5

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ π. Β. ΚΟΝΙΣΠΟΛΙΑΤΟΥ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΩΝ ΤΩΝ ΑΛΥΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ (Ν. ΛΕΚΟΥ)

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς Στρατιωτικὰς σχολὰς καὶ τὸ Πολυτεχνεῖον.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ
56—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—56
1912

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὰ πρακτικὰ ἐπαγγέλματα εἰς πολλὰς ὠφελίμους ἐπιστήμας καὶ εἰς αὐτὸν τὸν πρακτικὸν βίον ἡ χρησιμότης τῆς Ἀλγέβρας εἶναι προφανής. Ἀλλ᾽ ἡ ἐξ αὐτῆς ὠφέλεια δὲν σταματᾷ ἕως ἐδῶ. Ἡ Ἄλγεβρα ὀξύνει τὴν κρίσιν, καθιστᾷ εὔστροφον τὸ πνεῦμα εἰς τὸ νὰ ἐκφέρῃ περὶ οἱουδήποτε σκέψεις μετὰ τῆς αὐτῆς εὐχερείας μεθ᾽ ἧς καταστρώνει μίαν ἐξίσωσιν. Ἐν τῷ ὠκεανῷ τοῦ ἀγνώστου κατορθοῖ τὸ ἐξησκημένον πνεῦμα ν᾽ ἀνεύρῃ σταγόνα τοῦ ποθουμένου γνωστοῦ καὶ νὰ πλάσῃ ἐπ᾽ αὐτῆς εἶτα διὰ τῆς σκέψεως ὠκεανοὺς ὅλους γνώσεως καὶ Ἀληθείας. Ἡ Ἄλγεβρα δύναται νὰ θεωρηθῇ βάσις τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν διότι τὴν ἐπικαλούμεθα πανταχοῦ καὶ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ καὶ ἐν οἱῳδήποτε περιπλόκῳ προβλήματι. Ἡ τριγωνομετρία πάλιν εἶναι θυγάτηρ τῆς Γεωμετρίας μετὰ τῆς Ἀλγέβρας. Ἡ ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας δὲ ἐξάσκησις τοῦ πνεύματος εἰς τοὺς λεπτοτάτους συλλογισμοὺς μιᾶς λ. χ. διερευνήσεως καὶ εἰς τὰ περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, ὧν ἐπιλαμβάνεται, παρασκευάζει τὸ πνεῦμα εἰς κατανόησιν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ καὶ τῶν ἄλλων ἀνωτέρων Μαθηματικῶν. Ὅλοι οἱ νόμοι ἐφ᾽ ὧν ἐρείδεται αὕτη δὲν εἶναι συνθῆκαι, ὡς πολλοὶ δοξάζουσι, διότι παραλληλιζόμενοι πρὸς τὸν πρακτικὸν βίον δεικνύασι τὴν προφανῆ ἀλήθειάν των ἐν αὐτῷ· ὅταν δὲ εἶναι ἀλήθεια ἐν τῷ πρακτικῷ δὲν παύει παρὰ καὶ ἐν τῷ θεωρητικῷ καὶ παντοῦ νὰ εἶναι ἀλήθεια. Ὅπως δὲ ἀποκτήσῃ τις βάσεις σταθερὰς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ οὐ μικρὰν ἀνάγκην ἔχει καλοῦ ὁδηγοῦ, διὸ καὶ οἱ καλῶς κατανοήσαντες ταύτην πολλὰ τοῖς ἐκδιδάξασιν αὐτοὺς ὀφείλουσι. Τὴν βάσιν λοιπὸν ταύτην τῶν Μαθηματικῶν δέον νὰ μελετῶμεν ἐμβριθῶς μὴ φειδόμενοι μόχθων καὶ νὰ ὀξύνωμεν οὕτω τὴν κρίσιν ἡμῶν μελετῶντες λύσεις ὅσῳ τὸ δυνατὸν πλειοτέρων προβλημάτων.

Πρὸς τοῦτο νομίζοντες ὅτι θὰ παράσχωμεν ἐκδούλευσιν τῇ μαθητιώσῃ νεολαίᾳ ἐπεχειρήσαμεν τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Κράτους.

Οἱ ἐν τέλει τύποι ἐτέθησαν πρὸς ταχυτέραν τῶν μελετώντων εὕρεσιν καὶ ὅπως διὰ τῆς συνεχοῦς οὕτω χρήσεως αὐτῶν μονιμοποιηθῶσιν.

Ἐν Κερκύρᾳ, 22 Αὐγούστου 1911.

ΣΠ. ΚΟΝΙΣΠΟΛΙΑΤΗΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ἄσκησις (Ἀλγ. σελ. 19).

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις:

$$10-(-4)-(-3)+7,$$

$$3-4-5-2+3, \quad \frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8},$$

$$4-5-6-7-8-9+17-4+35,$$

$$3{,}012-2{,}014+4{,}345-2{,}375.$$

Ἡ παράστασις $10-(-4)-(-3)+7$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $10+4+3+7=24$. Ἡ παράστασις $3-4-5-2+3$ εἶναι ἰσοδύναμος $3+(-4)+(-5)+(-2)+3=-5$. Ἡ παράστασις $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}$, ἢ ἡ $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{9}{6}-\frac{13}{8}=-\frac{1}{8}$. Ἡ $4-5-6-7-8-9+17-4+35$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $4+(-5)+(-6)+(-7)+(-8)+(-9)+17+(-4)+35$ ἢ $56-39=17$. Καὶ ἡ τελευταία παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν παράστασιν $3{,}012+(-2{,}014)+4{,}345+(-2{,}375)$, ἢ τὴν $7{,}357-4{,}389=2{,}968$.

Ἄσκησις (Ἀλγ. σελ. 24).

Ἐκτέλεσον τὰς ἑπομένας πράξεις

$$3.\,(-5)-\left(-\frac{1}{2}\right).\ \left(-\frac{2}{3}\right).\ \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{(-5).\ [(-2)+(-3)]} \quad + \quad \sqrt[3]{3.\ [(-10)-(-1)]}$$

$$\sqrt[3]{(-8)}\,[3-(-5)]+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ $3\cdot(-5)=-15$, $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}.\ \frac{2}{5}=\frac{2}{15}$, ἡ διαφορὰ $3.\ (-5)-\left(-\frac{1}{2}\right).\ \left(-\frac{2}{3}\right)\ \ \frac{2}{5}$ καθίσταται $-15-\ \frac{2}{15}=-15\frac{2}{15}$. Ἡ παράστασις $\sqrt{(-5).[(-2)+(-3)]}$ $+\sqrt[3]{3.\ [(-10)-(-1)]}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\sqrt{(-5)\ .(-5)}$ $+\sqrt[3]{3.\ (-9)}$, ἢ πρὸς τὴν $\sqrt{25}\ +\ \sqrt[3]{(-27)}\ =\ 5+(-3)=2$.

Καὶ ἡ τελευταία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\sqrt[3]{(-8)}.\ 8+1=(-2).\ 8+1=-15$.

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 24).

1). Τίνα τὰ ὅμοια μονώνυμα ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$7\alpha^3\beta+2\alpha^2\gamma-12\alpha^3\beta-6\beta^2+4\alpha^2\gamma+\alpha^3\beta\ ;$$

Ἐν τῷ πολυωνύμῳ τούτῳ ὅμοια μονώνυμα εἶναι τὰ $7\alpha^3\beta$, $-12\alpha^3\beta$, $\alpha^3\beta$ καὶ τὰ $2\alpha^2\gamma$, $4\alpha^2\gamma$.

2). Ὑπάρχουσιν ὅμοια μονώνυμα ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$8\alpha^3\beta\gamma\quad 2\alpha^3\beta^2\gamma+5\alpha\beta\gamma^2-6\alpha\beta\gamma\ ;$$

Ἐν τῷ μολυωνύμῳ τούτῳ δὲν ὑπάρχουσιν ὅμοια μονώνυμα.

3). Εὑρεῖν τὸν βαθμὸν ἑκάστου τῶν πολυωνύμων $1+3\chi\psi-5\chi^2$, $5\chi^3\psi\omega+7\chi\psi^2\omega-5\omega^6$, πρὸς ἕκαστον τῶν γραμμάτων χ, ψ, ω, καὶ πρὸς τὸ σύνολον.

Τὸ πρῶτον πολυώνυμον εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς χ, πρώτου πρὸς ψ, μηδενὸς πρὸς ω καὶ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὰ χ, ψ, ω· τὸ δὲ δεύτερον εἶναι τρίτου βαθμοῦ πρὸς χ, δευτέρου πρὸς ψ, ἕκτου πρὸς ω καὶ ἕκτου πρὸς τὰ χ, ψ, ω.

4). Νὰ διαταχθῶσι κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ τὰ πολυώνυμα:

$$\chi+3\chi^5-8\chi^3+2\chi^4-9-2\chi^2,$$
$$\chi^3-8+\chi^5-8\chi^2,\qquad \chi+2+\chi^5-2\chi^4.$$

Τὰ δοθέντα πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ διατάσσονται ὡς ἕπεται:

$$3\chi^5+2\chi^4-8\chi^3-2\chi^2+\chi-9,$$
$$\chi^5+\chi^3-8\chi^2-8,\qquad \chi^5-2\chi^4+\chi+2.$$

5). Πολυώνυμόν τι εἶναι ὁμογενὲς πρὸς χ, ψ καὶ ω· εὑρεῖν τὴν γενικὴν αὐτοῦ μορφὴν α΄) ἐὰν εἶναι $1^{ου}$, β΄) ἐὰν εἶναι $2^{ου}$ βαθμοῦ.

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον εἶναι $1^{ου}$ βαθμοῦ, ἡ γενικὴ αὐτοῦ μορφὴ εἶναι $\chi+\psi+\omega$, ἐὰν δὲ $2^{ου}$ εἶναι $\chi\psi+\psi\omega+\omega\chi$.

7). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν πολυωνύμων:

$\alpha^3-5\alpha^2\beta+\beta^3$, $\alpha^4+6\alpha^3\beta-7\alpha\beta^3-\beta^4$, ὅταν $\alpha=-1$, $\beta=5$.

Τὸ πολυώνυμον $\alpha^3-5\alpha^2\beta+\beta^3$, ὅταν $\alpha=-1$ καὶ $\beta=5$, ἔχει τιμὴν $-1-25+125=99$. Τὸ δὲ $\alpha^4+6\alpha^3\beta-7\alpha\beta^3-\beta^4$ ἔχῃ τιμήν, ὅταν $\alpha=-1$ καὶ $\beta=5$, $1+(-30)-(-875)-625$, ἢ $1-30+875-625=221$.

7). Εὑρεῖν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως:

$$\frac{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-2\beta)}{3\alpha-5\beta}, \text{ ὅταν } \alpha=4, \quad \beta=5.$$

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ταύτης εἶναι

$$\frac{(4+5)\,(4-10)}{12-25}=\frac{9.(-6)}{-13}=\frac{-54}{-13}=4\,\frac{2}{13}.$$

8). Ὁμοίως: $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)$, ὅταν $\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=-17$.

Ἡ τιμὴ ταύτης εἶναι $(-3)\,(-2+17)+(-2)\,(-17+3)=$ $=(-3).\,15+(-2)\,(-14)=-45+28=-17$.

9). Ὁμοίως: $(\alpha+\beta)\,[\gamma+(\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta)]+\alpha(\beta-\gamma)\,[\gamma+(\alpha-\beta)\delta]$, ὅταν $\alpha=-3{,}2$ $\beta=3{,}4$ $\gamma=-3{,}5$ $\delta=-34$.

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ταύτης εἶναι

$(-3{,}2+3{,}4)\,[-3{,}5+(-3{,}2+3{,}4)\,(-3{,}5-34)]+(-3{,}2)$
$(3{,}4+3{,}5)\,[-3{,}5+(-3{,}2-3{,}4)\,(-34)]$

ἢ $(0{,}2)\,[-3{,}5+(-7{,}5)]+(-22{,}08)\,(220{,}9)$

ἢ $(0{,}2)\,(-11)+(-4877{,}472)$

ἢ $-2{,}2-4877{,}472=-4879{,}672$.

10). Ὁμοίως: $\sqrt[3]{\alpha^2-\beta(\alpha+\gamma)}-\sqrt{\alpha+\gamma+2\beta}$, ὅταν $\alpha=4$, $\beta=-1$, $\gamma=7$.

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ταύτης εἶναι

$$\sqrt[3]{16-(-1)\,(4+7)}-\sqrt{4+7-2}, \text{ ἢ}$$

$$\sqrt[3]{16-(-11)}-\sqrt{11-2}=\sqrt[3]{27}-\sqrt{9}=0.$$

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 38).

1). Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$1-3\chi+7\chi^2-6\chi^3 \text{ καὶ } -1+7\chi-8\chi^3+\chi^4,$$

$$3\chi-5\chi^2+\frac{3}{2}\chi^4 \text{ καὶ } 2-\frac{3}{4}\chi^2-\frac{5}{6}\chi^3+3\chi^4.$$

Προσθέτοντες τὰ δύο πρῶτα πολυώνυμα εὑρίσκομεν ὡς ἄθροισμα τὸ πολυώνυμον $4\chi+7\chi^2-14\chi^3+\chi^4$, προσθέτοντες δὲ τὰ ἕτερα δύο εὑρίσκομεν $2+3\chi-\frac{23}{4}\chi^2-\frac{5}{6}\chi^3+\frac{9}{2}\chi^4$.

2). Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων

$$3\chi-5\chi^2+7\chi^3 \text{ καὶ } 1-3\chi+6\chi^2,$$

$$4-\frac{2}{3}\chi+7\chi^2 \text{ καὶ } \frac{3}{5}-2\chi^3+5\chi^4.$$

Ἵνα εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων $3\chi-5\chi^2+7\chi^3$ καὶ καὶ $1-3\chi+6\chi^2$ προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον τὸ ἀντίθετον τοῦ δευτέρου $-1+3\chi-6\chi^2$, ὅτε εὑρίσκομεν ὡς διαφορὰν τὸ πολυώνυμον $-1+6\chi-11\chi^2+7\chi^3$· ὁμοίως προσθέτοντες εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἑτέρων δύο πολυωνύμων τὸ ἀντίθετον τοῦ δευτέρου $-\frac{3}{5}+2\chi^3-5\chi^4$, εὑρίσκομεν ὡς διαφορὰν τὸ πολυώνυμον $\frac{17}{5}-\frac{2}{3}\chi+7\chi^2+2\chi^3-5\chi^4$.

3). Ἐκτέλεσον τὴν ἀφαίρεσιν

$$(13\alpha^4+3\alpha^3\beta-7\alpha^2\beta^2+\beta^4)-(7\alpha^4+12\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2+8\alpha\beta^2-5\beta^4).$$

Πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον τὸ ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου

$$\begin{array}{rrrrr} 13\alpha^4 & +\ 3\alpha^3\beta & -\ 7\alpha^2\beta^2 & & +\ \beta^4 \\ -7\alpha^4 & -\ 12\alpha^3\beta & +\ 6\alpha^2\beta^2 & -\ 8\alpha\beta^2 & +\ 5\beta^4 \\ \hline 6\alpha^4 & -\ 9\alpha^3\beta & -\ \alpha^2\beta^2 & -\ 8\alpha\beta^2 & +\ 6\beta^4 \end{array}$$

4). Ἐάν τις εἶναι χ ἐτῶν, ποίαν ἡλικίαν εἶχε πρὸ 6 ἐτῶν;

Πρὸ 6 ἐτῶν εἶχεν ἡλικίαν $\chi-6$ ἐτῶν.

5). Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι σ, ὁ εἷς τούτων εἶναι α· τίς εἶναι ὁ ἄλλος;

Ὁ ἄλλος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις εἰς τὸν α προστιθέμενος δίδει τὸν σ, ἤτοι ὁ $\sigma-\alpha$.

6). Ἡ διαφορὰ τῶν διαστάσεων (πλάτους καὶ ὕψους) ὀρθογωνίου εἶναι α μέτρα, ἡ δὲ μικροτέρα αὐτοῦ διάστασις χ· νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου.—Τίς ἡ πλευρὰ ῥόμβου ἔχοντος περίμετρον ὅσην τὸ ὀρθογώνιον;

Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῶν διαστάσεων εἶναι α μέτρα, ἡ δὲ μικροτέρα διάστασις χ, ἕπεται ὅτι ἡ μεγαλυτέρα εἶναι $\alpha+\chi$ καὶ ἑπομένως ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $2(\alpha+\chi)+2\chi=2\alpha+4\chi$. Ἑκάστη δὲ τῶν τεσσάρων ἴσων πλευρῶν τοῦ ῥόμβου τοῦ ἔχοντος περίμετρον $2\alpha+4\chi$ εἶναι $\frac{2\alpha+4\chi}{4}$ ἢ $\frac{\alpha}{2}+\chi$.

7). Ἔστωσαν χ αἱ ἑκατοντάδες, ψ αἱ δεκάδες καὶ ω αἱ μονάδες τριψηφίου ἀριθμοῦ. Πῶς δύναται οὗτος νὰ παρασταθῇ; καὶ πῶς ὁ ἀντεστραμμένος; Τίς ἡ διαφορὰ αὐτῶν;

Ἔστω ρ ἡ βάσις τοῦ συστήματος καθ' ὃ γράφεται ὁ ἀριθμός· ἀναλύοντες τοῦτον εἰς τὰς μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν βάσιν ρ, βλέπομεν ὅτι περιέχει χ μονάδας γ΄ τάξεως, ψ μονάδας β΄ καὶ ω μονάδας α΄, ἑπομένως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα $\chi\rho^2+\psi\rho+\omega$· ὁ δὲ ἀντεστραμμένος, ὁ περιέχων ω μονάδας γ΄ τάξεως, ψ μονάδας β΄ καὶ χ μονάδας α΄, δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος $\omega\rho^2+\psi\rho+\chi$. Ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι $(\chi\rho^2+\psi\rho+\omega)-(\omega\rho^2+\psi\rho+\chi)$, ἢ $\chi\rho^2+\omega-\omega\rho^2-\chi$, ἢ $\chi(\rho^2-1)+\omega(1-\rho^2)$.

8). Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ἔστωσαν α, β, γ. Σχηματίζομεν νέον τρίγωνον ἔχον πλευρὰς $\alpha+\delta$, $\beta-\frac{\delta}{2}$, $\gamma+\frac{2}{3}\delta$. Ζητεῖται ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων τῶν δύο τριγώνων.

Ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι $\alpha+\beta+\gamma$, ἡ δὲ τοῦ νέου τριγώνου εἶναι $\alpha+\delta+\beta-\frac{\delta}{2}+\gamma+\frac{2}{3}\delta$. ἡ διαφορὰ ἔθεν τῶν δύο περιμέτρων εἶναι $\alpha+\delta+\beta-\frac{\delta}{2}+\gamma+\frac{2}{3}\delta-\alpha-\beta-\gamma$, ἢ

$\delta-\frac{\delta}{2}+\frac{2}{3}\delta=\frac{7}{6}\delta$.

9). Ἐκ τῶν πολυωνύμων $A=1+3\chi-7\chi^2+8\chi^3$,

$B=\chi-6\chi^2+\chi^4$, $\quad\Gamma=3+\chi-5\chi^3$,

σχημάτισον τὰς παραστάσεις

$A+B+\Gamma$, $\quad A+B-\Gamma$, $\quad A-B+\Gamma$, $\quad -A+B+\Gamma$.

Ἵνα ἐκ τῶν πολυωνύμων Α, Β, Γ σχηματίσωμεν τὴν παράστασιν $A+B+\Gamma$, προσθέτομεν τὰ πολυώνυμα ταῦτα:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & +3\chi & -7\chi^2 & +8\chi^3 & \\ & \chi & -6\chi^2 & & +\chi^4 \\ 3 & +\chi & & -5\chi^3 & \\ \hline 4 & +5\chi & -13\chi^2 & +3\chi^3 & +\chi^4 \end{array}$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν παράστασιν $A+B-\Gamma$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα Α, Β καὶ τὸ ἀντίθετον τοῦ Γ πολυώνυμον $-3-\chi+5\chi^3$, (προκύπτον ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων τοῦ Γ):

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & +3\chi & -7\chi^2 & +8\chi^3 & \\ & \chi & -6\chi^2 & & +\chi^4 \\ -3 & -\chi & & +5\chi^3 & \\ \hline -2 & +3\chi & -13\chi^2 & +13\chi^3 & +\chi^4 \end{array}$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν παράστασιν $A-B+\Gamma$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα Α, Γ καὶ τὸ ἀντίθετον τοῦ Β πολυώνυμον $-\chi+6\chi^2-\chi^4$:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & +3\chi & -7\chi^2 & +8\chi^3 & \\ 3 & +\chi & & -5\chi^3 & \\ & -\chi & +6\chi^2 & & -\chi^4 \\ \hline 4 & +3\chi & -\chi^2 & +3\chi^3 & -\chi^4 \end{array}$$

Ἵνα σχηματίσωμεν τὴν παράστασιν $-A+B+\Gamma$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰ πολυώνυμα Β, Γ καὶ τὸ ἀντίθετον τοῦ Α πολυώνυμον $-1-3\chi+7\chi^2-8\chi^3$:

$$\begin{array}{rrrrr} & \chi & -6\chi^2 & & +\chi^4 \\ 3 & +\chi & & -5\chi^3 & \\ -1 & -3\chi & +7\chi^2 & -8\chi^3 & \\ \hline 2 & -\chi & +\chi^2 & -13\chi^3 & +\chi^4 \end{array}$$

10). Πρόσθεσον τὰ πολυώνυμα

$$1+7\chi^5-3\chi^2+\chi^4-2\chi, \qquad 3\chi^2+7\chi^5-2\chi+\chi^3-1$$

μετὰ προηγουμένην διάταξιν αὐτῶν.

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & -2\chi & -3\chi^2 & & +\chi^4 & +7\chi^5 \\ -1 & -2\chi & +3\chi^2 & +\chi^3 & & +7\chi^5 \\ \hline & -4\chi & & +\chi^3 & +\chi^4 & +14\chi^5 \end{array}$$

11). Ἁπλοποίησον

$(4\chi^3-2\chi^2+\chi+1)-(3\chi^3\chi-{}^2\chi-7)-(3\chi^3-\chi^2-\chi-7)-$
$-(\chi^3-4\chi^2+2\chi+8)$.

Ἡ παράστασις αὕτη δύναται νὰ γραφῇ

$4\chi^3-2\chi^2+\chi+1-3\chi^3+\chi^2+\chi+7-\chi^3+4\chi^2-2\chi-8$,

ἐκτελοῦντες δὲ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν $3\chi^2$.

12). Ἁπλοποίησον τὰς παραστάσεις

$$\alpha^2-(\beta^2-\gamma^2)-[\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2)],\quad \alpha-[\beta-(\beta-\alpha)],$$
$$\chi+[\psi-\chi-(\psi-\omega)],$$
$$5\alpha^2-3\alpha\chi+\chi^2-(4\alpha^2+5\alpha\chi-(3\alpha^2-7\alpha\chi+5\chi^2)]-7\chi^2.$$

Ἡ παράστασις $\alpha^2-(\beta^2-\gamma^2)-[\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2)]$ ἰσοῦται τῇ $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)$, ἢ $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, ἢ $2\gamma^2$.

Ἡ παράστασις $\alpha-[\beta-(\beta-\alpha)]$ ἰσοῦται τῇ $\alpha-(\beta-\beta+\alpha)$, ἢ $\alpha-\beta+\beta-\alpha=0$.

Ἡ παράστασις $\chi+[\psi-\chi-(\psi-\omega)]$ ἰσοῦται τῇ $\chi+\psi-\chi-\psi+$ $+\omega=\omega$.

Καὶ ἡ τελευταία παράστασις ἰσοῦται τῇ

$5\alpha^2-3\alpha\chi+\chi^2-(4\alpha^2+5\alpha\chi-3\alpha^2+7\alpha\chi-5\chi^2)-7\chi^2$,

ἢ $5\alpha^2-3\alpha\chi+\chi^2-4\alpha^2-5\alpha\chi+3\alpha^2-7\alpha\chi+5\chi^2-7\chi^2$,

ἢ $4\alpha^2-15\alpha\chi-\chi^2$.

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 48).

α). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολ.ωνύμων

$$1+3\chi-2\chi^2-5\chi^3 \quad \text{καὶ} \quad 1-3\chi+2\chi^2-5\chi^3$$

$$\begin{array}{l}
1+3\chi-2\chi^2-5\chi^3\\
1-3\chi+2\chi^2-5\chi^3\\
\hline
1+3\chi-2\chi^2-5\chi^3\\
\quad -3\chi-9\chi^2+6\chi_3+15\chi^4\\
\qquad +2\chi^2+6\chi_3-4\chi^4-10\chi^5\\
\qquad\qquad -5\chi_3-15\chi^4+10\chi^5+25\chi^6\\
\hline
1\quad -9\chi^2+2\chi_3-4\chi^4\qquad +25\chi^6
\end{array}$$

β'). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$1+7\chi-6\chi^2+4\chi^4 \quad \text{καὶ} \quad 7\chi-5\chi^3+8\chi^5$$

$$\begin{array}{l}
1+7\chi-6\chi^2+4\chi^4 \\
7\chi-5\chi^3+8\chi^5 \\
\hline
7\chi+49\chi^2-42\chi^3\qquad+28\chi^5 \\
\qquad-5\chi^3-35\chi^4+30\chi^5\qquad-20\chi^7 \\
\qquad\qquad\qquad8\chi^5+56\chi^6-48\chi^7+32\chi^9 \\
\hline
7\chi+49\chi^2-47\chi^3-35\chi^4+66\chi^5+56\chi^6-68\chi^7+32\chi^9
\end{array}$$

γ'). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$\chi^2+\chi+1 \quad \text{καὶ} \quad \chi-1$$

$$\begin{array}{l}
\chi^2+\chi+1 \\
\chi-1 \\
\hline
\chi^3+\chi^2+\chi \\
\quad-\chi^2-\chi-1 \\
\hline
\chi^3-1
\end{array}$$

δ'). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$$\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1 \quad \text{καὶ} \quad \chi+1$$

$$\begin{array}{l}
\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1 \\
\chi+1 \\
\hline
\chi^5-\chi^4+\chi^3-\chi^2+\chi \\
\quad\chi^4-{}^3\chi+\chi^2-\chi+1 \\
\hline
\chi^5+1
\end{array}$$

ε'). Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν διωνύμων.

$$\chi+\alpha \quad \text{καὶ} \quad \chi-\alpha$$

$$\begin{array}{l}
\chi+\alpha \\
\chi-\alpha \\
\hline
\chi^2+\alpha\chi \\
\quad-\alpha\chi-\alpha^2 \\
\hline
\chi^2-\alpha^2
\end{array}$$

ς').—Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων.

$$\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2+\alpha\chi+\alpha^2$$

$$\begin{array}{l} \chi^2-\alpha\chi+\alpha^2 \\ \underline{\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2} \\ \chi^4-\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2 \\ \quad +\alpha\chi^3-\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi \\ \qquad\quad +\alpha^2\chi^2-\alpha^3\chi+\alpha^4 \\ \hline \chi^4+\ \alpha^2\chi^2\ +\ \alpha^4 \end{array}$$

2). Δεῖξον ὅτι $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)$ εἶναι ἴσον πρὸς $\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi+\alpha\beta\gamma$.

Ἐντεῦθεν νὰ ἐξαχθῇ τὸ γινόμενον $(\chi+3)(\chi-2)(\chi-1)$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ παραστάσει $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)$ τὸ γινόμενον $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\chi^2+\alpha\chi+\beta\chi+\alpha\beta$, ἔχομεν

$$(\chi^2+\alpha\chi+\beta\chi+\alpha\beta)(\chi+\gamma),$$

$$\text{ἢ } \chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi^2+\alpha\beta\chi+\gamma\chi^2+\gamma\alpha\chi+\beta\gamma\chi+\alpha\beta\gamma$$

προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν

$$\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma)\chi+\alpha\beta\gamma.$$

Ἐν τῷ γινομένῳ $(\chi+3)(\chi-2)(\chi-1)$ εἶναι $\alpha=3$, $\beta=-2$, $\gamma=-1$· ὅθεν τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς $\chi^3+(3-2-1)\chi^2+(-6+2-3)\chi+6$ ἢ πρὸς $\chi^3-7\chi+6$.

3). Σχημάτισον τὸ τετράγωνον καὶ τὸν κύβον τῶν διωνύμων $3\chi-5\psi$, $\chi^2+3\psi^2$, $\chi^2+\chi$, $\chi^2-3\chi^4$.

Τὰ τετράγωνα τῶν δοθέντων διωνύμων εἶναι $9\chi^2-30\chi\psi+25\psi^2$, $\chi^4+6\chi^2\psi^2+9\psi^4$, $\chi^4+2\chi^3+\chi^2$, $\chi^4-6\chi^6+9\chi^8$. Οἱ δὲ κύβοι τούτων εἶναι

$27\chi^3-135\chi^2\psi+225\psi^2\chi-125\psi^3$, $\chi^6+9\chi^4\psi^2+27\chi^2\psi^4+27\psi^6$, $\chi^6+3\chi^5+3\chi^4+\chi^3$, $\chi^6-9\chi^8+27\chi^{10}-27\chi^{12}$.

4). Δεῖξον ὅτι ἡ παράστασις $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ παριστᾷ πάντοτε ἄρτιον ἀριθμόν, ἐὰν α, β, γ, εἶναι ἀκέραιοι.

Ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2$$

$$\text{ἢ } (2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2)-(2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)$$

$$\text{ἢ } 2\,[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)].$$

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι, ἡ παράστασις $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ παριστᾷ ἀριθμὸν ἀκέραιον, ὡς οὖσα ἄθροισμα ἀκεραίων ἀριθμῶν, (διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε ἀκέραιοι)· ὁμοίως καὶ ἡ παράστασις $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ παριστᾷ ἀριθμὸν ἀκέραιον, διότι τὰ μονώνυμα ἐξ ὧν αὕτη ἀποτελεῖται εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἑπομένως ἡ ἐν ἀγκύλαις παράστασις εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὅστις, εἴτε ἄρτιος εἶναι εἴτε περιττός, διπλασιαζόμενος καθίσταται πάντοτε ἄρτιος.

5). Συμπλήρωσον εἰς τετράγωνα τὰ διώνυμα

$$\chi^2+4\chi,\quad \chi^2-6\chi,\quad \chi^2+3\chi,\quad \chi^2-5\chi,$$
$$4\chi^2+\chi,\quad 3\chi^2-5\chi,\quad \chi^4+3\chi^2,\quad 5\chi^4-2\chi^2,$$
$$\chi^2+1,\quad \chi^2+4,\quad \chi^2+3,\quad 4\chi^2+1.$$

χ^2 εἶναι τετράγωνον τοῦ χ, καὶ 4χ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διπλάσιον γινόμενον τοῦ χ ἐπὶ $\frac{4\chi}{2.\chi}=2$. ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 2 δηλ. τὸν 4, ὅτε λαμβάνομεν τὸ τριώνυμον $\chi^2+4\chi+4$, ὅπερ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\chi+2$ Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ διώνυμον $\chi^2-6\chi$ πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν ὅρον 9, ἵνα τοῦτο καταστῇ τέλειον τετράγωνον, εἰς τὸ $\chi^2+3\chi$ τὸν $\frac{9}{4}$, εἰς τὸ $\chi^2-5\chi$ τὸν $\frac{25}{4}$, εἰς τὸ $4\chi^2+\chi$ τὸν $\frac{1}{4}$, εἰς τὸ $3\chi^2-5\chi$, τὸν $\frac{25}{12}$, εἰς τὸ $\chi^4+3\chi^2$ τὸν $\frac{9}{4}$ καὶ εἰς τὸ διώνυμον $5\chi^4-2\chi^2$ τὸν ὅρον $\frac{1}{5}$.

χ^2 εἶναι τετράγωνον τοῦ χ, καὶ 1 εἶναι τετράγωνον τοῦ 1, τὸ δὲ διπλάσιον γινόμενον τῶν χ καὶ 1 εἶναι 2χ· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν τὸν ὅρον 2χ, ὅτε λαμβάνομεν τὸ τριώνυμον $\chi^2+1+2\chi$, ὅπερ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\chi+1$. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ διώνυμον χ^2+4 ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ὅρον 4χ, εἰς τὸ χ^2+3 τὸν $2\sqrt{3}\chi$ καὶ εἰς τὸ $4\chi^2+1$ τὸν ὅρον 4χ.

6). Πάντες οἱ ἀκέραιοι οἱ προκύπτοντες ἐκ τῆς παραστάσεως $\alpha^4+4\beta^4$, ὅταν τὸ α καὶ β ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ ἀριθμῶν ἀκεραίων (διαφόρων τῆς 1), εἶναι ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι. Εἰς τὴν παράστασιν $\alpha^4+4\beta^4$ οἱ δύο ὅροι εἶναι τετράγωνα τῶν α^2 καὶ $2\beta^2$· ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν $4\alpha^2\beta^2$ λαμβάνομεν τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha^2+2\beta^2$. Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες ἐν τῇ παραστάσει $\alpha^4+4\beta^4$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $4\alpha^2\beta^2$, ὅτε οὐδόλως μεταβάλλεται ἡ τιμὴ αὐτῆς, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν:

$$(\alpha^2+2\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$$
$$\text{ἢ } (\alpha^2+2\beta^2)^2-(2\alpha\beta)^2,$$
$$\text{ἢ } (\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)\,(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta).$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος, ἐκτὸς ἐὰν ὁ εἷς τούτων εἶναι πρῶτος καὶ ὁ ἕτερος εἶναι ἡ μονάς, ὅτε ὁ πρῶτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὴν μονάδα παρέχει τὸν ἑαυτόν του· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ἐὰν οἱ α καὶ β ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τῆς μονάδος, ὅτε ὁ μὲν παράγων $\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta$ γίνετι 5, ὁ δὲ $\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta$ γίνεται 1.

7), Ἐπαλήθευσον ὅτι
$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\chi^2+\psi^2+\omega^2)-(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega)^2$ καὶ $(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\beta\omega-\gamma\psi)^2+(\gamma\chi-\alpha\omega)^2$ εἶναι παραστάσεις ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\chi^2+\psi^2+\omega^2)$ ἰσοῦται πρὸς $\alpha^2\chi^2+\beta^2\chi^2+\gamma^2\chi^2+\alpha^2\psi^2+\beta^2\psi^2+\gamma^2\psi^2+\alpha^2\omega^2+\beta^2\omega^2+\gamma^2\omega^2$ προσέτι δὲ καὶ $(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega)^2$ ἰσοῦται πρὸς $\alpha^2\chi^2+\beta^2\psi^2+2\alpha\beta\chi\psi+\gamma^2\omega^2+2\alpha\gamma\omega\chi+2\beta\gamma\omega\psi$, ἡ πρώτη παράστασις δύναται νὰ γραφῇ

$$(\alpha^2\chi^2+\beta^2\chi^2+\gamma^2\chi^2+\alpha^2\psi^2+\beta^2\psi^2+\gamma^2\psi^2+\alpha^2\omega^2+\beta^2\omega^2+\gamma^2\omega^2)$$
$$-(\alpha^2\chi^2+\beta^2\psi^2+2\alpha\beta\chi\psi+\gamma^2\omega^2+2\alpha\gamma\omega\chi+2\beta\gamma\omega\psi),\ \text{ἢ}$$
$$\beta^2\chi^2+\alpha^2\psi^2-2\alpha\beta\chi\psi+\beta^2\omega^2+\gamma^2\psi^2-2\beta\gamma\omega\psi+\gamma^2\chi^2+\alpha^2\omega^2-2\alpha\gamma\omega\chi$$
$$\text{ἢ } (\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\beta\omega-\gamma\psi)^2+(\gamma\chi-\alpha\omega)^2.$$

8). Δεῖξον ὅτι τὸ γινόμενον δύο παραγόντων μεταβλητῶν ἀλλ' ἐχόντων ἄθροισμα σταθερὸν 2α, εἶναι τόσῳ μεῖζον ὅσῳ ἡ διαφορὰ τῶν παραγόντων εἶναι ἐλάσσων.

Ἐὰν ὁ εἷς παρασταθῇ διὰ $\alpha+\chi$, ὁ ἕτερος θὰ εἶναι $\alpha-\chi$ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\alpha^2-\chi^2$. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι, ὅταν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ τὸν ἀριθμὸν $(\alpha+\chi)-(\alpha-\chi)$, ἢ 2χ, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ α ἠλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ χ, καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι τόσῳ μεῖζον ὅσῳ ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι ἐλάσσων· ἐπειδὴ δὲ ὁ χ μεταβάλλεται μετὰ τῆς διαφορᾶς, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μεταβλητῶν τούτων ἀριθμῶν εἶναι τόσῳ μεῖζον ὅσῳ ἡ διαφορὰ τῶν παραγόντων εἶναι ἐλάσσων.

9), Δεῖξον τὴν ἀνισότητα $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$, (ὑποτίθεται ὅτι α καὶ β ἄνισα).

Ἐπειδὴ ἐτέθη $\alpha =|= \beta$, ἡ παράστασις $\alpha - \beta$ διαφέρει τοῦ μηδενὸς καὶ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἐν ἑκατέρᾳ δὲ τῶν περιπτώσεων τούτων εἰς τὸ τετράγωνον ὑψουμένη καθίσταται θετική· ὅθεν ἔχομεν

$$(\alpha-\beta)^2 > 0$$

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν ἀριθμὸν $2\alpha\beta$, ὅτε ἡ ἀνισότης μένει, εὑρίσκομεν

$$\alpha^2+\beta^2 > 2\alpha\beta,$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ $\alpha\beta$, λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha\beta} > 2,$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} > 2.$$

10). Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιαθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἀνίσων εἶναι μεῖζον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ ἄνισοι. Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $(\alpha-\beta)^2 > 0$ τὸν ἀριθμὸν $4\alpha\beta$, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)^2 > 4\alpha\beta,$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 4, λαμβάνομεν.

$$\left(\frac{\alpha+\beta^2}{4} > \alpha\beta\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \alpha\beta.$$

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 51)

1). Ἐκτέλεσον τὰς ἑπομένας διαιρέσεις:

$$72\alpha^5\beta^3 : 9\alpha^3\beta, \qquad 35\alpha^3\beta^2\gamma : (-7)\alpha^2\gamma,$$

$$-48\alpha^7\beta^5\gamma^2\chi : 12\alpha^4\beta^3\chi, \qquad -56\alpha^9\beta^7\gamma^3\chi^2 : (-8)\,\alpha^5\beta^3\gamma^3.$$

Ἔχομεν (Ἀλγ. ἐδ. 70):

$$72\alpha^5\beta^3 : 9\alpha^3\beta = 8\alpha^2\beta^2,$$

$$35\alpha^3\beta^2\gamma : (-7)\alpha^2\gamma = (-5)\alpha\beta^2$$

$$-48\alpha^7\beta^5\gamma^2\chi : 12\alpha^4\beta^3\chi = (-4)\alpha^3\beta^2\gamma^2,$$

$$-56\alpha^9\beta^7\gamma^3\chi^2 : (-8)\alpha^5\beta^3\gamma^3 = +7\alpha^4\beta^4\chi^2.$$

2). Τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων $4\alpha^2\chi\psi : 8\alpha\chi^2$, $36\alpha^3\beta^3\gamma : (-8)\alpha^2\beta^3\chi$, $3\alpha^2\beta : 12\alpha^4\delta\psi$, νὰ ἐκφρ κσθῶσι μετ᾿ ἀρνητικῶν ἐκθετῶν.

Τὸ πηλίκον $\frac{4\alpha^2\chi\psi}{8\alpha\chi^2}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς

$$4\alpha^2\chi\psi\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\chi^2}$$

καὶ ἐπειδὴ (ἐδ. 29) εἶναι $\frac{1}{\alpha^\rho}=\alpha^{-\rho}$, ἕπεται $4\alpha^2\chi\psi 8^{-1}\alpha^{-1}\chi^{-2}$. Ὅθεν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομασμοῦ θέτοντες εἰς τοὺς ἐκθέτας τούτων τὸ σημεῖον —. Οὕτω τὸ πηλίκον $\frac{36\alpha^3 6^3\gamma}{(-8)\alpha^2 6^3\chi}$ ἐκφράζεται $36\,\alpha^3\,6^3\,\gamma\,(-8)^{-1}\,\alpha^{-2}\,6^{-3}\,\chi^{-1}$ καὶ τὸ πηλίκον $\frac{3\alpha^2 6}{12\alpha^4 6\psi}$ ἐκφράζεται $3\alpha^2 6 12^{-1}\,\alpha^{-4}\,6^{-1}\,\psi^{-1}$.

Ἐκτέλεσον τὰς ἑπομένας διαιρέσεις·

$$(6\chi+14\psi):2,\qquad (9\chi^2-4\chi):\chi,$$
$$(10\alpha\chi^3-86\chi^2-4\chi):2\chi,\qquad (3\chi^2\psi-6\chi\psi^2+\chi\psi):\chi\psi,$$
$$(7\alpha^2-14\alpha^3 6+21\alpha^4 6^2):7\alpha^2,\qquad (8\alpha^4 6-2\alpha^3 6^2+4\alpha^2 6^3):-4\alpha^2 6.$$

Ἔχομεν (Ἀλγ. ἐδ. 72).

$$(6\chi+14\psi):2=3\chi+7\psi,$$
$$(9\chi^2-4\chi):\chi=9\chi-4,$$
$$(10\alpha\chi^3-86\chi^2-4\chi):2\chi=5\alpha\chi^2-46\chi-2,$$
$$(3\chi^2\psi-6\chi\psi^2+\chi\psi):\chi\psi=3\chi-6\psi+1,$$
$$(7\alpha^2-14\alpha^3 6+21\alpha^4 6^2):7\alpha^2=1-2\alpha 6+3\alpha^2 6^2,$$
$$(8\alpha^4 6-2\alpha^3 6^2+4\alpha^2 6^3):-4\alpha^2 6=-2\alpha^2+\frac{\alpha 6}{2}-6^2.$$

4). Ἐξαγωγὴ τοῦ κοινοῦ παράγοντος εἰς τὰ πολυώνυμα

$$\alpha^2\chi+6\gamma\chi-\gamma^2\chi,\qquad 8\chi^2-4\alpha\chi^3+6\alpha^2\chi^4,$$
$$7\alpha^2 6^2+8\alpha 6^3-\alpha 6,\qquad 9\alpha 6^3+15\alpha^2 6^2-246^4.$$

Ἐξάγοντες εἰς τὰ πολυώνυμα ταῦτα τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως, λαμβάνομεν

$(\alpha^2+\beta\gamma-\gamma^2)\chi$, $\quad 2\chi^2(4-2\alpha\chi+3\alpha^2\chi^2)$,

$\alpha\delta(7\alpha\beta+8\beta^2-1)$, $\quad 3\beta^2(3\alpha\beta+5\alpha^2-8\beta^2)$.

5). Ὑπολογίσαι τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων $\dfrac{\alpha^2+\beta^0+\chi^2}{\alpha^0+\chi}$, ὅταν $\alpha=2$, $\beta=49$, $\chi=4$, καὶ $\alpha^{-3}.(\alpha-\beta)^{-2}$, ὅταν $\alpha=5$, $\beta=3$. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ παραστάσει $\dfrac{\alpha^2+\beta^0+\chi^2}{\alpha^0+\chi}$ τὰ γράμματα ὑπό τῶν τιμῶν αὐτῶν, εὑρίσκομεν $\dfrac{4+1+16}{1+4}=\dfrac{21}{5}$. Ἡ παράστασις $\alpha^{-3}.(\alpha-\beta)^{-2}$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\dfrac{1}{\alpha^3}\cdot\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2}$, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἀντικαθιστῶντες τὰ γράμματα ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν, λαμβάνομεν $\dfrac{1}{75}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{300}$.

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 61).

1). Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\chi^4-\chi^3+2\chi^2+\chi+3$ διὰ τοῦ $\chi^2-2\chi+3$.

$$\begin{array}{r|l}
\chi^4-\chi^3+2\chi^2+\chi+3 & \chi^2-2\chi+3 \\ \cline{2-2}
-\chi^4+2\chi^3-3\chi^2 \quad\quad & \chi^2+\chi+1 \\ \cline{1-1}
\chi^3-\chi^2+\chi+3 & \\
-\chi^3+2\chi^2-3\chi \quad & \\ \cline{1-1}
\chi^2-2\chi+3 & \\
-\chi^2+2\chi-3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\chi^8-3\alpha^2\chi^6+2\alpha^4\chi^4+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8$ διὰ τοῦ $\chi^2+2\alpha\chi-\alpha^2$

$$
\begin{array}{l|l}
\chi^8-3\alpha^2\chi^6+2\alpha^4\chi^4+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \chi^2+2\alpha\chi-\alpha^2 \\
\hline
-\chi^8-2\alpha\chi^7+\alpha^2\chi^6 & \chi^6-2\alpha\chi^5+2\alpha^2\chi^4-6\alpha^3\chi^3+16\alpha^4\chi^2-38\alpha^5\chi+121\alpha^6 \\
\hline
-2\alpha\chi^7-2\alpha^2\chi^6+2\alpha^4\chi^4+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \\
+2\alpha\chi^7+4\alpha^2\chi^6-2\alpha^3\chi^5 & \\
\hline
2\alpha^2\chi^6-2\alpha^3\chi^5+2\alpha^4\chi^4+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \\
-2\alpha^2\chi^6-4\alpha^3\chi^5+2\alpha^4\chi^4 & \\
\hline
-6\alpha^3\chi^5+4\alpha^4\chi^4+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \\
+6\alpha^3\chi^5+12\alpha^4\chi^4-6\alpha^5\chi^3 & \\
\hline
16\alpha^4\chi^4-6\alpha^5\chi^3+29\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \\
-16\alpha^4\chi^4-32\alpha^5\chi^3+16\alpha^6\chi^2 & \\
\hline
-38\alpha^5\chi^3+45\alpha^6\chi^2+17\alpha^8 & \\
+38\alpha^5\chi^3+76\alpha^6\chi^2-38\alpha^7\chi & \\
\hline
+121\alpha^6\chi^2-38\alpha^7\chi+17\alpha^8 & \\
-121\alpha^6\chi^2-242\alpha^7\chi+121\alpha^8 & \\
\hline
-280\alpha^7\chi+138\alpha^8 &
\end{array}
$$

Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $(\chi+\psi)^5+\omega^5$ διὰ τοῦ $\chi+\psi+\omega$.

$$
\begin{array}{l|l}
(\chi+\psi)^5+\omega^5 & (\chi+\psi)+\omega \\
\hline
-(\chi+\psi)^5-\omega(\chi+\psi)^4 & (\chi+\psi)^4-\omega(\chi+\psi)^3+\omega^2(\chi+\psi)^2-\omega^3(\chi+\psi)+\omega^4 \\
\hline
-\omega(\chi+\psi)^4+\omega^5 & \\
+\omega(\chi+\psi)^4+\omega^2(\chi+\psi)^3 & \\
\hline
\omega^2(\chi+\psi)^3+\omega^5 & \\
-\omega^2(\chi+\psi)^3-\omega^3(\chi+\psi)^2 & \\
\hline
-\omega^3(\chi+\psi)^2+\omega^5 & \\
+\omega^3(\chi+\psi)^2+\omega^4(\chi+\psi) & \\
\hline
\omega^4(\chi+\psi)+\omega^5 & \\
-\omega^4(\chi+\psi)-\omega^5 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\chi^6+3\chi^5-\chi^4-\chi+1$ διὰ τοῦ $\chi^3+\chi-2$.

$$
\begin{array}{l|l}
\chi^6+3\chi^5-\chi^4-\chi+1 & \chi^3+\chi-2 \\
\hline
-\chi^6 \qquad -\chi^4+2\chi^3 & \chi^3+3\chi^2-2\chi-1 \\
\hline
\qquad 3\chi^5-2\chi^4+2\chi^3-\chi+1 & \\
\quad -3\chi^5 \qquad -3\chi^3+6\chi^2 & \\
\hline
\qquad\qquad -2\chi^4-\chi^3+6\chi^2-\chi+1 & \\
\qquad\qquad +2\chi^4 \qquad +2\chi^2-4\chi & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -\chi^3+8\chi^2-5\chi+1 & \\
\qquad\qquad\qquad +\chi^3 \qquad +\chi-2 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 8\chi^2-4\chi-1 &
\end{array}
$$

Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\chi^5+2\chi^4-3\chi^2+1$ διὰ τοῦ $\chi^4-2\chi+5$.

$$
\begin{array}{l|l}
\chi^5+2\chi^4-3\chi^2+1 & \chi^4-2\chi+5 \\
\hline
-\chi^5 \qquad +2\chi^2-5\chi & \chi+2 \\
\hline
\qquad 2\chi^4-\chi^2-5\chi+1 & \\
\quad -2\chi^4 \qquad +4\chi-10 & \\
\hline
\qquad\qquad -\chi^2-\chi-9 &
\end{array}
$$

Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$ διὰ τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$.

$$
\begin{array}{l|l}
(\alpha+\beta)^2-\gamma^2 & (\alpha+\beta)+\gamma \\
\hline
-(\alpha+\beta)^2-\gamma(\alpha+\beta) & (\alpha+\beta)-\gamma \\
\hline
-\gamma(\alpha+\beta)-\gamma^2 & \\
+\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2 & \\
\hline
\qquad O &
\end{array}
$$

2). Εὑρεῖν τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:

$$\chi^5+4\chi^4+\chi^3-2\chi^2-\chi-1 : \chi-2,$$

$$\chi^7+2\chi^5-3\chi^3+\chi : \chi+1,$$

ἄνευ ἐκτελέσεως αὐτῶν.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\chi^5+4\chi^4+\chi^3-$ $-2\chi^2-\chi+1$ διὰ $\chi-2$ ἰσοῦται τῇ ἀριθμητικῇ τιμῇ, ἣν λαμβάνει τοῦτο ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῷ τὸ χ ὑπὸ τοῦ 2, εἶναι δηλ. $32+64+8-8-2-1=93$.

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\chi^7+2\chi^3-3\chi^4+\chi$ διὰ $\chi+1$ ἰσοῦται τῇ ἀριθμητικῇ τιμῇ, ἣν λαμβάνει τοῦτο ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῷ τὸ χ ὑπὸ τοῦ -1, εἶναι δῆλα δὴ $-1-2+3-1=-1$.

3). Ὑπὸ τίνος ἀριθμοῦ δέον νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ μ ἵνα τὸ πολυώνυμον

$$2\chi^4+4\alpha\chi^3-5\alpha^2\chi^2-3\alpha^3\chi+\mu\alpha^4$$

διαιρῆται διὰ $\chi-\alpha$;

Πρέπει νὰ μηδενίζηται τὸ πολυώνυμον ὅταν ἀντὶ χ τεθῇ α, δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν

$$2\alpha^4+4\alpha^4-5\alpha^4-3\alpha^4+\mu\alpha^4=0,$$

ἢ

$$-2\alpha^4+\mu\alpha^4=0,$$

ἢ

$$\mu\alpha^4=2\alpha^4$$

ἐξ ἧς

$$\mu=2.$$

4). Δεῖξον ὅτι $13^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ 12.

Πότε $13^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ 14;

Τὸ διώνυμον $13^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ 12, ἤτοι διὰ $13-1$· διότι ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν 13 διὰ του 1, εὑρίσκομεν 0. Τὸ $13^\nu-1$ διαιρεῖται διὰ 14. ἤτοι διὰ $13+1$, ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος· διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι $(-1)^\nu-1$· τοῦτο εἶναι 0 ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος· ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττὸς τὸ ὑπόλοιπον ἰσοῦται πρὸς -2.

5). Δεῖξον ὅτι $2^{35}-1$ διαιρεῖται διὰ 31 καὶ διὰ 127.

Ἵνα τὸ διώνυμον $2^{35}-1$, ἢ τὸ ἴσον τούτου $(2^5)^7-1$, διαιρεῖται διὰ $31=2^5-1$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ μηδενίζηται ὅταν ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῷ τὸν 2^5 ὑπὸ 1, ἐπειδὴ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν 0, συνάγομεν ὅτι $(2^5)^7-1$ διαιρεῖται διὰ 2^5-1, ἢ $2^{35}-1$ διαιρεῖται διὰ 31.

Τὸ διώνυμον $2^{35}-1$, ἢ τὸ ἴσον τούτου $(2^7)^5-1$, διαιρεῖται καὶ διὰ $127=2^7-1$, διότι ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἐν αὐτῷ τὸν 2^7 ὑπὸ 1, εὑρίσκομεν 0.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ, σελ. 69).

1). Ἐκτέλεσον τὰς ἑπομένας πράξεις:

α΄). $$\frac{\psi}{\psi-\chi}-\frac{\chi}{\chi+\psi}$$

Ἡ διαφορὰ αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$\frac{\psi(\chi+\psi)}{\psi^2-\chi^2}-\frac{\chi(\psi-\chi)}{\psi^2-\chi^2},$$

ἢ $$\frac{\psi(\chi+\psi)-\chi(\psi-\chi)}{\psi^2-\chi^2},$$ ἢ $$\frac{\psi^2+\chi^2}{\psi^2-\chi^2}$$

β΄). $$\frac{3\chi-5}{\chi}+\frac{6\chi}{\chi-1}-\frac{9\chi+7}{\chi-2}.$$

Ἡ παράστασις αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$\frac{(3\chi-5)\ (\chi-1)\ (\chi-2)}{\chi(\chi-1)\ \ (\chi-2)}+\frac{6\chi\ (\chi-2)\chi}{\chi(\chi-1)\ (\chi-2}-\frac{(9\chi+7)\chi(\chi-1)}{\chi(\chi-1)\ (\chi-2)}$$

ἢ $$\frac{(3\chi^3-14\chi^2+21\chi-10)+(6\chi^3-12\chi^2)-(9\chi^3-2\chi^2-7\chi)}{\chi(\chi-1)\ \ (\chi-2)}$$

ἢ $$\frac{-24\chi^2+28\chi-10}{\chi^3-3\chi^2+2\chi}.$$

α+β α−β 1

γ΄). $$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· γίνεται δὲ κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν ὁ $\alpha^2-\beta^2$, διότι ἡ παράστασις αὕτη διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

δ΄). $$\frac{\chi^3}{\chi-1}-\frac{\chi^2}{\chi+1}-\frac{1}{\chi-1}+\frac{1}{\chi+1}$$

Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· γίνεται δὲ κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν ὁ $(\chi-1)(\chi+1)=\chi^2-1$· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{(\chi+1)\chi^3}{\chi^2-1}-\frac{(\chi-1)\chi^2}{\chi^2-1}-\frac{\chi+1}{\chi^2-1}+\frac{\chi-1}{\chi^2-1},$$

ἢ $$\frac{(\chi^4+\chi^5)-(\chi^3-\chi^6)-(\chi+1)+(\chi-1)}{\chi^2-1},$$

ἢ $$\frac{\chi^4+\chi^2-2}{\chi^2-1}=\chi^2+2.$$

ε΄). $$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}$$

Τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἑξῆς:

$$\frac{\alpha(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)\,(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta),}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{\beta(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\,(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$\frac{\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}.$$

Προσθέτοντες ταῦτα εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς

$$\frac{0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0.$$

ζ΄). $$\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta}.$$

Τὰ κλάσματα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἑξῆς:

$$\frac{\alpha^2(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),}\quad\frac{\beta^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),}$$

$$\frac{\gamma^2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

Προσθέτοντες ταῦτα εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς 1.

η΄). $$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)+\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)$$

Ἡ παράστασις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἑξῆς:

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\gamma}{\alpha\beta\gamma}+\frac{(\beta+\gamma)(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\alpha}{\alpha\beta\gamma}+\frac{(\gamma+\alpha)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)\beta}{\alpha\beta\gamma},$$

προσθέτοντες τὰ κλάσματα ταῦτα, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς

$$\frac{2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2}{\alpha\beta\gamma},$$

ἐξάγοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας $2\alpha\beta\gamma$ ἐκτὸς παρενθέσεως, λαμβάνομεν

$$\frac{2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους διὰ $\alpha\beta\gamma$, εὑρίσκομεν

$$2(\alpha+\beta+\gamma).$$

2). Διαίρεσον $\dfrac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ διὰ $\dfrac{2(\alpha\beta-\beta^2)\delta}{\alpha+\beta}$.

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀντιστρέφομεν τοὺς ὅρους τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζομεν, ὅτε λαμβάνομεν

$$\frac{(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta}{(\alpha^2-\beta^2)2(\alpha\beta-\beta^2)\delta}=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha-\beta)2(\alpha\beta-\beta^2)\delta},$$

ἢ $$\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)2\beta(\alpha-\beta)\delta}=\frac{1}{2\beta\delta}.$$

3). Νὰ καταστῇ ῥητὸς ὁ παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$

$$\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}},\ \frac{3}{4+\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀγφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ ἐπὶ $\sqrt{\beta}$, ἔχομεν $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}}$ ἐπὶ $\sqrt{\alpha-\beta}$, ἔχομεν

$$\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})\sqrt{\alpha-\beta})}{\alpha-\beta}=\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha-\beta}-\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta},$$

ἢ $$\frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}-\sqrt{\alpha\beta-\beta^2}}{\alpha-\beta}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ἐπὶ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, εὑρίσκομεν $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

ἐπὶ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, εὑρίσκομεν $\dfrac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$, ἢ $\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$.

4). Ἐκτέλεσον τὰς ἀκολούθους πράξεις:

α΄). $\dfrac{1}{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}+\dfrac{1}{\alpha-\beta\sqrt{\gamma}}$.

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha-\beta\sqrt{\gamma}}{\alpha^2-\beta^2\gamma}+\frac{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}{\alpha^2-\beta^2\gamma}=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2\gamma}.$$

β΄). $\dfrac{\chi}{\chi-\sqrt{\chi^2-1}}-\dfrac{\chi}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}$.

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λαμβάνομεν

$$\frac{\chi(\chi+\sqrt{\chi^2-1})}{\chi^2-(\chi^2-1)}-\frac{\chi(\chi-\sqrt{\chi^2-1})}{\chi^2-(\chi^2-1)},$$

ἢ $$\frac{\chi^2+\chi\sqrt{\chi^2-1}}{\chi^2-\chi^2+1}-\frac{\chi^2-\chi\sqrt{\chi^2-1}}{\chi^2-\chi^2+1},$$

ἢ $$(\chi^2+\chi\sqrt{\chi^2-1})-(\chi^2-\chi\sqrt{\chi^2-1})=2\chi\sqrt{\chi^2-1}.$$

γ΄). $\dfrac{\chi+\sqrt{\chi}}{\chi-\sqrt{\chi}}-\dfrac{\chi-\sqrt{\chi}}{\chi+\sqrt{\chi}}$.

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λαμβάνομεν

$$\frac{(\chi+\sqrt{\chi})^2}{\chi^2-\chi}-\frac{(\chi-\sqrt{\chi})^2}{\chi^2-\chi}$$

ἢ $$\frac{(\chi^2+\chi+2\chi\sqrt{\chi})-(\chi^2+\chi-2\chi\sqrt{\chi})}{\chi^2-\chi}=\frac{4\chi\sqrt{\chi}}{\chi^2-\chi}.$$

δ΄). $\dfrac{6}{\chi^2-4}-\dfrac{3}{\chi^2+2\chi}+\dfrac{1}{\chi}$.

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λαμβάνομεν

$$\frac{6(\chi^2+2\chi)\chi}{(\chi^2-4)(\chi^2+2\chi)\chi}-\frac{3(\chi^2-4)\chi}{(\chi^2+2\chi)(\chi^2-4)\chi}+\frac{(\chi^2-4)(\chi^2+2\chi)}{\chi(\chi^2-4)(\chi^2+2\chi)}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{6\chi^3+12\chi^2}{\chi^5+2\chi^4-4\chi^3-8\chi^2}-\frac{3\chi^3-12\chi}{\chi^5+2\chi^4-4\chi^3-8\chi^2}+\frac{\chi^4+2\chi^3-4\chi^2-8\chi}{\chi^5+2\chi^4-4\chi^3-8\chi^2},$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\chi^4+5\chi^3+8\chi^2+4\chi}{\chi^5+2\chi^4-4\chi^3-8\chi^2}.$$

'Εκ Β' βιβλίου.—'Ασκήσεις (Ἄλγ. σελ. 79).

1). Λῦσον καὶ ἐπαλήθευσον τὰς ἐξισώσεις

α'). $$4\chi+17=3\chi+24.$$

Μεταφέροντες εἰς τὸ πρῶτον μέλος πάντας τοὺς τὸν χ ἔχοντας ὅρους καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν

$$4\chi-3\chi=24-17,$$

προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν $\chi=7$· ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 7. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 7 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $45=45$.

β'). $$\frac{3\chi-1}{8}=4.$$

Ἐξαλείφομεν τὸν παρονομαστὴν πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 8. Θὰ προκύψῃ ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις

$$3\chi-1=32, \text{ ἢ } 3\chi=33 \text{ ἐξ ἧς } \chi=11\cdot$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 11.

Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 11 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $4=4$.

γ'). $$\frac{2\chi-1}{5}-3=\frac{\chi+3}{8}.$$

Ἵνα ἀπαλλάξωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 5.8, ὅτε εὑρίσκομεν

$$8(2\chi-1)-3.5.8=5(\chi+3),$$

ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν

$$16\chi-8-120=5\chi+15,$$

χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν, λαμβάνομεν

$$16\chi-5\chi=15+8+120\cdot$$

τέλος προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν $11\chi=143$, ἐξ ἧς καί $\chi=13$· ὥστε ὁ ἀριθμὸς 13, μόνος οὗτος, λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 13 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν

$$\frac{26-1}{5}-3=\frac{13+3}{8}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $2=2$.

δ′). $$\frac{30\chi+5}{4}-\frac{3\chi}{2}=2+\frac{5\chi}{3}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον 4.3, ἀπαλλάσσομεν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$90\chi+15-18\chi=24+20\chi$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων

$$90\chi-18\chi-20\chi=24-15$$

καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων $52\chi=9$ ἐξ ἧς καὶ $\chi=\frac{9}{52}$. ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{9}{52}$. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ $\frac{9}{52}$ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $\frac{119}{52}=\frac{119}{52}$.

ε′) $$(\chi+5)(\chi+3)=(\chi+9)(\chi+11).$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν

$$\chi^2+8\chi+15=\chi^2+20\chi+99$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων καὶ πρόσθεσιν αὐτῶν

$$-12\chi=84 \text{ ἐξ ἧς καὶ } \chi=-7\cdot$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς -7, μόνος οὗτος, λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· τῳόντι ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τὸν χ ὑπὸ τοῦ -7, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $8=8$.

ζ′). $$\alpha\chi+\beta^2=\beta\chi+\alpha^2$$

Μεταφέροντες τοὺς τὸν χ ἔχοντας ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi-\beta\chi=\alpha^2-\beta^2$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$(\alpha-\beta)\,\chi=\alpha^2-\beta^2 \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta\cdot$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta$. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ $\alpha+\beta$ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2$.

η′). $$4(\chi^2-49)+61=(2\chi-5)^2$$

Ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν

$$4\chi^2-196+61=4\chi^2+25-20\chi$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων καὶ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν

$$20\chi=160 \quad \text{ἐξ ἧς καὶ} \quad \chi=8\cdot$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 8 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν

$$4\,(64-49)+61=(16-5)^2$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $121=121$.

θ′) $$\frac{\alpha+\chi}{\alpha}-\frac{\beta-\chi}{\beta}=1;$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\alpha\beta$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\beta(\alpha+\chi)-\alpha(\beta-\chi)=\alpha\beta$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν

$$\alpha\beta+\beta\chi-(\alpha\beta-\alpha\chi)=\alpha\beta, \quad \text{ἢ} \quad \beta\chi+\alpha\chi=\alpha\beta$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$(\beta+\alpha)\chi=\alpha\beta$$

ἐξ ἧς, ἐὰν $\beta+\alpha$ διαφέρῃ τοῦ μηδενός, $\chi=\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}\cdot$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$.

Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ $\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}$ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $1=1$.

ι′) $\frac{5\chi-2}{3}-\frac{\chi-8}{4}=\frac{\chi+14}{2}-2.$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον 3.4, ἀπαλλάσσομεν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$4(5\chi-2)-3(\chi-8)=6(\chi+14)-24$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων

$$20\chi-8-3\chi+24=6\chi+84-24$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων

$$20\chi-3\chi-6\chi=84-24-24+8$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$11\chi=44 \text{ ἐξ ἧς καὶ } \chi=4\cdot$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς 4, μόνος οὗτος, λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 4 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν $\frac{20-2}{3}-\frac{4-8}{4}=\frac{4+14}{2}-2$ καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $7=7$.

κ′) $\frac{3\chi+4}{14}-\frac{4\chi}{15}=\frac{38-5\chi}{10}+\frac{1}{15}$

Ἵνα ἀπαλλάξωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον 14.15, ὅτε εὑρίσκομεν

$$15\,(3\chi+4)-56\chi=21\,(38-5\chi)+14,$$

ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν

$$45\chi+60-56\chi=798-105\chi+14,$$

χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν, λαμβάνομεν

$$45\chi-56\chi+105\chi=798+14-60\cdot$$

τέλος προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν $94\chi=752$, ἐξ ἧς καὶ $\chi=8$· ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ 8 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $-\frac{2}{15}=-\frac{2}{15}$.

λ′). $$\frac{\chi+2}{\chi-1}+\frac{\chi+1}{\chi-2}=2$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον $(\chi-1)(\chi-2)$, ἀπαλλάσσομεν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$(\chi+2)(\chi-2)+(\chi+1)(\chi-1)=2(\chi-1)(\chi-2),$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων

$$\chi^2-4+\chi^2-1=2\chi^2-6\chi+4$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν

$$6\chi=9, \text{ ἐξ ἧς καὶ } \chi=\frac{3}{2}\cdot$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{3}{2}$, μόνος οὗτος, λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἐὰν τῳόντι ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ $\frac{3}{2}$· εὑρίσκομεν τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $2=2$.

$\alpha+\beta$ α $\alpha-\beta$ $\alpha^2+\beta^2$

μ′). $$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\chi}{\alpha-\beta}+1$$

Ἡ παράστασις $\alpha(\alpha^2-\beta^2)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· ἑπομένως, ἐὰν ἐπ' αὐτὴν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως, ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\alpha^2-\beta^2)\chi+\alpha^2(\alpha-\beta)+2\alpha^2\beta=\alpha(\alpha+\beta)\chi+\alpha(\alpha^2-\beta^2)$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δοθείσῃ, πλὴν ὅταν εἶναι $\alpha^2=\beta^2$.

Ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν

$$\alpha^2\chi-\beta^2\chi+\alpha^3-\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta=\alpha^2\chi+\alpha\beta\chi+\alpha^3-\alpha\beta^2.$$

Μεταφέροντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς τὸν χ ἔχοντας εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\alpha^3-\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta-\alpha^3+\alpha\beta^2=\alpha^2\chi+\alpha\beta\chi-\alpha^2\chi+\beta^2\chi$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων,

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta\chi+\beta^2\chi\cdot$$

ἤτοι $$\alpha\beta(\alpha+\beta)=(\alpha\beta+\beta^2)\chi.$$

Ἐὰν νῦν ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ χ, ἤτοι ἡ παράστασις $\alpha\beta+\beta^2$, διαφέρῃ τοῦ 0, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ $\alpha\beta+\beta^2$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ

$$\chi=\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+\beta^2}=\frac{\alpha\beta\,(\alpha+\beta)}{\beta\,(\alpha+\beta)}=\alpha\cdot$$

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α. Ἐὰν τῷόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ ὑπὸ τοῦ α ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+1,$$

ἢ $$1+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+1,$$

ἢ $$1+\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+1,$$

ἢ $$1+\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+1,$$

καὶ $$1+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+1.$$

2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$8\chi+3=(\chi+2)^2-\chi^2+4\chi-1,$$
$$(\chi+1)^2+(\chi-1)^2=2(\chi^2+1),$$
$$(2\chi+1)^2+(\chi-1)^2=5\,(\chi^2+1),$$

νὰ διακρίνωμεν τίνες εἶναι ταυτότητες καὶ τίνες ἐξισώσεις· τῶν ἐξισώσεων νὰ εἴπωμεν τὸν βαθμὸν καὶ νὰ λύσωμεν αὐτάς.

Ἡ πρώτη ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ

$$8\chi+2=\chi^2+4+4\chi-\chi^2+4\chi-1,$$

ἢ $$8\chi+3=8\chi+3,$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι εἶναι ταυτότης.

Ἡ δευτέρα ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ

$$\chi^2+1+2\chi+\chi^2+1-2\chi=2\chi^2+2.$$

ἢ $$2\chi^2+2=2\chi^2+2.$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι εἶναι ταυτότης.

Ἡ δὲ τρίτη ἰσότης γράφεται

$$4\chi^2+1+4\chi+\chi^2+1-2\chi=5\chi^2+5,$$

ἢ $$5\chi^2+2\chi+2=5\chi^2+5,$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι ἀληθεύει μόνον ὅταν ὁ χ λάβῃ ἁρμοδίαν τιμήν, τουτέστιν εἶναι ἐξίσωσις· μεταφέροντες δὲ τοὺς τὸν χ ἔχοντας ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $5\chi^2-5\chi^2+2\chi=5-2$ ἢ $2\chi=3$, ἥτις εἶναι πρώτου βαθμοῦ καὶ ἐξ ἧς ἕπεται $\chi=\frac{3}{2}$.

3) Αἱ ἰσότητες

$$(\alpha\chi+\beta\psi)^2+(\beta\chi-\alpha\psi)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)$$

$$(\alpha\chi-\beta\psi)^2-(\beta\chi-\alpha\psi)^2=(\alpha^2-\beta^2)(\chi^2-\psi^2)$$

εἶναι ταυτότητες ἢ ἐξισώσεις;

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς πρώτης ἰσότητος εἶναι:

$$\alpha^2\chi^2+\beta^2\psi^2+2\alpha\beta\chi\psi+\beta^2\chi^2+\alpha^2\psi^2-2\alpha\beta\chi\psi$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+(\beta^2+\alpha^2)\psi^2, \text{ ἢ } (\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)\cdot$$

τουτέστιν ἴσον τῷ δευτέρῳ· ἄρα ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ταυτότης.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς δευτέρας ἰσότητος εἶναι

$$(\alpha^2\chi^2+\beta^2\psi^2-2\alpha\beta\chi\psi)-(\beta^2\chi^2+\alpha^2\psi^2-2\alpha\beta\chi\psi),$$

ἢ $\alpha^2\chi^2+\beta^2\psi^2-\beta^2\chi^2-\alpha^2\psi^2$, ἢ $(\alpha^2-\beta^2)\chi^2+(\beta^2-\alpha^2)\psi^2$,

ἢ $(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-(\alpha^2-\beta^2)\psi^2$, ἤτοι $(\alpha^2-\beta^2)(\chi^2-\psi^2)$· τουτέστιν ἴσον τῷ δευτέρῳ· ἄρα ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ταυτότης.

4). Δεῖξον ὅτι αἱ ἰσότητες

$$\frac{\chi+1}{\alpha+1}-\frac{\chi+2}{\alpha+2}=\frac{\chi-\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2},$$

$$\frac{\chi-1}{\alpha+1}-\frac{\chi-2}{\alpha+2}=\frac{\chi+\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}$$

$$\frac{\chi^2}{\chi-\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha-\chi}=\chi+\alpha$$

εἶναι ταυτότητες.

Ἡ ἰσότης $\frac{\chi+1}{\alpha+1}-\frac{\chi+2}{\alpha+2}=\frac{\chi-\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}$ εἶναι ταυτότης, διότι τρέποντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν, εὑρίσκομεν $\frac{\chi-\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}=\frac{\chi-\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}$.

Ἡ ἰσότης $\frac{\chi-1}{\alpha+1}-\frac{\chi-2}{\alpha+2}=\frac{\chi+\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}$ εἶναι ταὐτότης, διότι τρέποντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν, εὑρίσκομεν $\frac{\chi+\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}=\frac{\chi+\alpha}{\alpha^2+3\alpha+2}$.

Ὡσαύτως καὶ ἡ ἰσότης $\frac{\chi^2}{\chi-\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha-\chi}=\chi+\alpha$ εἶναι ταὐτότης, διότι τρέποντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν καὶ ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha\chi^2-\chi^3+\alpha^2\chi-\alpha^3}{2\alpha\chi-\alpha^2-\chi^2}=\chi+\alpha$, ἢ $\chi+\alpha=\chi+\alpha$.

Ἀσκήσεις. (Ἀλγ. σελ. 90).

1). Εὑρεῖν ἀριθμὸν ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{13}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{1}{3}$.

Παριστῶντες τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ καὶ ἀφαιροῦντες αὐτὸν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{5}{13}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{5-\chi}{13-\chi}=\frac{1}{3}$ ἢ $15-3\chi=13-\chi$, χωρίζοντες δὲ τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν καὶ προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, λαμβάνομεν $2=2\chi$ ἐξ ἧς καὶ $\chi=1$.

2). Πωλήσας τις ἵππον 120 δραχ, περισσότερον ἀπὸ ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτόν, ἐκέρδισε 12 % ἐπὶ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Πόσον εἶχεν ἀγοράσει τὸν ἵππον;

Ἔστω χ ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς τοῦ ἵππου· θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{12\chi}{100}=120, \text{ ἢ } 12\chi=12000 \text{ ἐξ ἧς καὶ } \chi=1000.$$

3). Νὰ μερισθῇ ὁ 100 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ ὄγδοον τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ ἔνατον τοῦ ἄλλου νὰ ἀποτελῶσι τὸν 12.

Ἔστω χ τὸ πρῶτον μέρος· τότε τὸ δεύτερον θὰ εἶναι $100-\chi$· εἶναι δὲ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος,

$$\frac{\chi}{8}+\frac{100-\chi}{9}=12\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ 100.

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ γινόμενον 8.9, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$9\chi+800-8\chi=864,$$

χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους καὶ προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους. εὑρίσκομεν $\chi=64$· ὥστε τὸ ἓν τῶν ζητουμένων μερῶν εἶναι 64, ἄρα τὸ ἕτερον εἶνα. $100-64=36$.

4). Πατὴρ ἐρωτηθεὶς περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπεκρίθη· μετὰ 15 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ μου θὰ εἶναι τριπλασία τῆς περισυνῆς. Ζητεῖται ἡ παροῦσα ἡλικία τοῦ υἱοῦ. Ἐὰν ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ παρασταθῇ διὰ χ, θὰ εἶναι

$$\chi+15=3\,(\chi-1).$$

πρέπει δὲ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ νὰ εἶναι θετικὴ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $\chi=9$· ὥστε ἡ παροῦσα ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶναι 9.

5). Πατὴρ ἀφῆκε διὰ διαθήκης εἰς μὲν τὸν πρῶτον υἱόν του 1000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου, εἰς τὸν δεύτερον 2000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, εἰς τὸν τρίτον 3000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου κ.ο.κ. Συμβαίνει δ' οὕτω νὰ λάβωσι πάντες τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν δραχμῶν. Ζητεῖται πόση ἦτο ἡ περιουσία, πόσοι οἱ υἱοὶ καὶ πόση ἡ μερὶς ἑκάστου.

Ἔστω χ ἡ περιουσία. Ὁ πρῶτος υἱὸς θὰ λάβῃ 1000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου τουτέστι θὰ λάβῃ $1000+\frac{\chi-1000}{10}$, ἢ $\frac{9000+\chi}{10}$.

Ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ 2000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου.

Ὅθεν ἐὰν ἐκ τοῦ χ ἀφαιρέσωμεν τὰς 2000 καὶ τὸ μέρος τοῦ πρώτου, θὰ μείνῃ

$$\chi-2000-\frac{9000+\chi}{10}$$

ἡ παράστασις αὕτη διαιρουμένη διὰ 10, δίδει

$$\frac{\chi}{10}-200-\frac{9000+\chi}{100}.$$

Λοιπὸν ὁ δεύτερος θὰ λάβῃ

$$2000+\frac{\chi}{10}-200-\frac{9000+\chi}{100}, \quad \text{ἢ} \quad 1800+\frac{\chi}{10}-\frac{9000+\chi}{100}.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ μερίδες εἶναι ἴσαι, ἕπεται

$$\frac{9000+\chi}{10}=1800+\frac{\chi}{10}-\frac{9000+\chi}{100}.$$

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 100, εὑρίσκομεν

$$90000+10\chi=180000+10\chi-9000-\chi.$$

Μεταφέροντες εἰς τὸ πρῶτον μέλος τοὺς τὸν χ ἔχοντας ὅρους καὶ εἰς τὸ δεύτερον τοὺς γνωστούς, λαμβάνομεν

$$10\chi-10\chi+\chi=180000-9000-90000,$$

προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν $\chi=81000$.

Ὁ πρῶτος υἱὸς θὰ λάβῃ 1000 δραχ. καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ὑπολοίπου, ἄρα ἡ μερὶς αὐτοῦ θὰ εἶναι

$$1000+\frac{81000-1000}{10}=9000.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν υἱῶν ἀρκεῖ προφανῶς νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιουσίαν διὰ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{81000}{9000}=9.$$

Παρατήρησις.—Ἐστηρίχθημεν διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπὶ τῆς ἰσότητος τῶν δύο πρώτων μερίδων· ἀλλ' εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν, ὅτι, ὅσαι καὶ ἂν εἶναι αὗται, μία οἱαδήποτε μερὶς εἶναι 9000. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν εὕρει ἤδη μ μερίδας ἴσας πρὸς 9000, καὶ ἂς ἐξετάσωμεν ποία ἡ τιμὴ τῆς μερίδος τῆς τάξεως

$\mu+1$. Ἐπειδὴ μία μερὶς εἶναι 9000, αἱ μ θὰ εἶναι 9000 μ· καὶ συνεπῶς ἡ τῆς τάξεως $\mu+1$ θὰ εἶναι κατ' ἀρχὰς 1000 $(\mu+1)$ θὰ εἶναι κατ' ἀρχὰς 1000 $(\mu+1)$, προσέτι δὲ καὶ

$$\frac{81000-9000\mu-1000\,(\mu+1)}{10}$$

δηλαδὴ ἐν ὅλῳ

$$1000\,(\mu+1)+\frac{81000-9000\mu-1000\,(\mu+1)}{10}.$$

ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη παράστασις ἁπλοποιουμένη καθίσταται ἴση πρὸς 9000. Ὅθεν ἡ μερὶς τῆς τάξεως $\mu+1$ εἶναι ἐπίσης 9000, ἐξ οὗ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι πᾶσαι αἱ μερίδες εἶναι ἴσαι.

6). Διδάσκαλος ἐρωτηθεὶς πόσους μαθητὰς ἔχει, ἀπεκρίθη· ἐὰν μὲν τεθῶσιν 8 μαθηταὶ εἰς ἕκαστον θρανίον, 4 μαθηταὶ ἵστανται ὄρθιοι· ἐὰν δὲ τεθῶσιν 9 εἰς ἕκαστον θρανίον, μένουσι κεναὶ 2 θέσεις τοῦ τελευταίου θρανίου. Πόσους μαθητὰς εἶχεν ὁ διδάσκαλος καὶ πόσα θρανία;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων· κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν οἱ μαθηταὶ ἦσαν $8\chi+4$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $9\chi-2$· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν ἦτο ὁ αὐτὸς κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἕπεται

$$8\chi+4=9\chi-2\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=6$· ἐπομένως οἱ μαθηταὶ ἦσαν $8.6+4=52$.

7). Ἔχων τις 45000 δραχ. τοκίζει μέρος πρὸς 5,5 $^0/_0$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4 $^0/_0$· ἀπολαμβάνει δὲ ἐτήσιον εἰσόδημα 2002,50. Τίνα τὰ δύο μέρη;

Ἐὰν διὰ χ παρασταθῇ τὸ ἓν μέρος, τὸ ἕτερον ἔσται 45008 - χ. Τὸ πρῶτον μέρος τοκιζόμενον πρὸς 5,5 $^0/_0$ διδει ἐτήσιον τόκον $\frac{5{,}5\chi}{100}=\frac{11\chi}{200}$, τὸ δ' ἕτερον δίδει $\frac{4\,(45000-\chi)}{100}=\frac{180000-4\chi}{100}$· καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο τόκοι ἀποτελοῦσι 2002,50 δραχ., ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{11\chi}{200}+\frac{180000-4\chi}{100}=2002{,}50.$$

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὸν 200, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσ,ν

$$11\chi+360000-8\chi=400500.$$

Μεταφέροντες τοὺς τὸν χ ἔχοντας ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν

$$11\chi-8\chi=400500-360000,$$

προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν

$$3\chi=40500 \text{ ἐξ ἧς καὶ } \chi=13500\text{'}$$

ὥστε τὸ ἓν μέρος εἶναι 13500, ἄρα τὸ ἕτερον εἶναι $45000-13500=31500$.

8). Ἔν τινι λυκείῳ φοιτῶσιν 824 μαθηταί. Μετὰ τὴν ἀποφοίτησιν 16 ἐσωτερικῶν καὶ 16 ἐξωτερικῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξωτερικῶν γίνεται διπλάσιος τοῦ τῶν ἐσωτερικῶν. Πόσους μαθητὰς ἑκάστης κατηγορίας εἶχεν ἐν ἀρχῇ;

Ἔστωσαν χ οἱ ἐσωτερικοί· τότε οἱ ἐξωτερικοὶ θὰ εἶεαι $824-\chi$. Μετὰ τὴν ἀποφοίτησιν 16 μαθητῶν ἐξ ἑκάστης κατηγορίας μένουσι $\chi-16$ ἐσωτερικοὶ καὶ $824-\chi-16=808-\chi$ ἐξωτερικοί· ἐπειδὴ δὲ τότε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξωτερικῶν γίνεται διπλάσιος τοῦ τῶν ἐσωτερικῶν, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$2(\chi-16)=808-\chi \quad \text{ἢ} \quad 2\chi-32=808-\chi,$$

ἣν λύοντες εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ἐσωτερικοὶ ἦσαν $\chi=280$· ἄρα οἱ ἐξωτερικοὶ ἦσαν $824-280=544$.

9). Ἔχει τις τοκίσει κεφάλαιον πρὸς 5 %· μετὰ 1 ἔτος καὶ 7 μῆνας προσθέτει τὸν τόκον εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τοκίζει τὰ μὲν $\frac{3}{5}$ τοῦ νέου κεφαλαίου πρὸς 4 %, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 3 %. Μετὰ 2 ἔτη ἔλαβε τόκον 4652 δραχ. Ζητεῖται τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον.

Ἔστω χ τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον· τοῦτο τοκιζόμενον ἐπὶ 19 μῆνας πρὸς 5 % δίδει τόκον $\frac{\chi.5.19}{100.12}=\frac{19\chi}{240}$. γίνεται ἄρα εἰς τὸ τέλος τῶν 19 μηνῶν $\chi+\frac{19\chi}{240}=\frac{259\chi}{240}$. Τὸ τοκισθὲν πρὸς 4 % θὰ εἶναι $\frac{259\chi}{400}$, ὁ δὲ τόκος αὐτοῦ $\frac{259.\chi.4.2}{400.100}$ ἢ $\frac{518\chi}{10000}$. Τὸ τοκισθὲν πρὸς 3 % θὰ εἶναι $\frac{259\chi}{600}$, ὁ δὲ τόκος αὐτοῦ $\frac{259.\chi.3.2}{600.100}=\frac{259\chi}{10000}$.

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο τόκοι ἀποτελοῦσι 4652 δραχμάς, ἔπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{518\chi}{10000}+\frac{259\chi}{10000}=4652.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 10000, εὑρίσκομεν

$$518\chi+259\chi=46520000$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$777\chi=46520000$ ἐξ ἧς καὶ $\chi=59871,30\ldots$

10). Τοκίζει τις μέρος κεφαλαίου πρὸς 4,5 % ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 8 μῆνας, ἕτερον μέρος διπλάσιον τοῦ πρώτου πρὸς 5 % ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 6 μῆνας καὶ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶναι τριπλάσιον τοῦ δευτέρου μέρους, τοκίζει πρὸς 4 % ἐπὶ 3 ἔτη 9 μῆνας. Τὸ σύνολον τῶν τόκων εἶναι 14150 δραχ. Ζητοῦνται τὰ μέρη καὶ τὸ κεφάλαιον.

Ἐὰν διὰ χ παραστήσωμεν τὸ πρῶτον μέρος, τὸ δεύτερον θὰ εἶναι 2χ καὶ τὸ τρίτον 6χ. Τὸ πρῶτον μέρος τοκιζόμενον πρὸς 4,5 % ἐπὶ 44 μῆνας δίδει τόκον $\frac{33\chi}{200}$, τὸ δεύτερον τοκιζόμενον πρὸς 5 % ἐπὶ 42 μῆνας δίδει τόκον $\frac{7\chi}{20}$ καὶ τὸ τρίτον ἐπὶ 45 μῆνας πρὸς 4 % δίδει τόκον $\frac{9\chi}{10}$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ τρεῖς τόκοι ἀποτελοῦσι 14150 δραχ., ἔπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{33\chi}{200}+\frac{7\chi}{20}+\frac{9\chi}{10}=14150.$$

Πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ 200, εὑρίσκομεν

$$33\chi+70\chi+180\chi=2830000$$

ἢ $283\chi=2830000$ ἐξ ἧς καὶ $\chi=10000$·

ὥστε τὸ πρῶτον μέρος εἶναι 10000, ἄρα τὸ δεύτερον εἶναι 20000, τὸ τρίτον 60000 καὶ τὸ κεφάλαιον $10000+20000+60000=90000$.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 102).

1). Λῦσον τὰ ἑπόμενα συστήματα

α΄). $3\chi-5\psi=5$

$$2\chi+\psi=25.$$

Ἐὰν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς ψ καὶ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκεται τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$3\chi-5\ (25-2\chi)=5$$
$$\psi=25-2\chi,$$

οὗτινος ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἄγνωστον τὸν χ καὶ λυομένη πρὸς αὐτὸν δίδει $\chi=10$· καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν προκύπτει ἡ τοῦ ψ τιμή, $\psi=5$.

β'). $$\frac{\chi}{2}+\frac{\psi}{3}=\frac{7}{9}$$
$$\frac{\chi}{3}+\frac{\psi}{2}=\frac{4}{3}.$$

Ἐκτελοῦντες ἐν ἑκάστῃ ἐξισώσει τὰς πράξεις τοῦ ἐν Ἀλγ. ἐδ. 99, εὑρίσκομεν

$$27\chi+18\psi=42$$
$$6\chi+\ 9\psi=24,$$

πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἐπὶ 2, ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$15\chi=-6 \quad \text{ἢ} \quad \chi=-\frac{2}{5},$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\psi=\frac{44}{15}$.

γ'). $$\frac{\chi+\psi}{8}+\frac{\chi-\psi}{6}=5$$
$$\frac{\chi+\psi}{4}-\frac{\chi-\psi}{3}=10.$$

Ἐκτελοῦντες ἐν ἑκάστῃ ἐξισώσει τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$7\chi-\psi=120$$
$$-\chi+7\psi=120,$$

πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἐπὶ 7 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$48\psi=960 \quad \text{ἢ} \quad \psi=20,$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=20$.

δʹ).
$$0,7\chi-3,2\psi=-0,79$$
$$1,9\chi+0,73=1,622.$$

Πρὸς ἀπαλοιφὴν τοῦ ψ, πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς μὲν πρώτης ἐπὶ 0,73, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ 3,2· οὕτω λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα
$$0,511\chi-2,336\psi=-0,5767$$
$$6,08\chi+2,336\psi=5,1904,$$
ἐξ οὗ προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $6,591\chi=4,6137$· ἑπομένως τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς
$$0,7\chi-3,2\psi=-0,79$$
$$6,591\chi=4,6137,$$
οὗ ἡ ἐπίλυσις εἶναι εὐκολωτάτη. Οὕτως εὑρίσκομεν
$$\chi=0,7 \text{ καὶ } \psi=0,4.$$

εʹ).
$$\frac{3\chi}{10}-\frac{\psi}{15}-\frac{4}{9}=\frac{\chi}{12}-\frac{7}{18}$$
$$2\chi-2\frac{2}{3}=\frac{\chi}{12}-\frac{\psi}{15}+1\frac{1}{10}.$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑξῆς:
$$\frac{3\chi}{10}-\frac{\chi}{12}-\frac{\psi}{15}=\frac{1}{18}$$
$$2\chi-\frac{\chi}{12}+\frac{\psi}{15}=1\frac{1}{10}+2\frac{2}{3},$$
ἐξ οὗ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν
$$\frac{3\chi}{10}+2\chi-\frac{\chi}{6}=\frac{1}{18}+1\frac{1}{10}+2\frac{2}{3}$$
μετὰ δὲ τὴν ἀπαλλαγὴν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ πᾶσαν ἀναγωγὴν καὶ ἁπλοποίησιν, λαμβάνομεν
$$24\chi=43 \quad \text{ἐξ ἧς καὶ } \chi=\frac{43}{24}.$$
ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\psi=\frac{479}{96}$.

ζ'). $$\frac{\mu}{\chi}+\frac{\nu}{\psi}=1$$

$$\frac{\nu}{\chi}+\frac{\mu}{\psi}=1.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν μὲν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ ν, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ μ, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\frac{\mu\nu}{\chi}+\frac{\nu^2}{\psi}=\nu$$

$$\frac{\mu\nu}{\chi}+\frac{\mu^2}{\psi}=\mu$$

Ἀφαιροῦντες δὲ τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, εὑρίσκομεν

$$\frac{\nu^2}{\psi}-\frac{\mu^2}{\psi}=\nu-\mu$$

ἢ $$\frac{\nu^2-\mu^2}{\psi}=\nu-\mu$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ ψ, εὑρίσκομεν

$\nu^2-\mu^2=(\nu-\mu)\ \psi$ ἐξ ἧς καὶ $\psi=\frac{\nu^2-\mu^2}{\nu-\mu}=\nu+\mu\cdot$

ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἔστω τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος, εὑρίσκομεν καὶ $\chi=\nu+\mu$.

η'). $$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma^2$$

$$\frac{\alpha}{\beta+\psi}-\frac{\beta}{\alpha+\chi}=0.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ γινόμενον $(\beta+\psi)\ (\alpha+\chi)$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\alpha\ (\alpha+\chi)-\beta\ (\beta+\psi)=0,$$

ἢ $$\alpha^2+\alpha\chi-\beta^2-\beta\psi=0,$$

ἢ $$\alpha\chi-\beta\psi=\beta^2-\alpha^2.$$

Οὕτω σχηματίζομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma^2$$

$$\alpha\chi-\beta\psi=\beta^2-\alpha^2,$$

ἐξ οὗ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$2\alpha\chi=\gamma^2+\beta^2-\alpha^2$$

καὶ $$\chi=\frac{\gamma^2+\beta^2-\alpha^2}{2\alpha}\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{\gamma^2-6^2+\alpha^2}{26}.$$

θ΄). $$\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\chi^2}-\frac{1}{\psi^2}=\frac{1}{4}$$

Θέτοντες $\frac{1}{\chi}=\chi'$ $\frac{1}{\psi}=\psi'$, τὸ δοθὲν σύστημα γίνεται

$$\chi'-\psi'=\frac{1}{3}$$

$$\chi^2-\psi^2=\frac{1}{4},$$

διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως διὰ τῶν ἴσων $\chi'-\psi'=\frac{1}{3}$, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\chi'-\psi'=\frac{1}{3}$$

$$\chi'+\psi'=\frac{8}{4},$$

ἐξ οὗ προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2\chi'=\frac{13}{12}$ ἢ $\chi'=\frac{13}{24}$· ὅθεν, ἐπειδὴ $\chi'=\frac{1}{\chi}$, ἕπεται $\chi=\frac{24}{13}$· ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\psi=\frac{24}{5}$.

2). Ἐν τῷ συστήματι

$$5\chi-2\psi=7$$
$$3\chi-\lambda\psi=1$$

νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε $\chi+\psi=7$.

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος καὶ ἐκ τῆς $\chi+\psi=7$ προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ· ἀντικαθιστῶντες δὲ ταύτας εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3\chi-\lambda\psi=1$ λύομεν ταύτην πρὸς λ. Οὕτως ἔχομεν

$$5\chi-2\psi=7 \qquad (1)$$
$$\chi+\psi=7 \qquad (2)$$

διπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ προσθέτοντες εἰς τὴν πρώτην, λαμβάνομεν

$$7\chi = 21 \quad \text{ἐξ ἧς καὶ} \quad \chi = 3\cdot$$

θέτοντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ χ εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν $\psi = 4$. Ἀντικαθιστῶντες νῦν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ εἰς τὴν (1) καὶ λύοντες ταύτην πρὸς λ, εὑρίσκομεν $\lambda = 2$.

3). Νὰ ἐξετασθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 12\chi - 3\psi &= 7 \\ -4\chi + \psi &= 9 \end{aligned}$$

πρὶν ἢ λυθῇ.

Αἱ ἀξιώσεις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ἀσυμβίβαστοι, διότι διαιροῦντες τὴν πρώτην διὰ -3, λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} -4\chi + \psi &= -\frac{7}{3} \\ -4\chi + \psi &= 9\cdot \end{aligned}$$

καὶ ἑπομένως οὐδεμία λύσις ὑπάρχει, διότι εἶναι προφανὲς ὅτι οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβωσιν οἱ ἄγνωστοι χ, ψ, ἡ αὐτὴ ποσότης $-4\chi + \psi$ δὲν δύναται νὰ εἶναι συγχρόνως ἴση πρὸς $-\frac{7}{3}$ καὶ πρὸς 9.

4). Ἐν τῷ συστήματι

$$\begin{aligned} \lambda\chi \quad + \quad \psi &= 3\lambda \\ (\lambda - 1)\chi - 2\lambda\psi &= 4 \end{aligned}$$

νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε τὸ σύστημα νὰ ἐπιδέχηται μίαν μόνην λύσιν.

Ἡ παράστασις $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ ἐνταῦθα εἶναι $-2\lambda^2 - (\lambda - 1)$, ἥτις πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0, πρέπει δηλαδὴ νὰ ἔχωμεν

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0,$$

$$\text{ἢ} \quad (\lambda^2 + \lambda) + (\lambda^2 - 1) \neq 0\cdot$$

ἀλλὰ $\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda + 1)$ καὶ $(\lambda^2 - 1) = (\lambda + 1)\,(\lambda - 1)$, ἡ ἀνωτέρω ἄρα παράστασις γράφεται

$$\lambda\,(\lambda + 1) + (\lambda + 1)\,(\lambda - 1) \neq 0,$$

ἐξάγοντες δὲ τὸν κοινὸν παράγοννα $(\lambda + 1)$ ἐκτὸς παρενθέσεως, λαμβάνομεν

$$(\lambda + 1)\,(2\lambda - 1) \neq 0.$$

Ἡ σχέσις αὕτη πληροῦται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ ἐκτὸς τῶν δύο τιμῶν $\frac{1}{2}$ καὶ -1, αἵτινες μηδενίζουσι τὸ πρῶτον μέλος. Ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ λ, πλὴν τῶν $\frac{1}{2}$ καὶ -1.

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 109).

Λῦσον τὰ ἑπόμενα συστήματα

1ον).
$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega&=12\\ 3\chi-2\psi+4\omega&=13\\ 2\chi+7\psi-5\omega&=-15. \end{aligned}$$

Ἐὰν μεταξὺ πρώτης καὶ δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, ἔστω τὸν ω, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega&=12\\ \chi+6\psi&=15\\ 7\chi+12\psi&=45. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους, (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), λύομεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων ($\chi=3$, $\psi=2$), ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον ($\omega=7$).

2ον).
$$\begin{aligned} 6\chi+3\psi-4\omega&=3\\ 2\chi-9\psi+18\omega&=\frac{5}{2}\\ \chi+2\psi-28\omega&=-\frac{35}{6}. \end{aligned}$$

Ἐὰν μεταξὺ πρώτης καὶ δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, ἔστω τὸν χ, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} 6\chi+3\psi-4\omega&=3\\ -30\psi+58\omega&=\frac{9}{2}\\ -9\psi+164\omega&=38. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους, (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), λύομεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων $\left(\omega=\frac{1}{4},\quad \psi=\frac{1}{3}\right)$ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον $\left(\chi=\frac{1}{2}\right)$.

3ον).
$$\begin{aligned} \chi+2\psi+5\omega-4\varphi&=14\\ 3\chi+4\psi-6\omega-2\varphi&=-24\\ 2\chi-3\psi+\omega+2\varphi&=10\\ 4\chi-\psi-\omega+6\varphi&=0. \end{aligned}$$

Ἀπαλείφοντες τὸν χ μεταξὺ πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν λοιπῶν εὑρίσκομεν τρεῖς ἐξισώσεις, περιεχούσας μόνον τοὺς τρεῖς ἀγνώστους ψ, ω, φ, αἵτινες μετὰ τῆς πρώτης ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι· οὕτω ἔχομεν

$$\begin{aligned} \chi+2\psi+5\omega-4\varphi&=14\\ 2\psi+21\omega-10\varphi&=66\\ 7\psi+9\omega-10\varphi&=18\\ 9\psi+21\omega-22\varphi&=56. \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο δύναται να ἀντικατασταθῇ διὰ τρίτου, ἐν ᾧ ἡ πρώτη ἐξίσωσις περιέχει τοὺς τέσσαρας ἀγνώστους, ἡ δευτέρα τρεῖς, αἱ δὲ δύο τελευταῖαι μόνον δύο ἀγνώστους· ἤτοι διὰ τοῦ

$$\begin{aligned} \chi + 2\psi + 5\omega - 4\varphi &= 14 \\ 2\psi + 21\omega - 10\varphi &= 66 \\ -5\psi + 12\omega &= 48 \\ -23\psi + 126 &= 446 \end{aligned}$$

Λύομεν τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων $\left(\psi = -\frac{116}{59},\ \omega = \frac{563}{177}\right)$, ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν προσδιορίζομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $\left(\varphi = -\frac{37}{118}\right)$, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὰς τρεῖς εὑρεθείσας ἤδη τιμὰς εἰς τὴν πρώτην εὑρίσκομεν καὶ $\chi = \frac{137}{177}$.

4ον).

$$\begin{aligned} \chi + \psi - \varphi &= 6 \\ \psi + \varphi - \chi &= 7 \\ 5 + \chi - \psi &= 11. \end{aligned}$$

Ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο, εὑρίσκομεν

$$2\psi = 13, \qquad 2\chi = 17, \qquad 2\varphi = 18$$

ὅθεν

$$\psi = \frac{13}{2}, \qquad \chi = \frac{17}{2}, \qquad \varphi = 9.$$

5ον).

$$\begin{aligned} \alpha(\psi + \omega) &= 2\psi\omega \\ \beta(\omega + \varphi) &= 2\omega\varphi \\ \gamma(\chi + \psi) &= 2\chi\psi. \end{aligned}$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως διὰ $\alpha\psi\omega$, τῆς δευτέρας διὰ $\beta\omega\varphi$ καὶ τῆς τρίτης διὰ $\gamma\chi\psi$, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\frac{\psi + \omega}{\psi\omega} = \frac{2}{\alpha}, \qquad \frac{\omega + \varphi}{\omega\varphi} = \frac{2}{\beta}, \qquad \frac{\chi + \psi}{\chi\psi} = \frac{2}{\gamma}$$

ἢ

$$\frac{\psi}{\psi\omega} + \frac{\omega}{\psi\omega} = \frac{2}{\alpha}, \qquad \frac{\omega}{\omega\varphi} + \frac{\varphi}{\omega\varphi} = \frac{2}{\beta}, \qquad \frac{\chi}{\chi\psi} + \frac{\psi}{\chi\psi} = \frac{2}{\gamma}$$

ἢ

$$\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\psi} = \frac{2}{\alpha}, \qquad \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\omega} = \frac{2}{\beta}, \qquad \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\chi} = \frac{2}{\gamma}.$$

Τὸ δὲ σύστημα τοῦτο εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ 4ον τοῦ ἐδ. 116 καὶ λύοντες εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\omega}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma},\quad \frac{1}{\psi}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma},\quad \frac{1}{\varphi}=\frac{\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{1}{\chi}=\frac{\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}.$$

ὅθεν $\omega=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\beta\gamma+\alpha\gamma-\alpha\beta}$, $\quad\psi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\beta-\alpha\gamma}$, $\quad\varphi=\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma}$.

6ον). $\dfrac{\chi\psi\omega}{\chi\psi+\psi\omega}=\dfrac{1}{\alpha}$, $\quad\dfrac{\chi\psi\omega}{\psi\omega+\omega\chi}=\dfrac{1}{\beta}$, $\quad\dfrac{\chi\psi\omega}{\omega\chi+\chi\psi}=\dfrac{1}{\gamma}$.

Ἀντιστρέφοντες τοὺς λόγους δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\frac{\chi\psi+\psi\omega}{\chi\psi\omega}=\alpha,\quad \frac{\psi\omega+\omega\chi}{\chi\psi\omega}=\beta,\quad \frac{\omega\chi+\chi\psi}{\chi\psi\omega}=\gamma,$$

ἢ $\quad\dfrac{\chi+\omega}{\chi\omega}=\alpha$, $\quad\dfrac{\psi+\chi}{\chi\psi}=\beta$, $\quad\dfrac{\omega+\psi}{\psi\omega}=\gamma$

ἢ προσέτι $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\chi}=\alpha$, $\quad\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=\beta$, $\quad\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\gamma$. (1)

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\frac{2}{\omega}+\frac{2}{\chi}+\frac{2}{\psi}=\alpha+\beta+\gamma,$$

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ταύτης ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1), εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\psi}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2},\quad \frac{1}{\omega}=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{5},\quad \frac{1}{\chi}=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

ὅθεν $\quad\psi=\dfrac{2}{\beta+\gamma-\alpha}$, $\quad\omega=\dfrac{2}{\alpha+\gamma-\beta}$, $\quad\chi=\dfrac{2}{\alpha+\beta-\gamma}$.

7ον).

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega&=1\\ 2\chi-3\psi-5\omega&=-1\upsilon\\ 4\chi+9\psi+25\omega&=100. \end{aligned}$$

Ἐὰν μεταξὺ πρώτης καὶ δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων, ἔστω τὸν ω, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega &= 1 \\ 7\chi+2\psi &= -5 \\ 21\chi+16\psi &= -75. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους, (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), λύομεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων ($\chi=1$, $\psi=-6$), ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον ($\omega=6$).

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 116).

1). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐτησίων μισθῶν δύο ἀδελφῶν εἶναι 4400 δραχ. Ὁ πρεσβύτερος δαπανᾷ ἐτησίως τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μισθοῦ του· ὁ νεώτερος τὰ $\frac{3}{4}$. Οὕτως ἐξοικονομοῦσιν ἐτησίας 1310 δραχ. ὁμοῦ. Ζητεῖται ὁ μηνιαῖος μισθὸς ἑκάστου.

Ἔστω χ ὁ ἐτήσιος μισθὸς τοῦ πρεσβυτέρου καὶ ψ ὁ τοῦ νεωτέρου· τότε θὰ εἶναι $\chi+\psi=4400$.

Ὁ πρεσβύτερος ἐξοικονομεῖ ἐτησίως $\chi-\frac{2\chi}{3}=\frac{\chi}{3}$, ὁ δὲ νεώτερος $\frac{\chi}{4}$ τοῦ μισθοῦ του· ὥστε ἀμφότεροι ἐξοικονομοῦσιν ἐτησίως $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}$ ἅτινα κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι 1310 δραχμαί· ὅθεν ἕπεται τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi &= 4400 \\ \frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4} &= 1310 \end{aligned}$$

ἤ, τὸ ἰσοδύναμον τούτου
$$\begin{aligned} \chi+\psi &= 4400 \\ 4\chi+3\psi &= 15720. \end{aligned}$$

Ἐὰν ἡ πρώτη ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς ψ καὶ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ψ εἰς τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$ψ=4400-χ$$
$$4χ+3(4400-χ)=15720,$$

οὗτινος ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἄγνωστον τὸν χ καὶ λυομένη πρὸς αὐτὸν δίδει $χ=2520$· καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ τεθῇ εἰς τὴν πρώτην προκύπτει ἡ τιμὴ τοῦ ψ, $ψ=1880$.

Ὥστε ὁ ἐτήσιος μισθὸς τοῦ πρεσβυτέρου εἶναι 2520 δραχ. καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὁ μηνιαῖος 210· τοῦ δὲ νεωτέρου, οὗτινος ὁ ἐτήσιος εἶναι 1880, ὁ μηνιαῖος εἶναι $156\frac{2}{3}$.

2). Ζητοῦνται τρία κλάσματα γνωστοῦ ὄντως ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι $\frac{9}{20}$, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων $\frac{11}{30}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου $\frac{5}{12}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ, ψ, ω τὰ ζητούμενα κλάσματα, θὰ ἔχωμεν·

$$χ+ψ=\frac{9}{20}$$
$$ψ+ω=\frac{11}{30}$$
$$χ+ω=\frac{5}{12}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν·

$$2\,(χ+ψ+ω)=\frac{74}{60}, \quad ἢ \quad χ+ψ+ω=\frac{37}{60}.$$

Ἀφαιροῦντες δ' ἀπὸ ταύτης ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν·

$$ω=\frac{1}{6}, \qquad χ=\frac{1}{4}, \qquad ψ=\frac{1}{5}.$$

3). Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον γνωρίζοντες α΄) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκατοντάδων καὶ μονάδων εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, β΄) ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ ἀντεστραμμένου εἶναι 99, γ΄) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι 1575.

Ἔστωσαν χ αἱ ἑκατοντάδες, ψ αἱ δεκάδες καὶ ω αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ· θὰ εἶναι·

$$\chi+\omega=5\psi \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $100\chi+10\psi+\omega$ μονάδας, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ $100\omega+10\psi+\chi$· ἡ δὲ διαφορὰ τῶν πρώτων ἀπὸ τούτων εἶναι 99. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις·

$$(100\omega+10\psi+\chi)-(100\chi+10\psi+\omega)=99$$

ἢ
$$99\omega-99\chi=99 \qquad (2)$$

Θὰ εἶναι δὲ καὶ

$$100\chi+10\psi+\omega+100\omega+10\psi+\chi=1575$$

ἢ
$$101\chi+20\psi+101\omega=1575 \qquad (3).$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, ἀκέραιοι, θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὸ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), ἀποτελούμενον σύστημα εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 738.

4). Ἔμπορος ἔχει τρεῖς ποιότητας καφέ· τῆς 1ης ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δραχ., τῆς 2ας β καὶ τῆς 3ης γ δραχ. Θέλει νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα ν ὀκάδων, ὧν ἑκάστη νὰ τιμᾶται ε δραχ.

Πόσον θὰ θέσῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκ τῆς 3ης θὰ θέσῃ ὅσον ἐκ τῶν δύο πρώτων ὁμοῦ;

Ἔστωσαν χ αἱ ὀκάδες τὰς ὁποίας θὰ θέσῃ ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος, ψ αἱ ὀκάδες τῆς δευτέρας καὶ ω αἱ ὀκάδες τῆς τρίτης.

Ἐπειδὴ τὸ μῖγμα θὰ ἔχῃ ν ὀκάδας θὰ εἶναι προφανῶς

$$\chi+\psi+\omega=\nu.$$

Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι δραχμαὶ εν· ἀλλ' αἱ χ ὀκάδες τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζουν δραχμὰς αχ, αἱ ψ τῆς δευτέρας ἀξίζουν βψ καὶ αἱ ω τῆς τρίτης ἀξίζουν γω· ἄρα ἡ ἀξία τοῦ μίγματος θὰ εἶναι $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega$. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\epsilon\nu.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς τρίτης θὰ θέσῃ ὅσον ἐκ τῶν δύο πρώτων ὁμοῦ, ἕπεται

$$\chi+\psi=\omega, \quad \text{ἢ} \quad \chi+\psi-\omega=0.$$

Ἔχομεν ὅθεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$\chi+\psi+\omega=\nu$$
$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=\varepsilon\nu$$
$$\chi+\psi-\omega=0$$

Περιορισμός.—Πρέπει οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, νὰ εἶναι θετικοί.

Ἀπαλείφοντες μεταξὺ πρώτης καὶ δευτέρας καὶ μεταξὺ πρώτης καὶ τρίτης τὸν ω, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\chi+\psi+\omega=\nu$$
$$(\gamma-\alpha)\chi+(\gamma-\beta)\psi=(\gamma-\varepsilon)\nu$$
$$2\chi+2\psi=\nu,$$

οὗτινος αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους καὶ λύοντες τὸ ἐξ αὐτῶν ἀποτελούμενον σύστημα, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{(\gamma-2\varepsilon+\beta)\nu}{2(\beta-\alpha)},\qquad \psi=\frac{(\gamma-2\varepsilon+\alpha)\nu}{2(\alpha-\beta)}.$$

ὅθεν
$$\omega=\nu-\frac{(\gamma-2\varepsilon+\beta)\nu}{2(\beta-\alpha)}-\frac{(\gamma-2\varepsilon+\alpha)\nu}{2(\alpha-\beta)}.$$

Διερεύνησις.—Τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθῶσι, διότι δύναται νὰ εἶναι

$$\beta<\alpha,\quad \beta>\alpha,\quad \beta=\alpha.$$

1η Ἐὰν εἶναι $\beta<\alpha$, ἡ παράστασις $\alpha(\beta-\alpha)$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἵνα ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ πρέπει νὰ εἶναι $\gamma-2\varepsilon+\beta<0$, ἢ $\gamma+\beta<2\varepsilon$.

2α Ἐὰν εἶναι $\beta>\alpha$, ἡ παράστασις $\alpha(\alpha-\beta)$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἵνα ἡ τιμὴ τοῦ ψ εἶναι θετικὴ πρέπει νὰ εἶναι $\gamma-2\varepsilon+\alpha<0$, ἢ $\gamma+\alpha<2\varepsilon$.

3η Ἐὰν εἶναι $\beta=\alpha$, αἱ παραστάσεις $\alpha(\beta-\alpha)$ καὶ $\alpha(\alpha-\beta)$ γίνονται 0 καὶ συνεπῶς τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ βεβαιωθῇ τις ὅτι τοῦτο οὕτως ἔχει, παρατηρῶν, ὅτι, ἐὰν ἦτο $\beta=\alpha$, δὲν θὰ εἴχομεν τρεῖς ποιότητας καφέ.

5). Πατὴρ καὶ υἱὸς ἐργάζονται εἴς τι ἐργοστάσιον· διὰ 12 ἡμερομίσθια τοῦ πατρὸς καὶ ἐννέα τοῦ υἱοῦ ἔλαβον 78 δραχ. Τὸ ἑπόμενον δεκαπενθήμερον, ὁ πατὴρ εἰργάσθη 10 ἡμέρας καὶ ὁ υἱὸς 11, ἔλαβον δὲ 72 δραχμάς. Ζητεῖται τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου.

Ἐὰν διὰ χ παρασταθῇ τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ πατρὸς καὶ ψ τὸ τοῦ υἱοῦ, κατὰ τὰ δεδομένα θὰ εἶναι

$$12\chi+9\psi=78$$

καὶ

$$10\chi+11\psi=72.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 5, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ 6, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$60\chi+45\psi=390$$

$$60\chi+66\psi=432.$$

Ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα τῆς πρώτης ἐξισώσεως καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $21\psi=42$, ὅθεν $\psi=2$· ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἔστω ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=5$.

6). Πατὴρ ἀφίνει 100.000 δραχ. εἰς τὰ τρία τέκνα του· διατάσσει δὲ ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον τόσα ὥστε τὰ τρία μερίδια, κατατιθέμενα εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἁπλῷ πρὸς 5 %, νὰ γίνωνται ἴσα ὅταν τὰ τέκνα συμπληρώνωσι τὸ 21ον ἔτος τῆς ἡλικίας των· εἶναι δὲ τὸ μὲν 1ον 19 ἐτῶν, τὸ δὲ 2ον 15 καὶ τὸ 3ον 12. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον;

Ἔστωσαν χ, ψ, ω τὰ τρία μερίδια· ἐπειδὴ καὶ οἱ τρεῖς θὰ λάβωσιν 100,000 δραχ. θὰ εἶναι $\chi+\psi+\omega=100,000$. Τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου τοκιζόμενον ἐπὶ $21-19=2$ ἔτη πρὸς 5 % δίδει τόκον $\frac{5.2.\chi}{100}=\frac{\chi}{10}$, ἄρα γίνεται $\chi+\frac{\chi}{10}=\frac{11\chi}{10}$. τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου ἐπὶ 6 ἔτη πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον δίδει τόκον $\frac{5.6.\psi}{100}=\frac{3\psi}{10}$, ἄρα γίνεται $\chi+\frac{3\psi}{10}=\frac{13\psi}{10}$ καὶ τὸ τοῦ τρίτου ἐπὶ 9 ἔτη δίδει $\frac{5.9.\omega}{100}=\frac{9\omega}{20}$, ἄρα γίνεται $\omega+\frac{9\omega}{20}=\frac{29\omega}{20}$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρία μερίδια γίνονται ἴσα, ἔπεται $\frac{11\chi}{10}=\frac{13\psi}{10}=\frac{29\omega}{20}$. Ἔχομεν ὅθεν τὸ σύστημα

$$\chi+\psi+\omega=100.000$$

$$\frac{11\chi}{10}=\frac{13\psi}{10}$$

$$\frac{11\chi}{10}=\frac{29\omega}{20},$$

ὅπερ λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=38391,04$ δραχ., $\psi=32484,73$, $\omega=29124,23$.

7). Εὑρεῖν κλάσμα τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον πρὸς $\frac{1}{4}$ ἂν ἐλαττωθῶσιν οἱ δύο ὅροι κατὰ 3, καὶ ἴσον πρὸς $\frac{1}{2}$. ἂν αὐξηθῶσιν οἱ ὅροι κατὰ 5.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi-3}{\psi-3}=\frac{1}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi+5}{\psi+5}=\frac{1}{2}$$

ἤτοι

$$4\chi-\psi=9$$
$$2\chi-\psi=-5$$

Περιορισμός. —Πρέπει νὰ εἶναι οἱ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=7$, $\psi=19$· ἐπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{7}{19}$.

8). ***Πρόβλημα τοῦ Ἀρχιμήδους.*** — Ὁ βασιλεὺς Ἱέρων ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 7465 γραμμ. χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ ἐξ αὐτοῦ στέφανον. Ὑποπτεύσας δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στεφάνου, ὅτι ὁ χρυσοχόος ἀντεκατέστησε μέρος τοῦ χρυσοῦ δι' ἀργύρου, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδην, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ τοῦτο ἄνευ βλάβης τοῦ στεφάνου. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν 6998 γραμμ. Οὕτω δὲ ἀνεκάλυψε τὸν δόλον. Ζητεῖται πόσος ἄργυρος καὶ πόσος χρυσὸς ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἷς κυβικὸς δάκτυλος χρυσοῦ ζυγίζει 19 γραμμ. καὶ εἷς κυβικὸς δάκτυλος ἀργύρου 10,5 γραμμ.

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τοῦ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσοῦ καὶ ψ ὁ τοῦ ἀργύρου, κατὰ πρῶτον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi+\psi=7465. \qquad (1)$$

Τὰ 19 γραμμάρια τοῦ χρυσοῦ ζυγιζόμενα ἐν τῷ ὕδατι ἀποβάλλουσιν ἐκ τοῦ βάρους αὐτῶν, βάρος ἴσον πρὸς τὸ βάρος τοῦ ὕδατος τοῦ χωροῦντος ἐντὸς τοῦ ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου τὸ ὁποῖον τὰ γραμμάρια ταῦτα ἐκτοπίζουσιν, ἤτοι ἓν γραμμάριον, τὸ 1 γραμμ. ἀποβάλλει $\frac{1}{19}$ καὶ τὰ χ γραμμ. ἀποβάλλουσι $\frac{\chi}{19}$· ὁμοίως τὸ βάρος ψ τοῦ ἀργύρου θὰ ἀποβάλῃ $\frac{\psi}{10,5}$ γραμμάρια· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἀπωλειῶν θὰ συναποτελέσῃ τὴν ὅλην ἀπώλειαν τοῦ βάρους τοῦ στεφάνου ἐν τῷ ὕδατι, ἤτοι $7465-6998=467$ γραμμάρια, ἕπεται ὅθεν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi}{19}+\frac{\psi}{10,5}=467$$

ἢ

$$10,5\chi+19\psi=93166,5 \qquad (2)$$

Λύοντες τὸ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἀποτελούμενον σύστημα, εὑρίσκομεν $\chi=5737,47$ καὶ $\psi=1727,53$ γραμμάρια.

Ἀσκήσεις. (Ἀλγ. σελ. 130).

1) Εὑρεῖν πάντας τοὺς ἀκεραίους, οἵτινες ἂν μὲν αὐξηθῶσι κατὰ 1 γίνονται πολλαπλάσια τοῦ 5, ἂν δὲ ἐλαττωθῶσι κατὰ 1 γίνονται πολλαπλάσια τοῦ 4.

Ἔστω χ ὁ μικρότερος τῶν ζητουμένων ἀκεραίων· θὰ εἶναι

$$\chi+1=5\psi$$
$$\chi-1=4\psi.$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2\chi=9\psi,$$

ἣν λύοντες πρὸς χ, λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{9\psi}{2}.$$

Ἵνα ὁ χ εἶναι ἀκέραιος πρέπει ὁ ψ νὰ εἶναι ἄρτιος, ὁ δὲ μικρότερος τῶν ἀρτίων ὅστις δίδει εἰς τὸν χ ἀκεραίαν τιμὴν εἶναι ὁ 2· θέτοντες $\psi=2$, εὑρίσκομεν $\chi=9$.

Ὥστε ὁ μικρότερος τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 9 καὶ ἐπομένως πάντες οἱ ἄλλοι οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι ὁ 9 ηὐξημένος κατὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 4 καὶ 5, ἤτοι κατὰ 20ω· πάντες ὅθεν οἱ ἀκέραιοι οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα εἶναι ἄπειροι καὶ παρέχονται ὑπὸ τοῦ τύπου $\chi=9+20\omega$.

2) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον, ὅστις διαιρούμενος διὰ 4 δίδει ὑπόλοιπον 2, διὰ 5 ὑπόλοιπον 4 καὶ διὰ 9 ὑπόλοιπον 3.

Ἔστω α ὁ ἀριθμός, χ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ 4, ψ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 5 καὶ ω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9. Θὰ εἶναι

$$α=4χ+2,\quad α=5ψ+4,\quad α=9ω+3.$$

Ὅθεν προκύπτει τὸ σύστημα

$$4χ+2=5ψ+4$$
$$4χ+2=9ω+3$$

ἤ

$$5ψ-4χ=-2$$
$$-9ω+4χ=1,$$

ἐξ οὗ ἡ ἐξίσωσις

$$5ψ-9ω=-1,$$

ἣν λύοντες πρὸς ψ, εὑρίσκομεν

$$ψ=\frac{9ω-1}{5}.$$

Ἵνα ὁ ψ εἶναι ἀκέραιος πρέπει ὁ ω νὰ λήγῃ εἰς 4 ἢ 9, δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι ἵνα καὶ ὁ χ εἶναι ἀκέραιος, ἔτι δὲ καὶ $9ω+3$ τριψήφιος θὰ εἶναι $ω=19$, ἢ $ω=39$, ἢ $ω=59$, ἢ $ω=79$, ἢ $ω=99$· ὅθεν μόνον οἱ ἑπόμενοι πέντε ἀριθμοὶ πληροῦσι τὰ ζητούμενα

$$9.19+3=174$$
$$9.39+3=354$$
$$9.59+3=534$$
$$9.79+3=714$$
$$9.99+3=894.$$

Παρατηροῦντες, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι αὐξανόμενοι κατὰ 6 γίνονται, ὁ πρῶτος 180, ὁ δεύτερος τὸ διπλάσιον τούτου, ὁ τρίτος τὸ τριπλάσιον, ὁ τέταρτος τὸ τετραπλάσιον καὶ ὁ τελευταῖος τὸ πενταπλάσιον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτοὺς ὑπὸ τὸν τύπον $180π-6$, ἔνθα $π=1,2,3,4,5$.

3) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον ὅστις ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του ἐπὶ 34.

Ἔστωσαν χ, ψ, ω τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ· θὰ εἶναι κατὰ τὴν ἐκφώνησιν

$$100χ+10ψ+ω=34\,(χ+ψ+ω)$$

Περιορισμός. — Πρέπει οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω νὰ εἶναι ἀκέραιοι, θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν πρὸς χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{24\psi+33\omega}{66}, \text{ ἢ } \chi=\frac{4\psi}{11}+\frac{\omega}{2} \qquad (1)$$

Δοκιμάζοντες τοὺς ἀπὸ 0 μέχρι 9 ἀριθμούς, εὑρίσκομεν ὅτι ἵνα ὁ $\frac{4\psi}{11}$ εἶναι ἀκέραιος, ὁ ψ μόνον τὴν τιμὴν 0 δύναται νὰ λάβῃ· ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ψ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\omega}{2}\cdot$$

ἵνα δὲ ὁ ἀριθμὸς $\frac{\omega}{2}$ εἶναι ἀκέραιος, πρέπει ὁ ω νὰ εἶναι ἄρτιος· δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ἢ $\omega=2$, ἢ $\omega=4$, ἢ $\omega=6$, ἢ $\omega=8$· ὅθεν ὁ χ θὰ εἶναι 1, ἢ 2, ἢ 3, ἢ 4.

Ὥστε οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 102, 204, 306, 408.

4) Ζωέμπορος θέλει ν' ἀγοράσῃ ἀρνία καὶ κριοὺς ἀντὶ 827 δραχμῶν· πωλεῖται δὲ ἕκαστον ἀρνίον 16 δραχ. καὶ ἕκαστος κριὸς 21. Πόσα θ' ἀγοράσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνίων καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν κριῶν, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$16\chi+21\psi=827.$$

Λύοντες πρὸς χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{827-21\psi}{16}.$$

ἵνα δὲ ὁ ἀριθμὸς $827-21\psi$ διαιρῆται διὰ 16, πρέπει ὁ ψ νὰ εἶναι περιττός· δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν $\psi=15$, ὅθεν $\chi=32$.

Πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς προκειμένης ἐξισώσεως παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\chi=32-21\omega, \qquad \psi=15+16\omega\cdot$$

ἐκ δὲ τούτων θετικαὶ εἶναι μόνον αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega=0$, $\omega=1$ ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι

$$\begin{matrix}\chi=32 \\ \psi=15\end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix}\chi=11 \\ \psi=31.\end{matrix}$$

5) Ἠγόρασέ τις 200 ὀκάδας ἐκλεκτοῦ οἴνου τριῶν εἰδῶν ἀντὶ 400 δραχ. Τοῦ α′ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 4 δραχ., τοῦ β′ 1,40 καὶ τοῦ γ′ 1,20. Πόσας ὀκάδας ἐξ ἑκάστου εἴδους ἠγόρασεν;

Ἐὰν διὰ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀκάδων τοῦ α′ εἴδους, διὰ ψ τὸν τοῦ β′ καὶ διὰ φ τὸν τοῦ γ′, θὰ εἶναι

$$\chi+\psi+\varphi=200$$

καὶ

$$4\chi+1{,}40\psi+1{,}20\varphi=400,$$

ἐξ ὧν, ἀπαλείφοντες τὸν φ, λαμβάνομεν

$$2{,}80\chi+0{,}20\psi=160 \quad \text{ἢ} \quad 14\chi+\psi=800.$$

Λύοντες πρὸς χ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{800-\psi}{14}.$$

ἵνα δὲ ὁ ἀριθμὸς 800 — ψ διαιρῆται διὰ 14, πρέπει ὁ ψ νὰ εἶναι ἄρτιος· δοκιμάζοντες εὑρίσκομεν ψ=2, ὅθεν χ=57.

Πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς προκειμένης ἐξισώσεως παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\chi=57-\omega, \qquad \psi=2+14\omega,$$

ἐξ ὧν θετικαὶ εἶναι, καθιστῶσι δὲ καὶ τὸν φ θετικὸν αἱ πρὸς τὰς τιμὰς ω=0,1,2,3,....10 ἀντιστοιχοῦσαι· ὥστε

ἢ χ=57, ψ= 2 καὶ ἑπομένως φ=141
ἢ χ=56, ψ= 16 » » φ=128
ἢ χ=55, ψ= 30 » » φ=115
....
ἢ χ=47, ψ=142 » » φ= 11.

6) Εὑρεῖν τοὺς διψηφίους ἀριθμοὺς οἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα ἐὰν τὰ ψηφία γραφῶσι κατὰ τάξιν ἀντίστροφον νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ πρώτου.

Ἐὰν χ εἶναι αἱ δεκάδες ἑνὸς τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν καὶ ψ αἱ μονάδες αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον 10χ+ψ, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον 10ψ+χ· ὥστε θὰ εἶναι

$$10\psi+\chi=\frac{4}{7}\left(10\chi+\psi\right),$$

ἐξ ἧς προκύπτει 66ψ=33χ, ἢ 2ψ=χ.

Περιορισμός.—Πρέπει νὰ εἶναι οἱ ἄγνωστοι χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως καὶ εἶναι

ἢ $\psi=1$ καὶ $\chi=2$
ἢ $\psi=2$ $\chi=4$
ἢ $\psi=3$ $\chi=6$
ἢ $\psi=4$ $\chi=8$,

ὥστε οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 21, 42, 63, 84.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Ἀσκήσεις. (Ἄλγ. σελ. 149)

1) Ἁπλοποίησον τὰς ἑπομένας ἀρρήτους παραστάσεις

$\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}$, $2\sqrt{\frac{3}{4}}+3\sqrt{12}-5\sqrt{3}$, $4\sqrt{75}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{108}-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Ἡ ἄρρητος παράστασις $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{2.2^2}+\sqrt{2.3^2}+\sqrt{2.4^2}+\sqrt{2.5^2}$, ἢ $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$, ἐξάγοντες δὲ τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἐκτὸς παρενθέσεως ἔχομεν $14\sqrt{2}$.

Ἡ $2\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{12}-5\sqrt{3}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{3}+6\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ καὶ μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν κοινῶν παραγόντων ἐκτὸς παρενθέσεως γίνεται $2\sqrt{3}$.

Ἡ $4\sqrt{75}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{3}}$ ἰσοῦται τῇ $4\sqrt{3.5^2}+\frac{1}{3}\sqrt{3.3^2}-2.3\sqrt{\frac{1}{3}}$, ἥτις ἰσοῦται τῇ $20\sqrt{3}+\sqrt{3}-2\sqrt{3}=19\sqrt{3}$.

Καὶ τέλος ἡ παράστασις $\sqrt[3]{108}-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt[3]{4.3^3}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}.2^3}$, ἢ $3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{4}$.

2) Δεῖξον ὅτι $\sqrt{αϐ}$ περιέχεται μεταξὺ α καὶ ϐ.

Ἐὰν εἶνε $αϐ > ο$, θὰ δείξωμεν ὅτι τότε $\sqrt{αϐ}$ περιέχεται μεταξὺ α καὶ ϐ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $ϐ > α$, ὅτε $α < ϐ$, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἀνισότητος ἐπὶ α, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ ϐ, εὑρίσκομεν

$$αϐ > α^2 \text{ καὶ } αϐ < ϐ^2,$$

ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἀνισοτήτων τούτων, ἔχομεν

$$\sqrt{αϐ} > α \text{ καὶ } \sqrt{αϐ} < ϐ\cdot$$

ὥστε $\sqrt{αϐ}$ περιέχεααι μεταξὺ α καὶ ϐ. Ἵνα ἡ παράστασις $\sqrt{αϐ}$ εἶναι ἀριθμὸς πραγματικός, πρέπει νὰ εἶναι α καὶ ϐ ὁμόσημοι, πρέπει προσέτι νὰ εἶναι καὶ $\sqrt{αϐ} =|= ο$, ἤτοι α καὶ $ϐ =|= ο$, ἵνα $\sqrt{αϐ}$ περιέχηται μεταξῦ δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν· πρέπει ὅθεν νὰ ἔχωμεν $αϐ > ο$. Ἐὰν α καὶ ϐ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ τὴν θετικὴν ῥίζαν τοῦ αϐ, ἐὰν εἶναι ἀρνητικρὶ ἀληθεύει διὰ τὴν ἀρνητικήν.

3) Δεῖξον ὅτι $\sqrt{αϐ}$ μικρότερον τοῦ $\frac{α+ϐ}{2}$. (Ὑποτίθεται $α =|= ϐ$).

Προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $0 < (α-ϐ)^2$ τὸν ἀριθμὸν 4 αϐ, εὑρίσκομεν

$$4αϐ < (α+ϐ)^2,$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 4, λαμβάνομεν

$$αϐ < \frac{(α+ϐ)^2}{4},$$

καὶ ἐξάγοννες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, λαμβάνομεν

$$\sqrt{αϐ} < \frac{α+ϐ}{2}.$$

4) Ἐπαλήθευσον ὅτι τὸ πολυώνυμον $αχ^2 - ϐχ + γ$ μηδενίζεται ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἑκατέρου τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{ϐ+\sqrt{ϐ^2-4αγ}}{2α} \text{ καὶ } \frac{ϐ-\sqrt{ϐ^2-4αγ}}{2α}$$

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ πολυωνύμῳ τὸν χ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, ἔχομεν

$$\alpha.\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2-\beta.\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)+\gamma$$

ἢ $$\alpha.\frac{\beta^2+\beta^2-4\alpha\gamma+2\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{2\beta^2-4\alpha\gamma+2\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{4\alpha}-\frac{\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{\beta^2-2\alpha\gamma+\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}-\frac{\beta^2+\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{-2\alpha\gamma}{2\alpha}+\gamma \text{ καὶ } -\gamma+\gamma=o.$$

Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸν χ ὑπὸ ἀριθμοῦ $\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, ἔχομεν

$$\alpha.\left(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2-\beta.\left(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)+\gamma$$

ἢ $$\alpha.\frac{\beta^2+\beta^2-4\alpha\gamma-2\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2-\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{2\beta^2-4\alpha\gamma-2\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{4\alpha}-\frac{\beta^2-\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{\beta^2-2\alpha\gamma-\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}-\frac{\beta^2-\beta\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}+\gamma$$

ἢ $$\frac{-2\alpha\gamma}{2\alpha}+\gamma \text{ καὶ } -\gamma+\gamma=o.$$

5) Ἁπλοποίησον

$$\sqrt{8}.\sqrt{18},\quad \sqrt{32}.\sqrt{50},\quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}},$$

$$2\sqrt{\frac{3}{4}},\quad \frac{3}{\sqrt{108}}.\quad \frac{6}{\sqrt{4}}.$$

Ἡ ἄρρητος παράστασις $\sqrt{8}.\sqrt{18}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{8.18}$, ἢ τῇ $\sqrt{144}=$ $=12$. Ἡ παράστασις $\sqrt{32}.\sqrt{50}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{1600}=40$. Ἡ $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{\frac{8}{50}}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$. Ἡ $2\sqrt{\frac{3}{4}}$ ἰσοῦται τῇ $\sqrt{\frac{3}{4}.2^2}=$

$\sqrt{3}$. Καὶ τέλος ἡ παράστασις $\sqrt[3]{108}.\sqrt[6]{4}$ ἰσοῦται τῇ παραστάσει $\sqrt[3]{108}.\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{216}=6$.

6) Νὰ καταστῶσιν ὁμώνυμα καὶ να προστεθῶσιν τὰ κλάσματα

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{3\sqrt{2}},\quad \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων ἢ τῶν ἴσων των $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{18}}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$ εἶναι ἡ $\sqrt{18}$· ὅθεν ἵνα τρέψωμεν ταῦτα εἰς ὁμώνυμα πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ μὲν πρώτου ἐπὶ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$, τοῦ δευτέρου ἐπὶ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{18}}=1$ καὶ τοῦ τρίτου ἐπὶ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}},\quad \frac{1}{\sqrt{18}},\quad \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}},\quad \frac{1}{\sqrt{18}},\quad \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{18}}.$$

Τὸ δὲ ἄθροισμα $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}+\frac{1}{\sqrt{18}}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ εἶναι $\frac{7\sqrt{3}+1}{\sqrt{18}}$.

7) Ἐπαλήθευσον τὰς ἑπομένας ἰσότητας:

$$\frac{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-1}=\sqrt{\beta},\quad \sqrt{\frac{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}}=\frac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}\sqrt{\chi},$$

$$\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)+\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-1}=\sqrt{\beta}$, ἐπὶ $\sqrt{\alpha}-1$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\beta}$, ἥτις προφανῶς ἀληθεύει· ἐπειδὴ δὲ αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δοθείσῃ, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ δοθεῖσα ἀληθεύει.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἰσότητα $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}}=\dfrac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}\sqrt{\chi}$ τὴν παράστασιν $\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2$ διὰ τῆς ἴσης ταύτῃ $(\alpha+\chi)^2$ καὶ ἐξάγοντες ταύτην ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἔχομεν $\dfrac{\sqrt{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}}{\alpha+\chi}=\dfrac{\alpha-\chi}{\alpha+\chi}\sqrt{\chi}$ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\alpha+\chi$, εὑρίσκομεν $\sqrt{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}=(\alpha-\chi)\sqrt{\chi}$, εἰσάγοντες τὸν παράγοντα ἐντὸς τοῦ ριζικοῦ λαμβάνομεν

$$\sqrt{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}=\sqrt{\alpha^2\chi-2\alpha\chi^2+\chi^3}.$$

ἡ δὲ τελευταία αὕτη ἰσότης ἀληθεύει, ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα, ὡς ἰσοδύναμος ταύτῃ, ἀληθεύει.

Ἡ τρίτη ἰσότης εἶναι προφανής· διότι τὸ $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα $\alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}$ ὑψωμένον εἰς τὴν $\dfrac{3}{2}$, ὅπερ ὡς ἀμέσως φαίνεται δίδει τὸ ἄθροισμα $\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(6^2+\alpha^{\frac{2}{3}}6^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$. Ἑπομένως τὸ $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

Καὶ ἡ τετάρτη ἰσότης ἐπίσης καταδείκνυται ἀληθής, ὅπερ βλέπομεν ἀφ' οὗ τρέψωμεν τοὺς προσθετέους τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς εἰς τὸν αὐτὸν παρανομαστὴν ὁπότε, μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγάς, εὑρίσκομεν τὸ πρῶτον τοῦτο μέλος ἴσον πρὸς τὴν $\sqrt{2}$.

8) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν μονωνύμων :

$$36\alpha^8 6^2\gamma^4,\quad 9\chi^2\psi^6\gamma^8,\quad \frac{4}{9}\alpha^2 6^2,$$

$$\frac{5}{9}\alpha 6^3\times\frac{16}{5}\alpha^3 6,\qquad \frac{3}{5}\chi^3\psi^9:\frac{5}{3}\chi\psi^7.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μονωνύμου $36\alpha^8 6^2\gamma^4$ εἶναι $6\alpha^4 6\gamma^2$, ἡ τοῦ $9\chi^2\psi^6\gamma^8$ εἶναι $3\chi\psi^3\gamma^4$, ἡ τοῦ $\dfrac{4}{9}\alpha^2 6^2$ εἶναι $\dfrac{2}{3}\alpha 6$, ἡ τοῦ $\dfrac{5}{9}\alpha 6^3\times\dfrac{16}{5}\alpha^3 6=\dfrac{16}{9}\alpha^4 6^4$ εἶναι $\dfrac{4}{3}\alpha^2 6^2$ καὶ ἡ τοῦ μονωνύμου $\dfrac{3}{5}\chi^3\psi^9:\dfrac{5}{3}\chi\psi^7=\chi^2\psi^2$ εἶναι $\chi\psi$.

9) Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν πολυωνύμων.

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2, \qquad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2,$$

$$9\chi^2-30\chi+25, \qquad 25\chi^2-30\chi\psi+9\psi^2,$$

$$\frac{25}{9}\chi^2+2\chi+\frac{9}{25}, \qquad (\chi^2-1)(\chi^2+1)+2(\chi^2+1).$$

Ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ πολυωνύμου ($\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι (Ἄλγ. ἐδ. 65) $\alpha+\beta$, ἡ τοῦ $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ (ἐδ.66) εἶναι $\alpha-\beta$, ἡ τοῦ $9\chi^2-30\chi+25$ εἶναι $3\chi-5$, ἡ τοῦ $25\chi^2-30\chi\psi+9\psi^2$ εἶναι $5\chi-3\psi$, ἡ τοῦ $\frac{25}{9}\chi^2+2\chi+\frac{9}{25}=\left(\frac{5}{3}\chi+\frac{3}{5}\right)^2$ εἶναι $\frac{5}{3}\chi+\frac{3}{5}$.

Καὶ τελευταῖον ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῆς παραστάσεως $(\chi^2-1)(\chi^2+1)+2(\chi^2+1)$, ἥτις ἐκτελουμένων τῶν ἐν αὐτῇ σεσημειωμένων πράξεων καθίσταται $(\chi^4-1+2\chi^2+2$, ἢ $\chi^4+2\chi^2+1$, ἢ $(\chi^2+1)^2$, εἶναι χ^2+1.

ΜΕΡΟΣ Β΄.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ: 165).

1) Τὰ τριώνυμα

$$4\chi^2-8\chi+7,\quad 75\chi^2-60\chi+12,\quad 5\chi^2-7\chi-4,$$

νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\ (\sigma^2 \pm \tau^2)$.

Τὸ μὲν τριώνυμον $4\chi^2-8\chi+7$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $64-112=-48$, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 0, γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\ (\sigma^2+\tau^2)$ καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι

$$\sigma^2=\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \text{ καὶ } \tau^2=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2},$$

γράφομεν $4\left[\left(\chi+\frac{-8}{2.4}\right)^2+\frac{112-64}{64}\right]$, ἢ $4\left[\left(\chi-1\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

Τὸ δὲ τριώνυμον $75\chi^2-60\chi+12$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $3600-3600=0$, γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\sigma^2$, γράφεται δηλαδὴ $75\left(\chi+\frac{-60}{150}\right)^2$, ἢ $75\left(\chi-\frac{2}{5}\right)^2$. Καὶ τὸ τριώνυμον $5\chi^2-7\chi-4$, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $49-(-80)=129$, ἤτοι μεγαλυτέρα τοῦ 0, γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\ (\sigma^2-\tau^2)$ καὶ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν, ὅτι $\sigma^2=\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ $\tau^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ γράφομεν $5\left[\left(\chi+\frac{-7}{10}\right)^2-\frac{49-(-80)}{100}\right]$,

$$\text{ἢ } 5\left[\left(\chi-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{129}{100}\right].$$

2) Λῦσον τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις

$$3\ (\chi-3)\ (\chi-4)+21(\chi-1)-7=155,$$

$$7\chi^2-4375=0,\qquad -5\chi^2+140\chi=0.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν $3\ (\chi^2-7\chi+12)+21\chi-21-7=155$, ἢ $3\chi^2-21\chi+36+21\chi-21-7-155=0$, ἢ $3\chi^2-147=0$ καὶ $\chi^2-49=0$.

Ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-49=0$ εἶναι $\beta=0$, ἐπειδὴ δὲ α καὶ γ εἶναι ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι, ἔχει αὕτη δύο ἀντιθέτους ῥίζας, ἴσας δηλαδὴ ἀλλ' ἑτεροσήμους, αἵτινες εἶναι $\chi=\pm\sqrt{-\frac{-49}{1}}=\pm\sqrt{49}=\pm7$.

Ἡ ἐξίσωσις $7\chi^2-4375=0$, ἢ $\chi^2-625=0$ εἶναι ἠγμένη εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν καὶ ἔχει $\beta=0$, ἐπειδὴ δὲ α καὶ γ εἶναι ἀριθμοὶ ἑτερόσημοι, ἔχει δύο ἀντιθέτους ῥίζας, αἵτινες εἶναι

$$\chi=\pm\sqrt{-\frac{-625}{1}}=\pm\sqrt{625}=\pm25.$$

Ἡ ἐξίσωσις $-5\chi^2+140\chi=0$, ἢ $\chi^2-28\chi=0$, ἡ ἠγμένη ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν καὶ ἔχουσα $\gamma=0$, ἔχει δύο ῥίζας (Ἀλγ. ἐδ. 150), ὧν ἡ μὲν εἶναι $\chi=0$, ἡ δὲ $\chi=28$.

3) Λῦσον τὰς ἐξισώσεις $3\chi^2-5\chi=2$, $\chi^2-9=\frac{1}{6}(\chi+3)$, $(\chi-1)(\chi-2)=60$, $(\chi-1)^2=144$, $(3\chi+5)(3\chi-5)=9\chi$,

$$\frac{\chi}{\chi+1}+\frac{\chi+1}{\chi}+2=0,\qquad \frac{\alpha}{\chi-\alpha}+\frac{\chi-\beta}{\beta}=1,$$

$$\frac{7}{\chi-1}-\frac{1}{3\chi+2}=\frac{75}{7\chi+1},\qquad \frac{\alpha-\beta}{4(\chi-\alpha)}+\frac{\chi+2\beta}{\alpha+\beta}=2.$$

Ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2-5\chi=2$ ἰσοῦται τῇ $3\chi^2-5\chi-2=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{5\pm7}{6}$, ἤτοι ἡ μὲν 2, ἡ δ' ἑτέρα $-\frac{1}{3}$.

Ἐκτελοῦντες τὰς ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-9=\frac{1}{6}(\chi+3)$ σεσημειωμένας πράξεις εὑρίσκομεν $\chi^2-9=\frac{\chi}{6}+\frac{3}{6}$, ἀπαλλάσσοντες δὲ τῶν παρανομαστῶν, λαμβάνομεν $6\chi^2-54=\chi+3$, ἢ $6\chi^2-\chi-57=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{1\pm\sqrt{1+1368}}{12}=\frac{1\pm37}{12}$, ἤτοι $\frac{19}{6}$ καὶ -3.

Ἡ ἐξίσωσις $(\chi-1)(\chi-2)=60$ ἐκτελουμένων τῶν πράξεων γίνεται $\chi^2-3\chi-58=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{3\pm\sqrt{241}}{2}$.

Ἡ ἐξίσωσις $(\chi-1)^2=144$ ἰσοῦται τῇ $\chi^2+1-2\chi=144$, ἢ

$\chi^2-2\chi-143=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{2\pm\sqrt{4+572}}{2}=\frac{2\pm24}{2}$, ἤτοι ἡ μὲν 13, ἡ δ' ἑτέρα -11.

Ἡ ἐξίσωσις $(3\chi+5)(3\chi-5)=9\chi$ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων γίνεται $9\chi^2-9\chi-25=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι

$$\chi=\frac{9\pm\sqrt{981}}{18}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{109}{36}}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{\chi+1}+\frac{\chi+1}{\chi}+2=0$ ἐπὶ $\chi(\chi+1)$, εὑρίσκομεν $\chi^2+(\chi+1)^2+2\chi(\chi+1)=0$, μετὰ δὲ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς $4\chi^2+4\chi+1=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{8}=-\frac{1}{2}$.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{\alpha}{\chi-\alpha}+\frac{\chi-\beta}{\beta}=1$ ἐπὶ $\beta(\chi-\alpha)$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\alpha\beta+(\chi-\beta)(\chi-\alpha)=\beta(\chi-\alpha)$, ἢ $\alpha\beta+\chi^2-\alpha\chi-\beta\chi+\alpha\beta=\beta\chi-\alpha\beta$, ἢ $\chi^2-\alpha\chi-2\beta\chi+3\alpha\beta=0$, ἢ $\chi^2-(\alpha+2\beta)\chi+3\alpha\beta=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{\alpha+2\beta\pm\sqrt{(\alpha+2\beta)^2-12\alpha\beta}}{2}$, ἢ $\chi=\frac{\alpha+2\beta\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta^2-8\alpha\beta}}{2}$.

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς ἐν τῇ ἐξισώσει $\frac{7}{\chi-1}-\frac{1}{3\chi+2}=\frac{75}{7\chi+1}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(147\chi^2+119\chi+14)-(7\chi^2-6\chi-1)=225\chi^2-75\chi-150$, ἢ $-85\chi^2+200\chi+165=0$, ἢ $17\chi^2-40\chi-33=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\frac{40\pm\sqrt{1600+2244}}{34}=\frac{40\pm62}{34}$ ἤτοι ἡ μὲν μία εἶναι 3 ἡ δ' ἑτέρα $-\frac{11}{17}$.

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha-\beta}{4(\chi-\alpha)}+\frac{\chi+2\beta}{\alpha+\beta}=2$, ἀφ' οὗ ἀπαλλαγῇ τῶν παρονομαστῶν καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις, καθίσταται $4\chi^2-12\alpha\chi+9\alpha^2-\beta^2=0$· αἱ δὲ ῥίζαι ταύτης εἶναι $\chi=\frac{12\alpha\pm\sqrt{(12\alpha)^2-16(9\alpha^2-\beta^2)}}{8}$, ἢ $\chi = \frac{12\alpha \pm \sqrt{16\beta^2}}{8} = \frac{12\alpha \pm 4\beta}{8}$, ἤτοι ἡ μὲν μία εἶναι $\frac{3\alpha+\beta}{2}$, ἡ δ' ἑτέρα $\frac{3\alpha-\beta}{2}$.

4) Δεῖξον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(\alpha\chi+\beta)^2-(\gamma\chi+\delta)^2=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικάς.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐκτελουμένων τῶν πράξεων καθίσταται $(\alpha^2-\gamma^2)\chi^2+(2\alpha\beta-2\gamma\delta)\chi+(\beta^2-\delta^2)=0$· ἐν ταύτῃ δὲ ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $(2\alpha\beta-2\gamma\delta)^2-4(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\delta^2)$, ἢ $4(\alpha^2\beta^2+$ $+4\gamma^2\delta^2-8\alpha\beta\gamma\delta)-(4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\delta^2-4\beta^2\gamma^2+4\gamma^2\delta^2)$, ἢ $4\alpha^2\delta^2+$ $+4\beta^2\gamma^2-8\alpha\beta\gamma\delta$, ἢ $(2\alpha\delta-2\beta\gamma)^2$.

Ἡ δὲ παράστασις αὕτη παριστᾷ ἀριθμὸν θετικὸν (διότι ἡ διαφορὰ $2\alpha\delta-2\beta\gamma$, εἴτε θετικὴ εἴτε ἀρνητικὴ εἶναι, εἰς τὸ τετράγωνον ὑψουμένη καθίσταται θετική)· ἄρα (Ἀλγ. ἐδ. 148, 3) ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει δύο ῥίζας πραγματικάς.

5) Δεῖξον ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{\chi+\pi}+\frac{\chi+\pi}{\chi}+2=0$ ἔχει ῥίζας ἴσας οἱουδήποτε ὄντος τοῦ π.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀπαλλασσομένη ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καθίσταται $\chi^2+(\chi+\pi)^2+2\chi(\chi+\pi)=0$ καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς καθίσταται $4\chi^2+4\pi\chi+\pi^2=0$· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι $(4\pi)^2-(4.4\pi^2)=(4\pi)^2-(4\pi)^2$ ἥτις οἱουδήποτε ὄντος τοῦ π καθίσταται ἴση τῷ μηδενί· ἄρα (Ἀλγ. ἐδ. 148, 2) ἔχει ῥίζας ἴσας.

6) Σχημάτισον τὰς ἀξιώσεις $2^{ου}$ βαθμοῦ, ὧν αἱ ῥίζαι εἶναι 4 καὶ -5, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ καὶ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ἡ ἐξίσωσις $2^{ου}$ βαθμοῦ ἡ ἔχουσα ῥίζας 4 καὶ 5 γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\chi-4)(\chi-5)=0$, διαιροῦντες δ' ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης δι' α ἔχομεν $(\chi-4)(\chi-5)=0$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις ἔχομεν $\chi^2-9\chi+20=0$.

Ἡ ἐξίσωσις $2^{ου}$ βαθμοῦ ἡ ἔχουσα ῥίζας 4 καὶ -5 γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\chi-4)(\chi+5)=0$, διαιροῦντες δ' ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης δι' α ἔχομεν $(\chi-4)(\chi+5)=0$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις ἔχομεν $\chi^2+\chi-20=0$.

Ἡ ἐξίσωσις $2^{ου}$ βαθμοῦ ἡ ἔχουσα ῥίζας $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ καὶ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\left(\chi-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\chi-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$, διαιροῦντες δ' ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης δι' α ἔχομεν $\left(\chi - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ $\left(\chi - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις ἔχομεν $\chi^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\chi - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\chi\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ εἶναι γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ἔχομεν

$$\chi^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\chi - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\chi + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 0, \text{ ἢ } \chi^2 -$$

$$-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\chi + \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = 0, \text{ ἢ } \chi^2 - \chi - 1 = 0.$$

7) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων $\chi^2 - 8\chi + 15 = 0$, $24\chi^2 + 4\chi - 15 = 0$.

Τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 8\chi + 15 = 0$ τὸ ἄθροισμα $-\frac{6}{\alpha}$ εἶναι 8 καὶ τὸ γινόμενον $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι 15· τῆς δὲ ἐξισώσεως $24\chi^2 + 4\chi - 15 = 0$ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν $-\frac{6}{\alpha}$ εἶναι $-\frac{1}{6}$ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι $-\frac{5}{8}$.

8) $2\chi^2 + 8\chi$ εἶναι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ ἐχούσης ρίζας ἴσας. Εὑρεῖν αὐτὰς καὶ τὸν τρίτον τῆς ἐξισώσεως ὅρον.

Ἵνα αἱ ρίζαι εἶναι ἴσαι πρέπει ἡ παράστασις $6^2 - 4\alpha\gamma$ νὰ ἰσῶται τῷ μηδενί, ἤτοι νὰ εἶναι $64 - 8\gamma = 0$, ἢ $64 = 8\gamma$, ἐξ ἧς $\gamma = 8$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ ἡ ἔχουσα ρίζας ἴσας, καὶ τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι $2\chi^2 + 8\chi$, εἶναι ἡ $2\chi^2 + 8\chi + 8 = 0$.

9) Μερίσαι τὸν 625 εἰς δύο μέρη ὧν τὸ γινόμενον νὰ εἶναι 3100.

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας ἄθροισμα 625 καὶ γινόμενον 3100, οἱ δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι (Ἀλγ. ἐδ. 153) εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 625\chi + 3100 = 0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν $\rho = 620$ καὶ $\rho' = 5$· ὥστε τὰ δύο μέρη εἶναι τὸ μὲν 620 τὸ δὲ 5.

10) Εὑρεῖν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων $\chi^2 - 7\chi + 9 = 0$, $\chi^2 - 12\chi - 8 = 0$, $\chi^2 + 12\chi + 8 = 0$, $\chi^2 + 12\chi - 8 = 0$, πρὶν ἢ λυθῶσιν.

Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 7\chi + 9 = 0$ ἔχει ρίζας διακεκριμένας, διότι

$\beta^2-4\alpha\gamma=49-36$ εἶναι θετικόν. Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν $\frac{\gamma}{\alpha}=9$ εἶναι θετικόν, ἄρα αἱ ῥίζαι εἶναι ὁμόσημοι· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $-\frac{\beta}{\alpha}=7$ εἶναι θετικόν, αἱ ῥίζαι εἶναι θετικαί.

Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-12\chi-8=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς διακεκριμένας, διότι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι. Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν -8 εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα ἡ μία ῥίζα εἶναι θετική, ἡ ἑτέρα ἀρνητική. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 12 εἶναι θετικόν, ἕπεται ὅτι ἡ θετικὴ ῥίζα εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀπολύτως. Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+12\chi+8=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς διακεκριμένας, διότι $\beta^2-4\alpha\gamma=144-32$ εἶναι θετικόν. Τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν 8 εἶναι θετικόν, ἄρα αἱ ῥίζαι εἶναι ὁμόσημοι· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα -12 εἶναι ἀρνητικόν, αἱ δύο ῥίζαι εἶναι ἀρνητικαί.

Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+12\chi-8=0$ ἔχει ῥίζας πραγματικὰς διακεκριμένας, διότι α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι. Τὸ γινόμενον -8 εἶναι ἀρνητικόν· ἄρα ἡ μία ῥίζα εἶναι θετική, ἡ ἑτέρα ἀρνητική· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν -12 εἶναι ἀρνητικόν, ἡ ἀρνητικὴ ῥίζα εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀπολύτως.

11) Δεῖξον ὅτι τὸ τριώνυμον $\chi^2-\chi(\beta+\gamma)+\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2$ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τοῦτο.

Ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ ἐν τῷ τριωνύμῳ τούτῳ εἶναι $(\beta+\gamma)^2-(4\beta^2-4\beta\gamma+4\gamma^2)$, ἢ $-3\beta^2-3\gamma^2+6\beta\gamma$, ἢ $3(-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma)$· ἡ δὲ παράστασις αὕτη παριστᾷ ἀρνητικὸν ἀριθμόν. διότι εἶναι γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma$, ὅστις εἶναι ἀρνητικὸς ὡς ἀντίθετος τοῦ θετικοῦ $\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma=(\beta-\gamma)^2$· ἄρα (Ἀλγ. 147, α΄) τὸ τριώνυμον δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἐπειδὴ δὲ $\alpha=1$ τὸ τριώνυμον δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Εἶναι δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο

$$\left(\chi+\frac{-(\beta+\gamma)}{2}\right)^2+\frac{(4\beta^2-4\beta\gamma+4\gamma^2)-(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)}{4},$$

$$\text{ἢ}\ \left(\chi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+\frac{3(\beta-\gamma)^2}{4}.$$

12) Τὸ τριώνυμον $7\chi^2-44\chi+12$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς παράγοντας καὶ νὰ ἐξετασθῇ διὰ τίνας τιμὰς τοῦ χ εἶναι θετικὸν καὶ διὰ τίνας ἀρνητικόν.

Ἐξισοῦντες τὸ τριώνυμον πρὸς τὸ 0 καὶ λύοντες τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 6 καὶ $\frac{2}{7}$. Ἡ παράστασις β^2-

$-4\alpha\gamma$ εἶναί 1600, ἤτοι ἀριθμὸς μὴ ἀρνητικός, ἄρα τὸ τριώνυμον γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\chi-\rho)(\chi-\rho')$· καὶ θέττοντες ἀντὶ ρ καὶ ρ′ τὰς εὑρεθείσας ρίζας ἔχομεν τὸ τριώνυμον ἀναλελυμένον εἰς τοὺς παράγοντας $7\left(\chi-6\right)\left(\chi-\frac{2}{7}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $7\chi^2-44\chi+12=0$ εἶναι πααγματικαὶ καὶ ἄνισοι, τὸ τριώνυμον $7\chi^2-44\chi+12$ διὰ πᾶσαν μὲν τιμὴν τοῦ χ ἐκτὸς τῶν ριζῶν 6 καὶ $\frac{2}{7}$ πίπτουσαν ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α καὶ ἐπειδὴ τὸ α ἐνταῦθα εἶναι θετικὸν καὶ τὸ τριώνυμον εἶναι θετικόν· διὰ πᾶσαν δὲ τιμὴν τοῦ χ μεταξὺ τῶν ριζῶν πίπτουσαν ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α καὶ ἐπειδὴ τὸ ἀντίθετον τοῦ α σημεῖον εἶναι ἐνταῦθα ἀρνητικὸν καὶ τὸ τριώνυμον $7\chi^2-44\chi+12$ εἶναι ἀρνητικόν.

13) Νὰ δειχθῇ ἡ ταὐτότης $\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}=\frac{1}{\chi-\rho}+\frac{1}{\chi-\rho'}$, ἔνθα ρ καὶ ρ′ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha(\chi-\rho)(\chi-\rho')$· ἔχομεν ὅθεν $\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha(\chi-\rho)(\chi-\rho')}=\frac{1}{\chi-\rho}+\frac{1}{\chi-\rho'}$,

ἢ $\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha(\chi-\rho)(\chi-\rho')}=\frac{(\chi-\rho)+(\chi-\rho')}{(\chi-\rho)(\chi-\rho')}$, ἢ $\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha}=(\chi-\rho)+(\chi-\rho')$.

Ἵνα νῦν δείξωμεν τὴν ταυτότητα τῶν δύο δοθεισῶν παραστάσεων, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος, τῆς ἰσοδυνάμου τῇ δοθείσῃ. ἰσοῦται τῷ πρώτῳ· τῳόντι, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῷ δευτέρῳ μέλει αὐτῆς τὰ γράμματα ρ καὶ ρ′ ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν $\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καὶ $\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ οὓς ταῦτα παριστῶσι, καθίσταται $\chi+\frac{\beta}{2\alpha}+\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=2\chi+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2\alpha\chi+\beta}{\alpha}$.

14) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ἴσα πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{9}{2}$.

Καλοῦντες χ καὶ ψ τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς ἔχομεν

$$\chi+\psi=\frac{9}{2} \qquad \chi\psi=\frac{9}{2}.$$

Οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ εἶναι αἱ ρίζαι (Ἀλγ. ἐδ. 153) τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\frac{9}{2}\chi+\frac{9}{2}=0$, ἢ $2\chi^2-9\chi+9=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν

$\chi = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4} = \frac{9 \pm 3}{4}$· οἱ ζητούμενοι ὅθεν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3 καὶ $1\frac{1}{2}$.

15) Γνωστοῦ ὄντως ὅτι ἡ ἐξίσωσις $5\chi^2 - 5\chi^3 + 11\chi - 2 = 0$ ἔχει τὴν ρίζαν 2, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἄλλαι ρίζαι.

Διαιροῦμεν τὸ πολυώνυμον $5\chi^2 - 5\chi^3 + 11\chi - 2$ διὰ $\chi - 2$· διότι $\chi = 2$ μηδενίζει τὸ πολυώνυμον, ἄρα (Ἄλγ. ἐδ. 78) εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi - 2$. Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὸ πηλίκον $-5\chi^2 - 5\chi + 1$ πρὸς τὸ μηδέν, προκύπτει δευτεροβαθμία ἐξίσωσις, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι $\frac{-5+\sqrt{45}}{10}$ καὶ $\frac{-5-\sqrt{45}}{10}$.

16) Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῶν α, β, γ.

Ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $\left(-\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) - \left(-\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$, ἢ $\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς διαφαρᾶς ταύτης εἶναι $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{\alpha^2}$.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 180).

1) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις:

α') $\chi - \sqrt{4-\chi^2} = 1$.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ριζικὸν εἰς τὸ ἕτερον τῶν μελῶν γράφομεν $-\sqrt{4-\chi^2} = 1 - \chi$. Ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα, ἔχομεν $\sqrt{4-\chi^2} = \chi - 1$ καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $4 - \chi^2 = \chi^2 + 1 - 2\chi$, ἢ $2\chi^2 - 2\chi - 3 = 0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι $\frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$.

β') $\sqrt{2\chi+5} = 4 - \chi$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2\chi + 5 = 16 + \chi^2 - 8\chi$, ἢ $\chi^2 - 10\chi + 11 = 0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι $\chi = \frac{10 \pm \sqrt{56}}{2} = 5 \pm \sqrt{14}$, τὰς ὁποίας ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν βλέπομεν ὅτι ἡ $5 - \sqrt{14}$ ἁρμόζει εἰς ταύτην, ἡ δὲ $5 + \sqrt{14}$ εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς $-\sqrt{2\chi+5} = 4 - \chi$.

γ') $3\chi + \sqrt{6\chi+10} = 35$.

Γράφομεν $\sqrt{6\chi+10} = 35 - 3\chi$, ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $6\chi+10=1225+9\chi^2-210\chi$, ἢ $9\chi^2-216\chi+$ $+1215=0$, ἢ $\chi^2-24\chi+135=0$.

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι 9 καὶ 15. Ἀντικαθιστῶντες ταύτας εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν βλέπομεν ὅτι μόνον ἡ 9 ἁρμόζει εἰς ταύτην· ἡ δὲ 15 εἰς τὴν συζυγῆ $3\chi-\sqrt{6\chi+10}=35$.

δ') $$\sqrt{\chi-9}-\sqrt{\chi-18}=1.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν $\chi-9+\chi-18-$ $-2\sqrt{(\chi-9)(\chi-18)}=1$, ἢ $2\chi-28=2\sqrt{\chi^2-27\chi+162}$, ἢ $\chi-14=$ $=\sqrt{\chi^2-27\chi+162}$·

ὑψοῦντες καὶ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν χ^2+196- $-28\chi=\chi^2-27\chi+162$, ἢ $196-162=28\chi-27\chi$, ἐξ ἧς καὶ $\chi=34$.

ε') $$\chi+\sqrt{\chi^2+16}=\frac{40}{\sqrt{\chi^2+16}}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\sqrt{\chi^2+16}$, εὑρίσκομεν $\chi\sqrt{\chi^2+16}+\chi^2+16=40$, ἢ $\chi\sqrt{\chi^2+16}=24-\chi^2$· ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν $\chi^4+16\chi^2=576+$ $+\chi^4-48\chi^2$, ἢ $64\chi^2-576=0$ καὶ διαιροῦντες διὰ 64 εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-9=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\chi=\pm\sqrt{9}=\pm3$.

ζ') $$\frac{1}{\sqrt{2+\chi}-\sqrt{2-\chi}}+\frac{1}{\sqrt{2+\chi}+\sqrt{2-\chi}}=1.$$

Προσθέτοντες τὰ κλάσματα τοῦ πρώτου μέλους, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\frac{2\sqrt{2+\chi}}{2\chi}=1$, ἢ $\frac{\sqrt{2+\chi}}{\chi}=1$, ἢ $\sqrt{2+\chi}=\chi$ καὶ ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2+\chi=\chi^2$, ἢ $\chi^2-\chi-2=0$, ἥτις λυομένη δίδει τὰς ῥίζας 2 καὶ -1.

η') $$\sqrt{2\chi+3}+\sqrt{5\chi+1}=\sqrt{12\chi+13}.$$

Τετραγωνίζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2\chi+3+5\chi+$ $+1+2\sqrt{(2\chi+3)(5\chi+1)}=12\chi+13$, ἢ $2\sqrt{10\chi^2+17\chi+3}=5\chi+9$· τετραγωνίζοντες καὶ πάλιν, εὑρίσκομεν $40\chi^2+68\chi+12=25\chi^2+$ $+81+90\chi$, ἢ $15\chi^2-22\chi-69=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι 3 καὶ $-\frac{23}{15}$, ἐξ ὧν μόνον ἡ 3 ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

2) Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις : $\chi^4-1684\chi^2+1024=0$, $81\chi^4-$ $-72\chi^2+16=0$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\psi$, ἐξ οὗ $\chi^4=\psi^2$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται ψ^2- $-1684\psi+1024=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\psi=\frac{1684\pm\sqrt{2835856-4096}}{2}$

$=842\pm\sqrt{\frac{2831760}{4}}=842\pm\sqrt{707940}=842\pm18\sqrt{2185}$ ὅθεν $\chi=$
$=\pm\sqrt{842\pm18\sqrt{2185}}$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\psi$, ἐξ οὗ $\chi^4=\psi^2$, ἡ ἐξίσωσις $81\chi^4-72\chi^2+16=$
$=0$ γίνεται $81\psi^2-72\psi+16=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\psi=$
$=\frac{72\pm\sqrt{5184-5184}}{162}=\frac{4}{9}$· ὅθεν $\chi=\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$·

3) Λῦσον τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3+\frac{1}{\chi^3}=6\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)$·

Λαμβάνομεν ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$· ὅθεν $\psi^3=$
$=\chi^3+3\chi^2\frac{1}{\chi}+3\chi\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\chi^3}$, ἢ $\psi^3=\chi^3+3\chi+\frac{3}{\chi}+\frac{1}{\chi^3}$, ἢ $\psi^3=\chi^3+$
$+\frac{1}{\chi^3}+3\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)$· ἐπειδὴ δὲ ἐτέθη $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$, ἔχομεν $\psi^3=$
$=\chi^3+\frac{1}{\chi^3}+3\psi$, ἢ $\psi^3-3\psi=\chi^3+\frac{1}{\chi^3}$. Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^3-3\psi=6\psi$, ἢ $\psi^3-9\psi=0$. Τὸ διώνυμον $\psi^3-9\psi$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\psi-3$, διότι ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῷ ἀντὶ ψ ὁ 3 μηδενίζεται· διαιροῦντες διὰ $\psi-3$ εὑρίσκομεν πηλίκον $\psi^2+3\psi$, ὅπερ ἐξισοῦντες πρὸς τὸ μηδὲν λαμβάνομεν ἐξίσωσιν 2ου βαθμοῦ, ἥτις λυομένη δίδει τὰς ῥίζας 0 καὶ -3.

Ἔχομεν ἄρα $3=\chi+\frac{1}{\chi}$, ἢ $\chi^2-3\chi+1=0$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$· καὶ
$-3=\chi+\frac{1}{\chi}$, ἢ $\chi^2+3\chi+1=0$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

4) Δεῖξον ὅτι ὁ ἐν ἐδ. 161 μετασχηματισμὸς διὰ τὰς ῥίζας τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha\chi^4+6\chi^2+\gamma=0$ εἶναι δυνατὸς ἂν αγ εἶναι τετράγωνον τέλειον,

Ἐὰν ἡ ἐν ἐδ. 161 τεθεῖσα ἰσότης $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\chi}\pm\sqrt{\psi}$ εἶναι δυνατή, θὰ ἔχωμεν $\chi+\psi=A$, $\chi\psi=\frac{B}{4}$, δηλαδὴ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ χ, ψ εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\omega^2-A\omega+\frac{B}{4}=0. \qquad (1)$$

Ἐν τῇ ἐξισώσει ταύτῃ ἔχομεν $A=-\frac{6}{2}$, $B=\frac{6^2}{4}-\alpha\gamma$· ὅθεν

$A^2-B=\frac{6^2}{4}-\frac{6^2}{2}+\alpha\gamma=\alpha\gamma$. Ἀλλ', ὡς ἐν ἐδ. 161 ἐδείχθη, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) ὦσιν ἀριθμοὶ σύμμετροι, πρέπει ἡ παράστασις A^2-B, ἢ ἡ ἴση ταύτης $\alpha\gamma$, νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

5) Λῦσον τὴν ἐξίσωσιν $8\chi^6-215\chi^3-27=0$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^3=\psi$, ἐξ οὗ $\chi^6=\psi^2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $8\psi^2-215\psi-27=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι 27 καὶ $-\frac{1}{8}$. ἐπειδὴ δὲ ἐτέθη

$\psi=\chi^3$, ἔχομεν $\chi=\pm 3$ ἢ $\chi=\pm\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\mp\frac{1}{2}$.

6) Λῦσον τὴν ἐξίσωσιν: $(\chi^2-7\chi)^2-13(\chi^2-7\chi+18)=-270$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2-7\chi=\psi$, ἐξ οὗ $(\chi^2-7\chi)^2=\psi^2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $\psi^3-13(\psi+18)+270=0$, ἢ $\psi^2-13\psi+36=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι $\psi=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$, ἤτοι 9 καὶ 4· ἐπειδὴ δὲ ἐτέθη $\chi^2-7\chi=\psi$, ἔχομεν $\chi^2-7\chi-9=0$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{7\pm\sqrt{85}}{2}$ καὶ $\chi^2-7\chi-4=0$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.

7) Λῦσον τὴν ἐξίσωσιν $8\chi^4+14\chi^3-69\chi^2+14\chi+8=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἐν γένει τὴν ῥίζαν 2· ἵνα λύσωμεν αὐτήν, διαιροῦμεν διὰ χ^2 καὶ συνάπτομεν τοὺς ὅρους τοὺς ἐξ ἴσου τῶν ἄκρων ἀπέχοντας.

$$8.\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+14\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-69=0. \qquad (1)$$

Θὰ λάβωμεν ὡς βοηθητικὸν ἄγνωστον $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$ ὅθεν $\psi^2-2=\chi^2+\frac{1}{\chi^2}$.

Ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ (1) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν 2ου βαθμοῦ $8(\psi^2-2)+14\ \psi-69=0$ ἢ $8\ \psi^2+14\psi-85=0$, ἥτις ἔχει τὰς ῥίζας $\frac{5}{2}$ καὶ $-\frac{17}{4}$. Εἰς μὲν τὴν $\frac{5}{2}$ ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\frac{5}{2}=\chi+\frac{1}{\chi}$ ἢ $\chi^2-\frac{5}{2}\chi+1=0$ ὁριζόμεναι δύο τιμαὶ τοῦ χ, $\chi=2$ καὶ $\chi=\frac{1}{2}$, εἰς δὲ τὴν $-\frac{17}{4}$ ἀντιστοιχοῦσιν αἱ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $-\frac{17}{4}=\chi+\frac{1}{\chi}$ ἢ $\chi^2+\frac{17}{4}\chi+1=0$ ὁριζόμεναι τιμαὶ τοῦ χ, $\chi=-\frac{1}{4}$ καὶ $\chi=-4$.

8) Λῦσον τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=12 \qquad \chi^3+\psi^3=576.$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν $\chi^3+\psi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=1728$, ἐξ ἧς ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $3\chi^2\psi+3\chi\psi^3=1728-576$ ἢ $3\chi\psi(\chi+\psi)=1152$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄρθροισμα $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ 12, λαμβάνομεν $36\chi\psi=1152$ ἐξ ἧς $\chi\psi=\frac{1152}{36}=32$.

Ἔχομεν ἄρα τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν χ καὶ ψ, ἑπομένως οὗτοι εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-12\chi+32=0$.

Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{12\pm\sqrt{144-128}}{2}=\frac{12\pm4}{2}$, ἤτοι ἡ μὲν μία 8 ἡ δ' ἑτέρα 4.

Λῦσον τὸ σύστημα

$$\chi+\psi=2 \qquad \chi^4+\psi^4=34$$

Ἀντὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως γράφομεν $\chi+\psi=\alpha$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν βοηθητικὸν ἄγνωστον τὸν β καὶ θέσωμεν $\chi-\psi=\beta$, θὰ ἔχωμεν (Ἀλγ. ἐδ. 117, 1ον) $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Αἱ τιμαὶ αὗται ἀντικαθιστώμεναι ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^4+\psi^4=34$ δίδουσι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^4+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^4=34$ ἤ, μετὰ τὰς πράξεις $\alpha^4+6\alpha^2\beta^2+\beta^4=272$.

Ἀντικαθιστῶντες α διὰ τῆς τιμῆς αὐτοῦ 2, καθίσταται τέλος $\beta^4+24\beta^2-256=0$.

Ἐὰν λύσωμεν τὴν διτετράγωνον ταύτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν μίαν μόνην παραδεκτὴν τιμὴν $\beta=2\sqrt{2}$. Ὅθεν $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$.

9. Λῦσον τὸ σύστημα $\chi\psi=\alpha$, $\psi\omega=\beta$, $\omega\chi=\gamma$. Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$\chi\psi+\psi\omega+\omega\chi=\alpha+\beta+\gamma \qquad (1)$$

ἢ

$$(\chi+\omega)\psi+\omega\chi=\alpha+\beta+\gamma,$$

θέτοντες δ' ἐν ταύτῃ τὰς τιμὰς $\chi=\frac{\alpha}{\psi}$ καὶ $\omega=\frac{\beta}{\psi}$, ἃς εὑρίσκομεν ἐκ τῶν δοθεισῶν, ἔχομεν $\left(\frac{\alpha+\beta}{\psi}\right)\psi+\frac{\alpha\beta}{\psi^2}=\alpha+\beta+\gamma$, ἢ $(\alpha+\beta)\psi^2+$ $+\alpha\beta=(\alpha+\beta+\gamma)\psi^2$, ἢ $(\alpha+\beta+\gamma)\psi^2-(\alpha+\beta)\psi=\alpha\beta$, ἢ $\gamma\psi^2-$ $-\alpha\beta=0$, ἐξ ἧς $\psi=\pm\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}$.

Ἡ (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ $\chi\psi+(\psi+\chi)\omega=\alpha+\beta+\gamma$, ἀντικαθιστῶντες δ' ἐν ταύτῃ τὰς τιμὰς $\chi=\frac{\gamma}{\omega}$ καὶ $\psi=\frac{\beta}{\omega}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $\alpha\omega^2-\beta\gamma=0$, ἐξ ἧς $\omega=\pm\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}$.

Προσέτι ἡ (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ $\psi\omega+(\psi+\omega)\chi=\alpha+\beta+\gamma$, ἐν ᾗ θέτοντες τὰς τιμὰς $\psi=\frac{\alpha}{\chi}$ καὶ $\omega=\frac{\gamma}{\chi}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις $\beta\chi^2-\alpha\gamma=0$, ἐξ ἧς $\chi=\pm\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}$.

10) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ νὰ σχηματισθῇ α') ἡ ἐξίσωσις ἥτις ἔχει ῥίζας διπλασίας τῶν ῥιζῶν αὐτῆς· β') ἡ ἐξίσωσις ἥτις ἔχει ῥίζας τὰ τετράγωνα τῶν ῥιζῶν αὐτῆς.

Αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἀξιώσεως εἶναι $\frac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{2}$, ἄρα αἱ διπλάσιαι τούτων εἶναι $-\pi\pm\sqrt{\pi^2-4\kappa}$· ἡ δ' ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα τὰς ῥίζας ταύτας γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $(\chi-(-\pi+\sqrt{\pi^2-4\kappa}))$. $(\chi-(-\pi-\sqrt{\pi^2-4\kappa}))=0$ ἢ $(\chi+\pi-\sqrt{\pi^2-4\kappa})(\chi+\pi+$ $+\sqrt{\pi^2-4\kappa})=0$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων αὐτῶν, ὅθεν $(\chi+\pi)^2-$ $-(\pi^2-4\kappa)=0$, ἢ $\chi^2+2\pi\chi+\pi^2-\pi^2+4\kappa=0$ καὶ $\chi^2+2\pi\chi+$ $+4\kappa=0$· ὥστε ἡ ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα ῥίζας διπλασίας τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης εἶναι ἡ $\chi^2+2\pi\chi+4\kappa=0$.

Τὰ τετράγωνα τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$\frac{\pi^2+\pi^2-4\kappa-2\pi\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{4}=\frac{\pi^2-2\kappa-\pi\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{2}$$

$$\text{καὶ}\ \frac{\pi^2+\pi^2-4\kappa+2\pi\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{4}=\frac{\pi^2-2\kappa+\pi\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{2}.$$

ἡ δ' ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα τὰς ῥίζας ταύτας γράφεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi-\frac{\pi^2-2\varkappa-\pi\sqrt{\pi^2-4\varkappa}}{2}\right)\left(-\chi\frac{\pi^2-2\varkappa+\pi\sqrt{\pi^2-\varkappa^4}}{2}\right)=0,$$

ἤ $(2\chi-\pi^2+2\varkappa+\pi\sqrt{\pi^2-4\varkappa})$ $(2\chi-\pi^2+2\varkappa-\pi\sqrt{\pi^2-4\varkappa})=0$, ἤ $(2\chi-\pi^2+2\varkappa)^2-(\pi^4-4\varkappa\pi^2)=0$, καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα ῥίζας τὰ τετράγωνα τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης εἶναι ἡ $\chi^2+(2\varkappa-\pi^2)\chi+\varkappa^2=0$.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 191)

1) Κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει διαστάσεις 82μ, 5 καὶ 61 μ, 7. Εὑρεῖν τὴν πλευρὰν τετραγώνου ἰσοδυνάμου τῷ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστω χ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου, θὰ ἔχωμεν $\chi^2=(82,5)\ (61,7)=5090,25$, ἢ $\chi^2-5090,25=0$, ἐξ ἧς $\chi=$ $=\pm\sqrt{-\frac{-5090,25}{1}}=\pm\sqrt{5090,25}=\pm71,34...$

Ἐκ τῶν λύσεων τούτων ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητουμένου μόνον ἡ 71,34 εἶναι παραδεκτή, ἡ δὲ $-71,34$ ἀπορρίπτεται.

2) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς διαφέροντας κατὰ 2 καὶ ἔχοντας γινόμενον 1088.

Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα $\chi-\psi=2$ $\chi\psi=1088$

Τετραγωνίζοντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi^2-2\chi\psi+$ $+\psi^2=4$ διπλασιάζοντες τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν

$$2\chi\psi=2176 \qquad (1)$$

προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη, ἔχομεν χ^2+ $+\psi^2=2180$ προσθέτοντες τὴν (1) εἰς ταύτην ἔχομεν $(\chi+\psi)^2=$ $=4356$. Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα $(\chi+\psi)^2=4356$, $\chi\psi=1088$, ὅπερ ἀναλύεται εἰς δύο ἄλλα:

$$\left.\begin{matrix}\chi+\psi=66\\ \chi\psi=1080\end{matrix}\right\}(2)\qquad\left.\begin{matrix}\chi+\psi=-66\\ \chi\psi=1088\end{matrix}\right\}(3)$$

Τὸ σύστημα (2) δίδει τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, αἵτινες εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-66\chi+1088=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 34 καὶ 32. Τὸ σύστημα (3) δίδει τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, αἵτινες εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+66\chi+1088=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν -32 καὶ -34.

3) Εὑρεῖν κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{5}{7}$, οὗ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων νὰ εἶναι 10115.

Ἔστω $\frac{\chi}{\psi}$ τὸ ζητούμενον κλάσμα, θὰ εἶναι $\frac{\chi}{\psi}=\frac{5}{7}$ καὶ $\chi\psi=$ $=10115$, ἢ $7\chi=5\psi$ καὶ $\chi\psi=10115$.

Λύοντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄγνωστον χ, εὑρίσκομεν $\chi = \frac{5}{7}\psi$· θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἔχομεν $\frac{5}{7}\psi^2 = 10115$ ἢ $5\psi^2 = 70805$ ἢ $\psi^2 = 14161$ καὶ $\psi = \sqrt{14161} = \pm 119$· θέτοντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ψ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi\psi = 10115$, εὑρίσκομεν $\pm 119\chi = 10115$ καὶ $\chi = \frac{10115}{\pm 119} = \pm 85$. Τὸ ζητοθμενον ὅθεν κλάσμα εἶναι $\frac{85}{119}$.

4) Τίς ἡ βάσις τοῦ συστήματος ἀριθμήσεως ἐν τῷ ὁποίῳ ὁ ἀριθμὸς 496 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος θὰ ἐγράφετο 354;

Ἔστω χ ἡ ἄγνωστος βάσις. Ἀνακύοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων κατὰ τὴν βάσιν χ, βλέπομεν ὅτι περιέχει **3** μονάδας γ΄ τάξεως, 5 μονάδας β΄ καὶ 4 μονάδας α΄, ἑπομένως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄρθροισμα $3\chi^2 + 5\chi + 4$.

Κατὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἤτοι κατὰ τὴν βάσιν 10, τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ εἶναι 496 καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα ἀθροίσματα εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσα, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $3\chi^2 + 5\chi + 4 = 496$ ἢ $3\chi^2 + 5\chi - 492 = 0$.

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι $\chi = \frac{-6 \pm \sqrt{25 + 5904}}{6} = \frac{-5 \pm 77}{6}$, ἤτοι ἡ μὲν μία εἶναι 12, ἡ δ' ἑτέρα $\frac{41}{3}$.

Ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος εἶναι φύσει θετικὸς ἀριθμός, ἡ δευτέρα ῥίζα ἀπορρίπτεται· ὥστε ἡ ζητουμένη βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς 12.

5) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς 0,1664 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος θὰ γραφῇ 0,0404;

Ἔστω χ ἡ ἄγνωστος βάσις· κατὰ τὴν βάσιν χ ὁ ἀριθμὸς 0,0404 ἔχει μονάδας $\frac{4}{\chi^2} + \frac{4}{\chi^4}$, ἐπειδὴ δὲ αὗται ἰσοῦνται πρὸς 0,1664 ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{4}{\chi^2} + \frac{4}{\chi^4} = 0,1664$, ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνοντες ὡς ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τὸ χ^4, ὁπότε ἔχομεν $4\chi^2 + 4 = 0,1664\chi^4$ ἢ $0,1664\chi^4 - 4\chi^2 - 4 = 0$, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ 10000, εὑρίσκομεν $1664\chi^4 - 40000\chi^2 - 40000 = 0$, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη δι' 64, εὑρίσκομεν $26\chi^4 - 625\chi^2 - 625 = 0$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2=\psi$, ἐξ οὗ $\chi^4=\psi^2$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $26\psi^2-626\psi-625=0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι 25 καὶ $-\frac{25}{26}$. τὴν τιμὴν $\psi=-\frac{25}{26}$ δὲν παραδεχόμεθα ὡς ἀριθμὸν ἀρνητικόν· ἔχομεν λοιπὸν $\psi=25$, ἄρα $\chi=\sqrt{25}=\pm5$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος εἶναι φύσει θετικὸς ἀριθμός, ἡ ἀρνητικὴ ρίζα ἀπορρίπτεται· ὥστε ἡ ζητουμένη βάσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5.

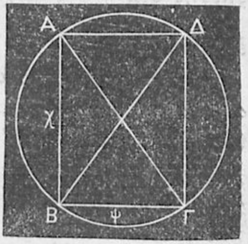
6) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ἐκ τοῦ γινομένου αὐτῶν 448 καὶ τοῦ πηλίκου 7.

Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, θὰ εἶναι $\chi\psi=448$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=7$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ ψ, εὑρίσκομεν $\chi=7\psi$· ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ἔχομεν $7\psi^2=448$, ἢ $\psi^2-64=0$, ἐξ ἧς $\psi=\pm\sqrt{-\frac{-64}{1}}=\pm\sqrt{64}=\pm8$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi=7\psi$ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ψ, εὑρίσκομεν καὶ $\chi=\pm56$. Οἱ ζητούμενοι ὅθεν ἀριθμοὶ εἶναι $\psi=8$ καὶ $\chi=56$, ἢ $\psi=-8$ καὶ $\chi=-56$.

7) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἀκτῖνος α ὀρθογώνιον περιμέτρου 2τ.

Τῆς δοθείσης περιμέτρου οὔσης 2τ, ἔχομεν $ΑΒ+ΒΓ=\tau$. Πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὰ μήκη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ.

Ἔστωσαν $ΑΒ=\chi$, $ΒΓ=\psi$, τότε ἔχομεν $\chi+\psi=\tau$.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=(ΑΓ)^2$, ἤ, ἐπειδὴ $ΑΓ=2\alpha$, $\chi^2+\psi^2=4\alpha^2$.

Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα $\chi+\psi=\tau$ καὶ $\chi^2+\psi^2=4\alpha^2$.

Οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, εἶναι (ἐδ. 163, 2ον) ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\tau\chi+\frac{\tau^2-4\alpha}{2}=0$. Οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι $\frac{\tau}{2}+\frac{\sqrt{8\alpha^2-\tau^2}}{2}$ καὶ $\frac{\tau}{2}-\frac{\sqrt{8\alpha^2-\tau^2}}{2}$.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι $8\alpha^2\geqq\tau^2$, ἢ $\alpha\sqrt{8}\geqq\tau$, ἢ $2\alpha\sqrt{2}\geqq\tau$. Ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν εἶναι λοιπὸν $2\alpha\sqrt{2}=\tau$. Τότε $\chi=\psi=\frac{\tau}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον.

8) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ἴσα. Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, τότε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi+\psi=\chi\psi$ (1), $\chi\psi=\frac{\chi}{\psi}$ (2).

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ ψ, λαμβάνομεν $\chi\psi^2=\chi$, ἢ $\chi\psi^2-\chi=0$, ἐξ ἧς $\psi=\pm\sqrt{-\frac{-\chi}{\chi}}=\pm\sqrt{1}=\pm1$. Ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ ψ ἡ μὲν $\rho=1$ τιθεμένη εἰς τὴν (1) δίδει τιμὴν τοῦ χ ἀπαράδεκτον, ἡ δὲ $\rho'=-1$ δίδει $\chi=\frac{1}{2}$. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ 1.

9) Εὑρεῖν τὰς 3 πλευρὰς τριγώνου ὀρθογωνίου ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἔστωσαν β καὶ γ αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ τριγώνου καὶ α ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ. Ἔχομεν ἐν πρώτοις τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\alpha+\beta+\gamma=2\,\tau, \qquad (1)$$
$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2. \qquad (2)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ εἶναι λοιπὸν ἐκπεφρασμένον διὰ $\tau\rho$. ἀλλὰ τοῦτο ἐκφράζεται ἐπίσης διὰ $\frac{1}{2}\beta\gamma$. Ἔχομεν ἄρα τὴν τρίτην ἐξίσωσιν $\beta\gamma=2\,\tau\rho$, (3) ἐξ ἧς $2\beta\gamma=4\,\tau\rho$. (4).

Αἱ ἰσότητες (2) καὶ (4) προστιθέμεναι δίδουσι $\beta^2+\gamma^2+2\,\beta\gamma=\alpha^2+4\,\tau\rho$, ἢ $(\beta+\gamma)^2=\alpha^2+4\,\tau\rho$. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῆς (1), ἔχομεν $(\beta+\gamma)^2=(2\,\tau-\alpha)^2$. ἔχομεν ἄρα καὶ $\alpha^2+4\,\tau\rho.=(2\tau-\alpha)^2=4\tau^2-4\tau\alpha+\alpha^2$ ἐξ ἧς $\alpha=\tau-\rho$. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ α, τιθεμένη εἰς τὴν (1), δίδει $\beta+\gamma=\tau+\rho$. Ἀλλ' ἔχομεν προσέτι $\beta\gamma=2\,\tau\rho$. ἄρα β καὶ γ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-(\tau+\rho)\,\chi+2\,\tau\rho.=0$, ἐν ἢ

$$\chi=\frac{1}{2}\left(\tau+\rho\pm\sqrt{(\tau+\rho)^2-8\,\tau\rho.}\right)$$

Ἡ μία τῶν τιμῶν τοῦ χ παρέχει τὴν πλευρὰν β καὶ ἡ ἄλλη παρέχει τὴν πλευρὰν γ.

10) Ἐκ τῆς πωλήσεως δύο ὑφασμάτων Α καὶ Β ἔμπορός τις ἔλαβε 350 δραχ. Ἀλλ' ἂν ἐπώλει τὸ Α μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως τοῦ Β, θὰ ἐλάμβανε 125 δραχ. ἂν δὲ ἐπώλει τὸ Β μὲ τὴν τιμὴν τοῦ

πήχεως τοῦ Α, θὰ ἐλάμβανε 240 δραχ. Ἐκ πόσων πήχεων συνέκειτο ἑκάττρον τῶν ὑφασμάτων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ Β ἔχει 3 πήχεις περισσότερον; Ἐὰν παρασταθῇ διὰ χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων τοῦ Α ὑφάσματος, ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων τοῦ Β θὰ εἶναι $\chi+3$. Ἂν τὸ Α ἐπωλεῖτο μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως τοῦ Β, θὰ ἐλάμβανεν 125 δρ.; ἑπομένως ἕκαστος πῆχυς θὰ ἐπωλεῖτο $\frac{125}{\chi}$ καὶ οἱ $\chi+3$ θὰ ἐπωλοῦντο $\frac{125(\chi+3)}{\chi}$. Ἂν τὸ Β ἐπωλεῖτο μὲ τὴν τιμὴν τοῦ πήχεως τοῦ Α θὰ ἐλάμβανε 240 δραχ., ἑπομένως ἕκαστος πῆχυς θὰ ἐπωλεῖτο $\frac{240}{\chi+3}$ καὶ οἱ χ πήχεις $\frac{240\chi}{\chi+3}$. Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $\frac{125(\chi+3)}{\chi}+\frac{240\chi}{\chi+3}=350$, ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγάς, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\chi^2-20\chi+75=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 15 καὶ 5. Ἀμφότεραι αἱ λύσεις αὗται πληροῦσι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ἑπομένως, ἢ τὸ Α συνέκειτο ἐκ 15 πήχεων καὶ τὸ Β ἐκ 18, ἢ τὸ Α ἐκ 5 καὶ τὸ Β ἐξ 8 πήχεων.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 210).

1) Λῦσον τὰς ἀνισότητας $\chi-1<\chi^2$, $\frac{\chi+13}{12+\chi-\chi^2}>1$. Ἡ ἀνισότης $\chi-1<\chi^2$ γράφεται $\chi-1-\chi^2<0$, ἢ $\chi^2-\chi+1>0$.

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2-\chi+1=0$, ἔχομεν $6^2-4\alpha\gamma=1-4<0$. Αἱ δύο ῥίζαι εἶναι φανταστικαί, Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α. (Ἄλγ. θεώρ. 154).

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα $\alpha=1$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\chi-12=0$ εἶναι 4 καὶ -3, ἄρα (ἐδ. 157) τὸ τριώνυμον $\chi^2-\chi-12$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν πίπτουσαν εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὸ ἀντίθετον τούτου $12+\chi-\chi^2$ εἶναι θετικὸν διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ χ· πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\frac{\chi+13}{12+\chi-\chi^2}>1$ ἐπὶ $12+\chi-\chi^2$ λαμβάνομεν $\chi+13>12+\chi-\chi^2$ ἢ $\chi^2+1>0$. Ἐὰν τεθῇ $\chi^2+1=0$, ἔχομεν $6^2-4\alpha\gamma=-4<0$. Αἱ δύο ῥίζαι εἶναι φανταστικαί. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα $\alpha=1$, ἡ ἀνισότης $\chi^2+1>0$ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ· ἄρα ἡ ἀνισότης $\frac{\chi+13}{12+\chi-\chi^2}>1$ ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς μεταξὺ τῶν ριζῶν 4 καὶ -3 πιπτούσας τιμὰς τοῦ χ.

2) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις $\lambda\chi^2+7\chi-1=0$, $\chi^2+2\lambda\chi+4=0$, $6\chi^2-\chi-5\lambda=0$, $\lambda^2\chi^2-2\lambda\chi-2=0$, $(\chi-3)^2+(\chi-1)^2-(\chi-\lambda)^2=0$ ἔχουσι τὰς ρίζας αὐτῶν πραγματικάς;

Αἱ ρίζαι τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εἶναι πραγματικαί, τοῦ λ λαμβάνοντος ἁρμοδίας τιμάς, ὅταν αὗται εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι. Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\lambda\chi^2+7\chi-1=0$ ἴσαι, πρέπει νὰ ἔχωμεν $6^2-4\alpha\gamma=0$, ἤτοι $49+4\lambda=0$· λύοντες εὑρίσκομεν $\lambda-\frac{49}{4}$. Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι πρέπει νὰ ἔχωμεν $6^2-4\alpha\gamma>0$, ἤτοι $49+4\lambda>0$· λύοντες εὑρίσκομεν $\lambda>-\frac{49}{4}$.

Ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2+2\lambda\chi+4=0$ εἶναι $6^2-4\alpha\gamma=4\lambda^2-16$· ὥστε ἔχομεν να λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $4\lambda^2-16>0$. Ἡ ἐξίσωσις $4\lambda^2-16=0$ ἔχει ρίζας -2, 2. Ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ τὰς μὴ περιλαμβανομένας μεταξὺ τῶν ριζῶν. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἔχωμεν ἢ $\lambda=-2$, ἢ $\lambda=2$, ἢ $\lambda<-2$, ἢ $\lambda>2$, διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως πραγματικαί.

Ἐν τῇ ἐξισώσει $6\chi^2-\chi-5\lambda=0$ εἶναι $6^2-4\alpha\gamma=1+120\lambda$, ἵνα δὲ αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί, πρέπει νὰ εἶναι $1+120\lambda\geqq 0$ ἢ $120\lambda\geqq -1$ καὶ $\lambda\geqq -\frac{1}{120}$.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\lambda^2\chi^2-2\lambda\chi-2=0$ πραγματικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν $6^2-4\alpha\gamma\geqq 0$, ἢ $4\lambda^2+8\lambda^2\geqq 0$, ἢ $12\lambda^2\geqq 0$, ἢ $\lambda^2\geqq\frac{0}{12}$, ἢ $\lambda^2\geqq 0$.

Ἡ ἐξίσωσις $(\chi-3)^2+(\chi-1)^2-(\chi-\lambda)^2=0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\chi^2-6\chi+9+\chi^2-2\chi+1-\chi^2+2\lambda\chi-\lambda^2=0$, ἢ πρὸς τὴν $\chi^2+(2\lambda-8)\chi+10-\lambda^2=0$.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης πραγματικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν $6^2-4\alpha\gamma\geqq 0$. Ἐνταῦθα εἶναι $6^2-4\alpha\gamma=4\lambda^2-32\lambda+64-40+4\lambda^2=8\lambda^2-32\lambda+24$· ὥστε πρέπει νὰ ἔχωμεν $8\lambda^2-32\lambda+24\geqq 0$. Ἡ ἐξίσωσις $8\lambda^2-32\lambda+24=0$ ἔχει τὰς ρίζας 3 καὶ 1.

Ἄρα (ἐδ. 157) διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ μεγαλυτέραν τοῦ 3 καὶ μικροτέραν τοῦ 1 ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας αὐτῆς πραγματικάς.

3) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὸ τριώνυμον $\chi^2-\lambda\chi+(\lambda-1)$ εἶναι τετράγωνον; Πᾶν τριώνυμον 2ου βαθμοῦ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μίαν τῶν ἑξῆς μορφῶν $\alpha(\sigma^2+\tau^2)$, $\alpha\sigma^2$, ἢ $\alpha(\sigma^2-\tau^2)$ καθόσον ἡ παράστασις $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, μηδὲν ἢ θετικὸς ἀριθμός. Ἐν τῷ δοθέντι τριωνύμῳ $\alpha=1$, τὸ τριώνυμον ὅθεν εἶναι τετράγωνον ἂν ὁ λ λάβῃ τοιαύτην τιμὴν ὥστε νὰ δύναται τοῦτο νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\sigma^2=\sigma^2$ τουτέστιν ἂν ὁ λ εἶναι τοιοῦτος ὥστε νὰ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἢ $\lambda^2-4\lambda+4=0$· λύοντες εὑρίσκομεν $\lambda=2$.

4) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὸ τριώνυμον $(\lambda^3+8)\chi^2+2(\lambda^2-4)\chi+(\lambda-2)$ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, τετράγωνον τέλειον, διαφορὰ δύο τετραγώνων;

Τὸ τριώνυμον τοῦτο γράφεται ὡς γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ χ, ἤτοι τοῦ λ^3+8, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα, ἢ τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων ἢ ἐπὶ τετράγωνον τέλειον, ὅπερ γινόμενον παραμένει ἄθροισμα, διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἢ τετράγωνον τέλειον, ἐὰν ὁ συντελεστὴς λ^3+8 εἶναι τετράγωνον τέλειον. Ἐν τῷ τριωνύμῳ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=8\lambda^3-32\lambda^2-32\lambda+128$. Τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἔχει γενικῶς τὴν ῥίζαν 2, διαιροῦντες τοῦτο διὰ $\lambda-2$ καὶ ἐξισοῦντες τὸ πηλίκον πρὸς τὸ μηδὲν εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 4, -2. Ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ λ ἡ 4 δὲν καθιστᾷ τὸν λ^3+8 τέλειον τετράγωνον. Ὅθεν τὸ τριώνυμον εἶναι τετράγωνον τέλειον, ἐὰν ὁ λ λάβῃ τὰς τιμὰς 2 καὶ -2· εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ μικροτέραν τοῦ -2 καὶ μεγαλυτέραν τοῦ 2 μὴ ὑπερβαίνουσαν τὸν 4 καὶ καθιστῶσαν τὸν λ^3+8 τέλειον τετράγωνον· εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ λ περιλαμβανομένην μεταξὺ -2 καὶ 2 καὶ μεγαλυτέραν τοῦ 4 καθιστῶσαν δὲ τὸν λ^3+8 τέλειον τετράγωνον.

5) Σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν τριωνύμων $\chi^2+\chi+1$, $3\chi^2-\chi-4$, $-4\chi^2+7\chi+6$. Ἐὰν προσδιορίσωμεν διὰ ψ μίαν οἵαν δήποτε τιμὴν τοῦ τριωνύμου $\chi^2+\chi+1$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\psi=\chi^2+\chi+1$.

Ἐπειδὴ α ἐνταῦθα εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον τῇ μονάδι, ἔχομεν

(Ἀλγ. ἐδ. 147, α') $\psi=\left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

Τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{1}{2}$, ἡ παράστασις $\chi+\frac{1}{2}$ διατελοῦσα ἀρνητικὴ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ 0. ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτῆς ἑπομένως, ὡς καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς $\left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2$, ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0. Ὥστε τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{1}{2}$, ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι $\frac{3}{4}$. Ἐὰν τὸ χ ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $-\frac{1}{2}$ μέχρι $+\infty$ ἡ παράστασις $\chi+\frac{1}{2}$ γίνεται θετικὴ καὶ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι $+\infty$, ἑπομένως καὶ τὸ τετράγωνον αὐτῆς. Ὥστε τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{1}{2}$ μέχρι $+\infty$, ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου αὐξάνεται ἀπὸ $\frac{3}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

Τὸ τριώνυμον $3\chi^2-\chi-4$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\psi=3\left[\left(\chi-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{-48-1}{36}\right] \text{ ἢ } \psi=3\left[\left(\chi-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{36}\right].$$

Τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $\frac{1}{6}$, ἡ τιμὴ τοῦ ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ μέχρι $-\frac{49}{12}$. ἐὰν τὸ χ ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $\frac{1}{6}$ μέχρι $+\infty$, ἡ τιμὴ τοῦ ψ αὐξάνεται ἀπὸ $-\frac{49}{12}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Τὸ τριώνυμον $-4\chi^2+7\chi+6$ δύναται νὰ τεθῇ

$$\psi=-4\left[\left(\chi-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{-96-49}{4(-4)^2}\right] \text{ ἢ } \psi=-4\left[\left(\chi-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{145}{64}\right]$$

Ἐπειδὴ ἐν τῇ παρούσῃ περιπτώσει α εἶναι ἀρνητικὸς ($\alpha=-4$), προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ὅτι τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $\frac{7}{8}$, ἡ τιμὴ τοῦ ψ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-4\times-\frac{145}{64}$ ἢ μέχρι $\frac{145}{16}$. καὶ ἐὰν τὸ χ ἐξακολουθήσῃ αὐξανόμενον ἀπὸ $\frac{7}{8}$ μέχρι $+\infty$, ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{145}{16}$ μέχρι $-\infty$.

6) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τοῦ χ δι' ἃς τὰ ἑπόμενα κλάσματα $\frac{\chi+2}{4\chi^2+8\chi+9}$, $\frac{\chi+2}{2\chi^2-3\chi+2}$, $\frac{\chi^2-1}{\chi^2+1}$, $\frac{\chi^2+2\chi-3}{\chi-2}$, λαμβάνουσι τὴν μεγίστην καὶ τὴν ἐλαχίστην αὐτῶν τιμήν.

Ἐξισοῦντες τὸ κλάσμα $\frac{\chi+2}{4\chi^2+8\chi+9}$ πρὸς τὸν μεταβλητὸν ψ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi+2}{4\chi^2+8\chi+9}=\psi$. Ἀπαλλάσσοντες τῶν παρονομαστῶν καὶ διατάσσοντες εὑρίσκομεν $4\psi\chi^2+(8\psi-1)\chi+9\psi-2=0$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ δέον νὰ εἶναι πραγματική. πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $(8\psi-1)^2-4.4\psi(9\psi-2)\overline{>}0$ ἢ $-80\psi^2+16\psi+1\overline{>}0$ [α]

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $-80\psi^2+16\psi+1=0$, ἢ $80\psi^2-16\psi-1=0$ εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{1}{20}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ^2 εἶναι ἀρνητικὸς (σχέσις [α]), τὸ τριώνυμον δὲν θὰ εἶναι θετικὸν παρὰ ἐὰν ψ ποικίλλῃ μεταξὺ $\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{1}{20}$· ὅθεν $\frac{1}{4}$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ κλάσματος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $-\frac{1}{2}$ τοῦ χ καὶ $-\frac{1}{20}$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτοῦ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $-\frac{7}{2}$ τοῦ χ.

Ἐξισοῦντες τὸ κλάσμα $\frac{\chi+2}{2\chi^2-3\chi+2}$ πρὸς τὸν μεταβλητὸν ψ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi+2}{2\chi^2-3\chi+2}=\psi$.

Ἀπαλλάσσοντες τῶν παρονομαστῶν καὶ διατάσσοντες εὑρίσκομεν $2\psi\chi^2-(3\psi+1)\chi+2\psi-2=0$. Ἡ τιμὴ τοῦ χ δέον νὰ εἶναι πραγματικὴ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $-7\psi^2+22\psi+1\overline{>}0$ [α]

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $-7\psi^2+22\psi+1=0$, ἢ $7\psi^2-22\psi-1=0$ εἶναι $\psi=\frac{22\pm\sqrt{484+28}}{14}$. ἐξ οὗ $\psi'=3,18.....$, καὶ $\psi''=-0,04.....$ Ἀλλά, (σχέσις [α]), ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ^2 εἶναι ἀρνητικός· ἄρα 3,18 εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ κλάσματος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν 0,80 τοῦ χ καὶ $-0,04$ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτοῦ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $-6,37$ τοῦ χ.

Ἐξισοῦντες τὸ κλάσμα $\frac{\chi^2-1}{\chi^2+1}$ πρὸς τὸν μεταβλητὸν ψ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi^2-1}{\chi^2+1}=\psi$. Ἀπαλλάσσοντες τῶν παρονομαστῶν καὶ διατάσσοντες εὑρίσκομεν $(\psi-1)\chi^2+\psi+1=0$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ δέον νὰ εἶναι πραγματική· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $-4(\psi-1)(\psi+1)\overline{>}0$, ἢ $-4\psi^2+4\overline{>}0$. [α]

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $-4\psi^2+4=0$, ἢ $4\psi^2-4=0$ εἶναι 1 καὶ -1. Ἐπειδὴ (σχέσις [α]) ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ^2 εἶναι ἀρνητικός, ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ κλάσματος εἶναι 1 καὶ ἡ ἐλαχίστη -1. Εἰς τὴν μεγίστην 1 ἀντιστοιχεῖ $\chi=\mp\infty$ καὶ εἰς τὴν ἐλαχίττην -1 ἀντιστοιχεῖ $\chi=0$.

Ἐξισοῦντες τὸ κλάσμα $\dfrac{\chi^2+2\chi-3}{\chi-2}$ πρὸς τὸν μεταβλητὸν ψ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{\chi^2+2\chi-3}{\chi-2}=\psi$.

Ἀπαλλάσσοντες τῶν παρονομαστῶν καὶ διατάσσοντες εὑρίσκομεν $\chi^2+(2-\psi)\chi+2\psi-3=0$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ δέον νὰ εἶναι πραγματική· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $(2-\psi)^2-4(2\psi-3)\geqq 0$, ἢ $\psi^2-12\psi+16\geqq 0$. [α]

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\psi^2-12\psi+16=0$ εἶναι $6-2\sqrt{5}$ καὶ $6+2\sqrt{5}$. Διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ψ ἢ τοιαύτην ὥστε $\psi\leqq 6-2\sqrt{5}$ ἢ τοιαύτην ὥστε $\psi\geqq 6+2\sqrt{5}$ ἡ σχέσις [α] ἀληθεύει.

Οὕτω τὸ δοθὲν κλάσμα δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς αὐξούσας τιμὰς ἀπὸ τοῦ $6+2\sqrt{5}$ μέχρι τοῦ θετικοῦ ἀπείρου· ἐκ τῶν τιμῶν τούτων ἐλαχίστη εἶναι ἡ $6+2\sqrt{5}$, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $2+\sqrt{5}$ τοῦ χ.

Ὡσαύτως τὸ κλάσμα δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς φθινούσας τιμὰς ἀπὸ τοῦ $6-2\sqrt{5}$ μέχρι τοῦ $-\infty$· ἐκ τῶν τιμῶν τούτων μεγίστη εἶναι ἡ $6-2\sqrt{5}$, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $2-\sqrt{5}$ τοῦ χ.

Παρατήρησις. Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα δὲν εἶναι ἀπόλυτα (Ἀλγ. ἐδ. 169, σημ).

7) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένων εὑρεῖν τὸ ἔχον τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν. Τίνες αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου;

Ἔστωσαν χ, ψ αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ μ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Θὰ εἶναι $\chi^2+\psi^2=4\rho^2$ καὶ $\chi\psi=\mu$.

Διπλασιάζοντες τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη πρὸς τὴν πρώτην σχηματίζομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $(\chi+\psi)^2=4\rho^2+2\mu$, $\chi\psi=\mu$· ἢ $\chi+\psi=+\sqrt{4\rho^2+2\mu}$, $\chi\psi=\mu$.

Τὸ σύστημα τοῦτο δίδει τὰς τιμὰς τῶν χ, ψ, αἵτινες εἶναι (Ἀλγ. ἐδ. 153) ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\omega\sqrt{4\rho^2+2\mu}+\mu=0$. [α]

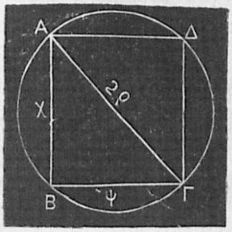
Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι πραγματικαὶ ἐὰν ἔχωμεν $4\rho^2+2\mu\geqq 0$ καὶ $(\sqrt{4\rho^2+2\mu})^2-4\mu\geqq 0$, ἢ $4\rho^2+2\mu\geqq 0$ καὶ $4\rho^2-2\mu\geqq 0$, ἢ $2\mu\geqq -4\rho^2$ καὶ $-2\mu\geqq -4\rho^2$, ἢ $\mu\geqq -2\rho^2$ καὶ $\mu\leqq 2\rho^2$.

Ἄρα τὸ μ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $2\rho^2$ καὶ ἀπὸ $+\infty$ μέχρι $-2\rho^2$, τ. ἔ. ἔχει μεγίστην μὲν τιμὴν τὴν $2\rho^2$, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν $\rho\sqrt{2}$ τοῦ ω, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως [α], ἐλαχίστην δὲ τιμὴν τὴν $-2\rho^2$, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν $\rho\sqrt{2}$ τοῦ ω. Ὅθεν $\chi=\rho\sqrt{2}$ καὶ $\psi=\rho\sqrt{2}$ καὶ συνεπῶς τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ ὀρθογώνιον, οὗτινος ἑκάστη τῶν πλευρῶν εἶναι $\rho\sqrt{2}$, τ. ἔ. τὸ τετράγωνον.

8) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένων, εὑρεῖν τὸ ἔχον τὴν μεγαλυτέραν περίμετρον. Τίνες αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου;

Ἔστωσαν χ, ψ αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τ ἡ περίμετρος αὐτοῦ. Τότε ἔχομεν $2(\chi+\psi)=\tau$, ἢ $\chi+\psi=\frac{\tau}{2}$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὸ Πυθαγόρειον ἔχομεν: $\chi^2+\psi^2=4\rho^2$. Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα



$$\chi+\psi=\frac{\tau}{2},\quad \chi^2+\psi^2=4\rho^2.$$

Οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ εἶναι (Ἀλγ. ἐδ. 163, 2ον) ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\frac{\tau}{2}\chi+\frac{\frac{\tau^2}{4}-4\rho^2}{2}=0$,

ἢ $8\chi^2-4\tau\chi+\tau^2-16\rho^2=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{4\tau\pm\sqrt{16\tau^2-32\tau^2+512\rho^2}}{16}=\frac{4\tau\pm\sqrt{16(32\rho^2-\tau^2)}}{16}=$
$=\frac{\tau\pm\sqrt{32\rho^2-\tau^2}}{4}$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης δέον νὰ εἶναι πραγματικαί· πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $32\rho^2\geq\tau^2$ ἢ $4\sqrt{2}\rho\geq\tau$.

Ἡ μεγαλυτέρα ὅθεν τιμὴ τοῦ τ εἶναι ἡ $4\sqrt{2}\rho$, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν $\rho\sqrt{2}$ τοῦ χ, ἣν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἀλλὰ γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι $\rho\sqrt{2}$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου· τὸ τὴν μεγίστην ἄρα περίμετρον ἔχον ὀρθογώνιον εἶναι τὸ τετράγωνον.

9) Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ τινος α νὰ μερισθῇ εἰς δύο μέρη οὕτως, ὥστε τὸ τριπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ πρώτου καὶ τὸ τετραπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ δευτέρου νὰ δίδωσι τὸ μέγιστον δυνατὸν ἄθροισμα.

Ἔστω χ^2 τὸ πρῶτον μέρος· τὸ δεύτερον θὰ εἶναι $\alpha^2-\chi^2$· τότε ἔχομεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν $3\chi+4\sqrt{\alpha^2-\chi^2}=\mu$, ἢ $4\sqrt{\alpha^2-\chi^2}=\mu-3\chi$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη λαμβάνομεν $16(\alpha^2-\chi^2)=\mu^2+9\chi^2-6\mu\chi$, ἢ $25\chi^2-6\mu\chi+\mu^2-16\alpha^2=0$.

Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{3\mu\pm\sqrt{9\mu^2-25\mu^2+400\alpha^2}}{25}$,

$$\text{ἢ}\quad \chi=\frac{3\mu\pm\sqrt{400\alpha^2-16\mu^2}}{25}.$$

Διὰ νὰ εἶναι ὁ χ πραγματικός, πρέπει νὰ ἔχωμεν $16\mu^2 \overline{<} 400\alpha^2$.

Ἡ μεγίστη ὅθεν τιμὴ τοῦ μ εἶναι $\mu = \sqrt{\frac{400\alpha^2}{16}} = 5\alpha$.

Ἡ τιμὴ τοῦ χ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μεγίστην ταύτην τοῦ μ εἶναι $\chi = \frac{3.5\alpha}{25} = \frac{3\alpha}{5}$.

Τὸ πρῶτον ἄρα μέρος εἶναι $\chi^2 = \left(\frac{3\alpha}{5}\right)^2 = \frac{9\alpha^2}{25}$. Τὸ δεύτερον εἶναι $\alpha^2 - \frac{9\alpha^2}{25} = \frac{16\alpha^2}{25}$.

10) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν χ καὶ ψ, ὧν τὸ ἄθροισμα $\chi + \psi$ μένει σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ γίνωσιν ἴσοι.

Ἔστω α τὸ σταθερὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ ε τὸ μεταβλητὸν ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν· θὰ ἔχωμεν

$$\chi + \psi = \alpha \qquad (1)$$

$$\chi^2 + \psi^2 = \varepsilon \qquad (2)$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν $\chi^2 + \psi^2 + 2\chi\psi = \alpha^2$ ἢ $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2 - 2\chi\psi$, ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἐξισώσει (2) τὴν παράστασιν $\chi^2 + \psi^2$ ὑπὸ τῆς ἴσης ταύτῃ $\alpha^2 - 2\chi\psi$, λαμβάνομεν $\varepsilon = \alpha^2 - 2\chi\psi$· εἶναι δὲ πρόδηλον ὅτι τὸ ε γίνεται ἐλάχιστον ὅταν τὸ γινόμενον $\chi\psi$ θὰ εἶναι μέγιστον, δηλαδὴ ὅταν ἔχωμεν $\chi = \psi$.

Σημ. Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο δύναται νὰ ἀναχθῇ τὸ ἑξῆς γεωμετρικὸν πρόβλημα. Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον;

11) Ἐκ τῶν κυλίνδρων ὧν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα α, τίς ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

Ἔστω χ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ ψ τὸ ὕψος. Ἔχομεν κατὰ τὴν ἐκφώνησιν $\chi + \psi = \alpha$. (1)

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $O = \pi\chi^2\psi$ (2)

Τοῦ π ὄντος σταθεροῦ πρόδηλον, ὅτι ὁ ὄγκος θὰ εἶναι μέγιστος, ὅταν ὁ ἀριθμὸς $\chi^2\psi$ γίνῃ μέγιστος.

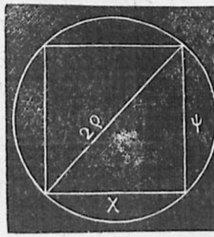
Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων χ καὶ ψ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς α. Ὅθεν (ἐδ. 171 θεώρ. II) τὸ γινόμενον $\chi^2\psi$ θὰ εἶναι μέγιστον ὅταν ἔχωμεν $\frac{\chi}{\psi} = \frac{2}{1}$ (3)

Ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $\psi = \alpha - \chi$, ἣν τιμὴν θέτοντες εἰς τὴν (3), λαμβάνομεν $\frac{\chi}{\alpha-\chi}=2$, ἐξ ἧς $\chi=\frac{2\alpha}{3}$ ἄρα $\psi=\frac{\alpha}{3}$. Ὁ ὄγκος ὅθεν τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι μέγιστος, ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, εὑρίσκομεν τὸν μέγιστον ὄγκον $0=\frac{4\pi\alpha^3}{27}$.

12) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος ρ ἐγγεγραμμένων ποῖον τὸ ἔχον τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ μ τὸ ζητούμενον μέγιστον ὀρθογώνιον, τὸ σχῆμα παρέχει τὰς δύο σχέσεις

$\chi\psi=\mu$, (1) καὶ $\chi^2+\psi^2=4\rho^2$ (2)



Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\chi\psi$ θὰ εἶναι προφανῶς μέγιστον ὅταν καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\chi^2\psi^2$ εἶναι μέγιστον. Οἱ δύο παράγοντες χ^2, ψ^2 ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα $4\rho^2$· τὸ μέγιστον ἄρα γινόμενον αὐτῶν θὰ εἶναι ὅταν $\chi^2=\psi^2$ ἢ $\chi=\psi$.

Τὸ ζητούμενον ὅθεν ὀρθογώνιον οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν προόδων

(Ἄλγ. σελ. 215).

1) γυνή τις ἀγοράσασα ραπτομηχανὴν συμφωνεῖ νὰ ἐξοφλήσῃ τὴν ἀξίαν αὐτῆς εἰς 12 δόσεις μηνιαίας, ὧν ἡ 1η ἐκ 10 δραχ., ἡ 2α ἐκ 15, ἡ 3η ἐξ 20 κ. ο. κ. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς μηχανῆς.

Αἱ μηνιαῖαι δόσεις σχηματίζουσι τὴν πρόοδον 10, 15, 20 . . . . 65, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 5, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων 12 καὶ ὁ ὅρος τ ὁ τὴν δωδεκάτην τάξιν κατέχων εἶναι $\tau=10+5.11=65$.

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῆς προόδου ταύτης, ἤτοι ἡ ἀξία τῆς μηχανῆς εἶναι $\frac{(65+10).12}{2}=450$.

2) Γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς ὅτι σῶμα πῖπτον ἐλευθέρως ἐν τῷ κενῷ διανύει 4 μ., 9 εἰς τὸ 1ον δλ., καθ' ἕκαστον δὲ ἑπόμενον δλ. διανύει 9 μ, 8 περισσότερον ἢ κατὰ τὸ ἀμέσως προηγούμενον. Ζητεῖται τὸ ὕψος ἐξ οὗ κατέπεσε λίθος οὗ ἡ πτῶσις διήρκεσε θ δευτερόλεπτα.

Κατὰ τὰ δεδομένα, τὰ ὑπὸ τοῦ λίθου διανυθέντα διαστήματα σχηματίζουσι τὴν πρόοδον 4,9 14,7 24,5 .... 9,8θ—4,9 τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 9,8, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων θ καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος $\tau=4,9+9,8(\theta-1)=4,9+9,8\theta-9,8=9,8\theta-4,9$.

Τὸ διανυθὲν διάστημα τὸ ὕψος δηλονότι ἐξ οὗ κατέπεσεν, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου, θὰ εἶναι

$$\frac{4,9+9,8\theta-4,9}{2}.\ \theta=\frac{9,8\theta^2}{2}=4,9\theta^2.$$

3) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 18000 δραχ. πρὸς 4,5 %. Εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους προσθέτει 200 δραχ. ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Πόσοι τόκοι θὰ συναθροισθῶσι μέχρι τέλους τοῦ 20οῦ ἔτους;

Αἱ 18000 δραχμαὶ τοκιζόμεναι ἐπὶ 1 ἔτος πρὸς 4,5 % δίδουσι τόκον $\frac{18000.4,5}{100}=810$ δρ. ὥστε κατὰ τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ἔχει τόκους δρ. 810, εἰς ἕκαστον δὲ ἑπόμενον ἔτος οἱ τόκοι αὐξάνονται κατὰ τὸν τόκον τῶν 200 δραχμῶν $\frac{200.4,5}{100}=9$. Οἱ μέχρι τέλους τοῦ 20οῦ ἔτους συναθροισθησόμενοι τόκοι εἶναι προφανῶς τὸ ἄρθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 810, λόγος ὁ 9 καὶ ὁ ὅρος τ ὁ τὴν εἰκοστὴν τάξιν κατέχων εἶναι ὁ $810+19.9=981$, ἤτοι τῆς προόδου 810, 819, 828.... ....981.

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου ταύτης εἶναι

$$\frac{(810+981).20}{2}=17910.$$

4) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀπὸ 195 μέχρι 327.

Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων προόδου ἀριθμητικῆς τῆς ὁποίας ἔχομεν γνωστοὺς τὸν πρῶτον ὅρον 195, τὸν τελευταῖον 327 καὶ τὸν λόγον 1, ἄγνωστον δὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, ἔχομεν $\tau-\alpha=(\nu-1)\omega$ ἢ $\frac{\tau-\alpha}{\omega}=\nu-1$ καὶ $\frac{\tau-\alpha}{\omega}+1=\nu$, ἀντικαθιστῶντες τὰ γράμματα ὑπὸ τῶν τιμῶν αὐτῶν, λαμβάνομεν $\frac{327-195}{1}+1=\nu$, ἢ $132+1=\nu$ καὶ $\nu=133$. (θ)

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς ῥηθείσης προόδου εἶναι κατὰ τὸν τύπον $\frac{195+327}{2}.\ 133=34713$.

5) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περιττῶν ἀπὸ 195 μέχρι 327.

Καὶ ἐνταῦθα πρόκειται περὶ εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων προόδου ἀριθμητικῆς τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 195, τελευταῖος ὁ 327, λόγος ὁ 2 καὶ πλῆθος τῶν ὅρων κατὰ τὸν ἐν τῷ προηγουμένῳ ζητήματι εὑρεθέντα τύπον (θ) εἶναι $\nu = \frac{327-295}{2} + 1$ ἢ $\nu = 67$.

Τὸ δὲ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι

$$\frac{195+327}{2}.\ 67 = 17487.$$

6) Δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β ἀπεχόντων 860 χιλιόμετρα καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς ἀπεράντου εὐθείας γραμμῆς τῆς συνδεούσης τὰ δύο σημεῖα, ὁ μὲν κατὰ τὴν φορὰν ΑΒ ὁ δὲ κατὰ τὴν ἀντίθετον. Ὁ Α διανύει 12 χιλιόμετρα τὴν 1ην ἡμέραν, καθ' ἑκάστην δὲ ἑπομένην 8 χιλιόμετρα ἐπὶ πλέον ἢ κατὰ τὴν προηγουμένην. Ὁ Β διανύει 20 χιλιόμετρα τὴν 1ην ἡμέραν, καθ' ἕκαστην δὲ ἑπομένην 4 χιλιόμετρα περισσότερα ἢ τὴν προηγουμένην. Μετὰ πόσας ἡμέρας ὁ Β θὰ φθάσῃ τὸν Α καὶ ποίαν ἀπόστασιν ἕκαστος θὰ ἔχῃ διατρέξει;

Ἔστωσαν χ αἱ ἡμέραι αἵτινες θὰ παρέλθωσι μέχρι τῆς συναντήσεως τῶν δύο ὁδοιπόρων. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπὸ τοῦ Α διανυθέντων διαστημάτων παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma = \frac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$ ἐν τῷ ὁποίῳ $\alpha = 12$, $\tau = 12 + 8(\chi - 1)$ καὶ $\nu = \chi$ ἔχομεν λοιπὸν

$$\Sigma = \frac{(12+12+8\chi-8)\chi}{2} = 4\chi^2 + 8\chi.$$

Καθ' ὃν χρόνον ὁ Α διέτρεξε τὸ διάστημα $4\chi^2 + 8\chi$, ὁ Β διέτρεξε προφανῶς τὸ διαστημα $860 - 4\chi^2 - 8\chi$.

Ἀλλ' αὐτὸ τοῦτο τὸ διάστημα παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma = \frac{(\alpha+\tau).\nu}{2}$, ἐν τῷ ὁποίῳ $\alpha = 20$, $\tau = 20 + 4(\chi - 1)$ καὶ $\nu = \chi$· ἔχομεν λοιπὸν $\Sigma = \frac{(20+20+4\chi-4)\chi}{2} = 2\chi^2 + 18\chi$.

Ἐξισοῦντες τὰς δύο τιμὰς τὰς παριστώσας τὸ ὑπὸ τοῦ Β διανυθὲν διάστημα, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $860 - 4\chi^2 - 8\chi = 2\chi^2 + 18\chi$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 10 καὶ $-\frac{43}{3}$, ἐξ ὧν ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ζητουμένου μόνον ἡ 10 εἶναι παραδεκτή. Ἀντικαθιστῶντες τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν $\chi = 10$ ἐν τῇ παραστάσει $4\chi^2 + 8\chi$ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ Α θὰ ἔχῃ διατρέξει 480 χιλιόμετρα, ἄρα ὁ Β θὰ ἔχῃ διατρέξει διάστημα 860—480=380 χιλιομέτρων.

7) Ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ ἐχούσῃ $α=\frac{1}{2}$, $ω=\frac{1}{3}$, πόσους ὅρους πρέπει νὰ λάβωμεν ἵνα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 48;

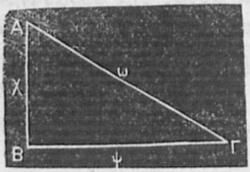
Ἔστωσαν χ οἱ ὅροι, τότε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 48, ὅπερ κατὰ τὸν τύπον ἰσοῦται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ἄκρων ὅρων $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}+(χ-1)\frac{1}{3}$ ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν χ, θὰ εἶναι

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(χ-1)\frac{1}{3}}{2}\cdot χ=48, \text{ ἢ } \left(\frac{χ}{3}+\frac{2}{3}\right)χ=96, \text{ ἢ } (χ+2)χ=288$$

καὶ $χ^2+2χ-288=0$· αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$$χ=\frac{-2\pm\sqrt{4+1152}}{2}=\frac{-2\pm 34}{2},$$ ἤτοι 16 καὶ -18 ἐξ ὧν μόνη ἡ 16 εἶναι παραδεκτή.

8) Εὑρεῖν τὰς πλευρὰς τριγώνου ὀρθογωνίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι



αὗται ἀποτελοῦσι πρόοδον ἀριθμητικὴν ἔχουσαν λόγον δ. Ἡ ἰδιότης τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου δίδει $χ^2+ψ^2=ω^2$. (1)

Ἀλλ' ἐξ ἄλλου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι χ, $χ+δ$, $χ+2δ$. Ὅθεν ἡ σχέσις (1) δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς $χ^2+(χ+δ)^2=(χ+2δ)^2$, ἐξ ἧς $χ^2-2δχ-3δ^2=0$.

Λύοντες εὑρίσκομεν διὰ μόνην παραδεκτὴν τιμὴν τοῦ χ, $χ=3δ$. Αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι λοιπὸν 3δ, 4δ, 5δ.

9) Δεῖξον ὅτι ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{α+β}$, $\frac{1}{α+γ}$, $\frac{1}{β+γ}$, ἀποτελῶσι πρόοδον ἀριθμητικήν, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $α^2$, $β^2$, $γ^2$, ἀποτελοῦσι τοιαύτην πρόοδον. Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{α+β}$, $\frac{1}{α+γ}$, $\frac{1}{β+γ}$, ἀποτελῶσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης θὰ εἶναι

$$\frac{1}{α+γ}-\frac{1}{α+β}=\frac{β-γ}{(α+γ)(α+β)} \quad (1)$$

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{α+β}$, $\frac{1}{α+γ}$, $\frac{1}{β+γ}$ προέρχονται ἐκ τῶν $α^2$, $β^2$, $γ^2$

πολλαπλασιαζομένου ἑκάστου ἐπὶ $\frac{\frac{1}{\alpha+\beta}}{\alpha^2}$, $\frac{\frac{1}{\alpha+\gamma}}{\beta^2}$, $\frac{\frac{1}{\beta+\gamma}}{\gamma^2}$, ἢ ἐπὶ $\frac{1}{\alpha^2(\alpha+\beta)}$, $\frac{1}{\beta^2(\alpha+\gamma)}$, $\frac{1}{\gamma^2(\beta+\gamma)}$. Ἡ δὲ πρόοδος αὕτη οὐδόλως ἀλλοιοῦται, ὅταν εἶναι $\frac{\alpha^2}{\alpha^2(\alpha+\beta)}$, $\frac{\beta^2}{\beta^2(\alpha+\gamma)}$, $\frac{\gamma^2}{\gamma^2(\beta+\gamma)}$ διότι καὶ νῦν ὁ λόγος θὰ εἶναι $\frac{\beta^2}{\beta^2(\alpha+\gamma)}-\frac{\alpha^2}{\alpha^2(\alpha+\beta)}=\frac{\beta-\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)}$, τ. ἔ. ἴσος τῷ λόγῳ (1)

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

10) Εὑρεῖν 5 ἀριθμοὺς ἀποτελοῦντας πρόοδον ἀριθμητικὴν γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 15, τῶν δὲ ἀντιστρόφων αὐτῶν $\frac{137}{60}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν μεσαῖον ὅρον διὰ χ καὶ τὸν λόγον δι' ω, ἡ πρόοδος θὰ εἶναι $\chi-2\omega$, $\chi-\omega$, χ, $\chi+\omega$, $\chi+2\omega$. Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε τὴν ἐξίσωσιν $\chi-2\omega+\chi-\omega+\chi+\chi+\omega+\chi+2\omega$, ἢ $5\chi=15$ καὶ $\chi=3$. Θὰ ἔχωμεν προσέτι τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{\chi-2\omega}+\frac{1}{\chi-\omega}+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi+\omega}+\frac{1}{\chi+2\omega}=\frac{137}{60}$, ἢ $\frac{1}{3-2\omega}+\frac{1}{3-\omega}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3+\omega}+\frac{1}{3+2\omega}=\frac{137}{60}$, μετὰ δὲ τὰς πράξεις καὶ ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν $52\omega^4-385\omega^2+333=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν τὰς λύσεις $\omega=1$ καὶ $\omega=\sqrt{\frac{333}{52}}$.

Οἱ ζητούμενοι ὅθεν ἀριθμοὶ εἶναι 1, 2, 3, 4, 5 ἢ $3-2\sqrt{\frac{333}{52}}$, $3-\sqrt{\frac{333}{52}}$, 3, $3+\sqrt{\frac{333}{52}}$, $3+2\sqrt{\frac{333}{52}}$.

11) Οἱ ἄκροι ὅροι προόδου ἀριθμητικῆς εἶναι -5 καὶ $+25$. Εὑρεῖν δύο ὅρους ἴσον ἀπέχοντας τῶν ἄκρων καὶ ἔχοντας γινόμενον 36.

Ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἀπεχόντων τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ὅρων εἶναι $-5+25=20$, ὥστε οἱ δύο ζητούμενοι ὅροι ἔχουσιν ἄθροισμα 20 καὶ γινόμενον 36, εἶναι ἄρα ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-20\chi+36=0$, ἣν λύοντες εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας 2 καὶ 18.

12) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα Σ_2 τῶν τετραγώνων καὶ τὸ ἄθροισμα Σ_3 τῶν κύβων τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ ν.

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\chi+1)^3=\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$, τεθῇ κατὰ σειρὰν $\chi=1, 2, 3, \dots \nu$ καὶ προστεθῶσιν αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης $(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2\dots+\nu^2)+3(1+2+3\dots+\nu)+\nu$ εἴτε $(\nu+1)^3=1+3\Sigma_2+3\Sigma_1+\nu$ καὶ ἐπειδὴ $\Sigma_1=1+2+\dots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ἡ ἰσότης γίνεται $(\nu+1)^3=1+3\Sigma_2+\frac{3\nu(\nu+1)}{2}+\nu$, ἢ $\nu^3+3\nu^2+3\nu+1=1+3\Sigma_2+\frac{3\nu(\nu+1)}{2}+\nu$, ἢ $2\nu^3+6\nu^2+6\nu+2=2+6\Sigma_2+3\nu^2+3\nu+2\nu$, ἢ $2\nu^3+3\nu^2+\nu=6\Sigma_2$ καὶ $\Sigma_2=\frac{2\nu^3+3\nu^2+\nu}{6}$, ἢ $\Sigma_2=\frac{\nu(2\nu^2+3\nu+1)}{6}$, ἢ $\Sigma_2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

Ἵνα εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Σ_3 τῶν κύβων τῶν ἀκεραίων 1 ἕως ν ἀναχωροῦμεν ἐκ τῆς ταυτότητος $(\chi+1)^4=\chi^4+4\chi^3+6\chi^2+4\chi+1$ καὶ δι' ὁμοίου τρόπου φθάνομεν εἰς τὴν ἰσότητα $(\nu+1)^4=4\Sigma_3+6\Sigma_2+4\Sigma_1+(\nu+1)$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\Sigma_3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2=(\Sigma_1)^2$.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 222)

1) Εὑρεῖν ἀριθμὸν εἰς ὃν προστιθέμενοι οἱ 15, 27 καὶ 45 νὰ ἀποτελῶσι πρόοδον γεωμετρικήν.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τότε ἡ πρόοδος θὰ εἶναι $15+\chi$, $27+\chi$, $45+\chi$· εἰς πᾶσαν δὲ γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων, ὅθεν ἔχομεν $(15+\chi).\left(\frac{27+\chi}{15+\chi}\right)^2=45+\chi$, ἢ $\frac{(27+\chi)^2}{15+\chi}=45+\chi$, ἢ $(27+\chi)^2=(45+\chi)(15+\chi)$ καὶ $729+\chi^2+54\chi=675+60\chi+\chi^2$, ἐξ ἧς $54=6\chi$· ὅθεν $\chi=9$.

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν προόδων 1, 3, 3^2, ... 3^{15} καὶ 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5^2}$, ... $\frac{1}{5^{11}}$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς πρώτης προόδου, κατὰ τὸν τύπον $K=\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}$ τὸν παρέχοντα αὐτό, εἶναι $K=\frac{3^{15}.3-1}{3-1}=\frac{3^{16}-1}{2}=21523360$.

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς δευτέρας προόδου, κατὰ τὸν τύπον $K=\frac{\alpha-\tau\omega}{1-\omega}$ τὸν παρέχοντα τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι

$$K=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-\frac{\frac{1}{5^{11}}\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{5^{12}}}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4.5^{11}}=\frac{5^{12}-1}{4.5^{11}}=\frac{244140624}{195312500}=$$
$$=\frac{61035156}{48828125}.$$

3) Εἰς πρόοδον γεωμετρικὴν ἐκ 10 ὅρων, ὁ 5ος ὅρος ἰσοῦται τῷ λόγῳ καὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 125. Σχημάτισον τὴν πρόοδον.

Ἐὰν ὁ λόγος παρασταθῇ δι' ω, ὁ πέμπτος ὅρος θὰ εἶναι ω, ἑπομένως ὁ τέταρτος 1, ὁ τρίτος $\frac{1}{\omega}$, ὁ δεύτερος $\frac{1}{\omega^2}$ ὁ πρῶτος $\frac{1}{\omega^2}$, ὁ ἕκτος ω^2, ὁ ἕβδομος ω^3, ὁ ὄγδοος ω^4, ὁ ἔνατος ω^5 καὶ ὁ δέκατος ω^6, τ. ἔ. ἡ πρόοδος θὰ εἶναι $\frac{1}{\omega^3}, \frac{1}{\omega^2}, \frac{1}{\omega}$ $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι 125, ἔχομεν $\frac{1}{\omega^3}.\omega^6=125$, ἢ $\omega^3=125$ καὶ $\omega=\sqrt[3]{125}=5$. Ἡ ζητουμένη ὅθεν πρόοδος εἶναι

$$\frac{1}{5^3}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{5}, 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6.$$

4) Δεῖξον ὅτι εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων.

Θὰ δείξωμεν ὅτι εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον, αὔξουσαν ἢ φθίνουσαν, τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων, εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων.

Ἔστω ἡ αὔξουσα γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \alpha\omega^5$. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὅρων $\alpha\omega$ καὶ $\alpha\omega^4$ τῶν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων εἶναι $\alpha\omega+\alpha\omega^4$ ἢ $\alpha(\omega+\omega^4)$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι $\alpha+\alpha\omega^5$ ἢ $\alpha(1+\omega^5)$. Ὁ δὲ ἀριθμὸς $\omega^4+\omega$ εἶναι μικρότερος τοῦ $\omega^5=\omega^4\omega$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον τοῦ $1+\omega^5$, ἤτοι εἶναι $\omega+\omega^4<1+\omega^5$· καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν α, βλέπομεν τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος: $\alpha(\omega+\omega^4)<\alpha(1+\omega^5)$.

Ἔστω δεύτερον ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha, \frac{\alpha}{\omega}, \frac{\alpha}{\omega^2}, \frac{\alpha}{\omega^3}, \frac{\alpha}{\omega^4}, \frac{\alpha}{\omega^5}.$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὅρων $\frac{\alpha}{\omega}$ καὶ $\frac{\alpha}{\omega^4}$ τῶν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ἀπεχόντων εἶναι $\frac{\alpha}{\omega}+\frac{\alpha}{\omega^4}$ ἢ $\alpha\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^4}\right)=\alpha\left(\frac{\omega^4+\omega}{\omega^5}\right)$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι $\alpha+\frac{\alpha}{\omega^5}$ ἢ $\alpha\left(1+\frac{1}{\omega^5}\right)=\alpha\left(\frac{\omega^5+1}{\omega^5}\right)$. Τὸ κλάσμα $\frac{\omega^4+\omega}{\omega^5}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{\omega^5+1}{\omega^5}$, διότι ἔχει μικρότερον ἀριθμητήν, ἤτοι εἶναι $\frac{\omega^4+\omega}{\omega^5}<\frac{\omega^5+1}{\omega^5}$. ὅθεν εἶναι καὶ $\alpha\left(\frac{\omega^4+\omega}{\omega^5}\right) < \alpha\left(\frac{\omega^5+1}{\omega^5}\right)$.

5) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα $1+11+111+\ldots.+(1\ldots..1)$ συγκείμενον ἐξ ὅρων ὧν ἕκαστος γράφεται διὰ τόσων ψηφίων 1 ὅση εἶναι ἡ τάξις του.

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 9 ἀγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots.+(10^\nu-1)$ καὶ αὐξάνοντες ἕκαστον τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου κατὰ μονάδα, ὁπότε τὸ ἄθροισμα αὐξάνει κατὰ ν μονάδας, ἀγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $10+10^2+10^3+\ldots.+10^\nu$, οὗτινος οἱ προσθετέοι ἀποτελοῦσι πρόοδον γεωμετρικὴν ἔχουσαν λόγον 10, ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι κατὰ τὸν τύπον

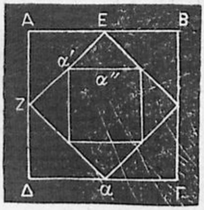
$K=\frac{10^\nu.10-10}{10-1}=\frac{10(10^\nu-1)}{9}$. τὸ ἄθροισμα ἄρα $(10-1)+$ $+(10^2-1)+\ldots.+(10^\nu-1)$ εἶναι

$\frac{10(10^\nu-1)}{9}-\nu=\frac{10(10^\nu-1)-9\nu}{9}$ καὶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα $\frac{10(10^\nu-1)-9\nu}{81}$·

6) Εἰς τετράγωνον πλευρᾶς α ἐγγράφομεν δεύτερον συνάπτοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου· εἰς τὸ δεύτερον ἐγγράφομεν ὁμοίως τρίτον κ. ο. κ. Εὑρεῖν 1ον τὴν περίμετρον καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου· 2ον τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐμβαδῶν πάντων τῶν τετραγώνων τούτων· 3ον τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐὰν ἡ ἐγγραφὴ νοηθῇ ἐκτεινομένη ἐπ' ἄπειρον.

Ἐὰν παραστήσωμεν δι' α' τὴν πλευρὰν τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἔχομεν $\alpha'^2=(AE)^2+(AZ)^2$, ἢ $\alpha'^2=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{\alpha^2}{2}$.

Οὕτω τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου τετραγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου· προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν ὡσαύτως ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρίτου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δευτέρου καὶ τὸ τοῦ νυοστοῦ εἶναι τὸ $\frac{1}{2^\nu}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου· ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νυοστοῦ τετραγώνου εἶναι $\frac{\alpha^2}{2^\nu}$,



ἐξ οὗ εὑρίσκεται ἡ πλευρὰ αὐτοῦ $\frac{\alpha}{2^{\frac{\nu}{2}}}=\frac{\alpha}{\sqrt{2^\nu}}=\frac{\alpha\sqrt{2^\nu}}{2^\nu}$. Ἐπομένως εὑρίσκεται καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ $\frac{4\alpha\sqrt{2^\nu}}{2^\nu}$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων πάντων τῶν τετραγώνων, θὰ εἶναι :

$$4\alpha+\frac{4\alpha\sqrt{2}}{2}+\frac{4\alpha\sqrt{4}}{4}+\frac{4\alpha\sqrt{8}}{8}+\ldots\ldots,$$

δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐν ᾗ πρῶτος ὅρος εἶναι 4α καὶ λόγος $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν διὰ τοῦ Α, θὰ ἔχωμεν ὅθεν

$$A=\frac{4\alpha}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\alpha}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{8\alpha}{2-\sqrt{2}}=\frac{8\alpha\,(2+\sqrt{2})}{2},$$

$$\text{ἢ}\qquad A=4\alpha\,(2+\sqrt{2}).$$

Ὥστε τὸ ὅριον πρὸς ὃ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων πάντων τῶν τετραγώνων ἐὰν ἡ ἐγγραφὴ νοηθῇ ἐκτεινομένη ἐπ' ἄπειρον εἶναι $4\alpha\,(2+\sqrt{2})$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν πάντων τῶν τετραγώνων θὰ εἶναι $\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{8}\ldots\ldots$, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐν ᾗ πρῶτος ὅρος εἶναι α^2 καὶ λόγος $\frac{1}{2}$. Τὸ δὲ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου ταύτης εἶναι:

$$A=\frac{\alpha^2}{1-\frac{1}{2}}=2\,\alpha^2.$$

Παρατήρησις. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τετραγώνου εἶναι α^2, ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐγγεγραμμένων τετραγώνων εἶναι $2\alpha^2-\alpha^2=\alpha^2$ παρατηροῦμεν ὅθεν ὅτι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐγγεγραμμένων τετραγώνων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τετραγώνου.

7) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $2^{\nu+1}-1$ εἶναι πρῶτος, ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu}(2^{\nu+1}-1)$ εἶναι τέλειος, ἰσοῦται δηλ. πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ. (Τοῦτο συμβαίνει π. χ. διὰ τὰς τιμὰς 1, 2, 4, 6, 12,... τοῦ ν).

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι

$$\frac{2^{\nu}(2^{\nu+1}-1)}{2^{\nu+1}-1}=2^{\nu}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{2^{2\nu+1}-2^{\nu}}{2^{\nu+1}-1}=2^{\nu}.$$

ἀλλὰ $\dfrac{2^{2\nu+1}-2^{\nu}}{2^{\nu+1}-1}$ εἶναι ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου· θέτοντες ὅθεν $\dfrac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}=2^{\nu}$ ὁ ἀριθμὸς $2^{\nu}(2^{\nu+1}-1)$ καθίσταται $\dfrac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}(2^{\nu+1}-1)$· ὁ ἀριθμὸς ἄρα οὗτος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ὅπερ ἀριθμὸς ἔχων ὑποπολλαπλάσια, ἐπὶ τὸν $2^{\nu+1}-1$ δίδει γινόμενον ἀριθμὸν πάλιν ἔχοντα ὑποπολλαπλάσια. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὑποπολλαπλασίων λ.χ. τοῦ τελευταίου ὅρου γεωμετρικῆς προόδου πρέπει νὰ δίδῃ τοῦτον, συνάγεται ὅτι καὶ νῦν ὁπότε ἔχομεν ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἐπὶ τὸν $2^{\nu+1}-1$ πρέπει νὰ συμβαίνῃ τοῦτο.

Ἀσκήσεις (Ἀλγ. σελ. 234).

1) Γνωρίζοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 330, εὑρεῖν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

Οἱ πρῶτοι παράγοντες εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ 330 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5 καὶ 11, τῶν ὁποίων προσθέτοντες τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν καὶ τὸν λογάριθμον τοῦ γινομένου αὐτῶν **330**· οὕτως ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \text{λογ } 2 &= 0{,}30103 \\ \text{λογ } 3 &= 0{,}47712 \\ \text{λογ } 5 &= 0{,}69897 \\ \text{λογ } 11 &= 1{,}04139 \\ \hline \text{καὶ} \quad \text{λογ } 330 &= 2{,}51851. \end{aligned}$$

2) Πῶς θὰ ὑρολογισθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἑξῆς παραστάσεων:

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^{\mu},\quad \alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\rho},\ \sqrt[\nu]{\alpha^3\beta\gamma},\quad \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}}}{\beta\sqrt{\delta}};\quad \frac{3\alpha^2\sqrt{\beta\gamma}}{5\mu}.$$

Ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^{\mu}$ εἶναι μ λογ $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)=$ μ (λογ α + λογ β — λογ γ). Ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\alpha^{\mu}.\beta^{\nu}.\gamma^{\rho}$ εἶναι μ λογ α + ν λογ β + ρ λογ γ. Ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\sqrt[\nu]{\alpha^3\beta\gamma}$ εἶναι $\frac{\lambda o\gamma(\alpha^3\beta\gamma)}{\nu}=\frac{3\,\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\,\beta+\lambda o\gamma\,\gamma}{\nu}$. Ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}}}{\beta\sqrt{\delta}}$ εἶναι $\lambda o\gamma\,\alpha+\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}}-(\lambda o\gamma\,\beta+\lambda o\gamma\sqrt{\delta})$, ἢ $\lambda o\gamma\,\alpha+\frac{\mu\,\lambda o\gamma\,\gamma}{\nu}-\lambda o\gamma\,\beta-\frac{\lambda o\gamma\,\delta}{2}$. Καὶ τέλος ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\frac{3\alpha^2\sqrt{\beta\gamma}}{5\mu}$ εἶναι $\lambda o\gamma 3+2\lambda o\gamma\alpha+\frac{\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\gamma}{2}-\lambda o\gamma 5-\lambda o\gamma\mu$.

3) Ἔν τινι συστήματι λογαρίθμων ὁ λογάριθμος τοῦ 729 εἶναι 6. Τίς ἡ βάσις τοῦ συστήματος;

Ἔστω χ ἡ βάσις τοῦ συστήματος, ἐν τῷ ὁποίῳ δηλ. ὁ λογάριθμος τοῦ χ εἶναι 1· ἐν τῷ συστήματι τούτῳ ἔχομεν $\lambda o\gamma\,\chi=1$, $\lambda o\gamma\,\chi^2=2$, $\lambda o\gamma\,\chi^3=3$, $\lambda o\gamma\,\chi^4=4$, $\lambda o\gamma\,\chi^5=5$, $\lambda o\gamma\,\chi^6=6$ κλπ.

Ἐν τῷ ζητουμένῳ συστήματι ὁ λογάριθμος τοῦ 729 εἶναι 6, ἀλλὰ καὶ $\lambda o\gamma\,\chi^6=6$· ὅθεν ἕπεται $\chi^6=729$, ἢ $\chi=\sqrt[6]{729}$.

Τὴν παράστασιν $\sqrt[6]{729}=729^{\frac{1}{6}}$ ὑπολογίζομεν διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων διότι ἔχομεν $\lambda o\gamma\ 729^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\lambda o\gamma\,729=\frac{2,86273}{6}=0,47712$· ὅθεν $\chi=3$.

4) Ποῖον χαρακτηριστικὸν ἔχουσιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

$$0,7\quad 0,036,\quad 0,0065,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{8};$$

Ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 0,7 ἔχει χαρακτηριστικὸν $\overline{1}$, ὁ τοῦ 0,036 ἔχει $\overline{2}$, ὁ τοῦ 0,0065 ἔχει $\overline{3}$, ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{4}=0,25$ ἔχει χαρακτηριστικὸν $\overline{1}$, ὁ τοῦ $\frac{3}{4}=0,75$ ἔχει $\overline{1}$, καὶ ὁ τοῦ $\frac{5}{8}=0,625$ ἔχει χαρακτηριστικὸν $\overline{1}$.

5) Λῦσον τὰς ἐξισώσεις $\lambda o\gamma\, \chi^2 = \lambda o\gamma 100$, $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 24 - \lambda o\gamma 8$, $2\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 192 + \lambda o\gamma \frac{3}{4}$, $\lambda o\gamma\, \chi = 3\lambda o\gamma 18 - 4\lambda o\gamma 12$, $4\lambda o\gamma \frac{\chi}{2} + 3\lambda o\gamma \frac{\chi}{3} = 5\lambda o\gamma\, \chi - \lambda o\gamma\, \chi 27$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\, \chi^2 = \lambda o\gamma 100$, ἄρα $\chi^2 = 100$ καὶ $\chi = 10$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 24 - \lambda o\gamma 8$, ἢ $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma \frac{24}{8} = \lambda o\gamma\, 3$· ἄρα $\chi = 3$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 24 + \lambda o\gamma 8$, ἢ $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma\, 192$· ἄρα $\chi = 192$.

Ἔχομεν $2\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 192 + \lambda o\gamma \frac{3}{4} = \lambda o\gamma \left(192 . \frac{3}{4}\right) = \lambda o\gamma 144$,

ἢ $\lambda o\gamma\, \chi = \frac{\lambda o\gamma 144}{2} = \frac{2,15836}{2} = 1,07918$ καὶ $\chi = 12$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\, \chi = 3\, \lambda o\gamma\, 18 - 4\, \lambda o\gamma\, 12$, ἢ $\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma \left(\frac{18^3}{12^4}\right) = \lambda o\gamma \frac{9}{32}$· ὅθεν $\chi = \frac{9}{32}$.

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$\lambda o\gamma \left[\left(\frac{\chi}{2}\right)^4 . \left(\frac{\chi}{3}\right)^2\right] = 5\lambda o\gamma\, \chi - 27\lambda o\gamma\, \chi,$$

ἢ πρὸς τὴν $\lambda o\gamma \frac{\chi^7}{432} = (-22)\, \lambda o\gamma\, \chi$,

ἢ $7\, \lambda o\gamma\, \chi - \lambda o\gamma\, 432 = (-22)\, \lambda o\gamma\, \chi$,

ἢ $7\, \lambda o\gamma\, \chi + 22\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 432$

καὶ $29\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma 432$·

ὅθεν $\lambda o\gamma\, \chi = \frac{\lambda o\gamma 432}{29} = \frac{2,63548}{29} = 0,09088$ καὶ $\chi = 1,2328$.

6) Εὑρεῖν ἀκέραιον ἀριθμὸν χ οὗ ὁ λογάριθμος δὶς λαμβανόμενος νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ 1 τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ $\chi - \frac{9}{10}$.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ εἶναι :

$2\lambda o\gamma\, \chi = \lambda o\gamma \left(\chi - \frac{9}{10}\right) + 1$, ἢ $\lambda o\gamma\, \chi^2 - \lambda o\gamma \left(\chi - \frac{9}{10}\right) = 1$·

ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ $\chi - \frac{9}{10}$ ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ χ^2, ἔχομεν ἄρα

$\lambda o\gamma \frac{\chi^2}{\chi - \frac{9}{10}} = 1$ ἢ $\frac{\chi^2}{\chi - \frac{9}{10}} = 10$· ἀπαλλάσσοντες τῶν παρανομαστῶν εὑρίσκομεν $\chi^2=10\chi-9$, ἢ $\chi^2-10\chi+9=0$, λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὰς ρίζας 1 καὶ 9.

7) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-4\chi+\lambda o\gamma\, \nu=0$ εἶναι πραγματικαί, καὶ ποῖον τὸ εἶδος τῶν ριζῶν διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ ν ;

Ἐνταῦθα εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=16-4\lambda o\gamma\nu=4(4-\lambda o\gamma\, \nu)$· ἵνα αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma\, \nu \leqq 4$, ἢ $\nu \leqq 10000$. Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ν=1 καὶ ν=10000 ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας αὐτῆς ἴσας, διὰ τὰς μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10000 τιμὰς τοῦ ν ἔχει ρίζας ὁμοσήμους διότι λογ ν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ διὰ τὰς θετικὰς καὶ μικροτέρας τῆς μονάδος τιμὰς τοῦ ν ἔχει ριζας ἑτεροσήμους, διότι λογ ν εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός.

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 249).

1) Νὰ εὑρεθῶσι διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ τιμαὶ τῶν ἑξῆς παραστάσεων $87{,}4563 \times 0{,}798349$, $(28754)^7$, $\dfrac{\sqrt[5]{(32785)^3}}{\sqrt[4]{(24538)^5}}$.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν 87,4563 ἐπὶ 0,798349 εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\, 87{,}4563=1{,}94179 \qquad \lambda o\gamma\, 0{,}798349=\bar{1}90219$$

ἄθροισμα λογαρίθμων $=1{,}84398=$ λογ. γινομένου.

Ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 1,84398 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς 69,82 εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $(28754)^7$ εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\, 28754= & 4{,}45870 \\ \text{ἐπὶ} & 7 \\ \hline \text{γινόμενον} & 31{,}21090=\lambda o\gamma (28754)^7. \end{array}$$

Ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 31,21090 ἀντιστοιχῶν ἀριθμός, ὁ γραφόμενος διὰ 32 ψηφίων, εἶναι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $(28754)^7$.

Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου $\dfrac{\sqrt[5]{(32785)^3}}{\sqrt[4]{(24538)^5}}$

εἶναι $\lambda o\gamma \sqrt[5]{(32785)^3} - \lambda o\gamma \sqrt[4]{(24538)^5}$

ἢ $\lambda o\gamma \dfrac{3\,\lambda o\gamma 32785}{5} - \lambda o\gamma \dfrac{5\lambda o\gamma 24538}{4}$ (1).

Ἔχομεν λογ 32785=4,51567 καὶ λογ 24538=4,38975· ὅθεν ἡ παράστασις (1) γίνεται λογ 2,70940 — λογ 5,48719 = λογ $\bar{3}$,22221. Ὁ εἰς τὸν λογ$\bar{3}$,22221 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι 0,001668.

2) Εὑρεῖν τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῶν ἀριθμῶν 3^{10}, 3^{100},...$3^{1000000}$.

Ὁ λογάριθμος τοῦ 3^{10} εἶναι 10 λογ3=10.0,47712=4,7712· ἐπειδὴ δὲ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 10^3 ἔχει χαρακτηριστικὸν 4 τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων δι' ὧν γράφεται οὗτος εἶναι 5. Ὁ λογάριθμος τοῦ 3^{100} εἶναι 100 λογ3=47,712· ἄρα 3^{100} γράφεται διὰ 48 ψηφίων. Ὁ λογάριθμος τοῦ 3^{1000} εἶναι 1000 λογ 3=477,12· ἄρα 3^{1000} γράφεται διὰ 478 ψηφίων. Ὁ λογ τοῦ 3^{10000} εἶναι 10000 λογ3=4771,2· ἄρα 3^{10000} γράφεται διὰ 4772 ψηφίων. Ὁ λογ τοῦ 3^{100000} εἶναι 100000 λογ3 = 47712· ἄρα 3^{100000} γράφεται διὰ 47713 ψηφίων. Ὁ λογ τοῦ $3^{1000000}$ εἶναι 1000000 λογ 3=477120· ἄρα ὁ ἀριθμὸς $3^{1000000}$ γράφεται διὰ 477121 ψηφίων.

3) Πῶς θὰ ὑπολογισθῶσι διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις

$$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3, \qquad \sqrt[4]{3(\alpha^4-\beta^4)}.$$

Ἔχομεν λογ $\alpha^3\beta$ = 3 λογ α + λογ β καὶ λογ $\alpha\beta^3$ = λογ α + + 3 λογ β· ἀφαιροῦντες δὲ τὸν εἰς λογ $\alpha\beta^3$ ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ εἰς λογ $\alpha^3\beta$ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3$. Ὁ λογάριθμος τῆς παραστάσεως $\sqrt[4]{3(\alpha^4-\beta^4)}$ εἶναι $\dfrac{\text{λογ}3+\text{λογ}(\alpha^4-\beta^4)}{4}$. ἵνα δὲ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν $\alpha^4-\beta^4$ ἀφαιροῦμεν τὸν εἰς τὸν λογάριθμον 4λογ β ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμὸν ἀπὸ τοῦ εἰς 4λογ α ἀντιστοιχοῦντος, ἔστω δὲ υ τὸ ὑπόλοιπον τότε θὰ ἔχωμεν $\text{λογ}\sqrt[4]{3(\alpha^4-\beta^4)}=\dfrac{\text{λογ}3+\text{λογ}\,\upsilon}{4}$. ὁ εἰς τὸν $\dfrac{\text{λογ}\ 3+\text{λογ}\,\upsilon}{4}$ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\sqrt[4]{3(\alpha^4-\beta^4)}$.

4) Λῦσον τὰς ἐξισώσεις $7^{(\chi^2-5\chi+9)}=343$, $24^{3\chi-2}=10000$.

Ἔχομεν $(\chi^2-5\chi+9)\text{λογ}7=\text{λογ}343$, ἢ $\chi^2-5\chi+9=$ $\dfrac{\text{λογ}343}{\text{λογ}\,7}=\dfrac{2,53529}{0,84510}=3$, ἢ $\chi^2-5\chi+6=0$· λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν τὰς ρίζας χ=3 καὶ χ=2. Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους εἰς τὴν $24^{3\chi-2}=10000$ λαμβάνομεν $(3\chi-2)\text{λογ}24=\text{λογ}10000$, ἢ $3\chi-2=\dfrac{\text{λογ}\,10000}{\text{λογ}\ 24}=\dfrac{4}{1,38021}$ =2,898... ἢ 3χ=4,898... ἐξ ἧς χ=1,633.

5) Λῦσον τὴν ἐξίσωσιν $5^{\chi-1}=2+\frac{3}{5^{\chi-2}}$.

Ἀπαλλάσσοντες τῶν παρονομαστῶν λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $5^{2\chi-3}=2(5^{\chi-2})+3$, ἢ $5^{2\chi-3}-2(5^{\chi-2})-3=0$, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 5^3 λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $5^{2\chi}-2(5^{\chi+1})-3.5^3=0$, ἢ $5^2\chi-10.5^\chi-375=0$.
Ἐὰν τεθῇ $\psi=5^\chi$, προκύπτει ἡ 2ου βαθμοῦ ἐξίσωσις $\psi^2-10\psi-375=0$, ἐξ ἧς $\psi=\frac{1\mp\sqrt{100+1500}}{2}=\frac{10\mp40}{2}$, ὅθεν

$$\psi'=25, \quad \psi''=-15.$$

Τώρα ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $5^\chi=25$, ἥτις λύεται εὐκόλως ἂν ληφθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν δύο μελῶν. Οὕτως ἔχομεν

$$\chi\,\lambda o\gamma 5=\lambda o\gamma\, 25 \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=\frac{\lambda o\gamma 25}{\lambda o\gamma 5}=\frac{1,39794}{0,69897}=2.$$

Ἀσκήσεις (Ἄλγ. σελ. 262)

1) Τίς ἡ ἀξία κεφαλαίου 24000 δραχμῶν ἀνατοκιζομένου πρὸς 5% ἐπὶ 4 ἔτη;

Λύσις. Ἔχομεν $\alpha=24000$, $\tau=0,05$, $\nu=4$. Ὁ τύπος $K=\alpha.(1+\tau)^\nu$ γίνεται $K=24000.(1,05)^4$. Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν· $\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma 24000+4\lambda o\gamma(1,05)$·
$\lambda o\gamma(1,05)=0,02119$

$$\begin{array}{rcl} \lambda o\gamma\ 24000 & = & 4,38021 \\ 4\lambda o\gamma(1,05) & = & 0,08476 \\ \hline \lambda o\gamma\ K & = & 4,46497 \\ \text{καὶ}\quad K & = & 29172,15. \end{array}$$

2) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5% διπλασιάζεται;

Ἔστω α τὸ κεφάλαιον· τοῦτο ἀνατοκιζόμενον πρὸς 5% γίνεται μετὰ παρέλευσιν ν ἐτῶν $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἐπειδὴ δὲ τότε θὰ διπλασιασθῇ ἤτοι θὰ γίνῃ 2α, ἔχομεν $\alpha(1+\tau)^\nu=2\alpha$ ὥστε $\alpha(1+\tau)^\nu=2\alpha$ ἢ

$$\alpha(1,05)^\nu=2\alpha \quad \text{ἢ καὶ} \quad (1,05)^\nu=2.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν $\nu\lambda o\gamma(1,05)=\lambda o\gamma 2$ ἢ

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\, 2}{\lambda o\gamma\,(1,05)}=\frac{0,30103}{0,02119}=14 \text{ ἔτη καὶ τι πλέον.}$$

Ἐπειδὴ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν ὅτι 14 ἔτη δὲν εἶναι ἱκανά, ἀλλὰ 15 εἶναι πλείονα τοῦ δέοντος, ἵνα εὕρωμεν καὶ τὰς ἡμέρας η τοῦ 15ου ἔτους, ἐξισοῦμεν τὸν $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{365}\right)$

πρὸς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\frac{0,30103}{0,02119}$ ὅπερ εἶναι ὄχι $\upsilon=437$, ἀλλ' $\upsilon=0,00437$, διότι τὸ ὑπόλοιπον λαμβάνεται οὕτως ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ ἐκφράζῃ οἵας μονάδας καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· ὥστε ἔχομεν·

$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{365}=0,00437 \quad \kappa\alpha\grave{\iota} \quad 1+\frac{(0,05)\eta}{365}=1,01011 \quad \mathring{\eta}\right.$$

$$\frac{(0,05)\eta}{365}=1,01011-1=0,01011 \quad \mathring{\eta} \quad (0,05).\eta=0,01011.365$$

$$\kappa\alpha\grave{\iota} \qquad \eta=\frac{0,01011.365}{(0,05)}=\frac{1,011.365}{5}=\frac{1,011.73}{1}=73,803$$

ὥστε $\eta=73,803$, ἤτοι κατὰ προσέγγισιν 74 ἡμέραι.

3) Ἐὰν καταθέσῃ τις 4320 δραχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς $5^0/_0$ πόσα θὰ λάβῃ μετὰ $8\frac{1}{2}$ ἔτη, τοῦ τόκου λογιζομένου καθ' ἑξαμηνίαν;

Ἐπειδὴ ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνει οὐχὶ κατ' ἔτος ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα ἤτοι καθ' ἑξαμηνίαν ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ γίνεται (κατὰ τὸ ἐδ. 203 σημ. α'): $\Sigma=\alpha\left(1+\frac{\tau}{2}\right)^{2\nu}$ ἔχομεν δὲ $\alpha=4320$, $\tau=0,05$, $\nu=8\frac{1}{2}$, ὅθεν $\Sigma=4320\left(1+\frac{0,05}{2}\right)^{17}$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 4320+17\,\lambda o\gamma\left(1+\frac{0,05}{2}\right)$ ἢ $\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 4320+17\lambda o\gamma\left(\frac{41}{40}\right)=\lambda o\gamma\,4320+17\lambda o\gamma 41-17\lambda o\gamma 40$

$$\begin{array}{rr}
 & \lambda o\gamma 4320=\ \ 3,63548 \\
(\lambda o\gamma 41=1,61278) & 17.\lambda o\gamma 41=27,41736 \\
\hline
 & \check{\alpha}\theta\rho. \quad =31,05284 \\
(\lambda o\gamma 40=1,60206) & 17\lambda o\gamma 40=27,23502 \\
\hline
 & \lambda o\gamma\Sigma=\ \ 3,81782 \\
 & \kappa\alpha\grave{\iota} \quad \Sigma=\ 6574,30 \ \ \delta\rho.
\end{array}$$

4) Κατέθεσέ τις 100 δρ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς $6^0/_0$, εἰς τὴν ἀρχὴν δὲ ἑκάστου ἑπομένου ἔτους προσθέτει 20 δρχ. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη;

Μετὰ 10 ἔτη θὰ λάβῃ 100 δραχ. ἀνατοκιζομένας ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς $6^0/_0$, αἵτινες κατὰ τὸν τύπον $K=\alpha(1+\tau)^{\nu}$ γίνονται·

$$K=100\,(1,06)^{10}. \qquad (1)$$

Πλὴν δὲ τούτων θὰ λάβῃ καὶ τὸ ποσὸν εἰς ὃ φθάνουσιν αἱ κατὰ τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ἐπὶ $10-1=9$ ἔτη κατατιθέμεναι 20 δρ.

ὅπερ ποσὸν κατὰ τὸν τύπον $\Sigma = \alpha(1+\tau).\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$ εἶναι

$$\Sigma = 20.(1,06).\frac{(1,06)^{9}-1}{0,06}. \quad (2)$$

Ἵνα εὕρωμεν ἑπομένως πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη ἀφ' οὗ εὕρομεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους τὴν ἀξίαν τοῦ Κ καὶ Σ, προσθέτομεν ταύτας.

Ἐφαρμόζοντες δὲ εἰς τὸν τύπον (1) τοὺς λογαρίθμους, εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma K = \lambda o\gamma 100 + \lambda o\gamma (1,06)^{10}.$$

Εὑρίσκομεν δὲ ἐν τῇ σελίδι 134 πινάκων Dupuis ὅτι $(1,06)^{10} = 1,790848$, ὅπερ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\lambda o\gamma K = \lambda o\gamma 100 + \lambda o\gamma 1,790848$$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma 100 & = 2 \\ \lambda o\gamma 1,790848 & = 0,25306 \\ \hline \lambda o\gamma K & = 2,25306 \\ \text{καὶ} \quad K & = 179,084 \end{array}$$

Ἐφαρμόζοντες δὲ τοὺς λογαρίθμους καὶ εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma \Sigma = \lambda o\gamma 20 + \lambda o\gamma(1,06) + \lambda o\gamma\, 0,689479 - \lambda o\gamma(0,06)$

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma 20 & = 1,30103 \\ \lambda o\gamma(1,06) & = 0,02531 \\ \lambda o\gamma\, 0,689479 & = \bar{1},83852 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & 1,16486 \\ \lambda o\gamma\,(0,06) & = \bar{2},77815 \\ \hline \lambda o\gamma \Sigma & = 2,38671 \\ \text{καὶ} \quad \Sigma & = 243,61. \end{array}$$

Τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν Κ καὶ Σ εἶναι τὰ χρήματα, ἅτινα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη, εἶναι δὲ τοῦτο 179,08 + 243,61 ἤτοι 422,69 δρ.

5) Ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς γεννήσεως τοῦ τέκνου του θέλει τις νὰ καταθέσῃ ἐτησίως ποσόν τι εἰς τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5%, οὕτως ὥστε ὅταν τὸ τέκνον συμπληρώσῃ τὸ 20ὸν ἔτος τῆς ἡλικίας νὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ 15000 δραχμάς.

Τί ποσὸν πρέπει νὰ καταθέτῃ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους;

Γνωρίζομεν κατὰ τὸ ἐδ. 206, ὅτι ἐάν τις καταθέτῃ ἐν τῇ ἀρχῇ ἑκάστου ἔτους α δρχ. εἰς τὴν τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ θὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη τ ὄντος τοῦ τόκου τῆς 1 δρ. κατ' ἔτος $\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$. Ἔχομεν $\tau = 0,045$, $\nu = 20$ καὶ $\Sigma = 15000$· ὅθεν

$$15000 = \alpha\,(1,045)\frac{1,045)^{20}-1}{0,045}.$$

Εὑρίσκομεν ἐν σελίδι 134 τῶν πινάκων Dupuis, ὅτι $(1,045)^{20}$ εἶναι 2,411714 καὶ θέτοντες τοῦτο ἀντὶ τοῦ ἴσου του $(1,045)^{20}$

ἔχομεν: $$15000 = \alpha(1,045)\frac{2,411714-1}{0,045}$$

ἢ $$15000 = \alpha(1,045)\frac{1,411714}{0,045}.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma 15000 = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma(1,045) + \lambda o\gamma(1,411714) - \lambda o\gamma(0,045)$$

ἢ $$\lambda o\gamma 15000 - \lambda o\gamma(1,045) - \lambda o\gamma(1,411714) + \lambda o\gamma(0,045) = \lambda o\gamma\alpha.$$

λογ 15000	=4,17609
λογ 1,045	=0,01912
διαφορὰ	4.15697
λογ(1,411714)	=0,14974
διαφορὰ	4,00723
λογ 0,045	$=\bar{2},65321$
λογ α	=2,66044

ὅθεν $\alpha = 457,55$ δραχμαί.

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ

τῶν εὐχρηστοτέρων τῆς Ἀλγέβρας τύπων.

Γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν α καὶ β ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν:

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Κύβος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀριθμῶν:

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

Τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἀριθμῶν:

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

Κύβος τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἀριθμῶν:

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

Λύσις τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$: $\chi=\dfrac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$ καὶ $\psi=\dfrac{\gamma'\alpha-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$.

Ἐξίσωσις τοῦ 2ου βαθμοῦ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$: $\chi=\dfrac{-\beta\mp\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

Μεγίστη τιμὴ τοῦ γινομένου $\chi^\mu\psi^\nu\omega^\rho$... τῶν δυνάμεων μ, ν, ρ... ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα μένει ἀμετάβλητον, ὅταν $\dfrac{\chi}{\mu}=\dfrac{\psi}{\nu}=\dfrac{\omega}{\rho}\ldots$

Ἐλαχίστη τοῦ $\chi+\psi+\omega\ldots$, ἐὰν $\chi^\mu\psi^\nu\omega^\rho\ldots$ μένῃ ἀμετάβλητον, ὅταν

$$\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}\ldots$$

Πρόοδοι ἀριθμητικαί: α, ὄντος πρώτου ὅρου· τ, τελευταίου· ν, πλήθους τῶν ὅρων· ω, λόγου· Σ, ἀθροίσματος τῶν ὅρων:

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega \qquad \Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2}.$$

Πρόοδοι γεωμετρικαί: $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ $\quad \Sigma=\dfrac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1}=\dfrac{\alpha(\omega^\nu-1)}{\omega-1}$.

Ὅριον τοῦ Σ διὰ $\omega<1$ καὶ $\nu=\infty$: $\Sigma=\dfrac{\alpha}{1-\omega}$.

Τύπος τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος :

$$(\chi+\alpha)^{\mu}=\chi^{\mu}+\mu\alpha\chi^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^{2}\chi^{\mu-2}+\ldots.+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots.\nu}\alpha^{\nu}\chi^{\mu-\nu}+\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Ἀριθμοὶ εὔχρηστοι.

$\sqrt{2} = 1,41421$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2} = 1,25992$

$\sqrt{3} = 1,73205$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} = 1,44224$

$\sqrt{5} = 2,23606$

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΟΥΣΙΩΔΕΣΤΕΡΩΝ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ

Σελ. 5 στίχ. 17 ἀντὶ $-2,968$ γράφε: $=2,968$.

Σελ. 11 στίχοι τελευταῖοι ἀντὶ χ_3 γράφε: χ^3.

Σελ. 13 στίχ. 5 ἀντὶ α^3 γράφε: α^4.

Σελ. 14 στίχ. 24 ἀντὶ $2\sqrt{3\chi}$ γράφε: $2\sqrt{3}\chi$.

Σελ. 16 στίχ. 17 ἀντὶ $\left(\frac{\alpha+6^2}{4}>\alpha 6\right)$ γράφε: $\frac{(\alpha+6)^2}{4}>\alpha 6$.

Σελ. 21 στίχ. 2 ἀντὶ $+1$ γράφε: -1·

» » » 5 ἀντὶ $2\chi^3-3\chi^4$ γράφε: $2\chi^5-3\chi^3$.

Σελ. 24 στίχ. 13 ἀντὶ $\sqrt{6}$ γράφε: $\sqrt{\alpha}$· μετὰ στίχ. 18 πρόσθεσον τὰ ἑξῆς: Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{3}{4+\sqrt{2}}$ ἐπὶ $4-\sqrt{2}$, ἔχομεν $\frac{3(4-\sqrt{2})}{14}$.

Σελ. 36 στίχ. 2 ἐξάλειψον τό: θὰ εἶναι κατ᾽ἀρχὰς $1000(\mu+1)$·

» » » 26 ἀντὶ $45008-\chi$ γράφε: $45000-\chi$.

Σελ. 42 στίχ. 8 ἀντὶ $\chi^2-\psi^2$ γράφε: $\chi'^2-\psi'^2$·

» » » 12 ἀντὶ $\frac{8}{4}$ γράφε: $\frac{3}{4}$.

Σελ. 43 στίχ. 11 ἀντὶ ἀξιώσεις γράφε: ἐξισώσεις.

Σελ. 46 στίχ. 5 ἀντὶ 126 γράφε: 126ω·

» » » 14 ἀντὶ 5 γράφε: φ.

Σελ. 51 στίχοι 17, 20 καὶ 23 ἀντὶ $\alpha(6-\alpha)$ καὶ $\alpha(\alpha-6)$ γράφε: $2(6-\alpha)$ καὶ $2(\alpha-6)$.

Σελ. 58 στίχ. 18 ἀντὶ $+\sqrt{12}$ γράφε: $+3\sqrt{12}$.

Σελ. 61 ἐν τέλει 12 στίχου πρόσθεσον: $=\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6}$.

Σελ. 68 στίχ. 7 ἀντὶ $\frac{1}{2}$ γράφε: $\frac{1}{4}$.

Σελ. 74 στίχ. 7 ἀντὶ $\mp\frac{1}{2}$ γράφε: $=\mp\frac{1}{2}$.

Σελ. 75 στίχ. 1 ἀντὶ $-\frac{17}{1}$ γράφε: $-\frac{17}{4}$.

Σελ. 77 στίχ. 1 ἀντὶ $\left(-\chi\frac{\pi^2-2\varkappa+\pi\sqrt{\pi^2-\varkappa^4}}{2}\right)$ γράφε : $\left(\chi-\frac{\pi^2-2\varkappa+\pi\sqrt{\pi^2-4\varkappa}}{2}\right)$. στίχ. 22 ἀντὶ -2180 γράφε: $=2180$

Σελ. 78 στίχ. 17 ἀντὶ -6 γράφε : -5·

» » » 18 ἀντὶ $\frac{41}{3}$ γράφε : $-\frac{41}{3}$.

Σελ. 80 στίχ. 9 ἀντὶ 1 γράφε: -1.

Σελ. 23 στίχ. 1 ἀντὶ χ^5 γράφε: χ^3.