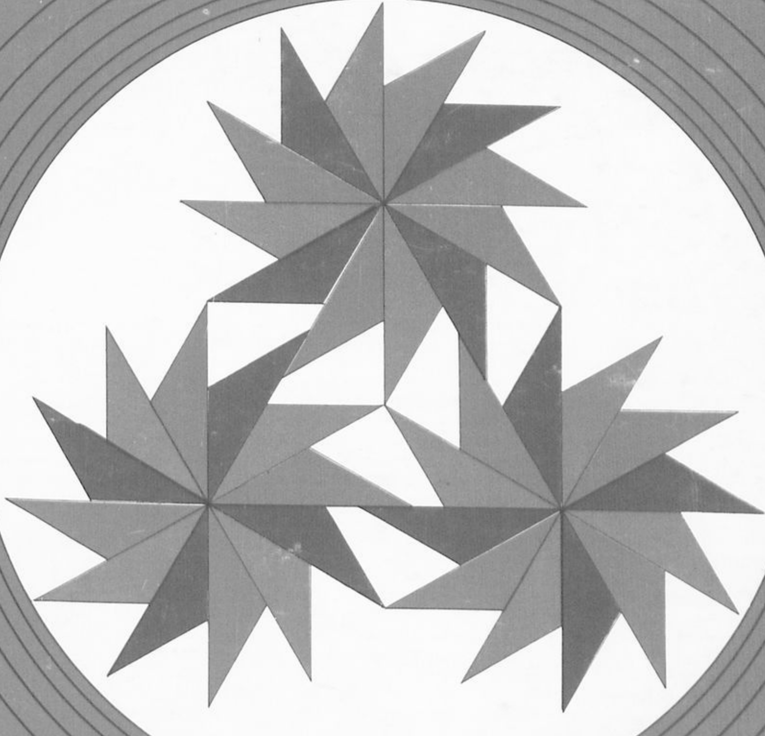
ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΦΙΛ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ - ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Κ. Α. Τ. Ε.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ Ή ΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ



ΒΙΒΛΙΟΝ Β'

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1973

Δ 2 ΜΜΑ

Περιστερόπουλου, Αναγνώσεις 1918.

Περιστερόπουλος, Αναστάσιος Φιλ.

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΦΙΛ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ - ΕΠΙΜΕΛΗΤΟΥ Κ.Α.Τ.Ε.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ
Ή ΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ

Απολλώνιος (Πρόβλημα)

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΛΥΣΙΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

28

ΑΘΗΝΑΙ 1973

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κατὰ τὸ παρελθὸν ἔτος ἐξεδώσαμεν εἰς πρῶτον βιβλίον τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν Ἐπαφῶν λελυμένον διὰ τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας. Ἡ ἐργασία ἔτυχεν εὐμενοῦς ὑποδοχῆς. Ὁ διακεκριμένος Καθηγητὴς κ. Εὐάγγελος Σταμάτης, μέλος τῆς Διεθνοῦς Ἀκαδημίας τῆς Ἱστορίας τῶν Ἐπιστημῶν, εἰδικὸς δὲ περὶ θέματα οἷον τὸ ἀπασχολῆσαν ἡμᾶς, ἔγραψεν ἐνθουσιώδη κριτικήν, ἐκ τῆς ὁποίας παραθέτομεν τὸ ἑξῆς ἀπόσπασμα : «Εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω δέκα προβλημάτων (εἰς τὰ ὁποῖα ἀναλύεται τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου) ὁ κ. Περιστερόπουλος παραθέτει ἀνάλυσιν, σύνθεσιν, ἀπόδειξιν καὶ διερεύνησιν. Διαπραγματεύεται δὲ ἕκαστον πρόβλημα μὲ βαθυτάτην γνῶσιν ὅλων τῶν λεπτομερειῶν αὐτοῦ, μὲ πᾶσαν δυνατὴν ἁπλότητα καὶ μὲ σαφήνειαν. Εἰς τὴν Ἑλλάδα διὰ πρώτην φορὰν δημοσιεύεται τὸ πρόβλημα τῶν Ἐπαφῶν τοῦ Ἀπολλωνίου μὲ τόσην πληρότητα. Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον προκαλεῖ ἐντύπωσιν καὶ τιμᾷ ἰδιαιτέρως τὴν ἐργασίαν τοῦ συγγραφέως εἶναι ἡ διερεύνησις ἑκάστου τῶν δέκα προβλημάτων. Ὁ κ. Περιστερόπουλος δὲν ἐφείσθη κόπων διὰ νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὰς νεωτέρας ἐπιστημονικὰς ἀξιώσεις διὰ τὸ πρόβλημα τῶν Ἐπαφῶν τοῦ Ἀπολλωνίου. Ἡ εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ βιβλίου ἀναφερομένη πρόθεσις τοῦ συγγραφέως, ὅπως ἐκδώσῃ λύσιν τοῦ περιφήμου τούτου προβλήματος καὶ διὰ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, ἐπιτρέπει πλείστας ἐλπίδας εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐρεύνας τοῦ κ. Περιστεροπούλου, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ προβλήματος τῶν Ἐπαφῶν θὰ συνδέσῃ τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν ἐπιστήμην μὲ τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν ἐξέλιξιν».

Ἡ καλὴ ὑποδοχή, τῆς ὁποίας ἔτυχε τὸ πρῶτον βιβλίον, ἐνεθάρρυνεν ἡμᾶς, ἵνα μετὰ μεγαλυτέρας προθυμίας ἐκδώσωμεν, ὡς εἴχομεν ὑποσχεθῆ, εἰς δεύτερον βιβλίον τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν Ἐπαφῶν λελυμένον διὰ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν.

Ὅτε ἐλύομεν τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα διὰ τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας, ἐξ ἀρχῆς ὑπέφωσκεν ἡ διὰ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν λύσις αὐτοῦ. Ἀλλ' οὐδέποτε ἐφανταζόμεθα, ὅτι ἡ λύσις θὰ ἐλάμβανε τοσαύτην ἔκτασιν, καί, τὸ κυριώτερον, ὅτι θὰ εὑρίσκομεν τοσαύτας ἰδιότητας ἐπὶ τῶν καμπυλῶν τοῦ β' βαθμοῦ ἢ κωνικῶν τομῶν (ὑπερβολή, ἔλλειψις, παραβολή), τὰς ὁποίας διεπραγματεύθη ὁ Ἀπολλώνιος εἰς τὰ περίφημα ὀκτὼ αὐτοῦ βιβλία, τὰ προσπορίσαντα εἰς αὐτὸν σπανίαν δόξαν, καὶ αἱ ὁποῖαι ἐθεωροῦντο τὰ ἀνώτατα Μαθηματικὰ τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Εἰς τὸν περίφημον δὲ μαθηματικὸν καὶ ἀστρονόμον Halley ἀνήκει ἡ τιμή, ὅτι ἀνέσυρεν ἐκ τῆς ἀφανείας, ἐξέδωκε καὶ προέβαλε τὰ ἑπτὰ διασωθέντα βιβλία τοῦ Ἀπολλωνίου, ἀνακατεσκεύασε δὲ τὸ ἀπολεσθὲν ὄγδοον βιβλίον. Τοιαύτη δὲ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἔργου τοῦ Ἀπολλωνίου, ὥστε ἄνευ αὐτοῦ ὁ σεληνάνθρωπος θὰ ἦτο ἴσως ἀκόμη μόνον εἰς τὴν φαντασίαν τοῦ Ἰουλίου Βέρν. Ἀρκεῖ νὰ σκεφθῇ τις, ὅτι αἱ κωνικαὶ τομαὶ δὲν εἶναι ἁπλῶς μαθηματικὰ κατασκευάσματα.

'Αλλ', ὡς ἀπέδειξεν ὁ διάσημος μαθηματικὸς Kepler, αἱ τροχιαὶ τῶν πλανητῶν εἶναι κωνικαὶ τομαί. Γενικώτερον δὲ εἰπεῖν, ὡς εἶναι γνωστὸν σήμερον, αἱ κωνικαὶ τομαὶ ἐνυπάρχουν εἴς τε τὸν μακρόκοσμον καὶ τὸν μικρόκοσμον. Κωνικὰς τομὰς διαγράφουν οὐ μόνον οἱ πλανῆται, ἀλλὰ καὶ ὁ ἥλιος καὶ οἱ δορυφόροι (φυσικοί τε καὶ τεχνητοὶ) καὶ οἱ κομῆται καὶ πάντες οἱ ἀστέρες, οἱ γαλαξίαι καὶ τὰ συστήματα τῶν γαλαξιῶν. 'Εν δὲ τῷ μικροκόσμῳ τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἔλλειψιν περὶ τὸν πυρῆνα τοῦ ἀτόμου.

Τὸ μετὰ χεῖρας βιβλίον δὲν θὰ ἐλάμβανε τόσην ἔκτασιν, ἐὰν ὁ μέγας φιλόσοφος Καρτέσιος δὲν ἐχάριζεν εἰς τὴν Μαθηματικὴν 'Επιστήμην τὴν μαγικὴν κλεῖδα τῶν ἀπ' αὐτοῦ ὀνομασθεισῶν συντεταγμένων. Διὰ τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων πλεῖστα μαθηματικὰ προβλήματα ἐπιλύονται εἰς βάθος καὶ εἰς ἔκτασιν καὶ κυριολεκτικῶς διαλύονται καὶ κονιορτοποιοῦνται.

Τὸ βιβλίον διαιροῦμεν εἰς τρία κεφάλαια. Εἰς τὸ πρῶτον ἐκθέτομεν γενικά τινα περὶ ὑπερβολῆς, ἐλλείψεως καὶ παραβολῆς. Εἰς τὸ δεύτερον ἐνδιατρίβομεν περὶ γεωμετρικούς τινας τόπους χρησίμους διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ 'Απολλωνίου. Καὶ εἰς τὸ τρίτον διαπραγματευόμεθα τὸ κύριον θέμα, ἤτοι τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τοῦ 'Απολλωνίου.

'Ως καὶ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, πρὸς διευκόλυνσιν ἐν τῇ λύσει τῶν προβλημάτων ἠναγκάσθημεν νὰ εἰσαγάγωμεν νέα τινὰ μαθηματικὰ σύμβολα, τῶν ὁποίων ἡ ἐξήγησις παρέχεται εἰς τὸν ἐν τῷ τέλει τοῦ παρόντος βιβλίου πίνακα συμβόλων.

Σημειωθήτω δὲ τέλος, ὅτι ἐν τῇ λύσει τοῦ προβλήματος τοῦ 'Απολλωνίου ἢ τῶν 'Επαφῶν διὰ τῶν 'Ανωτέρων Μαθηματικῶν δὲν εἴχομεν τὴν βοήθειαν ἄλλων σχετικῶν ἐργασιῶν. 'Η λύσις εἶναι προϊὸν βασάνου τῆς διανοίας μας. Κατὰ πόσον δὲ διὰ τῆς λύσεως ταύτης προσφέρομέν τι ἄξιον τοῦ κόπου τῆς συγγραφῆς καὶ τοῦ κόπου τῆς ἀναγνώσεως, περὶ τούτου θὰ κρίνουν οἱ εἰδικοί, τῶν ὁποίων ἐπικαλούμεθα τὴν ἐπιείκειαν.

'Εν Κοζάνῃ τῇ 25ῃ Μαρτίου 1973

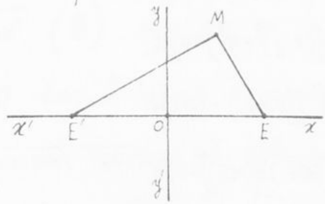
ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΦΙΛ. ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΙ ΚΩΝΙΚΑΙ ΤΟΜΑΙ.

α΄) Ἡ ὑπερβολή.

§ 1. Ἔστωσαν δύο σταθερά σημεῖα Ε καί Ε΄ ἐπί ἐπιπέδου. Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν σημεῖον Μ κείμενον ἐπί τῆς μεσοκαθέτου $y'Oy$ τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΕ΄ ἀπέχει ἴσον ἀπό τά σημεῖα Ε καί Ε΄. Ἄν ὅμως τό σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου δέν κεῖται ἐπί τῆς $y'Oy$, ἀπέχει τότε ἄνισον τῶν Ε καί Ε΄, ὀλιγώτερον δέ ἀπό ἐκεῖνο τό σημεῖον μετά τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται εἰς τό ἴδιον ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρός τήν $y'Oy$ (σχ. 1).

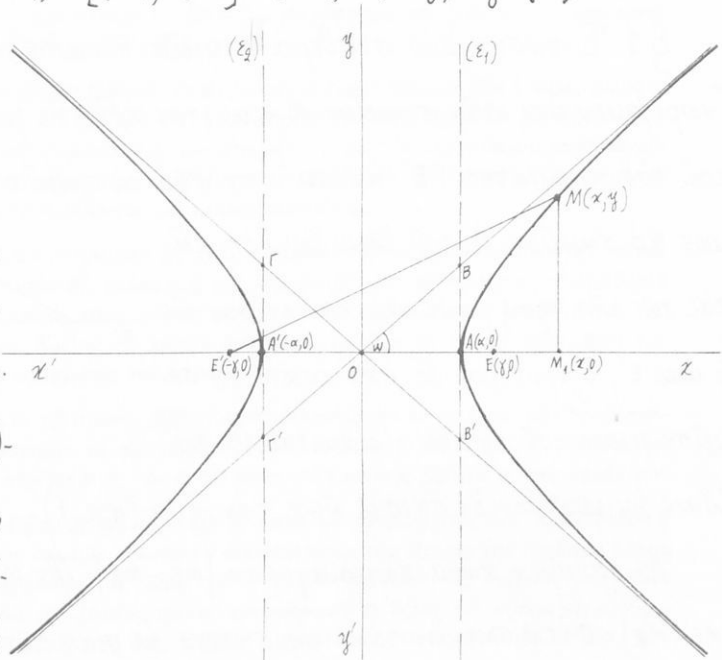


Σχ. 1.

Ἄς λάβωμεν τώρα τήν διαφοράν $|ME'-ME|$. Ἄν $M \in (y'Oy)$, τότε $|ME'-ME| = 0$. Ἐπίσης, ἄν τό Μ εὑρίσκεται εἰς μίαν τῶν κλειστῶν ἡμιευθειῶν Ex, $E'x'$, τότε $|ME'-ME| = E'E$. Τέλος, εἰς οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν τοῦ Μ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ἔχομεν: $0 < |ME'-ME| < E'E$.

Ταῦτα ἀναφέροντες, ἄς ζητήσωμεν τόν γεωμετρικόν τόπον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου διά τά ὁποῖα ἰσχύει: $|(ME')-(ME)| = 2\alpha$, ἔνθα α τό μέτρον δοθέντος(1) καί σταθεροῦ εὐθ. τμήματος.

Θεωροῦμεν (σχ. 2) τήν εὐθεῖαν $x'Ox$ ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων x καί τήν $y'Oy$ ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων y, μέ ἀρχήν τό O. Ἔστω σημεῖόν τι $M(x,y)$ τοῦ ζητουμένου τόπου· ἔχομεν δι' αὐτό $|(ME')-(ME)| = 2\alpha$. Ἐπίσης, ἄν $MM_1 \perp x'x$, ἔχομεν: $(ME')^2 = (E'M_1)^2 + (MM_1)^2 = [(E'O)+(OM_1)]^2 + (MM_1)^2 = (\gamma + x)^2 + y^2$ **(α)**, ἔνθα $(E'O) = (OE) = \gamma$. Ὁμοίως: $(ME)^2 = (EM_1)^2 + (MM_1)^2 = [(OM_1)-(OE)]^2 + (MM_1)^2 = (x-\gamma)^2 + y^2$ **(β)**. Ἐκ τῶν (α) καί (β) ἔχομεν: $(ME')^2 - (ME)^2 = [(\gamma+x)^2+y^2] - [(x-\gamma)^2+y^2] = 4\gamma x$, ἤ $[(ME')-(ME)]\cdot[(ME')+(ME)] = 4\gamma x$ καί ἐπειδή $(ME')-(ME) = 2\alpha$ **(γ)**, διότι τό M εὑρίσκεται(2) δεξιά τοῦ ἄξονος $y'Oy$, ἔχομεν: $(ME')+(ME) = \frac{2\gamma x}{\alpha}$ **(δ)**. Ἐκ τῶν (γ), (δ) προκύπτει: $(ME') = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha$ **(ε)** καί $(ME) = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha$ **(στ)**, ὁπότε ἐκ τῶν (α), (ε) ἤ (β), (στ) εὑρίσκομεν κατόπιν πράξεων(3): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = 1$ καί ἐάν τεθῇ $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$, ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν:



Σχ. 2.

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \qquad (A)$$

Ἀποδεικνύεται[4] ὅτι καί πᾶν σημεῖον $M(x,y)$ ἱκανοποιοῦν τήν (A), ἱκανοποιεῖ καί τήν τεθεῖσαν σχέσιν: $|(E'M)-(EM)|=2\alpha$, καί ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Τό σύνολον λοιπόν τῶν σημείων $M(x,y)$ τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τήν (A) καλεῖται ὑ π ε ρ β ο λ ή. Τά σημεῖα E καί E′ καλοῦνται ἑ σ τ ί α ι τῆς ὑπερβολῆς, ἡ δέ ἀπόστασις αὐτῶν $(E'E)=2\gamma$ καλεῖται ἑστιακή ἀπόστασις.

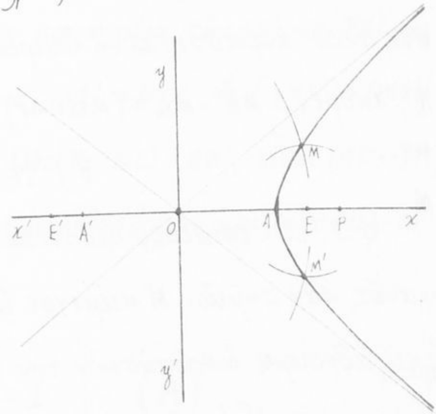
Ἐκ τῆς (A) ἕπεται ὅτι: $y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ **(B)**· καί διά νά ἔχωμεν πραγματικά y θά πρέπῃ $x^2-\alpha^2\geqslant 0$, δηλ. ἤ $x\leqslant-\alpha$ ἤ $x\geqslant\alpha$. Ἄρα ἡ καμπύλη εὑρίσκεται ἐκτός τῆς ἀνοικτῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2) μέ ἀντιστοίχους ἐξισώσεις $x=\alpha$, $x=-\alpha$. Ἐάν εἰς τήν (B) θέσωμεν $x=\pm\alpha$, εὑρίσκομεν $y=0$· ἑπομένως ἡ ὑπερβολή τέμνει τόν ἄξονα τῶν x εἰς τά σημεῖα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$ ἀντιστοίχως, τά ὁποῖα ὀνομάζονται κορυφαί τῆς ὑπερβολῆς. Ἐπίσης, ἄν τό ζεῦγος (x,y) ἐπαληθεύῃ τήν (A), τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύουν αὐτήν καί τά ζεύγη $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$· ἄρα ἡ ὑπερβολή εἶναι συμμετρική ὡς πρός τούς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καθώς καί ὡς πρός τήν ἀρχήν O τῶν ἀξόνων.

Ἄς γράψωμεν τήν περιφέρειαν (O, OE), ἥτις θά τάμῃ τάς (ε_1) καί (ε_2) εἰς τά B, B', Γ, Γ'. Ἐπειδή $(OB)=(OE)=\gamma$ καί $(OA)=\alpha$, ἕπεται ὅτι $(AB)^2=(OB)^2-(OA)^2=\gamma^2-\alpha^2$· ἀλλά $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$. Ἄρα $(AB)=\beta$. Ὁπότε ἡ εὐθεῖα OB ἔχει ἐξίσωσιν: $y_1=\varepsilon\varphi\omega\cdot x=\frac{\beta}{\alpha}\cdot x$. Ἐκ τῆς (A) ἔχομεν διά τό α' τεταρτημόριον: $y = +\frac{\beta}{\alpha}\cdot x\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}} \mid x \geqslant \alpha$. Ἐπίσης, ἐκ τῆς προφανοῦς σχέσεως $0 < \frac{\alpha}{x}$ ἕπεται $0 > -\frac{\alpha^2}{x^2}$ ἤ $1 > 1-\frac{\alpha^2}{x^2}$ ἤ$^{(5)}$ $1 > \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}$ καί ἐπειδή $\frac{\beta x}{\alpha} > 0$ ἄρα $\frac{\beta x}{\alpha} > \frac{\beta x}{\alpha}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}$, ἤτοι $y_1 > y$ (Γ). Ἐπίσης, ἡ εὐθεῖα ΟΒ' ἔχει ἐξίσωσιν: $y_2 = \varepsilon\varphi(\pi-\omega)\cdot x = -\varepsilon\varphi\omega\cdot x = -y_1$. Ἀλλ' ἡ (Γ) γίνεται $-y_1 < -y$ καί ἄρα $y_2 = -y_1 < -y = -\frac{\beta}{\alpha}x\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}$. Ὥστε: $y_2 < \pm\frac{\beta}{\alpha}x\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}} < y_1$. Ἐκ τῆς (Β) πάλιν ἔχομεν $y \to \pm\infty$, ἐάν $x \to +\infty$.

Ἐκ πάντων λοιπόν τούτων ἕπεται ὅτι ὁ δεξιός κλάδος τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκεται ἐντός τῆς ἀνοικτῆς γωνίας Β'ΟΒ.

Ἐπίσης, ἐκ τῆς (Γ) ἕπεται ὅτι: $y_1 - y > 0$ ἤ $\frac{\beta x}{\alpha} - \frac{\beta x}{\alpha}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}} > 0$ ἤ $\frac{\beta x}{\alpha}\left(1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) > 0$ καί ἐπειδή $\frac{\beta x}{\alpha} > 0$, εἶναι $1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}} > 0$. Ἄρα, διά $x \to +\infty$, εἶναι: $\left(1-\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}\right) \to 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ΟΒ ἐφάπτεται τοῦ ἄνω δεξιοῦ κλάδου τῆς ὑπερβολῆς εἰς τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτοῦ. Διά τοῦτο ἡ ΟΒ ὀνομάζεται ἀ σ ύ μ π τ ω τ ο ς τῆς ὑπερβολῆς. Ἡ ὑπερβολή λοιπόν ἔχει δύο ἀσυμπτώτους, τάς εὐθείας Γ'Β καί ΓΒ'.

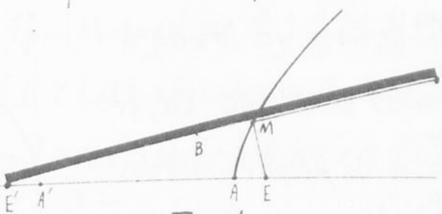
§2. Χ ά ρ α ξ ι ς ὑ π ε ρ β ο λ ῆ ς: Δυνάμεθα νά χαράξωμεν μίαν ὑπερβολήν, ὅταν δίδωνται αἱ ἑστίαι Ε καί Ε' καθώς καί αἱ κορυφαί αὐτῆς Α καί Α', ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Ρ ἐπί τῆς ἡμιευθείας Εx (σχ.3) καί ἀκολούθως γράφομεν τάς περιφερείας (Ε, ΕΜ = ΡΑ) καί (Ε', Ε'Μ = ΡΑ'). Αἱ περιφέρειαι αὗται (Ε, ΡΑ) καί (Ε΄, ΡΑ΄) τέμνονται[6] εἰς τά σημεῖα Μ καί Μ΄ ἅτινα εἶναι σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς, διότι (ΜΕ΄) − (ΜΕ) = (ΡΑ΄) − (ΡΑ) = (ΑΑ΄) = 2α. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν ὅσα σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς θέλομεν· συνδέοντες δέ ταῦτα χαράσσομεν τήν ὑπερβολήν.



Σχ. 3.

Τό ὅμοιον κάμνομεν καί ὅταν τό Ρ εὑρίσκεται ἐπί τῆς ἡμιευθείας Ε΄x΄.

Ἀλλά καί διά συνεχοῦς γραμμῆς χαράσσομεν αὐτήν ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν κανόνα καί τοποθετοῦμεν τό ἕν ἄκρον αὐτοῦ εἰς τήν ἑστίαν Ε΄ (σχ. 4), εἰς τρόπον ὥστε νά στρέφεται περί τό Ε΄ κινούμενος οὗτος εἰς τό ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ὁποίου θέλομεν νά χαράξωμεν τήν ὑπερβολήν.



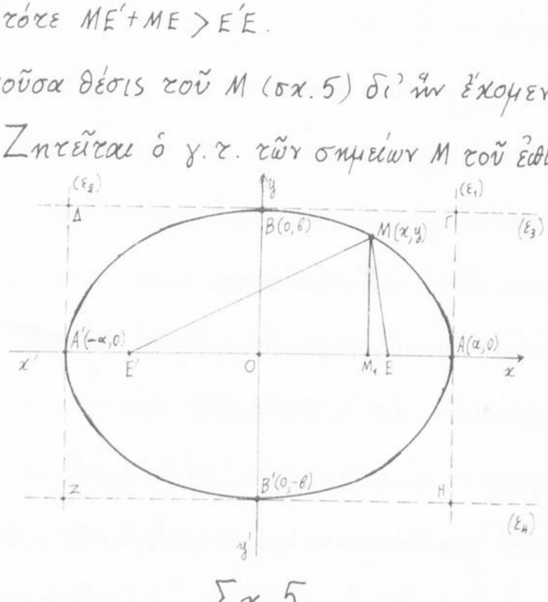
Σχ. 4.

Ἀκολούθως ἐπί τοῦ κανόνος λαμβάνομεν τμῆμα (Ε΄Β) = (Α΄Α) = 2α. Τό ἕτερον ἄκρον Γ τοῦ κανόνος τό συνδέομεν μέ τήν ἑτέραν ἑστίαν Ε διά νήματος μήκους ἴσου πρός ΒΓ. Διά μολυβδίδος τείνομεν τό νῆμα ὥστε αὐτη νά ἔλθη εἰς ἐπαφήν μετά τοῦ κανόνος, ἔστω εἰς τό Μ. Περιστρεφομένου τοῦ κανόνος ὀλισθαίνει τό νῆμα ἐπί τῆς μολυβδίδος (ἥτις φροντίζομεν νά εὑρίσκεται πάντοτε εἰς ἐπαφήν μετά τοῦ κανόνος) καί οὕτω χαράσσεται ἡ ὑπερβολή. Διότι, διά τό τυχόν σημεῖον M, ἔχομεν: $ME' - ME = (ME' + M\Gamma) - (ME + M\Gamma) = \Gamma E' - B\Gamma = E'B = A'A = 2\alpha$.

β') Ἡ ἔλλειψις.

§ 3. Ἐπί ἐπιπέδου δίδονται δύο σημεῖα σταθερά E καί E'. Προφανῶς, πᾶν σημεῖον M κείμενον ἐπί τοῦ κλειστοῦ εὐθ. τμήματος $E'E$ ἔχει ἄθροισμα ἀποστάσεών του ἀπό τά E καί E' ἴσον πρός $E'E$· ἤτοι $ME' + ME = E'E$. Ἐάν ὅμως τό M εὑρίσκεται εἰς οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν τοῦ ἐπιπέδου, θά ἔχωμεν τότε $ME' + ME > E'E$.

Ἔστω τώρα μία τυχοῦσα θέσις τοῦ M (σχ. 5) δι' ἥν ἔχομεν $(ME') + (ME) = 2\alpha > (E'E) = 2\gamma$. Ζητεῖται ὁ γ. τ. τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ σχέσις $(ME') + (ME) = 2\alpha$, ἔνθα α τό μέτρον δοθέντος καί σταθεροῦ εὐθ. τμήματος.



Σχ. 5.

Πρός τούτοις θεωροῦμεν τήν εὐθεῖαν $E'E$ ὡς ἄξονα $x'Ox$ τῶν τετμημένων μέ ἀρχήν τό μέσον O τοῦ εὐθ. τμ. $E'E$ καί τήν μεσοκάθετον $y'Oy$ τοῦ $E'E$ ὡς ἄξονα τῶν τεταγμένων. Ἄν

$MM_1 \perp x'Ox$, θά ἔχωμεν: $(ME')^2 = (E'M_1)^2 + (M_1M)^2 = [(E'O) + (OM_1)]^2 + (M_1M)^2 = (\gamma + x)^2 + y^2$ **(α)**. Ἐπίσης, $(ME)^2 = (M_1E)^2 + (M_1M)^2 = [(OE) - (OM_1)]^2 + (M_1M)^2 = (\gamma - x)^2 + y^2$ **(β)**. Δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη τῶν (α) καί (β) προκύπτει: $(ME')^2 - (ME)^2 = [(\gamma + x)^2 + y^2] - [(\gamma - x)^2 + y^2] = 4\gamma x$ ἤ $[(ME') + (ME)] \cdot [(ME') - (ME)] = 4\gamma x$, καί ἐπειδή $(ME') + (ME) = 2\alpha$, εἶναι $(ME') - (ME) = \frac{2\gamma x}{\alpha}$. Ἐργαζόμενοι ὡς καί διά τήν ὑπερβολήν καί θέτοντες $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2$, ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1} \qquad (A)$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καί πᾶν σημεῖον $M(x, y)$ ἱκανοποιοῦν τήν (A), ἱκανοποιεῖ καί τήν σχέσιν $(ME') + (ME) = 2\alpha$, καί ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Τό σύνολον λοιπόν τῶν σημείων $M(x, y)$ τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τήν (A) καλεῖται ἔλλειψις. Τά σημεῖα E καί E' καλοῦνται ἑστίαι τῆς ἐλλείψεως, ἡ δέ ἀπόστασις αὐτῶν $(E'E) = 2\gamma$ καλεῖται ἑστιακή ἀπόστασις.

Ἐκ τῆς (A) ἕπεται ὅτι: $y = \pm \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ · ἄρα θά πρέπῃ $\alpha^2 - x^2 \geqslant 0$, ἤτοι $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$. Ἑπομένως ἡ ἔλλειψις εὑρίσκεται ἐντός τῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) μέ ἐξισώσεις ἀντιστοίχως $x = \alpha$, $x = -\alpha$. Ἐπίσης, ἡ (A) λυομένη ὡς πρός x δίδει: $x = \pm \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta^2 - y^2}$ · ἄρα θά πρέπῃ $\beta^2 - y^2 \geqslant 0$, ἤτοι $-\beta \leqslant y \leqslant \beta$. Ἑπομένως ἡ ἔλλειψις εὑρίσκεται ἐντός τῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν (ε_3), (ε_4) ἐξισώσεων $y = \beta$, $y = -\beta$ ἀντιστοίχως.

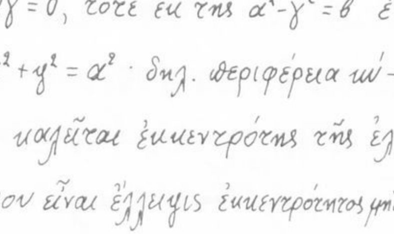
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἡ ἔλλειψις εὑρίσκεται ἐντός τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΖΗ, τό ὁποῖον καλεῖται ὀρθογώνιον περιγεγραμμένον περί τήν ἔλλειψιν, καί ἄρα δέν ἔχει αὕτη σημεῖα εἰς τό ἄπειρον.

Διαπιστοῦμεν ἐπίσης ὅτι τέμνει τόν ἄξονα τῶν x εἰς τά σημεῖα $A(\alpha,0)$, $A'(-\alpha,0)$ καί τόν ἄξονα τῶν y εἰς τά $B(0,\beta)$, $B'(0,-\beta)$.

Ἐπίσης, ὡς καί ἡ ὑπερβολή, ἡ ἔλλειψις εἶναι συμμετρική ὡς πρός τούς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, καθώς καί ὡς πρός τήν ἀρχήν O τῶν ἀξόνων.

Τό εὐθ. τμ. AA' λέγεται **μέγας ἄξων** τῆς ἐλλείψεως καί τό BB' **ἐλάσσων ἄξων** αὐτῆς. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $(BE)=(BE')=\alpha$. Ἄν $E\equiv E'$, ἤτοι $(EE')=2\gamma=0$, τότε ἐκ τῆς $\alpha^2-\gamma^2=\beta^2$ ἕπεται $\alpha^2=\beta^2$. Ὁπότε ἡ (A) γίνεται $x^2+y^2=\alpha^2$· δηλ. περιφέρεια κύκλου ἀκτῖνος α. Ὁ λόγος $\frac{\gamma}{\alpha}=\varepsilon<1$ καλεῖται ἐκκεντρότης τῆς ἐλλείψεως· ἑπομένως ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ἔλλειψις ἐκκεντρότητος μηδέν.

§ 4. **Χάραξις ἐλλείψεως**: Ἔστωσαν (σχ. 6) E, E' αἱ ἑστίαι ἐλλείψεως καί αἱ κορυφαί αὐτῆς A, A' (δηλ. τά σημεῖα τομῆς τῆς ἐλλείψεως μετά τῆς εὐθείας EE' εἶναι προφανῶς $EA=E'A'$). Διά νά χαράξωμεν ταύτην λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον P τοῦ εὐθ.

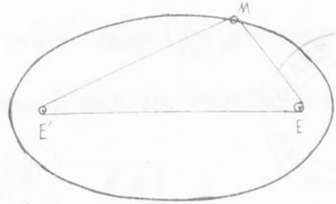


Σχ. 6.

τμ. $E'E$ καί ἀκολούθως γράφομεν τάς περιφερείας $(E, EM=PA)$, $(E', E'M_1=PA)$

αἵτινες τέμνονται ἀντιστοίχως ὑπό τῶν (Ε', Ε'Μ = ΡΑ'), (Ε, $ΕΜ_1$ = ΡΑ'), εἰς τά σημεῖα Μ καί $Μ_1$ ἀντιστοίχως, καθώς καί εἰς τά συμμετρικά αὐτῶν Μ', $Μ'_1$ ὡς πρός τήν εὐθεῖαν Ε'Ε. Οὕτως εὑρίσκομεν τέσσαρα σημεῖα τῆς ἐλλείψεως. Κατ' αὐτόν λοιπόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν ὅσα σημεῖα θέλομεν. Ἐπίσης, αἱ περιφέρειαι (Ε, ΕΒ = ΟΑ), (Ε', Ε'Β = ΟΑ'), ἔνθα ΟΑ = ΟΑ', τεμνόμεναι θά δώσουν τάς ἄλλας δύο κορυφάς τῆς ἐλλείψεως Β καί Β'.

Διά συνεχοῦς γραμμῆς χαράσσομεν ταύτην εἰς τό ἔδαφος ὡς ἑξῆς: Κλειστόν νῆμα Ε'ΜΕΕ' μήκους 2α+2γ περιβάλλει τούς πασσαλίσκους Ε', Ε (ἑστίαι τῆς ἐλλείψεως). Κατόπιν τείνομεν αὐτό δι' αἰχμηρᾶς ράβδου Μ,

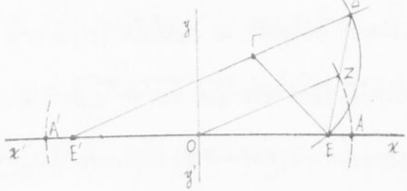


Σχ. 7.

ἥτις περιστρεφομένη περί τούς δύο πασσαλίσκους γράφει ἔλλειψιν(7).

Ἄσκησις 1: Νά χαραχθῇ ἔλλειψις, ὅταν δίδωνται αἱ ἑστίαι αὐτῆς Ε καί Ε' καί ἕν σημεῖόν της Γ, μή κείμενον ἐπί τῶν ἀξόνων (σχ. 8).

Λύσις: Ἡ περιφέρεια (Γ, ΓΕ) θά τάμῃ τήν προέκτασιν τῆς Ε'Γ εἰς τό Δ, ὁπότε (Ε'Δ) = (Ε'Γ)+(ΓΔ)



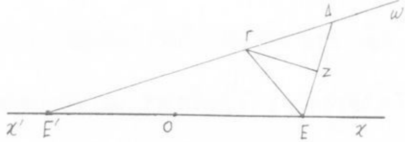
Σχ. 8.

= (Ε'Γ) + (ΓΕ) = 2α. Ἄν ΟΕ' = ΟΕ καί ΖΕ = ΖΔ, τότε (ΟΖ) = (Ε'Δ) : 2 = 2α : 2 = α. Ἡ (Ο, ΟΖ) θά τάμῃ τήν x'x εἰς τά σημεῖα Α καί Α'. Ἄρα τό εὐθ. τμῆμα

ΑΑ' εἶναι ὁ μέγας ἄξων τῆς ἐλλείψεως. Κατά τά γνωστά ἐκτελεῖται ἡ χάραξις.

Ἄσκησις 2: Νά χαραχθῇ ἔλλειψις, ὅταν δίδωνται αἱ ἑστίαι αὐτῆς Ε καί Ε', ὡς καί τό 2α (σχ. 9).

Λύσις: Προφανῶς θά πρέπῃ νά εἶναι (ΕΕ') < 2α. Ἐπί τυχούσης ἡμιευθείας Ε'ω λαμβάνομεν εὐθ.

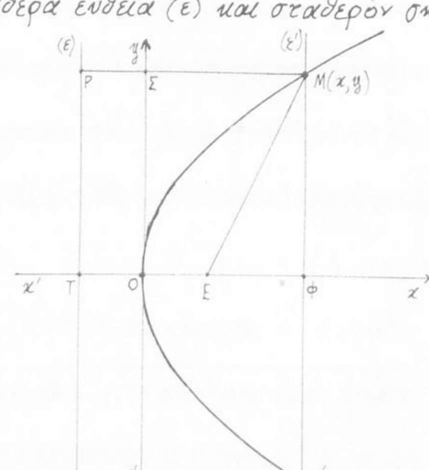


Σχ. 9.

τμῆμα Ε'Δ τοιοῦτον, ὥστε (Ε'Δ) = 2α. Ἐάν Γ εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῆς Ε'ω μετά τῆς μεσοκαθέτου ΖΓ τοῦ εὐθ. τμ. ΕΖ, τότε τό Γ εἶναι σημεῖον τῆς ζητουμένης ἐλλείψεως· διότι (ΓΕ') + (ΓΕ) = (ΓΕ') + (ΓΔ) = (Ε'Δ) = 2α. Οὕτω δέ μεταπίπτομεν εἰς τήν ἄσκησιν 1.

γ') Ἡ παραβολή.

§5. Δίδονται ἐπί ἐπιπέδου σταθερά εὐθεῖα (ε) καί σταθερόν σημεῖον Ε∉(ε) (σχ. 10). Φέρομεν ἐκ τοῦ Ε τήν x'x ⊥ (ε)· ἔστω ὅτι αἱ (ε), x'x τέμνονται εἰς τό Τ. Ἐπίσης, τυχοῦσα εὐθεῖα (ε') ⊥ x'x τέμνει τήν x'x εἰς τό Φ. Ἐάν ἡ περιφέρ. (Ε, ΕΜ = ΤΦ) τέμνῃ τήν (ε') εἰς τό Μ, ἄς ζητήσωμεν τόν γ.τ. τοῦ Μ. Ἄν ΜΡ ⊥ (ε) καί ἐπειδή ΜΡ = ΦΤ = ΜΕ, τό πρόβλημα τίθεται



Σχ. 10.

οὕτω: Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Μ τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπό τήν εὐθεῖαν (ε) καί τό σημεῖον Ε.

Λαμβάνομεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων τάς εὐθείας x'Ox (τῶν τετμημένων) καί y'Oy (τῶν τεταγμένων) μέ ἀρχήν τό Ο, ἔνθα ΟΤ=ΟΕ. Ἐάν καλέσωμεν τό (ΕΤ) = ν, τότε ἔχομεν διά τό Μ(x,y): $(ME)^2 = (E\Phi)^2 + (\Phi M)^2 = [(O\Phi)-(OE)]^2 + (\Phi M)^2 = (x - \frac{\nu}{2})^2 + y^2$ **(α)**. Ἐπίσης, (ΜΡ)= (ΜΣ) + (ΣΡ) = (ΦΟ) + (ΟΤ) ἤ $(MP)^2 = [(\Phi O) + (OT)]^2 = (x + \frac{\nu}{2})^2$ **(β)**. Ἐκ τῶν (α), (β), καί ἐπειδή ΜΕ = ΜΡ, ἕπεται $(x - \frac{\nu}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{\nu}{2})^2$. Καί ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\boxed{y^2 = 2\nu x} \qquad (A)$$

Ἀλλά καί πᾶν σημεῖον Μ(x,y) ἐπαληθεῦον τήν (Α), ἐπαληθεύει καί τήν σχέσιν ΜΕ = ΜΡ καί ἑπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Τό σύνολον λοιπόν τῶν σημείων Μ(x,y) τά ὁποῖα ἐπαληθεύουν τήν (Α) καλεῖται παραβολή. Ἡ εὐθεῖα (ε) καλεῖται διευθετοῦσα τῆς παραβολῆς, τό Ε ἑστία αὐτῆς καί τό ν καλεῖται ἡμιπαράμετρος τῆς παραβολῆς.

Ἡ (Α) γράφεται ἀκόμη: $y = \pm\sqrt{2\nu x}$. Καί διά νά ἔχωμεν y πραγματικά, θά πρέπῃ $2\nu x \geqslant 0$ ἤ, ἐπειδή $\nu > 0$, $x \geqslant 0$. Διά $x=0$ ἔχομεν καί $y=0$. Ἄρα τό Ο εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς καί λέγεται κορυφή αὐτῆς. Ἐπίσης, ἐπειδή ἡ (Α) ἐπαληθεύεται καί ἀπό τό σημεῖον $M(x,-y)$, ἡ παραβολή εἶναι συμμετρική ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x.

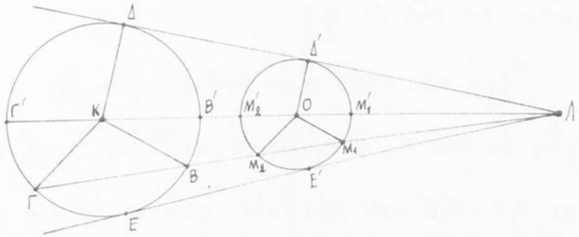
§6. Χάραξις παραβολῆς: Προλογίζοντες διά τήν παραβολήν εὕρομεν ὅτι ἡ περιφ. (Ε, ΕΜ = ΤΦ) τέμνει τήν τυχοῦσαν (ε') εἰς τά Μ καί Μ', τά ὁποῖα εἶναι σημεῖα τῆς παραβολῆς. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν ὅσα σημεῖα αὐτῆς θέλομεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΙΝΕΣ ΤΟΠΟΙ.

§7. Α΄.1. Δίδονται (σχ. 11) περιφέρεια (Κ, R) καί σημεῖον Λ ἐκτός τοῦ κλειστοῦ κύκλου (Κ). Φέρομεν ἐκ τοῦ Λ τυχοῦσαν τέμνουσαν ΛΒΓ τήν περιφέρειαν εἰς τά σημεῖα Β καί Γ. Ἐάν M_1 εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθ. τμ. ΛΒ καί M_2 τό μέσον τοῦ ΛΓ, θά εὕρωμεν τόν γ. τ. τῶν M_1 καί M_2.

Λύσις: Ἄν ΟΚ = ΟΛ, καί ἐπειδή $M_1B = M_1\Lambda$, ἕπεται ὅτι $(OM_1) = \frac{(KB)}{2} = \frac{R}{2}$. Ἄρα τό M_1 κεῖται ἐπί γνωστῆς περιφερείας $(O, \frac{R}{2})$. Ἐπίσης, ἐπειδή καί $M_2\Gamma = M_2\Lambda$ καί τό M_2 κεῖται ἐπί τῆς



Σχ. 11.

περιφερείας $(O, \frac{R}{2})$. Ἀλλά καί ὅταν ἡ ἐκ τοῦ Λ τέμνουσα διέλθῃ ἐκ τοῦ Κ, ἀποδεικνύεται(8) ὅτι τά M_1' καί M_2', διά τά ὁποῖα εἶναι $M_1'\Lambda = M_1'B'$ καί $M_2'\Lambda = M_2'\Gamma'$, κεῖνται ἐπί τῆς περιφ. $(O, \frac{R}{2})$.

Ἄς φέρωμεν τώρα τήν ἐφαπτομένην ΛΔ τῆς (Κ, R)· αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη καί τῆς $(O, \frac{R}{2})$. Διότι, ἄν $O\Delta' \perp \Lambda\Delta \rightsquigarrow (O\Delta') = \frac{(K\Delta)}{2} = \frac{R}{2}$.

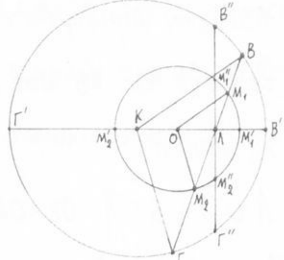
Τό M_1 λοιπόν κινεῖται ἐπί τοῦ τόξου $E'M_1\Delta'$ καί τό M_2 ἐπί τοῦ $\widehat{E'M_2\Delta'}$.

Καί ἀντιστρόφως, διά πᾶν $M_1 \in \widehat{E'M_1\Delta'}$ καί $M_2 \in \widehat{E'M_2\Delta'}$ ἔχομεν ἀντιστοίχως $M_1B = M_1\Lambda$ καί $M_2\Gamma = M_2\Lambda$ (ὅρα βιβλίον Ι, πρόβλ. VII, § 52 ἀντιστρ.).

Ἐπομένως ὁ τόπος τοῦ M_1 εἶναι τό τόξον $E'M_1\Delta'$ καί τοῦ M_2 τό $\widehat{E'M_2\Delta'}$.

§8. Α΄.2. Δίδονται (σχ. 12) περιφ. (K, R) καί σημεῖον Λ ἐντός τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (K). Φέρομεν ἐκ τοῦ Λ τυχοῦσαν χορδήν ΒΛΓ. Ἐάν $M_1B = M_1\Lambda$ καί $M_2\Gamma = M_2\Lambda$, θά εὕρωμεν τόν γ. τ. τῶν M_1 καί M_2.

Λύσις: Ἄν ΟΚ = ΟΛ, καί ἐπειδή $M_1B = M_1\Lambda$, ἕπεται ὅτι $(OM_1) = \frac{(KB)}{2} = \frac{R}{2}$. Ἄρα τό M_1 κεῖται ἐπί γνωστῆς περιφερείας $(O, \frac{R}{2})$. Ἐπίσης, ἐπειδή καί $M_2\Gamma = M_2\Lambda$ καί τό M_2 κεῖται ἐπί τῆς $(O, \frac{R}{2})$.



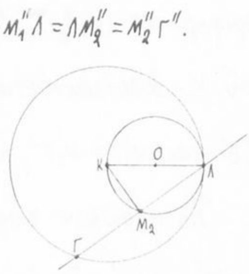
Σχ. 12.

Ἀλλά καί ὅταν ἡ ἐκ τοῦ Λ χορδή διέλθῃ ἐκ τοῦ Κ, ἀποδεικνύεται[9] ὅτι τά M_1' καί M_2', διά τά ὁποῖα εἶναι $M_1'\Lambda = M_1'B'$ καί $M_2'\Lambda = M_2'\Gamma'$, κεῖνται ἐπί τῆς περιφ. $(O, \frac{R}{2})$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον.

Εἰδικῶς, ὅταν ἡ $B''\Lambda\Gamma'' \perp K\Lambda$, τότε εἶναι $B''M_1'' = M_1''\Lambda = \Lambda M_2'' = M_2''\Gamma''$.

§9. Α΄.3. Δίδονται (σχ. 13) περιφέρεια (K, R) καί σημεῖον Λ ἐπί τῆς περιφερείας. Φέρομεν ἐκ τοῦ Λ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΛΓ. Ἐάν $M_2\Gamma = M_2\Lambda$, θά εὕρωμεν τόν γ.τ. τοῦ M_2.



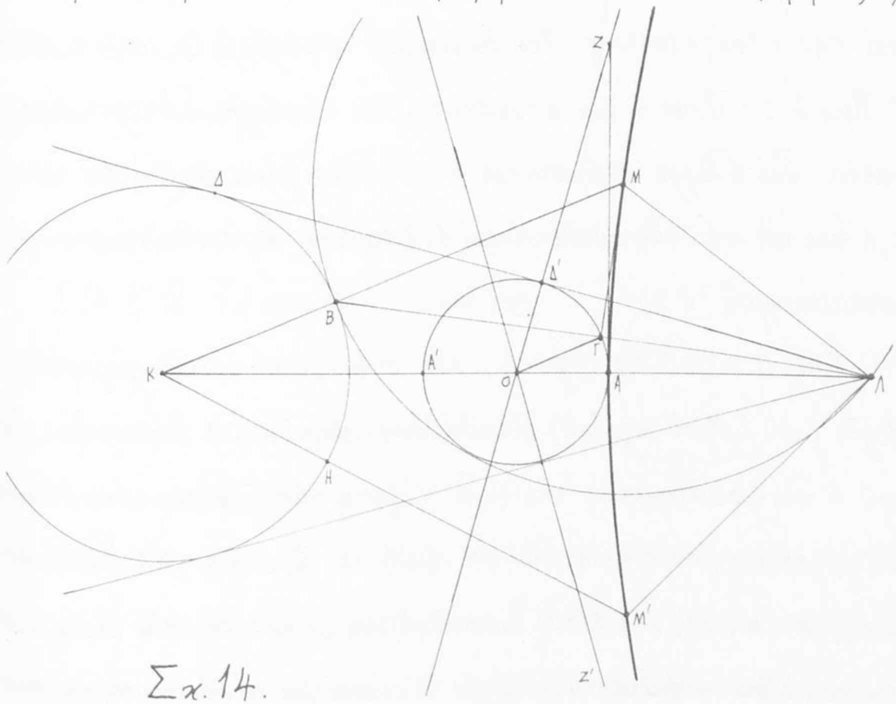
Σχ. 13.

Λύσις: Ἐπειδή εἶναι $K\widehat{M_2}\Lambda = 1$ ὀρθ., ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ σημείου M_2 εἶναι ἡ περιφέρ. $(O, \frac{R}{2})$, ἔνθα εἶναι ΚΟ = ΟΛ.

§10. Β΄. Δίδονται περιφ. (Κ,R) καί σημεῖον Λ. Θά εὕρωμεν τόν γ.τ. τῶν κέντρων Μ τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (Κ,R).

§11. Β΄.1. Τό σημεῖον Λ εἶναι ἐκτός τοῦ κλειστοῦ κύκλου (Κ,R).

§12. Β΄.1.α΄. Ἡ ἀκτίς ΚΒ (σχ. 14) καί ἡ μεσοκάθετος ΓΜ τοῦ εὐθ. τμ. ΛΒ τέμνονται εἰς τό Μ. Γράφομεν κατόπιν τήν περιφέρ. (Μ,ΜΛ).



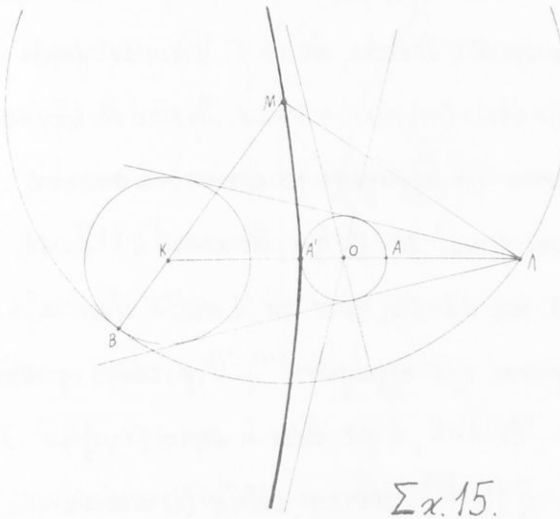
Σχ. 14.

Ἡ (Μ,ΜΛ), ὡς κατεσκευάσθη, διέρχεται ἐκ τοῦ Λ καί ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ,R). Ἄρα τό Μ εἶναι ἕν (τυχόν) σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου καί ἔχομεν δι' αὐτό(10): (ΜΚ) − (ΜΛ) = (ΚΒ) = R = 2α (σταθερόν). Ἑπομένως τό Μ κεῖται ἐπί ὑπερβολῆς(10) μέ ἑστίας τά σημεῖα Κ καί Λ.

Κατασκευή: Ἄν ΟΚ=ΟΛ, ἐπειδή καί ΒΓ=ΓΛ, ἕπεται ὅτι ἡ (Ο,ΟΓ) ἐφάπτεται τῆς ΛΔ, ἥτις εἶναι ἐφαπτομένη τῆς (Κ,R)· καί ὅτι (ΟΓ) $=(O\Delta') = \frac{R}{2}$ (§ 7). Τά σημεῖα τομῆς Α, Α' τῆς ΚΛ μετά τῆς (Ο,ΟΓ) εἶναι αἱ κορυφαί τῆς ὑπερβολῆς, διότι $(OA)=(OA')=\frac{R}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. Ἄν $AZ \perp K\Lambda$, ἔνθα Ζ ἡ τομή τῶν ΟΔ' καί ΑΖ, τότε ἔχομεν ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΔ'Λ καί ΟΑΖ : $(OZ)=(O\Lambda)=\gamma$ (ὅρα θεωρίαν περί ὑπερβολῆς § 1), $(OA)=\alpha$, $(AZ)=\beta$. Ἄρα ἡ ΟΖ εἶναι ἡ μία ἀσύμπτωτος τῆς ὑπερβολῆς. Εὐκόλως εὑρίσκεται καί ἡ ἄλλη ἀσύμπτωτος ἡ ΟΖ'. Γνωρίζομεν λοιπόν τάς ἑστίας Κ, Λ καί τάς κορυφάς αὐτῆς Α' καί Α. Ἑπομένως δυνάμεθα νά τήν κατασκευάσωμεν (§ 2).

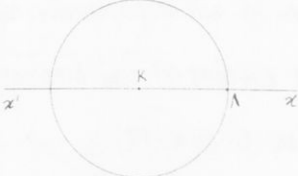
Καί ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον Μ' τῆς ἐν λόγῳ ὑπερβολῆς (τοῦ δεξιοῦ κλάδου) εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένης τῆς (Κ,R) (ἐξωτερικῶς). Διότι, $(M'K)-(M'\Lambda)=R$ ἤ $(M'H)+(HK)-(M'\Lambda)=R$ ἤ $(M'H)+R-(M'\Lambda)=R$, ἄρα $M'H=M'\Lambda$. Καί ἡ περιφέρεια $(M', M'\Lambda)$ διέρχεται ἐκ τοῦ Λ καί ἐφάπτεται τῆς (Κ,R) ἐξωτερικῶς, διότι ἡ διάκεντρος αὐτῶν Μ'Κ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των. Ἄρα ὁ τόπος εἶναι ὁ δεξιός κλάδος τῆς ἀνωτέρω ὑπερβολῆς.

§ 13. Β'.1.β'. Ἄς ζητήσωμεν τώρα τόν γεωμετρικόν τόπον τῶν κέντρων Μ τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένων τῆς (K,R) ἐσωτερικῶς. Προφανῶς ΜΛ>ΜΚ. Ἄρα (ΜΛ)-(ΜΚ)=(ΚΒ)=R =2α (σταθερόν). Ἑπομένως τά σημεῖα Μ κεῖνται ἐπί τοῦ ἄλλου κλάδου τῆς προηγουμένης ὑπερβολῆς. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον (σχ. 15).



Σχ. 15.

§14. Β'.2. Τό σημεῖον Λ εἶναι ἐπί τῆς περιφερείας (Κ) (σχ. 16).

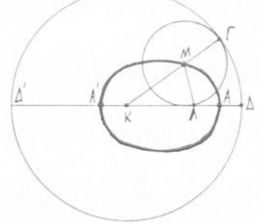


Σχ. 16.

Προφανῶς ὁ γ.τ. εἶναι ἡ εὐθεῖα xx' πλήν τῶν σημείων αὐτῆς Κ καί Λ. Πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Λx εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένης ἐξωτερικῶς τῆς (Κ). Ἐπίσης, πᾶν σημεῖον Μ τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Λx', πλήν τοῦ σημείου Κ, εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένης ἐσωτερικῶς τῆς (Κ).

§15. Β'.3. Τό σημεῖον Λ εἶναι ἐντός τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου κέντρου Κ καί ἀκτῖνος R (σχ. 17).

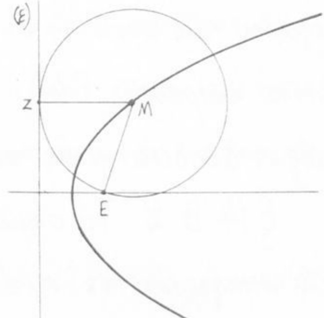
Ἔστω περιφέρεια (Μ) διερχομένη ἐκ τοῦ Λ καί ἐφαπτομένη τῆς (Κ), ἐσωτερικῶς βεβαίως, εἰς τό Γ. Ἔχομεν: (ΜΚ)+(ΜΛ) = (ΜΚ)+(ΜΓ) = (ΚΓ) = $R = 2\alpha$. Ἄρα τό Μ εὑρίσκεται ἐπί ἐλλείψεως μέ ἑστίας τά σημεῖα Κ καί Λ καί $2\alpha = R$ (§ Η, ἄσκησις 2). Ἄν ΑΛ = ΑΔ καί Α'Λ = Α'Δ', τότε τά Α καί Α' εἶναι αἱ κορυφαί τῆς ἐλλείψεως[11]. Ὁ γ. τόπος λοιπόν εἶναι ἡ ἐν λόγῳ ἔλλειψις.



Σχ. 17.

Ἄν Λ≡Κ, ὁ γ.τ. εἶναι ἡ περιφ. $(K, \frac{R}{2})$.

§16. Γ'. Δίδονται εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον $E \notin (\varepsilon)$, καί ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν κέντρων Μ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Ε (σχ. 18).



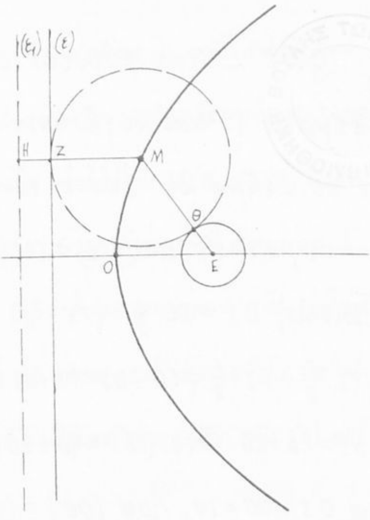
Σχ. 18.

Λύσις: Ἔστω μία τοιαύτη περιφέρεια (Μ) ἐφαπτομένη τῆς (ε) εἰς τό Ζ καί διερχομένη ἐκ τοῦ Ε. Ἐπειδή $MZ \perp (\varepsilon)$ καί ΜΖ = ΜΕ τό Μ κεῖται ἐπί παραβολῆς διευθετούσης (ε) καί ἑστίας Ε (§ 5). Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καί τό ἀντίστροφον. Ἄρα ὁ τόπος εἶναι ἡ ἐν λόγῳ παραβολή.

§17. Δ'. Δίδονται εὐθεῖα (ε) καί περιφέρεια (Ε, R). Ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν κέντρων Μ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφερείας (Ε, R).

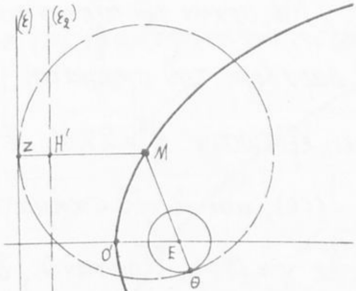
§18. Δ΄.1. Ἔστω ὅτι $(\varepsilon)\cap(E)=\emptyset$.

§19. Δ΄.1.α΄. Ἔστω περιφέρεια (Μ) ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας (ε) εἰς τό Ζ καί τῆς περιφερείας (Ε) εἰς τό Θ ἐξωτερικῶς (σχ. 19). Ἐάν $(\varepsilon_1)//(\varepsilon)$ καί (ΖΗ)=(ΘΕ)=R, τότε ἡ περιφέρεια (Μ, ΜΗ=ΜΕ) ἐφάπτεται τῆς (ε_1) καί διέρχεται ἐκ τοῦ Ε. Ἑπομένως μεταπίπτομεν εἰς τήν Γ΄ περίπτωσιν (§16). Ἡ διευθετοῦσα εἶναι ἡ (ε_1)



Σχ. 19.

§20. Δ΄.1.β΄. Ἐάν ἡ περιφέρεια (Μ) ἐφάπτεται τῆς (ε) εἰς τό Ζ καί τῆς περιφερείας (Ε) εἰς τό Θ ἀλλ' ἐσωτερικῶς (σχ. 20), τότε φέρομεν τήν $(\varepsilon_2)//(\varepsilon)$ ὥστε (ΖΗ')=(ΘΕ)=R· ὁπότε ἡ (Μ, ΜΗ'=ΜΕ) ἐφάπτεται τῆς (ε_2) καί διέρχεται ἐκ τοῦ Ε. Μεταπίπτομεν λοιπόν εἰς τήν Γ΄ περίπτωσιν (§16). Ἡ διευθετοῦσα ἐνταῦθα εἶναι ἡ εὐθεία (ε_2).



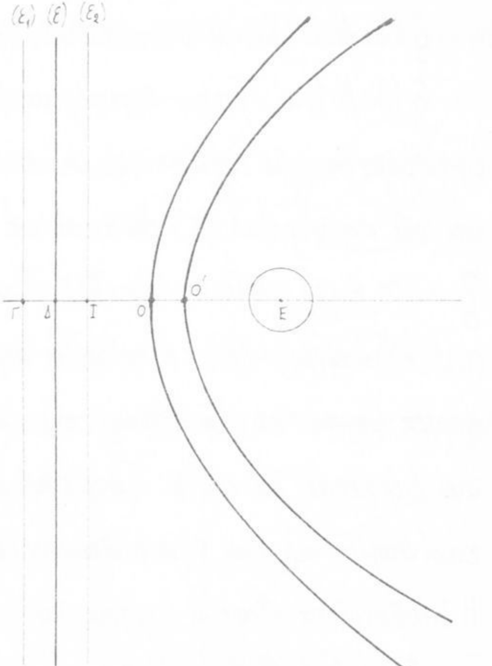
Σχ. 20.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ἐκ τῶν §§ 19, 20 ὅτι ὁ γ.τ. εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο παραβολῶν.

§21. Συγχωνεύοντες τά σχήματα 19 καί 20, ἔχομεν τότε τό σχῆμα 21· ὁπότε εἶναι:

ΟΓ = ΟΕ, Ο'Ι = Ο'Ε καί (ΓΔ) = (ΔΙ) = R.

Ἐπίσης, $Ο'Ι = ΙΕ \cdot \frac{1}{2} = (ΓΕ - ΓΙ)\cdot\frac{1}{2} = ΓΕ\cdot\frac{1}{2} - ΓΙ\cdot\frac{1}{2} = ΓΟ - ΔΙ = ΓΔ + ΔΙ + ΙΟ - ΔΙ = ΓΔ + ΙΟ$· ἤτοι $Ο'Ι = ΓΔ + ΙΟ$, ἀλλά $Ο'Ι = ΟΟ' + ΙΟ$. Ἄρα $(ΟΟ') = (ΓΔ) = R$.

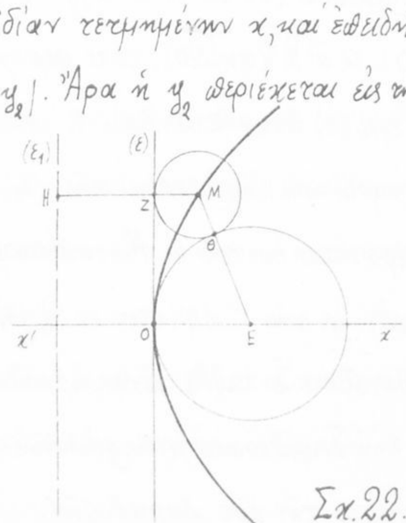


Σχ.21.

Μέ ἀρχήν τῶν ἀξόνων τό Ο ἡ παραβολή τοῦ σχήματος 19 ἔχει ἐξίσωσιν $y_1^2 = 2\nu_1 x_1$, ἔνθα $\nu_1 = (ΓΕ)$, καί ἡ τοῦ σχήματος 20 ἔχει τοιαύτην τήν $y_2^2 = 2\nu_2(x_2 - R)$, ἔνθα $\nu_2 = (ΙΕ)$. Προφανῶς, διά τήν ἰδίαν τετμημένην x, καί ἐπειδή $\nu_1 > \nu_2$ καί $x > x - R$, ἔχομεν $|y_1| > |y_2|$. Ἄρα ἡ y_2 περιέχεται εἰς τήν y_1.

§22. Δ'.2. Ἡ εὐθεῖα (ε) ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Ε) (σχ.22).

Ἐργαζόμενοι ὡς καί προηγουμένως καταλήγομεν ὅτι ὁ γ.τ. εἶναι ἡ παραβολή μέ διευθετοῦσαν

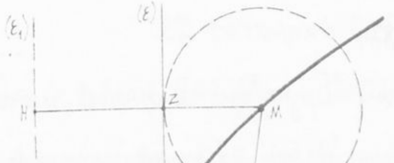


Σχ.22.

τήν (ε_1) καί ἑστίαν τό σημεῖον Ε, πλήν τῆς κορυφῆς τῆς παραβολῆς, ἥτις εἶναι τό σημεῖον Ο· εἶναι δέ τοῦτο τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας (Ε) καί τῆς εὐθείας (ε). Ὡς ἐπίσης καί ἡ εὐθεῖα $x'x$ πλήν τῶν σημείων αὐτῆς Ο καί Ε. Ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Ox, πλήν τοῦ σημείου Ε, εἶναι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (Ε), ἀλλ' ἐσωτερικῶς. Ἡ δέ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Ox' εἶναι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) καί τῆς (Ε), ἀλλ' ἐξωτερικῶς (ὅρα §14).

§23. Δ'.3. Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τήν περιφέρειαν (Ε).

§24. Δ'.3.α'. Ἔστω (σχ. 23) περιφέρεια (Μ) ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας (ε) εἰς τό Ζ καί τῆς περιφ. (Ε) εἰς τό Θ ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς. Ἐργαζόμενοι καί ἐνταῦθα ὡς ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τό νά γράψωμεν παραβολήν μέ διευθετοῦσαν τήν (ε_1) καί ἑστίαν τό Ε. Προφανῶς τά σημεῖα τομῆς M_1 καί M_2 τῆς (ε) μετά τῆς (Ε) εἶναι σημεῖα τῆς ἐν λόγῳ παραβολῆς· καί ἡ κορυφή αὐτῆς Ο εἶναι τό μέσον τοῦ ΝΔ, διότι ΓΔ = ΝΕ ἤ ΓΟ + ΟΔ = ΕΟ + ΟΝ, καί ἐπειδή ΓΟ = ΕΟ, εἶναι ΟΔ = ΟΝ.

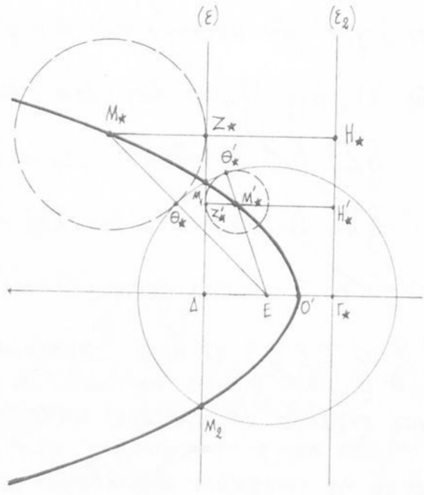


Σχ.23.

Ἔστω ἐπίσης (σχ. 23) περιφέρεια (M') ἐφαπτομένη τῆς (ε) εἰς τό Z' καί τῆς (E) εἰς τό Θ' *ἐσωτερικῶς*. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καταλήγομεν ὅτι $Z'H' = \Theta'E$ ἤ $Z'M' + M'H' = \Theta'M' + M'E$ ἤ $M'H' = M'E$ · ἄρα τό M ἀνήκει εἰς παραβολήν μέ διευθετοῦσαν τήν εὐθεῖαν (ε_1) καί ἑστίαν τό E. Εἶναι δηλ. τμῆμα τῆς ἀνωτέρω παραβολῆς.

§25. Δ'.3.β'. Ἔστω πάλιν (σχ. 24) περιφέρεια ($M_\star$) ἐφαπτομένη τῆς (ε) εἰς τό $Z_\star$ καί τῆς (E) εἰς τό $\Theta_\star$ *ἐξωτερικῶς*, ἀλλ' εὑρισκομένη εἰς τό ἕτερον ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρός τάς (ε) καί (M) τοῦ σχήματος 23.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καταλήγομεν εἰς τό νά γράψωμεν παραβολήν μέ διευθετοῦσαν τήν (ε_2) καί ἑστίαν τό E.



Σχ. 24.

Ἔστω ἐπίσης περιφέρεια ($M'_\star$) (σχ. 24), ἐφαπτομένη τῆς (ε) εἰς τό $Z'_\star$ καί τῆς (E) εἰς τό $\Theta'_\star$ *ἐσωτερικῶς*. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως συμπεραίνομεν ὅτι τό $M'_\star$ ἀνήκει εἰς παραβολήν μέ διευθετοῦσαν τήν εὐθεῖαν (ε_2) καί ἑστίαν τό E. Εἶναι δηλ. τμῆμα τῆς ἀνωτέρω παραβολῆς.

Ὥστε ἡ ἕνωσις τῶν δύο παραβολῶν τῶν σχημάτων 23 καί

24, πλήν τῶν σημείων M_1 καί M_2, εἶναι ὁ γ.τ. τῶν κέντρων M τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (Ε).

Ἐάν ἡ (ε) διέρχεται ἐκ τοῦ Ε, τότε αἱ ἐν λόγῳ παραβολαί εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός τήν (ε).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΛΘ΄–ΜΔ΄ (§§177–182) ΤΟΥ ΠΡΟΒΛ. Χ ΤΟΥ Α΄ ΒΙΒΛΙΟΥ.

§26. Α΄. Δίδονται δύο περιφέρειαι (K,R_1), (K,R_2) ἐκτός ἀλλήλων, καί ζητεῖται ὁ γ.τ. τῶν Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (K,R_1), (Λ,R_2).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν περίπτωσιν ΛΘ΄ τοῦ προβλήματος Χ τοῦ πρώτου βιβλίου (§177), καί τά ἐν §§12, 13 τοῦ παρόντος, συμπεραίνομεν τά ἑξῆς:

Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων:

α΄) ἐξωτερικῶς τῶν (K,R_1) καί (K,R_2) (σχ. 25) εἶναι ὁ δεξιός[12] κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά Κ καί Λ καί μέ $2\alpha = R_1 - R_2$ (εἰς τό σχῆμα ὁ διερχόμενος ἐκ τοῦ σημείου Α).

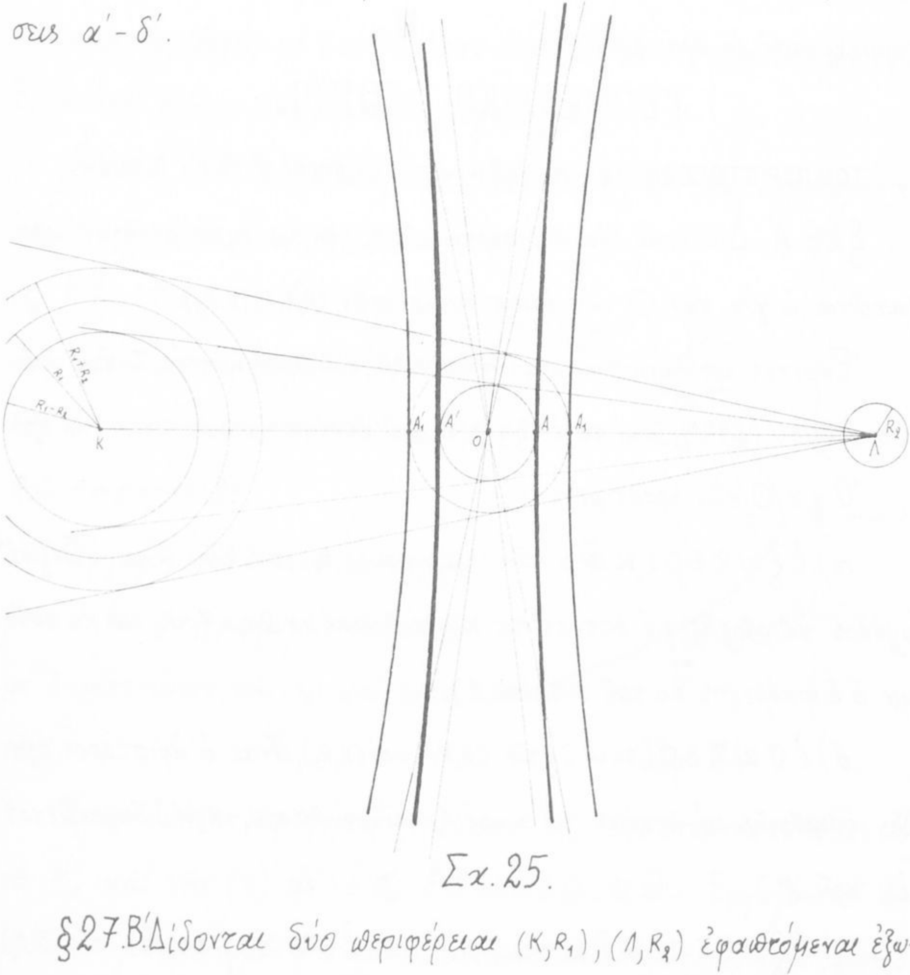
β΄) ἐσωτερικῶς τῶν (K,R_1) καί (K,R_2), εἶναι ὁ ἀριστερός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά Κ καί Λ καί μέ $2\alpha = R_1 - R_2$ (ὁ διερχόμενος ἐκ τοῦ Α΄).

γ΄) ἐξωτερικῶς τῆς (K,R_1) καί ἐσωτερικῶς τῆς (Λ,R_2), εἶναι ὁ δεξιός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά Κ, Λ καί μέ $2\alpha = R_1 + R_2$ (ὁ διερχόμενος ἐκ τοῦ A_1). Καί

δ΄) ἐσωτερικῶς τῆς (K,R_1) καί ἐξωτερικῶς τῆς

(Λ,R_2), εἶναι ὁ ἀριστερός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά Κ, Λ καί μέ $2\alpha = R_1 + R_2$ (ὁ διερχόμενος ἐκ τοῦ A_1').

Κατωτέρω παραθέτομεν τό σχῆμα δι᾽ ἁπάσας τάς περιπτώσεις α΄-δ΄.



Σχ. 25.

§27.Β΄.Δίδονται δύο περιφέρειαι (K,R_1), (Λ,R_2) ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς, καί ζητεῖται ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (K,R_1), (Λ,R_2).

Ὡς καί ἐν § 26 συμπεραίνομεν ὅτι:

Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων:

α') ἐξωτερικῶς τῶν (K, R_1), (Λ, R_2) εἶναι ὁ δεξιός[13] κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά K, Λ καί μέ $2\alpha = R_1 - R_2$.

β') ἐσωτερικῶς τῶν (K, R_1), (Λ, R_2) εἶναι ὁ ἀριστερός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά K, Λ καί μέ $2\alpha = R_1 - R_2$.

γ') ἐξωτερικῶς τῆς (K, R_1) καί ἐσωτερικῶς τῆς (Λ, R_2) εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $O\Lambda$, πλήν τοῦ σημείου Λ, ἔνθα ἡ ἀρχή O τῆς ἡμιευθείας εἶναι τό σημεῖον ἐπαφῆς τῶν (K, R_1), (Λ, R_2). Καί

δ') ἐσωτερικῶς τῆς (K, R_1) καί ἐξωτερικῶς τῆς (Λ, R_2) εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα OK, πλήν τοῦ σημείου K, ἔνθα ἡ ἀρχή O τῆς ἡμιευθείας ὡς ἐν γ'.

§28.Γ'. Δίδονται δύο περιφ. (K, R_1), (Λ, R_2) τεμνόμεναι, καί ζητεῖται ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (K, R_1), (Λ, R_2).

Ὡς καί προηγουμένως συμπεραίνομεν ὅτι:

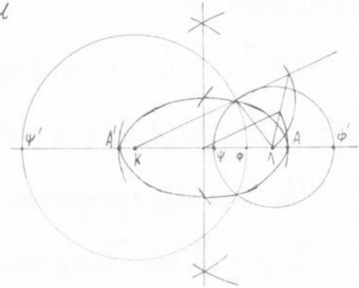
Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων:

α') ἐξωτερικῶς τῶν (K, R_1), (Λ, R_2) εἶναι ὁ δεξιός[13] κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά K, Λ καί μέ $2\alpha = R_1 - R_2$, πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος τῆς ἐν λόγῳ ὑπερβολῆς μέ ἄκρα τά σημεῖα τομῆς τῶν (K, R_1) καί (Λ, R_2). Εἶναι δέ ταῦτα σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς διότι ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεών των ἀπό τάς ἑστίας K καί Λ εἶναι ἴση μέ $R_1 - R_2 = 2\alpha$ καί κεῖνται δεξιά τῆς μεσοκαθέτου τῆς διακέντρου $K\Lambda$.

β') ἐσωτερικῶς τῶν (K, R_1), (Λ, R_2) εἶναι ὁ ἀριστερός κλάδος τῆς προαναφερθείσης ἐν α΄ ὑπερβολῆς, ὡς καί τό ἀνοικτόν τμῆμα τοῦ δεξιοῦ κλάδου τῆς ἐν λόγῳ ὑπερβολῆς, τό ὁριζόμενον ἀπό τά σημεῖα τομῆς τῶν $(Κ,R_1)$, $(Λ,R_2)$.

γ΄) ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς $(Κ,R_1)$ καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς $(Λ,R_2)$ εἶναι τό ἀνοικτόν τμῆμα ἐλλείψεως μέ ἑστίας Κ, Λ, τό εὑρισκόμενον ἐντός τῆς $(Λ,R_2)$ καί μέ $2α = R_1+R_2$· διότι (ὅρα σχ. 183, §179, α΄ βιβλίον) ἔχομεν: $(ΡΚ)+(ΡΛ) = (ΚΑ)+(ΑΡ)+(ΡΛ) = (ΚΑ)+(ΡΒ)+(ΡΛ) = (ΚΑ)+(ΛΒ) = R_1+R_2 = 2α$ (σταθερόν). Προφανῶς τά σημεῖα τομῆς τῶν $(Κ,R_1)$, $(Λ,R_2)$ εἶναι σημεῖα τῆς ἐλλείψεως. Καί βάσει τῆς ἀσκήσεως 1, §4 δυνάμεθα νά χαράξωμεν τήν ἔλλειψιν ταύτην[14]. Καί

δ΄) ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς $(Κ,R_1)$ καί ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς $(Λ,R_2)$, εἶναι τό ἀνοικτόν τμῆμα ἐλλείψεως μέ ἑστίας Κ καί Λ, τό εὑρισκόμενον ἐντός τῆς $(Κ,R_1)$, καί μέ $2α = R_1+R_2$.



Σχ. 26.

Διά τάς γ΄ καί δ΄ περιπτώσεις παραθέτομεν τό σχῆμα 26.

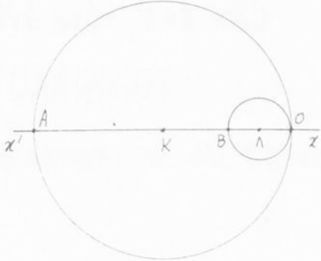
§29. Δ΄. Δίδονται δύο περιφέρειαι $(Κ,R_1)$, $(Λ,R_2)$ ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς, καί ζητεῖται ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν $(Κ,R_1)$, $(Λ,R_2)$.

Συμπεραίνομεν ὅτι:

Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων:

α΄) ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν $(Κ,R_1)$, $(Λ,R_2)$ εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Ox (σχ. 27).

β') ἐσωτερικῶς τῶν (K,R_1), (K,R_2) εἶναι ἡ ἀνοικτὴ ἡμιευθεῖα Ox', πλὴν τῶν σημείων K καὶ Λ.



Σχ. 27.

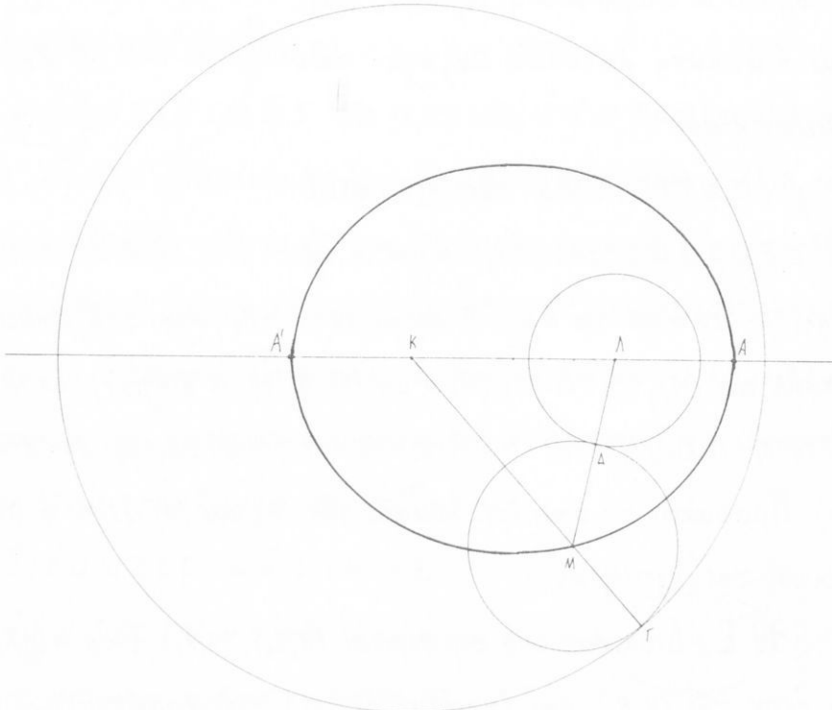
γ') ἐσωτερικῶς τῆς (K,R_1) καὶ ἐξωτερικῶς τῆς (Λ,R_2) εἶναι ἡ ἔλλειψις μὲ ἑστίας τὰ K καὶ Λ καὶ μὲ $2\alpha = R_1 + R_2$, πλὴν τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν (K), (Λ). Διότι (ὅρα σχ. 185, § 180, α' βιβλίον) ἔχομεν:
$(PK)+(P\Lambda)=(KA)-(PA)+(P\Lambda)=(KA)-(PB)+(P\Lambda)=(KA)+(\Lambda B)=R_1+R_2=2\alpha$ (σταθερόν). Προφανῶς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν (K) καὶ (Λ) εἶναι ἡ μία κορυφὴ τῆς ἐλλείψεως.

§30. Ε'. Δίδονται δύο περιφέρειαι (K,R_1), (Λ,R_2), ἔνθα ἡ (Λ,R_2) εἶναι ἐντὸς τῆς (K,R_1), καὶ ζητεῖται ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (K,R_1), (Λ,R_2).

Οὗτος εἶναι ἡ ἔλλειψις μὲ ἑστίας τὰ σημεῖα K καὶ Λ καὶ μὲ $2\alpha = R_1 + R_2$.

Ἀναλυτικώτερον, ἔστω (σχ. 28) ἡ περιφ. $(M, M\Gamma = M\Delta)$, ἐφαπτομένη τῶν $(K, K\Gamma = R_1)$, $(\Lambda, \Lambda\Delta = R_2)$ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Ἔχομεν: $(MK)+(M\Lambda)=(MK)+(M\Delta)+(\Delta\Lambda)=(MK)+(M\Gamma)+(\Delta\Lambda)=(K\Gamma)+(\Lambda\Delta)=R_1+R_2=2\alpha$ (σταθερόν). Ἑπομένως, ἔχομεν γνωστὰς τὰς ἑστίας K καὶ Λ, ὡς καὶ τὸ 2α (ὅρα ἄσκησιν 2, §4).

Ἐάν $K \equiv \Lambda$, τότε ἀντί τῆς ἐλλείψεως ἔχομεν τήν περιφ. $\left(K, \frac{R_1+R_2}{2}\right)$.



Σχ. 28.

§ 31. ΣΤ'. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης περιφερείας (K, R).

Εἶναι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (K), ἐκτός τοῦ κέντρου αὐτοῦ K.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

§32. Ὡς καί ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ γράφομεν, τό πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου τίθεται οὕτω:

Νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἐπειδή ὅμως ἕν σημεῖον δύναται νά θεωρηθῇ ὡς περιφέρεια μέ κέντρον τό σημεῖον τοῦτο καί ἀκτῖνα μηδενικήν, ὡς καί μία εὐθεῖα δύναται νά θεωρηθῇ ὡς περιφέρεια μέ ἀκτῖνα ἀπείρως μεγάλην, διά τοῦτο τό γενικόν πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἀναλύεται εἰς τά ἑξῆς δέκα προβλήματα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ τριῶν δεδομένων σημείων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II: Νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ III: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ δύο δεδομένων σημείων καί ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ δοθέντος σημείου καί ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ V: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ δύο δεδομένων σημείων καί ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ δοθέντος σημείου καί ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας καί δοθείσης εὐθείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VII: Νά γραφῇ περιφέρεια διερχομένη ἐκ δοθέντος σημείου καί ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VIII: Νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καί δοθείσης περιφερείας.

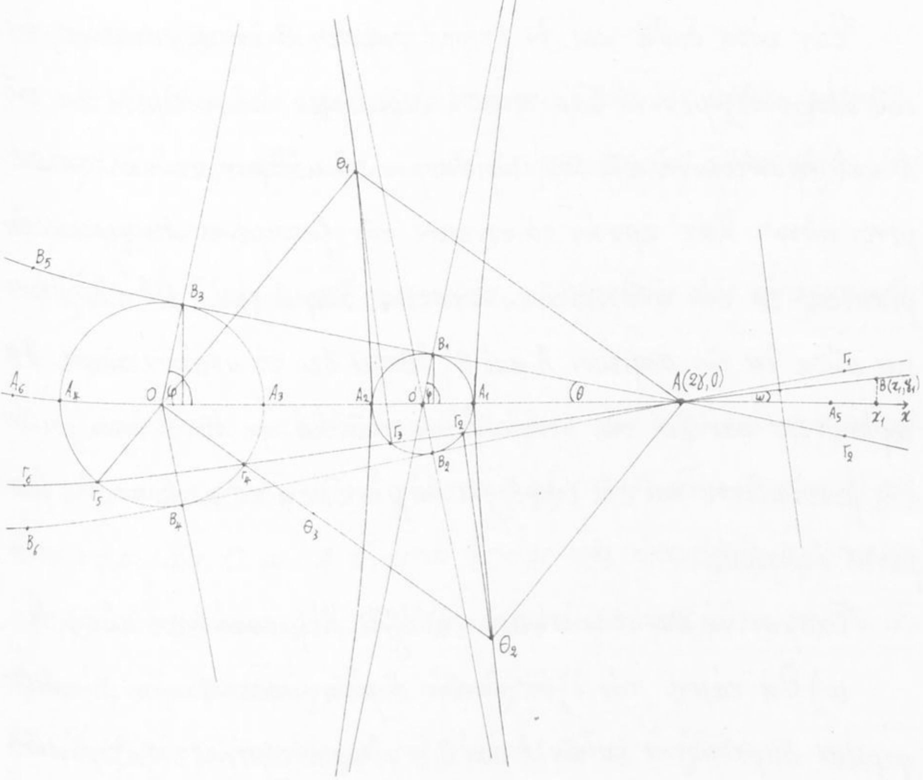
ΠΡΟΒΛΗΜΑ IX: Νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας καί δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ X: Νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

Ἕπονται αἱ λύσεις τῶν ἀνωτέρω δέκα προβλημάτων, οὐχί ὡς κατά σειράν ἐγράφησαν, ἀλλ' ὡς ἤρχοντο εἰς τόν νοῦν ὅτε ἐλύομεν ταῦτα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.

§33. **Α΄.** Τό σημεῖον Α εἶναι ἐκτός τοῦ κλειστοῦ κύκλου (Ο, R = 2α) καί τό Β ὁπουδήποτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου (Ο) (σχ. 29).



Σχ. 29.

§34. Κατά τά γνωστά (§§ 10 – 13), ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α καί ἐφαπτομένων τῆς περιφ. (Ο) εἶναι μία ὑπερβολή. Ὁ δεξιός κλάδος τῆς ἐν λόγῳ ὑπερβολῆς εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένων ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς περιφ. (Ο)· ἄς ὀνομάσωμεν τοῦτον ἐ ξ ύ κ (ἐξωτερικός ὑπερβολικός κλάδος).

Ὁ ἀριστερός κλάδος εἶναι ὁ γ.τ. Ο τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένων ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς περιφ. (Ο)· ἄς ὀνομάσωμεν τοῦτον ἐ σ ύ κ (ἐσωτερικός ὑπερβολικός κλάδος).

Ἐάν τώρα δοθῇ καί ἕν ἕτερον σημεῖον Β ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐκ τοῦ ὁποίου θέλομεν νά διέρχεται ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένη τῆς (Ο), εὑρίσκομεν τό κέντρον ταύτης σκεπτόμενοι οὕτω: Κατ᾽ ἀρχήν τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εὑρίσκεται εἰς τήν ἀναφερθεῖσαν ἀνωτέρω ὑπερβολήν. Ἐπειδή δέ διέρχεται αὕτη ἐκ τῶν σημείων Α καί Β, ἕπεται ὅτι τό κέντρον αὐτῆς θά εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμ. ΑΒ. Ἡ τομή λοιπόν τῆς μεσοκαθέτου καί τῆς ὑπερβολῆς θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν νά παρατηρήσωμεν τά ἑξῆς: Ἡ μεσοκάθετος αὕτη, ἤ

α') Θά τέμνῃ τόν ἐξύκ εἰς δύο σημεῖα, ὁπότε ἔχομεν δύο περιφερείας διερχομένας ἐκ τῶν Α καί Β καί ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς τῆς (Ο), ἤ

β') Θά τέμνῃ τόν ἐσύκ εἰς δύο σημεῖα, ὁπότε ἔχομεν δύο περιφερείας, ἀλλ᾽ ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς τῆς (Ο), ἤ

γ') Θά τέμνῃ τόν ἐξύκ εἰς ἕν σημεῖον καί τόν ἐσύκ εἰς ἕν ἕτερον σημεῖον, ὁπότε ἔχομεν δύο περιφερείας· ἡ μία ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (Ο) καί ἡ ἑτέρα ἐσωτερικῶς ἀντιστοίχως, ἤ δ') Ἡ μεσοκάθετος αὐτή θά ἐφάπτεται τοῦ ἐξύν, ὁπότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῆς (O), ἤ

ε') Θά ἐφάπτεται τοῦ ἐσύν, ὁπότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς (O), ἤ

στ') Οὐδένα τῶν κλάδων θά τάμη, ὁπότε δέν ἔχομεν λύσιν, ἤ

ζ') Θά ταὐτισθῇ μέ μίαν τῶν ἀσυμπτωτικῶν, ὁπότε πάλιν δέν ἔχομεν λύσιν.

§35. Ἄς εὕρωμεν πάντα ταῦτα τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας.

Ὑποθέτομεν τήν εὐθεῖαν OA ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων x, μέ ἀρχήν τό σημεῖον O. Κατά τά γνωστά (§§ 10-13) εἶναι: $(OO')=(O'A)=\gamma$, ἤτοι τά σημεῖα O καί A εἶναι αἱ ἑστίαι τῆς ὑπερβολῆς. Ἐπίσης, $(OB_3)=(OB_4)=R=2\alpha$ καί $(O'B_1)=(O'A_1)=(O'B_2)=(O'A_2)=\alpha$, ἤτοι τά σημεῖα A_1 καί A_2 εἶναι αἱ κορυφαί τῆς ὑπερβολῆς.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ταύτης εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\boxed{\frac{(x-\gamma)^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (1)$$

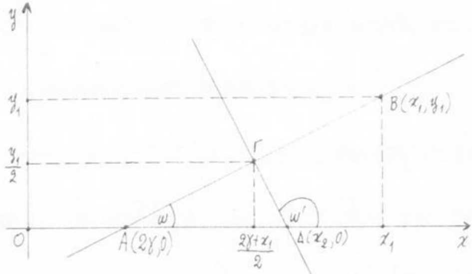
Ἄς ἐκφράσωμεν τήν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης ἐκ τῶν σημείων $A(2\gamma,0)$ καί $B(x_1,y_1)$ καί ἐν συνεχείᾳ τήν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμ. AB.

Διά τήν εὐθεῖαν AB ἔχομεν (σχ. 30):

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y_1}{x_1 - 2\gamma} \;\Big|\; x_1 \neq 2\gamma \Leftrightarrow \omega \neq \pm\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Ἐάν ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. ΑΒ τέμνῃ τόν ἄξονα τῶν x εἰς τό σημεῖον $\Delta(x_2, 0)$, ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\omega' = \frac{\frac{y_1}{2}}{\frac{2\gamma + x_1}{2} - x_2} = \frac{y_1}{2\gamma + x_1 - 2x_2} \qquad (3)$$



Σχ. 30.

Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἐπειδή αἱ ΑΒ καί ΓΔ τέμνονται καθέτως, θά ἔχωμεν: $\varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega' = -1$ ἤ $\varepsilon\varphi\omega' = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} \;\big|\; \omega \neq 0, \pm\pi$. Ἄρα ἡ (3) γίνεται: $-\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{y_1}{2\gamma + x_1 - 2x_2}$, καί λόγῳ τῆς (2) ἔπεται: $-\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{\varepsilon\varphi\omega(x_1 - 2\gamma)}{2\gamma + x_1 - 2x_2}$ ἤ ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν: $x_2 = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega(x_1 - 2\gamma) + x_1 + 2\gamma}{2}$ (4)

Ἡ ἐξίσωσις εὐθείας διερχομένης ἐκ τῶν σημείων $\Delta(x_2, 0)$ καί $\Gamma\left(\frac{2\gamma + x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ εἶναι: $\frac{y - 0}{0 - \frac{y_1}{2}} = \frac{x - x_2}{x_2 - \frac{2\gamma + x_1}{2}}$ ἤ τελικῶς $y = \frac{y_1(x_2 - x)}{2x_2 - 2\gamma - x_1}$ καί ἀντικαθιστῶντες τά y_1 καί x_2 ἐκ τῶν (2) καί (4) ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμ. ΑΒ:

$$y = \frac{-2x + x_1\varepsilon\varphi^2\omega + x_1 - 2\gamma\varepsilon\varphi^2\omega + 2\gamma}{2\varepsilon\varphi\omega}$$

ἤ θέτοντες χάριν συντομίας πράξεων $\varepsilon\varphi\omega = t$:

$$\boxed{y = \frac{-2x + t^2 x_1 + x_1 - 2\gamma t^2 + 2\gamma}{2t}} \qquad (5)$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καί (5) θά μᾶς δώσῃ τάς συντεταγμένας τῶν σημείων τομῆς τῆς ὑπερβολῆς (1) μετά τῆς μεσοκαθέτου (5).

Ἡ (5) λυομένη ὡς πρὸς x γίνεται:

$$x = \frac{t^2 x_1 + x_1 - 2\gamma t^2 + 2\gamma - 2ty}{2} \qquad (6)$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τῆς (6) εἰς τὴν (1) καὶ ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν:

$$\boxed{\begin{aligned}&(4\beta^2 t^2 - 4\alpha^2) y^2 - 2(2\beta^2 t^3 x_1 + 2\beta^2 t x_1 - 4\beta^2 \gamma t^3) y + \beta^2 t^4 x_1^2 + \beta^2 x_1^2 + \\ &4\beta^2 \gamma^2 t^4 + 2\beta^2 t^2 x_1^2 - 4\beta^2 \gamma t^4 x_1 - 4\beta^2 \gamma t^2 x_1 - 4\alpha^2 \beta^2 = 0\end{aligned}} \qquad (7)$$

ἢ καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφήν:

$$\boxed{\begin{aligned}&4(\beta^2 t^2 - \alpha^2) y^2 - 4(\beta^2 t^3 x_1 + \beta^2 t x_1 - 2\beta^2 \gamma t^3) y + \\ &\left[\beta(t^2+1) x_1 - 2\beta\gamma t^2\right]^2 - 4\alpha^2 \beta^2 = 0\end{aligned}} \qquad (7')$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (7) εἶναι:

$$\Delta(x_1) \equiv 4\alpha^2 \beta^2 (t^2+1)\left[(t^2+1) x_1^2 - 4\gamma t^2 x_1 + 4(\gamma^2 t^2 - \alpha^2)\right] \qquad (8)$$

Ἐκ τῆς (7) ἔχομεν:

$$y'_{1,2} = \frac{2\beta^2 t^3 x_1 + 2\beta^2 t x_1 - 4\beta^2 \gamma t^3 \pm \sqrt{\Delta(x_1)}}{4(\beta^2 t^2 - \alpha^2)} \qquad \text{ἢ}$$

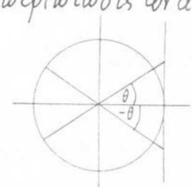
$$\boxed{y'_{1,2} = \frac{\beta^2 t^3 x_1 + \beta^2 t x_1 - 2\beta^2 \gamma t^3 \pm \alpha\beta \cdot \frac{1}{|\sigma\upsilon\nu\omega|} \sqrt{(t^2+1) x_1^2 - 4\gamma t^2 x_1 + 4(\gamma^2 t^2 - \alpha^2) \equiv \Delta_1(x_1)}}{2(\beta^2 t^2 - \alpha^2)}} \qquad (9)$$

διότι $t^2+1 = \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$.

Θὰ πρέπῃ ὅμως νὰ εἶναι $\beta^2 t^2 - \alpha^2 \neq 0$ ἢ $t^2 \neq \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ἢ $\varepsilon\varphi^2\omega \neq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$.

Ἀλλὰ εἶναι (σχ. 29): $(O'A) = \gamma$, $(O'B_1) = \alpha$ καὶ (ὅρα περίπτωσιν Β΄ § 10)

$(AB_1)=\beta$. Ἄρα $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\alpha}{\beta}$. Ὥστε ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται: $\varepsilon\varphi^2\omega\neq\varepsilon\varphi^2\theta$ ἢ $\varepsilon\varphi\omega\neq\pm\varepsilon\varphi\theta$ ἢ $\omega\neq\pm\theta$, $\omega\neq\pi-\theta$, $\omega\neq-\pi+\theta$ $(\theta>0)$ **(Π)** · δηλ. $B\notin$ (εὐθεῖα AB_3 ἢ AB_4), (ἐξετάζεται κατωτέρω ὡς εἰδική περίπτωσις ἂν ἀνάγκη).



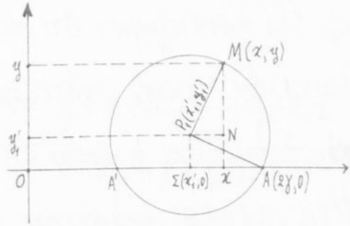
Διά νά ἔχωμεν πραγματικά y ἐκ τῆς (9), θά πρέπῃ νά ἐξετάσωμεν τό πρόσημον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος: $\Delta_1(x_1)\equiv(t^2+1)x_1^2-4\gamma t^2x_1+4(\gamma^2t^2-\alpha^2)$ **(10)**.

Σχ.31.

Δηλ. διά ποίας τιμάς τοῦ x_1 τό τριώνυμον $\Delta_1(x_1)$ εἶναι θετικόν, ἀρνητικόν ἢ μηδέν. Πρός τούτοις λαμβάνομεν τήν διακρίνουσαν $\delta_1(t)$ τοῦ τοῦ $\Delta_1(x_1)$. Ἔχομεν[15]: $\delta_1(t)\equiv(2\gamma t^2)^2-(t^2+1)(4\gamma^2t^2-4\alpha^2)=-4t^2(\gamma^2-\alpha^2)+4\alpha^2=-4\beta^2t^2+4\alpha^2$.

a) Ἄν $-4\beta^2t^2+4\alpha^2<0$, δηλ. $t^2>\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ἢ $\varepsilon\varphi^2\omega>\varepsilon\varphi^2\theta$, ἤτοι: $\theta<\omega<\pi-\theta\ \underline{\vee}\ -\pi+\theta<\omega<-\theta$, μέ $\omega\neq\pm\frac{\pi}{2}$ λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ (2), τότε τό $\Delta_1(x_1)$ εἶναι πάντοτε ὁμόσημον[16] πρός τόν συντελεστήν τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τοῦ x_1, ἤτοι πρός τόν (t^2+1) · ἔχομεν ὅμως πάντοτε: $t^2+1>0$. Ἄρα τό $\Delta_1(x_1)$ εἶναι πάντοτε θετικόν διά πᾶν x_1. Ἑπομένως ἐκ τῆς (9) ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους y_1', y_2'. Ὁπότε ἐκ τῆς (6) εὑρίσκομεν καί τάς τετμημένας x_1', x_2' τῶν κέντρων τῶν ζητουμένων περιφερειῶν. Ὥστε τά σημεῖα $P_1(x_1',y_1')$ καί $P_2(x_2',y_2')$ εἶναι τά κέντρα τῶν ζητουμένων περιφερειῶν αἵτινες διέρχονται ἐκ τῶν σημείων A καί B καί ἐφάπτονται τῆς περιφ. (O).

Ἂς ἐκφράσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιφερείας $P_1(x_1', y_1')$ τῆς διερχομένης ἐκ τοῦ $A(2\gamma, 0)$ (σχ. 32) καὶ ἐφαπτομένης τῆς (O). Ἔχομεν: $(P_1N)^2 + (NM)^2 = (P_1M)^2 = (P_1A)^2 = (\Sigma A)^2 + (\Sigma P_1)^2$ ἤτοι $(P_1N)^2 + (NM)^2 = (\Sigma A)^2 + (\Sigma P_1)^2$ ἢ



Σχ. 32.

$$(x - x_1')^2 + (y - y_1')^2 = (2\gamma - x_1')^2 + y_1'^2$$

Ὁμοίως ἔχομεν καὶ διὰ τὴν $P_2(x_2', y_2')$:

$$(x - x_2')^2 + (y - y_2')^2 = (2\gamma - x_2')^2 + y_2'^2$$

Σημείωσις: Θέτοντες ὅπου $y = 0$, εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τομῆς τῆς περιφ. (P_1) μετὰ τοῦ ἄξονος Ox. Οὕτως εὑρίσκομεν: $A(2\gamma, 0)$ (γνωστόν) καὶ $A'(-2\gamma + 2x_1', 0)$.

Ἐν συνεχείᾳ θὰ ζητήσωμεν, εἰς ποίους κλάδους τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκονται τὰ σημεῖα P_1, P_2.

Ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (5) εἰς τὴν (1) καὶ ἐκτελέσωμεν πράξεις θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) \equiv{}& (4\beta^2t^2 - 4\alpha^2)x^2 + (-8\beta^2\gamma t^2 + 4\alpha^2t^2x_1 + 4\alpha^2x_1 - 8\alpha^2\gamma t^2 + 8\alpha^2\gamma)x + \\ &+ 4\beta^2\gamma^2t^2 - \alpha^2t^4x_1^2 - \alpha^2x_1^2 - 4\alpha^2\gamma^2t^4 - 4\alpha^2\gamma^2 - 2\alpha^2t^2x_1^2 + 4\alpha^2\gamma t^4x_1 - \\ &- 4\alpha^2\gamma x_1 + 8\alpha^2\gamma^2t^2 - 4\alpha^2\beta^2t^2 = 0 \end{aligned}} \qquad (11)$$

ἢ καὶ ὑπὸ ἄλλην μορφήν:

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) \equiv{}& 4(\beta^2t^2 - \alpha^2)x^2 - 4\left[2\gamma^3t^2 - 2\alpha^2\gamma - \alpha^2(t^2+1)x_1\right]x + \\ &+ 4\beta^4t^2 - \alpha^2\left[(t^2+1)x_1 - 2\gamma(t^2-1)\right]^2 = 0 \end{aligned}} \qquad (11')$$

Αἱ ῥίζαι τῆς (11) εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν P_1 καί P_2, δηλ. αἱ x_1', x_2'. Θά ἀποδείξωμεν ὅτι τό[17] γ εὑρίσκεται μεταξύ τῶν ῥιζῶν x_1' καί x_2'. Ὁπότε, ἄν $x_2' < x_1'$, τότε τό P_1 εὑρίσκεται εἰς τόν ἐξύκ καί τό P_2 εἰς τόν ἐσύκ. Ἤτοι ἡ περιφ. $(P_1, P_1A = P_1B)$ ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (0) καί ἡ $(P_2, P_2A = P_2B)$ ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς ταύτης.

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀλγέβρας, ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ $\xi \in R$ εὑρίσκεται μεταξύ τῶν ῥιζῶν $\rho_1, \rho_2 \in R$ τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, εἶναι: $\alpha \cdot \varphi(\xi) < 0$.

Διά τήν (11) ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι: $(4\beta^2 t^2 - 4\alpha^2) \cdot F(\gamma) < 0$. Ἡ $4\beta^2 t^2 - 4\alpha^2 > 0$, διότι αὕτη γίνεται τελικῶς $\varepsilon\varphi^2\omega > \varepsilon\varphi^2\theta$. Ἄρα θά πρέπη $F(\gamma) < 0$. Θέτοντες εἰς τήν (11) ὅπου $x = \gamma$ καί ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν: $F(\gamma) = -\alpha^2\left[(t^2+1)^2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot 2\gamma t^2 (t^2+1) x_1 + (2\gamma t^2)^2 + 4\beta^2 t^2\right] = -\alpha^2\left[\left[(t^2+1) - 2\gamma t^2\right]^2 + (2\beta t)^2\right]$. Ἀλλά ἡ ἀγκύλη εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων· ὁπότε, καί μέ τό μηδέν νά ἰσοῦται τό πρῶτον τετράγωνον, τό δεύτερον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, διότι $t \neq 0$. Ἄρα $F(\gamma) < 0$.

Ἐάν $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$, ἤτοι ἡ εὐθεῖα $AB \perp OA$, ὁπότε[18] $x_1 = 2\gamma$, τότε ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB θά εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα OA τῶν τετμημένων· ὁπότε ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου ταύτης θά εἶναι $y = \frac{y_1}{2}$· καί ἐάν θέσωμεν $\frac{y_1}{2} = \kappa$, τότε:

$$\boxed{y = \kappa} \quad (12)$$

Τό σύστημα τῶν (1), (12) θά μᾶς δώσῃ τά σημεῖα τομῆς τῆς μεσοκαθέτου μετά τῆς ὑπερβολῆς.

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν, ἐάν θέσωμεν ὅπου $y=\kappa$, $\frac{(x-\gamma)^2}{\alpha^2}-\frac{\kappa^2}{\beta^2}=1$ ἤ $(x-\gamma)^2=\frac{\alpha^2(\kappa^2+\beta^2)}{\beta^2}$ ἤ $x-\gamma=\pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\kappa^2+\beta^2}$ ἤ $x'_{1,2}=\gamma\pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\kappa^2+\beta^2}$.

Ἀποδεικνύεται καί ἐνταῦθα, ὡς καί ἀνωτέρω, ὅτι $x'_2<\gamma<x'_1$. Ἄρα τό $P_1(x'_1, y'_1=\kappa)$ ἀνήκει εἰς τόν ἐξύκ καί τό $P_2(x'_2, y'_2=\kappa)$ εἰς τόν ἐσύκ.

Τό συμπέρασμα λοιπόν ἐκ τῆς περιπτώσεως a εἶναι ὅτι: ἐάν (σχ. 29) $B\in(\text{ἀνοικτή } B_1\widehat{A}\Gamma_1 \veebar B_2\widehat{A}\Gamma_2)$, ἔχομεν δύο λύσεις. Ἡ μία περιφέρεια ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (O), ἡ δ' ἑτέρα ἐσωτερικῶς ταύτης.

b) Ἄν $-4\beta^2t^2+4\alpha^2=0$, δηλ. $t^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ἤτοι $\varepsilon\varphi^2\omega=\varepsilon\varphi^2\theta$ ἐξ ἧς ἕπεται $\omega=\pm\theta$ κ.λ.π., τότε προσκρούομεν εἰς τούς περιορισμούς (π) (σελίς 36).

c) Ἄν $-4\beta^2t^2+4\alpha^2>0$, δηλ. $0<\omega<\theta$, $\pi-\theta<\omega<\pi$, $-\theta<\omega<0$, $-\pi<\omega<-\pi+\theta$ (καί τοῦτο λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $\omega\neq 0, \pm\pi$), τότε τό $\Delta_1(x_1)$ εἶναι ὁμόσημον πρός τόν συντελεστήν τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τοῦ x_1 διά πᾶν x_1 ἐκτός τῶν ριζῶν τῆς (10) καί ἑτερόσημον πρός τόν συντελεστήν τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τοῦ x_1 διά πᾶν x_1 ἐντός τῶν ριζῶν τῆς (10)· γίνεται δέ μηδέν τό $\Delta_1(x_1)$ διά $x_1=\rho_1$ ἤ ρ_2, ἔνθα ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τοῦ $\Delta_1(x_1)$. Ὁ συντελεστής ὅμως τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου τοῦ x_1 εἶναι $t^2+1>0$. Ἄρα: $\Delta_1(x_1)>0$ $\forall x_1$ ἐκτός τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2. Ἤτοι, ἐκ τῆς (9), ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους. Ἄν $\rho_2 < x_1 < \rho_1 \Rightarrow \Delta_1(x_1) < 0$ καί ἐκ τῆς (9) ἔχομεν δύο ρίζας μιγαδικάς. Ἐπίσης, ἄν $x_1 = \rho_2$ ἤ $x_1 = \rho_1$, τότε $\Delta_1(x_1) = 0$ · καί ἐκ τῆς (9) ἔχομεν μίαν ρίζαν πραγματικήν.

Αἱ ρίζαι τοῦ $\Delta_1(x_1)$ εἶναι:

$$\rho_{1,2} = \frac{2\gamma t^2 \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 t^2}}{t^2+1} \qquad (13)$$

μέ $\alpha^2 - \beta^2 t^2 > 0$, τό ὁποῖον εἶναι ἐξησφαλισμένον λόγῳ τῆς περιπτώσεως C.

Τά σημεῖα Γ_4 καί Γ_5 εἶναι αἱ τομαί τῆς περιφ. (O) καί τῆς εὐθείας $B\Gamma_6$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας $B\Gamma_6$ εἶναι ἡ (2) καί τῆς περιφ. (O) ἡ:

$$x^2 + y^2 = 4\alpha^2 \qquad (14)$$

Ἡ (2) γράφεται καί

$$y = t(x - 2\gamma) \qquad (15)$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν (14), (15) θά μᾶς δώσῃ τάς συντεταγμένας τῶν σημείων τομῆς τῆς περιφ. (O) καί τῆς εὐθείας $B\Gamma_6$. Θέτοντες τό y, ἐκ τῆς (15), εἰς τήν (14), ἔχομεν κατόπιν πράξεων: $(t^2+1)x^2 - 4\gamma t^2 x + 4\gamma^2 t^2 - 4\alpha^2 = 0$. Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις εἶναι τό $\Delta_1(x_1)$ καί ἔχει ρίζας τάς (13).

Ἐν ἄλλαις λέξεσιν, ἐάν $B \in$ (ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν AB ἤ ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $\Gamma_5\Gamma_6$ ἤ ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $A\Gamma_4$), τότε ἔχομεν δύο λύσεις ἐκ τῆς (9). Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Gamma_4\Gamma_5$), ἔχομεν μιγαδικάς ρίζας ἐκ τῆς (9). Καί ἐάν $B \equiv \Gamma_4$ ἤ Γ_5, τότε ἔχομεν μίαν πραγματικήν ρίζαν ἐκ τῆς (9).

Ἐν συνεχείᾳ θά ἐξετάσωμεν ποίους κλάδους τέμνει ἡ μεσοκάθετος. Ἄν λάβωμεν: $\rho_1 = \frac{2\gamma t^2 + 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2 t^2}}{t^2+1} < x_1$ **(16)**, τότε ἔχομεν $\Delta_1(x_1) > 0$ καί ἐκ τῆς (9) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους, ἄρα καί ἐκ τῆς(19) (6) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους. Ταύτας ἐκαλέσαμεν x_1' καί x_2'. Ἄς ἐξετάσωμεν τήν θέσιν τοῦ γ ὡς πρός τάς x_1' καί x_2'.

Ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀλγέβρας γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ $\xi \in R$ εὑρίσκεται ἀριστερά τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (δηλ. $\xi < \rho_2 \leq \rho_1$), εἶναι: $\Delta \geqslant 0$, $\alpha \cdot \varphi(\xi) > 0$ καί $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$.

Εἰς τήν περίπτωσίν μας ἔχομεν τήν διακρίνουσαν τῆς (11) θετικήν. Ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος τῆς (11) $(4\beta^2 t^2 - 4\alpha^2) < 0$, ἐκ τῆς περιπτώσεως c. Εἶναι καί $F(\gamma) < 0$ (ὅρα σελ. 38). Ἄρα: $(4\beta^2 t^2 - 4\alpha^2) F(\gamma) > 0$

Θά ἐξασφαλίσωμεν καί τό $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$. Ἔχομεν ἐκ τῆς (11):
$$K = \gamma + \frac{-8\beta^2\gamma t^2 + 4\alpha^2 t^2 x_1 + 4\alpha^2 x_1 - 8\alpha^2\gamma t^2 + 8\alpha^2\gamma}{8\beta^2 t^2 - 8\alpha^2} = \frac{\alpha^2(t^2 x_1 + x_1 - 2\gamma t^2)}{2(\beta^2 t^2 - \alpha^2)} < 0$$
διότι ἐκ τῆς (16) ἔχομεν: $2\gamma t^2 + 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2 t^2} < x_1(t^2+1)$ ἤ $0 < 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2 t^2} < t^2 x_1 + x_1 - 2\gamma t^2$, ἐπίσης εἶναι $\beta^2 t^2 - \alpha^2 < 0$. Ἄρα ἔχομεν τήν διάταξιν $\gamma < x_2' < x_1'$. Ἑπομένως ἡ μεσοκάθετος τέμνει τόν ἄξονα εἰς δύο σημεῖα.

Ἐπίσης, ἐάν λάβωμεν: $x_1 < \frac{2\gamma t^2 - 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2t^2}}{t^2+1} = \rho_2$ **(17)**, τότε ἔχομεν $\Delta_1(x_1) > 0$ καί ἐκ τῆς (9) δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους. Ἄς ἐξετάσωμεν τήν θέσιν τοῦ γ ὡς πρός τάς x_1' καί x_2'.

Ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀλγέβρας γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ $\xi \in R$ εὑρίσκεται δεξιά τῶν ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (δηλ. $\rho_2 \leqslant \rho_1 < \xi$), εἶναι: $\Delta \geqslant 0$, $\alpha \cdot \varphi(\xi) > 0$ καί $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἐργαζόμεθα ὡς καί ἀνωτέρω. Μόνον ὅτι ἡ παράστασις $K > 0$. Διότι ἐκ τῆς (17) ἔχομεν: $2\gamma t^2 - 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2t^2} > x_1(t^2+1)$ ἤ $0 > -2\sqrt{\alpha^2-\beta^2t^2} > t^2x_1 + x_1 - 2\gamma t^2$. Ἄρα ἔχομεν τήν διάταξιν $x_2' < x_1' < \gamma$. Ἑπομένως ἡ μεσοκάθετος τέμνει τόν ἄξονα εἰς δύο σημεῖα.

Ἄν τώρα λάβωμεν: $x_1 = \rho_1$, ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: $\gamma < x_2' = x_1'$. Καί ἑπομένως ἡ μεσοκάθετος ἐφάπτεται τοῦ ἄξονα. Καί ἄν $x_1 = \rho_2$, τότε ἡ μεσοκάθετος ἐφάπτεται τοῦ ἄξονα.

Τό συμπέρασμα λοιπόν ἐκ τῆς περιπτώσεως C εἶναι ὅτι: Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή $\Gamma_1\widehat{A}\Gamma_2$ ἤ ἀνοικτόν χωρίον $AB_3\Gamma_4B_4A$), τότε ἔχομεν δύο[20] λύσεις καί αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς τῆς (O). Ἄν πάλιν $B \in$ (ἀνοικτόν μέρος ἐπιπέδου $B_5B_3\Gamma_5B_4B_6$), ἔχομεν δύο[21] λύσεις καί αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς τῆς (O). Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν τόξον $B_3A_3B_4$), ἔχομεν μίαν[22] λύσιν καί ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (O). Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν $\widehat{B_3A_4B_4}$), ἔχομεν μίαν[22] λύσιν καί ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (0). Καί ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν κύκλον (0)), οὐδεμίαν[23] λύσιν ἔχομεν.

Εἰδικαί περιπτώσεις.

α) Ἐάν $\omega = 0$ ἤ $\pm\pi$, δηλ. $B \in$ (εὐθεῖα OA, πλήν σημεῖον A), τότε ἔχομεν $B(x_1, y_1 = 0)$ καί ἡ εὐθεῖα AB ἔχει ἐξίσωσιν:

$$y = 0 \qquad (18)$$

Ἡ δέ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος AB ἔχει ἐξίσωσιν:

$$x = \frac{2\gamma + x_1}{2} \qquad (19)$$

Τό σύστημα τῶν (1), (19) λυόμενον δίδει:

$$y'_{1,2} = \pm \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{x_1^2 - 4\alpha^2} \qquad (20)$$

Ἐάν $x_1^2 - 4\alpha^2 > 0$, ἤτοι $x_1 < -2\alpha$ ἤ $2\alpha < x_1$, ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (20) πραγματικάς καί ἀντιθέτους.

Ἐάν $x_1^2 - 4\alpha^2 < 0$, ἤτοι $-2\alpha < x_1 < 2\alpha$, ἔχομεν ρίζας φανταστικάς.

Ἐάν $x_1^2 - 4\alpha^2 = 0$, ἤτοι $x_1 = \pm 2\alpha$, ἔχομεν μίαν ρίζαν πραγματικήν.

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται: 1) Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα A_3A_5, πλήν τοῦ σημείου A), ἔχομεν δύο περιφερείας (P_1), (P_2) ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς τῆς (0) καί συμμετρικάς ὡς πρός τόν ἄξονα Ox. 2) Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα A_4A_6), ἔχομεν δύο ἐπίσης περιφερείας ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς τῆς (0), συμμετρικάς ἐπίσης ὡς πρός τόν ἄξονα Ox. 3) Ἐάν $B \equiv A_3$, ἔχομεν μίαν περιφέρειαν, τήν $(A_1, A_1A = A_1A_3)$, ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς. 4) Ἐάν $B \equiv A_4$, ἔχομεν μίαν περιφέρειαν, τήν $(A_2, A_2A = A_2A_4)$, ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς καί 5) Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν εὐθ. τμ. A_4A_3), οὐδεμίαν περιφέρειαν ἔχομεν.

β') Ἐάν $\omega = -\theta$ ἤ $\pi - \theta$, ἤτοι ἡ ἡμιευθεῖα AB ταυτίζεται μέ τήν[24] $A\Gamma_2$ ἤ τήν AB_5 ἀντιστοίχως, τότε λαμβάνοντες[25] $\omega = \pi - \theta$, ἔνθα $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (ὅρα σχ. 29), ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -\sigma\varphi\varphi = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi}$ $= -\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{\beta}$. Ὁπότε ἐκ τῆς (7), ἐπειδή $t = \varepsilon\varphi\omega = -\frac{\alpha}{\beta}$, ἔχομεν, κατόπιν ἐκτελέσεως πράξεων καί **λαμβάνοντες** συνάμα ὑπ' ὄψιν, ὅτι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$:

$$\boxed{4\alpha\beta\gamma(\gamma x_1 - 2\alpha^2)y + \gamma^4 x_1^2 - 4\alpha^2\gamma^3 x_1 + 4\alpha^4\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^4 = 0} \qquad (21)$$

ἤ καί ὑπό ἄλλην μορφήν:

$$\boxed{4\alpha\beta\gamma(\gamma x_1 - 2\alpha^2)y + \gamma^2(\gamma x_1 - 2\alpha^2)^2 - 4\alpha^2\beta^4 = 0} \qquad (21')$$

Καί ἐάν $\gamma x_1 - 2\alpha^2 \neq 0$ ἤ $x_1 \neq 2\alpha \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = 2\alpha\sigma\upsilon\varphi$, ἔχομεν μίαν πραγματικήν ρίζαν διά τό y.

Παρατηροῦμεν ὅτι τό σημεῖον B_3 ἔχει τετμημένην $2\alpha\sigma\upsilon\varphi$. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν ὅταν $B \equiv B_3$ (ἤ $B \equiv B_4$, ἀντιστοίχως).

Ἐάν εἰς τήν (11) θέσωμεν ὅπου $t = \varepsilon\varphi\omega = -\frac{\alpha}{\beta}$, ἔχομεν:

$$\boxed{\begin{array}{l} 4\beta^2\gamma(\gamma x_1 - 2\alpha^2)x + 4\beta^4\gamma^2 - \alpha^4 x_1^2 - \beta^4 x_1^2 - 4\alpha^4\gamma^2 - 4\beta^4\gamma^2 \\ -2\alpha^2\beta^2 x_1^2 + 4\alpha^4\gamma x_1 - 4\beta^4\gamma x_1 + 8\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^4 = 0 \end{array}} \qquad (22)$$

ἤ καί ὑπό ἄλλην μορφήν:

$$\boxed{4\beta^2\gamma(\gamma x_1 - 2\alpha^2)x + 4\beta^6 - \gamma^2\left[(\gamma x_1 - 2\alpha^2) + 2\beta^2\right]^2 = 0} \qquad (22')$$

Ἐάν $x_1 > 2\alpha\sigma\upsilon\varphi = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$ ἤ $\gamma x_1 - 2\alpha^2 > 0$, τότε θά δείξωμεν ὅτι καί ἡ μοναδική πραγματική ρίζα x' τῆς (22) εἶναι μεγαλυτέρα ἀπό τήν τετμημένην τοῦ σημείου B_1, ἤτοι $x' > \gamma + \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \gamma + \alpha \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \gamma + \frac{\alpha^2}{\gamma} = \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma}$.

Ἐκ τῆς (22') ἔχομεν ἄν θέσωμεν $A(x_1) \equiv \gamma x_1 - 2\alpha^2$:

$$x' = \frac{\gamma^2(A+2\beta^2)^2 - 4\beta^6}{4\beta^2\gamma A}$$

Θά ἐξετάσωμεν ἐάν ἡ σχέσις: $x' > \frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma}$ εἶναι ἀληθής. Ἐπειδή $A = \gamma x_1 - 2\alpha^2 > 0$ ἔχομεν: $\gamma^2(A+2\beta^2)^2 - 4\beta^6 > 4\beta^2 A(\gamma^2+\alpha^2)$ ἤ τελικῶς: $\gamma^2 A^2 - 4\alpha^2\beta^2 A + 4\alpha^2\beta^4 > 0$ · καί ἐπειδή ἡ διακρίνουσα τῆς τελευταίας σχέσεως εἶναι ἀρνητική $\forall x_1 > 2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$, ἕπεται ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀληθής. Ἄρα ἡ μεσοκάθετος τέμνει τόν ἐξύκ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καί $\forall x_1 < 2\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ ἔχομεν $x' < \gamma + \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$. Ἄρα ἡ μεσοκάθετος τέμνει τόν ἐσύκ.

Ἐκ πάντων τούτων ἕπεται ὅτι: 1) Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $B_3\Gamma_2$ ἤ $B_4\Gamma_1$, πλήν τοῦ σημείου A), ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῆς (0). 2) Ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα B_3B_5 ἤ B_4B_6), ἔχομεν μίαν πάλιν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς (0). Καί 3) ἐάν $B \equiv B_3$ ἤ B_4, οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Μία ἰδιότης.[26]

§36. Ἐάν $B_4 \equiv \Gamma_4$ (σχ. 29), τότε τό Γ_2 εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθ. τμ. $A\Gamma_4$ (ὅρα: §7). Ἐπίσης, γνωρίζομεν ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ $A\Gamma_4$ ἐφάπτεται τοῦ ἐξύκ (ὅρα: σελίς 42, σειρά 9 κάτωθεν), ἔστω εἰς τό Θ_2.

Τοῦτο τό Θ_2 δυνάμεθα νά τό εὕρωμεν καί ἄλλως. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἐξύκ εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς (O). Ἐπίσης, ὅτι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $\Gamma_4 O$, πλήν τοῦ σημείου Ο, εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Γ_4 καί ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς τῆς (O) (ὅρα: § 14). Καί ἡ ἀντικειμένη τῆς $\Gamma_4 O$ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $\Gamma_4\Theta_3$, εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Γ_4 καί ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς (O). Τό σημεῖον τομῆς λοιπόν τοῦ ἐξύκ καί τῆς $\Gamma_4\Theta_3$ πρέπει νά εἶναι τό κέντρον τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης ἐκ τῶν Α καί Γ_4 καί ἐφαπτομένης ἐξωτερικῶς τῆς (O). Ἄρα τοῦτο εἶναι τό Θ_2.

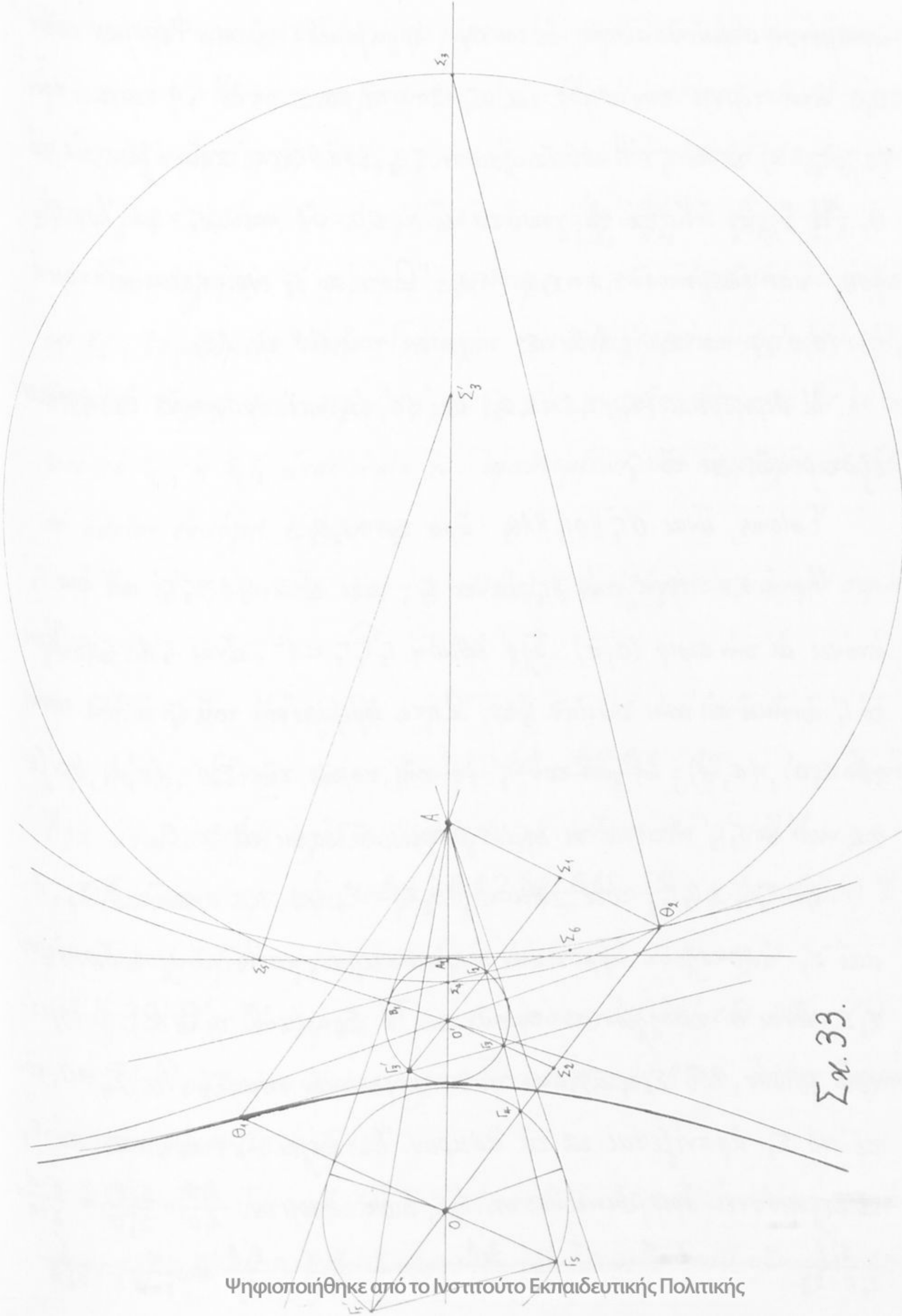
Ἀναλόγως συλλογιζόμενοι ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ $A\Gamma_5$, ἔνθα $A\Gamma_3 = \Gamma_3\Gamma_5$, ἐφάπτεται τοῦ ἐσύκ εἰς τό Θ_1 ἐκ τοῦ ὁποίου θά διέλθη καί ἡ $\Gamma_5 O$.

Ἔχομεν ἐπίσης, $\Theta_2\widehat{A}\Gamma_2 = \Theta_2\widehat{\Gamma_4}\Gamma_2 = O\widehat{\Gamma_4}\Gamma_5 = O\widehat{\Gamma_5}\Gamma_4 = \Theta_1\widehat{\Gamma_5}\Gamma_3 = \Theta_1\widehat{A}\Gamma_3$, ἤτοι $\Theta_2\widehat{\Gamma_4}A = \Theta_1\widehat{A}\Gamma_4$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $\Theta_1 A // \Theta_2 O$, καί $\Theta_2\widehat{A}\Gamma_5 = \Theta_1\widehat{\Gamma_5}A$, ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $\Theta_1 O // \Theta_2 A$. Ἄρα τό $\Theta_1 O \Theta_2 A$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καί ἐπειδή $OO' = O'A$, ἕπεται ὅτι ἡ $\Theta_1 O' \Theta_2$ εἶναι διαγώνιος τοῦ ἐν λόγῳ παραλληλογράμμου.

Ἐφαρμογαί.

§ 37. Ὡς καί ἐν σχήματι 29, ἔστω τώρα τό σχῆμα 33.

Διά νά εὕρωμεν γραφικῶς τήν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς εἰς



Σχ. 33.

ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς, ἔστω Θ_2, ἐργαζόμεθα οὕτω: Φέρομεν τὴν $\Theta_2 O$ ἥτις τέμνει τὴν περιφ. $(O, O\Gamma_4 = 2\alpha)$ εἰς τὸ Γ_4· ἡ δὲ $\Gamma_4 A$ τέμνει τὴν $(O', O'\Gamma_2 = \alpha)$ εἰς τὸ Γ_2. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν $\Gamma_2\Theta_2$ ἐφάπτεται τοῦ ἔξύκ εἰς τὸ Θ_2. Ἢ ἄλλως: Κατὰ τὰ γνωστὰ εἶναι $O'O = O'A$ καὶ $\Gamma_2\Gamma_4 = \Gamma_2 A$. Ἄρα $O'\Gamma_2 \parallel O\Theta_2$· καὶ ἑπομένως $\Sigma_1 A = \Sigma_1\Theta_2 = \Sigma_1\Gamma_2$. Ὥστε τὸ Γ_2 εὑρίσκεται ὡς ἡ τομὴ τῶν $(O', O'\Gamma_2)$ καὶ $\Sigma_1 O'$, ἔνθα Σ_1 τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμ. $A\Theta_2$.

Αἱ περιφέρειαι $(\Sigma_1, \Sigma_1 A = \Sigma_1\Theta_2)$ καὶ $(O', O'\Gamma_2 = \alpha)$ προφανῶς ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Γ_2.

Ἐπίσης, εἶναι $O'\Gamma_3 \parallel O\Gamma_5 \parallel A\Theta_2$· ἄρα $\Sigma_2 O = \Sigma_2\Theta_2$.

Ἂν ἡ $\Sigma_1 O'$ τέμνῃ τὴν $A\Gamma_5'$ εἰς τὸ Γ_3', τότε εἶναι $\Gamma_3' A = \Gamma_3'\Gamma_5'$ καὶ ἄρα Γ_3' ἀνήκει εἰς τὴν περιφ. (O', α)· ἀλλ' ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma_5'\Gamma_5\Gamma_4} = 1^{\llcorner}$, εἶναι $\Gamma_3' A = \Gamma_3'\Gamma_5$. Ἤτοι τὸ Γ_3' ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν $\Gamma_3\Theta_1$. Ὥστε ὁριζομένου τοῦ Γ_3 ἐκ τῆς τομῆς τῶν $\Sigma_2 O'$, (O', α), ὡς καὶ τοῦ Γ_3' ἐκ τῆς τομῆς τῶν $\Sigma_1 O'$, (O', α), ὁρίζεται καὶ ἡ $\Gamma_3\Gamma_3'$ ἥτις εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ ἐσύκ εἰς τὸ Θ_1.

Ἂν $\Sigma_3\Theta_2 \perp \Theta_2\Gamma_2$, τότε, ἐπειδὴ $O\widehat{\Theta_2}\Sigma_4 = \Sigma_4\widehat{\Theta_2}A$, τὰ σημεῖα O, Σ_4, A καὶ Σ_3 ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν σημειοσειράν, καὶ ὁ κύκλος διαμέτρου $\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι ὁ ἀπολλώνιος τοιοῦτος. Τὸ $\Sigma_4 \in$ (εὐθ. τμ. $O'A_1$). Διδομένου λοιπὸν τοῦ Σ_4, εὑρίσκεται τὸ ἁρμονικὸν του Σ_3. Ἂν $\Sigma_4 \equiv O$, τότε τὸ Σ_3 ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ἂν πάλιν $\Sigma_4 \equiv A_1$, τότε τὸ Σ_3 καταλαμβάνει ὡρισμένην θέσιν Σ_3', διότι ἔχομεν: $\frac{A_1 A}{A_1 O} = \frac{\Sigma_3' A}{\Sigma_3' O}$ ἢ $\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha} = \frac{\Sigma_3' A}{\Sigma_3' A + 2\gamma}$ ἢ $\frac{\gamma-\alpha}{(\gamma+\alpha)-(\gamma-\alpha)} = \frac{\Sigma_3' A}{(\Sigma_3' A + 2\gamma) - \Sigma_3' A}$ ἢ $\frac{\gamma-\alpha}{2\alpha} = \frac{\Sigma_3' A}{2\gamma}$ ἢ $\frac{\alpha}{\gamma-\alpha} = \frac{\gamma}{\Sigma_3' A}$.

Ἄρα τό εὐθ. τμ. $Σ_3'A$ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμημάτων $α$, $γ-α$ καί $γ$. Κατασκευάζεται δέ οὕτως: Ἄν ἡ κάθετος τῇ OA εἰς τό A_1 τέμνῃ τήν $O'B_1$ εἰς τό $Σ_5$, τότε εἶναι κατά τά γνωστά $O'Σ_5 = γ$ καί $B_1Σ_5 = γ-α$ · ὁπότε, ἄν $Σ_5Σ_3' \parallel B_1A$, εἶναι $\frac{O'B_1}{B_1Σ_5} = \frac{O'A}{AΣ_3'}$ ἤ $\frac{α}{γ-α} = \frac{γ}{Σ_3'A}$.

Ἐάν θέλωμεν νά φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς ὑπερβολῆς ἐκ σημείου $Σ_6$, ἐργαζόμεθα οὕτω: Γράφομεν τήν περιφέρειαν διαμέτρου $AΣ_6$ ἥτις θά τάμῃ τήν περιφ. $(O', α)$ εἰς δύο σημεῖα, ἔστω τό ἕν ἐκ τούτων τό $Γ_2$, ἡ $Σ_6Γ_2$ εἶναι ἡ μία τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς εἰς τό $Θ_2$ τό ὁποῖον εὐκόλως εὑρίσκεται.

Ἄν τό $Σ_6$ κινῆται ἐπί τῆς εὐθείας $Γ_2Σ_4$ ἐξάγονται διάφορα συμπεράσματα.

Ἄσκησις: Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ $Σ_1$, ὡς καί τοῦ $Σ_2$.

Λύσις: Εἶναι: $Σ_1O' - Σ_1A = \frac{Θ_2O}{2} - \frac{Θ_2A}{2} = \frac{Θ_2O - Θ_2A}{2} = \frac{2α}{2} = α$ (σταθερόν). Ἄρα εἶναι ὁ δεξιός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας τά O' καί A κ.λ.π.

Ἐπίσης, $Σ_2O - Σ_2O' = \frac{Θ_2O}{2} - \frac{Θ_2A}{2} = \frac{Θ_2O - Θ_2A}{2} = \frac{2α}{2} = α$ (σταθερόν). Ἄρα εἶναι ὁ δεξιός κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίας O, O' κ.λ.π.

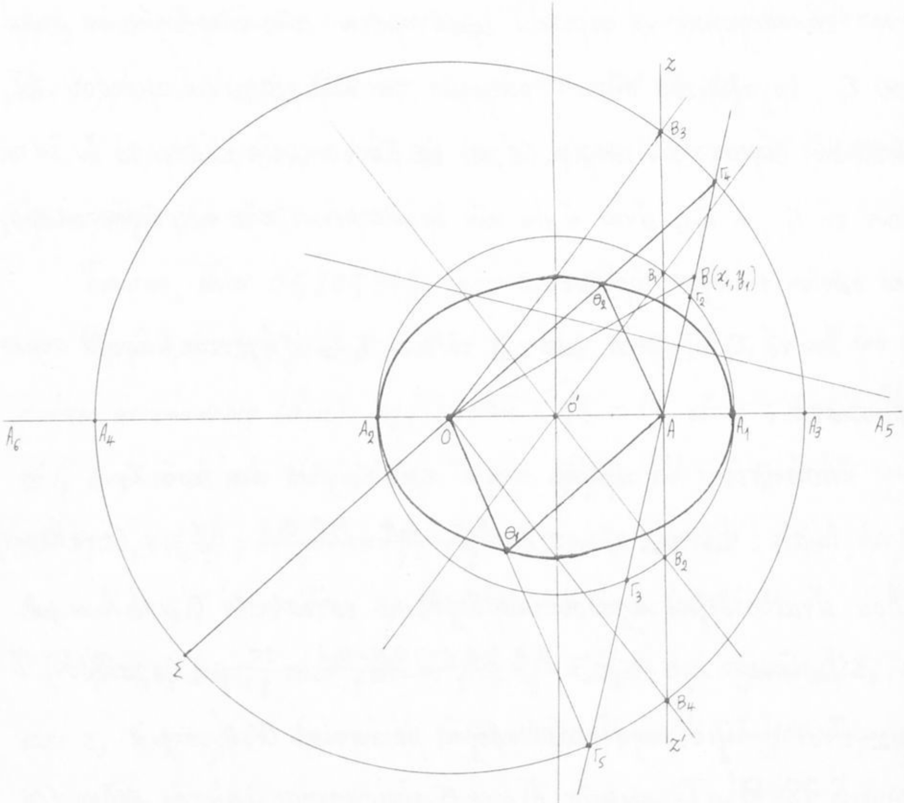
§ 38. **Β'**. Τά σημεῖα A καί B εὑρίσκονται ἐπί τῆς περιφ. (O).

Τότε οὐδεμίαν ἔχομεν λύσιν, ἐκτός ἐάν $A \equiv B$, ὁπότε ἔχομεν τήν περίπτωσιν Β'.2. § 14.

§ 39. **Γ'**. Τό σημεῖον A εὑρίσκεται εἰς τόν ἀνοικτόν κύκλον (O) καί τό B ὁπουδήποτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου (O)

(ὅρα σχ. 34).

Κατά τά γνωστά (§ 15, Β΄.3) ὁ γ.τ. Ο τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α (σχ. 34) καί ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας (Ο), εἶναι ἔλλειψις.



Σχ.34.

Ἐάν τώρα δοθῇ καί ἕν ἕτερον σημεῖον Β ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου (Ο), ἐκ τοῦ ὁποίου θέλομεν νά διέρχεται ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένη τῆς (Ο), εὑρίσκομεν τό κέντρον αὐτῆς σκεπτόμενοι οὕτω: Κατ' ἀρχήν τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εὑρίσκεται εἰς τήν προαναφερθεῖσαν ἔλλειψιν. Ἐπειδή δέ διέρχεται αὕτη ἐκ τῶν σημείων Α καί Β, ἕπεται ὅτι τό κέντρον αὐτῆς θά εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἡ τομή λοιπόν τῆς μεσοκαθέτου καί τῆς ἐλλείψεως θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἡ μεσοκάθετος αὕτη ἤ α') θά τάμῃ τήν ἔλλειψιν εἰς δύο σημεῖα, ὁπότε ἔχομεν δύο περιφερείας διερχομένας ἐκ τῶν Α καί Β καί ἐφαπτομένας τῆς (Ο) (ἐσωτερικῶς βέβαια), ἤ β') θά ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως, ὁπότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν, ἤ γ') δέν θά τέμνῃ τήν ἔλλειψιν, ὁπότε δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 40. Ἄς εὕρωμεν πάντα ταῦτα μέ τήν βοήθειαν τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας.

Ὑποθέτομεν, ὡς καί ἐν Α' τοῦ παρόντος προβλήματος, τήν εὐθεῖαν ΟΑ ὡς ἄξονα τῶν τετμημένων x μέ ἀρχήν τό Ο. Κατά τά γνωστά (§15, Β'.3) εἶναι: $(OO') = (O'A) = \gamma$, ἤτοι τά σημεῖα Ο καί Α εἶναι αἱ ἑστίαι τῆς ἐλλείψεως. Ἐπίσης: $(OB_3) = (OB_4) = 2\alpha$, $(O'B_1) = (O'A_1) = (O'B_2) = (O'A_2) = \alpha$ · ἤτοι τά σημεῖα A_1 καί A_2 εἶναι αἱ κορυφαί τῆς ἐλλείψεως.

Ἡ ἐξίσωσις λοιπόν τῆς ἐν λόγῳ ἐλλείψεως εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\boxed{\frac{(x-\gamma)^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (23)$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμ. ΑΒ εἶναι ἡ (5). Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (23) καί (5) θά μᾶς δώσῃ τάς συντεταγμένας τῶν σημείων τομῆς τῆς ἐλλείψεως (23) μετά τῆς μεσοκαθέτου (5).

Θέτοντες τήν τιμήν τοῦ x ἐκ τῆς (6) εἰς τήν (23) καί ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν:

$$\boxed{\begin{aligned}&(4\beta^2t^2+4\alpha^2)y^2-2(2\beta^2t^3x_1+2\beta^2tx_1-4\beta^2\gamma t^3)y+\\&+\beta^2t^4x_1^2+\beta^2x_1^2+4\beta^2\gamma^2t^4+2\beta^2t^2x_1^2-4\beta^2\gamma t^4x_1-\\&-4\beta^2\gamma t^2x_1-4\alpha^2\beta^2=0\end{aligned}} \qquad (24)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (24) εἶναι (ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι διά τήν ἔλλειψιν ἰσχύει ἡ σχέσις: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$):

$$\boxed{\Delta(x_1)\equiv 4\alpha^2\beta^2(t^2+1)\cdot\left[-(t^2+1)x_1^2+4\gamma t^2x_1-4(\gamma^2t^2-\alpha^2)\right]} \qquad (25)$$

Ἐκ τῆς (24) ἔχομεν: $y'_{1,2}=\dfrac{2\beta^2t^3x_1+2\beta^2tx_1-4\beta^2\gamma t^3\pm\sqrt{\Delta(x_1)}}{4(\beta^2t^2+\alpha^2)}$ ἤ

$$\boxed{y'_{1,2}=\frac{\beta^2t^3x_1+\beta^2tx_1-2\beta^2\gamma t^3\pm\frac{\alpha\cdot\beta}{|\sigma\upsilon\nu\omega|}\sqrt{-(t^2+1)x_1^2+4\gamma t^2x_1-4(\gamma^2t^2-\alpha^2)}}{2(\beta^2t^2+\alpha^2)}} \qquad (26)$$

$\sqrt{-(t^2+1)x_1^2+4\gamma t^2x_1-4(\gamma^2t^2-\alpha^2)}\equiv\Delta_1(x_1)$

διότι $t^2+1=\varepsilon\varphi^2\omega+1=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$. Εἶναι δέ πάντοτε: $\beta^2t^2+\alpha^2\neq 0$.

Διά νά ἔχωμεν πραγματικά y ἐκ τῆς (26) ἐξετάζομεν τό πρόσημον τῆς ὑπορρίζου ποσότητος:

$$\Delta_1(x_1) \equiv -(t^2+1)x_1^2 + 4\gamma t^2 x_1 - 4(\gamma^2 t^2 - \alpha^2) \qquad (27)$$

Δηλ. διά ποίας τιμάς τοῦ x_1 τό τριώνυμον $\Delta_1(x_1)$ εἶναι θετικόν, ἀρνητικόν ἤ μηδέν.

Τήν (27) θά ἐκφράσωμεν συναρτήσει τῶν πολικῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου Β. Ἔστωσαν αἱ πολικαί συντεταγμέναι τοῦ Β αἱ ρ καί θ· ἤτοι $B(\rho,\theta)$. Δηλ. $(OB)=\rho$ καί $A_5\hat{O}B=\theta$. Ἔχομεν: $t = \varepsilon\varphi\omega = \frac{y_1}{x_1-2\gamma} = \frac{\rho\eta\mu\theta}{\rho\sigma\upsilon\nu\theta - 2\gamma}$, $t^2 = \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta}{(\rho\sigma\upsilon\nu\theta-2\gamma)^2} =$

$= \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta}{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\gamma^2 - 4\gamma\rho\sigma\upsilon\nu\theta = \mathbf{K}}$, $t^2+1 = \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta}{K} + 1 =$

$= \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\gamma^2 - 4\gamma\rho\sigma\upsilon\nu\theta}{K} = \frac{\rho^2 - 4\gamma\rho\sigma\upsilon\nu\theta + 4\gamma^2}{K}$. Θέτοντες συμβολικῶς $\sigma\upsilon\nu\theta = \theta_1$ καί $\eta\mu\theta = \theta_2$ ἔχομεν: $t^2 = \frac{\rho^2\theta_2^2}{K}$, $t^2+1 = \frac{\rho^2 - 4\gamma\rho\theta_1 + 4\gamma^2}{K}$.

Ὁπότε ἡ (27) γίνεται:

$$-\frac{\rho^2-4\gamma\rho\theta_1+4\gamma^2}{K}\cdot\rho^2\theta_1^2 + 4\gamma\cdot\frac{\rho^2\theta_2^2}{K}\cdot\rho\theta_1 - 4\gamma^2\cdot\frac{\rho^2\theta_2^2}{K} + 4\alpha^2 =$$

$$= \frac{-\rho^4\theta_1^2 + 4\gamma\rho^3\theta_1^3 - 4\gamma^2\rho^2\theta_1^2 + 4\gamma\rho^3\theta_2^2\theta_1 - 4\gamma^2\theta_2^2\rho^2 + 4\alpha^2\rho^2\theta_1^2 - 16\alpha^2\gamma\rho\theta_1 + 16\alpha^2\gamma^2}{K} =$$

$$= \frac{-\rho^4\theta_1^2 + 4\gamma\rho^3\theta_1^3 - 4\gamma^2\rho^2\theta_1^2 + 4\gamma\rho^3\theta_1(1-\theta_1^2) - 4\gamma^2\rho^2(1-\theta_1^2) + 4\alpha^2\rho^2\theta_1^2 - 16\alpha^2\gamma\rho\theta_1 + 16\alpha^2\gamma^2}{K} =$$

$$= \frac{\rho^2(4\alpha^2-\rho^2)\theta_1^2 - 4\gamma\rho(4\alpha^2-\rho^2)\theta_1 + 4\gamma^2(4\alpha^2-\rho^2)}{K} =$$

$$= \frac{(4\alpha^2-\rho^2)(\rho^2\theta_1^2 - 4\gamma\rho\theta_1 + 4\gamma^2)}{K} = \frac{(4\alpha^2-\rho^2)\cdot K}{K} = 4\alpha^2 - \rho^2$$

Ὥστε ἀρκεῖ νά ἐξετάσωμεν τό πρόσημον τῆς παραστάσεως: $4\alpha^2-\rho^2$.

α) Ἄν $4\alpha^2-\rho^2>0$, ἤτοι[(27)] $-2\alpha<\rho<2\alpha$, ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὅταν τό B εἶναι σημεῖον τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (O) πλήν τῶν ἀνοικτῶν εὐθ. τμημ. B_4B_3 καί A_3A_4, τότε ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους ἐκ τῆς (26), τάς y_1' καί y_2', ὁπότε ἐκ τῆς (6) ἔχομεν καί τά x_1', x_2'. Ὥστε τά κέντρα τῶν ζητουμένων περιφερειῶν εἶναι τά $P_1(x_1', y_1')$ καί $P_2(x_2', y_2')$.

b) Ἄν $4\alpha^2-\rho^2=0$, ἤτοι $\rho=\pm 2\alpha$, ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὅταν τό B εἶναι σημεῖον τῆς περιφ. (O) πλήν τῶν σημείων B_3, B_4, A_3, A_4, τότε ἔχομεν μίαν (διπλῆν) ρίζαν πραγματικήν, δηλ. $y_1'=y_2'$ καί ἐκ τῆς (6) $x_1'=x_2'$· ὁπότε οἱ δύο κύκλοι ταυτίζονται, ἤτοι $(P_1)\equiv(P_2)$. Δηλ. ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως.

c) Ἄν $4\alpha^2-\rho^2<0$, ἤτοι $\rho<-2\alpha \veebar 2\alpha<\rho$, ἐν ἄλλαις λέξεσιν ὅταν τό B εἶναι ἐκτός τοῦ κλειστοῦ κύκλου (O), τότε δέν ἔχομεν λύσιν.

Εἰδικαί περιπτώσεις.

§ 41. 1) Ἐάν $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$, ἤτοι ἡ εὐθεῖα $AB\perp OA$ ὁπότε $x_1=2\gamma$, τότε ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB θά εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα OA τῶν τετμημένων· ὁπότε ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν (12). Τό σύστημα τῶν (23), (12) λυόμενον θά μᾶς δώσῃ: $x_{1,2}'=\gamma\pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\beta^2-\kappa^2}$.

Ὥστε: α) Ἐάν $\beta^2-\kappa^2>0$, ἤτοι $-\beta<\kappa<\beta$ ἤ $-2\beta<y<2\beta$, τότε ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους. Εἶναι: $(O'A)=\gamma$,

$(O'B_1) = \alpha$ καί $O'\widehat{A}B_1 = 1^L$ · ἄρα $(AB_1) = \beta$. Ἐπίσης, $AB_1 = B_1B_3$ καί $AB_2 = B_2B_4$. Ἄν λοιπόν τό B εὑρίσκεται ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ εὐθ. τμ. B_3B_4 πλήν τοῦ σημείου A, τότε ἔχομεν δύο λύσεις. β') Ἐάν $\beta^2 - \kappa^2 = 0$, ἤτοι $y_1 = \pm 2\beta$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν. Ἤτοι, ἐάν $B \equiv B_3 \veebar B_4$ ἔχομεν μίαν λύσιν. γ') Ἐάν $\beta^2 - \kappa^2 < 0$, ἤτοι $y_1 < -2\beta \veebar 2\beta < y_1$, τότε δέν ἔχομεν λύσιν. Δηλ. ἐάν τό B εὑρίσκεται εἰς τήν ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $B_3Z \veebar B_4Z'$, δέν ἔχομεν λύσιν.

2) Ἐάν $\omega = 0$, δηλ. ἡ AB διέρχεται ἐκ τοῦ O, τότε ἔχομεν $B(x_1, y_1 = 0)$ · καί ἡ εὐθεῖα AB ἔχει ἐξίσωσιν τήν (18). Ἡ δέ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήμ. AB ἔχει ἐξίσωσιν τήν (19). Τό σύστημα τῶν (23) καί (19) δίδει:

$$y'_{1,2} = \pm \frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{4\alpha^2 - x_1^2}$$

Ὁπότε: α') Ἐάν $4\alpha^2 - x_1^2 > 0$, ἤ $-2\alpha < x_1 < 2\alpha$, τότε$^{(28)}$ ἔχομεν δύο λύσεις. β') Ἐάν $4\alpha^2 - x_1^2 = 0$, ἤ $x_1 = \pm 2\alpha$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν. γ') Ἐάν $4\alpha^2 - x_1^2 < 0$, δέν ἔχομεν λύσιν.

§42. Τελικόν συμπέρασμα λοιπόν εἶναι ὅτι: ἔχομεν δύο λύσεις ὅταν τό B εὑρίσκεται εἰς τόν ἀνοικτόν κύκλον (O) (ἀλλά $B \not\equiv A$), μίαν ὅταν εὑρίσκεται εἰς τήν περιφ. (O), οὐδεμίαν ὅταν εὑρίσκεται ὁπουδήποτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πλήν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (O).

Μία ἰδιότης[29]

§43. Ἐάν $B \equiv \Gamma_4$ (σχ. 34), τότε τό Γ_2 εἶναι τό μέσον τοῦ $A\Gamma_4$ (§8). Ἐπίσης, γνωρίζομεν ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ $A\Gamma_4$ ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως (§40, b), ἔστω εἰς τό Θ_2.

Τοῦτο τό Θ_2 δυνάμεθα νά τό εὕρωμεν καί ἄλλως. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἔλλειψις εἶναι ὁ γ.τ.Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ A καί ἐφαπτομένων τῆς (O). Ἐπίσης, ὅτι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $\Gamma_4 O$, πλήν τοῦ σημείου O, εἶναι ὁ γ.τ.Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ Γ_4 καί ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς τῆς (O) (§14). Τό σημεῖον τομῆς[30] λοιπόν τῆς ἐλλείψεως καί τῆς $\Gamma_4 O$ πρέπει νά εἶναι τό κέντρον τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης ἐκ τῶν A καί Γ_4 καί ἐφαπτομένης τῆς (O). Ἄρα τοῦτο εἶναι τό Θ_2.

Ἀναλόγως συλλογιζόμεθα καί ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ $A\Gamma_5$ ($A\Gamma_3 = \Gamma_3\Gamma_5$) ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τό Θ_1 ἐκ τοῦ ὁποίου θά διέλθῃ καί ἡ $\Gamma_5 O$.

Ἔχομεν ἐπίσης, $\Theta_2 \hat{A} \Gamma_4 = O\hat{\Gamma_4}\Gamma_5 = O\hat{\Gamma_5}\Gamma_4 = \Theta_1 \hat{A}\Gamma_5$, ἤτοι $\Theta_2\hat{A}\Gamma_4 = O\hat{\Gamma_5}\Gamma_4$ ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $O\Theta_1 \parallel A\Theta_2$ καί $O\hat{\Gamma_4}\Gamma_5 = \Theta_1\hat{A}\Gamma_5$ ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι $O\Theta_2 \parallel A\Theta_1$. Ἄρα τό $\Theta_1 O \Theta_2 A$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Καί ἐπειδή $OO' = O'A$, ἕπεται ὅτι ἡ $\Theta_1 O' \Theta_2$ εἶναι διαγώνιος τοῦ ἐν λόγῳ παραλληλογράμμου.

§44. Ἐπανερχόμεθα εἰς τήν περίπτωσιν b, §40 ὅταν $\rho = \pm 2\alpha$. Ἄς θέσωμεν κατ' ἀρχήν εἰς τήν (26) $\rho = +2\alpha$, $x_1 = \rho συνθ$

$= 2\alpha\theta_1$, $t = \frac{\rho \eta\mu\theta}{\rho\sigma\upsilon\nu\theta - 2\gamma} = \frac{2\alpha\theta_2}{2\alpha\theta_1 - 2\gamma}$, $t^2 = \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta}{(\rho\sigma\upsilon\nu\theta-2\gamma)^2} = \frac{\rho^2\eta\mu^2\theta}{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\gamma^2 - 4\gamma\rho\sigma\upsilon\nu\theta}$
$= \frac{4\alpha^2\theta_2^2}{4\alpha^2\theta_1^2 + 4\gamma^2 - 8\alpha\gamma\theta_1 = K} = \frac{4\alpha^2\theta_2^2}{K}$ (ὅρα § 40, πολικάς συντεταγμένας).

Ἔχομεν: $y' = \frac{\beta^2 t^3 x_1 + \beta^2 t x_1 - 2\beta^2\gamma t^3}{2(\beta^2 t^2 + \alpha^2)} = \frac{\beta^2 t (t^2 x_1 + x_1 - 2\gamma t^2)}{2(\beta^2 t^2 + \alpha^2)} =$

$$= \frac{\frac{2\alpha\beta^2\theta_2}{2\alpha\theta_1 - 2\gamma}\left(\frac{8\alpha^3\theta_1\theta_2^2}{K} + 2\alpha\theta_1 - \frac{8\alpha^2\gamma\theta_2^2}{K}\right)}{2\cdot\left(\frac{4\alpha^2\beta^2\theta_2^2}{K} + \alpha^2\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2\alpha\beta^2\theta_2}{2(\alpha\theta_1-\gamma)}\cdot\frac{8\alpha^3\theta_1\theta_2^2 + 8\alpha^3\theta_1^3 + 8\alpha\gamma^2\theta_1 - 16\alpha^2\gamma\theta_1^2 - 8\alpha^2\gamma\theta_2^2}{K}}{2\cdot\frac{4\alpha^2\beta^2\theta_2^2 + 4\alpha^4\theta_1^2 + 4\alpha^2\gamma^2 - 8\alpha^3\gamma\theta_1}{K}} =$$

$$= \frac{\alpha\beta^2\theta_2\cdot 8\alpha\left[\alpha^2\theta_1(1-\theta_1^2) + \alpha^2\theta_1^3 + \gamma^2\theta_1 - 2\alpha\gamma\theta_1^2 - \alpha\gamma(1-\theta_1^2)\right]}{2(\alpha\theta_1-\gamma)\cdot 4\alpha^2\left[\beta^2(1-\theta_1^2) + \alpha^2\theta_1^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\theta_1\right]} =$$

$$= \frac{\beta^2\theta_2(\alpha^2\theta_1 + \gamma^2\theta_1 - \alpha\gamma\theta_1^2 - \alpha\gamma)}{(\alpha\theta_1-\gamma)(\beta^2 - \beta^2\theta_1^2 + \alpha^2\theta_1^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\theta_1)} = \frac{-\beta^2\theta_2\left[\alpha\gamma\theta_1^2 - (\alpha^2+\gamma^2)\theta_1 + \alpha\gamma\right]}{(\alpha\theta_1-\gamma)\left[(\beta^2+\gamma^2) + (\alpha^2-\beta^2)\theta_1^2 - 2\alpha\gamma\theta_1\right]} =$$

$= \frac{-\beta^2\theta_2[\varphi(\theta_1)]}{(\alpha\theta_1-\gamma)(\alpha^2+\gamma^2\theta_1^2-2\alpha\gamma\theta_1)} = \frac{-\beta^2\theta_2[\varphi(\theta_1)]}{(\alpha\theta_1-\gamma)(\alpha-\gamma\theta_1)^2}$. Ἀλλά $\varphi(\theta_1) \equiv \alpha\gamma\left(\theta_1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\cdot$ $\cdot\left(\theta_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right) = (\alpha\theta_1 - \gamma)(\gamma\theta_1 - \alpha)$. Ἄρα: $y' = -\frac{\beta^2\theta_2(\alpha\theta_1-\gamma)(\gamma\theta_1-\alpha)}{(\alpha\theta_1-\gamma)(\gamma\theta_1-\alpha)^2} = \frac{\beta^2\theta_2}{\alpha-\gamma\theta_1}$.

Ἤτοι:

$$\boxed{y' = \frac{\beta^2\eta\mu\theta}{\alpha - \gamma\sigma\upsilon\nu\theta}} \qquad (29)$$

Ἄν $A_3\hat{O}\Gamma_4 = \theta$ ἔχομεν διά τό σημεῖον Γ_4 τήν (29). Καί ἄν Σ εἶναι τό ἀντιδιαμετρικόν τοῦ Γ_4 τότε ἔχομεν ἐκ τῆς (29) πάλιν διά τό Σ, ἐπειδή ἡ μή κυρτή γωνία $A_3\hat{O}\Sigma = \pi + \theta$:

$$y' = \frac{\beta^2\eta\mu(\pi+\theta)}{\alpha - \gamma\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)} = -\frac{\beta^2\eta\mu\theta}{\alpha+\gamma\sigma\upsilon\nu\theta} \qquad (30)$$

Ἄν ἐπίσης ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω μέ $\rho = -2\alpha$, θά εὕρωμεν τήν (30). Ὥστε τό σημεῖον Γ_4 προσδιορίζεται διά τῶν πολικῶν συντεταγμένων μέ δύο συμβολισμούς: $\Gamma_4(\rho = 2\alpha, \theta)$ ἤ $\Gamma_4(\rho = -2\alpha, \pi + \theta)$.

Σημείωσις α′: Τό πρόσημον τῶν (29) καί (30) ἐξαρτᾶται ἀπό τό ημθ, διότι εἶναι πάντοτε $\frac{\alpha}{\gamma} > 1 \geq \pm$ συνθ.

Σημείωσις β′: Ἐάν $\theta = \frac{\pi}{2}$, ἐκ τῆς (29) ἕπεται ὅτι: $y' = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

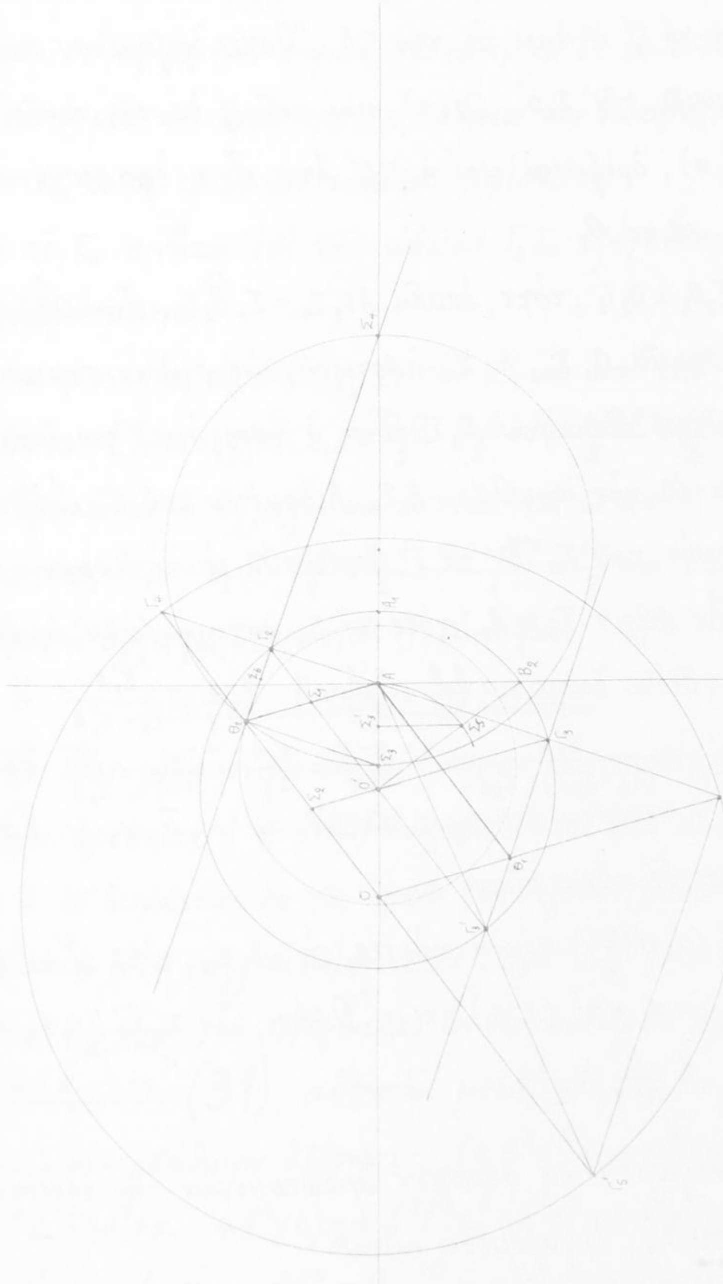
Ἐφαρμογαί.

§ 45. Ὡς καί ἐν σχήματι 34, ἔχομεν τώρα τό σχῆμα 35.

Διά νά εὕρωμεν γραφικῶς τήν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς, ἔστω Θ_2, ἐργαζόμεθα οὕτω: Φέρομεν τήν $\Theta_2 O$ ἥτις τέμνει τήν περιφ. $(O, O\Gamma_4 = 2\alpha)$ εἰς τό Γ_4· καί ἡ $\Gamma_4 A$ τέμνει τήν $(O', O'\Gamma_2 = \alpha)$ εἰς τό Γ_2. Ἡ εὐθεῖα λοιπόν $\Gamma_2\Theta_2$ ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τό Θ_2.

Ἤ ἄλλως: Κατά τά γνωστά εἶναι $O'O = O'A$ καί $\Gamma_2\Gamma_4 = \Gamma_2 A$. Ἄρα $O'\Gamma_2 \parallel O\Theta_2$. Καί ἑπομένως $\Sigma_1 A = \Sigma_1\Theta_2 = \Sigma_1\Gamma_2$. Ὥστε τό Γ_2 εὑρίσκεται ὡς ἡ τομή τῶν $(O', O'\Gamma_2)$ καί $\Sigma_1 O'$, ἔνθα Σ_1 μέσον τοῦ εὐθ. τμ. $A\Theta_2$. Προφανῶς αἱ περιφέρειαι $(\Sigma_1, \Sigma_1 A = \Sigma_1\Theta_2)$ καί $(O', O'\Gamma_2 = \alpha)$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τό Γ_2.

Ἐπίσης, εἶναι $O'\Gamma_3 \parallel O\Gamma_5 \parallel A\Theta_2$· ἄρα $\Sigma_2 O = \Sigma_2\Theta_2$. Ἄν ἡ $\Sigma_1 O'$ τέμνῃ τήν $A\Gamma_5$ εἰς τό Γ_3', τότε εἶναι $\Gamma_3' A = \Gamma_3'\Gamma_5'$ καί ἄρα τό Γ_3' ἀ-



Σχ. 35.

νήκει εἰς τήν περιφ. (O', α)· ἀλλ' ἐπειδή $\Gamma_5'\widehat{\Gamma_5}\Gamma_4 = 1^L$, εἶναι $\Gamma_3'A = \Gamma_3'\Gamma_5$. Ἤτοι τό Γ_3' ἀνήκει εἰς τήν $\Gamma_3\theta_1$. Ὥστε ὁριζομένου τοῦ Γ_3 ἐκ τῆς τομῆς τῶν Σ_2O', (O', α), καί τοῦ Γ_3' ἐκ τῆς τομῆς τῶν Σ_1O', (O'_1, α), ὁρίζεται καί ἡ $\Gamma_3\Gamma_3'$ ἥτις εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως εἰς τό θ_1.

Ἄν $\Sigma_3\theta_2 \perp \theta_2\Gamma_2$, τότε, ἐπειδή $A\widehat{\theta_2}\Sigma_4 = \Sigma_4\widehat{\theta_2}\Gamma_4$, εἶναι $O\widehat{\theta_2}\Sigma_3 = \Sigma_3\widehat{\theta_2}A$· ὥστε τά σημεῖα O, Σ_3, A, Σ_4 ἀποτελοῦν ἁρμονικήν σημειοσειράν καί ὁ κύκλος διαμέτρου $\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι ὁ ἀπολλώνιος τοιοῦτος. Τό Σ_4 ἀνήκει εἰς τήν ἡμιευθεῖαν $A_1\Sigma_4$. Διδομένου τοῦ Σ_4 εὑρίσκεται τό ἁρμονικόν του Σ_3. Ἄν τό Σ_4 ἀφανισθῇ εἰς τό ἄπειρον, τότε $\Sigma_3 \equiv O'$. Ἄν πάλιν $\Sigma_4 \equiv A_1$, τότε τό Σ_3 καταλαμβάνει ὡρισμένην θέσιν Σ_3', διότι ἔχομεν: $\frac{A_1A}{A_1O} = \frac{\Sigma_3'A}{\Sigma_3'O}$ ἤ $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma} = \frac{\Sigma_3'A}{2\gamma - \Sigma_3'A}$ ἤ $\frac{\alpha-\gamma}{(\alpha+\gamma)+(\alpha-\gamma)} = \frac{\Sigma_3'A}{(2\gamma-\Sigma_3'A)+\Sigma_3'A}$ ἤ $\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha} = \frac{\Sigma_3'A}{2\gamma}$ ἤ $\frac{\alpha}{\alpha-\gamma} = \frac{\gamma}{\Sigma_3'A}$ ἄρα τό $\Sigma_3'A$ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθ. τμ. α, $\alpha-\gamma$, γ. Κατασκευάζεται δέ αὕτη οὕτω:

Ἄν ἡ $(O', O'A=\gamma)$ τέμνῃ τήν $O'B_2$ εἰς τό Σ_5, τότε εἶναι $(O'\Sigma_5) = \gamma$, $(O'B_2) = \alpha$ καί $(\Sigma_5B_2) = \alpha-\gamma$. Ὁπότε, ἄν $\Sigma_5\Sigma_3' \parallel B_2A$, εἶναι $\frac{O'B_2}{B_2\Sigma_5} = \frac{O'A}{A\Sigma_3'}$ ἤ $\frac{\alpha}{\alpha-\gamma} = \frac{\gamma}{\Sigma_3'A}$.

Ἐάν θέλωμεν νά φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς ἐλλείψεως ἐκ σημείου Σ_6, ἐργαζόμεθα οὕτω:

Γράφομεν τήν περιφέρειαν διαμέτρου $A\Sigma_6$ ἥτις θά τάμῃ τήν περιφ. (O', α) εἰς δύο σημεῖα· ἔστω Γ_2 τό ἕν ἐκ τούτων. Ἡ $\Sigma_6\Gamma_2$ εἶναι ἡ μία τῶν ἐφαπτομένων (ὑπάρχει καί δευτέρα) τῆς ἐλλείψεως εἰς τό Θ_2 τό ὁποῖον εὐκόλως εὑρίσκεται.

Ἄν τό Σ_6 κινῆται ἐπί τῆς εὐθείας $\Gamma_2\Sigma_4$ ἐξάγονται διάφορα συμπεράσματα.

Ἄσκησις: Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ Σ_1 ὡς καί τοῦ Σ_2.

Λύσις: Εἶναι: $\Sigma_1O' + \Sigma_1A = \frac{\Theta_2O}{2} + \frac{\Theta_2A}{2} = \frac{\Theta_2O + \Theta_2A}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (σταθερόν). Ἄρα εἶναι ἡ ἔλλειψις μέ ἑστίας τά O' καί A κ.λ.π.

Ἐπίσης, $\Sigma_2O + \Sigma_2O' = \frac{\Theta_2O}{2} + \frac{\Theta_2A}{2} = \frac{\Theta_2O + \Theta_2A}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ (σταθερόν). Ἄρα εἶναι ἡ ἔλλειψις μέ ἑστίας O, O' κ.λ.π.

ΕΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΕΩΣ.

§46. Ἐάν λάβωμεν ὡς θετικόν ἄξονα τῶν x τήν ἡμιευθεῖαν AA_6 μέ ἀρχήν τό A (σχ. 29) ἁπλοποιοῦνταί πως αἱ πράξεις. Διότι ἡ AB διέρχεται ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, ὁπότε ἡ (1) μέν παραμένει ἡ ἰδία, ἀλλ' ἡ (2) γίνεται: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y_1}{x_1}$, ἡ (3) γίνεται: $\varepsilon\varphi\omega' = \frac{y_1}{x_1 - 2x_2}$, ἡ (6) γίνεται ἄν ἐργασθῶμεν ὁμοίως:
$x = \frac{t^2x_1 + x_1 - 2ty}{2}$ **(31)** · αὕτη δέ μετά τῆς (1) θά μᾶς δώσῃ τήν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν: $(4\beta^2t^2 - 4\alpha^2)\cdot y^2 - 2\cdot(2\beta^2t^3x_1 + 2\beta^2tx_1 - 4\beta^2\gamma t)y + \beta^2t^4x_1^2 + \beta^2x_1^2 + 4\beta^2\gamma^2 + 2\beta^2t^2x_1^2 - 4\beta^2\gamma t^2x_1 - 4\beta^2\gamma x_1 - 4\alpha^2\beta^2 = 0$. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως θά εὑ-

ρωμεν ἀντὶ τῆς (10) τὴν $\Delta_1(x_1) \equiv (t^2+1)x_1^2 - 4\gamma x_1 + 4\beta^2$ καὶ ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου $\Delta_1(x_1)$ εἶναι: $\delta_1(t) = 4\alpha^2 - 4\beta^2 t^2$, δηλ. ἡ ἰδία ὡς καὶ τῆς (10). Συνεχίζομεν λοιπὸν παρομοίως.

Σημείωσις: Ἂν θεωρήσωμεν ὡς ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τὸ σημεῖον Ο΄ (σχ. 29), ἡ (1) ἁπλοποιουμένη γίνεται: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, ἀλλὰ γίνονται ἐν συνεχείᾳ πολυπλοκώτεραι αἱ πράξεις.

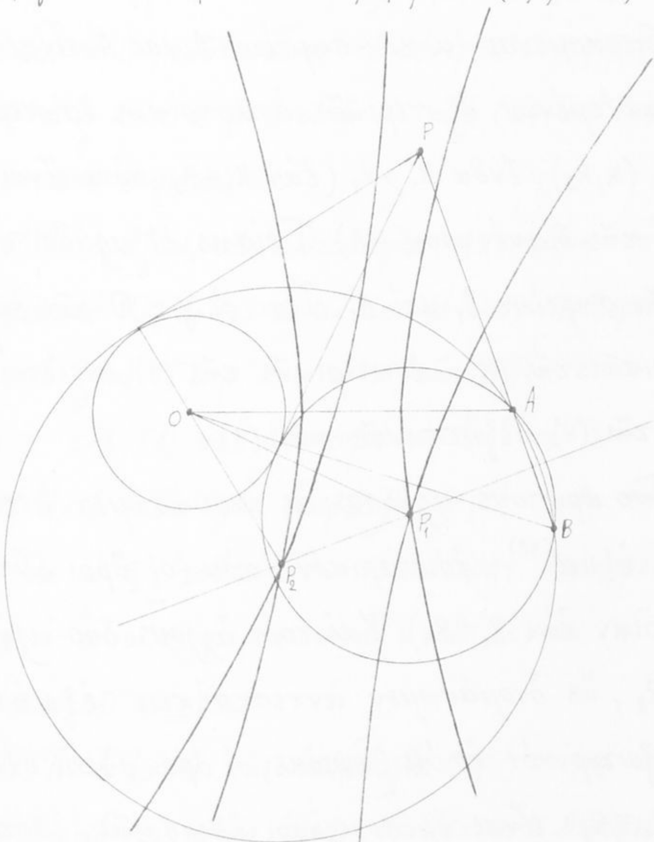
ΤΟ ΡΙΖΙΚΟΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΤΩΝ (Ο), (P_1), (P_2).

§47. Θεωροῦμεν τὴν περιφέρειαν (Ο) καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἡ ὑπερβολὴ μὲ ἑστίας τὰ σημεῖα Ο καὶ Α εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (Ο) καὶ διερχομένων ἐκ τοῦ Α. Ἐπίσης, ἡ ὑπερβολὴ μὲ ἑστίας τὰ Ο καὶ Β εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (Ο) καὶ διερχομένων ἐκ τοῦ Β (ὅρα σχ. 36).

Ἔστω ὅτι ὁ ἐξύκ τῆς ὑπερβολῆς (Ο,Α) τέμνει τὸν ἐξύκ τῆς ὑπερβολῆς (Ο,Β) εἰς τὸ σημεῖον P_1. Τοῦτο λοιπὸν τὸ P_1 εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας (P_1), ἥτις ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (Ο) καὶ διέρχεται ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἐπίσης, ἂν ὁ ἐσύκ τῆς ὑπερβολῆς (Ο,Α) τέμνῃ τὸν ἐσύκ τῆς ὑπερβολῆς (Ο,Β) εἰς τὸ P_2, τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας (P_2), ἥτις ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (Ο) καὶ διέρχεται ἐκ τῶν Α καὶ Β.

Ἐπειδὴ $P_1A = P_1B$ καὶ $P_2A = P_2B$, ἕπεται ὅτι ἡ P_1P_2 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος AB.

Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (O),(P₁) ὡς καὶ ἡ τοιαύτη τῶν (O), (P₂) καὶ ἡ AB τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον P, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν περιφερειῶν (O), (P_1), (P_2).



Σχ. 36.

Σημείωσις: Ἐὰν τὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι ἐσωτερικὰ τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (o), τότε ἔχομεν τομὰς ἐλλείψεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VII.[31]

§48. Ἔστω ὅτι οἱ κλειστοί κύκλοι εἶναι ἐντός ἀλλήλων καί τό σημεῖον ἐντός αὐτῶν.

Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό σχ. 25. Ἀνεφέραμεν ἐκεῖ, ὅτι οἱ κλάδοι οἱ διερχόμενοι ἐκ τῶν σημείων A καί A' εἶναι οἱ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς ἀντιστοίχως ἐσωτερικῶς τῶν (K, R_1), (K, R_2), ἔνθα $R_1 > R_2$ (ἐάν $R_1 = R_2$, τότε εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρου ΚΛ). Ἐπίσης, οἱ κλάδοι οἱ διερχόμενοι ἐκ τῶν σημείων A_1 καί A_1' εἶναι οἱ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς (Κ) – ἐσωτερικῶς τῆς (Λ), ἀντιστοίχως ἐσωτερικῶς τῆς (Κ) – ἐξωτερικῶς τῆς (Λ).

Τούς δύο πρώτους κλάδους ἄς ὀνομάσωμεν ἀντιστοίχως ἐσωτερικόν ἐξύκ[32], ἐσωτερικόν ἐσύκ (οἱ ὅροι οὗτοι δέν ἔχουν ἔννοιαν ἐάν $R_1 = R_2$). Καί τούς ἄλλους δύο κλάδους, ἔνθα $R_1 > R_2$, ἄς ὀνομάσωμεν ἀντιστοίχως ἐξωτερικόν ἐξύκ, ἐξωτερικόν ἐσύκ (ἐπίσης, οἱ ὅροι οὗτοι δέν ἰσχύουν ἐάν $R_1 = R_2$· εἶναι ὅμως κλάδοι ὑπερβολῆς, ὁπότε θά λέγωμεν τότε κλάδος ἑστίας Κ καί κλάδος ἑστίας Λ).

Κατόπιν τῶν ὁρισμῶν αὐτῶν εἰσερχόμεθα εἰς τό πρόβλημα.

Ἔστω ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι οἱ (K, R_1) καί (Λ, R_2) (σχ. 25) καί ὅτι τό ἐντός αὐτῶν σημεῖον Σ θά μᾶς δώσῃ μετά τοῦ κύκλου, ἔστω (K, R_1), τήν ὑπερβολήν μέ ἑστίας τά σημεῖα Κ καί Σ. Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς:

α') Ἄν ὁ ἐξύκ τῆς ὑπερβολῆς (Κ, Σ) τάμῃ τόν ἐσωτερικόν ἐξύκ εἰς τό P_1, τοῦτο εἶναι τό κέντρον περιφερείας (P_1) ἐφαπτομένης ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ) καί (Λ) καί διερχομένης ἐκ τοῦ σημείου Σ.

β') Ἄν ὁ ἐξύκ τῆς ὑπερβολῆς (Κ, Σ) τάμῃ τόν ἐξωτερικόν ἐξύκ εἰς τό P_2, τοῦτο εἶναι τό κέντρον περιφερείας (P_2) ἐφαπτομένης ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ) – ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Λ) καί διερχομένης ἐκ τοῦ Σ.

γ') Ἄν ὁ ἐσύκ τῆς ὑπερβολῆς (Κ, Σ) τάμῃ τόν ἐσωτερικόν ἐσύκ εἰς τό P_3, τοῦτο εἶναι τό κέντρον περιφερείας (P_3) ἐφαπτομένης ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ) καί (Λ) καί διερχομένης ἐκ τοῦ Σ. Καί

δ') Ἄν ὁ ἐσύκ τῆς ὑπερβολῆς (Κ, Σ) τάμῃ τόν ἐξωτερικόν ἐσύκ εἰς τό P_4, τοῦτο εἶναι τό κέντρον περιφερείας (P_4) ἐφαπτομένης ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ) – ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Λ) καί διερχομένης ἐκ τοῦ σημείου Σ.

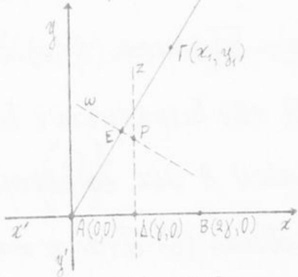
Παρομοίως ἐργαζόμεθα καί δι' ἁπάσας τάς ἄλλας περιπτώσεις ὡς πρός τάς σχετικάς θέσεις τῶν περιφερειῶν (Κ), (Λ) καί τοῦ σημείου Σ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς §§ 10-15 ὡς καί τάς τοιαύτας 27-31.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ X.

§49. Ἐπέκτασις τοῦ VII προβλήματος εἶναι τό X. Καί τούτου τά κέντρα τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν τριῶν διδομένων περιφερειῶν εἶναι τομαί ὑπερβολῶν, ἐλλείψεων καί εὐθειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.[33]

§50. Δίδονται τά σημεῖα A,B καί Γ (σχ. 37), ἐκ τῶν ὁποίων θέλομεν νά διέλθῃ περιφέρεια.



Σχ. 37.

Ἔστω ὀρθοκανονικόν σύστημα ἀξόνων μέ ἀρχήν τό σημεῖον A καί ἔστω ὅτι ὁ θετικός ἡμιάξων τῶν x διέρχεται ἐκ τοῦ σταθεροῦ σημείου B. Ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB ἔχει ἐξίσωσιν: $x=\gamma$ **(1)**. Ἐπίσης, ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AΓ ἔχει ἐξίσωσιν τήν (31) τῆς § 46. Αἱ δύο αὗται δίδουν: $x'=\gamma$ καί $y'=\dfrac{t^2x_1+x_1-2\gamma}{2t}$. Ὥστε τό κέντρον P τῆς ζητουμένης περιφερείας ἔχει συντεταγμένας τάς x' καί y' μέ τόν περιορισμόν $t\neq 0$.

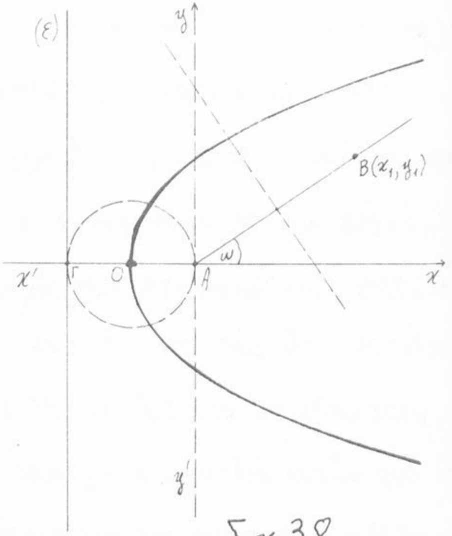
Ἐάν $t=0$, δηλ. $\Gamma\in(x'x)$, τότε ἔχομεν τάς μεσοκαθέτους μέ ἐξισώσεις: $x=\gamma$ καί $x=\dfrac{x_1}{2}$. Αὗται συναληθεύουν ἐάν $x_1=2\gamma$, ἤτοι $\Gamma\equiv B$· ὁπότε αἱ μεσοκάθετοι ταυτίζονται καί ἔχομεν ἀπειρίαν λύσεων μέ $P(\gamma,y)$. Ἐάν $x_1\neq 2\gamma$, δέν ἔχομεν λύσιν.

Ἐπίσης, ἔχομεν καί τόν περιορισμόν $t\neq\dfrac{\pi}{2}$. Ἄν $t=\dfrac{\pi}{2}$, τότε $\Gamma\in(y'y)$. Ὁπότε ἔχομεν τάς μεσοκαθέτους μέ ἐξισώσεις $x=\gamma$ καί $y=\dfrac{y_1}{2}$. Ἤτοι ἔχομεν μίαν περιφέρειαν μέ κέντρον $P\left(\gamma,\dfrac{y_1}{2}\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ III.

§51. Α'. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον $A \notin (\varepsilon)$ (σχ. 38).

Εἴδομεν (§16) ὅτι ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α καί ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) εἶναι ἡ παραβολή ἑστίας Α καί διευθετούσης (ε). Ἄς παραστήσωμεν ταύτην $[A,(\varepsilon)]$.



Σχ. 38.

Ἐάν ὁ ἄξων τῶν τετμημένων εἶναι ἡ εὐθεῖα $x'Ax$ $(\perp(\varepsilon))$ καί τῶν τεταγμένων ἡ κάθετος τῇ $x'x$ εἰς τήν κορυφήν Ο τῆς παραβολῆς, τότε ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι:

$$\boxed{y^2 = 2\nu x} \qquad (1)$$

ἔνθα $\nu = (\Gamma A)$.

Δίδεται τώρα καί σημεῖον $B \not\equiv A$. Ὁ γ.τ. Θ τῶν διερχομένων ἐκ τῶν σημείων Α καί Β εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. ΑΒ. Ἡ τομή λοιπόν αὐτῆς τῆς μεσοκαθέτου μετά τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon)]$ θά μᾶς δώσῃ ἐν γένει δύο σημεῖα P_1 καί P_2. Αἱ περιφέρειαι (P_1), (P_2) εἶναι ἐκεῖναι, αἵτινες διέρχονται ἐκ τῶν σημείων Α καί Β καί ἐφάπτονται τῆς εὐθείας (ε).

Ἄς ἐξετάσωμεν τοῦτο ἀναλυτικῶς. Ἔστω ὅτι ὁ ἄξων τῶν y μεταφέρεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸν καὶ διέρχεται ἐκ τῆς ἑστίας A· ἐνῷ ὁ ἄξων τῶν x παραμένει ὁ ἴδιος. Ἡ παραβολὴ τότε ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\boxed{y^2 = 2\nu\left(x + \frac{\nu}{2}\right)} \qquad (2)$$

διότι $(\Gamma O) = (OA) = \frac{\nu}{2}$.

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2) καὶ τῆς (31) (§ 46) θὰ μᾶς δώσῃ τὰς συντεταγμένας τῶν κέντρων τῶν ζητουμένων περιφερειῶν.

Ἡ (2) γίνεται: $y^2 = 2\nu x + \nu^2$ **(3)**, ἢ λόγῳ τῆς (31) ἔχομεν:

$$\boxed{y^2 + 2\nu t y - \nu^2 - \nu t^2 x_1 - \nu x_1 = 0} \qquad (4)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (4) εἶναι (κατόπιν πράξεων):

$$\Delta = \nu(t^2+1)(\nu + x_1)$$

a) Ἐὰν $\Delta > 0$ ἢ (ἐπειδὴ $\nu > 0$ καὶ $t^2+1>0$) $\nu + x_1 > 0$ ἢ $x_1 > -\nu$, τότε ἔχομεν δύο λύσεις:

$$\boxed{y'_{1,2} = -\nu t \pm \sqrt{\nu(t^2+1)(x_1+\nu)}} \qquad (5)$$

Καὶ ἐκ τῆς (31):

$$x'_{1,2} = \frac{t^2 x_1 + x_1 - 2t y'_{1,2}}{2} \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν (5), (6) ἔχομεν: $P_1(x'_1, y'_1)$ καὶ $P_2(x'_2, y'_2)$.

b) Ἐὰν $\Delta = 0$, ἤτοι $x_1 = -\nu$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν:

$y' = -\nu t = -\nu \cdot \frac{y_1}{x_1} = -\nu \cdot \frac{y_1}{-\nu} = y_1$ **(7)**. Καὶ ἐκ τῆς (31) ἔχομεν:

$x' = \frac{t^2x_1 + x_1 - 2ty'}{2}$ **(8)**. Αἱ (7) καί (8) εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῆς μιᾶς περιφερείας (P) κέντρου $P(x', y')$.

c) Ἐάν $\Delta < 0$, ἤτοι $x_1 < -\nu$, δέν ἔχομεν λύσιν.

ΘΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ $y_2' < y_1'$ ΤΗΣ (4) ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ y.

§52. Θά λάβωμεν τό γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς (4): $\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$ καί τό ἄθροισμα αὐτῶν: $A = -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν: $\Gamma = \frac{-\nu^2 - \nu t^2 x_1 - \nu x_1}{1}$ $= -\nu(\nu + t^2x_1 + x_1) = -\frac{\nu(x_1^2 + \nu x_1 + x_1^2 t^2)}{x_1}$, διότι $x_1 \neq 0$. Ἀλλά $t^2 = \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{y_1^2}{x_1^2}$ $\Leftrightarrow x_1^2 t^2 = y_1^2$. ἄρα ἔχομεν: $x_1^2 + \nu x_1 + x_1^2 t^2 = x_1^2 + \nu x_1 + \frac{\nu^2}{4} + y_1^2 - \frac{\nu^2}{4} =$ $(x_1 + \frac{\nu}{2})^2 + y_1^2 - (\frac{\nu}{2})^2 = F(x_1, y_1)$, ἥτις παριστᾷ τό ἐσωτερικόν ἤ ἐξωτερικόν ἤ περιφέρειαν κύκλου κέντρου $O(-\frac{\nu}{2}, 0)$ καί ἀκτῖνος $R = \frac{\nu}{2} = (OA) = (O\Gamma)$ (σχ. 38). Ἑπομένως $\Gamma = -\frac{\nu[(x_1 + \frac{\nu}{2})^2 + y_1^2 - (\frac{\nu}{2})^2]}{x_1}$ μέ $\nu > 0$ καί $-\nu < x_1$ λόγῳ τῆς a § 51.

Ἐπίσης, $A = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\nu t}{1} = -2\nu\frac{y_1}{x_1}$.

Καταρτίζομεν οὕτω τόν κάτωθι πίνακα:

x_1	$F(x_1, y_1)$	Γ	y_1	A	Συμπεράσματα
$(0, +\infty)$	+	−	+	−	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_1' \rvert < \lvert y_2' \rvert$
			−	+	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_2' \rvert < \lvert y_1' \rvert$
$(-\nu, 0)$	+	+	+	+	$0 < y_2' < y_1'$
			−	−	$y_2' < y_1' < 0$
	0	0	+	+	$0 = y_2' < y_1'$
			−	−	$y_2' < y_1' = 0$
	−	−	+	+	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_2' \rvert < \lvert y_1' \rvert$
			−	−	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_1' \rvert < \lvert y_2' \rvert$

Σημείωσις: Κατωτέρω ἐξετάζομεν τάς περιπτώσεις $y_1 = 0$, $x_1 = 0$.

Εἰδικαί περιπτώσεις.

§53. Διά τήν εὕρεσιν τῆς (31) (§46) ἐσημειώσαμεν τούς περιορισμούς $\omega \neq 0$ καί $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. Ἄς ἐξετάσωμεν αὐτούς κεχωρισμένως.

1) Ἐάν $\omega = 0$ (ἤ $\omega = \pi$), δηλ. ἡ AB εἶναι ὁ ἄξων τῶν τετμημένων, τότε ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB ἔχει ἐξίσωσιν:

$$x = \frac{x_1}{2} \qquad (9)$$

Καί ἡ (3) λόγῳ τῆς (9) γίνεται:

$$y'_{1,2} = \pm\sqrt{\nu(x_1+\nu)} \qquad (10)$$

Ἐξετάζοντες τήν ὑπόρριζον ποσότητα τῆς (10) εὑρίσκομεν τά ἀνωτέρω (§51) συμπεράσματα a, b καί c. Αἱ περιφέρειαι (P_1) καί (P_2) εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν $x'x$. Ἤτοι ἔχομεν $y'_2 < 0 < y'_1$ καί $|y'_1| = |y'_2|$.

2) Ἐάν $\omega = \frac{\pi}{2}$ (ἤ $\omega = \frac{3\pi}{2}$), ἤτοι ἡ $AB \perp x'x$, τότε ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. AB εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα $x'x$ καί ἔχει ἐξίσωσιν: $y = \kappa$ (11), ἔνθα $\kappa = \frac{y_1}{2} \neq 0$. (Ἐάν $y_1 > 0 \Rightarrow y' = \frac{y_1}{2} > 0$ καί ἐάν $y_1 < 0 \Rightarrow y' = \frac{y_1}{2} < 0$). Καί λόγῳ τῆς (11) ἡ (3) γίνεται $x = \frac{\kappa^2 - \nu^2}{2\nu}$.
Ἔχομεν δηλ. μίαν λύσιν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

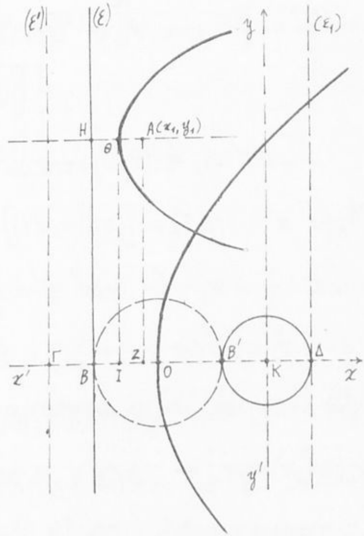
§54. Ἐκ πάντων τούτων ἕπεται ὅτι: Ἐάν τό σημεῖον B εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim A]$ (σχ. 38), τότε δέν ἔχομεν λύσιν. Ἐάν εὑρίσκεται εἰς τήν εὐθεῖαν (ε), ἔχομεν μίαν λύσιν. Ἐάν εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), A]$ — πλήν τοῦ ἄξονος $y'y$ — τότε ἔχομεν δύο λύσεις. Καί ἐάν εὑρίσκεται εἰς τόν ἄξονα τῶν y — πλήν τοῦ σημείου A — ἔχομεν μίαν λύσιν.

§55. **B'.** Ἐάν $A \in (\varepsilon)$, τότε ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς τό A εἶναι ἡ εὐθεῖα $y=0$ · ὁπότε ἐκ τῆς (31)(§46) ἔχομεν: $x=\frac{(t^2+1)x_1}{2}$. Ἔχομεν δηλ. μίαν περιφέρειαν (P) μέ $P(x', y')$, ἔνθα $x' = \frac{(t^2+1)\cdot x_1}{2}$ καί $y'=0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI.

§ 56. **Α'.** Δίδεται ὁ κλειστός κύκλος (Κ, ΚΔ = R) καί ἡ εὐθεῖα (ε), ἔνθα (Κ) ∩ (ε) = ∅ (σχ. 39).

§ 57. **Α'.1.** Γνωρίζομεν ὅτι ὁ γ.τ. Ο τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφερείας (Κ) ἀλλ' ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς, εἶναι ἡ παραβολή [Κ, (ε')] · ἔνθα (ε') ∥ (ε) εἰς ἀπόστασιν (ΒΓ) = R καί ἀνήκει εἰς τό ἡμιεπίπεδον [(ε), ~Κ] (§ 19).



Σχ. 39.

Ἐπίσης, ὁ γ.τ. Ο τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α, εἶναι ἡ παραβολή [Α, (ε)] (§ 16).

Ἡ τομή τῶν παραβολῶν τούτων θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τοῦ Α, ἐφαπτομένης τῆς (ε) καί ἐξωτερικῶς τῆς (Κ). Ἔχομεν ἐν γένει δύο τοιαύτας περιφερείας.

Ἄς ἐξετάσωμεν πάντα ταῦτα ἀναλυτικῶς. Ἡ παραβολή [Κ, (ε')] ἔχει ἐξίσωσιν $y'^2 = 2\nu_1 x'$ **(1)**, ἔνθα ἡ ἡμιπαράμετρος $\nu_1 = (ΓΚ)$ · ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων εἶναι ἡ κορυφή τῆς παραβολῆς Ο (ἔνθα ΓΟ = ΟΚ). Ἐπίσης, ἡ ἄλλη παραβολή [Α, (ε)] ἔχει ἐξἴσωσιν $y''^2 = 2\nu x''$ (2), ἔνθα $\nu = (AH)$· ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εἶναι ἡ κορυφὴ Θ (ἔνθα ΗΘ = ΘΑ).

Ἐὰν μεταφέρωμεν τὰ δύο ταῦτα ὀρθογώνια συστήματα παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰ εἰς τὴν θέσιν Κ, δηλ. μὲ ἄξονα τῶν τετμημένων τὴν εὐθεῖαν $x'x$ καὶ τῶν τεταγμένων τὴν $y'y$, τότε γίνεται[34] ἡ (1): $(y-\beta)^2 = 2\nu_1(x-\alpha)$, ἔνθα εἶναι $O(\alpha,\beta)$. Ἀλλὰ $\alpha = -(KO) = -\frac{(K\Gamma)}{2} = -\frac{\nu_1}{2}$ καὶ $\beta = 0$. Ὅτε ἔχομεν: $(y-0)^2 = 2\nu_1\left(x + \frac{\nu_1}{2}\right)$ ἢ

$$\boxed{y^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2} \qquad (3)$$

Ἐπίσης, ἡ (2) γίνεται: $(y-\beta')^2 = 2\nu(x-\alpha')$, ἔνθα εἶναι $\Theta(\alpha',\beta')$. Ἀλλὰ $\alpha' = -(KI) = -[(KZ)+(ZI)] = -[(KZ)+(A\Theta)] = -\left[(KZ)+\frac{(AH)}{2}\right] = -\left[(KZ)+\frac{\nu}{2}\right] = -(KZ) - \frac{\nu}{2} = x_1 - \frac{\nu}{2}$ καὶ $\beta' = y_1$, ἔνθα εἶναι $A(x_1, y_1)$· ὅτε ἔχομεν: $(y-y_1)^2 = 2\nu\left(x - x_1 + \frac{\nu}{2}\right) = 2\nu x - 2\nu x_1 + \nu^2$ ἢ ἐπειδὴ[35] $(KZ)+(ZB)+(B\Gamma) = (K\Gamma) \iff (KZ)+(AH)+(B\Gamma) = (K\Gamma) \iff -x_1 + \nu + R = \nu_1 \iff \nu = x_1 + \nu_1 - R$, ἔπεται $(y-y_1)^2 = 2(x_1+\nu_1-R)x - 2(x_1+\nu_1-R)x_1 + (x_1+\nu_1-R)^2$. Καὶ ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{y^2 - 2y_1 y + y_1^2 = 2(x_1+\nu_1-R)x - x_1^2 + \nu_1^2 + R^2 - 2\nu_1 R} \qquad (4)$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (3), (4) θὰ μᾶς δώσῃ τὰς συντεταγμένας τῶν κέντρων τῶν ζητουμένων περιφερειῶν. Πρὸς τοῦτοις λύομεν τὴν (3) ὡς πρὸς x καὶ θέτομεν ταύτην εἰς τὴν (4), ὅτε ἔχομεν τελικῶς[36]:

$$\boxed{(x_1-R)y^2 + 2\nu_1 y_1 \cdot y - \nu_1 y_1^2 - \nu_1^2 x_1 - \nu_1^2 R - \nu_1 x_1^2 + \nu_1 R^2 = 0} \qquad (5)$$

Καί ἐάν $x_1 - R \neq 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς (5):

$$\boxed{y'_{1,2} = \frac{-\gamma_1 y_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 y_1^2 - (x_1-R)(-\gamma_1 y_1^2 - \gamma_1^2 x_1 - \gamma_1^2 R - \gamma_1 x_1^2 + \gamma_1 R^2)}}{x_1 - R}} \qquad (6)$$

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης Δ τῆς (6) γίνεται:

$$\Delta = \gamma_1\left[(x_1+\gamma_1-R)y_1^2 + (x_1^3+R^3) + (\gamma_1 x_1^2 - \gamma_1 R^2) + (-Rx_1^2 - R^2 x_1)\right] =$$

$$= \gamma_1\left[(x_1+\gamma_1-R)y_1^2 + (x_1+R)(x_1^2 - Rx_1 + R^2) + \gamma_1(x_1+R)(x_1-R) - Rx_1(x_1+R)\right] =$$

$$= \gamma_1\left[(x_1+\gamma_1-R)y_1^2 + (x_1+R)\left[x_1^2 - Rx_1 + R^2 + \gamma_1(x_1-R) - Rx_1\right]\right] =$$

$$= \gamma_1\left[(x_1+\gamma_1-R)y_1^2 + (x_1+R)\left[(x_1-R)^2 + \gamma_1(x_1-R)\right]\right] =$$

$$= \gamma_1\left[(x_1+\gamma_1-R)y_1^2 + (x_1+R)(x_1-R)(x_1+\gamma_1-R)\right] =$$

$$= \gamma_1(x_1+\gamma_1-R)\left[y_1^2 + (x_1+R)(x_1-R)\right] =$$

$$= \gamma_1(x_1+\gamma_1-R)(x_1^2+y_1^2-R^2) .$$

Διακρίνομεν τάς περιπτώσεις:

α) Ἐάν $\Delta < 0$, δέν ἔχομεν πραγματικάς ρίζας ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $\gamma_1 > 0$, ἕπεται ὅτι οἱ παράγοντες $(x_1+\gamma_1-R)$ καί $(x_1^2+y_1^2-R^2)$ πρέπει νά εἶναι ἑτερόσημοι. Ἐάν $x_1^2+y_1^2-R^2 < 0$, ὅπερ σημαίνει[37] ὅτι τό σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (K), τότε κατ' ἀνάγκην θά εἶναι $x_1+\gamma_1-R > 0$, διότι ἔχομεν: $(KB) > R > |x_1| \Rightarrow -(KB) < x_1 < (KB)$ ἤτοι $x_1 + (KB) > 0$, ἀλλά $(KB) = (K\Gamma) - (B\Gamma) = \gamma_1 - R$· ἄρα $x_1+\gamma_1-R > 0$. Ἤ ἁπλούστερον: $x_1+\gamma_1-R = \gamma > 0$. Ἐάν πάλιν: $x_1+\gamma_1-R < 0$, ἤτοι $x_1+(KB) < 0$ ἤ $x_1 < -(KB)$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό σημεῖον Α εὑρίσκεται[38] εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον

$[(\varepsilon), \sim K]$, τότε κατ' ἀνάγκην θά εἶναι $x_1^2 + y_1^2 - R^2 > 0$· διότι διά τό Α ἔχομεν τώρα: $(AK) > (BK) > R$, ἤτοι τό Α εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (Κ).

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι δέν ἔχομεν λύσιν ὅταν τό Α εἶναι ἐσωτερικόν τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (Κ), ἤ ὅταν εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim K]$.

b) Ἐάν $\Delta = 0$, ἔχομεν μίαν πραγματικήν ρίζαν ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $\nu_1 \neq 0$, ἕπεται ὅτι ὁ εἷς ἐκ τῶν παραγόντων $(x_1 + \nu_1 - R)$ καί $(x_1^2 + y_1^2 - R^2)$ εἶναι μηδέν. Ἐάν $x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A \in$ [περιφ. (Κ), πλήν σημείου Δ] (λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $x_1 - R \neq 0$), τότε κατ' ἀνάγκην $x_1 + \nu_1 - R \neq 0$· διότι ἔχομεν: $(KB) > R \geqslant |x_1| \Rightarrow -(KB) < x_1 < (KB)$ κ.λ.π. Ἐάν $x_1 + \nu_1 - R = 0$, ἤτοι $x_1 + (KB) = 0$ ἤ $x_1 = -(KB)$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A \in (\varepsilon)$[33], τότε κατ' ἀνάγκην θά εἶναι $x_1^2 + y_1^2 - R^2 > 0$.

Ἐκ τῆς (5) ἐπίσης ἔχομεν τόν περιορισμόν $x_1 - R \neq 0 \Longleftrightarrow x_1 \neq R$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A \notin (\varepsilon_1)$, ἔνθα $(\varepsilon_1) \parallel y'y$ διερχομένη ἐκ τοῦ $\Delta(R, 0)$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι ἔχομεν μίαν λύσιν ὅταν τό $A \in (\varepsilon)$ $\veebar$ $A \in$ [περιφ. (Κ), πλήν σημείου Δ].

c) Ἐάν $\Delta > 0$, ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $\nu_1 > 0$, ἕπεται ὅτι οἱ ἄλλοι δύο παράγοντες εἰ-ναι ὁμόσημοι. Ἐάν[40] $x_1^2+y_1^2-R^2>0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό A εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (K), τότε θά εὑρεθῇ καί $x_1+\nu_1-R>0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό A ἀνήκει εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),K]$. Καί ἐπειδή ἔχομεν καί τόν περιορισμόν $x_1\neq R$, ἕπεται ὅτι ἔχομεν δύο λύσεις ὅταν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),K]$, πλήν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (K) καί τῆς εὐθείας (ε_1).

Ἐάν $x_1-R=0\Leftrightarrow x_1=R$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A\in(\varepsilon_1)$, τότε ἔχομεν μίαν πραγματικήν ρίζαν ἐκ τῆς (5), τήν:

$$\boxed{y'=\frac{y_1^2+2\nu_1R}{2y_1}} \qquad (7)$$

μέ $y_1\neq 0$, ἤτοι $A\not\equiv\Delta$. Ἐάν $y_1=0$, τότε $0\cdot y'=2\nu_1R$ καί ἐάν $y_1\to+0$ $\Rightarrow y'=+\infty$, ἐάν $y_1\to-0\Rightarrow y'=-\infty$.

Ὥστε, ἐάν[41] $A\in\big((\varepsilon_1)$, πλήν σημείου $\Delta\big)$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν:

$$\boxed{x=\frac{y^2-\nu_1^2}{2\nu_1}} \qquad (8)$$

καί θέτοντες εἰς αὐτήν τάς εὑρεθείσας τιμάς τοῦ y, ἔχομεν τάς συντεταγμένας τῶν κέντρων τῶν δύο περιφερειῶν, ἐν γένει, αἵτινες διέρχονται ἐκ τοῦ σημείου A καί ἐφάπτονται τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφερείας (K), ἀλλ' ἐξωτερικῶς.

ΘΕΣΕΙΣ ΤΩΝ $y_2'\leqslant y_1'$ ΕΙΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΤΩΝ y.

§58. Ὡς καί ἐν §52 ἔχομεν καί ἐνταῦθα:

$$\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-\nu_1 y_1^2 - \nu_1^2 x_1 - \nu_1^2 R - \nu_1 x_1^2 + \nu_1 R^2}{x_1 - R} = -\nu_1 \frac{y_1^2 + \nu_1 x_1 + \nu_1 R + x_1^2 - R^2}{x_1 - R} = -\nu_1 \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(x_1 + \frac{\nu_1}{2}\right)^2 + y_1^2 - \left(\frac{\nu_1}{2} - R\right)^2}{x_1 - R} = -\nu_1 \cdot \frac{F(x_1, y_1)}{x_1 - R},$$ ἔνθα ἐτέθη $F(x_1, y_1) \equiv \left(x_1 + \frac{\nu_1}{2}\right)^2 + y_1^2 - \left(\frac{\nu_1}{2} - R\right)^2$ · καί ἐάν $F(x_1, y_1) = 0$ ἀπεικονίζεται αὕτη εἰς τήν περιφέρειαν κέντρου $O\left(-\frac{\nu_1}{2}, 0\right)$ καί ἀκτῖνος $\frac{\nu_1}{2} - R = (OB) = (OB')$. Ἐπίσης, $A = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\nu_1 y_1}{x_1 - R}$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν διακρίνουσαν Δ τῆς (6), ὡς καί ὅτι $\nu_1 > 0$, καταρτίζομεν τόν κάτωθι πίνακα:

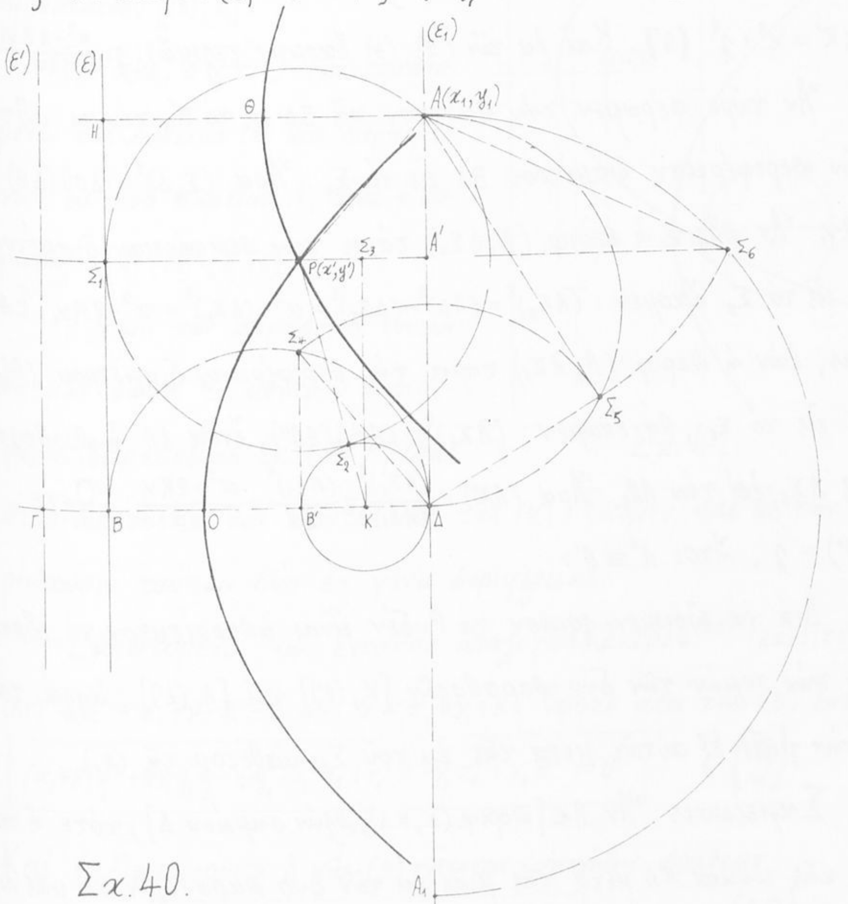
x_1	$x_1^2+y_1^2-R^2$	$x_1+\nu_1-R$	Δ	$F(x_1,y_1)$	x_1-R	Γ	y_1	A	Συμπέρασμα
$(R, +\infty)$	+	+	+	+	+	−	+	−	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_1'\rvert < \lvert y_2'\rvert$
							0	0	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_2'\rvert = \lvert y_1'\rvert$
							−	+	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_2'\rvert < \lvert y_1'\rvert$
R					0		+		λόγῳ τῆς (7) $0 < y'$
							+0		» » » $y' = +\infty$
							−0		» » » $y' = -\infty$
							−		» » » $y' < 0$
$(-R, R)$	+	+	+	+	−	+	+	+	$0 < y_2' < y_1'$
							−	−	$y_2' < y_1' < 0$
	0	+	0	+	−	+	+	+	$0 < y_2' = y_1'$
							−	−	$y_2' = y_1' < 0$
	−	+	−				+		μιγαδικαί συζυγεῖς
							0		φανταστικαί »
							−		μιγαδικαί »
$-R$	+	+	+	+	−	+	+	+	$0 < y_2' < y_1$
							−	−	$y_2 < y_1' < 0$
	0	+	0	0	−	0	0	0	$y_2' = y_1' = 0$
$(-\nu_1+R, -R)$	+	+	+	+	−	+	+	+	$0 < y_2' < y_1$
							−	−	$y_2' < y_1' < 0$
				0	−	0	+	+	$0 = y_2' < y_1$
							−	−	$y_2' < y_1' = 0$
				−	−	−	+	+	$y_2' < 0 < y_1'$, $\lvert y_2'\rvert < \lvert y_1'\rvert$
							0	0	», $\lvert y_2'\rvert = \lvert y_1'\rvert$
							−	−	», $\lvert y_1'\rvert < \lvert y_2'\rvert$
$-\nu_1+R$	+	0	0	+	−	+	+	+	$0 < y_2' = y_1'$
							−	−	$y_2' = y_1' < 0$
				0	−	0	0	0	$y_2' = y_1' = 0$
$(-\infty, -\nu_1+R)$	+	−	−				+		μιγαδικαί συζυγεῖς
							0		φανταστικαί »
							−		μιγαδικαί »

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

τοῦ κέντρου $P(x',y')$ τῆς ζητουμένης περιφερείας ὅταν:

$A(x_1,y_1) \in [(\varepsilon_1)$, πλήν σημείου $\Delta]$ (σχ. 39), ὁπότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

§59. Ἔχομεν (ὅρα σχ. 40): $(K\Sigma_3)^2 = (KP)^2 - (P\Sigma_3)^2 = [(K\Sigma_2) + (\Sigma_2 P)]^2 -$



Σχ. 40.

$-[(PA') - (\Sigma_3 A')]^2$ **(1')**. Ἀλλά $(PA') = (\Sigma_1 A') - (\Sigma_1 P) = (B\Delta) - R' = (BK) + (K\Delta) - R' = (BK) + (B\Gamma) - R' = (K\Gamma) - R' = \nu_1 - R'$ · ἔνθα ἐτέθη $(P\Sigma_1) = R'$. Ἄν θέσωμεν καί $(\Sigma_3 A') = (K\Delta) = R$, ἡ (1') γίνεται: $(K\Sigma_3)^2 = (R + R')^2 - (\nu_1 - R' - R)^2 = R^2 + R'^2 +$

$+2RR'-\gamma_1^2-R'^2-R^2+2\gamma_1R'+2\gamma_1R-2R'R=-\gamma_1^2+2\gamma_1R'+2\gamma_1R$. Ἀλλά $(K\Sigma_3)^2=(\Delta A')^2$ $=\left[(\Delta A)-(AA')\right]^2=(\alpha-\lambda)^2$, ἄν τεθῇ $(A\Delta)=\alpha$ καί $(AA')=\lambda$. Ἄρα: $(\alpha-\lambda)^2=$ $-\gamma_1^2+2\gamma_1R'+2\gamma_1R$ **(2')**. Ἐπίσης, εἶναι: $(PA')^2=(PA)^2-(AA')^2=R'^2-\lambda^2$ καί $(PA')^2=(\gamma_1-R')^2$. Ἄρα: $(\gamma_1-R')^2=R'^2-\lambda^2 \Longleftrightarrow \gamma_1^2+R'^2-2\gamma_1R=R'^2-\lambda^2 \Longleftrightarrow$ $2\gamma_1R'=\gamma_1^2+\lambda^2$ **(3')**. Καί ἐκ τῶν (2), (3) ἔχομεν τελικῶς: $\lambda=\dfrac{\alpha^2-2R\gamma_1}{2\alpha}$.

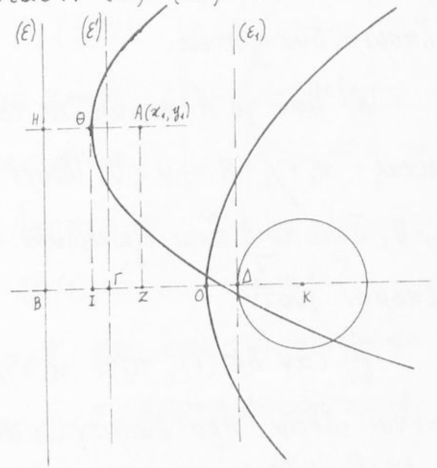
Ἄν τώρα φέρωμεν τήν κάθετον τῇ ΒΔ εἰς τό Β', τέμνει αὕτη τήν περιφέρειαν διαμέτρου ΒΔ εἰς τό Σ_4. Ἄρα $(\Sigma_4\Delta)^2=(\Delta B')(\Delta B)=$ $2R\gamma_1$. Ἄν πάλιν ἡ περιφ. $(\Delta, \Delta\Sigma_4)$ τάμῃ τήν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΔ εἰς τό Σ_5 ἔχομεν: $(A\Sigma_5)^2=(A\Delta)^2-(\Delta\Sigma_5)^2=\alpha^2-(\Delta\Sigma_4)^2=\alpha^2-2R\gamma_1$. Ἐπίσης, ἐάν ἡ περιφ. $(A, A\Sigma_5)$ τάμῃ τήν περιφέρειαν διαμέτρου $(AA_1)=$ 2α εἰς τό Σ_6, θά ἔχωμεν: $(A\Sigma_6)^2=(AA_1)(AA'')$, ἔνθα AA'' ἡ προβολή τῆς $A\Sigma_6$ ἐπί τήν AA_1. Ἄρα $(AA'')=\dfrac{(A\Sigma_6)^2}{(AA_1)}=\dfrac{(A\Sigma_5)^2}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-2R\gamma_1}{2\alpha}$. Ὥστε: $(AA'')=\lambda$, ἤτοι $A''\equiv A'$.

Διά νά εὕρωμεν λοιπόν τό Ρ δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά εὕρωμεν τήν τομήν τῶν δύο παραβολῶν $[K, (\varepsilon')]$ καί $[A, (\varepsilon')]$, ἀλλά τήν τομήν μιᾶς ἐξ αὐτῶν μετά τῆς ἐκ τοῦ Σ_6 καθέτου τῇ (ε_1).

Σημείωσις: Ἄν $A\in$[περιφ. (Κ, ΚΔ), πλήν σημείου Δ], τότε ἡ τομή τῆς εὐθείας ΚΑ μετά τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο παραβολῶν θά μᾶς δώσῃ τό Ρ.

§60. **Α'.2.** Ἄς ἐξετάσωμεν καί τήν περίπτωσιν, ὅταν ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Γνωρίζομεν (§20) ὅτι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 41) καί τῆς περιφ. (Κ), ἀλλ' ἐσωτερικῶς, εἶναι ἡ παραβολή [Κ, (ε')]· ἔνθα (ε')//(ε) εἰς ἀπόστασιν (ΒΓ) = (ΚΔ) = R καί εἰς τό ἡμιεπίπεδον [(ε), Κ].



Σχ. 41.

Ἐπίσης, ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α, εἶναι ἡ παραβολή [Α, (ε)] (§16).

Ἡ τομή τῶν παραβολῶν τούτων θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τοῦ Α, ἐφαπτομένης τῆς (ε) καί ἐσωτερικῶς τῆς (Κ). Ἔχομεν καί εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην δύο ἐν γένει περιφερείας.

Σκεπτόμενοι καί ἐνταῦθα ἀναλόγως ἔχομεν[42] (ΚΖ)+(ΖΒ)−(ΒΓ)= (ΚΓ) $\iff -x_1+\nu-R=\nu_1 \iff \nu=x_1+\nu_1+R$. Ὁπότε ἀντί τῆς (5) ἔχομεν τήν:

$$\boxed{(x_1+R)y^2+2\nu_1 y_1 y-\nu_1 y_1^2-\nu_1^2 x_1+\nu_1^2 R-\nu_1 x_1^2+\nu_1 R^2=0} \qquad (9)$$

Καί ἡ διακρίνουσα Δ τῆς (9) γίνεται κατόπιν πράξεων:

$$\boxed{\Delta=\nu_1(x_1+\nu_1+R)(x_1^2+y_1^2-R^2)} \qquad (10)$$

Σπουδάζοντες τήν διακρίνουσαν Δ, διακρίνομεν τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

α΄) Ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), K]$, τότε εἶναι: $x_1+\nu_1+R=\nu>0$. Ὁπότε, ἐάν: 1) $x_1^2+y_1^2-R^2<0$, δέν ἔχομεν λύσιν, 2) $x_1^2+y_1^2-R^2=0$, ἔχομεν μίαν λύσιν, καί 3) $x_1^2+y_1^2-R^2>0$, ἔχομεν δύο λύσεις.

β΄) Ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim K]$, τότε εἶναι: $x_1+\nu_1+R=-\nu<0$. Ὁπότε ἀναγκαστικῶς θά εἶναι: $x_1^2+y_1^2-R^2>0$, διότι τό A εἶναι ἐξωτερικόν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (K). Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

γ΄) Ἐάν $A\in(\varepsilon)$, τότε $x_1+\nu_1-R=\nu=0$ δηλ. ἡ παραβολή γίνεται εὐθεῖα. Ἄρα ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καταλήγομεν δηλ. εἰς τά ἴδια συμπεράσματα ὡς καί ἐν Α΄.1., μέ τήν διαφοράν ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε_1) ἔλαβεν ἄλλην θέσιν, λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $x_1+R\neq 0 \Longleftrightarrow x_1\neq -R$.

Σημείωσις: Δυνάμεθα καί ἐνταῦθα νά κατασκευάσωμεν ἀνάλογον πίνακα ὡς καί ἐν Α΄.1. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν: $\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}=-\nu_1\dfrac{(x_1+\frac{\nu_1}{2})^2+y_1^2-(\frac{\nu_1}{2}+R)^2}{x_1+R}$.

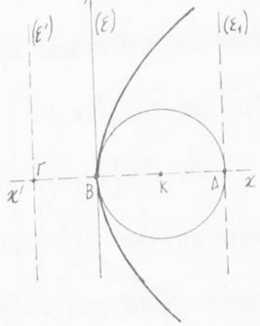
§61. Ἔχομεν λοιπόν εἰς τήν περίπτωσιν Α΄, ἐν γένει, τέσσαρας περιφερείας-λύσεις.

§62. **Β΄**. Ἡ εὐθεῖα (ε) ἐφάπτεται τῆς περιφ. (K) (σχ. 42).

1) Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφ. (K) ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς, εἶναι ἡ παραβολή $[K, (\varepsilon')]$, πλήν τοῦ σημείου B, ὡς

καί ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Bx' (§22).

Διά τήν παραβολήν $[K, (\varepsilon')]$ ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα, ὡς καί ἐν $A'.1.$ (§57).



Σχ.42.

Διά τήν Bx' ἔχομεν ἀντί τῆς (3) (§57), τήν $y=0 \mid x<-R$. Ὁπότε, θέτοντες εἰς τήν (4) (§57) $y=0$ καί $x_1=2R$ — καί ἐπειδή $x<-R \Longrightarrow x+R \neq 0$ — ἔχομεν: $x=\dfrac{x_1^2+y_1^2-R^2}{2(x_1+R)}$. Δηλαδή ἔχομεν μίαν περιφέρειαν. Ἐάν ὅμως $A\in(\varepsilon)$, τότε ἀντί τῆς (4) ἔχομεν τήν $y=y_1 \mid x\in\Pi$ καί ἀντί τῆς (3) τήν $y=0 \mid x<-R$. Αὗται συμβιβάζονται ὅταν $y_1=0$ ὁπότε, ἐπειδή $x_1=-R$, ἕπεται ὅτι $A\equiv B$. Ἔχομεν λοιπόν ἀπείρους περιφερείας $P(x', y')$ μέ $x'<-R$ καί $y'=0$.

2) Ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφ. (K) ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Bx, πλήν τοῦ σημείου K. Αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν $y=0 \mid x>-R \wedge x\neq 0$. Ὁπότε ἔχομεν, ὡς ἀνωτέρω, $x=\dfrac{x_1^2+y_1^2-R^2}{2(x_1+R)}$ ἀλλά $x\neq 0$, ἤτοι — ἐπειδή $x_1+R\neq 0$ — $x_1^2+y_1^2-R^2\neq 0$. Ἔχομεν δηλ. μίαν λύσιν καί οὐδεμίαν ἐάν $A\in[\text{περιφ.}(K)]$.

Ἐπίσης, ἐάν $A\in(\varepsilon)$, τότε ἀντί τῆς (4) ἔχομεν τήν $y=y_1 \mid x\in\Pi$ καί ἀντί τῆς (3) τήν $y=0 \mid x>-R \wedge x\neq 0$. Αὗται συμβιβάζονται ὅταν $y_1=0$, ὁπότε $A\equiv B$. Ἔχομεν λοιπόν ἀπείρους περιφερείας $P(x', y')$ μέ $x'>-R$ καί $y'=0$, πλήν τῆς $P'(0,0)$.

Ὥστε:

Ἄν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον (Κ)], ἔχομεν μίαν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τοῦ Α καί ἐφαπτομένην τῆς (ε), ὡς καί τῆς (Κ) ἐσωτερικῶς (εἰς τό σημεῖον Β).

Ἄν $A \in$ [περιφ. (Κ), πλήν σημείων Β, Δ], ἔχομεν μίαν περιφέρειαν (ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῆς (Κ)). Ἄν $A \equiv B$, ἔχομεν ἀπειρίαν περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) εἰς τό Β καί τῆς (Κ) εἰς τό Β πάλιν, τῶν ὁποίων τά κέντρα εἶναι ἐπί τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Βx, πλήν τοῦ σημείου Κ, καί ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς· ἤ ἐπί τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Βx' καί ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς τῆς (Κ).

Ἄν $A \equiv \Delta$, δέν ἔχομεν λύσιν.

Ἄν $A \in$ [(ε), πλήν σημείου Β], ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς τῆς (Κ).

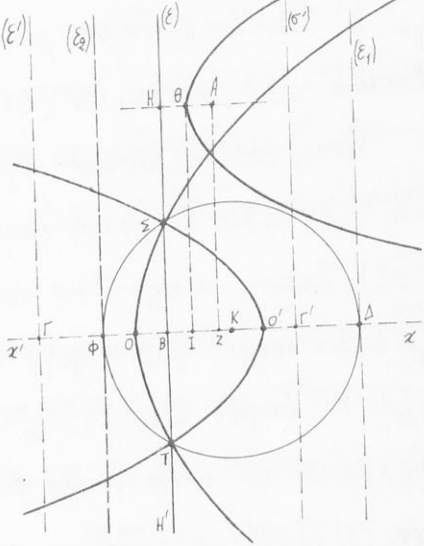
Ἄν $A \in$ [(ε_1), πλήν σημείου Δ], ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας τῆς (Κ), μίαν ἐξωτερικῶς καί μίαν ἐσωτερικῶς ταύτης.

Ἄν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἡμιεπίπεδον [(ε), Κ], οὐχί ὅμως εἰς τά ἀνωτέρω ἀναφερθέντα σημειοσύνολα, τότε ἔχομεν τρεῖς περιφερείας ἐφαπτομένας τῆς (Κ), δύο ἐξωτερικῶς καί μίαν ἐσωτερικῶς.

Καί, ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἕτερον ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον, τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τοῦ Α, ἐφαπτομένην τῆς (ε) (εἰς τό Β) καί τῆς (Κ) ἐξωτερικῶς (εἰς τό Β).

§63. Γ'. Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τόν κύκλον (Κ) (σχ. 43).

1) Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν § 24, ὡς καί τήν § 57 συμπεραίνομεν ὅτι: ἡ τομή τῆς παραβολῆς [Κ, (ε')], ἔνθα (ΓΒ) = R, μετά τῆς παραβολῆς [Α, (ε)] εἶναι τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις διέρχεται ἐκ τοῦ Α καί ἐφάπτεται τῶν (ε) καί (Κ).



Σχ. 43.

Ἐργαζόμενοι καί ἐνταῦθα ὡς καί ἐν § 57, καταλήγομεν εἰς τήν (5) (§ 57). Οὕτω διακρίνομεν τάς περιπτώσεις:

α) Ἐάν $\Delta < 0$, δέν ἔχομεν πραγματικάς ρίζας ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $\nu_1 > 0$ (διά τήν παραβολήν [Κ, (ε')]), ἕπεται ὅτι οἱ παράγοντες $(x_1+\nu_1-R)$ καί $(x_1^2+y_1^2-R^2)$ πρέπει νά εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἐάν λοιπόν Α ∈ (ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα ΣΔΤΒΣ), τότε ὁ μέν παράγων $(x_1^2+y_1^2-R^2)$ εἶναι ἀρνητικός, ὁ δέ $(x_1+\nu_1-R)$ θετικός (§ 57, α). Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν. (Ταῦτα διά τήν παραβολήν [Κ, (ε')], κατωτέρω ἀναφέρομεν καί διά τήν ἄλλην παραβολήν [Κ, (σ')], ὅρα § 25).

Ἐπίσης, ἐάν τό Α εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον [(ε), ~Κ] πλήν τοῦ κλειστοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΣΦΤΒΣ, τότε ὁ μέν παράγων $(x_1^2+y_1^2-R^2)$ εἶναι θετικός, ὁ δέ $(x_1+\nu_1-R)$ ἀρνητικός. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

b) Ἐάν $\Delta=0$, ἔχομεν μίαν πραγματικήν ρίζαν ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $\nu_1\neq 0$, ἕπεται ὅτι $(x_1+\nu_1-R=0) \vee (x_1^2+y_1^2-R^2=0)$.

Ὥστε, ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν τόξον ΔΣ ἤ τό ΔΤ), ἔχομεν $x_1^2+y_1^2-R^2=0$ καί $x_1+\nu_1-R>0$. Ἑπομένως ἔχομεν μίαν ρίζαν. Ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν $\widehat{\Sigma\Phi T}$), ἔχομεν $x_1^2+y_1^2-R^2=0$ καί $x_1+\nu_1-R<0$. Ἤτοι μία ρίζα. Ἐάν $A\equiv\Delta$, δέν ἔχομεν λύσιν, λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $x_1-R\neq 0$. Ἐάν $(A\equiv\Sigma)$ $\underline{\vee}$ $(A\equiv T)$, ἔχομεν τότε $(x_1^2+y_1^2-R^2=0)\wedge(x_1+\nu_1-R=0)$. Ὁπότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι ἐκ τῆς (6) (§57): $y'=\dfrac{-\nu_1 y_1}{x_1-R}$ · καί ἐπειδή $x_1+\nu_1-R=0$, ἕπεται $y'=\dfrac{-\nu_1 y_1}{-\nu_1}=y_1$. Ἐπίσης, ἐκ τῆς (3): $x'=\dfrac{y_1^2-\nu_1^2}{2\nu_1}$ · ἀλλ' ἐπειδή $x_1^2+y_1^2-R^2=0 \iff y_1^2=R^2-x_1^2$, ἕπεται ὅτι $x'=\dfrac{R^2-x_1^2-\nu_1^2}{2\nu_1}$, ἤ ἐπειδή $x_1+\nu_1-R=0 \iff x_1=R-\nu_1 \Rightarrow x_1^2=R^2+\nu_1^2-2\nu_1R$, ἕπεται: $x'=\dfrac{R^2-R^2-\nu_1^2+2\nu_1R-\nu_1^2}{2\nu_1}=\dfrac{2\nu_1(-\nu_1+R)}{2\nu_1}=-\nu_1+R$. Ὥστε ἔχομεν $P(x',y')$ μέ $x'=-\nu_1+R=\overline{K\Gamma}+\overline{\Gamma B}=\overline{KB}$ καί $y'=y_1$. Ἤτοι, ἐάν $A\equiv\Sigma$, τότε τό κέντρον P τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι τό Σ, δηλ. $P\equiv\Sigma$ καί ἡ ζητουμένη περιφέρεια εἶναι ἡ (Σ, ΣΣ), δηλ. μηδενική. Ἐπίσης, ἄν $A\equiv T$, ἔχομεν $P\equiv T$, ἤτοι ἡ μηδενική περιφέρεια (Τ, ΤΤ).

Ἐάν $A\in$(ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν ΣΗ ἤ ΤΗ'), τότε εἶναι $x_1^2+y_1^2-$

$-R^2>0$ καί $x_1+v_1-R=0$ · δηλ. ἔχομεν μίαν ρίζαν ἐκ τῆς (5) (ταῦτα διά τήν παραβολήν $[K,(\varepsilon')]$).

Ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν εὐθ. τμ. ΣΤ), εἶναι $(x_1^2+y_1^2-R^2<0)\wedge(x_1+v_1-R=0)$, δηλ. μίαν ρίζαν ἐκ τῆς (5).

C) Ἐάν $\Delta>0$, ἔχομεν δύο πραγματικάς ρίζας ἐκ τῆς (5). Ἐπειδή $v_1>0$ (ἐπαναλαμβάνομεν, διά τήν παραβολήν $[K,(\varepsilon')]$), ἔπεται ὅτι οἱ παράγοντες (x_1+v_1-R) καί $(x_1^2+y_1^2-R^2)$ πρέπει νά εἶναι ὁμόσημοι.

Ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),K]$, πλήν τοῦ κλειστοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΣΔΤΒΣ καί τῆς εὐθείας (ε_1), τότε εἶναι $x_1^2+y_1^2-R^2>0$ καί $x_1+v_1-R>0$. Ἄρα ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (5).

Ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα ΣΦΤΒΣ), τότε εἶναι: $x_1^2+y_1^2-R^2<0$ καί $x_1+v_1-R<0$. Ἄρα ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (5).

Τέλος, ἐάν $A\in[(\varepsilon_1)$, πλήν σημείου $\Delta]$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Σημείωσις: Εἰς τά ἴδια συμπεράσματα καταλήγομεν, ἐάν ἡ εὐθεῖα (ε) ἔχῃ ἐξίσωσιν $x=0$ ἤ $x=\overline{KB}>0$.

2) Ἀναλόγως σκεπτόμενοι καί διά τήν παραβολήν $[K,(\sigma')]$ ἔνθα εἶναι τώρα[43] $v_1<0$, καταλήγομεν εἰς τά ἑξῆς γενικά συμπεράσματα καί διά τάς δύο περιπτώσεις 1 καί 2:

Ἐάν $(A\equiv\Sigma)\,\underline{\vee}\,(A\equiv T)$, δέν ἔχομεν λύσιν.

Ἐάν $A \in [(\varepsilon_1) \veebar (\varepsilon_2)]$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

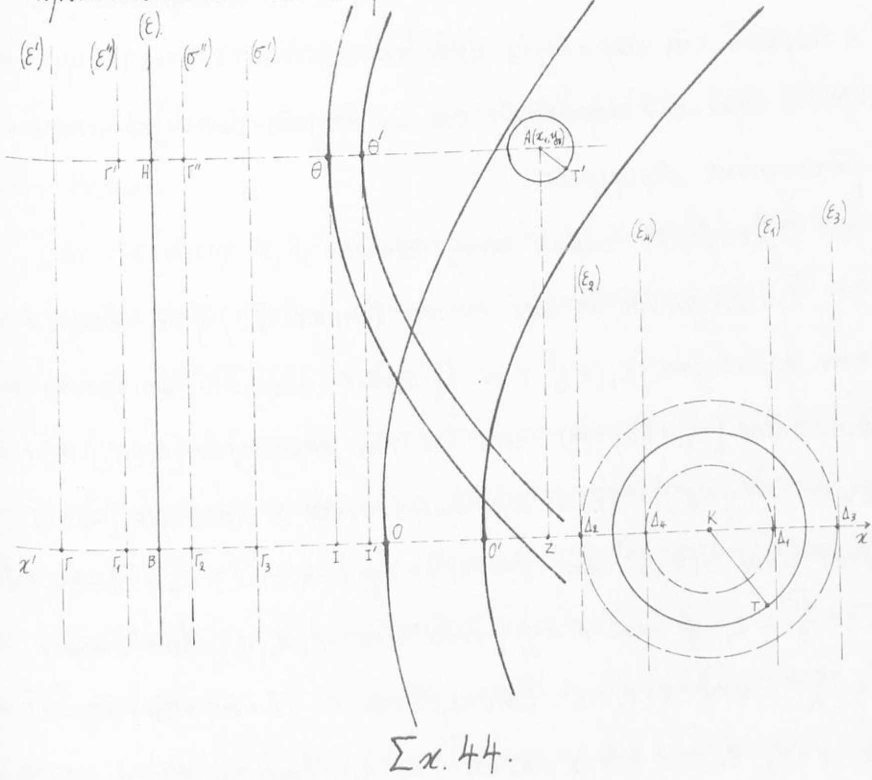
Τέλος, εἰς οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν ἐάν ἀνήκῃ τό A, ἔχομεν δύο λύσεις.

Παρατήρησις: Εἶναι (σχ. 43): $\Gamma\Phi = \Gamma B - \Phi B = \Phi K - \Phi B = BK = B\Gamma' - K\Gamma' = K\Delta - K\Gamma' = \Gamma'\Delta$ · ἤτοι $\Gamma\Phi = BK = \Gamma'\Delta$. Ἐπίσης, εἶναι: $B\Gamma' = K\Phi$ ἤ $BK + K\Gamma' = KB + B\Phi$ ἤ $K\Gamma' = B\Phi$ · ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν § 24, συμπεραίνομεν ὅτι: $\Phi O = OB = KO' = O'\Gamma'$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IX.(44)

§ 64. Δίδονται αἱ περιφέρειαι (K, R_1), (A, R_2), μέ $R_1 \geqslant R_2$, ὡς καί ἡ εὐθεῖα (ε). Καί ζητεῖται περιφέρεια ἐφαπτομένη αὐτῶν.

§ 65. **Α'**. Αἱ περιφέρειαι (Κ), (Α) εὑρίσκονται εἰς τό αὐτό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρός τήν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 44).



Σχ. 44.

§ 66. **Α'.1.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ) καί (Α).

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 19) ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (Κ), ἀλλ' ἐξωτερικῶς, εἶναι ἡ παραβολή [Κ, (ε')], ἔνθα $(\varepsilon')\parallel(\varepsilon)$ εἰς ἀπόστασιν $(B\Gamma)=(K T)=R_1$ καί εἰς τό ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim K]$· ἡ κορυφή αὐτῆς τῆς παραβολῆς εἶναι τό O.

Ἐπίσης, ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (A), ἀλλ' ἐξωτερικῶς, εἶναι ἡ παραβολή $[A, (\varepsilon'')]$, ἔνθα $(\varepsilon'')\parallel(\varepsilon)$ εἰς ἀπόστασιν $(H\Gamma')=(A\Gamma')=R_2$ καί εἰς τό ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim K]$· ἡ κορυφή τῆς παραβολῆς εἶναι τό Θ.

Ἡ τομή τῶν παραβολῶν τούτων θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐξετάζομεν ταῦτα ἀναλυτικῶς.

Σκεπτόμενοι ὡς καί ἐν προβλήματι VI, § 57, ἔχομεν διά τήν παραβολήν $[K, (\varepsilon')]$ τήν ἐξίσωσιν (3) (§ 57), ὡρισμένην εἰς τό διάστημα $[x_0=\overline{KO}, +\infty)$· καί διά τήν παραβολήν $[A, (\varepsilon'')]$ τήν ἐξίσωσιν: $(y-\beta')^2=2\gamma(x-\alpha')$, ὡρισμένην εἰς τό διάστημα $[x_\theta=\overline{KI}, +\infty)$, ἔνθα εἶναι $\Theta(\alpha', \beta')$ καί $\gamma=(A\Gamma')$. Ἀλλά $\alpha'=\overline{KI}=\overline{KZ}+\overline{ZI}=\overline{KZ}+\overline{A\Theta}=\overline{KZ}+\frac{\overline{A\Gamma'}}{2}=x_1-\frac{\gamma}{2}$ καί $\beta'=y_1$, ἔνθα εἶναι $A(x_1, y_1)$. Ἄρα ἔχομεν: $(y-y_1)^2=2\gamma x-2\gamma x_1+\gamma^2$. Ἐπίσης, ἔχομεν: $\overline{KZ}+\overline{Z\Gamma_1}+\overline{\Gamma_1 B}+\overline{B\Gamma}=\overline{K\Gamma} \Leftrightarrow x_1-\gamma+R_2-R_1=-\gamma_1 \Leftrightarrow \gamma=x_1+\gamma_1-(R_1-R_2)$. Ἄρα τήν θέσιν τοῦ R εἰς τήν (4) (§ 57) ἔχει ἡ παράστασις R_1-R_2. Καί ἑπομένως, ἀντί τῆς (5) (§ 57), θά ἔχωμεν:

$$\boxed{(x_1-R_1+R_2)y^2+2\gamma_1 y_1 y-\gamma_1 y_1^2-\gamma_1^2 x_1-\gamma_1^2(R_1-R_2)-\gamma_1 x_1^2+\gamma_1(R_1-R_2)^2=0} \quad (1)$$

Καί ἐάν $x_1 - R_1 + R_2 \neq 0$, ἔχομεν τάς ρίζας τῆς (1), ὡς καί ἐν (6) (§57).

Ἡ διακρίνουσα τῆς (1) γίνεται τελικῶς:

$$\boxed{\Delta = \gamma_1(x_1 + \gamma_1 - R_1 + R_2)\left[x_1^2 + y_1^2 - (R_1 - R_2)^2\right]} \qquad (2)$$

Εἶναι: $\gamma_1 = \overline{\Gamma K} > 0$ καί $x_1 + \gamma_1 - R_1 + R_2 = \gamma = \overline{\Gamma' A} > 0$. Ἑπομένως ἡ διακρίνουσα Δ ἐξαρτᾶται ἀπό τήν παράστασιν $x_1^2 + y_1^2 - (R_1 - R_2)^2$. Καί συμπεραίνομεν οὕτω τά ἑξῆς:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον $(K, (K\Delta_1) = R_1 - R_2)$] $\veebar$ $A \equiv \Delta_1$, τότε <u>οὐδεμίαν</u> λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ [περιφ. $(K, R_1 - R_2)$, πλήν σημείου Δ_1] $\veebar$ $A \in$ [(ε_1), πλήν σημείου Δ_1], τότε ἔχομεν <u>μίαν</u> περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε) καί ἐξωτερικῶς τῶν (K, R_1), (A, R_2).

Καί ἐάν τό Α ἀνήκη εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''), K]$, πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν <u>δύο</u> περιφερείας, ἔνθα $(\sigma'') // (\varepsilon)$ εἰς ἀπόστασιν $(H\Gamma'') = (AT') = R_2$ καί εἰς τό ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), K]$ καί τοῦτο διότι $(HA) > R_2$.

Σημείωσις α': Ἐάν $R_1 = R_2$, τότε ἡ (2) (§66) γίνεται $\Delta = \gamma_1(x_1 + \gamma_1)(x_1^2 + y_1^2) > 0$, μέ $A \not\equiv K$. Ἐπίσης, $\Delta_1 \equiv K$. Ὥστε τότε ἔχομεν δύο λύσεις, ἤ μίαν ἐάν $A \in$ [(ε_1), πλήν σημείου $\Delta_1 \equiv K$].

Σημείωσις β': Ἀνάλογον πίνακα πρός τόν τῆς § 58 δυνάμεθα καί εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν νά κατασκευάσωμεν. Ἐνταῦθα ἔχομεν: $\Gamma = \dfrac{\gamma}{\alpha} = -\gamma_1 \cdot \dfrac{\left(x_1 + \frac{\gamma_1}{2}\right)^2 + y_1^2 - \left[\frac{\gamma_1}{2} - (R_1 - R_2)\right]^2}{x_1 - R_1 + R_2}$.

§67. **Α'.2.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α) καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Γνωρίζομεν ὅτι (§20): ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφερείας (Κ), ἀλλ' ἐσωτερικῶς, εἶναι ἡ παραβολή [Κ, (σ')], ἔνθα (σ')∥(ε) εἰς ἀπόστασιν $(ΒΓ_3) = (ΚΤ) = R_1$ καί εἰς τό ἡμιεπίπεδον [(ε), Κ] (σχ. 44)· ἡ κορυφή αὐτῆς εἶναι τό Ο', εἶναι δέ ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $[x_{O'} = \overline{KO'}, +\infty)$.

Ἡ τομή λοιπόν τῶν παραβολῶν [Κ, (σ')] καί [Α, (ε'')], θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν περίπτωσιν Α'.2, §60, συμπεραίνομεν ὅτι[45]:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον $(K, (K\Delta) = R_1 + R_2)$] $\veebar$ $A \equiv \Delta_2$, τότε <u>οὐδεμίαν</u> λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ [περιφ. (K, R_1+R_2), πλήν σημείου Δ_2] $\veebar$ $A \in$ [(ε_2), πλήν σημείου Δ_2], τότε ἔχομεν <u>μίαν</u> περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε), ἐξωτερικῶς τῆς (A, R_2) καί ἐσωτερικῶς τῆς (K, R_1): Ταῦτα δέ μέ τήν παρατήρησιν ὅτι $\overline{K\Gamma_2} < \overline{K\Delta_2}$. Ἡ (σ'') κινεῖται εἰς τήν ταινίαν [(ε), (σ')].

Καί ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον [(σ''), Κ], πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν <u>δύο</u> περιφερ.

§68. **Α'.3.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Γνωρίζομεν ὅτι: ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε)

καί τῆς περιφ. (A), ἀλλ' ἐσωτερικῶς, εἶναι ἡ παραβολή $[A, (\sigma'')]$.
ἡ κορυφή αὐτῆς εἶναι τό Θ'. Εἶναι δέ αὕτη ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $[x_{\theta'} = \overline{K\Gamma'}, +\infty)$.

Ἡ τομή λοιπόν τῶν παραβολῶν $[K, (\varepsilon')]$ καί $[A, (\sigma'')]$ θά μᾶς δώση τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν ἀκριβῶς τά ἴδια, πλήν ὅμως ὅτι εἰς τήν (4)(§57) θά θέσωμεν ἀντί R τήν παράστασιν $R_1 + R_2$. Καί τοῦτο διότι: $\overline{KZ} + \overline{Z\Gamma_2} + \overline{\Gamma_2 B} + \overline{B\Gamma} = \overline{K\Gamma} \Leftrightarrow x_1 - \nu - R_2 - R_1 = -\nu_1 \Leftrightarrow \nu = x_1 + \nu_1 - (R_1 + R_2)$, ὁπότε ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\boxed{(x_1 - R_1 - R_2)y^2 + 2\nu_1 y_1 \cdot y - \nu_1 y_1^2 - \nu_1^2 x_1 - \nu_1^2(R_1 + R_2) - \nu_1 x_1^2 - \nu_1 (R_1 + R_2)^2 = 0} \quad (3)$$

Καί ἐάν $x_1 - R_1 - R_2 \neq 0$, ἔχομεν τάς ρίζας τῆς (3).

Ἡ διακρίνουσα Δ τῆς (3) γίνεται:

$$\boxed{\Delta = \nu_1 (x_1 + \nu_1 - R_1 - R_2)\left[x_1^2 + y_1^2 - (R_1 + R_2)^2\right]} \quad (4)$$

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον $(K, (K\Delta_3) = R_1 + R_2)$] $\veebar$ $A \equiv \Delta_3$, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ [περιφ. $(K, R_1 + R_2)$, πλήν σημεῖον Δ_3] $\veebar$ $A \in$ [(ε_3), πλήν σημείου Δ_3], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε), ἐσωτερικῶς τῆς (A, R_2) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K, R_1). Ταῦτα δέ μέ τόν περιορισμόν ὅτι $\overline{K\Gamma_2} < \overline{K\Delta_2}$, διότι $(AH) > R_2$.

Καί ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''), K]$, πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν δύο περιφερείας.

§69. **Α'. 4.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ) καί (Α).

Ἡ τομή τῶν παραβολῶν $[K, (\sigma')]$ καί $[A, (\sigma'')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Σημειοῦντες ἐνταῦθα ὅτι: $\overline{KZ} + \overline{Z\Gamma_2} + \overline{\Gamma_2 B} + \overline{B\Gamma_3} = \overline{K\Gamma_3} \Leftrightarrow x_1 - y - R_2 - R_1 = -y_1 \Leftrightarrow y = x_1 + y_1 + (R_1 - R_2)$, συμπεραίνομεν:

Ἐάν $A \in [$ἀνοικτόν κύκλον $(K, (K\Delta_4) = R_1 - R_2)] \veebar A \equiv \Delta_4$, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in [$περιφ. $(K, R_1 - R_2)$, πλήν σημείου $\Delta_4] \veebar A \in [(\varepsilon_4)$, πλήν σημείου $\Delta_4]$, τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε) καί ἐσωτερικῶς τῶν (K, R_1), (A, R_2).

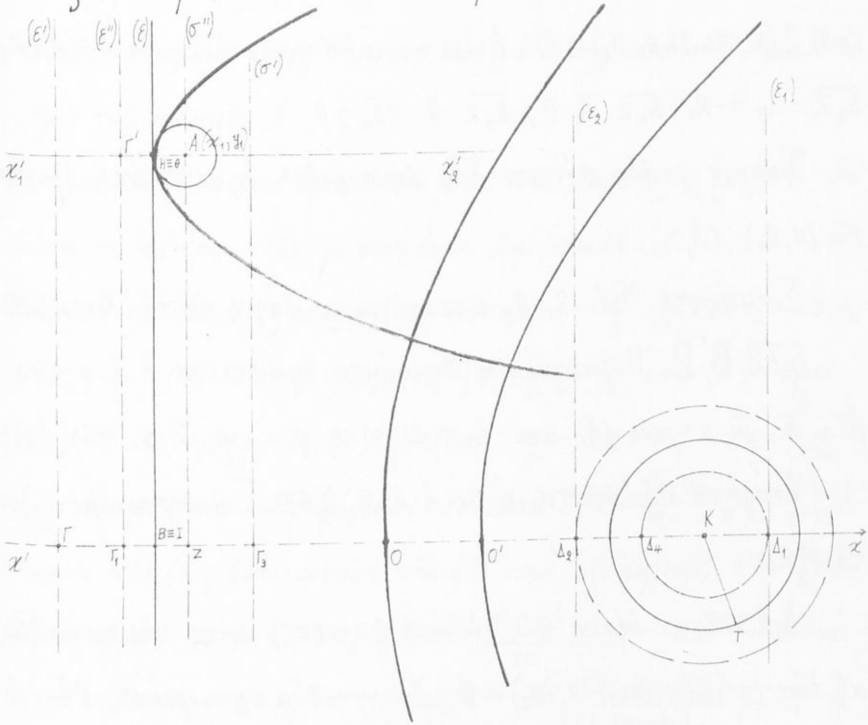
Καί ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''), K]$, πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν δύο περιφερείας.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, τότε $(\sigma'') \equiv (\sigma')$ καί $\Delta_4 \equiv K$.

§70. **Β'.** Ἔχομεν: $(K) \cap (\varepsilon) = \emptyset$, $(A) \cap (\varepsilon) = \{H\}$ καί εὑρίσκονται εἰς τό αὐτό ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρός τήν εὐθεῖαν (ε)(σχ.45).

§71. **Β'. 1.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε-ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Γνωρίζομεν, ὅτι (§22) ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καὶ τῆς περιφερείας (Α), ἀλλ' ἐξωτερικῶς, εἶναι ἡ ἕνωσις τῆς παραβολῆς [Α, (ε'')], πλὴν τῆς κορυφῆς αὐτῆς Θ — ἔνθα (ε'') ὡς καὶ ἐν § 66 — μετὰ τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $\Theta x_1'$.



Σχ. 45.

Ἡ τομὴ τοῦ ἀνωτέρω τόπου μετὰ τῆς παραβολῆς [Κ, (ε')] θὰ μᾶς δώσῃ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἡ ἀνοικτὴ ἡμιευθεῖα $\Theta x_1'$ ἔχει ἐξίσωσιν $y = y_1 \mid x < x_B = \overline{KB}$. Ἑπομένως δὲν ἔχει κοινὸν πεδίον ὁρισμοῦ μετὰ τῆς παραβολῆς [Κ, (ε')].

Ἄρα ἡ τομή τῶν παραβολῶν $[K,(\varepsilon')]$ καί $[A,(\varepsilon'')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως ἐρχόμεθα εἰς τήν περίπτωσιν Α΄.1, § 66. Πλήν ὅμως, λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $R_1 > R_2$, ἕπεται ὅτι: οἱανδήποτε θέσιν καί ἄν ἔχῃ ἡ (σ'') εἰς τήν ταινίαν $|(\varepsilon),(\sigma')|$, εἶναι πάντοτε $(\sigma'')\cap(K,(K\Delta_4)=R_1-R_2)=\emptyset$. Διότι $-R_1 > \overline{KB} = K\Delta_4 + \overline{\Delta_4 Z} + \overline{ZB} = -(R_1-R_2) + \overline{\Delta_4 Z} - R_2 = -R_1 + \overline{\Delta_4 Z}$ ἤ $0 > \overline{\Delta_4 Z}$ ἤ $\overline{Z\Delta_4} > 0$.

Ἔχομεν λοιπόν πάντοτε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς τῶν (K,R_1), (A,R_2).

Σημείωσις: Ἐάν $R_1=R_2$ καταλήγομεν πάλιν εἰς τό ἴδιον συμπέρασμα.

§ 72. **Β΄.2.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α) καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ἀνάλογος περίπτωσις εἶναι ἡ Α΄.2, § 67. Συμπεραίνομεν λοιπόν τά ἑξῆς:

Διά πᾶσαν θέσιν τῆς εὐθείας $AZ\equiv(\sigma'')$ ἐντός τῆς ταινίας $|(\varepsilon),(\sigma')|$, α΄) ἐάν $(\sigma'')\cap(K,(K\Delta_2)=R_1+R_2)=\emptyset$, ἔχομεν δύο περιφερείας, β΄) ἐάν $(\sigma'')\cap(K,R_1+R_2)=\{\Delta_2\}$, ὁπότε $(\varepsilon_2)\equiv(\sigma'')$, τότε $\forall A\in[(\sigma'')\equiv(\varepsilon_2)$, πλήν σημεῖον $\Delta_2]$, ἔχομεν μίαν λύσιν καί γ΄) ἐάν ἡ εὐθεῖα (σ'') τέμνῃ τήν περιφ. (K,R_1+R_2) κατά τά σημεῖα Δ', Δ'', τότε, ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Delta'\Delta''$, οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν, ἐάν $A\equiv\Delta' \veebar A\equiv\Delta'$, ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (A,R_2)

ἐξωτερικῶς καί τῆς (K, R_1) ἐσωτερικῶς καί ἐάν $A \in [(\sigma'') \equiv (\varepsilon_2)$, πλήν κλειστοῦ εὐθ. τμ. $\Delta'\Delta'']$, τότε ἔχομεν δύο περιφερείας.

§ 73. Β΄.3. Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A) καί ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 22): ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (A), ἀλλ' ἐσωτερικῶς, εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Hx_2', πλήν τοῦ σημείου A.

Ἡ τομή τῆς ἀνωτέρω ἡμιευθείας μετά τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν λοιπόν νά λύσωμεν τό σύστημα: $y = y_1 \mid x \in (x_B = \overline{KB}, x_Z = \overline{KZ}) \cup (x_Z, +\infty)$ (1΄) καί $y^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2 \mid x \in [x_O = \overline{KO}, +\infty)$ (2΄) (ὅρα (3) § 57). Ἡ (2΄) λόγῳ τῆς (1΄) γίνεται: $y_1^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{y_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}$.

Ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν κέντρου $P\left(x' = \dfrac{y_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}, y' = y_1\right)$, ἐφαπτομένη τῆς (ε), ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K).

Εἶναι ὅμως $x' \neq \overline{KZ} = x_1$, ἤτοι $\dfrac{y_1^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \neq x_1$ · καί ἐπειδή $\nu_1 = \overline{\Gamma K} = \overline{\Gamma B} + \overline{BZ} + \overline{ZK} = R_1 + R_2 - x_1$, ἔχομεν: $\dfrac{y_1^2 - (R_1 + R_2 - x_1)^2}{2(R_1 + R_2 - x_1)} \neq x_1$ ἤ $y_1^2 - (R_1 + R_2 - x_1)^2 \neq 2x_1(R_1 + R_2 - x_1)$ καί ἐκτελοῦντες πράξεις εὑρίσκομεν τελικῶς: $x_1^2 + y_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \neq 0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δέν ἔχομεν λύσιν ἐάν $A \in$ περιφ. $(K, K\Delta_2 = R_1 + R_2)$. Ὁπότε συμπεραίνομεν τά ἑξῆς: Διά πᾶσαν θέσιν τῆς (σ'') ἐντός τῆς ταινίας $[(\varepsilon), (\sigma')]$, α΄) ἐάν $(\sigma'') \cap (K, (K\Delta_2) = R_1 + R_2) = \emptyset$, ἔχομεν μίαν λύσιν, β΄) ἐάν

$(\sigma'') \cap (K, R_1+R_2) = \{\Delta_2\}$, τότε $\forall A \in [(\sigma''),$ πλήν σημεῖον $\Delta_2]$, ἔχομεν μίαν λύσιν πάλιν καί γ') ἐάν ἡ (σ'') τέμνῃ τήν (K, R_1+R_2) κατά τά σημεῖα Δ', Δ'', τότε, ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Delta'\Delta''$, ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε), ἐσωτερικῶς τῆς (A) – καί περιέχεται ἐντός αὐτῆς – καί ἐξωτερικῶς τῆς (K), ἐάν ὅμως $A \equiv \Delta' \veebar A \equiv \Delta''$, δέν ἔχομεν λύσιν καί μάλιστα ἡ (A) ἐφάπτεται τῆς (ε) καί τῆς (K), καί ἐάν $A \in [(\sigma''),$ πλήν κλειστοῦ εὐθ. τμ. $\Delta'\Delta'']$, ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἥτις ἐφάπτεται τῆς (ε), ἐσωτερικῶς τῆς A – καί περιέχει αὐτήν – καί ἐξωτερικῶς τῆς (K).

§ 74. **B'4.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν $(K), (A)$.

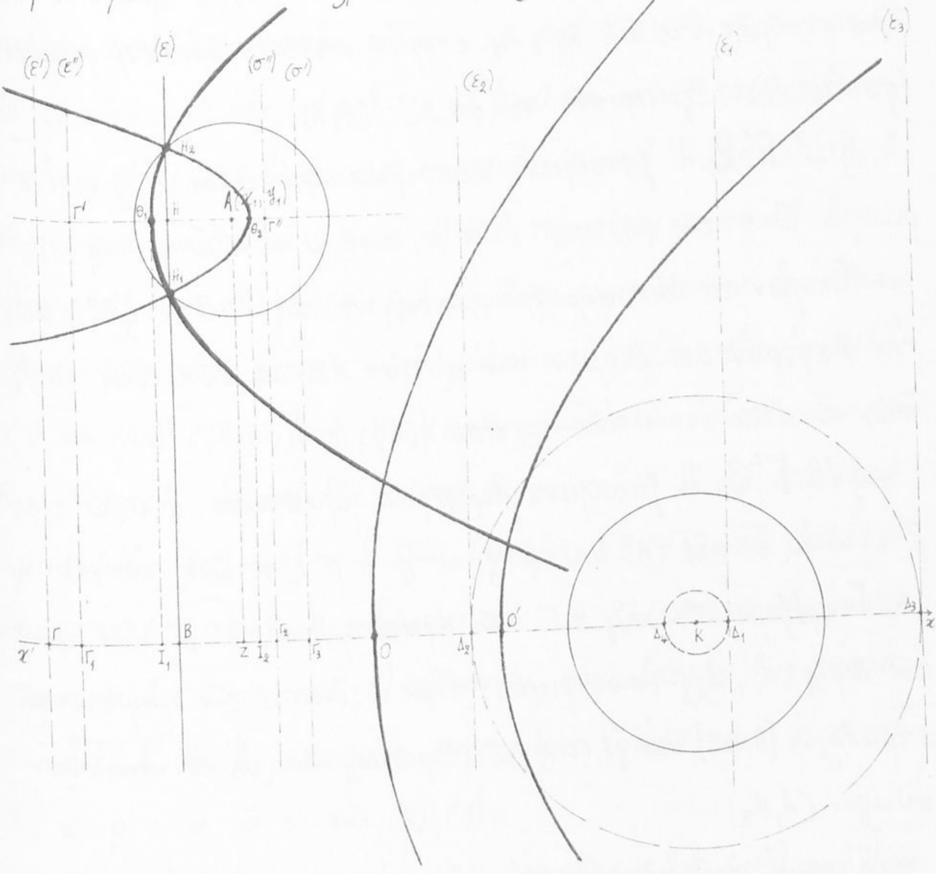
Ἡ τομή τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Hx_2', πλήν τοῦ σημείου A, μετά τῆς παραβολῆς $[K, (\sigma')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν, ὡς καί ἐν B'.3, § 73, τάς ἐξισώσεις (1') καί (2'), ἐπί πλέον δέ εἶναι πάντοτε: $\overline{KZ} \leqslant \overline{K\Gamma_3} < \overline{KO'}$. Ἄρα ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν.

§ 75. **Γ'.** Ἔχομεν: $(K) \cap (\varepsilon) = \emptyset$, ἡ δέ εὐθεῖα (ε) τέμνει τήν περιφέρειαν (A) (σχ. 46).

§ 76. **Γ'.1.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν $(K), (A)$.

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 23): ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθεί-
ας (ε) καί τῆς περιφ. (A), ἀλλ' ἐξωτερικῶς, εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν
παραβολῶν $[A,(\varepsilon'')]$ καί $[A,(\sigma'')]$, πλήν τῶν τμημάτων αὐτῶν τῶν
εὑρισκομένων εἰς τόν κλειστόν κύκλον (A, R_2).



Σχ. 46.

Ἡ τομή τοῦ ἀνωτέρω τόπου μετά τῆς παραβολῆς $[K,(\varepsilon')]$ θά
μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἀλλά ἡ πα-

ραβολή $[A,(\sigma'')]$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ $(-\infty, x_B=\overline{KB})$ δέν ἔχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ μετά τῆς $[K,(\varepsilon')]$. Διά τοῦτο θά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς ἄλλης παραβολῆς $[A,(\varepsilon'')]$ μετά τῆς $[K,(\varepsilon')]$.

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τάς περιπτώσεις Α΄.1. (§66) καί Β΄.1. (§71), διαπιστοῦμεν ὅτι διά $R_1 \geqslant R_2$ ἔχομεν πάντοτε δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς τῶν (K,R_1), (A,R_2).

§ 77. **Γ΄2.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α) καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα, ὡς καί ἐν Β΄.2. §72· μέ τήν διαφοράν ὅτι ἔχομεν τήν εὐθεῖαν ΑΖ καί οὐχί τήν (σ''), ἥτις κινεῖται ἐντός τῆς ταινίας $|(\varepsilon'),(\sigma')|$.

§ 78. **Γ΄3.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α) καί ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (ε) καί τῆς περιφ. (Α), ἀλλ᾽ ἐσωτερικῶς, εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν τμημάτων τῶν παραβολῶν $[A,(\varepsilon'')]$ καί $[A,(\sigma'')]$ τῶν εὑρισκομένων εἰς τόν ἀνοικτόν κύκλον (A,R_2).

Ἡ τομή τοῦ ἀνωτέρω τόπου μετά τῆς παραβολῆς $[K,(\varepsilon')]$, θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἀλλά τό τμῆμα τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon'')]$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ $[x_{I_1}=\overline{KI_1},\ x_B=\overline{KB})$ δέν ἔχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ μετά τῆς

$[K,(\varepsilon')]$. Διά τοῦτο θά εὕρωμεν τήν τομήν τοῦ τμήματος τῆς ἄλλης παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$ μετά τῆς $[K,(\varepsilon')]$.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν παραπομπήν (38) καί τήν περίπτωσιν Α'.3. § 68, ἐξετάζομεν τό πρόσημον τῆς διακρινούσης Δ (ὅρα σχέσιν (4), § 68). Ἐπειδή εἶναι $\nu_1>0$ καί $x_1+\nu_1-R_1-R_2=-\nu<0$, ἕπεται ὅτι: α') ἐάν $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2>0 \iff x_1^2+y_1^2>(R_1+R_1)^2 \iff (KZ)^2+(ZA)^2>(R_1+R_2)^2$ (σχ. 46) $\iff (AK)^2>(R_1+R_2)^2$ ἤ $(AK)>R_1+R_2$, ὅπερ σημαίνει ὅτι αἱ (K) καί (A) δέν τέμνονται, τότε δέν ἔχομεν λύσιν, β') ἐάν $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2=0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν καί γ') ἐάν $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2<0 \iff (AK)^2<(R_1+R_2)^2$ ἤ $(AK)<R_1+R_2$, καί ἐπειδή εἶναι — διά πᾶν R_2: $0<R_2\leqslant R_1$, ὡς καί διά πᾶσαν θέσιν τοῦ K ἐν τῷ ἀνοικτῷ ἡμιεπιπέδῳ $[(\sigma'),\sim B]$ — ἡ ἑξῆς διάταξις: $\overline{KZ}<\overline{K\Gamma_2}\leqslant\overline{K\Gamma_3}$, ὁπότε[(46)] $(AK)\geqslant(KZ)>(\Gamma_2\Gamma_3)=R_1-R_2$, ἕπεται ὅτι: $R_1-R_2<(AK)<R_1+R_2$, ὅπερ σημαίνει ὅτι αἱ (K) καί (A) τέμνονται, τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

§ 79. Γ'4. Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῶν (K), (A).

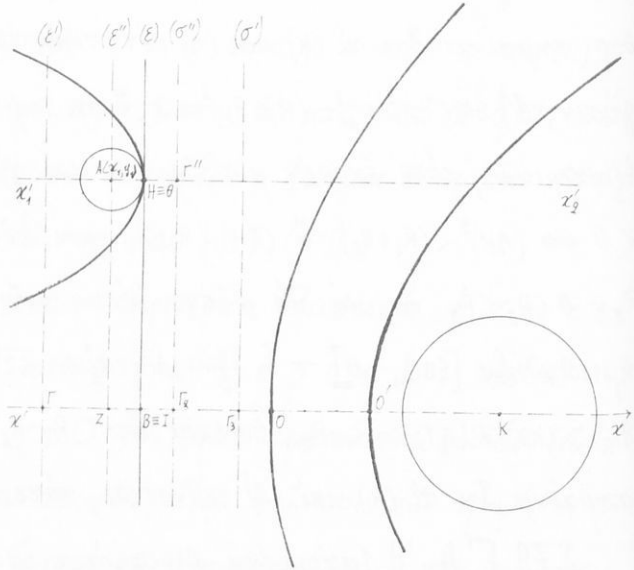
Ἡ τομή τοῦ τμήματος τῆς παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$ τοῦ εὑρισκομένου εἰς τόν ἀνοικτόν κύκλον (A,R_2) μετά τῆς παραβολῆς $[K,(\sigma')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Ἀλλ' ἡ πρώτη μέν εὑρίσκεται πάντοτε εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma'), B]$ καί ἡ ἄλλη εἰς τό ἕτερον ἡμιεπίπεδον. Ἄρα δέν ὑπάρχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ καί ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 80. **Δ΄.** Ἔχομεν: $(K)\cap(\varepsilon)=\emptyset$, $(A)\cap(\varepsilon)=\{H\}$ καί εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 47).

§ 81. **Δ΄.1.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (K), (A).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν περίπτωσιν Β΄.1. §71, καταλήγομεν εἰς τό νά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Hx_2' μετά τῆς παραβολῆς $[K,(\varepsilon')]$.

Ἔχομεν λοιπόν νά λύσωμεν τό σύστημα: $y=y_1 \mid x\in(x_B=\overline{KB},+\infty)$ καί $y^2=2\nu_1 x+\nu_1^2 \mid x\in[x_0=\overline{KO},+\infty)$.



Σχ. 47.

Ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν.

§ 82. **Δ΄.2.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A) καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

Ὡς καί ἐν Δ΄.1. §81, θά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Hx_2' μετά τῆς παραβολῆς [Κ, (σ')]. Ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν.

§83. **Δ΄.3.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Λ) καί ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ὁ εἷς τόπος εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Hx_1', πλήν τοῦ σημείου Α καί ὁ ἕτερος ἡ παραβολή [Κ, (ε')]. Ἄρα δέν ὑπάρχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ καί ἑπομένως δέν ἔχομεν λύσιν.

§84. **Δ΄.4.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Λ).

Δέν ὑπάρχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

§85. **Ε΄.** Ἔχομεν: $(K)\Lambda(\varepsilon)=\emptyset$, $(\Lambda)\Lambda(\varepsilon)=\emptyset$ καί αἱ περιφέρειαι εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας.

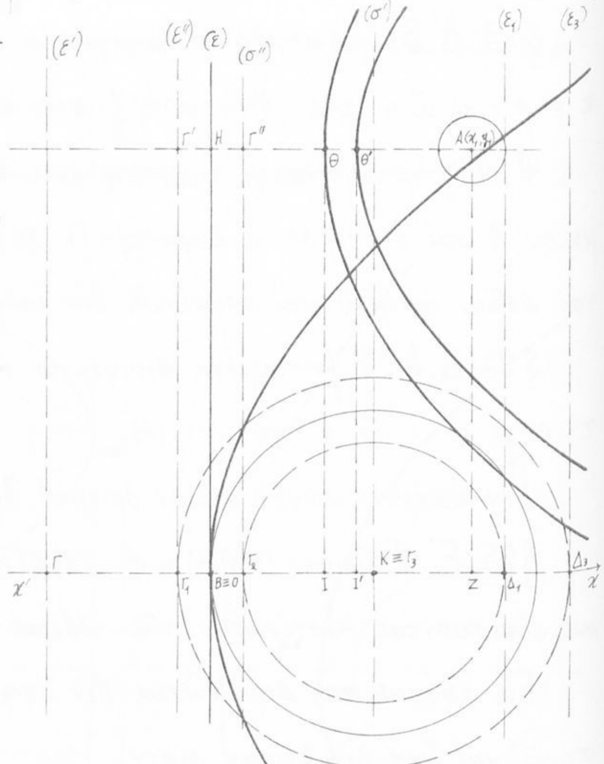
Εἰς ἁπάσας τάς περιπτώσεις δέν ἔχομεν κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ καί ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

§86. **ΣΤ΄.** Ἔχομεν τήν (ε) ἐφαπτομένην τῆς (Κ), $(\Lambda)\Lambda(\varepsilon)=\emptyset$ καί ὅτι αἱ περιφέρειαι εὑρίσκονται εἰς τό αὐτό ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρός τήν (ε) (σχ. 48).

§87. **ΣΤ΄.1.** Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Λ).

Ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε) καί τῆς (Κ), ἀλλ᾽ ἐζωτερικῶς, εἶναι ἡ ἕνωσις τῆς παραβολῆς [K, (ε')], πλήν τῆς κορυφῆς αὐτῆς O, μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Ox' μέ ἐξίσωσιν $y=0 \mid x\in(-\infty,\ x_B=\overline{KB})$, ἥτις δέν ἔχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ μετά τῆς παραβολῆς [A, (ε'')]. Θά εὕρωμεν λοιπόν τήν τομήν τῆς παραβ. [A, (ε'')] μετά τῆς [K, (ε')].

Τά συμπεράσματα εἶναι ὡς καί ἐν A'. 1. § 66. Πλήν, ἐάν $R_1=R_2$ — καί ἐπειδή $A\notin(\sigma')$ — τότε ἔχομεν πάντοτε δύο λύσεις.



Σχ. 48.

§ 88. ΣΤ'. 2. Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A) καί ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

Θά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς παραβολῆς [A, (ε'')] μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx, πλήν τοῦ σημείου K.

Βάσει τῶν A'. 1. § 66 καί (4), § 57, ἡ παραβολή ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\boxed{y^2-2y_1\cdot y+y_1^2=2[x_1+\gamma_1-(R_1-R_2)]x-x_1^2+\gamma_1^2+(R_1-R_2)^2-2\gamma_1(R_1-R_2)} \quad (1)$$

μέ πεδίον ὁρισμοῦ $[x_\theta=\overline{KI},+\infty)$, μέ Θ τεῖνον εἰς Η.

Ἐπίσης, ἡ ἡμιευθεῖα ἔχει ἐξίσωσιν: $y=0 / x\in(x_B=\overline{KB}=-R_1,+\infty) \wedge x\neq 0$. Θέτοντες εἰς τήν (1) $y=0$ καί $\gamma_1=\overline{\Gamma K}=\overline{\Gamma B}+\overline{BK}=R_1+R_1=2R_1$, ἔχομεν τελικῶς: $x=\dfrac{x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2}{2(x_1+R_1+R_2)}$· εἶναι δέ $x_1+R_1+R_2=R_2+R_1+x_1=\overline{\Gamma_1 B}+\overline{BK}+\overline{KZ}=\overline{\Gamma_1 Z}>0$.

Ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν κέντρου $P\left(x'=\dfrac{x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2}{2(x_1+R_1+R_2)}, y'=0\right)$. Ἀλλά θά πρέπῃ $x>-R_1$. Ἤτοι: $\dfrac{x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2}{2(x_1+R_1+R_2)}>-R_1$. Τελικῶς δέ $[x_1-(-R_1)]^2+y_1^2-R_2^2>0$· τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι τό $A(x_1,y_1)$ δέν θά πρέπῃ νά εἶναι ἐντός τοῦ κλειστοῦ κύκλου $(B,(B\Gamma_2)=(B\Gamma_1)=R_2)$, ὅπως ἐπειδή δέν εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπ. $[(\sigma''),K]$, μᾶς ἀπαλλάσσει ἐκ τοῦ περιορισμοῦ τούτου.

Ἐπίσης, θά πρέπῃ $x\neq 0$. Ἤτοι: $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2\neq 0$. Σημαίνει δέ τοῦτο ὅτι τό Α δέν θά πρέπῃ νά εὑρίσκεται εἰς τό τόξον τῆς περιφερείας $(K,(K\Gamma_1)=R_1+R_2)$, τό εὑρισκόμενον εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''),K]$.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1=R_2$, ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα.

§ 89. ΣΤ΄. 3. Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α) καί ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Θά εὕρωμεν τήν τομήν τῶν παραβολῶν $[A,(\sigma'')]$ καί $[K,(\varepsilon')]$.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν Α'. 3, § 68, καταλήγομεν εἰς τὰ ἴδια συμπεράσματα μὲ τὴν παρατήρησιν, ὅτι ἀναφερόμεθα τώρα εἰς τὸ τόξον τῆς περιφερείας (K, R_1+R_2), τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''), K]$.

§ 90. ΣΤ'. 4. Ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἐφάπτεται ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν Α'. 3. § 68, ἀντὶ τῆς (1) (88) ἔχομεν τήν:

$$\boxed{y^2-2y_1y+y_1^2=2\left[x_1+\nu_1-(R_1+R_2)\right]x-x_1^2+\nu_1^2+(R_1+R_2)^2-2\nu_1(R_1+R_2)}$$

Σκεπτόμενοι ὡς καὶ ἐν ΣΤ'. 2. § 88, εὑρίσκομεν: $x=\dfrac{x_1^2+y_1^2-(R_1-R_2)^2}{2(x_1+R_1-R_2)}$

εἶναι δὲ $x_1+R_1-R_2=-R_2+R_1+x_1=\overline{\Gamma_2 B}+\overline{BK}+\overline{KZ}=\overline{\Gamma_2 Z}>0$. Ἔχομεν ἑπομένως μίαν περιφέρειαν κέντρου $P\left(x'=\dfrac{x_1^2+y_1^2-(R_1-R_2)^2}{2(x_1+R_1-R_2)},\ y'=0\right)$, μὲ $x_1^2+y_1^2-(R_1-R_2)^2\neq 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A\in[\text{περιφ.}\,(K, R_1-R_2)]$.

§ 91. Ζ'. Ἔχομεν τὴν (ε) ἐφαπτομένην τῶν (Κ), (Α), αἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὸ ἴδιον ἡμιεπίπεδον ἐν σχέσει πρὸς τὴν (ε) (σχ. 49).

§ 92. Ζ'. 1. Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Ὁ εἷς τόπος εἶναι ἡ παραβολὴ $[A, (\varepsilon'')]$, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $(x_B=\overline{KB}=-R_1, +\infty)$ καὶ ἡ ἀνοικτὴ ἡμιευθεῖα Hx_1', μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $(-\infty, -R_1)$. Ὁ ἕτερος δὲ τόπος ἡ παραβ. $[K, (\varepsilon')]$, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ὡς καὶ ἡ $[A, (\varepsilon'')]$, καὶ ἡ ἀνοικτὴ ἡμιευθεῖα Bx', μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ὡς καὶ ἡ Hx_1'.

α') Διὰ τὰς παραβολὰς $[A, (\varepsilon'')]$, $[K, (\varepsilon')]$ ἔχομεν τὰ ἐν ΣΤ'. 1.

§87. Ἤτοι δύο λύσεις· ἐντός ἐάν $A \equiv Z \in (K, R_1 - R_2)$, ὁπότε $[A, (\varepsilon'')] \cap [K, (\varepsilon')] = \{B\}$, καί ἡ $[A, (\varepsilon'')]$ περιέχεται[47] εἰς τήν $[K, (\varepsilon')]$, ὁπότε δέν ἔχομεν λύσιν.

Ἐάν δηλ. $A \equiv Z$, τότε $x_1 = \overline{KZ} = \overline{KB} + \overline{BZ} = -R_1 + R_2$ καί $y_1 = 0$· ὁπότε ἡ (2), §66 γίνεται $\Delta = 0$ καί ἐκ τῆς (1), §66 ἔχομεν $y'_1 = y'_2 = \frac{-\nu_1 y_1}{x_1 - R_1 + R_2} = 0$· καί ἐκ τῆς (3), §57 ἔχομεν $0 = 2\nu_1 x + \nu_1^2$ ἤ $x' = -\frac{\nu_1}{2} = \frac{\overline{K\Gamma}}{2} = \overline{KB} = -R_1$. Ἤτοι αἱ παραβολαί ἔχουν ἕν μόνον κοινόν σημεῖον, τό $B(-R_1, 0)$· ἀλλά $\overline{KB} \notin (x_B = \overline{KB} = -R_1, +\infty)$. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, τότε $\forall A \in [(\sigma'),$ πλήν σημείου $K]$, ἔχομεν μίαν λύσιν (ἐάν $A \equiv K$, ἔχομεν ἀπείρους).

β) Ἐπίσης, αἱ ἡμιευθεῖαι Hx'_1 καί Bx' ἔχουν ἀντιστοίχως ἐξισώσεις $y = y_1$ καί $y = 0$, μέ κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ $(-\infty, -R_1)$. Αὗται συναληθεύουν ἐάν $y_1 = 0$, ὁπότε $A \equiv \Gamma_2$, καί ἄρα ταυτίζονται. Ἀλλά τότε πᾶν σημεῖον $P \in$ (ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν Bx') εἶναι κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης τῆς (ε) εἰς τό B καί τῶν (A) καί (K) ἐξωτερικῶς εἰς τό B πάλιν. Εἶναι δηλ. $P(x', y' = 0) \mid x' \in (-\infty, -R_1)$.

§93. **Ζ΄.2.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

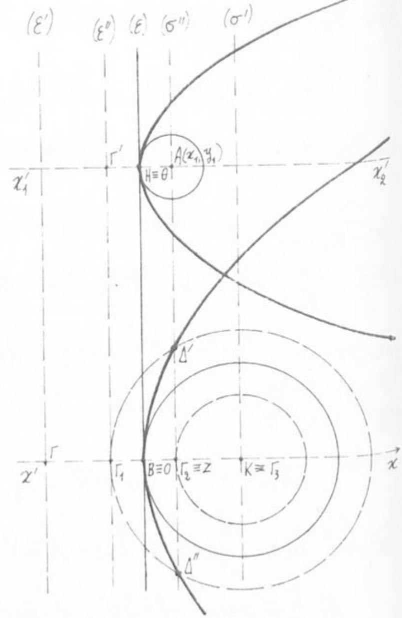
Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν ΣΤ΄.2. §88, συμπεραίνομεν, ὅτι ἔχομεν μίαν λύσιν $\forall A \in [(\sigma''),$ πλήν σημείων $\Delta', Z, \Delta'']$, ἔνθα εἶναι:

$(K, (K\Gamma_1) = R_1 + R_2) \cap (\sigma'') = \{\Delta', \Delta''\}$.

§94. Ζ΄.3. Ἐσωτερικῶς τῆς (Α), ἐξωτερικῶς τῆς (Κ).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν Β΄.3.§73 καί ὅτι $\gamma_1 = 2R_1$, συμπεραίνομεν ὅτι ἔχομεν μίαν περιφέρειαν $\forall A \in [(\sigma'')$, πλήν σημείων $\Delta', Z, \Delta'']$, ἔνθα Δ', Δ'' ὡς καί ἐν Ζ΄.2.§93, κέντρου $P\left(x' = \frac{y_1^2 - \gamma_1^2}{2\gamma_1} = \frac{y_1^2 - 4R_1^2}{4R_1},\ y' = y_1\right)$, μέ $y_1 \neq 0$, διότι τότε θά ἦτο $x' = \frac{0 - 4R_1^2}{4R_1} = -R_1 \in [(-R_1, x_1 = -R_1 + R_2) \cup (x_1, +\infty)]$.

Ἕπεται μία κατασκευή καί ἀκολούθως ἡ τετάρτη περίπτωσις.

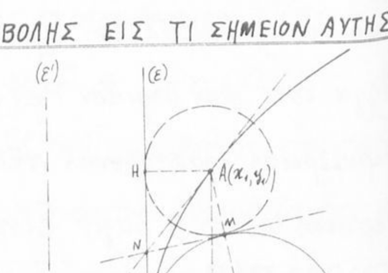


Σχ. 49.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΕΙΣ ΤΙ ΣΗΜΕΙΟΝ ΑΥΤΗΣ.

§95. Ἄν $A \equiv \Delta'$ (σχ. 49), τότε ἔχομεν τό σχῆμα 50.

Αἱ (Α), (Κ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τό σημεῖον Μ. Ἡ (Α) ἐφάπτεται τῆς εὐθείας (ε) εἰς τό Η. Ἄν ΝΜ εἶναι ἡ κοινή ἐσωτερική ἐφαπτομένη τῶν (Α) καί (Κ), τότε ἡ ΝΑ εἶναι



Σχ. 50.

ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$ εἰς τό σημεῖον A αὐτῆς$^{(48)}$.

Ἀπόδειξις: Ἡ παραβολή ἔχει ἐξίσωσιν $y^2 = 2\gamma_1 x + \gamma_1^2 = 4R_1 x + 4R_1^2$, διότι $\gamma_1 = 2R_1$ (ὅρα σχέσιν (3), § 57). Ἐπίσης, ἔχομεν: $HN = NM = NB$ καί $H\hat{N}A = B\hat{N}\Pi$. Ἄρα τά ὀρθ. τρίγωνα AHN καί ΠBN εἶναι ἴσα καί ἑπομένως $(B\Pi) = (HA) = R_2$. Ἔχομεν λοιπόν $\Pi(x_2, y_2)$ καί $A(x_1, y_1)$, ἔνθα $x_2 = \overline{K\Pi} = \overline{KB} + \overline{B\Pi} = -R_1 - R_2$, $y_2 = 0$, $x_1 = \overline{KZ} = \overline{KB} + \overline{BZ} = -R_1 + R_2$ καί $y_1 = \overline{ZA}$. Ἀλλά $(ZA)^2 = (KA)^2 - (ZK)^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4R_1R_2$, καί ἄρα $y_1 = 2\sqrt{R_1R_2}$.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ΠA τῆς διερχομένης ἐκ τῶν σημείων Π καί A εἶναι: $\dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_2}{y_1 - y_2}$. ἤ θέτοντες τάς τιμάς ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν: $\dfrac{x + R_1 + R_2}{2R_2} = \dfrac{y}{2\sqrt{R_1R_2}}$ ἤ τελικῶς $y = \dfrac{(x + R_1 + R_2)\sqrt{R_1R_2}}{R_2}$.

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων τῆς παραβολῆς καί τῆς εὐθείας ἔχομεν τελικῶς $x^2 + 2(R_1 - R_2)x + (R_1 - R_2)^2 = 0$ ἤ $(x + R_1 - R_2)^2 = 0$· ἤτοι $x = -R_1 + R_2 = x_1$ καί $y = y_1$, δηλ. μίαν λύσιν· ἄρα ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα ΠA τῆς παραβολῆς εἰς τό A.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, ἄν θέλωμεν νά φέρωμεν ἐφαπτομένην παραβολῆς εἴς τι σημεῖον A αὐτῆς, ἐνεργοῦμεν οὕτω: Φέρομεν εὐθεῖαν (ε) κάθετον πρός τόν ἄξονα τῶν x εἰς τήν κορυφήν B τῆς παραβολῆς. Κατόπιν γράφομεν τήν περιφέρειαν (K, KB), ἔνθα K ἡ ἑστία τῆς παραβολῆς. Ἄν ἡ AK τέμνῃ τήν περιφέρειαν εἰς τό M, φέρομεν τήν ἐφαπτομένην τῆς (K, KB) εἰς τό M, ἥτις θά τάμη τήν (ε) εἰς τό Ν. Ἡ ΝΑ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς.

Ἤ ἁπλούστερον: λαμβάνομεν ΠΒ = ΒΖ = ΗΑ. Ἡ ΠΑ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό Α.

§96. **Ζ΄.4.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Ἡ ἡμιευθεῖα Hx_2' ἔχει ἐξίσωσιν τήν $y = y_1 | x \in (-R_1, x_1 = -R_1 + R_2) \cup (x_1, +\infty)$ καί ἡ Bx ἔχει ἐξίσωσιν τήν $y = 0 | x \in (-R_1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Αὗται συναληθεύουν ἐάν $y_1 = 0$, ἤτοι ταὐτίζονται. Ὁπότε ἔχομεν ἀπειρίαν λύσεων. Τά κέντρα τῶν περιφερειῶν ἀνήκουν εἰς τήν ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν Bx, πλήν τῶν σημείων Ζ καί Κ.

§97. **Η΄.** Ἔχομεν τήν (ε) ἐφαπτομένην τῆς (Κ) καί τέμνουσαν τήν (Α) (σχ. 51).

§98. **Η΄.1.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Ὡς καί ἐν Γ΄.1. §76, αἱ παραβολαί [Κ, (ε΄)] καί [Α, (ε΄΄)], ὡρισμέναι ἀμφότεραι εἰς τό διάστημα $(\overline{KB} = -R_1, +\infty)$, θά τμηθοῦν εἰς δύο σημεῖα, διότι $A \notin [\text{κλειστόν κύκλον } (K, (K\Delta_1) = (K\Gamma_2) = R_1 - R_2) \cup (\varepsilon_1)]$. Ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις· ἐκτός ἐάν $H_1 \equiv B \veebar H_2 \equiv B$, ὁπότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, καταλήγομεν εἰς τά ἴδια συμπεράσματα.

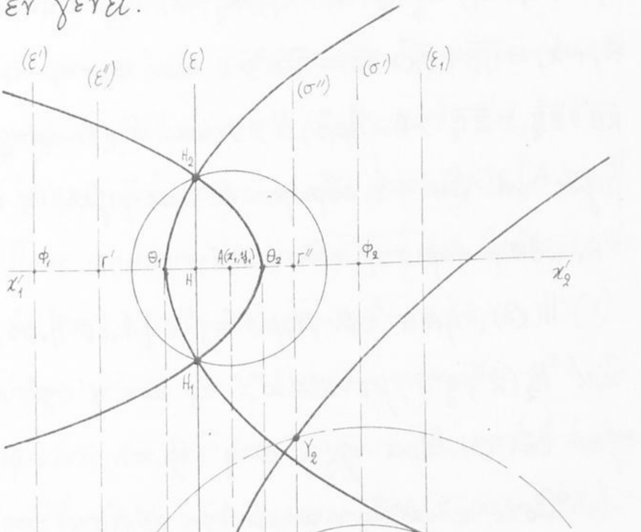
Ἐπίσης, ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα Bx' καί ἡ παραβολή $[A,(\sigma'')]$, πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς $H_1\Theta_2H_2$ ὡρισμέναι ἀμφότεραι εἰς τό διάστημα $(-\infty, -R)$, τεμνόμεναι θά μᾶς δώσουν ἄλλην μίαν λύσιν ἐν γένει.

Διερεύνησις[49]: Λόγῳ τῆς Γ'.3.§78 καί τοῦ ὅτι $\gamma_1 = 2R_1$, ἡ (4), §57 γίνεται:

$$y^2 - 2y_1y + y_1^2 = 2(x_1 + R_1 - R_2)x - x_1^2 + 4R_1^2 + (R_1 + R_2)^2 - 4R_1(R_1 + R_2) \quad (1)$$

ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$

Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις εἰς τήν (1), ἔχομεν τελικῶς:



$$x = \frac{y^2 - 2y_1y + y_1^2 - (R_1 - R_2)^2 + x_1^2}{2(x_1 + R_1 - R_2)} \quad (2)$$

Σχ. 51.

καί ἐπειδή $x < -R_1$ – λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ – ὡς καί $x_1 + R_1 - R_2 =$

$-R_2+R_1+x_1=\overline{\Gamma_2 B}+\overline{BK}+\overline{KZ}=\overline{\Gamma_2 Z}<0$ · ἄρα ἔχομεν τελικῶς ἐκ τῆς (2):

$y^2-2y_1y+y_1^2+R_1^2+x_1^2+2R_1x_1-R_2^2>0$ (3).

Ἡ διακρίνουσα τῆς (3) εἶναι: $\Delta=y_1^2-y_1^2-R_1^2-x_1^2-2R_1x_1+R_2^2=R_2^2-(x_1+R_1)^2=(R_2+x_1+R_1)(R_2-x_1-R_1)$. Εἶναι ὅμως $R_2+x_1+R_1=R_2+R_1+x_1=\overline{\Gamma_1 B}+\overline{BK}+\overline{KZ}=\overline{\Gamma_1 Z}>0$ καί $R_2-x_1-R_1=-x_1-R_1+R_2=\overline{ZK}+\overline{KB}+\overline{B\Gamma_2}=\overline{Z\Gamma_2}>0$. Ἄρα $\Delta>0$ καί ἡ (3) ἐπαληθεύεται $\forall y$ ἐκτός τῶν ριζῶν της. Διά νά εὕρωμεν δέ τάς ρίζας θά πρέπῃ νά θέσωμεν $x=-R_1$, ὅπερ παριστᾷ τήν εὐθεῖαν (ε).

Ἡ (ε) τέμνει τήν παραβολήν $[A,(\sigma'')]$ εἰς τά σημεῖα $H_1(x',y')$ καί $H_2(x'',y'')$, μέ $x'=x''=-R_1$ καί $y'<y''$. Τά y', y'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (3). Ἄρα $y<y' \veebar y''<y$.

Ὥστε ἡ ὑπ' ὄψιν παραβολή εὑρίσκεται ἐκτός τῆς κλειστῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν σημείων H_1 καί H_2 καί παραλλήλων πρός τόν ἄξονα τῶν x. Καί ἄρα, ἐάν ὁ ἄξων τῶν x εὑρίσκεται εἰς τήν κλειστήν ταύτην ταινίαν, τότε δέν ἔχομεν τήν ἀναφερομένην ἀνωτέρω τρίτην λύσιν.

Ἔχομεν λοιπόν ἐν γένει τρεῖς λύσεις. Εἰδικῶς ἐάν $H_1\equiv B \veebar H_2\equiv B$, τότε ἔχομεν μόνον μίαν λύσιν.

§99. **Η'.2.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ἡ τομή τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx— ἐκτός τοῦ σημείου Κ — καί τῆς παραβολῆς $[A, (\varepsilon'')]$ — ἐκτός τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς $H_1\Theta_1H_2$ — θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν ἐνταῦθα μίαν λύσιν, ἐκτός ἐάν ὁ ἄξων τῶν x εἶναι εὐθεῖα τῆς κλειστῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν H_1 καί H_2 καί παραλλήλων πρός τόν $x'x$ (ὅρα καί ἐν Η΄.1, §98).

Ἐπίσης, ἐάν τό $K(0,0)$ εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς $[A, (\varepsilon'')]$, λύσιν δέν ἔχομεν. Πρός τούτοις, ἀντί τῆς (1), §98, θά ἔχωμεν τήν:

$$y^2 - 2y_1y + y_1^2 = 2(x_1 + R_1 + R_2)x - x_1^2 + 4R_1^2 + (R_1 - R_2)^2 - 4R_1(R_1 - R_2) \quad (1),$$

θέτοντες δέ εἰς ταύτην $x = 0$, $y = 0$, ἔχομεν τελικῶς $x_1^2 + y_1^2 - (R_1 + R_2)^2 = 0$· ὅπερ σημαίνει, ὅτι δέν ἔχομεν λύσιν, ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν τόξον[50] $Y_1\Gamma_1Y_2$ τῆς περιφερείας $(K, (K\Gamma_1) = R_1 + R_2)$.

§100. Η΄3. Ἐσωτερικῶς τῆς (Α), ἐξωτερικῶς τῆς (Κ).

Τό ἀνοικτόν τμῆμα $H_1\Theta_2H_2$ τῆς παραβολῆς $[A, (\sigma'')]$ τεμνόμενον μετά τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν Γ΄.3, §78, ἐξετάζομεν τό πρόσημον τῆς διακρινούσης Δ (ὅρα (4), §68).

Ἐπειδή εἶναι $\gamma_1 > 0$ καί $x_1 + \gamma_1 - R_1 - R_2 = -\nu < 0$, ἕπεται ὅτι:

α) Ἐάν $x_1^2 + y_1^2 - (R_1 + R_2)^2 > 0$ κ.λ.π. (ὡς ἐν Γ΄.3, §78), τότε δέν ἔχομεν λύσιν. β') Ἐάν $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2=0$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν· καί γ') Ἐάν $x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2<0$ κ.λ.π. καί ἐπειδή εἶναι, διά πᾶν R_2: $0<R_2\leqslant R_1$, ὡς καί διά πᾶσαν θέσιν τοῦ $K\in(\sigma')$ ἡ ἑξῆς διάταξις: $\overline{KZ}<\overline{K\Gamma_2}\leqslant\overline{K\Gamma_3}=0$, ὁπότε $(AK)\geqslant(KZ)>(\Gamma_2\Gamma_3)=R_1-R_2$, ἕπεται ὅτι κ.λ.π. Ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις. Ἐκτός ἐάν $H_1\equiv B$ $\veebar$ $H_2\equiv B$, ὁπότε, ἐάν εἰς τήν (1), §98, ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$, θέσωμεν $x=-R_1$ καί $y=0$, αὕτη γίνεται: $x_1^2+y_1^2+R_1^2+2R_1x_1-R_2^2=0 \Longleftrightarrow (x_1+R_1)^2+y_1^2-R_2^2=0$, ἥτις σημαίνει ὅτι $A\in(B,(B\Gamma_1)=R_2)$, ὁπότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

Ἐπίσης τό ἀνοικτόν τμῆμα $H_1\Theta_1H_2$ τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon'')]$, τεμνόμενον μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx', θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν μίαν λύσιν μόνον, ὅταν ὁ ἄξων τῶν x εἶναι εὐθεῖα τῆς ἀνοικτῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν H_1 καί H_2 καί παραλλήλων πρός τήν $x'x$.

Ἔχομεν λοιπόν, ἐν γένει, τρεῖς λύσεις. Ἰδιαιτέρως ἐάν $H_1\equiv B$ $\veebar$ $H_2\equiv B$, τότε ἔχομεν μόνον μίαν λύσιν.

§ 101. Η'4. Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

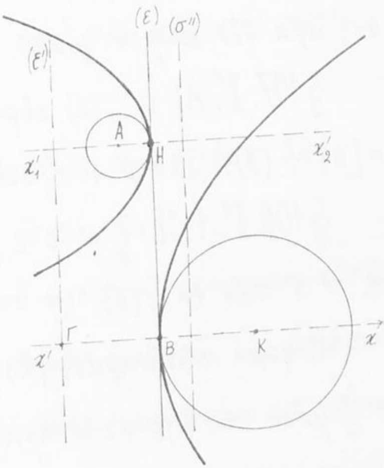
Τό ἀνοικτόν τμῆμα $H_1\Theta_2H_2$ τῆς παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$ τεμνόμενον μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx — πλήν τοῦ σημείου Κ — θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐπειδή εἶναι $\overline{KI_2} < \overline{K\Gamma_2} < 0$, ἕπεται ὅτι οὐδέποτε $\Theta_2 \equiv K$, ὁπότε ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν, ἐάν ὁ ἄξων τῶν x εἶναι εὐθεῖα τῆς ἀνοικτῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν H_1 καί H_2 καί παραλλήλων τῷ ἄξονι $x'x$, οὐδεμίαν δέ ἐάν εἶναι ἐκτός τῆς εἰρημένης ἀνοικτῆς ταινίας.

§ 102. Θ'. Αἱ (K),(A) ἐφάπτονται τῆς (ε) καί εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν αὐτῆς (σχ. 52).

§ 103. Θ'1. Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (K),(A).

Ἡ τομή τῆς παραβολῆς $[K,(\varepsilon')]$ — πλήν τῆς κορυφῆς B — μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Hx_2' θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.



Σχ. 52.

Ἐπίσης, ἡ τομή τῆς παραβολῆς $[A,(\sigma'')]$ — πλήν τῆς κορυφῆς H — μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx' θά μᾶς δώσῃ λύσιν.

Ἔχομεν λοιπόν πάντοτε δύο λύσεις· ἐάν $H \equiv B$ δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 104. Θ'2. Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

Ἐάν $x'x // x_1' x_2'$, ἐν στενῇ σημασίᾳ, οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν. Ἐάν ὅμως ταὐτίζωνται, ἔχομεν ἀπειρίαν λύσεων.

§ 105. **Θ'3.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ἐάν $Bx' // Hx_1'$, ἐν στενῇ σημασίᾳ, οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν. Ἐάν ὅμως ταὐτίζωνται, ἔχομεν ἀπειρίαν λύσεων.

§ 106. **Θ'4.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Αἱ ἀνοικταί ἡμιευθεῖαι Bx καί Hx_1' δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον, ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

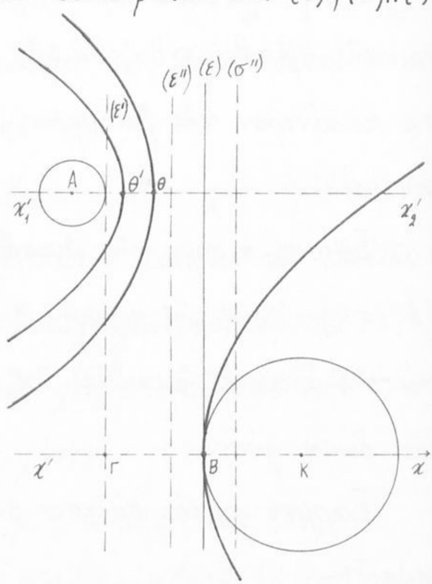
§ 107. **Ι'.** Αἱ (Κ), (Α) εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς (ε), $(K) \cap (\varepsilon) = \{B\}$, $(A) \cap (\varepsilon) = \emptyset$ (σχ. 53).

§ 108. **Ι'1.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Κ), (Α).

Ἡ τομή τῆς παραβολῆς [Α, (σ'')] μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Bx' θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν.

§ 109. **Ι'2.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).



Σχ. 53.

Ἡ παραβολή [Α, (σ'')] δέν τέμνεται ὑπό τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Βx. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

§110. Ι'.3. Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Τό κέντρον εἶναι ἡ τομή τῆς παραβολῆς [Α, (ε'')] μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Βx'.

Ἔχομεν πάντοτε μίαν λύσιν.

§111. Ι'.4. Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Α), (Κ).

Ἡ παραβολή [Α, (ε'')] δέν τέμνεται ὑπό τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας Βx. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

§112. ΙΑ'. Ἡ (ε) τέμνει τήν (Κ), οὐχί ὅμως τήν (Α) (σχ. 54).

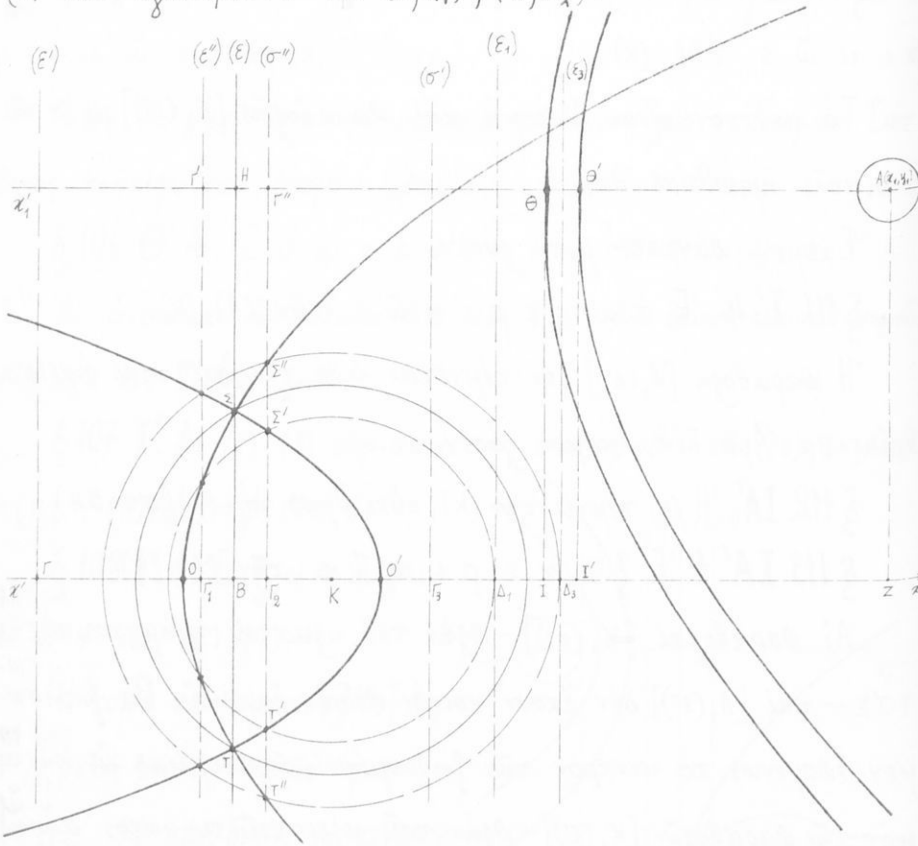
§113. ΙΑ'.1. Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Α), (Κ).

Αἱ παραβολαί [Κ, (σ')] – πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς ΤΟ'Σ – καί [Α, (ε'')] δέν ἔχουν κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ. Θά ζητήσωμεν ἑπομένως τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἰς τήν τομήν τῶν παραβολῶν [Κ, (ε')] – πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς ΤΟΣ – καί [Α, (ε'')].

Σκεπτόμενοι ὡς καί ἐν Α'.1.§66, καταλήγομεν εἰς τά ἑξῆς συμπεράσματα:

Ἐάν Α∈[ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα Σ'Δ$_1$Τ'Γ$_2$Σ'], ἤ ἐάν Α≡Δ$_1$, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ (ἀνοικτόν τόξον $\Sigma'\Delta_1 T'$, πλήν σημείου Δ_1), ἤ $A \in [(\varepsilon_1)$, πλήν σημείου $\Delta_1]$, τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε) καί ἐξωτερικῶς τῶν (K, R_1), (A, R_2).



Σχ. 54.

Καί ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''), K]$[51], πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, τότε $\Delta_1 \equiv K$· ἀλλά τό K κινεῖται εἰς τό ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Gamma\Gamma_3$. Ἤτοι ἡ (ε_1) εἶναι εὐθεῖα τῆς ἀνοικτῆς ταινίας $|(\varepsilon'), (\sigma')|$ καί ἄρα ἔχομεν πάντοτε δύο λύσεις.

§ 114. **ΙΑ΄.2.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (A), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (K).

Ἡ τομή τοῦ ἀνοικτοῦ τμήματος ΤΟ΄Σ τῆς παραβολῆς $[K,(\sigma')]$ μετά τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon'')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Τό ἕτερον ἀνοικτόν τμῆμα ΤΟΣ τῆς $[K,(\varepsilon')]$ δέν ἔχει κοινόν πεδίον ὁρισμοῦ μετά τῆς $[A,(\varepsilon'')]$.

Ἐνταῦθα ἡ παραβολή $[K,(\sigma')]$ ἔχει $\gamma_1<0$ (ὅρα Γ΄.1. §63, περίπτωσις 2 μέ $\gamma_1<0$). Ὁπότε ἔχομεν (σχ. 54): $\overline{KZ}+\overline{Z\Gamma_1}+\overline{\Gamma_1 B}+\overline{B\Gamma_3}=\overline{K\Gamma_3}$ $\Longleftrightarrow x_1-\gamma+R_2+R_1=N_1 \Longleftrightarrow \gamma=x_1-N_1+R_1+R_2=x_1+(-N_1)+R_1+R_2=x_1+\gamma_1-(-R_1)+R_2$, ἔνθα ἐτέθη $-N_1=\gamma_1<0$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν Α΄.1. §66, θά καταλήξωμεν εἰς τάς (1) καί (2) τῆς §66, ἀρκεῖ νά θέσωμεν ὅπου R_1 τό $-R_1$ καί ἀντιστρόφως. Ὁ συντελεστής τοῦ y^2 τῆς (1) θά εἶναι $x_1+R_1+R_2$ καί ἡ διακρίνουσα θά γίνῃ: $\Delta=\gamma_1(x_1+\gamma_1+R_1+R_2)\left[x_1^2+y_1^2-(R_1+R_2)^2\right]$, μέ τήν παρατήρησιν ὅτι $\gamma_1<0$ καί $x_1+\gamma_1+R_1+R_2=\gamma>0$. Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα $\Sigma''\Delta_3 T''\Gamma_2\Sigma''$), τότε ἔχομεν δύο λύσεις· ἔνθα $(K\Delta_3)=R_1+R_2$.

Ἐάν $A\in$(ἀνοικτόν τόξον $\Sigma''\Delta_3 T''$), τότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί, ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''),K]$ (52), πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Σημείωσις: Εἰς τά ἴδια συμπεράσματα καταλήγομεν ἐάν $R_1 = R_2$, διότι ἡ (σ″) τέμνει πάντοτε τήν $(K, R_1 + R_2 = 2R_1)$.

§ 115. **ΙΑ΄.3.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Θά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς παραβολῆς [Κ, (ε′)] — πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς ΤΟΣ — μετά τῆς τοιαύτης [Α, (σ″)].

Ὡς ἐν Α΄.3. § 68, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐάν Α ∈ (ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα $Σ''Δ_3 T'' Γ_2 Σ''$), ἤ ἐάν $A \equiv Δ_3$, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν Α ∈ (ἀνοικτόν τόξον $Σ''Δ_3 T''$, πλήν σημείου $Δ_3$), ἤ $A \in [(ε_3)$, πλήν σημείου $Δ_3]$, τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς (ε), ἐσωτερικῶς τῆς (Α) καί ἐξωτερικῶς τῆς (Κ).

Καί, ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον [(σ″), Κ][52], πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, ὅρα σημείωσιν ΙΑ΄.2. § 114.

§ 116. **ΙΑ΄.4.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Α), (Κ).

Θά εὕρωμεν τήν τομήν τῆς παραβολῆς [Α, (σ″)] μετά τοῦ ἀνοικτοῦ τμήματος ΤΟΣ τῆς παραβολῆς [Κ, (σ′)].

Ὡς καί ἐν ΙΑ'. 2. § 114, ἡ παραβολή $[K,(\sigma')]$ ἔχει $\nu_1<0$. Ἐπίσης, ἔχομεν (σχ. 54): $\overline{KZ}+\overline{Z\Gamma_2}+\overline{\Gamma_2B}+\overline{B\Gamma_3}=\overline{K\Gamma_3} \Leftrightarrow x_1-\nu-R_2+R_1=N_1 \Leftrightarrow \nu=x_1+(-N_1)+R_1-R_2=x_1+\nu_1-(-R_1)-R_2$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν περίπτωσιν Α'. 3. § 68, θά καταλήξωμεν εἰς τάς (3) καί (4) τῆς § 68, ἀρκεῖ νά θέσωμεν ὅπου R_1 τό $-R_1$ καί ἀντιστρόφως. Ὁ συντελεστής τοῦ y^2 τῆς (3) θά εἶναι $x_1+R_1-R_2$ καί ἡ διακρίνουσα θά γίνῃ: $\Delta=\nu_1(x_1+\nu_1+R_1-R_2)\left[x_1^2+y_1^2-(R_1-R_2)^2\right]$, μέ τήν παρατήρησιν ὅτι $\nu_1<0$ καί $x_1+\nu_1+R_1-R_2=\nu>0$.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἐάν τό $A\in$ (ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα $\Sigma'\Delta_1T'\Gamma_2\Sigma'$), τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐάν $A\in$ (ἀνοικτόν τόξον $\Sigma'\Delta_1T'$), τότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί, ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\sigma''),K]^{(53)}$, πλήν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων σημειοσυνόλων, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1=R_2$, τότε ὁ συντελεστής τοῦ y^2 θά γίνῃ $x_1+R_1-R_2=x_1=\overline{KZ}>\overline{K\Gamma_3}>0$ καί ἡ διακρίνουσα γίνεται: $\Delta=\nu_1\cdot(x_1+\nu_1)(x_1^2+y_1^2)<0$. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 117. **ΙΒ'**. Ἡ (ε) τέμνει τήν (K) καί ἐφάπτεται τῆς (A) (σχ. 55).

§ 118. **ΙΒ'. 1.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (A), (K).

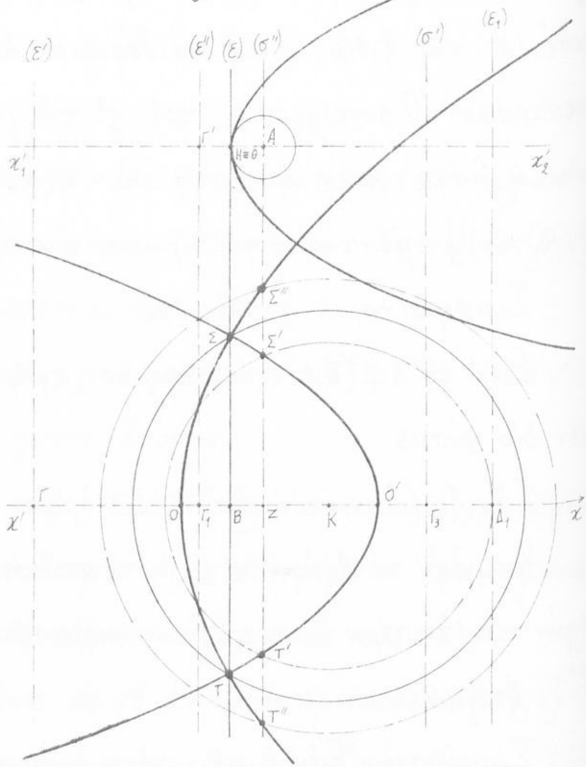
α') Ἡ τομή τῶν παραβολῶν $[K,(\varepsilon')]$, $[A,(\varepsilon'')]$ δίδει λύσιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν ΙΑ΄.1.§113, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐάν $A \in$ (ἀνοικτόν εὐθ. τμ. Σ΄Τ΄), οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν. Ἐάν $A \equiv \Sigma' \veebar A \equiv T'$, ἔχομεν μίαν λύσιν. Καί ἐάν $A \in$ [εὐθεῖαν(σ''), πλήν κλειστοῦ εὐθ. τμ. Σ΄Τ΄], τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

Παρατήρησις 1: Ἐάν $\overline{KZ} = \overline{K\Delta_1}$, τότε $\forall$ $A \in$ [εὐθεῖαν $(\sigma'') \equiv (\varepsilon_1)$, πλήν σημείου Δ_1], ἔχομεν μίαν λύσιν καί ἐάν $\overline{KZ} > \overline{K\Delta_1}$, ἔχομεν δύο λύσεις[54].

Παρατήρησις 2: Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\Theta \equiv \Sigma$, ὁπότε αἱ παραβολαί $[K, (\varepsilon')]$ καί $[A, (\varepsilon'')]$ ἔχουν ἕν κοινόν σημεῖον, τό Σ. Τοῦτο δέν



Σχ.55.

εἶναι τό μοναδικόν[55]· διότι ἄλλως θά εἴχομεν $A \equiv \Sigma'$, ὁπότε $\Sigma'\Sigma \parallel x'x$ καί ἄρα $\overline{Z\Sigma'} = \overline{B\Sigma}$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ παραβολή $[K, (\sigma')]$ εἶναι γνησίως μονότονος καί εἶναι $\overline{Z\Sigma'} < \overline{B\Sigma}$. Ἀνήκει δέ τό Σ΄ εἰς τήν παραβολήν $[K, (\sigma')]$, διότι εἶναι $(\Sigma'K) = R_1 - R_2$ καί ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ' ἀπό τήν (σ') εἶναι ἴση μέ $(Z\Gamma_3) = (B\Gamma_3) - (BZ) = R_1 - R_2$. Τό ἕτερον λοιπόν σημεῖον τομῆς τῶν παραβολῶν $[A, (\varepsilon'')]$ καί $[K, (\varepsilon')]$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ὥστε ἐάν $\Theta \equiv \Sigma$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ A τότε εἶναι: $x_1 = \overline{KZ} = \overline{KB} + \overline{BZ} = x_B + R_2$ καί $y_1 = \overline{ZA} = \overline{B\Sigma}$, ἀλλά $(B\Sigma)^2 = (K\Sigma)^2 - (BK)^2 = R_1^2 - (x_B + R_2)^2$ καί ἄρα $y_1 = +\sqrt{R_1^2 - (x_B + R_2)^2}$.

Ὁμοίως, ἐάν $\Theta \equiv T$, ἔχομεν μίαν λύσιν μέ $A\left(x_1 = x_B + R_2,\ y = -\sqrt{R_1^2 - (x_B + R_2)^2}\right)$.

Παρατήρησις 3: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν πάντοτε δύο λύσεις (ὅρα σημείωσιν ΙΑ'.1. § 113).

β') Ἐπίσης, ἡ τομή τῆς παραβολῆς $[K, (\sigma')]$, πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς ΤΟ'Σ, μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $\Theta x_1'$ θά μᾶς δώσῃ τό κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἡ παραβολή $[K, (\sigma')]$ ἔχει ἐξίσωσιν $y^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2$ (1), μέ $\nu_1 < 0$ (ὅρα παραπομπήν (43)) καί μέ $x < \overline{KB} = \beta$, ἔνθα εἶναι $-R_1 < \overline{KB} < +R_1$ καί ἡ ἡμιευθεῖα $\Theta x_1'$ ἔχει τοιαύτην $y = \overline{B\Theta} = \alpha$ (2), μέ $x < \overline{KB} = \beta$. Λύοντες τό σύστημα τῶν (1), (2) ἔχομεν μίαν λύσιν: $x = \dfrac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}$ καί $y = \alpha$.

Διερεύνησις: Θά πρέπῃ $x = \dfrac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} < \beta$ ἤ $\alpha^2 - \nu_1^2 > 2\beta\nu_1$, τελικῶς $\alpha < -\sqrt{\nu_1^2 + 2\beta\nu_1}$ $\underline{\vee}$ $+\sqrt{\nu_1^2 + 2\beta\nu_1} < \alpha$. Ἀλλά $\nu_1 = \overline{\Gamma_3 K} = \overline{\Gamma_3 B} + \overline{BK} = -R_1 - \beta$ καί $\nu_1^2 = R_1^2 + \beta^2 + 2\beta R_1$. Ἄρα $\nu_1^2 + 2\beta\nu_1 = R_1^2 + \beta^2 + 2\beta R_1 + 2\beta\cdot$

$\cdot(-R_1-\beta) = R_1^2 - \beta^2 = (K\Sigma)^2 - (KB)^2 = (B\Sigma)^2$. Ὥστε ὁ περιορισμός γίνεται:

$\alpha < -\sqrt{(B\Sigma)^2}$ $\veebar$ $+\sqrt{(B\Sigma)^2} < \alpha$ ἤ $\alpha < -(B\Sigma)$ $\veebar$ $(B\Sigma) < \alpha$ ἤ $\alpha < \overline{BT}$ $\veebar$ $\overline{B\Sigma} < \alpha$.

Διά νά ἔχωμεν λοιπόν λύσιν θά πρέπη ἡ εὐθεῖα $x_1' x_2'$ νά εἶναι ἐντός τῆς κλειστῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν σημείων Σ καί Τ καί παραλλήλων τῇ $x'x$.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν τά ἴδια.

§119. **ΙΒ'.2.** Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

α') Ἡ τομή τοῦ ἀνοικτοῦ τμήματος ΤΟ'Σ τῆς παραβολῆς $[K, (\sigma')]$ μετά τῆς $[A, (\varepsilon'')]$ θά μᾶς δώσῃ τήν λύσιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν ΙΑ'.2.§114, συμπεραίνομεν:

Ἐάν τό $A \in$ (ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Sigma''T''$), ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐάν $A \equiv \Sigma''$ $\veebar$ $A \equiv T''$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί, ἐάν $A \in$ [εὐθεῖαν (σ''), πλήν κλειστοῦ εὐθ. τμ. $\Sigma''T''$], τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Παρατήρησις 1: Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν παρατήρησιν 2 ἐν ΙΒ'.1, §118 καί ὅτι $\overline{B\Sigma} < \overline{Z\Sigma''}$, λέγομεν ὅτι: ἐάν $\Theta \equiv \Sigma$, τότε ἔχομεν μίαν λύσιν. Ὁμοίως μίαν λύσιν ἔχομεν καί ὅταν $\Theta \equiv T$.

Ἐπειδή $(\Sigma''K) = R_1 + R_2$ καί ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ'' ἀπό τήν (ε) εἶναι $(\Gamma Z) = (\Gamma B) + (BZ) = R_1 + R_2$, ἔπεται ὅτι τό Σ'' εἶναι σημεῖον τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$· ὁμοίως καί τό T''.

Παρατήρησις 2: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα (ὅρα σημείωσιν ΙΑ΄.2, § 114).

β΄) Ἡ τομή τοῦ ἀνοικτοῦ τμήματος ΤΟΣ τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$ μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $\Theta x_1'$ θά μᾶς δώσῃ λύσιν.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν ΙΒ΄.1.β΄, § 118 καί ὅτι $\nu_1 > 0$, καταλήγομεν εἰς τό συμπέρασμα, ὅτι ἔχομεν μίαν λύσιν, ὅταν ἡ $x_1'x_2'$ εἶναι εὐθεῖα τῆς ἀνοικτῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν σημείων Σ καί Τ καί παραλλήλων τῇ $x'x$.

§ 120. **ΙΒ΄.3.** Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Α), ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῆς (Κ).

Ἡ τομή τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $\Theta x_2'$ — πλήν τοῦ σημείου Α — καί τῆς παραβολῆς $[K, (\varepsilon')]$ — πλήν τοῦ κλειστοῦ τμήματος αὐτῆς ΤΟΣ — θά μᾶς δώσῃ τήν λύσιν.

Ἡ παραβολή $[K, (\varepsilon')]$ ἔχει ἐξίσωσιν $y^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2$, μέ $\nu_1 > 0$ (ὅρα ΙΒ΄.1.β΄, § 118) καί μέ $\beta = \overline{KB} < x$· καί ἡ ἡμιευθεῖα $\Theta x_2'$ ἔχει τοιαύτην $y = \overline{B\Theta} = \alpha$, μέ $\beta < x \neq \overline{KZ} = x_1$.

Λύοντες τό σύστημα ἔχομεν μίαν λύσιν: $x = \dfrac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}$ καί $y = \alpha$.

Τελικῶς συμπεραίνομεν, ὅτι διά νά ἔχωμεν λύσιν πρέπει ἡ $x_1'x_2'$ νά εἶναι ἐκτός τῆς κλειστῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν σημείων Σ καί Τ καί παραλλήλων τῇ $x'x$.

Ἐάν(56) ὅμως $A \equiv \Sigma'' \veebar A \equiv T''$, λύσιν δέν ἔχομεν.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν τά ἴδια.

§ 121. ΙΒ'.4. Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (Α), (Κ).

Ἡ τομή τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $\Theta x_2'$ – πλήν τοῦ σημείου Α – καί τοῦ ἀνοικτοῦ τμήματος $TO'\Sigma$ τῆς παραβολῆς $[K, (\sigma')]$ θά μᾶς δώσῃ τήν λύσιν.

Ἡ παραβολή $[K, (\sigma')]$ ἔχει ἐξίσωσιν: $y^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2$ (1), μέ $\nu_1 < 0$ (ὅρα ΙΒ'. 1. β', § 118) καί μέ $\beta = \overline{KB} < x \leqslant \overline{KO'} = -\frac{\nu_1}{2}$· καί ἡ ἡμιευθεῖα $\Theta x_2'$ ἔχει τοιαύτην $y = \overline{B\Theta} = \alpha$ (2) μέ $\beta < x \neq \overline{KZ} = x_1$.

Τό σύστημα τῶν (1), (2) θά μᾶς δώσῃ τήν μίαν λύσιν ἐν γένει: $x = \frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}$ καί $y = \alpha$.

Διερεύνησις: Θά πρέπῃ $\beta < \frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \leqslant -\frac{\nu_1}{2} \wedge \frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \neq x_1$. Ἐκ τῆς $\beta < \frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1}$ ἕπεται τελικῶς $-\sqrt{\nu_1^2 + 2\beta\nu_1} < \alpha < +\sqrt{\nu_1^2 + 2\beta\nu_1}$ καί ἐκ τῆς $\frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \leqslant -\frac{\nu_1}{2}$ ἕπεται $\alpha^2 \geqslant 0$· ἀλλά τό α^2 εἶναι μονίμως θετικόν ἤ μηδέν $\forall \alpha \in \Pi$.

Ἐπίσης, ἡ $\frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \neq x_1$ γίνεται: $\alpha \neq \pm\sqrt{\nu_1^2 + 2\nu_1 x_1}$· ἀλλά $\nu_1 = \overline{\Gamma_3 K} = \overline{\Gamma_3 B} + \overline{BZ} + \overline{ZK} = -R_1 + R_2 - x_1$ καί $\nu_1^2 = R_1^2 + R_2^2 + x_1^2 - 2R_1R_2 + 2R_1x_1 - 2R_2x_1$. Ἄρα $\nu_1^2 + 2\nu_1 x_1 = R_1^2 + R_2^2 + x_1^2 - 2R_1R_2 + 2R_1x_1 - 2R_2x_1 + 2x_1(-R_1 + R_2 - x_1) = (R_1 - R_2)^2 - x_1^2 = (K\Sigma')^2 - (KZ)^2 = (Z\Sigma')^2$. Ἑπομένως $\alpha \neq \pm\sqrt{(Z\Sigma')^2} = \pm(Z\Sigma')$.

Ὥστε ἔχομεν μίαν λύσιν, μόνον ὅταν ἡ $x_1 x_2'$ εἶναι εὐθεῖα τῆς ἀνοικτῆς ταινίας τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τῶν Σ καί Τ καί παραλλήλων τῇ $x'x$. Ἐξαιροῦνται αἱ εὐθεῖαι $x_1' x_2'$ αἱ διερχόμεναι ἐκ τῶν Σ′ καί Τ′.

Σημείωσις: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν τά ἴδια.

§ 122. **ΙΓ′.** Ἡ (ε) τέμνει ἀμφοτέρας τάς περιφερείας (Κ) καί (Λ) (σχ. 56).

1) Θά μελετήσωμεν κατ' ἀρχήν τήν τομήν τῶν παραβολῶν [Κ, (ε′)] καί [Λ, (ε″)]. Τά τμήματα αὐτῶν τά εὑρισκόμενα εἰς τούς ἀνοικτούς κύκλους (Κ), (Λ) εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς αὐτῶν· ἐνῷ τά εὑρισκόμενα ἐντός τῶν κλειστῶν κύκλων (Κ), (Λ) εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς.

Ὡς καί ἐν ΙΒ′. 1, § 118, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ταινίαν |(ε″), (σ″)|, πλήν κλειστοῦ μέρους κύκλου ($K, K\Delta_1 = R_1 - R_2$) εὑρισκομένου(57) εἰς τήν ἐν λόγῳ ταινίαν], τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

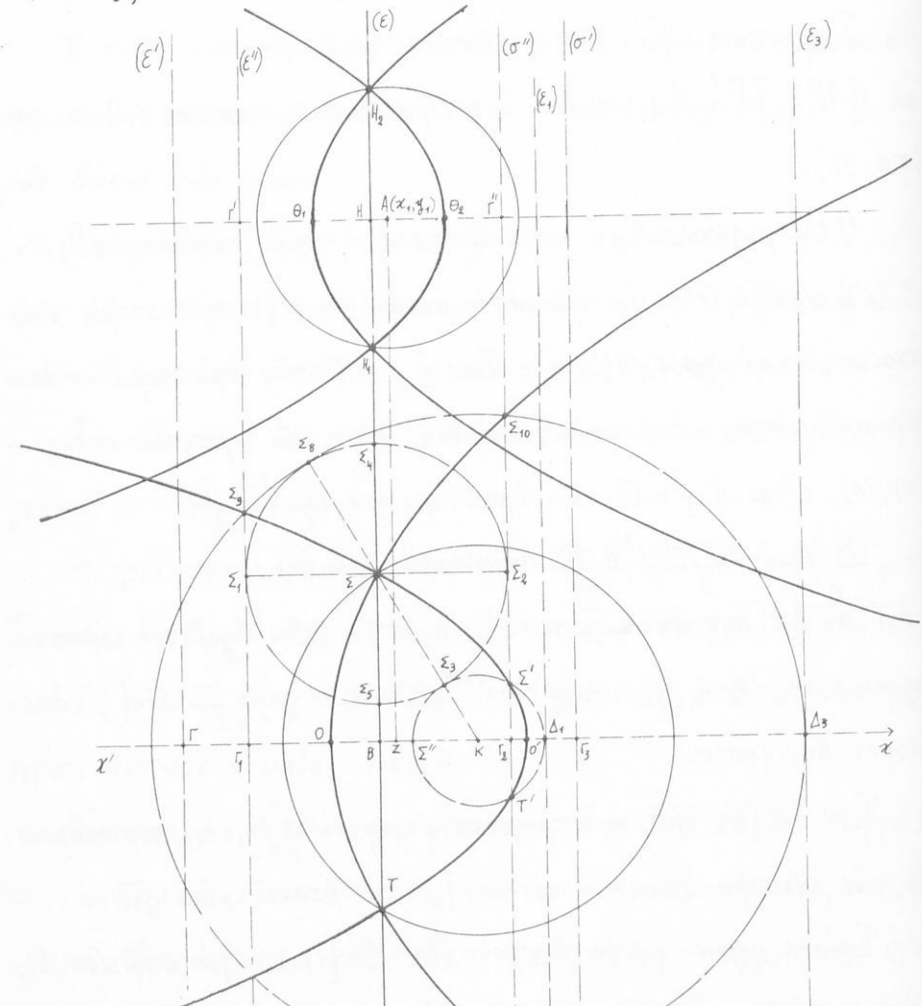
Ἐάν $A \in$ [εἰς τμῆμα ἤ τμήματα περιφερείας ($K, K\Delta_1$), εὑρισκόμενα εἰς τήν ἀνωτέρω ἀνοικτήν ταινίαν], τότε ἔχομεν μίαν λύσιν.

Ἐπίσης, μίαν λύσιν ἔχομεν ἐάν $A \in$ [(ε_1), πλήν σημείου Δ_1, μέ (ε_1) εὐθεῖαν τῆς ἀνωτέρω ἀνοικτῆς ταινίας].

Καί τέλος οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μέρος κύκλου ($K, K\Delta_1$), εὑρισκόμενον εἰς τήν ἐν λόγῳ ταινίαν].

ΒΑΘΥΤΕΡΑ ΕΞΕΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΖΗΤΗΜΑΤΟΣ

Ἔστω (Σ, R_2) ἡ περιφέρεια (σχ. 56) ἡ ἐφαπτομένη τῆς $(K, K\Delta_1)$ εἰς τό Σ_3, τῆς (σ'') εἰς τό Σ_2 καί τῆς (ε'') εἰς τό Σ_1.



Σχ. 56.

Ἐάν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν μέρος ταινίας $(\varepsilon'')\Sigma_1\Sigma_4\Sigma_2(\sigma'')$, τότε εἶναι πάντοτε $\overline{B\Sigma} < \overline{BH_1}$ καί ἄρα $H_1\Theta_1H_2 \cap TO\Sigma = \emptyset$. Ἤτοι ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τῶν (K), (A) καί τῆς (ε).

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_1\Sigma_4\Sigma_2$], τότε $H_1 \equiv \Sigma$ καί ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς (ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$).

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον $(\Sigma, \Sigma\Sigma_5 = R_2)$], τότε $H_2 \equiv \Sigma$ καί ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς (ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$).

Ἐάν $A \equiv \Sigma_3$, τότε αἱ παραβολαί ἐφάπτονται καί ἔχομεν μίαν περιφέρειαν, διότι $\Sigma_3 \in$ [περιφ. $(K, K\Delta_1)$]. Ἀλλά τότε $H_2 \equiv \Sigma$. Ἄρα ἡ περιφέρεια εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$. Ὥστε ἄν $A \equiv \Sigma_3$, λύσιν δέν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα $\Sigma_1\Gamma_1\Sigma''\Sigma_3\Sigma_5\Sigma_1$ ἤ τοιοῦτον $\Sigma_3\Sigma'\Sigma_2\Sigma_3$], τότε $\overline{BH_2} < \overline{B\Sigma}$ καί ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς.

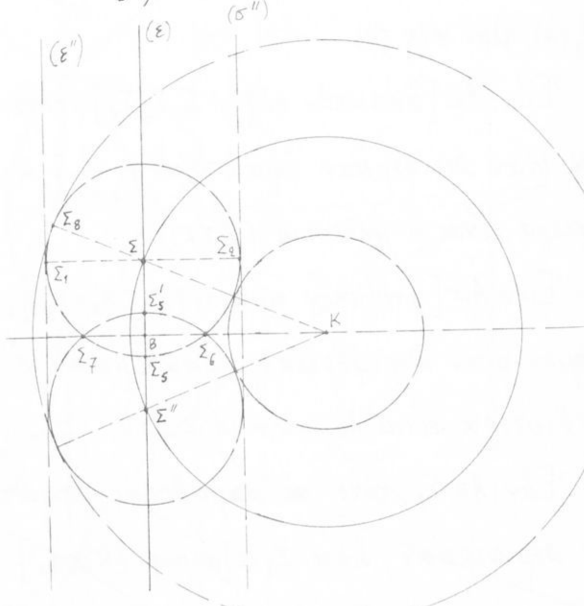
Ἐάν $A \in$ [κλειστόν τόξον $\Sigma'\Sigma''$, πλήν σημείων Σ' καί Σ_3], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς.

Ἐάν[58] $A \in$ [ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Gamma_1\Sigma''$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς.

Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί διά τήν ἀρνητικήν γωνίαν $|(\varepsilon''),(\sigma'')|$.

Εἰς τό σχῆμα 57 ἐξετάζομεν τήν περίπτωσιν ὅταν $(\Sigma B) < R_2$.

Ἐνταῦθα ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα πλήν, ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν καμπυλόγραμμ. σχῆμα $\Sigma_7 \Sigma_5 \Sigma_6 \Sigma_5' \Sigma_7$], τότε ἔχομεν $\overline{BH_1} < \overline{B\Sigma''} < \overline{B\Sigma} < \overline{BH_2}$ καί ἄρα ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς.



Σχ. 57.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_7 \Sigma_5 \Sigma_6$], τότε $\overline{BH_1} < \overline{B\Sigma''} < \overline{B\Sigma} = \overline{BH_2}$ καί ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς (ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$)

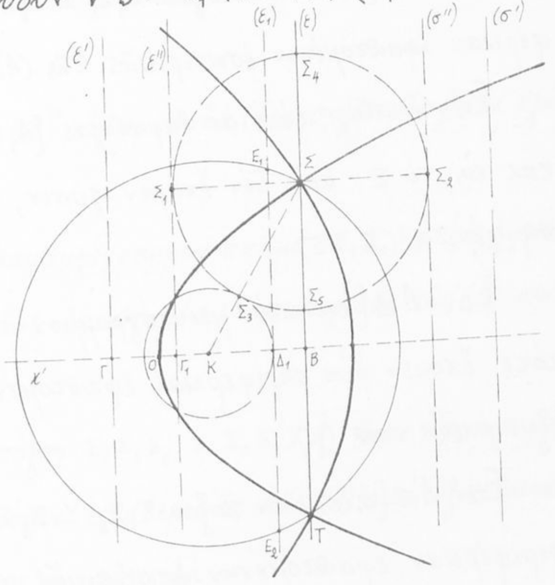
Ἐπίσης, ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_7 \Sigma_5' \Sigma_6$], τότε $\overline{BH_1} = \overline{B\Sigma''} < \overline{B\Sigma} < \overline{BH_2}$ καί ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐξωτερικῶς (ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma'', \Sigma''\Sigma'')$).

Ἐάν $A \equiv \Sigma_6 \veebar A \equiv \Sigma_7$, τότε $\overline{BH_1} = \overline{B\Sigma''} < \overline{B\Sigma} = \overline{BH_2}$, ἤτοι $H_1 \equiv \Sigma'' \wedge H_2 \equiv \Sigma$. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν (ἔχομεν δύο μηδενικάς περιφερείας $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$ καί $(\Sigma'', \Sigma''\Sigma'')$).

Σημείωσις: Ἐάν $\overline{B\Sigma} = R_2 \Longrightarrow \Sigma_5 \equiv \Sigma_5' \equiv \Sigma_6 \equiv \Sigma_7 \equiv B$, ὁπότε ἐάν $A \equiv B \Longrightarrow H_1 \equiv \Sigma'' \wedge H_2 \equiv \Sigma$. Ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν.

Πάντα ταῦτα ἰσχύουν $\forall B : -R_1 < \overline{KB} < R_1$ (ὅρα παρατήρησιν (54) καί σχῆμα 58).

Ἐάν πάλιν (σχ. 58) $(\varepsilon_1) \in [$ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon''), (\sigma'')|]$, τότε $\forall A \in [(\varepsilon_1)$, πλήν σημείου $\Delta_1]$ ἔχομεν μίαν περιφέρειαν· εἶναι δέ αὕτη μηδενική ἐάν ἡ (A) διέρχεται ἐκ τοῦ $E_1 \veebar E_2$.



Σχ. 58.

Σημείωσις: Ἐάν $R_2 = R_1$, τότε εἶναι $\Sigma_3 \equiv K$ (ὅρα σχ. 56) καί $\overline{B\Sigma} \leqslant R_2 = R_1$ · τό ἴσον ἰσχύει ὅταν $K \equiv B$.

Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί διά τήν τομήν τῶν παραβολῶν $[K, (\sigma')]$ καί $[A, (\sigma'')]$, ἀρκεῖ ὁ θετικός ἄξων τῶν x νά καταστῇ ἀρνητικός τοιοῦτος καί ἀντιστρόφως.

2) Θά μελετήσωμεν τώρα τήν τομήν τῶν παραβολῶν $[K,(\varepsilon')]$, $[A,(\sigma'')]$ (ὅρα σχ. 56).

Ὡς καί ἐν Γ΄.3.§78, συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μέρος ἐπιπέδου $(\varepsilon'')\Sigma_9\Sigma_8\Sigma_{10}(\sigma'')$], οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_9\Sigma_8 \veebar \Sigma_8\Sigma_{10}$], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K).

Ἐάν $A \equiv \Sigma_8$, τότε αἱ παραβολαί $[A,(\sigma'')]$ καί $[K,(\varepsilon')]$ ἐφάπτονται εἰς τό Σ· ἄρα δέν ἔχομεν λύσιν, ἤ ἄλλως εἶναι ἡ μηδενική περιφέρεια $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα $\Sigma_8\Sigma_9\Sigma_1\Sigma_8 \veebar \Sigma_8\Sigma_{10}\Sigma_2\Sigma_8$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K).

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_1\Sigma_8 \veebar \Sigma_8\Sigma_4\Sigma_2$], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K). Ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον $(\Sigma, \Sigma\Sigma_8 = R_2)$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας· ἡ μία ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K) καί ἡ ἑτέρα ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῆς (A) καί ἐσωτερικῶς τῆς (K).

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_1\Sigma_5\Sigma_3\Sigma_2$], τότε ἔχομεν μίαν πε-

ριφέρειαν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς (A) καί ἐσωτερικῶς τῆς (K).
Ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$.

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα $\Sigma_1\Gamma_1\Gamma_2\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_5\Sigma_1$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐξωτερικῶς τῆς (A) καί ἐσωτερικῶς τῆς (K).

Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί διά τήν ἀρνητικήν ταινίαν $|(\varepsilon''), (\sigma'')|$.

Ἐάν $(\Sigma B) < R_2$ (σχ. 57), ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα πλήν ὅτι:

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν καμπυλόγραμμον σχῆμα $\Sigma_7\Sigma_5\Sigma_6\Sigma_5'\Sigma_7$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K).

Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Sigma_7\Sigma_5\Sigma_6 \veebar \Sigma_7\Sigma_5'\Sigma_6$], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς (A) καί ἐξωτερικῶς τῆς (K)· ἡ δευτέρα εἶναι ἡ μηδενική.

Ἐάν $A \equiv \Sigma_7 \veebar A \equiv \Sigma_6$, οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν· καί αἱ δύο εἶναι αἱ μηδενικαί $(\Sigma, \Sigma\Sigma)$ καί $(\Sigma'', \Sigma''\Sigma'')$.

Σημείωσις 1: Ἐάν $\overline{B\Sigma} = R_2$ καί $A \equiv B$, δέν ἔχομεν λύσιν (δύο μηδενικαί).

Σημείωσις 2: Ἡ $(\varepsilon_3) \notin$ [ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon''), (\sigma'')|$], διότι ἔχομεν (σχ. 56): $\overline{KB} < R_1 \Rightarrow \overline{KB} + R_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow \overline{KB} + \overline{B\Gamma_2} <$

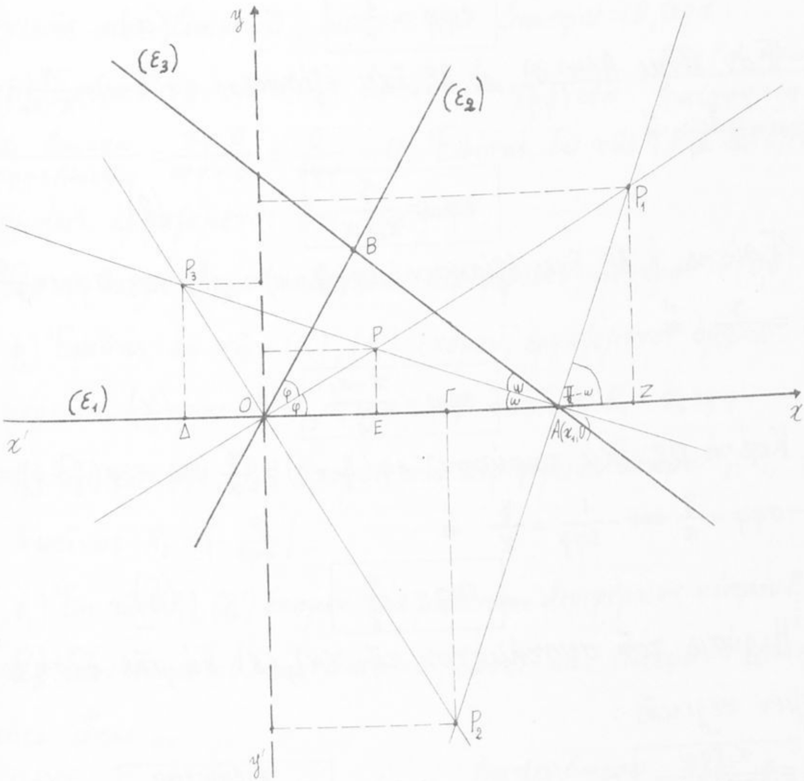
$<\overline{K\Delta_3} \Longrightarrow \overline{K\Gamma_2} < K\Delta_3$.

Σημείωσις 3: Ἐάν $R_1 = R_2$, ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα· εἶναι δέ πάντοτε (σχ. 57): $\overline{B\Sigma} \leqslant R_2$. Τό ἴσον ἰσχύει ἐάν $B \equiv K$.

Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί διά τήν τομήν τῶν παραβολῶν $[K, (\sigma')]$, $[A, (\varepsilon'')]$, ἀρκεῖ ὁ θετικός ἄξων τῶν x νά καταστῇ ἀρνητικός τοιοῦτος καί ἀντιστρόφως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II.

§123. Ζητεῖται νά γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3) (σχ. 59).



Σχ. 59.

Θεωροῦμεν ὀρθοκανονικόν σύστημα ἀξόνων μέ ἄξονα τῶν x τήν εὐθεῖαν (ε_1) καί ἀρχήν O τήν τομήν τῶν (ε_1), (ε_2).

Ἄν $B\hat{O}P_1 = P_1\hat{O}A = \varphi$, $B\hat{A}P_3 = P_3\hat{A}O = \omega$, $P_3OP_2 \perp OP_1$, $P_1AP_2 \perp AP_3$, τότε τό P εἶναι τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τό τρίγωνον BOA καί τά P_1, P_2, P_3 τά κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων περιφερειῶν τοῦ BOA.

Ἡ εὐθεῖα OP_1 ἔχει ἐξίσωσιν:

$$\boxed{\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}} \qquad (\alpha)$$

Ἐάν εἶναι $A(x_1, 0)$, ἡ AP_3 ἔχει ἐξίσωσιν: $\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = \frac{y}{x - x_1} \iff$ $-\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x - x_1}$ ἤ

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x_1 - x}} \qquad (\beta)$$

Ἐπίσης, ἡ AP_1 ἔχει ἐξίσωσιν: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \frac{y}{x - x_1} \iff \sigma\varphi\omega = \frac{y}{x - x_1} \iff$ $\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{y}{x - x_1}$ ἤ

$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega = \frac{x - x_1}{y}} \qquad (\gamma)$$

Καί ἡ OP_3 ἔχει τοιαύτην: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \frac{y}{x} \iff -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{y}{x}$ $\iff -\sigma\varphi\varphi = \frac{y}{x} \iff -\frac{1}{\varepsilon\varphi\varphi} = \frac{y}{x}$ ἤ

$$\boxed{\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{x}{y}} \qquad (\delta)$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν (α), (β) θά μᾶς δώσῃ τό $P(x, y)$. Ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{x = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P) \qquad \text{καί} \qquad \boxed{y = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega\, \varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P')$$

Ἐπίσης, ἐκ τοῦ συστήματος τῶν (α), (γ) ἔχομεν διά τό $P_1(x, y)$:

$$\boxed{x = \frac{x_1}{1 - \varepsilon\varphi\varphi\, \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_1) \qquad \text{καί} \qquad \boxed{y = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\varphi}{1 - \varepsilon\varphi\varphi\, \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_1')$$

Ἐκ τῶν (γ), (δ) ἔχομεν διά τό $P_2(x, y)$:

$$\boxed{x = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_2) \qquad \text{καί} \qquad \boxed{y = -\frac{x_1}{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_2')$$

Καί τέλος, διά τό $P_3(x, y)$ ἔχομεν ἐκ τῶν (β), (δ):

$$\boxed{x = -\frac{x_1 \varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_3) \quad \text{καί} \quad \boxed{y = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\omega}} \quad (P_3')$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ

1) Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία φ = σταθερά καί διάφορος τῆς μηδενικῆς καί $\lim\omega = 0$, ὁπότε καί $\lim \varepsilon\varphi\omega = 0$, ἄρα:

p) Ἔχομεν ἐκ τῆς (P): $\lim x = \lim \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega} = \frac{\lim(x_1 \varepsilon\varphi\omega)}{\lim(\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega)} = \frac{\lim x_1 \cdot \lim \varepsilon\varphi\omega}{\lim\varepsilon\varphi\varphi + \lim\varepsilon\varphi\omega} = \frac{x_1 \cdot 0}{\varepsilon\varphi\varphi + 0} = \frac{0}{\varepsilon\varphi\varphi} = 0$. Ἐπίσης, ἐκ τῆς (P') ἔχομεν παρομοίως ἐργαζόμενοι ὅτι $\lim y = 0$.

Ὥστε ἔχομεν τήν μηδενικήν περιφέρειαν κέντρου $P(0,0)$.

p_1) Ἐπίσης, ἐκ τῶν (P_1), (P_1') ἔχομεν, ἐργαζόμενοι ὁμοίως, τήν περιφέρειαν κέντρου $P_1(x_1, x_1\varepsilon\varphi\varphi)$ καί ἀκτῖνος $R_1 = x_1 \varepsilon\varphi\varphi$.

p_2) Ἐκ τῶν (P_2), (P_2') ἔχομεν τήν περιφέρειαν κέντρου $P_2\left(x_1, -\frac{x_1}{\varepsilon\varphi\varphi}\right)$ καί ἀκτῖνος $R_2 = \left|-\frac{x_1}{\varepsilon\varphi\varphi}\right|$.

p_3) Ἐκ τῶν (P_3), (P_3') ἔχομεν τήν μηδενικήν περιφέρειαν κέντρου $P_3(0,0)$.

2) Ἐάν $\lim\omega = 0$ καί $\lim\varphi = 0$, ὁπότε καί $\lim\varepsilon\varphi\omega = 0$, $\lim\varepsilon\varphi\varphi = 0$, τότε εἶναι:

p) Ἐκ τῆς σχέσεως (P): $\lim x = \frac{\lim x_1 \cdot \lim\varepsilon\varphi\omega}{\lim\varepsilon\varphi\varphi + \lim\varepsilon\varphi\omega} = \frac{x_1 \cdot 0}{0+0} = \frac{0}{0}$ = ἀοριστία. Ἑπομένως κατά τόν κανόνα τοῦ de l' Hospital ἔπεται ὅτι $\lim x = \lim \frac{(x_1 \varepsilon\varphi\omega)'}{(\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega)'} = \lim \frac{x_1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{x_1 \cdot \lim\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\lim\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + \lim\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{x_1 \cdot \frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}} = \frac{x_1}{2}$, διότι $\lim\sigma\upsilon\nu\omega = 1$.

Ἐπίσης, ἐκ τῆς (P'): $\lim y = \lim \frac{(x_1 \varepsilon\varphi\varphi\varepsilon\varphi\omega)'}{(\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega)'} = \lim \frac{x_1\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\cdot\varepsilon\varphi\omega + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\varepsilon\varphi\varphi\right)}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{x_1\left(\frac{1}{1}\cdot 0 + \frac{1}{1}\cdot 0\right)}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}} = \frac{0}{2} = 0$.

Ὥστε ἔχομεν τὴν μηδενικὴν περιφέρειαν κέντρου $P(\frac{x_1}{2}, 0)$.

p_1) Ἐκ τῶν $(P_1), (P_1')$ ἔχομεν τὴν μηδ. περιφέρειαν κέντρου $P_1(x_1, 0)$.

p_2) Ἐκ τῶν $(P_2), (P_2')$ ἔχομεν τὴν περιφέρειαν κέντρου $P_2(\frac{x_1}{2}, -\infty)$.

p_3) Ἐκ τῶν $(P_3), (P_3')$ ἔχομεν τὴν μηδ. περιφέρειαν κέντρου $P_3(0,0)$.

Σημείωσις: Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ὑπετέθη $x_1 \neq 0$, εἰ δ' ἄλλως πᾶσαι εἶναι μηδενικαὶ περιφέρειαι.

3) Εἰς τὰς σχέσεις $(P), (P'), (P_2), (P_2')$ ὑπετέθη ὅτι $\varepsilon\varphi\varphi + \varepsilon\varphi\omega \neq 0 \iff \varepsilon\varphi\varphi \neq -\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(-\omega) \iff \varphi \neq -\omega$ (1) ἢ $\varphi \neq \pi - \omega$ (2)

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται $\varphi + \omega \neq 0$, καὶ ἐπειδὴ ὑποθέτομεν φ, ω ὄχι ἀρνητικαὶ γωνίαι, ἄρα $\varphi \neq 0$ εἴτε $\omega \neq 0$. Ἐὰν $\varphi = \omega = 0$, τότε αἱ εὐθεῖαι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ ταυτίζονται, ὁπότε πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας εἶναι κέντρον περιφερείας ἐφαπτομένης τῆς εὐθείας. Ἀνάλογα πάλιν συμπεράσματα ἔχομεν ἐὰν π.χ. εἶναι $\varphi \neq 0$, $\omega = 0$.

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται: $\varphi + \omega \neq \pi$. Δηλ. αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΒ καὶ ΑΒ θὰ καταστοῦν παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι ἐὰν $\varphi + \omega = \pi$. Ἤτοι $(\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, ὁπότε ἐξετάζεται ὡς εἰδικὴ περίπτωσις.

Ἐὰν $(\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, τότε (σχ. 59) θὰ εἶναι $2\varphi + 2\omega = \pi \iff \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$ · ὁπότε ἐκ τῶν $(P), (P')$ ἔχομεν: $x = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2} - \omega) + \varepsilon\varphi\omega} = \frac{x_1 \varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$ καὶ $y = \frac{x_1 \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$. Ἐπίσης ἐκ τῶν $(P_2), (P_2')$ ἔχομεν: $x = \frac{x_1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$ καὶ

$y=-\frac{x_1 εφω}{1+εφ^2ω}$. Τά κέντρα τῶν ἄλλων περιφερειῶν ἀφανίζονται εἰς τό ἄπειρον.

Ὑποτέθη ἐπίσης εἰς τάς σχέσεις $(P_1), (P_1'), (P_3), (P_3')$ ὅτι $1-εφφεφω \neq 0 \Leftrightarrow 2ημφημω \neq 2συνφσυνω \Leftrightarrow συν(φ-ω)-συν(φ+ω) \neq συν(φ-ω)+συν(φ+ω) \Leftrightarrow συν(φ+ω)\neq 0$. Ἄρα $φ+ω \neq 0$, ἤτοι ἐρχόμεθα εἰς τά προηγούμενα πάλιν.

Σημείωσις: Εἶναι $\overline{ΓΑ}=\overline{ΓΟ}+\overline{ΟΑ}=-\frac{x_1 εφφ}{εφφ+εφω}+x_1=\frac{x_1 εφω}{εφφ+εφω}=\overline{ΟΕ}$.
Ἐπίσης, $\overline{ΖΑ}=\overline{ΖΟ}+\overline{ΟΑ}=-\frac{x_1}{1-εφφεφω}+x_1=-\frac{x_1 εφφεφω}{1-εφφεφω}=\overline{ΟΔ}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

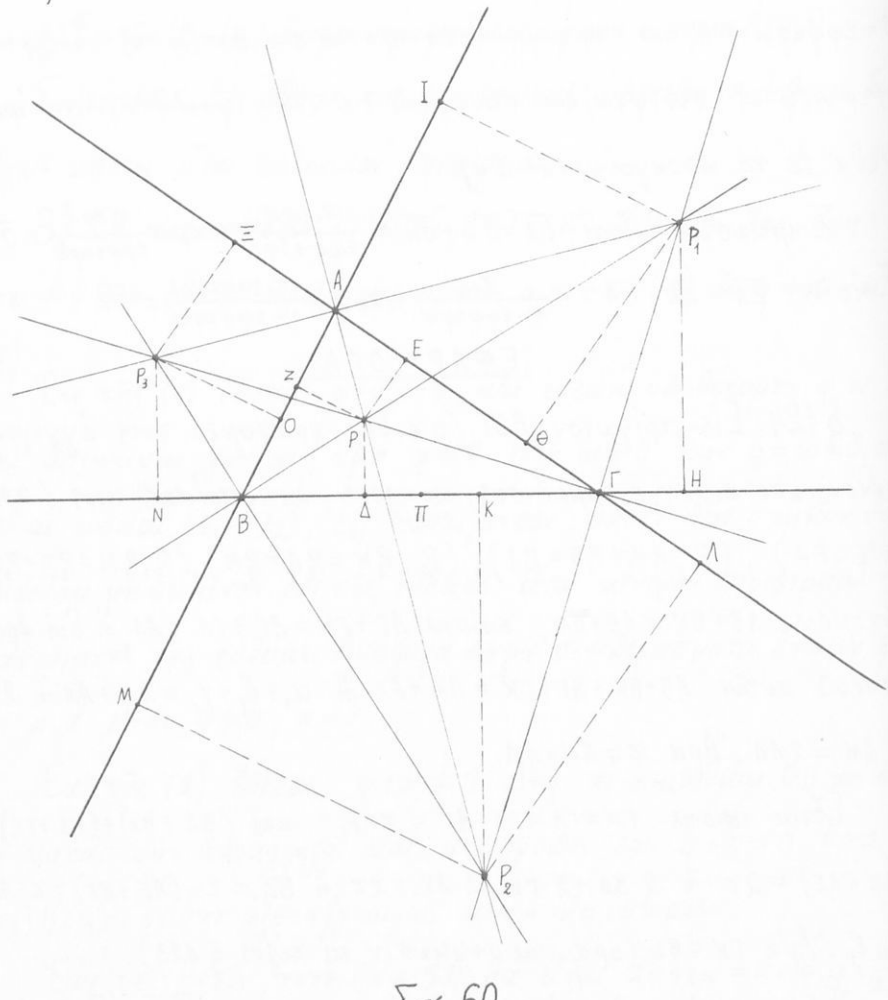
§124. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 60) γράφομεν τούς ἐγγεγραμμένον καί παρεγγεγραμμένους κύκλους, ἀντιστοίχως τούς $(P, PΔ=PE=PZ)$, $(P_1, P_1H=P_1Θ=P_1I)$, $(P_2, P_2K=P_2Λ=P_2M)$, $(P_3, P_3N=P_3Ξ=P_3O)$.
Ἔχομεν: $AB+BK=AB+BM$, ἐπίσης $ΑΓ+ΓΚ=ΑΓ+ΓΛ=ΑΛ$ ἤ διά προσθέσεως αὐτῶν $AB+BK+ΑΓ+ΓΚ=ΑΜ+ΑΛ$ ἤ $α_1+β_1+γ_1=ΑΜ+ΑΛ$ ἤ $2τ=2\cdot ΑΜ=2\cdot ΑΛ$. Ἄρα $τ=ΑΜ=ΑΛ$.

Εἶναι ἐπίσης $ΓΚ=ΓΛ=ΑΛ-ΑΓ=τ-β_1$ · καί $(ΒΔ+ΒΖ)+(ΓΔ+ΓΕ)+(ΑΖ+ΑΕ)=2τ$ ἤ $2\cdot ΒΔ+2\cdot ΓΕ+2\cdot ΑΕ=2τ$ ἤ $ΒΔ=τ-(ΑΕ+ΕΓ)=τ-ΑΓ=τ-β_1$. Ἄρα $ΓΚ=ΒΔ$ (ὅρα καί σημείωσιν εἰς τέλος § 123).

Ἔχομεν πάλιν, ἀναλόγως ἐργαζόμενοι: $ΒΚ=τ-γ_1$. Ἑπομένως $ΔΚ=ΒΚ-ΒΔ=(τ-γ_1)-(τ-β_1)=β_1-γ_1$.

Ἐπίσης, εἶναι: $ΝΗ=ΝΒ+ΒΓ+ΓΗ=(τ-α_1)+α_1+(τ-α_1)=β_1+γ_1$

Ἐκ πάντων τούτων ἕπεται ὅτι (ὅρα § 3): ἡ ἔλλειψις μὲ ἐστιακὴν ἀπόστασιν $2\gamma = B\Gamma = \alpha_1$ καὶ διερχομένη ἐκ τοῦ A, ἔχει μέγαν ἄξονα τὸ NH. Ἔχομεν δηλ. $A\Gamma + AB = \beta_1 + \gamma_1 = NH = 2\alpha$.



Σχ. 60.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως αὐτῆς (μὲ ἀρχὴν τῶν ἀξόνων τὸ Π, ἔνθα $B\Pi = \Pi\Gamma$) εἶναι :

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (1)$$

Ἔνθα $2\alpha=\beta_1+\gamma_1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ καί $2\gamma=\alpha_1$.

Προφανῶς τό σημεῖον A εἶναι κοινόν τῆς ἐλλείψεως καί τῆς εὐθείας P_1P_3. Θά δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι τό μοναδικόν. Ἤτοι, ὅτι ἡ εὐθεῖα P_1P_3 ἐφάπτεται τῆς ἐλλείψεως εἰς τό A.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας P_1P_3 τῆς διερχομένης ἐκ τῶν σημείων $P_1(x_1,y_1)$ καί $P_3(x_2,y_2)$ εἶναι ἡ:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2} \qquad (2)$$

Εἶναι $x_1=\overline{\Pi H}=\alpha$ καί $y_1=\overline{HP_1}=\rho_\beta=\overline{BH}\cdot \varepsilon\varphi(H\hat{B}P_1)=(\overline{B\Pi}+\overline{\Pi H})\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ $=(\gamma+\alpha)\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$, ἔνθα ρ_β ἡ ἀκτίς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου (P_1).

Ἐπίσης, $x_2=\overline{\Pi N}=-\alpha$ καί $y_1=\overline{NP_3}=\rho_\gamma=\overline{N\Gamma}\cdot\varepsilon\varphi(N\hat{\Gamma}P_3)=(\alpha+\gamma)\cdot$ $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$. Ἄρα ἡ (2) γίνεται: $\frac{x-\alpha}{\alpha-(-\alpha)}=\frac{y-\rho_\beta}{\rho_\beta-\rho_\gamma}$ ἤ τελικῶς $\frac{x}{\alpha}=\frac{2y-(\rho_\beta+\rho_\gamma)}{\rho_\beta-\rho_\gamma}$ καί ἐάν θέσωμεν χάριν εὐκολίας πράξεων: $\rho_\beta+\rho_\gamma=\lambda$ καί $\rho_\beta-\rho_\gamma=\mu$, εἶναι $\frac{x}{\alpha}=\frac{2y-\lambda}{\mu}$ ἤ $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{4y^2+\lambda^2-4\lambda y}{\mu^2}$. ὁπότε ἡ (1) γίνεται: $\frac{4y^2+\lambda^2-4\lambda y}{\mu^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, ἤ τελικῶς:

$$\boxed{(4\beta^2+\mu^2)y^2-4\beta^2\lambda y+\beta^2\lambda^2-\beta^2\mu^2=0} \qquad (3)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (3) εἶναι:

$\Delta'=4\beta^4\lambda^2-(4\beta^2+\mu^2)(\beta^2\lambda^2-\beta^2\mu^2)=\beta^2\mu^2(4\beta^2+\mu^2-\lambda^2)$· ἀλλά· $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$, $\mu^2=(\rho_\beta-\rho_\gamma)^2=\rho_\beta^2+\rho_\gamma^2-2\rho_\beta\rho_\gamma$ καί $\lambda^2=(\rho_\beta+\rho_\gamma)^2=\rho_\beta^2+\rho_\gamma^2+2\rho_\beta\rho_\gamma$. Ἄρα εἶναι: $4\beta^2+\mu^2-\lambda^2=4(\alpha^2-\gamma^2)+\rho_\beta^2+\rho_\gamma^2-2\rho_\beta\rho_\gamma-\rho_\beta^2-\rho_\gamma^2-2\rho_\beta\rho_\gamma=4(\alpha^2-\gamma^2)-4\rho_\beta\rho_\gamma=4(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)-4(\alpha+\gamma)\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot(\alpha+\gamma)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=$

$= 4(\alpha+\gamma)\cdot\left[(\alpha-\gamma)-(\alpha+\gamma)\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\right]$. Ἀλλά $\alpha+\gamma = \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}+\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}{2} = \frac{2\tau}{2} = \tau$ καί $\alpha-\gamma = \frac{-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}{2} = \tau-\alpha_1$. Ἐπίσης, εἶναι γνωστόν ὅτι $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha_1)(\tau-\gamma_1)}{\tau(\tau-\beta_1)}}$ καί $\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha_1)(\tau-\beta_1)}{\tau(\tau-\gamma_1)}}$. Ἄρα εἶναι:

$(\alpha-\gamma)-(\alpha+\gamma)\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}) = (\tau-\alpha_1)-\tau\sqrt{\frac{(\tau-\alpha_1)(\tau-\gamma_1)}{\tau(\tau-\beta_1)}}\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\alpha_1)(\tau-\beta_1)}{\tau(\tau-\gamma_1)}} = (\tau-\alpha_1)-\tau\cdot\frac{\tau-\alpha_1}{\tau} = (\tau-\alpha_1)-(\tau-\alpha_1) = 0$[59].

Ὥστε ἡ διακρίνουσα εἶναι μηδέν καί ἄρα ἔχομεν μίαν λύσιν. Δηλ. τό σημεῖον A εἶναι τό μοναδικόν κοινόν σημεῖον τῆς ἐλλείψεως καί τῆς εὐθείας P_1P_3.

Ἀκολούθως ἔπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή ἐφαπτομένης ἐλλείψεως εἰς τι σημεῖον A αὐτῆς:

Συνδέομεν τό A μέ τήν ἑστίαν B· λαμβάνομεν $BO = BN$ καί $P_3N \perp B\Gamma$, $P_3O \perp AB$. Ἡ εὐθεῖα λοιπόν P_3A εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἐλλείψεως εἰς τό A.

Ἡ ὑπερβολή μέ ἑστιακήν ἀπόστασιν $2\gamma = B\Gamma = \alpha_1$, ἥτις διέρχεται ἐκ τοῦ A, ἔχει κορυφάς τά σημεῖα Δ καί K. Ἔχομεν δηλ. $A\Gamma - AB = \beta_1-\gamma_1 = \Delta K = 2\alpha$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι:

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1} \qquad (4)$$

Ἔνθα $2\alpha = \beta_1-\gamma_1$, $\beta^2 = \gamma^2-\alpha^2$ καί $2\gamma = \alpha_1$.

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ PP_2 εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς (4) εἰς τό σημεῖον A.

Διά τά σημεῖα $P_2(x_3, y_3)$ καί $P(x_4, y_4)$ ἔχομεν: $x_3 = \overline{\Pi K} = \alpha$ καί $y_3 = \overline{KP_2} = -\rho_\alpha$. Ἐπίσης, $x_4 = \overline{\Pi\Delta} = -\alpha$ καί $y_4 = \overline{\Delta P} = \rho$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας PP_2 εἶναι: $\dfrac{x-\alpha}{\alpha-(-\alpha)} = \dfrac{y-(-\rho_\alpha)}{-\rho_\alpha-\rho}$ ἤ τελικῶς $-\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{2y+\rho_\alpha+\rho}{\rho_\alpha+\rho} = \dfrac{2y+\lambda}{\mu}$, ἔνθα ἐτέθη $\rho_\alpha - \rho = \lambda$ καί $\rho_\alpha - \rho = \mu$. Ὁπότε $\dfrac{x^2}{\alpha^2} = \dfrac{4y^2+\lambda^2+4\lambda y}{\mu^2}$ καί ἡ (4) γίνεται $\dfrac{4y^2+\lambda^2+4\lambda y}{\mu^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ ἤ τελικῶς:

$$\boxed{(4\beta^2-\mu^2)y^2 + 4\beta^2\lambda y + \beta^2\lambda^2 - \beta^2\mu^2 = 0} \qquad (5)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (5) εἶναι:

$\Delta' = 4\beta^4\lambda^2 - (4\beta^2-\mu^2)(\beta^2\lambda^2-\beta^2\mu^2) = \beta^2\mu^2(4\beta^2-\mu^2+\lambda^2)$. Ἀλλά $\beta^2 = \gamma^2-\alpha^2$, $\mu^2 = \rho_\alpha^2+\rho^2+2\rho_\alpha\rho$ καί $\lambda^2 = \rho_\alpha^2+\rho^2-2\rho_\alpha\rho$. Ἄρα $4\beta^2-\mu^2+\lambda^2 = 4(\gamma^2-\alpha^2) - 4\rho_\alpha\rho$. Εἶναι ὅμως $\rho_\alpha = KP_2 = K\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Gamma}{2}\right) = (\Pi\Gamma - \Pi K)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = (\gamma-\alpha)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$ καί $\rho = P\Delta = \Delta\Gamma\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = (\Delta\Pi+\Pi\Gamma)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = (\alpha+\gamma)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$.

Ἄρα $4(\gamma^2-\alpha^2) - 4(\gamma-\alpha)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}(\gamma+\alpha)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 4(\gamma^2-\alpha^2) - 4(\gamma^2-\alpha^2) = 0$.

Ἔχομεν λοιπόν μίαν λύσιν. Ἤτοι τό σημεῖον A εἶναι τό μοναδικόν σημεῖον τομῆς τῆς ἐν λόγῳ ὑπερβολῆς καί τῆς εὐθείας PP_2.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ ἑξῆς κατασκευή ἐφαπτομένης ὑπερβολῆς εἰς τι σημεῖον A αὐτῆς:

Συνδέομεν τό A μέ τήν ἑστίαν B· λαμβάνομεν $BZ = B\Delta$ καί $P\Delta \perp B\Gamma$, $PZ \perp AB$. Ἡ εὐθεῖα PA εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὑπερβολῆς εἰς τό A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἄν δίδωνται τά $\lambda = \beta_1 - \gamma_1$, ρ, ρ_α.

Εὕρομεν (§124) ὅτι $\Delta K = \beta_1 - \gamma_1$ (σχ. 60).

Σύνθεσις: Λαμβάνομεν $\Delta K = \lambda$, $\rho = \Delta P \perp \Delta K$, $\rho_\alpha = KP_2 \perp \Delta K$, ὁπότε αἱ ἐξωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων (P, ρ), (P_2, ρ_α) θά μᾶς δώσουν τό ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

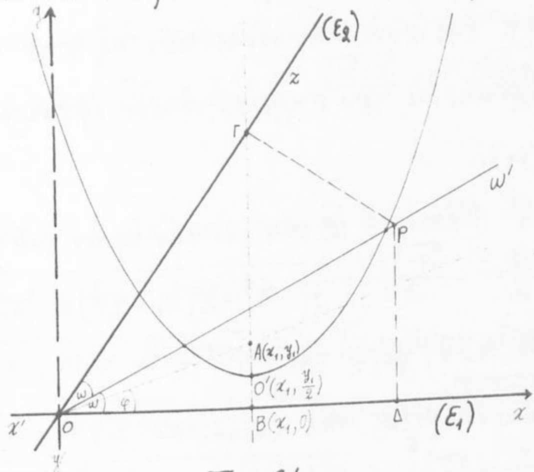
2) Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἄν δίδωνται τά $\lambda = \beta_1 + \gamma_1$, ρ_β, ρ_γ.

Εὕρομεν (§124) ὅτι $NH = \beta_1 + \gamma_1$ (σχ. 60).

Σύνθεσις: Λαμβάνομεν $NH = \lambda$, $\rho_\beta = HP_1 \perp NH$, $\rho_\gamma = NP_3 \perp NH$, ὁπότε αἱ ἐσωτερικαί ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων (P_1, ρ_β), (P_3, ρ_γ) θά μᾶς δώσουν τό ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.

§125. **Α'.** Ἔστωσαν (σχ. 61) αἱ εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τό O καί σημεῖον A ἐντός τῆς μιᾶς ἐκ τῶν σχηματιζομένων ἐξ αὐτῶν τεσσάρων γωνιῶν. Ἔστω ἐπίσης ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ox εἶναι ὁ θετικός ἡμιάξων τῶν x ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων.



Σχ. 61.

Ταῦτα προλογίζοντες ἄς ἐκφράσωμεν τήν ἐξίσωσιν τῆς διχοτόμου Οω' τῆς γωνίας $x\hat{O}z = 2\omega \neq 0$ ἤ π, ἥτις εἶναι ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἡμιευθειῶν Ox καί Oz. Εἶναι δέ αὕτη ἡ $y = \varepsilon\varphi\omega \cdot x$, ἤ ἄν καλέσωμεν $\varepsilon\varphi\omega = t$ ἔχομεν:

$$\boxed{y = t \cdot x} \qquad (1)$$

μέ $x > 0$.

Ἐπίσης, ἡ παραβολή $[A, (\varepsilon_1)]$ εἶναι ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί διερχομένων ἐκ τοῦ $A(x_1, y_1)$. Ἔχει δέ αὕτη ἐξίσωσιν: $x'^2 = 2\nu y'$, εἰς ὀρθοκανονικόν σύστημα ἀξόνων μέ θετικόν ἡμιάξονα τῶν y' τήν ἡμιευθεῖαν O'A, ἔνθα εἶναι $\nu = \overline{BA} = y_1$. Ἤ μεταφέροντες τοῦτο παραλλήλως πρός ἑαυτό εἰς τό O(0,0) ἐ-χομεν: $(x-x_1)^2 = 2y_1\left(y-\frac{y_1}{2}\right)$ · ἢ τελικῶς:

$$\boxed{x^2 - 2(x_1 x + y_1 y) + x_1^2 + y_1^2 = 0} \qquad (2)$$

Ἡ λύσις λοιπόν τοῦ συστήματος τῶν (1) καί (2) θά μᾶς δώσῃ τάς συντεταγμένας τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων ἐκ τοῦ σημείου Α καί ἐφαπτομένων τῶν εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2).

Θέτοντες εἰς τήν (2) τήν τιμήν τοῦ y ἐκ τῆς (1) ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{x^2 - 2(x_1 + y_1 t)x + x_1^2 + y_1^2 = 0} \qquad (3)$$

μέ $x > 0$, λόγῳ τῆς (1)[60].

Αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι:

$$\boxed{x'_{1,2} = x_1 + y_1 t \pm \sqrt{y_1(y_1 t^2 + 2x_1 t - y_1)}} \qquad (4)$$

Καί ἐκ τῆς (1) δυνάμει τῆς (4) ἔχομεν:

$$\boxed{y'_{1,2} = t \cdot x'_{1,2}} \qquad (5)$$

Διά νά ἔχωμεν πραγματικάς ρίζας πρέπει νά εἶναι:

$$\boxed{y_1(y_1 t^2 + 2x_1 t - y_1) \geqslant 0} \qquad (6)$$

Ἐθέσαμεν ὅμως οὕτω τούς ἄξονας $x'Ox$ καί $y'Oy$ ὥστε νά εἶναι πάντοτε $y_1 \geqslant 0$. Ἐάν $y_1 \neq 0$ ἡ (6) γίνεται:

$$\boxed{y_1 t^2 + 2x_1 t - y_1 \geqslant 0} \qquad (7)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (7) εἶναι: $\Delta' = x_1^2 + y_1^2 > 0$ · καί ἐπειδή ὁ συντελεστής τοῦ t^2 εἶναι $y_1 > 0$, ἄρα ἡ (7) ἐπαληθεύεται διά πᾶσαν τιμήν τοῦ t ἐκτός τῶν ριζῶν αὐτῆς.

Αἱ ῥίζαι ταύτης εἶναι: $t_{1,2}=\dfrac{-x_1\pm\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}$. Ἄρα ἔχομεν, ἐάν $t_2<t_1$:

$$t\leqslant\frac{-x_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}=t_2 \quad \veebar \quad t_1=\frac{-x_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}\leqslant t \qquad (8)$$

Ἐπειδή τό γινόμενον τῶν ῥιζῶν τῆς (7) εἶναι $\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-y_1}{y}=-1<0$, ἄρα ἔχομεν ῥίζας ἑτεροσήμους. Εἶναι δέ $-\frac{x_1}{y_1}-\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}<-\frac{x_1}{y_1}+\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}$, ἤτοι $t_2<0<t_1$.

Ἔχομεν ἐπίσης $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ ἤ $0<\varepsilon\varphi\omega<+\infty$ ἤ $0<t<+\infty$. Ἄρα ἡ (7) ἐπαληθεύεται $\forall t\geqslant t_1$, ἤτοι $t=\varepsilon\varphi\omega\geqslant-\frac{x_1}{y_1}+\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{y_1}=-\frac{x_1}{y_1}+\sqrt{\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2+1}=-\sigma\varphi\varphi+\sqrt{\sigma\varphi^2\varphi+1}$, ἔνθα εἶναι $\varphi=B\hat{O}A$. Γνωρίζομεν ὅμως ἐκ τῆς τριγωνομετρίας ὅτι: $\sqrt{\sigma\varphi^2\varphi+1}=\frac{1}{\eta\mu\varphi}$ (61) καί $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu2\omega}}$. Ἄρα ἡ $\varepsilon\varphi\omega\geqslant-\sigma\varphi\varphi+\sqrt{\sigma\varphi^2\varphi+1}$ γίνεται: $\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu2\omega}}\geqslant-\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}+\frac{1}{\eta\mu\varphi}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$. Εἶναι δέ $1-\sigma\upsilon\nu\varphi>0$ καί $\eta\mu\varphi>0$. Ἑπομένως $\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu2\omega}\geqslant\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2}{\eta\mu^2\varphi}$, ἀλλ' εἶναι $-1<\sigma\upsilon\nu2\omega$ ἤ $0<1+\sigma\upsilon\nu2\omega$. Ἄρα $(1-\sigma\upsilon\nu2\omega)\eta\mu^2\varphi\geqslant(1+\sigma\upsilon\nu2\omega)(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2$. Ἤ τελικῶς:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\varphi-(1+\sigma\upsilon\nu2\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi+\sigma\upsilon\nu2\omega\leqslant0} \qquad (9)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (9) εἶναι: $(1+\sigma\upsilon\nu2\omega)^2-4\sigma\upsilon\nu2\omega==(1-\sigma\upsilon\nu2\omega)^2>0$. Ἄρα αὕτη ἐπαληθεύεται διά τιμάς τοῦ συνφ ἐντός τῶν ῥιζῶν. Αἱ ῥίζαι εἶναι: $\sigma\upsilon\nu\varphi_{1,2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\omega\pm(1-\sigma\upsilon\nu2\omega)}{2}=\begin{cases}1\\ \sigma\upsilon\nu2\omega\end{cases}$. Ἄρα: $\sigma\upsilon\nu2\omega\leqslant\sigma\upsilon\nu\varphi\leqslant1=\sigma\upsilon\nu0$, ἤ $2\omega\geqslant\varphi\geqslant0$, ἀλλά $\varphi\neq0$. Ἄρα: $0<\varphi\leqslant2\omega$.

Ἐάν πάλιν εἶναι (62) $y_1=0$, ὁπότε $\varphi=0$, ἡ διακρίνουσα τῆς (3) μηδενίζεται. Συμπεραίνομεν λοιπόν τελικῶς ὅτι διά νά ἔχομεν ρίζας πραγματικάς ἐκ τῆς (3), θά πρέπῃ νά εἶναι:

$$\boxed{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\omega} \qquad (10)$$

Ὥστε, ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν γωνίαν xOz], ἔχομεν δύο λύσεις καί ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $Ox \veebar Oz$], ἔχομεν μίαν λύσιν.

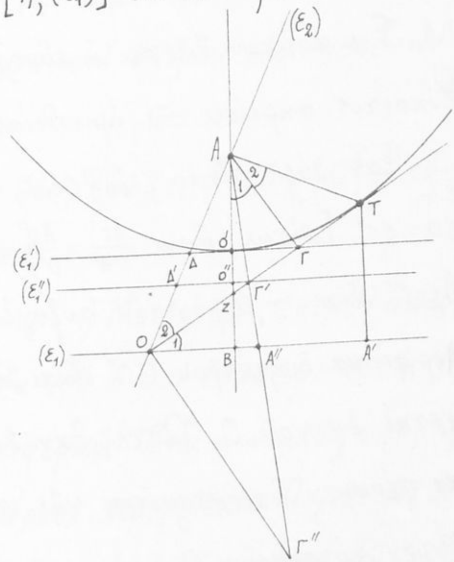
Ἐάν τό $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν Ox], ἔστω ὅτι $A \equiv B$, τότε, ἐπειδή $\varphi = 0$ καί ἄρα $y_1 = 0$, ἔπεται ἐκ τῶν (4) καί (5) ὅτι $x' = x_1$ καί $y' = tx_1$. Ἀλλά τό σημεῖον $P(x_1, tx_1)$ εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῆς διχοτόμου $O\omega'$ μετά τῆς καθέτου τῇ (ε_1) εἰς τό $A \equiv B$.

Ἐάν πάλιν τό $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν Oz], ἔστω ὅτι $A \equiv \Gamma$, τότε εἶναι $\varphi = 2\omega$ καί ἄρα ἔχομεν μίαν λύσιν. Ἡ διχοτόμος $O\omega'$ δηλ. ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς $[A, (\varepsilon_1)]$. Τοῦτο δέ τό σημεῖον ἐπαφῆς διχοτόμου καί παραβολῆς θά πρέπῃ νά εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῆς $O\omega'$ μετά τῆς καθέτου τῇ (ε_2) εἰς τό Γ. Ἔστω τοῦτο τό σημεῖον P. Ἄν δέ $P\Delta \perp (\varepsilon_1)$, ἔχομεν: τριγ. $O\Delta P$ = τρίγ. $O\Gamma\Delta$ καί ἄρα $(O\Delta) = (O\Gamma) = \frac{(OB)}{\sigma\upsilon\nu 2\omega}$ καί ἐπειδή ἐκ τῆς τριγωνομετρίας εἶναι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\omega} = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}{1 - \varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, ἄρα $\overline{O\Delta} = x_1 \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} = x_1 \cdot \left(1 + \frac{2t^2}{1-t^2}\right) = x_1\left(1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \frac{2\varepsilon\varphi\omega}{1 - \varepsilon\varphi^2\omega}\right) = x_1(1 + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi 2\omega) = x_1 + x_1\,\varepsilon\varphi 2\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega = x_1 + y_1 t = x'$ (ἐκ τῆς (4), ἐφόσον $\varphi = 2\omega$ καί ἄρα ἡ διακρίνουσα μηδενίζεται).

'Επίσης, εἶναι $\overline{ΔΡ} = \overline{ΟΔ} \cdot εφω = x't = y'$ ἐκ τῆς (5).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 126. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμεθα εἰς τό νά κατασκευάσωμεν ἐφαπτομένην παραβολῆς $[A, (\varepsilon_1)]$ εἰς τι σημεῖον αὐτῆς Τ (σχ. 62), ὡς ἑξῆς: Συνδέομεν δι' εὐθ. τμήματος τήν ἑστίαν Α μετά τοῦ σημείου Τ καί ἀκολούθως φέρομεν τήν εὐθεῖαν $(\varepsilon_2) \perp AT$ εἰς τό Α. Αὕτη θά τέμνῃ τήν διευθετοῦσαν (ε_1) εἰς τό Ο. Ἡ ΟΤ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς παραβολῆς εἰς τό σημεῖον αὐτῆς Τ.



Σχ. 62.

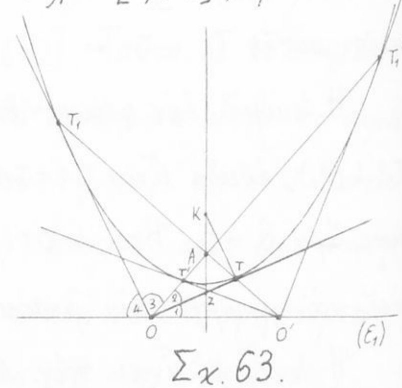
Ἤ ἀκόμη, ἐάν φέρωμεν τήν $TA' \perp (\varepsilon_1)$, ἐπειδή εἶναι ΤΑ = ΤΑ', ἕπεται ὅτι τρίγ. ΤΑ'Ο = τρίγ. ΤΑΟ καί ἄρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Ἤτοι ἡ ΟΤ εἶναι μεσοκάθετος τῇ ΑΑ'. Ὥστε ἀρκεῖ νά φέρωμεν τήν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΑ'.

Ἤ ἀκόμη εἶναι τρίγ. ΑΤΟ ≈ τρίγ. ΒΖΟ, διότι $O\hat{A}T = O\hat{B}Z = 1^L$ καί $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Ἄρα $A\hat{T}O = B\hat{Z}O = A\hat{Z}T$. Ἑπομένως ΑΖ = ΑΤ. Ἡ εὔκολος εὕρεσις τοῦ Ζ μᾶς ὁρίζει τήν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς εἰς τό Τ, τήν ΖΤ.

Ἐάν (ε_1') εἶναι ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς O' τῆς παραβολῆς παράλληλος τῇ διευθετούσῃ (ε_1), τότε, ἐπειδή $AO' = O'B$, ἕπεται ὅτι $A\Delta = \Delta O$. Ἀλλά $\hat{O}_2 = \hat{O}_1 = \Delta\hat{\Gamma}O$ · ἄρα $\Delta O = \Delta\Gamma = \Delta A$ καί ἑπομένως $A\hat{\Gamma}O = 1^L$. Ὥστε[63] $Z\Gamma = \Gamma T$. Ἐπίσης, $O'\Gamma < Z\Gamma = \Gamma T$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ εὔκολος κατασκευή ἐφαπτομένης ἐκ τυχόντος σημείου τῆς ἡμιευθείας $O'B$ ἤ τῆς (ε_1) ἤ τῆς (ε_1').

Ἐάν πάλιν εἶναι $(\varepsilon_1'') \parallel (\varepsilon_1')$, τότε ἔχομεν $\hat{O}_2 = \hat{O}_1 = \Delta'\hat{\Gamma}'O$ · ἄρα $\Delta'O = \Delta'\Gamma'$. Ἐπίσης, εἶναι $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'A''} = \frac{AO''}{O''B} = \frac{A\Delta'}{\Delta'O} = \frac{A\Delta'}{\Delta'\Gamma'} = \frac{AO}{OA''}$, ἤτοι $\frac{A\Gamma'}{\Gamma'A''} = \frac{AO}{OA''}$. Ἄν Γ'' εἶναι τό ἁρμονικόν συζυγές τοῦ Γ' ὡς πρός τά A, A'', τότε ἡ περιφέρεια διαμέτρου $\Gamma'\Gamma''$ εἶναι ἡ ἀπολλώνιος τοιαύτη, ἥτις διέρχεται ἐκ τοῦ O. Ὥστε, ἐάν θέλωμεν ἐκ τυχόντος σημείου Γ' νά φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς παραβολῆς $[A, (\varepsilon_1)]$, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό σημεῖον O.



Σχ. 63.

Δίδεται (σχ. 63) παραβολή $[A, (\varepsilon_1)]$ καί $OT'AT_1' \perp O'TAT_1$. Κατά τά ἀνωτέρω αἱ OT_1, OT, $O'T_1'$, OT' εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς παραβολῆς. Εἶναι δέ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ καί $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$. Ἄρα $\hat{O}_3 + \hat{O}_4 = T_1\hat{O}T = 1^L$. Ὁμοίως $T_1'O'T' = 1^L$.

Ἐπίσης, ἄν $KT \perp OT$, εἶναι $\hat{O}_1 = A\hat{K}T$ καί $\hat{O}_2 = A\hat{T}K$ · ἄρα $AK = AT = AZ$. Εἶναι ἐπίσης $T_1O \parallel KT$.

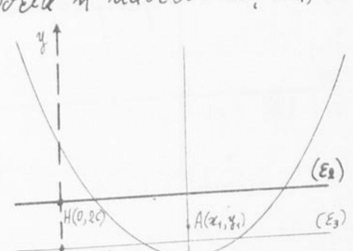
§127. Πάντα ταῦτα διά τήν γωνίαν xOz (σχ. 61). Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί δι' οἱανδήποτε ἄλλην γωνίαν.

Σημειωτέον ὅτι, ἐάν $A \equiv \Gamma$ (σχ. 61), τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν (ε_1), (ε_2) καί διερχομένην ἐκ τοῦ A, εὑρισκομένων εἰς τήν γωνίαν xOz καί ἑτέραν εὑρισκομένην εἰς τήν γωνίαν $x'Oz$.

Συμπερασματικῶς λέγομεν ὅτι, ἐάν $(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{O\}$, ἔχομεν πάντοτε δύο λύσεις μέ $A \not\equiv O$.

§128. **Β'.** Ἐάν $(\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2)$, τότε: 1) Μέ $A \notin (\varepsilon_1)$, ἔχομεν ἀπείρους περιφερείας διερχομένας ἐκ τοῦ A καί ἐφαπτομένας τῆς (ε_1). Ὁ γ.τ. τῶν κέντρων αὐτῶν τῶν περιφερειῶν εἶναι ἡ παραβολή $[A, (\varepsilon_1)]$. 2) Μέ $A \in (\varepsilon_1)$, ἔχομεν πάλιν ἀπείρους περιφερείας. Ὁ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ κάθετος τῇ (ε_1) εἰς τό A, πλήν τοῦ σημείου A αὐτῆς.

§129. **Γ'.** Ἐάν $(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \emptyset$, ἤτοι ἐάν αἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλοι, τότε ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (ε_1) καί (ε_2) εἶναι ἡ μεσοπαράλληλος αὐτῶν (ε_3). Ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τόν ἄξονα τῶν y εἰς τό σημεῖον $\Theta(0, c)$, ὁπότε ἀντί τῆς (1) ἔχομεν τήν (σχ. 64):



Σχ. 64.

$$\boxed{y = c} \qquad (1')$$

Ἄρα ἡ (3) γίνεται δυνάμει τῆς (1'):

$$\boxed{x^2 - 2x_1 x - 2cy_1 + x_1^2 + y_1^2 = 0} \qquad (3')$$

Αἱ ρίζαι τῆς (3') εἶναι:

$$\boxed{x'_{1,2} = x_1 \pm \sqrt{y_1(2c - y_1)}} \qquad (4')$$

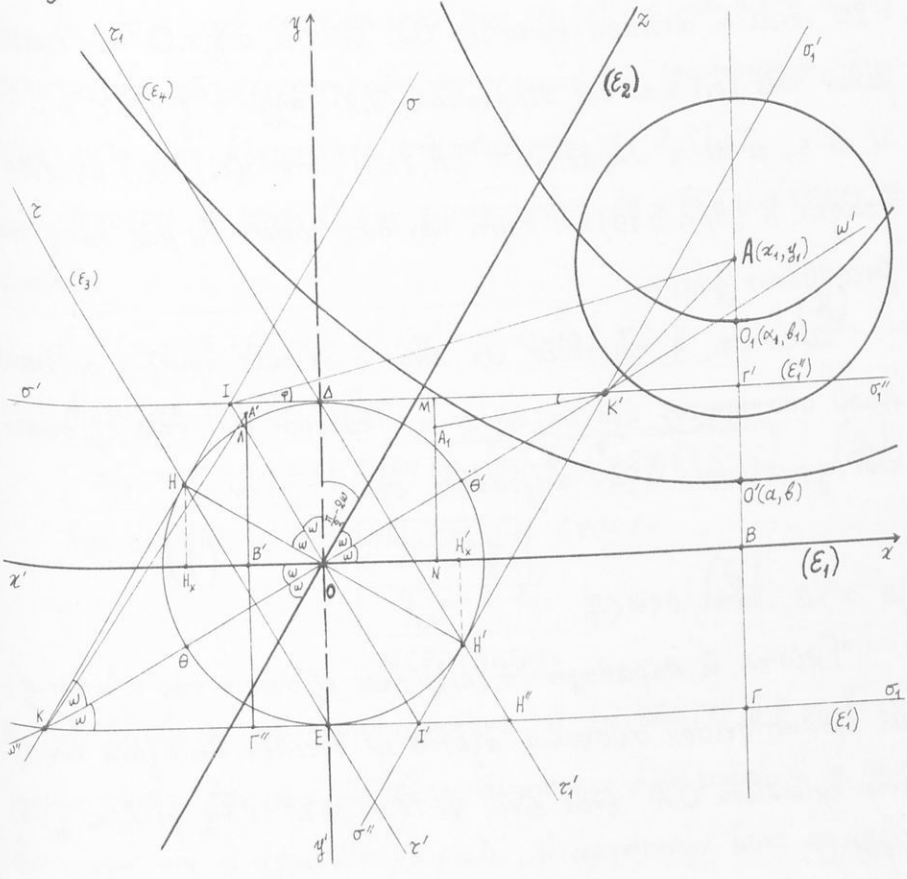
Ὁπότε, ἐάν $y_1 > 0$, διά νά ἔχωμεν ρίζας πραγματικάς θά πρέπη νά εἶναι $2c - y_1 \geqslant 0$ ἤ $y_1 \leqslant 2c$.

Ὥστε, ἐάν $y_1 = 2c$, ἤτοι ἐάν $A \in (\varepsilon_2)$, τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν διερχομένην ἐκ τοῦ A καί ἐφαπτομένην τῶν (ε_1) καί (ε_2) καί ἐάν $0 < y_1 < 2c$, ἤτοι ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)|$], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας. Μίαν περιφέρειαν ἔχομεν καί ὅταν $A \in (\varepsilon_1)$· διότι, ἄν τόν ρόλον τῆς (ε_1) παίξῃ ἡ (ε_2), καταλήγομεν εἰς τά ἴδια συμπεράσματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VIII (64)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ I.

§ 130. Εἶναι: $(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{O\}$. Ἔστωσαν (σχ. 65) αἱ εὐθεῖαι (ε_1),



Σχ. 65.

(ε_2) τεμνόμεναι εἰς τό O καί περιφέρεια (A, R). Αἱ (ε_1), (ε_2) τεμνόμεναι σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας. Ἄς ζητήσωμεν τάς περιφερείας τάς ἐφαπτομένας τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOz καί τῆς περιφερείας (A, R).

Α΄. Ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς.

§ 131. Ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $xOz = 2\omega$ εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $O\omega'$. Ἐπίσης, ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί τῆς περιφερείας (A, R), ἀλλ' ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς, εἶναι ἡ παραβολή (55) $[A, (\varepsilon_1')]$, ἔνθα $(\varepsilon_1') // (\varepsilon_1)$ εἰς ἀπόστασιν R (ὅρα § 19). Ἡ τομή τῶν δύο τόπων θά μᾶς δώσῃ τήν ζητουμένην λύσιν.

Ἔστω ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ox εἶναι ὁ θετικός ἡμιάξων ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων, ὁπότε ἡ διχοτόμος $O\omega'$ ἔχει ἐξίσωσιν τήν $y = x \cdot \varepsilon\varphi\omega$ ἤ, ἄν καλέσωμεν $\varepsilon\varphi\omega = t$, τήν:

$$\boxed{y = t \cdot x} \qquad (1)$$

μέ $x > 0$, διότι $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

Ἐπίσης, ἡ παραβολή $[A, (\varepsilon_1')]$ ἔχει ἐξίσωσιν τήν $x'^2 = 2\nu \cdot y'$, εἰς ὀρθοκανονικόν σύστημα ἀξόνων μέ θετικόν ἡμιάξονα τῶν y' τήν ἡμιευθεῖαν $O'A$ · ἔνθα εἶναι $\nu = \overline{\Gamma A} = \overline{\Gamma B} + \overline{BA} = R + y_1$ μέ $A(x_1, y_1)$ ὡς πρός O.

Ἄς μεταφέρωμεν τήν παραβολήν $[A, (\varepsilon_1')]$ παραλλήλως πρός ἑαυτήν εἰς τό $O(0,0)$.

Διά τό $O'(\alpha, \beta)$ ὡς πρός O ἔχομεν: $\alpha = \overline{OB} = x_1$ καί $\beta = \overline{BO'} = \overline{BA} + \overline{AO'} = y_1 + \frac{\overline{A\Gamma}}{2} = y_1 - \frac{\nu}{2} = y_1 - \frac{R + y_1}{2} = \frac{y_1 - R}{2}$. Ὁπότε μεταφερομένη ἡ παραβολή ἔχει ἐξίσωσιν τήν $(x-x_1)^2=2(R+y_1)(y-\frac{y_1-R}{2})$ ἤ ἐκτελοῦντες πράξεις ἔχομεν τήν:

$$\boxed{x^2-2(x_1x+y_1y+Ry)+x_1^2+y_1^2-R^2=0} \qquad (2)$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τῶν (1), (2) θά μᾶς δώσῃ τάς συντεταγμένας τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς γωνίας xOy καί ἐξωτερικῶς τῆς περιφερείας (A,R).

Θέτοντες εἰς τήν (2) τήν τιμήν τοῦ y ἐκ τῆς (1) ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{x^2-2(x_1+y_1t+Rt)x+x_1^2+y_1^2-R^2=0 \mid x>0} \qquad (3)$$

Αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι:

$$\boxed{x'_{1,2}=x_1+y_1t+Rt\pm\sqrt{(R+y_1)\left[(R+y_1)t^2+2x_1t+R-y_1\right]}} \qquad (4)$$

Καί ἐκ τῆς (1) δυνάμει τῆς (4) ἔχομεν:

$$\boxed{y'_{1,2}=t\cdot x'_{1,2}} \qquad (5)$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ

§ 132. Λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $x>0$ ἐκ τῆς (3) δ έ ν θά εὕρωμεν λύσιν, ἐάν αἱ ρίζαι εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικαί, ἤ ἡ μία ἀρνητική καί ἡ ἄλλη ἴση μέ μηδέν, ἤ ἀμφότεραι ἴσαι μέ μηδέν. Ἐν ἄλλαις λέξεσι δ έ ν θά ἔχωμεν λύσιν ἐάν $\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}\geqslant 0 \wedge A=-\frac{\beta}{\alpha}\leqslant 0$· ἔνθα Γ καί Α εἶναι ἀντιστοίχως τό γινόμενον καί τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς (3).

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\boxed{\Gamma = x_1^2 + y_1^2 - R^2 \geqslant 0} \qquad (6)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό $A(x_1, y_1) \notin$ [ἀνοικτόν κύκλον $(0,R)$].

Ἐπίσης, εἶναι $A = 2(x_1 + y_1 t + Rt) \leqslant 0$. Ἤ

$$\boxed{x_1 + y_1 t + Rt \leqslant 0} \qquad (7)$$

Ἄς γράψωμεν τώρα τήν περιφέρειαν $(0,R)$. Τέμνει αὕτη τόν ἄξονα τῶν y εἰς τά σημεῖα Δ καί Ε. Φέρομεν ἐπίσης κάθετον τῇ (ε_2) εἰς τό Ο, ἥτις τέμνει τήν $(0,R)$ εἰς τό Η. Ἀκολούθως ἄς ἐκφράσωμεν τήν ἐξίσωσιν τήν διερχομένην ἐκ τῶν σημείων Η καί Ε.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ Η εἶναι: $H_x = -R\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right) = -R\eta\mu 2\omega$ καί $H_y = R\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right) = R\sigma\upsilon\nu 2\omega$, μέ $0 < 2\omega < \pi$. Ἤτοι: $H(-R\eta\mu 2\omega, R\sigma\upsilon\nu 2\omega)$. Ἐπίσης, εἶναι: $E(0, -R)$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ταύτης (ὅρα § 124, τύπος (2)) εἶναι: $\frac{x}{R\eta\mu 2\omega} = \frac{y + R}{-R - R\sigma\upsilon\nu 2\omega}$ ἤ $-y\eta\mu 2\omega - R\eta\mu 2\omega - x - x\sigma\upsilon\nu 2\omega = 0$.

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας ὅτι: $\eta\mu 2\omega = \frac{2\varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{2t}{1 + t^2}$ καί $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Ὁπότε ἔχομεν: $y \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + R \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + x + x\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 0$. Ἐκτελοῦντες δέ πράξεις ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{x + yt + Rt = 0} \qquad (8)$$

Βάσει τῆς (8) ἡ (7) σημαίνει ὅτι τό $A(x_1, y_1)$ εὑρίσκεται εἰς τό κλειστόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_3), \sim O]$.

Ὥστε ἐκ τῶν (6) καί (7) ἕπεται ὅτι, ἄν τό Α ἀνήκῃ εἰς τό κλειστόν μέρος ἐπιπέδου τΗΘΕτ', εἰς τό ὁποῖον δέν ἀνήκει τό Ο, τότε δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 133. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τήν διακρίνουσαν τῆς (3). Διά νά ἔχωμεν ρίζας πραγματικάς θά πρέπῃ νά εἶναι:

$$\boxed{(R+y_1)\cdot\left[(R+y_1)t^2+2x_1t+R-y_1\right]\geqslant 0} \qquad (9)$$

§ 134. **α')** Ἔστω ὅτι $\boxed{R+y_1>0}$ **(10)**, ὅπερ σημαίνει ὅτι σπουδάζομεν τό πρόβλημα ἐν τῷ ἀνοικτῷ ἡμιεπιπέδῳ $[(\varepsilon_1'), O]$. Ἄρα πραγματικάς ρίζας θά ἔχωμεν ὅταν:

$$\boxed{F(t)\equiv(R+y_1)t^2+2x_1t+R-y_1\geqslant 0} \qquad (11)$$

Ἡ διακρίνουσα τοῦ $F(t)$ εἶναι:

$$\boxed{\Delta=x_1^2+y_1^2-R^2} \qquad (12)$$

§ 135. **α.α')** Ἔστω ὅτι $\boxed{\Delta>0}$ **(13)**, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A\in$ [ἐξωτερικόν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (O,R)], ὁπότε ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους $t_2<t_1$.

Ἄς λάβωμεν τό γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς $F(t)$· εἶναι:

$$\boxed{\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{R-y_1}{R+y_1}} \qquad (14).$$

§ 136. **α.α.1')** Ἔστω ὅτι $\boxed{R-y_1<0}$ **(15)**, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό Α εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_1''),\sim O]$, ἔνθ[α] $(\varepsilon_1'')\parallel(\varepsilon_1)$ καί διερχομένη ἐκ τοῦ σημείου Δ, ὁπότε $\boxed{\Gamma<0}$ (16[)]
Καί ἄρα ἔχομεν ρίζας ἑτεροσήμους· ἤτοι $\boxed{t_2<0<t_1}$ (17).

Ἡ (11) θά ἰσχύῃ διά τιμάς τοῦ t ἐκτός τῶν ριζῶν ἤ καί ἴ[σας]

σας πρός τάς ρίζας. Ἤτοι: $t \leq t_2$ $\underline{\vee}$ $t_1 \leq t$. Ἀλλά λόγῳ τῆς (17) καίδιότι $t > 0$, ἕπεται ὅτι:

$$\boxed{t \geq t_1 = \frac{-x_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - R^2}}{R + y_1}} \qquad (18)$$

Ἀκολούθως ἄς φέρωμεν εὐθεῖαν $HI \parallel (\varepsilon_2)$, ἥτις τέμνει τήν (ε_1'') εἰς τό I. Ἔστω ὅτι $\widehat{\Gamma'IA} = \varphi$, ὁπότε $\sigma\varphi\varphi = \frac{\overline{I\Gamma'}}{\overline{\Gamma'A}} = \frac{\overline{I\Delta} + \overline{\Delta\Gamma}}{\overline{\Gamma'A}}$. Ἀλλά $\overline{\Gamma'A} = \overline{\Gamma'B} + \overline{BA} = -R + y_1$ καί $\overline{\Delta\Gamma'} = x_1$. Εἶναι ἐπίσης $\widehat{IO\Delta} = \omega$ καί $\overline{O\Delta} = R$, ὁπότε $\overline{I\Delta} = R\varepsilon\varphi\omega$. Ἄρα ἔχομεν: $\sigma\varphi\varphi = \frac{R\varepsilon\varphi\omega + x_1}{-R + y_1} = \frac{Rt + x_1}{y_1 - R}$. Λύοντες ὡς πρός x_1 καί θέτοντες (διά συντομίαν πράξεων) $\sigma\varphi\varphi = \phi$, ἔχομεν: $x_1 = y_1\phi - R\phi - Rt$. Καί ἡ (18) γίνεται: $t \geq \frac{-(y_1\phi - R\phi - Rt) + \sqrt{(y_1\phi - R\phi - Rt)^2 + y_1^2 - R^2}}{R + y_1}$ ἤ λόγῳ τῆς (10): $y_1 t + (y_1 - R)\phi \geq \sqrt{[(y_1 - R)\phi - Rt]^2 + (y_1^2 - R^2)} > 0$ [66]. Ἡ ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον: $y_1^2 t^2 + (y_1 - R)^2\phi^2 + 2y_1(y_1 - R)\phi t \geq (y_1 - R)^2\phi^2 + R^2t^2 - 2R(y_1 - R)\phi t + (y_1^2 - R^2)$ ἤ τελικῶς $(y_1^2 - R^2)(t^2 + 2\phi t - 1) \geq 0$, ἤ [66]

$$\boxed{t^2 + 2\phi t - 1 \geq 0} \qquad (19)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (19) εἶναι $\Delta' = \phi^2 + 1 > 0$. Ἄρα ἡ (19) ἐπαληθεύεται διά τιμάς τοῦ t ἐκτός τῶν ριζῶν $t_2' < t_1'$. Ἀλλ' εἶναι: $\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} < 0$ καί ἑπομένως ἔχομεν $t_2' < 0 < t_1' < t$. Ὥστε ἔχομεν:

$$\boxed{t = \varepsilon\varphi\omega \geq t_1' = -\sigma\varphi\varphi + \sqrt{\sigma\varphi^2\varphi + 1}} \qquad (20)$$

Οὕτως ἐρχόμεθα εἰς τήν (9), §125 τοῦ προβλήματος IV καί εὑρίσκομεν ὅτι $0 \leq \varphi \leq 2\omega$. Ἀλλά [67] διά $\varphi = 0$ εἶναι $R - y_1 = 0$, ὁπότε ἔχομεν: $0 < \varphi \leq 2\omega$.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἄν $A \in$ [ἀνοικτὴν $\widehat{\Gamma' I \sigma}$], ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3) πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἄν $A \in$ [ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν $I\sigma$], ἔχομεν τότε μίαν ρίζαν. Καὶ οὐδεμίαν ρίζαν ἔχομεν, ἐὰν $A \in$ [ἀνοικτὴν $\widehat{\sigma I \sigma'}$]

Σημείωσις: Λόγῳ τῶν (13) καὶ (7), οὐδεμία τῶν ριζῶν τῆς (3) εἶναι ἀρνητική. Ἑπομένως, ἕνεκεν τῆς (5) οὔτε καὶ αἱ $y'_{\sigma_{1,2}}$ εἶναι ἀρνητικαί.

§137. **α.α.2′)** Ἔστω τώρα ὅτι $\boxed{R - y_{\sigma_1} = 0}$ **(21)**, ὅπερ σημαίνει[68] ὅτι $A \in$ [εὐθεῖαν (ε''_1)]. Ἀλλ' ἐκ τῆς (14) ἔχομεν $\Gamma = 0$. Ἤτοι ἡ μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ριζῶν ἰσοῦται μὲ τὸ μηδέν.

Λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς (11). Ἔχομεν:

$$\boxed{A = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2x_1}{R + y_{\sigma_1}} = -\frac{2x_1}{R+R} = -\frac{x_1}{R}} \qquad \mathbf{(22)}$$

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν τὰς περιπτώσεις:

§138. **α.α.2′₁)** Ἔστω $x_1 > 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$ [ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν $\Delta\Gamma'$], ἀλλὰ τότε ἡ (22) γίνεται $A < 0$. Ἄρα $t_2 < t_1 = 0$. Καὶ ἑπομένως θὰ πρέπῃ διὰ νὰ ἐπαληθεύεται ἡ (11) νὰ ἔχωμεν $t \leqslant t_2 < 0$ $\veebar$ $0 = t_1 \leqslant t$. Ἐπειδὴ εἶναι πάντοτε $t > 0$, ἔπεται ὅτι $\forall t (0, +\infty)$ ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3), ὅταν $A \in$ [ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν $\Delta\Gamma'$].

§139. **α.α.2′₂)** Ἔστω ὅτι $x_1 = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \equiv \Delta$. Τότε ἡ (12) γίνεται: $\Delta = 0$, ὁπότε προσκρούομεν εἰς τὴν[69] (13).

§140. **α.α.2′₃)** Ἔστω ὅτι $x_1 < 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$ [ἀνοικτὴν ἡμιευθεῖαν $\Delta\sigma'$], τότε ὅμως ἡ (22) γίνεται $A>0$. Ἤτοι $0=t_2<t_1$. Ὁπότε θά πρέπῃ $t\leq t_2=0$ $\veebar$ $t_1\leq t$ καί ἐπειδή $t>0$, ἄρα ἔχομεν λόγῳ τῶν (18) καί (21): $t\geq t_1=\frac{-x_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{R+y_1}=$ $=\frac{-x_1+|x_1|}{2R}=\frac{-x_1-x_1}{2R}=-\frac{x_1}{R}>0.$

Ὅταν ὅμως $A\in$[ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $\Delta\sigma'$], τότε, ἄν καλέσωμεν $\widehat{\Delta OA}=\varphi$, θά ἔχωμεν διά τό τρίγωνον ΔOA, ἔνθα $\hat{\Delta}=1^{L}$: $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{-\overline{\Delta A}}{\overline{O\Delta}}=-\frac{x_1}{R}$. Ὥστε ἡ $t\geq-\frac{x_1}{R}$ γίνεται: $\varepsilon\varphi\omega\geq\varepsilon\varphi\varphi$ ἤ $\varphi\leq\omega$. Ἀλλ' εἶναι $\widehat{\Delta OI}=\omega$. Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἄν $A\in$[ἀνοικτόν εὐθ. τμῆμα ΔI], τότε ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3). Ἐάν[70] $A\equiv I$, ἔχομεν μίαν ρίζαν. Καί ὅταν $A\in$[ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $I\sigma'$], οὐδεμίαν ρίζαν ἐκ τῆς (3) ἔχομεν.

§141. α.α.3') Ἔστω ὅτι $\boxed{R-y_1>0}$ **(23)**, ὅπερ σημαίνει[71] μετά τῶν (10) καί (13) ὅτι $A\in$[ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_1'),(\varepsilon_1'')|$, πλήν κλειστοῦ κύκλου (O,R)]. Ἄρα ἐκ τῆς (14) ἕπεται ὅτι ἔχομεν ρίζας ἐκ τῆς (11) ὁμοσήμους.

Ἐξετάζομεν τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

§142. α.α.$3_1'$) Ἔστω ὅτι $x_1>0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A\in$[ἀνοικτήν θετικήν ἡμιταινίαν $|(\varepsilon_1'),(\varepsilon_1'')|$, πλήν κλειστοῦ καί θετικοῦ κύκλου (O,R)]. Ἀλλά τότε ἡ (22) γίνεται $A<0$. Ἄρα: $t_2<t_1<0$ καί διά νά ἐπαληθεύεται ἡ (11) θά πρέπῃ $t\leq t_2<0$ $\veebar$ $t_1\leq t$ · ἀλλά $t>0$. Ἄρα ἔχομεν πάντοτε δύο ρίζας ἐκ τῆς (3).

§143. α.α.$3'_2$) Ἐάν $x_1=0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A\in$[ἀνοικτόν εὐθ. τμ. ΔΕ], τότε ἡ (12) γίνεται $\Delta = y_1^2 - R^2 = (y_1+R)(y_1-R) < 0$ λόγῳ τῶν (10) καί (23)· οὕτω δέ προσκρούομεν εἰς τήν(72) (13).

§144. α.α.$3'_3$) Καί ἄν $x_1<0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A\in$[ἀνοικτήν ἀρνητικήν ἡμιταινίαν $|(\varepsilon_1'),(\varepsilon_1'')|$, πλήν κλειστοῦ καί ἀρνητικοῦ κύκλου (O,R)], τότε ἔχομεν ἐκ τῆς (22): $A>0$. Ἄρα ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (11) εἶναι θετικαί, ἤτοι $0<t_2<t_1$. Καί διά νά ἰσχύῃ ἡ (11) θά πρέπῃ $0<t\leqslant t_2$ $\veebar$ $0<t_1\leqslant t$. Ἤτοι:

$$t\leqslant \frac{-x_1-\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{R+y_1} \quad (\alpha) \quad \veebar \quad t\geqslant \frac{-x_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{R+y_1} \quad (\beta)$$

Λαμβάνομεν τήν (β): Ἔστω ὅτι τό A καταλαμβάνει τήν θέσιν τοῦ A' (σχ. 65). Ἄν $\widehat{A'KE}=\varphi$ καί $A'\Gamma''\perp KE$, ἔχομεν $\sigma\varphi\varphi = \frac{\overline{K\Gamma''}}{\overline{\Gamma''A'}} = \frac{\overline{KE}+\overline{E\Gamma''}}{\overline{\Gamma''B'}+\overline{B'A'}}$ · ἀλλά εἶναι $\overline{KE} = \overline{EO}\cdot\sigma\varphi\,\widehat{EKO} = R\sigma\varphi\omega = R\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{R}{t}$, $\overline{E\Gamma''}=x_1$, $\overline{\Gamma''B'}=R$ καί $\overline{B'A'}=y_1$. Ἄρα $\sigma\varphi\varphi = \frac{\frac{R}{t}+x_1}{R+y_1} = \frac{R+x_1t}{(R+y_1)t}$ καί ἄν καλέσωμεν $\sigma\varphi\varphi=\Phi$, ἔχομεν τελικῶς $x_1 = \frac{(R+y_1)\Phi t-R}{t}$.

Ἄρα ἡ (β) γίνεται:

$$t\geqslant \frac{-\frac{(R+y_1)\Phi t-R}{t}+\sqrt{\left(\frac{(R+y_1)\Phi t-R}{t}\right)^2+y_1^2-R^2}}{R+y_1}$$

ἤ τελικῶς—καί ἐπειδή $R+y_1>0$ — ἔχομεν: $(R+y_1)^2t^2(t^2+2\Phi t-1)\geqslant 0$. Ἄρα $t^2+2\Phi t-1\geqslant 0$, διότι $(R+y_1)^2t^2>0$. Οὕτω λοιπόν καταλήγομεν εἰς τήν (19). Ὁπότε ἔχομεν: $0<\varphi\leqslant 2\omega$, διότι $\varphi\neq 0$ λόγῳ τῆς (10). Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἄν τό A ἀνήκῃ εἰς τό ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα

ΚΕΘΗΚ ἢ ἐπίσης ἀνοικτόν ΙΗΛΔΙ, τότε ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3) καί ἐάν τό $A \in$ [ἀνοικτόν εὐθ. τμ. ΚΗ $\veebar$ ΗΙ], τότε ἔχομεν μίαν ρίζαν. Ἀλλά λόγῳ τῶν (6) καί (7) ἐξαιρεῖται τό ΚΕΘΗΚ.

Σημείωσις: Ἡ (β) γίνεται $(R+y_1)t+x_1 \geqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}$ καί ἡ (α) γίνεται $(R+y_1)t+x_1 \leqslant -\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}$ ἢ $-[(R+y_1)t+x_1] \geqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}$. Ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον ἢ τήν μίαν ἢ τήν ἄλλην ἔχομεν τά ἴδια συμπεράσματα.

§145. **α.β′)** Ἔστω τώρα ὅτι: $\boxed{\Delta = 0}$ **(24)**. Τοῦτο σημαίνει ἐκ τῆς (12), ὅτι τό $A \in$ [περιφέρειαν (O,R)]. Ἀλλά τότε ἡ (11) εἶναι πάντοτε ὁμόσημος μέ τόν συντελεστήν $R+y_1$ τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου της – ὁπότε ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους ἐκ τῆς (3) – ἤτοι $F(t) > 0 \ \forall t$, πλήν τῆς τιμῆς $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2x_1}{2(R+y_1)} = -\frac{x_1}{R+y_1}$, διά τήν ὁποίαν ἔχομεν μίαν ρίζαν διπλῆν ἐκ τῆς (3). Ἡ τελευταία σχέσις γίνεται $(R+y_1)t = -x_1$ ἢ $x_1+y_1t+Rt=0$ καί λόγῳ τῆς (8), ἄν $A \equiv H$, ἔχομεν μίαν ρίζαν διπλῆν ἐκ τῆς (3). Ἄν ἦτο $A \equiv E$, θά εἴχομεν τότε $y_1 = -R$ ἢ $y_1 + R = 0$, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τήν (10). Συμπεραίνομεν λοιπόν, δυνάμει καί τῶν (6), (7), ὅτι:

Ἄν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον ΕΔΛΗ], ἔχομεν δύο πραγματικάς ρίζας ἐκ τῆς (3). Ἀλλ' ἡ μία εἶναι ἴση μέ μηδέν, διότι λόγῳ τῆς (24) ἡ (3) γίνεται: $x^2 - 2(x_1+y_1t+Rt)x = 0$, ἐξ ἧς $x_1' = 0$ καί ἐκ τῆς

(5) $y_1' = 0$. Ἤτοι ἡ περιφέρεια ἡ ἐφαπτομένη τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOz καί τῆς περιφερείας (A,R) εἶναι μηδενική. Ἄρα εἰς τήν πραγματικότητα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν μέ τετμημένην[73] τοῦ κέντρου της $x_2' = 2(x_1 + y_1 t + Rt)$.

Ἄν $A \equiv H$, ἔχομεν ἐκ τῆς (2) λόγῳ τῶν (24) καί (7): $x^2 = 0$, ἤτοι $x_{1,2}' = 0$. Αἱ περιφέρειαι δηλ. εἶναι μηδενικαί. Ἄρα εἰς τήν πραγματικότητα δέν ἔχομεν λύσιν.

Καί ἐάν $A \in$ [τόξον ΗΘΕ], δέν ἔχομεν λύσιν.

§146. α.γ′) Ἐξετάζομεν τέλος καί ὅταν $\boxed{\Delta < 0}$ (25)

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τό $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον (O,R)]. Ἀλλά τότε ἡ (11) εἶναι πάντοτε θετική διά πᾶσαν τιμήν τοῦ t.

Ὥστε ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3) πραγματικάς καί ἀνίσους. Ἀλλά λόγῳ τῆς (25) τό γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς (3) εἶναι: $\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = x_1^2 + y_1^2 - R^2 < 0$. Ἄρα αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι[74] καί ἑπομένως, λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $x > 0$, θά δεχθῶμεν τήν θετικήν ρίζαν. Ἔχομεν λοιπόν μίαν περιφέρειαν.

§147. β′) Ἔστω τώρα ὅτι $R + y_1 = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τό $A \in (\varepsilon_1')$ καί ἄρα ὁ κύκλος (A,R) ἐφάπτεται τῆς (ε_1).

Ἀλλά τότε ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1), ὡς καί τοῦ κύκλου (A,R), ἀλλ' ἐξωτερικῶς, εἶναι μία παραβολή καί μία ἡμιευθεῖα (ὅρα § 22). Ἤτοι, ἐάν π.χ. $A \equiv \Gamma$, ὁ γ.τ. θά εἶναι ἡ ἕνωσις $[A \equiv \Gamma, (\varepsilon_1'')] \cup$ [ἡμιευθεῖα $B\Gamma'$], πλήν σημείου B. Ἀλλ' ἡ παραβολή $[\Gamma, (\varepsilon_1'')]$ ἔχει $y<0$, ἐνῷ ἡ διχοτόμος $O\omega'$ ἔχει $y>0$ καί ἑπομένως $[\Gamma, (\varepsilon_1'')] \cap$ [ἡμιευθεῖα $O\omega'$] $= \emptyset$. Ἀπομένει λοιπόν ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα $B\Gamma'$, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $x = x_1$ καί μετά τῆς (1) ἀποτελεῖ σύστημα. Ἤτοι $y = tx_1$. Ἔχομεν λοιπόν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOz καί ἐξωτερικῶς τῆς περιφερείας (A, R). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $(x' = x_1, y' = tx_1)$. Ἀλλά καί ἐκ τῆς (3) ἐξάγονται τά συμπεράσματα ταῦτα, διότι ἡ (2), ἐφόσον $R + y_1 = 0$, γίνεται $(x - x_1)^2 = 0$ ἤ $x = x_1$ · ἤτοι ἡ παραβολή ἐκφυλίζεται εἰς ἡμιευθεῖαν.

§148. γ') Ἔστω $R + y_1 < 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$ [ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_1'), \sim O]$.

Ἄν ὁ Ox' εἶναι ὁ θετικός ἡμιάξων τῶν x καί ὁ Oy' ὁ ἀρνητικός τοιοῦτος τῶν y, τότε, συμφώνως τῇ περιπτώσει α.α.1, §136, ἔχομεν τά ἑξῆς συμπεράσματα:

Ἄν $A \in$ [ἀνοικτήν γωνίαν $KI'\sigma''$], ἔχομεν δύο ρίζας πραγματικάς καί ἀνίσους· τοῦτο δέ σημαίνει, ὅτι ἡ παραβολή τέμνει τήν $O\omega''$ εἰς δύο σημεῖα.

Ἄν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $I'\sigma''$], τότε ἡ παραβολή ἐφάπτεται τῆς $O\omega''$.

Καί ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν γωνίαν $\sigma'' I'\Gamma$], δέν ἔχομεν ρίζας, ἤτοι ἡ παραβολή δέν τέμνει τήν εὐθεῖαν ω'ω''.

Σημείωσις: Ἀλλά καί συμφώνως τῇ σημειώσει ἐν α.α.1, § 136, ὅταν τό $A \in$ [ἀνοικτήν $K\widehat{I'\sigma''}$], ἐκ τῆς (5) ἔχομεν $y'_{1,2} < 0$ ἐνῷ ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $y > 0$.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι: ἄν $A \in$ [ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon'_1), \sim O]$], λύσιν δέν ἔχομεν.

Συμπεράσματα.

§ 149. Ἐκ πάντων τούτων συμπεραίνομεν διά τήν γωνίαν xOx ὅτι:

1) Ἐάν τό $A \in$ [ἀνοικτόν μέρος ἐπιπέδου $\sigma H\Lambda\Delta\Theta' H' E\sigma_1$, εἰς τό ὁποῖον δέν ἀνήκει τό O], τότε ἔχομεν δύο περιφερείας ἐφαπτο-μένας τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOx καί τῆς περιφερείας (A, R), ἀλλ' ἐξωτερικῶς.

2) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $H\sigma \veebar E\sigma_1$], ἔχομεν μίαν πε-ριφέρειαν.

3) Ἐάν $A \in$ [κλειστόν κύκλον (O, R), πλήν κλειστοῦ τόξου $H\widehat{E}$], τότε ἔχομεν πάλιν μίαν περιφέρειαν.

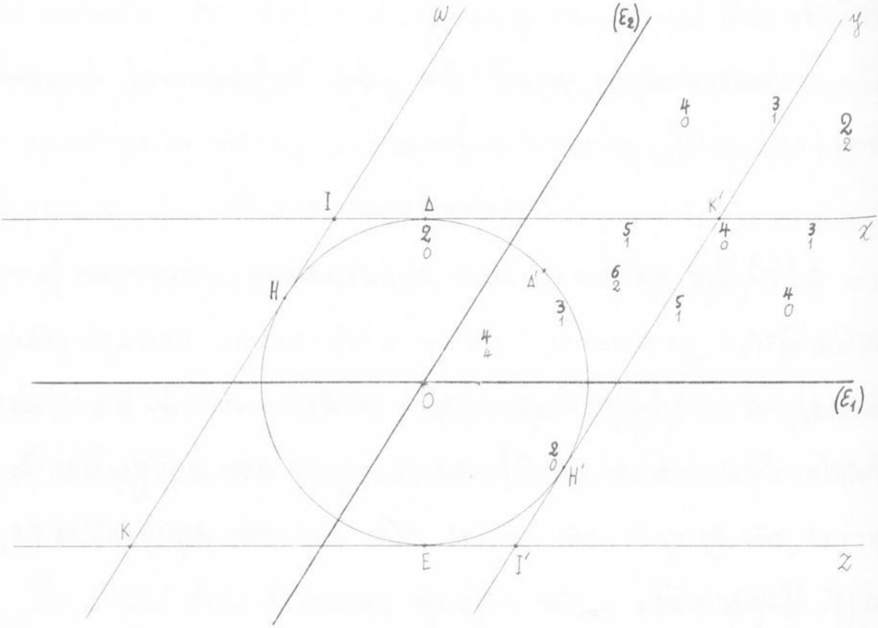
Εἰς οἱανδήποτε ἄλλην θέσιν τοῦ A δέν ἔχομεν λύσιν.

Σημείωσις: Δέν θεωροῦμεν λύσιν τήν μηδενικήν περιφέρεια[ν].

Γενικόν συμπέρασμα.

§ 150. Πάντα τά ἀνωτέρω συμπεράσματα εἶναι διά τ[ήν] μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῶν τεμνομένων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2).

Εἰς τό σχῆμα 66 ἐκθέτομεν πόσας(75) περιφερείας ἔχομεν



Σχ. 66.

ἐφαπτομένας τῶν εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) καί <u>ἐξωτερικῶς</u> τῆς περιφερείας (A, R), διά τάς διαφόρους θέσεις τοῦ A.

1) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν γωνίαν $xK'y$], ἔχομεν <u>δύο</u> περιφερείας.

2) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $K'x \veebar K'y$], ἔχομεν <u>τρεῖς.</u>

3) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιταινίαν $xK'I'z \veebar yK'I\omega$], ἔχομεν <u>τέσσαρας.</u>

4) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $K'\Delta \veebar K'H'$], ἔχομεν <u>πέντε.</u>

5) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα $K'\Delta\Delta'H'K'$], ἔχομεν <u>ἕξ.</u>

6) Ἐάν $A \equiv K'$, ἔχομεν τέσσαρας.

7) Ἐάν $A \equiv \Delta$ $\veebar$ $A \equiv H'$, τότε ἔχομεν δύο.

8) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν τόξον $\Delta\Delta' H'$], ἔχομεν τρεῖς. Καί

9) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον (O,R)], τότε ἔχομεν τέσσαρας περιφερείας ἐφαπτομένας τῶν (ε_1), (ε_2) καί ἐξωτερικῶς τῆς (A,R).

Τά ἴδια συμπεράσματα ἔχομεν καί διά τάς ἄλλας κορυφάς τοῦ ρόμβου $KI'K'I$.

B'. Ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς.

§ 151. Ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί τῆς περιφερείας (A,R), ἀλλ' ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ῶ ς τώρα, εἶναι ἡ παραβολή $[A,(\varepsilon_1'')]$ (σχ. 65) (ὅρα § 20).

Ἡ τομή λοιπόν τῆς παραβολῆς ταύτης μετά τῆς ἀνοικτῆς ἡμιευθείας $O\omega'$ θά μᾶς δώσῃ τά κέντρα τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOz καί τῆς περιφερείας (A,R), ἀλλ' ἐσωτερικῶς.

Ὡς καί ἐν A', § 131, ἔχομεν διά τήν παραβολήν $[A,(\varepsilon_1'')]$: $\gamma_1 = \overline{\Gamma' A} = \overline{\Gamma' B} + \overline{BA} = -R + y_1$. Ἐπίσης, διά τήν κορυφήν αὐτῆς $O_1(\alpha_1, \beta_1)$ ἔχομεν: $\alpha_1 = \overline{OB} = x_1$ καί $\beta_1 = \overline{BO_1} = \overline{BA} + \overline{AO_1} = y_1 + \dfrac{\overline{A\Gamma'}}{2} = y_1 - \dfrac{\gamma_1}{2} = y_1 - \dfrac{-R+y_1}{2} = \dfrac{R+y_1}{2}$.

Ὡς καί ἐν A', κατόπιν πράξεων ἔχομεν:

$$\boxed{x^2 - 2(x_1 x + y_1 y - Ry) + x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0} \qquad (2')$$

Ἀναλόγως σκεπτόμενοι ἔχομεν ἀντί τῶν (3), (4) κ.λ.π. τάς:

$$\boxed{x^2-2(x_1+y_1t-Rt)x+x_1^2+y_1^2-R^2=0 \;\Big|\; x>0} \quad (3')$$

$$\boxed{x'_{1,2}=x_1+y_1t-Rt\pm\sqrt{(-R+y_1)\left[(-R+y_1)t^2+2x_1t-R-y_1\right]}} \quad (4')$$

$$\boxed{y'_{1,2}=t\,x'_{1,2}} \quad (5')$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ

§152. Ἐπίσης, ἀντί τῶν (6), (7) κ.λ.π., θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\Gamma=x_1^2+y_1^2-R^2\geqslant 0} \quad (6')$$

$$\boxed{x_1+y_1t-Rt\leqslant 0} \quad (7')$$

Ἀντί τῆς εὐθείας ΗΕ, θά ἔχωμεν τώρα τήν Η'Δ.

Ἔχομεν: $H'_x=+R\eta\mu 2\omega$, $H'_y=-R\sigma\upsilon\nu 2\omega$ καί $\Delta(0,+R)$. Καί ἀντί τῆς (8), θά ἔχωμεν τήν:

$$\boxed{x+yt-Rt=0} \quad (8')$$

Βάσει τῆς (8') ἡ (7') σημαίνει, ὅτι $A(x_1,y_1)\in$[κλειστόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_4), O]$].

Ὥστε ἐκ τῶν (6') καί (7') ἕπεται, ὅτι, ἄν $A\in$[κλειστόν μέρος ἐπιπέδου $\tau_1\Delta\Theta H'\tau'_1$, εἰς τό ὁποῖον δέν κεῖται τό Ο], τότε δέν ἔχομεν λύσιν.

Ἐπίσης, ἀντί τῆς (9) θά ἔχωμεν τήν:

$$\boxed{(-R+y_1)\left[(-R+y_1)t^2+2x_1t-R-y_1\right]\geqslant 0} \quad (9')$$

§153. **α')** Εἶναι: $\boxed{-R+y_1=\nu_1>0}$ **(10')**, ὅπερ σημαίνει ὅτι σπουδάζομεν τό πρόβλημα ἐν τῷ ἀνοικτῷ ἡμιεπιπέδῳ $[(\varepsilon''_1),\sim O]$.

Ἀντί τῶν (11), (12) θά ἔχωμεν:

$$\boxed{F(t) \equiv (-R+y_1)t^2+2x_1t-R-y_1 \geqslant 0} \qquad (11')$$

$$\boxed{\Delta = x_1^2+y_1^2-R^2} \qquad (12')$$

Ἔχομεν: $\Delta = x_1^2+y_1^2-R^2 = x_1^2+(y_1-R)(y_1+R)>0$ **(13')** μονίμως, διότι ἐκ τῆς (10') ἔχομεν $y_1>R \Leftrightarrow y_1+R>2R>0$. Ἐπίσης, τό γινόμενον $\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-R-y_1}{-R+y_1}<0$ μονίμως.

Ὡς καί ἐν α.α.1, § 136, ἔχομεν, ἄν $H'I' /\!/ (\varepsilon_2)$ καί τέμνῃ τήν (ε_1'') εἰς τό K': $\sigma\varphi\varphi = \frac{\overline{K'\Gamma'}}{\overline{\Gamma'A}} = \frac{\overline{K'\Delta}+\overline{\Delta\Gamma'}}{\overline{\Gamma'A}}$, ἔνθα $\widehat{\Gamma'K'A}=\varphi$. Ἀλλά $\overline{\Gamma'A} = \overline{\Gamma'B}+\overline{BA} = -R+y_1$ καί $\overline{\Delta\Gamma'} = x_1$. Εἶναι ἐπίσης, $\widehat{K'O\Delta} = \frac{\pi}{2}-\omega$, $\overline{O\Delta}=R$, ὁπότε $\overline{K'\Delta} = -R\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-\omega) = -R\sigma\varphi\omega = -R\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = -\frac{R}{t}$. Προχωροῦντες, ὡς καί ἐν α.α.1, § 136, καταλήγομεν εἰς τήν ἑξῆς σχέσιν:

$(y_1-R)^2t^2(t^2+2\Phi t-1) \geqslant 0$ ἤ

$$\boxed{t^2+2\Phi t-1 \geqslant 0} \qquad (19')$$

Καί λόγῳ τῆς (10') ἔχομεν: $0<\varphi\leqslant 2\omega$.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ὅτι:

Ἄν $A\in$[ἀνοικτήν $\widehat{\sigma_1''K'\sigma_1'}$], ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3') πραγματικάς καί ἀνίσους.

Ἄν $A\in$[ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $K'\sigma_1'$], ἔχομεν μίαν ρίζαν, καί

Ἐάν $A\in$[ἀνοικτήν $\widehat{\sigma_1'K'\sigma'}$], οὐδεμίαν ρίζαν ἔχομεν.

§ 154. **β')** Ἔστω τώρα ὅτι $\boxed{-R+y_1=0}$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A\in(\varepsilon_1'')$.

Ἀλλά τότε $\gamma_1 = -R + y_1 = 0$ καί ἡ παραβολή ἐκφυλίζεται εἰς εὐθεῖαν (ὅρα § 22) καί ἀντί τῆς (2') ἔχομεν τήν εὐθεῖαν:

$$\boxed{x = x_1 \mid y \in (0, R) \cup (R, +\infty)} \quad (a)$$

Ἡ (a) μετά τῆς (1), δηλ. τῆς $y = tx \mid x > 0$, ὁρίζει σύστημα. Ἔχομεν λοιπόν μίαν λύσιν: $x' = x_1$ καί $y' = tx_1$ μέ $x_1 > 0$ καί $y' \neq R$· ἤτοι $R \neq tx_1$. Ἀλλά διά τό σημεῖον K' ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{K'_y}{K'_x} = \frac{R}{K'_x}$, ἤτοι $R = tK'_x$. Ἄρα $tK'_x \neq tx_1$, ἤτοι $K'_x = x_1$. Δηλ. ἐάν $A \equiv K'$, δέν ἔχομεν λύσιν (μηδενική περιφέρεια).

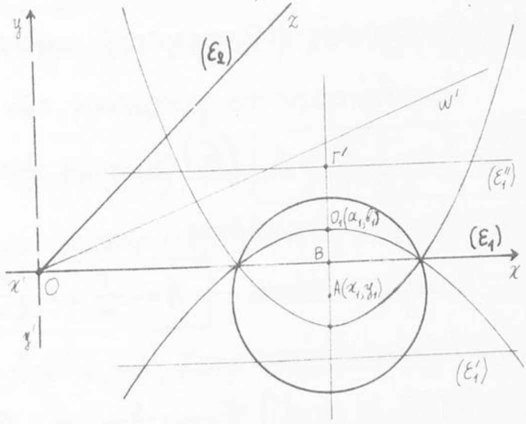
Ὥστε, ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $\Delta\sigma_1''$, πλήν σημείου K'], ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOz καί τῆς περιφερείας (A, R), ἀλλ᾽ ἐσωτερικῶς. Καί ἐάν A $\in$ [κλειστήν ἡμιευθεῖαν $\Delta\sigma'$], δέν ἔχομεν λύσιν.

Σημείωσις: Ἐάν $A \equiv \Delta$, ἔχομεν μηδενικήν περιφέρειαν.

§155. γ') Καί τώρα ἔστω ὅτι $A \in$ [ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_1'), (\varepsilon_1'')|$], ὁπότε: $\boxed{-R < y_1 < R}$ (1_1).

Καί ἐάν μέν $y_1 = 0$, ἤτοι $A \in (\varepsilon_1)$, τότε προφανῶς ἡ (ε_1) τέμνει τήν (A, R), ὡς διερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου. Ἐάν $y_1 > 0$, τότε ἐκ τῆς (1_1) ἕπεται $R > y_1 = \overline{BA} = (BA)$· ἤτοι ἡ (ε_1) τέμνει τήν (A, R). Ἐπίσης, ἐάν $y_1 < 0$, ἐκ τῆς (1_1) ἕπεται $R > -y_1 = -\overline{BA} = \overline{AB} = (AB)$ (σχ. 67)· ἄρα τέμνονται πάλιν.

Ἀλλά τότε (σχ. 67) ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί ἐσωτερικῶς τῆς (A,R) εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν τμημάτων τῶν παραβολῶν $[A,(\varepsilon_1')]$ καί $[A,(\varepsilon_1'')]$ τῶν εὑρισκομένων εἰς τόν ἀνοικτόν κύκλον (A,R).



Σχ. 67.

Τό ἀναφερθέν ἀνωτέρω τμῆμα τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon_1')]$ ἔχει $y<0$ ἐνῷ ἡ διχοτόμος $O\omega'$ ἔχει $y>0$. Ἄρα ἀπομένει νά μελετήσωμεν τήν παραβολήν $[A,(\varepsilon_1'')]$.

Ἔχομεν δι' αὐτήν: $\gamma_1 = \overline{\Gamma' A} = \overline{\Gamma' B} + \overline{BA} = -R + y_1 < 0$, $\alpha_1 = x_1$, $\beta_1 = \overline{BO_1} = \overline{B\Gamma'} + \overline{\Gamma' O_1} = R + \frac{\overline{\Gamma' A}}{2} = R + \frac{\gamma_1}{2} = R + \frac{-R+y_1}{2} = \frac{R+y_1}{2}$. Ἄρα ἔχομεν, ὡς ἐν (2), § 131, $(x-\alpha_1)^2 = 2\gamma_1(y-\beta_1)$ ἤ $(x-x_1)^2 = 2(-R+y_1)\left(y - \frac{R+y_1}{2}\right)$ ἤ τελικῶς:

$$\boxed{x^2 - 2(x_1 x + y_1 y - Ry) + x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0} \qquad (2_1)$$

εὕρομεν δηλ. τήν (2'), § 151, μέ τήν διαφοράν ὅτι εἶναι ἐνταῦθα: $\boxed{\gamma_1 = -R + y_1 < 0}$ (3_1). Προχωροῦντες κανονικῶς καταλήγομεν εἰς τήν (9'). Καί διά νά ἔχωμεν ρίζας πραγματικάς θά πρέπῃ νά εἶναι:

$$\boxed{(-R+y_1)t^2 + 2x_1 t - R - y_1 \leqslant 0} \qquad (4_1)$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (4_1) εἶναι ἡ (12'). Οὕτω δέ διακρίνομεν περιπτώσεις:

§156. γ.α′) Ἔστω ὅτι: $\boxed{\Delta > 0}$ **(5₁)**, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$[ἐξωτερικόν τοῦ κλειστοῦ κύκλου (O,R)].

Λαμβάνομεν τό γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς (4_1):

$$\boxed{\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-R-y_1}{-R+y_1} > 0} \quad (6_1)$$

μονίμως θετικόν ἕνεκεν τῆς (3_1). Ἄρα ἔχομεν ρίζας ὁμοσήμους.

Ἔχομεν ἐπίσης: $\boxed{A = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2x_1}{-R+y_1}}$ (7_1). Ὁπότε διακρίνομεν ὑποπεριπτώσεις:

§157. γ.α.1′) Ἔστω ὅτι $x_1 > 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$[ἀνοικτόν μέρος ἐπιπέδου $\sigma_1 E H'\Theta'\Delta\sigma_1''$]. Ἄρα ἡ (7_1) γίνεται $A>0$ καί ἑπομένως εἶναι: $0 < t_2 < t_1$. Καί ἡ (4_1) θά ἐπαληθεύεται διά τιμάς τοῦ t ἐκτός τῶν ριζῶν· ἤτοι: $t \leqslant t_2 \ \veebar\ t_1 \leqslant t$. Εἶναι δέ:

$$t_2 = \frac{-x_1 + \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{-R+y_1} = \frac{-x_1}{-R+y_1} - \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{R-y_1} \quad \text{καί} \quad t_1 = \frac{-x_1 - \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{-R+y_1} = \frac{-x_1}{-R+y_1} + \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{R-y_1}.$$

Ἄρα:

$$t \leqslant \frac{-x_1 + \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{-R+y_1} \quad (\alpha') \quad \veebar \quad t \geqslant \frac{-x_1 - \sqrt{x_1^2+y_1^2-R^2}}{-R+y_1} \quad (\beta')$$

Λαμβάνω τήν (β'): Ἔστω ὅτι τό A καταλαμβάνει τήν θέσιν τοῦ A_1 (σχ. 65). Ἄν $A_1\widehat{K'}\Delta = \varphi$ καί $A_1M \perp K'\Delta$, ἔχομεν: $\sigma\varphi\varphi = \frac{\overline{MK'}}{\overline{A_1M}} = \frac{\overline{M\Delta}+\overline{\Delta K'}}{\overline{A_1N}+\overline{NM}} = \frac{-x_1+\overline{\Delta K'}}{-y_1+R}$, ἀλλά $\overline{\Delta K'} = \overline{O\Delta}\cdot\sigma\varphi(\Delta\widehat{K'}O) = R\cdot\sigma\varphi\omega = R\cdot\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{R}{t}$.

Καί ἄν καλέσωμεν $\sigma\varphi\varphi = \Phi$, ἔχομεν τελικῶς: $-x_1 = \frac{-(-R+y_1)\Phi t - R}{t}$, ὁπότε ἡ (β') γίνεται τελικῶς: $(-R+y_1)^2 t^2 (t^2 + 2\Phi t - 1) \geqslant 0$ καί οὕτω καταλήγομεν εἰς τήν (19). Ἄρα $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\omega$· ἡ περίπτωσις $\varphi = 0$ ἐξητάσθη εἰς β′, §154.

Συμπεραίνομεν λοιπόν, λόγῳ καί τῶν (7') καί (5_1), ὅτι:

Ἄν $A \in$[ἀνοικτόν μικτόγραμμον σχῆμα $K'\Delta\Theta'H'K'$], ἔχομεν δύο ρίζας ἐκ τῆς (3').

Ἄν $A \in$[ἀνοικτόν εὐθ. τμῆμα $H'K'$], ἔχομεν μίαν ρίζαν. Καί

Ἐάν $A \in$[ἀνοικτόν μέρος ἐπιπέδου $\sigma_1 H'' H' K' \sigma_1''$], οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

§158. γ.α.2') Ἔστω ὅτι $x_1 = 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$ [ἀνοικτόν εὐθ. τμ. ΔE]. Τοῦτο ὅμως δέν εὐσταθεῖ, λόγῳ τῆς (5_1), διότι τότε εἶναι $\Delta = y_1^2 - R^2 = (y_1 + R)\cdot(y_1 - R) < 0$.

§159. γ.α.3') Ἔστω ὅτι $x_1 < 0$. Ἀποκλείεται ὅμως καί ἡ περίπτωσις αὕτη, λόγῳ τῶν (6'), (7').

§160. γ.β') Ἔστω ὅτι $\boxed{\Delta = 0}$ **(8_1)**, ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \in$[περιφέρειαν (O,R)].

Ἀλλά τότε ἡ (4_1) ἰσχύει πάντοτε, πλήν τῆς τιμῆς $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{2x_1}{2(-R+y_1)} = -\frac{x_1}{-R+y_1}$, ἐξ ἧς ἕπεται ἡ $x_1 + y_1 t - Rt = 0$ καί λόγῳ τῆς (7') ἕπεται ὅτι:

Ἐάν $A \in$[ἀνοικτόν τόξον $\Delta\Theta'H''$], ἔχομεν δύο ρίζας τῆς (3') καί ἐπειδή ἡ μία εἶναι ἴση μέ μηδέν, ἄρα ἔχομεν μίαν περιφέρειαν (ὅρα καί α.β, §145).

Ἐάν $A \in$[κλειστόν τόξον $\Delta\Theta H'$], δέν ἔχομεν περιφέρειαν-λύσιν.

Σημείωσις: Ἐάν $A \equiv \Delta$ $\veebar$ $A \equiv H'$, ἔχομεν μηδενικάς περιφερείας.

§ 161. γ.γ') Ἔστω ὅτι $\boxed{\Delta < 0}$ (9_1), ὅπερ σημαίνει, ὅτι $A \in$ [ἀνοικτόν κύκλον (O, R)].

Ἔχομεν δύο ρίζας· ἀλλά θά δεχθῶμεν τήν θετικήν (ὅρα α.γ', § 146).

Συμπεράσματα.

§ 162. Ἐκ πάντων τούτων συμπεραίνομεν διά τήν γωνίαν xOz ὅτι:

1) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν $\sigma_1'\widehat{K'}\sigma_1''$ $\veebar$ ἀνοικτόν μεικτόγραμμον σχῆμα $K'\Delta\Theta'H'$], ἔχομεν δύο περιφερείας - λύσεις.

2) Ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ἡμιευθεῖαν $K'\sigma_1'$ $\veebar$ $K'\sigma_1''$ $\veebar$ ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $\Delta K'$ $\veebar$ $H'K'$ $\veebar$ ἀνοικτόν τόξον $\Delta H'$ $\veebar$ ἀνοικτόν κύκλον (O, R)], τότε ἔχομεν μίαν περιφέρειαν - λύσιν.

Διά πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου δέν ἔχομεν λύσιν.

Σημείωσις: Εἰς τό σχῆμα 66 οἱ κάτω γεγραμμένοι ἀριθμοί δηλοῦν τόν ἀριθμόν τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς τῆς (A, R).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ II.

§ 163. Εἶναι: $(\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2)$.

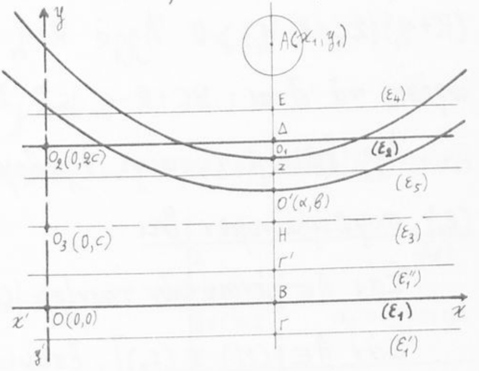
Ὅρα Δ', § 17.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ III.

§ 164. Εἶναι : $(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \emptyset$ (σχ. 68).

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ καί ἡ μεσοπαράλληλος αὐτῶν (ε_3), ἥτις εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῶν (ε_1) καί (ε_2).

Ἄν ἡ μία ἐκ τῶν $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, ἔστω ἡ (ε_1), εἶναι ὁ ἄξων τῶν x ὀρθοκανονικοῦ συστήματος ἀξόνων, τότε ἡ μέν εὐθεῖα (ε_2) ἔχει ἐξίσωσιν : $y = 2c$, ἔνθα $c >$



Σχ. 68.

0, ἡ δέ μεσοπαράλληλος (ε_3) ἔχει ἐξίσωσιν τήν :

$$\boxed{y = c} \qquad (1^*)$$

Α΄ Ἐξωτερικῶς.

§ 165. Ἡ παραβολή $[A, (\varepsilon_1')]$ (σχ. 68), εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί τῆς περιφερείας (A, R), ἀλλ᾽ ἐξωτερικῶς. Αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν τήν (2), § 131 · θέτοντες δέ εἰς αὐτήν ὅπου $y = c$, ἔχομεν κατόπιν πράξεων τήν :

$$\boxed{x^2 - 2x_1 x - 2cy_1 - 2cR + x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0} \qquad (2^*)$$

Ἐκ τῆς (2^*) ἔχομεν :

$$\boxed{x'_{1,2} = x_1 \pm \sqrt{(R + y_1)(2c + R - y_1)}} \qquad (3^*)$$

Ἡ (3^*) μᾶς δίδει τάς τετμημένας τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῶν $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ καί ἐξωτερικῶς τῆς (A,R).

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ

§ 166. Διά νά ἔχωμεν πραγματικά $x'_{1,2}$ θά πρέπῃ νά εἶναι: $(R+y_1)(2C+R-y_1)\geqslant 0$. Ἀλλά $R+y_1=\overline{\Gamma A}=\gamma>0$ ἤ $y_1>-R$. Ἄρα θά πρέπῃ νά εἶναι: $2C+R-y_1\geqslant 0$ ἤ $y_1\leqslant 2C+R$. Ἤτοι: $-R<y_1\leqslant 2C+R$.

Ἀλλ' ἐπειδή τυχαίως ἐλάβομεν ὡς ἄξονα τῶν x τήν εὐθεῖαν (ε_1), συμπεραίνομεν ὅτι:

Ἐάν $A\in$[ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon'_1),(\varepsilon_4)|$], ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐάν $A\in[(\varepsilon'_1) \veebar (\varepsilon_4)]$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί οὐδεμίαν λύσιν εἰς οἱανδήποτε ἄλλην περίπτωσιν.

Β' Ἐσωτερικῶς.

§ 167. Ἡ παραβολή $[A,(\varepsilon''_1)]$ (σχ. 68), ἔνθα $\gamma=\overline{\Gamma'A}=\overline{\Gamma'B}+\overline{BA}=-R+y_1>0$, εἶναι ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί τῆς (A,R), ἀλλ' ἐσωτερικῶς. Ἔχει δέ ἐξίσωσιν τήν $(2')$, § 151· θέτοντες εἰς ταύτην τήν τιμήν τοῦ y ἐκ τῆς (1^*), ἔχομεν κατόπιν πράξεων τήν:

$$\boxed{x^2-2x_1x-2Cy_1+2CR+x_1^2+y_1^2-R^2=0} \qquad (4^*)$$

Καί:

$$\boxed{x'_{1,2}=x_1\pm\sqrt{(-R+y_1)(2C-R-y_1)}} \qquad (5^*)$$

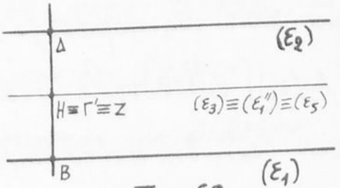
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ

§ 168. **α. 1')** Ἄν $R<C$, ἤτοι $R=\overline{B\Gamma'}<\overline{BH}=C$ (σχ. 68), τότε, ἐπειδή $-R+y_1>0$, ἤτοι $y_1>R$, διά νά ἔχωμεν πραγματικά $x'_{1,2}$ ἐκ τῆς (5*), θά πρέπῃ: $2c-R-y_1 \geq 0$ ἤ $y_1 \leq 2c-R=\overline{B\Delta}+\overline{\Delta Z}=\overline{BZ}$.

Ὥστε: Ἐάν $A\in$ [ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_1''),(\varepsilon_5)|$], τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

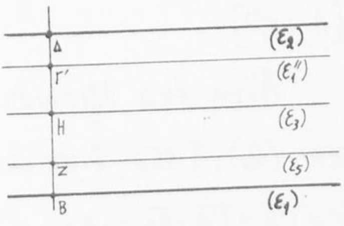
Ἐάν $A\in(\varepsilon_5)$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί ἐάν $A\in$ [ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_5),\Delta]$], οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.



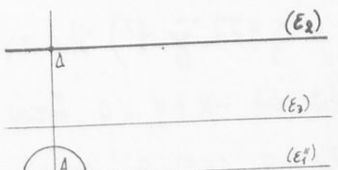
Σχ. 69.

§169. α.2') Ἄν $R=c$ (σχ. 69), τότε: $2c-R-y_1=2R-R-y_1=R-y_1=-(-R+y_1)<0$ καί ἑπομένως δέν ἔχομεν λύσιν.



Σχ. 70.

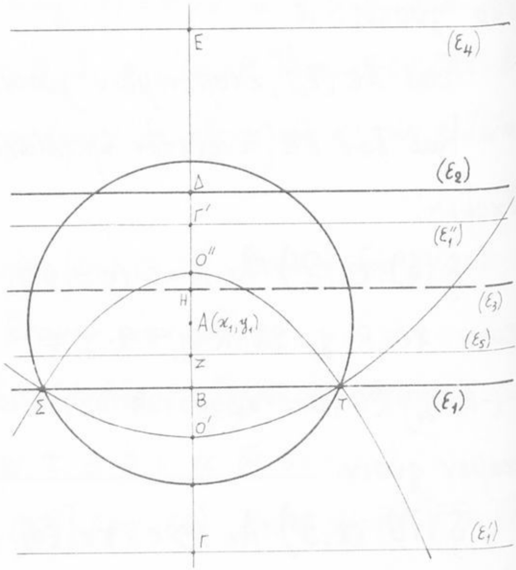
§170. α.3') Ἄν $R>c$ (σχ. 70), τότε: $2c-R-y_1<2R-R-y_1=R-y_1=-(-R+y_1)<0$ καί ἑπομένως δέν ἔχομεν λύσιν.



Σχ. 71.

§171. β') Ἄς ἐξετάσωμεν τήν περίπτωσιν ὅταν $A\in(\varepsilon_1'')$ (σχ. 71). Ἀλλά τότε ὁ γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (A,R) ἐσωτερικῶς εἶναι ἡ ἀνοικτή ἡμιευθεῖα ΒΔ, πλήν τοῦ κέντρου Α. Ἔχομεν ἐνταῦθα μίαν λύσιν· πλήν ὅταν $R=c$.

§ 172. **γ′)** Καί ἄν ἡ (A,R) τέμνῃ τήν (ε_1) (σχ. 72), τότε ἔχομεν, ὡς γ.τ.Θ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (ε_1) καί ἐσωτερικῶς τῆς (A), τά δύο ἀνοικτά τμήματα τῶν παραβολῶν $[A,(\varepsilon_1')]$ καί $[A,(\varepsilon_1'')]$, τά περιεχόμενα ἐντός τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου (A,R).



Σχ. 72.

Ἐπειδή ὅμως τό τμῆμα ΣΟ′Τ τῆς παραβολῆς $[A,(\varepsilon_1')]$ οὐδέποτε τέμνει τήν (ε_3), διά τοῦτο θά μελετήσωμεν τήν παραβολήν $[A,(\varepsilon_1'')]$.

Αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν τήν (2_1), § 155, ἔνθα εἶναι $\nu=\overline{\Gamma'A}=\overline{\Gamma'B}+\overline{BA}=-R+y_1<0$· θέτοντες δέ τήν τιμήν τοῦ y ἐκ τῆς (1^*), ἔχομεν τάς (4^*) καί (5^*), μέ $\nu=-R+y_1<0$.

§ 173. **γ.1′)** Ἄν $R>c$, ἤτοι $R=\overline{B\Gamma'}>\overline{BH}=c$ (σχ. 72), τότε, ἐπειδή $-R+y_1<0$, ἤτοι $y_1<R$, διά νά ἔχωμεν πραγματικά $x_{1,2}$ ἐκ τῆς (5^*) θά πρέπῃ νά εἶναι $2c-R-y_1\leq 0$ ἤ $y_1\geqslant 2c-R=\overline{B\Delta}+\overline{\Delta Z}=\overline{BZ}$.

Ὥστε: Ἐάν $A\in$[ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_5),(\varepsilon_1'')|$], τότε ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐάν $A \in (\varepsilon_5)$, ἔχομεν μίαν λύσιν.

Καί ἐάν $A \in$ [ἀνοικτήν ταινίαν $|(\varepsilon_5), (\varepsilon_1')|$], τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

§ 174. **γ.2΄)** Ἐάν $R = c$, ὁπότε $(\varepsilon_3) \equiv (\varepsilon_1'') \equiv (\varepsilon_5)$ (σχ. 69), τότε ἔχομεν: $2c - R - y_1 = 2R - R - y_1 = R - y_1 = -(-R + y_1) > 0$, καί ἑπομένως δέν ἔχομεν λύσιν.

§ 175. **γ.3΄)** Καί ἐάν $R < c$ (σχ. 68), τότε: $2c - R - y_1 > 2R - R - y_1 = R - y_1 = -(-R + y_1) > 0$ καί ἄρα λύσιν δέν ἔχομεν.

§ 176. **δ΄)** Καί τέλος, ἐάν $A \in$ [κλειστόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon_1'), \sim B]$], οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

ΠΑΡΑΠΟΜΠΑΙ.

(1) Σελ. 1. Ὑποθέτομεν ὅτι: $0 < 2\alpha < (E'E) = 2\gamma$.

(2) Σελ. 2. Ἐάν τό Μ εὑρίσκεται ἀριστερῶς τοῦ ἄξονος $y'oy$ καταλήγομεν πάλιν εἰς τήν ἐξίσωσιν (Α).

(3) Σελ. 2. Εἰς τό τρίγωνον ΜΕ'Ε ἔχομεν: $|ME' - ME| < E'E$ δηλαδή $2\alpha < 2\gamma$ ἤ $\gamma^2 - \alpha^2 \neq 0$.

(4) Σελ. 3. Ἐκ τῆς (Α) καταλήγομεν, ἐργαζόμενοι ἀντιστρόφως, ὅτι $(\gamma + x)^2 + y^2 = \left(\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha\right)^2$ · ἀλλά $(\gamma + x)^2 + y^2 = (E'M)^2$. Ἄρα $(E'M) = \frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν: $(EM) = \frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha$. Ἔχομεν τελικῶς: $\left|(E'M) - (EM)\right| = \left|\left(\frac{\gamma x}{\alpha} + \alpha\right) - \left(\frac{\gamma x}{\alpha} - \alpha\right)\right| = 2\alpha$.

(5) Σελ. 4. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $x \geqslant \alpha$ ἤ $1 \geqslant \frac{\alpha}{x} > 0$ ἤ $1 \geqslant \frac{\alpha^2}{x^2}$ ἤ $1 - \frac{\alpha^2}{x^2} \geqslant 0$.

(6) Σελ. 5. Διότι ἰσχύει: $EE' < PE' < PE' + PE = PA' + A'E' + PE = PA' + AE + PE = PA' + PA$ καί $EE' > AA' = PA' - PA$ · ἤτοι $PA' - PA < EE' < PA' + PA$.

(7) Σελ. 9. Καλεῖται αὕτη ἔλλειψις τοῦ κηπουροῦ.

(8) Σελ. 13. Εἶναι $OM_1' = O\Lambda - M_1'\Lambda = OK - M_1'B = (KB' + B'O) - (B'O + OM_1') = KB' + B'O - B'O - OM_1' = KB' - OM_1'$. Ἤτοι $2 \cdot OM_1' = KB'$ ἤ $2 \cdot (OM_1') = R$ · ἄρα $(M_1'O) = \frac{R}{2}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί $(M_2'O) = \frac{R}{2}$.

(9) Σελ. 14. Εἶναι $OM_1' = O\Lambda + M_1'\Lambda = OK + M_1'B' = (KB' - B'O) + (B'O - OM_1') = KB' - B'O + B'O - OM_1' = KB' - OM_1'$. Ἤτοι $2 \cdot OM_1' = KB'$ ἤ $2 \cdot (OM_1') = R$. Ἄρα $(M_1'O) = \frac{R}{2}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί $(M_2'O) = \frac{R}{2}$.

(10) Σελ. 15. Προφανῶς $MK > M\Lambda$· καί ἄρα τό M κεῖται εἰς τόν κλάδον μέ ἑστίαν τό Λ.

(11) Σελ. 18. Ὅρα καί § 8.

(12) Σελ. 23. Ὑποθέτομεν ὅτι $R_1 > R_2$, καί ὅτι, ὡς βλέπομεν τό σχῆμα, τό Λ εὑρίσκεται δεξιῶς τοῦ K. Ἄν $R_1 = R_2$, διά τάς περιπτώσεις μόνον α' καί β', ὁ γ.τ. εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμ. $K\Lambda$.

(13) Σελ. 25. Ἰσχύουν τά ἐν Α', § 26.

(14) Σελ. 26. Ἐπίσης, τά A, A' γνωστά· διότι, ἄν λάβωμεν (σχ. 26) $A\Phi = A\Phi'$ καί $A'\Psi = A'\Psi'$, ἔχομεν διά τό A: $(AK)+(A\Lambda) = (A\Phi)+(\Phi K)+(\Lambda\Phi')-(A\Phi') = (K\Phi)+(\Lambda\Phi') = R_1 + R_2 = 2\alpha$. Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καί διά τό A'.

(15) Σελ. 36. Διά τήν ἀκρίβειαν ἐλάβομεν τόν τύπον τοῦ ἡμίσεως.

(16) Σελ. 36. Ταῦτα ἐκ τῆς θεωρίας τῆς ἀλγέβρας.

(17) Σελ. 38. Τό γ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ κέντρου O' τῆς ὑπερβολῆς.

(18) Σελ. 38. Ἀλλά καί ἐάν $B \equiv A$, ἔχομεν $x_1 = 2\gamma$· ὁπότε εὑρισκόμεθα εἰς τήν περίπτωσιν Β' § 10.

(19) Σελ. 41. Ἤ καί τῆς (11).

(20) Σελ. 42. Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω, ὅτι δύο λύσεις ἔχομεν ἐπίσης ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα A_3A_5, πλήν τοῦ σημείου A).

(21) Σελ. 42. Ἀποδεικνύεται κατωτέρω ὅτι δύο λύσεις ἔχομεν ἐπίσης, ἐάν $B \in$ (ἀνοικτή ἡμιευθεῖα A_4A_6).

(22) Σελ. 42. Ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ὅτι μίαν λύσιν ἔχομεν

ἐάν $B \equiv A_3$ ἢ A_4.

(23) Σελ. 43. Ἀποδεικνύεται κατωτέρω, ὅτι οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν ἐάν $B \in$ (ἀνοικτόν εὐθ. τμ. $A_3 A_4$).

(24) Σελ. 44. Ἐάν $\omega = \theta$ ἢ $-\pi + \theta$, ἡ ἡμιευθεῖα AB ταυτίζεται μέ τήν $A\Gamma_1$ ἢ τήν AB_6 ἀντιστοίχως.

(25) Σελ. 44. Εἰς τά ἴδια συμπεράσματα καταλήγομεν, ἐάν λάβωμεν $\omega = -\theta$.

(26) Σελ. 45. Εἰς τήν ἰδιότητα ταύτην βασίζομεν κατασκευήν ὑπερβολογράφου, ὅν ἔχομεν ἐν σχεδίοις.

(27) Σελ. 53. Ἐπεξηγοῦμεν κατωτέρω (§ 44) τήν ἔννοιαν τοῦ $-2a < \rho < 0$.

(28) Σελ. 55. Πλήν τῆς $x_1 = +2\gamma$, ὁπότε ἔχομεν ἀπείρους λύσεις, διότι $B \equiv A$.

(29) Σελ. 56. Εἰς τήν ἰδιότητα ταύτην βασίζομεν κατασκευήν ἐλλειψογράφου, ἥν ἔχομεν ἐν σχεδίοις.

(30) Σελ. 56. Τέμνονται, διότι τό O εἶναι ἐσωτερικόν τῆς ἐλλείψεως καί τό Γ_4 ἐξωτερικόν αὐτῆς.

(31) Σελ. 64. Τό πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐπέκτασις τοῦ V.

(32) Σελ. 64. Ὅρα διά τόν ὅρον τοῦτον εἰς § 34.

(33) Σελ. 67. Εἶναι τοῦτο μερική περίπτωσις τοῦ V.

(34) Σελ. 74. Οἱ τύποι παραλλήλου μεταφορᾶς τῶν ἀξόνων εἶναι:

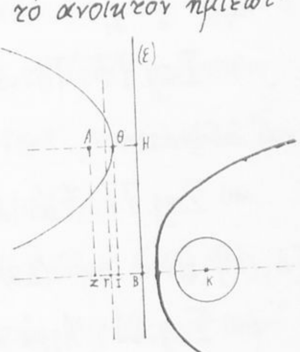
$x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$, ἔνθα α, β ἡ τετμημένη καί ἡ τεταγμένη ἀντιστοίχως τῆς ἀρχῆς Ο΄ τῶν μεταφερομένων ἀξόνων.

(35) Σελ. 74. Ἀλλά καί κατά τήν ἰδιότητα τοῦ Chasles ἔχομεν: $\overline{KZ} + \overline{ZB} + \overline{B\Gamma} = \overline{K\Gamma} \Leftrightarrow x_1 - \nu - R = -\nu_1$.

(36) Σελ. 74. Ἐάν $R = 0$, ἡ (5) γίνεται: $x_1 y^2 + 2\nu_1 y_1 y - \nu_1 y_1^2 - \nu_1^2 x_1 - \nu_1 x_1^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\nu_1 \frac{y_1}{x_1} y - \nu_1 y_1 \frac{y_1}{x_1} - \nu_1^2 - \nu_1 x_1 = 0$ καί ἐπειδή $\frac{y_1}{x_1} = \varepsilon\varphi\omega = t$ καί ἐξ αὐτῆς $y_1 = x_1 t$, ἔπεται: $y^2 + 2\nu_1 t y - \nu_1 x_1 t^2 - \nu_1^2 - \nu_1 x_1 = 0$, ἥτις εἶναι ἡ (4) τῆς § 51. Δηλ. τό πρόβλημα III εἶναι μερική περίπτωσις τοῦ VI.

(37) Σελ. 75. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύκλου (Κ) εἶναι: $x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

(38) Σελ. 75. Ἀλλ' ἄν τό Α εὑρίσκεται εἰς τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon), \sim K]$ (σχ. παραπλεύρως), τότε ἡ (2) γίνεται: $y''^2 = -2\nu x''$, ἤτοι $x'' < 0$ ἤ ἄν μεταφερθῶμεν εἰς τό Κ παραλλήλως: $(y - \beta')^2 = -2\nu(x - \alpha')$ · ἀλλά $\alpha' = \overline{KI} = \overline{KZ} + \overline{ZI} = x_1 + \frac{\nu}{2}$ καί $\beta' = y_1$. Ἄρα $(y - y_1)^2 = -2\nu x + 2\nu x_1 + \nu^2$ · ἀλλά $\overline{KZ} + \overline{ZB} + \overline{B\Gamma} = \overline{K\Gamma} \Leftrightarrow x_1 + \nu - R = -\nu_1 \Leftrightarrow -\nu = x_1 + \nu_1 - R$. Ὅτε ἔχομεν:



Σχ. 73.

$(y - y_1)^2 = 2(x_1 + \nu_1 - R)x - 2(x_1 + \nu_1 - R)x_1 + (x_1 + \nu_1 - R)^2$ καί ἐκτελοῦντες πράξεις ἐρχόμεθα πάλιν εἰς τήν (4).

(39) Σελ. 76. Ὅταν ὅμως $A \in (\varepsilon)$, τότε ὁ γ.τ. Θ τῶν ἐφαπτομ-

νων τῆς (ε) εἰς τό σημεῖον $A\in(\varepsilon)$ εἶναι ἡ κάθετος τῇ (ε) εἰς τό A· ὁπότε ἀντί τῆς (2) ἔχομεν τήν εὐθεῖαν $y=y_1$, καί θέτοντες εἰς τήν (3) τήν τιμήν ταύτην ἔχομεν $x=\frac{y_1^2-\nu_1^2}{2\nu_1}$. Ἤτοι ἔχομεν μίαν περιφέρειαν κέντρου $P\left(x'=\frac{y_1^2-\nu_1^2}{2\nu_1},\ y'=y_1\right)$. Ἀλλά γενικῶς δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν, ὅτι $x_1+\nu_1-R=0$, ὁπότε ἡ διακρίνουσα μηδενίζεται καί ἐκ τῆς (6) ἔχομεν: $y'=\frac{-\nu_1 y_1}{x_1-R}=\frac{-\nu_1 y_1}{-\nu_1}=y_1$, ὁπότε ἐκ τῆς (3) ἕπεται $x=\frac{y_1^2-\nu_1^2}{2\nu_1}$. Θεωροῦμεν δηλ. τήν παραβολήν (2) μέ $\nu=x_1+\nu_1-R=0$, ὁπότε γίνεται εὐθεῖα. Ἐξ ἄλλου ἡ (4) γίνεται: $(y-y_1)^2=2(x_1+\nu_1-R)x+(\nu_1-R)^2-x_1^2=2x(x_1+\nu_1-R)+(x_1+\nu_1-R)(\nu_1-R-x_1)=(x_1+\nu_1-R)(2x-x_1+\nu_1-R)$ καί ἐπειδή $x_1+\nu_1-R=0$ ἄρα $y=y_1$

(40) Σελ. 77. Τό νά εἶναι καί οἱ δύο παράγοντες ἀρνητικοί εἶναι ἀδύνατον.

(41) Σελ. 77. Ἐάν $A\equiv\Delta$, τότε ἡ ἡμιπαράμετρος τῆς παραβολῆς $[\Delta,(\varepsilon)]$ εἶναι: $\nu=(\Delta B)=(\Delta K)+(KB)=R+(KB)=(KB)+(B\Gamma)=(K\Gamma)=\nu_1$.

(42) Σελ. 81. Ἀλλά καί κατά τήν ἰδιότητα τοῦ Chasles ἔχομεν: $\overline{KZ}+\overline{ZB}+\overline{B\Gamma}=\overline{K\Gamma}\iff x_1-\nu+R=-\nu_1$.

(43) Σελ. 87 Ἔστω (ὅρα σχέσιν (1), § 57) ὅτι αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν $y'^2=-2N_1x'$ μέ $x'<0$ καί $N_1=(\Gamma'K)$ (σχ. 43). Μεταφέρομεν ταύτην εἰς τό K παραλλήλως πρός ἑαυτήν, ὁπότε γίνεται: $(y-\beta)^2=-2N_1(x-\alpha)$, ἔνθα $\beta=0$ καί $\alpha=(KO')=\frac{(K\Gamma')}{2}=\frac{N_1}{2}$, ὁπότε ἔχομεν:

$y^2 = -2N_1\left(x - \frac{N_1}{2}\right) = -2N_1 x + N_1^2 = 2(-N_1)x + (-N_1)^2 = 2\nu_1 x + \nu_1^2$, ὅπου ἐθέσαμεν $-N_1 = \nu_1 < 0$· ὁπότε ἐπανερχόμεθα εἰς τήν (3) § 57. Ἀλλά τότε εἶναι: $\overline{KZ} + \overline{ZB} + \overline{B\Gamma'} = \overline{K\Gamma'}$ (σχ. 43) ἤ $x_1 - \nu + R = N_1 \Leftrightarrow \nu = x_1 - N_1 + R = x_1 + (-N_1) - (-R) = x_1 + \nu_1 - (-R)$. Ἐκτελοῦντες πράξεις θά εὕρωμεν τήν (5) τῆς § 57, ἀρκεῖ νά θέσωμεν ὅπου R τό $-R$ καί ἀντιστρόφως. Ὁ συντελεστής τοῦ y^2 τῆς (5) θά εἶναι $x_1 + R$ καί διά νά εὕρωμεν τήν ἀντίστοιχον τῆς (6) θά πρέπῃ $x_1 \neq -R$.

(44) Σελ. 89. Τό πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἐπέκτασις τοῦ VI.

(45) Σελ. 92. Εἶναι: $\overline{KZ} + \overline{Z\Gamma_1} + \overline{\Gamma_1 B} + \overline{B\Gamma_3} = \overline{K\Gamma_3} \Longleftrightarrow x_1 - \nu + R_2 + R_1 = -\nu_1 \Longleftrightarrow \nu = x_1 + \nu_1 + (R_1 + R_2)$ (σχ. 44).

(46) Σελ. 101. Εἶναι $(AK) \geqslant (KZ)$· τό ἴσον ἰσχύει ὅταν $\overline{ZA} = y_1 = 0$.

(47) Σελ. 107. Ἔστωσαν δύο παραβολαί εἰς τό ἴδιον ὀρθοκανονικόν σύστημα ἀξόνων: $y_1^2 = 2\kappa_1 x$ καί $y_2^2 = 2\kappa_2 x$, μέ $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$. Ἔχομεν: $y_1^2 - y_2^2 = 2x(\kappa_1 - \kappa_2) > 0 \Rightarrow y_1^2 > y_2^2 \Longleftrightarrow |y_1| > |y_2|$.

(48) Σελ. 109. Ἡ παραβολή διέρχεται ἐκ τοῦ A (ὅρα Δ'. 2. § 22).

(49) Σελ. 111. Ἡ διερεύνησις γίνεται διά τήν τελευταίαν περίπτωσιν.

(50) Σελ. 113. Πλήν τοῦ σημείου Γ_1, λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ.

(51) Σελ. 118. Ἐάν $\overline{K\Gamma_2} \geqslant \overline{K\Delta_1}$, τότε ἔχομεν πάντοτε δύο λύσεις.

(52) Σελ. 119. Εἰς τά ἴδια συμπεράσματα καταλήγομεν, ἐάν εἶναι $0 \leqslant \overline{K\Gamma_2} < \overline{K\Delta_3}$.

(53) Σελ. 121. Ἐάν $\overline{K\Gamma_2} \geqslant \overline{K\Delta_1}$, τότε οὐδεμίαν λύσιν ἔχομεν.

(54) Σελ. 122. Εἶναι δέ $-R_1 < \overline{KB} < R_1 \Leftrightarrow -R_1 < \overline{KZ} + \overline{ZB} < R_1 \Leftrightarrow -R_1 < \overline{KZ} - R_2 < R_1 \Leftrightarrow -R_1 + R_2 < \overline{KZ} < R_1 + R_2$.

(55) Σελ. 122. Ὑποτίθεται βεβαίως, ὅτι $(\sigma'') \not\equiv (\varepsilon_1)$.

(56) Σελ. 126. Διότι ἔχομεν τόν περιορισμόν $x = \frac{\alpha^2 - \nu_1^2}{2\nu_1} \neq x_1$ ἤ $\alpha \neq \pm\sqrt{\nu_1^2 + 2\nu_1 x_1}$· ἀλλά $\nu_1 = \overline{\Gamma K} = \overline{\Gamma B} + \overline{BZ} + \overline{ZK} = R_1 + R_2 - x_1$ καί $\nu_1^2 = R_1^2 + R_2^2 + x_1^2 + 2R_1R_2 - 2R_1x_1 - 2R_2x_1$. Ἄρα $\nu_1^2 + 2\nu_1 x_1 = R_1^2 + R_2^2 + x_1^2 + 2R_1R_2 - 2R_1x_1 - 2R_2x_1 + 2x_1(R_1 + R_2 - x_1) = (R_1 + R_2)^2 - x_1^2 = (K\Sigma'')^2 - (KZ)^2 = (Z\Sigma'')^2$. Ὥστε $\alpha \neq \pm\sqrt{(Z\Sigma'')^2} = (Z\Sigma'')$.

(57) Σελ. 127. Εἶναι: $|(\varepsilon''), (\sigma'')| \cap (K, K\Delta_1 = R_1 - R_2) \neq \emptyset$ (ὅρα παραπομπήν (54)).

(58) Σελ. 129. Ταῦτα ἐάν $R_2 < (\Sigma B)$. Ἀμέσως κατωτέρω ἐξετάζομεν καί ἐάν $(\Sigma B) \leqslant R_2$.

(59) Σελ. 142. Ἤ ἐπειδή $\rho_\beta = P_1\Theta = \Theta\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right) = \Gamma H \cdot \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = (\Pi H - \Pi\Gamma) \cdot \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} = (\alpha - \gamma)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$, ἄρα $4(\alpha^2 - \gamma^2) - 4\rho_\beta \cdot \rho_\gamma = 4(\alpha^2 - \gamma^2) - 4(\alpha - \gamma)\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2} \cdot (\alpha + \gamma)\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} = 4(\alpha^2 - \gamma^2) - 4(\alpha^2 - \gamma^2) = 0$.

(60) Σελ. 146. Ἐάν $x = 0$, ἐκ τῆς (1) ἕπεται καί $y = 0$. Ὁπότε ἡ (2) γίνεται διά τό ζεῦγος $(0,0)$: $x_1^2 + y_1^2 = 0$ ἤ $x_1 = y_1 = r = 0$. Δηλ. ἡ παραβολή ἐκφυλίζεται εἰς τόν ἄξονα τῶν y, ὁπότε δέν ἔχομεν λύσιν· ἤ ἔχομεν τήν μηδενικήν περιφέρειαν (0).

(61) Σελ. 147. Ἐπειδή ὑπεθέσαμεν, ὅτι $y_1 \neq 0$, ἄρα ἐκ τῆς εφφ=

$= \frac{y_1}{x_1}$ ἕπεται ὅτι καί $\varphi \neq 0$.

(62) Σελ. 147. Ἐάν $y_1 = 0$, ἐκ τῆς (2) ἔχομεν $x = x_1$ · δηλ. ἡ παραβολή ἐκφυλίζεται εἰς εὐθεῖαν κάθετον τῇ (ε_1).

(63) Σελ. 150. Διότι $\hat{A}_1 = \hat{O}_1$ καί $\hat{A}_2 = \hat{O}_2$.

(64) Σελ. 153. Εἶναι τοῦτο ἐπέκτασις τοῦ IV.

(65) Σελ. 154. Πλήν τοῦ τμήματος αὐτῆς τό εὑρισκόμενον ἐντός τοῦ κλειστοῦ κύκλου (A, R), ὅταν ἡ (ε_1) τέμνῃ τόν κύκλον (A,R). Ἀλλά τότε ἔχομεν καί τήν παραβολήν $[A, (\varepsilon_1'')]$, ἔνθα $(\varepsilon_1'') \parallel (\varepsilon_1)$ εἰς ἀπόστασιν R. Ἄν δέ $(\varepsilon_1) \cap (A, R) = \{B\}$, τότε ὡς τόπος παρουσιάζεται καί ἡμιευθεῖα κ.λ.π. (ὅρα §§ 22, 23, 24, 25)

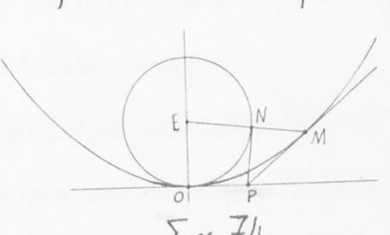
(66) Σελ. 158. Διότι $y_1^2 - R^2 = (y_1 + R)(y_1 - R) > 0$ λόγῳ τῶν (10) καί (15).

(67) Σελ. 158. Κατωτέρω ἐξετάζεται καί ἡ περίπτωσις ὅταν $\varphi = 0$ · ἤτοι $A \in [\text{εὐθεῖαν } (\varepsilon_1'')]$.

(68) Σελ. 159. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην γ.τ. εἶναι καί ἀνοικτή ἡμιευθεῖα (ὅρα παραπομπήν (65)).

(69) Σελ. 159. Κατωτέρω ἐξετάζομεν καί τήν περίπτωσιν $\Delta = 0$.

(70) Σελ. 160. Ἐφαρμογή: Ἐάν $A \equiv I$, τότε ἡ $\omega''\omega'$ ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς $[I, (\varepsilon_1')]$. Οὕτως ὁδηγούμεθα εἰς τό νά κατασκευάσωμεν ἐφαπτομένην παραβολῆς εἰς τι σημεῖον Μ αὐτῆς (σχῆμα παραπλεύρας)



Σχ. 74.

— ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἑστίαν Ε καί τήν κορυφήν Ο αὐτῆς — ὡς ἑξῆς: Γράφομεν περιφέρειαν (Ε,ΕΟ), ἥτις τέμνει τήν ΕΜ εἰς τό Ν. Ἀκολούθως φέρομεν τήν ΝΡ⊥ΕΜ, ἥτις τέμνει τήν ΟΡ εἰς τό Ρ, ἔνθα ΟΡ⊥ΕΟ. Ἡ ΡΜ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἐν λόγῳ παραβολῆς εἰς τό Μ.

(71) Σελ. 160. Ὅρα καί παρατηρησιν (65). Ἡ ἑτέρα παραβολή ἔχει $y<0$ καί ἄρα δέν τέμνει τήν διχοτόμον.

(72) Σελ. 161. Κατωτέρω ἐξετάζεται καί ἡ περίπτωσις καθ' ἣν $\Delta<0$.

(73) Σελ. 163. Ἀσφαλῶς εἶναι $x_2'>0$· ὅρα καί (7).

(74) Σελ. 163. Λόγῳ τῆς (8), ἐάν $A\in$[ἀνοικτόν κυκλικόν τμῆμα ΗΘΕΗ], τότε ἀπολύτως μεγαλυτέρα ρίζα τῆς (3) εἶναι ἡ ἀρνητική. Ἐάν $A\in$[ἀνοικτόν κυκλ. τμ. ΗΛΔΘ'Η'ΕΗ], ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετική. Καί ἐάν $A\in$[ἀνοικτόν εὐθ. τμ. ΕΗ], τότε αἱ ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι.

(75) Σελ. 166. Ὅρα σημείωσιν § 162.

ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

περιφέρεια (Κ, ΚΑ) : Τό σύνολον τῶν σημείων Μ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπό τό σταθερόν σημεῖον Κ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἴσον τό σταθερόν σημεῖον Α τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου ἀπό τό Κ.

κλειστός κύκλος (Κ, ΚΑ) : Τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περιφ. (Κ, ΚΑ), διά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις: $MK \leqslant KA$.

ἀνοικτός κύκλος (Κ, ΚΑ) : Ἐάν ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $MK < KA$.

κύκλος (Κ, ΚΑ) : Σημαίνει ἢ κλειστός κύκλος ἢ ἀνοικτός τοιοῦτος.

$\perp$: Σύμβολον τῆς καθετότητος.

$\Longrightarrow$: » » συνεπαγωγῆς.

$\Longleftrightarrow$: » » λογικῆς ἰσοδυναμίας.

$(\varepsilon_1) \equiv (\varepsilon_2)$: Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) ταυτίζονται.

1^{L} : Μία ὀρθή γωνία.

$A \not\equiv B$: Τά σημεῖα Α καί Β δέν ταυτίζονται.

$A \notin (\varepsilon)$: Τό σημεῖον Α δέν ἀνήκει εἰς τήν εὐθεῖαν (ε).

$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$: Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλοι.

$(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{A\}$: Ἡ τομή τῶν εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) εἶναι τό σημεῖον Α.

$\cup$: Σύμβολον τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων.

ταινία $|(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)|$: Τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), τά ὁποῖα περιέχονται μεταξύ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν (δηλ. ἀνοικτή ταινία).

ταινία $[(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)]$: Ὅταν συμπεριλαμβάνωνται καί τά σημεῖα τῶν εὐθειῶν $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ (δηλ. κλειστή ταινία).

ταινία $|(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)]$: Ἀνοικτή κατά τήν (ε_1) καί κλειστή κατά τήν (ε_2).

ταινία $[(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)|$: Κλειστή κατά τήν (ε_1) καί ἀνοικτή κατά τήν (ε_2).

$(O,00)$: Μηδενική περιφέρεια κέντρου O.

$(\varepsilon_1)\cap(\varepsilon_2)=\emptyset$: Εἶναι $(\varepsilon_1)\parallel(\varepsilon_2)$ ἐν στενῇ σημασίᾳ.

$\wedge$: Σύμβολον συζεύξεως δύο προτάσεων.

$\underline{\vee}$: » τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως ($\vee$: τῆς διαζεύξεως).

ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),A]$: Ἐκ τῶν δύο ἡμιεπιπέδων, εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται ἐπίπεδόν τι ὑπό τῆς εὐθείας (ε), θά λάβωμεν ἐκεῖνο, εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει τό σημεῖον A.

κλειστόν ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),A]$: Ὅταν συμπεριλαμβάνεται καί ἡ εὐθεῖα (ε).

ἡμιεπίπεδον $[(\varepsilon),\sim A]$: Ἐκ τῶν δύο πάλιν ἡμιεπιπέδων, θά λάβωμεν τώρα ἐκεῖνο, εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει τό συμμετρικόν τοῦ A ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεῖαν (ε).

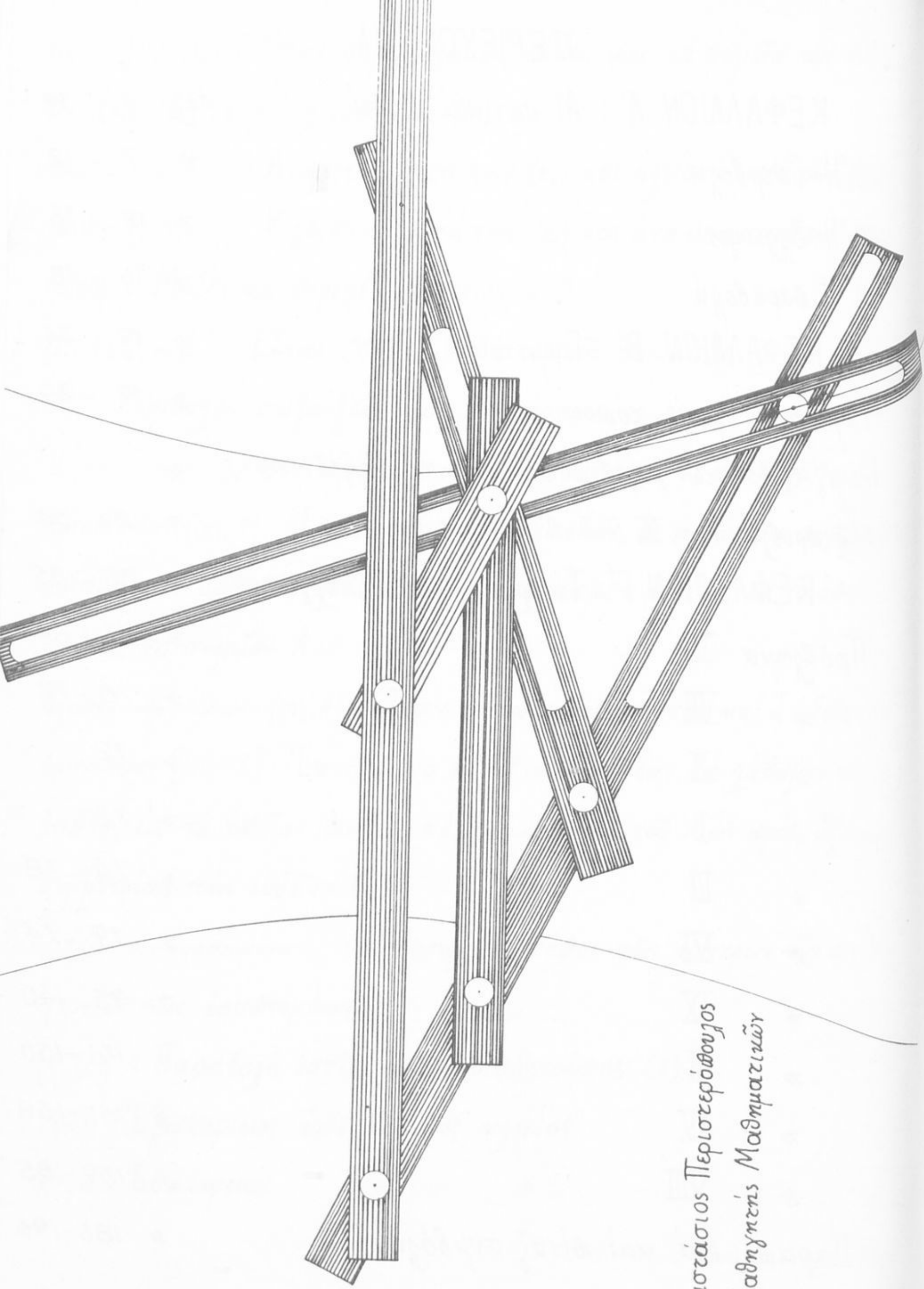
γ.τ.$\odot$ τῶν ἐφαπτομένων... : Γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων...

$[A,(\varepsilon)]$: Παραβολή ἑστίας A καί διευθετούσης (ε).

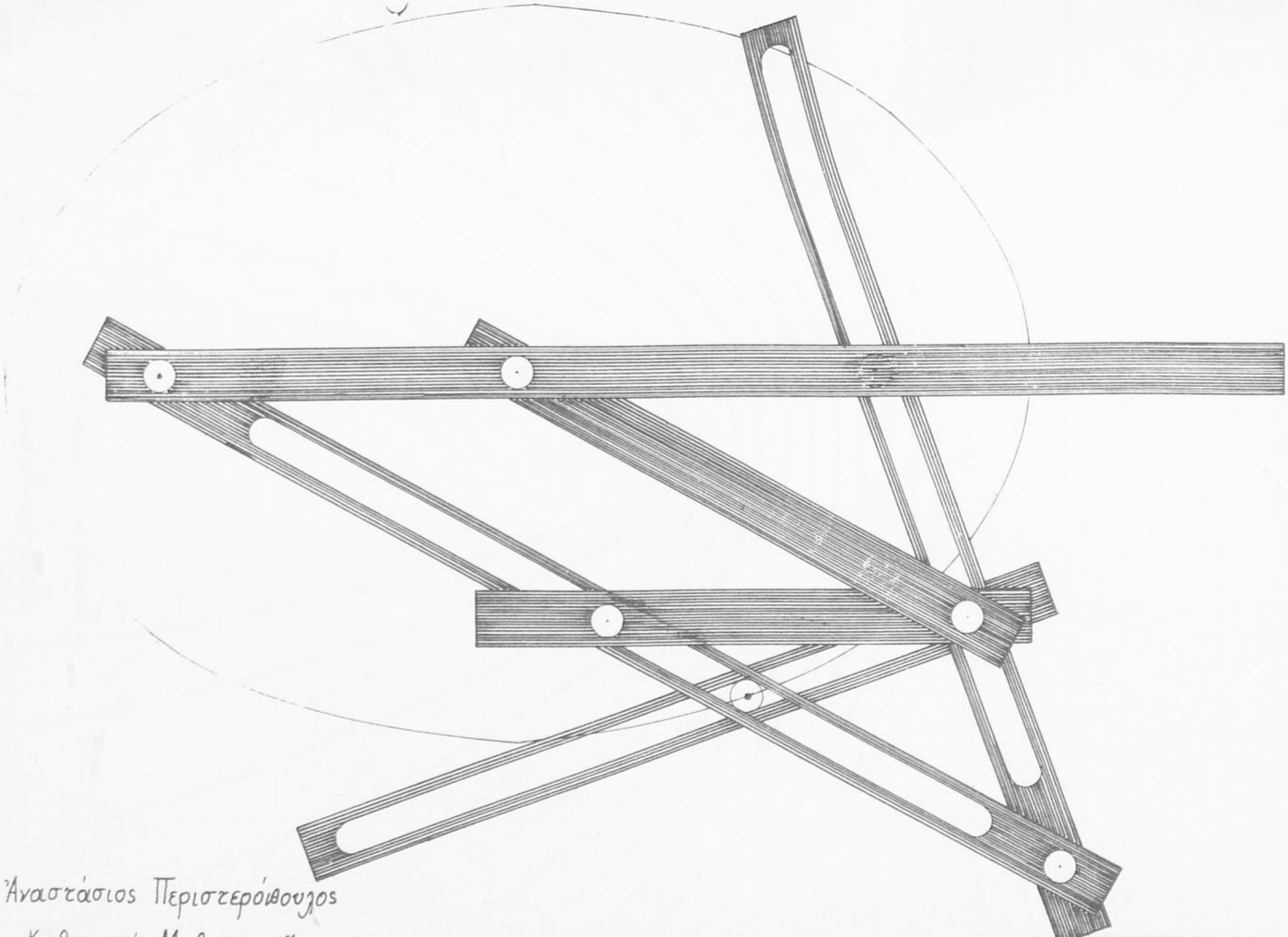
ἐξυκ : Ἐξωτερικός ὑπερβολικός κλάδος.

ἐσυκ : Ἐσωτερικός » » .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ


Ἀναστάσιος Περιστερόπουλος
Καθηγητής Μαθηματικῶν

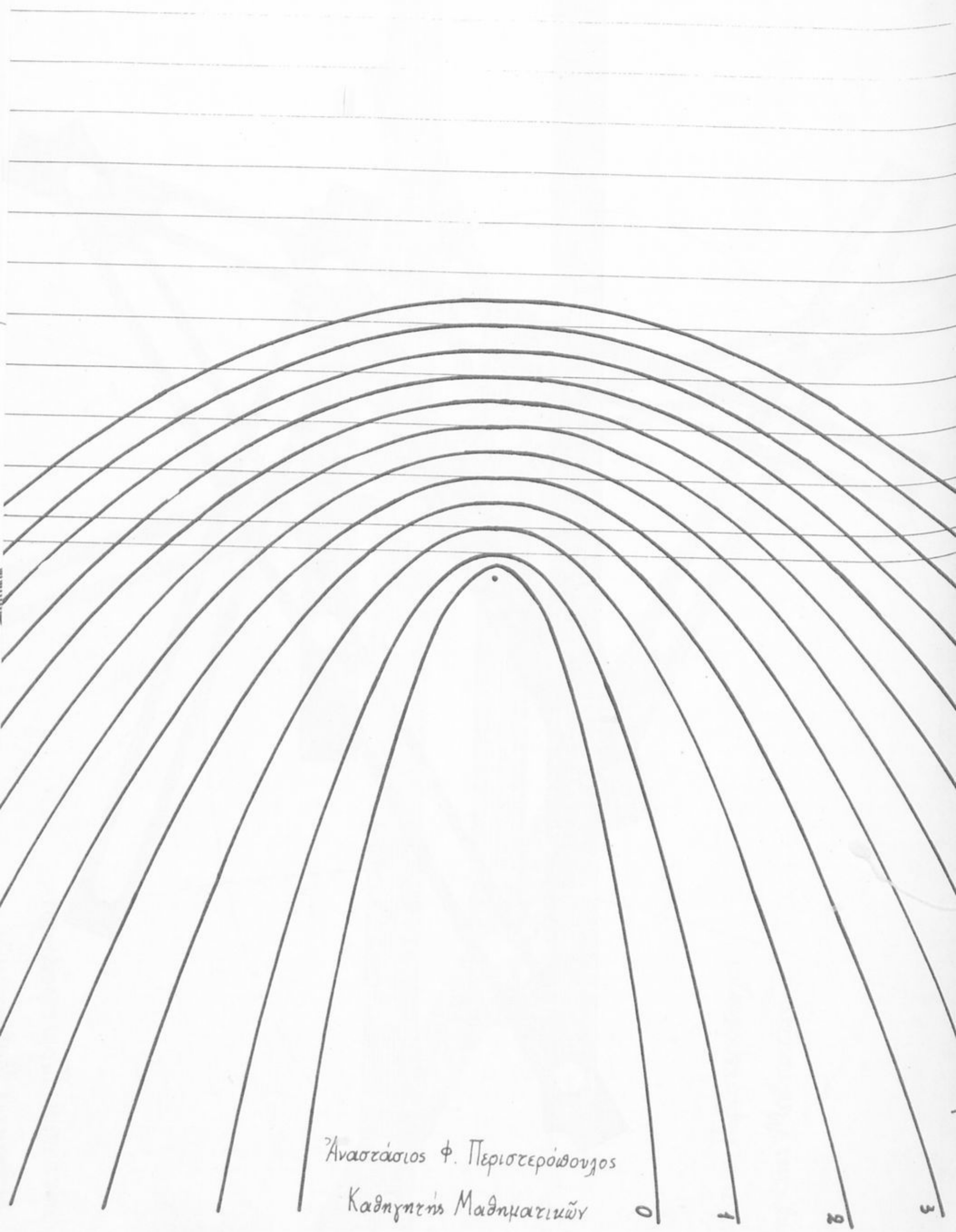
ΠΡΟΧΕΙΡΟΝ ΣΧΕΔΙΟΝ ΕΛΛΕΙΨΟΓΡΑΦΟΥ



Ἀναστάσιος Περιστερόπουλος

Καθηγητὴς Μαθηματικῶν

ΠΡΟΧΕΙΡΟΝ ΣΧΕΔΙΟΝ ΠΑΡΑΒΟΛΟΓΡΑΜΜΟΥ



Ἀναστάσιος Φ. Περιστερόπουλος

Καθηγητής Μαθηματικῶν

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ:

1) *ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ Ή ΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ*

Βιβλίον Α' — Λύσις διὰ τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας.
᾿Ανάλυσις - Σύνθεσις - ᾿Απόδειξις - Διερεύνησις.
Διὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις Γυμνασίου, ὑποψηφίους ἀνωτέρων καὶ ἀνωτάτων Σχολῶν, ὡς καὶ πάντα ἀσχολούμενον περὶ τὴν Γεωμετρίαν.

2) *ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ 111 ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΘΕΩΡ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ*

Βοήθημα διὰ τοὺς Μαθητὰς τῶν Γ' καὶ Δ' Τάξεων τοῦ Γυμνασίου.

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΙΝ:

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΤΙΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΤΟ ΕΞΩΦΥΛΛΟΝ τυγχάνει ἐμπνεύσεως καὶ σχεδιάσεως τοῦ συγγραφέως.