$	+	+	+	0 −	−	−	0 +	+	+	
$1-2\sigma\upsilon\nu\chi$	−	−	0 +	+	+	+	+	0 −	−	
$\sigma\upsilon\nu 2\chi$	+	−	−	−	+	−	−	−	+	
ϕ	−	+	−	+	−	+	−	+	−	

Λύσεις: 1) $45^0 < \chi < 60^0$ ἤ εἰς ἀκτίνια $\frac{\Pi}{4} < \chi < \frac{\Pi}{3}$

2) $90^0 < \chi < 135^0$ ἤ $\frac{\Pi}{2} < \chi < \frac{3\Pi}{4}$

3) $225^0 < \chi < 270^0$ ἤ $\frac{5\Pi}{4} < \chi < \frac{3\Pi}{2}$

καί 4) $300^0 < \chi < 315^0$ ἤτοι $\frac{5\Pi}{3} < \chi < \frac{7\Pi}{4}$