ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ

ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ Φ. ΠΑΛΛΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΝ ΤΗ, ΣΧΟΛΗ, ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ ΚΑΙ τ. ΕΝ ΤΗ, ΣΧΟΛΗ,, ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ. ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων τοῦ Κράτους Σχολῶν, τῶν Σπουδαστῶν τῶν Στρατιωτικῶν Σχολῶν Εὐελπίδων, Δοκίμων, Ἰκάρων, τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν Σπουδαστῶν τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τῶν Πανεπιστημίων καὶ τῶν Σπουδαστῶν τοῦ Πολυτεχνείου.

ΤΕΥΧΟΣ Β΄.

ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΑΘΗΝΑΙ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Α. Φ. ΠΑΛΛΑ

Παλλας (Αριστείδης Φ.)

ΑΡΙΣΤΕΙΔΟΥ Φ. ΠΑΛΛΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ ΕΝ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ ΚΑΙ τ. ΕΝ ΤΗ ΣΧΟΛΗ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ. ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΑΛΛΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

ΜΕΓΑΛΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΤΕΥΧΟΣ Β'.

ΔΕΥΤΕΡΟΝ, ΤΡΙΤΟΝ ΚΑΙ ΤΕΤΑΡΤΟΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ

ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΡΟΥΖΒΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56 - ΑΘΗΝΑΙ

1959

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αἱ παραπομπαὶ ἀναφέρονται εἰς τὸ βιβλίον μου ***«Μεγάλη Γεωμετρία, τόμος Α΄ ἔκδοσις δευτέρα».***

2) Εἰς τὸ βιβλίον μου ***«Μεγάλη Γεωμετρία»****, ἡ ἀρίθμησις τῶν ἀσκήσεων μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ 299 βαίνει κανονικῶς. Μετὰ τὴν 299 ἄσκησιν τῆς σελίδος 127 τοῦ τεύχους Α' τοῦ βιβλίου μου, τίθεται αὔξων ἀριθμὸς ἀσκήσεως 200 ἀντὶ τοῦ κανονικοῦ 300. Ἐνταῦθα θὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν κανονικὴν ἀρίθμησιν. Οὕτως εἰς τὰς ἀσκήσεις ὑπ' αὔξοντα ἀριθμὸν 200 ἕως 446 καὶ ἀπὸ τῆς σελίδος 127 μέχρι τῆς σελίδος 176 τοῦ βιβλίου μου* ***«Μεγάλη Γεωμετρία. Τόμος Α΄, τεῦχος Α΄».*** *δέον εἰς τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων νὰ προστίθενται μία μονάς.*

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

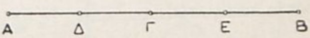
ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΔΙΑ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

383) Δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ διαιρεθῇ εἰς 2 ἢ 4 ἢ 8 ἢ γενικῶς εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.

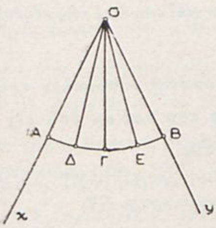
Λύσις. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ προβλήματος 1 § 265 εὑρίσκομεν τὸ μέσον Γ τοῦ ΑΒ καὶ οὕτω τὸ ΑΒ διηρέθη εἰς 2 ἴσα μέρη. Εὑρίσκομεν ὁμοίως τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν ΑΓ καὶ ΓΒ καὶ οὕτω τὸ ΑΒ διηρέθη εἰς $4=2^2$ ἴσα μέρη. Ὁμοίως τῶν ΑΔ, ΔΓ, ΓΕ καὶ ΕΒ εὑρίσκομεν τὰ μέσα καὶ οὕτω τὸ ΑΒ θὰ διαιρεθῇ εἰς $8=2^3$ ἴσα μέρη. Ὁμοίως προχωροῦντες διαιροῦμεν τὸ ΑΒ εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.



Σχ. 263.

384) Δοθεῖσα γωνία $\widehat{xoy}$ νὰ διαιρεθῇ εἰς 2 ἢ 4 ἢ 8, ἢ γενικῶς εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.

Λύσις. Τῆς δοθείσης γωνίας $\widehat{xoy}$ κατασκευάζομεν (§ 268) τὴν διχοτόμον ΟΓ καὶ οὕτως ἡ $\widehat{xoy}$ διηρέθη εἰς 2 ἴσα μέρη. Τῶν γωνιῶν $\widehat{xo\Gamma}$ καὶ $\widehat{yo\Gamma}$ κατασκευάζομεν τὰς διχοτόμους ΟΔ καὶ ΟΕ καὶ οὕτως ἡ γωνία διηρέθη εἰς $4=2^2$ ἴσα μέρη, τὰ $\widehat{xo\Delta}$, $\widehat{\Delta o\Gamma}$, $\widehat{\Gamma oE}$, $\widehat{Eoy}$. Τῶν τεσσάρων αὐτῶν γωνιῶν κατασκευάζομεν τὰς διχοτόμους καὶ οὕτως ἡ γωνία $\widehat{xoy}$ διαιρεῖται εἰς $8=2^3$ ἴσα μέρη. Προχωροῦντες ὁμοίως ἡ γωνία διαιρεῖται εἰς $16=2^4$ καὶ γενικῶς εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.



Σχ. 264.

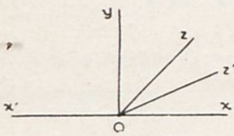
385) Μὲ διάμετρον δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα νὰ γραφῇ περιφέρεια.

Λύσις. Εὑρίσκομεν (σχ. 263) τὸ μέσον Γ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

386) Σημείου Α κειμένου ἐκτὸς εὐθείας xy ***νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην.***

Λύσις. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΟ ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς xy τὸ σημεῖον Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΟ τὸ σημεῖον Α΄. Τὸ Α΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.

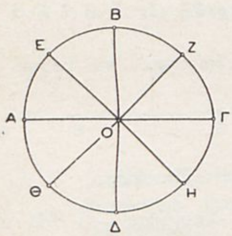
387) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία 45°, ἢ 22° 30΄, ἢ 135°.



Σχ. 265.

Λύσις. Διχοτομοῦμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν $\widehat{xoy}$ κατασκευάζοντες τὴν διχοτόμον αὐτῆς oz, ὅτε ἡ $\widehat{xoz}$ εἶναι 45°, ἡ δὲ $\widehat{x'oz}$ εἶναι 135°, ἔνθα ox΄ ἡ προέκτασις τῆς ox. Διχοτομοῦμεν τὴν $\widehat{xoz}$ κατασκευάζοντες τὴν διχοτόμον αὐτῆς oz΄, ὅτε ἡ $\widehat{xoz'}$ εἶναι 22° 30΄.

388) Περιφέρεια κύκλου νὰ διαιρεθῇ εἰς 4 ἢ 8 ἢ 16, ἢ γενικῶς εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.



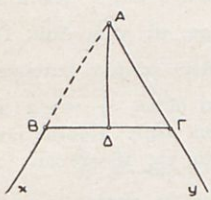
Σχ. 266.

Λύσις. Φέρομεν (σχ. 266) δύο καθέτους διαμέτρους ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ καὶ οὕτω διαιρεῖται ἡ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη τὰ $\overset{\frown}{ΑΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΔ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΔΑ}$. Διχοτομοῦμεν τὰς γωνίας $\widehat{ΑΟΒ}$ καὶ $\widehat{ΒΟΓ}$ διὰ τῶν ΕΟΗ καὶ ΖΟΘ καὶ οὕτως ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς ὀκτὼ ἴσα μέρη τὰ $\overset{\frown}{ΑΕ}$, $\overset{\frown}{ΕΒ}$, $\overset{\frown}{ΒΖ}$, $\overset{\frown}{ΖΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΗ}$, $\overset{\frown}{ΗΔ}$, $\overset{\frown}{ΔΘ}$, $\overset{\frown}{ΘΑ}$. Ὁμοίως διχοτομοῦντες τὰς γωνίας $\widehat{ΑΟΕ}$, $\widehat{ΕΟΒ}$, $\widehat{ΒΟΖ}$, $\widehat{ΖΟΓ}$ διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 16 ἴσα μέρη. Προχωροῦντες ὁμοίως διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 2^{ν} ἴσα μέρη.

389) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ εὐθείας xy ***σημεῖον ἴσον ἀπέχον δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β, ἐκ τῶν ὁποίων ἓν τουλάχιστον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας.***

Λύσις. Ἰδὲ λύσιν εἰς τὴν ἄσκησιν 24.

390) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς βάσεώς του καὶ ἐκ τοῦ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους.



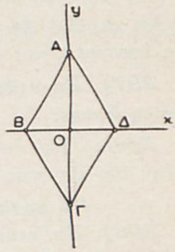
Σχ. 267.

Λύσις. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν βάσιν ΒΓ (σχ. 267) ὑψοῦμεν εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Δ κάθετον, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν μῆκος ΔΑ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος, ὅτε τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

391) Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος μὲ διαγωνίους ἴσας πρὸς δύο δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

Λύσις. Ἔστωσαν α καὶ β τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα. Λαμβάνομεν (σχ. 268) δύο καθέτους εὐθείας Ox καὶ Oy καὶ μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνας $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\beta}{2}$ γράφομεν περιφερείας, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη τέμνει τὴν Ox εἰς τὰ Β καὶ Δ καὶ ἡ δευτέρα τέμνει τὴν Oy εἰς τὰ Α καὶ Γ. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ῥόμβος, διότι εἶναι

$$OB = O\Delta = \frac{\alpha}{2} \quad \text{καὶ} \quad OA = O\Gamma = \frac{\beta}{2}.$$



Σχ. 268.

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

392) Ἐκ τῆς πλευρᾶς του, ἢ ἐκ τοῦ ὕψους του.

Λύσις. α) Ἔστω α ἡ δοθεῖσα πλευρά. Λαμβάνομεν τμῆμα (σχ. 267) ΒΓ=α καὶ εἰς τὰ Β καὶ Γ μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, κατασκευάζομεν γωνίας $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$, ὅτε τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

β) Ἔστω υ τὸ δοθὲν ὕψος. Λαμβάνομεν τμῆμα (σχ. 267) ΑΔ=υ καὶ εἰς τὸ Δ ὑψοῦμεν κάθετον. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΔ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν, ἑκατέρωθεν τῆς ΑΔ, γωνίας $\widehat{BA\Delta} = \widehat{\Gamma A\Delta} = 30^\circ$, τῶν ὁποίων αἱ ἕτεραι πλευραὶ τέμνουν τὴν εἰς τὸ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$.

393) Ἐκ τῆς περιμέτρου του.

Λύσις. Μὲ πλευρὰν τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δοθείσης περιμέτρου κατασκευάζομεν (ἄσκ. 392) ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

394) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου, ἢ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $R = \frac{2}{3}\upsilon$, ἔνθα υ τὸ ὕψος, ἔχομεν $\upsilon = \frac{3}{2}R$. Ἄρα τοῦ τριγώνου γνωρίζομεν τὸ ὕψος καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν προηγουμένην κατασκευήν, (ἄσκ. 392).

β) Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι $\rho = \frac{1}{3}\upsilon$, ἔχομεν $\upsilon = 3\rho$. Ἄρα τοῦ τριγώνου γνωρίζομεν τὸ ὕψος καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν προηγουμένην κατασκευήν, (ἄσκ. 392).

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

395) Μὲ βάσιν τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ ὕψος τὰ $\frac{2}{3}$ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος.

Λύσις. Ἔστω Κ τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα. Διαιροῦμεν (§ 273) τὸ Κ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὰ τρία ἐξ αὐτῶν, ὅτε ἔχομεν τὴν βάσιν α, τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Διαιροῦμεν τὸ Κ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὰ δύο ἐξ αὐτῶν, ὅτε ἔχομεν τὸ ὕψος υ. Οὕτω, γνωστῶν τῶν α καὶ υ ἔχομεν τὴν κατασκευὴν τῆς ἀσκήσεως 390.

396) Ἐκ τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καὶ ἐκ τοῦ εἰς τὴν βάσιν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους.

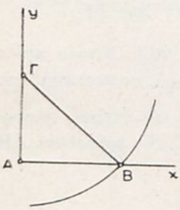
Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 267) γωνίαν $x\widehat{A}y$ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ κατασκευάζομεν τὴν διχοτόμον αὐτῆς ΑΔ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν μῆκος ΑΔ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος. Εἰς τὸ Δ ὑψοῦμεν κάθετον τῇ ΑΔ, ἥτις τέμνει τὰς Αx καὶ Αy εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

397) Ἐκ μιᾶς γωνίας τῆς βάσεως καὶ ἐκ τοῦ εἰς τὴν βάσιν ἀντιστοιχοῦντος ὕψους.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὰς γωνίας τῆς βάσεως κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς καὶ οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην κατασκευήν.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον.

398) Ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ ἐκ τῆς ὑποτεινούσης.



Σχ. 269.

Λύσις. Ἔστωσαν β καὶ α ἡ κάθετος πλευρὰ καὶ ἡ ὑποτείνουσα. ***Περιορισμός.*** Πρέπει $\beta < \alpha$. Λαμβάνομεν (σχ. 269) ὀρθὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ καὶ ἐπὶ τῆς Αy λαμβάνομεν μῆκος $A\Gamma=\beta$. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ εἶναι τὸ ζητούμενον.

399) Ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ ἐκ μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Λύσις. Ἔστωσαν β καὶ Γ ἡ κάθετος πλευρὰ καὶ ἡ δοθεῖσα ὀξεία γωνία. Λαμβάνομεν (σχ. 269) ὀρθὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Αy μῆκος $A\Gamma=\beta$. Μὲ πλευρὰν ΓΑ καὶ κορυφὴν Γ κατασκευάζομεν γωνίαν $A\widehat{\Gamma}B$ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Γ. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐὰν τώρα δίδεται ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ γωνία Β, ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς β, τότε κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Γ καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

400) Ἐκ τῆς ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Λύσις. Ἔστωσαν α καὶ Γ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὀξεία γωνία. Λαμβάνομεν (σχ. 269) $\Gamma B=\alpha$ καὶ μὲ πλευρὰν αὐτὴν καὶ κορυφὴν Γ κατασκευάζομεν γωνίαν $B\widehat{\Gamma}A$ ἴσην πρὸς Γ καὶ ἐκ τοῦ Β ἄγομεν τὴν κάθετον ΒΑ ἐπὶ τὴν ἑτέραν πλευρὰν ΓΑ τῆς κατασκευασθείσης γωνίας. Οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

401) Ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν ἢ ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

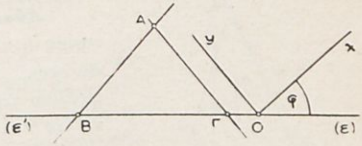
Λύσις. α) Ἐπὶ (σχ. 269) τῶν πλευρῶν Αy καὶ Αx ὀρθῆς γωνίας $x\widehat{A}y$ λαμβάνομεν μήκη $A\Gamma=\beta$ καὶ $AB=\gamma$, ἔνθα β καὶ γ αἱ δοθεῖσαι κάθετοι πλευραί, καὶ φέρομεν τὴν ΓΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι τὸ ζητούμενον.

β) Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ β ἡ κάθετος πλευρά. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=2R$ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν κατασκευὴν τῆς ἀσκήσεως 398.

402) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου του.

Λύσις. Διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν περίμετρον α εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, ὅτε εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον.

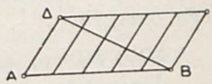
403) Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν γωνίαν ἴσην πρὸς φ.



Σχ. 270.

Λύσις. Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ (ε) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Μὲ κορυφὴν (σχ. 270) τυχὸν σημεῖον Ο τῆς (ε) καὶ πλευρᾶς τὰ ἑκατέρωθεν τοῦ Ο τμήματα τῆς (ε) κατασκευάζομεν γωνίας $x\widehat{O}\varepsilon$ καὶ $y\widehat{O}\varepsilon'$ ἴσας πρὸς φ καὶ ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς Οx καὶ Οy. Αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.

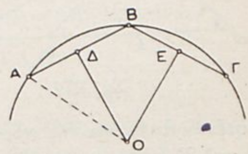
404) Δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ διαιρεθῇ δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς μίαν πλευράν του εἰς ν ἴσα μέρη.



Σχ, 271.

Λύσις. Διαιροῦμεν (σχ. 271) τὴν ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους τῇ ΑΔ καὶ οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς ν ἴσα μέρη.

405) Δοθέντος τόξου κύκλου νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.



Σχ. 272.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 272) ἐπὶ τοῦ τόξου τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ. Εἰς τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν χορδῶν ὑψοῦμεν καθέτους ἐπ' αὐτάς, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο. Τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον καὶ ἡ ΟΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον.

406) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του καὶ τῆς μιᾶς διαγωνίου του.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον (σχ. 271) γνωρίζομεν τὰ ΑΒ, ΑΔ καὶ ΔΒ, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ κατασκευάζεται. Ἐκ τῶν Δ καὶ Β φέρομεν ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Γ. Τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

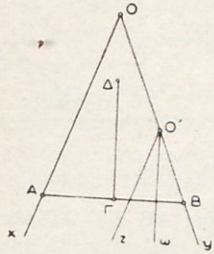
407) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν $B\Gamma=\alpha$, Α, $B-\Gamma=\delta$.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $B-\Gamma=\delta$ καὶ $B+\Gamma=180-A$ λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως

$$2B=180-A+\delta \text{ καὶ } 2\Gamma=180-A-\delta, \text{ ἢ } B=90-\frac{1}{2}(A-\delta) \text{ καὶ } \Gamma=90-\frac{1}{2}(A+\delta).$$

Περιορισμός. Πρέπει $\frac{1}{2}(A-\delta)<90$ καὶ $\frac{1}{2}(A+\delta)<90$. Ἐφ' ὅσον τώρα εἶναι γνωστὰ τὰ α, Β καὶ Γ ἔχομεν τὴν κατασκευὴν τῆς § 277.

408) Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διχοτόμος γωνίας xoy, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ κεῖται ἐκτὸς τοῦ φύλλου τῆς σχεδιάσεως, ἤτοι νὰ γίνῃ ἡ κατασκευὴ χωρὶς νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας.



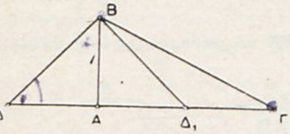
Σχ. 273.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 273) $\widehat{xoy}$ ἡ γωνία, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ o κεῖται ἐκτὸς τοῦ φύλλου τῆς σχεδιάσεως. Ἐκ σημείου o′ τῆς oy, κειμένου ἐπὶ τοῦ φύλλου τῆς σχεδιάσεως, φέρομεν τὴν o′z παράλληλον τῇ ox καὶ τῆς γωνίας zo′y κατασκευάζομεν, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 268), τὴν διχοτόμον o′ω, ἥτις θὰ εἶναι παράλληλος τῇ διχοτόμῳ τῆς γωνίας xoy. Ἐπὶ τὴν o′ω ὑψοῦμεν εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὴν κάθετον, τέμνουσαν τὰς ox καὶ oy εἰς τὰ A καὶ B. Εἰς τὸ μέσον Γ τῆς AB ἄγομεν τὴν κάθετον ΓΔ τῇ AB ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος, διότι τὸ τρίγωνον oAB εἶναι ἰσοσκελές.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90°) ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων.

409) ΒΓ=α, ΑΓ+ΑΒ=λ.

Λύσις. Δίδονται ΒΓ=α καὶ ΑΓ+ΑΒ=β+γ=λ. ***Περιορισμός.*** Πρέπει α<λ.



Σχ. 274.

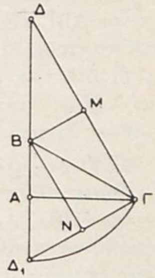
Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (Α=90°). Προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ μῆκος ΑΔ==ΑΒ, ὅτε εἶναι ΓΔ=λ καὶ $\widehat{ΒΔΑ}$=45°. Τὸ τρίγωνον ΔΒΓ κατασκευάζεται (§ 275), διότι γνωρίζομεν δύο πλευράς του (σχ. 274) ΒΓ=α, ΓΔ=λ καὶ τὴν γωνίαν Δ=45° τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς του ΒΓ. Κατασκευασθέντος τοῦ ΒΔΓ, φέρομεν ἐκ τοῦ Β κάθετον τῇ ΔΓ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Α. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Πράγματι. Ἐπειδὴ εἶναι Δ=45 θὰ ἔχωμεν ΑΔ=ΑΒ καὶ συνεπῶς ΓΑ+ΑΒ=ΓΔ=λ.

410) ΒΓ=α, ΑΓ−ΑΒ=λ.

Λύσις. Δίδονται ΒΓ=α, ΑΓ−ΑΒ=β−γ=λ. ***Περιορισμός.*** Πρέπει α>λ. Ἔστω (σχ. 274) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν $ΑΔ_1$=ΑΒ, ὅτε εἶναι $ΓΔ_1$=ΓΑ−ΑΒ=λ καὶ $\widehat{ΑΔ_1Β}$=45°, ὅτε $\widehat{ΒΔ_1Γ}$=135°. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=α, $ΓΔ_1$=λ καὶ $\widehat{ΒΔ_1Γ}$=135°, τὸ τρίγωνον $ΒΔ_1Γ$ κατασκευάζεται (§ 275). Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν τὴν ΒΑ κάθετον τῇ $ΓΔ_1$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Α, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

411) ΑΓ=β, ΒΓ+ΑΒ=λ.

Λύσις. Δίδεται ΑΓ=β καὶ ΒΓ+ΑΒ=α+γ=λ. ***Περιορισμός.*** Πρέπει β<λ. Ἔστω (σχ. 275) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ΒΔ=ΓΒ, ὅτε εἶναι ΑΔ=ΒΓ+ΑΒ=λ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ κατασκευάζεται. Τοῦ ΔΑΓ κατασκευασθέντος φέρομεν (ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ=ΓΒ$) κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ, ἥτις, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΔ>ΑΓ$, τέμνει τὴν ΔΑ εἰς τὸ Β κείμενον μεταξὺ Α καὶ Δ, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 275.

412) $ΑΓ=β$, $ΒΓ-ΑΒ=λ$.

Λύσις. Δίδεται $ΑΓ=β$ καὶ $ΒΓ-ΑΒ=α-γ=λ$. ***Περιορισμός***. Πρέπει $β>λ$. Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 275) τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπὶ τῆς ΒΑ προεκτεινομένης λαμβάνομεν $ΒΔ_1=ΓΒ$, ὅτε εἶναι $ΑΔ_1=ΓΒ-ΒΑ=λ$ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον $ΑΓΔ_1$ κατασκευάζεται. Τοῦ $ΑΔ_1Γ$ κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι $ΓΒ=ΒΔ_1$ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $Δ_1Γ$ εἰς τὸ μέσον της Ν, ἥτις (ἐπειδὴ $ΑΔ_1<ΑΓ$) θὰ τάμῃ τὴν προέκτασιν τῆς $Δ_1Α$ εἰς τὸ Β καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

413) Β, $ΑΓ+ΑΒ=λ$

Λύσις. Δίδεται (τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν) $ΑΓ+ΑΒ=β+γ=λ$ καὶ ἡ γωνία Β (ἢ ἡ Γ). Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ κατὰ $ΑΔ_2=ΑΓ$, ὅτε ἔχομεν $ΒΔ_2=ΓΑ+ΑΒ=λ$ καὶ γωνία $Δ_2=45^0$ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον $ΒΔ_2Γ$ κατασκευάζεται (μία πλευρὰ $ΒΔ_2=λ$ καὶ δύο προσκείμεναι εἰς αὐτὴν γωνίαν $Δ_2=45^0$ καὶ Β). Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν τὴν ΓΑ κάθετον τῇ $ΒΔ_2$ καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

414) Β, $ΑΓ-ΑΒ=λ$.

Λύσις. Δίδεται (σχ. 274) $ΑΓ-ΑΒ=β-γ=λ$ καὶ ἡ γωνία Β (ἢ ἡ Γ). Ἐργαζόμεθα ὁμοίως, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς ΑΓ μῆκος $ΑΔ_1=ΑΒ$, ὅτε εἶναι

$$ΓΔ_1=ΓΑ-ΑΒ=λ \text{ καὶ } \widehat{ΑΔ_1Β}=45^0, \text{ ἢ } \widehat{ΒΔ_1Γ}=135^0.$$

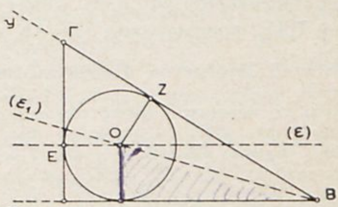
415) Β, $ΒΓ+ΑΓ=λ$.

Λύσις. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 411 (σχ. 275) ὅπου ἡ κάθετος πλευρὰ ποὺ ἐδίδετο ἐκεῖ ἀντικαθίσταται μὲ τὴν γωνίαν Β (ἢ Γ) ποὺ δίδεται ἐδῶ.

416) Β, $ΒΓ-ΑΓ=λ$.

Λύσις. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 412 (σχ. 275) ὅπου ἡ κάθετος πλευρὰ ποὺ ἐδίδετο ἐκεῖ ἀντικαθίσταται μὲ τὴν γωνίαν Β (ἢ Γ) ποὺ δίδεται ἐδῶ.

417) Β, ρ ἢ R.



Σχ. 276.

Λύσις. α) Δίδονται ἡ γωνία Β καὶ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Λαμβάνομεν γωνίαν $x\widehat{Β}y$ ἴσην πρὸς τὴν Β καὶ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ Βx καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ρ. Ἡ (ε) τέμνει τὴν διχοτόμον $(ε_1)$ τῆς Β εἰς τὸ Ο. Τὸ Ο ἀπέχει ἰσάκις τῶν Βx καὶ Βy καὶ μάλιστα ἀπόστασιν ρ. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα $ΟΛ=ΟΖ=ρ$ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου ἥτις ἐφάπτεται τῶν Βx καὶ

By. Ἡ (ε) τέμνει τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον φέρομεν ἐφαπτομένην, ἥτις τέμνει τὰς Bx καὶ By εἰς τὰ Α καὶ Γ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος τῇ ΟΕ θὰ εἶναι κάθετος καὶ τῇ ΑΒ καὶ συνεπῶς τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ μάλιστα τὸ ζητούμενον διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

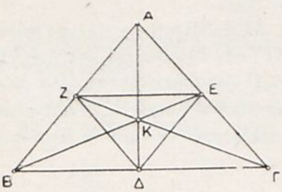
β) Δίδονται ἡ γωνία Β καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐπειδὴ εἶναι ὑποτείνουσα $\alpha=2R$, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὰ α καὶ Β καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἄσκησιν 400.

418) ϱ, R.

Λύσις. Δίδονται τὰ ρ καὶ R. Ἔχομεν δείξει (ἄσκησις 194) ὅτι εἶναι $\beta+\gamma=2\varrho+2R$. Ἄρα τοῦ ζητουμένου τριγώνου γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma$ τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν $\alpha=2R$ καὶ συνεπῶς ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἄσκησιν 409.

Νὰ κατασκευασθῇ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων του.

419) Ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του.



Σχ. 277.

Λύσις. Ἔστωσαν Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ. Τὸ τρίγωνον (σχ. 277) ΖΔΕ κατασκευάζεται. Ἐκ τῶν Ζ, Δ καὶ Ε φέρομεν ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΔ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι. Ἐκ τῶν ἐκ κατασκευῆς παραλληλογράμμων ΑΖΔΕ καὶ ΒΖΕΔ λαμβάνομεν ΑΖ=ΔΕ καὶ ΒΖ=ΔΕ καὶ συνεπῶς ΑΖ=ΒΖ, ἤτοι τὸ Ζ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι τὰ Δ καὶ Ε εἶναι ἀντιστοίχως μέσα τῶν ΒΓ καὶ ΓΑ.

420) Ἐκ τῶν μ_α, μ_β, μ_γ.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 277) $ΑΔ=\mu_\alpha$, $ΒΕ=\mu_\beta$, καὶ $ΓΖ=\mu_\beta$ αἱ τρεῖς διάμεσοι τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ καὶ Κ τὸ σημεῖον τομῆς των. Ὡς γνωστὸν (§ 157) εἶναι

$$ΒΚ=\frac{2}{3}ΒΕ=\frac{2}{3}\mu_\beta,\ ΓΚ=\frac{2}{3}ΓΖ=\frac{2}{3}\mu_\beta \text{ καὶ } ΚΔ=\frac{1}{3}ΑΔ=\frac{1}{3}\mu_\alpha.$$

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΒΓ κατασκευάζεται (§ 286) διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο πλευραί του καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη διάμεσος. Κατασκευασθέντος τοῦ ΒΚΓ, προεκτείνομεν τὴν ΔΚ κατὰ μῆκος ΚΑ=2ΚΔ, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΚ=2ΚΔ=2\,\frac{1}{3}\mu_\alpha=\frac{2}{3}\mu_\alpha$, τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον βάρους του καὶ συνεπῶς αἱ ΒΚ καὶ ΓΚ εἶναι διάμεσοι αὐτοῦ. Ἔχομεν δὲ $ΒΚ=\frac{2}{3}ΒΕ$, $ΓΚ=\frac{2}{3}ΓΖ$, $ΚΔ=\frac{1}{3}ΑΔ$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $ΒΚ=\frac{2}{3}\mu_\beta$, $ΓΚ=\frac{2}{3}\mu_\gamma$ καὶ $ΚΔ=\frac{1}{3}\mu_\alpha$, αἱ ἰσότητες αὐτὲς δίδουν $ΒΕ=\mu_\beta$, $ΓΖ=\mu_\gamma$ καὶ $ΑΔ=\mu_\alpha$. Ἄρα τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μήκη διαμέσων μ_α, μ_β, μ_γ.

Περιορισμός Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι κατασκευάσιμον τὸ τρίγωνον ΚΒΓ, τὸ ὁποῖον συμβαίνει (ἰδὲ § 286) ὅταν εἶναι:

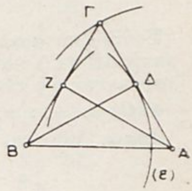
$$|\text{ΒΚ}-\text{ΓΚ}|<2\text{ΚΔ}<\text{ΒΚ}+\text{ΓΚ}, \text{ ἤτοι}$$

$$\left|\frac{2}{3}\mu_\beta-\frac{2}{3}\mu_\gamma\right|<2\cdot\frac{1}{3}\mu_\alpha<\frac{2}{3}\mu_\beta+\frac{2}{3}\mu_\gamma, \text{ ἢ } |\mu_\beta-\mu_\gamma|<\mu_\alpha<\mu_\beta+\mu_\gamma.$$

421) β, γ, υ_β.

Δίδονται ΑΓ=β, ΑΒ=γ (σχ. 278) καὶ ὕψος ΑΖ=υ_α.

Περιορισμός. $\upsilon_\alpha<\gamma, \beta$. Λαμβάνομεν τὴν ΑΒ ἴσην πρὸς γ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα υ_α γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ταύτης ΒΖ. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα β γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν ΒΖ εἰς τὸ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 278.

422) β, γ, υ_α.

Λύσις. Δίδονται ΑΓ=β, ΑΒ=γ καί ὕψος ΒΔ=υ_β (ἢ τὸ υ_α).

Περιορισμός. $\upsilon_\beta\leqslant\gamma$. Λαμβάνομεν (σχ. 278) τὴν ΑΒ ἴσην πρὸς γ καὶ μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα υ_β γράφομεν τὴν περιφέρειαν (ε) καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ταύτης ΑΔ, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ΑΓ=β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

423) β, γ, μ_α.

Λύσις. Ἰδὲ λύσιν εἰς τὸ βιβλίον ἐν παραγράφῳ 286.

424) α, μ_β, μ_γ.

Λύσις. Δίδονται (σχ. 277) ΒΓ=α καὶ αἱ διάμεσοι ΒΕ=μ_β, ΓΖ=μ_γ. Τὸ τρίγωνον ΚΒΓ κατασκευάζεται (διότι γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς του ΒΓ=α, ΒΚ=$\frac{2}{3}\mu_\beta$, ΓΚ=$\frac{2}{3}\mu_\gamma$), ὑπὸ τὸν περιορισμὸν

$$|\text{ΒΚ}-\text{ΓΚ}|<\text{ΒΓ}<\text{ΒΚ}+\text{ΓΚ}, \text{ ἢ } \left|\frac{2}{3}\mu_\beta-\frac{2}{3}\mu_\gamma\right|<\alpha<\frac{2}{3}\mu_\beta+\frac{2}{3}\mu_\gamma,$$

$$\text{ἢ } |\mu_\beta-\mu_\gamma|<\frac{3}{2}\alpha<\mu_\beta+\mu_\gamma.$$

Κατασκευασθέντος τοῦ ΒΚΓ φέρομεν τὴν διάμεσον αὐτοῦ ΚΔ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν κατὰ ΚΑ=2ΚΔ. Τὸ Α συνδεόμενον μὲ τὰ Β καὶ Γ δίδει τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Πράγματι, ἐπειδὴ εἶναι ΑΚ=2ΚΔ, τὸ Κ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου καὶ συνεπῶς αἱ ΒΚ καὶ ΓΚ εἶναι διάμεσοι αὐτοῦ. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΚ=$\frac{2}{3}\mu_\beta$, ΓΚ=$\frac{2}{3}\mu_\gamma$, ΒΚ=$\frac{2}{3}$ΒΕ καὶ ΓΚ=$\frac{2}{3}$ΓΖ, θὰ ἔχωμεν: ΒΕ=μ_β καὶ ΓΖ=μ_γ, ἤτοι τὸ ΑΒΓ ἔχει τὰς διαμέσους ΒΕ καὶ ΓΖ ἴσας πρὸς μ_β καὶ μ_γ.

425) α, μ_α, μ_γ.

Λύσις. Δίδονται ΒΓ=α, καὶ διάμεσοι ΑΔ=μ_α, ΓΖ=μ_γ. Τὸ τρίγωνον

ΔΚΓ (σχ. 277) κατασκευάζεται (διότι γνωρίζομεν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του $\Delta\Gamma=\frac{\alpha}{2}$, $K\Delta=\frac{1}{3}\mu_\alpha$, $\Gamma K=\frac{2}{3}\mu_\gamma$), ὑπὸ τὸν περιορισμὸν

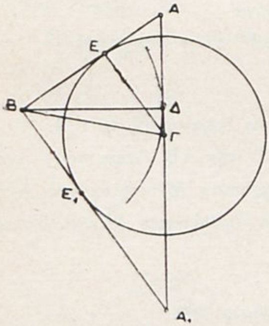
$$|\Gamma K-K\Delta|<\Delta\Gamma<\Gamma K+K\Delta, \text{ ἢ } \left|\frac{2}{3}\mu_\gamma-\frac{1}{3}\mu_\alpha\right|<\frac{\alpha}{2}<\frac{2}{3}\mu_\gamma+\frac{1}{3}\mu_\alpha$$

$$|2\mu_\gamma-\mu_\alpha|<\frac{3}{2}\alpha<2\mu_\gamma+\mu_\alpha.$$

Τούτου κατασκευασθέντος προεκτείνομεν τὴν ΔΚ κατὰ ΚΑ=2ΔΚ καὶ τὴν ΓΔ κατὰ ΔΒ=ΓΔ καὶ φέρομεν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται.

426) α, υ_β, υ_γ.

Λύσις. Δίδονται (σχ. 279) ΒΓ=α καὶ τὰ ὕψη $B\Delta=\upsilon_\beta$, $\Gamma E=\upsilon_\gamma$.

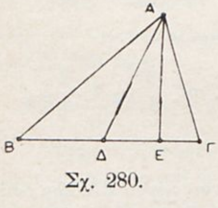


Σχ. 279.

Περιορισμός. $\alpha>\upsilon_\beta$, υ_γ. Λαμβάνομεν τὴν ΒΓ=α καὶ μὲ κέντρα τὰ Β καὶ Γ καὶ ἀκτίνας ἀντιστοίχως υ_β καὶ υ_γ γράφομεν περιφερείας καὶ ἐκ τῶν Γ καὶ Β φέρομεν ἀντιστοίχως τὰς ἐφαπτομένας εἰς αὐτὰς ΓΔ καὶ ΒΕ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, εἶναι τὸ ζητούμενον. Εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος υ_γ ἄγεται ἐκ τοῦ Β καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἡ BE_1 ἥτις τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ A_1. Τὸ τρίγωνον $A_1B\Gamma$ εἶναι ἐπίσης τὸ ζητούμενον. Αἱ δύο λύσεις ΑΒΓ καὶ $A_1B\Gamma$ εἶναι διακεκριμέναι. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ Γ, εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος υ_β, ἄγεται ἐκτὸς τῆς ΓΔ καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη, ὑπάρχει καὶ τρίτη λύσις *).

427) α, υ_α, μ_α.

Λύσις. Δίδονται (σχ. 280) ΒΓ=α, ὕψος $AE=\upsilon_\alpha$, διάμεσος $A\Delta=\mu_\alpha$.

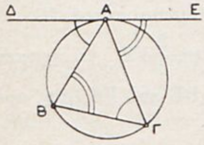


Σχ. 280.

Περιορισμός. $\mu_\alpha\geqslant\upsilon_\alpha$. Τὸ τρίγωνον ΑΕΔ κατασκευάζεται. Τούτου κατασκευασθέντος λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΕ, ἑκατέρωθεν τοῦ Δ, μήκη $\Delta\Gamma=\Delta B=\frac{\alpha}{2}$ καὶ συνδέομεν τὰ Β καὶ Γ μὲ τὸ Α καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

428) A, B, Γ, R.

Λύσις. Περιορισμὸς Α+Β+Γ=180°. Γράφομεν κύκλον (σχ. 281) ἀκτῖνος R καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας του φέρομεν ἐφαπτομένην ΔΕ καὶ μὲ πλευρὰς τὰς ΑΔ καὶ ΑΕ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν ἀντιστοίχως γωνίας $\widehat{\Delta AB}$ καὶ $\widehat{EA\Gamma}$



Σχ. 281.

*) Ἐν ὅλῳ ὑπάρχουν τέσσαρα τρίγωνα ἀνὰ δύο ἴσα.

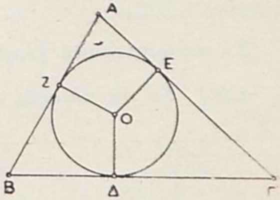
ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς Γ καὶ Β. Αἱ ἕτεραι πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον διότι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον R καὶ ἔχει $\widehat{A\Gamma B}=\widehat{\Delta A B}=\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{A B\Gamma}=\widehat{E A\Gamma}=\widehat{B}$.

429) Α, Β, Γ, ϱ.

Λύσις. Δίδονται Α, Β, Γ καὶ ϱ.

Περιορισμός. $A+B+\Gamma=180^0$. Ἐὰν Ε, Δ, Ζ (σχ. 282) εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ZOE}=180-\widehat{A},\ \widehat{ZO\Delta}=180-\widehat{B},\ \widehat{\Delta OE}=180-\widehat{\Gamma}.$$



Σχ. 282.

Σύνθεσις. Γράφομεν κύκλον Ο ἀκτῖνος ϱ καὶ λαμβάνομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα αὐτοῦ ΟΔ μὲ πλευρὰν τὴν ὁποίαν καὶ κορυφὴν τὸ Ο κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν τῆς ΟΔ γωνίας

$$\widehat{ZO\Delta}=180-\widehat{B} \text{ καὶ } \widehat{EO\Delta}=180-\widehat{\Gamma}.$$

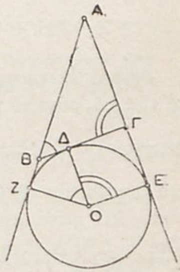
Εἰς τὰ Δ, Ζ καὶ Ε φέρομεν ἐφαπτομένας αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

430) Α, Β, Γ, ϱ_α.

Λύσις. Δίδονται Α, Β, Γ καὶ ϱ_α ἀκτὶς παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Ἐὰν Ζ, Δ, Ε εἶναι τὰ σημεῖα (σχ. 283) ἐπαφῆς τοῦ κύκλου Ο ἀκτῖνος ϱ_α, θὰ ἔχωμεν $\widehat{\Delta OZ}=\widehat{B}$, $\widehat{\Delta OE}=\widehat{\Gamma}$.

Σύνθεσις. Γράφομεν κύκλον Ο ἀκτῖνος ϱ_α καὶ λαμβάνομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα αὐτοῦ ΟΔ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΟΔ καὶ κορυφὴν τὸ Ο κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν τῆς ΟΔ γωνίας $\widehat{\Delta OZ}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta OE}=\widehat{\Gamma}$. Αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ Ζ, Δ καὶ Ε ὁρίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

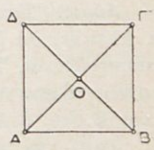


Σχ. 283.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων του.

431) Ἐκ τῆς διαγωνίου του.

Λύσις. Ἔστω ΑΓ=λ ἡ διαγώνιος τοῦ ζητουμένου τετραγώνου ΑΒΓΔ. Ἔχομεν (σχ. 284) $O\Gamma=OB=\frac{1}{2}\lambda$ καὶ συνεπῶς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΟΒ κατασκευάζεται, ὅτε εὐκόλως, διὰ διπλασιασμοῦ τῶν ΓΟ καὶ ΒΟ, κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον.



Σχ. 284.

432) Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς πλευρᾶς καὶ διαγωνίου.

Λύσις. Δίδεται ΑΓ+ΑΒ=λ, ἢ ΑΓ−ΑΒ=λ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 284) κατασκευάζεται (ἰδὲ ἄσκ. 413 καὶ 414) διότι γνωρίζομεν τὰ $A\Gamma\pm AB=\lambda$ καὶ $\widehat{A\Gamma B}=45^0$. Τούτου κατασκευασθέντος εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ τετράγωνον.

433) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου ἢ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

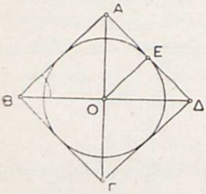
Λύσις. α) Δίδεται ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράγωνον

ΑΒΓΔ κύκλον. Θὰ ἔχωμεν (σχ. 284) ΑΓ=2R καὶ συνεπῶς ἔχομεν τὴν κατασκευὴν τῆς ἀσκήσεως 431.

β) Δίδεται ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Θὰ ἔχωμεν ΑΒ=2ρ, ἤτοι γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ συνεπῶς τὸ τετράγωνον κατασκευάζεται εὐκόλως.

Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ΑΒΓΔ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων.

434) Ἐκ τῆς πλευρᾶς ΑΒ=α καὶ τῆς γωνίας $\widehat{ΑΒΓ}$=ω.



Σχ. 285.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 285) εἶναι

$$\widehat{ΑΒΔ} = \frac{1}{2}\widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2}\widehat{ω},$$

τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΒ κατασκευάζεται, ὅτε, προεκτείνοντες τὰς ΒΟ καὶ ΑΟ ἀντιστοίχως κατὰ ΟΔ=ΒΟ καὶ ΟΓ=ΑΟ, εὑρίσκομεν τὰ Δ καὶ Γ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ῥόμβον.

435) Τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὡς καὶ τῆς γωνίας $\widehat{ΑΔΓ}$=ω.

Λύσις. Ἐὰν (σχ. 285) Ε εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μετὰ τῆς ΑΔ, τότε τὸ τρίγωνον ΟΕΔ κατασκευάζεται ὡς ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ ἡ ΟΕ=ρ καὶ ἡ $\widehat{ΕΔΟ} = \frac{1}{2}ω$. Τούτου κατασκευασθέντος ὑψοῦμεν εἰς τὸ Ο κάθετον τῇ ΟΔ, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΕ εἰς τὸ Β. Προεκτείνομεν τὰς ΔΟ καὶ ΑΟ κατὰ μήκη ΟΒ=ΟΔ, ΟΓ=ΟΑ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ Β καὶ Γ, ὅτε ὁ ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ῥόμβος.

436) Ἐκ τῆς πλευρᾶς ΑΒ=α καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Ἔστω ὅτι εἶναι ΑΓ+ΒΔ=2λ (σχ. 285). Θὰ ἔχωμεν τότε ΟΒ+ΟΓ=λ καὶ συνεπῶς (ἰδὲ ἀσκ. 469) τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΓ κατασκευάζεται. Τούτου κατασκευασθέντος εὐκόλως κατασκευάζεται καὶ ὁ ῥόμβος.

437) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἐκ μιᾶς διαγωνίου.

Λύσις. Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς καὶ ΑΓ=2λ ἡ διαγώνιος. Ἐπειδὴ (σχ. 285) εἶναι ΑΓ=2λ, θὰ ἔχωμεν ΑΟ=λ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΟΕ=ρ, τὸ τρίγωνον ΑΟΕ κατασκευάζεται. Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν εἰς τὸ Ο κάθετον τῇ ΑΟ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ Δ. Διπλασιάζοντες τὰς ΑΟ καὶ ΔΟ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Β ὅτε, ὁ ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ῥόμβος.

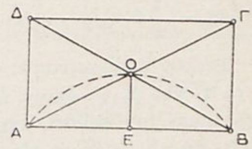
438) Ἐγγεγραμμένος εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον ΚΛΜΝ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ παραλληλογράμμου.

Λύσις. Εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθμὸν 111 ἄσκησις.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων.

439) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς του καὶ ἐκ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Ἔστω ΑΒ=α καὶ $\widehat{ΑΟΒ}=\widehat{ω}$ ἡ δοθεῖσα πλευρὰ καὶ ἡ δοθεῖσα γωνία τῶν διαγωνίων. Τὸ (σχ. 286) ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ κατασκευάζεται οὕτω: Μὲ χορδὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ω. Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ Ο, τὸ ὁποῖον συνδεόμενον μὲ τὰ Α καὶ Β δίδει τὸ τρίγωνον ΑΟΒ. Διπλασιάζομεν τώρα τὰς ΑΟ καὶ ΒΟ καὶ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον.



Σχ. 286.

440) Ἐκ τῆς διαφορᾶς δύο προσκειμένων πλευρῶν του καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Ἔστω ὅτι δίδεται ΑΒ—ΑΔ=λ καὶ $\widehat{AOB}=\widehat{\omega}$. Ἔχομεν (σχ. 286) $2\cdot\widehat{OBA}+\widehat{AOB}=180^0$,

$$\text{ἢ } 2\cdot\widehat{OBA}+\widehat{\omega}=180^0, \text{ ἢ } \widehat{OBA}=90-\frac{\omega}{2}, \text{ ἢ } \widehat{\Delta BA}=90-\frac{\omega}{2}.$$

Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΒΑ κατασκευάζεται (ἰδὲ ἄσκ. 414) διότι εἶναι γνωστὴ ἡ διαφορὰ ΑΒ—ΑΔ τῶν καθέτων πλευρῶν του ὡς καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία του $\widehat{\Delta BA}$. Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν εἰς τὰ Δ καὶ Β ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΔ καὶ ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι ὁρίζουν τὸ Γ.

441) Ἐκ τῆς περιμέτρου του καὶ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του.

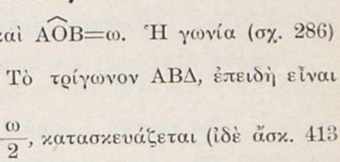
Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 286) εἶναι 2·ΑΒ+2·ΑΔ=2τ, ἔνθα 2τ ἡ δοθεῖσα περίμετρος, θὰ ἔχωμεν ΑΒ+ΑΔ=τ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι (ἰδὲ ἄσκησιν 440) $\widehat{\Delta BA}=90^0-\frac{\omega}{2}$, ἔνθα ω ἡ δοθεῖσα γωνία $\widehat{AOB}$ τῶν διαγωνίων, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΒ κατασκευάζεται (ἰδὲ ἄσκησιν 413). Τούτου κατασκευασθέντος κατασκευάζεται εὐκόλως καὶ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον.

442) Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς μιᾶς πλευρᾶς του καὶ τῆς μιᾶς διαγωνίου του ὡς καὶ ἐκ τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Ἔστω ὅτι δίδεται ΒΔ±ΑΔ=λ καὶ $\widehat{AOB}=\omega$. Ἡ γωνία (σχ. 286) $\widehat{\Delta BA}$ ἰσοῦται (ἰδὲ ἄσκ. 440) πρὸς $90^0-\frac{\omega}{2}$. Τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι ΒΔ+ΑΔ=λ, ἢ ΒΔ—ΑΔ=λ καὶ $\widehat{\Delta BA}=90^0-\frac{\omega}{2}$, κατασκευάζεται (ἰδὲ ἄσκ. 413 καὶ 414). Τούτου κατασκευασθέντος εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ ὀρθογώνιον.

Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων του.

443) Ἐκ τῶν βάσεών του καὶ τῶν διαγωνίων του.



Σχ. 287.

Λύσις. Δίδονται ΑΒ=α, ΓΔ=β, ΑΓ==δ_1, ΒΔ=δ_2. Ἔστωσαν (σχ. 287) Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ, ὅτε θὰ ἔχωμεν (§ 139) $EZ=\frac{1}{2}(AB-\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Τὸ τραπέζιον ΑΒΖΕ κατασκευάζεται, διότι (§ 288) γνωρίζομεν τὰς τέσσαρας πλευράς του, ΑΒ=α $AE=\frac{1}{2}\delta_1$, $BZ=\frac{1}{2}\delta_2$

καὶ $EZ=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Τὸ τραπέζιον τοῦτο κατασκευάζεται (§ 288) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $|BZ-BE|<AB-EZ<BZ+BE$, ἢ

$$\left|\frac{1}{2}\delta_2-\frac{1}{2}\delta_1\right|<\alpha-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)<\frac{1}{2}\delta_2+\frac{1}{2}\delta_1, \text{ ἢ } |\delta_2-\delta_1|<\alpha+\beta<\delta_2+\delta_1.$$

Τούτου κατασκευασθέντος διπλασιάζομεν τὰς ΑΕ καὶ ΒΖ καὶ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα δίδουν τὸ ζητούμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ. Εἶναι δὲ τοῦτο τραπέζιον καθότι, ἐπειδὴ εἶναι ΑΕ=ΕΓ, ΒΖ=ΖΔ καὶ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΔΓ παράλληλος τῇ ΑΒ. Εἶναι τὸ ζητούμενον διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

444) Ἐκ τῶν βάσεων ΑΒ=α, ΓΔ=β, τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ=δ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 287) ΓΗ=υ τὸ ὕψος. Τὸ τρίγωνον ΑΓΗ κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον ΑΓ>ΓΗ ἤτοι δ>υ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΗ λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς μῆκος ΑΒ=α καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον καὶ ἀντίρροπον τῆς ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς μῆκος ΓΔ=β. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

445) Ἐκ τῶν βάσεων ΑΒ=α, ΓΔ=β, τοῦ ὕψους υ καὶ τοῦ σκέλους ΓΒ=γ

Λύσις. Ἔστω ΓΗ=υ τὸ ὕψος. Τὸ τρίγωνον (σχ. 287) ΓΗΒ κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον γ⩾υ. Ἐπὶ τῆς ΒΗ λαμβάνομεν μῆκος ΒΑ=α καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΑ λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς μῆκος ΓΔ=β. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

446) Ἐκ τῶν βάσεων ΑΒ=α, ΓΔ=β, τῆς διαγωνίου ΑΓ=δ, ὡς καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ=γ.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον (σχ. 286) ΓΑΒ κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον εἶναι

$$|A\Gamma-\Gamma B|<AB<A\Gamma+\Gamma B, \text{ ἢ } |\delta-\gamma|<\alpha<\delta+\gamma.$$

Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς μῆκος ΓΔ=β. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος.

447) Τῶν μέσων παραλλήλων χορδῶν κύκλου.

Λύσις. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ κάθετος ἐπὶ τὰς χορδάς.

448) Τῶν μέσων ἴσων χορδῶν κύκλου.

Λύσις. Ἰδὲ τὴν ὑπ' ἀριθ. 184 ἄσκησιν.

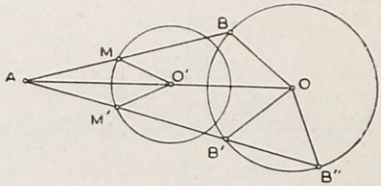
449) Τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς περιφερείας κέντρου Ο μέχρι τῆς περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 288) ΑΒ μία τοιαύτη εὐθεῖα καὶ Μ τὸ μέσον της, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ γ τόπος. Ἐὰν Ο΄ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΟ, θὰ ἔχωμεν $O'M=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}R$, ἤτοι τὸ Μ ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν $\frac{1}{2}R$ ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο΄. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ο΄ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}$R. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρού Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}$R.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς. Φέρομεν τὴν ΑΜ′, ἥτις τέμει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ Β′ καὶ Β″. Ἐπειδὴ εἶναι

$$O'M' = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}OB' = \frac{1}{2}OB'',$$

ἡ Ο′Μ′ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΟΒ′ ἢ τῇ ΟΒ″ καὶ συνεπῶς τὸ Μ′ θὰ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ′ ἢ τῆς ΑΒ″, ἐνταῦθα εἶναι τῆς ΑΒ′. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τῆς περιφερείας Ο′ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου, ἤτοι εἶναι μέσον εὐθείας συνδεούσης τὸ Α μὲ σημεῖον τῆς περιφερείας Ο.

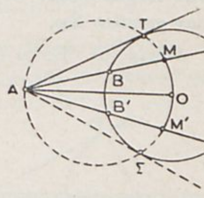


Σχ. 288.

Συμπέρασμα. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ὁ ζητούμενος γ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Ο′ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}$R. Ὁ τόπος δὲν ἔχει ὅρια, ἤτοι εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια Ο. Ὁμοίως ἐξετάζονται καὶ αἱ περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο, ἢ ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο.

450) Τῶν μέσων χορδῶν κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ εὐθειῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 289) Α τὸ σημεῖον καὶ ΑΒΓ τυχοῦσα διὰ τοῦ Α διερχομένη εὐθεῖα ὁρίζουσα ἐπὶ τῆς περιφερείας χορδὴν ΒΓ. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς χορδῆς ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΟΜ, ἥτις θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AMO}=90^{o}$, τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΟ. Ἐπειδὴ αἱ διὰ τοῦ Α διερχόμεναι εὐθεῖαι καὶ τέμνουσαι τὴν Ο κεῖνται ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{TA\Sigma}$ τῶν ἐκ τοῦ Α ἀγομένων ἐφαπτομένων ΑΤ καὶ ΑΣ εἰς τὴν περιφέρειαν Ο, ἕπεται ὅτι τὸ Μ θὰ κεῖται μόνον ἐπὶ τοῦ τόξου $\Sigma\widehat{O}T$ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΟ. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\Sigma\widehat{O}T$ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΟ τοῦ κειμένου ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο.



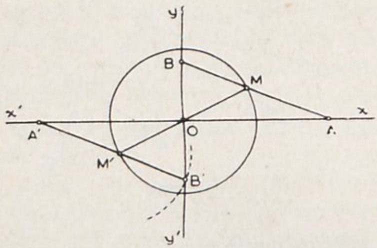
Σχ. 289.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου $\Sigma\widehat{O}T$ καὶ ΑΒ′Γ′ ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AM'O}=90^{o}$, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, ἕπεται ὅτι ἡ ΟΜ′ εἶναι κάθετος τῇ χορδῇ Β′Γ′ καὶ συνεπῶς τὸ Μ′ εἶναι μέσον τῆς Β′Γ′. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ τόξου $\Sigma\widehat{O}T$ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπον εἶναι τὸ τόξον $\Sigma\widehat{O}T$.

451) Τοῦ μέσου εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους α, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα διαγράφουν ἀντιστοίχως δύο καθέτους εὐθείας Οx καὶ Οy.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 290) ΑΒ μία θέσις τοῦ τμήματος αὐτοῦ καὶ Μ τὸ μέσον του. Ἐπειδὴ εἶναι $ΟΜ=\frac{1}{2}\cdot ΑΒ=\frac{1}{2}α$, ἕπεται ὅτι τὸ Μ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ τόπος, κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}α$.



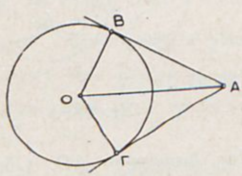
Σχ. 290.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ′ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὸ Μ′ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}α=(ΟΜ')$, γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν Οy′ εἰς τὸ Β′. Ἡ Β′Μ′ τέμνει τὴν Οx′ εἰς τὸ Α′. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον Α′ΟΒ′ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ εἶναι ΟΜ′=Μ′Β′, ἡ ΟΜ′ θὰ εἶναι (§ 132) διάμεσος καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $Α'Β'=2\frac{α}{2}=α$. Ἄρα τὸ Μ′ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}α$.

452) Τῶν σημείων ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν κέντρου Ο ἔχουν δοθὲν μῆκος α, ἢ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν 2φ.

Λύσις. α) Ἔστω (σχ. 291) Α ἓν σημεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν δοθὲν μῆκος α. Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΑ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ κάθετοι πλευραί του ΟΒ καὶ ΒΑ, ἕπεται ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος καὶ συνεπῶς τὸ Α κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΑ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΑ.

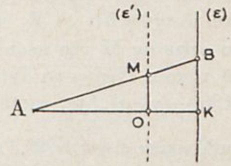


Σχ. 291.

β) Ἔστω ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση ἔστω πρὸς 2φ, τότε τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΒΑ εἶναι κατασκευάσιμον διότι εἶναι γνωστὰ ἡ ΟΒ καὶ ἡ $\widehat{ΟΑΒ}$ καὶ συνεπῶς ἡ ΟΑ εἶναι σταθερά. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΑ.

453) Τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δοθὲν σημεῖον Α μὲ τὰ σημεῖα δοθείσης εὐθείας (ε).

Λύσις. Ἔστω (σχ. 292) ΑΒ μία τυχοῦσα τοιαύτη εὐθεῖα, ΑΚ ἡ κάθετος τῇ (ε) καὶ Μ καὶ Ο τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΚ. Ἐπειδὴ ἡ ΟΜ εἶναι παράλληλος τῇ (ε), ἔπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι εὐθεῖα (ε′) παράλληλος τῇ (ε) καὶ διερχομένη διὰ μέσου τῆς ΑΚ, ἤτοι ἰσαπέχουσα τοῦ Α καὶ τῆς (ε).



Σχ. 292.

454) Τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται δύο τεμνομένων, ἢ παραλλήλων εὐθειῶν.

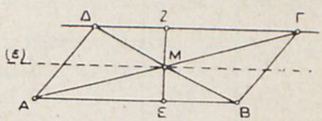
Λύσις Ὡς εὐκόλως φαίνεται ὁ γεωμ. τόπος εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦν τὰς γωνίας τὰς σχηματιζομένας ὑπὸ τῶν δύο τεμνομένων εὐθειῶν. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε εἶναι ἡ ἰσαπέχουσα αὐτῶν παράλληλος.

455) Τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τῶν ἐχόντων κοινὴν βάσιν καὶ ἴσα ὕψη.

Λύσις. Ἔστω σχ. 293) ΑΒ ἡ κοινὴ βάσις καὶ υ τὸ κοινὸν ὕψος. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΕ κάθετον τῇ ΑΒ θὰ εἶναι

$$ME = \frac{1}{2} ZE = \frac{1}{2} \upsilon.$$

Ἄρα τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος, ἀπέχει τῆς σταθερᾶς εὐθείας ΑΒ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}\upsilon$ καὶ συνεπῶς θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε) παραλλήλου τῇ ΑΒ καὶ ἀπεχούσης ταύτης ἀπόστασιν $\frac{1}{2}\upsilon$.



Σχ. 293.

Ἀντιστρόφως. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι πᾶν σημεῖον Μ τῆς (ε′) εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι ἐὰν φέρωμεν τὰς ΑΜ καὶ ΒΜ καὶ τὰς διπλασιάσομεν μέχρι τῶν Δ καὶ Γ προκύπτει παραλληλόγραμμον βάσεως ΑΒ καὶ ὕψους υ καὶ κέντρου Μ.

Συμπέρασμα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε).

456) Τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν μεταβλητῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 294) K_1 καὶ K_2 αἱ περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ Μ. Ἔχομεν $2\omega + K_1 = 180^0$ καὶ $2\varphi + K_2 = 180^0$.

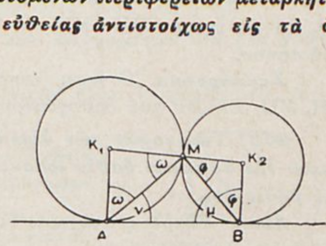
Προσθέτομεν καὶ ἔχομεν

$$2(\omega+\varphi)+K_1+K_2=360^0.$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $K_1 + K_2 = 180^0$ λαμβάνομεν

$$2(\omega+\varphi)=180^0, \text{ ἢ } \omega+\varphi=90^0.$$

Ἄρα $\widehat{AMB} = 90^0$ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΒ.



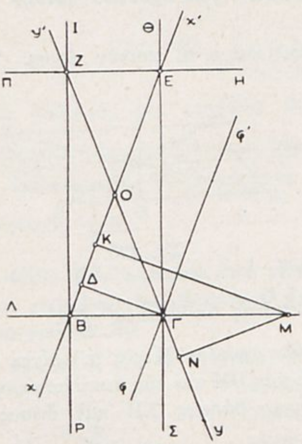
Σχ. 294.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΒ καὶ ἔστω K_1 ἡ περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Μ καὶ ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ εἰς τὸ Α καὶ K_2 ἡ διερχομένη διὰ τοῦ Μ καὶ ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὰς ἀκτίνας K_1M καὶ K_2M. Ἐὰν δείξωμεν ὅτι ἡ K_1MK_2 εἶναι εὐθεῖα, τότε ἐδείχθη ὅτι αἱ K_1 καὶ K_2 ἐφάπτονται εἰς τὸ Μ, ἤτοι ἐδείχθη ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΒ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου. Πράγματι ἔχομεν $\omega=90^0-\nu$ καὶ $\varphi=90^0-\mu$ καὶ συνεπῶς $\omega+\varphi=$ $=180^0-(\nu+\mu)$, ὅτε, ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΜΒ εἶναι $\nu+\mu=90^0$, λαμβάνομεν $\omega+\varphi=90^0$. Ἄρα εἶναι $\widehat{\omega}+\widehat{AMB}+\widehat{\varphi}=180^0$ καὶ συνεπῶς ἡ K_1MK_2 εἶναι εὐθεῖα.

Συμπέρασμα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ.

457) Τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν $x'x$ καὶ $y'y$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς λ.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 295) ΜΚ καὶ ΜΝ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν x′x καὶ y′y. Φέρομεν τὴν ΜΓΒ κάθετον τῇ διχοτόμῳ τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$ καὶ τὴν ΓΔ κάθετον τῇ x′x. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἔχομεν (§ 140) ΜΚ—ΜΝ= =ΓΔ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΜΚ—ΜΝ=λ, θὰ ἔχωμεν ΓΔ=λ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον ὡς τομὴ τῆς y′y καὶ τῆς παραλλήλου φφ′ πρὸς τὴν x′x, ἔνθα αἱ φφ′ καὶ x′x ἀπέχουν ἀπόστασιν λ. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ τῶν προεκτάσεων ΓΜ καὶ ΒΛ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΓ. Ἐὰν κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ δι' ὅμοιον λόγον τὰ σημεῖα Μ τοῦ τόπου κεῖνται καὶ ἐπὶ τῶν ΓΣ, ΕΘ, ΕΗ, ΖΠ ΖΙ καὶ ΒΡ.



Σχ. 295.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ἡμιευθείας ΓΜ καὶ ΜΚ καὶ ΜΝ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τῶν x′x καὶ y′y. Ἐπειδὴ εἶναι (§ 140) ΜΚ—ΜΝ=ΓΔ καὶ ΓΔ=λ, ἔχομεν ΜΚ—ΜΝ=λ. Ἄρα τὸ Μ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου.

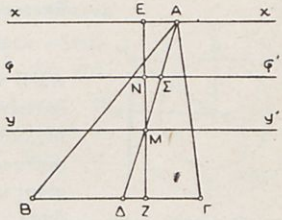
Συμπέρασμα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι αἱ προεκτάσεις ΓΜ, ΒΛ, ΓΣ, ΕΘ, ΕΗ, ΖΠ, ΖΙ, ΒΡ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ.

458) Τῶν τομῶν τῶν διαγωνίων τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐὰν τάμωμεν δοθὲν ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν του.

Λύσις. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

459) Τῶν τομῶν τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων κοινὴν βάσιν καὶ τῶν ὁποίων τὰ ὕψη τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν κοινὴν βάσιν εἶναι ἴσα.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒΓ τὰ τρίγωνα, ΒΓ ἡ κοινὴ βάσις, υ τὸ εἰς τὴν ΒΓ ἀντιστοιχοῦν ὕψος καὶ Μ ἡ τομὴ τῶν διαμέσων. Ἡ κορυφὴ (σχ. 296) Α κινεῖται ἐπ' εὐθείας xx′ παραλλήλου τῇ βάσει καὶ ἀπεχούσης ταύτης ἀπόστασιν υ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ=2·ΜΔ, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΕΖ κάθετον τῇ ΒΓ καὶ λάβωμεν τὸ μέσον Ν τῆς ΜΕ καὶ φέρομεν τὰς φφ′ καὶ yy′ παραλλήλους τῇ ΒΓ καὶ διερχομένας διὰ τῶν Ν καὶ Μ, τότε, ἐπειδὴ εἶναι ΑΣ=ΣΜ=ΜΔ, θὰ ἔχωμεν καὶ $ΕΝ=ΝΜ=ΜΖ=\frac{υ}{3}$.



Σχ. 296.

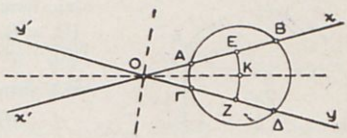
Ἄρα τὸ Μ, ὡς ἀπέχον τῆς ΒΓ σταθερὰν ἀπόστασιν $\frac{υ}{3}$, θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας yy′ παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ταύτης ἀπόστασιν $\frac{υ}{3}$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς yy′. Ἡ ΔΜ τέμνει τὴν xx′ εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ εἶναι $ΜΖ=\frac{υ}{3}=\frac{1}{3}ΕΖ$, θὰ εἶναι καὶ $ΜΔ=\frac{1}{3}ΑΔ$. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τομὴ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς yy′ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ εὐθεῖα yy′.

460) Τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποτέμνουν ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν x′οx καὶ y′οy χορδὰς ἴσας.

Λύσις. Ἐὰν (σχ. 297) ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ ἴσαι χορδαὶ καὶ ΚΕ, ΚΖ αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τοῦ κέντρου, θὰ ἔχωμεν ΚΕ=ΚΖ καὶ συνεπῶς τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας xοy. Ἄρα τὰ σημεῖα Κ τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν x′οx καὶ y′οy. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν x′οx καὶ y′οy.



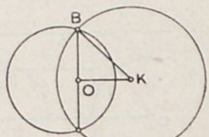
Σχ. 297.

461) Τῶν κέντων τῶν περιφερειῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

Λύσις. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ.

462) Τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν δοθείσης ἀκτῖνος ϱ, αἱ ὁποῖαι διχοτομοῦν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

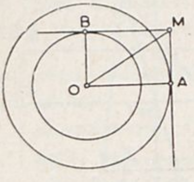
Λύσις. Ἔστω Ο ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ἀκτῖνος ϱ ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν Ο, ἤτοι ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κείμενα ἐπὶ διαμέτρου. Ἐπειδὴ (σχ. 298) εἶναι ΚΒ=ϱ καὶ ΟΒ=$ϱ_1$, ἔνθα $ϱ_1$ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας, τὸ ὀρθογώ-



Σχ. 298.

νιον τρίγωνον ΒΟΚ εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς ἡ ΚΟ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Κ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΚΟ.

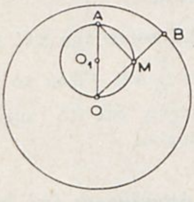
463) Τῆς κορυφῆς ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν.



Σχ. 299.

Λύσις. Ἔστω Μ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{AMB}$ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν Ο. Ἐπειδὴ τοῦ ὀρθογωνίου (σχ. 299) ΟΒΜΑ αἱ ΟΒ καὶ ΟΑ, ὡς ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν, εἶναι γνωσταί, ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς ἡ ΟΜ εἶναι σταθερά. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΜ.

464) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας δοθείσης περιφερείας κέντρου Ο.

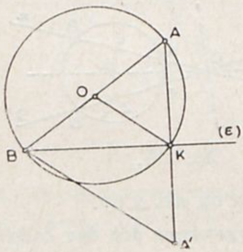


Σχ. 300.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 300) ΟΒ τυχοῦσα ἀκτὶς καὶ ΑΜ ἡ ἐπ' αὐτὴν κάθετος. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AMO}=90^0$, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια διαμέτρου ΟΑ.

465) Τῶν συμμετρικῶν σημείων δοθέντος σημείου Α ὡς πρὸς τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου Β.

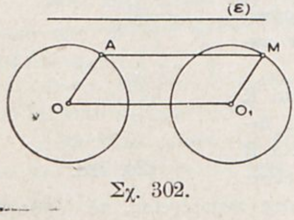
Λύσις. Ἔστω (σχ. 301) Α' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε), ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Β. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΑ'=ΒΑ (σταθερόν), ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Α' εἶναι περιφέρεια κέντραυ Β καὶ ἀκτῖνος ΒΑ' ἴσης πρὸς ΒΑ.



Σχ. 301.

466) Τοῦ ἄκρου εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους α, τοῦ ὁποίου τὸ ἕτερον ἄκρον διαγράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ τὸ ὁποῖον τμῆμα παραμένει παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).

Λύσις. Ἔστω (301) Μ τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ τόπος. Φέρομεν τὴν OO_1, παράλληλον τῇ (ε) καὶ ἴσην πρὸς α, ὅτε τὸ O_1 εἶναι σταθερὸν σημεῖον. Τὸ σχῆμα AOO_1M, ἐπειδὴ αἱ OO_1 καὶ ΑΜ εἶναι ἴσαι πρὸς α καὶ παράλληλοι, εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $O_1M=OA=R$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἐπειδὴ εἶναι $O_1M=R$, ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου O_1 καὶ ἀκτῖνος R, ἥτις περιφέρεια εἶναι ἴση τῇ Ο. Τὸ ἀντίστρο-

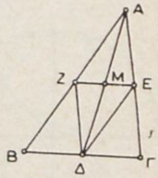


Σχ. 302.

φον φαίνεται εὐκόλως. Ἡ περιφέρεια $Ο_1$ καλεῖται ***μεταφορὰ*** τῆς περιφερείας Ο κατὰ μῆκος α καὶ διεύθυνσιν (ε).

467) Τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὰς παραλλήλους αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τυχόντος σημείου τῆς τρίτης πλευρᾶς πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ ἓν τρίγωνον καὶ (σχ. 303) ΑΖΔΕ ἓν τοιοῦτον παραλληλόγραμμον κέντρου Μ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ=ΜΔ, ἕπεται ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, εἶναι (ἄσκ. 453) εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ, ἥτις ἀπέχει τῆς ΒΓ ὅσο ἀπέχει καὶ τοῦ σημείου Α.



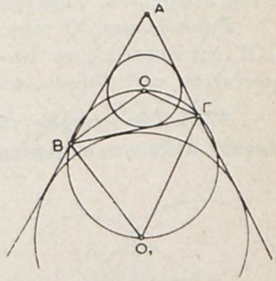
Σχ. 303.

468) Τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα κοινὴν βάσιν καὶ σταθερὰν κατὰ μέγεθος τὴν γωνίαν τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς κοινῆς βάσεως, ὡς καὶ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τῶν τριγώνων αὐτῶν εἰς τὴν κοινὴν βάσιν.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒΓ (σχ. 304) τὰ τρίγωνα κοινῆς βάσεως ΒΓ καὶ σταθερᾶς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$ καὶ Ο καὶ $Ο_1$ τὰ κέντρα ἐγγεγραμμένου καὶ παραγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι (§ 124)

$$\widehat{ΒΟΓ}=90^0+\frac{Α}{2} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{ΒΟ_1Γ}=90^0-\frac{Α}{2},$$

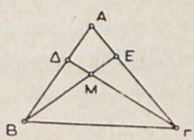
ἕπεται ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ Ο εἶναι τόξον χορδῆς ΒΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς $90^0+\frac{Α}{2}$, ὁ δὲ γ. τόπος τοῦ $Ο_1$ εἶναι τόξον χορδῆς ΒΓ δεχόμενον γωνίαν $90^0-\frac{Α}{2}$. Τὰ ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται εὐκόλως. Τά δύο τόξα τῶν δύο γ. τόπων συνιστοῦν περιφέρειαν κύκλου, διότι εἶναι $\widehat{ΒΟΓ}+\widehat{ΒΟ_1Γ}=180^0$ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον $ΟΒΟ_1Γ$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 304.

469) Τῶν σημείων τομῆς τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὡς καὶ τῶν σημείων τομῆς τῶν διχοτόμων των, ὡς ἐπίσης καὶ τῶν σημείων τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τῶν προσκειμένων εἰς τὴν κοινὴν βάσιν.

Λύσις. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν διχοτόμων εἶναι (σχ. 304) ὁ προηγουμένως ἐξετασθεὶς γεωμ. τόπος τοῦ Ο, ὁ δὲ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων, τῶν προσκειμένων εἰς τὴν κοινὴν βάσιν, εἶναι ὁ προηγουμένως ἐξετασθεὶς γεωμ. τόπος τοῦ $Ο_1$. Ἔστω (σχ. 305) Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ὑψῶν ΒΕ καὶ ΓΔ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΜΓ}=\widehat{ΔΜΕ}=180^0-Α$, ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τόξον χορδῆς ΒΓ, δεχόμενον γωνίαν $180^0-Α$.

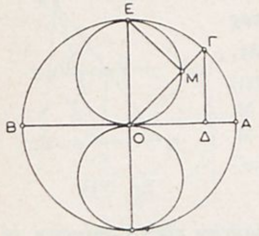


Σχ. 305.

470) Τοῦ σημείου Μ τῆς ἀκτῖνος ΟΓ περιφερείας κύκλου ὁριζοντίας

διαμέτρου ΑΟΒ, ὅταν ἡ ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ κέντρον Ο καὶ εἶναι ΟΜ=ΓΔ, ἔνθα ΓΔ ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

Λύσις. Φέρομεν (σχ. 306) τὴν διάμετρον ΕΟΖ κάθετον τῇ ΑΟΒ. Τὰ τρίγωνα ΟΓΔ καὶ ΟΕΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΓ==ΟΕ, ΓΔ=ΟΜ καὶ $\widehat{\text{ΟΓΔ}}=\widehat{\text{ΕΟΜ}}$. Ἐπειδὴ τὸ ΟΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ τὸ ἴσον πρὸς αὐτὸ ΟΜΕ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{\text{ΟΜΕ}}=90^0$. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΟΕ.



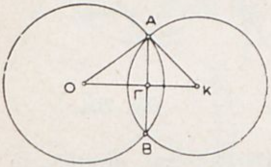
Σχ. 306.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας διαμέτρου ΟΕ, ἡ ΟΜ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον τῇ ΑΟΒ. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΕ καὶ ΟΔΓ ἔχουν ΟΕ=ΟΓ καὶ $\widehat{\text{ΕΟΜ}}=\widehat{\text{ΟΓΔ}}$, εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ΟΜ=ΓΔ. Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΟΕ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΟΕ ἐφ' ὅσον ἡ ΟΓ στρέφεται εἰς τὸ ἄνω ἡμικύκλιον. Ἐὰν ἡ ΟΕ στρέφεται καὶ εἰς τὸ κάτω ἡμικύκλιον, τότε ὁ γεωμ. τόπος εἶναι καὶ ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΟΖ.

471) Τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν δεδομένης ἀκτῖνος ρ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὴν δοθέντος μήκους α.

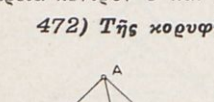
Λύσις. Ἔστω Ο ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἀκτῖνος R καὶ Κ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας ἀκτῖνος ρ. Ἔστω ἐπίσης ΑΒ ἡ χαρδὴ μήκους α καθ' ἣν τέμνονται αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Κ (σχ. 307) καὶ Γ τὸ σημεῖον τομῆς της ὑπὸ τῆς διακέντρου ΟΚ.



Σχ. 307.

Ἐπειδὴ εἶναι $\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}=\frac{1}{2}\alpha$, $\text{ΑΚ}=\rho$ καὶ ΟΑ=R, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας, τὰ τρίγωνα ΟΓΑ καὶ ΚΓΑ εἶναι κατασκευάσιμα καὶ συνεπῶς τὰ ΟΓ καὶ ΓΚ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος, ἐπομένως καὶ τὸ ΟΚ=ΟΓ+ΓΚ εἶναι σταθερόν. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Κ εἶναι περιφέρεια κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΚ.

472) Τῆς κορυφῆς Γ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Β εἶναι σταθερά, ἡ δὲ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὑποτείνουσαν ἔχει δοθὲν μῆμος λ.

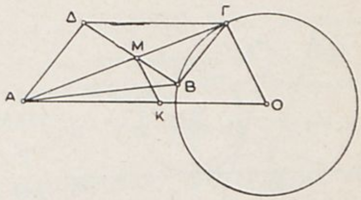


Σχ. 308.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 308) διάμεσος ΑΔ=λ, τότε θὰ εἶναι ΒΓ=2λ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Γ εἶναι περιφέρεια κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος ΒΓ=2λ.

473) Τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, τῶν ὁποίων ἡ κο-

ρυφὴ Α εἶναι σταθερά, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.



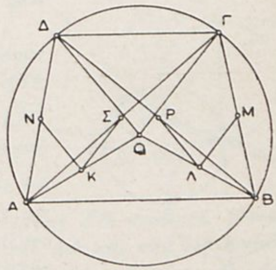
Σχ. 309.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 309) Μ τὸ κέντρον καὶ Κ τὸ μέσον τῆς ΑΟ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ=ΜΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\text{ΚΜ} = \frac{1}{2}\,\text{ΟΓ} = \frac{1}{2}\varrho,$$

ἔνθα ϱ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ϱ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ϱ.

474) Τῶν μέσων τῶν σκελῶν καὶ τῶν διαγωνίων τραπεζίου ἐγγεγραμμένου εἰς δοθέντα κύκλον καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι ὡρισμένη χορδὴ τῆς περιφερείας.



Σχ. 310.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 310) Μ, Ν τὰ μέσα τῶν σκελῶν ΒΓ καὶ ΑΔ, ΑΒ ἡ ὡρισμένη βάσις καὶ Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων καὶ Ο τὸ κέντρον τῆς δοθείσης περιφερείας τῆς ὁποίας ἔστω R ἡ ἀκτίς. Ἐὰν Λ καὶ Κ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΒΟ καὶ ΑΟ, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{ΛΜ} = \frac{1}{2}\,\text{ΟΓ} = \frac{1}{2}R,\quad \text{ΛΡ} = \frac{1}{2}\,\text{ΟΔ} = \frac{1}{2}R,$$

$$\text{ΚΣ} = \frac{1}{2}\,\text{ΟΓ} = \frac{1}{2}R \text{ καὶ } \text{ΚΝ} = \frac{1}{2}\,\text{ΟΔ} = \frac{1}{2}R.$$

Ἄρα τὰ Ρ καὶ Μ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Λ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}R$ καὶ τὰ Σ καὶ Ν ἐπὶ περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}R$. Τὰ ἀντίστροφα φαίνονται εὐκόλως. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τῶν Ρ καὶ Μ εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρου Λ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}R$, ὁ δὲ γεωμ. τόπος τῶν Σ καὶ Ν εἶναι περιφέρεια κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}R$.

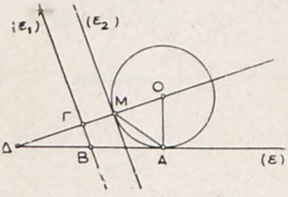
475) Τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε_1) εἰς πάσας τὰς περιφερείας τὰς ἐφαπτομένας δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς Α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 311) Ο μία περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας (ε) εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Α καὶ (ε_2) ἐφαπτομένη ταύτης εἰς τὸ Μ παράλληλος πρὸς τὴν σταθερὰν διεύθυνσιν (ε_1) Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ.

Ἡ ΟΜ ὡς κάθετος τῇ (ε_2) εἶναι καὶ κάθετος τῇ (ε_1). Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΟΓΒΑ λαμβάνομεν ὅτι

$\widehat{MOA}+\widehat{B}=180^0$, ἢ $\widehat{MOA}=180^0-B$, ἢ $180^0-2\cdot\widehat{OAM}=180^0-\widehat{OMA}$,

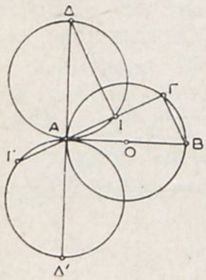
ἢ $2\cdot\widehat{OAM}=\widehat{B}$, ἢ $\widehat{OAM}=\frac{1}{2}\widehat{B}$ (1).



Σχ. 311.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ $\widehat{OAM}$ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ M κεῖται ἐπὶ εὐθείας AM, σχηματιζούσης μετὰ τῆς AO σταθερὰν γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}$B. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ M εἶναι ἡ εὐθεῖα AM ἡ σχηματίζουσα μετὰ τῆς AO γωνίαν $\frac{1}{2}$B.

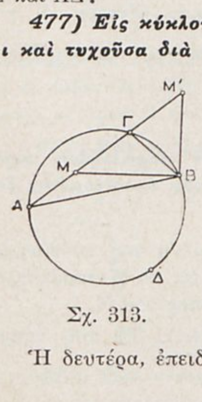
476) Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ καὶ τυχοῦσα χορδὴ αὐτοῦ ΑΓ, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ΑΙ=ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ι.



Σχ. 312.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Α λαμβάνομεν (σχ. 312) ΑΔ=ΑΒ, ὅτε τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΙΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΑΒ=ΑΔ, ΓΒ=ΑΙ καὶ $\widehat{ΓΒΑ}=\widehat{ΙΑΔ}$, καὶ συνεπῶς, ἐπειδὴ τὸ ΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὸ ΑΙΔ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{ΑΙΔ}=90^0$ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον Ι κεῖται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΔ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ι, ὅταν ἡ ΑΓ στρέφεται εἰς τὸ ἄνω ἡμικύκλιον, εἶναι ἡμιπεριφέρεια κύκλου διαμέτρου ΑΔ=ΑΒ. Ἐὰν ἡ ΑΓ στρέφεται καὶ εἰς τὸ κάτω ἡμικύκλιον, τότε ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΔ′=ΑΒ. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α μήκη ΑΙ=ΑΙ′=ΒΓ, τότε ὁ γεωμ. τόπος τῶν Ι καὶ Ι′ εἶναι αἱ περιφέρειαι διαμέτρων ΑΔ καὶ ΑΔ′.

477) Εἰς κύκλον κέντρου Ο δίδεται χορδὴ ΑΒ σταθερὰ θέσει μεγέθει καὶ τυχοῦσα διὰ τοῦ Α χορδὴ ΑΓ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Γ τὰ μήκη ΓΜ καὶ ΓΜ′, τοιαῦτα ὥστε ΓΜ=ΓΜ′=ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ′.



Σχ. 313.

Λύσις. Ἐκ τῶν (σχ. 313) ἰσοσκελῶν τριγώνων ΓΒΜ′ καὶ ΓΜΒ ἔχομεν

$$\widehat{ΑΓΒ}=2\widehat{M'} \text{ καὶ } 2\cdot\widehat{ΓΜΒ}=180^0-\widehat{ΑΓΒ}$$

καὶ συνεπῶς

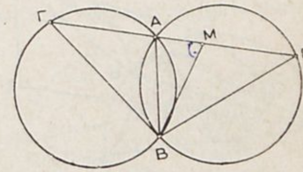
$$\widehat{M'}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΓΒ} \text{ (1) καὶ } \widehat{ΓΜΒ}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ΑΓΒ}.$$

Ἡ δευτέρα, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΓΜΒ}=180^0-\widehat{ΑΜΒ}$, γίνεται

$$180^\circ - \widehat{\mathrm{AMB}} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}, \text{ ἢ } \widehat{\mathrm{AMB}} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}} \quad (2).$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος, διότι βαίνει εἰς τὸ σταθερὸν τόξον $\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγεται ὅτι οἱ γεωμ. τόποι τῶν Μ′ καὶ Μ εἶναι τόξα κύκλου γραφόμενα μὲ χορδὴν ΑΒ καὶ δεχόμενα τὸ μὲν γωνίαν $\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ τὸ δὲ γωνία $90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$. Αὐτὰ ὅταν τὸ Γ διαγάφει τὸ τόξον $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$. Ἐὰν ὅμως τὸ Γ διαγράφῃ τὸ τόξον $\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$, τότε οἱ τόποι εἶναι τόξα γραφόμενα μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δεχόμενα γωνίας ἀντιστοίχως $90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ διὰ τὸ Μ′ καὶ $\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ διὰ τὸ Μ.

478) Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ διὰ τοῦ Α ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὰς περιφερείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΓΓ′.

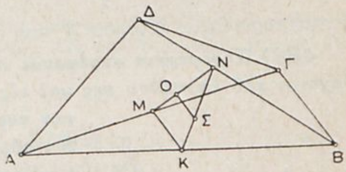


Σχ. 314.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 314) αἱ γωνίαι $\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma'}$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἴσους κύκλους καὶ βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα, τὸ τρίγωνον ΓΒΓ′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἡ ΒΜ εἶναι κάθετος τῇ ΓΓ′.

Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ.

479) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδεται ἡ πλευρὰ ΑΒ σταθερὰ θέσει καὶ μεγέθει, ὡς καὶ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ καὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΓ καὶ τοῦ μέσου Ο τῆς συνδεούσης τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν διαγωνίων.



Σχ. 315.

Λύσις. Ἐὰν (σχ. 315) Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ Σ τῆς ΚΝ, θὰ ἔχωμεν (1) $\mathrm{KM} = \frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}$ (σταθερόν)

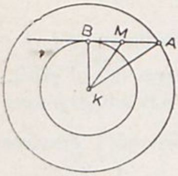
καὶ (2) $\mathrm{O\Sigma} = \frac{1}{2}\mathrm{KM} = \frac{1}{4}\mathrm{B\Gamma}$ (σταθερόν).

Ἐπειδὴ τὰ ΑΔ καὶ ΒΔ εἶναι σταθερὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι σταθερὸν θέσει καὶ μεγέθει καὶ συνεπῶς τὸ Ν εἶναι σημεῖον σταθερόν, ὅτε καὶ τὸ Σ εἶναι σταθερόν. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι οἱ γεωμ. τόποι τῶν Μ καὶ Ο εἶναι περιφέρειαι κύκλων κέντρων ἀντιστοίχως Κ καὶ Σ καὶ ἀκτίνων $\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}$ καὶ $\frac{1}{4}\mathrm{B\Gamma}$.

Τὰ ἀντίστροφα φαίνονται εὐκόλως.

480) Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι κέντρου Κ καὶ ἐκ σημείου Α τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας ἄγεται ἐφαπτομένη τῆς ἐσωτερικῆς καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ΑΜ=λ, ἔνθα λ δοθέν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν τὸ Α διαγράφῃ τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν.

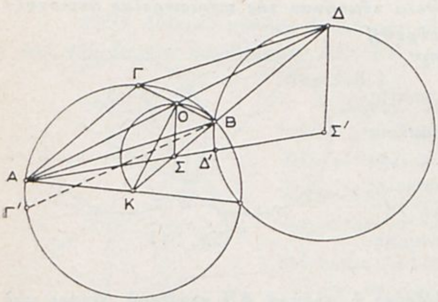
Λύσις. Ἔστω ΑΒ ἡ ἐφαπτομένη. Τὸ τρίγωνον ΒΚΑ (σχ. 315) εἶναι κατασκευάσιμον ὡς ὀρθογώνιον γνωστῶν τῶν ΚΑ καὶ



Σχ. 316.

ΚΒ. Ἄρα ἡ γωνία $\widehat{KAB}=\widehat{KAM}$ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος. Τὸ τρίγωνον ΚΑΜ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο πλευραί του ΚΑ, ΑΜ καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία ΚΑΜ. Ἄρα ἡ ΚΜ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΜ.

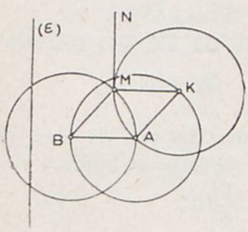
481) Δίδεται χορδὴ ΑΒ περιφερείας κέντρου Κ, σταθερὰ θέσει μεγέθει καὶ τυχοῦσα χορδὴ ΑΓ. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ, φέροντες ἐκ τῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου Ο τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ ὡς καὶ τῆς κορυφῆς του Δ.



Σχ. 317.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 317) τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς ΒΓ, ἡ ΚΟ θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΓΒ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{KOB}=90^{\circ}$, ὅτε ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ο εἶναι περιφέρεια διαμέτρου ΚΒ. Ἔστω Σ τὸ μέσον τῆς ΚΒ. Φέρομεν τὴν ΑΣ καὶ προεκτείνομεν ταύτην κατὰ ΣΣ′=ΑΣ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΣ′ λαμβάνομεν Σ′Δ=2·ΣΟ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ΟΣ=ΚΣ=\frac{1}{2}ΚΒ$, προκύπτει Σ′Δ=ΚΒ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Δ εἶναι περιφέρεια κέντρου Σ′ καὶ ἀκτῖνος Σ′Δ=ΚΒ.

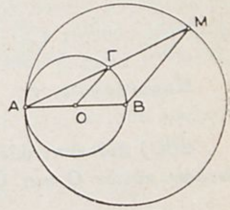
482) Περιφέρεια στρέφεται περὶ δεδομένον σημεῖον αὐτῆς Α χωρὶς νὰ ἐξέρχεται τοῦ ἐπιπέδου της καὶ εἰς ἑκάστην θέσιν αὐτῆς ἄγομεν ἐφαπτομένην της παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης.



Σχ. 318.

Λύσις. Ἔστω Κ ἡ στρεφομένη (σχ. 318) περὶ τὸ Α περιφέρεια ἀκτῖνος ρ καὶ ΜΝ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ παράλληλος τῇ δοδείσῃ εὐθεῖα (ε). Τὸ Κ θὰ διαγράφῃ κατὰ τὴν στροφὴν περιφέρειαν κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ρ. Ἡ ΚΜ κατὰ τὴν στροφὴν θὰ εἶναι διαρκῶς κάθετος τῇ (ε). Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΒ, τῆς περιφερείας κέντρου Α, κάθετον τῇ (ε). Τὸ σχῆμα ΚΜΒΑ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς εἶναι ΒΜ=ΑΚ=ρ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι δύο περιφέρειαι κέντρων Β καὶ Β′ καὶ ἀκτῖνος ρ, ἔνθα Β′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ Α.

483) Ἐκ σημείου Α δοθείσης περιφερείας ἄγονται χορδαί, αἱ ὁποῖαι προεκτείνονται κατὰ μῆκος ἴσον πρὸς ἑκάστην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων τῶν προεκτάσεων αὐτῶν.

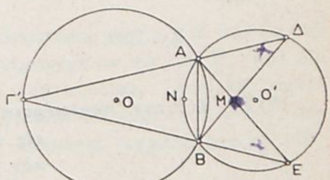


Σχ. 319.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 319) ΑΓ μία χορδὴ δοθείσης περιφερείας καὶ Μ τὸ ἄκρον τῆς προεκτάσεως, ἔνθα ΑΓ=ΓΜ. Ἔστω ΑΟΒ ἡ εἰς τὸ Α ἀντιστοιχοῦσα διάμετρος. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΜ ἔχομεν ΒΜ=2ΟΓ (σταθερὸν) καὶ συνεπῶς ὁ γ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος διπλασίας τῆς ἀκτῖνος τοῦ δοθέντος κύκλου Ο.

484) Δύο περιφέρειαι κέντων Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Συνδέομεν τὸ τυχὸν σημεῖον Γ′ τῆς περιφερείας Ο μὲ τὰ Α καὶ Β. Αἱ Γ′Α καὶ Γ′Β τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο′ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΒΔ.

Λύσις. Ἡ γωνία $\widehat{\Gamma'}$ (σχ. 320) εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος, διότι ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ τῆς περιφερείας Ο.



Σχ. 320.

Ἐπειδὴ αἱ Γ′ΑΔ καὶ Γ′ΒΕ εἶναι τέμνουσαι τῆς Ο′ θὰ ἔχωμεν (§ 200)

$$\widehat{\Gamma'} = \frac{1}{2}(\text{τοξ}\Delta\mathrm{E} - \text{τοξ}\mathrm{ANB})$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

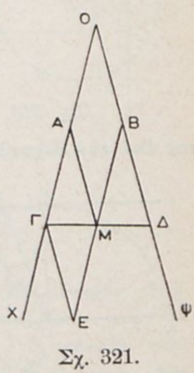
$$\text{τοξ}\Delta\mathrm{E} = 2\widehat{\Gamma'} + \text{τοξ}\mathrm{ANB}$$

καὶ συνεπῶς τὸ τόξον ΔΕ ἔχει σταθερὸν μέγεθος. Ἐπειδὴ αἱ ΑΜΕ καὶ ΒΜΔ εἶναι χορδαὶ τεμνόμεναι ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο′, θὰ ἔχωμεν (§ 200)

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \frac{1}{2}(\text{τοξ}\mathrm{ANB} + \text{τοξ}\Delta\mathrm{E}),$$

ἤτοι ἡ γωνία $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ ἔχει σταθερὸν μέγεθος καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τόξον κύκλου γραφόμενον μὲ χορδὴν ΑΒ καὶ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}(\text{τοξ}\mathrm{ANB} + \text{τοξ}\Delta\mathrm{E})$.

485) Δοθείσης γωνίας $\mathrm{X}\widehat{\mathrm{O}}\Psi$ φέρομεν δι᾽ ἑνὸς σημείου Μ, κειμένου ἐντὸς αὐτῆς, παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν τὸ ἄθροισμα ΜΑ+ΜΒ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς α.



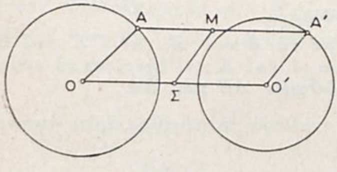
Σχ. 321.

Λύσις. Ἐπὶ (σχ. 321) τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΜ λαμβάνομεν ΜΕ=ΜΑ, ὅτε εἶναι ΒΕ=α. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον τῇ ΟΨ, ἥτις τέμνει τὴν ΟΧ εἰς τὸ Γ. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΕ=α καὶ ΓΕ παράλληλος τῇ ΟΨ, πρὸς δὲ ΒΕ παράλληλος τῇ ΟΧ, ἡ θέσις τοῦ Γ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη. Ἡ ΓΜ τέμνει τὴν ΟΨ εἰς τὸ Δ. Τὸ σχῆμα ΑΓΕΜ, ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ=ΜΕ, εἶναι ρόμβος καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι

$\widehat{A\Gamma M}=\widehat{M\Gamma E}$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι καὶ $\widehat{M\Gamma E}=\widehat{M\Delta B}$, λαμβάναμεν $\widehat{A\Gamma M}=\widehat{M\Delta B}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΓΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἡ ΓΔ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς ὡρισμένης εὐθείας ΓΔ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΔ.

Παρατήρησις. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο· α) ὅταν ἀφορᾷ δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ β) ὅταν εἶναι $MA-MB=\alpha$.

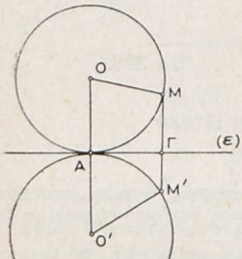
486) Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἀκτίνων ϱ καὶ ϱ′ καὶ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν Ο καὶ Ο′ φέρομεν τὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους ἀκτίνας ΟΑ καὶ Ο′Α′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς ΑΑ′.



Σχ. 322.

Λύσις. Τὸ σχῆμα (σχ. 322) ΟΑΑ′Ο′ εἶναι τραπέζιον καὶ συνεπῶς, ἐὰν Σ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΟΟ′, θὰ ἔχωμεν $\Sigma M=\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$, διότι ἡ ΣΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Σ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$.

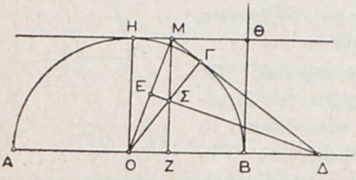
487) Δίδεται περιφέρεια Ο ἐφαπτομένη μιᾶς δοθείσης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐὰν Μ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸν σημείου Μ τῆς περιφερείας ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ′.



Σχ. 323.

Λύσις Ἐὰν Ο′ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο (σχ. 323) ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε), θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ σχῆμα ΟΟ′Μ′Μ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ συνεπῶς ἐὰν ϱ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς Ο θὰ ἔχωμεν $O'M'=OM=\varrho$. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ′ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο′ καὶ ἀκτῖνος ϱ.

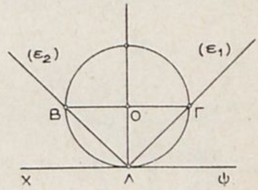
488) Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΟΒ καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην εἰς ἓν σημεῖον Γ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ σημεῖον Δ. Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΓΔΟ, ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΓΔ τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος.



Σχ. 324.

Λύσις Ἔστω (σχ. 324) ΔΕ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΓΔΟ. Ἐπειδὴ αἱ ΟΓ καὶ ΔΕ εἶναι τὰ δύο ὕψη τοῦ τριγώνου ΟΜΔ, ἕπεται ὅτι ΜΣΖ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ΔΕ καὶ ΟΓ, εἶναι τὸ τρίτον ὕψος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{EM\Delta}=90^0-\widehat{M\Delta E}=90-\widehat{O\Delta E}=\widehat{EO\Delta}$, τὸ τρίγωνον ΜΔΟ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς εἶναι ΜΖ=ΟΓ=ρ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἀφοῦ εἶναι ΜΖ=ρ, ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὸ σημεῖον Η, ἔνθα ἡ ΟΗ εἶναι κάθετος τῇ ΑΟΒ.

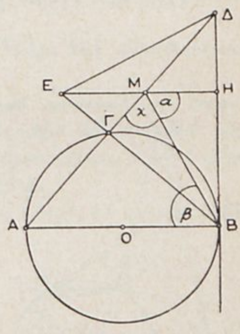
489) Δίδεται εὐθεῖα xy καὶ σημεῖον Α ἐπ' αὐτῆς. Ἐὰν γράψωμεν περιφερείας ἐφαπτομένας τῆς xy εἰς τὸ Α, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 325.

Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 325) μία τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ ΒΓ ἡ διάμετρος. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν Β καὶ Γ. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΓ=ΟΑ=ΟΒ, αἱ γωνίαι $\widehat{ΟΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΟΑΒ}$ εἶναι 45^0. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τῶν Γ καὶ Β εἶναι αἱ εὐθεῖαι $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ Α καὶ σχηματίζουν μετὰ τῆς καθέτου ΟΑ τῇ xy εἰς τὸ Α γωνίαν 45^0.

490) Δίδεται περιφέρεια καὶ τυχοῦσα διάμετρος αὐτῆς ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ, καὶ εἰς τὸ σημεῖον Δ τὴν εἰς τὸ Β ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ λαμβάνομεν ΒΕ=ΒΔ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς Μ τῆς ΑΔ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ε ἀγομένης παραλλήλου τῇ ΑΒ.



Σχ. 326.

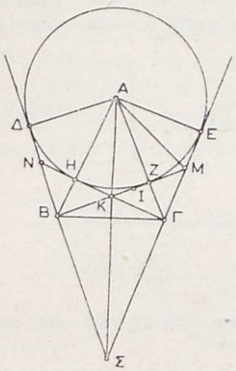
Λύσις. Αἱ ΕΗ καὶ ΔΓ ὡς ὕψη τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΕΔ εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν ΒΓ=ΒΗ, ὅτε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΜ καὶ ΒΗΜ εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ ἔχωμεν x=α, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι α=β, θὰ ἔχωμεν καὶ x=β. Ἄρα εἶναι ΑΜ=ΑΒ καὶ συνεπῶς τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ. Ἡ ΑΜ ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Β τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Μ παράλληλος τῇ ΑΒ ὁρίζει ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΒΔ τὰ Ε καὶ Η. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΜ=ΑΒ θὰ ἔχωμεν x=β, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι καὶ β=α, προκύπτει x=α καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα ΓΜΒ καὶ ΒΗΜ εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=ΒΗ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΒΕΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα τὸ Μ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου. Ὁ τόπος συνεπῶς εἶναι περιφέρεια κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ.

491) Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ κορυφῆς Α. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ΑΒ, γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς ΒΔ καὶ ΓΕ μεταξὺ τῶν ὁποίων κεῖται ἡ περιφέρεια. Ἔστωσαν ἐπίσης ΒΖ καὶ ΓΗ αἱ ἕτεραι δύο ἐφαπτόμεναι. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος α) τῆς τομῆς Σ τῶν ΒΔ καὶ ΓΕ,

β) τῆς τομῆς Μ τῶν ΒΖ καὶ ΓΕ, γ) ἐπὶ τῆς ΜΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β λαμβάνεται ΜΙ=ΜΓ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ τόπος τοῦ Ι.

Λύσις. α) Ἐπειδὴ (σχ. 327) εἶναι ΣΒ=ΣΓ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΣ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Σ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$. Ἐπίσης ἡ ἰδία διχοτόμος εἶναι καὶ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς Κ τῶν δύο ἄλλων συμμετρικῶν ἐφαπτομέτην ΓΗ καὶ ΒΖ.



Σχ. 327.

β) Ἔστω Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων ΒΖ καὶ ΓΕ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΑΔΒ εἶναι ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἔχοντα ΑΓ=ΑΒ καὶ ΑΕ=ΑΔ, θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΑΓΕ}=\widehat{ΑΒΔ} \text{ ἢ } \widehat{ΑΓΕ}=\widehat{ΑΒΖ}$$

(διότι $\widehat{ΑΒΖ}=\widehat{ΑΒΔ}$) ἢ $\widehat{ΑΓΜ}=\widehat{ΑΒΖ}$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΒΜΓ}=\widehat{ΒΑΓ}$. Ἄρα ὁ γ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τόξον γραφόμενον μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{ΒΑΓ}$.

γ) Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΓΜΙ λαμβάνομεν

$$2\cdot\widehat{ΜΙΓ}=180^0-\widehat{Μ}=180^0-\widehat{ΒΜΓ}=180^0-\widehat{ΒΑΓ} \text{ καὶ συνεπῶς } \widehat{ΜΙΓ}=90^0-\frac{1}{2}\widehat{ΒΑΓ}.$$

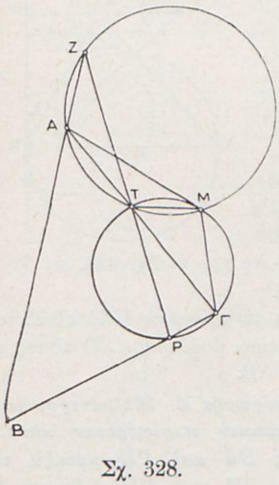
Ἀλλὰ $\widehat{ΒΙΓ}=180^0-\widehat{ΜΙΓ}$ καὶ συνεπῶς

$$\widehat{ΒΙΓ}=180^0-90^0-\frac{1}{2}\widehat{ΒΑΓ}, \text{ ἢ } \widehat{ΒΙΓ}=90^0+\frac{1}{2}\widehat{ΒΑΓ}.$$

Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ι εἶναι τόξον χορδῆς ΒΓ δεχόμενον γωνίανἴσην πρὸς $90^0+\frac{1}{2}\widehat{ΒΑΓ}$.

492) Διὰ σημείου Ρ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν ΑΓ εἰς τὸ Τ καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς Μ τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΡΓΤ καὶ ΡΒΖ.

Λύσις. Ἐκ (σχ. 312) τοῦ κύκλου ΖΒΡ λαμβάνομεν $\widehat{ΖΒΜ}=\widehat{ΖΡΜ}=\widehat{ΤΡΜ}$ (1), ἐκ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΜΤΡΓ λαμβάνομεν $\widehat{ΤΡΜ}=\widehat{ΤΓΜ}=\widehat{ΑΓΜ}$ (2).



Σχ. 328.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει

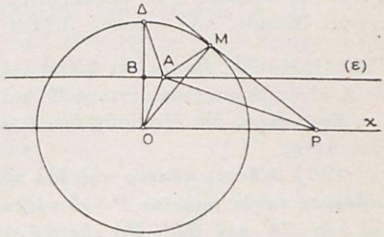
$$\widehat{ΖΒΜ}=\widehat{ΑΓΜ} \text{ ἢ } \widehat{ΑΒΜ}=\widehat{ΑΓΜ}$$

Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΜΓΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ **συνεπῶς** ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια.

493) Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καὶ μιὰ εὐθεῖα ΟΧ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο. Ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῆς ΟΧ ἄγεται ἐφαπτομένη ΡΜ τῆς περιφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\widehat{ΟΡΜ}$.

Λύσις. Ἔστω Α ὁ ποῦς τῆς καθέτου. Ἐπειδὴ (σχ. 329) εἶναι $\widehat{ΟΡΑ}=\widehat{ΑΡΜ}$, ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΟΑΜΡ λαμβάνομεν

$\widehat{ΑΟΜ}=\widehat{ΑΡΜ}=\widehat{ΟΡΑ}=ΟΜΑ$.



Σχ. 329.

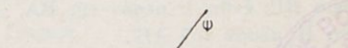
Ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΑΜ εἶναι ἰσοσκελές. Φέρομεν τὴν ΟΔ κάθετον τῇ ΟΧ, ὅτε ἔχομεν $\widehat{ΔΟΑ}=\widehat{ΟΡΑ}$, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους. Ἄρα εἶναι $\widehat{ΔΟΑ}=\widehat{ΑΟΜ}$ καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑΔ εἶναι ἴσα, ὅτε τὸ τρίγωνον ΟΑΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου (ε) εἰς τὸ μέσον Β τῆς ΟΔ. Ἄρα τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΟΔ εἰς τὸ μέσον Β αὐτῆς καὶ μάλιστα εἰς τὸ τμῆμα αὐτῆς ΒΗ, ἔνθα Η τομὴ τῶν ΔΖ καὶ (ε) καὶ Ζ τομὴ ΟΡ καὶ τῆς περιφερείας. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Α εἶναι τὸ τμῆμα ΒΗ τῆς εὐθείας (ε).

494) Εὐθεῖα ΑΒ δοθέντος μήκους, ἔχει τὰ ἄκρα της ὀλισθαίνονται ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν ΟΧ καὶ ΟΨ.

α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ. β) Δείξατε ὅτι ἐὰν ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι τὰ δύο ὕψη τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ἡ ΓΔ ἔχει σταθερὸν μῆκος καὶ γ) εὑρεῖν τὸν γεωμ. τόπον τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΟΒ.

Λύσις. α) Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΚΑΒ εἶναι κατασκευάσιμον διότι εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΑΒ δοθεῖσαν καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{ΑΚΒ}$ ἴσην πρὸς $2\cdot \widehat{xOy}$.

Ἄρα ἡ ΟΚ=ΚΑ=ΚΒ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΚ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως.



Σχ. 330.

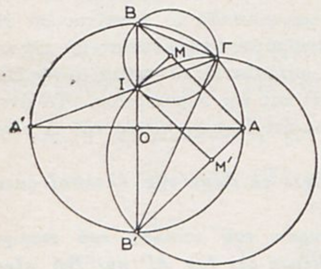
Ὅρια τοῦ τόπου. Ἐπὶ τῶν Οx καὶ Οy λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ ΟΑ′=ΑΒ καὶ ΟΒ′=ΑΒ. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ σημεῖα Κ′ καὶ Κ″ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος εἶναι τὸ τόξον Κ′ΑΒΚ″ τῆς περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΚ.

β) Τὸ τετράπλευρον ΑΔΓΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον διαμέτρου ΑΒ (σχ. 330) σταθερᾶς τὸ μῆκος. Ἐπειδὴ ὁ κύκλος οὗτος ἔχει σταθερὰν διάμετρον, ἕπεται ὅτι ἡ χορδὴ αὐτοῦ ΓΔ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν σταθερὰ μεγέθει γωνίαν $\widehat{ΓΑΔ}=90^0-\widehat{O}$, εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος.

γ). Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι σταθερὰ τὸ μῆκος, κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὁ περὶ τὸ τρίγωνον ΟΓΔ περιγεγραμμένος κύκλος, ὅστις διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Μ, διότι τὸ τετράπλευρον ΟΔΜΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἔχει σταθερὰν ἀκτῖνα. Ἐπειδὴ τοῦ κύκλου αὐτοῦ διάμετρος εἶναι ἡ ΟΜ, διότι εἶναι $\widehat{ΟΓΜ}=\widehat{ΟΔΜ}=90^0$, ἕπεται ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΜ.

Σημείωσις. Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ὅλη ἡ περιφέρεια ἢ μέρος αὐτῆς.

495) Δίδεται κύκλος καὶ δύο κάθετοι διάμετροι αὐτοῦ ΑΑ′ καὶ ΒΒ′. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου ΑΒ μὲ τὸ σημεῖον Α′ καὶ ἔστω Ι ἡ τομὴ τῶν ΓΑ′ καὶ ΒΒ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν περιγεγραμμένων περὶ ἕκαστον τῶν τριγώνων ΓΙΒ καὶ ΓΙΒ′.



Σχ. 331.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 331) Μ καὶ Μ′ τὰ κέντρα τῶν κύκλων αὐτῶν. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\widehat{ΒΓΑ′}$ καὶ $\widehat{Α′ΓΒ′}$, ὡς βαίνουσαι εἰς τὰ τόξα ΒΑ′ καὶ Α′Β′, ἅτινα ἰσοῦνται πρὸς 90^0, εἶναι ἴσαι πρὸς 45^0, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι $\widehat{ΒΜΙ}$ καὶ $\widehat{Β′Μ′Ι}$, ὡς ἐπίκεντροι, ἰσοῦνται πρὸς 90^0 ἑκάστη. Ἐπειδὴ τώρα τὰ τρίγωνα ΒΜΙ καὶ Β′Μ′Ι εἶναι ἰσοσκελῆ, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι $\widehat{ΜΒΙ}$ καὶ $\widehat{Μ′Β′Ι}$ εἶναι 45^0 ἑκάστη καὶ συνεπῶς αἱ ΒΜ καὶ Β′Μ′ διέρχονται διὰ τοῦ Α. Ἄρα τὰ Μ καὶ Μ′ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΒΑ καὶ Β′Α. Ὅταν τὸ Γ διαγράφει τὸ τόξον ΒΓΑ τὸ Μ διαγράφει τὸ εὐθύγραμ. τμῆμα ΒΡ, ἔνθα Ρ μέσον τῆς ΒΑ, τὸ δὲ Μ′ διαγράφει τὸ εὐθυγ. τμῆμα ΑΡ′, ἔνθα Ρ′ μέσον τοῦ ΑΒ′.

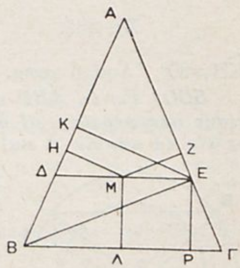
496) Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν φέρομεν χορδὴν ΑΒ καὶ ἑτέραν μεταβλητὴν ΑΓ. Ἐπὶ τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ, β) ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Δ καὶ γ) νὰ εὑρεθῇ παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ΑΔ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

Λύσις. Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις τῆς ἀσκήσεως ταύτης εἶναι ἡ ἄσκ. 481.

γ) Ἐπειδὴ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Δ (ἄσκ. 481) εἶναι (σχ. 316) περιφέρεια κέντρου Σ′ καὶ ἀκτῖνος ρ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας, ἕπεται ὅτι ἡ πλησιεστέρα θέσις τοῦ Δ πρὸς τὸ Α εἶναι ἡ τομὴ Δ′ τῆς ΑΣ′ καὶ τῆς περιφερείας κέντρου Σ′ καὶ ἀκτῖνος ρ. Ἔστω Γ′ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῆς ΒΟ′, ἔνθα Ο′ τὸ μέσον τῆς ΑΔ′. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔ′Γ′ εἶναι τὸ ἔχον ἐλαχίστην διαγώνιον ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ Α.

497) Δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος σημείων τοιούτων, ὥστε ἡ ἀπόστασίς των ἀπὸ τῆς βάσεως νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ΑΒ=ΑΓ). Ἔστωσαν ΜΖ, ΜΗ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Μ ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ (σχ. 332) ΜΛ ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς βάσεως. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ΜΖ+ΜΗ=ΜΛ (1). Φέρομεν τὴν ΔΕ διὰ τοῦ Μ παράλληλον τῇ ΒΓ, ὅτε, ἐὰν ΕΡ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπὸ τῆς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ΜΛ=ΕΡ καὶ συνεπῶς ἡ (1) γίνεται ΜΖ+ΜΗ=ΕΡ (2). Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς θὰ ἔχωμεν (§ 138) ΜΖ+ΜΗ=ΕΚ (3), ἔνθα ΕΚ κάθετος τῇ ΑΒ. Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ΕΡ=ΕΚ καὶ συνεπῶς τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β. Ἄρα τὸ Ε εἶναι ὡρισμένον σημεῖον καὶ συνεπῶς ὡρισμένη εἶναι καὶ ἡ θέσις τῆς ΔΕ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΔΕ.

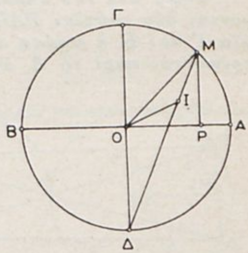


Σχ. 332.

Σημείωσις. Νὰ ἐξετασθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ὁ ἐν λόγῳ τόπος εἶναι αἱ ἑκατέρωθεν προεκτάσεις τῆς ΔΕ).

498) Δίδεται κύκλος καὶ σταθερὰ διάμετρος αὐτοῦ ΑΟΒ, ἐὰν ΟΜ εἶναι τυχοῦσα ἀκτὶς καὶ ΜΡ ἡ ἐκ τοῦ Μ κάθετος τῇ διαμέτρῳ ΑΟΒ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΟΜΡ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 333) Ι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ Ι κεῖται ἐπὶ τῆς ΜΔ, ἔνθα ΓΔ κάθετος τῇ ΑΟΒ εἰς τὸ Ο, διότι, λόγῳ τῆς ἰσότητος $\widehat{ΟΜΔ}=\widehat{ΟΔΜ}=\widehat{ΔΜΡ}$, ἡ ΜΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΟΜΡ. Ἡ ΟΙ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΜΟΡ}$ καὶ συνεπῶς, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΜΙΟ}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{Ρ}$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{Ρ}=90^\circ$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΜΙΟ}=90^\circ+45^\circ=135^\circ$. Ἀφοῦ εἶναι

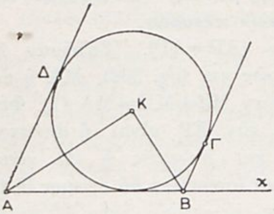


Σχ. 333.

$\widehat{ΜΙΟ}=135^\circ$ θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΟΙΔ}=45^\circ=\widehat{ΟΑΔ}$. Ἄρα ὅταν τὸ Μ διαγράφει τὸ τόξον ΑΓ τὸ Ι διαγράφει τὸ τόξον ΑΙΟ τῆς περιφερείας ΑΟΔ. Ἄρα ὁ γ. τόπος τοῦ Ι εἶναι τὸ τόξον ΑΙΟ τῆς περιφερείας ΑΟΔ ὅταν τὸ Μ κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ.

499) Δοθέντων δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β μιᾶς δοθείσης εὐθείας (x), νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς εὐθείας (x) καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἐκ τῶν Α καὶ Β ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι νὰ εἶναι παράλληλοι.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 334) Κ τὸ κέντρον μιᾶς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ ΑΔ καὶ ΒΓ αἱ παράλληλοι ἐφαπτόμεναι. Ἔχομεν $\widehat{KAB}=\frac{1}{2}\widehat{\Delta AB}$ καὶ $\widehat{KBA}=\frac{1}{2}\widehat{\Gamma BA}$ καὶ

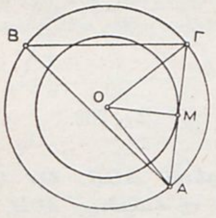


Σχ. 334.

συνεπῶς $\widehat{KAB}+\widehat{KBA}=\frac{1}{2}(\widehat{\Delta AB}+\widehat{\Gamma BA})$.

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Delta AB}+\widehat{\Gamma BA}=180^0$, διότι αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, γίνεται $\widehat{KAB}+\widehat{KBA}=90^0$, ἢ $180^0-\widehat{AKB}=90^0$, ἢ $\widehat{AKB}=90^0$. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Κ εἶναι περιφέρεια κύκλου διαμέτρου ΑΒ.

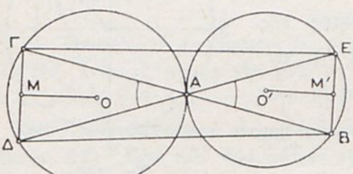
500) Γωνία ΑΒΓ σταθεροῦ μεγέθους ἔχει τὴν κορυφήν της Β ἐπὶ δοθείσης περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν τὴν περιφέρειαν ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Ἐὰν ἡ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Β, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΑΓ.



Σχ. 335.

Λύσις. Ἐὰν (σχ. 335) Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, θὰ ἔχωμεν $\widehat{A O \Gamma}=2\widehat{AB\Gamma}$ (σταθερὰ) καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΟΓ εἶναι κατὰ μέγεθος σταθερόν, ὅτε καὶ τὸ ὕψος του ΟΜ (ἔνθα Μ μέσον τῆς ΑΓ) εἶναι σταθερόν. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΜ. Νὰ γίνῃ διερεύνησις τοῦ γεωμ. τόπου (1).

501) Διὰ τοῦ σημείου Α τῆς ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν ἄγονται δύο εὐθεῖαι ΓΑΒ καὶ ΔΑΕ τέμνουσαι τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Β ἡ πρώτη καὶ Δ καὶ Ε ἡ δευτέρα. Ἐὰν αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι στρέφονται περὶ τὸ Α, ὥστε ἡ γωνία των νὰ ἔχῃ σταθερὸν μέγεθος, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ΓΕΒΔ.



Σχ. 336.

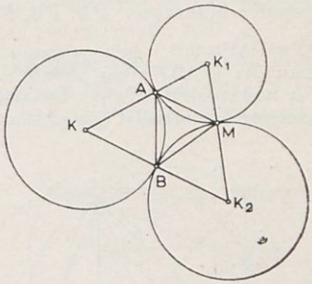
Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 336) αἱ γωνίαι $\widehat{\Gamma A \Delta}$ καὶ $\widehat{EAB}$ εἶναι κατὰ μέγεθος σταθεραὶ καὶ αἱ χορδαὶ ΓΔ καὶ ΕΒ θὰ ἔχουν μῆκος σταθερὸν καὶ συνεπῶς καὶ αἱ ἀποστάσεις των ΟΜ καὶ Ο′Μ′ ἀπὸ τῶν κέντρων Ο καὶ Ο′ τῶν περιφερειῶν θὰ εἶναι σταθεραί.

Ἄρα οἱ γεωμ. τόποι τῶν Μ καὶ Μ′ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ περιφέρειαι κέντρων Ο καὶ Ο′ καὶ ἀκτίνων ΟΜ καὶ Ο′Μ′.

502) Δύο μεταβληταὶ περιφέρειαι K_1 καὶ K_2 ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ ἡ μὲν K_1 ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς περιφερείας Κ εἰς τὸ Α, ἡ δὲ K_2 ἐφάπτεται ἐπίσης ἐξωτερικῶς τῆς Κ εἰς τὸ σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ.

(1) Ὁ γ. τόπος εἶναι τὸ τόξον τῆς περιφερείας αὐτῆς τὸ κείμενον ἐκτὸς τῶν ἐκ τοῦ Β ἀγομένων ἐφαπτομένων εἰς αὐτήν.

Λύσις. Ἔχομεν (σχ. 337) $\widehat{K_1}+2\cdot K_1\widehat{M}A=180^0$ καὶ $\widehat{K_2}+2\cdot K_2\widehat{M}B=180^0$. Προστιθέμεναι αὗται δίδουν



Σχ. 337.

$$\widehat{K_1}+\widehat{K_2}+2(K_1\widehat{M}A+K_2\widehat{M}B)=360^0$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{K_1}+\widehat{K_2}=180^0-\widehat{K}$ καὶ $K_1\widehat{M}A+K_2\widehat{M}B=180^0-A\widehat{M}B$, αὕτη γίνεται

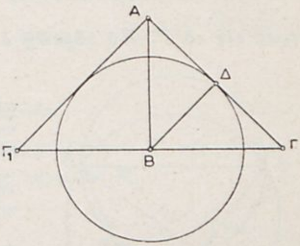
$$180^0-\widehat{K}+2(180^0-A\widehat{M}B)=360^0, \text{ ἢ}$$

$$180^0-\widehat{K}=2\cdot A\widehat{M}B, \text{ ἢ } A\widehat{M}B=90-\frac{1}{2}\widehat{K}.$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $A\widehat{M}B$, ὡς ἐδείχθη, εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $90^0-\frac{1}{2}\widehat{K}$, ἕπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΒ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $90^0-\frac{1}{2}\widehat{K}$.

Ἐὰν Γ καὶ Δ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ τόξομ αὐτοῦ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῆς Κ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως, τότε τὸ τόξον ΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος.

503) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερὰ θέσει μεγέθει, ἡ δὲ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Β εἶναι σταθερὰ μεγέθει. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.



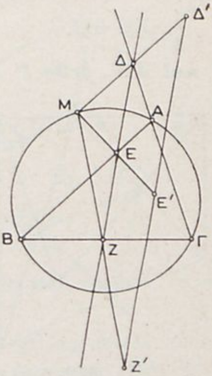
Σχ. 338.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 338) ΒΔ=δ ἡ σταθερὰ διάμεσος. Προεκτείνομεν τὴν ΓΒ κατὰ μῆκος $B\Gamma_1=\Gamma B$. Ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma B=B\Gamma_1$ καὶ ΓΔ=ΔΑ, θὰ ἔχωμεν $\Gamma_1A=2\cdot B\Delta=2\cdot\delta$.

Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Α εἶναι περιφέρεια κέντρου Γ_1 καὶ ἀκτῖνος 2δ.

504) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος σημείου Μ, τοῦ ὁποίου τὰ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 339) Δ′, Ε′ καὶ Ζ′ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΓΑ, ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

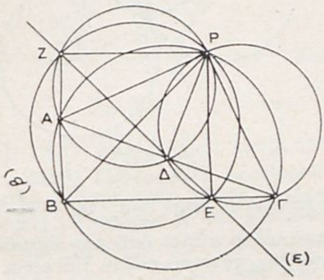


Σχ. 339.

Ἐπειδὴ τὰ Δ′, Ε′, Ζ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ θὰ κεῖνται ἀπ' εὐθείας (διότι εἶναι ΜΔ=ΔΔ′, ΜΕ=ΕΕ′, ΜΖ=ΖΖ′) καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι (§ 238) ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια.

505) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Αἱ μὲ διαμέτρους ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τρία σημεῖα, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Ρ.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 340) Ζ, Ε καὶ Δ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν τριῶν περιφερειῶν διαμέτρων ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ, κείμενα ἐπ' εὐθείας (ε). Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΔΡ}=\widehat{ΓΔΡ}=90^0$, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰ ἡμικύκλια διαμέτρων ΡΑ καὶ ΡΓ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΔΓ εἶναι εὐθεῖα καὶ συνεπῶς τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΡΔ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὰ Ε καὶ Ζ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΑΒ καὶ ὅτι αἱ ΡΕ καὶ ΡΖ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' αὐτάς. Παρατηροῦμεν συνεπῶς ὅτι τὸ Ρ ἔχει τὴν ἰδιότητα «οἱ πόδες τῶν καθέτων τῶν ἐξ αὐτοῦ ἀγομένων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας». Ἀλλὰ τότε ὡς γνωστὸν (§ 238) ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ρ εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια.

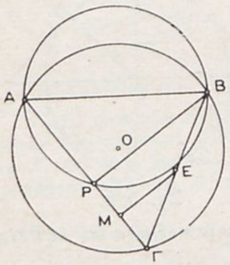


Σχ. 340.

506) Ἐπὶ μιᾶς χορδῆς ΑΒ μιᾶς δοθείσης περιφερείας Ο, γράφομεν μίαν δευτέραν περιφέρειαν ἔχουσαν τὴν ΑΒ ὡς διάμετρον. Διὰ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ρ καὶ τὴν περιφέρειαν Ο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος εἰς τὸ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΡΓ.

Λύσις. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ΑΒ εἶναι σταθερὰ (σχ. 341) θέσει μεγέθει, ἡ δὲ γωνία $\widehat{Γ}$, ὡς ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν σταθερὰν χορδὴν ΑΒ, εἶναι σταθερὰ μεγέθει. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἐπειδὴ ἡ $\widehat{ΒΡΑ}$ εἶναι 90^0, ἡ ἐκ τοῦ Ε κάθετος τῇ ΡΓ θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΡΓ.

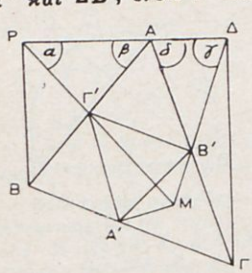
Ἄρα τὸ Μ εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ὁ ἐξετασθεὶς ἐν § 307 τοῦ βιβλίου μου «Μεγάλη Γεωμετρία».



Σχ. 341.

507) Διὰ τῆς κορυφῆς Α δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ ταύτην ΒΡ καὶ ΓΔ, ὡς καὶ αἱ εὐθεῖαι ΡΓ' καὶ ΔΒ', ἔνθα Γ' καὶ Β' μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΡΓ' καὶ ΔΒ'.

Λύσις Ἐκ τῶν (σχ. 342) ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΡΒ καὶ ΑΔΓ, τῶν ὁποίων διάμεσοι εἶναι αἱ ΡΓ' καὶ ΔΒ', ἔχομεν $\widehat{α}=\widehat{β}$ καὶ $\widehat{γ}=\widehat{δ}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{α}+\widehat{γ}=\widehat{β}+\widehat{δ}$, ἢ $180^0-\widehat{Μ}=180^0-\widehat{Α}$, ἢ $\widehat{Μ}=\widehat{Α}$, ἢ $Γ'\widehat{Μ}Β'=\widehat{Α}$ (1). Ἐὰν Α εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ θὰ ἔχωμεν $Γ'\widehat{Α'}Β'=\widehat{Α}$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $Γ'\widehat{Μ}Β'=Γ'\widehat{Α'}Β'$ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον Γ'Α'ΜΒ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ὅταν ἡ στρεφομένη εὐθεῖα κεῖται μεταξὺ τῆς ΑΓ καὶ τῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Α καθέτου, ἢ μεταξὺ τῆς ΑΒ καὶ



Σχ. 342.

τῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Α καθέτου, τότε ἡ γωνία Μ ἰσοῦται πρὸς 180^0-A.

Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' περιγεγραμμένη περιφέρεια ἤτοι ἡ περιφέρεια τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

508) Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Γ δύο τεμνομένων περιφερειῶν κέντρων K_1 καὶ K_2, ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο περιφερείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς Σ τῶν εὐθειῶν MK_1 καὶ NK_2.

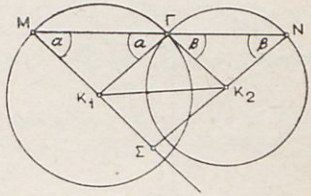
Λύσις. Ἔχομεν (σχ. 343) $\Sigma\widehat{K_1\Gamma}=2\cdot\widehat{\alpha}$, $\Sigma\widehat{K_2\Gamma}=2\cdot\widehat{\beta}$ καὶ συνεπῶς

$$\Sigma\widehat{K_1\Gamma}+\Sigma\widehat{K_2\Gamma}=2(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}), \text{ ἢ}$$

$$\Sigma\widehat{K_1\Gamma}+\Sigma\widehat{K_2\Gamma}=2(180^0-K_1\widehat{\Gamma}K_2) \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου $\Sigma K_1\Gamma K_2$ ἔχομεν

$$\widehat{\Sigma}=360^0-(\Sigma\widehat{K_1\Gamma}+\Sigma\widehat{K_2\Gamma})-K_1\widehat{\Gamma}K_2.$$



Σχ. 343.

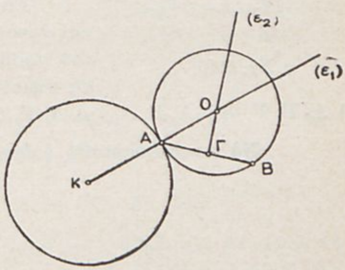
Αὕτη, λόγῳ τῆς (1), γίνεται $\widehat{\Sigma}=360^0-2(180^0-K_1\widehat{\Gamma}K_2)-K_1\widehat{\Gamma}K_2$, ἢ $\widehat{\Sigma}=K_1\widehat{\Gamma}K_2$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ ἡ $K_1\widehat{\Gamma}K_2$ εἶναι σταθερὰ γωνία, συνάγομεν ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Σ εἶναι τόξον χορδῆς K_1K_2 δεχόμενον γωνίαν $\widehat{\Sigma}$ ἴσην πρὸς τὴν $K_1\widehat{\Gamma}K_2$.

Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια κύκλου.

509) Ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας κέντρου Κ εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Β.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 344) Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ αὕτη ἐφάπτεται τῆς Κ εἰς τὸ Α, ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ο εἶναι ἡ εὐθεῖα ΚΑ, ἐπειδὴ δὲ διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ο εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε_2) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Γ.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΑ καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΑΒ. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι τὸ κέντρον Ο.



Σχ. 344.

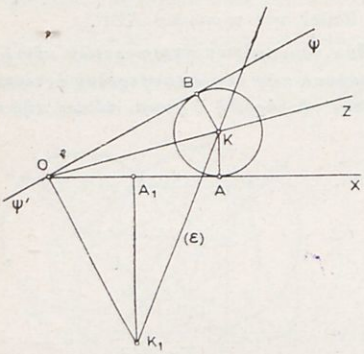
Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ=ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

Περιορισμός. Αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) πρέπει νὰ τέμνωνται.

510) Ἐφαπτομένη δύο εὐθειῶν Οx καὶ Οy καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας.

Λύσις. Ἔστω (ε) ἡ εὐθεῖα (σχ. 345), ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ κέντρον καὶ ἔστω Κ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐφ' ὅσον αὕτη ἐφάπτεται τῶν Οx καὶ Οy τὸ κέντρον της θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας τῶν Οx καὶ Οy.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΖ τῆς γωνίας τῶν Οx καὶ Οy, ἥτις τέμνει τὴν (ε) εἰς τὸ Κ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασίν του ΚΑ ἀπὸ τῆς Οx γράφομεν περιφέρειαν ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι ἡ (ε) τέμνει καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $x\widehat{O}y'$ παραπληρωματικῆς τῆς $x\widehat{O}y$, εἰς τὸ K_1 τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας τῆς ὁποίας ἀκτὶς εἶναι ἡ ἀπόστασις K_1A_1 τοῦ K_1 ἀπὸ τῆς Οx. Ἐὰν ἡ (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν διχοτόμον, τότε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Ἐὰν ἡ (ε) διέρχεται διὰ τοῦ Ο τότε ἡ περιφέρεια ἐκφυλίζεται εἰς τὸ σημεῖον Ο.

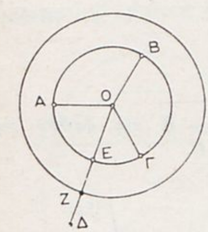


Σχ. 345.

511) Ἰσαπέχουσα τεσσάρων δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, Δ.

Λύσις. Διὰ τῶν τριῶν (σχ. 346) σημείων Α, Β, Γ γράφομεν περιφέρειαν Ο καὶ φέρομεν τὴν ΟΔ, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς περιφερείας εἰς τὸ Ε. Ἔστω Ζ τὸ μέσον τῆς ΔΕ. Ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $OZ=\frac{1}{2}(OE+O\Delta)$ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἀπέχει ἰσάκις τῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν περιφέρειαν τῶν Α, Δ, Γ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, θὰ ἔχωμεν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἐν ὅλῳ ἔχομεν 4 λύσεις καθότι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἀνὰ τρία λαμβανόμενα εἶναι α) Α, Β, Γ, β) Α, Β, Δ, γ) Α, Γ, Δ, δ) Β, Γ, Δ.

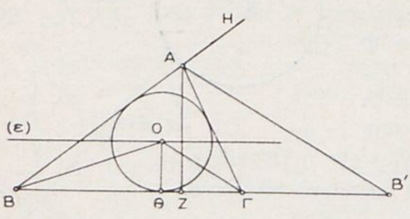


Σχ. 346.

Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90⁰) ἐκ τῶν:

512) υ_α, Δ_α.

Λύσις. Ἔστω ΑΖ τὸ (σχ. 347) ὕψος καὶ $AB'=\Delta_\alpha$ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΖΒ′ κατασκευάζεται ἐφ᾿ ὅσον εἶναι $\upsilon_\alpha<\Delta_\alpha$. Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma AB'}=\widehat{HAB'}=45^0$, κατασκευάζομεν μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ′ καὶ κορυφὴν τὸ Α ἑκατέρωθεν γωνίας 45^0 τῶν ὁποίων αἱ ἕτεραι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΑΗ τέμνουν τὴν Β′Ζ εἰς τὰ Γ καὶ Β, ὅτε τὸ ζητούμενον τρίγωμον εἶναι τὸ ΑΒΓ.



Σχ. 347.

513) ϱ, α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 347) Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{BO\Gamma} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{A} = 90^0 + 45^0 = 135^0$, $B\Gamma = \alpha$ καὶ $O\Theta = \rho$, τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου κύκλου χορδῆς $B\Gamma = \alpha$ δεχόμενον γωνίαν 135^0 καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) τῆς παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ταύτης ἀπόστασιν ρ.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $B\Gamma = \alpha$ κπὶ μὲ χορδὴν ταύτην κατασκευάζομεν τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν 135^0 καὶ φέρομεν τὴν (ε) παράλληλον τῇ ΒΓ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ρ, ἥτις τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ Ο. Διπλασιάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{OB\Gamma}$ καὶ $\widehat{O\Gamma B}$ καὶ οὕτως ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἑτέρων πλευρῶν ΒΑ καὶ ΓΑ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Διερεύνησις. Ἐὰν β καλέσωμεν τὸ βέλος τοῦ τόξου θὰ ἔχωμεν: α) Ἐὰν $\beta > \rho$ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. β) Ἐὰν $\beta = \rho$ ἔχει μίαν καὶ γ) Ἐὰν $\beta < \rho$ οὐδεμίαν.

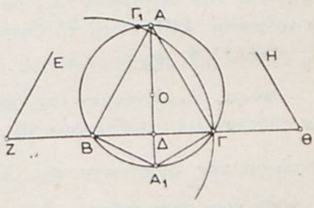
514) υ_α, R.

Λύσις. Ἐπειδὴ $\alpha = 2R$ ἔχομεν γνωστὰ τὰ α καὶ υ_α, ὅτε (σχ. 347) τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς· Μὲ διάμετρον τὴν $B\Gamma = 2R$ κατασκευάζομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν εὐθεῖαν (ε_1) παράλληλον τὴν ΒΓ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν υ_α, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τὴν κορυφὴν Α. Ἐὰ $\upsilon_\alpha < R$ ἔχομεν δύο λύσεις, ἐὰν $\upsilon_\alpha = R$ μίαν καὶ ἐὰν $\upsilon_\alpha > R$ οὐδεμίαν.

Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Β=Γ) ἐκ τῶν:

515) α, R.

Λύσις. Γράφομεν περιφέρειαν (σχ. 348) Ο ἀκτῖνος R καὶ μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Β καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν πρώτην εἰς τὰ Γ καὶ Γ_1. Εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον, ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ Α καὶ A_1. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A_1B\Gamma$ εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 348.

Περιορισμός. Πρέπει $\alpha \leqslant 2R$. Ἕτεραι δύο λύσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ Γ_1.

516) α, υ_α.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 348) τὴν ΒΓ ἴσην πρὸς α καὶ εἰς τὸ μέσον της Δ ὑψοῦμεν κάθετον λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς μῆκος $\Delta A = \upsilon_\alpha$, ὅτε τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

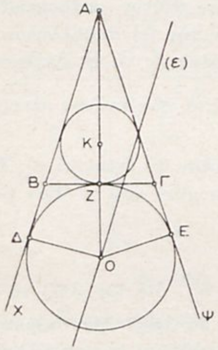
517) B, υ_α.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 348) $A\Delta = \upsilon_\alpha$ καὶ εἰς τὸ Δ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν. Εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Θ τῆς καθέτου ταύτης κατασκευάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{EZ\Theta}$ καὶ $\widehat{H\Theta Z}$ ἴσας πρὸς Β καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΕΖ καὶ ΗΘ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΖΘ εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

518) 2τ, A.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 349) γωνίαν $X\widehat{A}\Psi$ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν A καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν μήκη $A\Delta=AE=\tau$ καὶ εἰς τὰ Δ καὶ E ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς AX καὶ AΨ αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ O. Μὲ κέντρον O καὶ ἀκτῖνα $O\Delta=OE$ γράφομεν περιφέρειν καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς τὸ συμεῖον Z καθ' ὃ ἡ AO τέμνει τὴν περιφέρειαν. Ἡ ἐφαπτομένη αὕτη τέμνει τὰς AX καὶ AΨ εἰς τὸ B καὶ Γ. Τὸ ABΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, διότι εἶναι α) ἰσοσκελές, β) ἔχει τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην πρὸς A καὶ γ) ἐπειδὴ εἶναι $BZ=B\Delta$ καὶ $\Gamma Z=\Gamma E$, θὰ ἔχωμεν

$$AB+A\Gamma+B\Gamma=A\Delta+AE=2A\Delta=2\tau.$$



Σχ. 349.

519) α, ρ.

Λύσις. Κατασκευάζομεν (σχ. 349) περιφέρειαν K ἀκτῖνος ρ καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον Z αὐτῆς φέρομεν ἐφαπτομένην λαμβάνοντες ἑκατέρωθεν τοῦ Z ἐπ' αὐτῆς μήκη $ZB=Z\Gamma=\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἐκ τῶν B καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ A.

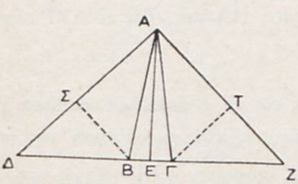
Περιορισμός. Πρέπει $\alpha>2\rho$.

520) Α, υ_α.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 349) γωνίαν $X\widehat{A}\Psi$ ἴσην πρὸς A καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς λαμβάνομεν μῆκος AZ ἴσον πρὸς υ_α. Εἰς τὸ Z ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῶν AX καὶ AΨ τὰ σημεῖα B καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ABΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

521) Α, ρ_α.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 349) γωνίαν $X\widehat{A}\Psi$ ἴσην πρὸς A καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ AX καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ρ_α. Ἡ (ε) τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς $X\widehat{A}\Psi$ εἰς τὸ O. Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα ρ_α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν διχοτόμον AO τῆς γωνίας $x\widehat{A}y$ εἰς τὸ Z. Ἡ εἰς τὸ Z ἐφαπτομένη ὁρίζει ἐπὶ τῶν OX καὶ OΨ τὰ B καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ABΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 350.

522) 2τ, υ_α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 350) ABΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Προεκτείνομεν τὴν BΓ ἑκατέρωθεν κατὰ μήκη $B\Delta=AB$, $\Gamma Z=A\Gamma$, ὅτε εἶναι $\Delta Z=AB+B\Gamma+\Gamma A=2\tau$. Ἔστω $AE=\upsilon_\alpha$ τὸ ὕψος τοῦ ABΓ.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $\Delta Z=2\tau$ καὶ εἰς τὸ μέσον της E ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν μῆκος $EA=\upsilon_\alpha$ καὶ οὕτω κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον

ΑΔΖ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΔ καὶ ΑΓ=ΓΖ, ὑψοῦμεν εἰς τὰ μέσα Σ καὶ Τ τῶν ΑΔ καὶ ΑΖ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτάς, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΔΖ τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι εἶναι $ΑΕ=υ_α$ καὶ $ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=ΔΖ=2τ$.

Διερεύνησις. Πρέπει αἱ ΣΒ καὶ ΤΓ νὰ τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΔΖ. Ἄρα πρέπει $\widehat{ΔΑΖ}>90^0$, ὅτε $\widehat{ΑΔΖ}+\widehat{ΑΖΔ}<90^0$. Συνεπῶς $2\cdot\widehat{ΔΑΕ}>2\cdot\widehat{ΑΔΕ}$ $\widehat{ΔΑΕ}>\widehat{ΑΔΕ}$. Ἄρα πρέπει $τ>υ_α$.

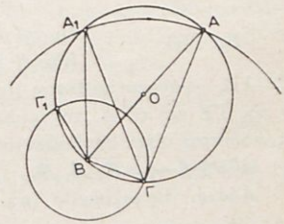
Νὰ κατασκευασθῇ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν:

523) $α,\ υ_α,\ μ_α$.

Λύσις. Εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθ. 427.

524) $α,\ β,\ R$.

Λύσις. Περιορισμός. $α\leqslant 2R$, $β<2R$, ἢ $α<2R$, $β\leqslant 2R$. Γράφομεν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος R καὶ μὲ (σχ. 351) κέντρον τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Β καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ Γ καὶ $Γ_1$, ὅτε εἶναι $ΒΓ=ΒΓ_1=α$. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα Β γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν Ο εἰς τὰ Α καὶ $Α_1$, ὅτε εἶναι $ΓΑ=ΓΑ_1=β$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1ΒΓ$ εἶναι τὰ ζητούμενα. Ἄλλαι δύο λύσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον $Γ_1$. Ἄρα ἔχομεν τέσσαρες λύσεις. Ἐὰν εἶναι $α=2R$, ἢ $β=2R$ αἱ λύσεις περιορίζονται εἰς δύο.

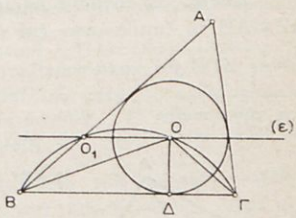


Σχ. 351.

525) $α,\ Α,\ ρ$

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 352), (ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου), ἔχομεν $\widehat{ΒΟΓ}=90^0+\frac{Α}{2}$, ἕπεται ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΓ=α δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $90^0+\frac{Α}{2}$. Ἀφ' ἑτέρου τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν ρ.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν ΒΓ=α κατασκευάζομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $90^0+\frac{Α}{2}$ καὶ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Ο καὶ $Ο_1$ εἰς ἃ τοῦτο τέμνεται ὑπὸ τῆς (ε). Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς αὐτὴν ΒΑ καὶ ΓΑ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον, διότι τοῦτο ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.



Σχ. 352.

Διερεύνησις. Ἐὰν β εἶναι τὸ βέλος τοῦ τόξου ΒΟΓ, τότε ἐὰν $β>ρ$ ἔχομεν δύο λύσεις ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ σημεῖα Ο καὶ $Ο_1$, ἐὰν εἶναι $β=ρ$ μίαν καὶ ἐὰν $β<ρ$ οὐδεμίαν.

Περιορισμός. Πρέπει $α>2ρ$.

526) Α, Β, ρ.

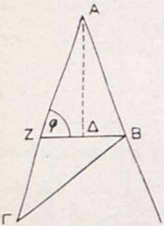
Λύσις. Εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθμ. 429.

527) α, Α, β+γ=Κ.

Λύσις. Εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ 1η τῆς § 286, σελὶς 150 τοῦ βιβλίου μου «Μεγάλη Γεωμετρία».

528) α, Α, β—γ=Κ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 353) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ΒΓ=α, $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$ καὶ ΑΓ—ΑΒ=Κ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῇ ΑΓ μῆκος ΑΖ ἴσον πρὸς ΑΒ, ὅτε ἔχομεν ΖΓ=ΑΓ—ΑΖ==ΑΓ—ΑΒ=Κ. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΖΒ λαμβάνομεν $2φ+Α=180^0$, ἢ $φ=90^0-\frac{Α}{2}$, ὅτε θὰ εἶναι



Σχ. 353.

$$\widehat{ΓΖΒ}=180^0-φ=180^0-90^0+\frac{Α}{2}, \text{ ἢ } \widehat{ΓΖΒ}=90^0+\frac{Α}{2} \quad (1).$$

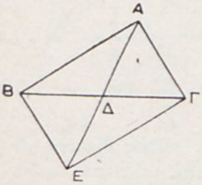
Ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=α, ΓΖ=Κ καὶ $\widehat{ΓΖΒ}=90^0+\frac{Α}{2}$ τὸ τρίγωνον ΓΖΒ κατασκευάζεται κατὰ τὰ γνωστά, (ἰδὲ § 279). Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι ΑΖ=ΑΒ, ὑψοῦμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΖΒ, ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΖ εἰς τὸ Α. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον διότι, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα. ***Περιορισμός.*** Πρέπει α>k.

529) β—γ=Κ, Α, Β.

Λύσις. Ἐργαζόμεθα (σχ. 353) ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ὅτε τὸ τρίγωνον ΖΓΒ κατασκευάζεται τώρα διότι γνωρίζομεν τὰ ΖΓ=Κ, $\widehat{ΓΖΒ}==90^0+\frac{Α}{2}$ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{Γ}=180^0-\widehat{Α}-\widehat{Β}$. Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΖΒ κάθετον ἥτις τέμνει τὴν ΓΖ προεκτεινομένην εἰς τὸ Α καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

530) β+γ=Κ, Α, Β.

Λύσις. Ἡ ἐργασία ὁμοία τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως μὲ τὴν διαφορὰ τὸ ΑΖ=ΑΒ τὸ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ πρὸς τὸ Α, ὅτε τὸ τρίγωνον ΖΓΒ θὰ κατασκευάζεται διότι θὰ γνωρίζωμεν τὰ ΓΖ=Κ, $\widehat{ΓΖΒ}=\frac{Α}{2}$ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{Γ}$. Τούτου κατασκευασθέντος ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΖΒ θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΓΖ τὸ Α καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 354.

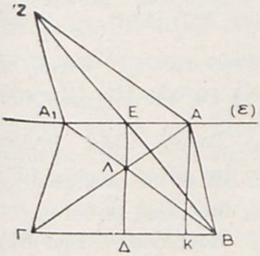
531) β, Α, $μ_α$.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 354) ΑΒΓ τὸ τρίγωνον. Δίδονται ΑΓ=β, $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$ καὶ διάμεσος ΑΔ=$μ_α$. Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ κατὰ ἴσον μῆκος μέχρι τοῦ Ε, ὅτε εἶναι ΑΕ=$2μ_α$. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ κατασκευάζεται διότι γνωρίζομεν δύο πλευράς του ΑΓ=β, ΑΕ=$2μ_α$ καὶ τὴν γωνίαν του $\widehat{ΑΓΕ}$ ἴσην πρὸς $180^0-\widehat{ΒΑΓ}=180^0-\widehat{Α}$, λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΓ. Τούτου κατασκευασθέντος εὑρίσκομεν τὸ μέσον Δ τῆς ΑΕ καὶ φέρομεν τὴν ΓΔ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν κατὰ ἴσον μῆκος καὶ εὑρίσκομεν τὸ Β. Οὕτως ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον, ὡς εὐκόλως φαίνεται, εἶναι τὸ ζητούμενον διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

532) α, υ_α, $B-\Gamma=\varphi$.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 355) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται $B\Gamma=\alpha$, $\widehat{AB\Gamma}-\widehat{A\Gamma B}=\varphi$ καὶ τὸ ὕψος $AK=\upsilon_\alpha$. Ἡ κορυφὴ Α θὰ κεῖται ἐπ' εὐθείας (ε) παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν υ_α. Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\Gamma\widehat{B}A_1$ ἴσην πρὸς Γ, ὅτε θὰ εἶναι $A_1\widehat{B}A=\varphi$. Τὸ τραπέζιον $AA_1\Gamma B$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς. Φέρομεν τὴν ΒΕ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν κατὰ ἴσον μῆκος καὶ εὑρίσκομεν τὸ Ζ. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $BAZA_1$ ἔχομεν

$$B\widehat{A}Z=180^\circ-A_1\widehat{B}A=180^\circ-\varphi.$$



Σχ. 355.

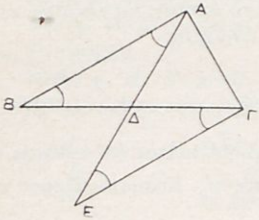
Ἄρα τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $Z\widehat{A}B$ τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΖ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς $180^\circ-\varphi$.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $\Gamma B=\alpha$ καὶ φέρομεν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον πρὸς αὐτὴν ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν υ_α. Εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΓΒ ὑψοῦμεν κάθετον, ἥτις τέμνει τὴν (ε) εἰς τὸ Ε. Φέρομεν τὴν ΒΕ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν κατὰ ἴσον μῆκος καὶ εὑρίσκομεν τὸ Ζ. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΖ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $180^\circ-\varphi$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν (ε) εἰς τὸ Α. Τὸ Α συνδεόμενον μὲ τὰ Γ καὶ Β δίδει τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν $EA_1=AE$, τὸ ABA_1B εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἔχομεν $A_1\widehat{B}A=180^\circ-Z\widehat{A}B$, ἢ (ἐπειδὴ εἶναι $Z\widehat{A}B=180^\circ-\varphi$) $A_1\widehat{B}A=180^\circ-180^\circ+\varphi$, ἢ $A_1\widehat{B}A=\varphi$. Τὸ σχῆμα $AA_1\Gamma B$ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον καὶ συνεπῶς ἔχομεν $A\widehat{\Gamma}B=A_1\widehat{B}\Gamma$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $A\widehat{B}\Gamma-A_1\widehat{B}\Gamma=A_1\widehat{B}A$, θὰ ἔχωμεν καὶ $A\widehat{B}\Gamma-$ $-A\widehat{\Gamma}B=\varphi$, ἤτοι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν $A\widehat{B}\Gamma$ καὶ $A\widehat{\Gamma}B$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι φ. Ἐπίσης τὸ τρίγωνον τοῦτο ἔχει τὴν $B\Gamma=\alpha$ καὶ ὕψος υ_α. Ἄρα τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

533) α, β, $A-B=\varphi$

Λύσις. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ (σχ. 356) κατασκευάζομεν γωνίαν $B\widehat{A}\Delta=\widehat{B}$ καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ε. Θὰ ἔχωμεν $\Delta\widehat{\Gamma}E=\widehat{B}$ καὶ $\Delta\widehat{E}\Gamma=B\widehat{A}\Delta=B$. Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΔΕ λαμβάνομεν $A\Delta=B\Delta$ καὶ $\Delta E=\Gamma\Delta$. Προστιθέμεναι αὗται δίδουν $AE=B\Gamma$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $B\Gamma=\alpha$, ἔχομεν καὶ $AE=\alpha$. Ἐπειδὴ εἶναι

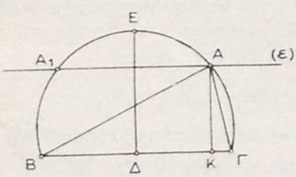
$\widehat{ΕΑΓ}=\widehat{ΒΑΓ}-\widehat{ΒΑΔ}=Α-Β=φ$ καὶ $ΑΓ=β$, τὸ τρίγωνον ΑΕΓ κατασκευάζεται. Κατασκευασθέντος τοῦ ΑΕΓ, σχηματίζομεν μὲ πλευρὰς τὰς ΕΓ καὶ ΕΑ καὶ κορυφὰς ἀντιστοίχως Γ καὶ Α τὰς γωνίας $\widehat{ΕΓΔ}$ καὶ $\widehat{ΕΑΒ}$ ἴσας πρὸς τὴν $\widehat{Ε}$. Αἱ ἕτεραι πλευραὶ ΓΔ καὶ ΑΒ τῶν γωνιῶν αὐτῶν ὁρίζουν τὸ Β, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.



Σχ. 356.

534) α, $υ_α$, Α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 357) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται $ΒΓ=α$, $\widehat{ΒΑΓ}=Α$ καὶ τὸ ὕψος $ΑΚ=υ_α$. Ἐπειδὴ εἶναι $ΑΚ=υ_α$, τὸ Α κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε) παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν $υ_α$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$, τὸ Α θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΓ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{Α}$.



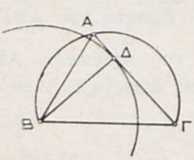
Σχ. 357.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $ΒΓ=α$ καὶ φέρομεν τὴν (ε) παράλληλον πρὸς αὐτὴν καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν $υ_α$, ἐπίσης μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{Α}$. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνεται ὑπὸ τῆς (ε) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$, ὅτε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1ΒΓ$ εἶναι τὰ ζητούμενα.

Διερεύνησις. Ἐὰν $ΕΔ=β$ εἶναι τὸ βέλος τοῦ τόξου, τότε θὰ ἔχωμεν α) διὰ $β>υ_α$ δύο λύσεις, β) διὰ $β=υ_α$ μίαν λύσιν καὶ γ) διὰ $β<υ_α$ οὐδεμίαν λύσιν.

535) α, Α, $υ_β$.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 358) ΑΒΓ τὸ τρίγωνον. Δίδονται $ΒΓ=α$, $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$ καὶ ὕψος $ΒΔ=υ_β$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$, τὸ Α κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΓ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{Α}$. Ἐπειδὴ εἶναι $ΒΔ=υ_β$, τὸ Α κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΓΑ, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Γ εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος $υ_β$.



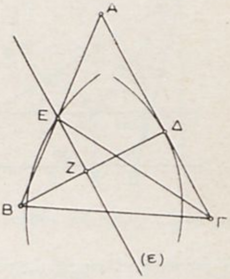
Σχ. 358.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $υ_β \leqslant α$.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν ΒΓ ἴσην πρὸς α καὶ μὲ χορδὴν αὐτὴν γράφομεν τόξον $\widehat{ΒΑΓ}$ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς $\widehat{Α}$. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα $υ_β$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ταύτης ΓΔ (τὴν κειμένην ἐντὸς τοῦ τόξου $\widehat{ΒΑΓ}$), ἥτις τέμνει τὸ τόξον $\widehat{ΒΑΓ}$ εἰς τὸ Α τὸ ὁποῖον συνδεόμενον μὲ τὰ Β καὶ Γ δίδει τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

536) α, υ_β, μ_γ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 359) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ΒΓ=α, ὕψος ΒΔ=υ_β καὶ διάμεσος ΓΕ=μ_γ. Ἡ ΓΑ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος υ_β. Ἐπειδὴ εἶναι ΓΕ=μ_γ καὶ ΒΕ=ΕΑ, τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος μ_γ καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), ἥτις ἰσαπέχει τοῦ Β καὶ τῆς ΓΑ.



Σχ. 359.

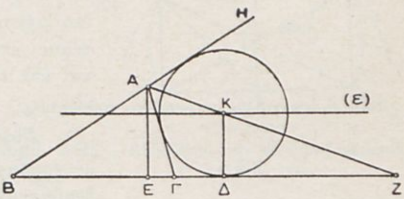
Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν ΒΓ ἴσην πρὸς α καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα υ_β γράφομεν περιφέρειαν τῆς ὁποίας φέρομεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα μ_γ γράφομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε), ἰσαπέχουσαν τοῦ Β καὶ τῆς ΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Ἡ ΒΕ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Α καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα σταιχεῖα.

Περιορισμός. Πρέπει $\alpha > \upsilon_\alpha$.

537) υ_α, A, Δ_α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 360) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ὕψος ΑΕ=υ_α, $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$ καὶ ἐξωτερ. διχοτόμος ΑΖ=Δ_α. Ἔχομεν

$$\widehat{ΗΑΖ}=\frac{1}{2}(180^0-\widehat{Α})=90^0-\frac{Α}{2}.$$



Σχ. 360.

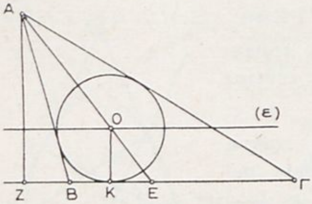
Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΖ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΑΖ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν τῆς ΑΖ τὰς γωνίας $\widehat{ΗΑΖ}$ καὶ $\widehat{ΓΑΖ}$ ἴσας πρὸς $90^0-\frac{Α}{2}$. Αἱ ἕτεραι πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τέμνουν τὴν ΖΕ εἰς τὰ Β καὶ Γ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα ὡς εὐκόλως φαίνεται.

538) υ_α, Δ_α, ϱ_β.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 360) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ὕψος ΑΕ=υ_α, ἐξωτερ. διχοτόμος ΑΖ=Δ_α καὶ ἀκτὶς ΚΔ=ϱ_β τοῦ παρεγγεγραμμέκύκλου εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΕΖ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ ΕΖ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ϱ_β. Ἡ (ε) τέμνει τὴν ΑΖ εἰς τὸ Κ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ϱ_β γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τοῦ Α (πρέπει ΑΚ>ϱ_β) φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΗ καὶ ΑΓ τῆς περιφερείας αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΕΖ εἰς τὰ Β καὶ Γ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

539) υ_α, δ_α, ϱ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 361) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ὕψος $AZ=\upsilon_\alpha$, διχοτόμος ἐσωτερ. $AE=\delta_\alpha$ καὶ ἀκτὶς $OK=\varrho$ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΖΕ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ ΖΕ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ϱ. Ἡ (ε) ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΕ τὸ Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ϱ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΖΕ τὰ Β καὶ Γ.

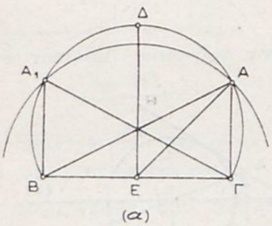


Σχ. 361.

Οὕτως ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον διότι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

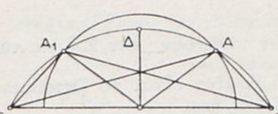
540) α, A, μ_α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 362α) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται $B\Gamma=\alpha$, $\widehat{BA\Gamma}=\widehat{A}$, διάμεσος $EA=\mu_\alpha$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{BA\Gamma}=\widehat{A}$, τὸ Α θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ τοῦ γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{A}$. Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ εἶναι $EA=\mu_\alpha$, τὸ Α θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Ε καὶ ἀκτῖνος μ_α.



Σχ. 362 α.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $B\Gamma=\alpha$ καὶ μὲ χορδὴν ταύτην κατασκευάζομεν τόξον $\widehat{B\Delta\Gamma}$ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς Α. Μὲ κέντρον Ε (μέσον τῆς ΒΓ) καὶ ἀκτῖνα μ_α γράφομεν περιφέρειαν ἥτις, τέμνει τὸ τόξον $\widehat{B\Delta\Gamma}$ εἰς τὰ Α καὶ A_1. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $A_1B\Gamma$ εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 362β.

Διερεύνησις. α) Ἔστω $A<90^\circ$ καὶ $E\Delta=\beta$ τὸ βέλος τοῦ τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ (σχ. 362α).

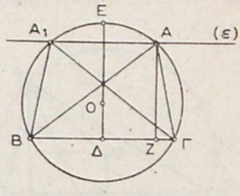
Ἐὰν τότε εἶναι $\frac{\alpha}{2}<\mu_\alpha<\beta$ θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις, ἐὰν $\mu_\alpha=\beta$ μίαν καὶ ἐὰν $\mu_\alpha>\beta$ οὐδεμίαν, β) ἔστω $A>90^\circ$ καὶ $E\Delta=\beta$ τὸ βέλος τοῦ τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$ (σχ. 362β).

Ἐὰν τότε εἶναι $\beta<\mu_\alpha<\frac{\alpha}{2}$ θὰ ἔχωμεν δύο λύσεις, ἐὰν $\mu_\alpha<\beta$ οὐδεμίαν.

γ) Ἔστω $A=90^\circ$. Τότε πρέπει $\mu_\alpha=\frac{\alpha}{2}$, ὅτε τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, διὰ $\mu_\alpha>\frac{\alpha}{2}$, ἢ $\mu_\alpha<\frac{\alpha}{2}$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

541) α, R, υ_α.

Λύσις. Κατασκευάζομεν (σχ. 363) περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος R καὶ λαμβάνομεν χορδὴν ταύτης ΒΓ=α. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν υ_α, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1$ΒΓ εἶναι τὰ ζητούμενα διότι ἔχουν τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

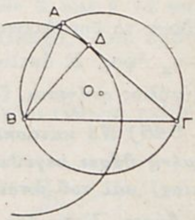


Σχ. 363.

Διερεύνησις. Ἔστω ΔΕ=β τὸ βέλος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΒΕΓ}$, α) ἐὰν εἶναι $\upsilon_\alpha < \beta$ ἔχομεν δύο λύσεις, β) ἐὰν $\upsilon_\alpha = \beta$ μίαν καὶ γ) ἐὰν $\upsilon_\alpha > \beta$ οὐδεμίαν.

542) α, R υ_β.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 364) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ΒΓ=α, ὕψος ΒΔ=υ_β καὶ ἀκτὶς R περιγεγαραμμμένου κύκλου. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΔ=υ_β, ἡ ΓΑ ἐφάπτεται κύκλου κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος υ_β.



Σχ. 364.

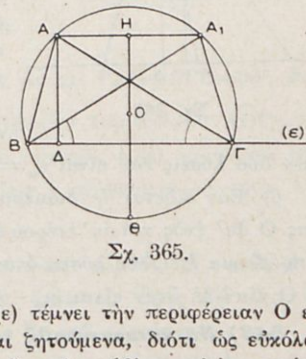
Σύνθεσις. Γράφομεν κύκλον Ο ἀκτῖνος R καὶ λαμβάνομεν χορδὴν αὐτοῦ ΒΓ=α. Μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα υ_β γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΓΔ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

543) υ_α, R, Β—Γ=φ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 365) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἡ διαφορὰ $\widehat{ΑΒΓ}-\widehat{ΑΓΒ}=\varphi$ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=υ_α. Φέρομεν τὴν $ΑΑ_1$ παράλληλον τῇ ΒΓ, ὅτε σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ΑΒΓΑ_1$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΑΒΑ_1}=\widehat{ΑΒΓ}-Α_1\widehat{ΒΓ}=\widehat{ΑΒΓ}-\widehat{ΑΓΒ}=\varphi.$$

Ἀφοῦ ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΑ_1}$ εἶναι γνωστὴ θὰ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ χορδὴ $ΑΑ_1$.

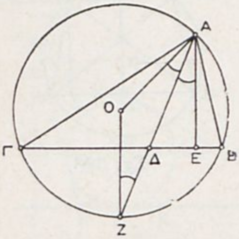


Σχ. 365.

Σύνθεσις. Γράφομεν κύκλον Ο ἀκτῖνος R καὶ λαμβάνομεν χορδὴν αὐτοῦ $ΑΑ_1$ τοιαύτην ὥστε νὰ ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση πρὸς φ. Φέρομεν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ $ΑΑ_1$ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν ἴσην πρὸς υ_α. Ἡ (ε) τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ Β καὶ Γ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1$ΒΓ εἶναι ζητούμενα, διότι ὡς εὐκόλως φαίνεται ἔχουν τὰ δοθέντα στοιχεῖα. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $\upsilon_\alpha <$ΗΘ, ἔνθα ΗΘ τὸ βέλος τοῦ τόξου $ΑΘΑ_1$

544) υ_α, δ_α, R.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 366) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Δίδονται ἡ ἀκτὶς ΟΑ=R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ ὕψος ΑΕ=υ_α καὶ ἡ διχοτόμος ΑΔ=δ_α. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ΑΔ τέμνει τὴν περιφέρειαν, τότε τὸ Ζ θὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΒ καὶ ἡ ΖΟ θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΓΒ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{\mathrm{Ε Α Δ}}=\widehat{\mathrm{Α Ζ Ο}}=\widehat{\mathrm{Ο Α Ζ}}$.

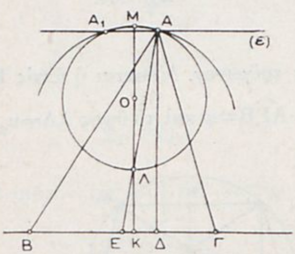


Σχ. 366.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΕΔ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΑΔ καὶ κορυφὴν τὸ Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{\mathrm{Δ Α Ο}}$ ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{\mathrm{Ε Α Δ}}$. Ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς τῆς κατασκευασθείσης γωνίας λαμβάνομεν ΟΑ=R καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν κύκλον ὅστις τέμνει τὴν ΔΕ εἰς τὰ Γ καὶ Β, τὰ ὁποῖα συνδεόμενα μὲ τὸ Α δίδουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Εἶναι τοῦτο τὸ ζητούμενον διότι ἔχει ΑΕ=υ_α ὕψος, R ἀκτῖνα περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἔχουσα μῆκος δ_α.

545) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι δεδομένη θέσει μεγέθει, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας (ἢ εὐθείας) καὶ τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ ὕψος υ_α, ἢ ἡ διάμεσος μ_α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 367) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 367.

α) Ἐὰν δίδεται τὸ ὕψος ΑΔ=υ_α. Ἡ κορυφὴ Α θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Ο καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ εὐθείας (ε) παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν υ_α.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ ἀπέχουσαν ταύτης ἀπόστασιν υ_α. Ἡ (ε) τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1$ΒΓ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

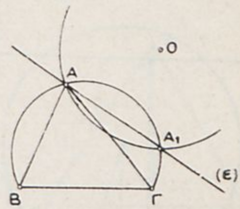
Διερεύνησις. Ἔστω ΜΛΚ ἡ διὰ τοῦ Ο κάθετος τῇ ΒΓ. Ἐὰν εἶναι ΚΛ$<\upsilon_\alpha<$ΚΜ ἔχομεν δύο λύσεις ἐὰν εἶναι $\upsilon_\alpha=$ ΛΚ, ἢ $\upsilon_\alpha=$ ΚΜ μίαν.

β) Ἐὰν δίδεται ἡ διάμεσος ΑΕ=μ_α. Τότε τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Ε καὶ ἀκτῖνος μ_α. Τὸ πρόβλημα ἔχει, δύο λύσεις ὅταν εἶναι $|\mu_\alpha-\rho|<$ΟΕ$<\mu_\alpha+\rho$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Ο, μίαν δὲ ὅταν εἶναι $|\mu_\alpha-\rho|=$ΟΕ ἢ $\mu_\alpha+\rho=$ΟΕ.

546) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι δεδομένη θέσει μεγέθει, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι δεδομένη μεγέθει καὶ ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ δεδομένης εὐθείας ἢ περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 368) τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Ἐπειδὴ εἶναι ἡ $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$ σταθερὰ μεγέθει, ἕπεται ὅτι τὸ Α κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{Α}$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $\widehat{Α}$. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὴν εὐθεῖαν (ε) (ἢ τὴν περιφέρειαν Ο) ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα τὰ Α καὶ $Α_1$. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1ΒΓ$ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, καθ' ὅσον τὸ τόξον ΒΑΓ τέμνει εἰς δύο ἢ ἓν ἢ εἰς οὐδὲν σημεῖον τὴν εὐθεῖαν (ε) ἢ τὴν περιφέρειαν Ο.



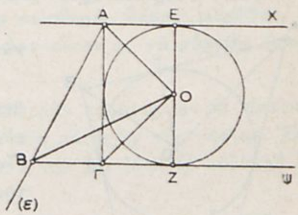
Σχ. 368.

547) Εὐθεῖα (ε) κινεῖται ὥστε τὸ ἐπ' αὐτῆς ἀποτεμνόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα ὑπὸ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν x καὶ y νὰ φαίνεται ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο, ἰσαπέχοντος τῶν παραλλήλων, ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς εὐθείας (ε).

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 369) x καὶ y αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ (ε) ἡ κινουμένη εὐθεῖα τέμνουσα τὰς x καὶ y εἰς τὰ Α καὶ Β οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{ΑΟΒ}=90^o$, ἔνθα Ο τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ ἰσαπέχον τῶν παραλλήλων. Φέρομεν τὴν ΕΟΖ κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΕ περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΑΓ. Ἔχομεν

$$\widehat{ΓΑΟ}=\frac{1}{2}\widehat{ΓΑΕ} \text{ καὶ } \widehat{ΑΓΟ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΓΖ}$$

καὶ συνεπῶς $\widehat{ΓΑΟ}+\widehat{ΑΓΟ}=\frac{1}{2}(\widehat{ΓΑΕ}+\widehat{ΑΓΖ})$.



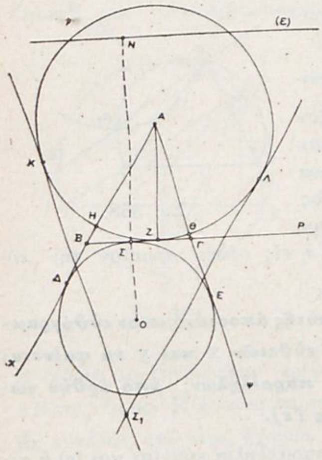
Σχ. 369.

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΓΑΕ}+\widehat{ΑΓΖ}=180^o$, γίνεται $\widehat{ΓΑΟ}+\widehat{ΑΓΟ}=90^o$, ὅτε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΟΓ}=90^o$. Ἐπειδὴ εἶναι καὶ $\widehat{ΑΟΒ}=90^o$ λαμβάνομεν $\widehat{ΑΟΓ}=\widehat{ΑΟΒ}$.

Ἄρα ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΑΓ συμπίπτουν καὶ συνεπῶς ἡ (ε) ἐφάπτεται τῆς περιφερείας. Ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς (ε) εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΕ.

548) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι δεδομένη θέσει μεγέθει ἡ γωνία $\widehat{Α}$ καὶ ζητεῖται ἡ περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ὅταν τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι δοθὲν κατὰ μῆκος ἢ εἶναι δοθεῖσα ἡ περίμετρος 2τ τοῦ τριγώνου.

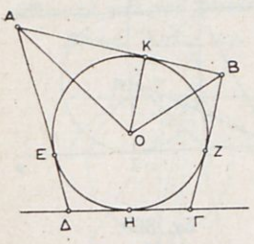
Λύσις. α) Ἐπειδὴ (σχ. 370) εἶναι ὕψος $ΑΖ=υ_α$, ἡ ΒΓ θὰ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος $υ_α$. Ἐὰν τῆς περιφερείας αὐτῆς φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΛΣ καὶ ΚΣ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τότε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ζ τῆς ΒΓ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τόξου ΚΗΘΛ, διότι ἐὰν εὑρίσκεται εἰς ἄλλο τόξο δὲν θὰ τέμνῃ ἡ ΒΓ τὴν ΑΒ, ἢ τὴν ΑΓ. Ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς ΒΓ εἶναι τὸ τόξον ΚΗΘΛ.



Σχ. 370.

β) ***Ὅταν δίδεται ἡ περίμετρος 2τ.*** Ἔστω Ο ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα ἐπαφῆς του μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ὡς γνωστὸν εἶναι ΑΔ=ΑΕ=τ καὶ συνεπῶς τὰ Δ καὶ Ε εἶναι σταθερὰ σημεῖα, ἄρα καὶ ὁ κύκλος Ο εἶναι σταθερός. Ἄρα ἡ ΒΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου Ο, ὅστις ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς Α εἰς τὰ σταθερὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Η τῆς ΒΓ πρέπει νὰ κεῖται εἰς τὸ τόξον ΔΗΕ. Ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς ΒΓ εἶναι τὸ τόξον ΔΗΕ τοῦ κύκλου Ο.

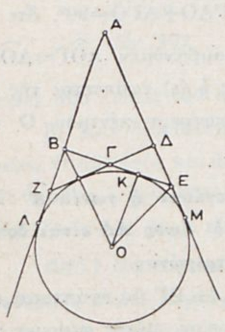
549) *Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἡ πλευρὰ ΓΔ κινεῖται ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ, ἢ ΑΒ−ΓΔ=ΑΔ−ΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΔ.*



Σχ. 371.]

Λύσις. α) ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ+ΒΓ. Λόγῳ τῆς δοθείσης σχέσεως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 371) εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον. Ὁ κύκλος οὗτος εἶναι τελείως ὡρισμένος ὡς ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν σταθερῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΔ. Ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΔ εἶναι τὸ τόξον $\overparen{ΕΗΖ}$ τοῦ κύκλου Ο, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι ἡ τομὴ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ ἀκτὶς ἡ ἀπόστασίς του ΟΚ ἀπὸ τῇ ΑΒ.

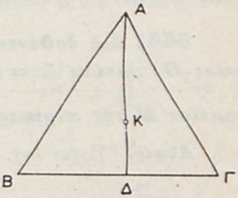
β) ΑΒ−ΓΔ=ΑΔ−ΒΓ. Λόγῳ τῆς δοθείσης σχέσεως (σχ. 372), ὡς γνωστόν, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παρεγγράψιμον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶναι ἡ τομὴ τῶν διχοτόμων τῶν σταθερῶν γωνιῶν $\widehat{ΒΕΜ}$ καὶ $\widehat{ΓΒΛ}$ καὶ ἀκτὶς ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ΟΚ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Ἄρα ἡ περιβάλλουσα τῆς ΓΔ εἶναι τὸ τόξον ΛΚ τοῦ κύκλου αὐτοῦ.



Σχ. 372.

550) *Τριγώνου ΑΒΓ δίδεται θέσει μεγέθει ἡ διάμεσος ΑΔ καὶ ζητεῖται ἡ περιβάλλουσα τῶν δύο ἄλλων διαμέσων, ὅταν αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κινοῦνται.*

Λύσις. Διαιροῦμεν (σχ. 373) τὴν διάμεσον ΑΔ διὰ τοῦ Κ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ ἀπὸ τοῦ Α καὶ εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ ἀπὸ τοῦ Δ. Ἡ περιβάλλουσα τῶν ἄλλων διαμέσων εἶναι τὸ σημεῖον Κ, διότι τὸ Κ θὰ εἶναι τὸ κέντρον βάρους ὅλων τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων κοινὴν διάμεσον τὴν ΑΔ.



Σχ. 373.

551) Παραλληλογράμμου ΑΒΓΑ δίδεται θέσει μεγέθει ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ζητεῖται ἡ περιβάλλουσα τῆς ἑτέρας διαγωνίου ΒΔ ὅταν αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ κινοῦνται.

Λύσις. Ἡ περιβάλλουσα τῆς διαγωνίου ΒΔ εἶναι τὸ μέσον τῆς σταθερᾶς διαγωνίου ΑΓ, διότι αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

552) Τραπεζίου ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ δίδεται θέσει μεγέθει καὶ ζητεῖται ἡ περιβάλλουσα τῆς διαμέσου αὐτοῦ ὅταν αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ κινοῦνται.

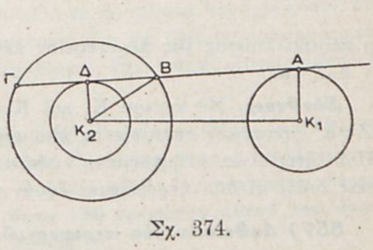
Λύσις. Ἐπειδὴ ἡ διάμεσος τραπεζίου διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων, ἕπεται ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῆς διαμέσου τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ μέσον τῆς διαγωνίου ἥτις ἐδόθη θέσει μεγέθει.

553) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι σταθερὰ θέσει μεγέθει, ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι ϱ, νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Λύσις. Εἰς τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ (σχ. 372) ἐγγράφομεν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος ϱ. Ἔστω Λ καὶ Μ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς της μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας. Ἐὰν Λ′ καὶ Μ′ εἶναι τὰ ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τῶν Λ καὶ Μ, τότε τὸ τόξον Λ′Μ′ εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς ΒΓ.

554) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν K_1 καὶ K_2 νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς πρώτης καὶ νὰ τέμνῃ ἐπὶ τῆς δευτέρας χορδὴν δοθέντος μήκους α.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα (σχ. 374) ἐφαπτομένη τῆς K_1 καὶ ὁρίζουσα ἐπὶ τῆς K_2 χορδὴν ΒΓ μήκους α. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΒΓ ἔχει δοθὲν μέγεθος ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασίς της $K_2Δ$ ἀπὸ τοῦ κέντρου K_2 ἔχει σταθερὸν μέγεθος (διότι τὸ τρίγωνον $K_2ΔΒ$ εἶναι κατασκευάσιμον). Ἄρα ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ἔχει περιβάλλουσαν (ἤτοι ἐφάπτεται) τὴν περιφέρειαν κέντρου K_2 καὶ ἀκτῖνος $K_2Δ$.

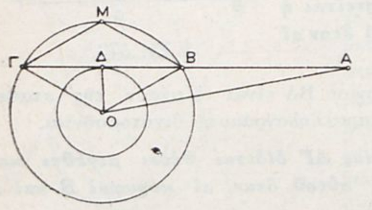


Σχ. 374.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ K_2 καὶ ἀκτῖνα $K_2Δ$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς K_1, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει τέσσαρες λύσεις διότι ὑπάρχουν τέσσαρες κοιναὶ ἐφαπτόμεναι (δύο ἐξωτερικαὶ καὶ δύο ἐσωτερικαὶ) τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν. Ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha \leqslant 2R_2$, ἔνθα R_2 ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας K_2.

555) Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δοθείσης περιφερείας Ο, τοιαύτη ὥστε ἡ ὑπ' αὐτῆς ὁριζομένη χορδὴ νὰ φαίνεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{\varphi}$.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 375) ΑΒΓ ἡ ζητουμένη τέμνουσα, τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{\Gamma M B}=\varphi$. Ἐὰν ΟΔ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς ΒΓ ἀπὸ τοῦ Ο, θὰ ἔχωμεν (ἰδὲ § 327) ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος καὶ συνεπῶς ἡ ΒΓ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΔ.

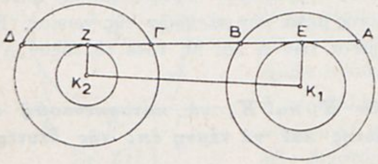


Σχ. 375.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν (§ 327) τὴν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΔ καὶ ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΑΒΓ τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τοῦ Μ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

556) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ὁρίζουσα ἐπὶ τῶν περιφερειῶν χορδὰς μὲ μήκη ἀντιστοίχως α καὶ β.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 386) ΑΒΓΔ ἡ ζητουμένη τέμνουσα τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι $AB=\alpha$, $\Gamma\Delta=\beta$.



Σχ. 376.

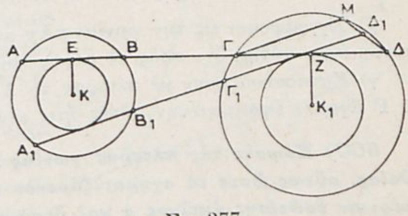
Περιορισμός. $\alpha \leqslant 2R_1$, $\beta \leqslant 2R_2$ ἐὰν R_1 καὶ R_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν σταθερὰ μεγέθη, ἔπεται ὅτι αἱ ἀποστάσεις των K_1E καὶ K_2Z ἀπὸ τῶν κέντρων K_1 καὶ K_2 ἀντιστοίχως θὰ ἔχουν ἐπίσης σταθερὰ μεγέθη. Ἔστω ὅτι εἶναι $K_1E=\lambda$ καὶ $K_2Z=\mu$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΑΒΓΔ θὰ ἔχῃ περιβαλλούσας τὰς περιφερείας κέντρων K_1 καὶ K_2 καὶ ἀκτίνων $K_1E=\lambda$ καὶ $K_2Z=\mu$.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρα K_1 καὶ K_2 καὶ ἀκτίνας ἀντιστοίχως $K_1E=\lambda$ καὶ $K_2Z=\mu$ γράφομεν περιφερείας καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΑΒΓΔ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει τέσσαρες λύσεις διότι αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουν τέσσαρας κοινὰς ἐφαπτομένας.

557) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν Κ καὶ K_1 νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ὁρίζουσα ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ χορδὴν μήκους α καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας K_1 χορδὴν ἡ ὁποία νὰ φαίνεται ἀπὸ δοθέντος σημείου τῆς περιφερείας αὐτῆς ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{\varphi}$.

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς περιφερείας καὶ ΑΒΓΔ (σχ. 377) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=α καὶ $\widehat{\Gamma M \Delta}=\varphi$.

Περιορισμός. $\alpha<2R$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς Κ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἔχει σταθερὸν μῆκος ἡ ἀπόστασίς της ΚΕ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ θὰ ἔχῃ σταθερὸν μῆκος καὶ συνεπῶς ἡ ΑΒΓΔ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΕ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma M \Delta}=\varphi$ ἡ K_1Z (ἰδὲ § 327) θὰ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος καὶ συνεπῶς ἡ ΑΒΓΔ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν τὴν περιφέρειαν κέντρου K_1 καὶ ἀκτῖνος K_1Z.



Σχ. 377.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρα Κ καὶ K_1 καὶ ἀκτίνας ἀντιστοίχως ΚΕ καὶ K_1Z γράφομεν περιφερείας τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ΑΒΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Ἐπειδὴ πρέπει ἡ ἐφαπτομένη τῆς δευτέρας τῶν περιφερειῶν αὐτῶν νὰ εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Μ διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις τὰς ΑΒΓΔ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

558) Κόψατε τὰς πλευρὰς γωνίας $x\widehat{A}y$ δι' εὐθείας, οὕτως ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ εἶναι 2τ, τὸ δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψος τοῦ τριγώνου νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 370) ΒΓ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τοιαύτη ὥστε τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι υ_α καὶ ἡ περίμετρος νὰ εἶναι 2τ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΖ=α ἡ ΒΓ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν τὴν περιφέρειαν κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος α. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=2τ, ἡ ΒΓ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν τὴν περιφέρειαν. ἥτις ἐφάπτεται τῶν Αx καὶ Βy εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΔ=ΑΕ=τ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὰς δύο περιφερείας τὴν κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος α καὶ τὴν ἐφαπτομένην τῶν Αx καὶ Αy εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Τῶν δύο περιφερειῶν φέρομεν τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διερεύνησις. Ἐὰν $|\alpha-O\Delta|<AO<\alpha+O\Delta$ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι αἱ δύο περιφέρειαι θὰ τέμνωνται καὶ συνεπῶς δὲν θὰ ὑπάρχῃ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη. Ἐὰν εἶναι $AO>\alpha+O\Delta$ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις καὶ διὰ $AO=\alpha+O\Delta$ μίαν.

559) Κόψατε τὰς πλευρὰς γωνίας $x\widehat{A}y$, δοθείσης θέσει μεγέθει, δι' εὐθείας διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου Ρ, οὕτως ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ εἶναι 2τ, ἢ ἡ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένη περιφέρεια νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἢ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τοῦ ἀγομένου ἐκ τῆς κορυφῆς Α νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος υ_α.

Λύσις. α) Ἔστω (σχ. 370) ΡΓΒ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ=2τ, ἡ ΓΒ θὰ ἔχῃ περιβάλλουσαν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἐφάπτεται τῶν Αx καὶ Αy εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΔ=ΑΕ=τ

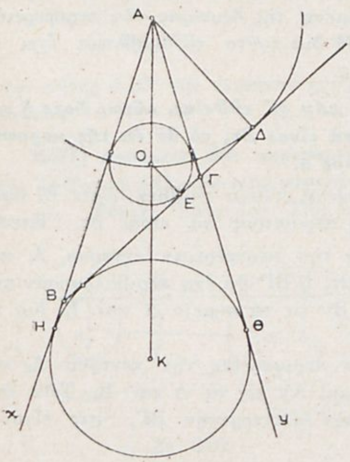
Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν Ax καὶ Ay τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε οὕτως ὥστε ΑΔ=τ=ΑΕ καὶ κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἐφάπτεται τῶν Ax καὶ Ay εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

β) Ἐγγράφομεν εἰς τὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ κύκλον ἀκτῖνος ρ καὶ ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς, ὄχι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

γ) Κατασκευάζομεν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα $υ_α$ περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

560) Κόψατε τὰς πλευρὰς γωνίας $x\widehat{A}y$, δοθείσης θέσει μεγέθει, δι' εὐθείας, οὕτως ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον νὰ ἔχῃ ἐγγεγραμμένην περιφέρειαν δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ ὕψος ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς Α δοθέντος μήκους $υ_α$. Νὰ ἐξετασθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ὕψους εἶναι γνωστὴ ἡ περίμετρος 2τ, ἢ ἡ ἀκτὶς $ρ_α$ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις. α) Ἔστω (σχ. 378) ΒΓΔ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα σχηματίζουσα τὸ τρίγωνον ὕψους ΑΔ=$υ_α$ καὶ ἀκτῖνος ἐγγεγραμμένου κύκλου ΟΕ=ρ. Ἐγγράφομεν εἰς τὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ κύκλον Ο ἀκτῖνος ρ, ταύτης ἐφαπτομένη εἶναι ΒΕΓ. Ἐπίσης μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα $υ_α$ γράφομεν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη. Τῶν δύο περιφερειῶν φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΓ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.



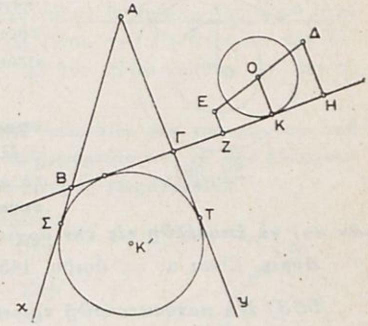
Σχ. 378.

β) Ἐὰν δίδονται τὰ ρ καὶ 2τ. Τότε ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο ἀκτῖνος ρ ἥτις εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ καὶ τῆς περιφερείας Κ ἥτις ἐφάπτεται τῶν Ax καὶ Ay εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΗ=ΑΘ=τ.

γ) Ἐὰν δίδωνται τὰ ρ καὶ $ρ_α$. Τότε ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Ο καὶ Κ, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς τὴν γωνίαν $x\widehat{A}y$ καὶ ἔχουν ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ρ καὶ $ρ_α$.

561) Ἡ ἄσκησις 559 νὰ λυθῇ ἐὰν ἀντὶ τοῦ σημείου Ρ δίδεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ἔχει δοθεῖσαν διεύθυνσιν, ἢ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἔχει ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων σταθερόν, ἢ διαφορὰν ἀποστάσεων σταθεράν, ἢ ὅτι ἀποκόπτει ἐπὶ δοθείσης περιφερείας χορδὴν μήκους α, ἢ χορδὴν ἡ ὁποία φαίνεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{φ}$.

Λύσις. α) Ἀφοῦ (σχ. 370) κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἐφάπτεται τῶν Αx καὶ Αy εἰς τὰ Δ καὶ Ε, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΔ=ΑΕ=τ, θὰ φέρωμεν μετὰ ταῦτα ἐφαπτομένην αὐτῆς πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α, παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε), ἤτοι θὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Ο κάθετον τῇ (ε) καὶ εἰς τὸ σημεῖον Σ ὅπου αὕτη θὰ τάμῃ τὴν περιφέρειαν, θὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

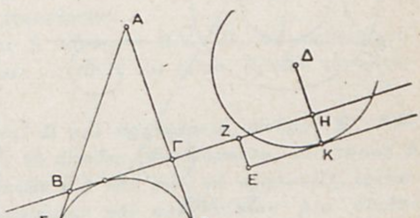


Σχ. 379.

β) Ἀντὶ νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ρ ἐφαπτομένη εἰς τὰς περιφερείας τῆς ἀσκήσεως 559, φέρομεν ἐφαπτομένας αὐτῶν παραλλήλους πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

γ) Δίδονται ἡ περίμετρος 2r καὶ καὶ ὅτι ΕΖ+ΔΗ=2λ (σταθερόν), ἔνθα Ε καὶ Δ δοθέντα σταθερὰ σημεῖα. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Ι) Ἡ ΒΓ νὰ ἔχῃ τὰ Ε καὶ Δ πρὸς τὸ αὐτὸ (σχ. 379) μέρος. Τότε (ἰδὲ § 324) ἡ ΒΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας κέντρου Ο (Ο μέσον τῆς ΕΔ) καὶ ἀκτῖνος $ΟΚ=\frac{1}{2}(ΕΖ+ΔΗ)=λ$. Ἐπειδὴ ἀφ' ἑτέρου ἡ ΒΓ ἐφάπτεται καὶ τῆς περιφερείας Κ′ (ἥτις ἐφάπτεται τῶν Αx καὶ Αy εἰς τὰ Σ καὶ Τ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΣ=ΑΤ=τ), ἕπεται ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Κ′. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.



Σχ. 380.

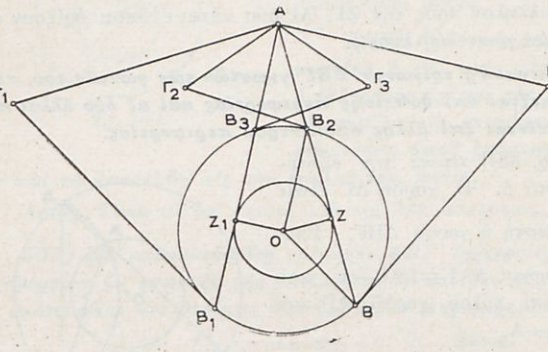
ΙΙ) Ἡ ΒΓ νὰ ἔχῃ τὰ Ε καὶ Δ ἑκατέρωθεν (σχ. 380). Τότε (ἰδὲ § 339) ἡ ΒΓ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΕΚ ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Ε εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος ΔΚ=2λ. Ἀφ' ἑτέρου ἡ ΒΓ ἐφάπτεται καὶ τῆς περιφερείας Κ′. Ἄρα εἰς τὴν περιφέρειαν Κ′ φέρομεν ἐφαπτομένην πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΕΚ, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ Ε εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος ΔΚ=2λ.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν εἶναι ΔΗ—ΕΖ=2λ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν μας τὰς § 324 καὶ § 339.

γ) Ἡ ζητουμένη (σχ. 381) εὐθεῖα, ἐὰν ἀποκόπτει ἀπὸ τῆς δοθείσης περιφερείας Ο χορδὴν μήκους α, θὰ ἐφάπτεται (σχ. 381) ὁμοκέντρου περιφερείας ἀκτῖνος ΟΚ, ἔνθα $ΚΕ=\frac{α}{2}$ καὶ ΟΕ=R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Κατὰ τὰ λοιπὰ ἡ κατασκευὴ εἶναι ὁμοία.

ται ἡ θέσις τῆς κορυφῆς Α, ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας, ἡ δὲ πλευρὰ ΒΓ ἐφάπτεται τῆς ἰδίας περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 386) ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ Ο ἡ δοθεῖσα περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΒΓ}=60^0$ θὰ εἶναι $\widehat{ΒΟΒ_2}=120^0$ καὶ συνεπῶς ἡ χορδὴ $ΒΒ_2$ εἶναι γνωστή, ἄρα καὶ ἡ ἀπόστασίς της ΟΖ ἀπὸ τοῦ Ο εἶναι γνωστή. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ ΑΒ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΖ.

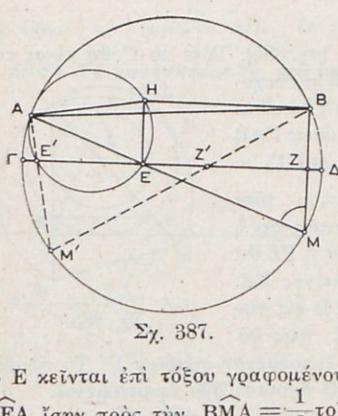


Σχ. 386.

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΖ καὶ φέρομεν τὰς ἐκ τοῦ Α ἐφαπτομένας αὐτῆς ΑΒ καὶ $ΑΒ_1$. Εἰς τὰ Β, $Β_1$, $Β_2$ καὶ $Β_3$ καθ' ἃ αὗται τέμνουν τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν φέρομεν τάς ἐφαπτομένας ΒΓ, $Β_1Γ_1$, $Β_2Γ_2$, $Β_3Γ_3$ καὶ μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ, $ΑΒ_1$, $ΑΒ_2$, $ΑΒ_3$ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{ΒΑΓ}$, $Β_1\widehat{ΑΓ_1}$, $Β_2\widehat{ΑΓ_2}$, $Β_3\widehat{ΑΓ_3}$ ἴσας πρὸς 60^0. Οὕτω σχηματίζονται τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, $ΑΒ_1Γ_1$, $ΑΒ_2Γ_2$, $ΑΒ_3Γ_3$ τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος.

568) Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου ΓΔ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς περιφερείας σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἀποκόπτουν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΔ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους α.

Λύσις. Ἔστω ΕΖ τὸ ἀποκοπτόμενον τμῆμα. Ἐξ ὑποθέσεως (σχ. 387) εἶναι (ΕΖ)=α. Φέρομεν τὴν ΒΗ παράλληλον τῇ ΖΕ καὶ ἴσην πρὸς α (ἤτοι μεταφέρομεν τὴν ΖΕ εἰς τὴν θέσιν ΒΗ), ὅτε τὸ Η εἶναι σταθερὸν σημεῖον καὶ τὸ σχῆμα ΒΖΕΗ εἶναι παραλληλόγραμμον. Λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν ΒΖ καὶ ΗΕ ἔχομεν $\widehat{ΗΕΑ}=\widehat{ΒΜΑ}$ καὶ συνεπῶς, ἐπειδὴ ἡ $\widehat{ΒΜΑ}$ εἶναι σταθερὰ διότι βαίνει εἰς σταθερὸν τόξον ΑΒ καὶ ἡ $\widehat{ΗΕΑ}$ θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ Ε κεῖνται ἐπὶ τόξου γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν ΑΗ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{ΗΕΑ}$ ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{ΒΜΑ}=\frac{1}{2}$τοξΑΒ.



Σχ. 387.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΒΗ παράλληλον τῇ διαμέτρῳ ΔΓ καὶ ἴσην πρὸς α. Μὲ χορδὴν τὴν ΑΗ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}$τοξ ΑΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΓΔ ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ε΄. Ἡ ΑΕ ὁρίζει τὸ Μ ἡ δὲ ΑΕ΄ τὸ Μ΄. Τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

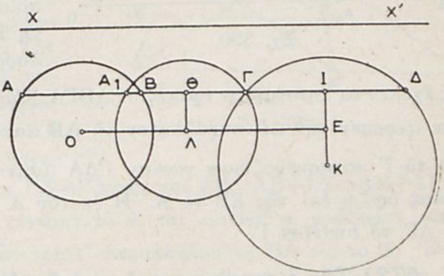
569) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν κειμένων ἐκτὸς ἀλλήλων, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΒΓΔ τέμνουσα τὰς δύο περιφερείας, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν xx΄ καὶ τοιαύτη ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκοπτομένων ὑπ᾽ αὐτῆς ἐπὶ τῶν περιφερειῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν λ.

Λύσις. Μεταφέρομεν (σχ. 388) τὴν Ο κατὰ τὴν διεύθυνσιν xx΄ καὶ εἰς μῆκος ΒΓ. Ἔστω Λ ἡ νέα της θέσις ὅτε θὰ εἶναι $A_1\Gamma = AB$. Φέρομεν τὴν ΚΕΙ κάθετον τῇ ΟΛ καὶ τὴν ΛΘ κάθετον τῇ ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ εἶναι

$$\Theta\Gamma = \frac{A_1\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \text{ καὶ } \Gamma I = \frac{\Gamma\Delta}{2}$$

λαμβάνομεν

$$\Lambda E = \Theta I = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

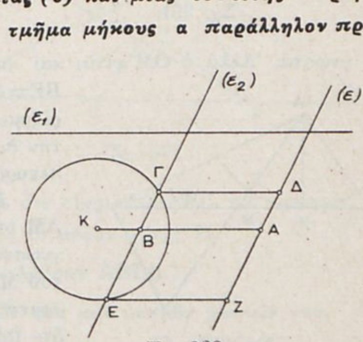


Σχ. 388.

Σύνθεσις. Ἐκ τῶν Ο φέρομεν παράλληλον τῇ xx΄, ἥτις τέμνει εἰς τὸ Ε τὴν ἐκ τοῦ Κ κάθετον τῇ xx΄. Ἐπὶ τῆς ΕΟ λαμβάνομεν $E\Lambda = \frac{\lambda}{2}$ καὶ ὁρίζομεν οὕτω τὸ Λ. Μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς Ο γράφομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς Κ τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ xx΄ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

570) Μεταξὺ μιᾶς δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ μιᾶς δοθείσης περιφερείας Κ, νὰ τοποθετηθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους α παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Λύσις. Ἔστω (ε_1) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Μεταφέρομεν (σχ. 389) τὴν (ε) κατὰ τὴν διεύθυνσιν (ε_1) καὶ εἰς μῆκος α, ἤτοι φέρομεν τὴν ΚΑ παράλληλον τῇ (ε_1) καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς μῆκος (ΒΑ)=α καὶ ἐκ τοῦ Β ἄγομεν τὴν (ε_2) παράλληλον τῇ (ε). Ἡ (ε_2) εἶναι ἡ μεταφορὰ τῆς (ε). Ἡ (ε_2) τέμνει τὴν Κ ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Ε ἐκ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς ΓΔ καὶ ΕΖ παραλλήλους τῇ (ε_1) ἕως ὅτου συναντήσουν τὴν (ε) εἰς τὰ Δ καὶ Ζ. Τὰ ΓΔ καὶ ΕΖ εἶναι αἱ ζητούμεναι τοποθετήσεις.

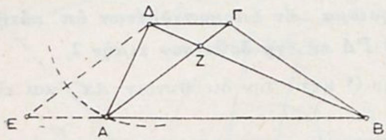


Σχ. 389.

Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ γνωστῶν :

571) Τῶν διαγωνίων του δ_1 καὶ δ_2 τῆς γωνίας των ω καὶ μιᾶς πλευρᾶς του ἢ μιᾶς γωνίας του.

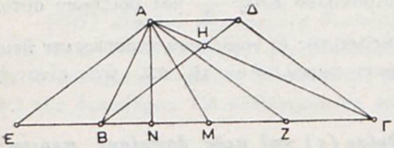
Λύσις. Δίδονται $ΑΓ=\delta_1$, $ΒΔ=\delta_2$, $\widehat{ΑΖΒ}=ω$ καὶ $ΔΑ=α$ ἢ $\widehat{ΑΔΓ}=φ$. Φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΓΑ. Τὸ τρίγωνον ΕΔΒ κατασκευάζεται διότι εἶναι γνωστὰ ἡ $ΔΕ=ΑΓ=\delta_1$, ἡ $ΒΔ=\delta_2$ καὶ ἡ $\widehat{ΕΔΒ}=\widehat{ΑΖΒ}=ω$. Τούτου κατασκευασθέντος, ἐὰν δίδεται ἡ $ΔΑ=α$, μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα $ΔΑ=α$ κατασκευάζομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΕΒ τὸ Α, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὴν ΑΓ παράλληλον τῇ ΕΔ. Ἡ ΑΓ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Δ παράλληλον τῇ ΑΒ εἰς τὸ Γ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἐὰν τώρα δίδεται ἡ γωνία $\widehat{ΑΔΓ}=φ$, τότε φέρομεν τὴν ΔΓ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ μὲ πλευρὰν ταύτην καὶ κορυφὴν τὸ Γ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ΓΔΑ}$ ἴσην πρὸς φ, ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς ὁποίας ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΕΒ τὸ Α. Ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΕΔ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΔΓ τὸ σημεῖον Γ.



Σχ. 390.

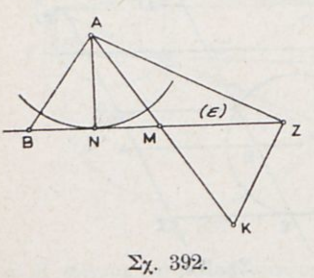
572) Τῶν διαγωνίων του δ_1 καὶ δ_2 τῆς γωνίας των ω καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς λ τῶν σκελῶν του.

Λύσις. Ἔχομεν (σχ. 391) $ΑΓ=\delta_1$, $ΒΔ=\delta_2$, $\widehat{ΒΗΓ}=ω$ καὶ $ΔΓ-ΑΒ=λ$. Φέρομεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ ΒΔ καὶ τὴν ΑΖ παράλληλον τῇ ΔΓ καὶ τὸ ὕψος ΑΝ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΑΕ==ΒΔ=\delta_2$, $ΑΓ=\delta_2$ καὶ $\widehat{ΕΑΓ}=\widehat{ΒΗΓ}==ω$, τὸ τρίγωνον ΕΑΓ εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς τὸ ὕψος του ΑΝ καὶ ἡ διάμεσός του ΑΜ εἶναι γνωστά, Ἀλλὰ ἡ ΟΜ εἶναι καὶ διάμεσος καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΖ (διότι $ΒΕ=ΑΔ=ΖΓ$). Ἄρα τοῦ τριγώνου ΑΒΖ γνωρίζομεν τὴν διάμεσον ΑΜ, τὸ ὕψος ΑΝ καὶ τὴν διαφορὰν $ΑΖ-ΑΒ=ΔΓ-ΑΒ=λ$ τῶν δύο πλευρῶν ΑΖ καὶ ΑΒ.



Σχ. 391.

Κατασκευὴ τοῦ ΑΒΖ. Λαμβάνομεν τὴν ΑΜ (σχ. 392) καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα τὸ γνωστὸν ὕψος ΑΝ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Μ ἐφαπτομένην ταύτης τὴν (ε). Προεκτείνομεν τὴν ΑΜ κατὰ ἴσον μῆκος μέχρι τοῦ Κ, ὅτε θὰ εἶναι $ΖΚ=ΑΒ$ καὶ συνεπῶς $ΑΖ-ΖΚ==ΑΖ-ΑΒ=λ$. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Ζ, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν Α καὶ Κ



Σχ. 392.

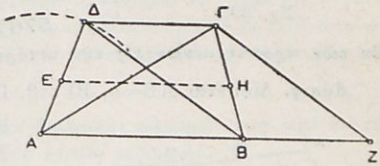
νὰ εἶναι λ. Τοῦτο ὅμως ἐπιτυγχάνεται ὡς βλέπει τις εἰς τὴν ἄσκησιν 755. Κατασκευασθέντος τοῦ ΑΒΖ κατασκευάζεται τὸ τραπέζιον. Ὁμοίως ἐὰν δίδεται ΑΓ+ΑΒ=λ.

Σημείωσις. Ἡ κατασκευὴ αὕτη πρέπει νὰ γίνῃ μετὰ τὸ τρίτον βιβλίον τῆς γεωμετρίας.

573) Τῶν διαγωνίων του δ_1 καὶ δ_2 μιᾶς πλευρᾶς του καὶ τῆς διαμέσου του μ.

Λύσις. Δίδονται (σχ. 393) αἱ διαγώνιοι ΑΓ$=\delta_1$, ΒΔ$=\delta_2$, ἡ διάμεσος ΕΗ=μ καὶ μία πλευρά του ἴση πρὸς α.

α) Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ μία βάσις ΔΓ. Ἐπειδὴ εἶναι 2μ=ΑΒ+ΔΓ, θὰ ἔχωμεν ΑΒ=2μ—ΔΓ=2μ—α, ἤτοι γνωρίζομεν καὶ τὴν ἄλλην βάσιν καὶ οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἄσκ. 443.



Σχ. 393.

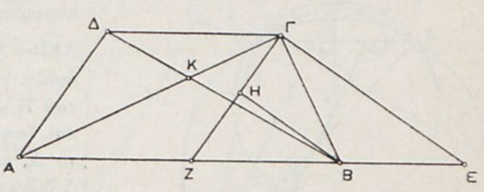
β) Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ σκέλος ΑΔ=α. Φέρομεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ ΔΒ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΖ κατασκευάζεται, διότι εἶναι ΑΓ$=\delta_1$, ΓΖ=ΒΔ$=\delta_2$ καὶ ΑΖ=ΑΒ+ΒΖ=ΑΒ+ΔΓ=2μ. Τούτου κατασκευασθέντος μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ Γ παραλλήλου τῇ ΒΑ εἰς τὸ Δ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΒ παράλληλον τῇ ΓΖ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ Β. Λύσεις ἐν γένει δύο.

Περιορισμός. |ΑΓ—ΓΖ|<ΑΖ<ΑΓ+ΓΖ, ἤτοι $|\delta_1-\delta_2|<2\mu<\delta_1+\delta_2$.

574) Τῶν διαγωνίων του δ_1 καὶ δ_2 τῆς γωνίας των ω καὶ τῆς διαφορᾶς λ δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του.

Λύσις. Δίδονται ΑΓ$=\delta_1$, ΒΔ$=\delta_2$ (σχ. 394), $\widehat{\text{ΑΚΒ}}=\omega$, ΑΒ—ΒΓ=λ.

Φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΔΒ τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ κατασκευάζεται διότι εἶναι ΑΓ$=\delta_1$, ΓΕ=ΒΔ$=\delta_2$, $\widehat{\text{ΑΓΕ}}=\widehat{\text{ΑΚΒ}}=\omega$. Ἐπὶ τῆς ΑΕ λαμβάνομεν ΑΖ=λ, ὅτε εἶναι ΒΖ=ΒΓ καὶ συνεπῶς τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΓΖ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Η.

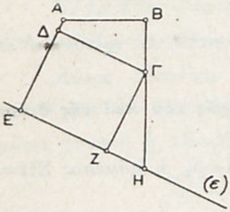


Σχ. 394.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

575) Ἐκ δύο ἀπέναντι πλευρῶν του καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν του.

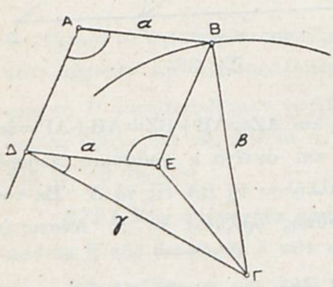
Λύσις. Δίδονται ΑΒ=α, ΓΔ=γ καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{\text{Α}}$, $\widehat{\text{Β}}$, $\widehat{\text{Γ}}$, $\widehat{\text{Δ}}$. Μὲ πλευρὰν (σχ. 395) ΑΒ=α καὶ κορυφὰς Α καὶ Β κατασκευάζομεν ἀντιστοίχως γωνίας $\widehat{BAE}$ καὶ $\widehat{ABH}$ ἴσας πρὸς τὰς $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$. Μὲ κορυφὴν τὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΑΕ καὶ πλευρὰν τὴν ΕΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς Δ, ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας ἔστω ὅτι εἶναι ἡ (ε). Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνομεν μῆκος $EZ=\gamma$ καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον τῇ ΕΑ ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΒΗ τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ (ε) ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΕ τὸ Δ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ὡς εὐκόλως φαίνεται εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 395.

576) Ἐκ τριῶν πλευρῶν του καὶ τῶν γωνιῶν τῶν προσκειμένων εἰς τὴν τετάρτην πλευράν.

Λύσις. Δίδονται $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$ καὶ αἱ γωνίαι $\widehat{BA\Delta}$ καὶ $\widehat{A\Delta\Gamma}$. Φέρομεν (σχ. 396) τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ἴσην πρὸς α, ὅτε τὸ σχῆμα ΑΒΕΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A\Delta E}=180^0-A$ θὰ ἔχωμεν



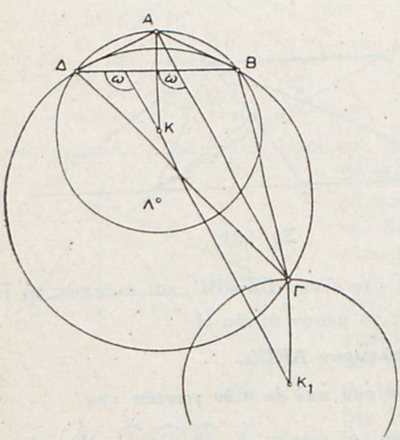
Σχ. 396.

$$\widehat{E\Delta\Gamma}=\widehat{A\Delta\Gamma}-\widehat{A\Delta E}=\widehat{\Delta}-180^0+\widehat{A}=$$
$$=\widehat{\Delta}+\widehat{A}-180^0.$$

Τὸ τρίγωνον ΕΔΓ εἶναι κατασκευάσιμον διότι εἶναι $\Delta E=\alpha$, $\Delta\Gamma=\gamma$ καὶ $\widehat{E\Delta\Gamma}=\widehat{\Delta}+\widehat{A}-180^0$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Delta EB}=\widehat{A}$ καὶ $\Gamma B=\beta$, ἵνα εὕρωμεν τὸ Β, κατασκευασθέντος τοῦ τριγώνου ΕΔΓ, γράφομεν περιφέρειαν κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος β καὶ μὲ πλευρὰν ΕΔ καὶ κορυφὴν Ε κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{\Delta EB}=A$ ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς ὁποίας ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ Β. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΑ παράλληλον καὶ ἴσην τῇ ΕΔ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ Α, τὸ ὁποῖον συνδεόμενον μὲ τὸ Δ δίδει τὸ ζητούμενον τετράπλευρον.

577) Ἐκ τῶν διαγωνίων του, τῆς γωνίας αὐτῶν ω καὶ ἐκ δύο ἀπέναντι γωνιῶν του.

Λύσις. Δίδονται $A\Gamma=\delta_1$, $B\Delta=\delta_2$, αἱ γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ ἡ γωνία $\widehat{\omega}$ τῶν διαγωνίων. Μὲ χορδὴν $\Delta B=\delta_2$ (σχ. 397) κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν τόξα $\widehat{\Delta AB}$ καὶ $\widehat{\Delta\Gamma B}$ δε-



Σχ. 397.

χόμενα ἀντιστοίχως γωνίας $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν τόξων αὐτῶν. Πρέπει τώρα μεταξὺ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ τοποθετήσωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους $A\Gamma=\delta_1$ κατὰ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΔΒ γωνίαν $\widehat{\omega}$ (§ 353). Ἐργαζόμεθα οὕτω. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν εὐθεῖαν KK_1 σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΔΒ γωνίαν $\widehat{\omega}$ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς μῆκος $KK_1=\delta_1$. Οὕτω τὸ K_1 εἶναι ὡρισμένον σημεῖον. Ἐπειδὴ αἱ KK_1 καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ σχῆμα $AKK_1\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $K_1\Gamma=KA$. Ἄρα τὸ $K_1\Gamma$ εἶναι σταθερὸν μέγεθος ὡς ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας κέντρου Κ. Ἄρα τὸ Γ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας κέντρου Λ καὶ τῆς περιφερείας κέντρου K_1 καὶ ἀκτῖνος $K_1\Gamma=KA$. Εὑρεθέντος τοῦ Γ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ παράλληλον τῇ K_1K, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τοῦ τόξου $\Delta\widehat{A}B$ τὸ Α.

578) Ἐκ τῶν διαγωνίων του, δύο ἀπέναντι πλευρῶν του καὶ ἐκ τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν.

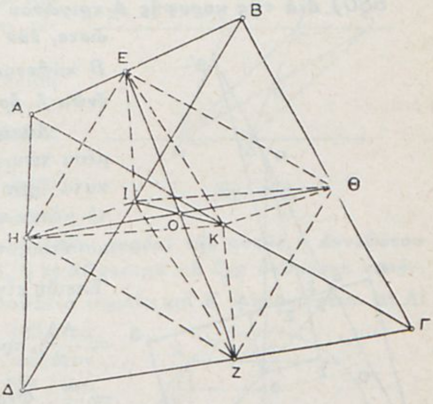
Λύσις. Δίδονται $A\Gamma=\delta_1$, $B\Delta=\delta_2$, $AB=\alpha$, $\Gamma\Delta=\gamma$ καὶ $EZ=\lambda$, ἔνθα Ε καὶ Ζ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστωσαν Θ καὶ Η τὰ μέσα τῶν (σχ. 398) ΒΓ καὶ ΑΔ καὶ Ι καὶ Κ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων.

Ἔχομεν $E\Theta=\frac{1}{2}A\Gamma=\frac{1}{2}\delta_1=HZ$, $\Theta Z=\frac{1}{2}B\Delta=\frac{1}{2}\delta_2=EH$,

$HI=K\Theta=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\alpha$,

$I\Theta=HK=\frac{1}{2}\Delta\Gamma=\frac{1}{2}\gamma$,

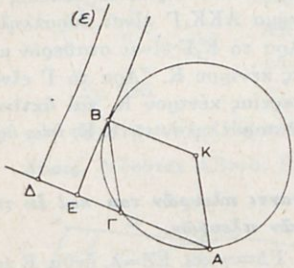
$EK=IZ=\frac{1}{2}B\Gamma$, $EI=KZ=\frac{1}{2}\Delta A$.



Σχ. 398.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν $EZ=\lambda$ καὶ μὲ κέντρα τὰ Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνας $E\Theta=\frac{1}{2}\delta_1$, $Z\Theta=$ $=\frac{1}{2}\delta_2$ γράφομεν περιφερείας αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι $\left[\text{ὅταν } \frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)<\lambda<\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\right]$ ὁρίζουν τὸ Θ. Φέρομεν τὴν ΘΟ, ἔνθα Ο μέσον τῆς ΕΖ, καὶ προεκτείννομεν ταύτην κατὰ ἴσον μῆκος, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ Η (διότι αἱ ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ ὡς γνωστὸν διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο). Μὲ κέντρα Η καὶ Θ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως $HI=\frac{1}{2}\alpha$, $\Theta I=\frac{1}{2}\gamma$ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι $\left[\text{ὅταν } \frac{1}{2}(\alpha-\gamma)<H\Theta<\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right]$, ὁρίζουν τὸ Ι. Φέρομεν τὴν ΙΟ, ἣν προεκτείνομεν κατὰ ἴσον μῆκος καὶ εὑρίσκομεν τὸ Κ. Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΗΙ, ΕΚ, ΚΗ καὶ ΙΕ φέρομεν ἐκ τῶν Ε, Θ, Ζ, Η ἀντιστοίχως παροηλλήλους πρὸς τὰς ΗΙ, ΕΚ, ΚΗ καὶ ΙΕ. Αὗται ἀνὰ δύο τεμνόμεναι διαδοχικῶς ὁρίζουν ὡς εὐκόλως φαίνεται τὸ ζητούμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

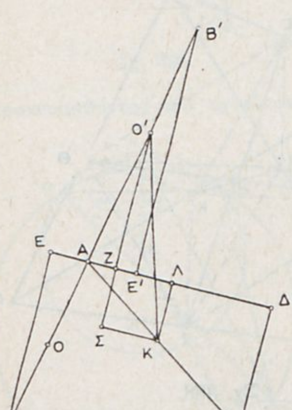
579) Περιφέρεια κύκλου ἀκτῖνος R στρέφεται περὶ ἓν σημεῖον της Α χωρὶς νὰ ἐξέρχεται τοῦ ἐπιπέδου της καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς τῶν παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε).



Σχ. 399.

Λύσις. Ἔστω Κ μία ἐκ τῶν περιφερειῶν καὶ ἡ ἐφαπτομένη ταύτης ΒΕ ἡ παράλληλος τῇ (ε). Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον τῇ (ε) καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ΑΓ=R ὅτε τὸ σχῆμα ΑΚΒΓ, ἐπειδὴ αἱ ΚΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι πρὸς R καὶ παράλληλοι, εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ μάλιστα ρόμβος. Ἄρα εἶναι ΓΒ=ΚΑ=R (σχ. 399) καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Β εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος R. Ἐὰν θεωρήσωμεν καὶ τὰς πρὸς τὸ ἕτερον μέρος ἐφαπτομένας, τότε ὁ γεωμ. τόπος εἶναι καὶ ἡ περιφέρεια ἀκτῖνος R καὶ κέντρου τοῦ σημείου Γ_1 συμμετρικοῦ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ Α.

580) Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη ὥστε, ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι αἱ ἐκ τῶν Γ καὶ Β κάθετοι ἐπ᾽ αὐτὴν νὰ εἶναι ΑΔ—ΑΕ=λ, ἔνθα λ δοθέν.

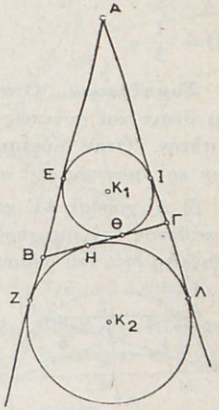


Σχ. 400.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 400) Ο καὶ Κ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ κατὰ ἴσον μῆκος μέχρι τοῦ Β′ καὶ ἔστω Ο′ τὸ μέσον τῆς ΑΒ′. Φέρομεν τὰς Β′Ε′ καὶ Ο′Ζ καθέτους τῇ ΕΔ καὶ τὴν ΚΛ κάθετον τῇ ΕΔ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΑΖ=\frac{ΑΕ}{2}=\frac{ΑΕ'}{2}$ καὶ $ΑΛ=\frac{ΑΔ}{2}$, προκύπτει $ΖΛ=ΑΛ-ΑΖ=\frac{ΑΔ-ΑΕ}{2}=\frac{λ}{2}$. Φέρομεν τὴν ΚΣ κάθετον τῇ Ο′Ζ, ὅτε θὰ εἶναι $ΚΣ=ΖΛ=\frac{λ}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον Ο′ΣΚ εἶναι κατασκευάσιμον. Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν ἐκ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΣΚ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

581) Γνωστῆς τῆς γωνίας ω τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων δύο περιφερειῶν καὶ τῶν μηκῶν τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν νὰ κατασκευασθοῦν αἱ περιφέρειαι.

Λύσις. Ἔστωσαν K_1 καὶ K_2 αἱ περιφέρειαι. Δίδονται $EZ=\alpha$ καὶ $H\Theta=\beta$ καὶ ἡ γωνία $Z\widehat{A}\Lambda=\omega$. Εἶναι γνωστὸν (ἰδὲ ἄσκ. 222 παρατ. στ΄.) ὅτι εἶναι $AB-A\Gamma=H\Theta=\beta$ καὶ $B\Gamma=EZ=\alpha$. Ἄρα τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (σχ. 401) κατασκευάζεται διότι εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα $B\Gamma=\alpha$, $AB-A\Gamma=\beta$ καὶ ἡ γωνία $\widehat{A}$ (ἰδὲ ἄσκ. 528). Τούτου κατασκευασθέντος ἐγγράφομεν εἰς αὐτὸ περιφέρειαν, ἥτις εἶναι ἡ K_1 καὶ παρεγγράφομεν εἰς αὐτὸ περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς $B\Gamma$, ἥτις εἶναι ἡ K_2.

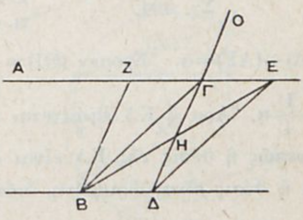


Σχ. 401.

582) Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x καὶ y καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα A καὶ B. Διὰ δεδομένου σημείου O νὰ ἀχθῇ τέμνουσα συναντῶσα τὴν x εἰς τὸ Γ καὶ τὴν y εἰς τὸ Δ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $A\Gamma+B\Delta=\alpha$, ἢ $A\Gamma-B\Delta=\alpha$, ἔνθα α δοθέν.

Λύσις. α) Λαμβάνομεν (σχ. 402) $\Gamma E=B\Delta$ ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $AE=A\Gamma+\Gamma E=A\Gamma+B\Delta=\alpha$, τὸ E εἶνα σταθερὸν σημεῖον. Ἐπειδὴ τὸ $B\Gamma E\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμον, ἡ $O\Gamma\Delta$ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου H τῆς BE. Ἄρα ἡ ζητουμένη τέμνουσα εἶναι ἡ OH.

β) Λαμβάνομεν $\Gamma Z=B\Delta$ ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $AZ=A\Gamma-\Gamma Z=A\Gamma-B\Delta=\alpha$, τὸ Z εἶναι σταθερὸν σημεῖον. Ἐπειδὴ τὸ $B\Delta\Gamma Z$ εἶναι παραλληλόγραμμον ἡ ζητουμένη τέμνουσα $O\Gamma\Delta$ εἶναι ἡ παράλληλος τῇ BZ.



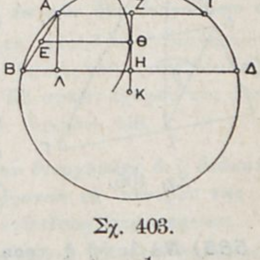
Σχ. 402.

583) Διὰ δύο δεδομένων σημείων μιᾶς περιφερείας νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι χορδαὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἀντιθέτου διευθύνσεως, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά, ἢ τὸ ἄθροισμα νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμήν.

Λύσις. Ἔστωσαν A καὶ B τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ K ἡ περιφέρεια. α) Αἱ ζητούμεναι χορδαὶ $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ (σχ. 403) νὰ εἶναι ὁμόρροποι. Φέρομεν τὴν KHZ κάθετον ἐπὶ τὰς χορδὰς καὶ τὴν διάμεσον $E\Theta$ τοῦ τραπεζίου $ABHZ$. Ἔχομεν

$$2(E\Theta)=(BH)+(AZ)=\frac{1}{2}(B\Delta+A\Gamma)=\frac{1}{2}\alpha.$$

Ἄρα εἶναι $(E\Theta)=\frac{1}{4}\alpha$ καὶ συνεπῶς ἡ KZ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου E (E μέσον τῆς AB) καὶ ἀκτῖνος $(E\Theta)=\frac{1}{4}\alpha$. Φέρομεν τὴν $A\Lambda$ κάθετον τῇ $B\Delta$, ὅτε ἔχομεν $(B\Lambda)=(BH)-(\Lambda H)=(BH)-(AZ)=\frac{1}{2}(B\Delta-A\Gamma)=$



Σχ. 403.

$=\frac{1}{2}\alpha$ καὶ συνεπῶς ἡ ΑΛ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος

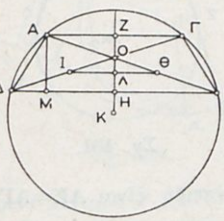
$(ΒΛ)=\frac{1}{2}\alpha$.

Συμπέρασμα. Ὅταν δίδεται τὸ (ΒΔ)+(ΑΓ) τότε εἶναι ὡρισμένη ἡ ΚΖ κατὰ θέσιν καὶ συνεπῶς καὶ αἱ ζητούμεναι χορδαὶ ΒΔ καὶ ΑΓ ὡς κάθετοι ἐπ' αὐτήν. Ὅταν δίδεται τὸ (ΒΔ)—(ΑΓ)=α τότε εἶναι ὡρισμένη ἡ ΑΛ κατὰ θέσιν καὶ συνεπῶς καὶ αἱ ζητούμεναι χορδαὶ ὡς κάθετοι ἐπ' αὐτήν.

β) Αἱ χορδαὶ ΑΓ καὶ ΒΔ (σχ. 404) νὰ εἶναι ἀντίρροποι. Φέρομεν τὴν ΚΖ κάθετον ἐπὶ τὰς χορδὰς ὅτε αὕτη, λόγῳ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΔΒΓ, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΙΘ, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ. Φέρομεν καὶ τὴν ΑΜ κάθετον τῇ ΒΔ. Ἔστω πρῶτον (ΒΔ)+(ΑΓ)=α. Ἔχομεν

$$(ΒΜ)=(ΒΗ)+(ΗΜ)=\frac{1}{2}(ΒΔ+ΑΓ)=\frac{1}{2}\alpha.$$

Ἄρα ἡ ΑΜ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος $(ΒΜ)=\frac{1}{2}\alpha$ καὶ συνεπῶς ἡ θέσις τῆς ΑΜ εἶναι ὡρισμένη, ἑπομένως καὶ τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΔ ἡ θέσις εἶναι ὡρισμένη διότι αὗται εἶναι κάθετοι τῇ ΑΜ. Ἔστω δεύτερον

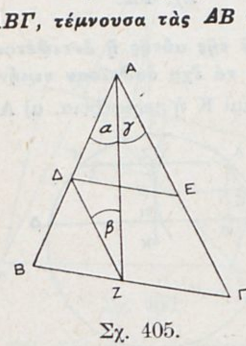


Σχ. 404.

(ΒΔ)—(ΑΓ)=α. Ἔχομεν $(ΘΙ)=\frac{1}{2}(ΒΔ-ΑΓ)=\frac{1}{2}\alpha$, ὅτε $2(ΘΛ)=\frac{1}{2}\alpha$, ἢ $(ΘΛ)=\frac{1}{4}\alpha$. Ἄρα ἡ ΚΛ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Θ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{4}\alpha$ καὶ συνεπῶς ἡ θέσις τῆς ΚΛ εἶναι ὡρισμένη, ἑπομένως καὶ τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΔ ἡ θέσις εἶναι ὡρισμένη, διότι αὗται εἶνα κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΛ.

584) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ=ΓΕ.

Λύσις. Φέρομεν (σχ. 405) τὴν ΔΖ παράλληλον τῇ ΕΓ, ὅτε θὰ εἶναι ΔΖ=ΕΓ=ΑΔ. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΔΖ ἔχομεν $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$. Ἐπειδὴ εἶναι καὶ β=γ, θὰ ἔχωμεν α=γ καὶ συνεπῶς ἡ ΑΖ θὰ εἶναι διχοτόμος.

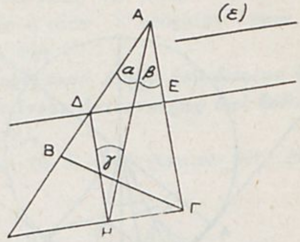


Σχ. 405.

Σύνθεσις. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν $\widehat{Α}$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Ζ, ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὴν ΖΔ παράλληλον τῇ ΓΑ καὶ οὕτως ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ Δ. Ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος ΔΕ τῇ ΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη.

585) Νὰ λυθῇ ἡ προηγουμένη ἄσκησις, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε).

Λύσις. Φέρομεν (σχ. 406) τὴν ΓΖ παράλληλον τῇ (ε) τέμνουσαν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Φέρομεν (ὡς προηγουμένως) τὴν διχοτόμον τῆς Α ἥτις τέμνει τὴν ΖΓ εἰς τὸ Η. Ἡ ἐκ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΑΓ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ Δ. Ἡ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος ΔΕ τῇ (ε) εἶναι ἡ ζητουμένη·

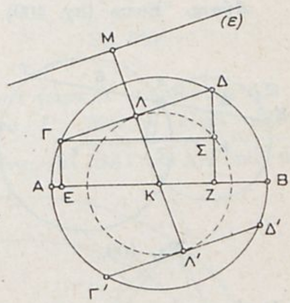


Σχ. 406.

Πράγματι. Ἔχομεν $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$ λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΗ αaὶ $\widehat{\beta}=\widehat{\gamma}$ λόγῳ τῶν παραλλήλων ΗΔ καὶ ΑΓ. Ἄρα εἶναι $\widehat{\alpha}=\widehat{\gamma}$ καὶ συνεπῶς ΑΔ=ΔΗ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι καὶ ΔΗ=ΕΓ (λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΗΔΕΓ), θὰ ἔχωμεν ΑΔ=ΕΓ.

536) Νὰ ἀχθῇ χορδὴ κύκλου παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε) καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ προβολή της ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμήν.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 407) ΓΔ ἡ ζητουμένη χορδὴ καὶ (ΕΖ)=α ἡ προβολή της ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διάμετρον ΑΚΒ. Φέρομεν τὴν ΓΣ κάθετον τῇ ΔΖ, ὅτε τὸ τρίγωνον ΓΣΔ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ τὴν ΓΣ=α καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{\Delta\Gamma\Sigma}$ ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν τῆς (ε) καὶ τῆς ΑΒ. Ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι ὡρισμένη κατὰ μέγεθος, ὡς ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, συνεπῶς καὶ ἡ ἀπόστοσίς της ΚΛ ἀπὸ τοῦ Κ εἶναι ὡρισμένη κατὰ μέγεθος.



Σχ. 407.

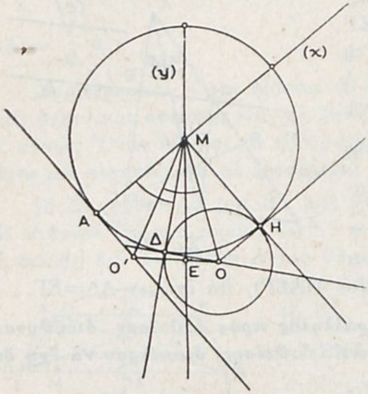
Σύνθεσις. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν κατὰ μέγεθος ὡρισμένην ΚΛ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Κ ἄγομεν κάθετον τῇ (ε), ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν ταύτην εἰς τὰ σημεῖα Λ καὶ Λ′. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὰ Λ καὶ Λ′ εἶναι αἱ ζητούμεναι χορδαί. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

587) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῆς διαμέσου του, ἐκ τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ ἐκ τῶν δύο διαγωνίων του.

Λύσις. Δίδεται ἡ διάμεσος μ, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν διαγωνίων λ καὶ αἱ διαγώνιοι δ_1 καὶ δ_2. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου ($\alpha>\beta$) θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν $\alpha+\beta=2\mu$ καὶ $\alpha-\beta=2\lambda$. Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν τὰς βάσεις $\alpha=\mu+\lambda$ καὶ $\beta=\mu-\lambda$ καὶ οὕτω ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἄσκησιν 443.

588) Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ δεδομένου σημείου Δ, κειμένου ἐπὶ δοθείσης εὐθείας x, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 408) Μ ἡ ζητουμένη περιφέρεια καὶ Ο ἡ δοθεῖσα τέμνουσα ὀρθογωνίως τὴν Μ εἰς τὰ Δ καὶ Η. Ἐὰν γίνῃ στροφὴ περὶ τὸ Μ κατὰ γωνίαν ΔΜΑ, ἐπειδὴ αἱ ΜΔ καὶ ΔΟ εἶναι κάθετοι, τὸ μὲν Δ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Α, τὸ δὲ Ο θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Ο′, ἔνθα ΑΟ′ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς Μ εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ εἶναι ΜΟ′=ΜΟ, τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας (y) καθέτου τῇ Ο′Ο εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ε.

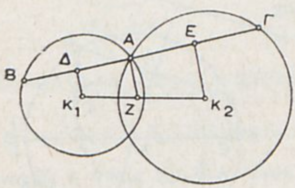


Σχ. 408.

Σύνθεσις. Εἰς τὸ Α φέρομεν κάθετον τῇ (x) καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς μῆκος ΑΟ′ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας Ο. Εἰς τὸ μέσον Ε τῆς Ο′Ο ὑψοῦμεν κάθετον ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (x) τὸ κέντρον Μ τῆς ζητουμένης περιφερείας.

589) Διὰ τοῦ ἑνὸς σημείου τομῆς Α δύο τεμνομένων περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτὰς διχοτομουμένη ὑπὸ τοῦ σημείου Α.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 409) ΒΑΓ ἡ τέμνουσα καὶ $K_1Δ$, K_2E αἱ κάθετοι ἐπὶ ταύτην. Ἐπειδὴ εἶναι ΒΑ=ΑΓ, θὰ εἶναι καὶ ΔΑ=ΑΕ. Φέρομεν ἐκ τοῦ Α μέσου τῆς ΔΕ παράλληλον πρὸς τὰς $K_1Δ$ καὶ K_2E. Αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ζ τῆς K_1K_2.

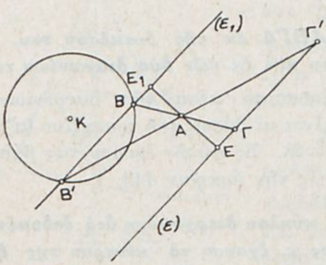


Σχ. 409.

Σύνθεσις. Συνδέομεν τὸ Α μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς διακέντρου K_1K_2 καὶ ἐπὶ τὴν ΖΑ ὑψοῦμεν εἰς τὸ Α κάθετον τὴν ΒΑΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἕτερος τρόπος. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ΑΒ τὸ Β εἶναι στροφὴ τοῦ Γ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 180°. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ στρέψωμεν τὴν περιφέρειαν K_2 περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 180°, ὅτε ἡ νέα θέσις αὐτῆς θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς K_1 τὸ Β, ὅτε ἡ ΒΑ εἶναι ὡρισμένη.

590) Διὰ δεδομένου σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ καὶ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ.



Σχ. 410.

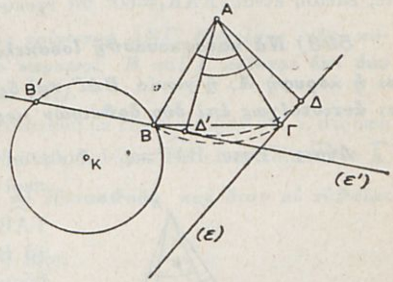
Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 410) εἶναι ΑΒ=ΑΓ, τὸ Β εἶναι στροφὴ τοῦ Γ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 180°. Στρέφομεν τὴν (ε) κατὰ γωνίαν 180°, ὅτε ἡ νέα θέσις της θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς Κ τὸ Β.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΕ κάθετον τῇ (ε) καὶ λαμβάνομεν εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΕΑ τὸ AE_1=ΑΕ καὶ εἰς τὸ E_1 ὑψοῦμεν κάθετον ($ε_1$) ἐπὶ τὴν

AE_1. Ἡ (ε_1) ὁρίζει ἐπὶ τῆς Κ τὰ σημεῖα Β καὶ Β′. Φέρομεν τὰς ΒΑ καὶ Β′Α, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (ε) τὰ Γ καὶ Γ′. Αἱ ΒΑΓ καὶ Β′ΑΓ′ εἶναι αἱ ζητούμεναι τέμνουσαι. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ (ε_1) τέμνει ἢ ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν Κ.

591) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α δίδεται, αἱ δὲ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ καὶ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε).

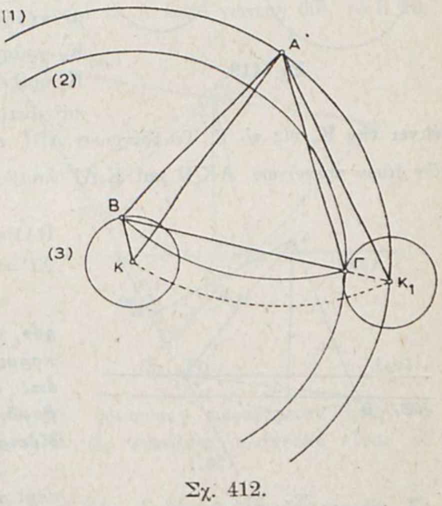
Λύσις. Ἐὰν γίνῃ στροφὴ (σχ. 411) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^o, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma A B}=60^o$ καὶ ΑΒ=ΑΓ, τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β. Ἄρα τὸ Β εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας Κ καὶ τῆς εὐθείας ἥτις εὑρίσκεται ἐὰν τὴν (ε) στρέψωμεν περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^o.



Σχ. 411.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον τῇ (ε) καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν τόξον $\Delta\Delta'=60^o$. Εἰς τὸ Δ′ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε′) τοῦ τόξου αὐτοῦ. Ἡ τομὴ τῆς (ε′), ἥτις εἶναι στροφὴ τῆς (ε) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^o, καὶ τῆς περιφερείας Κ εἶναι τὸ Β. Μὲ κέντρον τώρα Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε) τὸ Γ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ′=ΑΔ θὰ ἔχωμεν $\widehat{BA\Delta'}=\widehat{\Gamma A\Delta}$, ὅτε θὰ εἶναι καὶ $\widehat{BA\Gamma}=\widehat{\Delta' A\Delta}$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Delta' A \Delta}=60^o$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{BA\Gamma}=60^o$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ συνεπῶς εἶναι τὸ ζητούμενον.

592) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὰς κορυφάς του Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.



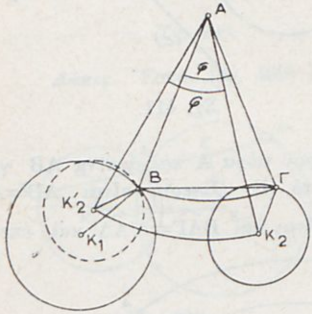
Σχ. 412.

Λύσις. Ἔστωσαν (1), (2), (3) αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι καὶ ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 412). Ἐὰν γίνῃ στροφὴ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^o, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{BA\Gamma}=60^o$ καὶ ΑΒ=ΑΓ, τὸ Β θὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ καὶ ἡ περιφέρεια (3) θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν K_1 καὶ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ. Ἄρα τὸ Γ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας (2) καὶ τῆς K_1 ἥτις εἶναι στροφὴ τῆς (3) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^o.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (1) τυχὸν σημεῖον Α καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΚ γράφομεν τόξον $\widehat{KK_1}=60^0$. Μὲ κέντρον τὸ K_1 καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς (3) γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τάμῃ τὴν (2) ἔστω εἰς τὸ Γ. (Ἡ K_1 εἶναι ἡ στροφὴ τῆς (3) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^0). Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τάμῃ τὴν (3) ἔστω εἰς τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΚ, $ΑΓΚ_1$, ἔχομεν $B\widehat{A}K=\Gamma\widehat{A}K_1$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $B\widehat{A}\Gamma=K\widehat{A}K_1$ ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι, $K\widehat{A}K_1=60^0$ θὰ ἔχωμεν $B\widehat{A}\Gamma=60^0$.

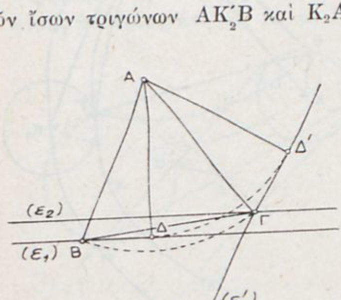
593) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ κορυφὴ Α, ἡ γωνία $B\widehat{A}\Gamma$ καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2.

Λύσις. Ἔστω $B\widehat{A}\Gamma=\varphi$ ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἐὰν (σχ. 413) γίνῃ στροφὴ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν φ, ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma\widehat{A}B=\varphi$ καὶ ΑΓ=ΑΒ, τὸ Γ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Β καὶ ἡ περιφέρεια K_2 θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν K'_2 καὶ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Β. Ἄρα τὸ Β εἶναι τομὴ τῆς K_1 καὶ τῆς K'_2, ἥτις εἶναι στροφὴ τῆς K_2 περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν φ.



Σχ. 413.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα AK_2 γράφομεν τόξον $\widehat{K_2K'_2}=\varphi$ καὶ μὲ κέντρον K'_2 καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς K_2 γράφομεν περιφέρειαν. Ἡ περιφέρεια K'_2 ὁρίζει ἐπὶ τῆς K_1 τὸ Β. Μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν K_2 εἰς τὸ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων AK'_2B καὶ $K_2A\Gamma$ λαμβάνομεν $K'_2\widehat{A}B=K_2\widehat{A}\Gamma$ καὶ συνεπῶς $B\widehat{A}\Gamma=K'_2\widehat{A}K_2=\varphi_2$, ἀφ' ἑτέρου, εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΒ.



Σχ. 414.

594) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο παραλλήλων δοθεισῶν εὐθειῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$), ἡ δὲ κορυφὴ Α δίδεται.

Λύσις. Ἐὰν γίνῃ (σχ. 414) στροφὴ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^0, τὸ Β θὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ καὶ ἡ εὐθεῖα ($ε_1$) θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν ($ε'_1$), ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον τῇ (ε_1) καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν τόξον $\widehat{\Delta\Delta'}=60^0$ καὶ εἰς τὸ Δ′ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε_1') ἥτις εἶναι ἡ στροφὴ τῆς (ε_1) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^0. Ἡ (ε_1') θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς (ε_2) τὸ Γ. Μὲ κέντον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν (ε_1) εἰς τὸ Β, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔ′Γ′ ἔχομεν $B\widehat{A}\Delta=\Delta'\widehat{A}\Gamma$ καὶ συνεπῶς $\Gamma\widehat{A}B=\Delta'\widehat{A}\Delta=60^0$.

595) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσασκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, δοθείσης τῆς κορυφῆς Α, τῆς γωνίας Α καὶ ὅτι αἱ δύο κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

Λύσις. Θὰ γίνῃ ἡ προηγουμένη κατασκευὴ μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ στροφὴ θὰ γίνῃ κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Α, ἤτοι θὰ εἶναι τοξ. $\widehat{\Delta\Delta'}=\widehat{A}$.

596) Αἱ ἀσκήσεις 594 καὶ 595 νὰ ἐξετασθοῦν καὶ ὅταν αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) δὲν εἶναι παράλληλοι.

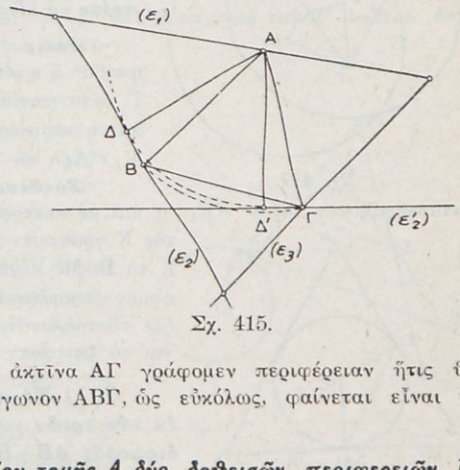
Λύσις. Ἡ ἐργασία εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία.

597) Ἡ ἄσκησις 592 νὰ ἐξετασθῇ καὶ ὅταν αἱ τρεῖς περιφέρειαι εἶναι τυχοῦσαι.

Λύσις. Θὰ γίνῃ ἀκριβῶς ἡ ἰδία ἐργασία.

598) Νὰ κασασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον τὰς κορυφάς του ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3).

Λύσις. Ἐὰν γίνῃ (σχ. 415) στροφὴ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^0. τὸ Β θὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ καὶ ἡ (ε_2) θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν (ε_2'), ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ. Ἄρα τὸ Γ εἶναι τομὴ τῆς (ε_3) καὶ τῆς (ε_2') ἥτις εἶναι στροφὴ τῆς (ε_2) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 60^0.

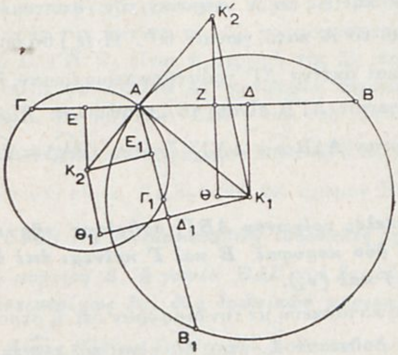


Σχ. 415.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΔ, ἔνθα Α τυχὸν σημεῖον τῆς (ε_1), κάθετον τῇ (ε_2) καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν τόξον $\widehat{\Delta\Delta'}=60^0$. Εἰς τὸ Δ′ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε_2') ἥτις τέμνει τὴν (ε_3) εἰς τὸ Γ. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις θὰ τάμῃ τὴν (ε_2) εἰς τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εὐκόλως, φαίνεται εἶναι τὸ ζητούμενον.

599) Διὰ τοῦ ἑνὸς σημείου τομῆς Α δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτὰς ΒΑΓ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι $AB-A\Gamma=\alpha$, ἔνθα α δοθέν.

Λύσις. α) Ὅταν τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἀντίρροπα. Φέρομεν τὰς $K_1\Delta$, καὶ K_2E (σχ. 416) καθέτους τῇ ΓΑΒ καὶ λαμβάνομεν καὶ τὸ K'_2 συμμετρικὸν τοῦ K_2 ὡς πρὸς τὸ Α. Ἐκ τοῦ K'_2 φέρομεν τὴν K'_2Z κάθετον τῇ ΓΑΒ καὶ ἐπ' αὐτὴν τὴν κάθετον $K_1\Theta$. Ἔχομεν



Σχ. 416.

$$AZ=AE=\frac{A\Gamma}{2} \text{ καὶ } A\Delta=\frac{AB}{2}$$

καὶ συνεπῶς $Z\Delta=A\Delta-AZ=$

$$=\frac{1}{2}(AB-A\Gamma)=\frac{\alpha}{2}=K_1\Theta,$$

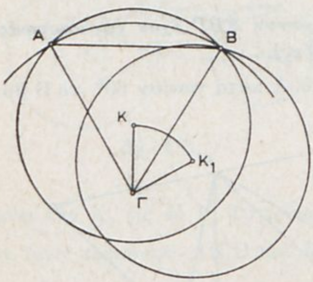
Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $K'_2K_1\Theta$ καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον τῇ $K_1\Theta$ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

β) Ὅταν τὰ AB_1 καὶ $A\Gamma_1$ εἶναι ὁμόρροπα. Φέρομεν πάλιν τὰς $K_1\Delta_1$, K_2E_1 καθέτους τῇ AB_1 καὶ τὴν $K_2\Theta_1$ κάθετον τῇ $K_1\Delta_1$. Ἔχομεν

$$K_2\Theta_1=E_1\Delta_1=A\Delta_1-AE_1=\frac{1}{2}(AB_1-A\Gamma_1)=\frac{1}{2}\alpha.$$

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $K_2K_1\Theta_1$ καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον τῇ $K_2\Theta_1$ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

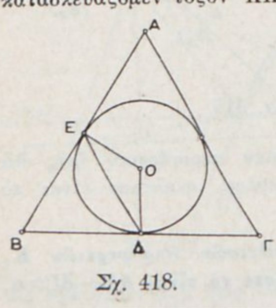
600) Νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΑΒ κύκλου Κ, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα Α καὶ Β συνδεόμενα διὰ δοθέντος σημείου Γ νὰ σχηματίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἢ ἰσοσκελὲς τοιοῦτον, τοῦ ὁποίου νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς.



Σχ. 417.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 417) $\widehat{A\Gamma B}=\varphi$ (ὅπου $\varphi=60^0$ ἢ $\varphi\neq60^0$). Ἐὰν γίνῃ στροφὴ περὶ τὸ Γ κατὰ γωνίαν φ, τὸ Α θὰ πέσῃ εἰς τὸ Β καὶ ἡ περιφέρεια Κ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν K_1. Ἄρα τὸ Β εἶναι τομὴ τῆς Κ καὶ K_1.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΚ κατασκευάζομεν τόξον $\widehat{KK_1}=\varphi$ καὶ μὲ κέντρον τὸ K_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς Κ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς Κ τὸ Β. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖναι ΓΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν Κ εἰς τὸ Α, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εὐκόλως, φαίνεται εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 418.

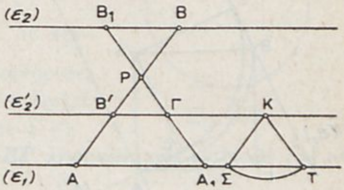
601) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν του Α, Β, Γ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς $AB+B\Gamma-\Gamma A=\alpha$.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 418) Ο ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος. Ὡς γνωστὸν εἶναι $B\Delta=BE=$

$=\frac{1}{2}(AB+B\Gamma-A\Gamma)=\frac{\alpha}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΕΔ κατασκευάζεται. Εἰς τὰ Ε καὶ Δ ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΒΑ καὶ ΒΕ καὶ ὁρίζεται οὕτω τὸ Ο. Ἄρα ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἶναι γνωστή. Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου ΑΒΓ ἐκ τῶν Α, Β, Γ, ρ (ἰδὲ ἄσκ. 429).

602) Διὰ δεδομένου σημείου Ρ, κειμένου μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτὰς ΑΡΒ, τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΡΑ—ΡΒ=α, ἔνθα α δοθέν.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 419) ε_2' ἡ συμμετρικὴ τῆς (ε_2) ὡς πρὸς τὸ Ρ. Ἔχομεν α=ΡΑ−ΡΒ=ΡΑ−ΡΒ′=Β′Α. Ἐπὶ τῆς (ε_2') λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Κ καὶ φέρομεν τὴν ΚΣ παράλληλον τῇ Β′Α, ὅτε θὰ εἶναι ΚΣ=α.



Σχ. 419.

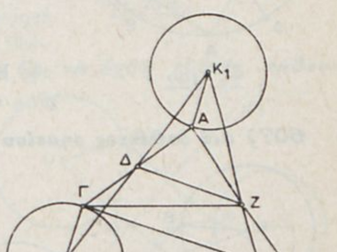
Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς (ε_2') συμμετρικῆς τῆς (ε_2) ὡς πρὸς τὸ Ρ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Κ, μὲ τὸ ὁποῖον ὡς κέντρον καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε_1) τὰ Σ καὶ Τ. Ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν τὰς ΒΡΑ καὶ B_1PA_1 παραλλήλους πρὸς τὰς ΚΣ καὶ ΚΤ, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι τέμνουσαι.

603) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ μιᾶς καθέτου πλευρᾶς του καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Λύσις. Εἶναι ἡ ὑπ᾽ ἀριθμὸν 411.

604) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῶν μέσων Δ καὶ Ζ τῶν πλευρῶν του ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ κορυφή του Γ κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ, ἢ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας x.

Λύσις. Φέρομεν (σχ. 420) τὴν ΚΔ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως $\Delta K_1=K\Delta$, ὅτε θὰ εἶναι $K_1A=K\Gamma$. Ἄρα τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου K_1 (συμμετρικῆς τῆς Κ ὡς πρὸς τὸ Δ) καὶ ἀκτῖνος ρ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης Κ. Φέρομεν τὴν K_1Z καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν $ZK_2=ZK_1$, ὅτε θὰ εἶναι $K_2B=K_2A=K\Gamma$. Ἄρα τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς πιριφερείας κέντρου K_2 (συμμετρικῆς τῆς K_1 ὡς πρὸς κέντρον Ζ) καὶ ἀκτῖνος ρ. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΔΖ καὶ ἰσοῦται πρὸς 2ΔΖ, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΒ μήκους 2ΔΖ παράλληλον τῇ ΔΖ καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα νὰ κεῖν-

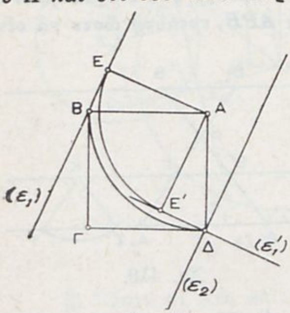


Σχ. 420.

ται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ K_2 (ἰδὲ § 353). Ἀχθείσης τῆς ΓΒ φέρομεν τὰς ΓΔ καὶ ΒΖ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ Α καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ, ὡς εὐκόλως, φαίνεται εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν ἡ Κ εἶναι εὐθεῖα.

605) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, δοθείσης τῆς κορυφῆς του Α καὶ ὅτι δύο ἄλλαι κορυφαί του κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

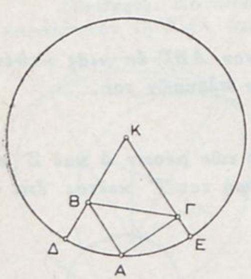


Σχ. 421.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 421) τὸ Δ εἶναι στροφὴ τοῦ Β περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°, ἕπεται ὅτι τὸ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε_1'), ἥτις εἶναι ἡ στροφὴ τῆς (ε_1) περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΕ κάθετον τῇ (ε_1) καὶ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΕ τόξον ΕΕ′=90°. Εἰς τὸ Ε′ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε_1'), ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε_2) τὸ Δ.

606) Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα ΚΔΕ νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90°), τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α εἶναι δοθὲν σημεῖον τοῦ τόξου ΔΕ εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει ὁ τομεύς.

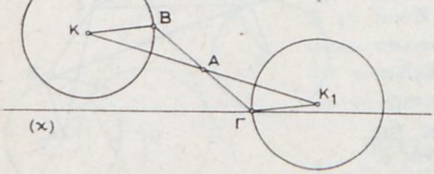


Σχ. 422.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 422) εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ ΒΑΓ=90°, τὸ Γ εἶναι στροφὴ τοῦ Β περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°. Ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς ΚΔ, ἕπεται ὅτι τὸ Γ θὰ εἶναι τομὴ τῆς ΚΕ καὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία εἶναι στροφὴ τῆς ΚΔ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν στροφὴν τῆς ΚΔ περὶ τὸ Α κατὰ γωνίαν 90°, ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΚΕ τὸ Γ.

607) Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Β καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν x εἰς τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ.



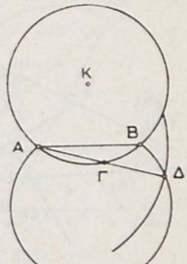
Σχ. 423.

Λύσις. Φέρομεν τὴν ΑΚ (σχ. 423) καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς AK_1=ΚΑ, ὅτε θὰ εἶναι $K_1Γ$=ΚΒ. Μὲ κέντρον τὸ K_1 καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς Κ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς (x) τὸ Γ. Ἡ ΓΑ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἐν γένει λύσεις.

608) Ἐπὶ τόξου ΑΒ δοθείσης περιφερείας Κ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι χορδ.ΑΓ+χορδ.ΒΓ=α.

Λύσις. Προεκτείνομεν τὴν ΑΓ (σχ. 424) κατὰ μῆκος ΓΔ=ΒΓ, ὅτε θὰ ἔχωμεν ΑΔ=α καὶ $2\widehat{\Delta}=\widehat{\text{ΑΓΒ}}$. Ἀλλὰ ἡ $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ εἶναι γωνία γνωστή, διότι εἶναι γνωστὸν τὸ τόξον $\widehat{\text{ΑΒ}}$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν ΑΒ γράφομεν τόξον $\text{Α}\widehat{\Delta}\text{Β}$ δεχόμενον γωνίαν $\widehat{\Delta}=\frac{1}{2}\widehat{\text{ΑΓΒ}}$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ=α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ τὸ Δ. Ἡ ΑΔ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ δοθέντος τόξου τὸ ζητούμεν σημεῖον Γ (1).

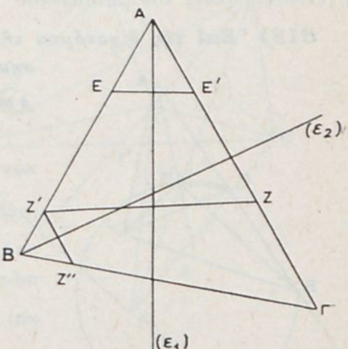


Σχ. 424.

609) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῶν τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ ($ε_1$) ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν του, ἑνὸς σημείου Ε τῆς ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου Ζ τῆς ΑΓ.

Λύσις. α) Ἔστωσαν (σχ. 425) ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) αἱ διχοτόμοι τῶν Α καὶ Β. Τὰ συμμετρικὰ Ε′ καὶ Ζ′ τῶν Ε καὶ Ζ ὡς πρὸς τὴν ($ε_1$) θὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ, τὸ δὲ συμμετρικὸν Ζ″ τοῦ Ζ′ ὡς πρὸς τὴν ($ε_2$) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἄρα ἡ ΕΖ′ εἶναι ὡρισμένη καὶ προκτεινομένη ὁρίζει ἐπὶ τῶν ($ε_1$) καὶ ($ε_2$) τὰ Α καὶ Β. Φέρομεν τὰς ΒΖ″ καὶ ΑΕ′Ζ καὶ οὕτω ὁρίζεται τὸ Γ.

Παρατήρησις Ἐὰν τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ, τότε ἡ ΑΒ ὁρίζεται, ἐκ τοῦ Ζ′ καὶ ἐκ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν ($ε_2$).

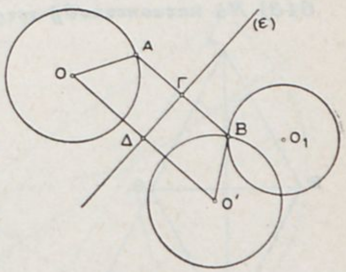


Σχ. 425.

610) Μεταξὺ δύο περιφερειῶν Ο καὶ $Ο_1$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) καὶ διχοτομουμένη ὑπ᾿ αὐτῆς.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 426) ΑΒ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ⊥(ε) καὶ ΑΓ=ΓΒ, τὸ Β εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ συνεπῶς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο′ ἥτις εἶναι συμμετρικὴ τῆς Ο ὡς πρὸς τὴν (ε).

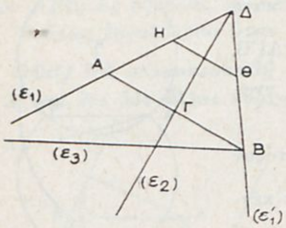
Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Ο′ τοῦ Ο ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ μὲ κέντρον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα τῆς Ο γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς $Ο_1$ τὸ Β. Ἡ ἐκ τοῦ Β κάθετος τῇ (ε) εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Λύσεις ἐν γένει δύο.



Σχ. 426.

(1) Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Γ τὸ ΑΓ+ΓΒ εἶναι μέγιστον.

611) *Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἡ δὲ (ε_2) κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα περατούμενον εἰς τὰς (ε_1) καὶ (ε_3) καὶ τεμνόμενον δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς (ε_2).*

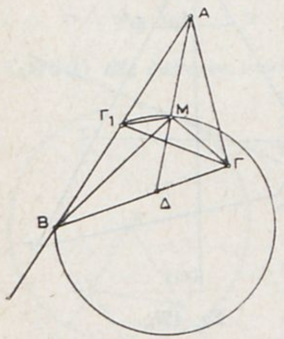


Σχ. 427.

Λύσις. Ἔστω ΑΒ (σχ. 427) τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἐπειδὴ εἶναι $AB \perp \varepsilon_2$ καὶ ΑΓ=ΓΒ, τὸ Β θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ε_1' ἥτις εἶναι συμμετρικὴ τῆς (ε_1) ὡς πρὸς τὴν ε_2.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν (ε_1') συμμετρικὴν τῆς (ε_1) ὡς πρὸς τὴν (ε_2). Ἡ τομὴ τῶν (ε_1') καὶ (ε_3) εἶναι τὸ Β καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ κάθετος τῇ (ε_2) εἶναι ἡ θέσις τοῦ ζητουμένου τμήματος.

612) *Ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma}=\omega$.*

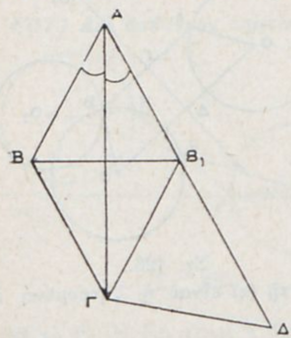


Σχ. 428.

Λύσις. Ἔστω Γ_1 (σχ. 428) τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AM\Gamma}=\widehat{AM\Gamma_1}$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{BM\Gamma_1}=\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma_1}=\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma}=\omega$ καὶ συνεπῶς τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς $B\Gamma_1$ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{\omega}$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν τὴν $B\Gamma_1$ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $\widehat{\omega}$. Ἡ τομὴ τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ τῆς διχοτόμου εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Ἔχομεν ἐν γένει δύο λύσεις.

613) *Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ γνωστῶν τῶν τεσσάρων πλευρῶν του καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $\widehat{A}$.*

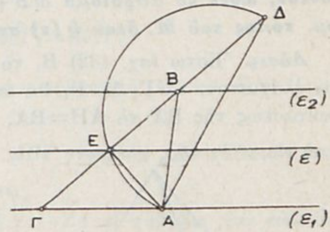


Σχ. 429.

Λύσις. Ἔχομεν (σχ. 429) ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ, ΔΑ=δ καὶ $\widehat{BA\Gamma}=\widehat{\Gamma A\Delta}$. Λαμβάνομεν τὸ B_1 συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτε θὰ ἔχωμεν $\Gamma B_1=\beta$, $B_1\Delta=A\Delta-AB_1=A\Delta-AB=\delta-\alpha$. Ἄρα τὸ τρίγωνον $\Gamma B_1\Delta$ κατασκευάζεται, ἐφ᾽ ὅσον εἶναι $|\beta-\gamma|<|\alpha-\delta|<\beta+\gamma$. Τούτου κατασκευασθέντος λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔB_1 τὴν ΔΑ=δ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Α. Λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Β τοῦ B_1 ὡς πρὸς τὴν ΑΓ, ὅτε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.

614) Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ ἓν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς (ε_1) καὶ ἓν σημεῖον Δ κείμενον ἐκτὸς τῶν παραλλήλων. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Δ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς (ε_2) καὶ (ε_1) εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΑΓ (σχ. 430) τὸ Α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ. Ἄρα τὸ Ε θὰ εἶναι τομὴ τῆς ἰσαπεχούσης παραλλήλου (ε) καὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΔ.

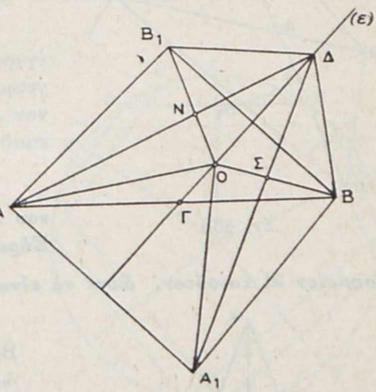


Σχ. 430.

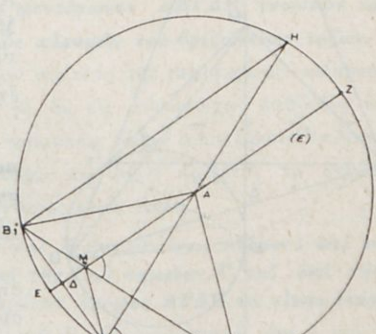
Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ἰσαπέχουσαν παράλληλον (ε) καὶ τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΔΑ. Ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι τὸ Ε, ὅτε ἡ ΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

615) Διὰ τοῦ μέσου Γ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἄγεται εὐθεῖα (ε) σχηματίζουσα μετὰ τῆς ΑΒ δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{\varphi}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Δ, ὥστε νὰ εἶναι $\Gamma\widehat{\Delta}B=2A\widehat{\Delta}\Gamma$.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 431) A_1 καὶ B_1 τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ὡς πρὸς τὴν (ε). Ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma\widehat{\Delta}B=2\Gamma\widehat{\Delta}A$ καὶ $\Gamma\widehat{\Delta}A=\Gamma\widehat{\Delta}A_1$ καὶ $\Gamma\widehat{\Delta}B=\Gamma\widehat{\Delta}B_1$, θὰ ἔχωμεν ὅτι αἱ ΔA_1 καὶ ΔΑ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\Gamma\widehat{\Delta}B$ καὶ $\Gamma\widehat{\Delta}B_1$. Τὰ συμμετρικὰ τῶν Β καὶ B_1 ὡς πρὸς τὰς ΔA_1 καὶ ΔΑ ἀντιστοίχως θὰ συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς (ε), διότι ἡ (ε) εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς BB_1. Ἐπειδὴ εἶναι $AO=AB_1$, ἕπεται ὅτι ἡ θέσις τοῦ Ο ἐπὶ τῆς (ε) εἶναι ὡρισμένη (εἶναι τοῦτο τομὴ τῆς (ε) καὶ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος AB_1). Αἱ ἐκ τῶν Α καὶ A_1 κάθετοι ἐπὶ τὰς B_1O καὶ ΒΟ ἀντιστοίχως ὁρίζουν ἐπὶ τῇ (ε) τὸ Δ.



Σχ. 431.



Σχ. 432.

616) Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τυχοῦσα εὐ-

θεῖα (ε) ἀγομένη διὰ τῆς κορυφῆς Α. Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνομεν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΜΒ+ΜΓ νὰ εἶναι ἐλάχιστον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ (ε) στρέφεται περὶ τὸ Α.

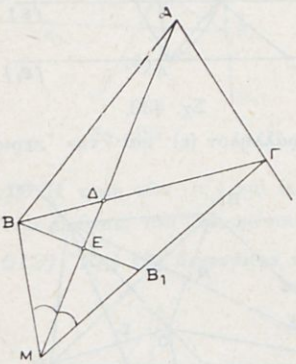
Λύσις. Ἔστω (σχ. 432) B_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β. Ἐπειδὴ τὸ (ΜΒ)+(ΜΓ) εἶναι ἐλάχιστον, τὰ Γ, Μ, B_1 θὰ κεῖναι ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ τὸ ΑΗ=ΒΑ, τὸ B_1 θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΒΗ. Ἔχομεν τώρα

$$\widehat{AM\Gamma}=\widehat{ZM\Gamma}=\frac{1}{2}(\text{τοξ}\Gamma Z+\text{τοξ}B_1E)=$$

$$=\frac{1}{2}(\text{τοξ}\Gamma Z+\text{τοξ}BE)=\frac{1}{2}(\text{τοξ}\Gamma Z+\text{τοξ}HZ)=$$

$$=\frac{1}{2}\text{τοξ}\Gamma ZH=\widehat{HB\Gamma}=\widehat{AB\Gamma}.$$

Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΜΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ὁ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένος κύκλος. Νὰ ἐξετασθοῦν τὰ ὅρια τοῦ τόπου.



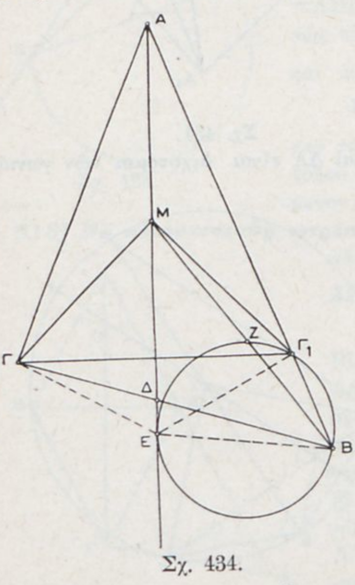
Σχ. 433.

617) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ. Εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ΑΔ, ἢ τῆς προεκτάσεώς της σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{BM\Delta}=\widehat{\Gamma M\Delta}$.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 433) εἶναι $\widehat{BM\Delta}=\widehat{\Gamma M\Delta}$, τὸ συμμετρικὸν B_1 τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΑΜ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΜ.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν B_1 τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν ΓB_1, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΔ τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ. Εἶναι τὸ Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον διότι, λόγῳ τῶν ἴσων τριγώνων ΒΕΜ καὶ B_1EM, ἔχομεν $\widehat{BME}=\widehat{B_1ME}$ ἢ $\widehat{BM\Delta}=\widehat{\Gamma M\Delta}$.

618) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ $\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma}$ νὰ εἶναι μεγίστη.



Σχ. 434.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 434) Μ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΔ καὶ Γ_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AM\Gamma}=\widehat{AM\Gamma_1}$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma}=\widehat{AMB}-\widehat{AM\Gamma_1}=\widehat{BM\Gamma_1}$. Ἄρα πρέπει ἡ γωνία $\widehat{BM\Gamma}$ νὰ γίνῃ μεγίστη. Γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Β, Γ_1 καὶ ἐφαπτομένην τῆς ΑΔ. Ἔστω Ε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ Ζ ἡ τομὴ τῆς περιφερείας καὶ τῆς ΒΜ. Ἔχομεν

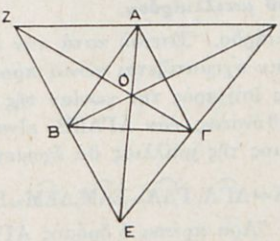
$$B\widehat{E}\Gamma_1 = B\widehat{Z}\Gamma_1 > Z\widehat{M}\Gamma_1 = B\widehat{M}\Gamma_1.$$

Ἄρα ἵνα ἡ γωνία $B\widehat{M}\Gamma$, γίνῃ μεγίστη πρέπει τὸ Μ νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν Ε.

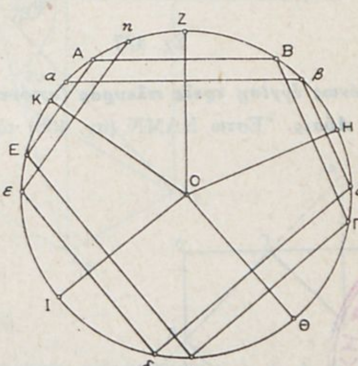
619) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῶν τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 435) ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΔ αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι. Ἐπειδὴ αἱ ΑΕ, ΒΔ καὶ ΓΖ εἶναι αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι θὰ εἶναι αὗται κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΖΕ καὶ ΔΕ.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὰ ὕψη ΕΑ, ΔΒ καὶ ΖΓ τοῦ τριγώνου ΔΖΕ. ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 435.



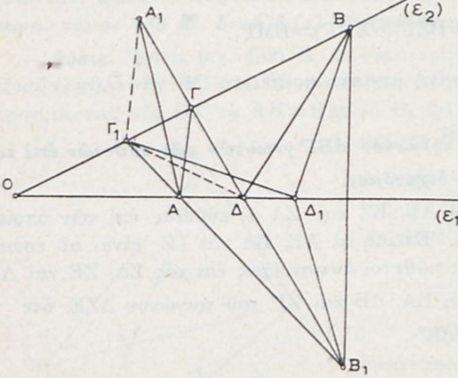
Σχ. 436.

620) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ γνωστῶν τῶν μέσων Ζ, Η, Θ, Ι καὶ Κ τῶν ὑπὸ τῶν πλευρῶν του ὁριζομένων τόξων.

Λύσις. Ἔστω α (σχ. 497) τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας κείμενον μεταξὺ Κ καὶ Ζ. Φέρομεν τὰς αβ, βγ, γδ, δε, εη, ἀντιστοίχως καθέτους ἐπὶ τὰς ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ, ΟΙ, ΟΚ. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τόξον $\widehat{\alpha A} = \widehat{B\beta} = \widehat{\gamma\Gamma} = \widehat{\Delta\delta} = \widehat{\varepsilon E} = \widehat{A\eta}$. Ἄρα τὸ Α εἶναι μέσον τοῦ τόξου αη. Οὕτω ὁρίζεται τὸ σημεῖον Α καὶ συνεπῶς τὸ πεντάγωνον. Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.

621) Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως κείμενα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε_2) σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς (ε_1) σημεῖον Δ, τοιαῦτα ὥστε ὁ τεθλασμένος δρόμος ΑΓΔΒ νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 437) A_1 καὶ B_1 τὰ συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰ (ε_2) καὶ (ε_1). Ἡ A_1B_2 ὁρίζει ἐπὶ τῶν (ε_2) καὶ (ε_1) τὰ ζητούμενα σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὁ δρόμος ΑΓΔΒ εἶναι μικρότερος τοῦ τυχόντος $ΑΓ_1Δ_1Β$. Πράγματι, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΓ=Α_1Γ$ καὶ $ΔΒ=ΔΒ_1$, ὁ δρόμος ΑΓΔΒ ἰσοῦται πρὸς τὴν εὐθεῖαν $Α_1Β_1$, ἐνῶ ὁ τυχὸν δρόμος $ΑΓ_1Δ_1Β$, ἐπειδὴ εἶναι $ΑΓ_1=Α_1Γ_1$ καὶ $Δ_1Β=Δ_1Β_1$, ἰσοῦται πρὸς τὴν τεθλασμένην $Α_1Γ_1Δ_1Β_1$ ἥτις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας $Α_1Β_1$.



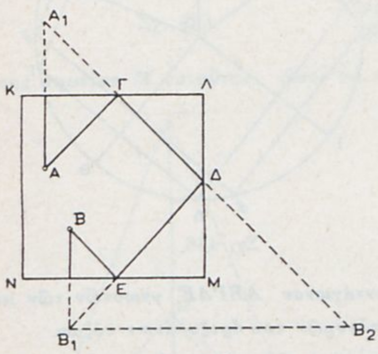
Σχ. 437.

622) Πρὸς ποίαν διεύθυνσιν πρέπει νὰ ἐκτοξευθῇ εἰς ἓν τετράγωνον μπιλιάρδο μία μπίλλια Α διὰ νὰ κτυπήσῃ μίαν ἄλλην Β ἀφοῦ προηγουμένως ἐγγίσῃ τρεῖς πλευρὰς (σπόντες) τοῦ μπιλλιάρδου.

Λύσις. Ἔστω ΚΛΜΝ (σχ. 438) τὸ μπιλλιάρδο. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκτόξευσιν σχηματίζεται γωνία προσπώσεως ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς νέας διευθύνσεως, ἐὰν ΑΓΔΕΒ εἶναι ὁ δρόμος τῆς μπίλλιας θὰ ἔχωμεν:

$$\widehat{ΑΓΚ}=\widehat{ΔΓΛ},\ \widehat{ΓΔΛ}=\widehat{ΕΔΜ},\ \widehat{ΔΕΜ}=\widehat{ΒΕΝ}.$$

Ἄρα πρέπει ὁ δρόμος ΑΓΔΕΒ νὰ εἶναι ὁ ἐλάχιστος καὶ συνεπῶς ἀναγόμεθα εἰς τὴν γνωστὴν ἄσκησιν. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ $Α_1$ καὶ $Β_1$ τῶν Α καὶ Β ἀντικτοίχως ὡς πρὸς τὰς ΚΛ καὶ ΝΜ καὶ τὸ $Β_2$ συμμετρικὸν τοῦ $Β_1$ ὡς πρὸς τὴν ΜΛ. Ἡ $Α_1Β_2$ ὁρίζει ἐπὶ τῶν ΚΛ καὶ ΛΜ τὰ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ $ΔΒ_1$ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΝΜ τὸ Ε καὶ ὁ ζητούμενος δρόμος εἶναι ὁ ΑΓΔΕΒ.



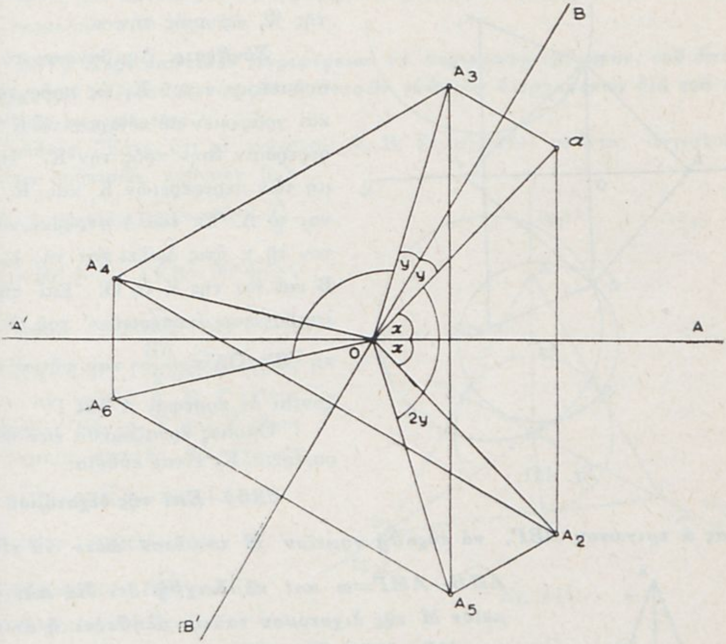
Σχ. 438.

623) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰδώλων ἑνὸς ἀντικειμένου τιθεμένου πρὸ δύο ἐπιπέδων κατόπτρων σχηματιζόντων γωνίαν 60^0, ἢ 90^0.

Λύσις. α) Ἔστωσαν Α΄Α καὶ Β΄Β τὰ ὑπὸ γωνίαν 60^0 κάτοπτρα. Ἐὰν $Α_2$, $Α_3$ (σχ. 439) εἶναι τὰ συμμετρικά, τοῦ δοθέντος ἀντικειμένου α ὡς πρὸς τὰς ΟΑ, ΟΒ, $Α_5$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $Α_3$ ὡς πρὸς τὴν ΟΑ, $Α_4$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $Α_2$ ὡς πρὸς τὴν ΟΒ καὶ $Α_6$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ $Α_5$ ὡς πρὸς τὴν ΟΒ, θὰ ἔχωμεν

$$Οα=ΟΑ_2=ΟΑ_5=\cdots=ΟΑ_3,\ Α_4\widehat{Ο}Α_3=Α_2\widehat{Ο}α \text{ καὶ } Α_6\widehat{Ο}Α_2=Α_4\widehat{Ο}α,$$

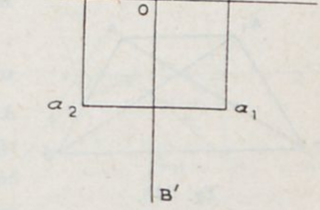
καὶ συνεπῶς ἡ ΟΑ, ὡς διχοτόμος τῆς $α\widehat{Ο}Α_2$, προεκτεινομένη, θὰ εἶναι τοιαύτη καὶ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον A_6OA_4. Ἄρα τὸ A_6 εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A_4 ὡς



Σχ. 439.

πρὸς τὴν ΟΑ. Ἑπομένως τὸ συμμετρικὸν ἑκάστου τῶν σημείων $\alpha, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ὡς πρὸς τὰς ΟΑ, ΟΒ εἶναι ἓν ἐκ τῶν ὑπολοίπων καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ εἴδωλα τοῦ α ὡς πρὸς τὰ κάτοπτρα ΟΑ, ΟΒ τὰ ὁποῖα σχηματίζουν γωνίαν 60^0 εἶναι πέντε.

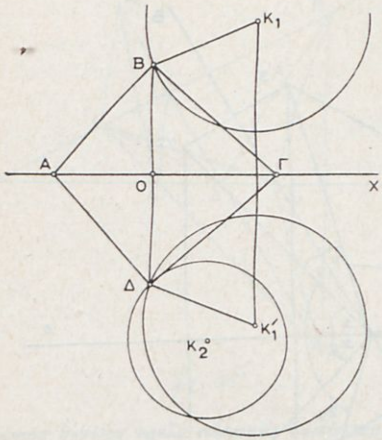
β) Ἔστωσαν Α′Α καὶ Β′Β (σχ. 440) τὰ ὑπὸ γωνίαν 90^0 κάτοπτρα. Τὰ εἴδωλα τοῦ α ὡς πρὸς τὰ δύο κάτοπτρα εἶναι ὡς εὐκόλως φαίνεται τὰ συμμετρικὰ τοῦ α ὡς πρὸς τὰ Α′Α, Β′Β καὶ ὡς πρὸς τὸ Ο.



Σχ. 440.

624) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας x, ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_1 καὶ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_2, ἢ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε).

Λύσις. Ἡ ΒΔ (σχ. 441) εἶναι κάθετος τῇ x καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτῆς καὶ συνεπῶς τὸ Δ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν x. Ἄρα τὸ Δ θὰ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας K_2 καὶ τῆς περιφερείας K'_1 ἥτις εἶναι συμμετρικὴ τῆς K_1 ὡς πρὸς τὴν x.

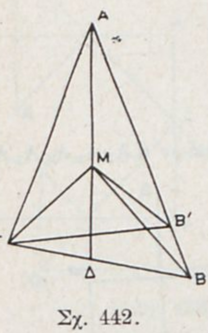


Σχ. 441.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὸ K'_1 συμμετρικὸν τοῦ K_1 ὡς πρὸς τὴν x καὶ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ K'_1 περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὴν K_1. Ἡ τομὴ τῶν περιφερειῶν K'_1 καὶ K_2 εἶναι τὸ Δ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον τῇ x ἥτις ορίζει ἐπὶ τῆς K_1 τὸ Β καὶ ἐπὶ τῆς x τὸ Ο. Ἐπὶ τῆς x λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο μῆκη $ΟΓ=ΟΑ=\frac{ΔΒ}{2}$ καὶ οὕτως ὁρίζονται αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἐὰν ἡ περιφέρεια K_2 εἶναι εὐθεῖα.

625) Ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMB}-\widehat{AMΓ}=ω$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου ταύτης ἀληθεύει ἡ ἀνισότης $MB-MΓ<AB-AΓ$.



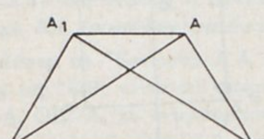
Σχ. 442.

Λύσις. α) Τὸ μέρος τοῦτο ἐξητάσθη εἰς τὴν ἄσκησιν 612.

β) Ἐὰν Β′ (σχ. 432) εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ, θὰ ἔχωμεν $MΓ=MB'$ καὶ $AB'=AΓ$. Ἀλλὰ $B'B=AB-AB'=AB-AΓ$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $MB-MB'<B'B$, θὰ ἔχωμεν

$MB-MB'<AB-AΓ$, ἢ $MB-MΓ<AB-AΓ$ ὅ.ἔ.δ.

626) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν $AB=γ$, $AΓ=β$ καὶ $B-Γ=ω$.



Σχ. 443.

Λύσις. Φέρομεν τὴν BA_1 (σχ. 443) τοιαύτην, ὥστε $\widehat{A_1BΓ}=\widehat{AΓB}$, ὅτε θὰ εἶναι $\widehat{ABA_1}=ω$. Φέρομεν καὶ τὴν AA_1 παράλληλον τῇ ΓΒ ἥτις τέμνει τὴν BA_1 εἰς τὸ A_1. Ἐπειδὴ τὸ τραπέζιον $A_1ABΓ$ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ ἔχωμεν $A_1B=AΓ=β$. Τὸ τρίγωνον ABA_1 κατασκευάζεται διότι εἶναι γνωστὰ τὰ $AB=γ$, $A_1B=γ$ καὶ $\widehat{ABA_1}=ω$. Τούτου κατασκευασθέντος φέρομεν ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΓ παράλληλον τῇ AA_1 καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΓ=β γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης παραλλήλου τὸ σημεῖον Γ.

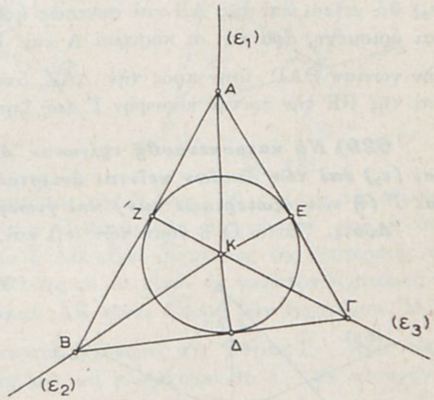
627) Περὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν νὰ περιγραφῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω ὅτι αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ (σχ. 444) κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3). Ἐπειδὴ $\widehat{BK\Gamma}=90^0+\frac{A}{2}$, $\widehat{\Gamma KA}=90^0+\frac{B}{2}$, $\widehat{AKB}=90^0+\frac{\Gamma}{2}$, θὰ ἔχωμεν $A=2\widehat{BK\Gamma}-180^0$, $B=2\widehat{\Gamma KA}-180^0$, $\Gamma=2\widehat{AKB}-180^0$. Ἄρα αἱ γωνίαι Α, Β, Γ εἶναι γνωσταί. Ἐὰν Δ, Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ZKE}=2\widehat{ZKA}=180^0-A=$$

$$=180^0-2\widehat{BK\Gamma}+360^0, \text{ ἢ}$$

$$\widehat{ZKA}=270^0-\widehat{BK\Gamma}=\widehat{EKA}.$$



Σχ. 444.

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν

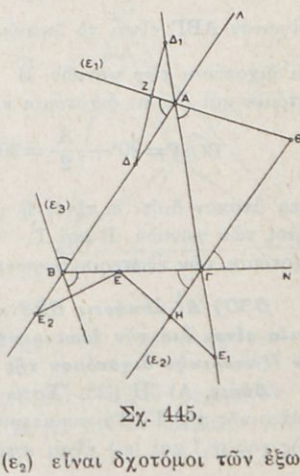
$$\widehat{ZKB}=270^0-\widehat{\Gamma KA}=\widehat{\Delta KB} \text{ καὶ } \widehat{\Delta K\Gamma}=270^0-\widehat{AKB}=\widehat{EK\Gamma}.$$

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν τὴν (ε_1) καὶ κορυφὴν Κ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{ZKA}=\widehat{EKA}=270^0-\widehat{BK\Gamma}$ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ Ζ καὶ Ε εἰς τὰ ὁποῖα φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3) τὰ Α, Β, Γ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εὐκόλως φαίνεται, εἶναι τὸ ζητούμενον.

628) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῶν δύο εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται δύο ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι ὡς καὶ ἑνὸς σημείου Δ τῆς ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου Ε τῆς ΒΓ.

Λύσις. α) Ἐὰν Δ_1 καὶ E_1 (σχ. 445) εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2), ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Delta AZ}=\Delta_1\widehat{A}Z$ καὶ $\widehat{E\Gamma H}=E_1\widehat{\Gamma}H$, λόγῳ τῆς συμμετρίας καὶ $\widehat{\Theta A\Gamma}=\widehat{\Lambda A\Theta}=\widehat{ZA\Delta}$,



Σχ. 445.

$\widehat{E\Gamma H}=\widehat{N\Gamma\Theta}=\widehat{\Theta\Gamma A}$, λόγῳ τοῦ ὅτι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι δχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α καὶ Γ, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ZA\Delta_1}=\widehat{\Theta A\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Gamma\Theta}=\widehat{H\Gamma E_1}$. Ἄρα τὰ σημεῖα Δ_1, Α, Γ, E_1 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Δ_1 καὶ E_1 συμμετρικὰ τῶν Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2). Ἡ εὐθεῖα Δ_1E_1 ὁρίζει ἐπὶ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ. Αἱ ΑΔ καὶ ΓΕ ὁρίζουν τὴν κορυφὴν Β καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὡς εὐκόλως φαίνεται, εἶναι τὸ ζητούμενον.

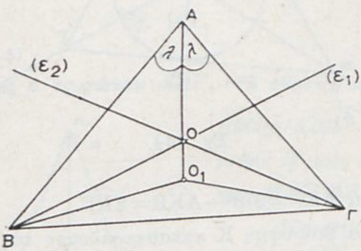
β) Ἐὰν ἀντὶ τῆς διχοτόμου (ε_2), τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Γ, δίδεται ἡ διχοτόμος (ε_3) τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Β, τότε τὸ συμμετρικὸν E_2 τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν (ε_3) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ συνεπῶς ἡ ΑΒ, ὡς συνδέουσα τὰ Δ καὶ E_2, εἶναι ὡρισμένη, ἄρα καὶ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β εἶναι ὡρισμέναι. Σχηματίζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{\Theta A\Gamma}$ ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{\Delta AZ}$, ὅτε ἡ ἑτέρα πλευρὰ αὐτῆς ΑΓ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΒΕ τὴν τρίτην κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

629) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ δοθεισῶν τῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται ἀντιστοίχως αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ (ἢ τῶν ἐξωτερικῶν των) καὶ γνωστῆς καὶ τῆς κορυφῆς Α.

Λύσις. Ἔστω Ο ἡ τομὴ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2), ὅτε ἡ ΑΟ (σχ. 446) εἶναι ἡ τρίτη διχοτόμος. Ἔστω $\widehat{BO\Gamma}=\omega$ τότε θὰ εἶναι ὡς γνωστόν,

$$\omega=90^0+\frac{A}{2}, \text{ ἢ } A=2\omega-180^0, \text{ ἢ}$$

$$2\lambda=2\omega-180^0, \text{ ἢ } \lambda=\omega-90^0,$$



Σχ. 446.

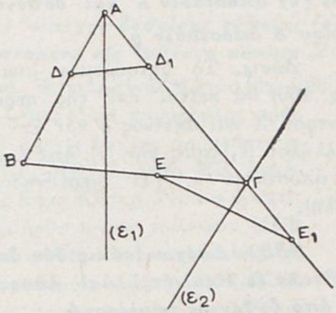
Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΑΟ μὲ τὴν ὁποίαν ὡς πλευρὰν καὶ κορυφὴν Ο κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν γωνίας ἴσας πρὸς λ. Αἱ ἕτεραι πλευραὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν ὁρίζουν ἐπὶ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) τὰ Β καὶ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$. Ἔστω ὅτι αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) δὲν εἶναι διχοτόμοι καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι εἶναι αἱ BO_1 καὶ ΓO_1. Θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν

$$\widehat{BO_1\Gamma}=90^0+\frac{A}{2}=90^0+\frac{2\lambda}{2}=90^0+\lambda=90^0+\omega-90^0=\omega,$$

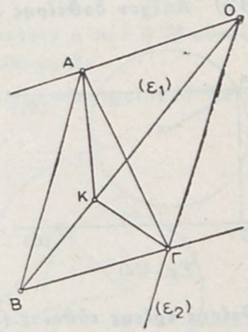
ὅπερ ἄτοπον διότι ω εἶναι ἡ γωνία $\widehat{BO\Gamma}$. Ἄρα αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν.

630) Αἱ ἀσκήσεις 628 καὶ 629 νὰ λυθοῦν ὅταν ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ἡ μία εἶναι διὰ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς μιᾶς γωνίας καὶ ἡ ἄλλη διὰ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἑτέρας γωνίας.

Λύσις. Α) Ἡ 628. Ἔστω (ε_1) ἡ διχοτόμος (σχ. 447) τῆς Α καὶ (ε_2) τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Γ. Τὰ συμμετρικὰ Δ_1 καὶ E_1 τῶν Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι σημεῖα τῆς ΑΓ. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι γνωστὴ καὶ συνεπῶς καὶ αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ, ὅτε αἱ ΑΔ καὶ ΓΕ ὁρίζουν τὴν τρίτην κορυφὴν Β.



Σχ. 447.



Σχ. 448.

Β) Ἡ 629. Ἔστω (ε_1) διχοτόμος τῆς Β (σχ. 448) καὶ (ε_2) τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Γ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς των Ο θὰ διέλθῃ ὡς γνωστὸν καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Α. Ἄρα ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς τῆς Α. Ἡ κάθετος ΑΚ ἐπὶ τὴν ΑΟ εἰς τὸ Α, εἶναι ὡς γνωστὸν διχοτόμος τῆς Α καὶ συνεπῶς ἡ τομὴ Κ τῶν (ε_1) καὶ ΑΚ εἶναι ἡ τομὴ τῶν διχοτόμων. Ἡ ἐκ τοῦ Κ κάθετος τῇ (ε_2) εἶναι ὡς γνωστὸν διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$. Ἄρα εὑρεθέντος τοῦ Κ ὑψοῦμεν κάθετον τῇ (ε_2) καὶ εὑρίσκομεν τὸ Γ. Μὲ πλευρὰν τώρα τὴν ΑΚ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{KAB}$ ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{\Gamma AK}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε_1) τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

631) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῆς τῆς ΒΓ θέσει μεγέθει, τῆς διαφορᾶς Β—Γ=ω τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε).

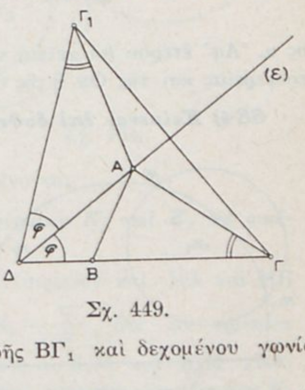
Λύσις. Ἔστω Γ_1 (σχ. 449) τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ φ ἡ γωνία τῆς ΒΓ μετὰ τῆς (ε). Ἔχομεν, ἐκ τοῦ τετραπλεύρου $\Delta BA\Gamma_1$,

$$\widehat{BA\Gamma_1}=360^\circ-2\varphi-\widehat{AB\Delta}-\widehat{A\Gamma_1\Delta}.$$

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι

$$\widehat{AB\Delta}=180^\circ-B,\ \widehat{A\Gamma_1\Delta}=\widehat{A\Gamma\Delta}=\Gamma, \text{ γίνεται}$$

$$\widehat{BA\Gamma_1}=360^\circ-2\varphi-(180^\circ-B)-\Gamma=$$
$$=180^\circ-2\varphi+B-\Gamma=180^\circ-2\varphi+\omega.$$



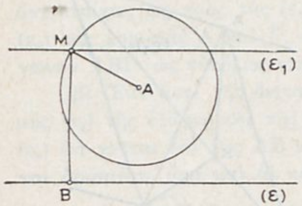
Σχ. 449.

Ἄρα ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς $B\Gamma_1$ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $180^\circ-2\varphi+\omega$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν $B\Gamma_1$ κατασκευάζομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $180^\circ-2\varphi+\omega$, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε) τὸ Α, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον πληροῦν τὰς κάτωθι συνθήκας:

632) Ἀπέχον δοθείσης εὐθείας (ε) ἀπόστασιν α καὶ δοθέντος σημείου Α ἀπόστασιν ρ.

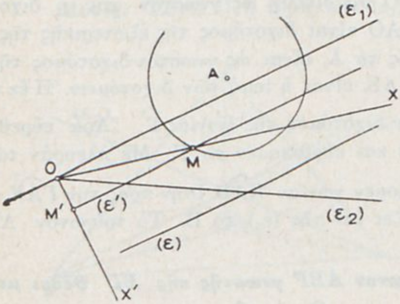


Σχ. 450.

Λύσις. Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ (σχ. 450) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ρ καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου (ε_1) πρὸς τὴν (ε), ἥτις ἀπέχει τῆς (ε) ἀπόστασιν α. (Ἡ διερεύνησις εἶναι ἁπλῆ).

633) Ἀπέχον ἰσάκις δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ ἀπόστασιν α ἀπὸ δοθείσης τρίτης εὐθείας (ε), ἢ ἀπὸ δοθέντος σημείου Α.

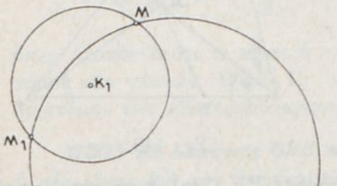
Λύσις. α) Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ (σχ. 451) ὡς ἀπέχον ἰσάκις τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου Οx τῆς γωνίας αὐτῶν (ἢ ἐπὶ τῆς διχοτόμου Οx′ τῆς παραπληρωματικῆς της). Ἀφ᾽ ἑτέρου, ἐπειδὴ ἀπέχει τῆς (ε) ἀπόστασιν α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε′) ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ (ε) καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν α. Ἄρα τὸ Μ εἶναι ἡ τομὴ τῆς (ε′) καὶ τῆς Οx ἢ τῆς Οx′. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.



Σχ. 451.

β) Ἐπειδὴ τὸ Μ ἀπέχει τοῦ Α ἀπόστασιν α θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος α. Ἀφ᾽ ἑτέρου θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς Οx, ἢ Οx′. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας καὶ τῆς Οx ἢ τῆς Οx′. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσεις.

684) Κείμενον ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_1 καὶ ἐκ τοῦ ὁποίου δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{\varphi}$.



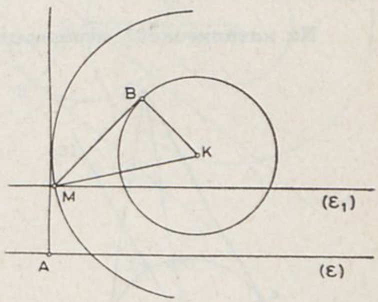
Σχ. 452.

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ (σχ. 452) βλέπει τὸ ΑΒ ὑπὸ γωνίαν $\widehat{\varphi}$ θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου περιφερείας χορδῆς ΑΒ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς φ.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τόξον $\overline{AMB}$ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς φ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ M_1, καθ᾽ ἃ τὸ τόξον τοῦτο τέμνει τὴν K_1, εἶναι τὰ ζητούμενα. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν καθ' ὅσον τὸ ἐν λόγῳ τόξον τέμνει τὴν περιφέρειαν K_1 ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς ἢ δὲν τὴν τέμνει.

635) Ἀπέχον δοθείσης εὐθείας (ε) ἀπόστασιν α καὶ ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη ἐφαπτομένη εἰς δοθέντα κύκλον K ἔχει μῆκος β.

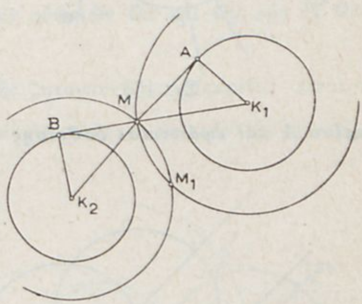
Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι ΜΑ=α (σχ. 453) τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ($ε_1$) ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (ε) καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν α. Ἐπειδὴ εἶναι ΜΒ=β, ἔνθα ΜΒ ἐφαπτομένη τῆς Κ καὶ ΚΒ=ρ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Κ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΒΚ εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς τὸ ΚΜ εἶναι σταθερόν. Ἄρα τὸ Μ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΜ. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας ταύτης καὶ τῆς ($ε_1$). Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ ($ε_1$) τέμνει ἢ ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΜ.



Σχ. 453.

436) Ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ εἰς δύο δεδομένας περιφερείας K_1 καὶ K_2 ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι νὰ ἔχουν μήκη ἀντιστοίχως α καὶ β.

Λύσις. Ἐὰν Μ (σχ. 454) εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ΜΑ καὶ ΜΒ αἱ ἐφαπτόμεναι θὰ ἔχωμεν ΜΑ=α καὶ ΜΒ=β, ὅτε τὰ τρίγωνα MAK_1 καὶ MBK_2 εἶναι κατασκευάσιμα καὶ συνεπῶς αἱ K_1M καὶ K_2M εἶναι κατὰ μέγεθος σταθεραί. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν κέντρων K_1 καὶ K_2 καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως K_1M καὶ K_2M. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον αἱ δύο αὗται περιφέρειαι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται ἢ δὲν τέμνονται.



Σχ. 454.

637) Ἐκ τοῦ ὁποίου δύο δοθεῖσαι περιφέρειαι K_1 καὶ K_2 νὰ φαίνωνται ἀντιστοίχως ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ φ.

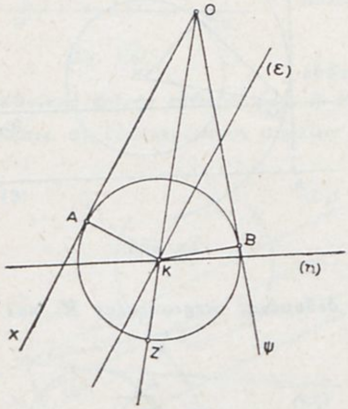
Λύσις. Ἐὰν Μ (σχ. 454) εἶναι τὸ ζητούμενεν σημεῖον καὶ ΜΑ καὶ ΜΒ αἱ ἐφαπτόμεναι, θὰ ἔχωμεν $\widehat{AMK_1}=\frac{\omega}{2}$ καὶ $\widehat{BMK_2}=\frac{\varphi}{2}$. ὅτε τὰ τρίγωνα MAK_1 καὶ MBK_2 εἶναι κατασκευάσιμα καὶ συνεπῶς αἱ K_1M καὶ K_2M εἶναι κατὰ μέγεθος σταθεραί. Ἄρα τὸ Μ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν κέντρων K_1 καὶ K_2 καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως K_1M καὶ K_2M. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον αἱ δύο αὗται περιφέρειαι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται ἢ δὲν τέμνονται.

638) Κείμενον ἐπὶ δεδομένης εὐθείας (ε) καὶ ἀπέχον ἰσάκις δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), ἢ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β.

Λύσις. α) Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι αἱ τομαὶ τῆς (ε) ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2).

β) Τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τομὴ τῆς (ε) καὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ.

Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια κύκλου ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων:



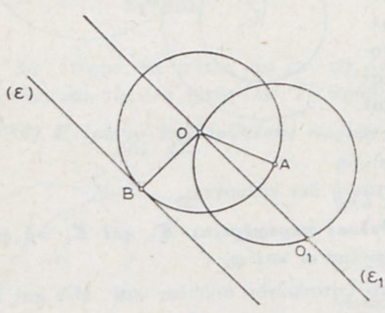
Σχ. 455.

639) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος R καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Ox καὶ Oy.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 455) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι ΚΑ=ΚΒ, τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$. Ἐπειδὴ εἶναι ΚΑ= R, τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε) παραλλήλου τῇ Οx καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν R.

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.

640) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος της R καὶ ἐκ τοῦ ὅτι διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας (ε).



Σχ. 456.

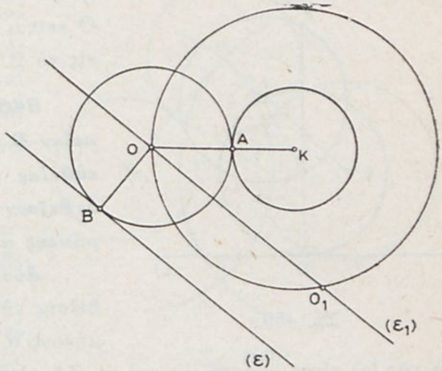
Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 456) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΑ=R, τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος R. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΒ=R, τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε_1) παραλλήλου τῇ (ε) καὶ ἀπέχουσα ταύτης ἀπόστασιν R. Ἡ τομὴ Ο ἢ O_1 τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος R καὶ τῆς εὐθείας (ε_1) εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

641) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος της R καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας Κ καὶ δοθείσης εὐθείας (ε).

Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 457) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι ΚΟ=R+ρ, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας Κ, τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου K καὶ ἀκτῖνος R+ρ. Ἐπειδὴ εἶναι OB=R, τὸ O θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε_1) ἥτις εἶναι παράλληλος τῆς (ε), καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν R. Ἄρα τὸ O εἶναι τομὴ τῆς (ε_1) καὶ τῆς περιφερείας κέντρου K καὶ ἀκτῖνος R+ρ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.



Σχ. 457.

642) Ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (η) καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Ox καὶ Oy.

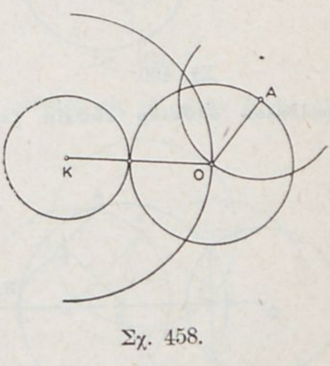
Λύσις. Τὸ κέντρον K (σχ. 455) τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι ἡ τομὴ τῆς διχοτόμου OZ τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας (η).

643) Νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Ox καὶ Oy, τῆς δὲ Ox εἰς ὡρισμένον σημεῖον A.

Λύσις. Τὸ κέντρον K (σχ. 455) τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι τομὴ τῆς διχοτόμου OZ τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν Ox εἰς τὸ A.

644) Ἐκ τῆς ἀκτῖνος R καὶ ἐκ τοῦ ὅτι διέρχεται διὰ δεδομένου σημείου A καὶ ἐφάπεεται δοθείσης περιφερείας K.

Λύσις. Ἔστω O (σχ. 458) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι KO=ρ+R, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας K, καὶ AO=R, τὸ κέντρον O τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν κέντρων K καὶ A καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως R+ρ καὶ R. Ἡ σύνθεσις καὶ ἡ διερεύνησις εἶναι ἁπλῆ.

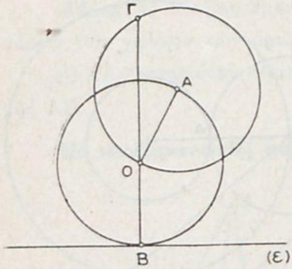


Σχ. 458.

645) Διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου A καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς σημεῖον αὐτῆς B.

Λύσις. Ἔστω O (σχ. 459) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι

AO=R, τὸ O θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου A καὶ ἀκτῖνος R. Ἐπειδὴ ἡ OB εἶναι κάθετος τῇ (ε), ἕπεται ὅτι τὸ O κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν (ε) εἰς τὸ B. Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.

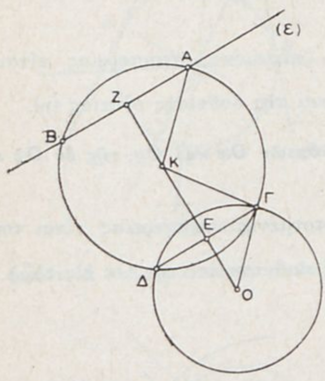


Σχ. 459.

646) Ἔχουσα κέντρον δοθὲν σημεῖον K καὶ ἀποκόπτουσα ἐπὶ δοθείσης εὐθείας χορδὴν μήκους α, ἢ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν K κατὰ χορδὴν μήκους α.

Λύσις. α) Ἀποκόπτουσα ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας (ε) (σχ. 460) χορδὴν AB μήκους α. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις KZ τοῦ K ἀπὸ τῆς (ε) εἶναι γνωστὴ ὡς καὶ τὸ ZA εἶναι γνωστὸν ὡς ἥμισυ τοῦ α, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀκτὶς KA τῆς περιφερείας εἶναι γνωστή. Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.

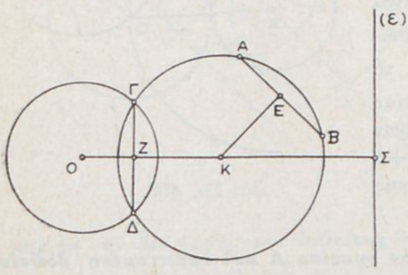
β) Τέμνουσα τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν O κατὰ χορδὴν ΓΔ μήκους α. Ἐπειδὴ ἡ KO εἶναι γνωστή, ἡ ΓE ἰσοῦται πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ καὶ ἡ OΓ εἶναι γνωστὴ ὡς ἀκτὶς τῆς O, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον KOΓ εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς ἡ ἀκτὶς KΓ τῆς ζητουμένης περιφερείας ὁρίζεται.



Σχ. 460.

647) Διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν K κατὰ χορδὴν παράλληλον δοθείσῃ εὐθεῖᾳ (ε).

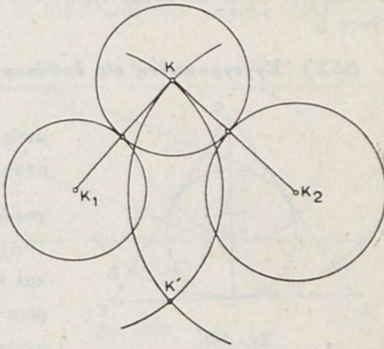
Λύσις. Τὸ κέντρον O τῆς ζητουμένης περιφερείας (σχ. 461) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου τῇ AB εἰς τὸ μέσον αὐτῆς E καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ K ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), διότι ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι παράλληλος τῇ (ε). Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.



Σχ. 461.

648) Ἔχουσα ἀκτῖνα ϱ καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 462) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι $K_1K=R_1+\rho$ καὶ $K_2K=R_2+\rho$, ἔνθα R_1 καὶ R_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν K_1 καὶ K_2, τὸ Κ θὰ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν κέντων K_1 καὶ K_2 καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως $R_1+\rho$ καὶ $R_2+\rho$. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

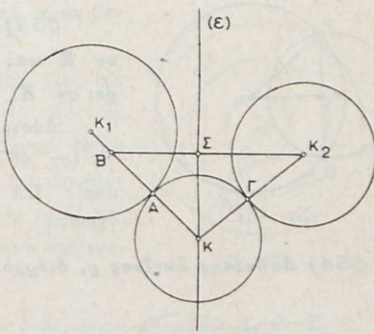


Σχ. 462.

649) Ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν K_1 καὶ K_2 τῆς δὲ K_1 εἰς ὡρισμένον σημεῖον Α.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 463) τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

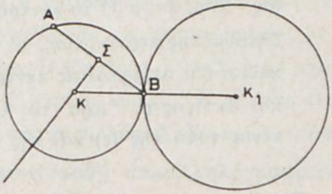
Τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας K_1A διότι ἡ διάμετρος K_1K διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς AK_1 μῆκος $AB=R_2$, ἔνθα R_2 ἡ ἀκτὶς τῆς K_2. Ἐπειδὴ εἶναι $BK=R_2+AK=KK_2$, τὸ Κ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς (ε) ἥτις ἄγεται κάθετος τῇ BK_2 εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Σ. Ἄρα τὸ Κ εἶναι τομὴ τῶν εὐθειῶν K_1A καὶ (ε).



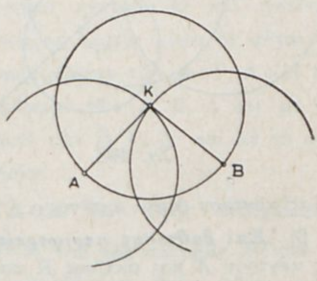
Σχ. 463.

650) Διερχομένη διὰ σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας K_1 εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Β.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 464) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Τὸ Κ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας K_1B ἀφ' ἑνὸς καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Σ τῆς ΑΒ.



Σχ. 464.

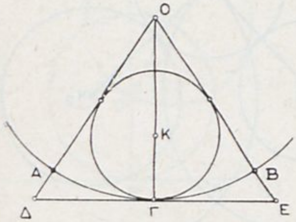


Σχ. 465.

651) Δοθείσης ἀκτῖνος ρ καὶ διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 465) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΚ=ΒΚ=ρ, τὸ Κ θὰ εἶναι τομὴ τῶν περιφερειῶν κέντρων Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνος ρ.

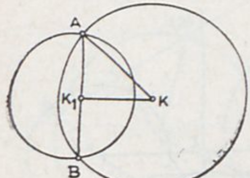
652) *Ἐγγεγραμμένη εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα.*



Σχ. 466.

Λύσις. Ἔστω ΟΑΒ ὁ κυκλικὸς τομεύς. Τὸ κέντρον Κ (σχ. 466) τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΓ τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$. Ἐὰν εἰς τὸ Γ ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη τέμνουσα τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ Δ καὶ Ε, τότε ἡ περιφέρεια Κ εἶναι ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγω-νον ΟΔΕ.

Σύνθεσις. Εἰς τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου $\overparen{AB}$ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ἥτις τέμνει τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΔΕ ἐγγράφομεν κύκλον Κ ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος.

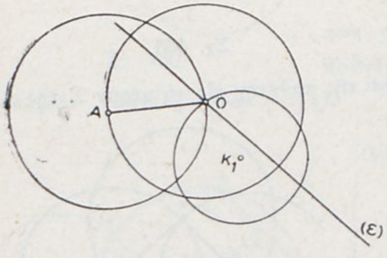


Σχ. 467.

653) *Ἔχουσα κέντρον δοθὲν σημεῖον Κ καὶ τέμνουσα δίχα δοθεῖσαν περιφέρειαν K_1.*

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $K_1A=R_1$ ἀκτὶς τῆς K_1 (σχ. 467) καὶ K_1K γνωστόν, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι γνωστή.

654) *Δοθείσης ἀκτῖνος ρ, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε), ἢ δοθείσης περιφερείας Κ.*



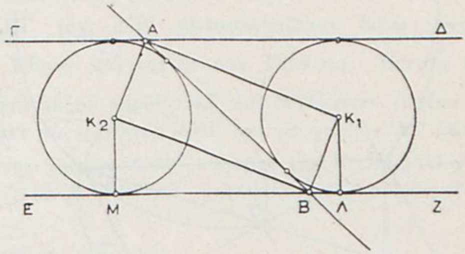
Σχ. 468.

Λύσις. α) ***Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε).*** Ἐπειδὴ εἶναι ΟΑ=ρ (σχ. 468), ἔνθα Ο τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ρ. Ἄρα τὸ Ο θὰ εἶναι τομὴ τῆς (ε) καὶ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ρ.

β) ***Ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_1.*** Τὸ Ο θὰ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος R καὶ τῆς περιφερείας K_1.

655) *Ἐφαπτομένη τριῶν εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι παράλληλοι.*

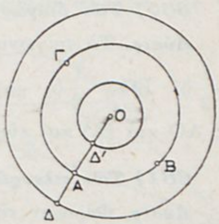
Λύσις. Ἔστωσαν ΓΔ καὶ ΕΖ (σχ. 469) αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ ΑΒ ἡ τρίτη εὐθεῖα. Ἔστωσαν $ΑΚ_1$ καὶ $ΒΚ_1$ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{ΔΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΖΒΑ}$ τεμνόμεναι εἰς τὸ $Κ_1$ καὶ $ΑΚ_2$ καὶ $ΒΚ_2$ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{ΓΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΕΒΑ}$ τεμνόμεναι εἰς τὸ $Κ_2$. Ἐπειδὴ τὰ $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ ἀπέχουν ἕκαστον ἰσάκις τῶν τριῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΑΒ καὶ ΕΖ, αἱ περιφέρειαι αἱ γραφόμεναι μὲ κέντρα τὰ $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως τὰς ἀποστάσεις $Κ_1Λ$ καὶ $Κ_2Μ$ τῶν $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ ἀπὸ τῆς ΕΖ, εἶναι αἱ ζητούμεναι.



Σχ. 469.

656) Ἀπέχουσα ἀπόστασιν α ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ.

Λύσις. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν (σχ. 470) τὴν διερχομένην διὰ τῶν Α, Β, Γ (ὑποτίθεται ὅτι τὰ Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας) καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἐπὶ τῆς ΟΑ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α τὰ ΑΔ=ΑΔ′=α καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ΟΔ καὶ ΟΔ′ γράφομεν περιφερείας αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.



Σχ. 470.

657) Ἀπέχουσα ἰσάκις τεσσάρων δεδομένων σημείων Α, Β, Γ, Δ.

Λύσις. Κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν Ο τὴν διερχομένην διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Φέρομεν τὴν ΟΔ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Τῆς ΔΕ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ζ. Ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΖ εἶναι ἡ ζητουμένη. Τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρας λύσεις εἶναι δὲ αὗται αἱ ἑξῆς· Ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως μὲ τὴν περιφέρειαν τῶν **Α**, Γ, Δ καὶ μὲ τὸ σημεῖον Β (δευτέρα λύσις), ἢ μὲ τὴν περιφέρειαν τῶν Α, Β, Δ καὶ μὲ τὸ σημεῖον Γ, (τρίτη λύσις), ἢ μὲ τὴν περιφέρειαν τῶν Β, Γ, Δ καὶ μὲ τὸ σημεῖον Α (τετάρτη λύσις). Τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν.

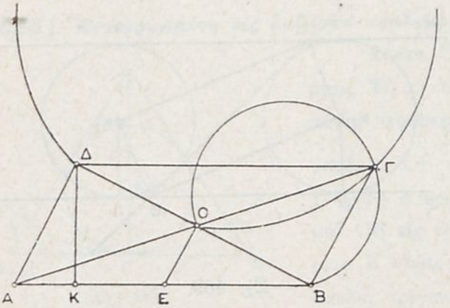
Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων:

658) Τῶν διαγωνίων του $ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$ ***καὶ τῆς πλευρᾶς*** $ΒΓ=α$.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΒΟΓ (σχ. 471) κατασκευάζεται διότι εἶναι γνωστοὶ αἱ τρεῖς πλευραί του $ΟΓ=\frac{1}{2}δ_1$, $ΟΒ=\frac{1}{2}δ_2$ καὶ $ΒΓ=α$,

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{2}(\delta_1-\delta_2)<\alpha<\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)$.

Τούτου κατασκευασθέντος διπλασιάζομεν τὰς ΒΟ καὶ ΓΟ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς κορυφὰς Δ καὶ Α.



Σχ, 471.

659) Τῶν πλευρῶν του ΑΒ=α, ΑΔ=β καὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ=δ.

Λύσις· Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 471) κατασκευάζεται ὅτε φέροντες ἐκ τῶν Α καὶ Γ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΓ καὶ ΑΒ ἔχομεν τὸ παραλληλόγραμμον.

Περιορισμός. Πρέπει $|\alpha-\beta|<\delta<\alpha+\beta$.

660) Τῶν διαγωνίων ΑΓ=δ₁, ΒΔ=δ₂ καὶ τῆς γωνίας των φ.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΑΟΒ (σχ. 471) κατασκευάζεται διότι εἶναι $AO=\frac{1}{2}\delta_1$, $BO=\frac{1}{2}\delta_2$ καὶ $\widehat{AOB}=\varphi$. Τούτου κατασκετασθέντος διπλασιάζομεν τὰς ΑΟ καὶ ΒΟ καὶ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ.

661) Τῶν πλευρῶν ΑΒ=α, ΑΔ=β καὶ τῆς γωνίας φ τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Φέρομεν τὴν ΟΕ (σχ. 471), ἔνθα Ε μέσον τῆς ΑΒ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $OE=\frac{1}{2}\cdot A\Delta=\frac{1}{2}\beta$, τὸ τρίγωνον ΑΟΒ ὡς γνωστὸν κατασκευάζεται διότι γνωρίζομεν τὴν βάσιν του ΑΒ=α τὴν εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσαν διάμεσον $OE=\frac{1}{2}\beta$ καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν $\widehat{AOB}=\varphi$. Τούτον κατασκευασθέντος διπλοσιάξομεν τὰς ΑΟ καὶ ΒΟ καὶ εὑρίσκομεν τὰ Γ καὶ Δ.

662) Τῆς διαγωνίου ΒΔ=δ₂ καὶ τῶν γωνιῶν ω καὶ φ τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΑΓ μετὰ τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΒΓ.

Λύσις. Λαμβάνομεν (σχ. 471) τὴν ΒΔ ἴσην πρὸς δ_2 καὶ μὲ χορδὰς τὰς ΒΟ καὶ ΔΟ, ἔνθα Ο μέσον τῆς ΒΔ, κατασκευάζομεν ἀντιστοίχως τόξα $\widehat{B\Gamma O}$ καὶ $\widehat{\Delta\Gamma O}$ δεχόμετα γωνίας φ καὶ ω. Τὸ σημεῖον Γ τῆς τομῆς τῶν δύο τόξων συνδεόμενον μὲ τὰ Β καὶ Δ ὁρίζει τὸ τρίγωνον ΒΓΔ. Κατασκευασθέντος τοῦ ΒΓΛ εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ παραλληλόγραμμον,

663) Ἐκ τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν καὶ τοῦ ὕψους.

Λύσις. Ἔστω ΔΚ (σχ. 471) τὸ ὕψος. Τὸ τρίγωνον ΑΔΚ κατασκευάζεται διότι γνωρίζομεν τὰ ΑΔ καὶ ΔΚ. Τούτου κατασκευασθέντος εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ παραλληλόγραμμον.

Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἔνθα ΑΒ καὶ ΓΔ αἱ βάσεις, ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων :

664) $ΑΓ=δ$, $ΓΒ=γ$, $\widehat{ΑΔΓ}=ω$, $\widehat{ΓΒΑ}=φ$.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 472) κατασκευάζεται διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ τὴν $ΑΓ=δ$, τὴν $ΓΒ=γ$ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{ΓΒΑ}=φ$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΔΓ}=ω$, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΓ καὶ δεχομένου γωνίαν ω.

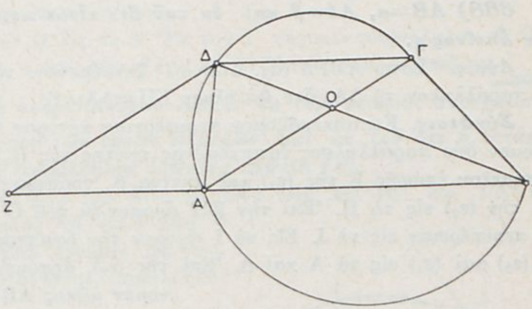
Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μὲ χορδὴν ΑΓ κατασκευάζομεν τόξον $\widehat{ΑΔΓ}$ δεχόμενον γωνίαν ω καὶ φέρομεν τὴν ΓΔ παράλληλον τῇ ΒΑ, ἥτις τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ Δ, ὅτε τὸ ζητούμενον τραπέζιον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.

665) $ΑΒ=α$, $ΓΔ=β$, $ΑΓ=δ$, $\widehat{ΓΒΑ}=ω$.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $ΑΒ=α$, $ΑΓ=δ$ καὶ $\widehat{ΓΒΑ}=ω$ (σχ. 472) τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται Τούτου κατασκευασθέντος, φέρομεν τὴν ΓΔ παράλληλον τῇ ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς μῆκος $ΓΔ=β$. Οὕτως ὁρίζεται τὸ Δ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ τραπέζιον.

666) $ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$, τῆς γωνίας φ τῶν διαγωνίων καὶ ἐκ τῆς γωνίας $\widehat{ΔΑΒ}=ω$, ἢ τοῦ σκέλους $ΑΔ=α$.

Λύσις. Φέρομεν τὴν ΔΖ (σχ. 472) παράλληλον τῇ ΓΑ, ἥτις τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ εἶναι $ΔΖ=ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$ καὶ $\widehat{ΖΔΒ}=\widehat{ΑΟΒ}=φ$, τὸ τρίγωνον ΖΔΒ κατασκευάζεται. Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΔΑΒ}=ω$, κατασκευάζομεν μὲ χορδὴν τὴν ΔΒ τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς ω. Τὸ τόξον τοῦτο ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΒΖ τὸ Α. (Ἐὰν ἀντὶ τῆς $\widehat{ΔΑΒ}$ δίδεται τὸ σκέλος $ΑΔ=α$, τότε τὸ Α ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς ΒΖ καὶ τῆς περιφερείας κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος α). Ἵνα τώρα ὁρίσωμεν τὸ Γ φέρομεν ἐκ τῶν Α καὶ Δ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΖΔ καὶ ΖΒ. Αἱ παράλληλοι αὗται τεμνόμεναι ὁρίζουν τὸ Γ.

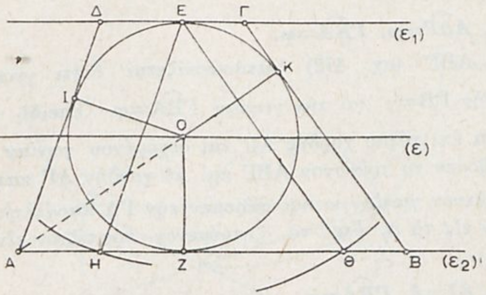


Σχ. 472.

667) $ΑΔ=γ$, $ΒΓ=δ$ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 473) τὸ ζητούμενον τραπέζιον καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἔστω Ε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ΔΓ. Φέρομεν τὰς ΕΗ καὶ ΕΘ παραλλήλους πρὸς τὰς ΔΑ καὶ ΓΒ, ὅτε θὰ εἶναι $ΕΗ=ΑΔ=γ$ καὶ $ΕΘ=ΓΒ=δ$.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος ρ καὶ φέρομεν δύο παραλλήλους ἐφαπτομένας αὐτῆςτὰς (ε_1) καὶ (ε_2). Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς (ε_1) καὶ ἀκτῖνας γ καὶ δ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν (ε_2) εἰς τὰ Η καὶ Θ. Ἐπὶ τὰς ΕΗ καὶ ΕΘ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μήκη γ καὶ δ φέρομεν ἐκ τοῦ Ο καθέτους, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ Ι καὶ Κ. Εἰς τὰ Ι καὶ Κ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΔΑ καὶ ΓΒ τῆς περιφερείας Ο καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ τραπέζιον.



Σχ. 473.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι γ, δ$\geqslant$2ρ. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσις διότι ἑκάστη τῶν περιφερειῶν κέντρου Ε καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως γ καὶ δ τέμνει τὴν (ε_2) ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα.

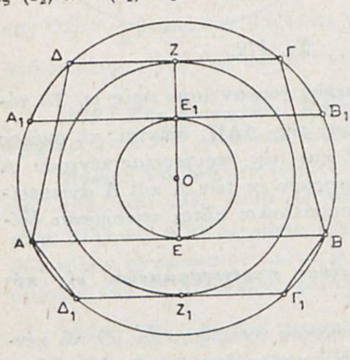
668) ΑΒ=α, ΑΔ=β καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι περιγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 473) τὸ ζητούμενον τραπέζιον. Φέρομεν τὴν ΕΗ παράλληλον τῇ ΔΑ, ὅτε θὰ εἶναι ΕΗ=ΔΑ=β.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ρ καὶ φέρομεν δύο παραλλήλους ἐφαπτομένας ταύτης τὰς (ε_1) καὶ (ε_2). Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Ε τῆς (ε_1) καὶ ἀκτῖνα β γράφομετ περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν (ε_2) εἰς τὸ Η. Ἐπὶ τὴν ΕΗ ἄγομεν ἐκ τοῦ Ο κάθετον, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ι. Εἰς τὸ Ι ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ ἥτις τέμνει τὰς (ε_2) καὶ (ε_1) εἰς τὰ Α καὶ Δ. Ἐπὶ τῆς (ε_2), ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Α, λαμβάνομεν μῆκος ΑΒ=α καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν (ε_1) εἰς τὸ Γ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

Περιορισμός. β$\geqslant$2ρ καὶ α>ΑΖ.

669) ΑΒ=α, ΓΔ=β καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R.



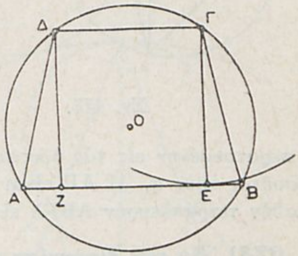
Σχ. 474.

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΔΓ (σχ. 474) εἶναι γνωσταὶ θὰ εἶναι γνωσταὶ καὶ αἱ ἀποστάσεις των ΟΕ καὶ ΟΖ ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Σύνθεσις. Γράφομεν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος R καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ΟΕ καὶ ΟΕ γράφομεν περιφερείας. Διὰ τοῦ Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἥτις τέμνει τὰς δύο αὐτὰς περιφερείας εἰς τὰ Ε καὶ $Ε_1$ τὴν μίαν καὶ εἰς τὰ Ζ καὶ $Ζ_1$ τὴν ἄλλην. Εἰς τὰ Ε, $Ε_1$, Ζ καὶ $Ζ_1$ φέρομεν ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, ΑΒ, $Α_1Β_1$, ΓΔ, $Γ_1Δ_1$. Τὰ τραπέζια ΑΒΓΔ, $ΑΒΓ_1Δ_1$, $Α_1Β_1ΓΔ$ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

670) ΑΒ—ΓΔ=δ, ἐκ τοῦ ὕψους υ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι εἶναι τοῦτο ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Λύσις. Ἐφ' ὅσον (σχ. 475) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον θὰ εἶναι ἰσοσκελές. Ἔστω $ΓΕ=υ_α$ τὸ ὕψος. Ἐπειδὴ εἶναι 2ΕΒ=ΑΒ—ΓΔ=δ θὰ ἔχωμεν $ΕΒ=\frac{δ}{2}$ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΓΕΒ κατασκευάζεται. Ἄρα ἡ ΓΒ εἶναι γνωστή.



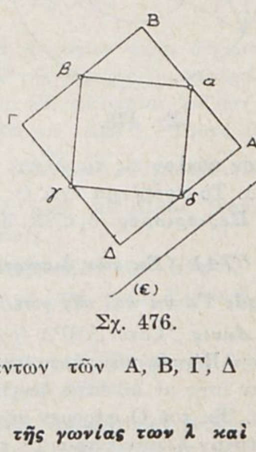
Σχ. 475.

Σύνθεσις. Ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον τὸ τραπέζιον, λαμβάνομεν χορδὴν ΓΒ (ἥτις εἶναι γνωστὴ διότι τὸ τρίγωνον ΓΕΒ ὡς ἐλέχθη κατασκευάζεται). Ἐπειδὴ εἶναι $ΓΕ=υ_α$, μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα $υ_α$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ ΒΕ ἥτις τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Α. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΑ, ἥτις τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Δ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τραπέζιον.

Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων:

671) Ἐκ τῶν μέσων τῶν τριῶν πλευρῶν καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ τετάρτη πλευρὰ μήκους $δ_1$ εἶναι παράλληλος δοθείσῃ εὐθεῖα (ε).

Λύσις. Ἔστωσαν α, β, γ (σχ. 476) τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΔ καὶ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῇ (ε). Ἐὰν δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΑ θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν ὅτι τὸ σχῆμα αβγδ εἶναι παραλληλόγραμμον.

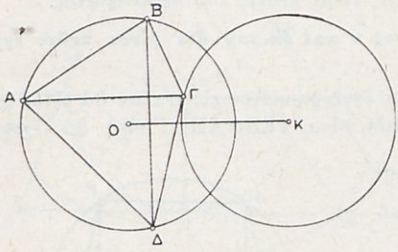


Σχ. 476.

Σύνθεσις. Ἐκ τῶν α καὶ γ φέρομεν ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς βγ καὶ βα. Αἱ παράλληλοι αὗται ὁρίζουν τὸ δ. Διά τοῦ δ φέρομεν παράλληλον τῇ (ε) καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς $δΔ=δΑ=\frac{1}{2}δ_1$. Φέρομεν τὰς Αα καὶ Δγ τὰς ὁποίας προεκτείνομεν κατὰ ἴσα μήκη καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὰ Β καὶ Γ. Ἡ ΒΓ, ὡς εὐκόλως φαίνεται, διέρχεται διὰ τοῦ β καὶ διχοτομεῖται ὑπ' αὐτοῦ. Οὕτως ὁρισθέντων τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁρίσθη καὶ τὸ τετράπλευρον.

672) Ἐκ τῶν διαγωνίων $ΑΓ=δ_1$, $ΒΔ=δ_2$ τῆς γωνίας των λ καὶ τῶν γωνιῶν του $\widehat{ΒΑΔ}=ω$ καὶ $\widehat{ΑΒΓ}=φ$.

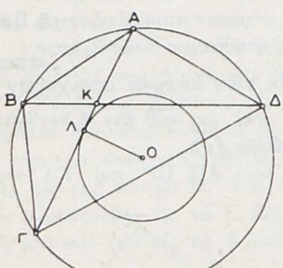
Λύσις. Λαμβάνομεν τὴν $Β Δ = δ_2$ (σχ. 477) καὶ μὲ χορδὴν ταύτην γράφομεν τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην μὲ ω, ἔστω δὲ Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον τοῦτο. Φέρομεν ἐκ τοῦ Ο τὴν ΟΚ ἴσην πρὸς $δ_1$ καὶ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΔ γωνίαν λ. Μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν τῆς Ο γράφομεν περιφέρειαν, ὅτε, ὡς γνωστόν, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΟΚ καὶ περατουμένη εἰς τὰς δύο περιφερείας Ο καὶ Κ ἔχει μῆκος $δ_1$. Μετὰ ταῦτα φέρομεν μίαν εὐθεῖαν τὴν ΑΓ παράλληλον τῇ ΟΚ περατουμένην εἰς τὰς δύο περιφερείας καὶ τοιαύτην ὥστε ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ νὰ ἰσοῦται πρὸς φ. Ἡ ΑΓ εἶναι ἡ θέσις τῆς δευτέρας διαγωνίου, τὸ δὲ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 477.

673) Ἐκ τῶν διαγωνίων του $ΑΓ = δ_1$, $ΒΔ = δ_2$ τῆς γωνίας αὐτῶν λ καὶ τοῦ ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 478) τὸ τετράπλευρον. Δίδονται $ΑΓ = δ_1$, $ΒΔ = δ_2$, $\widehat{ΓΚΔ} = λ$ καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐπειδὴ ἡ ΑΓ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ ἀπόστασις τῆς ΟΛ ἀπὸ τοῦ κέντρου θὰ εἶναι γνωστή. Ἄρα ἡ ΑΓ θὰ ἐφάπτεται κύκλου κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΛ.



Σχ. 478.

Σύνθεσις. Γράφομεν δύο κύκλους κέντρου Ο καὶ ἀκτίνων R καὶ ΟΛ. Τοῦ πρώτου φέρομεν χορδὴν ΒΔ μήκους $δ_2$ καὶ τοῦ δευτέρου φέρομεν ἐφαπτομένην ΑΓ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΔ γωνίαν λ, ἥτις τέμνει τὸν πρῶτον κύκλον εἰς τὰ Α καὶ Γ, ὅτε τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

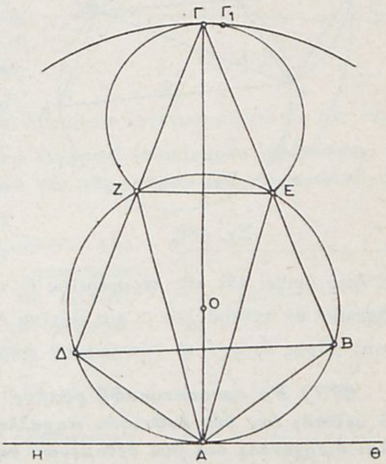
Περιορισμός. $δ_1 \leqslant 2R$, $δ_2 \leqslant 2R$.

674) Ἐκ τῶν διαγωνίων του $ΑΓ = δ_1$, $ΒΔ = δ_2$, τῆς γωνίας των λ, τῆς πλευρᾶς $ΓΔ = α$ καὶ τῆς γωνίας $\widehat{ΒΑΔ} = ω$.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 477) τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Λαμβάνομεν τὴν $ΒΔ = δ_2$ καὶ μὲ ταύτην ὡς χορδὴν γράφομεν τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην μὲ ω, ἔστω δὲ Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει τὸ τόξον τοῦτο. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν ΟΚ ἴσην πρὸς $δ_1$ καὶ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΒΔ γωνίαν λ, μὲ κέντρον δὲ τὸ Κ γράφομεν περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὴν Ο, ὅτε, ὡς γνωστόν, πᾶσα εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΟΚ περατουμένη εἰς τὰς δύο περιφερείας ἔχει μῆκος ΟΚ=δ_1. Μετὰ ταῦτα, ἐπειδὴ εἶναι ΓΔ=α, μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τάμῃ τὴν Ο εἰς τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΑ παράλληλον τῇ ΟΚ, ἥτις τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Α. Οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

675) Ἐκ τῶν διαγωνίων του ΑΓ=δ_1, ΒΔ=δ_2 καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν του Α, Β, Γ, Δ.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 479) τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Ἔστω ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ τέμνων τὰς ΔΓ καὶ ΒΓ εἰς τὰ Ζ καὶ Ε καὶ ΗΑ ἡ ἐφαπτσμένη αὐτοῦ εἰς τὸ Α. Θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΗΑΕ}=\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{ΘΑΖ}=\widehat{Δ}$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΖΓΕ}=\widehat{Γ}$ (γνωστὴ) καὶ ΑΓ=δ_1 τὸ σημεῖον Γ θὰ εἶναι τομὴ τοῦ τόξου χορδῆς ΖΕ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{Γ}$ καὶ τοῦ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος δ_1.



Σχ. 479.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸν κύκλον Ο καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΗΑΘ καὶ κατασκευάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{ΗΑΕ}$ καὶ $\widehat{ΘΑΖ}$ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Δ}$.

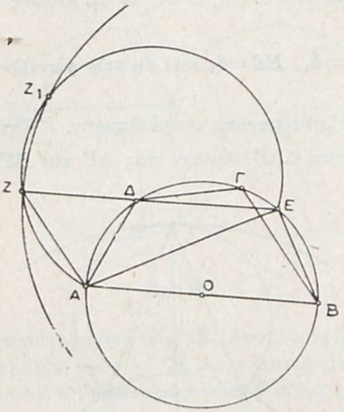
Αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΑΖ τῶν γωνιῶν αὐτῶν ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Μὲ χορδὴν τὴν ΕΖ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς Γ. Τὸ τόξον τοῦτο τέμνεται ὑπὸ τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος δ_1 εἰς τὰ Γ καὶ $Γ_1$. Φέρομεν τὰς ΓΖ καὶ ΓΕ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς Ο τὰ Δ καὶ Β καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον διότι εἶναι ΑΓ=δ_1, $\widehat{ΔΓΒ}=\widehat{Γ}$, $\widehat{ΓΔΑ}=\widehat{ΖΑΘ}=\widehat{Δ}$, $\widehat{ΓΒΑ}=\widehat{ΕΑΗ}=\widehat{Β}$ καὶ ΒΔ=δ_2 καθ' ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΔΑΒ}$ ἰσοῦται πρὸς Α διότι αἱ ἄλλαι ἰσοῦνται πρὸς Β, Γ, Δ. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

Σημ. Ὁ κύκλος Ο κατασκευάζεται οὕτω. Λαμβάνομεν τὴν ΒΔ=δ_2 καὶ γράφομεν μὲ χορδὴν ταύτην τόξον δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς Α, ὅτε ὁ κύκλος τοῦ τόξου αὐτοῦ εἶναι ὁ Ο.

676) Ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ, ἐκ τῆς πλευρᾶς του ΔΓ=α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον διαμέτρου ΑΒ=2R.

Λύσις. Ἔχομεν ΑΔ+ΒΓ=2τ−2R−α (σχ. 480). Λαμβάνομεν χορδὴν ΒΕ ἴσην πρὸς ΓΔ, ὅτε εἶναι ΔΕ=ΒΓ καὶ συνεπῶς ΑΔ+ΔΕ=ΑΔ+ΒΓ=2τ−2R+α, Ἀφοῦ ἡ χορδὴ ΒΕ εἶναι γνωστὴ θὰ εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ τόξον $\widehat{ΑΔΕ}$ καὶ συνεπῶς καὶ ἡ γωνία $\widehat{A\Delta E}$. Θέτομεν $\widehat{A\Delta E}=\omega$. Προεκτείνομεν τὴν ΕΔ λαμβάνοντες $\Delta Z = A\Delta$, ὅτε ἔχομεν

$$EZ = E\Delta + \Delta Z = E\Delta + A\Delta = 2\tau - 2R - \alpha.$$



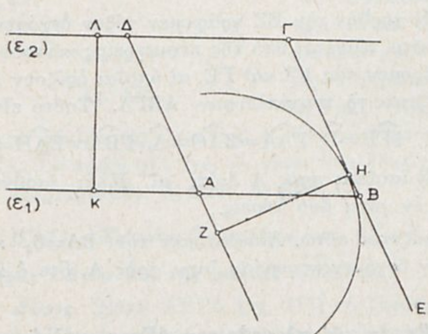
Σχ. 480.

Ἡ γωνία $\widehat{EZA}$ εἶναι γνωστὴ ὡς ἴση πρὸς $\frac{1}{2}\widehat{A\Delta E}=\frac{1}{2}\omega$. Ἄρα τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΕ καὶ δεχομένου γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὴν χορδὴν $BE=\alpha$ καὶ μὲ χορδὴν τὴν ΑΕ γράφομεν τόξον $\widehat{AZE}$ δεχόμενον γωνίαν $\frac{1}{2}\omega$. Ἐπειδὴ εἶναι $EZ = 2\tau - 2R - \alpha$, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα $2\tau - 2R - \alpha$ περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὸ τόξον $\widehat{AZE}$ εἰς τὰ Ζ καὶ Z_1. Φέρομεν τὴν ΖΕ ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο τὸ σημεῖον Δ. Ἐπειδὴ εἶναι $\Delta\Gamma=\alpha$ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα α περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Γ καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Ἑτέραν λύσιν δίδει τὸ Z_1.

677) Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), αἱ δὲ δύο ἄλλαι διέρχονται διὰ δύο δεδομένων σημείων Ε καὶ Ζ.

Λύσις. Ἔστω $K\Lambda=\lambda$ (σχ. 481) ἡ ἀπόστασις τῶν (ε_1) καὶ (ε_2). Ὡς γνωστὸν, ἡ ἀπόστασις τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ. Ἐὰν συνεπῶς ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος τῇ ΒΓ, θὰ εἶναι $ZH = K\Lambda = \lambda$. Ἄρα ἡ ΕΒ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Ζ καὶ ἀκτῖνος λ (περιορισμὸς $ZE \geqslant \lambda$).

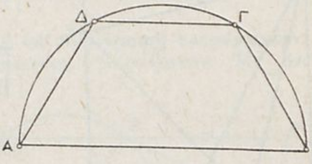


Σχ. 481.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα λ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Ε φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΕΗ, ἥτις τέμνει τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) εἰς τὰ Β καὶ Γ. Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΓ, ἥτις τέμνει τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) εἰς τὰ Α καὶ Δ. Οὕτω κατασκευάσθη ὁ ζητούμενος ρόμβος. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

678) Ποῖον ἐκ τῶν τετραπλεύρων ΑΒΓΔ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΒ=2R ἔχει τὴν μεγίστην περίμετρον;

Λύσις. Ὑποτιθεμένου τοῦ Δ (σχ. 482) σταθεροῦ, ἵνα τὸ ἄθροισμα ΔΓ+ΒΓ εἶναι μέγιστον, πρέπει τὸ Γ νὰ εἶναι μέσον τοῦ τόξου $\widehat{ΔΒ}$ ἤτοι πρέπει(1) νὰ εἶναι ΔΓ=ΒΓ. Ἐὰν τὸ Γ εἶναι σταθερόν, ἵνα τὸ ΑΔ+ΔΓ εἶναι μέγιστον πρέπει ὁμοίως ΑΔ=ΔΓ. Ἄρα ἵνα τὸ ΑΔ+ΔΓ+ΓΒ γίνῃ μέγιστον πρέπει νὰ εἶναι ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ.

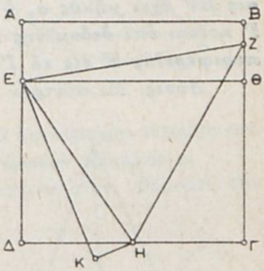


Σχ. 482.

Σύνθεσις. Διαιροῦμεν τὸ τόξον $\widehat{ΑΒ}$ εἰς τρία ἴσα μέρη. Τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μετὰ τῶν Α καὶ Β εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου μεγίστης περιμέτρου. Προφανῶς τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ἥμισυ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

679) Εἰς τετράγωνον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἔχον μίαν κορυφήν του εἰς δοθὲν σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου, ἢ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ τετραγώνου.

Λύσις. α) Ἔστω Ε τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς περιμέτρου καὶ ΕΖΗ (σχ. 483) τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ΕΘ κάθετος τῇ ΒΓ. Μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΕΗ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΚΗ ἴσον πρὸς τὸ ΕΘΖ. Ἔχομεν $Ζ\widehat{Ε}Δ=Ζ\widehat{Ε}Θ+90^0$ καὶ $Ζ\widehat{Ε}Δ=Ζ\widehat{Ε}Η+Η\widehat{Ε}Κ+Κ\widehat{Ε}Δ=$ $=60^0+Η\widehat{Ε}Κ+Κ\widehat{Ε}Δ$. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν $Ζ\widehat{Ε}Θ+90^0=60^0+Η\widehat{Ε}Κ+Κ\widehat{Ε}Δ$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $Ζ\widehat{Ε}Θ=Η\widehat{Ε}Κ$, ἔχομεν $Κ\widehat{Ε}Δ=30^0$.



Σχ. 483.

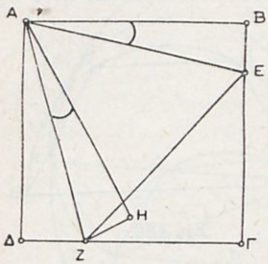
Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν τὴν ΕΔ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $Δ\widehat{Ε}Κ=30^0$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΕΚ μῆκος ΕΚ=ΕΘ. Εἰς τὸ Κ ὑψοῦμεν κάθετον τῇ ΕΚ, ἥτις τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ Η καὶ οὕτως ὁρίζεται ἡ πλευρὰ ΕΗ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα ΕΗ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΓΒ τὸ Ζ, ὅπερ συνδεόμενον μὲ τὸ Η δίδει τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον ΕΗΖ.

---

1) Τοῦτο φαίνεται ὡς ἑξῆς. Προεκτείνομεν τὴν ΔΓ κατὰ ΓΕ=ΓΒ, ὅτε $Δ\widehat{Ε}Β=\frac{1}{2}Β\widehat{Γ}Δ$. Ἄρα τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΔ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}Β\widehat{Γ}Δ$. Ἵνα συνεπῶς τὸ ΔΓ+ΓΒ=ΔΕ γίνῃ μέγιστον, θὰ πρέπει ἡ ΔΕ νὰ γίνῃ διάμετρος τῆς περιφερείας αὐτῆς. Ὅταν ὅμως ἡ ΔΕ γίνῃ διάμετρος τὸ τρίγωνον ΔΒΕ γίνεται ὀρθογώνιον καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=ΓΕ, ἡ ΒΓ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ. Ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=ΓΕ=ΔΓ, ἤτοι τὸ Γ θὰ εἶναι μέσον τοῦ τόξου ΔΕ.

β) Ἔ ΑΖΕ (σχ. 484) τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ΑΖ κατασκευάζομεν τρίγωνον ΑΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΒΑΕ, ὅτε εἶναι $B\widehat{A}E=H\widehat{A}Z$.

Ἔχομεν $E\widehat{A}\Delta=90^0-B\widehat{A}E$ καὶ $E\widehat{A}\Delta=E\widehat{A}Z-H\widehat{A}Z+H\widehat{A}\Delta$.



Σχ. 484.

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν

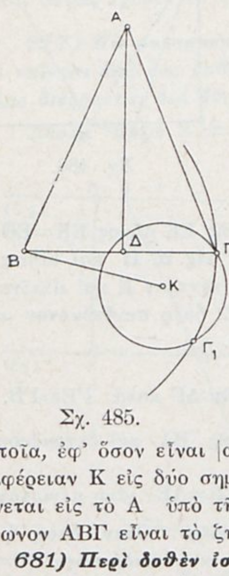
$$90^0-B\widehat{A}E=E\widehat{A}Z-H\widehat{A}Z+H\widehat{A}\Delta,$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $E\widehat{A}Z=60^0$, προκύπτει $H\widehat{A}\Delta=30^0$.

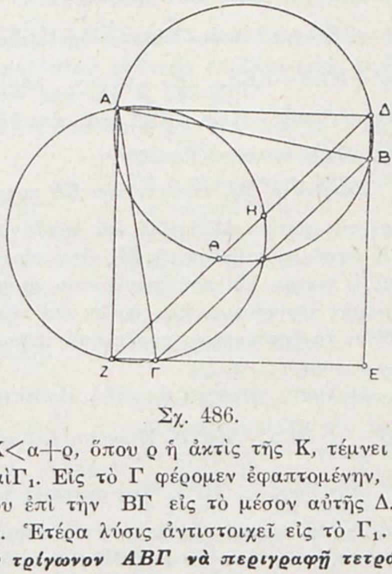
Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΔ κατασκευάζομεν γωνίαν $H\widehat{A}\Delta=30^0$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΗ λαμβάνομεν ΑΗ=ΑΒ. Εἰς τὸ Η ὑψοῦμεν κάθετον τῇ ΑΗ, ἥτις τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ Ζ καὶ οὕτως ὁρίζεται ἡ πλευρὰ ΑΖ τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΖ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, τὸ ὁποῖον συνδεόμενον μὲ τὰ Α καὶ Ζ δίδει τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

680) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ ἔχει μῆκος α, ἡ κορυφὴ Β εἶναι ὡρισμένη κατὰ θέσιν, ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ δεδομένης περιφερείας Κ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ Γ.

Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ Β (σχ. 485) καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν,



Σχ. 485.



Σχ. 486.

ἡ ὁποία, ἐφ' ὅσον εἶναι $|\alpha-\rho|<BK<\alpha+\rho$, ὅπου ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Κ, τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ_1. Εἰς τὸ Γ φέρομεν ἐφαπτομένην, ἥτις τέμνεται εἰς τὸ Α ὑπὸ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Δ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἑτέρα λύσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Γ_1.

681) Περὶ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου.

Λύσις. Ἔστω ΑΔΕΖ τὸ τετράγωνον (σχ. 486). Μὲ διαμέτρους ΑΒ καὶ

ΑΓ γράφομεν περιφερείας τὰς ὁποίας ἡ ΔΖ τέμνει εἰς τὰ Θ καὶ Η. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΔΖ}=\widehat{ΒΔΖ}=\widehat{ΑΖΔ}=\widehat{ΓΖΔ}=45^0$, θὰ ἔχωμεν τόξ.ΑΘ=τόξ.ΒΘ καὶ τόξ.ΑΗ=τόξ.ΓΗ.

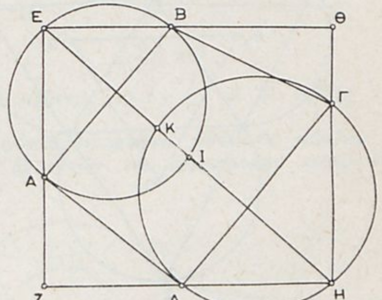
Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὰ μέσα Θ καὶ Η τῶν ἡμικυκλίων ΑΘΒ καὶ ΑΗΓ διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἡ ΘΗ τέμνει τὰς περιφερείας τῶν ἡμικυκλίων αὐτῶν εἰς τὰ Δ καὶ Ζ. Φέρομεν τὰς ΑΔ, ΔΒ, ΑΖ καὶ ΖΓ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

682) Περὶ δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

Λύσις. Ἔστω ΕΖΗΘ (σχ. 487) τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Μὲ διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ γράφομεν περιφερείας αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς διαγωνίου ΕΗ εἰς τὰ Ι καὶ Κ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΕΗ}=\widehat{ΖΕΗ}=\widehat{ΖΗΚ}=\widehat{ΘΗΚ}=45^0$, θὰ ἔχωμεν

τόξ.ΑΙ=τόξ.ΒΙ καὶ τόξ.ΓΚ=τόξ.ΔΚ.

Σύνθεσις. Μὲ διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ γράφομεν περιφερείας καὶ λαμβάνομεν τὰ μέσα Ι καὶ Κ τῶν ἡμικυκλίων ΑΙΒ καὶ ΓΚΔ. Φέρομεν τὴν ΙΚ ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας εἰς τὰ Ε καὶ Η. Φέρομεν τὰς ΕΒ, ΕΑ, ΗΔ καὶ ΗΓ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ ΕΖΗΘ τὸ ὁποῖον, ὡς εὐκόλως φαίνεται, εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

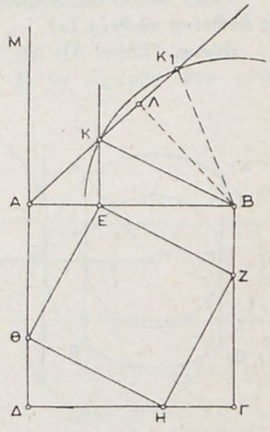


Σχ. 487.

683) Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον πλευρᾶς α.

Λύσις. Ἔστω ΕΖΗΘ (σχ. 488) τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Φέρομεν τὴν ΒΚ ἴσην πρὸς α καὶ παράλληλον τῇ ΕΖ, ὅτε τὸ σχῆμα ΚΕΖΒ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ ΚΕ εἶναι κάθετος τῇ ΑΒ καὶ ἴση τῇ ΒΖ. Ἐπειδή, λόγῳ τῶν ἴσων τριγώνων ΕΒΖ καὶ ΕΑΘ, εἶναι ΑΕ=ΒΖ, θὰ ἔχωμεν ΑΕ=ΕΚ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{ΚΑΕ}=45^0$.

Σύνθεσις. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν $\widehat{ΜΑΒ}$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν διχοτόμον εἰς τὰ Κ καὶ $Κ_1$. Φέρομεν τὴν ΚΕ κάθετον τῇ ΑΒ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Ε. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΚΒ, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐπὶ τὴν ΕΖ ὑψοῦμεν εἰς τὰ Ε καὶ Ζ καθέτους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΔ καὶ ΔΓ εἰς τὰ Θ καὶ Η. Τὸ τετράπλευρον ΕΘΗΖ τὸ ὁποῖον, λόγῳ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΕΘ, ΕΒΖ καὶ ΖΗΓ, εἶναι τετράγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι λόγῳ τοῦ παραλληλογράμμου ΚΕΖΒ εἶναι ΚΒ=ΕΖ=α. Ἑτέρα λύσις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $Κ_1$.

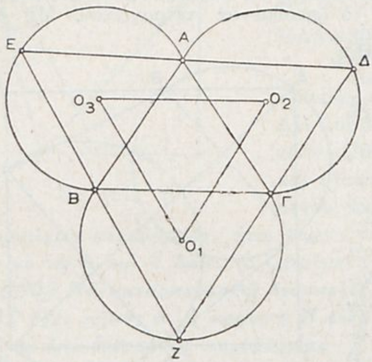


Σχ. 488.

Διερεύνησις Ἐὰν ἡ ΒΛ εἶναι κάθετος τῇ διχοτόμῳ, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν πρέπει ΒΛ⩽α<ΒΑ.

684) Περὶ δοθὲν τρίγωνον νὰ περιγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τοιαῦτα καὶ νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἐξ αὐτῶν ἔχει τὴν μεγίστην περίμετρον.

Λύσις. α) Ἔστω ΔΕΖ (σχ. 489) τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τὰ Ζ, Δ καὶ Ε κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν τόξων τῶν γραφομένων μὲ χορδὰς ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ καὶ δεχομένων γωνίας 60°.



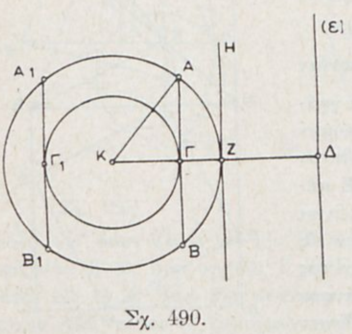
Σχ. 489.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὰς ΒΓ καὶ ΓΑ γράφομεν τόξα δεχόμενα γωνίας 60°. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ἥτις τέμνει τὰ τόξα ἔστω εἰς τὰ Ζ καὶ Δ. Φέρομεν τὰς ΖΒ καὶ ΔΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΑΔΓ}=\widehat{ΒΖΓ}=60°$, τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ἰσόπλευρον. Ὑπάρχουν ἄπειρα τοιαῦτα διότι διὰ τοῦ Γ ἄγονται ἄπειραι εὐθεῖαι.

β) Ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν τριῶν τόξων. Ὡς εὐκόλως φαίνεται τὸ τρίγωνον $O_1O_2O_3$ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν διὰ τοῦ Γ διερχομένων χορδῶν ΔΖ μεγίστη, ὡς γνωστόν, εἶναι ἡ παράλληλος τῷ O_1O_2, ἕπεται ὅτι τὸ μεγίστης περιμέτρου τριγώνον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ΔΖ ὅταν αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ O_1O_2.

685) Δοθέντος κύκλου Κ νὰ εὑρεθῇ χορδὴ αὐτοῦ μήκους α παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ (ε).

Λύσις. Ἔστω ΑΒ (σχ. 490) ἡ ζητουμένη χορδή. Ἐπειδὴ εἶναι ΚΑ=ρ καὶ $ΑΓ=\frac{α}{2}$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Κ, τὸ τρίγωνον ΚΑΓ εἶναι κατασκευάσιμον καὶ συνεπῶς ἡ ΚΓ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος. Ἄρα ἡ ΑΒ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΓ.



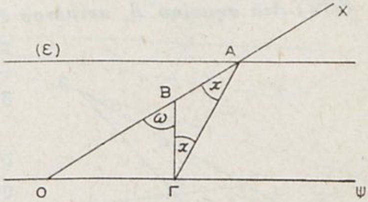
Σχ. 490.

Σύνθεσις. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΓ. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν κάθετον ΚΔ τῇ (ε), ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τὸ Γ. Ἐπὶ τὴν ΚΔ ὑψοῦμεν εἰς τὸ Γ κάθετον ἥτις ὁρίζει τὴν ζητουμένην χορδήν.

Περιορισμός. Πρέπει α<2ρ ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις τὰς ΑΒ καὶ A_1B_1. Ἐὰν α=2ρ, ἔχομεν μίαν λύσιν τὴν ἐκ τοῦ Κ παράλληλον τῇ (ε).

686) Δεδομένων γωνίας xoy καὶ σημείου A κειμένου ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ox, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ἰδίας πλευρᾶς σημεῖον B ἰσάκις ἀπέχον τοῦ A καὶ τῆς πλευρᾶς oy.

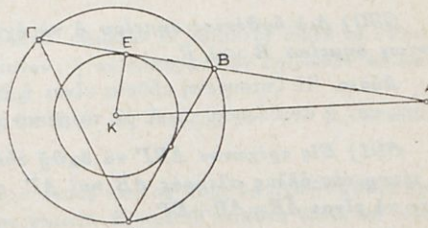
Λύσις. Ἔστω ΒΓ (σχ. 491) ἡ ἀπόστασις τοῦ Β ἀπὸ τῆς oy. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{\omega}=2\widehat{x}$, ἢ $90^0-\widehat{o}=2\widehat{x}$, ἢ $\widehat{x}=45^0-\frac{\widehat{o}}{2}$. Μὲ πλευρὰν ΟΑ καὶ κορυφὴν τὸ Α κατασκευάζομεν $O\widehat{A\Gamma}=x=45^0-\frac{\widehat{o}}{2}$, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα πλευρὰ ὁρίζει τὸ Γ. Ἡ κάθετος τῇ oy εἰς τὸ Γ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ox τὸ Β.



Σχ. 491.

687) Διὰ σημείου A νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα δοθέντα κύκλον K εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε εἰς τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν νὰ ἐγγράφεται γωνία ἴση πρὸς φ.

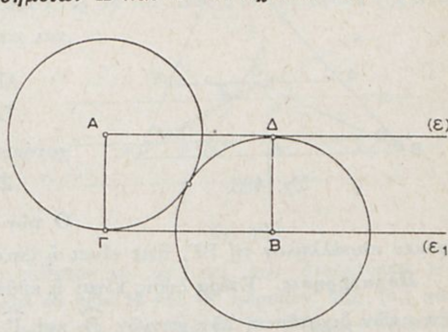
Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα (σχ. 492) τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι $\Gamma\widehat{\Delta}B=\varphi$. Ἐπειδὴ εἶναι $\Gamma\widehat{\Delta}B=\varphi$, ἡ ΒΓ θὰ ἔχῃ σταθερὸν μέγεθος καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἀπόστασίς της ΚΕ ἀπὸ τοῦ Κ θὰ ἔχῃ σταθερὸν μέγεθος. Ἄρα ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΑΒΓ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ΚΕ. Διὰ $\varphi \gtrless 90^0$ ἔχομεν δύο λύσεις καὶ διὰ $\varphi=90^0$ μίαν.



Σχ. 492.

688) Διὰ δύο δεδομένων σημείων A καὶ B νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἀπέχουσαι ἀπόστασιν α.

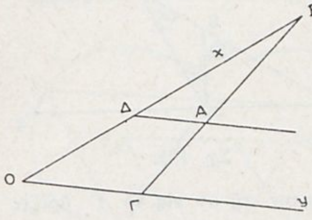
Λύσις. Ἔστωσαν (ε) καὶ (ε_1) (2χ. 493) αἱ εὐθεῖαι καὶ ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπ᾽ αὐτῶν. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ΒΔ=α, ἡ (ε_1) θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος α καὶ ἡ (ε) τοῦ κύκλου κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος α.



Σχ. 493.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρα Α καὶ Β γράφομεν περιφερείας ἀκτῖνος α καὶ ἐκ τοῦ Β φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς πρώτης καὶ ἐκ τοῦ Α τῆς δευτέρας, τὰς ΒΓ καὶ ΑΔ αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι, διότι τὸ σχῆμα ΑΔΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, καθότι εἶναι ΑΓ=ΒΔ=α καὶ $\widehat{ΑΔΒ}=\widehat{ΑΓΒ}=90^0$.

689) Διὰ σημείου Α, κειμένου ἐντὸς γωνίας $\widehat{xoy}$, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον τμῆμα νὰ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Α.



Σχ. 494.

Λύσις. Ἔστω ΒΑΓ (σχ. 494) ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Φέρομεν τὴν ΑΔ παράλληλον τῇ οy, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΓΑ=ΑΒ θὰ εἶναι καὶ ΟΔ=ΔΒ.

Σύνθεσις Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ΑΔ παράλληλον τῇ οy καὶ εὑρίσκομεν τὸ Δ ἐπὶ τῆς οx καὶ λαμβάνομεν ΔΒ=ΟΔ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸ Β, τὸ ὁποῖον συνδεόμενον μὲ τὸ Α δίδει τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν.

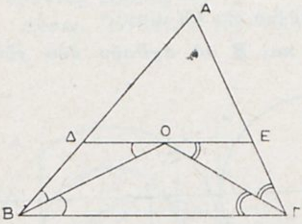
690) Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἴσον ἀπέχουσα δύο δοθέντων σημείων Β καὶ Γ.

Λύσις. Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΓ ὡς ἐπίσης καὶ ἡ συνδέουσα τὸ Α μὲ τὸ μέσον τῆς ΒΓ.

691) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ, ὥστε νὰ τέμνῃ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΔΒ+ΕΓ.

Λύσις. Λαμβάνομεν ΔΟ=ΔΒ (σχ. 495) ὅτε θὰ εἶναι ΕΟ=ΕΓ. Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΒΔΟ καὶ ΓΕΟ, λαμβάνομεν $\widehat{ΔΟΒ}=\widehat{ΔΒΟ}$ καὶ $\widehat{ΓΟΕ}=\widehat{ΟΓΕ}$, ὅτε, ἐπειδὴ λόγῳ τῶν παραλλήλων εἶναι καὶ $\widehat{ΔΟΒ}=\widehat{ΟΒΓ}$, προκύπτει

$$\widehat{ΔΒΟ}=\widehat{ΓΒΟ} \text{ καὶ } \widehat{ΕΓΟ}=\widehat{ΒΓΟ}.$$



Σχ. 495.

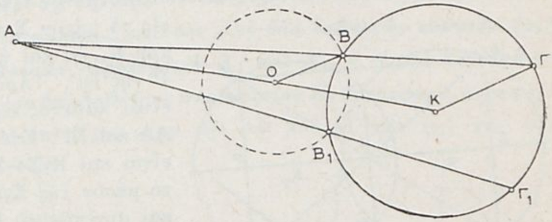
Ἄρα τὸ Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$.

Σύνθεσις. Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ φέρομεν παράλληλον τῇ ΒΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Παρατήρησις. Ἑτέρα λύσις εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ παράλληλος τῇ ΒΓ.

692) Ἐκ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς δοθέντος κύκλου Κ, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν Κ κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ.

Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 496) τὸ μέσον τῆς ΑΚ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ θὰ ἔχωμεν $OB=\frac{1}{2}K\Gamma=$ $=\frac{1}{2}\varrho$. Ἄρα τὸ Β κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{\varrho}{2}$.



Σχ. 496.

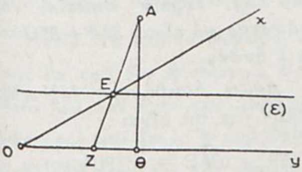
Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς ΑΚ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}\varrho$ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν Κ εἰς τὰ Β καὶ B_1. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒΓ καὶ $AB_1\Gamma_1$ εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο ἢ μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{2}\varrho$ τέμνει ἢ ἐφάπτεται ἢ δὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ.

693) Εὑρεῖν ἐντὸς τριγώνου ΑΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα ΜΑ+ΜΒ+ΜΓ νὰ εἶναι ἐλάχιστον, ἢ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου νὰ φαίνωνται ἀπὸ τοῦ Μ ὑπὸ ἴσας γωνίας.

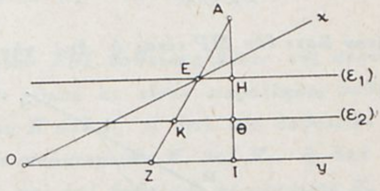
Λύσις. Ἰδὲ λύσιν ταύτης § 70 Τόμ. Α'. τεῦχος 2ον τοῦ βιβλίου μας Μεγάλη Γεωμετρία.

694) Διὰ σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς γωνίας $\widehat{xoy}$, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ὁρίζουσα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι ΑΕ=ΕΖ, ἢ 2ΑΕ=ΕΖ.

Λύσις. α) Φέρομεν τὴν ΑΘ (σχ. 497) κάθετον τῇ οy καὶ ἔστω Η τὸ μέσον ταύτης. Ἐκ τοῦ Η φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) παράλληλον τῇ οy, ἥτις τέμνει τὴν οx εἰς τὸ Ε. Ἡ ΑΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, διότι ἡ ΗΕ, ὡς ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου Η τῆς ΑΘ παράλληλος τῇ οy θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΑΖ.



Σχ. 497.



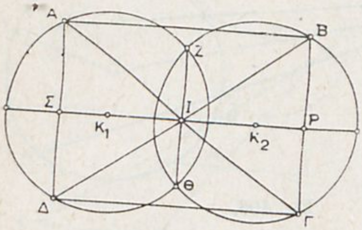
Σχ. 498.

β) Φέρομεν τὴν ΑΙ (σχ. 498) κάθετον τῇ οy καὶ τὴν διαιροῦμεν εἰς τρία ἴσα τμήματα ΑΗ=ΗΘ=ΘΙ καὶ ἐκ τῶν Η καὶ Θ φέρομεν τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) παραλλήλους τῇ οy. Ἡ (ε_1) τέμνει τὴν οx εἰς τὸ Ε. Φέρομεν τὴν ΑΕ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι λόγῳ τῶν παραλλήλων, ἐπειδὴ εἶναι ΑΚ=ΗΘ= =ΘΙ, θὰ εἶναι καὶ ΑΕ=ΕΚ=ΚΖ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν 2(ΑΕ)=(ΕΖ).

695) Δοθεισῶν δύο ἴσων τεμνομένων περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ κα-

τασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἐπὶ τῆς ἑτέρας περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 499) τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Σ τῆς ΑΔ θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ K_1, ὡς καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Ρ τῆς ΒΓ. Ἄρα ἡ διάκεντρος K_1K_2 εἶναι κάθετος εἰς τὰ μέσα Σ καὶ Ρ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΔ=ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ $K_1\Sigma = K_2P$, ὅτε, ἐὰν Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς K_1K_2 θὰ ἔχωμεν ΙΣ=ΙΡ καὶ συνεπῶς τὸ Ι εἶναι τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου. Ἄρα αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τετραγώνου θὰ διέλθουν ἐκ τοῦ Ι αἱ δὲ γωνίαι $\widehat{A I \Sigma}$, $\widehat{\Sigma I \Delta}$ θὰ εἶναι 45^0 ἑκάστη.

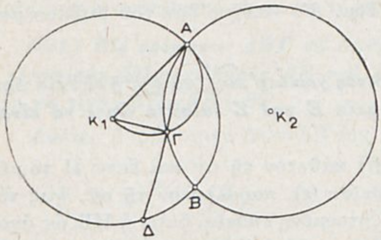


Σχ. 499.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν τὸ μέσον Ι τῆς K_1K_2 καὶ σχηματίζομεν τὰς γωνίας $K_1\widehat{I}A = K_1\widehat{I}\Delta = 45^0$. Αἱ πλευραὶ αὐτῶν ΙΑ καὶ ΙΔ προεκτεινόμεναι ὁρίζουν ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου.

696) Δοθεισῶν δύο τεμνομένων εἰς τὰ Α καὶ Β περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α τέμνουσα τῆς μιᾶς διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς ἑτέρας.

Λύσις. Μὲ διάμετρον τὴν K_1A (σχ. 500) γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν K_2 εἰς τὸ Γ. Ἡ ΑΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα. Πράγματι, ἐπειδὴ εἶναι $K_1\widehat{\Gamma}A = 90^0$, ἡ $K_1\Gamma$ εἶναι κάθετος τῇ ΑΔ καὶ συνεπῶς τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ.



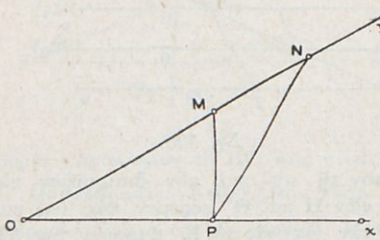
Σχ. 500.

697) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς οy γωνίας $\widehat{xoy}$, εὑρεῖν σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε ἐὰν ΜΡ εἶναι ἡ ἐπὶ τὴν οx κάθετος νὰ εἶναι ΜΡ+ΜΟ=λ, ἔνθα λ δοθέν.

Λύσις. Λαμβάνομεν ΜΝ=ΜΡ (σχ. 501) ὅτε θὰ εἶναι

$$\widehat{N} = \frac{1}{2}\,\widehat{oMP} = \frac{1}{2}(90^0 - \widehat{o}) =$$

$$= 45^0 - \frac{1}{2}\,\widehat{o} \quad \text{καὶ} \quad oN = \lambda.$$



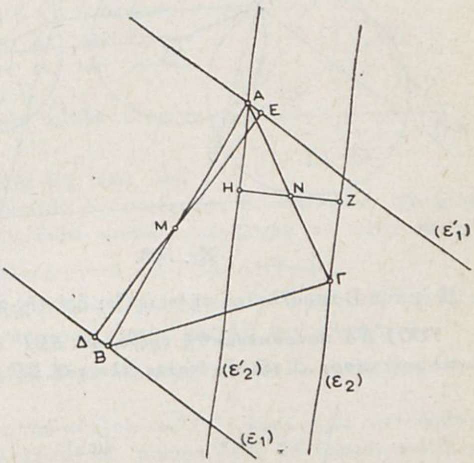
Σχ. 501.

Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς οy λαμβάνομεν οΝ=λ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν Νο καὶ κορυφὴν τὸ Ν κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{oNP}$ ἴσην πρὸς $45^0 - \frac{1}{2}\,\widehat{o}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς οχ τὸ σημεῖον Ρ. Ἡ κάθετος τῇ οχ εἰς τὸ Ρ θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ογ τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ.

698) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῶν θέσει τῶν μέσων δύο πλευρῶν του καὶ ὅτι δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), ἢ ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, ἢ ἡ μία ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε_1) καὶ ἡ ἑτέρα ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_1 (μεταφορά, στροφή).

Λύσις. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ (ε_1) καὶ (ε_2) αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ. Ἐπειδὴ εἶναι ΜΑ=ΜΒ καὶ ΝΓ=ΝΑ, τὸ Α θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν (ε_1') καὶ (ε_2') αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως συμμετρικαὶ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) ὡς πρὸς τὰ Μ καὶ Ν.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὰς ΜΔ καὶ ΝΖ καθέτους ἐπὶ τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν ΜΕ=ΜΔ καὶ ΝΗ=ΝΖ. Εἰς τὰ Ε καὶ Η ὑψοῦμεν καθέτους (ε_1') καὶ (ε_2') ἐπὶ τὰς ΔΕ καὶ ΖΗ ἀντιστοίχως. Ἡ τομὴ Α τῶν (ε_1') καὶ (ε_2') εἶναι ἡ κορυφὴ Α. Αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ ὁρίζουν ἐπὶ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) τὰς δύο ἄλλας κορρφὰς Β καὶ Γ. Ἐὰν τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ τότε τὸ Γ θὰ εἶναι τομὴ τῆς (ε_2) καὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς (ε_1) ὡς πρὸς τὸ Μ.



Σχ. 502.

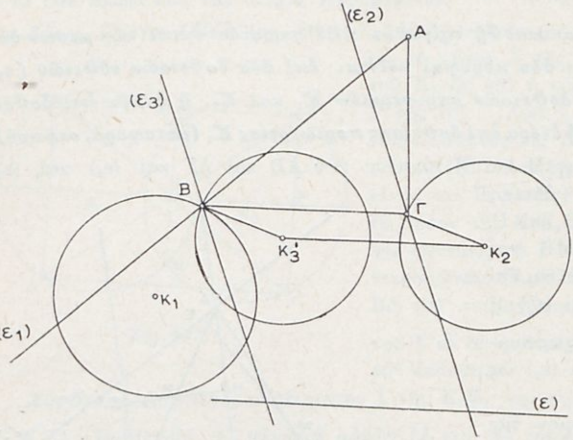
Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν αἱ (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι περιφέρειαι ἢ ἡ μία περιφέρεια καὶ ἡ ἄλλη εὐθεῖα.

699) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ δοθείσης θέσει τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ ἔχει μῆκος α, εἶναι παράλληλος δοθείσῃ εὐθεῖα (ε) καὶ ἔχει τὰς κορυφάς του Β καὶ Γ, ἢ ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), ἢ ἐπὶ δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, ἢ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε_1) τὴν κορυφὴν Β καὶ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_2 τὴν κορυφὴν Γ.

Λύσις. α) Μεταφέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε_2) (σχ. 503) κατὰ τὴν διεύθυνσιν (ε) καὶ εἰς μῆκος α, ὅτε λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν (ε_3). Ἡ τομὴ τῶν (ε_1) καὶ (ε_3) εἶναι ἡ κορυφὴ Β. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον τῇ (ε) ἥτις τέμνει τὴν (ε_2) εἰς τὸ Γ τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἄλλη κορυφὴ τοῦ τριγώνου.

β) Μεταφέρομεν τὴν περιφέρειαν K_2 κατὰ τὴν διεύθυνσιν (ε) καὶ εἰς μῆκος α, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἴσην περιφέρειαν K_3. Ἡ τομὴ τῶν περιφερειῶν

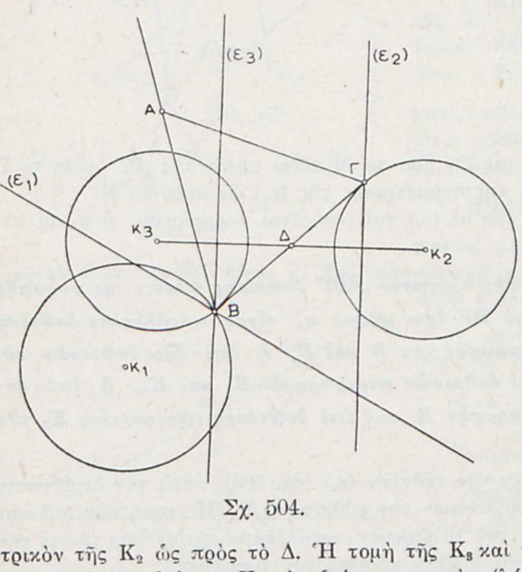
K_1 καὶ K_3 εἶναι τὸ Β. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον τῇ (ε) ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν K_2 εἰς τὸ σημεῖον Γ τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἄλλη κορυφὴ τοῦ τριγώνου. (Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις).



Σχ. 503.

γ) Μεταφέρομεν τὴν περιφέρειαν K_2 κατὰ τὴν διεύθυνσιν (ε) καὶ εἰς μῆκος α, ὅτε λαμβάνομεν τὴν περιφέρειαν K_3 ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε_1) τὴν κορυφὴν Β. Ἡ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ (ε) ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας K_2 τὴν κορυφὴν Γ.

700) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ δοθέντων θέσει τῆς κορυφῆς Α καὶ τοῦ μέσου Δ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2), ἢ ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, ἢ ἡ μία ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε_1) καὶ ἡ ἑτέρα ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K_2.



Σχ. 504.

Λύσις. α) Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν (ε_3) συμμετρικὴν τῆς (ε_2) ὡς πρὸς τὸ Δ. Ἡ τομὴ τῆς (ε_3) καὶ τῆς (ε_1) εἶναι ἡ κορυφὴ Β ὅτε ἡ ΒΔ ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε_2) τὴν ἑτέραν κορυφὴν Γ.

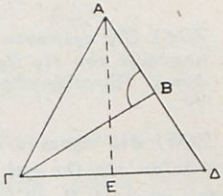
β) Κατασκευάζομεν τὴν περιφέρειαν K_3 συμμετρικὸν τῆς K_2 ὡς πρὸς τὸ Δ. Ἡ τομὴ τῆς K_3 καὶ τῆς K_1 εἶναι ἡ κορυφὴ Β, ὅτε ἡ ΒΔ ὁρίζει ἐπὶ τῆς K_2 τὴν ἑτέραν κορυφὴν (λύσεις ἐν γένει δύο).

γ) Κατασκευάζομεν περιφέρειαν K_3 συμμετρικὴν τῆς K_2 ὡς πρὸς τὸ Δ.

Ἡ τομὴ τῆς K_3 καὶ τῆς εὐθείας (ε_1) εἶναι ἡ κορυφὴ Β, ὅτε ἡ τομὴ τῆς ΒΔ καὶ τῆς περιφερείας K_2 εἶναι ἡ κορυφὴ Γ (δύο λύσεις ἐν γένει).

701) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ δοθείσης τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων ἐπαφῆς εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ, τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἰδίων κύκλων εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ, ὡς καὶ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ ἢ τῆς γωνία $\widehat{B}$.

Λύσις. Ἡ πρώτη δοθεῖσα ἀπόστασις δ ἰσοῦται (§ 222 παρατήρ. στ') πρὸς β—γ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἀπόστασις δ_1 ἰσοῦται πρὸς α. Ἄρα ἔχομεν νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἐκ τῶν $\alpha=\delta_1$, $\beta-\gamma=\delta$, Α, ἢ $\alpha=\delta_1$, $\beta-\gamma=\delta$, Β.



Σχ. 505.

Ἡ πρώτη τῶν κατασκευῶν αὐτῶν εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθμ. 532 ἄσκησις.

Ἡ δευτέρα γίνεται ὡς ἑξῆς (σχ. 505). Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ μῆκος ΑΔ=ΑΓ, ὅτε θὰ ἔχωμεν $B\Delta=\beta-\gamma=\delta$. Τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι τούτου γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα

$$\Gamma B=\alpha=\delta_1,\ B\Delta=\beta-\gamma=\delta \text{ καὶ } \Gamma\widehat{B}\Delta=180^0-\widehat{B}.$$

Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ΑΔ, ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΓΔ θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΔΒ τὴν κορυφὴν Α.

702) Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον δοθείσης τῆς περιμέτρου του.

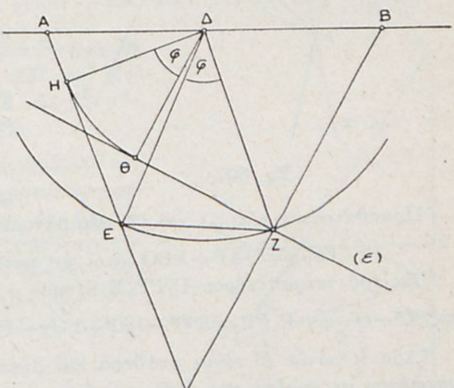
Λύσις. Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ 2τ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραί του θὰ ἔχωμεν $\alpha=2R$ καὶ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, ἢ $\alpha=2R$ καὶ $\beta+\gamma=2\tau-2R$ καὶ οὕτως ἤχθημεν εἰς τὴν ἄσκ. 409.

703) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἰσοσκελὲς τοιοῦτον, ἔχον τὴν κορυφήν του εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι δοθεῖσα καὶ ἴση πρὸς φ.

Λύσις. Ἔστω ΔΕΖ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἔνθα

$$\Delta E=\Delta Z \text{ καὶ } E\widehat{\Delta}Z=\varphi.$$

Ἐὰν γίνῃ στροφὴ περὶ τὸ Δ (σχ. 506) κατὰ γωνίαν φ, τὸ Ε θὰ πέσῃ εἰς τὸ Ζ. Ἄρα τὸ Ζ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), ἥτις εἶναι ἡ στροφὴ τῆς ΑΓ περὶ τὸ Δ κατὰ γωνίαν φ.



Σχ. 506.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΔΗ τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΔΓ γράφομεν περιφέρειαν καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τόξον ὥστε $H\widehat{\Delta}\Theta=\omega$. Εἰς τὸ Θ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην (ε), ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ τὴν κορυφὴν Ζ. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΖ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὴν κορυφὴν Ε. Τὸ τρίγωνον ΔΖΕ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΔΗΕ καὶ ΔΘΖ ἔχομεν $H\widehat{\Delta}E=\Theta\widehat{\Delta}Z$ καὶ συνεπῶς:

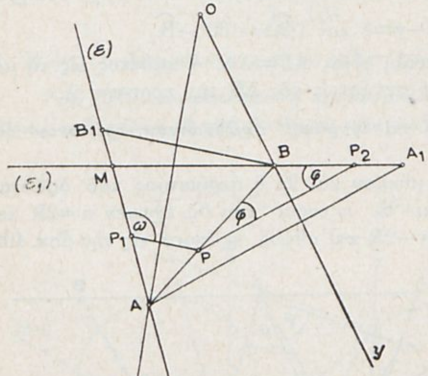
$$E\widehat{\Delta}Z=H\widehat{\Delta}\Theta=\varphi.$$

704) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τοιοῦτον, ἔχον τὴν μίαν κορυφήν του εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ.

Λύσις. Ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως κάμνοντες στροφὴν κατὰ γωνίαν 60^0.

705) Διὰ σημείου Ρ, ἐντὸς γωνίας $x\widehat{O}y$ κειμένου, φέρομεν τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν τὰς Οx καὶ Οy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Στρεφομένης τῆς τεμνούσης περὶ τὸ Ρ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν συμμετρικῶν τῆς ΑΡΒ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς Οx καὶ Οy.

Λύσις. Ἔστωσαν P_1 καὶ P_2 τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰς οx καὶ οy, ὅτε αἱ εὐθεῖαι $AP_1\equiv(\varepsilon)$ καὶ $BP_2\equiv(\varepsilon_1)$ εἶναι αἱ συμμετρικαὶ (σχ. 507) τῆς ΑΡΒ ὡς πρὸς τὰς οx καὶ οy. Ἔστω Μ ἡ τομὴ τῶν (ε) καὶ (ε_1). Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ.



Σχ. 507.

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου P_1AP, τοῦ ὁποίου διχοτόμος εἶναι ἡ ΑΟ, λαμβάνομεν: $P\widehat{P_1}A=$ $=90^0-O\widehat{A}P$, ὅτε

$$\omega=180^0-P\widehat{P_1}A=90^0+O\widehat{A}P \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου PBP_2 τοῦ ὁποίου διχοτόμος εἶναι ἡ ΟΒ, λαμβάνομεν:

$$\varphi=90^0-P\widehat{B}y=$$
$$=90^0-(180^0-A\widehat{B}O)=A\widehat{B}O-90^0 \quad (2).$$

Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\omega+\varphi=O\widehat{A}P+A\widehat{B}O, \text{ ἤτοι } \omega+\varphi=180^0-x\widehat{O}y \quad (3).$$

Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου P_1PP_2M ἔχομεν

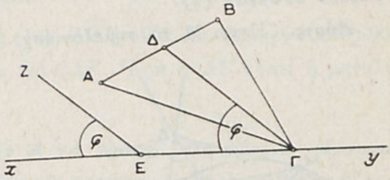
$$\widehat{M}=360^0-\omega-\varphi-P_1\widehat{P}P_2=360^0-180^0+x\widehat{O}y-P_1\widehat{P}P_2, \text{ ἢ } \widehat{M}=180^0+x\widehat{O}y-P_1\widehat{P}P_2.$$

Ἄρα ἡ γωνία $\widehat{M}$ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν P_1P_2 καὶ δεχομένην γωνίαν ἴσην πρὸς Μ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι τὸ τόξον τοῦτο.

706) Νὰ κατασκευασθῇ ἑπτάγωνον, ἢ ἐννεάγωνον, ἢ γενικῶς πολύγωνον μὲ $2\nu+1$ τὸ πλῆθος πλευράς, γνωστῶν τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του.

Λύσις. Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὴν παράγραφον 290.

707) Δίδεται εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διάμεσος ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς xy δοθεῖσαν γωνίαν $\widehat{\varphi}$.

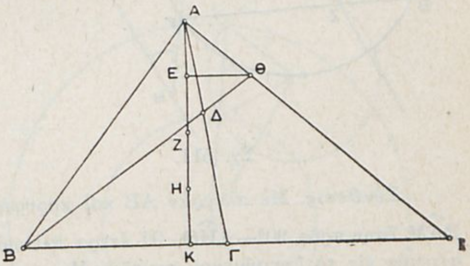


Σχ. 508.

Λύσις. Διὰ τυχόντος σημείου Ε τῆς xy φέρομεν εὐθεῖαν ΕΖ σχηματίζουσαν (σχ. 508) μετὰ τῆς xy γωνίαν $\widehat{\varphi}$.

Ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΧΥ φέρομεν παράλληλον τῇ ΕΖ, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς xy τὴν κορυφὴν Γ.

708) Ἐκ μιᾶς κορυφῆς τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς, ἡ ὁποία νὰ τέμνεται ὑπὸ μιᾶς διαμέσου, ἀγομένης ἐξ ἄλλης κορυφῆς, εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{1}{3}$.



Σχ. 509.

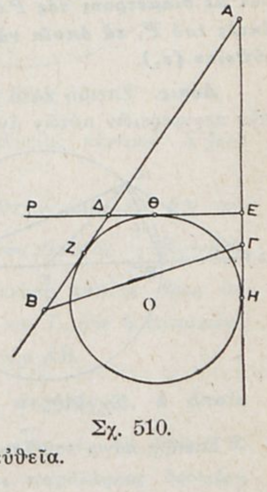
Λύσις. Ἔστω ΒΔ ἡ διάμεσος (σχ. 509). Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΚ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ΑΕ=ΕΖ=ΖΗ=ΗΚ καὶ ἐκ τοῦ Ε φέχομεν παράλληλον τῇ ΒΓ, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέσου τὸ Θ. Ἡ εὐθεῖα ΑΘΙ εἶναι ἡ ζητουμένη καθότι, ἐπειδὴ $ΑΕ=\frac{1}{3}ΕΚ$, θὰ εἶναι καὶ $ΑΘ=\frac{1}{3}ΘΙ$.

709) Διὰ δεδομένου σημείου Ρ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ+ΓΕ=ΔΕ.

Λύσις. Φέρομεν τὸν παρεγγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ ΑΔΕ (σχ. 510). Ἔχομεν, ὡς γνωστόν, ΔΕ=ΕΗ+ΔΖ (1). Ἐπίσης ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΔΕ=ΒΔ+ΓΕ (2). Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ΕΗ+ΔΖ=ΒΔ+ΓΕ, ἢ ΕΗ−ΓΕ=ΒΔ−ΔΖ, ἢ ΓΗ=ΒΖ, ἢ ΑΗ−ΑΓ=ΑΒ−ΑΖ, ἢ ΑΒ+ΑΓ=ΔΖ+ΑΗ, ἢ ΑΒ+ΑΓ=2(ΑΖ),

$$ἢ\ ΑΖ=ΑΗ=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΑΓ).$$

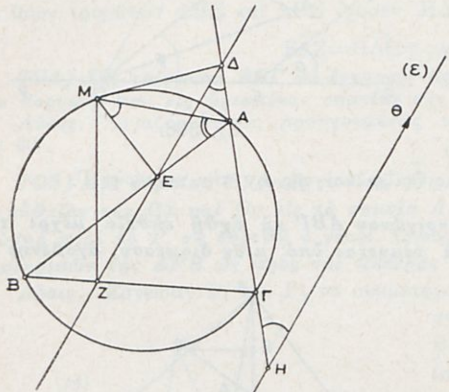
Ἄρα τὰ Ζ καὶ Η εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος Ο εἶνα κατασκευάσιμος. Ἐκ τοῦ Ρ φέρομεν ἐφαπτομένην εἰς τὸ τόξον ΖΗ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 510.

710) Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ περιφερείας Κ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε οἱ πόδες τῶν ἐξ αὐτοῦ ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν περιφέρειαν, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον (σχ. 511) καὶ Δ, Ε, Ζ οἱ πόδες τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς πλευράς, οἱ ὁποῖοι κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Simson κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.



Σχ. 511.

Ἐπειδὴ εἶναι ΗΘ ∥ ΔΕΖ, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΕΔΑ}=\widehat{ΑΗΘ}$, ἤ, λόγῳ τοῦ ἐγγραψίμου εἰς κύκλον τετραπλεύρου ΔΜΕΑ, θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΕΜΑ}=\widehat{ΕΔΑ}=\widehat{ΑΗΘ} \quad (1).$$

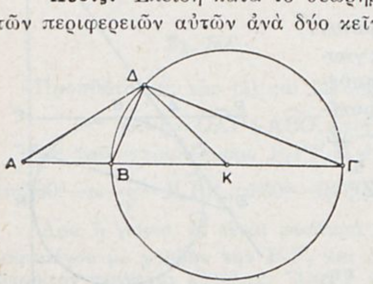
Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΜΕΑ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΕΑΜ}=90^0-\widehat{ΕΜΑ}$, ἥτις, λόγῳ τῆς (1), δίδει $\widehat{ΕΑΜ}=90^0-\widehat{ΑΗΘ}$.

Ἄρα ἡ γωνία $\widehat{ΕΑΜ}$ εἶναι ὡρισμένη.

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{ΒΑΜ}$ ἴσην πρὸς $90^0-\widehat{ΑΗΘ}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ κόψῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ.

711) Ἐπὶ περιφερείας Κ δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε αἱ περιφέρειαι αἱ γραφόμεναι μὲ διαμέτρους τὰς ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο εἰς τρία σημεῖα, ἐκτὸς τοῦ Ρ, τὰ ὁποῖα νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ($ε_1$).

Λύσις. Ἐπειδὴ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Salmons τὰ τρία σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν ἀνὰ δύο κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἥτις εἶναι ἡ εὐθεῖα τοῦ Simyon τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Ρ, διὰ τοῦτο ἡ ἄσκησις αὕτη εἶναι ἡ προηγουμένη.



Σχ. 512.

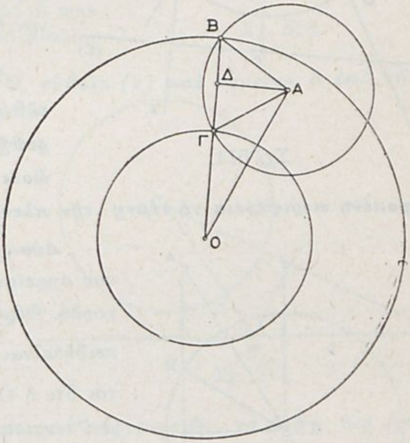
712) Δοθέντος σημείου Α, νὰ εὑρεθῇ ἡ μικροτέρα καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ δοθείσης περιφερείας Κ.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΚΓ (σχ. 512) ἡ διάμετρος, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Α καὶ Δ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας.

Ἐπειδή, λόγῳ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΚΔΒ, εἶναι $\widehat{ΚΒΔ}<90^0$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{AB\Delta}>90^0$, ὅτε, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $A\Delta>AB$. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{B\Delta\Gamma}=90^0$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{A\Delta\Gamma}>90^0$, ὅτε ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $A\Delta<A\Gamma$. Ἄρα ἡ ΑΓ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις.

713) Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα δύο δοθείσας ὁμοκέντρους περιφερείας εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ σημεῖα τομῆς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

Λύσις. Ἔστωσαν Β καὶ Γ (σχ. 513) τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν κέντρου Ο ὑπὸ τῆς περιφερείας κέντρου Α.



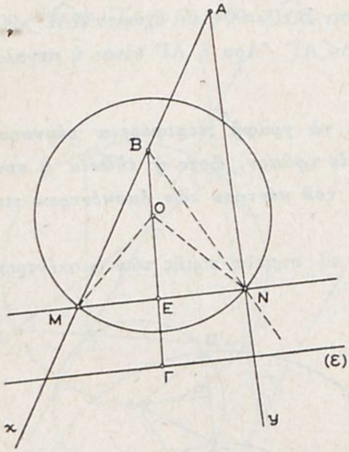
Σχ. 513.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ Ο. Ἐπειδὴ εἶναι $AB=A\Gamma$, ἡ ἐκ τοῦ Α κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου αὐτῆς Δ. Ἐπειδὴ εἶναι $B\Gamma=R_1-R_2$, ἔνθα R_1 καὶ R_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν, θὰ ἔχωμεν $\Gamma\Delta=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$ καὶ συνεπῶς $O\Delta=O\Gamma+\Gamma\Delta=R_2+\frac{1}{2}(R_1-R_2)=\frac{1}{2}(R_1+R_2)$. Ἀφοῦ αἱ ΟΔ καὶ ΟΑ εἶναι γνωσταὶ θὰ εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ ΑΔ καὶ συνεπῶς ἡ ΒΓ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΔ.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτεινούσης ΟΑ καὶ ἑτέρας καθέτου πλευρᾶς $\frac{1}{2}(R_1+R_2)$, γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Ο φέρομεν ἐφαπτομένην ταύτης, ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ὅτε ἡ ζητουμένη περιφέρεια εἶναι ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ.

714) Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς Αx καὶ Αy δοθείσης γωνίας $x\widehat{A}y$ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΜΝ νὰ εἶναι παράλληλος δοθείσῃ εὐθείᾳ (ε).

Λύσις. Ἡ ἐκ τοῦ Ο κάθετος ΟΓ τῇ (ε) (σχ. 514), ἐπειδὴ εἶναι ΟΜ=ΟΝ, θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΜΝ καὶ συνεπῶς, ἐὰν Β εἶναι ἡ τομὴ τῶν Αx καὶ ΟΓ, θὰ ἔχωμεν $\widehat{MBO}=\widehat{NBO}$.

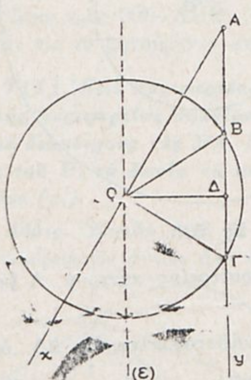


Σχ. 514.

Σύνθεσις. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΟΓ ἐπὶ τὴν (ε) καὶ εὑρίσκομεν τὸ Β. Μὲ πλευρὰν ΒΟ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{OBN}$ ἴσην πρὸς τὴν $x\widehat{BO}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς ὁρίζει ἐπὶ τῆς Αy τὸ σημεῖον Ν. Ἐκ τοῦ Ν φέρομεν κάθετον ΝΜ τῇ ΟΓ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

715) Δίδονται γωνία $x\widehat{A}y$ καὶ δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Αx σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε ἡ μὲ κέντρον αὐτὸ καὶ ἀκτῖνα α γραφομένη περιφέρεια νὰ τέμνῃ τὴν πλευρὰν Αy κατὰ χορδὴν ἴσην πρὸς β.

Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 515) τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ΒΓ ἡ ἐπὶ τῆς Αy ὁριζομένη χορδή. Φέρομεν τὴν ΟΔ κάθετον τῇ Αy. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΒ=α καὶ $B\Delta=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{\beta}{2}$, ἔπεται ὅτι ἡ ΟΔ ἔχει ὡρισμένον μῆκος. Ἄρα τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ Αy καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν ΟΔ.



Σχ. 515.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $\alpha>\frac{\beta}{2}$.

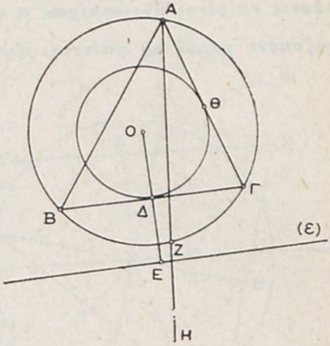
716) Εἰς δοθέντα κύκλον Ο νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε) καὶ δοθὲν μῆκος α, ἡ δὲ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Η κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Λύσις. Ἔστω (ε) ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις. Ἐπειδὴ ἡ ΒΓ (σχ. 516) ἔχει δοθὲν μῆκος α, ἡ ἀπόστασίς της ΟΔ ἀπὸ τοῦ Ο θὰ ἔχῃ σταθερὸν μέγεθος. Ἄρα ἡ ΒΓ θὰ ἐφάπτεται περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΔ. Ἀλλὰ ἡ ΒΓ ἔχει καὶ δοθεῖσαν διεύθυνσιν (ε) καὶ συνεπῶς ἡ ἀκτὶς ΟΔ θὰ εἶναι κάθετος τῇ (ε). Ἡ διχοτόμος ΑΗ θὰ περάσῃ ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνεται εἰς τὸ Δ ὑπὸ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν (ε). Εἰς τὸ Δ φέρομεν ἐφαπτομένην, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Ο τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ζ τοῦ τόξου $\widehat{ΒΓ}$ καὶ φέρομεν τὴν ΖΗ, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας τὴν κορυφὴν Α.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $α \leqslant 2R$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας.

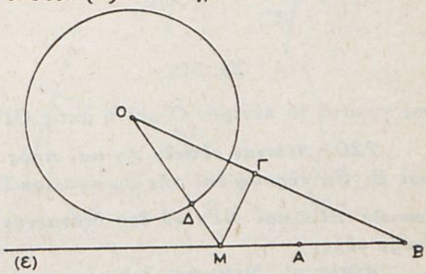
Παρατήρησις. Ὁμοίως λύεται τὸ πρόβλημα ἐὰν τὸ Η κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.



Σχ. 516.

717) Δίδεται περιφέρεια Ο, εὐθεῖα (ε) καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς (ε) ἀπέχον ἰσάκις τοῦ Α καὶ τῆς περιφερείας.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ (σχ. 517) ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς Ο. Ἐπειδὴ εἶναι ΜΑ=ΜΔ καὶ ΑΒ=ΟΔ θὰ ἔχωμεν ΜΟ=ΜΒ. Ἄρα τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΟΒ.

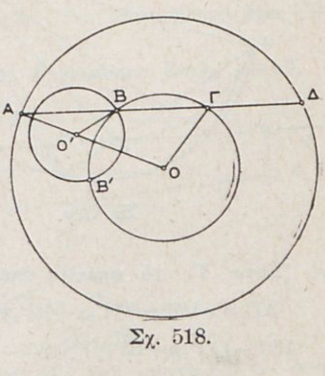


Σχ. 517.

718) Δοθεισῶν δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, νὰ ἀχθῇ διὰ ἑνὸς σημείου Α τῆς ἐξωτερικῆς τέμνουσα ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία νὰ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῆς ἐσωτερικῆς, ἤτοι νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ.

Λύσις. Ἐκ τοῦ Β (σχ. 518) φέρομεν τὴν ΒΟ′ παράλληλον τῇ ΟΓ, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ, θὰ ἔχωμεν $Ο'Β=\frac{1}{2}ΟΓ$.

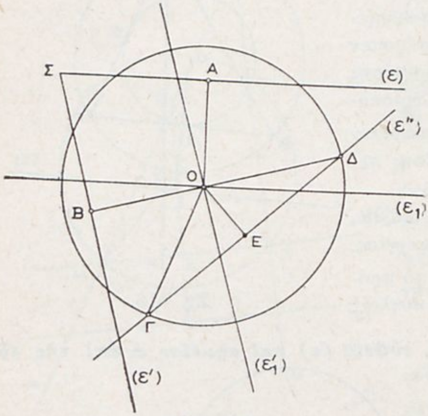
Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο′ τῆς ΑΟ καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς μικρᾶς περιφερείας γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ὁρίσῃ ἐπὶ τῆς μικρῆς περιφερείας τὰ Β καὶ Β′. Αἱ ΑΒ καὶ ΑΒ′ εἶναι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι.



Σχ. 518.

719) Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο

εὐθείας (ε) καὶ (ε′) κατὰ δύο χορδὰς τῶν ὁποίων αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀποστάσεις νὰ εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ β, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας (ε″) ὁριζομένη χορδὴ νὰ φαίνεται ἀπὸ τοῦ κέντρου ὑπὸ γωνίαν $\widehat{\varphi}$.



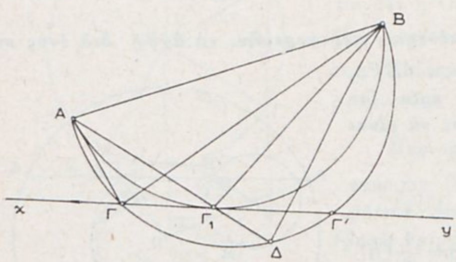
Σχ. 519.

Λύσις. Ἐπειδὴ (σχ. 519) εἶναι ΟΑ=α καὶ ΟΒ=β, τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι τομὴ τῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_1'), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς (ε) καὶ (ε′) καὶ ἀπέχουν αὐτῶν ἀποστάσεις ἀντιστοίχως α καὶ β. Ἄρα τὸ Ο εἶναι ὡρισμένον καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ἀπόστασις ΟΕ τοῦ Ο ἀπὸ τῆς (ε″) εἶναι γνωστή.

Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma O \Delta}=\varphi$ καὶ συνεπῶς $\widehat{\Gamma O E}=\frac{\varphi}{2}$, τὸ τρίγωνον ΓΟΕ εἶναι κατασκευάσιμον. Ἄρα τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶναι γνωστὰ τὸ κέντρον Ο καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΓ.

720) Δίδεται εὐθεῖα xy ***καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς*** xy ***σημεῖον Γ τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν*** $\widehat{A\Gamma x}$ ***καὶ*** $\widehat{B\Gamma y}$ ***νὰ ἔχῃ δεδομένην τιμήν. Ποῖον τὸ ἐλάχιστον τῆς τιμῆς αὐτης;***

Λύσις. α) Ἔστω φ ἡ διδομένη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος καὶ Γ (σχ. 520) τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A\Gamma x}+\widehat{B\Gamma y}=\varphi$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{A\Gamma B}=180^0-\varphi$ καὶ συνεπῶς τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τόξου γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δεχομένου γωνίαν $180^0-\varphi$. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις τὰ Γ καὶ Γ′.



Σχ. 520.

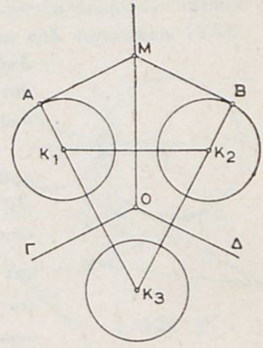
β) Γράφομεν περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β καὶ ἐφαπτομένην τῆς xy. Ἔστω Γ_1 τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A\Gamma_1 B}>\widehat{A\Delta B}=\widehat{A\Gamma B}$ καὶ $\widehat{A\Gamma_1 B}=180^0-(\widehat{A\Gamma_1 x}+\widehat{B\Gamma_1 y})$ καὶ $\widehat{A\Gamma B}=180^0-(\widehat{A\Gamma x}+\widehat{B\Gamma y})$, θὰ ἔχωμεν $180^0-(\widehat{A\Gamma_1 x}+\widehat{B\Gamma_1 y})>180^0-(\widehat{A\Gamma x}+\widehat{B\Gamma y})$, ἢ $\widehat{A\Gamma_1 x}+\widehat{B\Gamma_1 y}<\widehat{A\Gamma x}+\widehat{B\Gamma y}$.

Ἄρα τὸ σημεῖον διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὸ ἐλάχιστον τοῦ $\widehat{A\Gamma x}+\widehat{B\Gamma y}$ εἶναι τὸ Γ_1.

721) Εὑρεῖν σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου τρεῖς ἴσοι κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

Λύσις. Ἔστωσαν K_1, K_2, K_3 (σχ. 521) οἱ κύκλοι καὶ Μ ἓν σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ K_1 καὶ K_2 φαίνονται ὑπὸ ἴσην γωνίαν (1).

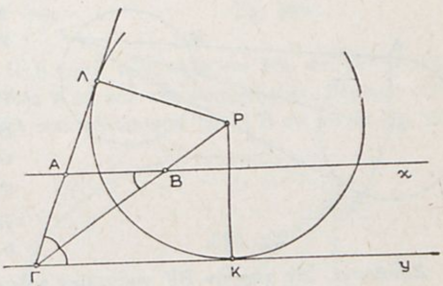
Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AMK_1}=\widehat{BMK_2}$, τὰ τρίγωνα AMK_1 καὶ BMK_2 θὰ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $K_1M=K_2M$. Ἄρα τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς K_1K_2. Κατόπιν αὐτοῦ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς Ο τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $K_1K_2K_3$.



Σχ. 521.

722) Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x καὶ y καὶ ἐπὶ τῆς πρώτης σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ σημείου Ρ, κειμένου ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, εὐθεῖα τέμνουσα τὴν x εἰς τὸ Β καὶ τὴν y εἰς τὸ Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

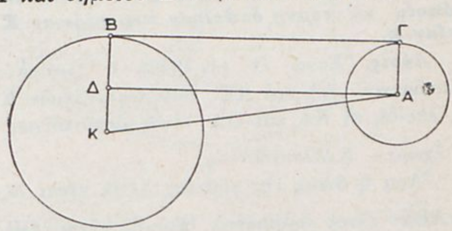
Λύσις. Ἐπειδὴ ΑΒ=ΑΓ (σχ. 522) θὰ ἔχωμεν $\widehat{AB\Gamma}=\widehat{A\Gamma B}$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AB\Gamma}=\widehat{B\Gamma y}$ προκύπτει $\widehat{A\Gamma B}=\widehat{B\Gamma K}$, ἤτοι ἡ ΡΓ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{A\Gamma y}$ καὶ συνεπῶς τὸ Ρ θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν Γy καὶ ΓΑ.



Σχ. 522.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν ΡΚ κάθετον τῇ y καὶ μὲ κέντρον τὸ Ρ καὶ ἀκτῖνα ΡΚ γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἄγομεν εἰς αὐτὴν ἐκ τοῦ Α τὴν ἐφαπτομένη ΑΛ, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς y τὸ σημεῖον Γ, ὅτε ἡ ΡΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα. Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν πρέρει $PA \geqslant PK$.

723) Δοθέντος κύκλου Κ καὶ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς αὐτοῦ, νὰ γραφῇ μὲ κέντρον τὸ Α περιφέρεια κύκλου, ὥστε ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἢ ἐσωτερικὴ τῶν δύο περιφερειῶν νὰ ἔχῃ ἐφαπτομένη μῆκος α.



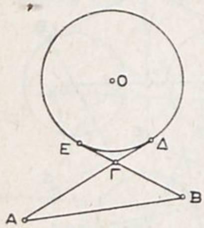
Σχ. 523.

Λύσις. Ἔχομεν ΒΓ=α (σχ. 523), ὅτε, ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος τῇ ΚΒ, θὰ ἔχωμεν ΑΔ=α καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΚΔΑ εἶναι κατασκευάσιμον. Τούτου κατασκευασθέντος ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ τῆς δοθεί-

(1) Εἰς τὸ σχῆμα 521 νὰ ἀχθοῦν αἱ K_1M καὶ K_2M.

σης περιφερείας τὸ ΚΔ ἔχομεν τὴν ἀκτῖνα ΔΒ=ΑΓ τῆς ζητουμένης. Ὁμοίως ἐὰν δίδεται τὸ μῆκας α τῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης.

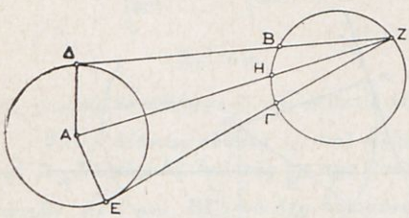
724) Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος ρ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ταύτην ἐκ τῶν Α καὶ Β νὰ ἔχουν δοθεῖσαν διαφορὰν καὶ νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν.



Σχ. 524.

Λύσις. Ἔστω α ἡ δοθεῖσα διαφορὰ καὶ φ ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἔχομεν ΑΔ—ΒΕ=α, ἢ (ΑΓ+ΓΔ)—(ΒΓ+ΓΕ)=α, ἢ ΑΓ—ΒΓ=α (σχ. 524). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΒ, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ τὰ ΑΒ, ΑΓ—ΒΓ=α καὶ $\widehat{ΑΓΒ}$=φ, εἶναι κατασκευάσιμον (ἄσκ. 532). Τούτου κατασκευασθέντος κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐφαπτόμενον τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\widehat{ΕΓΔ}$, ἥτις εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς ΑΓΒ.

725) Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ, νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Α τοιαύτη, ὥστε αἱ εἰς αὐτὴν ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι ἐκ τῶν Β καὶ Γ νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν.



Σχ. 525.

Λύσις. Ἔστω ω ἡ δοθεῖσα γωνία. Ἐπειδὴ (σχ. 525) εἶναι $\widehat{ΒΖΓ}$=ω, τὸ Ζ θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΒΓ δεχομένου γωνίαν ω. Ἐπειδὴ ἡ ΖΑ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΔΖΕ}$, τὸ Η θὰ εἶναι μέσον τοῦ τόξου $\overline{ΒΗΓ}$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν ΒΓ γράφομεν τόξον $\overline{ΒΖΓ}$ δεχόμενον γωνίαν ω. Καταγράφομεν ὅλην τὴν περιφέρειαν τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν τὸ μέσον Η τοῦ τόξου $\overline{ΒΗΓ}$. Ἡ ΑΗ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ τόξου $\overline{ΒΖΓ}$ τὸ Ζ. Φέρομεν τὰς ΖΒ καὶ ΖΓ καὶ ἐκ τοῦ Α τὰς καθέτους ΑΔ καὶ ΑΕ ἐπ' αὐτάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι. Ἡ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα ΑΔ=ΑΕ γραφομένη περιφέρεια εἶναι ἡ ζητουμένη.

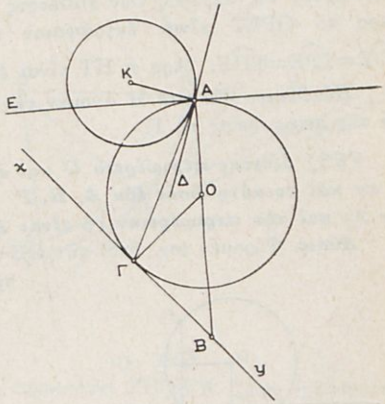
726) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας *xy* ***καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ εἰς σημεῖον Α ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.***

Λύσις. Ἔστω Ο (σχ. 526) ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Αἱ εἰς τὸ Α ἐφαπτόμεναι ΑΔ καὶ ΑΕ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Ο σχηματίζουν γωνίαν φ, ὅτε, ἐπειδὴ αἱ ΚΑ καὶ ΟΑ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΔ καὶ ΑΕ, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΚΑΟ}=180^0-φ$.

Ἄρα ἡ θέσις τῆς εὐθείας ΑΟΒ εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεπῶς καὶ ἡ γωνία $\widehat{ΑΒx}$ εἶναι ὡρισμένη. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΓ κάθετος τῇ xy θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΓΟΒ}=90^0-\widehat{ΑΒx}$, ὅτε, ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΓ, προκύπτει:

$$\widehat{ΓΑΟ}=\frac{1}{2}\widehat{ΓΟΒ}=\frac{1}{2}(90^0-\widehat{ΑΒx}).$$

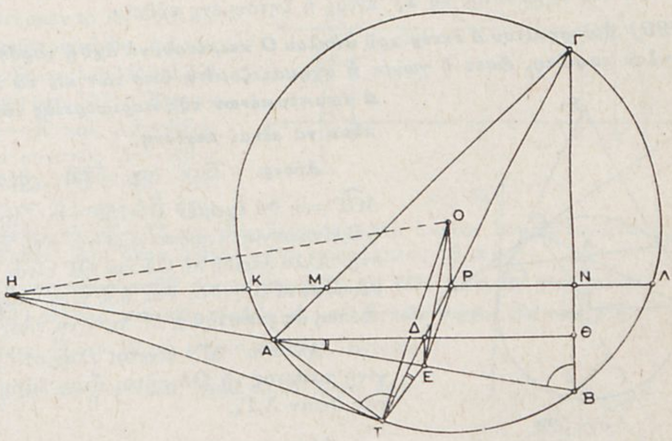
Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν ΚΑ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς $180^0-\varphi$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς ὁρίζει ἐπὶ τῆς xy τὸ Β καὶ οὕτω ὁρίζεται ἡ γωνία $\widehat{ABx}$. Μὲ πλευρὰν ΑΒ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{BA\Gamma}$ ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}(90^0-\widehat{ABx})$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ ταύτης ὁρίζει ἐπὶ τῆς xy τὸ Γ. Ἡ εἰς τὸ Γ κάθετος τῇ xy ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ κέντρον Ο τῆς περιφερείας.



Σχ. 526.

727) Ἐπὶ περιφερείας Ο δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν σταθερὰ χορδὴ ΚΛ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ΑΓ καὶ ΒΓ νὰ τέμνουν τὴν ΚΛ εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Ν, ἰσάκις ἀπέχοντα τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΚΛ.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 527), Η ἡ τομὴ τῶν ΛΚ καὶ ΒΑ καὶ Τ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΓΡ, ἔνθα Ρ μέσον τῆς ΚΛ, καὶ τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ΗΤ καὶ τὴν ΑΘ παράλληλον τῇ ΚΛ καὶ τέμνουσαν τὴν ΓΒ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΓΤ



Σχ. 527.

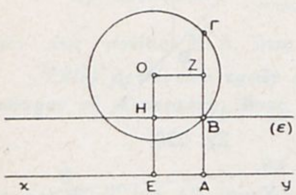
εἰς τὸ Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς μέσον τῆς ΑΘ, διότι τὸ Ρ εἶναι μέσον τῆς ΜΝ. Ἔστω Ε τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{AE\Delta}=\widehat{AB\Gamma}=\widehat{AT\Gamma}$, τὸ ΑΤΕΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\Delta\widehat{T}E=\Delta\widehat{A}E=E\widehat{H}P$. Ἄρα τὸ ΤΕΡΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{THE}=\widehat{TPE}$ (1). Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{EOP}=\widehat{EHP}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους καὶ $\widehat{EHP}=\widehat{PTE}$ ἔπεται $\widehat{PTE}=EOP$. Ἄρα τὸ OPET εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{TOE}=\widehat{TPE}=\widehat{THE}$. Ἄρα ἡ HT εἶναι ἐφαπτομένη.

Σύνθεσις. Ἐκ τοῦ H ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην HT, ὅτε ἡ TP ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ Γ.

728) Δίδεται περιφέρεια O καὶ εὐθεῖα xy. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος τῇ xy καὶ τοιαύτη ὥστε ἐὰν A, B, Γ εἶναι τὰ σημεῖα καθ' ἃ αὕτη τέμνει τὴν xy καὶ τὴν περιφέρειαν νὰ εἶναι AB=BΓ.

Λύσις. Φέρσμεν (σχ. 528) τὴν OE κάθετον τῇ xy καὶ τὴν OZ κάθετον τῇ BΓ. Ἔχομεν $OE=AZ=AB+BZ=$
$$=AB+\frac{AB}{2}=\frac{3\cdot AB}{2}.$$
Ἄρα εἶναι $AB=\frac{2}{3}OE$.

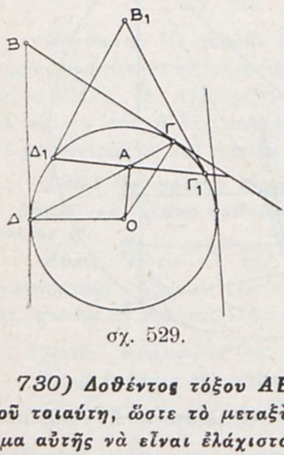


σχ. 528.

Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς OE λαμβάνομεν $HE=\frac{2}{3}(OE)$ καὶ εἰς τὸ H φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) κάθετον τῇ OE, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς O τὸ σημεῖον B.

Ἡ ἐκ τοῦ B κάθετος τῇ xy εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

729) Διὰ σημείου A ἐντὸς τοῦ κύκλου O κειμένου, νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΓAΔ τοῦ κύκλου τοιαύτη, ὥστε ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μεγίστη.



σχ. 529.

Λύσις. Ἐὰν (σχ. 529) θέσωμεν $\widehat{ΔOΓ}=ω$, θὰ ἔχωμεν $B=180^0-ω$. Ἄρα ἵνα ἡ B γίνῃ μεγίστη πρέπει ἡ ω νὰ γίνῃ ἐλαχίστη. Ἀλλὰ ἐπειδὴ αἱ OΔ καὶ OΓ εἶναι σταθεραὶ κατὰ μέγεθος ἵνα ἡ ω γίνῃ ἐλαχίστη πρέπει, ὡς γνωστόν, ἡ ΔΓ νὰ γίνῃ ἐλαχίστη.

Ἀλλὰ ἡ ΔΓ γίνεται ἐλαχίστη ὅταν γίνῃ κάθετος τῇ OA, ἤτοι ὅταν λάβῃ τὴν τὴν θέσιν $Δ_1Γ_1$.

Ἄρα ἡ μεγίστη γωνία εἶναι ἡ $Δ_1\widehat{B_1}Γ_1$

730) Δοθέντος τόξου AB κέντρου O, νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη αὐτοῦ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν OA καὶ OB περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

Λύσις. Ἔστω (σχ. 530) ZH τυχοῦσα ἐφαπτομένη εἰς τὸ Λ καὶ ΓΔ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ μέσον E τοῦ τόξου AB. Ἔστω PΣ εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ E παράλληλος τῇ ZH. Φέρομεν τὴν ΔI παραλληλον τῇ PΓ, ὅτε τὸ PΔIΓ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἔχομεν τώρα $\widehat{\Delta I \Sigma}=\widehat{O P \Sigma}>\widehat{O \Gamma \Delta}=\widehat{O \Delta \Gamma}>\widehat{\Delta \Sigma I}$ καὶ συ-θὰ εἶναι $\Delta\Sigma>\Delta I=P\Gamma$.

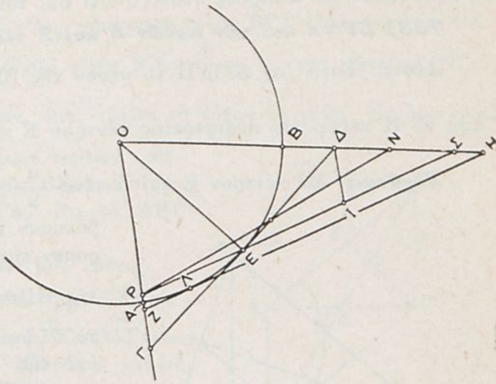
Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΣ μῆκος $\Delta N=\Delta I=P\Gamma$, ὅτε θὰ εἶναι $OP+ON=$ $=O\Gamma+O\Delta$ καὶ συνεπῶς (ἄσκ. 141), θὰ ἔχωμεν

$$PN>\Gamma\Delta \quad (1).$$

Ἐπειδὴ ἡ $\widehat{PN\Sigma}$ εἶναι ἀμβλεῖα θὰ ἔχωμεν

$$P\Sigma>PN \quad (2).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $P\Sigma>\Gamma\Delta$.

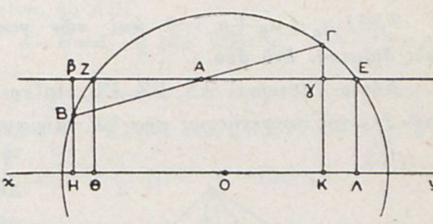


σχ. 530.

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $ZH>P\Sigma$, προκύπτει $ZH>\Gamma\Lambda$. Ἄρα ἡ ἐλαχίστη ἐφαπτομένη εἶναι ἡ ΓΔ.

731) Διὰ σημείου Α, ἐντὸς κύκλου Ο κειμένου, νὰ ἀχθῇ χορδὴ τοῦ κύκλου τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν προβολῶν τῶν μερῶν της ΒΑ καὶ ΑΓ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy νὰ εἶναι μεγίστη.

Λύσις. Αἱ προβολαὶ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι, ὡς γνωστόν, ἴσαι. Ἄρα τὴν xy θεωροῦμεν ἀγομένην ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἢ ἐκ τοῦ Α. Θέλομεν τὸ $A\gamma-A\beta$ νὰ εἶναι μέγιστον, ἔνθα Αβ καὶ Αγ αἱ προβολαὶ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἐπὶ τὴν xy (σχ. 531). Ἔχομεν $A\gamma=AE-\gamma E$ καὶ $A\beta=AZ+$ $+\beta Z$ καὶ συνεπῶς $A\gamma-A\beta=$ $=(AE-AZ)-(\gamma E+\beta Z)$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΑΕ καὶ ΑΖ σταθερά, πρέπει τὸ $\gamma E+\beta Z$ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον, τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὅταν ταῦτα γίνουν μηδέν, ἤτοι ὅταν ἡ ΒΑΓ γίνῃ παράλληλος τῇ xy.



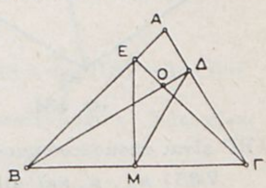
σχ. 531.

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν κάτωθι στοιχείων.

732) ΒΓ=α καὶ τῶν ποδῶν Δ καὶ Ε τῶν ὑψῶν ΒΔ καὶ ΓΕ.

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἔχομεν $EM=\frac{1}{2}B\Gamma=\frac{1}{2}\alpha=\Delta M$ Ἄρα τὸ Μ εἶναι ὡρισμένον.

Σύνθεσις. Διὰ τοῦ Μ ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν $MB=M\Gamma=\frac{\alpha}{2}$. Φέρομεν τὰς ΒΕ καὶ ΓΔ αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ Α. Ἐπειδὴ εἶναι $EM=\Delta M=\frac{B\Gamma}{2}$, τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΒΔΓ εἶναι ὀρθογώ-



σχ. 532.

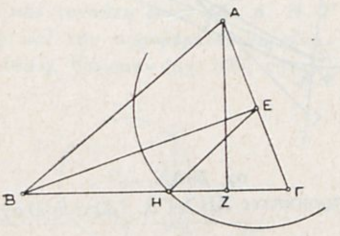
νια καὶ συνεπῶς τὰ ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ὕψη τοῦ κατασκευασθέντος τριγώνου. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις διότι διὰ τοῦ Μ ἄγονται ἄπειραι εὐθεῖαι.

733) ΒΓ=α καὶ τῶν ποδῶν Δ καὶ Ζ τῶν ὑψῶν ΔΖ καὶ ΒΕ

Λύσις. Ἔστω (σχ. 533) Η τὸ μέσον τῆς ΒΓ=α, ὅτε θὰ εἶναι $ΕΗ=\frac{α}{2}$.

Ἄρα τὸ Η κεῖται ἐπὶ περιφερείας κέντρου Ε καὶ ἀκτῖνος $\frac{α}{2}$.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον Ε καὶ ἀκτῖνα $\frac{α}{2}$ γράφομεν περιφέρειαν καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Η. Φέρομεν τὴν ΗΖ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς $ΗΓ=ΗΒ=\frac{α}{2}$ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ ὑψοῦμεν κάθετον ἥτις τέμνεται ὑπὸ τῆς ΓΕ εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ εἶναι $ΗΕ=\frac{ΒΓ}{2}$, τὸ τρίγωνον ΒΕΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς ἡ ΒΕ εἶναι κάθετος τῇ ΑΓ.

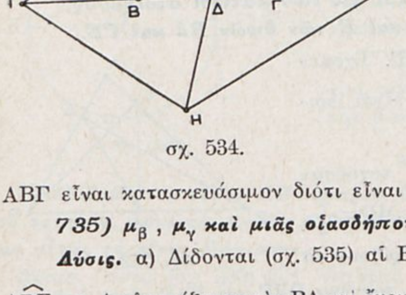


σχ. 533.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

734) $μ_α+μ_β+μ_γ=δ$ καὶ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ τρεῖς διάμεσοι ἀνὰ δύο.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΔ, ΒΖ, ΓΕ, αἱ τρεῖς διάμεσοι $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ τμήματα ΓΘ=ΒΙ=ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΔ τὸ ΔΗ=ΑΔ. Ἔχομεν προφανῶς $ΑΘ \underline{\parallel} 2\cdot ΓΕ=2μ_γ$, $ΑΙ=ΘΗ \underline{\parallel} 2\cdot ΒΖ=2μ_β$ καὶ $ΑΗ=2μ_α$. Αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $\widehat{ΑΗΘ}$, εἶναι γνωσταί, διότι αἱ πλευραί του εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς τρεῖς διαμέσους. Τὸ τρίγωνον ΑΗΘ γνωστῆς τῆς περιμέτρου του $2(μ_α+μ_β+μ_γ)$ καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν του εἶναι κατασκευάσιμον. Τούτου κατασκευασθέντος τὰ ἡμίσυ τῶν πλευρῶν του εἶναι αἱ διάμεσοι τοῦ ΑΒΓ, ὅτε τὸ ΑΒΓ εἶναι κατασκευάσιμον διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ τρεῖς διάμεσοι αὐτοῦ.



σχ. 534.

735) $μ_β$, $μ_γ$ καὶ μιᾶς οἱασδήποτε γωνίας του.

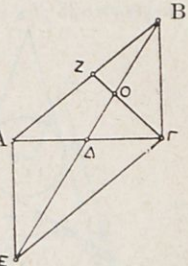
Λύσις. α) Δίδονται (σχ. 535) αἱ $ΒΔ=μ_β$ καὶ $ΓΖ=μ_γ$ καὶ ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}=φ$. Διπλασιάζομεν τὴν ΒΔ καὶ ἔχομεν τὴν ΒΕ, ὅτε, λόγῳ τοῦ παραλληλογράμου ΒΑΕΓ ἔχομεν $\widehat{ΒΓΕ}=180-φ$. Ἐπίσης εἶναι $ΟΓ=\frac{2}{3}μ_γ$ καὶ $ΒΟ=\frac{2}{3}μ_β$.

Σύνθεσις. Μὲ χορδὴν $ΒΕ=2μ_β$ γράφομεν τόξον ΒΓΕ δεχόμενον γωνίαν $180^0-φ$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο (ἔνθα εἶναι $ΒΟ=\frac{2}{3}μ_β$) καὶ ἀκτῖνα $ΟΓ=$ $=\frac{2}{3}μ_γ$, γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὸ τόξον ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα. Ἔστω Γ τὸ ἓν τῶν σημείων τούτων. Φέρομεν τὴν ΓΔ, ἔνθα Δ μέσον τῆς ΒΕ, καὶ προεκτείνοντες λαμβάνομεν ΔΑ=ΓΑ, ὅτε τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

β) Δίδονται (σχ. 535) αἱ $ΒΔ=μ_β$, $ΓΖ=μ_γ$ καὶ ἡ γωνία $\widehat{ΒΑΓ}=ω$. Θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΔΓΕ}=\widehat{ΒΑΓ}=ω$.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν $ΒΕ=2μ_β$ καὶ μὲ χορδὴν ΔΕ, ἔνθα Δ μέσον τῆς ΒΕ, κατασκευάζομεν τόξον ΔΓΕ δεχόμενον γωνίαν ω καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο, ἔνθα $ΒΟ=\frac{2}{3}μ_β$ καὶ ἀκτῖνα



σχ. 535.

$ΟΓ=\frac{2}{3}μ_γ$, γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὸ τόξον ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα. Ἔστω Γ τὸ ἓν τῶν σημείων. Φέρομεν τὴν ΓΔ ἣν προεκτείνομεν κατὰ ἴσον μῆκος ΔΑ, ὅτε τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ.

736) $ΑΒ=γ$, $ΑΓ+ΓΒ=μ$, $Α-Β=δ$, ἢ τῶν $ΑΒ=γ$, $ΑΓ-ΓΒ=μ$, $Β-Α=δ$.

Λύσις. α) Περιορισμὸς $γ<μ$. Προεκτείνομεν (τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν) τὴν ΑΓ κατὰ ΓΔ=ΓΒ, ὅτε εἶναι $ΑΔ=ΑΓ+ΓΒ=μ$ καὶ $\widehat{ΓΒΔ}=\widehat{ΓΔΒ}=\frac{1}{2}\widehat{Γ}$ (1). Ἔχομεν $\widehat{ΑΒΔ}=\widehat{Β}+\widehat{ΓΒΔ}=\widehat{Β}+\frac{Γ}{2}=\widehat{Β}+\frac{1}{2}(180^0-Α-Β)=90^0-\frac{Α-Β}{2}=$ $=90^0-\frac{δ}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ κατασκευάζεται, διότι εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα του: $ΑΒ=γ$, $ΑΔ=μ$, $\widehat{ΑΒΔ}=90^0-\frac{δ}{2}$.

Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=ΓΔ, ἡ μεσοκάθετος τῆς ΒΔ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΔ τὴν κορυφὴν Γ.

β) Περιορισμὸς $γ>μ$. Ἐπὶ τῆς ΓΑ (τὸ σχῆμα ἁπλοῦν) λαμβάνομεν ΓΔ=ΓΒ, ὅτε εἶναι $ΔΑ=μ$ καὶ $\widehat{ΓΔΒ}=\widehat{ΓΒΔ}=90^0-\frac{Γ}{2}$.

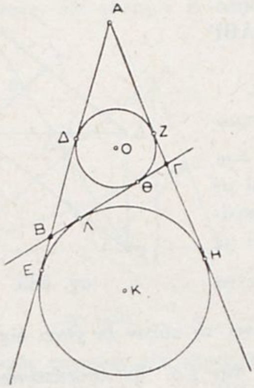
Ἔχομεν $\widehat{ΔΒΑ}=\widehat{Β}-\widehat{ΓΒΔ}=\widehat{Β}-90^0+\frac{Γ}{2}=\widehat{Β}-90^0+\frac{1}{2}(180^0-Α-Β)=$ $=\frac{Β-Α}{2}=\frac{δ}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι κατασκευάσιμον διότι εἶναι γνωστὰ τὰ στοιχεῖα του $ΑΔ=μ$, $ΑΒ=γ$, $\widehat{ΑΒΔ}=\frac{δ}{2}$.

Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι ΓΔ=ΓΒ, ἡ μεσοκάθετος τῆς ΒΔ ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΔ τὴν κορυφὴν Γ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

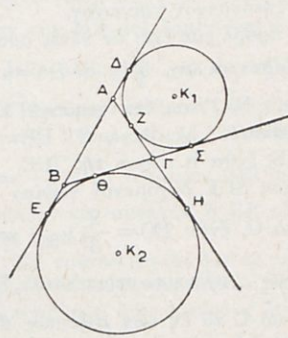
737) Θέσει μεγέθει τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἑνὸς τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Λύσις. Ἔστωσαν Ο καὶ Κ ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ ὁ παρεγγεγραμένος κύκλος εἰς τὴν πλευραὶ ΒΓ. Φέρομεν (σχ. 537) τὰς ἐξωτερικὰς κοινὰς ἐφαπτομένας ΕΔ καὶ ΗΖ τῶν δύο κύκλων καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΛΘ.

Αὗται τεμνόμεναι ἀνὰ δύο ὁρίζουν τὸ τρίγωνον. Ἐπειδὴ ἄγονται ἐν γένει δύο ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ἔχομεν ἐν γένει δύο λύσεις.



σχ. 537,

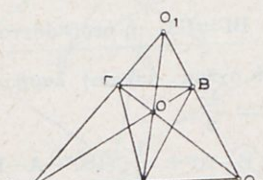


σχ. 538.

738) Θέσει μεγέθει δύο ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Λύσις. Ἔστωσαν $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ οἱ παρεγγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τὰς πλευρᾶς ΑΓ καὶ ΒΓ. Φέρομεν τὴν ἐξωτερικὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΕΔ τῶν δύο κύκλων, ὡς καὶ τὰς κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας ΘΙ καὶ ΖΗ Τεμνόμεναι αὗται ἀνὰ δύο ὁρίζουν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ ἄγονται δύο ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

739) Ἐκ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.



σχ. 539.

Λύσις. Ἔστωσαν $Ο_1$, $Ο_2$, $Ο_3$ τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων. Αἱ $Ο_1Α$ καὶ $Ο_2Ο_3$ ὡς διχοτόμοι παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι. Ἄρα αἱ $Ο_1Α$, $Ο_2Β$, $Ο_3Γ$ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς $Ο_2Ο_3$, $Ο_3Ο_1$, $Ο_1Ο_2$.

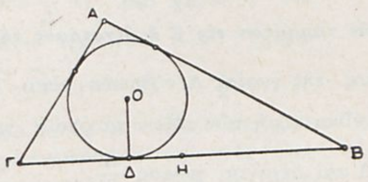
Σύνθεσις. Φέρομεν τὰ ὕψη $Ο_1Α$, $Ο_2Β$, $Ο_3Γ$ τοῦ τριγώνου $Ο_1Ο_2Ο_3$, ὅτε οἱ πόδες Α,Β,Γ τῶν ὑψῶν εἶναι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

740) α) Ἐκ τῶν $ΒΓ=α$, $ΑΒ-ΑΓ=δ$, $ϱ$, β) Ἐκ τῶν γωνιῶν $ΒΑΓ=φ$, $ΒΓ=α$, $ϱα$.

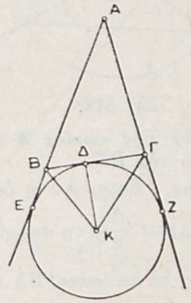
Λύσις. α) Ἔστω (σχ. 540) Η τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Ὡς γνωστὸν $Γ\Delta = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta H = ΓH - Γ\Delta = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \frac{\gamma-\beta}{2} = \frac{AB-AΓ}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς $ΓB=\alpha$ λαμβάνομεν, ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ μέσου αὐτῆς Η, $H\Delta = \frac{\delta}{2}$ καὶ εἰς τὸ Δ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον $\Delta O = \varrho$. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ϱ γράφομεν κύκλον καὶ ἐκ τῶν Γ καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας του, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ, 540.



Σχ. 541.

β) Ὡς γνωστὸν (σχ. 541) εἶναι $\widehat{BKΓ} = 90^0 - \frac{A}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΚΓ εἶναι κατασκευάσιμον $\left(\text{γνωστὰ } ΒΓ=\alpha, \text{ ὕψος } Κ\Delta=\varrho_\alpha,\ \widehat{BKΓ} = 90^0 - \frac{A}{2}\right)$.

Τούτου κατασκευασθέντος διπλασιάζομεν τὰς γωνίας $Γ\widehat{B}K$ καὶ $B\widehat{Γ}K$ καὶ ἔχομεν τὰς γωνίας $Γ\widehat{B}E$ καὶ $B\widehat{Γ}Z$. Αἱ ΕΒ καὶ ΖΓ προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ Α.

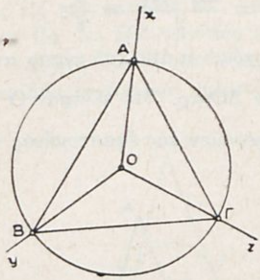
Περιορισμός. Πρέπει ἡ ϱ_α νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ βέλους τοῦ τόξου χορδῆς $ΒΓ=\alpha$ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $90^0 - \frac{A}{2}$.

741) γωνΒΑΓ=φ καὶ τῶν τμημάτων ΒΗ καὶ ΓΗ τῶν ὑψῶν, ἔνθα Η τὸ ὀρθόκεντρον.

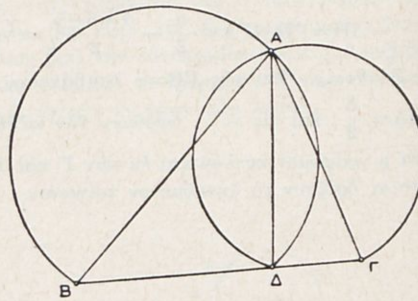
Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $B\widehat{H}Γ = 180^0 - \varphi$ τὸ τρίγωνον ΒΗΓ εἶναι κατασκευάσιμον. Τούτου κατασκευασθέντος ἐκ τῶν Β καὶ Γ ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΓΗ καὶ ΒΗ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖα ὁρίζουν τό Α. (Τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν).

742) Β, Γ καὶ τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι $A\widehat{O}Γ = 2\widehat{B}$, $A\widehat{O}B = 2\widehat{Γ}$ (σχ. 542), φέρομεν διὰ τοῦ Ο τρεῖς εὐθείας Ox, Oy, Oz σχηματιζούσαςγωνίας $x\widehat{O}y = 2\widehat{Γ}$ καὶ $x\widehat{O}z = 2\widehat{B}$ καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ τυχοῦσαν ἀκτῖνα γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῶν Ox, Oy, Oz, ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα, Α, Β, Γ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. Τὸ πρόβλημα ἔχει προφανῶς ἀπείρους λύσεις.



Σχ. 542.



Σχ. 543.

743) Τῆς γωνίας Α καὶ τῶν τμημάτων εἰς ἃ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α χωρίζει τὴν ΒΓ.

Λύσις. Ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἐπειδὴ εἶναι (σχ. 543) $\widehat{BA\Delta}=\widehat{\Gamma A\Delta}=\frac{A}{2}$, τὸ σημεῖον Α εἶναι τομὴ τῶν τόξων τὰ ὁποῖα γράφονται μὲ χορδὰς τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΔ καὶ δέχονται γωνίας $\frac{A}{2}$.

744) Ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β καὶ τοῦ κέντρου βάρους Ο.

Λύσις. Φέρομεν (τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν) τὰς ΑΟ καὶ ΒΟ καὶ τὰς προεκτείνομεν ἀντιστοίχως κατὰ $O\Delta=\frac{1}{2}AO$ τὴν πρώτην καὶ $OE=\frac{1}{2}BO$ τὴν δευτέραν. Αἱ ΒΔ καὶ ΑΕ προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ Γ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον Πράγματι, ἐὰν Θ καὶ Ι εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΟ καὶ ΒΟ, ἐπειδὴ εἶναι ΟΘ=ΟΔ καὶ ΟΙ=ΟΕ, τὸ ΘΙΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\Delta E \overset{\parallel}{=} \Theta I$. Ἀλλὰ εἶναι $\Theta I \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AB$, διότι συνδέει τὰ μέσα τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\Delta E \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AB$. Ἄρα τὰ Δ καὶ Ε εἶναι μέσα τῶν ΒΓ καὶ ΑΓ.

745) Ἐκ τῆς διαμέσου $A\Delta=\mu_\alpha$, τῆς ὑποδιαμέσου $AE=\mu'_\alpha$ (Ε μέσον τῆς ΒΔ) καὶ τῆς ἀποστάσεως ΔΕ=δ τῶν ποδῶν αὐτῶν.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι κατασκευάσιμον. Προεκτείνομεν τὴν ΔΕ κατὰ ΕΒ=ΔΕ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Β. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ κατὰ ΔΓ=ΒΔ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Γ. (Τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν).

746) Ἐκ τῆς διαμέσου $A\Delta=\mu_\alpha$, τῆς ὑποδιαμέσου $AE=\mu'_\alpha$ καὶ τοῦ ὕψους $AZ=\upsilon_\alpha$. Περιορισμός. Πρέπει $\upsilon_\alpha \leqslant \mu_\alpha$, $\upsilon_\alpha \leqslant \mu'_\alpha$.

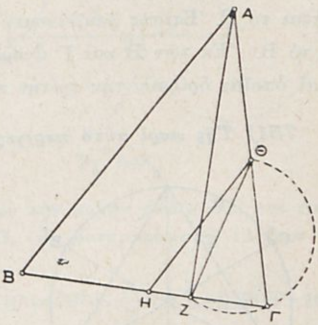
Λύσις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΕ καὶ ΑΖΔ κατασκευάζονται. Προεκτείνομεν τὴν ΔΕ κατὰ ΕΒ=ΔΕ καὶ εὑρίσκομεν τὸ Β. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ κατὰ ΔΓ=ΒΔ ἐαὶ εὑρίσκομεν τὸ Γ, (τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν).

747) ΒΓ=α καὶ τῶν μηκῶν ΕΗ καὶ ΖΗ τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀπὸ τοῦ ποδός των μέχρι τῆς τομῆς των.

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΗΕΖ (τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν) κατασκευάζεται διότι εἶναι $ΕΖ=\frac{α}{2}$. Ἐπὶ τὰς ΗΕ καὶ ΗΖ ὑψοῦμεν καθέτους ἀντιστοίχως εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὸ Α. Προεκτείνομεν τὰς ΑΕ καὶ ΑΖ κατὰ μήκη ἀντιστοίχως $ΕΒ=ΑΕ$ καὶ $ΖΓ=ΑΖ$ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰ Β καὶ Γ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, καθότι, ἐπειδὴ εἶναι $ΕΖ \overset{\parallel}{=} \frac{ΒΓ}{2}$ καὶ $ΕΖ=\frac{α}{2}$, θὰ ἔχωμεν $ΒΓ=α$.

748) $ΑΒ=γ$, $Γ-Β=ω$, καὶ τῆς ἀποστάσεως ΖΗ τοῦ μέσου Η τῆς ΒΓ ἀπὸ τὸν πόδα Ζ τοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ ὕψους.

Λύσις. Ἔστω Θ τὸ μέσον τῆς ΑΓ. Ἐπειδὴ εἶναι $Θ\widehat{Η}Ζ=\widehat{Β}$ καὶ $Θ\widehat{Ζ}Γ=\widehat{Γ}$, διότι $ΖΘ=\frac{1}{2}ΑΓ$ ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΖΓ, ἔχομεν $Η\widehat{Θ}Ζ=\widehat{Γ}-\widehat{Β}=ω$ καὶ $ΗΘ=\frac{γ}{2}$.



Σχ. 544.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΗΖΘ (σχ. 544) εἶναι κατασκευάσιμον ὑπὸ τοὺς γνωστοὺς περιορισμοὺς (§ 279) καὶ συνεπῶς ἡ γωνία $\widehat{Γ}$ εἶναι γνωστὴ ὡς παραπλήρωμα τῆς ΘΖΗ. Τούτου κατασκευασθέντος μὲ χορδὴν ΘΖ γράφομεν τόξον δεχόμενον γωνίαν $\widehat{Γ}$ τὸ ὁποῖον τέμνεται ὑπὸ τῆς ΗΖ εἰς τὸ Γ. Διπλασιάζομεν μετὰ ταῦτα τὰς ΓΗ καὶ ΓΘ καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς κορυφὰς Β καὶ Α.

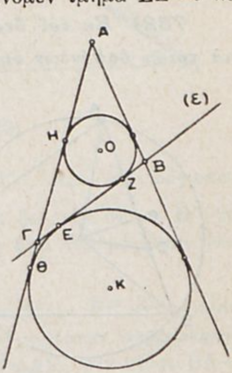
749) α) Ἐκ τῶν $ϱ$, $ϱ_α$, $ΑΓ-ΑΒ=δ$. β) Ἐκ τῶν $ϱ$, $ϱ_α$, $α$.

Λύσις. α) Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι $ΕΖ=β-γ=δ$ (σχ. 545).

Σύνθεσις. Ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας (ε) λαμβάνομεν τμῆμα $ΕΖ=δ$ καὶ γράφομεν δύο κύκλους ἐφαπτομένους τῆς (ε) ἀντιστοίχως εἰς τὰ Ζ καὶ Ε κειμένους ἑκατέρωθεν τῆς (ε) καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως $ϱ$ καὶ $ϱ_α$. Τῶν κύκλων αὐτῶν ἄγομεν τὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $ϱ<ϱ_α$.

β) Εἶναι γνωστὸν (σχ. 545) ὅτι εἶναι $ΗΘ=α$ (ἰδὲ § 232).



Σχ. 545.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν ΗΘ καὶ ἐπ' αὐτῆς μῆκος $ΗΘ=α$ καὶ γράφομεν δύο κύκλους ἐφαπτομένους αὐτῆς, ἀντιστοίχως εἰς τὰ Η καὶ Θ ἀκτίνων $ϱ$ καὶ $ϱ_α$ καὶ κειμένους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας. Τῶν κύκλων αὐτῶν φέρομεν καὶ τὴν ἄλλην ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ἥτις τέμνει τὴν πρώτην εἰς τὸ Α ὡς καὶ τὴν κοινὴν ἐσωτερικήν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν τὰ Γ καὶ Β.

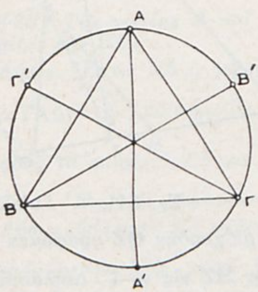
750) ΒΓ=α, ΑΓ—ΑΒ=δ, ρ.

Λύσις. Ἔχομεν $\alpha+\beta-\gamma=\delta+\alpha$, ἢ $2\tau-2\gamma=\delta+\alpha$, ἢ $\tau-\gamma=\frac{\delta+\alpha}{2}$ (σχ. 555)

ἢ $\Gamma Z=\frac{\delta+\alpha}{2}$.

Σύνθεσις. Γράφομεν κύκλον Ο ἀκτῖνος ρ καὶ φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτοῦ (ε) εἰς τυχὸν σημεῖον Ζ καὶ λαμβάνομεν, ἐπ' αὐτῆς $\Gamma Z=\frac{\delta+\alpha}{2}$. Οὕτως ὁρίζεται τὸ Γ. Ἐπίσης λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) μῆκος ΓΒ=α καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ Β. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ ἄγομεν τὰς ἑτέρας ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον Ο, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὴν τρίτην κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου.

751) Τῆς περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ τῶν σημείων τομῆς ταύτης ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.



Σχ. 546.

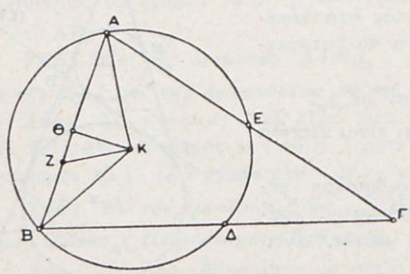
Λύσις. Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′ (σχ. 546) τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα τομῆς. Ἔχομεν

$$\widehat{A}=\frac{1}{2}\widehat{B\Gamma}=\frac{1}{2}(360^\circ-\widehat{B\Gamma' A}-\widehat{\Gamma B' A})=$$

$$=\frac{1}{2}(360^\circ-2\widehat{A\Gamma'}-2\widehat{AB'})=180^\circ-\widehat{\Gamma' B'}.$$

Ὁμοίως εἶναι $\widehat{B}=180^\circ-\widehat{A'\Gamma'}$ καὶ $\widehat{\Gamma}=180^\circ-\widehat{B'A'}$. Ἄρα αἱ γωνία $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ εἶναι γνωσταὶ καὶ συνεπῶς καὶ τὰ τόξα ΒΑ′, ΓΑ′, ΓΒ′, ΑΒ′, ΑΓ′, ΒΓ′ εἶναι γνωστά. Ἄρα τὸ ΑΒΓ κατασκευάζεται.

752) Ἐκ τοῦ ὅτι αἱ τρεῖς πλευραί του ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ διέρχονται διὰ τριῶν δοθέντων σημείων Δ, Ε, Ζ, αἱ κορυφαί του Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ περιφερείας Κ διερχομένης διὰ τῶν Δ καὶ Ε καὶ ἡ γωνία του Γ εἶναι γνωστή.



Σχ. 547.

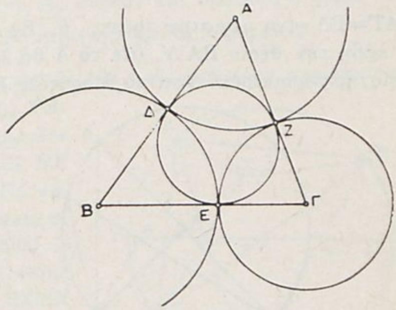
Λύσις. Ἔστω Γ=φ. Ὡς γνωστὸν εἶναι $\widehat{\Gamma}=\frac{1}{2}(\widehat{AB}-\widehat{\Delta E})$, ἢ $2\varphi=\widehat{AB}-\widehat{\Delta E}$, ἢ $\widehat{AB}=2\varphi+\widehat{\Delta E}$.

Ἄρα τὸ μέγεθος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ (σχ. 547) εἶναι γνωστὸν καὶ συνεπῶς καὶ ἡ γωνία $\widehat{BKA}$ εἶναι γνωστή, ὅτε καὶ ἡ ἀπόστασις ΚΘ τοῦ Κ ἀπὸ τῆς ΑΒ εἶναι γνωστή.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΖΚΘ, ὅτε ἡ ΖΘ προεκτεινομένη ὁρίζει τὰ Α καὶ Β, ὅτε αἱ ΑΕ καὶ ΒΔ προεκτεινόμεναι ὁρίζουν τὸ Γ.

753) Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς.

Λύσις. Ἐγγράφομεν κύκλον (σχ. 548) εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅτε, ἐὰν Ε, Ζ, Δ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ὡς γνωστόν, θὰ ἔχωμεν $Α\Delta=ΑΖ=\tau-\alpha$, $Β\Delta=ΒΕ=\tau-\beta$, $ΓΕ=ΓΖ=\tau-\gamma$. Οἱ κύκλοι κέντρων Α, Β, Γ καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως $Α\Delta=\tau-\alpha$, $Β\Delta=\tau-\beta$, καὶ $ΓΕ=\tau-\gamma$ εἶναι οἱ ζητούμενοι.

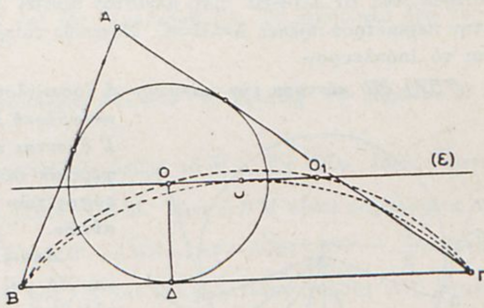


Σχ. 548.

754) Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ περιγεγραμμένων περὶ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἔχον τὴν μεγίστην γωνίαν κορυφῆς.

Λύσις. Ὡς(1) γνωστὸν (σχ. 549) εἶναι $\widehat{ΒΟΓ}=90^0+\frac{Α}{2}$, ἢ $\widehat{Α}=2\cdot\widehat{ΒΟΓ}-180^0$.

Ἄρα ἵνα ἡ Α γίνῃ μεγίστη ἀρκεῖ ἡ $\widehat{ΒΟΓ}$ νὰ γίνῃ μεγίστη. Τὸ Ο κεῖται ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), ἀπεχούσης τῆς ΒΓ ἀπόστασιν ρ (ρ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τοῦ τόξου $ΒΟΟ_1Γ$ γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{ΒΟΓ}$. Γράφομεν τὸ τόξον ΟΟ'Γ, τὸ



Σχ. 549.

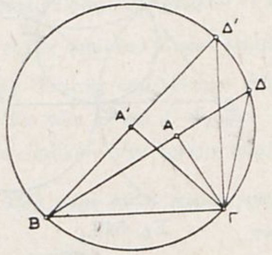
ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς (ε), ὅτε θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΒΟ'Γ}>\widehat{ΒΟΓ}$. Ἄρα τὸ μέγιστον τῆς $\widehat{ΒΟΓ}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θέσιν Ο', τοῦ Ο. Ἀλλὰ διὰ τὴν θέσιν Ο' τὸ τρίγωνον ΑΒΓ γίνεται ἰσοσκελές. Ἄρα τὸ ἰσοσκελὲς ἔχει τὴν μεγίστην γωνίαν κορυφῆς.

755) Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ γωνίαν κορυφὴν ἴσην πρὸς φ, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἔχον τὴν μεγίστην περίμετρον.

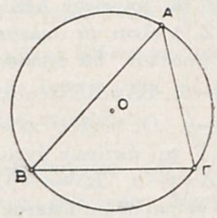
Λύσις. Προεκτείνομεν (σχ. 550) τὴν ΒΑ κατὰ $Β\Delta=ΑΓ$, ὅτε εἶναι $ΒΑ+ΑΓ=Β\Delta$ καὶ $\widehat{Β\Delta Γ}=\frac{Α}{2}=\frac{\varphi}{2}$. Τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς $ΒΓ=\alpha$ καὶ

(1) Εἰς τὸ σχῆμα 549 νὰ ἀχθοῦν αἱ ΒΟ, ΓΟ, ΒΟ', ΓΟ'.

δεχομένου γωνίαν $\frac{\varphi}{2}$. Ἔστω Α′ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ· Ἵνα τὸ ΒΑ+ +ΑΓ=ΒΔ γίνῃ μέγιστον πρέπει ἡ ΒΔ νὰ γίνῃ διάμετρος τοῦ κύκλου, ἤτοι νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΑ′Δ′, ὅτε τὸ Α θὰ λάβῃ τὴν θέσιν Α′. Ἄρα τὸ τρίγωνον μεγίστης περιμέτρου εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς ΒΑ′Γ.



Σχ. 550.

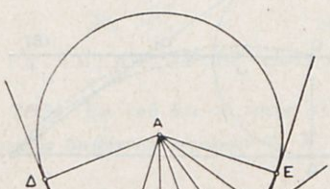


Σχ. 551.

756) Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον μεγίστης περιμέτρου.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὴν ΒΓ σταθερὰν (σχ. 551), ὅτε ἵνα τὸ ΑΒ+ΑΓ γίνῃ μέγιστον πρέπει (ἄσκ. 755) νὰ εἶναι Β=Γ. Ὁμοίως ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ΓΑ σταθεράν, ἵνα τὸ ΑΒ+ΒΓ γίνῃ μέγιστον πρέπει Α=Β. Ἄρα ἵνα ἔχωμεν μεγίστην περίμετρον πρέπει Α=Β=Γ. Συνεπῶς τὸ τρίγωνον μεγίστης περιμέτρου εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

757) Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ γράφεται μεταβλητὴ περιφέρεια. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ ἄγονται ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν ταύτην καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν τομῶν τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν.

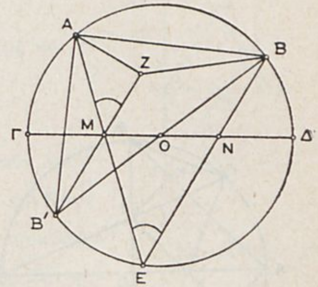


Σχ. 552.

Λύσις. α) Ἔστωσαν αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΔ καὶ ΓΕ ὁρίζουσαι τὸ Μ. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΔΜ, ΑΕΜ καὶ ΒΔΑ, ΓΕΑ λαμβάνομεν, $\widehat{\text{ΜΑΔ}}=\widehat{\text{ΜΑΕ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΒΑΔ}}=\widehat{\text{ΓΑΕ}}$. Δι' ἀφαιρέσεως προκύπτει $\widehat{\text{ΜΑΒ}}=\widehat{\text{ΜΑΓ}}$. Ἄρα ὁ τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\text{ΒΑΓ}}$, ἀπεριορίστως προεκτεινομένη ἑκατέρωθεν τοῦ Α, ἐκτὸς τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ Α καὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν Β καὶ Γ εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ.

β) Ἔστωσαν αἱ ἐφαπτόμεναι ΓΕ καὶ ΒΖ ὁρίζουσαι τὸ Ν. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΒΑΖ καὶ ΓΑΕ προκύπτει $\widehat{ΑΒΖ}=\widehat{ΑΓΕ}$, ἢ $\widehat{ΑΒΝ}=\widehat{ΑΓΝ}$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΝ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ν εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια.

758) Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ μιᾶς δοθείσης περιφερείας Ο καὶ μία ὡρισμένη διάμετρος αὐτῆς ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΑΕ καὶ ΒΕ νὰ ἀποτέμνουν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΔ εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ δοθέντος μήκους α.



Σχ. 553.

Λύσις. Φέρομεν τὴν ΒΖ (σχ. 553) ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΜΝ, ὅτε ἡ θέσις τοῦ Ζ εἶναι ὡρισμένη. Ἐπειδὴ τὸ ΒΖΜΝ εἶναι ἐκ κατασκευῆς παραλληλόγραμμον, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΑΜΖ}=\widehat{ΑΕΒ}$, ὅτε, ἐπειδὴ ἡ $\widehat{ΑΕΒ}$ εἶναι γνωστὴ ὡς βαίνουσα εἰς σταθερὸν τόξον $\widehat{ΑΒ}$ καὶ ἡ $\widehat{ΑΜΖ}$ θὰ εἶναι γνωστή. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΑΖ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{ΑΜΖ}$ ἴσην πρὸς τὴν $\widehat{ΑΕΒ}=\frac{1}{2}$ τοξ$\widehat{ΑΒ}$ καὶ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΓΔ. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις.

759) Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον Ε ὥστε νὰ εἶναι ΟΜ=ΟΝ.

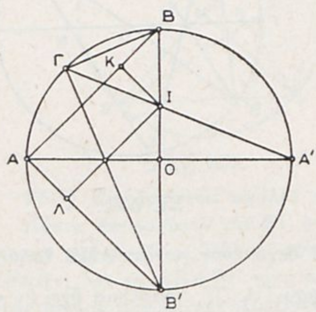
Λύσις. Ἡ ΒΟ προεκτεινομένη ὁρίζει τὸ Β′. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΒΝ καὶ ΟΜΒ′ προκύπτει $\widehat{ΟΒΝ}=\widehat{ΟΒ'Μ}$. Ἄρα ἡ Β′Μ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΕ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{ΑΜΒ'}=180^0-\widehat{ΑΜΖ}=180^0-\widehat{ΑΕΒ}=180^0-\frac{1}{2}$τοξ$\widehat{ΑΒ}$.

Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου χορδῆς ΑΒ′ δεχομένου γωνίαν $\widehat{ΑΜΒ'}$ ἴσην πρὸς $180^0-\frac{1}{2}$τοξ$\widehat{ΑΒ}$.

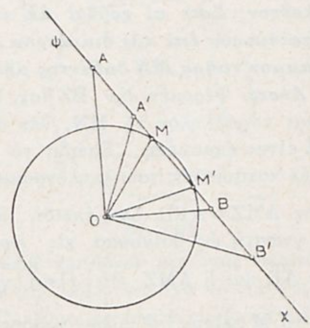
760) Δίδονται δύο κάθετοι διάμετροι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ κύκλου Ο καὶ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου ΑΒ. Ἡ ΓΑ′ τέμνει τὴν ΒΒ′ εἰς τὸ Ι. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΓΙΒ καὶ ΓΙΒ′.

Λύσις. Ἔστωσαν (σχ. 554) Κ καὶ Λ τὰ κέντρα τῶν κύκλων αὐτῶν. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΓΑ'}=\frac{1}{2}$τοξ$\widehat{ΒΑ'}=\frac{1}{2}\,90^0=45^0$ καὶ $\widehat{ΙΓΒ'}=\widehat{Α'ΓΒ'}=\frac{1}{2}90^0=45^0$ αἱ γωνίαι $\widehat{ΒΚΙ}$ καὶ $\widehat{Β'ΛΙ}$ ὡς ἐπίκεντροι θὰ εἶναι 90^0, ὅτε ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΒΚΙ καὶ Β′ΛΙ πρακύπτει $\widehat{ΚΒΙ}=45^0$ καὶ $\widehat{ΙΒ'Λ}=45^0$. Ἄρα ἡ ΒΚ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α ὡς καὶ ἡ Β′Λ.

Ἄρα τὰ Κ καὶ Λ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΒ′ καὶ μάλιστα τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ΑΒ, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ μέσου της καὶ τοῦ Β τὸ δὲ Λ ἐπὶ τοῦ τμήματος τῆς ΑΒ′ τὸ περιεχομενον μεταξὺ τοῦ μέσου της καὶ τοῦ Α. Ἄρα οἱ γεωμ. τόποι τῶν Κ καὶ Λ εἶναι τὰ προαναφερθέντα τμήματα τῶν ΑΒ καὶ ΑΒ′.



Σχ. 554.



Σχ. 555.

761) Ἐκ σημείου Ο κειμένου ἐκτὸς εὐθείας xy, νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως καὶ ὁρίζουσαι ἐπὶ τῆς xy τμῆμα δοθέντος μήκους α.

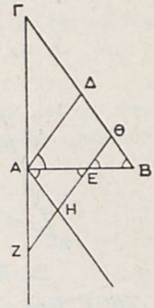
Λύσις. Ἔστωσαν ΟΑ καὶ ΟΒ αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι (σχ. 555) καὶ Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Ἐπειδὴ εἶναι $ΟΜ=\frac{ΑΒ}{2}=\frac{α}{2}$ γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα $\frac{α}{2}$ περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς xy τὰ Μ καὶ Μ′. Ἐπὶ τῆς xy λαμβάνομεν $ΜΑ=ΜΒ=\frac{ΟΜ}{2}=\frac{α}{2}$ καὶ $Μ'Α'=Μ'Β'=ΟΜ'=\frac{α}{2}$, ὅτε αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι αἱ ΟΑ καὶ ΟΒ, ἢ αἱ ΟΑ′ καὶ ΟΒ′. Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν πρέπει ἡ περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $\frac{α}{2}$ νὰ τέμνῃ τὴν xy.

762) Δίδονται δύο κάθετοι εὐθεῖαι οx καὶ οy καὶ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτάς. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν xoy, ἡ δὲ κορυφή του, ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας αὐτῆς, νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε).

Λύσις. Διχοτομοῦμεν τὴν xoy. Ἡ διχοτόμος ὁρίζει ἐπὶ τῆς (ε) τὸ Β ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγομεν καθέτους ΒΔ καὶ ΒΓ ἐπὶ τὰς οx καὶ οy. Τὸ ΟΔΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον. (Τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν).

763) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90^0) καὶ περιεχομένων μεταξὺ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἔστω καὶ προεκτεινομένων.



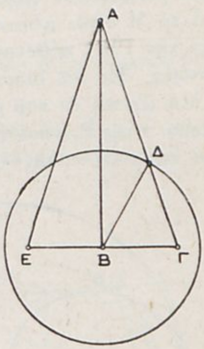
Σχ. 556.

Λύσις. Ἔστω ΖΕ (σχ. 556) ἡ παράλληλος καὶ Η τὸ μέσον της. Λόγῳ τῶν παραλλήλων ἔχομεν:

$$\Delta\widehat{A}B=\Theta\widehat{E}B=A\widehat{E}H \quad (1).$$

Ἐπειδὴ αἱ ΑΔ καὶ ΑΗ εἶναι διάμεσοι τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΒ καὶ ΕΑΖ, θὰ ἔχωμεν $\Delta\widehat{A}B=\widehat{B}$ καὶ $A\widehat{E}H=E\widehat{A}H$. Ἐξ αὐτῶν λόγῳ τῶν (1) προκύπτει $E\widehat{A}H=\widehat{B}$. Ἄρα ἡ ΑΗ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Η εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΓΒ.

764) Τριγώνου μεταβλητοῦ ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ μένει σταθερὰ θέσει μεγέθει, ἐπίσης σταθερὸν εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἐκ τοῦ Β ἀγομένης διαμέσου τοῦ τριγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.



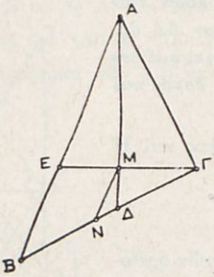
Σχ. 557.

Λύσις. Ἔστω ΒΔ ἡ διάμεσος. Τὸ Δ (σχ. 557) γράφει περιφέρειαν κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος γνωστῆς ΒΔ. Φέρομεν τὴν ΑΕ παράλληλον τῇ ΔΒ, ὅτε θὰ εἶναι ΕΑ=2·ΒΔ καὶ ΕΒ=ΒΓ=α. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Α εἶναι περιφέρεια κέντρου Ε καὶ ἀκτῖνος 2·ΒΔ.

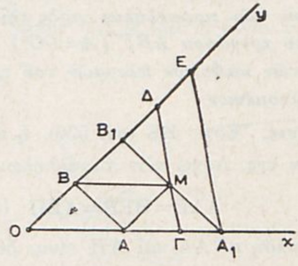
765) Τριγώνου ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερὰ θέσει μεγέθει, ἐπίσης εἶναι ΑΒ—ΑΓ=Κ (σταθερόν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῆς προβολῆς τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικήν, ἢ ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α.

Λύσις. Ἔστω Μ ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ (σχ. 558). Ἡ ΓΜ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἐπειδὴ τὸ ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελὲς θὰ εἶναι ΑΕ=ΑΓ καὶ συνεπῶς ΒΕ=ΑΒ—ΑΕ=ΑΒ—ΑΓ=Κ. Ἔστω Ν τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ὅτε θὰ εἶναι $NM=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}K$. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Ν καὶ ἀκτῖνος $\frac{K}{2}$.

Διὰ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον πρέπει νὰ δοθῇ ὡς σταθερὸν τὸ ΑΒ+ΑΓ, ὅτε, ἐὰν τοῦτο εἶναι Κ, ὁ γεωμ. τόπος θὰ εἶναι περιφέρεια κέντρου K καὶ ἀκτῖνος $\frac{K}{2}$.



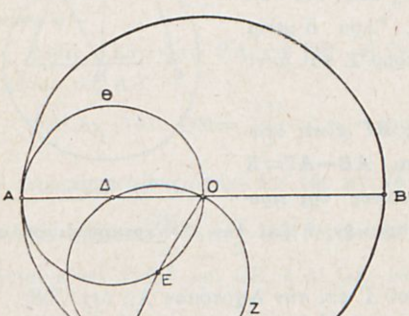
Σχ. 558.



Σχ. 559.

766) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ox καὶ oy γωνίας xoy λαμβάνομεν ἀντισοίχως τὰ σημεῖα A καὶ B τοιαῦτα ὥστε OA+OB=K (σταθερὸν) καὶ κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον AOBM. Τὶς ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς M τοῦ παραλληλογράμμου, ὅταν τὰ σημεῖα A καὶ B κινοῦνται.

Λύσις. Λαμβάνομεν $BB_1=OB$ καὶ $AA_1=OA$ (σχ. 559), ὅτε, λόγῳ τῶν παραλληλογράμμων ABB_1M καὶ $ABMA_1$, προκύπτει. ὅτι ἡ A_1MB_1 εἶναι εὐθεῖα καὶ τὸ M εἶναι μέσον της. Ἐπίσης εἶναι $OA_1+OB_1=2(OA+OB)=2K$. Φέρομεν τὴν ΓΜΔ κάθετον τῇ διχοτόμῳ τῆς xoy ὡς καὶ τὴν A_1E κάθετον τῇ διχοτόμῳ. Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου $ΓA_1EΔ$ λαμβάνομεν $ΓA_1=ΔE$. Ἐπειδὴ ἡ ΜΔ ἄγεται ἐκ τοῦ μέσου τῆς A_1B_1 παράλληλος τῇ A_1E θὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς B_1E καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $B_1Δ=ΔE$. Ἄρα εἶναι $B_1Δ=ΓA_1$. Ἔχομεν τώρα $OΓ=OA_1-ΓA_1$ καὶ $OΔ=OB_1+B_1Δ$. Προστιθέμεναι αὗται δίδουν $2OΔ=OA_1+OB_1=2K$. Ἄρα τὰ Δ καὶ Γ εἶναι σταθερὰ σημεῖα καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ M εἶναι ἡ εὐθεῖα ΓΔ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως.

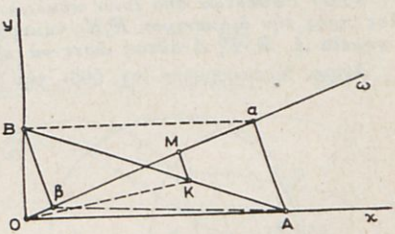


Σ. 560.

767) Εὑρεῖν τὸν γεωμ. τόπον τὸν ὁποῖον γράφει τυχὸν σημεῖον περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος R, ὅταν αὕτη κινεῖται, οὕτως ὥστε νὰ ἐφάπτεται (κυλιομένη) ἐσωτερικῶς ἄλλης περιφερείας ἀκτῖνος 2R.

Λύσις. Ἔστω OA (σχ. 560) ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας. Ἔστω ὅτι ὁ μικρὸς κύκλος, κατέχων κατ᾽ ἀρχὰς τὴν θέσιν ΑΕΟΘ, στρέφεται ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας καὶ ἔστω ΓΖΟΔ μία οἱαδήποτε θέσις τοῦ κυλιομένου κύκλου. Ἔστω Γ τὸ νέον σημεῖον ἐπαφῆς. Ἔχομεν $\widehat{AOΓ}=$τοξ$\widehat{AΓ}=\frac{1}{2}$τοξ$\widehat{AE}=\frac{1}{2}$τοξ$\widehat{ΓΔ}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ μικρότερον τόξον ἔχει ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ τῆς ΑΟ, καὶσυνεπῶς τόξον μιᾶς μοίρας τῆς μικροτέρας περιφερείας εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου μιᾶς μοίρας τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας, ἕπεται ὅτι τὸ τόξον $\overset{\frown}{ΑΓ}$ εἶναι ἴσον (εἰς ἀπόλυτον τιμὴν) πρὸς ἕκαστον τῶν τόξων $\overset{\frown}{ΑΕ}$ καὶ $\overset{\frown}{ΓΔ}$. Ἄρα ὅταν ὁ κινούμενος κύκλος μεταστῇ ἐκ τῆς πρώτης εἰς τὴν δευτέραν θέσιν, τὸ Ε θὰ πέσῃ εἰς τὸ Γ καὶ τὸ Α εἰς τὸ Δ. Ἄρα τὸ Α γράφῃ τὴν διάμετρον ΑΒ.

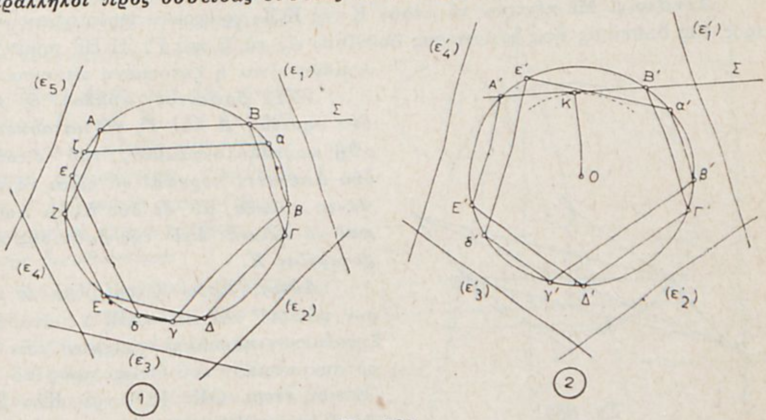
768) Δίδονναι δύο κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εὐθεῖαι οx καὶ οy καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Οω καὶ ἐπ' αὐτῆς προβάλλομεν τὰ Α καὶ Β. Τὶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο αὐτῶν προβολῶν, ὅταν ἡ οω στρέφεται περὶ τὸ Ο.



Σχ. 561.

Λύσις. Ἔστωσαν α καὶ β (σχ. 561) αἱ προβολαὶ καὶ Μ τὸ μέσον τῆς αβ καὶ Κ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Λόγῳ τοῦ τραπεζίου ΑαΒβ ἡ ΚΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς Αα καὶ Ββ καὶ συνεπῶς κάθετος τῷ Οω. Ἄρα εἶναι $\widehat{ΟΜΚ}=90^0$ καὶ συνεπῶς ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια διαμέτρου ΟΚ.

569) Εἰς κύκλον νὰ ἐγγραφῇ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, πᾶσαι δὲ αἱ ἄλλαι πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθείσας εὐθείας ἀντιστοίχως.



Σχ. 562.

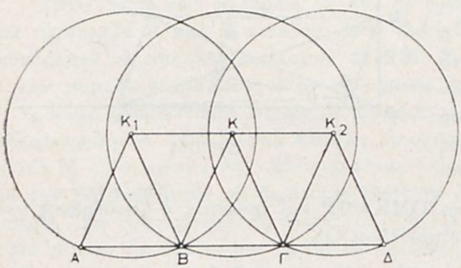
Λύσις. α) Ἔστω Σ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 562) τὸ πολύγωνον μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν τοῦ ὁποίου ἡ ΑΒ διέρχεται διά τοῦ Σ αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας $(ε_1)$, $(ε_2)$, $(ε_3)$, $(ε_4)$,

(ε_5). Ἔστω α τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὰς αβ, βγ, γδ, δε καὶ εζ, ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{Βα}=\widehat{βΓ}=\widehat{Δγ}=\widehat{δΕ}=\widehat{Ζε}=\widehat{ζΑ}$, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ αζ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Σ. Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ.

β) Ἔστω Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 562 (2)) τὸ πολύγωνον μὲ περιττὸν πλῆθος πλευρῶν, τοῦ ὁποίου ἡ Α΄Β΄ διέρχεται διὰ Σ καὶ αἱ Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, Δ΄Ε΄ καὶ Ε΄Α΄ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς (ε_1'), (ε_2'), (ε_3'), (ε_4'). Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως ἔχομεν ὅτι ἡ α΄ε΄ εἶναι ἴση τῇ Α΄Β΄. Ἄρα ἐκ τοῦ Σ ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΣΒ΄Α΄ ὁρίζουσα ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο χορδὴν δοθέντος μήκους α΄ε΄. Ἡ κατασκευὴ ὅμως αὕτη εἶναι γνωστὴ (ἰδὲ § 343).

770) Δοθέντων δύο ἴσων κύκλων K_1 καὶ K_2 νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον K_1K_2 τέμνουσα τὰς περιφερείας κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ.

Λύσις. Μεταφέρομεν (σχ. 563) τὴν περιφέρειαν K_1 κατὰ μῆκος ΑΒ καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν διάκεντρον K_1K_2, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ, τὸ Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ Α καὶ τοῦ Β. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ νέον κέντρον, ἡ νέα περιφέρεια θὰ διέλθῃ ἐκ τῶν Γ καὶ Β καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ΚΒ=ΚΓ. Ἄρα τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ὅτε, ἐπειδὴ τὸ $K_1ΒΓK_2$ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τὸ Κ θὰ εἶναι μέσον τῆς K_1K_2.

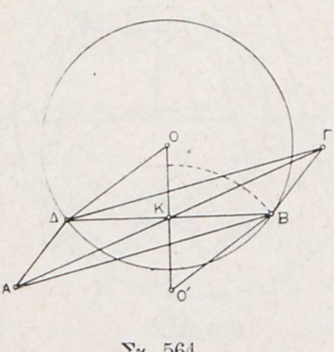


Σχ. 563.

Σύνθεσις. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Κ τῆς K_1K_2 γράφομεν περιφέρειαν ἴσην πρὸς τὰς δοθείσας ἥτις τέμνει τὰς δοθείσας εἰς τὰ Β καὶ Γ. Ἡ ΒΓ προεκτεινομένη εἶναι ἡ ζητουμένη τέμουσα.

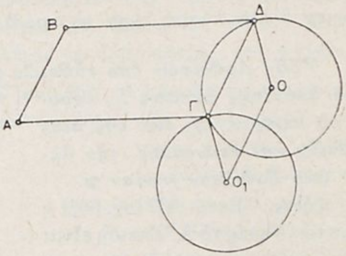
771) Δοθέντος κύκλου Ο καὶ δύο σημείων Α καὶ Γ, νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι κορυφαὶ νὰ εἶναι τὰ δοθέντα σημεῖα, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας Κ.

Λύσις. Ἔστω Κ (σχ. 564) τὸ μέσον τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ (ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον) καὶ Ο΄ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸ Κ. Ἐπειδὴ εἶναι ΟΚ=ΚΟ΄, καὶ ΚΔ=ΚΒ θὰ ἔχωμεν Ο΄Β=ΟΒ. Ἄρα τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο ἀφ' ἑνὸς καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου Ο΄ καὶ ἀκτῖνος ρ (ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Ο) ἀφ' ἑτέρου. Ἄρα τὸ Β εἶναι σημεῖον ὡρισμένον καὶ συνεπῶς καὶ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὡρισμένον.



Σχ. 564.

772) Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ νὰ εἶναι τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, αἱ δὲ δύο ἄλλαι νὰ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Ο.

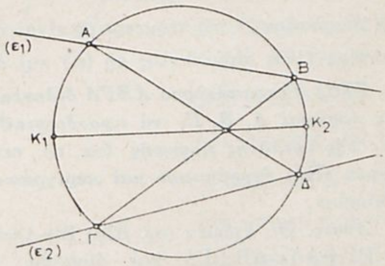


Σχ. 565.

Λύσις. Φέρομεν τὴν OO_1 (σχ. 565) ἴσην καὶ παράλληλον τῇ ΓΔ, ἢ ὅπερ τὸ ἴδιον τῇ ΒΑ. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου $ΟΔΓΟ_1$ προκύπτει $ΟΔ=O_1Γ$. Ἄρα τὸ Γ εἶναι τομὴ τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὴν περιφερείας O_1.

Εὑρεθέντος τοῦ Γ ἄγομεν παράλληλον τῇ ΑΒ ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς Ο τὸ Δ, ὅτε τὸ ΑΒΔΓ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις διότι ἡ O_1 τέμνει τὴν Ο εἰς δύο σημεῖα. Ἐὰν εἶναι $AB>2ρ$, ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς Ο τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

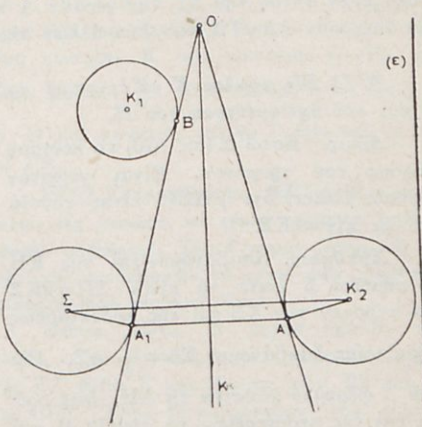
773) Δοθείσης θέσει τῆς διακέντρου K_1K_2 δύο περιφερειῶν καὶ θέσει τῶν δύο ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων, νὰ κατασκευασθοῦν χωρὶς τὴν χρῆσιν τῶν ἀκτίνων αἱ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.



Σχ. 566.

Λύσις. Ἔστωσαν $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ αἱ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι. Μὲ διάμετρον (σχ. 566) K_1K_2 γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὰς $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ εἰς τὰ Α, Β, Γ καὶ Δ, ὅτε (ἰδὲ ἄσκ. 279, σελ. 126) αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι αἱ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.

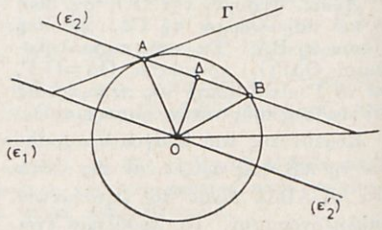
774) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν K_1 καὶ K_2, νὰ ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι αὐτῶν μία πρὸς ἑκάστην περιφέρειαν τοιαῦται, ὥστε ἡ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία νὰ ἔχῃ διχοτόμον δοθείσης διευθύνσεως.



Σχ. 567.

Λύσις. Ἔστω (ε) ἡ δοθεῖσα διεύθυνσις. Ἔστωσαν ΟΒ καὶ ΟΑ αἱ ζητούμεναι ἐφαπτόμεναι (σχ. 567) διχοτόμου ΟΚ. Ἔστω Σ ἡ περιφέρεια ἡ συμμετρικὴ τῆς K_2 ὡς πρὸς τὴν ΟΚ, ἥτις θὰ ἐφάπτεται τῆς ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον A_1 συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον. Ἄρα ἡ μία ἐφαπτομένη εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν K_1 καὶ Σ καὶ συνεπῶς εἶναι ὡρισμένη, ἐὰν ἡ ΟΚ εἶναι ὡρισμένη καὶ θέσει. Ὁρισθείσης τῆς ΟΒ ὁρίζεται ὁμοίως καὶ ἡ ΟΑ. Ἐὰν ὡς ΟΚ ληφθῇ ἄλλη εὐθεῖα παράλληλος τῇ (ε) θὰ ἔχωμεν ἄλλην λύσιν. Ἄρα τὸ πρόβλημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

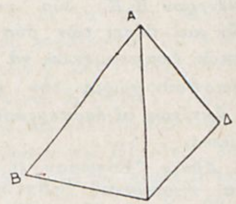
775) Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε_2) νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια δοθείσης ἀκτῖνος R, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας καὶ τεμνούσης τὴν ἄλλην ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.



Σχ. 568.

Λύσις. Ἔστω ΑΓ (σχ. 568) ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\Gamma A B}=\varphi$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{AOB}=2\varphi$ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι κατασκευάσιμον, ὅτε τὸ ὕψος αὐτοῦ ΔΟ εἶναι γνωστόν. Ἄρα τὸ κέντρον Ο τῆς περιφερείας εἶναι τομὴ τῶν εὐθειῶν (ε_1) καὶ (ε'_2), ἔνθα ἡ δευτέρα εἶναι παράλληλος τῇ (ε_2) καὶ ἀπέχει ταύτης ἀπόστασιν ΔΟ.

776) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ τρεῖς κορυφαὶ Α, Β, Γ, νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τῆς τετάρτης κορυφῆς ἵνα τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

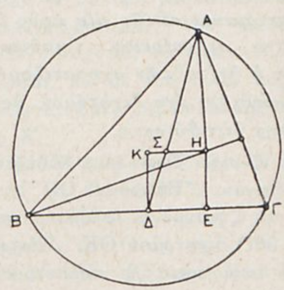


Σχ. 569.

Λύσις. Θὰ ἔχωμεν (σχ. 570) $B+\Delta=180^0$ καὶ $B\Gamma+A\Delta=AB+\Gamma\Delta$ καὶ συνεπῶς $\Delta==180^0-B$ καὶ $A\Delta-\Gamma\Delta=AB-B\Gamma$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι κατασκευάσιμον διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ τὴν ΑΓ τὴν γωνίαν $\widehat{\Delta}$ καὶ τὴν διαφορὰν $A\Delta-\Gamma\Delta$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (ἰδὲ ἄσκ. 528, σελ. 176).

777) Εἰς κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ΑΒΓ γνωστῆς τῆς κορυφῆς Α καὶ τοῦ ὀρθοκέντρου του Η.

Λύσις. Ἔστω Σ (σχ. 570) τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου. Εἶναι γνωστὸν (Εὐθεῖα Euler) ὅτι ἡ ΚΣΗ εἶναι εὐθεῖα καὶ ὅτι $\Sigma H=2K\Sigma$.

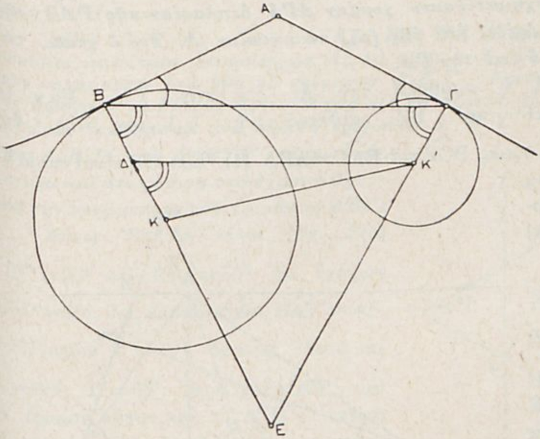


Σχ. 570.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΚΗ τὸ σημεῖον Σ ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma H=2K\Sigma$ καὶ φέρομεν τὴν ΑΣ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\Sigma\Delta=\frac{1}{2}A\Sigma$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον τῇ ΑΗ, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $\Sigma H=2K\Sigma$ καὶ $A\Sigma=2\Sigma\Delta$, ἡ ΚΔ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΗ καὶ συνεπῶς κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ τὸ Δ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ καὶ εἶναι ΑΣ=2ΣΔ, ἕπεται ὅτι τὸ Σ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου, ὅτε ἡ ΚΣ εἶναι ἡ εὐθεῖα τοῦ Euler δι' αὐτό. Ἐπειδὴ τώρα εἶναι ΣΗ=2ΚΣ, ἕπεται ὅτι τὸ Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου.

778) Δοθεισῶν δύο περιφερειῶν Κ καὶ Κ', νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν, μία πρὸς ἑκάστην, νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν φ καὶ νὰ εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των.



Σχ. 571.

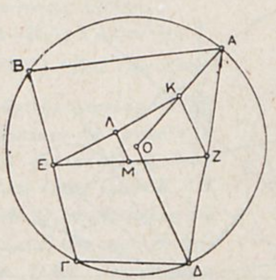
Λύσις. Ἔστω(σχ.571) Α τὸ δοθὲν σημεῖον, ΑΒ καὶ ΑΓ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ $\widehat{ΒΑΓ}=φ$. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΑΓ}=φ$ καὶ ΑΒ==ΑΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{ΑΓΒ}=90^0-\frac{φ}{2}$$

καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι

$$\widehat{ΓΒΕ}=\widehat{ΒΓΕ}=\frac{φ}{2}$$

(ὡς συμπληρωματικαὶ τῶν $\widehat{ΑΒΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΓΒ}$). Φέρομεν τὴν Κ'Δ παράλληλον τῇ ΓΒ, ὅτε θὰ εἶναι $\widehat{ΚΔΚ'}=\widehat{ΓΒΕ}=\frac{φ}{2}$ καὶ ΚΔ=ΚΒ−ΔΒ=ΚΒ−Κ'Γ==$R-R_1$ (ἔνθα R καὶ R_1 αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν). Ἄρα τὸ Δ εἶναι ὡρισμένον ὡς τομὴ τῆς περιφερείας κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος $R-R_1$ καὶ τοῦ τόξου χορδῆς ΚΚ' καὶ δεχομένου γωνίαν $\frac{φ}{2}$. Ὁρισθέντος τοῦ Δ ὁρίζεται τὸ Β καὶ συνεπῶς καὶ τὸ Γ ἄρα καὶ αἱ ΒΑ καὶ ΓΑ.



Σχ. 572.

779) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, αἱ τρεῖς κορυφαὶ Α, Β, Γ μένουν σταθεραί. Τίς ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς τῶν συνδεουσῶν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Τὸ Μ εἶναι, ὡς γνωστόν, μέσον τῆς ΕΖ, ἔνθα Ε καὶ Ζ μέσα τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ (σχ. 572). Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ρ ἡ ἀκτίς του, Κ δὲ καὶ Λ τὰ μέσα τῶν ΟΑ καὶ ΕΚ. Ἔχομεν: $ΛΜ=\frac{1}{2}ΚΖ$ καὶ $ΚΖ=\frac{1}{2}ΟΔ=\frac{1}{2}ρ$.

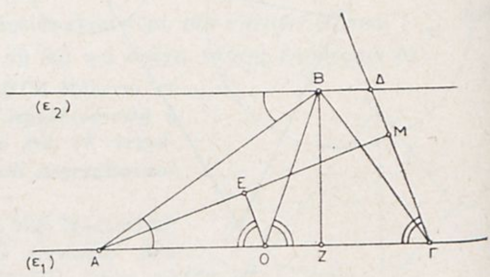
Ἄρα εἶναι $ΛΜ=\frac{1}{4}ρ$ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι περιφέρεια κέντρου Λ καὶ ἀκτῖνος $\frac{1}{4}ρ$.

780) *Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ καὶ ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ τὸ σημεῖον Α, διὰ τοῦ ὁποίου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ μέχρι τῆς $(ε_2)$. Εἰς τὸ Β ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ὁρίζουσαν ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὸ Γ σχηματίζομεν γωνίαν $\widehat{ΑΓΔ}$ διπλασίαν τῆς $\widehat{ΓΑΒ}$, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα πλευρὰ ὁρίζει ἐπὶ τῆς $(ε_2)$ τὸ σημεῖον Δ. Τὶς ὁ γεωμ. τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ.*

Λύσις. Ἔστω Μ ἡ προβολὴ τοῦ **Α** ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐὰν Ο εἶναι μέσον τῆς ΑΓ καὶ ΒΖ κάθετος τῇ $(ε_1)$ (σχ. 573), θὰ ἔχωμεν ΒΟ=ΑΟ καὶ συνεπῶς $\widehat{ΒΟΖ}=2\cdot\widehat{ΒΑΓ}=ΑΓΛ$ (1). Ἐὰν ΟΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΓΔ, τέμνουσα τὴν ΑΜ (ἔνθα Μ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ) εἰς τὸ Ε θὰ ἔχωμεν:

$\widehat{ΑΟΕ}=\widehat{ΟΓΔ}$ (2).

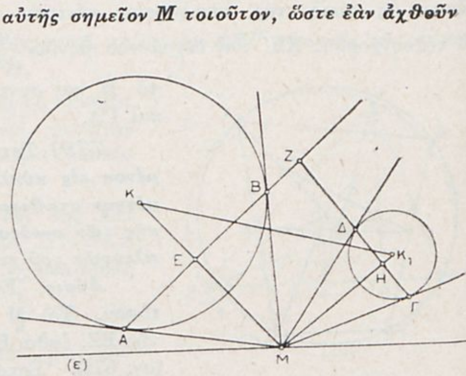
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $\widehat{ΑΟΕ}=\widehat{ΒΟΖ}$ καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα ΑΟΕ καὶ ΟΒΖ εἶναι ἴσα. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν προκύπτει ΑΕ=ΒΖ, ἢ 2·ΑΕ==2ΒΖ, ἢ ΑΜ=2·ΒΖ. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος 2·ΒΖ.



Σχ. 573.

781) *Δοθέντων δύο κύκλων Κ καὶ $Κ_1$ καὶ μιᾶς εὐθείας (ε) (ἢ περιφερείας Κ), νὰ εὑρεθῇ ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ἐξ αὐτοῦ ἐφαπτόμεναι πρὸς τοὺς δύο κύκλους, αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν νὰ σχηματίζουν μεταξὺ των δοθεῖσαν γωνίαν φ.*

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον. Ἔστωσαν (σχ. 574) Ζ=φ ἡ γωνία τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΜΕΖΗ, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{Ε}=\widehat{Η}=90^0$, λαμβάνομεν $\widehat{ΚΜΚ_1}=\widehat{ΕΜΗ}=180^0-$ $-Ζ$, ἢ $\widehat{ΚΜΚ_1}=180^0-φ$.



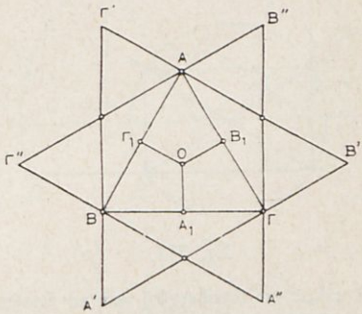
Σχ. 574.

Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς (ε) καὶ ἐπὶ τόξου χορδῆς $ΚΚ_1$ καὶ δεχομένου γωνίαν $180^0-\varphi$. Ἄρα τὸ Μ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον. Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις, ἤτοι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς εὐθείας (ε) (ἢ τῆς περιφερείας Κ) ὑπὸ τοῦ προαναφερθέντος τόξου.

782) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα, ἐὰν ἐξ αὐτῶν ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι εἰς δύο δοθέντας κύκλους Κ καὶ K_1, αἱ χορδαὶ τῶν ἐπαφῶν νὰ σχηματίζουν μεταξύ των δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Λύσις. Ὡς ἴδωμεν προηγουμένως θὰ εἶναι (σχ. 574) $\widehat{KMK_1}=180^0-\varphi$. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τὸ τόξον χορδῆς KK_1 τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν $180^0-\varphi$.

783) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν καθέτους ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τεμνόμεναι ἀνὰ δύο τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄, ἐπίσης ἐπὶ τὰς ἰδίας πλευρὰς ὑψοῦμεν καθέτους ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Α, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τεμνόμεναι ἀνὰ δύο τὸ τρίγωνον Α΄΄Β΄΄Γ΄΄. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ εἶναι ἰσόπλευρα καὶ ὅτι τὰ ὕψη των ἔχουν ἄθροισμα τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

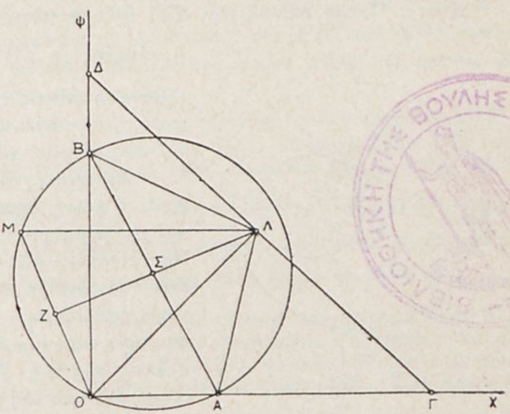


Σχ. 575.

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι (σχ. 575) $\widehat{\Gamma B\Gamma'}=90^0$ καὶ $\widehat{\Gamma BA}=60^0$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{AB\Gamma'}=30^0$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{BA\Gamma'}=90^0$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{\Gamma'}=60^0$, ὁμοίως εἶναι καὶ $\widehat{A'}=60^0$, $\widehat{B'}=60^0$. Ἄρα τὸ Α΄Β΄Γ΄ καὶ δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ τὸ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ εἶναι ἰσόπλευρα. Ἐὰν Ο εἶναι τυχὸν σημεῖον κείμενον ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ καὶ ἀχθοῦν αἱ OA_1, OB_1, $O\Gamma_1$ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ θὰ ἔχωμεν (ἰδὲ ἄσκησιν 98) $A\Gamma_1+BA_1+\Gamma B_1=\upsilon'$, ἔνθα υ΄ τὸ ὕψος τοῦ Α΄Β΄Γ΄ καὶ $\Gamma_1B+A_1\Gamma+B_1A=\upsilon''$ ἔνθα υ΄΄ τὸ ὕψος τοῦ Α΄΄Β΄Γ΄΄. Προτιθέμεναι αἱ δύο αὐταὶ ἰσότητες δίδουν

$$AB+B\Gamma+\Gamma A=\upsilon'+\upsilon''.$$

784) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας $\widehat{XO\Psi}$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ+ΟΒ=Κ. Ἡ ἐκ τοῦ Ο παράλληλος τῇ ΑΒ τέμνει τὴν περὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ περιγεγραμμένην περιφέρειαν ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ γ. τόπος.



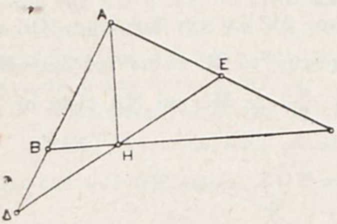
Σχ. 576.

Λύσις. Λαμβάνομεν ΑΓ=ΟΒ καὶ ΒΔ=ΟΑ (σχ. 576), ὅτε εἶναι ΟΓ=ΟΔ=

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ πρώτου καὶ δευτέρου βιβλίου

789) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $B=2\Gamma$, ἔνθα $B<90^0$. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ μῆκος $B\Delta=BH$. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

(Σχολὴ Εὐελπίδων 1955).



Σχ. 581.

Λύσις. Ἔχομεν $\widehat{B}=\widehat{\Delta}+B\widehat{H}\Delta$, ἢ $\widehat{B}=2\cdot B\widehat{H}\Delta$ (1). Ἐπειδὴ ἡ ΗΕ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΓ, θὰ εἶναι ΗΕ=ΓΕ καὶ συνεπῶς $E\widehat{H}\Gamma=\widehat{\Gamma}$, ἢ $2\widehat{\Gamma}=2\cdot E\widehat{H}\Gamma$ (2).

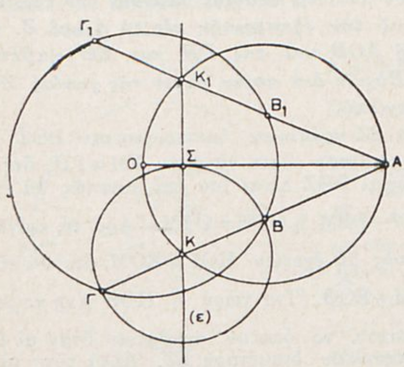
Ἐπειδὴ $\widehat{B}=2\widehat{\Gamma}$, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $B\widehat{H}\Delta=E\widehat{H}\Gamma$. Ἐκ ταύτης ἕπεται, ὅτι ἡ ΔΗΕ εἶναι εὐθεῖα (σχ. 581).

790) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΚ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΑΖ καὶ ζητεῖται νὰ δειχθῇ ὅτι αὗται τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΘ.

(Σχολὴ Εὐελπίδων).

Λύσις. Εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθμὸν 304 ἄσκησις.

791) Διὰ σημείου Α κειμένου ἐντὸς κύκλου κέντρου Ο, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ οὕτως ὥστε ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΒΓ νὰ ἐφάπτεται (1) τῆς ΟΑ. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1952).



Σχ. 582.

Λύσις. Ἔστω Σ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς (σχ. 582) καὶ Κ τὸ κέντρον. Ἔχομεν $A\Sigma^2=AB\cdot A\Gamma$, ὅτε, ἐπειδὴ $AB\cdot A\Gamma=AO^2-R^2$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς Ο, θὰ ἔχωμεν $A\Sigma^2=AO^2-R^2$ (1). Ἄρα τὸ Σ εἶναι γνωστὸν σημεῖον τῆς ΑΟ καὶ συνεπῶς τὸ κέντρον Κ κεῖται ἐπὶ τῆς σταθερᾶς εὐθείας (ε), ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Σ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΚΑ εἶναι ὀρθογώνιον, ἕπεται ὅτι τὸ Κ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΟΑ. Ἄρα τὸ Κ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον, ὡς τομὴ τῆς (ε) καὶ τῆς περιφερείας διαμέτρου ΟΑ. Ὁρισθέντος τοῦ Κ ὁρίζεται ἡ τέμνουσα ΑΒΚΓ. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰς ΑΒΚΓ καὶ $AB_1K_1\Gamma_1$.

(1) Ἡ ἄσκησις ἀνήκει εἰς τὸ τρίτον βιβλίον τῆς Γεωμετρίας

792) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ αἱ διχοτόμοι ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε φέρομεν τὰς παραλλήλους ΕΖ καὶ ΔΘ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΔ καὶ ΓΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α εἰς τὰ Ζ καὶ Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Ζ, Θ εἶναι ὁμοκύκλια. (Σχολὴ Φυσικῶν)

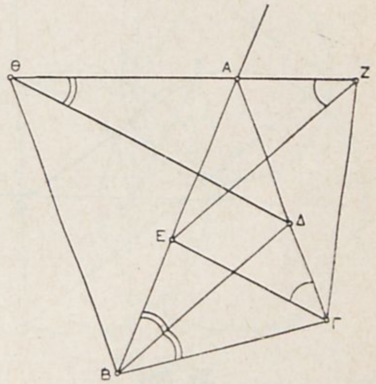
Λύσις. Ἔχομεν $\widehat{A\Delta\Theta}=\widehat{A\Gamma E}=\frac{\Gamma}{2}$ (1) καὶ $\widehat{\Delta A\Theta}=\widehat{\Delta AB}+\widehat{BA\Theta}=A+90^0-$ $-\frac{A}{2}=90^0+\frac{A}{2}$ (2). Λόγῳ αὐτῶν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΘ (σχ. 583), προκύπτει

$$\widehat{\Delta\Theta A}=180^0-\widehat{\Delta A\Theta}-\widehat{A\Delta\Theta}=$$
$$=180^0-\left(90^0+\frac{A}{2}\right)-\frac{\Gamma}{2}=$$
$$=90^0-\frac{A+\Gamma}{2}=\frac{B}{2} \quad (3).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$\widehat{AZE}=\frac{\Gamma}{2} \quad (4).$$

Λόγῳ τῶν (3) καὶ (4) συνάγομεν ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΔΒΘ καὶ ΑΕΓΖ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.



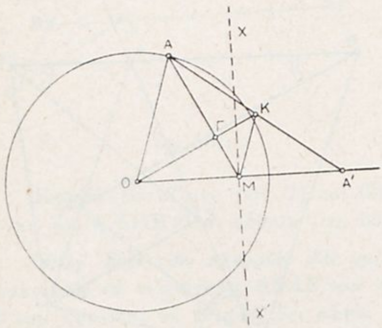
Σχ. 583.

Ἐκ τοῦ πρώτου λαμβάνομεν

$\widehat{\Theta B\Delta}=\widehat{ZA\Gamma}=90^0-\frac{A}{2}=\frac{B+\Gamma}{2}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{\Theta B\Gamma}=\widehat{\Theta B\Delta}+\widehat{\Delta B\Gamma}=\frac{B+\Gamma}{2}+$ $+\frac{B}{2}=\widehat{B}+\frac{\Gamma}{2}$ (5). Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΓΖ εὑρίσκομεν $\widehat{AZ\Gamma}=\widehat{BE\Gamma}=\widehat{A}+\frac{\Gamma}{2}$ (6). Προσθέτοντες τὰς (5) καὶ (6) λαμβάνομεν $\widehat{\Theta B\Gamma}+\widehat{AZ\Gamma}=A+B+\Gamma=180^0$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΒΓΖΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

793) Θεωροῦμεν δύο σταθερὰ σημεῖα Ο καὶ Γ, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ΟΓ=λ. Ἐὰν Α εἶναι μεταβλητὸν σημεῖον, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ τμῆμα $\Gamma M=\frac{A\Gamma}{2}$. Ἔστω τέλος Α′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸ Μ. Νὰ δειχθῇ: α) Ὅτι τὸ μέσον Κ τῆς ΑΑ′ εἶναι σταθερὸν σημεῖον. β) Ἐὰν τὸ Α κινεῖται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας (π) κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΑ=R, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ. γ) Νὰ εὑρεθῇ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν λ καὶ R, ὥστε ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ′ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν κέντρου Ο. Ἐπὶ πλέον νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν λ καὶ R, ὥστε ἡ ὡς ἄνω κάθετος νὰ τέμνῃ πάντοτε τὴν περιφέρειαν (π). (Σχολὴ Πολιτικῶν Μηχανικῶν 1952).

Λύσις. α) Ἡ ΑΜ ἐκ κατασκευῆς εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΟΑ'. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι κέντρον βάρους τοῦ ἰδίου τριγώνου διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΓ=2ΓΜ, ἢ $ΑΓ=\frac{2}{3}ΑΜ$. Ἄρα ἡ ΟΓΚ εἶναι διάμεσος τοῦ ἐν λόγῳ τριγώνου καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ Κ εἶναι μέσον τῆς ΑΑ' καὶ εἶναι $ΓΚ=\frac{1}{2}ΟΓ$, ἤτοι $ΓΚ=\frac{\lambda}{2}$ (σχ. 584). Ἄρα τὸ μέσον Κ τῆς ΑΑ' εἶναι σταθερὸν καθ' ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΓ καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ Γ σταθερὰν ἀπόστασιν.



Σχ. 584.

β) Συνδέομεν τὸ Μ μὲ τὸ Κ, ὅτε $ΚΜ=\frac{1}{2}ΟΑ=\frac{1}{2}R$ καὶ ἐπειδὴ τὸ Κ εἶναι σταθερὸν σημεῖον ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι περιφέρεια κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος $\frac{R}{2}$. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως.

γ) Ἵνα ἡ κάθετος xx' ἐπὶ τὴν ΟΑ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ, τέμνει τὴν περιφέρειαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ΟΜ νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἤτοι $ΟΜ<R$. Δηλαδὴ τὸ Μ πρέπει νὰ εἶναι σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν $\left(Κ, \frac{R}{2}\right)$, ἕπεται ὅτι, ἵνα ἡ xx' τέμνει τὴν περιφέρειαν κέντρου Ο, πρέπει ἡ περιφέρεια Κ νὰ τέμνῃ τὴν Ο, ἢ νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς αὐτῆς, ἤτοι πρέπει $R-\frac{R}{2}<ΟΚ<R+\frac{R}{2}$, ἢ $ΟΚ\leqslant R-\frac{R}{2}$.

Αὗται, ἐπειδὴ $ΟΚ=\frac{3\lambda}{2}$, γράφονται $\frac{R}{3}<\lambda<R$, ἢ $\lambda\leqslant\frac{R}{3}$. Οὕτως, ἐὰν ἰσχύῃ ἡ πρώτη, ἤτοι $\frac{R}{3}<\lambda<R$, αἱ Ο καὶ Κ τέμνονται καὶ ἡ εὐθεῖα xx' θὰ τέμνῃ τὴν Ο, μόνον ὅταν τὸ Μ κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τῆς Κ τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τῆς Ο. Ἐὰν δὲ ἰσχύῃ ἡ $\lambda\leqslant\frac{R}{3}$, ἡ Κ εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐντὸς τῆς Ο καὶ πάντοτε, δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς Κ, θὰ τέμνῃ ἡ xx' τὴν περιφέρειαν Ο.

794) Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΒ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν σημεῖον Α καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ. Διὰ τοῦ Γ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΒ καὶ ΖΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΒ.

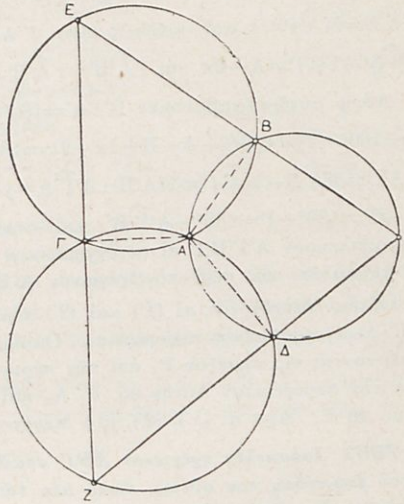
Λύσις. Ἔστω Μ ἡ τομὴ τοῦ ΕΒ καὶ ΖΔ. Ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων τετραπλεύρων ΑΓΕΒ καὶ ΑΓΖΔ (σχ. 585) λαμβάνομεν $\widehat{E}=2$ορθ$-\widehat{BA\Gamma}$, καὶ $\widehat{Z}=$ $=2$ορθ$-\widehat{\Gamma A\Delta}$. Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\widehat{E}+\widehat{Z}=4\text{ορθ}-(\widehat{BA\Gamma}+\widehat{\Gamma A\Delta}).$$

Ἀλλὰ $\widehat{E}+\widehat{Z}=2$ορθ$-\widehat{M}$ καὶ

$$\widehat{BA\Delta}=4\text{ορθ}-(\widehat{BA\Gamma}+\widehat{\Gamma A\Delta}).$$

Ἄρα 2ορθ$-\widehat{M}=\widehat{BA\Delta}$, ἤτοι $\widehat{M}+\widehat{BA\Delta}=2$ορθ. Τὸ τετράπλευρον ΒΑΔΜ εἶναι συνεπῶς ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΔΒ.



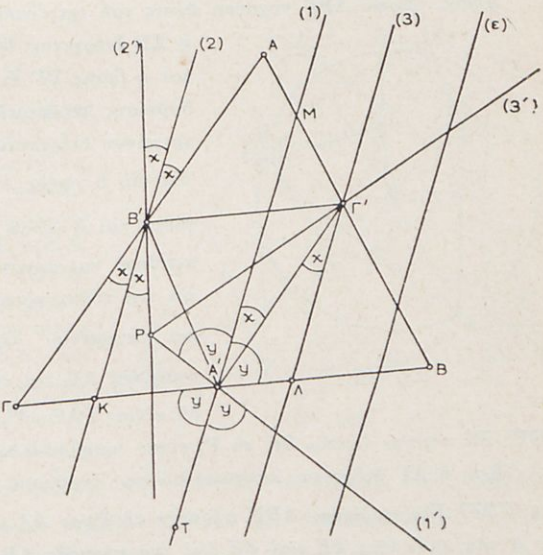
Σχ. 585.

795) Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Α', Β', Γ' τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Διὰ τῶν Α', Β', Γ' φέρομεν πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) παραλλήλους καὶ κατόπιν ὁρίζομεν τὰς εὐθείας αἵτινες εἶναι συμμετρικαὶ τῶν πλευρῶν ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους παραλλήλους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς αὗται συμμετρικαὶ εὐθεῖαι διέρχονται διὰ σημείου ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Λύσις. Ἔστωσαν (1), (2), (3) αἱ εὐθεῖαι (σχ. 586) αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν Α', Β', Γ' παράλληλοι πρὸς τὴν διεύθυνσιν (ε) καὶ (1'), (2'), (3') αἱ συμμετρικαὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς (1), (2), (3).

Ἔστω Ρ ἡ τομὴ τῶν (1') καὶ (2'). Λόγῳ τῆς συμμετρίας ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma B'K}=\widehat{KB'P}=x.$$



Σχ. 586.

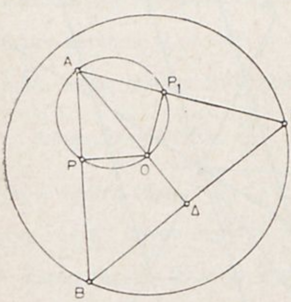
Ἐπειδὴ δὲ αἱ $A'\Gamma'$ καὶ $\Gamma B'$ εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ (3) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν $\Lambda\widehat{\Gamma'}A'=\Gamma\widehat{B'}K=x$. Ἐπίσης, λόγῳ τῆς συμμετρίας, ἔχομεν $T\widehat{A'}1'=T\widehat{A'}\Gamma'=M\widehat{A'}B=M\widehat{A'}P=y$ καὶ συνεπῶς εἶναι $\Gamma'\widehat{A}P=180^0-2y$. Ἔχομεν ἤδη $P\widehat{B'}A'=\Gamma\widehat{B'}A'-\Gamma\widehat{B'}P=A-2x$ καὶ $P\widehat{A'}B'=\Gamma\widehat{A'}B'-\Gamma\widehat{A'}P=B'-(180^0-2y)=B-180^0+2y$.

Λόγῳ αὐτῶν λαμβάνομεν $B'\widehat{P}A'=180^0-P\widehat{B'}A'-P\widehat{A'}B'=180^0-(A-2x)-(B-180^0-2y)=360^0-A-B+2x-2y=180^0+\Gamma-2(y-x)$ (1). Ἐπειδὴ $\widehat{\Gamma}=\Gamma'\widehat{A'}B=M\widehat{A'}B-M\widehat{A'}\Gamma'=M\widehat{A'}B-A'\widehat{\Gamma'}A=y-x$, ἡ (1) γίνεται $B'\widehat{P}A'=180^0+\Gamma-2\Gamma=180^0-\Gamma=180^0-A'\widehat{\Gamma'}B'$ καὶ συνεπῶς $B'\widehat{P}A'+A'\widehat{\Gamma'}B'=180^0$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον $A'\Gamma'B'P$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ περιγεγραμμένης περιφερείας.

Οὕτως ἐδείχθη ὅτι αἱ (1′) καὶ (2′) τέμνονται ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ περιγεγραμμένης περιφερείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ (1′) καὶ (3′) τέμνονται εἰς σημεῖον P_1 ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ (1′) τέμνει τὴν περιφέρειαν αὐτὴν εἰς τὸ A_1 καὶ εἰς τὸ P, ἕπεται ὅτι τὸ P_1 συμπτει μὲ τὸ P. Ἄρα αἱ (1′), (2′), (3′) διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

796) Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ σταθερᾶς γωνίας κορυφῆς Α, κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε μία τῶν ἴσων πλευρῶν του νὰ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ καὶ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του νὰ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἕτερον σκέλος του διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

Λύσις. Ἔστω $AB\Gamma$ τυχοῦσα θέσις τοῦ τριγώνου (σχ. 587) καὶ ἔστω ὅτι ἡ AB διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου P καὶ ἡ βάσις $B\Gamma$ ἔχει τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας O. Τὸ ὕψος $A\Delta$ τοῦ τριγώνου διέρχεται προφανῶς διὰ τοῦ O. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι σταθερὰ τὸ μέγεθος καὶ ἡ γωνία $P\widehat{A}O=\frac{A}{2}$ θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς ἡ κορυφὴ A θὰ κεῖται ἐπὶ τόξου γραφομένου μὲ χορδὴν PO καὶ δεχομένου γωνίαν $\frac{A}{2}$. Ἔστω P_1 ἡ τομὴ τῆς $A\Gamma$ καὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ. Ἐπειδὴ εἶναι $P\widehat{A}O=P_1\widehat{A}O$, θὰ ἔχωμεν $OP_1=OP$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ P_1 εἶναι ὡρισμένον σημεῖον τοῦ τόξου $\widehat{PAO}$.



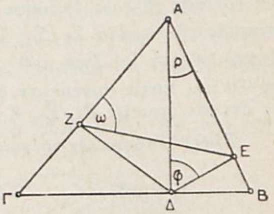
Σχ. 587.

Ἄρα ἡ $A\Gamma$ διέρχεται πάντοτε διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου P_1.

797) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ ποδὸς τούτου Δ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΓΖΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Λύσις. Τὸ τετράπλευρον ΑΕΔΖ (σχ. 588) ὡς ἔχον τὰς γωνίας $\widehat{\text{ΑΕΔ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΑΖΔ}}$ ὀρθὰς εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{\omega}=\widehat{\varphi}$. Ἀλλὰ $\widehat{\varphi}+\widehat{\varrho}=90^0=\widehat{\text{Β}}+\widehat{\varrho}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{\varphi}=\widehat{\text{Β}}$, ὅτε καὶ $\widehat{\omega}=\widehat{\text{Β}}$. Κατόπιν αὐτῶν ἔχομεν $\widehat{\text{ΓΖΕ}}+\widehat{\text{Β}}=\widehat{\text{ΓΖΕ}}+\widehat{\omega}=180^0$.

Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΒΓΖΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 588.

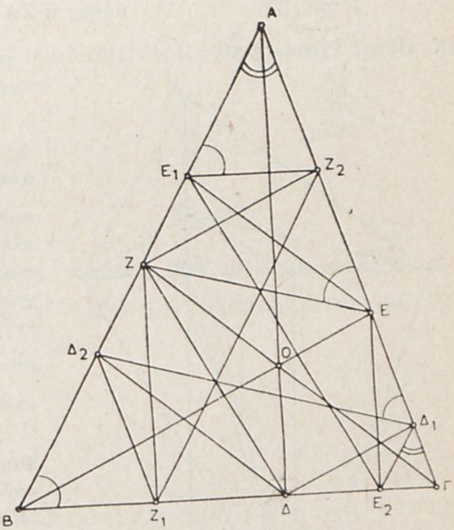
798) Ἐκ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἕξη πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. (Περιφέρεια Taylor).

Λύσις. Κατὰ τὴν προηγομμένην ἄσκησιν τὸ τετράπλευρον $\text{Β}\Delta_2\Delta_1\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\Delta_2\widehat{\Delta_1}\text{Α}=\widehat{\text{Β}}$ (1). Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΒΓΕΖ (σχ. 589) εἶναι ἐγγράψιμον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{\text{ΖΕΑ}}=\widehat{\text{Β}}$ (2). Ἐπειδὴ τοῦ τριγώνου ΑΖΕ δύο ὕψη εἶναι τὰ $\text{Ζ}\text{Ζ}_2$ καὶ $\text{Ε}\text{Ε}_1$, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ τετράπλευρον $\text{ΖΕ}\text{Ζ}_2\text{Ε}_1$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι

$\widehat{\text{ΖΕΑ}}=\text{Ζ}_2\widehat{\text{Ε}_1}\text{Α}$ (3).

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) προκύπτει $\Delta_2\widehat{\Delta_1}\text{Α}=\text{Ζ}_2\widehat{\text{Ε}_1}\text{Α}$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον $\Delta_1\Delta_2\text{Ε}_1\text{Ζ}_2$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Δι' ὁμοίας ἐργασίας ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ τετράπλευρα $\text{Ζ}_1\text{Ζ}_2\Delta_1\text{Ε}_2$ καὶ $\text{Ε}_1\text{Ε}_2\text{Ζ}_1\Delta_2$ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ἐγγράψιμα αὐτὰ τετράπλευρα συνάγεται ὅτι αἱ $\text{Ε}_1\text{Ζ}_2$, $\text{Ζ}_1\Delta_2$ καὶ $\Delta_1\text{Ε}_2$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐπειδὴ εἶναι $\text{Ε}_2\widehat{\Delta_1}\Gamma=\widehat{\text{Α}}$,

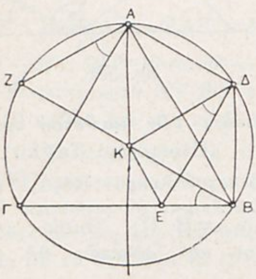


Σχ. 589.

$\Delta_2\widehat{\Delta_1}\text{Α}=\widehat{\text{Β}}$, θὰ ἔχωμεν $\Delta_2\widehat{\Delta_1}\text{Ε}_2=180^0-(\text{Α}+\text{Β})$ (4). Λόγῳ τῆς παραλληλίας τῶν $\text{Ζ}_1\Delta_2$ καὶ ΓΑ ἔχομεν $\Delta_2\widehat{\text{Ζ}_1}\text{Ε}_2=180^0-\Gamma$ (5). Διὰ προσθέσεως τῶν (4) καὶ (5) προκύπτει $\Delta_2\widehat{\Delta_1}\text{Ε}_2+\Delta_2\widehat{\text{Ζ}_1}\text{Ε}_2=180^0$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον $\Delta_2\text{Ζ}_1\text{Ε}_2\Delta_1$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὰ τετράπλευρα $\Delta_1\Delta_2E_1Z_2$ (α), $Z_1Z_2E_2\Delta_1$ (β), $E_1E_2Z_1\Delta_2$ (γ), $\Delta_2Z_1E_2\Delta_1$ (δ) εἶναι ἐγγράψιμα εἰς περιφέρειαν. Αἱ περιφέρειαι τῶν (β) καὶ (δ), ὡς ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα τὰ Z_1, Δ_1, E_2, συμπίπτουν καὶ συνεπῶς τὰ σημεῖα Z_1, Z_2, E_2, Δ_1, Δ_2 κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (c). Ἡ περιφέρεια (c) ἔχει μεθ᾽ ἑκάστης τῶν περιφερειῶν (α) καὶ (γ) τρία κοινὰ σημεῖα καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ περιφέρειαι αὗται συμπίπτουν. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα E_1, E_2, Z_1, Z_2, Δ_1, Δ_2 εἶναι ὁμοκύκλια.

***799)** Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ. Ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Δ τοῦ κέντρου Κ ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν παράλληλον τῇ ΑΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ν᾽ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία $\widehat{\Delta KE}$=1 ὀρθ.*

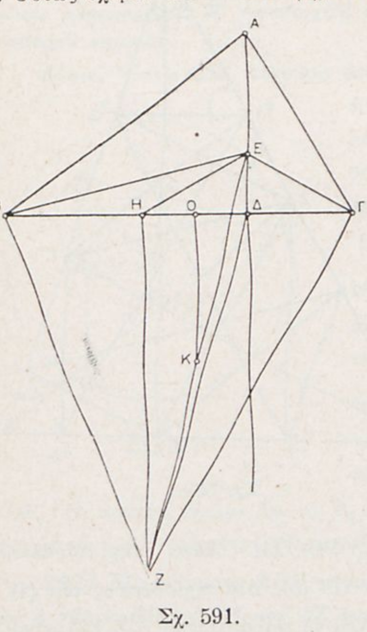


Σχ. 590.

Λύσις. Τὸ τετράπλευρον ΑΚΒΔ (σχ. 590) εἶναι ῥόμβος ἕνεκα τῆς συμμετρίας. Ἑπομένως ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΚΑ καὶ συνεπῶς $\widehat{\Delta BE}=90^0$. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΚΖ, θὰ εἶναι $\widehat{BAZ}=90^0$, ἤτοι ἡ ΖΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἑπομένως ἡ ΖΑ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΚ. Οὕτως ἔχομεν $\widehat{E\Delta K}=\widehat{ZA\Gamma}$ (1), διότι αἱ γωνίαι αὗται ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους. Ἀλλὰ

$$\widehat{ZA\Gamma}=\widehat{EBK} \quad (2).$$

ὡς ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $\widehat{EBK}=\widehat{E\Delta K}$, ἤτοι ὅτι ἡ πλευρὰ ΕΚ τοῦ τετραπλεύρου ΕΚΔΒ φαίνεται ἐκ τῶν Δ καὶ Β ὑπὸ ἴσας γωνίας καὶ ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς $\widehat{\Delta KE}+\widehat{\Delta BE}=180^0$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{EB\Delta}=90^0$, ἕπεται ὅτι $\widehat{\Delta KE}=90^0$.

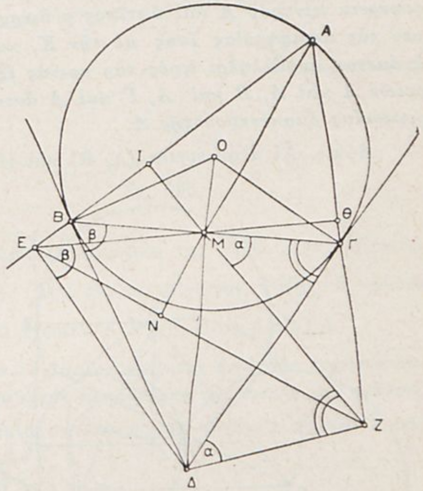


Σχ. 591.

***800)** Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΖ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὰς ΒΕ καὶ ΓΕ ἀντιστοίχως αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Ἐκ τοῦ Ζ φέρομεν τὴν ΖΗ κάθετον τῇ ΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον Η εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.*

Λύσις. Τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΓ (σχ. 591) εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον διαμέτρου ΕΖ. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὸ κύκλου, τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ. Φέρομεν τὴν ΚΟ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὅτε τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς ΒΓ. Τὸ ΕΔΖΗ εἶναι τραπέζιον, ἡ δὲ ΚΟ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του, ἐπειδὴ δὲ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς διαγωνίου του ΕΖ θὰ τέμνῃ τὴν ἄλλην διαγώνιον ΗΛ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Ο. Ἄρα εἶναι ΟΗ=ΟΔ.

801) Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἐκ τοῦ σημείου τομῆς Δ τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος τῇ ΕΖ.



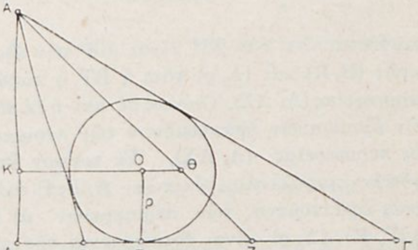
Σχ. 592.

Λύσις. Διὰ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος ΑΜΝ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΜ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ Μ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΕΖ.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΜΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Πράγματι, ἐκ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΔΕΒΜ (σχ. 592) ἔχομεν

$$\Delta\widehat{E}M = \Delta\widehat{B}M = \widehat{A} \quad (1).$$

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΜΓΖΔ εἶναι $M\widehat{Z}\Delta = M\widehat{\Gamma}\Delta = \widehat{A}$ (2). Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς θὰ εἶναι $\Delta\widehat{B}\Gamma = \Delta\widehat{\Gamma}B$, ὅτε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\Delta\widehat{E}M = \Delta\widehat{Z}M = \widehat{A}$ (3). Ἡ γωνία $E\widehat{\Delta}Z$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α, ἤτοι εἶναι $E\widehat{\Delta}Z = 180^\circ - \widehat{A}$. Κατόπιν αὐτῶν ἔχομεν $E\widehat{\Delta}Z + \Delta\widehat{E}M = 180^\circ - \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ$ καὶ $E\widehat{\Delta}Z + \Delta\widehat{Z}M = 180^\circ - \widehat{A} + \widehat{A} = 180^\circ$. Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν ὅτι τὸ ΕΔΖΜ εἶναι παραλληλόγραμμον.



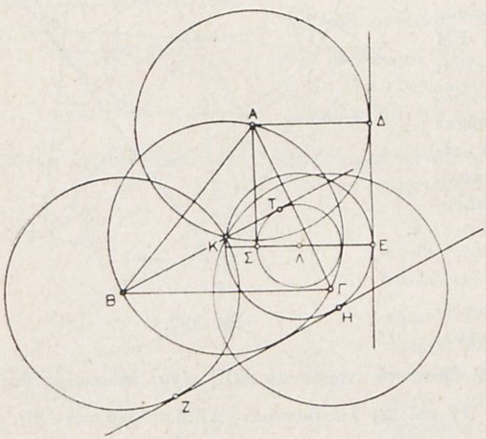
Σχ. 593.

802) Ἐὰν $υ_α = 3ρ$, ἔνθα $υ_α$ εἶναι τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ κέντρον βάρους καὶ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὁρίζουν εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΓ.

Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ τμῆμα ΚΔ=ρ (σχ. 593). Τότε ἡ ΚΟ, ἔνθα Ο τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ. Προεκτεινομένη δὲ αὕτη τέμνει τὴν διάμεσον ΑΖ εἰς τὸ Θ. Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{K\Delta}}=\frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{\Theta Z}}=2$, θὰ ἔχωμεν ΑΘ=2·ΘΖ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ Θ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

803) Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος R. ***Περιφέρεια κέντρου Λ καὶ ἀκτῖτος ρ διέρχεται διὰ τοῦ Κ. Ἂν ἤδη γράψωμεν τὰς περιφερείας ἴσας μὲ τὴν Κ, καὶ μὲ κέντρα Α, Β, Γ, αἱ ἐξ αὐτῶν ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν Α καὶ Λ, Β καὶ Λ, Γ καὶ Λ ἀντιστοίχως ἐφάπτονται τῆς αὐτῆς περιφερείας ὁμοκέντρου τῆς Λ.***

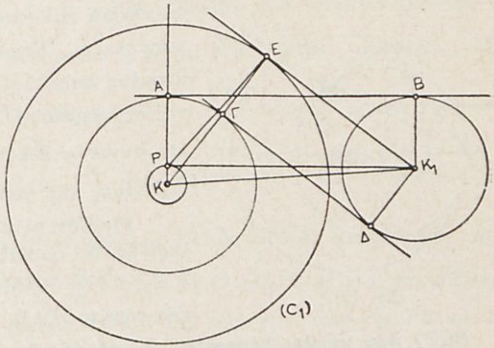
Λύσις. Αἱ περιφέρειαι (Α, R) καὶ (Λ, ρ) ὡς διερχόμεναι διὰ τοῦ Κ τέμνονται. Ἔστω ὅτι ΔΕ (σχ. 594) εἶναι μία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν τούτων, ὅτε αἱ ἀκτῖνες ΑΔ καὶ ΛΕ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Δ καὶ Ε εἶναι παράλληλοι. Ἄρα ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ τέμνουσαν τὴν ΕΛ εἰς τὸ Σ, τὸ τμῆμα ΛΣ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων R καὶ ρ, ἤτοι τὸ ΛΣ εἶναι σταθερὸν κατὰ μῆκος καὶ ἴσον πρὸς |R—ρ|. Ἐπειδὴ ἡ ΛΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΣ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΣ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Λ, ΛΣ). Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, ἐὰν ΖΗ εἶναι μία τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν (Β, R) καὶ (Λ, ρ) τότε ἡ ΒΤ, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΖΗ, ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Λ, ΛΣ). Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος πρὸς μίαν τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν περιφερειῶν (Γ, R) καὶ (Λ, ρ) ἐφάπτεται τῆς περιφερείας (Λ, ΛΣ). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι καὶ αἱ ἓξ δυνάμεναι νὰ ἀχθοῦν παράλληλοι ἐκ τῶν Α, Β, Γ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν α) (Α, R), (Λ, ρ), β) (Β, R), (Λ, ρ) καὶ γ) (Γ, R), (Λ, ρ) εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας κέντρου Λ καὶ ἀκτῖνος ΛΣ=|R—ρ|.



Σχ. 594.

804) Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης τούτων.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ καὶ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Κ καὶ K_1 Μὲ κέτρον τὸ Κ (σχ. 595) καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύο περιφερειῶν γράφομεν τὴν περιφέρειαν c_1. Φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς ἐκ τοῦ K_1 τὴν K_1E ὅτε, ὡς γνωστόν, εἶναι $\Gamma\Delta = K_1E$. Φέρομεν τὴν K_1P κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ, ὅτε $K_1P = AB$. Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δείξωμεν ὅτι $K_1P > K_1E$. Τὸ τετράπλευρον PEK_1K εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι $K\widehat{E}K_1 = K\widehat{P}K_1 = 90^0$.

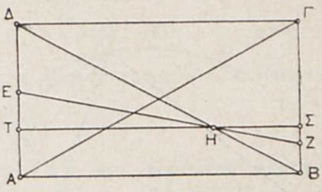


Σχ. 595.

Ἡ γωνία $P\widehat{K}K_1 < 90^0$, ὅτε ἡ παραπληρωματική της $P\widehat{E}K_1 > 90^0$. Ἐπειδὴ $K\widehat{E}K_1 = 90^0$, ἔπεται ὅτι $P\widehat{E}K_1 > K\widehat{E}K_1$. Ἄρα εἰς τὸ τρίγωνον PEK_1 ἡ γωνία $P\widehat{E}K_1$ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $K_1P > K_1E$, ἢ $AB > \Gamma\Delta$.

805) Πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο τυχόντα σημεῖα τῆς περιμέτρου ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι μικρότερον τῆς διαγωνίου τούτου.

Λύσις. Ἔστω ΕΖ τυχοῦσα εὐθεῖα συνδέουσα τὰ τυχόντα σημεῖα Ε καὶ Ζ (σχ. 596) τῶν μικροτέρων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ καὶ Η ἡ τομὴ τῆς ΕΖ καὶ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Φέρομεν τὴν ΤΗΣ κάθετον ἐπὶ τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι $T\Delta > TE$ καὶ $\Sigma B > \Sigma Z$, θὰ ἔχωμεν $H\Delta > HE$ (1) καὶ $HB > HZ$ (2). Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $B\Delta > EZ$ ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 596.

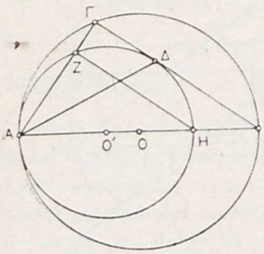
Ἐὰν τὸ Ε πέσῃ μεταξὺ Τ καὶ Α καὶ τὸ Ζ μεταξὺ Γ καὶ Σ, τότε ἐργαζόμεθα ὁμοίως μὲ τὴν ἑτέραν διαγώνιον.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὰ Ε καὶ Ζ εἶναι ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΔΓ, ἢ τὸ ἓν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ τὸ ἕτερον ἐπὶ τῆς ΔΓ ἡ πρότασις εἶναι φανερά.

806) Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸ Α. Χορδὴ ΒΓ τοῦ κύκλου Ο ἐφάπτεται εἰς τὸ Δ τῆς περιφερείας Ο′. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος ἐσωτερική, ἢ ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Λύσις. α) Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $B\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}\Gamma$. Φέρομεν τὴν ΖΗ. ἔνθα Ζ καὶ Η αἱ τομαὶ τῆς Ο′ ὑπὸ τῶν

ΑΓ καὶ ΑΒ. Αἱ γωνίαι $\widehat{A\Gamma B}$ καὶ $\widehat{AZH}$ εἶναι ὀρθαὶ ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμικύκλια καὶ ἑπομένως αἱ ΒΓ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΖΗ τῆς περιφερείας Ο′, ἔπεται ὅτι εἶναι $\widehat{H\Delta}=\widehat{\Delta Z}$, καὶ συνεπῶς $\widehat{BA\Delta}=\widehat{\Delta A\Gamma}$. Ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ (σχ. 597).

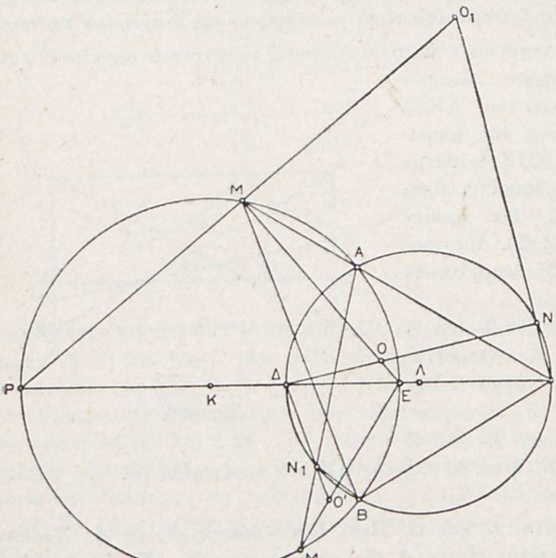


Σχ. 597.

β) Ἐὰν αἱ περιφέρεια ἐφάπτωνται ἐξωτερικῆς, δι' ὁμοίας ἐργασίας εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma AB}$.

807) Δύο κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἥτις τέμει τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ· 1ον) Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΒΜΝ. 2ον) Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν πλευρὰν ΜΝ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου.

Λύσις. Ἔστωσαν Κ καὶ Λ οἱ κύκλοι καὶ Ρ, Ε καὶ Δ, Σ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν των (σχ. 598), ὑπὸ τῆς διαμέτρου ΚΛ. Ἐπειδὴ τὰ Ε καὶ Δ εἶναι μέσα τῶν τόξων ΑΕΒ καὶ ΑΔΒ, ἔπεται ὅτι αἱ ΜΕ καὶ ΝΔ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{M}$ καὶ $\widehat{N}$ τοῦ τριγώνου ΒΜΝ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον τομῆς των Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς εἰς τὸ τρίγωνον ΒΜΝ ἐγγεγραμμένης περιφερείας. Ἐπειδὴ αἱ ΜΡ καὶ ΝΣ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ΜΕ καὶ ΝΔ, ἔπεται ὅτι αὗται εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τῶν $\widehat{M}$ καὶ $\widehat{N}$ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον τομῆς των O_1 εἶναι τὸ κέντρον



Σχ. 598.

τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου ΒΜΝ εἰς τὴν πλευρὰν ΜΝ. Ζητοῦνται οἱ γεωμ. τόποι τῶν Ο καὶ $Ο_1$. Ἐπειδὴ εἶναι $Μ\widehat{Β}Ν=180^0-\widehat{Μ}-\widehat{Ν}=$ $=180^0-\frac{Α\widehat{Ε}Β}{2}-\frac{Α\widehat{Δ}Β}{2}$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $Μ\widehat{Β}Ν$ εἶναι σταθερά. Ἔστω αὕτη ω, ἤτοι $Μ\widehat{Β}Ν=ω$ (1). ἔνθα $ω=180^0-\frac{Α\widehat{Ε}Β}{2}-\frac{Α\widehat{Δ}Β}{2}$. Ὡς γνωστὸν εἶναι $Μ\widehat{Ο}Ν=90^0+\frac{Μ\widehat{Β}Ν}{2}=90^0+\frac{ω}{2}$ καὶ $Μ\widehat{Ο_1}Ν=90_0-\frac{Μ\widehat{Β}Ν}{2}=90^0-\frac{ω}{2}$.

Ἐξ αὐτῶν, ἐπειδὴ $Μ\widehat{Ο}Ν=Δ\widehat{Ο}Ε$ καὶ $Μ\widehat{Ο_1}Ν=Ρ\widehat{Ο_1}Σ$, λαμβάνομεν $Δ\widehat{Ο}Ε=$ $=90^0+\frac{ω}{2}$ καὶ $Ρ\widehat{Ο_1}Σ=90^0-\frac{ω}{2}$. Ἄρα τὰ Ο καὶ $Ο_1$ κεῖνται ἐπὶ τόξων γραφομένων ἀντιστοίχως μὲ χορδὰς ΔΕ καὶ ΡΣ κειμένων ἄνω τῆς ΡΣ καὶ δεχομένων ἀντιστοίχως γωνίας $90^0+\frac{ω}{2}$ καὶ $90^0-\frac{ω}{2}$, ὅταν ἡ ΜΑΝ δὲν τέμνει τὰ τόξα $Α\widehat{Δ}Β$ καὶ $Α\widehat{Ε}Β$. Ἐὰν ἡ ΜΑΝ τέμνῃ ἓν τῶν τόξων $Α\widehat{Ε}Β$, $Α\widehat{Δ}Β$, ἤτοι ὅταν ἔχῃ π.χ. τὴν θέσιν $ΑΝ_1Μ_1$, τότε τὰ Ο καὶ $Ο_1$ κεῖνται ἐπὶ τόξων γραφομένων μὲ χορδὰς ἀντιστοίχως ΔΕ καὶ ΡΣ, κειμένων πρὸς τὰ κάτω τῆς ΡΣ καὶ δεχομένων ἀντιστοίχως γωνίας $90^0-\frac{ω}{2}$ καὶ $90^0+\frac{ω}{2}$. Πράγματι ἔχομεν:

$$Μ_1=\frac{Α\widehat{Ε}Β}{2},\ Ν_1=180^0-Α\widehat{Ν_1}Β=180^0-\frac{Α\widehat{Ν}Β}{2}=180^0-\frac{360^0-Α\widehat{Δ}Β}{2}=\frac{Α\widehat{Δ}Β}{2}$$

ὅτε $Μ_1\widehat{Β}Ν_1=180^0-\widehat{Μ_1}-\widehat{Ν_1}=180^0-\frac{Α\widehat{Ε}Β}{2}-\frac{Α\widehat{Δ}Β}{2}=ω$ καὶ συνεπῶς, ἐὰν Ο′ εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, θὰ ἔχωμεν $Μ_1\widehat{Ο'}Ν_1=$ $=90^0+\frac{ω}{2}$, ὅτε $Δ\widehat{Ο'}Ε=Ν_1\widehat{Ο}Ε=180^0-Μ_1\widehat{Ο'}Ν_1=180^0-90^0-\frac{ω}{2}=90^0-\frac{ω}{2}$.

Ὁμοίως ἐὰν $Ο'_1$ εἶναι τὸ κέντρον τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὴν πλευρὰν $Μ_1Ν_1$, θὰ ἔχωμεν $Δ\widehat{Ο'_1}Ε=90^0+\frac{ω}{2}$.

808) Δίδεται γωνία σταθερὰ θέσει ΧΑΨ καὶ τέμνομεν ταύτην ὑπὸ κινητῆς εὐθείας ΒΓ. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι σταθερόν, νὰ εὑρεθῇ· 1ον) Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. 2ον) Ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Λύσις. Ἡ διατύπωσις γίνεται καὶ οὕτω: Τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{Α}$ παραμένει σταθερά. Ἐὰν $ΑΒ\pm ΑΓ=Κ$ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ὡς καὶ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.

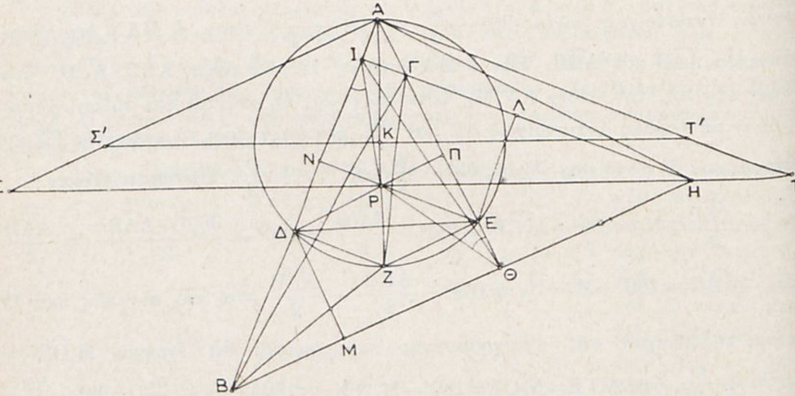
1) Ἔστω $ΑΒ+ΑΓ=Κ$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ (σχ. 599) λαμβάνομεν $ΑΔ=ΑΕ=\frac{Κ}{2}$. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, θὰ απο-

δείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΓΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, δηλαδὴ ὅτι ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ ΑΓΒ διέρχεται ἐκ τοῦ Ζ.

Πράγματι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΖ καὶ ΓΖΕ εἶναι ἴσα διότι ΔΖ=ΖΕ καὶ ΔΒ=ΓΕ $\left(\text{ὡς προκύπτει εὐκόλως ἐκ τῶν } ΑΔ=ΑΕ=\frac{Κ}{2} \text{ καὶ } ΑΒ+ΑΓ=Κ\right)$.

Ἑπομένως $\widehat{ΖΓΕ}=\widehat{ΔΒΖ}$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΓΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ ΑΒΓ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΖ. Ἐὰν ΑΣ′ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ΑΤ′⊥ΑΒ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Σ′Τ′, ἔνθα Σ′ καὶ Τ′ τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ ἀνωτέρω κάθετοι τέμνουσι τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΖ.

Ἐὰν Ρ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΔΕ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ ΑΒΓ, ΔΜ



Σχ. 599.

κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΗ καὶ ΕΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΗ, τότε τὰ τρίγωνα ΒΔΜ καὶ ΓΛΕ εἶναι ἴσα, διότι ΒΔ=ΕΓ καὶ $\widehat{ΒΔΜ}=\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{ΓΕΛ}$ (διότι ἡ ΔΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΘ καὶ ἡ ΑΒ παράλληλος πρὸς τὴν ΕΛ). Ἄρα ΕΛ=ΔΜ καὶ συνεπῶς ΝΙ=ΠΘ. Τὰ ὀρθογώνια ὅθεν τρίγωνα ΡΝΙ καὶ ΡΠΘ εἶναι ἴσα διότι ΠΘ=ΝΙ καὶ ΡΠ=ΡΝ. Ἄρα $\widehat{ΝΙΡ}=\widehat{ΡΘΠ}$.

Τὸ τετράπλευρον ΑΙΡΘ εἶναι συνεπῶς ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἐπειδὴ ὅμως καὶ τὸ ΑΙΘΗ εἶναι ἐγγράψιμον (διότι $\widehat{ΑΙΗ}=\widehat{ΑΘΗ}=90^\circ$) τὰ σημεῖα Α, Ι, Ρ, Θ, Η εἶναι ὁμοκύκλια καὶ $\widehat{ΑΡΗ}=\widehat{ΑΙΗ}=\widehat{ΑΘΗ}=90^\circ$.

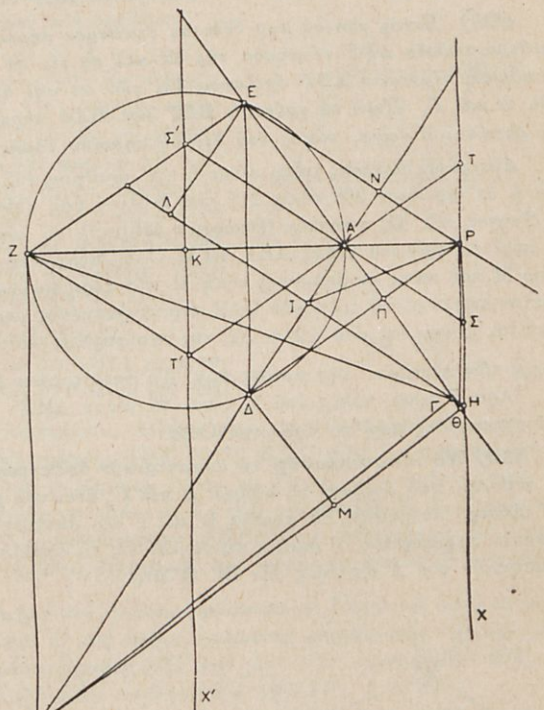
Ἄρα ἡ ΗΡ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ εἰς τὸ Ρ. Ὁ γεωμ. τόπος, ὅθεν, τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΤ, ἔνθα Σ καὶ Τ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΖ εἰς τὸ Ρ καὶ τῶν καθέτων ΑΤ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΑΣ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

2) Ἔστω ΑΒ—ΑΓ=Κ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ

(σχ. 600) λαμβάνομεν ΑΔ$=\frac{K}{2}$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ, πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α, λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ$=\frac{K}{2}$. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{ΕΑΔ}$ (δηλ. τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ, θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΖΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, δηλαδὴ ὅτι ἡ περιγεγραμμένη περιφέρεια εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διέρχεται ἐκ τοῦ σταθεροῦ σημείου Ζ.

Πράγματι: ΑΒ$-$ΑΓ$=$Κ, ἢ ΑΒ$-\frac{K}{2}=$ΑΓ$+\frac{K}{2}$, ἢ ΑΒ$-$ΑΔ$=$ $=$ΑΓ$+$ΑΕ, ἢ ΔΒ$=$ΕΓ.

Τὰ ὀρθογώνια ὅθεν τρίγωνα, ΔΖΒ καὶ ΖΓΕ εἶναι ἴσα διότι ΔΒ$=$ΕΓ καὶ ΖΔ$=$ΖΔ. Ἄρα $\widehat{ΖΓΕ}=\widehat{ΖΒΔ}$, ἢ $\widehat{ΖΒΑ}=\widehat{ΖΓΑ}$.



Σχ. 600.

Ἐὰν Τ′ εἶναι ἡ τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΖ καὶ τῆς καθέτου Τ′Α ἐπὶ τὴν ΑΓ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ ΑΒΓ θὰ εἶναι ἡ ἡμιευθεῖα Τ′Χ′.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γεωμ. τόπου τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ΔΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΗ καὶ ΕΛ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΗ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ καὶ ΕΛΓ εἶναι ἴσα διότι ΔΒ$=$ΕΓ καὶ $\widehat{ΒΔΜ}=\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{ΛΕΓ}$. Ἄρα ΔΜ$=$ΕΛ, ἢ ΠΘ$=$ΙΝ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα συνεπῶς ΡΠΘ καὶ ΡΝΙ εἶναι ἴσα, διότι ΠΘ$=$ΙΝ καὶ ΓΝ$=$ΡΠ.

Ἄρα $\widehat{ΝΙΡ}=\widehat{ΠΘΡ}$, ἢ $\widehat{ΑΙΡ}=\widehat{ΑΘΡ}$.

Τὸ τετράπλευρον ὅθεν ΑΙΘΡ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ΑΙΘΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον (διότι $\widehat{AIH}=\widehat{A\Theta H}=90^o$) τὰ σημεῖα Ρ,Α,Ι,Θ,Η εἶναι ὁμοκύκλια. Ἄρα $\widehat{APH}=\widehat{AIH}=\widehat{A\Theta H}=90^o$, ἤτοι ἡ ΡΗ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΑ εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Ρ αὐτῆς.

Ἐὰν Σ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΑΣ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τῆς ΡΗ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ ἡμιευθεῖα ΗΧ.

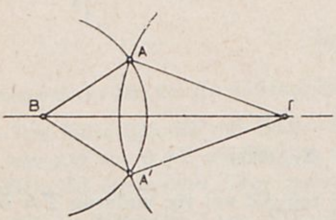
809) Ἐντὸς γωνίας xoy δίδεται σταθερὸν σημεῖον Β καὶ δι' αὐτοῦ σταθερὰ εὐθεῖα ΔΒΕ τέμνουσα τὰς ox καὶ oy εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ μεταβλητὴ τέμνουσα ΑΒΓ ὁρίζουσα ἐπὶ τῶν ox καὶ oy ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Γ. Περὶ τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΒΑΔ περιγράφομεν περιφερείας καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ἑτέρου σημείου τομῆς αὐτῶν.

Λύσις. Ἡ ἄσκησις αὕτη εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθμὸν 492 τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ἤτοι ἡ ὑπ' ἀριθμὸν 392 σελὶς 167 τοῦ βιβλίου μας (Μεγάλη Γεωμετρία Τόμ. Α', Τεῦχος Α'). Ὡς γνωστὸν (Θεώρημα Miquel) οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΓ, ΑΒΔ, ΒΓΕ, ΟΔΕ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ τομὴ Μ τῶν περιφερειῶν ΑΒΔ καὶ ΓΕΒ εἶναι σημεῖον τῆς περὶ τὸ τρίγωνον ΟΔΕ περιγεγραμμένης περιφερείας. Τὸ σημεῖον Μ κεῖται μόνον ἐπὶ τοῦ τόξου $\overline{\Delta E}$ τῆς περιφερείας αὐτῆς, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\widehat{xoy}$. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως.

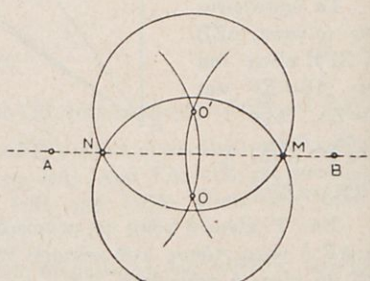
Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τὸ τόξον $\Delta\overline{M}E$ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΟΔΕ.

810) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ συμμετρικὸν δοθέντος σημείου Α ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ποὺ ὁρίζουν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ κανόνος.

Λύσις. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἀκτῖνας ΒΑ καὶ ΑΓ (σχ. 601) γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α'. Τὸ Α' εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΒΓ (§ 207).



Σχ. 601.



Σχ. 602.

811) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς εὐθείας ποὺ ὁρίζουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ χρήσεως μόνον τοῦ διαβήτου, ὅταν τὰ σημεῖα Α, Β, Ο δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

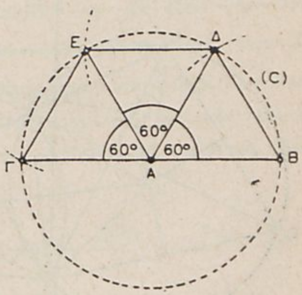
Λύσις. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ σημεῖα τομῆς. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀκτίνας ΑΟ καὶ ΒΟ ἀντιστοίχως (σχ. 602) γράφομεν περιφερείας αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο′ συμμετρικοῦ τοῦ Ο ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπειδὴ εἶναι Ο′Μ=Ο′Ν=ΟΝ=ρ=ἀκτὶς τῆς Ο, ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο′ καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς δοθείσης περιφερείας γράψωμεν περιφέρειαν, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν Ο εἰς τὰ ζητούμενα σημεῖα Μ καὶ Ν. Τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ ἀνήκουν εἰς τὴν ΑΒ διότι ἰσαπέχουν ἀμφότερα τῶν Ο, καὶ Ο′.

812) Νὰ διπλασιασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ὁρίζουν δύο σημεῖα Α καὶ Β μὲ μόνον τὸν διαβήτην.

Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν πειφέρειαν (c). Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (c) τὸ σημεῖον Δ. Μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (c) τὸ Ε. Τέλος μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς (c) τὸ Γ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΕ, ΑΕΓ εἶναι ἰσόπλευρα θὰ εἶναι

$$\widehat{ΒΑΔ}=\widehat{ΔΑΕ}=\widehat{ΕΑΓ}=60^0.$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΒΑΓ εἶναι εὐθεῖα καὶ τὸ ΒΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒ.



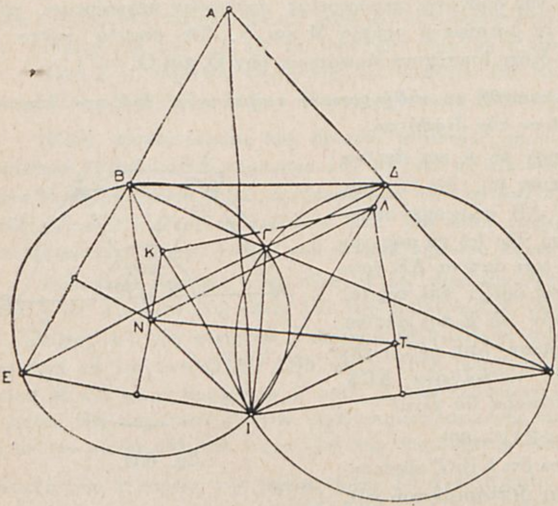
Σχ. 603.

813) Οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι περὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒΕ, ΓΔΕ, ΒΓΖ, ΑΔΖ, τεμνόμεναι ἀνὰ δύο, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι καὶ τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ περιφερείας (Π) ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ Ι. Ἐὰν τὰ σημεῖα Ε, Ι, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δείξατε ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι διχοτόμος τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν, τῶν γωνιῶν $\widehat{ΑΙΓ}$, $\widehat{ΒΙΔ}$ ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ διαγώνιοι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ι. Ἐπίσης τὸ κέντρον Ο τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας Ο τοῦ ΑΒΓΔ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας (Π) καὶ ἐπὶ τῶν περιφερειῶν ΑΙΓ, ΒΙΔ. Συμπεράνατε ὅτι ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ.

Λύσις. α) Ὅτι οἱ περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΓΔΕ, ΒΓΖ, ΑΔΖ περιγεγραμμένοι κύκλοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι (σχ. 604) ἐδείχθη ἐν παραγράφῳ 242 (Θεώρημα Miquel).

β) Ὅτι τὰ κέντρα Κ, Λ, Τ, Ν τῶν κύκλων τῶν περιγεγραμμένων ἀντιστοίχως περὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΔ, ΑΒΖ, ΓΔΖ, ΒΓΕ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Π ἐδείχθη ἐπίσης ἐν παραγράφῳ 242 (Θεώρημα τοῦ Miquel).

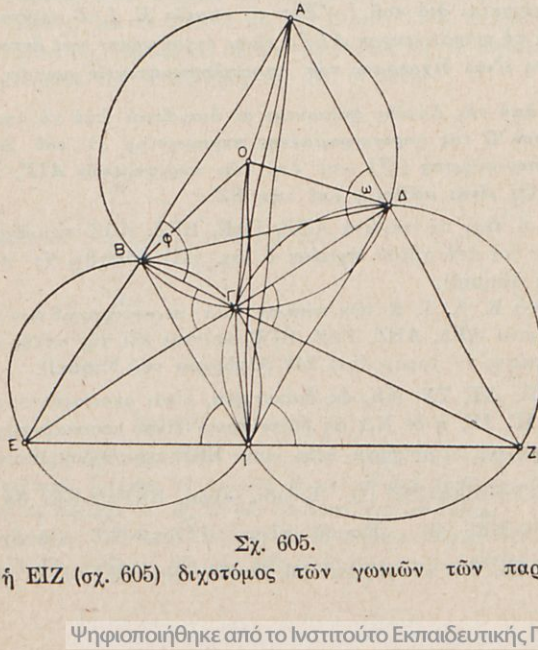
γ) Ἐπειδὴ αἱ ΚΛ, ΛΤ, ΤΝ, ΝΚ, ὡς διάκεντροι, εἶναι μεσοκάθετοι ἀντιστοίχως τῶν ΙΑ, ΙΖ, ΙΓ, ΙΕ, ἡ δὲ ΝΛ ὡς διάκεντρος εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς ΙΒ τῶν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΖ καὶ ΕΒΓ περιγεγραμμένων κύκλων, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΝΛΤ}+\widehat{ΒΙΖ}=180^0$ (1). Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΝΙ}=2\cdot\widehat{ΒΕΙ}$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΝΙΒ}=\widehat{ΝΒΙ}=90^0-\widehat{ΒΕΙ}$ (2). Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΙΤΖ}=2\cdot\widehat{ΙΓΖ}$, θὰ ἔχωμεν $\widehat{ΤΙΖ}=\widehat{ΤΖΙ}=90^0-\widehat{ΙΓΖ}$ (3). Ἐκ τῶν (2) καὶ (3), ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{ΒΕΙ}=\widehat{ΙΓΖ}$ (λόγῳ τοῦ ἐγγραψίμου τετραπλεύρου ΕΒΓΙ) θὰ ἔχωμεν $\widehat{NIB}=\widehat{TIZ}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{NIT}=\widehat{BIZ}$, ὅτε ἡ (1) γίνεται $\widehat{N\Lambda T}+\widehat{NIT}=180^0$. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΝΛΤΙ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς περιφέρειαν, ἥτις συμπίπτει μὲ τὴν περιφέρειαν (Π) τῶν Κ,Λ,Τ,Ν. Ἄρα τὰ Κ, Λ, Τ,Ι,Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (Π).



Σχ. 604.

δ) Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΓΔΖΙ καὶ ΙΓΒΕ ἔχομεν $\widehat{\Gamma IZ}=\widehat{\Gamma\Delta A}$ καὶ $\widehat{\Gamma IE}=\widehat{AB\Gamma}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma IZ}+\widehat{\Gamma IE}=\widehat{\Gamma\Delta A}+\widehat{AB\Gamma}$ (α).

Ἐὰν συνεπῶς τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, θὰ ἔχωμεν $\widehat{\Gamma\Delta A}+\widehat{AB\Gamma}=180^0$, ὅτε ἡ (α) γίνεται $\widehat{\Gamma IZ}+\widehat{\Gamma IE}=180^0$. Ἄρα ἡ ΕΙΖ εἶναι εὐθεῖα.



Σχ. 605.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ ΕΙΖ εἶναι εὐθεῖα, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (α) θὰ εἶναι 180^0 καὶ συνεπῶς καὶ τὸ δεύτερον καὶ ἑπομένως τὸ ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

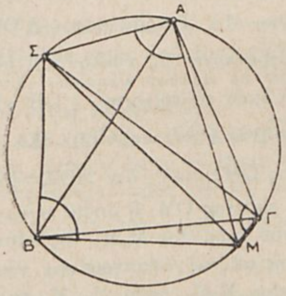
ε) Διὰ νὰ εἶναι ἡ ΕΙΖ (σχ. 605) διχοτόμος τῶν γωνιῶν τῶν παραπληρωματικῶν τῶν

$\widehat{\text{ΑΙΓ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΔΙΒ}}$ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι $\widehat{\text{ΓΙΕ}}=\widehat{\text{ΑΙΖ}}$ καὶ $\widehat{\text{ΒΙΕ}}=\widehat{\text{ΔΙΖ}}$. Πράγματι ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΒΓΙΕ, ΔΓΙΖ λαμβάνομεν $\widehat{\text{ΒΙΕ}}=\widehat{\text{ΕΓΒ}}=\widehat{\text{ΔΓΖ}}=\widehat{\text{ΔΙΖ}}$. Ἐκ τῶν ἐγγραψίμων τετραπλεύρων ΓΙΕΒ καὶ ΑΒΙΖ λαμβάνομεν $\widehat{\text{ΓΙΕ}}=\widehat{\text{ΑΒΓ}}=\widehat{\text{ΑΒΖ}}=\widehat{\text{ΑΙΖ}}$.

ζ) Ἔχομεν $\widehat{\text{ΒΙΔ}}=\widehat{\text{ΒΙΓ}}+\widehat{\text{ΓΙΔ}}=\widehat{\text{ΒΕΓ}}+\widehat{\text{ΓΖΔ}}=(180^0-\omega-\text{Α})+(180^0-\varphi-\text{Β})=360^0-(\omega+\varphi)-2\text{Α}=360^0-180^0-2\text{Α}=180^0-2\text{Α}=180^0-\widehat{\text{ΒΟΔ}}$ καὶ συνεπῶς $\widehat{\text{ΒΙΔ}}+\widehat{\text{ΒΟΔ}}=180^0$. Ἄρα τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΒΙΔ περιφερείας. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περὶ τὸ τρίγωνον ΓΙΑ περιγεγραμμένης περιφερείας, διότι, ὡς εὐκόλως φαίνεται, εἶναι $\widehat{\text{ΓΙΑ}}+\widehat{\text{ΓΟΑ}}=180^0$.

θ) Ἔχομεν $\widehat{\text{ΟΙΖ}}=\widehat{\text{ΟΙΔ}}+\widehat{\text{ΔΙΖ}}=\widehat{\text{ΟΒΔ}}+\widehat{\text{ΔΓΖ}}=90^0-\dfrac{\widehat{\text{ΒΟΔ}}}{2}+\widehat{\text{ΔΓΖ}}=90^0-\dfrac{2\text{Α}}{2}+\text{Α}=90^0$. Ἄρα ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ.

814) Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε αἱ κάθετοι εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ ἀντιστοίχως νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

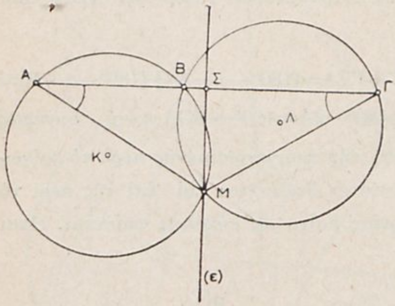


Σχ. 606.

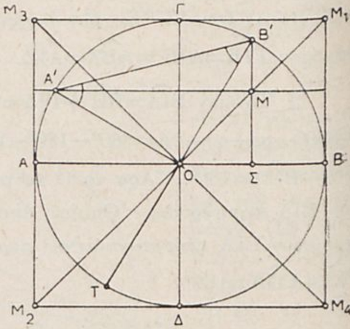
Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, διὰ τὸ ὁποῖον αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τὰς ΑΜ, ΒΜ, ΓΜ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ. Τὰ τετράπλευρα ΣΑΓΜ καὶ ΣΑΜΒ (σχ. 606) εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, αἱ δὲ περιγεγραμμέναι περὶ αὐτὰ περιφέρειαι, ὡς ἔχουσαι τρία σημεῖα κοινὰ τὰ Σ,Α,Μ, συμπίπτουν εἰς μίαν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ περιφέρεια τῆς συμπτώσεως διέρχεται διὰ τῶν Α, Β, Γ, ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΑΒΓ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένη περιφέρεια.

815) Ἐπ' εὐθείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Μὲ χορδὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ γράφομεν δύο ἴσας περιφερείας αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ διάφορον τοῦ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

Λύσις. Ἔστω Μ τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Κ καὶ Λ. Ἐπειδὴ $\widehat{\text{ΒΑΜ}}=\widehat{\text{ΒΓΜ}}$ (ὡς βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα ἴσων περιφερειῶν) ἕπεται ὅτι τὸ Μ ἰσαπέχει τῶν Α καὶ Γ (σχ. 607) καὶ συνεπῶς κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου (ε) τῆς ΑΓ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ μεσοκάθετος (ε) τῆς ΑΓ.



Σχ. 607.



Σχ. 608.

616) Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ δύο διάμετροι ΑΒ, ΓΔ κάθετοι μεταξύ των σταθεραί. Φέρομεν τὰς ἀκτίνας ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ καθέτους μεταξύ των καὶ ἐκ τῶν Α′ καὶ Β′ παραλλήλους πρὸς τὰς διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ ὅταν ἡ γωνία $A'\widehat{O}B'$ στρέφεται περὶ τὸ Ο.

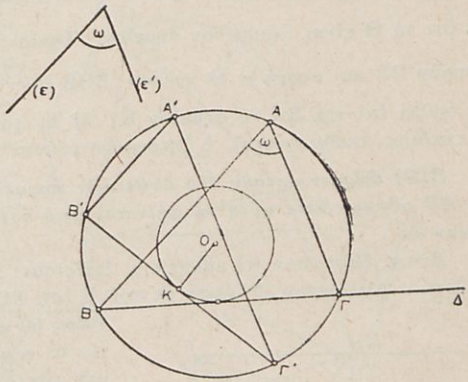
Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου. Τὸ Τετράπλευρον Α′ΟΜΒ′ (σχ. 608), ἐπειδὴ $A'\widehat{O}B'=A'\widehat{M}B'=90^0$, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $O\widehat{M}B'+O\widehat{A'}B'=180^0$ (1). Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνον Α′ΟΒ′ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές, ἕπεται ὅτι εἶναι $O\widehat{A'}B'=A'\widehat{B'}O=45^0$ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $O\widehat{M}B'=135^0$ καὶ ἑπομένως $O\widehat{M}\Sigma=45^0$, ὅτε $M\widehat{O}\Sigma=45^0$.

Ἄρα τὸ τυχὸν σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ, ἡ ὁποία σχηματίζει μετὰ τῆς ΟΒ γωνίαν 45^0 καὶ μάλιστα ἐπὶ τοῦ τμήματος M_1M_2 τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἔνθα M_1 καὶ M_2 τὰ σημεῖα τομῆς ταύτης μὲ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ Β καὶ Α. Ἐπίσης τὸ Μ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας M_3M_4, ἔνθα M_3, M_4 τὰ σημεῖα τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $A\widehat{O}\Gamma$ μετὰ τῶν εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἐφαπτομένων. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἢ τῆς ἄλλης διαγωνίου τοῦ τετραγώνου $M_1M_3M_2M_4$. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι αἱ διαγώνιαι M_1M_2 καὶ M_3M_4 τοῦ τετραγώνου $M_1M_3M_2M_4$.

817) Εἰς δοθέντα κύκλον Ο νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′) καὶ ἡ ΒΓ νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Δ.

Λύσις. Ἀφοῦ ἡ γωνία $\widehat{A}$ θὰ ἔχῃ τὰς πλευράς της ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς σταθερὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′) θὰ εἶναι γωνία γνωστοῦ μεγέθους ἔστω ω καὶ ἑπομένως καὶ τὸ μέγεθος τῆς χορδῆς ΒΓ θὰ εἶναι γνωστόν.

Σύνθεσις. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α′ τῆς περιφερείας φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς (ε) καὶ (ε′), αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ Β′ καὶ Γ′. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν ΟΚ τοῦ Ο ἀπὸ τῆς Β′Γ′ (σχ. 609) γράφομεν περιφέρειαν καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς ΔΓΒ, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν (ε), ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ Α, ὅτε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (ε′). Ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=Β′Γ′, θὰ εἶναι καὶ $B\widehat{A}\Gamma = B'\widehat{A'}\Gamma' = \omega$, ὅτε, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῇ (ε) καὶ ἡ ΑΓ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ (ε′).



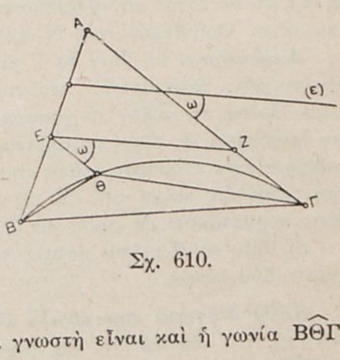
Σχ. 609.

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι ἐκ τοῦ Δ ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος ΟΚ.

818) Κόψατε τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ διὰ εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν οὕτως, ὥστε τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τούτων τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῆς ΒΓ καὶ τῆς ζητουμένης εὐθείας νὰ εἶναι ἴσα.

Λύσις. Ἔστω ΕΖ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ (ε) καὶ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΕΒ=ΖΓ (σχ. 610). Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν εὐθεῖαν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΖΓ καὶ ἴσην πρὸς ΕΒ=ΖΓ. Ἡ γωνία $\widehat{\Theta E Z}$ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\widehat{\omega}$ τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας (ε) καὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Ὁμοίως εἶναι γνωστὴ ἡ $B\widehat{E}\Theta = \widehat{A}$. Τὸ τρίγωνον ΒΕΘ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς

$$E\widehat{B}\Theta = E\widehat{\Theta}B = \frac{180^\circ - A}{2}.$$



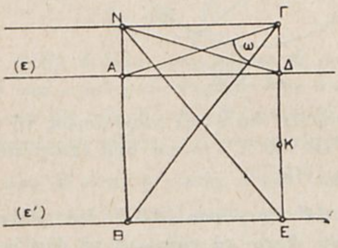
Σχ. 610.

Ἡ γωνία $E\widehat{\Theta}\Gamma$ ἐπίσης εἶναι γνωστὴ ὡς παραπληρωματικὴ τῆς $\Theta\widehat{E}Z$. Ἄρα γνωστὴ εἶναι καὶ ἡ γωνία $B\widehat{\Theta}\Gamma = 360^\circ - (B\widehat{\Theta}E + \Gamma\widehat{\Theta}E) = 90^\circ + \omega + \frac{A}{2}$. Ἄρα τὸ Θ κεῖται ἐπὶ τόξου κύκλου γραφομένου ἐπὶ χορδῆς ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν $B\widehat{\Theta}\Gamma = 360^\circ - (B\widehat{\Theta}E + E\widehat{\Theta}\Gamma) =$

$=90^0+\omega+\frac{A}{2}$. Ὁμοίως κεῖται καὶ ἐπὶ εὐθείας ΒΘ σχηματιζούσης μετὰ τῆς ΒΓ γωνίαν $\widehat{\Theta B\Gamma}=\widehat{B}-\widehat{E B \Theta}=B-\frac{180^0-A}{2}=B+\frac{A}{2}-90^0$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ Θ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον. Ὁρισθέντος τοῦ Θ σχηματίζομεν μὲ πλευρὰν ΒΘ καὶ κορυφὴν Θ γωνίαν $\widehat{B\Theta E}=\frac{180^0-A}{2}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ ταύτης ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΒΑ τὸ σημεῖον Ε. Ἡ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ (ε) εἶναι, ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ἡ ζητουμένη εὐθεῖα ΕΖ.

819) Φέρατε μεταξὺ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν κοινὴν κάθετον ΑΒ οὕτως, ὥστε αὕτη νὰ φαίνεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Λύσις. Ἔστωσαν (ε) καὶ (ε′) αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι. Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμμένον. Φέρομεν ἐκ τοῦ Γ (σχ. 611) τὴν κάθετον ἐπὶ τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′), ἡ ὁποία τέμνει αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ μέχρις ὅτου τμήσῃ εἰς τὸ Ν τὴν παράλληλον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὰς (ε) καὶ (ε′).



Σχ. 611.

Τὰ τετράπλευρα ΓΔΑΝ καὶ ΓΕΒΝ εἶναι ὀρθογώνια καὶ συνεπῶς αἱ διαγώνιοί των εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΔΝ=ΓΑ καὶ ΕΝ=ΓΒ. Ἐπειδὴ εἶναι

$$\widehat{\Gamma A B}=90^0+\widehat{\Gamma A \Delta}=90^0+\widehat{N \Delta A}=\widehat{N \Delta E},$$

ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ ΝΔΕ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{\Delta N E}=\widehat{A\Gamma B}=\widehat{\omega}$. Κατόπιν αὐτῶν τὸ Ν ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς παραλλήλου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′) μὲ τὸ τόξον τὸ γραφόμενον μὲ χορδὴν τὴν ΔΕ καὶ δεχόμενον γωνίαν ἴσην μὲ ω. Ὁρισθέντος τοῦ Ν ὁρίζεται ἡ ΑΒ.

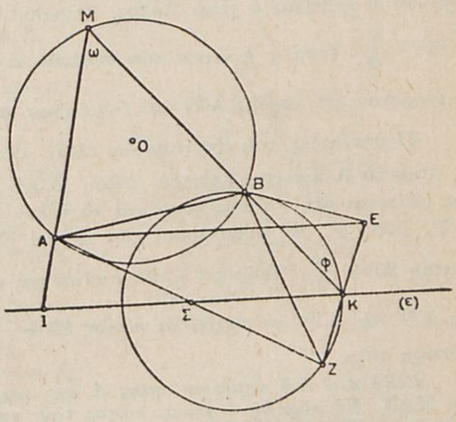
Διερεύνησις. α) Ἐὰν τὸ Γ κεῖται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων τότε πρέπει νὰ εἶναι $\omega<90^0$. Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον τὸ γραφόμενον μὲ χορδὴν τὴν ΔΕ καὶ δεχόμενον γωνίαν ἴσην πρὸς ω, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΚΓ, ἔνθα Κ μέσον τῆς ΔΕ, τότε τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρες λύσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ΓΔΕ, διότι τὸ ἐν λόγῳ τόξον θὰ τέμνῃ τὴν ΓΝ εἰς δύο σημεῖα. Ἐὰν εἶναι ρ=ΚΓ θὰ ἔχῃ δύο λύσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν ΓΔΕ καὶ ἐὰν ρ<ΚΓ οὐδεμίαν.

β) Ἐὰν τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν παραλλήλων, τότε τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε δύο λύσεις.

820) Δίδονται περιφέρεια Ο, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπ' αὐτῆς καὶ εὐθεῖα (ε). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) τμῆμα ΙΚ τὸ ὁποῖον· 1ον) Νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος. 2ον) Νὰ ἔχῃ μέσον δοθὲν σημεῖον.

Λύσις. α) Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ ὅτι ΙΚ=λ. Ἡ γωνία

$\widehat{AMB}$ (σχ. 612) εἶναι γνωστὴ διότι ἡ χορδὴ AB εἶναι γνωστή, ἔστω $\widehat{AMB}=\omega$. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τὴν AE παράλληλον πρὸς τὴν (ε) καὶ ἴσην μὲ λ. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ σημεῖον K προσδιορίζεται διότι κεῖται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τόξου κύκλου χορδῆς BE καὶ δεχομένου γωνίαν $\varphi=\omega=\widehat{AMB}=$ $=$σταθεράν. Ὁρισθέντος τοῦ σημείου K φέρομεν τὴν KB ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ M. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ἐφ' ὅσον ἡ (ε) τέμνει τὸ τόξον.

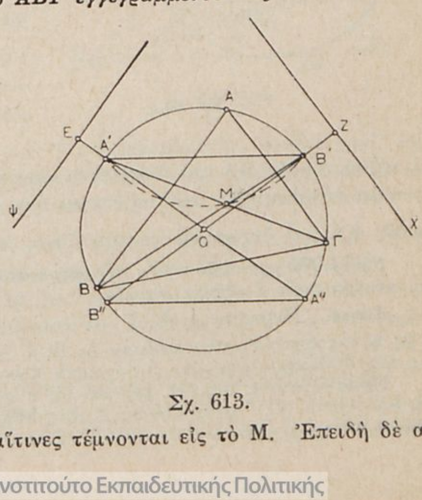


Σχ. 612.

β) Ἔστω Σ τὸ μέσον τοῦ IK, ὅτε θὰ ἔχωμεν $I\Sigma=$ $=\Sigma K$. Λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Z τοῦ A ὡς πρὸς τὸ δοθὲν σημεῖον Σ καὶ φέρομεν τὰς BZ καὶ ZK. Τὸ σημεῖον Z εἶναι σταθερὸν καὶ συνεπῶς καὶ τὸ τμῆμα BZ ὡς συμμετρικὸν τοῦ A ὡς πρὸς τὸ Σ καὶ ἑπομένως τὸ τμῆμα BZ εἶναι ὡρισμένον. Τὸ σημεῖον K, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς (ε) ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν BZ καὶ δεχομένου γωνίαν $\widehat{BKZ}=180^0-\varphi=180^0-\omega$, εἶναι ὡρισμένον. Ὁρισθέντος τοῦ K, φέρομεν τὴν KB ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ σημεῖον M. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ἐφ' ὅσον ἡ (ε) τέμνει τὸ τόξον.

821) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αἳ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον Ο καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας (Χ) καὶ (Ψ).

Λύσις. Ἐκ τοῦ κέντρου O (σχ. 613) φέρομεν τὰς καθέτους OE καὶ OZ ἐπὶ τὰς σταθερὰς εὐθείας x καὶ y, αἵτινες τέμνουν τὴν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα A′ καὶ B′ τὰ ὁποῖα εἶναι σταθερά. Ἐπειδὴ δὲ αἱ OE καὶ OZ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς χορδὰς AB καὶ AΓ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὰς παραλλήλους αὐτῶν, τὰ A′ καὶ B′ εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων AB καὶ AΓ.



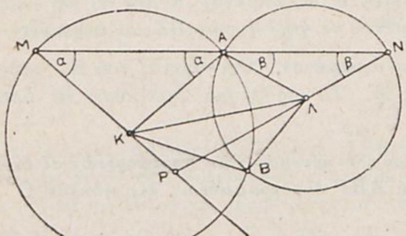
Σχ. 613.

Φέρομεν τὰς BB′ καὶ ΓΓ′ αἵτινες τέμνονται εἰς τὸ M. Ἐπειδὴ δὲ αὐται εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ κέντρον τῆς εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένης περιφερείας. Τοῦ σημείου Μ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $A'\widehat{M}B' = 90^0 + \frac{A}{2} =$ $= 90^0 + \frac{\varphi}{2}$, ἔνθα φ ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν x καὶ y, τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου γραφομένου ἐπὶ χορδῆς Α′Β′ καὶ δεχομένου γωνίαν $90^0 + \frac{\varphi}{2}$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ἀντιστρόφου εἶναι εὔκολος. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Α κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $A'\overset{\frown}{A}B'$, εἶναι τὸ τόξον $A'\overset{\frown}{M}B'$. Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ὁ τόπος εἶναι καὶ τὸ τόξον τὸ γραφόμενον μὲ χορδὴν τὴν Α″Β″, ἔνθα Α″, Β″ συμμετρικὰ τῶν Α′ καὶ Β′ ὡς πρὸς τὸ Ο καὶ δεχόμενον γωνίαν $90^0 + \frac{\varphi}{2}$. Ἐπίσης ὁ γ. τόπος εἶναι καὶ τὰ τόξα τὰ γραφόμενα μὲ χορδὰς τὰς Α′Β″ καὶ Α″Β′ καὶ δεχόμενα γωνίας $90^0 + \frac{180^0 - \varphi}{2}$. Ἄρα ὁ γ. τόπος εἶναι τέσσαρα τόξα.

822) Διὰ τοῦ σημείου τομῆς Α δύο περιφερειῶν, φέρομεν διατέμνουσαν ΜΑΝ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέτρων τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων Μ καὶ Ν.

Λύσις. Ἔστω Ρ ἡ τομὴ τῶν διαμέτρων ΜΚ καὶ ΝΛ τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ (σχ. 614). Ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΝΡ ἔχομεν



Σχ. 614.

$$M\widehat{P}N = 180^0 - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}) =$$
$$= 180^0 - (M\widehat{A}K + N\widehat{A}\Lambda) =$$
$$= K\widehat{A}\Lambda = K\widehat{B}\Lambda = \text{σταθερά}.$$

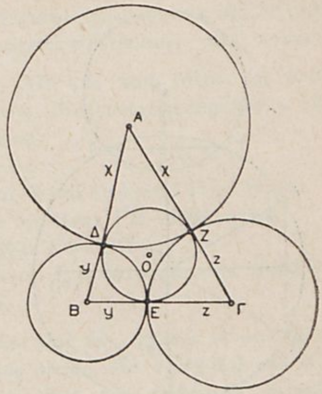
Ἄρα ἡ διάκεντρος ΚΛ φαίνεται ἐκ τοῦ Ρ ὑπὸ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἀκτῖνες αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν Κ καὶ Λ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν. Ἄρα τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΚΛ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς ΚΒΛ. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Ρ εἶναι τόξον χορδῆς ΚΛ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $K\widehat{B}\Lambda$.

823) Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι μεταξύ των καὶ ἔχουσαι κέντρα τρία δοθέντα σημεῖα.

Λύσις. Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ ζητούμεναι περιφέρειαι. Ἐὰν καλέσωμεν x, y, z τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων Α, Β, Γ (σχ. 615) καὶ μὲ α, β, γ τὰς ἀποστάσεις τῶν δοθέντων σημείων, θὰ ἔχωμεν $x + y = \gamma$ (1), $y + z = \alpha$ (2), $z + x = \beta$ (3).

Προσθέτοντες τὰς (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν $2x + 2y + 2z = \alpha + \beta + \gamma = 2\tau$, ἢ $x + y + z = \tau$ (4). Ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς τὰς (1), (2), (3) ἀπὸ τὴν (4) εὑρίσκομεν $z = \tau - \gamma$, $x = \tau - \alpha$, $y = \tau - \beta$. Ἐὰν ἐγγράψωμεν περιφέρειαν κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, αὕτη θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν του εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Ἀλλὰ (§ 129) αἱ ἀποστάσεις τῶν Δ, Ε, Ζ ἐκ τῶν Α, Β, Γ εἶναι $x=\tau-\alpha$, $y=\tau-\beta$, $z=\tau-\gamma$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν ἐπαφῆς τῶν τριῶν κύκλων Α, Β, Γ συμπίπτουν μὲ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν του.

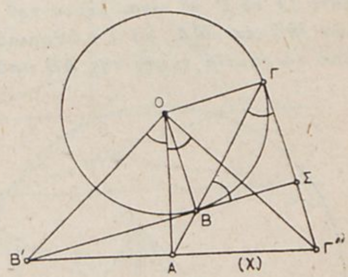
Κατασκευή. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλον, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Μὲ κέντρα τὰ Α, Β, Γ καὶ μὲ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως τὰς ΑΔ, ΒΔ καὶ ΓΖ γράφομεν τρεῖς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι.



Σχ. 615.

824) Προβάλλομεν τὸ κέντρον Ο μιᾶς περιφερείας ἐπὶ εὐθεῖαν (x) καὶ ἔστω Α ἡ προβολή του. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ τῆς περιφερείας. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (x) εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει μέσον τὸ σημεῖον Α.

Λύσις. Τὸ τετράπλευρον ΑΟΓΓ′, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίας ὀρθάς, τὰς $O\widehat{A}B'$ καὶ $O\widehat{\Gamma}\Gamma'$, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ συνεπῶς εἶναι $A\widehat{O}\Gamma'=A\widehat{\Gamma}\Gamma'$ (1). Τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΒ′ εἶναι ἐπίσης ἐγγράψιμον δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $B'\widehat{O}A=B'\widehat{B}A$ (2). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $B'\widehat{B}A$ καὶ $A\widehat{\Gamma}\Gamma'$ (σχ. 616) σχηματίζονται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΓ καὶ συνεπῶς εἶναι ἴσαι,



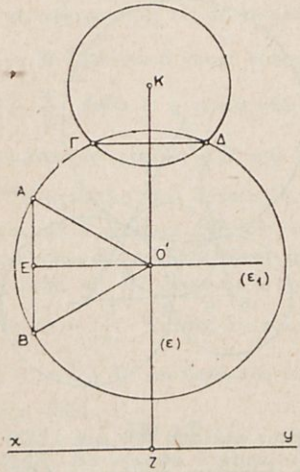
Σχ. 616.

ἤτοι $B'\widehat{B}A=A\widehat{\Gamma}A'$. Λόγῳ ταύτης, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει $A\widehat{O}B'=A\widehat{O}\Gamma'$ (3).

Ἐκ τῆς (3) συνάγομεν ὅτι τὸ τρίγωνον Β′ΟΓ′ εἶναι ἰσοσκελές, καὶ συνεπῶς τὸ ὕψος του θὰ εἶναι καὶ διάμεσός του. Ἄρα εἶναι ΑΒ′=ΑΓ′ ὅ.ἔ.δ.

825) Διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β νὰ ἀχθῇ περιφέρεια ἥτις νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ κατὰ χορδὴν σταθερᾶς διευθύνσεως.

Λύσις. Ἔστω Ο′ τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ τέμνει τὴν Κ οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ ΓΔ νὰ ἔχῃ σταθερὰν διεύθυνσιν xy. Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΟ′. Ἡ ΚΟ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΔ. Ἄρα τὸ κέντρον Ο′ (σχ. 617) κεῖται ἐπὶ εὐθείας (ε) καθέτου ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν xy καὶ ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου Κ τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἐὰν φέρωμεν τὰς Ο′Α καὶ Ο′Β θὰ εἶναι Ο′Α=Ο′Β ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου Ο'. Ἄρα τὸ Ο' κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθετου (ε_1) ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἡ τομὴ Ο' τῶν δύο τούτων εὐθειῶν (ε) καὶ (ε_1) εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

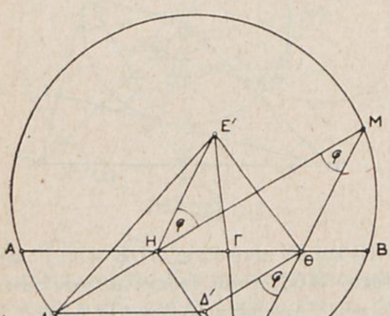


Σχ. 617.

Κατασκευή. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν (ε) κάθετον ἐπὶ τὴν σταθερὰν διεύθυνσιν xy. Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν (ε_1) κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Αἱ (ε) καὶ (ε_1) ὁρίζουν τὸ σημεῖον Ο', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας. Μὲ κέντρον τὸ Ο' καὶ ἀκτῖνα τὴν Ο'Α γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει αἱ (ε) καὶ (ε_1) νὰ τέμνωνται καὶ ἡ περιφέρεια κέντρου Ο' καὶ ἀκτῖνος Ο'Α νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν Κ.

826) Δίδονται μία χορδὴ ΑΒ μιᾶς περιφερείας, ἓν σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε ἐπὶ ἑνὸς τῶν τόξων χορδῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου τόξου σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε 1) τὸ Γ νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος τοῦ ὁριζομένου ἐπὶ τῆς ΑΒ ὑπὸ τῶν ΜΕ καὶ ΜΔ. 2) Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τοῦ Γ ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΑΒ ὑπὸ τῶν ΜΔ καὶ ΜΕ νὰ εἶναι δοθέν.



Σχ. 618.

Λύσις. 1) Ἐὰν Ε' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὸ Γ (σχ. 618), τὸ σχῆμα Ε'ΘΕΗ, ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΕΕ' καὶ ΗΘ διχοτομοῦνται, εἶναι παραλληλόγραμμον.

Συνεπῶς, ἐὰν διὰ φ παρασταθῇ τὸ μέτρον τῆς γνωστῆς κατὰ μέγεθος γωνίας $\widehat{\Delta M E}$, θὰ ἔχωμεν

$$E'\widehat{H}M = H\widehat{M}\Theta = \varphi \quad (1) \quad \text{καὶ}$$

$$E'\widehat{H}\Delta = 180^0 - E'\widehat{H}M = 180^0 - \varphi \quad (2).$$

Τὸ σημεῖον, ὅθεν, Η εἶναι τομὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἀφ' ἑτέρου τόξου τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν ΔΕ' καὶ δέχεται γωνίαν $180^0 - \varphi$.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου Η προσδιορίζεται τὸ Μ ὡς τομὴ τῆς ΔΗ καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

2) Εὑρίσκομεν ἐπὶ τοῦ τόξου τῆς χορδῆς ΑΒ, ἐφ' οὗ δὲν κεῖνται τὰ ση-

μεῖα Δ καὶ Ε, σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ΜΔ καὶ ΜΕ νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθύγραμμον τμῆμα ΗΘ=α, ἔνθα α τὸ δοθέν.

Πρὸς τοῦτο, θεωροῦντες τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ φέροντες τὴν ΔΔ′ $\underline{\parallel}$ ΗΘ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ΔΗΘΔ′ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς $Δ'\widehat{Θ}Ε=φ$. Συνεπῶς τὸ Θ εἶναι τομὴ τῆς ΑΒ καὶ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν Δ′Ε καὶ δέχεται γωνίαν φ. Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκεται τὸ Μ ὡς τομὴ τῆς ΑΒ καὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

α) Ἐὰν τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Η καὶ Θ θὰ ἔχωμεν ΓΗ+ΓΘ=α.

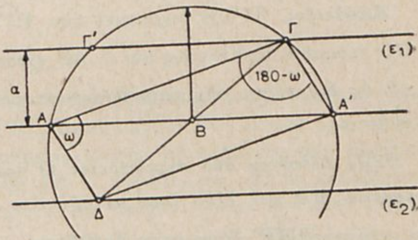
β) Ἐὰν τοῦτο κεῖται μεταξὺ Θ καὶ Β θὰ εἶναι ΓΗ−ΓΘ=α καὶ

γ) Ἐὰν κεῖται μεταξὺ Α καὶ Η θὰ εἶναι ΓΘ−ΓΗ=α.

Ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ΓΗ καὶ ΓΘ θὰ εἶναι α.

827) ***Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα ἐπὶ τῆς ἰσαπεχούσης παραλλήλου πρὸς αὐτάς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Β εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐπ' αὐτῆς ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δοθεισῶν παραλλήλων τμῆμα νὰ φαίνεται ἀπὸ τὸ Α ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.***

Λύσις. Ἔστωσαν $(ε_1)$ καὶ $(ε_2)$ αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι εὐθεῖαι, (ε) ἡ ἰσαπέχουσα αὐτῶν παράλληλος. ΓΑΔ ἡ διὰ τοῦ Β εὐθεῖα (σχ. 619) καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία $Γ\widehat{Α}Δ$. Ἔστω ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη. Λαμβάνομεν τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Β. Τὸ ΑΓΑ′Δ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $Α\widehat{Γ}Α'=180^0-ω$. Οὕτως ὁρίζεται τὸ Γ ὡς τομὴ τῆς $(ε_1)$ καὶ τοῦ τόξου τοῦ γραφομένου μὲ χορδὴν ΑΑ′ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $180^0-ω$.



Σχ. 619.

Κατασκευή. Λαμβάνομεν τὸ Α′ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς Β καὶ μὲ χορδὴν τὴν ΑΑ′ γράφομεν τόξον κύκλου δεχόμενον γωνίαν $180^0-ω$, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἐπὶ τῆς $(ε_1)$ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′. Φέρομεν τὴν ΓΒ καὶ ἡ προέκτασίς της τέμνει τὴν ἄλλην παράλληλον εἰς τὸ Δ. Συνδέομεν τὸ Α μὲ τὰ Γ καὶ Δ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $Δ\widehat{Α}Γ=ω$.

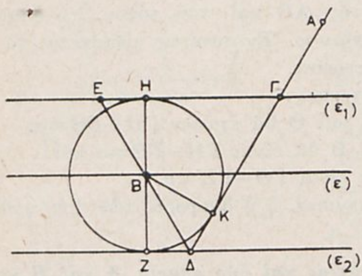
Ἀπόδειξις. Τὸ ΑΓΑ′Δ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ΑΒ=ΒΑ′ καὶ ΓΒ=ΒΔ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $Δ\widehat{Α}Γ=180^0-Α\widehat{Γ}Α'=180^0-(180^0-ω)=ω$.

Διερεύνησις. Ὑπάρχουν δύο λύσεις ὅταν τὸ βέλος τοῦ κυκλικοῦ τόξου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀποστάσεως ξα τῶν $(ε_1)$, $(ε_2)$, μία ὅταν τὸ βέλος ἰσοῦται μὲ α καὶ καμμία ὅταν τὸ βέλος εἶναι μικρότερον τοῦ α.

828) ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου δύο παραλλήλων εὐθειῶν, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον***

τμῆμα ταύτης νὰ φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Β ἰσαπέχον τῶν δύο παραλλήλων.

Λύσις. Ἔστωσαν (ε_1) καὶ (ε_2) αἱ δοθεῖσαι παράλληλοι καὶ (ε) ἡ ἰσαπέχουσα παράλληλος ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Β (σχ. 620). Ἔστω ΑΓΔ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ μέχρι τομῆς της μὲ τὴν (ε_1) εἰς τὸ Ε. Τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διότι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΔ καὶ συγχρόνως ΕΒ=ΒΔ, καθ' ὅσον τὸ Β ἰσαπέχει τῶν δοθεισῶν παραλλήλων. Φέρομεν τὴν ἐκ τοῦ Β κοινὴν κάθετον ΗΖ τῶν δύο παραλλήλων καὶ τὴν ΒΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ. Εἶναι προφανὲς ὅτι ΗΒ=ΒΚ=ΒΖ. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ ΑΔ θὰ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος $\mathrm{BZ}=\frac{1}{2}\mathrm{HZ}$.



Σχ. 620.

Κατασκευή. Γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα $\mathrm{BZ}=\frac{1}{2}\mathrm{HZ}$ καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας τὴν ΑΔ ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

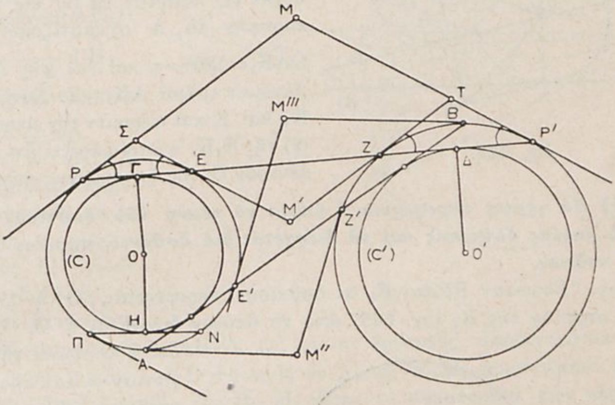
Ἀπόδειξις. Ἡ ΓΒ διχοτομεῖ τὴν $\widehat{\mathrm{H\Gamma K}}$ διότι αἱ πλευραί της ἐφάπτονται τῆς περιφερείας. Ὁμοίως καὶ ἡ ΔΒ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{\mathrm{Z\Delta K}}$. Ἄρα αἱ ΓΒ καὶ ΔΒ ὡς διχοτόμοι τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν $\widehat{\mathrm{Z\Delta K}}$ καὶ $\widehat{\mathrm{H\Gamma K}}$ τέμνονται καθέτως.

829) Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′, νὰ ἀχθοῦν δύο ἐφαπτόμεναι τούτων ΜΡ καὶ ΜΡ′ ἴσαι μεταξύ των καὶ τοιαῦται ὥστε νὰ σχηματίζουν γωνίαν $\widehat{\mathrm{PMP'}}$ ἴσην πρὸς δοθεῖσαν.

Λύσις. Ἐξ' ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν ΜΡ=ΜΡ′, ἔνθα ΜΡ ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο καὶ ΜΡ′ ἐφαπτομένη τῆς Ο′ (σχ. 621) καὶ $\widehat{\mathrm{PMP'}}=\omega$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\mathrm{P'\widehat{P}M}=\mathrm{P\widehat{P'}M}=90^0-\frac{\omega}{2}$ (1). Ἡ ΡΡ′ τέμνει τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο′ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Λόγῳ τῆς (1) αἱ ΡΕ καὶ Ρ′Ζ εἶναι ὁρισμέναι κατὰ μέγεθος καὶ συνεπῶς εἶναι ὡρισμέναι αἱ ἀποστάσεις των ΟΓ καὶ Ο′Δ ἀπὸ τῶν Ο καὶ Ο′. Ἡ ΡΡ′ εἶναι κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν C(Ο, ΟΓ) καὶ C′(Ο′, Ο′Δ) αἱ ὁποῖαι εἶναι κατασκευάσιμοι διότι εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀκτῖνες των ΟΓ καὶ Ο′Δ ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη.

Σύνθεσις. Γράφομεν τὰς περιφερείας (C) καὶ (C′) καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν περιφερειῶν αὐτῶν τέμνουσαν τὰς δοθείσας Ο καὶ Ο′ εἰς τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ρ′. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν εἰς τὰ Ρ καὶ Ρ′ εἶναι αἱ ζητούμεναι.

Πράγματι ἐκ κατασκευῆς εἶναι $P'\widehat{P}M = P\widehat{P'}M = 90^0 - \frac{\omega}{2}$ καὶ συνεπῶς ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ τρίγωνον PMP' εἶναι ἰσοσκελές, ὥστε MP=MP', ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ γωνία $P\widehat{M}P' = \omega$. Ἡ ἀχθεῖσα κοινὴ ἐφαπτομένη PP' τῶν περιφερειῶν (C) καὶ (C') τέμνει τὰς ἀρχικὰς περιφερείας καὶ εἰς δύο ἄλλα σημεῖα Ε καὶ Ζ. Αἱ εἰς αὐτὰ ἐφαπτόμεναι ΕΜ' καὶ ΖΜ' τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο' δίδουν δευτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος ὡς εὐκόλως φαίνεται (διότι αἱ ΕΜ' καὶ ΖΜ' εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΜΡ' καὶ ΜΡ).



Σχ. 621.

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι εἰς πᾶσαν ἀγομένην κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν βοηθητικῶν περιφερειῶν (C) καὶ (C') ἀντιστοιχοῦν δύο λύσεις τοῦ προβλήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐσωτερικῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν βοηθητικῶν περιφερειῶν (C) καὶ (C'), ἔστω τῆς ΑΒ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ χωριζόμενα σημεῖα Α καὶ Ζ' ἀφ' ἑνός, καὶ Ε' καὶ Β ἀφ' ἑτέρου δίδουν ἀνὰ μίαν λύσιν.

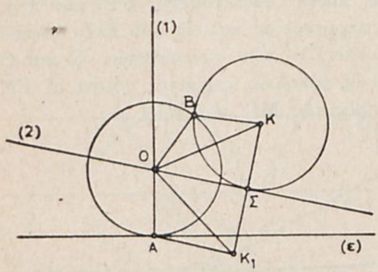
Ἐν γένει τὸ πλῆθος τῶν λύσεων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σχετικὴν θέσιν πρὸς ἀλλήλας τῶν βοηθητικῶν περιφερειῶν (C) καὶ (C').

Τὸ μέγιστον τῶν λύσεων λαμβάνομεν, ὅταν αἱ βοηθητικαὶ περιφέρειαι κεῖνται ἐντὸς ἀλλήλων, ὅτε ἄγονται 4 κοιναὶ ἐφαπτόμεναι, καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει ἐν ὅλῳ 8 λύσεις. Αὗται περιορίζονται εἰς 6 εἰς τὴν περίπτωσιν ἐξωτερικῆς ἐπαφῆς τῶν βοηθητικῶν περιφερειῶν καὶ εἰς 4 διὰ τὴν περίπτωσιν τομῆς των.

830) Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη, δοθείσης εὐθείας (x) εἰς σταθερὸν σημεῖον Α καὶ τέμνουσα δοθεῖσαν περιφέρειαν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν.

Λύσις. Ἔστω Κ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Ο ἡ ζητουμένη καὶ Β τὸ σημεῖον τομῆς. Ἐπειδὴ αἱ εἰς τὸ Β ἐφαπτόμεναι τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, ἔστω φ, ἡ γωνία $O\widehat{B}K$ (σχ. 622) τῶν ἀκτίνων θὰ εἶναι $O\widehat{B}K = 180^0 - \varphi$. Μὲ πλευρὰν τὴν ΟΑ καὶ κορυφὴν Α κατασκευάζομεν γωνίαν $O\widehat{A}K_1 = O\widehat{B}K =$

$=180^0-φ$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $ΑΚ_1$ τὸ τμῆμα $ΑΚ_1=ΚΒ=R$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας. Ἐπειδὴ εἶναι $ΟΑ=ΟΒ$, $ΑΚ_1=ΚΒ$ καὶ $\widehat{ΟΑΚ_1}=\widehat{ΟΒΚ}=180^0-φ$, τὰ τρίγωνα $ΟΑΚ_1$ καὶ ΟΒΚ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $ΟΚ_1=ΟΚ$. Ἄρα τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΣΟ τῆς $Κ_1Κ$.

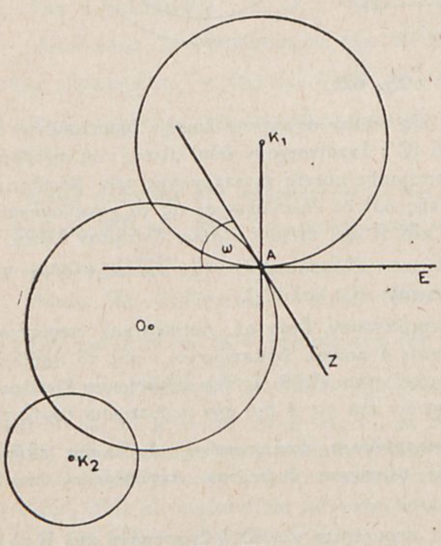


Σχ. 622.

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν τὴν εὐθεῖαν (1) κάθετον τῇ (ε) εἰς τὸ Α καὶ κορυφὴν τὸ Α σχηματίζομεν γωνίαν $\widehat{ΟΑΚ_1}=180^0-φ$ καὶ ἐπὶ τῆς $ΑΚ_1$ λαμβάνομεν τμῆμα $ΑΚ_1=R$. Συνδέομεν τὰ $Κ_1$ καὶ Κ καὶ φέρομεν τὴν μεσοκάθετον (2) τῆς $Κ_1Κ$, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς (1) τὸ κέντρον Ο τῆς ζητουμένης περιφερείας.

831) Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας ὑπὸ γωνίας δοθείσας καὶ νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου κειμένου ἐπὶ μιᾶς τούτων.

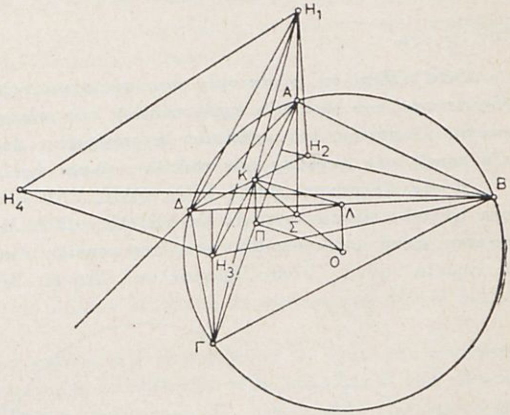
Λύσις. Ἔστωσαν $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι, Ο ἡ ζητουμένη καὶ Α τὸ σημεῖον τῆς $Κ_1$ (σχ. 623) ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ Ο. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ Ο τέμνει τὴν $Κ_1$ ὑπὸ γωνίαν ω καὶ τὴν $Κ_2$ ὑπὸ γωνίαν φ. Φέρομεν εἰς τὸ Α τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ τῆς $Κ_1$ καὶ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{ΕΑΖ}=φ$, ὅτε ἡ ΑΖ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς Ο εἰς τὸ Α. Οὕτως ἀνοίχθημεν εἰς τὴν κατασκευήν. «Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας ΑΖ εἰς τὸ Α καὶ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν $Κ_2$ κατὰ γωνίαν φ». (Ἰδὲ προηγουμένην ἄσκησιν 831).



Σχ. 623.

832) Ἐὰν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, δείξατε ὅτι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΓΔ εὑρίσκονται ἐπὶ περιφερείας ἴσης πρὸς τὴν πρώτην.

Λύσις. Ἔστωσαν $Η_1$, $Η_2$, $Η_3$, $Η_4$ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΑΓΔ, Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ Λ καὶ Π τὰ μέσα τῶν ΔΒ καὶ ΑΓ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΔΓΒ, ὡς γνωστὸν (§ 163) λαμβάνομεν $ΓH_3=2\cdot ΟΛ$ καὶ ἐκ τοῦ ΑΔΒ ἔχομεν ἐπίσης $ΑH_1=2\cdot ΟΛ$ (σχ. 624). Ἄρα τὸ σχῆμα $ΑH_1H_3Γ$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, ὅτε τὰ H_1 καὶ H_3 εἶναι συμμετρικὰ τῶν Α καὶ Γ ὡς πρὸς τὸ Κ. Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ τριγώνου $ΑH_3Γ$ εἶναι $ΠΚ \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2} ΓH_3$ ὡς καὶ $ΓH_3=2\cdot ΟΛ$, θὰ ἔχωμεν $ΠΚ \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} ΟΛ$.



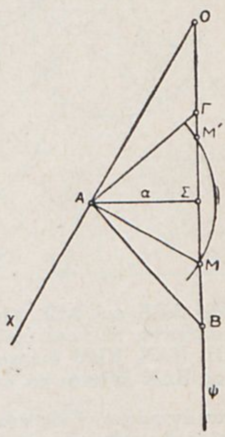
Σχ. 624.

Ἄρα τὸ ΟΠΚΛ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς τὰ Ο καὶ Κ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον Σ τῆς συνδεούσης τὰ μέσα Π καὶ Λ τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Δι' ὁμοίας ἐργασίας ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ H_3 εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ Κ καὶ τὸ H_2 συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὸ Κ. Ἐπειδὴ τὰ H_1, H_2, H_3, H_4 εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν Γ, Δ, Α, Β τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι τὰ δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ $H_1H_2H_3H_4$ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς εἶναι ἐγγράψιμα εἰς ἴσους κύκλους.

833. Δίδονται γωνία $x\widehat{O}y$ καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς Οx. Νὰ τοποθετηθῇ ὀρθὴ γωνία ἔχουσα κορυφὴν τὸ Α καὶ αἱ πλευραί της νὰ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς Οy τμῆμα δοθέντος μήκους.

Λύσις. Ἔστω $\widehat{ΒΑΓ}$ ἡ θέσις τῆς γωνίας καὶ λ τὸ δοθὲν μῆκος ΒΓ. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΔΜ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ. Τότε $ΑΜ=\frac{λ}{2}$.

Ἄρα θὰ εἶναι $ΜΓ=ΜΒ=\frac{λ}{2}$ καὶ $ΓΒ=λ$.



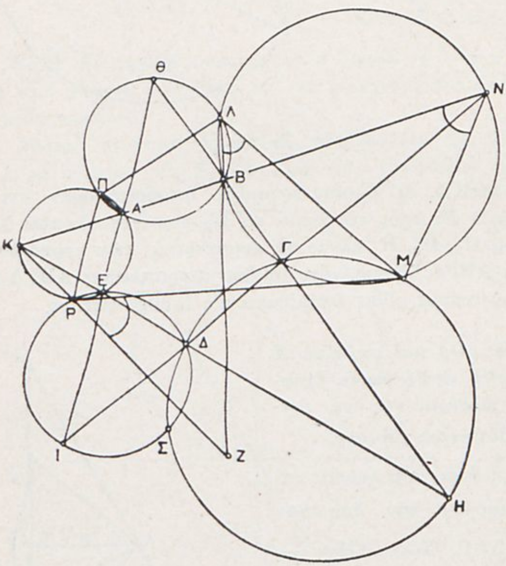
Σχ. 625.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\frac{λ}{2}$ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οy εἰς τὰ Μ καὶ Μ'. Λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Μ τμήματα $ΓΜ=ΜΒ=\frac{λ}{2}$ καὶ ὁρίζομεν τὰ Γ καὶ Β. Συνδέομεν ταῦτα μὲ τὸ Α καὶ ὡς εὐκόλως φαίνεται τὸ ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α μὲ ὑποτείνουσαν $ΓΒ=λ$.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ὅταν $\frac{\lambda}{2}>\alpha$, (α=ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὴν Οy). Ἔχει μίαν λύσιν ὅταν $\frac{\lambda}{2}=\alpha$ καὶ οὐδεμίαν, ὅταν, $\frac{\lambda}{2}<\alpha$.

834) Περὶ τὰ πέντε τρίγωνα, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν ἑνὸς πενταγώνου καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τῶν παρακειμένων εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν, περιγράφομεν περιφερείας. Δείξατε ὅτι τὰ (δεύτερα) σημεῖα τομῆς τῶν περιφερειῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒΘ, ΒΓΝ, ΓΔΗ, ΕΔΙ, ΕΑΚ (σχ. 626) τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἰς τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ Λ, Μ, Σ, Ρ, Π τὰ σημεῖα τομῆς τῶν περὶ αὐτὰ περιγεγραμμένων περιφερειῶν διαδοχικῶς. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ὁμοκύκλια. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τέσσαρα τυχόντα ἐκ τῶν σημείων τῆς τομῆς π.χ. τὰ Λ, Μ, Ρ, Π, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΛΜΡΠ. Φέρομεν τὰς ΝΜ, ΛΒ, ΚΡ. Αἱ δύο αὐταὶ τελευταῖαι εὐθεῖαι τέμνονται εἰς σημεῖόν τι Ζ. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΝΔΕ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τέμνονται εἰς τὰ Κ καὶ Ι κατὰ τὸ θεώρημα (§ 242) τοῦ **Miguel**, αἱ περιφέρειαι ΑΕΚ, ΔΕΙ, ΚΔΝ, ΑΙΝ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ Ρ, διότι τοῦτο εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο πρώτων περιφερειῶν ΑΕΚ καὶ ΔΕΙ. Ὁμοίως θεωροῦντες τὸ τετράπλευρον ΒΚΔΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ὁρίζουν τὰ Ν καὶ Η, ἔχομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι ΒΓΝ, ΔΓΗ, ΚΔΝ, ΚΒΗ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. Ἄρα ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΔΝ κεῖνται τὰ σημεῖα Ρ καὶ Μ καὶ συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΡΜΝΚ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{M}=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M}=\mathrm{B}\widehat{\Lambda}\mathrm{M}$, τὸ ὁποῖον δεικνύει, ὅτι τὸ Ζ ἀνήκει εἰς τὴν περιφέρειαν ΡΛΜ. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $\mathrm{P}\widehat{\Pi}\Lambda=\mathrm{P}\widehat{\Pi}\mathrm{A}+\mathrm{A}\widehat{\Pi}\Lambda=\mathrm{P}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{A}+\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}=180^0-\mathrm{P}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ καὶ συνεπῶς $\mathrm{P}\widehat{\Pi}\Lambda+\mathrm{P}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}=$ $=180^0$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΡΠΛΖ εἶναι ἐγγράψιμον



Σχ. 626.

εἰς κύκλον. Οὕτως, αἱ δύο περιφέρειαι ΡΠΛ καὶ ΡΜΛ, ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ Ρ, Λ, Ζ συμπίπτουν εἰς μίαν. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὰ σημεῖα Ρ, Π, Λ, Μ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἔστω (C). Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ Ρ, Π, Λ, Σ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἔστω (C_1). Αἱ δύο περιφέρειαι (C) καὶ (C_1), ἔχουσαι τρία κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν καὶ συνεπῶς τὰ πέντε σημεῖα Ρ, Π, Λ, Μ, Σ εἶναι ὁμοκύκλια.

835) Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καὶ σταθερὸν σημεῖον Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΒΑΓ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας διερχομένας διὰ τοῦ Α καὶ ἐφαπτομένας τῆς δοθείσης εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς των Μ.

Λύσις. Εἶναι ἡ εἰς τὸ βιβλίον λελυμένη ἐν παραγράφῳ 305.

836) Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ βάσις ΑΒ εἶναι σταθερὰ θέσει, καθὼς καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας Γ εἶναι σταθερόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ' τόπος τῆς προβολῆς Μ τοῦ μέσου Ε τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ.

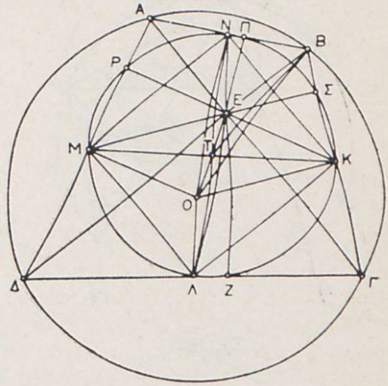
Λύσις. Εἶναι ἡ εἰς τὸ βιβλίον λελυμένη ἐν παραγράφῳ 307 μὲ διάφορον διατύπωσιν.

837) Μὲ διάμετρον χορδὴν ΑΒ περιφερείας Ο γράφομεν περιφέρειαν καὶ διὰ τοῦ σημείου Α φέρομεν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΑΡΓ τῶν δύο περιφερειῶν. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ, τοῦ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματος ΡΓ τῆς τεμνούσης;

Λύσις. Εἶναι ἡ εἰς τὸ βιβλίον λελυμένη ἐν παραγράφῳ 307 μὲ διάφορον διατύπωσιν.

838) Δίδεται (1) ***περιφέρεια Ο καὶ σταθερὸν σημεῖον Ε ἐντὸ αὐτῆς. Διὰτοῦ Ε φέρομεν δύο καθέτους μεταξύ των χορδὰς τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Ε ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου τούτου, ὅταν αἱ κάθετοι χορδαὶ ΑΓ, ΒΔ στρέφονται περὶ τὸ Ε.***

Λύσις. Ἔστωσαν Ν, Κ, Λ, Μ (σχ. 627) τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ τετραπλεύρου καὶ Π, Σ, Ε, Ρ αἱ προβολαὶ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ἰδίας πλευράς. Ὡς γνωστὸν (ἄσκ. 346) τὰ σημεῖα Ν, Κ, Λ, Μ, Π, Σ, Ζ Ρ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ αἱ ΝΕΖ, ΜΕΣ, ΚΕΡ, ΜΕΣ εἶναι εὐθεῖαι. Ἡ περιφέρεια αὕτη, ὡς περιγεγραμμένη περὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΚΛΜ, ἔχει διάμετρον τὴν ΜΚ καὶ συνεπῶς κέντρον τὸ μέσον αὐτῆς Τ. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένης περιφερείας, τότε αἱ ΟΜ καὶ ΟΚ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ συνεπῶς



Σχ. 627.

(1) Ἡ ἄσκησις ἀνήκει εἰς τὸ τρίτον βιβλίον Γεωμετρίας.

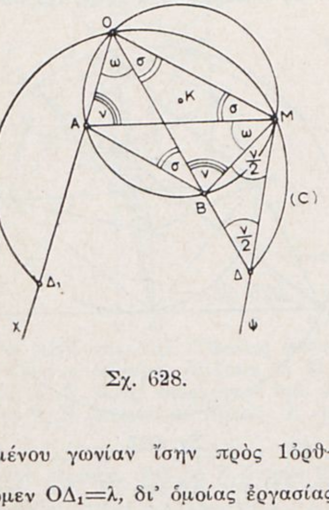
παράλληλοι πρὸς τὰς ΚΕΡ καὶ ΜΕΣ ἀντιστοίχως. Ἄρα τὸ σχῆμα ΕΜΟΚ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ ΟΕ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Τ. Ἄρα τὸ κέντρον Τ τῆς περιφερείας τῶν σημείων Ν, Κ, Λ, Μ, Π, Σ, Ζ, Ρ, ὡς μέσον τῆς ΟΕ, εἶναι σταθερὸν σημεῖον.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΚΕ, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων, ἔχομεν $OK^2+EK^2=2\cdot KT^2+\frac{OE^2}{2}$ (1). Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $EK=\frac{B\Gamma}{2}$ (ὡς διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ) λαμβάνομεν $OK^2+\frac{B\Gamma^2}{4}=2\cdot KT^2+\frac{OE^2}{2}$ (2).

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΚΒ ἔχομεν $OK^2=OB^2-KB^2=OB^2-\frac{B\Gamma^2}{4}$, ὅτε ἡ (2) γίνεται $OB^2=2\cdot KT^2+\frac{OE^2}{2}$, ἢ $4\cdot KT^2=2\cdot OB^2-OE^2$, ἢ $KT=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot OB^2-OE^2}$, ἢ $KT=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-OE^2}$, ἔνθα R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης περιφερείας Ο. Ἄρα ἡ ἀκτὶς ΚΤ τῆς περιφερείας τῶν σημείων Ν, Κ, Λ, Μ, Π, Σ, Ζ, Ρ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τῶν Ν, Κ. Λ, Μ, Π, Σ, Ζ, Ρ εἶναι ἡ περιφέρεια κέντρου Τ καὶ ἀκτῖνος $KT=\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-OE^2}$.

839) Δίδεται γωνία $x\widehat{O}y$ σταθερὰ κατὰ θέσιν. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ταύτης λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β οὕτως ὥστε ΟΑ+ΟΒ=λ. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῆς ἐκ τοῦ Ο ἀγομένης παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιφερείας.

Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου (σχ. 628). Τὸ τετράπλευρον ΑΒΜΟ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς εἶναι ΒΜ=ΑΟ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΟΒ τμῆμα ΒΔ=ΒΜ=ΟΑ, ὅτε θὰ εἶναι ΟΔ=λ.



Σχ. 628.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΜΝ ἔχομεν $\nu+2\sigma=2\text{ὀρθ.}-\omega$, ἢ $\frac{\nu}{2}+\sigma=1\text{ὀρθ.}-\frac{\omega}{2}$ καὶ συνεπῶς $O\widehat{M}\Delta=\sigma+\omega+\frac{\nu}{2}=1\text{ὀρθ}-$ $-\frac{\omega}{2}+\omega=1\text{ὀρθ}+\frac{\omega}{2}$, ἤτοι ἡ γωνία $O\widehat{M}\Delta$ εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου (C) χορδῆς ΟΔ=λ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $1\text{ὀρθ}+\frac{\omega}{2}=1\text{ὀρθ}+\frac{x\widehat{O}y}{2}$. Ἐὰν ἐπὶ τῆς Οx λάβωμεν $O\Delta_1=\lambda$, δι' ὁμοίας ἐργασίας εὑρίσκομεν ὅτι τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου (C_1), τοῦ γραφομένου μὲ χορδὴν $O\Delta_1$ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς

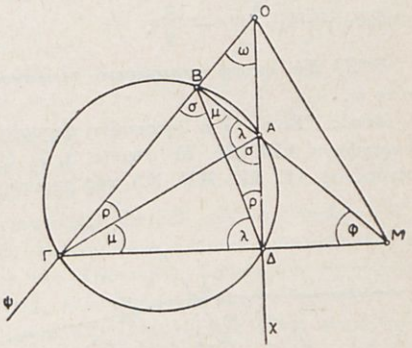
$1ὀρθ + \frac{\omega}{2}$. Τὸ ἀντίστροφον φαίνεται εὐκόλως. Ἄρα ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τὰ κυκλικὰ τόξα (C) καὶ (C_1).

840) Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι Ox καὶ Oy καὶ σημεῖον Μ. Ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν διὰ τοῦ σημείου τούτου δύο εὐθεῖαι ΜΑΒ καὶ ΜΔΓ τοιαῦται, ὥστε ἡ γωνία των νὰ εἶναι φ καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμμον, ἔνθα Α, Β εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΜΑΒ μετὰ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ Γ, Δ τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΜΔΓ μετὰ τῶν ἰδίων εὐθειῶν.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν

$$\varphi = \frac{\widehat{B\Gamma}}{2} - \frac{\widehat{A\Delta}}{2} = \lambda - \mu \text{ καὶ}$$

$$x\widehat{O}y = \omega = \frac{\widehat{\Gamma\Delta}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \sigma - \varrho.$$



Σχ. 629.

Ἐξ αὐτῶν, διὰ προσθέσεως, ἔχομεν $\omega + \varphi = (\lambda + \sigma) - (\varrho + \mu)$, ἢ $\omega + \varphi = B\widehat{A}\Delta + B\widehat{\Gamma}\Delta$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $B\widehat{A}\Delta = 180^0 - B\widehat{\Gamma}\Delta$, λαμβάνομεν $\omega + \varphi = 180^0 - 2 \cdot B\widehat{\Gamma}\Delta$ (σχ. 629) καὶ συνεπῶς

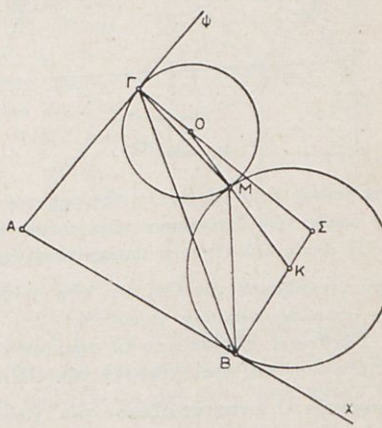
$$B\widehat{\Gamma}\Delta = 90^0 - \frac{\omega + \varphi}{2}, \text{ ἢ}$$

$$O\widehat{\Gamma}M = 90^0 - \frac{\omega + \varphi}{2}.$$

Ἄρα τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τόξου χορδῆς ΟΜ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $90^0 - \frac{\omega + \varphi}{2}$ καὶ συνεπῶς ὁρίζεται. Ὁρισθέντος τοῦ Γ ὁρίζεται ἡ ΜΔΓ καὶ συνεπῶς καὶ ἡ ΜΑΒ.

841) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας $x\widehat{A}y$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σταθερὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας ἐφαπτομένας μεταξύ των εἰς τὸ Μ καὶ ἡ πρώτη νὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β, ἡ δὲ δευτέρα τῆς ΑΓ εἰς τὸ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ,

Λύσις. Ἔστω Σ (σχ. 630) ἡ τομὴ τῶν ΓΟ καὶ ΒΚ, ἔνθα Ο καὶ Κ τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν.



Σχ. 630.

Ἐπειδὴ εἶναι $O\widehat{\Gamma}A = 90^0$ καὶ $K\widehat{B}A = 90^0$, θὰ ἔχωμεν $\Sigma = 180^0 - A$ (1). Ἔχομεν ἤδη $\Sigma\widehat{O}K = 2O\widehat{M}\Gamma$ καὶ $\Sigma\widehat{K}O = 2K\widehat{M}B$.

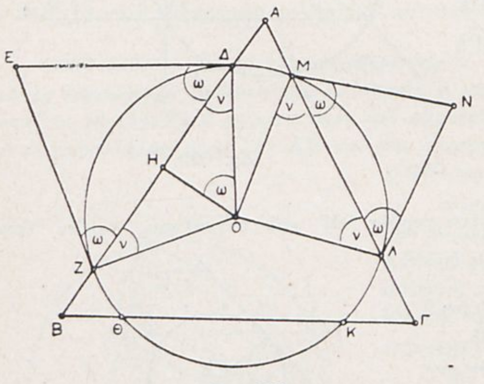
Προσθέτοντες αὐτὰς λαμβάνομεν $\widehat{\Sigma O K}+\widehat{\Sigma K O}=2(\widehat{O M \Gamma}+\widehat{K M B})$, ἢ $180^0-\widehat{\Sigma}=2(180^0-\widehat{\Gamma M B})$. Αὕτη, λόγῳ τῆς (1), γίνεται

$$180^0-(180^0-\widehat{A})=2(180^0-\widehat{\Gamma M B}),\ \text{ἢ}\ A=2(180^0-\widehat{\Gamma M B}),\ \text{ἢ}\ \widehat{\Gamma M B}=180^0-\frac{\widehat{A}}{2}.$$

Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου $\overparen{B M \Gamma}$ χορδῆς ΒΓ καὶ δεχομένου γωνίαν ἴσην πρὸς $180^0-\dfrac{A}{2}$ καὶ συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι τόξον χορδῆς ΒΓ δεχομένου γωνίαν $180^0-\dfrac{A}{2}$.

842) Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς τριγώνου ὑπὸ ἴσας γωνίας ω.

Λύσις. Ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Θ, Κ, Λ, Μ (σχ. 631). Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΔΕ, ΕΖ, ΜΝ, ΝΛ τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Λ Μ. Αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἴσαι πρὸς ω. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ συμπληρωματικαί των γωνίαι $\widehat{O\Delta Z}$, $\widehat{OZ\Delta}$, $\widehat{OM\Lambda}$, $\widehat{O\Lambda M}$ καὶ ἔστω ν ἑκάστη. Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΔΖ καὶ ΟΛΜ εἶναι συνεπῶς ἴσα καὶ ἑπομένως εἶναι ΔΖ=ΛΜ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ΔΖ=ΘΚ. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΔΖ, ΛΜ καὶ ΘΚ εἶναι ἴσαι, τὸ κέντρον Ο ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



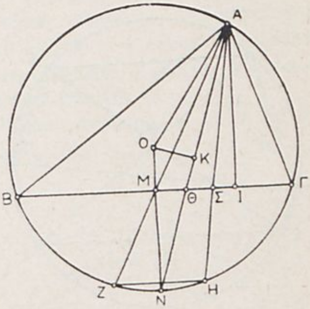
Σχ. 631.

Ἡ ἀκτὶς ΟΔ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΗΔ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ΟΗ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{H O \Delta}$ ἴσην μὲ ω, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν γωνίαν ν.

Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς Ο τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ φέρομεν τὴν ΟΗ κάθετον τῇ ΑΒ. Μὲ πλευρὰν ΟΗ καὶ κορυφὴν Ο κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{H O \Delta}=\omega$, τῆς ὁποίας ἡ ἑτέρα πλευρὰ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ Δ. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

843) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς διαμέσου ΑΜ, τῆς συμμετροδιαμέσου ΔΣ καὶ τῆς ἀποστάσεως ΜΣ τῶν ποδῶν των.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον (σχ. 632). Περιγράφομεν περὶ αὐτὸ περιφέρειαν. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΘ τῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ṅ τοῦ τόξου $\widehat{ΒΝΓ}$, εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $Μ\widehat{Α}Σ$. Ἀφ' ἑτέρου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΟΜ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέμνεται μετὰ τῆς ΑΘ εἰς τὸ Ν. Ἐκ τούτου λοιπὸν ἕπεται ἡ ἑπομένη κατασκευή.

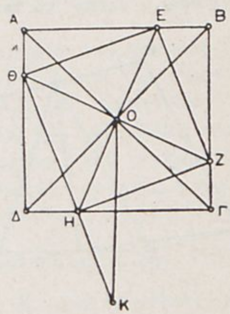


Σχ. 632.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΜΣ ἐφ' ὅσον $|ΑΜ-ΑΣ|<ΜΣ<ΑΜ+ΑΣ$ καὶ φέρομεν τὴν ΑΘ διχοτόμον, τῆς γωνίας $Μ\widehat{Α}Σ$ και τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΣ εἰς τὸ Μ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ σημεῖον Ν. Φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΝ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Κ, ἡ ὁποία συναντᾶ τὴν ΝΜ εἰς τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον περιγεγραμμένης περιφερείας καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΟΑ=ΟΝ. Γράφομεν τὴν ἐν λόγῳ περιφέρειαν καὶ προεκτείνομεν τὴν ΜΣ, ἡ ὁποία συναντᾶ τὴν γραφεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

844) Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

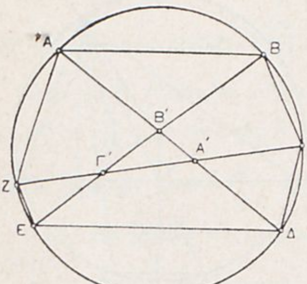
Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ (σχ. 633) τὸ δοθὲν καὶ ΕΖΗΘ τὸ ζητούμενον, τοῦ ὁποίου ἡ ΘΗ διέρχεται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Κ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅταν παραλληλόγραμμον τι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἄλλο τὰ κέντρα των συμπίπτουν. Οὕτω τὸ Ο θὰ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων τῶν δύο τετραγώνων ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ. Φέρομεν τὴν ΚΟ, ὅτε θὰ εἶναι $Κ\widehat{Η}Ο=135^0$. Ἄρα τὸ Η ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς ΔΓ καὶ τοῦ τόξου τοῦ γραφομένου μὲ χορδὴν τὴν ΚΟ καὶ δεχομένου γωνίαν 135^0. Ὁρισθέντος τοῦ Η φέρομεν τὴν ΗΟΕ καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν ΘΟΖ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ τὰς τρεῖς ἄλλας κορυφὰς Ε, Θ, Ζ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Σχ. 633.

845) Ἐὰν αἱ διαγώνιοι αἱ συνδέουσαι ἀπέναντι κορυφὰς ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντί του πλευραὶ παράλληλοι ἀνὰ δύο, τότε τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ ἑξάγωνον εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι. Ἔστωσαν αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΕ (σχ. 634) εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, διότι αἱ ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἔχει τὰς διαγωνίους ΑΔ καὶ ΒΕ ἐξ ὑποθέσεως ἴσας. Ἄρα ἡ διχοτόμος ΜΝ τῆς γωνίας $\widehat{AB'B}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΕΔ καὶ τέμνει αὐτὰς εἰς τὰ μέσα Μ καὶ Ν. Ἄρα ἡ διχοτόμος ΜΝ τῆς γωνίας $\widehat{B'}$ τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ΑΒ καὶ ΕΔ καὶ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A'}$ τοῦ Α΄Β΄Γ΄ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν μέσων τῶν ΑΖ καὶ ΓΔ καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτὰς καὶ τέλος ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma'}$ τοῦ Α΄Β΄Γ΄ θὰ διέλθῃ διὰ τῶν μέσων τῶν ΖΕ καὶ ΒΓ καὶ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς.



Σχ. 634.

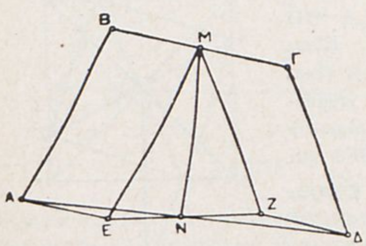
Ἐὰν συνεπῶς Ο εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, τοῦτο θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων εἰς τὰ μέσα τῶν ἓξ πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑπομένως θὰ ἀπέχῃ ἴσον τῶν ἓξ κορυφῶν αὐτοῦ, ἤτοι θὰ εἶναι τοῦτο τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ἑξάγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

846) Ἐὰν τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ τούτων ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν τὴν συνδέουσαν τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

Λύσις. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 635) εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΓΔ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν ΒΓ καὶ ΑΔ καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΜΕ καὶ ΓΔΖΜ.

Ἐπειδὴ ΑΒ=ΜΕ, ΓΔ=ΜΖ ἕπεται ὅτι ΜΕ=ΜΖ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΜΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΕ καὶ ΔΖ, ὡς ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΜ καὶ ΓΜ, εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι τὸ ΑΕΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ἡ ΕΖ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΑΔ. Ἡ ΜΝ, ὡς διάμεσος τοῦ ΑΕΖ εἶναι καὶ ὕψος καὶ συνεπῶς αἱ προβολαὶ τῶν ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὴν ΜΝ εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ ΜΝ, ἤτοι εἶναι ἴσαι. Κατὰ συνέπειαν καὶ αἱ προβολαὶ τῶν παραλλήλων καὶ ἴσων πρὸς αὐτὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὴν ΜΝ θὰ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 635.

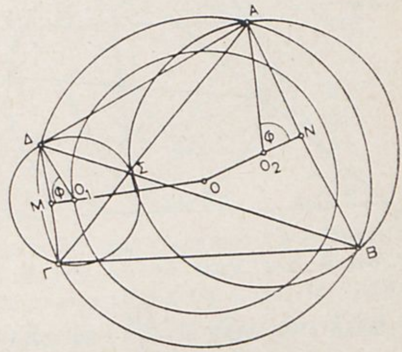
847) Τετραπλεύρου μεταβλητοῦ καὶ ἐγγεγραμμένου εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν, δύο ἀπέναντι πλευραὶ μένουν σταθεραὶ κατὰ μέγεθος μόνον. Εὕρατε τοὺς γεωμ. τόπους τῶν κέντρων τῶν περιγεγραμμένων περιφερειῶν

περὶ τὰ τρίγωνα ἅτινα ἔχουν βάσεις τὰς σταθερὰς κατὰ μῆκος πλευρὰς καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον τὸ ἐγγεραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο (σχ. 636) τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σταθεραὶ κατὰ μέγεθος μόνον, Σ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ O_1, O_2 τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων περὶ τὰ τρίγωνα ΔΣΓ καὶ ΑΒΣ περιφερειῶν. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν O_1, O_2 ὅταν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῆς Ο.

Ἐπειδὴ τὰ μήκη τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὑπετέθησαν σταθερά, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὰ μέτρα τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{\Gamma\Delta}$ καὶ συνεπῶς, ἐὰν θέσωμεν $\Delta\widehat{\Sigma}\Gamma=\varphi$, θὰ ἔχωμεν:

$$\varphi=\frac{\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}}{2}=\text{σταθερά}.$$



Σχ. 636.

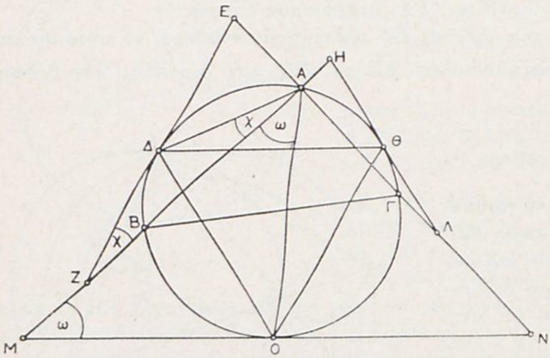
Ἄρα, ἐὰν O_1 εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΔΣΓ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ φέρωμεν τὴν OO_1, αὕτη ὡς διάκεντρος τῶν κύκλων Ο, O_1 θὰ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς κοινῆς χορδῆς ΓΔ καὶ θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $MO_1\Delta$ θὰ εἶναι σταθερὸν κατὰ μέγεθος ἀφοῦ $M\widehat{O_1}\Delta=\varphi$ καὶ $M\Delta=\frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $MO_1=$σταθερόν. Ἐπειδὴ δὲ $OM=$ σταθερὸν καὶ $\Gamma\Delta=$ $=$σταθερόν, θὰ ἔχωμεν καὶ $OO_1=OM-O_1M=$σταθερόν καὶ συνεπῶς τὸ O_1 γράφει ὁμόκεντρον περιφέρειαν πρὸς τὴν Ο ἀκτῖνος OO_1, τὸ δὲ O_2 ἑτέραν ὁμόκεντρον περιφέρειαν τῇ Ο μὲ ἀκτῖνα $OO_2=ON-O_2N$. Τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει. Πράγματι, ἐὰν θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον O_1 τῆς περιφερείας κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος $OO_1=OM-O_1M$, ἔνθα ΟΜ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τῆς χορδῆς ΓΔ σταθεροῦ μήκους καὶ O_1M ἡ προσκειμένη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς τὴν γωνίαν φ, τὴν ὁριζομένην ἐκ τῆς σχέσεως $\varphi=\frac{\widehat{AB}+\widehat{\Gamma\Delta}}{2}$ καὶ μὲ ἑτέραν κάθετον τὴν $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ καὶ φέρωμεν τὴν OO_1 καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λάβωμεν μῆκος O_1M, εἰς δὲ τὸ Μ φέρομεν κάθετον τῇ ΟΜ τὴν ΓΔ καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτῆς ἔστω τοῦ Δ φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΔΒ τοῦ Ο, διὰ δὲ τοῦ ἑτέρου τὴν χορδὴν ΓΑ σχηματίζουσαν μετὰ τῆς ΔΒ γωνίαν φ, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ ἔχῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ μὲ μήκη ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα, τὸ δὲ κέντρον τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΓΣΔ περιγεγραμμένου κύκλου θὰ εἶναι τὸ O_1. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ πᾶν σημεῖον O_2 τῆς περιφερείας κέντρου Ο ἀκτῖνος $OO_2=ON-O_2N$.

848) Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς περιφέρειαν. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας εἰς ἕκαστον τῶν τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{A\Gamma}$, εἰς τρόπον,

ὥστε τὸ σημεῖον ἐπαφῆς νὰ εἶναι μέσον ἑκάστοτε τοῦ τμήματος τοῦ ἀποκοπτομένου ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις. Ἔστωσαν ΕΖ, ΗΛ, ΜΝ (σχ. 637) αἱ ἐφαπτόμεναι τοιαῦται, ὥστε ΔΕ=ΔΖ, ΘΗ=ΘΛ, ΟΜ=ΟΝ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΟΘ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τόξον $\widehat{\Delta A\Theta} = \widehat{\Delta BO} = \frac{1}{3}$ περιφερείας.



Σχ. 637.

Συνδέομεν τὸ Α μὲ τὸ Δ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΑΖ ἔχομεν ὅτι $A\Delta = \frac{EZ}{2}$. Ἄρα $A\Delta = \Delta E = \Delta Z$ καὶ $\Delta\widehat{A}Z = \Delta\widehat{Z}A$ (1).

Ἀλλὰ εἶναι $\Delta\widehat{A}Z = \frac{\widehat{\Delta B}}{2}$ καὶ $\Delta\widehat{Z}A = \frac{\widehat{A\Delta}-\widehat{\Delta B}}{2}$, ὅτε ἡ (1) γίνεται

$$\frac{\widehat{A\Delta}}{2} = \widehat{\Delta B},\ \text{ἢ}\ \widehat{A\Delta} = 2\cdot\widehat{\Delta B},\ \text{ἢ}\ \widehat{A\Delta}+\widehat{\Delta B} = 3\cdot\widehat{\Delta B},\ \text{ἢ}\ \widehat{\Delta B} = \frac{1}{3}\widehat{A\Delta B},\ \text{ἢ}\ \widehat{A\Delta} = \frac{2}{3}\widehat{A\Delta B}.$$

Ὁμοίως εἶναι $\widehat{A\Theta} = \frac{2}{3}\widehat{A\Theta\Gamma}$ καὶ συνεπῶς:

$$\widehat{A\Delta}+\widehat{A\Theta} = \widehat{\Delta A\Theta} = \frac{2}{3}(\widehat{A\Delta B}+\widehat{A\Theta\Gamma}) = \frac{2}{3}\widehat{BA\Gamma}.$$

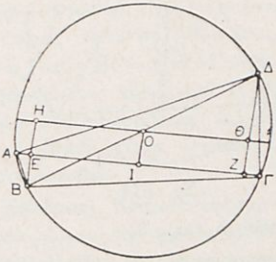
Εἶναι λοιπὸν τὸ τόξον $\widehat{A\Delta\Theta}$ τὸ τρίτον τῆς περιφερείας καὶ ἡ χορδὴ ΔΘ ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $M\widehat{A}O = A\widehat{M}O$ καὶ ἑπομένως $\widehat{BO} = \frac{1}{2}\widehat{A\Gamma O}$ καὶ ἐπειδὴ $\widehat{B\Delta} = \frac{1}{2}\widehat{A\Delta}$, ἕπεται $\widehat{OB\Delta} = \frac{1}{2}\widehat{\Delta A\Gamma O}$, ἢ $\widehat{OB\Delta} = \frac{1}{3}$ περιφερείας.

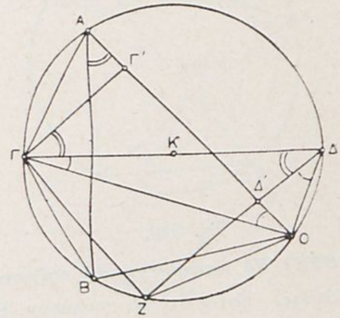
849) Ἐὰν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, τότε αἱ προβολαὶ δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἐπὶ τὴν διαγώνιον ἥτις συνδέει τὰς κορυφὰς τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι.

Λύσις. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι ὀρθαί. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΕ=ΓΖ καὶ ΑΖ=ΓΕ (σχ. 638), ἔνθα ΑΕ καὶ ΓΖ αἱ προβολαὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ΑΖ καὶ ΓΕ αἱ προβολαὶ τῶν ΑΔ καὶ ΓΒ ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ φέρομεν τὰς ΒΕ καὶ ΔΖ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ τὴν διάμετρον τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ τέμνουσαν τὴν ΔΖ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΕ εἰς τὸ Η·

Τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΔΘ καὶ ΟΒΗ εἶναι ἴσα. Ἄρα ΟΘ=ΟΗ. Ἐὰν συνεπῶς Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ἐπειδὴ ἡ ΟΙ εἶναι κάθετος τῇ ΑΓ, θὰ ἔχωμεν ΟΗ=ΙΕ καὶ ΟΘ=ΙΖ. Ἐξ αὐτῶν προκύπτει ΙΕ=ΙΖ (1) καὶ συνεπῶς ΑΕ=ΓΖ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι ΑΕ=ΓΖ καὶ ΑΖ=ΓΕ ὅ.ἔ.δ.



Σχ. 638.



Σχ. 639.

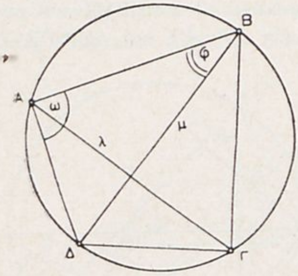
850) Εἰς κύκλον δίδονται χορδὴ ΑΒ καὶ διάμετρος ΓΔ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Ο τῆς περιφερείας μετὰ τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ προβάλλομεν τὰς χορδὰς ΟΓ, ΟΔ ἐπὶ τὴν ΟΑ. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν τῶν ἀνωτέρω χορδῶν εἶναι ἴσον τῇ ΟΑ καὶ ἡ διαφορά των ἴση πρὸς τὴν ΟΒ.

Λύσις. α) Ἔστωσαν ΟΓ′, ΟΔ′ (σχ. 639), αἱ προβολαὶ τῶν χορδῶν ΟΓ καὶ ΟΔ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΟΑ. Διὰ νὰ δειχθῇ ὅτι ΟΑ=ΟΓ′+ΟΔ′, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΟΔ′=ΑΓ′. Πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὴν ΔΔ′ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι $\widehat{ΓΟΑ}=\widehat{ΖΔΟ}$ (διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΟΖ=ΑΓ. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΟΖΓ εἶναι τραπέζιον καὶ ἀφοῦ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον θὰ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΓΓ′=ΖΔ′ καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα ΑΓΓ′ καὶ ΟΖΔ′ εἶναι ἴσα. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν προκύπτει ΑΓ′=ΟΔ′.

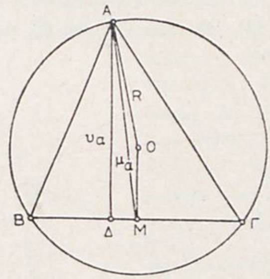
β) Ἔχομεν ΟΓ′−ΟΔ′=Γ′Δ′=ΓΖ (1). Ἐπειδὴ $\widehat{ΒΑΟ}=\widehat{Γ'ΓΔ}$ (διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους) καὶ $\widehat{Γ'ΓΔ}=\widehat{ΓΔΖ}$ (ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΓΓ′ καὶ ΔΔ′), λαμβάνομεν $\widehat{ΒΑΟ}=\widehat{ΓΔΖ}$ καὶ συνεπῶς ΓΖ=ΟΒ (2). Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ΟΓ′−ΟΔ′=ΟΒ ὅ.ἔ.δ.

851) Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐγγράψιμον ἐκ τῆς γωνίας $\widehat{Α}=ω$, τῆς γωνίας $\widehat{ΑΒΔ}=φ$ τῆς ΑΓ=λ καὶ ΒΔ=μ.

Λύσις. Τὸ ΑΒΔ κατασκευάζεται κατὰ τὰ γνωστὰ ἐφ' ὅσον $ω+φ<180^\circ$ (σχ. 640). Τούτου κατασκευασθέντος περιγράφομεν τὴν περὶ αὐτὸ περιγεγραμμένην περιφέρειαν καὶ μὲ κέντρον Α καὶ ἀκτῖνα λ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς πρώτης περιφερείας δύο σημεῖα τὰ Γ καὶ $Γ_1$, ὅτε τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ $ΑΒΓ_1Δ$ εἶναι τὰ ζητούμενα. Ἐὰν 2R εἶναι ἡ διάμετρος τῆς περὶ τὸ ΑΒΔ περιγεγραμμένης περιφερείας, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν θὰ πρέπῃ $AB < \lambda$, $A\Delta < \lambda$ καὶ $\lambda \leqslant 2R$.



Σχ. 640.



Σχ. 641.

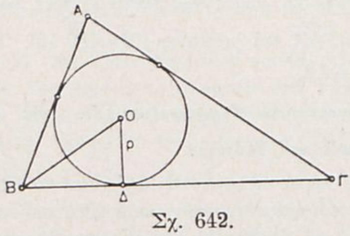
852) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν υ_α, μ_α, R.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάσθη καὶ εἶναι $A\Delta = \upsilon_\alpha$, $AM = \mu_\alpha$, $OA = R$. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΜ (σχ. 641) κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον εἶναι $\upsilon_\alpha \leqslant \mu_\alpha$. Τὸ κέντρον Ο τῆς περιφερείας ὁρίζεται ὡς ἑξῆς. Κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΜ καὶ εἰς τὸ Μ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΜ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις ὁρίζει ἐπὶ τῆς καθέτου τὸ Ο. Ὁρισθέντος τοῦ Ο μὲ κέντρον αὐτὸ καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΔΜ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ. Πρέπει $R > OM$ ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν.

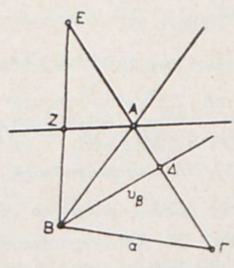
853) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, α, ρ.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 642) κατεσκευάσθη καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ $O\Delta = \rho$ ἡ ἀκτίς. Τὸ τρίγωνον ΒΟΔ κατασκευάζεται διότι $O\Delta = \rho$, $\widehat{BO\Delta} = \frac{B}{2}$.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΒΟΔ, καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Προεκτείνομεν τὴν ΒΔ λαμβάνοντες $B\Gamma = \alpha$. Ἐκ τῶν Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὴν κορυφὴν Α.



Σχ. 642.



Σχ. 643.

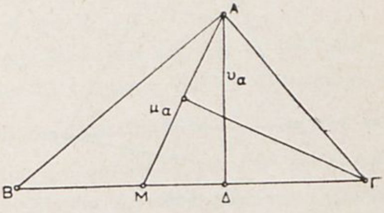
854) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν α, $\beta+\gamma=\lambda$, υ_β.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον (σχ. 643) εἰς ὃ εἶναι $\Delta B = \upsilon_\beta$ καὶ

ΑΒ+ΑΓ=λ. Προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ ΑΕ=ΑΒ, ὅτε εἶναι ΓΕ=λ. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὰ ἡ ὑποτείνουσα α καὶ ἡ κάθετος πλευρὰ $B\Delta=\upsilon_\beta$. Κατασκευασθέντος τούτου προεκτείνομεν τὴν ΓΔ καὶ λαμβάνομεν ΓΕ=λ. Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον τῆς ΒΕ, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΓΕ τὴν κορυφὴν Α. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ἐφ' ὅσον $\upsilon_\beta \leqslant \alpha < \lambda$.

855) *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν υ_α, μ_α καὶ ἐκ τοῦ ὅτι $\alpha=2\beta$.*

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ὕψος $A\Delta=\upsilon_\alpha$, διάμεσος $AM=\mu_\alpha$ καὶ ΒΓ=α=2ΑΓ=2β. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΑΔ (σχ. 644) κατασκευάζεται καὶ τὸ τρίγωνον ΜΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς ἐφ' ὅσον α=2β.



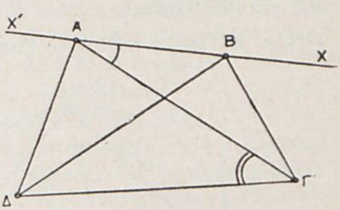
Σχ. 644.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὰ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΜΑΔ. Τούτου κατασκευασθέντος, ἐπειδὴ εἶναι ΜΓ=ΑΓ, ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΜ ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΜΔ τὴν κορυφὴν Γ. Ὁρισθείσης τῆς κορυφῆς Γ ὁρίζεται καὶ ἡ κορυφὴ Β καὶ συνεπῶς καὶ τὸ τρίγωνον.

Περιορισμός. Πρέπει $\mu_\alpha \geqslant \upsilon_\alpha$.

856) *Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν ΑΓ, $\widehat{\Gamma A B}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$, ΓΔ καὶ ΔΒ.*

Λύσις. Τὸ τρίγωνον ΑΓΔ κατασκευάζεται ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΔ καὶ τῆς γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$ (σχ. 645). Τούτου κατασκευασθέντος μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{BA\Gamma}$ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἡ μὲ κέντρον Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΒ γραφομένη περιφέρεια ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΑΒ τῆς γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ τὸ σημεῖον Β. Συνδέομεν τὸ Β μὲ τὸ Γ καὶ τὸ Α μὲ τὸ Δ καὶ οὕτω τὸ ζητούμενον τετράπλευρον εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.



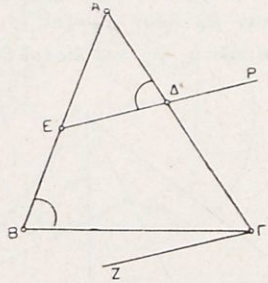
Σχ. 645.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ὁρίζεται ἡ κορυφὴ Β πρέπει ἡ ΔΒ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως τοῦ Δ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ἡ περιφέρεια νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ ὥστε τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς τοὐλάχιστον νὰ εἶναι ἐπὶ τῆς Αx καὶ ὄχι ἐπὶ τῆς Αx'.

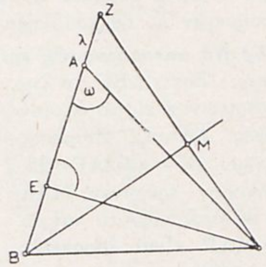
857) *Διὰ σημείου Ρ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου ΑΒΓ οὕτως ὥστε τὸ ὁριζόμενον τετράπλευρον νὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Λύσις. Ἔστω ΡΔΕ ἡ εὐθεῖα. Ἐπειδὴ τὸ ΒΓΔΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον θὰ ἔχωμεν $\widehat{E\Delta A}=\widehat{B}$.

Σύνθεσις. Μὲ πλευρὰν ΑΓ καὶ κορυφὴν Γ (σχ. 646) σχηματίζομεν γωνίαν $\widehat{ΑΓΖ}=\widehat{Β}$ καὶ ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν τὴν ΡΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΖ. Ἡ ΡΔΕ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.



Σχ. 646.



Σχ. 647.

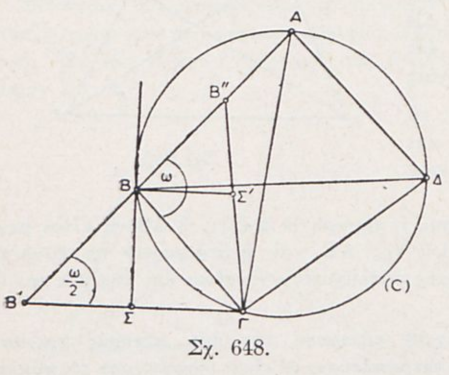
858) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν Α, β καὶ α—γ=λ.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 647) τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{ΒΑΓ}=\widehat{Α}$, ΑΓ=β καὶ ΒΓ—ΑΒ=λ. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΓ κατασκευάζεται. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ λαμβάνομεν ΑΖ=λ, ὅτε εἶναι ΒΖ=ΒΓ καὶ συνεπῶς τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΓΖ.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΕ καὶ εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΕΑ λαμβάνομεν ΑΖ=λ. Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον τῆς ΓΖ, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΕ τὴν κορυφὴν Β καὶ οὕτω κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. ***Περιορισμός.*** Πρέπει β>λ.

859) Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν R, ΑΓ, ΒΔ καὶ ΑΒ±ΒΓ=λ.

Λύσις. α) Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον καὶ ἔστω ὅτι εἶναι ΑΓ=ν καὶ ΒΔ=μ (σχ. 648). Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ λαμβάνομεν ΒΒ′=ΒΓ, ὅτε εἶναι $\widehat{Β'}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΒΓ}$ (1). Ἡ γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$ εἶναι γνωστή, διότι εἶναι γνωστὴ ἡ χορδὴ ΑΓ. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{ΑΒΓ}=ω$, ὅτε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\widehat{Β'}=\frac{1}{2}ω$. Τὸ τρίγωνον ΑΓΒ′, ἐπειδὴ εἶναι ΑΓ=ν, ΑΒ′=λ καὶ $Β'=\frac{ω}{2}$ κατασκευάζεται, ἐφ' ὅσον εἶναι λ>ν καὶ ἡ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα, ἢ ἴση τῆς ἀποστάσεως τοῦ Α ἀπὸ τῆς Β′Γ. Τούτου κατασκευασθέντος (ἄσκ. 279) φέρομεν τὴν μεσοκάθετον



Σχ. 648.

τῆς Β'Γ, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ' τὸ Β καὶ οὕτω κατασκευάσθη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Περὶ τὸ τρίγωνον αὐτὸ περιγράφομεν τὴν περιφέρειαν (C), τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ R. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΔ=μ γράφομεν περιφέρειαν (C_1), ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς (C) τὴν κορυφὴν Δ. Ἡ περιφέρεια (C_1) θὰ πρέπῃ νὰ τμήσῃ τὴν (C) ὥστε τὸ ἓν τουλάχιστον τῶν σημείων τομῆς νὰ μὴν εὑρίσκεται εἰς τὸ τόξον $\widehat{ΑΒΓ}$. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $ΒΔ \leqslant 2R$ καὶ ΒΔ μεγαλύτερον τῆς μικροτέρας τῶν ΒΓ καὶ ΒΑ. Τὸ πρόβλημα, ἢ δὲν ἔχει λύσιν, ἢ ἔχει 4 λύσεις, ἢ ἔχει τρεῖς λύσεις, ἢ ἔχει 2, ἢ 1.

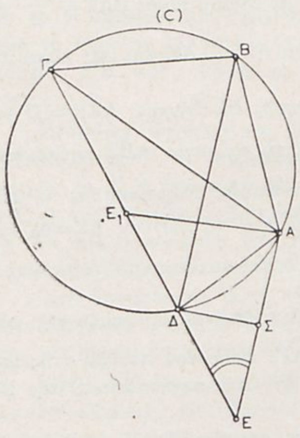
β) Ἐὰν δίδεται ΑΒ—ΒΓ=λ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΒΒ''=ΒΓ, ὅτε εἶναι ΑΒ''=λ καὶ τότε κατασκευάζεται τὸ τρίγωνον ΑΒ''Γ, διότι εἶναι γνωστά του ἡ ΑΓ=ν, ἡ ΑΒ''=λ καὶ ἡ γωνία $\widehat{ΑΒ''Γ} = 90^0 + \frac{ω}{2}$, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $λ < ν$. Τούτου κατασκευασθέντος ἡ μεσοκάθετος τῆς ΓΒ'' ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΑΒ'' τὴν κορυφὴν Β. Μετὰ ταῦτα ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

860) Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΓΔ±ΔΑ.

Λύσις. α) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 649) κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον εἶναι $|ΑΓ-ΑΒ| < ΒΓ < ΑΓ+ΑΒ$. Τούτου κατασκευασθέντος περιγράφομεν περὶ αὐτὸ τὴν περιφέρειαν (C). Προεκτείνομεν τὴν ΓΔ κατὰ ΔΕ==ΑΔ, ὅτε εἶναι ΓΕ=ΓΔ+ΑΔ=λ καὶ

$$\widehat{Ε} = 90^0 - \frac{\widehat{ΓΔΕ}}{2} = 90^0 - \frac{\widehat{ΑΒΓ}}{2}.$$

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΕΓ κατασκευάζεται ὑπὸ τοὺς γνωστοὺς περιορισμούς. Τούτου κατασκευασθέντος, ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΕ ὁρίζει ἐπὶ τῆς ΓΕ τὸ σημεῖον Δ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ τετράπλευρον.



Σχ. 649.

β) Ἐὰν δίδεται τὸ ΓΔ—ΑΔ=λ, τότε ἐργαζόμεθα ὁμοίως μὲ τὴν διαφορὰν ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΓΕ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $ΑΕ_1Γ$, ἔνθα εἶναι $ΓΕ_1 = ΓΔ - ΑΔ = ΓΔ - ΔΕ_1 = λ$ καὶ $\widehat{ΓΕ_1Α} = 90^0 + \frac{\widehat{ΑΒΓ}}{2}$.

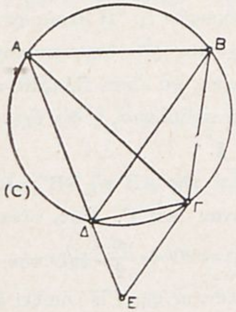
Τούτου κατασκευασθέντος ἡ μεσοκάθετος τῆς $ΑΕ_1$ ὁρίζει ἐπὶ τῆς $ΓΕ_1$ τὸ Δ.

881) Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν ΑΒ+ΒΓ=λ, ΒΓ, ΒΔ καὶ $\widehat{Α}$.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράπλευρον. Ἀφοῦ ἡ ΒΓ εἶναι γνωστὴ καὶ εἶναι ΑΒ+ΒΓ=λ (σχ. 650) θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=λ—ΒΓ=γνωστή.

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΔ κατασκευάζεται, διότι γνωρίζομεν αὐτοῦ τὴν

ΑΒ τὴν ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}=\widehat{\mathrm{A}}$ (ὑπὸ τοὺς γνωστοὺς περιορισμούς).



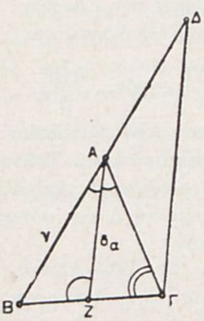
Σχ. 650.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ περιγράφομεν περὶ αὐτὸ περιφέρειαν (C). Μετὰ ταῦτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα τὸ γνωστὸ μῆκος ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πρώτην εἰς τὸ Γ καὶ τοιουτοτρόπως ὁρίζεται καὶ ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν δίδεται τὸ ΑΒ—ΒΓ=λ.

862) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν γ, δ_α, $B-\Gamma=\omega$.

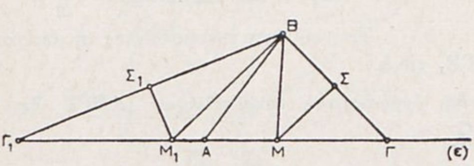
Λύσις. Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ κατὰ ΑΔ=ΑΓ, ὅτε εἶναι $\widehat{\mathrm{A}\Delta\Gamma}=\widehat{\mathrm{A}\Gamma\Delta}=\frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$. Ἔχομεν $\widehat{\mathrm{B}\Gamma\Delta}=\widehat{\Gamma}+\widehat{\mathrm{A}\Gamma\Delta}=\widehat{\Gamma}+\frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}=\widehat{\Gamma}+90^0-\frac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}-\frac{\widehat{\Gamma}}{2}=90^0-\frac{\widehat{\mathrm{B}}-\widehat{\Gamma}}{2}=90^0-\frac{\widehat{\omega}}{2}$.

Ἐὰν ΑΖ (σχ. 651) εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς Α, ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{\mathrm{BAZ}}=\frac{\mathrm{A}}{2}$ καὶ $\widehat{\mathrm{B}\Delta\Gamma}=\frac{\mathrm{A}}{2}$, ἔπεται ὅτι αἱ ΑΖ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $\widehat{\mathrm{AZB}}=\widehat{\mathrm{B}\Gamma\Delta}=90^0-\frac{\omega}{2}$. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΖ κατασκευάζεται ὑπὸ τοὺς γνωστοὺς περιορισμοὺς (§ 279) διότι εἶναι γνωστά του τὰ ΑΒ=γ, ΑΖ=δ_α καὶ $\widehat{\mathrm{AZB}}=90^0-\frac{\omega}{2}$. Τούτου κατασκευασθέντος διπλασιάζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{\mathrm{BAZ}}$ κατασκευάζοντες οὕτω τὴν γωνίαν $\widehat{\mathrm{BA}\Gamma}$. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς γωνίας αὐτῆς ὁρίζει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΖ τὴν κορυφὴν Γ.



Σχ. 651.

863) Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε) δίδεται σημεῖον Α καὶ ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς (ε) σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε ΑΜ±ΒΜ==λ, ἔνθα λ δοθὲν μῆκος.



Σχ. 652.

Λύσις. α) Ὅταν ΑΜ+ΒΜ=λ.

Περιορισμός. λ>ΔΒ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΜ κατὰ ΜΓ=ΑΜ (σχ. 652), ὅτε εἶναι ΑΓ=λ.

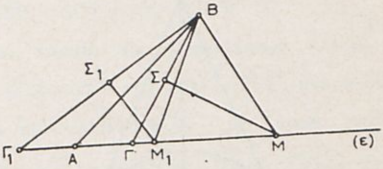
Σύνθεσις. Ἐπὶ τῆς (ε) λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α τὰ σημεῖα Γ καὶ $Γ_1$ ὥστε νὰ εἶναι $ΑΓ=ΑΓ_1=λ$. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΒΓ καὶ $ΒΓ_1$, ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (ε) τὰ σημεῖα Μ καὶ $Μ_1$, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

β) Ὅταν εἶναι (σχ. 653).

$|ΑΜ-ΒΜ|=λ$.

Περιορισμός. $λ<ΑΒ$.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς (ε) $ΑΓ=ΑΓ_1=λ$. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΒΓ καὶ $ΒΓ_1$ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς (ε) τὰ σημεῖα Μ καὶ $Μ_1$, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Πράγματι εἶναι $λ=ΑΓ=ΑΜ-ΓΜ=$ $=ΑΜ-ΒΜ$ καὶ $λ=ΑΓ_1=Μ_1Γ_1-Μ_1Α=Μ_1Β-Μ_1Α$.

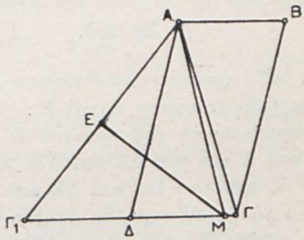


Σχ. 653.

864) Ἐκ τῆς κορυφῆς Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΜ συναντῶσα τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Μ, οὕτως ὥστε ΑΜ=ΑΒ+ΜΔ.

Λύσις. Ἔστω $Γ_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ Δ (σχ. 654). Ἐπειδὴ $ΓΔ=ΑΒ=ΔΓ_1$ ἔχομεν $ΑΜ=ΑΒ+ΔΜ=$ $=ΔΓ_1+ΔΜ=Γ_1Μ$, ἤτοι $ΜΓ_1=ΜΑ$ καὶ συνεπῶς τὸ Μ ἰσαπέχει τῶν σημείων Α καὶ $Γ_1$. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΕΜ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $ΑΓ_1$.

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον τῆς $ΑΓ_1$ (ὅπου $Γ_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ Δ) ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΓ εἰς τὸ Μ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι· ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $ΑΜΓ_1$ ἔχομεν $ΜΑ=ΜΓ_1=ΜΔ+ΔΓ_1=ΜΔ+ΑΒ$.



Σχ. 654.

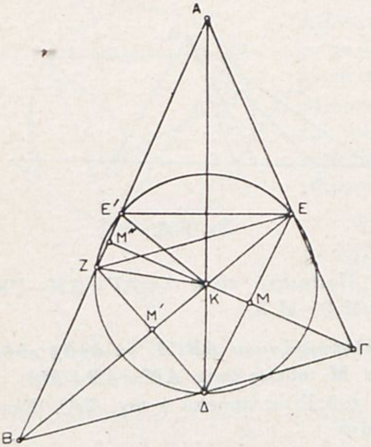
Ἐὰν ζητεῖται τὸ Μ νὰ κεῖται μεταξὺ Δ καὶ Γ, τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν ἐφ' ὅσον ἡ μεσοκάθετος τῆς $ΑΓ_1$ τέμνει τὴν $Γ_1Γ$ μεταξὺ Δ καὶ Γ. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει ὅταν εἶναι $Γ_1Δ=ΑΒ<ΑΔ$ καὶ $Γ_1Γ=2ΓΔ>ΑΓ$.

865) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῆς διχοτόμου $ΑΔ=δ_α$ καὶ τῶν $ΑΒ-ΒΔ=λ$, $ΑΓ-ΓΔ=μ$.

Λύσις. Θεωροῦντες τὸ τρίγωνον ὡς κατασκευασθέν, παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ εὐθύγραμμον τμῆμα $ΒΖ=ΒΔ$ (σχ. 655) καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὐθύγραμμον τμῆμα $ΓΕ=ΓΔ$, θὰ ἔχωμεν $ΑΖ=ΑΒ-ΒΖ=$ $=ΑΒ-ΒΔ=λ$ καὶ $ΑΕ=ΑΓ-ΓΕ=ΑΓ-ΓΔ=μ$. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΖ καὶ ΑΕ εἶναι ὅθεν γνωστά.

Ὡσαύτως παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΔΖ καὶ ΓΔΕ εἶναι ἰσοσκελῆ. Συνεπῶς αἱ διχοτόμοι τῶν Β καὶ Γ θὰ εἶναι μεσοκάθετοι διὰ τὸ τρίγωνον ΔΖΕ. Ἡ τομὴ Κ τῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΔΖΕ.

Ἄρα $ΚΔ=ΚΖ=ΚΕ$ καὶ $ΑΔ=ΑΚ+ΚΔ=ΑΚ+ΚΖ=ΑΚ+ΚΕ'$ (ἔνθα Ε' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν ΑΔ). Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἀγόμεθα εἰς τὴν κάτωθι κατασκευήν, Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΖ=λ. Ἐπ' αὐτοῦ (ὑποθέτοντες λ>μ) λαμβάνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ′=μ. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ″ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΖΕ′.



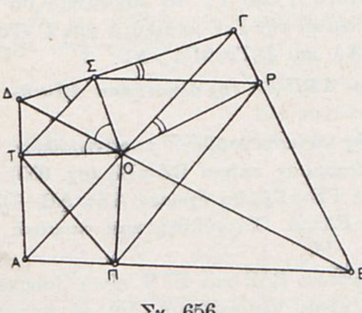
Σχ. 655.

Ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης, ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς ἀναλύσεως προέκυψεν ΚΖ=ΚΕ′, θὰ κεῖται τὸ σημεῖον Κ. Πρὸς καθορισμὸν τῆς θέσεως τοῦ σημείου Κ ἐπὶ τῆς εἰρημένης εὐθείας (τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΖΕ′) παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶναι κέντρον περιφερείας διερχομένης ἐκ τῶν γνωστῶν σημείων Ζ καὶ Ε′ καὶ ἐφαπτομένης τῆς περιφερείας κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΔ=δ_α.

Κατασκευάζοντες κατὰ τὸν ἕνα ἐκ τῶν γνωστῶν τρόπων τὴν ἐν λόγῳ περιφέρειαν εὑρίσκομεν τὸ κέντρον αὐτῆς Κ. Φέρομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ΑΚ, προεκτείνομεν ταύτην μέχρι τοῦ σημείου ἁφῆς Δ τῶν ἀνωτέρω περιφερειῶν (κέντρων Α καὶ Κ). Φέρομεν μετὰ ταῦτα τὰς ΔΖ καὶ ΔΕ (ἔνθα Ε τὸ συμμετρικὸν τοῦ γνωστοῦ Ε′ ὡς πρὸς τὴν γνωστὴν ΑΚ) καὶ τὰς καθέτους ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς ΔΖ καὶ ΔΕ. Ἐὰν Β καὶ Γ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐκ τοῦ Κ καθέτων ἐπὶ τὰς ΔΖ καὶ ΔΕ μετὰ τῶν ΑΖ καὶ ΑΕ τὸ τρίγωνον, ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως ἐκ τῆς γενομένης κατασκευῆς.

866) Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων του ἐπὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του.

Λύσις. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ προβολαὶ Π, Ρ, Σ, Τ τοῦ σημείου Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ ΔΑ. Ἐὰν ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου Ο, τότε ὁρίζονται αἱ προβάλλουσαι ΟΠ, ΟΡ, ΟΣ, ΟΤ καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓΔ καὶ κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ΟΠ, ΟΡ, ΟΣ, ΟΤ. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Ο ἐξετάζομεν τὰς γωνίας $\widehat{ΤΟΡ}$ καὶ $\widehat{ΣΟΠ}$,



Σχ. 656.

Ἔχομεν ὅτι $\widehat{ΤΟΡ}=\widehat{ΤΟΣ}+\widehat{ΣΟΡ}$ (1). Ἀλλὰ $\widehat{ΤΟΣ}=\widehat{ΤΟΔ}+\widehat{ΔΟΣ}$ καὶ $\widehat{ΣΟΡ}=$ $=\widehat{ΣΟΓ}+\widehat{ΓΟΡ}$, ἄρα $\widehat{ΤΟΣ}+\widehat{ΣΟΡ}=\widehat{ΤΟΔ}+(\widehat{ΔΟΣ}+\widehat{ΣΟΓ})+\widehat{ΓΟΡ}=\widehat{ΤΟΔ}+\widehat{ΔΟΓ}+\widehat{ΓΟΡ}$, ὅτε ἡ (1) γίνεται $\widehat{TOP}=\widehat{TO\Delta}+\widehat{\Delta O\Gamma}+\widehat{\Gamma OP}$ (2). Ἀλλὰ τὰ τετράπλευρα ΤΟΣΔ καὶ ΟΡΓΣ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλους. Ἄρα $\widehat{TO\Delta}=\widehat{T\Sigma\Delta}$ καὶ $\widehat{\Gamma OP}=\widehat{\Gamma\Sigma P}$, ὅτε ἡ (2) γίνεται $\widehat{TOP}=\widehat{\Delta O\Gamma}+(\widehat{T\Sigma\Delta}+\widehat{\Gamma\Sigma P})=\widehat{\Delta O\Gamma}+180^0-\widehat{T\Sigma P}$ (3).

Ἀλλὰ $\widehat{\Delta O\Gamma}=\widehat{\Delta O\Sigma}+\widehat{\Sigma O\Gamma}$ (4) καὶ ἐπειδὴ τὰ τετράπλευρα ΟΤΔΣ καὶ ΟΡΓΣ εἶναι ἐγγράψιμα, ἕπεται ὅτι $\widehat{\Delta O\Sigma}=\widehat{\Delta T\Sigma}$ καὶ $\widehat{\Sigma O\Gamma}=\widehat{\Sigma P\Gamma}$, ὅτε ἡ (4) γίνεται $\widehat{\Delta O\Gamma}=\widehat{\Delta T\Sigma}+\widehat{\Sigma P\Gamma}$ (5). Ἐπειδὴ ὅμως $\widehat{AOB}=\widehat{\Delta O\Gamma}$, ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ $\widehat{AOB}=\widehat{AO\Pi}+\widehat{\Pi OB}$, ἔχομεν $\widehat{AO\Pi}=\widehat{AT\Pi}$ καὶ $\widehat{\Pi OB}=\widehat{\Pi PB}$. Οὕτως ἔχομεν $\widehat{\Delta O\Gamma}=\widehat{AOB}=\widehat{AO\Pi}+\widehat{\Pi OB}=\widehat{AT\Pi}+\widehat{\Pi PB}$ (6). Προσθέτοντες τὰς (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν $2\widehat{\Delta O\Gamma}=(\widehat{\Delta T\Sigma}+\widehat{AT\Pi})+(\widehat{\Sigma P\Gamma}+\widehat{\Pi PB})=180^0-\widehat{\Pi T\Sigma}+180^0-\widehat{\Pi P\Sigma}=$ $=360^0-(\widehat{\Pi T\Sigma}+\widehat{\Pi P\Sigma})=\widehat{T\Pi P}+\widehat{T\Sigma P}$. Ὅθεν $\widehat{\Delta O\Gamma}=\frac{1}{2}\widehat{T\Pi P}+\frac{1}{2}\widehat{T\Sigma P}$, ὅτε ἡ (3) γίνεται $\widehat{TOP}=\frac{\widehat{T\Pi P}}{2}+\frac{\widehat{T\Sigma P}}{2}+180^0-\widehat{T\Sigma P}=180^0+\frac{\widehat{T\Pi P}}{2}-\frac{\widehat{T\Sigma P}}{2}$ (7).

Ἡ ἄλλη ἐκ τῶν γωνιῶν $\widehat{TOP}$ δηλ. ἐκείνη ποὺ ἔχει εἰς τὸ ἐσωτερικόν της τὸ σημεῖον Π, θὰ ἰσοῦται μὲ $180^0-\frac{\widehat{T\Pi P}}{2}+\frac{\widehat{T\Sigma P}}{2}$ δηλ. ἴση μὲ τὸ παραπλήρωμα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν $\widehat{T\Sigma P}$ καὶ $\widehat{T\Pi P}$. Δηλ. ἡ ΤΡ θὰ φαίνεται ἐκ τοῦ Ο ὑπὸ γωνίαν ἴσην μὲ τὸ παραπλήρωμα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν $\widehat{T\Sigma P}$ καὶ $\widehat{T\Pi P}$.

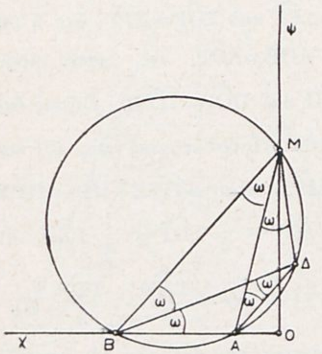
Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\widehat{\Sigma O\Pi}=180^0-\frac{1}{2}(\widehat{\Sigma P\Pi}-\widehat{\Sigma T\Pi})$. Ἄρα ἡ ΣΠ θὰ φαίνεται ἐκ τοῦ Ο ὑπὸ γωνίαν ἴσην μὲ τὸ παραπλήρωμα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν $\widehat{\Sigma P\Pi}$ καὶ $\widehat{\Sigma T\Pi}$.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τόξον ἔχον χορδὴν τὴν ΤΡ πρὸς τὸ μέρος αὐτῆς ὅπου κεῖται ἡ κορυφὴ τῆς μικροτέρας ἐκ τῶν γωνιῶν $\widehat{T\Sigma P}$ καὶ $\widehat{T\Pi P}$ τοῦ τετραπλεύρου ΤΠΡΣ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν $\widehat{T\Sigma P}$ καὶ $\widehat{T\Pi P}$. Ἀκολούθως κατασκευάζομεν τόξον ποὺ νὰ ἔχῃ χορδὴν τὴν ΣΜ, πρὸς τὸ μέρος δὲ αὐτῆς ὅπου κεῖται καὶ ἡ μικροτέρα τῶν γωνιῶν $\widehat{\Sigma T\Pi}$ καὶ $\widehat{\Sigma P\Pi}$ τοῦ τετραπλεύρου ΤΠΡΣ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ παραπλήρωμα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν τούτων $\widehat{\Sigma T\Pi}$ καὶ $\widehat{\Sigma P\Pi}$. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων τόξων. Συνδέομεν τὸ Ο δι' εὐθειῶν μὲ τὰ δοθέντα σημεῖα Π, Ρ, Σ, Τ καὶ φέρομεν εἰς αὐτὰ τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ΟΠ, ΟΡ, ΟΣ, ΟΤ. Αἱ κάθετοι αὗται θὰ τέμνωνται ἑκάστη μὲ τὴν ἑπομένην της, ὡς κάθετοι ἀντιστοίχως δύο τεμνομένων εὐθειῶν, εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ ζητουμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

867) Ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν δοθείσης ὀρθῆς γωνίας xOy δίδονται τὰ σημεῖα A καὶ B. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε $\widehat{AMB}=2\cdot\widehat{ABM}$.

Λύσις. Ἔστω $(OA)=\alpha$ καὶ $(OB)=\beta$, ἔνθα $\beta>\alpha$ (σχ. 657). Ἐπειδὴ $\widehat{BMA}=\frac{1}{2}\widehat{MBA}$, ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνιας $\widehat{ABM}$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν ΑΒΜ εἰς τὸ Δ, θὰ ἔχωμεν

$$(AB)=(A\Delta)=(M\Delta)=\beta-\alpha.$$



Σχ. 657.

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΒΜ λαμβάνομεν

$$(OM)^2=(BM)^2-(OB)^2=x^2-\beta^2$$

(ἔνθα $BM=x$) καὶ

$$(OM)^2=(AM)^2-(OA)^2=\delta^2-\alpha^2$$

[ἔνθα $(B\Delta)=(AM)=\delta$], ἄρα

$$x^2-\beta^2=\delta^2-\alpha^2 \quad (1).$$

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΒΑΔΜ λαμβάνομεν

$$(AM)(B\Delta)=(A\Delta)(BM)+(\Delta M)(BA) \quad (2).$$

Ἐπειδὴ $(AM)=(B\Delta)=\delta$, $(A\Delta)=(AB)=(M\Delta)=\beta-\alpha$ καὶ $(BM)=x$, ἡ (2) γίνεται $\delta^2=(\beta-\alpha)x+\alpha^2$ (3). Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν

$$x^2-\beta^2=(\beta-\alpha)x+\alpha^2-\alpha^2 \quad (4), \quad \text{ἢ} \quad x^2-(\beta-\alpha)x-\beta^2=0 \quad (5), \quad \text{ὅτε}$$

$$x=\frac{(\beta-\alpha)+\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\beta^2}}{2}.$$

Ἵνα ἡ ῥίζα αὕτη εἶναι δεκτὴ δέον

$$x>\beta, \text{ ἢ } \frac{\beta-\alpha+\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\beta^2}}{2}>\beta, \text{ ἢ } \beta-\alpha+\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\beta^2}>2\beta, \text{ ἢ}$$

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+4\beta^2}>\beta+\alpha$, ἢ $(\beta-\alpha)^2+4\beta^2>\beta^2+\alpha^2+2\alpha\beta$, ἢ $4\beta^2>4\alpha\beta$, ἢ $\beta>\alpha$ (ὅπερ ἐλήφθη ὡς ἀληθές). Ἄρα τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

868) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν: α) A, δ_α, τ. β) A, ϱ, τ. γ) α, ϱ, ϱ_α. δ) ϱ, ϱ_α, $\beta-\gamma=\lambda$. ε) A, R, τ. στ) α, ϱ, $\beta+\gamma=\lambda$. ζ) α, ϱ, $\beta-\gamma=\lambda$. η) α, ϱ_β, ϱ_γ.

Λύσις. α) α, δ_α, τ. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ Κ ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ (σχ. 653). Θὰ εἶναι τότε $AE=AZ=\tau$, ἡ δὲ ΑΚ θὰ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $A\Delta=\delta_\alpha$.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\widehat{A}$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν της $AE=AZ=\tau$ καὶ εἰς τὰ Ζ καὶ Ε ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ Κ. Μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΖ γράφομεν περιφέρειαν. Ἐπὶ τῆς ΑΚ λαμβάνομεν $A\Delta=\delta_\alpha$ καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς τὴν περιφέρειαν Κ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζει ἐπὶ τῶν ΑΖ καὶ ΑΕ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν ἐφ' ὅσον εἶναι

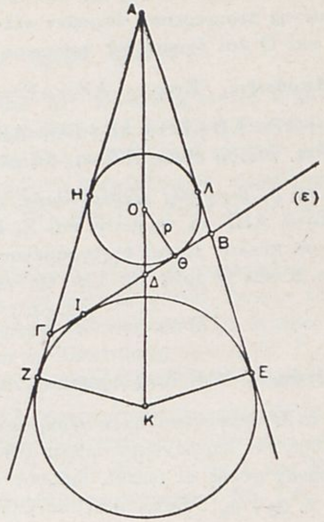
$$\Delta K = AK - \delta_\alpha \geqslant KZ.$$

β) ***Α, ρ, τ.*** Εἶναι τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἀσκήσεως 560.

γ) ***α, ρ, ρ_α.*** Εἶναι τὸ τρίτον μέρος τῆς ἀσκήσεως 560.

δ) ***ρ, ρ_α, β—γ=λ.*** Ἐὰν Ι καὶ Θ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ΒΓ μετὰ τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Κ ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης θὰ εἶναι ΙΘ=β—γ=λ.

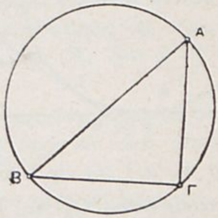
Σύνθεσις. Ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΘΙ=λ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας Ο καὶ Κ ἐφαπτομένας τῆς εὐθείας ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ Ι, κειμένας ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως ρ καὶ ρ_α. Τῶν κύκλων αὐτῶν ἄγομεν τὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΑΖ καὶ ΑΕ καὶ οὕτως ὁρίζεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον.



Σχ. 658.

Περιορισμός. Πρέπει νὰ εἶναι $\rho < \rho_\alpha$.

ε) ***Α, R, τ.*** Κατασκευάζομεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν καὶ λαμβάνομεν τὸ τόξον $\widehat{B A \Gamma}$ (σχ. 659), ὥστε νὰ ἐγγράφεται εἰς αὐτὸ γωνία ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν $\widehat{A}$. Τότε ἡ μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ ΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι α+β+γ=2τ, θὰ ἔχωμεν β+γ=2τ—α=2τ—ΒΓ. Ἄρα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι γνωστὰ ἡ πλευρὰ ΒΓ, ἡ γωνία $\widehat{B A \Gamma} = \widehat{A}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται (ἰδὲ § 286).



Σχ. 659.

στ) ***α, ρ, β+γ=λ.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον (σχ. 659). Ἡ περίμετρος αὐτοῦ 2τ=α+β+γ= =α+λ. Ἐὰν Ζ καὶ Ε εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ Η καὶ Λ τοῦ ἐγγεγραμμένου, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι

$$AZ = AE = \tau = \frac{\alpha + \lambda}{2} \text{ καὶ } ZH = \alpha.$$

Περιορισμός. $\alpha < \lambda$.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους ΑΖ=τ καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου Ζ αὐτοῦ μῆκος ΖΗ=α. Γράφομεν τὴν εἰς τὸ Η ἐφαπτομένην περιφέρειαν Ο τῇ ΑΖ ἀκτῖνος ρ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην ΑΛ τῆς Ο καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῆς μῆκος ΑΕ=τ. Ἐκ τῶν Ζ καὶ Ε ὑψοῦμεν καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΖ καὶ ΑΕ καὶ ὁρίζομεν τὸ κέντρον Κ τῆς παρεγγεγραμμένης περιφερείας. Φέρομεν τέλος τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην τῶν Κ καὶ Ο καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $ΑΖ=ΑΕ=τ=\frac{α+λ}{2}$, $ΑΖ=ΑΒ+ΒΘ$, $ΑΕ=ΑΓ+ΓΘ$ καὶ $ΑΖ+ΑΕ=ΑΒ+ΒΘ+ΑΓ+ΓΘ=ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ=α+λ$. Ἐπίσης εἶναι $ΗΖ= =ΒΓ$, ὅτε, ἐπειδὴ εἶναι $ΗΖ=α$, θὰ εἶναι καὶ $ΒΓ=α$.

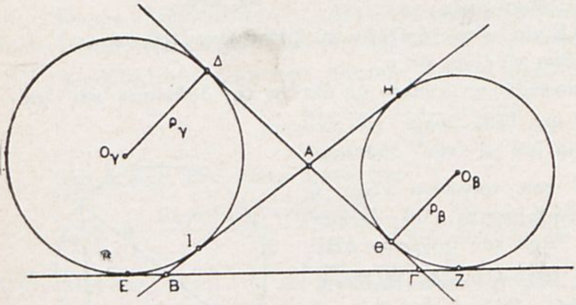
ζ) ***α, ϱ, β—γ=λ. Περιορισμός.*** $α>λ$.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ τρίγωνον καὶ Ζ, Ε, Η, Λ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς παρεγγεγραμμένου κύκλου Κ καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο καὶ Ι καὶ Θ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν Κ καὶ Ο μετὰ τῆς ΓΒ. Ὡς γνωστὸν εἶναι

$$ΓΘ=τ-γ=\frac{α+β+γ}{2}-γ=\frac{α+β-γ}{2}=\frac{α+λ}{2}.$$

Σύνθεσις. Ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας (ε) λαμβάνομεν τμῆμα $ΓΘ=\frac{α+λ}{2}$ καὶ εἰς τὸ Θ κατασκευάζομεν περιφέρειαν Ο ἐφαπτομένην τῆς (ε) καὶ ἀκτῖνος ϱ. Ἐπὶ τῆς ΓΘ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΒ=α καὶ ἐκ τῶν Γ καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὴν κορυφὴν Α.

η) ***α, $ϱ_β$, $ϱ_γ$.*** Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ $Ο_β$, $Ο_γ$ οἱ παρεγγεγραμμένοι κύκλοι (σχ. 660) εἰς τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Ὡς γνωστὸν εἶναι $ΑΔ=τ-β$ καὶ $ΑΘ= =ΑΗ=τ-γ$ καὶ συνεπῶς $ΑΔ+ΑΘ= =2τ-β-γ=α$, ἢ $ΘΔ=α$.



Σχ. 660.

Σύνθεσις, Ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας λαμβάνομεν $ΘΔ= =α$ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας $Ο_β$ καὶ $Ο_γ$ ἀκτίνων ἀντιστοίχως $ϱ_β$ καὶ $ϱ_γ$ ἐφαπτομένας τῆς ΘΔ εἰς τὰ Θ καὶ Δ καὶ κειμένας ἑκατέρωθεν τῆς ΔΘ. Τῶν περιφερειῶν αὐτῶν φέρομεν τὴν ἑτέραν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΗΙ καὶ τὴν ἐξωτερικὴν ΕΖ. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΘΔ, ΗΙ καὶ ΕΖ ὁρίζουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Προτεινόμεναι πρὸς λύσιν.

1) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ τέμνονται εἰς τὸ Ε καὶ αἱ ΒΓ καὶ ΑΔ εἰς τὸ Ζ. Δείξατε ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον εἶναι ὅπως τὸ σημεῖον τοῦ Miguel (§ 242) κεῖται ἐπὶ τῆς ΕΖ. Ἐπίσης δείξατε ὅτι ἐὰν τοῦ περὶ τὸ τετράπλευρον περιγεγραμμένου κύκλου διάμετρος εἶναι ἡ ΑΓ, τότε αἱ ΗΔ καὶ ΗΒ, ἔνθα Η μέσον τῆς ΕΖ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2) Ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ μὲ ἴσας πλευρὰς εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον k. Ἔστω xky τυχοῦσα διάμετρος τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἔχουσα τὰς κορυφὰς Ζ, Α, Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου καὶ τὰς Γ, Δ, Ε πρὸς τὸ ἕτερον. Ἐὰν Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, Ζζ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης Αα+Ββ+Ζζ=Γγ+Δδ+Εε.

3) Ἐκ τοῦ κοινοῦ σημείου Α δύο τεμνομένων περιφερειῶν k_1 καὶ k_2 ἄγονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι σχηματίζουσαι σταθερὰν γωνίαν καὶ τέμνουσαι τὰς περιφερείας ἡ μὲν μία εἰς τὰ Β καὶ Γ, ἡ δὲ ἄλλη εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΓΕ, ΒΓ, ΕΔ, ΔΓ καὶ ΒΕ.

4) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΟΗ, ἔνθα Ο τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον, εἶναι συνισταμένη τῶν τριῶν ἴσων δυνάμεων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,

5) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν σημείων τομῆς Δ,Ε, Ζ τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων ὑπὸ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

6) Διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται τυχοῦσα εὐθεῖα (ε). Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ συμμετρικαὶ αὐτῆς ($ε_1$), ($ε_2$), ($ε_3$) ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ. Ἐὰν ἡ (ε) στρέφεται περὶ τὸ Η νὰ εὑρεθῇ καὶ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

7) Ἐπὶ εὐθυγράμμου τμόματος ΑΒ σταθεροῦ κινεῖται σημεῖον Μ. Κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΒΜΔ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ καὶ ζητεῖται α) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου μ τῆς ΓΔ καὶ β) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγρομμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΓΜΔ εἶναι σταθερὸν σημεῖον.

8) Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς χορδῆς ΑΒ περιφερείας λαμβάνομεν σημεῖον $Α_1$, τοιοῦτον ὥστε $ΑΒ=ΒΑ_1$. Ἐὰν Γ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου τοῦ τριγώνου $Α_1ΒΓ$, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν κορυφὴν Β, ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ Β.

9) Δίδονται δύο περιφέρειαι $Κ_1$ καὶ $Κ_2$ τεμνόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τὰς περιφερείας διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου αὐτῶν Α, τὴν ΓΑΔ, ἔνθα Γ σημεῖον τῆς $Κ_1$ καὶ Δ σημεῖον τῆς $Κ_2$. Φέρομεν τὴν διάμετρον $ΓΚ_1Ε$ καὶ τὴν διάμετρον $ΔΚ_2Ζ$, ὡς καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Γ, Ε, Δ καὶ Ζ τῶν περιφερειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω ἐφαπτομένων.

10) Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΕΖ. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ὧν ἡ πλευρὰ ΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε, ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ζ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΕΖ. Ἐὰν Ε′ καὶ Ζ′ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΕ καὶ ΑΖ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα Ε′ΔΓ καὶ Ζ′ΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ μέσου Ν τῆς ΓΔ ἀγομένων παραλλήλων ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΕΑ καὶ ΖΑ.

11) Δίδεται κύκλος Ο καὶ δύο κάθετοι διάμετροι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ. Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ λαμβάνομεν σημεῖον Ε καὶ τοῦ τόξου ΓΒ σημεῖον Ζ, οὕτως ὥστε $\widehat{EOZ}=90^0$. Ἐκ τῶν Ε καὶ Ζ φέρομεν τὰς καθέτους ΕΡ καὶ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐὰν Ι καὶ Ι′ τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα ΕΡΟ καὶ ΟΖΘ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ΑΙ καὶ ΒΙ′, ὅταν τὸ Ε διαγράφῃ τὸ τόξον ΑΓ.

12) Δίδεται ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ μὲ πλευρὰς ἴσας. Διὰ τοῦ κέντρου Κ τοῦ κύκλου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΕ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως. Ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν ΒΗ καὶ ΖΘ.

13) Δίδονται δύο κύκλοι Λ καὶ Κ τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὡς καὶ τυχὸν σημεῖον Ρ κείμενον ἐπὶ τῆς πρώτης περιφερείας. Ἄγομεν τὰς ΡΑ καὶ ΡΒ τεμνούσας τὴν δευτέραν περιφέρειαν εἰς τὰ Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κ. βάρους τῶν τριγώνων ΑΓΔ.

Τέλος Β′. βιβλίου Γεωμετρίας.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1) Μεγάλη Ἄλγεβρα	Τόμος Α΄ (δευτέρα ἔκδοσις)	Δραχ.	125
2) » »	Τόμος Β΄ (» »)	»	125
3) Μεγάλη Γεωμετρία	Τόμος Α΄ (» »)	»	130
4) » »	Τόμος Β΄ (» »)	»	100
5) Μεγάλη Τριγωνομετρία		»	125
6) Λύσεις Ἀσκήσεων	Μ. Τριγωνομετρίας	»	85
7) Λύσεις Ἀσκήσεων	Α΄ Τόμου Μ. Ἀλγέβρας	»	65
8) » »	Β΄ Τόμου Μ. Ἀλγέβρας τεῦχος Α΄ . . .	»	70
9) » »	Β΄ Τόμου Μ. Ἀλγέβρας τεῦχος Β΄ . . .	»	70
10) » »	Α΄ βιβλίου Μ. Γεωμετρίας	»	50
11) » »	Β΄ βιβλίου Μ. Γεωμετρίας	»	70
12) » »	Γ΄ καὶ Δ΄ βιβλίου Μ. Γεωμετρίας	»	70
13) » »	Β΄ Τόμου Μ. Γεωμετρίας	»	125
14) Φυσικὴ Μηχανικὴ—Ὑδροστατικὴ—Ἀεροστατικὴ		»	50

15) Θέματα Σχολῶν 1947 δραχ. 10,
16) Θέματα Σχολῶν 1948 δραχ. 10
17) » » 1949 » 10,
18) » » 1950 » 10
19) » » 1951 » 15,
20) » » 1952 » 15
21) » » 1953 » 20,
22) » » 1954 » 20
23) » » 1955 » 20,
24) » » 1956 » 20
25) » » 1957 » 25,
26) » » 1958 » 30
27) » » 1959 » 30

ΑΝΩΤΑΤΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΙΣ

1) Διαφορικὸς καὶ διανυσματικὸς λογισμὸς	Δραχ.	80
2) Ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς καὶ θεωρία πιθανοτήτων	»	80
3) Ἀνωτέρα Ἄλγεβρα	»	100
4) Διανυσματικὴ Γεωμετρία	»	30
5) Θεωρία Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων	»	50
6) Διανυσματικὴ ἑρμηνεία χώρου ν διαστάσεων	»	30
7) Μετρικοὶ τύποι διανυσμάτων	»	30
8) Κριτικὴ ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδίου αἰτήματος	»	30
9) Φυσικὴ καὶ Θεωρητικὴ Μηχανικὴ (ἐξηντλήθη)	»	
10) Κριτικὴ ἐπὶ τῆς ἐργασίας τῶν ἰνῶν	»	20