Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ε 1 ΦΣΚ

Φυσική ς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΕΙΣΙΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

"ΕΝΩΣΕΩΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ„

Φυσική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

15

1941

ΕΚΔΟΣΙΣ
Α. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 50

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΕΙΣΙΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Ε 1, 928 κ
Φυσική

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Χ. ΣΤΥΛΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ-Γ. ΚΟΥΝΙΑΚΗ, Σ. ΤΖΟΥΜΕΛΕΑ, ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ
Γ. ΒΟΥΝΑΤΣΟΥ - Δ. ΠΑΤΡΙΚΙΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Ε.Μ.Π.
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ - ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙ
ΠΑΥΛΟΥ ΒΙΔΩΡΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ
Αὔξ. ἀρ. καταθέσεω 1125
δυνάμει τοῦ νόμου 1561. 1939

1941

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ - Α. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΓΩΝΙΑ ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ - ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 50
ΑΘΗΝΑΙ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

002
νιε
ετ3
171

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.

ΜΕΡΟΣ Α'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΙΝΗΤΙΚΗ — ΣΤΑΤΙΚΗ — ΔΥΝΑΜΙΚΗ.

1) Πόσον χρόνον χρειάζεται εἷς ἀστὴρ διά νά ἀποστείλη τὸ φῶς του εἰς τὴν γῆν, γνωρίζοντες ὅτι ἡ διαχωρίζουσα ἡμᾶς ἀπό τούτου ἀπόστασις εἶναι 2.10^9 γήϊναι ἀκτῖνες καί ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός του εἶναι 3.10^5 χιλμ. εἰς τό δευτερόλεπτον.

Λύσις: 1 γηΐνη ἀκτίς $= 6366$ χιλμ.

καί ~~2~~ 2.10^9 γήϊναι ἀκτῖνες $= 6366 \times 2.10^9 = 12.732.10^9$ χιλμ.

Ἐξ ἄλλου, ἡ φωτεινή ἀκτίς τοῦ ἀστέρος διατρέχει 3.10^5 χλμ. εἰς τό δευτερόλεπτον, ἄρα τά $12.732.10^9$ χιλμ. θά διατρέξῃ εἰς:

$$12732.10^9 \text{ χιλμ} = \frac{12732.10^9}{3.10^5} = \frac{12732.10^9}{3} =$$

$$= 4244 \times 10^4 \text{ δευτερόλεπτα} = \frac{4244 \times 10^4}{60} \text{ πρῶτα λεπτά} =$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$= \frac{4244 \times 10^2}{36} \text{ ὧραι} = \frac{4244 \times 10^2}{36 \times 24} \text{ ἡμέραι} =$$

$$= \frac{4244 \times 10^2}{36 \times 24 \times 365} \text{ ἔτη.}$$

2) Ἕν κινητόν ἀρχίζει μέ μίαν ταχύτητα ὁμοιόμορφον καί δέχεται μίαν ἐπιτάχυνσιν 6μ., ἡ ὁποία τό κάμη νά διανύση ἕν διάστημα 360μ. εἰς 10 δευτερόλεπτα. Ποία εἶναι ἡ τελική ταχύτης τοῦ κινητοῦ τούτου;

<u>Λύσις</u>: Γνωρίζομεν ὅτι: $\delta = \tau_\alpha x + \frac{1}{2} \gamma x^2$.

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦτον καί λύοντες αὐτόν ὡς πρός τήν ἀρχικήν ταχύτητα, ἔχομεν:

$$\tau_\alpha = \frac{\delta}{x} - \frac{\gamma x}{2}$$

ἤ δίδοντες τάς τιμάς τοῦ προβλήματος:

$$\tau_\alpha = \frac{360}{10} - \frac{6 \times 10}{2} = 36 - 30 = 6\mu.$$

Ἐξ ἄλλου ὅμως ἡ τελική ταχύτης παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\tau = \tau_\alpha + \gamma x \quad \text{ἀλλά} \quad \tau_\alpha = 6\mu.,\ \gamma = 6\mu.,\ x = 10 \text{ δλ.},$$

ὅθεν: $$\tau_\tau = 6 + (6 \times 10) = 66\mu.$$

Ἄρα ἡ τελική ταχύτης τοῦ κινητοῦ τούτου εἶναι 66 μέτρα εἰς τό δευτερόλεπτον.

3) Κινητόν ὑπόκειται εἰς τήν ἐνέργειαν δυνάμεως, ἥτις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεταδίδει εἰς αὐτό ἐπιτάχυνσιν 9,8088 μ. κατά δευτερόλεπτον. Νά εὑρεθῇ ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος, ἣν θά λάβῃ μετά 20 πρῶτα λεπτά.

Λύσις: Ἀφοῦ κατά ἕν δευτερόλεπτον ἡ αὔξησις τῆς ταχύτητος εἶναι 9,8088, εἰς τά 20' ἡ αὔξησις θά ἰσοῦται μέ:

$$9{,}8088 \,.\, 20 \,.\, 60'' = 9{,}8088 \,.\, 1200'' = 11770{,}56\,\mu.$$ m sec⁻¹

4) Κινητόν διήνυσεν εἰς 8'' 313,8816 μ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσίς του.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 \quad , \text{ἐξ οὗ} \quad \gamma = \frac{2\delta}{x^2} \,,$$

$$\gamma = \frac{2 \,.\, 313{,}8816}{8^2} = \frac{627{,}7632}{64} \quad \text{Ἄρα } \gamma = 9{,}80255\,\mu.$$

5) Κινητόν ἔχον κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, διέτρεξε 1000 μ. εἰς τά 10 πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του. Πόσον διάστημα θά διανύσῃ μέχρι τό $18^{ον}$ δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του;

Λύσις: Ἔχομεν: $\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2$

ὅθεν: $1000 = \frac{1}{2}\gamma \,.\, 100$ καί $\gamma = 20$.

Ἐάν δέ τό ζητούμενον διάστημα:

$$\delta = \frac{1}{2}\, 20\, (18)^2 \quad \text{ἤ} \quad \delta = 10 \,.\, 324 = 3240\,\mu.$$ (ἀπό τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεώς του).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6) Σώμα ἐπί 5 δευτερόλεπτα ὑπέκειτο εἰς τήν ἐνέργειαν ἐπιταχυντικῆς δυνάμεως, εἰς τό τέλος δέ τοῦ $5^{ου}$ δευτερολέπτου ἡ δύναμις αὕτη ἔπαυσε νά ἐνεργῇ. Οὕτω, τό κινητόν διέτρεξεν εἰς τά ἑπόμενα 18 δευτερόλεπτα 450μ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις καί τό διάστημα τό διανυθέν κατά τά 5 πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του.

<u>Λύσις:</u> Ἐφ' ὅσον ἔπαυσε νά ἐνεργῇ ἡ δύναμις, τό σῶμα θά ἀρχίσῃ νά κινῆται ἰσοταχῶς, μέ ταχύτητα τήν ταχύτητα τῆς μεταβαλλομένης κατά τό τέλος τῶν 5 δευτερολέπτων. Ἔχω:

$$\delta = \tau \cdot x \ , \ \text{ἄρα} \ \ \tau = \frac{\delta}{x} \ , \ \tau = \frac{450}{18} = 25\mu. \quad \tau = \gamma x$$

$$\gamma = \frac{\tau}{x} \ , \ \gamma = \frac{25}{5} = 5 \ , \ \delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 \ , \delta = \frac{1}{2} 5 (5)^2 =$$

$$= \frac{125}{2} = 62{,}5 \ \mu.$$

7) Κινητόν ὑφίσταται τήν ἐνέργειαν ἐπιβραδυντικῆς δυνάμεως, ἥτις δίδει εἰς αὐτό ἐπιβράδυνσιν 15μ. ἀνά 1 δευτερ., οὕτω δέ τό κινητόν σταματᾷ μετά πάροδον 24 δευτ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀρχική του ταχύτης.

<u>Λύσις</u>: Εἰς τήν ἐπιβραδυντικήν κίνησιν ἔχομεν:

$$T = T_0 - \gamma x \ ,$$

ἀλλ' ἐφ' ὅσον τό κινητόν σταματᾷ, ἔχομεν:

$$T = 0 \ , \ \text{ἤτοι} \quad 0 = T_0 - \gamma x \ , \ \text{ἤ} \ \ T_0 = \gamma x \ .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν : $T_0 = 15 . 24$, ἄρα $T_0 = 360 \mu$.

8) Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης κινητοῦ εἶναι 800 μ. κατὰ δευτερόλεπτον · ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐπιβραδυντικῆς δυνάμεως, τὸ κινητὸν τοῦτο σταματᾷ μετὰ 20 δευτερ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιβράδυνσις, ἣν μεταδίδει εἰς αὐτὸ ἡ δύναμις αὕτη.

<u>Λύσις:</u> Εἰς τὴν ἐπιβραδυντικὴν κίνησιν ἔχομεν:

$$T = T_0 - \gamma x ,$$

ἐφ' ὅσον δὲ τὸ κινητὸν σταματᾷ , τότε:

$$T = 0 , \text{ ἤτοι } 0 = T_0 - \gamma x \text{ ἢ } T_0 = \gamma x$$

$$\text{καί: } \gamma = \frac{T_0}{x} = \frac{800}{20} = 40 , \text{ ἄρα } \gamma = 40 \mu . \text{ εἰς τὸ δλ.}$$

9) Ἡ ἀπόστασις δύο σταθμῶν σιδηροδρόμου εἶναι ἴση πρὸς 10 χιλμ. καὶ διανύεται ὑπὸ τούτου μετὰ κινήσεως ὁμαλῆς ἐντὸς 10 περίπου λεπτῶν. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ σιδηροδρόμου καθ' ὥραν;

<u>Λύσις:</u> Τὰ 10' εἶναι τὰ $\frac{10}{60}$ ἢ τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὥρας.

Ἐκ τοῦ τύπου: $\delta = \tau x$ ἔχομεν:

$$\tau = \frac{\delta}{x} , \text{ ὅθεν: } \tau = \frac{10}{\frac{1}{6}} = 60 \text{ χιλμ. καθ' ὥραν}$$

10) Σῶμα, εἰς ἠρεμίαν εὑρισκόμενον, ὑποβάλλεται αἴφνης εἰς τὴν ἐνέργειαν σταθερᾶς δυνάμεως , ἥτις μεταδίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν 5,75 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Ζητεῖται μετὰ πό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σον χρόνον θά διατρέξῃ 1996,675 μ.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$δ=\frac{1}{2}γx^2 \quad , \text{ ἤτοι: } \quad 1996,675=\frac{5,75}{2}\cdot x^2$$

Λύω ὡς πρός x καί ἔχω:

$$x=\sqrt{\frac{2.\ 1996,675}{5,75}}$$

11) Νά εὑρεθῇ εἰς τήν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν ἡ ταχύτης συναρτήσει τοῦ διαστήματος.

Λύσις: Ἔχομεν:

$$(1) \qquad δ=\frac{1}{2}γx^2 \quad \text{καί} \quad τ=γx.$$

Ἑπομένως: $τ^2=γ^2x^2$, ὅθεν $\frac{τ^2}{γ^2}=x^2$

Ἀντικαθιστῶντες τό x^2 εἰς τήν (1) διά τοῦ ἴσου του, ἔχομεν:

$$δ=\frac{1}{2}γ\frac{τ^2}{γ^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{τ^2}{γ}=\frac{τ^2}{2γ} \qquad .τ^2=2δγ\,,\ τ=\pm\sqrt{2γδ}$$

12) Κινητόν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας μετά κινήσεως ὁμαλῶς μεταβαλλομένης. Ποῖον εἶναι τό διανυθέν διάστημα μετά παρέλευσιν τριῶν ὡρῶν, ἐάν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι +2 χιλιομ. καθ' ὥραν. Ποῖον δέ, ἐάν εἶναι − 2 χιλμ.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι: $δ=\frac{1}{2}γx^2$

ὅθεν : $$δ=\frac{1}{2}.2.(3)^2 = 9 \text{ χλμ}$$

$$δ=-\frac{1}{2}.2.(3)^2=-9 \text{ χιλμ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δηλαδή, θά διανύση τήν πρώτην φοράν 9 χιλιόμετρα, τήν δέ δευτέραν 9 χιλμ., ἀλλά κατ' ἀντίθετον φοράν.

13) Δύο κινητά ἀναχωροῦν ἐκ τῶν δύο ἄκρων A καί B, οὕτως ὥστε νά συναντηθοῦν μέ ταχύτητας τ καί τ'. Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ τό σημεῖον Γ τῆς συναντήσεώς των.

<u>Λύσις:</u> Ἔστω Γ τό σημεῖον τῆς συναντήσεώς των, θέτω δέ: $A\Gamma = x$, $AB = \alpha$, ὁπότε καί $\Gamma B = \alpha - x$. Ἔστω y ὁ χρόνος, εἰς τό τέλος τοῦ ὁποίου θά γίνῃ ἡ συνάντησις. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι: $\delta = \tau y$, τότε: $x = \tau y$ καί $\alpha - x = \tau' y$, ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$y = \frac{x}{\tau} \quad \text{καί} \quad y = \frac{\alpha - x}{\tau'}, \quad \text{ὅθεν}: \frac{x}{\tau} = \frac{\alpha - x}{\tau'}$$

καί λύοντες τήν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρός x, εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{\alpha\tau}{\tau + \tau'}$$

καί ἐπειδή $x = \tau y$, ἔχομεν:

$$\tau y = \frac{\alpha\tau}{\tau + \tau'}, \quad \text{ὅθεν}: \quad y = \frac{\alpha}{\tau + \tau'}$$

Ἄρα ἡ συνάντησις θά γίνῃ εἰς χρόνον $y = \frac{\alpha}{\tau + \tau'}$ καί εἰς ἀπόστασιν ἐκ τοῦ A $x = \frac{\alpha\tau}{\tau + \tau'}$

14) Ποία θά εἶναι ἡ γραμμική ταχύτης σημείου κειμένου εἰς ἀπόστασιν 5μ. ἀπό τοῦ ἄξονος περιστρεφομένου τροχοῦ, ἔχοντος γωνιώδη ταχύτητα 7 εἰς τό δευτερόλεπτον;

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι ἡ γραμμική ταχύτης, ἡ γωνιώδης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και ή αύτῆς περιστροφῆς συνδέονται διά τῆς σχέσεως : $\upsilon = \omega\rho$.

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τά δεδομένα, ἔχομεν:

$$\upsilon = 7 \times 5 = 35 \mu.$$

15) Δύο σώματα ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, χωρίς ἀρχικήν ταχύτητα. Πότε θά χωρίζωνται ὑπό μιᾶς ἀποστάσεως 200 μέτρων, ἄν τό δεύτερον πέσῃ 3 δλ. ἀργότερον. Νά εὑρεθοῦν καί τά διαστήματα πού θά ἔχουν διανύσῃ κατά τήν στιγμήν αὐτήν.

Λύσις : Ἔστω ὅτι μετά x δευτερόλεπτα ἀπό τῆς πτώσεως τοῦ δευτέρου σώματος θά χωρίζωνται ὑπό μιᾶς ἀποστάσεως 200 μέτρων.

Τό πρῶτον σῶμα θά κινηθῇ ἐπί $x+3$ δευτερόλεπτα καί θά διανύσῃ διάστημα :

$$OA = \frac{1}{2} g (x+3)^2 \qquad (1) .$$

Τό δεύτερον σῶμα θά κινηθῇ ἐπί x δευτερόλεπτα καί θά διανύσῃ διάστημα :

$$OB = \frac{1}{2} g x^2 \qquad (2) .$$

Ἐπειδή θά ἀπέχουν κατά 200 μέτρα, θά ἔχωμεν:

$$OA - OB = 200 = \frac{1}{2} g (x+3)^2 - \frac{1}{2} g x^2$$

$$200 = 3gx + \frac{9}{2} g ;$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρός x, εὑρίσκομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$x = 5,3 \text{ δλ.}$$

Θέτοντες τήν τιμήν τοῦ x είς τήν (2), λαμβάνομεν:

$$OB = \frac{1}{2} g (5,3)^2 = 137,64 \text{ μ.}$$

Ὅθεν τό μέν δεύτερον σῶμα διήνυσε 137,64 μ., τό δέ πρῶτον 137,64 + 200 = 337,64 μ.

16) Σῶμα ἀνυψοῦται κατακορύφως μέ ἀρχικήν ταχύτητα 490 μ. κατά δευτερόλεπτον. Μέ ποίαν ἀρχικήν ταχύτητα πρέπει νά ἀνυψωθῇ δεύτερον σῶμα 10 δευτερόλεπτα ἀργότερον, διά νά φθάσουν ταὐτοχρόνως εἰς τό ἔδαφος κατά τήν πτῶσιν των. Νά εὑρεθῇ καί τό ἀνώτατον ὕψος, εἰς τό ὁποῖον θά φθάσῃ ἕκαστον σῶμα.

<u>Λύσις:</u> Ὁ χρόνος, τόν ὁποῖον χρειάζεται τό πρῶτον σῶμα διά νά ἀνέλθῃ, εἶναι:

$$x = \frac{\tau}{g} = \frac{490}{9,80} = 50''.$$

Τόν αὐτόν χρόνον χρειάζεται διά νά κατέλθῃ εἰς τό ἔδαφος, ἤτοι τό πρῶτον σῶμα θά πέσῃ εἰς τό ἔδαφος μετά 50+50 = 100''.

Τό δεύτερον σῶμα θά πέσῃ εἰς τό ἔδαφος μετά 100−10=90'' καί ἐπομένως ὁ χρόνος τῆς ἀνυψώσεώς του θά εἶναι 45''.

Ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου σώματος θά εἶναι λοιπόν:

$$\tau = gx = 9,80 \times 45 = 439 \text{ μ.}$$

Τό ἀνώτατον ὕψος, εἰς τό ὁποῖον θά φθάσῃ τό πρῶτον σῶμα, εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

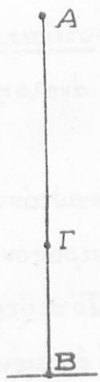
$$\upsilon = \frac{\tau^2}{2g} = \frac{490^2}{2 \cdot 9{,}80} = 12250 \mu.$$

Τοῦ δέ δευτέρου σώματος εἶναι:

$$\upsilon = \frac{\tau^2}{2g} = \frac{439^2}{2 \cdot 9{,}80} = 9832{,}70 \mu.$$

17) Νά εὑρεθῇ ποῖον διάστημα διανύει ἕν κινητόν κατά τό πέμπτον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του.

Λύσις: Τό ζητούμενον διάστημα θά εὑρεθῇ, ἐάν ἀπό τό διάστημα πού διανύει τό κινητόν εἰς 5 δλ. ἀφαιρέσωμεν τό διάστημα πού διανύει εἰς 4 δλ.



Τό κινητόν εἰς 5 δλ. διανύει διάστημα:

$$AB = \frac{1}{2} g x^2 = \frac{1}{2} 9{,}80 . 5^2 = 122{,}5 \mu.$$

Τό κινητόν εἰς 4 δλ. διανύει διάστημα:

$$A\Gamma = \frac{1}{2} g x^2 = \frac{1}{2} 9{,}80 \cdot 4^2 = 78{,}40 \mu$$

Ἑπομένως, κατά τό πέμπτον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του, διανύει διάστημα:

$$\Gamma B = AB - A\Gamma = 122{,}50 - 78{,}40 = 44{,}10 \mu.$$

18) Ἕν σῶμα πίπτει κατά τήν ἐλευθέραν πτῶσιν ἐκ τινος σημείου υ. Μερίσατε τό ὕψος εἰς ν μέρη, τά ὁποῖα θά διανυθοῦν εἰς χρόνους ἴσους.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω T ἡ ὁλικὴ διάρκεια τῆς πτώσεως. Τότε ἔχομεν:

$$\upsilon = \frac{gT^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad T = \sqrt{\frac{2\upsilon}{g}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{T}{\nu} = \sqrt{\frac{2\upsilon}{g\nu^2}}$$

Ἐὰν τὰ ζητούμενα τμήματα εἶναι $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\ldots \upsilon_\nu$, ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος θὰ χρειασθῇ νὰ διατρεχθοῦν κεχωρισμένως, εἶναι $\frac{T}{\nu}$. Τότε, λοιπόν, εὑρίσκομεν:

$$\upsilon_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{2} g \frac{2\upsilon}{g\nu^2} = \frac{\upsilon}{\nu^2},$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{2T}{\nu}\right)^2 = \frac{4\upsilon}{\nu^2}$$

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 = \frac{1}{2} g \left(\frac{3T}{\nu}\right)^2 = \frac{9\upsilon}{\nu^2} \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ὁπότε ἀφαιροῦντες, λαμβάνομεν

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{\nu^2}, \quad \upsilon_2 = \frac{3\upsilon}{\nu^2}, \quad \upsilon_3 = \frac{5\upsilon}{\nu^2} \ldots\ldots \upsilon_\nu = \frac{(2\nu-1)\upsilon}{\nu^2}$$

Τὰ διάφορα, ὅθεν, διαστήματα (μέρη) θὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.

19) Πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ λίθος διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα ἑνὸς φρέατος βάθους 375μ. ($g = 9{,}80$)

Λύσις: Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\delta = \frac{1}{2} g x^2$ ποὺ δίδει τὸ διάστημα, ἀντικαταστήσωμεν τὸ δ διὰ τῆς τιμῆς του 375, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$375 = \frac{1}{2}\, 9{,}80\, x^2$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν : $x = 8{,}7\,\delta.$

20) Νά εὑρεθῆ ἡ ταχύτης ἑνός σώματος, τό ὁποῖον πίπτει ἀπό ὕψους 250 μέτρων.

Λύσις : Ἐάν εἰς τόν τύπον $\tau = \sqrt{2g\upsilon}$, ὅστις δίδει τήν ταχύτητα ἑνός σώματος, τό ὁποῖον πίπτει ἀπό ἕν ὕψος υ, ἀντικαταστήσωμεν τό υ διά τῆς τιμῆς του 250 μ., θά ἔχωμεν:

$$\tau = \sqrt{2 \cdot 9{,}80 \cdot 250}\ \mu.$$

21) Βλῆμα ρίπτεται ὑπό γωνίαν 45°, μέ ἀρχικήν ταχύτητα 500 μ. κατά δευτερόλεπτον. Εἰς ποῖον ὕψος θά φθάση τό βλῆμα καί εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τοῦ σημείου τῆς ἐκτοξεύσεως θά φθάση μακράν;

Λύσις : Τό ὕψος τῆς βολῆς παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\upsilon = \frac{\tau_\alpha^2\, \eta\mu^2\varphi}{2g} = \frac{500^2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 9{,}81} = \frac{62500}{9{,}81} = 6371{,}05\ \mu.$$

Τό μῆκος τῆς βολῆς κατ' εὐθεῖαν γραμμήν εἶναι:

$$\delta = \frac{\tau_a^2\, \eta\mu 2a}{g} = \frac{500^2}{g} = 25484{,}19\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha.$$

22) Ἀερόστατον ἀνυψοῦται κατακορύφως μέ ὁμαλήν ταχύτητα 150 μ. κατά λεπτόν. Κατά τινα στιγμήν ἀφίνουν νά πέση ἐκ τοῦ ἀεροστάτου ὀβίς, ἡ ὁποία ὅταν ἔφθασεν εἰς τό ἔδαφος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξερράγη, ὁ δέ κρότος ἠκούσθη ἀπό τούς ἐπιβαίνοντας τοῦ ἀεροστάτου μετά 10 δευτερόλεπτα ἀπό ~~τῆ~~ στιγμῆς, καθ' ἥν ἀφέθη ἡ ὀβίς. Νά εὑρεθῇ τό ὕψος, εἰς τό ὁποῖον εὑρίσκετο τό ἀερόστατον, καθ' ἥν στιγμήν ἀφέθη ἡ ὀβίς.

Λύσις: Ἔστω A ἡ θέσις τοῦ ἀεροστάτου, ὅταν ἀφέθη ἡ ὀβίς, καί Γ ὅταν ἠκούσθη ὁ κρότος. Τό διάστημα $A\Gamma$ διηνύθη εἰς 10 δλ. μέ ὁμαλήν ταχύτητα 150μ. κατά λεπτόν ἤ 2,5 μ. κατά δευτερόλεπτον. Θά ἔχωμεν, λοιπόν:

$$A\Gamma = \tau x = 2{,}5 . 10 = 25 \ \mu. \quad (1).$$

Ἡ ὀβίς διήνυσε τήν ἀπόστασιν AB μέ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην καί μέ ἀρχικήν ταχύτητα 2,5 μ. Ἐάν παραστήσωμεν μέ x τόν χρόνον πού ἐχρειάσθη ἡ ὀβίς διά νά φθάσῃ εἰς τό B, θά ἔχωμεν:

$$AB = \tau_\alpha x + \frac{1}{2} g x^2$$

καί ἐπειδή ἡ ταχύτης εἶναι ἀρνητική, ὡς ἀντίθετος πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ ἀεροστάτου, καί ἡ ἐπιτάχυνσις θετική, ἔχομεν:

$$AB = \frac{1}{2} g x^2 - \tau_\alpha x = \frac{1}{2} g x^2 - 2{,}5 x \quad (2).$$

Τό διάστημα $B\Gamma$ διανύεται ὑπό τοῦ ἤχου εἰς $(10-x)$ δευτε ρόλεπτα καί έπομένως έχομεν:

$$B\Gamma = \tau x' = 340\ (10 - x) \qquad (3)$$

Ἀλλά: $\qquad AB + A\Gamma = B\Gamma$,

ἤ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς (1), (2) καί (3), εὑρίσκομεν:

$$4,9\, x^2 + 337,5\, x - 3375 = 0 \;,$$

λύοντες δέ ταύτην, ἔχομεν: $\quad x = 8,85$ δλ.

θέτοντες ἤδη τήν τιμήν τοῦ x εἰς τήν (3), εὑρίσκομεν:

$$B\Gamma = 340 \cdot 1,15 = 391$$

καί $\qquad AB = B\Gamma - A\Gamma = 391 - 25 = 366 .$

Ἄρα ἡ ὀβίς κατέπεσεν ἐξ ὕψους 366 μέτρων.

23) Σῶμα τι κατά τήν πτῶσιν του διατρέχει τό $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ὁλικοῦ ὕψους κατά τό τελευταῖον δευτερόλεπτον. Νά προσδιορισθῇ τό ὁλικόν ὕψος υ καί ὁ χρόνος x τῆς πτώσεως.

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων $\delta = \frac{1}{2} g x^2$, ἔχομεν:

Τό ὁλικόν ὕψος $\qquad \upsilon = \frac{1}{2} g x^2$

Τό ὕψος $\quad \upsilon' = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{1}{2} g x^2 - \frac{1}{2} g (x-1)^2$,

ἐξ οὗ: $\quad 2x - 1 = \frac{x^2}{\nu} \qquad$ ἤ $\quad x^2 - 2\nu x + \nu = 0$

ὅθεν: $\qquad x = \nu \pm \sqrt{\nu^2 - \nu}$

24) Νά δειχθῇ ὅτι, κατά τήν πτῶσιν σώματος ἐν τῷ κενῷ,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τά διανυόμενα διαστήματα κατά τά διαδοχικά δευτερόλεπτα αὐξάνουν κατ' ἀριθμητικήν πρόοδον.

Λύσις: Τό διανυόμενον διάστημα κατά τινα χρόνον x ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν διαστημάτων εἰς δύο διαδοχικούς χρόνους. Ὅθεν :

$$\delta_x = \frac{1}{2} g x^2 - \frac{1}{2} g (x-1)^2 = gx - \frac{g}{2}$$

$$\delta_{x+1} = \frac{1}{2} g (x+1)^2 - \frac{1}{2} g x^2 = gx + \frac{g}{2}$$

Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι τά διαδοχικά διαστήματα δ_x, δ_{x+1} αὐξάνουν κατά τήν σταθεράν ποσότητα g.

25) Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως, ὑπό τήν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος. Ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως εἶναι 7 δλ. Ὑπολογίσατε : 1ον) Τό διάστημα τό διανυόμενον κατά τά 7 δλ. 2ον) Τήν ταχύτητα τοῦ σώματος, τήν στιγμήν, καθ' ἥν φθάνει εἰς τό ἔδαφος. 3ον) Τό διάστημα τό διανυόμενον κατά τό 7ον δευτερόλεπτον. $g = 9{,}80$ μ.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων, ἔχομεν :

1ον) $$\delta = \frac{1}{2} g x^2 = \frac{1}{2} 9{,}80 \times 49 = 240{,}1 \ \mu.$$

2ον) $$\tau = gx = 9{,}80 \times 7 = 68{,}6 \ \mu. \text{ εἰς } \delta\lambda.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3ον) $\delta' = \frac{1}{2} g x^2 - \frac{1}{2} g (x-1)^2 = g\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

$$= 9{,}80\,(7-0{,}5) = 63{,}7\ \mu.$$

26) Σῶμα πίπτον ἐν τῷ κενῷ ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, διέτρεξε κατά τά δύο τελευταῖα δευτερόλεπτα τῆς πτώσεως αὐτοῦ 118,6 μέτρα. Ἐκ τίνους ὕψους κατέπεσε καί ποίαν ταχύτητα εἶχεν (ἐάν $g = 9{,}81$), ὅταν ἔφθασεν εἰς τό ἔδαφος;

Λύσις: Τό διάστημα τῶν 118,6 μ. εἶναι διαφορά τοῦ ὁλικοῦ καί τοῦ διανυθέντος κατά τά $(x-2)''$. Ἐάν x ὁ χρόνος, τό μέν ὁλικόν εἶναι: $\frac{g x^2}{2}$

τό δέ κατά $(x-2)''$ διανυθέν: $\frac{g (x-2)^2}{2}$

Ἔχομεν δέ: $\frac{g x^2}{2} - \frac{g(x-2)^2}{2} = 118{,}6\ \mu.$

$$\frac{g x^2}{2} - \frac{g x^2 - 4 g x + 4g}{2} = 118{,}6 \quad , \quad 4gx - 4g = 237{,}2$$

καί $x = \frac{237{,}2 + 4 \cdot 9{,}81}{4 \cdot 9{,}81} = \frac{59{,}3 + 9{,}81}{9{,}81} = \frac{69{,}11}{9{,}81} = 7{,}''05$

Ἄρα ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι $7{,}''05$

Τό ὕψος: $\upsilon = \frac{g x^2}{2} = \frac{9{,}81\,(7{,}05)^2}{2} = 243{,}79$.

Ἡ δέ ταχύτης κατά τήν ἄφιξιν εἰς τό ἔδαφος:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$υ = g \cdot x = 69{,}16\,μ.$$

27) Σῶμα ἀφεθὲν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ τῆς κορυφῆς πύργου, διέτρεξε κατὰ τὸ τελευταῖον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ ὕψους, ἐξ οὗ κατέπεσε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τῆς πτώσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ πύργου. $g = 9{,}81$.

Λύσις: Ἔχομεν: τὸ ὅλον διάστημα:

$Δ$ $$Δ = \frac{1}{2} g x^2,$$

ἄρα τὸ ἥμισυ: $$\frac{g x^2}{4}$$

Ἐξ ἄλλου, τὸ ἥμισυ ἰσοῦται μέ:

$$\frac{(2x-1)g}{2} \quad \text{Ἄρα:} \quad \frac{g x^2}{4} = \frac{(2x-1)g}{2}$$

καί: $4x - 2 = x^2$ καί $x^2 - 4x + 2 = 0$,

ἐξ οὗ: $x_1 = 3{,}414$ καί $x_2 = 0{,}586$.

Παραδεκτὴ μόνον ἡ πρώτη, διότι ἄλλως $2x - 1$ ἤτοι ὁ χρόνος μέχρι τοῦ μέσου ὕψους θὰ ἦτο ἀρνητικός. Ἤτοι ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι $3'',414$. Τὸ δὲ ὕψος τοῦ πύργου:

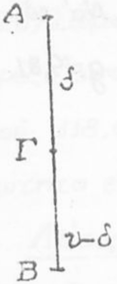
$$Δ = \frac{1}{2} g x^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}414^2 = 57{,}17\,μ.$$

28) Σῶμα ἀφέθη ἐξ ὕψους $υ$, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, συγχρόνως δὲ ἐρρίφθη πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐκ τοῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου δεύτερον σῶμα, μετὰ ταχύτητος $α$. Νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἐγένετο ἡ σύγκρουσις τῶν δύο σωμάτων καὶ τὸ ὑφ' ἑκατέρου διανυ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θέν διάστημα.

<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν: $\delta = \frac{gx^2}{2}$ καί $\upsilon - \delta = \alpha x - \frac{gx^2}{2}$



Προσθέτοντες κατά μέλη, ἔχομεν:

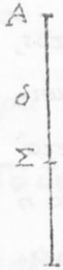
$$\upsilon = \alpha x \quad \text{καί} \quad x = \frac{\upsilon}{\alpha}.$$

Ἤτοι ὁ χρόνος, μεθ' οὗ θά συναντηθοῦν εἶναι $\frac{\upsilon}{\alpha}$, τό δέ διάστημα: $\delta = \frac{g\upsilon^2}{2\alpha^2}$

καί τό $\upsilon - \delta = \upsilon - \frac{g\upsilon^2}{2\alpha^2} = \frac{2\upsilon\alpha^2 - g\upsilon^2}{2\alpha^2}$

29) Σῶμα ἐρρίφθη ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, μέ ἀρχικήν ταχύτητα 25 μ. κατά 1'', καθ' ἥν δέ στιγμήν ἔφθασεν εἰς τό μέγιστον ὕψος, ἐρρίφθη ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δεύτερον σῶμα μέ τήν αὐτήν ἀρχικήν ταχύτητα. Εἰς ποῖον σημεῖον ἀπό τοῦ σημείου ἀναρρίψεως τά δύο σώματα συνηντήθησαν;

<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν: $0 = 25 - gx$ καί $x = \frac{25}{g}$ ὁ χρόνος ἵνα φθάσῃ εἰς τό μέγιστον ὕψος. Ἐπίσης ἔχομεν:



$\delta = gx - \frac{1}{2}gx^2 = \frac{25^2}{2g}$ (μέ τό τετράγωνον τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος διά τοῦ 2g). Ἔστω δέ y ὁ χρόνος, μεθ' οὗ συνηντήθησαν.

$$A\Sigma = \frac{1}{2}gy^2, \quad B\Sigma = 25y - \frac{1}{2}gy^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Προσθέτοντες κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{25^2}{2g} = 25y \quad \text{καί} \quad y = \frac{25}{2g}.$$

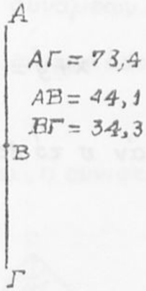
Ἡ συνάντησις, ὅθεν, ἐγένετο μετά χρόνον $\frac{25}{2g}$ ἀπό τῆς στιγμῆς, καθ' ἥν ἐρρίφθη τό δεύτερον.

30) Δύο σώματα ἀφέθησαν ἐξ ὕψους 78,4 μ., ἐκ τούτων δέ τό δεύτερον 1" μετά τό πρῶτον. Ποία ἦτο ἡ ἀπόστασις αὐτῶν, καθ' ἥν στιγμήν τό πρῶτον ἤγγισε τό ἔδαφος, ἐάν $g = 9,8$;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$\delta = \frac{1}{2} g x^2$$

καί $$x^2 = \frac{2\delta}{g}, \quad x^2 = \frac{78,4}{4,9} = 16, \quad x = 4$$



$$\delta = \frac{1}{2}\, 9,8 . 16 = 4,9 . 16 = 78,4$$

$$AB = \frac{1}{2} . 9,8 . 9 = 4,9 . 9 = 44,1$$

31) Λίθος ἐχρειάσθη 3" διά νά πέσῃ εἰς τόν πυθμένα ξηροῦ φρέατος. Πόσον εἶναι τό βάθος αὐτοῦ καί ποία ἡ ταχύτης τοῦ λίθου, ὅταν ἔφθασεν εἰς τόν πυθμένα;

<u>Λύσις</u>: Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ Δ τό ζητούμενον βάθος, ἔχομεν:

$$\Delta = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}\, 9,8 . 9 = 4,9 . 9 = 44,1 .$$

Τό βάθος τοῦ φρέατος εἶναι 44,1 μ. Ἡ δέ ζητουμένη ταχύτης τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λίθου εἶναι: $\tau = g \cdot x = 9{,}8 \cdot 3 = 29{,}4$ μ. κατά δευτερόλ.

32) Ἐκ στομίου φρέατος ἀφέθη λίθος εἰς αὐτό. Ἠκούσθη δέ ὁ κρότος τοῦ λίθου κτυπήσαντος τό ὕδωρ μετά 3″,2. Νά εὑρεθῇ εἰς πόσον βάθος εὑρίσκετο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐν τῷ ἀέρι εἶναι 340μ.

Λύσις: Ὁ χρόνος 3,2 ἀποτελεῖται ἀπό τόν χρόνον, τόν ὁποῖον ἐχρειάσθη ὁ λίθος, ἵνα φθάσῃ μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, καί ἀπό τόν χρόνον, τόν ὁποῖον ἐχρειάσθη ὁ ἦχος, ἵνα διανύσῃ τό αὐτό διάστημα, ἤτοι ἔχομεν:

$$x + y = 3''{,}2 \;.\; \text{Ἀλλά} \quad x = \sqrt{\frac{2\upsilon}{g}} \quad \text{καί} \quad y = \frac{\upsilon}{\tau}$$

ἐάν υ τό βάθος καί τ = 340μ. Ἤτοι ἔχομεν:

$$\sqrt{\frac{2\upsilon}{g}} + \frac{\upsilon}{\tau} = 3{,}2 \quad , \sqrt{\frac{2\upsilon}{g}} = 3{,}2 - \frac{\upsilon}{\tau}$$

$$\frac{2\upsilon}{g} = 10{,}24 + \frac{\upsilon^2}{\tau^2} - 6{,}4\frac{\upsilon}{\tau}$$

$$2\upsilon\tau^2 - 10{,}24\, g\tau^2 + 6{,}4\, \upsilon g\tau - \upsilon g^2 = 0$$

καί $$g\upsilon^2 - 2\tau(\tau + 3{,}2g)\upsilon + 10{,}24 \cdot \tau^2 g = 0$$

$$\upsilon = \frac{\tau(\tau+3{,}2g) \pm \sqrt{\tau^2(\tau+3{,}2g)^2 - 10{,}24\,\tau^2 g^2}}{g} =$$

$$= \frac{\tau(\tau+3{,}2g) \pm \tau\sqrt{(\tau+3{,}2g)^2 - 10{,}24 g^2}}{g}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Delta = \tau^2 + 10{,}24\, g^2 + 6{,}4\, \tau . g - 10{,}24 g^2 = \tau^2 + 6{,}4\, \tau g .$$

Τό ὑπόρριζον εἶναι θετικόν, ἄρα αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαί καί ἄνισοι. Πρέπει ἀμφότεραι νά εἶναι θετικαί, ὅπερ πράγματι συμβαίνει, ἐκ τῆς παρατηρήσεως τοῦ ἀθροίσματος καί τῶν γινομένων τῶν ῥιζῶν εἰς τήν ἐξίσωσιν.

Τό γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι:

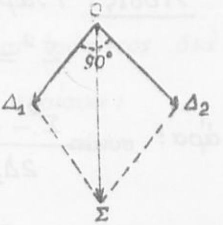
$$10{,}24\, \tau^2 = (3{,}2\tau)(3{,}2\tau) .$$

Ἄρα, ἡ μία ῥίζα εἶναι μεγαλυτέρα καί ἡ ἄλλη μικροτέρα τοῦ $3{,}2\, \tau$. Παραδεκτή ἡ μικροτέρα.

33) Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων Δ_1 καί Δ_2, ἄν $\Delta_1 = 5$ χλμ. καί $\Delta_2 = 4$ χλμ. καί αἱ διευθύνσεις αὐτῶν ἀποτελοῦν γωνίαν 90°.

<u>Λύσις</u>: Κατά τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου, ἡ συνισταμένη τῶν Δ_1 καί Δ_2 εἶναι ἡ Σ. Ἀλλά:

$$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 \quad , \quad \Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$$



καί
$$\Sigma = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

34) Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δύο δυνάμεων Δ_1 καί Δ_2, ἄν $\Delta_1 = 5$ χλγρ. καί $\Delta_2 = 4$ χλγρ. καί αἱ διευθύνσεις αὐτῶν ἀποτελοῦν γωνίας: α) 45°, β) 60°, γ) 10°.

Ἐκ τοῦ τριγώνου $O\Delta_1\Sigma$ ἔχω:

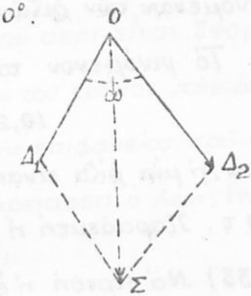
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Sigma^2 = \Delta_1 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \text{συν} \widehat{\Delta_1\Delta_2}$$ Οὕτω, ἄρα:

α) $\Sigma^2 = 25+16+2.20\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἄν $\omega = 45°$

$\Sigma^2 = 41+20\sqrt{2}$ καί $\Sigma = \sqrt{41+20\sqrt{2}}$

β) $\Sigma^2 = 25+16+2.20.\frac{1}{2}$, ἄν $\omega = 60°$.



$\Sigma^2 = 41+20$ καί $\Sigma = \sqrt{51} =$

$= 7,861$ χιλιόγραμμα

γ) $\Sigma^2 = 41+2.20$ συν $10°$, ἄν $\omega = 10°$

$\Sigma^2 = 41+39,4$

καί $\Sigma = \sqrt{80,4} = 8,96$ χιλιόγραμμα.

35) Δύναμίς τις $\Delta_1 = \sqrt{3}$, ἄλλη δύναμις $\Delta_2 = \sqrt{2}$, ἡ δέ συνισταμένη αὐτῶν $\Sigma_1 = 1$ χιλ. Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν διευθύνσεων τῶν δυνάμεων τούτων.

Λύσις: Γνωρίζω ὅτι:

$$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 . \text{συν}\omega$$

ἄρα: $$\text{συν}\omega = \frac{\Sigma^2 - \Delta_1^2 - \Delta_2^2}{2\Delta_1\Delta_2} = \frac{1-5}{2\sqrt{6}} = \frac{-4}{2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{-4 \cdot 2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}.2\sqrt{6}} = \frac{-8\sqrt{6}}{24} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

ἀλλά: $$\text{συν}(180° - \omega) = -\text{συν}\omega = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Λογαριθμίζων ἔχω:

$$\text{λογ συν}(180° - \omega) = \frac{1}{2}\text{λογ } 6 - \text{λογ } 3 = \bar{1},911.95 \;,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$180^\circ - \omega = 37^\circ 15' 54'' \quad \text{καί} \quad \omega = 142^\circ 44' 6''.$$

36) Ἡ γωνία δύο δυνάμεων εἶναι 135°. Νά εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νά ὑπάρξῃ μεταξύ τῶν δυνάμεων τούτων, ἵνα ἡ συνισταμένη των ἰσοῦται μέ τήν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν.

Λύσις: Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\Delta_1 < \Delta_2$. Γνωρίζω δέ προσέτι ὅτι:

$$\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \,\text{συν}\,\omega$$

Ἀφοῦ $\Sigma = \Delta_1$, ἔχομεν:

$$\Delta_1^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2 \,\text{συν}\,\omega,$$

ἀλλά: $\omega = 135$ καί $\text{συν}\,135 = -\text{συν}\,45^\circ$, ὅθεν:

$$\Delta_1^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ἤ $\Delta_1^2 - \Delta_1^2 = \Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_2\sqrt{2}$

ἤ $0 = \Delta_2^2 - \Delta_1\Delta_2\sqrt{2}$ ἤ $\Delta_2^2 = \Delta_1\Delta_2\sqrt{2}$

καί διαιρῶν ἀμφότερα τά μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος διά τοῦ Δ_2, ὑποθέτων αὐτό διάφορον τοῦ μηδενός, εὑρίσκω:

$$\Delta_2 = \Delta_1\sqrt{2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \sqrt{2}$$

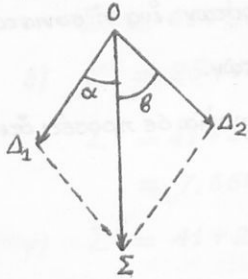
Ὥστε ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = \sqrt{2}$

37) Νά ἀναλυθῇ δύναμις 20 χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας, αἵτινες σχηματίζουσι μετά τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης των γωνίας 45° καί 15°.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τριγώνου $0\Delta_1\Sigma$ ἔχω:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\Delta_1}{\eta\mu\beta}=\frac{\Delta_2}{\eta\mu\alpha}=\frac{\Sigma}{\eta\mu(\alpha+\beta)}$$



$$\frac{\Delta_1}{\eta\mu 15^\circ}=\frac{\Delta_2}{\eta\mu 45^\circ}=\frac{20}{\eta\mu 60^\circ}.$$ Ὅθεν:

$$\Delta_1=\frac{20\eta\mu 15^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{40\eta\mu 15^\circ}{\sqrt{3}}$$

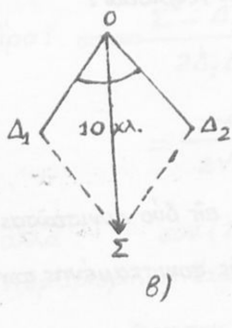
$$\Delta_1=\frac{10,36\sqrt{3}}{3}$$ χιλιόγραμμα.

$$\Delta_2=\frac{20\eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ}=\frac{40\sqrt{2}}{2\sqrt{3}},\quad \Delta_2=\frac{20\sqrt{6}}{3}$$ χιλιόγρ.

(38) Δύναμις 10 χιλιογράμμων ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας ἴσας καὶ σχηματιζούσας γωνίαν 60°. Ἡ αὐτὴ δύναμις ν' ἀναλυθῇ εἰς δύο ἄλλας, σχηματιζούσας γωνίαν 60° καὶ ἐχούσας ἄθροισμα 12 ἢ διαφορὰν 7 χιλιογρ.

<u>Λύσις:</u> α) Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\Sigma^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2\,\sigma\upsilon\nu\omega.$$



Ἀλλὰ $\Delta_1=\Delta_2$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu 60=\frac{1}{2}$,

ὅθεν: $\Sigma^2=2\Delta_1^2+\Delta_1^2=3\Delta_1^2$ καὶ

$$\Delta_1=\frac{\Sigma\sqrt{3}}{3},\ \text{ἄρα}\ \Delta_1=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

β) $$\Sigma^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+2\Delta_1\Delta_2\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$\Sigma^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_1\Delta_2,\quad \Sigma^2-\Delta_1\Delta_2=(\Delta_1+\Delta_2)^2=144$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄθεν : $$\Delta_1\Delta_2 = 144 - 100 = 44.$$

Ἄρα ἔπεται τό σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1+\Delta_2 &= 12 \\ \Delta_1\,\Delta_2 &= 44 \end{aligned}\right\},$$

ὅπερ ἔχει λύσεις φανταστικάς. Ὥστε δέν δύναται νά γίνῃ ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις.

γ) $\Sigma^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_1\Delta_2$, $\Sigma^2 - 3\Delta_1\Delta_2 = (\Delta_1-\Delta_2)^2$

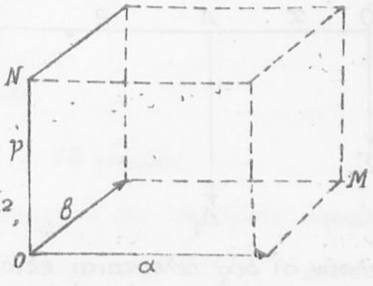
καί $\Delta_1\Delta_2 = 17$.

Ἄρα, ἔπεται τό σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1-\Delta_2 &= 7 \\ \Delta_1\Delta_2 &= 17 \end{aligned}\right\},$$

ὅπερ λύεται καί μᾶς δίδει τό ζητούμενον.

39) Ἐάν τρεῖς δυνάμεις ἴσαι, ἐνεργοῦσαι ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου, κεῖνται εἰς διάφορα ἐπίπεδα, ἔχουν συνισταμένην τήν διαγώνιον τοῦ κύβου τῶν ἴσων δυνάμεων. Νά εὑρεθῇ τό μέγεθος ταύτης.



<u>Λύσις</u> : Μᾶς δίδεται ὅτι:

$$\alpha = \beta = \gamma \quad (1).$$

$$(OM)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(NM)^2 = (OM)^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

ἀλλά λόγῳ τῆς (1) ἔχω :

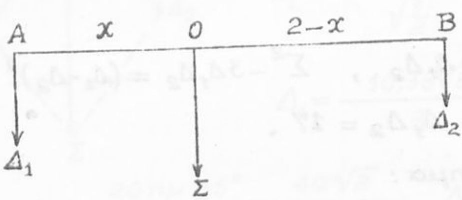
$$(NM)^2 = 3\alpha^2, \text{ ἤτοι } (NM) = \alpha\sqrt{3}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα ἡ συνισταμένη ἔχει μέγεθος $a\sqrt{3}$.

40) Ν' ἀναλυθῇ δύναμις 7 χιλιογρ. εἰς δύο ἄλλας συνιστώσας, παραλλήλους καί ὁμορρόπους, ἐχούσας λόγον $\frac{2}{5}$, τά δέ σημεῖα ἐφαρμογῆς νά ἀπέχουν 2 μέτρα.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω $AB = 2$, τότε θά ἔχω, ἄν $(AO) = x$:



$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{5}$$

καί $5x = 4 - 2x$

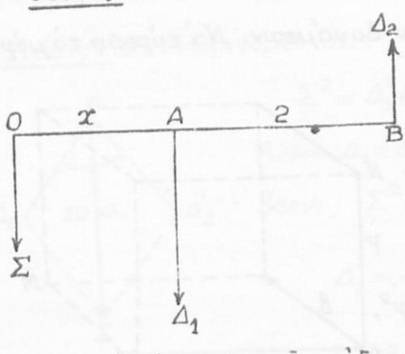
ὅθεν: $AO = x = \frac{4}{7} = 0{,}5714\mu.$

Γνωρίζω ὅτι: $\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 = 7$ καί $2\Delta_1 = 5\Delta_2$.

Λύων τό σύστημα, ὅπερ ἀποτελοῦν αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις, εὑρίσκω: $\Delta_1 = 5$ χιλιόγρ., $\Delta_2 = 2$ χιλιόγρ.

41) Τό αὐτό διά τήν περίπτωσιν ἀντιρρόπων δυνάμεων.

<u>Λύσις</u>: Ἐπίσης ἔχομεν, ἄν $(AO) = x$:



$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{x}{2+x} = \frac{2}{5}$$

καί: $5x = 4 + 2x$, $x = \frac{4}{3} = 1.333\mu.$

Γνωρίζω ὅτι:

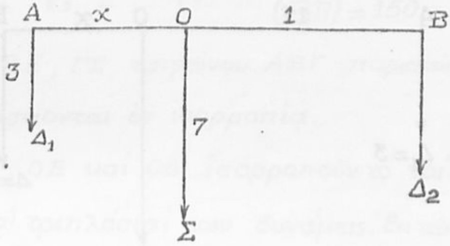
$\Sigma = \Delta_1 - \Delta_2 = 7$, $2\Delta_1 = 5\Delta_2$.

Λύων δέ τό σύστημα, ὅπερ ἀποτελοῦν αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις, εὑρίσκω:

$\Delta_1 = 11{,}66$ χιλιόγρ., $\Delta_2 = 4{,}66$ χιλιόγρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

42) Να άναλυθῇ δύναμις 7 χιλιογρ. εἰς δύο συνιστώσας ὁμορρόπους, ἐξ ὧν ἡ μία νά ἔχῃ ἔντασιν 3 χιλιογρ., τό δέ σημεῖον ἐφαρμογῆς ν' ἀπέχῃ 1 μέτρον ἀπό τό σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δοθείσης δυνάμεως.



Λύσις: Ἔχομεν:

$$\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$$

καί $\Delta_2 = \Sigma - \Delta_1 = 7 - 3 = 4$.

Ἐπίσης: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = \dfrac{4}{3}$

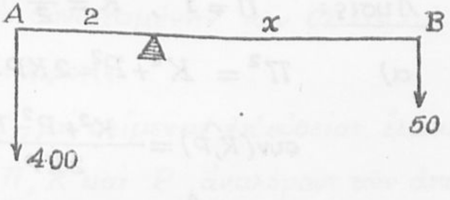
ἐξ οὗ: $x = \dfrac{3}{4}$ καί $AB = 1 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{4}$ μ.

43) Διά πρωτογενοῦς μοχλοῦ μετακινοῦμεν βάρος 400 ὀκάδων διά δυνάμεως 50 ὀκ. ὁ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 2 μ. Πόσον τό μῆκος ὅλου τοῦ μοχλοῦ;

Λύσις: Ἔστω x ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως. Ἐπειδή αἱ ῥοπαί θά εἶναι ἴσαι, ἔπεται:

$2 \cdot 400 = 50 \cdot x$, $x = 16$

Ἄρα τό ὅλον μῆκος τοῦ μοχλοῦ:



$$(AB) = x + 2 = 16 + 2 = 18 \text{ μέτρα.}$$

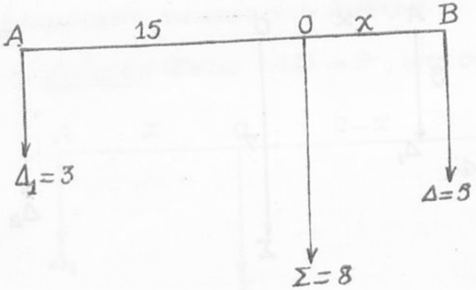
44) Εἰς τά ἄκρα εὐθείας AB ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις παράλληλοι καί τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἡ $\Delta_1 = 3$ χιλγρ. καί ἡ Δ_2; Ἡ συνισταμένη των ἔχει ἔντασιν 8 χιλγρ. καί εἶναι ἐφηρμοσμένη εἰς ἀπό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στασιν 15 εκατοστών από του άκρου A της ευθείας AB. Ζητεῖται τό μῆκος τῆς AB.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι: $\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$, ὅθεν:

$\Delta_2 = \Sigma - \Delta_1 = 8 - 3 = 5$.



Ἐπειδή αἱ ῥοπαί εἶναι ἴσαι: $(AO)\Delta_1 = (BO)\Delta_2$, ἀλλά: $(OB) = x$, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 5$ καί $(AO) = 15$.

Ἑπομένως:

$3.15 = 5 \cdot x$ καί $x = 9$. Ἄρα $AB = 24$.

45) Τρεῖς δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπί σημείου, ἰσορροποῦν. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἐντάσεις αὐτῶν εἶναι $\Pi = 1$ χιλιόγραμμα, $K = \frac{1}{2}$ χιλγρ. καί $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ χιλιογρ., νά εὑρεθοῦν αἱ ὑπό τῶν δυνάμεων σχηματιζόμεναι γωνίαι.

<u>Λύσις:</u> $\Pi = 1$, $K = \frac{1}{2}$, $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α) $\Pi^2 = K^2 + P^2 - 2KP . \sigma\upsilon\nu(\widehat{K,P})$,

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{K,P}) = \frac{K^2 + P^2 - \Pi^2}{2KP} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 0 .$$

$\sigma\upsilon\nu(\widehat{K,P}) = \sigma\upsilon\nu\, 90^\circ$. $(\widehat{K,P}) = 90^\circ$.

β) $$\frac{P}{\eta\mu(\Pi,K)} = \frac{\Pi}{\eta\mu(P,K)} = \frac{K}{\eta\mu(P,\Pi)} .$$

Ἐπίσης: $\eta\mu(\Pi,K) = \eta\mu(P,K) \cdot \frac{P}{\Pi} = 1 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\eta\mu(\Pi, K) = \eta\mu\, 60$ $\qquad (\widehat{\Pi,K}) = 60^\circ$

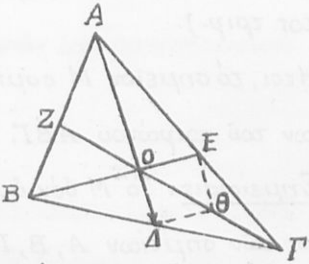
$(\Pi, K) + 60 = 2\Pi = 120$ $\qquad (\widehat{\Pi,K}) = 120^\circ$

$\eta\mu(P,\Pi) = \eta\mu(PK) \cdot \frac{K}{\Pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ $\qquad (\widehat{P,\Pi}) = 30$

$(\widehat{P,\Pi}) = 150.$

46) Ἐάν αἱ διάμεσοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ παριστῶσι τρεῖς δυνάμεις, αὗται εὑρίσκονται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Ἄν ἀποδείξωμεν, ὅτι ΟΖ, ΟΕ καί ΟΔ ἰσορροποῦν τό τρίγωνον, τό αὐτό ποιοῦν καί αἱ τριπλάσιαί των δυνάμεις. Ἐκ τῶν Ε καί Δ φέρομεν παραλλήλους, αἵτινες συναντῶνται εἰς ἕν σημεῖον Θ, κείμενον ἐπί τῆς ΟΓ.



$(E\Theta = \frac{1}{2}\, OA,\ \ O\Delta = \frac{1}{2}\, OA).$

Ἔχομεν: $\quad (O\Theta) = (OZ)$,

διότι: $\quad (O\Theta) = \frac{1}{2}(O\Gamma)$ καί $(ZO) = \frac{1}{2}(O\Gamma)$.

Ἄρα, ἡ ΟΖ ἰσορροπεῖ τήν συνισταμένην τῶν ΟΕ καί ΟΔ. Ἑπομένως, καί τό τρίγωνον ἰσορροπεῖ.

47) Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μή κείμεναι ἐπ' εὐθείας, ἕλκουν σημεῖον Μ, μέ ἐντάσεις Π, Κ καί Ρ, ἀναλόγους τῶν ἀποστάσεων. Εἰς ποίαν θέσιν θά ἰσορροπήσῃ τό Μ;

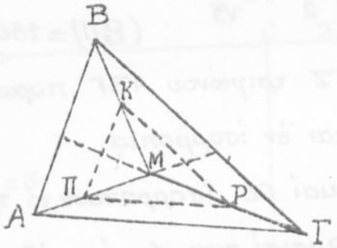
<u>Λύσις:</u> Ἔστωσαν δυνάμεις, παριστῶσαι τάς ἕλξεις, αἱ Π, Κ, Ρ, αἵτινες ἐξ ὑποθέσεως ἰσορροποῦν ἀλλήλας.

Ἔχομεν δέ:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{MP}{M\Gamma} = \frac{MK}{MB} = \frac{M\Pi}{MA},$$

ἤτοι τά τρίγωνα $M\Pi K$, MKP, $MP\Pi$ καί MAB, $MB\Gamma$, $M\Gamma A$ εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως. Ἑκάστη τῶν Π, K, P προεκτεινομένη, διέρχεται διά τῶν μέσων τῶν KP, ΠP καί ΠK, ἄρα καί διά τῶν μέσων τῶν $B\Gamma$, $A\Gamma$ καί AB (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τριγ.).



Ἤτοι, τό σημεῖον M συμπίπτει μέ τό σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

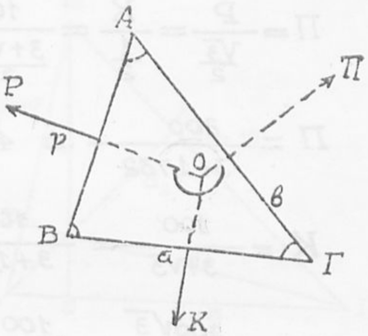
Σημείωσις: Τό M δέν δύναται νά κεῖται ἐκτός, πρός τό ἕν μέρος τῶν σημείων A, B, Γ, ἀλλά μεταξύ αὐτῶν, διότι ἄλλως δέν θά ὑπῆρχεν ἰσορροπία.

48) Ἐάν τρεῖς δυνάμεις ἐφηρμοσμέναι εἰς τά μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου $AB\Gamma$ καθέτως ἐπ' αὐτῶν, εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογοι τῶν μηκῶν α, β, γ, φέρονται δέ πᾶσαι πρός τά ἔξω τοῦ τριγώνου, τό τρίγωνον ἀκινητεῖ.

Λύσις: $\dfrac{K}{\alpha} = \dfrac{\Pi}{\beta} = \dfrac{P}{\gamma}$

Ἔχομεν δέ :

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$$



ἄρα: $$\frac{K}{\eta\mu A}=\frac{\Pi}{\eta\mu B}=\frac{P}{\eta\mu \Gamma}$$

ἀλλά: $\eta\mu A = \eta\mu\,(\Pi,P)$,

$\eta\mu B = \eta\mu\,(K,P)$

καί $\eta\mu \Gamma = \eta\mu\,(\Pi,K)$

ἄρα: $$\frac{K}{\eta\mu\,(\Pi,P)}=\frac{\Pi}{\eta\mu(K,P)}=\frac{P}{\eta\mu(\Pi,K)}.$$

Ἤτοι ὑφίσταται ἡ σχέσις τῶν συνιστωσῶν καί συνισταμένης ἤ δυνάμεων ἰσορροπουσῶν.

Ἑπομένως, τό τρίγωνον ἰσορροπεῖ.

49) Τρεῖς δυνάμεις Π, Κ, Ρ, ἔχουσαι ἄθροισμα 10 χιλιογράμμων, ἰσορροποῦσιν, ἐνεργοῦσαι εἰς τό σημεῖον Μ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης τούτων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι γωνία $\Pi,K = 120^\circ$ καί γωνία $\Pi,P = 150^\circ$.

<u>Λύσις:</u> γων. $P,K = 90^\circ$ $$\frac{\Pi}{\eta\mu(\widehat{K,\Pi})}=\frac{P}{\eta\mu(\widehat{\Pi,K})}=\frac{K}{\eta\mu(\widehat{\Pi,P})}=$$

$$=\frac{\Pi+P+K}{\eta\mu\,(\widehat{K,P})+\eta\mu\,(\widehat{\Pi,K})+\eta\mu\,(\widehat{\Pi,P})}.$$

$$\eta\mu(\widehat{K,P})=\eta\mu\, 90^\circ=1\ ,\ \ \eta\mu\,(\widehat{\Pi,K})=\eta\mu\, 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

$$\eta\mu\,(\Pi,P)=\eta\mu\, 150^\circ=\frac{1}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Pi = \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{K}{\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} = \frac{200}{3+\sqrt{3}} =$$

$$\Pi = \frac{200}{3+1,732} = 42,266.$$

$$K = \frac{100}{3+\sqrt{3}} = \frac{100}{3+1,732} = 21,133$$

$$P = \frac{100\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}\,(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{300\sqrt{3}-300}{6} =$$

$$P = 50(1.732-1) = 50 \cdot 0,732 = 36,6$$

50) Τρεῖς δυνάμεις Δ_1, Δ_2 καί Δ_3, ἔχουσαι ἄθροισμα 100 χιλιογράμμων, εἶναι ἐφηρμοσμέναι εἰς τό σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τριγώνου ΑΒΓ καί ἔχουν φοράς τάς φοράς τῶν ὑψῶν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Ἄν αἱ πλευραί ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἔχουν ἀντιστοίχους 7, 10, 8 μέτρων, ποῖαι εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων, ἐάν τό τρίγωνον ἀκινητῇ;

<u>Λύσις</u>:

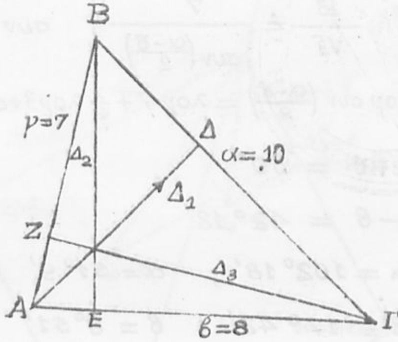
$$\frac{\Delta_1}{\eta\mu(\Delta_2,\Delta_3)} = \frac{\Delta_2}{\eta\mu(\Delta_1,\Delta_3)} = \frac{\Delta_3}{\eta\mu(\Delta_1,\Delta_2)}$$

$$\eta\mu(\Delta_2\Delta_3) = \eta\mu A, \quad \eta\mu(\Delta_1\Delta_3) = \eta\mu B, \quad \eta\mu(\Delta_1\Delta_2) = \eta\mu \Gamma.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta_1}{\eta\mu A} &= \frac{\Delta_2}{\eta\mu B} = \frac{\Delta_3}{\eta\mu \Gamma} \\ \frac{\alpha}{\eta\mu A} &= \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \end{aligned}\right\}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαιρούμεν κατά μέλη:



$$\frac{Δ_1}{α}=\frac{Δ_2}{β}=\frac{Δ_3}{γ}=$$

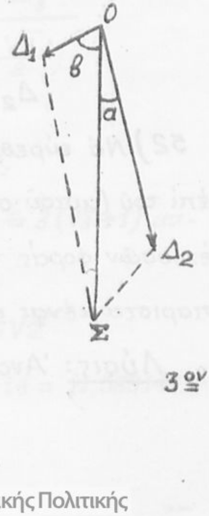
$$=\frac{Δ_1+Δ_2+Δ_3}{α+β+γ}$$

$$\frac{Δ_1}{10}=\frac{Δ_2}{8}=\frac{Δ_3}{7}=\frac{100}{25}=4$$

$$Δ_1=40\ ,\ Δ_2=32\ ,\ Δ_3=28.$$

51) Νά ἀναλυθῇ δύναμις 13 χιλιογράμμων εἰς δύο συνιστώσας, σχηματιζούσας γωνίαν 60° καί ἐχούσας ἄθροισμα ἐντάσεων 14 χιλιόγραμμα. Νά προσδιορισθῇ ἑκάστη καί ἡ γωνία, ἥν θά σχηματίζῃ ἑκάστη τῶν συνιστωσῶν μετά τῆς συνισταμένης.

<u>Λύσις:</u> $Σ=13\ ,\ Δ_1+Δ_2=14\ ,\ γων.\, Δ_1 0 Δ_2=60°.$



$$\frac{Σ}{ημ(Δ_1Δ_2)}=\frac{Δ_1}{ημ(Δ_2Σ)}=\frac{Δ_2}{ημ(ΔΣ)},$$

$$\frac{Σ}{ημ60°}=\frac{Δ_1}{ημα}=\frac{Δ_2}{ημβ}=\frac{Δ_1+Δ_2}{ημα+ημβ},$$

$$\frac{Σ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14}{2ημ\left(\frac{α+β}{2}\right)συν\left(\frac{α-β}{2}\right)},$$

$$\frac{2σ}{\sqrt{3}}=\frac{14}{2\,ημ30°συν\left(\frac{α-β}{2}\right)},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{13}{\sqrt{3}} \doteq \frac{7}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{13}$$

$\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \lambda o\gamma\, 7 + \frac{1}{2}\lambda o\gamma 3 + \sigma\upsilon\lambda\lambda. 13$

$\lambda o\gamma\, 7 = 0,84510$

$\frac{1}{2}\lambda o\gamma\, 3 = 0,23856$

$\sigma\upsilon\lambda\lambda\, 13 = \bar{2},88606$

$\lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \bar{1},96972$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\,(21^\circ 9')$

$\alpha - \beta = 42^\circ 18'$

$\alpha + \beta = 60^\circ$

$\alpha - \beta = 42^\circ 18'$

$2\alpha = 102^\circ 18', \quad \alpha = 51^\circ 9'$

$2\beta = 17^\circ 42', \quad \beta = 8^\circ 51'$

$$\frac{13}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_1}{\eta\mu\, 8,51} = \frac{\Delta_2}{\eta\mu\, 51,9}$$

$\Delta_1 = \frac{1\, \eta\mu\, 8,51 . 13}{\sqrt{3}}, \quad \lambda o\gamma\, \Delta = \lambda o\gamma\, \eta\mu\, 8,51 + \lambda o\gamma 13 + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\lambda\lambda 3$

$\lambda o\gamma \eta\mu\, 8^\circ 51' = \bar{1},18709$

$\lambda o\gamma\;\; 13 = 1,11394$

$\frac{1}{2}\sigma\upsilon\lambda\lambda 3 = \bar{1},75144$

$\lambda o\gamma \Delta_1 = 0,06247$

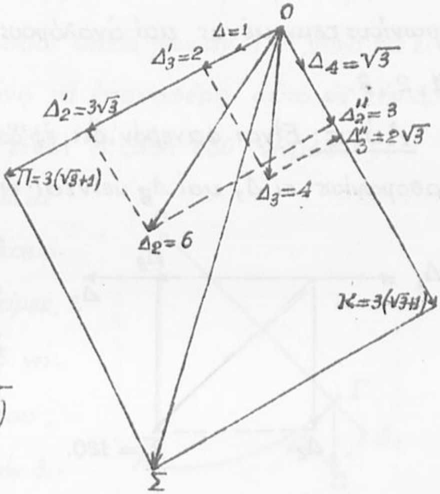
$\Delta_2 = 11,846 \quad , \quad \Delta_1 = 1,154\ \chi\lambda\gamma\rho.$

52) Νά εὑρεθῆ ἡ συνισταμένη τεσσάρων δυνάμεων, ἐνεργουσῶν ἐπί τοῦ (αὐτοῦ σημείου) κέντρου κανονικοῦ δωδεκαγώνου καί ἐχουσῶν φοράς τεσσάρων διαδοχικῶν ἀκτίνων αὐτοῦ καί τάσεις παριστωμένας ὑπό τῶν ἀριθμῶν $1, 6, 4, \sqrt{3}$.

<u>Λύσις</u>: Ἀναλύομεν τάς δυνάμεις Δ_2 καί Δ_3, ἑκατέραν εἰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο ἄλλας, μίαν κατά τήν διεύθυνσιν τῆς Δ_1 καί μίαν κατά τήν τῆς Δ_4, ἤτοι εἰς συνιστώσας καθέτους.



<u>Λύσις</u>: Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῆς Δ_2 ἔχομεν:

$$\frac{\Delta_2}{\eta\mu\, 90^\circ}=\frac{\Delta_2'}{\eta\mu(\Delta_2\Delta_2'')}=\frac{\Delta_2''}{\eta\mu(\Delta_2\Delta_2')}$$

$$6=\frac{\Delta_2'}{\eta\mu 60^\circ}=\frac{\Delta_2''}{\eta\mu\, 30^\circ}$$

$$6=\frac{\Delta_2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\Delta_2'}{\frac{1}{2}}\quad,\quad \Delta_2'=3\sqrt{3}\quad \text{καί}\quad \Delta_2''=3\,.$$

Ἐκ δέ τῆς ἀναλύσεως τῆς Δ_3:

$$\frac{\Delta_3}{\eta\mu\, 90^\circ}=\frac{\Delta_3'}{\eta\mu\, 30^\circ}=\frac{\Delta_3''}{\eta\mu\, 60^\circ}\;,\qquad 4=\frac{\Delta_3'}{\frac{1}{2}}=\frac{\Delta_3''}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Delta_3'=2\quad,\quad \Delta_3''=2\sqrt{3}$$

Οὕτως, ἔχομεν εἰς τό O ἐνεργούσας τάς δυνάμεις:

$\Pi = 2+1+3\sqrt{3} = 3(\sqrt{3}+1)$ καί $K=3+3\sqrt{3}=3(\sqrt{3}+1)$ καθέτως. Ἡ συνισταμένη, λοιπόν:

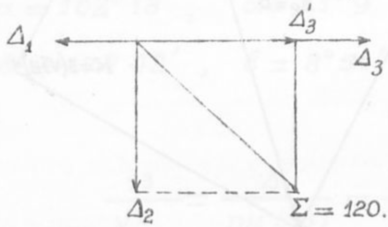
$$\Sigma = \sqrt{\Pi^2+K^2} = \sqrt{2\Pi^2} = \Pi\sqrt{2}$$

$$\Sigma = [3(\sqrt{3}+1)]\sqrt{2} = 3\cdot 2732\cdot 1{,}414 = 11{,}589144 \text{ χλγρ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

53) Ν' ἀναλυθῇ δύναμις 120 χλγρ. εἰς τρεῖς συνιστώσας ὀρθογωνίους τεμνομένας καί ἀναλόγους κατ' ἔντασιν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3.

<u>Λύσις:</u> Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς δυνάμεις τέμνονται ὀρθογωνίως, αἱ Δ_1 καί Δ_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἤτοι ἡ συνισταμένη



αὐτῶν Δ_3' εἶναι ἀνάλογος τοῦ 3−1, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ 2. Ἄρα ἴση τῇ Δ_2. Ἡ δοθεῖσα, λοιπόν, $\Sigma = 120$ εἶναι διαγώνιος τετραγώνου, ἔχοντος πλευράν τήν $\Delta_2 = \Delta_3'$. Ἔχομεν δέ:

$$\frac{\Sigma}{\eta\mu\, 90^\circ} = \frac{\Delta_2}{\eta\mu\, 45^\circ} \quad \text{καί} \quad \Delta_2 = 120\frac{\sqrt{2}}{2} = 60\sqrt{2}$$

Ἡ Δ_3' εἶναι συνισταμένη δύο δυνάμεων, ὧν ἡ μία εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης, ἤτοι ἔχομεν:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{1}{3} \quad \text{καί} \quad -\Delta_1 + 3\Delta_1 = 60\sqrt{2}\ , \ \text{καί}\ \Delta_1 = 30\sqrt{2}\ ,$$

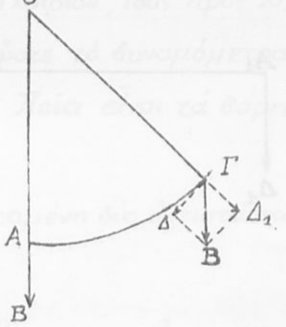
$$\Delta_3 = 90\sqrt{2}\ .\ \text{Ἐπομένως:}\ \Delta_1 = 30\sqrt{2}$$

Αἱ τρεῖς δυνάμεις, εἰς τάς ὁποίας ἀνελύθη, εἶναι: $30\sqrt{2}$, $60\sqrt{2}$ καί $90\sqrt{2}$, ὀρθογωνίως τεμνόμεναι.

54) Βάρος 10 χιλιογράμμων εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τό κατώτερον ἄκρον νήματος, τοῦ ὁποίου τό ἀνώτερον ἄκρον εἶναι προσηλ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λωμένον εἰς ὁριζόντιον ὑποστήριγμα. Ἐὰν ἀπομακρύνωμεν τὸ νῆμα ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας κατὰ γωνίαν 45°, ποία θὰ εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία θὰ τείνῃ νὰ ἐπαναφέρῃ αὐτὸ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν καὶ ποία θὰ εἶναι ἡ τάσις τοῦ νήματος;



Λύσις: Τὸ βάρος B, ὅπερ κατὰ τὴν νέαν θέσιν παραμένει κατακόρυφον, ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, τὴν $Δ_1$, ἥτις εἶναι ἡ τάσις τοῦ νήματος κατὰ τὴν διεύθυνσίν του, καὶ τὴν Δ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, ἥτις εἶναι καὶ ἡ δύναμις, ἡ τείνουσα νὰ ἐπαναφέρῃ αὐτὸ εἰς τὴν προτέραν του θέσιν. Τὸ $ΓΔΒΔ_1$ εἶναι τετράγωνον ὡς ὀρθογώνιον, οὗ ἡ διαγώνιος σχηματίζει μετὰ τῆς πλευρᾶς γωνίαν 45°. Ἄρα $Δ = Δ_1$ καὶ

$$\frac{B}{ημΔΔ_1} = \frac{Δ}{ημΒΔ_1} = \frac{Δ_1}{ημΒΔ} \quad , \quad 10 = \frac{Δ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad καὶ \quad Δ = 5\sqrt{2}$$

Ἐπειδὴ δέ: $Δ = Δ_1$ καὶ $Δ_1 = 5\sqrt{2}$,

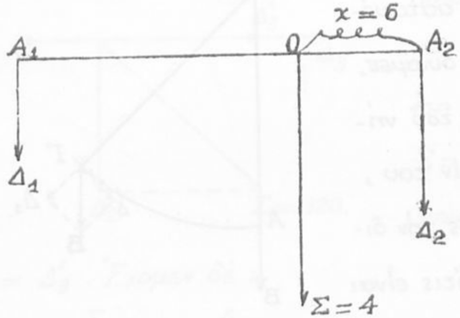
ἡ δύναμις ἡ τείνουσα νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν, εἶναι ἴση πρὸς τὴν τάσιν τοῦ νήματος καὶ ἰσοῦται μὲ $5\sqrt{2}$ χιλιόγραμμα.

55) Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, $Δ_1 = 1,5$ χλγρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και $\Delta_2 = 2{,}5$ χλγρ., εἶναι ἐφηρμοσμέναι εἰς τά ἄκρα A_1 καί A_2 εὐθείας, καθέτως πρός αὐτήν. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης καί τό σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἐάν τό μῆκος τῆς εὐθείας A_1A_2 εἶναι 16 δακτύλων.

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης, κατά τά γνωστά, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστασῶν, ἤτοι $2{,}5+1{,}5 = 4$ χιλγρ.



Ὅσον ἀφορᾷ τό σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἔχομεν:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{A_2O}{A_1O} = \frac{15}{25} = \frac{x}{16-x}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{16-x}, \quad 48-3x = 5x, \; 8x = 48, \; x = 6.$$

Τό σημεῖον ἐφαρμογῆς εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 6 δακτύλων ἀπό τοῦ A_2.

56) Ὁριζόντιος κανών μήκους 1 μέτρου καί βάρους ἐλαχίστου καί, ὡς ἐκ τούτου, μή λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, στηρίζεται διά τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων του ἐπί τῆς ἀκμῆς μαχαιρίου ὁριζοντίου. Τό ἕτερον ἄκρον αὐτοῦ εἶναι προσηρμοσμένον εἰς τό ἄγκιστρον κατακορύφου διαμέτρου. Ποῖαι θά εἶναι αἱ ἐν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δείξεις τοῦ δυναμομέτρου τούτου, ἄν ἐξαρτήσωμεν ἐκ τοῦ κανόνος βάρος 1 χιλιογράμμου εἰς ἀπόστασιν ἀπό τοῦ μαχαιρίου 10, 20, 30 κ.λ.π. δακτύλων.

Ἐπί τοῦ αὐτοῦ κανόνος, ὡς ἀνωτέρω διατεθειμένου, θέτομεν διαδοχικῶς εἰς ἀποστάσεις ἐπί τοῦ μαχαιρίου, ἴσας πρός 10, 20, 30 κ.λ.π. δακτύλους, βάρη τοιαῦτα, ὥστε τό δυναμόμετρον νά δεικνύῃ πάντοτε 2 χιλιόγραμμα. Ποῖα εἶναι τά βάρη ταῦτα;

<u>Λύσις:</u> α) Τό βάρος Π εἶναι συνισταμένη δύο ἀντιστάσεων, τῶν Σ καί Ρ. Ἄρα:

1) $\frac{P}{\Sigma} = \frac{90}{10}$, $\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{10} = 10$, $\frac{1}{\Sigma} = 10$

καί: $\Sigma = \frac{1}{10}$ χιλιογρ., ἤτοι $\Sigma = 100$ γραμμάρια.

2) $\frac{P}{\Sigma} = \frac{80}{20}$, $\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{20}$, $\frac{1}{\Sigma} = 5$

καί: $\Sigma = \frac{1}{5}$ χιλιογρ., ἤ $\Sigma = 200$ γραμμ.

3) $\frac{P}{\Sigma} = \frac{70}{30}$, $\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{30}$, $\frac{1}{\Sigma} = \frac{10}{3}$

καί: $\Sigma = \frac{3}{10}$ χιλιογρ., ἤ $\Sigma = 300$ γραμμάρια.

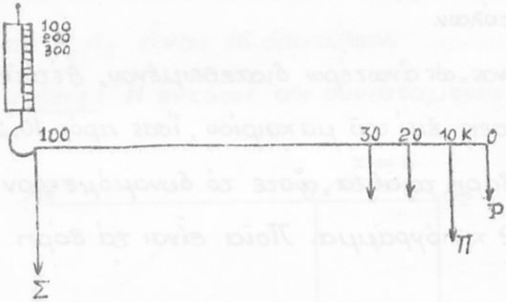
Αἱ ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου θά εἶναι 100, 200, 300 γραμ.

β) 1) Ἔχομεν: $\Sigma = 2$ καί $\Pi = x = \Sigma + P$.

Κατά τήν περίπτωσιν ταύτην εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\frac{P}{\Sigma} = \frac{90}{10}$, $\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{10}$, $\frac{x}{2} = 10$, $\underline{x = 20 \text{ χλγρ.}}$



2) $\frac{P}{\Sigma} = \frac{80}{20}$,

$\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{20}$,

$\frac{x}{2} = 5$, $\underline{x = 10 \text{ χλγρ.}}$

3) $\frac{O}{\Sigma} = \frac{70}{30}$,

$\frac{P+\Sigma}{\Sigma} = \frac{100}{30}$,

$\frac{x}{2} = \frac{10}{3}$, $x = \frac{20}{3} = 6{,}666$ χιλιόγραμμα.

Τά βάρη, τά όποία πρέπει νά θέσωμεν είναι 20, 10, 6,666 χιλιόγραμμα.

57) Τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, κειμένων ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζομεν εἰς μέν τά Α καί Β δύο δυνάμεις Π καί Κ, ἴσας, παραλλήλους καί ἀντιρρόπους, εἰς δέ τά Γ καί Δ δύο ἄλλας Ρ καί Σ, ἴσας μεταξύ των καί ἀντιρρόπους, ἀλλ' οὕτως ὥστε ἡ Ρ νά εἶναι παράλληλος καί ὁμόρροπος τῇ Κ. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ τέσσαρες αὗται δυνάμεις ἰσορροποῦν, ὅταν Π(ΑΒ) = Σ(ΓΔ).

<u>Λύσις</u>: Λαμβάνομεν τάς ῥοπάς πρός τυχόν σημεῖον Ο. Ροπή τοῦ ζεύγους Π καί Κ εἶναι Π(ΑΟ) καί Κ(ΒΟ), τοῦ δέ Ρ καί Σ εἶναι Σ(ΔΟ) καί Ρ(ΓΟ). (Τά ποσά εἶναι ἀνάλογα μέ τάς καθέτους).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Πρέπει:

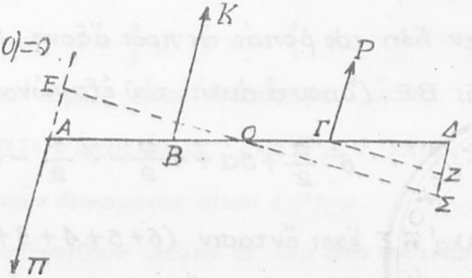
$\Pi(A0)-K(B0)+P(\Gamma 0)-\Sigma(\Delta 0)=0$

Ἀλλά: $A0=AB+B0$

καί $\Delta 0=\Delta\Gamma+\Gamma 0$. Ἄρα:

$\Pi(AB)+\Pi(B0)-\Pi(B0)+$

$+\Sigma(\Gamma 0)-\Sigma(\Delta\Gamma)-\Sigma(\Gamma 0)\equiv 0$



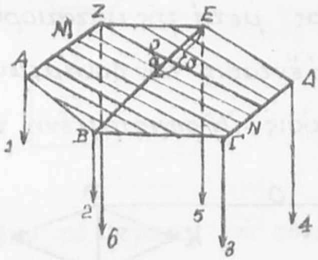
ἤ $\Pi(AB)-\Sigma(\Delta\Gamma)\equiv 0$.

Ἀλλά μᾶς δίδεται:

$$\Pi(AB)=\Sigma(\Gamma\Delta) \quad \text{καί} \quad \Pi(AB)-\Sigma(\Gamma\Delta)=0.$$

Ἄρα, ἐφ' ὅσον ἡ ταχύτης ὑφίσταται, αἱ δυνάμεις ἰσορροποῦν.

57) Δοθέντος κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ, ἐξαρτῶμεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α βάρος 1 χιλιογρ., ἐκ τῆς Β 2 χιλγρ., ἐκ τῆς Γ 3 χλγρ κ.ο.κ. μέχρι τῆς Ζ, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξαρτῶμεν βάρος 6 χλγρ. Νά δειχθῇ ὅτι τό σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν 6 τούτων βαρῶν εὑρίσκεται ἐπί τῆς διαγωνίου ΒΕ καί ἀπέχει ἀπό τοῦ Ε ἴσον πρός τά $\frac{5}{7}$ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἑξαγώνου.



Λύσις: θεωροῦμεν πρός ἄξονα ΒΕ τάς ῥοπάς τῶν δυνάμεων 4, 3 καί 6, 1. Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἴσον (7), τό σημεῖον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐφαρμογῆς των θά κεῖται ἐπί τῆς ΒΕ, εἴς τι σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν ἤδη τάς ῥοπάς ὡς πρός ἄξονα ΜΝ, κάθετον ἐπί τό μέσον τῆς ΒΕ. (ὅπου ά αὐτῆς τοῦ ἑξαγώνου (ΟΕ)). Ἔχομεν δέ:

$$6\cdot\frac{\alpha}{2}+5\alpha+4\frac{\alpha}{2}-3\frac{4}{2}-2\alpha-1\frac{\alpha}{2}=\text{ῥοπή } \Sigma$$

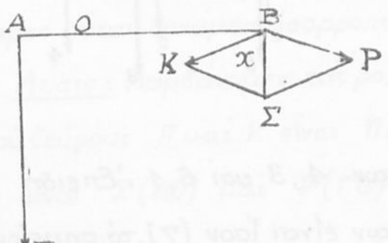
Ἀλλά ἡ Σ ἔχει ἔντασιν $(6+5+4+3+2+1)=21$, ἤτοι ῥοπή αὐτῆς εἶναι $21(\alpha-x)$. Ἄρα:

$$42(\alpha-x)=6\alpha+10\alpha+4\alpha-3\alpha-4\alpha-\alpha=12\alpha$$

$$7(\alpha-x)=2\alpha,\quad 7x=5\alpha \quad \text{καί} \quad x=\frac{5\alpha}{7} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

59) Ράβδος ὁμοιομερής ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως, ἐστηριγμένη εἰς σημεῖον Ο, μερίζον αὐτόν κατά λόγον $\frac{AO}{OB}=\frac{1}{3}$. Ἐάν ἐφαρμόσωμεν εἰς τό Α δύναμιν Π κατακόρυφον 3 χλγρ., εἰς δέ τό Β ἑκατέρωθεν τῆς κατακορύφου καί ἐν τῷ αὐτῷ μετ' αὐτῆς ἐπιπέδῳ δύο δυνάμεις Κ καί Ρ, ἴσας καί σχηματιζούσας μετά τῆς κατακορύφου γωνίαν 60°. Ποία εἶναι ἡ κοινή ἔντασις τῶν δυνάμεων Κ καί Ρ;

Λύσις: Ἡ συνισταμένη τῶν Κ καί Ρ συμπίπτει μέ τήν



κατακόρυφον, διότι τό ὑπό τῶν Κ καί Ρ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον εἶναι ῥόμβος. Ἐάν δέ καλέσωμεν x τήν συνισταμένην τῶν Κ καί

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ρ, ἔχομεν:

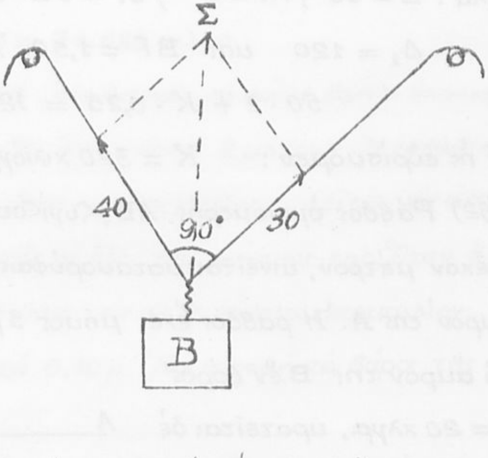
$$\frac{x}{\Pi} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{3} \quad \text{καί} \quad x = \frac{1}{3}\cdot\Pi\,, \quad x = \frac{1}{3}\cdot 3\,, \quad x = 1 \text{ χλγρ.}$$

Τά τρίγωνα ΒΣΚ καί ΒΣΡ εἶναι ἰσόπλευρα, ἄρα:

$$BK = B\Sigma = BP\,, \text{ ἐπομένως } K = P = 1 \text{ χλγρ.}$$

Ἤτοι, ἡ κοινή ἔντασις τῶν δυνάμεων εἶναι 1χλγρμ.

60) Δύο ἐργάται ὑποστηρίζουν σῶμα τι διά δύο σχοινίων, συνδεδεμένων εἰς τό αὐτό σημεῖον. Τό ἕν σχοινίων ἀσκεῖ δύναμιν 30 χιλγρ., τό δέ ἕτερον 40 χιλγρ., καί αἱ διευθύνσεις αὐτῶν σχηματίζουν ὀρθήν γωνίαν. Νά εὑρεθῇ τό βάρος τοῦ σώματος.



Λύσις: Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἑλκουσῶν τό σῶμα δυνάμεων εἶναι ἴση καί ἀντίθετος πρός τό βάρος τοῦ σώματος. Διά νά εὕρωμεν δέ τό ζητούμενον βάρος τοῦ σώματος, πρέπει νά ὑπολογίσωμεν τό μέγεθος τῆς συνισταμένης. Ἐκ τοῦ τύπου δέ:

$$\Sigma = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$$

ἔχομεν: $\Sigma = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ χιλιόγρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀλλά $\Sigma = B$, ἄρα: $B = 50$ χιλγρ.

61) Μία δοκός ΑΒ ὁμοιομερὴς φέρει εἰς τὸ Α ἓν βάρος $\Delta = 50$ χλγρ. καὶ εἰς τὸ Β ἓν βάρος $\Delta_1 = 120$ χλγρ., στηρίζεται δὲ εἰς ἓν σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε $A\Gamma = 2\mu$ καὶ $B\Gamma = 1{,}50\mu$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τῆς δοκοῦ.

<u>Λύσις:</u> Τὸ βάρος Κ τῆς δοκοῦ εἶναι ἐφηρμοσμένον εἰς τὸ μέσον Ο τῆς δοκοῦ ΑΒ. Διὰ νὰ εὑρίσκηται ἡ δοκὸς εἰς ἰσορροπίαν, πρέπει νὰ εἶναι:

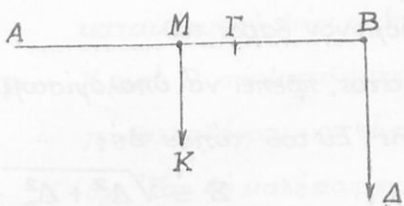
$$\Delta \cdot A\Gamma + K \cdot O\Gamma = \Delta \cdot B\Gamma .$$

Ἀλλά: $\Delta = 50$, $A\Gamma = 2$, $O\Gamma = OB - B\Gamma = 1{,}75 - 1{,}50 = 0{,}25$, $\Delta_1 = 120$ καὶ $B\Gamma = 1{,}50$. Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν:

$$50 \cdot 2 + K \cdot 0{,}25 = 120 \cdot 1{,}50 ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν: $K = 320$ χιλιόγρ.

62) Ῥάβδος ὁμοιομερὴς ΑΒ, ζυγίζουσα 500 γραμ. κατὰ τρέχον μέτρον, κινεῖται κατακορύφως περὶ τὸ στερεωμένον ἄκρον της Α. Ἡ ῥάβδος ἔχει μῆκος 3 μέτρων καὶ φέρει εἰς τὸ ἄκρον της Β ἓν βάρος $\Delta = 20$ χλγρ., κρατεῖται δὲ ὁριζοντίως δι' ἑνὸς ὑποστηρίγματος Γ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Α 1,80 μ. Νὰ προσδιορισθῇ



ἡ πίεσις ποὺ ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος: α) ἂν δὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑπολογισθῇ τὸ βάρος τῆς ῥάβδου καὶ β) ἄν ὑπολογισθῇ καὶ τὸ βάρος τῆς ῥάβδου.

Λύσις: α) Ἐάν παραστήσωμεν μέ x τήν πίεσιν πού ὑφίσταται τό σημεῖον Γ, θά ἔχωμεν τότε:

$$x \cdot A\Gamma = \Delta \cdot AB \quad \text{ἤ} \quad x \cdot 1{,}80 = 20 \cdot 3 \quad \text{,ὅθεν :} \quad x = 33{,}33 \text{ χλγρ.}$$

β) Τό βάρος Κ τῆς ῥάβδου εἶναι : $500 \cdot 3 = 1500$ γρ.$= 1{,}5$ χλγρ. καί εἶναι ἐφηρμοσμένον εἰς τό μέσον τῆς ΑΒ. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τό βάρος τῆς ῥάβδου, θά ἔχωμεν:

$$x \cdot A\Gamma = \Delta . AB + K \cdot AM \quad ,$$

ἤ $$x \cdot 1{,}80 = 20 . 3 + 1{,}5 \cdot 1{,}5$$

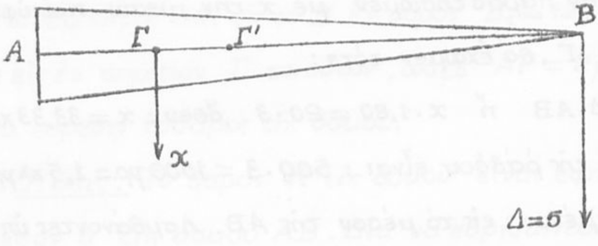
ἐξ ἧς εὑρίσκομεν: $x = 34{,}583$ χιλγρ.

63) Ράβδος βαρεία ΑΒ, τῆς ὁποίας τό πάχος βαίνει ἐλαττούμενον ἐκ τοῦ Α πρός τό Β, ἔχει μῆκος 2 μέτρων. Ἡ ῥάβδος εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ὅταν τό ὑπομόχλιον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ἐκ τοῦ Α ἴσην πρός τό 1/3 τοῦ μήκους της. Ὅταν ὅμως θέσωμεν ἕν βάρος 5 χλγρ. εἰς τό Β, τότε τό ὑπομόχλιον πρέπει νά μετατεθῇ κατά 0,10 μ. Νά εὑρεθῇ τό βάρος τῆς ῥάβδου.

Λύσις: Ἔστω x τό βάρος τῆς ῥάβδου. Τό βάρος της εἶναι ἐφηρμοσμένον εἰς τό κέντρον Γ τοῦ βάρους τοῦ σώματος. Θά εἶναι λοιπόν:

$$A\Gamma = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \text{ μ.} \quad \text{καί} \quad B\Gamma = \frac{4}{3} \text{ μ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Ὅταν προσθέσωμεν τό βάρος τῶν 5 χιλιογρ., τότε τό ὑπομόχλιον θά μετατεθῇ εἰς τήν θέσιν Γ' καί διά νά ὑπάρχῃ ἰσορροπία, πρέπει νά ἔχωμεν:

$$x \cdot ΓΓ' = Δ \cdot ΒΓ',$$

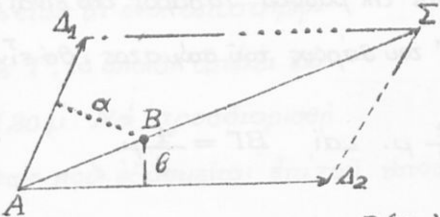
ἤ:
$$x \cdot 0,10 = 5 \cdot \left(\frac{4}{3} - 0,10\right),$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν: $x = 61,66$ χιλιόγραμμα.

Ἄρα τό βάρος τῆς ῥάβδου εἶναι 61,66 χιλιόγραμμα.

64) Αἱ ἀποστάσεις σημείου Β τῆς διευθύνσεως τῆς συνισταμένης Σ δύο δυνάμεων, ἐνεργουσῶν εἰς τό αὐτό σημεῖον ἀπό τῶν διευθύνσεων τῶν δυνάμεων τούτων, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρός τάς ἐντάσεις αὐτῶν.

<u>Λύσις</u>: Ἐάν παραστήσωμεν διά τῶν α καί β τάς ἀποστάσεις τοῦ Β ἀπό τῶν διευθύνσεων τῶν $Δ_1$, $Δ_2$, θά εἶναι Ροπή $Δ_1$ ὡς πρός Β $-Δ_1 \cdot α$, Ροπή $Δ_2$ ὡς πρός Β $Δ_2 \cdot β$.



Ὅθεν:

$$P(Δ_1) + P(Δ_2) = -Δ_1 \cdot α + Δ_2 \cdot β.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ δέ: $\quad P(\Delta_1)+P(\Delta_2) = P(\Sigma) = 0$,

ἔπεται ὅτι: $\quad -\Delta_1 \cdot \alpha + \Delta_2 \cdot \beta = 0$

Ἄρα: $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

65) Μοχλὸς ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι 8 χιλιογρ., ἔχει μῆκος 2 μ. Τὸ ὑπομόχλιον Γ ἀπέχει τοῦ Β 0,65 μ. Ποίαν δύναμιν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ἄκρον Β τοῦ μικροῦ βραχίονος, διὰ νὰ ἰσορροπήσωμεν 200 χιλιόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τεθῇ εἰς τὸ ἄκρον Α τοῦ μεγάλου βραχίονος;

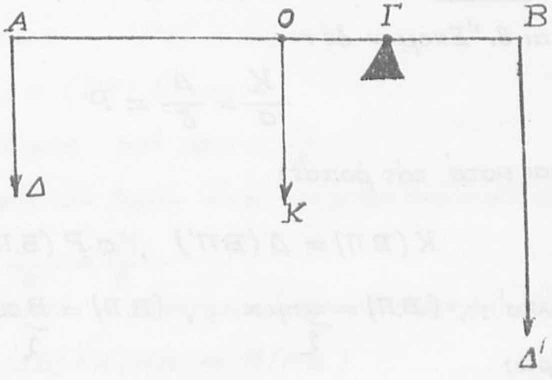
<u>Λύσις:</u> Τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ μοχλοῦ ΑΒ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον Ο καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$AO = OB = \frac{AB}{2} = 1 \text{ μέτρον.}$$

Ἐπειδὴ δὲ $B\Gamma = 0{,}65$, ἔπεται ὅτι:

$$O\Gamma = 1 - 0{,}65 = 0{,}35 \ \mu.$$

Ἐὰν ἤδη παραστήσωμεν μὲ x τὸ βάρος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸ ἄκρον Β διὰ νὰ ἐπέλθῃ ἰσορροπία, πρέπει νὰ ἔχωμεν:



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

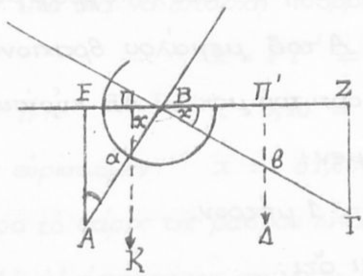
$$\Delta.(A\Gamma) + K.(O\Gamma) = \Delta'.(B\Gamma)$$

ἤ: $$200 \cdot 1,35 + 8 \cdot 0,35 = x \cdot 0,65.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν:

$$x = 419,69 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

66) Ράβδος ὁμοιομερής, βαρεῖα, ΑΒΓ, ἠγκωνισμένη εἰς τὸ Β καὶ ὀρθὴν γωνίαν, οὕτως ὥστε ΒΑ $= \alpha$ καὶ ΒΓ $= \beta$, δύναται νὰ στρέφηται ἐλευθέρως περὶ τὸ σταθερὸν σημεῖον Β, ἐν τῷ κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ ΑΒΓ.



Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΒΓ μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Β. Ὅταν ἡ ῥάβδος εὑρίσκηται ἐν ἀσταθεῖ καὶ εὐσταθεῖ ἰσορροπίᾳ.

<u>Λύσις</u>: Τὰ βάρη ἐνεργοῦν εἰς τὰ μέσα τῶν βραχιόνων α καὶ β. Ἔχομεν δέ:

$$\frac{K}{\alpha} = \frac{\Delta}{\beta} = P$$

καὶ κατὰ τὰς ροπάς:

$$K(B\Pi) = \Delta(B\Pi'), \quad \alpha.P(B.\Pi) = \beta.P(B\Pi').$$

Ἀλλά: $(B.\Pi) = \frac{\alpha}{2}\eta\mu x$, $(B.\Pi) = \frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu x$,

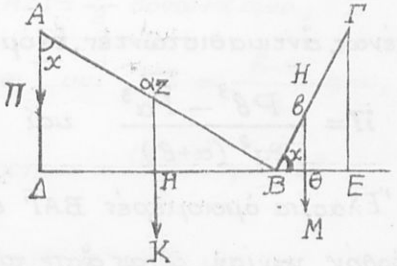
ἄρα:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\alpha^2}{2}\eta\mu x = \frac{\beta^2}{2}\sigma\upsilon\nu x \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \varepsilon\varphi x = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Οὕτως, εὑρίσκομεν δύο τιμάς τάς x, ἐξ ὧν ἡ διαφέρουσα κατά $180°$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν.

67) Ἔλασμα ὁμοιομερές $AB\Gamma$, βάρους P, ἠγκωνισμένον εἰς τό B κατ' ὀρθήν γωνίαν, οὕτως ὥστε τό μῆκος τῶν βραχιόνων νά εἶναι $AB=\alpha$ καί $B\Gamma=\beta$, ἰσορροπεῖ, ἐστηριγμένον διά τῆς ἀκμῆς B, ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Τί βάρος πρέπει νά ἐξαρτήσωμεν εἰς τό A (ἐάν $\alpha<\beta$), ἵνα τά ἄκρα A καί Γ κεῖνται εἰς τό αὐτό ὕψος ἀπό τοῦ ἐπιπέδου τῆς στηρίξεως;



<u>Λύσις</u>: Ἔστω Π τό ζητούμενον βάρος. Ἔχομεν:

$$(A\Delta)=\alpha\,\sigma\upsilon\nu x \quad , \quad (\Gamma E)=\beta\,\eta\mu x \, .$$

Ἐπειδή ὅμως $(A\Delta)=(\Gamma E)$, ἔχομεν:

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu x = \beta\,\eta\mu x \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \varepsilon\varphi x = \frac{\alpha}{\beta} \, .$$

Σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν βαρῶν εἶναι τά μέσα τῶν α καί β.

Ἔχομεν : $\quad \dfrac{K}{\alpha} = \dfrac{M}{\beta}$.

Ἐπειδή ὅμως ἰσορροπεῖ τό σύστημα, ἔχομεν ἐκ τῶν ροπῶν:

$$\Pi(\Delta B)+K(HB) = M(\theta B)$$

$4^{ον}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και επειδή: $\Delta B = \alpha\eta\mu x$, $HB = \frac{\alpha}{2}\cdot\eta\mu x$, $(\Theta B) = \frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu x$,

έχομεν: $\Pi \alpha \eta\mu x + K\cdot\frac{\alpha}{2}\eta\mu x = M\cdot\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu x$, $\Pi\alpha + K\frac{\alpha}{2} = M\frac{\beta}{2}\cdot\sigma\varphi x$.

Ἀλλά: $\sigma\varphi x = \frac{\beta}{\alpha}$, ἄρα: $2\Pi\cdot\alpha + K\cdot\alpha = M\cdot\frac{\beta}{2\alpha}$

καί $$\Pi = \frac{M\beta^2 - K\alpha^2}{2\alpha^2}$$

Ἀλλά: $\frac{K}{\alpha} = \frac{M}{\beta} = \frac{K+M}{\alpha+\beta} = \frac{P}{\alpha+\beta}$ καί $M = \frac{\beta\cdot P}{\alpha+\beta}$ καί $K = \frac{\alpha\cdot P}{\alpha+\beta}$

Ἐπομένως, ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$\Pi = \frac{P\beta^3 - P\alpha^3}{2\alpha^2(\alpha+\beta)} \quad \text{καί} \quad \Pi = \frac{P(\beta^3-\alpha^3)}{2\alpha^2(\beta+\alpha)}$$

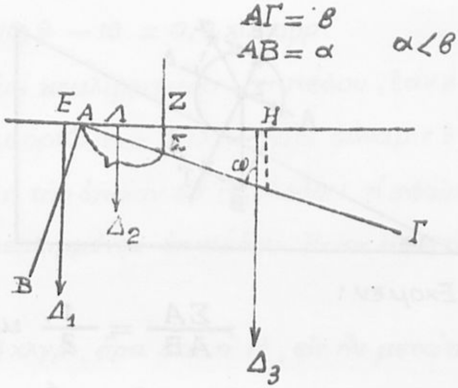
68) Ἔλασμα ὁμοιομερές ΒΑΓ εἶναι ἠγκωνισμένον εἰς τό Α κατ' ὀρθήν γωνίαν, οὕτως ὥστε τά μήκη τῶν βραχιόνων ΑΒ καί ΑΓ νά εἶναι ἀντιστοίχως α καί β. Νά εὑρεθῇ ἐκ τίνος σημείου τοῦ μεγάλου βραχίονος πρέπει νά ἐξαρτηθῇ, ἵνα ὅταν ἰσορροπήσῃ, τά ἄκρα Β καί Γ κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω $\beta > \alpha$ καί x ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως Σ ἀπό τοῦ Α. Ὡς γνωστόν, τά βάρη τῶν βραχιόνων ἐνεργοῦν εἰς τά μέσα αὐτῶν. Θεωροῦμεν τάς ῥοπάς ὡς πρός

$$\Sigma:\ \Delta_1(EZ) + \Delta_2(\Lambda Z) = \Delta_3(HZ).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλά τά βάρη εἶναι ἀνάλογα τῶν μηκῶν, ἐπειδή ἡ ράβδος εἶναι ὁμοιομερής, ἤτοι:



$$\frac{\Delta_1}{\alpha} = \frac{\Delta_2}{x} = \frac{\Delta_3}{\beta - x} = P,$$

ἄρα: $\alpha(EZ) + x(\Lambda Z) =$
$= (\beta - x)(HZ)$.

Ἔχομεν ὅμως: $(EZ) = (EA) + (AZ) = \frac{\alpha}{2}$ συνω $+ x$ ημω,

$$(\Lambda Z) = \frac{x}{2}\,\text{ημω}, \quad \text{καί} \quad HZ = \frac{\beta - x}{2}\,\text{ημω},$$

ἄρα: $\frac{\alpha^2}{2}$ συνω $+ \frac{x^2}{2}$ ημω $+ \alpha . x$ ημω $= \frac{(\beta - x)^2}{2}$ ημω $. x^2$

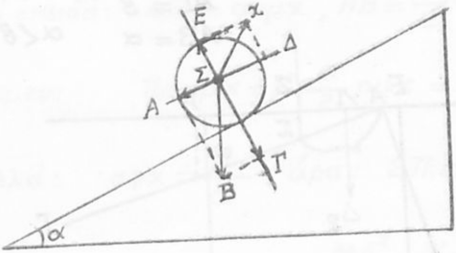
$$\alpha^2 \sigma\varphi\omega + 2\alpha x + \cancel{x^2} = (\beta - x)^2 = \beta^2 + \cancel{x^2} - 2\beta x.$$

$$2(\alpha + \beta)x = \beta^2 - \alpha^2 . \sigma\varphi\omega. \quad \text{Ἀλλά} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\alpha}{\beta}$$

ἄρα: $2(\alpha + \beta)x = \beta^2 - \frac{\alpha^3}{\beta}$ καί $x = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{2\beta(\alpha + \beta)}$.

69) Ἐπί κεκλιμένου ἐπιπέδου, οὗ ἡ βάσις εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους, βάρος 38,729 χλγρ. ἀκινητῶν, ὑποκείμενον εἰς τήν ἐνέργειαν δυνάμεως, σχηματιζούσης γωνίαν 30° μετό ἐπίπεδον. Νά εὑρεθῇ ἡ δύναμις αὕτη καί ἡ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου πίεσις.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Λύσις: Τό βάρος ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, εἰς μίαν κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ καί ἄλλην κάθετον πρός ταύτην.

Ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma A}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad (AB) = 2(\Sigma A).$$

Ἐπίσης: $B^2 = 4(\Sigma A)^2 + (\Sigma A)^2 = 5(\Sigma A)^2$ καί $(\Sigma A) = \frac{B\sqrt{5}}{5}$

Ὁμοίως ἡ x ἀναλύεται εἰς δύο δυνάμεις, μίαν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον καί ἄλλην ἀντίθετον τῇ ΑΣ, ἥτις εἶναι καί ἴση αὐτῇ, ἤτοι:

$$\Delta\Sigma = \frac{B\sqrt{5}}{5}.$$

Ἀλλά: $(\Sigma\Delta) = x \cdot \text{συν}30^\circ = x\frac{\sqrt{3}}{2}$ καί $(\Sigma E) = x\,\text{συν}60^\circ = \frac{x}{2}$.

Ἑπομένως: $x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B}{\sqrt{5}}$ καί $x = \frac{2B}{\sqrt{15}}$

$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma B + \frac{1}{2}\,\text{συλλ.}\,15 = 0{,}30103 + 1{,}58804 + \bar{1}{,}41195 =$

$= 1{,}30102$ καί $x = 20$ χιλιόγρ. ἡ ἐνεργοῦσα δύναμις.

$(\Sigma E) = \frac{1}{2} \cdot x = 10$ χιλιόγραμμα

καί $(\Sigma\Gamma) = 2(A\Sigma) = \frac{2B\sqrt{5}}{5} = 10{,}9$ χιλιόγρ.

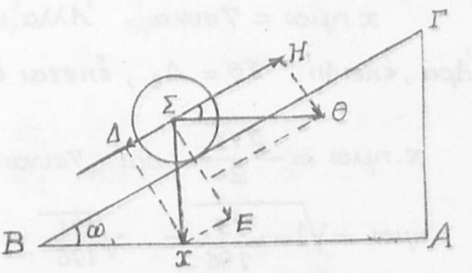
Ἡ ἀντίστασις ἄρα, ἥν παρουσιάζει τό ἐπίπεδον, εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(\Sigma\Gamma)-(\Sigma E) = 10,9 - 10 = 0,9$ χιλιογρ.

70) Σφαῖρα ἰσορροπεῖ ἐπί κεκλιμμένου ἐπιπέδου, ἐάν ἐνεργῇ ἐπ' αὐτῆς δύναμις εἴτε ὁριζόντιος 5 χλγρ., εἴτε δύναμις 3 χλγρ. ἀντίρροπος τῆς φορᾶς, τήν ὁποίαν θά ἠκολούθει ἡ σφαῖρα, ἄν ἦτο ἐλευθέρα, ἐπί τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου. Ποῖον εἶναι τό βάρος τῆς σφαίρας;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν: $\Delta = 3$ χλγρ., ἄρα καί ἡ H, εἰς ἥν μετά τῆς E ἀναλύεται ἡ $\Theta = 5$ χλγρ., εἶναι 3 χλγρ., ὡς ἰσορροποῦσα καί αὐτή τήν σφαῖραν. Ἐπίσης: $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ συνω $= \frac{3}{5}$.



Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΣx ἔχω (ἐάν x τό βάρος τῆς σφαίρας):

$\Delta = x\eta\mu\omega$

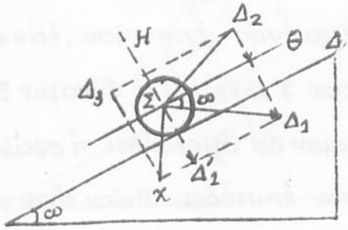
καί $x = \frac{\Delta}{\eta\mu\omega}$, ἀλλά: $\eta\mu\omega = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

ἄρα: $x = \frac{\Delta}{\frac{4}{5}} = \frac{3.5}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$.

Τό βάρος, λοιπόν, τῆς σφαίρας εἶναι 3,75.

71) Σφαῖρα ἰσορροπεῖ ἐπί κεκλιμμένου ἐπιπέδου, ἐάν ἐνεργῇ ἐπ' αὐτῆς, εἴτε δύναμις 7 χιλιογράμμων ὁριζόντιος, εἴτε δύναμις 5 χιλιογράμμων, σχηματίζουσα μετά τῆς γραμμῆς κλί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



σεως τοῦ ἐπιπέδου γωνίαν 30°. Ποῖον εἶναι τό βάρος τῆς σφαίρας;

<u>Λύσις</u>: Ἡ ὁριζόντιος δύναμις Δ ἀναλύεται εἰς τάς Δ_1 καί Δ_1', ἡ ἄλλη δέ Δ_2 εἰς τάς Η καί θ. Καί τό βάρος ἔστω x. Ἔχομεν:

$$\Delta_1 = x\,\eta\mu\omega\,, \quad \text{καί} \quad \Delta_3 = \Delta_1 = 7\,\sigma\upsilon\nu\omega\,, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$x\,\eta\mu\omega = 7\,\sigma\upsilon\nu\omega\,. \quad \text{Ἀλλά: } \Sigma\theta = 5\,\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ἄρα, ἐπειδή $\Sigma\theta = \Delta_3$, ἕπεται ὅτι:

$$x.\eta\mu\omega = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \text{καί} \quad 7\,\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5\sqrt{3}}{2}\,, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\eta\mu\omega = \sqrt{1-\frac{75}{196}} = \sqrt{\frac{121}{196}} = \frac{11}{14}\,. \quad \text{Ἤτοι:}$$

$$x \cdot \frac{11}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\,, \quad x = \frac{35\sqrt{3}}{11} = \frac{60{,}62}{11} = 5{,}51.$$

Ἤτοι τό βάρος τῆς σφαίρας εἶναι 5,51 χιλιόγρ.

72) Εἰς ποῖα σημεῖα τῆς περιφερείας κυκλικοῦ δίσκου πρέπει νά ἐξαρτήσωμεν ἀντιστοίχως βάρη 3, 4 καί 5 χλγρ., ἵνα οὗτος ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ κέντρου του ἰσορροπῇ ὁριζοντίως;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ἡ δύναμις $\Delta_1 = 4$ ἐκ τινων σημείων τῆς περιφερείας, ἥτις πρέπει νά κεῖται εἰς τοιοῦτον σημεῖον ἐφαρμογῆς, ὥστε νά εὑρίσκηται ἐπί τῆς δι' αὐτοῦ διερχομένης δια-

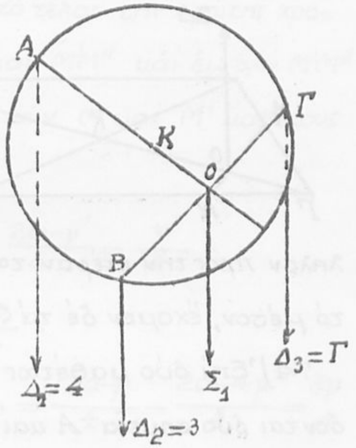
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μέτρου, τό σημείον έφαρμογής τών δύο άλλων δυνάμεων, καί

$$\Delta_1 (AK) = \Sigma_1 x (KO),$$

$$\Delta_1 \alpha = \Sigma K$$

καί $x = \dfrac{\Delta_1 \alpha}{\Sigma_1} = \dfrac{4\alpha}{8} = \dfrac{\alpha}{2}$.



Ήτοι ορίζεται τό σημείον έφαρμογής τών $\Delta_2 = 3$ καί $\Delta_3 = 5$, τών όποίων τά σημεία έφαρμογής ορίζονται ώς εξής:

$$\Delta_2 (OB) = \Delta_3 (O\Gamma), \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{O\Gamma}{OB}, \quad \frac{O\Gamma}{OB} = \frac{3}{5} .$$

Άλλά: $(O\Gamma)^2 = \dfrac{9\alpha^2}{20}$, ήτοι: $O\Gamma = \dfrac{3\alpha}{\sqrt{20}} = \dfrac{3\alpha}{2\sqrt{5}}$

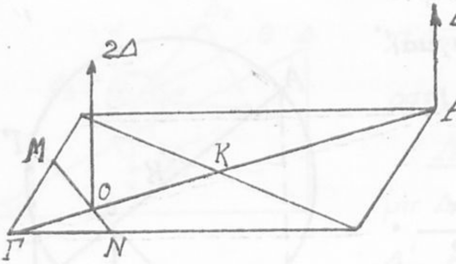
Ούτω, προσδιορίζεται τό Γ · προσδιορίζομεν καί τό Β, προεκτείνοντες τήν ΓΟ μέχρι τής περιφερείας.

73) Παραλληλόγραμμον όμοιομερές φέρεται υπό τριών άνθρώπων, ών ό είς υποβαστάζει αυτό είς μίαν τών κορυφών του. Είς τίνα σημεία τής περιμέτρου του πρέπει νά υποβαστάζουν οι δύο άλλοι, ίνα καί οι τρείς βαστάζουν τό αυτό βάρος;

<u>Λύσις</u> : Τό κέντρον τού βάρους ένεργεί είς τό σημείον το-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μῆς τῶν διαγωνίων. Ἔχομεν δέ:

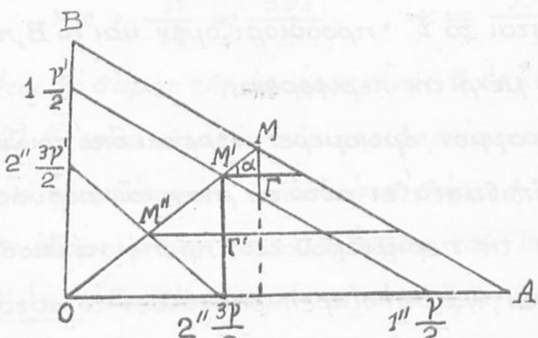


$$\Delta(AK) = 2\Delta(OK),$$

$$(AK) = 2(OK).$$

Διά νά ἀναλύσωμεν τήν 2Δ εἰς δύο ἴσας, φέρομεν παράλληλον πρός τήν ἑτέραν τῶν διαγωνίων, ὅτε αὕτη τέμνεται εἰς τό μέσον, ἔχομεν δέ τά ζητούμενα σημεῖα M καί N.

74) Ἐπί δύο καθέτως τεμνομένων εὐθειῶν Ox, Oy, δίδονται δύο σημεῖα A καί B, ὧν αἱ ἀπό τοῦ O ἀποστάσεις εἶναι ἀντιστοίχως α καί β. Δύο κινητά ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν A καί B, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, καί φέρονται ἀμφότερα εἰς τό O μέ κίνησιν ὁμαλῶς μεταβαλλομένην καί ἐπιταχύνσεις γ καί γ'. Νά εὑρεθῇ ἡ τροχιά τοῦ μέσου M τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τά δύο κινητά, καί τό εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ σημείου M.



Λύσις: Ἔστωσαν M, M', M''

τά μέσα τών εὐθειών, τών ἑνουσών τά κινητά, κατά διαφόρους θέσεις, ὧν ΓΔ ἡ θέσις κατά τό τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος. Φέρομεν τά ΜΜ' καί Μ'Μ'' καί ἐκ τών Μ'Μ'' παραλλήλους πρός τήν ΟΑ καί ἐκ τών Μ καί Μ' καθέτους ἐπί ταύτας. Ἔχομεν:

$$M'\Gamma' = \frac{a}{2} - \frac{a-\frac{\gamma}{2}}{2} = \frac{2a}{4} - \frac{2a-\gamma'}{4} = \frac{\gamma'}{4}.$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν: $M\Gamma = \dfrac{\gamma}{4}$.

Ὁμοίως: $$M''\Gamma' = \frac{a-\frac{\gamma}{2}}{2} - \frac{a-2\gamma}{2} = \frac{2a-\gamma}{4} - \frac{2a-4\gamma}{4} = \frac{3\gamma}{4}.$$

Κατ' ἀναλογίαν δέ: $M'\Gamma = \dfrac{3\gamma}{4}$.

Ἤτοι: $$\frac{M\Gamma}{M'\Gamma} = \frac{\frac{\gamma'}{4}}{\frac{3\gamma}{4}} = \frac{\gamma'}{3\gamma} \quad \text{καί} \quad \frac{M'\Gamma'}{M''\Gamma'} = \frac{\frac{\gamma'}{4}}{\frac{3\gamma}{4}} = \frac{\gamma'}{3\gamma},$$

ἄρα: $\dfrac{M\Gamma}{M'\Gamma} = \dfrac{M'\Gamma'}{M''\Gamma'}$, ἄρα $MM'\Gamma \sim M'M''\Gamma'$ καί $\varphi = \omega$.

Ἄρα αἱ Μ'Μ'' κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἑπομένως, ἡ τροχιά τοῦ μέσου εἶναι εὐθεῖα.

Ἐπίσης ἔχομεν: $$\frac{MM'}{MM''} = \frac{AA'}{AA''} = \frac{\frac{1}{2}\gamma x^2}{\frac{1}{2}\gamma x^2},$$

(κατά τά ὅμοια τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραί εἶναι παράλληλοι τῆς ΟΑ),

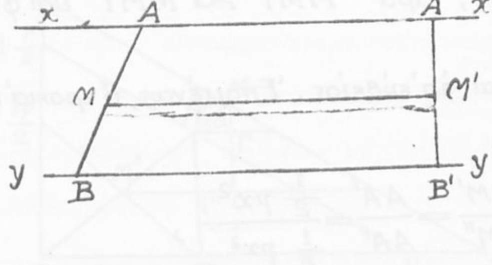
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι: $$\frac{M'M''}{MM''}=\frac{x^2}{x'^2}.$$

Βλέπομεν, λοιπόν, ὅτι τά διαστήματα τά διανυόμενα ὑπό τοῦ μέσου, εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἤτοι ἡ κίνησις τοῦ μέσου εἶναι ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

75) Ἐπί δύο παραλλήλων εὐθειῶν xx' καί yy' δίδονται ἀντιστοίχως δύο σημεῖα A καί B. Δύο κινητά ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν σημείων τούτων καί κατά τήν αὐτήν φοράν. Νά εὑρεθῇ ἡ τροχιά τοῦ μέσου M τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τά δύο κινητά: α) ὅταν τά κινητά κινοῦνται ἰσοταχῶς μέ ταχύτητα α καί α', καί β) ὅταν κινοῦνται μέ κινήσεις ὁμαλῶς μεταβαλλομένας, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, μέ ἐπιταχύνσεις γ καί γ'.

<u>Λύσις:</u> α) Ἔχομεν: $AA'=\alpha x$ καί $BB'=\alpha' x$, μετά χρόνον x κινήσεως. Ἀλλά τό $AA'BB'$ εἶναι τραπέζιον καί ἡ διάμεσος αὐτοῦ εἶναι παράλληλος



τῇ βάσει. Ἑπομένως, ἡ κίνησις εὐθύγραμμος. Ἐπίσης ἔχομεν:

$$MM' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{(\alpha+\alpha')x}{2}.$$

Τό διανυόμενον, λοιπόν, διάστημα εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου. Ἄρα, ἡ κίνησις τοῦ Μ ἰσοταχής.

β) Ἡ κίνησις καί πάλιν, διά τόν αὐτόν λόγον, εἶναι εὐθύγραμμος. Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἔχομεν:

$$MM' = \frac{\frac{1}{2}\gamma x^2 + \frac{1}{2}\gamma' x^2}{2} = \frac{(\gamma+\gamma')x^2}{4}$$

Ἤτοι τά διανυόμενα διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, ἐν οἷς διηνύθησαν. Ἐπομένως, ἡ κίνησις τοῦ Μ εἶναι ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

76) Ἐπί δύο καθέτων τεμνομένων εὐθειῶν Ox, Oy, δίδονται δύο σημεῖα Α καί Β, τῶν ὁποίων αἱ ἀπό τοῦ Ο ἀποστάσεις εἶναι ἀντιστοίχως α καί β. Δύο κινητά ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν σημείων Α καί Β καί κατευθύνονται πρός τό Ο, ὁμαλῶς καί μετά τῆς αὐτῆς ταχύτητος. Νά εὑρεθῇ:

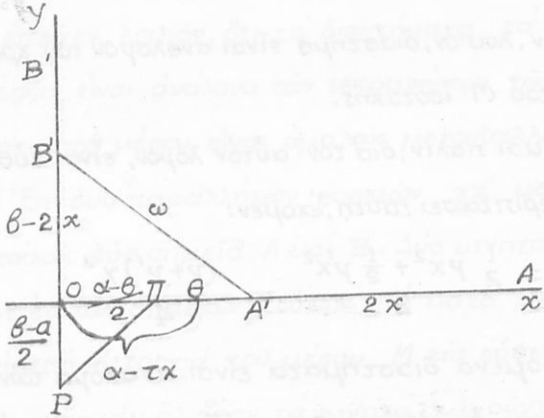
α) Κατά ποίαν στιγμήν ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις θά εἶναι ἐλαχίστη.

β) Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη αὐτή ἀπόστασις.

γ) Ποίαν γωνίαν θά σχηματίζῃ ἡ τά δύο κινητά ἑνοῦσα εὐθεῖα μετά τῆς Ox, κατά τήν στιγμήν ταύτην.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

<u>Λύσις</u>: Ἔστω $OA > OB$ καί τ ἡ ταχύτης. Ἔστω δέ x ὁ χρόνος, καθ' ὅν τά κινητά θά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἐλαχίστην μεταξύ των ἀπόστασιν.



Ἔχομεν:

$$\omega^2 = \alpha^2 + \tau^2 x^2 - 2\alpha\tau x + \beta^2 + \tau^2 x^2 - 2\beta\tau x ,$$

$$2\tau^2 x^2 - 2(\alpha+\beta)\tau x + \alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 = 0$$

$$x = \frac{(\alpha+\beta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 2\omega^2}}{\tau^2}$$

$$\Delta = 2\omega^2 - (\alpha-\beta)^2 .$$

Ἵνα εἶναι τό πρόβλημα δυνατόν, πρέπει $2\omega^2 - (\alpha-\beta)^2 \geq 0$, ἤτοι $2\omega^2$ πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $(\alpha-\beta)^2$ ἤ τοὐλάχιστον ἴσον αὐτῷ.

Κατά τήν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν εἶναι:

$$2\omega^2 = (\alpha-\beta)^2 \quad \text{καί} \quad \omega = \frac{(\alpha-\beta)\sqrt{2}}{2},$$

ὁ χρόνος δέ εἶναι: $x = \dfrac{\alpha+\beta}{\tau^2}$.

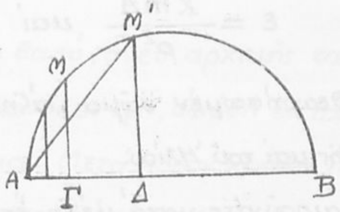
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα: $\alpha - \tau x = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$ καί $\beta - 2x = \beta - \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$

Ἑπομένως, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι ἡ ΠΡ καί ἰσοῦται μέ $\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{2}}{2}$. Ἡ δέ γωνία μετά τοῦ ἄξονος Ox

$$\left(\hat{P\theta\Pi} = \frac{\frac{\alpha-\beta}{2}}{\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ εἶναι 45^o.

77) Κινητόν Μ, ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α, διατρέχει τήν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ μέ κίνησιν τοιαύτην, ὥστε ἡ εὐθύγραμμος ἀπόστασις ΜΑ νά μεταβάλληται ἀναλόγως τοῦ χρόνου. Νά εὑρεθῇ μέ ποίου εἴδους κίνησιν θά κινῆται ἡ προβολή τοῦ Μ ἐπί τῆς διαμέτρου ΑΒ.



Λύσις: Ἔστω ΑΜ τό διάστημα τό διανυθέν κατά τήν πρώτην μονάδα τοῦ χρόνου καί ΑΜ' τό διάνυθέν κατά τάς δύο πρώτας. Κατά τά δοθέντα, ἔχομεν:

$$2(AM) = (AM').\ \text{Ἀλλά}\ AM'^2 = 2P\cdot(A\Delta)$$

καί: $$A\Delta = \frac{(AM')^2}{2P},\ A\Delta = \frac{4(AM)^2}{2P}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τό διανυθέν κατά τάς 3 πρώτας χρο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κικὰς μονάδας διάστημα εἶναι $\frac{g(AM)^2}{2P}$, ἤτοι ἡ κίνησις τῆς προβολῆς εἶναι ὁμαλῶς μεταβαλλομένη.

78) Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ἡλίου εἶναι 324300 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς μάζης τῆς Γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτοῦ 108 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡλίου.

<u>Λύσις</u>: Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν m καὶ ρ τὴν μᾶζαν καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς γῆς, ἡ μᾶζα καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἡλίου θὰ εἶναι 324300 m καὶ 108ρ ἀντιστοίχως. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon = \frac{KmA}{\rho^2} \quad \text{καὶ} \quad E = \frac{K\,324300\,mA}{108^2\rho^2}$$

ἐὰν θεωρήσωμεν σῶμα μάζης A, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ ἡ ἕλξις τῆς Γῆς καὶ τοῦ Ἡλίου.

Διαιροῦντες κατὰ μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{E}{\varepsilon} = \frac{324300}{108^2} = \frac{324300}{11664}$$

Ἄρα καί: $\frac{\Gamma}{g} = \frac{3243000}{11664}$,

ἐὰν Γ ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις τοῦ Ἡλίου, ἤτοι:

$$\frac{\Gamma}{g} = 27{,}8 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = 27{,}8 . g.$$

79) Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις σώματος πίπτοντος ἐπὶ τῆς σελήνης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ μᾶζα αὐτῆς εἶναι τὸ $\frac{1}{80}$ τῆς μάζης τῆς γῆς, ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτῆς τὰ $\frac{11}{40}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῆς.

Λύσις: Παριστῶμεν διά τῶν m καί ρ τήν μᾶζαν καί τήν ἀκτῖνα τῆς Γῆς, ὅτε ἡ μᾶζα τῆς Σελήνης θά εἶναι $\frac{m}{80}$, ἡ δέ ἀκτίς $\frac{11\rho}{40}$. Ἔστω δέ σῶμα μάζης M, ἐπί τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦν αἱ ἕλξεις τῆς Γῆς καί τῆς Σελήνης.

Ἔχομεν:
$$E=\frac{K.M\frac{m}{80}}{\frac{11^2.\rho^2}{40^2}}=K\cdot\frac{M.m.40^2}{80.121.\rho^2} \quad \text{καί } E'=K\frac{mM}{\rho^2}$$

Ἄρα $\frac{E}{E'}=\frac{\Gamma}{g}=\frac{40^2}{80.121}=\frac{40}{242}=0,165$ καί $\Gamma=0,165g$.

80) Ἐκ σημείου Α ἀφέθη σῶμα βαρύ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Τήν στιγμήν πού εἶχε διανύσει 1μ., ἀφέθη ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καί δεύτερον σῶμα. Μετά πόσον χρόνον ἡ μεταξύ τῶν δύο σωμάτων ἀπόστασις θά εἶναι 10;

Λύσις: Ἔστω x ὁ ζητούμενος χρόνος ἀπό τῆς πτώσεως τοῦ πρώτου σώματος. Τότε τό διάστημα τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{2}gx^2$, τοῦ δέ δευτέρου $\frac{1}{2}g\cdot\left(x-\sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2$, διότι $\sqrt{\frac{2}{g}}$ εἶναι ὁ χρόνος, καθ' ὅν διηνύθη τό 1 μέτρον. Ἔχομεν δέ:

$$\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}g\left(x^2+\frac{2}{g}-2x\sqrt{\frac{2}{g}}\right)=10$$

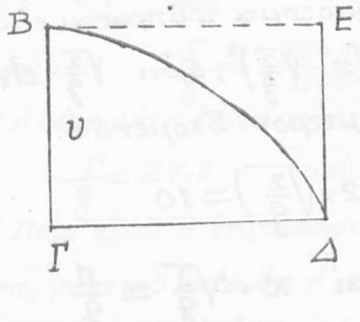
καί: $2x\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}=\frac{22}{g}$ καί $x\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}=\frac{11}{g}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και $\quad x = \dfrac{11}{\sqrt{2g}} \quad$ ή $\quad x = \dfrac{11\sqrt{2g}}{2g}$

81) Ἀεροπλάνον πετᾷ ὁριζοντίως κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς ὕψος 500 μ. ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους καὶ μὲ ταχύτητα 120 χλμ. τὴν ὥραν. Ὁ ἀεροπόρος θέλει νὰ βομβαρδίσῃ μὲ ὀβίδα βάρους 50 χλγρ. ἓν κτίριον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κινεῖται. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ: α) Πρὸ πόσου χρόνου πρέπει νὰ ἀφίσῃ τὴν ὀβίδα ὁ ἀεροπόρος, πρὶν φθάσῃ ἐπὶ τῆς κατακορύφου, ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ κτίριον. β) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κατακορύφου θὰ εὑρίσκηται τότε. γ) Ποῦ θὰ εὑρίσκηται τὸ ἀεροπλάνον, καθ' ἣν στιγμὴν ἡ ὀβὶς θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, ἂν ἐξακολουθήσῃ νὰ κινῆται.

<u>Λύσις</u>: Ὁ χρόνος x, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ ὀβὶς κατὰ τὴν πτῶσιν της, διὰ νὰ διανύσῃ τὴν καμπύλην ΒΔ, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν χρόνον, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἡ ὀβὶς διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν ΒΓ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:



$$v = \frac{1}{2} g x^2 ,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν:

$$x = \sqrt{\frac{2\upsilon}{g}} = \sqrt{\frac{2.500}{9,80}} = 10,2 \text{ δλ.}$$

β) Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀεροπόρος ἀφίνει τήν ὀβίδα νά πέσῃ ἀπό τό σημεῖον Β καί ὅτι αὐτη κατά τήν πτῶσιν της θά φθάσῃ εἰς τό Δ, ὅπου ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχει τό κτίριον, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι ἡ ΒΕ, ἡ ὁποία δίδεται ὑπό τοῦ τύπου: $BE = \tau x$,

ὅπου: $\tau = \frac{120.000}{3600} = \frac{100}{3}$ μ. καί $x = 10,2$ δλ.

Ἀντικαθιστῶντες, εὑρίσκομεν:

$$BE = \frac{100}{3} \cdot 10,2 = 340 \text{ μ.}$$

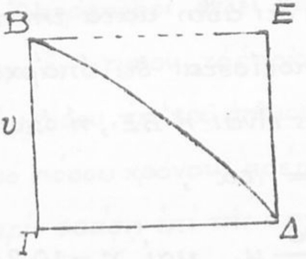
γ) Καθ' ἥν στιγμήν ἡ ὀβίς θά φθάσῃ εἰς τό κτίριον Δ, τό ἀεροπλάνον θά εὑρίσκηται ἐπί τῆς κατακορύφου τοῦ Δ, δηλαδή εἰς τό Ε.

82) Ἀτμομηχανή κινεῖται μέ ταχύτητα 120 χλμ. τήν ὥραν. Ταξειδιώτης ἀφίνει νά πέσῃ, κατά τήν στιγμήν τῆς εἰσόδου του εἰς σήραγγα, μήκους 20 μ., σῶμα βάρους 5 χλγρ. Ἐάν τό ὕψος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφέθη νά πέσῃ τό σῶμα, εἶναι 2μ, νά εὑρεθῇ: α) ὁ χρόνος x τῆς πτώσεως, β) ἐάν τό σημεῖον τῆς πτώσεως εἶναι ἐντός ἤ ἐκτός τῆς σήραγγος. $g = 9,80$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω Β τό σημεῖον, ἀπό τό ὁποῖον ἀφέθη τό σῶμα, ΒΓ τό ὕψος καί Δ τό σημεῖον τοῦ ἐδάφους, εἰς τό ὁποῖον ἔφθασε τό σῶμα κατά τήν πτῶσιν του.

Ὁ χρόνος πού θά χρειασθῆ τό σῶμα διά νά μεταβῆ ἀπό τοῦ Β μέχρι τοῦ Δ, εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν χρόνον πού χρειάζεται τό σῶμα διά νά φθάσῃ εἰς τό Γ ἤ ἀπό τό σημεῖον Β μέχρι τοῦ Ε. (Πρότασις ἀνεξαρτησίας τῶν ἀποτελεσμάτων).



Ἀπό τόν τύπον πού δίδει τό διάστημα ἔχομεν:

$$\delta = ΒΓ = \frac{1}{2} g x^2 .$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$2 = \frac{1}{2}\ 9{,}80 x^2$$

λύοντες δέ αὐ(τ)ήν πρός x, ἔχομεν:

$$x = \sqrt{\frac{4}{9{,}80}} = 0{,}63 .$$

β) Τό σῶμα κατά τήν πτῶσιν του διήνυσε τό διάστημα ΓΔ μέ ἀρχικήν ταχύτητα 120 χλμ. τήν ὥραν ἤ $\frac{120000}{3600}$ μ. κατά δευτερόλεπτον καί εἰς χρόνον 0,63''. Ἔχομεν, λοιπόν:

$$ΓΔ = \tau_\alpha x = \frac{120000}{3600} . 0{,}63 = 21 μ.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ ἡ σήραγξ ἔχει μῆκος 20 μ., ἕπεται ὅτι τὸ σῶμα θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς σήραγγος.

83) Μία ἀτμομηχανὴ βάρους 40 τόννων τρέχει μὲ μίαν ταχύτητα 50 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, ἐν δὲ ἐμπόδιον τὴν σταματᾷ ἀποτόμως. Ἐκ ποίου ὕψους θὰ ἔπρεπε νὰ πέσῃ, ἵνα ἡ σύγκρουσις ἔφερε τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ρίον καὶ ἡ πτῶσις (ἐκαμε τὸ ἴδιον);

Λύσις: Κατὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διατρέξῃ πίπτον ἓν κινητὸν κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν, ἵνα ἀποκτήσῃ μίαν δεδομένην ταχύτητα.

Ὁ τύπος: $\tau = \sqrt{2g\delta}$ δίδει: $\delta = \dfrac{\tau^2}{2g}$

Ἡ ἀτμομηχανὴ διατρέχει 50.000 μέτρα τὴν ὥραν, ἤτοι: εἰς τὸ δευτερόλεπτον $\dfrac{50000}{3600}$, αὐτὴ δὲ εἶναι ἡ ταχύτης:

$$\tau = \frac{50000}{3600} = \frac{125}{9}\ ,\ \text{ὅθεν:}\quad \tau = \frac{125}{9}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν: $\delta = \dfrac{15625}{81 \times 2 \times 9{,}8088} = 9{,}83$.

Ἄρα τὸ ὕψος πρέπει νὰ εἶναι 9,83 μέτρα.

84) Ποδηλάτης κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ, μὲ ταχύτητα 12 χιλμ. τὴν ὥραν. Μὲ τὴν ταχύτητα ταύτην εἰσέρχεται εἰς κατωφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι 3 εκ. κατὰ τρέχον μέτρον. Τὴν στιγμὴν αὐτὴν παύει ὁ ποδηλάτης νὰ κινῇ τὰ πέδιλα τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ποδηλάτου. Νά εύρεθῆ ποίαν ταχύτητα θά ἔχῃ ὁ ποδηλάτης μετά 100 μέτρων πορείαν ἐπί τοῦ κεκλιμμένου αὐτοῦ ἐπιπέδου καί πόσον χρόνον ἐχρειάσθη διά νά διανύσῃ τό διάστημα τοῦτο (Πολυτεχνείου).

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἀρχική ταχύτης τ_α τοῦ ποδηλάτου εἶναι:

$$\tau_\alpha = \frac{12000}{3600} = \frac{10}{3} \text{ μ. κατά δευτερόλεπτον}$$

Γνωρίζομεν ἐξ ἄλλου, ὅτι τό διάστημα πού διανύει ἕν κινητόν ἐπί κεκλιμμένου ἐπιπέδου, μέ ἀρχικήν ταχύτητα, εἶναι:

$$\delta = \tau_\alpha x + \frac{1}{2}\gamma x^2 \qquad (1),$$

ἔχομεν δέ: $\delta = 100$, $\tau_\alpha = \frac{10}{3}$ καί $\gamma = g\,\eta\mu\omega$

Ὑπολογίζομεν ἤδη τό ημω. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

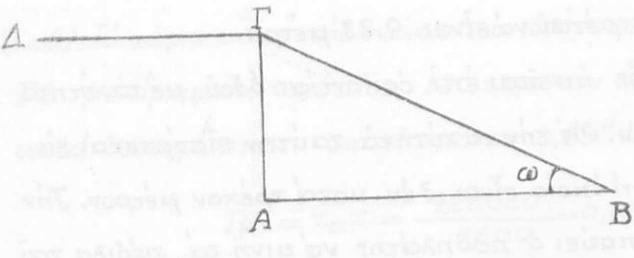
$$A\Gamma = B\Gamma\,\eta\mu\omega, \quad \text{ἤ} \quad \eta\mu\omega = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{3}{100}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) τάς εὑρεθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$100 = \frac{10}{3}x + \frac{1}{2}\,0{,}294x^2$$

Λύοντες δέ ταύτην εὑρίσκομεν:

$x' = 17{,}09$ δ.



Ὥστε ὁ ποδηλάτης ἐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χρειάσθη 17,09 δ. διά νά διανύση τά 100 μ. Ἡ ταχύτης, τήν ὁποίαν θά ἔχῃ ὁ ποδηλάτης, μετά πορείαν 100 μ. θά εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου:

$$\tau_\tau = \tau_\alpha + \gamma x = \frac{10}{3} + 0{,}294 \cdot 17{,}09 = 8{,}357 \text{ μ. κατά δευτερόλεπτον.}$$

85) Ἄνωθεν ὑγροῦ πυκνότητος Δ, καί εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρός S, ἀφίεται νά πέσῃ σῶμα πυκνότητος ϑ, μικροτέρας τῆς Δ. Ζητεῖται: α) τό βάθος ἐντός τοῦ ὑγροῦ, εἰς ὅ θά κατέλθῃ τό σῶμα, καί β) ὁ χρόνος, ἐντός τοῦ ὁποίου θά διανύσῃ τό βάθος αὐτό ἐντός τοῦ ὑγροῦ.

<u>Λύσις:</u> Ἡ εἰσχώρησις ἐντός τοῦ ὑγροῦ σταματᾷ, ὅταν ἡ ταχύτης γίνῃ ἴση πρός μηδέν, ἤτοι:

$$\tau_\tau = \tau_\alpha - \gamma x = 0 \quad \text{καί} \quad x = \frac{\tau_\alpha}{\gamma}.$$

Ἐπίσης, τό βάθος, εἰς ὅ εἰσέρχεται τό σῶμα μέ τήν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν ἰσοῦται:

$$\delta = \tau_\alpha x - \frac{1}{2}\gamma x^2$$

Ἀλλά $\quad \tau_\alpha = \sqrt{2gS}$,

διότι τ_α εἶναι ἡ τελική ταχύτης, ἥν ἀποκτᾷ τό σῶμα ἐν τῷ ἀέρι, καί ἡ ἀρχική ταχύτης, μεθ' ἧς εἰσέρχεται τοῦτο εἰς τό ὑγρόν.

Ὁμοίως: $\quad \gamma = g\dfrac{\Delta - \vartheta}{\vartheta}$.

Διότι: Ἐάν Θ ὁ ὄγκος τοῦ πίπτοντος σώματος, ἡ μᾶζα αὐ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ θά εἶναι Θθ καί ἡ μᾶζα τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ θά εἶναι Θ.Δ. Ἀλλά τό σῶμα εἰς τόν ἀέρα, ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς μάζης του Θθ, ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν g, ἐπίσης δέ τοῦτο ἐντός τοῦ ὑγροῦ, ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως $\Theta.\Delta-\Theta\vartheta$, ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν γ. Ἤτοι:

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{\Theta\Delta-\Theta\vartheta}{\Theta\vartheta}=\frac{\Theta(\Delta-\vartheta)}{\Theta\vartheta}=\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}$$

καί $\gamma=g\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}$. Ὅθεν:

$$\delta=\tau_\alpha x-\frac{1}{2}\gamma x^2=\sqrt{2gs}\cdot\frac{\sqrt{2gs}}{\gamma}-\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{\sqrt{2gs}}{\gamma}\right)^2,$$

$$\delta=\frac{2gs}{\gamma}-\frac{gs}{\gamma}=\frac{gs}{\gamma}, \text{ ἤτοι :}$$

$$\delta=\frac{gs}{\gamma}=\frac{gs}{g\cdot\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}}=\frac{s}{\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}}$$

καί ὁ χρόνος: $x=\frac{\tau_\alpha}{\gamma}=\frac{\sqrt{2gs}}{g\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}}$.

Ἄρα: $$\delta=\frac{S}{g\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}} \quad \text{καί} \quad x=\frac{\sqrt{2gs}}{g\frac{\Delta-\vartheta}{\vartheta}}.$$

86) Εἰς τήν μηχανήν Atwood, ἕκαστον τῶν ἴσων βαρῶν εἶναι 90 γραμμάρια. Ἐπί τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν θέτομεν πρόσ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θετον βάρος 16 γραμ. Τό σύστημα τεθέν είς κίνησιν, έκινήθη επί 5 δευτερόλεπτα, είς τό τέλος τών όποίων άφηρέθη τό πρόσθετον βάρος. Μετά ταύτα, τό σύστημα έκινήθη επί 6 δευτερόλεπτα ακόμη. Νά ευρεθή τό ολικόν διανυθέν διάστημα.

Λύσις: Τό διάστημα, τό όποίον διήνυσε τό σύστημα κατά τά 5 πρώτα δευτερόλεπτα, δίδεται υπό τού τύπου:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 \qquad (1).$$

Έδώ ή έπιτάχυνσις γ είναι:

$$\gamma = \frac{\mu g}{2M+\mu} = \frac{16 \cdot 980}{2 \cdot 90+16} = 80 \text{ έκ.μ.}, \quad x = 5$$

Έπομένως, ό τύπος (1) γίνεται:

$$\delta = \frac{1}{2} 80 \cdot 5^2 = 40 \cdot 25 = 1000 \text{ έκ} = 10 \mu.$$

Κατά τήν στιγμήν έκείνην, τό κινητόν είχε ταχύτητα:

$$\tau = gx = 80 \cdot 5 = 400 \text{ έκ.} = 4 \mu.$$

Μετά τήν άφαίρεσιν τού προσθέτου βάρους, τό σύστημα θά κινήται, λόγω τής άδρανείας, μέ όμαλήν κίνησιν καί μέ άρχικήν ταχύτητα 4μ. κατά δευτερόλεπτον καί έπομένως θά διανύση διάστημα:

$$\delta' = \tau x = 4 \cdot 6 = 24 \mu.$$

Άρα τό ολικόν διάστημα πού διήνυσεν είναι:

$$\delta + \delta' = 10 + 24 = 34 \mu.$$

87) Είς τήν μηχανήν τού Atwood, έκάστη τών ίσων σφαι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρῶν Α καί Β ἔχει βάρος 50 γρ. Ἐπί τῆς σφαίρας Α θέτομεν ἕν πρόσθετον βάρος 10 γρ., ἐπί δέ τοῦ Β πρόσθετον βάρος 5 γρ. Νά εὑρεθῆ: α) ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, β) ποῖον θά εἶναι τό ὁλικόν διανυθέν διάστημα, ἄν μετά 5 δευτερόλεπτα ἀφαιρεθῆ τό πρόσθετον βάρος 6 γραμ., τό δέ σύστημα κινηθῆ ἐπί 4 δευτερόλεπτα ἀκόμη, γ) ἄν ἀφαιρεθῆ τό πρόσθετον βάρος τῶν 10 γραμ. καί οὐχί τῶν 6, μετά πόσα δευτερόλεπτα θά σταματήσῃ τό σύστημα. ($g = 980$)

<u>Λύσις:</u> α) Ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι κατ' ἀρχάς ἡ διαφορά τῶν προσθέτων βαρῶν, ἤτοι 10-6 = 4 γρ. καί ἑπομένως ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι:

$$\gamma = \frac{\mu g}{2M+\mu} = \frac{4.980}{2.50+4} = 33,8 \text{ ἑκ.}$$

β) Κατά τά 5 πρῶτα δευτερόλεπτα τό σύστημα θά διανύσῃ διάστημα:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{1}{2} 33,8 . 5^2 = 422,5 \text{ ἑκ.}$$

καί ἡ ταχύτης τ, τήν ὁποίαν θά ἔχῃ ἀποκτήσει τό σύστημα, θά εἶναι:

$$\tau = \gamma x = 33,8 . 5 = 169 \text{ ἑκ.}$$

Ὅταν θά ἀφαιρεθῆ τό πρόσθετον βάρος τῶν 6 γρ., τό σύστημα θά κινηθῆ μέ δύναμιν 10 γρ. Ἑπομένως, ἡ νέα ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος θά εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\gamma = \frac{\mu g}{2M+\mu} = \frac{10.980}{2.50+10} = 89 \text{ έκ.}$$

Ἐπειδή τό σύστημα ἔχει ἀποκτήσει ἀρχικήν ταχύτητα 169 έκ., τό διάστημα πού θά διανύσῃ θά εἶναι:

$$\delta = \tau_\alpha x + \frac{1}{2}\gamma x^2 = 169.4 + \frac{1}{2}\,89.4^2 = 1388 \text{ έκ.}$$

ὥστε τό ὁλικόν διανυθέν διάστημα εἶναι:

$$422,5 + 1388 = 1810,5 \text{ έκ.}$$

γ) Τήν στιγμήν, καθ' ἥν θά ἀφαιρεθῇ τῶν 10 γρ. τό βάρος, τό σύστημα ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητα 169 έκ. Μετά τήν ἀφαίρεσιν τοῦ προσθέτου βάρους τῶν 10 γρ., τό σύστημα θά κινῆται μέ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν, διότι ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι τό πρόσθετον βάρος τῶν 6 γραμμαρίων, καί θά ἔχῃ ἀντίθετον φοράν, ἑπομένως δέ ἡ νέα ἐπιτάχυνσις (ἐπιβράδυνσις ἤδη) θά εἶναι:

$$\gamma = \frac{\mu g}{2M+\mu} = \frac{6.980}{2.50+6} = \frac{2940}{53}$$

Τό σύστημα θά σταματήσῃ, ὅταν ἡ ταχύτης του μηδενισθῇ, δηλαδή ὅταν $\tau = 0$. Ἀλλ' ἐπειδή:

$$\tau = \tau_\alpha - \gamma x,$$

πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\tau_\alpha - \gamma x = 0 \quad \text{ἤ} \quad 169 - \frac{2940}{53}\,x = 0.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν:

$$x = 3{,}04 \text{ δευτερόλεπτα.}$$

88) Εἰς μηχανήν τοῦ Atwood, αἱ δύο ἴσαι μᾶζαι ζυγίζουν 200 γραμ. ἑκάστη, τό δέ πρόσθετον βάρος μ συντελεῖ, ὥστε τό σύστημα νά διανύσῃ διάστημα 24 ἑκ. ἐντός 2″. Ζητεῖται ἡ τιμή τοῦ μ, ὅταν $g = 981$ ἑκ.

<u>Λύσις</u>: Ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι $981 \cdot \mu$, ἤτοι:

$$\gamma = \frac{981\,\mu}{400+\mu}, \text{ καί } 400+\mu = 981 \cdot \mu.$$

ἀλλ' ἡ τιμή τοῦ γ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 \quad \text{ἤ} \quad \gamma = \frac{2\delta}{x^2} = \frac{48}{4} = 12 \text{ ἑκ.}$$

Ἤτοι: $\quad 400+\mu \cdot 12 = 981\,\mu.$

Ἄρα: $\quad \mu = 4{,}95$ γραμμάρια.

89) Εἰς τήν μηχανήν τοῦ Atwood, τό πρόσθετον βάρος 10γρ. θέτει εἰς κίνησιν τάς δύο μάζας αὐτῆς, ἄν ἑκάστη ἔχει βάρος 250 γραμ., προσδίδουσα εἰς τήν πτῶσιν ἐπιτάχυνσιν ἴσην πρός 19 ἑκ. κατά δευτερόλεπτον. Ζητεῖται ἡ τιμή τοῦ g εἰς τόν τόπον τοῦ πειράματος.

<u>Λύσις</u>: Ἐκ τοῦ τύπου:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{\mu}{2M+\mu},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύοντες ὡς πρός g, ἔχομεν:

$$g=\frac{\gamma(2M+\mu)}{\mu}$$

καί ἀντικαθιστῶντες τάς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$g=\frac{19(2\cdot 250+10)}{10}=969 \text{ ἑκ.}$$

Ἄρα: $g=969$ ἑκ. μ.

90) Αἱ δύο μάζαι τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood εἶναι ἑκάστη 20 γραμμάρια. Ἡ πρόσθετος μάζα εἶναι 1 γραμ. Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως εἰς τόν τόπον, ἔνθα $g=981$ ἑκ;

<u>Λύσις</u>: Ἀντικαθιστῶμεν τά δεδομένα τοῦ προβλήματος εἰς τόν τύπον τῶν ἐπιταχύνσεων, ἐν σχέσει πρός τάς μάζας, καί ἔχομεν:

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{\mu}{2M+\mu} \quad \text{ἤ:}$$

$$\gamma=g\frac{\mu}{2M+\mu}=\frac{\mu g}{2M+\mu}=\frac{981\cdot 1}{2.20+1}=23{,}92 \text{ ἑκ.}$$

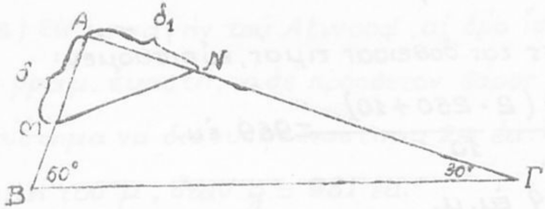
Ἄρα: $\gamma=23{,}92$ ἑκ.

91) Δύο σώματα Π καί Ρ ἀφέθησαν νά πέσουν ἐκ τῆς κορυφῆς Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου συγχρόνως, τό μέν ἐπί τῆς ΑΒ, σχηματιζούσης μετά τῆς ὁριζοντίως κειμένης ὑποτεινούσης τήν γωνίαν 60°, τό δέ ἄλλο ἐπί τῆς ΑΓ. Μετά πόσον χρόνον ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν κινη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῶν θὰ εἶναι λ.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω x ὁ ζητούμενος χρόνος, καθ' ὃν τὸ μὲν πρῶτον διήνυσε τὸ διάστημα $AM = \delta$, τὸ δὲ δεύτερον τὸ $AN = \delta_1$.



Ἐὰν γ καὶ γ_1 αἱ ἐπιταχύνσεις αὐτῶν ἀντιστοίχως, ἔχομεν:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 \quad \text{καὶ} \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 x^2.$$

Ἀλλά: $$\sqrt{\delta^2 + \delta_1^2} = \lambda .$$

Ἐπομένως: $$\sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2 x^4 + \frac{1}{4}\gamma_1^2 x^4} = \lambda , \quad \frac{1}{2}x^2\sqrt{\gamma^2+\gamma_1^2} = \lambda$$

καί: $$x = \sqrt{\frac{2\lambda}{\sqrt{\gamma^2+\gamma_1^2}}}$$

Ἀλλά: $$\gamma = g.\eta\mu\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}g \quad \text{καὶ} \quad \gamma_1 = g.\eta\mu\, 30 = \frac{g}{2}.$$

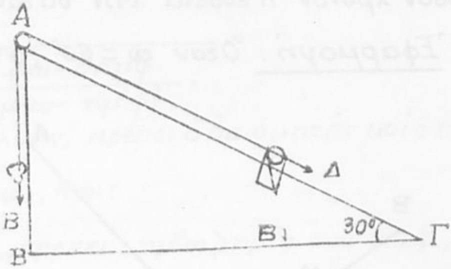
$$x = \sqrt{\frac{2\lambda}{\sqrt{\frac{3}{4}g^2 + \frac{1}{4}g^2}}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$$

Δηλαδὴ ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι $\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$.

92) Βάρος 8 χιλιογράμμων πίπτει κατὰ μῆκος τοῦ ὕψους κεκλιμμένου ἐπιπέδου, σῦρον διὰ μικρᾶς τροχαλίας, εὐρι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σκομένης εἰς τὴν κορυφήν, βάρος 6 χλγρ., κείμενον ἐπὶ κεκλιμμένου ἐπιπέδου. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 7 μέτρα καὶ ἡ γωνία κλίσεως πρὸς τὸν ὁρίζοντα 30°, πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ τὸ βάρος τῶν 8 χιλγμ., διὰ νὰ διατρέξῃ τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου;



<u>Λύσις</u>: Ἐὰν ἐκινεῖτο τὸ σύστημα ἐλεύθερον, ἤτοι ἐὰν ἐνήργει τὸ βάρος $B+B_1$ (Ἐὰν Δ ἡ μία τῶν συνιστωσῶν τῆς $B_1 = 6$ χλγρ., παράλληλος τῇ ΑΓ, τῆς ἄλλης ἐξουδετερουμένης), ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ ἦτο g. Τώρα, ὁπότε ἐνεργεῖ δύναμις $B-\Delta$, ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ Β. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων, ἤτοι:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{B-\Delta}{B+B_1} = \frac{8-\Delta}{8+6}$$

Ἀλλά: $\quad \Delta = B_1 \cdot \eta\mu 30^\circ = 3 \quad$, ἄρα: $\gamma = g \cdot \frac{5}{14}$

Καὶ ὁ ζητούμενος χρόνος θὰ εἶναι:

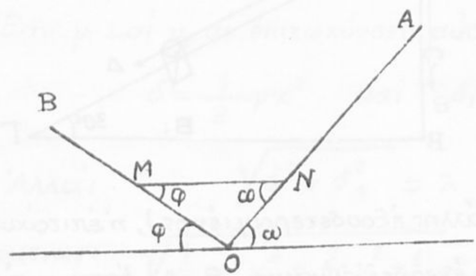
$$x = \sqrt{\frac{2\delta}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\delta}{\frac{5g}{14}}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 14}{5 \cdot g}} = \sqrt{\frac{14^2}{49}} = \frac{14}{7} = 2''$$

Ὅθεν, θὰ χρειασθῇ χρόνον 2''.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

93) Δύο κινητά Μ καί Ν, ὑποκείμενα μόνον εἰς τήν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος, κατέρχονται τά κεκλιμμένα ἐπίπεδα ΟΠ καί ΟΡ, ἀναχωρήσαντα ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τό μέν ἐκ τοῦ Α, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν $OA = \alpha$ ἀπό τοῦ Ο, τό δέ ἐκ τοῦ Β, εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν $OB = \beta$. Μετά πόσον χρόνον ἡ εὐθεῖα ΜΝ θά εἶναι ὁριζοντία;

<u>Ἐφαρμογή:</u> Ὅταν $\omega = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\alpha = 40\mu.$, $\beta = 10\mu.$



<u>Λύσις:</u> Ἔστω x ὁ ζητούμενος χρόνος. Ἔχομεν:

$ON = MN.\eta\mu\varphi$ καί

$OM = MN.\eta\mu\omega$

Ἀλλά:

$$ON = OA - AN \quad \text{καί} \quad OM = OB - BN.$$

Ἀλλά:
$$AN = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{1}{2} g\,\eta\mu\omega\, x^2$$

καί:
$$BM = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{1}{2} g\,\eta\mu\varphi\, x^2 .$$

Ἤτοι:
$$MN\,\eta\mu\varphi = \alpha - \frac{1}{2} g\,\eta\mu\omega\, x^2$$

καί:
$$MN \cdot \eta\mu\omega = \beta - \frac{1}{2}\,\eta\mu\varphi\, x^2 .$$

Διαιροῦντες δέ κατά μέλη, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\eta\mu\,\varphi}{\eta\mu\,\omega}=\frac{\alpha-\frac{1}{2}g.\eta\mu\,\omega.x^2}{\beta-\frac{1}{2}g\,\eta\mu\varphi.x^2}$$

καί $$\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega}=\frac{2\alpha-g\,\eta\mu\omega.x^2}{2\beta-g\,\eta\mu\varphi.x^2}$$

καί $$2\beta\eta\mu\varphi-g\eta\mu^2\varphi\cdot x^2=2\alpha\eta\mu\omega-g.\eta\mu^2\omega x^2$$

καί $$g(\eta\mu^2\omega-\eta\mu^2\varphi)x^2=2(\alpha\eta\mu\omega-\beta\eta\mu\varphi)$$

καί $$x=\sqrt{\frac{2\alpha\eta\mu\omega-\beta\eta\mu\varphi}{g(\eta\mu^2\omega-\eta\mu^2\varphi)}}.$$

Ίνα τό πρόβλημα έχη λύσιν, πρέπει ό άριθμητής καί ό παρονομαστής νά είναι ομόσημοι, ήτοι:

Εάν $\alpha\eta\mu\omega>\beta.\eta\mu\varphi$, πρέπει $\eta\mu^2\omega>\eta\mu^2\varphi$ καί $\omega>\varphi$, ή άντιθέτως.

<u>Εφαρμογή</u>: Έχομεν:

$$x=\sqrt{\frac{2(40\eta\mu60^\circ-\eta\mu30^\circ)}{g(\eta\mu^2 60^\circ-\eta\mu^2 30)}}=\sqrt{\frac{40\sqrt{3}}{g(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})}}=\sqrt{\frac{80\sqrt{3}-20}{g}}$$

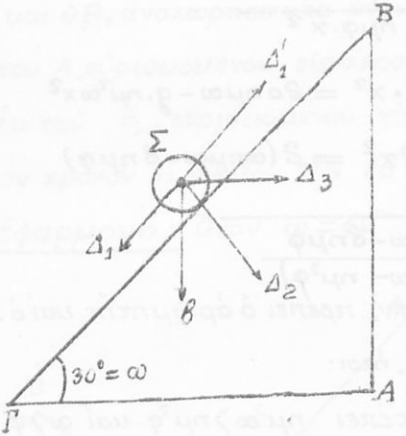
$$x=\sqrt{\frac{113,137-20}{9,8}}=\sqrt{\frac{93,137}{9,8}}=3,075$$

94) Σώματι ακινητεί επί κεκλιμμένου επιπέδου, είτε όταν ένεργή έπ' αυτού δύναμις όριζοντία έντάσεως 2 χλγρμ., είτε όταν ενεργή δύναμις έντάσεως $\sqrt{3}$ χιλγρ. άντίρροπος πρός τήν φοράν τής κινήσεως τού σώματος, άν τούτο έκινείτο έλευθέρως επί τού κεκλιμμένου επιπέδου. Ζητείται νά εύρεθή ή

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κλίσις τοῦ ἐπιπέδου, ὡς καὶ τὸ βάρος τοῦ σώματος.

<u>Λύσις:</u> Τὸ σῶμα Σ ἀκινητεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, εἴτε ὅταν



ἐνεργῇ ἡ $\Delta_3 = 2$ χλγρ., εἴτε ἡ Δ_1', ἀντίρροπος τῆς Δ_1 καὶ ἴση πρὸς $\sqrt{3}$ χλγρ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Delta_1'\Sigma\Delta_3$ λαμβάνομεν:

$$\Delta_1'\Sigma = \Delta_3\Sigma\,\sigma\upsilon\nu\,\Delta_1'\Sigma\Delta_3$$

ἀλλά: $\Delta_1'\Sigma\Delta_3 = \omega$, ὅθεν:

$$\Delta_1'\Sigma = \Delta_3\Sigma\,\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{3} = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$$

καὶ $\quad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ \quad$, ἄρα $\quad \alpha = 30^\circ$

Ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν:

$$\Delta_1\Sigma = B\eta\mu\omega \quad , \quad \sqrt{3} = B\cdot\frac{1}{2}$$

Ἄρα τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι:

$$\beta = 2\sqrt{3} \text{ χιλιόγραμμα.}$$

95) Κεκλιμμένον ἐπίπεδον ἔχει σταθερὰν βάσιν καὶ ὕψος μεταβλητόν. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ ὕψους ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται ὅπως κινητὸν κατέλθῃ ἐπ' αὐτοῦ γίνεται ἐλάχιστος.

<u>Λύσις:</u> Ἔστω x τὸ ὕψος καὶ y ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ χρόνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θά εἶναι:

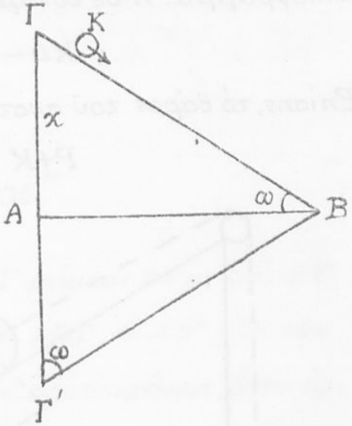
$$ΓΒ = \frac{1}{2} g ημω y^2 .$$

Ἄν τό σῶμα ἔπιπτεν καταιορύφως εἰς χρόνον y, θά διήνυε διάστημα ΓΓ', τοιοῦτον ὥστε $\frac{1}{2}gy^2$, ὅθεν:

$$ΓΒ = ΓΓ' ημω,$$

ἄρα τό τρίγωνον ΓΓ'Β εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Β.

Ἡ ἐλαχίστη τιμή τοῦ χρόνου y ἀντιστοιχεῖ πρός τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς ὑποτεινούσης ΓΓ'. Ἀλλά:



$$ΓΓ' = x + ΑΓ'$$

καί $x \cdot (ΑΓ') = (ΑΒ)^2 =$ σταθερόν.

Ἄρα, διά νά γίνῃ τό ἄθροισμα $x + (ΑΓ')$ ἐλάχιστον, ἀφοῦ τό γινόμενον $x \cdot (ΑΓ')$ εἶναι σταθερόν, πρέπει:

$$x = ΑΓ', \text{ ἤτοι } ω = 45^\circ \text{ ἤ } x = ΑΒ.$$

96) Εἰς κεκλιμμένον ἐπίπεδον, μήκους 5 μέτρων καί ὕψους 3 μέτρων, κατέρχεται σφαῖρα βάρους 5 χιλιογράμμων, ἥτις ἀναβιβάζει βάρος 2 χιλιογράμμων μέσῳ τροχαλίας, εὑρισκομένης εἰς τήν κορυφήν τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου. Νά εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ὅστις ἀπαιτεῖται, ὅπως τό σῶμα διανύσῃ τό ὕψος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ἐπιπέδου.

<u>Λύσις</u> : Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΚΛ καί ΒΑΓ ἔχομεν τάς σχέσεις:

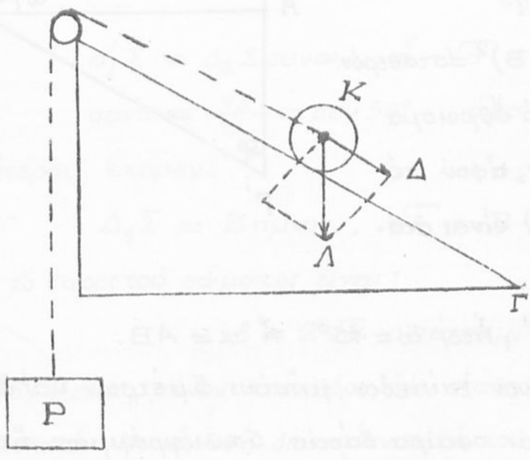
$$\frac{K\Delta}{K\Lambda}=\frac{AB}{B\Gamma} \quad \text{καί} \quad K\Delta=K\Lambda\cdot\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{5.3}{5}=3 \text{ χλγρ.}$$

Ἤτοι, ἡ κινοῦσα τήν σφαῖραν δύναμις ΚΔ ἰσοῦται πρός 3 χιλιόγραμμα. Ἡ δέ δύναμις, ἥτις ἀνυψοῖ τό βάρος Ρ εἶναι:

$$K\Delta-P = 3-2 = 1 \text{ χλγρ.}$$

Ἐπίσης, τό βάρος τοῦ συστήματος εἶναι:

$$P+K = 2+5 = 7 \text{ χλγρ.}$$



Τό βάρος τοῦ συστήματος δίδει εἰς τοῦτο ἐπιτάχυνσιν g. Ἡ δύναμις ΚΔ−Ρ δίδει ἐπιτάχυνσιν γ. Ἐπειδή ὅμως αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς δυνάμεις, ἔχομεν:

$$\frac{K\Delta-P}{P+K}=\frac{\gamma}{g}=\frac{1}{7}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅθεν: $\quad \gamma = \frac{g}{7}$

Τό διάστημα ΑΒ, ἤτοι τό ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι:

$$AB = \frac{1}{2}\gamma x^2$$

Ἀντικαθιστῶμεν τό γ διά τοῦ ἴσου του καί εὑρίσκομεν:

$$3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{7}\cdot x^2 = \frac{g}{14}\cdot x^2$$

ἐξοῦ: $\quad x^2 = \frac{42}{9,8}$

Ἄρα: $\quad x = \sqrt{\frac{42}{9,8}} = 2,06''$

97) Δύο κεκλιμένα ἐπίπεδα, ΑΓ μήκους 25μ. καί ΒΓ μήκους 40μ., σχηματίζουν γωνίαν ΑΒΓ = 45°. Ἐκ τῶν κορυφῶν των Α καί Β ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος δύο κινητά. Νά προσδιορισθοῦν αἱ γωνίαι κλίσεως ω καί φ τῶν ἐπιπέδων τούτων μετά τοῦ ὁρίζοντος, ἵνα τά κινητά φθάσουν ταὐτοχρόνως εἰς τό Γ.

Λύσις: Ἐάν x εἶναι ὁ χρόνος τῆς διαδρομῆς (καί εἰς τά δύο ἐπίπεδα, προφανῶς, ὁ ἴδιος), ἐπειδή gημω εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις διά τό κινούμενον ἐπί τοῦ ΒΓ καί gημφ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διά τό κινούμενον ἐπί τοῦ ΑΓ, θά ἔχωμεν:

$$40 = \frac{1}{2} g x^2 \eta\mu\omega$$

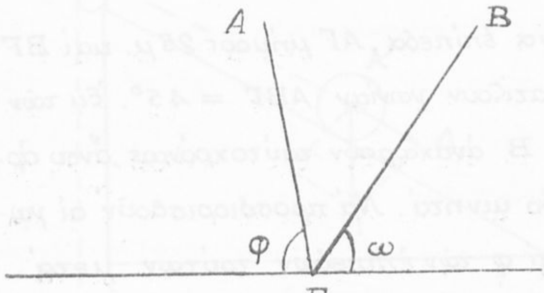
καί $$25 = \frac{1}{2} g x^2 \eta\mu\varphi$$

Διαιρῶ ταύτας κατά μέλη, ὁπότε ἔχω:

$$\frac{8}{5} = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu\varphi}$$

ἤ ἐφαρμόζοντες τήν γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν:

$$\frac{13}{3} = \frac{\eta\mu\omega + \eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega - \eta\mu\varphi} \quad \text{ἤ} \quad \frac{13}{3} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega+\varphi}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega-\varphi}{2}\right)}$$



Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης, ὑπολογίζοντες τριγωνομετρικῶς τήν διαφοράν ω-φ, γνωρίζομεν καί τό ἄθροισμα, ἤτοι:

$$\omega + \varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Λύοντες ἤδη τό σύστημα τοῦτο, εὑρίσκωμεν τάς γωνίας ω καί φ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

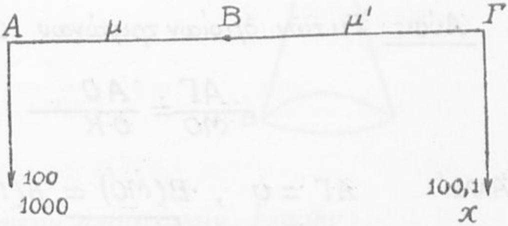
98) Τό μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 300μ., ἡ δέ ἐπιτάχυνσις, ἥν ἀποκτᾷ σῶμα κυλιόμενον ἐπ' αὐτοῦ, εἶναι 49 έκ., εἰς τόπον ἔνθα $g = 980$ έκ. Εὑρεῖν τό ὕψος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

<u>Λύσις:</u> Εἶναι γνωστόν ὅτι:

$$\gamma = g \cdot \frac{\upsilon}{\mu} ,$$

ὅθεν : $\upsilon = \dfrac{\gamma\mu}{g}$, ἄρα : $\upsilon = \dfrac{0,49 \times 300}{9,80} = 15\mu.$

99) Ἔμπορός τις παρετήρησεν, ὅτι διά νά ἰσορροπήσῃ βάρος 100 δραμίων, τεθέν εἰς ἕνα τῶν δίσκων τοῦ ζυγοῦ, ἐχρειάσθη νά θέσῃ 100,1 δρ. εἰς τόν ἕτερον. Τί βάρος ἐπί τοῦ δευτέρου δίσκου δύναται νά ἰσορροπήσῃ 1000 δράμια, τιθέμενα ἐν τῷ πρώτῳ;



<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν κατά τήν περίπτωσιν:

$$100\mu = 100{,}1\mu' , \text{ ἤτοι: } \frac{\mu}{\mu'} = \frac{100{,}1}{100}$$

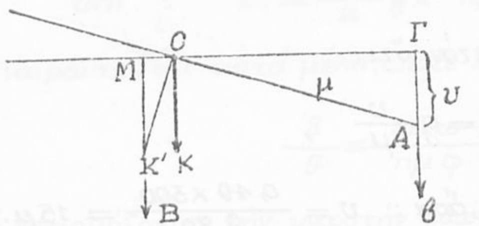
Κατά τήν δευτέραν ἔχομεν:

$$1000\mu = x.\mu' \text{ καί } \frac{\mu}{\mu'} = \frac{x}{1000}.$$

Ἄρα: $\dfrac{100{,}1}{100} = \dfrac{x}{1000}$ καί $x = 1001$ δράμια.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

100) Φάλαγξ ζυγοῦ ἔχει μῆκος 2 μ. καί βάρος Β, ἴσους δέ βραχίονας. Θέτοντες βάρος β ἐπί τοῦ ἑτέρου τῶν δίσκων, παρατηροῦμεν ὅτι τό ἄκρον τῆς φάλαγγος κατέρχεται εἰς σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις ἀπό τῆς ἀρχικῆς θέσεως τῆς φάλαγγος εἶναι υ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος ἀπό τοῦ ἄξονος αἰωρήσεως.



Λύσις: Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΜΚ' καί ΑΟΓ, ἔχομεν:

$$\frac{A\Gamma}{MO} = \frac{AO}{OK}.$$

Ἀλλά: $A\Gamma = \upsilon$, $B(MO) = \beta(\Gamma O)$,

$$(MO) = \frac{B\sqrt{\mu^2-\upsilon^2}}{\beta} \quad \text{καί} \quad AO = \mu.$$

Ἐπομένως:

$$\frac{\upsilon}{\frac{B\sqrt{\mu^2-\upsilon^2}}{\beta}} = \frac{\mu}{x}$$

καί:

$$x = B.\mu\frac{\sqrt{\mu^2-\upsilon^2}}{\beta.\upsilon}.$$

101) Ζυγός, ἔχων δύο δίσκους Α καί Β, εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ, ἀλλ' ὅταν ἀντιμεταθέσωμεν τούς δίσκους, παρατηροῦ-

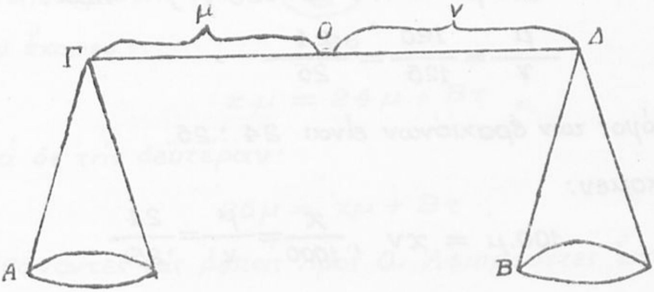
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μεν, ὅτι διά νά ἰσορροπήση ὁ ζυγός, πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τόν δίσκον Β $10\frac{5}{24}$ γραμμάρια. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ δίσκος Α εἶναι 125 γραμμάρια, νά εὑρεθῇ:

α) Τό βάρος τοῦ δίσκου Β,

β) ὁ λόγος τῶν βραχιόνων καί

γ) τό βάρος, τό ὁποῖον πρέπει νά θέσωμεν ἐν τῷ δίσκῳ Β, διά νά ἰσορροπήσωμεν 1 χλγρμ., τεθέν ἐν τῷ Α.



Λύσις α) Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν:

$$125 \cdot \mu = x \cdot \nu ,$$

κατά δέ τήν δευτέραν ἔχομεν:

$$x + \left(\frac{10 \cdot 24 + 5}{24}\right)\mu = 125\, \nu .$$

Διαιροῦντες ταύτας κατά μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\frac{125}{x + \frac{245}{24}} = \frac{x}{125}, \quad \frac{3000}{24x + 245} = \frac{x}{125},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$x^2+245x-375000=0$$

$$x=\frac{-245+\sqrt{60025+36000000}}{48}=\frac{-245+6005}{48}=$$

$$=\frac{5760}{48}=120$$

Τὸ βάρος τοῦ δίσκου Β εἶναι 120 γραμμάρια.

β) Ἔχομεν:

$$125\mu = x\nu = 120\nu, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{120}{125}=\frac{24}{25},$$

ἤτοι ὁ λόγος τῶν βραχιόνων εἶναι 24 : 25.

γ) Ἔχομεν:

$$100.\mu = x\nu, \quad \frac{x}{1000}=\frac{\mu}{\nu}=\frac{24}{25}$$

καὶ $x = 40.24 = 960.$

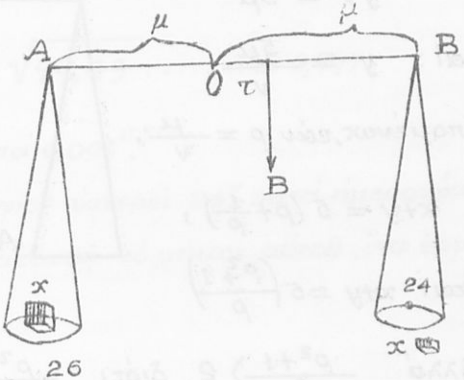
Τὸ βάρος, ὅθεν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὸν Β, ἵνα ἰσορροπήσωμεν 1000 γραμμάρια, τεθέντα εἰς τὸν Β, εἶναι 960 γραμμάρια.

102) Οἱ δύο βραχίονες τῆς φάλαγγος ζυγοῦ εἶναι ἰσομήκεις, ἀλλὰ τὸ κέντρον βάρους δὲν εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς κατακορύφου τοῦ σημείου στηρίξεως τῆς φάλαγγος, ἀλλ' εἰς ἀπόστασιν τ ἀπ' αὐτῆς.

Ζυγίζομεν ἓν σῶμα, θέτοντες αὐτὸ διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δίσκων καί εὑρίσκομεν, τήν μέν πρώτην φοράν ὅτι ἰσορροπεῖ
με 24 γραμμάρια,
τήν δέ δευτέραν μέ
26 γραμμάρια. Ποῖ-
ον εἶναι τό ἀληθές
βάρος αὐτοῦ;



<u>Λύσις</u>: Κατά
μέν τήν πρώτην ζύ-
γισιν ἔχομεν:

$$x \cdot \mu = 24\mu + B\tau \quad ,$$

κατά δέ τήν δευτέραν:

$$26\mu = x\mu + B\tau \quad ,$$

λαμβάνοντες τάς ροπάς πρός Ο. Ἀφαιροῦντες ἔχομεν:

$$x \cdot \mu - 26\mu = 24\mu - x\mu \; .$$

Καί διαιρῶν διά μ, ἔχω:

$$2x = 50 \quad \text{καί} \quad x = 25 .$$

Τό ἀληθές βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἄρα 25 γρμ.

103) Ἐπώλησέ τις 10 χλγρ. καφφέ, ζυγίσας τό μέν ἥμισυ ἐν τῷ δίσκῳ Α ζυγοῦ τινός, μέ ἀνίσους βραχίονας, τό δέ ἄλλο ἐν τῷ δίσκῳ Β. Ἐκέρδισεν ἤ ἐζημιώθη;

<u>Λύσις</u>: Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν:

$$x\mu = 5\nu \; , \quad \text{ὅτε:} \quad x = \frac{5\nu}{\mu} \; ,$$

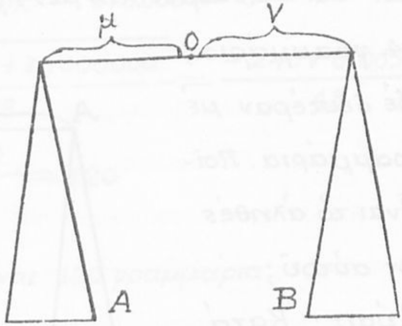
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κατά δέ τήν δευτέραν:

$$y\nu = 5\mu$$

καί: $$y = \frac{5\mu}{\nu}$$

Ἐπομένως, ἐάν $\rho = \frac{\mu}{\nu}$,



$$x+y = 5\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right),$$

ἤτοι: $$x+y = 5\left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right)$$

Ἀλλά $\frac{\rho^2+1}{\rho} > 2$, διότι $\rho^2+1 > 2\rho$,

διότι $(\rho-1)^2 = \rho^2-2\rho-1$, ἄρα καί:

$$x+y > 5.2, \text{ ἤτοι } x+y > 10.$$

Ἤτοι ὁ ἔμπορος ἐκέρδισεν.

104) Πόσον θά ἠλαττοῦτο ὁ χρόνος τῆς αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τοῦ δίδοντος δευτερόλεπτα εἰς τόν ἰσημερινόν, ἐάν μετεφέρετο εἰς τόν πόλον, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος εἰς μέν τόν Ἰσημερινόν εἶναι 9,78, εἰς δέ τόν πόλον 9,83.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι οἱ χρόνοι τῶν αἰωρήσεων εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν ἐντάσεων, ἤτοι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{9,78}{9,83}}$$

$$T = \sqrt{\frac{9,78}{9,83}} = \sqrt{99,49} \ldots\ldots = 0,997.$$

Ὁ χρόνος ἐλαττοῦται κατά 0,003''.

105) Εὐκρεμές ὡρολόγιον ὑστερεῖ 24'' κατά ἡμερονύκτιον. Πόσον πρέπει νά ἐλαττωθῇ τό μῆκος αὐτοῦ, ἵνα ἐργάζηται κανονικῶς;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$1 = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{καί} \quad 1 + \frac{1}{3600} = \pi\sqrt{\frac{\mu'}{g}}$$

Διότι καθ' ὥραν ὑστερεῖ 1''. Διαιροῦντες κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{1}{\frac{3601}{3600}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \quad \text{καί} \quad \frac{3600}{3601} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}},$$

$$\frac{3600^2}{3601^2} = \frac{\mu}{\mu'}, \quad \frac{3601^2 - 3600^2}{3601^2} = \frac{\mu' - \mu}{\mu'} = \frac{\varepsilon}{\mu'}$$

$$\text{καί} \quad \varepsilon = \mu' \cdot \frac{7201}{3601^2}.$$

Ἄρα τό μῆκος αὐτοῦ πρέπει νά ἐλαττωθῇ κατά $\frac{7201}{3601^2}$ τοῦ μήκους του.

106) Εἰς τήν μηχανήν τοῦ Atwood, μεταχειριζόμεθα διαδοχικῶς, διά νά θέσωμεν τό σύστημα εἰς κίνησιν, δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

προσθέτους μάζας, τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι 10 γραμμ., ἡ δὲ ἑτέρα 20 γραμ. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τὸ διάστημα τὸ διανυόμενον κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον εἶναι 23,88 ἑκ. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, τὸ διάστημα τοῦτο εἶναι 44,59 ἑκατοστά. Ζητεῖται:

α) ἡ τιμὴ τοῦ g εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος καὶ

β) ἡ τιμὴ τῶν μαζῶν τῶν κυλίνδρων, τῶν ἐξηρτημένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ νήματος.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι:

$$10g = (2M+10)\gamma,$$

κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, καί:

$$20g = (2M+20)\gamma',$$

κατὰ τὴν δευτέραν. Ἐπίσης, γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι διπλασία τοῦ εἰς τὴν πρώτην μονάδα τοῦ χρόνου διανυομένου διαστήματος, ἤτοι ἐνταῦθα ἔχομεν:

$$\gamma = 46,76 \quad \text{καὶ} \quad \gamma' = 89,18.$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$10g = (2M+10).46,76$$

$$\text{καὶ} \quad 20g = (2M+20).89,18.$$

Διαιροῦντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$(2M+10)\,46,76 = (2M+20)\,44,59$$

$$\text{καὶ} \quad (M+5).46,76 = (M+10)\,44,59$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$46,76\,M + 233,8 = 44,59\,M + 445,9$$

καί $\quad 46,76\,M - 44,59\,M = 445,9 - 233,8,$

$$2,17\,M = 212,1 \text{ καί } \underline{M = 97,8 \text{ περίπου}}.$$

Ὅθεν: $\quad 10\,g = (195,6+10)46,76 = 205,6 \cdot 46,76$

καί $\quad \underline{g = 961,3.}$

107) Εἰς τήν μηχανήν τοῦ Atwood, ἑκάστη τῶν ἴσων μαζῶν, τῶν ἐξηρτημένων εἰς τά ἄκρα τοῦ νήματος, εἶναι 60 γραμμάρια. Θέτομεν ἐπί τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν δίσκον 4 γραμμαρίων. Νά εὑρεθῇ:

α) Εἰς ποίαν διαίρεσιν τοῦ κανόνος πρέπει νά θέσωμεν τόν διάτρητον δίσκον, ἵνα δεχθῶμεν τόν δίσκον εἰς τό τέλος τῶν 3″ τῆς πτώσεως.

β) Εἰς ποίαν διαίρεσιν πρέπει νά θέσωμεν τόν πλήρη δίσκον, ἵνα φθάσῃ ἐπ' αὐτοῦ ὁ κύλινδρος μετά 2″, ἀφ' ἧς στιγμῆς ἀφῃρέθη τό πρόσθετον βάρος.

Νά ληφθῇ ὑπ' ὄψει, ὅτι ὁ κύλινδρος ἔχει ὕψος 1,5 ἑκατ., ἡ δέ κάτω βάσις αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ, κατά τήν στιγμήν τῆς ἀναχωρήσεως, εἰς τό 0 τῆς κλίμακος τοῦ κανόνος ($g=980$).

α) Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\delta = \frac{\gamma}{2} t^2 ,$$

ἀλλά: $\quad \gamma = \frac{g \cdot m}{2M+m} = \frac{980 \cdot 4}{124} = 31,6 ,$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄρα: $\delta = \frac{31,6}{2} \cdot g = 31,6 \cdot 4,5 = 144,2.$

Ἡ διαίρεσις, ὅθεν, εἰς ἣν δέον νά τοποθετηθῇ, εἶναι:

$$144,2 - 1,5 = 142,7.$$

β) Ἔχομεν:

$$v = \gamma . t = 31,6 \cdot 3 = 94,8.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἀρχική ταχύτης.

Τό σῶμα ἐξακολουθεῖ κινούμενον εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς, ἤτοι:

$$\delta = v . t = 94,8 . 2 = 189,6 .$$

Ἡ δέ κίνησις εἶναι εὐθύγραμμος μεταβατική. Ὁ πλήρης δίσκος, λοιπόν, πρέπει νά τεθῇ εἰς τήν διαίρεσιν:

$$142,2 + 189,6 = 331,8 \text{ δακτύλων.}$$

(Ἐνταῦθα ἔχομεν κάτω βάσιν).

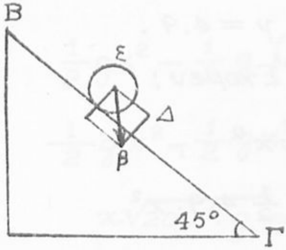
108) Σφαῖρα κυλιομένη ἐπί κεκλιμμένου ἐπιπέδου, τελείως λείου καί κλίσεως 45°, διανύει διάστημά τι. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τῆς σφαίρας.

<u>Λύσις</u>: Κινητήριος δύναμις τοῦ σώματος ε εἶναι ἡ Δ, ἥτις εἶναι μία τῶν συνιστωσῶν, εἰς ἣν ἀναλύεται τό βάρος, ἐξ ὧν ἡ ἄλλη κάθετος τῷ κεκλιμμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔχομεν δέ:

$$\Delta = B . \eta\mu\, 45^\circ$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις, ἥν μεταδίδει εἰς τό σῶμα. Ἐάν τό σῶμα ἦτο ἐλεύθερον, ἤτοι ἐάν ἐνήργει τό Β, ἡ ἐπιτάχυνσις θά ἦτο g. Ἀλλ' αἱ ἐπιταχύνσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων, ἤτοι:

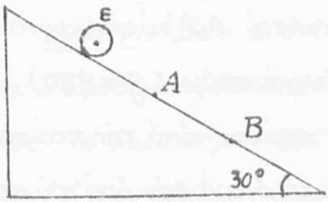


$$\frac{B\eta\mu 45}{B} = \frac{\gamma}{g}$$

Ἄρα $\gamma = g\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\gamma = 980\cdot\frac{141}{2} = 691$ περίπου.

109) Σφαῖρα κυλίεται ἄνευ τριβῆς ἐπί κεκλιμμένου ἐπιπέδου, κλίσεως 30°, καί διέρχεται διαδοχικῶς διά δύο σημείων Α καί Β, ἀπεχόντων μεταξύ των 19,6. Τήν στιγμήν, κατά τήν ὁποίαν ἡ σφαῖρα διέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α ἔχει ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{32{,}92}$ μ.

Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης, τήν ὁποίαν θά ἔχῃ ἡ σφαῖρα, ὅταν φθάσῃ εἰς τό Β $(g = 980)$.



Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ σώματος τούτου εἶναι:

$$\gamma = g\eta\mu 30^\circ = \frac{g}{2} = 4{,}9$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπίσης ὅτι:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \gamma \cdot x,$$

ἔνθα: $\upsilon_0 = \sqrt{32,92}$ καί $\gamma = 4,9$.

Τό x προσδιορίζομεν ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν:

$$\delta = \upsilon_0 x + \frac{1}{2}\gamma x^2,$$

$$19,6 = \sqrt{32,92}\,x + \frac{1}{2}\,4,9 \cdot x^2$$

$$4,9x^2 + 2\sqrt{32,92}\,x - 39,2 = 0$$

$$x = \frac{-\sqrt{32,92} \pm \sqrt{32,92 + 192,08}}{4,9} = \frac{-5,74 + 15}{4,9} =$$

$$= \frac{5,74 + 15}{4,9} = \frac{9,26}{4,9} = 1,9$$

Ἀντικαθιστῶντες, λοιπόν, ἔχομεν:

$$\upsilon = \sqrt{32,92} + 4,9 \cdot 1,9 = 5,74 + 9,31 = 15,05$$

110) Ἔκ τινος σημείου Μ ἀφίνομεν νά πέσῃ βαρύ σῶμα, κατά τήν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου. Ὅταν τό σῶμα τοῦτο διατρέξῃ διάστημα 100 ἑκατοστομέτρων, ἀφίνομεν νά πέσῃ ἐπί τοῦ αὐτοῦ σημείου δεύτερον βαρύ σῶμα. Μετά πόσον χρόνον τά δύο ταῦτα κινητά θά εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των 1000 ἑκατοστομ. ($g = 980$).

<u>Λύσις</u>: Ἔστω x ὁ ζητούμενος χρόνος ἀπό τῆς πτώσεως τοῦ πρώτου σώματος. Τό διάστημα τό διανυθέν ὑπό τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{2}gx^2$, τό δέ ὑπό τοῦ δευτέρου $\frac{1}{2}g\left(x - \sqrt{\frac{200}{g}}\right)^2$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διότι $\sqrt{\frac{200}{g}}$ εἶναι ὁ χρόνος, καθ' ὃν διηνύθησαν 100 ἑκατοστόμετρα $\left(100=\frac{1}{2}gx^2,\ x^2=\frac{200}{g}\right)$. Ἔχομεν δέ:

$$\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}g\left(x^2+\frac{200}{g}-2x\sqrt{\frac{200}{g}}\right)=1000$$

$$\frac{1}{2}gx^2-\frac{1}{2}gx^2-100-x\cdot g\sqrt{\frac{200}{g}}=1000$$

$$x\cdot\sqrt{200\cdot g}=1100$$

$$x=\frac{1100}{\sqrt{200.g}}=\frac{1100}{443}=2'',483.$$

Τά δύο ταῦτα κινητά θά εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 1000 ἑκατοστομέτρων μεταξύ των μετά 2'',483.

111) Δύο βλήματα βάλλονται διαδοχικῶς, κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, μέ ἀρχικήν ταχύτητα 100 μ. κατά δευτερόλεπτον. Πόσος χρόνος πρέπει νά παρεμβληθῇ μεταξύ τῆς βολῆς δύο κινητῶν, ἵνα τό δεύτερον κινῆται ἐπί 8'',7, μέχρις ὅτου συναντήσῃ τό πρῶτον; $(g=980)$.

Λύσις: Ἐάν x ὁ ζητούμενος χρόνος καί Δ τό σημεῖον, εἰς ὅ ἔφθασε τό δεύτερον κινητόν μετά 8'',7 ἀπό τῆς βολῆς του, τό διάστημα ΒΓ+ΓΔ διηνύθη εἰς χρόνον 8'',7. Καί ὁ μέν χρόνος, καθ' ὃν διηνύθη τό ΒΓ ἰσοῦται μέ:

$$\frac{v_0}{g}-x=\frac{100}{9,81}-x=10,2-x$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(v = v_0 - gt$ και $t = \frac{v_0}{g}$, διότι $v = 0)$.

Άρκει νά προσδιορίσωμεν τόν χρόνον, καθ' ὅν διήνυσε τό ΓΔ τό διάστημα ΓΔ. Τοῦτο ἰσοῦται μέ: ΓΕ − ΔΕ. Ἀλλά:

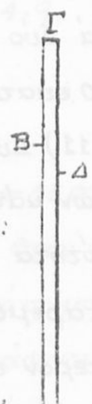
$$\Gamma E = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{καί} \quad \Delta E = v_0 \cdot 8{,}7 - \frac{1}{2} g \cdot 8{,}7^2$$

ἤτοι: $$\Gamma E = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10000}{19{,}6} \quad 510{,}2$$

καί $$\Delta E = 870 - \frac{1}{2} g \cdot 75{,}69 = 870 - 370{,}88 = 499{,}12.$$

Ἑπομένως: $\Gamma\Delta = 510{,}2 - 499{,}12 = 11{,}08$.



Καί ὁ χρόνος, καθ' ὅν διηνύθη τό ΓΔ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἰσοῦται μέ

$$\sqrt{\frac{2\delta}{g}} = \sqrt{\frac{22{,}16}{9{,}8}} = 1{,}5 \quad .$$ Ἔχομεν δέ:

$$10{,}2 - x + 1{,}5 = 8{,}7$$

καί $$x = 11{,}7 - 8{,}7 = 3''.$$

112) Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις, ἥν λαμβάνει σφαῖρα βάρους 2 χιλιογράμμων, κινουμένη ἐπί λείου ἐπιπέδου, ὑπό τήν ἐπίδρασιν δυνάμεως 10 χιλιογράμμων, ἐφηρμοσμένης ὁριζοντίως ἐπί τοῦ μέτρου βάρους αὐτῆς.

<u>Λύσις</u>: Εἶναι γνωστόν, ὅτι αἱ ἐντάσεις δυνάμεων, ἐνερ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γουσῶν ἐπί σώματος ὡρισμένης μάζης, εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς ἀντιστοίχους ἐπιταχύνσεις, ἅς προσδίδουν εἰς αὐτήν." Ἤτοι:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\gamma}{g}$$

ἐξοῦ:
$$\gamma = g\frac{\Delta}{\Delta'}$$

Ἐνταῦθα $\Delta = 10$ χλγρ., $\Delta' = 2$ χλγρ, $g = 981$ ἑκμ.

Ἄρα: $\gamma = 981 \cdot \frac{10}{2} = 4905$ ἑκ.μ.

113). Δίδεται μηχανή τοῦ Atwood, εἰς τήν ὁποίαν τό διάστημα τό διανυόμενον εἰς 2'',4 τῆς πτώσεως εἶναι 2'',7 μ. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι αἱ ἴσαι μᾶζαι ἔχουν 100 γραμμάρια ἑκάστη καί τό πρόσθετον βάρος 25 γραμμάρια, νά εὑρεθῇ τό μῆκος τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, τό ὁποῖον θά παρέχῃ εἰς τόν τόπον τοῦτον τά δευτερόλεπτα.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

ἄρα:
$$\lambda = \frac{gT^2}{\pi^2}$$

Ἐκ τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχομεν:

$$\gamma = \frac{g \cdot m}{2M+m},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄρα: $$g = \gamma \frac{(2M+m)}{m} = 10\gamma.$$

ἀλλά: $$2,7 = \frac{1}{2}\gamma \cdot 2,4^2 = \frac{1}{2}\gamma.5,76 \quad \text{καί} \quad \gamma = \frac{5,4}{5,76}$$

ὅθεν: $$g = 10.\frac{5,4}{5,75} \quad \text{καί} \quad g = 9,37$$

ἄρα: $$\lambda = \frac{9,37 . 1^2}{3,14^2} = \frac{9,37}{9,86} = 0,95$$

Τό μῆκος, λοιπόν, τοῦ ἐκκρεμοῦς, τό ὁποῖον εἰς τόν τόπον τοῦτον παρέχει τά δευτερόλεπτα, εἶναι 0,95 μ.

114) Εἴς τινα τόπον ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς Γῆς εἶναι μεγαλυτέρα παρά εἰς τόν Ἰσημερινόν κατά $\frac{1}{200}$ τῆς τιμῆς αὐτοῦ. Κατά πόσα δευτερόλεπτα καθ' ἑκάστην εἰς 24 ὥρας καθυστερεῖ ὡρολόγιον κανονισμένον εἰς δευτερόλεπτα εἰς τόν τόπον τοῦτον, ἐάν μεταφερθῇ εἰς τόν Ἰσημερινόν;

<u>Λύσις:</u> Ἐάν δ τά ζητούμενα δευτερόλεπτα, καθ' ἅ καθυστερεῖ τό ἐκκρεμές εἰς τόν Ἰσημερινόν, κατά τούς νόμους τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχομεν :

$$\frac{T}{T'} = \frac{86400}{86400-\delta} = \frac{\sqrt{g'}}{\sqrt{g}} ,$$

ἐάν g εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς τόν Ἰσημερινόν καί g' εἰς τόν τόπον τοῦτον. Ἔχομεν δε:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$g' = g + \frac{g}{200} = \frac{201g}{200}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς ταύτην, ἔχομεν:

$$\frac{86400}{86400-\delta} = \frac{\sqrt{\frac{201g}{200}}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{201}}{\sqrt{200}}$$

$$\frac{\delta}{86400} = \frac{\sqrt{201} - \sqrt{200}}{\sqrt{201}} = \frac{14{,}178 - 14{,}142}{14{,}178}$$

$$\frac{\delta}{86400} = \frac{36}{14{,}178}, \quad \delta = \frac{3100\cdot 400}{14{,}178} = 219 \;.$$

Ἄρα, εἰς τὸν Ἰσημερινὸν θὰ καθυστερῇ 219″ κατὰ εἰκοσιτετράωρον.

115) Βαρὺ σῶμα, βάρους 50 γραμμαρίων, πίπτει ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος ἔκ τινος ὕψους, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 200 μ. κατὰ δευτερόλεπτον. Ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ ἄκρον τῆς πτώσεως αὐτοῦ, ἔχει ῥύμην ἴσην πρὸς 1550,675 Joules. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πτώσεως εἰς μέτρα.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ῥύμη σώματός τινος, μάζης m, ἰσοῦται πρός:

$$P = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

ἔνθα v ἡ ταχύτης αὐτοῦ. Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$10^7 \cdot 1550{,}675 = \frac{1}{2} \cdot 50\, v^2 g$$

$$15506750000 = 25 \cdot 981 \cdot v^2 = 24525 . v^2 ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\upsilon^2 = 632281 \quad \text{καί} \quad \upsilon = 795 \ \mu.$$

ἡ ταχύτης εἰς τό ἄκρον τῆς πτώσεως.

Γνωρίζομεν ὅτι τό διάστημα δ ἰσοῦται πρός:

$$\delta = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Ἀλλά: $\upsilon = \upsilon_0 + gt$ καί $t = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{g}$

Ἑπομένως:

$$\delta = \upsilon_0 \frac{\upsilon - \upsilon_0}{g} + \frac{1}{2} \frac{(\upsilon - \upsilon_0)^2}{g} = 200 \frac{595}{981} + \frac{1}{2} \cdot \frac{354025}{981}$$

$$\delta = \frac{119000}{981} + \frac{117012,5}{981} = \frac{296012,5}{981}$$

$$\delta = 301,75 \ \mu.$$

Τό διάστημα, ὅθεν, τό ὁποῖον διήνυσεν εἶναι 301,75 μέτρα.

116) Εἰς τό ἄκρον νήματος μήκους 1,5 μ. ἐξαρτᾶται μικρός κάδος, τοῦ ὁποίου ὁλόκληρον τό βάρος εἶναι 3 χλγρ. καί στρέφεται ταχέως, οὕτως ὥστε νά περιγράφῃ περιφέρειαν κύκλου κατακορύφως. Ζητεῖται:

α) Πόσας στροφάς τοὐλάχιστον πρέπει νά ἐκτελῇ ὁ κάδος κατά δευτερόλεπτον, ἵνα μή χύνηται τό ὕδωρ, καί

β) νά ὑπολογισθῇ ἡ τάσις τοῦ νήματος, ὅταν ὁ κάδος ἐκτελῇ δύο στροφάς κατά δευτερόλεπτον. $(g = 981)$.

Λύσις: α) Ἵνα μή χύνηται τό ὕδωρ, πρέπει τό νῆμα νά εὑρίσκηται ἐν τάσει, ἤτοι ἡ φυγόκεντρος δύναμις Φ πρέπει νά εἶναι ἴση τοὐλάχιστον πρός 3 χλγρ. Γνωρίζομεν ὅτι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Phi = \frac{4\Pi^2 m\rho}{T^2} \quad ,$$

Ἀλλά : $\Phi = B = 3$ χλγ., $\Pi^2 = 3,14^2 = 9,8596$,

$$m = \frac{B}{\gamma} = \frac{3}{9,81} \quad \text{καί} \quad \rho = 1,5.$$ Ἑπομένως:

$$3 = \frac{4 \cdot 9,8596 \cdot 3 \cdot 1,5}{9,81 \cdot T^2} \quad , \quad 29,43T^2 = 177,47 \ ,$$

καί $T^2 = 6,03$ καί $T = 2,45$.

Ἑπομένως, ἡ περίοδος τῆς περιστροφῆς πρέπει νά εἶναι $2'',45$.

Εἰς χρόνον, λοιπόν, $2'',45$ ἐκτελεῖ μίαν περιστροφήν, ἐπομένως εἰς χρόνον $1''$ ἐκτελεῖ :

$$\frac{1}{2,45} = 0,408 \ .$$

Ἤτοι, διά νά μή χύνεται τό ὕδωρ, πρέπει ὁ κάδος νά ἐκτελῇ 0,408 τῆς στροφῆς κατά δευτερόλεπτον.

β) Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\Delta = \frac{\mu \cdot \tau^2}{\alpha} \quad ,$$

Ἀλλά : $\tau = 4\Pi\alpha$ (2 στροφαί εἰς $1''$),

ἤτοι: $$\Delta = \frac{16\Pi^2 \cdot \alpha^2 \cdot \mu}{\alpha} = 16\Pi^2 \alpha\mu = 16 \cdot 3,14^2 \cdot 150 \cdot 3000$$

$$\Delta = 7\,200000 \cdot 9,8596 = 70989120 \text{ δύναι.}$$

Ἤτοι ἡ τάσις τῆς χορδῆς εἶναι 70989120 δύναι.

117) Ἑκάστη τῶν σφαιρῶν ρυθμιστοῦ τοῦ Watt ζυγίζει 8χιλιόγραμμα, τό δέ μῆκος τοῦ στελέχους ἐξαρτήσεως εἶναι 0,5.

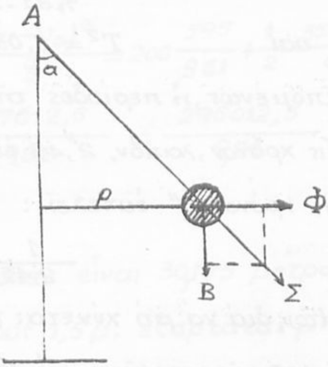
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ συσκευὴ ἐκτελεῖ μίαν στροφὴν κατὰ δευτερόλεπτον.

Ζητεῖται:

α) Ἡ τιμὴ τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν θὰ σχηματίζῃ τὸ στέλεχος μετὰ τῆς κατακορύφου, καὶ

β) ἡ τιμὴ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως τῆς σφαίρας εἰς χιλιόγραμμα. ($g = 981$).



Λύσις: α) Ἡ φυγόκεντρος δύναμις, ἥτις εἶναι ἡ μία τῶν συνιστωσῶν τῆς Σ, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα εἶναι τὸ βάρος Β. Ἔχομεν δέ:

$$\Phi = \frac{4\Pi^2 . \mu . \rho}{T^2} = 4\Pi^2 . 8000 . 50 \text{ ημα}$$

διότι: $\rho = 50 \text{ημα}$.

Ἀφ' ἑτέρου: $\Phi = Bg . \varepsilon\varphi\alpha$ (εἰς δύνας).

Ἐξισοῦντες, ἔχομεν:

$$4 \cdot 9,8596 \cdot 8000 \cdot 50 \text{ ημα} = 8000 \cdot g . \varepsilon\varphi\alpha ,$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{g}{200 \cdot 9,8596} = \frac{980}{1971,92} = \frac{1}{2} \text{ περίπου},$$

ἤτοι: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 60$ καὶ $\alpha = 60^\circ$

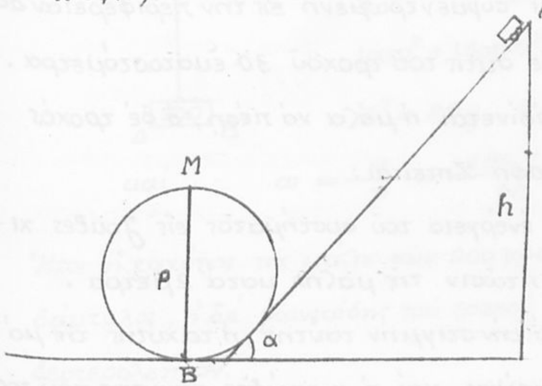
β) Ἔχομεν:

$$\Phi = B . \varepsilon\varphi\alpha = 8\sqrt{3} = 13,856 \text{ χιλιόγραμμα}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα, ἡ τιμή τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως εἶναι 13,856 χλγρ.

118) Ἡ γραμμή ἐναερίου σιδηροδρόμου σχηματίζει κύκλον, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἶναι κατακόρυφον, ἡ δέ ἀκτίς αὐτοῦ εἶναι ρ. Τό ὕψος τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου εἶναι οὕτως ὑπολογισμένον, ὥστε ὅταν μικρόν βαγόνιον ἀφεθῆ εἰς τήν κορυφήν αὐτοῦ Α, νά διανυθῆ ὁ κύκλος ΑΜΒ, χωρίς τοῦτο νά ἀνατραπῆ. Ζητεῖται, ποῖον πρέπει νά εἶναι τό ἐλάχιστον ὕψος h τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου ΒΑ, ἵνα ἐπιτευχθῆ τό ἀποτέλεσμα τοῦτο. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καί ἡ τριβή δέν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν).



Λύσις: Ἡ ταχύτης τοῦ βαγονίου εἰς τό Β θά εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{2hg},$$

εἰς δέ τό Μ θά εἶναι:

$$\upsilon' = \sqrt{2g(h-2\rho)}.$$

Ἡ φυγόκεντρος δύναμις :

$$\Phi = B = \frac{m.\upsilon^2}{\rho}, \text{ ἤτοι:}$$

$$m.g = \frac{m.\upsilon^2}{\rho} \quad \text{καί } \upsilon^2 = g.\rho.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ v, ἔχομεν:

$$g \cdot \rho = 2g(h-2\rho),$$

καὶ $2h = 5\rho$, ἄρα $h = 2{,}5\rho$.

Ἑπομένως, τὸ ὕψος τοῦ κεκλιμμένου ἐπιπέδου πρέπει νὰ εἶναι 2,5πλάσιον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

119) Τροχὸς ποδηλάτου ἄνευ ἐλαστικοῦ, δυνάμενος νὰ περιστραφῇ ἄνευ τριβῆς περὶ τὸν ἄξονά του, περιβάλλεται περιφερειακῶς διὰ νήματος ἀβαροῦς, εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι ἐξηρτημένη μᾶζα 200 γραμμαρίων. Ἡ μᾶζα τοῦ τροχοῦ, ἡ ὁποία θεωρεῖται συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, εἶναι 3 χλγρ., ἡ δὲ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ 30 ἑκατοστόμετρα. Κατά τινα στιγμὴν, ἀφίνεται ἡ μᾶζα νὰ πέσῃ, ὁ δὲ τροχὸς ἐλεύθερος νὰ περιστραφῇ. Ζητεῖται:

α) Ποία ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἰς Joules χιλιόγραμμα μετὰ τὴν πτῶσιν τῆς μάζης κατὰ 2 μέτρα.

β) Ποίαι εἶναι, κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην, ἡ ταχύτης τῆς μάζης τῶν 200 γραμμαρίων καὶ ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ τροχοῦ.

γ) Ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως τῆς μάζης ταύτης.

<u>Λύσις</u>: Εἰς τὸ σημεῖον Δ ἡ ῥύμη τοῦ συστήματος P ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ῥυμῶν τῆς μάζης καὶ τῶν τοῦ τροχοῦ $P_1 + P_2$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλά: $P_1 = \frac{1}{2} M \cdot \upsilon^2$ καί $P_2 = \frac{1}{2} M_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho^2$.

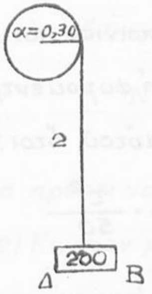
Ἑπομένως: $P = \frac{1}{2}(M \cdot \upsilon^2 + M_1 \cdot \omega^2 \cdot \rho^2)$

καί ἐπειδή: $\omega^2 \cdot \rho^2 = \upsilon^2$,

ἔχομεν: $P = \frac{1}{2}\upsilon^2 (M + M_1)$.

Ἡ μεταβολή τῆς ῥύμης ἰσοῦται μέ τό παραχθέν ἔργον Δ.δ

καί Δ.δ.g εἰς δύνας, ἤτοι:



$$\frac{1}{2}\upsilon^2 (M + M_1) = \Delta\delta g$$

καί ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} 200\,\upsilon^2 + \frac{1}{2} \cdot 3000\,\upsilon^2 = 200 \cdot g \cdot 200,$$

$$100\upsilon^2 + 1500\upsilon^2 = 40000 g, \; 16\upsilon^2 = 400 g,$$

$$\upsilon^2 = 25 g, \; \upsilon = 5\sqrt{g} = 5 \cdot 31{,}3, \; \upsilon = 156{,}5$$

καί $\omega = \frac{\upsilon}{P} = \frac{156{,}5}{30} = 5{,}223 \ldots$

Ἤτοι ἡ ταχύτης τῆς μάζης τῶν 200 γραμμαρίων εἶναι 156,5 δάκτυλοι, ἡ δέ γωνιώδης τοῦ τροχοῦ 5,223 ἀκτίνια κατά δευτερόλεπτον.

Ἡ κινητική ἐνέργεια εἶναι:

$$\Delta . \delta . g = 40000 \cdot 980 \text{ ἔργια} = 39200000 \text{ ἔργια} =$$

$$= 3{,}92 \text{ Joules} = 0{,}4 \text{ χιλιογραμμετρα}.$$

Ἤτοι, ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι: 3,92 Joules ἤ 0,4 χιλιογραμμόμετρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑπολογισθῇ ἡ φυγόκεντρος δύναμις.

Λύσις: Ἡ ταχύτης τῆς μηχανῆς κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι:

$$\tau = \frac{60.000}{3600} = \frac{100}{6}\ \mu.$$

Ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι:

$$\Phi = \frac{m\tau^2}{\rho} = \frac{50000 \cdot \left(\frac{100}{6}\right)^2}{500}\ \text{χιλιόγραμμα.}$$

124) Ἓν ἐκκρεμὲς δίδει τὰς αἰωρήσεις εἰς ἕνα χρόνον x. Τὸ ἐπιμηκύνομεν κατὰ α καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως γίνεται x'. Ζητεῖται ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος συναρτήσει τῶν α, x καὶ x'.

Λύσις: Ἔχομεν κατ' ἀρχάς:

$$x = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad (1)$$

καὶ μετὰ τὴν ἐπιμήκυνσιν:

$$x' = 2\pi\sqrt{\frac{\mu+\alpha}{g}} \quad (2)$$

Ὑψοῦντες τὰς δύο ἰσότητας εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν:

$$x^2 = \frac{4\pi^2\mu}{g} \quad \text{καὶ} \quad x'^2 = \frac{4\pi^2(\mu+\alpha)}{g}$$

καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\frac{x^2}{x'^2} = \frac{4\pi^2\mu}{4\pi^2(\mu+\alpha)} = \frac{\mu}{\mu+\alpha}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ μ:

$$\mu = \frac{\alpha x^2}{x'^2 - x^2} \qquad (3)$$

Εἰσάγοντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ μ ἐκ τῆς (3) εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν τὸ g συναρτήσει τῶν ζητουμένων:

$$g = \frac{4\pi^2\mu}{x^2} = 4\pi^2 \frac{\frac{\alpha x^2}{x'^2 - x^2}}{x^2} = 4\pi^2 \frac{\alpha}{x'^2 - x^2}$$

Ἄρα:
$$g = \frac{4\pi^2 \alpha}{x'^2 - x^2}$$

125) Θεωροῦμεν ὅλα τὰ κεκλιμένα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου O. Ζητοῦνται:

1) Ποῖος ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν θέσεων τῶν κινητῶν, τὰ ὁποῖα ἀναχωρήσαντα ἐκ τοῦ O ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ κινούμενα ἐπὶ τῶν κεκλιμένων ἐπιπέδων, ἀπέκτησαν τὴν αὐτὴν ταχύτητα.

2) Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν θέσεων, ἃς καταλαμβάνουν τὰ κινητὰ ταῦτα κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον.

Λύσις: 1) Ἔστω OA (σχ. 1) ἡ ἐκ τοῦ O ἀγομένη κατακόρυφος καὶ Δ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου, ἤτοι κινητὸν κινούμενον κατὰ τὴν OA, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, τὸ ὁποῖον ἀποκτᾷ εἰς τὸ Δ ταχύτητα τ. Ἔστω ἐπίσης τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον OB, σχηματίζον μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν ω, καὶ Γ τὸ μετ' αὐτοῦ σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου.

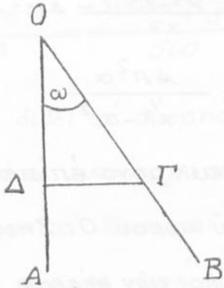
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατά τά γνωστά, θά έχωμεν:

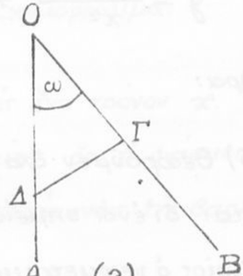
$$\tau = \sqrt{2g(O\Delta)} = \sqrt{2g\eta\mu\omega(O\Gamma)}$$

ή $\qquad O\Delta = (O\Gamma)\eta\mu\omega)$

ήτοι τά Δ, Γ κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁριζόντιον ἐπίπεδον κάτωθεν τοῦ Ο κείμενον καί εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ $\delta = \frac{v^2}{2g}$



(1)



(2)

2) Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ (σχ.2) ἡ κατακόρυφος καί πλαγία τις τροχιά δύο ἐκ τῶν κινητῶν καί Δ, Γ τά ἐπ' αὐτῶν σημεῖα τοῦ τόπου. Ὡς γνωστόν:

$$O\Delta = \frac{1}{2}gx^2$$

$$O\Gamma = \frac{1}{2}g\eta\mu\omega x^2 \quad \text{ή} \quad \frac{O\Gamma}{O\Delta} = \eta\mu\omega,$$

ἤτοι ἡ γωνία ΟΓΔ εἶναι ὀρθή. Ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον ΟΔ κατακόρυφον καί ἴσην πρός $\frac{1}{2}gx^2$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

126) Εἰς ἕνα τόπον, ἓν ἐκκρεμές, μήκους 1 μέτρου, κάμνει 239 πλήρεις αἰωρήσεις εἰς 8 πρῶτα λεπτά. Ποία θά εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις, ἡ ὀφειλομένη εἰς τήν βαρύτητα, εἰς τόν τόπον τοῦτον.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου:

$$\frac{T}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{ἔχομεν:}$$

$$\frac{T^2}{\nu^2} = \frac{4\pi^2\mu}{g}, \quad \text{ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:}$$

$$g = \frac{4\pi^2\mu\nu^2}{T^2} = \frac{4\cdot(3,14)^2\cdot 1\cdot(237)^2}{(8\cdot 60)^2} = 9,777\,\mu$$

Ληφθέντος $\pi = 3,14$ καί ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν αἰωρήσεων $\nu = 239$.

127) Μία τροχαλία κάμνει 20 στροφάς εἰς τό πρῶτον λεπτόν. Ποία εἶναι ἡ γωνιώδης της ταχύτης;

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$\omega = \frac{2\pi\cdot 20}{60} = 2,054\,\mu.$$

128) Ὡρολόγιον, τοῦ ὁποίου ἡ πορεία εἶναι κανονική εἰς Παρισίους, προπορεύεται κατά δύο δευτερόλεπτα τήν ἡμέραν, ὅταν τό μεταφέρωμεν εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τόν τόπον τοῦτον.

Λύσις: Τό ἐκκρεμές τοῦ ὡρολογίου ἐκτελεῖ 86400+120 = 86520 αἰωρήσεις ἁπλᾶς τήν ἡμέραν (εἰκοσιτετραώρον). Ἡ διάρκεια

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

άρκεια μιᾶς τῶν αἰωρήσεων τούτων εἶναι:

$$T = \frac{86400}{86520} \text{ δευτερόλεπτα}$$

Ἡ ἐπιτάχυνσις g δίδεται διά τῆς σχέσεως:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{1}{T^2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\gamma}{9{,}81} = \frac{1}{T^2}$$

$$g = 9{,}81 \cdot \left(\frac{86520}{86400}\right)^2 = 9{,}81 \cdot \left(\frac{721}{720}\right)^2 = 9{,}84 \ \mu.$$

129) Ποία θά εἶναι ἡ διάρκεια τῆς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς, μήκους 1 μέτρου, ἐπί τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡλίου, ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις, ἥν δίδει οὗτος, εἶναι 28 φοράς μεγαλυτέρα τῆς γηΐνης.

<u>Λύσις</u>: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχομεν:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{ἤ} \quad T = \pi\sqrt{\frac{100}{28 \cdot g}} = \pi\sqrt{\frac{100}{28 \cdot 981}}$$

Ἄρα ἡ διάρκεια εἶναι: $T = \pi\sqrt{\dfrac{100}{28 \cdot 981}}$ δλ.

130) Ποῖον πρέπει νά εἶναι τό μῆκος ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς, ἵνα ἡ διάρκεια τῶν αἰωρήσεων μικροῦ πλάτους εἶναι τό $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτερολέπτου;

<u>Λύσις</u>: Ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως εἶναι:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}, \text{ ἐξ οὗ } \frac{T}{\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{ἤ} \quad \frac{T^2}{\pi^2} \cdot g = \mu,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι: $\mu = g\dfrac{T^2}{\pi^2} = 0{,}99396\,T^2$. Ἀλλά:

$T = \frac{1}{2}$ δλ, ἄρα: $\mu = 0{,}24849$ τοῦ μέτρου.

131) Ποῖον εἶναι τό μῆκος ἑνός ἐκκρεμοῦς, τό ὁποῖον κάμνει 75 ἁπλᾶς αἰωρήσεις εἰς ἕν πρῶτον λεπτόν. ($g = 9{,}82\,\mu$.).

<u>Λύσις</u>: Διά τάς ἁπλᾶς αἰωρήσεις ὁ τύπος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

Ἐάν α εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ἁπλῶν αἰωρήσεων εἰς T δευτερόλεπτα, τότε ἡ διάρκεια μιᾶς ἁπλῆς αἰωρήσεως θά εἶναι:

$$\frac{T}{\alpha} = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}, \quad \text{ἐξοῦ: } \mu = \frac{gT^2}{\pi^2\alpha^2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τάς δοθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$\mu = \frac{9{,}82 \cdot 60^2}{3{,}14^2 \cdot 75^2} = 0{,}6374 \text{ τοῦ πρώτου λεπτοῦ}.$$

132) Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνός σώματος, τό ὁποῖον πίπτει ἐπί τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡλίου; Ἡ μᾶζα τοῦ Ἡλίου εἶναι ἴση πρός 324439 M (M = μᾶζα τῆς γῆς) καί ἡ ἀκτίς του $R' = 108R$ (R = ἀκτίς τῆς γῆς).

<u>Λύσις</u>: Ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς εἶναι:

$$\frac{\Delta}{\mu} = g = G\frac{M}{R^2},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔνθα σ παριστᾷ τὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἀπό τὴν μίαν πρός τὴν ἄλλην ἐκ δύο μαζῶν, ἴσον πρός τὴν μονάδα καί ἀπεχουσῶν 1 ἑκατοστόμετρον.

Ἐπί τῆς ἐπιφανείας τοῦ Ἡλίου εἶναι:

$$\frac{\Delta'}{\mu} = \gamma = G\cdot\frac{M'}{R'^2}$$

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{M'}{M}\cdot\frac{R^2}{R'^2}, \text{ ἀλλά: } M' = 324439\, M$$

Ἄρα: $$\gamma = \frac{324439}{11664}\cdot g = 28g$$

133) Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις ἑνός σώματος, τό ὁποῖον πίπτει ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς Σελήνης; Μᾶζα τῆς Σελήνης $M' = 0{,}01255\ M$ καί ἀκτίς $R' = 0{,}273\,R$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ ἐξαχθέντος τύπου:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{M'}{M}\cdot\frac{R^2}{R'^2}$$

εὑρίσκομεν: $$\gamma = \frac{0{,}01255}{(0{,}273)^2}\, g = 0{,}168\, g.$$

134) Σῶμα βάρους 1 χιλιογράμμου μεταφέρεται ἐκ τῆς βάσεως εἰς τήν κορυφήν τοῦ πύργου Ἄϊφελ. Πόσον θά ἐλαττωθῇ τό βάρος του; Ὕψος τοῦ πύργου 300 μέτρα.

Λύσις: Ἔχομεν:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{R^2}{(R+\upsilon)^2} = 1 - \frac{2\upsilon}{R}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$2\upsilon = 500 \text{ μέτρα}, \quad R = 6.000.000$$

$$\frac{2\upsilon}{R} = \frac{1}{100.000}$$

Ἡ ἐλάττωσις τοῦ βάρους θά εἶναι 1/10 τοῦ γραμμαρίου.

135) Εἴς τι μέρος, ἔνθα $g = 980$, ἀνυψώθη σῶμα μάζης 24 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 8 μ. Ποῖον εἶναι τό παραχθέν ἔργον εἰς Joules;

<u>Λύσις</u>: Τό παραχθέν ἔργον ἰσοῦται πρός:

$$800 \cdot 980 \cdot 24000 = 1881,6 \cdot 10^7 \text{ ἔργια},$$

ἤτοι 1881,6 Joules.

136) Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς G τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, ὅταν ἡ μᾶζα τῆς γῆς εἶναι $5,95 \cdot 10^{27}$ καί ἡ ἀκτίς της εἶναι $6,37 \cdot 10^3$.

<u>Λύσις</u>: Ὑποθέτομεν μίαν μᾶζαν 1 γραμμ., ἥτις πίπτει εἰς τήν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, καί ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$F = G\frac{M \cdot \mu}{\rho^2}$$

διά $F = 981.$, $\mu = 1$ καί $M = 5,95 \times 10^{27}$

$$\text{Ἄρα:} \quad G = \frac{981 \cdot (6,37)^2 \cdot 10^6}{5,95 \cdot 10^{27}} = \frac{6,69}{10^8}$$

137) Βλῆμα τηλεβόλου, βάρους 30 χιλιογράμμων, προσκρούει ἐπί πλευρᾶς θωρηκτοῦ μετά ταχύτητος 500 μ. κατά 1 δευτε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρόλεπτον, εἰσερχομένη ἐντός τοῦ θώρακος κατά 0,10 μ. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ χάλυβος τοῦ θωρηκτοῦ;

Λύσις: Ἔστω Α ἡ ἀντίστασις τοῦ χάλυβος καί W ἡ κινητική ἐνέργεια. Τότε:

$$W = \frac{1}{2}\mu\tau^2 = A\cdot 0,10$$

Ὅθεν: $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{30.(500)^2}{9,81\cdot 0,10} = 3.820.000$ χιλιόγραμμα.

138) Σφαῖρα τηλεβόλου 10 χιλιογράμμων, ρίπτεται μετά ταχύτητος 600 μέτρων κατά δευτερόλεπτον. Ποία εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια ταύτης;

Λύσις: Ἡ κινητική ἐνέργεια εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}\mu\tau^2 = \frac{1}{2}\,10.000\,(60.000)^2 = 18.10^{12}\text{ έργια}$$

ἤ $W = 1.800.000$ Ἰούλιοι μονάδες

139) Βάρος 20 χιλιογράμμων ἀναβιβάζεται ὑπό μηχανῆς εἰς ὕψος 2,25 μέτρων ἐντός 3''. Ποία εἶναι ἡ ὑπό τῆς μηχανῆς ταύτης παραγομένη ἐνέργεια;

Λύσις: Εἶναι γνωστόν ὅτι:

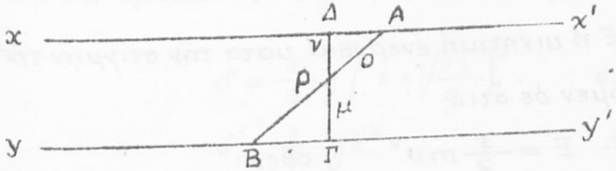
$E = \Delta.\delta$, ἤτοι $E = 20$ χλγρ. $\cdot$ 2,25μ. $=$ 45 χιλιογραμμόμετρα ἐντός 3'', ὅθεν 15 χιλιογραμμόμετρα ἐντός 1 δευτερολέπτου. Ἡ δέ ἰσχύς τῆς μηχανῆς ταύτης εἶναι 0,2 ἵππων. Διότι, ὅταν ἡ μηχανή παράγῃ ἔργον 75 χιλιογραμ–

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μομέτρων εἰς 1 δευτ., ἔχει τότε ἰσχὺν ἑνὸς ἵππου, ὅταν παράγῃ ἔργον 15 χιλιογραμμομέτρων, ἔχει ἰσχὺν $\frac{15}{75} = 0{,}20$ ἵππων.

140) Δύο κινητὰ κινοῦνται ἐπὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν κατ' ἀντίθετον φοράν. Ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἑνὸς ἔστω γ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ δευτέρου, ἵνα ἡ ταῦτα ἑνοῦσα εὐθεῖα διέρχηται πάντοτε διὰ δοθέντος σημείου, ἀπέχοντος ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἀποστάσεις μ καὶ ν.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ὅτι τὰ κινητὰ εὑρίσκονται εἰς τὰς θέσεις Γ καὶ Δ. Μετὰ πάροδον χρόνου τινός, τὸ ἐπὶ τῆς xx' κι-



νούμενον θὰ φθάσῃ εἰς τὸ Α. Τότε τὸ ἐπὶ τῆς yy' θέλομεν νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ Β. Θὰ ἔχωμεν, λοιπόν:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$\Gamma B = \frac{1}{2}\gamma' t^2$$

Ὅπου γ' ἔστω ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἄλλου κινητοῦ.

Ἐκ τῶν ΟΒΓ ≃ ΔΟΑ, ἔχομεν:

$$\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{\Delta A}{B\Gamma} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\frac{1}{2}\gamma t^2}{\frac{1}{2}\gamma' t^2} = \frac{\gamma}{\gamma'}. \text{ Ἄρα καὶ } \gamma = \gamma'\frac{\mu}{\nu}.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

141) Σφαίρα ἔχουσα μᾶζαν 15 χιλιογράμμων ὠθεῖται ὑπό πυροβόλου ὅπλου, μέ ταχύτητα 650 μέτρων κατά δευτερόλεπτον. Νά ὑπολογισθῇ ἡ κινητική του ἐνέργεια εἰς Joules.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω E ἡ κινητική του ἐνέργεια. Τότε, ὡς γνωστόν:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 15000 (650)^2$$

ἤ $\quad E = 75 . 65^2 \, 10^8$ ἐργ. καί $E = 750 . 65^2$ Joules.

142) Μᾶζα 10 χιλιογράμμων ὠθεῖται μέ ταχύτητα 600μ. κατά δευτερόλεπτον. Πόση εἶναι τήν στιγμήν τῆς ὤσεως ἡ κινητική ἐνέργεια;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω E ἡ κινητική ἐνέργεια κατά τήν στιγμήν τῆς ὤσεως. Γνωρίζομεν δέ ὅτι:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \text{ ὅθεν:}$$

$$m = 10.000 \text{ γρ. καί } v = 60.000 \text{ ἑκατ.}$$

Ἄρα: $\quad E = \frac{1}{2} 10^4 . 6^2 . 10^8 = 18 . 10^{12}$ ἔργια

ἤ $\quad E = 18 . 10^5$ Joules

καί $\quad E = \frac{18 . 10^{12}}{981 . 10^5} = \frac{18 . 10^7}{981} = \frac{2 . 10^7}{109}$ χιλιόγρ.

143) Σῶμα πίπτει ἐλευθέρως, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Εἰς πόσον χρόνον θά διανύσῃ 50 μέτρα, ὅταν ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι 9,8;

<u>Λύσις</u>: Ἐκ τοῦ τύπου:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\delta = \frac{1}{2} g x^2$$

ἔχομεν: $x = \sqrt{\frac{2\delta}{g}}$ ἄρα $x = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{9,8}} = 3'',16$

144) Ἐκ τινος σημείου Μ ἀφέθη σῶμα βαρύ, ἀφοῦ διέτρεξεν διάστημα λ ἀφέθη ἐκ τοῦ Μ ἕτερον σῶμα. Εὑρεῖν μετά πόσον χρόνον ἡ ἀπόστασις θά εἶναι α.

<u>Λύσις</u>: Ὅταν ἀφέθη τό δεύτερον, τό πρῶτον θά ἔχη κινηθῆ ἐπί χρόνον $\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$ (διότι $\lambda = \frac{1}{2} g y^2$). Ὅταν ἀφεθῆ καί τό δεύτερον καί ἡ ἀπόστασις γίνη α, τό πρῶτον θά ἔχη κινηθῆ ἐπί χρόνον $t + \sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$, τό δέ δεύτερον κατά t, ὥστε:

$$\delta = \frac{1}{2} g \left(t + \sqrt{\frac{2\lambda}{g}} \right)^2 \qquad \text{διά τό } \alpha^{ον}$$

$$\delta' = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{διά τό } \beta^{ον}$$

$$\delta - \delta' = \frac{1}{2} g \left[\left(t + \sqrt{\frac{2\lambda}{g}} \right)^2 - t^2 \right] \qquad \delta - \delta' = \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2} g \left(t^2 + \frac{2\lambda}{g} + 2t\sqrt{\frac{2\lambda}{g}} - t^2 \right)$$

Λύω ἤδη ὡς πρός t καί ἔχω:

$$2\alpha = g \left(\frac{2\lambda}{g} + 2t\sqrt{\frac{2\lambda}{g}} \right)$$

$$2\alpha = 2\lambda + 2gt\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}$$

$$gt\sqrt{\frac{2\lambda}{g}} = \alpha - \lambda$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὥστε μετά χρόνον:

$$t=\frac{\alpha-\lambda}{g\sqrt{\frac{2\lambda}{g}}}=\frac{(\alpha-\lambda)\sqrt{g}}{g\sqrt{2\lambda}}=\frac{\alpha-\lambda}{\sqrt{2g\lambda}}$$

145) Βόμβα ἐβλήθη κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, μέ ἀρχικήν ταχύτητα 245,25 μ. Μετά πόσον χρόνον θά φθάση εἰς τό μέγιστον ὕψος καί ποῖον θά εἶναι τοῦτο;

Λύσις: Ἔχομεν:

$$T_x=T_0-gt\ ,\qquad T_x=0\quad ,\text{δηλ: } gt=T_0$$

καί $\quad t=\dfrac{245,25}{g}\quad$ τό g εἰς μέτρα.

Ὥστε μετά χρόνον $t=\dfrac{245,25}{g}$ δλ. θά φθάση εἰς τό ἀνώτατον ὕψος.

$$\delta=T_0t-\frac{1}{2}gt^2=\frac{245,25^2}{g}-g\frac{245,25^2}{2g^2}=$$

$$=\frac{245,25^2}{g}-\frac{245,25^2}{2g}=$$

$$=\frac{245,25^2(2-1)}{2g}=\frac{245,25^2}{2g}.$$

146) Ἐκκρεμές κτυπᾷ τό δλ., ἕτερον δέ ἔχει διάρκειαν αἰωρήσεως, διαφέρουσαν κατά $\frac{1}{40}$ τῆς τοῦ πρώτου. Εὑρεῖν τόν λόγον τῶν μηκῶν τῶν ἐκκρεμῶν.

Λύσις: Διά τό πρῶτον ἔχομεν:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διά δέ τό δεύτερον:

$$t' = \pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} \quad \text{ή}$$

$$\ell = \frac{t^2 g}{\pi^2} \quad \text{καί} \quad \ell' = \frac{t'^2 g}{\pi^2},$$

ήτοι $\quad \dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{t^2 g}{t'^2 g} = \dfrac{t^2}{t'^2}$

ἀλλά: $\quad t' = t - \dfrac{t}{40} = t\left(1 - \dfrac{1}{40}\right),$

ἄρα: $\quad \dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{t^2}{t^2\left(\dfrac{39}{40}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{39}{40}\right)^2} = \dfrac{40^2}{39^2}$

147) Σῶμα τι πίπτει ἐκ τινος ὕψους υ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος. Κατά τήν διάρκειαν τῆς πτώσεώς του, τό ἐκκρεμές, μήκους 20 ἑκ., ἐκτελεῖ τρεῖς πλήρεις παλμούς. Νά εὑρεθῇ τό ὕψος υ, παραλειπομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος. (Πολυτεχνείου).

<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν:

$$\delta = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{καί} \quad t = \pi\sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

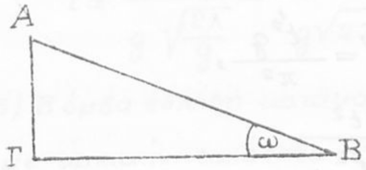
$$\delta = \frac{1}{2}g\pi^2\frac{20}{g} \quad \text{καί}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\pi^2 . 36 . 20 = 360 . \pi^2 = 360 \cdot (3,14)^2$$

148) Σῶμα κινούμενον ἐπί κεκλιμένου ἐπιπέδου χρειάζεται διά νά φθάσῃ μέχρι τοῦ ἐδάφους χρόνον διπλάσιον ἐκείνου, ὅν θά ἐχρειάζετο, ἐάν ἔπιπτεν ἐλευθέρως ἐκ τοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτοῦ ὕψους. Νά εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου.



Λύσις: ὡς γνωστόν:

$$(A\Gamma) = \frac{1}{2} g x^2$$

ἐάν x ὁ χρόνος

$$(AB) = \frac{1}{2} \gamma (2x)^2 = 2\gamma x^2 =$$
$$= 2g\eta\mu\omega\, x^2 .$$

ἀλλά: $(A\Gamma) = (AB)\eta\mu\omega$,

ἄρα: $(AB) = \dfrac{g x^2}{2\eta\mu\omega} = 2g\eta\mu\omega\, x^2$

καί: $4\eta\mu^2\omega = 1$ καί $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, ἄρα $\omega = 30^0$

149) Σῶμα κινεῖται ἐπί κεκλιμένου ἐπιπέδου καί διανύει 50 δακτύλους εἰς 2 δευτερόλεπτα. Νά εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου.

Λύσις: ὡς γνωστόν, ἔχω:

$$50 = \frac{1}{2}\gamma (2)^2 = 2\gamma \quad \text{καί } \gamma = 25 \text{ ἑκατ.}$$

ἀλλά: $\gamma = g\eta\mu\omega$ καί $\eta\mu\omega = \dfrac{\gamma}{g} = \dfrac{25}{980} = \dfrac{5}{196}$,

ὅθεν: $\lambda o\gamma\eta\mu\omega = \bar{2},40671$,

ἄρα : $\omega = 1^0\, 27'\, 45''$

150) Ποίαν κλίσιν πρέπει νά δώσωμεν εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὥστε σφαῖρα, ἀφιεμένη εἰς τήν κορυφήν αὐτοῦ, νά διανύσῃ ὡρισμένον χρόνον θ ὡρισμένον διάστημα δ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ σφαῖρα θά κινηθῆ μέ ταχύτητα ὁμαλῶς μεταβαλλομένην. Ἄρα:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma\theta^2 \quad \text{ἀλλά} \quad \gamma = g\,\eta\mu\omega \quad (\omega = \text{κλίσις})$$

ὅθεν: $\delta = \frac{1}{2} g\,\eta\mu\omega\,\theta^2$ καί $\eta\mu\omega = \frac{2\delta}{g\theta^2}$

ἐξ οὗ εὑρίσκω τό ω.

151) Σῶμα κινεῖται ἐπί κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἔχοντος κλίσιν 10° καί μῆκος 300 μέτρων. Εἰς πόσον χρόνον διανύει ὅλον τό κεκλιμένον ἐπίπεδον;

Λύσις: ὡς γνωστόν, ἔχω:

$$\gamma = g\,\eta\mu\omega = 9{,}8\,\eta\mu\,10^\circ = 9{,}8 \cdot 0{,}174 = 1{,}7$$

$$300 = \frac{1}{2}\gamma x^2 \quad \text{καί} \quad x^2 = \frac{300}{0{,}85} = 356$$

Ἄρα: $x = 18{,}8$ δευτερόλεπτα.

152) Πόσον βάθος ἔχει φρέαρ, εἰς τό ὁποῖον σῶμα, ἀφιέμενον εἰς τό στόμιον αὐτοῦ, διανύει διάστημα 176,58 μέτρα κατά τά δύο τελευταῖα δευτερόλεπτα τῆς πτώσεως;

Λύσις: Ἔστω x ὁ χρόνος πού χρειάζεται, ἵνα διανύσῃ ὅλον τό φρέαρ. Τότε ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} g x^2 - \frac{1}{2} g (x-2)^2 = 176{,}58$$

$$4{,}9\,(x^2 - x^2 + 4x - 4) = 176{,}58$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$x - 1 = \frac{1765,8}{196} \quad \text{καί} \quad x = 10,06''.$$

Ἄρα τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἶναι:

$$\beta = \frac{1}{2} g\,(10,06)^2 = 4,9\,(10,06)^2,$$

δηλαδή 490 μέτρα περίπου.

153) Ἐκ πόσου ὕψους πίπτει σῶμα ἐλευθέρως, καθ' ὃν χρόνον ἐκκρεμὲς μήκους 50 δακτύλων ἐκτελεῖ 4 αἰωρήσεις.

Λύσις: Ἔστω T ἡ διάρκεια μιᾶς αἰωρήσεως:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{50}{g}}.$$

Ἄρα ὁ χρόνος, καθ' ὃν πίπτει, εἶναι:

$$4T = 8\pi\sqrt{\frac{50}{g}}$$

ἄρα: $x = \frac{1}{2} g \cdot 64\pi^2 \cdot \frac{50}{g} = 32 \cdot \pi^2 \cdot 50$

καί $x = 157,904$ μέτρα.

154) Νὰ εὑρεθῇ εἰς χιλιόγραμμα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια 350 χιλγρ., ὠθουμένων μὲ ταχύτητα 800 μέτρων κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ὤσεως.

Λύσις: ὡς γνωστόν:

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$E = \frac{1}{2}\ 350.000\,(80.000)^2 = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 8^2 \cdot 10^{12}$$

ἢ $E = 32 \cdot 35 \cdot 10^{12}$ ἔργια

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί : $E = \frac{32.35.10^7}{981}$ χιλιογραμμόμετρα.

155) Σώμα πίπτει ελευθέρως εξ ύψους 250 μ. Νά ευρεθή τό διάστημα, όπερ διανύει κατά τό τελευταίον δευτερόλεπτον τής πτώσεως.

Λύσις: Εύρίσκω πρώτον τόν ολικόν χρόνον τής πτώσεως:

$$250 = 4,9\,x^2 \quad \text{καί} \quad x = \sqrt{\frac{2500}{49}} = 7'',15.$$

Διά νά εύρω τό ζητούμενον διάστημα, άρκει νά εύρω τό διάστημα εις χρόνον 6'',15 από τήν εκκίνησιν. Ήτοι:

$$\delta = 4,9\,(6,15)^2 = 185,318 \text{ μέτρα}.$$

Άρα τό ζητούμενον διάστημα είναι 64,682 μέτρα.

156) Κινητόν ωθείται εκ τών κάτω πρός τά άνω, μέ αρχικήν ταχύτητα 60 μέτρων κατά δευτερόλεπτον επί κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως 30°. Πόσον διάστημα διήνυσε μέχρι τής στιγμής, καθ' ήν θά παύση ανερχόμενον;

Λύσις: Έχομεν :

$$\gamma = g\,\eta\mu 30^\circ = 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 4,9 .$$

Τήν στιγμήν, καθ' ήν θά σταματήση, ή τελική ταχύτης είναι μηδέν, άρα έχομεν:

$$0 = T_o - \gamma x \quad \text{καί} \quad x = \frac{60}{4,9} = 12'',2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα: $\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{1}{2} 4{,}9\,(12{,}2)^2 = 364{,}658\ \mu.$

157) Ἐκ πόσου ὕψους πίπτει σῶμα ἐλευθέρως κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς, ἔχοντος μῆκος 10μ.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω Τ ἡ διάρκεια, ὅτε ἔχομεν:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{10}{g}},$$

ἄρα: $x = \frac{1}{2} g T^2 = \frac{1}{2} g\, 4\pi^2 \frac{10}{g} = 2\pi^2.10 = 197{,}38$

Ἤτοι διανύει διάστημα 197,38 μέτρα.

158) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων τῆς μηχανῆς Atwood ἔχει βάρος 200 γρ. Πόσον πρόσθετον βάρος πρέπει νὰ θέσωμεν, ὥστε πτῶσις ἐξ ὕψους 2 μέτρων νὰ γίνῃ εἰς 5 δευτερόλεπτα. $g = 9{,}81$.

<u>Λύσις</u>: Προσδιορίζομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ συστήματος.

Ἔχω $\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2$

καὶ $\gamma = \frac{2\delta}{x^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{2B+\beta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{0{,}16}{9{,}81} = \frac{\beta}{2B+\beta} = \frac{\beta}{400+\beta}$$

ἢ $$\frac{0{,}16}{9{,}81} = \frac{\beta}{400+\beta},$$

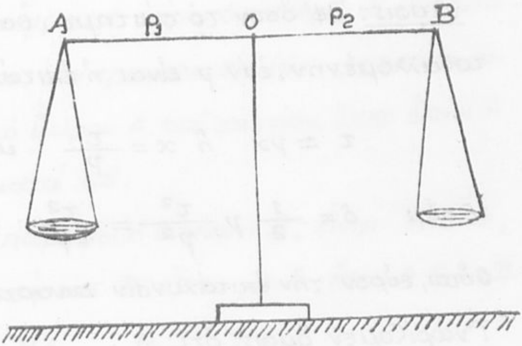
ὅθεν: $64 + 0{,}16\,\beta = 9{,}81\beta$ ἢ $965\beta = 6400$

Ἄρα: $\beta = 6{,}63$ γρ. (πρόσθετον βάρος)

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

159) Πρόκειται νά προσδιορίσωμεν τό ἀκριβές βάρος σώματος τινός, ἀλλ' ὁ ζυγός, τόν ὁποῖον ἔχομεν, δέν εἶναι ἀκριβής. Ἐν τούτοις εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς: Ἐθέσαμεν τό σῶμα ἐπί τοῦ ἑνός δίσκου Α τοῦ ζυγοῦ τούτου, ἐπί δέ τοῦ ἑτέρου ἐχρειάσθη νά θέσωμεν 4000 γρ. διά νά ἀποκατασταθῇ ἡ ἰσορροπία. Κατόπιν μετεθέσαμεν τό σῶμα ἐπί τοῦ δίσκου Β, ὁπότε ἐχρειάσθησαν 4410 γρ. ἐπί τοῦ ἑτέρου δίσκου διά τήν ἰσορροπίαν. Ζητεῖται ἤδη τό ἀκριβές βάρος τοῦ σώματος.

Λύσις: Ἐφ' ὅσον ὁ ζυγός δέν εἶναι ἀκριβής, οἱ βραχίονες τῆς φάλαγγος εἶναι ἄνισοι, ἔστω P_1 καί P_2. Λαμβάνομεν τάς ῥοπάς κατά τάς ἰσορροπίας. Ἔστω δέ x τό ζητούμενον βάρος. Κατά τήν πρώτην ἔχω:



$$xP_1 = 4000P_2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{x}{4000} = \frac{P_2}{P_1} \quad (1).$$

Κατά τήν δευτέραν ἔχω:

$$xP_2 = 4410P_1 \quad \text{ἤ} \quad \frac{4410}{x} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

9ον

Συσχετίζοντες δέ τάς σχέσεις (1) καί (2), έχομεν:

$$\frac{x}{4000} = \frac{4100}{x} \quad \text{ή} \quad x^2 = 4000 \cdot 4410 = 17640000$$

ἐξ οὗ: $\quad x = 4200$ γραμ.

160) Ἕκαστον τῶν ἴσων βαρῶν μηχανῆς Atwood ἔχει βάρος Β, τό δέ πρόσθετον βάρος β ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν τό σύστημα διανύση διάστημά τι δ, ἀποκτᾶ ταχύτητα τ. Ἐπί τῇ βάσει τῶν δεδομένων τούτων, νά εὑρεθῇ πόσον μῆκος πρέπει νά ἔχῃ ἐκκρεμές, ὅπερ ἐν τῷ τόπῳ τοῦ πειράματος κάμνει μίαν αἰώρησιν εἰς ἕν δευτερόλεπτον.

<u>Λύσις</u>: Ἐφ' ὅσον τό σύστημα θά κινηθῇ μέ κίνησιν μεταβαλλομένην, ἐάν γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τούτου, ἔχομεν:

$$\tau = \gamma x \quad \text{ή} \quad x = \frac{\tau}{\gamma} \quad \text{καί} \quad \delta = \frac{1}{2}\gamma x^2$$

ἐξ οὗ: $\quad \delta = \frac{1}{2}\gamma\frac{\tau^2}{\gamma^2} = \frac{\tau^2}{2\gamma} \quad$ ἄρα $\quad \gamma = \frac{\tau^2}{2\delta}$.

Οὕτω, εὗρον τήν ἐπιτάχυνσιν συναρτήσει τῶν γνωστῶν τ καί δ.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{2B+\beta} \quad \text{καί} \quad g = \frac{\gamma(2B+\beta)}{\beta} = \frac{\tau^2(2B+\beta)}{2\delta\beta}$$

Ἀντικαθιστῶν τό g εἰς τόν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad \text{έχω:} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\frac{\tau^2(2B+\beta)}{2\delta\beta}}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλά: $T = 1''$, ἄρα $\quad 1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\delta\theta\mu}{\tau^2(2B+\theta)}}$,

Ἄρα: $\quad \mu = \dfrac{\tau^2(2B+\theta)}{8\pi^2\,\theta\delta}$

εἶναι τό ζητούμενον μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς.

161) Δείξατε ὅτι εἰς πολύσπαστον, οὗτινος ἑκάστη τροχαλιοθήκη ἔχει τρεῖς τροχαλίας, ἡ δύναμις ἰσορροπεῖ ἀντίστασιν ἑξαπλασίαν, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν ἀρχήν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου.

Λύσις: Ὅταν τό ἑλκόμενον σημεῖον μετατίθεται κατά τήν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως καί τό ἀνελκόμενον βάρος Β ἀνέρχεται κατά τι, παραδείγματος χάριν διάστημα δ, ἕν ἕκαστον ἐκ τῶν ἕξ σχοινίων τῶν τροχαλιοθηκῶν μετατίθεται κατά δ, οὕτως ὥστε τό ἄκρον Α τοῦ σχοινίου, ὅπερ ἕλκει ἡ δύναμις, μετατίθεται κατά 6δ.

Ὅθεν τό ἔργον, ὅπερ παράγει ἡ δύναμις Α, εἶναι $A\cdot 6\cdot \delta$, τό ἔργον ὅμως τῆς ἀντιστάσεως Β εἶναι $B\cdot\delta$ ἤτοι $A\cdot 6\cdot\delta = B\cdot\delta$,

ἐξ οὗ $\quad A = \dfrac{B\delta}{6\delta} = \dfrac{B}{6} = \dfrac{1}{6}B$.

Ἄρα ἡ δύναμις Α εἶναι ἴση πρός τό $\frac{1}{6}$ τῆς ἀντιστάσεως.

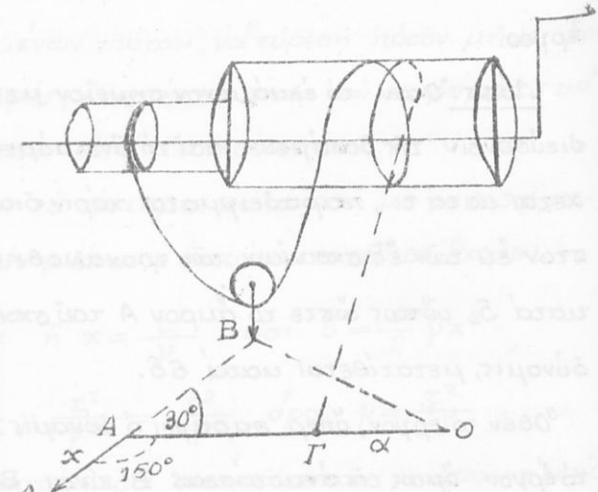
162) Εἰς διαφορικόν βαροῦλκον ἡ ἀντίστασις εἶναι 2000 χλγρ. Τό ἕν ἄκρον τοῦ σχοινίου αὐτοῦ συνδέεται, μέσῳ τοῦ μεγάλου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κυλίνδρου του, μέ σημεῖον τι μοχλοῦ τρίτου εἴδους, εἰς ὅν ὁμοχλοβραχίων ἀντιστάσεως $\alpha = 40$ έκ. Τό ὅλον μῆκος εἶναι 120 έκ. εἰς τό ἕτερον ἄκρον δέ τούτου ἐνεργεῖ δύναμις ἀγνώστου ἐντάσεως, σχηματίζουσα μετά τοῦ ὁριζοντίου μοχλοῦ γωνίαν 150°. Αἱ ἀκτῖνες τοῦ βαρούλκου εἶναι $\rho = 20$ έκ. καί $R = 60$ έκ. καί τό μῆκος τοῦ στροφάλου 60 έκ. Νά εὑρεθῆ ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως x, ἵνα διατηρῆται ἡ ἰσορροπία τοῦ συστήματος.

Λύσις :

Ἐκ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας τοῦ διαφορικοῦ βαρούλκου ἔχομεν τήν ἐπομένην σχέσιν :



$$\Delta = \frac{A\,(R-\rho)}{2\mu} = \frac{2000\,(60-20)}{120} = \frac{2000}{3}$$

Ἐκ τῶν ῥοπῶν τοῦ μοχλοῦ ἔχομεν:

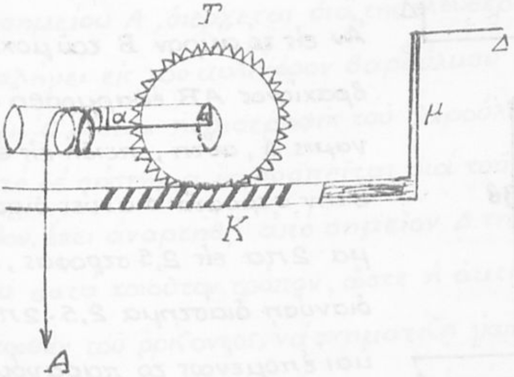
$$A\alpha = \Delta\delta \quad \text{ἤ} \quad \frac{2000}{3} \cdot 40 = x \cdot 120\,\eta\mu 30^\circ$$

καί $\quad x = 444$ χιλιόγρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

163) Ποία είναι ή συνθήκη ίσορροπίας είς τόν άτέρμονα κοχλίαν;

Λύσις: Έστω ότι ό όδοντωτός τροχός έχει ν όδόντας, ό δέ ά-ξων αύτού έχει άκτίνα α καί είς τό άκρον τού περιελισσομένου σχοινίου ένεργεί ή δύναμις Α, ίσορροπούσα τήν Δ. Είς



κάθε περιστροφήν τού κοχλίου ό τροχός Τ στρέφεται κατά ένα όδόντα. Έπομένως διά νά στραφή ό Τ κατά μίαν πλήρη περιστροφήν, πρέπει ό κοχλίας Κ νά περιστραφή ν φοράς. Έχομεν έπομένως:

$$\Delta \times \nu \cdot 2\pi\mu = A \times 2\pi\alpha$$

όθεν: $\dfrac{\Delta}{A} = \dfrac{2\pi\alpha}{\nu \cdot 2\pi\mu} = \dfrac{\alpha}{\nu \cdot \mu}$ Άρα $\Delta = \dfrac{A \cdot \alpha}{\nu \cdot \mu}$,

ένθα Α ή άντίστασις καί Δ ή κινούσα δύναμις.

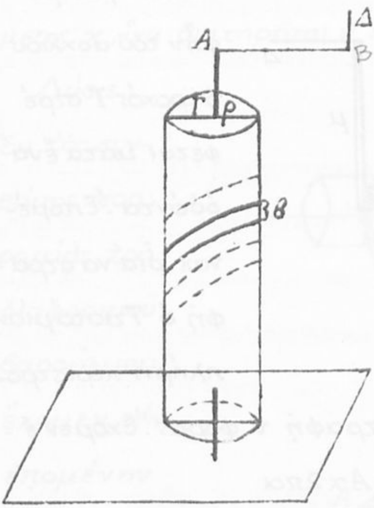
164) Πόσην άντίστασιν ύπερνικώμεν διά κοχλίου στρεφομένου 2,5 στροφάς διά δυνάμεως 5 χιλγρμ., έφηρμοσμένης έπί μοχλοβραχίονος, τού όποίου τό μήκος Α είναι ίσον μέ τό άθροισμα τού μήκους τής άκτίνος τού κυλίνδρου τού κοχλίου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί τοῦ βήματος τούτου. Ἡ ἀκτίς τοῦ κοχλίου εἶναι $\rho = \frac{\alpha}{5}$.

<u>Λύσις:</u> Ἔστω ὁ κοχλίας Κ, ὅστις κινεῖται διά τοῦ μοχλοβραχίονος ΑΒ=α, β τό βῆμα αὐτοῦ καί ρ ἡ ἀκτίς του. Κατά τό πρόβλημα, θά ἔχωμεν:

$$\alpha = \rho + \beta = \frac{\alpha}{5} + \beta \quad , \text{ὅθεν: } \alpha = \frac{5\beta}{4}$$



Ἄν εἰς τό ἄκρον Β τοῦ μοχλοβραχίονος ΑΒ ἐφαρμοσθῇ δύναμις Δ, αὐτή, ἐπειδή εἰς ἑκάστην στροφήν διανύει διάστημα 2πα εἰς 2,5 στροφάς, θά διανύσῃ διάστημα 2,5·2πα καί ἑπομένως τό παραγόμενον ἔργον ὑπό τῆς Δ εἶναι:

$E = \Delta . 2{,}5 \cdot 2\pi\alpha$. Ἐξ ἄλλου ὅμως ὁ κοχλίας εἰς 2,5 στροφάς θά κατέλθῃ κατά 2,5 βήματα, ἤτοι κατά διάστημα 2,5β καί ἄν παραστήσωμεν διά Α τήν ἀντίστασιν, τότε τό ἔργον αὐτῆς θά εἶναι:

$$E' = 2{,}5\beta A \quad , \text{ἀλλά } E = E' \ ,$$

ὅθεν:
$$2{,}5 \cdot \beta \cdot A = \Delta . 2{,}5 \cdot 2\pi \frac{5\beta}{4}$$

καί μετά τάς ἀπλοποιήσεις εὑρίσκομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$A = \frac{5\pi\Delta}{2}$$

καί ἐπειδή $\pi = 3,14$ καί $\Delta = 5$ χλγρ., ἔχομεν:

$$A = 39,25 \text{ χλγρ.}$$

Ἄρα δυνάμεθα νά ὑπερνικήσωμεν ἀντίστασιν 39,25 χλγρ.

165) Σῶμα βάρους x ἀναρτᾶται ἐκ τοῦ κέντρου Κ ἐλευθέρας τροχαλίας ὡς ἑξῆς: Τό νῆμα προσδενόμενον ἐκ σταθεροῦ σημείου Α, διέρχεται διά τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας Κ καί καταλήγει εἰς τόν κύλινδρον βαρούλκου Ο ὀρυχείου, αὐτίνος 20 έκ. Ὁ δίσκος περιστροφῆς τοῦ βαρούλκου ἔχει ἀκτῖνα 50 έκ., τό δέ σύστημα ἰσορροπεῖται διά τοῦ βάρους 40 χλγρ. τό ὁποῖον ἔχει ἀναρτηθῆ ἀπό σημεῖον Δ τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ἀκτίς ΟΔ, εὑρισκομένη κάτωθεν τοῦ ὁρίζοντος, νά σχηματίζῃ γωνίαν 30° μετ' αὐτοῦ. Ἄν αἱ προεκτάσεις τοῦ νήματος ἀπό τά σημεῖα ἐπαφῆς αὐτοῦ μετά τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας σχηματίζουν γωνίαν 60°, νά εὑρεθῇ τό ἰσορροπούμενον βάρος x.

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι διά νά ἰσορροπῇ τό βαρούλκον ὀρυχείων, πρέπει νά ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\Delta R \sigma\upsilon\nu\varphi = A\rho.$$

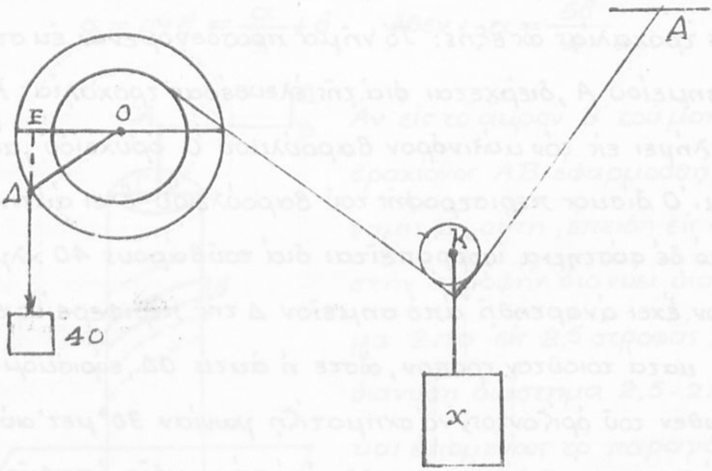
Ἐδῶ εἶναι $\Delta = 40$, $R = 50$, $\varphi = 30°$, $\rho = 20$ καί Α ἡ ἀντίστασις, ἥτις ἐνεργεῖ ὡς δύναμις ἐπί τῆς ἐλευθέρας τροχαλίας Κ. Ἔχομεν λοιπόν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$40 \cdot 50 \text{ συν } 30^\circ = A \cdot 20 \quad \text{ἤ} \quad 1000\sqrt{3} = 20A$$

καί $\qquad A = 50\sqrt{3}$ χιλιόγραμμα.

Ἡ δύναμις, λοιπόν, ἥτις ἰσορροπεῖ διά τῆς τροχαλίας Κ τό βάρος x εἶναι $50\sqrt{3}$ χλγρ. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι διά



νά ἰσορροπῇ ἡ ἐλευθέρα τροχαλία, πρέπει νά ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$A = 2\Delta \text{ συν } \frac{\omega}{2}$$

Ἐδῶ εἶναι $A = x$, $\Delta = 50\sqrt{3}$ καί $\omega = 60$. Ἄρα:

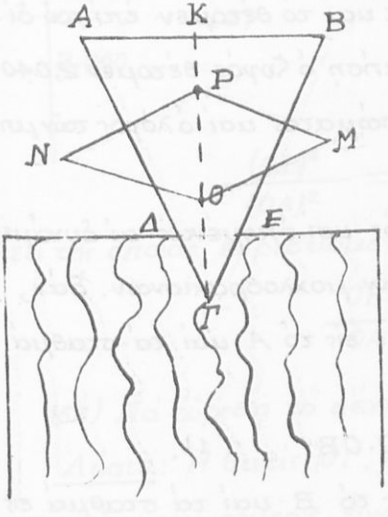
$$x = 100\sqrt{3} \text{ συν } 30^\circ = 100\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 150 \text{ χλγρ.}$$

166) Σφύρα μάζης 5 χιλγρ. καταπίπτει ἐπί κεφαλῆς ἀφηνός μετά ταχύτητος 10 μ. κατά δευτερόλεπτον καί ἀναγκάζει τοῦτον νά εἰσδύσῃ εἰς τό πρῶτον κτύπημα ἐντόςξύλου εἰς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάθος 5 έκ. Νά εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ πλευρική ἀντίστασις τοῦ ξύλου, ὅταν ἡ κεφαλή του εἶναι 3 έκ. καί ἡ πλευρά του 10 έκ.

<u>Λύσις</u>: Ἔστωσαν ΑΒ ἡ κεφαλή καί ΒΓ ἡ πλευρά τοῦ σφηνός. Ἐπί τῶν πλευρωμάτων τοῦ σφηνός ἐνεργοῦν καθέτως καί εἰς τά σημεῖα Δ καί Ε αἱ ἴσαι ἀντιστάσεις, αἱ ὁποῖαι παρίστανται διά τῶν εὐθειῶν ΟΜ καί ΟΝ. Ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΟΡ ἰσορροπεῖται διά δυνάμεως, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπί τῆς κεφαλῆς ΑΒ τοῦ σφηνός. Τά τρίγωνα ΟΡΜ καί ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν ἀνά μίαν τάς πλευράς των καθέτους. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν:



$$\frac{ΟΡ}{ΟΜ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ},$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν:

$$ΟΡ = \frac{ΑΒ.ΟΜ}{ΑΓ} \quad (1)$$

Ἀλλά γνωρίζομεν, ὅτι ἡ κινητική ἐνέργεια W τῆς σφύρας, ἡ ὁποία κτυπᾷ τόν σφῆνα, εἶναι:

$$W = \frac{1}{2}μτ^2 = \frac{1}{2}\,5000 \cdot 1000^2 = 25 \cdot 10^8 \text{ ἔργια},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τό δέ ἔργον: $E = \Delta n$,

(ὅπου Δ ἡ δύναμις καί n ἡ μετάθεσις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως). Ἐπειδή ἡ κινητική ἐνέργεια μετετράπη εἰς ἔργον, θά ἔχωμεν:

$$E = W \quad , \text{ἤτοι } \Delta \cdot 5 = 25 \cdot 10^8 \text{ , ἄρα } \Delta = 5 \cdot 10^8 \text{ δύναι.}$$

θέτοντες εἰς τήν (1) $AB = 10$, $A\Gamma = 3$ καί $OM = \Delta = 5 \cdot 10^8$, ἔχομεν:

$$OP = \frac{5 \cdot 10^9}{3} \text{ δύναι.}$$

167) Ἐπί τοῦ δίσκου Α ἑνός ζυγοῦ θέτομεν ἕν σῶμα. Διά νά ἐπέλθῃ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ, θέτομεν ἐπί τοῦ δίσκου Β 2 χλγρ. Λαμβάνομεν τό σῶμα x καί τό θέτομεν ἐπί τοῦ δίσκου Β, ὁπότε διά νά ἰσορροπήσῃ ὁ ζυγός θέτομεν 2,040 χλγρ. Νά εὑρεθῇ τό βάρος τοῦ σώματος καί ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν βραχιόνων τοῦ ζυγοῦ.

<u>Λύσις</u>: Ὁ ζυγός εἶναι μοχλός καί ἑπομένως αἱ δυνάμεις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν μοχλοβραχιόνων. Ἐάν, λοιπόν, τό σῶμα x εὑρίσκηται εἰς τό Α καί τά σταθμά εἰς τό Β, θά ἔχωμεν:

$$x \cdot AO = 2 \cdot OB \qquad (1).$$

Ἐάν δέ τό σῶμα εὑρίσκηται εἰς τό Β καί τά σταθμά εἰς τό Α, θά ἔχωμεν:

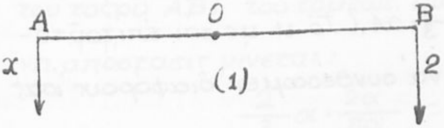
$$2{,}040 \cdot AO = x \cdot OB \qquad (2).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαιροῦντες τάς (1) καί (2) κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{x}{2{,}040} = \frac{2}{x} \quad ἤ \quad x^2 = 2 \cdot 2{,}040$$

Ἄρα: $\qquad x = 2{,}019$

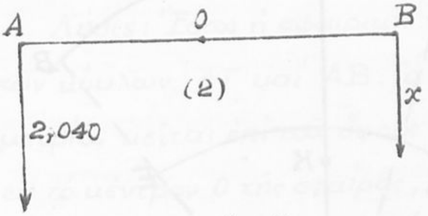


Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{x}{2} \qquad (3)$$

Ἐκ δέ τῆς (2):

$$\frac{OB}{OA} = \frac{2{,}040}{x} \qquad (4)$$



Πολλαπλασιάζοντες τάς (3) καί (4) κατά μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\frac{(OB)^2}{(OA)^2} = \frac{2{,}040}{2},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν:

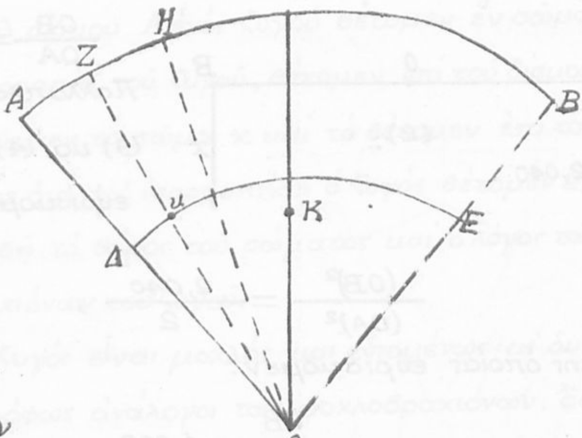
$$\frac{OB}{OA} = 1{,}009 .$$

168) Νά εὑρεθῇ τό κέντρον βάρους κυκλικοῦ τομέως.

Λύσις: Ἡ αὐτίς ΟΓ, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τό μέσον τοῦ τόξου τοῦ τομέως, εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ καί κατ' ἀκολουθίαν τό κέντρον βάρους αὐτοῦ κεῖται ἐπί ταύτης. Ἐάν ἤδη νοήσωμεν τό τόξον ΑΓΒ διῃρημένον εἰς ἐλάχιστα

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσα μέρη, ὡς τὸ ΖΗ, καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, διαιρεῖται δὲ οὕτω ὁ δοθεὶς κυκλικὸς τομεὺς εἰς ἀπειροελαχίστους κυκλικοὺς τομεῖς. Ἐὰν ἐξομοιώσωμεν ἕκαστον τούτων πρὸς τρίγωνον, ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Ο ἀγομένης διαμέσου καὶ εἰς ἀπόστασιν Οκ τὰ $\frac{2}{3}$ ΟΑ. (Τὸ κ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ. Οὕτως ἤδη ἀγόμεθα νὰ συνθέσωμεν διαφόρους ἴσας καὶ παραλλήλους δυνάμεις, ἐνεργούσας εἰς διάφορα σημεῖα τοῦ τόξου ΔΕ, ὁμοιομερῶς ἐπ' αὐτοῦ διανενημημένα. Τὸ κέντρον ἄρα τούτων συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον Κ τοῦ τόξου καὶ ἑπομένως:



$$(OK)=\frac{(O\Delta)(\widehat{\Delta E})}{(\widehat{\Delta E})}.$$

Ἐπειδὴ δέ:

$$O\Delta=\frac{2}{3}(OA)=\frac{2}{3}\alpha \quad ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\widehat{\Delta E} = \frac{2}{3}\overline{AB} \quad , \quad \widehat{\Delta E} = \frac{2}{3}(\overline{AB}) = \frac{2}{3}\mu \; ,$$

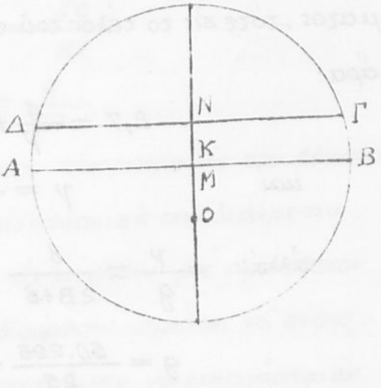
ἕπεται ὅτι:
$$OK = \frac{\frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{2}{3}(\overline{AB})}{\frac{2}{3}\mu} = \frac{2}{3}\alpha \frac{(\overline{AB})}{\mu} \; ,$$

ἔνθα $(\overline{AB})$ δηλοῖ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ μ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒΓ τοῦ τομέως. Διὰ ἡμικύκλιον, ἡ προηγουμένη ἀπόστασις γίνεται:

$$\frac{2}{3}\alpha \cdot \frac{2\alpha}{\pi\alpha} = \frac{4\alpha}{3\pi} .$$

169) Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον βάρους σφαιρικῆς ζώνης.

Λύσις: Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἡ περιοριζομένη ὑπὸ τῶν κύκλων ΔΓ καὶ ΑΒ. Τὸ κέντρον βάρους, λόγῳ τῆς συμμετρίας κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους ταύτης, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας, ἤτοι ἐπὶ τοῦ ΜΝ. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν διαιρέσεων φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τοὺς βασικοὺς κύκλους· οὕτω, θὰ ἔχωμεν ν ἰσοϋψεῖς ζώνας, ὧν ἔστω λ τὸ κοινὸν ὕψος· τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης εἶναι 2πρλ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς



τῆς σφαίρας. Οὕτω ἐπὶ τοῦ ὕψους ΜΝ ἐφαρμόζονται ν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἴσαι καὶ ὁμόρροποι δυνάμεις, ὅτε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κέντρου παραλλήλων δυνάμεων ἐφηρμοσμένων εἰς τὰ σημεῖα τῆς ΜΝ (τοῦ ν ὅμως τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ ἐμβαδὸν τῶν ζωνῶν τείνει εἰς τὸ μηδέν), ἄρα ἀρκεῖ νὰ εὕρω τὸ κέντρον βάρους τῆς ΜΝ, ὅπερ εἶναι τὸ μέσον τῆς Κ.

170) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων μηχανῆς Atwood ἔχει βάρος 100 γρ. τὸ δὲ πρόσθετον βάρος εἶναι 25 γρ.

Ἐὰν τὸ ὑπὸ τοῦ συστήματος τούτου διανυόμενον διάστημα κατὰ τὸ πέμπτον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του εἶναι $2{,}7^{\mu}$. περίπου, πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὥστε τοῦτο νὰ κάμῃ εἰς τὸν τόπον τοῦτον μίαν αἰώρησιν εἰς 1''.

<u>Λύσις</u>: Προσδιορίζω τὸ g. Ἐὰν γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος, τότε εἰς τὸ τέλος τοῦ τετάρτου δευτερολέπτου $\tau = 4\gamma$, ἄρα:

$$2{,}7 = \frac{4}{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma = \frac{9}{2}\gamma$$

καὶ $$\gamma = \frac{5{,}4}{9} = 0{,}6\mu.$$

ἀλλά: $$\frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{2B+\beta} \quad \text{καὶ} \quad g = \gamma\frac{2B+\beta}{\beta}$$

$$g = \frac{60.225}{25} = \frac{60.45}{5} = 60.9 = 540 \text{ ἑκ.}$$

Ἄρα, ἐὰν μ τὸ μῆκος, θὰ ἔχω:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{5,4}}$$

$$\mu = \frac{2,7}{2\pi^2} \text{ μέτρα}$$

171) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει βάρος 200 γραμ., τό δέ πρόσθετον βάρος εἶναι 5 γρ. Πόσον διάστημα θά διανύσῃ τό σύστημα εἰς 2'' καί πόση θά εἶναι ἡ ταχύτης του εἰς τό τέλος τοῦ 3ου δευτερολέπτου;

Λύσις: Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τήν ἐπιτάχυνσιν γ τοῦ συστήματος. Γνωρίζω ὅτι:

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{\beta}{2B+\beta} = \frac{5}{405} = \frac{1}{81}$$

καί: $\gamma = \frac{g}{81}$, ἄρα

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma 4 = 2\gamma = \frac{2g}{81}$$

καί $\tau = 3\gamma = \frac{3g}{81} = \frac{g}{27}$

172) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει βάρος 20 γρ. Θέτομεν τόν δακτύλιον εἰς τήν διαίρεσιν 1,60 μ. καί θέτομεν τό σύστημα εἰς κίνησιν μέ πρόσθετον βάρος 2 γρμ. Ζητεῖται εἰς ποίαν διαίρεσιν πρέπει νά θέσωμεν τόν πλήρη δίσκον, ὥστε νά δυνηθῶμεν νά μετρήσωμεν τήν ταχύτητα, ἥν θά ἔχῃ τό σύστημα, καθ' ἥν στιγμήν τό πρόσ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θετον βάρος σταματᾷ;

<u>Λύσις:</u> Ἐάν τ εἶναι ἡ τελικὴ ταχύτης τοῦ συστήματος, θά θέσωμεν τόν πλήρη δίσκον εἰς τήν ὑποδιαίρεσιν 1,60 + τ.

Ἔστω γ ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ συστήματος· τότε:

$$\gamma = g\frac{\beta}{2B+\beta} = 9,81\frac{2}{42} = \frac{9,81}{21}$$

Ἐάν x ὁ χρόνος πού ἐχρειάσθη, ἵνα διανύσῃ τό δοθέν διάστημα, τότε: $1,60 = \frac{1}{2}\gamma x^2$

καί $$x^2 = \frac{1,60\cdot 2}{\gamma} = \frac{3,2\cdot 21}{9,81} = \frac{3,2\cdot 7}{3,27} = 6,85$$

$$x = 2'',61 \quad , \text{ ἄρα:}$$

$$\tau = 2,61\cdot\frac{9,81}{21} = \frac{3,27}{7}\,2,61 = 1,21921\mu.$$

Ἄρα τόν δίσκον θά θέσω εἰς τήν διαίρεσιν 2,81μ.

173) Ἕκαστος τῶν ἴσων κυλίνδρων μηχανῆς τοῦ Atwood ἔχει βάρος 60 γρμ. καί τό πρόσθετον βάρος εἶναι 10 γρ. Ποῖαι πρέπει νά εἶναι αἱ θέσεις τοῦ δακτυλίου καί τοῦ δίσκου, ὅπως τό πρόσθετον βάρος κρατηθῇ μετά 5'' καί ὁ κύλινδρος πέσῃ ἐπί τοῦ δίσκου 3'' βραδύτερον;

<u>Λύσις:</u> Βασιζόμεθα εἰς τό ὅτι, ἐάν ἀφαιρεθῇ τό πρόσθετον βάρος, ὁ κύλινδρος (μή λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος) κινεῖται ἰσοταχῶς, μέ ταχύτητα τήν ταχύτητα, ἥν εἶχε τήν στιγμήν, καθ' ἥν ἄφησε τό πρόσθετον βάρος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Έστω γ ή επιτάχυνσις τού συστήματος καί $g = 9,81$. Τότε:

$$\frac{\gamma}{g}=\frac{\beta}{2B+\beta}=\frac{10}{130}=\frac{1}{13}$$

καί: $$\gamma=\frac{g}{13}=0,755\,\mu$$

άρα: $$\delta=\frac{1}{2}\gamma(5)^2=\frac{1}{2}\,0,755\cdot 25=9437\,\mu.$$

Άρα τόν δακτύλιον θά θέσω είς τήν υποδιαίρεσιν $9,43\,\mu$.

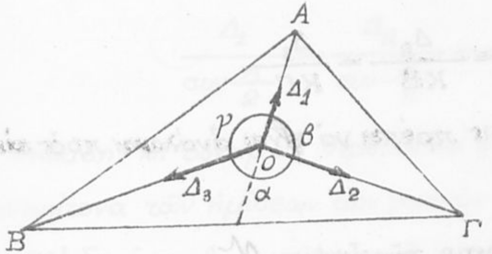
Εάν τ ή τελική ταχύτης, τότε:

$$\tau=\gamma x=5.0755=3,775\,\mu.$$

άρα: $$\delta_1=3.3775=11,325.$$

Ήτοι τόν δίσκον θά θέσω είς τήν διαίρεσιν $20,762\,\mu$.

174) Δοθέντος ενός τριγώνου, ποίας δυνάμεις πρέπει νά εφαρμόσωμεν:



1) κατά τάς διαμέσους,

2) κατά τήν διεύθυνσιν τών ύψών,

3) κατά τήν διεύθυνσιν τών έσωτερικών διχοτόμων, ίνα έκαστον τών συστημάτων τούτων ίσορροπή;

<u>Λύσις</u>: Έστωσαν $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ αί τρείς δυνάμεις καί α, β, γ αί γωνίαι, τάς όποίας σχηματίζουν μεταξύ των.

• Διά τήν ίσορροπίαν δέον νά έχωμεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\Delta_1}{\eta\mu\alpha} = \frac{\Delta_2}{\eta\mu\beta} = \frac{\Delta_3}{\eta\mu\gamma} \qquad (1)$$

1ον) <u>Κατά τήν διεύθυνσιν τῶν διαμέσων:</u>

Ἐάν τό σημεῖον Ο εἶναι τό κέντρον Κ τῶν διαμέσων καί Μ τό σημεῖον τομῆς τῆς ΑΚ καί τῆς ΒΓ, θά ἔχωμεν:

$$\frac{MB}{\eta\mu\gamma} = \frac{KB}{\eta\mu\hat{M}} \quad \text{καί} \quad \frac{M\Gamma}{\eta\mu\beta} = \frac{K\Gamma}{\eta\mu\hat{M}}$$

πρᾶγμα τό ὁποῖον μᾶς δίδει, λόγῳ τῆς ἰσότητος: $MB = M\Gamma$:

$$KB\,\eta\mu\gamma = K\Gamma\,\eta\mu\beta\,.$$

Ὡσαύτως ἔχομεν:

$$KA\,\eta\mu\beta = KB\,\eta\mu\alpha\,,$$

ἐξ οὗ:
$$\frac{\eta\mu\alpha}{KA} = \frac{\eta\mu\beta}{KB} = \frac{\eta\mu\gamma}{K\Gamma}$$

καί ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$\frac{\Delta_1}{KA} = \frac{\Delta_2}{KB} = \frac{\Delta_3}{K\Gamma}$$

Δηλαδή ὅτι: Αἱ δυνάμεις πρέπει νά εἶναι ἀνάλογοι πρός τάς δυνάμεις τοῦ τριγώνου.

2ον) <u>Κατά τήν διεύθυνσιν τῶν ὑψῶν:</u>

Ἐάν τό σημεῖον Ο εἶναι τό σημεῖον Η τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν, τότε αἱ γωνίαι α, β, γ εἶναι παραπληρωματικαί τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ καί ἡ σχέσις (1) γίνεται:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{\Delta_1}{\eta\mu A} = \frac{\Delta_2}{\eta\mu B} = \frac{\Delta_3}{\eta\mu \Gamma}$$

$$\frac{\Delta_1}{\alpha} = \frac{\Delta_2}{\beta} = \frac{\Delta_3}{\gamma}$$

3ον) Κατά τήν διεύθυνσιν τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων:

Ἐάν τό σημεῖον Ο εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων, ἤτοι τό κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, θά ἔχωμεν:

$$\alpha = \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = \frac{A}{2} + \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\beta = \frac{B}{2} + \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2} + \frac{\pi}{2} \ .$$

Καί ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$\frac{\Delta_1}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} = \frac{\Delta_2}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} = \frac{\Delta_3}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$

Δηλαδή: Αἱ δυνάμεις πρέπει νά εἶναι ἀνάλογοι πρός τά συνημίτονα τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

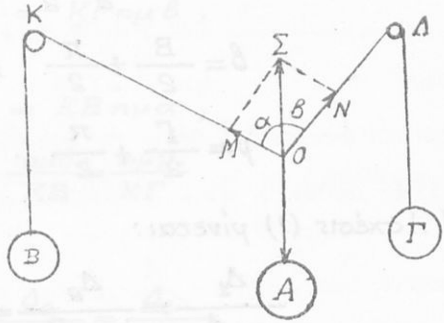
175) Σφαῖρα Α, ζυγίζουσα 2 χιλιόγραμμα, ἀναρτᾶται ἀπό νήματος ΑΟ. Ἐπί τοῦ ἄκρου Ο τοῦ νήματος τούτου εἶναι προσδεδεμένα δύο ἄλλα νήματα, διερχόμενα διά δύο τροχαλιῶν καί φέρουν ἐπί τῶν ἀντιστοίχων ἐλευθέρων ἄκρων των δύο σφαίρας Β καί Γ, αἵτινες ζυγίζουν, ἡ μία 1 χιλιογρ,

ἢ ἑτέρα 1,732 γραμμάρια.

1ον) Νά εὑρεθῇ ἐάν ὑφίσταται μία θέσις ἰσορροπίας τοῦ συστήματος.

2ον) Ἐάν αἱ θέσεις καί αἱ διατάξεις τῶν τροχαλιῶν καί τά μήκη τῶν νημάτων συμβιβάζωνται πρός τήν ὕπαρξιν μιᾶς θέσεως ἰσορροπίας, νά ὑπολογισθοῦν μετά προσεγγίσεως αἱ γωνίαι τῶν τριῶν νημάτων εἰς τό Ο καί εἰς αὐτήν τήν θέσιν.

Αἱ τροχαλίαι θά ληφθοῦν ἐπί τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου ΟΑΒΓ καί περιστρεφόμεναι, ἄνευ τριβῆς, ἐπί δύο ἀξόνων σταθερῶν. Τά δύο νήματα θά ληφθοῦν μή ἐκτατά καί ἄνευ βάρους.



Λύσις: 1) Ἔστωσαν: $\Delta = 2\,\chi\lambda\gamma\rho.$,

$M = 1\,\chi\lambda\gamma\rho.$,

$N = 1{,}732\,\chi\gamma\rho$,

τά βάρη τῶν ὑπ' ὄψει σφαιρῶν καί Σ ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων (Μ) καί (Ν) τῶν συντιθεμένων εἰς τό Ο.

Εἰς ἑκάστην θέσιν ἰσορροπίας δέον νά ἔχωμεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$(P) = -(5).$$

Όταν τό σημεῖον O εἶναι πολύ κάτω τῶν τροχαλιῶν K καί Λ, τά νήματα OK καί OΛ τείνουν νά γίνουν κατακόρυφα καί ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἔχομεν: $\Delta < |\Sigma|$, διότι τό Σ ὀλίγον διαφέρει τοῦ $M+N = 2{,}732$ χλγρ. Όταν τό O πλησιάζῃ πολύ τήν εὐθεῖαν KΛ, ἔχομεν: $\Delta > |\Sigma|$, διότι τό Σ ὀλίγον διαφέρει τοῦ $M-N = 0{,}732$ χλγρ.

Μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν θέσεων τοῦ σημείου O ὑπάρχει εἷς τόπος σημείων, ὅπου $\Delta = |\Sigma|$.

Ἀκόμη ἐπί τοῦ τόπου τούτου ὑπάρχει ἕν σημεῖον καί μόνον ἕν, διά τό ὁποῖον (Σ) εἶναι κατακόρυφος, δηλαδή ἴση καί ἀντίθετος πρός τήν Δ.

Ὑπάρχει, συνεπῶς, μία θέσις ἰσορροπίας τοῦ συστήματος.

2) Γωνίαι τῶν νημάτων ἐν τῇ θέσει τῆς ἰσορροπίας.

Ἔχομεν:

$$\frac{\Delta}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{M}{\eta\mu\beta} = \frac{N}{\eta\mu\alpha}, \text{ ἐξ οὗ}$$

$$\Delta\eta\mu\beta = M\eta\mu(\alpha+\beta) = M(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

καί $$N\eta\mu\beta = M\eta\mu\alpha \quad \text{ἤ} \quad \eta\mu\beta = \frac{M\eta\mu\alpha}{N}$$

ἤ $$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\sqrt{N^2 - M^2\eta\mu^2\alpha}}{R}, \text{ ἐξ οὗ}$$

$$\frac{\Delta.\,M\eta\mu\alpha}{N} = M\left(\frac{\eta\mu\alpha\sqrt{N^2 - M^2\eta\mu^2\alpha}}{N} + \frac{M\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{N}\right)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σχέσις, ἥτις μᾶς δίδει:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\Delta^2 + M^2 - N^2}{2\Delta M} = \frac{4+1-3}{2\times 2} = \frac{1}{2},$$

δηλαδή $\qquad \alpha = \frac{\pi}{3}$

Ἀκόμη ἔχομεν:

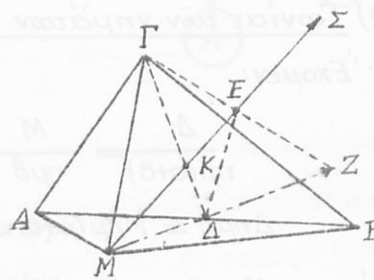
$$\eta\mu\beta = \frac{M\eta\mu\alpha}{N} = \frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

ἐξ οὗ $\qquad \beta = \frac{\pi}{6}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ γωνία ΚΟΛ εἶναι ὀρθή, ὅτι:

$$\widehat{KOA} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{καί} \quad \widehat{\Lambda OA} = \frac{5\pi}{6}$$

176) Ἀπό τινος σημείου Μ, ἐκλεγέντος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται δυνάμεις, τῶν ὁποίων τά διανύσματα εἶναι (ΜΑ), (ΜΒ), (ΜΓ).



Δείξατε:

1ον) Ὅτι ἡ συνισταμένη διέρχεται διά τοῦ κέντρου βάρους Κ τοῦ τριγώνου.

2ον) Ὅτι ἡ ἔντασις της εἶναι 3ΜΚ.

<u>Λύσις:</u> Ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἀνυσμάτων (ΜΑ) καί (ΜΒ) εἶναι τό διάνυσμα (ΜΖ), τό διερχόμενον διά τοῦ μέσου Δ τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πλευράς ΑΒ.

Ἡ συνισταμένη τῶν (ΜΓ) καί (ΜΖ) εἶναι ἡ (ΜΣ).

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΜΓ καί ΚΕΔ λαμβάνομεν:

$$\frac{ΓΚ}{ΔΚ}=\frac{ΓΜ}{ΔΕ}=\frac{ΜΚ}{ΕΚ}=\frac{2}{1} \qquad (1),$$

ἐξ οὗ $$ΓΚ = 2ΔΚ = \frac{2}{3}ΓΔ .$$

Ἤτοι, τό σημεῖον **Κ** εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου (κέντρον βάρους).

Πρός εὕρεσιν τῆς ἐντάσεως τῆς συνισταμένης, λαμβάνομεν τήν σχέσιν (ἐκ τῆς (1)):

$$\frac{ΜΚ}{ΕΚ}=\frac{2}{1}$$

ἥτις μᾶς δίδει:

$$\frac{ΜΚ}{ΜΚ+ΕΚ}=\frac{2}{2+1} \quad ἤ \quad \frac{ΜΚ}{\frac{1}{2}ΜΣ}=\frac{2}{3}$$

ἐξ οὗ λαμβάνομεν:

$$ΜΣ = 3.ΜΚ$$

177) Ἐπί τῆς ΑΒ ὡς ὑποτεινούσης, κατασκευάζεται ὀρθογώνιον ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπί τῆς ΒΓ, ὡς ὑποτεινούσης, κατασκευάζεται, ἐξωτερικῶς πρός τό προηγούμενον, ὀρθογώνιον ἰσοσκελές τρίγωνον τό $ΒΓΓ_1$ καί καθεξῆς. Ἔστω $Γ_ν$ τό τελευταῖον τῶν οὕτω ληφθέντων σημείων. Ζητεῖται:

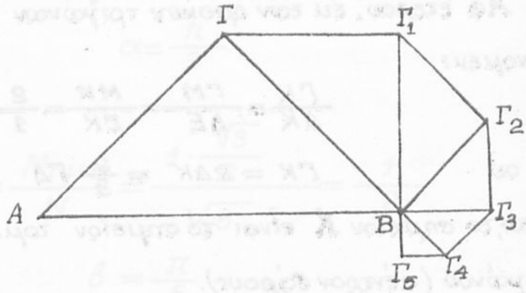
1ον) Τό μῆκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς $ΑΓΓ_1Γ_2 \ldots Γ_ν$.

2ον) Τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, ἅτινα κατε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

συνεδύασθησαν οὕτω.

3ον) Ὑποθέτοντες ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A\Gamma$, $\Gamma\Gamma_1$, $\Gamma_1\Gamma_2 \ldots\ldots \Gamma_{\nu-1}\Gamma_\nu$ παριστοῦν δυνάμεις κατὰ μέγεθος καὶ διεύθυνσιν, ζητεῖται νὰ ἀναχθῇ τὸ σύστημα τοῦτο τῶν δυνάμεων εἰς ἓν ζεῦγος καὶ μίαν δύναμιν, διερχομένην ἐκ τοῦ B.



Λύσις : Θέτοντες $AB = \alpha$, ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$A\Gamma = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Gamma\Gamma_1 = A\Gamma\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Gamma_1\Gamma_2 = \Gamma\Gamma_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

. . . .

. . . .

$$\Gamma_{\nu-1}\Gamma_\nu = \Gamma_{\nu-2}\Gamma_{\nu-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\nu+1}$$

Τὰ διάφορα τμήματα τῆς τεθλασμένης $A\Gamma\Gamma_1 \ldots\ldots \Gamma_\nu$ σχηματίζουν ἄρα τοὺς ὅρους μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι : $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οὕτω ἡ γραμμὴ αὐτὴ ἔχει μῆκος:

$$\mu = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\nu}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν τῶν πλευρῶν αὐξάνῃ ἀπείρως, τὸ μῆκος μ τείνει πρὸς τὸ ὅριον:

$$\mu' = \frac{\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \alpha(\sqrt{2}+1).$$

2ον) Τὰ κατασκευασθέντα τρίγωνα εἶναι κατ' ἀριθμὸν $\nu+1$. Τὰ ἐμβαδὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\frac{\alpha^2}{4}, \frac{\alpha^2}{8}, \frac{\alpha^2}{16} \dots\dots \frac{\alpha^2}{2^{\nu+1}}$$

Συνεπῶς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι:

$$S = \frac{\alpha^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots\frac{1}{2^\nu}\right) = \frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha^2}{2}\left(1-\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)$$

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ν τῶν πλευρῶν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ἔχει ὡς ὅριον:

$$S' = \frac{\alpha^2}{2},$$

ἤτοι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου τριγώνου ΑΒΓ.

3ον) Ἡ $(A\Gamma_\nu)$ εἶναι τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων. Ἀλλά, $(A\Gamma_\nu) = (AB) + (B\Gamma_\nu)$ καὶ $(B\Gamma_\nu) = (\Gamma_{\nu-1}\Gamma_\nu)$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐξάνῃ τείνων πρὸς τὸ ἄπειρον. Συνεπῶς, εἰς τὸ ὅριον, ἡ $(A\Gamma_\nu)$ συμπίπτει μὲ τὴν (AB).

Ἐὰν πραγματοποιήσωμεν τὴν ἀναγωγὴν ὡς πρὸς Β, ἔχομεν μίαν δύναμιν παριστωμένην ὑπὸ τοῦ διανύσματος (AB),

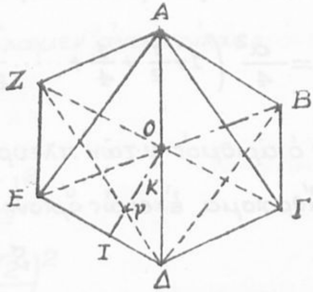
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐφαρμοζομένην εἰς τό Β καί ἕν ζεῦγος ἔχον ῥοπήν ἴσην πρός $2S'$ ἤ α^2.

178) Δίδεται κανονικόν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, οὗτινος ἔστω Ο τό κέντρον.

1ον) Νά προσδιορισθῇ ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων τῶν παριστωμένων ὑπό τῶν παριστωμένων ὑπό τῶν: ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ.

2ον) Νά εὑρεθῇ τό κέντρον βάρους τῆς πλακός, ἥτις σχηματίζεται ὑπό τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, ὅταν ἀφαιρεθῇ τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΟΒ, ἐπί τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ πλάξ αὕτη κατεσκευάσθη ἐξ ὁμογενοῦς ὕλης.



Λύσις: 1ον) Αἱ (ΑΒ) καί (ΑΕ) ἔχουν συνισταμένην τήν (ΑΔ), διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ. Ὡσαύτως ἡ (ΑΓ) καί (ΑΖ) ἔχουσιν ὡς συνισταμένην τήν (ΑΔ).

Ἡ συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων, φερομένη ὑπό τῶν διευθύνσεων $\overrightarrow{ΑΔ}$, ἔχει, συνεπῶς, μῆκος:

$$3ΑΔ = 6\rho ,$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τό ἑξάγωνον περιγεγραμμένου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κύκλου. Ἡ ἀκτίς αὕτη εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴση πρός τήν πλευράν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

2ον) Οἱ δύο ρόμβοι ΑΟΕΖ καί ΒΟΔΓ ἔχουν, λόγῳ συμμετρίας, τό κέντρον βάρους των ἐπί τοῦ κέντρου τοῦ σχήματος Ο καί τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΔΟΕ εὑρίσκεται ἐπί τοῦ σημείου p κειμένου εἰς τά $\frac{2}{3}$ τῆς ΟΙ. Τό κέντρον βάρος $\underline{K}$ ὁλοκλήρου τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας θά εὑρίσκεται ἐπί τῆς ΟΙ καί εἰς θέσιν τοιαύτην, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\frac{OK}{Kp}=\frac{1}{4} \quad \text{ἤ} \quad \frac{OK}{Op}=\frac{1}{5}$$

ἐξ οὗ:

$$OK=\frac{Op}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{OI}{5}=\frac{\rho\sqrt{3}}{15}$$

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ
ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ.

1) Ἡ διαφορά τῶν πιέσεων, τάς ὁποίας ὑφίστανται δύο ἴσα στοιχεῖα ἐπιφανειῶν, ἐντός ὑγροῦ εὑρισκομένων, ἰσοῦται πρός τό βάρος ὑγρᾶς στήλης, ἐχούσης βάσιν μέν τό ἕν τῶν στοιχείων τούτων, ὕψος δέ τήν μεταξύ τῶν κατακορύφων ἀπόστασιν.

Λύσις: Ἔστω τό δοχεῖον Α, περιέχον ὑγρόν ἐν ἠρεμίᾳ, καί δύο ἴσαι ἐπιφάνειαι ε_1 καί ε_2 ἐντός αὐτοῦ εὑρισκόμεναι. Ἔστωσαν δέ Π_1 καί Π_2 αἱ πιέσεις αὐτῶν. Λέγω ὅτι:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \varepsilon_1 \upsilon \delta ,$$

ἔνθα υ ἡ μεταξύ των κατακόρυφος ἀπόστασις καί δ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ. Ἐκ τῶν περί ἀνώσεων εἶναι γνωστόν ὅτι:

$$\Pi_1 = \varepsilon_1 \upsilon_1 \delta$$

καί

$$\Pi_2 = \varepsilon_2 \upsilon_2 \delta$$

Ἀφαιροῦντες κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \varepsilon_1 \upsilon_1 \delta - \varepsilon_2 \upsilon_2 \delta$$

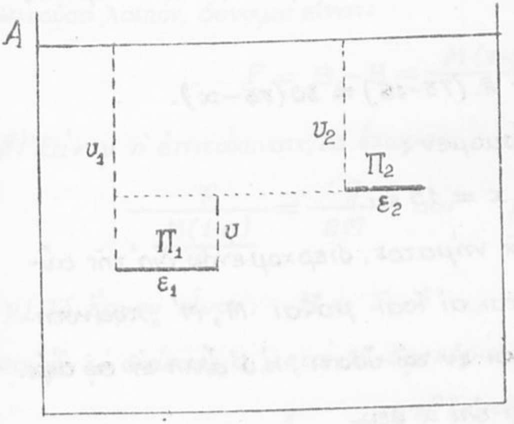
ἀλλά $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, τότε:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = \varepsilon_1 (\upsilon_1 - \upsilon_2) \delta$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐὰν $υ_1 - υ_2 = υ$,ἕπεται ὅτι:

$$Π_1 - Π_2 = ε_1 υ δ.$$



Συνέπειαι τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς εἶναι:

α) ὅτι ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ δεχομένου πανταχοῦ τὴν αὐτὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, εἶναι ἐπίπεδον ὁριζόντιον, καὶ

β) αἱ ἰσόσταθμοι ἢ ἰσοβαρεῖς ἐπιφάνειαι.

2) Ἔχομεν δύο δοκιμαστικούς σωλῆνας ἀνεστραμμένους ἐντός λεκάνης ψευδαργύρου, καθ' ἣν στιγμὴν ἡ πίεσις εἶναι 75 ἐκ. Hg. Ὁ πρῶτος σωλὴν περιέχει ὀξυγόνον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 20 κυβ. ἐκ. καὶ ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται ἐντός αὐτοῦ κατά 9 ἐκ. Ὁ δεύτερος περιέχει ὑδρογόνον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 8 κ. ἐκ. καὶ ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται ἐντός αὐτοῦ 15 ἐκ. Ἀναμιγνύομεν τά δύο ἀέρια εἰς τρίτον σωλῆνα καὶ σχηματίζεται ὄγκος 30 κ. ἐκ. Ζητεῖται τό ὕψος, εἰς τό ὁποῖον θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τόν σωλῆνα τοῦτον.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ὅτι θά ἀνέλθῃ κατά x ἐκ. Ὁ ὄγκος 20 κ. ἐκ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

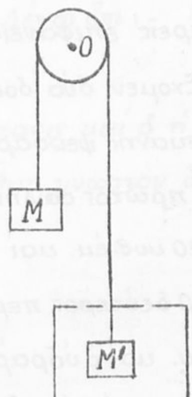
τοῦ ὀξυγόνου ἔχει πίεσιν 75−9 ἑκ. Ὁ ὄγκος τῶν 8 κ.ἑκ. ὑδρογόνου ἔχει πίεσιν 75-15. Ὁ ὄγκος τῶν 30 κ.ἑκ. τοῦ μίγματος ἔχει πίεσιν 75−x. Κατὰ τὸν νόμον τῆς μίξεως τῶν ἀερίων, ἔχομεν :

$$20(75-9)+8(75-15)=30(75-x).$$

Λύοντες ἤδη ταύτην, εὑρίσκομεν :

$$x = 15 \text{ ἑκ.}$$

3) Εἰς τὰ ἄκρα ἀβαροῦς νήματος, διερχομένου διὰ τῆς αὔλακος τροχαλίας, κρέμανται αἱ ἴσαι μᾶζαι M, M′, πυκνότητος Δ. Ἡ μία τούτων κεῖται ἐν τῷ ὕδατι, ἡ δ' ἄλλη ἐν τῷ ἀέρι.



Ἂν τὸ σύστημα κινηθῇ ἐπὶ x δευτερόλεπτα, νὰ εὑρεθῇ :

α) Ἡ κινοῦσα δύναμις.

β) Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως.

γ) Τὸ δαπανηθὲν ἔργον (ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος α, ἡ πίεσις σταθερά, αἱ δὲ τριβαὶ παραλείπονται).

<u>Λύσις:</u> α) Ἐὰν Θ εἶναι ὁ ὄγκος ἑκάστης μάζης ~~μάζης~~, θὰ ἔχωμεν $\Theta=\frac{M}{\Delta}$.

Τὸ βάρος τῆς M ἐν τῷ ὕδατι εἶναι:

$$B = Mg-\frac{M}{\Delta}\cdot 1 .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τό βάρος Μ' ἐν τῷ ἀέρι εἶναι:

$$B_1 = Mg - \frac{M}{\Delta}\cdot \alpha .$$

Ἡ κινοῦσα, λοιπόν, δύναμις εἶναι:

$$F = B_1 - B = \frac{M(1-\alpha)}{\Delta} .$$

β) Ἐάν γ ἡ ἐπιτάχυνσις, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\gamma}{\frac{M(1-\alpha)}{\Delta}} = \frac{g}{2M} \quad \text{καί} \quad \gamma = \frac{g(1-\alpha)}{2\Delta}$$

γ) Τό ἔργον εἶναι: $E = F \cdot \delta$,

ἔνθα δ τό διάστημα μετά x δευτερόλεπτα. Ἤτοι:

$$\delta = \frac{1}{2}\gamma x^2 = \frac{gx^2(1-\alpha)}{4\Delta}$$

Ἄρα: $$E = \frac{Mgx^2(1-\alpha)^2}{4\Delta^2} .$$

4) Ὁ βαρομετρικός θάλαμος βαρομέτρου ὑδραργύρου εἶναι 6 ἑκ., ἡ δέ διάμετρος τοῦ σωλῆνος 1 ἑκ. Ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις 76 ἑκ. Hg. Εἰσάγομεν ἐν τῷ σωλῆνι φυσαλίδα ἀέρος 0,35 κ. ἑκ. καί ὑπό πίεσιν 77,5 ἑκ. Hg. Ζητεῖται: α) Ποία ἡ ἐν τῷ σωλῆνι κατάπτωσις τοῦ Hg; β) Τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως κατερχομένης εἰς 75 ἑκ. Hg., ποία ἡ νέα κατάπτωσις τοῦ Hg ἐν τῷ σωλῆνι;

<u>Λύσις:</u> α) Ἔστω x ἡ πρώτη κατάπτωσις. Τότε ὁ ὄγκος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς φυσαλίδος γίνεται $(6+x)\cdot 0,25\pi$ ($0,25\pi$ ἡ ἐπιφάνεια τῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος). Ἡ πίεσις γίνεται $(76-x)\cdot 13,6$. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Boyle-Mariotte, ἔχομεν :

$$0,35\cdot 77,5\cdot 13,6=(6+x)\cdot 0,25\pi(76-x).136\ ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ x.

β) Ἄν y εἶναι ἡ νέα κατάπτωσις, ὁ ὄγκος γίνεται $6+x+y$, ἡ πίεσις $75-y$ · προηγουμένως ὁ ὄγκος ἦτο $6+x$ καὶ ἡ πίεσις $76-x$. Ἄρα ἔχομεν:

$$(6+x+y)(75-y)=(6+x)(76-x)\ ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὸ y.

5) Κύβος ἐκ μολύβδου, ἀκμῆς 4 δακτύλων, προσκολλᾶται εἰς σφαῖραν ἐκ φελλοῦ. Πόσην διάμετρον πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ σφαῖρα, ἵνα τὸ σύστημα αἰωρῆται ἐντὸς τοῦ ὕδατος (εἰδ. βάρος μολύβδου 11,36 , φελλοῦ 0,24).

<u>Λύσις:</u> Ἀφοῦ τὸ σύστημα θὰ ἰσορροπῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος, ἕπεται ὅτι τὸ ὁλικὸν βάρος αὐτοῦ θὰ ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὴν ἄνωσιν, τὴν ὁποίαν τοῦτο θὰ ὑφίσταται.

Ἀλλὰ τὸ βάρος τοῦ μολύβδου = ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος $=$

$$=4^3\cdot 11,36$$

καὶ τὸ βάρος τῆς σφαίρας = ὄγκον ἐπὶ τὸ εἰδ. βάρος $=$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho^3\cdot 0,24\ .$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἄνωσις εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ κύβου καὶ σφαίρας, ἔχομεν:

$$4^3 \cdot 11{,}36 + \frac{4}{3}\pi\rho^3 \cdot 0{,}24 = 4^3 + \frac{4}{3}\pi\rho^3$$

ἐξ ἧς:

$$\rho = 4\delta \quad \text{περίπου.}$$

6) Κυλινδρικὸν δοχεῖον κλειστὸν διαπερᾶται ὑπὸ τοῦ βραχυτέρου βραχίονος σίφωνος. Τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον περιέχει ὑγρὸν πυκνότητος δ καὶ ἄνωθεν αὐτοῦ ἀέρα ὕψους α, ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφαν. τοῦ ὑγροῦ καὶ ὑπὸ τὴν ἐξωτ. πίεσιν H. Ὁ σίφων εἶναι πλήρης ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ καὶ κλείεται κατὰ τὸ ἄλλο ἄκρον διὰ στρόφιγγος, ἥτις ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου δ_1. Ἀνοίγομεν τὴν στρόφιγγα, χύνεται ποσόν τι ὑγροῦ καὶ μετὰ παύει ἡ ροή. Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ κατέλθῃ ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον (Πολυτεχνείου).

Λύσις: Ἔστω ὅτι θὰ κατέλθῃ κατὰ x (ἀπὸ τοῦ A εἰς τὸ B).

Ἔστω E ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως τοῦ δοχείου. Ὁ ὄγκος τοῦ ἐν τῷ δοχείῳ ἀέρος θὰ γίνῃ: $E(\alpha+x)$. Ἐὰν Π ἡ νέα πίεσις, κατὰ τὸν νόμον Boyle-Mariotte, ἔχομεν:

$$\Pi \cdot E \cdot (\alpha + x) = H \cdot E \cdot \alpha,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν:

$$\Pi = \frac{H\cdot\alpha}{\alpha+x}.$$

Ἡ πίεσις, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, τὴν ὁποίαν δέχεται διατομὴ τῆς E' τοῦ ὁριζοντίου μέρους ZH, εἶναι: $\frac{H\alpha}{\alpha+x} - \delta(\alpha+x+y)$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ δὲ πίεσις ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ εἶναι: $H-\delta(\delta_1+\alpha+y)$.

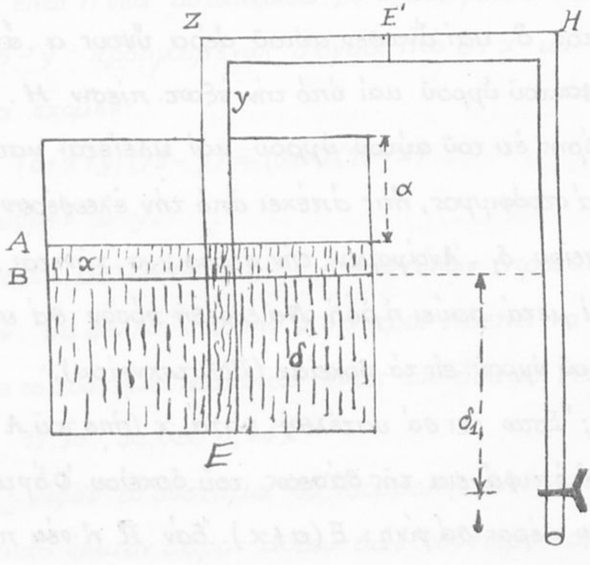
ἐπειδὴ δὲ παύει ἡ ροή, θὰ εἶναι:

$$\frac{H\alpha}{\alpha+x}-\delta(\alpha+x+y)=H-\delta(\delta_1+\alpha+y),$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν:

$$\delta x^2+(\alpha\delta+H-\delta\delta_1)x-\alpha\delta\delta_1=0$$

. Ἄρα:



$$x=\frac{-(\alpha\delta+H-\delta\delta_1)\pm\sqrt{(\alpha\delta+H-\delta\delta_1)^2+4\alpha\delta^2\delta_1}}{2\delta}.$$

7) Σῶμα τι ἔχει βάρος 40 γραμμαρίων. Τὸ βάρος τοῦτο, ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκηται ἐντὸς τοῦ ὕδατος, φαίνεται ἴσον πρὸς 22 γραμμάρια. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καὶ ποῖον τὸ εἰδικὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάρος του;

<u>Λύσις</u>: Ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ἰσοῦται προφανῶς μὲ τὴν ἄνωσιν, ἤτοι:

$$\Theta = 40 - 22 = 18 \text{ κυβ. εκ.}$$

καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος:

$$\delta = \frac{B}{\Theta} = \frac{40}{18} = 2,22$$

8) Μία κυβική παλάμη φελλοῦ, πυκνότητος 0,24, συνενουμένη μετὰ Μ μάζης ἀργύρου, πυκνότητος 10,5, αἰωρεῖται ἐντὸς θαλασσίου ὕδατος, πυκνότητος 1,028. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα Μ τοῦ Ag.

<u>Λύσις</u>: Προφανῶς, ἡ μᾶζα τοῦ ἐκτοπιζομένου θαλασσίου ὕδατος Μ' εἶναι ἴση μὲ τὴν μᾶζαν Μ'' τοῦ φελλοῦ καὶ τοῦ ἀργύρου

$M' = M''$ · ἀλλά:

$$M' = (1000 + \Theta) \cdot 1,028 \quad \text{καί:}$$

$$M'' = 1000 \cdot 0,24 + \Theta \cdot 10,5 \quad \text{, ὅθεν:}$$

$$(1000 + \Theta) \cdot 1,028 = 1000 \cdot 0,24 + \Theta \cdot 10,5 \text{ ,}$$

ἐξ οὗ: $\Theta = 83,2$ κ. εκ. (ὄγκος τοῦ ἀργύρου).

Ἐπειδὴ ὅμως $M = \Theta \cdot \pi$, εὑρίσκομεν:

$$M = 83,2 \cdot 10,5 = 873,6 \text{ γραμ.}$$

9) Ποία εἶναι ἡ πίεσις ἡ ἐξασκουμένη ἐφ' ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἑκατοστομέτρου, ὑπὸ στήλης ὑδραργύρου, ὕψους 1 μέτρου;

<u>Λύσις</u>: Προφανῶς ἡ ζητουμένη πίεσις εἶναι:

$$\Pi = \varepsilon \cdot \upsilon \cdot \delta \cdot g \quad ,$$

$$\Pi = 1 \cdot 100 \cdot 13,6 \cdot 981 = 1360 \cdot 981 = 1334160 \text{ δύναι.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

10) Ποία είναι εις χιλιόγραμμα κατά τετραγωνικόν εκατοστόμετρον η πίεσις επί της εσωτερικής επιφανείας υδραγωγού σωλήνος συγκοινωνούντος μετά δεξαμενής, εις την οποίαν η ελευθέρα επιφάνεια του ύδατος ευρίσκεται εις ύψος 20 μέτρων άνωθεν του σημείου του σωλήνος, εφ' ου εξασκείται η πίεσις;

<u>Λύσις</u>: Ἡ ζητουμένη πίεσις είναι:

$$Π = υ \cdot δ \quad ,$$

ένθα υ το ύψος και δ το ειδικόν βάρος. Αντικαθιστώντες τότε τας δοθείσας τιμάς, έχομεν:

$$Π = υ \cdot δ = 2.000 \cdot 1 = 2000 \text{ γραμμάρια} \, ,$$

ήτοι: $Π = 2$ χιλιόγραμμα.

10) Ὁ πύργος του Eiffel στηρίζεται επί 16 υδραυλικών πιεστηρίων και έχει βάρος 8.000 τόννων ή 8.000.000 χιλιογράμ. Διά να ευρίσκηται εν ισορροπία ο πύργος, πόση πίεσις πρέπει να εξασκήται επί του μικρού εμβόλου εκάστου πιεστηρίου, δεδομένου ότι η επιφάνεια του μεγάλου κυλίνδρου είναι 100πλασίου της του μικρού;

<u>Λύσις</u>: Ἕκαστον πιεστήριον υποβαστάζει βάρος 8000 : 16 = 500 τόννων. Ἐκ του τύπου:

$$\frac{Π}{π} = \frac{E}{ε} \qquad \text{έχομεν:}$$

$$Π = \frac{πE}{ε} \qquad \text{ή} \qquad 500 = π \frac{100}{1} \; ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅθεν : $\pi = \frac{500}{100} = 5$ τόννοι $= 5000$ χιλιόγραμμα.

12) Δύο κύλινδροι φέροντες εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ὀπὰς διαμέτρου 4 εκ., ἔχουν συνδεθῆ διὰ σωλῆνος καὶ ἐπληρώθησαν δι᾽ ὕδατος καὶ ἐκλείσθησαν διὰ πωμάτων. Διὰ μέσου τοῦ ἑνὸς διέρχεται ἔμβολον διαμέτρου 0,5 έκ. Ποία εἶναι ἡ δύναμις, δι᾽ ἧς θὰ ἐξωθηθῇ τὸ ἕτερον πῶμα πρὸς τὰ ἔξω, ἐὰν τὸ ἔμβολον πιέζηται πρὸς τὰ ἔσω διὰ δυνάμεως 10 χλγρ.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ Pascal, ὅτι αἱ πιέσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντιστοίχων ἐπιφανειῶν, ἤτοι:

$$\frac{\Pi}{\pi} = \frac{E}{\varepsilon} \qquad (1),$$

ἔνθα: $\Pi = 10$ χιλιόγραμμα, $\pi = x$, $E = 0{,}5$ έκ., $\varepsilon = 4$ έκ.

Λύοντες ἤδη τὴν σχέσιν (1) ὡς πρὸς τὴν ἄγνωστον πίεσιν π καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς ἀνωτέρω δοθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$\pi = 640 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

13) Ποία εἶναι ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων, εὑρισκομένων ἐντὸς μάζης ὑδραργύρου, ὅταν ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ αὐτῶν εἶναι 1000 γραμ., γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 ;

<u>Λύσις :</u> Κατὰ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ὑδροστατικῆς, εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν πιέσεων μεταξὺ δύο σημείων ἑνὸς ἰσορροποῦντος ὑγροῦ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος ὑγροῦ κυλίνδρου,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχοντος βάσιν τὴν μονάδα ἐπιφανείας καὶ ὕψος τὴν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν δύο τούτων σημείων.

Ὅθεν, ἐὰν υ εἶναι ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῶν δύο σημείων, θὰ ἔχωμεν:

$$υ \cdot 13{,}6 = 1000 \text{ γρ.}$$

Ἄρα: $$υ = \frac{1000}{13{,}6} = 73{,}53 \text{ ἑκ.}$$

14) Εἰς ἕνα ἀεροθάλαμον χωρητικότητος 10 λιτρῶν, εἰσάγομεν διαδοχικῶς 3 λ. ἀέρος πιέσεως 4 ἀτμοσφαιρῶν, ἔπειτα 6 λίτρας μὲ τὴν αὐτὴν πίεσιν καὶ 5 λίτρας ὑπὸ πίεσιν 3 ἀτμοσφαιρῶν. Ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ πίεσις τοῦ κράματος.

<u>Λύσις</u>: Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Δάλτωνος, μέσα εἰς τὸ ἀεριῶδες μίγμα κάθε ἀέριον θεωρεῖται ὡς νὰ εἶναι μόνον.

α΄) Ὁ πρῶτος ὄγκος τοῦ ἀερίου (3 λίτρες ὑπὸ πίεσιν 3 ἀτμοσφαιρῶν) εἰς χωρητικότητα ὄγκου 10 λιτρῶν. Ἑπομένως, κατόπιν τοῦ νόμου τοῦ Boyle – Mariotte, ἡ νέα πίεσίς του $Π_1$ θὰ μᾶς δοθῇ ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν:

$$\frac{3}{10} = \frac{Π_1}{4}, \text{ ἐξ οὗ: } Π_1 = 1{,}2 \text{ ἀτμ.}$$

β΄) Ὁ δεύτερος ὄγκος τοῦ ἀερίου (6 λίτρες ὑπὸ πίεσιν 4 ἀτμοσφαιρῶν), θὰ λάβῃ τὸν νέον ὄγκον τῶν 10 λιτρῶν, ἀλλὰ ὑπὸ νέαν πίεσιν:

$$Π_2 = \frac{6 \cdot 4}{10} = 2{,}4 \text{ ἀτμ.}$$

γ΄) Ὁ τελευταῖος ὄγκος τοῦ ἀερίου (5 λίτρες ἀερίου, ὑπὸ πίεσιν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3 ἀτμοσφ.) θά καταλάβῃ τόν νέον ὄγκον τῶν 10 λιτρῶν καί ἡ πί-

εσίς του θά γίνῃ :

$$\Pi_3 = \frac{5 \cdot 3}{10} = 1,5 \text{ ἀτμ.}$$

Ἡ πίεσις, λοιπόν, τοῦ μίγματος (3+6+5 = 14 λιτρῶν ἀέ-

ριου) θά εἶναι :

$$1,2 + 2,4 + 1,5 = 5,1 \text{ ἀτμοσφαιρῶν.}$$

15) Ποίαν δύναμιν ἐξασκεῖ ἡ ἀτμόσφαιρα ἐπί ἑνός τετραγω-

νικοῦ μέτρου, εὑρισκομένου εἰς τήν κορυφήν ὄρους, ἔνθα τό

βαρόμετρον δεικνύει 70 έκ. καί $g = 9,81$;

__Λύσις :__ Προφανῶς, ἡ ἐξασκουμένη πίεσις ἰσοῦται μέ:

$$10000 \cdot 70 \cdot 13,6 = 9520 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

16) Μᾶζα ἀερίου καταλαμβάνει ὑπό πίεσιν 70 ἑκατοστομέ-

τρων ὄγκον 646 κυβ. ἑκατοστῶν. Ποῖος ὁ ὄγκος της ὑπό πίεσιν

76 ἑκατοστομέτρων;

__Λύσις :__ Συμφώνως πρός τόν νόμον Boyle-Mariotte, ἔχομεν:

$$p \cdot v = p' \cdot v' ,$$

ἤτοι : $$646 \cdot 74 = x \cdot 76 ,$$

ἐξ οὗ : $$x = 629 \text{ κυβ. ἑκατοστόμετρα.}$$

17) Ποῖον θά ἦτο τό ὕψος τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς ἕνα τόπον,

εἰς τόν ὁποῖον τό βαρόμετρον δεικνύει 76 έκ. ἐάν ὁ ἀήρ εἶχε παν-

τοῦ σταθεράν πυκνότητα καί τό g δέν μετεβάλλετο μετά

τοῦ ὕψους ;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Προφανώς έχομεν:

$$x = 0{,}001293 = 76 \cdot 13{,}6$$

καί $\quad x = 799381$ έκατοστόμετρα,

ή: $\quad x = 8$ χιλιόμετρα περίπου

18) Ποίαν δύναμιν πρέπει νά έξασκήσωμεν διά τόν διαχωρισμόν τών δύο ήμισφαιρίων τού Μαγδεμβούργου, διαμέτρου 10 έκ. τού μέτρου, όταν είς τό έσωτερικόν αύτών έχει δημιουργηθή κενόν;

Λύσις: Ή έπιφάνεια τής σφαίρας παρέχεται ύπό τού τύπου: $4\pi\rho^2$, ήτοι:

$$4 \cdot 3{,}1416 \cdot 25 = 314{,}16 \text{ τετρ. έκατ.}$$

Όθεν ή πίεσις ή έπιφερομένη έπί τής σφαίρας, είναι:

$$1033 \,.\, 314{,}16 = 324{,}527 \text{ χιλιόγραμμα}$$

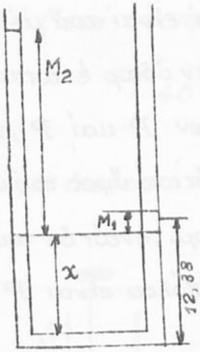
καί ίδιαιτέρως δι' ένα ήμισφαίριον έξασκείται πίεσις:

$$\frac{324{,}527}{2} = 162{,}264 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

19) Δύο κατακόρυφοι σωλήνες τής αύτής τομής, ίσης πρός 3 τετραγωνικούς δακτύλους, συγκοινωνούν μεταξύ των δι' όμοίου όριζοντίου σωλήνος. Χύνομεν έντός τού ένός 60 γραμμάρια ένός ύγρού, έλαφροτέρου τού ύδραργύρου, άφού προηγουμένως ρίψωμεν 1500 γραμμάρια ύδραργύρου. Ή πυκνότης τού δευτέρου ύγρού είναι 0,91.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ ἰσορροπία τῶν ὑγρῶν τούτων, ἤτοι ἡ ἀπόστασις τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν, ὡς καί τῆς ἐπιφανείας χωρισμοῦ ἀπό τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος, ἐάν τό μῆκος αὐτοῦ εἶναι 12 ἑκατοστομέτρων.



<u>Λύσις</u>: Ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$V = \frac{1500}{13,6} = 110,3 \text{ κυβικοί δάκτυλοι.}$$

Ὁ ὄγκος τῆς βάσεως εἶναι:

$V_1 = 3 \cdot 12 = 36$ κυβικοί δάκτυλοι. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ ἐντός τῶν σωλήνων ὑδραργύρου εἶναι: $110,3 - 36 = 74,3$ κ.δ. καί εἰς ἕκαστον: $\frac{74,3}{2} = 37,15$, τό δέ ὕψος εἶναι $\frac{37,15}{3} = 12,38$ἑκ.

Ἐάν καλέσωμεν διά $υ$ τό ὕψος τοῦ δευτέρου ὑγροῦ, ἔχομεν:

$$υ = \frac{1}{S} \cdot V = \frac{60}{30,91} = \frac{20}{0,91} = 21,96.$$

Ἔχομεν κατά τήν ἰσορροπίαν:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{M_1}{21,96} = \frac{0,91}{13,6} \quad M_1 = 1,47.$$

Ἑπομένως, ἡ μεταξύ τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἀπόστασις εἶναι:

$$21,96 - 1,47 = 20,49 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Ὁ ὑδράργυρος, ἑπομένως, εἰς μέν τόν ἕνα σωλῆνα ἀνῆλθεν κατά $\frac{1,47}{2} = 0,735$ ἑκ., εἰς δέ τόν ἕτερον κατῆλθε κατά 0,735 ἑκ. Ἑπομένως, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπό τόν ὁριζόντιον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σωλῆνα εἶναι:

$$x = 12{,}38 - 0{,}735 = 11{,}645 \text{ εκ.}$$

20) Δοχεῖον κυλινδρικόν φέρει εἰς τό ἀνώτερον αὐτοῦ μέρος δύο σωλῆνας A καί B, τῶν ὁποίων αἱ τομαί εἶναι τοῦ μέν A 50, τοῦ δέ B 25 τετρ. δάκτυλοι. Χύνομεν ὕδωρ ἐντός τοῦ δοχείου καί διατηροῦμεν, τῇ βοηθείᾳ ἐμβόλων P καί P', τάς στάθμας εἰς διάφορον ὕψος. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τό ὕψος τοῦ ὕδατος ἐντός τοῦ σωλῆνος A εἶναι 20 ἑκατοστομ., ἐντός δέ τοῦ B 30 καί ὅτι τό βάρος τοῦ μεγαλυτέρου ἐμβόλου εἶναι P εἶναι 2 χλγρ., ζητεῖται:

α) Τό βάρος τοῦ μικροῦ ἐμβολέως P'.

β) Ἡ νέα διαφορά στάθμης, ὅταν προσθέσῃ τις (1 χιλγρ. ἐπί τοῦ P'.

γ) Αἱ νέαι θέσεις τῶν ἐμβόλων ἀπό τοῦ καλύμματος τοῦ κυλινδρικοῦ δοχείου, μετά τήν προσθήκην ταύτην.

δ) Ἡ πίεσις τοῦ πυθμένος ἀπό τετραγ. εκατοστομ., ὅταν τό ὕψος τοῦ δοχείου εἶναι 50 ἑκατοστόμετρα.

<u>Λύσις:</u> α) Ἐπί τῆς ἐπιφανείας αβ ἔχομεν πίεσιν κατά τετραγωνικόν δάκτυλον:

$$\frac{P}{50} = \frac{2000}{50} = 40 \text{ γραμμάρια.}$$

Αὐτη ἰσοῦται μέ τήν πίεσιν τοῦ P' κατά τετραγ. δάκτ. ἐπί τῆς αβ, ἥτις εἶναι $\frac{P'}{25}$, αὐξηθεῖσαν κατά $υ = 10$ γραμμά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρια, ἤτοι:

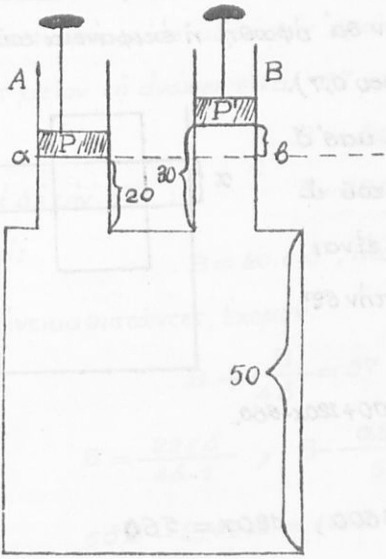
$$\frac{P'}{25} + 10 = 40 \;,\; \frac{P'}{25} = 30 \;,\; P' = 750.$$

Τὸ βάρος τοῦ P' εἶναι 750 γραμμάρια.

β!) Μετὰ τὴν πρόσθεσιν 1000 γραμ., ἔχομεν:

$$40 = x + \frac{1750}{25} = x + 70 \;,\; x = -30.$$

Ἤτοι, ἡ διαφορὰ τῆς στάθμης εἶναι 30 δάκτυλοι, τοῦ P' εὑρισκομένου κάτωθι τοῦ P.



γ) Τότε ἡ ποσότης τοῦ ὕδατος ἡ εὑρισκομένη εἰς τοὺς σωλῆνας, ἥτις εἶναι

$$20 \cdot 50 + 30 \cdot 25 = 1750$$

γραμμάρια, ἐὰν καλέσωμεν διὰ τοῦ y τὸ ὕψος τοῦ P, ὅτε τὸ P' θὰ εἶναι $y-30$, θὰ ἰσοῦται μέ:

$$50 \cdot y + 25\,(y-30) = 1750,$$

$$75\,y = 1750 + 750 = 2500$$

καί: $y = 33{,}33$.

Τὸ ὕψος τοῦ P εἶναι 33,33... καὶ τοῦ P' 3,333 δάκτ.

δ) Ἡ πίεσις τοῦ πυθμένος κατὰ τετρ. δάκτυλον, ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος στήλης ὕδατος, τομῆς 1 τ. δ. μέχρι τῆς ἐλευθέρας

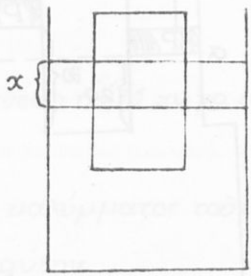
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιφανείας του, αὐξηθὲν κατὰ τὴν πίεσιν τοῦ ἀντιστοίχου ἐμβολέως κατὰ τετρ. δάκτυλον, ἤτοι:

$$\pi = 50 + 33,3 + \frac{2000}{50} = 83,3 + 40,$$

$$\pi = 123,3 \text{ γραμμάρια.}$$

21). Δοχεῖον κυλινδρικόν, τομῆς 120 τετρ. δακτύλων, περιέχει ὕδωρ, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 30 ἑκατοστά, ἄνωθεν τῆς βάσεως τοῦ δοχείου. Θέτομεν, ὥστε νὰ ἐπιπλεύσῃ ἐπ' αὐτοῦ, κύλινδρον ἐκ ξύλου, τομῆς 80 τετρ. ἑκατοστμ. καὶ ὕψους 10 ἑκατοστομ. Ζητεῖται πόσον θὰ ὑψωθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐν τῷ δοχείῳ (εἰδ. βάρ. ξύλου 0,7).



<u>Λύσις</u>: Ἔστω x τὸ ὕψος, καθ' ὃ θὰ ἀνέλθῃ τὸ ὕδωρ. Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος πρὸ τῆς ἐμβαπτίσεως εἶναι: 30.120 = 3.600 γραμ. Κατὰ τὴν βαν περίπτωσιν, ὁ ὄγκος εἶναι:

$$120(30 + x) - 80 \cdot 0,7 \cdot 10 = 3600 + 120x - 560.$$

Ἔχομεν δέ:

$$3600 + 120x - 560 = 3600, \quad 120x = 560$$

καί $$x = 4,666 \ldots$$

Ἑπομένως, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος θὰ ἀνυψωθῇ κατὰ 4,666 δακτύλους.

22) Κύλινδρος, ὕψους 20 ἑκατοστμ., εἶναι ἐξηρτημένος κά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τωθεν τοῦ ἑνός τῶν δίσκων ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ. Ὅταν 5 ἑκατοστομ. τοῦ κυλίνδρου τούτου βυθίζωνται ἐντός τοῦ ὕδατος, πρέπει νά θέσωμεν εἰς τόν ἕτερον δίσκον 57 γραμμάρια, ἵνα ἰσορροπήσωμεν αὐτόν. Ὅταν 12 ἑκατ. τοῦ κυλίνδρου βυθίζωνται ἐντός ὑγροῦ, πυκνότητος 0,83, πρέπει νά θέσωμεν 22 γρ. διά τήν ἰσορροπίαν. Ζητεῖται τό βάρος καί ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου.

__Λύσις__: Ἔστω B τό βάρος καί δ ἡ πυκνότης. Ἐάν ε ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου, τότε κατά τήν πρώτην περίπτωσιν, ἐπειδή τό βάρος μεῖον τῇ ἀνώσει εἶναι 57 γραμμάρια, ἔχομεν:

$$B - \delta\varepsilon = 57.$$

Κατά δέ τήν $\beta^{\alpha\nu}$:

$$B - 12.0{,}83\,\iota\varepsilon = 22.$$

Ἀλλά:

$$B = 20.\varepsilon.\delta, \quad \text{ἤτοι:} \quad \varepsilon = \frac{B}{20}$$

καί ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$B - \frac{B}{4\delta} = 57, \quad 4\delta B - B = 228\delta$$

$$B = \frac{228\delta}{4\delta - 1}, \quad B - \frac{0{,}83.3}{5\delta} = 22,$$

$$5\delta B - 2{,}49\,B = 110\delta \quad \text{καί} \quad B = \frac{110\delta}{5\delta - 2{,}49},$$

ἄρα: $$\frac{228}{4\delta - 1} = \frac{110\delta}{5\delta - 2{,}49}, \quad 1140\delta - 567{,}72 = 440\delta - 110,$$

$$700\delta = 457{,}12 \quad \text{καί} \quad \delta = 0{,}654$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$B = \frac{228 \cdot 0{,}654}{4 \cdot 0{,}654 - 1} = \frac{149{,}112}{1{,}616} \quad , \; B = 92{,}27$$

Ἤτοι τὸ βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 92,27 γραμμάρια καὶ ἡ πυκνότης 0,654.

23) Κύλινδρος κενὸς ἐσωτερικῶς καὶ κλειστὸς πανταχόθεν, ἰσοπαχής, ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀκτὶς αὐτοῦ εἶναι 10 ἑκατ., τὸ ἐξωτερικὸν ὕψος 35 ἑκατ., τὸ δὲ ἐσωτερικὸν 39. Ἐὰν θέσωμεν ἐπὶ τῆς ἄνω βάσεως αὐτοῦ βάρος 4510 γραμμαρίων, φέρεται αὕτη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ μετάλλου, ἐξ οὗ ὁ κύλινδρος εἶναι κατεσκευασμένος.

<u>Λύσις</u> Ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου εἶναι:

$$O = \pi \cdot 10^2 \cdot 35 - \pi\, 9^2 \cdot 33 = 3500\pi - 267\pi = 827\pi = 2596{,}78 \text{ δάκτ.}$$

Ἐὰν B τὸ βάρος τοῦ μετάλλου, ἔχομεν:

$$B + 4510 = 3500\pi = 10990 \quad , \; B = 6480 \text{ γραμ.}$$

καὶ τὸ εἰδ. βάρος εἶναι:

$$\delta = \frac{B}{O} = \frac{6480}{2596{,}78} = 2{,}495.$$

Ἄρα τὸ εἰδ. βάρος εἶναι 2,495.

24) Ποῖον εἶναι τὸ βάρος Fe, ὅπερ πρέπει νὰ ἐξαρτήσωμεν ἀπὸ μίαν κυβικὴν παλάμην φελλοῦ ($\delta = 0{,}24$), διὰ νὰ αἰωρῆται ὁ κύβος ἐν τῷ θαλασσίῳ ὕδατι; ($\delta = 1{,}026$) Πυκνότης $Fe = 7{,}7$.

<u>Λύσις</u>: $A = B$. Ἔστω Θ ὁ ὄγκος τοῦ Fe. Ἔχομεν:

$$A = (1000 + \Theta) \cdot 1{,}026$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί:
$$B = 1000 \cdot 0{,}24 + \theta \cdot 7{,}7,$$

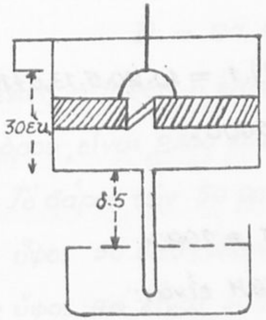
ἄρα:
$$(1000+\theta) \cdot 1{,}026 = 1000 \cdot 0{,}24 + \theta \cdot 7{,}7,$$

ἐξ οὗ
$$\theta = \frac{786}{6{,}674},$$

Ἄρα τό βάρος τοῦ Fe εἶναι:
$$B = \theta\pi = \frac{786}{6{,}674} \cdot 7{,}7.$$

25) Ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας ὁ σωλήν ἔχει μῆκος 5,5 μ.τ. καί ἡ διατομή τοῦ ἐμβόλου εἶναι 30 ἑκ., ἡ δέ τομή τοῦ σωλῆνος εἶναι τό $\frac{1}{2}$ τῆς τοῦ κυλίνδρου. Εἰς ποῖον ὕψος θά ἀνέλθη τό ὕδωρ ἐν τῷ σωλῆνι μετά τήν ἀνέλκυσιν τοῦ ἐμβόλου, ὅταν ἡ ἀρχική πίεσις ἐν τῷ σωλῆνι εἶναι 10 μ.τ. ὕδατος.

Λύσις: Ὅταν ὁ ἐμβολεύς εὑρίσκεται εἰς τό κατώτερον μέρος, τότε ὁ ἐντός τοῦ σωλῆνος ἀήρ ἔχει ὄγκον 550 χμ.ἑκ. Ὅταν ἀνυψώνωμεν τοὔδωρ ἀνέρχεται εἰς τόν σωλῆνα κατά τό ὕψος ἔστω y καί ὑπό πίεσιν 10-y. θα ἔχη ὄγκον:



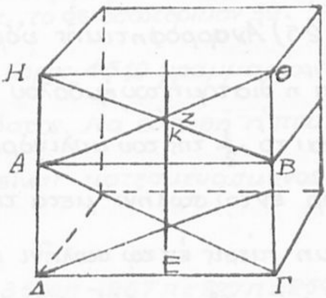
$$(550-y)x + 20x \cdot 30x.$$ Ὥστε:
$$550x \cdot 10 = (10-y)(550-y+600)x,$$
$$5500 = (10-y)(1150-y),$$
$$5500 = 11500 - 1150y - 10y + y^2,$$
$$y^2 - 1160y + 6000 = 0,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και $\quad y = 580 \pm \sqrt{580^2 - 6000}$.

26) Κυβικόν δοχεῖον πλευρᾶς 20 δακτύλων εἶναι πλῆρες κατά τό ἥμισυ ἐξ ὑδραργύρου καί κατά τό ἥμισυ τό ἕτερον δι' ὕδατος.

Ποία εἶναι ἡ ὑπό τῶν δύο τούτων ὑγρῶν ἐπιφερομένη πίεσις ἐφ' ἑκάστης κατακορύφου ἕδρας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 ;



Λύσις: Λαμβάνομεν τήν ἕδραν ΗΔΓΘ. Ἡ ὁλική πίεσις αὐτῆς ἰσοῦται μέ τήν πίεσιν, τήν ὁποίαν δέχεται ἡ ΑΒΓΔ καί μέ τήν πίεσιν τῆς ΑΒΘΗ.

Ἡ πίεσις τῆς ΑΒΓΔ εἶναι:

$$(ΑΒΓΔ)\cdot(ΕΚ)\cdot 13,6 + (ΑΒΓΔ)(ΚΙ).1 = 10\cdot 20\cdot 5.13,6 + 10\cdot 20\cdot 10.1 =$$

$$= 13600 + 2000 = 15600 .$$

Ἡ πίεσις τῆς ΑΒΘΗ εἶναι:

$$(ΑΒΘΗ)(ΖΙ)\cdot 1 = 10.20.5 = 1000.$$

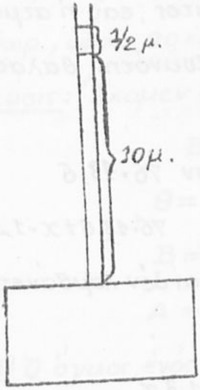
Ἄρα ἡ ὁλική πίεσις τῆς ἐπιφανείας ΔΓΘΗ εἶναι:

$$ΔΓΘΗ = 15600 + 1000 = 16600 \text{ γραμμάρια}.$$

27) Κοῖλος κύλινδρος, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ἐπιφανείας 25τ. παλάμαι, κεῖται ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου, φέρων ἐπί τῆς ἄνω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάσεως μακρόν κατακόρυφον σωλῆνα. Ὁ κύλινδρος εἶναι πλήρης ὕδατος, ὁ δέ σωλήν περιέχει καί αὐτός ὕδωρ, μέχρις ὕψους 10μ.



Ποία εἶναι ἡ πίεσις ἡ τείνουσα ν' ἀποσπάση τήν ἄνω βάσιν τοῦ κυλίνδρου καί πόσον θά αὐξηθῆ ἡ πίεσις αὐτη, ἐάν εἰσαχθῆ εἰς τόν σωλῆνα ὕδωρ 50 γραμμαρίων, ὅταν ἡ τομή τοῦ σωλῆνος εἶναι 1τ.δ.

<u>Λύσις</u> : α) Ἡ ἐπί τῆς ἄνω βάσεως πίεσις ἰσοῦται μέ τό βάρος ὑγρᾶς στήλης, βάσιν ἐχούσης τήν πιεζομένην ἐπιφάνειαν, ὕψος δέ τήν ἀπόστασιν αὐτῆς ἐπί τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Ἤτοι:

$$P = 25.100 = 2500 \text{ κυβικαί παλάμαι.}$$

Ἑπομένως, ἡ πίεσις, ἡ ἐπιφερομένη ἐπί τῆς ἄνω ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, εἶναι 2500 χιλιογρ.

β) Τό βάρος τῶν 50 γραμμαρίων θά καταλάβη εἰς τόν σωλῆνα ὕψος 50 δακτύλων, ἤτοι 5 παλαμῶν. Ἑπομένως, τό ὁλικόν ὕψος θά εἶναι 105 παλαμῶν, καί ἡ πίεσις θά εἶναι:

$$P = 25.105 = 2625 \text{ χιλγρ.}$$

Ἤτοι, ἡ πίεσις θά αὐξηθῆ κατά 125 χιλιόγραμμα.

28) Φιάλη πλήρης ἀέρος, χωρητικότητος 500 κ.έκ., βυθι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζεται ἐντός βαθείας δεξαμενῆς, περιεχούσης θαλάσσιον ὕδωρ, μέ τό στόμιον πρός τά κάτω. Εἰς ποῖον βάθος πρέπει νά βυθισθῆ, ὥστε νά εἰσχωρήσωσιν ἐν αὐτῆ 120 κ. ἑκ. ὕδατος; ἐάν ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἰς τήν ἐπιφάνειαν εἶναι 760. Πυκνότης θαλασσίου ὕδατος 1,3.

<u>Λύσις</u>: Εἰς ὄγκον 500 κ. ἑκ. ἔχομεν πίεσιν $76 \cdot 13,6$

" " 380 κ. ἑκ. " " $76 \cdot 13,6 + x \cdot 1,3$

ἐφ' ὅσον τήν φιάλην θεωροῦμεν κυλινδρικήν καί δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὁ λαιμός:

$$500 \cdot 76 \cdot 13,6 = 380 \cdot 76 \cdot 13,6 + 380 \cdot 1,3\,x\,,$$

καί: $380 \cdot 1,3\,x = 76 \cdot 13,6\,(500-380) = 76 \cdot 13,6 \cdot 120$

$$x = \frac{76 \cdot 13.6}{38.13} = \frac{2.136}{13} = \frac{272}{13}$$

καί $x = 20,923$ ἑκ.

29) Εἰς ὄγκος μετάλλου ἰσορροπεῖται εἰς τόν ἀέρα ὑπό βάρους 50 γρ. ἐκ χαλκοῦ (Cu). Βυθισμένος εἰς τό ὕδωρ, θερμοκρασίας 0° καί πυκνότητος 0,99987, ἰσορροπεῖται μέ 42 γρ. χαλκοῦ. Ποία ἡ πυκνότης τοῦ μετάλλου;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$\pi = \frac{B}{\theta}\,,\quad B = 50 \text{ γρ. καί } \theta = \text{ὄγκος ἐκτοπ. ὕδατος.}$$

$$\theta = \frac{B}{\pi'} = \frac{A}{\pi'} = \frac{B+\beta}{\pi'} = \frac{50-42}{0,99987}\,,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και. $$\pi = \frac{49,9935}{8} = 6,3317$$

30) Ποία η άνωσις ενός κυλίνδρου εκ ξύλου, βυθιζομένου εις τό ύδωρ, ύψους 20 εκ. και διαμέτρου 10 εκ. (Πυκνότης ξύλου 0,6).

Λύσις: Έχομεν:

$$B = A \quad \text{καί} \quad B = \theta\pi'$$

$$\theta = \pi\rho^2 \upsilon = \pi 5^2 . 20 = 500\pi$$

$$B = 500\pi' = 500 \cdot 0,6 \cdot \pi = 300\pi$$

$$A = 300\pi = 300 \cdot 3,14 = 3,14 \cdot 3 \ .$$

31) Ο όγκος ενός αεροστάτου πλήρους φωταερίου είναι 1000 κ.μ. και η ολική του μάζα, συμπεριλαμβανομένης και της λέμβου, είναι 50 kgm.

Ποίαν μάζαν τό αερόστατον δύναται νά υποβαστάση; (π αέρος 0,0013, πυκν. αερίου 0,0005).

Λύσις: Εφ' όσον ισορροπεί, έχομεν:

$$A = B \quad , \quad A = \theta\pi \quad ,$$

ένθα θ ο όγκος του εκτοπιζομένου αέρος, ήτοι του αεροστάτου, π η πυκνότης του αέρος

$$\theta = 1000000 = 1000 \text{ κ.μ.}$$

$$A = 1000000 \cdot 0,0013$$

$$B = 500 + 1000000 \cdot 0,0005 + x \quad ,$$

ένθα x τό βάρος, όπερ δύναται νά υποβαστάση.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα: $1000000 \cdot 0{,}0013 = 500 + 1000000 \cdot 0{,}0005 + x.$

καί: $x = 1300 - 1000 = 300$ χλγρ.

32) Τὸ δοχεῖον μηχανῆς ἔχει χωρητικότητα 4 λιτρῶν καί ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος εἰς αὐτό εἶναι 76 ἑκ. Ὁ κύλινδρος τῆς ἀντλίας εἶναι χωρητικότητος 1/2 λίτρας. Ποία θά εἶναι ἡ πίεσις τοῦ δοχείου μετά 4 κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως;

Λύσις: Ἐφαρμόζω τόν τύπον:

$$\Pi_\nu = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^\nu$$

$$\Pi_4 = 76\left(\frac{4}{4+\frac{1}{2}}\right)^4 = 76\left(\frac{8}{9}\right)^4$$

33) Ποῖος ὁ λόγος τῆς χωρητικότητος τοῦ δοχείου καί τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀεραντλίας, ἐάν εἰς τό τέλος τοῦ τετάρτου κτυπήματος τοῦ ἐμβολέως ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου τοῦ δοχείου ἔχῃ καταστῇ ἴση πρός $\frac{81}{256}$ τῆς ἀρχικῆς πιέσεως;

Λύσις: Ἐφαρμόζω τόν τύπον:

$$\Pi_\nu = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^\nu$$

καί ἔχω:

$$\Pi_\nu = \Pi\left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^4 = \frac{81}{256}\Pi\left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^4 =$$

$$= \frac{81}{256} \quad \frac{\theta}{\theta+\vartheta} = \sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{3}{4}$$

καί $4\theta = 3\theta - 3\vartheta$ καί $\theta = 3\vartheta$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Αρα: $\frac{\Theta}{\vartheta} = 3$

34) Τό μανόμετρον μιᾶς ἀεραντλίας δεικνύει 5 έκ. μετά 10 κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως. Ἡ ἀρχική πίεσις τοῦ δοχείου ἦτο 75 έκ. Τί θά δείξῃ τό μανόμετρον μετά 20 κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως;

<u>Λύσις:</u> Ἐφαρμόζω τόν τύπον:

$$\Pi_\nu = \Pi\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^\nu$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{μετά 10 κτυπήματα:} & 5 = 75\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^{10} & (1) \\ \text{" 20 "} & x = 75\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^{20} & (2) \end{array}\right\}$$

Ἡ πρώτη γράφεται, ἀφοῦ ὑψωθῇ εἰς τό τετράγωνον:

$$25 = 75^2\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^{20},$$

$$\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^{20} = \frac{25}{(75)^2}$$

$$x = 75 . \frac{25}{(75)^2} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3} = 0{,}333 \text{ έκ.}$$

35) Σῶμα τι τοποθετεῖται ὑπό τόν κώδωνα ἀεραντλίας. Ἡ ἀρχική πίεσις ἔστω 76 έκ., καταντᾷ δέ αὐτή 19 μετά δύο κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως.

Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ σώματος, δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώδωνος εἶναι 2 λίτραι καί ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου 1 λίτρα.

<u>Λύσις:</u> Ἔστω x ὁ ὄγκος τοῦ σώματος:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\Pi_2 = \Pi\left(\frac{\Theta}{\Theta+\vartheta}\right)^2$$

Ἔχομεν δέ: $\Theta = 2-x$, $\Pi_2 = 19$, $\Pi_1 = 76$. Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$19 = 76\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^2,$$

λύομεν ταύτην ὡς πρός x καί ἔχομεν:

$$\frac{2-x}{3-x} = \sqrt{\frac{19}{76}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{2-x}{3-x} = \frac{1}{2}.$$

ἤ $\quad 4-2x = 3-x$, ἄρα $\quad x = 1.$

36) Τό δοχεῖον ἀεραντλίας ἔχει χωρητικότητα 379 κυ. τῆς λίτρας καί ὁ κύλινδρος τῆς ἀεραντλίας 58.

Μετά πόσα κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως, ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος θά καταστῇ ἴση πρός τό 1/10 τῆς ἀρχικῆς;

<u>Λύσις:</u> Ἔστω ὅτι μετά x κτυπήματα θά γίνῃ 1/10 τῆς ἀρχικῆς· τότε θά ἔχωμεν:

$$P_x = P\left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^x = \frac{P}{10}$$

$$\text{ἤ} \quad \left(\frac{\theta}{\theta+\vartheta}\right)^x = \frac{1}{10} \quad \text{καί} \quad \left(\frac{379}{437}\right)^x = \frac{1}{10}$$

Λύω ἤδη τήν ἐξίσωσιν ταύτην διά τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων: Ἤτοι:

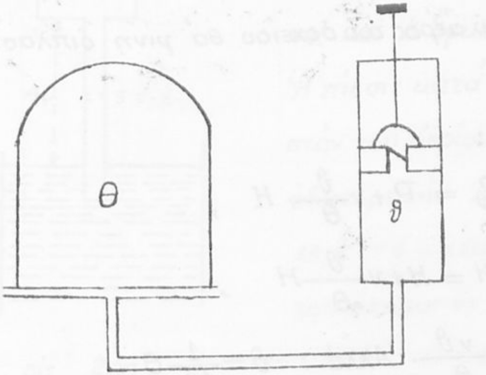
$$x\,(\text{λογ}\,379 - \text{λογ}\,437) = 1$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί: $x = \frac{1}{λογ 379 - λογ 437}$.

Ἄρα: $x = \frac{1}{λογ 437 - λογ 379}$

37) Ἡ χωρητικότης τοῦ κυλίνδρου ἀεροθλιπτικῆς ἀεραντλίας εἶναι 80 κ.έκ. Εἰς τό δοχεῖον, οὗ ἡ χωρητικότης εἶναι 1 λίτρα, ἡ ἀρχική πίεσις εἶναι ἴση πρός 1 ἀτμόσφαιραν. Πόσα κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως χρειάζονται, ἵνα ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντός τοῦ δοχείου γίνῃ 5 ἀτμοσφαιρῶν;



Λύσις: Ἔστω P ἡ ἀρχική πίεσις, H ἡ ἀτμοσφαιρική, $Θ$ ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου, $ϑ$ ὁ τοῦ κυλίνδρου, P_1 = πίεσις μετά 1 κτύπημα. Ἔχομεν:

$$P_1 Θ = PΘ + Hϑ \qquad P_1 = P + \frac{Hϑ}{Θ}$$

καί $$P_2 = P_1 + \frac{Hϑ}{Θ}$$

καί $$P_2 = P + 2\frac{ϑ}{Θ}H$$

καί μετά ν κτυπήματα ἐνταῦθα $P_ν = 5$ ἀτμ. καί $P = 1$ ἀτμ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\Theta = 1$ λίτρ. $= 1000$ κ.έκ. , $\vartheta = 80$ κ.έκ. , $H = 1$ ἀτμ.

Ἄρα:
$$5 = 1 + \nu \frac{80}{1000} \cdot 75$$

ἤ: $\frac{8\nu \cdot 75}{100} = 4$ ἤ: $75 \cdot 8 \cdot \nu = 4000$

καί: $600\nu = 4000$. Ἤτοι: $\nu = \frac{4000}{600} = \frac{40}{6}$.

38) Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου μιᾶς καταθλιπτικῆς ἀντλίας εἶναι 10πλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου. Μετά πόσα κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος τοῦ δοχείου θά γίνῃ διπλασία τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$P_\nu = P + \nu \frac{\vartheta}{\Theta} \cdot H \;,$$

$$2H = H + \nu \frac{\vartheta}{\Theta} H \;,$$

καί: $2 = 1 + \frac{\nu\vartheta}{\Theta}$. Ἀλλά: $\vartheta = \frac{1}{10}\Theta$,

ἤτοι: $2 = 1 + \frac{\nu\vartheta}{10\vartheta}$ καί: $2 = 1 + \frac{\nu}{10}$

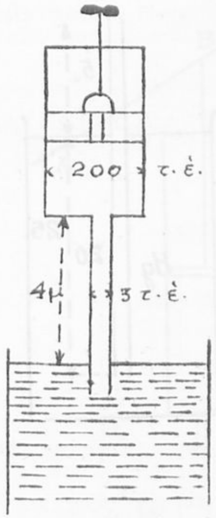
Ἄρα: $\nu = 10$.

39) Ὁ ἀναρροφητικός σωλήν μιᾶς ἀντλίας εἶναι 4 μέτρων ὕψους. Ἡ τομή του εἶναι 3 τ.έκ. καί ἡ τομή τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀντλίας 200 τ.έκ. Ποῖον ὀφείλει νά εἶναι τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου (ἡ διαδρομή τοῦ ἐμβολέως), ἵνα κατά τό πρῶτον κτύπημα τοῦ ἐμβολέως τό ὕδωρ πληρώσῃ τόν ἀναρροφητικόν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σωλῆνα ; (Πίεσις ἐξωτερική 75 ἑκ.)

Λύσις: Ὅταν τὸ ἔμβολον εὑρίσκηται εἰς τὸ κάτω μέρος, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $400 \cdot 3 = 1200$ κ.ἑκ. Ἐὰν x τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἔσεται $200x$. Ὅταν τὸ ἔμβολον ἀνέλθῃ, τὸ ὕψος θὰ καταλάβῃ ὅλον τὸν ὄγκον τοῦ σωλῆνος καὶ ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $200x$. Ἡ πίεσις κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν τοῦ ἀερίου θὰ ἰσορροπῇ τὴν ἐξωτερικὴν πίεσιν, ἥτις εἶναι $13{,}6 \cdot 75 - 400$ (δηλ. μένει τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐν τῷ σωλῆνι). Ὥστε:



εἰς 200 $75 \cdot 13{,}6$ εἰς ὕψος ὕδατος

$200x$ $13{,}6 \cdot 75 - 400$

καὶ $1200 \cdot 75 \cdot 13{,}6 = 200x(13{,}6 \cdot 75 - 400)$

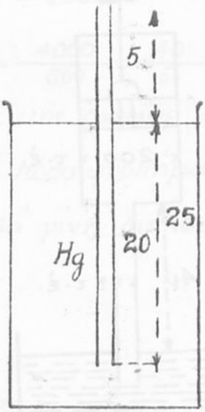
$$x = \frac{6 \cdot 75 \cdot 13{,}6}{13{,}6 \cdot 75 - 400} = \frac{1200 \cdot 6}{620} = \frac{1200 \cdot 3}{310} = \frac{360}{31}$$

Ἄρα: $x = 11{,}6$.

40) Σωλὴν κυλινδρικὸς ἀνοικτὸς ἑκατέρωθεν, ὕψους 25 ἑκ. εἶναι βυθισμένος κατὰ 20 ἑκ. εἰς Hg. Τὸν κλείομεν διὰ τοῦ δακτύλου εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον καὶ τὸν ἐξάγομεν κατακό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρύφως ἐκ τοῦ Hg. Ποῖον ὕψος καταλαμβάνει τὸ ὑγρὸν μετὰ τὴν παῦσιν τῆς εἰροῆς (ὕψος βαρομ. 75 ἑκ.).



<u>Λύσις:</u> Εἰς ὄγκον 5ω ἔχει τὸ ἀέριον πίεσιν 75.

Εἰς ὄγκον $(25-x)\omega$ ἔστω P

$$P = 75 - x.$$

ὥστε: $5\omega \cdot 75 = (25-x)\omega(75-x)$,

Διαιρῶ διὰ τοῦ ω καὶ ἔχω:

$$5 \cdot 75 = (25-x)(75-x),$$

$$375 = 1875 - 100x + x^2,$$

ἐξοῦ: $x^2 - 100x + 1500 = 0$

$$x = 50\sqrt{2500-1500}$$

καὶ $x = 50\sqrt{1000}$.

41) Ὁ μέγας ἐμβολεὺς ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ἔχει ἀκτῖνα 5 ἑκ. Ποία ὀφείλει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐμβόλου τῆς ἀντλίας, ἵνα δύναμις 20 χλγρ, ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ βραχίονος τοῦ μοχλοῦ μεταδίδῃ πίεσιν 2000 χλγρ; Ὁ λόγος τῶν μοχλοβραχιόνων εἶναι 4.

<u>Λύσις:</u> Ἔχω:

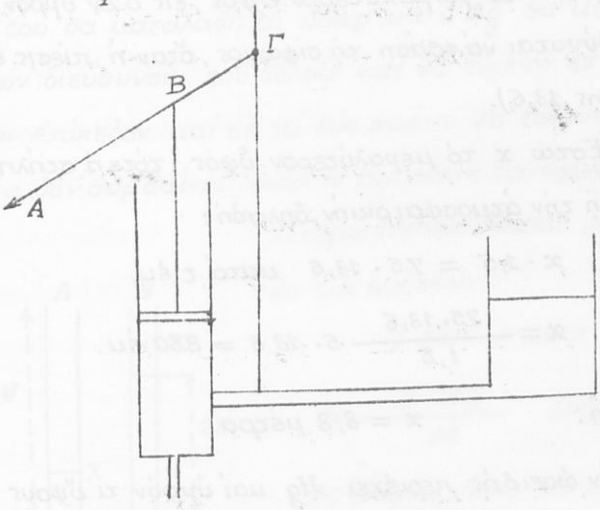
$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = 4 \text{ καὶ } \Delta . A\Gamma = B\Gamma \cdot x$$

(x= ἀντίδρασις).

$$20 . A\Gamma = B\Gamma \cdot x \text{ καὶ } x = \frac{20 . A\Gamma}{B\Gamma} = 20 \cdot 4$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι, ὡς γνωρίζομεν, ἀνάλογοι τῶν πιέσεων $\frac{P}{P_1} = \frac{E}{\varepsilon}$, ἔχω:



$$\varepsilon = \frac{E \cdot P_1}{P},$$

καὶ $$E = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 20 \cdot 4}{2000} = \frac{200 \cdot \pi}{200} = \pi$$

ὥστε $\varepsilon = \pi$, ἐξ οὗ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐπιφανείας $\varepsilon = 1$ τ. ἑκ.

42) Ἡ τομὴ τοῦ ἐμβολέως μονοκυλίνδρου ἀντλίας εἶναι 20 τ. ἑκ., ἡ δὲ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου 100 ἑκ. Ὁ ὄγκος τοῦ πρὸς ἀραίωσιν δοχείου εἶναι 1 λίτρ. ὑπὸ ἀρχικὴν πίεσιν 0,7865. Εὑρεῖν τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου μετὰ 3 κτυπήματα τοῦ ἐμβολέως.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$P_3 = 0{,}7865 \left(\frac{1000}{1000+100}\right)^3$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P_3 = \frac{0,7865 + 1000}{11^3}.$$

43) Ποῖον εἶναι τό μεγαλύτερον ὕψος, εἰς ὅ ἕν ὑγρόν πυκνότητος 1,5 δύναται νά φθάσῃ τῇ σίφωνος, ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 75. (Hg πυκνότης 13,6).

<u>Λύσις:</u> Ἔστω x τό μεγαλύτερον ὕψος · τότε ἡ στήλη αὕτη θά ἰσορροπῇ τήν ἀτμοσφαιρικήν, δηλαδή:

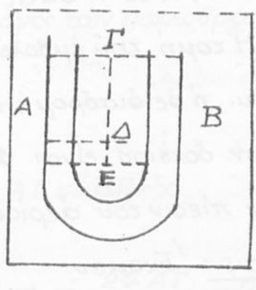
$$x \cdot 1,5 = 75 \cdot 13,6 \quad \text{κατά τ.έκ.}$$

$$x = \frac{75 \cdot 13,6}{1,5} \; 5 \cdot 13,6 = 880 \text{ έκ.}$$

δηλαδή: $x = 8,8$ μέτρα

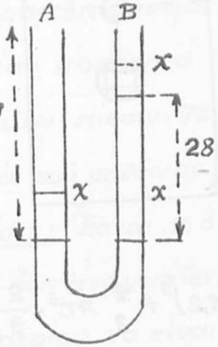
44) Σωλήν ὠοειδής περιέχει Hg καί ὑγρόν τι ὕψους 3 έκ. καί 28 έκ. Τό σύστημα ἐμβαπτίζεται εἰς ὕδωρ. Νά παρακολουθηθῇ ἡ κίνησις καί διατί συμβαίνει αὕτη;

<u>Λύσις:</u> Ὅταν ὁ σωλήν βυθισθῇ εἰς τό ὕδωρ, ἐπειδή ἡ ὑπό τοῦ ὕδατος πίεσις, ἡ ἐπιφερομένη εἰς τό Α σκέλος, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφερομένης εἰς τό Β, ὁ ὑδράργυρος τοῦ Α θά κινηθῇ κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ βέλους καί θά κατέλθῃ κατά ὕψος x καί κατά x θά ἀνέλθῃ εἰς τό σκέλος Β.



Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐάν ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ τοῦ ἐν τῷ Β εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ὕδατος, τότε τό ὑγρόν θά χυθῇ ἐντός τοῦ δοχείου καί τήν θέσιν του θά καταλάβῃ τό ὕδωρ καί ὁ Hg θά κινηθῇ κατ᾽ ἀντίθετον διεύθυνσιν τοῦ βέλους καί θά εὑρεθῇ εἰς τό αὐτό ὁριζόντιον ἐπίπεδον καί εἰς τά δύο σκέλη. Τό τοιοῦτον ὅμως ἐνταῦθα δέν συμβαίνει, διότι ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τοῦ ὕδατος, ὡς φαίνεται



ἐκ τῆς σχέσεως:

$$3 \cdot 13{,}6 = 28x \text{ , ἐξ οὗ}$$

$$x = \frac{3 \cdot 13{,}6}{28} \quad \text{ὅπερ} > 1.$$

Ἄς ἴδωμεν πόσον θά κατέλθῃ ὁ Hg ἐν τῷ σκέλει Β.

{$υ - 3x$ = ὕψος ὕδατος , $3x$ = ὕψος Hg}
(εἰς τό σκέλος Α).

{ x = ὕψος Hg , $2x$ = ὕψος ὑγροῦ, $\frac{13{,}6 \cdot 3}{28} \cdot υ - (28 + x) =$ = ὕψος ὕδατος } (εἰς τό σκέλος Β).

Καί ἐπειδή ἔχω ἰσορροπίαν:

$$(3-x) \cdot 13{,}6 + υ + 3 + x = x \cdot 13{,}6 + 28 \; \frac{13{,}6 \cdot 3}{28} + υ - (28+x)$$

$$3 \cdot 13{,}6 - 13{,}6 \cdot x - 3 + x = x \cdot 13{,}6 + 13{,}6 \cdot 3 - 28 - x$$

$$-3 + 28 = 2x \cdot 13{,}6 - 2x$$

$$2x\,(13{,}6 - 1) = 25$$

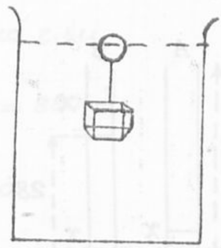
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$2x \cdot 12,6 = 25$$

$$x = \frac{25}{2 \cdot 12,6} = \frac{12,5}{12,6} = \frac{125}{126} \text{ έκ.}$$

Δηλαδή ὁ ὑδράργυρος εἰς τὸ Α θὰ κατέλθη κατὰ $\frac{125}{126}$ έκ.

45) Κύβος ἐκ Cu, εἰδ. βάρους 8,8 καὶ πλευρᾶς 6,2 έκ. κρατεῖται μετέωρος ἐν οἰνοπνεύματι πυκνότητος 0,9 ὑπὸ σφαίρας ἐκ φελλοῦ πυκνότητος 0,25. Βυθιζομένη κατὰ τὰ ²/₃ ἐν τῷ οἰνοπνεύματι. Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.



Λύσις: Ἔχομεν:

$B = A$, ἐφ' ὅσον ἰσορροπεῖ.

$$B = (6,2)^3 \cdot 8,8 + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 0,25 \quad A = \left[(6,2)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot 0,9$$

ἤτοι: $(6,2)^3 \cdot 8,8 + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 0,25 = \left[(6,2)^3 + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{2}{3}\right] \cdot 0,9$,

$$(6,2)^3 \cdot 8,8 + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 0,25 = 0,9 \cdot (6,2)^3 + \frac{8}{9}\pi r^3 \cdot 0,9 ,$$

$$\frac{8}{9}\pi r^3 \cdot 0,9 - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 0,25 = (6,2)^3 \cdot 8,8 - (6,2)^3 \cdot 0,9 ,$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (0,6 - 0,25) = (6,2)^3 \cdot (8,8 - 0,9) = (6,2)^3 \cdot 7,9 ,$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 0,35 = (6,2)^3 \cdot 7,9 ,$$

$$4\pi r^3 \cdot 0,35 = 3 \cdot (6,2)^3 \cdot 7,9 ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\tau^3 = \frac{3.(6,2)^3 \cdot 7,9}{4.0,35 \cdot 3,14}.$$

Ἄρα ἡ λύσις: $\tau = 6,2\sqrt{\frac{3 \cdot 7,9}{4.0,35 \cdot 3,14}}$.

46) Εἷς κυλινδρικός πλωτήρ, ἔχων ὕψος 3 μέτρα καί τομήν 6τ.μέτρα, εἶναι βυθισμένος ἐντός ὕδατος, οὕτως ὥστε ἡ κορυφή αὐτοῦ νά εὑρίσκηται 10,6 μέτρα κάτωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος.

Ποίαν ποσότητα ἀέρα πρέπει νά εἰσαράγωμεν ὑπό ἐξωτερικήν πίεσιν 76, ἵνα ἐμποδίσωμεν τό ὕδωρ νά εἰσέλθη ἐντός τοῦ σωλῆνος;

Λύσις: Ἔστω x ὁ εἰσακτέος ὄγκος τοῦ ἀερίου. Πρέπει ἡ πίεσις, ἥτις ἀναγκάζει τό ὕδωρ νά εἰσέλθη καί ἡ πίεσις τοῦ ἐντός ἀερίου νά εἶναι ἴσαι:

Ἡ πρώτη πίεσις εἶναι:

$$100(10,6+3)\,1^{\gamma\rho.} + 76 \cdot 13,6^{\gamma\rho} = 1360 + 76 \cdot 13,6 =$$

$$= 136\,(10+7,6) = 136 \cdot 17,6\ \gamma\rho.$$

Ἡ δευτέρα πίεσις ὑπολογίζεται: Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι: $6\tau.\mu \cdot 3 = 18\ \kappa.\mu.$ ἤ $18 \cdot 10^6\ \kappa.\acute{\epsilon}\kappa.$

$x = 76.13,6$ καί: $18.10^6.136 \cdot 17,6 = 76.13,6 \cdot x$

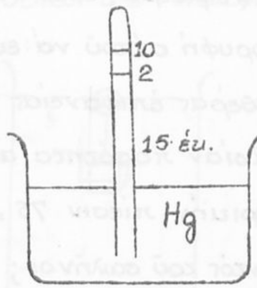
$$x = \frac{18.10^6.136 \cdot 17,6}{76 \cdot 13,6} = \frac{18.10^6.176}{76} = \frac{9.88 \cdot 10^6}{19}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δηλαδή, ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος εἶναι:

$$\frac{9 \cdot 88 \cdot 10^{6}}{19}.$$

47) Κύλινδρος, περιέχων ἀέριόν τι, βυθίζεται ἐντός λεκάνης Hg. Τό ἀέριον καταλαμβάνει ὕψος 10 έκ. καί ὁ Hg ἀνυψοῦται κατά 15 έκ. Πρέπει νά βυθίσωμεν κατά 17 έκ. τόν σωλῆνα, ἵνα τό ἀέριον ἀποκτήση πίεσιν ἴσην τῇ ἐξωτερικῇ. Εὑρεῖν τήν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν.



Λύσις: Ἡ πίεσις ἐντός τοῦ ἀερίου τῶν 10 έκ. ἰσοῦται μέ τήν ἀτμοσφαιρικήν, μεῖον τῇ πιέσει τῶν 15 έκ., δηλαδή:

$$\Pi = x - 15.$$

Ὥστε εἰς ὄγκον 10ω (ἔνθα ω ἡ καθ. τομή τοῦ σωλῆνος), πίεσις $x-15$.

Ὥστε εἰς ὄγκον 8ω (διότι θά βυθισθῇ κατά 2) πίεσις x;

Ἔχομεν: $8\omega x = 10\omega(x-15)$,

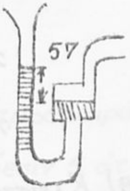
ἤ: $8x = 10(x-15)$ ἤ: $4x = 5(x-15)$

καί: $4x = 5x - 75$. Ἄρα: $x = 75$.

48) Εἰς ἕν ἀνοικτόν μανόμετρον, τό ὁποῖον συγκοινωνεῖ μετά τινος δοχείου, περιέχοντος πεπιεσμένον ἀέρα, ὁ Hg

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

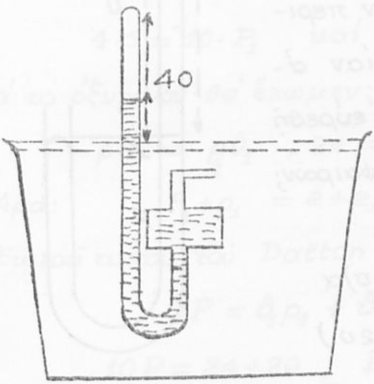
ἀνυψοῦται κατὰ 57 ἑκ. ἄνωθεν τῆς ἐπιφανείας τῆς λεκάνης, ὑποτιθεμένης οὐσιωδῶς ἀμεταβλήτου. Τὸ βαρομετρικὸν ὕψος εἶναι 75 ἑκ. Ποία εἶναι ἡ ἐλαστικὴ δύναμις τοῦ πεπιεσμένου ἀερίου;



<u>Λύσις:</u> Ἔστω x ἡ πίεσις· τότε ἔχομεν:

$$x = (57+75)\,13{,}6 = 13{,}6 \cdot 132 = 1732 \text{ λ.}$$

49) Κλειστὸν κυλινδρικὸν μανόμετρον, περιέχον ἀέρα, βυθίζεται εἰς εὐρεῖαν λεκάνην πλήρη Hg (ἀνωτέρας ἐπιφανείας ἀμεταβλήτου). Τὸ ὕψος τοῦ σωλῆνος εἶναι 40 ἑκ. ἄνωθεν τοῦ σημείου ἔνθα σταματᾷ ὁ Hg ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ τῆς λεκάνης δι' ἐξωτερικὴν πίεσιν 76. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς θὰ σταματήσῃ ὁ Hg, διὰ πίεσιν τριῶν ἀτμοσφαιρῶν;



<u>Λύσις:</u> Ἔστω x τὸ ζητούμενον ὕψος. Ἔχομεν:

$$40\omega.76 = x\omega\left[3.76-(40-x)\right]$$

$$40\cdot 76 = x\left[3.76-(40-x)\right]$$

$$3040 = 228x - 40x + x^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

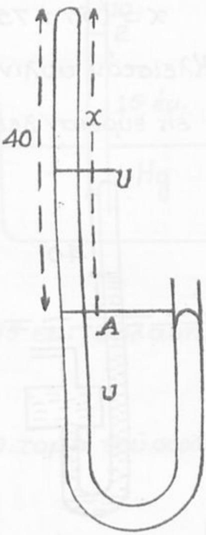
$$x = -94 + \sqrt{94^2 + 3040}$$

$$x = -94 + \sqrt{8836 + 3040} = -94 + \sqrt{11876}$$

$$x = -94 + 109 . \text{ Ἄρα } x = 15.$$

5θ) Κλειστὸν μανόμετρον, οὗ οἱ σωλῆνες εἶναι τῆς αὐτῆς διαμέτρου, περιέχει Hg. Ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 76 έκ., ὁ ὑδράργυρος εἶναι καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος.

Τὸ ὕψος τοῦ κλειστοῦ σωλῆνος, ὅστις κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην περιέχει ἀέρα, εἶναι 40 έκ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς θὰ εὑρεθῇ ὁ Hg διὰ πίεσιν τριῶν ἀτμοσφαιρῶν;



Λύσις: Ἔχομεν:

$$40 . \alpha . 76 = (40 - \upsilon)(3.76 - 2\upsilon)\alpha$$

$$40 . 76 = (40 - \upsilon)(3 \cdot 76 - 2\upsilon)$$

$$40 . 76 = 40 . 3 . 76 - 3 \cdot 76\,\upsilon - 80\upsilon + 2\upsilon^2$$

$$20 . 76 = 20 . 3 . 76 - 3 . 38\upsilon - 40\upsilon + \upsilon^2$$

$$\upsilon^2 - 154\,\upsilon + 20 . 76\,(3 - 1) = 0$$

$$\upsilon^2 - 154\,\upsilon + 40 \cdot 76 = 0$$

$$\upsilon = 77 \pm \sqrt{77^2 - 40 . 76} = 77 \pm 53 \cdot 7$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$v = 77 - 53,7 = 23,3 .$$

Άρα: $x = 40 - 23,3 = 16,7 .$

51) Σφαίρα περιέχει 6 λίτρ. Ο υπό πίεσιν 4 ατμοσφαιρών, μία δευτέρα σφαίρα περιέχει 4 λίτρ. Ν., υπό πίεσιν 5 ατμοσφαιρών. Συγκοινωνούμεν τάς σφαίρας ταύτας.

Ποία είναι ή ελαστική δύναμις τού μίγματος, όταν ή θερμοκρασία αύτη έχει ήδη αποκατασταθή εις την αρχικήν;

Λύσις: Διά τό άζωτον θά έχομεν:

$$P\theta = P_1 \theta_1 \quad , \text{ ήτοι:}$$

$$4 \cdot 5 = 10 \cdot P_1 \quad \text{καί} \quad P_1 = \frac{20}{10} = 2 \; .$$

Διά τό όξυγόνον θά έχωμεν:

$$\rho\vartheta = \rho_1\vartheta_1 \quad , \; 24 = 10\rho_1 \quad , \; \rho_1 = \frac{24}{10} = 2,4$$

Άρα: $P_1 + \rho_1 = 2 + 2,4 = 4,4$

β) Έκ τού τύπου τού Dalton έχομεν:

$$\theta P = \vartheta_1 \rho_1 + \vartheta_2 \rho_2$$

$$10P = 24 + 20 \quad , \quad P = \frac{44}{10} = 4,4$$

52) Δοχείον περιέχει 5 λίτρας αέρος υπό πίεσιν 1μ. Hg. Έξάγομεν έξ αυτού μάζαν αέρος, καταλαμβάνουσαν χωρητικότητα 2 λίτρων υπό πίεσιν 76. Ποία είναι ή ελαστική δύναμις τού υπολειφθέντος αερίου;

Λύσις: Έχομεν:

$$P\theta = P_1\vartheta_1 + P_2\vartheta_2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$100 \cdot 5 = P_1 \cdot 5 + 2 \cdot 76$$

$$5P_1 = 100 \cdot 5 - 2 \cdot 76 = 500 - 152 = 348 .$$

$$P_1 = \frac{348}{5} = 69,6$$

53) Σφαίρα 10 λίτρων πλήρης άέρος, ύπό πίεσιν 76 έκ., ζυγίζει 215 γρ. πλήρης άέρος συμπεπιεσμένου, ύπό πίεσιν 3 άτμ. ζυγίζει 241 γραμ. Ποία ή πυκνότης τού άέρος ύπό πίεσιν 76 ; (Πολυτεχνείου).

Λύσις: Τά βάρη είναι άνάλογα τών πιέσεων:

Έστω Β τό βάρος τής σφαίρας κενής· τότε έχομεν:

$$\frac{215 - B}{241 - B} = \frac{76}{376} = \frac{1}{3} \;, 645 - 3B = 241 - B$$

καί $\quad 2B = 645 - 241 \quad$, ήτοι: $\quad B = 202.$

Τό βάρος B' τού άερίου ύπό πίεσιν 76 άτμ. είναι:

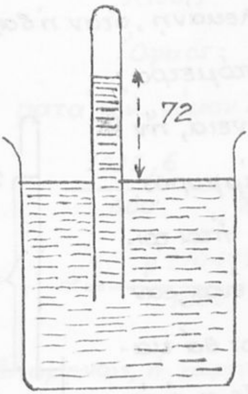
$$B' = 215 - 202 = 13 .$$

Έπειδή δέ $B' = \theta\pi$, έπεται:

$$13 = 10000 . \pi \quad \text{καί} \quad \pi = \frac{13}{10000} = 0,0013.$$

54) Έχομεν σωλήνα κυλινδρικόν πεπληρωμένον μέχρι τινός ύπό Hg, ούτως ώστε τό μεταξύ τής έπιφανείας τού Hg καί τού άνοικτού άκρου τού σωλήνος ύψος είναι 15 έκ. Έάν κλείσωμεν τό άνοικτόν άκρον τού σωλήνος καί βυθίσωμεν αύτόν έντός λεκάνης Hg, ό Hg καταλαμβάνει ύψος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



ὕψος 72 έκ. καί ὁ ἀήρ 38 έκ. Ζητεῖται ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις. (Πολυτεχνείου).

Λύσις: Ἔχομεν

$15\omega \qquad H$

$38\omega \qquad H-72$, ἄρα:

$15\omega H = 38\omega(H-72)$, καί

$2.3H = 38 \cdot 72$

$$H = \frac{38.72}{23} = 118$$

καί $H = 118$ έκ.

55) Ποῖον εἶναι τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος, ἥτις εἰς θερμοκρασίαν 0° καί πίεσιν 76 έκατ., ἀσκεῖ τήν αὐτήν πίεσιν, ἥν καί στήλη ὑδραργύρου ὕψους 1 δακτύλου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἰς 0° εἶναι 0,001293.

Λύσις: Ἐάν ε ἡ πιεζομένη ἐπιφάνεια καί x τό ζητούμενον ὕψος, ἔχομεν:

$$\varepsilon \cdot x \cdot 0{,}001293 = \varepsilon \cdot 1 \cdot 13{,}6 .$$

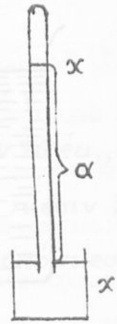
$$x = \frac{13600000}{1293}$$

$x = 10518$ δάκτυλοι ἤ 105,18 μέτρα.

56) Ἡ διάμετρος βαρομετρικοῦ σωλῆνος εἶναι 2 δακτύλων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ λεκάνη εἶναι κυκλική καί ἡ διάμετρος αὐτῆς 4 δακτύλων. Πόσον θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος ἐν τῇ λεκάνῃ, ὅταν ἡ βαρομετρική στήλη ἐλαττωθῇ κατά 5 χιλιοστόμετρα;



Λύσις: Ἡ περί τόν σωλῆνα ἐπιφάνεια, ἥν θά καταλάβῃ ὁ ἐκ τοῦ σωλῆνος ὑδράργυρος, εἶναι: $(\pi . 4^2) = 16\pi - 4\pi = 12\pi$, ἤτοι τριπλασία τῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος. Ἑπομένως, ἐάν x τό ζητούμενον ὕψος, ὁ ὑδράργυρος θά κατέλθῃ ἐν τῷ σωλῆνι κατά 3x. Ἐάν δέ α ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις, ἔχομεν:

$$\alpha + 4x - \alpha = 0,5 \text{ τοῦ δακτύλου}$$

καί $$x = \frac{1}{8} \text{ τοῦ δακτύλου.}$$

57) Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ χωρητικότης ἀγγείου περιέχοντος 3 γραμμάρια ἀέρος εἰς θερμοκρασίαν 0°, ἵνα ὁ ἀήρ οὗτος ἐπιφέρῃ πίεσιν ἐπί τῶν τοιχωμάτων 500 γραμμαρίων κατά τετραγωνικόν δάκτυλον, ἐάν ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 0,0013;

Λύσις: Ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος ὑπό πίεσιν 76 ἑκ. στήλης ὑδραργύρου, ἤτοι $76 \cdot 13,6 = 1033,6$ γραμμαρίων κατά τετραγων. δάκτυλον εἶναι $\frac{3}{0,0013} = 2\,307,7$ κ.δ. Ἐάν x ἡ ζητουμένη χωρητικότης, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Πίεσις:} & 1033,6 \qquad \qquad \frac{500}{x} \\ \text{Όγκος:} & 2307,7 \end{array}\right\}$$

Καὶ κατὰ τὸν νόμον Β.- Μ.- ἔχομεν:

$$\frac{1033,6}{500} = \frac{x}{2307,7} \quad , \quad x = \frac{2307,7 \cdot 1033,6}{500} = \frac{2385238,7}{500}$$

$$x = \frac{4770477}{1000} \quad , \quad x = 4770 \text{ κυβ. δάκτ.}$$

Ἑπομένως, ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου πρέπει νὰ εἶναι 4 κυβ. παλάμαι καὶ 770 κυβ. δάκτυλοι.

58) Ποσότης ἀερίου μετρηθεῖσα ὑπὸ πίεσιν 74 δακτύλων, κατέχει χῶρον 646 δακτύλων. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ὑπὸ πίεσιν 76;

Λύσις: Ἐὰν x ὁ ζητούμενος ὄγκος, κατὰ τὸν νόμον Β.- Μ.- ἔχομεν:

$$\frac{74}{76} = \frac{x}{646} \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{37}{38} \cdot 646 = \frac{37}{19} \cdot 323 = 629.$$

Ἦτοι ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου, ὑπὸ πίεσιν 76, εἶναι 629 τετρ. δάκτ.

59) Μία λίτρα ἀέρος, ὑπὸ πίεσιν 76, ἔχει βάρος 1,293 γραμμάρια. Ποῖον εἶναι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ἀέρος, ὑπὸ πίεσιν 77;

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ πιέσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν εἰδικῶν βαρῶν καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος παραμένει ἐνταῦθα σταθερός, εἶναι ἀνάλογοι τῶν βαρῶν, ἤτοι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{12,93}{x} = \frac{76}{77} \quad \text{και} \quad x = \frac{77 \cdot 1,293}{76} = 1,31 .$$

Ήτοι τό βάρος μιάς λίτρας άέρος, ύπό πίεσιν 77, εἶναι 1,31 γραμμάρια.

60) Ἐν βαρομετρικῷ σωλῆνι, τομῆς 1 τετρ. δακτύλου καί ἐν τῷ ὁποίῳ ὁ ὑδράργυρος εὑρίσκεται εἰς ὕψος 76 δακτύλων, ὁ βαρομετρικός θάλαμος εἶναι 10 δακτύλων. Ποῖον ὄγκον ἀέρος, ὑπό πίεσιν 76, πρέπει νά εἰσαγάγωμεν εἰς τόν βαρομετρικόν θάλαμον, ἵνα τό ὕψος τῆς βαρομετρικῆς στήλης γίνῃ 50;

<u>Λύσις:</u> Κατά τήν περίπτωσιν ταύτην, ὁ ὄγκος, ὅν θά καταλάβῃ ὁ ἀήρ, εἶναι $10+26 = 36$ κ.δ., ἡ δέ πίεσις αὐτοῦ θά εἶναι 26 δάκτυλοι, καθ' ὅ ὕψος θά κατέλθῃ ἡ ὑδραργυρική στήλη. Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ x τόν ὄγκον εἰς 76, ἔχομεν κατά τόν νόμον Β.-Μ.-:

$$\frac{x}{36} = \frac{27}{76} \quad , \quad x = \frac{13 \cdot 18}{19} = \frac{234}{19} = 12,3$$

Δηλαδή, ὁ ἀήρ, τόν ὁποῖον πρέπει νά εἰσαγάγωμεν, ἔχει ὄγκον 12,3 κ.δ., ὑπό πίεσιν 76.

61) Βαρομετρικός σωλήν τομῆς 1 τ.δ. δεικνύει 77 δακτύλους καί ὁ βαρομετρικός θάλαμος ἔχει ὕψος 4 δακτύλων. Πόσον θά κατέλθῃ ὁ ὑδράργυρος, ἐάν εἰσαγάγωμεν εἰς τόν θάλαμον 1 κ.δ. ἀέρος, ὑπό πίεσιν 77 δακτύλων;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐάν x τό ζητούμενον ὕψος, τότε ὁ εἰσαχθησόμενος ἀήρ θά καταλάβῃ ὄγκον $4+x$ κ.δ., ἡ δέ πίεσις αὐτοῦ θά εἶναι x, ὅσον θά κατέλθῃ ὁ ὑδράργυρος. Κατά τόν νόμον τοῦ B.- M.-, ἔχομεν:

$$\frac{x}{77}=\frac{1}{4+x}, \quad 4x^2+x^2-77=0, \quad x^2+4x-77=0$$

$$x=-2\pm\sqrt{4+77}=-2\pm 9, \quad x=7.$$

Ἐπομένως, ὁ ὑδράργυρος θά κατέλθῃ κατά 7 δακτύλους, ἤτοι θά δεικνύῃ πίεσιν 70.

62) Φυσαλίς ἀέρος εἶναι προσκεκολλημένη εἰς τό τοίχωμα ἀγγείου, περιέχοντος ὕδωρ, καί ἔχει ὄγκον 1/50 τοῦ κυβ. δακτύλου, εὑρίσκεται δέ εἰς βάθος 6,8 δακτύλων, ἀπό τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος. Πόσος θά γίνῃ ὁ ὄγκος αὐτῆς, ἐάν ἡ βαρομετρική πίεσις μεταβληθῇ ἀπό 77 εἰς 74 δακτύλους;

Λύσις: Ὅταν ὁ ὄγκος εἶναι $X=\frac{1}{50}$ δακτ., τότε ἡ πίεσις εἶναι $P=6{,}8+77\cdot 13{,}6$ γραμμάρια κατά τετραγωνικόν δάκτυλον. Ὅταν θά γίνῃ ἡ πίεσις $P_1=6{,}8+74\cdot 13{,}6$ γραμμάρια, ἔστω ὅτι ὁ ὄγκος θά γίνῃ $V_1=x$. Ἔχομεν λοιπόν:

$$V=0{,}02, \quad P=6{,}8+1047{,}2=1054; \quad V_1=x,$$

καί $P_1=6{,}8+1006{,}4=1013{,}2.$

Καί, κατά τόν νόμον B.- M.-, ἔχομεν:

$$1013{,}2\cdot x=0{,}02\cdot 1054 \quad \text{καί} \quad x=\frac{105\,V}{5066},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$x = 0{,}0208053 \quad , \quad x = \frac{2{,}08053}{100},$$

$$x = \frac{1{,}040265}{50}.$$

Ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ γίνῃ, κατὰ τὴν μεταβολὴν τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως, $\frac{1{,}040265}{50}$ δ.

63) Βαρομετρικὸς σωλὴν περιέχει ὀλίγον ἀέρα. Ὅταν τὸ ὕψος τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου εἶναι 10 δάκτυλοι, ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 75 δακτύλων. Ἐὰν ὅμως ὑψώσωμεν τὸν σωλῆνα, οὕτως ὥστε τὸ ὕψος τοῦ θαλάμου νὰ γίνῃ 15 δάκτυλοι, τότε τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἶναι 75,2 δάκτυλοι. Ποία εἶναι ἡ ἀληθὴς βαρομετρικὴ πίεσιν, κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω P ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου, ὅταν ὁ ὄγκος του εἶναι $V = 10$ 1.δ., καὶ P_1 ὅταν ὁ ὄγκος $V_1 = 15$ δάκτυλοι. Ἐὰν δὲ x ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις, ἔχομεν:

$$P = x - 75 \quad \text{καὶ} \quad P_1 = x - 75{,}2 .$$

Καὶ κατὰ τὸν νόμον Β.-Μ.-, ἔχομεν:

$$(x-75)\cdot 10 = (x-75{,}2)\cdot 15 \quad ,$$

$$15x - 1128 = 10x - 750 \quad , \quad 5x = 378$$

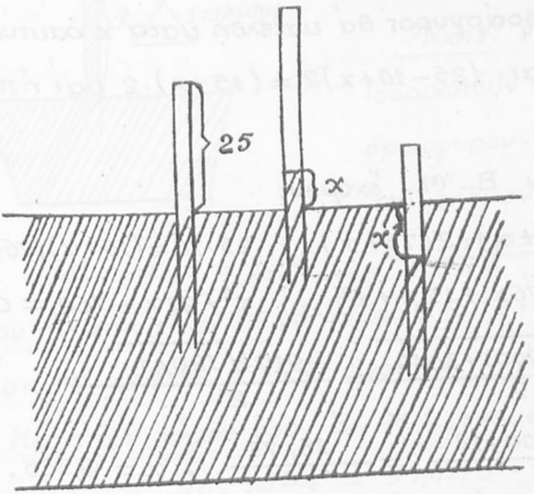
$$\text{καὶ} \quad x = 75{,}6$$

Ἡ ἀληθὴς βαρομετρικὴ πίεσις, κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ πειράματος εἶναι 75,6 δάκτ. ὑδραργυρικῆς στήλης.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

64) Δοκιμαστικός σωλήν κυλινδρικός, τομής 2 τ.δ., είναι ἀνεστραμμένος ἐντός λεκάνης ὑδραργύρου καί περιέχει 50 κ. δ. ἀέρος, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ἐντός καί ἐκτός τοῦ σωλῆνος εὑρίσκωνται εἰς τό αὐτό ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Νά εὑρεθῇ:

α) Ἐάν ὑψώσωμεν τόν σωλῆνα κατά 10 δακτύλους, εἰς ποῖον ὕψος θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος ἀπό τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου.



β) Ἐάν βυθίσωμεν τόν σωλῆνα κατά 10 δακτύλους, ποία θά εἶναι ἡ διαφορά τῶν ὑψῶν τοῦ ὑδραργύρου ἐντός καί ἐκτός τοῦ σωλῆνος.

<u>Λύσις</u>: α) Ἔστω x τό ὕψος, καθ' ὅ θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τόν σωλῆνα. Τότε ὁ ὄγκος του γίνεται:

$$(25+10-x)2 = (35-x)2$$

καί ἡ πίεσις: $76-x$. Κατά τόν νόμον Β.-Μ. ἔχομεν:

$$76 \cdot 50 = 2(35-x)(76-x), \quad 76 \cdot 25 = (35-x)(76-x),$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$1900 = 2660 - 35x - 76x + x^2,$$

$$x^2 - 111x + 760 = 0$$

$$x = \frac{111 \pm \sqrt{12321 - 3040}}{2} = \frac{111 \pm \sqrt{9281}}{2},$$

$$x = \frac{111 - 96,34}{2} = \frac{14,66}{2}, \quad x = 7,33$$

Ἄρα ὁ ὑδράργυρος θὰ ἀνέλθῃ ἐν τῷ σωλῆνι 7,33 δακτ.

β) Ἔστω ὅτι ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ κατὰ x δακτύλους.

Τότε ὁ ὄγκος γίνεται: $(25-10+x) \cdot 2 = (15+x) \cdot 2$ καὶ ἡ πίεσις $76+x$.

Κατὰ τὸν νόμον Β.-Μ.-, ἔχομεν:

$$50 \cdot 76 = (15+x) \cdot 2(76+x), \quad 25 \cdot 76 = (15+x)(76+x),$$

$$1900 = 1140 + 76x + 15x + x^2, \quad x^2 + 91x - 760 = 0$$

$$x = \frac{-91 \pm \sqrt{9001 + 3040}}{2} = \frac{-91 \pm \sqrt{12041}}{2},$$

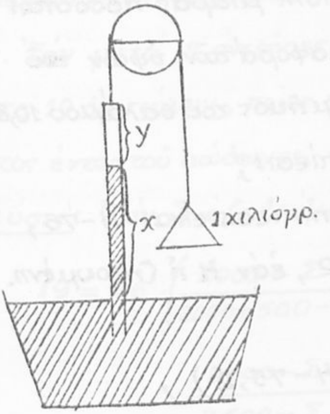
$$x = \frac{-91 \pm 109,73}{2} = \frac{18,73}{2}, \quad x = 9,365.$$

Ἄρα, ὁ ὑδράργυρος θὰ κατέλθῃ εἰς τὸν σωλῆνα 9,365 δακτ.

65) Κυλινδρικὸς σωλὴν ΑΒ, κλειστὸς κατὰ τὸ Α, ἔχει βυθισθῆ ἐντὸς λεκάνης ὑδραργύρου, περιέχει δὲ ὀλίγον ἀέρα. Ἡ ἐσωτερικὴ τομὴ αὐτοῦ εἶναι 4 δάκτυλοι. Νῆμα διερχόμενον διὰ τῆς αὔλακος εὐκινήτου τροχαλίας φέρει εἰς τὸ ἕτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ δίσκον, εἰς δὲ τὸν ἄλλον τὸν σωλῆνα ΑΒ. Ἐρματίζομεν τὴν συσκευήν, οὕτως ὥστε ἡ ἐπιφά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νεια Γ τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῷ σωλῆνι καὶ τῇ λεκάνῃ νά εἶναι εἰς τό αὐτό ὁριζόντιον ἐπίπεδον.



Τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος εἶναι τότε 10 δακτύλων. Ἐάν θέσωμεν ἐν τῷ δίσκῳ βάρος 1χλγρ., πόσον θά ὑψωθῇ ὁ σωλήν.

<u>Λύσις:</u> Τά 1000 γραμμάρια ἰσορροποῦν τόν ἀνελθόντα ὑδράργυρον. Ἐάν x τό ὕψος αὐτοῦ, ἔχομεν:

$$4 \cdot x \cdot 13,6 = 1000 \quad , \quad x = \frac{73,53}{4} = 18,3825 .$$

Ὅταν ἡ πίεσις εἶναι 76, ὁ ὄγκος εἶναι $4 \cdot 10$. Ὅταν ἡ πίεσις εἶναι $76 - 18,3825$, ὁ ὄγκος εἶναι $4y$.

Κατά τόν νόμον τοῦ Β.- Μ.-, ἔχομεν:

$$76 \cdot 10 \cdot 4 = 57,6175 \cdot x \cdot 4$$

καί $$x = \frac{7600000}{576175} = 13,1905 .$$

Ἐπομένως, ἡ διαφορά τοῦ ὕψους τοῦ ἀέρος εἶναι 3,1905.

Τό ὁλικόν ὕψος εἶναι:

$$\upsilon = 18,3825 + 3,1905 = 21,573$$

δηλαδή: $\upsilon = 21,573$ δάκτυλοι.

66) Ὁ θάλαμος σιφωνοειδοῦς βαρομέτρου εἶναι μήκους

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

10 δακτύλων καὶ περιέχει ὀλίγον ἀέρα, τὸ δὲ βαρόμετρον ἐδείκνυεν 75 δακτύλους. Ἀφαιρεθείσης μικρᾶς ποσότητος ὑδραργύρου δι' ἀναρροφήσεως, ἡ διαφορὰ τῶν ὑψῶν τοῦ ὑδραργύρου ἐγένετο 75,2 καὶ τὸ μῆκος τοῦ θαλάμου 10,8. Ποία ἦτο ἡ ἀληθὴς βαρομετρικὴ πίεσις;

<u>Λύσις</u>: Ὅταν ὁ ὄγκος εἶναι 10, ἡ πίεσις εἶναι $H-75$, ὅταν 10,8, ἡ πίεσις εἶναι $H-75,2$, ἐὰν H ἡ ζητουμένη. Κατὰ τὸν νόμον Β.-Μ.-, ἔχομεν:

$$10\,(H-75) = 10{,}8\,.\,(H-75{,}2)\,,$$

$$10H-750 = 10{,}8H-812{,}16 \quad , \quad 8H = 671{,}6$$

Ἄρα: $\quad H = 77{,}7$ δάκτυλοι.

Ἡ ἀληθὴς ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι, ὅθεν, 77,7 δακτύλων.

67) Ὁ κώδων ἀεραντλίας ἔχει χωρητικότητα 4 λιτρῶν, τὸ δὲ σῶμα αὐτῆς $\frac{1}{2}$ λίτρας. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐν τῷ κώδωνι εἶναι 75, πόση θὰ γίνῃ μετὰ 4 ἀντλήσεις;

<u>Λύσις</u>: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$H_4 = 75\left(\frac{4000}{4500}\right)^4, \text{ διότι: } H_\nu = H\left(\frac{V}{V+v}\right)^\nu.$$

$$H_4 = 75.\left(\frac{8}{9}\right)^4 = 75\cdot\frac{4096}{6561} = 25\cdot\frac{4096}{2187}\,,$$

$$H_4 = \frac{102400}{2187} = 46{,}8 \quad , \quad H_4 = 46{,}8$$

Μετὰ 4 ἀντλήσεις, συνεπῶς, ἡ πίεσις θὰ γίνῃ 46,8 δακτύλων.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

68) Σῶμά τι ἐτέθη ὑπό κώδωνα ἀεραντλίας, τῆς ὁποίας ὁ μέν κώδων εἶναι χωρητικότητος 2 λιτρῶν, τό δέ σῶμα 1/2 λίτρας. Ἐάν μετά 2 ἀντλήσεις ἡ πίεσις τοῦ ἐν τῷ κώδωνι ἀέρος ἐγένετο 19 δακτύλων, ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος τοῦ τεθέντος ἐντός τοῦ κώδωνος, ἐάν ἡ ἀρχική πίεσις ἦτο 76;

Λύσις: Ἐάν Σ ὁ ζητούμενος ὄγκος, ἔχομεν:

$$19 = 76 \cdot \left(\frac{2000-\Sigma}{2000+500-\Sigma}\right)^2 , \quad \frac{1}{4} = \left(\frac{2000-\Sigma}{2500-\Sigma}\right)^2$$

$$\frac{2000-\Sigma}{2500-\Sigma} = \pm\frac{1}{2} .$$

α) $(2000-\Sigma).2 = 2500-\Sigma \quad , \quad 4000-2\Sigma = 2500-\Sigma$

$$4000-2500 = 2\Sigma-\Sigma \quad , \quad 1500 = \Sigma .$$

β) $(2000-\Sigma)2 = -2500\Sigma \quad , \quad 4000+2500 = 3\Sigma ,$

$$65000 = 3\Sigma \quad , \quad \Sigma = 2166,66.$$

69) Ποῖον θά εἶναι τό ὕψος τῆς βαρομετρικῆς στήλης εἰς τήν κορυφήν τοῦ πύργου τοῦ Eiffel (333 μ.), ὅταν εἰς τούς πρόποδας αὐτοῦ εἶναι 0,76 μ;

Λύσις: Ἔστω x τό ὕψος τῆς βαρομετρικῆς στήλης. Ἔχων ὑπ' ὄψιν μου ὅτι τό ὕψος ἐλαττοῦται κατά 1 εκατ. ἀνά 105,2 μέτρα, θά ἔχω:

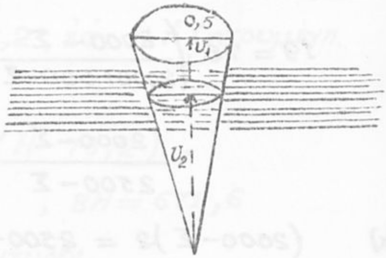
$$(76-x).105,2 = 333 \quad , \text{ ἐξ οὗ:}$$

$$x = 72,83 \text{ εκατ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

70) Βυθίζομεν διά τής κορυφής έντός ύδραργύρου, ού ή πυκνότης είναι 13,596, ένα κώνον έκ σιδήρου, έχοντα 22 έκ. τού μέτρου ύψος καί άκτίνα βάσεως 0,5 έκ. καί πυκνότητα σιδήρου 7,788. Κατά πόσον θά βυθισθή ό κώνος έντός τού ύδραργύρου;

<u>Λύσις:</u> Έστω $υ_2$ τό ύψος τού βυθιζομένου τμήματος (όπερ τμήμα είναι ένας κώνος). Εφόσον θά έπιπλέη τό βάρος τού σιδηρού κώνου Β, θά ίσούται μέ τό βάρος κώνου έξ ύδραργύρου, ύψους υ, δηλαδή δέον νά έχη βυθισθή ό σιδηρούς κώνος. Άλλ' ώς γνωστόν έχω:



$$\frac{\theta \text{. όγκος τού κώνου έκ σιδήρου}}{\vartheta \text{. όγκος τού κώνου έκ ύδραργύρου}} = \frac{13,596}{7,788},$$

δηλαδή όγκοι τού αύτού βάρους είναι άντιστρόφως άνάλογοι πρός τάς πυκνότητας· έξ άλλου όμως οί όγκοι είναι άνάλογοι πρός τούς κύβους τών ύψών, δηλαδή:

$$\frac{\theta}{\vartheta} = \frac{υ_1^3}{υ_2^3},$$

(όπου $υ_1$ τό ύψος τού σιδηρού κώνου).

$$\frac{υ_1^3}{υ_2^3} = \frac{13,596}{7,788} \quad \text{ή} \quad υ_2^3 = υ_1^3 \frac{7,788}{13,596}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\upsilon_1 = 22$, ἔχομεν:

$$\upsilon_2 = 22\sqrt{\frac{7,788}{13,596}}$$. Ἄρα: $\upsilon_2 = 18,271$ ἑκ.

Θὰ βυθισθῇ, λοιπόν, ὁ κῶνος τοῦ σιδήρου κατὰ 18,271 ἑκ. τοῦ μέτρου.

71) Κύβος ἐξ ἀργιλλίου (δ= 2,35) εἶναι ἐμβαπτισμένος ἐντὸς Hg (δ= 13,6), ἔχει δὲ πλευρὰν 20 ἑκ. Ζητεῖται ποῖον μέρος τοῦ ὕψους του εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ Hg. (Πολυτεχνείου).

Λύσις: Ὡς γνωστὸν τὸ Β=Α , ἀλλ' ὅμως:

$$B = 20^3 \cdot 2,35 \quad \text{καὶ} \quad A = 20^2 \cdot x \cdot 13,6 ,$$

ὅθεν: $$20^3 \cdot 2,35 = 20^2 \cdot x \cdot 13,6 ,$$

ἐξ οὗ: $$x = \frac{470}{136}$$ ἑκατοστόμετρα

72) Ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀεραντλίας, περιεχούσης ἀέρα ὑπὸ πίεσιν 760 χιλ., θέτομεν ζυγὸν καὶ ἐκ τῶν ἄκρων τῆς φάλαγγος αὐτοῦ ἀναρτῶμεν δύο κύβους, ὧν ὁ μὲν εἷς ἔχει ἀκμὴν 3 δακτ. καὶ βάρος 26,324 γραμ., ὁ δὲ ἄλλος 5 δακτ. καὶ βάρος 26,259 γραμ. Νὰ εὑρεθῇ πόσην πίεσιν πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀήρ, ἵνα ἡ φάλαγξ ἰσορροπῇ;

Λύσις: Ἐὰν α ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος καὶ 76 ἑκατ. πίεσιν καὶ θ ἡ πυκνότης αὐτοῦ μετὰ τὴν ἀραίωσιν, πρέπει:

$$26,324 + 27\alpha - 27\theta = 26,259 + 125\alpha - 125\theta .$$

Ἀλλ' εἰς 76 ἑκ. ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι $\alpha = 0,001293$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅθεν: $0{,}065 + 98\theta = 98\alpha = 0{,}126714$,

ἄρα: $98\theta = 0{,}061714$ καί $\theta = 0{,}000629$.

Αἱ πιέσεις εἶναι ἀνάλογοι τῶν πυκνοτήτων δι' ὄγκον σταθερόν, ἄρα:

$$\frac{x}{76} = \frac{0{,}000629}{0{,}001293} = \frac{629}{1293}, \quad x = 369 \text{ κιλ.}$$

Ὅθεν, ὅταν ἰσορροπῇ, ἡ πίεσις θά εἶναι 369 χιλ. στήλης ὑδραργύρου.

73) Ἀραιόμετρον τοῦ Φαρενάϊτ ζυγίζει 50 γρ., ἄν δέ θέσωμεν ἐπ' αὐτοῦ 10 γρ. βυθίζεται μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς εἰς ὑγρόν, ἔχον εἰδ. βάρος 0,75.

Πόσον βάρος πρέπει νά θέσωμεν, ὥστε νά βυθισθῇ μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς τό ὕδωρ;

<u>Λύσις:</u> Ἔστω x τό βάρος. Ἐάν θ ὁ ὄγκος τοῦ ἀραιομέτρου κατά πρῶτον:

$$50 + 10 = \theta \cdot 0{,}75 \quad \text{ἤ} \quad 60 = \theta \cdot 0{,}75 \quad \text{καί } \theta = 80 \text{ κυ.}$$

Εἰς δέ τό ὕδωρ πρέπει:

$$50 + x = 80 \quad \text{ὅθεν:} \quad x = 30 \text{ γρ.}$$

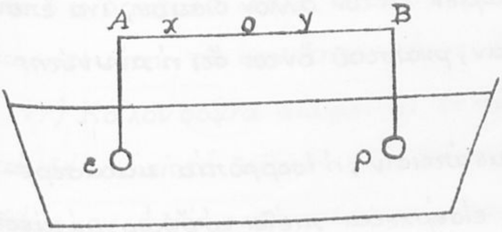
Ἄρα διά τό ὕδωρ θά βάλλω 30 γρ.

74) Δύο σφαῖραι μεταλλικαί, τῶν ὁποίων αἱ πυκνότητες εἶναι 5 καί 10, ἔχουν τό αὐτό βάρος Β ἐν τῷ κενῷ. Ἐξαρτῶμεν αὐτάς εἰς τά ἄκρα μοχλοῦ καί βυθίζομεν ἐντός ὕδατος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ποῖος πρέπει νά εἶναι ὁ λόγος τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ, ἵνα εὑρεθῇ ἐν ἰσορροπίᾳ;

<u>Λύσις:</u> Ἡ ἄνωσις, τήν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ε ἰσοῦται μέ τό βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος, ἤτοι μέ τόν ὄγκον αὐτοῦ.



Ἀλλ' ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\frac{B}{5}$, διότι 5 εἶναι τό εἰδ. βάρος. Ἐπομένως, εἰς τό ἄκρον A τοῦ μοχλοῦ ἐνεργεῖ βάρος:

$$B-\frac{B}{5}=\frac{4B}{5}.$$

Ἡ ἄνωσις, τήν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ ρ, ἰσοῦται μέ $\frac{B}{10}$. Ἐπομένως εἰς τό ἄκρον B τοῦ μοχλοῦ ἐνεργεῖ βάρος:

$$B-\frac{B}{10}=\frac{9B}{10}.$$

Ἐάν δέ x καί y τά μήκη τῶν βραχιόνων, ἔχομεν:

$$\frac{4B}{5}x=\frac{9B}{10}y \quad \text{καί} \quad 8x=9y$$

καί $$\frac{x}{y}=\frac{9}{8}$$

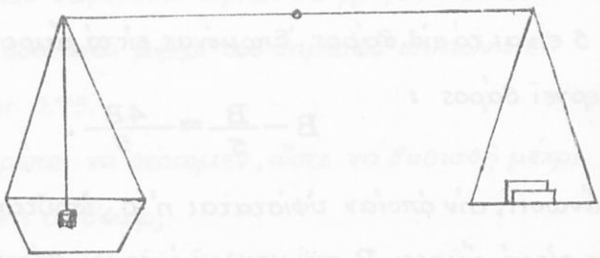
ὁ ζητούμενος ἄρα λόγος εἶναι 9:8.

75) Ἀγγεῖον περιέχον ἔλαιον, ἐτέθη ἐπί τοῦ ἑτέρου τῶν δίσκων ζυγοῦ καί ἰσορροπήθη μέ χόνδρους μολύβδου. Ἐάν ἐμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαπτίσωμεν είς τό περιεχόμενον έν τῷ δοχείῳ ἔλαιον, κύβον μολύβδου, πλευρᾶς 5 δακτύλων, κρατοῦντες αὐτόν μετέωρον έν τῷ έλαίῳ τῇ βοηθείᾳ λεπτοῦ νήματος, ποῖον βάρος πρέπει νά προσθέσωμεν είς τόν ἄλλον δίσκον, ἵνα έπαναφέρωμεν τήν ἰσορροπίαν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι 0,912.

Λύσις: Κατά τήν ἐμβάπτισιν, ἡ ἰσορροπία καταστρέφεται, διότι ὅταν ὁ κύβος είσέρχεται πιέζει τό ὕδωρ, μέ πίεσιν ἴσην πρός τήν ὑφισταμένην ἄνωσιν, κατά τό ἀντίστροφον τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους.



Κατά ταῦτα, τό βάρος, τό ὁποῖον πρέπει νά θέσωμεν έπί τοῦ ἑτέρου δίσκου, ἰσοῦται μέ τήν ἄνωσιν, ἥν ὑφίσταται ὁ βυθισθείς κύβος. Ἀλλ' αὐτή ἰσοῦται μέ: $125 \cdot 0,912 = 114$.

Ἤτοι πρέπει νά θέσωμεν έπί τοῦ ἑτέρου τῶν δίσκων 114 γρ.

76) Χρυσοῦν ἀντικείμενον, εἰδικοῦ βάρους 19,25 ἔχει βάρος 96,25 γραμμάρια, ἐμβαπτιζόμενον δέ έν τῷ ὕδατι, ἐκτοπίζει ὕδωρ, βάρους 6 γραμμαρίων. Τό ἀντικείμενον τοῦτο εἶναι συμπαγές ἤ κοῖλον καί ποία εἶναι ἡ χωρητικότης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς κοιλότητος, ἄν εἶναι κοῖλον;

<u>Λύσις</u>: Ὁ ὄγκος τοῦ ἀντικειμένου ἰσοῦται μέ $\frac{96,25}{19,25} = 5$ κυβικοί δάκτυλοι, ὁ δέ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ εἶναι 6 κ. δάκτυλοι. Ἄρα, τό ἀντικείμενον εἶναι κοῖλον καί ἡ χωρητικότης τῆς κοιλότητος εἶναι 1 κ. δ.

77) Κοῖλον σῶμα αἰωρεῖται ἐν τῷ ὕδατι. Διά νά αἰωρῆται δέ καί εἰς τό θειϊκόν ὀξύ, πυκνότητος 1,85, πρέπει νά θέσωμεν ἐντός τῆς κοιλότητος αὐτοῦ ἕρμα βάρους 42,5 γραμμαρίων. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

<u>Λύσις</u>: Ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ παραμένει πάντοτε ὁ αὐτός, ὁπότε τό ἕρμα προστίθεται εἰς τήν κοιλότητα τοῦ σώματος. Ἔχομεν δέ:

$$B \cdot 1,85 = B + 42,5,$$

ἔνθα B εἶναι τό βάρος, ὅπερ ἰσοῦται μέ τόν ὄγκον ἤ τήν ἄνωσιν, ὡς αἰωρούμενον εἰς τό ὕδωρ, ἤτοι:

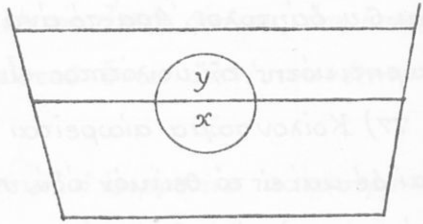
$$0,85\, B = 42,5 \quad \text{καί} \quad B = 50.$$

Ἤτοι ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι 50 κυβ. δακτ.

78) Σφαῖρα εἰδικοῦ βάρους 0,95 καί ὄγκου 100 κυβ. δακτύλων, ἐπιπολάζει ἐπί τοῦ ὕδατος ἀγγείου. Χύνομεν ἐν τῷ ἀγγείῳ ἔλαιον, εἰδ. βάρους 0,9, μέχρις οὗ ἡ σφαῖρα καλυφθῇ ὁλοσχερῶς. Ποῖος θά εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τῆς σφαίρας, τό ὁποῖον θά εὑρίσκηται τότε ἐντός τοῦ ὕδατος;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Έστω x τό μέρος τής σφαίρας, τό βυθιζόμενον έν τῷ ὕδατι καί y τό βυθιζόμενον έν τῷ ἐλαίῳ.



Ἡ σφαίρα ὑφίσταται δύο ἀνώσεις, ἄνωσιν τοῦ x ἐκ τοῦ ὕδατος καί ἄνωσιν τοῦ y ἐκ τοῦ ἐλαίου. Ἡ πρώτη ἰσοῦται μέ x, ἡ δευτέρα μέ $0,9y$. Ἔχομεν δέ:

$$x + 0,9y = 95 \quad . \quad \text{Ἀλλά} \quad x + y = 100$$

ἄρα $\quad 0,1y = 5 \quad$ καί $\quad y = 50 \quad , \quad x = 50$

Ἐπομένως, ἡ σφαῖρα βυθίζεται έν τῷ ὕδατι κατά τό ἥμισυ.

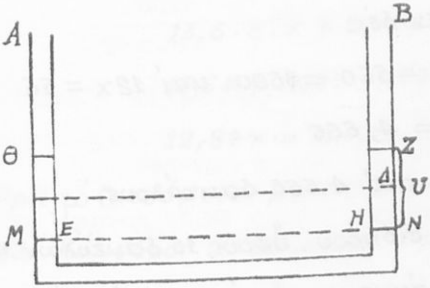
79) Δύο κατακόρυφοι σωλῆνες, τομῆς 2 τετραγωνικῶν δακτύλων καί συγκοινωνῦντες δι᾽ ὁριζοντίου σωλῆνος, περιέχουν ὑδράργυρον μέχρι σημείου τινός. Χύνομεν εἰς τόν ἕτερον τούτων 60 γραμμάρια ὑγροῦ, ἐλαφροτέρου τοῦ ὑδραργύρου, γνωστοῦ δέ ὄντος ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6, νά εὑρεθῇ κατά πόσα χιλιοστά τοῦ μέτρου θ᾽ ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τόν ἄλλον σωλῆνα.

Λύσις: Ὅταν τά ὑγρά ἰσορροποῦν, αἱ πιέσεις τῶν ἐπιφανειῶν ΜΕ καί ΗΝ εἶναι ἴσαι, ἤτοι:

$$60 = 2υ \cdot 13,6 \quad \text{ἤ} \quad 30 = υ \cdot 13,6 \quad \text{καί} \quad υ = 2,206$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(ἐάν υ εἶναι ἡ διαφορά τοῦ ὕψους τοῦ ὑδραργύρου καί εἰς τούς δύο σωλῆνας). Ἀλλά



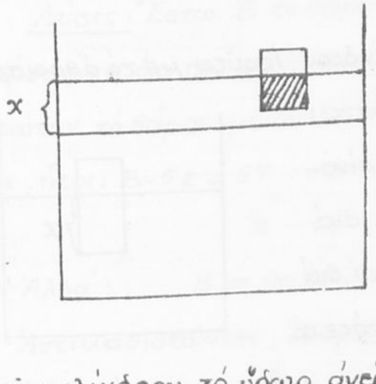
τό ζητούμενον ὕψος ΔΖ εἶναι τό ἥμισυ τοῦ Θ, διότι οἱ δύο σωλῆνες εἶναι τῆς αὐτῆς διαμέτρου καί ἑπομένως:

$M\Theta = \Delta Z$, ἤτοι:

$\Delta Z = \frac{1}{2}\, 2,206$ καί $\Delta Z = 1,103$.

Ἤτοι ὁ ὑδράργυρος θά ἀνέλθῃ εἰς τόν σωλῆνα B κατά 11,03 χιλιοστά.

80) Κυλινδρικόν ἀγγεῖον, τομῆς 120 τετραγωνικῶν δακτύλων, περιέχει ὕδωρ, μέχρις ὕψους 30 δακτύλων. Ἐάν ρίψωμεν ἐν αὐτῷ κύλινδρον ἐκ ξύλου, τομῆς 80 τετραγωνικῶν δακτύλων καί ὕψους 10 δακτύλων, πόσον θά ἀνέλθῃ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐν τῷ ἀγγείῳ, ἐάν ἡ πυκνότης εἶναι 0,7;



Λύσις: Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος εἶναι $120 . 30 = 3600$. Ἔστω δέ ὅτι μετά τήν ἐμβάπτισιν τοῦ κυλίνδρου, τό ὕδωρ ἀνέρχεται κατά ὕψος x. Τότε ὁ ὄγκος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὐτοῦ εἶναι : $120(30+x) - 560$,

ἰσοῦται δέ ὁ ὑπό τοῦ βυθιζομένου μέρους ὄγκος μέ:

$800 \cdot 0,7 = 560$. Ἔχομεν δέ :

$$120,30 + 120x - 560 = 3600 \quad \text{καί} \quad 12x = 56$$

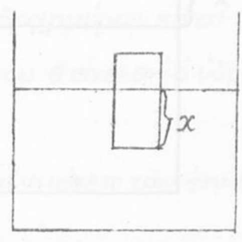
ἄρα καί : $x = 4,666 \ldots\ldots$

Ἤτοι τό ὕδωρ θά ἀνέλθῃ κατά 4,666 δακτύλους.

81) Θέτομεν κύλινδρον σιδήρου, ὕψους 15 δακτύλων καί εἰδικοῦ βάρους 7,8, ἐντός ἀγγείου περιέχοντος ὑδράργυρον καί οἰνόπνευμα εἰς ποσότητα τοιαύτην, ὥστε ὁ κύλινδρος νά εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου κεκαλυμμένος.

Ὁ κύλινδρος ἐπιπολάζει κατακορύφως ἐπί τῆς ἐπιφανείας χωρισμοῦ τῶν δύο ὑγρῶν. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τοῦ μέρους τοῦ κυλίνδρου τοῦ εὑρισκομένου ἐντός τοῦ ὑδραργύρου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τό εἰδικόν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6, τοῦ δέ οἰνοπνεύματος 0,79.

<u>Λύσις</u> : Τό βάρος τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀνώσεων, τάς ὁποίας ὑφίσταται ὑπό τοῦ ὑδραργύρου καί τοῦ οἰνοπνεύματος. Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ x τό ζητούμενον μῆκος καί διά τοῦ ε τήν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, τότε τό



βάρος αὐτοῦ εἶναι : $15 \cdot 7,8 \cdot \varepsilon = 117 \cdot \varepsilon$ γραμμάρια, ἤ ἐκ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ ὑδραργύρου ἄνωσις 13,6 . x . ε καὶ ἡ ἐκ τοῦ οἰνοπνεύματος 0,79 ε(15 − x). Ἔχομεν δέ:

$$13{,}6 \cdot \varepsilon \cdot x + 0{,}79\,\varepsilon\,(15 - x) = 117 \cdot \varepsilon,$$

$$13{,}6\,x + 11{,}85 - 0{,}79\,x = 117,$$

$$12{,}81\,x = 105{,}15 \quad \text{καὶ} \quad x = 8{,}2.$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 8,2 δάκτυλοι.

82) Κύλινδρος 20 δακτύλων ὕψους, κρέμαται ἀπὸ τὸν ἕτερον τῶν δίσκων ζυγοῦ. Ὅταν 5 δάκτυλοι τοῦ κυλίνδρου τούτου βυθισθῶσιν ἐν τῷ ὕδατι, πρέπει νὰ θέσωμεν 57 γραμμάρια εἰς τὸν ἄλλον δίσκον, διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὴν ἰσορροπίαν. Ὅταν δὲ 12 δάκτυλοι αὐτοῦ βυθισθῶσιν ἐν ὑγρῷ, πυκνότητος 0,83, πρέπει νὰ θέσωμεν 22 γραμμάρια εἰς τὸν ἄλλον δίσκον, διὰ τὴν ἰσορροπίαν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος καὶ ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω B τὸ βάρος καὶ δ ἡ πυκνότης. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, τότε κατὰ τὴν πρώτην, τὸ βάρος μεῖον τῇ ἀνώσει, ἰσοῦται μὲ 57 γραμμάρια, ἤτοι: $B - 5\varepsilon = 57$. Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν:

$$B - 12 \cdot 0{,}83 \cdot \varepsilon = 22.$$

Ἀλλά: $B = 20 \cdot \varepsilon \cdot \delta$, ἄρα καί: $\varepsilon = \dfrac{B}{20\delta}$.

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$B - \frac{B}{4\delta} = 57, \quad 4\delta B - B = 228\delta,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί $B = \dfrac{228\delta}{4\delta - 1}$ καί: $B - \dfrac{0{,}83 \cdot 3{,}13}{5\delta} = 22$,

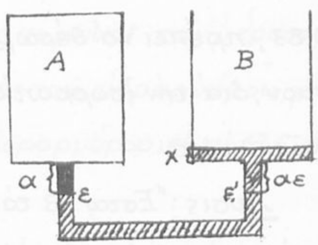
$$5\delta B - 2{,}49B = 110\delta \quad \text{καί} \quad B = \frac{110\delta}{5\delta - 2{,}49}$$

Ἄρα: $\dfrac{228}{4\delta - 1} = \dfrac{110}{5\delta - 2{,}49}$, $1140\delta - 567{,}72 = 440\delta - 110$,

$$700\delta = 457{,}72 \quad \text{καί} \quad \delta = 0{,}654.$$

Ἤτοι, τό μέν βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι 92,27 γραμμ., ἡ δέ πυκνότης αὐτοῦ 0,654.

83) Δύο κυλινδρικά ἀγγεῖα Α καί Β, τομῆς 80 δακτύλων τετρ. ἕκαστον καί ὕψους 28,6 δακτύλων, συγκοινωνοῦν διά σωλῆνος ΓΔΕ, τομῆς 10 τετρ. δακτύλων. Ὁ σωλήν ΓΔΕ εἶναι πλήρης ὑδραργύρου. Ἐάν εἰς τό ἀγγεῖον Α θέσωμεν ὕδωρ, μέχρις οὗ τοῦτο πληρωθῇ ἐντελῶς, πόσον θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος εἰς τό ἄλλο ἀγγεῖον;



Λύσις: Ἔστω x τό ζητούμενον ὕψος καί α τό ὕψος, καθ' ὅ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου θά κατέλθῃ εἰς τόν σωλῆνα. Αἱ πιέσεις, τάς ὁποίας δέχονται αἱ ε καί ε', εἶναι ἴσαι. Καί ἡ μέν πίεσις τῆς ε εἶναι $28{,}6 + \alpha$, ἡ δέ τῆς ε' $(\alpha + x)13{,}6$. Ἔχομεν δέ:

$$28{,}6 + \alpha = 13{,}6(\alpha + x).$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

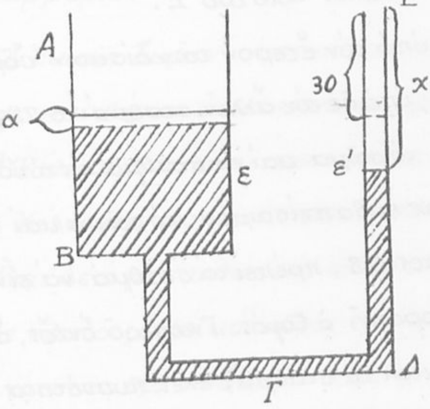
Ἀλλά: $80\cdot x = 10\cdot\alpha$ ἤ $\alpha = 8x$.

Ἐπομένως: $28{,}6 + 8x = 13{,}6\cdot 9x = 122{,}4\cdot x$,

$114{,}4\cdot x = 28{,}6$ καί $x = 0{,}25$.

Ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου θά ἀνέλθῃ εἰς τό δοχεῖον Β κατά 0,25 τοῦ δακτύλου.

84) Σωλήν, δίς κεκομμένος, ΑΒΓΔΕ καταλήγει εἰς δύο βραχίονας κυλινδρικούς κατακορύφως, ΑΒ καί ΔΕ, τῶν ὁποίων αἱ διάμετροι εἶναι ἀντιστοίχως 6 δακτύλων καί 1 δακτύλου. Χύνομεν εἰς τόν σωλῆνα ὑδράργυρον τόσον, ὥστε ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἰς τόν βραχίονα ΔΕ νά εἶναι εἰς ἀπόστασιν 30 δακτύλων ἀπό τοῦ χείλους αὐτῆς Ε.



Ζητεῖται, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τοῦ Ε, θά κατέλθῃ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ἐν τῷ σωλῆνι ΔΕ, ἐάν πληρώσωμεν αὐτήν μέ ὕδωρ.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω x ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Αἱ ἐπιφάνειαι ε καί ε' ὑφίστανται ἴσας πιέσεις. Ἐάν α εἶναι τό ὕψος, εἰς ὅ ἀνῆλθεν ὁ ὑδράργυρος εἰς τό Α, τότε ἡ πίεσις τῆς ε εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$(\alpha+x-30)\cdot 13{,}6$, τῆς δέ ε' x κατά τετραγωνικόν δάκτυλον.

Ἔχομεν δέ :

$$x = (\alpha + x - 30)\cdot 13{,}6 .$$

Ἀλλά : $\pi\cdot 3^2\cdot\alpha = \pi\cdot 1^2\cdot(x-30)$,

ἤτοι: $9\alpha = x-30$ καί $\alpha = \dfrac{x-30}{9}$.

Ἑπομένως: $x = \left(x-30+\dfrac{x-30}{9}\right)\cdot 13{,}6$, $9x = 10(x-30)13{,}6$

$$9x = 136x - 4080 , \quad 127x = 4080 , \quad x = 32$$

Ἤτοι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἰς τόν σωλῆνα ΔΕ θά κατέλθῃ εἰς ἀπόστασιν 32 δακτύλων ἀπό τοῦ Ε.

85) Ἐάν ἐξαρτήσωμεν ὑπό τόν ἕτερον τῶν δίσκων ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ σῶμά τι, ὑπό δέ τόν ἄλλον σταθμά 76,72 γραμμαρίων καί ἐμβαπτίσωμεν τό σῶμα καί τά σταθμά εἰς τό ὕδωρ, ὁ ζυγός ἰσορροπεῖ. Ἐάν ὅμως ἐμβαπτίσωμεν τό σῶμα καί τά σταθμά εἰς ὑγρόν πυκνότητος 0,8 , πρέπει τά σταθμά νά εἶναι 77 γραμμάρια ,διά νά ἰσορροπῇ ὁ ζυγός. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τό μέταλλον , ἐξ οὗ σύγκειται τά σταθμά, ἔχει πυκνότητα 8,8, νά εὑρεθῇ τό βάρος καί ἡ πυκνότης τοῦ σώματος.

<u>Λύσις</u> : Ἔστω Β τό βάρος καί δ ἡ πυκνότης αὐτοῦ. Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν, ἔχομεν :

$$B - \frac{B}{\delta} = 76{,}72 - \frac{76{,}72}{8{,}8} \quad , \quad B\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right) = 68$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κατά δέ τήν δευτέραν:

$$B - \frac{\beta}{\delta} \cdot 0{,}8 = 77 - \frac{77}{8{,}8} \cdot 0{,}8 \quad , \quad B\left(\frac{\delta - 0{,}8}{\delta}\right) = 70$$

Διαιροῦντες δέ ταύτας κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{\delta - 1}{\delta - 0{,}8} = \frac{34}{35} \quad \text{καί} \quad 35\delta - 35 = 34\delta - 27{,}2 \quad , \quad \delta = 7{,}8$$

$$B\left(\frac{\delta - 0{,}8}{\delta}\right) = 70 \quad , \quad B \cdot \frac{7}{7{,}8} = 70 \quad , \quad B = 78.$$

Ἤτοι ἡ πυκνότης μέν τοῦ σώματος εἶναι 7,8, τό δέ βάρος αὐτοῦ 78 γραμμάρια.

86) Ἐκ τῶν ἄκρων νήματος διερχομένου διά τῆς αὔλακος τροχαλίας καί βάρους ἀνεπαισθήτου, κρέμανται:

α) Κύλινδρος χαλκοῦ, πυκνότητος 8,8 καί μήκους 20 δακτύλων.

β) Κύλινδρος σιδήρου, πυκνότητος 7,8 καί μήκους 15 δακτ.

Εἶναι δε ὁ μέν κύλινδρος τοῦ χαλκοῦ βυθισμένος ὁλοσχερῶς ἐντός ὕδατος, ὁ δέ κύλινδρος τοῦ σιδήρου ἐντός οἰνοπνεύματος, πυκνότητος 0,8. Οὕτω τό σύστημα ἰσορροπεῖ. Ἐάν ἀφαιρέσωμεν τό ἀγγεῖον τό περιέχον τό οἰνόπνευμα, πόσον μέρος τοῦ χαλκίνου κυλίνδρου θά ἐξέλθῃ τοῦ ὕδατος;

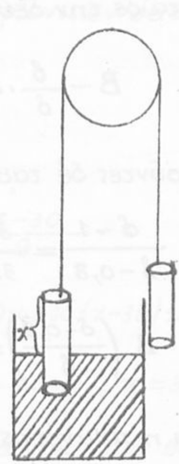
<u>Λύσις</u>: Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν, ἔχομεν:

$$20 \cdot \varepsilon \cdot 8{,}8 = 20, \qquad \varepsilon = 15 \cdot \varepsilon' \cdot 7{,}8 - 15 + \varepsilon' \cdot 0{,}8 \quad ,$$

$$4 \cdot \varepsilon \cdot 7{,}8 = 3 \cdot \varepsilon' \cdot 7 \quad , \qquad 31{,}2 \cdot \varepsilon = 21 \cdot \varepsilon' \quad ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐάν ε καί ε' εἶναι αἱ βάσεις τῶν κυλίνδρων, ἀντιστοίχως.



Κατά τήν δευτέραν περίπτωσιν, ἔχομεν:

$$20 \cdot \varepsilon \cdot 8{,}8 - (20 - x)\varepsilon = 15 \cdot \varepsilon' \cdot 7{,}8 \,,$$

$$20 \cdot \varepsilon \cdot 8{,}8 - 20\varepsilon + x \cdot \varepsilon = 117\varepsilon' \,,$$

$$(156 + x)\varepsilon = 117\varepsilon' .$$

Διαιροῦντες ταύτην διά τῆς προηγουμένης, ἔχομεν:

$$\frac{156 + x}{31{,}2} = \frac{117}{21} = \frac{39}{7} \,,$$

$$156 + x = \frac{1216{,}8}{7} = 173{,}83 \quad \text{καί} \quad x = 17{,}83 .$$

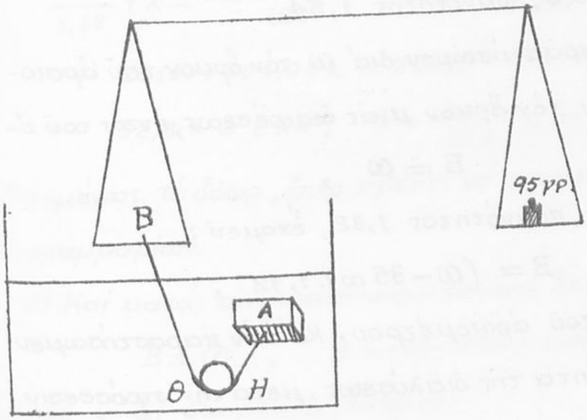
Ὁ χάλκινος κύλινδρος θά ἐξέλθῃ τοῦ ὕδατος κατά 17,83 δακτ.

87) Τεμάχιον φελλοῦ ἔχει ἐν τῷ ἀέρι βάρος 30 γραμμαρίων. Δένομεν αὐτό εἰς τό ἄκρον Α νήματος, διερχομένου διά τροχαλίας, εὑρισκομένης εἰς τόν πυθμένα δοχείου, πλήρους ὕδατος. Τό ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος θέτομεν ὑπό τόν ἕτερον τῶν δίσκων ζυγοῦ, θέτοντες δέ εἰς τόν ἄλλον δίσκον σταθμά 95 γραμμαρίων, κατορθοῦμεν ὥστε ὁ φελλός νά εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ ὕδατος, ἡ δέ φάλαγξ τοῦ ζυγοῦ ὁριζοντία. Ποία εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ φελλοῦ;

<u>Λύσις</u>: Ἐπί τοῦ δίσκου Β ἐνεργεῖ δύναμις ἴση πρός τήν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διαφοράν τοῦ βάρους τοῦ φελλοῦ ἀπό τῆς ἀνώσεως, τήν ὁποίαν ὑφίσταται οὗτος, ἥτις ἰσορροπεῖται ἐπί τοῦ βάρους τῶν 95 γραμμαρίων.



Τοῦτο δέ, διότι ὁλόκληρος ἡ δύναμις ἡ ἐνεργοῦσα εἰς τό Η παραμένει σταθερά, μεταβάλλουσα μόνον τήν διεύθυνσιν αὐτῆς ὑπό τῆς τροχαλίας.

Ἤτοι ἔχομεν : $\frac{B}{\delta} = \frac{30}{\delta}$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ φελλοῦ, ὅστις ἰσοῦται καί μέ τήν ἄνωσιν, ἐάν δέ δ ἡ πυκνότης αὐτοῦ. Ἐπομένως, ἔχομεν:

$$\frac{30}{\delta} - 30 = 95 \;, \quad \frac{30}{\delta} = 125 \;, \quad \delta = \frac{6}{25} \quad \delta = 0,24$$

Τό ζητούμενον εἰδ. βάρος τοῦ φελλοῦ εἶναι 0,24.

88) Διάλυσις ἅλατος, πυκνότητος 1,32, δεικνύει 35 βαθμούς εἰς ἀραιόμετρον Baumé.

α) Πόσα γραμμάρια ὕδατος πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς 100 γραμμάρια διαλύσεως, ἵνα τό ἀραιόμετρον δεικνύῃ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐν τῇ διαλύσει 25 βαθμούς;

β) Ποίαν διαίρεσιν θὰ δείξῃ τὸ ἀραιόμετρον τοῦτο, ἐὰν ἐμβαπτισθῇ εἰς θειϊκὸν ὀξύ, πυκνότητος 1,84 ;

<u>Λύσις</u>: Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Ω τὸν ὄγκον τοῦ ἀραιομέτρου καὶ διὰ ω τὸν ὄγκον μιᾶς διαιρέσεως, ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἔχομεν :

$$B = Ω \quad ,$$

ἐντὸς δὲ τοῦ ὑγροῦ, πυκνότητος 1,32, ἔχομεν :

$$B = (Ω - 35\,ω).1,32 \quad ,$$

ἔνθα Β τὸ βάρος τοῦ ἀραιομέτρου. Καὶ ἐὰν παραστήσωμεν διὰ δ τὴν πυκνότητα τῆς διαλύσεως, μετὰ τὴν πρόσθεσιν ὕδατος, ἔχομεν:

$$B = (Ω - 35ω)\cdot δ$$

Ἀντικαθιστῶντες δέ, ἔχομεν :

$$Ω = (Ω - 35ω).1,32 \quad , \quad Ω = 1,32.Ω - 46,2ω \, ,$$

$$0,32Ω = 46,2ω \quad , \quad Ω = (Ω - 25ω)\cdot δ \, ,$$

$$Ω = \frac{4620.ω}{32} = \frac{1155\,ω}{8} \, , \quad \frac{1155ω}{8} = \left(\frac{1155ω}{8} - 25ω\right)δ$$

$$1155 = 1155δ - 200δ \quad , \quad 1155 = 955\,δ \quad , \quad δ = \frac{231}{191}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ x τὸ βάρος τοῦ ὕδατος, ὅπερ θὰ προσθέσωμεν, ἔχομεν:

$$O = \frac{B}{δ} = \frac{(100+x)\cdot 191}{231} \, .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλ' ὁ ὄγκος οὗτος ἰσοῦται μέ $\frac{100}{1,32}+x$. Ἐπομένως:

$$\frac{100}{1,32}+x=\frac{(100+x)191}{231}, \quad \frac{100+1,32x}{1,32}=\frac{19100+191x}{231},$$

$$23100+304,92x=25212+252,12x,$$

$$52,8x=2112, \quad x=\frac{2112}{52,8}=40.$$

Ἐπομένως, τό ὕδωρ, ὅπερ πρέπει νά προσθέσωμεν, εἶναι 40 γραμμαρίων.

β) Καί κατά τήν περίπτωσιν ταύτην, ἔχομεν:

$$B=\omega, \quad B=(\omega-35\omega)\cdot 1,32.$$

Ἐάν δέ y αἱ διαιρέσεις, ἔχομεν:

$$B=(\omega-y\omega)\cdot 1,84, \quad \text{ἤτοι:}$$

$$\omega=1,32\omega-46,2\omega, \quad 0,32\omega=46,2\omega \quad \text{καί} \quad \omega=\frac{1155\omega}{8}$$

$$\omega=1,84\omega-1,84\omega y, \quad \frac{115\omega}{8}=1,84, \quad \frac{115\omega}{8}=1,84\omega y.$$

$$1155=2125,2-14,72y, \quad 14,72y=970,2$$

$$\text{καί} \quad y=66 \text{ περίπου.}$$

Τό ἀραιόμετρον, ὅθεν, ἐάν ἐμβαπτισθῇ εἰς θειϊκόν ὀξύ, θά δείξῃ 66 περίπου.

89) 100 γραμμάρια διαλύσεως θαλασσίου ὕδατος, περιέχον 10 γραμμάρια ἅλατος, ἡ δέ πυκνότης τῆς διαλύσεως εἶναι 1,07.

Πόσα γραμμάρια ἅλατος πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τήν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

διάλυσιν ταύτην, ἵνα ἡ πυκνότης της γίνη 1,2 ;

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\delta = \frac{B}{O} \quad , \text{ ἤτοι ἐνταῦθα:}$$

$$1,2 = 100 + x \ .$$

Ἐάν E ἡ πυκνότης τοῦ ἅλατος, ἔχομεν:

$$\frac{100}{1,07} + \frac{x}{E} \quad , \quad 1,2 = \frac{107\,E\,(100+x)}{100E + 1,07x} \ ,$$

$$120E + 1,284\,x = 107\,E + 1,07 \cdot E \cdot x \ ,$$

$$(1,07\,E - 1,284) = 13\,E \quad , \text{ ἐξ οὗ}$$

$$x = \frac{13 \cdot E}{1,07 \cdot E - 1,284} \ .$$

90) Ἀραιόμετρον Fahrenheit, σταθεροῦ ὄγκου, χρειάζεται πρόσθετον βάρος 8,59 γραμμάρια διά νά βυθισθῆ μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς, ἐν ὑγρῷ πυκνότητος 0,73, ἵνα δέ καταδυθῆ μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰς θειϊκόν ὀξύ πυκνότητος 1,85, ἀπαιτεῖται πρόσθετον βάρος 101,75 γραμμαρίων. Νά εὑρεθῆ:

α) Τό βάρος τοῦ ὀργάνου.

β) Τί πρόσθετον βάρος ἀπαιτεῖται, ἵνα καταδύηται μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς ἐν καθαρῷ ὕδατι.

Λύσις: Ἔχομεν, ἐάν B τό βάρος, ω ὁ ὄγκος τοῦ ἀραιομέτρου καί x τό πρόσθετον βάρος:

$$B + 8,59 = 0,73\omega \ ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$B + 101,75 = 1,85\,\omega$$

$$B + x = \omega$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} B + 8,59 = 0,73\,(B + x) \\ B + 101,75 = 1,85\,(B + x) \end{array}\right\}$$

Διαιρῶ κατά μέλη καί ἔχω:

$$\frac{B + 8,59}{B + 101,75} = \frac{0,73}{1,85},$$

$$1,85 \cdot B + 15,89 = 0,73 \cdot B + 74,28$$

$$1,12\,B = 58,39\,, \quad B = 52,13\,,$$

ἤτοι τό βάρος τοῦ ὀργάνου εἶναι 52 γραμμάρια περίπου.

$$52,13 + 8,59 = 0,73\,(52,13 + x)$$

$$52,13 + 8,59 = 52,13 \cdot 0,73 + 0,73\,x\,,$$

$$0,73\,x = 52,13 \cdot 0,27 + 8,59\,,$$

$$0,73\,x = 14,0751\,, \quad x = 19,28\,.$$

Ἵνα, λοιπόν, βυθισθῇ μέχρι τοῦ ἀνωτάτου ἄκρου εἰς ὕδωρ, πρέπει νά προσθέσωμεν 19,28 γραμμάρια.

91) Ἀναμιγνύομεν 3 ὄγκους ὕδατος μέ 5 ὄγκους θειϊκοῦ ὀξέος καί ἀφοῦ ψυχθῇ τό μῖγμα, ἐμβαπτίζομεν εἰς αὐτό σῶμά τι, ὅπερ ὑφίσταται ἄνωσιν 15,73 γραμμάρια. Τό ἴδιον σῶμα εἰς καθαρόν ὕδωρ ὑφίσταται ἄνωσιν 10 γραμμαρίων, εἰς δέ τό θειϊκόν ὀξύ 18,4 γραμμάρια. Εὑρεῖν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1) Ἐάν ἐπῆλθε συστολή κατά τήν ἀνάμιξιν.

2) Ἐάν ἐπῆλθε τοιαύτη, νά εὑρεθῇ ἡ τιμή αὐτῆς.

3) Εἰς 100 ὄγκους μίγματος, πόσοι ὄγκοι ὕδατος καί πόσοι θειϊκοῦ ὀξέος ἀντιστοιχοῦν;

<u>Λύσις:</u> Ὁ ὄγκος τοῦ βυθισθέντος σώματος, καθώς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ ὕδατος, εἶναι 10, ἄρα ἡ ἄνωσις, ἐάν παραστήσωμεν διά δ τήν πυκνότητα τοῦ προκύψαντος ὑγροῦ, εἶναι:

$$10\delta = 15{,}73 \quad \text{καί} \quad \delta = 1{,}573.$$

Τό βάρος τοῦ μίγματος εἶναι:

$$B = 3H + 5H \cdot \delta .$$

ἐάν δέ τό εἰδικόν βάρος τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος, ὅπερ ἰσοῦται μέ $\frac{18{,}4}{10} = 1{,}84$. Ἐάν δέν ἐπήρχετο συστολή, ἡ πυκνότης ἔπρεπε νά εἶναι:

$$\frac{B}{O} = \frac{H\cdot(3+5\cdot 1{,}84)}{8H}$$

$$\delta_1 = \frac{3+9{,}2}{8} = \frac{12{,}2}{8} = 1{,}525.$$

Ἀλλά τοῦτο εἶναι 1,573. Ἑπομένως, ἐπῆλθε συστολή. Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\delta = \frac{B}{O} \quad \text{καί} \quad \delta' = \frac{B}{O'}$$

Ἐνταῦθα B τό αὐτό, ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{O'}{O} = \frac{\delta'}{\delta} \quad \text{καί} \quad \delta = 1{,}573 \quad \text{καί} \quad \delta' = 1{,}525,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα:

$$\frac{O}{O'} = \frac{1,525}{1,573} \quad \text{καί } O = 0,96 \cdot O'$$

Ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ προκύψαντος εἶναι τά $\frac{96}{100}$ τοῦ ληφθέντος.

γ) Εἰς 8 ὑποθετικούς ὄγκους μίγματος ἀντιστοιχοῦν 3 ὄγκοι ὕδατος καί 5 θειϊκοῦ ὀξέος. Ἄρα εἰς 100:

$$\frac{5 \cdot 100}{8} = 62,5 \text{ ὄγκοι θειϊκοῦ ὀξέος}$$

καί $$\frac{3 \cdot 100}{8} = 37,5 \text{ ὄγκοι ὕδατος.}$$

Ἤτοι εἰς 96 ὄγκους τοῦ μίγματος ἀντιστοιχοῦν 37,5 ὕδατος καί 62,5 θειϊκοῦ ὀξέος. Ἄρα εἰς 100 ἀντιστοιχοῦν:

$$\frac{37,5 \cdot 100}{96} = \frac{3750}{96} = 39 \text{ ὄγκοι ὕδατος,}$$

$$\frac{62,5 \cdot 100}{96} = 65 \text{ ὄγκοι θειϊκοῦ ὀξέος.}$$

92) Δύο κυλινδρικά ἀγγεῖα Α καί Β συγκοινωνοῦν ἐκ τῶν κάτω καί περιέχουν ὕδωρ. Εἰσάγομεν εἰς τόν κύλινδρον Α ἔμβολέα, κλείοντες αὐτόν ὑδατοστεγῶς, δυνάμενον ὅμως νά κινῆται μετά τριβῆς ἀνεπαισθήτου. Παρατηροῦμεν τότε, ὅτι τά ὕψη τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ ὕδατος εἰς τούς δύο κυλίνδρους διαφέρουν κατά 12 δακτύλους. Ἐάν ὅμως θέσωμεν ἐπί τοῦ ἐμβολέως καί βάρος 2,5 χλγρμ., ἡ διαφορά τῶν ὑψῶν γίνεται 52 δακτύλων.

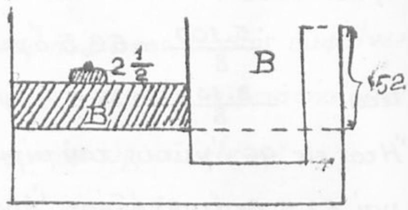
Νά εὑρεθῇ ἡ τομή τοῦ κυλίνδρου Α, ἄν ἡ τοῦ Β εἶναι 3 τετρ. δακτύλων καί τό βάρος τοῦ ἐμβολέως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν, έχομεν, εάν Β τό βάρος καί Μ ή τομή:

$$\frac{B}{36} = \frac{M}{3} \quad \text{καί} \quad B = 12M$$

Καί κατά τήν δευτέραν περίπτωσιν έχομεν:



$$\frac{B+2500}{3 \cdot 52} = \frac{M}{3}$$

καί $B+2500 = 52M$

Άλλα: $B = 12M$, άρα:

$$12M + 2500 = 52M \;,\; 40M = 2500$$

καί $M = 62{,}5 \cdot B = 12 \cdot 6{,}25$, $B = 750$.

Άρα τό βάρος 750 γραμμάρια καί ή τόμή 62,5.

93) Έξαρτώμεν υπό τόν έτερον τών δίσκων ζυγού μεταλλικόν κύλινδρον, βάρους 1,135 χλγρ., καί αφού ισορροπήσωμεν αυτόν μέ τά σταθμά, βυθίζομεν αυτόν είς υγρόν πυκνότητος 0,8 · παρατηρούμεν τότε, ότι τό βάρος αυτού ελαττούται είς 1,055 χλγρ. Μετά τούτο βυθίζομεν τόν κύλινδρον είς άλλο υγρόν καί παρατηρούμεν ότι τό βάρος αυτού ελαττούται είς 1,043 χλγρ.

Νά ευρεθή ή πυκνότης τού κυλίνδρου καί ή πυκνότης τού δευτέρου υγρού.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Κατά τήν πρώτην περίπτωσιν, ἐάν A ἡ ἄνωσις, τήν ὁποίαν ὑφίσταται ἐκ τοῦ πρώτου ὑγροῦ, ἔχομεν:

$$1,135 - A = 1,055 \quad \text{καί} \quad A = 0,08 .$$

Ἐάν δέ x ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου, ἔχομεν:

$$0,08 = \frac{1,135}{x} \cdot 0,8 \quad \text{καί} \quad x = 1,135 \cdot 10$$

ἄρα: $$x = 11,35 ,$$

ἤτοι ἡ πυκνότης τοῦ κυλίνδρου εἶναι 11,35.

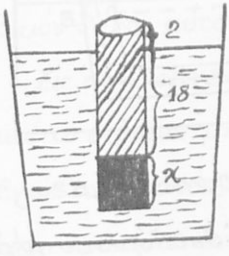
Κατά τήν δευτέραν περίπτωσιν, ἔχομεν:

$$A = 1,135 - 1,043 = 0,092 = \frac{1,135}{11,35} \cdot y$$

$$\text{καί} \quad y = 0,092 \cdot 10 \quad \text{καί} \quad y = 0,92.$$

Ἤτοι, ἡ πυκνότης τοῦ δευτέρου ὑγροῦ εἶναι 0,92.

94) Πόσον εἶναι τό μῆκος κυλίνδρου ἐκ πλατίνης, ὅταν προσαρμοζόμενον εἰς τό ἄκρον χαλυβδίνου κυλίνδρου, μήκους 20 ἑκατοστομέτρων, κρατῇ αὐτόν ὄρθιον ἐν τῷ ὑδραργύρῳ, τῆς ἄνω βάσεως αὐτοῦ οὔσης ἐκτός τοῦ ὑδραργύρου, εἰς ὕψος 2 ἑκατοστομέτρων; (Εἰδ. βάρος: πλατίνης 21,12, χάλυβος 7,8, ὑδραργύρου 13,6).



Λύσις: Τό βάρος τοῦ χαλυβδίνου κυλίνδρου, ἐάν E ἡ τομή, εἶναι:

$$B = 20 \cdot E \cdot 7,8 ,$$

τό δέ ἐκ τῆς πλατίνης εἶναι:

$$B' = x \cdot E \cdot 21,12 .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τό βάρος τοῦ συστήματος εἶναι:

$$B_1 = E\,(156 + 21{,}12\,x).$$

Ἡ ἄνωσις εἶναι:

$$A = (18 + x)\cdot 13{,}6\cdot E\ ,$$

ἰσοῦται δέ μέ τό βάρος τοῦ συστήματος, ἤτοι:

$$E\,(156 + 21{,}12\,x) = (18 + x)\cdot 13{,}6\cdot E\ ,$$

$$156 + 21{,}12\,x = 244{,}8 + 13{,}6\,x\ ,$$

καί $7{,}52\,x = 88{,}8$, ἄρα: $x = 11{,}8$.

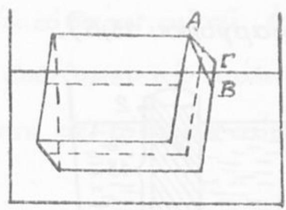
Τό ὕψος, ὅθεν, τοῦ ἐκ πλατίνης κυλίνδρου εἶναι 11,8 δακτ.

95) Ἐπί ἐλαίου πυκνότητος 0,915 θέτομεν τεμάχιον φελλοῦ, ἔχον τό σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, μέ διαστάσεις 7,5, 3,2 καί 2 δακτύλων.

Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ φελλοῦ εἶναι 0,24, νά εὑρεθῆ πόσον θά ἐξέχη ὁ φελλός τοῦ ἐλαίου.

Λύσις: Ὁ φελλός, ὡς εἶναι προφανές, θά ἰσορροπήσῃ ἐπί τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλατυτέρων αὐτοῦ βάσεων.

Ἔστω δέ $(A\Gamma) = x$ τό ἐξέχον μέρος αὐτοῦ· τότε $B\Gamma = 2 - x$



Τό βάρος τοῦ φελλοῦ εἶναι:

$$B = 7{,}5\cdot 2\cdot 3{,}2\cdot 0{,}24\ ,\quad B = 48\cdot 0{,}24 = 11{,}52\ ,$$

ἰσοῦται δέ μέ τήν ἄνωσιν, ἥν ὑφίσταται τό βυθιζόμενον μέρος:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$A = 7,5 \cdot 3,2 \cdot (2-x) \cdot 0,915 = 21,96(2-x),$$

ἤτοι: $21,96 \cdot (2-x) = 11,52$, $21,96x = 32,4$,

ἄρα καί: $x = 1,475$.

Τό ἐξέχον μέρος τοῦ φελλοῦ ἔχει ὕψος 1,475 δακτύλων.

96) Ἀναμιγνύομεν ὕδωρ καί οἰνόπνευμα ἀπόλυτον ὑπό ἴσους ὄγκους καί παρατηροῦμεν ὅτι ἐπέρχεται συστολή ἴση πρός τό 1/20 τοῦ ὁλικοῦ ὄγκου.

Γνωστοῦ δέ ὄντος, ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ἀπολύτου οἰνοπνεύματος εἶναι 0,79, νά εὑρεθῇ ποίαν διαίρεσιν θά δείξῃ τό ἑκατοντάβαθμον οἰνοπνευματόμετρον, ἐάν ἐμβαπτισθῇ εἰς τοῦτο καί ποῖον τό ὀξυζύγιον τοῦ Baumé, ὅπερ βυθίζεται μέχρι 0, ἐν διαλύσει πυκνότητος 1,075, καί μέχρι τῆς διαιρέσεως 10, ἐν καθαρῷ ὕδατι.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ω οἱ ἴσοι ὄγκοι, τότε ὁ ὁλικός ὄγκος εἶναι:

$$2\omega = \frac{2\omega}{20} = 1,9\omega .$$

Καί τό μέν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι ω, τοῦ δέ οἰνοπνεύματος 0,79ω, ἤτοι τό βάρος τοῦ μίγματος εἶναι ω+0,79ω, τό δέ εἰδικόν βάρος αὐτοῦ εἶναι $\frac{B}{O} = \frac{1,79}{1,9}$.

Εἰς τό οἰνόπνευμα (ἐάν ο ὁ ὄγκος ὁ κάτωθεν τοῦ μηδενός καί ω ὁ ὄγκος μιᾶς διαιρέσεως καί B τό βάρος του) ἔχομεν:

Ἐντός τοῦ ὕδατος: $B = \omega$,

ἐντός τοῦ οἰνοπνεύματος: $B = (\omega + 100\omega) \cdot 0,79$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί ἐντός τοῦ προκύψαντος ὑγροῦ:

$$B = (\omega + x\omega) \cdot \frac{1,79}{1,9} \cdot$$

Ἀντικαθιστῶντες δέ τό B διά τοῦ ω, ἔχομεν:

$$\omega = 0,79\omega + 79\omega \ , \quad 0,21\omega = 79\omega \ , \quad \omega = \frac{7900}{21} \cdot \omega \cdot$$

Ἀντικαθιστῶμεν τήν τιμήν ταύτην εἰς τήν δευτέραν:

$$\frac{7900\omega}{21} = \frac{1,79 \cdot 7900\omega}{21 \cdot 1,9} + 1,79 \cdot \omega \frac{x}{1,9} \ ,$$

$$15010 = 14141 + 37,59 \cdot x \quad , \quad 37,59 \cdot x = 869$$

ἄρα καί: $x = 23$ περίπου.

Τό ἑκατοντάβαθμον οἰνοπνευματόμετρον θά δείξῃ 23.

Εἰς τό ὀξυζύγιον τοῦ Baume ἔχομεν:

Ἐντός διαλύσεως πυκνότητος 1,075:

$$B = 1,075 \cdot \omega$$

ἐν καθαρῷ ὕδατι: $B = \omega + 10\omega$

καί εἰς τό διάλυμα: $B = (\omega + x\omega)\frac{17,9}{19}$

Ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν τοῦ B, ἔχομεν:

$$1,075 \cdot \omega = \omega + 10\omega \quad , \quad 0,075\omega = 10\omega \ ,$$

$$\omega = \frac{10000\omega}{75} = \frac{400 \cdot \omega}{3}$$

Ἀντικαθιστῶμεν τήν τιμήν ταύτην τοῦ ω εἰς τήν τρίτην καί

ἔχομεν: $$1,075 \frac{400\omega}{3} = \left(\frac{400\omega}{3} + x\omega\right) \frac{17,9}{19} \ ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{430}{3} = \frac{7160}{3.19} + \frac{17,9 \cdot x}{19} , \quad 8,170 = 7160 + 53,7\,x ,$$

$$53,7 \cdot x = 1010 \quad \text{καί} \quad x = 18,8 .$$

Τό ὀξυζύγιον τοῦ Baumé θά δείξῃ 18,8.

97) Θέτομεν φιαλίδιον κενόν, ἐπί ἑνός τῶν δίσκων ζυγοῦ καί ἰσορροποῦμεν μέ λεπτούς κόνδρους μολύβδου. Ἔπειτα θέτομεν ἐν αὐτῷ 270 γραμ. ὑγροῦ, ὅπερ καταλαμβάνει τό 1/4 τῆς χωρητικότητος τοῦ φιαλιδίου, καί τό ὑπόλοιπον πληροῦμεν δι' ἄλλου ὑγροῦ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ λόγος τῶν πυκνοτήτων εἶναι 3/4 καί ὅτι τό γινόμενον αὐτῶν εἶναι 0,8748. Εὑρεῖν τό βάρος τοῦ δευτέρου ὑγροῦ καί τήν χωρητικότητα τοῦ φιαλιδίου.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω π ἡ πυκνότης τοῦ πρώτου καί π' τοῦ δευτέρου· τότε ἔχομεν:

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \text{καί} \quad \pi\pi' = 0,8748 .$$

Λύων τό σύστημα τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων, ἔχω:

$$\pi = 1,08 \quad \text{καί} \quad \pi' = 0,81 .$$

Ἐξ ἄλλου, ἐάν P ὁ ὄγκος τοῦ φιαλιδίου καί x τό βάρος τοῦ δευτέρου ὑγροῦ, θά ἔχωμεν:

$$P = \frac{270}{1,08} + \frac{x}{0,81} ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δίδεται δέ ὅτι:

$$\frac{x}{0{,}81} = \frac{3P}{4}$$

Ἄρα λύων τό σύστημα, μέ ἀγνώστους τά P καί x, εὑρίσκω:

$$P = \frac{270}{1{,}08} + \frac{3P}{4} \quad \text{ἤ} \quad P = \frac{4.270}{1{,}08} = 1000 \text{ κ. ἑκ.}$$

Ἄρα ὁ ὄγκος P εἶναι μία λίτρα.

Ἀλλά: $\frac{x}{0{,}81} = \frac{3P}{4} = \frac{3000}{4} = 750$.

Ὅθεν : $x = 750.0{,}81 = 607{,}5$ γραμ.

98) Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο στοιχείων ἐλαίου, ὅταν ἡ διαφορά τῶν δύο πιέσεων εἶναι ἡ αὐτή, τῶν σημείων τούτων εὑρισκομένων ἐντός Hg καί ἀπεχόντων ἀλλήλων ἀπόστασιν κατακόρυφον 3 ἑκ., γνωστῆς τῆς πυκνότητος τοῦ ἐλαίου – 0,915 – καί τοῦ Hg – 13,6. (Πολυτεχνείου).

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαφορά τῶν πιέσεων ἰσοῦται μέ στήλην τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ, βάσιν ἔχουσαν τό ἕν στοιχεῖον, ὕψος δέ τήν κατακόρυφον ἀπόστασιν τῶν σημείων τούτων.

Ὥστε: $P_2 - P_1 = 3.13{,}6$ εἰς τόν ὑδράργυρον ,

καί: $P_2 - P_1 = x$ εἰς τό ἔλαιον.

Ἀλλ' ἡ διαφορά τῶν πιέσεων εἶναι ἡ αὐτή:

Ἤτοι: $3.13{,}6 = x \,.\, 0{,}915$, ἐξ οὗ:

$$\frac{3.13{,}6}{0{,}915} = \frac{3.13600}{915} = \frac{1360}{305} = \frac{272}{61} = 4{,}46$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα : $x = 4,46$ ἑκ.

99) Δύο δοχεῖα, σχήματος κωνικοῦ καί τοῦ αὐτοῦ βάρους, ἔχουν ἐσωτερικόν ὕψος 25 ἑκ. καί ἐσωτερικήν διάμετρον 12 ἑκ. Πληροῦμεν μέχρι τοῦ ἀνωτέρου χείλους, τό μέν διά θειϊκοῦ ὀξέος πυκνότητος 1,84, τό δέ διά αἰθέρος, πυκνότητος 0,71.

Ζητεῖται ἡ διαφορά τῶν βαρῶν τῶν δύο τούτων δοχείων, ὅταν εἶναι ὡς ἄνω πεπληρωμένα ταῦτα. (Πολυτεχνείου).

<u>Λύσις:</u> Τό μέν θειϊκόν ὀξύ εἶναι, προφανῶς, τό βαρύτερον, τά δέ βάρη αὐτῶν θά εἶναι:

τοῦ α': $B = \frac{1}{3}\pi . 12^2 . 25 . 1,84$

τοῦ β': $B' = \frac{1}{3}\pi . 12^2 . 25 . 0,71.$

καί ἡ διαφορά των θά εἶναι:

$$B - B' = \frac{1}{3}\pi . 12^2 . 25 (1,84 - 0,71) = \frac{3,14}{3} . 144,22 (1,84 - 0,71).$$

100) Οἰνήρυσιν μήκους 2 μ. βυθίζομεν κατά τό ἥμισυ αὐτῆς ἐντός ὕδατος καί κλείομεν αὐτήν κατά τό ἀνώτερον ἄκρον· ἀνασύρομεν αὐτήν, ὁπότε αἰωρεῖται εἰς τόν σωλῆνα ὕδωρ 903 χιλιοστομ. Εὑρεῖν τήν ἀτμοσφαιρικήν πίεσιν (Πολυτεχνείου).

<u>Λύσις:</u> Κατά τήν ἀρχήν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, ὅταν ἐμβαπτίσωμεν τήν οἰνήρυσιν κατά τό ἥμισυ θά πληρώση αὐτήν τό ὕδωρ κατά τό ἥμισυ, ἄρα τόν ἕτερον ἥμισυ ὄγκον

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θά τόν κατέχῃ ἀήρ ὑπό πίεσιν x, ἐάν x ἡ ζητουμένη ἀτμοσφαιρική πίεσις. Ὅταν ἀνασύρωμεν τήν σίφωνα (?) τήν οἰνήρυσιν, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ἐλαττοῦται καί ἐπομένως αὐξάνει ὁ τοῦ ἀερίου. Ἐφ' ὅσον δέ τό ὕδωρ ἰσορροπεῖ, ἕπεται ὅτι ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου π σύν τό βάρος τοῦ ὕδατος ἐπί 1 τ. ἑκ. ἐπιφ. εἶναι μιᾶς ἀτμοσφαίρας, ἤτοι :

$$\pi + 90{,}3 = x \text{ . Ἀλλά } \frac{\pi}{x} = \frac{1000}{1097} \text{ .}$$

Ἄρα : $$\pi = \frac{1000\,x}{1097} \text{ . Ὅθεν :}$$

$$\frac{1000x}{1097} + 90{,}3 = x \quad \text{ἤ}$$

$$1000x + 99159{,}1 = 1097\,x \text{ ,}$$

ἐξ οὗ : $$x = 1022{,}2 \text{ γραμ.}$$

Ἄρα ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι $\frac{1022{,}2}{13{,}6} = 75{,}2$ ἑκατ. ὑδραργυρικῆς στήλης.

101) Σφαῖρα κοίλη, ἰσοπαχής, ἔχει βάρος 3,5 γρ. τό δέ εἰδ. βάρος τῆς ὕλης, ἐξ ἧς εἶναι αὐτή 2,5, πληροῦται φωταερίου εἰδ. βάρους 0,43, οὗ ἡ ὁλική πίεσις ἐντός τῆς σφαίρας εἶναι 850 χιλιοστά. Ἡ σφαῖρα μένει μετέωρος ἐν τῷ ἀέρι, ὅστις ἔχει πίεσιν 76 ἑκ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω B τό ὁλικόν βάρος τῆς σφαίρας μετά τοῦ φωταερίου, A ἡ ἄνωσις τοῦ ἀέρος καί θ ὁ ὄγκος τοῦ φωταερίου. Τότε $B = A$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$B = 3,5 + b\phi = 3,5 + \theta\delta$$

ἐάν δ εἶναι τό εἰδ. βάρος τοῦ φωταερίου ἐν σχέσει πρός τό ὕδωρ, ὑπό πίεσιν 850 χλρρ.

Ἀλλά τά εἰδ. βάρη εἶναι ἀνάλογα τῶν πιέσεων, ὑπό ὄγκον σταθερόν, ἤτοι:

$$\frac{\delta}{0{,}43 \cdot 0{,}0013} = \frac{850}{760} \quad \text{καί} \quad \delta = \frac{85 \cdot 0{,}43 \cdot 0{,}0013}{76},$$

Ὅθεν: $\delta = 0{,}000619$.

Ἡ ἄνωσις δέ:

$$A = \left(\frac{3{,}5}{2{,}5} + \theta\right) \cdot 0{,}0013$$

$$3{,}5 + 0{,}000619\,\theta = \frac{7 \cdot 0{,}0013}{5} + 0{,}0013\,\theta$$

ἤ $\quad 0{,}000681\,\theta = 3{,}4982$,

ἤτοι: $\quad \theta = 5137$ κ. ἑκατ.

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ φωταερίου εἶναι 5,137 κ. ποδ.

102) Νά εὑρεθῇ τό εἰδ. βάρος σώματος τινός, μέ τά ἑξῆς δεδομένα: Βάρος διά νά βυθισθῇ ἡ συσκευή Nicholson ἐντός τοῦ ὕδατος μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς 500 γραμ. Βάρος ἵνα ἡ συσκευή μέ τό σῶμα ἐπί τοῦ δίσκου 450 γρ. καί βάρος ἵνα ἡ συσκευή βυθισθῇ μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου μέ τό σῶμα εἰς τό δοχεῖον, 480 γρ.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι: $\delta = \frac{B}{b}$,

βάρος σώματος: $B = 500 - 450 = 50$ γρ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τό σῶμα ἐκτοπίζει ὕδωρ 30 γρ. Διότι, ὅταν τοῦτο τεθῇ ἐπί τοῦ δοχείου, ἀπαιτοῦνται ἐπί πλέον 30 γρ. διά νά βυθισθῇ, ὥστε:

$$\delta = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$$

$$\delta = 1{,}66 .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΘΕΡΜΟΤΗΣ.

1) Νά μετατραποῦν εἰς βαθμούς Κελσίου καί Ρεωμύρου οἱ 90 βαθμοί Φαρενάϊτ.

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$90 - 32 = 62^\circ \quad \text{καί}$$

οἱ $180\ \Phi = 100\ K$

οἱ $62\ \Phi = x$; ἐξ οὗ:

$$x = \frac{100 \cdot 62}{180} = 34^\circ,4\ K$$

Ὁμοίως: οἱ $180\ \Phi = 80\ P$

οἱ $62\ \Phi = x$; , ἐξ οὗ:

$$x = 27^\circ,5\ P.$$

2) Ἐντός καμίνου, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τήν θερμοκρασίαν, θέτομεν ράβδον μεταλλίνην, ἔχουσαν εἰς 0° μῆκος 1,10 μ. Τό μῆκος τῆς ράβδου γίνεται 1,107 μ. Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου, ὅταν ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι 0,000012;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$M_\vartheta = M_o \cdot (1 + \lambda\vartheta),$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν: $1,107 = 1,10(1+0,000012\,\vartheta)$

καί: $\vartheta = 530°,3$.

3) Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν τά θερμόμετρα Κελσίου καί Φαρενάϊτ δεικνύουν τόν αὐτόν βαθμόν;

<u>Λύσις</u>: Ὀνομάζομεν c τό μῆκος μιᾶς διαιρέσεως εἰς τήν κλίμακα Κελσίου καί f τό μῆκος μιᾶς διαιρέσεως εἰς τήν κλίμακα Φαρενάϊτ.

Παριστάνοντες διά x τόν ἀριθμόν τῶν δεικνυομένων βαθμῶν ἐπί τῶν δύο κλιμάκων, καί ἐκφράζοντες ὅτι τό μῆκος τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τοῦ μηδενός καί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὑδραργύρου εἶναι τό αὐτό ἐπί τῶν δύο κλιμάκων (δυνάμεθα νά τά ὑποθέσωμεν), ἔχομεν:

$$x \cdot c = (x-32)f.$$

Ἐξ ἄλλου, γνωρίζομεν ὅτι:

$$100\,c = 180\,f$$

Διαιροῦντες κατά μέλη, εὑρίσκομεν:

$$\frac{x}{5} = \frac{x-32}{9},$$

ἐξ οὗ καί: $x = -40$.

Κατ' ἄλλον τρόπον:

Ἔστω x οἱ βαθμοί τοῦ Κελσίου, οἵτινες συμπίπτουν μέ τούς τοῦ Φαρενάϊτ· τότε ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{9}{5}x + 32 = x \quad \text{καί} \quad x = -40.$$

4) Ἡ πυκνότης τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,31 εἰς 0°. Ὁ δέ συντελεστής τῆς κυβικῆς διαστολῆς εἶναι 0,000 58. Εὕρετε τὴν πυκνότητα εἰς 150°.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$\Pi_{150} = \frac{10,31}{1 + 0,000\,58 \cdot 150} = 10,32$$

5) Ράβδος σιδηρᾶ, θερμανθεῖσα ἀπό 0° εἰς ϑ°, ὑπέστη αὔξησιν τοῦ μήκους της κατά 0,7 μ.

Νά εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία ϑ°, ὅταν ὁ συντελεστής τῆς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι 0,0000 12.

Λύσις: Ἔστω τό μῆκος τῆς ράβδου εἰς 0° ἴσον πρός 100 ἑκ. εἰς ϑ τοῦτο γίνεται 100 + 0,7. Ὅθεν:

$$100,7 = 100(1 + 0,000\,012\,\vartheta)$$

ἤ:

$$0,7 = 0,0012\,\vartheta,$$

ἐξ οὗ:

$$\vartheta = \frac{0,7}{0,0012} = 583°.$$

6) Ποία εἶναι ἡ αὔξησις τοῦ μήκους ράβδου σιδηρᾶς κατά τήν θέρμανσίν της ἀπό 0° εἰς 40°, ὅταν αὕτη ἔχῃ μῆκος 1000 μ. εἰς τήν θερμοκρασίαν τοῦ 0°;

Συντελεστής διαστολῆς τοῦ σιδήρου = 0,000 12.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου γνωρίζομεν ὅτι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$M_\vartheta = M_0\,(1+\lambda\vartheta)$$

Ἀντικαθιστῶντες τάς δοθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$M_{40} = 1000\,(1+40\cdot 0{,}000012).$$

Διά νά εὕρωμεν ὅμως τήν ἐπιμήκυνσιν, πρέπει τό $M_0 = 100$,

ἤτοι: $\quad M_{40} - M_0 = 1000\,(1+40\cdot 0{,}000012) - 1000 = x.$

Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις, εὑρίσκομεν:

$$M_{40} - M_0 = x = \text{ἐπιμήκυνσις} = 0{,}48 \text{ ἑκ.μ.}$$

7) Σιδηρᾶ ράβδος, μήκους 25 ἑκ.μ., θερμαίνεται ἀπό 20° εἰς 500°. Κατά πόσον ἐπιμηκύνεται;

<u>Λύσις:</u> Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$M_\vartheta = M_{\vartheta'}\left[1+\lambda(\vartheta-\vartheta')\right],$$

ἔχομεν:
$$M_\vartheta = 25\left[1+0{,}000012\,(500-20)\right]$$

καί ἐκτελοῦντες τάς πράξεις, εὑρίσκομεν:

$$M_\vartheta = 25{,}144 \text{ ἑκ.μ.}$$

Ἀφαιροῦντες ἤδη ἐξ αὐτοῦ τό ἀρχικόν μῆκος 25 ἑκ.μ. λαμβάνομεν ὡς ἐπιμήκυνσιν 0,144 ἑκ.μ.

8) Πόσα χιλιόγραμμα ὕδατος 30° πρέπει νά ἀναμιχθοῦν μετά 10 χιλιογράμμων πάγου, ἵνα τό μῖγμα μετά τήν τῆξιν τοῦ πάγου, ἀποκτήσῃ θερμοκρασίαν 0°;

<u>Λύσις:</u> Ὁ πάγος διά νά τακῇ, θά ἀποκτήσῃ 10 x 80 μερ. θερμίδας. Ὅταν παραστήσωμεν διά x τό βάρος τοῦ ὡς ἀνωτέρω

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀπαιτουμένου ποσοῦ ὕδατος, τοῦτο θά ἀποβάλῃ $30x$ μεγάλας θερμίδας, ὅθεν ἔχομεν:

$$30x = 800 \quad , \quad \text{ἐξ οὗ:}$$

$$x = \frac{800}{30} = 26,6 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

Ἄρα πρέπει νά ἀναμιχθοῦν 26,6 χιλιόγραμμα ὕδατος, θερμοκρασίας 30°.

9) Ἡ πυκνότης τοῦ ὑδραργύρου εἶναι 13,6 εἰς 0°. Ποία ἡ πυκνότης εἰς 20°, ὅταν ὁ συντελεστής τῆς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\frac{1}{5500}$;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$\Pi_{20} = \frac{13,6}{1+\frac{20}{5500}} = 13,551.$$

10) Βαρομετρικόν ὕψος 75,5 εἰς θερμοκρασίαν 15° νά ἀναχθῇ εἰς θερμοκρασίαν 0°, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ συντελεστής τῆς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\frac{1}{5550}$.

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$H_0 = \frac{77,5}{1+\frac{15}{5550}} = 75,296.$$

11) Ὁ συντελεστής τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι 0,0000122. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια δίσκου κυκλικοῦ μεταλλικοῦ σιδηροῦ εἰς 60°, ὅταν οὗτος εἰς 0° ἔχῃ διάμετρον 2,75 μ;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$E\theta = E_0 (1+\sigma\vartheta)$$

ἔχομεν: $E_{60^\circ} = E_0(1+\sigma 60^\circ) = E_0(1+2\lambda 60^\circ)$.

Ἔχομεν ὅμως:

$$E_0 = 3{,}14 \cdot \frac{2{,}75^2}{4}.$$

ὅθεν λαμβάνομεν:

$$E_{60} = 3{,}14 \cdot \frac{2{,}75^2}{4}(1+2\cdot 0{,}0000122\cdot 60)$$

Ἄρα: $E_{60^\circ} = 5{,}94$ τ. μ.

12) Θερμόμετρον Κελσίου βυθίζεται ἐντός ὑγροῦ μέχρι τοῦ βαθμοῦ 25. Ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται μέχρι τοῦ βαθμοῦ 110. Ποῖον βαθμόν θά δείξῃ τό θερμόμετρον τοῦτο, ἐάν βυθισθῇ ἐντός θερμοῦ ὑγροῦ μέχρι τοῦ ἐπιπέδου ὅπου σταματᾷ ὁ ὑδράργυρος; Ἡ ἐξωτερική θερμοκρασία εἶναι 15°.

Λύσις: Τό μέρος τοῦ στελέχους τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τοῦ βαθμοῦ 25 καί τοῦ βαθμοῦ 110, πρέπει νά θερμανθῇ ἀπό 15° εἰς x°. Ὁ ὑδράργυρος καί ἡ ὕαλος διαστέλλονται. Ὁ ἀριθμός τῶν βαθμῶν x δίδεται ὑπό τῆς ἐξισώσεως:

$$x = 110 + (110-25)\left(\frac{1}{5550} - \frac{1}{38700}\right)(x-15)$$

Ἄρα: $x = 111^\circ{,}26$.

ἔνθα $\frac{1}{5550}$ κυβικός συντελεστής τοῦ ὑδραργύρου.

13) Διοχετεύοντες τόν ἐξ 1,5 χιλιογράμμου ὕδατος ἀναπτυσ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σόμενον ἀτμόν δι᾿ ὀφιοειδοῦς σωλῆνος εἰς 100 χιλιόγρ. ὕδατος 15°, παρατηροῦμεν ὅτι ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τούτου εἰς 24,2°. Ποία εἶναι θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος;

<u>Λύσις</u>: Τό ποσόν τῆς θερμότητος τό ἀπορροφηθέν πρός ἐξάτμισιν 1,5 χιλιογρ. ὕδατος ἀπερροφήθη ὑπό τοῦ ὕδατος τῶν 100 χιλιογρ. διά νά ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία αὐτοῦ ἀπό 15° εἰς 24,2° συνεπῶς τά δύο αὐτά ποσά εἶναι ἴσα. Ἐάν καλέσωμεν μ μᾶζαν τοῦ ἐξατμισθέντος ὕδατος καί τοῦ παραχθέντος κατά τήν ψῦξιν τοῦ ἀτμοῦ, x τήν θερμότητα ἐξαερώσεως, ε τήν εἰδικήν θερμότητα τοῦ ὕδατος, ϑ_1 τήν ἀρχικήν θερμοκρασίαν τοῦ ἀτμοῦ, ϑ_2 τήν ἀρχικήν θερμοκρασίαν τοῦ ὑγροῦ καί ϑ τήν τελικήν θερμοκρασίαν αὐτοῦ. Τότε τό ἐκλυθέν ποσόν θερμότητος ἐκ τῆς μ μάζης τοῦ ληφθέντος κατά τήν συμπύκνωσιν τῶν ἀτμῶν ὕδατος εἶναι ἴσον πρός τό ἀπορροφηθέν κατά τήν ἐξάτμισίν του, ἤτοι μx.

Τό διά συμπυκνώσεως ληφθέν ὕδωρ ἔδωσεν ἐπίσης ποσόν θερμότητος ἴσον πρός $\mu.\varepsilon.(\vartheta_1-\vartheta)$. Τά ἄνω ποσά θερμότητος ἀπερροφήθησαν ὑπό τοῦ ὕδατος 15°, ἤτοι $M(\vartheta-\vartheta_2)$, ἑπομένως ἔχομεν:

$$\mu.x+\mu.\varepsilon.(\vartheta_1-\vartheta)=M(\vartheta-\vartheta_2).$$

Ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$1,5 \cdot x + 1,5 \cdot 1\,(100-24,2) = 100\,(24,2-15)$$

καί λύοντες ἤδη ταύτην ὡς πρός x, εὑρίσκομεν:

$$x = 537,5 \text{ θερμίδες.}$$

14) Διοχετεύομεν δύο χιλιόγραμμα ἀτμοῦ αἰθέρος 35° ἐντός 9 χιλιογρ. ὕδατος 10°. Εἰς ποῖον σημεῖον ἀνέρχεται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος, ὅταν ἡ θερμότης ἐξατμίσεως τοῦ αἰθέρος εἶναι 90, ἡ δέ εἰδική θερμότης εἶναι 0,5;

<u>Λύσις</u>: Κατά τήν μεταβολήν τοῦ ἀτμοῦ τοῦ αἰθέρος εἰς ὑγρόν 35°, ἀπεβλήθησαν 2·90 θερμίδες, κατά τήν μεταβολήν τοῦ ὑγροῦ τούτου εἰς ὑγρόν x^0 ἀπεβλήθησαν $2 \cdot 0,5\,(0,5-x)$ θερμίδες, αὗται δέ ἀπερροφήθησαν ἀπό τό ὕδωρ, ὅπερ ἔλαβεν $9(x-10)$ θερμίδες. Ὅθεν:

$$2 \cdot 90 + 2 \cdot 0,5\,(35-x) = 9 \cdot (x-10),$$

ἐξ ἧς:

$$x = 30°,5.$$

15) Οἱ βραχίονες τοῦ μοχλοῦ ἀσφαλιστικῆς δικλεῖδος ἀτμολέβητος εἶναι 3 ἑκ. καί 54 τοῦ μέτρου, ἐκ τοῦ ἄκρου δέ τοῦ μεγάλου βραχίονος κρέμαται βάρος 1 χιλιογρ. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς δικλεῖδος εἶναι 12 τ.ἑκ. Ποίαν θέσιν ἀπαιτεῖται νά ἔχῃ ὁ ἀτμός τοῦ λέβητος, ὥστε νά ἀνοίξῃ τήν δικλεῖδα;

<u>Λύσις</u>: Ἐάν καλέσωμεν x τήν πίεσιν τήν ἐπιφερομένην ὑπό τοῦ ἀτμοῦ ἐπί ἑνός τετραγωνικοῦ ἑκατοστοῦ τῆς

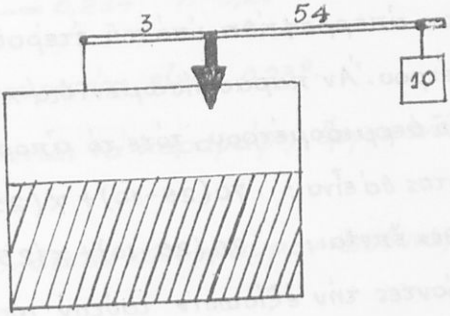
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βαλβίδος· τότε ἐπί 12 τ.εκ. ἐπιφέρεται πίεσις 12 x. Ἐκ τοῦ

μοχλοῦ ὅμως ἔχομεν τήν σχέσιν:

$$12x \cdot 3 = 10 \cdot 54 ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:



$x = \frac{540}{36} = 15$ χιλιογρ.

Καί ἐάν ἐκφράσωμεν τήν πίεσιν ταύτην εἰς ἀτμοσφαίρας, ἔχομεν:

$\frac{15}{1,033} = 14,52$ ἀτμόσφ.

16) Πόσον ζέον ὕδωρ ἀπαιτοῦν 30 χιλιόγραμμα πάγου 0° διά νά τακοῦν;

<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν:

$$30 \cdot 80 = 100 \cdot x \quad \text{καί} \quad x = 24 \text{ χιλιογρ.}$$

Διότι 1 χιλιόγραμμον 100° περιέχει 100 μεγάλας θερμίδας.

17) Ποία ἡ θερμοχωρητικότης θερμιδομέτρου εἰς τό ὁποῖον προσθέτοντες 70 γρ. ὕδατος 10° καί 50 γρ. ὕδατος 50°, λαμβάνομεν τελικήν θερμοκρασίαν 25°.

<u>Λύσις:</u> Ὡς γνωστόν, θερμοχωρητικότης σώματος καλεῖται τό ποσόν τῆς θερμότητος, τό ὁποῖον ἀπαιτεῖται ὅπως ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος ἀνυψωθῇ κατά 1° ἤ τό γινόμε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπί τήν ειδικήν θερμότητα αὐτοῦ.

Προφανῶς, τά 50 γραμ. ὕδατος ἀπέδωσαν ποσόν θερμότητος ἴσον πρός 50(50−25) θερμίδας, τό ποσόν τοῦτο ὅμως ἀπερροφήθη ὑπό τοῦ ἑτέρου ὕδατος καί τοῦ θερμιδομέτρου. Ἄν παραστήσωμεν διά x τήν θερμοχωρητικότητα τοῦ θερμιδομέτρου, τότε τό ἀπορροφηθέν ποσόν τῆς θερμότητος θά εἶναι: $70(25-10)+x.(25-10)$

Ὅθεν ἕπεται: $70(25-10)+x(25-10)=50(50-25)$.

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρός x, εὑρίσκομεν:

$$x = 13,33 \ .$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη θερμοχωρητικότης εἶναι 13,33.

18) Ἐκ καταρράκτου ὕψους 10 μέτρων, πίπτει κατά 1δλ. κυβικόν μέτρον ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος κατά τήν πτῶσιν ταύτην, ἐάν δέν ληφθῇ ὑπ᾽ ὄψιν ἡ ταχύτης τοῦ ὕδατος ἡ προηγουμένη καί ἡ ἐξάτμισις αὐτοῦ;

Λύσις: Κατά τήν πτῶσιν 1 κυβικοῦ μέτρου ὕδατος, τό παραγόμενον ἔργον εἶναι:

$$E = \Delta . \delta = 1000 \text{ χιλγρ.} \cdot 100 \mu. = 100000 \text{ χιλγρ.}$$

Τό ἔργον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς ποσόν θερμότητος ἴσον πρός $\frac{100.000}{427} = 234,4$ θερμίδες.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤδη 1000 θερμίδες ἀνυψώνουν τὴν θερμοκρασίαν 1000 χιλγρ. ὕδατος κατὰ 1°, αἱ 234,4 θερμίδες πόσον ἀνυψώνουν τὴν θερμοκρασίαν ὕδατος; Ὅθεν ἔχομεν:

$$x = \frac{234}{1000} = 0,234^{\circ} \quad ἢ \quad 0,23^{\circ}$$

Ἤτοι ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας εἶναι 0,23°.

19) Πόσας θερμίδας δύναται νὰ παραγάγῃ ἔργον ἑνὸς Joules;

<u>Λύσις</u>: Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἓν χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 9,81 Joules.

Ἐπίσης ἔργον 427 χιλιογραμμομέτρων παράγει 1 θερμίδα.

Ἀφοῦ 1 χιλ. γραμ. ἰσοδυναμεῖ πρὸς 9,81 Joules

τὰ 427 " " " x "

Ὅθεν: $x = 9,81 \cdot 427$ Joules.

Ἀφοῦ 9,81·427 Joules παράγονται ἀπὸ 1 θερμίδα

ἢ 1 " " " x "

Ὅθεν: $$x = \frac{1}{9,81 \cdot 427} = \frac{1}{4188,87} = 0,0002387$$ θερμίδες μικραί.

20) Ἐντὸς θερμιδομέτρου 1000 γραμ. ὕδατος 4° διοχετεύομεν 26 γρ. ὑδρατμοῦ 100°, ὅτε ἡ τελικὴ θερμοκρα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σία τοῦ ὑγροῦ γίνεται 20°. Ποία εἶναι ἡ θερμότης ἐξατμίσεως x τοῦ ὕδατος εἰς 100°;

Λύσις: Τὸ ἐκλυθὲν ποσὸν τῆς θερμότητος εἶναι:

$$26x + 26(100-20).$$

Τὸ ἀπορροφηθὲν ὑπὸ τοῦ ὕδατος εἶναι:

$$1000(20-4).$$

Ὅθεν: $$26x + 26(100-20) = 1000(20-4)$$

Ἄρα: $$x = 555,4.$$

21) Ποῖον ποσὸν θερμότητος ἀναπτύσσεται ἐκ 200 γρ. ὑδραργύρου ψυχομένου ἀπὸ 20° εἰς 8°; Εἰδ. θερμότης ὑδραργύρου 0,033.

Λύσις: Ἕπεται προφανῶς:

$$200 \cdot 0,033(20-8°) = 69,2 \text{ θερμίδες.}$$

22) Ἔχει τις 32 λίτρες ὀξυγόνου εἰς 16° Ρεωμύρου. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος εἰς 28° Ρ, τῆς πιέσεως παραμενούσης τῆς αὐτῆς;

Λύσις:

Οἱ $$16°P = \frac{16 \cdot 5}{4} = 20°K$$

$$28°P = \frac{28 \cdot 5}{4} = 35°K$$

Τότε: $$\theta_0 = \frac{\theta_{20}}{1+\lambda\vartheta} = \frac{32}{1+\frac{20}{273}} = \frac{32 \cdot 273}{293}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλά: $\theta_{35} = \theta_0 (1+\lambda\vartheta) = \frac{32 \cdot 273}{293}\left(1+\frac{35}{273}\right) =$

$$= \frac{32 \cdot 273}{293} \cdot \frac{308}{273}$$

Ἄρα: $\theta_{35} = \frac{32 \cdot 308}{293} = 33{,}638$ λίτρες.

Ἄλλος τρόπος:

$$\theta_{20} = \theta_0 (1+20\alpha)$$

$$\theta_{35} = \theta_0 (1+35\alpha) ,$$

ἐξ οὗ: $\frac{\theta_{35}}{\theta_{20}} = \frac{1+35\alpha}{1+20\alpha}$ ἤ: $\theta_{35} = \theta_{20} \frac{\frac{308}{273}}{\frac{293}{273}}$

Ὅθεν: $\theta_{35} = 32 \cdot \frac{308}{293} = 33{,}638$ λίτρες.

23) Ἐντός θερμιδομέτρου ἐξ ὀρειχάλκου, μάζης 30 γραμαρια φέρομεν 500 γρ. ὕδατος 20°. Μετά ταῦτ , προσθέτομεν εἰς τό ὕδωρ σῶμα μάζης 108 γραμ., θερμοκρασίας 100°, ὅτε ἡ τελική θερμοκρασία τοῦ συστήματος γίνεται 21,815°. Ποία εἶναι ἡ εἰδική θερμότης τοῦ σώματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ εἰδική θερμότης τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι 0,09;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν κατά τήν μέθοδον τῶν μιγμάτων εὑρεθέντα τύπον:

$$\varepsilon = \frac{(M+\mu\cdot\varepsilon')(\tau-\vartheta_1)}{\beta\cdot(\vartheta-\tau)} ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$M = 500$ γρ. ὕδατος $\quad \vartheta_1 = 20°$ ἀρχική θερμότης ὕδατος

$\mu = 30$ γρ. ὀρειχάλκου $\quad \vartheta = 100°$ θερμ. σώματος

$\varepsilon' = 0{,}09$ εἰδ. θερ. ὀρειχάλκου $\quad \beta = 108$ γραμ. σώματος.

$\tau = 21{,}815°$ τελ. θερμ. μίγματος

Ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς ταύτας, εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon = \frac{(500 + 30 \cdot 0{,}09) \cdot (21{,}815 - 20)}{108\,(100 - 21{,}815)} = 0{,}108$$

Εἰδική θερμότης τοῦ σώματος $\varepsilon = 0{,}108$.

24) Ὁ ὄγκος μάζης ἀερίου εἰς θερμοκρασίαν 20° εἶναι 300 κυβ. ἑκ. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν ὁ ὄγκος θά εἶναι 400 κ. ἑκ., ὑπό πίεσιν σταθεράν;

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος Θ_ϑ ἑνός σώματος εἰς θερμοκρασίαν ϑ βαθμῶν δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Theta_\vartheta = \Theta_0\,(1 + \kappa\vartheta) \qquad (1),$$

ὅπου Θ_0 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος εἰς 0° καί κ ὁ συντελεστής τῆς κυβικῆς διαστολῆς. Ὥστε, συμφώνως πρός τόν τύπον (1), ἔχομεν:

$$300 = \Theta_0 \left(1 + \frac{20}{273}\right)$$

$$\text{καί:} \quad 400 = \Theta_0 \left(1 + \frac{\vartheta}{273}\right)$$

Οἱ ὄγκοι ὅμως τῶν σωμάτων εἶναι ἀνάλογοι τῶν διωνύμων διαστολῆς, ἐπομένως:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

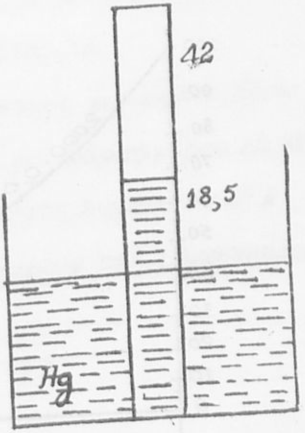
$$\frac{300}{400}=\frac{1+\frac{20}{273}}{1+\frac{\vartheta}{273}} \quad \text{ἤ} \quad \frac{3}{4}=\frac{293}{273+\vartheta},$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$\vartheta = 151^\circ.$$

25) Ποῖον ὄγκον θά καταλάβῃ εἰς 0° καί ὑπό πίεσιν 760 χιλιοστῶν ἕν ἀέριον, κεκλεισμένον εἰς δοκιμαστικόν σωλῆνα ἀνεστραμμένον εἰς ὑδράργυρον;

Ἡ τομή τοῦ σωλῆνος εἶναι 5 τ. ἑκ. τοῦ μέτρου, τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀερίου εἶναι 42 ἑκ. μ. καί τό ὕψος τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, τῆς εὑρισκομένης ἐν συνεχείᾳ μέ τό ἀέριον, εἶναι 18,5 ἑκ. μ. Ἡ θερμοκρασία τήν στιγμήν τοῦ πειράματος εἶναι 17° Κ. καί τό βαρόμετρον δεικνύει 758 χιλιοστά τοῦ μέτρου.



Λύσις: Ἔχομεν, προφανῶς, 42·5 = 210 κυβ. μέτρα ἀερίου, εἰς θερμοκρασίαν 17° Κ. καί ὑπό πίεσιν 758−185 = 573 χιλιοστομέτρων. Ὁ γενικός τύπος:

$$\theta_\vartheta = \theta_o\,(1+\alpha)\frac{\Pi_o}{\Pi_\vartheta}$$

μᾶς δίδει :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\theta_{17} = 210 \text{ κυβ. μ.} = \theta_0 \cdot \frac{273+17}{273} \cdot \frac{760}{573} =$$

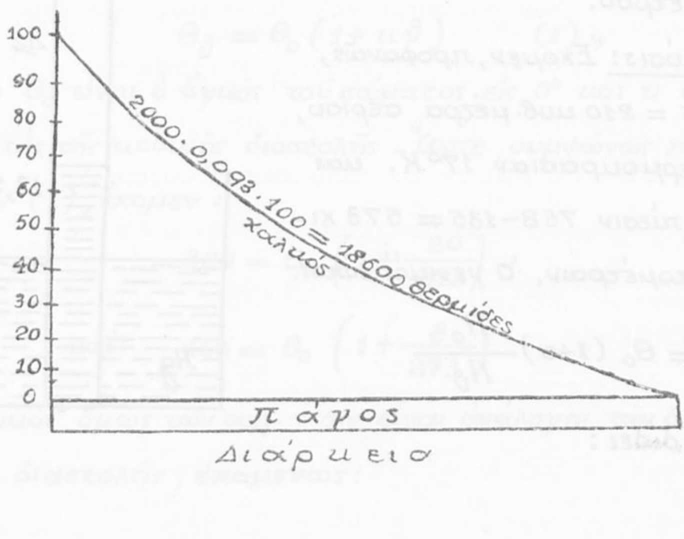
$$= \theta_0 \cdot \frac{290}{273} \cdot \frac{760}{573} \quad \text{ἤ}$$

$$210 \text{ κυβ.μ.} = \theta_0 \cdot \frac{220400}{156429} \quad \text{ἤ}$$

$$\theta_0 = \frac{210 \cdot 156429}{220400}$$

Ἄρα: $\theta_0 = \frac{3275009}{22040} = 149,5$ κυβ. μετρα.

26) Μία μᾶζα χαλκοῦ θερμοκρασίας 100°Κ, εἰσάγεται μέσα εἰς ἓν θερμιδόμετρον μὲ πάγον. Πόσον πάγον θὰ λυώσῃ, ὅταν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ χαλκοῦ εἶναι 0,093 καὶ ἡ μᾶζα 2 χιλιόγραμμα. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ σχετικὸν διάγραμμα.



Λύσις: Τά 2000 γραμμάρια τοῦ χαλκοῦ μεταβαίνοντα ἀπό 100° εἰς 0° Κ., χάνουν Μ.ε.θ θερμίδας, ἤτοι:

$$2000 \cdot 0{,}093 \cdot 100 = 18600 \text{ θερμίδες.}$$

Αἱ θερμίδες ὅμως αὗται χρησιμεύουν νά λυώσουν μίαν ποσότητα πάγου, ἀλλ' ὡς γνωστόν, 80 θερμίδες λυώνουν 1 γραμ. πάγου θερμοκρασίας 0° Κ. Αἱ 18600 ἄρα θερμίδες πάγου θά λυώσουν:

$$\frac{1 \cdot 18600}{80} = 232{,}5 \text{ γραμ. πάγου.}$$

27) Ἕν γραμμάριον ἄνθρακος καιόμενον, δίδει 7.850 θερμίδας. Ποῖον εἶναι τό μηχανικόν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος ταύτης εἰς ἔργια καί εἰς χιλιογραμμόμετρα;

Λύσις: Ἔχομεν:

Εἰς ἔργια: $7850 \cdot 4{,}17 \cdot 10^7 = 32734{,}5 \cdot 10^7$

Εἰς χιλιογραμμόμ: $7850 \cdot 425 = 3336{,}15.$

28) Ποῖος εἶναι ὁ γραμμικός συντελεστής τῆς ὑάλου, ὅταν ἕν δοχεῖον ὑάλινον γεμάτο μέ 10 χιλιόγρ. ὑδραργύρου εἰς 18° Κ, ἔχει μίαν θερμοχωρητικότητα 0,7373 λιτρῶν εἰς 0° Κ;

Λύσις: Ὁ ὄγκος τῶν 10 χιλιογράμμων τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0° εἶναι:

$$\Theta = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{10}{13{,}6}$$

ὁ αὐτός ὄγκος εἰς 18° γίνεται:

$$\frac{10}{13{,}6}\left(1 + \frac{18}{5550}\right)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τότε ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου θά εἶναι ἴσος εἰς 18° K πρός:

$$\Theta(1+\kappa\vartheta) \text{ ἤ } 0{,}7373(1+\kappa\vartheta) \text{ ἤ } 0{,}7373(1+18\,k).$$

Ἀλλά οἱ δύο ὄγκοι εἶναι ἴσοι εἰς 18° K, ἤτοι:

$$\frac{10}{13{,}6}\cdot\left(1+\frac{18}{5550}\right)=0{,}7373\cdot(1+18\,K),$$

ἐξ ἧς: $K=0{,}000027$ (συντελεστής διαστολῆς κατ' ὄγκον).

Ἄρα, ὁ γραμμικός συντελεστής τῆς ὑάλου εἶναι:

$$\frac{K}{3}=\frac{0{,}000027}{3}=\text{ἤ}=0{,}000009=\lambda.$$

29) Μία βροχή, τῆς ὁποίας ἡ θερμοκρασία εἶναι 16° K, πίπτει ἐπί ἐδάφους κεκαλυμμένου μέ ἕν στρῶμα χιόνος, 5 ἑκ. πάχους καί θερμοκρασίας − 3° K (πυκνότητος 0,80). Ποῖον ὕψος βροχῆς πρέπει νά πέσῃ διά νά τακῇ πλήρως ἡ χιών;

Λύσις: Τό βάρος τοῦ ὄγκου τῆς χιόνος, ἡ ὁποία καλύπτει 1 τετραγ. ἑκ. ἐπιφανείας ἐδάφους εἶναι $1.5.0{,}8=4$ γραμ.

Διά νά ἀνυψωθοῦν 4 γραμ χιόνος ἀπό −3° εἰς 0°, χρειάζονται 4 · 3 θερμίδες. Διά νά λυώσῃ τό βάρος τῆς χιόνος εἰς 0° χρειάζονται 4.80 θερμίδες.

Τόσες θερμίδες χρειάζονται, ἵνα τό ὕδωρ τῆς βροχῆς πέσῃ ἐπ' αὐτῶν τῶν τετραγωνικῶν ἑκατοστῶν τῆς χιόνος.

Ἐάν ὀνομάσωμεν διά τοῦ x τό ζητούμενον ὕψος, θά

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χρειασθοῦν 16 x θερμίδες, ἐξ οὗ:

$$16x = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 8$$

καί $$x = \frac{332}{16} = 20{,}75 \text{ εὐ. μ.}$$

30) Χύτρα τοῦ Παπίνου περιέχει 3 χιλιόγραμμα ὕδατος
120°. Ὅταν ἀνοίξωμεν τὴν βαλβίδα αὐτοῦ, ἐξατμίζεται ἐν
μέρος ὕδατος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνει θερμοκρασίαν
100°. Πόση εἶναι ἡ μάζα τοῦ ἀναπτυχθέντος ἀτμοῦ;

<u>Λύσις:</u> Ἄν εἶναι x ἡ ποσότης τοῦ παραχθέντος ἀτμοῦ,
ἡ ποσότης τῆς θερμότητος, ἣν κατέχει οὗτος εἶναι 536 x.
Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, ὅπερ ἀπερροφήθη ἐκ τοῦ ὕ-
δατος, εἶναι:

$$536x = 3(120° - 100°)$$

καί: $$x = 0{,}112 \text{ χιλιόγραμμα.}$$

31) Σφαίρα ἀεροστάτου, ἧς ὁ ὄγκος εἶναι 60 κυβ. μέ-
τρα, εἶναι πλήρης ὑδρογόνου, τοῦ ὁποίου ἡ πυκνότης ὡς
πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι 0,069. Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος
τοῦ περικαλύμματος, ἵνα φθάνῃ εἰς ὕψος ὅπου ἡ θερμοκρα-
σία εἶναι 5° καὶ ἡ πίεσις 152 χιλιοστόμετρα;

<u>Λύσις:</u> Εἰς τὸ ὕψος ὅπου τὸ ἀερόστατον θὰ σταθῇ ἐν ἰσορ-
ροπίᾳ, τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀέρος θὰ εἶναι τὸ ἄθροι-
σμα τῶν βαρῶν τοῦ ἐσωτερικοῦ ἀερίου καὶ τοῦ περικα-

λύμματος. Ἂν καλέσωμεν π τὸ βάρος τοῦ περικαλύμματος, θὰ ἔχωμεν:

$$60 \cdot \frac{1{,}293}{1+\frac{5}{273}} \cdot \frac{15{,}2}{76} = 60 \cdot \frac{1{,}293 \cdot 0{,}069}{1+\frac{5}{273}} \cdot \frac{15{,}2}{76} + \pi$$

ἐξ οὗ: $\pi = 14{,}18$ χιλιόγραμμα.

32) Δοχεῖον περιέχει ὕδωρ θερμοκρασίας 15°. Ἕτερον δοχεῖον περιέχει ὕδωρ θερμοκρασίας 95°. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου δοχείου, ἵνα ἀποτελέσωμεν μῖγμα 325 κυβ. παλαμῶν, θερμοκρασίας 35°;

Λύσις: Ἔστωσαν x καὶ y αἱ κυβικαὶ παλάμαι τοῦ ὕδατος τῶν δύο δοχείων.

Θερμότης ἀπορροφηθεῖσα ὑπὸ τῶν x κυβικῶν παλαμῶν εἶναι (35−15)x. Θερμότης παραχωρηθεῖσα ὑπὸ τῶν y κυβ. παλαμῶν εἶναι (95−35)y. Ἑπομένως:

$$x(35-15) = (95-35)y$$

ἤ: $\frac{x}{y} = 3$ καὶ $x+y = 325$.

Ἄρα: $x = 243{,}75$ κυβ. παλάμαι

$y = 81{,}25$ » » .

33) Ὑδράργυρος πίπτει ἐξ ὕψους 5 μέτρων ἐπὶ ἐπιφανείας ἐστερημένης ἀγωγιμότητος. Κατὰ πόσους βαθμοὺς θὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία του μετὰ τὴν πτῶσιν του; Εἰδικὴ θερμότης ὑδραργύρου 0,033.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Διά μ γραμμάρια ὑδραργύρου τό ἔργον τῆς πτώσεως εἶναι: μ.500.981 ἔργια.

Θερμότης ἰσοδύναμος εἰς θερμίδας:

$$\frac{\mu \cdot 500 \cdot 981}{4,17 \cdot 107} = \mu \cdot 0,033\vartheta = Q.$$

Ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας $\frac{500 \cdot 981}{4,17 \cdot 10^7 \cdot 0,033} = 0,36^0$

34) Σφαῖρα σιδήρου, βάρους 800 χιλιογράμμων, πίπτει ἐξ ὕψους 10 μ. ἐπί πλακός ἐκ μολύβδου βάρους 6 χιλιογράμ., καί θερμοκρασίας 12°, ὅτε ἀναπηδᾷ εἰς ὕψος 0,245 μ. Μετά ταῦτα ἀμέσως ὁ μόλυβδος φέρεται ἐντός ὕδατος μάζης 5 χιλιογρ. καί θερμοκρασίας 12°, ὅτε τοῦτο καθίσταται 15,5°. Ποία εἶναι ἡ τιμή τοῦ Joule, ἤτοι τό μηχανικόν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, ἐάν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι θερμαίνεται μόνον ὁ μόλυβδος;

Λύσις: Τό παραγόμενον κατά τήν πτῶσιν ἔργον εἶναι:

$$E = \Delta \cdot \delta = 800 \cdot 10\mu. = 8000 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

Τό παραγόμενον κατά τήν ἀναπήδησιν τῆς σφαίρας ἔργον εἶναι: $E = \Delta \cdot \delta = 800 \cdot 0,245 = 196$ χιλιογραμμόμετρα, ἤτοι παρήχθη τελικῶς ἔργον:

$$8000 - 196 = 7804 \text{ χιλιογραμμομέτρων.}$$

Τό παραχθέν εἶτα ἐκ τοῦ ἔργου τούτου ποσόν τῆς θερμό-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τητος εἶναι τό παραμεῖναν εἰς τόν μόλυβδον καί τό ἀπορροφηθέν ὑπό τοῦ ὕδατος. Ὁ μόλυβδος ἀπέκτησε θερμοκρασίαν 15,5°, ἤτοι ἀνυψώθη ἡ θερμοκρασία του κατά 3,5°, ὡς καί τοῦ ὕδατος. Ἄρα τά 6 χιλιόγραμμα μολύβδου ἀπερρόφησαν:

$$6 \cdot 0{,}031 \cdot 3{,}5 = 0{,}6510 \text{ θερμίδας.}$$

Ἐπίσης τά 5 χιλιόγραμμα ὕδατος ἀπερρόφησαν:

$$5 \cdot 1 \cdot 3{,}5 = 17{,}5 \text{ θερμίδας.}$$

Ὥστε, ἐν συνόλῳ παρήχθησαν:

$$0{,}651 + 17{,}5 = 18{,}151 \text{ θερμίδες.}$$

Εἶναι δέ γνωστόν ὅτι:

$$J = \frac{E}{Q} = \frac{7804}{18{,}151} = 430{,}8 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

35) Ἁμαξοστοιχία 250 τόννων κινεῖται μετά ταχύτητος 20 μέτρων κατά 1 δευτερόλεπτον. Ποία θερμότης θά ἀναπτυχθῇ, ἄν σταματήσωμεν ταύτην ἀποτόμως διά τῶν εἰδικῶν μηχανημάτων της;

<u>Λύσις</u>: Πρός τοῦτο, δέον νά εὕρωμεν τό παραγόμενον ἔργον, ὅπερ διαιρούμενον διά 4,17 μᾶς δίδει τάς ἀναπτυσσομένας θερμίδας. Διότι ἔργον 1 Joule ἰσοδυναμεῖ πρός $\frac{1}{4{,}17}$ θερμίδας. Εἶναι δέ ἐπίσης γνωστόν, ὅτι τό ἔργον, ὅπερ παράγει δύναμις, συνεχῶς ἐπιδρῶσα ἐπί σώματος, ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τῆς ζώσης δυνάμεως, ἤτοι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$E = \frac{M\tau^2}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες, ἔχομεν :

$$E = \frac{250 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot (2000)^2}{2} = \frac{25000000 \cdot 4000000}{2} =$$

$= 500 \cdot 10^{12}$ ἔργια ἢ $500 \cdot 10^5$ Joules,

διότι: 1 Joule = 10.000.000 ἔργια

καί : $\frac{500 \cdot 10^5}{4,17} = 12.000.000$ θερμίδες $= 1,2 \cdot 10^7$ θερμίδες.

36) Φέροντες ἐντός ὕδατος 25,45 γραμμαρίων, θερμοκρασίας 12,5°, σῶμα βάρους 6,17 γραμμαρίων, θερμανθέν εἰς 80°, προσδίδομεν εἰς τό μῖγμα τελικήν θερμοκρασίαν 14°,17. Ποία ἡ εἰδική θερμότης τοῦ σώματος ;

Λύσις : Εἶναι γνωστόν, ὅτι τό ἐκλυθέν ποσόν τῆς θερμότητος ἐκ τοῦ σώματος ἀπερροφήθη ὑπό τοῦ ὕδατος. Ὅθεν:

$$24,45\,\varepsilon\,(14°,17 - 12°,5) = 6,17\,\varepsilon'\,(80° - 14°,7).$$

Ἀλλά ἡ εἰδική θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι = 1. Ὅθεν :

$$\varepsilon' = \frac{25,45 \cdot (14,17 - 12,5)}{6,17\,(80 - 14,7)} = 0,104 \text{ θερμίδες},$$

$\varepsilon' = 0,104$ θερμίδες.

37) Πόσα χιλιόγραμμα ὕδατος 30° πρέπει νά ἀναμιχθοῦσι μετά 10 χιλιογράμμων πάγου, ἵνα τό μῖγμα μετά τήν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆξιν τοῦ πάγου ἀπαιτήσῃ θερμοκρασίαν 0^o;

<u>Λύσις:</u> Ὁ πάγος διά νά τακῇ θά ἀπαιτήσῃ $10 \cdot 80$ μεγάλας θερμίδας. Ὅταν παραστήσωμεν διά x τό βάρος τοῦ ὡς ἀνωτέρω ἀπαιτουμένου ποσοῦ ὕδατος, τοῦτο θά ἀποβάλῃ $30x$ μεγάλας θερμίδας. Ὅθεν:

$$30 \cdot x = 800 \quad \text{καί} \quad x = \frac{800}{30} = 26{,}6 \text{ χιλιόγρ.}$$

38) Ποῖον εἶναι τό μῆκος ῥάβδου ἐκ λευκοχρύσου εἰς 100^o, ὅταν εἰς 0^o εἶναι 3 μέτρων καί ὁ συντελεστής γραμμικῆς διαστολῆς αὐτοῦ $\frac{1}{116 \cdot 100}$;

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι:

$$M_\vartheta = M_o (1 + \lambda\vartheta)$$

τό μῆκος εἰς ϑ βαθμούς ἰσοῦται μέ τό μῆκος εἰς μηδέν βαθμόν ἐπί τό διώνυμον τῆς γραμμικῆς διαστολῆς $(1 + \lambda\vartheta)$. Ἀντικαθιστῶντες δέ τάς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

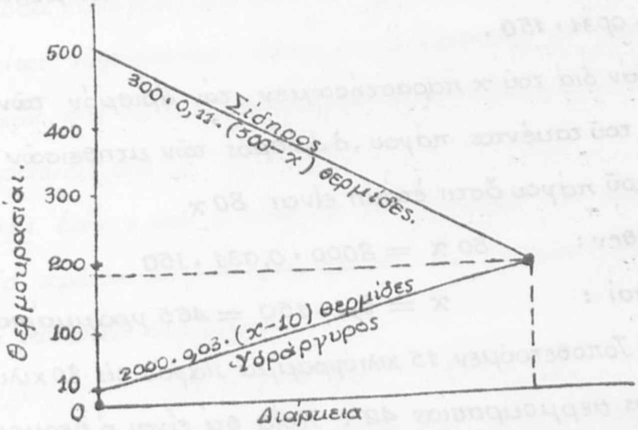
$$M_\vartheta = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{116 \cdot 100} \cdot 100\right) = 3 + \frac{3}{116} = 3{,}0025$$

$$M_\vartheta = 3{,}0025$$

39) Βυθίζομεν 300 γραμμάρια σιδήρου (εἰδ. θερμ. 0,11), θερμοκρασίας 500^o, μέσα εἰς 2 χιλιόγραμμα ὑδραργύρου, θερμοκρασίας 10^o Κελσίου (εἰδ. θερμ. 0,03). Ζητεῖται νά μάθωμεν εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θά ἀνέλθῃ ὁ ὑδράργυρος καί νά κατασκευάσωμεν τό σχετικόν διάγραμμα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω x ἡ τελικὴ θερμοκρασία. Ὁ σίδηρος θὰ χάσῃ: $300 \cdot 0{,}11 \, (500-x)$ θερμίδας, ὁ δὲ ὑδράργυρος ἀντιθέτως θὰ κερδίσῃ: $2000 \cdot 0{,}03 \cdot (x-10)$ θερμίδας.



Αἱ δύο ποσότητες θὰ εἶναι ἴσαι, ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$300 \cdot 0{,}11 \cdot (500-x) = 2000 \cdot 0{,}03 \, (x-10)$$

ἤ: $$33 \cdot (500-x) = 60(x-10),$$

$$16500 - 33x = 60x - 600$$

ἐξ οὗ: $$x = \frac{17100}{93} = 183{,}8\ ^\circ K$$

Ἄρα ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ ὑδραργύρου εἶναι:

$$x = 183^\circ{,}8 \text{ Κελσίου.}$$

40) Μέσα εἰς ἓν θερμιδόμετρον πάγου εἰσάγομεν 8 χι-

λιόγραμμα μολύβδου (ειδ. θερμότης 0,031), άτινα ἤχθησαν εἰς θερμοκρασίαν 150°. Ποῖον θά εἶναι τό βάρος τοῦ τακέντος πάγου;

<u>Λύσις</u>: Αἱ ἀπωλεσθεῖσαι θερμίδες ὑπό τοῦ μολύβδου εἶναι: $8000 \cdot 0{,}031 \cdot 150$.

Ἐάν διά τοῦ x παραστήσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν γραμμαρίων τοῦ τακέντος πάγου, ὁ ἀριθμός τῶν κτηθεισῶν θερμίδων ὑπό τοῦ πάγου ὅστις ἐτάκη εἶναι $80x$.

Ὅθεν: $$80x = 8000 \cdot 0{,}031 \cdot 150$$

καί: $$x = 3{,}1 \cdot 150 = 465 \text{ γραμμάρια.}$$

41) Τοποθετοῦμεν 15 χιλιόγραμμα πάγου εἰς 80 χιλιόγραμμα ὕδατος θερμοκρασίας 42°. Ποία θά εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω x ἡ θερμοκρασία αὐτή· τότε:

Διά νά λυώσῃ 1 γρ. πάγου εἰς 0° χρειάζονται 80 θερμίδες

" " " 1 χιλγρ. " " " " $8 \cdot 10^4$ "

" " λυώσουν 15 χλγρ. " " " " $15 \cdot 8 \cdot 10^4$ "

Ἐξ ἀντιθέτου, τά 80 χιλιόγραμμα ὕδατος διά νά κατέλθουν ἀπό 42° εἰς $x°$, θά χάσουν $8 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot (42 - x)$ θερμίδας.

Ὅπως ὁ ἀριθμός τῶν ἀπωλεσθεισῶν θερμίδων εἶναι ἴσος πρός τόν ἀριθμόν τῶν θερμίδων τῶν κτηθεισῶν ὑπό τοῦ πάγου, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$15 \cdot 8 \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^4 \cdot (42-x),$$

ἐξ ἧς: $15 = 42 - x$ ἤ $x = 27^o$

Ἄρα $x = 27^o$ ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος.

42) Πόσα χιλιόγραμμα ὕδατος πρέπει νά λάβωμεν ἐκ δύο δοχείων περιεχόντων ὕδωρ, θερμοκρασίας 20^o καί 50^o, ἀντιστοίχως, διά νά σχηματίσωμεν 90 χιλιόγραμμα ὕδατος θερμοκρασίας 42^o;

<u>Λύσις:</u> Ἐάν x καί y εἶναι τά χιλιόγραμμα τοῦ ὕδατος, τά ὁποῖα πρέπει νά λάβωμεν ἐκ τῶν δύο δοχείων, θά ἔχωμεν τήν ἰσότητα τῶν βαρῶν:

$$x + y = 90 \qquad (1).$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἰσότης τῶν ποσοτήτων τῆς θερμότητος εἶναι:

$$20x + 50y = 90 \cdot 42 \qquad (2).$$

Λύοντες ἤδη τό πρωτοβάθμιον σύστημα τῶν (1) καί (2) ὡς πρός τούς δύο ἀγνώστους, εὑρίσκομεν:

$$x = 24 \text{ χιλιόγραμμα } 20^o$$

$$\text{καί} \quad y = 66 \text{ χιλιόγραμμα } 50^o.$$

43) Ἕν θερμόμετρον Φαρενάϊτ καί ἕν θερμόμετρον Ρεωμύρου δεικνύουν τόν αὐτόν ἀριθμόν βαθμῶν μέ τό αὐτό σημεῖον. Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία κατά τήν στιγμήν ταύτην;

<u>Λύσις:</u> Ἐάν x εἶναι ἡ θερμοκρασία αὐτή εἰς βαθμούς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Κελσίου τό θερμόμετρον τοῦ Φ. θά δεικνύῃ $\frac{9x}{5}+32$ καί τό τοῦ Ῥεωμύρου $\frac{4x}{5}$

Αἱ δύο αὗται ἐκφράσεις πρέπει, προφανῶς, νά εἶναι ἴσαι, ἤτοι:

$$\frac{9x}{5}+32 = \frac{4x}{5},$$

ἐξ οὗ: $9x+160 = 4x$ ἤ $5x = -160$ καί $x = -32^\circ$ Κελσίου.

Ἀλλά: -32° Κελσίου $= \frac{-32.4}{5}$ Ρ $= -25{,}6^\circ$ Ρεωμύρου

-32° Κελσίου $= \frac{-32.9}{5}+32$Φ $= -25{,}6^\circ$ Φαρενάϊτ.

44) Ἕν θερμόμετρον Φαρενάϊτ δεικνύει τήν θερμοκρασίαν ἑνός σώματος καί σημειώνει 14°. Ποίαν θερμοκρασίαν δεικνύουν ἕν θερμόμετρον Ρεωμύρου καί 2) ἕν ἑκατονταβάθμιον, ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας καί διά τό αὐτό σῶμα;

<u>Λύσις</u>: Προφανῶς ἔχομεν:

$$14-32 = -18.$$

Ὥστε εἰς βαθμούς Ρεωμύρου: $\frac{-18.4}{9} = -8^\circ$

καί εἰς „ Κελσίου : $\frac{-18.5}{9} = -10^\circ$

45) Σφαῖρα ἐκ μολύβδου, ἔχουσα ταχύτητα 500 μέτρων κατά δευτερόλεπτον, ἐπιπίπτει ἐπί τοίχου ἀνθισταμένου. Ποία θά εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰδική θερμότης στερεοῦ μολύβδου 0,0314, εἰδική θερμότης ρευστοῦ μολύβδου 0,0402, σημεῖον τήξεως 330°, θερμότης τήξεως 5,37.

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἰσοδύναμος θερμότης πρός τήν δρῶσαν δύναμιν, ἥτις ἐξαφανίζεται τήν στιγμήν τῆς συγκρούσεως, ὑψοῦνει τήν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ μολύβδου εἰς 330°, τόν κάμνει νά τηχθῇ καί ὑψώνει τήν θερμοκρασίαν τοῦ τετηγμένου μολύβδου κατά $x°$:

$$\frac{\mu \cdot 500^2}{2} \cdot \frac{1}{425} = \mu \cdot 0,0314 \cdot 330° + \mu \cdot 5,37 + \mu \cdot 0,0402x$$

Ἡ θερμοκρασία θά ὑψωθῇ εἰς 6955°.

46) Ὑάλινος σωλήν, κυλινδρικός, μήκους 1 μέτρου καί 2 ἑκ. διαμέτρου, φέρει ὑδράργυρον εἰς ὕψος 95 ἑκ.μ., εἰς θερμοκρασίαν μηδέν. Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν θά πληρωθῇ τελείως ὁ σωλήν, δεδομένου, ὅτι ὁ συντελεστής κυβικῆς διαστολῆς τῆς ὑάλου εἶναι $\frac{1}{38700}$;

<u>Λύσις</u>: Ὁ ὄγκος τοῦ ὑδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν μηδέν εἶναι:

$$95 \cdot 3,14 \cdot 1^2 = 298,3 \text{ κυβ. ἑκ.}$$

εἰς $\vartheta°$ εἶναι: $\Theta_\vartheta = \Theta_0 (1 + \alpha\vartheta) = 298,3 \cdot \left(1 + \frac{1}{5550}\right)$.

Ὁ ὄγκος τοῦ σωλῆνος εἰς 0° εἶναι:

$$100 \cdot 3,14 \cdot 1^2 = 314 \text{ κυβ. ἑκ.},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς ϑ^o δὲ ὁ ὄγκος θὰ γίνῃ:

$$\Theta_\vartheta = 314 \cdot \left(1 + \frac{1}{38700}\vartheta\right).$$

Οἱ δύο αὐτοὶ ὄγκοι εἶναι ἴσοι, δεδομένου ὅτι πληροῦται ὁ σωλήν, ἤτοι:

$$298{,}3 \cdot \left(1 + \frac{1}{5550}\vartheta\right) = 314\left(1 + \frac{1}{38700}\vartheta\right),$$

ἐξ ἧς λύοντες ὡς πρὸς ϑ, λαμβάνομεν:

$$\vartheta = 348^o.$$

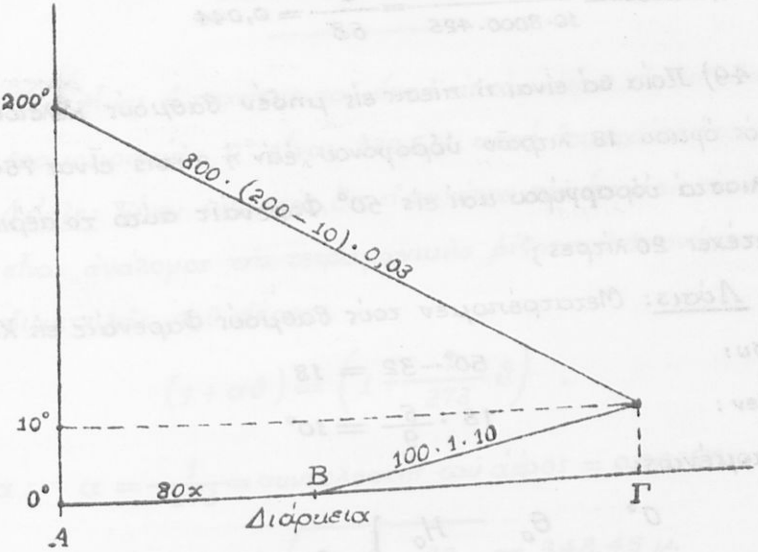
47) Μέσα εἰς ἕνα μῖγμα ὕδατος καὶ πάγου ἐν ἰσορροπίᾳ καὶ βάρους 120 γραμμαρίων, ρίπτομεν 800 γρ. ὑδραργύρου (εἰδ. θερμότης 0,03), θερμοκρασίας 200°. Ὁ πάγος τήκεται καὶ τὸ σύνολον κατέρχεται εἰς θερμοκρασίαν 10°. Ποία ἦτο ἡ ἀρχικὴ ποσότης τοῦ πάγου; Νὰ κατασκευασθῇ καὶ τὸ σχετικὸν διάγραμμα.

<u>Λύσις:</u> Ὁ ἀριθμὸς τῶν θερμίδων τῶν ἐκπιπτομένων ἐκ τοῦ ὑδραργύρου, εἶναι $800 \cdot 0{,}03 \cdot (200-10)$. Ἐὰν x εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τοῦ πάγου, τῶν περιεχομένων εἰς τὰ 120 γραμμάρια τοῦ μίγματος (ὕδατος + πάγου), θὰ χρειασθοῦν $80x$ θερμίδες διὰ νὰ λυώσουν. Λοιπόν, εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου (διαρκείας) τῆς τήξεως, θὰ ἔχωμεν 120 γραμμάρια ὕδατος, τὰ ὁποῖα διὰ νὰ ἀνυψώσουν τὴν θερμοκρασίαν ἀπὸ 0° εἰς 10° χρειάζονται $120 \cdot 1 \cdot 10$ θερμί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δας.

Αἱ ἀπολεσθεῖσαι ὑπό τοῦ ὑδραργύρου θερμίδες ἐλήφθη-



σαν ὑπό τοῦ ὕδατος καί τοῦ πάγου. Λοιπόν, ἔχομεν:

$$800 \cdot (200-10) \cdot 0,03 = 80x + (100 \cdot 10),$$

ἐξ ἧς:

$$x = 44,5 \text{ γραμμάρια.}$$

48) Ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσις θερμικῆς μηχανῆς, ἥτις κατα-ναλίσκει 10 χιλιόγραμμα ἄνθρακος καθ' ὥραν καί ὑψώνει κατά τόν αὐτόν χρόνον 30 κυβικά μέτρα ὕδατος εἰς ὕψος 50 μέτρων;

Λύσις: Τό κινητήριον ἔργον ἰσοῦται πρός

$$30\,000 \cdot 50 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τό ἀνθιστάμενον ἔργον ἰσοῦται πρός:

$$10 \cdot 8000 \cdot 425 \text{ χιλιογραμμόμετρα.}$$

$$\text{Ἄρα ἡ ἀπόδοσις} = \frac{30000 \cdot 50}{10 \cdot 8000 \cdot 425} = \frac{3}{68} = 0{,}044$$

49) Ποία θά εἶναι ἡ πίεσις εἰς μηδέν βαθμούς Κελσίου, ἑνός ὄγκου 18 λιτρῶν ὑδρογόνου, ἐάν ἡ πίεσις εἶναι 750 χιλιοστά ὑδραργύρου καί εἰς 50° Φαρενάϊτ αὐτό τό ἀέριον κατέχει 20 λίτρες;

<u>Λύσις:</u> Μετατρέπομεν τούς βαθμούς Φαρενάϊτ εἰς Κελσίου:

$$50^\circ - 32 = 18$$

Ὅθεν:

$$18 \cdot \frac{5}{9} = 10^\circ$$

Ἐπομένως:

$$\left.\begin{matrix} 0^\circ & \theta_o & H_o \\ \vartheta & \theta & H_o \end{matrix}\right\} \quad \theta = \theta_o\,(1+\alpha\vartheta)$$

$$\left.\begin{matrix} \vartheta & \theta_\vartheta & H_\vartheta \end{matrix}\right\} \quad \theta_\vartheta H_\vartheta = \theta H_o$$

Ἄρα ἔχομεν:

$$\theta_\vartheta H_\vartheta = \theta_o\,(1+\alpha\vartheta) H_o$$

$$\frac{\theta_\vartheta H_\vartheta}{\theta_o(1+\alpha\theta)} = \frac{20 \cdot 75}{18 \cdot \left(1+\frac{10}{273}\right)} = \frac{1500 \cdot 273}{18 \cdot 283} = 80{,}4 \text{ ἑκ.}$$

$$H_o = 804 \text{ χιλιοστά ὑδραργυρικῆς στήλης.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ.

1) Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τόν ἀέρα εἰς 30°, ὅταν ὑπό θερμοκρασίαν 0° εἶναι 330,6 μ. κατά δευτερόλεπτον.

<u>Λύσις:</u> Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τόν ἀέρα εἶναι ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ διωνύμου τῆς διαστολῆς τοῦ ἀέρος:

$$(1+\alpha\vartheta) = \left(1 + \frac{1}{273}\vartheta\right),$$

ἔνθα: $\alpha = \dfrac{1}{273} =$ συντελεστής τοῦ ἀέρος $= 0{,}00367$.

$$\tau = 330{,}60 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{273} 30} = 348{,}45 \text{ μ.}$$

2) Μία χορδή ζυγίζει 5 γραμ. κατά μέτρον καί εἶναι τεντωμένη ἐπί ἠχομέτρου δι' ἑνός βάρους 20 χιλιογράμμων. Ποῖον εἶναι τό μῆκος τῆς χορδῆς, ἐάν τό ὕψος τοῦ λαμβανομένου ἤχου ἐκ τῆς χορδῆς ἀντιστοιχῇ πρός 56 παλμούς;

<u>Λύσις:</u> Μεταχειριζόμενοι τόν τύπον τῶν παλλομένων χορδῶν:

$$N = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

(ἔνθα T ἡ τάσις εἰς δύνας καί μ ἡ μᾶζα εἰς γραμμάρια),

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν:

$$\lambda = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{256}\sqrt{\frac{2.10^4 . 981}{0,05}},$$

ἐξ ἧς: $\lambda = 176,86$ ἑκ. μ.

3) Ὑπό ποίαν θερμοκρασίαν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τόν ἀέρα εἶναι 336 μέτρα;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζομεν τόν προηγούμενον τύπον:

$$\tau_t = \tau_\alpha \cdot \sqrt{1+\alpha\vartheta}$$

καί ἔχομεν:

$$336 = 330,6 \cdot \sqrt{1+\frac{x}{273}},$$

$$336^2 = (330,6)^2 \cdot \left(1+\frac{x}{273}\right),$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τό x (ἄγνωστον θερμοκρασίαν):

$$x = 8,95^\circ$$

4) Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο σταθμῶν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ἦχος τηλεβόλου διέτρεξε ταύτην ἐντός 20 δευτερολέπτων, τῆς θερμοκρασίας τοῦ ἀέρος οὔσης 22°.

<u>Λύσις</u>: Γνωρίζομεν, ὅτι τό διάστημα ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα ἐπί τόν χρόνον, ἤτοι:

$$\delta = \tau . x \; .$$

Τό $x = 20''$, ἡ δέ ταχύτης εἰς 22° ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν, εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\tau = 330,6 \cdot \sqrt{1+\frac{22}{273}} \ .$$

Ὅθεν, ἔχομεν:

$$\delta = 330,6\sqrt{1+\frac{22}{273}} \cdot 20 = 6869,87 \ \mu.,$$

ἄρα: $\delta = 6869,87$ μέτρα.

5) Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐν τῷ ὑδρογόνῳ, ὅταν αὕτη εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 340 μ. καὶ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου 0,069, τοῦ δὲ ἀέρος 1;

Λύσις: Ὡς γνωστὸν αἱ ταχύτητες τοῦ ἤχου εἰς διάφορα μέσα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν πυκνοτήτων τῶν μέσων τούτων, ἤτοι:

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{\sqrt{\pi'}}{\sqrt{\pi}}$$

ἔνθα τ = ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα = 340

τ' = " " " τὸ ὑδρογόνον = x

π = πυκνότης τοῦ ἀέρος = 1

π' = " " ὑδρογόνου = 0,069

Ὅθεν ἔχομεν:

$$\tau \cdot \sqrt{\pi} = \tau'\sqrt{\pi'} \ ,$$

ἤτοι:

$$340 \cdot \sqrt{1} = \tau'\sqrt{0,069} \ ,$$

ἐξ ἧς:

$$\tau' = \frac{340}{\sqrt{0,069}} = 1297,70 \text{ μέτρα}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

6) Ἦχος παραγόμενος πρὸ τοίχου γίνεται ἐν δευτέρου ἀκουστὸς μετὰ ἕνα καὶ ἥμισυ δευτερόλεπτον. Ποία ἡ ἐκ τοῦ τοίχου ἀπόστασις τοῦ παρατηρητοῦ;

Λύσις: Ὁ ἦχος ἐπανέρχεται μετὰ $\frac{1}{10}$ δλ., ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ καλύμματος εἶναι 17 μέτρα. Ὁ ἦχος ὅμως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπανέρχεται μετὰ $\frac{15}{10}$ δλ, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ καλύμματος εἶναι x. Ὅθεν, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι :

$$x = 17 \cdot 15 = 255 \text{ μέτρα}$$

Ἄρα : $x = 255$ μέτρα.

7) Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος ἤχου ἐντὸς ὕδατος, ὅταν οὗτος ἀντιστοιχῇ εἰς 40 παλμοὺς κατὰ ἓν δευτερόλεπτον;

Λύσις : Προφανῶς, ἔχομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος ἰσοῦται μὲ τὴν ταχύτητα διὰ τῶν παλμῶν εἰς τὸ δευτερόλεπτον :

$$\lambda = \frac{\tau}{\pi},$$

ἀλλ' ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸ ὕδωρ εἶναι 1435 μ.

Ὅθεν : $$\lambda = \frac{1435}{40} = 35,875 \text{ μ.}$$

8) Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος εἰς τὸν ἀέρα ἤχου, ἀντιστοιχοῦντος εἰς 40 παλμοὺς κατὰ δευτερόλεπτον, εἰς θερμοκρασίαν, καθ' ἣν ἡ ταχύτης τῆς μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 336 μέτρα;

Λύσις : Τὸ μῆκος κύματος εἶναι :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\lambda = \frac{336}{40} = 8{,}4 \text{ μέτρα.}$$

9) Ποῖον εἶναι τό μῆκος κύματος εἰς τόν ἀέρα ἤχου, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμός τῶν παλμῶν εἶναι 435, τῆς ταχύτητος μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τόν ἀέρα οὔσης 331 μέτρα;

<u>Λύσις</u>: Τό μῆκος κύματος εἶναι:

$$\lambda = \frac{331}{435} = 0{,}761 \text{ μέτρα.}$$

10) Ὁ κινητός δίσκος μιᾶς σειρῆνος ἔχει 24 ὀπάς. Ποῖον εἶναι τό ὕψος τοῦ παραγομένου ἤχου, ὅταν ἐκτελῇ 1104 στροφάς εἰς τό πρῶτον λεπτόν;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$24 \cdot \frac{1104}{60} = 441{,}6 \text{ διπλοῖ παλμοί κατά δλ.}$$

11) Μία χορδή χαλκίνη ($\pi = 8{,}95$) τείνεται ἐπί τοῦ ἠχομέτρου δι' ἑνός βάρους 20 χιλιογράμμων καί κάμνει 920 παλμούς εἰς τό δευτερόλεπτον. Ποῖος θά εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν παλμῶν, ὁ ὁποῖος θά παραχθῇ εἰς ἕν δευτερόλεπτον, ὅταν τό τεῖνον βάρος γίνῃ ἴσον πρός 25 χιλιόγραμμα;

<u>Λύσις</u>: Οἱ ἀριθμοί τῶν παλμῶν μιᾶς χορδῆς εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν τεινόντων βαρῶν. Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ x τόν ἀριθμόν τῶν ἀγνώστων παλμῶν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θά ἔχωμεν:

$$\frac{x}{920}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{25}{20}}=\sqrt{\frac{5}{4}},$$

ἐξ οὗ:
$$x=\frac{920\cdot\sqrt{5}}{2}=460\cdot\sqrt{5}$$ παλμοί εἰς τό δευτερόλεπτον.

12) Διά ποίου βάρους πρέπει νά τείνωμεν μίαν χορδήν πυκνότητος δ, διαμέτρου 2ρ καί μήκους λ, διά νά μᾶς δίδῃ ν παλμούς εἰς τό δευτερόλεπτον;

<u>Λύσις:</u> Ἐκ τοῦ τύπου τῶν παλλομένων χορδῶν ἔχομεν:

$$N=\frac{1}{2\rho\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{\pi\delta}},$$

τότε:
$$\nu=\frac{1}{2\rho\lambda}\sqrt{\frac{gx}{\delta\pi}}$$

ἤ:
$$\nu^2=\frac{1}{4\rho^2\lambda^2}\cdot\frac{gx}{\delta\pi}$$

ἤ:
$$x=\frac{\nu^2\cdot4\rho^2\cdot\lambda^2\cdot\pi\delta}{g}$$

ἐάν x τό ζητούμενον βάρος.

13) Νά εὑρεθῇ τό ὕψος ἤχου, ὅστις παράγεται ὑπό χορδῆς, πυκνότητος 7,8, μήκους 1 μέτρου, διαμέτρου 1 χιλιοστοῦ καί τεινομένης ὑπό βάρους 42,54 χιλιογρ.

<u>Λύσις:</u> Ἐκ τοῦ τύπου τῶν παλλομένων χορδῶν, ἔχομεν ὅτι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$N = \frac{1}{2\rho\lambda}\sqrt{\frac{gM}{\pi\delta}} ,$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς δοθείσας τιμάς , εὑρίσκομεν :

$$N = \frac{1}{2.100.0{,}05} = \sqrt{\frac{42540 \cdot 981}{3{,}14 \cdot 78}} = 130{,}5$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΟΠΤΙΚΗ.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου εἶναι 120 ἑκ. καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου εἶναι 75 ἑκ.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς δοθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$\frac{1}{75}+\frac{1}{120}=\frac{1}{\varphi} \quad ,$$

ἐξ οὗ: $\varphi = 46{,}15$ ἑκ.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος 60 ἑκ.

Λύσις: Ὡς γνωστόν, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι:

$$\varphi=\frac{1}{2}R \quad ,$$

$$\varphi=\frac{60}{2}=30 \text{ ἑκ.μ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3) Νά εὑρεθῇ ἡ ἐστιακή ἀπόστασις ἀμφικύρτου φακοῦ, δείκτου διαθλάσεως 1,5 καί ἀκτίνων καμπυλότητος 18 έκ. καί 15 έκ.

<u>Λύσις</u>: Ἐάν εἰς τόν τύπον:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

ὅστις δίδει τήν ἐστιακήν ἀπόστασιν συναρτήσει τοῦ δείκτου διαθλάσεως καί τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος, ἀντικαταστήσω τά n, R καί R' διά τῶν ἴσων του, ἔχω:

$$\frac{1}{F} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{15}\right),$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν:

$$F = 16{,}3 \text{ έκ.}$$

4) Νά εὑρεθῇ ἡ ἰσχύς φακοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐστιακή ἀπόστασις εἶναι 0,30 μ.

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἰσχύς φακοῦ εἶναι τό ἀντίστροφον τῆς ἐστιακῆς ἀποστάσεως. Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ ἐστιακή ἀπόστασις εἶναι 0,30, ἡ ἰσχύς αὐτοῦ θά εἶναι:

$$\frac{1}{0{,}30} = 3{,}3 \text{ διόπτραι.}$$

5) Ἔμπροσθεν κοίλου κατόπτρου, ἀκτῖνος 40 έκ., εὑρίσκεται ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν 60 έκ. Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ εἰδώλου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐάν εἰς τόν τύπον:

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$$

θέσωμεν $\pi=60$ καί $\varphi=20$, ἔχομεν:

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi},$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν:

$$\pi'=30 \text{ ἑκ.}$$

6) Νά εὑρεθῇ ἡ ἑστιακή ἀπόστασις κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπό τοῦ κατόπτρου εἶναι 20 ἑκ. καί ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπό τοῦ κατόπτρου εἶναι 95 ἑκ.

<u>Λύσις:</u> Ἀντικαθιστῶντες εἰς τόν τύπον:

$$\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi'}=-\frac{1}{\varphi}$$

τά π, π' διά τῶν τιμῶν των, ἔχομεν:

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{95}=-\frac{1}{\varphi}$$

ἐξ ἧς: $-\varphi=25{,}30$

7) Νά εὑρεθῇ ἡ ἑστιακή ἀπόστασις συστήματος, ἀποτελουμένου ἐξ ἑνός συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 ἑκ., καί ἐξ ἑνός ἀποκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως -30 ἑκ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐάν εἰς τόν τύπον:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\quad,$$

ὅστις δίδει τήν ἐστιακήν ἀπόστασιν F συστήματος συναρτήσει τῆς ἐστιακῆς ἀποστάσεως συγκλίνοντος φακοῦ καί τῆς f_1=ἐστιακῆς ἀποστάσεως ἀποκλίνοντος φακοῦ, ἀντικαταστήσωμεν τά f καί f_1 διά τῶν τιμῶν των, ἔχομεν:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\quad,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν:

$$F=45\ \text{ἑκ.}$$

8) Δύο φλόγες ἐντάσεως 16 καί 9, ἀπέχουν μεταξύ των 140 ἑκατοστόμετρα. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς εὐθείας, ἥτις τάς ἑνώνει, πρέπει νά τοποθετηθῇ διάφραγμα, τό ὁποῖον θά φωτίζεται ἐξ ἴσου ὑπό τῶν δύο φωτεινῶν πηγῶν;

Λύσις: Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ διαφράγματος ἀπό τῆς ἰσχυροτέρας φωτεινῆς πηγῆς.

$$\frac{16}{x^2}=\frac{9}{(140-x)^2}\,,$$

λύοντες δέ τήν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν:

$$x_1=80\quad\text{καί}\quad x_2=560.$$

9). Ποῖον εἶναι τό ὕψος πύργου, ῥίπτοντος σκιάν 42 μέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τρων, ὅταν στέλεχος κατακόρυφον ῥίπτῃ σκιὰν 60 ἑκατοστομέτρων;

<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$\frac{\upsilon}{1} = \frac{4200}{60} = 70 \text{ μέτρα}.$$

10) Ὁ δείκτης διαθλάσεως ἑνὸς πρίσματος ἐξ ὑάλου εἶναι $\sqrt{2}$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὁριακῆς γωνίας.

<u>Λύσις</u>: Ἡ τιμὴ τῆς ὁριακῆς γωνίας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\eta\mu\,\lambda = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ἐξ οὗ:

$$\eta\mu\,\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

καί:

$$\lambda = 45^{o}$$

11) Πρὸ φακοῦ συγκλίνοντος, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 80 ἑκ.μ., φέρεται ἀντικείμενον ὕψους 5 ἑκ.μ. καὶ εἰς ἀπόστασιν 12 ἑκ.μ. Ποία εἶναι ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου;

<u>Λύσις</u>: Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi},$$

ὅτε ἔχομεν:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{8},$$

ἐξ οὗ:

$$\pi' = 24$$

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\pi'} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(ἔνθα α = ἀντικείμενον , ε = εἴδωλον).

Ἄρα $\pi' = 24$ ἑκ.μ. ἀνεστραμμένον καί ὕψους διπλασίου, ἤτοι 10 ἑκ.μ.

12) Φλόξ κηρίου, ἔχουσα ὕψος 4 ἑκ., εἶναι κάθετος ἐπί τόν κύριον ἄξονα κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 40 ἑκ., καί ἀπέχει 60 ἑκ. ἀπό τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου. Ζητεῖται : 1) ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου καί 2) τό μέγεθος τοῦ εἰδώλου.

<u>Λύσις:</u> Ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi} ,$$

ἐξ ἧς, ἀντικαθιστῶντες τάς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$\pi' = 120 .$$

Τό μέγεθος δέ τοῦ εἰδώλου παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\pi'} ,$$

$$\text{ἤτοι:} \quad \frac{4}{\varepsilon} = \frac{60}{120} ,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν: $\varepsilon = 8$ ἑκ.

13) Πρεσβύωψ δέν βλέπει καθαρά, παρά ἀπό ἀποστάσεως 0,60 ἑκ. καί πέραν τῆς ἀποστάσεως ταύτης. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ ἰσχύς τοῦ φακοῦ, ὁ ὁποῖος δύναται νά τοῦ ἐπαναφέρῃ τό σημεῖον τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἰς τήν ἀποστα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σιν τῶν 30 έκ.

<u>Λύσις</u>: Διά νά έπιτύχωμεν τοῦτο χρειάζεται συγκεντρωτικός φακός, ὅστις τιθέμενος εἰς ἀπόστασιν 30 έκ., νά δίδη εἴδωλον φανταστικόν εἰς ἀπόστασιν 60 έκ. Ἑπομένως πρέπει:

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{60}=\frac{1}{\varphi},$$

δηλαδή νά έχη ἑστιακήν ἀπόστασιν $\varphi = 60$ έκ., ἄρα καί ἡ ἰσχύς του θά εἶναι :

$$\frac{100}{60} = 1{,}64 \text{ διοπτρῶν.}$$

14) Νά δειχθῆ, ὅτι ὅταν ἡ γωνία πρίσματος εἶναι 60° καί ὁ δείκτης διαθλάσεως $\sqrt{2}$, τό πρίσμα εὑρίσκεται εἰς τήν Νευτώνειον θέσιν, διά γωνίαν $\pi = 45^\circ$.

<u>Λύσις</u> : Καί πράγματι :

$$\frac{\eta\mu\,\pi}{\eta\mu\,\rho} = \nu = \frac{\eta\mu\,45^\circ}{\eta\mu\,\rho} = \sqrt{2}$$

ἤ $\qquad \eta\mu\rho = \frac{1}{2}$, ὅθεν $\quad \rho = 30^\circ$.

Ἐπειδή ὅμως : $A = \rho + \rho' = 60 = \rho' + 30$, καί $\rho' = 30$, ἕπεται ὅτι : $\qquad \rho = \rho'$ καί $\pi = \pi'$,

ἤτοι Νευτώνειος θέσις τοῦ πρίσματος.

15) Πόσον χρονικόν διάστημα ἀπαιτεῖται, ἵνα τό φῶς φθάση ἐκ τοῦ ἡλίου εἰς τήν γῆν; Ἀπόστασις τῆς γῆς ἀπό τοῦ ἡλίου 23240 γήϊναι ἀκτῖνες, περιφέρεια τῆς γῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

40.000 χιλμ.

<u>Λύσις</u> : Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἡλίου ἀπό τῆς γῆς εἶναι :

$$23240 \cdot \frac{40000}{2\pi} \text{ χιλμ.},$$

ὁ δέ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διά νά διατρέξῃ τό φῶς τό διάστημα τοῦτο εἶναι :

$$23240 \cdot \frac{40000}{2\pi} \cdot \frac{1}{300000} = 493'' \text{ ἤτοι } 8' \text{ καί } 13''.$$

16) Ποία εἶναι ἡ ἀκτίς καμπυλότητος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ὅπου φωτεινόν τι σημεῖον τεθέν εἰς ἀπόστασιν 20 έκ. ἀπό τῆς κυρίας ἑστίας, σχηματίζει εἴδωλον καθ' ἀπόστασιν ἑνός μέτρου ἀπό τῆς κυρίας ἑστίας;

<u>Λύσις</u> : Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ Νεύτωνος :

$$\varphi^2 = \sigma \cdot \sigma',$$

ἔχομεν :
$$\varphi^2 = 20 \cdot 100 = 2000,$$

ἐξ οὗ :
$$\varphi = 44,7 \text{ έκ.}$$

Τό αὐτό πρόβλημα λύεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου :

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi},$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι :
$$\pi = \varphi + 20$$

καί :
$$\pi' = \varphi + 100$$

17) Ἐπί πρίσματος δείκτου διαθλάσεως $\sqrt{2}$ προσπίπτει φωτεινή ἀκτίς, ἡ ὁποία ἀναδύεται, ἐπιφαύουσα τήν ἐπι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φάνειαν τοῦ πρίσματος, ἄν ἡ γωνία προσπώσεως εἶναι 45°.

Ζητεῖται ἡ γωνία τοῦ πρίσματος.

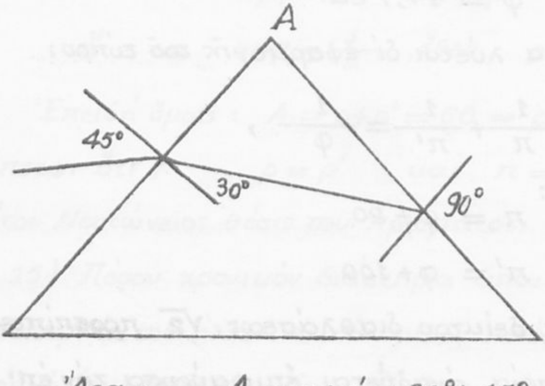
Λύσις: Ἀφοῦ ἡ ἀκτίς ἐξέρχεται ἐπιψαύουσα τήν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, σημαίνει ὅτι ἡ γωνία ἀναδύσεως εἶναι 90°, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία ρ' θά εἶναι:

$$\frac{\eta\mu\,\pi'}{\eta\mu\,\rho'} = \nu, \quad \acute{\eta} \quad \frac{\eta\mu\,\pi'}{\nu} = \eta\mu\rho', \; \acute{\eta}$$

$$\frac{\eta\mu 90^\circ}{\sqrt{2}} = \eta\mu\rho', \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \eta\mu\rho',$$

$$\text{ἐξ οὗ:} \qquad \rho' = 45^\circ.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ γωνία ρ' εἶναι 45°, ἄν εὑρεθῇ καί ἡ ρ, τότε ἐκ τοῦ τύπου $A = \rho + \rho'$ δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν ζητουμένην γωνίαν πρίσματος. Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ γωνία προσπτώσεως εἶναι 45°, τότε:



$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\rho} = \nu \quad \acute{\eta}$$

$$\eta\mu\rho = \frac{\eta\mu 45}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

ὅθεν $\rho = 30^\circ$.

Ἄρα: $A = \rho + \rho' = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

18) Δοχεῖον ὑάλινον, σχήματος ἡμισφαιρίου, τοῦ ὁποίου ἡ
τιμὴ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ κύκλου, εἶναι πλῆρες ὑγροῦ, δείκτου
διαθλάσεως $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ἐπὶ τοῦ κέντρου τῆς ἐλευθέρας του ἐπι-
φανείας πίπτει φωτεινὴ ἀκτίς, σχηματίζουσα μετὰ τῆς
ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ γωνίαν 30°. Ζητεῖται ἡ γω-
νία εκτροπῆς ἐκ τῆς διαθλάσεως εἰς μοίρας καὶ 2ον) ἄν
ἐξερχομένη τοῦ δοχείου, ὑφίσταται ἑτέραν τινὰ ἐκτρο-
πήν.

<u>Λύσις:</u> Ἡ γωνία ἐκτροπῆς ἐκ τῆς διαθλάσεως εἶναι
ἡ διαφορὰ τῆς γωνίας προσπτώσεως καὶ τῆς γωνίας δια-
θλάσεως, ἤτοι:

$$\delta = \pi - \rho \quad \text{ἤ} \quad \delta = 60^\circ - \rho.$$

Εὑρίσκομεν ἤδη τὸ ρ:

$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\rho} = \nu \;, \quad \frac{\eta\mu 60}{\eta\mu\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} \;, \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\eta\mu 60}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \eta\mu\rho \;, \quad \text{ἤ} \quad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \eta\mu\rho \;, \quad \text{ἤ}$$

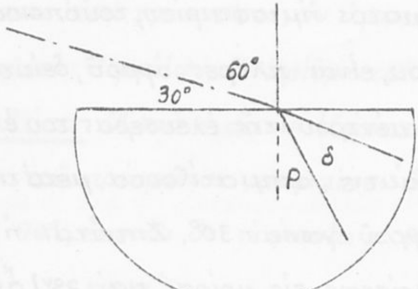
$$\eta\mu\rho = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu 45^\circ \;, \quad \text{ὅθεν:}$$

$$\rho = 45^\circ.$$

Ἄρα ἡ γωνία ἐκτροπῆς ἐκ διαθλάσεως θὰ εἶναι:

19ον

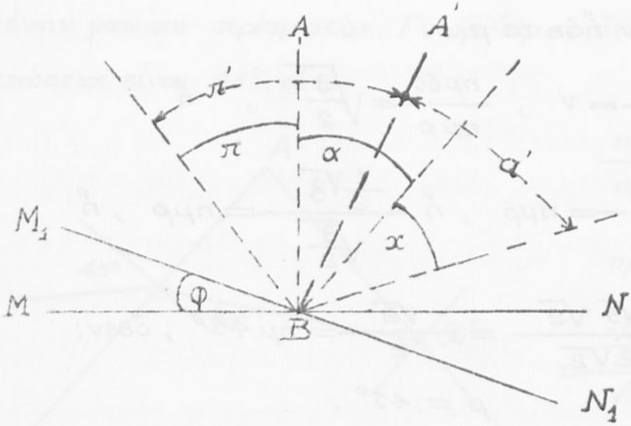
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής



$\delta = 60° - \rho =$
$= 60° - 45° = 15°$, ἡ δέ διαθλωμένη αὐτῆς, ὡς ἐξερχομένη καθέτως, οὐδεμίαν ἑτέραν ἐκτροπήν πάσχει.

19) Νά δειχθῇ ὅτι, ὅταν ἐπίπεδον κάτοπτρον στραφῇ κατά γωνίαν φ°, τότε ἡ ἀνακλωμένη αὐτῆς στρέφεται κατά γωνίαν 2φ.

<u>Λύσις:</u> Ἔστω τό κάτοπτρον ΜΝ, ἡ ἐπ' αὐτό κάθετος ΑΒ, π ἡ γωνία προσπτώσεως ἀρχική, α = γωνία ἀνακλάσεως. Στρέφομεν εἶτα τό κάτοπτρον M_1N_1 κατά γωνίαν φ, ὅτε ἔχομεν νέαν γωνίαν προσπτώσεως π' καί



καί νέαν γωνίαν ἀνακλάσεως α'. Ἐνταῦθα π = α καί

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\pi' = \alpha'$, ὡς γωνίαι προσπτώσεως καὶ ἀνακλάσεως.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἐξάγεται ὅτι:

$$x = \varphi + \alpha' = \alpha \quad (1),$$

ἀλλά: $\qquad \alpha' = \pi' = \pi + \varphi = \alpha + \varphi \quad ,$

διότι $\pi = \alpha$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ α' διὰ τοῦ ἴσου του $\alpha + \varphi$ καὶ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$x = \varphi + \alpha + \varphi - \alpha = 2\varphi \;, \quad \text{ὅθεν} \quad x = 2\varphi.$$

20) Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 ἑκ. καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ 25 ἑκ., εὑρίσκεται φωτεινὸν σημεῖον. Αἱ ἐκ τοῦ φωτεινοῦ σημείου ἀκτῖνες, διαθλώμεναι διὰ φακοῦ, προσπίπτουν ἐπὶ ἐπιπέδου κατόπτρου, εὑρισκομένου εἰς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 ἑκ. ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου αὐτοῦ. Οὕτω, ἀνακλώμεναι αἱ ἀκτῖνες καὶ προσπίπτουσαι ἐκ νέου ἐπὶ τοῦ φακοῦ, διαθλῶνται καὶ σχηματίζουν νέον εἴδωλον τελικόν, πρὸς τὸ μέρος τοῦ φωτεινοῦ ἀρχικοῦ σημείου.

Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ σχηματίζεται τὸ τελικὸν τοῦτο εἴδωλον;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω τὸ φωτεινὸν σημεῖον α, τὸ εἴδωλον αὐτοῦ α_1 θὰ εἶναι φανταστικόν, πρὸς τὸ μέρος τοῦ φακοῦ, εἰς ἀπόστασιν π'. Ὅθεν, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{50}$$

καί: $\pi' = 25$ ἑκατοστά.

Τό εἴδωλον α_1 ἀπέχει τοῦ ὄπισθεν τοῦ φακοῦ ἐπιπέδου κατόπτρου καί καθέτου πρός τόν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ κατά $50+25=75$ έκ.

Διά τοῦ κατόπτρου δέ σχηματίζεται εἴδωλον α_2 εἰς 75 έκ. ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καί φανταστικόν. Τό νέον τοῦτο εἴδωλον α_2 ἀπέχει πλέον ἀπό τοῦ φακοῦ $75+25=100$ έκ., παράγει δέ νέον εἴδωλον τελικόν α_3 πρός τό μέρος τοῦ ἀρχικοῦ φωτεινοῦ σημείου α εἰς ἀπόστασιν π'_3. Συνεπῶς:

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{\pi'_3}=\frac{1}{50}$$

καί $\pi'_3 = 100$ έκ.

21) Φωτεινή ἀκτίς προσπίπτει ὑπό γωνίαν ω ἐπί πλακός διαφανοῦς, μέ παραλλήλους ἕδρας, πάχους ε καί δείκτην διαθλάσεως ν. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις, καθ' ἥν θά μετακινηθῇ ἡ φωτεινή κηλίς ἐπί πετάσματος καθέτου τῇ προσπιπτούσῃ, ἄν ἀφαιρέσωμεν τήν πλάκα.

<u>Λύσις</u>: Ζητεῖται δηλαδή νά προσδιορισθῇ τό μῆκος ΑΒ συναρτήσει τῶν ν, ε καί ω. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$AB = A\Gamma \, \eta\mu \, \Gamma \quad \text{ἤ}$$

$$AB = A\Gamma \, \eta\mu(\omega - \delta)$$

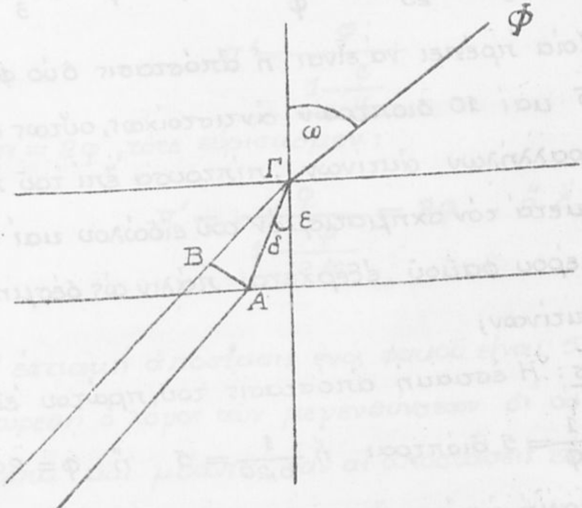
ὅπου δ ἡ γωνία διαθλάσεως.

Ἀλλά: $$A\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{\sigma\upsilon\nu\delta} = \frac{\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\delta}$$

Ἄρα: $$AB = \frac{\varepsilon\,\eta\mu(\omega-\delta)}{\sigma\upsilon\nu\delta} = \frac{\varepsilon}{\sigma\upsilon\nu\delta}(\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\delta - \eta\mu\delta\,\sigma\upsilon\nu\omega)$$

καὶ ἐπειδή: $$\eta\mu\delta = \frac{\eta\mu\omega}{\nu} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\delta = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2 - \eta\mu^2\omega},$$

ἔχομεν: $$AB = \varepsilon\left(\eta\mu\omega - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega\,\eta\mu\omega}{\sqrt{\nu^2 - \eta\mu^2\omega}}\right)$$



22) Βέλος εἶναι κάθετον ἐπί τόν ἄξονα φακοῦ συγκλίνου-

τος εἰς ἀπόστασιν 5 ἑκ. Τὸ εἴδωλόν του εἶναι φανταστικὸν καὶ 4 φορὰς μεγαλύτερον. Ζητεῖται ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις.

<u>Λύσις</u>: Ὁ τύπος ὁ συνδέων τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν πρὸς τὰς ἀποστάσεις εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου, διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, εἶναι:

$$\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi'}=\frac{1}{\varphi}$$

(ἔνθα ὁ φακὸς συγκλίνει, ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις φ θετική, τὸ εἴδωλον φανταστικὸν καὶ τὸ π' ἀρνητικόν).

Ἀλλά: $\frac{\varepsilon}{\alpha}=\frac{\pi}{\pi'}=4$, ἐξ οὗ: $\pi'=20$,

ὥστε: $\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{1}{\varphi}$ Ἄρα $\varphi=6\frac{2}{3}$ ἑκ

23) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο φακῶν, ἰσχύος 5 καὶ 10 διοπτριῶν ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων, πίπτουσα ἐπὶ τοῦ πρώτου φακοῦ, μετὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ εἰδώλου καὶ δίοδον διὰ τοῦ δευτέρου φακοῦ, ἐξέρχεται πάλιν ὡς δέσμη παραλλήλων ἀκτίνων;

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ πρώτου εἶναι:

$$\frac{1}{\varphi}=5 \text{ διόπτραι} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{0{,}20}=5 \quad \text{ἢ} \quad \varphi=20 \text{ ἑκ.}$$

Ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου εἶναι:

$$\varphi=10 \text{ ἑκ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φακῶν πρέπει νά εἶναι:

$$20 + 10 = 30 \text{ ἑκ.}$$

24) Δείξατε ὅτι, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπό σφαιρικοῦ κατόπτρου εἶναι 2φ καί ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπό τοῦ κατόπτρου εἶναι ἡ αὐτή.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{\varphi},$$

ἔχομεν:
$$\pi' = \frac{\pi\varphi}{\pi - \varphi}.$$

Καί ἄν διαιρέσωμεν διά π, τότε ἔχομεν:

$$\pi' = \frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi}{\pi}},$$

ἐάν δέ $\pi = 2\varphi$, τότε εὑρίσκομεν:

$$\pi' = \frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi}{2\varphi}} = 2\varphi, \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

25) Ἡ ἑστιακή ἀπόστασις ἑνός φακοῦ εἶναι 5 ἑκ. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν μεγενθύνσεων δι' ὀφθαλμόν ἐμμέτρωπα καί μύωπα, ἐάν αἱ ἀποστάσεις εὐκρινοῦς ὁράσεως τῶν ὀφθαλμῶν τούτων εἶναι ἀντιστοίχως 30 ἑκ. καί 12,5 ἑκ.

Λύσις: Ἡ μεγέθυνσις διά τόν ἐμμέτρωπα εἶναι:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$M = 1 + \frac{30}{5} = 7.$$

Ἡ μεγέθυνσις διά τόν μύωπα εἶναι:

$$M' = 1 + \frac{12,5}{5} = 3,5$$

Καί ὁ λόγος εἶναι: $\frac{7}{3,5} = 2.$

26) Ζητεῖται ἡ θέσις καί τό μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τοῦ σχηματιζομένου δι' ἀστρονομικῆς διόπτρας, ἐάν ἡ ἑστιακή ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἶναι 1 μ., τοῦ προσοφθαλμίου 2 έκ., τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο φακῶν οὔσης 1,8 μ. Ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμενικοῦ ἀπό τοῦ ἀντικειμένου εἶναι 500μ. Τό μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου καθέτου ἐπί τόν κύριον ἄξονα τοῦ συστήματος τῶν φακῶν εἶναι 5 μ.

<u>Λύσις:</u> Ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ ἀντικειμένου εἶναι $\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$. Τό μέγεθος τοῦ εἰδώλου, τό ὁποῖον δίδει ὁ ἀντικειμενικός, εἶναι: $\frac{1}{100} \cdot 100 = 1$ έκ. Τό εἴδωλον τοῦτο εἶναι εἰς ἀπόστασιν 1,8 ἀπό τοῦ προσοφθαλμίου, ὅστις δίδει εἴδωλον φανταστικόν εἰς ἀπόστασιν π', ἤτοι:

$$\frac{1}{1,8} + \frac{1}{\pi'} = \frac{1}{2} \quad \text{καί:} \quad \pi' = -18 \text{ έκ.}$$

Τό μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου εἶναι:

$$1 \text{ έκ.} \cdot \frac{18}{1,8} = 10 \text{ έκ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

27) Νὰ δειχθῇ θεωρητικῶς ὅτι ἡ γωνία ἐκτροπῆς ἑνὸς πρίσματος αὐξάνεται μετὰ τοῦ δείκτου διαθλάσεως (τὰ Α καὶ π μένουν σταθερά).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου:

$$\frac{ημπ}{ημρ} = ν ,$$

ἔχομεν: $$ημπ = νημρ .$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἐξάγεται ὅτι, ἐὰν αὐξηθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως ν, πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ ρ, διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ ἰσότης. Τότε, προφανῶς, ἡ διαφορὰ (π−ρ) γίνεται μεγαλυτέρα, διότι τὸ π παραμένει σταθερόν, ὡς εἰδείξαμεν εἰς ἑτέραν ἄσκησιν. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ρ γίνῃ μικρότερον, διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ ἰσότης $Α=ρ+ρ'$, πρέπει νὰ αὐξήσῃ τὸ ρ'. Ἂν αὐξήσῃ τοῦτο, τότε ἡ διαφορὰ (π'−ρ') αὐξάνει, ὁπότε τὸ (π−ρ)+(π'−ρ') γίνεται μεγαλύτερον καὶ ἐπειδὴ τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ἐκτροπῆς δ, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ γωνία αὐτὴ αὐξάνει.

28) Νὰ δειχθῇ θεωρητικῶς ὅτι ἡ γωνία ἐκτροπῆς ἑνὸς πρίσματος αὐξάνεται μετὰ τῆς διαθλαστικῆς γωνίας τοῦ πρίσματος (τὰ π καὶ ν μένουν σταθερά).

Λύσις: Γνωρίζομεν ἐκ τῶν τύπων τοῦ πρίσματος ὅτι:

$$δ = (π-ρ)+(π'-ρ') ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπίσης δὲ ὅτι: $A = \rho + \rho'$

(ἔνθα A ἡ διαθλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος).

Ἐπειδὴ ἡ γωνία προσπτώσεως π δὲν μεταβάλλεται καὶ ἡ γωνία δ δὲν μεταβάλλεται. Ἄρα ἡ διαφορὰ $(\pi-\rho)$ εἰς τὸν τύπον $\delta = (\pi-\rho)+(\pi'-\rho')$ μένει σταθερά.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία αὐτὴ ρ μένει σταθερὰ καὶ αὐξάνομεν τὴν A, διὰ νὰ ἴδωμεν τί παθαίνει ἡ γωνία ἐκτροπῆς, πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ ρ', διὰ νὰ διατηρηθῇ ἡ σχέσις $A=\rho+\rho'$ (ἐὰν αὐξηθῇ τὸ A). Ἀλλ' ἀφοῦ θὰ αὐξηθῇ ἡ ρ', πρέπει νὰ αὐξηθῇ καὶ ἡ π', καὶ μάλιστα κατὰ ποσὸν πολὺ μεγαλύτερον ἀπὸ ὅ,τι ἡ ρ'. Τότε ἡ διαφορὰ $\pi'-\rho'$ γίνεται μεγαλυτέρα καὶ τὸ ὅλον ἄθροισμα $(\pi-\rho)+(\pi'-\rho')$ γίνεται μεγαλύτερον, ἄρα καὶ τὸ δ μεγαλύτερον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ.

1) Δύο ἴσαι μαγνητικαὶ μᾶζαι, ἑκάστη 300 μονάδων C.g.S., ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν 1200 δυνῶν. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἡ μία ἀπὸ τῆς ἄλλης εὑρίσκονται αὗται;

<u>Λύσις:</u> Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον:

$$P = \frac{m \cdot m'}{\rho^2}$$

ἐνταῦθα ἔχομεν: $P = \dfrac{m^2}{\rho^2}$,

ἐπειδὴ $m = m'$· λύοντες δὲ ὡς πρὸς ρ, εὑρίσκομεν:

$$\rho = \frac{m}{\sqrt{P}} = \frac{300}{\sqrt{1200}} = 8{,}66 \text{ ἑκ.μ.}$$

2) Μία μαγνητικὴ ράβδος κυκλικῆς τομῆς, ἐκβάλλει 10000 μαγνητικὰς γραμμάς. Ποία εἶναι ἐκ τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μαγνητική της μᾶζα;

<u>Λύσις:</u> Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον:

$$N = 4\pi m \quad \text{ἢ} \quad m = \frac{N}{4\pi},$$

εὑρίσκομεν: $m = \dfrac{10000}{4\pi} = 800$ μονάδες C.g.S.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

3) Πόσαι δυναμικαί γραμμαί ἐκβάλλονται ἀπό ράβδον μαγνητισμένην, τῆς ὁποίας τά ἄκρα ἔχουν 400 μονάδας C.g.S;

<u>Λύσις:</u> Ὁ ἀριθμός τῶν δυναμικῶν γραμμῶν, τῶν ἐκβαλλομένων ἀπό τόν ἕνα πόλον, εἶναι:

$$N = 4\pi \cdot m ,$$

(ἔνθα m εἶναι ἡ μαγνητική μᾶζα ἑνός πόλου), ἐξ οὗ ἔχομεν: $N = 4\pi \cdot 400 = 5000$ γραμμαί.

4) Σιδηροῦς μαγνήτης, σχήματος πετάλου, εἶναι τοποθετημένος κατακορύφως καί δύναται νά φέρη ὁπλισμόν 5 χιλιογράμμων, τό δέ πάχος του εἶναι 1 ἑκατοστομέτρου καί τό πλάτος 3 ἑκ. Ποία εἶναι, εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην, ἡ ἐπαγωγή εἰς τό σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ὁπλισμοῦ καί πόσαι δυναμικαί γραμμαί παρουσιάζονται εἰς τόν βόρειον καί νότιον πόλον;

<u>Λύσις:</u> Ὅπως τά δύο ἄκρα τῆς ράβδου εἶναι πεπληρωμένα, ἡ φέρουσα δύναμις εἶναι:

$$P = 2\,\frac{B^2 \cdot Q}{8\pi} ,$$

ἐξ οὗ ἔχομεν: $B = \sqrt{\dfrac{4\pi P}{Q}}$ ἤ

$$B = \sqrt{\frac{4\pi \cdot (5.1000 \cdot 981)}{3.1}} .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

'Εξ ἄλλου, ὁ ἀριθμός τῶν δυναμικῶν γραμμῶν, τῶν ἐκβαλλομένων ἐκ τοῦ βορείου πόλου πρός τόν νότιον πόλον εἶναι :

$$N_o = Q \cdot B = 3 \cdot 4540 = 13620 \text{ γραμμαί.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ.

1) Σφαίρα ἀκτῖνος 14 ἑκατοστομέτρων εἶναι ἠλεκτρισμένη καί ἡ ἠλεκτρική της πυκνότης εἶναι 10. Ποῖον εἶναι τό δυναμικόν τῆς σφαίρας;

Λύσις: Τό δυναμικόν τῆς σφαίρας εἶναι ἴσον πρός τό πηλίκον τοῦ φορτίου της διά τῆς ἀκτῖνος της, ἤτοι:

$$\frac{4\pi \cdot 14^2 \cdot 10}{14} = 1759{,}296.$$

2) Νά εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις σύρματος, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτό ῥεύματος εἶναι 4 ampères, ἡ δέ κατά τά πέρατα διαφορά δυναμικοῦ ἴση πρός 160 volts.

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:

$$J = \frac{E}{R} = \frac{160}{4} = 40 \text{ ohms}$$

3) Δύο σφαῖραι μικραί φέρουν ἡ μέν μία ποσότητα ἠλεκτρικῆς ἴσην πρός +12, ἡ δέ ἄλλη ἴσην πρός −8 καί εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 ἑκ.μ. Μετά πόσης δυνάμεως ἕλκονται;

Λύσις: Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb, ἔχομεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$F=\frac{M.\mu}{\rho^2}=\frac{12.8}{2^2}=\frac{12.8}{4}=24 \text{ δύναι.}$$

4) Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξύ δύο σφαιρῶν, αἱτίνων 1 καί 2, αἵτινες εἶναι ἠλεκτρισμέναι καί παρουσιάζουν τό αὐτό δυναμικόν, ἑκάστη 40, ὅταν ἡ μεταξύ των ἀστική δύναμις εἶναι 4 δυνῶν;

<u>Λύσις</u>: Παριστῶντες διά B καί B' τά φορτία τῶν δύο σφαιρῶν, τότε τά δυναμικά των θά εἶναι $\frac{B}{1}$ καί $\frac{B'}{2}$, ἀμφότερα ὅμως ἰσοῦνται πρός 40, ἤτοι:

$$\frac{B}{1}=\frac{B'}{2}=40 \text{ , ὅθεν } B=40 \text{ , } B'=80.$$

Ἐφαρμόζοντες ἤδη τόν νόμον τοῦ Coulomb, εὑρίσκομεν:

$$\frac{40.80}{\delta^2}=4 \quad \text{ἤ} \quad \delta=28{,}2 \text{ ἑκ.μ.}$$

Ἄρα, ἡ ἀπόστασις εἶναι 28,2 ἑκ.μ.

5) Λουγδονική λάγηνος ἔχει τόν ἐξωτερικόν ὁπλισμόν εἰς τήν γῆν, τό δέ ἐσωτερικόν ὁπλισμόν εἰς στήλην δυνάμεως 30.000 volts. Νά ὑπολογισθῇ:

α) τό φορτίον της καί ἡ ἠλεκτρική ἐνέργειά της καί

β) ἡ ἐκλυομένη ποσότης ἀργύρου εἰς γραμμάρια, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ λάγηνος ἐκκενοῦται χιλίας φοράς εἰς διάλυσιν νιτρικοῦ ἀργύρου καί ὅτι 96.000 Coulombs ἐκλύουν 108 γραμμάρια Ἀργύρου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις : α) Τό φορτίον τῆς λαγήνου εἰς Coulombs θά εἶναι:

$$Q = 0,1 \cdot 30.000 \cdot \frac{1}{1.000.000} = 0,003 \text{ Coulombs},$$

ἡ δέ ἠλεκτρική ἐνέργεια αὐτῆς, διδομένη ὑπό τοῦ τύπου:

$$W = \frac{1}{2} C v^2 \quad , \qquad \text{θά εἶναι:}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (30000)^2 \cdot \frac{1}{1.000.000} = 45 \text{ Joules.}$$

β) Αἱ χίλιαι ἐκκενώσεις τῆς λαγήνου θά κάμουν νά διέλθη διά τοῦ νιτρικοῦ ἀργύρου ρεῦμα $0,0003 \cdot 1000 = 3$ coulombs. Ἀλλά 96600 Coulombs ἐκλύουν 108 γραμμάρια ἀργύρου, ἄρα θά εἶναι :

$$\frac{96\,600}{3} = \frac{108}{x}$$

ἤ $\qquad x = 0{,}003$ γραμ.

6) Λουγδονική λάγηνος ἔχει τόν μέν ἐξωτερικόν της ὁπλισμόν εἰς τό ἔδαφος, τόν δέ ἐσωτερικόν της συγκοινωνοῦντα μέ ἠλεκτρικήν πηγήν 60.000 volts. Ἐάν ἑνώσωμεν τόν ἐσωτερικόν ὁπλισμόν μέ δοχεῖον ἠλεκτροχωρητικότητος 1/100 τοῦ microfarad, ἐνῷ ὁ ἐξωτερικός ἐξακολουθεῖ νά εἶναι εἰς τό ἔδαφος, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἠλεκτρική πηγή δεικνύει 24.000 volts. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτροχωρητικότης τῆς λαγήνου.

Λύσις: Ἡ ἠλεκτροχωρητικότης C ἰσοῦται μέ τό πη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λίκον τῆς διαιρέσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἠλεκτρισμοῦ Q διά τοῦ δυναμικοῦ V, ἤτοι:

$$C = \frac{Q}{V} \quad ἤ \quad Q = CV.$$

Τώρα, ἐάν διά τοῦ x παραστήσωμεν τήν ἠλεκτροχωρητικότητα τῆς λαγήνου, θά ἔχωμεν τήν πρώτην φοράν:

$$C = x \quad καί \quad V = 60000 \cdot x$$

καί τήν δευτέραν: $C = x + 0{,}01$, $V = 24.000$,

ἄρα: $Q = 60000\,x$ καί $Q = 24000\,(x + 0{,}01)$

καί δι' ἐξισώσεως τῶν δευτέρων μελῶν:

$$60000\,x = 24000\,(x + 0{,}01)$$

καί $x = 1/150$ τοῦ microfarad.

7) Ποία ποσότης χαλκοῦ θά ἐκλυθῇ εἰς ἕν στοιχεῖον Daniell, καταγράφον 10 ὡριαία ampères;

<u>Λύσις</u>: Γνωστοῦ ὄντος τοῦ ἠλεκτροδυναμικοῦ ἰσοδυνάμου $\alpha = 0{,}328$ διά τόν χαλκόν, τοῦ χρόνου t μετατραπέντος εἰς δευτερόλεπτα καί τῶν 10 ὡριαίων ampères μετατραπέντων εἰς Coulombs, ἔχομεν:

Ἕν ὡριαῖον ampères $1 = 60 \cdot 60 = 3600$ Coulombs

$$g = 0{,}328 \cdot 3600 \cdot 10 = 11{,}8 \text{ γρ. χαλκοῦ},$$

ἐφαρμοσθέντος τοῦ τύπου: $g = \alpha Q$.

8) Πόσας ἡμέρας ἕν στοιχεῖον πρέπει νά ἐργασθῇ πρός 0,2 ampères, διά νά παράσχῃ 60 ὡριαῖα ampères;

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ὡς γνωστόν, τό ποσόν τοῦ ἠλεκτρισμοῦ Q ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ χρόνου ἐπί τό ρεῦμα εἰς ἀμπέρες, ἤτοι ἔχομεν:

$$Q = t \cdot J \quad , \text{ὅθεν} : \quad t = \frac{Q}{J} \quad , \text{ἤτοι:}$$

$$t = \frac{Q}{J} = \frac{60}{0{,}2} = 300 \text{ ὥρας, ἤ } \frac{300}{24} = 12{,}5 \text{ ἡμέρας.}$$

9) Πόσα Coulombs παρέχει ἕν στοιχεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ κατάστασις εἶναι ἐπί 30 ἡμέρας 0,1 ἀμπέρες;

Λύσις: Αἱ τριάκοντα ἡμέραι εἶναι 2592000 δευτερόλεπτα. Ὅθεν:

$$Q = 0{,}1 \cdot 2592000 = 2592000 \text{ Coulombs.}$$

10) Βλῆμα μάζης 400 γραμ, ποίαν ταχύτητα ἔπρεπε νά ἔχῃ ἵνα παράγῃ τό αὐτό ἔργον, ὅπερ παράγει κατά τήν εὐφόρτισιν τοῦ ἀγωγός, ἠλεκτροχωρητικότητος 150 καί δυναμικοῦ 100;

Λύσις: Προφανῶς:

$$\frac{1}{2} c v^2 = \frac{1}{2} \mu \tau^2 \quad \text{ἤ} \quad c v^2 = \mu \tau^2 ,$$

ἀντικαθιστῶντες δέ τάς δοθείσας τιμάς, ἔχομεν:

$$150 \cdot 100^2 = 400 \cdot \tau^2$$

καί λύοντες τήν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρός τήν ταχύτητα τ εὑρίσκομεν: $\tau = 61{,}2$ ἑκ.μ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

11) Εἷς συμπυκνωτής ἔχει χωρητικότητα 8000. Ἀφηλεκτρί-
ζομεν αὐτόν διά μεταλλικοῦ σύρματος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμο-
χωρητικότης εἶναι 0,0006. Τότε ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρμα-
τος γίνεται ἀπό 10° εἰς 510°. Ποία ἦτο ἡ διαφορά δυναμι-
κοῦ τῶν ὁπλισμῶν πρό τῆς ἀφηλεκτρίσεως, ἐάν ὑποτεθῇ
ὅτι ὅλη ἡ θερμότης τοῦ φορτίου μετεδόθη εἰς τό σύρμα;

<u>Λύσις</u>: Ἐκ τοῦ τύπου: $\frac{1}{2}CV^2$, ἔχομεν:

$$\frac{1}{2}\,8000\cdot V^2 = 4,17\cdot 10^7\cdot 0,0006\,(510-10)$$

ἐξ οὗ: $V = 59,25$ βόλτ.

12) Στήλη ἐξ 120 στοιχείων ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὁμάδων,
ἡνωμένων κατά ποσότητα, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιέχει
60 στοιχεῖα κατά τάσιν. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις
τῆς στήλης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοι-
χείου εἶναι 1,5 ohms.

<u>Λύσις</u>: Ἑκάστη σειρά ἔχει ὡς ἀντίστασιν $60\cdot 1,5=90$
ohms. Αἱ δύο ὁμάδες, συνδεδεμέναι κατά ποσότητα, θά
ἔχουν ἀντίστασιν ἴσην πρός $\frac{90}{2}=45$ ohms.

13) Ἡ ἀντίστασις ἀγωγοῦ χαλκίνου, μήκους 10 μ. καί
μάζης 20 γρ., εἶναι 0,715 ohms. Ποία εἶναι ἡ εἰδική ἀν-
τίστασις τοῦ χαλκοῦ, ὅταν ἡ πυκνότης εἶναι 8,8;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$R = \rho\frac{l}{\sigma},$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν:

$$0,715 = \gamma \frac{\frac{1000}{20}}{1000 . 8,8},$$

ἐξ οὗ $\gamma = 0,0000016$

14) Ἔχει τις 54 στοιχεῖα ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως, ἕκαστον 1,1 volt καὶ ἀντιστάσεως 20 ohms. Πῶς πρέπει νὰ συνδεθοῦν ταῦτα, ἵνα ἔχωμεν μέγιστον ῥεῦμα εἰς τηλεγραφικὴν γραμμὴν ἀντιστάσεως 12 ohms.

Λύσις: Ἔστω n ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁμάδων, m ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων, συνδεδεμένων κατὰ ποσότητα εἰς ἑκάστην ὁμάδα. Ἔχομεν:

$$n . m = 54 \quad , \quad \frac{n . 2\text{O}}{m} = 12$$

Λύομεν τὰς ἐξισώσεις καὶ ἔχομεν:

$$m = 3 \quad \text{καὶ} \quad n = 18.$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν 18 ὁμάδας τῶν 3 στοιχείων, συνδεδεμένων κατ' ἐπιφάνειαν.

15) Δυναμομηχανὴ παράγει συνεχὲς ῥεῦμα 125 ampères ὑπὸ 220 volts. Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς ἀτμομηχανῆς, ἥτις ὀφείλει νὰ τὴν κινήσῃ, ἐὰν ἡ μηχανικὴ ἀπόδοσις της εἶναι 0,745;

Λύσις: Ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι:

$$P = EI = 125 \cdot 220 = 27,5 \text{ κιλοβὰτ}.$$

Ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανῆς εἶναι:

$$T = \frac{27500}{736 . 0,745} = 50,15.$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

16) Ποία εἶναι ἡ ἔντασις ῥεύματος κλειστοῦ κυκλώματος στοιχείου ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 20 ohms, ἐξωτερικῆς 40 ohms καί ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 120 volts;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:

$$J = \frac{E}{R+r} = \frac{120}{40+20} = 2 \text{ αμπέρες.}$$

17) Ποία εἶναι ἡ δύναμις, ἥτις ἐξασκεῖται μεταξύ δύο πόλων μαγνητικῶν μαζῶν 32 καί 40 ἐξ ἀποστάσεως 10 ἑκατοστομέτρων;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν σχετικόν νόμον, ἔχομεν:

$$F = \frac{32 \cdot 40}{10^2} = 12{,}8 \text{ δύναι.}$$

18) Ἐντός μιᾶς ὥρας πόσον ὕδωρ δυνάμεθα νά ἠλεκτρολύσωμεν, διοχετεύοντες ῥεῦμα ἐξ ἠλεκτρικῆς πηγῆς ἰσχύος ἑνός ἀτμοΐππου, δοθέντος ὅτι 1,5 Joule ἠλεκτρολύει $\frac{9}{96600}$ γρ. ὕδατος εἰς 1 δευτερόλεπτον;

<u>Λύσις</u>: Ἀφοῦ 1,5 Joule ἠλεκτρολύει $\frac{9}{96600}$ γρ. ὕδατος, τά 75 · 9,81 · 3600'' ἠλεκτρολύουν:

$$\frac{9}{96600} \cdot \frac{75 \cdot 9{,}81 \cdot 3600}{1{,}5} = 164 \text{ γρ. ὕδατος.}$$

19) Τά ἠλεκτρόδια στήλης σταθερᾶς εἶναι συνδεδεμένα δι' ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 20 ohms, δι' οὗ διέρχεται ῥεῦμα ἐν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τάσεως 10 amperes. Ἐάν ὁ ἐξωτερικός ἀγωγός ἀποκτήσῃ ἀντίστασιν 40 ohms, τότε ἡ ἔντασις γίνεται 8 amperes, καί ὅταν ἡ ἀντίστασις γίνῃ x ohms, τότε ἡ ἔντασις καθίσταται ἴση πρός 9 amperes. Ποία ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τῆς στήλης τ καί ἡ ἐξωτερική ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ x;

Λύσις: Ὡς γνωστόν :

$$J = \frac{E}{R+\tau}, \text{ ὁπότε:}$$

εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν: $10 = \dfrac{E}{20+\tau}$,

εἰς " δευτέραν " " $8 = \dfrac{E}{40+\tau}$,

" " τρίτην " " $9 = \dfrac{E}{x+\tau}$.

Ὅθεν: $10(20+\tau) = 8(40+\tau) = 9(x+\tau)$,

λύοντες δέ εὑρίσκομεν :

$$\tau = 60 \text{ ohms} \quad \text{καί} \quad x' = 28\tfrac{8}{9} \text{ ohms}.$$

20) Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τούς πόλους στήλης, ἵνα δι' αὐτῆς παραχθῇ ρεῦμα 5 amperes ἐντός ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 7 ohms;

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι :

$$I = \frac{E}{R}, \text{ ὅθεν :}$$

$$E = I.R = 5.7 = 35 \text{ volts}.$$

21) Ποία ἡ ἀντίστασις σύρματος τινός, ὅταν διά διαφοράν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δυναμικοῦ 120 volts, παράγεται ρεῦμα ἐντάσεως 6 ampères.

<u>Λύσις:</u> Γνωρίζομεν ὅτι:

$$I = \frac{E}{R},$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς δοθείσας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$R = \frac{120}{6} = 20 \text{ ohms.}$$

22) Τὸ σύρμα τὸ ἑνοῦνον τοὺς δύο πόλους στήλης διακλαδίζεται εἰς δύο ἀγωγούς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σχέσις τῶν ποσοτήτων τῆς θερμότητος, τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον εἰς τοὺς δύο ἀγωγούς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἀντιστάσεις των εἶναι 3 καὶ 6 ohms.

<u>Λύσις:</u> Ἔστωσαν i_1 καὶ i_2 αἱ ἐντάσεις ἐντὸς τῶν δύο ἀγωγῶν, καὶ r_1 καὶ r_2 αἱ ἀντιστάσεις των. Τότε:

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 \qquad (1).$$

Ἐὰν q_1 καὶ q_2 εἶναι αἱ ποσότητες τῆς θερμότητος, αἱ ἀναπτυσσόμεναι εἰς τοὺς δύο ἀγωγοὺς τοὺς διακλαδιζομένους, τότε ἔχομεν:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{i_1^2 r_1}{i_2^2 r_2}.$$

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (1), ἔχομεν:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad \text{ὅθεν:} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{6}{3} = 2$$

23) Σφαιρίδιον μεταλλικόν, ἠλεκτρισμένον, φέρεται εἰς ἐπα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

φήν πρός ὅμοιον σφαιρίδιον καί εἶτα ἀπομακρύνεται αὐτοῦ. Ὅταν ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν δύο σφαιριδίων εἶναι 10 ἑκατοστ., ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀπωθεῖ τό ἕτερον μετά δυνάμεως 9 δυνῶν. Ζητεῖται πόσον ἠλεκτρισμόν ἔφερεν ἐν ἀρχῇ τό ἠλεκτρισμένον σφαιρίδιον.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$F = \frac{\mu M}{\rho^2}, \text{ ἔχομεν: } 9 = \frac{\mu M}{10^2}, \text{ ἀλλά } \mu = M$$

$$9 = \frac{\mu^2}{10^2}, \quad \mu^2 = 900, \quad \mu = 30 \text{ Coulombs.}$$

24) Δύο μικραί σφαῖραι ταυτόσημοι θετικῶς ἠλεκτρισμέναι καί τοποθετημέναι εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἡ μία ἀπό τῆς ἄλλης, προκαλοῦν ἀπώθησιν μεταξύ των ἴσην πρός μίαν ἠλεκτροστατικήν μονάδα. Τάς προσεγγίζομεν μέχρι σημείου ὥστε ἡ μία νά ἐφάπτεται τῆς ἄλλης, κατόπιν τάς ἀπομακρύνομεν εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρός τό ἥμισυ τῆς προηγουμένης καί ἔχομεν ἀπώθησιν ἴσην πρός 4,5 μονάδας. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν θετικῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων μ, μ' τῶν δύο σφαιρῶν.

Λύσις: Ἔστω δ ἡ ἀρχική ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν· κατά τόν νόμον τοῦ Coulomb, ἔχομεν:

$$\frac{\mu \mu'}{\delta^2} = 1 \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Όταν προκαλούμεν τήν έπαφήν τῶν δύο σφαιρῶν, τά φορτία διαμοιράζονται έξ ἴσου μεταξύ των. Ἡ κάθε μία λοιπόν έλαβε τό φορτίον $\frac{\mu+\mu'}{2}$. Διά τήν ἀπόστασιν $\frac{\delta}{2}$ έχομεν τότε πάλιν σύμφωνα μέ τόν ἀνωτέρω νόμον:

$$\frac{\frac{(\mu+\mu')^2}{2}}{\frac{\delta^2}{4}} = 4,5 \quad ἤ \quad \frac{(\mu+\mu')^2}{\delta^2} = 4,5 \qquad (2).$$

Διαιροῦντες τήν (1) διά τῆς (2), λαμβάνομεν:

$$\frac{(\mu+\mu')^2}{\mu\mu'} = 4,5 \quad ἤ \quad \frac{\mu}{\mu'} + 2 + \frac{\mu'}{\mu} = 4,5$$

θέτοντες δέ $\frac{\mu}{\mu'} = x$, εὑρίσκομεν:

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 4,5 ,$$

έξ οὗ λύοντες τήν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν: $x' = 2$, $x'' = \frac{1}{2}$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τό ἕν φορτίον εἶναι διπλάσιον τοῦ ἑτέρου.

25) Ποίαν ἀκτῖναν ἔχει σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ χωρητικότης εἶναι 1 microfarad;

Λύσις: Ἕν microfarad ἰσοδυναμεῖ πρός 9.10^5 ἠλεκτροστατικάς μονάδας χωρητικότητος, ἤτοι 900.000.

Ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει αὐτήν τήν χωρητικότητα, εἶναι 900.000 ἑκατοστόμετρα ἤ 9 χιλιόμετρα.

Ἡ χωρητικότης σφαίρας ἐχούσης τήν αὐτήν ἐπιφάνειαν,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

οίαν καί ή γή, δέν θά εἶχε παρά 700 microfarads.

26) Ἡ χωρητικότης ἀγωγοῦ εἶναι 700 μF. Ποῖον δυναμικόν πρέπει νά φορτίσῃ τις αὐτόν, ἵνα ἡ ἐνέργεια τῆς ἀφηλεκτρίσεώς του εἶναι ἰσοδύναμος πρός 1 θερμίδα;

Λύσις: Ἡ ἔκφρασις τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι $\frac{1}{2}CV^2$, ὥστε $\frac{1}{2}\cdot 700\cdot x^2 = 4,17\cdot 10^7$

Μία θερμίς εἶναι ἰσοδύναμος πρός $4,17 \cdot 10^7$ ἔργια καί

$$x = 345,2.$$

27) Τό ρεῦμα μιᾶς στήλης, ἀποτελουμένης ἀπό τρία στοιχεῖα κατά σειράν ἡνωμένα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἀπόστασιν 0,5 ohm, διέρχεται δι' ἀγωγῶν ἀσημάντου ἀντιστάσεως καί διά γαλβανομέτρου, τό ὁποῖον δεικνύει 1,5 ampères. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι 0,5 ohms νά εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμις ἑκάστου στοιχείου τῆς στήλης.

Λύσις: Ἡ ὁλική ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$0,5\cdot 3 + 0,5 = 2 \text{ ohms}.$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμις ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἐντάσεως ἐπί τήν ἀντίστασιν. Ἄρα:

$$E = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ volts}$$

καί δι' ἕκαστον στοιχεῖον:

$$E = \frac{3}{3} = 1 \text{ volt}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

28) Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα $C = 0,1$ μικρὰ Farad, φορτίζεται δὲ εἰς τάσιν $M = 220$ volts. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσον εἶναι τὸ φορτίον Q, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ.

Λύσις: Ἔχομεν ὅτι:

$$Q = C.M \quad , 1 \text{ microfarad} = 10^{-6} \text{ Farad}$$

ὅτε: $Q = 220 \text{ volts} \cdot 10^{-6} \text{ Farads}$, (volt x Farad = Coulomb),

ἢ $Q = 22 \times 10^{-6}$ Coulombs ,

ἢ $Q = 22$ microcoulombs .

29) Κατὰ πόσον ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία στήλης ὑδραργύρου, οὗτινος ἡ ἀντίστασις εἶναι 0,47 ohms, ἡ μᾶζα 20,25 γρ. ἡ εἰδικὴ θερμότης 0,0322, ὅταν διαβιβάσωμεν δι' αὐτοῦ ῥεῦμα ἐντάσεως 0,75 ampères ἐπὶ 5 λεπτά;

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον

$$\theta = \frac{1}{4,17} \cdot J^2 \cdot Rt \text{ , ἤτοι: } \frac{0,75^2 \cdot 0,47 \cdot 5 \cdot 60''}{4,17} = 19 \text{ θερμ.}$$

ἔστω ὅτι διὰ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ τῆς θερμότητος ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑδραργύρου κατὰ x, τότε τὸ ἀπορροφηθὲν ποσὸν εἶναι:

$$20,25 \cdot 0,0322\, x = 19 \quad \text{καὶ} \quad x = 29^\circ,2.$$

30) Ἐντὸς ὕδατος μάζης 300 γραμ. εὑρίσκεται ἀγωγὸς ἑλικοειδής, συνδεδεμένος πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας στήλης, ἥτις παρέχει ῥεῦμα ἐντάσεως 2 ampères, ὅτε ἡ θερμοκρα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σία τοῦ ὕδατος ἀνυψοῦται ἐντός 15' κατά 2°. Ποία θά εἶναι ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τά ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ;

Λύσις: Προφανῶς:

$$\theta = \frac{1}{4{,}17} R\tau^2 t \quad \text{καί} \quad E = RJ.$$

$$\theta = \frac{1}{4{,}17} E \cdot J \cdot 15 \cdot 60'' = \frac{1}{4{,}17} E \cdot 2 \cdot 15 \cdot 60''. \text{ Ἀλλά } \theta = 200 \cdot 2,$$

ὅθεν :
$$200 \cdot 2 = \frac{1}{4{,}17} E \cdot 2 \cdot 900 ,$$

$$400 \cdot 4{,}17 = E \cdot 1800 , \text{ ἐξοῦ:}$$

$$E = 0{,}93 \text{ Volts.}$$

31) Μία ἠλεκτροστατική μηχανή, δυνάμεως 25000 volts, φορτίζει εἰς 30'' μίαν ἠλεκτρικήν συστοιχίαν, χωρητικότητος 0,13 microfarad. Νά εὑρεθῇ ἡ ποσότης τοῦ περιεχομένου φορτίου εἰς Coulombs.

Λύσις: Ἡ χωρητικότης τῆς μηχανῆς εἶναι $\frac{13}{100}$ τοῦ microfarad, ἐκφραζομένη δέ εἰς farad γίνεται:

$\frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1.000000}$ farad. Ἄρα ἡ ποσότης τοῦ φορτίου εἰς Coulombs εἶναι ($Q = CV$):

$$Q = \frac{13}{100} \cdot \frac{1}{1000000} \cdot 2500 , \text{ ἤ } Q = \frac{325}{100000} \text{ Coulombs}$$

32) Ποία εἶναι ἡ ἰσχύς ῥεύματος κυκλοφοροῦντος ἐντός κυκλώματος ἀντιστάσεως 8 ohms καί ἔχοντος ἔντασιν 15.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ampères;

<u>Λύσις</u>: Ὡς γνωστόν, ἡ ἠλεκτρική ἰσχύς εἶναι:

$$W = RJ^2,$$

ἔνθα R ἡ ἀντίστασις καί J ἡ ἔντασις. Ὅθεν:

$$W = 8.(15)^2 = 1800 \text{ Watts.}$$

33) Ποία ἐνέργεια δαπανᾶται εἰς λυχνίαν διαρρεομένην ὑπό ρεύματος ἐντάσεως 12 Ampères καί ἔχουσαν διαφοράν δυναμικοῦ ἴσην πρός 45 Volts;

<u>Λύσις</u>: Προφανῶς εἶναι:

$$W = E \cdot J,$$

ἔνθα J ἡ ἔντασις καί E ἡ ἠλεκτρεγερτική δύναμις. Ὅθεν:

$$W = 45.12 = 540 \text{ Watts},$$

ἤ $\dfrac{540}{9{,}81 \cdot 75} = 0{,}74$ ἀτμόϊπποι.

34) Ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς ἠλεκτρικήν ἐγκατάστασιν εἶναι 220 volts. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς δωμάτιον φωτιζόμενον διά 2 λαμπτήρων ἀντιστάσεως 100 ohms δι' ἕκαστον καί ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἕκαστον λαμπτῆρα;

<u>Λύσις</u>: Ἡ συνολική ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$J = \frac{E}{R}, \text{ ἤτοι } J = \frac{220}{100} \cdot 2 = \frac{440}{100} = \frac{44}{10} = 4{,}4 \text{ amp.}$$

καί ἡ ἔντασις ἑκάστου λαμπτῆρος $\dfrac{220}{100} = 2{,}2$ ampères.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

35) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς εἶναι 142,5 volts καὶ ἡ ἀντίστασίς της ἡ ἐσωτερικὴ 2 ohms. Πόσους λαμπτῆρας πυρακτώσεως δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ αὕτη διατεταγμένους παραλλήλως, ἔχοντας δὲ ἕκαστος ἀντίστασιν 40 ohms καὶ διαρρεομένους ὑπὸ ῥεύματος $\frac{3}{4}$ ampères.

Λύσις : Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων. Τὸ κύριον ρεῦμα θὰ ἔχῃ ὡς ἔντασιν $\frac{3}{4}x$. Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς πλῆρες κύκλωμα. Ὅθεν:

$$\frac{3}{4}x = \frac{142,5}{2+\frac{40}{x}} \quad \text{καὶ} \quad x = 75$$

36) Δύο σύρματα τὸ ἓν ἐξ ἀργύρου καὶ τὸ ἕτερον ἐκ λευκοχρύσου, τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, εὑρίσκονται τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐντὸς κυκλώματος. Ποία εἶναι ἡ σχέσις τῶν ποσοτήτων τῆς θερμότητος τῆς ἀναπτυσσομένης εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ; Εἰδικὴ ἀντίστασις λευκοχρύσου 9, ἀργύρου $\frac{3}{2}$ microhoms.

Λύσις : Ἔστω P ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸν λευκόχρυσον καὶ A ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸν ἄργυρον, j ἡ σταθερὰ 4,17. Τότε :

$$Pj = I^2 \frac{1 \cdot 9}{S} t$$

καί : $$Aj = I^2 \frac{1 \cdot 1,5}{S} t \quad \text{ἄρα :} \ \frac{P}{A} = 6$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁ λευκόχρυσος λαμβάνει 6 φοράς μεγαλυτέραν θερμότητα ἡ ὁ ἄργυρος.

37) Κύκλωμα ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 ohm, διαρρέεται ὑπό ρεύματος 5 στοιχείων ἴσων, συνηνωμένων κατά τάσιν. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι 0,4 ohm καί ἡ διαφορά δυναμικοῦ 1,8 volt;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$J = \frac{v \cdot \varepsilon}{R + v\tau} = \frac{5 \cdot 1{,}8}{1 + 5 \cdot 0{,}4} = 3 \text{ ampères.}$$

38) Ποία ἡ ἀντίστασις ἠλεκτρικῆς λυχνίας, τῆς ὁποίας τό νῆμα διαρρέεται ὑπό ρεύματος ἐντάσεως 0,8 ampères καί ἡ ὁποία παρουσιάζει εἰς τά δύο ἄκρα της διαφοράν δυναμικοῦ ἴσην πρός 90 Volts;

<u>Λύσις</u>: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον, ἔχομεν:

$$R = \frac{E}{J} = \frac{90}{0{,}8} = 112{,}5 \text{ ohms.}$$

39) Ἠλεκτρικός λαμπτήρ καταναλίσκει ἔντασιν ρεύματος $J = 1$ Ampère, μέ τάσιν ρεύματος $M = 220$ Volt. Εὑρεῖν τήν ἀντίστασιν τοῦ λαμπτῆρος καί τήν ἰσχύν του.

<u>Λύσις</u>: Κατά τόν νόμον τοῦ Ohm ἔχω:

$$M = JR \quad , \text{ἄρα} \quad 220V = 1 Amp. R$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και
$$R = \frac{220\ Volt}{1\ Amp.} = 220\ Ohm.$$

Ἡ ἰσχύς εἶναι: $N = MJ$.

Ἡ τάσις εἶναι: $U = \frac{A}{q} = \frac{ἔργον}{φορτίον}$ ἤ $A = Mq$

Ἀλλ' ἐπίσης: $N = \frac{A}{t} = \frac{Mq}{t} = MJ$

Ἄρα: $N = 220\ volts \times J\ amp. = 220\ watts.$

40) Ἠλεκτρικός λαμπτήρ καταναλίσκει ἔντασιν ῥεύματος 0,5 Ampère καί ἐργάζεται ἐπί ἕνα μῆνα, 6 ὥρας ἡμερησίως. Ζητεῖται ἡ ποσότης τοῦ φορτίου, ἥτις διέρχεται διά τοῦ λαμπτῆρος.

<u>Λύσις:</u> Ἔχομεν: 1 Amp. = 1 Coulomb ἀνά 1″

Ἐπίσης ἔχομεν: $I = \frac{Q}{t}$ ἤ $Q = It$.

Ἄρα: $Q = 0{,}5A \cdot 36 \cdot 18 \cdot 10^3 = 324000$ Coulombs

ἔνθα: $t = 30 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 600$ (Ampères x séconde = Coulombs),

ὥστε: $Q = 324000$ Coulombs.

41) Λαμπτήρ πυρακτώσεως διαρρέεται ὑπό ῥεύματος 0,75 ampères, παρουσιάζει εἰς τά ἄκρα του διαφοράν δυναμικοῦ 60 Volts. Ποία ἡ θερμότης ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντός 1 ὥρας εἰς τόν λαμπτῆρα;

<u>Λύσις:</u> Ἡ ἐνέργεια ἡ παραγομένη ἐντός 1 δευτερολέπτου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τόν λαμπτῆρα εἶναι 0,75 · 60 Joules. Εἰς μίαν ὥραν ὁ ἀριθμός τῶν θερμίδων τῶν ἀναπτυσσομένων θά εἶναι:

$$\frac{0,75 \cdot 60 \cdot 3600}{4,17} = 39087 \text{ θερμίδες.}$$

42) Πυκνωτής χωρητικότητος 10, φέρεται εἰς δυναμικόν 30. Ποῖον εἶναι τό φορτίον του; Ποῖον ἔργον καταναλίσκεται διά νά φορτισθῇ;

<u>Λύσις:</u> Φορτίον: $10 \cdot 30 = 300$

Ἔργον δαπανώμενον διά φόρτισιν: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 30^2 = 4500$ ἔργια.

43) Ρεῦμα ἐντάσεως 10 Ampères διακλαδίζεται εἰς 3 ἀγωγούς ἀντιστάσεων 5, 2 καί 10 ohms. Ποία ἡ ἀντίστασις R, ἡ ἰσοδύναμος πρός τούς τρεῖς τούτους ἀγωγούς; Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντός ἑκάστου τῶν ἀγωγῶν καί ποία ἡ διαφορά δυναμικοῦ E εἰς τά ἄκρα αὐτῶν;

<u>Λύσις:</u> Τό $\frac{1}{R} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$ ἔχομεν

$$I_1 = \frac{12,5}{2} = 6,25 \quad , \quad I_2 = \frac{12,5}{5} = 2,5$$

$$I_3 = \frac{12,5}{10} = 1,25 \quad \text{καί} \quad I = \frac{E}{R} \quad , \quad 10 = \frac{E}{\frac{4}{5}}$$

Ἄρα: $E = 12,5$ Volts.

44) Ρεῦμα ἐντάσεως 1,5 Ampères διέρχεται ἐπί 15 λεπτά τῆς ὥρας διά σύρματος ἀντιστάσεως 3 ohms, εὑρισκο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένου ἐντός 300 γρ. ὕδατος. Ποία εἶναι ἡ προκαλουμένη ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας;

Λύσις: Ἔχομεν:

Ἔργον εἰς Joules εἶναι: $(1,5)^2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 60$

Θερμότης ἀντίστοιχος εἰς θερμίδας: $\dfrac{(1,5)^2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 60}{4,17}$

Ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος: $\dfrac{(1,5)^2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 60}{4,17 \cdot 300} = 4^\circ,85$

45) Πόσοι ἀτμοΐπποι χρειάζονται διά νά ἐπιτευχθῇ ρεῦμα 12 αμπέρες ἐντός ἀντιστάσεως 40 ohms;

Λύσις: Ἔχομεν:

Ἔργον Joules κατά δευτερόλεπτον: $(12)^2 \cdot 40 = 5760$

Ἀριθμοί ἀτμοΐππων: $\dfrac{5760}{9,81 \cdot 75} = 6,97$.

46) Διά πόσου φορτίου ἠλεκτρισμοῦ πρέπει νά φορτίσωμεν ἀγωγόν χωρητικότητος 100. microfarads, ἵνα ἀνυψωθῇ τό δυναμικόν αὐτοῦ εἰς 40 Volts;

Λύσις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$C = \frac{Q}{V},$$

ἔνθα C χωρητικότης εἰς microfarads, Q ποσόν ἠλεκτρισμοῦ εἰς Coulombs καί V δυναμικόν εἰς Volts. Ὅθεν:

$$Q = CV, \text{ ἤτοι: } Q = 50 \cdot \frac{100}{1000000} = \frac{5}{1000}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

47) Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ῥεύματος εἰς ἀγωγόν

ἀντιστάσεως 20 ohms, ὅταν ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τά πέ-

ρατα τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι 60 Volts;

Λύσις: Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον:

$$J = \frac{E}{R} \quad \text{ἤ} \quad J = \frac{60}{20} = 3 \text{ Ampères.}$$

48) Ἡ ἀκτίς τῆς Γῆς εἶναι 6370 χιλιόμετρα, ποία ἡ χωρη-

τικότης αὐτῆς εἰς microfarads;

Λύσις: Ἔχομεν:

$$\tau = c \text{ , ἤτοι } c = 637000000 \text{ θεωρητικαί μονάδες}$$

καί εἰς microfarads: $c = \frac{637.000000}{900.000} = 707,7$.

49) Τό δυναμικόν σφαίρας εἶναι 30 Volts, ἡ δέ χωρητικό-

της 80 μικροφαράδια. Ποῖον εἶναι τό φορτίον αὐτῆς;

Λύσις: Ἔχομεν:

$$Q = c \cdot v \quad \text{ἤτοι}: \frac{80}{1000000} \cdot 30 = \frac{24}{10.000}$$

50) Τρεῖς λυχνίαι ἀντιστάσεως 1,8 ohm ἑκάστη, τροφο-

δοτοῦνται ἐκ δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς ἐσωτερικῆς ἀντι-

στάσεως 0,6 ohm καί εἶναι συνδεδεμέναι μεταξύ των δι'

ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως 1,2 ohm. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς παρε-

χομένης ὑπό τῆς μηχανῆς ἐνεργείας πρός τήν καταναλισκο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μένην ὑπό τῶν λυχνιῶν, δηλ. ἡ ἀπόδοσις;

Λύσις: Προφανῶς: $\Theta = RJ^2t$ εἰς Joules.

Ἤτοι ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς Joules ἐνέργεια εἶναι:

$$(0,6 + 3 \cdot 1,8 + 1,2)J^2 \quad \text{ἤ} \quad 7,2J^2.$$

Ἡ καταναλισκομένη ὑπό τῶν λυχνιῶν εἶναι $3 \cdot 1,8 J^2$, ἤτοι $5,4J^2$ καί ὁ λόγος εἶναι:

$$\frac{5,4 \cdot J^2}{7,2 \cdot J^2} = \frac{5,4}{7,2} = 0,75.$$

51) Ποία εἶναι εἰς Volts ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ἄκρων ἀγωγοῦ, μήκους 6 χιλιομέτρων, τομῆς 40 τετραγωνικῶν χιλιοστῶν τοῦ μέτρου, δι' οὗ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 8 ampères, ὅταν ἡ εἰδική ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι 1,5 microohms.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

$$E = R \cdot J \quad \text{καί} \quad R = \rho \frac{l}{\sigma}, \text{ ἔχομεν:}$$

$$E = \rho \cdot \frac{l}{\sigma} \cdot J \quad \text{ἤ} \quad E = \frac{1,5}{1000000} \cdot \frac{600000}{0,4} \cdot 8 = 18 \text{ Volts.}$$

52) Τοποθετοῦμεν μεταξύ δύο σημείων ἑνός κυκλώματος 7 λάμπας κατά σειράν. Ἡ ἀντίστασις ἑκάστης εἶναι 130 ohms. Ἡ διαφορά τοῦ δυναμικοῦ μεταξύ τῶν δύο σημείων εἶναι 105 Volts. Νά εὑρεθῇ:

α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διερχομένου δι' ἑκάστης λάμ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μπας, καί

β) ἡ ὁλική ἔντασις τοῦ ῥεύματος.

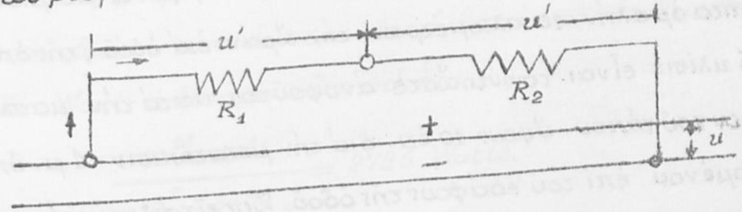
<u>Λύσις</u>: α) Ἡ ἔντασις τοῦ δι' ἑκάστης λάμπας διερχομένου ῥεύματος, θά εἶναι τό πηλίκον τῆς διαφορᾶς τοῦ δυναμικοῦ, διά τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ῥεύματος, ἤτοι:

$$I = \frac{105}{130} = 0{,}807 \text{ Ampère.}$$

β) Ἡ ὁλική ἔντασις τοῦ ῥεύματος θά εἶναι:

$$0{,}807 \cdot 7 = 5{,}649 \text{ ampères.}$$

53) Διά τήν ἐν τῷ σχήματι συσκευήν ἐν σειρᾷ, ἔχομεν δεδομένα: $M = 220$ Volts καί $R = 300$ Ohms. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος.



<u>Λύσις</u>: Ἔχομεν:

$$M' = JR \quad \text{καί} \quad M = u' + u' = 2u' \quad \text{ἤ} \quad M' = 110 \text{ V}$$

ἐπειδή ὅμως $R = 300$ Ohms, θά εἶναι:

$$J = \frac{M'}{R} = \frac{110}{300} = 0{,}36 \text{ Amp.} \quad \text{ἤ} \quad J = 0{,}36 \text{ Amp.}$$

Περαιτέρω, γενικεύοντες, ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο συσκευαί εἰ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

και ἀνόμοιοι : ἔστω $R_1 = 50$ Ohms, M_1 ; , $R_2 = 250$ Ohms M_2 ; Δίδεται τὸ αὐτὸ $M = 220$ Volts.

Ἔχομεν : $\left\{ \begin{array}{l} M_1 = JR_1 \\ M_2 = JR_2 \end{array} \right.$ καὶ $M = M_1 + M_2 = J(R_1 + R_2)$

ἢ $220 \text{ Volts} = J \cdot 300$ Ohms

ἢ $J = 0{,}73$ Ampère

Ἄρα λοιπόν:

$$M_1 = J \cdot R_1 = 0{,}73 \cdot 50 = 36{,}5 \text{ Volts}$$

$$M_2 = JR_2 = 0{,}73 \cdot 250 = 182{,}5 \text{ Volts}.$$

Ἐπίσης τὸ πρόβλημα γενικεύεται καὶ διὰ περισσοτέρας συσκευὰς ἐν σειρᾷ.

54) Αὐτοκίνητον 1000 χιλιογράμμων, τρέχει μὲ μίαν ταχύτητα ὁμαλὴν 10 χιλιομέτρων τὴν ὥραν ἐπὶ ὁδοῦ, τῆς ὁποίας ἡ κλίσις εἶναι τοιαύτη ὥστε ἀνυψοῦται κατὰ τὴν κατακόρυφον τοῦ τόπου ὕψους 10 ἑκ. διὰ τὴν μετατόπισιν 1 μ. ὑπολογιζομένου ἐπὶ τοῦ ἐδάφους τῆς ὁδοῦ. Ζητεῖται ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μέρους τῆς δυνάμεως τοῦ χρησιμοποιουμένου κινητῆρος διὰ τὴν κατανίκησιν τῆς βαρύτητος. Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ κινητὴρ αὐτὸς εἶναι ἠλεκτρικὸς κινητήρ, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ὑφίσταται σταθερὰ διαφορὰ 110 Volts (δυναμικοῦ) νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀναγκαίου ῥεύματος, διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς δυνάμεως ταύτης.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις:

1ον) Ἡ δύναμις τῶν αὐτοκινήτων ἐκφράζεται συνήθως εἰς ἀτμοΐππους. Συνεπῶς, ὁ ὑπολογισμός κατ' ἀρχήν θά ἔχῃ βάσιν τοῦ ἀτμοΐππους.

Εἰς ἕν δευτερόλεπτον τό αὐτοκίνητον ὑψοῦται κατά $\frac{10000}{10 \cdot 3600}$ μέτρα.

Τό ἐκτελεσθέν ἔργον διά τήν καταπίκησιν τῆς βαρύτητος, ἐφ' ὅσον ἡ ἅμαξα ζυγίζει 1000 χιλιόγραμμα, θά εἶναι:

$$\frac{10.000}{10 \cdot 3600} \cdot 1000 \cdot \frac{1}{75} = 3,703.$$

Τοῦτο τό κατά δευτερόλεπτον ἐπιτελεσθέν ἔργον χρησιμοποιεῖται ὡς μέτρον τῆς δυνάμεως τοῦ χρησιμοποιηθέντος κινητῆρος, διά τήν καταπίκησιν τῆς ἀντιστάσεως τῆς βαρύτητος.

Εἰς Watts ἡ δύναμις αὐτη θά ἦτο:

$$\frac{10^{11} \cdot 981}{10^{7} \cdot 3600} = 2725 \text{ Watts}.$$

2ον) Ἡ δύναμις αὐτη τῶν 2725 Watts ὀφείλεται εἰς τήν διέλευσιν ρεύματος ἐντάσεως I, διερχομένου ὑπό δυναμικόν 110 Volts. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐνέργεια ρεύματος μεταξύ δύο σημείων ἑνός ἀγωγοῦ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἶναι V, μᾶς δίδεται ἀπό τήν σχέσιν:

$$W = IE \quad ,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς τὴν προκειμένην δὲ περίπτωσιν ἔχομεν:

$$2725 = 110 \cdot I \quad , \text{ἐξ οὗ}:$$

$$I = 24,77 \text{ ἀμπέρες.}$$

55) Μετασχηματιστὴς δέχεται εἰς τὸ πρῶτον του κύκλωμα ρεῦμα 10 ἀμπέρες ὑπὸ ἠλεκτροκινητικὴν δύναμιν 550 Volts, μεταξὺ τῶν ἄκρων. Γνωρίζοντες ὅτι ὁ μετασχηματιστὴς οὗτος καταβιβάζει τὴν διαθέσιμον ἠλεκτροκινητικὴν δύναμιν, καθιστῶν αὐτὴν πεντάκις ἀσθενεστέραν καὶ ὅτι ἐξ ἄλλου ἡ εἰς ἐνέργειαν ἀπόστασις τοῦ μηχανισμοῦ τούτου εἶναι 80%, ζητεῖται ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς τὸ δεύτερον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ συλλεγομένη ἔντασις τοῦ ρεύματος.

<u>Λύσις</u>: Ἡ δύναμις τοῦ ἀρχικοῦ ρεύματος εἶναι:

$$10 \cdot 550 \text{ Watts}$$

Ἡ δύναμις μετὰ τὸν μετασχηματισμὸν δὲν θὰ εἶναι περισσοτέρα τῶν $\frac{80}{100}$ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ ἡ ἔντασις x τοῦ συλλεχθέντος ρεύματος εἰς τὴν ἔξοδον τοῦ μετασχηματιστοῦ θὰ δοθῇ ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{80}{100} \cdot 10 \cdot 550 = x \cdot \frac{550}{5}. \quad \text{Ἄρα:}$$

$$x = 40 \text{ Ἀμπέρες.}$$

56) Ἕνα κύκλωμα διατρέχεται ὑπὸ ρεύματος καὶ περικλείει δοχεῖον ἠλεκτρολυτικὸν V, περιέχον ἅλας χαλκοῦ

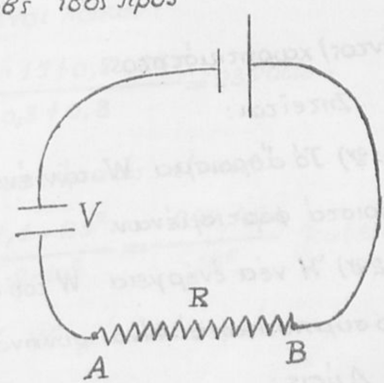
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί ἀντίστασιν R· τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος παραμενούσης σταθερᾶς, διαπιστοῦται ὅτι ἡ διαφορά τοῦ δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ἄκρων A καί B τῆς ἀντιστάσεως R εἶναι 20 Volts. Ἀφ' ἑτέρου, τῆς διελεύσεως τοῦ ρεύματος διαρκεσάσης 40 λεπτά, διαπιστοῦται ὅτι τό βάρος τῆς καθόδου ηὐξήθη κατά 0,791 γρ. Γνωρίζοντες ὅτι ἀπαιτοῦνται 96500 Coulombs διά νά ἀπελευθερωθῇ μία μονάς Valence = σθένους (ὁ μέσος ἀριθμός τῶν ἀτόμων ὑδρογόνου διά νά ἑνωθῇ μέ ἕν ἄτομον ἁπλοῦ τινός σώματος). Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ἀντιστάσεως R. Ἀτομικόν βάρος τοῦ χαλκοῦ 63,6.

Λύσις:

Ὁ ἀριθμός τῶν 96500 Coulombs ἐλευθερώνει μίαν μονάδα σθένους, δηλαδή $\frac{63,6}{2}$ χαλκοῦ, τοῦ μετάλλου τούτου ὄντος δισθενοῦς. Συνεπῶς, διά νά ἐπιτύχωμεν ἀπό 0,791 γρ. χαλκοῦ, θά χρειασθῇ ἀριθμός Coulombs ἴσος πρός

$96500 \cdot \frac{2}{63,6} \cdot 0,791$.



Διαρκεσάσης τῆς διελεύσεως τοῦ ρεύματος 40 πρῶτα λεπτά, δηλαδή 40 × 60 δλ., ὁ ἀριθμός τῶν Coulombs, ὁ κατά δευτερόλεπτον διελθών, εἶναι $96500 \cdot \frac{2}{63,6} \cdot \frac{0,791}{40 \cdot 60}$.

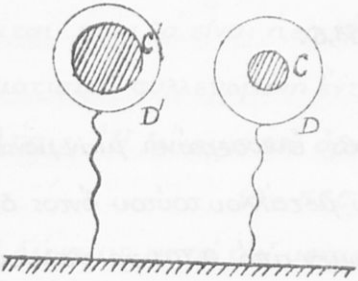
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁ γενόμενος ὑπολογισμός δίδει ἕν Coulomb κατά δευτερόλεπτον.

Ἡ ἔντασις, λοιπόν, τοῦ ρεύματος εἶναι 1 ampère, καί κατά συνέπειαν ἡ ζητουμένη τιμή τῆς ἀντιστάσεως R δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$1 = \frac{20}{R}, \text{ ἐξ οὗ: } R = 20 \text{ Ohms.}$$

57) Ἔστωσαν δύο σφαιρικοί συμπυκνωταί C-D, C'-D', χωρητικότητος 0,3 καί 0,8 μικροφαράδ ἀντιστοίχως. Τά ἐξωτερικά ἐλάσματα D καί D' εὑρίσκονται ἐπί τοῦ ἐδάφους.



Τά ἐσωτερικά ἐλάσματα C, C' εἶναι φορτισμένα ἀντιστοίχως μέ δυναμικόν 15 καί 26 Volts.

Ἑνώνομεν κατόπιν τό C μετά τοῦ C' δι' ἑνός ἀγωγοῦ ἀκανονίστου (ἄνευ ἐνδιαφέροντος) χωρητικότητος.

Ζητεῖται:

1ον) Τό ἄθροισμα W τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο συμπυκνωτῶν, χωριστά φορτισμένων.

2ον) Ἡ νέα ἐνέργεια W τοῦ συστήματος CC', DD', ὅταν οἱ δύο συμπυκνωταί εἶναι συνηνωμένοι.

Λύσις:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

1ον) Ἡ ἐνέργεια $W = \frac{CV^2}{2}$ τοῦ συμπυκνωτοῦ C–D εἶναι:

$$W = \frac{0{,}3 \cdot 15^2}{10^2 \cdot 2} = \frac{33{,}75}{10^6} \text{ Joules.}$$

Ἡ ἐνέργεια $W' = \frac{C'V'}{2}$ τοῦ συμπυκνωτοῦ C'–D' εἶναι:

$$W' = \frac{0{,}8 \cdot 26^2}{10^6 \cdot 2} = \frac{270{,}4}{10^6} \text{ Joules}$$

Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐνεργειῶν εἶναι:

$$W = \frac{33{,}75 + 270{,}4}{10^6} = \frac{304{,}15}{10^6} \text{ Joules.}$$

2ον) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κοινὸν δυναμικὸν V_1 καὶ διὰ τοὺς δύο συμπυκνωτάς, ὅταν εἶναι συνδεδεμένοι διὰ τῶν ἐσωτερικῶν ἐλασμάτων, εἶναι:

$$V_1 = \frac{CV + C'V'}{C + C'}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ V_1 εἶναι λοιπόν:

$$V_1 = \frac{0{,}3 \cdot 15 + 0{,}8 \cdot 26}{0{,}3 + 0{,}8} = 23 \text{ Volts.}$$

Καὶ ἡ νέα ἐνέργεια W' τοῦ συστήματος εἶναι:

$$W' = \frac{(C + C')V^2}{2} = \frac{1{,}1 \cdot 23^2}{2 \cdot 10^6} = \frac{290{,}95}{10^6} \text{ Joules.}$$

Ὑπάρχει μεταξὺ τῶν W καὶ W' μία διαφορά:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$W - W' = \frac{304,15 - 290,95}{10^6} = \frac{13,20}{10^6} \text{ Joules.}$$

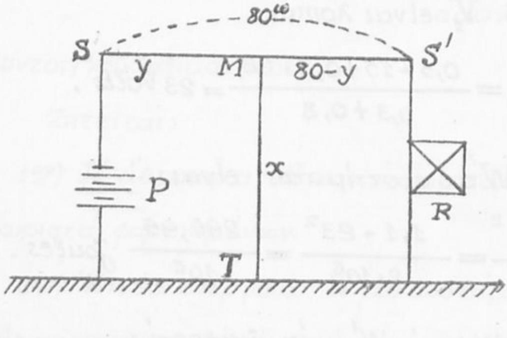
58) Μία τηλεγραφική ἐγκατάστασις περιλαμβάνει ἕνα συσσωρευτήν, τοῦ ὁποίου ἡ ἠλεκτρομηχανική δύναμις εἶναι 50 volts καί ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις 15 Ohms, καί ἕνα δέκτην τῶν 5 Ohms. Ἡ ἐπικοινωνία μετά τῆς γῆς εἶναι ἀρίστη.

Ἔξαφνα, συνεπείᾳ ἀτυχήματος, πίπτει κάπου μέρος τῆς γραμμῆς καί ἐπέρχεται ἐπικοινωνία μετά τῆς γῆς, τῆς ὁποίας ἐπικοινωνίας ἡ ἀντίστασις εἶναι x Ohms, καί παρατηρεῖ τις, ὅτι ἡ ἔντασις εἰς τόν πομπόν γίνεται 0,84 ampères καί εἰς τόν δέκτην 0,084 ampères.

Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀτυχήματος καί ἡ ἀντίστασις x.

<u>Λύσις:</u>

Ἄς σημειώσωμεν διά ρ τήν ἀντίστασιν τῆς γραμμῆς, διά R τήν τοῦ δέκτου καί R' τήν στήλης. Ἔστω ἀκόμα y ἡ ἀντίστασις τοῦ μέρους τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς τοῦ περιλαμβανομένου μεταξύ τῆς στήλης



καί τοῦ μέρους τοῦ ἀτυχήματος, I τήν ἔντασιν ἐντός τῆς στή-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λης και i τὴν ἔντασιν μέσα εἰς τὸν δέκτην.

Ἐφαρμόζομεν τὸν νόμον Kirchoff εἰς τὸ δίκτυον PSMSR:

$$I(R'+y)+i(80-y+R)=E \qquad (1),$$

κατόπιν δὲ εἰς τὸ δίκτυον PSMT:

$$I(R'+y)+(I-i)x = E \qquad (2).$$

Ἡ τιμὴ τοῦ y, ἡ προκύψασα ἐκ τῆς (1), θὰ προσδιορίσῃ τὴν θέσιν τοῦ ἀτυχήματος, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος· αὐτὴ ἡ τιμὴ τοῦ y τιθεμένη εἰς τὸ (2), θὰ μᾶς δώσῃ τὴν τιμὴν τοῦ x.

<u>Ἐφαρμογή:</u> $R = 5^{\omega}$, $R' = 15^{\omega}$, $E = 50^{v}$, $I = 0^{A},84$ καὶ $i = 0{,}084$.

Ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$0{,}84(15+y)+0{,}0084(80+5-y)=50,$$

τὸ ὁποῖον δίδει διὰ τὸ y τὴν τιμὴν $y = 40$ Ohms.

Τὸ ἀτύχημα ἔγινε, λοιπόν, εἰς τὸ μέσον τῆς γραμμῆς. Ἀντικαθιστῶντες αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν ἰσότητα (2) γίνεται:

$$0{,}84 \cdot 55 + (0{,}84-0{,}084)x = 50,$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$x = 5 \text{ Ohms}.$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς ἐπικοινωνίας μεταξὺ τοῦ σύρματος καὶ τῆς γῆς.

59) Δύο ἠλεκτρικὰ ἐκκρεμῆ ἐν ἐπαφῇ, μήκους λ, εἶναι φορτισμένα μὲ ἄγνωστον ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀπομακρύνονται μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε τὸ καθὲν ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς κατακορύφου γωνίαν α. Ζητεῖται τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ σφαῖραι ἔχουν βάρος Π.

Λύσις:

Ἔστω μ τὸ φορτίον ἑκάστης τῶν σφαιρῶν. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

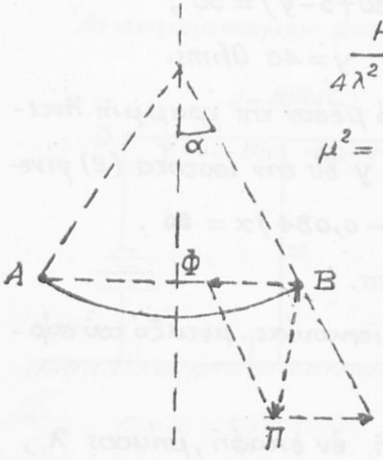
$$\frac{\mu^2}{AB^2} = B\Phi .$$

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

$$AB = 2\lambda \eta\mu\alpha ,$$

$$B\Phi = \Pi \varepsilon\varphi\alpha .$$

Κατὰ συνέπειαν, ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις γίνεται:



$$\frac{\mu^2}{4\lambda^2 \eta\mu^2\alpha} = \Pi\varepsilon\varphi\alpha . \quad \text{Ἄρα:}$$

$$\mu^2 = 4\Pi\lambda^2\eta\mu^2\alpha\varepsilon\varphi\alpha$$

60) Γαλβανόμετρον δίδει ἐπὶ κλίμακος ἀπόκλισιν κατὰ τὸν λόγον τῆς ἐντάσεως, ἅπερ δέχεται, τῶν ἄκρων του ὄντων συνδεδεμένων μὲ τοὺς δύο πόλους στήλης Ε μὲ σύρμα ἀντιστάσεως ἀπροσδιορίστου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ἀπόκλισις εἶναι 500 ὑποδιαιρέσεων.

Ἐάν παρεμβάλωμεν μέσα εἰς τό κύκλωμα μίαν ἀντί-

στασιν 10 Ohms, ἡ ἀπόκλισις γίνεται 50 ὑποδιαιρέσεων.

Ἀντικαθιστῶμεν τήν ἀντίστασιν ταύτην διά μιᾶς ἄλλης

ἀντιστάσεως ἀγνώστου, θά ἔχωμεν κλίσιν 80 ὑποδιαιρέσε-

ων. Ποία εἶναι ἡ τιμή τῆς ἀγνώστου ἀντιστάσεως.

<u>Λύσις</u>:

Ἔστωσαν E ἡ ἠλεκτρο<u>κινητική</u> δύναμις τῆς στήλης

εἰς Volts, R τό σύνολον τῶν ἀντιστάσεων εἰς Ohms τῆς στή-

λης καί τοῦ γαλβανομέτρου, K δέ ὁ συντελεστής τῆς ἀνα-

λογίας, τῆς ἐπιτρεπούσης νά ὑπολογίσωμεν ἀριθμητικῶς

τήν ἔντασιν τοῦ ῥεύματος, συναρτήσει τῆς ἀποκλίσεως τοῦ

γαλβανομέτρου.

Ἡ πρώτη ἀπόκλισις μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τήν ἐξίσωσιν:

$$K \cdot 500 = \frac{E}{R}$$

Ἡ δευτέρα: $$K \cdot 50 = \frac{E}{R+10}$$

καί ἡ τρίτη: $$K \cdot 80 = \frac{E}{R+x}$$

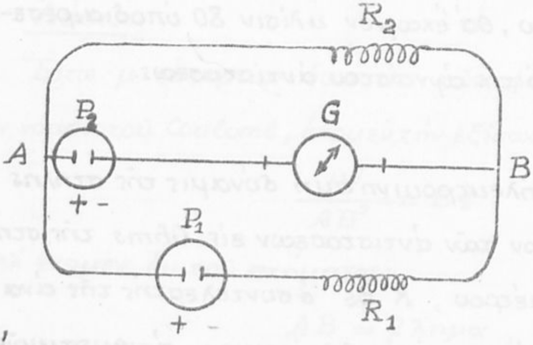
Ἀπό τάς ἐξισώσεις αὐτάς ἐξάγεται εὐκόλως ἡ τιμή τῶν

$$x = 5{,}83 \text{ Ohms} \quad \text{καί} \quad R = 1{,}11 \text{ Ohm.}$$

61) Τό δίκτυον μιᾶς στήλης P_1, δυνάμεως ἠλεκτρομη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χανικῆς E_1, περιλαμβάνει δύο ἀντιστάσεις μεταβλητάς R_1 καί R_2. Μεταξύ δύο σημείων A καί B τοῦ δικτύου ἐγκαθιστῶμεν μίαν μετοχέτευσιν περιέχουσαν μίαν στήλην P_2 καί ἕνα γαλβανόμετρον G.



Ἡ στήλη P_2 εἶναι εἰς ἀντίθεσιν μέ τήν στήλην P_1. Ἐκτελεῖ τις τά δύο ἐπακόλουθα πειράματα:

1ον) Δίδεται εἰς τάς ἀντιστάσεις R_1 καί R_2 μία τιμή τοιαύτη, ὥστε δέν περνᾷ ρεῦμα εἰς τήν μετοχέτευσιν AB.

2ον) Αὐξάνεται ἡ ἀντίστασις R_1 δι' ἑνός ποσοῦ ρ_1· περνᾷ ρεῦμα εἰς τήν μετοχέτευσιν AB. Δίδεται τότε εἰς τήν ἀντίστασιν R_2 μία αὔξησις ρ_2 τοιαύτη, ὥστε ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου νά μεταφερθῇ στό μηδέν.

Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ ἡ σχέσις (ἀναλογία) τῶν δύο ἠλεκτρομηχανικῶν δυνάμεων τῶν στηλῶν P_1 καί P_2, συνυπαρχουσῶν τῶν ἀντιστάσεων ρ_1 καί ρ_2.

<u>Ἀριθμητική ἐφαρμογή</u>: $E_1 = 2$ volts, $\rho_1 = \rho_2 = 10$ Ohms. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς ἠλεκτρομηχανικῆς δυνάμεως E_2

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί τῆς στήλης P_2.

Ἄς παραστήσωμεν μέ r_1 τήν ἀντίστασιν τῆς στήλης P_1 αὐξηθείσης διά τῶν συρμάτων συνδέσεως, τά ὁποῖα ἑνώνουν τούς πόλους μέ τό Π_2 καί τό Π_1

Τό ἴδιον διά τοῦ r_2 τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τήν διακλάδωσιν AP_2GB.

Ἐφαρμόζοντες τούς νόμους τοῦ Kirchoff εἰς τό δίκτυον $AR_2BR_1P_1$ καί εἰς τό δίκτυον AR_2BGP_2 εἰς τά δύο πειράματα, παρατηροῦμεν ὅτι οὐδέν ρεῦμα περνᾷ εἰς τήν διακλάδωσιν AGB.

<u>1ον Πείραμα:</u> Δίκτυον $AR_2BR_1P_1$. - Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I καί αἱ ἠλεκτρομηχανικαί δυνάμεις E_1 καί E_2. Ἔχομεν:

$$I(R_2+R_1+r_1)=E_1 \qquad (1)$$

Καί εἰς τό δίκτυον AR_2BGP_2:

$$IR_2=E_2 \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατά μέλη, ἔχομεν:

$$\frac{R_2+R_1+r_1}{R_2}=\frac{E_1}{E_2} \qquad (3)$$

<u>Πείραμα 2ον</u>: Συνδέομεν τήν ἀντίστασιν ρ_1 μέ τήν R_1 καί τήν ρ_2 μέ τήν R_2, ὁπότε οὐδέν ρεῦμα περνᾷ ἀπό τό γαλβανανόμετρον. Ἔστω I' ἡ νέα ἀντίστασις. Ἔχομεν εἰς τά ἴδια δίκτυα, ὅπως προηγουμένως:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$I'(R_2+\rho_2+R_1+\rho_1+r_1)=E_1 \qquad (1')$$

και $$I'(R_2+\rho_2)=E_2 \qquad (2').$$

Διαιρούντες κατά μέλη τάς (1') και (2'), έχομεν:

$$\frac{R_2+R_1+r_1+\rho_1+\rho_2}{R_2+\rho_2}=\frac{E_1}{E_2} \qquad (3')$$

Ἡ σύγκρισις τῶν ἰσοτήτων (3) και (3') ὁδηγεῖ εἰς τήν συνέχειαν τῶν ἴσων σχέσεων:

$$\frac{R_2+R_1+r_1+\rho_1+\rho_2}{R_2+\rho_2}=\frac{R_2+R_1+r_1}{R_2}=\frac{E_1}{E_2}$$

Ἐφαρμόζοντες δέ τήν γνωστήν ἰδιότητα «ἡ διαφορά τῶν παρονομαστῶν κ.λ.π.», εὑρίσκομεν τήν νέαν ἀναλογίαν:

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_2}=\frac{E_1}{E_2},$$

ἥτις δίδει τήν τιμήν τῆς ζητηθείσης σχέσεως.

Ἐφαρμογή: $\rho_1=\rho_2=10$ Ohms

$$E_1=2 \text{ Volts}$$

$$\frac{20}{10}=\frac{2}{E_2}$$

και $$E_2=1 \text{ Volt}.$$

62) Ἠλεκτρική γεννήτρια παράγει διαθέσιμον δύναμιν 1000 kilowatts ὑπό τάσιν 10.000 volts, τό δέ ρεῦμα μεταφέρεται εἰς ἀπόστασιν 20 χιλιομ. μέσῳ διπλῆς γραμμῆς (μετάβασις-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιστροφή) ἐκ χαλκίνου σύρματος διαμέτρου 10 χιλιοστ. Τῆς αὐτῆς δυνάμεως τῶν 1000 Kilowatts, δυναμένης νά παραχθῇ εἰς τόν σταθμόν τῆς γεννητρίας ὑπό τάσιν 50.000 volts, ζητεῖται ποία εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος, ἡ ὁποία θά ἠδύνατο νά ἀντικαταστήσῃ τό πρῶτον, παραδεχόμενοι ὅτι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας γραμμικῶς εἶναι ἡ αὐτή καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις. Ποῖον θά ἦτο τό ἐπί πλέον κικτόν κέρδος, τό πραγματοποιούμενον ἀπό τήν ἀντικατάστασιν ταύτην ἐπί τῆς τιμῆς τοῦ χρησιμοποιουμένου χαλκοῦ;

Ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ : $1{,}6 \times 10^{-6}$ ohm-cm.

Πυκνότης χαλκοῦ : 8,9.

Τιμή χιλιογράμμου χαλκοῦ 4^{f}.

<u>Λύσις:</u> Ἡ δύναμις τοῦ ῥεύματος δίδεται ἀπό τήν τιμήν τοῦ προϊόντος EI, εἰς τό ὁποῖον E ἀντιπροσωπεύει τήν ἠλεκτροκινητικήν δύναμιν μετρουμένην εἰς Volts, καί I τήν τάσιν, μετρουμένην εἰς ampères.

Ἐάν ἡ τάσις φθάσῃ ἀπό 10.000 εἰς 50.000 volts, δηλαδή γίνῃ πέντε φοράς μεγαλυτέρα, ἡ τάσις τοῦ ῥεύματος καθίσταται πεντάκις μικροτέρα καί ἡ ποσότης τῆς διαλυομένης ὑπό μορφήν δυνάμεως γίνεται 25 φοράς μικροτέρα.

Δεχόμεθα, ὅτι ἡ ἀπώλεια κατά τήν παραγωγήν τῆς θερμότητος παραμένει ἡ αὐτή· τότε τό σύρμα-ἀγωγός θά πρέ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πει νά έχη τιμήν 25 φοράς μικροτέραν, δηλαδή διάμετρον πεντάκις μικροτέραν.

Συνεπώς, ή διάμετρος τοῦ σύρματος-άγωγοῦ θά γίνη ἀπό 10 χιλιοστ., 2 χιλιοστ.

Ἡ μᾶζα καί, κατά συνέπειαν, ή τιμή τοῦ δευτέρου σύρματος θά είναι 25 φοράς μικροτέρα τῆς μάζης καί τῆς τιμῆς τοῦ πρώτου σύρματος, ἐξ αὐτοῦ δέ προκύπτει μεγάλη οἰκονομία, τήν ὁποίαν εἶναι εὔκολον νά ὑπολογίσωμεν.

Μᾶζα τοῦ πρώτου ἀγωγοῦ εἰς γραμμάρια:

$$\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 4000000 \cdot 8{,}9$$

καί κατά συνέπειαν ή τιμή του:

$$\pi (0{,}5)^2 \cdot 4000 \cdot 8{,}9 \cdot 4$$

Ἡ οἰκονομία ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου εἶναι $\frac{24}{25}$ καί

$$\frac{\pi (0{,}5)^2 \cdot 4000 \cdot 8{,}9 \cdot 4 \cdot 24}{25} = 107360^{f.} \text{ περίπου.}$$

Ὁ ὑπολογισμός αὐτός μᾶς δεικνύει τήν ἀνάγκην τοῦ νά μεταχειριζώμεθα ἰσχυράς τάσεις εἰς μεταφοράς ἐνεργείας εἰς μεγάλην ἀπόστασιν.

63) Ἐκκρεμές ἐξαρτᾶται ἐκ σύρματος ἀβαροῦς, μήκους 90 ἑκ. Ἀποτελεῖται ἐκ σφαίρας μάζης 1/2 γραμ., φερούσης φορτίον 50 μονάδων θετικοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Τό ἐκκρεμές τοῦτο αἰωρεῖται εἰς κατακόρυφον ἠλεκτρικόν πεδίον, κατ' ἀρχάς μέν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω, εἶτα δέ ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω.

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν, ἡ διάρκεια 100 ἁπλῶν αἰωρήσεων μικροῦ πλάτους εἶναι 108 δευτερόλεπτα, εἰς τήν δευτέραν δέ περίπτωσιν 86 δευτερόλεπτα.

Νά προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί ἡ ἔντασις τῆς βαρύτητος ἐν τῷ τόπῳ τοῦ πειράματος, ὑποτιθεμένης ἀμεταβλήτου τῆς ἀπολύτου ἀξίας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἀμφοτέρας τάς παρατηρήσεις.

<u>Λύσις:</u> Ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ἡ ἐπίδρασις τοῦ πεδίου ἐπί τῆς ἠλεκτρισμένης μάζης τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐλαττώνει τήν δύναμιν τῆς βαρύτητος κατά $50i$ δύνας (i οὔσης τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου) καί ἡ διάρκεια t μιᾶς αἰωρήσεως εἶναι:

$$t = \pi\sqrt{\frac{ml}{mg-50i}} .$$

Ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει, τοὐναντίον, ἡ ἐπίδρασις τοῦ πεδίου αὐξάνει τήν δύναμιν τῆς βαρύτητος καί ἔχομεν:

$$t' = \pi\sqrt{\frac{ml}{mg+50i}} .$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις γράφονται:

$$mg - 50i = \frac{ml\pi^2}{t^2} \qquad (1) ,$$

$$mg + 50i = \frac{ml\pi^2}{t'^2} \qquad (2) .$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διά προσθέσεως έχομεν:

$$g = \frac{l\pi^2}{2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t'^2}\right).$$

Δι' άντικαταστάσεως τῶν γραμμάτων ὑπό τῶν δοθεισῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, ἔχομεν:

$$g = 980^{cm},5 .$$

θέτοντες ἐν τῇ ἐξισώσει (2) τήν τιμήν τοῦ g, προσδιορίζομεν τήν ἔντασιν τοῦ πεδίου ἴσην πρός:

$$i = \frac{1}{50} m\left[\frac{l\pi^2}{t'^2} - g\right]$$

καί δι' ἀντικαταστάσεως τῶν γραμμάτων ὑπό τῶν δοθεισῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, ἔχομεν:

$$i = 2{,}19 \text{ δύναι.}$$

64) Τρεῖς λαμπτῆρες 16 κηρίων, τοποθετημένοι ἐπί τῆς αὐτῆς καθέτου τοῦ διαφράγματος εἰς ἀπόστασιν 3, 4 καί 5 μέτρων. Ὑπολογίσατε τήν φωτεινήν ἔντασιν ἑνός μόνου λαμπτῆρος, ὅστις τοποθετημένος εἰς τό 2 μέτρον ἀπό τοῦ διαφράγματος, θά ἔδιδεν, εἰς τήν βάσιν τῆς καθέτου, τόν αὐτόν φωτισμόν, τόν ὁποῖον δίδουν καί οἱ τρεῖς λαμπτῆρες, λειτουργοῦντες ταὐτοχρόνως. Τοῦ μόνου τούτου λαμπτῆρος φωτοβολοῦντος εἰς τάσιν 110 volts, ζητεῖται ποίαν ἔντασιν ῥεύματος θά καταναλώσῃ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕκαστον κηρίον ἀπαιτεῖ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δύο Watts;

Λύσις: Έστω x ή φωτεινή ένταση τοῦ λαμπτῆρος, ὅστις τοποθετημένος εἰς τό 2 μέτρον ἀπό τοῦ διαφράγματος, θά ἔδιδε τόν αὐτόν φωτισμόν, τόν ὁποῖον δίδουν καί οἱ τρεῖς λαμπτῆρες τῶν 16 κηρίων, τοποθετημένοι εἰς μεγαλυτέρας ἀποστάσεις.

Ἔχομεν τότε τήν σχέσιν:

$$\frac{16}{3^2}+\frac{16}{4^2}+\frac{16}{5^2}=\frac{x}{2^2},$$

ἐξ ἧς ἐξάγομεν:

$$x = 13,6 \text{ κηρία.}$$

ὁ λαμπτήρ οὗτος καταναλίσκει δύναμιν ἴσην πρός:

$$2 \cdot 13,6 = 27,2 \text{ watts}.$$

Συνεπῶς, δέον νά ἔχωμεν:

$$I \cdot 110 = 27,2,$$

ἐξ οὗ, διά τήν ἔντασιν τοῦ ρεύματος:

$$I = 0,247 \text{ ampère}.$$

65) Κύκλωμα περιλαμβάνει, τοποθετημένα κατά σειράν: γεννήτρια ἠλεκτρογεννητικής δυνάμεως 48 volts, ἀγωγόν ἀντιστάσεως 5 Ohms, ἐμβαπτισμένον εἰς θερμιδόμετρον, καί κινητῆρα. Αἱ ἀντιστάσεις τῆς γεννητρίας καί τῶν συρμάτων αἱ ἑνώσεις εἶναι μή ὑπολογίσιμοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διαπιστώνομεν ὅτι, ἐμποδίζοντες τὴν περιστροφὴν τοῦ κινητῆρος, ἐλευθεροῦνται εἰς τὸν ἐν τῷ θερμιδομέτρῳ ἐμβαπτισμένον ἀγωγὸν 1152 θερμίδες κατὰ λεπτόν, ἐνῷ ἡ ἐλευθερουμένη ποσότης θερμότητος δὲν εἶναι παρὰ 72 θερμίδες κατὰ λεπτόν, ὅταν λειτουργῇ ὁ κινητήρ.

Ζητεῖται:

1ον) Ἡ τάσις τοῦ ῥεύματος τοῦ διατρέχοντος τὸ κύκλωμα εἰς ἑκάστην αὐτῶν τῶν περιπτώσεων.

2ον) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος.

3ον) Ἡ ἀντι-ἠλεκτροκινητικὴ του δύναμις.

4ον) Ἡ διαφορὰ τοῦ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων του.

<u>Λύσις</u>: Γνωρίζομεν ὅτι 1 Joule ἀντιστοιχεῖ εἰς 0,24 θερμίδες.

1ον) Ἔστω I ἡ τάσις τοῦ ῥεύματος τοῦ διερχομένου τὸ κύκλωμα, ὅταν ὁ κινητὴρ εὑρίσκεται ἐν καταβυθίσει.

Ἡ ποσότης θερμότητος, ἡ ἐλευθερουμένη εἰς ἓν λεπτὸν εἰς τὸν ἀγωγὸν τῆς ἀντιστάσεως τῶν 5 Ohms, ὅστις εἶναι ἐμβαπτισμένος ἐν τῷ θερμιδομέτρῳ, ἰσοῦται πρὸς $5 \cdot I^2 \cdot 0{,}24 \cdot 60$, τοῦτο δὲ ἰσοῦται πρὸς 1152 θερμίδας.

Ἔχομεν, λοιπόν, ἰσότητα:

$$5I^2 \cdot 0{,}24 \cdot 60 = 1152 \,,$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς ἐξάγομεν: $I = 4$ ampères.

Ἡ ζητουμένη τάσις εἶναι 4 ampères.

Ὅταν θά θέσωμεν εἰς κίνησιν τόν κινητῆρα, τό ρεῦμα λαμβάνει νέαν τιμήν I', κατωτέραν τῆς I, καί ἔχομεν τήν ἰσότητα:

$$5 \cdot I'^2 \cdot 0{,}24 \cdot 60 = 72,$$

ἐξ ἧς ἐξάγομεν: $I' = 1$ ampère.

2ον) Ἡ ἐσωτερική ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν:

$$I = 4 = \frac{48}{5+x} \text{, ἐξ οὗ } x = 7 \text{ Ohms.}$$

3ον) Ἡ ἀντι-ηλεκτροκινητική δύναμις τοῦ κινητῆρος δίδεται, ἀφ' ἑτέρου, ἀπό τήν ἐξίσωσιν τήν σχετικήν πρός τήν τάσιν $I' = 1$:

$$1 = \frac{48-e}{5+7} \text{, ἥτις δίδει: } e = 36 \text{ volts.}$$

4ον) Ἡ διαφορά τοῦ δυναμικοῦ εἰς τά ἄκρα τοῦ κινητῆρος εἶναι τό ποσόν τῆς ἀντι-ηλεκτροκινητικῆς δυνάμεως καί τῆς πτώσεως τοῦ εἰς ohms δυναμικοῦ, εἴτε $36 + 1 \cdot 7 = 43$ volts.

66) Ἕξ στοιχεῖα, ἀντιστάσεως ρ καί ἠλεκτροκινητικῆς δυνάμεως ε, εἶναι τοποθετημένα εἰς δύο παραλλήλους σει-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

-ράς ἀνά τρία. Τό σύνολον αὐτό παρέχει ἠλεκτρισμόν εἰς κύκλωμα ἀντιστάσεως P, περιέχον διάλυσιν ἅλατος χαλκοῦ μέ ἠλεκτρόδια χαλκοῦ. Ζητεῖται:

1ον) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τό ἐσωτερικόν κύκλωμα

2ον) Ἡ ἐπί τῆς καθόδου κατατιθεμένη μᾶζα χαλκοῦ κατά τό χρονικόν διάστημα τ.

Ἀριθμητική ἐφαρμογή: ρ = 4 ohms, P = 5 ohms, e = 1,1 volt, τ = 30 λεπτά.

Γνωρίζομεν ὅτι 96512 Coulombs ἐλευθερώνουν 1 γραμ. ὑδρογόνου καί ὅτι τό ἀτομικόν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 63.

1ον) Συμφώνως πρός τόν προηγούμενον τύπον, ἡ ἔντασις τοῦ ὑπό τῆς στήλης παρεχομένου ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{6e}{3\rho + 2P}$$

δηλαδή μέ τούς ὑπό τῆς παραστάσεως παρεχομένους ἀριθμούς ἔχομεν:

$$I = \frac{6 \cdot 1,1}{3 \cdot 4 + 2 \cdot 5} = 0,3 \text{ ampères.}$$

2ον) Συμφώνως πρός τόν νόμον τοῦ Φαραντάϋ, ἡ κατατεθεῖσα μᾶζα χαλκοῦ εἶναι ἀνάλογος πρός τό ἀτομικόν βάρος 63 καί ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρός τήν μονάδα τοῦ σθένους 2.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Συνεπώς, ή ύπό 96512 Coulombs κατατεθεῖσα μᾶζα

εἶναι $\frac{63}{2}$ γρ.

Είς 30 λεπτά ό άριθμός τῶν Coulombs, ό διελθών τήν

διάλυσιν τοῦ ἅλατος χαλκοῦ, εἶναι:

$$0,3 \times 60 \times 30,$$

καί, κατά συνέπειαν τό βάρος τοῦ κατατεθειμένου χαλκοῦ

εἶναι:

$$\frac{63}{2} \cdot 0,3 \cdot 60 \cdot 30 \cdot \frac{1}{96512} = 0,176 \text{ γρμ.}$$

67) Θέτομεν είς περιστροφικήν κίνησιν μηχανήν τοῦ Gramme, είς τρόπον ὥστε νά άναπτύξη είς τό έξ έπαγωγῆς ρεῦμα τῆς ήλεκτροκινητικήν δύναμιν 20 volts. Βολτόμετρον έξαρτώμενον έκ δύο σημείων τοῦ έξωτερικοῦ κυκλώματος, χωριζομένων δι' άντιστάσεως 3 ohms, δεικνύει διαφοράν δυναμικοῦ 2 volts. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ή άντίστασις τοῦ έξ έπαγωγῆς ρεύματος εἶναι 2 ohms, ζητεῖται νά ύπολογίσωμεν:

1ον) Τήν έξωτερικήν άντίστασιν τοῦ κυκλώματος.

2ον) Είς τί θερμοκρασίαν θά ἔφθανον 500 γραμ. ὕδατος άρχικῆς θερμοκρασίας 0° έάν ἐδέχοντο ὅλην τήν παραγομένην θερμότητα έκ τῆς ὁλότητος τοῦ κυκλώματος ἐπί 5 λεπτά.

3ον) Τό φορτίον, τό όποῖον θά ἐλάμβανεν ἕνας συμπυκνω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς $\frac{1}{10}$ μικροφαραντάϋ, τοποθετημένος κατά παραγωγήν εἰς τά ἄκρα τῆς μηχανῆς.

Μηχανικόν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος: 4,18 Joules.

Λύσις: Τό βολτόμετρον παρουσιάζει διαφοράν δυναμικοῦ 2 volts μεταξύ δύο σημείων, ἠνωμένων δι' ἀντιστάσεως 3 ohms. Συνεπῶς, συμφώνως πρός τόν νόμον τοῦ ohm, ἡ τάσις τοῦ ῥεύματος εἶναι:

$$i = \frac{2}{3} \text{ ampère.}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ τάσις αὕτη τοῦ ῥεύματος ἰσοῦται πρός τήν ἠλεκτροκινητικήν δύναμιν τῆς μηχανῆς τοῦ Gramme, διαιρουμένην διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστάσεων τοῦ ἐσωτερικοῦ ῥεύματος (2 ohms) καί τοῦ ἐξωτερικοῦ σύρματος (x ohms).

Συνεπῶς, ἔχομεν:

$$\frac{2}{3} = \frac{20}{2+x}, \text{ ἐξ οὗ:}$$

$$x = 28 \text{ ohms.}$$

2ον) Ῥεῦμα $\frac{2}{3}$ ampère κυκλοφοροῦν ἐπί 5 λεπτά εἰς ἀγωγόν ἀντιστάσεως 28 ohms, παράγει θερμότητα ἴσην πρός

$$q = \frac{28 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{4,18} \cdot 60 \cdot 5$$

ἡ θερμότης αὕτη διοχετεύεται εἰς ὕδωρ 500 γρ. καί προ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καλεῖ ἄνοδον θερμοκρασίας t, διδομένην ἀπό τήν ἐξίσωσιν:

$$q = 500t.$$

Ἐξ αὐτοῦ ἐξάγομεν:

$$t = 1^{o},7$$

Τό ὕδωρ θά φθάσῃ εἰς θερμοκρασίαν $1^{o},7$.

3ον) Ἡ διαφορά δυναμικοῦ εἰς τά ἄκρα τῆς μηχανῆς δίδεται ἀπό τόν νόμον τοῦ Ohm:

$$\frac{2}{3} = \frac{V}{28}, \text{ ἐξ οὗ } V = 18 \text{ volts},66$$

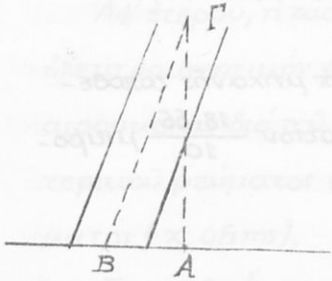
Ὁ ἐν παραγωγῇ ἐπί τῶν σφαιρῶν τῆς μηχανῆς τοποθετημένος συμπυκνωτής λαμβάνει φορτίον $\frac{18,66}{10}$ μικροκουλόμπ ἤ 1,866 μικροκουλόμπ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1) Διά τῆς καπνοδόχου ἀτμοπλοίου πρέπει νά ἀνέρχηται ὁ καπνός ἄνευ προστριβῆς ἐπί τῶν τοιχωμάτων. Ποίαν κλίσιν πρέπει νά δώσωμεν εἰς ταύτην, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι 4 m καί ἡ τοῦ καπνοῦ 7,8 m κατά 1".

<u>Λύσις</u>: Ἵνα τοῦτο συμβαίνῃ, πρέπει, καθ' ὅν χρόνον τό πλοῖον διανύῃ τό διάστημα ΑΒ, νά διανύῃ ὁ καπνός τό



διάστημα ΑΓ· ἀλλά ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{7,8}{4}$$

ἤτοι: $B = 71^\circ\ 24'\ 20''$.

Ἄρα πρέπει νά κλίνῃ πρός τά ὄπισθεν καί νά σχηματίζῃ μετά τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου γωνίαν $71^\circ\ 24'\ 20''$.

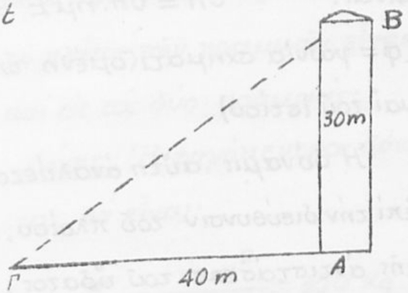
2) Σκοπεύει τίς τήν κορυφήν πύργου ὕψους 30 m ἀπέχοντος 40 m καί ἡ ταχύτης τοῦ βλήματος εἶναι 40 m/sec. Ποῖον σημεῖον ἔπληξεν ἡ σφαῖρα;

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ΑΒ ὁ πύργος καί Γ ὁ παρατηρητής· τότε $AB = 30\text{m}$ καί $A\Gamma = 40\text{ m}$, θά εἶναι δέ, ὡς γνωστόν, $B\Gamma = 50$. τότε θά ἔχωμεν:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$S = v.t \quad \text{ἤ} \quad 50 = 500 \cdot t$$

καί $t = {}^{1}/_{10}''$.



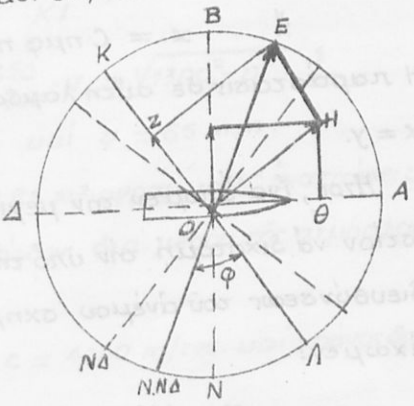
Κατά τό χρονικόν τοῦτο διάστημα, τό σῶμα πίπτει κατά

$$B\Delta = \frac{1}{2} g t^2 \text{, ἤτοι}$$

$$B\Delta = \frac{9,81}{2} = \frac{1}{100} = 4,9 \text{ cm.}$$

Ἤτοι, θά πλήξῃ τόν πύργον 4,9 cm κάτω τῆς κορυφῆς.

3) Ἱστιοφόρον διευθύνεται πρός ἀνατολάς, ἐνῷ ὁ ἄνεμος ἔχει διεύθυνσιν ΝΝΔ. Ποίαν πρέπει νά δώσωμεν εἰς τόν ἱστίον διεύθυνσιν, ἵνα ἔχωμεν τήν μεγίστην δυνατήν ταχύτητα καί ποία θά εἶναι αὐτη, ἄν ὁ ἄνεμος ἔχῃ ταχύτητα 14 m/sec.



<u>Λύσις:</u> Ἔστω ΟΕ ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀνέμου καί ΚΛ ἡ διεύθυνσις τοῦ ἱστίου. Ἡ δύναμις ΟΕ ἀναλύεται κατ' ἀρχάς εἰς ΟΖ καί ΟΗ καί ἐκ τούτων μέν ἡ ΟΖ ἐξουδετεροῦται διολισθαίνουσα ἐπί τοῦ ἱστίου, παραμένει δέ μόνον ἡ ΟΗ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπί τό ἱστίον καί αὐτη

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι: $OH = OH.\eta\mu E = OE\eta\mu\,\varphi$

(φ= γωνία σχηματιζομένη ὑπό τῆς διευθύνσεως τοῦ ἀνέμου καί τοῦ ἱστίου).

Ἡ δύναμις αὐτή ἀναλύεται πάλιν εἰς τήν OI κάθετον ἐπί τήν διεύθυνσιν τοῦ πλοίου, ἥτις καί ἐξουδετεροῦται ὑπό τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὕδατος, καί εἰς τήν Oθ ταὐτιζομένην πρός τήν πορείαν τοῦ πλοίου, καί εἶναι:

$O\theta = OH\eta\mu H$. Ἀλλά $H = y$,

ὅθεν: $\theta O = OH\eta\mu\,y$

(y= γωνία σχηματιζομένη ὑπό τῆς διευθύνσεως τοῦ πλοίου καί τοῦ ἱστίου). Ἄρα ἔχομεν:

$$\theta O = OE\eta\mu\varphi\,\eta\mu\,y$$

ἤ $x = C\eta\mu\varphi\,\eta\mu\,y$.

Ἡ παράστασις δέ αὐτή λαμβάνει τήν μεγίστην τιμήν, ἄν $x = y$.

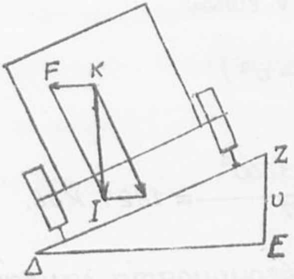
Ἤτοι, ἵνα ἔχωμεν τήν μεγίστην ταχύτητα, πρέπει τό ἱστίον νά διχοτομῇ τήν ὑπό τῆς πορείας τοῦ πλοίου καί τῆς διευθύνσεως τοῦ ἀνέμου σχηματιζομένην γωνίαν καί θά ἔχωμεν:

$$x = 142\ \eta\mu\ 56^\circ\ 15' = 9{,}979\ m/sec.$$

4) Ὄχημα βάρους 7000 χιλιογράμμων κινεῖται ἐπί καμπύλης ἀκτῖνος $\tau = 100 m$, μέ ταχύτητα $\upsilon = 7\ m/sec.$ Νά

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρεθῇ ἡ φυγόκεντρος καὶ πόσον ὑψηλότερον πρέπει νὰ κεῖται ἡ ἐξωτερικὴ γραμμή, ἂν τὸ πλάτος τῶν γραμμῶν εἶναι 1,3 , ἵνα ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο γραμμάς;



Λύσις: Ἡ φυγόκεντρος δύναμις θὰ εἶναι:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{\tau} = 350 \text{ Kg}$$

Τὰ τρίγωνα FKI καὶ ΔEZ εἶναι ὅμοια. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν:

$$\frac{EZ}{\Delta E} = \frac{FK}{KI}$$

ἤ: $$EZ = \frac{\Delta E . FK}{KI}$$

καὶ $$\upsilon = \sqrt{1300^2-\upsilon^2} - \frac{350}{7000} \cdot \upsilon = \sqrt{1300^2-\upsilon^2} \cdot \frac{1}{20}$$

ἢ $400\upsilon^2 = 1300^2 - \upsilon^2$ καὶ $\upsilon = 65$ m.m.

5) Μετεωρίτης βάρους 9,81 χιλιογράμμων ἐλαττώνει τὴν ταχύτητα αὐτοῦ κατὰ τὴν δίοδον διὰ μέσου τῆς ἀτμοσφαίρας τῆς γῆς κατὰ 200 m.

Ἀρχικὴ ταχύτης αὐτοῦ $c = 4000$ m/sec. καὶ χρόνος διαδρομῆς 4″.

Ζητεῖται ποῖον ἔργον ἐξετελέσθη, μὲ τί ποσὸν ἰσοδυναμεῖ τοῦτο, κατὰ πόσους βαθμοὺς ἐθερμάνθη ὁ μετεωρίτης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἂν ἔχῃ εἰδικήν θερμότητα $\varepsilon = 0{,}11$ Kal/kg καί ἂν ὅλη ἡ παραχθεῖσα θερμότης ἀπερροφήθη ὑπ' αὐτοῦ;

<u>Λύσις:</u> Ἡ ταχύτης εἰς τό τέλος τῆς διαδρομῆς εἶναι $4000-200=3800$. Λαμβάνων τόν τύπον

$$E=\frac{B}{2g}\ (c^2-\upsilon^2)$$

καί ἀντικαθιστῶν ἔχω:

$$E=\frac{4000^2-3800^2}{2\cdot 427}=1827\ Kal.$$

Ἵνα ἴδωμεν πόσον ἀνῆλθεν ἡ θερμοκρασία, λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$\vartheta=\frac{\Theta}{B\cdot\varepsilon}$$

ἔνθα ϑ = βαθμοί, Θ = ποσότης θερμότητος, B = βάρος καί ε = εἰδική θερμότης. Ἀντικαθιστῶν διά τῶν εὑρεθέντων, ἔχω:

$$\vartheta=\frac{1827}{9{,}81\cdot 0{,}11}=1693$$

6) Πρός κατασκευήν κλεψύδρας, χρησιμοποιεῖται κύλινδρος, ὕψους $h = 32$ cm καί ἀκτῖνος βάσεως $r = 8$ cm., πρέπει δέ νά κενοῦται δι' ὀπῆς, εὑρισκομένης εἰς τόν πυθμένα, ἐντός 1 ὥρας.

Ποῖον πρέπει νά εἶναι τό ἄνοιγμα τῆς κυκλικῆς ὀπῆς q; Καί εἰς ποῖον ὕψος ἀπό τοῦ πυθμένος πρέπει νά τοποθετηθοῦν ὑποδιαιρέσεις, οὕτως ὥστε νά δεικνύῃ καί τά τέταρτα τῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥρας. (πραγματικῶς ἐκρέουσα ποσότης εἶναι τά 0,6 τῆς θεωρητικῆς).

<u>Λύσις:</u> Ἡ ἐκρέουσα ποσότης γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι ἀνάλογος τῆς τομῆς τῆς ὀπῆς, τῆς ταχύτητος ἐκροῆς καί ἀνάλογος τοῦ χρόνου. Ἐπειδή ὅμως ἐνταῦθα ἡ ταχύτης ἐκροῆς δέν θά εἶναι σταθερά, διότι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ θά κατέρχεται συνεχῶς, ἡ ἐκρέουσα ποσότης θά εἶναι:

$$B = q\cdot\frac{t\cdot v}{2} \quad \text{ἤ} \quad \pi r^2 h = q\,\frac{t^2}{2}\sqrt{2hg\cdot 0{,}6}$$

ἐξ οὗ: $$q = \frac{2\pi r^2 h}{t^2\sqrt{2gh\cdot 0{,}6}} = 0{,}5944 \text{ qmm}.$$

Πρός εὕρεσιν τῶν διαστημάτων, εἰς ἅ πρέπει νά τοποθετήσωμεν τάς ὑποδιαιρέσεις, διά τά τέταρτα τῆς ὥρας, ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχάς τό ὕψος, ἐξ οὗ τό ὕδωρ θά ἐξέρρεεν ἐντός 15' καί εὑρίσκομεν $h/16$, ἐπειδή δέ ἡ ποσότης ἐκροῆς εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ χρόνου, θά εἶναι διά τά λοιπά τέταρτα:

$$\frac{4h}{16} \quad \text{καί} \quad \frac{9h}{16} \quad \text{ἤτοι 28 καί 18 cm.}$$

7) Ποίαν ἀκτῖνα πρέπει νά ἔχῃ τριχοειδής σωλήν, ἵνα τό ὕδωρ ἀνέρχεται ἐντός αὐτοῦ εἰς ὕψος 50 m;

<u>Λύσις:</u> Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον:

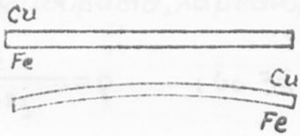
$$h = \frac{2\alpha}{r s}, \text{ ἔχομεν:}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν, ἄν λύσωμεν ὡς πρός τ:

$$\tau = \frac{2\alpha}{hs} = \frac{2.7,5}{50.000} = 0,003 \text{ m.m.}$$

8) Δύο ἐλάσματα, τό ἕν ἐκ χαλκοῦ, τό δέ ἕτερον ἐκ σιδήρου, ἔχοντα εἰς 0° τό αὐτό μῆκος Μ, τοποθετοῦνται παραλλήλως καί τοιουτοτρόπως, ὥστε νά ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων 1 m.m. Ἄν δεχθῶμεν κατά τήν διαστολήν τό σύστημα καμπτόμενον καί σχηματίζον τόξον κύκλου, ζητεῖται ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου, εἰς ὅν ἀνήκει τό ἔλασμα τοῦ χαλκοῦ, ἄν σ.γ.δ. τοῦ σιδήρου $\alpha = 0,000012$ καί τοῦ χαλκοῦ $\alpha' = 0,000018$.



Λύσις: Τό μῆκος τοῦ χαλκοῦ θά εἶναι $M(1+200\cdot 0,000018)$

" " " σιδήρου " " $M(1+200\cdot 0,000012)$.

Ὡς γνωστόν ὅμως, τό μῆκος τῶν τόξων ἔχει λόγον, ὅν καί αἱ ἀκτῖνες τῶν ἀντιστοίχων κύκλων, ἤτοι ἔχομεν:

$$\frac{R}{R-1} = \frac{M(1+200\cdot 0,000018)}{M(1+200 . 0,000012)} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{R}{R-1} = \frac{1,0036}{1,0024}, \text{ ἐξ οὗ: } R = 836,33 \text{ m.m.}$$

9) Ζητεῖται ἡ χωρητικότης ἀεροστάτου ἱκανοῦ νά ἀνυψώσῃ 1000 Kg μετ' ἀνυψωτικῆς δυνάμεως 10 Kg, τήν στιγ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μήν τῆς ἀναχωρήσεως, ἄν εἶναι πλῆρες ὑδρόγου, ἡ θερμο-
υρασία εἶναι 15°, ἡ πίεσις 75 τό βάρος τῶν ἐξαρτημάτων
100 χιλιογρ. καί ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου πρός τόν ἀέρα
0,069;

<u>Λύσις</u>: Ἡ ὅλη ἀνυψωτική δύναμις τούτου πρέπει νά
εἶναι 1110 χλγρ., πρέπει δέ νά ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν
τῶν ἴσων ὄγκων ἀέρος καί ὑδρογόνου, ἤτοι ἄν x ὁ ὄγ-
κος, θά ἔχωμεν:

$$\frac{x \cdot 1,293}{1+\frac{15}{273}} \cdot \frac{75}{76} - \frac{x \cdot 1,293 \cdot 0,069}{1+\frac{15}{273}} \cdot \frac{75}{76} = 1110$$

ἐξ οὗ: $x = 102$ κυβ. μέτρα.

10) Βαρόμετρον ἔχει ἐγκλεισθῇ ἐντός εὐρέος ὑαλίνου
σωλῆνος, κλεισθέντος διά τήξεως εἰς λύχνον. Κατά τήν στιγ-
μήν τῆς συγκλείσεως, τό ὕψος τῆς στήλης εἶναι 76 ἑκ. καί ἡ
θερμοκρασία 15°. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος τῆς ὑδραργυρι-
κῆς στήλης, ὅταν ἡ θερμοκρασία εἶναι 40°.

Συντελεστής διαστολῆς ὑδραργύρου: $\frac{1}{5550}$.

" " ἀέρος : 0,0036

Ἡ διαστολή τῆς ὑάλου δέν θά ληφθῇ ὑπ' ὄψιν.

<u>Λύσις</u>: Τοῦ σωλῆνος ὄντος εὐρέος, ἡ διακύμανσις τῆς
ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς τήν λεκάνην τοῦ βαρομέτρου εἶναι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μή ὑπολογίσιμος. Ἔστωσαν V ἡ ἐπίσης ἀμετάβλητος χωρητικότης τοῦ ἐπίσης ἐσφραγισμένου σωλῆνος, x ἡ τελικὴ πίεσις, μετρουμένη εἰς στήλην ὑδραργύρου τῆς ἀρχικῆς θερμοκρασίας τῶν 15 βαθμῶν.

Ὁ τύπος τοῦ Gay-Lussac δίδει τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{V}{1+15\alpha}\cdot 176 = \frac{V}{1+40\alpha}\cdot x$$

ἐκ τῆς ὁποίας:

$$x = \frac{1+40\alpha}{1+15\alpha}\cdot 76 \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐν τῇ πραγματικότητι, ὁ ὑδράργυρος τοῦ βαρομέτρου εὑρίσκεται ἐν διαστολῇ, ἡ πυκνότης (τὸ εἰδ. βάρος) ἔχει ἐλαττωθῆ καὶ ἀπαιτεῖται στήλη ὕψους y, μεγαλυτέρου τοῦ x, διὰ νὰ ἰσοσταθμίσῃ εἰς τὴν νέαν πίεσιν.

Ἂν ϑ καὶ ϑ' παριστῶσι τὰς πυκνότητας τοῦ ὑδραργύρου εἰς θερμοκρασίαν ἀντιστοίχως 15° καὶ 40°, ἔχομεν, θεωροῦντες τὴν πίεσιν ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν αὐτήν, δυναμένην νὰ μετρηθῇ διὰ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἑτέρου ὑγροῦ:

$$x\vartheta = y\vartheta'$$

ἢ

$$x\frac{\vartheta_0}{1+15\alpha} = y_0\frac{\vartheta_0}{1+40\mu} \qquad (2)$$

Τοῦ ϑ παριστῶντος τὴν πυκνότητα τοῦ ὑδραργύρου εἰς 0° καὶ μ ὄντος τοῦ συντελεστοῦ διαστολῆς τοῦ ὑδραρ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρύρου.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) ἔχομεν: $J = 76 \cdot \frac{1+40\alpha}{1+15\alpha} \cdot \frac{1+40\alpha}{1+15\mu} = 83$ έκ.

11) Μικροσκόπιον ἀποτελεῖται ἐκ προσοφθαλμίου ἰσχύος 40 διοπτρῶν καί ἀντικειμενικοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 χιλιοστομέτρων.

Τοποθετοῦμεν ἀντικείμενόν τι εἰς ἀπόστασιν 5,1 χιλιοστομέτρων ἀπό τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ ἀντικειμενικοῦ. Ζητεῖται:

1ον) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τοῦ σχηματιζομένου ὑπό τοῦ ἀντικειμενικοῦ εἰδώλου τοῦ ἀντικειμένου πρέπει νά τοποθετηθῇ ὁ προσοφθάλμιος, ἵνα τό τελικόν εἴδωλον σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν 30 ἑκατοστομέτρων ἀπό τοῦ προσοφθαλμίου;

2ον) Ποῖον τό μῆκος τοῦ μικροσκοπίου;

<u>Λύσις</u>: Ἡ ἑστιακή ἀπόστασις τοῦ προσοφθαλμίου εἶναι $\frac{1000}{40} = 25$ χιλιοστά. Ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ ὀφθαλμός τοῦ παρατηρητοῦ ταυτίζεται μετά τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ προσοφθαλμίου, ἡ ζητουμένη ἀπόστασις B_1C_1 προσδιορίζεται εἰς χιλιοστόμετρα ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{1}{B_1C_1} - \frac{1}{300} = \frac{1}{25},$$

ἐξ ἧς: $B_1C_1 = 23$ χιλιοστόμετρα.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{i}{o}=\frac{CB'}{CB}=\frac{\vartheta'}{\vartheta}=60.$$

3ον) Ἡ ἀπόστασις ϑ'' προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$\frac{1}{\vartheta''}+\frac{1}{D}=\frac{1}{F}, \text{ ἐξ ἧς:}$$

$$\vartheta''=\frac{D.F}{D-F}=33,3 \text{ χιλιοστόμετρα.}$$

Ὁ λόγος τῶν διαστάσεων τοῦ εἰδώλου $A''B''$ πρὸς τὸ εἴδωλον $A'B'$ ἰσοῦται πρός:

$$\frac{D}{\vartheta''}=\frac{D-F}{F}=9.$$

4ον) Ἐφ' ὅσον τιθέμεθα εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως, ἡ μεγέθυνσις g τοῦ προσοφθαλμίου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τὸν ὑφιστάμενον μεταξὺ $\frac{A''B''}{B''C}$ καὶ $\frac{A'B'}{B''C}$. Συνεπῶς, ἰσοῦται πρός: $\frac{D}{d'}=9.$

5ον) Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $\frac{A''B''}{AB}$.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ γράψωμεν:

$$\frac{A''B''}{AB}=\frac{A''B''}{A'B'}\cdot\frac{A'B'}{AB}=9\cdot60=540.$$

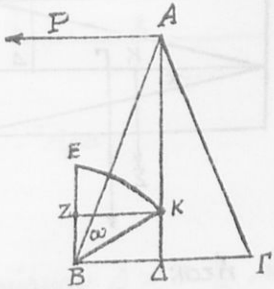
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

13) Τετραγωνική πυραμίς, έχουσα ακμήν βάσεως α=90 καί ύψος 120 cm., ειδικόν δέ βάρος 28, πρέπει νά ανατραπή διά δυνάμεως P, ενεργούσης οριζοντίως επί της κορυφής της. Πόση πρέπει νά είναι ή δύναμις αύτη ; Κατά ποίαν γωνίαν νά στραφή ή πυραμίς, ίνα ανατραπή, καί ποίον είναι τό μηχανικόν έργον;

__Λύσις:__ Έστω ΑΒΓ ή δοθείσα πυραμίς· τό βάρος ταύτης είναι:

$$\frac{\alpha^2 . \upsilon}{3} S = 970200 \text{ grs}$$

καί τό κέντρον του βάρους ευρίσκεται εις τό 1/4 του ύψους από της βάσεως, ήτοι εις ύψος 30cm. από της βάσεως. Κατά τήν ανατροπήν τό κέντρον του βάρους θά διαγράψη τόξον ΕΚ, άν δέ φέρωμεν τήν ΚΖ παράλληλον τη ΒΓ, βλέπομεν ότι τό κέντρον του βάρους θά ανυψωθή κατά τό ΕΖ καί θά είναι:



$$EZ = KB - \Delta K \quad \text{ή} \quad EZ = \sqrt{B\Delta^2 + K\Delta^2} - K\Delta = 24{,}08$$

Άρα τό μηχανικόν έργον, τό οποίον επιτελείται είναι:

$$B . EZ = 218{,}45 \ mKg.$$

Πρός εύρεσιν της ενεργούσης δυνάμεως, λαμβάνω τάς ροπάς καί έχω:

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

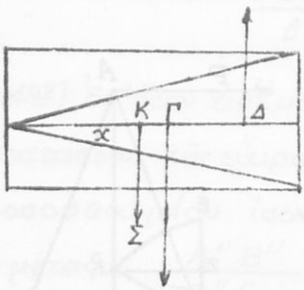
$$P \cdot 120 = 907{,}2\ 45 \quad \text{καί} \quad P = 340{,}2 \text{ Kgs.}$$

Πρός εὕρεσιν τῆς γωνίας, καθ' ἥν πρέπει νά στραφῇ ἡ πυραμίς, λαμβάνομεν τρίγωνον ΚΖΒ καί ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\omega \quad \frac{KZ}{ZB} = \frac{45}{30}$$

$$\text{καί} \quad \omega = 56^\circ\ 18'\ 36''$$

14) Κύλινδρος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τ καί ὕψος υ, ἐξ αὐτοῦ δέ ἔχει ἀφαιρεθῇ κῶνος, ἔχων τήν αὐτήν βάσιν καί ὡς κορυφήν τό κέντρον τῆς ἑτέρας βάσεως τοῦ κυλίνδρου· ποῦ εὑρίσκεται τό κέντρον τοῦ βάρους;



Λύσις: Τό βάρος τοῦ ἐναπομείναντος σώματος θά ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν βαρῶν τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ κώνου,

ἤτοι:

$$B = \pi\rho\upsilon^2 - \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3} = \frac{2\pi\rho^2\upsilon}{3}.$$

Ἐφαρμόζοντες δέ τάς ροπάς, ἔχομεν:

$$\frac{2\pi\rho^2\upsilon}{3} \cdot x = \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3} \cdot \frac{\upsilon}{2} - \frac{\pi\rho^2\upsilon}{3} \cdot \frac{3\upsilon}{4},$$

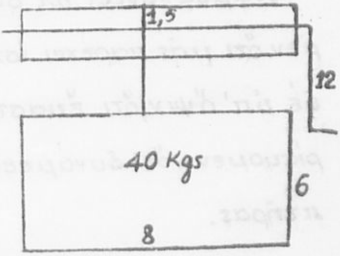
ἐξ οὗ: $\quad x = \dfrac{3\upsilon}{8}$

ἐπί τοῦ κοινοῦ ἄξονος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

15) Ὑδατοφράκτης ἔχει πλάτος $\beta = 8$ cm. καί βάρος 40 Kgs, τό δέ ὕψος τοῦ ὕδατος ἐντός τῆς δεξαμενῆς εἶναι $h = 6$cm. θέλομεν τῇ βοηθείᾳ βαρούλκου, οὗτινος ἡ ἀκτίς τυμπάνου εἶναι 1,5 cm, καί στροφάλου $R = 12$ cm., νά ἀνυψώσωμεν τόν ὑδατοφράκτην. Ποία δύναμις πρέπει νά καταβληθῇ, ἄν ὁ συντελεστής τριβῆς εἶναι $\tau = 0,5$

<u>Λύσις</u>: Τό βάρος, ὅπερ πρόκειται νά ἀνυψώσωμεν διά τοῦ βαρούλκου ἰσοῦται μέ τό βάρος Β τοῦ ὑδροφράκτου, αὐξηθέν κατά τήν ἐκ τῆς τριβῆς προερχομένην ἀντίστασιν Α, θά εἶναι δέ:



$$A = \frac{\beta.1.\upsilon}{2}.\tau = \frac{1}{2}\beta\upsilon^2\tau \quad . \text{ Ἄρα:}$$

$$B = B_1 + \frac{1}{2}\beta\upsilon^2\tau \,. \quad ,$$

λαμβάνοντες δέ τόν τύπον τοῦ βαρούλκου $\Delta = B \cdot \frac{\tau}{R}$, ἔχομεν:

$$\Delta = \frac{\tau}{R}\left(B + \frac{1}{2}\beta\upsilon^2\tau\right), \text{ ἐξ οὗ:}$$

$$\Delta = \frac{1,5}{12}\left(40 + \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 36 \cdot 0,5\right) = 14 \text{ Kgs}$$

16) Λίμνη κεῖται εἰς ὕψος 100 m καί ὀχετός διαβιβάζει ἐκ ταύτης $3m^3$ ὕδατος δι' ἑνός ὑδροστροβίλου. Ζητεῖται ἡ ἰσχύς τοῦ ὑδροστροβίλου, ἄν ἡ ἀπόδοσις εἶναι 75% τῆς θεωρη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τικής καί β) πόσους ἡμιβατικούς λαμπτῆρας, δυνάμεθα νά φωτίσωμεν, ἄν ἕκαστος παρέχῃ φωτισμόν 110 κηρίων;

<u>Λύσις</u>: Ἡ θεωρητική ἀπόδοσις εἶναι:

$$N = \frac{B.h}{75} = \frac{3000 \cdot 100}{75} = 4000 \text{ ἵπποι}$$

Ἄρα ἡ πραγματική 3000.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι 1 ἵππος = 736 watts, εὑρίσκομεν ὅτι μᾶς παρέχει ἰσχύν 2.208.000 watts. Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἕκαστος λαμπτήρ ἀπαιτεῖ 55 watts, εὑρίσκομεν, ὅτι δυνάμεθα νά τροφοδοτήσωμεν 40.145 λαμπτῆρας.

Ἀφιεροῦται

εἰς τὸν Ἐκλεκτὸν Καθηγητὴν καὶ φίλον

κ. Α. Τζώρτζην Καθηγητὴν τῆς Θεωρητικῆς Μηχανικῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν ὡς ἐλάχιστον δεῖγμα τῆς ἀπείρου μου ἐκτιμήσεως.-

Παῦλος Βιδωρῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής