Ε 1 ΦΣΚ

Ταγκαλάκη (Α)

ΑΛΚΙΒΙΑΔΟΥ Π. ΤΑΓΚΑΛΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

Ταγκαλάκη (Αλκιβ.)

ΦΥΣΙΚΗ

Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΣΧΟΛΩΝ Κ.Λ.Π

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΤΟΥΛΑΣ - ΜΑΥΡΑΚΟΣ"
ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΕΩΣ 1869
ΕΡΜΟΥ 45 - ΠΑΤΡΑΙ
1947

Ε 1 ΦΕΚ

ΑΛΚΙΒΙΑΔΟΥ Π. ΤΑΓΚΑΛΑΚΗ

Ταγκαλάκης (Αλκιβ.)

ΦΥΣΙΚΗ

Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ, ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΚΑΙ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΣΠΟΥΔΑΣΤΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΣΧΟΛΩΝ Κ.Λ.Π.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
„ΠΟΥΡΛΑΣ - ΜΑΥΡΑΚΟΣ"
ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΕΩΣ 1869
ΕΡΜΟΥ 45 ΠΑΤΡΑΙ
1948

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ σκοπὸς τῆς ἐκδόσεως τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου εἶναι πολλαπλοῦς. Τὸ βιβλίον τοῦτο προορίζεται πρὸς χρῆσιν: α) τῶν μαθητῶν τῶν γυμνασίων πρακτικῆς κατευθύνσεως (Πρακτικῶν Λυκείων), β) τῶν ὑποψηφίων σπουδαστῶν τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν, γ) τῶν μαθητῶν τῶν κλασσικῶν γυμνασίων καὶ δ) τῶν φοιτητῶν καὶ σπουδαστῶν ἐν γένει, ὡς βοήθημα διὰ τὴν πληρεστέραν κατανόησιν ὡρισμένων θεμάτων τῆς φυσικῆς.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ παρὸν βιβλίον χρήσιμον εἰς ὅλους τοὺς ἀναφερθέντας μαθητὰς καὶ σπουδαστάς, μετεχειρίσθημεν κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν δύο εἰδῶν στοιχεῖα: μεγάλα καὶ μικρά. Οἱ μαθηταὶ τῆς Ζ' τάξεως τῶν γυμνασίων θὰ περιορισθοῦν εἰς τὴν μελέτην τῶν μὲ μεγάλα στοιχεῖα περιόδων, διότι ἡ ἡ σχετικὴ ὕλη δὲν εἶναι ἀπαραίτητος δι' αὐτοὺς ἢ οἱ μαθηταὶ οὗτοι στεροῦνται τῶν ἀναγκαίων διὰ τὴν κατανόησιν τῆς ὕλης ταύτης μαθηματικῶν γνώσεων. Οἱ μαθηταὶ ὅμως τῶν γυμνασίων πρακτικῆς κατευθύνσεως (Πρ. Λυκείων), ὡς καὶ οἱ ὑποψήφιοι σπουδασταὶ τῶν ἀνωτέρων σχολῶν, θὰ μελετήσουν προσέτι καὶ τὰς μὲ μικρότερα στοιχεῖα περιόδους, ἐκτὸς ἂν ὁ διδάσκων τὸ μάθημα τοῦτο καθηγητὴς κρίνει ὅτι δέν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ διδασκαλία μερικῶν ἐξ αὐτῶν. Ὡς τοιαῦτα τμήματα ἐσημειώσαμεν καὶ ἡμεῖς μερικὰ δι' ἀστερίσκων, μὲ τὰ ὁποῖα ἂς ἀσχοληθοῦν ἐκεῖνοι, εἰς τοὺς ὁποίους γεννᾶται ἰδιαίτερον δι' αὐτὰ ἐνδιαφέρον.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ ἀνὰ χεῖρας τεύχους δὲν ἠθελήσαμεν, ἂν καὶ εἴχομεν τὴν πρὸς τοῦτο ἐπιθυμίαν, τοὐλάχιστον δι' ὡρισμένα σημεῖα, νὰ ἀπομακρυνθῶμεν πολὺ τῆς ἐπικρατούσης διατάξεως τῆς ὕλης εἰς τὰ ἐν χρήσει βιβλία φυσικῆς, ἵνα μὴ τὸ βιβλίον μας καταστῇ δύσχρηστον.

Τοῦ ὅλου ἔργου βλέπει τώρα τὸ φῶς τὸ πρῶτον τεῦχος, ἡ «μηχανικὴ τοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ τοῦ στερεοῦ σώματος». Τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς φυσικῆς διδάσκεται πολὺ συνοπτικῶς εἰς τὰ γυμνάσια, ὥστε τὸ παρὸν τεῦχος εἶναι ἀπαραίτητον συμπλήρωμα τοῦ ἐν χρήσει σχολικοῦ βιβλίου.

Τὸ ἴδιον τμῆμα εἰς τὰ γυμνάσια πρακτικῆς κατευθύνσεως διδάσκεται πολὺ ἐκτενῶς εἰς τὴν τελευταίαν τάξιν καὶ ἡ ὕπαρξις εἰδικοῦ βιβλίου πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι εἶναι ἀπαραίτητος. Δι᾿ αὐτοὺς τοὺς λόγους ἐκδίδομεν κεχωρισμένως τὸ παρὸν τεῦχος, ἐλπίζοντες ὅτι τοῦτο πληροῖ μίαν ἀνάγκην καὶ ὅτι εἰς τὴν προσπάθειαν αὐτὴν θὰ τύχωμεν τῆς ὑποστηρίξεως τῶν συναδέλφων καὶ τῶν μὲ τὴν φυσικὴν ἐν γένει ἀσχολουμένων.

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΦΥΣΙΚΗ. ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΡΕΥΝΗΣ ΑΥΤΗΣ. Ἡ περιβάλλουσα ἡμᾶς Φύσις δεικνύει τοιαύτην ποικιλίαν, ὥστε διὰ τὴν ἔρευναν αὐτῆς ἐδημιουργήθησαν πολλαὶ ἐπιστῆμαι, αἱ λεγόμεναι ***φυσικαὶ ἐπιστῆμαι***. Δύναταί τις ταύτας ἀναλόγως τοῦ ἰδιαιτέρου ἑκάστης σκοποῦ, νὰ διακρίνῃ εἰς δύο ὁμάδας: εἰς τὰς εἰδικὰς φυσικὰς ἐπιστήμας καὶ εἰς τὰς γενικὰς τοιαύτας. Ἑκάστη τῶν εἰδικῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔρευναν μιᾶς ὡρισμένης περιοχῆς τῆς φύσεως. Αὗται εἶναι: ἡ Ἀστρονομία, ἡ Γεωλογία, ἡ Ὀρυκτολογία, ἡ Μετεωρολογία, ἡ Βιολογία (Βοτανική, Ζῳολογία, Ἀνθρωπολογία) κ.λ.π. Ἐν ἀντιθέσει ὅμως πρὸς αὐτάς, αἱ γενικαὶ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι, ***ἡ Φυσικὴ*** καὶ ***ἡ Χημεία***, δὲν συνδέονται πρὸς μίαν ὡρισμένην περιοχὴν τῆς φύσεως, ἀλλ᾽ ἐκτείνονται εἰς ὅλας τὰς ἰδιαιτέρας περιοχὰς αὐτῆς. Αἱ εἰδικαὶ φυσικαὶ ἐπιστῆμαι ἐκ τῆς φυσικῆς καὶ τῆς χημείας λαμβάνουν τὰς βάσεις διὰ τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξίν των.

Ἡ Φυσική, ὡς καὶ ἡ Χημεία, ἐρευνᾷ τὰς μεταβολάς, αἱ ὁποῖαι συμβαίνουν εἰς τὴν ἄνευ ζωῆς φύσιν. Τὰς μεταβολάς, αἱ ὁποῖαι συμβαίνουν γενικῶς εἰς τὴν φύσιν, καλοῦμεν φαινόμενα. Ἡ ἔρευνα ἑνὸς φαινομένου τῆς ἀνοργάνου (μὴ ζώσης) φύσεως ἀκολουθεῖ τρία στάδια: 1) Πρέπει τὸ φαινόμενον ὄχι μόνον νὰ ***παρατηρηθῇ*** εἰς τὴν φύσιν, ἀλλὰ καὶ νὰ ***προξενηθῇ*** καὶ τοῦτο διότι πολλὰ φαινόμενα εἰς τὴν φύσιν δὲν παρουσιάζονται ὑπὸ καθαρὰν μορφὴν ἢ παρουσιάζονται σπανίως, ὥστε εἶναι ἀναγκαία ἡ παραγωγή των διὰ τὴν παρακολούθησίν των. Ἡ τοιαύτη ἐπανάληψις ἑνὸς φαινομένου ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας καλεῖται ***πείραμα***. 2) Πρέπει τὸ φαινόμενον νὰ ***παρατηρηθῇ συστηματικῶς***, δηλαδὴ νὰ καθορισθῇ ἡ πορεία του καὶ νὰ μετρηθοῦν διάφορα μεγέθη σχετικὰ μὲ αὐτό. 3) Πρέπει τὸ φαινόμενον νὰ ***ἐννοηθῇ***, δηλαδὴ νὰ ἐξακριβωθῇ ποῖοι ὅροι εἶναι οὐσιώδεις διὰ τὴν ἐπίτευξίν του καὶ ποία ποσοτικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν ὅρων πρέπει νὰ ὑπάρχῃ, ἵνα τὸ φανόμενον ἐμφανισθῇ ὑπὸ *ὡρισμένην* μορφήν. Πρέπει νὰ καθορισθῇ ἡ ποσοτικὴ σχέσις ὄχι μόνον μεταξὺ τῶν ὅρων τῶν ἀναγκαίων ἵνα προκληθῇ τὸ φαινόμε νον ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ὅρων τούτων καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς μεταβολῆς (φαινομένου). Ἐὰν ἕνα φαινόμενον ἔχωμεν κατανοήσει, τότε δυνάμεθα αὐτό, ὁσάκις θέλομεν, νὰ τὸ παραγάγωμεν καὶ μάλιστα μὲ ὡρισμένα ποσοτικῶς ἀποτελέσματα. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τό νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἐὰν γνωρίζωμεν τοὺς ὅρους ὑπὸ τοὺς ὁποίους ἐξελίσσεται ἕν φαινόμενον δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν μελλοντικὴν πορείαν του. Ἡ κατανόησις ἑνὸς φαινομένου, δηλαδὴ ἡ εὕρεσις τῶν ποσοτικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν αἰτίων καὶ τῶν ἀποτελεσμάτων, δὲν εἶναι ἄλλο τι ἢ ἡ εὕρεσις τοῦ ***φυσικοῦ νόμου***, ὅστις διέπει τὸ φαινόμενον τοῦτο.

Τὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα παρετηρήθησαν καὶ τῶν ὁποίων εὑρέθησαν οἱ νόμοι οἱ διέποντες ταῦτα, πρέπει νὰ ἑρμηνευθοῦν. Τοῦτο ἐπιχειρεῖται διὰ τῶν *ὑποθέσεων*. Ὑπόθεσις εἶναι ἀπόπειρα ἑρμηνείας διαφόρων φαινομένων, δι' ἄλλων ἁπλουστέρων ἢ γνωστοτέρων. Μία ὑπόθεσις, ἡ ὁποία ἐδημιουργήθη διὰ τὴν ἑρμηνείαν ὡρισμένων φαινομένων, εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς παρατηρήσεως μεταγενεστέρως νέων σχετικῶν φαινομένων, νὰ ἀποδειχθῇ ἀνεπαρκὴς καὶ διὰ τοῦτο νὰ ἀπορριφθῇ ἢ ἀντιθέτως νά ἐπιβεβαιωθῇ ὑπ' αὐτῶν ἢ ἀκόμη καὶ νὰ ἐπιτρέψῃ αὕτη εἰς τὸν ἐπιστήμονα νὰ προείπῃ καὶ νέα φαινόμενα καὶ οὕτω νὰ ἀποκτήσῃ μίαν νέαν ἐπιβεβαίωσιν, ἂν αἱ προβλεπόμεναι συνέπειαι ἀποδειχθοῦν καὶ διὰ τοῦ πειράματος ἀκριβεῖς. Ὅταν μία ὑπόθεσις ἀποκτήσῃ προσθέτως τοιαύτας ἐπιβεβαιώσεις, τότε χαρακτηρίζεται ὡς ***θεωρία***.

2. ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. Τὰ σώματα ἀντιλαμβανόμεθα διὰ τῶν αἰσθήσεών μας. Καλοῦμεν ἰδιότητας τῶν σωμάτων τοὺς διαφόρους τρόπους, κατὰ τοὺς ὁποίους ταῦτα ὑποπίπτουν εἰς τὰς αἰσθήσεις μας. Αἱ ἰδιότητες τῶν σωμάτων διακρίνονται εἰς ***μερικὰς*** καὶ τοιαῦται εἶναι αἱ ἰδιότητες αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς μερικὰ μόνον σώματα (ἡ διαφάνεια, ἡ μικρὰ ἢ μεγάλη σκληρότης, τὸ χρῶμα κ.λ.π.) καὶ εἰς ***γενικάς***, τὰς ὁποίας ἔχουν ὅλα ἀνεξαιρέτως τὰ σώματα, στερεά, ὑγρὰ ἢ ἀέρια. Γενικαὶ ἰδιότητες εἶναι :

1) *Ἡ ἔκτασις*. Καλεῖται τοιουτοτρόπως ἡ ἰδιότης πάντων τῶν σωμάτων, κατὰ τὴν ὁποίαν ταῦτα καταλαμβάνουν ἓν ὡρισμένον μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *ὄγκον* αὐτῶν.

2) *Τὸ ἀδιαχώρητον*. Τοῦτο εἶναι ἡ ἰδιότης, καθ' ἣν δύο ἢ περισσότερα σώματα δὲν δύνανται ταυτοχρόνως νὰ καταλαμβάνουν τὸν αὐτὸν χῶρον τοῦ διαστήματος. Ἡ ἔκτασις καὶ τὸ ἀδιαχώρητον εἶναι ἰδιότητες, ἄνευ τῶν ὁποίων εἶναι ἀδύνατον νὰ θεωρηθῇ ὑπάρχον ἓν σῶμα, ἕνεκα δὲ τούτου χαρακτηρίζονται αὗται καὶ ὡς οὐσιώδεις ἰδιότητες τῶν σωμάτων.

3) *Τὸ διαιρετόν*. Γνωρίζομεν ἐκ πείρας, ὅτι πᾶν σῶμα δύναται νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα διὰ περαιτέρω διαιρέσεως εἶναι δυνατὸν νὰ καταστοῦν ἐξόχως μικρά. Τὰ μικρὰ ταῦτα μέρη διατηροῦν τὰς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τοῦ ἀρχικοῦ σώματος. Ἡ τοιαύτη ἰδιότης τῶν σωμάτων καλεῖται **διαιρετὸν** αὐτῶν ἢ διαιρετότης τῆς ὕλης.

Αἱ διαστάσεις τῶν μικροτάτων μεριδίων, εἰς τὰ ὁποῖα δύναται νὰ ὁδηγήσῃ ἡ διαίρεσις τῶν σωμάτων, λαμβάνουν πολλάκις τιμὰς ἐκπληκτικῶς μικράς. Οὕτω διὰ καταλλήλων μηχανῶν κατασκευάζονται φύλλα χρυσοῦ πάχους $\frac{6}{100.000}$ τοῦ χιλιοστοῦ τοῦ μέτρου, σύρματα ἐκ λευκοχρύσου διαμέτρου (πάχους) $\frac{8}{10.000}$ τοῦ χιλιοστοῦ τοῦ μέτρου (ἢ 0,8 τοῦ χιλιοστοῦ τοῦ χιλιοστομέτρου) οὕτως, ὥστε, ἂν καὶ ὁ λευκόχρυσος εἶναι μέταλλον μεγάλου εἰδικοῦ βάρους, ἐξ ἑνὸς μόνον γραμμαρίου δύναται νὰ κατασκευασθῇ σύρμα μήκους 20 χιλιομέτρων κ.τ.λ.

Ἄτομα καὶ μόρια. Ἡ ὑπὸ τοῦ ἀνθρώπου διαίρεσις τῆς ὕλης σταματᾷ εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ αἰσθητήρια ἡμῶν ὄργανα καθίστανται τελειότερα καὶ ὅτι διαθέτομεν τελειότατα μέσα διαιρέσεως τῆς ὕλης, τότε θὰ ἦτο δυνατὴ ἡ ἐπ' ἄπειρον διαίρεσις τῆς ὕλης;

Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι ἕλληνες φιλόσοφοι (Λεύκιππος, Δημόκριτος), ὑπὸ εἴδους τινὸς διαισθήσεως ἀγόμενοι, ὑπεστήριξαν ὅτι ἡ ὕλη δὲν εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετή, ἀλλ' ἀποτελεῖται ἐκ μικροτάτων μεριδίων ἀδιαιρέτων, τῶν ἀτόμων. Εἰς τὴν ἰδέαν τῶν φιλοσόφων τούτων ἤχθη βραδύτερον καὶ ὁ Dalton (1) μετὰ τὴν ἀνεύρεσιν τοῦ περιφήμου νόμου του, τοῦ νόμου τῶν πολλαπλῶν ἀναλογιῶν (1808).

Ὁ Dalton, ὁ ὁποῖος ἐθεμελίωσε τὴν θεωρίαν τῆς ἐκ μικροτάτων ἀδιαιρέτων τεμαχίων συστάσεως τῆς ὕλης, ὠνόμασε τὰ μικρότατα ταῦτα μέρη τῆς ὕλης ***ἄτομα***. Τὰ ἄτομα ἑνὸς ἁπλοῦ σώματος (2) εἶναι ὅμοια μεταξύ των, ἐνῷ τὰ ἄτομα δύο διαφόρων ἁπλῶν σωμάτων εἶναι ἀνόμοια καὶ διαφέρουν μεταξύ των τόσον κατὰ τὸ ποσὸν τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται, ὅσον καὶ κατὰ τὰς ἰδιότητας.

Ἀφ᾽ ἑτέρου διάφοροι ἄλλαι ἔρευναι ὡδήγησαν εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι τὰ ἄτομα ἑνοῦνται μεταξύ των καὶ σχηματίζουν μικρότατα πάλιν μερίδια ὕλης, τὰ ***μόρια***. Ἓν μόριον ἁπλοῦ σώματος ἀποτελεῖται ἐξ ἑνός, δύο ἢ περισσοτέρων ὁμοίων ἀτόμων, ἐνῷ ἓν μόριον συνθέτου σώματος ἀποτελεῖται ἐκ περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς ἀτόμων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ὅλα ὅμοια μεταξύ των, ἀλλ᾽ εἶναι ἄτομα τῶν ἁπλῶν σωμάτων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ σύνθετον. Τὸ μόριον ἑνὸς σώματος ἁπλοῦ ἢ συνθέτου διατηρεῖ τὰς ἰδιότητας τοῦ σώματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει καὶ δύναται νὰ εὑρίσκεται ἐλεύθερον εἰς τὴν φύσιν.

Τὸ μέγεθος τῶν μορίων εἶναι λίαν μικρόν. Ἐὰν ταῦτα ὑποτεθοῦν σφαιρικά, ὑπελογίσθη ὅτι ἡ διάμετρος αὐτῶν κυμαίνεται μεταξὺ $\frac{1}{1.000.000}$ ἕως $\frac{1}{10.000.000}$ τοῦ χιλιοστομέτρου.

Τὰ μόρια εἶναι τὰ μικρότερα μέρη ἑνὸς σώματος, τὰ ὁποῖα δὲν διαιροῦνται περαιτέρω διὰ μηχανικῶν μέσων διαιρέσεως, ἀλλὰ διὰ χημικῶν τοιούτων εἰς ἄτομα. Τὸ ἄτομον τέλος, τὸ ἀδιαίρετον διὰ μηχανικῶν καὶ χημικῶν μέσων, εὑρέθη διὰ νεω-

---

(1) John Dalton (1766–1844), ἄγγλος φυσικὸς καὶ χημικός, ὁ ἀνακαλύψας τὸν νόμον τῶν πολλαπλῶν ἀναλογιῶν τῆς χημείας καὶ ἑρμηνεύσας αὐτὸν διὰ τῆς ἀτομικῆς θεωρίας του. Ἐμελέτησε τὰ τῆς μίξεως τῶν ἀερίων καὶ διαστολῆς αὐτῶν κ.λ.π. Περιέγραψε πρῶτος τὴν πάθησιν τῶν ὀφθαλμῶν, ἡ ὁποία ἐκ τοῦ ὀνόματός του καλεῖται δαλτωνισμὸς (ἀχρωματοψία).

(2) Πάντα τὰ σώματα κατατάσσονται, ὡς διδάσκει ἡ Χημεία, εἰς δύο κατηγορίας: τὰ ἁπλᾶ καὶ τὰ σύνθετα. Ἁπλᾶ εἶναι τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα διὰ τῶν μεθόδων τῆς Χημείας, δὲν ἀνελύθησαν εἰς ἄλλα ἁπλούστερα καὶ ἀνόμοια μεταξύ των σώματα· Ἁπλᾶ σώματα εἶναι σήμερον γνωστὰ 90, ὡς τὸ ὑδρογόνον, τὸ ὀξυγόνον, τὸ ἄζωτον, ὁ ὑδράργυρος, ὁ χαλκός, ὁ φωσφόρος κ.λ.π. Τὰ σύνθετα ἀναλύονται διὰ τῶν μεθόδων τῆς Χημείας εἰς ἁπλούστερα. Τὰ σύνθετα σώματα ἀποτελοῦνται ἐξ ἁπλῶν σωμάτων.

τέρων μεθόδων τῆς φυσικῆς, ὅτι δὲν εἶναι ὁμογενής τις ποσότης ὕλης, ἀλλ' ὅτι ἀποτελεῖται ἐξ ἑνός, κατὰ πολὺ μικροτέρου τοῦ ἀτόμου, πυρῆνος ἠλεκρισμένου θετικῶς, περὶ τὸν ὁποῖον καὶ εἰς ἀπόστασιν σημαντικὴν ὡς πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ πυρῆνος τούτου, στρέφονται ταχύτατα σωμάτια μικρότατα, ἀποτελούμενα ἐξ ἀρνητικοῦ ἠλεκτρισμοῦ, καλούμενα ἠλεκρόνια.

4) ***Τὸ πορῶδες.*** Τὰ μόρια τῶν σωμάτων δὲν ἐγγίζουν ἄλληλα, ἀλλὰ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν κενὰ διαστήματα τὰ ὁποῖα καλοῦν ***πόρους***. Περὶ αὐτοῦ πειθόμεθα καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι τὰ σώματα πιεζόμενα ἢ ψυχόμενα ἐλαττοῦνται κατ' ὄγκον. Ἀλλὰ ἐκτὸς τῶν ἀφανῶν τούτων μοριακῶν πόρων ὑπάρχουν εἰς πλεῖστα σώματα καὶ κενά, τὰ ὁποῖα εἶναι συνήθως ὁρατὰ διὰ γυμνοῦ ὀφθαλμοῦ ἢ διὰ μικροσκοπίου, καλούμενα τυχαῖοι ἢ φαινόμενοι πόροι, ὅπως εἶναι οἱ πόροι τῆς κισσήρεως (ἐλαφρόπετρας), τοῦ ξύλου, τοῦ φελλοῦ, τοῦ σπόγγου, τῶν δερμάτων, τοῦ διηθητικοῦ χάρτου κ. ἄ.

5) ***Τὸ συμπιεστὸν*** εἶναι γενικὴ ἰδιότης πάντων τῶν σωμάτων κατὰ τὴν ὁποίαν ταῦτα, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἐξωτερικῶν πιέσεων ὑφίστανται ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου αὐτῶν. Τὸ συμπιεστὸν εἶναι συνέπεια τοῦ πορώδους, διότι ὑπὸ τὴν ἐξωτερικὴν πίεσιν ἐπέρχεται ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου, καθότι τὰ μόρια τῶν σωμάτων πλησιάζουν πρὸς ἄλληλα. Τὰ περισσότερον συμπιεστὰ τῶν σωμάτων εἶναι τὰ ἀέρια, τὰ δὲ ὀλιγώτερον τὰ ὑγρά.

6) ***Ἡ ἐλαστικότης.*** Ἡ ἰδιότης, καθ' ἣν πάντα τὰ σώματα ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὑφίστανται μικρὰν ἢ μεγάλην μεταβολὴν τοῦ ὄγκου ἢ τοῦ σχήματος αὐτῶν ἢ ἀμφοτέρων, ἀλλ' ὅταν ἡ δύναμις ἡ προκαλέσασα τὴν μεταβολὴν παύσῃ ἐνεργοῦσα ἀναλαμβάνουν τὸν ἀρχικὸν ὄγκον ἢ σχῆμα, καλεῖται ***ἐλαστικότης*** τῶν σωμάτων. Τὰ ἀέρια καὶ τὰ ὑγρὰ εἶναι ἄκρως ἐλαστικά, δηλαδὴ ταῦτα ἀναλαμβάνουν τὸν ἀρχικὸν ὄγκον αὐτῶν ὅταν παύσῃ ἐνεργοῦσα ἡ μεταβαλοῦσα αὐτὸν δύναμις, ὁσονδήποτε καὶ ἂν ἦτο μεγάλη ἡ δύναμις αὕτη καὶ ἡ προκληθεῖσα ἐκ ταύτης μεταβολή. Τὰ στερεὰ τοὐναντίον σώματα ἐπανέρχονται εἰς τὴν ἀρχικὴν αὐτῶν κατάστασιν, ἐὰν ἡ παραμόρφωσις τὴν ὁποίαν ὑπέστησαν, δὲν ὑπερβῇ ἕν ὅριον, καλούμενον ***ὅριον τῆς ἐλαστικότητος***. Τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως

τοῦ σώματος καὶ εἶναι, ἐπομένως, ἡ μεγίστη παραμόρφωσις τοῦ σώματος, τὴν ὁποίαν ἄν ὑπερβῶμεν, τὸ σῶμα δὲν ἀναλαμβάνει πλήρως τὸν πρότερον ὄγκον ἢ σχῆμα αὐτοῦ.

Πάντα τὰ στερεὰ δὲν εἶναι ἐξ ἴσου ἐλαστικά. Ὁ χάλυψ, τὸ καουτσούκ, τὸ ἐλεφαντοστοῦν κ. ἄ. εἶναι λίαν ἐλαστικά, ἐνῷ ὁ κηρός, ὁ μόλυβδος κ. ἄ. εἶναι πολὺ ὀλίγον ἐλαστικά, ἤτοι ταῦτα καὶ μὲ πολὺ μικρὰν παραμόρφωσιν ὑπερβαίνουν τὸ τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος καὶ ὑφίστανται ἕνεκα τούτου μονίμους παραμορφώσεις.

Ἡ παραμόρφωσις τῶν στερεῶν σωμάτων προκαλεῖται: 1) διὰ τάσεως ἢ ἕλξεως, 2) διὰ πιέσεως, 3) διὰ κάμψεως καὶ 4) διὰ στρέψεως.

Ὁ Hooke (1) διετύπωσε τὸν ἑξῆς νόμον: Ἐφ' ὅσον δὲν ὑπερβαίνομεν τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος, αἱ ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις, τὰς ὁποίας ὑφίσταται σῶμα, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι προεκάλεσαν τὰς παραμορφώσεις ταύτας. Οὕτω ἂν μία δύναμις ἐπιφέρῃ ἐπὶ ράβδου αὔξησιν τοῦ μήκους α, δύναμις διπλασία θὰ ἐπιφέρῃ διπλασίαν ἐπιμήκυνσιν κ. ο. κ., ἐφ' ὅσον αἱ παραμορφώσεις αὗται κεῖνται ἐντὸς τοῦ ὁρίου τῆς ἐλαστικότητος.

Ἄλλαι τινὲς γενικαὶ ἰδιότητες τῶν σωμάτων (κινητόν, ἀδράνεια) θὰ ἐξετασθοῦν λεπτομερῶς ἐν τοῖς ἑπομένοις (βλ. § 30)

3. ΦΥΣΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι τὰ σώματα ἀποτελοῦνται ἐκ μορίων. Τὰ μόρια ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἀσκοῦν τὰ μὲν ἐπὶ τῶν δὲ ἕλξεις, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία συνδέει ταῦτα μεταξύ των καὶ ἡ ὁποία καλεῖται συνοχὴ τοῦ σώματος. Ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τῆς συνοχῆς, τὰ σώματα παρουσιάζονται ὑπὸ τρεῖς κυρίως καταστάσεις: ὡς στερεά, ὡς ὑγρὰ καὶ ὡς ἀέρια.

Εἰς τὰ στερεὰ σώματα τὰ μόρια κεῖνται πολὺ πλησίον ἀλλήλων καὶ ἡ μεταξὺ αὐτῶν συνοχὴ εἶναι μεγάλη οὕτως, ὥστε τὰ μόρια διατηροῦνται εἰς σταθερὰν θέσιν καὶ ἡ μόνη δυνατὴ κίνησις αὐτῶν ἐντὸς τοῦ σώματος εἶναι μία παλμικὴ κίνησις (ταλάντωσις) μικροῦ πλάτους περὶ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὰ στερεὰ ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα, ἀνθίστανται δέ, διὰ τῶν ἀναπτυσσομένων

---

(1) Robert Hooke (*1635—1703*) *ἄγγλος φυσικός. Ἀνεκάλυψε τὴν ἐκ κυττάρων σύστασιν τῶν φυτῶν, τὸν ὀπτικὸν τηλέγραφον, τὸ ἑλικοειδὲς ἐλατήριον τῶν ὡρολογίων.*

ἐλαστικῶν δυνάμεων, εἰς πᾶσαν ἐξωτερικὴν αἰτίαν, ἡ ὁποία τείνει νὰ μεταβάλῃ τὸν ὄγκον ἢ τὸ σχῆμα αὐτῶν. Παρουσιάζουν ἑπομένως τὰ στερεὰ ἐλαστικότητα ὄγκου καὶ σχήματος.

Εἰς τὰ ὑγρὰ τὰ μόρια εὑρίσκονται ἐπίσης πλησίον ἀλλήλων, ἀλλ᾽ αἱ ἀμοιβαῖαι ἕλξεις αὐτῶν (συνοχὴ) εἶναι μικρότεραι ἢ εἰς τὰ στερεὰ σώματα οὕτως, ὥστε τὰ μόρια τῶν ὑγρῶν δὲν διατηροῦν σταθερὰν θέσιν ἐντὸς τοῦ σώματος καὶ δύνανται εὐκόλως νὰ ὀλισθαίνουν τὰ μὲν ἐπὶ τῶν δὲ (ρευστότης τῶν ὑγρῶν). Τὰ ὑγρὰ ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ εἶναι πολὺ ὀλίγον συμπιεστά, δὲν ἔχουν ὅμως ἴδιον σχῆμα, ἀλλὰ λαμβάνουν τὸ σχῆμα τῶν περιεχόντων αὐτὰ δοχείων.

Εἰς τὰ ἀέρια μεταξὺ τῶν μορίων παρεντίθενται ἀποστάσεις μεγαλύτεραι ἢ εἰς τὰ στερεὰ καὶ ὑγρὰ σώματα καὶ ἕνεκα τούτου αἱ ἀμοιβαῖαι ἑλκτικαὶ δυνάμεις μεταξὺ τῶν μορίων εἶναι πολὺ μικραί. Τὰ μόρια κινοῦνται ἐλευθέρως ἐντὸς τῶν ἀερίων καὶ συνοχὴ μεταξὺ αὐτῶν δὲν ὑφίσταται. Τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν οὔτε ὡρισμένον σχῆμα, λαμβάνοντα τὸ σχῆμα τῶν περιεχόντων αὐτὰ δοχείων, οὔτε ὡρισμένον ὄγκον, ἀλλὰ τείνουν νὰ καταλάβουν πάντα ἐλεύθερον χῶρον (διαχυτικότης τῶν ἀερίων).

Τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια εἶναι ἐξόχως ἐλαστικά, ὡς ἀνεφέραμεν προηγουμένως, ἀλλὰ παρουσιάζουν μόνον ἐλαστικότητα ὄγκου, ὄχι ὅμως καὶ σχήματος. Τὰ ὑγρὰ καὶ τὰ ἀέρια φέρουν τὸ κοινὸν ὄνομα ***ρευστά.***

Ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα δύναται νὰ λάβῃ ὑπὸ καταλλήλους συνθήκας καὶ τὰς τρεῖς καταστάσεις. Οὕτω τὸ ὕδωρ ψυχόμενον γίνεται στερεὸν (πάγος) καὶ θερμαινόμενον μεταπίπτει εἰς ἀέριον (ὑδρατμός). Τὸ ἀέριον διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος διὰ ψύξεως δύναται νὰ γίνῃ ὑγρὸν καὶ κατόπιν στερεὸν κλπ. Σώματά τινα πολλάκις φέρονται εἰς κατάστασιν, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει σαφῶς εἰς μίαν τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθεισῶν. Οὕτω ὁ κηρός, εἰς κατάλληλον θερμοκρασίαν ἀγόμενος, παρουσιάζει ἰδιότητας στερεοῦ καὶ ὑγροῦ συγχρόνως, ἤτοι καθίσταται πλαστικός.

4. ΦΥΣΙΚΑ ΚΑΙ ΧΗΜΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ. Τὰ φαινόμενα (§1) διαιροῦνται εἰς φυσικὰ καὶ χημικά. Φυσικὰ λέγονται τὰ φαινόμενα ἐκεῖνα, κατὰ τὰ ὁποῖα τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα λαμ-

βάνουν μέρος εἰς τὴν μεταβολὴν (φαινόμενον), δὲν ὑφίστανται ῥιζικὴν ἀλλοίωσιν τῆς φύσεως (μορίου) αὐτῶν, χημικὰ δὲ ἐκεῖνα, κατὰ τὰ ὁποῖα ἐπέρχεται ριζικὴ ἀλλοίωσις τῆς φύσεως τῶν σωμάτων. Ἡ μαγνήτισις τεμαχίου σιδήρου, ἡ παραγωγὴ ἤχου διὰ κρούσεως κώδωνος, ἡ πτῶσις λίθου, ἡ τῆξις τοῦ πάγου κλπ. εἶναι φυσικὰ φαινόμενα, ἐνῷ ἡ καῦσις τοῦ ἄνθρακος, ἡ παραγωγὴ ἀσβέστου διὰ πυρώσεως ἀσβεστολίθων κτλ. εἶναι χημικὰ φαινόμενα, διότι τὰ σώματα ἄνθραξ, ἀσβεστόλιθος κλπ. ὑφίστανται ῥιζικὴν μεταβολὴν τῆς φύσεως αὐτῶν, παραγομένων διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος, ἀσβέστου κλπ.

Ἡ διάκρισις τῶν φαινομένων εἰς φυσικὰ καὶ χημικὰ διατηρεῖται μὲν διὰ λόγους διδακτικούς, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀκριβής, διότι πολλάκις φαινόμενα χαρακτηριζόμενα ὡς φυσικὰ συνδέονται μὲ ἀλλοίωσιν τῶν μορίων τοῦ σώματος (μικτὰ φαινόμενα).

5. ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ. ΜΟΝΑΔΕΣ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΩΝ

Ὡς εἴδομεν εἰς τὸ § 1 ἡ ἔρευνα τῶν φαινομένων ἀπαιτεῖ τὴν μέτρησιν διαφόρων μεγεθῶν. Καλεῖται μέτρησις ἑνὸς μεγέθους ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς καὶ ὡρισμένον μέγεθος, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται κατὰ συνθήκην ὡς μονάς. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως εἶναι ὁ λόγος τοῦ μετρηθέντος μεγέθους πρὸς τὸ μέγεθος τὸ ὁρισθὲν ὡς μονὰς καὶ παρίσταται οὗτος δι᾿ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος καλεῖται ἀριθμητικὴ τιμὴ ἢ μέτρον τοῦ μετρηθέντος ποσοῦ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅσα εἶναι τὰ εἴδη τῶν ποσῶν, τόσαι πρέπει νὰ εἶναι καὶ αἱ μονάδες, δηλαδὴ δι᾿ ἕκαστον μέγεθος εἶναι ἀναγκαία καὶ ἰδία μονάς. Ἐὰν ἑκάστη μονὰς καθωρίζετο αὐθαιρέτως θὰπροέκυπτε μεγάλη δυσχέρεια διὰ τὴν κοινὴν παραδοχὴν τῶν καθοριζομένων μονάδων. Δι᾿ αὐτὸν τὸν λόγον κατεβλήθη προσπάθεια ὅπως εἰδυνατόν, ἐξ ὀλίγων τινῶν μονάδων, καθορισθεισῶν κατὰ συνθήκην, καλουμένων ***θεμελιωδῶν μονάδων***, παραχθοῦν ὅλαι αἱ ἄλλαι μονάδες, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἕνεκα τούτου ***παράγωγοι μονάδες***. Οἱ Gauss καὶ Weber [1] τῷ 1836 προέτειναν ὅπως ὅλαι αἱ μονάδες τῆς φυσικῆς παραχθοῦν ἐκ τῶν μονάδων μήκους, μάζης [2]

(1) K. Gauss (1777-1855) καὶ W. Weber (1804-91). διαπρεπεῖς γερμανοὶ φυσικοί, οἱ ὁποῖοι κεχωρισμένως καὶ ἀπὸ κοινοῦ διεξήγαγον πολλὰς ἐρεύνας (σύστημα μονάδων, ἠλεκτρομαγνητισμὸς κ.λ.π.)

(2) Ὡς μᾶζαν ἑνὸς σώματος χαρακτηρίζομεν τὸ ποσὸν τῆς ὕλης τοῦ σώματος τούτου. Περισσότερα Βλ. εἰς § 32,34.

καὶ χρόνου. Εἰς τὸ Διεθνὲς ἠλεκτρολογικὸν Συνέδριον, τὸ γενόμενον κατὰ τὸ 1881 εἰς Παρισίους, ἐγένετο παραδεκτὸν σύστημα μονάδων, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ὡς θεμελειώδεις μονάδας μήκους μὲν τὸ ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου (centimètre) μάζης τὸ γραμμάριον (gramme) καὶ χρόνου τὸ δευτερόλεπτον (seconde) [1]. Τὸ σύστημα τῶν μονάδων τούτων καλεῖται σύστημα μονάδων C.G.S. [2], ἐκ τῶν ἀρχικῶν γραμμάτων τῶν ὀνομάτων τῶν θεμελιωδῶν μονάδων εἰς τὴν γαλλικὴν γλῶσσαν (centimètre, gramme, seconde).

1. ***Μονὰς μήκους.*** Τῷ 1791 μία Ἐπιτροπὴ ὁρισθεῖσα ὑπὸ τῆς γαλλικῆς Ἐθνοσυνελεύσεως, ἐξέλεξεν ὡς μονάδα μήκους διὰ τὰς συνήθεις πρακτικὰς μετρήσεις τὸ ἓν τεσσαρακοντάκις ἑκατομμυριοστὸν $\left(\frac{1}{40.000.000}\right)$ μέρος ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, κληθείσης τῆς μονάδος ταύτης «μέτρον». Πρὸς τοῦτο ἐμετρήθη ἓν τόξον τοῦ διὰ τοῦ ἀστεροσκοπείου τῶν Παρισίων διερχομένου μεσημβρινοῦ καὶ ἐκ τοῦ τόξου τούτου ὑπελογίσθη τὸ ὅλον μῆκος τοῦ μεσημβρινοῦ. Ἡ ἐκλογὴ μονάδος ἐξαρτωμένης ἐξ αὐτῶν τῶν διαστάσεων τῆς γῆς, δὲν θὰ εἶχε τὴν προσωρινότητα τῶν αὐθαιρέτων μονάδων. Κατεσκευάσθη τότε, βάσει ἀκριβῶν μετρήσεων, ***τὸ διεθνὲς πρότυπον*** καλούμενον ***μέτρον***, ἤτοι ράβδος ἐξ ἰριδιούχου λευκοχρύσου (κρᾶμα 90% λευκοχρύσου καὶ 10% ἰριδίου), τὸ μῆκος τῆς ὁποίας εἰς θερμοκρασίαν 0° δίδει τὸ μέτρον. Τὸ πρότυπον μέτρον φυλάσσεται εἰς τὸ Διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν (Bureau International des Poids et Mesures) εἰς τὰς Sèvres τῶν Παρισίων. Ἀλλὰ μεταγενέστεραι ἀκριβέστεραι μετρήσεις διεξαχθεῖσαι ὑπὸ τοῦ Bessel [3] ἔδειξαν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ μεσημβρινοῦ εἶναι με-

---

(1) *Τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἑκατοστομέτρου, τοῦ γραμμαρίου καὶ τοῦ δευτερολέπτου ὡς θεμελιωδῶν μονάδων ὑπεστήριξαν ἄγγλοι καὶ ἰδίως ἡ «Βρεττανικὴ Ἑταιρεία διὰ τὴν πρόοδον τῆς Ἐπιστήμης»* (British association for the advancement of science).

(2) *Τὸ σύστημα τοῦτο τῶν μονάδων φέρει πολλάκις τὸ ὄνομα «ἀπόλυτον σύστημα μονάδων». Ἡ ὀνομασία αὕτη δὲν εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἑκατοστομέτρου, γραμμαρίου καὶ δευτερολέπτου ὡς θεμελιωδῶν μονάδων, εἶναι μὲν ἐπιτυχὴς ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, ἀλλὰ δὲν παύει νὰ εἶναι αὐθαίρετος.*

(3) *Friedrich W. Bessel (1784 1846), μέγας γερμανὸς γεωδαίτης, καθηγητὴς τῆς Ἀστρονομίας εἰς Kônigsberg.*

γαλύτερον άπ' ὅ,τι εὑρέθη ὑπὸ τῶν γαλλικῶν μετρήσεων καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ μῆκος τοῦ προτύπου μέτρου δὲν εἶναι ἀκριβῶς τὸ $\frac{1}{40.000.000}$ τοῦ μήκους τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς, ἀλλὰ ἐλάχιστα (κατὰ 0,0858 τοῦ χιλιοστομέτρου) μικρότερον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ μεταβολὴ τοῦ μέτρου μεθ' ἑκάστην νέαν μέτρησιν τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς θὰ ἐπέφερε σύγχυσιν ἀφ' ἑνὸς καὶ ἄσκοπος θὰ ἦτο ἀφ' ἑτέρου, ἀπεφασίσθη ὅπως διατηρηθῇ ὡς μῆκος τοῦ μέτρου τὸ μῆκος τοῦ διεθνοῦς προτύπου μέτρου τοῦ φυλασσομένου εἰς Sèvres.

Τοῦ μέτρου (mètre) καθωρίσθησαν πολλαπλάσια καὶ ὑποπολλαπλάσια. Κατωτέρω ἀναγράφομεν μερικὰ ἐξ αὐτῶν, θέτοντες ἐντὸς παρενθέσεως τὸ σύμβολον ἑκάστου τούτων, τοῦ μέτρου συμβολιζομένου διὰ τοῦ m.

Χιλιόμετρον (Km)=1000 m.=10^5 cm.

Δεκατόμετρον ἢ παλάμη (dm)=$\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου.

Ἑκατοστόμετρον (cm)=$\frac{1}{100}$m.

Χιλιοστόμετρον (mm) $\frac{1}{1000}$ m=$\frac{1}{10}$cm ἢ 10^{-1} cm.

Μικρὸν (μ)=$\frac{1}{1000}$ mm=10^{-4}cm. κ.λ.π.

Διὰ τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. καθωρίσθη, ὡς εἴδομεν, ὡς θεμελιώδης μονὰς μήκους τὸ ἑκατοστόμετρον (cm). Παράγωγοι μονάδες αὐτοῦ εἶναι τὸ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (1cmχ1cm=cm^2) πρὸς μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν, τὸ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον (cm^3) πρὸς μέτρησιν τῶν ὄγκων κ.λ.π.

2. ***Μονὰς μάζης.*** Ὡς μονὰς μάζης ἀρχικῶς (1799) εἶχεν ἐκλεγῇ τὸ χιλιόγραμμον (Kilogramme=Kg), δηλαδὴ ἡ μᾶζα ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ἡ ἔχουσα ὄγκον μιᾶς κυβικῆς παλάμης. Εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. καθωρίσθη, ὡς εἴδομεν, τὸ γραμμάριον (gr) ὡς μονὰς μάζης, ἤτοι ἡ μᾶζα ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{1.000}$ τῆς μάζης ἑνὸς χιλιογράμμου.

Περὶ τῶν μονάδων τούτων περισσότερα ἐκτίθενται εἰς τὸ § 34.

3. ***Μονὰς χρόνου.*** Ὡς μονὰς χρόνου λαμβάνεται τὸ δευτερόλεπτον (sec), δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{86.400}$ τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας.

Αἱ μονάδες τῶν ἄλλων μεγεθῶν τῆς φυσικῆς τοῦ συστήματος C.G.S., παράγονται ἐκ τῶν ἀμέσων ἢ ἐμμέσων σχέσεων αὐτῶν πρὸς τὰς θεμελιώδεις τοιαύτας (μονάδες ταχύτητος, ἐπιταχύνσεως, δυνάμεως, ἔργου κλπ.)

Τεχνικὸν Σύστημα Μονάδων (Τ. Σ. ἢ Κ. Μ. S.). Τὸ τεχνικὸν σύστημα μονάδων, τοῦ ὁποίου χρῆσις γίνεται εἰς τὰς τεχνικὰς ἐφαρμογὰς διαφέρει τοῦ συστήματος μονάδων C.G.S., διότι εἰς αὐτὸ ἀντὶ νὰ ληφθοῦν ὡς θεμελιώδεις μονάδες αἱ μονάδες μήκους, μάζης καὶ χρόνου λαμβάνονται ὡς τοιαῦται αἱ μονάδες μήκους, δυνάμεως καὶ χρόνου. Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα ὡς θεμελιώδης μονὰς μήκους λαμβάνεται τὸ μέτρον (m), ὡς μονὰς χρόνου τὸ δευτερόλεπτον (sec) καὶ ὡς μονὰς δυνάμεως ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ ἕλκει σῶμα μάζης ἑνὸς χιλιογράμμου. Ἡ τοιαύτη δύναμις (Βλ. § 12 καὶ 34) παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου Kg*.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

6. ΟΡΙΣΜΟΙ. Μηχανική εἶναι ὁ κλάδος τῆς φυσικῆς, ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων καὶ τὰ αἴτια αὐτῆς.

Σῶμά τι λέγομεν ὅτι κινεῖται, ὅταν μεταβάλλῃ θέσιν εἰς τὸν χῶρον, ἄλλως λέγομεν ὅτι ἠρεμεῖ. Ἡ μεταβολὴ τῆς θέσεως σώματός τινος εἰς τὸν χῶρον, δὲν δύναται ἄλλως νὰ διαπιστωθῇ παρὰ μόνον διὰ τῆς μεταβολῆς τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἐξ ἄλλων σωμάτων, θεωρουμένων ὡς ἀκινήτων.

Εἰς τὴν μηχανικὴν πολλάκις, χάριν ἁπλοποιήσεως, θεωροῦνται τὰ σώματα τὰ εὑρισκόμενα εἰς κίνησιν, ὁσωνδήποτε μεγάλων διαστάσεων καὶ ἂν εἶναι ταῦτα, ὡς σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ὅμως ὑπάρχει συγκεντρωμένη ἅπασα ἡ ὕλη αὐτῶν. Δι' αὐτὸ τὰ σώματα τὰ θεωρούμενα ὡς ἄνευ διαστάσεων καλοῦνται ***φυσικὰ*** ἢ ***ὑλικὰ σημεῖα***, ἡ δὲ ἔρευνα τῆς κινήσεώς των γενικῶς ἀποτελεῖ τὴν ***μηχανικὴν τοῦ ὑλικοῦ σημείου***. Ἡ ***μηχανικὴ τῶν στερεῶν σωμάτων***, ἀντιθέτως, ἐξετάζει τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἄνευ τῆς προηγουμένης ἁπλοποιήσεως, θεωροῦσα δηλαδὴ ταῦτα ἀποτελούμενα ἐκ πολλῶν ὑλικῶν σημείων στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένων, ὥστε αἱ μεταξύ των ἀποστάσεις νὰ μένουν ἀμετάβλητοι ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. (1) Ἡ δευτέρα αὐτὴ μηχανικὴ προ-

---

(1) Τοιαῦτα σώματα δὲν παρουσιάζονται εἰς τὴν φύσιν. Τὰ στερεὰ σώματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὴν φύσιν, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὑφίστανται παραμορφώσεις τοσοῦτον μεγαλυτέρας, ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν ἐπιδρωσῶν δυνάμεων. Τὰ πραγματικὰ ταῦτα σώματα πλησιάζουν πρὸς τὰ στερεά, τὰ ὁποῖα ὡρίσαμεν ἀνωτέρω καὶ τὰ ὁποῖα ἂς καλέσωμεν ἀπολύτως στερεά, μόνον ὅταν αἱ ἐπιδρῶσαι δυνάμεις εἶναι λίαν μικραί. Εἰς τὴν μηχανικὴν τῶν στερεῶν σωμάτων, θὰ θεωρῶμεν χάριν ἁπλότητος, τὰ στερεὰ σώματα ὡς σύστημα ὑλικῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις δὲν μεταβάλλονται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν οἱασδήποτε ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

κύπτει διὰ καταλλήλου ἐπεκτάσεως τῆς μηχανικῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Ἡ μηχανική, ἀνεξαρτήτως τῆς προηγουμένης διακρίσεως, διαιρεῖται εἰς τρεῖς μικροτέρους κλάδους: τὴν κινητικὴν ἢ κινηματικήν, τὴν στατικὴν καὶ τὴν δυναμικήν. Εἰς τὴν **κινητικὴν** ἐξετάζεται ἡ κίνησις αὐτὴ καθ' ἑαυτήν, ἀνεξαρτήτως τῶν αἰτίων, τὰ ὁποῖα τὴν προκαλοῦν. Εἰς τὴν στατικὴν ἐξετάζονται τὰ αἴτια τῶν κινήσεων, ἤτοι αἱ δυνάμεις, αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ καὶ εἰς ποίαν περίπτωσιν ταῦτα, ἐφ' ὅσον πλείονα τοῦ ἑνὸς συνυπάρχουν ἐπὶ ἑνὸς σώματος, ἐπιφέρουν τὴν ἰσορροπίαν τούτου. Τέλος ἡ **δυναμικὴ** ἐξετάζει τὴν σχέσιν τῶν κινήσεων πρὸς τὰ αἴτια αὐτῶν Κατ' ἄλλους ἡ μηχανικὴ διαιρεῖται εἰς δύο μόνον κλάδους: τὴν στατικὴν καὶ τὴν δυναμικήν. Ἡ πρώτη ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν ἰσορροπίαν καὶ ἡ δευτέρα τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν πρώτην διαίρεσιν ὡς ἐπικρατεστέραν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

(ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ)

7. ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΚΙΝΗΣΙΣ. ΤΡΟΧΙΑ. Τὰ ἐν κινήσει εὑρισκόμενα σώματα καλοῦνται συντόμως *κινητά*. Ὡς κινητὸν δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ, ὡς εἴδομεν, ἓν σῶμα, ὅταν τοῦτο ἀλλάσσῃ θέσιν εἰς τὸ διάστημα, ἤτοι ὅταν ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπ' ἄλλων σωμάτων A_1, A_2 . . . , θεωρουμένων ὡς ἀκινήτων, μεταβάλλεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο κινεῖται ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν σωμάτων Α. Δυνατὸν ὅμως καὶ τὰ σώματα τοῦ συστήματος Α νὰ κινῶνται ὡς πρὸς ἄλλο σύστημα σωμάτων Β, τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἀπολύτως ἐξηκριβωμένον ὅτι εἶναι πράγματι ἀκίνητα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἂν ἡ κίνησις τοῦ σώματος Σ ἐξετάζεται ἐν σχέσει πρὸς τὸ σύστημα τῶν σωμάτων Α, θὰ λέγωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τῆς **σχετικῆς κινήσεως** αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ σύστημα Α, ἐνῷ ἐὰν ἐξετάζεται ἡ κίνησις αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν σωμάτων Β, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι πρόκειται περὶ τῆς **ἀπολύτου κινήσεως** τοῦ σώματος Σ. Ὡς παράδειγμα ἂς

λάβωμεν ἐπιβάτην κινούμενον ἐπὶ πλοίου, ὅπερ ἀπομακρύνεται τῆς ἀκτῆς. Ὁ ἐπιβάτης κινεῖται ὡς πρὸς τὸ πλοῖον (σχετικὴ κίνησις) καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀκτὴν (ἀπόλυτος κίνησις). Εἶναι δυναταὶ προσέτι αἱ ἑξῆς περιπτώσεις : α) ὁ ἐπιβάτης νὰ εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν ὡς πρὸς τὸ πλοῖον καὶ εἰς κίνησιν ὡς πρὸς τὴν ἀκτὴν ἢ β) νὰ εὑρίσκεται εἰς κίνησιν ὡς πρὸς τὸ πλοῖον καὶ ἐν ἠρεμίᾳ ὡς πρὸς τὴν ἀκτήν.

Ἀλλὰ εἶναι πράγματι ἀκίνητος ἡ ἀκτή, διὰ νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ ἐπιβάτου ἐν σχέσει πρὸς αὐτὴν ὡς ἀπόλυτον ; Ὅλοι γνωρίζωμεν ὅτι καὶ ἡ ξηρὰ κινεῖται μετέχουσα τῶν κινήσεων τῆς γῆς, περιστροφικῶς περὶ τὸν ἄξονά της καὶ μεταβατικῶς περὶ τὸν ἥλιον, ὅπως ἐπίσης ὅτι καὶ ὁ ἥλιος δὲν μένει ἀκίνητος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἰσχυρισθῶμεν ὅτι ἀπόλυτος κίνησις δὲν ὑπάρχει. Ἑπομένως ὅταν θέλωμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν κίνησιν ἑνὸς σώματος, θὰ ἐξετάσωμεν ταύτην ὡς πρὸς ἓν σῶμα ἢ σύστημα σωμάτων, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν κατὰ συνθήκην ὡς ἀκίνητα.

Τὰς συνήθεις κινήσεις θὰ μελετῶμεν θεωροῦντες τὴν γῆν ὡς ἀκίνητον σῶμα.

Ποῖον λοιπὸν θὰ εἶναι τὸ σύστημα σωμάτων ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον θὰ ἀναφέρεται ἡ κίνησις δὲν ἐνδιαφέρει τὴν κινητικήν. Οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τοῦτο, τὰ εἴδη τῶν κινήσεων τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν εἶναι ὡρισμένα καὶ θὰ τὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω.

Τὸ σῶμα τὸ ὁποῖον ἀλλάσσει θέσιν εἰς τὸ διάστημα ἐχαρακτηρίσαμεν ὡς κινητόν. Τὸ κινητὸν (ὑλικὸν σημεῖον) κατὰ τὴν κίνησίν του καταλαμβάνει διαδοχικὰς θέσεις, τῶν ὁποίων ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἀποτελεῖ γραμμὴν καλουμένην ***τροχιάν***. Ἀναλόγως τοῦ εἴδους τῆς γραμμῆς ταύτης ἡ τροχιὰ εἶναι εὐθεῖα, καμπύλη κ.λ.π. Τροχιὰ δηλαδὴ εἶναι ἡ μορφὴ τοῦ δρόμου, τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν κίνησίν του. Ἐὰν δηλαδὴ τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἡ τροχιὰ εἶναι κυκλικὴ κ. ο. κ.

Ἡ ἀπόστασις s τοῦ ὑλικοῦ σημείου (κινητοῦ) ἀπὸ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου τῆς κινήσεως, τὴν ὁποίαν διέτρεξε τὸ κινητὸν μετὰ πάροδον χρόνον τινὸς t, μετρουμένη κατὰ μῆκος τῆς τροχιᾶς, καλεῖται ***διάστημα***.

Ἐκ τοῦ εἴδους τῆς τροχιᾶς λαμβάνει ἡ κίνησις καὶ ἀνάλογον ὄνομα. Οὕτω ἡ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος, κυκλική, καμπυλόγραμμος ἐν γένει κ.λ.π., ὅταν ἡ τροχιὰ ἐφ' ἧς τὸ κινητὸν κινεῖται εἶναι εὐθεῖα, περιφέρεια κύκλου, καμπύλη κ.λ.π. Ἐκ τοῦ τρόπου δὲ καθ' ὅν τὸ κινητὸν κινεῖται ἐπὶ οἱασδήποτε τροχιᾶς διακρίνεται ἡ κίνησις εἰς ἰσοταχῆ (ὁμαλὴν) ἢ ἀνισοταχῆ (μεταβαλλομένη).

8. ΚΙΝΗΣΙΣ ΙΣΟΤΑΧΗΣ ἢ ΟΜΑΛΗ. Ἐὰν τὸ κινητὸν εἰς ἴσους χρόνους διατρέχῃ ἴσα διαστήματα, ἡ κίνησίς του καλεῖται ἰσοταχὴς ἢ ὁμαλή Τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα εἶναι ὅθεν σταθερὸν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως, ἡ τιμὴ δὲ τούτου δύναται νὰ δώσῃ τὴν ἔκφρασιν τῆς κινητικῆς καταστάσεως τοῦ κινητοῦ. Ἔχομεν λοιπὸν μίαν νέαν ἔννοιαν, καλουμένην ***ταχύτητα*** (υ), ἡ ὁποία εἶναι ποσότης ἔχουσα τὴν ἰδίαν τιμήν, εἰς τὴν ὁμαλὴν κίνησιν, μὲ τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου διανυόμενον διάστημα. Ἑπομένως

$$\upsilon = \frac{s}{t}, \qquad (1)$$

ἔνθα τὸ υ παριστᾷ τὴν ταχύτητα καὶ s τὸ κατὰ τὸν χρόνον t διανυθὲν διάστημα. Ἡ ταχύτης ἐκφράζεται μὲν ἀριθμητικῶς διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, μὲ τὸν ὁποῖον καὶ τὸ διάστημα, ὅπερ διατρέχει τὸ κινητὸν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, εἶναι ὅμως διάφορον τοῦ διαστήματος μέγεθος.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον θέσωμεν s=1cm. καὶ t=1sec, λαμβάνομεν υ=1. Ἕπεται ὅθεν ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τῆς μονάδος τῆς ταχύτητος εἰς τὸ σύστημα C.G.S. : Κινητόν, κινούμενον ὁμαλῶς, ἔχει ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν μονάδα τῆς ταχύτητος, ἂν διατρέχῃ 1cm κατὰ δευτερόλεπτον. Ἡ μονὰς αὕτη δὲν ἔχει ἴδιον ὄνομα, σημειοῦται ὅμως διὰ τῆς παραστάσεως $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ἢ $\text{cm.}\,\text{sec}^{-1}$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) προκύπτουν εὐκόλως καὶ αἱ ἑξῆς

$$s = \upsilon t, \quad t = \frac{s}{\upsilon}.$$

Ἡ ἁπλουστέρα ἐξ ὅλων τῶν κινήσεων εἶναι ἡ εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλή.

9. ΚΙΝΗΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΑΧΗΣ ἢ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ. Α'. Εἰς τὴν ἀνισοταχῆ ἢ μεταβαλλομένην κίνησιν τὸ κινητὸν διανύει

εἰς ἴσους χρόνους ἄνισα διαστήματα. Ὀφείλομεν λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν ὅτι, κατ᾽ αὐτήν, ἡ ταχύτης μεταβάλλεται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμήν. Ἐὰν τὸ μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β τῆς τροχιᾶς διάστημα s διέτρεξε τὸ κινητὸν εἰς χρόνον t, τὸ πηλίκον $\frac{s}{t}$ δίδει τὴν ***μέσην ταχύτητα*** τῆς κινήσεως, ἤτοι τὴν ταχύτητα ἐκείνην, ἥν ἄν εἶχε τὸ κινητόν, θὰ διήνυε τὸ ἐν λόγῳ διάστημα ἰσοταχῶς ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ t. Τὴν ἔννοιαν τῆς μέσης ταχύτητος χρησιμοποιοῦμεν συχνάκις λ.χ. ὅταν λέγωμεν ὅτι ὁ σιδηρόδρομος κατὰ τὸ ταξείδιον Ἀθηνῶν — Πατρῶν κινεῖται μὲ ταχύτητα 28 χιλιομέτρων τὴν ὥραν κ. ἀ. Ἡ μέση ταχύτης ὅμως δὲν δίδει σαφῆ εἰκόνα τοῦ τρόπου καθ᾽ ὅν διηνύθη διάστημά τι. Θὰ ἔπρεπε νὰ γνωρίζωμεν τὴν εἰς ἑκάστην στιγμὴν κινητικὴν κατάστασιν τοῦ κινητοῦ. Τοῦτο κατορθοῦμεν διὰ τῆς καλουμένης ***ταχύτητος κατά τινα στιγμὴν*** (στιγμιαία ταχύτης).

Ἐὰν κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν λάβωμεν διάστημα χρόνου πολὺ μικρόν, ἴσον πρὸς μικρὸν κλάσμα τοῦ δευτερολέπτου, τότε τὸ διανυθὲν κατὰ τὸν μικρὸν τοῦτον χρόνον διάστημα θὰ εἶναι ἐπίσης μικρὸν καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν ἐντὸς τοῦ μικροῦ τούτου χρονικοῦ διαστήματος ὡς ὁμαλήν. Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως

$$\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{2}$$

ἔνθα τὸ Δs παριστᾷ τὸ πολὺ μικρὸν διάστημα τὸ διανυθὲν περὶ τὴν θεωρουμένην στιγμήν, κατὰ τὸν λίαν μικρὸν χρόνον Δt. Ὅσον δὲ ὁ στοιχειώδης χρόνος Δt τείνει πρὸς τὸ μηδὲν —γίνεται δηλαδὴ ὅσον δύναταί τις νὰ φαντασθῇ μικρός, χωρὶς ὅμως νὰ μηδενισθῇ— τοσοῦτον καὶ τὸ Δs γίνεται μικρότερον καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \upsilon$ (1) θὰ παριστᾷ μὲ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν τὴν κατὰ τὸ ἐν λόγῳ χρονικὸν διάστημα ταχύτητα τοῦ κινητοῦ. Οὕτω διὰ νὰ εὕρουν π.χ. τὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος τὴν στιγμὴν καθ᾽ ἥν τοῦτο ἐξέρχεται

---

(1) *Ἀκριβέστερον, μαθηματικῶς, ὁρίζομεν ὡς ταχύτητα κατά τινα στιγμήν, τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, *ὅταν τὰ* Δt *καὶ* Δs *γίνωνται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρότερα, τείνοντα πρὸς τὸ μηδέν.*

τῆς κάννης τοῦ ὅπλου, δηλαδὴ τὴν καλουμένην ***ἀρχικὴν ταχύτητα*** τοῦ βλήματος προσδιορίζουν — καταλλήλως — τὸν χρόνον (κλάσμα τοῦ δευτερολέπτου), ὅν ἀπαιτεῖ τὸ βλῆμα διὰ νὰ διατρέξῃ ὀλίγα ἐκ τῶν πρώτων μέτρων τῆς τροχιᾶς του, ὑποθέτοντες ὅτι κατὰ τὸ μικρὸν τοῦτο διάστημα ἡ κίνησις ὑπῆρξεν ὁμαλή. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ ἠδύναντο νὰ εὕρουν τὴν ταχύτητα τοῦ βλήματος καὶ κατ' ἄλλην τινὰ στιγμὴν. Καὶ ἄν, εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν, δὲν δύνανται νὰ ἐλαττώσουν κάτω ὡρισμένου τινὸς ὁρίου τὸν χρόνον καὶ τὸ ἀντίστοιχον διάστημα διὰ τὴν εὕρεσιν π.χ. τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος τοῦ βλήματος, ὅπως ἀπαιτεῖ τοῦτο ὡς θεωρία, τοῦτο πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸ δυσχερὲς τῆς μετρήσεως ἕνεκα τῆς μεγάλης ταχύτητος τοῦ βλήματος.

Ἡ μελέτη μιᾶς ἀνισοταχοῦς κινήσεως εἶναι δυσχερής, ἐπειδὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ταχύτητα εἰς πάσας τὰς στιγμάς, ἐκτὸς ἄν αὔτη ὑπακούῃ εἴς τινα νόμον.

Β. Τὸ τελευταῖον τοῦτο συμβαίνει εἰς μίαν ἀνισοταχῆ κίνησιν, ἥτις καλεῖται ***κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη***, ἐπειδὴ ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ κατ' αὐτὴν αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται εἰς ἴσους χρόνους κατὰ τὸ αὐτὸ ποσόν. Εἶναι φανερὸν καὶ πρέπει εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς νὰ τονισθῇ, ὅτι ὅταν ὁμιλῶμεν ἐνταῦθα περὶ ταχύτητος, πρόκειται περὶ ταχύτητος κατὰ ὡρισμὲνας τινὰς στιγμὰς (στιγμιαίας), π χ. εἰς τὰ τέλη τῶν χρονικῶν μονάδων. Καὶ ἐὰν μὲν ἡ ταχύτης αὐξάνεται ὡς ἀνωτέρω, ἡ κίνησις φέρει τὸ ὄνομα «κίνησις ὁμαλῶς ***ἐπιταχυνομένη***» ἐὰν δὲ ἐλαττοῦται «κίνησις ὁμαλῶς ***ἐπιβραδυνομένη***».

Παραδείγματα: α) τὸ κινητὸν εἰς τοὺς χρόνους 0, 1, 2, 3 . . . . .sec ἔχει ταχύτητα 40,45, 50,55 . . . . . cm· πρόκειται περὶ κινήσεως ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης, ἔνθα ἡ ***ἀρχικὴ ταχύτης*** δηλαδὴ ἡ ταχύτης εἰς τὸν χρόνον ο (ἀρχὴ παρατηρήσεως), εἶναι 40 $\frac{cm}{sec}$, καὶ ἡ ταχύτης αὐξάνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος κατὰ 5 $\frac{cm}{sec}$.

β) Τὸ κινητὸν εἰς τοὺς χρόνους 0, 1, 2, 3, ... sec ἔχει ταχύτητα 70, 60, 50, 40. . . . . . cm· πρόκειται περὶ κινήσεως ὁμαλῶς ἐπιβραδυ νομένης, εἰς ἥν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι 70$\frac{cm}{sec}$

καὶ ἡ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος εἰς τὸ τέλος ἑκάστης μονάδος ἀνέρχεται εἰς $10\frac{cm}{sec}$

Τὸ σταθερὸν ποσόν, κατὰ τὸ ὁποῖον αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται ἡ ταχύτης εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου καλεῖται *ἐπιτάχυνσις*. Καὶ ἂν μὲν πρόκειται περὶ αὐξήσεως τῆς ταχύτητος, αὕτη εἶναι θετική, καλουμένη τότε ἁπλῶς ἐπιτάχυνσις, ἂν δὲ περὶ ἐλαττώσεως εἶναι ἀρνητική, καλουμένη τότε καὶ ἐπιβράνδυσις. Ἡ ἐπιτάχυνσις γενικῶς παρίσταται διὰ τοῦ μικροῦ γράμματος τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου γ.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ_0 τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα καὶ μὲ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως, ἡ ταχύτης κατὰ τὸ τέλος τῆς t της χρονικῆς μονάδος θὰ δίδεται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm \gamma t, \tag{3}$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον + θὰ τίθεται ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι θετικὴ (ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις), τὸ — δὲ ὅταν αὕτη εἶναι ἀρνητικὴ (ὁμ. ἐπιβραδυνομένη κίνησις). Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ταχύτητες υ αἱ κτηθεῖσαι ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τῶν χρόνων 0,1,2,3.......t sec, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας πρῶτος μὲν ὅρος εἶναι ὁ υ_0, λόγος ὁ $\pm\gamma$ καὶ τελευταῖος ὅρος ὁ $\upsilon_0 \pm \gamma t$. Ἡ πρόοδος δηλαδὴ εἶναι ἡ ἀκόλουθος : υ_0, $\upsilon_0 \pm \gamma$, $\upsilon_0 \pm \gamma \cdot 2$, $\upsilon_0 \pm \gamma \cdot 3$......... $\upsilon_0 \pm \gamma t$.

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (3) δίδουσα τὴν στιγμιαίαν ταχύτητα εἰς οἱονδήποτε χρόνον t, δύναται νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαστήματος, ὅπερ διανύει κινητὸν κατὰ τὸν χρόνον t, κινούμενον μὲ ἐπιτάχυνσιν γ, ἂν ἡ ἀρχική του ταχύτης εἶναι υ_0. Πρὸς τοῦτο δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὅτι τὸ κινητὸν διατρέχει τὸ ἴδιον (τὸ ζητούμενον) διάστημα s εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ἀλλὰ κινούμενον ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν μέσην ταχύτητα τῆς κινήσεώς του. Ἡ μέση ταχύτης εἶναι ὁ μέσος ὅρος ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης προόδου, ὅστις εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσοῦται πρὸς τὸν μέσον ὅρον τῶν ἄκρων ταχυτήτων, ἤτοι πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν υ_0 καὶ $\upsilon_0 \pm \gamma t$. Ὅθεν, κατὰ τὸν τύπον (1) ἔχομεν :

$$s = \upsilon . t = \left(\frac{\upsilon_0 + \upsilon_0 \pm \gamma t}{2} \right) . t = \left(\upsilon_0 \pm \frac{\gamma t}{2} \right) t = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2} \gamma t^2 . \tag{4}$$

Διὰ τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν ἰσχύουν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, οἱ ἑξῆς δύο τύποι :

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm \gamma t \tag{5}$$

$$\text{καὶ } s = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2} \gamma t^2 . \tag{6}$$

Τὸ σημεῖον + θὰ τίθεται ὅταν ἡ κίνησις εἶναι ἐπιταχυνομένη ὁμαλῶς, τὸ δὲ —, ὅταν αὕτη εἶναι ἐπιβραδυνομένη ὁμαλῶς.

Εἰς ἣν περίπτωσιν $\upsilon_0=o$, ἤτοι ὅταν κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς παρατηρήσεως τὸ κινητὸν ἦτο εἰς ἠρεμίαν, οἱ τελευταῖοι τύποι ἁπλουστεύονται:

$$\upsilon=\gamma t \tag{7}$$

$$s=\frac{1}{2}\gamma t^2. \tag{8}$$

Γ. Ἂς λάβωμεν τὸν τύπον (5), θεωροῦντες κατ᾽ ἀρχὰς τὴν κίνησιν ὡς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ὅτε $\upsilon=\upsilon_0+\gamma t$. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, ἔχομεν

$$\upsilon^2=(\upsilon_0+\gamma t)^2=\upsilon_0^2+\gamma^2t^2+2\upsilon_0\gamma t=\upsilon_0^2+2\gamma\left(\frac{\gamma t^2}{2}+\upsilon_0 t\right)=$$

$$=\upsilon_0^2+2\gamma s. \tag{9}$$

Ἐὰν πρόκειται ὅμως περὶ ἐπιβραδυνομένης ὁμαλῶς κινήσεως, τότε

$$\upsilon^2=(\upsilon_0-\gamma t)^2=\upsilon_0^2+\gamma^2t^2-2\upsilon_0\gamma t=\upsilon_0^2+2\gamma\left(\frac{\gamma t^2}{2}-\upsilon_0 t\right).$$

Ἀλλὰ $-\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\gamma t^2=-s$ (βλ. τύπον 6),

$$\text{ὅτε } \upsilon^2=\upsilon_0^2+2\gamma(-s)=\upsilon_0^2-2\gamma s \tag{10}$$

Ἐκ τῶν τύπων (9) καὶ (10) ἕπεται ὅτι γενικῶς εἶναι ἐν ἰσχύει διὰ τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν ἀκόμη καὶ ὁ τύπος

$$\upsilon^2=\upsilon_0^2\pm 2\gamma s$$

$$\text{ἢ } \upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2\pm 2\gamma s}, \tag{11}$$

ὁ δίδων τὴν ταχύτητα ὄχι συναρτήσει τοῦ χρόνου, ἀλλὰ τοῦ διανυθέντος διαστήματος. Ἂν $\upsilon_0=o$, τότε

$$\upsilon=\sqrt{2\gamma s}. \tag{12}$$

Δ. Ἐκ τῶν τύπων (7) καὶ (8) σύνάγονται εὐκόλως οἱ ἀκόλουθοι νόμοι, ἰσχύοντες διὰ τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, εἰς τὴν περίπτωσιν $\upsilon_0=o$:

1) Αἱ ταχύτητες, τὰς ὁποίας ἀποκτᾷ τὸ κινητὸν εἰς τὸ τέλος τῶν διαφόρων χρονικῶν μονάδων, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς χρόνους καθ᾽ οὓς ἐκτήθησαν.

2) Τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διέτρεξε τὸ κινητόν, εἶναι

ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, καθ᾽ οὓς ταῦτα διηνύθησαν.

Ἡ ἐπιτάχυνσις, ἀποτελοῦσα τὸ σταθερὸν ποσὸν κατὰ τὸ ὁποῖον αὐξάνεταιἤ ἐλατοῦται ἡ ταχύτης ἑνὸς κινητοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, μετρεῖται εἰς μονάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Μονὰς ἐπιταχύνσεως εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης αὐξάνεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου κατὰ τὴν μονάδα τῆς ταχύτητος. Εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ὡς μονὰς ταχύτητος λαμβάνεται ἡ $\frac{cm}{sec} = cm.sec.^{-1}$ Ἑπομένως, θεωροῦντες τὸν τύπον (7), ὅν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\gamma = \frac{\upsilon}{t}$, καὶ θέτοντες ἀντὶ τῶν υ καὶ t τὰς ἀντιστοίχους μονάδας, λαμβάνομεν διὰ τὴν μονάδα τῆς ἐπιταχύνσεως τὴν παράστασιν

$$\frac{cm.sec^{-1}}{sec} = cm.sec^{-2}$$

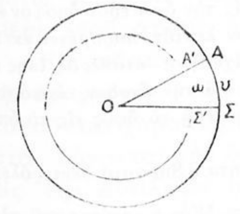
Ἡ μονὰς αὐτη τῆς ἐπιταχύνσεως προυτάθη καὶ ὑπὸ πολλῶν ἐγένετο παραδεκτὸν νὰ φέρῃ, πρὸς τιμὴν τοῦ Γαλιλαίου ([1]), τὸ ὄνομα «gal». Ἕν gal ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει τὸ ὄνομα milligal, γράφεται δὲ συγκεκομμένως mgal.

10. ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΑΙ ΟΜΑΛΗ ΚΙΝΗΣΙΣ. Ἡ κυκλικὴ ὁμαλὴ κίνησις ἀνήκει εἰς τὰς καμπυλογράμμους καὶ ὁμαλὰς κινήσεις, ἀλλὰ θὰ ἐξετάσωμεν αὐτὴν ἰδιαιτέρως, ἐπειδὴ πολλαὶ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς ὑπάρχουν. Κατ᾽ αὐτὴν τὸ σημεῖον κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου διατρέχον εἰς ἴσους χρόνους ἴσα τόξα. Τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (1sec) διαγραφόμενον τόξον ΣΑ

---

(1) *G. Galilei (1564-1642). Μέγας ἰταλὸς φυσικὸς καὶ ἀστρονόμος. Ἔθεσε τὰς βάσεις τῆς δυναμικῆς, ἐμελέτησε τὴν κίνησιν τοῦ ἐκρεμοῦς, ἀνεκάλυψε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ἐφεῦρε τὸν ὑδροστατικὸν ζυγὸν κ.λ.π. Ὑποστηρίξας ὅτι τὸ κέντρον τοῦ πλανητικοῦ συστήματος εἶναι ὁ ἥλιος καὶ ὄχι ἡ γῆ καὶ ὅτι ἡ γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἥλιον, κατεδιώχθη ὑπὸ τῆς ἱερᾶς ἐξετάσεως καὶ ἐσώθη ἐκ τῶν βασάνων μόνον ἀφοῦ ἀπηρνήθη τὴν διδασκαλίαν του.*

(Σχ. 1), εἰς cm μετρούμενον, δίδει τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος υ, καλουμένης ***γραμμικῆς ταχύτητος*** πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τῆς καλουμένης ***γωνιώδους ταχύτητος*** ω, ἥτις μετρεῖται διὰ τῆς ἐπικέντρου γωνίας τῆς βαινούσης εἰς τόξον μήκους ἴσου πρὸς υ, ἤτοι εἰς τὸ τόξον ΣΑ, ὅπερ διαγράφει τὸ κινητὸν εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Τὴν γωνιώδη ταχύτητα, ἤτοι



Σχ. 1

τὴν ὡς ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαν γωνίαν, μετροῦν ὄχι εἰς μοίρας ἀλλὰ εἰς ἀκτίνια. Τὸ ἀκτίνιον εἶναι γωνία, ἥτις ἰσοῦται πρὸς $360^{\circ} : 2\pi = 57^{\circ}\, 17'44''$. Ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην πρὸς 1, τὸ τόξον Σ'Α', ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ω μὲ τὸ τόξον ΣΑ=υ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ω μὲ τὸν ὁποῖον καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία Σ'ΟΑ'. Κατά τι θεώρημα τὰ τόξα υ καὶ ω τῶν ὁμοκέντρων κύκλων τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀντιστοίχων ἀκτίνων. Ὅθεν

$$\upsilon : \omega = r : 1$$

ἢ

$$\upsilon = r . \omega. \tag{13}$$

Ἡ γραμμικὴ ταχύτης κινητοῦ, κινουμένου ἰσοταχῶς ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, εὑρίσκεται κατὰ τ' ἀνωτέρω, ἂν τὴν γωνιώδη ταχύτητα αὐτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς περιστροφῆς.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον κινεῖται ἰσοταχῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας, ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τοῦτο διατρέξῃ ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, εἶναι ἑκάστοτε ὁ αὐτὸς καὶ καλεῖται ***περίοδος*** (Τ). Συχνότητα (Ν) καλοῦν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιστροφῶν εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Προφανῶς εἶναι $T = \frac{1}{N}$. (14)

Ἀκόμη εἶναι $2\pi r = \upsilon . T$, (15)

ἤ, διὰ συνδυασμοῦ τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ τῆς (13)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{16}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ παρόντος ἐδαφίου προκύπτουν ἀκόμη καὶ αἱ ἑξῆς:

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T}. \qquad \omega = 2\pi N, \qquad \upsilon = 2\pi r N.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1)

Α. 1) Ἀνελκυστὴρ πλήρης φορτίου ἀνέρχεται εἰς τὸν ἀνώτερον ὄροφον ἐργοστασίου μὲ ταχύτητα σταθερὰν 20m κατὰ πρῶτον λεπτόν, παραμένει ἐκεῖ διὰ τὴν ἐκφόρτωσιν 3 λεπτὰ καὶ κατέρχεται μετὰ ταχύτητος σταθερᾶς ἴσης πρὸς 30m κατὰ λεπτόν. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρῆλθε διὰ τὴν ἄνοδον, ἐκφόρτωσιν καὶ κάθοδον τοῦ ἀνελκυστῆρος εἶναι 5 λεπτά. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ὄροφος οὗτος.

2) Ποταμόπλοιον ἀνέρχεται ποταμὸν μὲ ταχύτητα 3,8m κατὰ δευτερόλεπτον $\left(\frac{m}{sec}\right)$ καὶ κατέρχεται τοῦτον μὲ ταχύτητα 6,2 $\frac{m}{sec}$. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ῥεύματος τοῦ ὕδατος εἶναι σταθεραί, νὰ εὑρεθοῦν αὗται.

Β. 3) Κινητὸν κινούμενον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 36 $\frac{m}{sec}$, σταματᾷ μετὰ παρέλευσιν 12 πρώτων λεπτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα.

4) Εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησίν του κινητὸν διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἑβδόμου μόνον δευτερολέπτου διάστημα 130 cm. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ αὐτοῦ ταχύτης ἦτο μηδέν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

5) Κινητὸν κινούμενον μὲ κιν. ὁμ. μεταβαλλομένην διήνυσε μέχρι τοῦ τέλους τοῦ 1ου καὶ 2ου sec ἀντιστοίχως τὰ διαστήματα 46,5m καὶ 102m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

6) Ἔκ τινος σημείου Α ἀναχωρεῖ κινητὸν μὲ κ. ὁ. ἐπιταχυνομένην ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Τρία δευτερόλεπτα μετὰ ταῦτα ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν κινούμενον ἕτερον κινητόν. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀντιστοίχως, τοῦ μὲν πρώτου 10 $\frac{cm}{sec}$ καὶ 60$\frac{cm}{sec^2}$, τοῦ δὲ δευτέρου 20$\frac{m}{sec}$ (υο) καὶ 240$\frac{cm}{sec^2}$ (γ), νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ πρώτου θὰ γίνῃ ἡ συνάντησίς των.

Γ΄. 7) Ἓν κινητὸν ἐκτελεῖ 30 στροφὰς εἰς ἕκαστον λεπτόν. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης αὐτοῦ;

8) Τροχὸς ἔχει γωνιώδη ταχύτητα 4,5. Ποία ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἑνὸς σημείου τοῦ τροχοῦ, ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς 20 cm; Πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ ὁ τροχὸς οὗτος εἰς 1 λεπτόν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΤΑΤΙΚΗ

α) ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

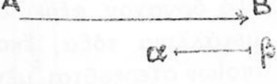
11. ΔΥΝΑΜΕΙΣ. Τὰ αἴτια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ προκαλέσουν τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἢ νὰ τροποποιήσουν τὴν

(1) *Τὰ ἀποτελέσματα τῆς λύσεως τῶν ἀσκήσεων βλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ τεύχους.*

κινητικὴν αὐτῶν κατάστασιν, καλοῦνται ***δυνάμεις*** (βλ. καὶ § 30). Οὕτω ἡ πίεσις τοῦ πνέοντος ἀνέμου ἐπὶ τῶν σωμάτων, ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοῦ, ἡ ἕλξις τῆς γῆς κτλ.. εἶναι δυνάμεις.

Εἰς πᾶσαν δύναμιν διακρίνομεν τρία τινά: τὸ ***σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς***, τὴν ***διεύθυνσιν*** καὶ τὴν ***ἔντασιν*** αὐτῆς. Ταῦτα καλοῦνται χαρακτηριστικὰ τῆς δυνάμεως διότι, ὅταν εἶναι γνωστά, δύνανται τὴν δύναμιν πλήρως νὰ ἐκφράσουν, κατὰ τὰς εἰς τὴν ἀντίληψιν τοῦ ἀνθρώπου ὑποπιπτούσας ἰδιότητας αὐτῆς. Ἡ δύναμις ἀποτελεῖ ἔννοιαν, πρὸς τὴν ὁποίαν φερόμεθα ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῆς καὶ δι᾽ αὐτὸ περισσότερα περὶ αὐτῆς θὰ ἐκτεθοῦν εἰς τὸ περὶ δυναμικῆς κεφάλαιον.

Γραφικῶς παριστῶμεν πᾶσαν δύναμιν διὰ βέλους ΑΒ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ Α παριστᾷ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς (Σχ. 2), ἡ διεύθυνσις τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως καὶ τὸ μῆκος, συγκρινόμενον πρὸς τὸ μῆκος μικρᾶς τινος εὐθείας αβ παριστώσης τὴν μονάδα τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως, τὴν ἔντασιν αὐτῆς.



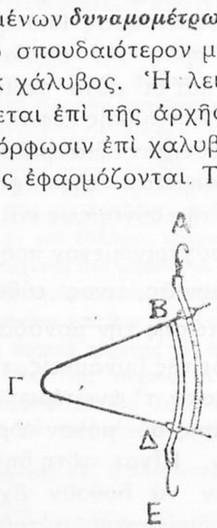
Σχ. 2

Ἡ δύναμις ἐκφράζεται, κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω, δι᾽ ἀνύσματος, ἤτοι τμήματος εὐθείας ἐχούσης οὐ μόνον ὡρισμένον μῆκος ἀλλὰ καὶ ὡρισμένην διεύθυνσιν. Εἶναι αὕτη δηλ. μέγεθος, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ καθορισθῇ δέον νὰ δοθοῦν ὄχι μόνον ἡ ἀριθμητικὴ αὐτοῦ τιμὴ ἀλλὰ καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτοῦ.

12. ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἔχουσαι ἀντιθέτους διευθύνσεις ἀναιροῦν ἀλλήλας, λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἢ εἶναι ἴσαι. Ἐνῷ ἂν δύο, τρεῖς κ.τ.λ δυνάμεις ἴσαι κατ᾽ ἔντασιν καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἀναιρῶνται διὰ μιᾶς ἄλλης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφηρμοσμένης καὶ ἀντιθέτου διευθύνσεως πρὸς αὐτάς, τότε ἡ τελευταία δύναμις εἶναι διπλασία, τριπλασία κ.τ.λ. ἑκάστης τῶν πρώτων. Κατ᾽ ἄλλην ἔκφρασιν: Δύναμις Α καλεῖται διπλασία, τριπλασία κ.τ.λ. ἄλλης Β, ὅταν φέρῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον φέρουν δύο, τρεῖς κ.τ.λ. δυνάμεις ἴσαι ἑκάστη πρὸς τὴν Β, ἐνεργοῦσαι ὁμοῦ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

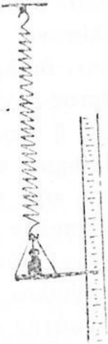
Ποίαν δύναμιν θὰ λάβωμεν ὡς μονάδα, ἵνα πρὸς αὐτὴν συγκρίνομεν τὰς ἄλλας, θὰ ἴδωμεν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ βιβλίου (§ 34). Πρὸς τὸ παρὸν δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκει ἡ γῆ ἓν ὡρισμένον σῶμα λ.χ. μίαν κυβικὴν παλάμην ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου. Ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου, ἡ δὲ σύγκρισις τῶν δυνάμεων πρὸς αὐτήν, ἤτοι ἡ μέτρησις αὐτῶν, γίνεται δι᾽ ὀργάνων καλουμένων ***δυναμομέτρων***.

Τὸ σπουδαιότερον μέρος τῶν δυναμομέτρων εἶναι ἐλατήριον ἐκ χάλυβος. Ἡ λειτουργία τῶν ἁπλουστέρων ἐξ αὐτῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι ἴσαι δυνάμεις φέρουν τὴν αὐτὴν παραμόρφωσιν ἐπὶ χαλυβδίνου ἐλατηρίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου διαδοχικῶς ἐφαρμόζονται. Τὸ Σχ. 3 παριστᾷ ἓν τῶν δυναμομέτρων τούτων. Τὸ ἐλατήριον εἰς αὐτὸ ἔχει καμφθῇ εἰς σχῆμα γωνίας ΒΓΔ. Τὸ ὄργανον φέρει ἀκόμη δύο μετάλλινα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων στερεοῦται μὲν διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ ἐλατηρίου, διέρχεται δὲ ἐλευθέρως δι᾽ ὀπῆς εὑρισκομένης ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σκέλους καὶ καταλήγει εἰς ἄγκιστρον. Τὸ ἓν ἄγκιστρον χρησιμεύει, ἵνα δι᾽ αὐτοῦ ἐξαρτᾶται τὸ ὄργανον ἔκ τινος σταθεροῦ στηρίγματος καὶ τὸ ἄλλο, ἵνα ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐφαρμόζωνται αἱ πρὸς μέτρησιν δυνάμεις. Τὸ δυναμόμετρον βαθμολογεῖται ἐμπειρικῶς ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ κατωτέρου ἀγκίστρου ἐξαρτῶνται διαδοχικῶς βάρη ἴσα πρὸς 1, 2, 3......... χιλιόγραμμα, εἰς τὰς θέσεις δὲ ὅπου τὸ ἀνώτερον σκέλος ΒΓ φθάνει ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τόξου, χαράσσονται γραμμαὶ καὶ σημειοῦνται οἱ ἀριθμοὶ 1,2,3.... χιλιόγραμ. Ἐὰν μεταγενεστέρως δύναμις, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ κατωτέρου ἀγκίστρου, παραμορφώσῃ οὕτω τὸ ἐλατήριον, ὥστε τὸ ὄργανον νὰ δείξῃ 3 χιλιόγραμμα, εἶναι φανερόν, καθ᾽ ἃ προηγουμένως ἀνεφέραμεν, ὅτι ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ ἕλκει τὴν μᾶζαν τῶν 3 Kg, ἀφοῦ ἀμφότεραι διαδοχικῶς ἐνεργήσασαι ἐπὶ τοῦ ὀργάνου ἐπιφέρουν τὴν αὐτὴν παραμόρφωσιν.

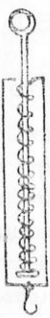


Σχ. 3

Τὸ Σχ. 4 παριστᾷ ἓν ἄλλο λίαν εὐπαθὲς δυναμόμετρον, τὸν ***δι᾿ ἐλατηρίου ζυγόν***. Τὸ σπειροειδὲς ἐλατήριον ἐξ οὗ ἀποτελεῖται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν διαφόρων δυνάμεων τείνεται καὶ δείκτης παρέχει ἀμέσως τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως ἐπὶ κλίμακος βαθμολογηθείσης ὡς προηγουμένως.


Σχ. 4

Ἓν ἄλλο δυναμόμετρον δεικνύει ἐπίσης τὸ Σχ. 5.


Σχ. 5

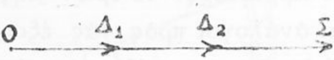
Δι᾿ ὅλα τὰ δυναμόμετρα, τὰ ὁποῖα λειτουργοῦν ὡς ἀνωτέρω, ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Hooke (§ 2), καθ᾿ ὃν αἱ ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις, ἐφ᾿ ὅσον δὲν ὑπερβαίνομεν τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι προεκάλεσαν τὰς παραμορφώσεις. Τοῦτο εὐκολύνει σημαντικῶς τὴν βαθμολογίαν τοῦ ὀργάνου, κυρίως διὰ τὰς ἐνδείξεις ὑποδιαιρέσεων μικροτέρων τῶν χρησιμοποιηθεισῶν διὰ τὴν ἐμπειρικὴν βαθμολογίαν αὐτοῦ. Ὡς δυναμόμετρα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ἄλλαι συσκευαί, τῶν ὁποίων ἡ λειτουργία στηρίζεται ἐπὶ ἄλλων ἀρχῶν. Οὕτω ὁ κοινὸς ζυγὸς εἶναι ἓν δυναμόμετρον.

13. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ἡ πεῖρα ἔδειξεν ὅτι πολλάκις ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται εἴτε ὅταν ἐνεργοῦν ἐπὶ ἑνὸς σώματος πολλαὶ δυνάμεις εἴτε μία μόνη. Ἡ ἐργασία διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἀντικαθιστῶσα δύο ἢ περισσοτέρας ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἐφηρμοσμένας γνωστὰς δυνάμεις παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, καλεῖται ***σύνθεσις δυνάμεων***. Ἡ εὑρισκομένη οὕτω δύναμις καλεῖται ***συνισταμένη***, αἱ δὲ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῆς συνισταμένης καλοῦνται ***συνιστῶσαι***. Ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων, ἤτοι ἡ εὕρεσις τῆς συνισταμένης αὐ-

τῶν, γίνεται διὰ τὴν ἁπλοποίησιν πολλῶν προβλημάτων. Εἶναι μεγάλη εὐκολία νὰ ὁμιλῶμεν περὶ μιᾶς δυνάμεως (συνισταμένης) ἀντὶ νὰ ὁμιλῶμεν περὶ πολλῶν (συνιστωσῶν).

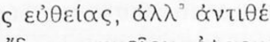
Ἡ ἀντίθετος ἐργασία δηλ. ἡ ἀντικατάστασις μιᾶς δυνάμεως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων καλεῖται *ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως*. Ἤχθημεν εἰς τὴν ἰδέαν τῆς ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων ἐπίσης ἐκ τῆς πείρας. Πολλάκις δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματος, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, κινεῖ αὐτὸ κατ' ἄλλην τινὰ διεύθυνσιν, ὡς λ.χ. ἡ βαρύτης ἐνεργοῦσα ἐπὶ σφαίρας εὑρισκομένης ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κινεῖ αὐτὴν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Τοῦτο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις αὕτη ἐξαφανισθεῖσα ἀντικατεστάθη ὑπὸ ἄλλων δυνάμεων, ἐξ ὧν μία ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως.

14. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΝΕΡΓΟΥΣΩΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ. Α΄. Ἔστωσαν δύο δυνάμεις $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (Σχ. 6) ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ εἶναι δύναμις ἔχουσα τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὴν αὐτὴν διεύθυτσιν καὶ ἔντασιν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρας τῶν δύο δυνάμεις. Οὕτω ἐὰν πρόκειται περὶ τῶν δυνάμεων $ΟΔ_1=2$ χιλιόγραμ. καὶ $ΟΔ_2=4$ χιλιόγρ., ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ θὰ ἔχῃ ἔντασιν $ΟΣ=2+4=6$ χιλιόγρ., σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Ο καὶ διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τῶν συνιστωσῶν.



Σχ. 6

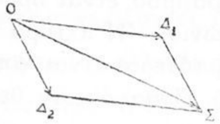
Β΄. Ἐὰν δύο δυνάμεις $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (σχ. 7) ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο καὶ διευθύνσεις κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλ' ἀντιθέτους, ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ ἔχει τὸ ἴδιον σημεῖον ἐφαρμογῆς, διεύθυνσιν τὴν τῆς μεγαλυτέρας καὶ ἔντασιν τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν. Οὕτω ἐὰν εἶναι $ΟΔ_2=5$ χλγ. καὶ $ΟΔ_1=3$ χιλιόγρ., ἡ ΟΣ ἰσοῦται κατ' ἔντασιν πρὸς $5-3=$ $=2$ χιλιόγραμμα.



Σχ. 7

Γ΄. Ἐὰν πολλαὶ δυνάμεις ἐνεργοῦν ἐπὶ ἑνὸς σημείου Ο, ἄλλαι μὲν κατὰ τὴν μίαν διεύθυνσιν, ἄλλαι δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον, συνθέτομεν χωριστὰ τὰς ὁμορρόπους καὶ λαμβάνομεν ὡς συνισταμένας αὐτῶν δύο δυνάμεις, ἀντιθέτου διευθύνσεως ἅς συνθέτομεν κατά τὴν περίπτωσιν Β.

Δ΄. Τὸ σχῆμα 8 δεικνύει μίαν ἄλλην περίπτωσιν. Δύο δυνάμεις $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ σημείου Ο ἔχουν διευθύνσεις, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν (μικροτέραν τῶν 180^0 καὶ μεγαλυτέραν τῶν 0^0). Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων παρίσταται κατ' ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν, ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΟΣ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου μὲ πλευρὰς τὰς δύο δυνάμεις (παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων).



Σχ. 8

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, φέρομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τοῦ σημείου $Δ_1$ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $ΟΔ_2$ καὶ κατόπιν ἐκ τοῦ $Δ_2$ ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν $ΟΔ_1$. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς Σ. Τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ $ΟΔ_1 ΣΔ_2$, ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ ΟΣ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δοθεισῶν δυνάμεων $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$.

Εἰς τὴν τριγωνομετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον, ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς α, β, γ καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτων γωνίας ἀντιστοίχως Α, Β, Γ, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$γ^2 = α^2 + β^2 - 2αβ \text{ συν } Γ.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου λοιπὸν $ΟΔ_1Σ$ (Σχ. 8) ἔχομεν

$$(ΟΣ)^2 = (ΟΔ_1)^2 + (Δ_1Σ)^2 - 2(ΟΔ_1)(Δ_1Σ) \text{ συν } (Ο\widehat{Δ_1}Σ),$$

ἤ, ἐπειδὴ $Δ_1Σ = ΟΔ_2$,

$$(ΟΣ)^2 = (ΟΔ_1)^2 + (ΟΔ_2)^2 - 2(ΟΔ_1)\cdot(ΟΔ_2) \text{συν} (Ο\widehat{Δ_1}Σ) \qquad (17)$$

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $ΟΔ_1Σ$ καὶ $Δ_1ΟΔ_2$ εἶναι παραπληρωματικοὶ καὶ ἑπομένως γων. $ΟΔ_1Σ = 180^0 - $(γων. $Δ_1ΟΔ_2) = 180^0 - φ$, ἔνθα φ παριστᾷ τὴν γωνίαν τῶν δύο δυνάμεων. Ὅθεν ἐὰν εἰς τὴν (17) τὰ ΟΣ, $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ παραστήσωμεν συντόμως διὰ Σ, $Δ_1$, $Δ_2$ καὶ λάβωμεν ἀκόμη ὑπ' ὄψιν ὅτι συν $(180^0 - φ) = -$συν φ ἔχομεν

$$Σ^2 = Δ_1{}^2 + Δ^2{}_2 - 2Δ_1Δ_2 \text{ συν } (180^0 - φ) = Δ_1 + Δ_2{}^2 + 2Δ_1Δ_2 \text{ συν } φ,$$

ἐξ ἧς

$$Σ = \sqrt{Δ_1{}^2 + Δ_2{}^2 + 2Δ_1Δ_2 \text{ συν } φ}. \qquad (18)$$

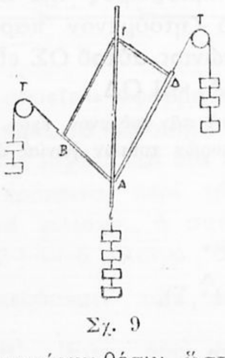
Διὰ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης δυο δυνάμεων, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις ἀποτελοῦν τὴν γωνίαν φ, ὅταν δίδωνται αἱ ἐντάσεις αὐτῶν Δ_1 καὶ Δ_2. Εἰς τὴν περίπτωσιν $\varphi = 90^0$, ἐπειδὴ συν $90^0 = 0$, ἔπεται ὅτι $\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$ (19)

Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος εὑρίσκεται καὶ βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ὡς ἀκολούθως

Ἐὰν ἡ γωνία φ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ὀρθή, τότε καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθαί. Τὸ τρίγωνον $Ο\Delta_1\Sigma$ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον. Ἡ πλευρὰ τούτου $\Delta_1\Sigma$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $Ο\Delta_2$, καθότι ἀμφότεραι εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν $(Ο\Sigma)^2 = (Ο\Delta_1)^2 + (Ο\Delta_2)^2$, ἢ συντόμως

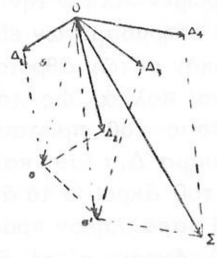
$$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \quad \text{ὅτε} \quad \Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \qquad (19)$$

Τὴν ἀρχὴν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων πειραματικῶς ἀποδεικνύουν δι᾿ ἑνὸς λίαν ἐλαφροῦ ἀρθρωτοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (Σχ. 9). Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΔ ἔχουν μήκη π.χ. 2 καὶ 3 παλαμῶν ἀντιστοίχως (ἢ ἄλλων οἱωνδήποτε μονάδων, αὐθαιρέτως λαμβανομένων). Τὸ παραλληλόγραμμον ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἄκρων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ διὰ νημάτων διερχομένων διὰ τῶν τροχαλιῶν Τ καὶ Τ καὶ φορτισθέντων διὰ βαρῶν ἴσων πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν, ἤτοι βαρῶν ἴσων πρὸς 2 καὶ 3 εἰς αὐθαιρέτους μονάδας. Ἐὰν εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον ἐλαφροῦ στελέχους ΑΓ, συνδεδεμένου ἀρθρωτῶς εἰς Α (μόνον), ἐξαρτηθῇ βάρος 4 μονάδων, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπέρχεται ἰσορροπία ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ στέλεχος, κατακορύφως ἱστάμενον, τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου. Τότε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 4 παλάμας (μονάδας γενικῶς). Τὸ παραλληλόγραμμον δέον νὰ εἶναι λίαν ἐλαφρόν, ὥστε τὸ βάρος αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰ χρησιμοποιηθέντα βάρη νὰ δύναται νὰ παραμεληθῇ.



Σχ. 9

Ἐὰν εἰς ἓν σημεῖον Ο (Σχ. 10) ἐνεργοῦν περισσότεραι τῶν δύο δυνάμεις, αἱ $Ο\Delta_1$, $Ο\Delta_2$, $Ο\Delta_3$, $Ο\Delta_4$, συνθέτομεν πρῶτον δύο ἐξ αὐτῶν λ.χ. τὰς $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$, κατόπιν συνθέτομεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν Οσ μὲ τὴν τρίτην δύναμιν $ΟΔ_3$ καὶ τὴν συνισταμένην αὐτῶν Οσ' μὲ τὴν τετάρτην $ΟΔ_4$ καί, ὅταν πρόκειται περὶ περισσοτέρων τῶν τεσσάρων δυνάμεων, οὕτω πως συνεχίζοντες τὴν ἐργασίαν, εὑρίσκομεν τὴν τελικὴν συνισταμένην ΟΣ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων.



Σχ. 10

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ περιπτώσεις Α καὶ Β τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις τῆς Δ. Ὁ τύπος (18) ἰσχύει καὶ δι' αὐτάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν Α ἡ γωνία φ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ συν φ=1, ὅτε

$$Σ = \sqrt{Δ_1^2 + Δ_2^2 + 2Δ_1Δ_2} = \sqrt{(Δ_1 + Δ_2)^2} = Δ_1 + Δ_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν Β ἡ φ=180° καὶ συν φ=−1,

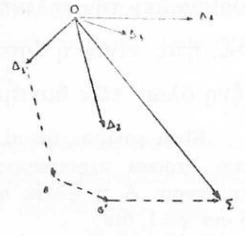
ὅτε $Σ = \sqrt{Δ_1^2 + Δ_2^2 - 2Δ_1Δ_2} = \sqrt{(Δ_2 - Δ_1)^2} = Δ_2 - Δ_1.$

* 15. ΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΩΣ ΑΝΥΣΜΑΤΑ. Εἰς τὸ § 11 ἀνεφέραμεν ὅτι αἱ δυνάμεις παρίστανται δι' ἀνυσμάτων καὶ ἐκεῖ ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀνύσματος (διανύσματος). Δυνάμεθα συντόμως νὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ δύναμις εἶναι ἄνυσμα. Εἰδικὸς κλάδος τῶν μαθηματικῶν ἀσχολεῖται μὲ τοὺς κανόνας ὑπολογισμοῦ, ἀναφερομένου εἰδικῶς εἰς τὰ ἀνύσματα, καλούμενος Ἀνυσματικὸς (ἢ Διανυσματικὸς) Λογισμός.

Εἰς τὸν ἀνυσματικὸν λογισμὸν γεωμετρικὸν ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (Σχ. 8) καλεῖται ἕτερον ἄνυσμα ΟΣ, τὸ ὁποῖον κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν παρέχεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰ δοθέντα ἀνύσματα. Ἀλλὰ τὸ ἄνυσμα ΟΣ δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος $ΟΔ_1$ δηλ. τοῦ σημείου $Δ_1$, φέρομεν ἄνυσμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄλλο ἄνυσμα $ΟΔ_2$, τὸ $Δ_1Σ$. Ἐὰν ἑνώσωμεν τώρα τὰ σημεῖα Ο καὶ Σ, λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα ΟΣ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δοθέντων.

Τὸ γεωμετρικὸν ὅθεν ἄθροισμα τῶν δύο ἀνυσμάτων $ΟΔ_1$

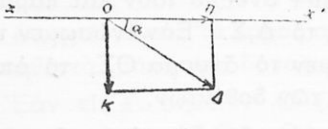
καὶ $O\Delta_2$, ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον, ἐφ' ὅσον ταῦτα εἶναι δυνάμεις, οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἡ συνισταμένη αὐτῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γεωμετρικὸν αὐτῶν ἄθροισμα. Τοῦτο εἰς ἣν περίπτωσιν τὰ ἀνύσματα εἶναι πολλά, ὡς τὰ $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, $O\Delta_3$, $O\Delta_4$ (Σχ. 11), ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ πρώτου ἀνύσματος, ἔστω τοῦ $O\Delta_1$, φέρομεν τὸ ἄνυσμα $\Delta_1\sigma$ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $O\Delta_2$, ἀκολούθως ἐκ τοῦ ἄκρου σ τὸ ἄνυσμα σσ', ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $O\Delta_3$ καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου σ' τὸ ἄνυσμα σ'Σ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $O\Delta_4$. Συνδέοντες τὸ Ο μὲ τὸ σημεῖον Σ λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα ΟΣ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Ο μὲ τὰ δοθέντα



Σχ. 11

καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐὰν αἱ $O\Delta_1$, $O\Delta_2$, $O\Delta_3$ καὶ $O\Delta_4$ εἶναι δυνάμεις, ἡ ΟΣ εἶναι συνισταμένη αὐτῶν.

16. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ. Ἐξ ὅσων ἀνεφέραμεν περὶ τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων καθίσταται εὐνόητον, ὅτι μίαν οἱανδήποτε δύναμιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένην ἄλλων δυνάμεων, δύο ἢ περισσοτέρων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁμορρόπων, ἢ ἀντιρρόπων ἢ σχηματιζουσῶν γωνίαν. Ἡ εὕρεσις τῶν συνιστωσῶν μιᾶς δυνάμεως, θεωρουμένης ὡς συνισταμένης αὐτῶν, καλεῖται ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως. Ἐπειδὴ μία δύναμις δύναται νὰ παριστᾷ τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων διαφόρου ἐντάσεως καὶ διευθύνσεως, εἶναι εὐνόητον ὅτι διὰ νὰ γίνῃ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀπαραίτητον νὰ δοθοῦν μερικὰ στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὁποίων νὰ στηριχθῇ αὐτή. Οὕτω ἐὰν ἐπὶ τοῦ Ο δυναμένου νὰ κινηθῇ μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας χχ', ἐνεργῇ ἡ δύναμις ΟΔ, αὐτὴ ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, τὴν ΟΠ, ἥτις κινεῖ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν χχ' καὶ τὴν ΟΚ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χχ'



Σχ. 12

καὶ ἡ ὁποία οὐδεμίαν ἐπιφέρει κίνησιν. Εἶναι δὲ ἡ ΟΚ κάθετος ἐπὶ τὴν χχ', διότι ἄν δὲν ἦτο τοιαύτη, θὰ ἀνελύετο αὕτη πάλιν εἰς δύο συνιστώσας κτλ. Ὥστε ἐνταῦθα ἡ ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνεφέρθησαν προηγουμένως.

Ἐκ τοῦ Σχ. 12 καθίσταται φανερόν, ὅτι εἰς τὴν ἰδιαιτέραν ταύτην περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ δύναμις ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$(\text{ΟΠ})=(\text{ΟΔ}).\ \text{συν}\ \alpha \quad \text{καὶ} \quad (\text{ΟΚ})=(\text{ΟΔ}).\ \text{ημα}. \qquad (20)$$

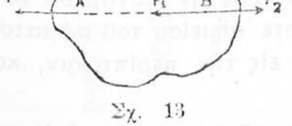
17. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ὅταν πολλαὶ δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ ἑνὸς σημείου καὶ ἰσορροποῦν, ἤτοι ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, τότε δυνάμεθα οἱανδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ θεωρῶμεν ὡς ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν λοιπῶν δυνάμεων.

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ.

18. ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΕΩΣ. Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἑνὸς στερεοῦ σώματος ἐφαρμόζωνται δύο ἴσαι δυνάμεις, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ εἶναι ἀντίθετοι, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα δὲν θὰ κινηθῇ. Τοῦτο διδάσκει ἡ πεῖρα. Ἐπὶ τῆς ἐμπειρικῆς ταύτης ἀρχῆς στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἑξῆς θεωρήματος :

Δυνάμεθα μίαν δύναμιν, ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τινος σημείου στερεοῦ σώματος, νὰ μεταφέρωμεν εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς εὐθείας, ἥν ὁρίζει ἡ διευθυνσίς της, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμά της, ἀρκεῖ τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ ἀποτελῇ σημεῖον τοῦ στερεοῦ σώματος ἢ νὰ εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένον μὲ αὐτό.

Ἀπόδειξις : Ἔστω ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Α (Σχ. 13) ἑνὸς στε-

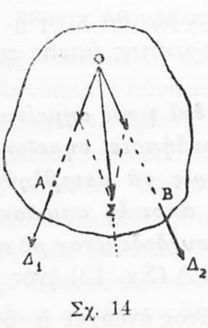


Σχ. 13

ρεοῦ σώματος ἐνεργεῖ ἡ δύνα- F. Εἰς ἕν ἄλλο σημεῖον Β τοῦ σώματος, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥν ὁρίζει ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἐνεργούσας δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις F_1 καὶ F_2, κειμένας ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς τὴν τῆς F, χωρὶς μὲ τὴν ὕπαρξιν τῶν δυνάμεων τούτων νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως F, ἐπειδὴ αἱ F_1 καὶ F_2 ἀναιροῦν ἀλλήλας. Ἀλλά, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἐμπειρικὴν ἀρχήν, αἱ F_1 καὶ F_2 ἐξουδετεροῦται ἀμοιβαίως καὶ δυνάμεθα νὰ τὰς ἀφαιρέσωμεν χωρὶς ἡ κατάστασις τοῦ σώματος νὰ μεταβληθῇ, ὅτε ἀπομένει μόνον ἡ BF_1, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἔντασιν καὶ τὴν διεύθυνσιν κοινὰς μὲ τὴν AF, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της εἶναι σημεῖον τοῦ στερεοῦ ἢ συνδέεται ἀναποσπάστως μετ᾽ αὐτοῦ καὶ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ ἡ AF.

19. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ. Ἡ σύνθεσις δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον εἶναι, ὡς εἴδομεν, πάντοτε δυνατὴ καὶ περὶ αὐτῆς ἠσχολήθημεν ἀνωτέρω. Κατὰ τὴν σύνθεσιν ὅμως δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς διάφορα σημεῖα στερεοῦ σώματος διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις: α) ὅταν αἱ δυνάμεις κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ὁμοεπίπεδοι) καὶ δὲν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, β) ὅταν εἶναι παράλληλοι καὶ γ) ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι οἱαιδήποτε.

20. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ. Ἔστωσαν τοιαῦται δυνάμεις αἱ $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$ ἐφηρμοσμέναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ στερεοῦ (Σχ. 14). Αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ δυνάμεις, θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο, ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὰς δυνάμεις εἰς τό σημεῖον Ο, ὅτε ἡ σύνθεσίς των γίνεται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ ΟΣ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων. Ταύτην δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀκολούθως ἐπὶ οἱουδήποτε σημείου τοῦ σώματος, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΣ, ἰδίως εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν τὸ Ο κεῖται ἐκτὸς τοῦ στερεοῦ.

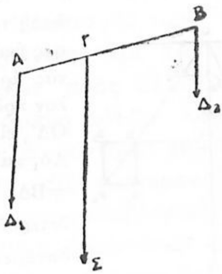


Σχ. 14

Ἡ σύνθεσις κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον γίνεται ἐπίσης: 1) ὅταν πολλαὶ δυνάμεις εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ μὴ παράλληλοι, ὅτε συνθέτομεν πρῶτον δύο, τὴν συνισταμένην αὐτῶν μὲ τρίτην κ.ο.κ., 2) ὅταν ἐκ τριῶν λ.χ. δυνάμεων δύο εἶναι ὁμοεπίπεδοι, ἡ δὲ τρίτη εἶναι ὁμοεπίπεδος πρὸς τὴν συνισταμένην αὐτῶν, καὶ 3) ὅταν πολλαὶ δυνάμεις δὲν εἶναι μὲν ὁμοεπίπεδοι, ἀλλὰ αἱ προεκτάσεις αὐτῶν συναντῶνται ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

21. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2 παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἐφηρμοσμέναι εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β στερεοῦ σώματος (Σχ. 15). Ἀποδεικνύεται (βλ. κατωτέρω), ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται ἔχουν συνισταμένην ΓΣ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὰς δοθείσας, τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν, ἤτοι $\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$ (21), τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τέμνει ταύτην εἰς τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας δυνάμεις, ἤτοι

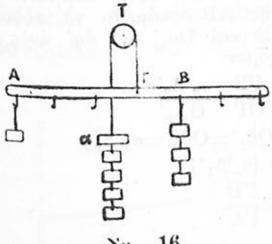
$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Gamma B}{\Gamma A}. \quad (22)$$



Σχ. 15

Τ' ἀνωτέρω ἀποδεικνύονται καὶ πειραματικῶς καὶ θεωρητικῶς.

Διὰ τὴν πειραματικὴν ἀπόδειξιν χρησιμεύει ῥάβδος, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ διὰ νήματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται τὴν αὔλακα παγίας τροχαλίας Τ καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ἓν βάρος α, ἴσον πρὸς τὸ βάρος τῆς ῥάβδου, διὰ νὰ ἰσορροπῇ αὐτήν. Ἡ ῥάβδος φέρει κατ' ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσας ἄγκιστρα, διὰ νὰ ἐξαρτῶνται ἐξ αὐτῶν διάφορα βάρη. Ἐάν, ὅπως τὸ Σχ. 16 δεικνύει, εἰς τὸ πρῶτον πρὸς



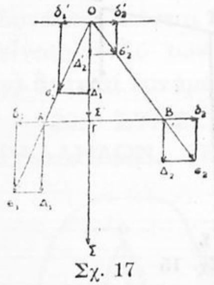
Σχ. 16

τὰ δεξιὰ ἄγκιστρον Β ἐξαρτήσωμεν 3 ἴσα βάρη, τότε πρέπει εἰς τὸ τρίτον π.χ. πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄγκιστρον Α νὰ ἐξαρτήσωμεν ἓν ὅμοιον βάρος καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος, ὁμοῦ μὲ τὸ βάρος α, πρέπει νὰ θέσωμεν τέσσαρα, ἴσα πρὸς τὰ ἄλλα, βάρη, ἵνα τὸ ὅλον σύστημα ἰσορροπῇ καὶ ἡ ράβδος ἵσταται ὁριζοντία. Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἀλήθεια τῶν σχέσεων (21) καὶ (22):

$$4=1+3 \text{ καὶ } 1:1=3:3.$$

Ἡ δύναμις τῶν 4 βαρῶν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο παραλλήλων δυνάμεων (§ 17).

Θεωρητικῶς εὑρίσκεται ἡ συνισταμένη ΓΣ δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων $ΑΔ_1$ καὶ $ΒΔ_2$ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸ § 18. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ θεωρήσωμεν ἐφαρμοζομένας τὰς δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις $Αδ_1$ καὶ $Βδ_2$, κειμένας ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ταύτης, τὸ σύστημα δὲν ἀλλάσσει κατάστασιν. Συνθέτομεν τὰς $Δ_1$ καὶ $δ_1$ καθὼς τὰς $Δ_2$ καὶ $δ_2$ καὶ εὑρίσκομεν ὡς συνισταμένας αὐτῶν τὰς $Ασ_1$ καὶ $Βσ_2$ ἀντιστοίχως. Αὗται εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ ὄχι παράλληλοι. Μεταφέρομεν αὐτὰς εἰς τὸ σημεῖον Ο, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 καὶ ταύτας, δηλαδὴ τὰς $Οσ_1'$ καὶ $Οσ_2'$ ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας ἑκάστην κατὰ τὰς εὐθείας ΟΓ, παράλληλον πρὸς τὰς ἀρχικὰς δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$, καὶ ΟΧ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ τῆς $Οσ_1'$ συνιστῶσαι $Οδ'_1$ καὶ $ΟΔ'_1$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς $Αδ_1$ καὶ $ΑΔ_1$, ὡς ἐπίσης εἶναι $Οδ'_2=Βδ_2$ καὶ $ΟΔ_2'=ΒΔ_2$. Αἱ $Οδ'_1$ καὶ $Οδ_2'$ ὡς ἴσαι καὶ ἀντίθετοι ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως, ὥστε ἀπομένουν μόνον αἱ δυνάμεις $ΟΔ_1'$, καὶ $ΟΔ_2'$ αἱ ὁποῖαι, ὡς ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ ὡς κείμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς



Σχ. 17

εὐθείας, δίδουν τὴν συνισταμένην ΟΣ', τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$ΟΣ'=Δ'_1+Δ'_2=Δ_1+Δ_2. \qquad (21)$$

Τὴν συνισταμένην ΟΣ' μεταφέρομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Τότε αὕτη λαμβάνει τὴν θέσιν ΓΣ. Τὴν θέσιν τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν θεωροῦντες τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΓ καὶ $Οσ_1'\,Δ_1'$ ἀφ' ἑνὸς καὶ ΟΓΒ καὶ $ΟΔ_2'\,σ'_2$ ἀφ' ἑτέρου· Ἐκ τούτων ἔχομεν:

$$\frac{ΑΓ}{ΟΓ}=\frac{σ_1'Δ_1'}{ΟΔ_1'}, \qquad \frac{ΓΒ}{ΟΓ}=\frac{σ_2'Δ_2'}{ΟΔ_2'}.$$

ἤ, ἐπειδὴ $ΟΔ_1'=ΑΔ_1$, $ΟΔ_2'=ΒΔ_2$ καὶ $σ_1'Δ_1'=Οδ_1'=Οδ_2'=σ_2'Δ_2'$,

$$(ΑΓ)\,(ΑΔ_1)=(ΟΓ)\,(σ_1'Δ_1'), \quad (ΓΒ)\,(ΒΔ_2)=(ΟΓ)\,(σ_1'Δ_1').$$

Ὅθεν $\quad (ΑΓ)\,(ΑΔ_1)=(ΓΒ)\,(ΒΔ_2)$ ἢ $\dfrac{ΑΔ_1}{ΒΔ_2}=\dfrac{ΓΒ}{ΓΑ}$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

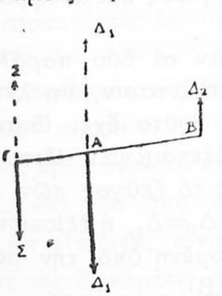
$$\frac{Δ_1}{Δ_2}=\frac{ΓΒ}{ΓΑ},$$

ἥτις εἶναι ἡ σχέσις (22)

Ἡ ΓΣ, ὡς προκύπτει ἐξ ὅσων ἀνωτέρω ἐξετέθησαν, εἶναι προσέτι παράλληλος πρὸς τὰς $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ καὶ ὁμόρροπος.

Ἐὰν ζητῆται ἡ συνισταμένη πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς πολλὰ σημεῖα ἑνὸς στερεοῦ σώματος, εὑρίσκομεν αὐτὴν συνθέτοντες δύο ἐξ αὐτῶν, τὴν συνισταμένην τούτων πρὸς τρίτην κ.ο.κ. Ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε σειρὰν καὶ ἂν συνθέσωμεν αὐτάς. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων.*** Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (22), διὰ τῆς ὁποίας καθορίζεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης παραλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει, τὸ ὁποῖον νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν δυνάμεων ἐν τῷ χώρῳ, ἕπεται ὅτι ἡ θέσις τοῦ κέντρου τῶν παραλλήλων δυνάμεων ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἐντάσεως αὐτῶν καὶ τῆς θέσεως τῶν σημείων τῆς ἐφαρμογῆς των. Ὅθεν, ἐὰν αἱ δυνάμεις στραφοῦν ὅλαι συγχρόνως περὶ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των, μένουν ὅμως παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας καὶ διατηροῦν τὰς ἐντάσεις των, ἡ συνισταμένη αὐτῶν λαμβάνει καὶ αὕτη τὴν νέαν των διεύθυνσιν, ἀλλὰ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ὡς πρότερον. Τέλος ἂν αἱ ἐντάσεις τῶν παραλλήλων δυνάμεων μεταβληθοῦν κατὰ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ κέντρον τῶν παραλλήλων τούτων δυνάμεων δὲν ἀλλάσσει θέσιν, ἐπειδὴ εἰς τὴν σχέσιν (22) εἰσέρχεται ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων τῶν συντιθεμένων δυνάμεων καὶ ὄχι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῶν.

22. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ. Ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ (Σχ. 18) ἔχουν ὡς συνισταμένην τὴν Σ, ἥτις ἔχει ἔντασιν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα



Σχ 18

ἐφαρμογῆς Α καὶ Β τῶν συνιστωσῶν, πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας οὕτως, ὥστε

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A}. \qquad (26)$$

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν ἐπὶ τῶν σημείων Β,Γ στερεοῦ ἐφηρμοσμέναι αἱ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις $B\Delta_2$ καὶ $\Gamma\Sigma_1'$. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν $A\Delta_1'$ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς αὐτὰς καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$A\Delta_1'=\Gamma\Sigma'+B\Delta_2 \qquad (23)$$

$$\frac{AB}{\Gamma A}=\frac{\Gamma\Sigma'}{B\Delta_2}. \qquad (24)$$

Ἂς φέρωμεν τὴν $A\Delta_1$ ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς $A\Delta_1'$. Αὕτη ἰσορροπεῖ τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων $\Gamma\Sigma'$ καὶ $B\Delta_2$. Κατὰ τὸ § 17 ἀφοῦ αἱ τρεῖς δυνάμεις $\Gamma\Sigma'$, $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$ ἰσορροποῦν, ἡ $\Gamma\Sigma'$ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἄλλων. Ἂς φέρωμεν τὴν ΓΣ ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς $\Gamma\Sigma'$. Αὕτη θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$. Ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων (23) καὶ (24), ἀντικαθιστῶντες τὰς $\Gamma\Sigma'$ καὶ $A\Delta_1'$ διὰ τῶν ἴσων των ΓΣ καὶ $A\Delta_1$, ἔχομεν

$$\Gamma\Sigma=A\Delta_1-B\Delta_2 \qquad (25)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{AB}{\Gamma A}=\frac{\Gamma\Sigma}{B\Delta_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Gamma\Sigma}=\frac{\Gamma A}{B\Delta_2}.$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{\Gamma\Sigma}=\frac{\Gamma A}{B\Delta_2}=\frac{AB+\Gamma A}{\Gamma\Sigma+B\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{A\Delta_1}.$$

Ὅθεν

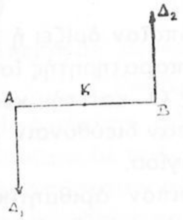
$$\frac{A\Delta_1}{B\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A}. \qquad (26)$$

Ἐὰν ἐπὶ σώματος ἐνεργοῦν πολλαὶ παράλληλοι δυνάμεις, ἄλλαι ὁμόρροποι καὶ ἄλλαι ἀντίρροποι, συνθέτομεν τὰς δυνάμεις τὰς ἐχούσας τὴν αὐτὴν φορὰν κεχωρισμένως καὶ οὕτω λαμβάνομεν δύο συνισταμένας, παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, τὰς ὁποίας συνθέτομεν ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις εἶναι ἴσαι κατ' ἔντασιν, θὰ λέγωμεν ὅτι πρόκειται περὶ ***ζεύγους δυνάμεων***. Τοῦτο ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ θὰ τὸ ἐξετάσωμεν ἰδιαιτέρως.

23. ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Εἰς τὸ ζεῦγος τῶν δυνάμεων δὲν ὑπάρχει συνισταμένη. Ἐπειδὴ $\Delta_1=\Delta_2$, ἡ ἐξίσωσις (25) $\Sigma=\Delta_1-\Delta_2$ δίδει $\Sigma=0$, ἡ δὲ (26), γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφὴν (βλ. Σχ. 18) $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}=\dfrac{\Gamma A+AB}{\Gamma A}$ ἢ $\Gamma A=\dfrac{\Delta_2\,(AB)}{\Delta_1-\Delta_2}$, δίδει $(\Gamma A)=\infty$ Δὲν

εἶναι λοιπὸν δυνατὴ ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων ἑνὸς ζεύγους.

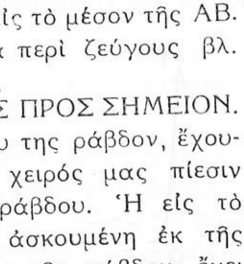


Σχ. 19

Τὸ ζεῦγος ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἐπιφέρῃ τὴν μετατόπισιν τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ. Ὡς ἀποτέλεσμα ἔχει τὴν περιστροφὴν τοῦ σώματος περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Περισσότερα περὶ ζεύγους βλ. εἰς τὸ §. 25.

24. ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ.

Ἐὰν κρατῶμεν διὰ τοῦ κατωτέρου ἄκρου της ῥάβδον, ἔχουσαν κατακόρυφον θέσιν, δεχόμεθα ἐπὶ τῆς χειρός μας πίεσιν πρὸς τὰ κάτω ἴσην πρὸς τὸ βάρος τῆς ῥάβδου. Ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ῥάβδου (ὁμοιομεροῦς οὔσης) ἀσκουμένη ἐκ τῆς ἕλξεως τῆς γῆς δύναμις, δηλαδὴ τὸ βάρος τῆς ῥάβδου, ἔχει διεύθυνσιν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως (χειρός). Ὅταν ἀπομακρύνωμεν ὅμως τὴν ῥάβδον τῆς κατακορύφου θέσεώς της καὶ τὴν φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν 2 (Σχ. 20), τότε αἰσθανόμεθα κάτι διάφορον ἢ προηγουμένως. Ἔχομεν τὴν αἴσθησιν ὅτι ἡ ῥάβδος τείνει νὰ στραφῇ περὶ τὴν χεῖρα μας (σημεῖον Ο). Ἡ τάσις τῆς περιστροφῆς γίνεται μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ κλίσις τῆς ῥάβδου αὐξηθῇ ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, ὅσον ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως Β

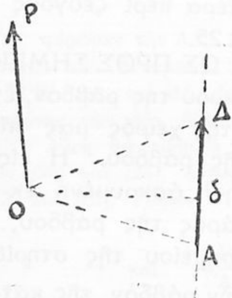


Σχ. 20

(βάρους) ἀπὸ τοῦ Ο γίνεται μεγαλυτέρα. Ἐκ τοιούτων παρατηρήσεων φερόμεθα εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς στατικῆς ῥοπῆς δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. Ὅταν ὁμιλῶμεν περὶ ῥοπῆς μιᾶς δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον ἐννοοῦμεν μίαν τάσιν περιστροφῆς τοῦ σώματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ αὕτη, περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο, ἥτις, ὡς εἴπομεν, εἶναι τοσοῦτον μεγαλυτέρα, ὅσον ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ σημείου αὐξάνεται. Ἡ ῥοπὴ παρίσταται δι᾽ ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο, μῆκος ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου, ἤτοι

$$P = \Delta . \, O\delta), \qquad (27)$$

διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ ΑΔ καὶ τὸ σημεῖον Ο, φορὰν δὲ τοιαύτην, ὥστε παρατηρητὴς ἱστάμενος κατὰ τὸ ΟΡ, ἤτοι ἔχων τοὺς πόδας εἰς Ο καὶ τὴν κεφαλὴν εἰς Ρ, νὰ βλέπῃ τὴν δύναμιν ΑΔ ἔχουσαν διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.



Σχ. 21

Ἡ ροπὴ λοιπὸν ἀριθμητικῶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΔ. Γίνεται ἴση πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο. Ἐὰν ἡ δύναμις ΑΔ μετατεθῇ εἰς ἄλλην διεύθυνσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζει αὕτη, συμφώνως πρὸς τὸ § 18, ἡ ροπὴ αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο δὲν μεταβάλλεται, ὡς εὐκόλως ἐννοεῖ τις.

Τὴν ἀπόστασιν Οδ τῆς δυνάμεως ΑΔ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο καλοῦμεν ***βραχίονα*** τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

25. ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ. Ἔστω τὸ ζεῦγος τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2(Σχ. 19). Ἐπειδὴ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὰς δυνάμεις ὁπουδήποτε ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν ὁρίζουν, παριστῶμεν εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο τὸ ζεῦγος οὕτως, ὥστε αἱ Δ_1 καὶ Δ_2 νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ζεῦγος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ θέτῃ τὸ σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται, εἰς περιστροφικὴν κίνησιν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ζεύγους, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Κ, τοῦ κειμένου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐξ ὅσων περὶ ροπῆς ἐξετέθησαν, δύναταί τις νὰ θεωρήσῃ τὴν περιστροφὴν τοῦ σώματος περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον ὡς ὀφειλομένην εἰς τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Κ. Αἱ ροπαὶ αὗται εἶναι

τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ δύνανται νὰ προστεθοῦν, ὅτε ἡ ὁλικὴ ροπὴ ἀμφοτέρων εἶναι

$$P = \Delta_1 (AK) + \Delta_2 (KB).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta_1 = \Delta_2$ καὶ $AK + KB = AB$, ἕπεται ὅτι

$$P = \Delta_1 (AK + KB) = \Gamma_1 (AB).$$

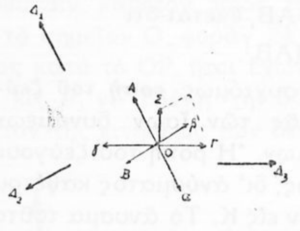
Ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη τιμὴ καλεῖται συντόμως *ροπὴ τοῦ ζεύγους*, ἰσοῦται δὲ πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν ἴσων δυνάμεων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων. Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους παρίσταται, ὅπως καὶ ἡ ροπὴ δυνάμεως, δι' ἀνύσματος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ, ἐφηρμοσμένον εἰς K. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο καλεῖται καὶ *ἄξων τοῦ ζεύγους.*

Ὅπως μία δύναμις δύναται νὰ μετατεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας της εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ σώματος, χωρὶς τὸ ἀποτέλεσμά της νὰ μεταβληθῇ, οὕτω καὶ πᾶν ζεῦγος ἀποδεικνύεται ὅτι δύναται νὰ μετακινηθῇ καθ' οἱονδήποτε τρόπον, ἤτοι νὰ στραφῇ ἢ μετατεθῇ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του ἢ ἀκόμη καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἀρχικόν του ἐπίπεδον, χωρὶς τὸ ἀποτέλεσμά του νὰ μεταβληθῇ.

Ἡ παράστασις τῶν ζευγῶν διὰ τῶν ἀξόνων των ἐπιτρέπει τὴν σύνθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ζευγῶν, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ ἑνὸς στρεπτοῦ σώματος. Συνθέτοντες ζεύγη εὑρίσκομεν ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ αὐτά. Ἡ σύνθεσις τῶν ζευγῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς συνθέσεως τῶν ἀξόνων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ζεύγη δύνανται νὰ μετατεθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των ἢ ἐπὶ ἄλλου παραλλήλου ἐπιπέδου, ἡ σύνθεσις τῶν ἀξόνων των, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ γεωμετρικοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος, εἶναι πάντοτε δυνατή, ἐπειδὴ δυνάμεθα δι' αὐτῶν τῶν μετακινήσεων νὰ καθιστῶμεν αὐτοὺς ἔχοντας ὡς ἀρχὴν τὸ αὐτὸ σημεῖον.

26. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Τώρα ἂς θεωρήσωμεν τὰς δυνάμεις $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, ἐνεργούσας ἐπὶ διαφόρων σημείων ἑνὸς στερεοῦ καὶ ἐχούσας τοιαύτας διευθύνσεις, ὥστε οὔτε παράλληλοι νὰ εἶναι, οὔτε νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Δὲν εἶναι δυνατὴ τότε ἡ σύνθεσις αὐτῶν κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ § 20. Διὰ νὰ συνθέσωμεν αὐτὰς ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τυχόντος σημείου O τοῦ στερεοῦ ἐνεργούσας 6 δυνάμεις, A, α, B, β, Γ, γ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο πρῶται εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὴν Δ_1, μεταξύ των ἀντίθετοι, αἱ B, β, Γ, γ ἀντιστοίχως παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὰς Δ_2 καὶ Δ_3, ἀντίθετοι δὲ μεταξύ των ἀνὰ δύο. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις Δ_1 καὶ α ἀποτελοῦν

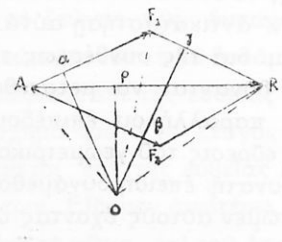
ζεῦγος, ὡς καὶ Δ_2, β καὶ Δ_3, γ ἕπεται ὅτι ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ἐφαρμόζονται νῦν τρία ζεύγη καὶ αἱ δυνάμεις Α, Β, Γ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Ο. Αἱ δυνάμεις αὗται, ὡς ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς συντίνενται εὐκόλως καὶ δίδουν ὡς συνισταμένην αὐτῶν τὴν ΟΣ. Ἀλλὰ καὶ τὰ ζεύγη ἀντικαθιστάμενα διὰ τῶν ἀξόνων των συντίθενται, ὡς ἐξετέθη εἰς τὸ § 25, καθότι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὰ ζεύγη οὕτως, ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ ἔχουν ἀρχὴν τὸ Ο. Ἡ σύνθεσις ἑπομένως δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων ἐνεργουσῶν ἐπὶ διαφόρων σημείων ἑνὸς στερεοῦ, μὴ ὁμοεπιπέδων, δίδει ὡς ἀποτέλεσμα μίαν συνισταμένην δύναμιν καὶ ἓν συνιστάμενον ζεῦγος.



Σχ. 22

Ἐὰν ἡ συνισταμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ σύστημα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων ἰσοδυναμεῖ πρὸς ζεῦγος. Ἐὰν ἐπίσης ἡ συνισταμένη δύναμις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ συνισταμένου ζεύγους, τότε μετακινοῦμεν τὸ ζεῦγος τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε ἡ συνισταμένη δύναμις νὰ ἀποκτήσῃ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς τῶν δύο δυνάμεων τοῦ ζεύγους. Διὰ δύο συνθέσεων τὸ σύστημα τῆς δυνάμεως ταύτης καὶ τοῦ ζεύγους ἀντικαθίσταται ἀπὸ μίαν συνισταμένην δύναμιν.

27. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ἢ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ Varignon [1]. Ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης δυνάμεων ὡς πρὸς ἓν σημεῖον Ο, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ὅταν τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων ἐκτὸς τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αὗται, πρὸς τὴν διαφορὰν δὲ τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν, ὅταν τὸ Ο κεῖται μεταξὺ τῶν δυνάμεων τούτων.



Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (Σχ. 23) θὰ ἔχωμεν:

$$R\,(O\rho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta) \quad (28)$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν (Σχ. 24):

$$R\,(O\rho) = F_2\,(O\beta) - F_1\,(O\alpha). \quad (29)$$

Ἀπόδειξις: 1) Ἐκ τοῦ σχήματος (23) φαίνεται ὅτι διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων τριγώνων, ὅταν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, OF_1 καὶ OR, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{ἐμβ. } OAR = \text{ἐμβ. } OAF_1 + \text{ἐμβ. } OF_1R - \text{ἐμβ. } F_1RA,$$

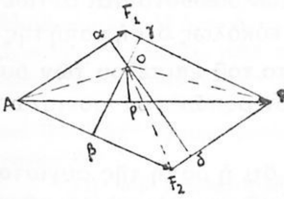
ἤτοι: $$\frac{1}{2} R\,(O\rho) = \frac{1}{2} F_1\,(O\alpha) + \frac{1}{2} F_2\,(O\gamma) - \frac{1}{2} F_2\,(\beta\gamma),$$

---

(1) Pierre Varignon (*1654–1722*), *γάλλος μαθηματικός.*

$$\text{ἢ} \quad R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta + \beta\gamma) - F_2\,(\beta\gamma),$$
$$\text{ὅτε} \quad R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha) + F\,(O\beta).$$

2) Ἐκ τοῦ σχήματος (24) φαίνεται ἐπίσης ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις :



$$\text{Ἐμβ. } OAR = \text{ἐμβ. } OAF_2 + \text{ἐμβ. } OF_2R - \text{ἐμβ. } ARF_2$$

ἤτοι

$$\frac{1}{2} R\,(O\varrho) = \frac{1}{2} F_2\,(O\beta) + \frac{1}{2} F_1\,(O\delta) - \frac{1}{2} F_1\,(\alpha\delta)$$

Σχ. 24

$$\text{ἢ} \quad R\,(O\varrho) = F_2\,(O\beta) + F_1\,(O\delta) - F_1\,(O\alpha + O\delta),$$
$$\text{ὅτε} \quad R\,(O\varrho) = F_2\,(O\beta) - F_1\,(O\alpha).$$

3) Ἐὰν τὸ σημεῖον O (κέντρον τῶν ῥοπῶν) κεῖται ἐπὶ τῆς συνισταμένης, ὅτε $O\varrho = 0$, τότε ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει

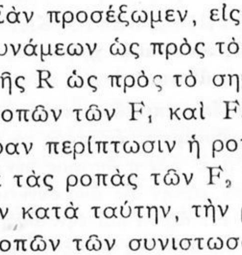
$$F_1\,(O\alpha) = F_2\,(O\beta).$$

Ἐὰν προσέξωμεν, εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ O ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ ἡ ῥοπὴ τῆς R ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν F_1 καὶ F_2 πρὸς τὸ ἴδιον σημεῖον, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ῥοπὴ τῆς F_1 δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὰς ῥοπὰς τῶν F_2 καὶ R ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἔχομεν κατὰ ταύτην, τὴν ῥοπὴν τῆς R ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν.

Ἐὰν πρόκειται περὶ δυνάμεων παραλλήλων, τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν ἰσχύει ἐπίσης. Εἰς τὸ σχ. 25 αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$R\,(O\rho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta).$$

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ.



Ἐπειδὴ $R = F_1 + F_2$, ἔπεται :

$$R\,(O\varrho) = F_1\,(O\varrho) + F_2\,(O\varrho)$$
$$\text{ἢ } R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha + \alpha\varrho) + F_2\,(O\beta - \varrho\beta) =$$
$$= F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta) + F_1\,(\alpha\varrho) - F_2\,(\varrho\beta) \tag{30}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν (22) εἶναι :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Gamma B}{A\Gamma}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΑΓ, αρ καὶ ΓΒ, ρβ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ αβ, ὡς κείμενα μεταξὺ παραλλήλων συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\frac{\varrho\beta}{\alpha\varrho} = \frac{\Gamma B}{A\Gamma}, \qquad \text{ἔπεται ὅτι}$$

F_1 (αρ) = F_2 (ρβ), ὁπότε ἡ σχέσις (30) γίνεται R (Ορ) = F_1 (Οα) + F_2 (Οβ).

Ἐὰν τὸ κέντρον τῶν ροπῶν Ο κεῖται μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ὅτε αἱ ροπαὶ τῶν δύο δυνάμεων διευθύνονται ἀντιθέτως τῆς ροπῆς τῆς τρίτης, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης δυνάμεων ὡς πρὸς ἕν σημεῖον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Εἰς ἥν δὲ περίπτωσιν ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων δίδει μίαν συνισταμένην καὶ ἕν συνιστάμενον ζεῦγος (§ 26), τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων πρὸς σημεῖον ἰσοῦται πρὸς τὴν ροπὴν τῆς συνισταμένης καὶ τὴν ροπὴν τοῦ ζεύγους.

28. ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ. Ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ἐν χρήσει εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἥν τὸ σῶμα, εἶναι στρεπτὸν περὶ ἄξονα.

Ἔστω ἐν πρώτοις ὅτι ἡ δύναμις κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα. Ἡ ζητουμένη ροπὴ εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλ' ἐὰν ἡ δύναμις δὲν κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἡ δευτέρα ὡς παράλληλος τῷ ἄξονι τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸ σῶμα ὄχι περὶ τὸν ἄξονα, ἀλλὰ νὰ στρέψῃ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἄξονα καὶ δι' αὐτὸ ἡ ροπή της ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἡ ροπὴ τῆς πρώτης τῶν συνιστωσῶν, ὡς κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, εὑρίσκεται εὐκόλως, συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην. Δυνάμεθα, ὅθεν, γενικῶς νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ἡ ροπὴ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἄξονος.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν (§ 27) ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ροπὰς δυνάμεων ὡς πρὸς ἄξονα.

Τέλος χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε καὶ ἡ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἐπίπεδον. Καλεῖται στατικὴ ροπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἐπίπεδον τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ἰσχύει μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν παραλλήλων δυνάμεων: Ἡ ροπὴ τῆς συνισταμένης παραλλήλων δυνάμεων πρὸς ἓν ἐπίπεδον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9) Τρεῖς δυνάμεις $Δ_1$, $Δ_2$, $Δ_3$ εἶναι ἐφηρμοσμέναι κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Αἱ $Δ_1 = Δ_2 = 8kg^*$ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90^0 καὶ ἡ $Δ_3 = 5kg^*$ σχηματίζει μετὰ τῆς πλησίον της $Δ_2$ γωνίαν 45^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων.

* 10) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $A = 6kg^*$ καὶ $B = 4{,}5kg^*$ ἐφηρμοσμένων ἐπὶ σημείου καὶ ὧν αἱ διευθύνσεις σχηματίζουν γωνίαν 60^0.

* 11) Μία κρεμαστὴ λάμπα, βάρους $8kg^*$, ἐξαρτᾶται ἐκ δύο σχοινίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὴν αὐτὴν γωνίαν $φ = 30^0$. Μὲ πόσην δύναμιν τείνεται ἕκαστον σχοινίον;

Β. 12) Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $F_1 = 3kg^*$ καὶ $F_2 = 16{,}5kg^*$, παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι 169 cm καὶ εἰς ποίαν ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν εὑρίσκεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ;

13) Ἐπὶ ἑνὸς σώματος καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις $AF_1 = 86{,}4gr^*$ καὶ $BF_2 = 36gr^*$, παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ, ἂν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἀπέχῃ τοῦ Α κατὰ 12 cm. Ἐπίσης ποία δύναμις f πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ Β, ἀντίθετος τῆς BF_2, ἵνα ἐλαττοῦσα ταύτην μεταφέρῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α ἴσην πρὸς 5 cm ;

* 14) Ἐπὶ σώματος ἐφαρμόζονται εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας $AB = 60$ cm δύο δυνάμεις $AF_1 = 6\ kg^*$ καὶ $BF_2 = 5kg^*$. Ἡ AF_1 σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 120^0 καὶ ἡ BF_2 μετὰ τῆς ἰδίας γωνίαν 90^0, ἀμφότεραι ὅμως κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ζητεῖται ἡ σύνθεσις τῶν δύο τούτων δυνάμεων, δηλαδὴ ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐντάσεως τῆς συνισταμένης R, τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της Γ, κειμένου ἐπὶ τῆς ΑΒ, διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀποστάσεως ΒΓ καὶ τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης δηλ. τῆς γωνίας ΒΓR.

Γ. [Αἱ κατωτέρω ἀσκήσεις λύονται συντόμως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν (τοῦ Varignon)].

15) Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις $F_1 = 7kg^*$, $F_2 = 8kg^*$, $F_3 = 9kg^*$, καὶ $F_4 = 10kg^*$ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 καὶ A_4 μιᾶς στερεᾶς εὐθείας A_1A_4. Αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς ἀποστάσεις εἶναι $A_1A_2 = 12$ cm, $A_2A_3 = 17$cm καὶ $A_3A_4 = 15$cm. Ἡ δύναμις F_2 εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν R καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ τῆς ἐφαρμογῆς της.

16) Ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφως ἱσταμένου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὁριζοντία καὶ διὰ τοῦ ὕψους ΑΔ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα ΒΔ=0,6 m καὶ ΔΓ=0,4m, ἐφαρμόζονται τρεῖς παράλληλοι δυνάμεις: εἰς Α

* *Αἱ μὲ ἀστερίσκον ἀσκήσεις λύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ γνώσεων ἐκ τῆς τριγωνομετρίας καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι κατάλληλοι διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ζ΄. τάξεως τῶν κλασσικῶν γυμνασίων.*

ἡ $F_1=7kg^*$, πρὸς τὰ ἄνω διευθυνομένη, εἰς Β καὶ Γ αἱ $F_2=10kg^*$ καὶ $F_3=8kg^*$ πρὸς τὰ κάτω διευθυνόμεναι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν Ρ, κείμενον ἐπὶ τῆς ΒΓ.

17) Πέντε παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις, ἐντάσεων 6, 8, 12, 15 καὶ 9 kg*, ἐνεργοῦν ἐπὶ πέντε στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένων σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου ἔχουν ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις 8, 4, 10, 5 καὶ 20 cm. Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν καὶ ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

29. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ. Ἡ δυναμικὴ ἐξετάζουσα τὴν σχέσιν τῶν κινήσεων πρὸς τὰ αἴτια αὐτῶν, ἀποτελεῖ τὸ σπουδαιότερον μέρος τῆς μηχανικῆς. Αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τινων ἀξιωμάτων ἢ ἀρχῶν, καλουμένων ἀξιωμάτων τοῦ Νεύτωνος (1). Ταῦτα εἶναι : τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας, τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.

30. Α΄. ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ. Τὰ ὑλικὰ σώματα δὲν δύνανται ἀφ᾽ ἑαυτῶν νὰ μεταβάλουν τὴν κινητικήν των κατάστασιν. Συγκεκριμμένως ; α) Σῶμα εὑρισκόμενον εἰς ἠρεμίαν δὲν δύναται νὰ κινηθῇ, ἂν δὲν ἐπιδράσῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐξωτερική τις αἰτία καὶ β) σῶμα εὑρισκόμενον εἰς κίνησιν δὲν δύναται νὰ μεταβάλῃ τὴν κατάστασιν τῆς κινήσεώς του, ἐὰν δὲν ἐνεργήσῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ μία ἐξωτερικὴ αἰτία, ἀλλὰ ἐφ᾽ ὅσον τοιαῦται αἰτίαι δὲν ὑπάρχουν, τὸ σῶμα θὰ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Ἐὰν λοιπὸν αἴφνης συμβῇ ἓν σῶμα ἀκίνητον νὰ κινηθῇ ἢ κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς νὰ αὐξήσῃ ἢ ἐλαττώσῃ ἢ μηδενίσῃ τὴν ταχύτητά του ἢ νὰ μεταβάλῃ τὴν εὐθύγραμμον πορείαν του, πρέπει, κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο,

---

1) Ὁ Isaac Newton (1642–1727) ὑπῆρξε μέγας Ἄγγλος φυσικός, μαθηματικός, ἀστρονόμος καὶ φιλόσοφος. Ἀπὸ τοῦ 1669 διωρίσθη καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge. Διετύπωσε τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως, ἀνέλυσε τὸ φῶς κ.τ.λ. Τὰ σπουδαιότερα ἔργα του εἶναι : "Philosophiae naturaiis prinzipia mathematica» (Μαθητικαὶ ἀρχαὶ τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας) (1686-1687), «Ὀπτική» (1704), «Arithmetica universalis» (1707) καὶ ἡ «Ἀνάλυσις». Εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἐδῶ ἀναγραφομένων ἔργων του ἔθεσε τὰς βάσεις τῆς μηχανικῆς, διατυπώσας εἰς αὐτὸ τὰ ἀξιώματα τῆς δυναμικῆς. Εἰς τὸ τελευταῖον καὶ ἀλλαχοῦ, ἐθεμελίωσε τὸν Ἀπειροστικὸν Λογισμόν. Ὁ Newton θεωρεῖται μία ἀπὸ τὰς μεγαλυτέρας φυσιογνωμίας εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης.

νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὡρισμέναι ἐξωτερικαὶ αἰτίαι συνετέλεσαν εἰς τοῦτο. Τὰς ἐξωτερικὰς ταύτας αἰτίας καλοῦμεν ***δυνάμεις***. Αὐτὸ εἶναι τὸ περιεχόμενον τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας, τὸ ὁποῖον συγχρόνως μᾶς ἐπέτρεψε νὰ δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας, ὅτι δηλ. ἓν σῶμα εὑρισκόμενον εἰς ἠρεμίαν δὲν δύναται ἀφ᾽ ἑαυτοῦ νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν, δὲν ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως. Ἡ παρατήρησις ἀφ᾽ ἑνὸς καὶ ἡ λογικὴ (ἀρχὴ τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἢ τῆς αἰτιότητος) ἀφ᾽ ἑτέρου δεικνύουν τὴν ὀρθότητα τούτου. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας οὔτε ὑπὸ τῆς πείρας (παρατηρήσεως) φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ἐπαληθευόμενον, οὔτε δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀλήθεια ἐκ τῶν προτέρων ἐπιβαλλομένη εἰς τὸ πνεῦμα. Ἀκριβῶς δι᾽ αὐτὸ ἐπὶ αἰῶνας ἐπεκράτησεν ἀντίθετος δοξασία.

Ὁ Γαλιλαῖος (1638), μελετῶν τὴν κίνησιν (πτῶσιν) τῶν σωμάτων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι ἓν κινούμενον σῶμα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου θὰ διετήρει ἀμετάβλητον τὴν ταχύτητά του, ἐὰν δὲν παρεβάλλοντο ἐμπόδια εἰς τὴν κίνησίν του. Οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ G. Baelo (1635), Cavalieri καὶ Baliani (1646) πρῶτοι ὑπεστήριξαν, ὅτι ἐφ᾽ ὅσον ἐξωτερικαὶ ἐπιδράσεις δὲν ὑπάρχουν, ἡ τροχιὰ ἑνὸς ἐλευθέρως κινουμένου σώματος πρέπει νὰ εἶναι εὐθεῖα, ἤτοι ὅτι τὸ κινητόν, ἄνευ αἰτίας τινός, δὲν μεταβάλλει τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του. Ὁ ὁλλανδὸς Isaac Beeckmann, ὅπως φαίνεται ἀπό τινα ἀνακοίνωσιν τοῦ Καρτεσίου (Descartes) τοῦ 1620, ἤδη πρὸ τοῦ ἔτους τούτου εἶχε διατυπώσει τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας. Εἰς τὸ ἡμερολόγιον τοῦ Beeckmann ὑπάρχει ἡ φράσις: «κινητὸν δὲν ἔρχεται εἰς ἠρεμίαν, ἐὰν δὲν ἐξαναγκασθῇ». Ὅμως ὁ Νεύτων εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος πρῶτος κατὰ τρόπον ἐπιστημονικὸν διετύπωσε τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας τῷ 1687, καταστήσας αὐτὴν θεμελιώδη νόμον τῆς κινήσεως.

Ἐνῷ λοιπὸν προηγουμένως ἐτίθετο τὸ ἐρώτημα «ποία ἡ αἰτία ἕνεκα τῆς ὁποίας ἡ ἀρξαμένη κίνησις διατηρεῖται ἐπί τι χρονικὸν διάστημα μετὰ τὴν παῦσιν τῆς ἐνεργείας τῆς ταύτην προκαλεσάσης δυνάμεως», ἤδη ἐδόθη διὰ τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος ἀρχῆς ἀπάντησις εἰς ἐρώτησιν τεθεῖσαν ἄλλως: «Ποία ἡ αἰτία ἕνεκα τῆς ὁποίας ἀρξαμένη κίνησις σταματᾷ καὶ ἐν γένει μεταβάλλεται;»

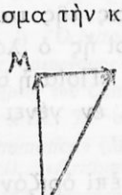
Ἡ παρατήρησις, καθ᾽ ἣν σφαῖρα κυλιομένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀμμώδους κατ᾽ ἀρχὰς καὶ ἐκ λείας ἀσφάλτου κατόπιν, ἀφοῦ ἅπαξ ἐτέθη εἰς κίνησιν διὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως διανύει διαστήματα ἄνισα, δύναται ἄριστα νὰ ἑρμηνευθῇ διὰ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι μεγαλύτερον, ἐπειδὴ αἱ τριβαὶ πρὸς τὸ ἔδαφος εἶναι μικρότεραι. Ἐὰν αἱ τριβαὶ πρὸς τὸ ἔδαφος, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καὶ οἱαδήποτε ἄλλη δρῶσα δύναμις, ὡς ἡ βαρύτης εἰς πολλὰς περιπτώσεις, δὲν ὑπῆρχον, τὸ σῶμα θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς. Εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ χῶρος, εἰς ὃν νὰ μὴ ὑπάρχουν ἐξωτερικαὶ αἰτίαι μεταβάλλουσαι τὴν κίνησιν (τριβαὶ κλπ.) Ἄμεσος λοιπὸν ἀπόδειξις τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας εἶναι ἀδύνατος. Ἐν τούτοις δεχόμεθα ὅτι καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος τούτου ἀληθεύει διότι αἱ παρατηρήσεις ἄριστα ἑρμηνεύονται δι᾽ αὐτοῦ εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις.

Τὴν ἰδιότητα, ἣν ἔχουν τὰ σώματα νὰ συμπεριφέρωνται ὡς τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα ὁρίζει, καλοῦμεν ***ἀδράνειαν***.

Ὡς πόρισμα τῆς ἀναφερθείσης ἀρχῆς ἐξάγομεν τοῦτο: Ἐὰν σῶμα ἠρεμῇ ἢ κινῆται ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως, ἐπ᾽ αὐτοῦ οὐδεμία δύναμις ἀσκεῖται (ἤ, γενικώτερον, ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ κίνησις τοῦ σώματος προῆλθεν ἐκ τῆς ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργείας δυνάμεως ἐπί τινα μόνον χρόνον, νῦν δέ, ὅτε ἡ κίνησις αὐτοῦ εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλή, ἡ δύναμις αὕτη δὲν ἐνεργεῖ.

31. Β΄. ΑΞΙΩΜΑ ΔΙΑΛΥΤΙΚΟΝ ἢ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο δύο ἢ περισσότεραι δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σώματος ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον ἑκάστη, ἐπιφέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα εἴτε ἂν ἐνεργήσουν συγχρόνως εἴτε διαδοχικῶς. Τὸ ἀποτέλεσμα δηλαδὴ τὸ ὁποῖον ἐπιφέρει μία δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματος δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς συγχρόνου ἐνεργείας ἄλλης δυνάμεως.

Αἱ δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν σωμάτων ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν κίνησιν αὐτῶν. Ἔστω ἐπὶ τῆς ἠρεμούσης ἐπιφανείας ὕδατος καὶ εἰς τὸ Λ (Σχ. 26) τεμάχιον φελλοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ φελλοῦ ἀσκουμένη ἐπί τινα στιγμὴν δύναμις Δ, τὸν φέρει μέχρι τοῦ σημείου Μ εἰς χρόνον t καὶ ἐκεῖ ἑτέρα δύναμις Δ, ἐνεργήσασα ἐπί τινα στιγμὴν θὰ τὸν φέρῃ εἰς Ν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον t. Κατὰ τὸ ἀξίωμα



Σχ. 26

τοῦτο, ἐὰν ἐπὶ τοῦ φελλοῦ εἰς Λ ἐφαρμοσθοῦν συγχρόνως αἱ αὐταὶ δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὁ φελλὸς θὰ ἐφέρετο εἰς Ν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t, ἀκολουθῶν τὸν δρόμον ΛΝ. Τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐκφράζει τὸ περιεχόμενον τοῦ διαλυτικοῦ ἀξιώματος. Πράγματι αἱ δύο δυνάμεις εἴτε συγχρόνως ἐνεργήσουν ἐπὶ ἑνὸς σώματος εἴτε διαδοχικῶς, ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον ἑκάστη, ἐπιφέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα· ἢ, ἄλλως, ἡ $Δ_2$ μετέθεσε τὸ τεμάχιον τοῦ φελλοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα ΜΝ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν τὸ τεμάχιον τοῦτο εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν σύγχρονον ἐνέργειαν καὶ ἄλλης δυνάμεως. Τὸ περὶ οὗ λόγος ἀξίωμα φέρει, ἕνεκα τούτου, καὶ τὴν ὀνομασίαν ***ἀξίωμα τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δυνάμεων.***

Ἂς παρατηρήσωμεν τοῦτο: Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως $Δ_2$ (λ.χ.) εἶναι τὸ αὐτὸ εἴτε τὸ σῶμα (φελλὸς) εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν (διαδοχικὴ ἐνέργεια) εἴτε εἰς κίνησιν (σύγχρονος ἐνέργεια τῶν $Δ_1$ καὶ $Δ_2$). Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα ΛΜΝ ἀποτελεῖ τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου, οὗτινος αἱ πλευραὶ ΛΜ καὶ ΜΝ καὶ ἡ διαγώνιος ΛΝ παριστοῦν τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t ὑπὸ τοῦ κινητοῦ—ὅτε τὰ μήκη ΛΜ, ΜΝ καὶ ΛΝ, ὡς ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων (μέσων ταχυτήτων) δίδουν τὸ μέτρον αὐτῶν—ἕπεται ὅτι ἡ σύνθεσις τῶν κινήσεων (ταχυτήτων) ἀκολουθεῖ τὸν κανόνα τῆς συνθέσεως δυνάμεων διὰ τοῦ παραλληλογράμμου (παραλληλόγραμμον τῶν κινήσεων).

Τὸ παράδειγμα τεμαχίου φελλοῦ ἐπιπλέοντος ἐπὶ τῆς ἠρέμου ἐπιφανείας ὕδατος καὶ ὑποκειμένου εἰς τὴν ἐνέργειαν τῶν δυνάμεων $Δ_1$ καὶ $Δ_2$, ἐξελέγη διὰ τὴν διασάφησιν τῆς ἀρχῆς ταύτης. Ὅμως παρατηρήσεις ἀνάλογοι ἐπὶ πολλῶν ἄλλων φαινομένων, τὰ ὁποῖα καθημερινῶς λαμβάνουν χώραν, ἀποτελοῦν τὴν πεῖραν, ἡ ὁποία μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἐν λόγῳ ἀρχῆς. Οὕτω ἐὰν ἐκ δύο ὁμοίων σφαιρῶν Α καὶ Β εὑρισκομένων εἰς ὕψος τι h ὑπεράνω τοῦ δαπέδου ἐπὶ ἑνὸς ὑποστηρίγματος, ἡ μὲν Α ἀφεθῇ νὰ πέσῃ κατακορύφως ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους της, ἡ δὲ Β ἐκσφενδονισθῇ ὁριζοντίως εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ τὴν ὤθησιν μιᾶς δυνάμεως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀμφότεραι θὰ φθάσουν εἰς τὸ ἔδαφος ταυτοχρόνως. Ἡ βαρύτης (ἕλξις τῆς γῆς) λοιπὸν ἐπέφερε τὸ ἀποτέλεσμά της, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τοῦτο ἐκ τῆς συγχρόνου ὑπάρξεως τῆς ἄλλης δυνάμεως εἰς τὴν σφαῖραν Β. Ἐὰν κυλίσωμεν σφαῖραν ἐπὶ τοῦ καταστρώματος πλοίου, ἡ κίνησις αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ πλοῖον εἶναι ἡ ἰδία εἴτε τὸ πλοῖον ἠρεμεῖ εἴτε κινεῖται. Ἡ κίνησις τῶν μερῶν τῆς μηχανῆς ὡρολογίου, ὅταν τοῦτο μεταφέρεται δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ μένει ἡ αὐτή, ὅπως καὶ ὅταν εἶναι ἀκίνητον κλπ.

Τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα ἔχει δύο σπουδαιοτάτας συνεπείας:

1) Δύναμις σταθερά, συνεχῶς ἐνεργοῦσα ἐπί τινος σώματος, προσδίδει εἰς αὐτὸ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κατὰ τὴν διεύθυσίν της. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἔστω ἕν ὑλικὸν σῶμα ἐπὶ τοῦ ὑποίου ἐνεργεῖ μία σταθερὰ δύναμις. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου ἡ δύναμις θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα ταχύτητα υ καὶ ἂν ἡ δύναμις παύσῃ τότε ἐνεργοῦσα, τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ τὴν ταχύτητα υ, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας. Ἂν ὅμως ἡ δύναμις ἐξακολουθήσῃ ἐνεργοῦσα, θὰ ἐπιφέρῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καὶ κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον, καθότι ἡ ἐπίδρασις αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς κινητικῆς καταστάσεως, εἰς ἣν ἤδη τὸ κινητὸν εὑρίσκεται, ἤτοι θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου δευτερολέπτου νέαν ταχύτητα υ. Ἡ ταχύτης ὅθεν τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου θὰ εἶναι $υ+υ=2υ$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου sec ἡ ταχύτης θὰ γίνῃ 3υ κ.ο.κ. Ἡ κίνησις λοιπὸν ἣν θὰ λάβῃ τὸ κινητὸν θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς υ. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἡ σταθερὰ δύναμις ἐφηρμόζετο, οὐχὶ ἐπὶ ἀκινήτου κατ᾽ ἀρχὰς σώματος, ἀλλὰ ἐπὶ σώματος ἐν ἰσοταχεῖ κινήσει εὑρισκομένου μὲ ταχύτητα $υ_0$, τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἦτο, ἕνεκα τῆς ἰσχύος τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δυνάμεων, τὸ αὐτό.

Κατ᾽ ἐπέκτασιν τοῦ πορίσματος τούτου, δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ, ὅτι ἐὰν ἐπὶ σώματος ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως κινουμένου, λόγῳ τῆς ἀδρανείας, ἐνεργήσῃ δύναμις σταθερὰ κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως, τὸ κινητὸν θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, μέχρις οὗ σταματήσει ἐντελῶς καί, ἐφ᾽ ὅσον ἐξακολουθεῖ ἐνεργοῦσα σταθερῶς ἡ δύναμις, κινηθῇ ἀκολούθως μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην πρὸς τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν.

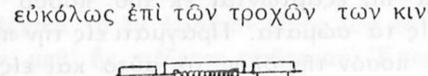
2) Αἱ ἐπιταχύνσεις, τὰς ὁποίας προσδίδουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα δύο δυνάμεις διαδοχικῶς ἐνεργοῦσαι ἐπ᾽ αὐτοῦ, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωρήσωμεν ἐνεργούσας ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου διαδοχικῶς τὰς δυνάμεις $\Delta_1, \Delta_2=2\Delta_1$ καὶ $\Delta_3=3\Delta_1$. Ἐὰν ἡ Δ_1 συνεχῶς ἐνεργοῦσα προσδίδῃ εἰς τὸ σῶμα ἐπιτάχυνσιν γ_1, ἡ Δ_2 ἀναλυομένη εἰς δύο συνιστώσας ἴσας ἑκάστην πρὸς Δ_1, ἐφηρμοσμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ ἐχούσας τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα, κατὰ τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα, ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $\gamma_1+\gamma_1=2\gamma_1=\gamma_2$, ἡ δὲ Δ_3 ἐπιτάχυνσιν $\gamma_3=3\gamma_1$. Ὥστε

$$\frac{\Delta_1}{\gamma_1}=\frac{\Delta_2}{\gamma_2}=\frac{\Delta_3}{\gamma_3}=\;.\;.\;.\;.\;.\;=m \qquad (31)$$

Τὸ m εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς διὰ τὸ ὑλικὸν σῶμα καὶ περὶ τῆς φύσεως αὐτοῦ ἀσχολούμεθα κατωτέρω.

32. ΜΑΖΑ. Διά νὰ ἴδωμεν τὴν σημασίαν τοῦ m εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (31) ἄς ἐκτελέσωμεν τὰ ἑξῆς πειράματα:

α) Ἐπὶ ὁριζοντίου λείας πλακὸς (ὑαλίνης) θέτομεν δύο ἴσα καὶ εὐκόλως ἐπὶ τῶν τροχῶν των κινητὰ ἁμάξια (Σχ. 27), ἔχοντα τὸ αὐτὸ βάρος. Τοποθετοῦμεν μεταξὺ αὐτῶν σπειροειδὲς ἐλατήριον καὶ πλησιάζομεν αὐτὰ πρὸς ἄλληλα συμπιέζοντες τὸ ἐλατήριον.



Σχ. 27

Καθηλοῦμεν ταῦτα εἰς τὴν νέαν των πρὸς ἄλληλα θέσιν, συνδέοντες αὐτὰ διὰ νήματος, ἐμποδιζομένης κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον τῆς διατάσεως τοῦ ἐλατηρίου. Τὸ σύστημα μένει ἀκίνητον. Ἐὰν τώρα κόψωμεν τὸ νῆμα, τὰ ἁμάξια ὠθούμενα ὑπὸ τῆς αὐτῆς δυνάμεως (συμφώνως πρὸς τὸ τρίτον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως) κινοῦνται πρὸς ἀντίθετον διεύθυνσιν καὶ φθάνουν εἰς ὡρισμένην ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς των θέσεως ἀπόστασιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Αἱ ταχύτητες (υ_1 καὶ υ_2) λοιπὸν ἄς ἀπέκτησαν κατὰ τόν, ἔστω καὶ ἐλάχιστον, χρόνον ἐνεργείας τῆς ὠθησάσης δυνάμεως, εἶναι ἴσαι. Ὁ χρόνος t τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰ δύο ἁμάξια καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἐκτήθησαν ὑπ' αὐτῶν αἱ ἴσαι ταχύτητες $υ_1$ καὶ $υ_2$. Ὅθεν

$$υ_1=γ_1 t=υ_2=γ_2 t \text{ καὶ } γ_1=γ_2.$$

Ἡ (31) δι' ἀμφότερα τὰ σώματα δίδει

$$\frac{Δ}{γ_1}=m_1, \quad \frac{Δ}{γ_2}=m_2.$$

Ἔπεται ὅτι $m_1=m_2$.

β) Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα, ἀλλὰ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἁμαξίου ἐκ τῶν δύο θέτομεν βάρη. Ὅταν κόψωμεν τὸ νῆμα τὰ δύο ἁμάξια ὠθοῦνται καὶ πάλιν ὑπὸ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, κινοῦνται ἀντιθέτως, ἀλλὰ τὸ βαρύτερον κινεῖται βραδύτερον. Θὰ διανύσῃ τοῦτο τὴν ὡρισμένην ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως ἀπόστασιν εἰς μεγαλύτερον χρόνον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν $υ_1=γ_1 t$, $υ_2=γ_2 t$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $υ_1>υ_2$, θὰ εἶναι καὶ $γ_1>γ_2$. Τὰ $m_1=\frac{Δ}{γ_1}$ καὶ $m_2=\frac{Δ}{γ_2}$ θὰ εἶναι ἄνισα καὶ μάλιστα $m_2>m_1$.

Ἐκ τῶν δύο ὡς ἄνω πειραμάτων εἶναι εὔκολον νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὰ m_1 καὶ m_2 ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ σώματα. Πράγματι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι τὸ ποσὸν τῆς ὕλης τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σώματα ($m_1=m_2$), ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν εἶναι μεγαλύτερον εἰς τὸ ἓν ($m_2>m_1$). Τὸν ἀριθμὸν m, ὅστις εἶναι σταθερὸς δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα καὶ ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τὸ ποσὸν τῆς ὕλης εἰς αὐτὸ καλοῦμεν ***μᾶζαν*** τοῦ σώματος.

Ἐὰν γενικῶς διὰ Δ ἢ F παραστήσωμεν τὴν σταθερὰν δύναμιν, τὴν ἀσκουμένην εἰς σῶμα μάζης m καὶ διὰ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὴν ὁποίαν αὐτὴ προσδίδει εἰς αὐτό, κατὰ τὴν (31) ἔχομεν τὴν θεμελειώδη σχέσιν

$$F=mγ, \tag{32}$$

ἥτις συνδέει τὰ μεγέθη ταῦτα.

33. Γ' ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΣ Ὅταν ἕνα σῶμα Α ἀσκῇ ἐπὶ ἄλλου σώματος Β μίαν δύναμιν, καὶ τὸ Β ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ Α δύναμιν ἴσην κατ' ἔντασιν, ἀλλὰ ἀντιθέτου διευθύνσεως. Ἐὰν τὴν ἐνέργειαν τοῦ Α ἐπὶ τοῦ Β καλέσωμεν δρᾶσιν, τὴν δὲ ἐνέργειαν τοῦ Β ἐπὶ τοῦ Α ἀντίδρασιν, δυνάμεθα συντόμως τὸ ἀξίωμα τοῦτο νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς: Πᾶσα δρᾶσις προκαλεῖ ἴσην ἀντίδρασιν.

Παραδείγματα: Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τραπέζης τοποθετήσωμεν βαρὺ σῶμα, τὸ σῶμα τοῦτο πιέζον τὴν τράπεζαν λόγῳ τοῦ βάρους του (δρᾶσις), μετασχηματίζει, ἔστω καὶ κατ᾽ ὀλίγον, ταύτην καὶ ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου παράγεται ἐλαστικὴ δύναμις (ἀντίδρασις), ὠθοῦσα τὸ βαρὺ σῶμα πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος, ἡ δὲ διεύθυνσίς της ἀντίθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος. Ἐὰν μὲ τὴν χεῖρα μας κτυπήσωμεν τὴν τράπεζαν, δεχόμεθα τὸ κτύπημα ἐκ τῆς τραπέζης πρὸς τὴν χεῖρα μας. Μαγνήτης ἕλκει τεμάχιον σιδήρου, ἀλλὰ καὶ ὁ σίδηρος ἕλκει τὸν μαγνήτην μετὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ὡς δύναται νὰ δειχθῇ, ἂν ἀμφότερα τὰ σώματα συνδεθοῦν μὲ δυναμόμετρα. Αἱ ἀμοιβαῖαι αὗται ἕλξεις ἔχουν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Ἡ γῆ ἕλκει τὰ σώματα τὰ εὑρισκόμενα πέριξ αὐτῆς, ἀλλὰ καὶ ταῦτα ἕλκουν τὴν γῆν μὲ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν. Ἡ γῆ ἕλκει τὴν σελήνην, ἀλλὰ καὶ ἡ σελήνη ἀσκεῖ ἴσην καὶ ἀντίθετον ἑλκτικὴν δύναμιν ἐπὶ τῆς γῆς κ. ο. κ. Τέλος ἓν ἄλλο παράδειγμα εἴδομεν εἰς τὰ πειράματα τοῦ § 32, ὅπου ἡ δύναμις μετὰ τῆς ὁποίας πιέζεται τὸ ἓν ἁμάξιον εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν, μεθ᾽ ἧς πιέζεται τὸ ἕτερον. Ἐπανερχόμενοι ἐπὶ τῶν πειραμάτων ἐκείνων ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν δύο τινά, τὰ ὁποῖα ἐκθέτομεν κατωτέρω.

1) Τὰ δύο σώματα, μαζῶν m_1 καὶ m_2, ὑφίστανται τὴν ἐνέργειαν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἠδύναντο νὰ προσδώσουν εἰς αὐτὰ ἐπιταχύνσεις γ_1 καὶ γ_2. Ἰσχύει ἑπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ἡ σχέσις (συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν 22):

$$m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2.$$

Ὅσον ἡ μᾶζα τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, λ. χ. ἡ m_2 γίνεται μεγαλυτέρα, τόσον καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις γ_2, τὴν ὁποίαν τοῦτο λαμβάνει, καθίσταται μικροτέρα. Ἐὰν δὲ ἡ μᾶζα m_2 εἶναι ὑπερβολικῶς μεγάλη, δηλαδὴ ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν m_1 τόσον μεγάλη, ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις γ_2 νὰ ἀποτελῇ μέγεθος τοσοῦτον μικρόν, ὥστε νὰ δύναται νὰ παραμεληθῇ, τότε τὸ ἓν μόνον τῶν σωμάτων, τὸ ἔχον τὴν μᾶζαν m_1, θὰ κινηθῇ. Τὸ τοιοῦτον συμβαίνει εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Ἂς ἴδωμεν μερικάς.

Λίθος εὑρισκόμενος εἰς ὕψος τι ἕλκεται ὑπὸ τῆς γῆς καὶ οὗτος ἕλκει δι᾽ ἴσης καὶ ἀντιθέτου δυνάμεως τὴν γῆν. Ὅμως

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1)

Α. 1) Ἀνελκυστὴρ πλήρης φορτίου ἀνέρχεται εἰς τὸν ἀνώτερον ὄροφον ἐργοστασίου μὲ ταχύτητα σταθερὰν 20m κατὰ πρῶτον λεπτόν, παραμένει ἐκεῖ διὰ τὴν ἐκφόρτωσιν 3 λεπτὰ καὶ κατέρχεται μετὰ ταχύτητος σταθερᾶς ἴσης πρὸς 30m κατὰ λεπτόν. Ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος παρῆλθε διὰ τὴν ἄνοδον, ἐκφόρτωσιν καὶ κάθοδον τοῦ ἀνελκυστῆρος εἶναι 5 λεπτά. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ ὄροφος οὗτος.

2) Ποταμόπλοιον ἀνέρχεται ποταμὸν μὲ ταχύτητα 3,8m κατὰ δευτερόλεπτον $\left(\frac{m}{sec}\right)$ καὶ κατέρχεται τοῦτον μὲ ταχύτητα 6,2 $\frac{m}{sec}$. Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ῥεύματος τοῦ ὕδατος εἶναι σταθεραί, νὰ εὑρεθοῦν αὗται.

Β. 3) Κινητὸν κινούμενον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 36 $\frac{m}{sec}$, σταματᾷ μετὰ παρέλευσιν 12 πρώτων λεπτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα.

4) Εἰς τὴν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησίν του κινητὸν διανύει κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἑβδόμου μόνον δευτερολέπτου διάστημα 130 cm. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ αὐτοῦ ταχύτης ἦτο μηδέν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

5) Κινητὸν κινούμενον μὲ κιν. ὁμ. μεταβαλλομένην διήνυσε μέχρι τοῦ τέλους τοῦ 1ου καὶ 2ου sec ἀντιστοίχως τὰ διαστήματα 46,5m καὶ 102m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

6) Ἔκ τινος σημείου Α ἀναχωρεῖ κινητόν μὲ κ. ὁ. ἐπιταχυνομένην ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Τρία δευτερόλεπτα μετὰ ταῦτα ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν κινούμενον ἕτερον κινητόν. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀντιστοίχως, τοῦ μὲν πρώτου 10 $\frac{cm}{sec}$ καὶ 60$\frac{cm}{sec^2}$, τοῦ δὲ δευτέρου 20$\frac{m}{sec}$ (υο) καὶ 240$\frac{cm}{sec^2}$ (γ), νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ πρώτου θὰ γίνῃ ἡ συνάντησίς των.

Γ΄. 7) Ἓν κινητὸν ἐκτελεῖ 30 στροφὰς εἰς ἕκαστον λεπτόν. Ποία ἡ γωνιώδης ταχύτης αὐτοῦ;

8) Τροχὸς ἔχει γωνιώδη ταχύτητα 4,5. Ποία ἡ γραμμικὴ ταχύτης ἑνὸς σημείου τοῦ τροχοῦ, ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς 20 cm; Πόσας στροφὰς ἐκτελεῖ ὁ τροχὸς οὗτος εἰς 1 λεπτόν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΣΤΑΤΙΚΗ

α) ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

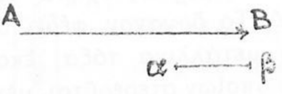
11. ΔΥΝΑΜΕΙΣ. Τὰ αἴτια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ προκαλέσουν τὴν κίνησιν τῶν σωμάτων ἢ νὰ τροποποιήσουν τὴν

(1) *Τὰ ἀποτελέσματα τῆς λύσεως τῶν ἀσκήσεων βλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ τεύχους.*

κινητικὴν αὐτῶν κατάστασιν, καλοῦνται ***δυνάμεις*** (βλ. καὶ § 30). Οὕτω ἡ πίεσις τοῦ πνέοντος ἀνέμου ἐπὶ τῶν σωμάτων, ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοῦ, ἡ ἕλξις τῆς γῆς κτλ. εἶναι δυνάμεις.

Εἰς πᾶσαν δύναμιν διακρίνομεν τρία τινά: τὸ ***σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς***, τὴν ***διεύθυνσιν*** καὶ τὴν ***ἔντασιν*** αὐτῆς. Ταῦτα καλοῦνται χαρακτηριστικὰ τῆς δυνάμεως διότι, ὅταν εἶναι γνωστά, δύνανται τὴν δύναμιν πλήρως νὰ ἐκφράσουν, κατὰ τὰς εἰς τὴν ἀντίληψιν τοῦ ἀνθρώπου ὑποπιπτούσας ἰδιότητας αὐτῆς. Ἡ δύναμις ἀποτελεῖ ἔννοιαν, πρὸς τὴν ὁποίαν φερόμεθα ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῆς καὶ δι᾽ αὐτὸ περισσότερα περὶ αὐτῆς θὰ ἐκτεθοῦν εἰς τὸ περὶ δυναμικῆς κεφάλαιον.

Γραφικῶς παριστῶμεν πᾶσαν δύναμιν διὰ βέλους ΑΒ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ Α παριστᾷ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς (Σχ. 2), ἡ διεύθυνσις τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως καὶ τὸ μῆκος, συγκρινόμενον πρὸς τὸ μῆκος μικρᾶς τινος εὐθείας αβ παριστώσης τὴν μονάδα τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως, τὴν ἔντασιν αὐτῆς. Ἡ δύναμις ἐκφράζεται, κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω, δι᾽ ἀνύσματος, ἤτοι τμήματος εὐθείας ἐχούσης οὐ μόνον ὡρισμένον μῆκος ἀλλὰ καὶ ὡρισμένην διεύθυνσιν. Εἶναι αὕτη δηλ. μέγεθος, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ καθορισθῇ δέον νὰ δοθοῦν ὄχι μόνον ἡ ἀριθμητικὴ αὐτοῦ τιμὴ ἀλλὰ καὶ ἡ διεύθυνσις αὐτοῦ.

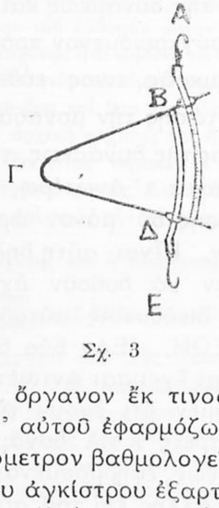


Σχ. 2

12. ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ἐὰν δύο δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἔχουσαι ἀντιθέτους διευθύνσεις ἀναιροῦν ἀλλήλας, λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔντασιν ἢ εἶναι ἴσαι. Ἐνῷ ἂν δύο, τρεῖς κ τ.λ δυνάμεις ἴσαι κατ᾽ ἔντασιν καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἀναιρῶνται διὰ μιᾶς ἄλλης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφηρμοσμένης καὶ ἀντιθέτου διευθύνσεως πρὸς αὐτάς, τότε ἡ τελευταία δύναμις εἶναι διπλασία, τριπλασία κ.τ.λ. ἑκάστης τῶν πρώτων. Κατ᾽ ἄλλην ἔκφρασιν: Δύναμις Α καλεῖται διπλασία. τριπλασία κ.τ.λ. ἄλλης Β, ὅταν φέρῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον φέρουν δύο, τρεῖς κ.τ.λ. δυνάμεις ἴσαι ἑκάστη πρὸς τὴν Β, ἐνεργοῦσαι ὁμοῦ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

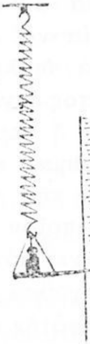
Ποίαν δύναμιν θὰ λάβωμεν ὡς μονάδα, ἵνα πρὸς αὐτὴν συγκρίνομεν τὰς ἄλλας, θὰ ἴδωμεν εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ βιβλίου (§ 34). Πρὸς τὸ παρὸν δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκει ἡ γῆ ἓν ὡρισμένον σῶμα λ.χ. μίαν κυβικὴν παλάμην ὕδατος ἀπεσταγμένου θερμοκρασίας 4° Κελσίου. Ἡ δύναμις αὕτη καλεῖται βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου, ἡ δὲ σύγκρισις τῶν δυνάμεων πρὸς αὐτήν, ἤτοι ἡ μέτρησις αὐτῶν, γίνεται δι' ὀργάνων καλουμένων ***δυναμομέτρων***.

Τὸ σπουδαιότερον μέρος τῶν δυναμομέτρων εἶναι ἐλατήριον ἐκ χάλυβος. Ἡ λειτουργία τῶν ἁπλουστέρων ἐξ αὐτῶν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ὅτι ἴσαι δυνάμεις φέρουν τὴν αὐτὴν παραμόρφωσιν ἐπὶ χαλυβδίνου ἐλατηρίου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου διαδοχικῶς ἐφαρμόζονται. Τὸ Σχ. 3 παριστᾷ ἓν τῶν δυναμομέτρων τούτων. Τὸ ἐλατήριον εἰς αὐτὸ ἔχει καμφθῇ εἰς σχῆμα γωνίας ΒΓΔ. Τὸ ὄργανον φέρει ἀκόμη δύο μετάλλινα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων στερεοῦται μὲν διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους τοῦ ἐλατηρίου, διέρχεται δὲ ἐλευθέρως δι' ὀπῆς εὑρισκομένης ἐπὶ τοῦ ἑτέρου σκέλους καὶ καταλήγει εἰς ἄγκιστρον. Τὸ ἓν ἄγκιστρον χρησιμεύει, ἵνα δι' αὐτοῦ ἐξαρτᾶται τὸ ὄργανον ἔκ τινος σταθεροῦ στηρίγματος καὶ τὸ ἄλλο, ἵνα ἐπ' αὐτοῦ ἐφαρμόζωνται αἱ πρὸς μέτρησιν δυνάμεις. Τὸ δυναμόμετρον βαθμολογεῖται ἐμπειρικῶς ὡς ἑξῆς: Ἐκ τοῦ κατωτέρου ἀγκίστρου ἐξαρτῶνται διαδοχικῶς βάρη ἴσα πρὸς 1, 2, 3......... χιλιόγραμμα, εἰς τὰς θέσεις δὲ ὅπου τὸ ἀνώτερον σκέλος ΒΓ φθάνει ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τόξου, χαράσσονται γραμμαὶ καὶ σημειοῦνται οἱ ἀριθμοὶ 1,2,3.... χιλιόγραμ. Ἐὰν μεταγενεστέρως δύναμις, ἐφαρμοζομένη ἐπὶ τοῦ κατωτέρου ἀγκίστρου, παραμορφώσῃ οὕτω τὸ ἐλατήριον, ὥστε τὸ ὄργανον νὰ δείξῃ 3 χιλιόγραμμα, εἶναι φανερόν, καθ' ἃ προηγουμένως ἀνεφέραμεν, ὅτι ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ ἕλκει τὴν μᾶζαν τῶν 3 Kg, ἀφοῦ ἀμφότεραι διαδοχικῶς ἐνεργήσασαι ἐπὶ τοῦ ὀργάνου ἐπιφέρουν τὴν αὐτὴν παραμόρφωσιν.



Σχ. 3

Τὸ Σχ. 4 παριστᾷ ἓν ἄλλο λίαν εὐπαθὲς δυναμόμετρον, τὸν ***δι᾽ ἐλατηρίου ζυγόν***. Τὸ σπειροειδὲς ἐλατήριον ἐξ οὗ ἀποτελεῖται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν διαφόρων δυνάμεων τείνεται καὶ δείκτης παρέχει ἀμέσως τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως ἐπὶ κλίμακος βαθμολογηθείσης ὡς προηγουμένως.



Σχ. 4

Ἓν ἄλλο δυναμόμετρον δεικνύει ἐπίσης τὸ Σχ. 5.

Σχ. 5

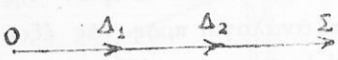
Δι᾽ ὅλα τὰ δυναμόμετρα, τὰ ὁποῖα λειτουργοῦν ὡς ἀνωτέρω, ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Hooke (§ 2), καθ᾽ ὃν αἱ ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις, ἐφ᾽ ὅσον δὲν ὑπερβαίνομεν τὸ ὅριον τῆς ἐλαστικότητος, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι προεκάλεσαν τὰς παραμορφώσεις. Τοῦτο εὐκολύνει σημαντικῶς τὴν βαθμολογίαν τοῦ ὀργάνου, κυρίως διὰ τὰς ἐνδείξεις ὑποδιαιρέσεων μικροτέρων τῶν χρησιμοποιηθεισῶν διὰ τὴν ἐμπειρικὴν βαθμολογίαν αὐτοῦ. Ὡς δυναμόμετρα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ἄλλαι συσκευαί, τῶν ὁποίων ἡ λειτουργία στηρίζεται ἐπὶ ἄλλων ἀρχῶν. Οὕτω ὁ κοινὸς ζυγὸς εἶναι ἓν δυναμόμετρον.

13. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ἡ πεῖρα ἔδειξεν ὅτι πολλάκις ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται εἴτε ὅταν ἐνεργοῦν ἐπὶ ἑνὸς σώματος πολλαὶ δυνάμεις εἴτε μία μόνη. Ἡ ἐργασία διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἀντικαθιστῶσα δύο ἢ περισσοτέρας ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἐφηρμοσμένας γνωστὰς δυνάμεις παράγει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, καλεῖται ***σύνθεσις δυνάμεων***. Ἡ εὑρισκομένη οὕτω δύναμις καλεῖται ***συνισταμένη***, αἱ δὲ δυνάμεις αἱ ὁποῖαι ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῆς συνισταμένης καλοῦνται ***συνιστῶσαι***. Ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων, ἤτοι ἡ εὕρεσις τῆς συνισταμένης αὐ-

τῶν, γίνεται διὰ τὴν ἁπλοποίησιν πολλῶν προβλημάτων. Εἶναι μεγάλη εὐκολία νὰ ὁμιλῶμεν περὶ μιᾶς δυνάμεως (συνισταμένης) ἀντὶ νὰ ὁμιλῶμεν περὶ πολλῶν (συνιστωσῶν).

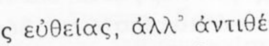
Ἡ ἀντίθετος ἐργασία δηλ. ἡ ἀντικατάστασις μιᾶς δυνάμεως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων ἄλλων καλεῖται ***ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως***. Ἤχθημεν εἰς τὴν ἰδέαν τῆς ἀναλύσεως τῶν δυνάμεων ἐπίσης ἐκ τῆς πείρας. Πολλάκις δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματος, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, κινεῖ αὐτὸ κατ' ἄλλην τινὰ διεύθυνσιν, ὡς λ.χ. ἡ βαρύτης ἐνεργοῦσα ἐπὶ σφαίρας εὑρισκομένης ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κινεῖ αὐτὴν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Τοῦτο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δύναμις αὕτη ἐξαφανισθεῖσα ἀντικατεστάθη ὑπὸ ἄλλων δυνάμεων, ἐξ ὧν μία ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως.

14. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΝΕΡΓΟΥΣΩΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ. Α΄. Ἔστωσαν δύο δυνάμεις $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (Σχ. 6) ἐφηρμοσμέναι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ εἶναι δύναμις ἔχουσα τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ ἔντασιν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρας τῶν δύο δυνάμεις. Οὕτω ἐὰν πρόκειται περὶ τῶν δυνάμεων $ΟΔ_1=2$ χιλιόγραμ. καὶ $ΟΔ_2=4$ χιλιόγρ., ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ θὰ ἔχῃ ἔντασιν $ΟΣ=2+4=6$ χιλιόγρ., σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Ο καὶ διεύθυνσιν τὴν διεύθυνσιν τῶν συνιστωσῶν.



Σχ. 6

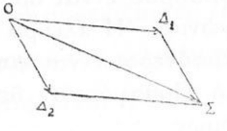
Β΄. Ἐὰν δύο δυνάμεις $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (σχ. 7) ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο καὶ διευθύνσεις κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλ' ἀντιθέτους, ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΣ ἔχει τὸ ἴδιον σημεῖον ἐφαρμογῆς, διεύθυνσιν τὴν τῆς μεγαλυτέρας καὶ ἔντασιν τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν. Οὕτω ἐὰν εἶναι $ΟΔ_2=5$ χλγ. καὶ $ΟΔ_1=3$ χιλιόγρ., ἡ ΟΣ ἰσοῦται κατ' ἔντασιν πρὸς $5-3=$ $=2$ χιλιόγραμμα.



Σχ. 7

Γ΄. Ἐὰν πολλαὶ δυνάμεις ἐνεργοῦν ἐπὶ ἑνὸς σημείου Ο, ἄλλαι μὲν κατὰ τὴν μίαν διεύθυνσιν, ἄλλαι δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον, συνθέτομεν χωριστὰ τὰς ὁμορρόπους καὶ λαμβάνομεν ὡς συνισταμένας αὐτῶν δύο δυνάμεις, ἀντιθέτου διευθύνσεως ἃς συνθέτομεν κατὰ τὴν περίπτωσιν Β.

Δ΄. Τὸ σχῆμα 8 δεικνύει μίαν ἄλλην περίπτωσιν. Δύο δυνάμεις $Ο\Delta_1$ καὶ $Ο\Delta_2$ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ σημείου Ο ἔχουν διευθύνσεις, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν (μικροτέραν τῶν 180° καὶ μεγαλυτέραν τῶν 0°).



Σχ. 8

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων δυνάμεων παρίσταται κατ' ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν, ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΟΣ τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου μὲ πλευρὰς τὰς δύο δυνάμεις (παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων).

Πρὸς σχηματισμὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, φέρομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τοῦ σημείου Δ_1 εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $Ο\Delta_2$ καὶ κατόπιν ἐκ τοῦ Δ_2 ἄλλην παράλληλον πρὸς τὴν $Ο\Delta_1$. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς Σ. Τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ $Ο\Delta_1 \Sigma \Delta_2$, ἡ δὲ διαγώνιος αὐτοῦ ΟΣ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δοθεισῶν δυνάμεων $Ο\Delta_1$ καὶ $Ο\Delta_2$.

Εἰς τὴν τριγωνομετρίαν ἀποδεικνύεται, ὅτι διὰ πᾶν τρίγωνον, ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας πρὸς α, β, γ καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτων γωνίας ἀντιστοίχως Α, Β, Γ, ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \;\text{συν}\; \Gamma.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου λοιπὸν $Ο\Delta_1\Sigma$ (Σχ. 8) ἔχομεν

$$(Ο\Sigma)^2 = (Ο\Delta_1)^2 + (\Delta_1\Sigma)^2 - 2(Ο\Delta_1)(\Delta_1\Sigma) \;\text{συν}\; (\widehat{Ο\Delta_1\Sigma}),$$

ἤ, ἐπειδὴ $\Delta_1\Sigma = Ο\Delta_2$,

$$(Ο\Sigma)^2 = (Ο\Delta_1)^2 + (Ο\Delta_2)^2 - 2(Ο\Delta_1)\cdot(Ο\Delta_2)\,\text{συν}(\widehat{Ο\Delta_1\Sigma}) \tag{17}$$

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $Ο\Delta_1\Sigma$ καὶ $\Delta_1 Ο \Delta_2$ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἐπομένως γων. $Ο\Delta_1\Sigma = 180^\circ - (\text{γων. } \Delta_1 Ο \Delta_2) = 180^\circ - \varphi$, ἔνθα φ παριστᾷ τὴν γωνίαν τῶν δύο δυνάμεων. Ὅθεν ἐὰν εἰς τὴν (17) τὰ ΟΣ, $Ο\Delta_1$ καὶ $Ο\Delta_2$ παραστήσωμεν συντόμως διὰ Σ, Δ_1, Δ_2 καὶ λάβωμεν ἀκόμη ὑπ' ὄψιν ὅτι συν $(180^\circ - \varphi) = -$συν φ ἔχομεν

$$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2 \;\text{συν}\; (180^\circ - \varphi) = \Delta_1 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \;\text{συν}\; \varphi,$$

ἐξ ἧς

$$\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \;\text{συν}\; \varphi}. \tag{18}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν τὴν ἔντασιν τῆς συνισταμένης δυο δυνάμεων, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις ἀποτελοῦν τὴν γωνίαν φ, ὅταν δίδωνται αἱ ἐντάσεις αὐτῶν Δ_1 καὶ Δ_2. Εἰς τὴν περίπτωσιν $\varphi = 90^0$, ἐπειδὴ

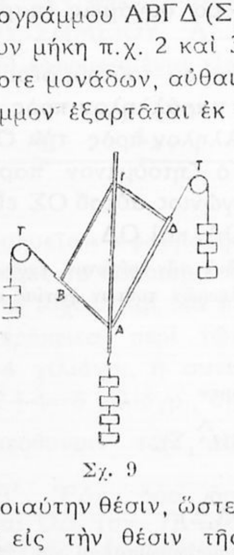
συν $90^0 = 0$, ἕπεται ὅτι $\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$ (19)

Ὁ τελευταῖος οὗτος τύπος εὑρίσκεται καὶ βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ὡς ἀκολούθως

Ἐὰν ἡ γωνία φ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ὀρθή, τότε καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθαί. Τὸ τρίγωνον $Ο\Delta_1\Sigma$ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον. Ἡ πλευρὰ τούτου $\Delta_1\Sigma$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $Ο\Delta_2$, καθότι ἀμφότεραι εἶναι ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν $(Ο\Sigma)^2 = (Ο\Delta_1)^2 + (Ο\Delta_2)^2$, ἢ συντόμως

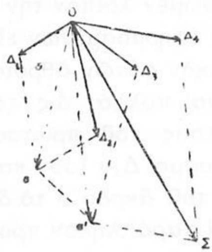
$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$, ὅτε $\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$. (19)

Τὴν ἀρχὴν τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων πειραματικῶς ἀποδεικνύουν δι' ἑνὸς λίαν ἐλαφροῦ ἀρθρωτοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (Σχ. 9). Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΔ ἔχουν μήκη π.χ. 2 καὶ 3 παλαμῶν ἀντιστοίχως (ἢ ἄλλων οἱωνδήποτε μονάδων, αὐθαιρέτως λαμβανομένων). Τὸ παραλληλόγραμμον ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἄκρων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ διὰ νημάτων διερχομένων διὰ τῶν τροχαλιῶν Τ καὶ Τ καὶ φορτισθέντων διὰ βαρῶν ἴσων πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν, ἤτοι βαρῶν ἴσων πρὸς 2 καὶ 3 εἰς αὐθαιρέτους μονάδας. Ἐὰν εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον ἐλαφροῦ στελέχους ΑΓ, συνδεδεμένου ἀρθρωτῶς εἰς Α (μόνον), ἐξαρτηθῇ βάρος 4 μονάδων, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπέρχεται ἰσορροπία ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ στέλεχος, κατακορύφως ἱστάμενον, τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου. Τότε τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ΑΓ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 4 παλάμας (μονάδας γενικῶς). Τὸ παραλληλόγραμμον δέον νὰ εἶναι λίαν ἐλαφρόν, ὥστε τὸ βάρος αὐτοῦ ἐν σχέσει πρὸς τὰ χρησιμοποιηθέντα βάρη νὰ δύναται νὰ παραμεληθῇ.



Σχ. 9

Ἐὰν εἰς ἓν σημεῖον Ο (Σχ. 10) ἐνεργοῦν περισσότεραι τῶν δύο δυνάμεις, αἱ $Ο\Delta_1$, $Ο\Delta_2$, $Ο\Delta_3$, $Ο\Delta_4$, συνθέτομεν πρῶτον δύο ἐξ αὐτῶν λ.χ. τὰς $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$, κατόπιν συνθέτομεν τὴν συνισταμένην αὐτῶν Οσ μὲ τὴν τρίτην δύναμιν $ΟΔ_3$, καὶ τὴν συνισταμένην αὐτῶν Οσ′ μὲ τὴν τετάρτην $ΟΔ_4$ καί, ὅταν πρόκειται περὶ περισσοτέρων τῶν τεσσάρων δυνάμεων, οὕτω πως συνεχίζοντες τὴν ἐργασίαν, εὑρίσκομεν τὴν τελικὴν συνισταμένην ΟΣ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνισταμένη ὅλων τῶν δυνάμεων.



Σχ. 10

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ περιπτώσεις Α καὶ Β τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις τῆς Δ. Ὁ τύπος (18) ἰσχύει καὶ δι' αὐτάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν Α ἡ γωνία φ τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ συν $φ=1$, ὅτε

$$Σ=\sqrt{Δ_1^2+Δ_2^2+2Δ_1Δ_2}=\sqrt{(Δ_1+Δ_2)^2}=Δ_1+Δ_2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν Β ἡ $φ=180^0$ καὶ συν $φ=-1$,

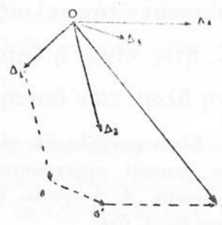
ὅτε $$Σ=\sqrt{Δ_1^2+Δ_2^2-2Δ_1Δ_2}=\sqrt{(Δ_2-Δ_1)^2}=Δ_2-Δ_1.$$

* 15. ΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΩΣ ΑΝΥΣΜΑΤΑ. Εἰς τὸ § 11 ἀνεφέραμεν ὅτι αἱ δυνάμεις παρίστανται δι' ἀνυσμάτων καὶ ἐκεῖ ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀνύσματος (διανύσματος). Δυνάμεθα συντόμως νὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ δύναμις εἶναι ἄνυσμα. Εἰδικὸς κλάδος τῶν μαθηματικῶν ἀσχολεῖται μὲ τοὺς κανόνας ὑπολογισμοῦ, ἀναφερομένου εἰδικῶς εἰς τὰ ἀνύσματα, καλούμενος Ἀνυσματικὸς (ἢ Διανυσματικὸς) Λογισμός.

Εἰς τὸν ἀνυσματικὸν λογισμὸν γεωμετρικὸν ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων $ΟΔ_1$ καὶ $ΟΔ_2$ (Σχ. 8) καλεῖται ἕτερον ἄνυσμα ΟΣ, τὸ ὁποῖον κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν παρέχεται ὑπὸ τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰ δοθέντα ἀνύσματα. Ἀλλὰ τὸ ἄνυσμα ΟΣ δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος $ΟΔ_1$ δηλ. τοῦ σημείου $Δ_1$, φέρομεν ἄνυσμα ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄλλο ἄνυσμα $ΟΔ_2$, τὸ $Δ_1Σ$. Ἐὰν ἑνώσωμεν τώρα τὰ σημεῖα Ο καὶ Σ, λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα ΟΣ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δοθέντων.

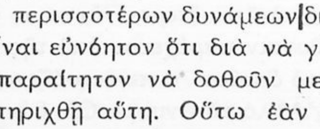
Τὸ γεωμετρικὸν ὅθεν ἄθροισμα τῶν δύο ἀνυσμάτων $ΟΔ_1$

καὶ $ΟΔ_2$, ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον, ἐφ᾽ ὅσον ταῦτα εἶναι δυνάμεις, οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἡ συνισταμένη αὐτῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ γεωμετρικὸν αὐτῶν ἄθροισμα. Τοῦτο εἰς ἣν περίπτωσιν τὰ ἀνύσματα εἶναι πολλά, ὡς τὰ $ΟΔ_1$, $ΟΔ_2$, $ΟΔ_3$, $ΟΔ_4$ (Σχ. 11), ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ πρώτου ἀνύσματος, ἔστω τοῦ $ΟΔ_1$, φέρομεν τὸ ἄνυσμα $Δ_1σ$ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $ΟΔ_2$, ἀκολούθως ἐκ τοῦ ἄκρου σ τὸ ἄνυσμα σσ΄, ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $ΟΔ_3$ καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου σ΄ τὸ ἄνυσμα σ΄Σ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ $ΟΔ_4$. Συνδέοντες τὸ Ο μὲ τὸ σημεῖον Σ λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα ΟΣ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν Ο μὲ τὰ δοθέντα


Σχ. 11

καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα αὐτῶν. Ἐὰν αἱ $ΟΔ_1$, $ΟΔ_2$, $ΟΔ_3$ καὶ $ΟΔ_4$ εἶναι δυνάμεις, ἡ ΟΣ εἶναι συνισταμένη αὐτῶν.

16. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΣ. Ἐξ ὅσων ἀνεφέραμεν περὶ τῆς συνθέσεως τῶν δυνάμεων καθίσταται εὐνόητον, ὅτι μίαν οἱανδήποτε δύναμιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς συνισταμένην ἄλλων δυνάμεων, δύο ἢ περισσοτέρων, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁμορρόπων, ἢ ἀντιρρόπων ἢ σχηματιζουσῶν γωνίαν. Ἡ εὕρεσις τῶν συνιστωσῶν μιᾶς δυνάμεως, θεωρουμένης ὡς συνισταμένης αὐτῶν, καλεῖται ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως. Ἐπειδὴ μία δύναμις δύναται νὰ παριστᾷ τὴν συνισταμένην δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων διαφόρου ἐντάσεως καὶ διευθύνσεως, εἶναι εὐνόητον ὅτι διὰ νὰ γίνῃ ἀνάλυσις μιᾶς δυνάμεως εἶναι ἀπαραίτητον νὰ δοθοῦν μερικὰ στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὁποίων νὰ στηριχθῇ αὕτη. Οὕτω ἐὰν ἐπὶ τοῦ Ο δυναμένου νὰ κινηθῇ μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας χχ΄, ἐνεργῇ ἡ δύναμις ΟΔ, αὕτη ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, τὴν ΟΠ, ἥτις κινεῖ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν χχ΄ καὶ τὴν ΟΚ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χχ΄


Σχ. 12

καὶ ἡ ὁποία οὐδεμίαν ἐπιφέρει κίνησιν. Εἶναι δὲ ἡ ΟΚ κάθετος ἐπὶ τὴν χχ', διότι ἄν δὲν ἦτο τοιαύτη, θὰ ἀνελύετο αὕτη πάλιν εἰς δύο συνιστώσας κτλ. Ὥστε ἐνταῦθα ἡ ἀνάλυσις τῆς δυνάμεως γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνεφέρθησαν προηγουμένως.

Ἐκ τοῦ Σχ. 12 καθίσταται φανερόν, ὅτι εἰς τὴν ἰδιαιτέραν ταύτην περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ δύναμις ἀναλύεται εἰς δύο συνιστώσας καθέτους πρὸς ἀλλήλας, ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$(ΟΠ)=(ΟΔ).\ συν\ α\ \text{καὶ}\ (ΟΚ)=(ΟΔ).\ ημα. \qquad (20)$$

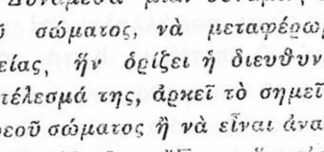
17. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ὅταν πολλαὶ δυνάμεις εἶναι ἐφηρμοσμέναι ἐπὶ ἑνὸς σημείου καὶ ἰσορροποῦν, ἤτοι ἡ συνισταμένη αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, τότε δυνάμεθα οἱανδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ θεωρῶμεν ὡς ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν συνισταμένην τῶν λοιπῶν δυνάμεων.

Β. ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ.

18. ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΔΥΝΑΜΕΩΣ. Ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἑνὸς στερεοῦ σώματος ἐφαρμόζωνται δύο ἴσαι δυνάμεις, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ εἶναι ἀντίθετοι, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ σῶμα δὲν θὰ κινηθῇ. Τοῦτο διδάσκει ἡ πεῖρα. Ἐπὶ τῆς ἐμπειρικῆς ταύτης ἀρχῆς στηρίζεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

Δυνάμεθα μίαν δύναμιν, ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τινος σημείου στερεοῦ σώματος, νὰ μεταφέρωμεν εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζει ἡ διευθυνσίς της, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμά της, ἀρκεῖ τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ ἀποτελῇ σημεῖον τοῦ στερεοῦ σώματος ἢ νὰ εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένον μὲ αὐτό.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Α (Σχ. 13) ἑνὸς στερεοῦ σώματος ἐνεργεῖ ἡ δύναμις F. Εἰς ἓν ἄλλο σημεῖον Β τοῦ σώματος, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζει ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἐνεργούσας δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις F_1 καὶ F_2, κειμένας ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ἔντασις ἑκάστης τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς τὴν τῆς F, χωρὶς μὲ τὴν ὕπαρξιν τῶν δυνάμεων τούτων νὰ μεταβληθῇ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνά-

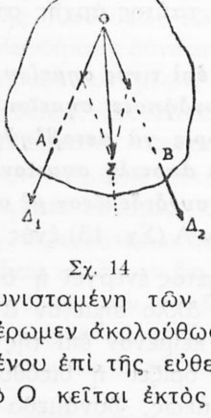


Σχ. 13

μεως F, ἐπειδὴ αἱ F_1 καὶ F_2 ἀναιροῦν ἀλλήλας. Ἀλλά, κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἐμπειρικὴν ἀρχήν, αἱ F_1 καὶ F_2 ἐξουδετεροῦται ἀμοιβαίως καὶ δυνάμεθα νὰ τὰς ἀφαιρέσωμεν χωρὶς ἡ κατάστασις τοῦ σώματος νὰ μεταβληθῇ, ὅτε ἀπομένει μόνον ἡ BF_1, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἔντασιν καὶ τὴν διεύθυνσιν κοινὰς μὲ τὴν AF, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της εἶναι σημεῖον τοῦ στερεοῦ ἢ συνδέεται ἀναποσπάστως μετ᾽ αὐτοῦ καὶ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ ἡ AF.

19. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ. Ἡ σύνθεσις δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς ἓν σημεῖον εἶναι, ὡς εἴδομεν, πάντοτε δυνατὴ καὶ περὶ αὐτῆς ἠσχολήθημεν ἀνωτέρω. Κατὰ τὴν σύνθεσιν ὅμως δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς διάφορα σημεῖα στερεοῦ σώματος διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις: α) ὅταν αἱ δυνάμεις κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ὁμοεπίπεδοι) καὶ δὲν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, β) ὅταν εἶναι παράλληλοι καὶ γ) ὅταν αἱ δυνάμεις εἶναι οἱαιδήποτε.

20. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ. Ἔστωσαν τοιαῦται δυνάμεις αἱ $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$ ἐφηρμοσμέναι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B τοῦ στερεοῦ (Σχ. 14). Αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ δυνάμεις, θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο, ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὰς δυνάμεις εἰς τό σημεῖον Ο, ὅτε ἡ σύνθεσίς των γίνεται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου. Ἡ ΟΣ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων. Ταύτην δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀκολούθως ἐπὶ οἱουδήποτε σημείου τοῦ σώματος, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΣ, ἰδίως εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν τὸ Ο κεῖται ἐκτὸς τοῦ στερεοῦ.

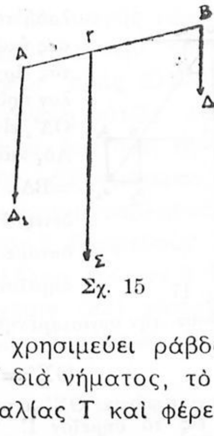


Σχ. 14

Ἡ σύνθεσις κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον γίνεται ἐπίσης: 1) ὅταν πολλαὶ δυνάμεις εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ μὴ παράλληλοι, ὅτε συνθέτομεν πρῶτον δύο, τὴν συνισταμένην αὐτῶν μὲ τρίτην κ.ο.κ., 2) ὅταν ἐκ τριῶν λ.χ. δυνάμεων δύο εἶναι ὁμοεπίπεδοι, ἡ δὲ τρίτη εἶναι ὁμοεπίπεδος πρὸς τὴν συνισταμένην αὐτῶν, καὶ 3) ὅταν πολλαὶ δυνάμεις δὲν εἶναι μὲν ὁμοεπίπεδοι, ἀλλὰ αἱ προεκτάσεις αὐτῶν συναντῶνται ὅλαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

21. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ἐφηρμοσμέναι εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β στερεοῦ σώματος (Σχ. 15). Ἀποδεικνύεται (βλ. κατωτέρω), ὅτι αἱ δυνάμεις αὗται ἔχουν συνισταμένην ΓΣ παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὰς δοθείσας, τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν, ἤτοι $Σ=Δ_1+Δ_2$ (21), τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τέμνει ταύτην εἰς τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς προσκειμένας δυνάμεις, ἤτοι

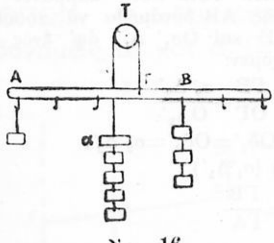
$$\frac{Δ_1}{Δ_2}=\frac{ΓΒ}{ΓΑ}. \quad (22)$$



Σχ. 15

Τ' ἀνώτέρω ἀποδεικνύονται καὶ πειραματικῶς καὶ θεωρητικῶς.

Διὰ τὴν πειραματικὴν ἀπόδειξιν χρησιμεύει ῥάβδος, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ διὰ νήματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται τὴν αὔλακα παγίας τροχαλίας Τ καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ἓν βάρος α, ἴσον πρὸς τὸ βάρος τῆς ῥάβδου, διὰ νὰ ἰσορροπῇ αὐτήν. Ἡ ῥάβδος φέρει κατ' ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσας ἄγκιστρα, διὰ νὰ ἐξαρτῶνται ἐξ αὐτῶν διάφορα βάρη. Ἐάν, ὅπως τὸ Σχ. 16 δεικνύει, εἰς τὸ πρῶτον πρὸς



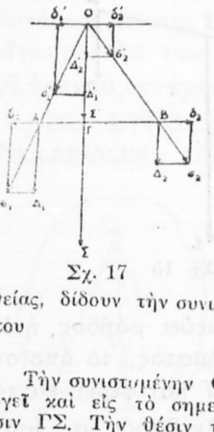
Σχ. 16

τὰ δεξιὰ ἄγκιστρον Β ἐξαρτήσωμεν 3 ἴσα βάρη, τότε πρέπει εἰς τὸ τρίτον π.χ. πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἄγκιστρον Α νὰ ἐξαρτήσωμεν ἓν ὅμοιον βάρος καὶ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος, ὁμοῦ μὲ τὸ βάρος α, πρέπει νὰ θέσωμεν τέσσαρα, ἴσα πρὸς τὰ ἄλλα, βάρη, ἵνα τὸ ὅλον σύστημα ἰσορροπῇ καὶ ἡ ράβδος ἵσταται ὁριζοντία. Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἀλήθεια τῶν σχέσεων (21) καὶ (22):

$$4=1+3 \text{ καὶ } 1:1=3:3.$$

Ἡ δύναμις τῶν 4 βαρῶν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ νήματος εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο παραλλήλων δυνάμεων (§ 17).

Θεωρητικῶς εὑρίσκεται ἡ συνισταμένη ΓΣ δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸ § 18. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ θεωρήσωμεν ἐφαρμοζομένας τὰς δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις $A\delta_1$ καὶ $B\delta_2$, κειμένας ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ταύτης, τό σύστημα δὲν ἀλλάσσει κατάστασιν. Συνθέτομεν τὰς Δ_1 καὶ δ_1 καθὼς τὰς Δ_2 καὶ δ_2 καὶ εὑρίσκομεν ὡς συνισταμένας αὐτῶν τὰς $A\sigma_1$ καὶ $B\sigma_2$ ἀντιστοίχως. Αὗται εἶναι ὁμοεπίπεδοι καὶ ὄχι παράλληλοι. Μεταφέρομεν αὐτὰς εἰς τὸ σημεῖον Ο, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 καὶ ταύτας, δηλαδὴ τὰς $O\sigma_1'$ καὶ $O\sigma_2'$ ἀναλύομεν εἰς δύο συνιστώσας ἑκάστην κατὰ τὰς εὐθείας ΟΓ, παράλληλον πρὸς τὰς ἀρχικὰς δυνάμεις Δ_1 καὶ Δ_2, καὶ ΟΧ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ τῆς $O\sigma_1'$ συνιστῶσαι $O\delta'_1$ καὶ $O\Delta'_1$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς $A\delta_1$ καὶ $A\Delta_1$, ὡς ἐπίσης εἶναι $O\delta'_2=B\delta_2$ καὶ $O\Delta_2'=B\Delta_2$. Αἱ $O\delta'_1$ καὶ $O\delta_2'$ ὡς ἴσαι καὶ ἀντίθετοι ἐξουδετεροῦνται ἀμοιβαίως, ὥστε ἀπομένουν μόνον αἱ δυνάμεις $O\Delta_1'$, καὶ $O\Delta_2'$ αἱ ὁποῖαι, ὡς ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ ὡς κείμεναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δίδουν τὴν συνισταμένην ΟΣ', τῆς ὁποίας ἡ ἔντασις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου



Σχ. 17

$$O\Sigma'=\Delta'_1+\Delta'_2=\Delta_1+\Delta_2. \qquad (21)$$

Τὴν συνισταμένην ΟΣ' μεταφέρομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Τότε αὕτη λαμβάνει τὴν θέσιν ΓΣ. Τὴν θέσιν τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν θεωροῦντες τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΑΓ καὶ $O\sigma_1'\,\Delta_1'$ ἀφ' ἑνὸς καὶ ΟΓΒ καὶ $O\Delta_2'\,\sigma'_2$ ἀφ' ἑτέρου· Ἐκ τούτων ἔχομεν:

$$\frac{A\Gamma}{O\Gamma}=\frac{\sigma_1'\Delta_1'}{O\Delta_1'}, \qquad \frac{\Gamma B}{O\Gamma}=\frac{\sigma_2'\Delta_2'}{O\Delta_2'}$$

ἤ, ἐπειδὴ $O\Delta_1'=A\Delta_1$, $O\Delta_2'=B\Delta_2$ καὶ $\sigma_1'\Delta_1'=O\delta_1'=O\delta_2'=\sigma_2'\Delta_2'$,

$(A\Gamma)\,(A\Delta_1)=(O\Gamma)\,(\sigma_1'\Delta_1')$, $(\Gamma B)\,(B\Delta_2)=(O\Gamma)\,(\sigma_1'\Delta_1')$.

Ὅθεν $\quad (A\Gamma)\,(A\Delta_1)=(\Gamma B)\,(B\Delta_2)$ ἢ $\dfrac{A\Delta_1}{B\Delta_2}=\dfrac{\Gamma B}{\Gamma A}$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

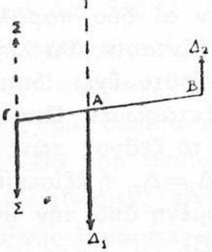
$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A},$$

ἥτις εἶναι ἡ σχέσις (22)

Ἡ ΓΣ, ὡς προκύπτει ἐξ ὅσων ἀνωτέρω ἐξετέθησαν, εἶναι προσέτι παράλληλος πρὸς τὰς Δ_1 καὶ Δ_2 καὶ ὁμόρροπος.

Ἐὰν ζητῆται ἡ συνισταμένη πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς πολλὰ σημεῖα ἑνὸς στερεοῦ σώματος, εὑρίσκομεν αὐτὴν συνθέτοντες δύο ἐξ αὐτῶν, τὴν συνισταμένην τούτων πρὸς τρίτην κ.ο.κ. Ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης πολλῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε σειρὰν καὶ ἂν συνθέσωμεν αὐτάς. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***κέντρον τῶν παραλλήλων δυνάμεων.*** Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις (22), διὰ τῆς ὁποίας καθορίζεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης παραλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει, τὸ ὁποῖον νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν δυνάμεων ἐν τῷ χώρῳ, ἕπεται ὅτι ἡ θέσις τοῦ κέντρου τῶν παραλλήλων δυνάμεων ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ἐντάσεως αὐτῶν καὶ τῆς θέσεως τῶν σημείων τῆς ἐφαρμογῆς των. Ὅθεν, ἐὰν αἱ δυνάμεις στραφοῦν ὅλαι συγχρόνως περὶ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των, μένουν ὅμως παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας καὶ διατηροῦν τὰς ἐντάσεις των, ἡ συνισταμένη αὐτῶν λαμβάνει καὶ αὕτη τὴν νέαν των διεύθυνσιν, ἀλλὰ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς, ὡς πρότερον. Τέλος ἂν αἱ ἐντάσεις τῶν παραλλήλων δυνάμεων μεταβληθοῦν κατὰ τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ κέντρον τῶν παραλλήλων τούτων δυνάμεων δὲν ἀλλάσσει θέσιν, ἐπειδὴ εἰς τὴν σχέσιν (22) εἰσέρχεται ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων τῶν συντιθεμένων δυνάμεων καὶ ὄχι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῶν.

22. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΝ. Ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ (Σχ. 18) ἔχουν ὡς συνισταμένην τὴν Σ, ἥτις ἔχει ἔντασιν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν δύο συνιστωσῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς δοθείσας καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῆς Γ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα



Σχ 18

ἐφαρμογῆς Α καὶ Β τῶν συνιστωσῶν, πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας οὕτως, ὥστε

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A}. \quad (26)$$

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν ἐπὶ τῶν σημείων Β,Γ στερεοῦ ἐφηρμοσμέναι αἱ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις $B\Delta_2$ καὶ $\Gamma\Sigma_1{}'$. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν $A\Delta_1{}'$ εἶναι παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς αὐτὰς καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$A\Delta_1{}'=\Gamma\Sigma'+B\Delta_2 \quad (23)$$

$$\frac{AB}{\Gamma A}=\frac{\Gamma\Sigma'}{B\Delta_2}. \quad (24)$$

Ἄς φέρωμεν τὴν $A\Delta_1$ ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς $A\Delta_1{}'$. Αὕτη ἰσορροπεῖ τὸ σύστημα τῶν δυνάμεων $\Gamma\Sigma'$ καὶ $B\Delta_2$. Κατὰ τὸ § 17 ἀφοῦ αἱ τρεῖς δυνάμεις $\Gamma\Sigma'$, $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$ ἰσορροποῦν, ἡ $\Gamma\Sigma'$ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἄλλων. Ἄς φέρωμεν τὴν $\Gamma\Sigma$ ἴσην καὶ ἀντίθετον τῆς $\Gamma\Sigma'$. Αὕτη θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν $A\Delta_1$ καὶ $B\Delta_2$. Ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων (23) καὶ (24), ἀντικαθιστῶντες τὰς $\Gamma\Sigma'$ καὶ $A\Delta_1{}'$ διὰ τῶν ἴσων των $\Gamma\Sigma$ καὶ $A\Delta_1$, ἔχομεν

$$\Gamma\Sigma=A\Delta_1-B\Delta_2 \quad (25)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{AB}{\Gamma A}=\frac{\Gamma\Sigma}{B\Delta_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{\Gamma\Sigma}=\frac{\Gamma A}{B\Delta_2}.$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, ἐκ τῆς τελευταίας σχέσεως λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{\Gamma\Sigma}=\frac{\Gamma A}{B\Delta_2}=\frac{AB+\Gamma A}{\Gamma\Sigma+B\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{A\Delta_1}.$$

Ὅθεν

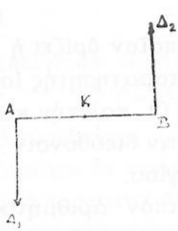
$$\frac{A\Delta_1}{B\Delta_2}=\frac{\Gamma B}{\Gamma A}. \quad (26)$$

Ἐὰν ἐπὶ σώματος ἐνεργοῦν πολλαὶ παράλληλοι δυνάμεις, ἄλλαι ὁμόρροποι καὶ ἄλλαι ἀντίρροποι, συνθέτομεν τὰς δυνάμεις τὰς ἐχούσας τὴν αὐτὴν φορὰν κεχωρισμένως καὶ οὕτω λαμβάνομεν δύο συνισταμένας, παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, τὰς ὁποίας συνθέτομεν ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ δύο παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι δυνάμεις εἶναι ἴσαι κατ' ἔντασιν, θὰ λέγωμεν ὅτι πρόκειται περὶ ***ζεύγους δυνάμεων***. Τοῦτο ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ θὰ τὸ ἐξετάσωμεν ἰδιαιτέρως.

23. ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Εἰς τὸ ζεῦγος τῶν δυνάμεων δὲν ὑπάρχει συνισταμένη. Ἐπειδὴ $\Delta_1=\Delta_2$, ἡ ἐξίσωσις (25) $\Sigma=\Delta_1-\Delta_2$ δίδει $\Sigma=0$, ἡ δὲ (26), γραφομένη ὑπὸ τὴν μορφὴν (βλ. Σχ. 18) $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\Gamma A+AB}{\Gamma A}$ ἢ $\Gamma A=\frac{\Delta_2\,(AB)}{\Delta_1-\Delta_2}$, δίδει $(\Gamma A)=\infty$ Δὲν

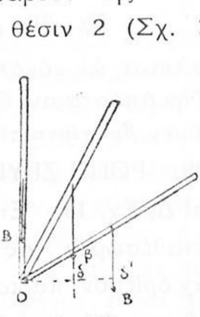
εἶναι λοιπὸν δυνατὴ ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων ἑνὸς ζεύγους.



Σχ. 19

Τὸ ζεῦγος ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἐπιφέρῃ· τὴν μετατόπισιν τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ. Ὡς ἀποτέλεσμα ἔχει τὴν περιστροφὴν τοῦ σώματος περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Περισσότερα περὶ ζεύγους βλ. εἰς τὸ §. 25.

24. ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ. Ἐὰν κρατῶμεν διὰ τοῦ κατωτέρου ἄκρου της ράβδον, ἔχουσαν κατακόρυφον θέσιν, δεχόμεθα ἐπὶ τῆς χειρός μας πίεσιν πρὸς τὰ κάτω ἴσην πρὸς τὸ βάρος τῆς ράβδου. Ἡ εἰς τὸ μέσον τῆς ράβδου (ὁμοιομεροῦς οὔσης) ἀσκουμένη ἐκ τῆς ἕλξεως τῆς γῆς δύναμις, δηλαδὴ τὸ βάρος τῆς ράβδου, ἔχει διεύθυνσιν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως (χειρός). Ὅταν ἀπομακρύνωμεν ὅμως τὴν ράβδον τῆς κατακορύφου θέσεώς της καὶ τὴν φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν 2 (Σχ. 20), τότε αἰσθανόμεθα κάτι διάφορον ἢ προηγουμένως. Ἔχομεν τὴν αἴσθησιν ὅτι ἡ ράβδος τείνει νὰ στραφῇ περὶ τὴν χεῖρα μας (σημεῖον Ο). Ἡ τάσις τῆς περιστροφῆς γίνεται μεγαλυτέρα, ὅταν ἡ κλίσις τῆς ράβδου αὐξηθῇ ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, ὅσον ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως Β

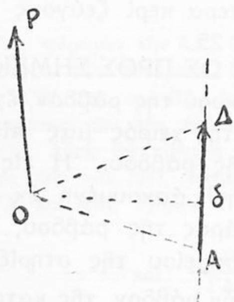


Σχ. 20

(βάρους) ἀπὸ τοῦ Ο γίνεται μεγαλυτέρα. Ἐκ τοιούτων παρατηρήσεων φερόμεθα εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς στατικῆς ροπῆς δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον. Ὅταν ὁμιλῶμεν περὶ ροπῆς μιᾶς δυνάμεως ὡς πρὸς σημεῖον ἐννοοῦμεν μίαν τάσιν περιστροφῆς τοῦ σώματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ αὕτη, περὶ τὸ σημεῖον τοῦτο, ἥτις, ὡς εἴπομεν, εἶναι τοσοῦτον μεγαλυτέρα, ὅσον ἡ ἀπόστασις τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ σημείου αὐξάνεται. Ἡ ροπὴ παρίσταται δι' ἀνύσματος, ὅπερ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο, μῆκος ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ σημείου, ἤτοι

$$P = \Delta . O\delta), \qquad (27)$$

διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ ΑΔ καὶ τὸ σημεῖον Ο, φορὰν δὲ τοιαύτην, ὥστε παρατηρητὴς ἱστάμενος κατὰ τὸ ΟΡ, ἤτοι ἔχων τοὺς πόδας εἰς Ο καὶ τὴν κεφαλὴν εἰς Ρ, νὰ βλέπῃ τὴν δύναμιν ΑΔ ἔχουσαν διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.



Σχ. 21

Ἡ ροπὴ λοιπὸν ἀριθμητικῶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΟΔ. Γίνεται ἴση πρὸς τὸ μηδέν, ἐὰν ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο. Ἐὰν ἡ δύναμις ΑΔ μετατεθῇ εἰς ἄλλην διεύθυνσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζει αὔτη, συμφώνως πρὸς τὸ § 18, ἡ ροπὴ αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο δὲν μεταβάλλεται, ὡς εὐκόλως ἐννοεῖ τις.

Τὴν ἀπόστασιν Οδ τῆς δυνάμεως ΑΔ ἀπὸ τοῦ σημείου Ο καλοῦμεν ***βραχίονα*** τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

25. ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ. Ἔστω τὸ ζεῦγος τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2(Σχ. 19). Ἐπειδὴ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ § 18 δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὰς δυνάμεις ὁπουδήποτε ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν ὁρίζουν, παριστῶμεν εἰς τὸ σχῆμα τοῦτο τὸ ζεῦγος οὕτως, ὥστε αἱ Δ_1 καὶ Δ_2 νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, τῆς ἑνούσης τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ζεῦγος ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ θέτῃ τὸ σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται, εἰς περιστροφικὴν κίνησιν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ζεύγους, διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Κ, τοῦ κειμένου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐξ ὅσων περὶ ροπῆς ἐξετέθησαν, δύναταί τις νὰ θεωρήσῃ τὴν περιστροφὴν τοῦ σώματος περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον ὡς ὀφειλομένην εἰς τὰς ροπὰς τῶν δυνάμεων Δ_1 καὶ Δ_2 ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Κ. Αἱ ροπαὶ αὗται εἶναι

τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ δύνανται νὰ προστεθοῦν, ὅτε ἡ ὁλικὴ ῥοπὴ ἀμφοτέρων εἶναι

$$P = \Delta_1 (AK) + \Delta_2 (KB).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta_1 = \Delta_2$ καὶ $AK + KB = AB$, ἕπεται ὅτι

$$P = \Delta_1 (AK + KB) = \Gamma_1 (AB).$$

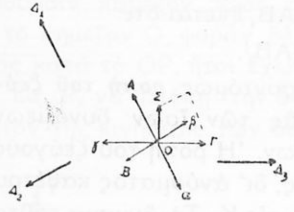
Ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη τιμὴ καλεῖται συντόμως ***ῥοπὴ τοῦ ζεύγους***, ἰσοῦται δὲ πρὸς τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν ἴσων δυνάμεων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν ἀπ᾽ ἀλλήλων. Ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους παρίσταται, ὅπως καὶ ἡ ῥοπὴ δυνάμεως, δι᾽ ἀνύσματος καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ, ἐφηρμοσμένον εἰς Κ. Τὸ ἄνυσμα τοῦτο καλεῖται καὶ ***ἄξων τοῦ ζεύγους***.

Ὅπως μία δύναμις δύναται νὰ μετατεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας της εἰς οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ σώματος, χωρὶς τὸ ἀποτέλεσμά της νὰ μεταβληθῇ, οὕτω καὶ πᾶν ζεῦγος ἀποδεικνύεται ὅτι δύναται νὰ μετακινηθῇ καθ᾽ οἱονδήποτε τρόπον, ἤτοι νὰ στραφῇ ἢ μετατεθῇ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του ἢ ἀκόμη καὶ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἀρχικόν του ἐπίπεδον, χωρὶς τὸ ἀποτέλεσμά του νὰ μεταβληθῇ.

Ἡ παράστασις τῶν ζευγῶν διὰ τῶν ἀξόνων των ἐπιτρέπει τὴν σύνθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ζευγῶν, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ ἑνὸς στρεπτοῦ σώματος. Συνθέτοντες ζεύγη εὑρίσκομεν ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ δύναται ν᾽ ἀντικαταστήσῃ αὐτά. Ἡ σύνθεσις τῶν ζευγῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς συνθέσεως τῶν ἀξόνων αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ζεύγη δύνανται νὰ μετατεθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των ἢ ἐπὶ ἄλλου παραλλήλου ἐπιπέδου, ἡ σύνθεσις τῶν ἀξόνων των, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ γεωμετρικοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος, εἶναι πάντοτε δυνατή, ἐπειδὴ δυνάμεθα δι᾽ αὐτῶν τῶν μετακινήσεων νὰ καθιστῶμεν αὐτοὺς ἔχοντας ὡς ἀρχὴν τὸ αὐτὸ σημεῖον.

26. ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. **Τώρα ἂς θεωρήσωμεν** τὰς δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Δ_3, ἐνεργούσας ἐπὶ διαφόρων σημείων ἑνὸς στερεοῦ καὶ ἐχούσας τοιαύτας διευθύνσεις, ὥστε οὔτε παράλληλοι νὰ εἶναι, οὔτε νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Δὲν εἶναι δυνατὴ τότε ἡ σύνθεσις αὐτῶν κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ § 20. Διὰ νὰ συνθέσωμεν αὐτὰς ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ἐνεργούσας 6 δυνάμεις, Α, α, Β, β, Γ, γ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο πρῶται εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὴν Δ_1, μεταξύ των ἀντίθετοι, αἱ Β, β, Γ, γ ἀντιστοίχως παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς τὰς Δ_2 καὶ Δ_3, ἀντίθετοι δὲ μεταξύ των ἀνὰ δύο. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις Δ_1 καὶ α ἀποτελοῦν

ζεῦγος, ὡς καὶ Δ_2, β καὶ Δ_3, γ ἕπεται ὅτι ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ἐφαρμόζονται νῦν τρία ζεύγη καὶ αἱ δυνάμεις Α, Β, Γ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ Ο. Αἱ δυνάμεις αὗται, ὡς ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς συντίνενται εὐκόλως καὶ δίδουν ὡς συνισταμένην αὐτῶν τὴν ΟΣ.



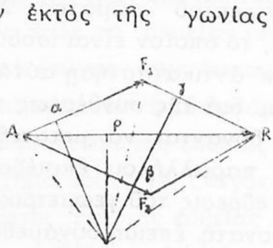
Σχ. 22

Ἀλλὰ καὶ τὰ ζεύγη ἀντικαθιστάμενα διὰ τῶν ἀξόνων των συντίθενται, ὡς ἐξετέθη εἰς τὸ § 25, καθότι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὰ ζεύγη οὕτως, ὥστε οἱ ἄξονες αὐτῶν νὰ ἔχουν ἀρχὴν τὸ Ο. Ἡ σύνθεσις ἑπομένως δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων ἐνεργουσῶν ἐπὶ διαφόρων σημείων ἑνὸς στερεοῦ, μὴ ὁμοεπιπέδων, δίδει ὡς ἀποτέλεσμα μίαν συνισταμένην δύναμιν καὶ ἓν συνιστάμενον ζεῦγος.

Ἐὰν ἡ συνισταμένη δύναμις εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ σύστημα τῶν συνιστωσῶν δυνάμεων ἰσοδυναμεῖ πρὸς ζεῦγος. Ἐὰν ἐπίσης ἡ συνισταμένη δύναμις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ συνισταμένου ζεύγους, τότε μετακινοῦμεντὸ ζεῦγος τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε ἡ συνισταμένη δύναμις νὰ ἀποκτήσῃ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς μιᾶς τῶν δύο δυνάμεων τοῦ ζεύγους. Διὰ δύο συνθέσεων τὸ σύστημα τῆς δυνάμεως ταύτης καὶ τοῦ ζεύγους ἀντικαθίσταται ἀπὸ μίαν συνισταμένην δύναμιν.

27. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ἢ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ Varignon (1).

Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης δυνάμεων ὡς πρὸς ἓν σημεῖον Ο, ἐνεργουσῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, ὅταν τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων ἐκτὸς τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αὗται, πρὸς τὴν διαφορὰν δὲ τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν, ὅταν τὸ Ο κεῖται μεταξὺ τῶν δυνάμεων τούτων.



Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (Σχ. 23) θὰ ἔχωμεν:

$$R\,(O\rho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta) \quad (28)$$

καὶ εἰς τὴν δευτέραν (Σχ. 24):

$$R\,(O\rho) = F_2\,(O\beta) - F_1\,(O\alpha). \quad (29)$$

Ἀπόδειξις: 1) Ἐκ τοῦ σχήματος (23) φαίνεται ὅτι διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχηματιζομένων τριγώνων, ὅταν ἐκ τοῦ Ο φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, OF_1 καὶ OR, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{ἐμβ. } OAR = \text{ἐμβ. } OAF_1 + \text{ἐμβ. } OF_1R - \text{ἐμβ. } F_1RA,$$

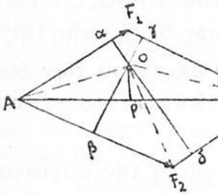
ἤτοι: $$\frac{1}{2}R\,(O\rho) = \frac{1}{2}F_1\,(O\alpha) + \frac{1}{2}F_2\,(O\gamma) - \frac{1}{2}F_2\,(\beta\gamma),$$

(1) Pierre Varignon (*1654–1722*), *γάλλος μαθηματικός*.

ἤ $\quad R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta + \beta\gamma) - F_2\,(\beta\gamma)$,

ὅτε $\quad R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta)$.

2) Ἐκ τοῦ σχήματος (24) φαίνεται ἐπίσης ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις :



Σχ. 24

$$\text{Ἐμβ. } OAR = \text{ἐμβ. } OAF_2 + \text{ἐμβ. } OF_2R - \text{ἐμβ. } ARF_2$$

ἤτοι

$$\frac{1}{2}\,R\,(O\varrho) = \frac{1}{2}\,F_2\,(O\beta) + \frac{1}{2}\,F_1\,(O\delta) - \frac{1}{2}\,F_1\,(\alpha\delta)$$

ἤ $\quad R\,(O\varrho) = F_2\,(O\beta) + F_1\,(O\delta) - F_1\,(O\alpha + O\delta)$,

ὅτε $\quad R\,(O\varrho) = F_2\,(O\beta) - F_1\,(O\alpha)$.

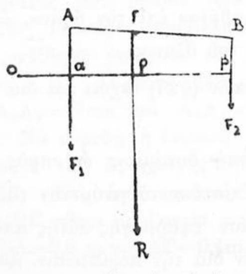
3) Ἐὰν τὸ σημεῖον O (κέντρον τῶν ῥοπῶν) κεῖται ἐπὶ τῆς συνισταμένης, ὅτε $O\varrho = 0$, τότε ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως προκύπτει

$$F_1\,(O\alpha) = F_2\,(O\beta).$$

Ἐὰν προσέξωμεν, εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς τὸ O ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ ἡ ῥοπὴ τῆς R ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν F_1 καὶ F_2 πρὸς τὸ ἴδιον σημεῖον, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ῥοπὴ τῆς F_1 δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὰς ῥοπὰς τῶν F_2 καὶ R ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἔχομεν κατὰ ταύτην, τὴν ῥοπὴν τῆς R ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν.

Ἐὰν πρόκειται περὶ δυνάμεων παραλλήλων, τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν ἰσχύει ἐπίσης. Εἰς τὸ σχ. 25 αἱ ῥοπαὶ τῶν δυνάμεων εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$R\,(O\rho) = F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta).$$



Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ.

Ἐπειδὴ $R = F_1 + F_2$, ἕπεται :

$$R\,(O\varrho) = F_1\,(O\varrho) + F_2\,(O\varrho)$$

$$\text{ἤ } R\,(O\varrho) = F_1\,(O\alpha + \alpha\varrho) + F_2\,(O\beta - \varrho\beta) =$$

$$= F_1\,(O\alpha) + F_2\,(O\beta) + F_1\,(\alpha\varrho) - F_2\,(\varrho\beta) \qquad (30)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν (22) εἶναι :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Gamma B}{A\Gamma}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΑΓ, αρ καὶ ΓΒ, ρβ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ αβ, ὡς κείμενα μεταξὺ παραλλήλων συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\frac{\varrho\beta}{\alpha\varrho} = \frac{\Gamma B}{A\Gamma}, \qquad \text{ἕπεται ὅτι}$$

F_1 (αρ) = F_2 (ρβ), ὁπότε ἡ σχέσις (30) γίνεται R (Oρ) = F_1 (Oα) + F_2 (Oβ).

Ἐὰν τὸ κέντρον τῶν ῥοπῶν O κεῖται μεταξὺ τῶν παραλλήλων, ὅτε αἱ ῥοπαὶ τῶν δύο δυνάμεων διευθύνονται ἀντιθέτως τῆς ῥοπῆς τῆς τρίτης, ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο τοῦ ἐπιπέδου τῶν δυνάμεων, ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης δυνάμεων ὡς πρὸς ἓν σημεῖον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Εἰς ἣν δὲ περίπτωσιν ἡ σύνθεσις τῶν δυνάμεων δίδει μίαν συνισταμένην καὶ ἓν συνιστάμενον ζεῦγος (§ 26), τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων πρὸς σημεῖον ἰσοῦται πρὸς τὴν ῥοπὴν τῆς συνισταμένης καὶ τὴν ῥοπὴν τοῦ ζεύγους.

28. ΣΤΑΤΙΚΗ ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ. Ἡ ῥοπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ἐν χρήσει εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σῶμα, εἶναι στρεπτὸν περὶ ἄξονα.

Ἔστω ἐν πρώτοις ὅτι ἡ δύναμις κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα. Ἡ ζητουμένη ῥοπὴ εἶναι ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλ' ἐὰν ἡ δύναμις δὲν κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, ἀναλύομεν αὐτὴν εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἡ δευτέρα ὡς παράλληλος τῷ ἄξονι τείνει νὰ περιστρέψῃ τὸ σῶμα ὄχι περὶ τὸν ἄξονα, ἀλλὰ νὰ στρέψῃ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἄξονα καὶ δι' αὐτὸ ἡ ῥοπή της ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἡ ῥοπὴ τῆς πρώτης τῶν συνιστωσῶν, ὡς κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα, εὑρίσκεται εὐκόλως, συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην. Δυνάμεθα, ὅθεν, γενικῶς νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ ῥοπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ἡ ῥοπὴ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἄξονος.

Ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν (§ 27) ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ῥοπὰς δυνάμεων ὡς πρὸς ἄξονα.

Τέλος χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε καὶ ἡ ῥοπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἐπίπεδον. Καλεῖται στατικὴ ῥοπὴ δυνάμεως ὡς πρὸς ἐπίπεδον τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν ἰσχύει μόνον διὰ τὴν περίπτωσιν παραλλήλων δυνάμεων: Ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης παραλλήλων δυνάμεων πρὸς ἓν ἐπίπεδον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9) Τρεῖς δυνάμεις Δ_1, Δ_2, Δ_3 εἶναι ἐφηρμοσμέναι κατὰ σειρὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Αἱ $\Delta_1 = \Delta_2 = 8kg^*$ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 90^o καὶ ἡ $\Delta_3 = 5kg^*$ σχηματίζει μετὰ τῆς πλησίον της Δ_2 γωνίαν 45^o. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν τούτων δυνάμεων.

* 10) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $A = 6kg^*$ καὶ $B = 4{,}5kg^*$ ἐφηρμοσμένων ἐπὶ σημείου καὶ ὧν αἱ διευθύνσεις σχηματίζουν γωνίαν 60^o.

* 11) Μία κρεμαστὴ λάμπα, βάρους $8kg^*$, ἐξαρτᾶται ἐκ δύο σχοινίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὴν αὐτὴν γωνίαν $\varphi = 30^o$. Μὲ πόσην δύναμιν τείνεται ἕκαστον σχοινίον;

Β. 12) Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων $F_1 = 3kg^*$ καὶ $F_2 = 16{,}5kg^*$, παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων, ἐφηρμοσμένων ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι 169 cm καὶ εἰς ποίαν ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν εὑρίσκεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης;

13) Ἐπὶ ἑνὸς σώματος καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἐφαρμόζονται δύο δυνάμεις $AF_1 = 86{,}4gr^*$ καὶ $BF_2 = 36gr^*$, παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ, ἂν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης ἀπέχῃ τοῦ Α κατὰ 12 cm. Ἐπίσης ποία δύναμις f πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ Β, ἀντίθετος τῆς BF_2, ἵνα ἐλαττοῦσα ταύτην μεταφέρῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α ἴσην πρὸς 5 cm;

* 14) Ἐπὶ σώματος ἐφαρμόζονται εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας $AB = 60$ cm δύο δυνάμεις $AF_1 = 6$ kg^* καὶ $BF_2 = 5kg^*$. Ἡ AF_1 σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ γωνίαν 120^o καὶ ἡ BF_2 μετὰ τῆς ἰδίας γωνίαν 90^o, ἀμφότεραι ὅμως κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ζητεῖται ἡ σύνθεσις τῶν δύο τούτων δυνάμεων, δηλαδὴ ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐντάσεως τῆς συνισταμένης R, τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της Γ, κειμένου ἐπὶ τῆς ΑΒ, διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀποστάσεως ΒΓ καὶ τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης δηλ. τῆς γωνίας ΒΓR.

Γ. [Αἱ κατωτέρω ἀσκήσεις λύονται συντόμως διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ροπῶν (τοῦ Varignon)].

15) Τέσσαρες παράλληλοι δυνάμεις $F_1 = 7kg^*$, $F_2 = 8kg^*$, $F_3 = 9kg^*$, καὶ $F_4 = 10kg^*$ ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα A_1, A_2, A_3 καὶ A_4 μιᾶς στερεᾶς εὐθείας $A_1 A_4$. Αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς ἀποστάσεις εἶναι $A_1A_2 = 12$ cm, $A_2A_3 = 17$cm καὶ $A_3A_4 = 15$cm. Ἡ δύναμις F_2 εἶναι ἀντίρροπος πρὸς τὰς ἄλλας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν R καὶ ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ τῆς ἐφαρμογῆς της.

16) Ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφως ἱσταμένου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὁριζοντία καὶ διὰ τοῦ ὕψους ΑΔ διαιρεῖται εἰς δύο τμήματα $B\Delta = 0{,}6$ m καὶ $\Delta\Gamma = 0{,}4$m, ἐφαρμόζονται τρεῖς παράλληλοι δυνάμεις: εἰς Α

---

* *Αἱ μὲ ἀστερίσκον ἀσκήσεις λύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ γνώσεων ἐκ τῆς τριγωνομετρίας καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι κατάλληλοι διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ζ΄. τάξεως τῶν κλασσικῶν γυμνασίων.*

ἡ F_1=7kg*, πρὸς τὰ ἄνω διευθυνομένη, εἰς Β καὶ Γ αἱ F_2=10kg* καὶ F_3=8kg* πρὸς τὰ κάτω διευθυνόμεναι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις καὶ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης αὐτῶν P, κείμενον ἐπὶ τῆς ΒΓ.

17) Πέντε παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις, ἐντάσεων 6, 8, 12, 15 καὶ 9 kg*, ἐνεργοῦν ἐπὶ πέντε στερεῶς πρὸς ἄλληλα συνδεδεμένων σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου ἔχουν ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις 8, 4, 10, 5 καὶ 20 cm. Ποία ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης αὐτῶν καὶ ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

29. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ. Ἡ δυναμικὴ ἐξετάζουσα τὴν σχέσιν τῶν κινήσεων πρὸς τὰ αἴτια αὐτῶν, ἀποτελεῖ τὸ σπουδαιότερον μέρος τῆς μηχανικῆς. Αὕτη στηρίζεται ἐπί τινων ἀξιωμάτων ἢ ἀρχῶν, καλουμένων ἀξιωμάτων τοῦ Νεύτωνος [1]. Ταῦτα εἶναι: τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας, τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως.

30. Α'. ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ. Τὰ ὑλικὰ σώματα δὲν δύνανται ἀφ᾽ ἑαυτῶν νὰ μεταβάλουν τὴν κινητικήν των κατάστασιν. Συγκεκριμμένως; α) Σῶμα εὑρισκόμενον εἰς ἠρεμίαν δὲν δύναται νὰ κινηθῇ, ἂν δὲν ἐπιδράσῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐξωτερική τις αἰτία καὶ β) σῶμα εὑρισκόμενον εἰς κίνησιν δὲν δύναται νὰ μεταβάλῃ τὴν κατάστασιν τῆς κινήσεώς του, ἐὰν δὲν ἐνεργήσῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ μία ἐξωτερικὴ αἰτία, ἀλλὰ ἐφ᾽ ὅσον τοιαῦται αἰτίαι δὲν ὑπάρχουν, τὸ σῶμα θὰ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Ἐὰν λοιπὸν αἴφνης συμβῇ ἓν σῶμα ἀκίνητον νὰ κινηθῇ ἢ κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς νὰ αὐξήσῃ ἢ ἐλαττώσῃ ἢ μηδενίσῃ τὴν ταχύτητά του ἢ νὰ μεταβάλῃ τὴν εὐθύγραμμον πορείαν του, πρέπει, κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο,

1) *Ὁ Isaac Newton (1642–1727) ὑπῆρξε μέγας ἄγγλος φυσικός, μαθηματικός, ἀστρονόμος καὶ φιλόσοφος. Ἀπὸ τοῦ 1669 διωρίσθη καθηγητὴς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge. Διετύπωσε τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως, ἀνέλυσε τὸ φῶς κ.τ.λ. Τὰ σπουδαιότερα ἔργα του εἶναι: «Philosophiae naturalis prinzipia mathematica» (Μαθητικαὶ ἀρχαὶ τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας) (1686-1687), «Ὀπτική» (1704), «Arithmetica universalis» (1707) καὶ ἡ «Ἀνάλυσις». Εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἐδῶ ἀναγραφομένων ἔργων του ἔθεσε τὰς βάσεις τῆς μηχανικῆς, διατυπώσας εἰς αὐτὸ τὰ ἀξιώματα τῆς δυναμικῆς. Εἰς τὸ τελευταῖον καὶ ἀλλαχοῦ, ἐθεμελίωσε τὸν Ἀπειροστικὸν Λογισμόν. Ὁ Newton θεωρεῖται μία ἀπὸ τὰς μεγαλυτέρας φυσιογνωμίας εἰς τὴν ἱστορίαν τῆς ἐπιστήμης.*

νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὡρισμέναι ἐξωτερικαὶ αἰτίαι συνετέλεσαν εἰς τοῦτο. Τὰς ἐξωτερικὰς ταύτας αἰτίας καλοῦμεν ***δυνάμεις***. Αὐτὸ εἶναι τὸ περιεχόμενον τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας, τὸ ὁποῖον συγχρόνως μᾶς ἐπέτρεψε νὰ δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως.

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας, ὅτι δηλ. ἓν σῶμα εὑρισκόμενον εἰς ἠρεμίαν δὲν δύναται ἀφ' ἑαυτοῦ νὰ τεθῇ εἰς κίνησιν, δὲν ἔχει ἀνάγκην ἀποδείξεως. Ἡ παρατήρησις ἀφ' ἑνὸς καὶ ἡ λογικὴ (ἀρχὴ τοῦ ἀποχρῶντος λόγου ἢ τῆς αἰτιότητος) ἀφ' ἑτέρου δεικνύουν τὴν ὀρθότητα τούτου. Ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας οὔτε ὑπὸ τῆς πείρας (παρατηρήσεως) φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως ἐπαληθευόμενον, οὔτε δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀλήθεια ἐκ τῶν προτέρων ἐπιβαλλομένη εἰς τὸ πνεῦμα. Ἀκριβῶς δι' αὐτὸ ἐπὶ αἰῶνας ἐπεκράτησεν ἀντίθετος δοξασία.

Ὁ Γαλιλαῖος (1638), μελετῶν τὴν κίνησιν (πτῶσιν) τῶν σωμάτων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, διετύπωσε τὴν γνώμην, ὅτι ἓν κινούμενον σῶμα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου θὰ διετήρει ἀμετάβλητον τὴν ταχύτητά του, ἐὰν δὲν παρενεβάλλοντο ἐμπόδια εἰς τὴν κίνησίν του. Οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ G. Baelo (1635), Cavalieri καὶ Baliani (1646) πρῶτοι ὑπεστήριξαν, ὅτι ἐφ' ὅσον ἐξωτερικαὶ ἐπιδράσεις δὲν ὑπάρχουν, ἡ τροχιὰ ἑνὸς ἐλευθέρως κινουμένου σώματος πρέπει νὰ εἶναι εὐθεῖα, ἤτοι ὅτι τὸ κινητόν, ἄνευ αἰτίας τινός, δὲν μεταβάλλει τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του. Ὁ ὀλλανδὸς Isaac Beeckmann, ὅπως φαίνεται ἀπό τινα ἀνακοίνωσιν τοῦ Καρτεσίου (Descartes) τοῦ 1620, ἤδη πρὸ τοῦ ἔτους τούτου εἶχε διατυπώσει τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας. Εἰς τὸ ἡμερολόγιον τοῦ Beeckmann ὑπάρχει ἡ φράσις: «κινητὸν δὲν ἔρχεται εἰς ἠρεμίαν, ἐὰν δὲν ἐξαναγκασθῇ». Ὅμως ὁ Νεύτων εἶναι ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος πρῶτος κατὰ τρόπον ἐπιστημονικὸν διετύπωσε τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας τῷ 1687, καταστήσας αὐτὴν θεμελιώδη νόμον τῆς κινήσεως.

Ἐνῷ λοιπὸν προηγουμένως ἐτίθετο τὸ ἐρώτημα «ποία ἡ αἰτία ἕνεκα τῆς ὁποίας ἡ ἀρξαμένη κίνησις διατηρεῖται ἐπί τι χρονικὸν διάστημα μετὰ τὴν παῦσιν τῆς ἐνεργείας τῆς ταύτην προκαλεσάσης δυνάμεως», ἤδη ἐδόθη διὰ τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος ἀρχῆς ἀπάντησις εἰς ἐρώτησιν τεθεῖσαν ἄλλως: «Ποία ἡ αἰτία ἕνεκα τῆς ὁποίας ἀρξαμένη κίνησις σταματᾷ καὶ ἐν γένει μεταβάλλεται;»

Ἡ παρατήρησις, καθ' ἣν σφαῖρα κυλιομένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἀμμώδους κατ' ἀρχὰς καὶ ἐκ λείας ἀσφάλτου κατόπιν, ἀφοῦ ἅπαξ ἐτέθη εἰς κίνησιν διὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως διανύει διαστήματα ἄνισα, δύναται ἄριστα νὰ ἑρμηνευθῇ διὰ τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι μεγαλύτερον, ἐπειδὴ αἱ τριβαὶ πρὸς τὸ ἔδαφος εἶναι μικρότεραι. Ἐὰν αἱ τριβαὶ πρὸς τὸ ἔδαφος, ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καὶ οἱαδήποτε ἄλλη δρῶσα δύναμις, ὡς ἡ βαρύτης εἰς πολλὰς περιπτώσεις, δὲν ὑπῆρχον, τὸ σῶμα θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς. Εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ χῶρος, εἰς ὃν νὰ μὴ ὑπάρχουν ἐξωτερικαὶ αἰτίαι μεταβάλλουσαι τὴν κίνησιν (τριβαὶ κλπ.) Ἄμεσος λοιπὸν ἀπόδειξις τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀδρανείας εἶναι ἀδύνατος. Ἐν τούτοις δεχόμεθα ὅτι καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀξιώματος τούτου ἀληθεύει διότι αἱ παρατηρήσεις ἄριστα ἑρμηνεύονται δι᾿ αὐτοῦ εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις.

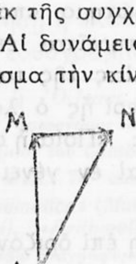
Τὴν ἰδιότητα, ἣν ἔχουν τὰ σώματα νὰ συμπεριφέρωνται ὡς τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα ὁρίζει, καλοῦμεν ***ἀδράνειαν***.

Ὡς πόρισμα τῆς ἀναφερθείσης ἀρχῆς ἐξάγομεν τοῦτο: Ἐὰν σῶμα ἠρεμῇ ἢ κινῆται ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως, ἐπ᾿ αὐτοῦ οὐδεμία δύναμις ἀσκεῖται (ἤ, γενικώτερον, ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ᾿ αὐτοῦ ἐνεργουσῶν δυνάμεων εἶναι μηδέν). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ κίνησις τοῦ σώματος προῆλθεν ἐκ τῆς ἐπ᾿ αὐτοῦ ἐνεργείας δυνάμεως ἐπί τινα μόνον χρόνον, νῦν δέ, ὅτε ἡ κίνησις αὐτοῦ εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλή, ἡ δύναμις αὕτη δὲν ἐνεργεῖ.

31. Β΄. ΑΞΙΩΜΑ ΔΙΑΛΥΤΙΚΟΝ ἢ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ.

Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο δύο ἢ περισσότεραι δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σώματος ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον ἑκάστη, ἐπιφέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα εἴτε ἂν ἐνεργήσουν συγχρόνως εἴτε διαδοχικῶς. Τὸ ἀποτέλεσμα δηλαδὴ τὸ ὁποῖον ἐπιφέρει μία δύναμις ἐνεργοῦσα ἐπὶ σώματος δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς συγχρόνου ἐνεργείας ἄλλης δυνάμεως.

Αἱ δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν σωμάτων ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν κίνησιν αὐτῶν. Ἔστω ἐπὶ τῆς ἠρεμούσης ἐπιφανείας ὕδατος καὶ εἰς τὸ Λ (Σχ. 26) τεμάχιον φελλοῦ. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ φελλοῦ ἀσκουμένη ἐπί τινα στιγμὴν δύναμις Δ, τὸν φέρει μέχρι τοῦ σημείου Μ εἰς χρόνον t καὶ ἐκεῖ ἑτέρα δύναμις Δ, ἐνεργήσασα ἐπί τινα στιγμὴν θὰ τὸν φέρῃ εἰς Ν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον t. Κατὰ τὸ ἀξίωμα



Σχ. 26

τοῦτο, ἐὰν ἐπὶ τοῦ φελλοῦ εἰς Λ ἐφαρμοσθοῦν συγχρόνως αἱ αὐται δυνάμεις $Δ_1$ καὶ $Δ_2$ καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὁ φελλὸς θὰ ἐφέρετο εἰς Ν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t, ἀκολουθῶν τὸν δρόμον ΛΝ. Τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐκφράζει τὸ περιεχόμενον τοῦ διαλυτικοῦ ἀξιώματος. Πράγματι αἱ δύο δυνάμεις εἴτε συγχρόνως ἐνεργήσουν ἐπὶ ἑνὸς σώματος εἴτε διαδοχικῶς, ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον ἑκάστη, ἐπιφέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα· ἤ, ἄλλως, ἡ $Δ_2$ μετέθεσε τὸ τεμάχιον τοῦ φελλοῦ πρὸς τὰ δεξιὰ κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα ΜΝ καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν τὸ τεμάχιον τοῦτο εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν σύγχρονον ἐνέργειαν καὶ ἄλλης δυνάμεως. Τὸ περὶ οὗ λόγος ἀξίωμα φέρει, ἕνεκα τούτου, καὶ τὴν ὀνομασίαν ***ἀξίωμα τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δυνάμεων.***

Ἄς παρατηρήσωμεν τοῦτο: Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως $Δ_2$ (λ.χ.) εἶναι τὸ αὐτὸ εἴτε τὸ σῶμα (φελλὸς) εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν (διαδοχικὴ ἐνέργεια) εἴτε εἰς κίνησιν (σύγχρονος ἐνέργεια τῶν $Δ_1$ καὶ $Δ_2$). Ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα ΛΜΝ ἀποτελεῖ τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου, οὗτινος αἱ πλευραὶ ΛΜ καὶ ΜΝ καὶ ἡ διαγώνιος ΛΝ παριστοῦν τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t ὑπὸ τοῦ κινητοῦ —ὅτε τὰ μήκη ΛΜ, ΜΝ καὶ ΛΝ, ὡς ἀνάλογα τῶν ταχυτήτων (μέσων ταχυτήτων) δίδουν τὸ μέτρον αὐτῶν— ἕπεται ὅτι ἡ σύνθεσις τῶν κινήσεων (ταχυτήτων) ἀκολουθεῖ τὸν κανόνα τῆς συνθέσεως δυνάμεων διὰ τοῦ παραλληλογράμμου (παραλληλόγραμμον τῶν κινήσεων).

Τὸ παράδειγμα τεμαχίου φελλοῦ ἐπιπλέοντος ἐπὶ τῆς ἠρέμου ἐπιφανείας ὕδατος καὶ ὑποκειμένου εἰς τὴν ἐνέργειαν τῶν δυνάμεων $Δ_1$ καὶ $Δ_2$, ἐξελέγη διὰ τὴν διασάφησιν τῆς ἀρχῆς ταύτης. Ὅμως παρατηρήσεις ἀνάλογοι ἐπὶ πολλῶν ἄλλων φαινομένων, τὰ ὁποῖα καθημερινῶς λαμβάνουν χώραν, ἀποτελοῦν τὴν πεῖραν, ἡ ὁποία μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὴν παραδοχὴν τῆς ἐν λόγῳ ἀρχῆς. Οὕτω ἐὰν ἐκ δύο ὁμοίων σφαιρῶν Α καὶ Β εὑρισκομένων εἰς ὕψος τι h ὑπεράνω τοῦ δαπέδου ἐπὶ ἑνὸς ὑποστηρίγματος, ἡ μὲν Α ἀφεθῇ νὰ πέσῃ κατακορύφως ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους της, ἡ δὲ Β ἐκσφενδονισθῇ ὁριζοντίως εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ τὴν ὤθησιν μιᾶς δυνάμεως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἀμφότεραι θὰ φθάσουν εἰς τὸ ἔδαφος ταυτοχρόνως. Ἡ βαρύτης (ἕλξις τῆς γῆς) λοιπὸν ἐπέφερε τὸ ἀποτέλεσμά της, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τοῦτο ἐκ τῆς συγχρόνου ὑπάρξεως τῆς ἄλλης δυνάμεως εἰς τὴν σφαῖραν Β. Ἐὰν κυλίσωμεν σφαῖραν ἐπὶ τοῦ καταστρώματος πλοίου, ἡ κίνησις αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ πλοῖον εἶναι ἡ ἰδία εἴτε τὸ πλοῖον ἠρεμεῖ εἴτε κινεῖται. Ἡ κίνησις τῶν μερῶν τῆς μηχανῆς ὡρολογίου, ὅταν τοῦτο μεταφέρεται δὲν μεταβάλλεται, ἀλλὰ μένει ἡ αὐτή, ὅπως καὶ ὅταν εἶναι ἀκίνητον κλπ.

Τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα ἔχει δύο σπουδαιοτάτας συνεπείας:

1) Δύναμις σταθερά, συνεχῶς ἐνεργοῦσα ἐπί τινος σώματος, προσδίδει εἰς αὐτὸ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κατὰ τὴν διεύθυσίν της. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς : Ἔστω ἕν ὑλικὸν σῶμα ἐπὶ τοῦ ὑποίου ἐνεργεῖ μία σταθερὰ δύναμις. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου δευτερολέπτου ἡ δύναμις θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα ταχύτητα υ καὶ ἄν ἡ δύναμις παύσῃ τότε ἐνεργοῦσα, τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ τὴν ταχύτητα υ, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας. Ἄν ὅμως ἡ δύναμις ἐξακολουθήσῃ ἐνεργοῦσα, θὰ ἐπιφέρῃ τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα καὶ κατὰ τὸ δεύτερον δευτερόλεπτον, καθότι ἡ ἐπίδρασις αὐτῆς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς κινητικῆς καταστάσεως, εἰς ἥν ἤδη τὸ κινητὸν εὑρίσκεται, ἤτοι θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα εἰς τὸ τέλος τοῦ 2ου δευτερολέπτου νέαν ταχύτητα υ. Ἡ ταχύτης ὅθεν τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου δευτερολέπτου θὰ εἶναι $υ+υ=2υ$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου sec ἡ ταχύτης θὰ γίνῃ 3υ κ.ο.κ. Ἡ κίνησις λοιπὸν ἥν θὰ λάβῃ τὸ κινητὸν θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς υ. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἡ σταθερὰ δύναμις ἐφηρμόζετο, οὐχὶ ἐπὶ ἀκινήτου κατ᾽ ἀρχὰς σώματος, ἀλλὰ ἐπὶ σώματος ἐν ἰσοταχεῖ κινήσει εὑρισκομένου μὲ ταχύτητα $υ_0$, τὸ ἀποτέλεσμα θὰ ἦτο, ἕνεκα τῆς ἰσχύος τοῦ ἀξιώματος τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν δυνάμεων, τὸ αὐτό.

Κατ᾽ ἐπέκτασιν τοῦ πορίσματος τούτου, δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ, ὅτι ἐὰν ἐπὶ σώματος ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως κινουμένου, λόγῳ τῆς ἀδρανείας, ἐνεργήσῃ δύναμις σταθερὰ κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς κινήσεως, τὸ κινητὸν θὰ κινηθῇ μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, μέχρις οὗ σταματήσει ἐντελῶς καί, ἐφ᾽ ὅσον ἐξακολουθεῖ ἐνεργοῦσα σταθερῶς ἡ δύναμις, κινηθῇ ἀκολούθως μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην πρὸς τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν.

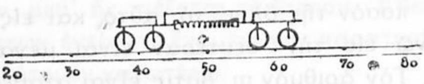
2) Αἱ ἐπιταχύνσεις, τὰς ὁποίας προσδίδουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα δύο δυνάμεις διαδοχικῶς ἐνεργοῦσαι ἐπ' αὐτοῦ, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωρήσωμεν ἐνεργούσας ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου διαδοχικῶς τὰς δυνάμεις Δ_1, $\Delta_2=2\Delta_1$ καὶ $\Delta_3=3\Delta_1$. Ἐὰν ἡ Δ_1 συνεχῶς ἐνεργοῦσα προσδίδῃ εἰς τὸ σῶμα ἐπιτάχυνσιν γ_1, ἡ Δ_2 ἀναλυομένη εἰς δύο συνιστώσας ἴσας ἑκάστην πρὸς Δ_1, ἐφηρμοσμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ σημείου καὶ ἐχούσας τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα, κατὰ τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα, ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς $\gamma_1+\gamma_1=2\gamma_1=\gamma_2$, ἡ δὲ Δ_3 ἐπιτάχυνσιν $\gamma_3=3\gamma_1$. Ὥστε

$$\frac{\Delta_1}{\gamma_1}=\frac{\Delta_2}{\gamma_2}=\frac{\Delta_3}{\gamma_3}=\;.\;.\;.\;.\;.=m \qquad (31)$$

Τὸ m εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς διὰ τὸ ὑλικὸν σῶμα καὶ περὶ τῆς φύσεως αὐτοῦ ἀσχολούμεθα κατωτέρω.

32. ΜΑΖΑ. Διά νὰ ἴδωμεν τὴν σημασίαν τοῦ m εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (31) ἂς ἐκτελέσωμεν τὰ ἑξῆς πειράματα:

α) Ἐπὶ ὁριζοντίου λείας πλακὸς (ὑαλίνης) θέτομεν δύο ἴσα καὶ εὐκόλως ἐπὶ τῶν τροχῶν των κινητὰ ἁμάξια (Σχ. 27), ἔχοντα τὸ αὐτὸ βάρος. Τοποθετοῦμεν μεταξὺ αὐτῶν σπειροειδὲς ἐλατήριον καὶ πλησιάζομεν αὐτὰ πρὸς ἄλληλα συμπιέζοντες τὸ ἐλατήριον.



Σχ. 27

Καθηλοῦμεν ταῦτα εἰς τὴν νέαν των πρὸς ἄλληλα θέσιν, συνδέοντες αὐτὰ διὰ νήματος, ἐμποδιζομένης κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τῆς διατάσεως τοῦ ἐλατηρίου. Τὸ σύστημα μένει ἀκίνητον. Ἐὰν τώρα κόψωμεν τὸ νῆμα, τὰ ἁμάξια ὠθούμενα ὑπὸ τῆς αὐτῆς δυνάμεως (συμφώνως πρὸς τὸ τρίτον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως) κινοῦνται πρὸς ἀντίθετον διεύθυνσιν καὶ φθάνουν εἰς ὡρισμένην ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς των θέσεως ἀπόστασιν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Αἱ ταχύτητες (υ_1 καὶ υ_2) λοιπὸν ἂς ἀπέκτησαν κατὰ τόν, ἔστω καὶ ἐλάχιστον, χρόνον ἐνεργείας τῆς ὠθησάσης δυνάμεως, εἶναι ἴσαι. Ὁ χρόνος t τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τὰ δύο ἁμάξια καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἐκτήθησαν ὑπ᾽ αὐτῶν αἱ ἴσαι ταχύτητες υ_1 καὶ υ_2. Ὅθεν

$$\upsilon_1=\gamma_1 t=\upsilon_2=\gamma_2 t \text{ καὶ } \gamma_1=\gamma_2.$$

Ἡ (31) δι᾽ ἀμφότερα τὰ σώματα δίδει

$$\frac{\Delta}{\gamma_1}=m_1, \quad \frac{\Delta}{\gamma_2}=m_2.$$

Ἕπεται ὅτι $m_1=m_2$.

β) Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα, ἀλλὰ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἁμαξίου ἐκ τῶν δύο θέτομεν βάρη. Ὅταν κόψωμεν τὸ νῆμα τὰ δύο ἁμάξια ὠθοῦνται καὶ πάλιν ὑπὸ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, κινοῦνται ἀντιθέτως, ἀλλὰ τὸ βαρύτερον κινεῖται βραδύτερον. Θὰ διανύσῃ τοῦτο τὴν ὡρισμένην ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θέσεως ἀπόστασιν εἰς μεγαλύτερον χρόνον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν $\upsilon_1=\gamma_1 t$, $\upsilon_2=\gamma_2 t$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\upsilon_1>\upsilon_2$, θὰ εἶναι καὶ $\gamma_1>\gamma_2$. Τὰ $m_1=\dfrac{\Delta}{\gamma_1}$ καὶ $m_2=\dfrac{\Delta}{\gamma_2}$ θὰ εἶναι ἄνισα καὶ μάλιστα $m_2>m_1$.

Ἐκ τῶν δύο ὡς ἄνω πειραμάτων εἶναι εὔκολον νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὰ m_1 καὶ m_2 ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ σώματα. Πράγματι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι τὸ ποσὸν τῆς ὕλης τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σώματα ($m_1=m_2$), ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν εἶναι μεγαλύτερον εἰς τὸ ἓν ($m_2>m_1$). Τὸν ἀριθμὸν m, ὅστις εἶναι σταθερὸς δι᾽ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σῶμα καὶ ὁ ὁποῖος χαρακτηρίζει τὸ ποσὸν τῆς ὕλης εἰς αὐτὸ καλοῦμεν ***μᾶζαν*** τοῦ σώματος.

Ἐὰν γενικῶς διὰ Δ ἢ F παραστήσωμεν τὴν σταθερὰν δύναμιν, τὴν ἀσκουμένην εἰς σῶμα μάζης m καὶ διὰ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, τὴν ὁποίαν αὕτη προσδίδει εἰς αὐτό, κατὰ τὴν (31) ἔχομεν τὴν θεμελειώδη σχέσιν

$$F=m\gamma, \tag{32}$$

ἥτις συνδέει τὰ μεγέθη ταῦτα.

33. Γ΄ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΣ

Ὅταν ἕνα σῶμα Α ἀσκῇ ἐπὶ ἄλλου σώματος Β μίαν δύναμιν, καὶ τὸ Β ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ Α δύναμιν ἴσην κατ᾽ ἔντασιν, ἀλλὰ ἀντιθέτου διευθύνσεως. Ἐὰν τὴν ἐνέργειαν τοῦ Α ἐπὶ τοῦ Β καλέσωμεν δρᾶσιν, τὴν δὲ ἐνέργειαν τοῦ Β ἐπὶ τοῦ Α ἀντίδρασιν, δυνάμεθα συντόμως τὸ ἀξίωμα τοῦτο νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς: Πᾶσα δρᾶσις προκαλεῖ ἴσην ἀντίδρασιν.

Παραδείγματα: Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τραπέζης τοποθετήσωμεν βαρὺ σῶμα, τὸ σῶμα τοῦτο πιέζον τὴν τράπεζαν λόγῳ τοῦ βάρους του (δρᾶσις), μετασχηματίζει, ἔστω καὶ κατ᾽ ὀλίγον, ταύτην καὶ ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου παράγεται ἐλαστικὴ δύναμις (ἀντίδρασις), ὠθοῦσα τὸ βαρὺ σῶμα πρὸς τὰ ἄνω. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ἴση πρὸς τὸ βάρος τοῦ σώματος, ἡ δὲ διεύθυνσίς της ἀντίθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος. Ἐὰν μὲ τὴν χεῖρα μας κτυπήσωμεν τὴν τράπεζαν, δεχόμεθα τὸ κτύπημα ἐκ τῆς τραπέζης πρὸς τὴν χεῖρα μας. Μαγνήτης ἕλκει τεμάχιον σιδήρου, ἀλλὰ καὶ ὁ σίδηρος ἕλκει τὸν μαγνήτην μετὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως, ὡς δύναται νὰ δειχθῇ, ἂν ἀμφότερα τὰ σώματα συνδεθοῦν μὲ δυναμόμετρα. Αἱ ἀμοιβαῖαι αὗται ἕλξεις ἔχουν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Ἡ γῆ ἕλκει τὰ σώματα τὰ εὑρισκόμενα πέριξ αὐτῆς, ἀλλὰ καὶ ταῦτα ἕλκουν τὴν γῆν μὲ ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν. Ἡ γῆ ἕλκει τὴν σελήνην, ἀλλὰ καὶ ἡ σελήνη ἀσκεῖ ἴσην καὶ ἀντίθετον ἑλκτικὴν δύναμιν ἐπὶ τῆς γῆς κ. ο. κ. Τέλος ἓν ἄλλο παράδειγμα εἴδομεν εἰς τὰ πειράματα τοῦ § 32, ὅπου ἡ δύναμις μετὰ τῆς ὁποίας πιέζεται τὸ ἓν ἁμάξιον εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν, μεθ᾽ ἧς πιέζεται τὸ ἕτερον. Ἐπανερχόμενοι ἐπὶ τῶν πειραμάτων ἐκείνων ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν δύο τινά, τὰ ὁποῖα ἐκθέτομεν κατωτέρω.

1) Τὰ δύο σώματα, μαζῶν m_1 καὶ m_2, ὑφίστανται τὴν ἐνέργειαν δύο ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι θὰ ἠδύναντο νὰ προσδώσουν εἰς αὐτὰ ἐπιταχύνσεις γ_1 καὶ γ_2. Ἰσχύει ἑπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ἡ σχέσις (συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν 22):

$$m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2.$$

Ὅσον ἡ μᾶζα τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, λ. χ. ἡ m_2 γίνεται μεγαλυτέρα, τόσον καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις γ_2, τὴν ὁποίαν τοῦτο λαμβάνει, καθίσταται μικροτέρα. Ἐὰν δὲ ἡ μᾶζα m_2 εἶναι ὑπερβολικῶς μεγάλη, δηλαδὴ ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν m_1 τόσον μεγάλη, ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις γ_2 νὰ ἀποτελῇ μέγεθος τοσοῦτον μικρόν, ὥστε νὰ δύναται νὰ παραμεληθῇ, τότε τὸ ἓν μόνον τῶν σωμάτων, τὸ ἔχον τὴν μᾶζαν m_1, θὰ κινηθῇ. Τὸ τοιοῦτον συμβαίνει εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Ἂς ἴδωμεν μερικάς.

Λίθος εὑρισκόμενος εἰς ὕψος τι ἕλκεται ὑπὸ τῆς γῆς καὶ οὗτος ἕλκει δι᾽ ἴσης καὶ ἀντιθέτου δυνάμεως τὴν γῆν. Ὅμως ὡς συνέπειαν τῆς ἀμοιβαίας ἕλξεως τῶν δύο τούτων σωμάτων θεωροῦμεν τὴν πτῶσιν τοῦ λίθου, ἤτοι τὴν κίνησιν τοῦ λίθου, οὐχὶ δὲ καὶ τῆς γῆς. Ἄλλο παράδειγμα εἶναι τὸ πήδημα ἀνθρώπου ὑπεράνω μιᾶς τάφρου. Κατὰ τὸ πήδημα ὁ ἄνθρωπος ἀπομακρύνεται τῆς μιᾶς ὄχθης τῆς τάφρου, ἡ ὡσαύτως ὅμως πράγματι λαμβάνουσα χώραν —θεωρητικῶς— κίνησις, κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν, τῆς ὄχθης ταύτης τῆς τάφρου, ἤτοι τῆς γῆς, παραμελεῖται, ἐπειδὴ ἡ μᾶζα τῆς γῆς ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν τοῦ πηδῶντος ἀνθρώπου εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐὰν πηδήσῃ τις ἐξ ἑνὸς πλοίου εἰς τὴν ἀκτήν, τὸ πλοῖον θὰ κινηθῇ ἐὰν εἶναι μικρὸν (λέμβος), ὀλιγώτερον ἢ οὐδόλως ἐὰν εἶναι μεγάλο. Ὅταν μία ἁμαξοστοιχία κινῆται ἐπὶ τῶν σιδηροτροχιῶν, λόγῳ τῆς ἀρχῆς τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, καὶ ἡ γῆ συγχρόνως θὰ ἔπρεπε νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν, ἂν δὲν ἦτο κατὰ τὴν μᾶζαν πολὺ μεγάλη. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δείξωμεν, ἂν ἐπὶ ἑνὸς δίσκου, ὁριζοντίως τοποθετημένου, ἐλαφροῦ καὶ στρεπτοῦ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, φέροντος κατὰ τὴν περιφέρειαν σιδηροτροχιάς, τοποθετήσωμεν μικρὰν —πειραματικὴν— ἁμαξοστοιχίαν κινουμένην δι' ἐλατηρίου. Ὅταν ἡ ἁμαξοστοιχία τεθῇ εἰς κίνησιν καὶ διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου, τότε ὁ δίσκος τίθεται καὶ αὐτὸς εἰς κίνησιν κατ' ἀντίθετον διεύθυνσιν, τοσοῦτον ταχύτερον, ὅσον ἡ ἁμαξοστοιχία καθίσταται βαρυτέρα, παύει δὲ κινούμενος εὐθὺς ὡς ὁ ἴδιος φορτωθῇ μὲ μεγάλας μάζας.

2) Τὰ δύο ἀμάξια τοῦ πειράματος τοῦ § 32, ἐφ' ὅσον εἶναι συνδεδεμένα μεταξύ των διὰ τοῦ νήματος, εἰς οὐδεμίαν κίνησιν τίθενται, ἐπειδὴ αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀσκούμεναι δυνάμεις ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, κείμεναι ἐπὶ τῆς συνδεούσης ἀμεταθέτως τὰ δύο σημεῖα τῆς ἐφαρμογῆς τῶν εὐθείας. Ἂς χαρακτηρίσωμεν τὰς δυνάμεις ταύτας ὡς ***ἐσωτερικὰς*** τοῦ συστήματος, ἐπειδὴ αὗται ἀσκοῦνται μεταξὺ τῶν μερῶν τοῦ συστήματος. Βλέπομεν ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου, ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἑνὸς συστήματος δὲν δύνανται νὰ θέσουν αὐτὸ εἰς κίνησιν, οὔτε ἐπιδροῦν ἐπὶ τῆς κινήσεως ἑνὸς συστήματος θεωρουμένου ὡς ἀπολύτως στερεοῦ. Οὐδεὶς δύναται νὰ θέσῃ εἰς κίνησιν λέμβον, εὑρισκόμενος [ἐντὸς αὐτῆς, ὠθῶν τὸ πρόσθιον μέρος της πρὸς τὰ ἐμπρός. Οὔτε δύναται ἄνθρωπος νὰ ἀνυψωθῇ ὠθῶν τὴν κεφαλὴν αὐτοῦ διὰ τῶν χειρῶν του πρὸς

τὰ ἄνω. Ἡ λέμβος δύναται νὰ κινηθῇ τῇ ἐπιδράσει ***ἐξωτερικῆς*** δυνάμεως λ. χ. ἐὰν διὰ σχοινίου συρθῇ ἀπὸ πλοίου τινός. Τὰ ὅρια ἑνὸς συστήματος γίνονται ὅσον θέλομεν μικρὰ ἢ μεγάλα. Διὰ τοῦτο μία δύναμις, θεωρουμένη ὡς ἐξωτερικὴ δι᾽ ἓν σύστημα, καθίσταται ἐσωτερική, ὅταν τὸ σύστημα εὐρυνθῇ, ὥστε νὰ περιλάβῃ καὶ τὸ σῶμα ἐκ τοῦ ὁποίου προέρχεται αὕτη.

Ἐξ ὅσων ἀνωτέρω εἴπομεν δύναται νὰ ἐξαχθῇ τὸ γενικὸν συμπέρασμα, ὅτι πᾶσα δύναμις οὐδέποτε ἀσκεῖται μόνη. Ἡ δύναμις ἀσκεῖται πάντοτε ἀμφιμερῶς.

34. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΑΖΗΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΣ. ***1) Μάζης.*** Ὡς μονὰς μάζης ἀρχικῶς (1799) εἶχεν ἐκλεγῇ τὸ χιλιόγραμμον (kg), ἤτοι ἡ μᾶζα μιᾶς κυβικῆς παλάμης ἀπεσταγμένου ὕδατος θερμοκρασίας 4° Κελσίου. Κατεσκευάσθη μάλιστα πρὸς τοῦτο ἓν ***πρότυπον χιλιόγραμμον***, ἤτοι κύλινδρος ἐκ λευκοχρύσου, τοῦ ὁποίου ἡ μᾶζα κατεβλήθη προσπάθεια νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν ἀκριβῶς ἴση πρὸς τὴν μᾶζαν μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου κτλ. Τὸ πρότυπον χιλιόγραμμον φυλάσσεται ἐκεῖ ὅπου καὶ τὸ πρότυπον μέτρον, δηλ. εἰς τὸ Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν εἰς τὰς Sèvres, παρὰ τοὺς Παρισίους. Εἰς τὴν φυσικὴν ὅμως, ὡς μονὰς μάζης ἐλήφθη τὸ ***γραμμάριον*** (gr), ἤτοι τὸ χιλιοστὸν μέρος τοῦ χιλιογράμμου, ἡ μᾶζα δηλ. ἑνὸς κυβικοῦ ἑκατοστομέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°.

Ἀλλὰ τὸ πρότυπον χιλιόγραμμον δὲν κατεσκευάσθη ἀκριβῶς ὅπως προϋπελογίσθη. Νεώτεραι μετρήσεις ἔδειξαν, ὅτι ἡ μᾶζα τούτου δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὴν μᾶζαν μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου κλπ., ἀλλὰ περίπου κατὰ 0,04 gr μεγαλυτέρα ταύτης. Κατόπιν τούτου, ἀντὶ νὰ ἐπιχειρήσουν τὴν κατασκευὴν ἄλλου ἀκριβοῦς προτύπου χιλιογράμμου, ἐτροποποίησαν τὸν ὁρισμὸν τοῦ χιλιογράμμου καὶ τοῦ γραμμαρίου. Χιλιόγραμμον εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ προτύπου χιλιογράμμου καὶ γραμμάριον εἶναι ἀκριβῶς τὸ χιλιοστὸν τῆς μάζης τοῦ προτύπου χιλιογράμμου. Τῷ 1889 κατεσκευάσθησαν ἀπὸ κρᾶμα λευκοχρύσου καὶ ἰριδίου σώματα μάζης ἴσης πρὸς τὴν τοῦ προτύπου χιλιογράμμου καὶ διενεμήθησαν εἰς διαφόρους χώρας.

2. ***Δυνάμεως.*** Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (32) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ καθορίσωμεν τὴν μονάδα τῆς δυνάμεως. Ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν διὰ τὰ m καὶ γ τὰς μονάδας τῆς μάζης καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως θὰ λάβωμεν καὶ διὰ τὴν F τιμὴν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα. Εἰς τὸ σύστημα C G S, ἑπομένως, μονὰς δυνάμεως εἶναι ἡ δύναμις ἐκείνη, ἥτις ἐνεργοῦσα συνεχῶς ἐπὶ σώματος μάζης ἴσης πρὸς 1 γραμμάριον προσδίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρὸς τὴν θεωρητικὴν μονάδα τῆς ἐπιταχύνσεως (1 cm. sec^{-2}). Ἡ μονὰς αὕτη τῆς δυνάμεως ὀνομάζεται δύνη (dyne ἢ Dyn), ἐκ τῆς πρώτης συλλαβῆς τῆς ἑλληνικῆς λέξεως «δύναμις». Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι μικρά, χρησιμοποιοῦν πολλάκις πολλαπλάσιον αὐτῆς, τὴν ***μεγαδύνην*** (Megadyne), ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς 1.000.000 dyne=10^6 dyne.

Ἐσχάτως προὐτάθη ὑπὸ μιᾶς εἰδικῆς διὰ τὰς μονάδας γερμανικῆς Ἐπιτροπῆς, ἡ χρῆσις μιᾶς νέας μονάδος, τῆς Vis (εἰς τὴν λατινικὴν vis σημαίνει δύναμις). 1 Vis=10^8 dyne.

Εἰς τὴν πρᾶξιν (Τεχνικὸν σύστημα) μεταχειρίζονται πολλάκις ὡς μονάδας δυνάμεως, τὴν δύναμιν μεθ᾿ ἧς ἕλκει ἡ γῆ ἓν γραμμάριον ἢ ἓν χιλιόγραμμον (βλ. καὶ § 5, 11), ἤτοι τὰ βάρη τῶν μονάδων μάζης, παριστοῦν δὲ ταύτας ἀντιστοίχως διὰ τῶν συμβόλων: 1gr* καὶ 1 kg*. Ἐπειδὴ δέ, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ ἕλξις τῆς γῆς προσδίδει εἰς τὰ πίπτοντα σώματα ἐπιτάχυνσιν ἴσην, εἰς γεωγραφικὸν πλάτος 45°, πρὸς 981 cm sec^{-2}, ἕπεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (32), ὅτι ἐκεῖ 1 gr*=981 dyne καὶ 1kg*= 981000 dyne. Ἑπομένως.

$$1 \text{ δύνη} = \frac{1}{981} \text{gr}^*.$$

35. ΣΧΕΣΕΙΣ: ΜΑΖΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ, ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ, ΜΑΖΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ. Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις (32) τῆς δυναμικῆς

$$F = m\gamma$$

ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν τὰς κατωτέρω σχέσεις.

1. Ἐὰν μία δύναμις F ἐνεργήσῃ διαδοχικῶς ἐπὶ δύο σωμάτων, μαζῶν m καὶ m΄, θὰ προσδώσῃ εἰς ταῦτα ἐπιταχύνσεις γ καὶ γ΄. Θὰ ἔχωμεν:

$$F = m\gamma = m'\gamma' \text{ καὶ } \frac{m}{m'} = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Ἑπομένως: Αἱ ἐπιταχύνσεις, τὰς ὁποίας μεταδίδει ἐπὶ δύο σωμάτων μία καὶ ἡ αὐτὴ δύναμις, ἐνεργοῦσα ἐπ᾿ αὐτῶν διαδοχικῶς, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς μάζας τῶν σωμάτων.

2. Ἐὰν δύο δυνάμεις F καὶ F′ ἐνεργήσουν ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μάζης διαδοχικῶς (ἢ ἐπὶ τῶν ἴσων μαζῶν), θὰ προσδώσουν ἐπ' αὐτῆς ἐπιταχύνσεις γ καὶ γ′. Θὰ εἶναι τότε

$$m=\frac{F}{\gamma}=\frac{F'}{\gamma'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{F}{F'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$$

Ἑπομένως: Δύο δυνάμεις μεταδίδουν, ἐνεργοῦσαι συνεχῶς, εἰς σώματα ἴσης μάζης, ἐπιταχύνσεις ἀναλόγους πρὸς τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων τούτων.

3. Ἐὰν δύο δυνάμεις F καὶ F′ ἐνεργοῦσαι εἰς δύο διαφόρους μάζας m καὶ m′ μεταδίδουν εἰς αὐτὰς τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν γ, τότε αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μάζας τῶν σωμάτων. Πράγματι θὰ ἔχωμεν:

$$\gamma=\frac{F}{m}=\frac{F'}{m'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{F}{F'}=\frac{m}{m'}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18) Δύναμις σταθερά, ἐντάσεως 120 δυνῶν, ἀσκεῖται ἐπὶ σώματος, τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς ἠρεμίας θέτει εἰς κίνησιν. Ἐὰν τὸ κινητόν, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς σταθερᾶς ταύτης δυνάμεως, διανύσῃ κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του διάστημα 2 cm, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μᾶζα αὐτοῦ.

19) Ἐπὶ σώματος μάζης 1 kg, κινουμένου ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα $5\frac{m}{sec}$, ἐφαρμόζεται κατά τινα στιγμὴν δύναμις σταθερά, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως. Ἐὰν κατὰ τὸ τέλος τοῦ 7ου δευτερολέπτου, ἀπὸ τῆς ἐν λόγῳ στιγμῆς ὑπολογιζομένου, τὸ κινητὸν ἀπέκτησε ταχύτητα $14{,}8\frac{m}{sec}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἀσκηθείσης δυνάμεως.

20) Ἐξ ἑνὸς τηλεβόλου μάζης 4000 kg ἐξακοντίζεται βλῆμα μάζης 24,5 kg. Τὸ τηλεβόλον, κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος, ὠθεῖται πρὸς τὰ ὀπίσω μὲ ταχύτητα 1,4 $m.sec^{-1}$. Ποίαν ταχύτητα ἀπέκτησε τὸ βλῆμα;

21) Ποία δύναμις εἶναι ἀναγκαία, ἵνα μίαν ἁμαξοστοιχίαν μάζης 27.000 kg, κινουμένην ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας, ἐντὸς 4 πρώτων λεπτῶν φέρῃ ἀπὸ τῆς ταχύτητος 7 $m.\ sec^{-1}$ εἰς τὴν ταχύτητα 14 $m.\ sec^{-1}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′ (1)

ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ

36. ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ. Ἔστω ὅτι ὑλικὸν σημεῖον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἰσοταχῶς. Κατὰ τὸ ἀξίωμα

(1) *Ὅσα εἴδομεν εἰς τοὺς τρεῖς κλάδους, τὴν κινητικήν, τὴν στατικὴν καὶ τὴν*

τῆς ἀδρανείας πρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ τούτου σημείου ἀσκεῖται συνεχῶς δύναμις ἀναγκάζουσα αὐτὸ νὰ παρεκκλίνῃ τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κινητοῦ οὐδεμία δύναμις ἠσκεῖτο, τότε τοῦτο θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Ἡ δύναμις, ἡ προκαλοῦσα τὴν μεταβολὴν τῆς τροχιᾶς ἀπὸ εὐθυγράμμου εἰς κυκλικήν, οὐδεμίαν ἐπίδρασιν ἔχει ἐπὶ τῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ καὶ ἕνεκα τούτου δέον νά ὑποτεθῇ ὅτι αὕτη (ἡ δύναμις), στρέφεται μὲν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας, ἀλλὰ εἶναι κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν (²) εἰς πάντα τὰ σημεῖα, ἑπομένως ὅτι διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας. Ἕνεκα τούτου καλεῖται ἡ δύναμις αὕτη ***κεντρομόλος***. Ἐὰν κατά τινα στιγμὴν ἡ κεντρομόλος δύναμις παύσῃ ἐνεργοῦσα, τὸ κινητόν, εὑρισκόμενον κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον Α. θὰ ἐξέλθῃ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς καὶ θὰ ἀκολουθήσῃ εὐθύγραμμον τοιαύτην, ἥτις εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Α.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔντασιν τῆς κεντρομόλου δυνάμεως σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

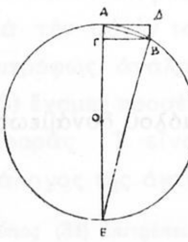
Ἔστω τὸ ὑλικὸν σημεῖον εἰς Α (Σχ. 28). Τοῦτο, μετά τινα χρόνον t ἀρκούντως μικρόν, θὰ φθάσῃ εἰς Β κινούμενον ἰσοτα-

---

δυναμικήν, ἀποτελοῦν τὰς γενικὰς ἐννοίας καὶ ἀρχὰς διὰ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ ἐρευνηθοῦν, διατυπωθοῦν καὶ ἑρμηνευθοῦν τὰ μηχανικὰ φαινόμενα. Μὲ τὴν ἐξέτασιν αὐτῶν ὅμως δὲν ἐξαντλεῖται τὸ θέμα τῆς μηχανικῆς. Ἡ λεπτομερὴς ἔρευνα τῶν διαφόρων κατηγοριῶν κινήσεων, αἱ ὁποῖαι συχνάκις ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἀντίληψίν μας (ὡς λ. χ. ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων, ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς κλπ.) πρὸς εὕρεσιν καὶ μελέτην τῶν αἰτίων αὐτῶν (δυνάμεων) καὶ πρὸς ἀποκάλυψιν τῶν νόμων τῶν διεπόντων ταύτας, ἐπιτυγχανομένη διὰ τῶν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν καὶ ἀρχῶν, τὰς ὁποίας προηγουμένως εἴδομεν καὶ γενικώτερον ἡ μελέτη πάντων τῶν μηχανικῶν φαινομένων, κινήσεως καὶ ἰσορροπίας, ἐνδιαφέρει σπουδαίως τὴν μηχανικήν. Ἡ ἔρευνα αὕτη συχνάκις ὁδηγεῖ εἰς πορίσματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἔχουν πρακτικὴν ἐφαρμογήν. Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀσχολούμεθα μὲ τὴν μελέτην μηχανικῶν τινων φαινομένων, συνηθέστατα παρουσιαζομένων καὶ μὲ τὰς διαφόρους πρακτικὰς ἐφαρμογὰς τῶν πορισμάτων τῆς μηχανικῆς εἰς τὴν τεχνικήν.

(²) *Κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ καμπύλης γραμμῆς εἰς ἓν σημεῖον εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον.*

χῶς μὲ ταχύτητα υ. Ἐπειδὴ ὁ t εἶναι πολὺ μικρὸς καὶ τὸ διανυθὲν τόξον ΑΒ θὰ εἶναι ἐπίσης μικρὸν οὕτως, ὥστε δύναται τοῦτο νὰ θεωρηθῇ ταυτιζόμενον μετὰ τῆς χορδῆς του.



Σχ. 28.

Τότε ἔχομεν ΑΒ= υt.

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου δὲν ἠσκεῖτο ἡ κεντρομόλος δύναμις, τοῦτο ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ t θὰ εὑρίσκετο εἰς Δ, διανῦσαν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ τῆς ἐφαπτομένης εἰς Α. Ἀσκουμένης ὅμως τῆς κεντρομόλου δυνάμεως εὑρίσκεται τοῦτο εἰς τὸ Β, ἤτοι ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως ταύτης ἐν τῷ χρόνῳ t μετετοπίσθη τὸ κινητὸν πρὸς τὸ κέντρον κατὰ τὸ διάστημα ΑΓ=ΔΒ, καθότι τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον. Τὸ διάστημα ΑΓ=ΔΒ διηνύθη ὑπὸ τοῦ κινητοῦ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως (τῆς κεντρομόλου), ἤτοι μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην.

Ὅθεν

$$(\text{ΑΓ}) = \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

ἔνθα γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις, ἣν προσέδωσεν εἰς τὸ κινητὸν (μάζης m), ἡ κεντρομόλος δύναμις. Ἐὰν δυνηθῶμεν νὰ ὑπολογήσωμεν τὴν γ, ἡ ἔντασις F τῆς ζητουμένης δυνάμεως θὰ εὑρεθῇ εὐκόλως ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου $F=m\gamma$. Τὸν ὑπολογισμὸν τοῦτον ἐπιτυγχάνομεν εὐκόλως ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΒΓ. Ταῦτα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνίαν ΓΑΒ κοινήν, τὰς γωνίας ΑΒΕ καὶ ΒΓΑ ἴσας ὡς ὀρθὰς καὶ ἑπομένως καὶ τὰς ἄλλας δύο γωνίας ΑΒΓ καὶ ΑΕΒ ἴσας (αὗται ἐξ ἄλλου εἶναι ἴσαι ὡς ὀξεῖαι ἔχουσαι τὰ πλευρὰς των ἀνὰ δύο καθέτους). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$\text{ΑΓ} : \text{ΑΒ} = \text{ΑΒ} : \text{ΑΕ}$$

ἤ, ἐπειδὴ εἶναι $\text{ΑΓ} = \frac{1}{2}\gamma t^2$, $\text{ΑΒ} = \upsilon t$ καὶ $\text{ΑΕ} = 2r$ (r εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου),

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 : \upsilon t = \upsilon t : 2r$$

καὶ ἐκ ταύτης

$$\gamma = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Ἡ ἔντασις, ἑπομένως, τῆς κεντρομόλου δυνάμεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F = m\frac{\upsilon^2}{r} \qquad (33)$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν ἀντὶ τῆς γραμμικῆς ταχύτητος υ τὴν γωνιώδη ω (βλ. § 10, τύπος 13), τότε ἔχομεν

$$F = m\omega^2 r \qquad (34)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (βλ. τύπον 16), ἔχομεν ἐπίσης

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}, \qquad (34)$$

ἔνθα T παριστᾷ, ὡς γνωστόν, τὴν περίοδον τῆς κυκλικῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως, δηλαδὴ τὸν χρόνον μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τοῦ κινητοῦ.

37. ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ. Ἐφ' ὅσον ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου ἰσοταχῶς σώματος ἀσκεῖται δύναμις διευθυνομένη πρὸς τὸ κέντρον, ἡ κεντρομόλος, πρέπει, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, ἐπὶ τοῦ ἰδίου σώματος νὰ ἐνεργῇ ἄλλη δύναμις ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν πρώτην. Ἡ δευτέρα δύναμις καλεῖται ***φυγόκεντρος***, ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος, φορὰν ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὰ ἔξω καὶ ἔντασιν διδομένην ὑπὸ τῶν τύπων (33) ἢ (35).

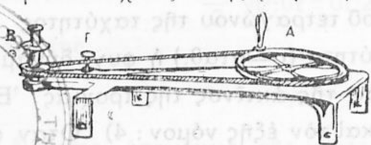
Κατὰ τὸ ἀναφερθὲν ἀνωτέρω ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, ὅταν παύσῃ ὑφισταμένη ἡ κεντρομόλος δύναμις, ἐξαφανίζεται καὶ ἡ φυγόκεντρος καὶ τὸ κινητόν, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας, θὰ τεθῇ ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης εἰς εὐθύγραμμον ὁμαλὴν κίνησιν κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρέθη τὸ κινητὸν κατὰ τὴν ἐν λόγῳ στιγμήν.

Νόμοι τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως. Ἐκ τοῦ τύπου (33) προκύπτουν οἱ ἑξῆς νόμοι: 1) Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ κινητοῦ· 2) ὅταν τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (r=σταθ.), ἡ φυγ. δύναμις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος αὐτοῦ καὶ 3) διὰ τὴν αὐτὴν ταχύτητα (υ=σταθ.) ἡ φυγ. δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς τροχιᾶς. Ἐκ τοῦ τύπου (35) ἔχομεν προσέτι καὶ τὸν ἑξῆς νόμον: 4) Ὅταν ὁ χρόνος περιφορᾶς Τ εἶναι σταθερός, ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς τροχιᾶς.

Ὁ τύπος (34) ἐπιτρέπει νὰ δώσωμεν μίαν ἄλλην ἔκφρασιν εἰς τὸν τελευταῖον νόμον: Ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνιώδη ταχύτητα (ω=σταθ.) ἡ φυγ. δύναμις κινητοῦ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς τροχιᾶς.

Κατὰ ταῦτα: 1) Ἐὰν δύο κινητὰ κινοῦνται μετὰ τῆς αὐτῆς γραμμικῆς ταχύτητος υ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ δύο ἴσων περιφερειῶν, ἔχοντα μάζας παριστωμένας ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τότε ἡ φυγόκεντρος δύναμις τοῦ δευτέρου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ πρώτου· 2) ἐὰν δύο σώματα κινοῦνται κυκλικῶς ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν, ἔχοντα τὴν αὐτὴν μᾶζαν ἀλλὰ γραμμικὰς ταχύτητας παριστωμένας ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τότε ἡ φυγόκεντρος δύναμις τοῦ δευτέρου εἶναι τετραπλασία τῆς τοῦ πρώτου· 3) ἐὰν δύο σώματα ἔχουν τὴν αὐτὴν μᾶζαν καὶ κινοῦνται μετὰ τῆς αὐτῆς γραμικῆς ταχύτητος ἐπὶ δύο περιφερειῶν ἀκτίνων παριστωμένων ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, τότε ἡ φυγόκεντρος δύναμις τοῦ δευτέρου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς φυγ. δυνάμεως τοῦ πρώτου καὶ 4) ὅταν δύο σώματα τῆς αὐτῆς μάζης κινοῦνται ἐπὶ δύο περιφερειῶν ἀκτίνων διδομένων διὰ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2, μετὰ τοιαύτης ταχύτητος, ὥστε νὰ ἐκτελοῦν ἀμφότερα μίαν πλήρη περιφορὰν εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, τότε ἡ φυγ. δύναμις τοῦ δευτέρου εἶναι διπλασία τοῦ πρώτου.

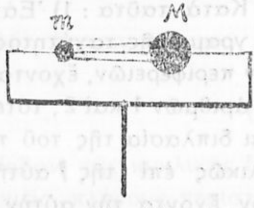
Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν νόμων. Πειραματικῶς δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τοὺς ἀνωτέρω νόμους διὰ τῆς φυγοκεντρικῆς μηχανῆς (Σχ. 29). Αὕτη φέρει ἐπὶ καταλλήλου βάσεως δύο τροχαλίας μὲ παραλλήλους κατακορύφους ἄξονας, μίαν μικροτέραν καὶ μίαν μεγαλυτέραν, συνδεομένας δι᾽ ἱμάντος οὕτως, ὥστε ἂν διὰ στροφάλου θέσωμεν εἰς περιστροφὴν τὴν μεγάλην τροχαλίαν, νὰ περιστρέφεται καὶ ἡ μικρὰ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ταχέως. Τῆς μικροτέρας τροχαλίας ὁ ἄξων ἀποτελεῖ τὸ κύριον μέρος τῆς μηχανῆς. Ἐπ᾽ αὐτοῦ προσαρμόζομεν διάφορα συστήματα, τὰ ὁποῖα πρόκειται



Σχ. 29

νὰ παρατηρήσωμεν, ἵνα ταῦτα τεθοῦν εἰς περιστροφήν.

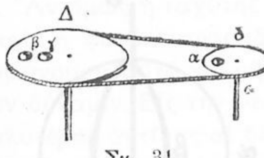
α) Προσαρμόζομεν κατὰ πρῶτον τὴν συσκευὴν τοῦ σχήματος 30, εἰς τὴν ὁποίαν δύο σφαῖραι, διαφόρου μάζης m καὶ M, δύνανται νὰ ὀλισθαίνουν κατὰ μῆκος ὁριζοντίου ὁδηγοῦ σύρματος οὖσαι συνδεδεμέναι μεταξύ των δι᾽ ἀλύσεων. Ἐὰν αἱ δύο σφαῖραι, δηλ. τὰ κέντρα αὐτῶν, τεθοῦν εἰς τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, τότε, κατὰ τὸν πρῶτον νόμον, ἡ φυγόκεντρος δύναμις θὰ εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν σφαῖραν τὴν ἔχουσαν τὴν μεγαλυτέραν μᾶζαν M καὶ ἕνεκα τούτου αὕτη θὰ κινηθῇ πρὸς τὰ ἔξω παρασύρουσα καὶ τὴν ἄλλην σφαῖραν.



Σχ. 30

β) Εἰς τὸν ἄξονα τῆς μηχανῆς προσαρμόζομεν τὸν δίσκον Δ, ὅστις δι᾽ ἱμάντος θέτει εἰς περιστροφὴν ἕτερον δίσκον **δ**, εὑρισκόμενον εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸν Δ (Σχ. 31) καὶ τοποθετημένον εἰς κατάλληλον θέσιν ἐπὶ τῆς μηχανῆς. Οἱ δύο οὗτοι δίσκοι φέρουν παρὰ τὴν περιφέρειάν των ἐνσκαφάς. Ἡ ἀκτὶς τοῦ δίσκου Δ εἶναι διπλασία ἐκείνης τοῦ **δ**. Ἐὰν εἰς τὰς δύο ταύτας ἐνσκαφὰς θέσωμεν δύο μικρὰς καὶ τῆς αὐτῆς μάζης σφαίρας καὶ περιστρέψωμεν τοὺς δίσκους μὲ ταχύτητα διαρκῶς αὐξανομένην, τότε θὰ ἴδωμεν ἐκσφενδονιζομένην πρῶτον τὴν σφαῖραν **α** καὶ κατόπιν τὴν **β**. Τὸ παρατηρηθὲν εἶναι σύμφωνον πρὸς τὸν τρίτον νόμον. Πράγματι αἱ δύο σφαῖραι α καὶ β ἔχουν τὴν αὐτὴν γραμμικὴν ταχύτητα καὶ ἑπομένως ἡ φυγόκεντρος δύναμις, ὡς ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀκτῖνα, εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν α ἢ εἰς τὴν β.

γ) Ἐὰν ὁ δίσκος Δ φέρῃ εἰς ἑτέραν ἐνσκαφὴν ἐγγύτερον πρὸς τὸς ἄξονα εὑρισκομένην, σφαῖραν γ ὁμοίαν πρὸς τὰς προηγουμένας, τότε ἡ σφαῖρα αὕτη θὰ ἐκφύγῃ μετὰ τὴν β ἤτοι ὅταν ἡ ταχύτης τῆς περιστροφῆς γίνῃ μεγαλυτέρα. Τοῦτο εἶναι σύμφωνον πρὸς τὸν τέταρτον νόμον. Εἰς τὰς σφαίρας β καὶ γ ὁ χρόνος τῆς περιστροφῆς εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος περιστροφῆς δηλ. μεγαλυτέρα εἰς τὴν σφαῖραν β ἢ εἰς τὴν γ.



Σχ. 31

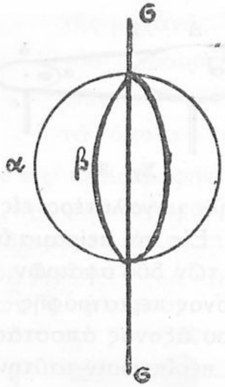
δ΄) Εἰς τὸ πείραμα ὑπὸ στοιχεῖον α) ἐπιτυγχάνομεν ἰσορροπίαν τῶν δύο σφαιρῶν, ὅταν ἡ σφαῖρα μάζης m ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἀπόστασιν α μεγαλυτέραν τῆς ἀπὸ τοῦ ἰδίου ἄξονος ἀποστάσεως Α τῆς ἄλλης σφαίρας. Πρέπει εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, νὰ εἶναι (4ος νόμος)

$$m. \alpha = M. A \qquad \text{ἢ} \quad \alpha : A = M : m,$$

(βλ. τύπον 35).

ε) Ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις αὐξάνεται μετὰ τῆς γραμμικῆς ταχύτητος τοῦ κινητοῦ, ἀπεδείχθη εἰς πάσας τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις, ἀφοῦ διὰ νὰ ἐκτοξευθοῦν αἱ σφαῖραι, ἤτοι διὰ νὰ αὐξήσωμεν τὴν φυγόκεντρον αὐτῶν δύναμιν, αὐξάνομεν ἑκάστοτε τὴν ταχύτητα τῆς περιστροφῆς. Ἀλλὰ ἐκ τούτου δὲν ἐξάγεται πειραματικῶς ὁ δεύτερος νόμος, διότι πρέπει ἀκόμη νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς γραμμικῆς ταχύτητος υ τοῦ κινητοῦ. Ἐπειδὴ καὶ διὰ τὰς ἄλλας ὡς ἄνω πειραματικὰς ἀποδείξεις δύναται νὰ λεχθῇ τὸ αὐτό, σημειοῦμεν ἐνταῦθα ὅτι διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀπόδειξιν τόσον τοῦ δευτέρου νόμου ὅσον καὶ τῶν ἄλλων τοιούτων, ὑπάρχει κατάλληλος συσκευή. Αὕτη περιλαμβάνει σφαῖραν ὀλισθαίνουσαν κατὰ μῆκος ὁδηγῶν συρμάτων, δυναμόμετρον, εἰς τὸ ὁποῖον προσδένεται διὰ νήματος ἡ σφαῖρα, χρησιμεῦον πρὸς μέτρησιν τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως καὶ στροφόμετρον πρὸς μέτρησιν τοῦ κατὰ δευτερόλεπτον ἀριθμοῦ τῶν στροφῶν τῆς συσκευῆς, ἵνα ἐκ τούτου ὑπολογισθῇ ἡ ταχύτης τῆς σφαίρας.

στ΄) Ἡ συσκευὴ τοῦ σχήματος 32 ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ στελέχους σσ΄, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δύο κυκλικὰ ἐλαστικὰ (ἐκ χάλυβος) ἐλάσματα α καὶ β, κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἔχουν στερεωθῇ εἰς τὴν θέσιν σ ἐνῷ εἰς τὴν θέσιν σ΄ τὸ στέλεχος τοῦτο διέρχεται ἐλευθέρως δι᾿ ὀπῆς, ἣν φέρουν τὰ ἐλάσματα. Ἐὰν θέσωμεν τὸ στέλεχος εἰς ταχεῖαν περιστροφικὴν κίνησιν, τότε τὰ κυκλικὰ ἐλάσματα λαμβάνουν τὸ σχῆμα ἐλλείψεων, μὲ μικρὸν ἄξονα τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Τὸ πείραμα τοῦτο ἐξηγεῖ καὶ τὸ σχῆμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς ἐλλειψοειδοῦς, ὅπερ ἔχει ἡ γῆ λόγῳ τῆς περιστροφῆς της.



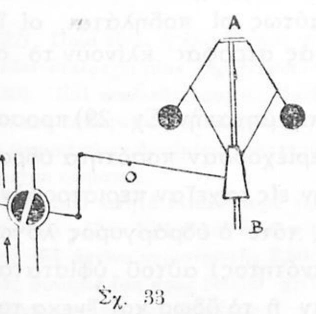
Σχ. 32

38. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι αἱ φυγόκεντρος καὶ κεντρομόλος δυνάμεις εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι εἰς ἓν περιστρεφόμενον σῶμα. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ μᾶζα τοῦ κινητοῦ καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς κινήσεως αὐτοῦ (ταχύτης, ἀκτὶς) μένουν σταθερά. Ἐὰν ὅμως μεταβληθῇ ἓν ἐξ αὐτῶν, τότε δύο τινὰ δύνανται νὰ συμβοῦν : ἢ τὸ κινητὸν τροποποιεῖ τὴν κίνησίν του διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ καὶ πάλιν ἰσότης φυγοκέντρου καὶ κεντρομόλου δυνάμεως (μᾶζα περιστρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον Α καὶ συγκρατουμένη πρὸς αὐτὸ δι᾿ ἐλατηρίου, ρυθμιστὴς τοῦ Watt κλπ) ἤ, λόγῳ τῆς αὐξήσεως τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως λύεται ὁ δεσμὸς τοῦ κινητοῦ μὲ τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς, ἤτοι παύει ὑφισταμένη ἡ κεντρομόλος δύναμις, ὅτε μηδενίζεται ταυτοχρόνως καὶ ἡ φυγόκεντρος καὶ τὸ σῶμα ἀκολουθεῖ τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς εἰς ὡρισμένον σημεῖον (ἀφαίρεσις τοῦ μέλιτος ἐκ τῆς κηρήθρας διὰ μηχανῆς, ἐκτίναξις τῆς ἰλύος (λάσπης) ἐκ τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν, ἐκτροχίασις ἁμαξοστοιχίας κλπ).

1) Ἔστω ἐλατήριον σπειροειδές, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἓν ἄκρον Α κρατεῖται διὰ τῆς χειρός μας, τὸ δὲ ἄλλο Β φέρει ἓν σῶμα μάζης m. Ἐὰν τὸ σῶμα τεθῇ εἰς περιστροφικὴν κίνησιν περὶ τὸ σημεῖον Α, ὑφίσταται τὴν ἐνέργειαν τῶν δύο δυνάμεων, κεντρομόλου καὶ φυγοκέντρου. Ἡ κεντρομόλος ἀσκεῖται ὑπὸ τῆς χειρός μας διὰ τοῦ ἐλατηρίου, οὗ ἡ τάσις μετρεῖ τὴν ἔντασιν αὐτῆς. Τὸ σῶμα προσπαθεῖ νὰ διατηρήσῃ τὴν εὐθύγραμμον τροχιάν του, νὰ ἀπομακρυνθῇ δηλονότι τοῦ κέντρου τῆς περιστροφῆς (φυγόκεντρος δύναμις). Ἐφ᾿ ὅσον ἡ ταχύτης παρα-

μένει σταθερὰ διὰ τὸ περιστρεφόμενον σῶμα, αἱ τιμαὶ τῆς κεντρομόλου καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως εἶναι σταθεραὶ καὶ ἴσαι. Ἂν ὅμως ἡ ταχύτης *υ* αὐξηθῇ τότε αὐξάνεται κατ' ἔντασιν καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις, τείνει περισσότερον τὸ νῆμα ἐπιμηκύνουσα αὐτὸ καὶ οὕτω δημιουργεῖ μεγαλυτέραν κεντρομόλον δύναμιν. Εἰς τὴν νέαν τροχιάν, ἤτοι εἰς τὴν περιφέρειαν μεγαλυτέρας ἀκτῖνος αἱ δύο δυνάμεις εἶναι πάλιν ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται, ὅτι αὐξανομένης τῆς ταχύτητος περιστρεφομένου σώματος, αὐξάνεται ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἔναντι τῆς κεντρομόλου καὶ ἵνα ἐπέλθῃ ἰσορροπία, τροποποιεῖται ἡ τροχιά, ἤτοι ἐπέρχεται μετακίνησις τοῦ σώματος πρὸς τὰ ἔξω.

2. ***Ρυθμιστὴς τοῦ* Watt.** Οὗτος χρησιμεύει διὰ νὰ ρυθμίζῃ τὴν κίνησιν μιᾶς ἀτμομηχανῆς. Ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς κατακορύφου ράβδου ΑΒ (σχ. 20), ἐκ τοῦ ἀνωτέρου μέρους τῆς ὁποίας κρέμανται δύο βαρεῖαι σφαῖραι. Ὅταν ἡ ἀτμομηχανὴ λειτουργῇ, τίθεται ἡ ράβδος εἰς στροφὴν περὶ τὸν ἄξονά της ΑΒ, ὅτε αἱ σφαῖραι, λόγῳ τῆς ἀναπτυσσομένης ἐπ' αὐτῶν φυγοκέντρου δυνάμεως, ἀνυψοῦνται τοσοῦτον περισσότερον, ὅσον ἡ ταχύτης τῆς περιστροφῆς ω εἶναι μεγαλυτέρα. Κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τῶν σφαιρῶν παρασύρεται μοχλός, στρεπτὸς περὶ τὸ Ο, ὅστις ἐλαττοῖ τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου εἰσρέον ποσὸν τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὸν κύλινδρον τῆς ἀτμομηχανῆς καὶ οὕτω κανονίζει τὴν κίνησιν τῆς μηχανῆς. Ἐπὶ ἐλαττώσεως τῆς ταχύτητος περιστροφῆς κατέρχονται αἱ σφαῖραι καὶ ὁ μοχλὸς ἐνεργεῖ ἀντιθέτως, αὐξάνων τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου εἰσρέον ποσὸν τοῦ ἀτμοῦ.



Σχ. 33

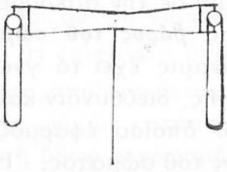
3. α) Ὁ ἐπὶ τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν προσκολληθεὶς βόρβορος ἐκτινάσσεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν ἐφαπτομένων τοῦ τοῦ τροχοῦ εἰς τὰ διάφορα αὐτῶν σημεῖα. β) Ὁμοίως ἐκτινάσσεται τὸ μέλι ἐκ τῆς κηρήθρας, ὅταν αὕτη τοποθετηθῇ εἰς εἰδικὴν φυγοκεντρικὴν μηχανὴν καὶ τεθῇ εἰς ταχεῖαν περιστρο-

φήν, συλλέγεται δὲ τοῦτο καταλλήλως. γ) Εἰς τὰς ξηραντηρίους φυγοκεντρικὰς μηχανὰς ἐκσφενδονίζεται τὸ ὕδωρ ἐκ τῶν ὑγρῶν ὑφασμάτων καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς τὰ ἀνωτέρω (α΄ καὶ β΄) παραδείγματα. Αὗται ἀποτελοῦνται ἐκ κυλινδρικῶν δοχείων, ὧν τὰ τοιχώματα εἶναι διάτρητα. Ἐντὸς αὐτῶν τίθενται τὰ ὑγρὰ ὑφάσματα καὶ ὅταν τὰ δοχεῖα ταῦτα τεθοῦν εἰς ταχεῖαν περιστροφήν, ἐκτινάσσεται διὰ τῶν ὀπῶν τὸ ὕδωρ, τὸ ὁποῖον συλλέγεται εἰς ἄλλα δοχεῖα περιβάλλοντα τὰ πρῶτα. δ) Ἀναλόγως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐξηγεῖται καὶ ἡ λειτουργία τῶν φυγοκεντρικῶν ἀντλιῶν.

4. Εἰς τὰς καμπὰς οἱ ὁδηγοὶ τῶν αὐτοκινήτων, ἁμαξοστοιχιῶν, ποδηλάτων κ.τ.λ. ἐλαττώνουν τὴν ταχύτητα, ἵνα οὕτω ἡ φυγ. δύναμις, ἡ ἐπὶ τῶν σωμάτων τούτων ἀναπτυσσομένη καταστῇ μικροτέρα καὶ ἀποφευχθῇ ἡ ἀνατροπὴ ἢ ἐκτροχίασις τούτων. Ἀκόμη εἰς τὰς στροφὰς τῆς σιδηροδρομικῆς γραμμῆς ἡ ἐξωτερικὴ σιδηροτροχιὰ τοποθετεῖται ὀλίγον ὑψηλότερον τῆς ἐσωτερικῆς, ἵνα ἡ ἁμαξοστοιχία κλίνῃ πρὸς τὰ ἔσω καὶ ἡ συνισταμένη τοῦ βάρους αὐτῆς καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως πίπτῃ σχεδὸν καθέτως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς στηρίξεως τῆς ἁμαξοστοιχίας. Κλίσιν πρὸς τὰ ἔσω ἐπίσης ἔχουν καὶ οἱ αὐτοκινητόδρομοι εἰς τὰς στροφάς. Ὡσαύτως οἱ ποδηλάται, οἱ ἵπποι καὶ οἱ ἀναβάται αὐτῶν κατὰ τὰς στροφὰς κλίνουν τὸ σῶμα αὐτῶν πρὸς τὰ ἔσω.

5) Ἐὰν εἰς τὴν φυγοκεντρικὴν μηχανὴν (Σχ. 29) προσαρμόσωμεν σφαῖραν ὑαλίνην κοίλην, περιέχουσαν ποσότητα ὑδραργύρου καὶ ὕδατος καὶ θέσωμεν αὐτὴν εἰς ταχεῖαν περιστροφὴν περὶ τὴν κατακόρυφον διάμετρόν της, τότε ὁ ὑδράργυρος λόγῳ τῆς μεγαλυτέρας εἰδικῆς μάζης (πυκνότητος) αὐτοῦ ὑφίσταται μεγαλυτέραν φυγόκεντρον δύναμιν ἢ τὸ ὕδωρ καὶ ἕνεκα τούτου τοποθετεῖται εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ἢ τὸ ὕδωρ, σχηματίζων μίαν ζώνην περὶ τὸν ὁριζόντιον μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ἐνῷ τὸ ὕδωρ σχηματίζει ζώνην, ἐγγύτερον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς κειμένην καὶ ἐκτεινομένην ὑπεράνω καὶ ὑποκάτω τῆς ζώνης τοῦ ὑδραργύρου. Ἐπὶ τῆς ἀρχῆς ταύτης στηρίζεται καὶ ὁ ἀποχωρισμὸς σωματιδίων (ἰζημάτων, βακτηρίων κλπ.) αἰωρουμένων ἐντὸς

ὑγρῶν, δι' εἰδικῶν φυγοκεντρικῶν μηχανῶν. Εἰς τὸ Σχ. 34 βλέπομεν μίαν συσκευήν, προσαρμοζομένην εἰς τὴν φυγοκεντρικὴν μηχανὴν τοῦ Σχ. 29. Ἐὰν ὁ ἄξων ταύτης τεθῇ εἰς ταχεῖαν περιστροφικὴν κίνησιν, τότε τὰ δύο ὑάλινα κυλινδρικὰ δοχεῖα, τὰ περιέχοντα τὸ ὑγρόν, περιστρέφονται καὶ λαμβάνουν ὡς ἐκ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ὁριζοντίαν θέσιν, ἐπέρχεται δὲ ὁ ἀποχωρισμὸς τῶν σωματιδίων συγκεντρουμένων εἰς τὸν πυθμένα τῶν δοχείων, ἐφ' ὅσον ἡ πυκνότης αὐτῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ὑγροῦ. Ἐὰν τεθοῦν εἰς τὰ δοχεῖα οὖρα, ἀποχωρίζονται ἐξ αὐτῶν τὰ στερεὰ συστατικά των, ἐὰν αἷμα, τὰ αἱμοσφαίρια, ἐὰν γάλα τὸ βούτυρον (πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς δηλ. πρὸς τὸ στόμιον τῶν σωλήνων) ἀπὸ τὰ λοιπὰ συστατικὰ κ.ο.κ.



Σχ. 34

Τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ὑπάρχουν πλεῖσται ἐφαρμογαί. Ἀρκούμεθα μόνον εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερθείσας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (1)

22) Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον διατρέχει μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἀκτῖνος 1,8 m εἰς 3 sec ;

23) Ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς, ἀκτῖνος 2.5 m, κινεῖται ἓν σῶμα καὶ κατὰ τὴν κίνησίν του ταύτην ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιστροφὴν εἰς 4 sec, ἀναπτυσσομένης ἐπ' αὐτοῦ φυγοκέντρου δυνάμεως ἴσης πρὸς 246490 δύνας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ κινουμένου σώματος.

24) Δύο κινητὰ κινοῦνται μὲ τὴν αὐτὴν γωνιώδη ταχύτητα, ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον ἔχει μᾶζαν 10 kg καὶ ἀκτῖνα περιστροφῆς 2,45 m, τὸ δὲ δεύτερον μᾶζαν 14,7 kg καὶ ἀκτῖνα περιστροφῆς 2,50 m. Ἐπὶ τοῦ πρώτου ἀναπτύσσεται φυγόκεντρος δύναμις ἴση πρὸς 985,96 gr.*. Πόση εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμις ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ δευτέρου;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΒΑΡΥΤΗΣ

39. ΒΑΡΥΤΗΣ. ΒΑΡΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ. Ἐὰν σῶμα ἀφεθῇ ἐλεύθερον πίπτει κατευθυνόμενον πρὸς τὴν γῆν. Πρέπει νὰ

(1) *Ἀσκήσεις ἀναφερομένας εἰς τὴν φυγ. δύναμιν βλ. ἐπίσης εἰς ἀσκήσεις τοῦ ἑπομένου κεφαλαίου.*

συμπεράνωμεν, ὅτι ἡ γῆ ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀσκῇ ἐπὶ τῶν διαφόρων ὑλικῶν σωμάτων, τῶν πέριξ αὐτῆς εὑρισκομένων, δυνάμεις ἑλκτικάς. Τὴν αἰτίαν, τὴν παράγουσαν τὰς ἑλκτικὰς ταύτας δυνάμεις, καλοῦμεν ***βαρύτητα,*** τὴν δύναμιν δὲ τὴν ἀσκουμένην, λόγῳ τῆς βαρύτητος, ἐπί τινος σώματος ***βάρος τοῦ σώματος*** τούτου. Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ὡς δύναμις ἔχει τὰ γνωστὰ τρία χαρακτηριστικά: σημεῖον ἐφαρμογῆς, διεύθυνσιν καὶ ἔντασιν. Τὸ σημεῖον τοῦ σώματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται τὸ βάρος αὐτοῦ, καλεῖται ***κέντρον βάρους*** τοῦ σώματος. Ἡ ἔντασις τοῦ βάρους σώματος μετρεῖται διὰ τῶν δυναμομέτρων. Τὰ περὶ κέντρου βάρους τῶν σωμάτων καὶ τῆς μετρήσεως τῆς ἐντάσεως τοῦ βάρους καὶ τῶν μονάδων αὐτῆς, θὰ πραγματευθῶμεν ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτενέστερον. Τώρα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους τῶν σωμάτων.

40. ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ. Ὡς διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος εἴς τινα θέσιν χαρακτηρίζομεν τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ἡ βαρύτης ἐπί τινος σώματος εὑρισκομένου εἰς τὴν ἐν λόγῳ θέσιν. Ἐπειδὴ πᾶν σῶμα πίπτον ἐλευθέρως ἀκολουθεῖ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως τῆς γῆς, ἕπεται ὅτι ἡ τροχιὰ τῆς πτώσεως σώματός τινος εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς βαρύτητος. Τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος δίδει τὸ ***νῆμα τῆς στάθμης.*** Τοῦτο ἀποτελεῖται ἔκ τινος μικροῦ βαρέος σώματος, συνήθως σχήματος κυλινδροκωνικοῦ ἢ σφαιροκωνικοῦ καὶ ἐξ ὀρειχάλκου, προσδεδεμένου καταλλήλως εἰς τὸ ἄκρον νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλον ἄκρον ἔχει στερεωθῇ εἰς σταθερὸν σημεῖον ἢ κρατεῖται διὰ τῆς χειρός μας. Ὅταν τό νῆμα ἰσορροπήσῃ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος, διότι πράγματι ἡ ἰσορροπία τότε μόνον εἶναι δυνατή, ὡς θὰ ἴδωμεν (§ 42), ὅταν τὸ βάρος τοῦ ἐξηρτημένου σώματος ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ τεταμένου νήματος. Εἰς ἐναντίαν περίπτωσιν τὸ βάρος θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο δυνάμεις, μίαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος καὶ ἄλλην κάθετον ἐπ᾽ αὐτήν, ὅτε ἡ δευτέρα θὰ ἐπέφερε τὴν κίνησιν τοῦ νήματος, ὅπερ ἄτοπον, ἀφοῦ τὸ νῆμα εἶναι ἐν ἰσορροπίᾳ. Τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἰσορροποῦντος νήματος τῆς στάθμης, ἑπομένως καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος, καλοῦμεν ***κατακόρυφον***. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς κατακορύφου καλεῖται κατακόρυφον ἐπίπεδον, πᾶν δὲ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κατακόρυ-

φον καλεῖται ὁριζόντιον. Εἶναι προφανές, ὅτι διὰ παντὸς σημείου διέρχεται μία κατακόρυφος, ἐπομένως ἄπειρα κατακόρυφα ἐπίπεδα καὶ ἓν ὁριζόντιον τοιοῦτον. Εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καλεῖται ὁριζοντία.

Ἡ ἐπιφάνεια ὑγροῦ ἠρεμοῦντος εἶναι ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἂν φέρωμεν ὑπεράνω λεκάνης, περιεχούσης ὑγρὸν μὲ κατοπτρικὴν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν (ὑδράργυρον ἢ ὕδωρ κεχρωσμένον), νῆμα στάθμης, κρατούμενον ἔκ τινος στηρίγματος, τοῦ ὁποίου τὸ βαρὺ σῶμα νὰ βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ. Παρατηροῦντες βλέπομεν τὸ εἴδωλον τοῦ νήματος κείμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὸ νῆμα, δηλ νῆμα καὶ εἴδωλον αὐτοῦ νὰ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον συμβαίνει μόνον ὅταν τὸ νῆμα εἶναι κάθετον πρὸς τὴν κατοπτρικὴν ἐπιφάνειαν. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει πανταχοῦ, ἤτοι ἡ κατακόρυφος εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῶν θαλασσῶν, λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψει ὅτι ἡ γῆ ἔχει κατὰ προσέγγισιν σφαιρικὸν σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῶν θαλασσῶν, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ κατακόρυφοι, αἱ διερχόμεναι δι᾽ ὅλων τῶν σημείων, συναντῶνται εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς. Πράγματι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἠρεμοῦντος ὕδατος τῆς θαλάσσης εἰς μικρὰν ἔκτασιν, δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐπίπεδος, ταυτιζομένη πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς γηΐνης σφαίρας καὶ ἐπειδὴ ἡ κατακόρυφος εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, ἕπεται ὅτι αὕτη διέρχεται προεκτεινομένη διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Αἱ κατακόρυφοι δύο σημείων δὲν εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν τὰ δύο σημεῖα ἀπέχουν ἀπ᾽ ἀλλήλων ὁριζοντίως 31 μέτρα, αἱ δι᾽ αὐτῶν διερχόμεναι κατακόρυφοι σχηματίζουν εἰς τὸ κέντρον τῆς γῆς γωνίαν 1''. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον τῆς γῆς κεῖται κάτωθεν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἰς σημαντικὴν ἀπόστασιν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἐφ᾽ ὅσον δύο σημεῖα κεῖνται εἰς μεγάλην ἀπ᾽ ἀλλήλων ὁριζοντίαν ἀπόστασιν, αἱ κατακόρυφοι αὐτῶν δὲν εἶναι παράλληλοι, ἄλλως, δηλαδὴ διὰ μικρὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων, αἱ κατακόρυφοι αὐτῶν δύνανται νὰ θεωρῶνται παράλληλοι.

41. ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΑΡΟΥΣ. Ἓν σῶμα δυνάμεθα νὰ φαν-

τασθῶμεν ἀποτελούμενον ἐκ πλήθους στοιχείων ὑλικῶν τόσον μικρῶν, ὥστε ταῦτα νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ὑλικὰ σημεῖα. Ἕκαστον τῶν ὑλικῶν τούτων σημείων θὰ ἕλκεται ὑπὸ τῆς γῆς καὶ ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τοῦ σώματος θὰ ἐνεργοῦν ἐπομένως πολλαὶ δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἔχουσαι τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου. Ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων ἀποτελεῖ προφανῶς τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ σώματος, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης εἶναι τὸ κένρον βάρους τοῦ σώματος τούτου. Τὸ κέντρον βάρους σώματος διατηρεῖ ἐπομένως τὰς ἰδιότητας τοῦ κέντρου τῶν παραλλήλων δυνάμεων (§ 21), ἤτοι ὅπως δήποτε καὶ ἂν στραφῇ τὸ σῶμα ἢ ἂν μεταφερθῇ τοῦτο εἰς ἄλλον τόπον, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος ἔχει ἄλλην τιμήν, τὸ κέντρον βάρους δὲν ἀλλάσσει θέσιν.

Τῶν ὁμογενῶν ἢ ὁμοιομερῶν σωμάτων, δηλαδὴ τῶν σωμάτων τῶν ὁποίων ἡ πυκνότης εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς πάντα τὰ σημεῖα, τὸ κέντρον βάρους ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ σχήματος αὐτῶν. Ἐὰν σώματος ὁμογενοῦς ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια ἔχῃ γεωμετρικὸν κέντρον, ἤτοι ἐὰν ὑπάρχῃ ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε τοῦτο νὰ τέμνῃ εἰς δύο ἴσα μέρη πάσας τὰς δι᾽ αὐτοῦ διερχομένας καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν περατουμένας εὐθείας, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος.

* Ἡ ἀλήθεια τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν ῥοπῶν. Ἡ ῥοπὴ τοῦ ὁλικοῦ βάρους τοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ, ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ μηδέν. Ἐπειδὴ δέ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ῥοπῶν, ἡ ῥοπὴ τῆς συνισταμένης παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων, ὡς πρός τι σημεῖον, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν συνιστωσῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν τῶν βαρῶν τῶν ὑλικῶν σημείων σώματος ὡς πρὸς τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Τοιοῦτόν τι πράγματι συμβαίνει εἰς σῶμα ἂν ὡς κέντρον τῶν ῥοπῶν ληφθῇ τὸ γεωμετρικὸν κέντρον. Διότι ἐπὶ ἑκάστης εὐθείας καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου ὑπάρχει ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὑλικῶν σημείων (σῶμα ὁμοιομερές), δηλαδὴ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἴσων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων, εἰς ἴσας ἀποστάσεις εὑρισκομένων. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ γεωμ. κέντρον ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ σημβαίνει διὰ πάσας τὰς εὐθείας, τὰς διὰ τοῦ κέντρου διερχομένας, ἤτοι δι᾽ ὅλον τὸ σῶμα.

Κατὰ τ᾽ ἀνωτέρω πρέπει τὸ κέντρον βάρους εὐθείας γραμμῆς πεπερασμένης καὶ ἐξ ὑλικῶν σημείων ἀποτελουμένης [1] νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον αὐτῆς· κυκλικοῦ δίσκου ἢ ἐλλειπτικοῦ

---

[1] *Ὁμιλοῦμεν ἐνταῦθα περὶ κέντρου βάρους γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν. Ἐννοοῦμεν τὸ κ. β. συρμάτων ἢ ἐλασμάτων πολὺ λεπτῶν καὶ ἰσοπαχῶν.*

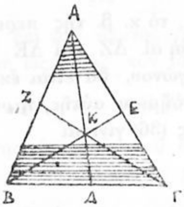
δίσκου ἢ σφαίρας ἢ ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, εἰς τὸ γεωμετρικὸν αὐτῶν κέντρον· παραλληλογράμμου καὶ παραλληλεπιπέδου, εἰς τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων των· κυλίνδρου (μὲ βάσεις παραλλήλους), εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τά κέντρα τῶν βάσεων.

Τὸ κέντρον βάρους πολλῶν σωμάτων εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς μάζης αὐτῶν. Οὕτω τὸ κ. β. κυκλικοῦ δακτυλίου (κρίκου) εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ, δηλ. ἐκτὸς τοῦ σώματος. Ἐπίσης τῆς περιφερείας κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας τὸ κ. β. κεῖται εἰς τὸ κέντρον αὐτῶν κλπ.

Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται ὅτι:

α) Τὸ κέντρον βάρους ἐπιφανείας τριγώνου κεῖται εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Διαιροῦμεν τὸ τρίγωνον εἰς λίαν στενὰς λωρίδας διὰ πολλῶν παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ εὐθειῶν. Προφανῶς τὰ κέντρα βάρους ὅλων τῶν λωρίδων τούτων κεῖνται εἰς τὸ μέσων αὐτῶν, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς ΑΔ, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ Α εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς (διάμεσος) [1]. Ἐπομένως τὸ κ. β. τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέσου ΑΔ. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κατόπιν πρὸς τὴν ΑΓ, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον βάρους πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν διαμέσων ΓΖ καὶ ΒΕ.



Σχ. 35

Τὸ κέντρον βάρους, ὅθεν, τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Κ, δηλαδὴ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου. Ἀλλὰ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ. Ἐκ τούτου καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΚΒ καὶ ΚΔΕ ἔχομεν $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{K\Delta}{AK} = \frac{1}{2}$. Ἐπομένως $K\Delta = \frac{1}{2}AK$ καὶ $K\Delta = \frac{1}{3}(A\Delta)$, ἢ κατ' ἀναλογίαν $ZK = \frac{1}{2}\Gamma Z$ κλπ.

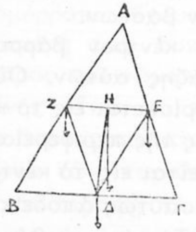
β) Τὸ κ. β. τῆς περιμέτρου τριγώνου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς δευτέρου τρι-

---

[1] *Ὅτι τὰ μέσα ὅλων τῶν λωρίδων κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΔ προκύπτει ἐκ τοῦ θεωρήματος: «Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀρχομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα».*

γώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἂν ἑνώσωμεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου τριγώνου δι᾽ εὐθειῶν.

* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ κ. β. τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 36), ἤτοι τὸ κ. β. πολὺ λεπτοῦ καὶ ὁμογενοῦς σύρματος, ἔχοντος τὸ σχῆμα τῆς περιμέτρου τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου. Τὸ κ. β. ἑκάστης πλευρᾶς εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, δηλαδὴ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε καὶ Ζ ἐνεργοῦν τὰ βάρη τῶν «ὑλικῶν» αὐτῶν πλευρῶν. Τὸ ζητούμενον κ. β. θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν τριῶν τούτων παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων δυνάμεων. Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ καὶ ΑΒ. Ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων, τῶν εἰς Ζ καὶ Ε ἐφηρμοσμένων, ἀσκεῖται εἰς τὸ σημεῖον Η, ὅπερ τέμνει τὴν ΖΕ εἰς μέρη τοιαῦτα, ὥστε



Σχ. 36

$$\frac{ZH}{HE} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad . \tag{36}$$

Σύρομεν τὴν ΗΔ. Ἐπὶ ταύτης εὑρίσκεται τὸ κ. β. τῆς περιμέτρου. Σύρομεν ἐπίσης τὰς εὐθείας ΔΕ καὶ ΔΖ. Ἐπειδὴ αἱ ΔΖ καὶ ΔΕ συνδέουν τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ μεγαλυτέρου τριγώνου, θὰ εἶναι ἑκάστη παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ἤτοι $(A\Gamma) = 2\ (\Delta Z)$ καὶ $(AB) = 2\ (\Delta E)$, ὅτε ἡ σχέσις (36) γίνεται

$$\frac{ZH}{HE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} \quad .$$

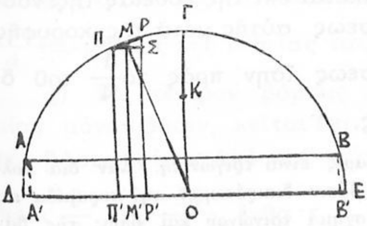
Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως καταφαίνεται, ὅτι ἡ ΔΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΖΔΕ τοῦ μικροτέρου τριγώνου ΖΔΕ. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου ταύτης κεῖται τὸ ζητούμενον κ. β. Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν τὴν ἰδίαν ὡς ἄνω πορείαν, ἀρχίζοντες ὅμως τὴν σύνθεσιν ὄχι ἐκ τῶν δυνάμεων τῶν ἐφηρμοσμένων εἰς Ζ καὶ Ε, ἀλλὰ ἐκ τῶν ἐφηρμοσμένων εἰς Ζ καὶ Δ, τότε θὰ εὕρωμεν ὁμοίως σκεπτόμενοι, ὅτι τὸ κ. β. θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΖΕΔ. Διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους τοῦτο πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΕΖΔ. Ἄρα κεῖται τὸ κέντρον βάρους τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἤ, κατ᾽ ἄλλο γνωστὸν θεώρημα, ἐπὶ τοῦ κέντρου του εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο τρίγωνον ΔΕΖ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

γ) Τὸ κ. β. κυκλικοῦ τόξου ΑΒ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσην πρὸς

$$\delta = \frac{r.\ \chi}{l} \,,$$

ἔνθα r ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, χ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ τόξου καὶ l τὸ μῆκος τοῦ τόξου.

* Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὸ κ. β. ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν. Τοῦτο, διὰ λόγους συμμετρίας, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εἰς τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου ΑΒ ἀγομένης ἀκτῖνος, ἔστω δὲ τὸ Κ. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον κανονικὴν τεθλασμένην γραμμήν, μὲ μεγάλον ἀριθμὸν (ν) ἰσωνεύθυγράμμων τμημάτων. Ἐν τοιοῦτον τμῆμα ἔστω τὸ ΠΡ. Τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον Μ. Ἐὰν μὲ S παραστήσωμεν τὸ βάρος τοῦ τμήματος ΠΡ, τότε ἡ ροπὴ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ θὰ εἶναι ἴση πρὸς S(ΜΜ′).



Σχ. 37

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΠΡΣ καὶ ΟΜΜ′ ἔχομεν

$$\text{ΠΡ} : \text{ΠΣ} = \text{ΟΜ} : \text{ΜΜ}' \text{ καὶ } \text{ΜΜ}' = \text{ΟΜ}\frac{\text{ΠΣ}}{\text{ΠΡ}}.$$

Ἡ ροπὴ λοιπὸν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΠΡ, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΔΕ, εἶναι $S\,(\text{ΟΜ})\frac{\text{ΠΣ}}{\text{ΠΡ}}$. Ἀλλὰ τὸ ΠΣ=Π′Ρ′ εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ τμήματος ΠΡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΔΕ· Ἐπομένως ὅλων τῶν τμημάτων τῆς τεθλασμένης ἡ ροπὴ ὡς πρὸς τὸν ἴδιον ἄξονα θὰ εἶναι

$$\nu S\,(\text{ΟΜ})\frac{\text{Α}'\text{Β}'}{\nu\,(\text{ΠΡ})}.$$

Ἐπίσης ἡ ροπὴ τοῦ ὁλικοῦ βάρους νS τῆς (ὅλης) γραμμῆς, ἐφηρμοσμένου εἰς Κ θὰ εἶναι νSδ, ἔνθα δ=ΟΚ. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν ἔχομεν

$$\nu S\,(\text{ΟΜ})\frac{\text{Α}'\,\text{Β}'}{\nu\,(\text{ΠΡ})} = \nu\ S\ \delta.$$

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ἡ τεθλασμένη γραμμή, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν της διαρκῶς, ἔχει ὅριον τὸ τόξον. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς ν εἶναι μέγας, δύνανται εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν νὰ τεθοῦν ἀντὶ τῆς ΟΜ ἡ ἀκτὶς r, ἀντὶ τοῦ γινομένου ν (ΠΡ) τὸ μῆκος l τοῦ τόξου, ὅτε

$$\delta = \frac{r\ \chi}{l},$$

ἔνθα $\chi = \text{Α}'\,\text{Β}' = \text{ΑΒ}$.

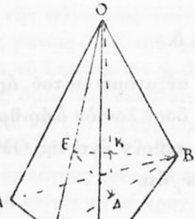
δ) Τὸ κ. β. κυκλικοῦ τομέως κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τόξου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις δίδεται δηλαδὴ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{r\chi}{l}.$$

ε) Τὸ κ.β. πυραμίδος εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ κέντρον βάρους τῆς βάσεως αὐτῆς μετὰ τῆς κορυφῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὅλου μήκους τῆς εὐθείας ταύτης.

* Ἔστω κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνική. Ἐὰν διὰ πολλῶν ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν διαιρέσωμεν τὴν πυραμίδα εἰς λεπτὰ στρώματα, ἕκαστον τούτων ἔχει σχῆμα τριγώνου καὶ ὅπως τῆς βάσεως τὸ κ. β. κεῖται εἰς τὴν τομὴν τῶν διαμέσων, οὕτω καὶ ὅλων τούτων τῶν τριγωνικῶν πλακῶν τὸ κ. β. κεῖται εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, ἤτοι, ὡς εὐκόλως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΔ, τῆς ἑνούσης τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος μετὰ τοῦ κ. βάρους τῆς βάσεως. Ἐὰν ὡς βάσιν λάβωμεν ἄλλην ἕδραν (τρίγωνον) τῆς πυραμίδος, καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ εὕρωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον κ.β. κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ, τῆς ἑνούσης τὴν νέαν κορυφὴν τῆς πυραμίδος μὲ τὸ κ.β. τῆς νέας βάσεως. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ κ.β. τῆν τριγωνικῆς πυραμίδος κεῖται ἐπὶ τοῦ σημείου Κ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς τέσσαρας κορυφὰς ταύτης μετὰ τοῦ κ. β. τῶν βάσεων αὐτῆς.

Τὰ τρίγωνα ΕΔΚ καὶ ΟΚΒ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν σχέσιν



Σχ. 38

ΚΔ : ΚΟ = ΔΕ : ΟΒ. Ἀλλὰ καὶ τρίγωνα ΕΖΔ καὶ ΟΖΒ εἶναι ὅμοια καὶ ἀληθεύει ἡ σχέσις

ΔΕ : ΟΒ = ΕΖ : ΟΖ. Ὅθεν

ΚΔ : ΚΟ = ΕΖ : ΟΖ. Ἐπειδὴ εἶναι, ὡς προηγουμένως ἐδείξαμεν εἰς τὰ περὶ κ. β. τῆς ἐπιφανείας τριγώνου,

ΕΖ : ΟΖ $= \frac{1}{3}$, ἕπεται ὅτι

ΚΔ : ΟΚ $= \frac{1}{3}$ ἤτοι ΚΔ $= \frac{1}{4}$ (ΟΔ).

Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι πολυγωνική, δηλαδὴ ἐὰν ἔχῃ βάσιν πολύγωνον, τότε ἂς φαντασθῶμεν αὐτὴν διαιρεθεῖσαν εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν (τοῦ αὐτοῦ ὕψους), ὅτε εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν τὸ κ. β. κεῖται εἰς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὕψους της, ἑπομένως ἐπίσης καὶ τὸ κ. β. τῆς ὅλης πυραμίδος εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος. Ὅθεν πυραμίδος οἱασδήποτε μορφῆς τὸ κ. β. εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὴν κορυφὴν μὲ τὸ κ. β. τῆς βάσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσην πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήκους τῆς ὅλης εὐθείας.

στ') Τὸ κ. β. κώνου εὑρίσκεται, ὅπως καὶ τῆς πυραμίδος, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ κ. β. τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ἴσην πρὸ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ μήκους τῆς εὐθείας ταύτης.

ζ) Τὸ κέντρον βάρους σφαιρικοῦ τμήματος, ἔχοντος μίαν μόνον βάσιν, κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καθέτου πρὸς τὴν βάσιν καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσην πρὸς $\frac{3}{4}\ \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$, ἔνθα r ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ h τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἡμισφαιρίου ὅθεν τὸ κ.β. κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσην πρὸς

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{(2r-r)^2}{3r-r}=\frac{3}{8}\,r.$$

η) Τὸ κέντρον βάρους σφαιρικῆς ζώνης, μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους αὐτῆς.

Ἑπομένως τὸ κ. β. ἡμισφαιρικῆς ἐπιφανείας κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ἀκτῖνος τῆς καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

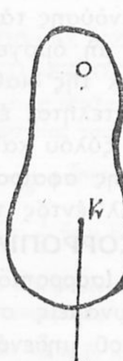
θ) Τὸ κ. β. πρίσματος εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων.

Εἰς τὰ μὴ ὁμογενῆ σώματα ἡ θέσις τοῦ κέντρου βάρους ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαθέσεως τῆς μάζης εἰς αὐτά. Οὕτω ἐὰν σφαῖρα ἀποτελῆται ἐκ δύο ἡμισφαιρίων προσκεκολλημένων, τοῦ ἑνὸς ἐκ ξύλου καὶ τοῦ ἑτέρου ἐκ μολύβδου, τὸ κέντρον βάρους τῆς ὅλης σφαίρας δὲν κεῖται εἰς τὸ γεωμετρικὸν αὐτῆς κέντρον, ἀλλ' ἐντὸς τῆς μάζης τοῦ μολύβδου.

42. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἰσορροπία ἑνὸς σώματος πρέπει αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐπιδρῶσαι δυνάμεις συντιθέμεται νὰ μὴ δίδουν συνισταμένην διάφορον τοῦ μηδενός, οὔτε νὰ δίδουν συνιστάμενον ζεῦγος. Συμφώνως πρὸς ὅσα ἐξετέθησαν εἰς τὴν στατικὴν (§ 17), ἓν σῶμα, εὑρισκόμενον πέριξ τῆς γῆς, ἰσορροπεῖ τότε μόνον, ὅταν ὅλαι αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦσαι δυνάμεις, πλὴν τῶν ὀφειλομένων εἰς τὴν βαρύτητα, δίδουν συνισταμένην ἴσην, ἀντίθετον καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κειμένην μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος. Οὕτω σῶμα στερεὸν ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἢ αἰωρεῖται εἰς αὐτὸ ἢ εἰς τὸν ἀέρα καὶ ἀκινητεῖ, ὅταν αἱ πιέσεις, ἃς ὑφίσταται τοῦτο ἐκ τοῦ ὕδατος ἢ τοῦ ἀέρος, ἔχουν συνισταμένην (ἄνωσιν), ἥτις μετὰ τοῦ βάρους τοῦ σώματος δὲν ἀποτελοῦν ζεῦγος καὶ δίδουν μετ' αὐτοῦ συνισταμένην ἴσην πρὸς τὸ μηδέν. Σῶμα, τὸ ὁποῖον στηρίζεταί που ἢ ἐξαρτᾶται ἔκ τινος σημείου, ἰσορροπεῖ καὶ πάλιν, ὅταν τὸ βάρος αὐτοῦ καὶ ἡ δύναμις, ἥτις γεννᾶται ἐκ τῆς ἐλαστικότητος τοῦ στηρίγματος πληροῦν τὰς ἀνωτέρω συνθήκας. Τὰ τῆς ἰσορροπίας στερεῶν σωμάτων αἰωρουμένων ἐντὸς ρευστῶν, θὰ ἐξετάσωμεν εὐρύτερον εἰς τὴν ὑδροστατικὴν καὶ ἀεροστατικήν. Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἰσορροπίαν α) στερεῶν ἐξηρτημένων οὕτως, ὥστε ταῦτα νὰ δύνανται νὰ στραφοῦν περὶ ὁριζόντιον ἄξονα (ἢ καὶ περὶ σημεῖον) καὶ β) στερεῶν, τὰ ὁποῖα στηρίζονται ἐπὶ βάσεως δι' ἑνὸς ἢ περισσοτέρων σημείων.

Α. Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ μόνη δυνατὴ κίνησις τοῦ σώματος εἶναι ἡ στροφὴ αὐτοῦ περὶ τὸν ὁριζόντιον ἄξονα. Ἑπομένως διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα πρέπει ἡ ροπὴ τοῦ βάρους P τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ὁριζόντιρν ἄξονα, τὸν διὰ τοῦ σημείου Ο (Σχ. 39) διερχόμενον, νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, δηλαδὴ πρέπει ἡ προέκτασις τῆς δυνάμεως (βάρους) ΚΡ νὰ συ ναντᾷ τὸν ἄξονα Ο.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο διατυποῦται ὡς ἑξῆς: Ἵνα σῶμα στερεόν, στρεπτὸν περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, ἰσορροπῇ, πρέπει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους Κ διερχομένη κατακόρυφος νὰ συναντᾷ τὸν ἄξονα.



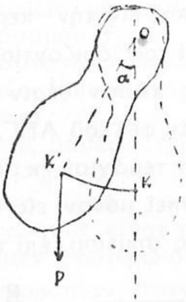
Σχ. 39

Τρεῖς περιπτώσεις εἶναι δυναταί:

1) Τὸ κέντρον βάρους Κ τοῦ σώματος εἶναι σημεῖον τοῦ ἄξονος Ο. Τότε τὸ σῶμα ἰσορ-

ροπεῖ εἰς πᾶσαν θέσιν, τὴν ὁποίαν θὰ δώσωμεν εἰς αὐτό, διότι πάντοτε ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως P ὡς πρὸς τὸν O εἶναι μηδέν. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ σώματος κατακόρυφος συναντᾷ πάντοτε τὸν ἄξονα. Ἡ ἰσορροπία αὕτη καλεῖται **ἀδιάφορος.**

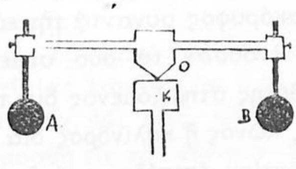
2) Τὸ κέντρον βάρους K τοῦ σώματος κεῖται κάτωθεν τοῦ O. Ἰσορροπεῖ τὸ σῶμα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως KP συναντᾷ τὸν ἄξονα O (Σχ. 39). Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ σῶμα λέγομεν ὅτι εὑρίσκεται εἰς **εὐσταθῆ** ἰσορροπίαν καὶ τοῦτο διότι ἐὰν ἀπομακρύνωμεν αὐτὸ τῆς θέσεως ταύτης καὶ φέρωμεν τὸ κ. β. K εἰς τὴν θέσιν K′ (Σχ. 40), τότε ἡ δύναμις P παράγει μίαν ροπὴν στροφῆς τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα O καὶ τὸ σῶμα ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν.



Σχ. 40

3) Τὸ κέντρον βάρους τοῦ σώματος εὑρίσκεται ἄνωθεν τοῦ ἄξονος O καὶ μάλιστα οὕτως, ὥστε ἡ διὰ τοῦ κ. β. διερχομένη κατακόρυφος νὰ συναντᾷ τὸν ἄξονα O. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, διότι ἡ ροπὴ τοῦ βάρους KP τοῦ σώματος, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα O, εἶναι μηδέν, ἀλλὰ ἂν τὸ σῶμα ἀπομακρυνθῇ τῆς θέσεως ταύτης ἔστω καὶ ἐπ᾽ ἐλάχιστον τοῦτο δὲν ἐπανέρχεται εἰς αὐτὴν, ἀλλὰ ἀνατρέπεται καὶ τοποθετεῖται εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Ἕνεκα τούτου ἡ ἰσορροπία τῆς περιπτώσεως ταύτης καλεῖται **ἀσταθής.**

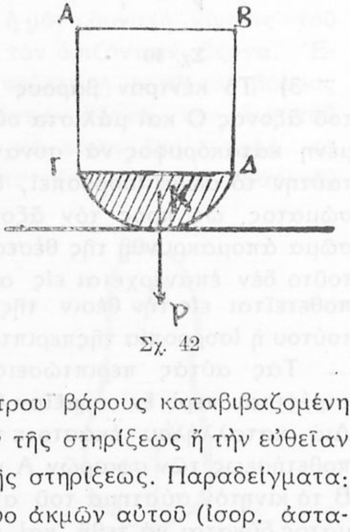
Τὰς αὐτὰς περιπτώσεις διακρίνει τις καὶ ὅταν σῶμα στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον O (Σχ. 41.) Διὰ καταλλήλου ἑκάστοτε τοποθετήσεως τῶν σφαιρῶν A καὶ B τὸ κινητὸν σύστημα τοῦ σχήματος δύναται νὰ τεθῇ καὶ εἰς τὰ τρία ἀναφερθέντα εἴδη τῆς ἰσορροπίας.



Σχ. 41

B) Ἔστω ἐν πρώτοις στερεὸν σῶμα στηριζόμενον ἐπὶ οριζοντίου ἐπιπέδου. Ἡ στήριξις δύναται νὰ γίνῃ 1) δι᾽ ἑνὸς σημείου, 2) διὰ δύο σημείων ἢ ἐπ᾽ εὐθείας καὶ 3) διὰ πολλῶν σημείων, μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, ἢ ἐπὶ βάσεως.

1) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους ἀγομένη κατακόρυφος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς στηρίξεως, διότι ἡ ροπὴ τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸ σημεῖον, περὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ στραφῇ τὸ σῶμα, δηλαδὴ τὸ σημεῖον τῆς στηρίξεως, εἶνε μηδέν. Τὰ τρία εἴδη τῆς ἰσορροπίας παρουσιάζονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην. Σφαῖρα ὁμογενὴς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου δι᾽ ἑνὸς σημείου καὶ ἰσορροπεῖ εἰς πᾶσαν θέσιν ἐπ᾽ αὐτοῦ (ἰσορροπία ἀδιάφορος). Κύλινδρος ἐκ φελλοῦ ΑΒΓΔ, ἔχων εἰς τὴν μίαν βάσιν του προσκεκολλημένον τεμάχιον ἐκ μολύβδου σχήματος περίπου ἡμισφαιρικοῦ, ἰσορροπεῖ μόνον εἰς ἣν θεσιν δεικνύει τὸ Σχ. 42, στηριζόμενος δι᾽ ἑνὸς σημείου ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἂν απομακρυνθῇ ἐκ τῆς θέσεως ταύτης διὰ κλίσεως, ἐπανέρχεται εἰς τὴν προτέραν θέσιν (ἰσορ. εὐσταθής). Τέλος κῶνος στηριζόμενος ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ τῆς κορυφῆς του εὑρίσκεται εἰς ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.



Σχ. 42

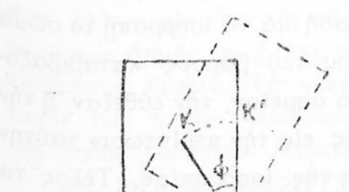
2) Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ προηγουμένως εἴδομεν, ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος ἐπιτυγχάνεται, ὅταν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους καταβιβαζομένη κατακόρυφος συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν τῆς στηρίξεως ἢ τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ δύο σημεῖα τῆς στηρίξεως. Παραδείγματα: Διαβήτης στηριζόμενος διὰ τῶν δύο ἀκμῶν αὐτοῦ (ἰσορ. ἀσταθής), κῶνος ἢ κύλινδρος διὰ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἔχων εἴς τινα θέσιν, ἔξω τοῦ ἄξονος μᾶζαν ἐκ μολύβδου (ἰσορ. εὐσταθὴς) κλπ.

Διὰ τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις 1 καὶ 2 θὰ ἠδύνατό τις νὰ εἴπῃ ὅτι ἐάν, δίδοντες εἰς τὸ σῶμα ἐλαχίστην κλίσιν ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ κατέρχεται δι᾽ αὐτῆς, τότε ἡ ἰσορροπία, εἰς ἣν εὑρίσκετο τὸ σῶμα, ἦτο ἡ ἀσταθής, ἐὰν κατὰ τὴν κλίσιν τὸ κ. β. ἀνέρχεται ἦτο ἡ εὐσταθὴς καὶ ἂν τοῦτο (τὸ κ. β.) μετὰ τὴν κλίσιν διατηρῆται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, τότε ἀδιάφορος. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν Α.

3) Ὅταν ἓν σῶμα στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ βάσεως, τότε διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα πρέπει ἡ διὰ τοῦ κέντρου βάρους ἀγομένη κατακόρυφος νὰ συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς ἓν σημεῖον. Ἐὰν τὸ σῶμα στηρίζεται διὰ τριῶν ἢ περισσοτέρων σημείων, μὴ κειμένων ἐπὶ εὐθείας, ὡς βάσις λαμβάνεται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐὰν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα δι᾽ εὐθειῶν. Ἐὰν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους καταβιβαζομένη κατακόρυφος πίπτῃ ἐκτὸς τῆς βάσεως, τὸ σῶμα ἀνατρέπεται. Ἐὰν ἡ κατακόρυφος αὕτη διέρχεται δι᾽ ἑνὸς σημείου τῆς βάσεως, ἡ ἰσορροπία εἶναι πάντοτε εὐσταθὴς (ἐκτὸς ἂν τὸ σημεῖον τῆς βάσεως, δι᾽ οὗ διέρχεται ἡ κατακόρυφος τοῦ κέντρου βάρους, κεῖται ἐπὶ τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως, ὅτε ἡ ἰσορροπία εἶναι τῆς μορφῆς 1 ἢ 2).

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ἓν σῶμα στερεὸν εὑρίσκεται εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν, ὅταν ἀπομακρυνόμενον τοῦτο τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἔστω καὶ ὀλίγον, ἐπανέρχεται εἰς αὐτήν. Ἔστω ἓν σῶμα στηριζόμενον ἐπὶ βάσεως καὶ εὑρισκόμενον εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν. Ἐὰν κλίνωμεν τοῦτο ἐπ᾽ ὀλίγον καὶ ἀνατραπῇ, τότε λέγομεν ὅτι ἡ **εὐστάθεια** αὐτοῦ εἶναι μικρά. Ἐὰν τοὐναντίον ἡ γωνία, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κλίνωμεν αὐτὸ ἵνα ἀνατραπῇ, εἶναι μεγάλη, λέγομεν ὅτι τὸ σῶμα κέκτηται μεγάλην εὐστάθειαν. Ἡ εὐστάθεια σώματος, εὑρισκομένου εἰς εὐσταθῆ ἰσορροπίαν, δύναται νὰ ἐκτιμηθῇ διὰ γεωμετρικοῦ ἢ δυναμικοῦ μέτρου.

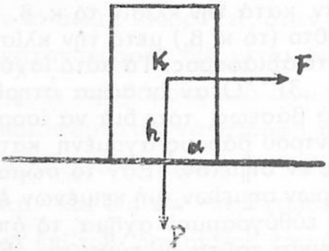
Ὡς γεωμετρικὸν μέτρον τῆς εὐσταθείας χρησιμεύει ἡ γωνία φ, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ τὸ σῶμα περὶ τὴν ἀκμὴν ἢ σημεῖον Α (Σχ. 43), ἵνα τοῦτο ἀνατραπῇ.



Σχ. 43

Ὡς δυναμικὸν μέτρον τῆς εὐσταθείας λαμβάνεται ἡ δύναμις F (Σχ. 44), ἥτις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ κέντρον βάρους Κ, ὁριζοντίως καὶ καθέτως πρὸς τὴν ἀκμὴν Α, ἵνα δι᾽ αὐτῆς τό σῶμα ἐξέλθῃ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, εἰς ἣν εὑρίσκεται. Ἔστω h ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους K τοῦ σώματος ἐκ τῆς ἐπιφανείας στηρίξεως καὶ α ἡ ἀπόστασις τῆς ἐκ τοῦ κέντρου βάρους καταβιβαζομένης κατακορύφου ἀπὸ τῆς A. Ἡ δύναμις F πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαύτην ἔντασιν, ὥστε ἡ ῥοπὴ αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν ἀκμὴν A νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ῥοπὴν τοῦ βάρους P ὡς πρὸς τὴν A, ἤτοι $F h = P \alpha$. Ὅθεν

$$F = \frac{\alpha}{h} P.$$



Σχ. 44

Ἐκ τῶν ἀναφερθέντων δύο μέτρων τῆς εὐσταθείας, δύναταί τις νὰ συμπεράνῃ ὅτι σώματός τινος ἡ ἰσορροπία εἶναι τοσοῦτον εὐσταθεστέρα, ὅσον ἡ βάσις εἶναι μεγαλυτέρα (ἡ F ἀνάλογος τοῦ α) καὶ ὅσον τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὴν βάσιν (ἡ F εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ h). Διὰ τοὺς λόγους τούτους πολλὰ ἐπιτραπέζια ἀντικείμενα, ὡς λάμπαι, μελανοδοχεῖα κλπ. ἔχουν εὐρεῖαν βάσιν καὶ τὸ κέντρον βάρους αὐτῶν ἐγγὺς τῆς βάσεως. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς κατασκευῆς τῶν ἀντικειμένων τούτων οὕτως, ὥστε τὸ πλεῖστον μέρος τῆς μάζης αὐτῶν νὰ εὑρίσκεται πλησίον τῆς βάσεως. Ἐπίσης οἱ παλαισταί, κατὰ τὴν πάλην, ἀνοίγουν καὶ κάμπτουν τὰ σκέλη των, ἵνα καὶ τὴν βάσιν αὐτῶν εὐρύνουν καὶ τὸ κέντρον βάρους αὐτῶν πλησιάσουν πρὸς τὴν βάσιν, οἱ γέροντες πρὸς εὔρυνσιν τῆς βάσεως χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν βάδισιν ῥάβδον κλπ.

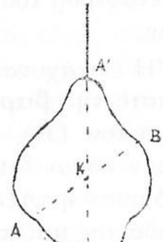
Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζονται τὰ σώματα δι᾽ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων σημείων εἶναι κεκλιμένον, αἱ συνθῆκαι ἰσορροπίας εἶναι αἱ αὐταί, δηλαδὴ διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σῶμα πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους καταβιβαζομένη κατακόρυφος νὰ συναντᾷ τὸ σημεῖον, τὴν εὐθεῖαν ἢ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς στηρίξεως. Ἐπίσης εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην παρουσιάζονται καὶ τὰ τρία εἴδη τῆς ἰσορροπίας. Τέλος τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ ἂν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑποστηρίγματος δὲν εἶναι ἐπίπεδος. Εἶναι ὅμως εὐνόητον, ὅτι τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑποστηρίγματος παίζει ρόλον ἐπὶ τοῦ εἴδους τῆς ἰσορροπίας ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος

Τὸ Σχ. 45 δεικνύει, ὅτι μία σφαῖρα, στηριζομένη δι' ἑνὸς σημείου ἐπὶ ὑποστηριγμάτων μὲ ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον, σφαιρικὴν κυρτὴν καὶ κοίλην, εὑρίσκεται εἰς ἀδιάφορον (α), ἀσταθῆ (β) καὶ εὐσταθῆ (γ) ἰσορροπίαν.

Σχ. 45

43. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ. Ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὁμογενὲς ἢ εἶναι ὁμογενές, ἀλλὰ δὲν ἔχει γεωμετρικὸν σχῆμα, τὸ κέντρον βάρους δύναται νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν πειραματικῶς. Ἡ συνήθης μέθοδος στηρίζεται ἐπὶ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας τῶν σωμάτων.

Οὕτω τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον βάρους, ἐξαρτῶμεν διὰ νήματος ἔκ τινος σημείου Α καὶ ἀφίνομεν αὐτὸ νὰ ἰσορροπήσῃ, ὅτε σημειοῦμεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν διὰ τοῦ Α διερχομένην κατακόρυφον ΑΒ, ἥτις εἶναι ἡ προέκτασις τοῦ νήματος ἐξαρτήσεως. Ἐξαρτῶμεν ἔπειτα τὸ σῶμα ἐξ ἄλλου σημείου Α' διὰ νήματος καὶ ἀφοῦ ἰσορροπήσει, σημειοῦμεν τὴν νέαν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου Α'Β' (Σχ. 46). Ἐπειδὴ τὸ



Σχ. 46

κέντρον βάρους τοῦ σώματος πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς Α'Β', τοῦτο προφανῶς εἶναι τὸ σημεῖον Κ τῆς τομῆς τῶν ΑΒ καὶ Α'Β'. Ἡ μέθοδος αὕτη ἔχει ἐπιτυχίαν, ὅταν ἐφαρμόζεται ἐπὶ σωμάτων ἐχόντων σχῆμα ἐπιπέδου δίσκου. Κατ' ἄλλην μέθοδον τὸ σῶμα ἰσορροπεῖται διαδοχικῶς ἐπὶ ὁριζοντίας ἀκμῆς, π. χ. ἐπὶ τοῦ ἄκρου τῆς τραπέζης, εἰς τρεῖς διαφόρους θέσεις. Τὸ κέντρον βάρους θὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν τριῶν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διήρχοντο ἑκάστοτε διὰ τῆς ἀκμῆς καὶ ἦσαν κατακόρυφα.

44. ΜΟΝΑΣ ΒΑΡΟΥΣ. ΕΝΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ. Τὸ βάρος σώματος εἶναι, ὡς εἴδομεν, δύναμις. Ἑπομένως μονὰς βάρους θὰ εἶναι ἡ μονὰς δυνάμεως, ἤτοι ἡ δύνη. Τὰ βάρη

λοιπὸν τῶν διαφόρων σωμάτων πρέπει νὰ ἐκφράζωνται εἰς δύνας ἢ πολλαπλάσια αὐτῆς.

Ὡς θὰ εἴδομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις, τὰ σώματα πίπτοντα εἰς τὸ κενόν, κινοῦνται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιτάχυνσις παρίσταται διὰ τοῦ g. Τὸ βάρος P λοιπὸν σώματος μάζης m εἰς γραμμάρια, δίδεται εἰς δύνας ὑπὸ τοῦ τύπου

$$P = mg, \tag{37}$$

ὅστις προέκυψεν ἐκ τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῆς δυναμικῆς $F = m\gamma$. Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σώματα (βλ. κατωτέρω) καὶ σταθερὰ εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον, μεταβάλλεται ὅμως αὕτη ἀπὸ τόπου εἰς τόπον. Ἐὰν εἰς ἕνα τόπον $g = 981$ cm. sec^{-2} καὶ εἰς ἄλλον $g = 980$ cm. sec^{-2}, τότε μᾶζα $m = 10$ gr ἔχει εἰς τοὺς δύο τούτους τόπους βάρη διάφορα $P = 9810$ dyne καὶ $P = 9800$ dyne. Ἐνῷ, λοιπόν, ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος ἡ μᾶζα μένει σταθερά, ὁπουδήποτε καὶ ἂν μεταφερθῇ τοῦτο, τὸ βάρος μεταβάλλεται ἀπὸ τόπου εἰς τόπον.

Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g εἰς ἕνα τόπον λέγεται καὶ **ἔντασις τῆς βαρύτητος** εἰς τὸν τόπον τοῦτον, ἐπειδή, κατὰ τὸν τύπον (37), ἂν $m = 1$ g r, τότε $P = g$ Dyne, δηλαδὴ διὰ τὸν λόγον ὅτι τὸ g παριστᾷ συγχρόνως καὶ τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ γῆ ἕλκει πρὸς ἑαυτὴν εἰς τὸν τόπον τοῦτον τὴν μονάδα τῆς μάζης.

45. ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΠΤΩΣΙΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. ΝΟΜΟΙ.

Θὰ μελετήσωμεν τώρα τοὺς νόμους τῆς κινήσεως σώματος πίπτοντος ἐλευθέρως ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος.

Ἐὰν λάβωμεν φύλλον χάρτου, κόψωμεν αὐτὸ εἰς δύο ἴσα μέρη, συμπιέσωμεν μεταξὺ τῶν δακτύλων μας τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, ὥστε νὰ καταστῇ τοῦτο σφαῖρα καὶ ἀφήσωμεν συγχρόνως τὰ δύο ταῦτα τεμάζια χάρτου νὰ πέσουν ἀπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ταῦτα δὲν θὰ φθάσουν ταυτοχρόνως εἰς τὸ ἔδαφος. Τὸ συσφαιρωθὲν τεμάχιον θὰ φθάσῃ πρῶτον εἰς τὸ ἔδαφος, ἐνῷ τὸ ἄλλο θὰ κινηθῇ βραδύτερον. Ἀποδίδομεν τὴν βραδύτητα τῆς πτώσεως τοῦ δευτέρου τεμαχίου εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία προβάλλεται εἰς αὐτό. Ἡ πτῶσις τῶν σωμάτων ἐντὸς τοῦ ἀέρος δὲν εἶνε λοιπὸν ἐλεύθερα πτῶσις. Προφανῶς ἐλευθέρως πίπτουν τὰ σώματα μόνον εἰς τὸ κενόν. δηλαδὴ εἰς τὸν κενὸν ἀέρος χῶρον. Ὁ Γαλιλαῖος ἐμελέτησε τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων καὶ διετύπωσε τοὺς νόμους τῆς πτώσεως αὐτῶν. Οὗτοι εἶναι οἱ ἑξῆς :

1) Εἰς τὸν αὐτὸν τόπον πάντα τὰ σώματα πίπτουν εἰς τὸ κενὸν μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος.

2) Τὰ διανυόμενα διαστήματα, ὑπὸ σώματος πίπτοντος ἐν τῷ κενῷ, εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, καθ' οὓς διηνύθησαν (νόμος τῶν διαστημάτων).

3) Αἱ ταχύτητες, τὰς ὁποίας ἀποκτᾷ σῶμα πῖπτον εἰς τὸ κενόν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων καθ' οὓς ἐκτήθησαν (νόμος τῶν ταχυτήτων).

Τοὺς ἀνωτέρω νόμους θὰ ἀποδείξωμεν κατωτέρω καὶ μάλιστα τὸν μὲν πρῶτον διὰ τοῦ σωλῆνος τοῦ Νεύτωνος, τοὺς δὲ δύο ἄλλους διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood κ. ἄ.

46 ΣΩΛΗΝ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΟΣ. Οὗτος εἶναι σωλὴν ὑάλινος, μήκους 2 περίπου μέτρων καὶ ἐσωτερικῆς διαμέτρου 6—8 cm, κλειστὸς κατὰ τὸ ἕν ἄκρον καὶ καταλήγων εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον εἰς στενώτερον σωλῆνα μεταλλικόν κλειόμενον ἀεροστεγῶς διὰ στρόφιγγος. Ἐντὸς τοῦ σωλῆνος περιέχονται διάφορα σώματα, ὡς λ.χ. μικρὰ σφαῖρα ἐκ μολύβδου, ἑτέρα ἐκ φελλοῦ, μικρὸν φύλλον χάρτου ἢ πτίλον κλπ. Ἐὰν ἀναστρέψωμεν ἀποτόμως τὸν σωλῆνα, τὰ σώματα ταῦτα θὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ ἄνω ἄκρον καὶ ἕνεκα τούτου θὰ ἀρχίσουν πίπτοντα. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ σωλῆνος θὰ φθάσῃ πρῶτον ἡ ἐκ μολύβδου σφαῖρα καὶ μετά τινα χρόνον, ἡ ἐκ φελλοῦ τοιαύτη καὶ τελευταῖον τὸ πτίλον. Ἐὰν ὅμως ἀφαιρέσωμεν δι' ἀεραντλίας τὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρα καὶ κλείσωμεν ἔπειτα τὴν στρόφιγγα, ἀναστρέψωμεν δὲ ἀποτόμως τὸν σωλῆνα, ὡς προηγουμένως, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ σώματα ταῦτα φθάνουν εἰς τὸ κάτω μέρος ταυτοχρόνως. Εἰς ἑκάστην στιγμὴν —διαρκούσης τῆς πτώσεως— ἔχουν πάντα τὴν αὐτὴν ταχύτητα καὶ τοῦτο δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ, ὅταν δεχθῶμεν ὅτι, ἂν καὶ ἔχουν διάφορον μᾶζαν, πίπτουν πάντα μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν. Ἑπομένως εἶναι $\frac{P_1}{m_1}=\frac{P_2}{m_2}=\frac{P_3}{m_3}$ . . . . $=g$.

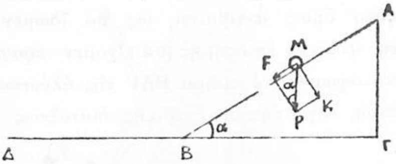
Ἡ αἰτία, ἡ ὁποία δημιουργεῖ διάφορον ἐπιτάχυνσιν εἰς τὰ διάφορα σώματα, τὰ ὁποῖα πίπτουν ἐντὸς τοῦ ἀέρος, εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος.

Ὅτι ἂν ἔλειπεν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος πάντα τὰ σώματα, ὁσηνδήποτε μᾶζαν καὶ ἂν ἔχουν ἢ ἐξ οἱασδήποτε οὐσίας καὶ ἂν συνίστανται ταῦτα, θὰ ἔπιπτον ταὐτοχρόνως, δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ δι' ἄλλων πειραμάτων (βλ. συνήθη σχολικὰ ἐγχειρίδια).

Ἐπίσης διὰ τῆς ἀκολούθου σκέψεως δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ταχύτης τῆς πτώσεως (καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g) δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς μάζης τοῦ σώματος: Δύο ὅμοια (κατὰ σχῆμα, μέγεθος καὶ μᾶζαν) σώματα, ἀφιέμενα ἐλεύθερα πίπτουν διαρκῶς μετὰ τῆς αὐτῆς πρὸς ἄλληλα ταχύτητος. Ἐὰν ταῦτα συνδεθοῦν διὰ λεπτοῦ σύρματος, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ἓν νέον σῶμα διπλασίας μάζης, εἶναι προφανὲς ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν δύο θὰ προηγεῖται τοῦ ἄλλου διὰ νὰ παρασύρῃ τοῦτο καὶ ἑπομένως καὶ πάλιν ταῦτα θὰ κινηθοῦν, ὡς καὶ προηγουμένως, διαρκῶς μετὰ τῆς αὐτῆς πρὸς ἄλληλα ταχύτητος. Ἓν σῶμα ἑπομένως διπλασίας μάζης κινεῖται πῖπτον ἐξ ἴσου ταχέως μὲ σώματα ἔχοντα μᾶζαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μάζης αὐτοῦ.

47. ΚΕΚΛΙΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ. Διὰ νὰ ἀποδειχθοῦν πειραματικῶς οἱ δύο τελευταῖοι νόμοι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὸ κενὸν παρουσιάζονται μεγάλαι δυσχέρειαι, ὀφειλόμεναι εἰς τὴν μεγάλην ταχύτητα, ἣν ἀποκτοῦν πίπτοντα τὰ σώματα, καθιστῶσαν δύσκολον τὴν μέτρησιν καὶ εἰς τὴν ἀλλοίωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἐκ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, ἐὰν ἡ πτῶσις γίνῃ ἐντὸς αὐτοῦ. Πρὸς ἄρσιν τοῦ δυσχερειῶν τούτων γίνεται χρῆσις εἰδικῶν μηχανῶν διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται βραδεῖα πτῶσις σώματος ἐντὸς τοῦ ἀέρος, χωρὶς τὰ ἀλλοιωθῇ, ἕνεκα τούτου, τὸ εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ πίπτοντος σώματος. Ἡ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος τῆς πτώσεως ἐπιτρέπει τὴν μέτρητρησιν τῶν διανυθέντων διαστημάτων κλπ. καὶ προορίζει τὴν ἀλλοίωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων, ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατόν, διὰ τὸν λόγον ὅτι ἡ ἀντίστασις, ἣν προβάλλει ὁ ἀὴρ εἰς τὰ πίπτοντα σώματα εἶναι, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ θὰ ἴδωμεν, ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος αὐτῶν.

Μία τοιαύτη μηχανὴ εἶναι καὶ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δοκοῦ ΑΒ, ξυλίνης ἢ μεταλλικῆς, ἥτις σχηματίζει μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΓΔ γωνίαν α καὶ φέρει αὔλακα εὐθύγραμμον καὶ λείαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας δύναται νὰ κυλίεται σφαῖρα Μ (Σχ. 47).



Σχ. 47

Ἐὰν φαντασθῶμεν ἐκ τοῦ ἄκρου Α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀγομένην τὴν κατακόρυφον ΑΓ, τότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ ΑΓ καλεῖται ὕψος (h) τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ΑΒ μῆκος (l) αὐτοῦ. Ἐπὶ τῆς σφαίρας Μ ἐνεργεῖ τὸ βάρος αὐτῆς P, ὅπερ ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, τὴν F, παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ τὴν Κ, κάθετον ἐπ᾽ αὐτό. Ἐκ τούτων, μόνον ἡ πρώτη δύναται νὰ θέσῃ τὸ σῶμα εἰς κίνησιν, καθότι ἡ δευτέρα, ὡς κάθετος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἐξουδετεροῦται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως αὐτοῦ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον F M P εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, καθότι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι FPM καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν. Ὅθεν εἶναι

$$\frac{MF}{MP} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{F}{P} = \frac{h}{l}. \tag{38}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $F = m\gamma$, ἔνθα m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας καὶ γ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κυλίσεως αὐτῆς, ὡς καὶ $P = mg$, ἔπεται ὅτι εἶναι

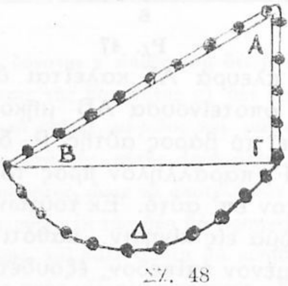
$$\frac{\gamma}{g} = \frac{h}{l} \quad \text{ἢ} \quad \gamma = \frac{h}{l}\, g. \tag{39}$$

Ἐπειδὴ τὸ h εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ l, ἐφ᾽ ὅσον ἡ α εἶναι μικροτέρα τῶν 90°, ἔπεται ὅτι ἡ γ εἶναι μικροτέρα τοῦ g καὶ μάλιστα τοσοῦτον μικροτέρα, ὅσον ἡ γωνία α ἐλαττοῦται. Διὰ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καθιστῶμεν λοιπὸν τὴν κίνησιν τῆς σφαίρας βραδυτέραν τῆς κινήσεως αὐτῆς κατὰ τὴν κατακόρυφον πτῶσιν.

Ἡ σχέσις (38) εὑρίσκεται κατ᾽ ἄλλον τρόπον διὰ τῆς ἑξῆς μεθόδου τοῦ Stevin (¹). Ἅλυσις ὁμογενὴς ἀναρτᾶται ἐκ τοῦ ὑποστηρίγματος ΑΒΓ (Σχ. 48) ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΑΒ καὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου ΑΓ. Προδήλως ἡ ἅλυσις αὕτη ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν ταύτην, διότι ἐν ἐναντίᾳ

(¹) *Simon Stevin* (1548 — 1620), ὀλλανδός, ἐπιθεωρητὴς τῶν φραγμάτων (ὑδραυλικός).

περιπτώσει, δηλαδὴ ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν αὕτη ἐτίθετο εἰς κίνησιν, ἡ κίνησις θὰ ἐσυνεχίζετο ἀκαταπαύστως, καθόιι ἡ ἑκάστοτε νέα θέσις αὐτῆς οὐδόλως θὰ διέφερε τῶν προηγουμένων. Τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς θέσιν, πρὸς ὡρισμένα πορίσματα τῆς φυσικῆς ἐπιστήμης (θὰ εἴχομεν πραγματοποίησιν τοῦ ἀεικινήτου!). Ἐὰν ἀποκόψωμεν τὸ τμῆμα ΒΔΓ τῆς ἁλύσεως, ἡ ἰσορροπία δὲν θὰ διαταραχθῇ, ἐπειδὴ, λόγῳ τῆς συμμετρικῆς διατάξεως τοῦ τμήματος τούτου, ἀσκεῖται ἡ αὐτὴ ἕλξις εἰς τὰς θέσεις Β κα Γ ἐπ' αὐτοῦ. Τὸ τμῆμα τῆς ἁλύσεως ΑΒ ἰσορροπεῖ μὲ τὸ ΑΓ. Ἀλλὰ τὰ βάρη τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ἁλύσεως εἶναι ἀνάλογα τῶν μηκῶν τῶν τμημάτων τούτων. Ἐὰν μὲ Ρ παραστήσωμεν τὸ βάρος τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ μὲ F τὸ τοῦ **ΑΓ**, ἔπεται ὅτι εἶναι



Σχ. 48

$$\frac{F}{P}=\frac{A\Gamma}{AB} \text{ ἢ } \frac{F}{P}=\frac{h}{l} \text{ καὶ } F=\frac{h}{l}\; P$$

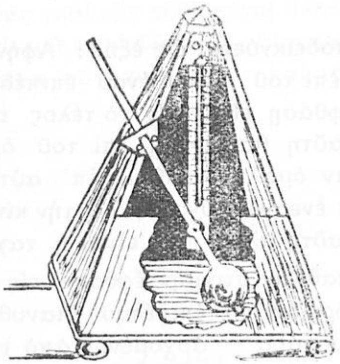
Ἡ F παριστᾷ, ὡς εὐκόλως ἐννοεῖ τις ἐνταῦθα, τὴν δύναμιν, ἥτις δέον νὰ ἀσκηθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α, ἵνα κρατήσῃ αὐτὸ εἰς ἰσορροπίαν. Εἶναι ἑπομένως αὕτη ἴση κατ' ἔντασιν πρὸς τὴν παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΒ ἐνεργοῦσαν συνιστῶσαν τοῦ βάρους Ρ. Ἡ συνιστῶσα, λοιπὸν γενικῶς, τοῦ βάρους μάζης κειμένης ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ διευθυνομένη παραλλήλως πρὸς αὐτό, ἐδείχθη ἑπομένως καὶ πάλιν ὅτι δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως (38).

Ἡ σχέσις (39) δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ἄλλως. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου FMP (Σχ. 47) ἔχομεν $F = P$ ημ α ἢ $m\gamma = mg$ ημ α καὶ $\gamma = g$ ημ α. (40)

Ὅσον ἐλαττοῦται ἡ γωνία α τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου πρὸς τὸ ὁριζόντιον τοσοῦτον, τοσοῦτον, ὡς ἐξάγεται ἐκ τῆς σχέσεως (40), καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κυλίσεως τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Α Β καθίσταται μικροτέρα τῆς g.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ 2ου καὶ 3ου νόμου τῆς πτώσεως χρησιποιεῖται βοηθητικῶς καὶ ὁ μετρονόμος (ἢ ρυθμόμετρον) τοῦ Mälzel (Σχ. 49).

Τὸ κύριον μέρος ἑνὸς μετρονόμου εἶναι ἐκκρεμὲς (Σχ. 49), τὸ ὁποῖον συνδέεται καταλλήλως μὲ μηχανισμόν, ὅστις ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα, ἴσα πρὸς τὴν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς, παράγει στιγμιαῖον κρότον. Ὁ χρόνος αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς δύναται νὰ μεταβάλλεται ἐντὸς εὐρέων ὁρίων, ὅταν τὸ εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος τοῦ ἐκκρεμοῦς εὑρισκόμενον κινητὸν βάρος μετατίθεται. Ἐὰν τοῦτο τεθῇ ἐγγύτερον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἡ διάρκεια αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς καθίσταται μικροτέρα. Ὄπισθεν τοῦ κινητοῦ βάρους ὑπάρχει κλῖμαξ, εἰς τὴν ὁποίαν δύναταί τις νὰ ἀναγιγνώσκῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς ἓν πρῶτον λεπτὸν κτύπων τοῦ μετρονόμου καὶ ἑπομένως νὰ εὑρίσκῃ τὸν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κρότων παρερχόμενον χρόνον. Ἐὰν τὸ κινητὸν βάρος εὑρίσκεται λ. χ. ἔμπροσθεν τοῦ ἀριθμοῦ 80, τότε ὁ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κτύπων τοῦ μετρονόμου μεσολαβῶν χρόνος εἶναι 0,75 sec.



Σχ. 49

Λαμβάνομεν τὴν σφαῖραν Μ καὶ ἀφήνομεν αὐτὴν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε, παρερχομένου τοῦ χρονικοῦ διαστήματος τοῦ μεσολαβοῦντος μεταξὺ δύο διαδοχικῶν κτύπων τοῦ μετρονόμου, νὰ φθάσῃ αὕτη εἰς τὸ σημεῖον Β (Σχ. 47). Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἔστω ὅτι ἡ σφαῖρα ἐτέθη ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Β ἴσην πρὸς 15 cm. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν ἐργασίαν ταύτην, ἀλλὰ θέσωμεν τὴν σφαῖραν εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Β, ὥστε νὰ διατρέξῃ ταύτην εἰς δύο χρονικὰς μονάδας, ἴσας πρὸς τὴν προηγουμένην τοιαύτην, τότε θὰ ἴδωμεν ὅτι διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τοῦτο πρέπει νὰ θέσωμεν τὴν σφαῖραν εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τοῦ Β. Ἡ σφαῖρα θὰ διατρέξῃ ἐπίσης τὸ διάστημα 135 cm εἰς τρεῖς χρονικὰς μονάδας κ.ο.κ. Ὅθεν

εἰς 1 χρονικὴν μονάδα διανύεται τὸ διάστημα $15\text{cm} = 15 \times 1^2\text{cm}$,
εἰς 2 χρονικὰς μονάδας » » » $60\text{cm} = 15 \times 2^2\text{cm}$,
εἰς 3 » » » » » $135\text{cm} = 15 \times 3^2\text{cm}$,

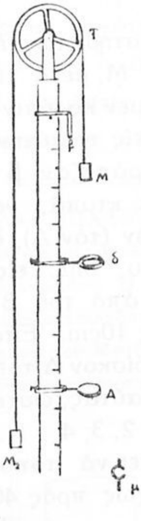
κ.ο.κ.

Ἀπεδείχθη ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ὁ δεύτερος νόμος τῆς πτώσεως, δηλ. ὅτι τὰ διανυόμενα διαστήματατα, ὑπὸ πίπτοντος σώματος, εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων καθ᾽ οὕς διηνύθησαν.

Ὁ νόμος τῶν ταχυτήτων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς : Ἀφήνομεν τὴν σφαῖραν νὰ κινηθῇ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀπὸ τοιαύτης θέσεως, ὥστε τὰ φθάσῃ εἰς Β εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος, ὅτε αὕτη θὰ κινηθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΒΔ μὲ κίνησιν ὁμαλήν, καθότι ἐπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Β καὶ ἐντεῦθεν οὐδεμία ἐνεργεῖ δύναμις διά τὴν κίνησίν της. Ἡ ταχύτης, ἥν θὰ ἔχῃ αὕτη πλέον θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀποκτήσει καθ᾽ ἥν στιγμὴν ἔφθασε εἰς τὸ Β. Μετροῦντες ὅθεν τὸ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διανυθὲν διάστημα κατὰ μίαν χρονικὴν μονάδα — ἀρχομένην ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ᾽ ἥν διέρχεται ἡ σφαῖρα τὸ Β — θὰ εὕρωμεν τὴν ταχύτητα ἥν εἶχεν ἡ σφαῖρα εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος τῆς πτώσεώς της. Ἔστω τὸ διάστημα τοῦτο (ταχύτης) 30 cm. Ἀφήνομεν κατόπιν τὴν σφαῖρα οὕτως, ὥστε νὰ φθάσῃ αὕτη εἰς Β εἰς τὸ τέλος δύο χρονικῶν μονάδων, ὅτε μετροῦμεν τὸ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διανυθὲν διάστημα κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα. Τοῦτο θὰ εἶναι 60 cm καὶ παριστᾷ τὴν ταχύτητα τὴν κτηθεῖσαν εἰς τὸ τέλος τῆς 2ας χρονικῆς μονάδος τῆς πτώσεως. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς τρίτης χρονικῆς μονάδος ἀποκτᾷ τὸ κινητὸν ταχύτητα 90 cm κ.ο.κ. Αἱ ταχύτητες, ὅθεν, τὰς ὁποίας ἀποκτᾷ σῶμα πῖπτον εἰς τὸ τέλος τῶν διαφόρων χρονικῶν μονάδων εἶναι ἀνάλογοι τῶν χρόνων τῆς πτώσεως.

Ὁ Γαλιλαῖος πρῶτος μετεχειρίσθη τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον διὰ τὴν μελέτην τῶν νόμων τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων.

48. ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ Atwood (1). Ἡ μηχανὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ κανόνος, μήκους περίπου δύο μέτρων, ὅστις τοποθετεῖται οὕτως, ὥστε νὰ ἵσταται κατακορύφως καὶ ὁ ὁποῖος φέρει διαιρέσεις τοῦ μέτρου. Εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ κανόνος τούτου ὑπάρχει μιὰ πολὺ ἐλαφρὰ τροχαλία Τ, στρεπτὴ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα διὰ τῆς αὔλακος τῆς ὁποίας διέρχεται λεπτὸν καὶ ἐλαφρὸν νῆμα. Τὸ νῆμα τοῦτο φέρει εἰς τὰ ἄκρα δύο ἴσους κατὰ τὴν μᾶζαν κυλίνδρους M_1 καὶ M_2. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ νήματος εἶναι ἐλάχιστον, δύναται τοῦτο νὰ μὴ λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν. Οἱ κύλινδροι M_1 καὶ M_2, εἰς οἱονδήποτε ὕψος καὶ ἂν εὑρίσκεται ἕκαστος, ἰσορροποῦν πάντοτε. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου M_1 θέσωμεν μικρὰν μᾶζαν μ, τότε τὸ σύστημα τῶν κυλίνδρων καὶ τοῦ νήματος δὲν δύναται πλέον νὰ διατηρήσῃ τὴν ἰσορροπίαν του καὶ θὰ κινηθῇ οὕτως, ὥστε ὁ κύλινδρος M_1 νὰ κατέρχεται. Ἡ κατακόρυφος κίνησις τῆς μάζης μ δὲν εἶναι ἐλευθέρα πτῶσις, διότι ἡ μᾶζα αὕτη διὰ τοῦ βάρους της θέτει εἰς κίνησιν σύστημα ἔχον ὁλικὴν μᾶζαν $2M+\mu$, ἔνθα M εἶναι ἡ μᾶζα ἑκάστου τῶν κυλίνδρων. Ἡ κινοῦσα τὴν μᾶζαν $2M+\mu$ δύναμις εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης μ, ἤτοι ἡ δύναμις μg, τοῦ g παριστῶντος τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $F=m\gamma$, θὰ ἔχωμεν



Σχ. 50

$$\mu g=(2M+\mu)\,\gamma,$$

ἔνθα γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τοῦ συστήματος, ἤ ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κατακορύφως κατερχομένου κυλίνδρου M_1. Ἐὰν γράψωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$\gamma=\frac{\mu}{2M+\mu}\,g\,, \tag{41}$$

βλέπομεν ὅτι ἡ γ εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς g, καθόσον ὁ λόγος $\frac{\mu}{2M+\mu}$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ κίνησις εἰς τὴν μηχανὴν τοῦ Atwood εἶναι βραδυτέρα ἤ κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν.

Εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ κανόνος καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κλίμακος ὑπάρχει μικρὰ τράπεζα β (Σχ. 50) ὑποστηρίζουσα τὸν

(¹) *Ἡ ἐν λόγῳ μηχανὴ φέρει τὸ ὄνομα ἐκ τοῦ ἄγγλου φυσικοῦ George Atwood (1745 — 1807), ὅστις ἐπενόησεν αὐτὴν τῷ 1784.*

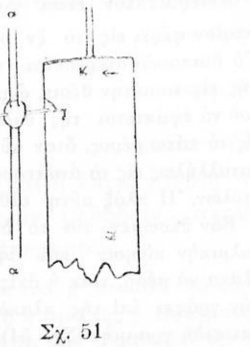
ἕνα τῶν κυλίνδρων, τὸν M_1, καὶ ἡ ὁποία ὑποχωροῦσα ἀφήνει ἐλεύθερον τὸν κύλινδρον τοῦτον. Κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος καὶ εἰς οἱανδήποτε θέσιν, δύνανται νὰ στερεωθοῦν ὁριζοντίως δίσκος Δ ἢ δάκτυλιος δ, διὰ τοῦ ὁποίου δακτυλίου διέρχεται ἐλευθέρως ὁ κύλινδρος M_1.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ νόμου τῶν διαστημάτων ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Φέρομεν τὸν κύλινδρον M_1 μετὰ τῆς προσθέτου μάζης μ ἐπὶ τῆς τραπέζης β. Θέτομεν κατόπιν τὸν μετρονόμον εἰς λειτουργίαν καὶ τὸν δίσκον Δ εἰς τοιαύτην θέσιν ἐπὶ τοῦ κανόνος, ὥστε ἂν κάμωμεν τὴν τράπεζαν **β** νὰ ὑποχωρήσῃ τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ μετρονόμος κτυπᾷ, νὰ φθάσῃ ὁ κύλινδρος M_1 μετὰ τῆς μάζης μ εἰς αὐτὸν (τὸν Δ), ὅταν θὰ ἠχήσῃ ὁ ἑπόμενος κτύπος τοῦ μετρονόμου, δηλ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα νὰ διατρέξῃ τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ β μέχρι τοῦ Δ. Ἔστω τὸ διάστημα τοῦτο ἴσον πρὸς 10cm. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν, ἀλλὰ τὸν δίσκον Δ τοποθετοῦμεν εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς τραπέζης β τοιαύτας, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς αὐτὸν ὁ κύλινδρος M_1 μετὰ πάροδον 2, 3, 4 . . . χρονικῶν μονάδων. Θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πρέπει νὰ τοποθετήσωμεν τὸν δίσκον εἰς ἀποστάσεις ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς 40(ἢ 10×2^2) cm, 90 (10×3^2) cm, 160 (10×4^2) cm . . . .

Ὁ νόμος τῶν ταχυτήτων ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς. Τοποθετὸν δακτύλιον δ κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν διαίρεσιν 10cm καὶ εἶτα εἰς τὰς θέσεις 40 cm, 90cm κλπ., ὥστε νὰ φθάσῃ ὁ κύλινδρος M_1, ὁ φέρων τὴν πρόσθετον μᾶζαν μ, ἐκκινῶν ἐκ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος, εἰς τὰς θέσεις ταύτας μετὰ χρόνον ἴσον πρὸς 1, 2, 3, κλπ. χρονικὰς μονάδας, Ὁ κύλινδρος M_1 διέρχεται ἐλευθέρως διὰ τοῦ δακτυλίου, ὄχι ὅμως καὶ ἡ πρόσθετος μᾶζα μ, διότι αὕτη ἔχει μίαν ὁριζοντίαν διάστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἐσωτερικῆς διαμέτρου τοῦ δακτυλίου. Μετὰ τὴν διέλευσιν διὰ τοῦ δακτυλίου ὁ κύλινδρος M_1 κινεῖται ὁμαλῶς, λόγῳ τῆς ἀδρανείας, ἐπειδὴ ἡ κινοῦσα δύναμις μg δὲν ἐνεργεῖ πλέον ἐπ' αὐτοῦ, μὲ ταχύτητα ἴσην πρὸς ἐκείνην, ἣν εἶχε τὴν στιγμὴν τῆς διόδου του διὰ τοῦ δακτυλίου. Μετροῦντες ὅθεν τὸ εἰς μίαν μονάδα χρόνου διανυθὲν διάστημα ὑπὸ τοῦ M_1, μετὰ τὴν δίοδόν του διὰ τοῦ δακτυλίου, εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα ταύτην. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸν πλήρη δίσκον Δ εἰς κατάλληλον ἑκάστοτε θέσιν, ὥστε νὰ φθάσῃ εἰς αὐτὴν ὁ κύλινδος M_1 μετὰ μίαν χρονικὴν μονάδα ἀπὸ τῆς διὰ τοῦ δακτυδίου δ διελεύσεώς του. Εὑρίσκεται ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ὁ δίσκος Δ πρέπει νὰ τεθῆ εἰς τὴν θέσιν 30cm, ἑπομένως ὅτι ἡ κατὰ τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος τῆς πτώσεως κτηθεῖσα ταχύτης εἶναι 20 cm. Εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις δέον νὰ τεθῆ ὁ Δ ἀντιστοίχως εἰς τὰς θέσεις 80 cm, 150 cm κλπ. Αἱ ταχύτητες λοιπὸν αἱ κτηθεῖσαι εἰς τὸ τέλος τῆς 2ας 3ης κλπ. χρονικῆς μονάδος εἶναι 40 cm, 60 cm κλπ. Ἀποδεικνύεται οὕτω ὁ νόμος τῶν ταχυτήτων.

49. ΑΛΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ. Ἐκτὸς τῶν ἀναφερθεισῶν μηχανῶν, ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι τοιαῦται, αἱ ὁποῖαι ὅμως χρησιμεύουν διὰ τὴν ἀπόδειξιν μόνον τοῦ νόμου τῶν διαστημάτων. Ἡ λειτουργία αὐτῶν στηρίζεται ἐπὶ ἀρχῆς διαφόρου τῆς τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood.

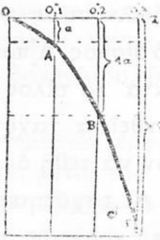
1. ***Μηχανὴ τοῦ Morin*** [1]. Ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου Κ κατακορύφου, ὅστις δύναται νὰ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά του ἰσοταχῶς δι' ὡρολογιακοῦ μηχανισμοῦ. Ἐγγὺς τοῦ κυλίνδρου δύναται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως βαρὺ σῶμα Σ (Σχ. 51), ὁδηγούμενον ὑπὸ τῶν κατακορύφων συρμάτων α α'. Τὸ σῶμα Σ φέρει γραφίδα γ ἐστραμμένην πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. Καλύπτομεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου διὰ φύλλου χάρτου. Ἐὰν ἀφήσωμεν νὰ πέσῃ τὸ σῶμα Σ, ἐνῷ ὁ κύλινδρος δὲν στρέφεται, ἡ γραφὶς γ θὰ γράψῃ μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ χάρτου. Ἐὰν ὅμως, ἐνῷ τὸ σῶμα πίπτει, ὁ κύλινδρος περιστρέφεται ἰσοταχῶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους, τότε ἡ γραφὶς θὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ χάρτου καμπύλην (παραβολήν), ἥτις ἀπεικονίζεται εἰς τὸ Σχ 52. Ἁπλοῦμεν τὸ φύλλον τοῦ χάρτου ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης καὶ διαιροῦμεν τὴν πλευρὰν ΟΧ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὥστε ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς γωνίαν στροφῆς διαγραφεῖσαν ὑπὸ τοῦ κυλίνδρου εἰς ὡρισμένον κλάσμα τοῦ δευτερολέπτου, λ. χ. 0,1 sec. Αἱ ἀποστάσεις Α'Α, Β'Β, Γ'Γ κλπ. εἶναι προφανῶς τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα εἰς



Σχ. 51

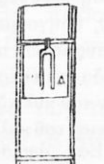
(1) *Ἡ μηχανὴ αὕτη κατεσκευάσθη ὑπὸ τοῦ γάλλου στρατηγοῦ* A. Morin *(1795—1880), ὅστις ὑπῆρξε καὶ ἐξαιρετικὸς μαθηματικὸς καὶ φυσικός.*

χρόνους ἴσους πρὸς 1, 2, 3.... χρονικὰς μονάδας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς 0,1 sec. Διὰ μετρήσεως μὲ τὴν βοήθειαν κανόνος εὑρίσκεται, ὅτι ἡ Β′ Β=4 (Α′Α) καὶ ἡ (Γ′Γ)=9 (Α′Α) κλπ, δηλ. ἂν μὲ α παραστήσωμεν τὸ διανυθὲν διάστημα Α′ Α εἰς τὴν πρώτην μονάδα χρόνου, τότε εἰς 2, 3 κλπ. χρονικὰς μονάδας τὰ διανυθέντα διαστήματα εἶναι 4α ($2^2 α$), 9α ($3^2 . α$) κτλ.



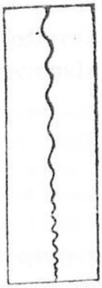
Σχ. 52

2. Μία ἄλλη μηχανὴ ἀποτελεῖται ἐκ δύο κατακορύφων στύλων, ὕψους 2 μέτρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων φέρει κατακόρυφον αὔλακα οὕτως, ὥστε αἱ δύο αὔλακες νὰ κεῖνται ἀπέναντι ἀλλήλων. Μεταξὺ τῶν στύλων ὑπάρχει πλὰξ ὑαλίνη, ἔχουσα μῆκος (ὕψος) 60 cm, ἥτις δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τῶν στύλων καὶ πίπτῃ κατακορύφως (Σχ. 53), ὁδηγουμένη ὑπὸ τῶν αὐλάκων. Εἰς τὴν μηχανὴν ταύτην ὑπάρχει ἀφ' ἑτέρου ἓν διαπασῶν Δ, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν παλμικῶν κινήσεων εἰς ἓν δευτερόλεπτον εἶναι γνωστὸς καὶ τὸ ὁποῖον φέρει εἰς τὸ ἓν σκέλος ἀκίδα. Τὸ διαπασῶν στερεοῦται ἐπὶ τῆς μηχανῆς εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ ἀκὶς αὐτοῦ νὰ ἐφάπτεται τῆς ὑαλίνης πλακὸς εἰς τὸ κάτω μέρος, ὅταν αὕτη στερεωθῇ καταλλήλως εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος τῶν στύλων. Ἡ πλὰξ αὕτη αἰθαλοῦται.



Σχ. 53

Ἐὰν θέσωμεν νῦν τὸ διαπασῶν εἰς παλμικὴν κίνησιν καὶ ἀφήσωμεν τὴν πλάκα νὰ πέσῃ, τότε ἡ ἀκὶς τοῦ διαπασῶν γράφει ἐπὶ τῆς πλακὸς μίαν κυματοειδῆ γραμμὴν (Σχ. 54). Αἱ κυμάνσεις εἰς τὴν γραμμὴν ταύτην, πρὸς τὸ κατώτερον μέρος τῆς πλακὸς εἶναι στεναὶ καὶ εὑρίσκονται ἐγγὺς ἀλλήλων, τὸ ἀντίθετον δὲ συμβαίνει εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς πλακός. Ἔστω ὅτι τὸ διαπασῶν ἐκτελεῖ 136 παλμικὰς κινήσεις εἰς ἓν δευτερόλεπτον. Ἡ διάρκεια μιᾶς παλμικῆς κινήσεως (ἀπεικονισθείσης ἐπὶ τῆς πλακὸς) εἶναι $\frac{1}{136}$ sec. Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὡς μονάδα χρόνου τὴν διάρκειαν τεσσάρων παλμικῶν κινήσεων τότε ἡ χρονικὴ αὕτη μονὰς εἶναι $\frac{1}{34}$ sec. Τὸ μῆκος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐκτείνονται αἱ 4 πρῶται παλμικαὶ κινήσεις, αἱ 8 πρῶται, αἱ 12 πρῶται κλπ. παλμικαὶ κινήσεις, ὡς ταύτας ἀπεικονίζει ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος 54, εἶναι τὰ διαστήματα τὰ διανυθέντα ὑπὸ σώματος (πλακὸς) πίπτοντος ἐλευθέρως εἰς χρόνους 1,2,3 κλπ. (χρονικὴ μονὰς $=\frac{1}{34}$ sec). Τὰ μήκη ταῦτα ἐμετρήθησαν καταλλήλως καὶ εὑρέθησαν ἴσα περίπου πρὸς 4,2 m m, 16,8 m m, 37,8 m m κλπ., ἤτοι ἐὰν μὲ α παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν 4,2 m m, τότε ταῦτα εἶναι ἴσα πρὸς $1^2\alpha$, $2^2\alpha$, $3^2\alpha$ κτλ.



Σχ. 54

50. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ. Οἱ νόμοι τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων ἐν τῷ κενῷ, οἱ ὁποῖοι ἀπεδείχθησαν ἀνωτέρω, εἶναι νόμοι τῆς ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως (§ 9, Δ). Ἡ κίνησις ὅθεν σώματος πίπτοντος εἰς τὸ κενὸν εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Ἰσχύουν ἑπομένως δι' αὐτὴν οἱ τύποι

$$\upsilon=\upsilon_0+gt$$

$$s=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\,gt^2$$

$$\text{καὶ } \upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+2gs}\,,$$

ἔνθα g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος. Αὕτη εὑρίσκεται διὰ διαφόρων μεθόδων, ἀκριβεστέρα τῶν ὁποίων εἶναι ἐκείνη διὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἡ τιμὴ τῆς g δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς μηχανῆς Atwood, ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς γ. Πράγματι θέτοντες τὴν τιμὴν τῆς γ καὶ τῶν μ καὶ M εἰς τὸν τύπον (41), εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς g. Ἡ τιμὴ τῆς γ εὑρίσκεται εὐκόλως λ. χ. ἐκ τοῦ κατὰ τὴν πρώτην χρονικὴν μονάδα διανυθέντος διαστήματος α. Ἐὰν ἡ χρονικὴ μονὰς εἶναι ἴση πρὸς 2 sec καὶ τὸ κατὰ τὴν πρώτην ταύτην χρονικὴν μονάδα διανυθὲν διάστημα ἴσον πρὸς 20 cm, προφανῶς εἶναι $20=\frac{1}{2}\gamma.\,2^2$ ἢ $\gamma=10$ cm. sec^{-2}. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐὰν M=475 gr καὶ μ=10 gr, εὑρίσκομεν ὅτι

$$g=\frac{2.475+10}{10}.\,10=960 \text{ cm. sec}^{-2}.$$

51. ΚΙΝΗΣΙΣ ΕΝ ΤΩ ΚΕΝΩ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΡΙΠΤΟΜΕΝΟΥ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΑΝΩ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ κίνησις τοῦ σώματος εἶναι εὐθύγραμμος καὶ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, καθόσον ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ εἶναι ἀρνητική, δηλαδὴ ἀντίθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0, μεθ' ἧς ρίπτεται τὸ σῶμα πρὸς τὰ ἄνω. Οἱ τύποι οἱ ἰσχύοντες διὰ τὴν κίνησιν ταύτην, εἶναι οἱ ἀκόλουθοι

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt$$

$$s = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (42)$$

$$\text{καὶ } \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gs}.$$

Τὸ σῶμα ἀνερχόμενον ἀποκτᾷ κατὰ τὰς διαφόρους στιγμὰς ταχύτητας διαρκῶς ἐλαττουμένας καὶ θὰ ἔλθῃ στιγμή, καθ' ἥν ἡ ταχύτης του θὰ μηδενισθῇ. Ὅταν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ μηδενισθῇ, τοῦτο θὰ ἔχῃ φθάσει εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, ἔπειτα δὲ θὰ ἀρχίσῃ πῖπτον πρὸς τὰ κάτω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Καλέσωμεν τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνῆλθε τὸ κινητόν, H. Προφανῶς εἶναι

$$H = \upsilon_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \qquad (43)$$

Ὁ χρόνος t, ὁ ἀπαιτηθείς, ἵνα τὸ κινητὸν φθάσῃ εἰς τὸ ὕψος H, δηλαδὴ εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων (42), ἄν θέσωμεν εἰς αὐτὴν $\upsilon = 0$, διότι κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον t ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ ἐμηδενίσθη. Ἔχομεν

$$0 = \upsilon_0 - gt,$$

ἐξ ἧς προκύπτει :

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} \qquad (44)$$

Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χρόνου θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (43), θὰ λάβωμεν τὸ μέγιστον ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα :

$$H = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \qquad (45)$$

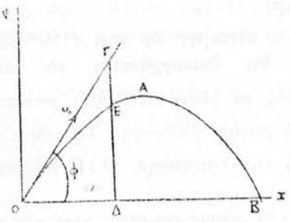
Τὸ σῶμα, ἀφοῦ φθάσει εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, πίπτει πρὸς τὸ ἔδαφος μὲ κίνησιν, ὡς εἴδομεν, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Εὑρίσκεται εὐκόλως, ὅτι ὁ χρόνος ὅν ἐχρειάσθη τὸ σῶμα διὰ νὰ ἀνέλθῃ εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, τὸ ὁποῖον χρειάζεται τοῦτο, ἵνα κατέλθῃ μέχρι τοῦ ἐδάφους.

Ὅταν φθάση τὸ σῶμα εἰς τὸ ἔδαφος θὰ ἀποκτήση ταχύτητα υ ἴσην πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τῆς πρὸς τὰ ἄνω ρίψεως. Πράγματι εἶναι

$$\upsilon = \sqrt{2g\,H} = \sqrt{2g.\frac{\upsilon_0^2}{2g}} = \upsilon_0.$$

52. ΒΟΛΗ ΕΝ ΤΩι ΚΕΝΩι ΣΩΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑΝ. Ἔστω τώρα ὅτι ἓν σῶμα ρίπτεται μετ' ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0 πρὸς μίαν διεύθυνσιν, σχηματίζουσαν πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὴν γωνίαν φ. Τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ ἐπὶ μιᾶς τροχιᾶς, ἡ ὁποία δὲν εἶναι εὐθύγραμμος, διότι ἐπὶ τοῦ κινουμένου σώματος ἐνεργεῖ συνεχῶς ἡ βαρύτης. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸ εἶδος τῆς τροχιᾶς καὶ νὰ μελετήσωμεν αὐτήν, ἄς λάβωμεν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων μὲ ἄξονα τῶν x τὴν ὁριζόντιον εὐθεῖαν ΟΧ καὶ ἄξονα τῶν y τὴν κατακόρυφον ΟΨ.

Οἱ δύο ἄξονες ἔχουν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ρίπτεται τὸ σῶμα καὶ ὁρίζουν ἓν κατακόρυφον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ διεύθυνσις τῆς βολῆς. Ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα θὰ διαγράψῃ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ σώματος δὲν ἐνήργει ἡ βαρύτης, τότε τοῦτο ἅπαξ τεθὲν εἰς κίνησιν θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς, μὲ ταχύτητα υ_0. Μετὰ χρόνον t θὰ ἔφθανε τοῦτο, ἔστω εἰς Γ, ὅτε $ΟΓ=\upsilon_0 t$. Ἀλλὰ τὸ σῶμα διὰ τῆς ἐνεργείας καὶ τῆς βαρύτητος δὲν εὑρίσκεται εἰς Γ, ἀλλὰ εἰς Ε. Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὸ διαλυτικὸν ἀξίωμα, θὰ ἀντιληφθῶμεν ὅτι τὸ διάστημα ΓΕ διηνύθη ὑπὸ τοῦ σώματος τῇ ἐνεργείᾳ τῆς βαρύτητος μόνον. Ὅθεν $ΓΕ=\frac{1}{2}gt^2$. Παριστῶντες τὰς συντεταγμένας τοῦ Ε διὰ τῶν x καὶ y, δηλαδὴ θέτοντες $ΟΔ= x$ καὶ $ΔΕ=y$, ἔχομεν ὡς γνωστὸν



Σχ. 55

$$x = ΟΓ.\ \text{συν}\ \varphi = \upsilon_0 t.\ \text{συν}\ \varphi$$

$$\text{καὶ}\ y = ΟΓ\ \text{ημ}\ \varphi - \frac{1}{2}gt^2 = \upsilon_0 t\ \text{ημ}\ \varphi - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (46)$$

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ t τὴν τιμήν του τὴν λαμβανομένην ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως $t=\frac{x}{\upsilon_0\ \text{συν}\ \varphi}$, θὰ λάβωμεν

$$y = x.\ \text{εφ}\ \varphi - \frac{g}{2\,\upsilon_0^2\ \text{συν}^2\ \varphi}.\ x^2 \qquad (47)$$

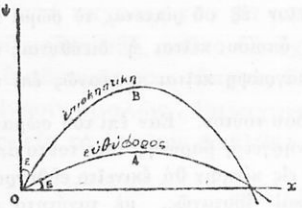
Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης καλουμένης ***παραβολῆς***. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην θέσωμεν $y=o$, τότε θὰ εὕρωμεν εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ο θὰ συναντήση τὸ κινητὸν τὸ ὁριζόντιον ἐπιπεδον τὸ διὰ τοῦ O διερχόμενον, ἤτοι θὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς OB=x εὑρίσκομεν

$$x = \frac{\eta\mu.\ 2\varphi}{g} \upsilon_0{}^2 \qquad (48)$$

Ἡ ἀπόστασις OB καλεῖται ***βεληνεκές***. Τὸ βεληνεκὲς λαμβάνει, ὑπὸ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα, τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν, ὅταν ἡ γωνία 2φ γίνῃ 90° (διότι τότε ημ 2φ=1), ἤτοι ὅταν φ=45°. Ἐπιτυγχάνομεν λοιπὸν τὸ μέγιστον βεληνεκὲς εἰς τὸ κενόν, ἂν ρίψωμεν τὸ σῶμα ὑπὸ γωνίαν φ=45°. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἐξίσωσις (48) γίνεται

$$x = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} \qquad (51).$$

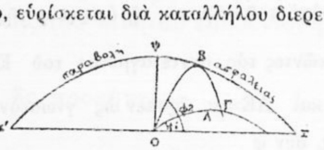
Συγκρίνοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς τὴν (45) συμπεραίνομεν ὅτι x=2H, δηλαδὴ ὅτι τὸ μέγιστον βεληνεκὲς εἶναι διπλάσιον τοῦ ὕψους, εἰς ὃ θὰ ἔφθανε τὸ σῶμα ῥιπτόμενον μετὰ τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς ταχύτητος κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω [1].



Σχ. 56

Ἐπειδὴ εἶναι ημ 2φ=ημ (180°—2φ), ἕπεται ὅτι ἐπιτυγχάνεται τὸ αὐτὸ βεληνεκές, μὲ ῥῖψιν εἴτε ὑπὸ γωνίαν φ εἴτε ὑπὸ γωνίαν (90°—φ). Τὸ σῶμα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον B (Σχ. 56) ἀκολουθοῦν ἢ τὴν καμπύλην ΟΔΓ (εὐθύφορον), ἢ τὴν ΟΒΓ (ἐπισκηπτικήν).

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου O (Σχ. 57) γίνωνται αἱ ῥίψεις σώματος μετὰ τῆς αὐτῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0 ὑπὸ διαφόρους γωνίας ἐν τῷ αὐτῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ, εὑρίσκεται διὰ καταλλήλου διερευνήσεως τῆς ἐξισώσεως (47), ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τῶν συντεταγμένων, τὰ βαλλόμενα ἀπὸ τοῦ O, χωρίζονται ἀπὸ τὰ ἀπρόσβλητα σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου διὰ καμπύλης καλουμένης ***παραβολῆς ἀσφαλείας***. Πᾶν σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης ταύτης



Σχ. 57

βάλλεται μὲ ῥῖψιν ὑπὸ μίαν μόνον γωνίαν, ἐνῷ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου

---

[1] *Τὸ κινητὸν ἀνέρχεται εἰς τὸ μεγαλύτερον ὕψος τῆς παραβολικῆς τροχιᾶς του, δηλ. εἰς τὸ Α (Σχ. 55), ἔστω εἰς χρόνον Τ, ὁ ὁποῖος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (44), ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς αὐτόν, ἀντὶ τῆς* υ_0 *τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν αὐτῆς, ἡ ὁποία προφανῶς ἰσοῦται πρὸς* $\upsilon_0 . \eta\mu\varphi$. *Ὅθεν* $T = \frac{\upsilon_0}{g} \eta\mu\varphi$. *Ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην θέσωμεν εἰς τὴν (46) ἀντὶ τοῦ* t, *θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν* $y = \frac{\upsilon_0{}^2\ \eta\mu^2\varphi}{2g}$, (50) *ἡ ὁποία παρέχει τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀνέλθῃ τὸ κινητόν, ὅταν διαγράφῃ τὴν παραβολικὴν τροχιάν του.*

κείμενον ἐντὸς τῆς καμπύλης ἀσφαλείας, λ. χ. τὸ Γ, βάλλεται μὲ ρῖψιν ὑπὸ δύο γωνίας φ_1 ἢ φ_2. Τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν γωνίαν φ_1 ριπτόμενον ἀκολουθεῖ τὴν εὐθύφορον τροχιὰν ΟΑΓ, ἐνῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν φ_2 τὴν ἐπισκηπτικὴν ΟΒΓ. Εἶναι πάντοτε $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^0$. Αἱ διαστάσεις τῆς παραβολῆς ἀσφαλείας εἶναι προφανῶς αἱ ἑξῆς: $O\Psi = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$ (κατακόρυφος ρῖψις) καὶ $OX = OX' = \frac{\upsilon_0^2}{g}$ (ρῖψις ὑπὸ γωνίαν $\varphi = 45^0$).

53. ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ ΤΟΥ ΑΕΡΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΙΝ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ. Εἴδομεν ἀνωτέρω τοὺς νόμους τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὸν κενὸν ἀέρος χῶρον. Ἐπίσης ἐξητάσαμεν τὴν κίνησιν, εἰς τὸν αὐτὸν χῶρον, σώματος ριπτομένου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἢ ὑπὸ γωνίαν. Νῦν πρόκειται νὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς αὐτὰς κινήσεις σώματος ἐντὸς τοῦ ἀέρος.

Ὅταν σῶμα κινῆται ἐντὸς τοῦ ἀέρος συναντᾷ κατὰ τὴν κίνησίν του ἀντίστασιν. Πράγματι ὁ ἀὴρ ἀσκεῖ ἐπὶ τῶν διαφόρων στοιχείων τῆς ἐπιφανείας σώματος κινουμένου δυνάμεις ἀντιστάσεως. Αἱ ἀνθιστάμεναι εἰς τὴν κίνησιν σώματος δυνάμεις εἰς ἣν περίπτωσιν τὸ σῶμα ἔχει σχῆμα συμμετρικὸν ὡς πρὸς ἄξονα παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως αὐτοῦ ἀνάγονται εἰς μίαν συνισταμένην ἡ ὁποία ἔχει διεύθυνσιν ἀντίθετον τῆς διευθύνσεως τῆς κινήσεως καὶ ἀποτελεῖ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος.

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εὑρέθη, διὰ διαφόρων πειραμάτων, ὅτι ἀκολουθεῖ τοὺς ἑξῆς νόμους: 1) Εἶναι αὕτη, διὰ ταχύτητας τοῦ σώματος περιλαμβανομένας μεταξὺ 4 καὶ 100 μέτρων περίπου κατὰ δευτερόλεπτον, ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος. 2) Διὰ σώματα γεωμετρικῶς ὅμοια, εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας τῆς κυρίας τομῆς τοῦ σώματος. Ὡς ***κυρία*** ἢ ***πρωτεύουσα τομὴ*** σώματος χαρακτηρίζεται ἐνταῦθα ἡ τομὴ τοῦ σώματος, ἡ ἔχουσα τὴν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν καὶ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Α τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, ἣν συναντᾷ σῶμα κινούμενον, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη, μὲ S τὴν ἐπιφάνειαν τῆς κυρίας τομῆς τοῦ σώματος, μὲ υ τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεως αὐτοῦ, τότε εἶναι

$$A = K.S.\upsilon^2, \tag{52}$$

ἔνθα Κ παριστᾷ ἀριθμητικὸν συντελεστὴν ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ σώματος [1]. Διὰ γεωμετρικῶς ὅμοια σώματα ὁ Κ εἶναι ὁ αὐτός.

Πτῶσις τῶν σωμάτων. 1. Πάντα τὰ σώματα ἐντὸς τοῦ ἀέρος δὲν πίπτουν, ὅπως εἰς τὸ κενόν, μετὰ τῆς αὐτῆς ταχύτητος. Τοῦτο δέον νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος. Σῶμα πῖπτον ἐντὸς τοῦ ἀέρος δὲν κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους του Β, ἀλλὰ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως (Β – Α), ἔνθα Α παριστᾷ τὴν ἀντίστασιν τὴν προβαλλομένην εἰς αὐτὸ ὑπὸ τοῦ ἀέρος. Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο πῖπτον ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν γ, ἐνῷ πῖπτον εἰς τὸ κενὸν θὰ ἀπέκτα ἐπιτάχυνσιν g. Εἰς τὴν Δυναμικὴν

---

(1) *Περὶ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος περισσότερα θὰ ἐκτεθοῦν εἰς τὸ οἰκεῖον κεφάλαιον τῆς Ἀεροδυναμικῆς. Ἐκεῖ θὰ ἀσχοληθῶμεν ἐκτενέστερον καὶ μὲ τὸν συντελεστὴν Κ. Ποία ἡ φύσις τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος ἢ γενικώτερον παντὸς ρευστοῦ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται σῶμα, καὶ πόθεν ἐξαρτᾶται ὁ Κ, θὰ ἀναφερθοῦν ἐκεῖ.*

(§ 35) εἴδομεν ὅτι διὰ τὸ αὐτὸ σῶμα αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων. Ὅθεν

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{B-A}{B}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\gamma=g\frac{B-A}{B}=g\left(1-\frac{A}{B}\right). \tag{53}$$

Ἡ γ καθίσταται τοσοῦτον μεγαλυτέρα, ὅσον τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ γίνεται μικρότερον. Διὰ βαρύτερα σώματα (καλλίτερον: εἰδικῶς βαρύτερα) ἡ γ λαμβάνει μεγαλυτέραν τιμήν.

2. Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος τοῦ σώματος, ἕπεται ὅτι ὅσον ταχύτερον πίπτει τὸ σῶμα, τοσοῦτον ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος αὐξάνεται. Ἡ διαφορὰ B–A καθίσταται διαρκῶς μικροτέρα. Ἡ πτῶσις ἑνὸς σώματος δὲν εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἂν καὶ ἡ ταχύτης τῆς πτώσεως διαρκῶς αὐξάνεται, διότι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς πτώσεως δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ διαρκῶς ἐλαττοῦται τείνουσα πρὸς τὸ μηδέν. Θὰ ἔλθῃ στιγμή, καθ' ἣν B=A, ὅτε B—A=0. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης καὶ ἔπειτα ἡ κίνησις τοῦ σώματος εἶναι κίνησις ἰσοταχής, μὲ ταχύτητα ἥτις καλεῖται **ὁρικὴ ταχύτης**.

Ἐὰν εἶναι m ἡ μᾶζα τοῦ πίπτοντος σώματος, S ἡ κυρία τομή του καὶ υ ἡ ταχύτης, ἣν τοῦτο θὰ ἀποκτήσῃ, προφανῶς ἰσχύει ἡ σχέσις

$$mg=K.\,S.\,\upsilon^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ τιμὴ τῆς ὁρικῆς γωνίας:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{mg}{KS}}. \tag{54}$$

Μία εἰδικὴ περίπτωσις ἔχει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον. Εἶναι ἡ περίπτωσις σφαίρας πιπτούσης ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι r καὶ ἡ πυκνότης αὐτῆς δ, τότε $m=\frac{4}{3}\pi r^3\delta$ καὶ $S=\pi r^2$. Ἑπομένως

$$\upsilon=\sqrt{\frac{4\,r.\delta.g}{3K}}. \tag{55}$$

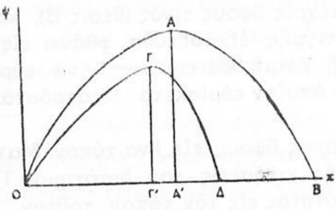
Ἄς λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν (53) καὶ ἂς θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τῶν A καὶ B τὰς τιμάς των: $A=K\pi r^2\upsilon^2$ καὶ $B=\frac{4}{3}\pi r^3\delta g$. Θὰ ἔχωμεν

$$\gamma=g\left(1-\frac{K\pi r^2\upsilon^2}{\frac{4}{3}\pi r^3\delta g}\right)=g\left(1-\frac{3K\upsilon^2}{4r\delta g}\right).$$

Βλέπομεν ὅτι ἐκ δύο σφαιρῶν, ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ, ταχύτερον πίπτει ἡ ἔχουσα τὴν μεγαλυτέραν ἀκτῖνα r. Οὕτω τὰ σταγονίδια τοῦ ὕδατος τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰ νέφη καὶ τὴν ὁμίχλην, πίπτουν βραδύτατα, οἱ σταγόνες τῆς βροχῆς, ἔχουσαι μεγαλυτέραν ἀκτῖνα ἢ ταῦτα πίπτουν μετὰ μεγαλυτέρας ταχύτητος. Τὰ μικρότατα μέρη τοῦ κονιορτοῦ, τὰ ὁποῖα αἰωροῦνται εἰς τὸν ἀέρα, πίπτουν μετὰ πολὺ μικρᾶς ταχύτητος. Ἡ σποδὸς τῶν ἡφαιστείων ἡ ἀνυψωθεῖσα εἰς τὰ ἀνώτερα στρώματα τῆς ἀτμοσφαίρας κατὰ τὰς ἐκρήξεις, πίπτει τόσον βραδέως, ὥστε καταπίπτει εἰς τὴν γῆν μετὰ πάροδον μηνῶν ἢ καὶ ἐτῶν. Ἡ τολύπη καπνοῦ σιγαρέττου παραμένει ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἐν αἰωρήσει ἐπ' ἀρκετόν.

Βολὴ σώματος. Ἐὰν σῶμα ριφθῇ κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἀνέρχεται ἐπὶ ὀλιγώτερον χρόνον καὶ φθάνει εἰς μικρότερον ὕψος ἢ εἰς τὸ κενόν.

Ἐὰν σῶμα ριφθῇ πλαγίως πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν φ, τότε, λόγῳ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, τὸ σῶμα δὲν ἀκολουθεῖ παραβολικὴν τροχιάν, ἀλλὰ ἄλλην τινα τροχιὰν ΟΓΔ (Σχ. 58), κειμένην ἐξ ὁλοκλήρου κάτωθεν τῆς παραβολῆς ΟΑΒ, ἣν θὰ διέγραφε τὸ σῶμα ἂν ἐρρίπτετο ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα εἰς τὸ κενόν. Ἡ τροχιὰ ΟΓΔ εἶναι ἀσύμμετρος ὡς πρὸς τὴν κατακόρυφον τὴν διὰ τοῦ ἀνωτέρου αὐτῆς σημείου Γ διερχομένην. Ὁ κατερχόμενος κλάδος ΓΔ σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τῶν x γωνίαν μεγαλυτέραν ἢ ὁ ἀνερχόμενος ΟΓ. Ἐὰν σῶμα ριφθῇ εἰς τὸν ἀέρα ἐπιτυγχάνει βεληνεκὲς ΟΔ μικρότερον ἢ εἰς τὸ κενὸν (ΟΒ), ριπτόμενον μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ.



Σχ. 58

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' [Κέντρα βάρους] 25) Αἱ μᾶζαι γῆς καὶ σελήνης ἔχουν λόγον 81 : 1. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι 382420 km. Ποῦ κεῖται τὸ κοινὸν κέντρον βάρους;

26) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς κυκλικοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 10 cm καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐπίκεντρον γωνίαν 90°.

* 27) Ποῦ κεῖται τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς τόξου 80°, ὅταν τοῦτο ἀνήκει εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 20 cm;

* 28) Ποῦ κεῖται τὸ κέντρον βάρους ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως, ἀκτῖνος 24 cm καὶ ἐπικέντρου γωνίας 120°;

Β' [Ἰσορροπία σωμάτων]. * 29) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ γωνίαν 35° θὰ τοποθετηθῇ κύλινδρος, ἔχων ἀκτῖνα βάσεως 6 cm, οὕτως, ὥστε νὰ στηρίζεται οὗτος διὰ μιᾶς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ὕψος, κατ' ἀνώτερον ὅριον, πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κύλινδρος οὗτος, ἵνα μὴ ἀνατραπῇ.

* 30) Μία κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίς, μάζης 907,2 kg, ἔχουσα ὕψος 12 παλαμῶν καὶ πλευρὰν βάσεως 9 παλ., ἰσορροπεῖ στηριζομένη

ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ μικροτέρα δύναμις Γ, ἡ ὁποία ἐνεργοῦσα ὁριζοντίως ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, θὰ ἐπιφέρῃ τὴν ἀνατροπὴν αὐτῆς καὶ κατὰ ποίαν γωνίαν φ πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ στραφῇ ἡ πυραμίς.

Γ΄. [Πτῶσις κ.λ.π. τῶν σωμάτων ἐν τῷ κενῷ].—31) Σῶμα ἀφέθη νὰ πέσῃ ἐξ ὕψους 1962 m. Ἐὰν $g=981$ cm. sec^{-2} νὰ εὑρεθῇ ἡ κτηθεῖσα ὑπ' αὐτοῦ ταχύτης, καθ' ἣν στιγμὴν ἔφθασε τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος.

32) Σῶμα ἐκτοξεύεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 98 cm.sec^{-1}. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, μέχρι τοῦ ὁποίου θὰ ἀνέλθῃ τοῦτο, ἂν εἰς τὸν τόπον εἰς τὸν ὁποῖον γίνεται ἡ ῥῖψις $g=980$ cm. sec^{-2}.

33) Ἀπὸ ἀεροστάτου, ἐν στάσει εὑρισκομένου εἰς ὕψος τι ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους (θέσις Α), ἐκτοξεύεται ἓν σῶμα κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0=147$ m. sec^{-1}. Τὸ ἀερόστατον ἀπομακρύνεται μετὰ ταῦτα, τὸ δὲ σῶμα ἀνέρχεται μέχρις ὕψους τινὸς (θέσις Β), κατόπιν πίπτει καὶ μετὰ 38 sec, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐξετοξεύθη φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος (θέσις Γ). Ἐὰν διὰ τὸ g ληφθῇ ἡ τιμὴ 980 cm. sec^{-2}, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὑπεράνω τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκετο τὸ ἀερόστατον δηλ. ἡ ἀπόστασις ΑΓ.

34) Σῶμα ἀφίεται καὶ πίπτει ἔκ τινος ὕψους, εἰς ἕνα τόπον, διανύει δὲ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ 12ου sec τῆς κινήσεώς του διάστημα 112,7 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

35) Δύο σώματα ῥίπτονται, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 245 m.sec^{-1}. Ἂν τὸ δεύτερον ἐρρίφθη 1 sec μετὰ τὸ πρῶτον, νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ῥίψεως τοῦ πρώτου, ἡ μεταξύ των ἀπόστασις θὰ γίνῃ ἴση πρὸς 171,5 m.

36) Σῶμα ῥίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ ἔδαφος μετὰ χρόνον 26 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης μετὰ τῆς ὁποίας ἐρρίφθη τοῦτο καὶ τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνῆλθεν.

37) Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ βάθους ἑνὸς πολὺ βαθέος φρέατος, ἀφήνομεν νὰ πέσῃ εἰς αὐτὸ λίθος. Τὸν κρότον τῆς προσκρούσεως τοῦ λίθου ἐκ τοῦ πυθμένος ἀκούομεν μετὰ 20 sec. Πόσον βαθὺ εἶναι τὸ φρέαρ, ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $333\,\frac{m}{sec}$ καὶ ἐὰν $g=9{,}81$ m. sec^{-2};

Δ΄. * 38) Σῶμα ἐκτοξεύεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0=333\frac{1}{3}$ m.sec^{-1} ὑπὸ γωνίαν $φ=75^0$ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ συνήντησε τὸ ὁριζόντιον ἔδαφος, εἰς ποῖον ἀνώτερον ὕψος ἔφθασε καὶ πόσον χρόνον ἐχρειάσθη διὰ νὰ διανύσῃ τὴν τροχιάν του.

* 39) Ὀβὶς ἐκτοξευομένη ὑπὸ γωνίαν $φ=30^0$ ἐπαναπίπτει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς ἀπόστασιν 2500 m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐκσφενδονισθῇ καὶ τὸ ἀνώτερον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ αὕτη κατὰ τὴν κίνησίν της.

* 40) Ἓν βλῆμα ἐκτοξεύεται καὶ κινούμενον ἐπιτυγχάνει μέγι-

στον ὕψος $y=40$ m καὶ βεληνεκὲς $x=190$ m. Ποία ἦτο ἡ ἀρχική του ταχύτης $υ_0$ καὶ ἡ γωνία ρίψεως $φ$;

* 41) Σφαῖρα ρίπτεται ἐκ τοῦ ἐδάφους λοξῶς πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ γωνίαν 45^0. Νὰ εὑρεθῇ ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης αὐτῆς, ὥστε νὰ διέλθῃ αὕτη διὰ σημείου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ὁριζοντίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ρίψεως ἴσην πρὸς 200 m καὶ εἰς ὕψος 10 m ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου καὶ ἐπιπέδου ἐδάφους.

Ε΄ 42) Εἰς τὴν μηχανὴν τοῦ Atwood ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἰσοβαρῶν κυλίνδρων τίθεται μικρὰ μᾶζα 10gr καὶ οἱ κύλινδροι ἀρχίζουν νὰ κινοῦνται. Μετὰ 2 sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως, ὁ κατερχόμενος κύλινδρος διερχόμενος διὰ τοῦ δακτυλίου ἐγκαταλείπει τὴν πρόσθετον μᾶζαν καὶ κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἑπομένου δευτερολέπτου διανύει διάστημα 39,2 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα ἑκάστου τῶν κυλίνδρων τῆς μηχανῆς.

43) Κεκλιμένον ἐπίπεδον ΑΒ ἔχει μῆκος 7,20 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του (ΑΓ), ὅταν εἰς τόπον ἔνθα $g=981$ cm sec^{-2} ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου τούτου ἐπιπέδου εἶναι 163,5 cm. sec^{-2}.

* 44) Εἰς τὴν κορυφὴν κεκλιμένου ἐπιπέδου στερεοῦται παγία τροχαλία, διὰ τῆς αὔλακος τῆς ὁποίας διέρχεται σχοινίον. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σχοινίου καὶ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὑπάρχει σῶμα Σ μάζης 10 kg, εἰς δὲ τὸ ἄλλο ἄκρον σῶμα Ρ μάζης ἐπίσης 10 kg, δυνάμενον νὰ κινῆται κατακορύφως παραλλήλως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Πρὸς ποῖον μέρος θὰ κινηθῇ τὸ σύστημα καὶ μὲ ποίαν ἐπιτάχυνσιν;

45) Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood ἑκάστη τῶν ἴσων μαζῶν εἶναι 200 gr. Ἐὰν ἡ μᾶζα τῆς τροχαλίας ἀνέρχεται εἰς 40 gr, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς προσθέτου μάζης, ἵνα ἡ μᾶζα αὕτη, κινουμένη ὁμοῦ μετὰ τοῦ λοιποῦ κινητοῦ συστήματος τῆς μηχανῆς, διανύσῃ τὸ ὕψος 2 m ἀποκτῶσα τελικὴν ταχύτητα $υ=2,2$ m. sec^{-1}.

ΣΤ΄ [Φυγ. δύναμις]. 46) Ἓν δοχεῖον περιέχον ὕδωρ περιστρέφεται ἐπὶ κατακορύφου περιφερείας, ἀκτῖνος $r=80$ cm. Πόση πρέπει νὰ γίνῃ ἡ γραμμικὴ ταχύτης του, ἵνα μὴ χύνεται τὸ ὕδωρ;

* 47) Εἰς ἕνα κατακόρυφον ἄξονα προσδένεται διὰ λεπτοῦ νήματος, μήκους 1,5 m, σῶμα μάζης 75 kg καὶ περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον, ὥστε νὰ ἐκτελῇ 100 στροφὰς κατὰ πρῶτον λεπτόν. Ποίαν γωνίαν σχηματίζει τὸ νῆμα μετὰ τοῦ ἄξονος καὶ ποία ἡ τάσις τοῦ νήματος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ

ΕΡΓΟΝ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ

54 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ. Ὅταν δύναμίς τις μετακινῇ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της, λέγομεν ὅτι **παράγει ἔργον.** Ἐπὶ τῆς μετακινήσεως τοῦ σημείου τῆς ἐφαρμογῆς δυνάμεως ἔχομεν νὰ κάμωμεν μερικὰς παρατηρήσεις. Πάντα τὰ σώματα προβάλλουν **ἀντίστασιν** εἰς τὴν μετακίνησιν αὐτῶν. Ἡ ἀντίστασις αὕτη δύναται νὰ ὀφείλεται εἰς διαφόρους αἰτίας. Οὕτως ὅταν θέλωμεν νὰ ἀνυψώσωμεν ἓν σῶμα ὡς ἀντίστασις παρουσιάζεται ἡ ἕλξις τῆς γῆς, ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ σώματος τούτου (βάρος τοῦ σώματος). Ὅταν θέλωμεν νὰ σύρωμεν ἓν ἁμάξιον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὡς ἀντίστασις ἐμφανίζεται ἡ τριβὴ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος. Ἡ ἀντίστασις δύναται νὰ ὀφείλεται καὶ εἰς ἐλαστικὰς δυνάμεις, ὅπως ὅταν θέλωμεν νὰ διατείνωμεν ἐλατήριον κ. ο. κ. Τὸ βάρος τοῦ σώματος, αἱ τριβαί, ἡ ἐλαστικὴ δύναμις κλπ. εἶναι ἀντιστάσεις καὶ διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν μετακίνησιν τῶν σωμάτων, πρέπει ἐπ' αὐτῶν νὰ ἀσκηθοῦν δυνάμεις. Ἐπιτυγχανομένων τῶν μετακινήσεων τῶν σωμάτων, αἱ ἀσκηθεῖσαι δυνάμεις παράγουν ἔργον. Δύο περιπτώσεις εἶναι τότε δυναταί.

1) Ἡ ἐνεργοῦσα διὰ τὴν μετακίνησιν δύναμις F ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστασιν W. Τὸ σῶμα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἅπαξ τεθὲν εἰς κίνησιν, θὰ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ ὁμαλῶς.

2) Ἡ σταθερὰ δύναμις F εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀντιστάσεως W. Τὸ σῶμα θὰ τεθῇ εἰς κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς F, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως $f = F - W$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, θὰ ἠδύνατό τις νὰ εἴπῃ, ὅτι ἔργον εἶναι ἡ ὑπερνίκησις τῆς ἀντιστάσεως. Κατὰ τὸν Maxwell [1]: «ἔργον εἶναι ἡ πρᾶξις τῆς γενέσεως μιᾶς μεταβολῆς εἰς τὴν διαμόρφωσιν ἑνὸς συστήματος, ἔναντι μιᾶς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς αὐτὴν τὴν μεταβολήν».

---

[1] *J. Maxwell (1831—79), ἄγγλος, καθηγητὴς τῆς φυσικῆς εἰς τὸ πανεπιστήμιον τοῦ Cambridge. Εἰργάσθη διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς κινητικῆς θεωρίας τῶν ἀερίων καὶ εἶναι ὁ θεμελιωτὴς τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας τοῦ φωτός.*

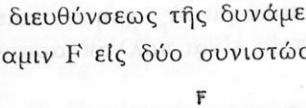
55. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΕΡΓΟΥ. Ἂς ἐξετάσωμεν ἐν πρώτοις τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγεται κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, δηλαδὴ ὅταν ἡ κίνησις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως εἶναι ὁμαλή. Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι ἡ μετάθεσις γίνεται πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως. Τότε φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἔργον διὰ τὴν μετατόπισιν εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν σώματος, εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ., ὅταν ἡ ἀντίστασις (καὶ ἑπομένως ἡ δύναμις) εἶναι διπλασία, τριπλασία κλπ. Τὸ ἔργον εἶναι, ὅθεν, ἀνάλογον τῆς δυνάμεως. Ἐπίσης τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον διὰ τὴν μετατόπισιν ἑνὸς σώματος ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους (τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν), εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ., ὅταν ἡ ἀπόστασις εἰς ἣν μετατίθεται τοῦτο εἶναι διπλασία, τριπλασία, κλπ. Εἶναι τὸ ἔργον ἑπομένως ἀνάλογον καὶ τῆς μετατοπίσεως. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν σώματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀντίστασις εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἐὰν ἀνυψώσωμεν εἰς ὕψος 1 μέτρου σῶμα μάζης 2, 3 κλπ. χιλιογράμμων, ἐκτελοῦμεν ἔργον διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. τοῦ παραγομένου διὰ τὴν ἀνύψωσιν εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος (1m) σώματος μάζης 1 kg. Ἐπίσης ἐὰν σῶμα μάζης 1 kg μετατίθεται εἰς ὕψη 2, 3 κλπ. μέτρων, ἐκτελεῖται ἔργον διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. τοῦ ἔργου τοῦ ἐκτελουμένου διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἰδίου σώματος εἰς ὕψος 1 μέτρου.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ γράψωμεν:

$$A = F.s, \qquad (56)$$

ἔνθα A παριστᾷ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετακίνησιν σώματος εἰς ἀπόστασιν s, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως F.

Ἐὰν τὸ κινητὸν δὲν κινῆται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ ἡ τροχιὰ αὐτοῦ x x′ (Σχ. 59) σχηματίζει μετὰ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως γωνίαν φ, τότε ἀναλύομεν τὴν δύναμιν F εἰς δύο συνιστώσας, μίαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως καὶ ἄλλην κάθετον ἐπ' αὐτήν. Ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν τῶν συνιστωσῶν εἶναι ἡ κινοῦσα δύναμις καί, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν



Σχ. 59

τιμὴν τοῦ παραχθέντος ἔργου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἔντασιν αὐτῆς ἐπὶ τὸν δρόμον s.

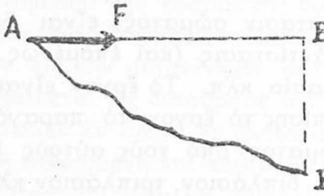
Εἶναι ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$A = s.\ F.\ \text{συν}\ \varphi, \tag{57}$$

ἤτοι τὸ ἔργον ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μετατοπίσεως s ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς δυνάμεως ἐπὶ τῆς εὐθυγράμμου τροχιᾶς. Ἐὰν ἡ (57) γραφῇ ὡς ἑξῆς

$$A = F.s.\ \text{συν.}\ \varphi, \tag{58}$$

δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ ἔργον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς μετατοπίσεως (διανυθέντος διαστήματος) ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως.



Σχ. 60

Ἐὰν ἀκόμη ἡ τροχιὰ τῆς κινήσεως εἶναι οἱασδήποτε μορφῆς ΑΒ (Σχ. 60), μὴ ταυτιζομένη πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως F, τότε τὸ ἔργον τὸ παραχθὲν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ διανυθέντος δρόμου ΑΒ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως, ἤτοι

$$A = F\ (AB'),$$

ἐπειδὴ ἡ τροχιὰ ΑΒ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελουμένη ἀπὸ στοιχεῖα εὐθύγραμμα, τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὴν ΑΒ′.

56. ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΡΓΟΥ. Ἐκ τοῦ τύπου (56) προκύπτει ὁ ὁρισμὸς τῆς μονάδος τοῦ ἔργου. Μονὰς ἔργου εἶναι τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ δυνάμεως ἴσης πρὸς τὴν μονάδα τῆς δυνάμεως, μεταθετούσης τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της, κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν μονάδα τῆς ἀποστάσεως.

Εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S., ὡς μονὰς ἔργου λαμβάνεται τὸ **ἔργιον** (erg). Εἶναι τοῦτο τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ δυνάμεως μιᾶς δύνης, ὅταν αὕτη μεταθέτῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ 1 cm. Δηλαδὴ

$$1\ \text{ἔργιον} = 1\ \text{δύνη} \times 1\ \text{cm}.$$

Ἐπειδὴ ἡ μονὰς αὕτη εἶναι πολὺ μικρά, χρησιμοποιεῖται μία ἄλλη, ἡ καλουμένη Joule, ἡ ὁποία εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἐργίου.

$$1\ \text{Joule} = 10\ 000\ 000\ \text{ἔργια} = 10^7\ \text{ἔργια}.$$

Πολλαπλάσιον τῆς Joule εἶναι ἡ Kilojoule.

$$1\ \text{Kilojoule} = 1000\ \text{Joule} = 10^{10}\ \text{erg}.$$

Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα μονάδων χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς ἔργου τὸ **χιλιογραμμόμετρον** (kg*m),ἤτοι τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον, ὅταν δύναμις ἴση πρὸς τὸ βάρος ἑνὸς χιλιογράμμου (kg*) μεταθέτῃ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου (1m) κατὰ τὴν διεύθυνσίν της. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι 1 kg* =1000gr×980=980000 dyne, ἕπεται ὅτι

1 kg*m=1 kg*×1m=9,80.10⁷ erg=9,80 Joule (1)

57. ΚΙΝΗΤΗΡΙΟΝ ΚΑΙ ΑΝΘΙΣΤΑΜΕΝΟΝ ΕΡΓΟΝ. Ὅταν ἡ μετακίνησις γίνεται ὑπό τινος δυνάμεως, κατὰ τὴν διεύθυνσίν της (2), τότε τὸ παραγόμενον ἔργον λέγεται **κινητήριον** (ἢ θετικόν). Εἴδομεν ὅμως ὅτι εἰς τὴν κινοῦσαν δύναμιν ἀντιτίθεται μία ἀντίστασις.

Τὸ παραχθὲν ἔργον διὰ τὴν ἀντίστασιν εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι ἐγένετο μετατόπισις ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀντιστάσεως. Θὰ ἠδυνάμεθα τοῦτο νὰ διατυπώσωμεν λέγοντες ὅτι ἡ ἀντίστασις ἐξετέλεσεν ἀρνητικὸν ἔργον ἢ ὅτι ὑπάρχει **ἀνθιστάμενον ἔργον**. Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσοταχοῦς μετακινήσεως τὸ κινητήριον (θετικὸν) καὶ τὸ ἀνθιστάμενον(ἀρνητικὸν) ἔργον εἶναι ἴσα.

Ἀνυψοῦσα λ.χ. κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω ἡ δύναμις F ὁμαλῶς σῶμα μάζης m εἰς τὸ ὕψος h, ἐκτελεῖ κινητήριον ἔργον ἴσον πρὸς mgh, ἐνῷ ἡ βαρύτης ἐκτελεῖ ἀνθιστάμενον ἔργον ἴσον πρὸς —mgh.

58. ΙΣΧΥΣ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΑΥΤΗΣ. Ὅταν δύναμις παράγῃ εἰς ἴσους χρόνους τὸ αὐτὸ ἔργον, τότε τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου παραγόμενον ἔργον καλοῦμεν **ἰσχύν**. Ὑπάρχουν διάφοροι πηγαὶ παραγωγῆς ἔργου, ὡς οἱ κινητῆρες (μηχαναί). **Ἰσχὺς ἢ ἀπόδοσις** πηγῆς τινος (λ.χ κινητῆρος) καλεῖται τὸ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου παραγόμενον ὑπ' αὐτῆς ἔργον. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἰσχὺν μιᾶς πηγῆς, ἀρκεῖ νὰ διαι-

---

(1) *Ἂν ὡς τιμὴν τοῦ* g *λάβωμεν ὄχι τὴν 980* cm. sec^{-2}, *ἀλλὰ τὴν 981* cm. sec^{-2}, *τότε θὰ ἔχωμεν 1* kg*=*1000* gr.×*981*= *981000* dyne *καὶ 1* kg*m= *9,81.10⁷* erg=*9,81* Joule.

(2) *Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ἡ μετακίνησις γίνεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν δυνάμεως· διότι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν γίνεται ἡ μετακίνησις λοξῶς, ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν μιᾶς δυνάμεως, γίνεται αὕτη κατὰ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς συνισταμένης τῆς δυνάμεως ταύτης, ἤτοι καὶ πάλιν κατὰ τὴν διεύθυνσιν δυνάμεώς τινος.*

ρέσωμεν τὸ παραχθὲν ἔργον A, ὑπὸ τῆς πηγῆς ταύτης, διὰ τοῦ χρόνου t, καθ' ὃν παρήχθη τοῦτο. Ἤτοι

$$I = \frac{A}{t}.$$

Ὡς μονάδα ἰσχύος ἔχομεν, εἰς τὸ σύστημα C.G.S., τὸ ἔργιον κατὰ δευτερόλεπτον. Ἑτέρα μονὰς ἰσχύος εἶναι τὸ Watt. Εἶναι δὲ 1 Watt=10^7 ἔργια εἰς 1 sec=1 joule εἰς 1 sec. Πολλαπλάσιον ταύτης εἶναι τὸ Kilowatt. 1 kilowatt (kw)=1000 watt.

Εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα, ὡς μονὰς ἰσχύος δύναται νὰ ληφθῇ τὸ χιλιογραμμόμετρον κατὰ δευτερόλεπτον $\left(\frac{kg^*m}{sec}\right)$.

Ἐν χρήσει ὅμως εἶναι ἑτέρα πρακτικὴ μονὰς ὁ **ἵππος**, ἡ ὁποία παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου HP ἢ PS. Εἷς ἵππος ἰσοῦται πρὸς 75 χιλιογραμμόμετρα κατὰ δευτερόλεπτον. Εἶναι ἑπομένως

$$1\ HP = 75\frac{kg^*m}{sec} = 75.\ 9{,}80\ watt = 735\ watt = 735.\ 10^7\frac{erg}{sec}\ ^{(1)}.$$

59. ΕΡΓΟΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΣ. ΖΩΣΑ ΔΥΝΑΜΙΣ. ΡΥΜΗ. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι σταθερὰ καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἔντασιν τῆς ἀντιστάσεως. Ὡς εἴδομεν (§ 54), τὸ σῶμα θὰ τεθῇ τότε εἰς κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Παράγεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔργον.

Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τοῦ σώματος (σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως) εἶναι

$$\gamma = \frac{f}{m}, \tag{59}$$

ἔνθα m παριστᾷ τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος. Τὸ σῶμα μετὰ χρόνον t θὰ ἀποκτήσῃ τὴν ταχύτητα

$$\upsilon = \gamma t, \tag{60}$$

ἀφοῦ διανύσει τὸ διάστημα

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2. \tag{61}$$

Ἐκ τῶν (60) καὶ (61) λαμβάνομεν

$$s = \frac{\upsilon^2}{2g}.$$

(1) Ἐν ἀντὶ $g = 980$ cm. sec^{-2} λάβωμεν $g = 981$ cm. sec^{-2}, τότε 1PH=736 watt.

Ἐπειδὴ εἶναι ἀκόμη $f = m\gamma$, ἔπεται ὅτι

$$f.s = \frac{1}{2} m\upsilon^2. \qquad (62)$$

Ἡ f παριστᾷ τὴν σταθερὰν δύναμιν, τὴν κινοῦσαν τὸ σῶμα. Ἐὰν τὸ σῶμα παρουσιάζῃ ἀντίστασιν τότε ἡ $f = F - W$, ἐὰν ὄχι, τότε ἡ f εἶναι ἡ ἀρχικὴ δύναμις ἡ κινοῦσα μίαν μᾶζαν ἐλευθέραν ἀντιστάσεως. Ἐκ τοῦ τύπου (62) προκύπτει ὅτι **τὸ ἔργον f.s μιᾶς δυνάμεως f σταθερᾶς, ἥτις θέτει εἰς κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην ἓν σῶμα μάζης m, ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{2} m\upsilon^2$, ἐὰν υ παριστᾷ τὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ τέλος τοῦ διανυθέντος** δρόμου s.

Ζῶσα δύναμις σώματος, εὑρισκομένου ἐν κινήσει κατ᾽ ἀρχὰς (κατὰ τὸν Leibniz [1]) ἐκαλεῖτο τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ταχύτητος αὐτοῦ ($m\upsilon^2$). Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, **τὸ ἔργον δυνάμεως, μετακινούσης ἓν σῶμα, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ζώσης δυνάμεως τοῦ σώματος, τῆς κτηθείσης εἰς τὸ τέλος τοῦ διανυθέντος διαστήματος.**

Ἡ ἔκφρασις $\frac{1}{2} m\upsilon^2$ καλεῖται **ρύμη**. Τελευταίως τὴν ρύμην $\frac{1}{2} m\upsilon^2$ καλοῦν ὡσαύτως καὶ ζῶσαν δύναμιν, ἐνῷ, ὡς εἴπομεν, ἀρχικῶς ἐκαλεῖτο ζῶσα δύναμις ἡ ἔκφρασις $m\upsilon^2$.

60. ΕΝΕΡΓΕΙΑ. Ἡ ἱκανότης πρὸς παραγωγὴν ἔργου καλεῖται **ἐνέργεια**. Πᾶν σῶμα ἢ σύστημα σωμάτων, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παραγάγῃ ἔργον, λέγομεν ὅτι ἐγκλείει ἐνέργειαν. Ἡ ἐνέργεια αὕτη τοῦ σώματος μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον δύναται τοῦτο νὰ παραγάγῃ.

Ὅταν ἓν σῶμα κινῆται ἐκτελεῖ ἔργον. Ἔχει ἑπομένως ἐνέργειαν, ἡ ὁποία μετρεῖται διὰ τοῦ ἐκτελουμένου ἔργου, δηλαδὴ διὰ τοῦ $\frac{m\upsilon^2}{2}$. Ὅτι σῶμα κινούμενον ἐνέχει ἐνέργειαν δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἄλλως : Ἐὰν προσκρούσῃ ἐπὶ ἀκι-

---

(1) G. W. Leibniz (*1646—1716*), *γερμανὸς φιλόσοφος καὶ μαθηματικός.*

νήτου σώματος θέτει τοῦτο εἰς κίνησιν. Τὸ δεύτερον σῶμα ἐκτελεῖ τότε ἓν ἔργον, διότι ἔλαβεν ἐκ τοῦ πρώτου ἐνέργειαν. Οὕτω τὸ ὕδωρ καταρράκτου θέτει εἰς κίνησιν ὑδρόμυλον, ὁ ἄνεμος κινεῖ ἀνεμόμυλον κλπ. Πᾶν λοιπὸν σῶμα κινούμενον κέκτηται ὡς ἐκ τῆς κινητικῆς του καταστάσεως ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἕνεκα τούτου καλοῦν **κινητικὴν ἐνέργειαν** ἢ **ἔργῳ ἐνέργειαν.** Πάσσαλος εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἐδάφους διὰ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐκ τῆς ἐπ᾽ αὐτοῦ καταφερομένης σφύρας (¹).

Ἐνέργειαν ἐγκλείουν ἐν ἑαυτοῖς καὶ σώματα, τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται εἰς κίνησιν. Ἐὰν ρίψωμεν κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μετ᾽ ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0 σῶμά τι μάζης m, τότε κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν προσεδώσαμεν εἰς αὐτὸ κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$. Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα ἀνῆλθεν εἰς ὕψος τι h καὶ εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του ἐκρατήθη διά τινος τρόπου ἐκεῖ. Τὸ σῶμα τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ ὕψος h ἄνευ κινήσεως, ὄχι ὅμως καὶ ἄνευ ἐνεργείας. Διότι ἂν ἀφεθῇ νὰ πέσῃ ἐκ τοῦ σημείου τούτου, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος θὰ ἔχῃ ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, ὡς ἀνεφέρθη εἰς τὸ § 51, ἐὰν δὲν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, ἑπομένως ἡ κινητική του ἐνέργεια $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$, τὴν στιγμὴν ταύτην, ἰσοῦται μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, ἥν προσεδώσαμεν εἰς αὐτὸ κατὰ τὴν ρῖψιν πρὸς τὰ ἄνω. Πρέπει νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ παραγάγῃ τὸ ἔργον $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$, ἤτοι ἔχει εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἐνέργειαν. Ἡ ἐνέργεια αὕτη, ἣν ἐγκλείει τὸ σῶμα εὑρισκόμενον ἀκίνητον εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, καλεῖται **λανθάνουσα ἐνέργεια,** ἢ ἀκόμη **δυνητικὴ ἢ δυναμικὴ ἢ θέσει ἐνέργεια.** Ὅτι τὸ σῶμα τοῦτο κέκτηται δυνητικὴν ἐνέργειαν, εὑρισκόμενον

(¹) *Ἵνα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι μεγαλυτέρα, πρέπει ἡ μᾶζα τῆς σφύρας νὰ εἶναι μεγάλη καὶ νὰ καταφερθῇ αὕτη μετὰ μεγάλης ὁρμῆς (ταχύτητος) ἐπὶ τοῦ πασσάλου, καθότι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἰσοῦται πρὸς* $\frac{m\upsilon^2}{2}$ *. Οὐδέποτε θὰ ἐπιχειρήσωμεν νὰ ἐμπήξωμεν μέγα καρφίον ἐντὸς σανίδος κρατοῦντες μικρὰν καὶ ἐλαφρὰν σφῦραν κλπ.*

εἰς ὕψος h, δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Δένομεν τὸ σῶμα εἰς τὸ ἄκρον νήματος, διερχομένου διὰ τῆς αὔλακος παγίας τροχαλίας καὶ φέροντος εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον σῶμα, εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἔχον μᾶζαν ἴσην πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ πρώτου. Ἐὰν τὸ σῶμα, τὸ εὑρισκόμενον εἰς ὕψος h, ἀφεθῇ νὰ πέσῃ πρὸς τὸ ἔδαφος, θὰ ἀνυψώσῃ εἰς τὸ ὕψος h τὸ ἕτερον τῆς αὐτῆς μάζης σῶμα, ἤτοι θὰ ἐκτελέσῃ ἔργον ἴσον πρὸς mgh. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ κίνησις αὕτη τῶν σωμάτων διὰ τῆς τροχαλίας, πρέπει ἐπὶ τοῦ πρώτου σώματος νὰ ἀσκηθῇ ἐλαφρὰ ὤθησις διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν τριβῶν ἢ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἰδίου σώματος ἓν πολὺ μικρὸν βάρος πρὸς τὸν αὐτὸν σκοπόν. Ὅταν τὸ σῶμα ἀνυψώθη, ἐδαπανήθη ἔργον ἴσον πρὸς gmh καὶ πῖπτον τοῦτο παρήγαγε ἰσότιμον ἔργον mgh. Ἄρα εἰς τὴν ἀνωτέραν αὐτοῦ θέσιν ἐκέκτητο τὸ σῶμα δυνητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸ mgh.

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι καὶ ἓν ἐλατήριον παραμορφούμενον, ἀποκτᾷ λανθάνουσαν ἐνέργειαν, διότι ἂν ἀφεθῇ ἐλεύθερον διὰ νὰ ἀναλάβῃ τὸ ἀρχικόν του σχῆμα, τότε δύναται νὰ παραγάγῃ ἔργον, λ.χ. νὰ κινήσῃ ἕναν μηχανισμὸν ἢ νὰ ἐκσφενδονίσῃ σῶμα κτλ. Ὡσαύτως ἓν ἀέριον συμπιεζόμενον ἐντὸς κλειστοῦ χώρου, ἀποταμιεύει δυνητικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν δύναται καταλλήλως νὰ ἐκδηλώσῃ εἰς ἔργον, νὰ κινήσῃ λ.χ ἕναν στρόβιλον.

Ἐκ τοῦ ἀναφερθέντος ἀνωτέρω παραδείγματος τοῦ σώματος τοῦ ριφθέντος πρὸς τὰ ἄνω, ἐξάγεται ὅτι τὸ δαπανηθὲν ἔργον διὰ τὴν ἀνύψωσίν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τὸ ἀποδιδόμενον κατὰ τὴν πτῶσιν του (ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν). Μὲ ἄλλας λέξεις: Τὸ σῶμα εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, ἔχει δυνητικὴν ἐνέργειαν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, ἣν προσεδώσαμεν εἰς αὐτό, ἵνα ἀνέλθῃ εἰς τὸ ὕψος τοῦτο.

Γενικῶς: Ἐὰν μία δύναμις μετακινῇ ἓν σῶμα, ὑπερνικῶσα μίαν ἀντίστασιν, τότε τὸ σῶμα, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἀποκτᾷ τὴν ἱκανότητα νὰ ἀποδώσῃ τὸ δαπανηθὲν διὰ τὴν μετακίνησίν του ἔργον.

Ἡ ἐνέργεια παρουσιάζεται κατὰ ταῦτα ὡς κινητικὴ καὶ ὡς δυνητική. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ἄλλαι μορφαὶ τῆς ἐνεργείας, ὡς δύναταί τις εὐκόλως νὰ ἀντιληφθῇ. Ὁ ἠλεκτρισμὸς λ. χ.

εἶναι μία τῶν μορφῶν τῆς ἐνεργείας, διότι δύναται ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος νὰ κινήσῃ μηχανὰς ἢ ὑπὸ μορφὴν κεραυνοῦ νὰ σχίσῃ δένδρα κλπ., δηλαδὴ νὰ παραγάγῃ ἔργον. Ἀλλὰ καὶ ἡ θερμότης εἶναι ἐνέργεια: διαστέλλουσα τὰ σώματα προκαλεῖ κινήσεις, ἢ ἐξατμίζουσα τὸ ὕδωρ παρέχει ὑδρατμὸν ὑπὸ πίεσιν, δυνάμενον νὰ κινήσῃ μηχανήν. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ἐνέργεια παρουσιάζεται καὶ ὡς φῶς ἢ ὑπὸ μίαν ἄλλην μορφήν, τὴν χημικὴν ἐνέργειαν. Χημικὴν ἐνέργειαν ἔχουν τὰ διάφορα σώματα καὶ καταλλήλως ἐκδηλώνουν αὐτήν. Χημικὴν ἐνέργειαν ἔχει ἡ πυρῖτις, ἥτις ἐκδηλουμένη διὰ τῆς ἀναφλέξεως αὐτῆς, δύναται νὰ προκαλέσῃ τὴν ἐκσφενδόνισιν ἑνὸς σώματος (βλήματος) κλπ. Ἡ ἐνέργεια λοιπὸν παρουσιάζεται ὑπὸ τὰς ἑξῆς μορφάς: ὡς ἠλεκτρισμός, θερμότης, φῶς, χημικὴ ἐνέργεια καὶ μηχανικὴ ἐνέργεια (κινητικὴ καὶ δυνητική).

Ἡ ἐνέργεια δύναται νὰ μετατραπῇ ἀπὸ τῆς μιᾶς μορφῆς εἰς τὴν ἄλλην. Περὶ τούτου πειθόμεθα ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι ὁσάκις ἐξαφανίζεται ποσόν τι ἐνεργείας μιᾶς μορφῆς, ἀναφαίνεται ταυτοχρόνως ποσὸν ἄλλης μορφῆς ἐνεργείας. Οὕτω κατὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν πρὸς τὰ ἄνω λίθου, χορηγεῖται εἰς αὐτὸν κινητικὴ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐλαττοῦται ὅσον ὁ λίθος ἀνέρχεται, ἐνῷ ἀποκτᾷ ὁ λίθος δυνητικὴν ἐνέργειαν, αὐξανομένην καθόσον οὗτος ἀνέρχεται εἰς μεγαλύτερον ὕψος. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς δυνητικήν. Ὅταν ὁ λίθος φθάσῃ εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, ἅπασα ἡ δοθεῖσα εἰς αὐτὸν κινητικὴ ἐνέργεια ἔχει μετατραπῆ εἰς δυνητικήν. Κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ σώματος τούτου, ἡ δυνητικὴ ἐνέργεια διαρκῶς ἐλαττοῦται ἐνῷ παρουσιάζεται κινητικὴ ἐνέργεια διαρκῶς αὐξανομένη. Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ὁ λίθος ἐγγίζει τὸ ἔδαφος, ἡ κινητική του ἐνέργεια ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν της, ἐνῷ ἡ δυνητικὴ ἐξηφανίσθη. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ λίθος εἰς πᾶν σημεῖον τῆς διαδρομῆς του κέκτηται δυνητικὴν καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν σταθεροῦ ἀθροίσματος.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ τελευταίου τούτου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια Κ ἑνὸς σώματος μετρεῖται, ὡς γνωστόν, διὰ τοῦ $\frac{mv^2}{2}$, ἐνῷ ἡ δυνητικὴ ἐνέργεια Δ διὰ τοῦ $F \cdot s$, δηλαδὴ διὰ τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον δύναται σῶμα νὰ παραγάγῃ. Ὅταν ὁ λίθος ἐκσφενδονίζεται πρὸς τὰ ἄνω, ἔχει $K=\frac{mv_0^2}{2}$ καὶ $\Delta=0$, ἤτοι $K+\Delta=\frac{mv_0^2}{2}$. Εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του, εὑρισκόμενον εἰς ὕψος $H=\frac{v_0^2}{2g}$ (βλ. § 51), εἶναι $K=0$ καὶ $\Delta=P.H$, ἔνθα P εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος, δηλαδὴ ἡ δύναμις, ἡ ὁποία θὰ παράγῃ τὸ ἔργον τῆς πτώσεως. Ἀλλὰ εἶναι $P=mg$. Ὅθεν, εἰς τὴν θέσιν ταύτην εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος

$$K+\Delta=PH=mgH=mg\frac{v_0^2}{2g}=\frac{mv_0^2}{2}\cdot \qquad (63)$$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς θέσεις τὸ σῶμα κέκτηται ἑπομένως τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐνεργείας. Ἀλλὰ καὶ εἴς τι σημεῖον Γ τῆς τροχιᾶς του, εὑρισκόμενον εἰς ὕψος h (ὅτε $h < H$), κέκτηται τὸ σῶμα τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐνεργείας. Πράγματι, ἂν εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο v, ἔχομεν $\Delta=PH=mgh$ καὶ $K=\frac{mv^2}{2}$. Ἐπειδὴ εἶναι $v=\sqrt{2g(H-h)}$, ἕπεται ὅτι

$$K+\Delta=\frac{mv^2}{2}+mgh=\frac{m}{2}2g(H-h)+mgh=mgH=\frac{mv_0^2}{2}$$

(κατὰ τὴν ἐξίσωσιν 63).

Εἰς πάσας λοιπὸν τὰς θέσεις κέκτηται τὸ σῶμα τὸ αὐτὸ ποσὸν ἐνεργείας.

Τί γίνεται ὅμως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ λίθου, ὅταν οὗτος ἐπαναχθῇ εἰς τὸ ἔδαφος καὶ ἐκεῖ μείνῃ;

Ἂς ἴδωμεν. Ἓν μέρος τῆς κινητικῆς αὐτοῦ ἐνεργείας μετατρέπεται εἰς ἦχον, δηλαδὴ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν μορίων τοῦ ἀέρος, ἄλλο μέρος εἰς σεῖσιν τοῦ ἐδάφους, δηλαδὴ εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν μορίων τοῦ ἐδάφους. Ἀλλὰ ἓν μέρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ λίθου, ὅπως δύναται νὰ δείξῃ ἀκριβὴς ἔρευνα, μετετράπη ἐπίσης εἰς θερμότητα. Εἰς θερμότητα μετατρέπονται κατόπιν καὶ αἱ κινητικαὶ ἐνέργειαι τῶν μορίων τοῦ ἀέρος καὶ τοῦ ἐδάφους. Ἄλλο παράδειγμα μετατροπῶν τῆς ἐνεργείας ἀπὸ μιᾶς μορφῆς εἰς ἄλλην εἶναι τὸ ἀκόλουθον. Τὸ ὕδωρ καταρράκτου πῖπτον, θέτει εἰς κίνησιν, διὰ τῆς κινητικῆς του ἐνεργείας, μηχανὴν παράγουσαν ἠλεκτρικὸν ρεῦμα. Τὸ ἠλεκτρικὸν τοῦτο ρεῦμα δύναται νὰ ἀνάψῃ λαμπτῆρα ἠλεκτρικὸν ἢ νὰ κινήσῃ ἠλεκτροκινητῆρα. Ἔχομεν ἐνταῦθα τὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν τῆς πτώσεως τοῦ ὕδατος μετατρεπομένην εἰς ἠλεκτρικήν, ταύτην εἰς θερμαντικὴν καὶ τὴν τελευταίαν εἰς φῶς ἢ εἰς τὴν περίπτωσιν ἠλεκτροκινητῆρος εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν. Αἱ τροφαὶ τοῦ ἀνθρώπου περιέχουν χημικὴν ἐνέργειαν, ἥτις μετατρέπεται ἐντὸς τοῦ σώματός μας εἰς θερμαντικὴν καὶ μηχανικὴν τοιαύτην.

61. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἀναφερθέντα παραδείγματα πείθεταί τις, ὅτι ἡ ἐνέργεια μετατρέπεται ἀπὸ μιᾶς μορφῆς εἰς ἄλλην, δὲν χάνεται οὔτε παράγεται ἐκ τοῦ μηδενός. Εἴδομεν εἰς τὸ παράδειγμα τῆς μετατροπῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς δυνητικήν, ὅτι ὅση κινητικὴ ἐνέργεια ἐξαφανίζεται, τόση δυνητικὴ ἐμφανίζεται καὶ τἀνάπαλιν. Τὸ αὐτὸ διεπιστώθη καὶ διὰ τὰς μετατροπὰς μηχανικῆς ἐνεργείας εἰς θερμότητα, ἠλεκτρικῆς εἰς θερμότητα, ἠλεκτρικῆς εἰς μηχανικὸν ἔργον κλπ. Τὸ αὐτὸ ποσὸν μηχανικοῦ ἔργου μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα δίδει τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσὸν θερμότητος κλπ.

Ἡ διαπίστωσις αὕτη ἀποτελεῖ τὴν **ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας**, ἤ, ὅπως ἄλλως λέγεται, τὸν **νόμον τῆς ἀφθαρσίας τῆς ἐνεργείας.** Δυνάμεθα τὴν ἀρχὴν ταύτην νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἀκολούθως:

Εἰς ἓν σύστημα μεμονωμένον (δηλ, σύστημα τὸ ὁποῖον δὲν δέχεται ἔξωθεν οὔτε ἀποστέλλει πρὸς τὰ ἔξω ἐνέργειαν, λ. χ. τὸ σύμπαν), **οἱαδήποτε εἶναι τὰ φαινόμενα, τὰ παραγόμενα εἰς αὐτό, ἡ ποσότης τῆς ἐνεργειας μένει σταθερά.**

Τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας διετύπωσε τὸ πρῶτον σαφῶς ὁ Robert Mayer (¹) τῷ 1842.

Ἡ ἐνέργεια ἔχουσα ὡς χαρακτηριστικὸν τὴν ἀφθαρσίαν, ἀποτελεῖ φυσικὴν ὀντότητα. Ἡ ἐνέργεια ὑπάρχει πράγματι. Τοῦτο δυνάμεθα νὰ ὑποστηρίξωμεν μετὰ τῆς αὐτῆς βεβαιότητος, μετὰ τῆς ὁποίας ὑποστηρίζομεν ὅτι ὑπάρχει καὶ ὕλη.

Ὁ νόμος τῆς ἀφθαρσίας τῆς ἐνεργείας ἀποτελεῖ τὸ θεμέλιον τῆς φυσικῆς, ὅπως ὁ νόμος τῆς ἀφθαρσίας τῆς ὕλης ἀποτελεῖ τὸ θεμέλιον τῆς χημείας.

* 62. ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ. ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ. Ἔστω ἓν σῶμα στρεφόμενον περὶ τὸν σταθερὸν ἄξονα Ο, μὲ τὴν γωνιώδη ταχύτητα ω. Ἓν στοιχεῖον τοῦ σώματος λίαν μικρόν, ἐξομοιώμενον πρὸς ὑλικὸν σημεῖον, ἔστω ὅτι ἔχει μᾶζαν m καὶ ὅτι ἀπέχει τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς κατὰ r. Η γραμμικὴ ταχύτης τοῦ ὑλικοῦ τούτου σημείου θὰ εἶναι $υ = rω$, ἡ δὲ ζῶσα δύναμις αὐτοῦ $mυ^2 = mω^2r^2$. Τὸ ὑλικὸν τοῦτο σημεῖον κέκτηται, κατὰ τὰ προηγούμενα, κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}\ mυ^2 = \frac{1}{2}\ ω^2mr^2$. Τὸ γινόμενον mr^2 καλεῖται ***ῥοπὴ ἀδρανείας***

(¹) Julius Robert Mayer *(1814—1878)*, *γερμανὸς ἰατρός.*

τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ὑλικοῦ σημείου, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

Ἐὰν θέλωμεν τὴν ὁλικὴν ζῶσαν δύναμιν τοῦ σώματος, πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὰς ζώσας δυνάμεις πάντων τῶν σημείων τοῦ σώματος τούτου. Ἔστωσαν m_1, m_2, m_3 .... αἱ μᾶζαι τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, εὑρισκομένων ἀντιστοίχως εἰς τὰς ἀποστάσεις r_1, r_2, r_3......... ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς. Προφανῶς ἡ ὁλικὴ ζῶσα δύναμις τοῦ σώματος θὰ εἶναι: $\omega^2 m_1 r_1^2 + \omega^2 m_2 r_2^2 + \omega^2 m_3 r_3^2 + \ldots\ldots = \Sigma\, \omega^2 m r^2$. Διὰ τοῦ συμβόλου $\Sigma\omega^2\, m r^2$ παριστῶμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ζωσῶν δυνάμεων πάντων τῶν σημείων τοῦ σώματος, τὰ ὁποῖα στρέφονται περὶ τὸν ἄξονα O, δηλαδὴ τὴν ὁλικὴν ζῶσαν δύναμιν τοῦ σώματος. Ἡ γωνιώδης ταχύτης ω εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος καὶ ἑπομένως ἡ (ὁλικὴ) ζῶσα δύναμις τοῦ σώματος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς: $\omega^2 \Sigma m r^2$. Ἐπειδὴ ἀκόμη ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τῶν διαφόρων σημείων τοῦ σώματος θὰ εἶναι $m_1 r_1^2$, $m_2 r_2^2$, $m_3 r_3^2$ . . . . ἕπεται ὅτι ἡ παράστασις $\Sigma m r^2$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥοπῶν ἀδρανείας ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, ἤ, ὅπως ἄλλως λέγομεν, τὴν ***ῥοπὴν ἀδρανείας K τοῦ σώματος***. Ὅθεν $K = \Sigma m r^2$. Ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος, κατὰ ταῦτα, θὰ εἶναι

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m r^2 = \frac{1}{2}\, K\omega^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48) Δύναμις 5 Kg* μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της, κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, εἰς ἀπόστασιν 7 m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ παραχθὲν ἔργον εἰς ἔργια, joule καὶ χιλιογραμμόμετρα.

49) Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς σωματιδίου α, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα 20000 km. sec^{-1} καὶ μᾶζαν $6{,}6 . 10^{-24}$ gr;

50) Δύναμις 25 kg* ἐνεργεῖ ἐπὶ 9 sec ἐπὶ σώματος μάζης 25 kg. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν δύναται νὰ μεταθέσῃ τὸ σῶμα ἡ κτηθεῖσα κινητικὴ ἐνέργεια, ἂν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ σώματος προβάλλεται ἀντίστασις 1000 kg*.

51) Ἀτμάμαξα βάρους 10000 kg* ἀπέκτησε τὴν ταχύτητα $\upsilon = 12$ m.sec^{-1}. Ἐὰν διακοπῇ ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀτμοῦ, πόσον μακρὰν θὰ μετακινηθῇ αὕτη, ἐὰν ἡ πρὸς ὑπερνίκησιν ἀντίστασις εἶναι 32 kg* καὶ αἱ σιδηροτροχιαὶ εἶναι ὁριζόντιαι;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

63. ΓΕΝΙΚΑ. **Μηχανὴ** καλεῖται γενικῶς πᾶν σύστημα σωμάτων, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει, ἵνα μετατρέπῃ προσφερομένην ἐνέργειαν, οἱασδήποτε μορφῆς, εἰς ἐνέργειαν μορφῆς τοιαύτης, ὥστε νὰ δύναται αὕτη νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀμέσως πρός τινα σκοπόν.

Ἡ προσφερομένη ἐνέργεια δύναται νὰ εἶναι θερμικὴ ἢ ἠλεκτρικὴ ἢ δυναμικὴ κλπ. καὶ διὰ τῆς μηχανῆς μετατρέπεται αὕτη λ.χ. εἰς κινητικὴν ὡρισμένου εἴδους. Παραδείγματα: Ἀτμομηχανή, ἠλεκτροκινητήρ, ὡρολόγιον κλπ. Ἐνταῦθα, εἰς τὸ πρῶτον δηλ. μέρος τῆς Φυσικῆς, τὴν Μηχανικήν, ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὰς μηχανὰς ἐκείνας, αἵτινες χρησιμεύουν πρὸς μετασχηματισμὸν μηχανικῆς ἐνεργείας εἰς μηχανικὴν πάλιν ἐνέργειαν, ἐκδηλουμένην εἰς ἔργον δυνάμενον νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀμέσως δι' ὡρισμένον σκοπόν. Πρόκειται δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, περὶ μετασχηματισμοῦ προσφερομένου μηχανικοῦ ἔργου εἰς μηχανικὸν πάλιν ἔργον. Κατὰ τὰς μετατροπὰς ταύτας ἰσχύει ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἐὰν ἑπομένως παραλείψωμεν, ὡς μικράν, τὴν ἀπώλειαν ἔργου ἕνεκα τῶν τριβῶν τῆς μηχανῆς, πρέπει τὸ προσφερόμενον εἰς τὴν μηχανὴν ἔργον νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὑπ' αὐτῆς ἀποδιδόμενον. Ὅθεν

$$F.\alpha = P.\beta, \tag{64}$$

ἔνθα εἶναι F ἡ ἐπὶ τῆς μηχανῆς ἐνεργοῦσα δύναμις, α ἡ μετατόπισις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς, P ἡ δύναμις, ἣν ἀσκεῖ ἡ μηχανὴ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ταῦ ἀποδιδομένου ἔργου καὶ β ἡ ἀντίστοιχος μετάθεσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς ταύτης.

Ἐκ τῆς (64) προκύπτει ἡ σχέσις

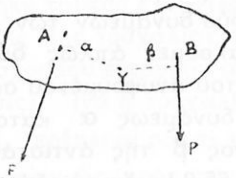
$$\frac{F}{P} = \frac{\beta}{\alpha},$$

ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι αἱ δυνάμεις, αἱ ἀσκούμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς μηχανῆς, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μετατοπίσεων, ἃς προκαλοῦν αὗται εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐφαρμογῆς των. Συνάγεται ἐκ τούτου, ὅτι ὅ,τι κερδίζομεν εἰς δύναμιν χάνομεν εἰς δρόμον (μετατόπισιν).

Κατὰ τὸν Γαλιλαῖον, δύναταί τις ὅλας τὰς μηχανὰς νὰ εὕρη ἀποτελουμένας ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἓξ ἁπλᾶς μηχανάς: μοχλόν, τροχαλίαν, βαροῦλκον, κεκλιμένον ἐπίπεδον, σφῆνα κοχλίαν. Αἱ μηχαναὶ δύνανται ἑπομένως νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἁπλᾶς καὶ συνθέτους. Ἁπλαῖ μηχαται εἶναι αἱ ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαι, σύνθετοι δὲ αἱ ἀποτελούμεναι ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ πολλῶν ἁπλῶν.

Αἱ ἁπλαῖ μηχαναὶ δύνανται νὰ ὑπαχθοῦν εἰς δύο τύπους: εἰς τὸν τύπον τοῦ μοχλοῦ καὶ τοιαῦται εἶναι ὁ μοχλός, ἡ τροχαλία καί τὸ βαροῦλκον, καὶ εἰς τὸν τύπον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἰς τὸν ὁποῖον ὑπάγονται τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὁ σφὴν καὶ ὁ κοχλίας.

64. ΜΟΧΛΟΣ. Μοχλὸς εἶναι σῶμα στερεὸν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ στραφῇ περὶ ἀκλόνητον ἄξονα Υ (Σχ 61) καὶ εἰς δύο σημεῖα τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, κείμεναι ἐπὶ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα.



Σχ. 61

Ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς Υ τοῦ μοχλοῦ ὀνομάζεται **ὑπομόχλιον**. Τὸ διὰ μιᾶς τῶν δύο δυνάμεων διερχόμενον ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα Υ, τέμνει τοῦτον εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἐκ τῆς δυνάμεως καλεῖται **μοχλοβραχίων** τῆς δυνάμεως ταύτης. Ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως F εἶναι ὁ α= ΥΑ καὶ ἐκεῖνος τῆς δυνάμεως P εἶναι ὁ β=ΥΒ.

Διὰ νὰ ἰσορροπῇ μοχλὸς πρέπει αἱ στατικαὶ ῥοπαὶ τῶν δύο δυνάμεων F καὶ P, ὡς πρὸς τὸ ὑπομόχλιον, νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἡ ῥοπὴ τῆς δυνάμεως F πρέπει νὰ εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἴση πρὸς τὴν ῥοπὴν τῆς δυνάμεως P, ἤτοι

$$F.\alpha = P.\beta$$

$$\text{ἢ} \quad F:P = \beta:\alpha\,. \qquad (65)$$

Ἵνα λοιπὸν ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ πρέπει αἱ δυνάμεις νὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τοὺς μοχλοβραχίονας αὐτῶν.

Τὴν συνθήκην ταύτην τῆς ἰσορροπίας τοῦ μοχλοῦ εὑρίσκομεν ἐφαρμόζοντες ἐν προκειμένῳ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Παρατηροῦμεν, ὅτι κατά τινα στροφὴν τοῦ μοχλοῦ κατὰ γωνίαν φ^0, παράγουν ἀμφότεραι αἱ δυνάμεις F καὶ P ἔργον, τὸ ὁποῖον πρέπει κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν νὰ εἶναι τὸ αὐτό.

$$\text{Δηλαδὴ} \qquad F.2\pi\alpha\frac{\varphi}{360} = P.2\pi\beta\frac{\varphi}{360}$$

$$\text{ἢ} \qquad F.\alpha = P.\beta.$$

Ὁ μοχλὸς χρησιμοποιεῖται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ὑπὸ μορφὴν στερεᾶς ῥάβδου, εὐθυγράμμου, γωνιώδους ἢ κεκαμμένης, στρεπτῆς περὶ ἄξονα ἀκλόνητον ἢ στηριζομένης εἰς ἓν σημεῖον καὶ δυναμένης νὰ στραφῇ περὶ αὐτό. Εἰς τὴν περίπτωσιν στηρίξεως τοῦ μοχλοῦ εἰς ἓν σημεῖον, εἰς τὴν περίπτωσιν δηλ. καθ' ἣν τὸ ὑπομόχλιον εἶναι ἓν σημεῖον, τότε διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁ μοχλὸς πρέπει τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο δυνάμεων.

Ὁ μοχλὸς συνήθως χρησιμοποιεῖται, ἵνα δι' ὡρισμένης δυνάμεως ἐπιτύχωμεν τὴν ὑπερνίκησιν μιᾶς ἀντιστάσεως, λ.χ. τὴν ἀνύψωσιν ἑνὸς βαρέος σώματος ἢ τὴν θραῦσιν σώματος κλπ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ἐκ τῶν δύο δυνάμεων τῶν ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ ἐφηρμοσμένων, τὴν μίαν καλοῦμεν ἁπλῶς **δύναμιν**, τὴν δὲ ἄλλην **ἀντίστασιν** (βάρος τοῦ ἀνυψουμένου σώματος κλπ.). Ἐὰν ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως **α** κατασκευασθῇ μεγαλύτερος τοῦ μοχλοβραχίονος **β** τῆς ἀντιστάσεως ν φοράς, ἕπεται ἐκ τῆς σχέσεως (65 β), ὅτι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ καταβληθῇ πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς ἀντιστάσεως, δέον νὰ εἶναι ν φορὰς μικροτέρα τῆς ἀντιστάσεως.

Ἀναλόγως τῆς θέσεως τοῦ ὑπομοχλίου ἐπὶ τοῦ μοχλοῦ, διακρίνομεν τοὺς μοχλοὺς εἰς τρία εἴδη. Εἰς τὸν μοχλὸν πρώτου εἴδους τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων τῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἀντιστάσεως. Δευτέρου εἴδους εἶναι ὁ μοχλός, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἀντίστασις ἐφαρμόζεται εἰς σημεῖον, κείμενον μεταξὺ τοῦ ὑπομοχλίου καὶ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως. Τέλος εἰς τὸν μοχλὸν τρίτου εἴδους ἡ δύναμις ἐνεργεῖ εἰς σημεῖον κείμενον μεταξὺ τοῦ ὑπομοχλίου καὶ τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως. Δι' ὅλα τὰ εἴδη μοχλῶν ἰσχύει ἡ αὐτὴ συνθήκη ἰσορροπίας (65).

Ἐξαρτήματα πολλῶν συνθέτων μηχανῶν εἶναι μοχλοί, ἀλλὰ μοχλοὶ εἶναι καὶ πολλὰ ἐργαλεῖα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν συχνότατα. Οὕτω ἡ ψαλὶς καὶ ἡ ἡλάγρα (κ. τανάλια) εἶναι ἑκάστη διπλοῦς μοχλὸς πρώτου εἴδους. Ἐπίσης μοχλοὶ πρώτου εἴδους εἶναι ὁ ζυγός, ὁ στατὴρ κ. ἄ.

Μοχλοὶ δευτέρου εἴδους εἶναι ὁ καρυοθραύστης (διπλοῦς μοχλός), αἱ κῶπαι τῆς λέμβου κ. ἄ.

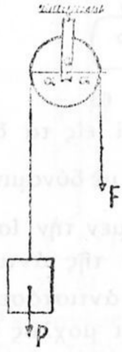
Τρίτου εἴδους μοχλοὶ εἶναι ἡ λαβὶς (κ. τσιμπίδα) (διπλοῦς μοχλός), κ. ἄ.

65. ΤΡΟΧΑΛΙΑΙ. Τροχαλία καλεῖται κυκλικὸς δίσκος, στρεπτὸς περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του καὶ κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ ὅστις φέρει κατὰ τὴν περι-

φέρειαν ἐνσκαφὴν (αὔλακα), διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται σχοινίον ἢ ἅλυσις.

Τὰ δύο ἄκρα τοῦ ἄξονος τῆς τροχαλίας στηρίζονται εἰς τὰ σκέλη ψαλίδος, ἡ ὁποία καλεῖται τροχαλιοθήκη. Ἡ τροχαλία δύναται νὰ εἶναι **παγία ἢ ἐλευθέρα** (κινητή).

Παγία τροχαλία. Παγία ἢ ἀκίνητος καλεῖται ἡ τροχαλία, τῆς ὁποίας ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς δὲν μετατίθεται. Ἡ τροχαλιοθήκη ταύτης ἔχει στερεωθῆ ἐπί τινος στηρίγματος. Ἡ μόνη κίνησις τῆς τροχαλίας εἶναι ἡ περιστροφὴ αὐτῆς. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σχοινίου ἐνεργοῦν αἱ δύο δυνάμεις F (δύναμις) καὶ P (ἀντίστασις). Ἵνα ἡ τροχαλία ἰσορροπῇ, πρέπει αἱ ροπαὶ τῶν δύο δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς οὖσαι ἀντίθετοι, νὰ εἶναι καὶ ἴσαι. Εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $F \cdot \alpha = P \cdot \alpha$ καὶ ἑπομένως $F = P$.



Σχ. 62

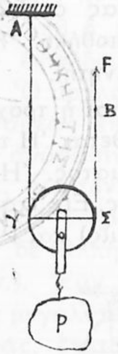
Ἡ παγία τροχαλία εἶναι λοιπὸν μοχλὸς πρώτου εἴδους μὲ ἴσους μοχλοβραχίονας α (α = ἀκτὶς τοῦ δίσκου).

Ὅτι ἡ δύναμις πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀντίστασιν προκύπτει καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Πράγματι ἡ μετακίνησις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως P εἶναι ἴση πρὸς τὴν μετακίνησιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F καὶ ἑπομένως καὶ $F = P$.

Ἡ τροχαλία αὕτη εἰσέρχεται εἰς τὴν κατασκευὴν πολλῶν συνθέτων μηχανῶν, ἀλλὰ χρησιμοποιεῖται καὶ μόνη, κυρίως διὰ τὴν ἀνύψωσιν σωμάτων. Κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τῶν σωμάτων παρέχεται διὰ τῆς παγίας τροχαλίας τὸ πλεονέκτημα τῆς μεταβολῆς τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως καὶ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς αὐτῆς. Εἶναι γνωστόν, ὅτι εἶναι προτιμοτέρα διὰ τὸν ἄνθρωπον ἡ ἕλξις ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω ἀπὸ τὴν ἕλξιν, διὰ τῆς ἰδίας δυνάμεως, ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Ἐλευθέρα τροχαλία. Εἰς τὴν ἐλευθέραν ἢ κινητὴν τροχαλίαν ὁ ἄξων αὐτῆς μετατίθεται, ὅταν ἡ τροχαλία στρέφεται. Ἡ τροχαλία διὰ τῆς ἐνσκαφῆς της στηρίζεται ἐπὶ τοῦ σχοινίου τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον προσδένεται εἰς ἕνα σταθερὸν σημεῖον Α, τὸ δὲ ἄλλο δέχεται τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως F. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ο τῆς τροχαλίας διὰ τῆς τροχαλιοθήκης, ἀσκεῖται ἡ ἀντίστασις Ρ. Ἡ τροχαλία αὕτη χρησιμοποιεῖται κυρίως διὰ τὴν ἀνύψωσιν βαρέων σωμάτων. Ἡ ἀνύψωσις ἐπιτυγχάνεται (σχ. 63) διὰ τῆς πρὸς τὰ ἄνω ἕλξεως τοῦ σχοινίου Β, ὁπότε ἡ τροχαλία ἀνέρχεται φέρουσα μεθ' ἑαυτῆς τὸ βάρος Ρ. Ἐπειδὴ τὸ βάρος Ρ κατανέμεται καὶ εἰς τὰ δύο σχοινία, ἔπεται ὅτι ἐνεργοῦντες εἰς τὸ σημεῖον Β μὲ δύναμιν $F = \frac{P}{2}$, διευθυνομένην πρὸς τὰ ἄνω, ἐπιτυγχάνομεν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος. Ὅτι διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς ἀντιστάσεως ἀπαιτεῖται δύναμις ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως, δεικνύεται καὶ ἄλλως. Ἡ κινητὴ τροχαλία εἶναι μοχλὸς δευτέρου εἴδους, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ ὑπομόχλιον εὑρίσκεται εἰς Υ, ἡ ἀντίστασις ἀσκεῖται εἰς Ο καὶ ἡ δύναμις εἰς Σ. Ἐπειδὴ ὁ μοχλαβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι πάντοτε διπλάσιος τοῦ τῆς ἀντιστάσεως, ἔπεται ὅτι ἡ δύναμις θὰ εἶναι πάντοτε ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως. Τέλος τὸ αὐτὸ δύναται νὰ δειχθῇ καὶ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Σύροντες πρὸς τὰ ἄνω διὰ τῆς δυνάμεως F σχοινίον μήκους α, ἀνυψοῦμεν τὸ βάρος Ρ εἰς ὕψος $\frac{\alpha}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $F\alpha = P\frac{\alpha}{2}$, ἔπεται ὅτι.

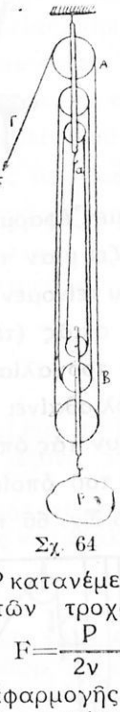
$$F = \frac{1}{2} P \text{ (1)}$$



Σχ. 63

(1) *Ἡ σχέσις $F = \frac{P}{2}$ ἰσχύει ὅταν τὰ δύο σχοινία ΑΥ καὶ ΒΣ εἶναι παράλληλα μεταξύ των. Εἰς ἣν περίπτωσιν ταῦτα σχηματίζουν μὲ τὴν κατακόρυφον ἴσην*

Πολύσπαστα. Σύστημα πολλῶν παγίων καὶ ἐλευθέρων τροχαλιῶν, καταλλήλως συνδυασμένων, καλεῖται πολύσπαστον. Ἡ πλέον συνήθη μορφὴ τοῦ πολυσπάστου εἶναι ἡ τοῦ σχήματος 64. Τὸ πολύσπαστον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο τροχαλιοθηκῶν Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι φέρουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τροχαλιῶν. Ἡ τροχαλιοθήκη Α στερεοῦται εἴς τινα θέσιν. Αὕτη φέρει ἄγκιστρον α, εἰς τὸ ὁποῖον προσδένεται τὸ ἄκρον τοῦ σχοινίου, τὸ ὁποῖον κατόπιν διέρχεται διὰ τῆς αὔλακος τῆς πρώτης τροχαλίας τῆς κινητῆς τροχαλιοθήκης Β καὶ ἀκολούθως διὰ τῆς πρώτης τροχαλίας τῆς πλαγίας τροχαλιοθήκης καὶ εἶτα ἐναλλὰξ περιβάλλει τοῦτο ὅλας τὰς λοιπὰς τροχαλίας, ὡς εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται. Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις P κατανέμεται ἐξ ἴσου εἰς 2 ν σχοινία, ἔνθα ν, εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τροχαλιῶν τῆς μιᾶς τροχαλιοθήκης, ἕπεται ὅτι ἡ δύναμις $F=\frac{P}{2\nu}$.



Σχ. 64

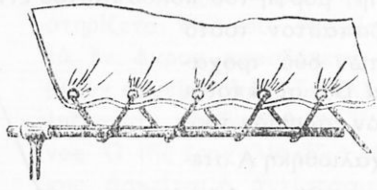
Διὰ νὰ μετακινηθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως κατὰ 1 μέτρον, πρέπει ὅλα τὰ σχοινία νὰ βραχυνθοῦν κατὰ 1 m, δηλ. πρέπει νὰ σύρωμεν σχοινίον μήκους 2 ν μέτρων. Ἑπομένως καὶ κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα, δηλαδὴ

$$F.\,2\nu = P.\,1$$

$$\text{καὶ}\quad F=\frac{P}{2\nu}.$$

γωνίαν (ϑ), τότε εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὸ ἄκρον B τοῦ σχοινίου δέον νὰ ἐφαρμοσθῇ δύναμις F′ τοιαύτη, ὥστε ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα αὐτῆς F νὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν $F=\frac{P}{2}$. *Ἡ συνιστῶσα αὕτη F′ προφανῶς ἔχει τὴν τιμὴν* $F'=F\,\text{συν}\,\vartheta$ *καὶ τότε εἶναι* $F'=\frac{P}{2\,\text{συν}\,\vartheta}$.

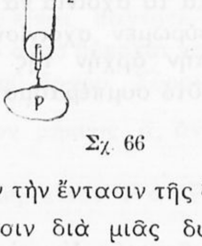
Τὸ πολύσπαστον χρησιμεύει διὰ τὴν μετακίνησιν, συνήθως ἀνύψωσιν, βαρέων σωμάτων. Ἀλλὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ πολυσπά-



Σχ. 65

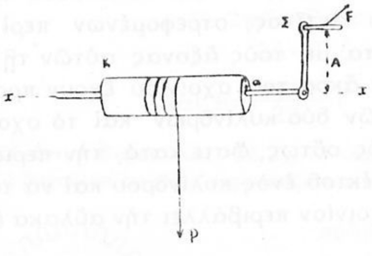
στου ἔχομεν ἐφαρμογὴν εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Τὸ σχ. 65 παρουσιάζει μίαν τοιαύτην ἐφαρμογήν, εἰς τὸ σύστημα διὰ τοῦ ὁποίου τείνομεν τὸ τεμάχιον τοῦ ὑφάσματος διὰ τὸν σχηματισμὸν σκιᾶς (τέντα), μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχουν τροχαλίαι διὰ τὴν ἐλάττωσιν τῶν τριβῶν, ἀλλὰ τὸ σχοινίον ὀλισθαίνει ἐπὶ τῶν μεταλλίνων κρίκων, οἱ ὁποῖοι σχηματίζουν τὰς ὀπὰς τοῦ πανίου, καὶ ἐπὶ τοῦ σιδηροῦ στελέχους, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τοῦτο προσδένεται.

Εἰς τὸ Σχ. 66 παρουσιάζεται εἷς ἄλλος τύπος πολυσπάστου. Ἀποτελεῖται τὸ πολύσπαστον τοῦ εἴδους τούτου ἐκ μιᾶς μόνον παγίας τροχαλίας καὶ πολλῶν ἐλευθέρων, συνδυασμένων, ὡς εἰς τὸ σχῆμα φαίνεται. Προφανῶς εἰς τὸ ἄκρον Α τοῦ σχοινίου πρέπει νὰ ἀσκήσωμεν δύναμιν $F=\frac{P}{2^{\nu}}$, ὅπου ν παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν. Ἐπειδὴ διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως F πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀντίστασιν διὰ μιᾶς δυνάμεως τοῦ 2, δι' αὐτὸ τὸ τοιοῦτον πολύσπαστον καλεῖται **δυναμικὸν πολύσπαστον.**



Σχ. 66

66. ΒΑΡΟΥΛΚΟΝ. Τὸ βαροῦλκον ἀποτελεῖται ἐκ στερεοῦ κυλίνδρου Κ (Σχ. 67), στρεφομένου περὶ τὸν ἄξονά του xx' διὰ τοῦ στροφάλου Σ. Ἡ ἀντίστασις Ρ, ἥτις εἶναι συνήθῶς τὸ βάρος ἀνυψουμένου σώματος, ἐνεργεῖ εἰς τὸ ἄκρον σχοινίου, τὸ ὁποῖον περιελίσσεται ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου, ἐνῷ ἡ δύναμις F ἀσκεῖται εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου Σ, κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν τοῦτο διαγράφει. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου καὶ μὲ Α τὸ μῆκος τοῦ βραχίονος τοῦ στροφάλου, τότε διὰ μίαν ὁλόκληρον περιστροφὴν τοῦ βαρούλκου, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου, θὰ ἔχωμεν



Σχ. 67

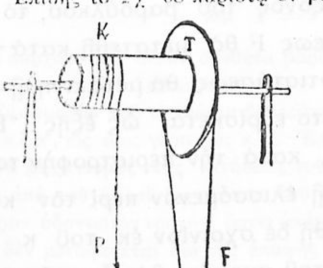
$$F.2\pi A = P.2\pi\alpha$$
$$\text{ἢ}\quad F.A = P.\alpha \tag{66}$$
$$\text{καὶ } F:P = \alpha : A.$$

Εἰς τὴν αὐτὴν σχέσιν φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἰσότητος τῶν ῥοπῶν τῶν δύο δυνάμεων ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς. Πράγματι εἶναι $F.A = P.\alpha$.

Ἐπειδὴ ἡ Α εἶναι ἐκ κατασκευῆς μεγαλυτέρα τῆς α, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν ὑπερνίκησιν μιᾶς ἀντιστάσεως καταβάλλεται δύναμις μικροτέρα ταύτης $\left(F = \dfrac{\alpha}{A}P\right)$.

Χρῆσις τοιούτου βαρούλκου γίνεται εἰς τὰ φρέατα, διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ δοχείου τοῦ φέροντος τὸ ὕδωρ, εἰς τὰ πλοῖα, διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς ἀγκύρας, εἰς τὸν μύλον τοῦ καφέ, τὰ κλειδία κ. ἄ.

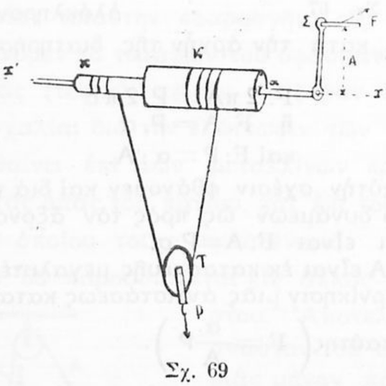
Ἐπίσης τὸ Σχ. 68 παριστᾷ ἓν βαροῦλκον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντὶ στροφάλου, ὑπάρχει ἡ τροχαλία Τ, ἔχουσα τὸ κέντρον της εἰς τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, διὰ τῆς αὔλακος τῆς ὁποίας διέρχεται σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι ἡνωμένα. Σύροντες τὸ σχοινίον, στρέφομεν τὸν κύλινδρον καὶ τὸ βάρος P ἀνυψοῦται. Καὶ ἐνταῦθα ἰσχύει ἡ σχέσις (66), εἰς τὴν ὁποίαν ὅμως τὸ Α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς τροχαλίας Τ. Εἰς ἄλλην μορφὴν βαρούλκου καὶ ὁ κύλινδρος Κ ἔχει ἀντικα-



Σχ. 68

ταςταθῇ διὰ τροχαλίας, ὅτε τὸ βαροῦλκον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο τροχαλιῶν ἀνίσων διαμέτρων, στρεπτῶν περὶ κοινὸν ἄξονα.

Διαφορικὸν βαροῦλκον. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο κυλίνδρων κ καὶ Κ, διαφόρου ἀκτῖνος, στρεφομένων περὶ κοινὸν ἄξονα xx΄, συμπίπτοντα μὲ τοὺς ἄξονας αὐτῶν τῇ βοηθείᾳ τοῦ στροφάλου Σ. Τὰ ἄκρα τοῦ σχοινίου ἔχουν προσαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κυλίνδρων καὶ τὸ σχοινίον ἔχει περιτυλιχθῇ περὶ αὐτοὺς οὕτως, ὥστε κατὰ τὴν περιστροφὴν νὰ ἐκτυλίσσεται τοῦτο ἐκ τοῦ ἑνὸς κυλίνδρου καὶ νὰ τυλίσσεται εἰς τὸν ἕτερον Τὸ σχοινίον περιβάλλει τὴν αὔλακα ἐλευ-



Σχ. 69

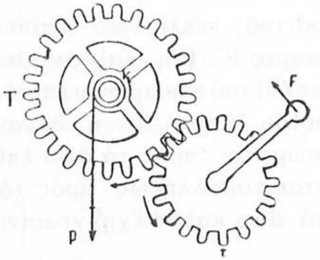
θέρας τροχαλίας Τ, εἰς τὸν ἄξονα τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ ἡ ἀντίστασις Ρ. Ἐὰν εἶναι Α τὸ μῆκος τοῦ βραχίονος τοῦ στροφάλου, α ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου Κ καὶ α΄ ἡ τοῦ κ, τότε διὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ ἄξονος τοῦ βαρούλκου, τὸ μὲν σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F θὰ μετατεθῇ κατὰ 2πΑ, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως θὰ μετακινηθῇ κατὰ τὸ διάστημα s. Τὸ διάστημα τοῦτο εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς : Ἔστω ὅτι ἡ τροχαλία ἀνέρχεται. Τότε, κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἄξονος, τὸ σχοινίον θά βραχυνθῇ ἑλισσόμενον περὶ τὸν κύλινδρον Κ κατὰ 2πα, θὰ ἐκτυλιχθῇ δὲ σχοινίον ἐκ τοῦ κ ἴσον πρὸς 2πα΄. Ἡ βράχυνσις ὅθεν τοῦ σχοινίου θὰ εἶναι ἴση πρὸς 2πα—2πα΄=2π (α—α΄) καὶ αὕτη θὰ ἐπιφέρῃ ἀνύψωσιν τῆς τροχαλίας ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς βραχύνσεως τοῦ σχοινίου. Ὅθεν $s=\pi\,(\alpha-\alpha')$. Ἀλλὰ τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἔργον τῆς ἀντιστάσεως. Ἑπομένως

$$F.\,2\pi A = P.\,\pi.\,(\alpha-\alpha').$$

$$\text{ἢ } F.\ 2A = P\,(\alpha-\alpha')$$

$$\text{καὶ } F = \frac{\alpha-\alpha'}{2A}.P$$

Σύνθετον Βαροῦλκον. Τὸ Σχ. 70 παριστᾷ ἕναν συνδυασμὸν δύο βαρούλκων. Τὰ βαροῦλκα ἐνταῦθα παρουσιάζονται ὑπὸ μορφὴν ὀδοντωτῶν τροχῶν. Τὸ



Σχ. 70

πρῶτον τ στρέφεται διὰ τοῦ στροφάλου Σ, μήκους Λ. Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀδόντων τοῦ τροχοῦ τ, Ν ὁ τοῦ Τ καὶ α ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου Κ. Κατὰ μίαν πλήρη περιστροφὴν τοῦ στροφάλου, ἡ μὲν δύναμις F μεταθέτει τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς της κατὰ $2\pi A$, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως P μετατίθεται κατὰ τὸ διάστημα s. Τοῦτο ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Ὁ τροχὸς Τ, κατὰ τὴν πλήρη περιστροφὴν τοῦ τ, δὲν ἐκτελεῖ ὁλόκληρον περιστροφήν, ἀλλὰ μέρος ἴσον πρὸς $\frac{\nu}{N}$ αὐτῆς. Τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς P ἀνέρχεται κατὰ ταύτην εἰς ὕψος $s=2\pi\alpha\frac{\nu}{N}$. Εἶναι λοιπόν, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου,

$$F.\ 2\pi A = P.\,2\pi\alpha\frac{\nu}{N}$$

$$\text{ἢ } F.A = P.\frac{\alpha\nu}{N}$$

$$\text{καὶ } F = P\frac{\alpha\nu}{AN}.$$

Ὑπάρχουν καὶ πλέον σύνθετα βαροῦλκα, μὲ πολλοὺς τροχούς. Οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι καὶ δι' αὐτὰ ἀνάλογοι.

Ἐφαρμογὴν τοῦ συνθέτου βαρούλκου ἔχομεν εἰς τὸν μηχανισμὸν τῶν ὡρολογίων κ.λ.π., εἰς τοὺς γερανοὺς κ. ἀ. Ἐπίσης ἓν σύνθετον βαροῦλκον εἶναι ὁλόκληρος ὁ μηχανισμὸς τῆς κινήσεως τοῦ ποδηλάτου, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ κίνησις ἀπὸ τοῦ ἁπλοῦ βαρούλκου, τοῦ κινουμένου ὑπὸ τοῦ ποδὸς (πεντάλ), εἰς τὸν ἕτερον ὀδοντωτὸν τροχόν, ὅστις ὑπάρχει εἰς τὸν ὀπίσθιον τροχὸν τοῦ ποδηλάτου, δὲν μεταφέρεται διὰ τῆς ἐπαφῆς τῶν ὀδόντων τῶν δύο τροχῶν, ἀλλὰ τῇ βοηθείᾳ ἁλύσεως.

67. ΚΕΚΛΙΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ. Τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον (§ 47) εἶναι ἁπλῆ μηχανὴ καὶ χρησιμοποιεῖται ἵνα ἀνυψώνωμεν βαρέα σώματα, διὰ δυνάμεως μικροτέρας τοῦ βάρους αὐτῶν. Σῶμα βάρους P (Σχ. 47), κείμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, δέχεται τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως F, διευθυνομένης παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἐντάσεως

$$F=\frac{h}{l}\,P\,, \tag{38}$$

ἔνθα $h = A\Gamma$ καὶ $l = AB$.

Ἢ $$F = P.\ \eta\mu\alpha \tag{40}$$

ἔνθα α εἶναι ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον μετὰ τοῦ ὁριζοντίου τοιούτου.

Ἵνα λοιπὸν τὸ σῶμα ἰσορροπῇ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, πρέπει ἐπ' αὐτοῦ νὰ ἀσκηθῇ δύναμις F' ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς F, ὅταν αἱ τριβαὶ τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν. Ἐκ τούτου ἔπεται, ὅτι ἡ δύναμις ἡ ἀναγκαία διὰ τὴν κίνησιν τοῦ σώματος πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ διευθύνεται παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἔχουσα φορὰν πρὸς τὰ ἄνω καὶ θὰ ἔχῃ ἔντασιν:

$$F=\frac{h}{l}\,P$$

ἢ $$F = P.\ \eta\mu\ \alpha.$$

Ἡ δύναμις F εἶναι τοσοῦτον μικροτέρα τοῦ βάρους P τοῦ σώματος, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ γωνία α.

Αἱ σχέσεις (38) καὶ (40) ἐξάγονται καὶ βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Ἐὰν τὸ σῶμα κινηθῇ ἀπὸ τοῦ B μέχρι τοῦ A, τὸ μὲν σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως μετετέθη πρὸς τὴν διεύθυνσίν της κατὰ $BA = l$, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως P μετετέθη κατὰ τὴν διεύθυνσίν της (κατ' ἀντίθετον ὅμως φορὰν ταύτης) κατὰ $\Gamma A = h$. Εἶναι λοιπὸν

$$F.\ (BA) = P.\ (\Gamma A)$$

ἢ $$F.\ l = P.\ h$$

καὶ $$F=\frac{h}{l}\,P.$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου A B Γ ἔχομεν

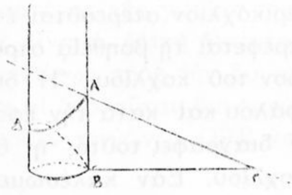
$$(A\Gamma) = (AB).\ \eta\mu\ \alpha$$

ἢ $$\frac{h}{l} = \eta\mu\ \alpha$$

καὶ ἑπομένως $$F = P.\ \eta\mu\ \alpha.$$

Ἐφαρμογὰς τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ὡς ἁπλῆς μηχανῆς, ἔχομεν πολλάς. Διὰ κεκλιμένου ἐπιπέδου, σχηματιζομένου ἐκ ράβδων ξυλίνων ἢ σιδηρῶν, ἀναβιβάζονται ἐπὶ φορτηγῶν αὐτοκινήτων π.χ. βαρέλια πλήρη ἢ ἄλλα ἐμπορεύματα. Οἱ δρόμοι εἶναι ἐπίσης ἐφαρμογαὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἵνα διὰ μικρᾶς σχετικῶς δυνάμεως ἀνυψωθῇ μία ἅμαξα εἰς ὕψος τι, ὁ δρόμος λαμβάνει πολλάκις τὸ σχῆμα τεθλασμένης γραμμῆς (ζὶκ - ζάκ). Τότε ἡ γωνία α τοῦ δρόμου πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον μένει μικρά. Εἷς ὀρειβάτης ἀνέρχεται τὸ ὄρος μὲ τόσον μικροτέραν δύναμιν, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ κλίσις τῆς πλευρᾶς τοῦ ὄρους.

68. ΚΟΧΛΙΑΣ. Κοχλίας εἶναι κύλινδρος, ἐκ ξύλου ἢ μετάλλου, φέρων ἑλικοειδῆ ἐκσκαφήν. Ἡ ἕλιξ εἶναι καμπύλη ἡ ὁποία δύναται νὰ σχηματισθῇ ὡς ἑξῆς: Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου προσαρμόζομεν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, ἔστω τὴν ΑΒ, ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, κατεσκευασμένου ἐκ χάρτου οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν γενετειρῶν τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ἡ ἄλλη τῶν καθέτων πλευρῶν, ἡ ΒΓ, ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τότε ὅταν περιτυλίξωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὸν κύλινδρον, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΑΓ θὰ σχηματίσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τὴν καμπύλην ΑΔΒ, ἥτις εἶναι ἡ ἕλιξ. Ὁ πλήρης ἑλιγμὸς ΑΔΒ δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις καὶ νὰ σχηματισθῇ καμπύλη ἄνευ τέλους (ἀτέρμων), ἂν ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου τούτου περιτυλιχθῇ ἡ πρὸς ἀμφότερα τὰ μέρη προέκτασις τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ληφθεῖσα. Ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ χάρτου, ἔχον πλευρὰς μεγαλυτέρας ἢ τὸ ΑΒΓ, ἀλλ' ὅμοιον πρὸς αὐτὸ δύναται νὰ δώσῃ περισσοτέρας τοῦ ἑνὸς ὁμοίους πρὸς ἐκεῖνον τοῦ ΑΒΓ, ἑλιγμούς. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ δύο ἀλληλοδιαδόχων ἑλιγμῶν, μετρουμένη παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου (δηλ. ἐπὶ μιᾶς γενετείρας αὐτοῦ) καλεῖται βῆμα τῆς ἕλικος.



Σχ. 71

Ὁ κοχλίας εἶναι στερεὸς κύλινδρος, φέρων τὴν ἕλικα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του ὑπὸ μορφὴν αὔλακος (ἐνσκαφῆς) ἢ ὑπὸ ἀνάγλυφον μορφὴν (προεξέχουσαν). Δύναται νὰ ἐφαρμόζεται οὗτος ἐντὸς κυλινδρικῆς ἐπίσης ὀπῆς, ἡ ὁποία φέρει ἐπὶ τῆς κοίλης ἐπιφανείας της ἀντίστοιχον ἀνάγλυφον ἕλικα ἢ ἑλικοειδῆ αὔλακα ὅτε κατὰ μίαν λ.χ. περιστροφὴν τοῦ κοχλίου, οὗτος προωθεῖται κατὰ ἓν βῆμα τῆς ἕλικος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος αὐτοῦ. Τὸ βῆμα τῆς ἕλικος ἑνὸς κοχλίου καλεῖται βῆμα τοῦ κοχλίου τούτου. Ὁ κοῖλος κύλινδρος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται ὁ κοχλίας, καλεῖται **περικόχλιον**.

Ὁ κοχλίας ἔχει πλείστας ἐφαρμογάς. Εἰσχωρῶν ἐντὸς δύο ἐπαλλήλως τεθέντων περικοχλίων, συνδέει τὰ σώματα τὰ φέροντα τὰ περικόχλια ταῦτα. Ὡς μικρομετρικὸς κοχλίας τοῦ Palmer χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν τοῦ πάχους διαφόρων σωμάτων. Ὡς ἁπλῆ μηχανὴ ὁ κοχλίας δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθῇ. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὸν κοχλίαν ὡς ἁπλῆν μηχανήν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ περικόχλιον στερεοῦται ἐπὶ ἀκλονήτου βάθρου, ὁ δὲ κοχλίας στρέφεται τῇ βοηθείᾳ στροφάλου, προσηρμοσμένου εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ κοχλίου. Ἡ δύναμις ἐνεργεῖ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ στροφάλου καὶ κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας τὴν ὁποίαν διαγράφει τοῦτο, ἡ δὲ ἀντίστασις εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ κοχλίου. Ἐὰν καλέσωμεν β τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου καὶ α τὸ μῆκος τοῦ στροφάλου, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἀπὸ τοῦ ἄξονος τοῦ κοχλίου, τότε ὅταν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F ἐκτελέσῃ μίαν πλήρη περιστροφήν, τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀντιστάσεως R θὰ μετακινηθῇ κατὰ ἓν βῆμα. Θὰ ἔχωμεν τότε τὴν ἰσότητα τῶν ἔργων

$$F.\ 2\pi\alpha = R.\beta$$

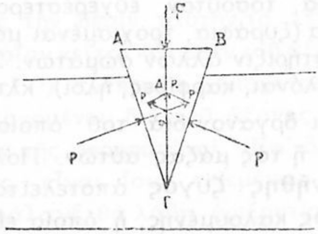
καὶ ἑπομένως

$$F = \frac{\beta}{2\pi\alpha}\ R.$$

Ὁ κοχλίας ὡς ἁπλῆ μηχανὴ ἔχει πολλὰς ἐφαρμογάς. Δύνανται δι' αὐτοῦ νὰ ἀνυψωθοῦν βαρέα σώματα ἢ νὰ ἀσκηθοῦν ἰσχυραὶ πιέσεις. Οὕτως ἡ σύνθλιψις διαφόρων καρπῶν ἢ ἄλλων σωμάτων γίνεται διὰ κοχλίου (πιεστήριον σταφυλῶν, μηχανὴ βιβλιοδέτου, πιεστήριον ἀντιγράφων (κόπιας) κ, ἄ.).

69. **ΣΦΗΝ.** Ὁ σφὴν εἶναι σῶμα στερεόν, ἔχον σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δυνάμεως

F εἰσδύει διὰ τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ ἐντὸς στερεοῦ σώματος καὶ ἀπομακρύνει ἀπ' ἀλλήλων τὰ ἑκατέρωθεν τούτου μέρη τοῦ σώματος.



Σχ. 72

Ἔστω ΑΒΓ ἡ ἐγκαρσία τομὴ τοῦ σφηνός, οὖσα ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἡ ἄνισος ἕδρα, τῆς ὁποίας τομὴ εἶναι ἡ ΑΒ, καλεῖται **ράχις** ἢ **κεφαλὴ** τοῦ σφηνός. Ἐπὶ τῶν πλαγίων ἑδρῶν τοῦ σφηνὸς ἀσκοῦνται καθέτως αἱ ἴσαι ὁλικαὶ ἀντιστάσεις P καὶ P, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν, ὥστε νὰ ἐφαρμόζωνται ἐπὶ τοῦ σημείου 0, κειμένου ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἥτις εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Γ. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν 0R εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις ἡ προβαλλομένη ὑπὸ τοῦ στερεοῦ ἀντιθέτως πρὸς τὴν δύναμιν F καί, ἵνα ὁ σφὴν ἰσορροπῇ, πρέπει αἱ δύο αὗται δυνάμεις νὰ εἶναι ἴσαι, δηλ. F = R. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OPR καὶ ΑΒΓ, ἔχομεν

$$OR : OP = AB : B\Gamma,$$

ἢ $$R : P = AB : B\Gamma,$$

ἢ $$F : P = AB : B\Gamma.$$

Ἑπομένως: Ἡ πρὸς ἰσορροπίαν ἀναγκαία δύναμις F εἶναι τοσοῦτον μικροτέρα τῆς πιέσεως P, ὅσον ἡ ράχις ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ μήκους τῆς ἕδρας ΒΓ. Ἡ δύναμις F ἐλαττοῦται, ὅταν ἡ δίεδρος γωνία ΑΓΒ καθίσταται ἐπίσης μικρά.

Τοῦτο δεικνύεται καλλίτερον, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν ἀντὶ τῆς ΑΒ τὴν τιμὴν $(AB) = 2\,(\Delta B) = 2.\,(B\Gamma).\ \eta\mu\,\frac{\varphi}{2}$, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, ἂν φ παριστᾷ τὴν γωνίαν ΑΓΒ,

ὅτε $$F : P = 2.\ \eta\mu\frac{\varphi}{2}$$

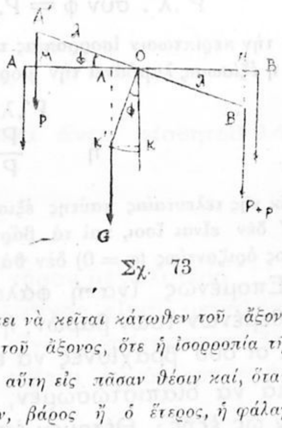
καὶ $$F = 2\,P\,\eta\mu\frac{\varphi}{2}.$$

Ὅσον ὁ σφὴν καθίσταται ὀξύτερος, τοσοῦτον ἡ δύναμις F γίνεται μικροτέρα τῆς προβαλλομένης ἀντιστάσεως P.

Ἐφαρμογαί: 1) Πάντα τὰ τμητικὰ ὄργανα εἶναι σφῆνες (μάχαιραι, ψαλίδες, ξυράφια, πελέκεις, σμῖλαι). Ὅσον ἡ γωνία τῆς ἀκμῆς τούτων εἶναι ὀξυτέρα, τοσοῦτον εὐχερέστερον τέμνομεν δι᾿ αὐτῶν σκληρὰ σώματα (ξυράφια, τροχισμέναι μάχαιραι κλπ.). 2) Σφῆνες πρὸς ὑποστήριξιν ἄλλων σωμάτων. 3) Σφῆνες πρὸς διάτρησιν σωμάτων (βελόναι, καρφίδες, ἧλοι) κλπ.

70. ΖΥΓΟΣ. Ὁ ζυγὸς εἶναι ὄργανον διὰ τοῦ ὁποίου συγκρίνομεν τὰ βάρη δύο σωμάτων ἢ τὰς μάζας αὐτῶν. Πολλοὶ τύποι ζυγοῦ ὑπάρχουν. Ὁ **συνήθης ζυγὸς** ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς στερεᾶς ῥάβδου, **φάλαγγος** καλουμένης, ἡ ὁποία εἰς τὸ μέσον διαπερᾶται καθέτως ὑπὸ τριγωνικοῦ πρίσματος ἐκ χάλυβος, μία τῶν ἀκμῶν τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἐπὶ δύο ὁριζοντίων λείων πλακῶν, ἐκ χάλυβος ἢ ἀχάτου, εὑρισκομένων εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος κατακορύφου στύλου, καὶ περὶ τὴν ὁποίαν ἀκμὴν δύναται αὕτη νὰ στρέφεται. Ἡ ἀκμὴ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἀποτελεῖ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς τῆς φάλαγγος. Ὁ ἄξων οὗτος δέον νὰ διατηρῆται ὁριζόντιος. Τὴν φάλαγγα διαπεροῦν καθέτως δύο ἀκόμη πρίσματα τριγωνικά, ἀνὰ ἓν εἰς ἕκαστον ἄκρον αὐτῆς, τῶν ὁποίων αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἐστραμμέναι πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς τῆς φάλαγγος. Ἐκ τῶν ἀκμῶν τῶν πρισμάτων τούτων ἐξαρτῶνται καταλλήλως δύο ἰσοβαρεῖς δίσκοι, δυνάμενοι νὰ στρέφωνται περὶ τὰς ἀκμὰς τῶν πρισμάτων. Ἐπὶ τῆς φάλαγγος, εἰς τὸ μέσον αὐτῆς καὶ καθέτως πρὸς αὐτὴν, εἶναι στερεωμένος δείκτης πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω διευθυνόμενος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄκρον κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς φάλαγγος, κινεῖται πρὸ κλίμακος καὶ ὁσάκις ἡ φάλαγξ εἶναι ὁριζοντία ὁ δείκτης τίθεται πρὸ τοῦ μηδενὸς τῆς κλίμακος. Αἱ ἀκμαὶ τῶν τριῶν πρισμάτων πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται, ὅτι ἡ φάλαγξ εἶναι μοχλὸς πρώτου εἴδους μὲ ἴσους βραχίονας. Ἕκαστος βραχίων ὁρίζεται ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀκμῆς τοῦ πρίσματος, ἐξ οὗ κρέμαται δίσκος, μέχρι τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς, δηλαδὴ μέχρι τῆς ἀκμῆς τοῦ πρίσματος, περὶ τὴν ὁποίαν στρέφεται ἡ φάλαγξ καὶ τοῦτο διότι, λόγῳ τῆς εὐκόλου περὶ τὰς ἀκμὰς τῶν πρισμάτων στροφῆς τῶν δίσκων, τὰ βάρη τῶν ἐπὶ τῶν δίσκων τεθέντων σωμάτων ἀσκοῦνται ἐπὶ τῆς φάλαγγος εἰς τὴν θέσιν τῶν ἀκμῶν τῶν πρισμάτων. Ἐὰν ἡ φάλαγξ εἶναι τελείως συμμετρικὴ καὶ ὡς πρὸς τὰς διαστάσεις καὶ ὡς πρὸς τὴν διανομὴν τῆς μάζης καὶ οἱ δίσκοι εἶναι ἰσοβαρεῖς, τότε πρέπει αὕτη, ἐφ' ὅσον δὲν φέρει βάρη εἰς τοὺς δίσκους, νὰ ἰσορροπῇ εἰς ὁριζοντίαν θέσιν. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ κέντρον βάρους Κ τῆς φάλαγγος, τὸ ὁποῖον κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς (ἰσορροπία εὐσταθὴς) (¹), πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τούτου (κατὰ τὴν γνωστὴν συνθήκην τῆς ἰσορροπίας). Ἐφ' ὅσον οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος εἶναι ἴσοι, τιθεμένων ἐπὶ τῶν δίσκων ἴσων βαρῶν, ἡ ἡ φάλαγξ θὰ λάβῃ ὁριζοντίαν θέσιν. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ βάρους ἑνὸς σώματος, τίθεται τοῦτο ἐπὶ ἑνὸς τῶν δίσκων τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δὲ δίσκου τίθενται σώματα γνωστῶν βαρῶν, τὰ καλούμενα **σταθμά**, μέχρις ὅτου ὁ ζυγὸς ἰσορροπήσει, ἤτοι ἡ φάλαγξ λάβει τὴν ὁριζοντίαν θέσιν. Τὸ ἄθροισμα τῶν βαρῶν τῶν σταθμῶν ἀποτελεῖ τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ σώματος.

Συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ ζυγοῦ. Ἀνωτέρω ὑπετέθη ὅτι ὁ ζυγὸς εἶναι οὕτω κατεσκευασμένος, ὥστε τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος, ὅταν οἱ δίσκοι εἶναι ἄνευ βαρῶν, νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος τῆς φάλαγγος καὶ κάτωθεν τοῦ ἄξονος τούτου. Ἐὰν ἡ φάλαγξ στραφῇ κατά τινα γωνίαν φ, λόγῳ ἀνίσου φορτώσεως τῶν δίσκων διὰ τῶν βαρῶν P+ρ καὶ P, ἔνθα τὸ ρ ὑποτίθεται λίαν μικρόν, τότε τὸ κέντρον βάρους αὐτῆς Κ ἐξέρχεται τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς Ο διερχομένου κατακορύφου ἐπιπέδου καὶ ἔρχεται εἰς τὴν θέσιν Κ' (Σχ. 73). Εἰς τὴν νέαν ταύτην θέσιν ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ καὶ θὰ ἔχωμεν τότε ἰσότητα τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων P, G (βάρους τῆς φάλαγγος) καὶ P+ρ ὡς πρὸς Ο. Δηλαδὴ ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως P+ρ (δεξιόστροφος) θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροι-



Σχ. 73

(¹) Τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος πρέπει νὰ κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς αὐτῆς, διότι ἄλλως ἢ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ὅτε ἡ ἰσορροπία τῆς φάλαγγος θὰ ἦτο ἀδιάφορος, ἤτοι θὰ ἰσορρόπει αὕτη εἰς πᾶσαν θέσιν καί, ὅταν ὁ εἷς δίσκος ἔφερε μεγαλύτερον, ἔστω καὶ κατ' ὀλίγον, βάρος ἢ ὁ ἕτερος, ἡ φάλαγξ θὰ ἔτεινε ἀμέσως νὰ καταστῇ κατακόρυφος, διότι τὸ νέον κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος θὰ ἔτεινε νὰ κατέλθῃ, ἢ θὰ ἔκειτο ὑπεράνω τοῦ ἄξονος, ὅτε μὲ μικρὰν κλίσιν τῆς φάλαγγος αὕτη θὰ ἀνετρέπετο.

σμα τῶν ῥοπῶν τῶν δυνάμεων P καὶ G ὡς πρὸς O (ἀριστεροστρόφων). Επομένως θὰ εἶναι :

$$(P+\rho)\ (ON)=P.\ (OM)+G.\ (O\Lambda)$$

ἢ $$(P+\rho)\ \lambda.\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi=P.\ \lambda\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi+G.\ h.\ \eta\mu\varphi, \qquad (67)$$

ἔνθα εἶναι λ ὁ βραχίων τῆς φάλαγγος,

$$\delta\eta\lambda.\ AO=BO=\lambda \text{ καὶ } h=OK.$$

Η ἐξίσωσις (67) παρέχει τὴν συνθήκην ἰσορροπίας τοῦ ζυγοῦ. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\ \varphi=\frac{\rho\lambda}{Gh} \qquad (68)$$

Ἵνα ἡ φάλαγξ ἵσταται ὁριζοντία (φ=0), ἐπειδὴ λ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἕπεται ὅτι ρ=0, δηλ. τὰ δύο βάρη τὰ ὁποῖα φέρουν οἱ δίσκοι πρέπει νὰ εἶναι ἴσα.

Ἀκρίβεια ζυγοῦ. Εἷς ζυγός, τοῦ ὁποίου ἡ φάλαγξ ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως ὅταν οἱ δίσκοι αὐτῆς εἶναι κενοί, θεωρεῖται ἀκριβής, ὅταν φορτιζομένων τῶν δίσκων του δι' ἴσων βαρῶν ἰσορροπῇ μὲ τὴν φάλαγγα καὶ πάλιν ὁριζοντίαν.

Διὰ νὰ εἶναι ὁ ζυγὸς ἀκριβὴς πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσοι.

Διότι ἂν οἱ βραχίονες λ καὶ λ' αὐτοῦ δὲν εἶναι ἴσοι, τότε, ἐὰν ἐπὶ τῶν δίσκων τεθοῦν βάρη P' καὶ P, ἡ ἐξίσωσις (67) γράφεται

$$P'.\lambda'.\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi=P.\lambda.\ \sigma\upsilon\nu\ \varphi+G.h.\ \eta\mu\ \varphi$$

καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας τῆς φάλαγγος εἰς ὁριζοντίαν θέσιν, δηλ. διὰ φ=0, ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$P'.\lambda'=P.\ \lambda$$

ἢ $$\frac{P'}{P}=\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ἐξάγεται ὅτι, ὅταν οἱ βραχίονες λ καὶ λ' δὲν εἶναι ἴσοι, καὶ τὰ βάρη δι' ὧν ἐπιτυγχάνεται ἡ ἰσορροπία τῆς φάλαγγος ὁριζοντίως (φ=0) δὲν θὰ εἶναι ἴσα.

Ἑπομένως ἵνα ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ εἰς ὁριζοντίαν θέσιν, τιθεμένων ἴσων βαρῶν, ἤτοι διὰ νὰ εἶναι ἀκριβὴς ὁ ζυγός, πρέπει οἱ δύο βραχίονες νὰ εἶναι ἴσοι

Διὰ νὰ διαπιστώσωμεν, ὅτι εἷς ζυγὸς εἶναι ἀκριβής, ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς: Θέτομεν ἐπὶ τῶν δύο δίσκων ζυγοῦ, ὅστις ἄνευ βαρῶν ἰσορροπεῖ μὲ ὁριζοντίαν τὴν φάλαγγα, βάρη ὥστε ἡ φάλαγξ ἰσορροποῦσα νὰ διατεθῇ ὁριζοντίως. Ἐὰν νῦν ἀνταλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν βαρῶν, ὥστε τὸ βάρος, ὅπερ ἦτο ἐπὶ τοῦ δίσκου Α νὰ ἔλθῃ ἐπὶ τοῦ δίσκου Β καὶ τὸ τοῦ Β ἐπὶ τοῦ Α καὶ ἡ φάλαγξ διατηρεῖ τὴν ὁριζοντίαν αὐτῆς θέσιν, τότε ὁ ζυγὸς εἶναι ἀκριβής. Δὲν ἀρκεῖ ἡ φάλαγξ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως, ὅταν ἐπὶ τῶν δίσκων δὲν ὑπάρχουν βάρη, διὰ νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ζυγὸς εἶνα ἀκριβής, διότι πιθανὸν οἱ βραχίονες νὰ εἶναι ἄνισοι, ἀλλὰ ὁ εἷς δίσκος νὰ εἶναι βαρύτερος τοῦ ἄλλου καὶ νὰ ἐπέρχεται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἰσορροπία. Πρέπει πρὸς τούτοις ἡ φάλαγξ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως φορτιζομένων τῶν δίσκων δι᾽ ἐξηλεγμένως ἴσων βαρῶν ἢ ἐπερχομένης τῆς εἰς ὁριζοντίαν θέσιν ἰσορροπίας της διὰ φορτώσεως τῶν δίσκων διά τινων βαρῶν, νὰ διατηρῆται ἡ τοιαύτη ἰσορροπία της καὶ μετὰ τὴν ἀνταλλαγὴν τῶν βαρῶν τούτων.

Εὐπάθεια τοῦ ζυγοῦ. Καλεῖται εἷς ζυγὸς εὐπαθής, ὅταν διὰ προσθήκης ἐλαχίστου βάρους ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δίσκων, ἡ φάλαγξ αὐτοῦ σχηματίζει αἰσθητὴν γωνίαν (φ) μετὰ τῆς ὁριζοντίας θέσεως, εἰς ἣν προηγουμένως ἰσορρόπει. Ὡς μέτρον τῆς εὐπαθείας τοῦ ζυγοῦ ἔχομεν τὸν λόγον τῆς ἀποκλίσεως (φ) τῆς φάλαγγος ἐκ τῆς ὁριζοντίας θέσεως αὐτῆς, μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ μικροῦ βάρους, πρὸς τὸ μικρὸν τοῦτο βάρος (ρ), δηλ. τὸν λόγον $\frac{\varphi}{\rho}$. Τὸν λόγον τοῦτον λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (68). Πράγματι ἔχομεν

$$\frac{\text{εφ}\ \varphi}{\rho} = \frac{\lambda}{G.h},$$

ἤ, ἐὰν ἡ φ εἶναι μικρά, ὅτε δυνάμεθα ἄνευ αἰσθητοῦ λάθους νὰ θέσωμεν εφ φ = φ,

$$\frac{\varphi}{\rho} = \frac{\lambda}{G.h}.$$

Ὅθεν ἡ εὐπάθεια ζυγοῦ εἶναι τόσον μεγαλυτέρα 1) ὅσον τὸ μῆκος λ τῶν βραχιόνων τῆς φάλαγγος εἶναι μεγαλύτερον, 2) ὅσον τὸ βάρος G τῆς φάλαγγος εἶναι μικρότερον καὶ 3) ὅσον τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος κεῖται ἐγγύτερον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς αὐτῆς.

Ὅτι ὁ λόγος $\frac{\varphi}{\rho}$ ἀποτελεῖ τὸ μέτρον τῆς εὐπαθείας ζυγοῦ καταφαίνεται ἂν σκεφθῇ τις ὅτι αὐτὴ καθίσταται τοσοῦτον μεγαλυτέρα, ὅσον ὑπὸ μικρότερον βάρος ρ ἡ γωνία κλίσεως καθίσται μεγαλυτέρα. Ὑπὸ ὡρισμένην γωνίαν φ ἡ εὐπάθεια εἶναι τοσοῦτον μεγαλυτέρα, ὅσον τὸ ρ εἶναι μικρότερον ἢ ὅσον ὑπὸ ὡρισμένον βάρος ρ ἡ φ εἶναι μεγαλυτέρα.

Εἷς ζυγὸς μὲ πολὺ μακρὰν φάλαγγα θὰ ἐκέκτητο μεγάλην εὐπάθειαν, θὰ ἐκινδύνευεν ὅμως νὰ χάσῃ τὴν ἀκρίβειάν του ἕνεκα κάμψεως τῆς φάλαγγος αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο κατασκευάζουν τοὺς ζυγοὺς μὲ βραχεῖαν, ἀλλὰ ἐλαφρὰν φάλλαγγα, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον βάρους νὰ εὑρίσκεται πλησίον τοῦ ἄξονος αὐτῆς.

Μέθοδοι ζυγίσεως. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς βάρος σώματος καὶ διὰ ζυγοῦ μὴ ἀκριβοῦς. Πρὸς τοῦτο ὑπάρχουν δύο μέθοδοι:

α) Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Θέτομεν τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δίσκων Α τοῦ ζυγοῦ καὶ ἰσορροποῦμεν αὐτὸ θέτοντες ἐπὶ τοῦ ἑτέρου δίσκου Β οἱαδήποτε σώματα (χόνδρους μολύβδου ἢ ἄμμον) Ἀφαιροῦμεν ἔπειτα τὸ σῶμα ἐκ τοῦ δίσκου Α καὶ εἰς αὐτὸν θέτομεν σταθμὰ μέχρις ὅτου ὁ ζυγὸς ἰσορροπήσει καὶ πάλιν. Τὸ βάρος τῶν σταθμῶν τούτων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ σώματος, διότι καὶ τὸ σῶμα καὶ τὰ σταθμὰ διαδοχικῶς ἐνήργησαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ βραχίονος διὰ νὰ φέρουν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, δηλ. νὰ ἰσορροπήσουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν.

β) Μέθοδος διπλῆς σταθμίσεως. Θέτομεν τὸ σῶμα εἰς τὸν δίσκον Α τοῦ ζυγοῦ, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς μοχλοβραχίονα λ_1 καὶ ἰσορροποῦμεν τὸν ζυγὸν διὰ σταθμῶν β_1, τιθεμένων ἐπὶ τοῦ δίσκου Β, ἀντιστοιχοῦντος εἰς μοχλοβραχίονα λ_2. Ἔχομεν τότε καλοῦντες x τὸ ζητούμενον ἀκριβὲς βάρος τοῦ σώματος

$$x\ \lambda_1 = \beta_1\ \lambda_2.$$

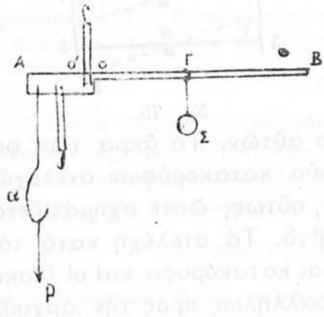
Ἀκολούθως θέτομεν τὸ σῶμα εἰς τὸν δίσκον Β καὶ ἰσορροποῦμεν τοῦτο διὰ σταθμῶν φ_2 τιθεμένων εἰς τὸν δίσκον Α, ὅτε ἔχομεν

$$x.\ \lambda_2 = \beta_2\ \lambda_1.$$

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας καὶ λαμβάνομεν τὸ ἀκριβὲς βάρος x τοῦ σώματος ἐκ τῆς οὕτω προκυπτούσης σχέσεως

$$x = \sqrt{\beta_1\ \beta_2}\ .$$

71. ΣΤΑΤΗΡ ἢ ΡΩΜΑ·Ι·ΚΟΣ ΖΥΓΟΣ. Διὰ τοῦ στατῆρος ζυγίζομεν σώματα εὐχερῶς, ἀλλ᾽ ὄχι μετὰ μεγάλης ἀκριβείας. Οὗτος ἀποτελεῖται ἐκ σιδηρᾶς ῥάβδου (φάλαγγος), ἥτις εἶναι μοχλὸς πρώτου εἴδους μὲ ἀνίσους βραχίονας. Ἡ φάλαγξ εἶναι στρεπτὴ περὶ σταθερὸν ἄξονα Ο. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς φάλαγγος, τὸ ὁποῖον κεῖται πλησίον τοῦ Ο, ἐξαρτᾶται ἄγκιστρον α, ἐξ᾽ οὗ κρέμαται τὸ πρὸς ζύγισιν σῶμα. Ἐπὶ τοῦ βραχίονος ΟΒ μετακινεῖται σφαῖρα Σ, ἔχουσα ὡρισμένον βάρος, μέχρις ὅτου ἡ φάλαγξ ἰσορροπήσῃ ὁριζοντίως. Τὸ βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος ἐνεργεῖ ἐπὶ μοχλοβραχίονος ὡρισμένου, ἐνῷ τὸ βάρος τῆς σφαίρας ἐνεργεῖ ἐπὶ μοχλοβραχίονος, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν καὶ ἕνεκα τούτου, διὰ τοῦ αὐτοῦ βάρους τῆς σφαίρας Σ, δυνάμεθα νὰ ζυγίζωμεν σώματα διαφόρου βάρους. Ἡ φάλαγξ ἐπὶ τοῦ βραχίονος ΟΒ φέρει διαιρέσεις βαθμολογημένας, ἵνα δι᾽ ἁπλῆς παρατηρήσεως τῆς θέσεως εἰς ἣν εὑρίσκεται ἡ σφαῖρα Σ, προσδιορίζεται τὸ ζητούμενον βάρος. Ἡ βαθμολογία τοῦ ὀργάνου γίνεται ὡς ἑξῆς: Ἐξαρτῶμεν ἐκ τοῦ ἀγκίστρου α διαδοχικῶς σώματα γνωστῆς μάζης (σταθμὰ) 1, 2, 3 . . . kg καὶ εἰς τὰς θέσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἵσταται κατὰ τὴν ἰσορροπίαν ἡ σφαῖρα, χαράσσομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3 . . . kg. Τὸ ἄγκιστρον ἀντικαθίσταται πολλάκις διὰ δίσκου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τίθενται τὰ πρὸς ζύγισιν σώματα.



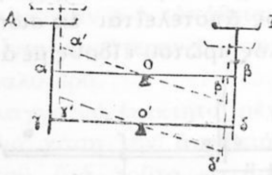
Σχ. 74

72. ΖΥΓΟΣ ΤΟΥ ROBERVAL [1]. Τοῦ ζυγοῦ τούτου γίνεται εὐρυτάτη χρῆσις εἰς τὸ ἐμπόριον. Φέρει τοὺς δίσκους πρὸς τὰ ἄνω καὶ κατὰ τοῦτο εἶναι περισσότερον εὔχρηστος

---

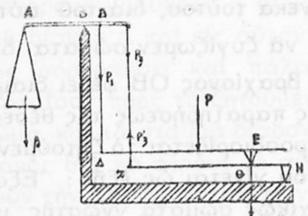
(1) *Giles Persone (1602—1675), γάλλος φυσικός, κληθεὶς de Roberval ἐκ τοῦ τόπου τῆς γεννήσεώς του. Ἐκτὸς τοῦ ὁμωνύμου ζυγοῦ, τὸν ὁποῖον κατεσκεύασε τῷ 1670, ἐπενόησεν ἐπίσης τὰ ἀραιόμετρα.*

τοῦ κοινοῦ ζυγοῦ. Οἱ δίσκοι Α καὶ Β (Σχ. 75), κατὰ τὰς σταθμίσεις, μετακινοῦνται πάντοτε παραλλήλως πρὸς ἑαυτούς. Ἀποτελεῖται ὁ ζυγὸς οὗτος ἐκ δύο φαλάγγων ἰσομήκων αβ καὶ γδ, στρεπτῶν περὶ ἄξονας 0 καὶ 0′, παραλλήλους καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου κειμένους καὶ διερχομένους ἀπὸ τὰ μέσα αὐτῶν. Τὰ ἄκρα τῶν φαλάγγων συνδέονται ἀνὰ δύο διὰ δύο κατακορύφων στελεχῶν αγ καὶ βδ, φερόντων τοὺς δίσκους, οὕτως, ὥστε σχηματίζεται τὸ ἀρθρωτὸν παραλληλόγραμμον αβγδ. Τὰ στελέχη κατὰ τὰς κινήσεις τῶν φαλάγγων διατηροῦνται κατακόρυφα καὶ οἱ δίσκοι ἕνεκα τούτου μετατοπίζονται παραλλήλως πρὸς τὴν ἀρχικήν των θέσιν.



Σχ. 75

73. ΠΛΑΣΤΙΓΞ ἢ ΖΥΓΟΣ τοῦ Quintenz (¹). Ἡ πλάστιγξ χρησιμεύει διὰ τὴν ζύγισιν βαρέων σωμάτων καὶ εἰς ταύτην συνήθως ἰσορροποῦμεν ἓν βάρος διὰ σταθμῶν δεκάκις μικροτέρων τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Ἡ τοιαύτη πλάστιγξ καλεῖται ἕνεκα τούτου **δεκατεύουσα** ἢ **δεκαπλασιαστική**.



Σχ. 76

Ἀποτελεῖται ἐκ πλακὸς ὁριζοντίας ΔΕ (Σχ. 76), ἐπὶ τῆς ὁποίας τίθενται τὰ πρὸς ζύγισιν σώματα. Ἡ πλὰξ αὕτη κατὰ τὸ μὲν ἓν ἄκρον Ε στηρίζεται δι' ἀκμῆς πρίσματος τριγωνικοῦ (ἢ δι' ἀκμῶν δύο πρισμάτων, αἵτινες κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς φάλαγγος ΑΓ) ἐπὶ ἑτέρας πλακὸς ΖΗ, κατὰ δὲ τὸ ἄλλο Δ διὰ κατακορύφου στελέχους ΔΒ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς φάλαγγος ΑΓ. Ἀλλὰ καὶ ἡ πλὰξ ΖΗ, δι' ἀκμῆς εἰς Η, στηρίζεται ἐπὶ τῆς βάσεως τῆς πλάστιγγος καὶ κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον διὰ κατακορύφου στελέχους ΖΓ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου Γ τῆς φάλαγγος ΑΓ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α τῆς φάλαγγος ΑΓ κρέμαται δίσκος, εἰς τὸν ὁποῖον θέτομεν τὰ σταθμά. Τὰ μήκη τῶν βραχιόνων τῆς φάλαγγος ΑΓ καὶ τοῦ μοχλοῦ ΖΗ κατασκευάζονται οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$$0\Gamma : 0B = HZ : H\Theta = \mu. \qquad (69)$$

(¹) *Ἐπενοήθη ὑπὸ τῶν Quintenz καὶ Schwilgué τῷ 1823 εἰς Στρασβοῦργον. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐκαλεῖτο ὑπό τινων καὶ ζυγὸς τοῦ Στρασβούργου.*

Τὸ ἐπὶ τῆς πλακὸς βάρος P κατανέμεται (ἀναλύεται) εἰς δύο συνιστώσας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία (P_1) διὰ τοῦ στελέχους ΔΒ ἀσκεῖ αι κατακορύφως εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ μοχλοῦ ΑΓ καὶ ἡ ἄλλη (P_2) εἰς τὸ σημεῖον Θ τοῦ μοχλοῦ ΖΗ. Ἔχομεν τότε $P=P_1+P_2$. Ἡ δύναμις τώρα P_2 ἀναλύεται ὡσαύτως εἰς δύο συνιστώσας, εἰς Γ καὶ Η ἐνεργούσας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἂς παρασταθῇ μὲ P_3. Εὐκόλως εὑρίσκεται, βάσει τῶν γνωστῶν περὶ συνθέσεως καὶ ἀναλύσεως δυνάμεων καὶ τῆς σχέσεως (69), ὅτι

$$P_3=\frac{P_2}{\mu}\ (^1)$$

Ἀλλὰ ἡ δύναμις P_3 ἀσκουμένη εἰς Γ, δημιουργεῖ ἐπὶ τοῦ βραχίονος ΟΓ ῥοπὴν ὡς πρὸς Ο ἴσην πρὸς P_3. (ΟΓ). Τὴν δύναμιν ταύτην θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλης x ἀσκουμένης εἰς Β καὶ ἐπίσης κατακορύφου, ἥτις νὰ παράγῃ τὴν αὐτὴν ῥοπὴν ὡς πρὸς Ο, ἤτοι

$$x.\ (OB)=P_3\ (O\Gamma)\quad \text{καὶ}\quad x=\frac{P_2}{\mu}\,\frac{O\Gamma}{OB}=P_2$$

Ἐπὶ τοῦ σημείου Β τῆς φάλαγγος ἐνεργεῖ λοιπὸν δύναμις $P_1+P_2=P$, ἤτοι ἀκέραιον τὸ βάρος P τοῦ ζυγιζομένου σώματος. Ἐπὶ τοῦ δίσκου, ἑπομένως, πρέπει διὰ τὴν ἰσορροπίαν νὰ τεθοῦν σταθμὰ β, διδόμενα ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\beta.\ (OA) = P.\ (OB)$$

$$\text{καὶ}\qquad \beta = P.\frac{OB}{OA}.$$

Ἐὰν εἶναι λ. χ. $OA = 10.\ (OB)$, τότε $\beta = \dfrac{P}{10}$.

Εἰς ἣν περίπτωσιν δὲ εἶναι $OA = 100\ (OB)$, τότε ἡ πλάστιγξ εἶναι ***ἑκατοστεύουσα*** ἢ ***ἑκατονταπλασιαστική***.

Ἡ πλὰξ ΔΕ, κατὰ τὰς ταλαντεύσεις τῆς φάλαγγος ΑΓ μετακινεῖται πάντοτε παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν. Ἐκ τῆς σχέσεως (69) προκύπτει, ὅτι ἐὰν π.χ. τὸ Β κατέλθῃ κατὰ 1 mm, τὸ Γ θὰ κατέλθῃ κατὰ μ mm καὶ τὸ Ε, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἰδίας σχέσεως (69), θὰ κατέλθῃ 1 mm. Τὰ δύο ἄκρα ἑπομένως τῆς πλακὸς Δ καὶ Ε κατέρχονται κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα, ἤτοι ἡ πλὰξ μετατοπίζεται διατηροῦσα θέσιν παράλληλον πρὸς τὴν ἀρχικήν.

74. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ. Διὰ τοῦ ζυγοῦ εὑρίσκομεν τὸν λόγον τῶν βαρῶν δύο σωμάτων, δηλ. πόσας φορὰς εἶναι βαρύτερον ἓν σῶμα ἀπὸ ἄλλο, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονάς. Ἐὰν διὰ τοῦ κοινοῦ ζυγοῦ ζυγίσωμεν ἓν σῶμα καὶ διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ἰσορροπίας θέσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου δίσκου 40 γραμ-

---

(1) *Ἡ σχέσις αὕτη εὑρίσκεται ὡσαύτως ἂν σκεφθῇ τις, ὅτι ὁ β' εἴδους μοχλὸς ΖΗ ἰσορροπεῖ ἐφαρμοζομένων ἐπ' αὐτοῦ τῆς ἀντιστάσεως P_2 καὶ τῆς ὑπὸ τῆς φάλαγγος ΑΓ ἀσκουμένης δυνάμεως P_3', ἴσης καὶ ἀντιθέτου τῆς P_3, ὅτε*

$$P_3.\ (ZH) = P_2.\ (\Theta H)\ \text{καὶ}\ P_3 = P_2\frac{\Theta H}{ZH}=\frac{P_2}{\mu}$$

μάρια, οὐδὲν ἄλλο εὑρίσκομεν εἰ μὴ ὅτι τὸ βάρος (Β) τοῦ σώματος εἶναι 40 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ βάρους (β) τοῦ γραμμαρίου. Δηλαδὴ $\frac{B}{\beta}=40=\frac{M.g}{\mu.g}=\frac{M}{\mu}$, ἔνθα Μ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ μ ἡ μᾶζα τοῦ γραμμαρίου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μᾶζα τοῦ γραμμαρίου ἐλήφθη ὡς μονὰς μάζης, διὰ τοῦ ζυγοῦ εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος Μ. Ὁ ζυγὸς εὑρίσκει, ὅθεν, τὸν λόγον τῶν βαρῶν δύο σωμάτων ἤτοι τὸν λόγον τῶν μαζῶν αὐτῶν καί, ἐὰν τὸ ἓν τῶν σωμάτων τούτων ἔχει μᾶζαν ἑνὸς γραμμαρίου, εὑρίσκει τὴν μᾶζαν τοῦ ἑτέρου σώματος. Πράγματι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν σταθμίσεων ἐκφράζεται πάντοτε εἰς μονάδας μάζης. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος εἰς δύνας θὰ πρέπῃ, γνωρίζοντες τὴν τιμὴν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g εἰς τὸν τόπον τοῦτον, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν μᾶζαν τοῦ σώματος, ἐπὶ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ g.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ τοῦ ζυγοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν τὴν μεταβολήν, ἣν ὑφίσταται τὸ βάρος σώματος, μεταφερομένου ἀπὸ τόπου εἰς τόπον. Τὴν τοιαύτην μεταβολὴν τοῦ βάρους σώματος δύναται νὰ δείξῃ μόνον εὐπαθὲς δυναμόμετρον, π.χ. ὁ ζυγὸς δι᾽ ἐλατηρίου (βλ. § 12).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. 52. Εἰς ἕνα μοχλὸν ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις F καὶ R, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι 448 kg* καὶ κρατοῦν αὐτὸν εἰς ἰσορροπίαν. Ἐὰν ὁ μοχλοβραχίων τῆς πρώτης δυνάμεως ἔχει λόγον ὡς πρὸς τὸν μοχλοβραχίονα τῆς δευτέρας ἴσον πρὸς 6, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῶν δύο τούτων δυνάμεων.

53) Ἐπὶ σώματος, ὑποτιθεμένου ἀβαροῦς, στρεπτοῦ περὶ ἄξονα, ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $F_1=5$ kg*, $F_2=8$ kg*, $F_3=2$ kg* καὶ $F_4=10$ kg*, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα. Ἐκ τῶν δυνάμεων τούτων, αἱ μὲν F_1, F_3 καὶ F_4 τείνουν νὰ στρέψουν τὸ σῶμα πρὸς μίαν διεύθυνσιν, ἡ δὲ F_2 πρὸς τὴν ἀντίθετον. Ἐὰν ἡ F_1 ἀπέχῃ τοῦ ἄξονος 4 cm, ἡ F_3 5 cm καὶ ἡ F_4 3 cm, νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἡ F_2, ἵνα τὸ σῶμα τοῦτο εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν.

* 54) Εἰς μοχλὸς ΑΒΓ κεκαμμένος ὀρθογωνίως, μὲ τὰ σκέλη ΑΒ=12 cm καὶ ΒΓ=18 cm, εἶναι στρεπτὸς περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ Β. Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β ἐνεργοῦν ἀντιστοίχως αἱ δυνάμεις 5,4 kg* καὶ 6,3 kg*. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι, τὰς ὁποί-

τὰ σκέλη τοῦ μοχλοῦ σχηματίζουν μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅταν ὁ μοχλὸς ἰσορροπῇ.

55) Εἰς ἓν σημεῖον Β μοχλοῦ ΑΓ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 3 παλάμας (dm) ἀπὸ τοῦ ἄκρου Γ, περὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ στρέφεται ὁ μοχλός, ἐνεργεῖ καθέτως πρὸς τὸν μοχλὸν δύναμις 100 kg*. Ἐὰν δύναμις 80 kg* ἐνεργοῦσα εἰς τὸ Α καθέτως ἐπίσης πρὸς τὸν μοχλὸν ἰσορροπῇ αὐτόν, ἔχοντα ἀνὰ μονάδα μήκους βάρος 8 kg* νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ΑΓ τοῦ μοχλοῦ τούτου.

56) Εἷς μοχλὸς ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον βάρους κεῖται εἰς τὸ μέσον, ἔχει μῆκος 50 cm καὶ βάρος 8 kg*. Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα του φέρει τὰ βάρη $P_1=5$kg* καὶ $P_2=12$ kg* εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν. Νὰ εὑρεθῇ ποσὸν ἀπέχει τὸ ὑπομόχλιον ἐκ τοῦ ἄκρου, εἰς τὸ ὁποῖον ἐνεργεῖ τὸ βάρος P_2.

Β′ * 57) Ἓν σχοινίον περιβάλλει τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς αὔλακος ἐλευθέρας τροχαλίας, ἡ ὁποία φέρει βάρος 96 kg*. Τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σχοινίου εἶναι στερεωμένον εἴς τινα θέσιν, εἰς δὲ τὸ ἄλλο ἐνεργεῖ δύναμις P, ἡ ὁποία ἐπιφέρει τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος. Πόση εἶναι ἡ δύναμις αὐτή;

58) Ἓν κυλινδρικὸν βαροῦλκον, διαμέτρου 30cm, δύναται νὰ στραφῇ περὶ τὸν ἄξονά του τῇ βοηθείᾳ τεσσάρων στελεχῶν (βραχιόνων), μήκους 120 cm. Εἰς τὸ ἄκρον ἑκάστου βραχίονος καὶ καθέτως πρὸς αὐτὸν ἀσκεῖται ὑπὸ ἀνδρὸς πίεσις 21 kg*. Νὰ εὑρεθῇ ποῖον βάρος δύναται οὕτω νὰ ἀνυψωθῇ.

* 59) Ἐπὶ κεκλιμένου κατὰ γωνίαν $\varphi=40^0$ ἐπιπέδου, εὑρίσκεται σῶμα βάρους 100 kg*. Νὰ εὑρεθῇ ποία δύναμις πρέπει νὰ ἀσκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ α) παραλλήλως πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ β) ὁριζοντίως, ἵνα ἐπιτευχθῇ ἡ ἰσορροπία τοῦ σώματος.

60) Ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν σφηνός ἔχοντος ἐγκαρσίαν τομὴν τρίγωνον ἰσοσκελές, ἀσκεῖται ἀντίστασις 56 kg* καὶ καθέτως ἐπὶ τῆς ράχεως αὐτοῦ δύναμις F, ἐπιφέρουσα τὴν ἰσορροπίαν τοῦ σφηνός. Ἐὰν ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν τῆς τομῆς τοῦ σφηνὸς εἶναι 25cm καὶ ἡ ράχις 5cm, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς F.

Γ′ 61) Εἰς τὸν ἕνα δίσκον ζυγοῦ μὲ ἀνίσους βραχίονας θέτομεν σῶμα ἀγνώστου βάρους. Διὰ νὰ ἐπέλθῃ ἰσορροπία θέτομεν εἰς τὸν ἄλλον δίσκον σταθμὰ 225 gr. Ἀλλάσσομεν κατόπιν ἀμοιβαίως τὴν θέσιν τῶν σταθμῶν καὶ τοῦ σώματος ἐπὶ τῶν δίσκων. Τότε πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ σταθμὰ 31 gr, ἵνα ἀποκατασταθῇ καὶ πάλιν ἡ ἰσορροπία. Νὰ εὑρεθοῦν: 1) τὸ ἀληθὲς βάρος x τοῦ σώματος· 2) ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο βραχιόνων τῆς φάλαγγος.

62) Οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος ζυγοῦ εἶναι ἰσομήκεις, ἀλλὰ τὸ κέντρον βάρους τῆς φάλαγγος δὲν εἶναι ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς, κατὰ τὴν ὁριζοντίαν θέσιν τῆς φάλαγγος, ἀλλὰ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ δ. Ζυγίζομεν ἓν σῶμα θέτοντες τοῦτο διαδοχικῶς εἰς τοὺς δύο δίσκους καὶ φέρομεν τὸν ζυ-

γὸν εἰς ἰσορροπίαν διὰ 18 καὶ κατόπιν διὰ 20 gr. Ποῖον τὸ ἀληθὲς βάρος τοῦ σώματος;

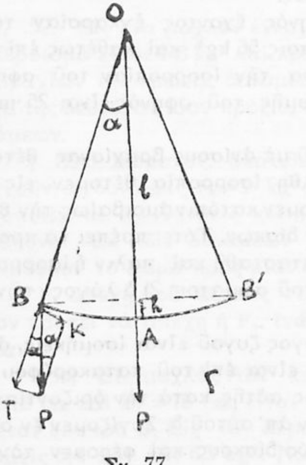
* 62) Ἡ φάλαγξ ἑνὸς ζυγοῦ τοῦ χημείου ἀποκλίνει τῆς ὁριζοντίας θέσεώς της κατὰ γωνίαν 5^0, ὅταν τεθῇ εἰς τὸν ἕνα δίσκον του τὸ μικρὸν βάρος τῶν 12 mg (χιλιοστῶν τοῦ γραμμαρίου). Ποῖον βάρος πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἕνα τῶν δίσκων τοῦ ἰδίου ζυγοῦ ἵνα προκληθῇ ἀπόκλισις κατὰ γωνίαν 3^0;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

ΕΚΚΡΕΜΕΣ

75. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ἐκκρεμὲς καλεῖται σῶμα στερεὸν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ στραφῇ περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ. Λέγεται τὸ ἐκρεμμὲς τοῦτο καὶ **φυσικὸν** ἢ **σύνθετον**, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ **μαθηματικὸν** ἢ **ἁπλοῦν** ἐκκρεμές, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἀποτελούμενον ἐξ ὑλικοῦ σημείου βαρέος, ἐξηρτημένου διὰ νήματος ἀβαροῦς καὶ μὴ ἐκτατοῦ, ἔκ τινος σταθεροῦ ὑποστηρίγματος. Τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς δὲν εἶναι δυνατὸν προφανῶς νὰ πραγματοποιηθῇ, ἀλλ᾽ ἡ ἐπινόησίς του εἶναι ἄκρως ἐξυπηρετικὴ διὰ τὴν μελέτην τῆς κινήσεως ἑνὸς συνήθους ἐκκρεμμοῦς, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἄλλο τι παρὰ σύνθετον.

76. ΚΙΝΗΣΙΣ ΑΠΛΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ. Ἔστω τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς ΟΑ (Σχ. 77), ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α. μάζης m, ἐξηρτημένου διὰ νήματος ΟΑ λεπτοῦ, ἀβαροῦς καὶ μὴ ἐκτατοῦ, ἐκ τοῦ ἀκλονήτου σημείου Ο. Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἰσορροπεῖ εἰς τὴν θέσιν ΟΑ. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ ἐκκρεμὲς ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του καὶ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν ΟΒ, εἶτα δὲ ἀφήσωμεν αὐτὸ, τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διατηρηθῇ εἰς τὴν θέσιν ταύτην, διότι τὸ βάρος P=mg τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις Τ καὶ Κ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη,



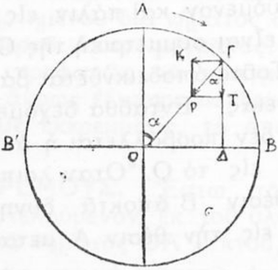
Σχ. 77

κειμένη ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΟΒ, καταργεῖται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ Ο, ἡ δὲ ἑτέρα Κ, κάθετος ἐπὶ τὴν προηγουμένην, ἤτοι ἔχουσα τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου ΑΒ εἰς Β, τείνει νὰ κινήσῃ τὸ ἐκκρεμὲς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του ΟΑ. Εἶναι δέ, ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΡΚ, Κ=Ρ. ημα=mgημα. Τὸ ὑλικὸν σημεῖον Α, ἑπομένως, κινεῖται ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α, διαγράφον τὸ τόξον ΒΑ μὲ ταχύτητα αὐξανομένην μέν, οὐχὶ ὅμως ὁμαλῶς, καθ' ὅσον ἡ κινοῦσα δύναμις Κ διαρκῶς ἐλαττοῦται, λόγῳ ἐλαττώσεως τῆς γωνίας α. Εἰς τὴν θέσιν Α ἡ κινοῦσα δύναμις Κ μηδενίζεται, ἀλλὰ τὸ ὑλικὸν σημεῖον δὲν σταματᾷ ἐκεῖ, λόγῳ τῆς κτηθείσης ταχύτητος ὑπερβαίνει τὴν θέσιν ταύτην καὶ φθάνει μέχρι τῆς ἄκρας θέσεως ΟΒ′ μὲ ταχύτητα διαρκῶς ἐλαττουμένην, λόγῳ τῆς ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως ἐνεργούσης συνιστώσης Κ, ἥν δίδει τὸ βάρος Ρ ἀναλυόμενον καὶ πάλιν εἰς τὰς θέσεις μεταξὺ Α καὶ Β′. Ἡ ΟΒ′ εἶναι συμμετρικὴ τῆς ΟΒ ὡς πρὸς την θέσιν τῆς ἠρεμίας ΟΑ. Τοῦτο ἀποδεικνύεται βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἐνταῦθα δεχόμεθα, ὅτι εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς δὲν προβάλλεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος, οὔτε ὑπάρχει τριβὴ εἰς τὸ Ο. Ὅταν λοιπὸν τὸ ὑλικὸν σημεῖον μετατεθῇ εἰς τὴν θέσιν Β ἀποκτᾷ δυνητικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς mgh. Αὕτη εἰς τὴν θέσιν Α μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς κινητικὴν ἴσην πρὸ $mgh=mg\,\frac{\upsilon^2}{2g}=\frac{m\upsilon^2}{2}$, ἔνθα υ παριστᾷ τὴν ταχύτητα, ἥν ἀπακτᾷ τὸ κινητὸν εἰς τὴν θέσιν Α (βλ. § 60). Ἡ κινητικὴ αὕτη ἐνέργεια εἰς τὴν ἄκραν θέσιν Β′ μετατρέπεται εἰς δυνητικὴν mgh′, ἥτις κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δυνητικὴν ἐνέργειαν, ἥν εἶχε τὸ ἐν λόγῳ ὑλικὸν σημεῖον εἰς Β. Ὅθεν $mgh=mgh'$ καὶ $h=h'$ καὶ ἀκόμη ΒΑ=ΑΒ′. Τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὴν θέσιν Β′ σταματᾷ καὶ ἄρχεται κινούμενον πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας, ἥν ὑπερβαίνει καὶ διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους, οὓς ἀνωτέρω ἐξεθέσαμεν, ἐπανέρχεται εἰς τὴν θέσιν ΟΒ κ.ο.κ. Τὸ ἐκρεμμὲς πρέπει νὰ κινῆται μεταξὺ Β καὶ Β′ ἐπ' ἄπειρον, ἐφ' ὅσον οὐδεμία ἀντίστασις προβάλλεται εἰς τὴν κίνησίν του.

Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς κινῆται, λέγομεν ὅτι ἐκτελεῖ αἰωρήσεις. Ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τῆς μιᾶς ἄκρας θέσεως μέχρι τῆς ἄλλης καλεῖται **ἁπλῆ αἰώρησις** αὐτοῦ, ἐνῷ ἡ κίνησις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς μιᾶς ἄκρας θέσεως μέχρι τῆς ἄλλης καὶ ἡ ἐπιστροφὴ εἰς τὴν ἀρχικὴν ἄκραν θέσιν, καλεῖται **διπλῆ ἢ πλήρης αἰώρησις** αὐτοῦ. Διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως, καλεῖται ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος, ἵνα τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελέσῃ μίαν ἁπλῆν αἰώρησιν, ἐνῷ ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως, καλεῖται **περίοδος** τοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἡ γωνία ΒΟΑ = α καλεῖται **πλάτος αἰωρήσεως** τοῦ ἐκκρεμοῦς ([1]).

Μῆκος l = ΟΑ ἐκκρεμοῦς καλεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ο.

77. ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ. Ἐὰν ἓν ὑλικὸν σημεῖον Α κινῆται ὁμαλῶς ἐπὶ περιφερείας κύκλου, τότε ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου τῆς περιφερείας ταύτης ἐκτελεῖ κίνησιν, ἥτις καλεῖται *ἁπλῆ ἁρμονικὴ κίνησις*. Ἡ κίνησις αὐτη ἐπαναλαμβάνεται ὁμοιόμορφος ἀνὰ ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ Α, δηλ. ἀνὰ ὡρισμένον χρονικὸν διάστημα καὶ ἀνήκει ἕνεκα τούτου εἰς τὰς καλουμένας *περιοδικὰς κινήσεις*.



Σχ. 78

Ἔστω τὸ σημεῖον Α (Σχ. 78), τὸ ὁποῖον, κινούμενον ὁμαλῶς ἐπὶ τῆς περιφερείας κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους, μετὰ χρόνον t εὑρίσκεται εἰς Γ. Ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τῆς διαμέτρου Β Β′ εἶναι τὸ Δ. Ἡ προβολὴ αὕτη κινεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΒΒ′ παλινδρομικῶς καὶ εἰς χρόνον Τ (περίοδος), μιᾶς πλήρους περιστροφῆς τοῦ Α, ἡ προβολὴ ἐκτελεῖ μίαν πλήρη ταλάντωσιν, μὲ ταχύτητα μεταβαλλομένην. Τὸ σημεῖον Γ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας διὰ τῆς ἐνεργείας σταθερᾶς δυνάμεως, διευθυνομένης πρὸς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς κεντρομόλου δυνάμεως

$$P = \frac{4\pi^2 mr}{T^2},$$

([1]) *Πολλάκις ὡς πλάτος αἰωρήσεως χαρακτηρίζεται ἡ γωνία ΒΟΒ′. Ἡ διαφορὰ αὕτη δὲν εἶναι οὐσιώδης, καθότι μεταξὺ τῶν δύο τούτων γωνιῶν ὑπάρχει σταθερὰ σχέσις:* $\widehat{BOB'} = 2 \cdot (\widehat{BOA})$.

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας. Ἐὰν δὲν ἐνήργει ἡ κεντρομόλος, τὸ κινητὸν λόγῳ τῆς ἀδρανείας θὰ ἐκινεῖτο ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς καὶ ἡ ἁρμονικὴ κίνησις τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΒ′ δὲν θὰ προέκυπτε. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι ἡ ταλαντευτικὴ κίνησις τοῦ σημείου Δ ὀφείλεται εἰς μίαν συνιστῶσαν τῆς Ρ, τὴν Κ. Εἶναι δὲ

$$K = P.\,\eta\mu\alpha = P.\frac{x}{r},$$

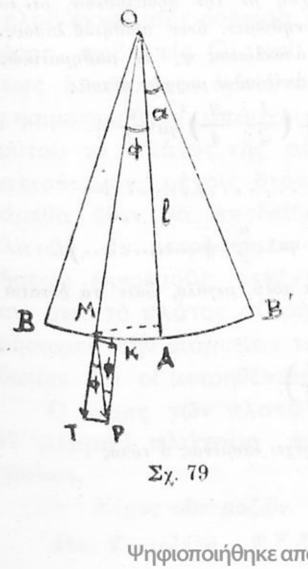
ἔνθα $x = O\Delta$.

Ὅθεν $$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}x. \qquad (70)$$

Παρατηροῦμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, ὅτι ἡ κινοῦσα δύναμις Κ εἶναι ἀνάλογος τοῦ χ, ἤ οι τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινητοῦ (προβολῆς) ἀπὸ τοῦ μέσου Ο.

Ἡ ταχύτης τοῦ σημείου Δ, κινουμένου ἐπὶ τῆς διαμέτρου Β′Β, ἐλαττοῦται συνεχῶς, ὅταν τὸ κινητὸν πλησιάζῃ πρὸς τὰ ἄκρα Β καὶ Β′, λόγῳ τῆς διαρκῶς αὐξανομένης δυνάμεως Κ, ἐνεργούσης ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως, κατὰ τὰς θέσεις ταύτας.

78. ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ. Ἔστω ἓν ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς (Σχ. 79), ἔχον πλάτος αἰωρήσεως λίαν μικρόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δύναται νὰ ληφθῇ ἀντὶ τοῦ τόξου ΒΒ′ ἡ χορδὴ ΒΒ′ κλπ. Ἡ κινοῦσα τὸ ὑλικὸν σημεῖον Μ δύναμις εἶναι εἰς πᾶσαν θέσιν ἴση πρὸς $K = P.\,\eta\mu\,\varphi$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία φ εἶναι λίαν μικρὰ δύναται νὰ τεθῇ $\eta\mu\,\varphi = \varphi$, ὅτε $K = P.\,\varphi = mg\,\varphi$. Ἀλλ' εἶναι $AM = l.\,\eta\mu\,\varphi = l.\,\varphi$ καὶ ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸ ΑΜ, $\varphi = \frac{x}{l}$.



Σχ. 79

Ἐπομένως $$K = \frac{mg}{l}x \qquad (71)$$

Καὶ εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ ἡ δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως x τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου Α. Ἡ κίνησις τοῦ Μ εἶναι συνεπῶς κίνησις ἁπλῆ ἁρμονική. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (70) καὶ (71) λαμβάνομεν

$$\frac{mg}{l}x = \frac{4\pi^2 m}{T^2}x$$

καὶ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (72)$$

Ὁ τύπος ὁ παρέχων τὴν περίοδον τῆς κινήσεως ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \; (^1). \qquad (72)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὐκόλως ἐξάγονται οἱ νόμοι οἱ διέποντες τὴν κίνησιν τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Οὗτοι εἶναι οἱ ἑξῆς:

1) Ἡ διάρκεια μιᾶς αἰωρήσεως (πλήρους ἢ ἁπλῆς) εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ πλάτους τῆς αἰωρήσεως, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι μικρὸν (ὄχι μεγαλύτερον τῶν 3′) [2]. Τοῦτο ἐξάγεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι εἰς τὸν τύπον (72) δὲν περιέχεται ὅρος μὲ α, προσέτι δὲ διότι ὁ ἐν λόγῳ τύπος ἐξήχθη μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως εἶναι μικρὸν (καὶ ὅταν φ=α νὰ δύναται νὰ τεθῇ ημ φ = φ).

2) Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μάζης τοῦ ἐκκρεμοῦς,

3) Ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ μήκους l τοῦ ἐκκρεμοῦς.

4) Ἡ διάρκεια αἰωρήσεως εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος (g) τοῦ τόπου, ἔνθα τοῦτο αἰωρεῖται.

---

(1) *Ὁ τύπος (72) τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς ἐξήχθη μὲ τὴν προϋπόθεσιν, ὅτι τὸ πλάτος αἰωρήσεως* **α** *εἶναι τόσον μικρόν, ὥστε νὰ δυνηθῶμεν, ἄνευ αἰσθητοῦ λάθους, νὰ λάβωμεν τὸ τόξον ἀντὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας ἀποκλίσεως φ. Ἡ μαθηματικῶς αὐστηρὰ παραγωγὴ τοῦ τύπου ὅμως ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀκόλουθον μορφὴν αὐτοῦ:*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \eta\mu^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \eta\mu^6 \frac{\alpha}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\eta\mu^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

ἢ κατὰ προσέγγισιν, ὅταν καὶ πάλιν τὸ **α** *δὲν εἶναι πολὺ μεγάλο, ὥστε νὰ δύναται νὰ τεθῇ* $\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

---

(2) *Τὴν διάρκειαν μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως παρέχει ἑπομένως ὁ τύπος*

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{\chi g}}.$$

Πειραματικὴ ἀπόδειξις τῶν νόμων. Ἀνεφέραμεν καὶ προηγουμένως, ὅτι τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμὲς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ. Πρόκειται περὶ μιᾶς ἐντελῶς ἰδανικῆς περιπτώσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατον νὰ πραγματοποιηθῇ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ ἀνέμενέ τις, ὅτι οἱ νόμοι τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθοῦν διὰ πειραμάτων. Τοῦτο εἶναι ἀληθές. Ἐν τούτοις ἐὰν κατασκευάσωμεν ἐκκρεμὲς ἀπὸ λεπτότατον νῆμα μετάξης, ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται μικρὰ σφαῖρα μεγάλης μάζης, τότε τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο εἶναι μὲν σύνθετον, ἀλλὰ προσεγγίζει κατὰ τὴν κατασκευὴν πρὸς τὸ ἁπλοῦν. Μὲ τοιαῦτα ἐκκρεμῆ θὰ ἀποδείξωμεν πειραματικῶς τοὺς ἀνωτέρω νόμους.

1) Νόμος τῶν πλατῶν. Λαμβάνομεν ἕν τοιοῦτον ἐκκρεμὲς καὶ τὸ θέτομεν εἰς αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους, μετροῦμεν δε διὰ χρονομέτρου τὴν διάρκειαν ἀριθμοῦ τινος αἰωρήσεων (λ.χ. 100) καὶ ὑπολογίζομεν οὕτω τὸν χρόνον μιᾶς αἰωρήσεως (διὰ διαιρέσεως τοῦ εὑρεθέντος χρόνου διὰ τοῦ 100). Ἐὰν κατόπιν μεταβάλλωμεν τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως, διατηροῦντες αὐτὸ καὶ πάλιν μικρόν, καὶ εὕρωμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸν χρόνον μιᾶς αἰωρήσεως. θὰ ἴδωμεν ὅτι ἀμφότεροι οἱ εὑρεθέντες χρόνοι εἶναι ἴσοι.

Ὑπεθέσαμεν προηγουμένως (§ 76) ὅτι εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς οὐδεμία προβάλλεται ἀντίστασις (ἀντίστασις ἀέρος, τριβὴ εἰς Ο) καὶ ἑπομένως ὅτι τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως διατηρεῖται ἀμείωτον. Εἰς τὰ ἐκκρεμῆ ὅμως τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν, ὑπάρχουν τοιαῦται ἀντιστάσεις καὶ ἕνεκα τούτου τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως αὐτῶν βαίνει συνεχῶς ἐλαττούμενον, μέχρις ὅτου ταῦτα ἀχθοῦν εἰς τὴν ἠρεμίαν. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ ἀποδείξωμεν πειραματικῶς τοὺς νόμους τῶν πλατῶν, ἂν μετρήσωμεν τὴν διάρκειαν ἀριθμοῦ τινος αἰωρήσεων ἐκκρεμοῦς, τεθέντος εἰς κίνησιν, καὶ μετά τινα χρόνον, ὅτε τὸ πλάτος αἰωρήσεως θὰ ἐλαττωθῇ σημαντικῶς, μετρήσωμεν τὴν διάρκειαν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ αἰωρήσεων, θὰ ἴδωμεν ὅτι οἱ μετρηθέντες χρόνοι εἶναι ἴσοι.

Ὁ νόμος τῶν πλατῶν δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ἄλλως: **Αἱ μικροῦ πλάτους αἰωρήσεις ἐκκρεμοῦς εἶναι ἰσόχρονοι.**

2) Νόμος τῶν μαζῶν. Λαμβάνομεν δύο ἢ περισσότερα ἐκκρεμῆ τοῦ αὐτοῦ μήκους, τῶν ὁποίων ὅμως αἱ μικραὶ σφαῖραι νὰ εἶναι κατεσκευασμέναι ἐκ διαφόρων οὐσιῶν καὶ νὰ ἔχουν διάφορον μᾶζαν (π. χ. ἡ μία ἐκ λευκοχρύσου, ἄλλη ἐκ σιδήρου, ἄλλη ἐξ ἀργιλλίου κλπ) καὶ τὰ θέτομεν εἰς αἰώρησιν τοῦ αὐτοῦ πλάτους, ἀπομακρύνοντες αὐτὰ συγχρόνως ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας των κατὰ τὴν αὐτὴν μικρὰν γωνίαν καὶ ἀφήνοντες ταῦτα κατόπιν ἐλεύθερα. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διάρκειαι αἰωρήσεως ὅλων τούτων τῶν ἐκκρεμῶν εἶναι αἱ αὐταί, ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διάρκεια αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς οὐσίας, ἐξ ἧς ἀποτελεῖται τοῦτο καὶ τῆς μάζης αὐτοῦ.

3) *Ὁ νόμος τῶν μηκῶν* Ἐὰν ληφθοῦν ἐκκρεμῆ μὲ μήκη l, 4. l, 9. l....... καὶ τεθοῦν εἰς αἰωρήσεις μικροῦ πλάτους, τότε οἱ χρόνοι αἰωρήσεως αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως T, 2T, 3T.......

4) *Ὁ νόμος τῶν ἐντάσεων τῆς βαρύτητος.* Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον εἶναι σταθερά. Ἡ πειραματικὴ ἀπόδειξις λοιπὸν τοῦ νόμου τούτου παρουσιάζει δυσχερείας. Ἐν τούτοις διὰ διαφόρων διατάξεων κατωρθώθη καὶ ὁ νόμος οὗτος νὰ ἐπαληθευθῇ πειραματικῶς καὶ μάλιστα εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον.

Οὕτω λαμβάνομεν ἓν ἐκκρεμές, τοῦ ὁποίου ἡ μικρὰ σφαῖρα νὰ εἶναι ἐκ σιδήρου, θέτομεν αὐτὸ εἰς αἰώρησιν μικροῦ πλάτους καὶ μετροῦμεν τὴν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως αὐτοῦ. Ἐὰν ἤδη δημιουργήσωμεν δι' ἠλεκτρομαγνήτου ἐπὶ τῆς σφαίρας ἕλξιν πρὸς τὰ κάτω διευθυνομένην, τοιαύτην ὥστε ἡ ὁλικὴ πρὸς τὰ κάτω ἕλξις ἐπὶ τῆς σφαίρας (ἐκ τῆς βαρύτητος καὶ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου) νὰ τετραπλασιασθῇ, θὰ μετρήσωμεν νέαν διάρκειαν αἰωρήσεως αὐτοῦ ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς προηγουμένης κ.ο.κ.

Κατ' ἄλλον τρόπον (Mach), ὁ νόμος οὗτος δύναται νὰ ἀποδειχθῇ πειραματικῶς δι' ἑνὸς ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον ἀντὶ νήματος φέρει στερεὸν (ἄκαμπτον) στέλεχος καὶ δὲν αἰωρεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἀλλ' ἐπὶ ἐπιπέδου σχηματίζοντος γωνίαν β μετὰ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ ἐκκρεμὲς ᾐωρεῖτο ἐντὸς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἡ κινοῦσα δύναμις Κ θὰ ἦτο μία συνιστῶσα τοῦ βάρους mg, ἐνῷ ὅταν αἰωρῆται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου κατὰ γωνίαν β ἐπιπέδου ἡ κινοῦσα δύναμις θὰ εἶναι μία συνιστῶσα τῆς δυνάμεως mg συν β. Ἀντὶ τῆς ἐπιταχύνσεως λοιπὸν g ὑπάρχει τώρα ἡ ἐπιτάχυνσις $g' = g$ συν β, μικροτέρα τῆς g. Ὁ χρόνος αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου θὰ εἶναι

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\,\text{συν}\,\beta}}.$$

Καθιστῶντες τὴν γωνίαν β μεγάλην ἐλαττοῦμεν τὴν ἐπιτάχυνσιν g' κατὰ βούλησιν, δίδοντες δηλαδὴ εἰς αὐτὴν γνωστὰς τιμάς. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι οἱ χρόνοι αἰωρήσεως δύο ἐκκρεμῶν ἰσομήκων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν ἐπιταχύνσεων g καὶ g', ἤτοι

$$T' : T = 1 : \sqrt{\text{συν}\,\beta}$$

79. ΣΥΝΘΕΤΟΝ ΕΚΚΡΕΜΕΣ. Τὸ σύνθετον ἢ φυσικὸν ἐκκρεμὲς δύναται νὰ ἔχῃ οἱονδήποτε σχῆμα.

Πᾶν σύνθετον ἐκκρεμὲς δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελούμενον ἐκ τόσων ἁπλῶν ἐκκρεμῶν, ὅσα εἶναι τὰ ὑλικὰ αὐτοῦ σημεῖα. Ἡ ἀπόστασις ἑκάστου ὑλικοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς, ἀποτελεῖ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Ἕκαστον τῶν ἁπλῶν τούτων ἐκκρεμῶν θὰ εἶχεν ἰδίαν διάρκειαν αἰωρήσεως, περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα, ἐὰν ἦτο κεχωρισμένον τῶν λοιπῶν. Τοιούτου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, τοῦ ὁποίου τὸ ὑλικὸν σημεῖον εὑρίσκεται πλησίον τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως, ἡ διάρκεια αἰωρήσεως εἶναι μικροτέρα τοῦ χρόνου αἰωρήσεως τοῦ ὅλου φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐνῷ τῶν ἁπλῶν ἐκκρεμῶν, τῶν ὁποίων τὰ ὑλικὰ σημεῖα κεῖνται εἰς τὸ πλέον ἀπομεμακρυσμένον μέρος ἐκ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως, μεγαλυτέρα. Ἐνδιαμέσως θὰ ὑπάρχουν ὑλικὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἂν κεχωρισμένως ᾐωροῦντο ὡς ἁπλᾶ ἐκκρεμῆ, θὰ εἶχον τὸν αὐτὸν χρόνον αἰωρήσεως μὲ τὸ σύνθετον. Τὰ σημεῖα ταῦτα, ὡς ἀποδεικνύεται, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως, ἥτις καλεῖται «ἄξων αἰωρήσεως». Ἑπομένως τὸ σύνθετον ἐκκρεμὲς καὶ ἐκεῖνο τὸ ἁπλοῦν, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἀξόνων, ἐξαρτήσεως καὶ αἰωρήσεως, ἐκτελοῦν ἰσοχρόνους αἰωρήσεις. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀξόνων φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς καλεῖται, ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω, **ἀνηγμένον μῆκος** αὐτοῦ, εἶναι δὲ τοῦτο, ὡς εἴπομεν, τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου πρὸς τὸ σύνθετον ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ὡς ἀποδεικνύεται, ὁ τύπος τοῦ συνθέτου ἐκκρεμοῦς εἶναι,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgr}}, \qquad (73)$$

ἔνθα Κ παριστᾷ τὴν ροπὴν ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως (περιστροφῆς), Μ τὴν μᾶζαν αὐτοῦ καὶ r τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως. Συγκρίνοντες τοὺς τύπους (72) καὶ (73) εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἀνηγμένον μῆκος τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι $l = \frac{K}{M r}$.

80. ΑΝΑΣΤΡΕΨΙΜΟΝ ΕΚΚΡΕΜΕΣ. Ἀποδεικνύεται, ὅτι ἂν φυσικὸν ἐκκρεμὲς ἐξαρτηθῇ εἴτε ἐκ τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως εἴτε ἐκ τοῦ ἄξονος αἰωρήσεως, τὸ μῆκος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, τοῦ ἰσοχρόνου πρὸς τὸ σύνθετον τοῦτο, εἶναι τὸ αὐτό, δηλαδὴ ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἀξόνων. Κατ᾽ ἄλλην ἔκφρασιν, ἐὰν ὁ ἄξων αἰωρήσεως φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς γίνῃ ἄξων ἐξαρτήσεως, ἡ διάρκεια αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου δὲν μεταβάλλεται. Ἀρκεῖ, λοιπόν, ἐπὶ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς νὰ εὑρεθοῦν δύο ἄξονες Ο καὶ Ο΄, παράλληλοι μεταξύ των καὶ τοιοῦτοι, ὥστε περὶ αὐτοὺς αἰωρούμενον τὸ ἐκκρεμὲς νὰ παρέχῃ ἴσους χρόνους αἰωρήσεως, ὁπότε ἡ ἀπόστασις ΟΟ΄ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου πρὸς τὸ σύνθετον ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, δηλαδὴ τὸ ἀνηγμένον μῆκος αὐτοῦ, πρέπει ὅμως, ὡς ἀποδεικνύεται, οἱ δύο οὗτοι ἄξονες νὰ ἔχουν τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ κέντρον βάρους τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν οὗτοι καὶ εἰς ἄνισον ἀπ᾽ αὐτῶν ἀπόστασιν. Διότι, ἂν τὸ κέντρον βάρους εὑρίσκεται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοὺς δύο ἄξονας, αἱ διάρκειαι τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς θὰ εἶναι μὲν αἱ αὐταὶ περὶ τοὺς δύο ἄξονας, χωρὶς οὗτοι νὰ εἶναι ἄξονες αἰωρήσεως καὶ ἐξαρτήσεως.

Ἐκκρεμῆ φέροντα τοὺς δύο τούτους ἄξονας καὶ δυνάμενα νὰ τεθοῦν εἰς αἰώρησιν περὶ αὐτούς, καλοῦνται **ἀναστρέψιμα ἢ ἀντιστρεπτὰ** ἐκκρεμῆ. Διάφοροι τύποι ἀντιστρεπτῶν ἐκκρεμῶν ὑπάρχουν. Τὸ Σχ. 80 δεικνύει τὸ ὑπὸ τοῦ Kater [1] κατασκευασθὲν ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμές. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ χαλυβδίνης ῥάβδου, ἡ ὁποία φέρει τρεῖς ἀνίσους φακοειδεῖς μά-

---

(1) Ὁ ἄγγλος H. Kater *(1777—1835) κατεσκεύασε πρῶτος τὸ ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμὲς τῷ 1817, χωρὶς νὰ γνωρίζῃ τὰς περιγραφὰς τοιούτων ἐκκρεμῶν, γενομένας προγενεστέρως ὑπὸ τῶν* de Prony *(1792) καὶ* J. Bohnenberger *(1811).*

ζας Α, Β, Γ καὶ δύο πρίσματα τριγωνικὰ ἐκ χάλυβος, τῶν

Σχ. 80

ὁποίων αἱ ἀκμαί, ἀντιθέτως ἐστραμμέναι, ἀποτελοῦν τοὺς δύο ἄξονας τοῦ ἀντιστρέπτου τούτου ἐκκρεμοῦς. Διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν μαζῶν Β καὶ Γ, ἡ ὁποία γίνεται τῇ βοηθείᾳ κοχλιῶν, ἐπιτυγχάνομεν ὥστε αἱ αἰωρήσεις νὰ εἶναι ἰσόχρονοι, εἴτε τὸ ἐκκρεμὲς ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ Ο, εἴτε ἐκ τοῦ Ο′. Τότε οἱ δύο οὗτοι ἄξονες Ο καὶ Ο′ εἶναι ἀμοιβαίως ἄξων ἐξαρτήσεως καὶ ἄξων αἰωρήσεως καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν l ὁρίζει τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου, πρὸς τὸ ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμές, ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Προφανῶς αἱ αἰωρήσεις τοῦ φυσικοῦ τούτου ἐκκρεμοῦς ἀκολουθοῦν τὸν τύπον τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

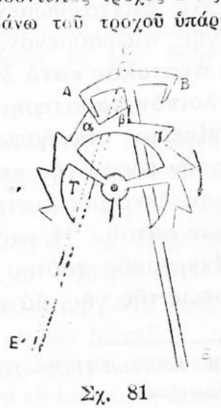
ἀρκεῖ ὡς l νὰ τεθῇ ἡ ἀπόστασις ΟΟ′.

Ἀναστρέψιμα ἐκκρεμῆ ἔχουν κατασκευάσει καὶ ἄλλοι (Defforges κλπ.).

81. ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ.

Α′ Μέτρησις τοῦ χρόνου. Ἕνεκα τοῦ ἰσοχρόνου τῶν μικροῦ πλάτους αἰωρήσεων ἐκκρεμοῦς, χρησιμοποιοῦνται τὰ ἐκκρεμῆ εἰς τὴν ρύθμισιν τῆς κινήσεως τῶν ὡρολογίων.

Διὰ τοῦ ἐλατηρίου ἢ διὰ βάρους τίθεται ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς Τ εἰς περιστροφὴν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους. Ὑπεράνω τοῦ τροχοῦ ὑπάρχει τὸ ἐξάρτημα ΑΒ, καλούμενον ὡς ἐκ τοῦ σχήματός του ἄγκυρα, τὸ ὁποῖον ἔχει προσκολληθῇ ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς ΟΕ. Ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν ΟΕ, τὸ ἄκρον Α τῆς ἀγκύρας εἰσέρχεται μεταξὺ τῶν ὀδόντων α καὶ β καὶ σταματᾷ οὕτω τὴν περιστροφὴν τοῦ τροχοῦ. Ἐπίσης ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς μετὰ μίαν ἁπλῆν αἰώρησιν εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν ΟΕ′, τότε τὸ ἄκρον Β εἰσέρχεται μεταξὺ τῶν ὀδόντων β καὶ γ καὶ σταματᾷ ἐκ νέου τὴν κίνησιν τοῦ τροχοῦ Τ.

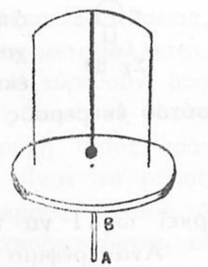


Σχ. 81

Ἐπειδὴ τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται κατὰ ἴσα χρονικὰ διαστήματα, λόγῳ τοῦ ἰσοχρόνου τῶν κινήσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὁ τροχὸς ἐξαναγκάζεται εἰς ἰσοταχῆ κίνησιν. Συγχρόνως τὸ ἐκκρεμὲς δέχεται περιοδικὰς ὠθήσεις ἐκ τοῦ τροχοῦ Τ διὰ τῶν ὁποίων ἡ κίνησίς του διατηρεῖται ἀμείωτος.

Β' Ἀπόδειξις τῆς περιστροφῆς τῆς γῆς. Ὁ Foucault [1] μετεχειρίσθη τὸ ἐκκρεμὲς πρὸς ἀπόδειξιν τῆς περιστροφῆς τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της.

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἐκτελῇ τὰς αἰωρήσεις του ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἀρχικὸν ἐπίπεδον αἰωρήσεως. Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ δείξωμεν διὰ τῆς συσκευῆς τοῦ σχήματος 82. Αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ πλαισίου κατακορύφου, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σημείου τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται ἐκκρεμές, ἀποτελούμενον ἐκ νήματος φέροντος μεταλλικὴν σφαῖραν. Ἡ συσκευὴ αὕτη δύναται νὰ προσαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς φυγοκεντρικῆς μηχανῆς καὶ νὰ τεθῇ οὕτω εἰς περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ συμπίπτοντα μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἐν ἰσορροπίᾳ εὑρισκομένου. Ἐὰν θέσωμεν εἰς αἰώρησιν τὸ ἐκκρεμὲς καὶ στρέψωμεν τὴν συσκευὴν (πλαίσιον), θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι αἱ αἰωρήσεις τοῦ ἐκκρεμοῦς λαμβάνουν χώραν πάντοτε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 82

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐστηρίχθη τὸ πείραμα τοῦ Foucault.

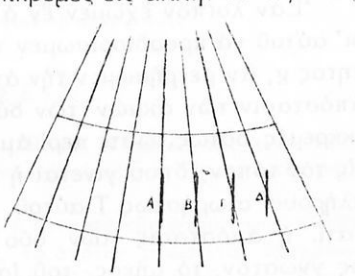
Ἂς φαντασθῶμεν ἓν ἐκκρεμές, ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν πόλων τῆς γῆς, αἰωρούμενον. Ὡς γνωστὸν ἡ γῆ στρέφεται ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολὰς κατὰ 360° εἰς 24 ὥρας ἢ 15° εἰς μίαν ὥραν. Δι' ἕνα λοιπὸν παρατηρητήν, ἐπὶ τῆς γῆς ἱστάμενον, θὰ φανῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς στρέφεται ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῆς περιστροφῆς τῆς γῆς καὶ τοῦτο ἀκριβῶς, διότι τὸ ἐκκρεμὲς διατηρεῖ ἀμετάβλητον τὸ ἐπίπεδον τῶν αἰωρήσεων αὐτοῦ. Ἡ φαινομένη στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου, ὡς πρὸς παρατηρητὴν μετέχοντα τῆς κινήσεως τῆς γῆς, θὰ εἶναι 15° καθ' ὥραν.

---

[1] *L. Foucault (1819—1868), γάλλος φυσικός, γενόμενος μέλος τῆς Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν.*

Ἐὰν τοὐναντίον φαντασθῶμεν τὸ ἐκκρεμὲς αἰωρούμενον εἰς τὸν ἰσημερινόν, τότε οὐδεμία στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως παρατηρεῖται. Τοῦτο δύναται νὰ ἐννοήσῃ τις, ἂν λ. χ. φαντασθῇ ὅτι κατ᾽ ἀρχὰς τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως ταυτίζεται πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς μεσημβρινοῦ. Ἡ διεύθυνσις τῆς αἰωρήσεως συμπίπτει τότε πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ μεσημβρινοῦ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὅλοι οἱ μεσημβρινοὶ εἰς μικρὰν ἔκτασιν περὶ τὸν ἰσημερινὸν εἶναι παράλληλοι, οὐδεμία ἀλλαγὴ θὰ παρατηρηθῇ εἰς τὴν διεύθυνσιν τῶν αἰωρήσεων, δηλ. αὗται θὰ γίνωνται πάντοτε κατὰ τὴν διεύθυνσιν Β—Ν.

Ἄς φαντασθῶμεν τέλος τὸ ἐκκρεμὲς εἰς ἄλλην θέσιν, ἐκτὸς τῶν πόλων καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ (Σχ. 83). Ἐὰν κατ᾽ ἀρχὰς εἰς τὸν τόπον Α αἱ αἰωρήσεις ἐγίνοντο κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μεσημβρινοῦ, μετά τινα χρόνον, ὅταν ὁ τόπος φθάσῃ εἰς Β, ἡ διεύθυνσις τῶν αἰωρήσεων διατηρεῖται παράλληλος πρὸς ἑαυτὴν καὶ ἑπομένως σχηματίζει μετὰ τοῦ μεσημβρινοῦ γωνίαν α, ἥτις εἰς Γ, Δ κ.κ.ἑ. γίνεται διαρκῶς μεγαλυτέρα. Ἡ στροφὴ αὕτη τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως γίνεται βραδυτέρα ἐνταῦθα ἢ εἰς τὸν πόλον.



Σχ. 83

Ἐνῷ εἰς τὸν πόλον εἰς μίαν ὥραν ἐπέρχεται στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως κατὰ 15°, εἰς τόπον ἔχοντα γεωγραφικὸν πλάτος φ, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπερχομένη στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως εἰς μίαν ὥραν εἶναι: 15° ημ φ.

Ὁ Foucault ἐξετέλεσε κατὰ πρῶτον τὸ πείραμά του τῷ 1850 εἰς τὸ Ἀστεροσκοπεῖον τῶν Παρισίων καὶ ἐπανέλαβε τοῦτο τῷ 1851 εἰς τὸ Πάνθεον τῶν Παρισίων δι᾽ ἐκκρεμοῦς ἀποτελουμένου ἐκ σφαίρας χαλκίνης μάζης 28 kg ἐξηρτημένης διὰ χαλυβδίνου σύρματος μήκους 67 m. Ἡ σφαῖρα κατέληγεν εἰς ἀκίδα, ἡ ὁποία κατὰ τὴν αἰώρησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐχάρασσε ἐπὶ στρώματος ἐξ ἄμμου, εὑρισκομένου εἰς τὸ δάπεδον, γραμμάς, αἱ ὁποῖαι μετετίθεντο διαρκῶς στρεφόμεναι περὶ κέντρον τὴν θέσιν εἰς ἣν εὑρίσκεται ἡ ἀκίς, ὅταν τὸ ἐκκρεμὲς ἠρεμῇ. Ἡ μετατόπισις αὕτη τῶν γραμμῶν, δεικνύουσα στροφὴν τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως, δὲν δύναται ἄλλως νὰ ἑρμηνευθῇ ἢ ὅτι ἡ γῆ περιστρέφεται.

Γ΄. Μέτρησις τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος g. Ἡ ἐπιτάχυνσις g τῆς βαρύτητος δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλους τοὺς τόπους, ἕνεκα διαφόρων λόγων. Τὴν τιμὴν τοῦ g εἰς τοὺς διαφόρους τόπους δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν διὰ τοῦ ἐκκρεμοῦς. Πράγματι ἐκ τοῦ τύπου (72) ἔχομεν

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} . \qquad (74)$$

Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν ἓν ἀναστρέψιμον ἐκκρεμές, δυνάμεθα δι᾽ αὐτοῦ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος g, ἂν μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν l τῶν ἀξόνων, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀκμῶν τῶν δύο πρισμάτων, ὅταν ρυθμισθῇ τὸ ἐκκρεμὲς οὕτως, ὥστε περὶ ἀμφοτέρας νὰ αἰωρῆται ἰσοχρόνως εἰς τὸν τόπον, ὅπου γίνεται ἡ μέτρησις, καὶ τὸν χρόνον μιᾶς πλήρους αἰωρήσεως T αὐτοῦ περὶ τὸν ἕνα τῶν ἀξόνων. Πράγματι, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀκμῶν τῶν πρισμάτων εἶναι, ὡς γνωστόν, τὸ μῆκος τοῦ ἰσοχρόνου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, ὅτε δυνάμεθα νὰ κάμωμεν χρῆσιν τοῦ ἀνωτέρω τύπου (74), ὅστις ἰσχύει διὰ τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμές.

Αἱ ὡς ἄνω διενεργούμεναι μετρήσεις (δι᾽ ἀναστρεψίμου ἐκκρεμοῦς) καλοῦνται ***ἀπόλυτοι μετρήσεις*** τοῦ g καὶ παρουσιάζουν δυσκολίαν κυρίως εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μήκους l. Ἕνεκα τούτου γίνονται τοιαῦται εἰς ὡρισμένα μόνον σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, εἰς τὰ λοιπὰ δὲ σημεῖα γίνονται ***σχετικαὶ μετρήσεις*** τοῦ g. Αὗται στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἀκολούθου ἀρχῆς. Ἐὰν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ φυσικὸν ἐκκρεμές, τοῦ ὁποίου τὸ ἀνηγμένον μῆκος (μῆκος ἰσοχρόνου πρὸς αὐτὸ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς) ἔστω l, τεθῇ εἰς αἰώρησιν εἰς τόπον τινὰ A, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ τιμὴ τοῦ g εἶναι γνωστὴ ἐξ ἀπολύτων μετρήσεων, καὶ προσδιορισθῇ ἡ διάρκεια πλήρους αἰωρήσεως, ὅτε θὰ ἔχωμεν $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, (75)

ἔπειτα δὲ μεταφερθῇ εἰς τὸν τόπον B, εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος g′, θὰ ἔχομεν τότε καὶ πάλιν

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} . \qquad (76)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (75) καὶ (76) λαμβάνομεν

$$\frac{T}{T'}=\frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}}$$

ἢ
$$g'=g\frac{T^2}{T'^2}\,, \qquad (77)$$

καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν g΄, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μόνον τὸ T΄ καὶ τὸ T εἰς τοὺς δύο τύπους, καθότι τὸ g εἶναι, ὡς ἀνεφέρθη, γνωστὸν δι' ἀπολύτου μετρήσεως εἰς τὸν τόπον Α. Μεταφέροντες κατόπιν τὸ αὐτὸ ἐκκρεμὲς εἰς ἄλλους Γ, Δ, κλπ. καὶ μετροῦντες μόνον τὴν διάρκειαν αἰωρήσεως, εὑρίσκομεν τὴν εἰς αὐτοὺς ἔντασιν τῆς βαρύτητος, ὡς ἀνωτέρω.

Ἡ μέτρησις αὕτη γίνεται δι' οἱουδήποτε φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς (καὶ μὴ ἀναστρεψίμου), ἀρκεῖ νὰ διατηρῆται ἀμετάβλητον τὸ μῆκος αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

64) Ἁπλοῦν ἐκκρεμές, μήκους 99 cm, ἐκτελεῖ εἴς τινα τόπον μίαν πλήρη αἰώρησιν εἰς χρόνον 2 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον τοῦτον.

65) Πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς ἕνα τόπον δι' ἀναστρεψίμου ἐκκρεμοῦς, τὸ ὁποῖον αἰωρεῖται ἰσοχρόνως περὶ τοὺς δύο αὐτοῦ ἄξονας, ἀπέχοντας ἀλλήλων 143,5 cm. Ἐὰν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἐκτελεῖ 50 ἁπλᾶς αἰωρήσεις εἰς 60 sec, ποία εἶναι ἡ ζητουμένη ἔντασις τῆς βαρύτητος;

66) Ἓν ἐκκρεμὲς μήκους λ ἐκτελεῖ 100 ἁπλᾶς αἰωρήσεις εἰς 1 πρῶτον λεπτόν. Πόσον πρέπει νὰ βραχύνωμεν τοῦτο, ἵνα ἐκτελῇ 110 ἁπλᾶς αἰωρήσεις εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

67) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν μηκῶν δύο ἐκκρεμῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκτελεῖ τὴν ἁπλῆν αἰώρησίν του εἰς 1 sec (ἐκκρεμῆ δευτερολέπτου) εἰς τόπον ἔνθα $g=9{,}811\ m.sec^{-2}$ καὶ εἰς τὸν ἰσημερινόν, ἔνθα $g=9{,}780\ m.sec^{-2}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΙΣ

82. ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΓΚΟΣΜΙΑΣ ΕΛΞΕΩΣ. Ἡ γῆ ἕλκει, ὡς εἴδομεν, πάντα τὰ πέριξ αὐτῆς εὑρισκόμενα σώματα. Ἕλκει ἐπίσης αὐτὴ καὶ τὴν σελήνην καὶ οὕτω ἐξηγεῖται πῶς ἡ σελήνη στρέφεται περὶ τὴν γῆν. Ἐπὶ τῆς σελήνης ἀσκοῦνται ἀφ' ἑνὸς ἡ ἕλξις τῆς γῆς (κεντρομόλος δύναμις) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ λόγῳ τῆς περιστροφῆς της ἀναπτυσσομένη φυγόκεντρος δύναμις. Αἱ δυνάμεις αὗται εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἀλλ' ἂν ἡ γῆ ἕλκῃ τὴν σελήνην μετά τινος δυνάμεως, βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, καὶ ἡ σελήνη ἕλκει τὴν γῆν μὲ ἴσην δύναμιν. Αἱ ἕλξεις ὅθεν τῶν σωμάτων εἶναι ἀμοιβαῖαι. Ὅ,τι συμβαίνει μεταξὺ γῆς καὶ σελήνης, τὸ αὐτὸ συμβαίνει μεταξὺ ἡλίου καὶ γῆς, μεταξὺ ἡλίου καὶ λοιπῶν πλανητῶν κ.ο.κ. Μεταξὺ τῶν ὑλικῶν σωμάτων ὑφίστανται ἀμοιβαῖαι ἑλκτικαὶ δυνάμεις. Ἡ ὕπαρξις ἑλκτικῆς ἀμοιβαίας δυνάμεως μεταξὺ δύο ὑλικῶν σωμάτων ἀποτελεῖ, δύναταί τις νὰ εἴπῃ, ἰδιότητα τῆς ὕλης. Ὁ Νεύτων,

προσδιορίσας τὴν ἑλκτικὴν δύναμιν μεταξὺ γῆς καὶ σελήνης (ἀκριβῶς ὡς μεταξὺ ἡλίου καὶ ἑνὸς πλανήτου) δι' ὑπολογισμοῦ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως τῆς ἀσκουμένης ἐπὶ τῆς σελήνης καὶ λαβὼν ὑπ' ὄψιν τοὺς νόμους τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν τοῦ Kepler,

διετύπωσε (1686) τὸν νόμον, τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ ἡ μεταξὺ δύο ὑλικῶν σωμάτων ἑλκτικὴ δύναμις, ὁ ὁποῖος, λόγῳ τῆς γενικότητός του, ἐκλήθη νόμος τῆς παγκοσμίας ἕλξεως. Ὁ νόμος εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Δύο ὑλικὰ σώματα ἕλκονται ἀμοιβαίως μὲ δύναμιν, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου τῶν μαζῶν αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν.

Ἐὰν μὲ m καὶ m′ παραστήσωμεν τὰς μάζας τῶν δύο σωμάτων καὶ μὲ r τὴν μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασιν, τότε, κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἕλξις F δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$F = k \frac{m . m'}{r^2},$$

ἔνθα k εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, ἐξαρτώμενος ἐκ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὰ μεγέθη τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, καὶ ὁ ὁποῖος καλεῖται **σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως.**

Ἐὰν θέσωμεν $m = m' = 1$ gr καὶ $r = 1$ cm, τότε θὰ ἔχωμεν $F = k$. Ἐπομένως ἡ σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἰσοῦται ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν ἕλξιν δύο μαζῶν, ἑκάστης ἴσης πρὸς 1 gr, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν ἀπ' ἀλλήλων ἴσην πρὸς

1 cm. Διὰ διαφόρων πειραμάτων εὑρέθη ὅτι $k=6{,}67.\ 10^{-8}$ dyne.

Ὁ νόμος τῆς παγκομίας ἕλξεως, καλούμενος καὶ νόμος τοῦ Νεύτωνος, ἐπαληθεύεται διὰ τοῦ πειράματος (ζυγὸς τοῦ Cavendish) καὶ ἑρμηνεύει τὰς κινήσεις τῶν οὐρανίων σωμάτων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ φαινόμενα τῆς βαρύτητος τῆς γῆς.

83. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. Ἀποδεικνύεται ὅτι σφαῖρα ὁμογενὴς ἢ ἐξ ὁμοκέντρων στιβάδων ἀποτελουμένη — καὶ ὡς τοιαύτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ γῆ — ἕλκει τὰ ἐκτὸς αὐτῆς σώματα ὡς ἐὰν ὅλη ἡ μᾶζα αὐτῆς, εὑρίσκετο συγκεντρωμένη εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως τοῦ Νεύτωνος, δυνάμεθα νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν κάτωθι ζητημάτων:

Α! Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος μεταβάλλεται μετὰ τοῦ ὕψους ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης. Ἐὰν μᾶζα m εὑρίσκεται εἰς ἕνα τόπον Α καὶ μεταφερθῇ εἰς ὕψος h κατακορύφως ὑπεράνω τοῦ τόπου τούτου, ὑφίσταται ἐλάττωσιν τοῦ βάρους του. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ νέον βάρος τοῦ σώματος, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔντασιν τῆς βαρύτητος εἰς τὸ ὕψος h. Ἂς καλέσωμεν g αὐτὴν εἰς τὸν τόπον Α καὶ g′ εἰς τὸ ὕψος h ὑπεράνω τούτου. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος θὰ ἔχωμεν ὅτι τὰ βάρη mg καὶ mg′ θὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν τόπων τούτων ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, διότι, ὡς εἴδομεν, ἐκεῖ θεωρεῖται συγκεντρωθεῖσα ἡ μᾶζα τῆς γῆς. Ἐπομένως

$$\frac{mg}{mg'}=\frac{g}{g'}=\frac{(R+h)^2}{R^2},$$

ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς γηΐνης σφαίρας. Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα, γνωστῶν ὄντων τῶν R καὶ g, νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος g′ εἰς ὕψος h.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλάττωσιν τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος μετὰ τοῦ ὕψους, ἂς λάβωμεν τὸν τελευταῖον τύπον, ἂς ἐφαρμόσωμεν γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καὶ ἂς ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{g-g'}{g'}=\frac{R^2+h^2+2hR-R^2}{R^2}=\frac{h^2}{R^2}+\frac{2h}{R}.$$

Ἀλλὰ τὸ $\frac{h^2}{R^2}$ εἶναι λίαν μικρὸς ἀριθμὸς καὶ δύναται νὰ παραμεληθῇ, ὅτε

$$g-g'=\frac{2hg'}{R}.$$

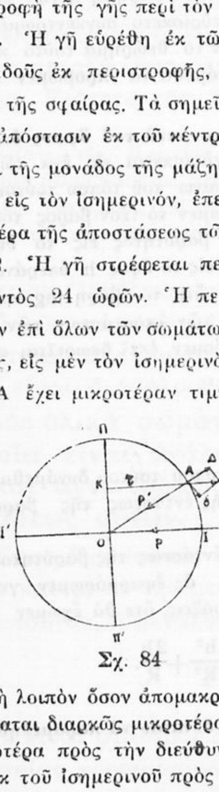
Ἂν μάλιστα θέσωμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἀντὶ g′ τὸ γνωστὸν g, θὰ ἔχωμεν ἀνεπαίσθητον λάθος καὶ τότε ἡ ἐλάττωσις g—g′ τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος μετὰ τοῦ ὕψους h δίδεται ὑπὸ τοῦ γινομένου $\frac{2gh}{R}$. Οὕτως ὑπὲρ ἕνα τόπον, εἰς ὃν $g=980$ cm. sec^{-2}, καὶ εἰς ὕψος $h=1000$ m, εἶναι ἡ ἐλάττωσις $g-g'=0{,}3$cm. sec^{-2} καὶ ἡ $g'=979{,}7$ cm. sec^{-2}.

Β. Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος μεταβάλλεται μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους.

Αἱ μετρήσεις τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς καὶ μάλιστα εἰς τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης, ἔδειξαν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ g δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλους τοὺς τόπους, ἀλλ' ὅτι αὕτη αὐξάνεται ἐκ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τοὺς πόλους. Ὡς αἴτια αὐτῆς τῆς μεταβολῆς φέρονται 1) τὸ σχῆμα τῆς γῆς, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σφαῖρα, ἀλλ' ἐλλειψοειδὲς ἐκ περιστροφῆς καὶ 2) ἡ περιστροφὴ τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της.

1. Ἡ γῆ εὑρέθη ἐκ τῶν γεωδαιτικῶν μετρήσεων, ὅτι ἔχει σχῆμα ἐλλειψοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς, πεπλατυσμένου εἰς τοὺς πόλους καὶ ὀλίγον διαφέροντος τῆς σφαίρας. Τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείαςτῆς γῆς δὲν ἔχουν, ἑπομένως, τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ κατὰ τὸν νόμον τοῦ Νεύτωνος ἡ ἕλξις τῆς γῆς ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς μάζης (δηλαδὴ ἡ g) εἰς τοὺς πόλους θὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ εἰς τὸν ἰσημερινόν, ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τῶν πόλων ἐκ τοῦ κέντρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων τοῦ ἰσημερινοῦ ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου.

2. Ἡ γῆ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονά της καὶ ἐκτελεῖ μίαν πλήρη περιστροφὴν ἐντὸς 24 ὡρῶν. Ἡ περιστροφικὴ αὕτη κίνησις παράγει φυγόκεντρον δύναμιν ἐπὶ ὅλων τῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς γῆς. Ἡ φυγόκεντρος δύναμις, εἰς μὲν τὸν ἰσημερινὸν ἔχει τὴν μεγίστην τιμὴν F, εἰς ἓν δὲ ἄλλο σημεῖον Α ἔχει μικροτέραν τιμὴν f, καθότι ἡ ἀπόστασις r ἀπὸ τοῦ ἄξονος τῆς περιστροφῆς εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος R τῆς γῆς (βλ. τύπον 35). Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἰς τοὺς πόλους εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Εἰς τὸν ἰσημερινὸν ἡ φυγόκεντρος δύναμις F (Σχ. 84) ἀντιτίθεται κατ' εὐθεῖαν πρὸς τὸ βάρος Ρ τῶν σωμάτων, ἐνῷ εἰς τὸ σημεῖον Α πρὸς τὸ βάρος Ρ' ἑνὸς σώματος ἀντιτίθεται κατ' εὐθεῖαν ἡ συνιστῶσα Α τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως f.



Σχ. 84

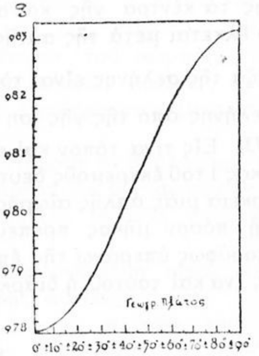
Ἐπειδὴ λοιπὸν ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ ἰσημερινοῦ α) ἡ φυγόκεντρος δύναμις καθίσταται διαρκῶς μικροτέρα καὶ β) ἡ διεύθυνσις αὐτῆς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλαγιωτέρα πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος, ἡ τιμὴ τοῦ g βαίνει αὐξανομένη ἐκ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τοὺς πόλους.

Ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος ἔχει τὰς ἀκολούθους τιμὰς εἰς τὰ διάφορα πλάτη:

Εἰς τὸν ἰσημερινὸν	978,1	cm. sec^{-2}
Εἰς γεωγρ. πλάτος 45°	980,6	»
» » » 60°	981,9	»
Εἰς τὸν πόλον	983,2	»

Ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς τοῦ g διὰ τὰς Ἀθήνας (γεωγρ. πλάτος 37°58′19″,71) δίδει τὸ ἀποτέλεσμα: $g=980,00$ cm. sec^{-2}.

Τὸ Σχ. 85 δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος μετὰ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους. Ἂς σημειωθῇ τέλος ὅτι ὑπάρχουν τύποι, οἱ ὁποῖοι δίδουν τὴν τιμὴν τοῦ g εἰς τὰ διάφορα πλάτη.



Σχ. 85
(κατὰ Helmert 1901)

Γ. Ὑπολογισμὸς τῆς μάζης καὶ πυκνότητος τῆς γῆς. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἕλξεως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μᾶζαν της γῆς, γνωρίζοντες τὴν μέσην ἀκτῖνα αὐτῆς ἐκ τῶν γεωδαιτικῶν μετρήσεων.

Ἔστω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς σῶμα μάζης m. Τὸ σῶμα τοῦτο ἔχει βάρος ἴσον πρὸς mg. Ἀλλὰ τὸ βάρος τοῦ σώματος οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἡ ἕλξις, ἥν ἀσκεῖ ἡ γῆ ἐπ' αὐτοῦ, δυναμένη νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἕλξεως. Αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$F=k\,\frac{m\,M}{R^2},$$

ἔνθα M ἡ ζητουμένη μᾶζα τῆς γῆς καὶ R ἡ μέση ἀκτὶς αὐτῆ, ἴση πρὸς 6366000 m. Ἐπομένως

$$m.g=k\frac{m.M}{R^2}$$

$$\text{καὶ}\quad M=\frac{g\,R^2}{k}.$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν τὰς γνωστὰς τιμὰς τῶν g, R καὶ k ($6,67.10^{-8}$), τότε λαμβάνομεν τὴν μᾶζαν της γῆς ἴσην πρὸς $5,97.10^{24}$ kg.

Η μέση πυκνότης δ τῆς γῆς θὰ ληφθῇ ἂν τὴν εὑρεθεῖσαν μᾶζαν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ὄγκου τῆς γηΐνης σφαίρας $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$. Εὑρέθη ὅτι $\delta=5,50$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

68. Ἡ πυκνότης τῆς γῆς εἶναι 5,6 καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς 6370.10^5 cm. Πόση εἶναι κατόπιν τούτου ἡ σταθερὰ k τῆς παγκ. ἕλξεως;

69) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος τῆς γῆς (θεωρουμένης ὡς σφαίρας), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μᾶζα αὐτῆς εἶναι $5,95.10^{27}$ gr καὶ ἡ ἀκτίς της $6\,370.10^5$ cm (περίπου).

70. Ἡ ἀκτὶς τοῦ πλανήτου Ἄρεως εἶναι τὰ 0,53 τῆς γηΐνης ἀκτῖνος, ἡ δὲ μᾶζα αὐτοῦ τὰ 0,105 τῆς γηΐνης μάζης. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἄρεως, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν g τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς γῆς.

71. Ἡ ἀκτὶς τῆς Ἀφροδίτης εἶναι πρὸς 0,995. R καὶ ἡ μᾶζα αὐτῆς ἴση πρὸς 0,814. M, ἐὰν τὰ R καὶ M παριστοῦν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὴν μᾶζαν

τῆς γῆς. Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως ἐπὶ τοῦ πλανήτου τούτου;

72. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς γῆς καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα γῆς καὶ σελήνης πρέπει νὰ εὑρίσκεται σῶμα, ἵνα τοῦτο ἕλκεται μετὰ τῆς αὐτῆς δυνάμεως ἐκ τῆς γῆς καὶ τῆς σελήνης; Ἡ μᾶζα τῆς σελήνης εἶναι τὸ $\frac{1}{81}$ τῆς μάζης τῆς γῆς καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς σελήνης ἀπὸ τῆς γῆς ἴση πρὸς 60, 157 γηΐνας ἀκτῖνας.

73. Εἴς τινα τόπον καὶ εἰς τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης τὸ μῆκος l τοῦ ἐκκρεμοῦς δευτερολέπτων, τοῦ ἐκκρεμοῦς δηλ. τοῦ ὁποίου ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως εἶναι 1 sec, εἶναι $l = 992{,}2$ m m. Νὰ εὑρεθῇ πόσον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ ἐκκρεμές, εὑρισκόμενον 1500 m κατακορύφως ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον, ἵνα καὶ τούτου ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως εἶναι 1 sec.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΤΡΙΒΗ

84. ΤΡΙΒΗ. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ. Ὅταν σῶμά τι κινῆται, ἐφαπτόμενον ἄλλου σώματος, ὑφίσταται τὴν ἐνέργειαν μιᾶς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀνθίσταται εἰς τὴν κίνησιν. Ἡ ἀντίστασις εἰς τὴν κίνησιν σώματος, ὀφειλομένη εἰς τὴν ἐπαφὴν τούτου πρὸς ἕτερον σῶμα, καλεῖται *τριβή*. Διακρίνομεν τὴν *τριβὴν ἐξ ὀλισθήσεως*, ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν σῶμα κινῆται ὀλισθαῖνον ἐπὶ ἄλλου καὶ τὴν τριβὴν *ἐκ κυλίσεως*, ἡ ὁποία γεννᾶται κατὰ τὴν κύλισιν σώματος ἐπὶ ἄλλου.

Τριβὴ ἐξ ὀλισθήσεως. Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σωμάτων οὐδέποτε εἶναι τελείως λεῖαι. Παρουσιάζουν πάντοτε ἀνωμαλίας, ἄλλοτε μικρὰς καὶ ἄλλοτε μεγάλας. Ὅσον δήποτε λεῖα καὶ ἂν φαίνεται ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος αἱ ἀνωμαλίαι αὗται ὑφίστανται, τὸ μέγεθος ὅμως αὐτῶν εἶναι μικρότερον ἢ ὅταν ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶναι τόσον λεῖα. Εἰς τὰς ἀνωμαλίας αὐτὰς ὀφείλεται ἡ τριβή, ἡ ὁποία ἑπομένως εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον τραχύτεραι εἶναι αἱ εἰς ἐπαφὴν ἐρχόμεναι ἐπιφάνειαι τῶν σωμάτων. Ἐπίσης ὅσον ὀλιγώτερον σκληρὰ εἶναι τὰ προστριβόμενα σώματα, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τριβή.

Τὸ μέγεθος τῆς δυνάμεως τῆς τριβῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τῆς ἑξῆς ἁπλῆς μεθόδου. Ἐπὶ μιᾶς τραπέζης καὶ ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου ἐπιφανείας αὐτῆς θέτομεν τὸ ἓν τῶν σωμάτων, ἔχον σχῆμα πλακός, ὥστε ἡ ἄνω αὐτοῦ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἐπίπεδος καὶ ὁριζοντία. Ἐπὶ τῆς πλακὸς ταύτης θέτομεν τὸ ἄλλο σῶμα, τὸ ὁποῖον πιέζεται ἐπὶ τοῦ πρώτου διὰ τοῦ βάρους του B, καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκοῦμεν δύναμιν ὁριζοντίαν F διὰ νήματος, διερχομένου διὰ τῆς αὔλακος παγίας τροχαλίας, εὑρισκομένης εἰς τὸ ἄκρον τῆς τραπέζης. Τὸ νῆμα εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτοῦ φέρει δίσκον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέτομεν βάρη, ἔχοντα τὴν ἐπιθυμητὴν τιμὴν τοῦ F. Ἡ F πρέπει νὰ ἔχῃ τοιαύτην ἔντασιν, ὥστε νὰ θέσῃ τὸ ὑπερκείμενον σῶμα εἰς κίνησιν καὶ νὰ διατηρῇ τὴν κίνησιν αὐτοῦ ὁμαλήν. Προφανῶς ἡ F εἶναι τότε ἴση ἀριθμητικῶς πρὸς τὴν δύναμιν τριβῆς τῶν δύο σωμάτων, διότι ἄν ἦτο μικροτέρα, δὲν θὰ προεκάλει τὴν κίνησιν τοῦ σώματος, ἄν δὲ ἦτο μεγαλυτέρα θὰ ἔδιδεν εἰς τὸ σῶμα κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην. Διὰ τῆς ἀνωτέρω διατάξεως (τριβόμετρον) μετρεῖται ἡ δύναμις τριβῆς μεταξὺ δύο σωμάτων.

Διὰ πολλῶν τοιούτων μετρήσεων εὑρέθησαν οἱ ἀκόλουθοι νόμοι:

1) Ἡ δύναμις τριβῆς, μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν δύο σωμάτων, εἶναι σταθερὰ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως, δηλαδὴ ἀνεξάρτητος τῆς ταχύτητος τῆς κινήσεως.

2) Ἡ δύναμις τῆς τριβῆς μεταξὺ δύο σωμάτων εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μεγέθους τῶν ἐπιφανειῶν ἐπαφῆς αὐτῶν.

Τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ἄν ἐπὶ τῆς πλακὸς τοῦ τριβομέτρου θέσωμεν τρία σώματα, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐντελῶς ὅμοια μεταξύ των, συνδεδεμένα τὸ ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἔπειτα δὲ τὸ ἕν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις θὰ μετρήσωμεν τὴν αὐτὴν δύναμιν τριβῆς, μολονότι ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι τριπλασία ἢ εἰς τὴν δευτέραν.

3. Ἡ δύναμις τριβῆς εἶναι ἀνάλογος τῆς καθέτου πιέσεως N ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς [1]. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τριβομέτρου, ἡ κάθετος πίεσις N εἶναι τὸ βάρος B τοῦ ὑπερκειμένου σώματος. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν

$$F = \eta . N$$

$$\text{καὶ} \quad \eta = \frac{F}{N},$$

ἔνθα η εἶναι ἀριθμὸς σταθερὸς διὰ δύο, ὡρισμένου εἴδους, ἐπιφανείας, καλούμενος ***συντελεστὴς τριβῆς***. Πειραματικῶς ὁ συντελεστὴς τριβῆς ἔχει εὑρεθῇ διὰ τὰ περισσότερα τῶν εἰς τὰς μηχανὰς χρησιμοποιουμένων στερεῶν σωμάτων. Οὕτω διὰ τὴν τριβὴν χυτοσιδήρου ἐπὶ χυτοσιδήρου $\eta = 0{,}14$, ὀρειχάλκου ἐπὶ χυτοσιδήρου $\eta = 0{,}19$ κλπ.

Ὅταν μεταξὺ τῶν τριβομένων ἐπιφανειῶν παρεμβάλλεται λιπαρὰ οὐσία ὁ συντελεστὴς τριβῆς καθίσταται σημαντικῶς μικρότερος, διότι, ὡς ἀπεδείχθη, αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τριβομένων σωμάτων, διὰ τῆς παρεμβολῆς τοῦ λεπτοῦ ὑγροῦ στρώματος τῆς λιπαρᾶς οὐσίας, δὲν ἔρχονται εἰς ἄμεσον ἐπαφήν.

Γωνία τριβῆς. Ἔστω ὅτι ἕν σῶμα εὑρίσκεται ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ δύναται νὰ ὀλισθαίνῃ ἐπ' αὐτοῦ. Ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργεῖ τὸ βάρος αὐτοῦ P, τὸ ὁποῖον ἀναλύεται, ὡς γνωρίζομεν, εἰς δύο συνιστώσας F καὶ K, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον καὶ ἡ K κάθετος ἐπ' αὐτοῦ (§ 47). Αἱ ἐντάσεις τῶν

(1) *Οἱ τρεῖς νόμοι τῆς τριβῆς ἰσχύουν ἐφ' ὅσον δὲν ὑπερβάλλεται ἕν ὅριον εἰς ἣν τιμὴν τῆς καθέτου πιέσεως N.*

συνιστωσῶν τούτων εἶναι $F = P$. ημα καὶ $K = P$. συνα. Τὸ σῶμα, λόγῳ τῆς τριβῆς, θὰ κινηθῇ πρὸς τὰ κάτω, ὅταν ἡ F εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἐκ τῆς τριβῆς ἀντίστασιν, ἡ ὁποία ἔχει τὴν τιμὴν n. $K = n$. P. συν α. Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ κλίσις α τοῦ ἐπιπέδου εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ F νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστασιν τῆς τριβῆς, δηλ. ὅταν P ημα$=$n. P. συν α, τότε τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἰσοταχῶς. Ἡ γωνία κλίσεως α, θὰ λάβῃ τότε τὴν τιμὴν εφα$=$n καὶ καλεῖται ***γωνία τριβῆς***. Ὥστε γωνία τριβῆς, εἰς τὴν περίπτωσιν κεκλιμ. ἐπιπέδου, εἶναι ἡ γωνία, ἡ ἀπαραίτητος ἵνα τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ βάρους του κινηθῇ ὁμαλῶς, καὶ αὕτη εἶναι τόσον μεγάλη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν συντελεστὴν τριβῆς. Ἂν ἡ γωνία κλίσεως φ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τριβῆς α, τότε τὸ σῶμα θὰ τεθῇ εἰς κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην.

Τριβὴ ἐκ κυλίσεως. Ἡ τριβὴ ἐκ κυλίσεως εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως. Ὅταν θέλωμεν νὰ μετατοπίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους βαρὺ σῶμα, δὲν σύρωμεν αὐτὸ πρὸς ὀλίσθησιν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ἀλλὰ τὸ θέτομεν ἐπὶ κυλίνδρων παραλλήλων καὶ διὰ τῆς ὠθήσεως τὸ κινοῦμεν διὰ μικροτέρας δυνάμεως, καθότι τώρα ἔχομεν κύλισιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τριβὴ εἶναι μικροτέρα ἢ κατὰ τὴν ὀλίσθησιν. Εἰς ἕνα τροχὸν ἁμάξης παρουσιάζεται τριβὴ μὲν ἐκ κυλίσεως μεταξὺ τροχοῦ καὶ ἐδάφους, τριβὴ δὲ ἐξ ὀλισθήσεως εἰς τὸν ἄξονα τοῦ τροχοῦ. Πρὸς μετατροπὴν τῆς τριβῆς ἐξ ὀλισθήσεως, εἰς τοὺς ἄξονας τῶν μηχανῶν, εἰς τριβὴν ἐκ κυλίσεως μεταχειρίζονται τοὺς ἐνσφαίρους τριβεῖς (ρουλεμάν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. * 74) Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, κεκλιμένου κατὰ γωνίαν φ$=25^0$, τίθεται σῶμα μάζης 400kg. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ἡ ὁποία ἐνεργοῦσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, α) ἐμποδίζει τὸ σῶμα νὰ ὀλισθήσῃ πρὸς τὰ κάτω· β) σύρει αὐτὸ πρὸς τὰ ἄνω. Συντελεστὴς τριβῆς $n = 0{,}2$, $g = 9{,}81$ m.sec^{-2}.

* 75. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ γωνίαν φ$=33^0$ κεῖται σῶμα μάζης 640 kg. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μικροτέρα τιμὴ μιᾶς δυνάμεως P, σχηματιζούσης μετὰ τοῦ κεκλ. ἐπιπέδου γωνίαν 21^0, ἡ ὁποία θὰ ἐμποδίσῃ τὸ σῶμα νὰ ὀλισθήσῃ πρὸς τὰ κάτω. Συντελεστὴς τριβῆς $n = 0{,}01$.

* 76) Ἐπὶ ἐπιπέδου κεκλιμένου κατὰ γωνίαν $27^0 45'$ εὑρίσκεται σῶμα βάρους 382 kg*. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $n = 0{,}24$, νὰ εὑρεθῇ ποία δύναμις θὰ ἐμποδίσῃ τὸ σῶμα νὰ κινηθῇ α) ἂν ἡ δύναμις αὕτη ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ β) ἂν αὕτη εἶναι ὁριζονία.

Β. * 77) Κύβος ὀλισθαίνων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, κατὰ γωνίαν φ$=28^0$, διατρέχει αὐτὸ εἰς 8 sec, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ κίνησις γίνεται ἄνευ τριβῆς. Ἐὰν ὅμως ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ τριβή, τότε τὸ σῶμα διατρέχει τὸ κεκλιμ. ἐπίπεδον εἰς 12 sec. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ πόσος ὁ συντελεστὴς τριβῆς η; <$g=981$ cm. sec^{-2}>.

* 78) Κεκλιμένον ἐπίπεδον, μήκους 120 m καὶ κλίσεως ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον 14^0, διατρέχεται ὑπὸ σώματος, κινουμένου λόγῳ τοῦ βάρους του, εἰς 30 sec. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς n;

* 79) Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σῶμα διατρέχει εἰς 3 sec τὸ τὸ διάστημα 15 m. Ποία ἡ γωνία κλίσεως αὐτοῦ, ἂν $n=0,4$;

* 80) Σῶμά τι εἰς $t=10$ sec διατρέχει ὀλισθαῖνον ὁλόκληρον τὸ μῆκος $s=66$ m κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς n ἔχει τὴν τιμὴν 0,25, νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία κλίσεως φ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Γ. * 81) Σῶμα ὠθεῖται ἐκ τοῦ κατωτέρου ἄκρου κεκλιμένου ἐπιπέδου, κατὰ γωνίαν $\varphi=30^0$, καὶ πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $\upsilon_0=80$m. sec^{-1} Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $n=0,05$, νὰ εὑρεθῇ πόσον διάστημα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ διατρέξῃ τὸ σῶμα τοῦτο.

* 82) Μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 18 m.sec^{-1} ὠθεῖται σῶμα λοξῶς πρὸς τὰ ἄνω, κατὰ μῆκος ἐπιπέδου κεκλιμένου κατὰ $\varphi=20^0$. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου θὰ ἀνέλθῃ τοῦτο; Συντελεστὴς τριβῆς $n=\frac{1}{40}$, $g=981$ m.sec^{-2}.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

*85. ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ. Εἰς τὸ § 5 (σελ. 12) ἀνεφέραμεν, ὅτι τὸ μῆκος, ἡ μᾶζα καὶ ὁ χρόνος ἐλήφθησαν ὡς θεμελιώδη μεγέθη αἱ μονάδες καὶ αὐτῶν ὡς θεμελιώδεις μονάδες. Τὰ λοιπὰ μεγέθη τῆς φυσικῆς καλοῦνται παράγωγα μεγέθη, διότι ταῦτα δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν. Αἱ μονάδες τῶν λοιπῶν (πλὴν τῶν θεμελιωδῶν) μεγεθῶν παράγονται ἐκ τῶν ἀμέσων ἢ ἐμμέσων σχέσεων αὐτῶν πρὸς τὰς θεμελιώδεις μονάδας καὶ ἕνεκα τούτου ἐκλήθησαν ὡς εἴδομεν, παράγωγοι μονάδες.

Διὰ νὰ καταδείξωμεν τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν καὶ τῶν λοιπῶν τοιούτων, τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὴν φυσικήν, ἄς λάβωμεν μερικὰ παραδείγματα. Τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας εἶναι μέγεθος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ θεμελιώδους μεγέθους, τοῦ μήκους. Πράγματι:

$$\text{Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας} = \text{Μῆκος} \times \text{Μῆκος}.$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν

$$\text{Ὄγκος} = \text{Μῆκος} \times \text{Μῆκος} \times \text{Μῆκος}$$

$$\text{Ταχύτης} = \frac{\text{Μῆκος}}{\text{Χρόνος}} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἐὰν τὸ μῆκος (Longueur) παραστήσωμεν διὰ τοῦ συμβόλου L, τὴν μᾶζαν (Masse) διὰ τοῦ M καὶ τὸν χρόνον (Temps) διὰ τοῦ T, θὰ ἠδυνάμεθα ὡσαύτως νὰ παρασιήσωμεν μὲ κατάλληλον συμβολισμὸν καὶ τὰ λοιπὰ παράγωγα μεγέθη, διά τινος συνδυασμοῦ τῶν συμβόλων L, M, T τῶν θεμελιωδῶν μεγεθῶν. Αἱ ἀνωτέρω σημειωθεῖσαι σχέσεις τῆς ἐπιφανείας, τοῦ ὄγκου καὶ τῆς ταχύτητος πρὸς τὰ θεμελιώδη μεγέθη θὰ ἠδύνατο νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς:

$$[\text{Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας}] = [L.L] = [L^2]$$
$$[\text{Ὄγκος}] = [L^3]$$
$$[\text{Ταχύτης}] = \left[\frac{L}{T}\right] = [L.T^{-1}]$$

Αἱ ἀγκύλαι τίθενται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἵνα δηλώσουν ὅτι αἱ σημειούμεναι σχέσεις δὲν εἶναι ποσοτικαί, ἀλλὰ ποιοτικαί.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὡς γνωστόν, $L^0 = 1$ ἢ $M^0 = 1$, ἢ $T^0 = 1$ τότε αἱ ἀνωτέρω σχέσεις δύνανται νὰ γραφοῦν :

$$[\text{Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας}] = [L^2M^0T^0]$$
$$[\text{Ὄγκος}] = [L^3M^0T^0]$$
$$[\text{Ταχύτης}] = [L^1M^0T^{-1}] \quad \text{κ. ο. κ.}$$

Τοὺς ἐκθέτας τῶν L, M, T, εἰς τὴν τοιαύτην παράστασιν ἑνὸς μεγέθους καλοῦμεν ***διαστάσεις*** τοῦ μεγέθους τούτου. Οὕτως ὁ ὄγκος ἔχει διαστάσεις +3, 0, 0, ἡ ταχύτης +1, 0, −1.

Ἐπεκτείνοντες τὰ ἀνωτέρω καὶ εἰς ἄλλα παραδείγματα θὰ ἔχωμεν:

Διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν $[\gamma] = \left[\frac{\upsilon}{T}\right] = \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = [LT^{-2}]$ ἢ $[L^1M^0T^{-2}]$

Διὰ τὴν δύναμιν $[F] = [M][\gamma] = [M.L.T^{-2}]$

κ. τ. λ.

Ὁ συμβολισμὸς τῶν μονάδων τῶν παραγώγων μεγεθῶν γίνεται βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων. Εἴδομεν εἰς τὸ § 8, ὅτι τὴν μονάδα ταχύτητος συμβολίζωμεν διὰ τῆς παραστάσεως $\frac{cm}{sec} = cm\ sec^{-1}$, εἰς τὸ § 9 (σελ. 24) ὅτι τὴν μονάδα ἐπιταχύνσεως σημειοῦμεν διὰ τῆς παραστάσεως $\frac{cm\ sec^{-1}}{sec} = cm\ sec^{-2}$ κλπ.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. 24 m, ***2.*** $5\frac{m}{sec}$, $1{,}2\frac{m}{sec}$ ***3.*** $\gamma = 5\frac{cm}{sec^2}$ καὶ $S = 900$ m·
4. $\gamma = 20$ cm. sec^{-2}. ***5.*** $\gamma = 9 m.sec^{-2}$, $\upsilon_0 = 42$ m. sec^{-1}. ***6.*** 6 sec.
7. $\omega = 3{,}14$ ἀκτίνια. ***8.*** $\upsilon = 90$ cm.sec^{-1}, N = 43,5 στροφαὶ περίπου.
9. 12,3 kg*. ***10.*** 9,124 kg*. ***11.*** 8 kg*. ***12.*** Σ = 19,5 kg*, ΑΓ = 143cm. ***13.*** ΑΒ = 16,8 cm, f = 16,183 gr*. ***14.*** α) R = 10,65 kg*, β) ΒΓ = 30,17 cm, $\gamma = \widehat{B\Gamma R} = 106^0\ 21'\ 39''$. ***15.*** Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης εἶναι προφανῶς R = 18 kg*. Ἂν ὡς κέντρον τῶν ῥοπῶν λάβωμεν λ.χ.

τὸ σημεῖον A_1, θὰ ἔχωμεν, βάσει τοῦ θεωρήματος τῶν ῥοπῶν : $(A_1\Gamma)\,18 = 9.29 + 10.44 - 8.29$, ἂν μὲ Γ παραστήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς ἐφαρμογῆς τῆς R, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας A_1A_4. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν $(A_1\Gamma) = 33\frac{11}{18}$ cm. ***16.*** $R = 11$ kg*, $BP = 0{,}34545$ m. ***17.*** $R = 50$ kg*, $x = 9{,}1$ cm. ***18.*** $m = 30$ gr. ***19.*** $F = 140.000$ dyne. ***20.*** $\upsilon = 228{,}57$ m sec^{-1}. ***21.*** 78 750 000 dyne ἢ 80,275 kg*. ***22.*** $\gamma = 7{,}89$ m. sec^{-2} ***23.*** $m = 400$ gr. ***24.*** $F = 1478{,}94$ gr*. ***25.*** 4663,6 km ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς γῆς καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων σωμάτων. ***26.*** $\delta = 9{,}4$ cm. ***27.*** Κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου $\delta = 18{,}415$ cm. ***28.*** Ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς ἀγομένης εἰς τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου καὶ εἰς ἀπόστασιν $\delta = 13{,}2$ cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ***29.*** $h = 17{,}136$ cm. ***30.*** $F = 340{,}2$ kg*, $\varphi = 56^{\circ}\,19'$. ***31.*** $t = 20$ sec, $\upsilon = 196{,}2$ m.sec^{-1}. ***32.*** $H = 490$ m. ***33.*** $A\Gamma = 1489{,}1$ m. ***34.*** 9,8 m. sec^{-2}. ***35.*** 8 sec. ***36.*** $\upsilon_0 = 127{,}4$ m. sec^{-1}, $H = 828{,}1$ m. ***37.*** 1280,2 m. ***38.*** $x = 5663{,}1$ m, $y = 5283{,}8$ m. ***39.*** $\upsilon_0 = 168{,}28$ m. sec^{-1}, $y = 360{,}84$ m. ***40.*** $\upsilon_0 = 43{,}5$ m. sec^{-1}, $\varphi = 40^{\circ}6'$. ***41.*** Ἡ ἄσκησις αὕτη λύεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (47), ὅταν θέσωμεν εἰς αὐτὴν τὰς τιμὰς τῶν x, y καὶ $g = 9{,}81$ m. sec^{-2}, ὅτε εὑρίσκομεν $\upsilon_0 = 45{,}4$ m. sec^{-1}. ***42.*** $M = 245$ gr. ***43.*** 1,20 m. ***44.*** Πρὸς τὸ P, $\gamma = 2{,}45$ m. sec^{-2}. ***45.*** $\mu = 61{,}98$ gr. ***46.*** $\upsilon = 2{,}80$ cm. sec^{-1} καὶ ἄνω. ***47.*** $\varphi = \pm 86^{\circ}\,34'\,52''$, $F = 1257{,}6$ kg*. ***48.*** 3 438 500 000 erg, 343,85 joule, 35 kg*m. ***49.*** $13{,}2.10^{-6}$ ergs. ***50.*** 9,9328 m. ***51.*** 2293,57 m. ***52.*** $F = 64$ kg*, $R = 384$ kg*. ***53.*** 7,5 cm. ***54.*** $O\widehat{B}A = 29^{\circ}\,45'$ καὶ $O'\widehat{B}\Gamma = 60^{\circ}\,15'$. ***55.*** $x_1 = 15$ dm ἢ $x_2 = 5$ dm. ***56.*** 18 cm. ***57.*** $P = 81{,}66$ kg*. ***58.*** 568 kg*. ***59.*** α) 64,279 kg* καὶ β) 83,910 kg*. ***60.*** 11,2 kg*. ***61.*** $x = 240$ gr.*, $\lambda_1 : \lambda = 15 : 16$. ***62.*** $x = 19$ gr*. ***63*** (ἡ ἄσκησις αὕτη φέρει ἐκ λάθους τὸν ἀριθμὸν 62, εἰς σελ. 140) 7,19 mg. ***64.*** $g = 976{,}1$ cm. sec^{-2}. ***65.*** $g = 982{,}53$ cm. sec^{-2}. ***66.*** $x = 6{,}2$ cm ***67.*** $l - l' = 3{,}14$ mm. ***68.*** $k = 656{,}5.10^{-10}$. ***69.*** $g = 982{,}45$ cm. sec^{-2}. ***70.*** $\gamma = 0{,}37$ g. ***71.*** $\gamma = 0{,}822$ g. ***72.*** 54,1413 γηΐνας ἀκτῖνας. ***73.*** 991,9 mm. ***74.*** α) 96,545 kg*, β) 241,55 kg*. ***75.*** 369 kg*. ***76.*** α) 96,728 kg*, β) 97,044 kg*. ***77.*** α) $g.\,\eta\mu\,28^{\circ} = \frac{2\,s}{t^2}$, $s = 147$ m, β) $mg.\eta\mu 28^{\circ} - mg.\,\sigma\upsilon\nu 28^{\circ}.n = m\,\frac{2.147}{12^2}$, $n = 0{,}3$. ***78.*** $n = 0{,}22131$. ***79.*** $40^{\circ}\,11'\,32''$. ***80.*** $mg.\eta\mu\varphi - \eta.mg.\,\sigma\upsilon\nu\varphi = m\,\frac{2\,s}{t^2}$ ἢ $\eta\mu\varphi - \eta.\,\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{2\,s}{gt^2}$. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ η θέσωμεν τὴν τιμήν του $\eta = \varepsilon\varphi\,\alpha$, ἔνθα α = γωνία τριβῆς, θὰ ἔχωμεν $\eta\mu\,(\varphi - \alpha) = \frac{2\,s.\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha}{g\,t^2}$. Ἀλλὰ $\varepsilon\varphi\,\alpha = \eta = 0{,}25$. Ὅθεν $\alpha = 14^{\circ}\,2'$. Ἐὰν θέσωμεν $\varphi - \alpha = x$, θὰ ἔχωμεν $\eta\mu\,x = 0{,}1305$ καὶ $x = 7^{\circ}\,30'$. Ὅθεν $\varphi = 21^{\circ}\,32'$. ***81.*** Κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου ἔχομεν εἰς τὸ ἀνώτερον σημεῖον τῆς διαδρομῆς ἰσότητα τῆς προσδο-

θείσης ἐνεργείας $\frac{m v_0^2}{2}$ καὶ τοῦ παραχθέντος ἔργου F. s = mg (ημ 30° + η. συν 30°). s ὑπὸ τῆς ἀντισιάσεως τῆς τριβῆς. Δηλ. mg (ημ 30° + η. συν 30°). s = $= \frac{m v_0^2}{2}$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τελικῶς s = 600,40 m.
82 45 m.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Γ. Ἀθανασιάδου*, Ἐπίτομος Φυσική.
2. *Τ. Ἀργυροπούλου*, Μαθήματα Πειραματικῆς Φυσικῆς, 1892.
3. **A. Berliner**, Lehrbuch der Physik, 1934.
4. *Κ. Γεωργικοπούλου*, Παραδόσεις Θεωρητικῆς Μηχανικῆς, *Τεῦχος Α'*, 1937.
5. **Ganot - Maneuvrier**, Traité de Physique.
6. **Grimsehl - Tomaschek**, Leurbuch der Physik, *Band I*, 1942.
7. **W. Guttmann**, Grundriss der Physik, 1919.
8. **H. Kayser**, Lerhbuch der Physik, 1900.
9. **E. Lecher**, Lehrbuch der Physik, 1919.
10. **E. Lommel**, Lehrbuch der Experimentalphysik, 1906, 1920
11. **E. Mach**, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 1933.
12. **G. Mahler - K. Mahler**, Physikalische Formelsammlung, 1943.
13. *Κ. Παλαιολόγου*, Φυσική, Μέρος Πρῶτον, 1939.
14. **H. Reich**, Angewandte Geophysik, *1. Teil*, 1933.
15. *Δ. Χόνδρου*, Μαθήματα Φυσικῆς, *Τόμος I.*
16. **R. Weber**, Angewandte Elementar - Mathematik, *Band 3, 1. Teil*, Mathematische Physik, 1923.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΕΦ. Α΄ ΚΙΝΗΤΙΚΗ (ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ)

ΚΕΦ. Β΄ ΣΤΑΤΙΚΗ

α) ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

β) ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΚΕΦ. Γ′ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦ Δ′ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΟΣ ΔΥΝΑΜΙΣ

ΚΕΦ. Ε′ ΒΑΡΥΤΗΣ

ΚΕΦ. ΣΤ΄ ΕΡΓΟΝ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΚΕΦ. Ζ΄ ΑΠΛΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

ΚΕΦ. Η΄ ΕΚΚΡΕΜΕΣ