η Κυριακίδης
οι χαρ. [illegible]

ΛΑΖΑΡΟΥ ΛΑΖΟΥ
Διευθυντοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΑΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ 1931 ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΑΛΛΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52 — ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1934

ΛΑΖΑΡΟΥ ΛΑΖΟΥ
Διευθυντοῦ Πρακτικοῦ Λυκείου

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

## ΜΕΡΟΣ Γ'

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΑΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ 1931 ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΑΛΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ



ΑΘΗΝΑΙ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν ΣΙΔΕΡΗ
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 52 — ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
1934

Κάθε γνήσιον τίτυπον φέρει ὴν ὑπογραφὴν ἑνὸς τῶν συγγραφέων.

Τόγκας

Τύποις ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
Ὁδὸς Λέκα— Στοὰ Σιμοπούλου

# ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

## ΒΙΒΛΙΟΝ V.

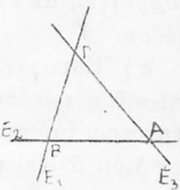
### Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα εἰς τὸν χῶρον.

*530. **Διὰ δοθείσης εὐθείας διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.***

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ δοθείσης εὐθείας καὶ σημείου κειμένου ἐκτὸς τῆς εὐθείας διέρχεται ἓν ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ ὅμως ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα ἐκτὸς τῆς δοθείσης εὐθείας ἕπεται, ὅτι θὰ διέρχωνται διὰ τῆς εὐθείας καὶ ἄπειρα ἐπίπεδα.

*531. **Ἐὰν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, ἢ πᾶσαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ πᾶσαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι $E_1$ $E_2$, $E_3$, (Σχ 1) αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ Α τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $E_2$ καὶ $E_3$. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα $E_1$ τέμνῃ τὰς $E_2$ καὶ $E_3$ εἰς δύο διάφορα σημεῖα Β καὶ Γ τότε ἡ εὐθεῖα $E_1$ θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζουν αἱ $E_2$ καὶ $E_3$ καὶ ἑπομένως καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα $E_1$ τέμνῃ τὰς $E_2$ καὶ $E_3$ εἰς δύο κοινὰ σημεῖα δηλ. εἰς τὸ Α, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α· ὥστε αἱ εὐθεῖαι $E_1$, $E_2$, $E_3$ ἢ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

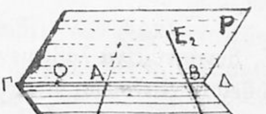


Σχ. 1.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις διὰ περισσοτέρας τῶν τριῶν εὐθείας.

*532. **Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο ἄλλας μὴ κειμένας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.***

Ἔστω ΟΑΒ (Σχ.2) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Ο καὶ τέμνει τὰς εὐθείας $E_1$ καὶ $E_2$ εἰς τα σημεῖα Α καὶ Β. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΑΒ τέμνει τὴν $E_1$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π αὐτῶν. Ἐπίσης ἐπειδὴ



Σχ. 2.

τέμνει καὶ τὴν $E_2$ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των Ρ. Ἄρα θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ νὰ τέμνωνται καὶ ἡ τομή των ΓΔ νὰ τέμνη τὰς $E_1$ καὶ $E_2$.

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον Ο καὶ εἶναι διάφορα, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ εὐθεῖα $E_1$ καὶ $E_2$ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι πράγματι τέμνονται.

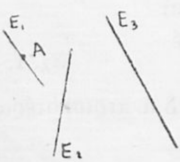
Ἀλλὰ διὰ νὰ τέμνῃ ἡ εὐθεῖα Ε, τὴν τομὴν ΓΔ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, δηλ. διὰ νὰ μὴν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ $E_1$ νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Ρ, δηλ. νὰ μὴ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό. Ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ αὐτὸ πρέπει τὸ σημεῖον Ο νὰ μὴν εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς $E_2$ καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν $E_1$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι διὰ νὰ τέμνῃ ἡ εὐθεῖα $E_2$ τὴν ΓΔ πρέπει τὸ Ο νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς $E_1$ καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν $E_2$

***533. Ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι τέμνουσαι τρεῖς εὐθείας, ἀνὰ δύο τῶν ὁποίων δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τί συμβαίνει, ἂν δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.***

α΄) Ἔστωσαν ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $E_1$, $E_2$, $E_3$ (Σχ. 3) δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἀνὰ δύο. Λέγω ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι τέμνουσαι ταύτας.

Διότι ἂν ἐπὶ τῆς μιᾶς τούτων ἔστω τῆς $E_1$ λάβωμεν τυχὸν σημεῖον, ἔστω τὸ Α, τότε ἔχομεν δύο εὐθείας $E_2$ καὶ $E_3$ μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῶν· ἀλλὰ τότε διὰ τοῦ Α (ἄσκησις 532) ἄγεται εὐθεῖα τέμνουσα τὰς $E_2$ καὶ $E_3$· ἐπειδὴ δὲ αὕτη διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῆς $E_1$ ἕπεται ὅτι τέμνει καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας· ἀλλὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας $E_1$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄπειρα σημεῖα, ἑπομένως ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.



Σχ. 3

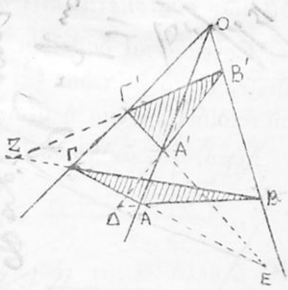
β΄) Ἔστω ὅτι αἱ $E_2$ καὶ $E_3$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου τέμνονται· τότε κάθε εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν μετὰ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς $E_1$, ἡ ὁποία δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν, τέμνει καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας· ἄρα πάλιν ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι τέμνουσαι καὶ τὰς δύο δοθείσας εὐθείας.

Ἔστω τέλος ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι $E_2$ καὶ $E_3$ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς $E_1$ τυχὸν σημεῖον Α καὶ θεωρήσωμεν τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τοῦ Α καὶ τοῦ $E_1$ καὶ $E_2$, ταῦτα τέμνονται κατ' εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Α· ὡς ὅμως θὰ δειχθῇ κατωτέρω, αὕτη εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν $E_2$ καὶ $E_3$ (Θ. 238 καὶ 239 Γεωμ. Σακ.) εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας.

**534. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ μὴ κείμενα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔχουν τὴν ἰδιότητα, ὅτι τέμνονται αἱ πλευραὶ ΒΓ, Β΄Γ΄, αἱ ΑΒ, Α΄Β΄ καὶ αἱ ΑΓ, Α΄Γ΄, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἢ εἶναι παράλληλοι, καὶ αἱ τομαὶ τῶν πλευρῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ (Σχ. 4) τέμνονται ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (ΒΓ, Β΄Γ΄).

Ὁμοίως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, Α΄Β΄ καὶ ΑΓ, Α΄Γ΄ ὁρίζουν ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα (ΑΒ, Α΄Β΄), (ΑΓ, Α΄Γ΄).



Σχ. 4

Τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τὰς εὐθείας ΓΓ΄, ΑΑ΄, ΒΒ΄.

Αἱ εὐθεῖαι ΓΓ΄ καὶ ΑΑ΄ ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (ΑΓ, Α΄Γ΄) θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

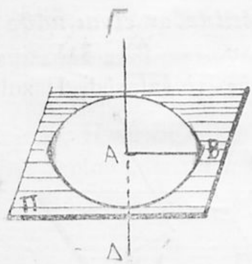
Ἐὰν τέμνωνται τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς τομῆς των θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων (ΒΓ, Β΄Γ΄), (ΑΒ. Α΄Β΄), (ΑΓ, Α΄Γ΄) καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τῆς τομῆς ΒΒ΄ τῶν ἐπιπέδων (ΑΒ, Α΄Β΄) καὶ (ΒΓ, Β΄Γ΄)· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΓΓ΄, ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄ θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΓ΄ καὶ ΑΑ΄ εἶναι παράλληλοι θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ ἡ ΒΒ΄ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτάς.

Διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ΒΓ, Β΄Γ΄) καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ δὲν τέμνονται, διότι ἐὰν ἐτέμνοντο τότε ἡ τρίτη εὐθεῖα ΑΑ΄ θὰ διήρχετο ἐκ τῆς τομῆς των (ὅπως ἐδείξαμεν προηγουμένως) καὶ ἑπομένως ἡ ΑΑ΄ θὰ ἔτεμνε τὴν ΓΓ΄, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ΒΒ΄ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΑΑ΄. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΓΓ΄, ΒΒ΄ καὶ ΑΑ΄ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

θετοι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΚΔ· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν δύο καθέτους ΑΚ καὶ ΒΚ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΔ καὶ κειμένας μετ᾽ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ΑΚΒ, ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ ΑΚ καὶ ΒΚ συμπίπτουν· εἶναι δὲ ΑΒ=ΑΚ—ΒΚ ἤτοι ΑΒ=12—7=5μ.

***539. Τίς εἶνε ὁ τόπος τῶν θέσεων εὐθείας μήκους 3 μ. καθέτου ἐπὶ ἄλλης καὶ στρεφομένης περὶ αὐτὴν ; Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ ἄκρου τῆς στρεφομένης εὐθείας.***

***Λύσις.*** Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ΓΔ ἐκείνη περὶ τὴν ὁποίαν ἡ ΑΒ περιστρέφεται καὶ ἡ ὁποία ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἔστω εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Α.



Σχ. 8.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν περιστροφὴν ἡ ΑΒ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Α, αἱ διάφοροι θέσεις τῆς ΑΒ ἀποτελοῦν καθέτους εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α τῆς ΓΔ°· ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι κάθετοι ἐπ᾽ αὐτὴν κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν θέσεων τῆς ΑΒ εἶναι τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Α.

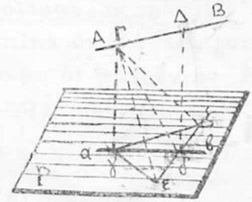
Κατὰ τὴν περιστροφὴν τὸ μῆκος τῆς ΑΒ διατηρεῖται σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς 3 μ.· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ εἶναι διαρκῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄκρου Β τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ ποδὸς Α αὐτῆς εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς 3 μ. καθ᾽ ὅλην τὴν περιστροφήν, ἄρα τὸ Β γράφει περιφέρειαν ἀκτῖνος 3 μ.· ἑπομένως τὸ μῆκος Γ ταύτης εἶναι Γ=2π(ΑΒ)=6π ἤτοι Γ=18, 8496 μ. ὅπου π=3,1416.

***540. Τίς εἶναι ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων ἐπὶ ἐπιπέδου Ρ τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων δοθείσης εὐθείας.***

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ προφανῶς ἡ ἰδία εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

Ἔστω ὅμως ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 9) κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Ρ. καὶ ἔστω Γγ ἡ ἐκ τοῦ σημείου αὐτῆς Γ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ· ἡ ΑΒ καὶ ἡ Γγ, τεμνόμεναι εἰς τὸ Γ, ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΒΓγ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ Ρ κατὰ τὴν αβ, διότι ἔχει μὲ αὐτὸ κοινὸν σημεῖον τὸ γ. Λέγω ὅτι ἡ αβ εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

Πρὸς τοῦτο ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ ἂς ἀχθῇ ἡ Δδ παράλληλος πρὸς τὴν Γγ· ἡ Δδ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΓγ ἑπομένως θὰ συναντήσῃ τὴν αβ εἴς τι σημεῖον δ· λέγω τώρα ὅτι ἡ Δδ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ· ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ Δδ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Γγ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αβ, διότι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Γγ, αβ καὶ Δδ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΒΓγ· ἐκ τοῦ σημείου δ φέρομεν τὴν εζ κάθετον ἐπὶ τὴν αβ καὶ κειμένην εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ· λαμβάνομεν εδ=δζ καὶ φέρομεν τὰς γδ, γζ, Γδ, Γζ· ἔχομεν γε=γζ, ὡς πλαγίας ἴσον ἀπεχούσας τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου· τότε ὅμως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Γγε καὶ Γγζ ἔχουν τὴν Γγ κοινὴν καὶ γε=γζ ἄρα εἶναι ἴσα ἑπομένως Γε=Γζ· ὅθεν τὸ τρίγωνον εΓζ εἶναι ἰσοσκελές· ἂν ἀχθῇ λοιπὸν ἡ Γδ, αὕτη εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ, ἐπειδὴ ἑνώνει τὸ μέσον τῆς βάσεώς του μὲ τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Γ· ἑπομένως ἡ εζ ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς γδ καὶ Γδ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν γδΓ· ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὅμως ἐπιπέδου κεῖται καὶ ἡ δΔ, ἄρα ἡ εζ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Δδ· ἀφοῦ ἡ Δδ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας εζ καὶ αβ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν· λοιπὸν ὁ ποῦς τῆς ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Δ ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας αβ αὐτοῦ, ἄρα αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

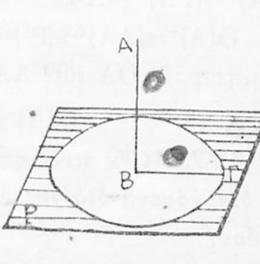


Σχ. 9.

***Σημείωσις.*** Ἡ ἄσκησις αὐτὴ λύεται εὐκόλως ἂν γνωρίζωμεν τὸ θεώρημα § 255 (Γεωμ. Ν. Σακελλαρίου) τῶν προβολῶν, τοῦ ὁποίου εἶναι ἄμεσος συνέπεια.

***541. Να εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν στρέφεται περὶ τὴν ἄλλην του κάθετον πλευρὰν ΑΒ ὁλόκληρον στροφὴν καὶ εἶναι ΑΓ=5δ καὶ ΑΒ=3δ.***

Αἱ διάφοροι θέσεις τῆς ΒΓ κατὰ τὴν περιστροφήν της εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β· ἤτοι ἡ ΒΓ στρεφομένη, γράφει ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν· ἐπειδὴ ὅμως τὸ μῆκος της εἶναι σταθερόν, διότι εἶναι κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν καὶ τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν σταθεράν, αὕτη στρεφομένη γράφει κύκλον, ὁ ὁποῖος



Σχ. 10.

ἔχει κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ· ἑπομένως ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδόν τοῦ κύκλου Β ἔχομεν $Ε=\pi(ΒΓ)^2$ ἀλλ᾿ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $(ΒΓ)^2=25-9=16$ ὅθεν $Ε=16.\pi.$, ἤτοι

$$Ε=50,2555 \text{ τ. δ,}$$

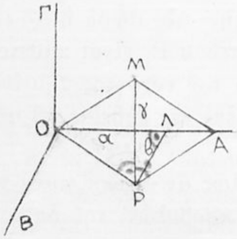
***542. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀνὰ δύο κάθετοι ἐπ᾿ ἀλλήλας καὶ σημεῖον Μ ἐκτὸς αὐτῶν. Ἂν ἐκ τοῦ Μ ἀχθῇ κάθετος ΜΡ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ καὶ ἐκ τοῦ Ρ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ΟΜ καὶ ΜΑ***

Ἔστω $ΟΛ=\alpha$, $ΛΡ=\beta$ καὶ $ΡΜ=\gamma$.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΟΡ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΡΛ ἔχομεν

$$(ΟΡ)^2=(ΟΛ)^2+(ΡΛ)^2 \quad \text{ἢ} \quad (ΟΡ)^2=\alpha^2+\beta^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ΜΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖάν αὐτοῦ ΟΡ τὴν ὁποίαν τέμνει.




Σχ. 11.

Ἑπομένως ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΜ τὸ τρίγωνον ΟΡΜ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ρ· ἐκ τούτου λοιπὸν ἔχομεν $(ΟΜ)^2=(ΟΡ)^2+(ΡΜ)^2$ ἢ ἕνεκα τῆς (1) καὶ ἐπειδὴ $ΡΜ=\gamma$, ἔχομεν

$$(ΟΜ)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΡΑ ἔχομεν $(ΜΑ)^2=(ΡΑ)^2+(ΡΜ)^2$ ἢ $(ΜΑ)^2=(ΡΑ)^2+\gamma^2$ (2)

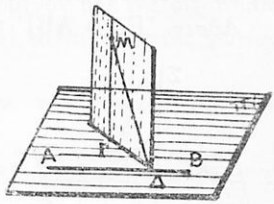
ἐκ δὲ τοῦ εἰς τὸ Λ ὀρθογωνίου τριγώνου ΡΛΑ ἔχομεν $(ΡΑ)^2=(ΡΛ)^2+(ΛΑ)^2$ ἢ $(ΡΑ)^2=\beta^2+(ΛΑ)^2$, ὁπότε ἡ (2) γίνεται $(ΜΑ)^2=(ΛΑ)^2+\beta^2+\gamma^2$· ἀλλὰ $ΛΑ=ΟΑ-ΟΛ$, ἐὰν δὲ δ παριστᾷ τὸ μῆκος τῆς ΟΑ τότε $ΛΑ=\delta-\alpha$, ὅθεν $(ΜΑ)^2=(\delta-\alpha)^2+\beta^2+\gamma^2$ ἢ

$$(ΜΑ)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\delta.$$

***543. Αἱ ἔκ τινος σημείου ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

***Λύσις.*** Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Π τυχὸν δι᾿ αὐτῆς διερχόμενος ἐπίπεδον, Μ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΜΓ ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· αὐτὴ μὲ τὴν ΜΓ ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον ΔΜΓ· ἐὰν τώρα ἀχθῇ ἡ ΜΔ, ἡ συνδέουσα τοὺς πόδας τῶν δύο καθέτων ΜΓ καὶ ΓΔ, τῆς μὲν πρώτης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ τὴν ΑΒ, αὕτη κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἡ ΑΒ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΜΓ ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας αὐτοῦ τὰς ΓΔ καὶ ΜΔ·



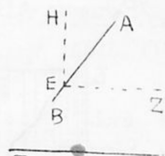

Σχ. 12.

ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι τελείως ὡρισμένον, ὡς κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ ἐκ σημείου Μ δοθέντος καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, διότι ὡς γνωστὸν ἓν καὶ μόνον τοιοῦτον ἐπίπεδον ἄγεται· ἑπομένως ἡ κάθετος ΜΓ ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον Π τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀγομένου ἐκ τοῦ Μ· ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι τυχὸν ἕπεται, ὅτι καὶ διὰ κάθε ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ τὸ αὐτὸ συμβαίνει· ἤτοι αἱ κάθετοι ἐκ τοῦ Μ αἱ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῆς ΑΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου ἐκ τοῦ Μ.

**544. *Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον δι' εὐθείας μὴ κειμένης μετ' ἄλλης ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ζητεῖται διὰ τῆς ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν πρέπει ἡ γωνία τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ εἶναι ὀρθή· καλεῖται δὲ γωνία δύο εὐθειῶν μὴ κειμένου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἡ γωνία ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς μιᾶς τούτων καὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ἄλλην, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τυχόντος σημείου τῆς πρώτης.



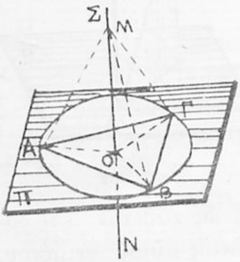

Ἔστω λοιπὸν ὅτι τοῦτο συμβαίνει· τότε ἐκ τυχόντος σημείου Ε τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ὁπότε γωνΑΕΖ=1 ὀρθή, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Ε φέρομεν τὴν ΕΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ·

Σχ. 13.

τότε ἡ ΑΒ καὶ ΕΗ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ ΕΖ εἶνε κάθετος, ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας αὐτοῦ· τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον, διότι ἀφοῦ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ ἡ παράλληλός της ΓΔ, εἶναι ὡσαύτως κάθετος ἐπ' αὐτό.

**545.** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις ἐκ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου.***

*Λύσις.* Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ Μ ἓν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ τοιοῦτον ὥστε ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ. Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν ΜΟ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθόγ. τρίγωνα ΜΟΑ, ΜΟΒ, ΜΟΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΜΟ κοινὴν καὶ τὰς ὑποτεινούσας ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.



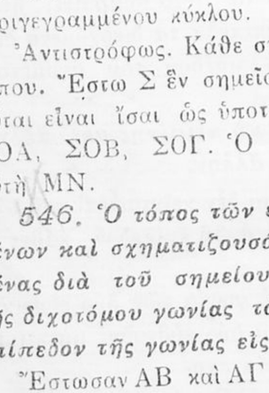
Σχ, 14.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἕπεται ὅτι εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ κεῖται, ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΝ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἀντιστρόφως. Κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ΜΝ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἔστω Σ ἓν σημεῖον τῆς ΜΚ. Ἂν φέρωμεν τὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ αὗται εἶναι ἴσαι ὡς ὑποτείνουσαι τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΟΑ, ΣΟΒ, ΣΟΓ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ κάθετος αὐτὴ ΜΝ.

**546.** ***Ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, τῶν διὰ δοθέντος σημείου ἀγομένων καὶ σχηματιζουσῶν ἴσας γωνίας μὲ δύο εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ σημείου, εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου γωνίας τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ ΑΔ μία εὐθεῖα τοῦ τόπου, ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

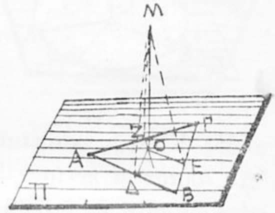


Σχ. 15.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἡ ΑΕ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΕΑΒ καὶ ΕΑΓ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΑΕ εἶναι καὶ αὐτὴ εὐθεῖα τοῦ τόπου. Αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΑΕ ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΕΑΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ὁ ζητούμενος τόπος. Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

**547. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν πλευρῶν δοθέντος τριγώνου.***

***Λύσις.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΜΔ=ΜΕ=ΜΖ. Ἂν φέρωμεν τὴν ΜΟ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τότε αἱ ΟΔ, ΟΕ ΟΖ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς κάθετοι πλευραὶ τῶν ἴσων ὀρθογ τριγώνων ΜΟΔ, ΜΟΕ καὶ ΜΟΖ καὶ θὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων. Τὸ Ο λοιπὸν ἀπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀποστάσεις ἴσας, ἄρα εἶναι καὶ αὐτὸ σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 16.

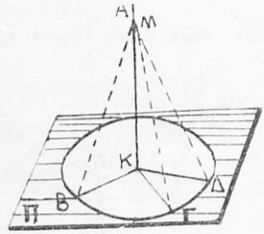
Ἀλλὰ τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἡ κάθετος λοιπὸν ΟΜ ἡ ὁποία ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

***Ἀντιστρόφως·*** ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ΟΜ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, ἤτοι ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι ἂν φέρωμεν τὰς ΝΔ, ΝΕ, ΝΖ σχηματίζονται τὰ ὀρθ. τρίγ. ΝΟΔ, ΝΟΕ, ΝΟΖ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ὑποτεινούσας ἴσας, ἤτοι θὰ εἶναι ΝΔ=ΝΕ=ΝΖ. Ὥστε τὸ Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα ΟΜ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

**548. *Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ τὰ σημεῖα περιφερείας εἶνε ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον.***

***Λύσις.*** Ἔστω Κ (Σχ. 17) ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ ΚΑ ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον της. Θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς καθέτου ταύτης καὶ ἂς φέρωμεν τὰς ΜΒ, ΜΓ,...,ΜΔ αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Μ μετὰ τῶν σημείων Β, Γ...Δ τῆς περιφερείας· τὰ σημεῖα αὐτὰ ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς, δηλαδὴ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ΚΑ, ἄρα αἱ ΜΒ, ΜΓ,... ΜΔ εἶναι πλάγιαι, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

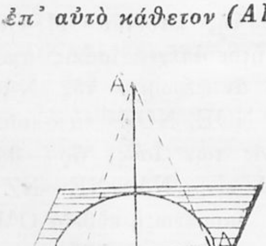
***Ἀντιστρόφως***. Κάθε σημεῖον Μ τοῦ χώρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν σημείων τῆς περιφερείας Κ εἶναι ἴσαι, κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΚΑ. Διότι ἔστω ὅτι τὸ Μ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΑ καὶ ἔστω ΜΒ=ΜΓ=...=ΜΔ· ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν κάθετον $ΜΚ_1$, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς περιφερείας· ἂν ἀχθοῦν αἱ $Κ_1Β$, $Κ_1Γ$, $Κ_1Δ$ αὗται ὡς ἀποστάσεις ἴσων πλαγίων ἀπὸ τοῦ




Σχ. 17.

ποδὸς $Κ_1$ τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι, ἤτοι $Κ_1Β=Κ_1Γ=..=Κ_1Δ$· Ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον $Κ_1$ καὶ ἀκτῖνα μίαν ἐξ αὐτῶν γράψωμεν περιφέρειαν αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Β, Γ,... Δ, ἤτοι ἔχει κοινὸ μετὰ τῆς Κ περισσότερα τῶν δύο σημείων, ἑπομένως συμπίπτει μὲ αὐτήν· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν μίαν περιφέρειαν μὲ δύο κέντρα τὰ Κ καὶ $Κ_1$ ὅπερ ἄτοπον· ἄρα τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς ΚΑ. ἀφοῦ λοιπὸν κάθε σημεῖον ποὺ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Κ κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΑ καὶ ἀντιστρόφως ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΑ εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Κ.

**549.** ***Ἐκ σημείου Α ἐκτὸς ἐπιπέδου Ρ κειμένου φέρομεν τὴν ἐπ' αὐτὸ κάθετον (ΑΠ)=4 δ. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου φέρομεν πλαγίαν ΑΔ πρὸς τὸ ἐπίπεδον μήκους 5δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου μὲ κέντρον Π καὶ ἀκτῖνα ΠΔ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.***




Σχ. 18.

***Λύσις*** Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ ἔχωμεν

$$Ε=π(ΠΔ)^2 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΠΔ ἔχομεν

$$(ΠΔ)^2=(ΑΔ)^2-(ΑΠ)^2=5^2-4^2=9$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $(ΠΔ)^2$ διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$Ε=π.9=3,14\times9=28,26 τ.δ.$$

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Π εἶναι

$$2π.(ΠΒ)=2\times3,14\times3=18,84 \ δ.$$

**550.** ***Ἐκ σημείου Α φέρομεν κάθετον ΑΒ ἐπὶ ἐπίπεδον Ρ***

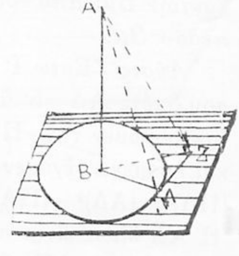
*καὶ μήκους δ. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα δ γράφομεν περιφέρειαν ἐν τῷ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΛ, ἂν τὸ Λ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ἂν ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΛΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἴση μὲ 3,24δ· πόση εἶναι ἡ ΑΖ;*

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΒΛ ἔχομεν

$$(ΑΛ)^2=(ΑΒ)^2+(ΒΛ)^2 \quad ἢ$$
$$=δ^2+δ^2=2δ^2$$

ἄρα $(ΑΛ)=δ\sqrt{2}$

Ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΛΖ καὶ τὴν ΑΖ, ἡ ΑΛ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΖ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων




Σχ. 19.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΛΖ ἔχομεν

$$(ΑΖ)^2=(ΛΖ)^2+(ΑΛ)^2 \quad ἢ \quad (ΑΖ)^2=3,24^2+2δ^2$$

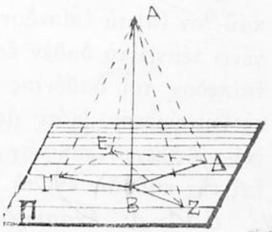
ἄρα $ΑΖ=\sqrt{3,24^2+2δ^2}$.

**551.** ***Ἂν εὐθεῖα σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς εὐθείας ἐπιπέδου εἰς τὴν τομήν των, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.***

Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Λέγω ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Διότι ἂν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων λάβωμεν ΒΓ=ΒΔ=ΒΖ καὶ φέρωμεν τὰς ΑΔ, ΑΓ καὶ ΑΖ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΒΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ τὰς ΒΓ=ΒΔ=ΒΖ ἐκ κατασκευῆς καὶ γωνΑΒΓ=γωνΑΒΔ=γωνΑΒΖ ἐξ ὑποθέσεως ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΔ==ΑΖ. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ, καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τοῦτο ἐκ τοῦ σημείου Α, ἔστω τὴν ΑΕ καὶ τὰς ΕΓ, ΕΔ, ΕΖ αὗται ὡς ἀποστάσεις τῶν ἴσων πλαγίων ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ ἀπὸ τοῦ ποδὸς Ε τῆς καθέτου ΑΕ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΕΓ=ΕΔ=ΕΖ· ἂν λοιπὸν μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα μίαν τούτων γραφῇ περιφέρεια αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Γ, Δ, Ζ· ἀλλ' ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ἂν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα μίαν τούτων γράψωμεν περιφέρειαν καὶ αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων Γ, Δ, Ζ· αἱ δύο ὅμως αὗται περιφέρειαι ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα συμπίπτουν εἰς μίαν. Ὑποθέτοντες λοιπὸν ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π εὐ-




Σχ. 20.

ρίσκομεν περιφέρειαν μὲ δύο κέντρα τὸ Β καὶ Ε, ὅπερ ἄτοπον· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

**552.** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου τῶν ἀπεχόντων 5μ. ἀπὸ δοθέντος σημείου Α, ἂν τοῦτο ἀπέχῃ τοῦ ἐπιπέδου 3μ.***

***Λύσις.*** Ἔστω Ρ (σχ. 18) τὸ ἐπίπεδον καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, ὁπότε ΑΔ=5· ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΠ κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ θὰ εἶναι ΑΠ=3μ· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΠΔ, τὸ τρίγωνον ΑΠΔ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Π καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$(ΠΔ)^2=(ΑΔ)^2-(ΠΑ)^2$ ἢ $(ΠΔ)^2=25-9=16$ καὶ $ΠΔ=4$.

Ἡ ΑΔ ὅμως εἶναι πλαγία καὶ κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου πλὴν τοῦ ποδὸς Π τῆς ΑΠ, θὰ κεῖται ἐπὶ πλαγίας ὡς πρὸς τὴν ΑΠ· ἵνα ὅμως τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχει 5μ. τοῦ Α πρέπει ἡ ΑΜ=ΑΔ· ἀλλ' αὗται ἐπειδὴ εἶναι πλάγιαι ἴσαι, ἀπέχουν ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, ἤτοι ΠΜ=ΠΔ=4· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸν πόδα Π τῆς καθέτου ΑΠ ἐπὶ τὸ Ρ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς 4μ. καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

**553.** ***Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπὶ ἐπιπέδου Ρ ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.***

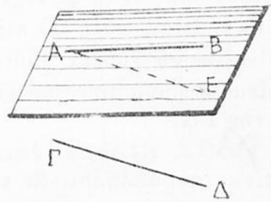
Θεωροῦμεν τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου (ἄσκησις 545), ἤτοι τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ· αὕτη ἐν γένει τέμνει τὸ δοθὲν ἐπίπεδον (ἐκτὸς ἂν τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ δοθέντος τριγώνου) εἴς τι σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι ἀφ' ἑνὸς κεῖται ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου, ἀφ' ἑτέρου ἀπέχει ἴσον τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἐπειδὴ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἰς τὸ κέντρον τοῦ τριγώνου.

**554.** ***Δι' ἑκάστης ἐκ δύο εὐθειῶν, μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἄγεται ἓν μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην.***

***Λύσις.*** Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· λέγω ὅτι διὰ τῆς ΑΒ ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ καὶ ἓν μόνον.

Διότι ἂν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α τῆς ΑΒ, ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, τότε ἡ ΑΒ καὶ ΑΕ ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΕΑΒ· ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΕ τοῦ ἐπιπέδου ΑΕΒ, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Ἄλλο

Ἄλλο ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ ΕΑΒ δὲν δύναται διὰ τῆς ΑΒ νὰ ἀχθῇ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ· διότι κάθε τοιοῦτον ἐπίπεδον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΓΔ ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ, δηλαδὴ ἔκ τινος σημείου τοῦ ἐπιπέδου ΕΑΒ· ἀλλὰ ὅλαι αἱ παράλληλοι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Πόρ. 240 Γεωμ. Σακελ.)· ὥστε ἐξ οἱουδήποτε σημείου τῆς ΑΒ καὶ ἂν ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΕΑΒ· ἄρα δὲν ἄγεται ἄλλο ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ ΕΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ διὰ τῆς ΓΔ ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον ἄγεται πρὸς τὴν ΑΒ.

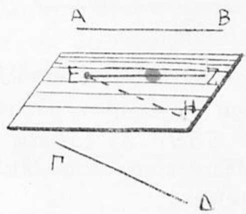


Σχ. 21.

**555. *Διὰ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο τυχούσας εὐθείας τοῦ χώρου.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ σημεῖόν τι Ε ἐκτὸς αὐτῶν κειμένον. Λέγω ὅτι διὰ τοῦ Ε ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον καὶ πρὸς τὰς δύο καὶ ἓν μόνον.

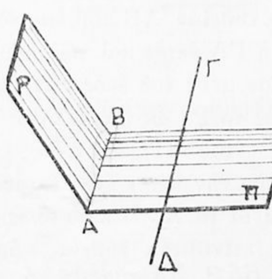
Διότι ἂν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν τὰς ΕΖ καὶ ΕΗ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, αὗται ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΗΕΖ. Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΗ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΗΕΖ. Ὁμοίως καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΗΕΖ διότι εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΖΕΗ εἶναι παράλληλον καὶ πρὸς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ. Δὲν ὑπάρχει δὲ ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, διότι κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτὰς ἀγομένη ἐκ τοῦ Ε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΗΕΖ.



Σχ. 22.

**556. *Ἂν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα εἶναι παράλληλα πρὸς εὐθεῖαν καὶ ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν.***

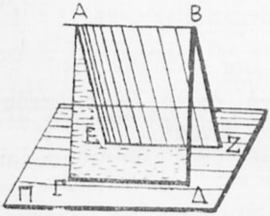
Ἔστω ΑΒ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἕκαστον, τῶν ὁποίων εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΓΔ, τότε λέγω ὅτι καὶ ἡ τομή των ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.



Σχ. 23.

Διότι ἂν ἐκ τοῦ τυχόντος κοινοῦ σημείου Α τῆς ΑΒ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ, αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ Ρ, διότι γνωρίζομεν ὅτι ἂν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον καὶ ἀχθῇ ἐκ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν, αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ παράλληλος αὕτη θὰ εἶναι κοινὴ εὐθεῖα τούτων, ἀλλ' ἡ μόνη κοινὴ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ΑΒ· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

557. ***Αἱ τομαὶ ἐπιπέδου Π ὑπὸ ἄλλων ἀγομένων δι' εὐθείας εἶναι παράλληλοι, ἂν τὸ Π εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν.***



Σχ. 24.

Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, καὶ ΓΔ καὶ ΕΖ αἱ τομαὶ τοῦ Π ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΖΕ τῶν διερχομένων διὰ τῆς ΑΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ τοῦ Π ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ· ὁμοίως ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ θὰ εἶναι καὶ ἀναμεταξύ των παράλληλοι.

558 ***Ἂν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλος πρὸς ἕκαστον αὐτῶν ἢ κεῖται ἐπί τινος τούτων.***

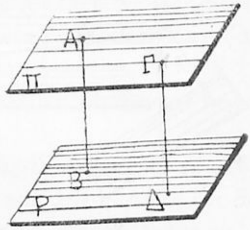
Ἔστωσαν ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καί Ρ (σχ. 23) τέμνονται κατὰ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ὁποίαν εἶναι παράλληλος ἡ ΓΔ.

Ἐὰν ἡ ΓΔ δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον οὔτε μὲ τὸ Π οὔτε μὲ τὸ Ρ τότε ἡ ΓΔ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς αὐτό· ἐπίσης ἡ ΓΔ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό, κεῖται δὲ ἡ ΓΔ ἐκτὸς καὶ τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἐὰν ὅμως ἡ ΓΔ ἔχῃ κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων, ἔστω τοῦ Π, τότε εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Ρ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΑΒ, κεῖται ὅμως ἐπὶ τοῦ Π διότι ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ὁρίζει μὲ αὐτὴν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ Π τρία κοινὰ σημεῖα τὰ Α, Β καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΓΔ καὶ τοῦ Π, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἄρα ταυτίζεται μὲ τὸ Π.

559. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις α') ἀπὸ δοθὲν ἐπίπεδον, β') ἀπὸ δύο ἐπίπεδα, γ') ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ἀπόστασιν λ ἀπὸ ἄλλο.***

α΄) Ἔστω Ρ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ γεωμ. τόμος τῶν σημείων τοῦ χώρου τῶν ἀπεχόντων ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀπόστασιν μ.

Ἔστω Α σημεῖον τοῦ τόπου καὶ ΑΒ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ ἐπεπέδου Ρ· ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=μ. Ἐὰν ἐκ τοῦ Α ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἑπομένως παράλληλον πρὸς τὸ Ρ, λέγω ὅτι τὸ Π εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.



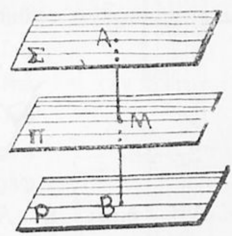
Σχ. 25.

Διότι ἔστω Γ τυχὸν σημεῖον τοῦ Π διάφορον τοῦ Α καὶ ΓΔ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ Ρ· τότε ΑΒ=ΓΔ=μ ὡς κάθετα εὐθύγρ. τμήματα περιεχόμενα μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων· ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπὸ τοῦ Ρ εἶναι ἴση μὲ μ ἕπεται, ὅτι τὸ Π εἶναι ὁ ζητούμενος μ. τόπος.

(*Σημ.* Νὰ διδαχθῇ μετὰ τὸ πόρισμα 245).

β΄) Τὰ δύο ἐπίπεδα δύναντα νὰ εἶναι παράλληλα, ἢ δύνανται νὰ τέμνωνται. (ἐὰν τέμνωνται βλέπε τὴν ἀντίστροφον τῆς ἀσκήσεως 692).

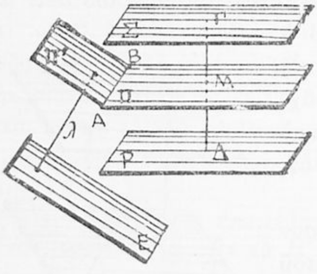
Ἔστωσαν Ρ καὶ Σ τὰ δοθέντα παράλληλα ἐπίπεδα. Ἀπὸ τὸ ἕνα ἐκ τούτων ἔστω τὸ Σ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α καὶ φέρομεν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Ρ· εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ἀποστάσεως ΑΒ φέρομεν ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ ταύτην· τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος. Διότι κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν κάθε σημεῖον τοῦ Σ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Π ἀπόστασιν ἴσην πρὸς ΑΒ/2 καὶ κάθε σημεῖον τοῦ Π ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ρ ἀπόστασιν ΑΒ/2, ἤτοι τὰ σημεῖα τοῦ Π ἀπὸ τὰ δύο δοθέντα ἐπίπεδα ἀπέχουν ἰσάκις. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶνε ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὰ δύο.



Σχ. 26.

γ΄) Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ καὶ ἀπόστασιν λ ἐκ τοῦ ἐπιπέδου Ε.

Ὁ τόπος των σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου τῶν Σ καὶ Ρ, ὡς εἴδομεν, εἶναι ἐπίπεδον Π παράλληλον πρὸς αὐτὰ καὶ εὑρισκόμενον εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ δύο, ὁ δὲ τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τοῦ Ε ἀπόστασιν λ εἶναι ἐπίπεδον Π′ (περίπτωσις α′) παράλληλον πρὸς αὐτὸ καὶ εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν λ απ᾽ αὐτοῦ· τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Π′ ἐν γένει τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

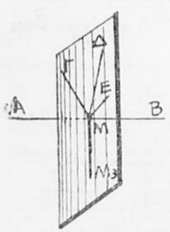


Σχ. 27

Διότι κάθε σημεῖον αὐτῆς, ὡς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Σ καὶ Ρ, ὡς σημεῖον δὲ τοῦ Π′ ἀπέχει ἀπόστασιν ἴσην πρὸς λ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ε. (Τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Π′ δὲν τέμνονται, ἐὰν τὸ Ε εἶναι κάθετον πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ).

**560. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος α′) τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ δύο σημείων· β′) τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Ρ, τῶν ἀπεχόντων ἀπόστασιν λ ἀπὸ ἄλλου ἐπιπέδου Ν.***

α′) Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Γ, Δ, Ε τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τὰ ἀπέχοντα ἐξ ἴσου τῶν Α καὶ Β· τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν καθέτων εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ. Αὗται ὅμως ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου Π καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Λέγω τώρα ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος· διότι ἂν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον $M_3$ αὐτοῦ καὶ φέρωμεν τὴν $MM_3$, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ διότι ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ $MM_3$ εἶναι κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν· ἀλλὰ τότε τὸ σημεῖον $M_3$ ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν ἄκρων Α, Β αὐτῆς. Ὅθεν ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο δοθέντα σημεῖα.



Σχ. 28.

Σχ. 29.

β′) Τὰ σημεῖα τοῦ χώρου τὰ ἀπέχοντα ἀπόστασιν λ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ν κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου Ε παραλλήλου πρὸς τὸ Ν (περιπτ. α′ ἄσκησις 559) τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Ν ἀπόστασιν λ· τὸ ἐπίπεδον Ε τέμνει ἐν γένει τὸ Ρ κατά τινα εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος· (τὰ ἐπίπεδα Ε καὶ Ρ δὲν τέμνονται, ἂν τὸ Ρ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ν). Ὅθεν ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνεται τὸ ἐπίπεδον Ρ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ Ν καὶ τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Ν ἀπόστασιν λ.

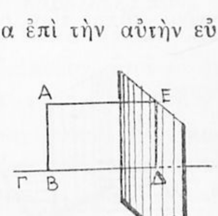
561. ***Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς εὐθεῖαν τέμνονται κατὰ παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἢ εἶναι παράλληλα.***

Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (σχ. 23) παράλληλα πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Ταῦτα ἢ θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλα. Λέγω ὅτι ἂν τέμνωνται κατά τινα εὐθεῖαν ΑΒ αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Διότι ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, ἤτοι ὅτι ἡ ΑΒ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ καὶ θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τοῦ ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου σημείου Α τῆς ΑΒ, τοῦτο θὰ τέμνῃ καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, διότι τὸ σημεῖον Α εἶναι κοινὸν τῶν δύο ἐπιπέδων· ἐπειδὴ δὲ ταῦτα εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν ΓΔ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΔΑ διέρχεται δι᾿ αὐτῆς, θὰ τέμνῃ τὰ Π καὶ Ρ κατ᾿ εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ΓΔ ὅπερ ἀδύνατον, διότι τότε ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α θὰ ὑπῆρχον δύο παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

562. — ***Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.***

Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΓΔ λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλα.



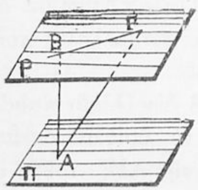
Σχ. 30.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ τοῦτο ἐπειδὴ ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ Ρ, τὸν πόδα Δ τῆς καθέτου ΓΔ ἐπ᾿ αὐτὸ, τέμνει τὸ Ρ κατά τινα εὐθεῖαν ΔΕ· ἐπειδὴ ἡ ΓΔ ὅμως εἶναι κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὸ Ρ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΔΕ· ἀλλὰ τότε ἡ ΑΒ καὶ ΔΕ ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι· Ὥστε ἡ ΑΒ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς αὐτό.

563. — ***Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο.***

Ἔστωσαν Π καὶ Ρ (σχ.31) τὰ παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ΒΓ εὐθεῖα τις κειμένη ἐπὶ τοῦ Ρ. λέγω ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π. Ἂν ἡ ΒΓ δὲν ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ Π θὰ τὸ ἔτεμνε εἴς τι σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, θὰ ἦτο σημεῖον καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π· ἀλλὰ τότε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον καὶ ἐπομένως θὰ ἐτέμνοντο, ὅπερ ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι παράλληλα· ἄρα ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

**564 — *Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ παράλληλα καὶ εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ Π εἰς τὸ Α, ἡ δὲ ΑΓ τέμνουσα τὸ Ρ εἰς τὸ Γ, νὰ εὑρεθῇ ἡ ΑΓ, ἂν εἶναι ΑΒ=3,8μ. ΒΓ=2,7 μ.***

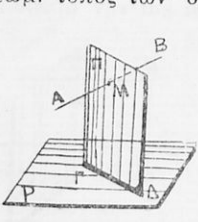



Σχ. 31.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ τὸ ὁποῖον εἶνε παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ αὐτοῦ· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Β, καὶ ἐπομένως ἔχομεν $(\text{ΑΓ})^2=(\text{ΑΒ})^2+(\text{ΒΓ})^2$ ἢ $(\text{ΑΓ})^2=3{,}8^2+2{,}7^2=21{,}73$ καὶ $\text{ΑΓ}=4{,}661\ldots$ μ.

**565. — *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπιπέδου, ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων, κειμένων ἐκτὸς αὐτοῦ.***

Ἔστω Ρ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ Α, Β τὰ δοθέντα σημεῖα. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις τῶν Α, Β, εἶναι τὸ κάθετον ἐπίπεδον Π εἰς τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ τῆς συνδεούσης ταῦτα. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἐν γένει τέμνει τὸ Ρ (ἐκτὸς ἂν ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ) κατά τινα εὐθεῖαν ΓΔ ἡ ὁποία εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος. Διότι κάθε σημεῖον αὐτῆς, ὡς σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἰσάκις τῶν Α, Β. Ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ τομὴ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα.




Σχ. 32.

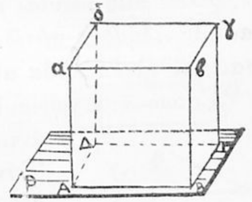
**566. — *Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ δοθέντα σημεῖα· τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἑπομένως ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ (ἄσκησις 454).

567. — ***Διὰ τῶν κορυφῶν παραλληλογράμμου κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου Ρ φέρομεν εὐθείας παραλλήλους καὶ ἴσας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Ποῖον σχῆμα ὁρίζουν τὰ ἄκρα τούτων καὶ τίνα σχέσιν ἔχει πρὸς τὸ δοθέν.***

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον καὶ Αα, Ββ, Γγ, Δδ αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, ἀγόμεναι παράλληλοι καὶ ἴσαι εὐθεῖαι· λέγω ὅτι τὰ ἄκρα αὐτῶν α, β, γ, δ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ αδ τὸ σχῆμα ΑαδΔ ἔχον τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ αδ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ αβ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἑπομένως αἱ γωνίαι δαβ καὶ ΔΑΒ ὡς ἔχουσαι τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν δαβ καὶ ΔΑΒ εἶναι παράλληλα· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ γωνίαι αβγ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν αβγ καὶ ΑΒΓ

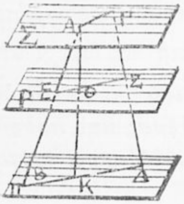



Σχ. 33.

εἶναι παράλληλα· ἀλλὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα αβγ καὶ δαβ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ, ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἄλληλα παράλληλα· ἐπειδὴ ὅμως ἔχουν κοινὴν τὴν εὐθεῖαν αβ συμπίπτουν εἰς ἓν ἐπίπεδον, ἤτοι τὰ σημεῖα α, β, γ, δ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου· ὅθεν τὸ σχῆμα α β γ δ εἶναι ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ αδ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἡ βγ ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, εἶναι δὲ καὶ ΑΔ=ΒΓ ἕνεκα τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἕπεται ὅτι καὶ αδ=βγ ὡς παράλληλοι καὶ ἴσαι μὲ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἑπομένως τὸ αβγδ εἶναι παραλληγόγραμμον· τοῦτο ὅμως ἔχει τὰς πλευράς του καὶ τὰς γωνίας του ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔ, ἄρα εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό. Ἤτοι τὰ ἄκρα τῶν παραλλήλων καὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου ὁρίζουν παραλληλόγραμμον ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

568. ***Εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τρία παράλληλα ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Β καὶ ἄλλη ΓΔ εἰς τὰ Γ, Ζ, Δ. Ἐὰν εἶναι ΑΕ=6μ.***

***ΒΕ=8μ. ΓΔ=12μ. νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ΓΖ καὶ ΓΔ.***



Σχ. 34.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς μέρη ἀνάλογα, ἑπομένως ἔχομεν :

$$\frac{ΑΕ}{ΕΒ}=\frac{ΓΖ}{ΖΔ} \quad ἢ \quad \frac{ΓΖ}{ΖΔ}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \quad ἢ \quad \frac{ΓΖ}{3}=\frac{ΖΔ}{4}$$

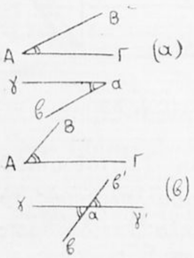
ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$\frac{ΓΖ}{3}=\frac{ΖΔ}{4}=\frac{ΓΖ+ΖΔ}{7}, \quad ἢ \quad \frac{ΓΖ}{3}=\frac{ΖΔ}{4}=\frac{ΓΔ}{7},$$

$$ἢ \quad \frac{ΓΖ}{3}=\frac{ΖΔ}{4}=\frac{12}{7} \quad καὶ \quad ΓΖ=\frac{12.3}{7}=5\frac{1}{7}, \; ΖΔ=\frac{12.4}{7}=6\frac{6}{7}.$$

***569. Δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ἀντιθέτου φορᾶς εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα.***

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ βαγ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ ἀντιθέτου φοράς. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς τῆς βαγ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς αὐτῆς α θὰ προκύψῃ ἡ γωνία β΄αγ΄ ἡ ὁποία κεῖται μετὰ τῆς βαγ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ εἶναι γων βαγ=γων β΄αγ΄, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀλλὰ ἡ γωνία β΄αγ΄ καὶ ΒΑΓ ἔχουν τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους καὶ κεῖνται εἰς διάφορα ἐπίπεδα, ἄρα τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι, ἤτοι γωνΒΑΓ=γων β΄αγ΄, ὅθεν καὶ γωνΒΑΓ=γων βαγ καὶ τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα διότι ἡ βαγ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ ἡ κατὰ κορυφήν της β΄αγ΄.



Σχ. 35.

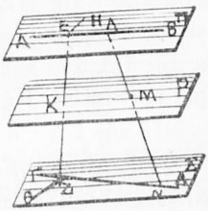
***570. Τίνα ἰδιότητα ἔχουν δύο γωνίαι, ἂν αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ δύο μὲν τῆς αὐτῆς φορᾶς δύο δι᾽ ἀντιθέτου.***

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ β΄αγ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ τὰς μὲν αβ΄ καὶ ΑΒ τῆς αὐτῆς φορᾶς, τὰς δὲ αγ καὶ ΑΓ ἀντιθέτου φορᾶς, λέγω ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα (ὑποτίθεται ὅτι αἱ γωνίαι κεῖνται εἰς διάφορα ἐπίπεδα).

Διότι ἂν προεκταθῇ ἡ πλευρὰ γα πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς α προκύπτει ἡ γωνία β΄αγ΄κειμένη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς β΄αγ, είναι δὲ γων β'αγ+γων β'αγ'=2 ὀρθ., ὡς ἐφεξῆς ἔχουσαι τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας· ἀλλὰ ἡ γωνία β'αγ' ἔχει τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἄρα τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶναι παράλληλα καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἤτοι γων β'αγ'=γων ΒΑΓ. Ὅθεν γωνΒΑΓ+γων β'αγ=2 ὀρθ. καὶ τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα.

571. ***Δίδονται δύο εὐθεῖαι μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεώς των φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ταύτην. Νὰ δειχθῇ ὅτι τοῦτο διχοτομεῖ τυχοῦσαν εὐθεῖαν συνδέουσαν δύο σημεῖα τῶν εὐθειῶν.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ΕΖ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν ἀπόστασις καὶ Ρ τὸ κάθετον ἐπίπεδον εἰς τὸ μέσον Κ τῆς ΕΖ καὶ ΛΝ τυχοῦσα εὐθεῖα συνδέουσα δύο σημεῖα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, καὶ ἡ ὁποία τέμνεται ὑπὸ τοῦ Ρ εἰς τὸ σημεῖον Μ· λέγω ὅτι τὸ Μ εἶνε τὸ μέσον τῆς ΛΝ.



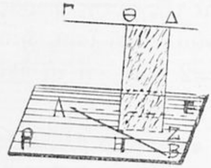
Σχ. 36.

Ἡ ΕΖ ὡς ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος· φέρομεν τὰς ΕΗ καὶ ΖΘ καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· αὗται μετὰ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὁρίζουν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Σ τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν ΕΖ, διότι αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ἑκάστου τούτων· ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, εἶναι κάθεται ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΖ εἶναι παράλληλα ἀναμεταξύ των καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΛΝ, ἐπειδὴ τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι $\frac{ΕΚ}{ΚΖ}=\frac{ΛΜ}{ΜΝ}$ ἀλλὰ $\frac{ΕΚ}{ΚΖ}=1$ διότι ἐξ ὑποθέσεως Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ὅθεν καὶ $\frac{ΛΜ}{ΜΝ}=1$, ἤτοι ΛΜ=ΜΝ· ἄρα Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΛΝ.

572. ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν τινὰ ἐπιπέδου αἱ ἀποστάσεις αὐτῆς ἀπὸ πάσης εὐθείας τοῦ Ρ μὴ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν εἶναι ἴσαι.***

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΓΔ (σχ. 37) παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΕ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· λέγω ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῆς ΓΔ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν τοῦ Ρ εἶναι ἴσαι· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς ΓΔ ἀπὸ μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι σταθερά.

Ἔστω ΘΗ ἡ ἀπόστασις τῆς ΓΔ καὶ ΑΒ, δηλαδὴ ἡ κοινὴ αὐτῶν κάθετος· ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΕ τοῦ Ρ, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ· ἡ ΓΔ καὶ ΘΗ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνῃ τὸ Ρ κατὰ τὴν ΗΖ· ἡ ΗΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ, ὡς τομὴ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, καὶ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς παραλλήλου εὐθείας ΓΔ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ· ἀλλὰ ΘΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΗΖ, ἑπομένως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΗΖ καὶ ΑΒ. Ἑπομένως ἡ ΘΗ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς ΓΔ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ ἡ ἀπόστασις ἀπ' αὐτοῦ εἶναι σταθερά, ἤτοι ἡ ἀπόστασις ΘΗ τῆς ΓΔ καὶ ΑΒ τυχούσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σταθερά.

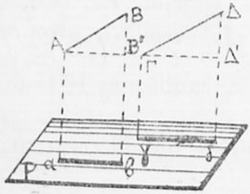


Σχ. 37

***573. Αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι ἴσων δὲ καὶ παραλλήλων εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι καὶ αβ καὶ γδ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ· λέγω ὅτι αβ καὶ γδ εἶναι παράλληλοι ἀναμεταξύ των.

Αἱ προβάλουσαι Αα καὶ Γγ (Σχ. 38) ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ εἶναι παράλληλοι· αἱ γωνίαι λοιπὸν ΒΑα καὶ ΔΓγ ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως παραλλήλους, ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν ΒΑα καὶ ΔΓγ εἶναι παράλληλα· ἄρα αἱ αβ καὶ γδ ὡς τομαὶ τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου τοῦ Ρ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 38.

Λέγω ὅτι ἂν ΑΒ=ΓΔ καὶ παράλληλοι, τότε καὶ αβ=γδ καὶ παράλληλοι. Αἱ αβ καὶ γδ εἶναι παράλληλοι ὡς προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸν ἐπίπεδον. Ἂν ἀχθοῦν τώρα αἱ ΑΒ΄ καὶ ΓΔ΄ ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς αβ καὶ γδ τότε ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ΑαβΒ΄ καὶ ΓγδΔ΄ ἔχομεν ΑΒ΄=αβ καὶ ΓΔ΄=γδ· ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΒ΄ καὶ ΔΓΔ΄ ἔχουν τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ Γ ἴσας, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἐξ ὑποθέσεως τὰς ὑποτεινούσας ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως $AB' = \Gamma\Delta'$, ὅθεν καὶ $\alpha\beta = \gamma\delta$.

**574. *Τὰ ἄκρα εὐθείας 53 δ. ἀπέχουν 48 δ. καὶ 20 δ. ἀπὸ ἐπιπέδου Ρ, πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ Ρ.***

Ἔστω $AB = 53$ δ. $A\alpha = 20$ δ. καὶ $B\beta = 48$ δ. (σχ. 38) καὶ $\alpha\beta$ ἡ προβολὴ τῆς $AB$ ἐπὶ τὸ Ρ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ $AB'$ παράλληλος πρὸς τὴν $\alpha\beta$ τότε τὸ τρίγωνον $BAB'$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ $B'$, διότι ἡ προβάλλουσα $B\beta$ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ $\alpha\beta$, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της $AB'$· ἐκ τούτου λοιπὸν ἔχομεν

$$(AB')^2 = (AB)^2 - (BB')^2 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\beta)^2 = (AB)^2 - (BB')^2$$

ἀλλὰ $\quad BB' = \beta B - \beta B' = \beta B - \alpha A$, ἢ $BB' = 48 - 20 = 28\delta$.

ὅθεν $\quad (\alpha\beta)^2 = 53^2 - 28^2 = 2025$ καὶ $\alpha\beta = 45\delta$.

**575. *Τὰ ἄκρα εὐθείας ἀπέχουν ἀπὸ προβολικοῦ ἐπιπέδου 11 δ. καὶ 44 δ. αἱ δὲ προβολαί των ἐπ᾽ αὐτοῦ 56 δ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς εὐθείας.***

***Λύσις.*** Ἔστω Ρ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον (σχ. 38) καὶ $\gamma$, $\delta$ αἱ ἐπ᾽ αὐτοῦ προβολαὶ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$· τότε ἡ $\gamma\delta = 56$ δ, ἔστωσαν δὲ $\Gamma\gamma = 11$ δ. καὶ $\Delta\delta = 44\delta$. αἱ προβάλλουσαι τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τῆς εὐθείας ΓΔ.

Φέρομεν τὴν $\Gamma\Delta'$ παράλληλον πρὸς τὴν $\gamma\delta$, τότε $\Delta'\Delta = \delta\Delta - \delta\Delta' = \delta\Delta - \gamma\Gamma = 54 - 11 = 33\delta$. καὶ $\Gamma\Delta' = \gamma\delta = 56\delta$.· ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Delta\Gamma\Delta'$, ἔχομεν $(\Gamma\Delta)^2 = (\Gamma\Delta')^2 + (\Delta'\Delta)^2$ ἢ $(\Gamma\Delta)^2 = 56^2 + 33^2 = 4225$ καὶ $\Gamma\Delta = 65$ δ.

**576. — *Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς προβολῆς εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, ἂν ἡ κλίσις αὐτῆς εἶναι 30°, 45°, 60°.***

Ἔστω Ρ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ $AB = \alpha$ (σχ. 40) ἡ εὐθεῖα τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς προβολῆς της $A\Gamma$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

α΄) ἔστω ὅτι ἡ γωνία κλίσεως $BA\Gamma = 30^\circ$.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $BA\Gamma$ ἡ κάθετος πλευρὰ $B\Gamma$ ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς γωνίας $30^\circ$ ἰσοῦται, ὡς γνωστόν, πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι $\quad B\Gamma = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, ἀλλὰ

$$(A\Gamma)^2 = (AB)^2 - (B\Gamma)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}, \quad \text{ἤτοι} \quad A\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

β΄) ἔστω ὅτι ἡ γωνία $BA\Gamma = 45^\circ$.

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἰσοσκελές, ἑπομένως $ΑΓ=ΓΒ$, ἄρα $ΑΒ^2=2(ΑΓ)^2$

καὶ $$ΑΓ=\frac{ΑΒ\sqrt{2}}{2}=\frac{α\sqrt{2}}{2}.$$

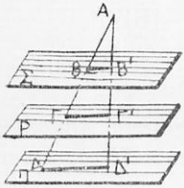
γ΄) ἔστω ὅτι γων$ΒΑΓ=60^0$.

Τότε γων.$ΑΒΓ=30^0$ ἑπομένως ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΓ ἡ ἀπέναντι ταύτης κειμένη ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης

ἤτοι $$ΑΓ=\frac{ΑΒ}{2}=\frac{α}{2}.$$

576΄. ***Αἱ κλίσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδα παράλληλα εἶναι ἴσαι.***

Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸ Σ εἶναι ἡ ΒΒ΄· τότε ἡ πρὸς τὸ Σ κλίσις τῆς εὐθείας ΑΔ εἶναι ἡ γωνία ΑΒΒ΄· λέγω ὅτι καὶ αἱ κλίσεις τῆς ΑΔ ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ και Π ἰσοῦνται πρὸς τὴν ΑΒΒ΄.



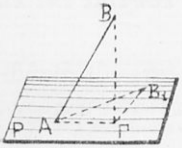
Σχ. 39.

Διότι ἡ ΑΔ καὶ ἡ προβολὴ αὐτῆς ΒΒ΄ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Σ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον τέμνει ὅλα τὰ δοθέντα ἐπίπεδα, κατ᾽ εὐθείας παραλλήλους ΒΒ΄,ΓΓ΄, ΔΔ΄, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ προβολαὶ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτά. Ἀλλὰ τότε γωνΑΒΒ΄=γωνΑΓΓ΄=ΑΔΔ΄, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΒ΄, ΓΓ΄ καὶ ΔΔ΄ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ,

577. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἔχουσα δοθεῖσαν κλίσιν πρὸς αὐτό.***

Ἔστω Ρ τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον, Α τὸ δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ καὶ ω ἡ δοθεῖσα κλίσις

Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΓ σχηματίζομεν ἐπὶ τοῦ Ρ γωνίαν $ΓΑΒ_1$ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν κλίσιν ω καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν κάθετον $ΓΒ_1$ ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς τὸ $Β_1$· οὕτω σχηματίζεται τὸ εἰς τὸ Γ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΓΑΒ_1$· περιστρέφομεν τοῦτο περὶ τὴν ΑΓ, ἕως ὅτου ἡ πλευρὰ $ΓΒ_1$ γίνῃ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ὁπότε τὸ τρίγωνον θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΓΒ, καὶ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα θὰ εἶναι ἡ ΑΒ· πράγματι ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ, ἡ ΑΓ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπ᾽ αὐτό· ἀλλὰ γων$ΒΑΓ$=γων$Β_1ΑΓ$ διότι εἶναι ἡ ἰδία γωνία εἰς ἄλλην θέσιν· ἀλλ᾽ ἐκ κατασκευῆς γων$Β_1ΑΓ=ω$, ἄρα καὶ γων$ΒΑΓ=ω$.



Σχ. 40.

**578. *Ὁ λόγος τῶν προβολῶν εὐθειῶν, ἐχουσῶν ἴσας κλίσεις πρὸς ἐπίπεδον, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν εὐθειῶν.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ ἔχουν ἴσας κλίσεις (σχ. 38) καὶ αβ, γδ ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· λέγω ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αβ}{γδ}$. Διότι ἂν φέρωμεν τὰς ΑΒ′ καὶ ΓΔ′, ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς προβολὰς αβ καὶ γδ, αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς προβαλλούσας Αβ καὶ Δδ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒΑΒ′ καὶ ΔΓΔ′ εἶναι ὀρθογώνια· πρὸς δὲ ΑΒ′=αβ καὶ ΓΔ′=γδ (1)· ἀλλὰ γωνΒΑΒ′=γωνΔΓΔ′, διότι αὗται εἶναι ἀντιστοίχως αἱ κλίσεις τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ· ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΒ′ καὶ ΔΓΔ′ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην· ἐκ τούτων λοιπὸν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ'}{ΓΔ'} \text{ ἢ ἕνεκα τῆς (1) } \quad \frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{αβ}{γδ}.$$

**579. *Πόσον εἶναι τὸ μῆκος εὐθείας, ἂν ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι α καὶ ἡ κλίσις αὐτῆς 30°, 45°, 60°.***

Ἐὰν διὰ x παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας καὶ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν ἀσκήσιν (576) εὑρίσκομεν διὰ κλίσιν ἴσην πρὸς 30°

$α=\frac{x}{2}\sqrt{3}$ καὶ λύοντες πρὸς x ἔχομεν $x=\frac{2α}{\sqrt{3}}$ ἢ $x=\frac{2}{3}α\sqrt{3}$.

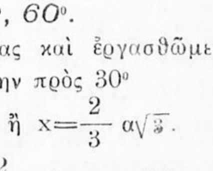
διὰ κλίσιν ἴσην πρὸς 45° $\quad α=\frac{x}{2}\sqrt{2}$ καὶ $x=\frac{2}{\sqrt{2}}α$ ἢ $x=α\sqrt{2}$

καὶ διὰ κλίσιν ἴσην πρὸς 60° $\quad α=\frac{x}{2}$ καὶ $x=2α$.

## ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ

**580 *Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ ἄλλο, αἱ σχηματιζόμεναι ἐφεξῆς δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστω ΓΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ σχηματίζουν τὰς ἐφεξῆς διέδρους ΠΓΔΡ καὶ ΡΓΔΖ, αἱ ὁποῖαι λέγω ὅτι εἶναι παραπληρωματικαί. Διότι ἂν φέρωμεν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς κοινῆς ἀκμῆς ΓΔ τῶν διέδρων τούτων κάθετον ἐπίπεδον, τοῦτο τέμνει τὸ μὲν ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν ΕΖ, τὸ δὲ Ρ κατὰ τὴν ΑΒ· ἀλλὰ τότε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων, ΠΓΔΡ καὶ ΡΓΔΖ διότι αἱ πλευραὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν



Σχ. 41.

αὐτῶν· ἀλλ' αἱ ἐπίπεδοι αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐφεξῆς καὶ αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ των κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἄρα καὶ αἱ δίεδροι πρὸς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί, καθόσον ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου.

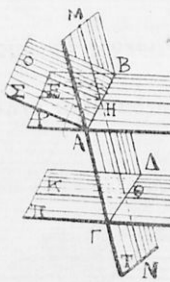
581. ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι του κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

Ἔστωσαν αἱ παραπληρωματικαὶ ἐφεξῆς δίεδραι ΕΓΔΑ καὶ ΑΓΔΖ (σχ. 41) ἤτοι ἔστω ΕΓΔΑ+ΑΓΔΖ=2 ὀρθ (1)· λέγω ὅτι αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι Ε καὶ Ζ αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἕδραι Ε καὶ Ζ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ προεκτείνομεν τὴν ἕδραν Ε, ἡ προέκτασις αὐτῆς Η θὰ διέλθῃ ἢ ἄνωθεν ἢ κάτωθεν τῆς ἕδρας Ζ, οὕτω δὲ θὰ σχηματισθῇ ἡ δίεδρος ΑΓΔΗ διάφορος τῆς διέδρου ΑΓΔΖ· ἀλλὰ αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι Ε καὶ Η τῶν ἐφεξῆς διέδρων ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΗ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διότι ἡ ἕδρα Η εἶναι προέκτασις τῆς ἕδρας Ε, ἑπομένως ΑΓΔΕ+ΑΓΔΗ=2 ὀρθ (2) (ἄσκησις 270). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν ΑΓΔΕ+ΑΓΔΖ=ΑΓΔΕ+ΑΓΔΗ ἢ ΑΓΔΖ=ΑΓΔΗ, ὅπερ ἀδύνατον, διότι αὗται εἶναι διάφοροι ἀναμεταξύ των, ἑπομένως αἱ ἕδραι Ε καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

582. ***Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ δύο παράλληλα ἐπίπεδα, αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικαί.***

α') Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π, Ρ τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Τ, κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως· λέγω ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΜ καὶ ΝΓΔΛ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 42.

Αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου εἶναι παράλληλοι. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Η τῆς ἀκμῆς ΑΒ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν, τοῦτο τέμνει τὸ Ρ κατὰ τὴν ΕΗΖ, τὸ Τ κατὰ τὴν ΜΗΘΝ, καὶ τὸ Π κατὰ τὴν ΚΛ· ἡ γωνία ΕΗΜ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΕΑΒΜ, διότι αἱ πλευραί της εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς· ἐπίσης ἡ ΝΘΛ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΝΓΔΛ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΗΕ, ἄρα καὶ ἡ παράλληλός της ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἑπομένως αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ΝΘΛ εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου ΝΓΔΛ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν της, ἄρα ἡ ΝΘΛ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΝΓΔΛ. Ἡ ΕΗ ὅμως καὶ ΘΛ εἶναι τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΗΕ ἄρα εἶναι παράλληλοι καὶ ἑπομένως γωνΕΗΜ=γωνΝΘΛ ὡς ἐκτὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΕΗ καὶ ΘΛ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΜΝ· ἑπομένως καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΕΑΒΜ=ΝΓΔΛ.

β΄) Θὰ δείξωμεν ὅτι ΖΑΒΘ+ΗΓΔΛ=2ορθ. (σχ. 42).

Διότι ΝΓΔΛ+ΗΓΔΛ=2ὀρθ. ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων, τὸ ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων περατοῦται εἰς τὴν τομήν των· ἐδείχθη ὅμως ὅτι ΝΓΔΛ=ΕΑΒΜ, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΑΒΜ+ΗΓΔΛ=2 ὀρθ. ἀλλὰ ΕΑΒΜ=ΖΑΒΘ ὡς κατακορυφήν, ὅθεν καὶ

ΖΑΒΘ+ΗΓΔΛ=2ὀρθ.

583. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα ὑπὸ τρίτου σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ διέδρους γωνίας ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικὰς τότε εἶναι παράλληλα, ἂν καὶ αἱ τομαί των εἶναι παράλληλοι.***

α΄) Ἔστω ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ Τ (σχ. 42) κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ διέδρους ἴσας, ἤτοι ΕΑΒΘ=ΗΓΔΛ· λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

Διότι ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΕΗΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ τῆς διέδρου ΕΑΒΘ, τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ παράλληλον τῆς ΑΒ· ἔστω δὲ ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰ Ρ καὶ Π κατὰ τὰς ΕΗ καὶ ΘΛ καὶ τὸ Τ κατὰ τὴν ΜΝ· αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΗΘ καὶ ΗΘΛ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΕΑΒΘ καὶ ΗΓΔΛ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων τούτων δι᾿ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῶν διέδρων· ἀφοῦ ὅμως αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τούτων ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΕΗΘ=ΗΘΛ. (1). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ρ δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π, τότε διὰ τῆς ΑΒ φέρομεν τὸ παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὸ Π (πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ νὰ φέρω εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ Π) ἔστω δὲ τοῦτο τὸ Σ· τότε τὸ ἐπίπεδον ΜΗΕ τέμνει τὸ Σ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΗΟ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΘΛ, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Σ ὑπὸ ἄλλου· ἄρα γωνΟΗΘ=γωνΗΘΛ (2) ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΗΟ καὶ ΘΛ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΜΝ· ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι γωνΕΗΘ=γωνΟΗΘ. Διὰ νὰ συμβαίνῃ ὅμως αὐτὸ πρέπει καὶ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς αὐτὰς δίεδροι ΕΑΒΘ καὶ ΟΑΒΘ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπειδὴ ἔχουν τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ κοινὴν πρέπει ἡ ἄλλη αὐτῶν ἕδρα νὰ συμπέσῃ, ἤτοι τὸ ἐπίπεδον Σ, ὅπερ ὑπετέθη παράλληλον πρὸς τὸ Π, νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Ρ· ἄρα τὰ Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

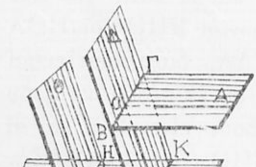
β') Ἔστω ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δίεδροι γωνίαι ΜΑΒΖ καὶ ΗΓΔΛ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΜΑΒΖ=ΗΓΔΛ λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα· διότι αἱ δίεδροι ΜΑΒΖ καὶ ΕΑΒΘ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφήν. ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΑΒΘ=ΗΓΔΛ· ἀφοῦ τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ διέδρους ΕΑΒΘ καὶ ΗΓΔΛ ἴσας, εἶναι παράλληλα.

γ') Ἔστω ὅτι οἱ δίεδροι ΖΑΒΘ καὶ ΗΓΛΔ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ΖΑΒΘ+ΗΓΔΛ=2ὀρθ. (1)· λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

Διότι αἱ δίεδροι ΖΑΒΘ+ΖΑΒΜ=2ὀρθ. (2) ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν περατοῦται εἰς τὴν τομήν των· ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν ΖΑΒΘ+ΗΓΔΛ=ΖΑΒΘ+ΖΑΒΜ· ἢ ΗΓΔΛ=ΖΑΒΜ, ἤτοι τὰ δύο ἐπίπεδα σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη διέδρους ἴσας, ἄρα εἶναι παράλληλα.

***584. Δύο δίεδροι τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι εἶναι ἀνὰ μίαν παράλληλοι, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.***

Ἔστωσαν αἱ δίεδροι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς ἕδρας ἀνὰ μίαν παραλλήλους, ἤτοι τὴν Α παράλληλον πρὸς τὴν Ε καὶ τὴν Δ παράλληλον πρὸς τὴν Θ, λέγω ὅτι ἂν μὲν αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἂν δὲ αἱ μὲν δύο ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀντιθέτου φορᾶς, αἱ δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 43.

Ἐν πρώτοις αἱ δίεδροι αὐταὶ ἔχουν καὶ τὰς ἀκμὰς παραλλήλους· διότι ἂν προεκτείνωμεν τὴν ἕδραν Δ αὐτή, ὡς τέμνουσα τὴν ἕδραν Α θὰ κόψῃ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἕδραν Ε κατά τινα εὐθεῖαν ΛΚ, ἡ ὁποία θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, διότι αἱ ΒΓ καὶ ΛΚ εἶναι τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου· ἐπίσης ἡ ΗΖ καὶ ΛΚ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Θ καὶ Δ ὑπὸ τοῦ Ε· ὅθεν αἱ ΒΓ καὶ ΗΖ ὡς παράλληλοι καὶ αἱ δύο πρὸς τὴν ΛΚ εἶναι καὶ ἀναμεταξύ των παράλληλοι. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον εἴς τι σημεῖον Ο τῆς ΓΒ τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΗΖ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ· αἱ δὲ τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων ΔΒΓΑ καὶ ΘΖΗΕ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ θὰ δώσουν τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΔΟΑ καὶ ΘΜΕ αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων· αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἀνὰ μία παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου.

Ἂν δὲ αἱ ἕδραι τῶν διέδρων εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς καὶ αἱ δύο, τότε καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπιπέδων τούτων γωνιῶν εἶναι τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς, ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἴσαι, ἐπομένως καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι. Ἂν δὲ αἱ δύο τῶν ἑδρῶν εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀντιθέτου, τότε καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι αἱ μὲν δύο ὁμόρροποι, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ἀντίρροποι, ἄρα αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ἐπομένως καὶ αἱ πρὸ αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί.

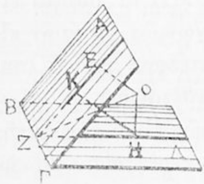
585. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διέδρων τῶν ἐχουσῶν κοινὴν ἀκμὴν καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου τὰ μέρη λαμβάνονται ὡς ἄκραι ἕδραι τῶν ἄκρων διέδρων, ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς.***

Διότι ἂν εἴς τι σημεῖον τῆς κοινῆς ἀκμῆς ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ταύτην, τοῦτο θὰ τέμνῃ ὅλας τὰς ἕδρας τῶν διέδρων κατ' εὐθείας, αἱ δὲ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν διαδοχικῶν εὐθειῶν ἀνὰ δύο, εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων· αἱ ἄκραι δὲ πλευραὶ τῶν ἄκρων ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰς διέδρους εἶναι τὰ δύο μέρη τῆς τομῆς τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ὁποίου κεῖνται αἱ ἄλλαι ἕδραι τῶν δοθεισῶν διέδρων· ἄρα αἱ ἄκραι αὗται πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· οὕτω λοιπὸν αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ἐπίπεδοι εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ εὐθειῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου εὐθείας καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τούτων ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς· ἀφοῦ ὅμως τὰ μέτρα τῶν διέδρων ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν καὶ αἱ δίεδροι ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν.

586. ***Τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι 4 ὀρθαί.***

Διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδο αὐτῶν εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ εὐθειῶν κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν διέδρων εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ ἀρχομένων ἐκ τοῦ σημείου τούτου καὶ διευθυνομένων κατὰ πάσας τὰς διευθύνσεις πέριξ αὐτοῦ· ἑπομένως τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς.

587. ***Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν διέδρου γωνίας, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς.***



Σχ. 44.

Ἔστω ἡ δίεδρος ΑΒΓΔ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.

Διότι ἡ ἕδρα Α, ὡς διερχομένη διὰ τῆς ἀκμῆς ΒΓ, ἤτοι εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· ἐπίσης ἡ ἕδρα Δ ὡς διερχομένη διὰ τῆς ΒΓ εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὸ ΕΖΗ.

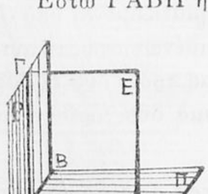
588. ***Ἂν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἕκαστον δύο τεμνομένων ἐπιπέδων, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν.***

Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗ (σχ. 44) κάθετον ἐπὶ ἕκαστον τῶν τεμνομένων ἐπιπέδων ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ· λέγω ὅτι τὸ ΕΖΗ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΒΓ.

Διότι ἀφοῦ καθένα ἀπὸ τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗ θὰ εἶναι καὶ ἡ τομή των ΒΓ κάθετος ἐπὶ τὸ ΕΖΗ.

589. ***Ἐὰν ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ ἑκάστην τῶν ἑδρῶν ὀρθῆς διέδρου γωνίας, ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ τρίτον καὶ ἑκάστη τῶν τριῶν τομῶν των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο ἄλλας.***

Ἔστω ΡΑΒΠ ἡ ὀρθὴ δίεδρος καὶ τὸ ἐπίπεδον Ε κάθετον ἐπὶ ἑκάστην τῶν ἑδρῶν Ρ καὶ Π αὐτῆς· λέγω ὅτι ἡ ἀκμὴ ΑΒ τῆς διέδρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ὅτι αἱ τομαὶ ΓΔ τοῦ Ρ καὶ Ε καὶ ΔΖ τοῦ Π καὶ Ε, ὡς καὶ ἡ ἀκμὴ ΑΒ εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των.



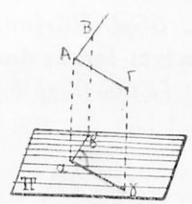
Σχ. 45

Διότι ἀφοῦ τὸ Ε εἶναι κάθετον ἐπὶ ἕκαστον τῶν τεμνομένων ἐπιπέδων Ρ καὶ Π εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν, ἤτοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου ΑΒ· ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ε θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΓΔ καὶ ΔΖ τὰς ὁποίας τέμνει εἰς τὸ Δ· ἡ δὲ γωνία ΓΔΖ ἐπειδὴ ἔχει πλευρὰς τὰς τομὰς ΓΔ καὶ ΔΖ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ὑπὸ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου Ε ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ, εἶναι ἡ ἀντίστοιχως ἐπίπεδος τῆς διέδρου ΡΑΒΠ· ἀλλ' αὐτὴ εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως ἄρα καὶ ἡ ΓΔΖ εἶναι ὀρθή, ἤτοι ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ.

**590.** ***Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ὀρθή, ἂν ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἢ κεῖται ἐπὶ αὐτοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως ἂν ἡ προβολὴ γωνίας εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.***

Ἔστω Π τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλος ἡ πλευρὰ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ· λέγω ὅτι ἡ προβολὴ βαγ τῆς γωνίας ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Ἡ ΑΓ ὡς παράλληλος πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν αὐτῆς αγ. Ἡ προβάλλουσα ὅμως Αα ἐπειδὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ αγ τὴν ὁποίαν τέμνει, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν αγ. Ἀλλὰ ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι ἡ ΒΑΓ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Αα τοῦ ἐπιπέδου ΒΑα, εἶναι κάθετος καὶ




Σχ. 46.

ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ παράλληλός της ἡ αγ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ τὴν αβ τὴν ὁποίαν τέμνει, ὁπότε γωνία βαγ εἶναι ὀρθή.

***Ἀντίστροφον.*** Ἔστω ὅτι ἡ προβολὴ βαγ τῆς γωνίας ΒΑΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π, τότε λέγω ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

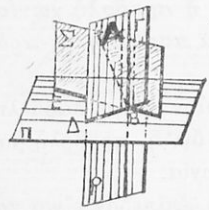
Ἀφοῦ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν προβολὴν αὐτῆς αγ· ἡ αγ ὅμως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αβ ἐξ ὑποθέσεως· ἐπειδὴ ἡ αγ ὅμως εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν προβάλλουσαν Αα, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑαβΒ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν· ἐπομένως καὶ ἡ παράλληλός της ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὴν ὁποίαν τέμνει, καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

**591.** ***Διὰ δοθείσης εὐθείας πλαγίας πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν καὶ ἓν μόνον.***

Ἔστω ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Λέγω ὅτι διὰ τῆς ΑΒ διέρχεται ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι εἰς τὸ Β ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π, διότι διέρχεται διὰ τῆς ΒΓ καθέτου ἐπὶ τὸ Π.

Ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ Π δὲν δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῆς ΑΒ. Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον Σ διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ Π, τότε ἡ τομὴ ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Σ καὶ Ρ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸ Π θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, διότι ἡ ΑΒ ὑπετέθη πλαγία πρὸς τὸ Π. Ὥστε ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ Π διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ.

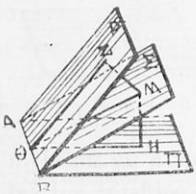



Σχ. 47.

**592.** ***Πᾶν σημεῖον ἐπιπέδου, διχοτομοῦντος δίεδρον γωνίαν, ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω Σ τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον γωνίαν ΡΑΒΠ καὶ Μ σημεῖον τυχὸν τοῦ ἐπιπέδου τούτου· λέγω ὅτι αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ΜΖ καὶ ΜΗ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν Ρ καὶ Π τῆς διέδρου γωνίας εἶναι ἴσαι.

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Σ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΑΒ ἔχομεν ΡΑΒΣ=ΣΑΒΠ· ἀλλ' ἡ ΜΖ καὶ ΜΗ τεμνόμεναι εἰς τὸ Μ ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου ΖΜΗ, τὸ ὁποῖον ἔχον κοινὸν σημεῖον μεθ' ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων Ρ, Σ, Π, τέμνει αὐτὰ κατὰ τὰς εὐθείας ΖΘ, ΘΜ καὶ ΘΗ· ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον ΖΜΗ ὡς διερχόμενον διὰ τῶν ΜΖ καὶ ΜΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας Ρ καὶ Π εἶναι κάθετον ἐπὶ ταύτας, ἐπομένως εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ· ὅθεν αἱ γωνίαι ΖΘΜ καὶ ΜΘΗ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΡΑΒΣ καὶ ΣΑΒΠ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων τούτων δι' ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν των· ἐπειδὴ δὲ αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι· ὅθεν τὰ εἰς τὸ Ζ καὶ Η ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΖΘ καὶ ΜΗΘ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΜΘ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΖΘΜ καὶ ΜΘΗ ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως καὶ ΜΖ=ΜΗ.



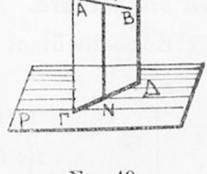

Σχ. 48.

***Ἀντιστρόφως.*** Ἔστω σημεῖον Μ τοῦ χώρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΖ καὶ ΜΗ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου ΑΒ εἶναι ἴσαι· λέγω ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΑΒ ἐπιπέδου.

Θεωρήσωμεν τὸ ἐπίπεδον Σ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ σημείου Μ καὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ τῆς δοθείσης διέδρου ΑΒ, ὡς καὶ τὸ ἐπίπεδον ΖΜΗ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ Μ καὶ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ΜΖ καὶ ΜΗ ἀπὸ τῶν ἑδρῶν Ρ καὶ Π τῆς διέδρου ΑΒ· τὸ ἐπίπεδον ΖΜΗ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰς ἕδρας Ρ καὶ Π διότι διέρχεται διὰ τῶν ΜΖ καὶ ΜΗ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως κάθεται πρὸς τὰς ἕδρας Ρ καὶ Π, ἑπομέ- εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ· τὸ ΖΜΗ τέμνει τὰ τρία ἐπίπεδα Ρ, Σ, Π κατὰ τὰς εὐθείας ΖΘ, ΘΜ, ΘΗ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς γωνίας ΜΘΖ καὶ ΜΘΗ, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι τῶν διέδρων ΡΑΒΜ καὶ ΠΑΒΜ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν τῶν διέδρων δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν των· ἀλλὰ τὰ εἰς τὸ Ζ καὶ Η ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΖΘ καὶ ΜΘΗ, ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ΜΖ=ΜΗ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΜΘ κοινήν, ἄρα εἶναι ἴσα, ὅθεν γωνΜΘΗ=γωνΜΘΖ· ἀφοῦ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πρὸς ταύτας ἀντιστοιχοῦσαι δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΡΑΒΜ=ΠΑΒΜ· ἀφοῦ ὅμως τὸ ἐπίπεδον Σ διαιρεῖ τὴν δίεδρον ΑΒ εἰς δύο ἴσας διέδρους, διχοτομεῖ αὐτήν.

593. ***Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ἄλλο δοθέν.***

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ Ρ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ. τότε τὸ ἐπίπεδον ΑΜΝ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΜΝ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι διέρχεται διὰ τῆς ΑΒ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ ὡς διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ΜΝ καθέτου ἐπὶ τὸ Ρ.



Σχ. 49.

594. ***Ἐπὶ ἐπιπέδου δίδεται εὐθεῖα της. Νὰ ἀχθῇ τὸ δι᾽ αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ δοθέν.***

Ἔστω Ρ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ΓΔ (σχ. 49) ἡ δοθεῖσα ἐπ᾽ αὐτοῦ εὐθεῖα. Ἐκ τυχόντος σημείου Ν αὐτῆς φέρομεν τὴν ΝΜ κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ. Τὸ ἐπίπεδον ΓΝΜ εἶναι, διὰ τὸν προηγούμενον λόγον, τὸ ζητούμενον.

595. ***Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ ἄλλο δοθέν.***

Ἔστω Μ (σχ.49) τὸ σημεῖον καὶ Ρ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον· ἐκ τοῦ Μ φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ. Κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΜΝ λύει τὸ πρόβλημα, διότι διέρχεται διὰ τοῦ Μ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ, ὡς διερχόμενον δι' εὐθείας ΜΝ καθέτου ἐπὶ τὸ Ρ.

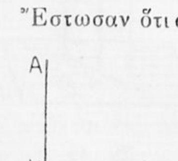
596. ***Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.***

Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΗ (σχ. 44) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Δ, λέγω ὅτι ἡ προβολὴ αὐτῆς ΕΚ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ Δ κατὰ τὴν ΒΓ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ἡ εὐθεῖα ΟΗ καὶ ἡ προβάλλουσα ΟΕ τὸ σημεῖον αὐτῆς Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α, ὁρίζουν το ἐπίπεδον ΟΗΚΕ· τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Δ, διότι διέρχεται διὰ τῆς ΟΗ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Δ· ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΟΗΚΕ διέρχεται διὰ τῆς ΟΕ καθέτου ἐπὶ τὸ Α εἶνε κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ΟΗΚΕ ὡς κάθετον ἐπὶ τὰ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Δ καὶ Α εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΒΓ. Ἡ ΒΓ λοιπὸν ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ΟΗΚΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ΟΗΚΕ καὶ τοῦ Α· ἀλλὰ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ κεῖται ἡ προβολὴ ΕΚ τῆς ΟΗ· ἄρα ἡ ΕΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

597. ***Ἂν τρεῖς εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀνὰ δύο κάθετοι καὶ τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα ἐπίπεδα εἶναι ἀνὰ δύο κάθετα.***

Ἔστωσαν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου Κ εἶναι ἀνὰ δύο κάθετοι· λέγω ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΑ τὰ ὑπ' αὐτῶν ὁριζόμενα εἶναι κάθετα ἀνὰ δύο.



Σχ. 50.

Διότι ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ δύο ἄλλαι, οὕτω ἡ ΑΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΚΓ ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας αὐτοῦ τὰς ὁποίας τέμνει εἰς τὸ Κ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ ΚΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΚΑ καὶ ἡ ΚΓ κάθετος ἐπὶ τὸ ΒΚΑ· τὸ ἐπίπεδον ὅμως ΒΚΑ ὡς διερχόμενον διὰ τῆς ΚΑ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΚΑ εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτό· δι' ὅμοιον λόγον τὸ ἐπίπεδον ΒΚΑ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΓΚΑ ὡς διερχόμενον διὰ τῆς ΒΚ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκαστον τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΚΓ καὶ ΓΚΑ εἶναι κάθενον ἐπὶ τὰ δύο ἄλλα.

## Στερεαὶ γωνίαι.

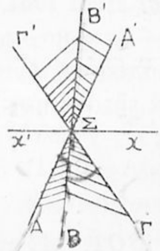
**598. *Δύο ἕδραι τριέδρου εἶναι $57^{\circ}\ 17'\ 36''$ καὶ $127^{\circ}\ 45'\ 36''$· μεταξὺ τίνων ὁρίων κεῖται ἡ τρίτη ἕδρα αὐτῆς.***

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἕδραι τῆς τριέδρου καὶ ἔστω $\beta=57^{\circ}\ 17'\ 36''$ καὶ $\gamma=127^{\circ}\ 45'\ 36''$· ἐπειδὴ $\alpha<\beta+\gamma$ πρέπει $\alpha<185^{\circ}\ 3'\ 12''$· ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης θὰ ὑπέθετέ τις, ὅτι ἡ α πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενὸς καὶ μικροτέρα τῶν $185^{\circ}\ 3'\ 12''$· τὸ ἀνώτερον ὅμως ὅριον εἶναι μικρότερον τῶν $185^{\circ}\ 3'\ 12''$, διότι (Θ. 271 Γεωμ. Σακελ. ἔκδοσις Δ') ἵνα ὑπάρξῃ τρίεδρος, δὲν ἀρκεῖ μόνον $\alpha<\beta+\gamma$, ἀλλὰ καὶ $\alpha+\beta+\gamma<360^{\circ}$, ἑπομένως $\alpha<360^{\circ}-(\beta+\gamma)$, ἤτοι $\alpha<174^{\circ}\ 56'\ 48''$· ὥστε ἡ τρίτη ἕδρα δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς μεγαλυτέρας τοῦ μηδενὸς καὶ μικροτέρας τῶν $174^{\circ}\ 56'\ 48''$.

**599. *Ἂν τριέδρου γωνίας δύο ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστω ἡ τρίεδρος ΣΑΒΓ εἰς τὴν ὁποιαν εἶναι γωνΑΣΒ=γωνΒΣΓ λέγω ὅτι δίεδρος ΑΣ=δίεδρον ΓΣ.

Ἂν λάβωμεν τὴν συμμετρικὴν τρίεδρον ΣΑ'Β'Γ' τῆς δοθείσης, θὰ εἶναι γωνΑΣΒ=γωνΑ'ΣΒ' καὶ γωνΓΣΒ=γωνΓ'ΣΒ' καὶ δίεδρος ΣΒ=δίεδρον ΣΒ', ὡς κατακορυφήν· ἐπειδὴ ὅμως αἱ ΑΣΒ καὶ ΒΣΓ εἶναι ἴσαι ἔχομεν



Σχ. 51.

γωνΑΣΒ=γωνΒΣΓ=γωνΑ'ΣΒ'=γωνΓ'ΣΒ'

Ἐπιθέτομεν τώρα τὴν τρίεδρον ΣΑ'Β'Γ' ἐπὶ τῆς ΣΑΒΓ οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ καὶ τῶν δύο νὰ συμπέσῃ εἰς τὸ Σ, ἡ ἀκμὴ ΣΒ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΣΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Β'ΣΑ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΣΑ· ἐπειδὴ ὅμως αἱ δίεδροι ΣΒ' καὶ ΣΒ' εἶναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον ΣΒ'Γ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΣΑΒ· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β'ΣΑ' καὶ ΒΣΓ, εἶναι ἴσαι καὶ ἡ κορυφὴ καὶ ἡ μία πλευρά των συνέπεσε, θὰ συμπέσῃ καὶ ἡ ἄλλη, ἤτοι ἡ ΣΑ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΣΓ· ὡσαύτως ἕνεκα τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Γ'ΣΒ', ΑΣΒ καὶ ἡ ΣΓ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΣΑ, ἤτοι αἱ κορυφαὶ καὶ αἱ ἀκμαὶ τῶν τριέδρων τούτων συμπίπτουν· αἱ τρίεδροι λοιπὸν εἶναι ἴσαι ἑπομένως καὶ δίεδρος ΣΑ'=δίεδρον ΣΓ, διότι αἱ ἀκμαί των καὶ αἱ ἕδραι των συνέπεσαν· ἀλλὰ δίεδρος ΣΑ'=δίεδρον ΣΑ, ὅθεν καὶ δίεδρ. ΣΑ=δίεδρον ΣΓ.

*Ἀντίστροφον*. Ἔστω ἡ τρίεδρος ΣΑΒΓ (σχ. 51) καὶ ὅτι ἡ δίεδρος ΑΣ=δίεδρον ΓΣ, λέγω ὅτι γωνΑΣΒ=γωνΓΣΒ.

Θεωρῶ τὴν τρίεδρον ΣΑ′Β′Γ′ συμμετρικὴν τῆς δοθείσης· τότε τὰ στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ εἶναι κατακορυφήν, ἤτοι δίεδρος ΑΣ=δίεδρον Α′Σ, δίεδρος ΓΣ=δίεδρον Γ′Σ καὶ ἐπειδὴ αἱ δίεδροι ΑΣ καὶ ΓΣ εἶναι ἴσαι ἔχομεν δίεδρ.ΑΣ=δίεδρ.ΓΣ=δίεδρ.Α′Σ=δίεδρ.Γ′Σ. Ὡσαύτως εἶναι καὶ γων.ΑΣΒ=γωνΑ′ΣΒ′, γωνΒΣΓ=γωνΒ′ΣΓ′. γωνΑΣΓ=Α′ΣΓ′. Ἐὰν περιστρέψωμεν κατὰ 180° τὴν ΣΑ′Β′Γ′ περὶ τὴν διχοτόμον x′x τῆς γωνίας Α′ΣΓ, τότε ἡ ΣΑ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΣΓ καὶ ἡ ΣΓ′ ἐπὶ τῆς ΣΑ· ἕνεκα ὅμως τῆς ἰσότητος τῶν διέδρων ΣΑ′ καὶ ΣΓ, ἡ ἕδρα Β′ΣΑ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΒΣΓ. Ἐπειδὴ ὅμως καὶ αἱ δίεδροι ΑΣ καὶ Γ′Σ εἶναι ἴσαι ἡ ἕδρα Γ′Β′Σ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΣ· ἀφοῦ ὅμως αἱ ἀκμαὶ ΣΑ′ καὶ ΣΓ′ ἐφήρμοσαν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΓ καὶ ΣΑ καὶ τὰ ἐπίπεδα Β′ΣΑ′ καὶ Γ′ΣΒ′ ἐφήρμοσαν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΒΣΓ καὶ ΑΣΒ καὶ αἱ τομαὶ αὐτῶν ΣΒ καὶ ΣΒ′ ἐφαρμόζουν· τότε ὅμως ἡ κορυφὴ Σ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν Β′ΣΑ′ καὶ ΒΣΓ ἐφαρμόζουν, ἄρα αὗται εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ γωνΒ′ΣΑ′=γωνΒΣΑ ἄρα καὶ γωνΒΣΑ=γωνΒΣΓ.

*600*. ***Ἂν τριέδρου γωνίας αἱ ἐπίπεδοι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, ἡ δὲ τρίεδρος εἶναι κανονική.***

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἐπίπεδοι τῆς δοθείσης τριέδρου καὶ Α, Β, Γ αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι, ἔστω δὲ α=β=γ· λέγω ὅτι καὶ Α=Β=Γ. Ἐκ τῆς ἰσότητος α=β, ἕπεται ἡ ἰσότης Α=Β (1) (ἄσκησις 599) ἐκ δὲ τῆς α=γ ἕπεται ἡ Α=Γ (2) παραβάλλοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν Α=Β=Γ, ἤτοι ἡ τρίεδρος ἔχει καὶ τὰς διέδρους ἴσας, ἑπομένως εἶναι κανονική.

*601*. ***Ἂν τριέδρου γωνίας δύο ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἡ ἀπέναντι ἑκάστης τούτων δίεδρος εἶναι ὀρθὴ καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἔστωσαν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι ΑΣΒ καὶ ΒΣΓ (σχ.51) γωνίαι τῆς τριέδρου ΣΑΒΓ εἶναι ὀρθαί, λέγω ὅτι καὶ αἱ δίεδροι ΣΓ καὶ ΣΑ εἶναι ὀρθαί.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΣΒ καὶ ΒΣΓ εἶναι ὀρθαὶ ἡ ἀκμὴ ΒΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΣΑ καὶ ΣΓ, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζουν αὗται· τότε τὰ ἐπίπεδα ΒΣΑ καὶ ΒΣΓ ὡς διερχόμενοι διὰ τῆς ΒΣ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ εἶναι κάθετα ἐπ᾿ αὐτό· ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΓ καὶ ΣΑ ἔχουν τὰς ἕδρας καθέτους ἀναμεταξύ των εἶναι ἑπομένως ὀρθαί.

*Ἀντίστροφον.* Ἔστω ὅτι αἱ δίεδροι γωνίαι ΣΑ καὶ ΣΓ τῆς τριέδρου ΣΑΒΓ (σχ. ) εἶναι ὀρθαί, λέγω ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων ἕδραι ΒΣΓ καὶ ΑΣΒ εἶναι ὀρθαί.

Ἐπειδὴ αἱ δίεδροι ΣΑ καὶ ΣΓ εἶναι ὀρθαὶ τὰ ἐπίπεδα ΒΣΑ καὶ ΒΣΓ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ· τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΣΓ κάθετον ἐπὶ τὰ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ΒΣΑ καὶ ΒΣΓ εἶναι ὡς κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΒΣ (ἄσκησις 588), ἑπομένως ἡ ΒΣ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΣΑ καὶ ΣΓ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὰς ὁποίας τέμνει, ἄρα γωνΑΣΒ=1 ὀρθ. καὶ γωνΒΣΓ=1 ὀρθ.

**602.** ***Ἂν αἱ ἐπίπεδοι τριέδρου γωνίας εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ὀρθαί, καὶ ἡ τρίεδρος λέγεται τρισορθογώνιος.***

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἐπίπεδοι καὶ Α, Β, Γ αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι γωνίαι τριέδρου γωνίας· καὶ ἔστω α=β=γ=1 ὀρθ.· λέγω ὅτι καὶ Α=Β=Γ=1 ὀρθ..

Ἀφοῦ α=β=1 ὀρθ. καὶ αἱ ἀπέναντι τούτων δίεδροι εἶναι ὀρθαὶ (ἄσκησις 601) ἤτοι Α=Β=1 ὀρθ.· ἀφοῦ δὲ καὶ α=γ=1 ὀρθ. τότε καὶ Α=Γ=1 ὀρθή· ἑπομένως Α=Β=Γ=1 ὀρθή.

**603.** ***Ἡ παραπληρωματικὴ τρισορθογωνίου τριέδρου εἶναι τρισορθογώνιος***

Ἔστω Λ ἡ δοθεῖσα τρισορθογώνιος τρίεδρος καὶ α, β, γ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῆς, καὶ Α, Β, Γ αἱ δίεδροι γωνίαι της· ἔστωσαν $α_1$, $β_1$, $γ_1$, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς $Λ_1$ τῆς Λ· λέγω ὅτι καὶ ἡ $Λ_1$ εἶναι τρισορθογώνιος.

Διότι, ἀφ' οὗ α=β=γ=1ὀρθ. τότε καὶ Α=Β=Γ=1 ὀρθ. (ἄσκησις 602)· ἀφοῦ ὅμως αἱ Λ καὶ $Λ_1$ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι παραπληρωματικαὶ τότε αἱ ἐπίπεδοι τῆς $Λ_1$ εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων τῆς Λ. ἤτοι $Α+α_1=2$ ὀρθ., $Β+β_1=2$ ὀρθ·, $Γ+γ_1=2$ ὀρθ. ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ τῆς Α=Β=Γ=1 ὀρθ. λαμβάνομεν $α_1=β_1=γ_1=1$ ὀρθ , ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι τῆς $Λ_1$ εἶναι ὅλαι ὀρθαί, ἄρα αὕτη εἶναι τρισορθογώνιος.

**604.** ***Ἡ παραπληρωματικὴ ἰσοσκελοῦς τριέδρου εἶναι ἰσοσκελής.***

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ ἐπίπεδοι καὶ Α, Β, Γ αἱ δίεδροι τῆς ἰσοσκελοῦς τριέδρου Λ, καὶ $α_1$, $β_1$, $γ_1$ αἱ ἐπίπεδοι καὶ $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ αἱ δίεδροι τῆς παραπληρωτατικῆς της $Λ_1$· λέγω ὅτι καὶ ἡ $Λ_1$ εἶναι ἰσοσκελής.

Διότι ἀφοῦ ἡ Λ εἶναι ἰσοσκελὴς ἔχει δύο διέδρους ἴσας, ἔστω δὲ

$A=B$· ἀλλὰ τότε καὶ $\alpha=\beta$(1) (ἀντίστροφον ἀσκήσ. 599)· ἐπειδὴ ὅμως ἡ $\Lambda$ καὶ $\Lambda_1$ ὑπετέθησαν παραπληρωματικαὶ ἔχομεν $\alpha+A_1=2$ ὀρθ. καὶ $\beta+B_1=2$ ὀρθ. ἤτοι $\alpha+A_1=\beta+B_1$ ἢ ἕνεκα τῆς (1) λαμβάνομεν $A_1=B_1$, ἤτοι δύο δίεδροι τῆς $\Lambda_1$ εἶναι ἴσαι, ἄρα αὕτη εἶναι ἰσοσκελής.

605. ***Ἐὰν δύο τρίεδροι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ κατακορυφὴν αὐτῶν εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἔστωσαν $\alpha, \beta, \gamma$ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ $A, B, \Gamma$ αἱ δίεδροι δοθείσης τριέδρου $\Lambda$· ἔστωσαν $\alpha', \beta', \gamma'$ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ $A', B', \Gamma'$ αἱ δίεδροι τῆς κατακορυφὴν πρὸς τὴν $\Lambda$· ἔστωσαν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ αἱ ἐπίπεδοι καὶ $A_1, B_1, \Gamma_1$ αἱ δίεδροι τῆς $\Lambda_1$, παραπληρωματικῆς τῆς $\Lambda$, καὶ $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$, αἱ ἐπίπεδοι καὶ $A'_1$, $B'_1$, $\Gamma'_1$ αἱ δίεδροι τῆς κατὰ κορυφὴν πρὸς τὴν $\Lambda_1$· ἐὰν τὰς κατακορυφὴν τῶν $\Lambda$ καὶ $\Lambda_1$ παραστήσωμεν ἀντιστοίχως διὰ τῶν $\Lambda'$ καὶ $\Lambda'_1$, λέγω ὅτι αἱ $\Lambda'$ καὶ $\Lambda'_1$ εἶναι παραπληρωματικαί.

Διότι ἕνεκα τῶν κατακορυφὴν τριέδρων $\Lambda$ καὶ $\Lambda'$, ὡς καὶ τῶν $\Lambda_1$ καὶ $\Lambda'_1$ ἔχομεν

$$\begin{array}{llll} \alpha=\alpha' & A=A' & \alpha_1=\alpha_1' & A_1=A_1' \\ \beta=\beta' & B=B' & \beta_1=\beta_1' & B_1=B_1' \\ \gamma=\gamma' & \Gamma=\Gamma' & \gamma_1=\gamma_1' & \Gamma_1=\Gamma_1' \end{array} \qquad (1)$$

ἕνεκα δὲ τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων $\Lambda$ καὶ $\Lambda'$ ἔχομεν.

$$\left\{\begin{array}{l} A+\alpha'=2\text{ορ.} \\ B+\beta'=2\text{ορ.} \\ \Gamma+\gamma'=2\text{ορ.} \end{array}\right.$$
ἕνεκα ὅμως τῆς 2ας καὶ 3ης τῶν σχέσεων (1) αἱ σχέσεις αὗται γίνονται
$$\begin{array}{l} A'+\alpha_1'=2\text{ορ.} \\ B'+\beta_1'=2\text{ορ.} \\ \Gamma'+\gamma_1'=2\text{ορ.} \end{array} \qquad (2)$$

ὡσαύτως ἕνεκα τῶν παραπληρωματικῶν $\Lambda$ καὶ $\Lambda'$ ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\left\{\begin{array}{l} A_1+\alpha=2\text{ορ.} \\ B_1+\beta=2\text{ορ.} \\ \Gamma_1'+\gamma=2\text{ορ.} \end{array}\right.$$
ἕνεκα ὅμως τῆς 1ης καὶ 4ης τῶν σχέσεων (1) αἱ σχέσεις αὗται γίνονται
$$\begin{array}{l} A_1'+\alpha'=2\text{ορ.} \\ B_1'+\alpha'=2\text{ορ.} \\ \Gamma_1'+\gamma'=2\text{ορ.} \end{array} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι τῶν γωνιῶν $\Lambda'$ $\Lambda_1'$ τῆς μιᾶς εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων τῆς ἄλλης, ἄρα αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

606· ***Ἂν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς διέδρους των ἀνὰ μίαν ἴσας, αἱ παραπληρωματικαί των ἔχουν τὰς ἐπιπέδους των ἀνὰ μίαν ἴσας.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ δίεδροι τῆς τριέδρου Λ καὶ α΄, β΄, γ΄ αἱ ἐπίπεδοι τῆς παραπληρωματικῆς της Λ΄· ἐπίσης ἔστωσαν $A_1$, $B_1$, $\Gamma_1$ αἱ δίεδροι τῆς τριέδρου $\Lambda_1$ καὶ $\alpha_1'$, $\beta_1'$, $\gamma_1'$ αἱ ἐπίπεδοι τῆς παραπληρωματικῆς της $\Lambda_1'$· ἔστω δὲ $A=A_1$, $B=B_1'$, $\Gamma=\Gamma_1'$ (1), τότε λέγω ὅτι καὶ $\alpha'=\alpha_1'$, $\beta'=\beta_1'$, $\gamma'=\gamma_1'$.

Διότι ἕνεκα τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων Λ καὶ Λ΄, ὡς καὶ τῶν Λ΄ καὶ $\Lambda_1'$ ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\begin{array}{lll} A+\alpha'=2\text{ορ}. & A_1+\alpha_1'=2\text{ορ}. & A+\alpha'=A_1+\alpha_1' \\ B+\beta'=2\text{ορ}. & B_1+\beta_1'=2\text{ορ}. \quad \text{ἤτοι} & B+\beta'=B_1+\beta_1' \quad (2) \\ \Gamma+\gamma'=2\text{ορ} & \Gamma_1+\gamma_1'=2\text{ορ}. & \Gamma+\gamma'=\Gamma_1+\gamma_1' \end{array}$$

ἐκ τῶν σχέσεων ὅμως (2), καὶ τῆς δοθείσης (1) λαμβάνομεν

$$\alpha'=\alpha_1', \quad \beta'=\beta_1', \quad \gamma'=\gamma_1'.$$

**607.** ***Ἂν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς ἐπιπέδους των ἀνὰ μίαν ἴσας, αἱ παραπληρωματικαί των ἔχουν τὰς διέδρους των ἀνὰ μίαν ἴσας.***

Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι Λ καὶ $\Lambda_1$, τῶν ὁποίων αἱ ἐπίπεδοι εἶναι ἀντιστοίχως αἱ α, β, γ καὶ $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$· ἔστωσαν δὲ Λ΄ καὶ $\Lambda_1'$ ἀντιστοίχως αἱ παραπληρωματικαὶ τρίεδροι τούτων, τῶν ὁποίων αἱ δίεδροι ἔστωσαν Α΄, Β΄, Γ΄, καὶ $A_1'$, $B_1'$, $\Gamma_1'$.

Λέγω ὅτι ἂν $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$ (1)
θὰ εἶναι καὶ $A'=A_1'$, $B'=B'_1$, $\Gamma'=\Gamma_1'$.

Διότι ἕνεκα τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν Λ καὶ Λ΄, ὡς καὶ τῶν $\Lambda_1$ καὶ $\Lambda_1'$ ἔχομεν

$$\begin{array}{lll} A'+\alpha=2\text{ορ}. & A_1'+\alpha_1=2\text{ορ}. & A'+\alpha=A_1'+\alpha_1 \\ B'+\beta=2\text{ορ}. & B_1'+\beta_1=2\text{ορ}. \quad \text{ἤτοι} & B'+\beta=B_1'+\beta_1 \quad (2) \\ \Gamma'+\gamma=2\text{ορ}. & \Gamma_1'+\gamma_1=2\text{ορ}. & \Gamma'+\gamma=\Gamma_1'+\gamma_1 \end{array}$$

αἱ σχέσεις ὅμως (2) καὶ αἱ (1) δίδουν $A'=A_1'$, $B'=B_1'$, $\Gamma'=\Gamma_1'$.

**608.** ***Μεταξὺ τίνων ὁρίων δύναται νὰ περιέχεται μία ἐπίπεδος γωνία κανονικῆς πολυεδρικῆς γωνίας μὲ 4,5...ν ἕδρας.***

Ἐπειδὴ ἡ γωνία εἶναι κανονικὴ ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας ἴσας· ἂν λοιπὸν ω εἶναι τὸ μέτρον τῆς μιᾶς τούτων καὶ ἡ γωνία ἔχει ν ἕδρας τὸ ἄθροισμα Σ ὅλων τῶν ἑδρῶν εἶναι $\Sigma=\omega.\nu$· ἀλλὰ εἰς κάθε κυρτὴν στερεὰν γωνίαν εἶναι $\Sigma<4$ ὀρθ., ἤτοι $\omega\nu<4$ὀρθ. ἢ $\omega<\frac{4}{\nu}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι προφανῶς $\omega>0$, ἕπεται ὅτι διὰ $\nu=4$ εἶναι $0<\omega<1$ ὀρθ.· διὰ $\nu=5$ εἶναι $0<\omega<\frac{5}{4}$ ὀρθ. καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

**609.** ***Τετραέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι***

*εἶναι 90° 45′, 60° 35′, 120° 40′· μεταξὺ τίνων γωνιῶν δύναται νὰ περιλαμβάνεται ἡ τετάρτη ἐπίπεδος γωνία αὐτῆς.*

***Λύσις.*** Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς δοθείσης τετραέδρου, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma+\delta<360^\circ$ καὶ $\delta<360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$ ἢ $\delta<360^\circ-272^\circ$ καὶ $\delta<88^\circ$· ἐπειδὴ ὅμως ἡ γωνία εἶναι τετράεδρος ἕπεται $\delta>0$, διότι ἂν $\delta=0$ τότε αὕτη θὰ ἦτο τρίεδρος, ἑπομένως $0^\circ<\delta<88^\circ$.

*610. **Πόσας ὀρθὰς γωνίας ἐπιπέδους δύναται νὰ ἔχῃ μία τετράεδρος πεντάεδρος . . . γωνία.***

Ὅσας δήποτε ἕδρας καὶ ἂν ἔχῃ μία στερεὰ γωνία τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς κορυφῆς της εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. Ἡ στερεὰ λοιπὸν γωνία δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἐπιπέδους ὀρθὰς γωνίας περισσοτέρας τῶν τριῶν, διότι ὅλαι αἱ λοιπαί, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, θὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῆς μιᾶς ὀρθῆς· ἄρα θὰ ἔχῃ ὀρθὰς ἐπιπέδους ἢ μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς.

*611. **Δύο δίεδροι τριέδρου εἶναι 118° 24′ 55″ καὶ 76° 38′ 17″· μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται ἡ τρίτη τρίεδρος.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ τρεῖς δίεδροι τῆς τριέδρου καὶ ἔστω
$B=118^\circ\ 24'\ 55''$ καὶ $\Gamma=76^\circ\ 38'\ 17''$.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε τρίεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων της περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν καὶ ἑκάστη αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθὰς γίνεται μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἔχομεν

$A+B+\Gamma<6$ ὀρθ. καὶ $A<540^\circ-(B+\Gamma)$, ἤτοι $A<344^\circ\ 56'\ 48''$
$A+2$ ὀρθ. $>B+\Gamma$ καὶ $A>(B+\Gamma)-180^\circ$, ἤτοι $A>15^\circ\ 3'\ 12''$
ἑπομένως $15^\circ\ 3'\ 12''<A<344^\circ\ 56'\ 48''$

ἤτοι ἡ Α δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς τιμὰς τὰς μεγαλυτέρας τῶν 15° 3′ 12″ καὶ τὰς μικροτέρας τῶν 344° 56′ 48″.

*612. **Δύο ἐπίπεδοι τριέδρου εἶναι 68° 35′, 120° 15′. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται μία τῶν διέδρων τῆς παραπληρωματικῆς της καὶ τίνες αἱ δίεδροι αὐτῆς; μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται ἡ τρίτη ἐπίπεδος τῆς δοθείσης.***

Ἔστωσαν $\alpha=68^\circ\ 35'$, $\beta=120^\circ 15'$ καὶ γ αἱ ἐπίπεδοι τῆς δοθείσης καὶ Α′, Β′, Γ′ αἱ δίεδροι τῆς παραπληρωματικῆς της, τότε
$A'+\alpha=180^\circ$ καὶ $B'+\beta=180^\circ$, ἤτοι $A'=111^\circ\ 25'$ καὶ $B'=59^\circ\ 45'$
ἀλλὰ $A'+B'+\Gamma'<540^\circ$ καὶ $\Gamma'<540-(A'+B')$ ἤτοι $\Gamma'<360^\circ\ 10'$·
ἀλλὰ πρὸς τούτοις πρέπει $A'+B'+\Gamma'>180^\circ$ καὶ $\Gamma'>180^\circ-(A'+B')$ ἤτοι $\Gamma'>8^\circ\ 50'$ Ἐπειδὴ δὲ οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ Γ περιλαμβανομένην μεταξὺ 8° 40′ καὶ 360° 10′ πληροῦται ἡ συνθήκη
$\Gamma'+180^\circ>A'+B'$ (διότι $A'+B'=171^\circ\ 10'$) ἕπεται, ὅτι πρέπει

$8^{\circ}50' < \Gamma' < 360^{\circ}10'$ ὥστε ἡ Γ΄ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς μεταξὺ $8^{\circ}50'$ καὶ $360^{\circ}10'$, ἐὰν ἐννοεῖται λαμβάνῃ καταλλήλους τιμὰς καὶ ἡ γωνία γ. Αἱ δύο ἄλλαι δίεδροι τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι $A' = 111^{\circ}\ 25'$ καὶ $B' = 59^{\circ}45'$. Ἵνα ἔχωμεν τρίεδρον πρέπει $\alpha+\beta+\gamma < 360^{\circ}$ καὶ $\gamma < 360-(\alpha+\beta)$, ἤτοι $\gamma < 171^{\circ}10'$· εἶναι ὅμως προφανὲς ὅτι $\gamma > 0$, ἐπομένως ἡ γωνία γ δύναται νὰ λάβῃ οἵαν δήποτε τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ μηδενὸς καὶ μικροτέραν τῶν $171^{\circ}\ 10'$.

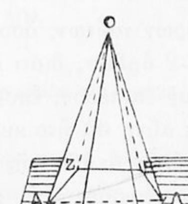
***613. Πόσον εἶναι τὸ ὀλιγώτερον ἢ τὸ πολὺ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων καὶ τῶν διέδρων γωνιῶν κανονικῆς τριέδρου γωνίας.***

Ἔστω α τὸ μέτρον μιᾶς τῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς κανονικῆς τριέδρου καὶ Α τὸ μέτρον μιᾶς τῶν ἴσων διέδρων αὐτῆς· πρέπει νὰ εἶναι $0 < 3\alpha < 4$ ὀρθ. ἢ $0 < \alpha < \frac{4}{3}$ ὀρθ. καὶ $2$ ὀρθ. $< 3A < 6$ ὀρθ. ἢ $\frac{2}{3}$ ὀρθ. $< A < 2$ ὀρθ. (1). Ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ τότε καὶ ἡ συνθήκη $A + 2$ὀρθ.$> B + \Gamma$ (2) πληροῦται, διότι ἐδῶ ἔχομεν $A + 2$ὀρ.$> 2A$ ἢ $A < 2$ὀρθ. ἐκ τοῦ ὁποίου παρατηροῦμεν, ὅτι ἂν πληροῦται ἡ (1) πληροῦται καὶ ἡ (2) ἐπομένως αἱ μὲν ἐπίπεδοι δύνανται νὰ ἔχουν οἱανδήποτε τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ μηδενὸς καὶ μικροτέραν τῶν $\frac{4}{3}$ ὀρθ., αἱ δὲ δίεδροι οἱανδήποτε τιμὴν μεγαλυτέραν τῶν $\frac{2}{3}$ ὀρθ. καὶ μικροτέραν τῶν δύο ὀρθῶν ἑκάστη.

***614. Μεταξὺ τίνων ὁρίων περιλαμβάνεται ἑκάστη τῶν διέδρων γωνιῶν κανονικῆς γωνίας μὲ ν ἕδρας.***

Ἔστω Ο ἡ δοθεῖσα κανονικὴ γωνία, τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν ἔστω ν.

Ἐὰν φέρωμεν ἐπίπεδον τέμνον ὅλας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς, ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς στερεᾶς γωνίας Ο εἶναι πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει τόσας πλευρὰς ὅσας ἕδρας ἔχει ἡ γωνία Ο, ἤτοι ν. Ἐὰν ἐκ τῆς τυχούσης κορυφῆς Α τοῦ πολυγώνου ἀχθοῦν ὅλαι αἱ δυναταὶ διαγώνιοι αὐτοῦ, τοῦτο θὰ διαιρεθῇ εἰς $\nu-2$ τρίγωνα. Διότι τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα θὰ ἔχουν ἕκαστον ὡς βάσιν μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραί των θὰ εἶναι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ· ἀλλὰ τὰ δύο ἀκραῖα τρίγωνα ἔχουν ἕκαστον δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ μία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς




Σχ. 52

βάσις, ἑπομένως αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰς βάσεις τῶν τριγώνων εἶναι ν—2 τὸ πλῆθος, ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα εἶναι ν—2. Ἂν τώρα θεωρήσωμεν τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς κορυφῆς Ο καὶ ἑκάστης διαγωνίου τοῦ πολυγώνου, ταῦτα διαιροῦν τὴν στερεὰν γωνίαν Ο εἰς ν—2 τριέδρους, διότι εἰς ἕκαστον τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἀντιστοιχεῖ μία τρίεδρος. Ἐπειδὴ δὲ εἰς κάθε τρίεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων της εἶναι μεγαλείτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν ἔχομεν

$$
\begin{aligned}
&2<\text{ΑΟΖΕ}+\text{ΖΟΕΑ}+\text{ΕΟΑΖ},\\
&2<\text{ΑΟΕΔ}+\text{ΕΟΔΑ}+\text{ΔΟΑΕ}\\
&2<\text{ΑΟΔΓ}+\text{ΔΟΓΑ}+\text{ΓΟΑΔ},\ldots\\
&\ldots,2<\text{ΑΟΓΒ}+\text{ΓΘΒΑ}+\text{ΒΟΑΓ}
\end{aligned}
$$

Ἀθροίζομεν τώρα τὰς ἀνισότητας κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι τοῦ πρώτου μέλους τοῦ ἀθροίσματος εἶναι τόσοι ὅσον τὸ πλῆθος τῶν τριέδρων εἰς τὰς ὁποίας διῃρέθη ἡ Ο, ἤτοι ν—2, ἑπομένως τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ 2(ν—2) οὕτω δὲ ἔχομεν

$$
\begin{aligned}
&2(\nu-2)<(\text{ΕΟΑΖ}+\text{ΔΟΑΕ}+\text{ΓΟΑΔ}+\ldots\\
&\ldots+\text{ΒΟΑΓ})+\text{ΑΟΖΕ}+(\text{ΑΟΓΔ}+\text{ΒΟΓΑ})+\\
&+(\text{ΖΟΕΑ}+\text{ΑΟΕΔ})+(\text{ΕΟΔΑ}+\text{ΑΟΔΓ})+\ldots+\text{ΟΓΒΑ}
\end{aligned}
$$

Αἱ δίεδροι ὅμως της πρώτης παρενθέσεως ἔχουν ἄθροισμα τὴν δίεδρον ΟΑ, τῆς δευτέρας τὴν ΟΓ καὶ τῆς τρίτης τὴν ΟΕ, τῆς δὲ τετάρτης παρενθέσεως ἔχουν ἄθροισμα τὴν ΟΔ, ἤτοι

$$2(\nu-2)<\text{ΟΑ}+\text{ΟΖ}+\text{ΟΕ}+\text{ΟΔ}+\text{ΟΓ}+\ldots\ldots+\text{ΟΒ}.$$

Ἀλλὰ ἡ δοθεῖσα στερεὰ γωνία Ο εἶναι κανονική, ἑπομένως ὅλαι αἱ τρίεδροι αὐτῆς εἶναι ἴσαι· ἂν λοιπὸν μὲ Α παραστήσωμεν τὸ μέτρον μιᾶς τούτων, τὸ ἄθροισμα τῶν ν διέδρων τῆς στερεᾶς Ο ἔχει μέτρον ν. Α, ἑπομένως $2(\nu-2)<\nu.\text{Α}$ καὶ $2-\dfrac{4}{\nu}<\text{Α}$ ἑκάστη ὅμως τῶν διέδρων τούτων, ὅσον δήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ ν, εἶναι μικροτέρα τῶν 2 ὀρθῶν, διότι ἂν Α=2ὀρθ. αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἑπομένως δὲν θὰ ὑπῆρχε δίεδρος· ἐὰν δὲ Α>2ορθ. τότε αὕτη θὰ ἦτο κυρτή, ἑπομένως ἡ ἀκμὴ της μετὰ τῶν δύο παρακειμένων ἀκμῶν τῆς Ο θὰ ὥριζε τρίεδρον ἐντὸς τῆς Ο κειμένην, ὁπότε προεκτεινομένη ἡ μία τῶν ἕδρων τῆς διέδρου ταύτης θὰ ἔτεμνε τὴν γωνίαν Ο καὶ ἑπομένως αὕτη δὲν θὰ ἦτο κυρτή· ἄρα Α<2ορ. καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$2-\frac{4}{\nu}<\text{Α}<2\text{ὀρθ}.$$

ἤτοι ἑκάστη γωνία τῆς δοθείσης στερεᾶς περιλαμβάνεται μεταξὺ $2-\dfrac{4}{\nu}$ καὶ 2 ὀρθῶν.

**615. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνία μὲ διέδρους α΄) 70°, 100° καὶ 50° β΄) 50°, 120°, 150°, γ΄) 100°, 120°, 110°.**

α΄) Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εἶναι $\alpha=110^\circ$, $\beta=80^\circ$, $\gamma=130^\circ$· παρατηροῦμεν δὲ ὅτι $\gamma<\alpha+\beta$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma<360^\circ$· Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὸ θεώρημα 273 Γεωμ. Σακελλ. ἔκδοσις Δ΄ κατασκευάζομεν τρίεδρον μὲ γωνίας ἐπιπέδους τὰς 110°, 80°, 130° καὶ ταύτης κατασκευάζομεν τὴν παραπληρωματικήν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς τριέδρου τῆς ἐχούσης γωνίας τὰς α,β,γ ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἀνὰ μίαν κάθετον ἐπὶ ἑκάστην ἕδραν αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ τρίτη ἀκμή, ὁπότε ἡ τρίεδρος ἡ ἔχουσα ἀκμὰς τὰς καθέτους αὐτὰς εἶναι ἡ ζητουμένη.

β΄) Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εἶναι αἱ $\alpha'=130^\circ$, $\beta'=60^\circ$, $\gamma'=30^\circ$, παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\alpha'>\beta'+\gamma'$ ἐπομένως τρίεδρος μὲ ἐπιπέδους $\alpha',\beta',\gamma'$, δὲν κατασκευάζεται, ἄρα οὔτε καὶ τρίεδρος ἔχουσα διέδρους 50°, 120° καὶ 150° κατασκευάζεται.

γ΄) αἱ ἐπίπεδοι τῆς παραπληρωματικῆς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εἶναι αἱ $\alpha''=80^\circ$, $\beta''=60^\circ$ καὶ $\gamma''=70^\circ$· παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha''<\beta''+\gamma''$ καὶ $\alpha''+\beta''+\gamma''<360$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τρίεδρον μὲ ἐπιπέδους τὰς $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ καὶ ταύτης κατασκευάζομεν τὴν παραπληρωματικήν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

**616. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίεδρος γωνία μὲ ἐπιπέδους γωνίας α΄) 120°, 50°, 140°. β΄) 120°, 120°, 40°.**

Ἡ κατασκευὴ γίνεται σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα 273 Γεωμετρ. Ν. Σακελλαρίου ἔκδ. Δ.

**617. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος γωνία μὲ ἐπιπέδους γωνίας** α΄) 50°, 50°, 80°. β΄) 90°, 80°, 140°. γ΄) 120°, 120°, 30°.

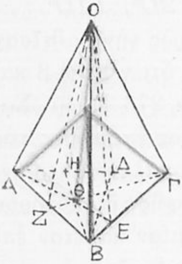
Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω

**618) Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὴ τρίεδρος γωνία μὲ ἐπιπέδους** 30° ἢ 90° ἢ 120°.

Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι κονονικὴ τρίεδρος γωνία μὲ ἐπιπέδους ἴσας μὲ 120° δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ 360°.

**619. Εἰς τρίεδρον ἰσοσκελῆ γωνίαν τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἑδρῶν τῶν ἴσων γωνιῶν εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τρίεδρον καὶ διαιρεῖ τὴν ἐπίπεδον αὐτῆς γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη.**

Ἔστω ἡ ἰσοσκελὴς τρίεδρος Ο εἰς τὴν ὁποίαν γωνΑΟΒ=γωνΒΟΓ καί ἔστω ΟΒΔ τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΟΒ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἴσων ἑδρῶν τῆς τριέδρου· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΟΓ.




Σχ. 53.

Τὸ ἐπίπεδον ΟΒΔ διαιρεῖ τὴν τρίεδρον εἰς δύο τριέδρους τὰς ΟΑΒΔ καὶ ΟΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν γωνΒΟΔ κοινὴν καὶ ἐξ ὑποθέσεως γωνΑΟΒ=γωνΒΟΓ· ἕνεκα δὲ τοῦ διχοτομοῦντος τὴν ΟΒ ἐπιπέδου αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΒΟΑ καὶ ΔΒΟΓ εἶναι ἴσαι, ἤτοι αἱ δύο τρίεδροι ἔχουν δύο ἐπιπέδους γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὑπὸ τούτων περιεχομένους διέδρους ἴσας, ἄρα ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα, ἤτοι γωνΑΟΔ=γωνΓΟΔ ὡς κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων διέδρων· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ΟΒΔ διχοτομεῖ τὴν γων ΑΟΓ καὶ ΑΟΔΒ=ΓΟΔΒ ὡς κείμεναι ἀπέναντι ἴσων ἐπιπέδων· ἀλλ' αἱ δίεδροι αὗται εἶναι ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ, ἑπομένως εἶναι παραπληρωματικαί· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθήν· ἄρα τὸ ἐπίπεδον ΟΒΔ εἶναι κάθεστον ἐπὶ τὸ ΑΟΓ.

**620.** ***Ἐὰν τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον δίεδρον γωνίαν τριέδρου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τρίτην ἕδραν, ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής.***

Ἔστω Ο ἡ δοθεῖσα τρίεδρος (σχ. 53) καὶ ΟΒΔ τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ΟΒ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν τρίτην ἕδραν ΑΟΓ· λέγω ὅτι ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής.

Τὸ ἐπίπεδον ΟΒΔ διαιρεῖ τὴν τρίεδρον Ο εἰς τὰς τριέδρους ΟΑΒΔ καὶ ΟΒΓΔ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν ἕδραν ΔΟΒ κοινὴν καὶ τὰς διέδρους ΑΒΟΔ καὶ ΓΒΟΔ ἴσας ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΟΒΔ διχοτομεῖ ΟΒ, ἐπίσης καὶ τὰς τιέδρους ΑΟΔΒ καὶ ΓΟΔΒ ἴσας ὡς ὀρθάς, διότι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεπεδον τῆς ΟΒ εἶναι κάθετον ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ· αἱ τρίεδροι λοιπὸν αὐταί, ἐπειδὴ ἔχουν μιαν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κοινὴν καὶ τὰς παρ' αὐτὴν διέδρους ἴσας, ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα, ἤτοι γωνΑΟΒ=γωνΓΟΒ, ὡς κείμεναι ἀπέναντι τῶν ὀρθῶν διέδρων, ἄρα ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής, διότι τότε καὶ ΟΑ=ΟΓ (ἄσκησ. 599).

**621.** ***Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ταύτην, ἡ τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής.***

Ἔστω ἡ τρίεδρος Ο (σχ. 53) καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΒΟΑ, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ἀκμῆς ΒΟ καὶ τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς γωνίας τῆς ἀπέναντι ἕδρας ΑΟΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ταύτην. Λέγω ὅτι ἡ τρίεδρος Ο εἶναι ἰσοσκελής.

Τὸ ἐπίπεδον ΒΟΔ διαιρεῖ τὴν Ο εἰς τὰς τριέδρους ΟΑΒΔ καὶ ΟΓΒΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν γωνίαν ΒΟΔ κοινὴν καὶ τὴν γωνΑΟΔ=γωνΓΟΔ, ἐπειδὴ ΟΔ εἶναι διχοτόμος, καὶ τὰς διέδρους ΑΟΔΒ καὶ ΓΟΔΒ ἴσας, ὡς ὀρθάς· αἱ τρίεδροι ΟΑΒΔ καὶ ΟΓΒΔ ἐπειδὴ ἔχουν δύο ἐπιπέδους γωνίας ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον ἴσην, ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα, ἤτοι γωνΑΟΒ==γωνΓΟΒ· ἑπομένως ἡ τρίεδρος Ο εἶναι ἰσοσκελής, διότι τότε καὶ ΟΑ=ΟΓ (ἄσκησις 599).

*622. Ἂν ΑΒΓ εἶναι τομὴ τρισορθογωνίου τριέδρου μὲ κορυφὴν Ο, εἶναι* $(ΑΒΓ)^2=(ΟΑΒ)^2+(ΟΒΓ)^2+(ΟΓΑ)^2$, *ἑκάστου τῶν ὅρων παριστάνοντος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὁμωνύμου τριγώνου.*

Προβάλλομεν (σχ. 53) τὴν κορυφὴν Ο ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΒΓ· ἔστω ἡ προβολὴ αὐτῆς τὸ σημεῖον Θ, καὶ ΟΘ ἡ προβάλλουσα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀκμῆς ΟΑ καὶ τῆς προβαλλούσης ΟΘ τέμνει τὸ ΑΒΓ κατὰ τὴν ΑΕ, τὴν δὲ ἕδραν ΒΟΓ κατὰ τὴν ΟΕ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ὡς διερχόμενον διὰ τῆς ΟΘ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ὡς διερχόμενον δὲ καὶ διὰ τῆς ΑΟ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΟΓ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἕδραν ταύτην· (εἶναι δὲ ἡ ΑΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΟΓ, διότι ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ, ἄρα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν). Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΟΕ ὡς κάθετον ἐπὶ τὰ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΒΟΓ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΒΓ· ἡ ΒΓ λοιπὸν ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΑΕ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΑΕ καὶ ΟΕ, ἤτοι ἡ ΑΕ εἶναι τὸ ἓν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ δὲ ΟΕ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΟΓ.

Θεωρήσωμεν τώρα τὸ ἐπίπεδον ΓΟΖ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀκμῆς ΟΓ καὶ τῆς προβαλλούσης ΟΘ· τοῦτο τέμνει τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ κατὰ τὴν ΓΖ, τὴν δὲ ἕδραν ΟΑΒ κατὰ τὴν ΟΖ· καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ΓΖ εἶναι τὸ ἓν ἐκ τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἡ ΟΖ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΟΒ· ἐντεῦθεν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ προβολὴ Θ τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο ὑψῶν αὐτοῦ· ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν ΒΘΗ

αὕτη εἶναι τὸ τρίτον ὕψος αὐτοῦ, ἑπομένως εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν ΟΗ, αὕτη ὡς ἑνοῦσα τὸν πόδα Η τῆς καθέτου ΘΗ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τὸ σημεῖον Ο τῆς καθέτου ΟΘ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ ΑΓ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἑπομένως εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΟΓ· τὸ τρίγωνον ὅμως ΒΟΗ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ο, διότι ἡ ΒΟ ὡς ἀκμὴ τῆς τρισορθογωνίου τριέδρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτῆς ΟΗ· εἰς τὸ ὀρθογώνιον δὲ αὐτὸ τρίγωνον ἡ ΟΘ εἶναι κάθετος, ἐκ τῆς κορυφῆς Ο τῆς ὀρθῆς του γωνίας, ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσάν του ΗΒ, ἑπομένως $(ΟΗ)^2=(ΒΗ)(ΘΗ)$ (1)
Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΟΑΓ, ἔχει μετὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΘΓ κοινὴν βάσιν τὴν ΑΓ, ἄρα εἶναι πρὸς αὐτὰ ὡς τὰ ὕψη των, ἤτοι

$$\frac{(ΟΑΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΟΗ)}{(ΒΗ)} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{(ΑΟΓ)}{(ΑΘΓ)}=\frac{(ΟΗ)}{(ΘΗ)} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{(ΟΑΓ)^2}{(ΑΒΓ)(ΑΘΓ)}=\frac{(ΟΗ)^2}{(ΒΗ)(ΘΗ)} \text{ ἢ ἕνεκα τῆς (1) ἔχομεν } \frac{(ΟΑΓ)^2}{(ΑΒΓ)(ΑΘΓ)}=1$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $(ΟΑΓ)^2=(ΑΒΓ)(ΑΘΓ)$ (4)

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι

$(ΟΒΓ)^2=(ΑΒΓ)(ΒΘΓ)$ (5) καὶ $(ΟΑΒ)^2=(ΑΒΓ)(ΑΘΒ)$ (6)

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν

$$(ΑΒΓ)(ΑΘΒ+ΒΘΓ+ΑΘΓ)=(ΟΑΒ)^2+(ΟΒΓ)^2+(ΟΓΑ)^2 \quad \text{ἤτοι}$$

$$(ΑΒΓ)^2=(ΟΑΒ)^2+(ΟΒΓ)^2+(ΟΓΑ)^2$$

### Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

1) Νὰ ἀχθῇ ἐξ ἑνὸς σημείου Μ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ ἕνα δοθέντα κύκλον Ο.

2) Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δύο ἄλλας εὐθείας $Ε_1$, $Ε_2$ μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τρίτην δοθεῖσαν εὐθεῖαν Δ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς $Ε_1$ καὶ $Ε_2$.

3) Δίδεται ἓν σημεῖον Μ, ἓν ἐπίπεδον Π καὶ μία εὐθεῖα Ε παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ μία εὐθεῖα ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὴν Ε καὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν ἀπόστασιν δοθεῖσαν λ.

4) Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ ἡ ὁποία νὰ συνατᾷ δύο περιφερείας Ο καὶ Ο′ κειμένας ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Π′.

5) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα διαιροῦν κατὰ δοθέντα λόγον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ ἑνὸς δοθέντος σημείου Μ καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π.

6) Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ 6, ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ δύο

οἱωνδήποτε ἐκ τῶν σημείων καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἔχει ὡς ἄκρα δύο ἄλλα σημεῖα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

7) Δίδονται τρία εὐθυγρ. τμήματα ἴσα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον Ο. α') Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τῶν μὴ κοινῶν ἄκρων των Α, Β, Γ, διέρχεται πάντοτε εἷς κύκλος. β') Ἐὰν αἱ θέσεις τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι ὡρισμέναι, ἡ δὲ ΟΓ λαμβάνει ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αὐτοῦ ;

8) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ σχηματίζῃ γωνίας ἴσας μὲ τρεῖς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἑνὸς ἐπιπέδου Π εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

9) Νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τέσσαρα δεδόμενα σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

10) Διὰ νὰ ἀπέχῃ ἓν ἐπίπεδον Π ἀπόστασιν ἴσην ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ ἢ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ.

11) Νὰ κατασκευασθῇ ἓν ἐπίπεδον Π τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

12) Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β τά ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἑνὸς ἐπιπέδου Π. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἓν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ΑΜ+ΜΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

13) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐξ ἑνὸς σημείου Α ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου Π αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἐξ ἑνὸς σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου ἢ εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π.

14) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ δοθέντος σημείου Ο ἐπὶ ὅλα τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ δοθείσης εὐθείας xy.

15) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου Π ἐκ τῶν ὁποίων βλέπομεν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

16) Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ, τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν τριῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ εὐθεῖα αὐταὶ ἀνὰ δύο λαμβανόμεναι.

17) Δίδονται εἰς τὸν χῶρον μία εὐθεῖα xy ὡριομένη, δύο ὡρισμένα σημεῖα Α, Β ἐκτὸς αὐτῆς καὶ ἐπὶ τῆς xy ἓν σημεῖον μεταβλητὸν Μ. Ζητεῖται ποὺ πρέπει νά τεθῇ τὸ σημεῖον Μ ἵνα α') ΜΑ+ΜΒ εἶναι ἐλάχιστον ; β') ἵνα ἡ διαφορὰ ΜΑ—ΜΒ εἶναι μεγίστη ;

18) Δίδονται δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι Οx καὶ Οy, καὶ σχηματίζουσαι ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἓν σημεῖον Μ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Οx ἓν σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς Οy ἓν σημεῖον Β, τοιοῦτον, ὥστε ἡ γωνία ΑΜΒ νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΑΒ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

19) Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'ΒΓ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινήν, καὶ τὰ σημεῖα Η, καὶ Η' τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν ἡ ΑΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΗΗ' κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'ΒΓ.

20) Δίδεται μία δίεδρος ΠΑΒΡ, ἓν σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ἕδρας Π καὶ ἓν ση-

μεῖον Δ ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ΓΔ ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὴν δίεδρον κατὰ ὀρθὴν γωνίαν.

21) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα νὰ ἰσοῦται μὲ λ.

22) Δίδεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἓν ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι ἴσαι.

23) Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ε, $Ε_1$, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς Ε, $Ε_1$ καὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π συναντοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

24) Δίδεται ἓν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἓν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ τῆς γωνίας ΒΑΓ νὰ εἶναι ὀρθὴ γωνία. Διερεύνησις.

25) Δίδεται ἓν σημεῖον Ο τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ο μία εὐθεῖα ΟΒ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ μίαν πλαγίαν ΟΑ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν γωνίαν.

26) Διὰ μιᾶς εὐθείας ΟΑ πλαγίας πρὸς ἐπίπεδον Π νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μὲ τὸ Π γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

27) Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Π τοιούτων ὥστε αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι τὰ συνδέουν μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

28) Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΧ καὶ ΒΥ αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν ω πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ δὲν εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο εὐθείας ΑΧ καὶ ΒΥ καὶ τὸν κύκλον σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ω μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κατὰ μίαν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου.

29) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ ἑνὸς εὐθυγρ. τμήματος ΑΒ σταθεροῦ μήκους καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα Α καὶ Β συναντοῦν δύο εὐθείας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

30) Νὰ τμηθῇ μία τρισορθογώνιος τρίεδρος στερεὰ γωνία οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν τρίγωνον.

31) Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ διέρχωνται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Α, Β, Γ.

32) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι α') ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο μιᾶς τριέδρου τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμάς της εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, καὶ Γ, συμπίπτει μὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. β') ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀξείας.

33) Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ ἔχουν, ὡς προβολὰς ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον, τρεῖς εὐθείας δοθείσας καὶ τεμνομένας.

34) Νὰ τμηθῇ μία τετράεδρος στερεὰ κυρτὴ γωνία δι' ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἓν παραλληλόγραμμον.

35) Δίδεται κύκλος Ο, ἓν σημεῖον Σ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονός του, καὶ ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ τετράεδρον Σ.ΑΒΓ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

## ΒΙΒΛΙΟΝ VI.

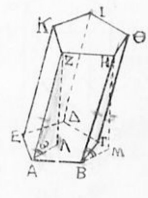
## Πολύεδρα πρίσματα.

623. ***Πᾶσα τομὴ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του ἰσοῦται μὲ τὴν βάσιν του.***

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων εἶναι ἴσαι, ἄρα ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος καὶ ἡ βάσις του εἶναι ἴσαι, ὡς τομαὶ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων.

624. ***Αἱ παράλληλοι ἀκμαὶ πρίσματος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.***

Ἔστω τὸ πρίσμα ΑΙ, καὶ δύο τυχοῦσαι ἀκμαὶ ΖΑ καὶ ΗΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἀκμαὶ αὐταὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 54.

Φέρομεν τὰς προβολὰς ΑΛ καὶ ΒΜ τῶν ἀκμῶν ΑΖ καὶ ΗΒ ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ τὰς καθέτους ΖΛ καὶ ΗΜ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΛΑ καὶ ΗΜΒ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΑΖ καὶ ΗΒ ἴσας, ὡς ἀκμὰς πρίσματος καὶ τὰς καθέτους ΖΛ καὶ ΗΜ ἴσας ὡς ἀποστάσεις τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας ω καὶ ω′ ἴσας. Ὥστε αἱ ἀκμαὶ ΖΑ καὶ ΗΒ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν καὶ πρὸς τὴν βάσιν ΖΗΘΙΚ.

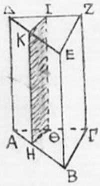
625. ***Αἱ παράλληλοι ἕδραι ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνια.***

Ἐπειδὴ τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν, αἱ ἀκμαί του εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἑπομένως αἱ ἕδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια.

626. ***Ἑκάστη τομὴ πρίσματος σχηματιζομένη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του εἶναι παραλληλόγραμμον.***

***Ἀπόδειξις.*** Ἔστω ΗΘΙΚ (σχ.55) ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, ἡ ὁποία γίνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς ἀκμάς του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ ΗΘΙΚ εἶναι παραλληλόγραμμον.

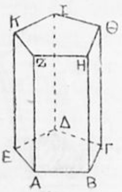
Αἱ εὐθεῖαι ΚΗ καὶ ΔΑ εἶναι παράλληλοι, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΔΑ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΚΘ, ἄρα τὸ δι' αὐτῆς διερχόμενον ἐπίπεδον ΔΑΒΕ τέμνει τὸ ΚΗΘΙ κατ' εὐθεῖαν παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ· δι' ὅμοιον λόγον ἡ ΘΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΑ· ὅθεν αἱ ΘΙ καὶ ΚΗ ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΔΑ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι δὲ καὶ ἴσαι ὡς περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος· ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΚΗΘΙ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 55.

*627. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του.*

Ἔστω τὸ πρίσμα ΑΙ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος ΑΙ θὰ ἔχωμεν



Σχ. 56.

$$\text{Ε}=(\text{ΑΒΗΖ})+(\text{ΒΓΘΗ})+(\text{ΓΔΙΘ})+(\text{ΔΕΚΙ})+(\text{ΕΑΖΚ})$$

ἀλλὰ $(\text{ΑΒΗΖ})=(\text{ΑΒ})(\text{ΑΖ})$,

$(\text{ΒΓΘΗ})=(\text{ΒΓ}).(\text{ΒΗ}]=(\text{ΒΓ})(\text{ΑΖ})$ (διότι ὅλαι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι). $(\text{ΓΔΙΘ})=(\text{ΓΔ}).(\text{ΑΖ})$

$(\text{ΔΕΚΙ})=(\text{ΔΕ}).(\text{ΑΖ})$, $(\text{ΕΑΖΚ})=(\text{ΕΑ})(\text{ΑΖ})$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\begin{aligned}\text{Ε}&=(\text{ΑΒ}).(\text{ΑΖ})+(\text{ΒΓ}).(\text{ΑΖ})+(\text{ΓΔ}).(\text{ΑΖ})+(\text{ΔΕ}).(\text{ΑΖ})+(\text{ΕΑ}).(\text{ΑΖ})\\&=(\text{ΑΖ})\times[(\text{ΑΒ})+(\text{ΒΓ})+(\text{ΓΔ})+(\text{ΔΕ})+(\text{ΕΑ})]\\&=\text{ὕψος}\times\text{περίμετρον τῆς βάσεως.}\end{aligned}$$

*628. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 10 δ. καὶ ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 29 δ.*

Γνωρίζομεν ὅτι

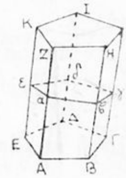
$$\begin{aligned}\text{ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. πρίσμ.}&=\text{ὕψος}\times\text{περίμετρον βάσεως}\\&=10\times 29=290 \text{ τ. δ.}\end{aligned}$$

*629. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περίμενον καθέτου τομῆς αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ πλάγιον πρίσμα ΑΙ (σχ. 57) καὶ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ αβγδε. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν

$$E=(ABHZ)+(B\Gamma\Theta H)+(\Gamma\Delta I\Theta)+(\Delta EKI)+(EAZK)$$

ἀλλὰ $(ABHZ)=(\alpha\beta).(AZ)$, $(B\Gamma\Theta H)=(\beta\gamma)(BH)=$ $=(\beta\gamma).(AZ)$ (διότι ὅλαι αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσαι) $(\Gamma\Delta I\Theta)=(\gamma\delta)(AZ)$, $(\Delta EKI)=(\delta\varepsilon)(AZ)$ καὶ $(EAZK)=(\varepsilon\alpha)(AZ)$.




Σχ. 57.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E=(\alpha\beta)(AZ)+(\beta\gamma)(AZ)+(\gamma\delta)(AZ)+(\delta\varepsilon)(AZ)+$$
$$+(\varepsilon\alpha)(AZ)$$
$$=(AZ)\times[(\alpha\beta)+(\beta\gamma)+(\gamma\delta)+(\delta\varepsilon)+(\varepsilon\alpha)]$$
$=$ἀκμὴν $\times$ περίμετρον καθέτου τομῆς.

***630. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου μὲ ἀκμὴν α εἶναι 6α².***

Ὁ κύβος ἔχει 6 τετραγωνικὰς ἴσας ἕδρας. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστης ἕδρας του τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\alpha^2$ (ἐμβαδὸν τετραγώνου) τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 ἑδρῶν του θὰ εἶναι $6\alpha^2$.

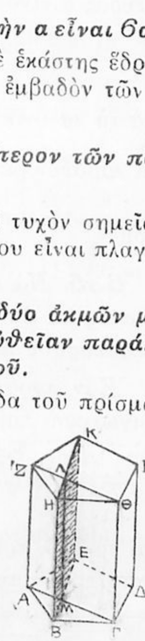
***631. Τὸ ὕψος πλαγίου πρίσματος εἶναι μικρότερον τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν αὐτοῦ.***

Διότι τὸ ὕψος εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἄνω βάσεως πρὸς τὴν κάτω βάσιν, ἐνῷ ἡ ἀκμή του εἶναι πλαγία πρὸς τὴν κάτω βάσιν τοῦ πρίσματος.

***632. Δύο διαγώνια ἐπίπεδα (διερχόμενα διὰ δύο ἀκμῶν μὴ παρακειμένων ἑδρῶν) πρίσματος τέμνονται κατ' εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς αὐτοῦ.***

Ἔστωσαν ΑΓΘΖ καὶ ΒΕΚΗ δύο διαγώνια ἐπίπεδα τοῦ πρίσμασματος ΑΚ καὶ ΛΜ ἡ τομὴ αὐτῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΛΜ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμάς.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΘ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΗΒ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΕΚΗ τὸ διερχόμενον δι' αὐτῆς. Ἀλλὰ διὰ τῆς ΓΘ διέρχονται τὰ ἐπίπεδα ΓΘΖΑ καὶ ΓΘΗΒ τὰ ὁποῖα τέμνουν τὸ ἐπίπεδον ΒΕΚΗ κατὰ τὰς εὐθείας ΒΗ καὶ ΛΜ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι (ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 557). Ὥστε ἡ ΛΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΗ, ἄρα καὶ πρὸς τὰς ἄλλας παραπλεύρους ἀκμάς. Εἶναι δὲ ἴσαι μὲ αὐτὴν ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΜΛΗ.




Σχ. 58.

***633. Πόσας κορυφάς, ἀκμάς, ἕδρας ἔχει πρίσμα μὲ βάσεις νύπλευρα.***

Πρίσμα μὲ ν πλευρὰς ἔχει 2. ν κορυφὰς 2ν+ν ἀκμὰς καὶ ν+2 ἕδρας.

***634. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ τριγωνικοῦ καὶ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος μὲ πλευρὰν τῆς βάσεως α καὶ παράπλευρον ἀκμὴν λ.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κανονικοῦ πρίσματος θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ε}=\text{παράπλευρ. ἐπιφάνειαν}+\text{ἐμβ. 2 βάσεων} \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ παράπλευρος ἐπιφ.$=$περίμετρον $\times$ ὕψος

$$=3\alpha.\lambda$$

τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α εἶναι $\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{Ε}=3\alpha\lambda+\frac{2\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6\alpha\lambda+\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχομεν: παράπλευρ. ἐπιφαν.$=6\alpha.\lambda$

καὶ ἐμβαδὸν βάσεως ἑξαγωνικῆς $=\dfrac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1)

ἔχομεν $$\text{Ε}=6\alpha\lambda+2.\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}=6\alpha\lambda+3\alpha^2\sqrt{3}$$

***635. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος μὲ ἀκμὰς τῆς βάσεως α=13δ, β=37δ, γ=40δ καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς δ=80δ.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ε}=\text{παράπλευρος ἐπιφάνεια}+\text{ἐμβ. 2 βάσεων.}$$

Ἀλλὰ παράπλευρ. ἐπιφ $=$περίμετρ. $\times$ ὕψος$=(\alpha+\beta+\gamma).\delta=$

$$=(13+37+30).80=7200 \text{ τ. δ.}$$

καὶ τὸ ἐμβ. τριγ. βασεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ὅπου τ$=$ἡμιπερίμετρος καὶ α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου. Ἐδῶ $\tau=45$, $\tau-\alpha=32$, $\tau-\beta=8$, $\tau-\gamma=5$, ὁπότε τὸ ἐμβ. τῆς τριγ. βάσεως εἶναι $\sqrt{45.32.8.5}=\sqrt{77600}=278{,}567$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\text{Ε}=7200+278{,}567=7478{,}567.$

***636. Κανονικοῦ τριγωνικοῦ ἢ τετραγωνικοῦ ἢ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος μὲ πάσας τὰς ἀκμάς του ἴσας τὸ ἐμβαδόν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του εἶναι 47,21 (δ²). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κανονικοῦ πρίσματος καὶ μὲ α τὴν ἀκμήν του θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ε}=\text{παράπλευρ. ἐπιφαν.}+\text{ἐμβ. 2 βάσεων.} \quad (1)$$

α) Διὰ τὸ κανονικὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχομεν

$$\text{παρ. ἐπιφαν.} = \text{περιμέτρ.} \times \text{ὕψος} = 3α.α = 3α^2,$$

ἐμβαδὸν βάσεως $= \dfrac{α^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ ἐξ ὑποθέσεως $E = 47{,}22$ ὁπότε

ὁ τύπος (1) γίνεται $\quad 47{,}22 = 3α^2 + 2.\dfrac{α^2\sqrt{3}}{4} =$

ἢ $\quad 94{,}44 = 6α^2 + α^2\sqrt{3} \quad$ ἢ $\quad 94{,}44 = φα^2(6+\sqrt{3}) \quad$ ἄρα

$$α^2 = \frac{94{,}44}{6+\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad α = \sqrt{\frac{94{,}44}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}}.$$

β) Διὰ τὸ κανονικὸν τετράγωνον ἔχομεν

παράπλ. ἐπιφ. $= 4α.α = 4α^2$, ἐμβ. βάσεως $= α^2$ καὶ $E = 47{,}22$ ὁπότε ἡ (1) γίνεται

$$47{,}22 = 4α^2 + 2α^2 \quad \text{ἢ} \quad 47{,}22 = 6α^2 \quad \text{ἄρα}$$

$$α^2 = \frac{47{,}22}{6} = 7{,}87 \quad \text{καὶ} \quad α = \sqrt{7{,}87} = 2.8$$

γ) Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχομεν: παράπλ. ἐπιφ $= 6α.α = 6α^2$

ἐμβ. βάσεως $= \dfrac{3α^2\sqrt{3}}{2}$ καὶ $E = 47{,}22$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται

$$47{,}22 = 6α^2 + 2.\frac{3α^2\sqrt{3}}{2} = 6α^2 + 3α^2\sqrt{3}$$

ἢ $\quad 47{,}22 = 3α^2(2+\sqrt{3}) \quad$ καὶ $\quad α^2 = \dfrac{47{,}22}{3(2+\sqrt{3})} =$

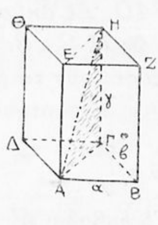
$$= \frac{15{,}74}{2+\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad α = \sqrt{\frac{15{,}74}{2+\sqrt{3}}}.$$

***637.*** ***Ἂν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ*** $\sqrt{α^2+β^2+γ^2}$.

Καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΓΗ ἔχομεν

$$(ΑΗ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΓΗ)^2 \qquad (1)$$

ἀλλὰ $(ΑΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 = α^2 + β^2$ καὶ $(ΓΗ)^2 = γ^2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

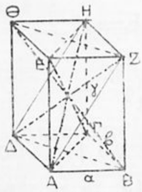


Σχ. 59.

$$(ΑΗ)^2 = α^2 + β^2 + γ^2 \quad \text{καὶ} \quad (ΑΗ) = \sqrt{α^2+β^2+γ^2}.$$

***638. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.***

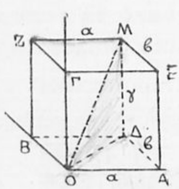
Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΗ καὶ ΑΗ, ΔΖ, ΕΓ, ΒΘ αἱ διαγώνιοί του. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι.



Σχ. 60.

Ἐν πρώτοις αἱ διαγώνιοι ΑΗ καὶ ΕΓ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΗΕ. Ὁμοίως εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ΒΘ καὶ ΔΖ, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΔΘΖΒ. Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΗ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι. Ἡ ΔΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΖΕ καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν ΑΖ. Τὸ ΔΑΖΗ εἶναι λοιπὸν ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΑΗ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΑΗ=ΔΖ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ΒΘ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι, ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ ΑΗ=ΕΓ καὶ ΔΖ=ΒΘ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἕπεται ὅτι ΑΗ=ΕΓ=ΔΖ=ΒΘ.

**639. Ἂν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ΒΟΓ, ΑΟΓ, ΑΟΒ εἶναι α, β, γ, ἡ ἀπόστασις ΟΜ εἶναι** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.



Σχ. 61.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΔΜ ἔχομεν

$$(ΟΜ)^2=(ΟΔ)^2+(ΔΜ)^2 \qquad (1)$$

ἀλλὰ (ΔΜ)=γ καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΑΔ ἔχομεν $(ΟΔ)^2=(ΟΑ)^2+(ΑΔ)^2=\alpha^2+\beta^2$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ $(ΟΔ)^2$ καὶ $(ΔΜ)^2$ διὰ τὴν ἴσων των ἔχομεν

$$(ΟΜ)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \text{ καὶ } ΟΜ=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

**640. Αἱ ἀκμαὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι μεταξύ των, ὡς οἱ 2 : 3: 5 καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του 942($\delta^2$). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν του.**

Ἂν παραστήσωμεν μὲ x, y, ω τὰς ἀκμάς του, θὰ ἔχωμεν κατ' ἀρχὰς

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{5} \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας του δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

ἂν α, β, γ εἶναι αἱ ἀκμαί του· ἐδῶ ἔχομεν

$$942=2(xy+x\omega+y\omega) \qquad (2)$$

Λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). Ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους (1) μὲ φ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὴν (1)

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{5}=\varphi \quad \text{ἢ} \quad x=2\varphi,\ y=3\varphi,\ \omega=5\varphi \qquad (3)$$

τὰς τιμὰς τῶν x, y, ω, θέτομεν εἰς τὴν (2) καὶ ἔχομεν

$$942=2(2\varphi.3\varphi+2\varphi.5\varphi+3\varphi.5\varphi) \quad \text{ἢ} \quad 942=62\varphi^2$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\varphi^2=\frac{942}{62}=15,19$ καὶ $\varphi=\sqrt{15,19}=3,897$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ φ εἰς τὴν (3) εὑρίσκομεν

$$x=7,794\delta. \quad y=11,691\delta. \quad \omega=19,485\delta.$$

*641.* ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας κύβου, ὅταν δίδεται ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν ἑδρῶν του, ἢ ἡ διαγώνιος του ἢ ἡ περίμετρος ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου του (διερχομένου διὰ δύο ἀκμῶν μὴ παρακειμένων ἑδρῶν.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, τὸ ἐμβαδόν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του εἶναι $6\alpha^2$, ἤτοι $E=6\alpha^2$. (1)
Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκμήν του α.

α') Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ διαγώνιος δ μιᾶς τῶν ἑδρῶν του π. χ. ἡ ΑΓ (σχ 60). Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος τετραγώνου πλευρᾶς α ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt{2}$, ἤτοι $\delta=\alpha\sqrt{2}$. Λύοντες ὡς πρὸς α ἔχομεν $\alpha=\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Ἀντικαθιστῶντες τὸ α διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν (1) ἔχομεν $E=6\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)^2=3\delta^2$

β') Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ διαγώνιος του ΑΗ.

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλεπιπέδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $AH=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ καὶ ἐπειδὴ ἐδῶ $\alpha=\beta=\gamma$ (διότι αἱ ἀκμαὶ κύβου εἶναι ἴσαι) ἔχομεν $AH=\sqrt{3\alpha^2}=\alpha\sqrt{3}$. Λύοντες ὡς πρὸς α ἔχομεν $\alpha=\frac{AH}{\sqrt{3}}$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται $E=6.\left(\frac{AH}{\sqrt{3}}\right)^2=2(AH)^2$

γ') Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ περίμετρος 2τ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΗΕ, ἤτοι

$$A\Gamma+\Gamma H+HE+EB=2\tau \quad \text{ἢ} \quad \alpha\sqrt{2}+\alpha+\alpha\sqrt{2}+\alpha=2\tau$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha+\alpha\sqrt{2}=\tau \quad \text{ἢ} \quad \alpha(1+\sqrt{2})=\tau \text{ καὶ } \alpha=\frac{\tau}{1+\sqrt{2}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ α εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E=6.\left(\frac{\tau}{1+\sqrt{2}}\right)^2=\frac{6\tau^2}{3+2\sqrt{2}}.$$

*642.* ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέ***

***δων, ἐὰν τὰ ὕψη των εἶναι 6 μ. αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ἔχουν διαστάσεις 2 μ., 4μ. καὶ 10μ., 8μ. ἀντιστοίχως.***

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ λόγος δύο ὀρθογ. παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ρ καὶ Ρ′ τὰ ὀρθογ. παραλληλεπίπεδα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{P}{P'}=\frac{2.4}{10.8}=\frac{1}{10}$$

***643. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ὀρθογ. παραλληλεπιπέδων, ἐὰν αἱ διαστάσεις των εἶναι 3μ., 4μ., 5μ., καὶ 6μ., 8μ., 10μ.***

Ἐπειδὴ ὁ λόγος δύο ὀρθογ. παραλληλεπιπέδων Ρ καὶ Ρ′ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεών των, ἔχομεν

$$\frac{P}{P'}=\frac{3.4.5}{6.8.10}=\frac{1}{2}.$$

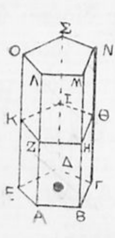
***644. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει λόγον 1 : 2 πρὸς ἄλλο μὲ ἴσην βάσιν καὶ ὕψος 3,4 μ.***

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθ. παραλληλεπίπεδα Ρ καί Ρ′ ἔχουν ἴσας βάσεις θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\frac{P}{P'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}=\frac{\upsilon}{3,4} \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon=1,7$$

***645. Δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἴσας ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.***

Ἔστω τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΙ· προτείνομεν τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του καὶ λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΚΟ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, ΕΣ ἴσα πρὸς τὰς ἀκμὰς τοῦ δοθέντος πρίσματος. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΣ, ΣΝ, ΝΜ, ΜΛ προκύπτει τὸ ὀρθὸν πρίσμα ΑΣ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα ΑΙ καὶ ΚΣ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα· διότι ἐὰν θέσωμεν τὸ ΑΙ ἐπὶ τοῦ ΚΣ οὕτως, ὥστε ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΖΗΘΙΚ, ἡ ἀκμὴ ΕΚ ἡ ὁποία εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒΓΔΕ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΚΖΗΘΙ εἰς τὸ σημεῖον Κ καὶ ἑπομένως θὰ συμπέσῃ μετὰ τῆς ΚΟ· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ΕΚ=ΚΟ ἕπεται, ὅτι ἡ κορυφὴ Κ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Ο. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ κορυφὴ Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Λ, κ. ο. κ. Τὰ πρίσματα ΑΙ καὶ ΚΣ θὰ ἐφαρμόζουν λοιπὸν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.



Σχ. 62.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ πρίσματα ΑΙ καὶ ΚΣ εἶναι ἴσα τότε τὸ ΑΣ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΙ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν τριπλασιάσωμεν, τετραπλασιάσωμεν κλπ. τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος θὰ προκύψῃ πρίσμα τρίπλάσιον, τετραπλάσιον τοῦ ἀρχικοῦ.

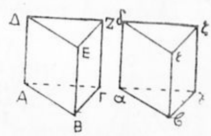
Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.

**646. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ὀρθῶν πρισμάτων μὲ βάσεις ἴσας καὶ ὕψη 3,5μ καὶ 7δ.***

Ἔστωσαν Ρ καὶ Ρ′ τὰ δοθέντα πρίσματα καὶ υ,υ′ τὰ ὕψη των· ἐπειδὴ τὰ πρίσματα αὐτὰ ἔχουν ἴσας βάσεις θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των, ἤτοι $\frac{P}{P'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{3,5}{0,7}=5.$

**647. *Ἂν δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἔχουν τὰς παραπλεύρους ἕδρας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ ὁμοίας κειμένας εἶναι ἴσα.***

Ἔστωσαν τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΔΕΖ καὶ αβγδεζ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἕδρας ΑΒΕΔ=αβεδ, ΒΓΖΕ=βγζε καὶ ΑΓΖΔ=αγζδ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ πρίσματα εἶναι αὐτὰ ἴσα.



Σχ. 63.

Ἐπειδὴ αἱ ἕδραι ΑΕ καὶ αε εἶναι ἴσαι ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ ΑΒ=αβ. Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι ΒΓ=βγ καὶ ΓΑ=γα.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἔχουν ἄρα καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας καί ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ πρίσματα ΑΖ καὶ αζ ἔχουν τὰς βάσεις των ἴσας καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἴσα.

**648. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.***

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ (σχ. 60) καὶ ΑΗ, ΕΓ, ΔΖ, ΒΘ αἱ διαγώνιοί του· θὰ δείξωμεν ὅτι

$$ΑΗ^2+ΕΓ^2+ΔΖ^2+ΒΘ^2=ΑΓ^2+ΒΓ^2+ΓΔ^2+ΑΔ^2+ΕΖ^2+ΖΗ^2+$$
$$+ΗΘ^2+ΘΕ^2+ΑΕ^2+ΒΖ^2+ΓΗ^2+ΔΘ^2.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΕΗ καὶ ΑΓ σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΗΕ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΗ καὶ ΕΓ εἶναι δύο διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν του ἔχομεν

$$ΑΗ^2+ΓΕ^2=ΑΓ^2+ΓΗ^2+ΗΕ^2+ΑΕ^2 \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ παραλλληλόγραμμον ΒΖΘΔ ἔχομεν

$$\Delta Z^2+B\Theta^2=B\Delta^2+\Delta\Theta^2+\Theta Z^2+ZB^2 \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$AH^2+\Gamma E^2+\Delta Z^2+B\Delta^2=A\Gamma^2+\Gamma H^2+HE^2+AE^2+$$
$$+B\Delta^2+\Delta\Theta^2+\Theta Z^2+ZB^2 \quad (3)$$

Ἀλλὰ $A\Gamma^2+B\Delta^2=AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2$

καὶ $EH^2+\Theta Z^2=EZ^2+ZH^2+H\Theta^2+\Theta E^2$

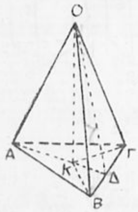
Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὰ $A\Gamma^2+B\Delta^2$ καὶ $EH^2+\Theta Z^2$ διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν

$$AH^2+\Gamma E^2+\Delta Z^2+B\Theta^2=AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2+$$
$$+\Gamma H^2+EZ^2+ZH^2+H\Theta^2+\Theta E^2+AE^2+\Delta\Theta^2+ZB^2.$$

## Πυραμίδες.

**649.** ***Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς***

Ἔστω ἡ κανονικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ, Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΚ καὶ τὰς ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ, ΟΚΒ, ΟΚΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἴσας, ὡς παραπλεύρους ἀκμὰς κανονικῆς πυραμίδος, καὶ τὴν ΟΚ κοινὴν, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας, ἤτοι



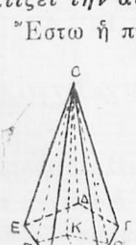
Σχ. 64.

γωνΟΑΚ=γωνΟΒΚ=γωνΟΓΚ.

Αἱ παράπλευραι ἀκμαὶ λοιπὸν κανονικῆς πυραμίδος σχηματίζουν γωνίας ἴσας μὲ τὴν βάσιν, ἄρα ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς αὐτήν.

**650.** ***Ἑκάστη παράπλευρος ἕδρα κανονικῆς πυραμίδος σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν μὲ τὴν βάσιν αὐτῆς.***

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ καὶ ΟΚ τὸ ὕψος της. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὰς καθέτους ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ... ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΑΒ, ΑΓ... τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΖ, ΟΗ, ΟΗ.., αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΑΕ, ΑΒ, ΒΓ... κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων.



Σχ. 65.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΖ, ΟΚΘ... εἶναι ἴσα διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, ἤτοι τὴν ΟΚ κοινὴν καὶ τὰς ΚΖ, ΚΘ... ἴσας, ὡς ἀποστήματα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Θὰ ἔχουν λοιπὸν καὶ γων ΟΖΚ=γωνΟΘΚ=...

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι ΟΖΚ, ΟΘΚ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν αἱ ἕδραι ΟΕΑ καὶ ΟΒΓ μὲ τὴν βάσιν. Ἀφοῦ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι αἱ ἕδραι σχηματίζουν μὲ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας.

*651.* ***Τὸ ὕψος πυραμίδος εἶναι μικρότερον ἑκάστης παραπλεύρου ἀκμῆς αὐτοῦ.***

Διότι τὸ μὲν ὕψος εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, αἱ δὲ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι πλάγιαι πρὸς αὐτήν.

*652.* ***Τὰ δι᾽ ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν πυραμίδος ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν βάσιν της διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.***

Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν βάσιν τέμνονται κατ᾽ εὐθείας καθέτους ἐπὶ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν ὡς κάθετοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

*653.* ***Ἑκάστης πυραμίδος ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως.***

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓ (σχ. 64). Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$(\text{ΟΒΓ})+(\text{ΟΑΒ})+(\text{ΟΓΑ})>(\text{ΑΒΓ}).$$

Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς ΟΔ τῆς ἕδρας ΟΒΓ. Ἐπίσης τὰς ΚΓ, ΚΒ, ΚΔ. Ἡ ΟΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΚΔ, διότι εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΔ. Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΚΒΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ ὕψη ἄνισα, ἄρα καὶ αἱ ἐπιφάνειαί των θὰ εἶναι ἄνισαι καὶ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ποὺ ἔχει μεγαλύτερον ὕψος, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$(\text{ΟΒΓ})>\text{ΚΒΓ} \qquad (1)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ΟΑΒ}>\text{ΑΚΒ}$ (2) καὶ $\text{ΟΑΓ}>\text{ΑΚΓ}$ (3)

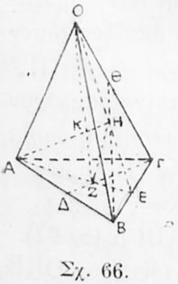
Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη ἔχομεν.

$$(\text{ΟΒΓ})+(\text{ΟΑΒ})+(\text{ΟΑΓ})>(\text{ΚΒΓ})+(\text{ΑΚΒ})+(\text{ΑΚΓ})$$

ἢ

$$(\text{ΟΒΓ})+(\text{ΟΑΒ})+(\text{ΟΑΓ})>\text{ΑΒΓ}$$

*654.* ***Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν τετραέδρου μὲ τὴν τομὴν τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρας, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, χωρίζον ἑκάστην εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 1:3.***



Σχ. 66.

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓΔ (Σχ. 66). Φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΕ καὶ ΓΔ τῆς ἕδρας ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ καὶ τὰς διαμέσους ΟΕ καὶ ΒΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Η. Φέρομεν ἐπίσης τὰς εὐθείας ΟΖ καὶ ΑΗ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ, διότι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΕΟ καὶ σχηματίζουν μετὰ τῆς ΟΑ γωνίας τῶν

ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι
$$\frac{HK}{AK}=\frac{KZ}{OK}=\frac{1}{3}.$$

Φέρομεν τὴν ΖΗ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΟ, διότι διαιρεῖ τὰς πλευρὰς ΕΟ καὶ ΕΑ τοῦ τριγώνου ΕΟΑ εἰς μέρη ἀνάλογα Πράγματι ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η εἶναι σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΟΒΓ ἔχομεν
$$EH=\frac{2}{3}OE \quad \text{καὶ} \quad EZ=\frac{2}{3}AE$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $\frac{EH}{OE}=\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{EZ}{AE}=\frac{2}{3}$. ἄρα καὶ $\frac{EH}{OE}=\frac{EZ}{AE}$

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΟ, τὰ τρίγωνα ΚΖΗ καὶ ΑΚΟ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰ γωνίας των ἴσας. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν $\frac{KZ}{OK}=\frac{KH}{AK}=\frac{ZH}{AO}$. (1).

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ καὶ ΕΑΟ εἶναι ὅμοια, ἄρα ἔχομεν
$$\frac{ZH}{AO}=\frac{EZ}{EA}=\frac{1}{3} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $\frac{KZ}{OK}=\frac{KH}{AK}=\frac{1}{3}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὴν κορυφὴν Β μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς ἕδρας ΑΟΓ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ σχέσις.

**656. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος κανονικῆς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, ἂν ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως εἶναι α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ λ.***

Σχ. 67.

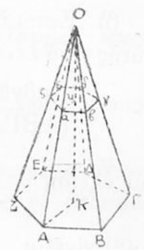
α) Ἔστω ἡ τριγωνικὴ κανονικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ. (σχ.64) Ἐὰν φέρωμεν τὸ ὕψος ΟΚ καὶ τὴν ΚΒ σχηματίζεται τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΒ ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἔχομεν
$$(OK)^2=(OB)^2-(KB)^2 \qquad (1)$$
ἀλλὰ ΟΒ=λ καὶ ΚΒ εἶναι ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt{3}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $(OK)^2=\lambda^2-(\alpha\sqrt{3})=\lambda^2-3\alpha^2$, ἄρα $OK=\sqrt{\lambda^2-3\alpha^2}$

β) Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ (σχ.67). Ἐὰν φέρωμεν τὸ ὕψος ΟΚ καὶ τὴνΚΒ, ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΒ ἔχομεν $\qquad (OK)^2=(OB)^2-(KB)^2 \qquad (1)$

ἀλλὰ $OB=\lambda$ καὶ $KB=\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (ἥμισυ τῆς διαγωνίου ΒΔ τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς α).

Ἀντικαθιστῶντες τὰ ΟΒ καὶ ΚΒ διὰ τῶν ἴσων των εἰς τὴν (1) ἔχομεν $(OK)^2=\lambda^2-\left(\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2=\lambda^2-\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{2\lambda^2-\alpha^2}{2}$

$$\text{καὶ } OK=\sqrt{\frac{2\lambda^2-\alpha^2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(2\lambda^2-\alpha^2)}$$




Σχ. 68.

γ) Ἔστω ἡ ἑξαγωγικὴ κανονικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕΖ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΚ καὶ τὴν ΑΚ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΑ ἔχομεν.

$$(OK)^2=(OA)^2-(KA)^2 \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ $OA=\lambda$ καὶ ΚΑ=ἀκτὶς κύκλου περιγεγραμμένου περὶ τὸ κανον. ἑξάγωνον $=\alpha$, ἡ (1) γράφεται

$$(OK)^2=\lambda^2-\alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad OK=\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}.$$

***657. Δίδεται πυραμὶς μὲ κορυφὴν Ο. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐπί τινος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν της, διὰ τοῦ ὁποίου τὸ ἀγόμενον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, νὰ τέμνῃ αὐτὴν κατὰ πολύγωνον, ἔχον λόγον πρὸς τὴν βάσιν ἴσον μὲ μ : ν***

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕΖ καὶ αβγδεζ (σχ.68) ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον α τῆς ἀκμῆς ΟΑ.

Γνωρίζομεν (βλ. § 297. 2ου Γεωμ.Σακελ.) ὅτι $\dfrac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)}{(AB\Gamma\Delta EZ)}=\dfrac{(O\alpha)^2}{(OA)^2}$ καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\dfrac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)}{(AB\Gamma\Delta EZ)}=\dfrac{\mu}{\nu}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$\dfrac{\mu}{\nu}=\dfrac{(O\alpha)^2}{(OA)^2}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $(O\alpha)^2=\dfrac{\mu}{\nu}(OA)^2$ καὶ $(O\alpha)=(OA)\sqrt{\dfrac{\mu}{\nu}}$

Ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ καὶ θὰ ἀπέχῃ τῆς κορυφῆς Ο ἀπόστασιν $(O\alpha)=(OA)\sqrt{\dfrac{\mu}{\nu}}$.

***658. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς κανονικῆς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, ἑξαγωνικῆς πυραμίδος μὲ ἀκμὴν τῆς βάσεως α, ἂν ἡ τομὴ γίνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ τέμνῃ τὸ ὕψος εἰς μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 4.***

α) Ἔστω ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ (σχ.69) καὶ αβγ ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2} \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\beta\gamma) = \left(\frac{o\kappa}{OK}\right)^2 (AB\Gamma) \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \frac{o\kappa}{OK} = \frac{3}{4}$ καὶ $(AB\Gamma) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

ἡ (1) γίνεται $\quad (\alpha\beta\gamma) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{64}$

β) Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ καὶ αβγδ (σχ.67) ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2} \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\beta\gamma\delta) = \left(\frac{o\kappa}{OK}\right)^2 (AB\Gamma\Delta) \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \frac{O\kappa}{OK} = \frac{3}{4}$ καὶ $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$

ἡ (2) γίνεται $\quad (\alpha\beta\gamma\delta) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \alpha^2 = \frac{9\alpha^2}{16}$

γ) Ἔστω ἡ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ.68) καὶ αβγδεζ ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

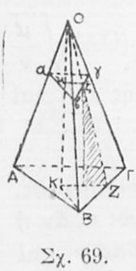
Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)}{(AB\Gamma\Delta EZ)} = \frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2} \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta) = \left(\frac{O\kappa}{OK}\right)^2 (AB\Gamma\Delta EZ) \qquad (3)$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \frac{o\kappa}{OK} = \frac{3}{4}$ καὶ $(AB\Gamma\Delta EZ) = \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$

ἡ (3) γίνεται $\quad (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2} = \frac{27\alpha^2\sqrt{3}}{32}$

***659. Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν προκυπτούσης κολούρου πυραμίδος.***



Σχ. 69.

Ἐπειδὴ ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι κανονική, αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλ. ἐπιφανείας τῆς κολ. πυραμίδος αβγΑΒΓ θὰ ἔχωμεν

$$E = \text{ἐμβ. } 3 \text{ τραπεζ. } (B\Gamma\gamma\beta) \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐμβ. τραπεζ. $(B\Gamma\gamma\beta) = (B\Gamma + \gamma\beta) \cdot \frac{\zeta Z}{2} \qquad (2)$

ἐδῶ $B\Gamma = \alpha$ καὶ $\frac{\beta\gamma}{B\Gamma} = \frac{O\kappa}{OK} = \frac{3}{4}$ ἢ

$$\beta\gamma = \frac{3(B\Gamma)}{4} = \frac{3\alpha}{4}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ ΒΓ καὶ γβ διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. τραπεζ. }(\text{ΒΓγβ})=\left(\alpha+\frac{3\alpha}{4}\right)\frac{(\zeta Z)}{2}=\frac{7\alpha}{8}\,(\zeta Z)$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται $\quad E=3.\frac{7\alpha}{8}(\zeta Z)=\frac{21}{8}\,(\zeta Z)$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν τετραγωνικὴν καὶ ἑξαγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα.

***660. Πόσας κορυφάς, ἀκμὰς καὶ ἕδρας ἔχει κόλουρος πυραμὶς μὲ βάσιν νύπλευρον;***

Ἡ κόλουρος πυραμὶς ποὺ ἔχει βάσιν μὲ ν πλευρὰς ἔχει 2ν κορυφάς, 2ν+ν ἀκμὰς καὶ ν+2 ἕδρας.

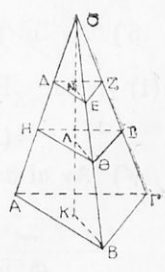
***661 Τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων κολούρου πυραμίδος εἶναι Β καὶ β, τὸ δὲ ὕψος υ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἐξ ἧς προέκυψεν αὕτη.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ $\upsilon_1$ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος θὰ ἔχωμεν

$\frac{\beta}{B}=\frac{\upsilon^2}{\upsilon_1{}^2}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon_1{}^2=\frac{\upsilon^2 B}{\beta}$ καὶ $\upsilon_1=\upsilon\sqrt{\frac{B}{\beta}}$

***662. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Μ τῆς τομῆς κολούρου πυραμίδος ἀπεχούσης ἰσάκις ἐκ τῶν βάσεων αὐτῆς καὶ παραλλήλου πρὸς ταύτας, ἂν αἱ βάσεις ἔχουν ἐμβαδὰ Β καὶ β***

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ ἡ κόλουρος πυραμίς, ΗΘΙ ἡ τομὴ αὐτῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ΟΑΒΓ ὁλόκληρος ἡ πυραμὶς ἐκ τῆς ὁποίας προέκυψε ἡ κόλουρος. Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΚ, τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὴν βάσιν ΔΕΖ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν τομὴν ΗΘΙ εἰς τὸ Λ. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ τομαὶ ΔΕΖ, ΗΘΙ, ΑΒΓ εἶναι ἀνάλογοι τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν σχέσιν:




$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΟΚ})^2}=\frac{(\text{ΗΘΙ})}{(\text{ΟΛ})^2}=\frac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΟΝ})^2}\ \text{ἢ}\ \frac{B}{(\text{ΟΚ})^2}=\frac{M}{(\text{ΟΛ})^2}=\frac{\beta}{(\text{ΟΝ})^2}$$

$$\text{ἢ}\ \frac{\sqrt{B}}{\text{ΟΚ}}=\frac{\sqrt{M}}{\text{ΟΛ}}=\frac{\sqrt{\beta}}{\text{ΟΝ}}$$

Σχ. 70

καὶ κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν

$$\frac{\sqrt{B}-\sqrt{M}}{\text{ΟΚ}-\text{ΟΛ}}=\frac{\sqrt{M}-\sqrt{\beta}}{\text{ΟΛ}-\text{ΟΝ}}\quad\text{ἢ}\quad\frac{\sqrt{B}-\sqrt{M}}{\text{ΛΚ}}=\frac{\sqrt{M}-\sqrt{\beta}}{\text{ΝΛ}}$$

καὶ ἐπειδὴ ΛΚ=ΚΛ ἐξ ὑποθέσεως θὰ εἶναι καὶ

$\sqrt{B}-\sqrt{M}=\sqrt{M}-\sqrt{\beta}\quad$ ἢ $\quad\sqrt{B}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{M}\quad$ καὶ

$$M=\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2=\frac{B+\beta+2\sqrt{B\beta}}{4}$$

*663. Κανονικῆς τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, ἑξαγωνικῆς κολούρου πυραμίδος δίδεται μία ἀκμὴ τῆς κάτω καὶ τῆς ἄνω βάσεως καὶ α΄) μία παράπλευρος ἀκμή, β΄) ἓν ὕψος παραπλεύρου ἕδρας γ΄) τὸ ὕψος τῆς κολούρου καὶ ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.*

α΄) Ἔστω ἡ κόλουρος κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ, (σχ. 70) τῆς ὁποίας δίδεται ΑΒ=Α, ΔΕ=α καὶ ΕΒ=μ.

Ἐὰν Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της θὰ ἔχωμεν

$$E=E_1+E_2+E_3\cdot$$

ὅπου $E_1$=ἐμβαδὸν κάτω βάσεως, $E_2$=ἐμβαδὸν ἄνω βάσεως καὶ $E_3$=ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας της· ἀλλὰ

$E_1=\frac{A^2\sqrt{3}}{4}$ καὶ $E_2=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, $E_3=3(ABE\Delta)\cdot$ ἀλλὰ τὸ ΑΒΕΔ εἶναι τραπέζιον ἔχον πλευρὰς ΑΒ=Α, ΔΕ=α, ΒΕ=μ καὶ ΑΔ=μ., ἑπομένως

$$(ABE\Delta)=\frac{1}{4}\,\frac{A+\alpha}{A-\alpha}\sqrt{(A-\alpha+2\mu)(-A+\alpha+2\mu)(A-\alpha)(A-\alpha)}$$

ἢ $(AB\Gamma\Delta)=\frac{A+\alpha}{4}\sqrt{(2(A\alpha+\mu^2)-(A^2+\alpha^2)}$ Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $E=\frac{\sqrt{3}(A^2+\alpha^2)+3(A+\alpha)\sqrt{2(A\alpha+\mu^2)-(A^2+\alpha^2}}{4}$.

β΄) Ἂν αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα τότε $E_1=A^2$, $E_2=\alpha^2$, ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $E=\frac{4(A^2+\alpha^2)+4(A+\alpha)\sqrt{2(A\alpha+\mu^2)-(A^2+\alpha^2)}}{4}=$

$$=(A^2+\alpha^2)+(A+\alpha)\sqrt{2(A\alpha+\mu^2)-(A^2+\alpha^2)}.$$

γ΄) Ἂν αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα τότε

$$E_1=\frac{3A^2\sqrt{3}}{2},\quad E_2=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2},\ \text{ὅθεν}$$

$$E=\frac{6\sqrt{3}\,(A^2+\alpha^2)+6\,(A+\alpha)\sqrt{2(A\sigma+\mu^2)-(A^2+\alpha^2)}}{4}.$$

2) Ἔστω ὅτι δίδεται ΑΒ=Α, ΔΕ=α καὶ υ τὸ ὕψος τῆς παραπλεύρου ἕδρας. Ἂν ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ ἔχομεν

$$E_1=\frac{A^2\sqrt{3}}{4},\quad E_2=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\ \text{καὶ}\ E_3=\frac{3(A+\alpha)}{2}.\upsilon$$

ὅθεν ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$E=\frac{\sqrt{3}(A^2+\alpha^2)+6(A+\alpha)\upsilon}{4}$$

Ἂν εἶναι τετραγωνικὴ ἔχομεν $E_1=A^2$, $E_2=\alpha^2$ καὶ $E_3=2(A+\alpha).\upsilon$ ὅθεν ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $E=A^2+\alpha^2+2(A+\alpha).\upsilon$

Ἂν εἶναι αἱ βάσεις ἑξάγωνα ἔχομεν

$$E_1=\frac{3A^2\sqrt{3}}{2}\quad E_2=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}\quad \text{καὶ}\quad E_3=3(A+\alpha).\upsilon$$

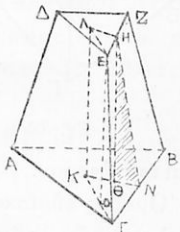
ὅθεν ἡ (1) δίδει $E=\dfrac{3\sqrt{3}(A^2+\alpha^2)+6(A+\alpha).\upsilon}{2}$.

3) Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ ὕψος ΛΚ$=\upsilon$ (σχ. 71) τῆς πυραμίδος καὶ αἱ ἀκμαὶ ΑΓ$=A$ καὶ ΔΕ$=\alpha$

α΄) Ἂν ἡ πυραμὶς εἶνε τριγωνική. Ἔστωσαν ΚΝ καὶ ΛΗ τὰ ἀποστήματα τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἀντιστοίχως, τότε

$$KN=\frac{A\sqrt{3}}{6}\quad \text{καὶ}\quad ΛH=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}.$$

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, αὕτη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΛΗΝΚ· διότι τοῦτο διερχόμενον διὰ τοῦ ὕψους ΚΛ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ἑπομένως ἡ κάθετος ΗΘ ὡς ἀγομένη ἐκ σημείου Η αὐτοῦ ἐπὶ τὸ κάθετον ἐπ' αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ΛΗΝΚ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΗΘΝ, ὅπου ΗΘ$=\upsilon$ καὶ



Σχ. 71.

$$ΘN=KN-KΘ=KN-ΛH=\frac{(A-\alpha)\sqrt{3}}{6},$$

ἔχομεν $(HN)^2=(HΘ)^2+(ΘN)^2$ ἢ

$$HN^2=\upsilon^2+3\frac{(A-\alpha)^2}{36}=\frac{36\upsilon^2+3(A-\alpha)^2}{36}\ \text{καὶ}\ HN=\sqrt{\frac{36\,\upsilon^2+3(A-\alpha)^2}{2}}.$$

Οὕτω γνωρίζομεν τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ ἀγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν 2.

4) Ἂν αἱ βάσεις εἶναι τετραγωνικαὶ τότε τὸ ἀπόστημα τῆς κάτω βάσεως αὐτοῦ εἶναι $\dfrac{A}{2}$ καὶ τῆς ἄνω $\delta=\dfrac{\alpha}{2}$, ἑπομένως τὸ παράπλευρον ὕψος εἶναι $(HN)^2=\upsilon^2+\dfrac{(A+\alpha)^2}{4}$ καὶ $HN=\sqrt{\dfrac{4\upsilon^2+(A+\alpha)^2}{2}}$

καὶ ἀγόμεθα οὕτω εἰς τὴν περίπτωσιν (2).

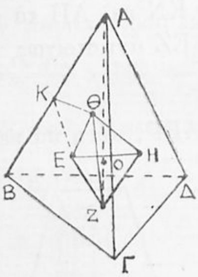
5) Ἂν αἱ βάσεις εἶναι ἑξάγωνα, τὸ ἀπόστημα τῆς κάτω βάσεως εἶναι

$\Delta = \frac{A\sqrt{3}}{2}$ καὶ τῆς ἄνω $\delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ἑπομένως τὸ μῆκος ΗΝ τοῦ παραπλεύρου ὕψους του εἶναι $(HN)^2 = \frac{4\upsilon^2 + 3(A+\alpha)^2}{4}$ καὶ $HN = \frac{\sqrt{4\upsilon^2 + 3(A+\alpha)^2}}{2}$ καὶ ἀγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν (2).

## Κανονικὰ καὶ ὅμοια πολύεδρα.

664. ***Τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τετραέδρου κανονικοῦ εἶναι κορυφαὶ νέου τοιούτου τετραέδρου· νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκμαί του.***

Ἔστωσαν Ε, Ζ, Η, Θ τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, καὶ Ο τὸ κοινὸν κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ τετράεδρον Α. Ἐπειδὴ τὰ κέντρα Ε, Θ, Η τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας Α ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ Ο καὶ Α, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΕΘΗ κύκλου. Ἐπὶ πλέον, ἐὰν Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΕΚΘ εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τρίγωνον ΕΘΗ, ἐπειδὴ ἔχει τὰς πλευρας του ἴσας εἶναι ἰσόπλευρον.




Σχ. 72

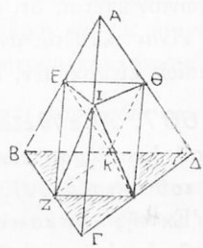
Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΘΗΖ, ΕΖΗ, ΘΕΖ εἶναι ἰσόπλευρα, ἂν λάβωμεν ἀντιστοίχως τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τῶν γωνιῶν Δ, Γ, Β· εἶναι δὲ καὶ ἴσα ἀναμεταξύ των, διότι ἡ πλευρὰ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΕΘ τοῦ σταθεροῦ τριγώνου ΚΕΘ. Ἡ ἀκτὶς ΟΖ τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας Ο εἰς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περὶ τὸ τετράεδρον ΖΕΘΗ.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (βλέπε ἄσκησις 845) ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τετράεδρον ἀκμῆς α εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}$, τῆς δὲ περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ τετράεδρον ΖΕΘΗ ἀκμῆς ΕΘ εἶναι $\frac{E\Theta\sqrt{6}}{4}$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν $\frac{E\Theta\sqrt{6}}{4} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{13}$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $E\Theta = \frac{\alpha}{3}$ ὥστε ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου ΖΕΘΗ εἶναι $\frac{\alpha}{3}$.

**665.** ***Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τούτου.***

Ἔστω τὸ κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν του. Ἐὰν ἑνώσωμεν κάθε σημεῖον ἀπὸ αὐτὰ μὲ τὰ τέσσαρα ἄλλα π. χ. τὸ Ι μὲ τὰ Ε,Ζ,Η,Θ, αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, ΕΖ, ΖΗ,ΘΗ εἶναι ἴσαι, διότι κάθε μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς ἀκμῆς (π. χ. ἡ ΕΘ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ, διότι συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Τὰ 8 τρίγωνα λοιπὸν ΙΕΘ, ΙΕΖ, ΙΖΗ, ΙΘΗ...εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ἀναμεταξύ των ἴσα· ἄρα τὸ πολύεδρον ΙΕΘΗΖΚ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.



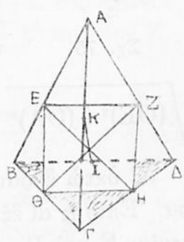

(Σχ. 73)

Ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ τετραέδρου εἶναι α, τότε ἡ ἀκμὴ τοῦ ὀκταέδρου θὰ εἶναι $\alpha/2$.

**666.** ***Αἱ εὐθεῖα αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι κειμένων ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον καὶ εἶναι κάθεται ἐπ' ἀλλήλας (καλούμεναι κρυσταλογραφικοὶ ἄξονες τοῦ τετραέδρου).***

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ΕΗ, ΖΘ, ΚΙ αἱ εὐθεῖαι ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Φέρομεν τὰς ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ.

Ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἐπειδὴ συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὁμοίως καὶ ἡ ΘΗ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Θ καὶ Η τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΓΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι λοιπὸν ἴσαι καὶ παράλληλοι ὡς ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν. Τὰ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΖΘ καὶ ΕΗ διχοτομοῦνται.




(Σχ. 74)

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΙΚ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΔ καὶ ΑΓ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν εὐθειῶν ΕΗ ἢ ΖΘ καὶ διχοτομεῖται ὑπ᾿ αὐτῶν. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ, ΙΚ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

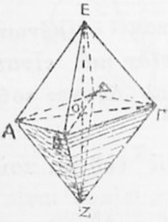
Ἐπειδὴ αἱ ἀκμαὶ τοῦ δοθέντος τετραέδρου εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εἶναι ἴσα· ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ὀρθογώνιον ἕπεται, ὅτι εἶναι τετράγωνον. Ἀλλὰ αἱ διαγώνιοι τετραγώνου εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των· ἄρα αἱ ΕΗ καὶ ΘΖ εἶναι κάθετοι. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ ἡ ΙΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΕΗ καὶ ΘΖ.

**667.** ***Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι κάθετοι ἐπ᾿ ἀλλήλας καὶ εἶναι ἴσαι (ἄξονες τοῦ ὀκταέδρου).***

Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ ὀκταέδρου γίνεται φανερὰ καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς.

Πρακτικῶς ἡ κατασκευὴ ἑνὸς ὀκταέδρου γίνεται ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐκ τοῦ κέντρου του Ο ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τὰ μήκη ΟΕ καὶ ΟΖ ἴσα μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ τετραγώνου, ἤτοι μὲ $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$. Ἂν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ μὲ τὰς κορυφὰς Α,Β,Γ,Δ σχηματίζεται ἓν κανονικὸν ὀκτάεδρον ΕΑΒΓΔΖ. Πράγματι αἱ ὀκτὼ ἀκμαὶ ΕΑ, ΑΒ.... εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι κάθε μία ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ



Σχ. 75

$$\sqrt{(OE)^2+(OA)^2}=\sqrt{\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\alpha^2}{4}+\frac{2\alpha^2}{4}}=\alpha.$$

Αἱ ὀκτὼ ἕδραι τοῦ ὀκταέδρου λοιπὸν εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα. Ἐπίσης αἱ ἓξ πολυεδρικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Διότι αἱ γωνίαι Ε καὶ Β π.χ. εἶναι αἱ γωνίαι τῆς κορυφῆς δύο τετραγωνικῶν πυραμίδων ΕΑΒΓΔ καὶ ΒΑΕΓΖ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ καὶ ἴσα ὕψη.

Αἱ ΑΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι καθεμία ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt{2}$ καὶ εἶναι κάθετοι, διότι ἡ ΖΟΕ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ο θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΖ καὶ κάθετος ἐπὶ αὐτήν, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΕΖ=ΒΔ.

668. ***Ἑκάστη τομὴ ὀκταέδρου διερχομένη διὰ δύο ἀξόνων αὐτοῦ εἶναι τετράγωνον.***

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΕΑΒΓΔΖ, (σχ. 75) καὶ ΑΓ, ΕΖ δύο ἄξονες αὐτοῦ καὶ ΑΕΓΖ ἡ τομὴ τοῦ ὀκταέδρου ἡ διερχομένη διὰ τῶν ΑΓ, ΕΖ.

Ἡ τομὴ ΑΕΓΖ εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει τὰς πλευράς του ΑΕ, ΕΓ, ΓΖ, ΖΑ ἴσας, ὡς ἀκμὰς κανονικοῦ ὀκταέδρου καὶ τὰς διαγωνίου του ΑΓ καὶ ΕΖ ἴσας, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

669. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι κορυφῶν κανονικοῦ ἑξαέδρου, ὀκταέδρου ἀκμῆς α.***

α) Τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον εἶναι κύβος, καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι κορυφῶν (μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας) ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου τοῦ κύβου, ἤτοι μὲ $\alpha\sqrt{3}$.

β) Γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη τομὴ κανονικοῦ ὀκταέδρου διερχομένη διὰ δύο ἀξόνων του εἶναι τετράγωνον. Αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ λοιπὸν τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου καὶ ἑπομένος ἡ ἀπόστασις τῶν κορυφῶν θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt{2}$.

670. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς α΄) τετραέδρου β΄) ἑξαέδρου κανονικοῦ ἐκ τῶν μέσων (καλουμένων κέντρων) τῶν διαφόρων ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν.***

α΄) Ἔστω τὸ κανονικὸν τετράεδρον ΟΑΒΓ (σχ. 66) πλευρᾶς α· τούτου αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ τὸ κέντρον ἑκάστης ἕδρας εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαμέσων της, ἡ ὁποία ἔστω εἰς τὴν ἕδραν ΑΒΓ τὸ σημεῖον Ζ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ ἔχομεν

$$ΑΕ^2 = ΑΒ^2 - ΒΕ^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad ΑΕ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Φέρομεν τὴν ἀπόστασιν ΟΖ τῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τοῦ κέντρου Ζ τῆς ἕδρας ΑΒΓ· ἐπειδὴ τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικὸν ἡ ΟΖ, ὡς ἑνοῦσα τὴν κορυφὴν αὐτοῦ Ο μετὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του εἶναι τὸ ὕψος του. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΖΑ ἔχομεν

$$ΟΖ^2 = ΑΟ^2 - ΑΖ^2 \quad \text{ἀλλὰ} \quad ΑΖ = \frac{2}{3}\,ΑΕ = \frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ὅθεν} \quad ΟΖ^2 = \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9} \quad \text{καὶ} \quad ΟΖ = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

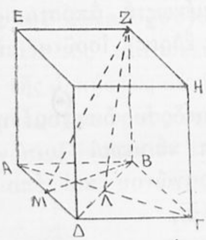
Ἡ ἀπόστασις τῆς αὐτῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΒΑ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτὴν κοινήν, ἰσοῦται πρὸς

$AZ=\frac{2}{3}AE=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν $AE=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, ἀπὸ δὲ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΓ, ΟΒ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀρχὴν αὐτήν, ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha}{2}$.

β') Τὸ μόνον κανονικὸν ἑξάεδρον (συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν Γ. Σακελ. ἔκδ. 4η § 302) εἶναι ὁ κύβος.

Ἔστω ὁ κύβος ΖΔ ἀκμῆς α· τὸ κέντρον ἑκάστης τῶν ἑδρῶν τούτου εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων αὐτῆς.

Ἂν λάβωμεν τὴν κορυφὴν Ζ καὶ τὸ κέντρον Λ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΖΛ, αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας του, ἑπομένως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΛΒΖ ἔχομεν $(\Lambda Z)^2=(ZB)^2+(\Lambda B)^2$.




Σχ. 76.

Ἀλλὰ $\Lambda B=\frac{1}{2}(\Delta B)=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ καὶ $(ZB)=\alpha$

ὅθεν $$(\Lambda Z)^2=\alpha^2+\frac{2\alpha^2}{4}=\frac{6\alpha^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad (\Lambda Z)=\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}.$$

Δι' ὅμοιον λόγον αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Ζ ἀπὸ τῶν μέσων τῶν ἑδρῶν ΕΔ καὶ ΗΔ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}$ ἑκάστη, ἀπὸ δὲ τῶν μέσων τῶν ἑδρῶν ΖΘ, ΖΓ, ΖΑ, αἱ ὁποῖαι διέρχονται δι' αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ 1/2 τῆς διαγωνίου ἑκάστου τῶν τετραγώνων τούτων, ἤτοι πρὸς $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς ΑΔ καὶ ΖΜ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ζ ἀπὸ τούτου· ἂν ἀχθῇ ἡ ΜΒ ἔχομεν $ZM^2=BZ^2+BM^2$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΑΜ ἔχομεν $BM^2=AB^2+AM^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4}$,

ἑπομένως $$ZM^2=\alpha^2+\frac{5\alpha^2}{4}=\frac{9\alpha^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad ZM=\frac{3}{2}\alpha$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ζ ἀπὸ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ΓΔ, ΘΔ ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{2}\alpha$.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ζ ἀπὸ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν ἀκμῶν

ΕΑ, ΕΘ, ΘΗ, ΗΓ ΑΒ, ΒΓ, ἰσοῦται πρὸς $BM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, ἀπὸ δὲ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν ἀκμῶν ΖΕ, ΖΒ, ΖΗ ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha}{2}$.

*671*. ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο ὁμολόγων ἑδρῶν ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων αὐτοῦ ἀκμῶν.***

Ἐπειδὴ τὰ πολύεδρα εἶναι ὅμοια καὶ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι αὐτῶν εἶναι ὅμοια πολύγωνα. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ὁλόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου δύο ὁμολόγων πλευρῶν του, αἱ ὁποῖαι ἐδῶ εἰς τὰ πολύεδρα εἶναι αἱ ἀκμαί.

*672*. ***Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἕδρας κύβου ἔχοντος ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του διπλάσιον ἄλλου ἀκμῆς α;***

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου ἀκμῆς α εἶναι $6\alpha^2$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ νέου κύβου εἶναι $2.\ 6\alpha^2 = 12\alpha^2$, ὁπότε τῆς μιᾶς ἕδρας τοῦ θὰ εἶναι $12\alpha^2 = 6{:}2\alpha^2$.

*673*. ***Αἱ ἀκμαὶ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι διπλάσιαι τῶν ἀκμῶν ἄλλου· ποσαπλασία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια του καὶ ἑκάστη ἕδρα του πρὸς τὰς τοῦ ἄλλου.***

Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν των.

Ἤτοι ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε′ ἀντιστοίχως τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ ζητουμένου καὶ μὲ α τὴν ἀκμὴν τοῦ δοθένος θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E}{E'} = \left(\frac{\alpha}{2\alpha}\right)^2 \text{ ἢ } \frac{E}{E'} = \frac{\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{ἄρα} \quad E' = 4E$$

δηλ. εἶναι τετραπλασία. Ἐπίσης καὶ κάθε ἕδρα του θὰ εἶναι τετραπλασία τῆς ἕδρας τοῦ δοθέντος.

## Ὄγκος πρισμάτων.

*674*. ***Ὁλόγος δύο πρισμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ρ καὶ Ρ′ τοὺς ὄγκους τῶν δύο πρισμάτων μὲ Β, Β′ τὰς βάσεις των καὶ μὲ υ, υ′ τὰ ὕψη των, θὰ ἔχωμεν

$$P = B.\upsilon \quad \text{καὶ} \quad P' = B'.\upsilon'$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{P}{P'} = \frac{B.\upsilon}{B'.\upsilon'}$ (1)

*675*. ***Πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των***

Ἔστωσαν P καὶ P′ δύο πρίσματα, B, B αἱ βάσεις των καὶ υ, υ′ τὰ ὕψη των. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{P}{P'}=\frac{B.\upsilon}{B.\upsilon'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

*676. Πρίσματα ἔχοντα ἴσα ὕψη ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων των.*

Ἔστωσαν P καὶ P′ δύο πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ βάσεις B καὶ B′.

Κατὰ τὴν ἄσκησιν 674 θὰ ἔχωμεν

$$\frac{P}{P'}=\frac{B.\upsilon}{B'\upsilon}= \quad \text{ἢ} \quad \frac{P}{P'}=\frac{B}{B'}$$

*677. Πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἔστωσαν τὰ πρίσματα P καὶ P′, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσοδυνάμους τὰς βάσεις των, ἤτοι B=B καὶ ἴσα τὰ ὕψη των, ἤτοι υ=υ. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\frac{P}{P'}=\frac{B.\upsilon}{B.\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad \frac{P}{P'}=1, \quad \text{ἄρα} \quad P=P'$$

*678. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ βάθος του εἶναι 5,13 μ. αἱ δὲ πλευραὶ τῆς βάσεώς του 6,5 μ., 6,9 μ. καὶ 5 μ.*

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος πρίσματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\text{ὄγκος πρίσμ.} = \text{ἐμβ βάσεως} \times \text{ὕψος} \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς βάσεσως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ὅπου τ= ἡμιπερίμετρος καὶ α,β,γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου. Ἐδῶ εἶναι τ=9,2, τ—α=2,7, τ—β=2,3 καὶ τ—γ=4,2.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$E=\sqrt{9{,}2\times2{,}7\times2{,}3\times4{,}2}=\sqrt{239{,}9544}=15{,}49 \text{ τ.μ. περίπου}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκος πρίσματος}=15{,}49\times5{,}13=79{,}4637 \text{ κ. μ.}$$

*679. Ἡ βάσις ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ῥόμβος, ἡ πλευρὰ τοῦ ὁποίου εἶναι 0,10μ., ἡ δὲ μικροτέρα διαγώνιος 0,12μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος του, ἂν γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 0,30μ.*

α) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια E ἑνὸς πρίσματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\text{περίμετρ. βάσ.}\times\text{ὕψος}+2 \text{ ἐμβαδ. βάσεων} \ (1)$$

Ἐδῶ εἶναι : περίμετρ. βάσεως=4×0,10=0,40, ὕψος=0,30. Τὸ ἐμβδ.

τῆς βάσεως, ἡ ὁποία εἶναι ῥόμβος εἶναι $(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{2}(ΒΔ)(ΑΓ)$ (2)

Ἀλλὰ $(ΒΔ)=0{,}12$ καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΑΔ ἔχομεν $(ΟΑ)^2=(ΑΔ)^2-(ΟΔ)^2=0{,}10^2-0{,}06^2=0{,}01-0{,}0036=0{,}0064$ ἄρα $(ΟΑ)=\sqrt{0{,}0064}=0{,}08$ καὶ $ΑΓ=0{,}16$, ὁπότε ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν

$$(ΑΒΓΔ)=\frac{1}{2}\times 0{,}12\times 0{,}16=0{,}0096 \text{ τ.μ.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$Ε=0{,}40\times 0{,}30+2.\ 0{,}0096=0{,}1200+0{,}0192=0{,}1392 \text{ τ.μ.}$$

β) Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι

Ὄγκ. πρίσμ. = ἐμβδ. βάσεως × ὕψος $=0{,}0096\times 0{,}30=0{,}0028{,}80$ κ.μ.

*680. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ πρίσματος ἔχοντος ὕψος 10δ., ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς βάσεώς εἶναι 10δ.*

Γνωρίζομεν ὅτι

Ὄγκ. πρίσμ. = ἐμβ. βάσεως × ὕψος. (1)

Ἐδῶ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 10δ., ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν της εἶναι $\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

ὄγκ. πρίσμ. $=25\sqrt{3}\times 10=250\sqrt{3}=250\times 1{,}73=432{,}50$ κ.δ.

*681. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 10δ. καὶ ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου 10δ.*

Γνωρίζομεν ὅτι

Ὄγκ. πρίσμ. = ἐμβάδ. βάσεως × ὕψος (1)

Ἐδῶ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 10δ., ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{3.10^2\sqrt{3}}{2}=150\sqrt{3}$ τ.δ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

ὄγκ. πρίσμ. $=150\sqrt{3}.10=1500\sqrt{3}=2595$ κ. δ,

*682. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἐσωτερικῆς ἀκμῆς κυβικῆς δεξαμενῆς χωρούσης 2 τόνους ὕδατος.*

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμὴν τῆς κυβικῆς δεξαμενῆς, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι $α^3$· ἐπειδὴ δὲ 2 τόνοι ὕδατος = 2 κ. μ. ὄγκον, ἔχομεν

$$α^3=2 \quad \text{καὶ } α=\sqrt[3]{2}.$$

683. *Ἡ ἀκμὴ κύβου ἔχει μῆκος α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπίφανείας του, καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου τόυ.*

Ὁ ὄγκος κύβου ἀκμῆς α εἶναι $\alpha^3$, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι $6\alpha^2$. Ἡ διαγώνιος του εἶναι $\alpha\sqrt{3}$.

684. *Ἡ διαγώνιος μιᾶς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου ἔχει μῆκος α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου.*

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀκμὴν μιᾶς ἕδρας του ΑΒΓΔ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ:

$$x^2+x^2=\alpha^2 \text{ ἢ } 2x^2=\alpha^2 \text{ ἢ } x^2=\frac{\alpha^2}{2} \text{ καὶ } x=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Ὁ ὄγκος V τοῦ κύβου θὰ εἶναι λοιπὸν

$$V=x^3=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\alpha^3}{2\sqrt{2}}=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{4}.$$

685. *Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α,β,γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του, ὁ ὄγκος του καὶ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου του.*

Γνωρίζομεν ὅτι

Ἐμβ. ὁλικ. ἐπιφ.πρίσμ.=περίμετρ.βάσεως×ὕψος+2 ἐμβ. βάσεων (1)

Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως καὶ γ τὸ ὕψος τότε ἡ μὲν περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι (2α+2β), τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι α β. Ἀντικαθιστῶντος καὶ τὴν (1) ἔχομεν

Ἐμβ.ὁλικ.ἐπιφ.πρίσμ. $=(2\alpha+2\beta).\gamma+2\alpha\beta=2\alpha\gamma+$
$+2\beta\gamma+2\alpha\beta=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$.

Ὁ ὄγκος V τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι $V=\alpha.\beta.\gamma$.

Ἡ δὲ διαγώνιός του δ εἶναι $\delta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

686. *Ὁ ὄγκος παραλληλεπιπέδου τινος εἶναι P, αἱ δὲ διαστάσεις του μεταξύ των καθὼς μ : ν : ρ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.*

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x, y, ω τὰς διαστάσεις του θὰ ἔχωμεν

τὰς ἐξισώσεις $\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}$ (1) $P=xy\omega$ (2)

Ἂν τοὺς ἴσους λόγους τῆς (1) παραστήσωμεν μὲ φ θὰ ἔχωμεν

$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{\omega}{\rho}=\varphi$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν

$$x=\mu\varphi,\quad y=\nu\varphi,\quad \omega=\rho\varphi \qquad (3)$$

Θέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ x, y, ω εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$P = \mu\varphi . . \varrho\varphi . \nu\varphi \text{ ἢ } P = \mu\nu\varrho\varphi^3 \text{ ἢ } \frac{P}{\mu\nu\varrho} = \varphi^3 \text{ καὶ } \varphi = \sqrt[3]{\frac{P}{\mu\nu\varrho}}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (3) ἀντὶ τοῦ φ τὴν τιμήν του εὑρίσκομεν

$$x = \mu\sqrt[3]{\frac{P}{\mu\nu\varrho}}, \quad y = \nu\sqrt[3]{\frac{P}{\mu\nu\varrho}}, \quad \omega = \varrho\sqrt[3]{\frac{P}{\mu\nu\varrho}}$$

## Ὄγκος πυραμίδων.

687. *Ὁ λόγος δύο πυραμίδων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεών των ἐπὶ τὸ ὕψος των.*

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π′ τὰς δύο πυραμίδας, μὲ Β, Β′ τὰς βάσεις των καὶ υ, υ′ τὰ ὕψη των ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν

$$\Pi = \frac{1}{3} B . \upsilon \quad (1) \quad \Pi' = \frac{1}{3} B' . \upsilon'$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B.\upsilon}{B'\upsilon'}$

688. ***Πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἰσοδύναμους ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν του.***

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ δύο πυραμίδες, Β καὶ Β αἱ βάσεις των καὶ υ, υ′ τὰ ὕψη των.

Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B.\upsilon}{B.\upsilon'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

689. ***Πυραμίδες ἔχουσαι ὕψη ἴσα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

Ἔστωσαν Π καὶ Π′ δύο πυραμίδες, Β καὶ Β′ οἱ βάσεις των, υ καὶ υ τὰ ὕψη των ἀντιστοίχως· κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B.\upsilon}{B'.\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B}{B'}$$

690. ***Πυραμίδες ἔχουσαι βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι.***

Ἔστωσαν αἱ πυραμίδες Π καὶ Π′, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς βάσεις των Β καὶ Β ἰσοδυνάμους καὶ τὰ ὕψη των υ, υ ἴσα.

Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{B.\upsilon}{B.\upsilon} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = 1 \quad \text{ἢ} \quad \Pi = \Pi'$$

ἄρα εἶναι ἰσοδύναμοι.

691. ***Ὁ ὄγκος πολυέδρου τινος δύναται νὰ εὑρεθῇ, ἂν χωρι-***

***σθῇ εἰς πυραμίδας, ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τῶν πυραμίδων τούτων καὶ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν.***

Πράγματι ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου κειμένου ἐντὸς τοῦ πολυέδρου φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου, σχηματίζονται τόσαι πυραμίδες, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου. Οἱ ὄγκοι αὐτῶν τῶν πυραμίδων εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται τὸ πολύεδρον ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὸν ὄγκον τοῦ πολυέδρου.

***692. Ὁ κύβος χωρίζεται εἰς 6 πυραμίδας ἐχούσας βάσεις τὰς ἕδρας αὐτοῦ καὶ κορυφὰς τὸ κέντρον τοῦ κύβου.***

Πράγματι ἂν ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύβου φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ θὰ σχηματισθοῦν 6 πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔχουν ὡς βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ κύβου καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ κύβου.

***693. Ὁ ὄγκος κανονικῆς (μὲ ἴσας ἀκμὰς) τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 182,17 ($\delta^3$)· πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανίας της.***

Ἔστω ΟΑΒΓ (σχ. 77) ἡ κανονικὴ τριγων. πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει ὅλας τὰς ἀκμὰς ἴσας. Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον της θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\,(\text{ΑΒΓ}).\,(\text{ΟΚ}) \qquad (1)$$

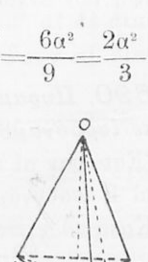
Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμήν της τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Τὸ δὲ ὕψος της ΟΚ θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΑ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΟΑ=α καὶ τὴν ΑΚ ἴσην μὲ τὰ 2/3 τῆς ΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση

$$\text{μὲ } \frac{\alpha\sqrt{3}}{2},\ \text{ἤτοι εἶναι ΑΚ}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Πράγματι ἔχομεν

$$(\text{ΟΚ})^2=(\text{ΟΑ})^2-(\text{ΑΚ})^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2=\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{9}=\frac{6\alpha^2}{9}=\frac{2\alpha^2}{3}$$

$$\text{καὶ ΟΚ}=\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}.$$



Σχ. 77.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$182{,}17=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} \ \text{ ἢ } \ 182{,}17=\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}.$$

Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς α ἔχομεν

$$\alpha^3=\frac{12\times182{,}17}{\sqrt{2}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha=\sqrt[3]{\frac{12\times182{,}17}{\sqrt{2}}}$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας της ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 ἴσων τριγώνων ΟΒΓ ἤτοι, εἶναι

$$E=4.(ΟΒΓ)=4.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=α^2\sqrt{3}.$$

β΄) Ἔστω ἡ κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς (ΟΑΒΓΔ) (σχ. 78) τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον της θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\ (ΑΒΓΔ)\ .\ (ΟΚ) \qquad (1)$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμήν της τότε θὰ ἔχωμεν $(ΑΒΓΔ)=α^2$· ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγ. ΟΚΒ ἔχομεν

$$(ΟΚ)^2=(ΟΒ)^2-(ΚΒ)^2 \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ΟΒ=α καὶ ΚΒ εἶναι ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α, ἤτοι εἶναι $ΚΒ=\frac{α\sqrt{2}}{2}$.

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν λοιπὸν

$$(ΟΚ)^2=α^2-\left(\frac{α\sqrt{2}}{2}\right)^2=α^2-\frac{α^2}{2}=\frac{α^2}{2} \text{ καὶ ἄρα } (ΟΚ)=\sqrt{\frac{α^2}{2}}=\frac{α}{\sqrt{2}}=\frac{α\sqrt{2}}{2}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ (ΑΒΓΔ) καὶ (ΟΚ) διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$182{,}17=\frac{1}{3}.α^2.\frac{α\sqrt{2}}{2}=\frac{α^3\sqrt{2}}{6}.$$

Λύοντες ὡς πρὸς α ἔχομεν

$$\frac{182{,}17\times 6}{\sqrt{2}}=α^3 \quad \text{καὶ} \quad α=\sqrt[3]{\frac{182{,}17\times 6}{\sqrt{2}}}.$$

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια Ε τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν 4 ἴσων ἰσοπλεύρων τριγώνων ΟΒΓ, ἤτοι εἶναι

$$\begin{aligned} E&=(ΑΒΓΔ)+4 \text{ τρίγ. } (ΟΒΓ)\\ &=α^2+4.\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=α^2+α^2\sqrt{3}=α^2(1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

γ΄) Ἔστω ἡ κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ.80) τῆς ὁποίας ὅλαι αἱ ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι, καὶ ΟΚ τὸ ὕψος της· ὁ ὄγκος αὐτῆς V εἶναι

$$V=\frac{1}{3}\ (ΑΒΓΔΕΖ)\ .\ (ΟΚ) \qquad (1)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμὴν τῆς πυραμίδος τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου (ΑΒΓΔΕΖ) εἶναι $\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγ. ΟΚΓ ἔχομεν $(ΟΚ)^2=(ΟΓ)^2-(ΚΓ)^2$ (2)

ἀλλὰ $(ΟΓ)=α$ καὶ $(ΚΓ)=α$ (διότι ἡ ἀκτὶς τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν πλευράν του).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν $(ΟΚ)^2=α^2-α^2=0$ ἤτοι τὸ ὕψος εἶναι μηδέν, ὁπότε ἡ κορυφὴ Ο συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τῆς βάσεως καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὅλας τὰς ἀκμάς της ἴσας.

*694. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος εἰς ($μ^3$) κανονικῆς πυραμίδος ἐχούσης βάσιν α΄) τετράγωνον μὲ πλευρὰν 3,4 μ. καὶ ὕψος 0,9. β΄) τρίγωνον πλευρᾶς 0,1 μ. καὶ ὕψος 0,15 μ. γ΄) ἐχούσης βάσιν ἑξάγωνον κανονικὸν πλευρᾶς 0,4 καὶ ὕψος 0,20 μ.*

Ὁ ὄγκος V πυραμίδος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V=\frac{1}{3}Β\,υ$ (1)

ὅπου Β=ἐμβαδὸν βάσεως καὶ υ=ὕψος.

α΄) Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 3,4 τότε τὸ ἐμβαδὸν της Β εἶναι $Β=3,4^2=11,66\ (μ^2)$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ Β καὶ υ διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\times 11,66\times 0,9=3,498 \text{ κ.μ.}$$

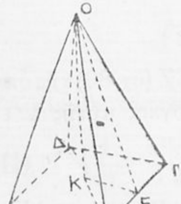
β΄) Τὸ ἐμβαδὸν Β τῆς τριγωνικῆς βάσεως εἶναι $\frac{0,1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{0,01\sqrt{3}}{4}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι υ=0,4 ὁ (1) γίνεται $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{0,01\sqrt{3}}{4}\cdot 0,15=0,000214$

γ΄) Τὸ ἐμβαδὸν Γ τῆς ἑξαγωνικῆς βάσεως εἶναι $\frac{3.0,4^2\sqrt{3}}{2}=3\times 0,08\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ υ=0,20 ὁ (1) γίνεται

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\times 0,08\sqrt{3}}{2}=0,04\sqrt{3}=0,0692\text{κ.μ.}$$

*695. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἰς ($μ^2$) κανονικῆς πυραμίδος, ἐὰν ἡ πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς βάσεώς της εἶναι 10 δ., τὸ δὲ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἶναι 16 δ.*



Σχ. 78.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβ. τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς παραπλεύρου τριγωνικῆς ἕδρας του, ἤτοι μὲ

4.(ΟΒΓ). Ἀλλὰ $4(ΟΒΓ)=4.\frac{1}{2}$ (ΒΓ)(ΟΕ)=2.10.16=320 τ. δ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ εἶναι $10^2=100$ τ. δ.

Ἐπομένως τὸ ἐμβ. τῆς ὁλ. ἐπιφανείας εἶναι

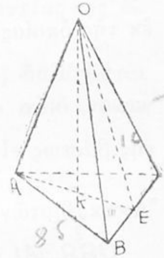
$$320+100=420 \quad (δ^2)=0,0420\ (μ^2).$$

*696. Ὁμοίως ἂν ἡ πλευρὰ τῆς τριγωνικῆς βάσεώς της εἶναι 8δ. καὶ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της 16δ. β) Ἂν ἡ πλευρὰ τῆς τετραγ. βάσεώς της εἶναι 32δ., τὸ δὲ ὕψος της 72δ.*

α΄) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς τριγ. πυραμίδος ΟΑΒΓ εἶναι

$$3.(ΟΒΓ)=3.\frac{1}{2}(ΒΓ)(ΟΕ)=\frac{3}{2}.\ 8.16=192\ (δ^2)$$

τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (ΑΒΓ) εἶναι $\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$.



Σχ. 79.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της εἶναι

$$Ε=192+16\sqrt{3}=219,68(δ^2)$$

β΄) Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ (σχ. 78) εἶναι

$$Ε=4.(ΟΒΓ)=4.\frac{1}{2}.(ΒΓ)\,(ΟΕ)=2.32.(ΟΕ) \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΕ ἔχομεν

$$(ΟΕ)^2=(ΟΚ)^2+(ΚΕ)^2=72^2+16^2=5184+256=5440$$

καὶ $ΟΕ=\sqrt{5440}=73,7$

ὁπότε ἀπὸ τὸν (1) ἔχομεν $Ε=64.\times 73,7=4726,8$ τ.δ.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τετραγωνικῆς βάσεως εἶναι $32^2=1024\ (δ^2)$.

Ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της εἶναι

$$4726,8+1024=5750,8\ (δ^2)$$

*697. Κανονικὴ πυραμὶς μὲ ὕψος 12 π. μετεσχηματίσθη εἰς κανονικὸν πρίσμα μὲ βάσιν ἰσοδύναμον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ὁ ὄγκος V τῆς κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν Β καὶ ὕψος 12 π.

εἶναι $$V=\frac{1}{3}Β\,12=4Β \qquad (1)$$

ὁ ὄγκος V΄ πρίσματος μὲ βάσιν Β καὶ μὲ ὕψος υ

εἶναι $$V'=Β.\ υ \qquad (2)$$

ἐπειδὴ $V=V'$ ἕπεται, ὅτι $4Β=Βυ$ ἢ $4=υ$

ἄρα τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 4 π.

*698. Νὰ εὑρεθῇ εἰς μέτρα τὸ ὕψος πυραμίδος α΄) ἐχούσης ὄγκον 26,936(μ³) πλευρὰν δὲ τῆς τριγωνικῆς βάσεώς της 3,6μ.*

*β') ἐχούσης ὄγκον 20 ($μ^3$) πλευρὰν δὲ τριγωνικῆς βάσεως 5μ., 4μ., 3μ.*

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος V πυραμίδος μὲ βάσιν B καὶ ὕψος υ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V=\frac{1}{3}B.υ$ (1)

α') Ἐδῶ $V=26,936$ καὶ $B=\frac{3,6^2\sqrt{3}}{4}=3,24\sqrt{3}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν (1) τὰ V καὶ B διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν $26,936=\frac{1}{3}.\ 3,24\sqrt{3}.υ$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $υ=\frac{3\times 26,936}{3,24\sqrt{3}}=$

β') Ἐδῶ $V=20$. Ἡ τριγωνικὴ βάσις της εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, διότι αἱ πλευραί της εἶναι 3, 4, 5. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν B τῆς βάσεως εἶναι $\frac{1}{2}.\ 3.\ 4=6$ ($μ^2$).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $20=\frac{1}{3}.6.υ$ ἢ $υ=10μ$.

**699.** ***Αἱ ἀκμαὶ τῆς βάσεως τετραγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 40δ., αἱ δὲ παράπλευροι ἀκμαί της 101 δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ (σχ. 78) θὰ ἔχωμεν $V=\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)(ΟΚ)$ (1)

ἐδῶ $(ΑΒΓΔ)=40^2=1600$ ($δ^2$)· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογ. τριγ. ΟΚΒ ἔχομεν

$$(ΟΚ)^2=(ΟΒ)^2-(ΚΒ)^2 \quad ἢ \quad (ΟΚ)^2=101^2-(20\sqrt{2})^2$$
$$=10201-800=9401 \text{ καὶ } (ΟΚ)=\sqrt{9401}=96,9$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν (1) τὰ (ΑΒΓΔ) καὶ (ΟΚ) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν $V=\frac{1}{3}\times 1600\times 96,9=41660$ κ.δ.

**700.** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος, ἐν τῇ ὁποίᾳ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της εἶναι 12 δ., ἡ δὲ βάσις ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 δ.***

Γνωρίζομεν ὅτι $(ΟΑΒΓ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓ).(ΟΚ)$ (1) (σχ. 79).

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ἡ πλευρὰ α ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10 δ. δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $α=10\sqrt{3}$, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (ΑΒΓ) εἶναι

$\frac{(10\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{300\sqrt{3}}{4}=75\sqrt{3}$· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογ. τριγ. ΟΚΕ ἔχομεν

$$(ΟΚ)^2=(ΟΕ)^2-(ΚΕ)^2 \quad (2)$$

ἀλλὰ (ΟΕ) = 12 καὶ ΚΕ = ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου $=\frac{10}{2}=5$,

ὁπότε ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) ἔχομεν

$$(OK)^2=12^2-5^2=144-25=119 \text{ καὶ } (OK)=\sqrt{119}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ (ΑΒΓ) καὶ (ΟΚ) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν $(ΟΑΒΓ)=\frac{1}{3}.\ 75\sqrt{3}\times\sqrt{119}=25\sqrt{359}=472{,}5$ κ. δ.

**701.** ***Τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς τῆς τετραγωνικῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος εἶναι α, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας της Ε. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος της.***

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια Ε τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ (σχ 78) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (ΑΒΓΔ) καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 4 ἴσων τριγώνων (ΟΒΓ), ἤτοι εἶναι $E=(ΑΒΓΔ)+4(ΟΒΓ)$ (1)

Ἀλλὰ $(ΑΒΓΔ)=\alpha^2$ καὶ $(ΟΒΓ)=\frac{1}{2}(ΒΓ)(ΟΕ)=\frac{1}{2}\alpha\,(ΟΕ)$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E=\alpha^2+4.\frac{1}{2}.\alpha(OE) \text{ ἢ } E=\alpha^2+2\alpha(OE) \text{ ἢ } (OE)=\frac{E-\alpha^2}{2\alpha}.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΚΕ ἔχομεν

$$(OK)^2=(OE)^2-(KE)^2=\left(\frac{E-\alpha^2}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{(E-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{4}=$$

$$=\frac{(E-\alpha^2)^2-\alpha^4}{4\alpha^2}=\frac{E^2-2E\alpha^2+\alpha^4-\alpha^4}{4\alpha^2}=\frac{E^2-2E\alpha^2}{4\alpha^2}$$

$$\text{καὶ } (OK)=\sqrt{\frac{E^2-2E\alpha^2}{4\alpha^2}}=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{E^2-2E\alpha^2}$$

**702.** ***Δοθέντος τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας Ε κανονικῆς πυραμίδος ἐχούσης βάσιν τετράγωνον, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.***

Γνωρίζομεν ὅτι $(ΟΑΒΓΔ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ).(ΟΚ)$ (1) (σχ. 78)

Ἀλλὰ $(ΑΒΓΔ)=\alpha^2$ καὶ $ΟΚ=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{E^2-2E\alpha^2}$ (ὡς εὑρέθη εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν). Ἀντικατιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ (ΑΒΓΔ) καὶ (ΟΚ) διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$(ΟΑΒΓΔ)=\frac{1}{3}.\alpha^2.\ \frac{1}{2\alpha}\sqrt{E^2-2E\alpha^2}=\frac{\alpha}{6}\sqrt{E^2-2E\alpha^2}$$

**703.** ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τῆς τετραγωνικῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος μὲ ὕψος υ καὶ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας της Ε.***

Γνωρίζομεν ὅτι $E=(ΑΒΓΔ)+4(ΟΒΓ)$ (1) (σχ. 78)

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως τότε $(ΑΒΓΔ)=\alpha^2$.

Ἐπίσης ἔχομεν $(ΟΒΓ)=\frac{1}{2}(ΒΓ)(ΟΕ)=\frac{1}{2}\,α\,(ΟΕ)$ (2)

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγ. (ΟΚΕ) ἔχομεν $(ΟΕ)^2=(ΟΚ)^2+(ΚΕ)^2$ (3)

καὶ ἐπειδὴ $(ΟΚ)=υ$ καὶ $(ΚΕ)=\frac{α}{2}$, ἡ (3) γίνεται

$$(ΟΕ)^2=υ^2+\left(\frac{α}{2}\right)^2=υ^2+\frac{α^2}{4}=\frac{4υ^2+α^2}{4} \text{ καὶ } ΟΕ=\frac{1}{2}\sqrt{4υ^2+α^2}$$

ὁπότε ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $(ΟΒΓ)=\frac{1}{2}α.\frac{1}{2}\sqrt{4υ^2+α^2}=\frac{α}{4}\sqrt{4υ^2+α^2}$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ (ΑΒΓΔ) καὶ (ΟΒΓ) διὰ τῶν ἴσων των

ἔχομεν $Ε=α^2+4.\frac{α}{4}\sqrt{4υ^2+α^2}$ ἢ $Ε=α^2+α\sqrt{4υ^2+α^2}$ (4)

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκμῆς α ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (4)· πρὸς τοῦτο ἂν ἀπομονόσωμεν τὸ ριζικὸν ἔχομεν $Ε-α^2=α\sqrt{4υ^2+α^2}$ ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη της καὶ ἔχομεν

$$Ε^2-2Εα^2+α^4=α^2(4υ^2+α^2)$$

$$\text{ἢ}\quad Ε^2-2Εα^2+α^4-4υ^2α^2-α^4=0 \quad\text{ἢ}$$

$$-(2Ε+4υ^2)α^2+Ε^2=0 \quad\text{ἢ}\quad α^2=\frac{Ε^2}{2Ε+4υ^2} \quad\text{καὶ}\quad α=\frac{Ε}{\sqrt{2Ε+4υ^2}}.$$

**704.** ***Τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ἐκ δρυὸς μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον ζυγίζει 580 γραμ. Ἂν αἱ ἀκμαὶ τῶν βάσεων εἶναι 8,5δ καὶ 5,7δ., πόσαι εἶναι αἱ παράπλευροι ἀκμαί, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι 0,89.***

Γνωρίζομεν ὅτι Βάρος = ὄγκον $\times$ εἰδικὸν βάρος (1)

Ἀλλὰ βάρος=580 γραμ., εἰδ.βάρ.=0,89 καὶ

$$ὄγκος=\frac{1}{3}.(ΛΚ)\left((Β+β+\sqrt{Ββ})\right) \quad (2)\ (σχ.71)$$

ὅπου Β καὶ β εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων καὶ ἐπειδὴ

$Β=\frac{8,5^2\sqrt{3}}{4}=$ καὶ $β=\frac{5,7^2\sqrt{3}}{4}$, ἡ (2) γίνεται

$$ὄγκ.=\frac{1}{3}.(ΛΚ)\left(\frac{8,5^2\sqrt{3}}{4}+\frac{5,7^2\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{8,5^2\sqrt{3}}{4}.\frac{5,7^2\sqrt{3}}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(ΛΚ)\left(\frac{72,25\sqrt{3}}{4}+\frac{32,49\sqrt{3}}{4}+\frac{8,5.5,7}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{ΛΚ}{3}\left(\frac{153,19\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{153,19\sqrt{3}(ΛΚ)}{12}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸν ὄγκον καὶ εἰδ. βάρος διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$580=\frac{153,19\sqrt{3}\,(ΛΚ)}{12}.0,89 \quad ἢ \quad (ΛΚ)=\frac{580.12}{153,19\sqrt{3}\,.0,89}=29,50$$

Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΟ κάθετον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΕΟΓ ἔχομεν $(ΕΓ)^2=(ΕΟ)^2+(ΟΓ)^2$ (3)

ἀλλὰ $(ΕΟ)=(ΛΚ)=29,50$ καὶ

$ΟΓ=ΚΓ-ΚΟ=ΚΓ-ΛΕ=\frac{8,5}{\sqrt{3}}-\frac{5,7}{\sqrt{3}}=\frac{2,8}{\sqrt{3}}$ ὁπότε ἀπὸ τὴν (3)

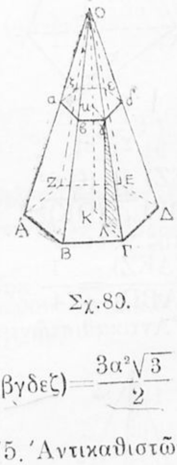
ἔχομεν $(ΕΓ)^2=(29,50)^2+\left(\frac{2,8}{\sqrt{3}}\right)^2=870,25-2,61=872,86$

καὶ $ΕΓ=\sqrt{872,86}=29,544.$ Ὥστε ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς πυραμίδος εἶναι 29,544.

**705.** ***Εἰς κανονικὴν ἑξαγωνικὴν κόλουρον πυραμίδα αἱ ἀκμαὶ τῆς κάτω βάσεως καὶ αἱ παράπλευροι εἶναι ἴσαι μὲ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον τῆς ἄνω βάσεως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκμαὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἂν ὁ ὄγκος εἶναι 104,75($δ^3$).***

Ἔστω ἡ κανονικὴ ἑξαγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς Αε.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὴν ἀκμὴν τῆς ἄνω βάσεως αβγδεζ, τότε ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιός της θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμένου περὶ τὸ ἑξάγωνον κύκλου, ἤτοι θὰ ἰσοῦται μὲ 2α· ὥστε αἱ ἀκμαὶ τῆς κάτω βάσεως ΑΒΓΔΕΖ καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ αΑ,βΒ...ζΖ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα ἴσαι μὲ 2α.




Σχ.89.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, μὲ Β καὶ β τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών των καὶ μὲ υ τὸ ὕψος της, θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\,υ\left(Β+β+\sqrt{Β.β}\right) \qquad (1)$$

Ἐδῶ $Β=(ΑΒΓΔΕΖ)=\frac{3.(2α)^2\sqrt{3}}{2}=6α^2\sqrt{3}$, $β=(αβγδεζ)=\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{Ββ}=\sqrt{6α^2\sqrt{3}\,.\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}}=3α^2\sqrt{3}$ καὶ $V=104,75$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ Β,β, καὶ V διὰ τῶν ἴσων των, ἔχομεν

$$104,75=\frac{1}{3}\,(κΚ)\left(6α^2\sqrt{3}+\frac{3α^2\sqrt{3}}{2}+3α^2\sqrt{3}\right)$$

ἢ $104,75=\frac{1}{3}\,(κΚ)\left(\frac{21α^2\sqrt{3}}{2}\right)$ ἢ $104,75=(κΚ).3,5α^2\sqrt{3}$

ἄρα $(κΚ)=\frac{104,75}{3,5α^2\sqrt{3}}=υ.$

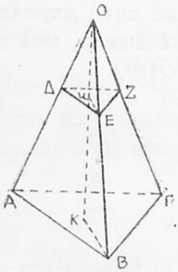
Φέρομεν τὴν γΛ· ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγ. γΛΓ ἔχομεν

$$(γΓ)^2=(γΛ)^2+(ΛΓ)^2 \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ $\gamma\Lambda=\kappa K=\upsilon$, καὶ $\Lambda\Gamma=K\Gamma-K\Lambda=K\Gamma-\kappa\gamma=2\alpha-\alpha=\alpha$ ἡ (2) γίνεται $(\gamma\Gamma)^2=\upsilon^2-\alpha^2$ καὶ $\gamma\Gamma=\sqrt{\upsilon^2-\alpha^2}$.

β) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κάτω βάσεως $6\alpha^2\sqrt{3}$, τῆς ἄνω βάσεως $\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}$ καὶ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν 6 ἴσων ἰσοσκελῶν τραπεζίων, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὰς τέσσαρας πλευράς.

**706. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος ὅταν προκύπτῃ ἐκ τῆς τομῆς κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν τρίγωνον, τετράγωνον, ἑξάγωνον καὶ ὕψος υ, ἂν τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ ὕψος.**




Σχ. 81

α) Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ θὰ ἔχωμεν ὄγκ (ΑΒΓΔΕΖ)=ὄγκ.πυρ.(ΟΑΒΓ−ὄγκ. πυρ.

$$(O\Delta EZ)=\frac{1}{3}(AB\Gamma).(OK)-\frac{1}{3}(\Delta EZ).(O\kappa) \qquad (1)$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τῆς κάτω βάσεως, τότε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θὰ εἶναι $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Ἐπειδὴ ἡ τομὴ (ΔΕΖ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν θὰ ἔχωμεν

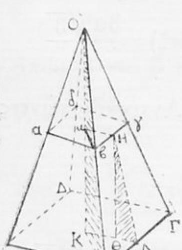
$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{(O\kappa)^2}{(OK)^2}$ καὶ ἐπειδὴ $O\kappa=\frac{\upsilon}{2}$ καὶ $(OK)=\upsilon$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{4} \text{ καὶ } (\Delta E\Delta)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)=\frac{1}{4}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}(AB\Gamma\Delta EZ)=\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\upsilon-\frac{1}{3}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}.\frac{\upsilon}{2}=$$

$$=\frac{8\alpha^2\sqrt{3}.\upsilon-\alpha^2\sqrt{3}\,\upsilon}{96}=\frac{7\alpha^2\sqrt{3}.\upsilon}{96}.$$




Σχ. 82

β) Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 82 ἔχομεν ὄγκ.(αβγδΑΒΓΔ)=ὄγκ.(ΟΒΓΔ)−ὄγκ.(οβγδ)=

$$=\frac{1}{3}(AB\Gamma\Delta).(OK)-\frac{1}{3}.(\alpha\beta\gamma\delta).(O\kappa) \qquad (1)$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τῆς τετραγωνικῆς βάσεως θὰ εἶναι $(AB\Gamma\Delta)=\alpha^2$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ τομὴ αβγδ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}=\frac{(\mathrm{O}\varkappa)^2}{(\mathrm{OK})^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{\alpha^2}=\frac{1}{4} \quad \text{καὶ} \quad (\alpha\beta\gamma\delta)=\frac{\alpha^2}{4}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}(\alpha\beta\gamma\delta\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{1}{3}.\alpha^2.\upsilon-\frac{1}{3}.\frac{\alpha^2}{4}.\frac{\upsilon}{2}=\frac{8\alpha^2\upsilon-\alpha^2\upsilon}{24}=\frac{7\alpha^2\upsilon}{24}$$

γ΄) Ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 80 ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})=\text{ὄγκ}(\mathrm{OAB\Gamma\Delta EZ})-\text{ὄγκ.}(\mathrm{O}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta) \quad (1)$$

$$=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})(\mathrm{OK})-\frac{1}{3}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)(\mathrm{O}\varkappa).$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τῆς κάτω βάσεως θὰ εἶναι

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Ἐπίσης θὰ ἔχωμεν}$$

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})}=\frac{(\mathrm{O}\varkappa)^2}{(\mathrm{OK})^2}=\frac{1}{4} \quad \text{καὶ} \quad (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})}{4} \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta)=\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{8}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\ \mathrm{AB\Gamma\Delta EZ})=\frac{1}{3}.\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{2}.\upsilon-\frac{1}{3}.\frac{3\alpha^2\sqrt{3}}{8}.\frac{\upsilon}{2}=\frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$$

***707. Τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι 30δ., αἱ δὲ πλευραὶ τῶν τετραγωνικῶν βάσεων 408 δ., καὶ 165 δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔαβγδ (σχ.82) καὶ μὲ Β, β τὰς βάσεις της, θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}.(\varkappa\mathrm{K})\left[\mathrm{B}+\beta+\sqrt{\mathrm{B}\beta}\,\right] \quad (1)$$

Ἐδῶ εἶναι $\quad \mathrm{B}=408^2=166464 \quad \beta=165^2=27225$

καὶ $\quad \sqrt{\mathrm{B}.\beta}=\sqrt{408^2.165^2}=408.165=67320$

Φέρομεν τὰ ἀποστήματα κΗ καὶ ΚΛ καὶ τὴν ΗΘ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἀπόστημα ΚΛ εἰς τὸ Θ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΗΘΛ ἔχομεν

$$(\mathrm{H\Theta})^2=(\mathrm{H\Lambda})^2-(\Theta\Lambda)^2 \quad (2)$$

Ἀλλὰ $(\mathrm{H\Lambda})=200$ καὶ $(\Theta\Lambda)=(\mathrm{K\Lambda})-(\mathrm{K\Theta}]=\mathrm{K\Lambda}-\varkappa\mathrm{H}=\frac{\mathrm{AB}}{2}-\frac{\alpha\beta}{2}$ $=204-82{,}5=121{,}5$, ὁπότε ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν

$$(\text{Η}\Theta)^2=200^2-121,5^2=40000-14762,25=25257,75$$

καὶ $\quad \text{Η}\Theta=\varkappa\text{Κ}=\sqrt{25257,75}=158,8$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ ΟΚ, Β, β διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\times 158,8\times(166464+67320+27225)=52,933\times 251009 \text{ κ. δ.}$$

$$V=13286562,5 \text{ κ. δ.}=13,2865625 \text{ κ. μ.}$$

**708. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολοβοῦ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ ἀκμὴν τῆς βάσεως α καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$.***

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος V τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ Β τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του, ἤτοι

$$V=\frac{1}{3}B\,(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

καὶ ἐπειδὴ $B=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3).$$

**709. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ ἀκμὰς 7 δ, 8 δ., 10,5 δ., καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς 3 δ., 8 δ. καὶ 6 δ.***

Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγ. πρίσματος, Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}B.(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν Β τῆς βάσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$B=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (2)$$

ὅπου τ=ἡμιπερίμετρος καὶ α, β, γ, αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως· ἐδῶ ἔχομεν $\alpha=7$, $\beta=8$, $\gamma=10,5$ ὁπότε $\tau=12,75$, $\tau-\alpha=5,75$, $\tau-\beta=4,75$ καὶ $\tau-\gamma=2,75$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$B=\sqrt{12,75\times 5,75\times 4,75\times 2,75}=3,0956$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ Β, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3,0946\,(3+8+6)=17,53607 \text{ κ. δ.}$$

***710.*** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 169 (δ²), αἱ δὲ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι ἡ μία 10 δ, ἡ ἄλλη 0,5 ταύτης καὶ ἡ τρίτη τὰ 3/5 τῆς δευτέρας.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, μὲ B τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ μὲ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ τὰς παραπλεύρους ἀκμάς της, θὰ ἔχωμεν $V=\frac{1}{3}B(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$ (1)

Ἐδῶ εἶναι $B=169(\delta^2)$, $\lambda_1=10$, $\lambda_2=10\times0{,}5=5$, $\lambda_3=\frac{3}{5}\times5=3$

καὶ ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες αὐτὰ διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὴν (1) ἔχομεν $V=\frac{1}{3}169(10+5+3)=\frac{1}{3}\times169\times18=1014\ (\delta^3)$.

***711.*** ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἔχοντος παραπλεύρους ἀκμὰς 3 δ., 5 δ., 6,5 δ. καὶ κάθετον τομὴν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν 6 δ., τὴν δὲ ἀπέναντι αὐτῆς ὀξεῖαν γωνίαν 30°.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγων. πρίσματος, B τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ, καὶ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του θὰ ἔχωμεν
$$V=\frac{1}{3}B(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι 30° ἕπεται, ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του θὰ εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας καθέτου πλευρᾶς, ἤτοι θὰ εἶναι 2.6=12 δ. Ἂν ὀνομάσωμεν μὲ γ τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν του θὰ ἔχωμεν
$$\gamma^2=12^2-6^2=144-36=108 \text{ καὶ } \gamma=\sqrt{108}=10{,}39$$

Τὸ ἐμβαδὸν B τῆς τομῆς θὰ εἶναι $B=\frac{1}{2}\times10{,}39\times6=31{,}17(\delta^2)$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰ B, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ διὰ τῶν τιμῶν εἰς τὴν (1) θὰ ἔχωμεν
$$V=\frac{1}{3}\times31{,}17(3+5+6{,}5)=\frac{1}{3}\times31{,}17\times14{,}5=$$
$$=10{,}39\times14{,}2=150{,}655 \text{ τ. δ.}$$

***712.*** ***Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων τετραέδρων ἔχουν λόγον 6:7. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων αὐτῶν.***

Γνωρίζωμεν ὅτι ἐπιφάνειαι E καὶ E′ δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $\frac{E}{E'}=\frac{6^2}{7^2}$ ἢ $\frac{E}{E'}=\frac{36}{49}$.

Ἐπίσης οἱ ὄγκοι V καὶ V′ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν των, ἤτοι εἶναι

$$\frac{V}{V'}=\frac{6^3}{7^3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{V}{V'}=\frac{216}{349}.$$

*713. Ἐὰν ἀκμή τις τετραέδρου εἶνε α, τίς εἶναι ἡ ὁμόλογος ἀκμὴ ὁμοίου τετραέδρου, ἔχοντος διπλασίαν ἐπιφάνειαν.*

Ἐὰν E καὶ E′ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων τετραέδρων καὶ $\alpha,\alpha_1$ αἱ ὁμόλογοι ἀκμαί των ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν $\frac{E}{E'}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$ καὶ ἐπειδὴ $E'=2E$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\frac{E}{2E}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \alpha_1^2=2\alpha^2 \text{ καὶ } \alpha_1=\alpha\sqrt{2}$$

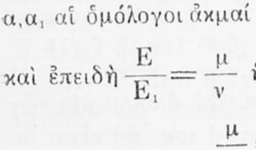
*714. Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον μ:ν. Τίνα λόγον ἔχουν δύο ὁμοίως κείμεναι ἀκμαὶ αὐτῶν.*

Ἐὰν E καὶ $E_1$ εἶναι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυέδρων καὶ $\alpha,\alpha_1$ αἱ ὁμόλογοι ἀκμαί των ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν $\frac{E}{E_1}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{E}{E_1}=\frac{\mu}{\nu}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\alpha_1}=\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}.$$

*715. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάεδρον ἐκ τῶν κέντρων τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.*



Σχ. 83.

Ἔστωσαν Ι,Κ,Λ,Μ,$N_1$Π τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ κανονικοῦ ἑξαέδρου ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ΚΙ,ΚΝ,ΚΛ,ΚΠ,ΜΙ, ΜΝ,ΜΚ,ΜΠ καὶ τὰς ΙΝ,ΝΛ,ΛΠ,ΠΙ σχηματίζεται τὸ ὀκτάεδρον ΜΚ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο πυραμίδας ΜΙΝΛΠ καὶ ΚΙΝΛΠ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΙΝΛΠ.

Αἱ ἕδραι τοῦ ὀκταέδρου ΚΜ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, διότι ἑκάστη ἀκμὴ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου. Πράγματι ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΓ καὶ ΑΘ καὶ τὴν διαγώνιον ΘΓ τοῦ κύβου, ἡ ΙΚ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΘ τοῦ τριγώνου ΑΓΘ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΘΓ.

Ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι α, ἡ διαγώνιός μιᾶς ἕδρας του θὰ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$ καὶ ἑπομένως ἡ ἀκμὴ τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

***716. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ κύβου ἰσοδυνάμου πρὸς κανονικὸν ὀκτάεδρον ἔχον ἀκμὴν 3 π***

Καθὼς γνωρίζομεν (βλέπε ἄσκησιν 667) τὸ κανονικὸν ὀκτάεδρον ΕΑΒΓΔΖ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο πυραμίδας ἴσας ΕΑΒΓΔ, ἑπομένως ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΕΑΒΓΔ· ἤτοι

$$\text{ὀγκ. ὀκτ. } ΕΑΒΓΔΖ = 2 \text{ ὀγκ. πυρ. } ΕΑΒΓΔ = 2.\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ).(ΟΕ) \quad (1)$$

Ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ ὀκταέδρου εἶναι α, τότε $(ΑΒΓΔ)=\alpha^2$ καὶ $ΟΕ=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὀγκ. ὀκταέδρ.} = 2.\frac{1}{3}\alpha^2\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3}$$

καὶ ἐπειδὴ ἐδῶ α=3 ἔχομεν: $\text{ὀγκ. ὀκταέδρ.} = \frac{3^3\sqrt{2}}{3} = 9\sqrt{2}$ κ.π.

Ἂν x εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $x^3$. Ἐπειδὴ ὁ κύβος καὶ τὸ ὀκτάεδρον εἶναι ἰσοδύναμα ἔχομεν $x^3=9\sqrt{2}$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\sqrt[3]{9\sqrt{2}}$.

***717. Πυραμίς τις τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της καὶ διερχομένου διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως. Νὰ συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι τῆς δοθείσης καὶ τῆς νέας πυραμίδος.***

Ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ Οαβγδ (σχ. 82) εἶναι ὅμοιαι, οἱ ὄγκοι των θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὑψῶν των, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\frac{(ΟΑΒΓΔ)}{(ο\,α\,β\,γ\,δ)} = \frac{(ΟΚ)^3}{(οκ)^3}$$

καὶ ἐπειδὴ $ΟΚ=2.Οκ$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{(ΟΑΒΓΔ)}{(Οαβγδ)} = \frac{(2.Οκ)^3}{(Οκ)^3} = 8$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $(ΟΑΒΓΔ)=8(Οαβγδ)$

ἤτοι ἡ δοθεῖσα εἶναι ὀκταπλασία τῆς νέας.

***718. Τὸ ὕψος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 3,6***

***μέτρα, ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεώς της 6 π. Τίνες αἱ διαστάσεις ὁμοίας αὐτῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι 1/10 τῆς πρώτης.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ V καὶ $V_1$ τοὺς ὄγκους τῶν δύο ὁμοίων πυραμίδων καὶ μὲ α, $α_1$ τὰς ὁμολόγους ἀκμὰς τῶν βασεών των, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\alpha^3}{\alpha_1^{\,3}}$$

Καὶ ἐπειδὴ $V=20V_1$, $\alpha=6$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{20V_1}{V_1}=\frac{6^3}{\alpha_1} \quad \text{ἢ} \quad 20=\frac{216}{\alpha_1^{\,3}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\alpha^3=10{,}8$ καὶ $\alpha=\sqrt[3]{10{,}8}$.

Ἐὰν υ καὶ $υ_1$ εἶναι τὰ ὕψη τῶν πυραμίδων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon_1^{\,3}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{20V_1}{V_1}=\frac{3{,}6^3}{\upsilon_1^{\,3}} \quad \text{ἢ} \quad 20=\frac{46{,}656}{\upsilon_1^{\,3}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon_1^{\,3}=2{,}332$ καὶ $\upsilon_1=\sqrt[3]{2{,}332}$.

***719. Τὸ μῆκος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν πυραμίδος εἶναι 4 μ. εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τμηθῇ ἡ ἀκμὴ αὕτη ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, χωρίζον αὐτὴν εἰς δύο μέρη, α') ἰσοδύναμα β') ἔχοντα λόγον 3 : 4.***

α') Τὸ ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος, ὁρίζει μίαν πυραμίδα ὁμοίαν πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦνται μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δοθεῖσα ἀκμὴ α τέμνεται ὑπὸ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου, καὶ μὲ V′, V τοὺς ὄγκους τῶν δύο ὁμοίων πυραμίδων θὰ ἔχωμεν

$$\frac{V'}{V}=\frac{x^3}{\alpha^3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{2}=\frac{x^3}{4^3} \quad \text{ἢ} \quad x=\sqrt[3]{32}$$

β') Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν

$$\frac{V'}{V}=\frac{x^3}{\alpha^3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{3}{4}=\frac{x^3}{4^3} \quad \text{καὶ} \quad x=\sqrt[3]{48}.$$

## Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

36) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

37) Ἐὰν εἰς ἓν τετραγωνικὸν πρίσμα τρεῖς διαγώνιοί του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἡ τετάρτη διαγώνιος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν τριῶν πρώτων, τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

38) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἓν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον δὲν τὸ τέμνει ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

39) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι ἀνὰ δύο ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

40) Δίδεται ἓν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ μιὰ διαγώνιός του ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΒΕΔ καὶ ΖΘΓ τριχοτομοῦν τὴν διαγώνιον ΑΗ.

41) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφὰς ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ηὐξημένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1933).

42) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν ὑπὸ τῶν 6 διαγωνίων ἐπιπέδων ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν· (Σχολὴ Εὐελπίδων 1932).

43. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ ἑνὸς κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

44) Εἰς ἓν τετραγωνικὸν πρῖσμα 1) αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν δύο ὁμάδας εὐθειῶν τεμνομένων. 2) ἡ ἀπόστασις τῶνκοινῶν σημείων των ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν μέσων τῶν διαγωνίων μιᾶς βάσεως. 3) ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν ἰδιότητα αὐτὴν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

45) Εἰς ἕνα τετραγωνικὸν πρῖσμα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ηὐξημένον κατὰ τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν διαγωνίων. Τί συμβαίνει ἂν τὸ πρῖσμα εἶναι παρλληλεπίπεδον,

46) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τετραέδρου ἀπὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον δὲν τέμνει τὸ τετράεδρον, ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν.

47) Νὰ κατασκευασθῇ ἓν τετράεδρον ἂν γνωρίζωμεν, τὰς ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν καὶ τὰς γωνίας τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι.

48) Νὰ κατασκευασθῇ ἓν τετράεδρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν τεσσάρων ἀκμῶν του. (Ὑποτίθεται ὅτι τὰ μέσα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου).

49) Δίδεται ἓν τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $ΜΟ^2+ΜΑ^2=ΜΒ^2+ΜΓ^2$.

50) Δίδεται ἓν τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $ΜΟ^2+ΜΑ^2+ΜΒ^2+ΜΓ^2$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

51) Νὰ τμηθῇ ἓν τετράεδρον ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἓν παραλληλόγραμμον. Ὑπάρχουν τρεῖς διευθύνσεις ἐπιπέδων. β') Νὰ εὑρεθῇ δι' ἑκάστης τῶν διευθύνσεων τούτων τὸ μέγιστον παραλληλόγραμμον. γ') Νὰ τμηθῇ τὸ τετράεδρον δι' ἑνὸς ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ῥόμβος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου αὐτοῦ.

52) Εἰς ἕνα κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων προεκτεινομένων κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

53) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τετράεδρον, δηλ. τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου νὰ περιέχουν ἑκάστη μίαν ἀκμὴν τοῦ τετραέδρου.

54) Κάθε τετράεδρον δὲν ἔχει παρὰ μόνον ἓν παραλληλεπίπεδον περιγεγραμμένον· ἀλλὰ κάθε παραλληλεπίπεδον ἔχει δύο τετράεδρα ἐγγεγραμμένα τὰ ὁποῖα καλοῦνται συζυγῆ. Ἐὰν δίδεται τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ τὰ τετράεδρα, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄλλο.

55) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ἓν τρισορθογώνιον τετράεδρον 1) τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἕδραν. 2) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας. 3) Ἐὰν α, β, γ. εἶναι αἱ ἀκμαὶ τῆς τρισορθογωνίου γωνίας καὶ υ τὸ ὕψος τῆς κορυφῆς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ἔχομεν

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

56) Δίδεται ἓν τετράεδρον κανονικὸν ΟΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΟΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ μέσον Μ τῆς ΟΔ καὶ αἱ ἀκμαί της διέρχονται διὰ τῶν Α, Β καὶ Γ εἶναι τρισορθογώνιος (Πολυτεχνεῖον).

57) Δίδεται ἓν κανονικὸν τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς μέσα τῶν πλευρῶν του τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράεδρον ΟΔΕΖ εἶναι τρισορθογώνιον.

58) Νὰ κατασκευασθῇ ἓν τετράεδρον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μήκη α, β, γ τῶν ἀκμῶν του.

59) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

60) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἂν ἡ βάσις του εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 μ., τὸ δὲ ὕψος του εἶναι διπλάσιον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τούτου.

61) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς τρισορθογωνίου τετραέδρου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α, β, γ τῆς ἕδρας τῆς κειμένης ἀπέναντι τῆς τρισορθογωνίου τριέδρου.

62) Ἡ βάσις ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 80 μ., ὁ δὲ λόγος τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 12 : 20. Ἡ πλαγία ἀκμὴ αὐτοῦ ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἶναι ἴση μὲ 30 μ. καὶ προβάλλεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

Νὰ ὑπολογισθῇ α') τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως. β') Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ γ') ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

63) Ἰδιοκτήτης κατεσκεύασε ἕνα κανονικὸν ἑξαγωνικὸν περίπτερον τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ἄνωθεν τοῦ ἐδάφους ἦτο 3 μέτρ. Διὰ τὸ κτίσιμον τοῦ περιπτέρου ἐπλήρωσε 25 δρ. κατὰ κυβ. μέτρον. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐξωτερικοῦ ἑξαγώνου τοῦ περιπτέρου εἶναι 5 μέτρα, τὸ πάχος τῶν τοίχων 0,60 μ., τὸ βάθος τῶν θεμελίων 1,10 μ. κάτωθεν τοῦ ἐδάφους καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῶν κουφωμάτων εἶναι ἴση μὲ τὸ δέκατον τῆς μέσης ἐπιφανείας τῶν τοίχων, νὰ εὑρεθῇ πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ ὁ ἰδιοκτήτης εἰς τὸν ἐργολάβον.

64) Αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἑνὸς τετραέδρου εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο (δηλ. εἶναι τρισορθογώνιον τὸ τετράεδρον). Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΗ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΟΑΒ καὶ τὴν ΓΗ. Ἐὰν ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου εἶναι 680 τ. ἑ. καὶ αἱ ἀκμαὶ ΟΑ=15 ἑκ., ΟΒ=20 ἑκ. νὰ ὑπολογισθῇ α') ἡ ΟΗ καὶ β') ἡ ΟΓ.

65) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ ἔχει βάσιν ΑΒΓ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον (Α ὀρθὴ γωνία) καὶ ὕψος τὴν ΑΣ. Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 25 μ. καὶ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ἔχουν διαφορὰν 7μ., τὸ δὲ ὕψος ΑΣ τῆς παραμίδος ἰσοῦται μὲ ΑΒ+ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ α') ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ β') ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά της.

66) Δίδεται ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς x. Ἀπὸ τὰ Α καὶ Β φέρομεν καθέτους Αx καὶ Γy πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Αx μῆκος ΑΕ ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπὶ τῆς Γy μῆκος ΓΗ ἴσον μὲ τὰ 3/2 τῆς διαγωνίου αὐτῆς. Νὰ ὑπολογισθοῦν α') αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΓΗΕ β') αἱ ΒΕ καὶ ΒΗ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΕΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ε. γ') Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΒΕΔ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς τριγων. πυραμίδος ΗΕΒΔ.

67) Δίδεται ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΟΑΒΓ ἀκμῆς α καὶ ζητεῖται α') νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του β') ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του γ') τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΜΝ ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΟΑ καὶ ΒΓ. δ') Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Ο πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του ΑΒΓ, ἵνα τὸ στερεὸν διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

68) Δίδεται ἡ κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ τῆς ὁποίας αἱ παράπλευραι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ=δ τῆς τετραγωνικῆς βάσεως. Ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς βάσεως φέρομεν τὴν κάθετον ΚΑ' ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΟΑ καὶ ἀπὸ τὸν πόδα Α' τῆς καθέτου αὐτῆς φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ τὴν τομὴν Α'Β'Γ'Δ'. Νὰ ὑπολογισθῇ α') ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ. β') Ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔ Α'Β'Γ'Δ'.

69) Ἡ κάτω βάσις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς ἄνω βάσεως, ἂν γ ορίζωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον πρίσματος μὲ βάσιν τὴν κάτω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ μὲ ὕψος τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τῆς κολούρου.

70) Αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη 2α καὶ α. Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΕ=3α, ΒΖ=4α, ΓΗ=α πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ρόμβου καὶ

πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ α') ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΕΗ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗ διέρχεται διὰ τοῦ Δ. β') Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ πρίσματος τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι αἱ ΑΒΓΔ καὶ ΔΕΖΗ.

71) Διὰ τῶν πλευρῶν μήκους α ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ ὑψοῦμεν 6 καθέτους ἕδρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου τὰς ΑΒΑ'Β', ΒΓΒ'Γ',.... καὶ λαμβάνομεν τρεῖς ἀκμὰς ΑΑ'=ΓΓ'=ΕΕ'=β. Ἔπειτα ἀπὸ ἓν σημεῖον Σ τοῦ τοῦ ἄξονος τοῦ ἑξαγώνου τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως μεγαλυτέραν τῆς β καὶ ἀπὸ ἑκάστην τῶν εὐθειῶν Α'Γ', Γ'Ε'. Ε'Α' φέρομεν ἐπίπεδα. Τὰ τρία ἐπίπεδα ΣΑ'Γ', ΣΓ'Ε', ΣΕ'Α' τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα Β', Δ', Ζ' τὰς ἀκμὰς ΒΒ', ΔΔ', ΖΖ' καὶ ὁρίζουν οὕτω ἓν στερεόν. 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δεκαέδρου αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Σ ἐπὶ τοῦ ἄξονος. 2) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ Σ, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεκαέδρου εἶναι ἐλαχίστη (παραδεχόμεθα ὅτι τὰ α καὶ β ἔχουν ὁρισθῇ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἐλάχιστον).

72) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ περιγεγραμμένου παραλληλεπιπέδου.

73) Νὰ ἀποδειχθῇ γεωμετρικῶς ἡ ταυτότης $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

74) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἕδρας αὐτῆς ἀπὸ τὴν ἀπέναντι ἀκμήν.

75) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τῆς μικροτέρας ἀποστάσεως τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΟΑ, ΒΓ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀκμὰς αὐτάς.

76) Δίδεται ἕνας ῥόμβος ΑΒΓΔ· ἐκ τῶν ἄκρων Α, Γ τῆς διαγωνίου ΑΓ ὑψοῦμεν καθέτους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ῥόμβου καὶ λαμβάνομεν ΑΕ=α καὶ ΓΖ=β. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδου ΔΕΖΒ, ἂν οἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου εἶναι δ καὶ δ'.

77) Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5. Ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 21150 ($\mu^2$), νὰ ὑπολογισθοῦν α') αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, β') αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

78) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν ἓν τετράεδρον ἔχῃ τὰς τέσσαρας τριέδρους γωνίας του ἴσας, ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας.

79) Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τετραέδρου ἓν σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἂν τὸ συνδέσωμεν μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραέδρου νὰ σχηματίζῃ τέσσαρα τετράεδρα ἰσοδύναμα.

80) Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τετραέδρου γωνίας Ο, τῆς ὁποίας αἱ τρεῖς ἕδραι εἶναι ἴσα μὲ $60^0$, λαμβάνομεν μήκη ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

81) Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ὀκταέδρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

82) Κόπτομεν ἕνα κύβον ἀκμῆς α δι' ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν ἑκάστης κορυφῆς καὶ λαμβάνομεν τὸ στερεὸν ποὺ μένει ἂν

ἀφαιρέσωμεν τὰς ὀκτὼ πυραμίδας ποὺ ἐσχηματίσθησαν οὕτω. Νὰ ὑπολογισθοῦν α΄) αἱ ἀκμαὶ τοῦ στερεοῦ, β΄) ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του καὶ γ΄) ὁ ὄγκος του.

83) Δίδεται ἓν παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ ὀκτάεδρον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν.

84) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

85) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν μήκη α,β,γ, ἐκ τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράεδρον.

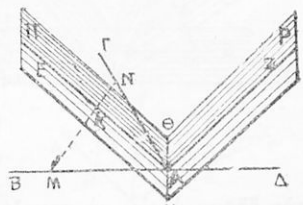
86) Δίδεται ἓν τετράεδρον ΣΑΒΓ καὶ τὰ μέσα Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν ἀκμῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν τὸ τετράετρον εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὸ Σ τὸ τετράεδρον ΣΑ΄Β΄Γ΄ ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας καὶ ἀντιστρόφως. Ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν αὐτήν, νὰ κατασκευασθῇ ἓν τετράεδρον μὲ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μήκη α, β, γ τῶν ἀκμῶν του καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1934).

87) Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι παραλληλόγραμμον. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ὄγκος της εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της.

## Συμμετρία.

### 720. *Τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.*

α΄) Ἔστω ὅτι αἱ παραπληρωματικαὶ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ εἶναι ἐπίπεδοι. Ἂν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Π τὸ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου ΑΕ τῆς γωνίας ΒΑΓ καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς γωνίας ΒΑΓ.



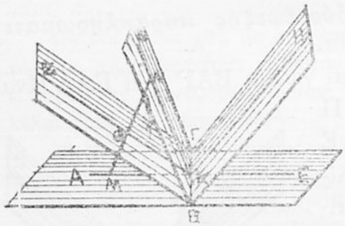

Σχ. 84.

Πράγματι ἂν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὸ Π ἐκ τοῦ σημείου Μ, αὕτη κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΓ, ὡς κάθετος ἀγομένη ἐκ σημείου τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΒΑΓ· ἑπομένως ἡ ΜΚ θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ὡς εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΓ· ἐπειδὴ ἡ ΜΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ ΑΕ. Ἡ ΜΚ προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΑΚ καὶ ΝΑΚ ἔχουν τὴν ΚΑ κοινὴν καὶ γωνΜΑΚ=γωνΚΑΝ, ἕνεκα τῆς διχοτόμου ΑΕ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἑπομένως εἶναι ἴσα, ἄρα ΜΚ=ΚΝ· ἤτοι τὰ σημεῖα, Μ,Ν εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π· τοῦτο εἶναι λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Δι᾿ ὅμοιον λόγον τὸ ἐπίπεδον Ρ τὸ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑΔ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου ΑΖ τῆς γωνίας ΓΑΔ εἶναι τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῆς.

Τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ὡς ἔχοντα κοινὸν σημεῖον τὸ Α τέμνονται καὶ σχηματίζουν τὴν δίεδρον Ε ΗΘ Ζ, τῆς ὁποίας ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι ἡ ΕΑΖ, διότι, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΓΔ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΗΘ· ἑπομένως ἡ ΗΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου ΑΕΖ· ἡ γωνία λοιπὸν ΕΑΖ ἔχει τὰς πλευράς της καθέτους ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΗΘ τῆς διέδρου Π ΗΘ Ρ καὶ καθεμία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἕδρας τῆς διέδρου, ἄρα εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΕΗΖ ἐπειδὴ ἔχει πλευρὰς τὰς διχοτόμους δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι ὀρθή, ἑπομένως καὶ ἡ δίεδρος Π ΗΘ Ρ, τὴν ὁποίαν μετρεῖ αὕτη, εἶναι ὀρθή; Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα ἀναμεταξύ των.

β΄) Ἔστω ὅτι αἱ ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι δίεδροι καὶ ἔστω ὅτι εἶναι αἱ ΑΒΓΔ καὶ ΔΒΓΕ.



Σχ. 85.

Ἂν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Ζ τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν Α ΒΓ Δ, λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς γωνίας αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ἕδρας Α φέρομεν τὴν ΜΘ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ζ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἕδραν Δ εἰς τὸ σημεῖον Ν· ἐκ τοῦ Θ φέρομεν τὴν ΘΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΒΓ τῆς διέδρου Α ΒΓ Δ· ἐπίσης φέρομεν καὶ τὰς ΜΚ καὶ ΝΚ. Ἡ ΜΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ζ, ἐκ σημείου Μ ἐκτὸς αὐτοῦ κειμένου, ἡ δὲ ΘΚ εἶναι κάθετος ἐκ τοῦ ποδὸς Θ τῆς ΜΘ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ τοῦ ἐπιπέδου Ζ, ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἡ ΜΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ καὶ ἑπομένως ἡ ἐπίπεδος γωνία ΜΚΘ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου Α ΒΓ Ζ.

Δι᾿ ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΘΚΝ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΖΒΓΔ· ἀλλὰ αἱ δύο αὐταὶ δίεδροι εἶναι ἴσαι, διότι τὸ Ζ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον Α ΒΓ Δ, ἑπομένως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν εἶναι ἴσαι, ἤτοι γωνΜΚΘ=γωνΘΚΝ. Τὰ δύο λοιπὸν ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΚΘ καὶ ΘΚΝ, ἔχουν τὴν ΘΚ κοινὴν καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως ΜΘ=ΘΝ, ἤτοι τὰ σημεῖα Μ, Ν τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου Α ΒΓΔ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ζ τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον αὐτὴν γωνίαν· τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς διέδρου.

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὸ ἐπίπεδον Η τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον Δ ΓΒ Ε εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῆς.

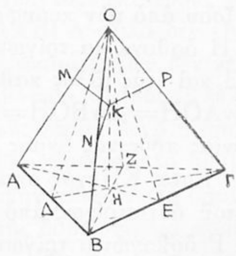
Ἀλλὰ $\quad Ζ\,ΒΓ\,Δ = \frac{Α\,ΒΓ\,Δ}{2}$ καὶ $Δ\,ΒΓ\,Η = \frac{Δ\,ΒΓ\,Ε}{2}$

ὅθεν $\quad Ζ\,ΒΓ\,Δ + Δ\,ΒΓ\,Η = \frac{Α\,ΒΓ\,Δ + Δ\,ΒΓ\,Ε}{2} = 1$ ὀρθ.

ἤτοι Ζ ΒΓ Η=1 ὀρθ. Ἄρα τὰ ἐπίπεδα Ζ καὶ Η εἶναι κάθετα ἀναμεταξύ των.

***721. Τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας τῶν ἑδρῶν τριέδρου τέμνονται κατ' εὐθεῖαν, σχηματίζουσαν μετὰ τῶν ἀκμῶν ἴσας γωνίας καὶ ἕκαστον σημεῖον τῆς εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου.***

Ἔστω ἡ τρίεδρος Ο· τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἑκάστης τῶν ἑδρῶν αὐτῆς εἶναι τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν τὸ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου τῆς ἕδρας (ἄσκησις 720 α'). Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΟΔΗ καὶ ΟΕΗ συμμετρίας τῶν ἑδρῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ· αὐτὰ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΗ διότι ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν Ο· Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Η τῆς ΟΗ φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτήν· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου κατὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τὸ ἐπίπεδον ΟΔΗ ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς ΑΟΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς, ἐπειδὴ δὲ διέρχεται καὶ διὰ τῆς ΟΗ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ· ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ΟΔΗ ὡς κάθετον ἐπὶ τὰς ἕδρας ΟΑΒ καὶ ΓΑΒ τῆς διέδρου ΑΒ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτῆς ΑΒ· ἄρα ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ΟΔΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΟΔ καὶ ΟΗ· ὅθεν ἡ ΟΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΟΒ· ἀλλὰ ἡ ΟΔ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ, ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, τὸ δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΑΒ· ὥστε ἡ ΔΗ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Σχ. 86.

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ τομὴ ΗΕ τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΗΟΕ συμμετρίας τῆς ἕδρας ΒΟΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ. Ἂν τώρα ἀχθῇ ἡ ΗΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΓ, ὡς ἀγομένη κάθετος ἐκ τοῦ σημείου τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ ΑΓ· Ἂν δὲ ἀχθῇ ἡ ΟΖ, αὕτη κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἀφοῦ ὅμως τὸ ὕψος ΟΖ τοῦ τριγώνου ΑΟΓ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς βάσεώς του, τὸ τρίγωνον ΑΟΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἑπομένως τὸ ὕψος του ΟΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΓ. Αἱ ΗΖ καὶ ΖΟ ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον ΟΗΖ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΗΖ καὶ ΖΟ αὐτοῦ, ἄρα τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΓ τῆς διέδρου ΒΑΓΟ, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἕδρας της, ἤτοι ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ, ἄρα τὸ ἐπίπεδον ΟΒΖ εἶναι τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς ἕδρας ΑΟΓ ὡς κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ διερχόμενον διὰ τῆς διχοτόμου ΟΖ αὐτῆς· ἑπομένως τὰ τρία ἐπίπεδα συμμετρίας τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΗΟ.

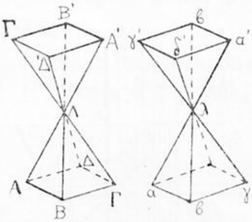
Φέρομεν τὰς ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ· ἐπειδὴ τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῶν καθέτων ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι ΗΑ=ΗΒ=ΗΓ· τὰ εἰς τὸ Η ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΗ, ΒΟΗ καὶ ΓΟΗ ἔχουν κοινὴν τὴν ΟΗ καὶ τὰς ἄλλας καθέτους πλευρὰς ἴσας, ἑπομένως εἶναι ἴσα, ἄρα γωνΑΟΗ=γωνΒΟΗ=γωνΓΟΗ· ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΟΗ σχηματίζει ἴσας γωνίας πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου.

Ἔστω Κ τυχὸν σημεῖον τῆς ΟΗ καὶ ΚΜ, ΚΝ, ΚΡ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀντιστοίχως ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου· τὰ εἰς τὰ Μ, Ν, Ρ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΚ, ΟΝΚ, ΟΡΚ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΚ κοινὴν καὶ γωνΜΟΑ=γωνΝΟΚ=γωνΡΟΚ· ἄρα αὐτὰ εἶναι ἴσα, καὶ ἑπομένως ΚΜ=ΚΝ=ΚΡ, ἤτοι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου.

722. ***Ἐὰν διά τινος σημείου τοῦ χώρου φέρομεν εὐθείας παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὰς ἀκμὰς δοθείσης πολυεδρικῆς γωνίας, σχηματίζεται πολύεδρος γωνία ἐφαρμόσιμος ἢ συμμετρικὴ τῆς δοθείσης.***

Ἔστω ἡ στερεὰ γωνίας ΛΑΒΓΔ καὶ (σχ.87) σημεῖον λ τοῦ χώρου ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὰς λα, λβ, λγ, λδ ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς δοθείσης στερεᾶς, ὁπότε σχηματίζεται ἡ στερεὰ γωνία λαβγδ.

Ἡ λαβγδ ἔχει τὰς ἕδρας της ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς ἕδρας τῆς δοθείσης, ἤτοι γων $\alpha\lambda\beta$=γων$\mathrm{A\Lambda B}$, γων $\beta\lambda\gamma$=γων$\mathrm{B\Lambda\Gamma}$, γων $\gamma\lambda\delta$=γων$\mathrm{\Lambda\Gamma\Delta}$, γων $\delta\lambda\alpha$=γων$\mathrm{\Delta\Lambda A}$, διότι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουν τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἑπομένως εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι· ἐπίσης ἔχουν καὶ τὰς διέδρους γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας, διότι αἱ τρίεδροι $\mathrm{\Lambda AB\Gamma}$ καὶ $\lambda\alpha\beta\gamma$ ἔχουν τὰς ἐπιπέδους των ἀντιστοίχως ἴσας, ἑπομένως ἔχουν καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐπιπέδων διέδρους ἴσας, ἤτοι $\lambda\beta=\mathrm{\Lambda B}$, διότι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων ἐπιπέδων γωνιῶν $\beta\lambda\gamma$ καὶ $\mathrm{B\Lambda\Gamma}$. Δι' ὅμοιον λόγον $\lambda\gamma=\mathrm{\Lambda\Gamma}$, $\lambda\delta=\mathrm{\Lambda\Delta}$, $\lambda\alpha=\mathrm{\Lambda A}$. Αἱ δύο λοιπὸν στερεαὶ Λ καὶ λ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας, ἕνεκα τῆς παραλληλίας τῶν ἀκμῶν των, καὶ τὰς διέδρους των ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ ἑπομένως εἶναι ἐφαρμόσιμοι.



Σχ. 87.

Ἐὰν ἐκ τοῦ λ φέρωμεν τὰς $\lambda\alpha'$, $\lambda\beta'$, $\lambda\gamma'$, $\lambda\delta'$ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΛΑ, ΛΒ, ΛΓ, ΛΔ ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς, θὰ σχηματισθῇ ἡ στερεὰ $\lambda\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, ἡ ὁποία ἔχει ἀντιστοίχως τὰς ἐπιπέδους γωνίας της καὶ τὰς διέδρους ἴσας πρὸς τὰς τῆς ΛΑΒΓΔ· ἀλλά δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμος πρὸς αὐτήν, διότι αἱ παράλληλοι ἀκμαὶ αὐτῶν δὲν κεῖνται ὁμοίως· π.χ. ἡ ἀκμὴ $\lambda\gamma'$ κεῖται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ἕδρας $\lambda\delta'\alpha'$, ἐνῷ ἡ παράλληλός της ΛΓ κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ἕδρας ΛΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\lambda\alpha'\delta'$. Ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τῆς ΛΑΒΓΔ, ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς Λ τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ στερεὰ ΛΑ'Β'Γ'Δ' ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς δοθείσης διὰ προεκτάσεως τῶν ἀκμῶν αὐτῆς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Λ, αὐτὴ προφανῶς ἔχει τὰς ἀκμάς της ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὰς τῆς $\lambda\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ καὶ ἑπομένως οἱ δύο αὗται στερεαὶ ἐφαρμόζουν· ἄρα ἡ $\lambda\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ εἶναι ἡ συμμετρικὴ τῆς ΛΑΒΓΔ.

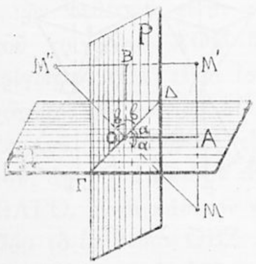
*723. **Δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα ἐπ' ἄλληλα τέμνονται κατ' ἄξονα συμμετρίας.***

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα συμμετρίας Π καὶ Ρ (σχ.88) τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα, καὶ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον ἑνὸς σχήματος Σ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ.

Τὸ συμετρικὸν σημεῖον τοῦ Μ, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ Μ', τοῦ δέ Μ' ὡς πρὸς τὸ Ρ εἶναι τὸ Μ''.

Τὰ σημεῖα Μ΄ καὶ Μ΄΄ θὰ εἶναι σημεῖα τοῦ σχήματος Σ καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν τομὴν ΓΔ.

Πράγματι ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΜΜ΄Μ΄΄ εἶναι κάθετον πρὸς τὰ Π καὶ Ρ θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΓΔ.




Σχ. 88.

Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῆς ΓΔ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΜ΄Μ΄΄. Αἱ εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΜ΄΄ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Π θὰ εἶναι ΟΜ=ΟΜ΄ (1). Ἐπίσης θὰ εἶναι καὶ ΟΜ΄=ΟΜ΄΄ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ΟΜ=ΟΜ΄΄ (3)

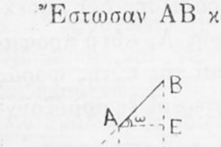
Ἐπίσης ἐπειδὴ αἱ γωνίαι α εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ Π, θὰ εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι β εἶναι ἴσαι.

Ἀλλά, καθὼς φαίνεται, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΜ΄Β εἶναι $\alpha+\beta=1$ ὀρθ. ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $2\alpha+2\beta=2$ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡ ΜΟΜ΄΄ εἶναι εὐθεῖα.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΟΜ΄΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, καθὼς ἀνεφέραμεν προηγουμένως καὶ ΟΜ=ΟΜ΄΄ ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΓΔ. Ἀφοῦ λοιπὸν εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ σχήματος Σ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ΄΄ συμμετρικὸν πρὸς τὴν ΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος Σ.

**724.** ***Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδον ἔχουν ἴσας κλίσεις πρὸς αὐτό.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ Α΄Β΄ δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Α΄ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ Π, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΑ΄ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ Π καὶ ὅτι ΑΓ=ΓΑ΄. Ὁμοίως ἡ ΒΒ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ εἶναι ΒΔ=ΔΒ΄. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α΄Β΄ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ Π εἶναι ἴσαι, ἑπομένως τὰ τετράπλευρα ΑΓΔΒ καὶ Α΄ΓΔΒ΄ εἶναι ἴσα.




Σχ. 89.

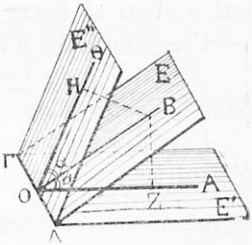
Ἐκ τῶν Α καὶ Α΄ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΑΕ καὶ Α΄Ε΄ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΒ΄ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε΄.

Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ καὶ Α΄Ε΄Β΄ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΑΕ=Α΄Ε΄ καὶ τὰς ὑποτεινούσας των ΑΒ καὶ Α΄Β΄

ἴσας. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ γωνίαι $\omega = \omega'$. Ἀλλὰ γων $\omega =$ γων$\mathrm{BO\Delta}$ καὶ γων $\omega' =$ γων$\mathrm{B'O\Delta}$ καὶ ἐπειδὴ γων$\omega =$ γων $\omega'$ ἕπεται, ὅτι καὶ γων $\mathrm{BO\Delta} =$ γων$\mathrm{B'O\Delta}$. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

725. ***Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄλλο, ἡ δίεδρος γωνία αὐτῶν διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἄλλου.***

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Ε', Ε'' συμμετρικὰ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε. Ἐὰν ΓΔ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ε', τότε ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κοινὴ εὐθεῖα καὶ τῶν ἐπιπέδων Ε', Ε'', διότι κάθε σημεῖον τοῦ Ε' ἔχει τὸ συμμετρικόν του εἰς τὸ Ε''.



Σχ. 90.

Ἐκ τυχόντος σημείου Ο τῆς ΓΔ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΑ, ΟΒ, ΟΘ ἐπ' αὐτὴν καὶ κειμένας ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἐπίπεδα Ε',Ε,Ε''.

Αἱ ΟΑ καὶ ΟΘ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε καὶ ἑπομένως αἱ γωνία α καὶ α εἶναι ἴσαι, ὡς ὀξεῖαι γωνίαι τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΗΒ καὶ ΟΖΒ.

Ἀλλὰ αἱ ἴσαι γωνίαι α καὶ α εἶναι αἱ ἀντίστοιχαι τῶν διέδρων ποὺ σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα Ε,Ε',Ε'', ὁπότε καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον Ε διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν Ε' καὶ Ε''.

## Κύλινδρος.

726. ***Ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι $E_\lambda$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του ρ, πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς κυλίνδρου;***

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $E_\lambda$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E_\lambda = 2\pi\rho(\upsilon + \rho)$ (1)
ὅπου ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Λύοντες τὴν (1) ὡς πρὸς υ ἔχομεν

$$E_\lambda = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2 \quad \text{ἢ} \quad E_\lambda - 2\pi\rho^2 = 2\pi\rho\upsilon \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \frac{E_\lambda - 2\pi\rho^2}{2\pi\rho}.$$

727. ***Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ Ρ ὁ ὄγκος κυλίνδρου, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του.***

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος Ρ ἑνὸς κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$P = \pi\rho^2\upsilon \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια Ε τοῦ κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = 2\pi\rho\upsilon \qquad (2)$$

ὅπου ρ = ἀκτὶς βάσεως καὶ υ = ὕψος κυλίνδρου, Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ἀγνώστων ρ καὶ υ ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{P}{E}=\frac{\rho}{2} \quad \text{ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν} \quad \rho=\frac{2P}{E}.$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ρ εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$E=2\pi.\frac{2P}{E}.\upsilon \quad \text{ἢ} \quad E^2=4\pi P\upsilon \quad \text{καὶ} \quad \upsilon=\frac{E^2}{4\pi P}.$$

728. ***Ἐὰν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου ἔχῃ μῆκος Γ καὶ υ εἶναι τὸ ὕψος του, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.***

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος V κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$V=\pi\rho^2\upsilon \qquad (1)$$

ὅπου ρ=ἀκτὶς βάσεως καὶ υ=ὕψος κυλίνδρου.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Gamma=2\pi\rho$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\rho=\dfrac{\Gamma}{2\pi}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ρ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$$V=\pi\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\upsilon=\frac{\pi\Gamma^2\upsilon}{4\pi^2}=\frac{\Gamma^2\upsilon}{4\pi}.$$

729. ***Δοθέντος τοῦ ἐμβαδοῦ $E_\lambda$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεως, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.***

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $E_\lambda$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι $E_\lambda=2\pi\rho(\upsilon+\rho)$.

Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι υ=2ρ θὰ ἔχωμεν

$$E_\lambda=2\pi\rho(2\rho+\rho) \quad \text{ἢ} \quad E_\lambda=2\pi\rho.3\rho \quad \text{ἢ} \quad E_\lambda=6\pi\rho^2.$$

Λύοντες ὡς πρὸς $\rho^2$ ἔχομεν $\rho^2=\dfrac{E_\lambda}{6\pi}$ καὶ $\rho=\sqrt{\dfrac{E_\lambda}{6\pi}}$.

Ἂν τώρα εἰς τὸν τύπον $V=\pi\rho^2\upsilon$, ποῦ δίδει τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, θέσωμεν ἀντὶ τῶν ρ καὶ υ τὰς τιμάς των θὰ ἔχωμεν

$$V=\pi.\frac{E_\lambda}{6\pi}.2\sqrt{\frac{E_\lambda}{6\pi}}=\frac{E_\lambda}{3}\sqrt{\frac{E_\lambda}{6\pi}}.$$

730. ***Ἐὰν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου ἔχῃ μῆκος Γ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του ἔχει ἐμβαδὸν $E_\lambda$, πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του.***

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, υ τὸ ὕψος του καὶ V ὁ ὄγκος του, θὰ ἔχωμεν $V=\pi\rho^2\upsilon$ (1)

Ἐπίσης ἔχομεν $E_\lambda = 2\pi\varrho(\upsilon+\varrho)$ (2) καὶ $\Gamma = 2\pi\varrho$ (3)

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $\varrho = \dfrac{\Gamma}{2\pi}$.

Θέτοντες ἀντὶ τοῦ ϱ τὴν τιμήν του εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$E_\lambda = 2\pi.\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\upsilon + \frac{\Gamma}{2\pi}\right) \quad \text{ἢ} \quad E_\lambda = \Gamma\upsilon + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \quad \text{ἢ}$$

$$\Gamma\upsilon = E_\lambda - \frac{\Gamma^2}{2\pi} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \frac{2\pi E_\lambda - \Gamma^2}{2\pi\Gamma}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ ϱ καὶ υ τὰς τιμάς των ἔχομεν

$$V = \pi\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left(\frac{2\pi E_\lambda - \Gamma^2}{2\pi\Gamma}\right) = \frac{\Gamma(2\pi E_\lambda - \Gamma^2)}{8\pi^2}.$$

**731.** ***Ἐὰν ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι P καὶ τὸ ὕψος του υ, πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.***

Τὸ ἐμβαδὸν $E_\lambda$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου εἶναι

$$E_\lambda = 2\pi\varrho(\upsilon+\varrho) \qquad (1)$$

ὁ δὲ ὄγκος του P εἶναι $P = \pi\varrho^2\upsilon$ (2)

Ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν $\varrho^2 = \dfrac{P}{\pi\upsilon}$ καὶ $\varrho = \sqrt{\dfrac{P}{\pi\upsilon}}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ϱ εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E_\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{P}{\pi\upsilon}}\left(\upsilon + \sqrt{\frac{P}{\pi\upsilon}}\right) = 2\pi\upsilon\sqrt{\frac{P}{\pi\upsilon}} + \frac{2P}{\upsilon}.$$

**732.** ***Ἐὰν P εἶναι ὁ ὄγκος κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρόν του, πόσον εἶναι τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.***

Τὸ ἐμβαδὸν $E_\lambda$ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$E_\lambda = 2\pi\varrho(\upsilon+\varrho)$ καὶ ἐπειδὴ $\upsilon = 2\varrho$ ἔχομεν

$$E_\lambda = 2\pi\varrho(2\varrho+\varrho) = 6\pi\varrho^2 \qquad (1)$$

Ὁ δὲ ὄγκος του P εἶναι $P = \pi\varrho^2\upsilon$ ἢ ἐπειδὴ εἶναι $\upsilon = 2\varrho$ ἔχομεν

$$P = \pi\varrho^2.2\varrho \quad \text{ἢ} \quad P = 2\pi\varrho^3 \quad \text{καὶ} \quad \varrho = \sqrt[3]{\frac{P}{2\pi}}$$

$$\text{ὁπότε} \qquad \upsilon = 2\varrho = 2\sqrt[3]{\frac{P}{2\pi}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ ρ τὴν τιμήν του ἔχομεν

$$E_\lambda = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2}.$$

*733. Ἂν $E_\lambda$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ υ τὸ ὕψος κυλίνδρου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του καὶ ὁ ὄγκος του.*

Γνωρίζομεν ὅτι $E_\lambda = 2\pi\rho(\upsilon+\rho)$ (1) καὶ $V = \pi\rho^2\upsilon$ (2)

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $E_\lambda = 2\pi\rho\upsilon + 2\pi\rho^2$ ἢ $2\pi\rho^2 + 2\pi\upsilon\rho - E_\lambda = 0$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$\rho = \frac{-2\pi\upsilon + \sqrt{4\pi^2\upsilon^2 + 8\pi . E_\lambda}}{4\pi}.$$

(ἡ ἀρνητικὴ ρίζα ἀποκλείεται, διότι $\rho < 0$).

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ ρ τὴν τιμήν του εὑρίσκομεν

$$V = \pi\left(\frac{-2\pi\upsilon + \sqrt{4\pi^2\upsilon^2 + 8\pi . E_\lambda}}{4\pi}\right)^2 . \upsilon$$

*734. Κύλινδρος ἐκ χυτοσιδήρου ἔχει μῆκος 5,13 πηχ., ἀκτῖνα δὲ βάσεως 0,32 πηχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος του, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοσιδήρου εἶναι 7,6.*

Γνωρίζομεν ὅτι Βάρος = εἰδικὸν βάρος × ὄγκον (1)

Ἐδῶ εἰδικ. βάρος = 7,6 καὶ

$\text{ὄγκος} = \pi\rho^2\upsilon = \pi \times 0,32^2 \times 5,13 = 0,525312\ \pi. = 1,64947968$ κ. π.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{Βάρος} = 7,6 \times 1,64948968 = 12,536045568$$

*735. Κυλίνδρου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 8 π., τὸ δὲ ὕψος 0,15 πηχ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του.*

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, υ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ Ε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του ἔχομεν $E = 2\pi\rho\upsilon$

Ἐδῶ $\rho = 4$ καὶ $\upsilon = 0,15$. Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$E = 2\pi \times 4 \times 0,15 = 1,20\pi = 1,20 \times 3,1416 = 3,76992 \text{ τ. πηχ.}$$

*736. Ἑνὸς κυλίνδρου ἡ ἀκιὶς τῆς βάσεώς του εἶναι 5,9 πηχ., τὸ δὲ ὕψος 2,1 πηχ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.*

Ὁ ὄγκος V εἶναι $V = \pi\rho^2\upsilon = \pi \times 5,9^2 \times 2,1 = 229,65$ κ.π.

ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνεια Ε εἶναι $E = 2\pi\rho(\upsilon+\rho) =$

$$= 2\pi \times 5,9(2,1+5,9) = 11,8\pi \times 8 = 29,656704 \text{ τ. πηχ.}$$

**737. *Νὰ κατασκευασθῇ δοχεῖον ἐκ ψευδαργύρου ἔχοντος εἰδικὸν βάρος 7,2, χωροῦν δύο ὀκάδας ὕδατος, ἔχον δὲ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεώς του. Τίνες αἱ διαστάσεις του.***

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, τὸ ὕψος του θὰ εἶναι 4ρ καὶ ὁ ὄγκος του V θὰ εἶναι $V = \pi . \rho^2 4\rho = 4\pi\rho^3$ (1)

Ὁ ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι 2 ὀκάδες ἢ $2 \times 1,280 = 2,560$ κ. παλάμ.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$2,560 = 4\pi\rho^3 \quad ἢ \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{2,560}{4\pi}} = \sqrt[3]{0,203} = 0,5877$$

Ἡ ἀκτὶς λοιπὸν τὴς βάσεως τοῦ δοχείου θὰ εἶναι 0,5877 παλ., τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $4 \times 0,5877 = 2,3508$ παλάμ.

**738. *Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως κυλίνδρου εἶναι 5,148 πηχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 1,32 πήχεις.***

Ἂν Γ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως, V ὁ ὄγκος του, Ε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του, ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του καὶ υ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma = 2\pi\rho \quad (1) \qquad V = \pi\rho^2 \upsilon \quad (2) \qquad E = 2\pi\rho\upsilon$$

Ἐδῶ εἶναι $\Gamma = 5,148$, $\upsilon = 1,32$.

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $5,148 = 2\pi\rho$ ἢ

$$\rho = \frac{5,148}{2\pi} = \frac{5,148}{2 \times 3,14} = 0,819.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ ρ καὶ υ τὰς τιμάς των ἔχομεν

$$V = \pi \times 0,819^2 \times 1,32 = 2,7815 \text{ κ. π.}$$

Ὁμοίως ἔχομεν $E = 5,148 \times 1,32 = 6,79536$ τ. π.

**739. *Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι 13,128 (μ³). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του, ἂν ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του εἶναι 1,48 μ.***

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $V = \pi\rho^2\upsilon$ ποὺ δίδει τὸν ὄγκον κυλίνδρου θέσωμεν $V = 13,128$, $\rho = 0,74$ ἔχομεν $13,128 = \pi . 0,74^2 . \upsilon$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon = \dfrac{13,128}{\pi . 0,74^2} = \dfrac{13,128}{3,14 \times 0,5476} = 7,635$ μ.

Γνωρίζομεν, ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια $E_\lambda$ κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E_\lambda = 2\pi\rho(\rho + \upsilon)$.

Θέτοντες ἀντὶ τῶν ρ καὶ υ τὰς τιμάς των ἔχομεν

$E_\lambda = 2\pi . 0,74\,(0,74 + 7,635) = 2\pi \times 0,74 \times 8,375$ καὶ $E_\lambda = 38,92$ τ μ

***740.* Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν (ἢ ὁλικῶν ἐπιφανειῶν) ὁμοίων κυλίνδρων, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὑψῶν ἢ τῶν ἀκτίνων των, οἱ δὲ ὄγκοι των μὲ τί;**

Ἐὰν Ε καὶ $E_1$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων, $\rho$, $\rho_1$ αἱ ἀκτῖνες των καὶ $\upsilon$, $\upsilon_1$ τὰ ὕψη των ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν $E=2\pi\rho\upsilon$ καὶ $E_1=2\pi\rho_1\upsilon_1$.

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{E}{E_1}=\frac{2\pi\rho\upsilon}{2\pi\rho_1\upsilon_1}=\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon_1} \qquad (1)$$

Καὶ ἐπειδὴ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{\upsilon}{\upsilon_1}, \quad \text{ὁπότε ἡ (1) γίνεται} \quad \frac{E}{E_1}=\frac{\rho^2}{\rho_1^2}=\frac{\upsilon^2}{\upsilon_1^2}.$$

Ἐὰν V καὶ $V_1$ εἶναι οἱ ὄγκοι των θὰ ἔχωμεν ὁμοίως

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi\rho^2\upsilon}{\pi\rho_1^2\upsilon_1}=\frac{\rho^2\upsilon}{\rho_1^2\upsilon_1} \quad \text{καὶ ἐπειδὴ} \quad \frac{\rho}{\rho_1}=\frac{\upsilon}{\upsilon_1}$$

θὰ ἔχωμεν

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\rho^3}{\rho^3}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon^3}$$

δηλ. οἱ ὄγκοι ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων ἢ τῶν ὑψῶν των

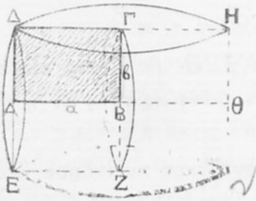
***741.* Ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις α, β στρέφεται περὶ τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων κυλίνδρων.**

Ἔστω ΑΒΓΔ τὰ δοθὲν ὀρθογώνιον. Ἂν περιστραφῇ περὶ τὴν ΑΒ θὰ παραγάγῃ τὸν κύλινδρον ΔΕΖΓ τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια Ε θὰ εἶναι

$E=2\pi(B\Gamma)(AB)$ ἢ $E=2\pi\beta\alpha$ (1)

Ὁ δὲ ὄγκος του V θὰ εἶναι

$V=\pi(B\Gamma)^2(AB)$ ἢ $V=\pi\beta^2\alpha$ (2)



Σχ. 91.

Ἐὰν περιστραφῇ περὶ τὴν ΒΓ θὰ παραγάγῃ τὸν κύλινδρον ΑΔΗΘ, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια $E_1$ θὰ εἶναι

$E_1=2\pi(AB)(B\Gamma)$ ἢ $E_1=2\pi\alpha\beta$ (3)

ὁ δὲ ὄγκος του $V_1$ θὰ εἶναι

$V_1=\pi(AB)^2(B\Gamma)$ ἢ $V=\pi\alpha^2\beta$ (4)

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (3) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{E}{E_1}=\frac{2\pi\beta\alpha}{2\pi\alpha\beta}=1.$$

Διαιροῦντες τὰς (2) καὶ (4) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi\beta^2\alpha}{\pi\alpha^2\beta}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

***742. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος κυλίνδρου, ἔχοντος ὄγκον 1 ($\mu^3$) ὅταν τοῦτο ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρόν του.***

Ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ρ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του καὶ υ τὸ ὕψος του θὰ ἔχωμεν $V=\pi\rho^2\upsilon$

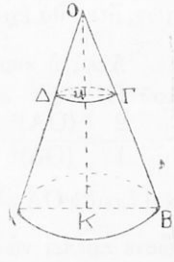
Ἐδῶ $V=1$, $\rho=\frac{\upsilon}{2}$. Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$1=\pi\frac{\upsilon^2}{4}.\upsilon \text{ ἢ } 4=\pi\upsilon^3 \text{ καὶ } \upsilon=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}=1{,}084 \ \mu.$$

## Κῶνος, κόλουρος κῶνος.

***743. Ὁ ἄξων τοῦ κώνου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ἑκάστης τομῆς του, παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του.***

Ἔστω ὁ κῶνος ΟΑΒ τὸν ὁποῖον τέμνομεν δι᾽ ἐπιπέδου ΔΓ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· ἡ τομὴ ΔΓ ὡς γνωστὸν εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ἔστω, ὅτι τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ΟΚ τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον κ· λέγω ὅτι τὸ σημεῖον κ εἶναι τὸ κέντρον τῆς τομῆς. Διότι ἂν θεωρήσωμεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸν κῶνον κατὰ γεννέτειραν ἔστω τὴν ΟΒ, τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατὰ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ καὶ τὸν κύκλον ΔΓ κατὰ τὴν εὐθεῖαν κΓ· αἱ ΚΒ καὶ κΓ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒ καὶ ΔΓ ὑπὸ ἄλλου, ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟκΓ καὶ ΟΚΒ εἶναι ὅμοια· ἐκ τούτων λαμβάνομεν




Σχ. 92.

$\frac{\kappa\Gamma}{KB}=\frac{O\kappa}{OK}$ καὶ $(\kappa\Gamma)=\frac{(KB)\,(O\kappa)}{(OK)}$· ἀλλὰ τὸ δεύτερον μέλος της ἰσότητος ταύτης εἶναι σταθερὸν, δι᾽ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΔΓ, διότι ἡ ΚΒ ὡς ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἶναι σταθερά, ὡσαύτως ἡ ΟΚ εἶναι σταθερὰ, ὡς ὕψος τοῦ κώνου καὶ ἡ Οκ σταθερὰ ὡς ἀπόστασις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου· ἑπομένως ἡ ἀπόστασις τοῦ τυχόντος σημείου Γ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΔΓ ἀπὸ τοῦ σημείου κ εἶναι σταθερά, ἤτοι ἡ αὐτὴ δι᾽ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΔΓ· ἄρα τὸ σημεῖον κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΔΓ.

**743΄. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι $\varrho=3$ πήχ., τὸ δὲ ὕψος του $\upsilon=10$ πηχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.**

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς βάσεως τοῦ κώνου ΟΑΒ (σχ92) εἶναι $E=\pi\varrho^2$ (1)
Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του $E_1$ εἶναι $E_1=\pi\varrho(OB)$ καὶ ἐπειδὴ $(OB)=\sqrt{\varrho^2+\upsilon^2}$ ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΟΚΒ ἔχομεν

$$E_1=\pi\varrho\sqrt{\varrho^2+\upsilon^2} \qquad (2)$$

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν.

$$\frac{E}{E_1}=\frac{\pi\varrho^2}{\pi\varrho\sqrt{\varrho^2+\upsilon^2}}=\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2+\upsilon^2}}=\frac{3}{\sqrt{3^2+10^2}}=\frac{3}{\sqrt{109}}.$$

**744. Ἡ πλευρὰ κώνου εἶναι 2 πηχ. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τμηθῇ αὕτη δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.**

Ἔστω ΓΔ (σχ 92) τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΟΒΑ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ οἱ κῶνοι ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ὅμοιοι, αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαί των θὰ εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν των ἢ τῶν ἀκτίνων των, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{κυρ ἐπιφ.}(OAB)}{\text{κυρ.ἐπιφ.}(O\Gamma\Delta)}=\frac{(OA)^2}{(O\Delta)^2} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ΟΑΒ εἶναι διπλασία τῆς κ. ἐπιφ. τοῦ ΟΓΔ καὶ ἑπομένως ἡ (1) γίνεται

$$\frac{2}{1}=\frac{(OA)^2}{(O\Delta)^2} \quad \text{καὶ } 2(O\Delta)^2=(OA)^2 \text{ ἢ } (O\Delta)=\frac{(OA)}{\sqrt{2}}$$

καὶ ἐπειδὴ ΟΑ=2 ἔχομεν $\quad (O\Delta)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=1{,}41$

ὥστε πρέπει νὰ λάβωμεν ΟΔ=1,41 καὶ ἐκ τοῦ Δ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ.

**745 Πόσος γίνεται ὁ ὄγκος κώνου, ἂν διπλασιασθῇ τὸ ὕψος του (ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του)· πόσος ἂν διπλασιασθῇ τὸ ὕψος καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του.**

Ἂν V, ϱ, υ εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ὄγκος, ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ὕψος κώνου θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\varrho^2\upsilon \qquad (1)$$

α΄) Ἂν διπλασιασθῇ τὸ ὕψος του θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\varrho^2.2\upsilon=2.\ \frac{1}{3}\pi\varrho^3\upsilon$$

ἤτοι ὁ ὄγκος διπλασιάζεται.

β΄) Ἂν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτίς του θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi(2\varrho)^2.\upsilon=4.\frac{1}{3}\pi\varrho^2\upsilon$$

ἤτοι ὁ ὄγκος τετραπλασιάζεται

γ΄) Ἂν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi.(2\varrho)^2 2\upsilon=\frac{1}{3}\pi.4.\varrho^2.2.\upsilon=8.\frac{1}{3}\pi\varrho^2\upsilon$$

ἤτοι ὁ ὄγκος ὀκταπλασιάζεται.

*746.* ***Ἡ πλευρὰ λ κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του.***

Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου, $\varrho$ ἡ ἀκτίς, $\upsilon$ τὸ ὕψος του θὰ ἔχωμεν $E=\pi\varrho(\varrho+\lambda)$.

Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι $\lambda=2\varrho$ ἔχομεν

$$E=\pi\varrho(\varrho+2\varrho)=\pi\varrho.3\varrho=3\pi\varrho^2.$$

*747.* ***Ἐὰν $E_\lambda$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος, $\varrho$ ἡ ἀκτίς, $\upsilon$ τὸ ὕψος, καὶ $\lambda$ ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου θὰ ἔχωμεν $V=\frac{1}{3}\pi\varrho^2\upsilon$ (1) $E_\lambda=\pi\varrho(\varrho+\lambda)$ (2)

Ἐπειδὴ $\lambda=2\varrho$ ἡ (2) γίνεται $E_\lambda=\pi\varrho(\varrho+2\varrho)$ ἢ $E_\lambda=3\pi\varrho^2$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\varrho^2=\frac{E_\lambda}{3\pi}$.

Θέτοντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ $\varrho$ τὴν τιμήν του ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{E_\lambda}{3\pi}\right)\upsilon=\frac{1}{9}E_\lambda\,\upsilon.$$

*748.* ***Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α,β,γ. α΄) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὸ κώνου μὲ ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του α. β΄) νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἰσοδυνάμου του κώνου μὲ ὕψος α.***

Ὁ ὄγκος V τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $V=\alpha\beta\gamma$ (1)

α΄) Ὁ ὄγκος V΄ κώνου μὲ ἀκτῖνα βάσεις α καὶ ὕψος υ εἶναι

$$V'=\frac{1}{3}\pi\alpha^2\upsilon \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $V=V'$ θὰ ἔχωμεν καὶ

$\frac{1}{3}\pi\alpha^2\upsilon=\alpha\beta\gamma$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon=\frac{3\alpha\beta\gamma}{\pi\alpha^2}=\frac{3\beta\gamma}{\pi\alpha}$.

β′) Ὁ ὄγκος $V_1$ κώνου μὲ ἀκτῖνα ρ καὶ ὕψος α εἶναι

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\rho^2\alpha$$

Ἐπειδὴ $V = V_1$ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3}\pi\rho^2\alpha = \alpha\beta\gamma$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\rho^2 = \frac{3\alpha\beta\gamma}{\pi\alpha}$. καὶ $\rho = \sqrt{\frac{3\beta\gamma}{\pi}}$.

**749.** ***Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως κώνου εἶναι 14 πηχ. καὶ τὸ ὕψος του 8 πηχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου του ὀρθοῦ πρίσματος μὲ τετραγωνικὴν βάσιν, πλευρᾶς 4 πηχ.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ρ ἡ ἀκτίς του καὶ υ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon \qquad (1)$$

Ἐδῶ $\rho = 7$, $\upsilon = 8$, ἄρα ἔχομεν

$$V = \frac{1}{3}\pi . 7^2 . 8 = \frac{392}{\pi} = 124,84 \text{ κ. πηχ.}$$

Ἐὰν $V'$ εἶναι ὁ ὄγκος πρίσματος, B τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ υ τὸ ὕψος του θὰ ἔχωμεν $V' = B.\upsilon$

Ἐδῶ εἶναι $B = 4^2 = 16$, ἄρα ἔχομεν $V_1 = 16\upsilon$.

Ἐπειδὴ $V = V'$ θὰ ἔχωμεν $16\upsilon = 124,84$

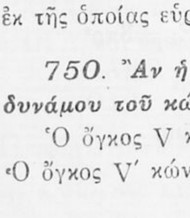
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon = \frac{124,84}{16} = 7,8025$ πηχ.

**750.** ***Ἂν ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α, πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου τοῦ κώνου μὲ ἀκτῖνα βάσεως του ρ.***

Ὁ ὄγκος V κύβου ἀκμῆς α εἶναι $V = \alpha^3$ (1)

Ὁ ὄγκος $V'$ κώνου μὲ ἀκτῖνα βάσεώς του ρ καὶ ὕψος υ εἶναι

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon.$$




Σχ. 93.

Ἐπειδὴ $V = V'$ θὰ ἔχωμεν

$\frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon = \alpha^3$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\upsilon = \frac{3\alpha^3}{\pi\rho^2}$.

**751.** ***Ἡ τομὴ κολούρου κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.***

Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ.93) ἡ τομὴ τοῦ κολούρου κώνου ἡ ὁποία γίνεται ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ ΛΚ.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΛΚ εἶναι παράλληλοι· ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον· ἂν ἀχθοῦν αἱ ΛΕ καὶ ΛΖ ἀντιστοίχως παράλληλοι τῶν ΔΑ καὶ ΓΒ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΛΚΕ καὶ ΛΚΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ΛΚ κοινὴν καὶ ΚΕ=ΚΖ διότι ἑκάστη εἶναι διαφορὰ τῶν ἀκτίνων τοῦ κολούρου κώνου, ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, ὅθεν καὶ ΛΕ=ΛΖ, ἄρα καὶ ΔΑ=ΓΒ ὡς ἴσαι πρὸς αὐτάς· τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι λοιπὸν ἰσοσκελές.

752. ***Εἰς κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα περιγράφεται ἢ ἐγγράφεται κόλουρος κῶνος.***

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἕπεται, ὅτι περιγράφονται ἢ ἐγγράφονται κύκλοι ὡς αὐτὰ καὶ ἐπομένως καὶ κόλουροι κῶνοι.

753. ***Δίδονται αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων $\varrho_1$ $\varrho_1$ καὶ ἡ πλευρὰ λ κολούρου κώνου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ΑΒΓΔ (σχ.93) καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ Ελ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho\varrho_1) \qquad (1)$$

$$E=\pi(\varrho+\varrho_1)\lambda \qquad (2) \qquad E_\lambda=\pi(\varrho+\varrho_1)\lambda+\pi\varrho^2+\pi\varrho_1^2$$

Φέρομεν τὴν ΓΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΒ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΓΖΒ ἔχομεν

$$(\Gamma Z)^2=(\Gamma B)^2-(ZB)^2 \text{ ἢ } (\Gamma Z)^2=\lambda^2-(\varrho-\varrho_1)^2 \text{ καὶ } \Gamma Z=\sqrt{\lambda^2-(\varrho-\varrho_1)^2}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ υ τὴν τιμήν του ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\lambda^2-(\varrho-\varrho_1)^2}\,(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho\varrho_1).$$

754. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων κολούρου κώνου μὲ ἀκτίνας τῶν βάσεων ϱ, $\varrho_1$ καὶ ὕψος υ καὶ κυλίνδρου μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἴσην μὲ τὴν μέσην τομὴν τοῦ κουλούρου κώνου (ἀπέχουσαν ἰσάκις τῶν βάσεων αὐτοῦ).***

Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ὄγκ.κολ.κών.}=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho\varrho_1) \qquad (1)$

Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἤτοι μὲ $\frac{\varrho+\varrho_1}{2}$, ἐπομένως ὁ ὄγκος του εἶναι

$$\text{ὄγκ.κυλινδ.}=\pi\left(\frac{\varrho+\varrho_1}{2}\right)^2\upsilon=\pi\left(\frac{\varrho^2+2\varrho\varrho_1+\varrho_1^2}{4}\right)\upsilon$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

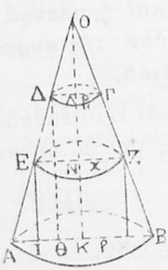
$$\text{ὄγκ.κολ.κων.} - \text{ὄγκ.κυλ.} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho\varrho_1) - \frac{\pi}{4}\upsilon(\varrho^2+2\varrho\varrho_1+\varrho_1^2)$$

$$= \frac{4\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho\varrho_1) - 3\pi\upsilon(\varrho^2+2\varrho\varrho_1+\varrho_1^2)}{12}$$

$$= \frac{\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_2)}{12} = \frac{\pi\upsilon(\varrho-\varrho_1)^2}{12}.$$

**755.** ***Κόλουρος κῶνος μὲ ἀκτῖνας ϱ, ϱ₁ τῶν βάσεών του καὶ ὕψος υ διχοτομεῖται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του. Εἰς ποῖον σημεῖον τέμνει τὸ ὕψος του καὶ πόσον εἶναι τὸ ὕψος του καὶ πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ;***

Ἔστω ΑΒΓΔ ὁ κόλουρος κῶνος, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι $\varrho$ καὶ $\varrho_1$, καὶ $x$ ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς ΕΖ.



Σχ. 94.

Ἐπειδὴ οἱ κῶνοι ΟΑΒ, ΟΕΖ, ΟΔΓ εἶναι ὅμοιοι θὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{(\text{ΟΑΒ})}{\varrho^3} = \frac{(\text{ΟΕΖ})}{x^3} = \frac{(\text{ΟΔΓ})}{\varrho_1^3}$.

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(\text{ΟΑΒ})-(\text{ΟΕΖ})}{\varrho^3-x^3} = \frac{(\text{ΟΕΖ})-(\text{ΟΔΓ})}{x^3-\varrho_1^3} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{(\text{ΑΒΖΕ})}{\varrho^3-x^3} = \frac{(\text{ΕΖΓΔ})}{x^3-\varrho_1^3}.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (ΑΒΖΕ)=(ΕΖΓΔ) θὰ εἶναι καὶ

$$\varrho^3-x^3=x^3-\varrho_1^3$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $2x^3=\varrho^3+\varrho_1^3$ καὶ $x=\sqrt[3]{\frac{\varrho^3+\varrho_1^3}{2}}$,

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ΑΖ θὰ εἶναι $\pi x^2=\pi\sqrt[3]{\left(\frac{\varrho^3+\varrho_1^3}{2}\right)^2}$.

Ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε φέρομεν τὰς καθέτους ΔΘ καὶ ΕΙ ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΙΕ καὶ ΑΘΔ ἔχομεν

$$\frac{\text{ΕΙ}}{\text{ΔΘ}} = \frac{\text{ΑΙ}}{\text{ΑΘ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΕΙ}}{\upsilon} = \frac{\varrho-x}{\varrho-\varrho_1}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\text{ΕΙ}=\frac{(\varrho-x)\upsilon}{\varrho-\varrho_1}$.

Ὥστε πρέπει τὸ ἐπίπεδον νὰ ἀπέχει ἀπὸ τῆς κάτω βάσεως ἀπόστασιν ἴσην μὲ

$$\frac{(\varrho-x)\upsilon}{\varrho-\varrho_1} = \frac{\left(\varrho-\sqrt[3]{\frac{\varrho^3+\varrho_1^3}{2}}\right)\upsilon}{\varrho-\varrho_1}.$$

*756. Καπνοδόχος ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου καὶ ὕψος 30 μ. Ἡ ἐξωτερικὴ περιφέρεια ἔχει περίμετρον 22 μετρ. κάτω καὶ 13 ἄνω. Τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς ἔχει μῆκος 2,1 μετρ. κάτω, καὶ 1,3 ἄνω. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ λιθοκτίστου τοῦ στερεοῦ.*

Ὁ ὄγκος τοῦ λιθοκτίστου στερεοῦ θὰ εὑρεθῇ, ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ ἐξωτερικοῦ κολούρου κώνου, ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ἐσωτερικοῦ κολούρου κώνου.

Ἡ ἀκτὶς τῆς κάτω βάσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ κολούρου κώνου εἶναι $\frac{22}{2\pi}=\frac{11}{\pi}=3{,}50$ μετρ., ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἄνω βάσεως του εἶναι $\frac{12}{2\pi}=2{,}07$ μ. Ἑπομένως ὁ ὄγκος του εἶναι

$$\text{ὄγκος}=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1{}^2+\varrho\varrho_1)=\frac{1}{3}\pi.30(3{,}50^2+2{,}07^2+3{,}50.2{,}07)=$$
$$=10\pi.\ 23{,}6849$$

Ἡ ἀκτὶς τῆς κάτω βάσεως τοῦ ἐσωτερ. κολούρου κώνου εἶναι 2,1:2=1,05 μ., τῆς δὲ ἄνω βάσεως 1,3:2=0,65 μ., ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ ἐσωτερικοῦ κολούρου κώνου εἶναι

$$\text{ὄγκος}=\frac{1}{3}\pi.30(1{,}05^2+0{,}65^2+1{,}05\times0{,}65)=10\pi.2{,}5075$$

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν ὄγκων εἶναι

$$10\pi.(23{,}6849-2{,}5075)=10\pi.21{,}1774=211{,}774\pi.\ \text{κ.μ.}$$

*757. Τὸ ὕψος κολούρου κώνου εἶναι 14 πηχ., ὁ δὲ ὄγκος του 924 ($\pi^3$). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του, ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 9 πήχ.*

Ἂν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις $x+y=9$ (1)

$$924=\frac{1}{3}\pi(x^2+y^2+xy)14 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν $x=9-y$ (3)

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ x εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$924.3=\pi[(9-y)^2+y^2+(9-y)y].14$$
ἢ
$$2772=\pi(81-18y+y^2+y^2+9y-y^2)14$$
ἢ
$$2772=\pi(81-9y+y^2)14.$$
$$\pi y^2-9\pi y+81\pi-198=0$$

Λύοντες αὐτὴν ἔχομεν $y=\frac{9\pi\pm\sqrt{792\pi-243\pi^2}}{2\pi}$

ἢ $y=\dfrac{9\pm\sqrt{\dfrac{792}{\pi}-243}}{2}$ Θέτοντες ὅπου $\pi=3,1416$.

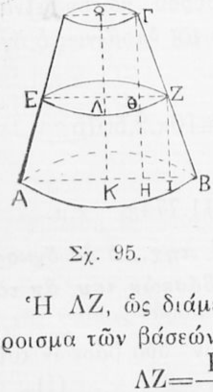
ἢ $y=\dfrac{9\pm\sqrt{252,1-243}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{9,1}}{.2}$

ἢ $y=\dfrac{9+0,47952}{2}=4,73976$, ὁπότε $x=4,26024$

ἢ $y=\dfrac{9-0,47952}{2}=4,26024$, ὁπότε $x=4,73976$.

**758.** ***Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων κολούρου κώνου εἶναι 20 δ. καὶ 135 δ. Ἐὰν τὸ ὕψος του εἶναι 15 δ. καὶ διχοτομηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του, πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν κολούρων κώνων εἰς τοὺς ὁποίους χωρίζεται.***

Ἔστω ΑΒΓΔ ὁ κόλουρος κῶνος καὶ ΕΖ ἡ τομή του ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.




Σχ. 95.

Γνωρίζομεν ὅτι

κυρ. ἐπιφ. (ΑΒΖΕ) $=\pi(\text{ΚΒ}+\text{ΛΖ})\text{ΒΖ}$ (1)

καὶ κυρ. ἐπιφ. (ΕΖΓΔ) $=\pi(\text{ΛΖ}+\text{ΟΓ})(\text{ΓΖ})$ (2)

Φέρομεν τὰς ΓΗ καὶ ΖΙ καθέτους ἐπὶ τὴν ΚΒ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΓΗΒ ἔχομεν

$(\text{ΓΒ})^2=(\text{ΓΗ})^2+(\text{ΗΒ})^2$ ἢ

$(\text{ΓΒ})^2=15^2+(135-20)^2=225+13225=13500$

ἄρα $\text{ΓΒ}=\sqrt{13500}=116,18$. Ἐπειδὴ $\text{ΟΛ}=\text{ΛΚ}$ ἕπεται, ὅτι καὶ $\text{ΓΖ}=\text{ΖΒ}=58,09$.

Ἡ ΛΖ, ὡς διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΚΒΓΟ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του, ἤτοι εἶναι

$$\text{ΛΖ}=\frac{\text{ΚΖ}+\text{ΟΓ}}{2}=\frac{135+20}{2}=77,5$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν ΚΒ, ΛΖ, ΒΖ, ΟΓ, ΓΖ εἰς τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν

κυρ.ἐπιφ.(ΑΒΖΕ) $=\pi(135+77,50)58,09=\pi.212,5\times58,09$ τ.δ.

κυρ.ἐπιφ.(ΕΖΓΔ) $=\pi(77,50+20)58,09=\pi.\ 97,5\times58,09$ τ.δ.

**759.** ***Ἀπὸ κῶνον ἔχοντα πλευρὰν 30 καὶ ἀκτῖνα βάσεως 10 π., ἀποκόπτεται κῶνος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του μὲ πλευρὰν 6π. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.***

Ἔστω ΟΑΒ (σχ. 94) ὁ δοθεὶς κῶνος τοῦ ὁποίου εἶναι $\text{ΚΒ}=10\pi$. καὶ $\text{ΟΒ}=30\pi$.

α΄) Ἐὰν ΓΔ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, τότε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\text{κυρ. ἐπιφ. }(ΑΒΔΓ)=\text{κυρ. ἐπιφ. }(ΟΑΒ)-\text{κυρ. ἐπιφ. }(ΟΓΔ)$$
$$=\pi.(ΚΒ)(ΟΒ)-\pi.(ΛΓ)(ΟΓ) \qquad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ΛΓ· ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΚΒ καὶ ΟΛΓ ἔχομεν

$$\frac{ΛΓ}{ΚΒ}=\frac{ΟΓ}{ΟΒ} \text{ ἢ } \frac{ΛΓ}{10}=\frac{6}{30} \text{ ἄρα } ΛΓ=\frac{6.10}{30}=2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ ΚΒ.. διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$\text{κυρ. ἐπιφ. }(ΑΒΓΔ)=\pi.10.30-\pi.2.6=288\ \pi.$$

β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ὄγκ.}(ΑΒΔΓ)=\text{ὄγκ.}(ΟΑΒ)-\text{ὄγκ}(ΟΓΔ)$$
$$=\frac{1}{3}\pi(ΚΒ)^2(ΟΚ)-\frac{1}{3}\pi(ΛΓ)^2(ΟΛ) \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΚΒ ἔχομεν

$$(ΟΚ)^2=(ΟΒ)^2-(ΚΒ)^2 \text{ ἢ } (ΟΚ)^2=30^2-10^2=800 \text{ καὶ} ΟΚ=\sqrt{800}=20\sqrt{2}.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΛΓ ἔχομεν

$$(ΟΛ)^2=(ΟΓ)^2-(ΛΓ)^2 \text{ ἢ } (ΟΛ)^2=6^2-2^2=32 \text{ καὶ } ΟΛ=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τῶν ΛΒ κλπ. τὰς τιμάς των ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.}(ΑΒΔΓ)=\frac{1}{3}\pi.10^2.20\sqrt{2}-\frac{1}{3}\pi.2^2\,4\sqrt{2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{2}\,(2000-16)=$$
$$=\frac{1}{3}\pi 1984\sqrt{2} \quad \text{κ. π.}$$

**760.** ***Αἱ μὲν διάμετροι τῶν βάσεων κολούρου κώνου εἶναι 14π. καὶ 7π, τὸ δὲ ὕψος 8π. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου ὀρθοῦ πρίσματος μὲ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 4.***

Ἂν $V$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου $\varrho$, $\varrho_1$ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του καὶ $\upsilon$ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\varrho^2+\varrho_1{}^2+\varrho\varrho_1)$$

καὶ ἐπειδὴ $\varrho=7$, $\varrho_1=3{,}5$ καὶ $\upsilon=8$ ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\pi 8(7^2+3{,}5^2+7\times 3{,}5)=\frac{1}{3}\pi 8\times 85{,}75=228{,}330.$$

Ἂν $V_1$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως του καὶ $\upsilon$ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν $V_1=Β.\upsilon$

καὶ ἐπειδὴ $Β=4^2=16$ ἔχομεν $V_1=16\ \upsilon$.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως οἱ ὄγκοι $V$ καὶ $V_1$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔχομεν

$16\upsilon=228{,}33\pi$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\upsilon=\dfrac{228{,}33\pi}{16}=45{,}66.$

*761. Ἐὰν ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α, πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου του κολούρου κώνου μὲ ἀκτῖνας βάσεων ρ καὶ ρ₁.*

Γνωρίζομεν ὅτι ὄγκος κύβου $=\alpha^3$

ὄγκ.κολ.κών.$=\frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2+\rho_1{}^2+\rho\rho_1)$.

Ἐπειδὴ ὁ κύβος καὶ ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔχομεν

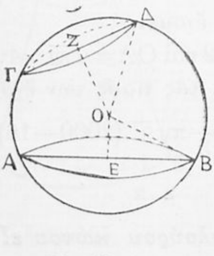
$$\frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2+\rho_1{}^2+\rho\rho_1)=\alpha^3.$$

Λύοντες ὡς πρὸς υ ἔχομεν $\upsilon=\frac{3\alpha^3}{\pi(\rho^2+\rho_1{}^2+\rho\rho_1)}$.

## Σφαῖρα.

*762. Ἐκ δύο κύκλων σφαίρας, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τοῦ κέντρου της, μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν μικροτέραν ἀπόστασιν.*

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ κυκλικαὶ τομαὶ τῆς σφαίρας Ο ὑπὸ δύο ἐπιπέδων, καὶ ἔστω ὅτι ΟΖ>ΟΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ὁ κύκλος ΑΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ΓΔ.



Σχ. 96.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΔ καὶ ΟΒ.

Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΖΔ ἔχομεν:

$(BE)^2=(OB)^2-(OE)^2$ καὶ $(\Delta Z)^2=(O\Delta)^2-(OZ)^2$.

Ἐπειδὴ ΟΒ=ΟΔ ὡς ἀκτῖνες σφαίρας καὶ ΟΕ<ΟΖ ἕπεται ὅτι $(BE)^2>(\Delta Z)^2$ καὶ ΒΕ<ΔΖ· ἀφοῦ ἡ ἀκτὶς ΒΕ τοῦ κύκλου ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ΔΖ ἕπεται, ὅτι ὁ κύκλος ΑΒ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ κύκλου ΓΔ.

*763. Διὰ σημείου κειμένου ἐντὸς σφαίρας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον αὐτὴν κατὰ τὸν δυνατὸν ἐλάχιστον κύκλον ἢ τὸν μέγιστον.*

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ μικροτέρα χορδή, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ σημεῖον κείμενον ἐντὸς κύκλου εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου (ἄσκησις 158 Α' μέρος).

Ἂν λοιπὸν ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου φέρωμεν διάμετρον τῆς σφαίρας καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν διάμετρον αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διὰ νὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, μέγιστος κύκλος πρέπει τὸ ἐπίπεδον νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

**764.** ***Δι᾿ εὐθείας τεμνούσης σφαῖραν νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον αὐτὴν κατὰ τὸν δυνατὸν ἐλάχιστον ἢ μέγιστον κύκλον.***

Ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας φέρομεν κάθετον ΟΕ (σχ. 96) ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν·

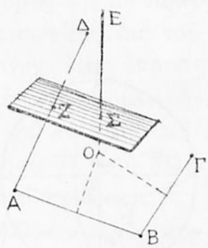
Ἐὰν τώρα φέρωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΕ, ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπ᾿ αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος κύκλος, διότι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι ἐλαχίστη (ἄσκησις 158 Α΄ μέρος).

Ἡ τομὴ τῆς σφαίρας θὰ εἶναι μέγιστος κύκλος, ἂν φέρωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

**765.** ***Εὕρετε τὸ κέντρον σφαίρας α΄) διερχομένης διὰ τεσσάρων σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· β) διερχομένης διὰ τριῶν σημείων καὶ ἐχούσης ἀκτῖνα ρ.***

α΄) Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἓν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, εἶναι ἡ κάθετος ΟΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν τριῶν σημείων.



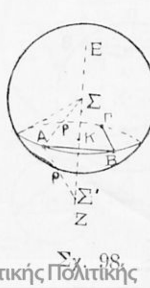
Σχ. 97.

Ἐξ ἄλλου ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ Α καὶ Δ εἶναι τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ κάθετον εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΔ. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν ΟΕ εἰς τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

Ὑπάρχει λοιπὸν ἓν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης σφαίρας. Δὲν ὑπάρχει παρὰ μόνον ἓν τοιοῦτον σημεῖον, διότι μία εὐθεῖα καὶ ἓν ἐπίπεδον δὲν δύνανται νὰ ἔχουν παρὰ ἓν κοινὸν σημεῖον.

β) Ἔστωσαν Α, Β, Γ (σχ. 98) τὰ τρία δοθέντα σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διέλθῃ ἡ σφαῖρα καὶ ρ ἡ ἀκτίς της.

Τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ζητουμένης σφαίρας ἕνα μικρὸν κύκλον, τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον Κ.



Σχ. 98.

Ἐκ τοῦ κέντρου Κ φέρομεν κάθετον ΕΖ ἐπί τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς εὑρίσκεται τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

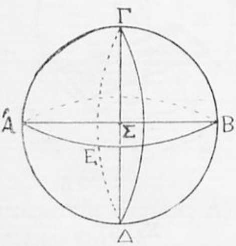
Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ', τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ· ὑπάρχουν λοιπὸν δύο λύσεις.

766. ***Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους.***

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἄξων κύκλου σφαίρας εἶναι ἡ κάθετος διάμετρός της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι παράλληλοι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, καὶ ἐπομένως ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους, δηλ. τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου αὐτῆς.

767. ***Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα δύο μεγίστων κύκλων σφαίρας εἶναι κάθετα μεταξύ των, ἕκαστος διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ ἄλλου.***

Ἔστωσαν ΑΕΒ καὶ ΓΕΔ δύο μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας Σ, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἀναμεταξύ των. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἕκαστος τῶν κύκλων αὐτῶν διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ ἄλλου.

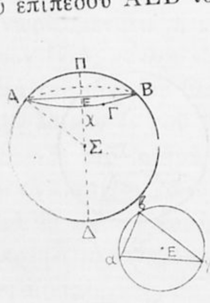



Σχ. 99.

Ἐκ τοῦ κέντρου Σ φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΑΕΒ. Ἐπειδὴ ἡ διάμετρος ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΒ ἐκ σημείου Σ κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΕΔ καθέτου ἐπὶ τὸ ΑΕΒ, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΕΔ καὶ ἐπομένως τὰ ἄκρα αὐτῆς Γ καὶ Δ εἶναι πόλοι τοῦ κύκλου ΑΒ.

Ὁμοίως καὶ ἡ διάμετρος ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΕΔ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΕΒ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΕΖ καὶ ἐπομένως τὰ ἄκρα της Α καὶ Β θὰ εἶναι πόλοι τοῦ μεγίστου κύκλου ΓΕΔ.

768 ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς μικροῦ κύκλου σφαίρας.***




Σχ. 100.

Ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δοθέντος μικροῦ κύκλου Ε τῆς σφαίρας λαμβάνομεν τρία σημεῖα τὰ Α, Γ, Β καὶ σχηματίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρίγωνον αβγ μὲ πλευρὰς τὰς χορδὰς τῶν τόξων ΑΓ, ΓΒ, ΒΑ, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν διὰ τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου·

περὶ τὸ τρίγωνον αβγ περιγράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὸν Ε, διότι καὶ οἱ δύο εἶναι περιγεγραμμένοι περὶ ἴσα τρίγωνα, ὅθεν ἡ ζητουμένη ἀκτὶς εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου αβγ.

769. ***Εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰς μικρὸν κύκλον σφαίρας ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.***

Ἐργαζόμενοι καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΒ (σχ. 100).

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α εἶναι

$E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ (1) ἡ δὲ πλευρὰ α δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$\alpha=\rho\sqrt{3}$ ὅπου $\rho=$ ἀκτὶς κύκλου.

τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $E=\frac{3\rho^2\sqrt{3}}{4}$.

770. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου κύκλου δοθείσης σφαίρας ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς.***

Ἔστω x ἡ ἀπόστασις τῆς τομῆς ΑΒ (σχ. 101) ἀπὸ τοῦ κέντρου Σ τῆς σφαίρας Σ. Ἂν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΣ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΣ

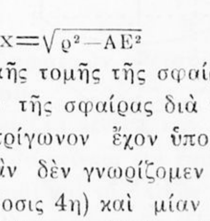
$(\Sigma E)^2=(A\Sigma)^2-(AE)^2$ ἢ $x^2=\rho^2-(AE)^2$ καὶ $x=\sqrt{\rho^2-AE^2}$ (1)

ὥστε ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΕ τῆς κυκλικῆς τομῆς τῆς σφαίρας εὑρίσκομεν τὴν ἀπόστασιν της ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διὰ τοῦ τύπου (1), ἤτοι κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας (τὴν ὁποίαν ἂν δὲν γνωρίζομεν εὑρίσκομεν κατὰ τὸ πρόβλημα 339 γεωμ. Σ. ἔκδοσις 4η) καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου (ἄσκησις 768), ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις.

771. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων μικρῶν κύκλων δοθείσης σφαίρας.***

Εὑρίσκομεν τὰς ἀποστάσεις τῶν κύκλων ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν καὶ προσθέτομεν αὐτάς.

772. ***Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα ἀκτῖνα δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

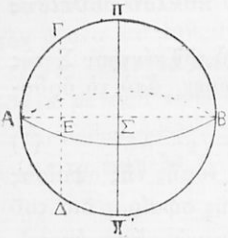


Σχ. 101.

Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν ασ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν αε ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα τοῦ ζητουμένου κύκλου· ἐπὶ τῆς σε λαμβάνομεν τμῆμα σγ=σα καὶ φέρομεν τὴν γα καὶ μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν γα γράφομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον Ε, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ζητούμενας.

Διότι ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΣΓ καὶ ΣΑ καὶ ἡ πολικὴ ἀπόστασις ΑΓ εἶναι σα=ΣΑ, σγ=ΣΓ καὶ αγ=ΑΓ ἐκ κατασκευῆς, ἄρα καὶ γων.αγε=γων.ΑΓΕ, ἑπομένως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα αγε καὶ ΑΓΕ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν γωνιῶν ἴσην, ἑπομένως εἶναι ἴσα καὶ αε=ΑΕ· ἀλλὰ αε=ρ, ἤτοι μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ὅθεν καὶ ΑΕ=ρ, ἤτοι ὁ γραφεὶς κύκλος ἔχει ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν, ἄρα εἶναι ὁ ζητούμενος.

773. ***Πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου, καθέτου καὶ διχοτομοῦντος ἄλλο δοθὲν τόξον μεγίστου κύκλου, ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἄκρων τούτου.***



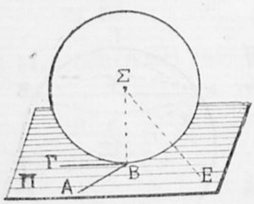
Σχ. 102

Ἔστω ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒ τῆς σφαίρας Σ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΑΔ.

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ τοῦ τόξου ΓΑΔ. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον Α τοῦ τόξου ΓΑΔ θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν χορδήν του ΓΔ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ε. Ἑπομένως κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου ΑΒ θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν ἄκρων Γ καὶ Δ.

774 ***Τὸ ἐπίπεδον δύο εὐθειῶν ἐφαπτομένων σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, εἶναι ἐφαπτόμενον αὐτῆς.***

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΒ, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς σφαίρας Σ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας.



Σχ. 103.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΣΒ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

Ἡ ΣΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΒ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Β θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΓ.

Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι λοιπὸν κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΣΒ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, διότι ἔχουν ἕνα καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον. Διότι, πράγματι, ἔστω φέρωμεν τὴν ΣΕ, αὕτη ὡς πλαγία θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ κέντρον Σ ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος καὶ ἑπομένως θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουν ἕνα καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον τὸ Β καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

775. ***Ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος σφαίρας εἶναι ἐφαπτόμενον αὐτῆς.***

Βλέπε ἀπόδειξιν προηγουμένης ἀσκήσεως.

776. ***Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς.***

Ἔστω (σχ. 103) Π ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας Σ καὶ ΣΒ ἡ ἀκτὶς ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς.

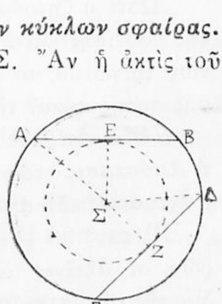
Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἕπεται ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖον Ε τοῦ ἐπιπέδου Π κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ ἑπομένως ἡ ἀπόστασις ΣΕ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΣΒ. Ὥστε ἡ ΣΒ εἶναι ἡ μικροτέρα εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ κέντρον πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

777. ***Τίς εἶναι ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος, τῶν ἐφαπτομένων τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

Ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, τὰ κέντρα των θὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως θὰ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ δοθὲν (ἑκατέρωθεν αὐτοῦ) καὶ τὸ ὁποῖον θὰ ἀπέχῃ αὐτοῦ ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τῶν ἴσων σφαιρῶν.

778. ***Τίς ὁ τόπος τῶν κέντρων ἴσων μικρῶν κύκλων σφαίρας.***

Ἔστω ΑΒ μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας Σ. Ἂν ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΒ εἶναι α καὶ τῆς σφαίρας ρ, τότε τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ $\Sigma E = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$ εἶναι σταθερόν, ἤτοι τὸ κέντρον αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν, ἄρα κεῖται ἐπὶ ὁμοκέντρου σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα $\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$ ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου.




Σχ. 104.

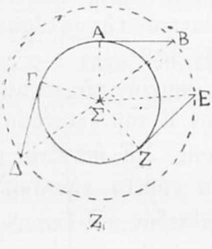
Ἔστω τώρα ὁ κύκλος ΔΓ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας Σ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ τὸ ἐπίπεδόν του ἐφάπτεται αὐτῆς καὶ ἔστω ΔΓ μία διάμετρός του· ἂν ἀχθῇ ἡ ΣΖ καὶ ΣΔ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΖΔ ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$(Z\Delta)^2 = \sqrt{\Sigma\Delta^2 - \Sigma Z^2} = \sqrt{\rho^2 - (\sqrt{\rho^2 - \alpha^2})^2} \text{ ἤτοι } Z\Delta = \sqrt{\rho^2 - \rho^2 + \alpha^2} = \alpha$$

ἤτοι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς α. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ κέντρον τοῦ τυχόντος κύκλου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα α κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας Σ τῆς ἐχούσης ἀκτῖνα $\sqrt{\varrho^2-\alpha^2}$ καὶ ἀντιστρόφως κάθε κύκλου ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας ταύτης ἡ ἀκτὶς εἶναι α ἕπεται, ὅτι ἡ σφαῖρα αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

779. ***Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι δοθείσης σφαίρας.***

Ἔστω ἡ σφαῖρα Σ καὶ ΑΒ, ΓΔ δύο ἴσαι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς. Τὰ ἄκρα αὐτῶν Β καὶ Δ εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.



Σχ. 105.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΣΑ, ΣΓ καὶ τὰς εὐθείας ΣΒ καὶ ΣΔ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΣΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ΣΑ=ΣΓ ὡς ἀκτίνας τῆς αὐτῆς σφαίρας καὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΣΒ=ΣΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Δ ἀπέχουν τοῦ κέντρου Σ ἀποστάσεις ἴσας. Ἄρα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης καὶ ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν ΣΒ.

Ἔστω Ε τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας ΣΒ. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΕΖ τῆς σφαίρας Σ. Φέρομεν ἐπίσης καὶ τὴν ἀκτῖνα ΣΕ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΖΕ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΑΒ, ἄρα ἕπεται ὅτι ΖΕ=ΑΒ. Τὸ Ε λοιπὸν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι σφαῖρα ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης σφαίρας καὶ τὸ μῆκος τῆς δοθείσης ἐφαπτομένης.

780. ***Δείξατε ὅτι ἂν δύο σφαῖραι ἐφάπτωνται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου.***

Βλέπε § 98 Γεωμετρίας Ν. Σακελλαρίου, διότι ἡ θέσις δύο σφαιρῶν, αἱ ἀκτῖνες των καὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των συνδέονται διὰ τῆς αὐτῆς σχέσεως διὰ τῆς ὁποίας συνδέονται καὶ ἡ θέσις καὶ αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων.

781. ***Ἂν σφαῖρα κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς ἄλλης, ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου των εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου.***

Βλέπε § 99 Γεωμετρίας Ν. Σακελλαρίου.

*782. Ἂν δύο σφαῖραι τέμνωνται, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορῶν τῶν ἀκτίνων των. Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου.*

Βλέπε § 97 Γεωμετρίας Νείλου Σακελλαρίου.

*783. Τίς ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης σφαίρας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.*

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ προέκτασις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς, διότι γνωρίζομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν ἐφαπτομένων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς.

Διὰ δὲ τὰς σφαίρας τὰς ἐφαπτομένας ἐσωτερικῶς τῆς δοθείσης, εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον ἀφῆς.

*784. Τίς ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, ἴσης ἀκτῖνος, τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης σφαίρας ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς.*

α) Τὰ κέντρα τῶν ἴσων σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς δοθείσης σφαίρας ἀπέχουν τοῦ κέντρου τῆς δοθείσης σφαίρας ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ ἐπιφανείας σφαίρας ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης καὶ ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῆς δοθείσης καὶ τῆς ἐφαπτομένης

β) Τὰ κέντρα δὲ τῶν ἴσων σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς τῆς δοθείσης σφαίρας ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον της ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῆς δοθείσης καὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ ἐπιφανείας σφαίρας ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης καὶ ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των.

*785. Τίς ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν.*

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας ὁμοκέντρου τῶν δοθεισῶν καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

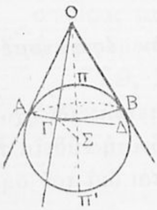
*786. Διὰ σημείου ἐκτὸς σφαίρας κειμένου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄπειρα ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς. Τίς ὁ τόπος τῶν σημείων ἀφῆς αὐτῶν.*

Ἔστω Ο (σχ.106) τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας Σ.

Διὰ τῆς εὐθείας ΟΣ φέρομεν ἓν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον θὰ κόψῃ τὴν σφαῖραν Σ κατὰ μέγιστον κύκλον ΠΑΠ′.

Φέρομεν τὴν ΟΑ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου ΠΑΠ′.

Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ περὶ τὸν ἄξονα ΟΣ, τὸ ἡμικύκλιον θὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν Σ, ἡ ἐφαπτομένη ΟΑ θὰ παραγάγῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ μὲ τὴν σφαῖραν κοινὸν τὸν κύκλον ΑΒ, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ σημεῖον Α κατὰ τὴν περιστροφήν του. Εἰς κάθε σημεῖον Γ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, ὁ κῶνος καὶ ἡ σφαῖρα θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐφαπτομένου ἐπίπεδον.



Σχ. 106.

Διότι ἡ γενέτειρα ΟΓ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ τοῦ κύκλου ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐφαπτόμενον τοῦ κώνου, κεῖνται καὶ ἡ μία καὶ ἡ ἄλλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐφαπτομένου εἰς τὴν σφαῖραν.

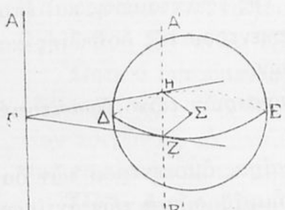
Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΑΒ εἶναι ἄπειρα, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ ἄπειρα ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τῆς σφαίρας καὶ διερχόμενα διὰ τοῦ Ο.

Ὁ τόπος τῶν σημείων ἁφῆς εἶναι ἡ περιφέρεια κυκλικῆς βάσεως τοῦ κώνου, δηλαδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΒ τῆς σφαίρας Σ.

**787.** ***Δι' εὐθείας κειμένης ἐκτὸς σφαίρας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς.***

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ κειμένη ἐκτὸς τῆς σφαίρας Σ.

Ἐκ τοῦ κέντρου Σ τῆς σφαίρας Σ φέρομεν ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὴν δὲ σφαῖραν κατὰ τὸν μέγιστον κύκλον ΔΕΖ.



Σχ. 107.

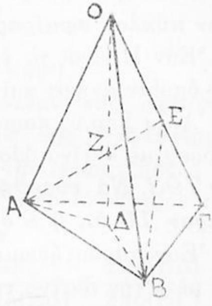
Φέρομεν ἐκ τοῦ Γ τὰς ἐφαπτομένας ΓΖ καὶ ΓΗ τοῦ κύκλου ΔΖΕ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΖ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας Σ, διότι ἡ ἀκτὶς ΣΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΓΖ καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Α'ΖΒ', ἡ ὁποία θὰ ἤγετο ἐκ τοῦ Ζ παραλλήλως πρὸς τὴν ΑΒ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΗ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας Σ.

**788.** ***Εἰς δοθὲν τετράεδρον δύναται νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα (ἐφαπτομένη ἑκάστης τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ).***

Γνωρίζομεν (ἄσκησις 789) ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς ἓξ διέδρους γωνίας ἑνὸς τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τῶν ἑδρῶν του. Τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τετράεδρον.

***789. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἓξ διέδρους γωνίας τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.***

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ. Τὰ ἐπίπεδα ποὺ διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας ΟΑ καὶ ΟΒ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΔ.




Σχ. 108.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΟΔ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ τῆς διέδρου ΟΑ καὶ ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ τῆς διέδρου ΟΒ. Ἑπομένως θὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΟΓ καὶ ΒΟΓ τῆς διέδρου ΟΓ καὶ κατὰ συνέπειαν κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν δίεδρον ΟΓ. Τὰ τρία λοιπὸν ἐπίπεδα ποὺ διχοτομοῦν τὰς διέδρους ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΔ Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΒ Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΟΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ζ κεῖται ἐπὶ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τρεῖς ἕδρας τῆς τριέδρου γωνίας ΟΑΒΓ καὶ ἐπὶ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΟΑΒ καὶ ΑΒΓ τῆς διέδρου ΑΒ θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἕδρας τοῦ τετραέδρου. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Ζ ἀνήκει καὶ εἰς τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς δύο ἄλλας διέδρους ΒΓ καὶ ΑΓ. Ὥστε τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἓξ διέδρων γωνιῶν ἑνὸς τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

***790. Εἰς δοθὲν τετράεδρον δύναται νὰ περιγραφῇ σφαῖρα (τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν του).***

Γνωρίζομεν (ἄσκησις 765) ὅτι διὰ τεσσάρων σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου διέρχεται μία καὶ μόνη σφαῖρα. Διὰ τῶν τεσσάρων λοιπὸν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου θὰ διέλθῃ μιὰ σφαῖρα, ἡ ὁποία θὰ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ τετράεδρον.

***791. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας μὲ μέγιστον κύκλον α΄) μήκους περιφερείας 4,57μ. β΄) ἐμβαδοῦ 2,85 (μ²).***

Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καὶ ρ ἡ ἀκτίς της, θὰ ἔχωμεν

$$E = 4\pi\rho^2 \qquad (1)$$

α') Ἐδῶ ἔχομεν $2\pi\varrho=4,57$ ἄρα $\varrho=\frac{4,57}{2\pi}=\frac{4,57}{6,28}=0,72$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E=4\pi.0,72=8,9432 \quad \tau.\mu.$$

β') Ἐδῶ ἔχομεν $\pi\varrho^2=2,85$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E=4.2,85=11,40(\mu^2).$$

*792. Τὸ ἐμβαδὸν ζώνης ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ἴσου ὕψους μὲ αὐτὴν καὶ μὲ βάσιν μέγιστον κύκλον σφαίρας.*

Ἐὰν E εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ϱ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ υ τὸ ὕψος της, θὰ ἔχωμεν $E=2\pi\varrho.\upsilon$.

Ἀλλὰ $2\pi\varrho.\upsilon$ παριστάνει καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου μὲ ἀκτῖνα βάσεως ϱ καὶ μὲ ὕψος υ.

*793. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας μὲ διάμετρον 10 δ., ἢ 9 δ., ἢ 3 π.*

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ μὲ ϱ τὴν ἀκτῖνα της θὰ ἔχωμεν $E=4\pi\varrho^2$. (1)

α') Ἐδῶ $\varrho=5\delta$. ἄρα $E=4\pi.5^2=100\pi=314,1$ τ.δ.

β') Ἐδῶ $\varrho=4,5\delta$. ἄρα $E=4\pi.4,5^2=81.\pi=254,34$ τ.δ.

γ') Ἐδῶ $\varrho=1,5\delta$. ἄρα $E=4\pi.1,5^2=9.\pi=28,26$ τ.δ.

*794. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος σφαίρας μὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της 616 (δ²).*

Ἐὰν E εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας καὶ ϱ ἡ ἀκτίς της θὰ ἔχωμεν $E=4\pi\varrho^2$ (1)

Ἐπειδὴ $E=616$, ἔχομεν $616=4\pi\varrho^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\varrho^2=\frac{616}{4\pi}=\frac{154}{\pi} \quad \text{καὶ} \quad \varrho=\sqrt{\frac{154}{\pi}} \quad \text{ἄρα} \quad \text{διάμετρος}=2\sqrt{\frac{154}{\pi}}$$

*795. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της.*

Γνωρίζομεν ὅτι $E=4\pi\varrho^2$.

Ἐπειδὴ $E=2\pi\varrho$ ἔχομεν $2\pi\varrho=4\pi\varrho^2$ ἢ $1=2\varrho$ καὶ $\varrho=1/2$

*796. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ζώνης, ἐχούσης ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου, ἂν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.*

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐμβαδ.ζώνης}=2\pi\varrho\upsilon$$

καὶ ἐπειδὴ ἐμβ.ζώνης$=\pi\varrho^2$ (ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου) ἔχομεν $\pi\varrho^2=2\pi\varrho\upsilon$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $\upsilon=\varrho/2$.

**797.** ***Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ζώνης μὲ μίαν βάσιν, ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως ϱ. Πόσον θὰ γίνῃ τοῦτο, ἂν τὸ ὕψος διπλασιασθῇ.***

α΄) Γνωρίζομεν ὅτι ἐμβαδὸν ζώνης $ΑΓΒ=2\pi(ΣΑ)(ΓΕ)=$
$=\pi.2(ΣΑ).(ΓΕ)=\pi(ΓΔ)(ΓΕ)=\pi(ΑΓ)^2$ (Σχ. 101) (1)

Ἐδῶ ἔχομεν $ΓΕ=υ$, $ΑΕ=ϱ$, ἄρα $(ΑΓ)^2=υ^2+ϱ^2$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $(ΑΓ)^2$ διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. ζών. }(ΑΓΒ)=\pi(ϱ^2+υ^2).$$

β΄) Ἂν τὸ ὕψος υ διπλασιασθῇ θὰ ἔχωμεν

$$\text{ἐμβ.ζων.}(ΑΓΒ)=\pi[ϱ^2+(2υ)^2]=\pi(ϱ^2+4υ^2).$$

**798.** ***Ποῖον ἐπίπεδον χωρίζει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας μὲ ἀκτῖνα ϱ εἰς δύο ζώνας, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς μεγαλυτέρας εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς ὅλης ἐπιφανείας καὶ τῆς μικροτέρας.***

Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒ (σχ. 101) ἀπέχει x ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Σ. Πρέπει κατὰ τὸ πρόβλημα νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἐπιφ.σφαίρας } Σ}{\text{ἐπιφ ζών. } ΑΔΒ}=\frac{\text{ἐπιφ.ζών.}ΑΔΒ}{\text{ἐπιφ ζών.}ΑΓΒ} \quad \text{ἢ} \quad \frac{4\pi ϱ^2}{2\pi ϱ(ΕΔ)}=\frac{2\pi ϱ(ΕΔ)}{2\pi ϱ(ΕΓ)}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2ϱ}{(ΕΔ)}=\frac{(ΕΔ)}{(ΕΓ)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2ϱ}{ϱ+x}=\frac{ϱ+x}{ϱ-x} \quad \text{ἢ} \quad (ϱ+x)^2=2ϱ(ϱ-x)$$

$$\text{ἢ} \quad ϱ^2+2ϱx+x^2-2ϱ^2+2ϱx=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2+4ϱx-ϱ^2=0$$

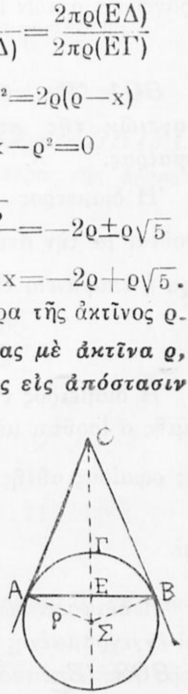
Λύοντες αὐτὴν ἔχομεν

$$x=\frac{-4ϱ\pm\sqrt{16ϱ^2+4ϱ^2}}{2}=\frac{-4ϱ\pm\sqrt{20ϱ^2}}{2}=\frac{-4ϱ\pm2ϱ\sqrt{5}}{2}=-2ϱ\pmϱ\sqrt{5}$$

Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν $x=-2ϱ+ϱ\sqrt{5}$. (Ἡ ἄλλη τιμὴ ἀποκλείεται ὡς ἀρνητικὴ καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος ϱ.

**799.** ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης σφαίρας μὲ ἀκτῖνα ϱ, ἥτις φωτίζεται ὑπὸ φωτεινῆς πηγῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν υ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.***

Ἔστω ΑΓΒ ἡ ζώνη τῆς σφαίρας Σ, ἡ ὁποία φωτίζεται ἀπὸ τὴν φωτεινὴν πηγὴν Ο. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΣΑ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Α τῆς ἐφαπτομένης ΟΑ καὶ τῆς σφαίρας Σ.




Σχ. 109.

Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ἐμβ. ζώνης }(ΑΓΒ)=2\pi ϱ(ΓΕ) \quad (1)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΟΑΣ ἔχομεν

$(ΑΣ)^2=(ΣΟ).(ΣΕ)$ ἢ $ϱ^2=υ(ΣΕ)$ ἄρα $(ΣΕ)=ϱ^2/υ$

ὁπότε $ΓΕ=ΣΓ-ΣΕ=ϱ-\dfrac{ϱ^2}{υ}=\dfrac{υϱ-ϱ^2}{υ}.$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ ΓΕ διὰ τῆς τιμῆς του ἔχομεν

$$\text{ἐμβ. ζώνης } (\text{ΑΓΒ}) = 2\pi\varrho.\left(\frac{\upsilon\varrho-\varrho^2}{\upsilon}\right) = \frac{2\pi\varrho^2}{\upsilon}(\upsilon-\varrho).$$

**800.** ***Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων διαμέτρου σφαίρας καὶ τῆς ἀκμῆς κύβου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν (ἔχοντος τὰς κορυφάς του ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας της) εἶναι 3 : 1.***

Ἂν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ διαγώνιος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύβου εἰς τὴν σφαῖραν θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον $2\varrho$ τῆς σφαίρας.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α ἰσοῦται μὲ $\alpha\sqrt{3}$, ἑπομένως ἐδῶ ἔχομεν $2\varrho=\alpha\sqrt{3}$, ἄρα $\alpha=\dfrac{2\varrho}{\sqrt{3}}$.

Τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας εἶναι $(2\varrho)^2=4\varrho^2$, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ἀκμῆς κύβου εἶναι $\left(\dfrac{2\varrho}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4\varrho^2}{3}$. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $\dfrac{4\varrho^2}{\frac{4\varrho^2}{3}}=\dfrac{3}{1}$.

**801.** ***Ἐκ τῆς ἀκμῆς κύβου νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὸν σφαίρας.***

Ἡ διάμετρος $2\varrho$ τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κύβον ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκμὴν α τοῦ κύβου, ἤτοι $2\varrho=\alpha$ καὶ $\varrho=\dfrac{\alpha}{2}$.

ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἶναι

$$4\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\pi\alpha^2.$$

Ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κύβον ἀκμῆς α ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ κύβου, ἤτοι μὲ $\alpha\sqrt{3}$· ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας αὐτῆς ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ καὶ τὸ ἐμβ. τῆς ἐπιφανείας της μὲ

$$4\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi\alpha^2.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρῶν τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κύβον εἶναι λοιπὸν $3\pi\alpha^2-\pi\alpha^2=2\pi\alpha^2$.

**802.** ***Ἐπίπεδον τέμνει τὴν διάμετρον σφαίρας εἰς μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν. Τὶς ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ζωνῶν.***

Ἔστω ΑΒ (σχ. 107) τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν διάμετρον ΓΔ τῆς σφαίρας εἰς μέρη τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΓΕ}{ΕΔ}=\frac{\mu}{\nu}$.

Γνωρίζομεν ὅτι $\quad$ ἐμβ.ζών.(ΑΓΒ)$=2\pi\varrho(ΓΕ)$ $\quad$ (1)

$\quad$ ἐμβ.ζών.(ΑΔΒ)$=2\pi\varrho(ΕΔ)$ $\quad$ (2)

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ ζών. (ΑΓΒ)}}{\text{ἐμβ. ζών. (ΑΔΒ)}}=\frac{2\pi\varrho(ΓΕ)}{2\pi\varrho\,(ΕΔ)}=\frac{ΓΕ}{ΕΔ}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ὥστε ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν ζωνῶν αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $\mu : \nu$.

***803. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας ἐχούσης διάμετρον 43 δ.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ Δ ἡ διάμετρός της θὰ ἔχωμεν $\quad V=\frac{1}{6}\pi Δ^3$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Δ διὰ τῆς τιμῆς του ἔχομεν $V=\frac{1}{6}\pi 43^3=$

$$=\frac{1}{6}\pi.79507=\frac{1}{6}3,1416.79507=0,5236.79507=41630 \text{ κ. δ.}$$

***804. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος σφαίρας ἐχούσης ὄγκον 75 (δ³).***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ Δ ἡ διάμετρός της ἔχομεν

$$V=\frac{1}{6}\pi Δ^3$$

Ἐπειδὴ ἐδῶ $V=75$ $\quad$ ἔχομεν

$$75=\frac{1}{6}\pi Δ^3 \quad \text{ἢ} \quad Δ^3=\frac{450}{\pi} \quad \text{ἢ} \quad Δ=\sqrt[3]{\frac{450}{\pi}}.$$

Λαμβάνοντες λογαρίθμους ἔχομεν

$$\text{λογ}\,Δ=\frac{1}{3}\,(\text{λογ}\;450-\text{λογ}\;3,14) \quad \text{ἢ}$$

$$\text{λογ}Δ=\frac{1}{3}(2,65321-0,49693)=\frac{1}{3}.2,15628=0,71876$$

$$\text{καὶ}\;Δ=5,23125 \text{ δ.}$$

***805. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας διὰ τοῦ μήκους Γ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της.***

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, ϱ ἡ ἀκτίς της καὶ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της, ἔχομεν

$$V=\frac{4}{3}\pi\varrho^3 \quad (1) \qquad Γ=2\pi\varrho \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $\varrho = \frac{\Gamma}{2\pi}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ρ εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{\Gamma^3}{8\pi^3} = \frac{\Gamma^3}{6\pi^2}.$$

*806. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ρ σφαίρας ἐχούσης ὄγκον P.*

Γνωρίζομεν ὅτι $P = \frac{4}{3}\pi\varrho^3$.

Λύοντες ὡς πρὸς ρ ἔχομεν $\varrho^3 = \frac{3P}{4\pi}$ καὶ $\varrho = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi}}$.

*807. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς ρ σφαίρας, ἐὰν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου της καὶ ὁ ὄγκος της ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν.*

Ἐὰν V εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, ρ ἡ ἀκτίς της, Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας της

θὰ ἔχωμεν $V = \frac{4}{3}\pi\varrho^3$ (1) $\Gamma = 2\pi\varrho$ (2)

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως V=Γ θὰ ἔχωμεν καὶ

$\frac{4}{3}\pi\varrho^3 = 2\pi\varrho$ ἢ $\frac{2}{3}\varrho^2 = 1$ ἢ $\varrho^2 = \frac{3}{2}$ καὶ $\varrho = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

*808. Ὁ λόγος τοῦ ὄγκου σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον περιγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου εἶναι ἴσος μὲ π : 6.*

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ V ὁ ὄγκος της θὰ ἔχωμεν

$$V = \frac{4}{3}\pi\varrho^2 \qquad (1)$$

Ἡ ἀκμὴ α τοῦ κύβου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, ἤτοι μὲ 2ρ, ἑπομένως ὁ ὄγκος $V_1$ τοῦ κύβου εἶναι $V_1 = (2\varrho)^3 = 8\varrho^3$ (2)

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\frac{V}{V_1} = \frac{4/3.\pi\varrho^3}{8\varrho^3} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}.$$

*809. Ἐὰν μὲ βάσιν δοθέντα κύκλον κατασκευάσωμεν κύλινδρον, ἡμισφαίριον καὶ κῶνον, ὥστε καὶ τὰ τρία στερεὰ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, οἱ ὄγκοι των εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ 3:2:1.*

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ ὁ κύλινδρος, ΟΑΒ ὁ κῶνος καὶ ΑΕΟΖΒ τὸ ἡμισφαίριον, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσιν τὸν κύκλον ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΟΚ.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ τῆς κοινῆς βάσεως, τότε τὸ κοινὸν ὕψος ΟΚ θὰ εἶναι

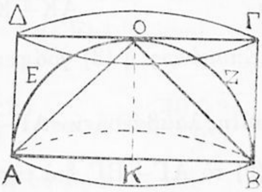
$$\text{ΟΚ}=\text{ΚΒ}=\rho$$

Θὰ ἔχωμεν ὄγκ. κυλινδρ.(ΑΒΓΔ)=

$$=\pi(\text{ΚΒ})^2(\text{ΟΚ})=\pi\rho^2\rho=\pi\rho^3$$

ὄγκ. ἡμισφαίρ. ΑΕΟΖΒ=

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(\text{ΚΒ})^3=\frac{4}{6}\pi\rho^3=\frac{2}{3}\pi\rho^3$$




Σχ. 110.

$$\text{ὄγκ. κών. ΟΑΒ}=\frac{1}{3}\pi(\text{ΚΒ})^2(\text{ΟΚ})=\frac{1}{3}\pi\rho^2\,\rho=\frac{1}{3}\pi\rho^3.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κύλινδρος εἶναι τριπλάσιος τοῦ κώνου (ΟΑΒ), τὸ δὲ ἡμισφαίριον διπλάσιον τοῦ αὐτοῦ κώνου (ΟΑΒ), ἤτοι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν αὐτῶν στερεῶν εἶναι, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3:2:1,

**810.** ***Ἐὰν εἰς κῶνον ἐγγραφῇ σφαῖρα, οἱ ὄγκοι των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν των.***

Ἔστω ΑΕΓ ἡ τομὴ τοῦ κώνου δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονός του, ΑΒ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ ΒΓ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του, ἔστω δὲ ὁ κύκλος Κ ἡ τομὴ τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον διὰ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ΚΔ ἡ ἀκτίς της.

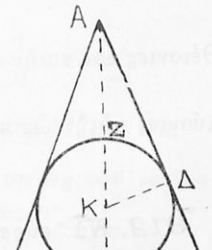
Ἐὰν μὲ $V_1$ καὶ $V_2$ παραστήσωμεν ἀντιστοίχως τοὺς ὄγκους τοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας ἔχομεν

$$V_1=\frac{1}{3}\pi(\text{ΒΓ})^2.(\text{ΑΒ})$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(\text{ΚΔ})^3.$$

Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{(\text{ΒΓ})^2(\text{ΑΒ})}{4(\text{ΚΔ})^3}\qquad(1)$$




Σχ. 111.

Ἐὰν $E_1$ καὶ $E_2$ παριστάνουν ἀντιστοίχως τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἔχομεν

$$E_1=\pi(\text{ΒΓ})(\text{ΑΓ})+\pi(\text{ΒΓ})^2=\pi(\text{ΒΓ})[\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ}]$$

$$E_2=4\pi(\text{ΚΔ})^2$$

καὶ

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{(\text{ΒΓ})[\text{ΑΓ}+\text{ΒΓ}]}{4(\text{ΚΔ})^2}\qquad(2)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΚΔ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν

$$\frac{A\Gamma}{AK}=\frac{B\Gamma}{K\Delta} \quad \text{καὶ ἐκ ταύτης} \quad \frac{A\Gamma}{AK}=\frac{B\Gamma}{K\Delta}=\frac{A\Gamma+B\Gamma}{AK+K\Delta} \quad (3)$$

ἀλλὰ $AK+K\Delta=AK+KB=AB$.

Ἐπομένως ἡ (3) γράφεται $\dfrac{A\Gamma}{AK}=\dfrac{B\Gamma}{K\Delta}=\dfrac{A\Gamma+B\Gamma}{AB}$,

ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $A\Gamma+B\Gamma=\dfrac{(B\Gamma)(AB)}{K\Delta}$· ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ $A\Gamma+B\Gamma$ διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς του λαμβάνομεν

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{(B\Gamma)(B\Gamma)(AB)}{4(K\Delta)^2(K\Delta)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E_1}{E_2}=\frac{(B\Gamma)^2(A\Gamma)}{4(K\Delta)^3} \quad (4)\cdot$$

τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (4) τὰ δεύτερα μέλη εἶναι ἴσα, ἄρα καὶ τὰ πρῶτα εἶναι ἴσα, ἤτοι $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{E_1}{E_2}$.

***811. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος ζώνης ἐχούσης ἐμβαδὸν E, ἂν ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι P.***

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, θὰ ἔχωμεν

ἐμβ.ζών.$=E=2\pi\rho\upsilon$ (1) ὄγκ.σφαιρ.$=P=\dfrac{4}{3}\pi\rho^3$ (2)

Ἀπὸ τὴν (2) ἔχομεν $\rho^3=\dfrac{3P}{4\pi}$ καὶ $\rho=\sqrt[3]{\dfrac{3P}{4\pi}}$.

Θέτοντες τὸν τιμὴν τοῦ ρ εἰς τὴν (1) ἔχομεν $E=2\pi\sqrt[3]{\dfrac{3P}{4\pi}}.\ \upsilon$.

Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς υ ἔχομεν $\upsilon=\dfrac{E}{2\pi\sqrt[3]{\dfrac{3P}{4\pi}}}$

***812. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης τῆς βάσεώς του εἶναι 3(δ²) καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 15 δ.***

Γνωρίζομεν ὅτι

ὀγκ. σφαιρ. τομ.$=$ἐμβ.ζώνης$\times 1/3$ ἀκτῖνος σφαίρας
$=3.5=15\ (\delta^3)$.

***813. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι 16 δ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 20 δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος.***

Γνωρίζομεν ὅτι (σχ. 101)

ὀγκ.σφαιρ.τμ.ΑΓΒΑ$=\dfrac{1}{2}\pi\ (AE)^2\ (\Gamma E)+\dfrac{1}{6}\pi(\Gamma E)^3$ (1)

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΔ ἔχομεν

$$(AE)^2=(ΓE).(EΔ) \text{ ἢ } 16^2=ΓE(ΓΔ-ΓE) \text{ ἢ }$$
$$256=ΓE(40-ΓE) \text{ ἢ } (ΓE)^2-40(ΓE)+256=0.$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$(ΓE)=\frac{40\pm\sqrt{1600-4.256}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{40\pm24}{2} \text{ καὶ } ΓE=\frac{40+24}{2}=32$$

(ἀποκλείεται ὡς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας) καὶ

$$ΓE=\frac{40-24}{2}=8.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ ΑΕ καὶ ΓΕ διὰ τῶν τιμῶν των, ἔχομεν

$$\text{ὀγκ.σφ.τμ.}(AΓBA)=\frac{1}{2}\pi.16^2\,8+\frac{1}{6}\pi8^3=1024\pi+85{,}33\pi=$$
$$=1109{,}33\pi=1159{,}33\times3{,}14=343{,}2962 \text{ κ δ.}$$

*814. **Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι 6 δ. καὶ 8 δ., ἐνῶ τὸ ὕψος του εἶναι 3 δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.***

Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, μὲ α καὶ β τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{2}\pi(\alpha^2+\beta^2)\upsilon+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3.$$

Ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι $\alpha=6$, $\beta=8$, $\upsilon=3$ ἔχομεν

$$V=\frac{1}{2}\pi(6^2+8^2).3+\frac{1}{6}\pi3^3=\frac{1}{2}\pi.300+\frac{1}{6}\pi.27=$$
$$=\frac{927\pi.}{6}=\frac{927\times3{,}1416}{6}=927\times0{,}5236=485{,}3772 \text{ κ δ.}$$

*815. **Ἂν P εἶναι ὁ ὄγκος καὶ υ τὸ ὕψος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.***

Ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς της βάσεώς του, θὰ ἔχωμεν

$$P=\frac{1}{2}\pi\alpha^2\upsilon+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3$$

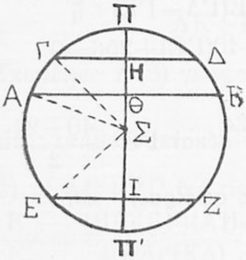
Λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς α καὶ ἔχομεν

$$6P=3\pi\alpha^2\upsilon+\pi\upsilon^3 \text{ ἢ } 3\pi\upsilon\alpha^2=6P-\pi\upsilon^3$$

$$\text{ἢ } \alpha^2=\frac{6P-\pi\upsilon^3}{3\pi\upsilon} \text{ καὶ } \alpha=\sqrt{\frac{6P-\pi\upsilon^3}{3\pi\upsilon}}.$$

*816. **Σφαῖρα μὲ ἀκτῖνα 75 δ. τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπεχόντων ἐκ τοῦ κέντρου αὐτῆς 9 δ. καὶ 45 δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων. α´) Ἂν τὰ ἐπίπεδα***

***κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου. β΄) Ἂν ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου.***




Σχ. 112

Ἔστωσαν ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου Σ τῆς σφαίρας Σ.

Γνωρίζομεν ὅτι

ὀγκ σφ.τμημ.(ΑΒΓΔ)=

$$=\frac{1}{2}\pi[(\text{ΑΘ})^2+(\text{ΓΗ})^2](\text{ΗΘ})+\frac{1}{6}\pi(\text{ΗΘ})^3 \quad (1)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΑΘΣ ἔχομεν

$(\text{ΑΘ})^2=(\text{ΑΣ})^2-(\text{ΣΘ})^2$ ἢ

$(\text{ΑΘ})^2=75^2-9^2=5544.$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΗΣ ἔχομεν

$(\text{ΓΗ})^2=(\text{ΓΣ})^2-(\text{ΣΗ})^2$ ἢ $(\text{ΓΗ})^2=75^2-45^2=3600$

Ἐπίσης ἔχομεν $\text{ΗΘ}=\text{ΣΗ}-\text{ΣΘ}$ ἢ $\text{ΗΘ}=45-9=36$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ ΑΘ, ΓΗ, ΗΘ διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὴν (1) ἔχομεν ὀγκ.σφ.τμ $(\text{ΑΒΓΔ})=\frac{1}{2}\pi(5544+3600)36+\frac{1}{6}\pi\ 36^3$

$$=164592\,\pi+7776\pi=172368\ \pi.$$

β΄) Ἐὰν τὰ ἐπιπεδα ΑΒ καὶ ΕΖ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Σ τῆς σφαίρας Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὀγκ.σφ.τμ.}(\text{ΕΖΒΑ})=\frac{1}{2}\pi\ [(\text{ΕΙ})^2+(\text{ΑΘ})^2]\ (\text{ΙΘ})+\frac{1}{6}\pi(\text{ΙΘ})^3 \quad (2)$$

Ἐδῶ εἶναι

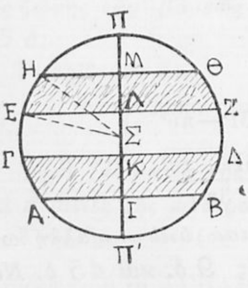
$(\text{ΕΙ})^2=(\text{ΓΗ})^2=3600,\ (\text{ΑΘ})=5544,\ \text{ΙΘ}=\text{ΙΣ}+\text{ΣΘ}=45+9=54$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ ΕΙ, ΑΘ, ΙΘ διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ τμ.}(\text{ΕΖΒΑ})=\frac{1}{2}\pi\ (3600+5544)54+\frac{1}{6}\pi.54^3$$

$$=236888\,\pi+26244\,\pi=509132\,\pi.$$

***817. Τέσσαρα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ διάμετρον σφαίρας καὶ χωρίζουν αὐτὴν εἰς 5 ἴσα μέρη· τίς ὁ ὄγκος ἑκάστου τούτων.***




Σχ. 113.

Ἔστωσαν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ τὰ τέσσαρα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὴν διάμετρον ΠΠ΄ τῆς σφαίρας Σ εἰς τὰ πέντε ἴσα μέρη $\text{Π΄Ι}=\text{ΙΚ}=\text{ΚΛ}=\text{ΛΜ}=\text{ΜΠ}=\frac{2\rho}{5}.$

α΄) Γνωρίζομεν ὅτι

ὄγκ.σφ.τμ ΗΠΘΗ=

$$=\frac{1}{2}\pi(\text{ΗΜ})^2(\text{ΜΠ})+\frac{1}{6}\pi\,(\text{ΜΠ})^3 \quad (1)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΣΜΗ ἔχομεν

$$(\text{HM})^2=(\Sigma\text{H})^2-(\Sigma\text{M})^2 \quad \text{ἢ}$$

$$\text{ἢ} \quad (\text{HM})^2=\varrho^2-(\Sigma\Pi-\text{M}\Pi)^2 \quad \text{ἢ} \quad (\text{HM})^2=\varrho^2-\left(\varrho-\frac{2\varrho}{5}\right)^2$$

$$\text{ἢ} \quad (\text{HM})^2=\varrho^2-\left(\frac{3\varrho}{5}\right)^2=\frac{16\,\varrho^2}{25}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν $\quad \text{M}\Pi=\dfrac{2\varrho}{5}.$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ HM, MΠ διὰ τῶν τιμῶν των εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{H}\Pi\Theta\text{H})=\frac{1}{2}\pi.\frac{16\,\varrho^2}{25}.\frac{2\varrho}{5}+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{2\varrho}{5}\right)^3$$

$$=\frac{16\,\pi\varrho^3}{125}+\frac{4\,\pi\varrho^3}{375}=\frac{52\,\pi\varrho^3}{375}.$$

β') $\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{EZ}\Theta\text{H})=\dfrac{1}{2}\pi[(\text{E}\Lambda)^2+(\text{HM})^2]\,(\Lambda\text{M})+\dfrac{1}{6}\pi(\Lambda\text{M})^3 \qquad (2)$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΛΕ ἔχομεν

$$(\text{E}\Lambda)^2=(\Sigma\text{E})^2-(\Sigma\Lambda)^2 \quad \text{ἢ} \quad (\text{E}\Lambda)^2=\varrho^2-\left(\frac{\varrho}{5}\right)^2=\frac{24\,\varrho^2}{25}.$$

Ἐπίσης ἔχομεν $\quad \Lambda\text{M}=\dfrac{2\varrho}{5}.$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἀντὶ τοῦ EΛ καὶ ΛM τὰς τιμάς των ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{EZ}\Theta\text{H})=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{24\,\varrho^2}{25}+\frac{16\,\varrho^2}{25}\right)\frac{2\varrho}{5}+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{2\varrho}{5}\right)^3$$

$$=\frac{40\pi\varrho^3}{125}+\frac{4\pi\varrho^3}{375}=\frac{124\pi\varrho^3}{375}.$$

γ') $\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\Gamma\Delta\text{ZE})=\dfrac{1}{2}\pi[(\Gamma\text{K})^2+(\text{E}\Lambda)^2)]\,(\text{K}\Lambda)+\dfrac{1}{6}\pi(\text{K}\Lambda)^3$

Ἐπειδὴ $\Gamma\text{K}=\text{E}\Lambda$ καὶ $\Lambda\text{K}=\dfrac{2\varrho}{5}$ ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\Gamma\Delta\text{ZE})=\frac{1}{2}\left(\frac{24\,\varrho^2}{25}+\frac{24\,\varrho^2}{25}\right)\frac{2\varrho}{5}+\frac{1}{6}\pi\left(\frac{2\varrho}{5}\right)^3$$

$$=\frac{48\,\pi\varrho^3}{125}+\frac{4\,\pi\varrho^3}{375}=\frac{148\,\pi\varrho^3}{375}.$$

δ') $\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{AB}\Delta\Gamma)=\text{ὄγκ.σφ.}(\text{EZ}\Theta\text{H})=\dfrac{124\,\pi\varrho^3}{375}.$

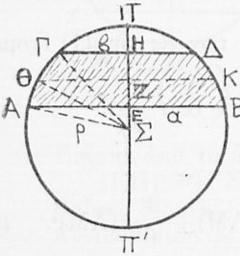
ε' $\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{A}\Pi'\text{B})=\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(\text{H}\Pi\Theta)=\dfrac{52\,\pi\varrho^3}{375}.$

***818.*** ***Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος διὰ τῆς διαμέτρου τῆς μέσης τομῆς αὐτοῦ (παραλλήλου καὶ ἰσάκις ἀπεχούσης τῶν βάσεών του) καὶ τοῦ ὕψους του.***

Ἂν ὀνομάσωμεν $\alpha$ καὶ $\beta$ τὰς ἀκτίνας ΑΕ καὶ ΓΗ (σχ. 114) τῶν δύο βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΔΓ καὶ $\upsilon$ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΕΗ θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(ΑΒΔΓ)=\frac{1}{2}\pi(\alpha^2+\beta^2)\upsilon+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3 \qquad (1)$$

Φέρομεν τὴν ΘΚ παράλληλον πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἰσάκις ἀπέχουσαν ἀπὸ αὐτάς. Φέρομεν ἐπίσης τὰς ἀκτῖνας ΣΑ, ΣΘ, ΣΓ.



Σχ. 114.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΣΕΑ ἔχομεν

$(ΑΣ)^2=(ΕΑ)^2+(ΕΣ)$ ἢ $\rho^2=\alpha^2+(ΣΖ-ΕΖ)^2$

ἢ $\rho^2=\alpha^2+(ΣΖ)^2-2(ΣΖ)(ΕΖ)+(ΕΖ)^2 \qquad (2)$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγ. ΣΓΗ ἔχομεν

$(ΣΓ)^2=(ΓΗ)^2+(ΣΗ)^2$ ἢ $\rho^2=\beta^2+(ΣΖ+ΖΗ)^2$

ἢ $\rho^2=\beta^2+(ΣΖ)^2+2(ΣΖ)(ΖΗ)+(ΖΗ)^2 \qquad (3)$

Προσθέτοντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψει ὅτι ΕΖ=ΖΗ ἔχομεν

$$2\rho^2=\alpha^2+\beta^2+2.(ΣΖ)^2+2(ΕΖ)^2 \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγωνον ΣΘΖ ἔχομεν

$(ΣΘ)^2=(ΘΖ)^2+(ΣΖ)^2$ ἢ

$\rho^2=(ΘΖ)^2+(ΣΖ)^2$ ἢ $2\rho^2=2.(ΘΖ)^2+2(ΣΖ)^2 \qquad (5)$

Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν (4) καὶ (5) εἶναι ἴσα θὰ εἶναι καὶ τὰ δεύτερα, ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$2(ΘΖ)^2+2(ΣΖ)^2=\alpha^2+\beta^2+2(ΣΖ)^2+2(ΕΖ)^2$$

ἢ $\alpha^2+\beta^2=2(ΘΖ)^2-2(ΕΖ)^2$

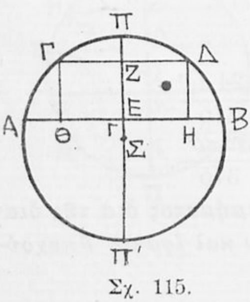
ἢ $\alpha^2+\beta^2=2(ΘΖ)^2-2.\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2$ ἢ $\alpha^2+\beta^2=2(ΘΖ)^2-\frac{\upsilon^2}{2}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\alpha^2+\beta^2$ εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(ΑΒΔΓ)=\frac{1}{2}\pi.\left(2.(ΘΖ)^2-\frac{\upsilon^2}{2}\right)\upsilon+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3$$

$$=\pi(ΘΖ)^2\upsilon-\frac{\pi\upsilon^3}{4}+\frac{1}{6}\pi\upsilon^3=\pi.(ΘΖ^2)\upsilon-\frac{1}{12}\pi\upsilon^3.$$

***819. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ, ἂν ἀπὸ τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἀφαιρέσωμεν τὸν εἰς τοῦτον ἐγγεγραμμένον κύλινδρον (μὲ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος).***



Σχ. 115.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ, ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΒΔΓ ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ΓΔΗΘ, θὰ ἔχωμεν

$$V=\text{ὄγκ.σφ.τμ.}(ΑΒΔΓ)-$$
$$-\text{ὄγκ.κυλίνδρ.}(ΓΔΗΘ) \qquad (1)$$

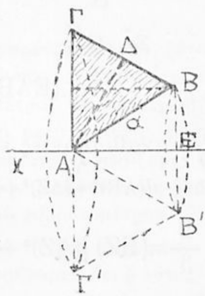
$$=\frac{1}{2}[\pi(\mathrm{AE})^2+(\Gamma Z)^2](EZ)+\frac{1}{6}\pi(EZ)^3-\pi(\Gamma Z)^2(EZ)$$

$$=\frac{1}{2}\pi[(\mathrm{AE})^2+(\Gamma Z)^2-2(\Gamma Z)^2](EZ)+\frac{1}{6}\pi(EZ)^3$$

$$=\frac{1}{2}\pi[(\mathrm{AE})^2-(\Gamma Z)^2](EZ)+\frac{1}{6}\pi(EZ)^3.$$

*820.* ***Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ προκύπτοντος ὅταν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται ὁλόκληρον στροφὴν περὶ ἄξονα διερχόμενον διά τινος κορυφῆς του καὶ κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν του εἶναι*** $\frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{4}$.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν xy, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς του Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν του ΑΓ. Φέρομεν τὸν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν xy.



Σχ. 113.

Κατὰ τὴν περιστροφήν του τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ γράψῃ στερεόν, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν πλευρὰν ΓΒ τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται ὁ ἄξων, ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν Ε τὴν ὁποίαν κατὰ τὴν περιστροφὴν γράφει ἡ ΓΒ· ἤτοι ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ζητούμενον ὄγκον θὰ ἔχωμεν

$$V=\frac{1}{3}(\mathrm{A\Delta}).E,\ \text{ἀλλὰ}\ \mathrm{A\Delta}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\quad \text{ὅθεν}\ V=\frac{1}{3}\,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}E \qquad (1)$$

Τὸ Ε εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνας βάσεων ΑΓ$=\alpha$ καὶ ΕΒ$=\frac{\alpha}{2}$ καὶ πλευρὰν ΓΒ$=\alpha$ ὅθεν

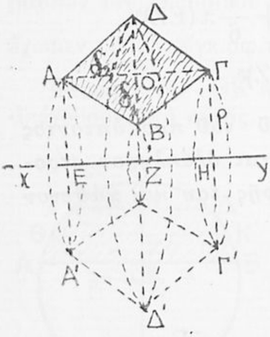
$$E=\pi\,\alpha\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3\pi\alpha^2}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Ε διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$V=\frac{1}{3}\,\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\pi\alpha^2}{2}\quad \text{ἢ}\quad V=\frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{4}.$$

*821.* ***Ρόμβος μὲ διαγωνίους*** $\delta_1$ ***καὶ*** $\delta_2$ ***στρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν διαγωνίων του καὶ εἰς ἀπόστασιν*** $\varrho$ ***ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.***

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ, ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ τὴν xy, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΔΒ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει τοῦ κέντρου Ο ἀπόστασιν $OZ=\rho$.




Σχ 117.

Ὁ ζητούμενος ὄγκος V θὰ εὑρεθῇ ἂν ἀπὸ τὸν ὄγκον τῶν κολούρων κώνων ποὺ παράγουν τὰ δύο ἴσα ὀρθογώνια τραπέζια ΕΑΔΖ καὶ ΖΔΓΗ ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον ποὺ παράγουν τὰ δύο ἴσα ὀρθογώνια τραπέζια ΕΑΒΖ καὶ ΖΒΓΗ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$V=2.\text{ὄγκ.}(\text{ΕΑΔΖ})-2\text{ὄγκ.}(\text{ΕΑΒΖ}) \qquad (1)$$

ἀλλὰ ὄγκ.(ΕΑΔΖ)=

$$=\frac{1}{3}\pi\,[(\text{ΑΕ})^2+(\text{ΔΖ})^2+(\text{ΑΕ})\,(\text{ΔΖ})]\,(\text{ΕΖ})$$

καὶ $\quad \text{ὄγκ.}(\text{ΕΑΒΖ})=\frac{1}{3}\pi\,[(\text{ΑΕ})^2+(\text{ΒΖ})^2+(\text{ΑΕ})\,(\text{ΒΖ})]\,\text{ΕΖ}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$V=2.\frac{1}{3}\pi[(\text{ΑΕ})^2+(\text{ΔΖ})^2+(\text{ΑΕ})(\text{ΔΖ})](\text{ΕΖ})-2.\frac{1}{3}[(\text{ΑΕ})^2+(\text{ΒΖ})^2+(\text{ΑΕ})\,(\text{ΒΖ})]\,(\text{ΕΖ})$$

$$=\frac{2}{3}\pi(\text{ΕΖ})\,[(\text{ΔΖ})^2-(\text{ΒΖ})^2+(\text{ΑΕ})\,(\text{ΔΖ})-(\text{ΑΕ})\,(\text{ΒΖ})] \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \text{ΑΕ}=\text{ΟΖ}=\rho, \quad \text{ΔΖ}=\text{ΟΖ}+\text{ΟΔ}=\rho+\frac{\delta_1}{2}=\frac{2\rho+\delta_1}{2},$

$$\text{ΕΖ}=\text{ΑΟ}=\frac{\delta_2}{2}, \quad \text{ΒΖ}=\text{ΟΖ}-\text{ΟΒ}=\rho-\frac{\delta_1}{2}=\frac{2\rho-\delta_1}{2}$$

ἡ προηγουμένη ἰσότης (2) γίνεται

$$V=\frac{2}{3}\pi.\frac{\delta_2}{2}\left[\left(\frac{2\rho+\delta_1}{2}\right)^2-\left(\frac{2\rho-\delta_1}{2}\right)^2+\rho.\left(\frac{2\rho+\delta_1}{2}\right)-\rho\left(\frac{2\rho-\delta_1}{2}\right)\right]$$

$$V=\frac{2}{3}\pi.\frac{\delta^2}{2}\left[\frac{4\rho^2+4\rho\delta_1+\delta^2{}_1-4\rho^2+4\rho\delta_1-\delta^2{}_1}{4}+\frac{2\rho^2+\rho\delta_1-2\rho^2+\rho\delta_1}{2}\right]$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\delta_2\;[2\rho\delta_1+\rho\delta_1]=2\pi\rho\delta_1\delta_2.$$

### Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

88) Τετράγωνον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΓΔ καὶ παράγει ἕνα κύλινδρον. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα στροφῆς ΓΔ. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ τετραγώνου περὶ τὴν ΓΔ, τὸ ὀρθογώνιον ΜΝΓΔ παράγει ἐπίσης ἕνα κύλινδρον. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΔΜ εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου πού παράγεται ἀπὸ τὸ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου

ποὺ παράγεται ἀπὸ τὸ ΜΝΓΔ. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΔΜ οὕτως, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου κυλίνδρου νὰ εἶναι διπλασία τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου κυλίνδρου.

89) Εἰς ἡμικύκλιον ἀκτῖνος ρ φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ. Ζητεῖται α΄) νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓΔ β΄) ὁ ὄγκος ποὺ παράγει τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ.

90) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Φέρομεν τὰς ΒΖ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΗ ἐπὶ τὴν ΖΓ. Περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΟΗ. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ ρ α΄) ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΑΘΒ καὶ ὁ ὄγκος του β΄) ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ΖΘΓ καὶ ὁ ὄγκος του.

91) Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς βάσεώς του.

92) Μιὰ δεξαμενὴ ποὺ ἔχει τὸ σχῆμα ἑνὸς ἀντεστραμμένου κώνου δέχεται τὸ νερὸ τῆς βροχῆς ποὺ πιπτει ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίας στέγης, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν 25; τ.μ. Ἂν τὸ ὕψος τῆς δεξαμενῆς εἶναι 4 μέτρα, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἀνοίγματος τῆς δεξαμενῆς, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι μετὰ συνεχῆ βροχὴν 5 ὡρῶν τὸ νερὸ ἔφθασε εἰς ὕψος 3,50 μ. ἐντὸς τῆς δεξαμενῆς. Γνωρίζομεν ἐπίσης, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ τῆς βροχῆς ποὺ πίπτει ἐπὶ ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἑκατοστόμετρα ἐπὶ ἕνα λεπτὸν τῆς ὥρας ἀνέρχεται εἰς 1/12 τοῦ χιλιοστομέτρου.

93) Ἓν ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος ΑΔ=υ καὶ ἐπιφάνειαν μυ. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ, ἂν γνωριζωμεν ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ περιστρεφομένου τοῦ τραπεζίου περὶ τὴν ΑΔ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπεζίου, εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

94) Δύο κύκλοι ἀκτίνων R καὶ ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Φέρομεν μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴνἐφαπτομένην καὶ περιστρέφομεν τὸ σύστημα περὶ τὴν διάκεντρον. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου ποὺ ἔχει πλευρὰν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην.

95) Εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ, τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον Ο καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΕΖΗ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου. Περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΑΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται ἀπὸ σχῆμα ΒΕΗΓ, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου εἶναι 1,50 μ.

96) Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ εὐθεῖαν xy ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου καὶ ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, ἂν στραφῇ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.

97) Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α καὶ λαμβάνομεν ΓΔ=x. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ φέρομεν εὐθεῖαν xΔy κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Περιστρέφομεν ἔπειτα τὸ ΑΒΓ περὶ τὴν xy. α΄) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις x, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ

στερεοῦ ποὺ θὰ παραχθῇ ἀπὸ τὴν περιστροφὴν εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4\pi\alpha^3}{3}$. β') Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΗ τοῦ τριγώνου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Νὰ εὑρεθῇ κατὰ ποίαν σχέσιν χωρίζει, τὸ ἐπίπεδον αὐτό, τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ποὺ παράγεται ἀπὸ τὸ ΑΒΓ.

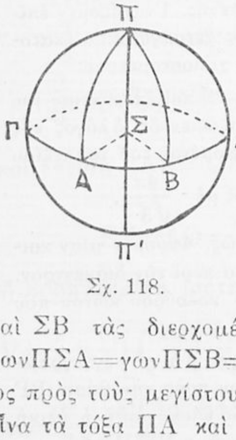
## Σφαιρικὰ σχήματα.

*822. Εἰς δισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον αἱ πλευραὶ αἱ ἀπέναντι τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι τεταρτημόρια περιφερειῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται, ἡ δὲ ἀπέναντι τῆς τρίτης γωνίας του πλευρὰ μετρεῖ ταύτην.*

Ἔστω ΠΑΒ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γωνία Β=γωνΑ= =1 ὀρθ : λέγω ὅτι τόξΠΒ=τόξΑΒ=$\frac{\pi}{2}$.

Ἔστω Σ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ τρίγωνον· ἡ ἀντίστοιχος τρίεδρος πρὸς τὸ ΠΑΒ εἶναι Σ.ΑΒΠ.

Ἡ γωνία Β εἶναι τὸ μέτρον τῆς διέδρου ΑΣΒΠ τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραί της, ἑπομένως ἡ δίεδρος αὐτὴ εἶναι ὀρθή, διότι τὸ ἐπίπεδον ΠΣΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ. Δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΠΣΑ. Τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ ὡς κάθετον ἐπὶ τὰ τεμνόμενα ἐπίπεδα ΠΣΑ καὶ ΠΣΒ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν αὐτῶν ΠΣ.



Σχ. 118.

Ἡ ΠΣ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτοῦ ΣΑ καὶ ΣΒ τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της καὶ ἑπομένως εἶναι γωνΠΣΑ=γωνΠΣΒ=1 ὀρθ.· ἀλλ' αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐπίκεντροι ὡς πρὸς τοὺς μεγίστους κύκλους, μέρη τῶν περιφερειῶν τῶν ὁποίων εἶνα τὰ τόξα ΠΑ καὶ ΠΒ, ἑπομένως βαίνουν ἐπὶ τοῦ τετάρτου τῆς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων, ἄρα τοξΠΑ=τοξΠΒ=$\frac{\pi}{2}$.

Τὸ σημεῖον Π ἀπέχει ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ τόξου ΑΒ τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἀπόστασιν ἴσην πρὸς $\frac{\pi}{2}$ ἀπὸ ἕκαστον, ἑπομένως τὸ Π εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΒ, ἄρα τὸ τόξον τοῦτο ὡς ἔχον πόλον τὴν κορυφὴν Π τῆς σφαιρικῆς γωνίας ΑΠΒ καὶ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας ταύτης.

*823. Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι μέτρον τῆν ἀπέναντι ταύτης γωνίας.*

Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΠ καὶ ΒΠ (σχ. 118) τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΠΒ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου, τὸ τρίγωνον ΑΠΒ εἶναι δισορθογώνιον καὶ ἑπομένως, κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μέτρον τῆς γωνίας ΑΠΒ.

*824. Ἑκάστη πλευρὰ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι τεταρτημόριον μεγίστου κύκλου σφαίρας.*

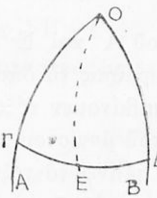
Ἐδείξαμεν εἰς τὴν ἄσκησιν 822 ὅτι, ἂν τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΠΒ (σχ. 118) εἶναι δισορθογώνιον τότε αἱ ἀπέναντι τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Α καὶ Β πλευραί του ΠΒ καὶ ΑΠ εἶναι τεταρτημόρια· ἐπειδὴ εἰς τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον ΑΠΒ καὶ ἡ τρίτη γωνία Π εἶναι ὀρθὴ ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ΑΒ εἶναι τεταρτημόριον μεγίστου κύκλου.

*825. Νὰ διχοτομηθῇ σφαιρική τις γωνία.*

Ἔστω ΑΟΒ (σχ. 119) ἡ δοθεῖσα σφαιρικὴ γωνία. Μὲ πόλον τὴν κορυφὴν Ο καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν τόξον ΓΔ κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς ΟΑ, ΟΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Φέρομεν τόξον ΟΕ μεγίστου κύκλου τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ε τοῦ τόξου ΓΔ· ἐσχηματίσθησαν τὰ τρίγωνα ΟΓΕ καὶ ΟΕΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, ἄρα θὰ εἶναι καὶ

γωνΓΟΕ=γωνΕΟΔ.

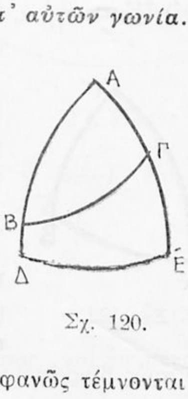
Ὥστε τὸ τόξον ΟΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΟΒ.




Σχ. 119.

*826. Νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται α΄) δύο πλευραὶ καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ᾽ αὐτῶν γωνία. β΄) μία πλευρὰ καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι αὐτῆς γ΄) αἱ πλευραί του δ΄) αἱ γωνίαι του.*

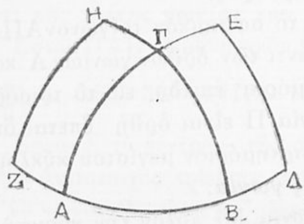
α΄) Ἔστωσαν α καὶ β τὰ μέτρα ἀντιστοίχως τῶν πλευρῶν καὶ $\mu^0$ τὸ μέτρον τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένης σφαιρικῆς γωνίας. Μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γράφομεν τόξον μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΔΕ=$\mu^0$· μὲ πόλους τὰ Δ καὶ Ε καὶ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τεταρτημόριον μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα προφανῶς τέμνονται εἰς




Σχ. 120.

τὸ Α· οὕτω σχηματίζεται ἡ σφαιρικὴ γωνία ΔΑΕ, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον τὸ ΔΕ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσον πρὸς μ· ἄρα ἡ ΔΑΕ εἶνε ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης λαμβάνομεν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς α καὶ β καὶ φέρομεν τὸ τόξον ΒΓ τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας τοῦ διερχομένου δι᾽ αὐτῶν· οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον διότι ἐκ κατασκευης ἔχει τοξ.ΑΒ=α, τοξ.ΑΓ=β καὶ γωνΒΑΓ=μ.

β΄) Ἔστω α ἡ δοθεῖσα πλευρὰ καὶ μ, ν ἀντιστοίχως αἱ προσκείμεναι πρὸς αὐτὴν γωνίαι.



Σχ. 121.

Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γράφομεν μέγιστον κύκλον αὐτῆς καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ λαμβάνομεν τοξ.ΑΒ ἴσον πρὸς α· μὲ πόλον τὸ Α γράφομεν τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΑΒ εἰς τὸ Δ· μὲ ἀρχὴν τὸ Δ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ τμῆμα ΔΕ ἔχον μέτρον ἴσον πρὸς μ καὶ φέρομεν τὸ τόξον ΑΕ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ Ε· μὲ πόλον τὸ Β γράφομεν τόξον μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον τέμει τὸ ΒΑ εἰς τὸ Ζ· ἐπ᾽ αὐτοῦ μὲ ἀρχὴν τὸ Ζ, λαμβάνομεν τόξον ΖΗ ἔχον μέτρον ἴσον μὲ ν καὶ φέρομεν τὸ τόξον ΒΗ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν σημείων Β καὶ Η· τοῦτο τέμνει τὸ τόξον ΑΕ εἰς τὸ Γ καὶ σχηματίζεται οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΓΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει πλευρὰν ΑΒ=α ἐκ κατασκευῆς καὶ γωνίας ΓΑΒ=μ καὶ ΓΒΑ=ν, διότι ἐκ κατασκευῆς τὰ μέτρα αὐτῶν ΔΕ καὶ ΖΗ εἶναι $\mu^0$ καὶ $\nu^0$ ἀντιστοίχως.

γ΄) Ἔστωσαν α, β, γ αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου σφαιρικοῦ τριγώνου.

Σχ. 122.

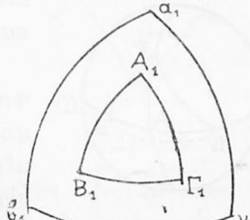
Ἐπειδὴ τὰ α, β, γ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὸ τρίγωνον τριέδρου, διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει νὰ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις $\alpha < \beta + \gamma$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma < 4$ὀρθ.

Ἔστω ὅτι οἱ περιορισμοὶ αὐτοὶ πληροῦνται. Τότε μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου αὐτῆς καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς τοξΑΒ=α· μὲ πόλον τὸ Α καὶ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς β γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ μὲ πόλιν Β καὶ μὲ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην πρὸς γ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ δύο αὗται περιφέρειαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον Γ, διότι ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ΑΓ+ΒΓ· πράγματι ἡ ΑΒ εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου α τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι χορδαὶ τῶν τόξων β καὶ γ ἐπίσης μεγίστων κύκλων τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἐπειδὴ δὲ $\alpha<\beta+\gamma$ θὰ εἶναι καὶ ΑΒ<ΑΓ+ΒΓ· ἂν λάβωμεν τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ τῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Γ καὶ Β καὶ Γ, σχηματίζεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι αἱ χορδαὶ τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ τῶν μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας ἐκ κατασκευῆς εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς χορδὰς α, γ, β μεγίστων κύκλων τῆς αὐτῆς σφαίρας· ἄρα τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ β καὶ γ, ἐπομένως τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς τὰ τρία δοθέντα τόξα, καὶ εἶναι τὸ ζητουμενον.

δ') Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ σφαιρικαὶ γωνίαι τοῦ ζητουμένου τριγώνου· ἵνα ὑπάρχῃ λύσις πρέπει

$$2\text{ὀρ.} < A+B+\Gamma < 4\text{ὀρ.} \qquad \text{καὶ} \qquad A+2\text{ὀρ} > B+\Gamma.$$

Μὲ πλευρὰς $\alpha=\pi-A$ $\beta=\pi-B$ καὶ $\gamma=\pi-\Gamma$ κατασκευάζομεν σφαιρικὸν τρίγωνον, ἔστω τοῦτο τὸ $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$· τοῦ τριγώνου, τούτου κατασκευάζομεν τὸ πολικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔστω τὸ $A_1B_1\Gamma_1$· λέγω ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι γνωρίζομεν.(Θεωρ. 368 Γ. Ν. Σακκελαρίου ἔκδοσις Δ') ὅτι ἂν δύο τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀλλήλων ἑκάστη γωνία του ἑνὸς εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀπέναντι γωνίας τοῦ ἄλλου, ἐπομένως




Σχ. 123.

$$\begin{aligned} \alpha+A_1&=\pi \\ \beta+B_1&=\pi \qquad (1) \\ \gamma+\Gamma_1&=\pi \end{aligned}$$

ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\alpha=\pi-A$ $\beta=\pi-B$ $\gamma=\pi-\Gamma$· ἐπομένως αἱ σχέσεις (1) γίνονται

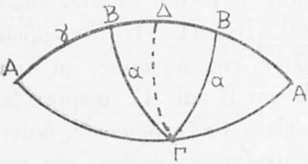
$$\begin{aligned} \pi-A+A_1&=\pi & & A=A_1 \\ \pi-B+B_1&=\pi & \text{ἢ} \quad & B=B_1 \\ \pi-\Gamma+\Gamma_1&=\pi & & \Gamma=\Gamma_1 \end{aligned}$$

ἤτοι τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ἔχει γωνίας τὰς δοθείσας καὶ ἐπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

*827. Νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς μιᾶς τούτων γωνία.*

Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ ἡ γωνία Α ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου.

Κατασκευάζομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους, οἱ ὁποῖοι νὰ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν Α. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας αὐτῆς ἓν τόξον ΑΓ ἴσον μὲ β καὶ μὲ πόλον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου α γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου. Ἐὰν Β εἶναι ἡ τομὴ τοῦ κύκλου αὐτοῦ μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας Α, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον.



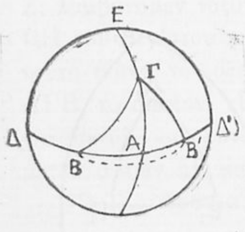

Σχ. 124.

*828. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς του ἢ μιᾶς γωνίας του.*

α΄) Φέρομεν δύο μεγίστους κύκλους ΔΑΔ΄ καὶ ΕΑΕ΄ καθέτους ἀναμεταξύ των, οὕτως ὥστε ὁ πόλος τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς τομῆς των λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ΕΕ΄ ἓν τόξον ΑΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Ἔπειτα μὲ πόλον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα σφαιρικὴν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν γράφομεν ἕνα τόξον ΒΒ΄, τὸ ὁποῖον θὰ κόψῃ τὸν μέγιστον κύκλον ΔΔ΄ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β΄ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ΕΓΕ΄.




Σχ. 125.

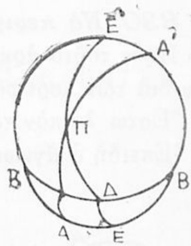
Ἂν φέρωμεν τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων ΓΒ, ΓΒ΄ θὰ σχηματισθοῦν δύο συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒ΄Γ τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ πόλον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν νὰ τέμνῃ τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΑΔ΄

β) Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ μία γωνία τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Φέρομεν δύο μεγίστους κύκλους ΒΑΒ΄ καὶ ΒΓΔΒ΄ (σχ.126), οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζουν γωνία Β ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. Ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ ΒΑΒ.

Ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔΒ′ λαμβάνομεν τὸ τόξον ΒΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν ἕνα τόξον μεγίστου κύκλου ΑΓΑ′ κάθετον ἐπὶ τὸν κύκλον ΒΑΒ′. Ὁ μέγιστος αὐτὸς κύκλος θὰ κόψῃ τὸν ΒΑΒ′ εἰς τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

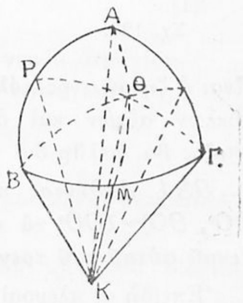



Σχ. 126.

**829. *Αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.***

Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικόν τι τρίγωνον καὶ ΚΑΒΓ ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τοῦτο τρίεδρος γωνία καὶ ΑΜ μία τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

Ἕνεκα τῆς διαμέσου ΑΜ ἔχομεν τοξ.ΒΜ=τοξ.ΜΓ καὶ ἑπομένως γωνΒΚΜ=γωνΜΚΓ, ὡς ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσαι ἐπὶ ἴσων τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῆς ἕδρας ΒΚΓ τῆς τριέδρου Κ. Ἡ ΚΜ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ἕδρας ΒΚΓ τῆς τριέδρου, ἄρα τὸ ἐπίπεδον ΑΚΜ τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ τὴν διάμεσον αὐτοῦ ΑΜ, ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀκμῆς ΑΚ τῆς τριέδρου καὶ τῆς διχοτόμου ΚΜ τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν ἀκμὴν αὐτὴν ἕδρας της.




Σχ. 127.

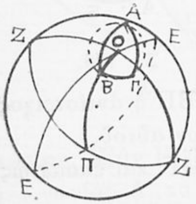
Ἔστωσαν ΒΝ καὶ ΓΡ αἱ δύο ἄλλαι διάμεσοι αὐτῆς· αὗται διὰ τὸν προηγούμενον λόγον εἶναι αἱ τομαὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν ἀκμῶν ΚΒ καὶ ΚΓ καὶ τῶν διχοτόμων ΚΝ καὶ ΚΡ ἀντιστοίχως τῶν ἀπέναντι πρὸς αὐτὰς ἑδρῶν τῆς τριέδρου. Ἀλλὰ τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΚΘ (βλέπε ἄσκησιν 861), ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου εἴς τι σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν τῶν τριῶν ἐπιπέδων· ἀλλὰ τὰ κοινὰ σημεῖα ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων τούτων καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα τῶν τόξων ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ· ἄρα τὸ κοινὸν σημεῖον Θ τῶν ἐπιπέδων καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου εἶναι κοινὸν καὶ τῶν τόξων τούτων, ἑπομένως τὰ τρία αὐτὰ τόξα, ἤτοι αἱ διάμεσοι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Θ, ἤτοι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

*830. Νὰ περιγραφῇ κύκλος περὶ δοθὲν σφαιρικὸν τρίγωνον.*

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἔστω λοιπὸν τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος πόλος θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β θὰ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, τὸ ὁποῖον θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπειδὴ καὶ τὸ κέντρον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὸ Α καὶ Β. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν σφαίραν κατὰ μέγιστον κύκλον.




Σχ. 128.

Ἐπίσης ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος πόλος θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπὸ τὰ Α καὶ Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ διερχομέναυ καθέτως ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΓ.

Ἡ τομὴ Ο καὶ Π τῶν δύο αὐτῶν κύκλων εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος. Ἔπειτα μὲ πόλον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν κύκλων αὐτῶν καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΟΑ γράφομεν κύκλον ὁ ὁποῖος θὰ διέλθῃ διὰ τῶν Α, Β, Γ.

*831. Δοθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου μὲ πλευρὰς (ἢ γωνίας) 60°, 80°, 100° νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι (ἢ αἱ πλευραὶ) τοῦ πολικοῦ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.*

Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ πολικοῦ του τριγώνου, αἱ γωνίαι τοῦ πολικοῦ θὰ εἶναι $180^\circ-60^\circ=120^\circ$, $180^\circ-80^\circ=100$, $180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

*832. Ἡ ἀκτὶς σφαίρας εἶναι 0,1 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἀτράκτου γωνίας 30° 4.750.*

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο ἀτράκτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γωνιῶν του. Ἤτοι, ἂν ὀνομάσωμεν μὲ Α καὶ Α′ δύο ἀτράκτους καὶ μὲ Γ, Γ′ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τῳν, θὰ ἔχωμεν $\frac{A'}{A}=\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ (1)

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἄτρακτος Α αὐξανόμενος γίνεται ὁλόκληρος ἐπιφάνεια Ε σφαίρας, ἡ γωνία του αὐξαναμένη καὶ αὐτὴ θὰ γίνῃ ἴση μὲ 4 ὀρθάς. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) θὰ γίνῃ

$$\frac{A'}{E}=\frac{\Gamma'}{4\,\text{ὀρθ.}} \quad \text{ἢ} \quad (A')=(E)\,\frac{\Gamma'}{4\,\text{ὀρθ.}} \qquad (2)$$

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν ἀτράκτου Α΄ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2).

Ἐδῶ ἔχομεν $(Ε)=4\pi\rho^2=4\pi.0{,}1^2=0{,}04\pi$ καὶ $\Gamma=30^0$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) ἔχομεν

$$(Α')=0{,}04\ \pi.\frac{30^0}{360^0}=\frac{0{,}04\pi}{12}=\frac{0{,}01\pi}{3}=0{,}01047 \text{ τ.μ.}$$

Ὁμοίως, ἂν γωνία$=75^0$, εὑρίσκομεν

$$(Α')=0.04\ \pi.\frac{75}{360}=$$

$$=\frac{0{,}01.\ 5.\ \pi}{6}=0{,}01\times5\times0{,}5236=0{,}2618 \text{ τ. μ.}$$

*833. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἀτράκτου γωνίας $30^0$, ἂν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι 41 ($\delta^2$).*

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀτράκτου Α δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(Α)=(Ε)\ \frac{\Gamma}{4\ \text{ὀρθ.}} \qquad (1)$$

ὅπου (Ε)=ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας καὶ Γ=γωνία ἀτράκτου.

Ἀντικαθιστῶντες τὰ Ε καὶ Γ διὰ τῶν τιμῶν των ἔχομεν

$$(Α)=41.\frac{30^0}{360}=\frac{41}{12}\ (\delta^2).$$

*833΄. Τί μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι σφαιρικὸν τρίγωνον, ἔχον γωνίας $92^0$, $100^0$, $120^0$.*

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$Ε=\frac{\pi\rho^2.\Sigma}{180} \qquad (1)$$

ὅπου ρ=ἀκτὶς σφαίρας, Σ=σφαιρικὴ ὑπεροχή.

Ἐδῶ $\Sigma=(92^0+100^0+120^0)-180^0=132^0$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Σ διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$Ε=\pi\rho^2.\frac{132}{180}=\pi\rho^2.\frac{11}{15}=4\ \pi\rho^2.\frac{11}{60}$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι τὰ 11/60 τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

*834. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν εἰς ($\delta^2$) τοῦ τριγώνου τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 0,6 μ.*

Ἂν εἰς τὸν τύπον $Ε=\frac{\pi\rho^2.\Sigma}{180}$, ποὺ δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, θέσωμεν $\Sigma=132$ καὶ $\rho=0{,}6$ ἔχομεν

$$E=\frac{\pi.0,6^2.132}{180}=\frac{\pi.0,36.11}{15}=\frac{0,0396\,\pi.}{15}=0,0082\ \delta^2$$

*835. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχοντος γωνίας 100°, 120°, 140°, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας εἶναι 0,16 μ.*

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε σφαιρικοῦ τριγώνου δίδεται ὑπὸ τύπου

$$E=\frac{\pi\rho^2.\Sigma}{180} \qquad (1)$$

Ἐδῶ Σ=σφαιρικὴ ὑπεροχὴ=(100°+120°+140°)−180°=180 καὶ ρ=0,08. Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$E=\frac{\pi.0,08^2.180}{180}=0,0064\,\pi.(\mu^2)$$

*836. Αἱ πλευραὶ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι 80°, 74°, 120° ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 0,24 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολικοῦ τοῦ τριγώνου εἰς (μ²)..*

Γνωρίζομεν ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀναμεταξύ των, κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ ἄλλου.

Αἱ γωνίαι τοῦ πολικοῦ εἶναι λοιπὸν

$$180-80=100, \quad 100-74=106, \quad 180-128=52^0.$$

Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $E=\dfrac{\pi\rho^2.\Sigma}{180}$.

Ἐδῶ Σ=(100+106+52)−180=78, καὶ ρ=0,24.

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $E=\dfrac{\pi.0,24^2.78}{180}=\dfrac{0,7488\pi}{30}.\ (\mu^2)$

*837. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ πολυγώνου σφαίρας, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα 10 δ., ἐὰν αἱ γωνίαι του εἶναι 100°, 120°, 160°, 140°.*

Τὸ ἐμβαδὸν Ε σφαιρικοῦ πολυγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E=\frac{\pi\rho^2.}{180}[T-(\nu-2)180]$$

ὅπου Τ=ἄθροισμα γωνιῶν του, ν=ἀριθμὸς πλευρῶν του.

Ἐδῶ ἔχομεν

$$T-(\nu-2)180=(100+120+160+140)-2.180=160, \quad \text{καὶ } \rho=10.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $E=\dfrac{\pi.10^2.160}{180}=\dfrac{800\pi}{9} \qquad (\delta^2)$

*838. Τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τετραγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος σχηματίζουν μὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων γωνίας $80^0$, $100^0$, $120^0$, $155^0$, τὸ μῆκος δὲ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν της εἶναι 42 δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της.*

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε σφαιρικοῦ πολυγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $$E=\frac{\pi\rho^2}{180}[T-(\nu-2)180].$$

Ἐδῶ $T-(\nu-2)180=(80+100+120+155)-2.180=95$ καὶ $\rho=42$.

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν $$E=\frac{\pi.42^2.95}{180}=931\pi. \quad (\delta^2)$$

*839. Τὰ ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τριγωνικῆς πυραμίδος σχηματίζουν μὲ ἕκαστον τῶν ἄλλων γωνίας $60^0$, $80^0$, $100^0$. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι 45($\delta^2$). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.*

Ἐάν εἰς τὸν τύπον $E=\frac{\pi\rho^2\Sigma}{180}$ πού δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου θέσωμεν $E=45$, $\Sigma=(60+80+100)-180=60^0$ ἔχομεν $$45=\frac{\pi\rho^2.60}{180} \quad \text{ἢ} \quad 135=\pi\rho^2 \quad \text{καὶ} \quad \rho=\sqrt{\frac{135}{\pi}}.$$

*840. Ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 5δ. Τίς ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ ὄνυχος ἔχοντος γωνίαν $36^0$.*

Ὁ ὄγος σφαιρικοῦ ὄνυχος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\text{ὄγκ σφαιρ ὄνυχος}=\frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3.\mu^0}{360}$$

ὅπου $\mu^0$=γωνία ὄνυχος καὶ $\rho$=ἀκτὶς σφαίρας.

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ.ὄνυχος}=\frac{4\pi.5^3.36}{3\ 360}=\frac{375\pi}{30} \quad (\delta^3).$$

*841. Τίς ἡ γωνία σφαιρικοῦ ὄνυχος ἔχοντος ὄγκον 1($\delta^3$), ἐνῶ ἡ σφαῖρα ἔχει ὄγκον 10($\delta^3$).*

Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ὄγκ.σφαιρ.ὄνυχος}=\frac{\text{ὄγκ.σφαιρ.}\times\mu^0}{360}$.

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$1=\frac{10.\mu^0}{360} \quad \text{ἢ} \quad \mu^0=\frac{360}{10}=36^0.$$

Ὥστε ἡ γωνία τοῦ ὄνυχος εἶναι $36^{\circ}$.

***842. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, ἐὰν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου τῆς βάσεως εἶναι $100^{\circ}$ ἑκάστη, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς σφαίρας 75δ.***

Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ὄγκ.σφαιρ.πυραμ.}=\frac{1}{3}\,\text{σφαιρ.βάσεως}\times\text{ἀκτῖν.σφαίρας}$$

Ἐδῶ $\qquad$ $\text{ἐμβ.σφ.τριγ.}=\dfrac{\pi\rho^2\Sigma}{180}$

καὶ ἐπειδὴ $\quad \rho=75$, καὶ $\Sigma=(100+100+100)-180=120$

ἔχομεν $\quad \text{ἐμβ.σφ.τριγ.}=\dfrac{\pi.75^2.120}{180}=\dfrac{\pi.5625.2}{3}=\dfrac{11250\pi}{3}$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$\text{ὄγκ.σφ πυρ.}=\frac{1}{3}\cdot\frac{11250\pi}{3}.75=93750\pi$$

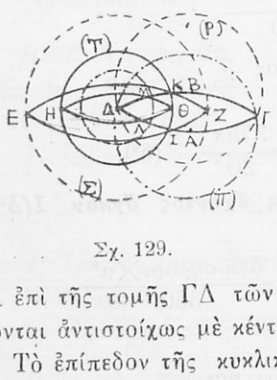
## Διάφοροι ἀσκήσεις.

***843. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα α΄) ἐκ τριῶν σημείων αὐτῆς. β΄) διερχομένη διὰ δύο σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας.***

α΄) Βλέπε ἄσκησιν 765 β΄.

β΄) Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Δ ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἀκτῖνος ρ.

Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα $\rho_1$ δοθεῖσαν καὶ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας Δ τὸ κέντρον της θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ Δ ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\rho+\rho_1$ ἢ μὲ $\rho-\rho_1$ καὶ ἑπομένως θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας (Σ) ἢ (Τ) ὁμοκέντρου τῆς δοθείσης Δ, καὶ μὲ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως $\rho+\rho_1$ ἢ $\rho-\rho_1$.



Σχ. 129.

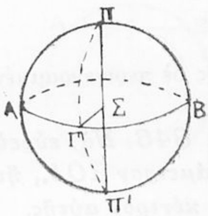
Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη σφαῖρα θὰ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ ἔχει ἀκτῖνα $\rho_1$, τὸ κέντρον της θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς ΓΔ τῶν δύο σφαιρῶν Π καὶ Ρ, αἱ ὁποῖαι γράφονται ἀντιστοίχως μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\rho_1$.

Τὸ ἐπίπεδον τῆς κυκλικῆς τομῆς ΓΔ τέμνει τὰς σφαίρας (Σ) καὶ (Τ) κατὰ τοὺς κύκλους ΕΖ καὶ ΗΘ. Τὰ κοινὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ, Μ τοῦ κύκλου ΓΔ καὶ τῶν κύκλων ΕΖ καὶ ΗΘ εἶναι τὰ κέντρα τῶν ζητουμένων σφαιρῶν.

Τὰ μὲ σημεῖα Ι καὶ Κ εἶναι κέντρα τῶν δύο ἐξωτερικῶν σφαιρῶν, τὰ δὲ Λ καὶ Μ τὰ κέντρα τῶν δύο σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι περιβάλλουν τὴν σφαῖραν Δ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει λοιπὸν καὶ λύσεις.

*844.* ***Πάντα τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ἀγόμενα δι᾽ ἑνὸς τῶν πόλων μεγίστου κύκλου εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν περιφέρειάν του.***

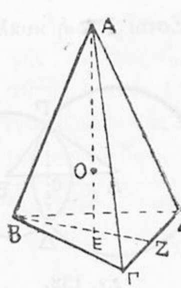


Σχ. 130.

Ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΒ τῆς σφαίρας Σ, καὶ ΠΓΠ′ τυχὸν τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῶν πόλων Π καὶ Π′. Τὸ ἐπίπεδον ΠΓΠ′ ἐπειδὴ διέρχεται διὰ τῶν πόλων Π καὶ Π′ τοῦ κύκλου ΑΒ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ καὶ ἑπομένως ἡ σφαιρικὴ γωνία ΠΓΒ εἶναι ὀρθή. Τὸ τόξον ΠΓΠ′ εἶναι λοιπὸν κάθετον ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ΑΒ.

*845.* ***Ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι α. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες ρ, ρ′ τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς αὐτὸ σφαίρας.***

α′) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς ἓν τετράεδρον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν 6 ἐπιπέδων ποὺ διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας του (βλέπε ἄσκησιν 788, 789). Ἐπειδὴ τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικόν, τὸ σημεῖον αὐτὸ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι τὸ κοινὸν αὐτὸ σημεῖον εἶναι ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν ἢ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τοῦ τετραέδρου μὲ τὴν τομὴν τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὰ 3/4 ἑκάστης ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἕπεται, ὅτι ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὰ 3/4 τοῦ ὕψους τοῦ τετραέδρου, ἡ δὲ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ 1/4 τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἔστω λοιπὸν τὸ κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ, ἀκμῆς α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΕ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγω-



Σχ. 131.

νον ΑΒΕ ἔχομεν $(ΑΕ)^2=(ΑΒ)^2-(ΒΕ)^2$ καὶ ἐπειδὴ $ΑΒ=α$ καὶ $ΒΕ=2/3$ τοῦ ὕψους $ΒΖ=\frac{2}{3}\cdot\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{α\sqrt{3}}{3}$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΑΕ)^2=α^2-\left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2=α^2-\frac{α^2}{3}=\frac{2α^2}{3}$ καὶ $ΑΕ=α\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{α\sqrt{6}}{3}$

Ἡ ἀκτὶς λοιπὸν τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἶναι

$$\frac{1}{4}.\ ΑΕ=\frac{1}{4}\cdot\frac{α\sqrt{6}}{3}=\frac{α\sqrt{6}}{12}$$

τῆς δὲ περιγεγραμμένης σφαίρας $\frac{3}{4}\ ΑΕ=\frac{3α\sqrt{6}}{12}=\frac{α\sqrt{6}}{4}$.

***846. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον 10 δ., ἥτις γίνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος 3 δ. ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτῆς.***

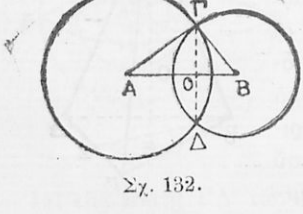
Ἔστω ΑΒ(σχ.101) ἡ τομὴ τῆς σφαίρας Σ ὑπὸ ἐπιπέδου. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΑΣ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΣ. $(ΑΕ)^2=(ΑΣ)^2-(ΣΕ)^2$ · ἐπειδὴ ἐδῶ εἶναι $ΑΣ=5$ καὶ $ΣΕ=3$ ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$(ΑΕ)^2=4^2-3^2 \quad ἢ \quad (ΑΕ)^2=16 \quad καὶ \quad ΑΕ=4.$$

Ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ΑΒ θὰ εἶναι λοιπὸν 2.4=8δ.

***847. Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν εἶναι 6δ. καὶ 4δ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων των 5δ. Τίς ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς τομῆς αὐτῶν.***

Ἔστω ΓΔ ἡ κυκλικὴ τομὴ τῶν σφαιρῶν Α καὶ Β. Ἡ ἀκτὶς ΟΓ αὐτῆς εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $ΑΒ=5$, $ΑΒ=6$, $ΓΒ=4$.



Σχ. 132.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὕψος τριγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$ΟΓ=\frac{2.}{ΑΒ}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

Ἐδῶ $α=4$, $β=6$, $γ=5$ καὶ $τ=7,5$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

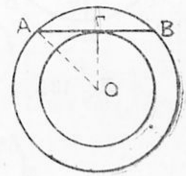
$$ΟΓ=\frac{2}{5}\sqrt{7,5\times2,5\times1,5\times3,5}=\frac{2}{5}\sqrt{98,4375}=3,968$$

***848. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου σφαίρας, ἐχούσης διάμετρον 5δ., καὶ ὁριζομένου ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος 1δ. ἀπὸ τὸ κέντρον.***

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΟ (σχ. 133) ἔχομεν $(ΑΓ)^2=(ΑΟ)^2-(ΟΓ)^2$ καὶ ἐπειδὴ $ΑΟ=2,5$ καὶ $ΟΓ=1$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$(ΑΓ)^2=2,5^2-1^2=5,25 \quad \text{ἄρα} \quad ΑΓ=\sqrt{5,25}.$$

***849. Αἱ ἀκτῖνες δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν εἶναι ϱ, ϱ₁. Ἄγεται ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας.***



Ἔστωσαν Ο αἱ δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι καὶ ΑΒ ἡ τομὴ τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου ἐφαπτομένου τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΓ.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΓ ἔχομεν

$$(ΑΓ)^2=(ΟΑ)^2-(ΟΓ)^2 \quad \text{ἢ}$$

Σχ. 133.

$(ΑΓ)^2=\varrho^2-\varrho_1^2$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς τομῆς ΑΒ, θὰ ἔχωμεν $Ε=\pi(ΑΓ)^2=\pi(\varrho^2-\varrho_1^2)$

***850. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν 8δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἀπεχόντων 5δ. καὶ 7δ. ἀπὸ τοῦ Α καὶ Β.***

Ὁ τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 5δ. ἀπὸ τὸ Α (σχ.132) εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 5δ. Ὁμοίως ὁ τόπος τῶν σημείων ποὺ ἀπέχουν 7δ. ἀπὸ τὸ Β εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 7δ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν σφαιρῶν, δηλαδὴ ἡ περιφέρεια κύκλου καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ὕψος ΟΓ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ καὶ κέντρον αὐτῆς ὁ ποὺς Ο τοῦ ὕψους ΓΟ. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς $ΑΒ=8$, $ΑΓ=5$, $ΒΓ=7$ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ΓΟ χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον $ΓΟ=\dfrac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

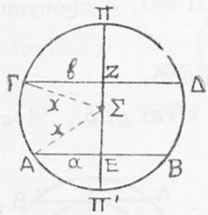
Ἐδῶ $\alpha=7$, $\beta=5$, $\gamma=8$, $\tau=10$.

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$ΓΟ=\frac{2}{8}\sqrt{10\times3\times5\times2}=\frac{2}{8}\sqrt{300}=4,33.$$

***851. Αἱ ἀκτίνες δύο παραλλήλων τομῶν σφαίρας εἶναι α καὶ β, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.***

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ τομαὶ της σφαίρας Σ ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν ΕΖ=δ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΣΑ καὶ ΣΓ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΣ καὶ ΓΖΣ.




Σχ. 134.

$$(ΕΣ)^2=(ΑΣ)^2-(ΑΕ)^2 \text{ ἢ } ΕΣ=\sqrt{x^2-\alpha^2}$$

$$(ΣΖ)^2=(ΓΣ)^2-(ΖΓ)^2 \text{ ἢ } ΣΖ=\sqrt{x^2-\beta^2}.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$ΕΣ+ΣΖ=\sqrt{x^2-\alpha^2}+\sqrt{x^2-\beta^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \delta=\sqrt{x^2-\alpha^2}+\sqrt{x^2-\beta^2}$$

ὑψοῦντες καὶ τὰ δύο μέλης της εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$\delta^2=x^2-\alpha^2+2\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}+x^2-\beta^2$$

$$\text{ἢ} \quad 2\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}=(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)-2x^2$$

ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον ἔχωμεν

$$4(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)=(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)x^2+4x^4$$

$$\text{ἢ} \quad 4x^4-4\alpha^2x^2-4\beta^2x^2+4\alpha^2\beta^2=$$

$$=(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)-4\delta^2x^2-4\alpha^2x^2-4\beta^2x^2+4x^4$$

$$\text{ἢ} \quad 4\delta^2x^2=(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2$$

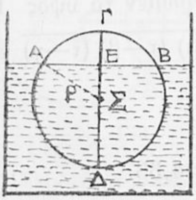
$$\text{ἢ} \quad x^2=\frac{(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2}{4\delta^2} \quad \text{καὶ}$$

$$x=\frac{1}{2\delta}\sqrt{(\delta^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{2\delta}\sqrt{(\delta^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\delta^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}$$

$$\text{ἢ} \quad x=\frac{1}{2\delta}\sqrt{[\delta^2+(\alpha+\beta)^2][\delta^2+(\alpha-\beta)^2]}.$$

852. ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος σφαίρας ἀκτῖνος ρ, ἥτις πλέει ἐντὸς ρευστοῦ εἰδικοῦ βάρους Ε, ὅταν τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι ἔξω τοῦ ρευστοῦ.***

Ἔστω ὅτι ἡ σφαῖρα Σ ἔχει βυθισθῇ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ μέχρι τῆς γραμμῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας της εὑρίσκεται ἔξω τοῦ ὑγροῦ ἕπεται, ὅτι τὸ ὕψος ΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τῆς διαμέτρου 2ρ ἤτοι




Σχ. 135.

$$ΓΕ=\frac{1}{4}.2\rho=\frac{\rho}{2}. \text{ ὁπότε } ΔΕ=\frac{3}{4}\,2\rho=\frac{3\rho}{2}.$$

Τὸ βάρος τῆς σφαίρας θὰ εἶναι προφανῶς ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον ἐκτοπίζει ἡ σφαῖρα. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι οἱ ὄγκοι V καὶ V′ τῶν δύο αὐτῶν σωμάτων (σφαίρας καὶ σφαιρικοῦ τμήματος) εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πυκνοτήτων δ καὶ ε τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ὑγροῦ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\frac{V}{V'}=\frac{\varepsilon}{\delta}$ (1)

Ἀλλὰ $V=\frac{4}{3}\pi\rho^3$

καὶ $\text{ὄγκ.σφ.τμημ. } A\Delta B=\frac{1}{2}\pi(AE)^2(E\Delta)+\frac{1}{6}\pi(\Delta E)^3$ (2)

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΑΕ ἔχομεν

$$(AE)^2=(A\Sigma)^2-(\Sigma E)^2 \text{ ἢ } (AE)^2=\rho^2-\left(\frac{\rho}{2}\right)^2=\frac{3\rho^2}{4}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ ΑΕ καὶ ΔΕ διὰ τῶν ἴσων των, ἔχομεν

$$V'=\text{ὄγκ.σφ.τμ. } A\Delta B=\frac{1}{2}\pi\,\frac{3\rho^2}{4}\cdot\frac{3\rho}{2}+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3\rho}{2}\right)^3$$

$$=\frac{9\pi\rho^3}{16}+\frac{27\pi\rho^3}{16}=\frac{36\pi\rho^3}{16}=\frac{9\pi\rho^3}{4}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰ V καὶ V′ διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3}{\frac{9\ \pi\rho^3}{4}}=\frac{\varepsilon}{\delta} \text{ ἢ } \frac{16}{27}=\frac{\varepsilon}{\delta} \text{ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν } \delta=\frac{27\,\varepsilon}{16}.$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι βάρος=ὄγκον×εἰδικὸν βάρος (3)

Ἐδῶ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήμ.$=\frac{36\pi\rho^3}{16}$ καὶ εἰδικὸν βάρος ὑγροῦ ε.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) ἔχομεν βάρος$=\frac{9\pi\rho^3}{4}\cdot\varepsilon$.

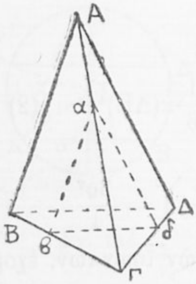
Ὥστε τὸ βάρος τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{9\pi\rho^3\varepsilon}{4}$.

***Σημείωσις.*** Τὸ βάρος τῆς σφαίρας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον της ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος της. Πράγματι ἔχομεν βάρος$=\frac{4}{3}\pi\rho^3\cdot\frac{27\,\varepsilon}{16}=\frac{9\pi\rho^3.\varepsilon}{4}$.

***853. Τὸ μέρος τετραέδρου τὸ ἀποτεμνόμενον δι᾽ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς μίαν ἕδραν του, εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτό.***

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ (σχ. 136) καὶ αβγ ἡ τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ἕδραν του ΑΒΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ εἶναι ὅμοια.

Αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ αβ, ΑΔ καὶ αδ, ΒΔ καὶ βδ εἶναι παράλληλοι καὶ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΔ καὶ αβδ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους. Ὁμοίως καὶ τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ γαβ, καθὼς καὶ τὰ ΓΒΔ, γβδ καὶ ΓΑΔ, γαδ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας. Αἱ ἕδραι λοιπὸν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἀνὰ μία ὁμοία πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου αβγδ.

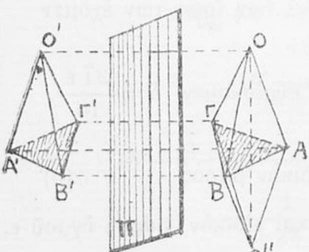



Σχ. 136.

Τὰ τετράεδρα αὐτὰ ἔχουν καὶ τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας· ἤτοι τὴν γ κοινήν, τὴν τρίεδρον β ἴσην μὲ τὴν Β διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους των ἀνὰ μίαν ἴσας, καὶ α=Α καὶ τὴν δ=Δ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Τὰ τετράελοιπὸν ΑΒΓΔ καὶ αβγδ εἶναι ὅμοια.

***854. Δύο τετράεδρα συμμετρικὰ εἶναι ἰσοδύναμα.***

Ἔστωσαν ΟΑΒΓ καὶ Ο΄Α΄Β΄Γ΄ δύο τετράεδρα συμμετρικὰ ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π· θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμα.




Σχ. 137.

Κατασκευάζομεν ἓν τρίτον τετράεδρον Ο΄΄ΑΒΓ συμμετρικὸν τοῦ ΟΑΒΓ ὡς πρὸς ἐπίπεδον τὴν βάσιν ΑΒΓ·

Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ Ο καὶ Ο΄΄ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ ἀπέχουν αὐτοῦ ἰσάκις. Τὰ τετράεδρα λοιπὸν ΟΑΒΓ καὶ Ο΄΄ΑΒΓ ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ σχήματα Ο΄Α΄Β΄Γ΄ καὶ Ο΄΄ΑΒΓ εἶναι συμμετρικά τοῦ ΟΑΒΓ ὡς πρὸς δύο διάφορα ἐπέπεδα εἶναι ἴσα. Τὸ τετράεδρον Ο΄Α΄Β΄Γ΄ εἶναι λοιπόν ἰσοδύναμον τοῦ ΟΑΒΓ.

***855. Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα συμμετρικὰ ἀνὰ ἕν.***

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα

α) Ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας, διότι εἶναι πολύγωνα, τῶν ὁποίων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

β) Ἔχουν τὰς ὁμολόγους διέδρους γωνίας ἴσας, διότι, ἂν λάβωμεν ὡς κέντρον συμμετρίας ἓν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τῆς δοθείσης διέδρου γωνίας βλέπομεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ συμμετρικὰ τῶν ἑδρῶν της σχηματίζουν τὴν δίεδρον, ἡ ὁποία εἶναι κατὰ κορυφήν αὐτῆς.

γ) Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ μιᾶς πολυέδρου γωνίας Α τοῦ πρώτου σχήματος Σ καὶ τῆς πολυεδρικῆς ὁμολόγου γωνίας Α′ τοῦ δευτέρου σχήματος Σ′, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ Σ, ἂν λάβωμεν ὡς κέντρον συμμετρίας τὴν κορυφὴν Α τῆς γωνίας τοῦ πρώτου πολυέδρου. Παρατηροῦμεν οὕτω ὅτι ἡ πολυεδρικὴ γωνία Α′ εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν πολυεδρικὴ γωνία τῆς γωνίας Α τοῦ πολυέδρου Σ.

Τὰ συμμετρικὰ λοιπὸν πολύεδρα εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

**856.** ***Ὁ ὄγκος σφαίρας ἔχει λόγον πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου ἴσον μὲ*** $\pi : 2/3.\sqrt{3}$.

Ἂν ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ διαγώνιος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὴν κύβου θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας, ἤτοι μὲ μὲ 2ρ. Ἀλλὰ διαγώνιος κύβου$=\alpha\sqrt{3}$ (ἂν α=ἀκμή του) ἢ

$$2\rho=\alpha\sqrt{3} \quad \text{καὶ} \quad \alpha=\frac{2\rho}{\sqrt{3}}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ὄγκ.σφαιρ.}=\frac{4}{3}\pi\rho^3 \quad (1) \quad \text{καὶ ὄγκ.κύβ.}=\alpha^3=\left(\frac{2\rho}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{8\rho^3}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

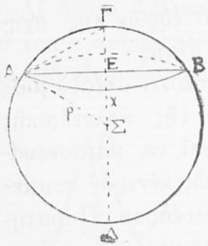
$$\frac{\text{ὄγκ.σφαίρ}}{\text{ὄγκ.κύβου}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3}{\frac{8\rho^3}{3\sqrt{3}}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}.$$

**857.** ***Ἐὰν ζώνη τις ἔχῃ μίαν βάσιν καὶ εἶναι μέση ἀνάλογος τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τῆς ὅλης ἐπιφανείας της, τὶς ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς βάσεώς της.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἐπιπέδου ΑΒ (σχ.138) ἀπὸ τοῦ κέντρου Σ τῆς σφαίρας καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζώνη ΑΔΒ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ζώνη}\,(\text{ΑΓΒ})}{\text{ζώνη}\,(\text{ΑΔΒ})}=\frac{\text{ζών.ΑΔΒ}}{\text{σφαίρ.Σ}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2\pi\rho(\text{ΕΓ})}{2\pi\rho(\text{ΕΔ})}=\frac{2\pi\rho(\text{ΕΔ})}{4\pi\rho^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΕΔ}}{2\rho} \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ ΕΔ$=\rho+x$, ΕΓ$=\rho-x$ ἡ ἰσότης (1) γίνεται




Σχ. 138.

$$\frac{\varrho - x}{\varrho + x} = \frac{\varrho + x}{2\varrho} \quad \text{ἢ} \quad (\varrho + x)^2 = 2\varrho(\varrho - x)$$

$$\text{ἢ} \quad \varrho^2 + 2\varrho x + x^2 - 2\varrho^2 + 2\varrho x = 0 \quad \text{ἢ}$$

$$x^2 + 4\varrho x - \varrho_2 = 0$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16\varrho + 4\varrho^2}}{2} = \frac{-4\varrho \pm \sqrt{20\varrho^2}}{2}$$

$$= \frac{-4\varrho \pm 2\varrho\sqrt{5}}{2}$$

ἄρα $\quad x = -2\varrho + \varrho\sqrt{5} = -2\varrho + 2{,}23\varrho = 0{,}23\varrho.$

ὥστε τὸ ἐπίπεδον πρέπει νὰ ἀπέχῃ $0{,}23\varrho$ τοῦ κέντρου.

***858. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανεία; σφαίρας ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικὸν τετράεδρον, ἔχον ἀκμὴν 6 δ.***

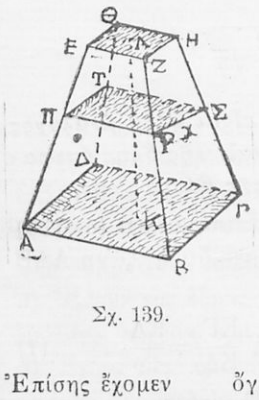
Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α εἶναι (ἄσκησις 845) $\dfrac{\alpha\sqrt{6}}{12}$.

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ εἶναι λοιπὸν

$$E = 4\,\pi\varrho^2 = 4\pi\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{4\pi\alpha^2 6}{144} = \frac{\pi\alpha^2}{6}$$

Ἐδῶ $\alpha = 6$, ὅθεν $E = 6\pi = 18{,}8406$ τ.δ.

***859 Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων κολούρου πυραμίδος καὶ πρίσματος, ἔχοντος ὕψος 24 δ, ἐὰν ἡ κόλουρος ἔχῃ βάσεις τετράγωνα μὲ πλευρὰς 20δ. καὶ 16δ., ἡ δὲ βάσις τοῦ πρίσματος εἶναι ἡ τομὴ τῆς κολούρου παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις της καὶ ἰσάκις ἀπέχουσα αὐτῶν.***




Σχ. 139.

Ἔστω ΠΡΣΤ ἡ τομὴ τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΕΖΗΘ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της.

Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ὄγκ.}(ΑΒΓΔΕΖΗΘ) = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)\upsilon$$

Ἐδῶ $\quad B = 20^2 = 400, \qquad \beta = 16^2 = 256$

καὶ $\quad \sqrt{B\beta} = \sqrt{20^2 . 16^2} = 20.16 = 320.$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν ὄγκ.(ΑΒΓΔΕΖΗΘ) =

$$= \frac{1}{3}(400 + 320 + 256).24 = 7808 \quad (\delta^3).$$

Ἐπίσης ἔχομεν $\qquad$ ὄγκ. πρίσμ. = (ΠΡΣΤ).υ $\qquad$ (2)

Ἡ πλευρὰ ΡΣ τῆς τετραγωνικῆς βάσεως ΠΡΣΤ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ΖΗΓΒ, ἤτοι εἶναι

$$\text{ΡΣ}=\frac{\text{ΒΓ}+\text{ΖΗ}}{2}=\frac{20+16}{2}=18$$

ἐπομένως $\quad$ ἐμβ $(\text{ΠΡΣΤ})=(\text{ΡΣ})^2=18^2=324.$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὰ (ΠΡΣΤ) καὶ υ διὰ τῶν ἴσων των

ἔχομεν $\quad$ ὄγκ.πρίσμ.$=324.24=7776 \quad (\delta^3) \qquad (3)$

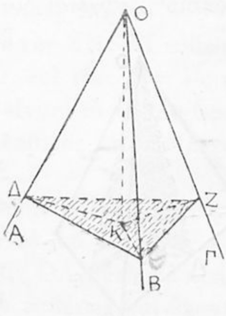
Ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν εἶναι λοιπὸν

$$7808-7776=32(\delta^3).$$

***860 Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας εὐθεῖα, ὥστε νὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τὰς ἀκμάς της.***

Ἔστω ΟΑΒΓ ἡ τρίεδρος γωνία καὶ ΟΚ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς ἀκμάς της ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν της ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ μήκη ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ. Φέρομεν τὰς ΔΕ, ΕΖ, ΖΔ. Ἡ εὐθεῖα ΟΚ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ εἰς τὸ σημεῖον Κ. Φέρομεν τὰς ΔΚ, ΚΕ, ΚΖ.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΚΔ, ΟΚΕ, ΟΚΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ἤτοι τὴν ΟΚ κοινήν, τὰς ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ καὶ τὰς γωνίας ΔΟΚ=ΕΟΚ=ΖΟΚ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΚΔ=ΚΕ=ΚΖ. Ἐπομένως τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ κύκλου.

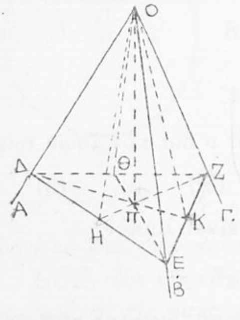



Σχ. 140.

Κατασκευή. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου Ο μήκη ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ Περιγράφομεν κύκλον περὶ τὸ τρίγωναν ΔΕΖ καὶ ἑνώνομεν τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου μὲ τὴν κορυφήν Ο τῆς τριέδρου. Ἡ ΟΚ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

***861. Εἰς τρίεδρον γωνίαν τὰ τρία ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἔναντι αὐτῆς ἐπιπέδου γωνίας, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστω ἡ τρίεδρος γωνία ΟΑΒΓ. Ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ καὶ φέρομεν τὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΔΕ, ΟΕΖ, ΟΔΖ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι ΟΗ, ΟΚ, ΟΘ, αἱ ὁποῖοι συνδέουν τὴν κορυφήν των Ο μὲ τὰ μέσα Η, Κ, Θ τῶν βάσεων των εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς κορυφῆς των.



Σχ. 141.

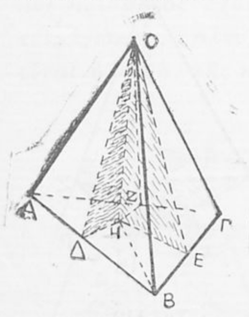
Ἐὰν φέρωμεν τὰς διαμέσους ΔΚ, ΖΗ, ΕΘ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Π.

Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὰ ἐπίπεδα ΟΔΚ, ΟΖΗ καὶ ΟΕΘ, αὐτὰ θὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα τὰ Ο καὶ Π καὶ ἐπομένως τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΠ.

*862.* ***Εἰς τρίεδρον γωνίαν τὰ τρία ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τῆς διχοτόμου μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστωσαν ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αἱ διχοτόμαι τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ τῆς τριέδρου γωνίας ΟΑΒΓ.

Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΟΔΗ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ΟΔ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΒ. Ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΕΗ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς διχοτόμου ΟΕ καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ.



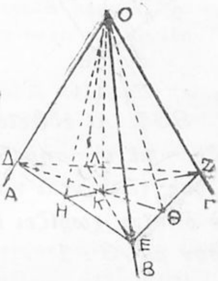
Σχ. 142.

Τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΗ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΟΗ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν γωνίαν ΑΟΒ, καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν της, κάθε σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΟΑ καὶ ΟΒ. Ὁμοίως ἡ ΟΗ ἐπειδὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διχοτομοῦντος τὴν γωνίαν ΒΟΓ καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ, κάθε σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΟΒ καὶ ΟΓ· ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΟΗ ἀπέχουν ἰσάκις καὶ ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΟΑ καὶ ΟΓ. Ἄρα ἡ ΟΗ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ καὶ διερχομένου διὰ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας ΑΟΓ.

Ὥστε καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα ΟΔΗ, ΟΕΗ, ΟΖΗ τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

**863. *Εἰς τρίεδρον γωνίαν τὰ τρία ἐπίπεδα, ἕκαστον τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.***

Ἔστω ἡ τρίεδρος γωνία ΟΑΒΓ. Διὰ τῆς ἀκμῆς ΟΑ φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν ΒΟΓ καὶ τέμνον αὐτὴν κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΘ. Ὁμοίως φέρομεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΟΓ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὴν κατὰ τὴν ΟΗ. Ἐκ τυχόντος σημείου Ε τῆς ἀκμῆς ΟΒ φέρομεν τὰς καθέτους ΕΘ, ΕΗ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΘ καὶ ΟΗ, καὶ κειμένας ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἐπίπεδα ΒΟΓ καὶ ΒΟΑ καί τὰς ὁποίας προεκτείνομεν μέχρις ὅτου συναντήσουν τὰς ἀκμὰς ΟΓ καὶ ΟΑ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Δ.



Σχ. 143.

Τὰ ἐπίπεδα ΑΟΘ καὶ ΒΟΓ τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΘ εἶναι κάθετα ἀναμεταξύ των ἐξ ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ὁποία, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΓ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΟΘ τῶν ἐπιπέδων ΑΟΘ καὶ ΒΟΓ θὰ εἶναι κάἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΘ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΘ τὴν κειμένην ἐπὶ τοῦ ΑΟΘ καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της Θ.

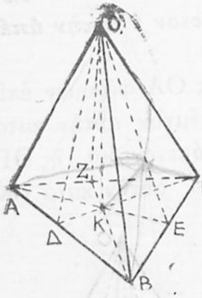
Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ. Αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν ΔΘ καὶ ΖΗ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΚΛ αὐτὴ θὰ εἶναι τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΔΖ.

Τὸ ἐπίπεδον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰς καθέτους ΕΖ καὶ ΕΔ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΟΘ καὶ ΓΟΗ εἶναι κάθετον ἐπὶ αὐτὰ καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν τομήν των ΟΚ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΟΛ αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων καὶ ἑπομέτὸ ἐπίπεδον ΒΟΛ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΖ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΓ, τὸ ὁποῖον περιέχει αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν.

Ὥστε τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΟΚ.

**864. *Εἰς τετράεδρον τὰ ἐπίπεδα, ἅτινα διέρχονται δι' ἑκάστης παραπλεύρου ἀκμῆς καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς τῆς βάσεως διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.***

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεως ΑΒΓ. Αἱ διάμεσοι ΑΕ, ΒΖ, ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ.



Σχ. 144.

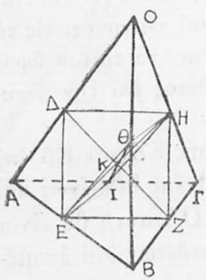
Τὰ ἐπίπεδα ΟΑΕ, ΟΓΔ, ΟΒΖ διερχόμενα ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΓ, ΟΒ καὶ τῶν μέσων Ε, Δ, Ζ τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεως ΑΒΓ ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὴν κορυφὴν Ο καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Κ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἄρα τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΚ.

*865. Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν ἑκάστην κορυφὴν τετραέδρου μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς ἔναντι της ἕδρας, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον καλούμενον κέντρον βάρους του, τὸ ὁποῖον χωρίζει ἑκάστην τῶν εὐθειῶν εἰς μέρη ἔχοντα λόγον ἴσον μὲ 3 : 1.*

(Βλέπε ἄσκησιν 654)

*866. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους του καὶ διχοτομοῦνται εἰς αὐτό.*

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν του. Φέρομεν τὰς ΔΗ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΔΖ.



Σχ. 145.

Τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ΔΗ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, διότι καθεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Αἱ ΕΗ καὶ ΔΖ, ὡς διαγώνιοι λοιπὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ, διχοτομοῦνται ἤτοι εἶναι ΕΚ=ΚΗ καὶ ΔΚ=ΚΖ.

Ὁμοίως, ἂν φέρωμεν τὰς ΘΗ καὶ ΕΙ αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ καὶ καθεμία θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΕΙΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως αἱ διαγώνιοί του ΕΗ καὶ ΙΘ διχοτομοῦνται, ἤτοι εἶναι ΕΚ=ΚΗ καὶ ΙΚ=ΚΘ.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΖ, ΗΕ καὶ ΘΙ, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ.

## Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.

98. Δίδεται ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ΑΔ=α, ΓΔ=β. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Μ,Ν, καὶ φέρομεν τὰς ΒΜ καὶ ΒΝ, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὸ ὀρθογώνιον εἰς τρία μέρη. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ καὶ Ν ἐπὶ τῆς ΓΔ οὕτως, ὥστε οἱ παραγόμενοι ὄγκοι ὑπὸ τῶν τριῶν, μερῶν ὅταν τὸ ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ τὴν ΑΔ νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. (Θέσατε ΔΜ=x, ΔΝ=y).

99. Τὸ ὕψος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 4μ. καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του 4μ. καὶ 1μ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ ὄγκος του δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ προσκείμενον εἰς τὴν μεγάλην βάσιν νὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου.

100. Δίδεται ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 2α καὶ ἓν σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του. Στρέφομεν τὰ τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΒΓ, ΜΓΔ, ΜΔΑ ἀντιστοίχως περὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν $\frac{4}{3}\pi\alpha^2\beta$.

101. Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν ἕνα ἰσόπλευρον κῶνον. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρέπει νὰ ἀχθῇ ἓν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἵνα ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου, εἶναι ἴση μὲ τὰ 3/4 τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ρ.

102. Δίδεται ἕνα ἡμισφαίριον ἀκτῖνος ρ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΣ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Λαμβάνομεν τὸν κῶνον, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸν κύκλον καὶ κορυφὴν τὸ ἄκρον Σ τῆς ἀκτῖνος ΟΣ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κύκλον ἀκτῖνος α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ α.

103. Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2ρ. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ἓν σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ ποὺ θὰ παραχθοῦν ἀπὸ τὰ τόξα ΔΑ καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴ ΔΒ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

104. Ἀπὸ ἓν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς περιφερείας Ο, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ τοῦ κύκλου Ο. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΑΟ. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΟ, ἵνα τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν ΑΒ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο.

105. Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ ἀκτίνων α καὶ β ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπταμένην ΑΒ τῶν δύο κύκλων. α′) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν περιστραφῇ περὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ′. β′) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

106. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη α καὶ β. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ποὺ παράγει τὸ ὀρθογώνιον, ἂν περιστραφῇ περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ.

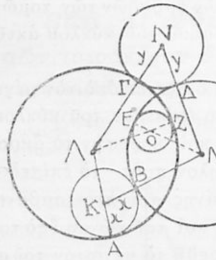
107. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2ρ. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΜ τοῦ κύκλου. Ζητεῖται α΄) νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΓΜ (Μ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς). β΄) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν ποὺ παράγονται ἀπὸ τὸ τόξον ΑΔΜ καὶ ἀπὸ τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης ΓΜ ὅταν στραφοῦν περὶ τὸν ἄξονα ΑΓ. γ΄) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ποὺ παράγεται ἀπὸ τὸ ΓΜΔΑΓ, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ΑΓ.

## Ἀσκήσεις Ἐπιπεδομετρίας.

**867. Ἐὰν δύο σταθεροὶ κύκλοι τέμνωνται καὶ ἀχθοῦν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τούτων, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων τούτων ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν σταθερῶν κύκλων εἶναι σταθερά, καθόσον οὗτοι ἐφάπτονται τοῦ ἑνὸς ἐξωτερικῶς καὶ τοῦ ἄλλου ἐσωτερικῶς, ἢ τῶν δύο ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς.**

Ἔστωσαν Λ, Μ οἱ τεμνόμενοι κύκλοι ἔχοντες ἀντιστοίχως ἀκτῖνας $\rho_1$, $\rho_2$. α΄) Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος Κ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου Μ ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Β καὶ τοῦ κύκλου Λ ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$ΚΜ+ΚΛ=\text{σταθερόν}.$$



Σχ. 146.

Ἂν φέρωμεν τὰς διακέντρους ΚΛ καὶ ΚΜ τῶν κύκλων τούτων, αὗται θὰ διέλθουν διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Α, Β· ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Κ, ἔχομεν $ΚΛ=ΛΑ-ΚΑ=\rho_1-x$ καὶ $ΚΜ=ΚΒ+ΒΜ=x+\rho_2$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη ἔχομεν

$$ΚΛ+ΚΜ=\rho_1+\rho_2=\text{σταθερόν}.$$

β΄) Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος Ν ἀκτῖνος y ἐφάπτεται τῶν Λ, Μ ἐξωτερικῶς εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Θὰ δείξω· ὅτι $ΛΝ-ΜΝ=\text{σταθερόν}$. Διότι ἂν φέρωμεν τὰς διακέντρους ΛΝ, ΜΝ τῶν κύκλων τούτων, αὗται θὰ διέλθουν διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς, καὶ θὰ ἔχωμεν $ΛΝ=ΛΓ+ΓΝ=\rho_1+y$ καὶ $ΜΝ=ΜΔ+ΔΝ=\rho_2+y$.

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$ΛΝ-ΜΝ=\rho_1-\rho_2=\text{σταθερόν}.$$

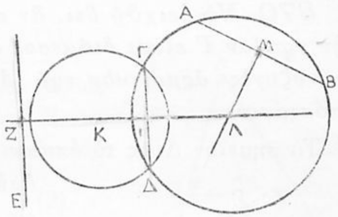
γ) Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος Ο ἀκτῖνος ω ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῶν κύκλων Κ καὶ Μ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $ΟΛ-ΟΜ=\text{σταθερόν}$. Διότι, ἂν πάλιν φέρωμεν τὰς διακέντρους ΛΟ καὶ ΟΜ, αὗται θὰ διέλθουν διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Ζ, Ε καὶ θὰ ἔχωμεν $ΟΜ=ΜΕ-ΕΟ=\rho_2-\omega$ καὶ $ΟΛ=ΛΖ-ΟΖ=\rho_1-\omega$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\text{ΟΜ}-\text{ΟΛ}=(\varrho_2-\omega)-(\varrho_1-\omega)=\varrho_2-\varrho_1=\text{σταθερά}.$$

**868.** ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἔχουσα μὲ δοθέντα κύκλον κοινὴν χορδήν, παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω Ε, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, Κ ὁ δοθεὶς κύκλος καὶ Α, Β δοθέντα σημεῖα. Ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ δοθέντος κύκλου, φέρομεν τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ τὴν ΜΛ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ τῆς συνδεούσης τὰ δοθέντα σημεῖα Α, Β· ἡ ΚΖ καὶ ΜΝ τέμνονται εἰς τὸ Λ. Μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΑ γράφομεν τὴν περιφέρειαν Λ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.



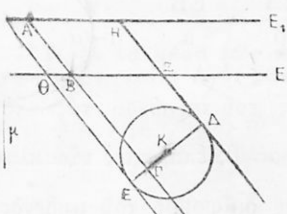

Σχ. 147.

Ἀφοῦ τὸ κέντρον Λ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΛΜ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Λ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ ἄλλου ἄκρου αὐτῆς Β. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ κοινὴ χορδὴ ΓΔ τῶν περιφερειῶν Κ, Λ, αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΚΛ· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν εἶναι κάθετος καὶ ἡ Ε· ἄρα αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

**869.** ***Νὰ γραφῇ εὐθεῖα ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας καὶ ὥστε τὸ μέρος αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο δοθεισῶν παραλλήλων, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.***

Ἔστωσαν $Ε_1$, $Ε_2$ αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι, μ τὸ δοθὲν μῆκος καὶ Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια.

Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς $Ε_1$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς μ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $Ε_2$ εἰς τὸ σημεῖον Β· φέρομεν τὴν ΑΒ ἡ ὁποία ἐκ κατασκευῆς ἰσοῦται πρὸς μ· ἐκ τοῦ κέντρου Κ τοῦ δοθέντος κύκλου φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν καὶ τὰ σημεῖα Ε, Δ· εἰς τὰ σημεῖα



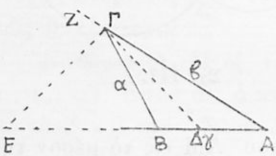

Σχ. 148.

αὐτὰ φέρομεν τὰς ΔΗ καὶ ΕΘ καθέτους ἐπὶ τὴν ΕΔ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΗ καὶ ΕΘ λύουν τὸ πρόβλημα.

Διότι αἱ ΔΗ καὶ ΕΛ ἐπειδὴ εἶναι κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΔ καὶ ΚΕ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου Κ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΔ μετὰ τῆς ΑΓ εἶναι παράλληλοι πρὸς αὐτήν· ἄρα ΖΗ=ΘΛ=ΒΑ=μ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων.

*870. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν Γ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καὶ τέμνει τὴν ΑΒ εἰ, τὸ Δ, τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ πρὸς τὰ Α, Β, κεῖται εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.*

Τὸ σημεῖον Δ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΒ, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἤτοι




Σχ. 149.

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\beta}{\alpha},$$

ἀλλὰ (§ 114 Γεωμ. Σακελλ. ἔκδοσις 4η) ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ ὑπάρχει μόνον ἓν σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{EA}{EB}=\frac{\beta}{\alpha},$$

ἐκ ταύτης ἔχομεν $\dfrac{EA}{\beta}=\dfrac{EB}{\alpha}=\dfrac{EA-EB}{\beta-\alpha}$

ἀλλὰ $EA-EB=AB=\gamma$ ὅθεν

$$\frac{EA}{\beta}=\frac{EB}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta-\alpha} \quad \text{καὶ} \quad EA=\frac{\beta\gamma}{\beta-\alpha}, \quad EB=\frac{\alpha\gamma}{\beta-\alpha},$$

Ἐὰν ὅμως τὸ Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἤτοι ἡ διχοτόμος εἶναι καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι $\beta=\alpha$ ἄρα $\beta-\alpha=0$, ἐπομένως τῶν κλασμάτων $\dfrac{\beta\gamma}{\beta-\alpha}$, $\dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\alpha}$ ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ παρονομαστὴς μηδέν, ἄρα καθένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ κλάσματα τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον·

ὅθεν καὶ $EA=\infty$ καὶ $EB=\infty$,

ἤτοι τὸ σημεῖον Ε κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον· ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων

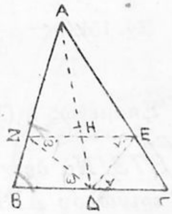
$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{EA}{EB}=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ἔχομεν} \quad \frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{EA}{EB}$$

ἤτοι τὸ Ε εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ, ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β· ἐπομένως τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Δ κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον.

*871. Ἂν ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ δὲ διχοτόμοι τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς αὐτοῦ εἰς τὸ Δ, τέμνουν τὰς ΑΓ, ΑΒ εἰς τὰ Ε, Ζ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.*

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΔ}{ΔΓ} \qquad (1)$$




Σχ. 150.

ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΔΒ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ ἡ ὁποία εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΔΓ, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{ΑΖ}{ΖΒ}=\frac{ΑΔ}{ΔΒ} \qquad (2)$$

ἀλλ' ἕνεκα τῆς διαμέσου ΑΔ ἔχομεν

$$ΔΒ=ΔΓ, \text{ ὅθεν } \frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΔ}{ΔΒ} \qquad (3)$$

ἐκ τῶν (1), (2), (3) ἔχομεν $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΖΒ}$.

ἐκ ταύτης δὲ $\frac{ΑΕ}{ΑΕ+ΕΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΖ+ΖΒ}$ ἢ $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}$.

ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΑΒΓ ἔχοντα τὴν γωνίαν Α κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ποὺ περιέχουν αὐτὴν ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια, ἐπομένως γωνΑΖΕ=γωνΒ· ἐπειδὴ αἱ ΖΕ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας, εἶναι παράλληλοι.

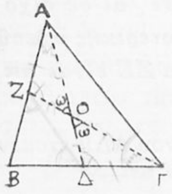
*872. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ΑΔ : ΓΖ=ΑΖ : ΒΔ.*

Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν τῶν διαμέσων ΑΔ, ΓΖ: ἐπειδὴ τὸ Ο ἀπέχει ἀπὸ κάθε κορυφὴν τοῦ τριγώνου ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὰ 2/3 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἔχομεν

$$\frac{ΑΟ}{ΟΔ}=\frac{2}{1}=2 \text{ καὶ } \frac{ΓΟ}{ΟΖ}=2, \text{ ὅθεν } \frac{ΑΟ}{ΟΔ}=\frac{ΓΟ}{ΟΖ}.$$

Ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΟΖ καὶ ΓΟΔ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ω καὶ ω' ἴσας, ὡς κατακορυφήν, ἄρα εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$\frac{AO}{O\Gamma} = \frac{AZ}{\Delta\Gamma}$ · ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τὸ Δ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἔχομεν $\Delta\Gamma = B\Delta$, ἑπομένως ἡ προηγουμένη ἀναλογία γίνεται $\frac{AO}{O\Gamma} = \frac{AZ}{B\Delta}$, ἢ ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου λόγου ἐπὶ $\frac{3}{2}$ ἔχομεν



Σχ. 151.

$$\frac{3/2 . AO}{3/2\ O\Gamma} = \frac{AZ}{B\Delta} \qquad (1)$$

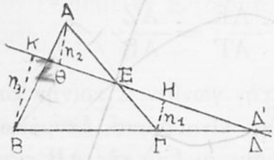
ἀλλὰ $\frac{3}{2}AO = A\Delta$ καὶ $\frac{3}{2}O\Gamma = \Gamma Z$.

Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $\frac{A\Delta}{\Gamma Z} = \frac{AZ}{B\Delta}$ ἢ $A\Delta : \Gamma Z = AZ : B\Delta$

***873. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶσα τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ Δ κειμένου ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ, ὁρίζει ἓξ μέρη ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοιαῦτα, ὥστε***

***ΑΕ.ΒΖ.ΓΔ=ΑΖ.ΒΔ.ΕΓ.***

Ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου φέρομεν τὰς $\Gamma H = \eta_1$, $A\Theta = \eta_2$, $BK = \eta_3$ καθέτους ἐπὶ τὴν διατέμνουσαν ΚΔ· ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΓΗ καὶ ΔΒΚ ἔχομεν



Σχ. 152.

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\eta_1}{\eta_3} \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΗΓΕ καὶ ΑΘΕ ἔχομεν

$$\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \qquad (2)$$

καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘΖ καὶ ΚΒΖ ἔχομεν

$$\frac{ZB}{ZA} = \frac{\eta_3}{\eta_2} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$\frac{EA}{E\Gamma} \cdot \frac{ZB}{ZA} \cdot \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{\eta_3}{\eta_2} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_3} = \frac{\eta_1 . \eta_2\ \eta_3}{\eta_1 . \eta_2 . \eta_3} = 1$$

ὅθεν $(AE)(ZB)(\Delta\Gamma) = (E\Gamma)(ZA)(\Delta B)$.

***874. Ἐὰν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ὁρίζουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ ἓξ μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ γινόμενον τριῶν μὴ διαδοχικῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τριῶν ἄλλων, τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. ἀσκήσ. 873) καὶ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κείμενα ἀνὰ ἓν ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου καὶ τοιαῦτα, ὥστε

$$(ΕΑ)(ΖΒ)(ΔΓ)=(ΕΓ)(ΖΑ)(ΔΒ) \qquad (1)$$

Λέγω ὅτι τὰ Δ,Ε,Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Διότι ἂν συνδέσωμεν τὰ Ζ καὶ Ε καὶ προεκτείνωμεν τὴν ΖΕ ἕως ὅτου κόψῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον ἔστω τὸ Δ', τότε (δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως 873) θὰ ἔχωμεν

$$(ΕΑ)(ΖΒ)(Δ'Γ)=(ΕΓ)(ΖΑ)(Δ'Β) \qquad (2)$$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΒ}{ΖΑ}\cdot\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=1 \quad (3), \qquad \frac{ΕΑ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΒ}{ΖΑ}\cdot\frac{Δ'Γ}{Δ'Β}=1 \quad (4)$$

ἐκ τῶν (3) καὶ (4) ἔχομεν $\frac{ΕΑ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΒ}{ΖΑ}\cdot\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}\cdot\frac{ΖΒ}{ΖΑ}\cdot\frac{Δ'Γ}{Δ'Β}$

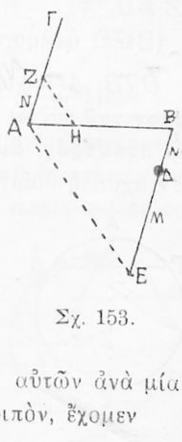
ἢ ἀφοῦ ἐξαλείψωμεν τοὺς ἴσους παράγοντας ἑκατέρωθεν, ἔχομεν

$$\frac{ΔΓ}{ΔΒ}=\frac{Δ'Γ}{Δ'Β} \quad ἢ \quad \frac{ΔΓ}{ΔΒ-ΔΓ}=\frac{Δ'Γ}{Δ'Β-Δ'Γ} \quad ἢ \quad \frac{ΔΓ}{ΓΒ}=\frac{Δ'Γ}{ΓΒ}$$

ἄρα ΔΓ=Δ'Γ· ὅθεν τὸ σημεῖον Δ' συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ, ἐπομένως τὰ τρία σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΔΕΖ.

**875. *Νὰ χωρισθῇ εὐθεῖα εἰς δύο μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα δύο εὐθειῶν παραλλήλων Μ, Ν ἀγομένων διὰ τῶν Α, Β καὶ ἐχουσῶν ἀντιθέτους φοράς.***

Ἔστω ΑΒ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία πρόκειται νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν ΑΓ=Μ καὶ ΒΔ=Ν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται παραλλήλως ἐκ τῶν Α,Β καὶ ἔχουν ἀντιθέτους φοράς.



Σχ. 153.

Ἐπὶ τῆς ΒΔ λαμβάνομεν τμῆμα διαδοχικὸν τοῦ ΒΔ=Ν, τὸ ΔΕ=Μ οὕτως, ὥστε ΒΕ=Μ+Ν· φέρομεν τὴν ΑΕ· ἐπὶ δὲ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΑΖ=Ν καὶ ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν τὴν ΖΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΕ· αὕτη τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η· λέγω ὅτι τὰ ζητούμενα τμήματα εἶναι τὰ ΑΗ, ΖΒ· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ

$$\frac{ΑΗ}{ΗΒ}=\frac{ΒΔ}{ΑΓ}=\frac{Ν}{Μ}.$$

Τὰ τρίγωνα ΑΗΖ καὶ ΑΒΕ ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν παραλλήλους εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν λοιπόν, ἔχομεν

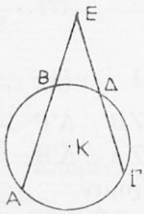
$$\frac{ΑΗ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΒΕ} \quad ἤτοι \quad \frac{ΑΗ}{ΑΒ}=\frac{Ν}{Μ+Ν}$$

ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$\frac{AH}{AB-AH}=\frac{N}{M+N-N} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AH}{HB}=\frac{N}{M}.$$

876. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (προεκτεινόνεναι) τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ε, ὥστε νὰ εἶναι ΕΑ.ΕΒ=ΕΓ.ΕΔ, τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.***

Ἂν περιγράψωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΕΓ εἴς τι σημεῖον Δ΄ λέγω ὅτι τοῦτο συμπίπτει πρὸς τὸ Δ. Ἂν τὸ Δ δὲν συνέπιπτε μὲ Δ καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Ε ἐκτὸς κύκλου κειμένου τὰς τεμνούσας ΕΒΑ καὶ ΕΔ΄Γ θὰ ἔχωμεν (πόρ. 145 Γεωμ. Σακελλ. ἔκδ. 4η)



Σχ. 154

$$(EA)(EB)=(E\Gamma)(E\Delta')$$

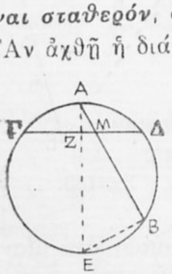
Ἀλλὰ καὶ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $(EA)(EB)=(E\Gamma)(E\Delta)$ ἄρα θὰ εἶναι καὶ $(E\Gamma)(E\Delta)=(E\Gamma)(E\Delta')$, ὅθεν $E\Delta=E\Delta'$. Ἄρα Δ συμπίπτει πρὸς τὸ Δ ἑπομένως καὶ τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν Α,Β,Γ· ἤτοι τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

877. ***Ἐκ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν τέμνουσαν τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ Ε, καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ,ΓΔ εἰς τὰ Ζ,Η Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΕ εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ΕΖ,ΕΗ.***

(Βλέπε ἄσκησιν 355 Β΄ μέρους ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων).

878. ***Δύο χορδαὶ ΑΒ,ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Μ καὶ Α εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΔ Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον (ΑΒ)(ΑΜ) εἶναι σταθερόν, ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ στρέφεται περὶ τὸ Α.***

Ἂν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΕ ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Α, αὕτη, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ αὐτοῦ καὶ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Ε· Ἂν φέρωμεν καὶ τὴν χορδὴν ΒΕ σχηματίζοντα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΜΖ τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Α κοινήν· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν



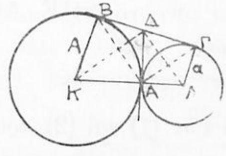
Σχ. 155.

$$\frac{AB}{AZ}=\frac{AE}{AM} \quad \text{ἢ} \quad (AB)(AM)=(AE)(AZ)$$

Ἀλλὰ ἡ ΑΕ, ὡς διάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου εἶναι σταθερά, ἡ δὲ ΑΖ εἶναι τὸ βέλος τοῦ δοθέντος τόξου ΓΔ, ἑπομένως καὶ αὕτη εἶναι σταθερά, ὅθεν $(ΑΕ)(ΑΖ)=$σταθερ. καὶ ἑπομένως $(ΑΒ)(ΑΜ)=$σταθερ.

**879. Ἂν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἡ κοινὴ ἐξωτερική των ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν διαμέτρων των.**

Ἔστωσαν οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται εἰς τὸ Α, καὶ ΒΓ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη καὶ Α, α αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι $(ΒΓ)^2=(2Α)(2α)$.



Σχ. 156.

Ἂν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ τῶν κύκλων Κ, Λ ἐφαπτομένη ΑΔ, αὕτη τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΔΑ=ΔΒ$ καὶ $ΔΑ=ΔΓ$, ὡς ἐφαπτόμενοι κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἔχομεν $ΑΔ=ΔΒ=ΔΓ$ (1)· ἂν δὲ ἀχθοῦν καὶ αἱ ΚΔ καὶ ΛΔ αὗται διχοτομοῦν τας γωνίας ΒΔΑ καὶ ΑΔΓ, ἑπομένως

$$\text{γων}ΚΔΑ=\text{γων}\frac{ΒΔΑ}{2} \quad \text{καὶ} \quad \text{γων}\,ΛΔΑ=\text{γων}\frac{ΓΔΑ}{2}$$

ὅθεν $$\text{γων}ΚΔΑ+\text{γων}ΛΔΑ=\frac{\text{γων}ΒΔΑ+\text{γων}ΓΔΑ}{2}=\frac{2\text{ὀρθ.}}{2}=1 \text{ ὀρθή}\cdot$$

ἑπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ διάκεντρος ΚΛ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΛ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ ἔχωμεν λοιπὸν $(ΑΔ)^2=(ΑΚ)(ΑΛ)$ ἢ $(ΑΔ)^2=Α.α.$ (2) ἀλλ᾽ ἕνεκα τῆς (1) εἶναι $ΑΔ=\frac{ΒΓ}{2}$, ἑπομένως ἡ (2) γίνεται $\frac{(ΒΓ)^2}{4}=Α.α$ ἢ $(ΒΓ)^2=4.Α.α$ ἢ $(ΒΓ)^2=(2Α)(2α)$.

**880. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς, πᾶσαι αἱ χορδαὶ τοῦ μεγάλου κύκλου, αἱ διὰ τοῦ σημείου ἁφῆς διερχόμεναι τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ μικροῦ κύκλου.**

Ἔστωσαν ὅτι οἱ κύκλοι Θ, Κ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α, καὶ ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΓΔ καὶ ΑΕΖ τοῦ κύκλου Κ τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Γ, Ε ἀντιστοίχως· θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ}$.

Σχ. 157.

Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΟΚ τῶν κύκλων Κ, Λ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α τῆς ἁφῆς καὶ τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Η καὶ τὴν Κ εἰς τὸ Θ· ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΗΓ, ΘΔ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΑΘΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνίαν Α κοινήν· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν $\frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΑΗ}{ΑΘ}$ (1)

Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς χορδὰς ΗΕ καὶ ΘΖ τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ, ΑΘΖ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΑΖ}=\frac{ΑΗ}{ΑΘ} \qquad (2)$$

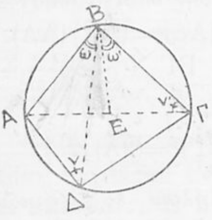
ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $\frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΖ}$.

881. ***Εἰς ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.*** (Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου).

Ἔστωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ διαγώνιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι $ΑΓ\times ΒΔ=ΑΔ\times ΒΓ+ΑΒ\times ΔΓ$.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Β φέρομεν τὴν ΒΕ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν ω′ ἴσην μὲ τὴν ω. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ γωνίαι ν καὶ ν′ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ, τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΕΓ εἶναι ὅμοια. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν




Σχ. 158.

$$\frac{ΑΔ}{ΕΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ} \text{ ἢ } ΑΔ\times ΒΓ=ΕΓ\times ΒΔ \quad (1)$$

Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΒΓ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν γωνΑΒΕ=γωνΔΒΓ καὶ γωνΒΑΓ=γωνΒΔΓ. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΔΓ} \text{ ἢ } ΑΒ\times ΔΓ=ΑΕ\times ΒΔ \quad (2)$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\begin{aligned} ΑΔ\times ΒΓ+ΑΒ\times ΔΓ&=ΕΓ\times ΒΔ+ΑΕ\times ΒΔ\\ &=ΒΔ(ΕΓ+ΑΕ)\\ &=ΒΔ\times ΑΓ. \end{aligned}$$

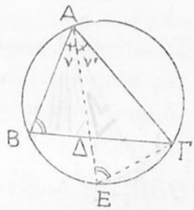
882. ***Ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ ἴσας γωνίας τῶν κορυφῶν εἶναι ὅμοια.***

Ἔστωσαν τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ, τὰ ὁποῖα ἔχουν γων Α=γων α· θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοσκελῆ, αἱ παρὰ τὴν βάσιν των γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι γωνΒ=γωνΓ καὶ γων β=γων γ.

Θὰ εἶναι λοιπὸν γωνΑ=2ορ.—2γωνΒ καὶ γων α=2ορ.—2γωνβ.
Ἐπειδὴ γωνΑ=γων α ἕπεται, ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων εἶναι ἴσα, ἤτοι 2ορ—2γωΒ=2ορ—2γων β,
ἄρα γωνΒ=γων β., καὶ γωνΓ=γωνγ τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ αβγ, ἀφοῦ ἔχουν τὰ γωνίας των ἴσας ἀνὰ μίαν εἶναι ὅμοια.

883. ***Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν ἀντίστοιχόν της βάσιν του εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειάν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ Ε. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι (ΑΒ) (ΑΓ)=(ΑΔ)(ΑΕ).***



Σχ. 159.

Ἂν φέρωμεν τὴν ΕΓ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΒΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν

γωνΕ=γωνΒ

ὡς ἐγγεγραμμένας και βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΓ. Ἐπίσης ἔχουν γων ν=γων ν' διότι ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΕΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν $\frac{ΑΓ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$ ἢ (ΑΒ)×(ΑΓ)=(ΑΔ)×(ΑΕ).

884. ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη των, διχοτομεῖ τὰς δύο κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας των.***

Ἔστωσαν Κ, Λ (σχ.156) αἱ περιφέρειαι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ ΒΓ ἡ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν καὶ ΑΔ ἡ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη των, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ.
Θὰ δείξωμεν ὅτι ΒΔ=ΔΓ.

Γνωρίζομεν ὅτι ΔΑ=ΔΒ ὡς ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας Κ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Δ, καὶ ΔΑ=ΔΓ ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Δ τῆς περιφερείας Λ· ἐκ τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν προκύπτει ΒΔ=ΔΓ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν ἄλλην ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην τῶν κύκλων Κ καὶ Λ.

885. ***Τὸ Ε εἶναι μέσον μιᾶς τῶν βάσεων ΒΓ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ΑΕ καὶ ΔΕ προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν ΔΓ καὶ ΑΒ, προεκτεινομένας εἰς τὰ Ζ καὶ Θ· δείξατε ὅτι ἡ ΖΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΑ.***

μνουσα αὐτοῦ ἔχομεν $\Delta E^2 = \Delta\Gamma' \times \Delta\Gamma$·
ὥστε ἡ ΔΕ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν ΔΓ′ καὶ ΔΓ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ κατὰ συνέπειαν νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς Ε.

***Κατασκευή.*** Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΖ τῆς γωνίας ΑΟΒ· ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΟΖ· λαμβάνομεν ΘΓ′=ΘΓ καὶ κατασκευάζομεν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ΔΓ καὶ ΔΓ′. Πρὸς τοῦτο μὲ διάμετρον τὴν ΔΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ σημείου Γ′ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Λ. Ἡ χορδὴ ΔΛ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΔΓ καὶ ΔΓ′. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ΔΛ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν κάθετον ΕΚ ἐπὶ τὴν ΟΑ, αὐτὴ θὰ κόψῃ τὴν διχοτόμον ΟΖ εἰς τὸ σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

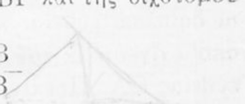
Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι ἡ μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΔΛ γραφομένη περιφέρεια τέμνει τὴν ΟΑ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Α. Ἂν λοιπὸν φέρωμεν καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΟΖ καὶ δεύτερον κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

***889. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ βάσις, ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν βάσιν καὶ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.***

Ἔστω α ἡ δοθεῖσα βάσις, δ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς αὐτὴν ἐξωτερικὴ διχοτόμος καὶ μ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ὅτι ΑΒΓ, εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ τοιοῦτον ὥστε ΒΓ=α, ΑΓ—ΑΒ=μ καὶ ΑΔ=δ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς βάσεως ΒΓ καὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ, ἔχομεν

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B}$$

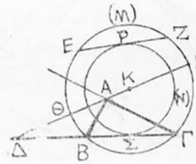


ἐκ ταύτης δὲ

$$\frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma - AB}{\Delta\Gamma - \Delta B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma - AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\alpha},$$

Παρατηροῦμεν ἐξ αὐτῶν ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ὡς καὶ αἱ τοῦ Β ἀπὸ τῶν ἄκρων Α, Δ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου ΑΔ ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\alpha}$, ἑπομένως κεῖνται καὶ αἱ δύο ἐπὶ τοῦ γεωμετρ. τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα δοθείσης εὐθείας ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\alpha}$ καὶ ὁ ὁποῖος, ὡς γνωστόν, εἶναι περιφέρεια Κ. Ἡ ΔΒΓ εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας Κ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς ΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου Κ ἔχει μῆκος ΒΓ=α.

***Σύνθεσις.*** Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ΔΗ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΑ=δ, ὅπου δ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καί κατασκευάζομεν τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν σημείων Δ καὶ Α ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\alpha}$, ὅπου μ ἡ δοθεῖσα διαφορὰ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ α ἡ πλευρὰ εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ διχοτόμος ΑΔ. Ὁ τόπος αὐτὸς εἶναι, καθὼς γνωρίζομεν, περιφέρεια καὶ ἔστω αὕτη ἡ (Μ)· λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΕΖ=α τοῦ κύκλου (Μ) καὶ γράφομεν ὁμόκεντρον περιφέρειαν (Ν) πρὸς τὴν (Μ) ἐφαπτομένην τῆς ΕΖ. Ἐκ δὲ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΓ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας (Ν), ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν (Μ) εἰς τὰ σημεῖα Β,Γ· ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 164.

***Ἀπόδειξις.*** Διότι ΒΓ=ΕΖ=α, ὡς χορδαὶ τοῦ κύκλου Ζ [τοῦ ἔχοντος περιφέρειαν τὴν (Μ)] αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ σημεῖα Β,Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Μ), ἤτοι ἐπὶ τοῦ γεωμ. τόπου τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς Α,Δ ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\alpha}$, ἔχομεν

$$\frac{BA}{B\Delta}=\frac{\mu}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{\mu}{\alpha}, \text{ ὅθεν } \frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{BA}{B\Delta} \text{ ἢ } \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}=\frac{\Gamma A}{BA},$$

ἤτοι ἡ ΑΔ τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς σημεῖον Δ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ἄκρων Β,Γ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν, ἄρα ἡ ΔΑ=δ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{BA}{B\Delta}$ ἔχομεν $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{BA}{B\Delta}=\frac{\Gamma A-BA}{\Gamma\Delta-B\Delta}$

ἤτοι $$\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{BA}{B\Delta}=\frac{\Gamma A-BA}{\alpha},$$

ἀλλὰ εἶναι καὶ $\frac{\Gamma A}{\Gamma\Delta}=\frac{BA}{B\Delta}=\frac{\mu}{\alpha}$, ὅθεν $\frac{\Gamma A-BA}{\alpha}=\frac{\mu}{\alpha}$,

ἐπομένως ΓΑ—ΒΑ=μ.

ἤτοι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος, καὶ ἐπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

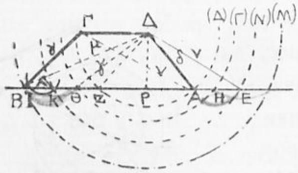
**890. *Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν διαγωνίων καὶ ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.***

Ἔστωσαν μ καὶ ν αἱ διαγώνιοί του καὶ γ, δ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου καὶ ἔστω $\mu > \nu$.

***Ἀνάλυσις.*** Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον, ὁπότε ΔΒ=μ, ΑΓ=ν, ΓΒ=γ καὶ ΔΑ=δ.

Ἐκ τῆς κορυφῆς Δ φέρομεν τὰς ΔΕ καὶ ΔΘ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΓΑ καὶ ΓΒ, ὁπότε ἐκ τῶν σχηματιζομένων παραλληλογράμμων ΓΔΕΑ καὶ ΒΓΔΘ λαμβάνομεν

$$ΒΘ=ΓΔ=ΑΕ. \qquad (1)$$




Σχ. 165.

Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνας κατὰ σειρὰν ΔΒ=μ, ΔΕ=ν, ΔΘ=γ καὶ ΔΑ=δ γράφομεν τὰς ὁμοκέντρους περιφερείας (Μ), (Ν), (Γ), (Δ), αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΑ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Η, Α, Ζ, Θ, Κ, Β.

Ἐὰν $\delta_1$ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ σημείου Β ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Γ), τότε (θεώρ. 147 Γεωμ. Ν. Σακελαρίου ἔκδοσις 4η) θὰ ἔχωμεν $\delta_1=(ΒΘ)\,(ΒΗ)$ καὶ $\delta_1=(ΒΔ)^2-(ΔΘ)^2=\mu^2-\gamma^2$, ἑπομένως $(ΒΘ)\,(ΒΗ)=\mu^2-\gamma^2$ (2)

Ἐὰν $\delta_2$ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ σημείου Κ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Δ) θὰ ἔχωμεν $\delta_2=(ΚΖ)\,(ΚΑ)$ καὶ $\delta_2=(ΔΕ)^2-(ΔΑ)^2=\nu^2-\delta^2$, ἑπομένως

$$(ΚΖ)\ (ΚΑ)=\nu^2-\delta^2 \qquad (3)$$

Διαιροῦντες τὰς (2) καὶ (3) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{(ΒΘ)\,(ΒΗ)}{(ΚΖ)\,(ΚΑ)}=\frac{\mu^2-\gamma^2}{\nu^2-\delta^2} \qquad (4)$$

Ἀλλὰ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΔΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ ἔχομεν ΚΡ=ΡΕ καὶ ΖΡ=ΡΑ, ὅθεν ΚΡ−ΖΡ=ΡΕ−ΡΑ, ἤτοι ΚΖ=ΑΕ ἢ ἕνεκα τῆς (1), (ΒΘ)=(ΚΖ), ἑπομένως ἡ (4) γράφεται

$\dfrac{ΒΗ}{ΚΑ}=\dfrac{\mu^2-\gamma^2}{\nu^2-\delta^2}$ · ἀλλὰ ΒΗ=ΒΑ+ΑΗ=ΒΑ+ΒΚ καὶ ΚΑ=ΒΑ−ΒΚ

ἑπομένως
$$\frac{ΒΑ+ΒΚ}{ΒΑ-ΒΚ}=\frac{\mu^2-\gamma^2}{\nu^2-\delta^2} \qquad (5)$$

ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν $\dfrac{(ΒΑ+ΒΚ)+(ΒΑ-ΒΚ)}{(ΒΑ+ΒΚ)-(ΒΑ-ΒΚ)}=\dfrac{(\mu^2-\gamma^2)+(\nu^2-\delta^2)}{(\mu^2-\gamma^2)-(\nu^2-\delta^2)}$

ἢ
$$\frac{ΒΑ}{ΒΚ}=\frac{\mu^2+\nu^2-(\gamma^2+\delta^2)}{\mu^2+\delta^2-(\nu^2+\gamma^2)} \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) συνάγομεν, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Β ἀπὸ τὰς τομὰς τῆς βάσεως ΒΑ τοῦ τραπεζίου μὲ τὰς περιφερείας (Δ) καὶ (Ν) ἔχουν λόγον σταθερόν· ἑπομένως προσδιορισθείσης τῆς ἀποστάσεως τοῦ Β ἀπὸ τῆς μιᾶς τομῆς, προσδιορίζεται ἐκ τῆς (6) καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἐκ τῆς ἄλλης τομῆς.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΓ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΚΛ καὶ ΒΑΔ ἔχομεν

$$\frac{ΒΛ}{μ}=\frac{ΛΚ}{δ}=\frac{ΒΚ}{ΒΑ} \text{ ἢ ἕνεκα τῆς (6) } \frac{ΒΛ}{μ}=\frac{ΛΚ}{δ}=\frac{μ^2+δ^2-(ν^2+γ^2)}{μ^2+ν^2-(γ^2+δ^2)}$$

ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν συνάγομεν ὅτι τὸ σημεῖον Λ εἶναι ὡρισμένον ἐπὶ τῆς ΒΔ, διότι ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Β εἶναι σταθερά· ἐπίσης σταθερὰ εἶναι καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τοῦ Λ, ἄρα τὸ Κ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἐχούσης κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα $ΛΚ=δ\,\frac{μ^2+δ^2-(ν^2+γ^2)}{μ^2+ν^2-(γ^2+δ^2)}$.

***Σύνθεσις.*** Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνας κατὰ σειρὰν τὰς μ, ν, γ, δ γράφομεν τὰς ὁμοκέντρους περιφερείας (Μ), (Ν), (Γ), (Δ)· ἐπὶ τῆς περιφερείας (Μ) λαμβάνομεν αὐθαιρέτως σημεῖον Β καὶ φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΒΔ· ἐπὶ ταύτης δὲ λαμβάνομεν σημεῖον Λ τοιοῦτον ὥστε $ΒΛ=μ\,\frac{μ^2+δ^3-(ν^2+γ^2)}{μ^2+ν^2-(γ^2+δ^2)}$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς $δ\,\frac{μ^2+δ^2-(ν^2+γ^2)}{μ^2+ν^2-(γ^2+δ^2)}$ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφερείαν (Ν) εἰς τὸ σημεῖον Κ· φέρομεν τὴν ΒΚ· αὕτη τέμνει τὰς ὁμοκέντρους περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Θ,Ζ,Α,Η,Ε· φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΔΕ=ν καὶ ΔΑ=δ καὶ ἐκ μὲν τοῦ σημείου Α φέρομεν τὴν ΑΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Δ τὴν ΔΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ· αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ Γ· φέρομεν τὴν ΓΒ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ.

***Ἀπόδειξις.*** Ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν

$$\frac{ΒΛ}{μ}=\frac{ΛΚ}{δ}=\frac{μ^2+δ^2-(ν^2+γ^2)}{μ^2+ν^2-(γ^3+δ^2)} \qquad (7)$$

ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒΛΚ καὶ ΒΔΑ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀναλόγους καὶ ἀπέναντι τοῦ ἑνὸς ζεύγους τούτων ἔχουν τὴν γωνίαν Β κοινήν, ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα ἢ εἶναι ὅμοια ἢ αἱ γωνίαι Κ καὶ Α εἶναι παραπληρωματικαί· ἀλλ' αὗται ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΔΑΖ καὶ ΛΚΙ εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι, ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΛΚ καὶ ΒΔΑ εἶναι ὅμοια· ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{B\Lambda}{\mu}=\frac{\Lambda K}{\nu}=\frac{BK}{BA}=\frac{\mu^2+\delta^2-(\nu^2+\gamma^2)}{\mu^2+\nu^2-(\gamma^2+\delta^2)}$$

τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράφομεν οὕτω

$$\frac{BK}{BA}=\frac{(\mu^2-\gamma^2)-(\nu^2-\delta^2)}{(\mu^2-\gamma^2)+(\nu^2-\delta^2)} \tag{8}$$

ἀλλά $\mu^2-\gamma^2$ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ σημείου Β, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Γ) ἑπομένως $\mu^2-\gamma^2=(B\Theta)(BH)$ ἡ δὲ $\nu^2-\delta^2$ εἶναι ἡ δύναμις τοῦ σημείου Κ ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Δ), ἑπομένως $\nu^2-\delta^2=(KZ)(KA)$, ὅθεν

ἡ (8) γίνεται $$\frac{BK}{BA}=\frac{(B\Theta)(BH)-(KZ)(KA)}{(B\Theta)(BH)+(KZ)(KA)}$$

ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$\frac{BK+BA}{BA-BK}=\frac{(B\Theta)(BH)}{(KZ)(KA)} \quad \text{ἢ} \quad \frac{BK+BA}{KA}=\frac{(B\Theta)(BH)}{(KZ)(KA)} \quad \text{ἢ}$$

$$BK+BA=\frac{(B\Theta)(BH)}{KZ}$$

ταύτην γράφομεν $\dfrac{BK+BA}{B\Theta}=\dfrac{BH}{KZ}$· ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν

$$\frac{BK+BA-B\Theta}{B\Theta}=\frac{BH-KZ}{KZ} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{BK+\Theta A}{B\Theta}=\frac{BK+ZH}{KZ} \tag{9}$$

ἀλλ' ἂν ἀχθῇ ἡ ΔΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ ἔχομεν $\Theta P=PH$ καὶ $PA=PZ$

ὅθεν $\Theta P+PA=PH+PZ$ ἢ $\Theta A=ZH$

ἑπομένως ἡ (9) γίνεται $$\frac{BK+\Theta A}{B\Theta}=\frac{BK+\Theta A}{KZ}$$

ἐκ ταύτης δὲ συνάγομεν, ὅτι $$B\Theta=KZ \tag{10}$$

Ἔχομεν ὅμως $$KP=PE \quad \text{καὶ} \quad ZP=PA \tag{11}$$

ὅθεν $KP-ZP=PE-PA$, ἤτοι $KZ=AE$

Ὅθεν λόγῳ τῶν (11) καὶ (10) ἔχομεν $B\Theta=AE$· ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΑΕΔΓ ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἐκ κατασκευῆς παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον, ἑπομένως $AE=\Gamma\Delta$, ἄρα καὶ $B\Theta=\Gamma\Delta$ καθόσον ἐδείχθη $B\Theta=AE$· ὅθεν τὸ τετράπλευρον ΒΓΔΘ ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, ἄρα καὶ τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον· ἕνεκα λοιπὸν τῶν δύο τούτων παραλληλογράμμων ἔχομεν

$$\Delta E=A\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Theta=\Gamma B$$

ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς εἶναι καὶ

$\Delta E=\nu$ καὶ $\Delta\Theta=\gamma$, ὅθεν καὶ $A\Gamma=\nu$ καὶ $\Gamma B=\gamma$.

Ὡσαύτως ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν $\Delta A=\delta$ καὶ $\Delta B=\mu$, ἤτοι τὸ σχηματισθὲν τραπέζιον ἔχει διαγωνίους ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας μ καὶ ν καὶ μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας γ καὶ δ, ἄρα εἶναι τὸ ζητούμενον.

## Παράρτημα.

### Στοιχειώδεις γνώσεις Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας

**891.** ***Τὸ μῆκος τοῦ γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν διανυσμάτων.***

Ἂν τὰ διανύσματα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὰ ἀποτελοῦν τεθλασμένην, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμά των· ἑπομένως αὐτὸ ἐπειδὴ ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὴν τεθλασμένην ἔχει μῆκος μικρότερον ἀπὸ τὸ μῆκος ἐκείνης· ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς τεθλασμένης ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποῦ ἀποτελοῦν τὰς πλευράς της· ἄρα τὸ μῆκος τοῦ γεωμ. ἀθροίσματος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων.

Ἂν ὅμως τὰ διανύσματα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν, ἔχουν ἄθροισμα τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ γεωμ. ἄθροισμα αὐτῶν· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὁμόρροπα, τὸ μῆκος τοῦ γεωμ. ἀθροίσματός των ἰσοῦται πρὸ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν διανυσμάτων.

**892.** ***Ἂν τὰ σημεῖα $A_1$, $A_2$. $A_3$... $A_\mu$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας θὰ εἶναι $(A_1A_2)+(A_2A_3)+..+(A_{\mu-1}A_\mu)=(A_1A_\mu)$.***

Διότι τὸ $A_1\ A_\mu$ εἶναι τὸ γεωτετρικὸν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{\mu-1}A_\mu$ · ἐπειδὴ δὲ αὐτὰ εἶναι ὁμόρροπα καὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μηκῶν των ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ γεωμ. ἀθροίσματος αὐτῶν.

**893.** ***Εὕρετε ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν*** x ***τὰ σημεῖα***

$$1 \cdot -2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0{,}25.$$

α') Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ ἀρχὴν τὸ Ο λαμβάνομεν τμῆμα ΟΘ ἴσον πρὸς τὸ διευθύνον διάνυσμα, ὁπότε τὸ πέρας αὐτοῦ Θ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον. β') Μὲ ἀρχὴν τὸ Ο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τμῆμα ΟΑ ἴσον πρὸς 2(ΟΘ), ὁπότε τὸ πέρας αὐτοῦ Α εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον Α(—2)· καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰ ἄλλα σημεῖα.

*894. Εὕρετε τὰ σημεῖα Μ(—4), Ν(—3,5), Ρ(2,5).*

Ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς φορᾶς λαμβάνομεν τμῆμα ΟΜ τετραπλάσιον τοῦ διευθύνοντος διανύσματος, ὁπότε τὸ πέρας αὐτοῦ Μ εἶναι τὸ σημεῖον Μ(—4)· καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰ λοιπὰ σημεῖα.

*895. Εὕρετε τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις*

$$2x-3=0,\ 7x+5=9,\ 5x+1=2,\ x^2=25,\ x^3=8.$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ὡς πρὸς x ἔχομεν κατὰ σειρὰν

$$x=1,5\cdot\ \ x=\frac{4}{7}\cdot\ \ x=0,2\cdot\ \ x=\pm5\cdot\ \ x=2\cdot$$

ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἤτοι τὰ

$$M_1(1,5),\ M'(4/7),\ M_2(0,2),\ M_3(+5),\ M_4(-5)],\ M_5(2)$$

καὶ τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ὡς καὶ προηγουμένως.

*896. Εὕρετε τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως*

$$2x^2+5x-2=0,\ x^2-3x=10,\ x^2-27x=81\ \ x^5+32=0$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσσεις ταύτας ἔχομεν κατὰ σειρὰν

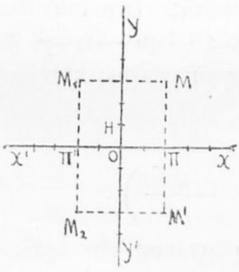
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4^2}}{4},\ x=5,-2,\qquad x=\frac{27\pm\sqrt{3^2+4^2}}{4},\ x=-2.$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου $M_1\left(\frac{-5-\sqrt{5^2+4^2}}{4}\right)$ ἢ εὑρίσκομεν τὴν $\sqrt{41}$ κατὰ προσέγγισιν, ὁπότε ἔχομεν νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Π(—2,85) καὶ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν καθὼς καὶ προηγουμένως, ἢ παρατηροῦμεν ὅτι $\sqrt{5^2+4^2}$ εἶνε ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς 5 καὶ 4, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἂν κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο τρίγωνον· ἔστω δὲ α ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Κατόπιν μὲ ἀρχὴν Ο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος δύο διαδοχικὰ ἀνύσματα μήκους —α,—5 καὶ τοῦ προκύπτοντος ἀνύσματος —(α+5) λαμβάνομεν τὸ 1/4 καὶ ἔχομεν τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀρνητικὴν ῥίζαν τῆς πρώτης ἐξισώσεως· διὰ τὴν θετικὴν ῥίζαν αὐτῆς, ἐπειδὴ α>5 λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος μὲ ἀρχὴν τὸ Ο ἄνυσμα $OM_1$ ἔχον μῆκος α, ἔπειτα μὲ ἀρχὴν τὸ $M_1$ λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα $M_1M_2$ διευθυνόμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν καὶ ἔχον μῆκος ἀπολύτως ἴσον πρὸς 5, ὁπότε προκύπτει τὸ ἄνυσμα $(OM_2)=(\alpha-5)$· τοῦ ἀνύσματος $OM_2$ λαμβάνομεν τὸ 1/4 ὁπότε προκύπτει τὸ ἄνυσμα $OM_3=\frac{\alpha-5}{4}$· τὸ σημεῖον $M_3$ εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν θετικὴν λύσιν τῆς πρώτης ἐξισώσεως. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὰ σημεῖα τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ρίζας τῆς τρίτης ἐξισώσεως. Τὰ δὲ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην εὑρίσκομεν καθὼς εἰς τὴν ἄσκησιν 894.

*896΄.* ***Ἡ τεταγμένη σημείου M τοῦ ἐπιπέδου εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ διάνυσμα ΟΠ ἔχῃ θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν.***

Διότι ὑπάρχουν δύο σημεῖα M, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένην τὸ (ΟΠ) συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· ἑπομένως ἂν τοῦ ἑνὸς ἡ τεταγμένη εἶναι θετικὴ τοῦ ἄλλου εἶναι ἀρνητική.

*897.* ***Ἡ τεταγμένη τοῦ M εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική, ἂν τὸ διάνυσμα ΠΜ ἔχῃ θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν φοράν***




Σχ. 166.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ y τὴν τεταγμένην τοῦ M ἔχομεν

$y=\frac{\overline{\Pi M}}{\overline{OH}}$· ἂν λοιπὸν $\overline{\Pi M}$ ἔχῃ θετικὴν φορὰν τότε $\frac{\overline{\Pi M}}{\overline{OH}}>0$, ἤτοι $y>0$· ἂν δὲ $\overline{\Pi M}$ ἔχῃ ἀρνητικὴν φορὰν τότε $\frac{\overline{\Pi M}}{\overline{OH}}<0$, ἤτοι $y<0$.

*898.* ***Τίνα σημεῖα ἔχουν αἱ συντεταγμένας σημείου κειμένου ἐντὸς τῶν γωνιῶν*** xOy xOy΄ x΄Oy x΄Oy΄ ***καὶ διατί ;***

Αἱ συντεταγμὲναι τῶν σημείων ποῦ κεῖνται εἰς τὴν γωνίαν xOy εἶναι καὶ αἱ δύο θετικαί, διότι τὰ διανύσματα $\overline{O\Pi}$, $\overline{\Pi M}$ ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰς ἔχουν καὶ τὰ δύο θετικὴν φοράν. Τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν xOy΄ ἔχουν $x>0$ καὶ $y<0$· δι' ὅμοιον λόγον τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν x΄Oy ἔχουν $x<0$ καὶ $y>0$. δι' ὅμοιον λόγον καὶ τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν x΄Oy΄ ἔχουν $x<0$, $y<0$.

*899.* ***Ἂν σημεῖον τι κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν*** x ***(ἢ τῶν*** y***) ἔχει τεταγμένην (ἢ τετμημένην) O. Διατί ;***

Ἂν σημεῖον τι M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἡ ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα αὐτὸν καὶ ἑπομένως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὴν ἀρχὴν O· ἄρα $y = \dfrac{\overline{OO}}{\overline{OH}}$· ἀλλὰ τὸ $\overline{OO}$ εἶναι διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος συμπίπτουν, ἑπομένως ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν· ὅθεν καὶ $y=0$· δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $x=0$ διὰ κάθε σημεῖον ποὺ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y.

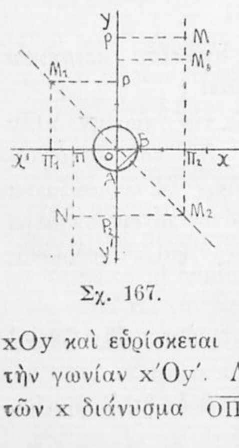
***900. Αἱ συντεταγμέναι σημείου τινὸς τῆς διχοτόμου τῶν γωνιῶν x′Oy. xOy′ εἶναι ἀντίθετοι. Διατί;***

Αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου $M_1$ ποὺ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου $M_2OM_1$ τῆς γωνίας x′Oy εἶναι τὰ πηλίκα τῶν ἀποστάσεων, τῶν θεωρουμένων ὡς διανυσμάτων, ἀπὸ τῶν ἀξόνων, ἤτοι ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας x′Oy· ἐπειδὴ ὅμως τὸ $M_2$ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας x′Oy τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ ἀποτελοῦν τὰς ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶναι ἴσα, ἀλλ' ὡς διανύσματα εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς· ἑπομένως εἶναι $-x=y$. Δι' ὅμοιον λόγον ἂν τὸ $M_2$ κεῖται εἰς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy′ ἔχομεν $x=-y$.

***901. Εὕρετε τὰ σημεῖα***

$$(3,5),\ (0,5),\ (3,4),(-2.-3),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Τὸ σημεῖον 3, 5 κεῖται εἰς τὴν πρώτην γωνίαν xoy τῶν ἀξόνων· ἐπὶ τοῦ Ox λοιπὸν λαμβάνομεν ἄνυσμα $\overline{O\Pi_2}=3.\overline{O\Theta}$ καὶ ἐκ τοῦ $\Pi_2$ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Oy καὶ λαμβάνομεν ἄνυσμα $\overline{\Pi_2 M}=5(\overline{OH})$, ὁπότε τὸ M εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.




Σχ. 167.

Τὸ σημεῖον (0,5) ἐπειδὴ ἔχει τετμημένην 0 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y· λαμβάνομεν ἑπομένως ἐπὶ τῆς θετικῆς φορᾶς αὐτοῦ διάνυσμα $\overline{OP}=5.\overline{OH}$, ὁπότε τὸ P εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Τὸ σημεῖαν (3,4) εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν xOy καὶ εὑρίσκεται καθὼς καὶ τὸ (3,5). Τὸ (−2,−3) εὑρίσκεται εἰς τὴν γωνίαν x′Oy′. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν x διάνυσμα $\overline{O\Pi}=2(\overline{O\Theta})$ καὶ ἐκ τοῦ Π φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y· ἐπὶ δὲ τῆς ἀρνητικῆς φορᾶς λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα $\overline{\Pi N}=3(ON)$, ὅτε τὸ σημεῖον N εἶναι τὸ ζητούμενον.

Τὸ σημεῖον $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ κεῖται εἰς τετάρτην γωνίαν τῶν ἀξόνων τὴν $xOy'$. Πρὸς εὕρεσιν τῆς τετμημένης του ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς· μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα τὸ δευθύνον διάνυσμα ΟΘ γράφομεν περιφέρειαν καὶ λαμβάνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτήν· ἡ ΑΒ ἔχει μῆκος $\overline{O\Theta}\sqrt{2}=\sqrt{2}$· ταύτης λαμβάνομεν τὸ 1/2 καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ ἀρχὴν τὸ Ο λαμβάνομεν τὸ ἄνυσμα $\overline{O\Pi'}=\frac{\overline{AB}}{2}$, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Π′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $xOy'$ εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

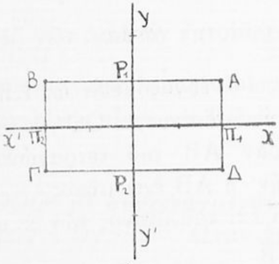
**902.** ***Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα συντεταγμένας $(\alpha, \beta)$, $(\alpha, -\beta)$, $(-\alpha, \beta)$ $(-\alpha, -\beta)$, ὅπου $\alpha>0$, $\beta>0$.***

Τὸ σημεῖον $(\alpha, \beta)$ κεῖται εἰς τὴν γωνίαν $xOy$· τὸ σημεῖον $(\alpha, -\beta)$ εἰς τὴν $xOy'$ καὶ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ $(\alpha, \beta)$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x· τὸ σημεῖον $(-\alpha, \beta)$ κεῖται εἰς τὴν γωνίαν $x'Oy$ καὶ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ $(\alpha, \beta)$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y· τὸ δὲ σημεῖον $(-\alpha, -\beta)$ κεῖται εἰς τὴν γωνίαν $x'Oy'$ καὶ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ $(\alpha,\beta)$ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο· ἐπίσης, ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν (Ο), εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων τὰ σημεῖα $(-\alpha,\beta)$, $(\alpha,-\beta)$· ἑπομένως τὰ δοθέντα σημεῖα εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

**903.** ***Σημείου τινὸς αἱ συντεταγμέναι εἶναι $(x, y)$· τίνες θὰ εἶναι αἱ συντεταγμέναι του, ἂν ἀλλάξωμεν τὰς φορὰς τῶν ἀξόνων· ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄξονας.***

Ἂν ἀλλάξωμεν τὰς φορὰς τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι x, y ἑνὸς σημειου θὰ εἶναι $(-x, -y)$· ἂν ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄξονας θὰ εἶναι $(y, x)$.

**904.** ***Ὀρθογώνιον ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ πλευρὰς παραλλήλους πρὸς ὀρθογωνίους ἄξονας. Ἂν ἡ μία κορυφή του ἔχει συντεταγμένας (2, 1), τίνες αἱ συντεταγμέναι των κορυφῶν αὐτῶν καὶ τῶν ὀρθῶν προβολῶν των ἐπὶ τῶν ἀξόνων.***




Σχ. 168.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου, αἱ ὁποῖαι κεῖνται κατὰ σειρὰν εἰς τὰς γωνίας xoy, x'oy, x'oy', xoy'· αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν εἶναι Α(2, 1), Β(−2, 1), Γ(−2, −1), Δ(2, −1). ἐὰν δὲ $\Pi_1$, $P_1$, $\Pi_2$, $P_2$ εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι τούτων εἶναι $\Pi_1(2, 0)$, $P_1(0, 1)$, $\Pi_2(-2, 0)$, $P_2(0, -1)$.

**905.** ***Εὕρετε τὰς συντεταγμένας προβολὰς τοῦ διανύσματος $M_1$, $M_2$, ἂν εἶναι α΄) $M_1(0, -3)$, $M_2(-5, 5)$, β΄) $M_2(2, 0)$, $M_1(-2, 3)$, γ΄) $M_1(3, 3)$ $M_2(1, 1)$ δ΄) $M_2(2, 5)$, $M_1(-3, 4)$.***

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β τὰς συντεταγμένας προβολὰς τοῦ $M_1M_2$ μὲ $(x_1, y_1)$, $(x_2\ y_2)$ τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων του θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\alpha = x_2 - x_1, \quad \beta = y_2 - y_1 \qquad (1)$$

α΄) Ἂν $M_1(0, -3)$, $M_2(-5, 5)$ θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν (1)

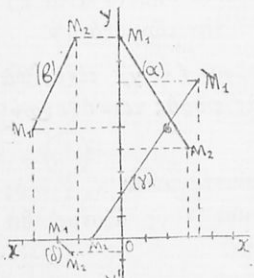
$$\alpha = -5, \quad \beta = 5 + 3 = 8.$$

β΄) Ἂν $M_2(2, 0)$ $M_1(-2, 3)$ ἔχομεν $\alpha = 2 + 2 = 4, \beta = 0 - 3 = -3$.

γ΄) Ἂν $M_1(3, 3)$, $M_2(1, 1)$ ἔχομεν $\alpha = 1 - 3 = -2, \beta = 1 - 3 = -2$.

δ΄) Ἂν $M_2(2, 5)$, $M_1(-3, 4)$ ἔχομεν $\alpha = 2 + 3 = 5$, $\beta = 5 - 4 - 1$.

**906.** ***Κατασκευάσατε τὸ διάνυσμα $M_1$ $M_2$, ἂν εἶναι α΄) ($\alpha=3$ $\beta=5$), $M_2(3, 4)$ β΄)($\alpha=2, \beta=4$), $M_1(-4, 5)$ γ΄) ($\alpha=-5$, $\beta=-7$), $M_2(-1{,}5, 0)$. δ΄) ($\alpha=0, 5$, $\beta=-0{,}5$), $M_1$ $(-3, 0)$.***




Σχ. 169.

α΄) Ἔστω ὅτι $\alpha=3$, $\beta=-5$ καὶ $M_2(3, 4)$.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ $x_1$, $y_1$ τὰς συντεταγμένας τοῦ $M_1$ καὶ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους (1) (ἄσκησ. 905) θὰ ἔχωμεν

$$3 = 3 - x_1 \quad \text{καὶ} \quad -5 = 4 - y_1$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$x_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y_1 = 9.$$

Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὰ σημεῖα $M_1(0, 9)$ καὶ $M_2(3, 4)$ καὶ φέρομεν τὸ διάνυσμα $M_1M_2$ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

β΄) Ἐὰν $\alpha=2$, $\beta=4$, $M_1(-4, 5)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τοὺς αὐτοὺς τύπους $2 = x_2 + 4$ καὶ $4 = y_2 - 5$

ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x_2 = -2$ καὶ $y_2 = 9$· τὸ ζητούμενον λοιπὸν διάνυσμα εἶναι τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν σημείων $M_1(-4, 5)$ $M_2(-2, 9)$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ τρίτον διάνυσμα ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων $M_1(3{,}5 \cdot 7)$, $M_2(-1{,}5 \cdot 0)$ καὶ τὸ τέταρτον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν $M_1(-3, 0)$, $M_2(-2{,}5, -0{,}5)$

**907. *Κατασκευάσατε διάνυσμα διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἔχον*** $(\alpha = 1, \beta = 4)$ $(\alpha = -1, \beta = 3)$.

α′) Ἂν εἰς τοὺς τύπους (1) (ἄσκ, 905) θέσωμεν $\alpha = 2, \beta = 4, x_1 = 0, y_1 = 0$.

εὑρίσκομεν $2 = x_2 - 0$ καὶ $4 = y_2 - 0$,

ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $x_2 = 2$ καὶ $y_2 = 4$.

Διὰ νὰ καρασκευάσωμεν τώρα τὸ ζητούμενον διάνυσμα ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων μὲ τὸ σημεῖον M(2, 4).

β′) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον διάνυσμα ἔχει ἀρχὴν τὸ O καὶ τέλος τὸ σημεῖον (—1, 3).

**908. *Δοθέντων τῶν σημείων*** $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ ***νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ*** $M(x, y)$ ***ἐπὶ τῆς εὐθείας*** $M_1M_2$, ***ὥστε νὰ εἶναι*** $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{3}{2}$ ἢ $-\frac{1}{2}$ ἢ $0{,}05$.

Αἱ συντεταγμέναι προβολαί τοῦ μὲν ἀνύσματος $M_1M$ εἶναι αἱ $x - y_1$, $y - y_1$, τοῦ δὲ $MM_2$ εἶναι $x_2 - x$, $y_2 - y$. Ἐπειδὴ τὰ ἀνύσματα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας $M_1M_2$, εἶναι παράλληλα· ἑπομένως αἱ ὁμώνυμοι προβολαί των εἶναι ἀνάλογοι καὶ ὁ λόγος αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν διανυσμάτων, ἤτοι $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{M_1M}{MM_2}$.

Ἂν λοιπὸν $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{3}{2}$ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{3}{2}$, $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{3}{2}$,

Λύοντες ὡς πρὸς x καὶ y ἔχομεν $x = \frac{2x_1 + 3x_2}{5}$, $y = \frac{2y_1 + 3y_2}{5}$

β′) Ἐὰν $\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{1}{2}$, ἔχομεν $x = 2x_1 - x_2$, $y = 2y_1 - y_2$.

γ′) Ἐὰν $\frac{M_1M}{MM_2} = 0{,}05$, εἶναι $x = \frac{x_1 + 0{,}05x_2}{1{,}05}$, $y = \frac{y_1 + 0{,}05y_2}{1{,}05}$

**909. *Δείξατε ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου διανύσματος ἰσοῦνται τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.***

Ἔστω τὸ διάνυσμα $M_1M_2$ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν σημείων $M_1(x_1, y_1)$,

$M_2(x_2,y_2)$ καὶ ἔστω $M(x,y)$ τὸ μέσον τοῦ $M_1M_2$. Τὸ μέσον M μὲ τὰ ἄκρα τοῦ $M_1M_1$ ὁρίζει δύο διανύσματα τὰ $M_1M$, $MM_2$ παράλληλα, τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον 1· ἐπειδὴ εἶναι παράλληλα καὶ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ αὐτῶν ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον,

ἤτοι
$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=1.$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις αὐτάς, ὡς πρὸς x καὶ y ἀντιστοίχως, ἔχομεν

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

*910. Δοθειςῶν τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν*
$$M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ M_3(y_3,y_3)$$
*ἑνὸς τριγώνου α΄) νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του, β΄) τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του.*

Ἐὰν N΄ (x΄,y΄) εἶνε τὸ μέσον τῆς $M_1M_2$ τότε $x'=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y'=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

Ἐὰν N΄΄(x΄΄,y΄΄) εἶνε τὸ μέσον τῆς $M_2M_3$ τότε $x''=\dfrac{x_2+x_3}{2}$, $y''=\dfrac{y_2+y_3}{2}$

Ἐὰν N΄΄΄(x΄΄΄,y΄΄΄) τὸ μέσον τῆς $M_3M_1$ τότε $x'''=\dfrac{x_3+x_1}{2}$, $y'''=\dfrac{y_3+y_1}{2}$

β΄) Ἔστω Δ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σημεῖον Δ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ 2/3 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου· ἂν λάβωμεν τὴν διάμεσον M΄N΄΄ θὰ ἔχωμεν $\dfrac{M_1\Delta}{M_1N''}=\dfrac{2}{3}$. Τὰ ἀνύσματα ὅμως $M_1\Delta$ καὶ $M_1N''$ εἶναι παράλληλα, ὡς κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἄρα ὁ λόγος των ἰσοῦται μὲ τὸ λόγον τῶν ὁμωνύμων προβολῶν των, ἤτοι

$$\frac{M_1\Delta}{M_1P''}=\frac{x-x_1}{x''-x_1}=\frac{2}{3} \quad \text{ἢ} \quad 3x=x_1+2x'' \qquad (1)$$

ἀλλὰ $x''=\dfrac{x_2+x_3}{2}$. ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ x΄΄ διὰ τῆς τιμῆς του, ἔχομεν $3x=x_1+x_2+x_3$ καὶ $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν $\quad y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{2}$.

*911. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων* (2, —3), (5, —7).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ εἶναι ἡ $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

ἀλλὰ $x_1=2,\ x_2=5,\ y_1=-3,\ y_2=-7.$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας γίνεται

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y+3}{-7+3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-4} \quad \text{ἢ} \quad 4x+3y+1=0.$$

***912. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς ἐχούσης συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν α′) 5, −7 β′) −1, −1 γ′) $\frac{3}{4}$, 0,8.***

Ἡ εὐθεῖα ἡ ἔχουσα συντεταγμένας α, β ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἔχει ἐξίσωσιν

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1.$$

α′) Ὅταν λοιπὸν $\alpha=5,\ \beta=-7$ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{7}=1 \quad \text{ἢ} \quad 7x-5y=35.$$

β′) Ὅταν $\alpha=\beta=-1$, τότε ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-1}=1 \quad \text{ἢ} \quad x+y+1=0$$

γ′) Ὅταν $\alpha=\dfrac{3}{4},\quad \beta=0{,}8=\dfrac{4}{5}$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι

$$\frac{x}{\frac{3}{4}}+\frac{y}{\frac{4}{5}}=1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{4x}{3}+\frac{5y}{4}=1 \quad \text{ἢ} \quad 16x+15y=12.$$

***913. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως α′) $\frac{3}{5}$, β′) −0,4, γ′) $-\frac{1}{2}$, δ′) $-\frac{3}{5}$.***

Ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως εἶναι λ, ἔχει ἐξίσωσιν $y=\lambda x$.

α′) Ὅταν $\lambda=\dfrac{3}{5}$ ἔχομεν $y=\dfrac{3}{5}x$ ἢ $3x-5y=0$.

β′) Ὅταν $\lambda=-0{,}4=-\dfrac{2}{5}$ ἔχομεν $y=-\dfrac{2}{5}x$ ἢ $2x+5y=0$.

γ′) Ὅταν $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ ἔχομεν $y=-\dfrac{1}{2}x$ ἢ $x+2y=0$.

δ') Ὅταν $\lambda=-\frac{3}{5}$, ἔχομεν $y=-\frac{3}{5}x$ ἢ $3x+5y=0$.

***914. Ὁμοίως τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου (3, −1) καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως** α') 1, −2 β') −0,8 γ') 0,65,*

Ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_1(x_1y_1)$ καὶ ἔχουσα συντελεστὴν διευθύνσεως λ ἔχει ἐξίσωσιν $y-y_1=\lambda(x-x_1)$,
ἐδῶ $x_1=3$ καὶ $y_1=-1$, ὅθεν ἡ ἐξίσωσις γίνεται $y+1=\lambda(x-3)$

α') Ἐὰν $\lambda=1$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $y+1=x-3$ ἢ $x-y=4$

β') Ἐὰν $\lambda=-2$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται. $y+1=-2x+6$ ἢ $2x+y=5$

γ') Ἐὰν $\lambda=0,8=\frac{4}{5}$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$y+1=\frac{4x-12}{5} \quad ἢ \quad 4x-5y=17$$

δ') Ἐὰν $\lambda=0,65=\frac{13}{20}$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$y+1=\frac{13x-39}{20} \quad ἢ \quad 13x-20y=59$$

***915. Δίδεται τρίγωνον μὲ κορυφὰς (2,3),(−3,5), (−2,−4) νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαμέσων του.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου Α(2,3), Β(−3,5), Γ(−2,−4).

Κάθε πλευρὰ τοῦ τριγώνου καθὼς καὶ κάθε διάμεσος αὐτοῦ διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων, ἑπομένως ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1)$$

Διὰ τὴν ΑΒ εἶναι $x_1=2$, $x_2=-3$, $y_1=3$, $y_2=5$
ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς ΑΒ εἶναι ἡ

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y-3}{2} \quad ἢ \quad 2x-4=-5y+15 \quad ἢ \quad 2x+5y=19$$

Διὰ τὴν ΒΓ εἶναι $x_1=-3$, $x_2=-2$, $y_1=5$, $y_2=-4$
ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{-9} \quad ἢ \quad -9x-27=y-5 \quad ἢ \quad 9x+y+22=0.$$

Διὰ τὴν ΓΑ εἶναι $x_1=-2$, $x_2=2$, $y_1=-4$, $y_2=3$,
ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y+4}{7}, \quad ἢ \quad 7x+14=4y+16 \quad ἢ \quad 7x-4y=2$$

Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ· τότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ Δ εἶναι

$$x_2=\frac{-3-2}{2}=\frac{-5}{2} \quad \text{καὶ} \quad y_2=\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς διαμέσου ΑΔ εἶναι ἡ

$$\frac{x-2}{-\frac{5}{2}-2}=\frac{y-3}{\frac{1}{2}-3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-2}{-9}=\frac{y-3}{-5} \quad \text{ἢ} \quad 5x-9y+17=0$$

Ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΑΓ· τότε αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ εἶναι

$$x_2=\frac{2-2}{2}=0, \quad y_2=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}$$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς διαμέσου ΒΕ εἶναι ἡ

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x+3}{3}=\frac{2y-10}{-11} \quad \text{ἢ} \quad 11x+6y+3=0$$

Ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΒ· τότε αἱ συντεταγμέναι του εἶναι

$$x_2=\frac{2-3}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad y_2=\frac{3+5}{2}=4$$

ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς διαμέσου ΓΖ εἶναι ἡ

$$\frac{x+2}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{y+4}{8} \quad \text{ἢ} \quad \frac{2x+4}{3}=\frac{y+4}{8} \quad \text{ἢ} \quad 16x-3y+20=0.$$

***916. Ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ σημεῖα (3,4), (−2,−2) διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς; τὸ σημεῖον (9,12) κεῖται ἐπ' αὐτῆς;***

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ δύο σημείων εἶναι

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad \text{ἐδῶ εἶναι} \quad x_1=3,\ y_1=4,\ x_2=-2,\ y_2=-2.$$

Ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{-6} \quad \text{ἢ} \quad 6x-18=5y-20 \quad \text{ἢ} \quad 6x-5y+2=0 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει σταθερὸν ὅρον, ἡ εὐθεῖα δὲν διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς. Τὸ σημεῖον (9,12) δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, διότι αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ δὲν πληροῦν τὴν ἐξίσωσίν της. Πράγματι ἂν θέσωμεν εἰς τὴν (1) $x=9$ καὶ $y=12$ εὑρίσκομεν

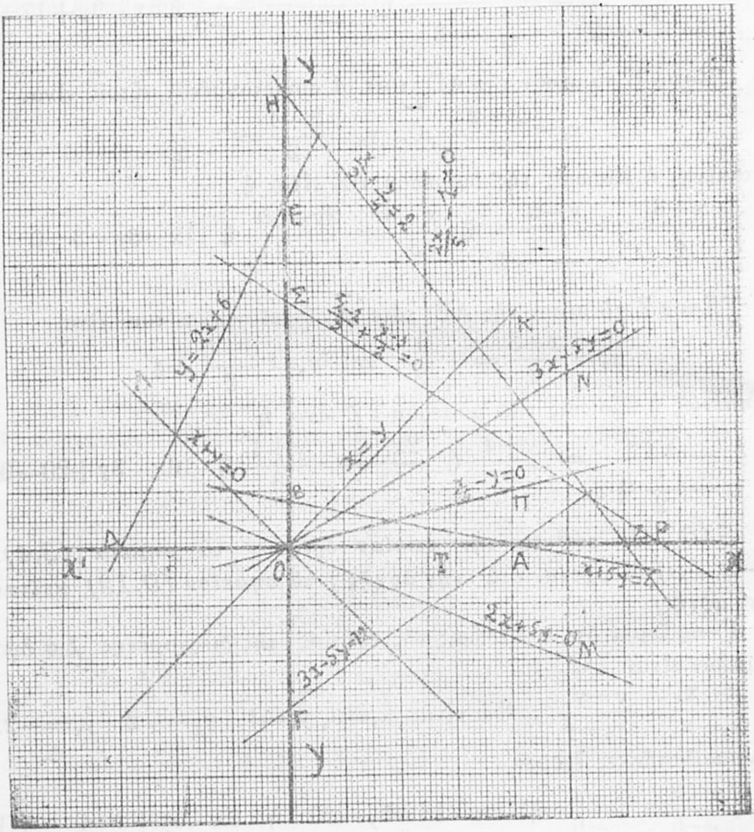
$$6.9-5.12+2=0 \quad \text{ἢ} \quad -4=0, \quad \text{τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.}$$

***917, Νὰ κατασκευασθῶσιν αἱ εὐθεῖαι τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι***

$x+5y=4,\ 3x-5y=12,\ y=2x+6,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2=0,\ x=y,\ x+y=0,$

$2x+5y=0,\ 3x-5y=0,\ \frac{x}{4}-y=0,\ \frac{x-2}{3}+\frac{y-3}{2}=0,\ \frac{2x}{5}-1=0.$

Ἔστωσαν οἱ ὀρθογώνιοι ἄξονες $x'x$, $y'y$.




Σχ. 170.

1ον) Ἡ $x+5y=4$ διὰ $y=0$ δίδει $x=4$ καὶ διὰ $x=0$ δίδει $y=\frac{4}{5}$· ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι $4, \frac{4}{5}$, ἄρα ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα $A(4,0)$, $B\left(0, \frac{4}{5}\right)$.

2ον) $3x-5y=12$· ταύτης αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι $x=4$, $y=-2,4$· ἄρα αὕτη ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων $A(4,0)$, $\Gamma(0,-2,4)$

3ον) $y=2x+6$· ταύτης αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι $y=6$, $x=-3$, ἑπομένως ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων $\Delta(-3,0)$, $E(0,6)$.

4ον) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-2=0$· ταύτην γράφομεν $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}-1$· ταύτης αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι $x=6$, $y=8$· ἑπομένως ὁρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων $E(6,0)$, $Z(0,8)$.

5ον) $x=y$· αὕτη εἶναι ἡ διχοτόμος ΟΚ τῆς πρώτης καὶ τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων.

6ον) $x+y=0$· αὕτη εἶναι ἡ διχοτόμος ΟΛ τῆς δευτέρας καὶ τετάρτης γωνίας τῶν ἀξόνων.

7ον) $2x+5y=0$· ἡ εὐθεῖα ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, διότι ἡ ἐξίσωσις στερεῖται σταθεροῦ ὅρου· ἐπὶ αὐτῆς δὲ κεῖται τὸ ἄνυσμα τοῦ ὁποίου συντελεστὴς διευθύνσεως εἶναι ὁ $\lambda=-2/5$ καὶ τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς· ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ αὐτοῦ εἶναι $(5,-2)$, ἄρα ἡ εὐθεῖα ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου $M(5,-2)$.

8ον) $3x-5y=0$· ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἐπ' αὐτῆς κεῖται τὸ διάνυσμα τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς $(5, 3)$ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς· ἄρα αὕτη ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου $N(5,3)$.

9ον) $\frac{x}{4}-y=0$· αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς· ὁρίζεται λοιπὸν ὑπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου $\Pi(4,1)$.

10ον) $\frac{x-2}{3}+\frac{y-3}{2}=0$· ταύτην γράφομεν $2x+3y=13$· ταύτης αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι $x=6,5$, $y=4\frac{1}{3}$· ὁρίζεται λοιπὸν ὑπὸ τῶν σημείων $P(6,5,0)$, $\Sigma\left(0,\ 4\frac{1}{3}\right)$.

11ον) $\frac{2x}{5}-1=0$ ἢ $x=\frac{5}{2}$· ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἐκ τοῦ σημείου $T\left(\frac{5}{2},0\right)$ τοῦ ἄξονος τῶν x.

**918.** ***Ἂν δύο εὐθεῖαι, ἔχουσαι ἐξισώσεις*** $Ax+By+\Gamma=0$, $A'x+B'y+\Gamma'=0$ ***συμπίπτουν θὰ εἶναι*** $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ ***καὶ ἀντιστρόφως.***

Λύοντες ὡς πρὸς y τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς ἔχομεν

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B} \text{ καὶ } y=\frac{A'}{B'}x-\frac{\Gamma'}{B'}$$

Ἐὰν διὰ λ καὶ β παραστήσωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς πρώτης καὶ τὴν τεταγμένην αὐτῆς ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἀντιστοίχως, ἔχομεν $\lambda=-\frac{A}{B}$, $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$· ἂν δὲ διὰ λ′, β′ παραστήσωμεν τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς δευτέρας καὶ τὴν τεταγμένην ταύτης ἐπὶ τὴν ἀρχήν· ἔχομεν $\lambda'=-\frac{A'}{B'}$, $\beta'=-\frac{\Gamma'}{B'}$ · ἀφοῦ ὅμως αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως, ἴσους ἤτοι

$$\lambda=\lambda' \quad \text{ἢ} \quad -\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \qquad (1$$

Ἐπίσης ἔχουν καὶ ὅλα τὰ σημεῖα κοινά, ἑπομένως τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἄρα αἱ τεταγμέναι αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι ἴσαι, ἤτοι

$$\beta=\beta' \quad \text{ἢ} \quad -\frac{\Gamma}{B}=-\frac{\Gamma'}{B'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'} \qquad (2)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$.

***Ἀντιστρόφως.*** Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$$Ax+By+\Gamma=0 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad A'x+B'y+\Gamma'=0 \quad (2)$$

καὶ ἔστω ὅτι $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τούτων παριστώμεναι εὐθεῖαι συμπίπτουν.

Διότι ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ ἔχομεν $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$· ἀλλὰ τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς παριστᾷ τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (1), τὸ δὲ δεύτερον μέλος τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῆς εὐθείας τῆς παριστωμένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2)· ἀφοῦ λοιπὸν οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσοι, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι. Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ ἔχομεν $-\frac{\Gamma}{B}=-\frac{\Gamma'}{B'}$, ἤτοι αἱ τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι ἴσαι, ἑπομένως τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν· ἀφοῦ λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, συμπίπτουν.

***Σημείωσις.*** Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα φθάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{\Gamma}{\Gamma'}=\mu$ ὁπότε $A=A'\mu$, $B=B'\mu$, $\Gamma=\Gamma'\mu$ τότε αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν εἶναι αἱ

$$A'\mu x+B'\mu y+\Gamma'\mu=0 \quad \text{καὶ} \quad A'x+B'y+\Gamma'=0$$

ἢ διαιροῦντες διὰ μ ἔχομεν $A'x+B'y+\Gamma'=0$ καὶ $A'x+B'y+\Gamma'=0$ ἤτοι αἱ δύο εὐθεῖαι παρίστανται ὑπὸ τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, ἄρα συμπίπτουν.

**919.** ***Ἂν δύο εὐθεῖαι ἔχουν τάς ἐξισώσεις***

$$Ax+By+\Gamma=0 \quad \textit{καὶ} \quad A'x+B'y+\Gamma'=0$$

***καὶ εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχωμεν*** $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ ***καὶ ἀντιστρόφως.***

Ἀφοῦ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι ἔχουν ἴσους συντελεστὰς κατευθύνσεως· ἐπειδὴ δὲ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν y εἰς διάφορα σημεῖα, ἄρα αἱ τεταγμέναι των $-\frac{\Gamma}{B}$, $-\frac{\Gamma'}{B'}$ εἶναι διάφοροι Ὥστε ἔχομεν $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$ καὶ $-\frac{\Gamma}{B}\neq-\frac{\Gamma'}{B'}$

ἢ $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ καὶ $\frac{B}{B'}\neq\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ ἤτοι $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{\Gamma}{\Gamma'}$.

***Ἀντιστρόφως.*** Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις

$Ax+By+\Gamma=0$ καὶ $A'x+B'y+\Gamma'=0$ καὶ ἔστω $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ λέγω ὅτι αὗται παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους.

Διότι ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ ἔχομεν $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$, ἤτοι αἱ εὐθεῖαι ἔχουν ἴσους συντελεστὰς διευθύνσεως, ἄρα εἶναι ἢ παράλληλοι ἢ συμπίπτουν· ἀλλ᾽ ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{B}{B'}\neq\frac{\Gamma}{\Gamma'}$ λαμβάνομεν $-\frac{\Gamma}{B}\neq-\frac{\Gamma'}{B'}$, ἤτοι αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῶν εὐθειῶν εἶναι διάφοροι, ἄρα τέμνουν τὸν ἄξονα τῶν y εἰς δύο διάφορα σημεῖα· ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ συμπίπτουν, διότι τότε ἔπρεπε ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῶν νὰ ἦσαν κοινά· καὶ θὰ ἔτεμνον τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον·, ἀφοῦ λοιπὸν δὲν συμπίπτουν εἶναι παράλληλοι.

**920. *Αἱ εὐθεῖαι μὲ ἐξισώσεις* $Ax+By+\Gamma=0$; $Ax+By=0$ *εἶναι παράλληλοι καὶ διατί.***

Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι, διότι $\frac{A}{A}=\frac{B}{B}=1$

ἀλλὰ $\frac{\Gamma'}{\Gamma}\neq 1$ διότι ἐδῶ $\Gamma'=0$, ὅθεν $\frac{\Gamma'}{\Gamma}=0$

**921. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων* $(5,-4)$, $(2,-3)$.**

Ἡ ἀπόστασις $M_1M_2$ δύο σημείων $M_1$ $(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $(M_1M_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$
εἰς ἄξονας συντεταγμένους ὀρθογωνίους. Ἐνταῦθα $x_1=5$ $x_2=2$ $y_1=-4$ $y_2=-3$· ἐὰν λοιπὸν διὰ δ παραστήσαμεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ἔχομεν

$$\delta^2=(2-5)^2+(-3+4)^2=9+1 \quad \text{καὶ} \quad \delta=\sqrt{10}.$$

**922. *Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου εἶναι* $(2,-1)$, $(-5,-5)$, $(-3,2)$ *νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του καὶ τοῦ διαμέσου αὐτοῦ.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπου $A(2,-1)$, $B(-5-5)$, $\Gamma(-3,2)$.

Ἔχομεν $(AB)^2=(-5-2)^2+(-5+1)^2=49+16$ καὶ $AB=\sqrt{65}$

$$(B\Gamma)^2=(-3+5)^2+(2+5)^2=4+49 \quad \text{καὶ} \quad B\Gamma=\sqrt{53}$$

$$(\Gamma A)^2=(2+3)^2+(-1-2)^2=25+9 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma A=\sqrt{34}$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ εἶναι

$$\left(-4,-\frac{3}{2}\right)\cdot \quad \text{ὥστε} \quad \Delta\left(-4,-\frac{3}{2}\right)$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου Ε τῆς ΓΑ εἶναι

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot \text{ὥστε } E\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου Ζ τῆς ΑΒ εἶναι

$$\left(-\frac{3}{2},-3\right)\cdot \quad \text{ὥστε } Z\left(-\frac{3}{2},-3\right).$$

Ἑπομένως τὰ μήκη τῶν διαμέσων εἶναι

$$(\mathrm{A\Delta})^2=(-4-2)^2+\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathrm{A\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{145}$$

$$(\mathrm{BE})^2=\left(-\frac{1}{2}+5\right)^2+\left(\frac{1}{2}+5\right)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathrm{BE}=\frac{1}{2}\sqrt{202}$$

$$(\Gamma \mathrm{Z})^2=\left(-\frac{3}{2}+3\right)^2+(-3-2)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \Gamma\mathrm{Z}=\frac{1}{2}\sqrt{109}$$

***923.** Ὀρθογώνιον ἔχει κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ μία τῶν κορυφῶν του ἔχει συντεταγμένας (α, β) ; Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαγωνίων του.*

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἔστω Α(α,β)· ἔστω ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἡ Γ εἰς τὴν τρίτην καὶ ἡ Δ εἰς τὴν τετάρτην, τότε αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $(-\alpha,\beta)$, $(-\alpha,-\beta)$, $(\alpha,-\beta)$ ἤτοι

$$\mathrm{A}(\alpha,\beta),\ \mathrm{B}(-\alpha,\beta),\ \Gamma(-\alpha,-\beta),\ \Delta(\alpha,-\beta)$$

ἑπομένως $(\mathrm{AB})^2=(-\alpha-\alpha)^2+(\beta-\beta)=4\alpha^2$ καὶ $\mathrm{AB}=2\alpha$

$(\mathrm{B}\Gamma)^2=(-\alpha+\alpha)^2+(-\beta-\beta)^2=4\beta^2$ καὶ $\mathrm{B}\Gamma=2\beta$

$(\Gamma\Delta)^2=(\alpha+\alpha)^2+(-\beta+\beta)^2=4\alpha^2$ καὶ $\Gamma\Delta=2\alpha$

$(\Delta\mathrm{A})^2=(\alpha-\alpha)^2+(\beta+\beta)^2=4\beta^2$ καὶ $\Delta\mathrm{A}=2\beta$

$(\Gamma\mathrm{A})^2=(\alpha+\alpha)^2+(\beta+\beta)^2=4\alpha^2+4\beta^2$ καὶ $\Gamma\mathrm{A}=2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$(\mathrm{B}\Delta)^2=(\alpha+\alpha)^2+(-\beta-\beta)^2=4\alpha^2+4\beta^2$ καὶ $\mathrm{B}\Delta=2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

***924.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, μὲ κέντρον (3,0) καὶ ἀκτῖνα 1,5. Ὁμοίως τῆς ἐχούσης κέντρον (0,—2) καὶ ἀκτῖνα 2.*

Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας τῆς ἐχούσης κέντρον (α,β) καὶ ἀκτῖνα ρ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους εἶναι $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$

Ἑπομένως διὰ τὴν πρώτην περιφέρειαν εἶναι $\alpha=3$, $\beta=0$ καὶ $\rho=1{,}5$

ὥστε ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι $(x-3)^2+y^2=1{,}5^2$

Διὰ δὲ τὴν δευτέραν ἔχομεν $\alpha=0$, $\beta=-2$, $\rho=2$

ὥστε ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι $x^2+(y+2)^2=4$

***925.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας μὲ ἀκτῖνα ρ καὶ ἐφαπτομένης τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων.*

Ἔστω Κ τὸ κέντρον καὶ Α,Β τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς περιφερείας καὶ τῶν ἀξόνων· αἱ ἀκτῖνες ΚΑ καὶ ΚΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας ἄρα ἀπολύτως ἴσαι πρὸς τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου Κ· τὸ κέντρον λοιπὸν ἔχει συντεταγμένας ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ, ἤτοι (ρ,ρ)· ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶναι $(x-\rho)^2+(y-\rho)^2=\rho^2$.

***926. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις περιφερείας ἐφαπτομένης τοῦ ἄξονος τῶν*** y ***καὶ ἐχούσης κέντρον (ϱ, O).***

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἑπομένως τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἄξονος τῶν y εἶναι ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων· ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ἰσοῦται πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου, ἤτοι πρὸς ϱ· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσίς της εἶναι $(x-\varrho)^2+y^2=\varrho^2$.

***927. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει κέντρον (3,—2) καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.***

Ἔστω K τὸ κέντρον· τότε ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὸ διάνυσμα $\overline{OK}$ τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων εἶναι (0,0) καὶ (3,—2)· ἄρα $(OK)^2=9+4$ καὶ $(OK)^2=13$· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας εἶναι ἡ $(x-3)^2+(y+2)^2=13$

***928. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια***

$$x^2+y^2-5x+6y-2=0, \qquad 5x^2+5y^2-x+y=0$$

Τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν

$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ ἔχει συντεταγμένας $\alpha=-\frac{A}{2}$, $\beta=-\frac{B}{2}$

ἡ δὲ ἀκτὶς ἔχει τιμὴν $\varrho=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-\Gamma}$

Διὰ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἔχομεν

$$-\frac{A}{2}=\frac{5}{2} \text{ καὶ } -\frac{B}{2}=-3 \text{ καὶ } \Gamma=-2.$$

ἑπομένως, τὸ μὲν κέντρον τῆς περιφερείας ταύτης εἶναι $K\left(\frac{5}{2},-3\right)$ ἡ δὲ ἀκτὶς

$$\varrho=\sqrt{\frac{25+36}{4}+2}=\sqrt{\frac{69}{4}}=\frac{\sqrt{69}}{2}=4{,}092\ldots$$

Μὲ κέντρον λοιπὸν τὸ σημεῖον $\left(\frac{5}{2},-3\right)$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ 4,092 γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν γράφομεν οὕτω

$$x^2+y^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y=0,$$

ἑπομένως εἶναι $\alpha=\frac{1}{10}$, $\beta=-\frac{1}{10}$, $\Gamma=0$

ἄρα $$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}{4}} = \frac{1}{10}\sqrt{2}$$

ὥστε ἡ ζητουμένη περιφέρεια εἶναι ἡ γραφομένη μὲ κέντρον

Κ $\left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{10}\sqrt{2}$. Αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο(0,0), διότι αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀρχῆς πληροῦν τὴν ἐξίσωσίν της.

*929.* ***Ὁμοίως*** $x^2+y^2-4x+7y=1$, $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-8=10$

Τὸ κέντρον τῆς πρώτης ἔχει συντεταγμένας $\alpha=2$ καὶ $\beta=-\frac{7}{2}$

ἡ δὲ ἀκτὶς αὐτῆς ἔχει τιμὴν

$$\varrho = \sqrt{\frac{16+49}{4}+1} = \frac{\sqrt{69}}{2} = 4{,}092...$$

ἑπομένως μὲ κέντρον Κ $\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ καὶ ἀκτῖνα $\varrho=4{,}092$, ἂν γραφῇ περιφέρεια, αὕτη ἔχει ἐξίσωσιν $x^2+y^4-4x+7y=1$.

Τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}+\frac{x}{2}-\frac{y}{3}-8=10$ γράφομεν οὕτω

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-y-54=0,$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον

$\alpha=-\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$ καὶ ἀκτῖνα $\varrho=\sqrt{\frac{\frac{9}{4}+1}{4}+54}$

ἤτοι $$\varrho = \frac{\sqrt{877}}{4} = 7{,}4035.$$

*930.* ***Ποῦ τέμνει ἡ εὐθεῖα*** $x=y$ ***τὴν περιφέρειαν***

$$x^2+y^2+2x+3y-5=0.$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς τομῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας πρέπει νὰ πληροῦν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις, ἤτοι νὰ εἶναι λύσις τοῦ συστήματος $x=y$ (1)

$$x^2+y^2+2x+3y-5=0 \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ y διὰ τῆς τιμῆς του ποὺ δίδει ἡ (1) εὑρίσκομεν $2x^2+5y-5=0$ καὶ $x=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$,

ἑπομένως τὰ σημεῖα τομῆς εἶναι τὰ

$$M_1\left(\frac{\sqrt{65}-5}{4}, \frac{\sqrt{65}-5}{4}\right) \text{ καὶ } M_2\left(-\frac{5+\sqrt{65}}{4}, -\frac{5+\sqrt{65}}{4}\right)$$

**Ἀσκήσεις πρὸς λύσιν.**

108) Νὰ τμηθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς τετραγωνικῆς κανονικῆς πυραμίδος εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της.

109) Νὰ τμηθῇ μία κόλουρος πυραμὶς δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο βάσεων.

110) Δίδεται ἓν ὀρθὸν κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓ.....Α'Β'Γ'... Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα Α'',Β'',Γ'',... τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. 2) ἂν γνωρίζωμεν τὰ ἐμβαδὰ Ε,Ε' τῶν βάσεων νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε'' τῆς τομῆς Α''Β''Γ''..

111) Εἰς ἕνα τετράεδρον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἀπέναντι ἀκμῶν, ἡ αὐτὴ σχέσις ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων διέδρων.

112) Δίδεται ἓν τετράεδρον ΟΑΒΓ τρισορθώνιον εἰς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ΟΚ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου Ο εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ τῆς τριέδρου αὐτῆς.

113) Μία κόλουρος πυραμὶς τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της, ἡ ἀπόστασις τοῦ ὁποίου ἀπὸ τὰς βάσεις ἔχει λόγον $\frac{3}{4}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι· αἱ βάσεις της εἶναι τετράγωνα πλευρῶν 5μ. καὶ 3 μ.

114) Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἓν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

115) Ὅταν ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος εἶναι πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πρίσματος ἀπὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν του καὶ τῶν βάσεών του εἶναι σταθερόν.

116) Ἐὰν μία πυραμὶς ἔχῃ βάσιν ἓν τραπέζιον, ὁ ὄγκος της εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου κατὰ τὸ ὁποῖον προβάλλεται ἡ πυραμὶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

117) Εἰς ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΑΒ, χωρίζει τὰς ἕδρας ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ἐμβδαδὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ τῶν προσκειμένων εἰς τὰ τρίγωνα αὐτά.

118) Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἀκμὴν κοινὴν καὶ τὴν δίεδρον τῆς ἀκμῆς αὐτῆς κοινήν, οἱ ὄγκοι των εἶναι ἀνάλογοι τῶν γινομένων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν δίεδρον αὐτήν.

119) Δίδεται μία κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ. Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Ο τοῦ ὕψους ΣΚ, ἢ τῆς προεκτάσεώς του, φέρωμεν τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου τῆς κορυφῆς Σ εἰς τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\Sigma A'} + \frac{1}{\Sigma B'} + \frac{1}{\Sigma \Gamma'} = \text{σταθερόν}.$$

120) Δίδεται ἓν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ἓν σημεῖον Ο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ ΟΓ, ΟΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{O\Gamma'}{\Gamma\Gamma'} + \frac{O\Delta'}{\Delta\Delta'} = 1$$

121) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος, ἂν χωρίσωμεν αὐτὴν εἰς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κορυφὴν ἓν σημεῖον Ο τῆς μιᾶς βάσεως της καὶ συνδέσωμεν τὸ Ο μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ στερεοῦ.

122) Ἓν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται κατὰ ὁλόκληρον στροφὴν περὶ εὐθεῖαν xy, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ δὲν τὸ τέμνει. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μὲ τὰ γινόμενα τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περίμετρον ἢ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

123) Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy καὶ ἓν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας καὶ εἰς ἀπόστασιν 2α ἀπὸ τῶν πλευρῶν της. Διὰ τοῦ Μ φέρομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὴν Oy εἰς τὸ Β. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ α ὁ λόγος τοῦ ὄγκου πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ, ὅταν στραφῇ κατὰ ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὴν Oy.

124) Ἔστω Β′Γ′ ἡ προβολὴ τῆς διαμέτρου ΒΓ ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος ΟΑ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΤΤ′ τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν θέσιν τῆς ΒΓ ὁ λόγος τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ποὺ παράγεται ἀπὸ τὴν περιστροφὴν τοῦ τραπεζίου ΒΓΒ′Γ′ περὶ τὴν ΤΤ′, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσος μὲ 2μ.

125) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ποὺ παράγει ἓν παραλληλόγραμμον, ἂν περιστραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο προσκειμένας πλευράς του.

126) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων καὶ τοῦ ὕψους ἑνὸς κολούρου κώνου, ἵναεῖναι περιγεγραμμένος περὶ μίαν σφαῖραν. β) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά του εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου.

127) Δίδονται δύο κανονικαὶ τεθλασμέναι γραμμαί, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐγγεγραμμένη, ἡ δὲ ἄλλη περιγεγραμμένη εἰς μίαν ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου AB. Νὰ ἀποδειχθῇ. ὅτι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον AB εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν ποὺ παράγουν αἱ δύο τεθλασμέναι γραμμαί.

128) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος ρ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ζωνῶν ποὺ ὁρίζει.

129) Ὁ παραγόμενος ἀπὸ τὴν περιστροφὴν ἑνὸς τριγώνου περὶ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ δὲν τὸ τέμνει, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία γράφεται ὑπὸ τοῦ κέντρου τῆς βαρύτητος τοῦ τριγώνου.