ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

Μπαρμπαστάθη (Χρ)

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Μὲ ἁπλουστεύσεις μαθηματικῶν ἐννοιῶν, παρατηρήσεις, ἐπεξηγήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθμητικοὺς πίνακας, διὰ τὴν εὐκολωτέραν καὶ ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς ἀριθμητικῆς.

Ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

18

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ

ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.

38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38

1949

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ
ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΤΗΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Μὲ ἁπλουστεύσεις μαθηματικῶν ἐννοιῶν, παρατηρήσεις, ἐπεξηγήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθμητικοὺς πίνακας, διὰ τὴν εὐκολωτέραν καὶ ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς ἀριθμητικῆς.

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1949

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τυπογραφεῖον Ἀδ/φῶν Γ. Ρόδη. Κεραμεικοῦ 42

ΓΕΝΙΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

Εἰς τὸν πολιτισμένον ἄνθρωπον, ὅπως εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζῃ νὰ γράφῃ καὶ νὰ διαβάζῃ, ἔτσι εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζῃ νὰ ἀριθμῇ καὶ νὰ λογαριάζῃ.

Ἡ ἀριθμητικὴ λοιπὸν εἶναι ἀπαραίτητον μάθημα διὰ πάντα ἄνθρωπον, εἴτε πρακτικὸν ἐπάγγελμα ἀκολουθήσῃ, εἴτε ἐπιστημονικόν. Ἄλλως τε ἡ ἀριθμητικὴ εἶναι ἡ βάσις τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

Διὰ νὰ εὐδοκιμήσῃ ὁ μαθητὴς εἰς τὸ μάθημα τῆς ἀριθμητικῆς πρέπει:

Νὰ κατανοήσῃ καλῶς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν διαφόρων ἐννοιῶν, τὰς ὁποίας διδάσκει ἡ ἀριθμητικὴ καὶ νὰ ἐφαρμόζῃ μὲ εὐκολίαν καὶ μὲ ἀκρίβειαν τοὺς διαφόρους κανόνας της. Τοὺς ὁρισμοὺς δὲ καὶ τοὺς κανόνας πρέπει νὰ τοὺς γνωρίζῃ ἀπὸ μνήμης.

Αἱ πρῶται δὲ ἱκανότητες τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ὁ μαθητὴς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἶναι:

Νὰ γράφῃ ὀρθῶς τοὸς ἀριθμοὺς καὶ ὀρθῶς νὰ τοὺς ἀπαγγέλῃ.

Νὰ ἐκτελῇ μὲ ἀκρίβειαν τὰς τέσσαρας πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, ἤτοι πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν.

Νὰ διακρίνῃ ἀμέσως εἰς τὰ ἁπλᾶ προβλήματα, τί πρᾶξιν πρέπει νὰ κάμῃ, διὰ νὰ εὕρῃ τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον, ἂν δηλαδὴ θὰ κάμῃ πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν κ.λ.π.

Ἀπαραίτητον ἐπίσης εἶναι νὰ ἀσκηθῇ ὁ μαθητὴς εἰς τὸν ἀπὸ μνήμης λογισμόν. Ὄχι δὲ μόνον, διότι θὰ τοῦ χρειασθῇ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, ἀλλὰ καὶ διότι πολὺ θὰ τὸν βοηθήσῃ εἰς τὴν ταχεῖαν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἐπὶ μεγαλυτέρων ἀριθμῶν.

Τὰς ἀνωτέρω γνώσεις καὶ δεξιότητας θὰ ἀποκτήσῃ ὁ μαθητής, παρακολουθῶν μὲ ἐπιμέλειαν εἰς τὸ σχολεῖον τὴν διδασκαλίαν τῆς ἀριθμητικῆς. Ὡς ἐπιβοηθητικὸν δὲ αὐτῆς θὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ παρὸν βιβλίον.

Κάθε ἄσκησις ἢ πρόβλημα τῆς Ἀριθμητικῆς, φέρει ἕναν αὔξοντα ἀριθμόν. Εἰς τὸν ἴδιον αὔξοντα ἀριθμὸν τοῦ παρόντος βιβλίου δίδεται ἡ λύσις της. Αἱ παράγραφοι (§) ποὺ σημειοῦνται εἰς αὐτὸ εἶναι αἱ παράγραφοι τῆς Ἀριθμητικῆς.

Ὁ μαθητὴς θὰ ἐπιχειρῇ νὰ λύῃ μόνος του τὴν ἄσκησιν. Ὅταν δὲ καταλήγῃ εἰς ἀποτέλεσμα, θὰ ἀνατρέχῃ εἰς τὸ βιβλίον τῶν λύσεων, διὰ νὰ ἴδῃ κατὰ πόσον ἡ λύσις του συμφωνεῖ μὲ τὴν λύσιν τοῦ βιβλίου. Ἐὰν δὲν συμφωνῇ, θὰ προσέξῃ διὰ νὰ εὕρῃ τὸ σφάλμα. Γενικῶς θὰ χρησιμοποιῇ τὰς λύσεις, μόνον ὅταν εὑρίσκῃ δυσκολίας, τὰς ὁποίας μόνος του δὲν δύναται νὰ ὑπερνικήσῃ. Ἐὰν ἐργάζεται μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, ἂς εἶναι βέβαιος, ὅτι θὰ γίνῃ ἱκανὸς νὰ λύῃ μὲ πολλὴν εὐχέρειαν δυσκόλους ἀσκήσεις καὶ προβλήματα τῆς ἀριθμητικῆς.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ

τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς ἐγκεκριμένης Ἀριθμητικῆς τῶν Γυμνασίων.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

Παρατηρήσεις. Μὲ τὰ ἐννέα σημαντικὰ ψηφία

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

καὶ μὲ τὸ 0 ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν. Γίνεται δὲ τοῦτο, διότι ἡ γραφὴ ἑνὸς ἀριθμοῦ στηρίζεται εἰς τὴν **ἀρχὴν τῆς θέσεως.** Δηλαδὴ τὸ αὐτὸ σημαντικὸν ψηφίον ἀλλάζει ἀξίαν, ὅταν εἰς τὸν ἀριθμὸν ἀλλάξῃ θέσιν. Π. χ. τὸ ψηφίον 5, ἐὰν ἔχῃ εἰς ἕναν ἀριθμὸν τὴν τρίτην θέσιν ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως π. χ. εἰς τὸν ἀριθμὸν 37582, παριστάνει ἑκατοντάδας, ἐὰν τώρα προχωρήσῃ μίαν θέσιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ λάβῃ τὴν τετάρτην θέσιν (35782) παριστάνει χιλιάδας, ἐνῷ ἐὰν προχωρήσῃ μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιὰ (37852) παριστάνει δεκάδας. Ἔτσι, ἐὰν ἔχωμεν π. χ. τοὺς ἀριθμοὺς 3852 καὶ 385200, τὸ ψηφίον 3 εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν παριστάνει χιλιάδας, ἐνῷ εἰς τὸν δεύτερον παριστάνει ἑκατοντάδας χιλιάδων, τὸ δὲ ψηφίον 2 τὸ ὁποῖον εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν παριστάνει ἑκατοντάδας εἰς τὸν πρῶτον παριστάνει ἁπλᾶς μονάδας κ. ο. κ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 11.

1) Ὀκτακόσιαι πεντήκοντα ὀκτὼ χιλιάδες τριακόσιαι δραχ.

2) Χίλια ἑκατὸν δέκα ἐννέα κυτία.

3) Ἓν δισεκατομμύριον, ἑξακόσια πεντήκοντα ἑκατομμύρια, ἑπτακοσίας χιλιάδας πέντε δραχμάς.

4) Ἑκατὸν τριάκοντα ἑκατομμύρια δραχμάς.

5) Δύο τρισεκατομμύρια, ἑξήκοντα ἑκατομμύρια δραχμάς.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 15.

6) 1940. *7)* 1912. *8)* 6 970 000.
9) 452 912. *10)* 251 308.

11) 14 000 ἑκατομμύρια. ***12)*** 2 614 218 ἑκατομμύρια.

13) **1.** α) Ἔχει μίαν ἑκατοντάδα· β) δέκα δεκάδας χιλιάδων.

2. 1 ἑκατομμύριον=100 000 δεκάδες=1000 χιλιάδες=100 δεκάδες χιλιάδων.

3. 35 ἑκατομμύρια=350 ἑκατοντάδες χιλιάδων=35 000 μονάδες χιλιάδων.

14) 23 678 ὁ μικρότερος καὶ 87 632 ὁ μεγαλύτερος.

15)

Ἀραχναῖον	Αἰγάλεω	Λύκαιον	Ἀρτεμίσιον
1198 μ.	1217 μ.	1333 μ.	1772 μ.
Παναχαϊκὸν	Πάρνων	Μαίναλον	Ἐρύμανθος
1925 μ.	1935 μ.	1980 μ.	2223 μ.
Κυλλήνη	Ταΰγετος	Ἀροάνια	
2375 μ.	2407 μ.	2555 μ.	

16)

Γκιῶνα	Οἴτη	Παρνασσὸς	Παναιτωλικὸν
2512 μ.	2483 μ.	2459 μ.	1924 μ.
Ἑλικὼν	Πάρνης	Κιθαιρὼν	Καλλίδρομον
1748 μ.	1412 μ.	1408 μ.	1371 μ.

17) 36=λϛ′=XXXVI, 79=οθ′=LXXIX,
289=σπθ′=CCLXXXIX, 307=τζ′=CCCVII,
5994=͵εϡϟδ′=$\overline{\text{V}}$CMXCIV

18) ϟθ′=99, σοα′=271, ϡϟθ′=999, ͵βωϟα′=2891.

19) **1.** CC=200, DCLV=655, DCCXL=740,
CMXII=912, MCXXXV=1135.

2. MM=2000, MCD=1400, $\overline{\text{V}}$DCCV=5705,
$\overline{\text{X}}$CMLXI=10961, $\overline{\text{L}}$LXXXIII=50083.

3. MMMMCCCLXXX=4380, $\overline{\text{XXII}}$DCCXIV=22714,
$\overline{\overline{\text{VII}}}$CM=7 000 900, $\overline{\overline{\overline{\text{LI}}}}$=51 000 000 000.

20) 274=CCLXXIV, 749=DCCXLIX,
1658=MDCLVIII, 4375=MMMMCCCLXXV
22714=$\overline{\text{XXII}}$DCCXIV, 1890=MDCCCXC.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁδηγίαι. Ἡ πρόσθεσις εἶναι ἀπὸ τὰς εὐκολωτέρας πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐν τούτοις ὅμως, εἰς ὅσους δὲν ἔχουν ἀσκηθῇ, παρουσιάζει δυσκολίας εἰς τὴν ἐκτέλεσιν, ἰδίως ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοὶ καὶ πολυψήφιοι. Διὰ τοῦτο πρέπει :

1ον) Νὰ γράφωμεν τὰ ψηφία καθαρά, κανονικά, χωριστὰ τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ εἰς κάποιαν ἀπόστασιν μεταξύ των. Ὅταν γράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον, νὰ προσέχωμεν ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἀκριβῶς εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην.

2ον) Ὅταν δὲν εἴμεθα ἀπολύτως βέβαιοι διὰ τὴν ἀκρίβειαν τοῦ ἐξαγομένου, νὰ κάμωμεν τὴν πρόσθεσιν δύο φοράς, ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν διαφορετικὰ ἐξαγόμενα, νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν πρόσθεσιν, μέχρις ὅτου εὕρωμεν τὸ σφάλμα.

3ον) Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι πολλοί, νὰ τοὺς χωρίζωμεν εἰς ὁμάδας, ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα τῆς σελίδος 30.

4ον) Εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀσκηθῶμεν ἀρκετὰ εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης πρόσθεσιν, ἐφαρμόζοντες τὰς συντομίας τῆς § 41.

Ἀσκήσεις — Λύσεις

Σελὶς 30.

21) Ἕνας τρόπος εἶναι νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι ἐντὸς παρενθέσεως (§ 28) καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ εὑρεθέντα ἀθροίσματα.

Τὸν δεύτερον δὲ τρόπον τὸν δίδει ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητος V σελὶς 26. Ἔτσι εὑρίσκομεν:

1. 20+24=44 ἢ 5+7+8+9+15=44
2. 27+56=83 ἢ 12+9+6+24+32=83
3. 22+33=55 ἢ 3+19+5+7+21=55
4. 20+28=48 ἢ 12+8+15+4+9=48.

22) **1.** 76253 **2.** 360 620.

23)

	1ον Ταμεῖον	2ον Ταμεῖον	3ον Ταμεῖον	Σύνολον
Δευτέρα	. . . . .	. . . . .	. . . . .	5 646 900
Τρίτη	. . . . .	. . . . .	. . . . .	6 703 080
Τετάρτη	. . . . .	. . . . .	. . . . .	4 628 225
Πέμπτη	. . . . .	. . . . .	. . . . .	6 143 775
Παρασκευὴ	. . . . .	. . . . .	. . . . .	5 034 690
Σάββατον	. . . . .	. . . . .	. . . . .	5 111 050
Σύνολον	5 095 860	12 340 260	15 831 600	33 267 720

24) Ἐδῶ θὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ συντομίαι τῆς § 41.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

Λύσεις

Σελ. 32.

Μέχρι τοῦ 1949 ἐπέρασαν.

25) 777+1949=2726 ἔτη *26)* 490+1949=2439 ἔτη

27) Ἀπ. 863 250 δρχ. *28)* Ἀπ. 43 029 δρχ.

29) Ἡ μήτηρ εἶναι 27 + 17 = 44 ἐτῶν καὶ ὁ πατὴρ 27+9+17=36+17=53 ἐτῶν.

30) Ἠγόρασε 36 + 49 = 85 ὀκ. σάπωνος· ἐπλήρωσε δὲ 261 000 + 407 325 = 668 325 δρχ.

31) Ἀπ. 359 200 δρχ.=ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος.

32) Ἀξία α′ χωραφίου 6 738 950 δρχ.
» β′ » 6 738 950+2 376 400=9 115 350 δρχ.

Διὰ τὰ δύο χωράφια ἔδωσε 15 854 300 δρχ.

33) Τὸ α′ χωρίον ἔλαβε 3 725 ὀκ. ἀλεύρου
» β′ » » 3 725+387 = 4 112 » »
» γ′ » » 4 112+564 = 4 676 » »

Μοιρασθὲν ποσὸν 12 513 ὀκ. ἀλεύρου

34) Τὸ α′ πρόσωπον ἔλαβε 427 650 δρχ.
» β′ » » 427 650+36 750=464 400 δρχ.
» γ′ » » 464 400+52 480=516 880 δρχ.

Τὸ ζητούμενον ποσὸν ἦτο 1 408 930 δρχ.

35) Ἤτοι ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 908, ὁ τρίτος μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου κατὰ 908 κ.ο.κ. Ὥστε εἶναι:

ὁ **1ος)** 3059 ὁ **2ος)** 3059+908=3967
ὁ **3ος)** 3967+908=4875 καὶ ὁ **4ος)** 4875+908=5783
καὶ 3059+3967+4875+5783=17 684.

36) **1ον.** 42 729+ 9 073=51 802, ὅταν α=9073
2ον. 42 729+38 009=80 738, ὅταν α=38 009.

37) Ἀπ. 3078+4069+39 017=46 164.

38) Μαθηταὶ Β′ Γυμνασίου 760+χ, ἤτοι 760+25=785.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἔννοιαι καὶ τρόποι ἀφαιρέσεως.—Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3 προσθέσωμεν τὸν 2, εὑρίσκομεν ἄθροισμα 5. Ὥστε, ἐὰν ἀπὸ τὸν 5 ἀφαιρέσωμεν τὸν 2, θὰ εὕρωμεν διαφορὰν 3.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα λοιπὸν $3+2=5$
προκύπτει ἀμέσως ἡ ἰσότης $5-2=3$
καὶ ἀντιστρόφως
ἀπὸ τὴν ἰσότητα $5-2=3$
προκύπτει ἀμέσως ἡ ἰσότης $3+2=5$

Γενικῶς δὲ γράφομεν:

Μειωτέος — Ἀφαιρετέος = **Διαφορὰ** (1)
Ἀφαιρετέος + **Διαφορὰ** = Μειωτέος (2)

Ἡ ἰσότης (1) μᾶς λέγει ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν μειωτέον κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ὁ ἀφαιρετέος. Ἐδῶ λοιπὸν ἔχομεν τὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν τῆς ἀφαιρέσεως. Διότι ἡ λέξις ἀφαίρεσις σημαίνει ἐλάττωσιν.

Π. χ. Ἔχω εἰς τὴν ἀποθήκην μου 100 ὀκάδας χημικὸν λίπασμα καὶ διὰ νὰ λιπάνω τὸ ἀμπέλι μου μοῦ χρειάζονται 35 ὀκάδες. Ἔτσι, θὰ πάρω (θὰ ἀφαιρέσω) ἀπὸ τὴν ἀποθήκην μου 35 ὀκάδας, ὁπότε θὰ μοῦ μείνουν 100 ὀκ. — 35 ὀκ. = 65 ὀκάδες. Αἱ 65 ὀκ. λοιπὸν εἶναι ἡ διαφορά.

Τώρα ἐρχόμεθα εἰς τὴν ἰσότητα (2). Αὐτὴ μᾶς λέγει, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν πρέπει νὰ **προσθέσωμεν** εἰς τὸν ἀφαιρετέον τόσας μονάδας, ὅσαι χρειάζονται διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μειωτέον. Ἐδῶ λοιπὸν δὲν βγάζομεν, ἀλλὰ προσθέτομεν. Ἡ ἔννοια τώρα τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν ἀρχικήν. Π. χ. Θέλω νὰ κτίσω ἕνα τοῖχον ὕψους 10 μέτρων. Οἱ ἐργάται ὡς τώρα ἔκτισαν 6 μέτρα. Ὥστε διὰ νὰ φθάσουν τὸ ὕψος τῶν 10 μέτρων, χρειάζονται νὰ κτίσουν ἀκόμη ἄλλα 4 μέτρα, διότι $6+4=10$. Ἐδῶ εὑρήκαμεν τὴν διαφορὰν 4 μέτρα διὰ τῆς προσθέσεως.

Ἡ ἀφαίρεσις λοιπὸν δύο ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ μὲ δύο τρόπους. Π. χ. εἰς τὴν ἀφαίρεσιν

$17-8$

ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν: ἂν βγάλωμεν ἀπὸ τὸν 17, 8 μονάδας, θὰ μᾶς μείνουν 9 μονάδες, ἢ διὰ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὰς 8 μονάδας εἰς τὰς 17 μᾶς χρειάζονται 9 μονάδες, ἢ συντομώτερα

8 ἀπὸ 17 = 9, πρῶτος τρόπος ἀφαιρέσεως (ὁ κανονικὸς)

ἢ 8 ὥς τὸν 17 = 9, δεύτερος τρόπος (ἀφαίρεσις διὰ τῆς προσθέσεως).

Χρῆσις τῶν δύο τρόπων τῆς ἀφαιρέσεως.— Εἰς τὰ ἰδικά μας σχολεῖα διδάσκεται κατὰ κανόνα ὁ πρῶτος τρόπος τῆς ἀφαιρέσεως. Εἰς τὰ ξένα σχολεῖα, διδάσκεται, εἰς ἄλλα μὲν κατὰ κανόνα ἡ ἀφαίρεσις διὰ τῆς προσθέσεως, εἰς ἄλλα δὲ καὶ οἱ δύο τρόποι.

Ἀλλ' ἐφ' ὅσον εἰς τὸν πρακτικὸν βίον παρουσιάζονται καὶ αἱ δύο ἔννοιαι τῆς ἀφαιρέσεως, ὁ μαθητὴς **ἀπαραιτήτως** πρέπει νὰ ἀσκηθῇ καὶ εἰς τοὺς δύο τρόπους τῆς ἀφαιρέσεως. Ἄλλως τε, διότι ἡ ἀφαίρεσις διὰ τῆς προσθέσεως 1) βοηθεῖ τὸν πρῶτον 2) διότι ἔχει εὐρυτάτην ἐφαρμογὴν εἰς τὸ ἐμπόριον εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν. Διότι, ἐὰν ἔχω ἀγοράσει π. χ. ἀπὸ ἓν παντοπωλεῖον ἕνα πρᾶγμα ἀξίας 3600 δραχμῶν καὶ δώσω εἰς τὸν ταμίαν ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 10000 δρχ., αὐτὸς μοῦ δίδει τὸ ὑπόλοιπον (6400 δρχ.) λέγων, 3600 καὶ **400** = 4000 καὶ **6000** = 10000. Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ ὁποία εἶναι γενικὴ εἰς ὅλα τὰ καταστήματα, ὁ ταμίας κάμνει ἀφαίρεσιν διὰ τῆς προσθέσεως.

Ὁ μαθητὴς ἠμπορεῖ νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸν δεύτερον τρόπον εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν, ὅταν ἡ διαφορὰ εἶναι μικρὰ καὶ ἰδιαίτερα ὅταν ὁ μειωτέος ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁλοκλήρους δεκάδας, ἑκατοντάδας ἢ καὶ χιλιάδας. Πρέπει δὲ νὰ συνδυάζῃ τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 9 (= 10), 2 καὶ 8 (= 10), 3 καὶ 7 (= 10), 4 καὶ 6 (= 10), 5 καὶ 5 (= 10). Π.χ. εἰς τὴν ἀπὸ μνήμης ἀφαίρεσιν 1000 — 642, θὰ εἴπῃ 642 καὶ **8** = 650 καὶ **50** = 700 καὶ **300** = 1000. Ἡ διαφορὰ εἶναι 358.

Ἐννοεῖται δέ, ὅτι ὁ μαθητὴς κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἀφαιρέσεως, πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπ' ὄψιν τὰς συντομίας τῆς ἀφαιρέσεως κλπ. τῆς § 53 τοῦ βιβλίου του τῆς Ἀριθμητικῆς.

Πότε γίνεται ἡ ἀφαίρεσις καὶ πότε ὄχι.—Ὅταν ἔχωμεν δύο ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς ἢ δύο συγκεκριμένους ὁμοειδεῖς δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τοὺς ἀφαιροῦμεν **πάντοτε.**.

Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἡ ἀφαίρεσις γίνεται, ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀφαιρετέου ἢ ἴσος του.

Ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον, ἡ ἀφαίρεσις δὲν γίνεται, ἤτοι εἶναι **ἀδύνατος.**

Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ ἀφαίρεσις, ὅταν ὁ μειωτέος καὶ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι συγκεκριμένοι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί. Ἀλλ' εἰς τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἀπὸ 5 πορτοκάλια δὲν ἠμποροῦμεν φυσικὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν 3 λεμόνια.

Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν 5 **κιλὰ** ζάχαρη, ἠμποροῦμεν νὰ πάρωμεν (ν' ἀφαιρέσωμεν) ἀπὸ αὐτὰς 2 **ὀκάδας** διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα γλύκισμα. Ἂν θέλωμεν ὅμως νὰ ἴδωμεν πόση ζάχαρη μᾶς ἀπέμεινε, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν: 5 κιλὰ ζάχαρη — 2 ὀκάδες ζάχαρη, ἀλλὰ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὅπως εἶναι γραμμένη ἔτσι. Πρέπει προηγουμένως νὰ τρέψωμεν ἢ τὰ κιλὰ εἰς ὀκάδας ἢ τὰς ὀκάδας εἰς κιλά. **Πρέπει δηλαδὴ τὰ ὁμοιειδῆ αὐτὰ ποσὰ νὰ μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

Ἔτσι, ἐὰν ἀπὸ ἕνα ὕφασμα 2 πήχεων κόψωμεν 3 ρούπια καὶ θέλωμεν νὰ ἴδωμεν πόσον ὕφασμα μᾶς ἀπέμεινε, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τὴν ἀφαίρεσιν

2 πήχεις — 3 ρούπια

ἀλλὰ διὰ νὰ τὴν ἐκτελέσωμεν, θὰ τρέψωμεν πρῶτα τοὺς πήχεις εἰς ρούπια. Ἐπειδὴ δὲ 2 πήχεις = 8 ρούπια + 8 ρούπια = 16 ρούπια θὰ γράψωμεν

16 ρούπια — 3 ρούπια = 13 ρούπια.

Ἐδῶ δὲ ἀκόμη πρέπει νὰ προσέξωμεν, ὅτι, ὁ μειωτέος, ὁ ἀφαιρετέος καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι καὶ οἱ τρεῖς ὁμοιειδεῖς ἀριθμοί.

Σημείωσις. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως, εἰς τὸν πρακτικὸν βίον, τὸ λέγομεν διαφοροτρόπως. Λέγομεν π. χ.

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ λογαριασμοῦ.
Ἡ διαφορὰ τῶν τιμῶν.
Αἱ ἐπὶ πλέον δαπάναι.
Ἡ ὑπεροχὴ ἑνὸς ὕψους ἀπὸ ἕνα ἄλλο.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 42.

39) 1.

$$\begin{array}{r} 4567 \\ 3289 \\ \hline 1278 \end{array}$$

ἤτοι 4567 — 3289 = 1278
Δοκιμὴ 3289 + 1278 = 4567
ἢ 4567 — 1278 = 3289.

2.	20004	ἤτοι	20004 — 7895 = 12109
	7895	Δοκιμὴ	7895 + 12109 = 20004
	12109	ἢ	20004 — 12109 = 7895.
3.	13578	ἤτοι	13578 — 6596 = 6982
	6596	Δοκιμὴ	6596 + 6982 = 13578
	6982	ἢ	13578 — 6982 = 6596.
4.	80304	ἤτοι	80304 — 25607 = 54697
	25607	Δοκιμὴ	25607 + 54697 = 80304
	54697	ἢ	80304 — 54697 = 25607.

40) **1.** 5702—3843=1859 **2.** 47932— 8647=39285
3. 13004—7349=5655 **4.** 147285—59697=87588

41) **1.** α΄) 150—65=85 β΄) (150—40)—25=110—25=85
2. α΄) 120—95=25 β΄) [(120—64)—23]—8=
=(56—23)—8=33—8=25.
3. α΄) 158—30=128 β΄) (56—30)+28+74=
=26+28+74=128
4. α΄) 99—24=75 β΄) 67+(32—24)=67+8=75.

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

Σελὶς 43.

42) Εἰς αὐτὰς πρέπει νὰ ἐφαρμόσῃ ὁ μαθητὴς ὅσα λέγονται εἰς τὴν § 53 καὶ ὅσα εἴπομεν ἡμεῖς ἀνωτέρω.

Τώρα εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (3) 78—29 ἠμπορεῖ νὰ ἀφαιρέσῃ 30 καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσῃ 1. Ἔτσι θὰ εὕρῃ 48+1=49.

Ὁμοίως εἰς τὴν ἀφαίρεσιν (5) 964—96 θὰ ἀφαιρέσῃ 100 καὶ ἔπειτα θὰ προσθέσῃ 4. Ἔτσι θὰ εὕρῃ 864+4=868.

Προβλήματα ἀφαιρέσεως — Λύσεις.

Σελὶς 43.

44) Ἐδῶ μειωτέος εἶναι ἡ χρονολογία τοῦ τρέχοντος ἔτους π. χ. ἡ 1949 καὶ ἀφαιρετέος ἡ δεδομένη χρονολογία.

45) Ἐπέρασαν 1821—1453=368 ἔτη.

46) Εἶναι ὑψηλότερον κατὰ 8840 μ.—2918 μ.=5922 μ.
47) (Ἀξία+κέρδος)—κέρδος=ἀξία, ἤτοι:
75350 δρχ.—16450 δραχ.=58900 δραχ.
48) Τοῦ μένουν ἀκόμη 1378 ὀκ.—842 ὀκ.=536 ὀκ.
49) α΄) (Ἀξία κήπου καὶ οἰκίας)— ἀξία κήπου = ἀξία οἰκίας ἤτοι 27 545 600 δρχ.—3 865 750 δρχ. = 23 679 850 δρχ.
β΄) Ἀξία οἰκίας—ἀξία κήπου=19 814 100 δρχ.
50) (ἔσοδον ἐκ σίτου + ἔσοδον ἐκ γεωμ.)—ἀξ. ἵππου=ἀπομείναντα χρήματα).
(8 474 900 δρχ. + 5 654 780 δρχ.) — 8 652 000 δρχ. =
= 5 477 680 δρχ.
51) Κέρδος θυγατρὸς=350750 δρχ.—76500 δρχ.=274250 δρχ.
Κέρδος τῶν δύο=625000 δρχ.
52) χρέος + ὑπόλοιπον = δάνειον + δρχ. ἐξ ἀρχῆς
ἤτοι 27650 δρχ.+3450 δρχ.=17450 δρχ.+δρχ. ἐξ ἀρχῆς
ἢ 31100 δρχ.=17450 δρχ.+δρχ. ἐξ ἀρχῆς.

Εἶχον λοιπὸν ἐξ ἀρχῆς 31100—17450=13650 δρχ.
53) χρέος=δάνειον+ὑπόλοιπον+δρχ. ἐξ ἀρχῆς, ἤτοι
37450=12600+3250+δρχ. ἐξ ἀρχῆς. ἢ
37450=15850+δρχ. ἐξ ἀρχῆς

Εἶχον λοιπὸν 37450—15850=21600 δρχ.
54) Ὁ μεγαλύτερος=3748—1859=1889
55) Ὁ μικρότερος=14875—5839=9036
56) Ὁ μεγαλύτερος τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 2763—857=1906.
Ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 1906—857=1049.
*57) **1.** α=101001—53068=47933
2. α=17023—10909=6114
58) 3029+9072—5948=12101—5948=6153
ἢ (§ 48, II)=3029+(9072—5948)=3029+3124=6153
59) **1.** α= 53608— 4506=49102
2. β=102032—84302=17730
3. γ= 43628—37153=6475
4. δ=735200—537609=197591.
60) **1.** Μειωτέος—Διαφορὰ=Ἀφαιρετέος
ἤτοι, 7632—5269=2363 ἢ 7632

$$\begin{array}{r} 7632 \\ \underline{2363} \\ 5269 \end{array}$$

2. Μειωτέος=ἀφαιρετέος+διαφορὰ=9726· ὥστε

$$\begin{array}{r} 9726 \\ 7689 \\ \hline 2037 \end{array}$$

3. Ἐδῶ θὰ εἴπομεν 6+2=8, 1 ἀπὸ 7=6 καὶ 4+2=6.
Ὥστε εἶναι

$$\begin{array}{r} 678 \\ 466 \\ \hline 212 \end{array}$$

4. Ἐδῶ θὰ εἴπωμεν 0 ἀπὸ 1=1, 7 ἀπὸ 9=2, 5+6=11 ἤτοι γράφωμεν ἐπάνω εἰς τὴν τρίτην θέσιν 1 καὶ ἔπειτα λέγομεν 1 καὶ 2=3,3 ἀπὸ 4=1. Ὥστε εἶναι

$$\begin{array}{r} 4191 \\ 2520 \\ \hline 1671 \end{array}$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Παρατηρήσεις καὶ ὁδηγίαι.—Ἡ πρώτη ἔννοια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον εἶναι εὔκολος. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι συγγενὴς μὲ τὴν πρόσθεσιν. Διὰ νὰ τὸν κατανοήσῃ ὅμως ὁ μαθητὴς ἐντελῶς, πρέπει νὰ προσέξῃ ἰδιαιτέρως τὰ ἑξῆς:

1ον. Τὸ ἄθροισμα 5+5+5+5+5+5 γράφεται 5 × 6. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα

5 μῆλα + 5 μῆλα + 5 μῆλα + 5 μῆλα + 5 πορτοκ. + 5 πορτοκ.

γράφεται: 5 μῆλα × 4 + 5 πορτοκ. × 2.

2ον. Τὸ γινόμενον 4×3 εἶναι ἴσον μὲ τὸ 3×4. Ἀλλὰ

4×3 σημαίνει 4+4+4, ἐνῷ τὸ
3×4 σημαίνει 3+3+3+3.

3ον. Εἰς ἓν ἁπλοῦν πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ, δηλαδὴ εἰς πρόβλημα τὸ ὁποῖον λύεται μὲ ἕνα πολλαπλασιασμόν, ὁ μαθητὴς ἀφοῦ εὕρῃ ποῖος εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ποῖος ὁ πολλαπλασιαστής, πρέπει νὰ γράψῃ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον καὶ ἔπειτα τὸν πολλαπλασιαστήν. Ἀλλὰ τὸν τελευταῖον αὐτόν, θὰ τὸν λαμβάνῃ **πάντοτε** ὡς ἀφῃρημένον ἀριθμόν. Π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα:

«Εἷς καθένα ἐκ 4 μαθητῶν ἔδωσα 5 μῆλα. Πόσα μῆλα ἔδωσα ἐν ὅλῳ;» πρέπει νὰ γράψη 5 μῆλα × 4 = 20 μῆλα καὶ ὄχι 5 μῆλα × 4 μαθ. ἢ 4 × 5 μῆλα. Διότι ἐδῶ ἐπαναλαμβάνεται ὁ ἀριθμὸς 5 μῆλα. Ὁ δὲ συγκεκριμένος ἀριθμὸς 4 μαθηταὶ εἷς τὸ πρόβλημα, δεικνύει ὅτι τὰ 5 μῆλα θὰ τὰ ἐπαναλάβωμεν 4 φοράς. Ἔτσι, ἐὰν π. χ. τὸν ἀριθμὸν 15 πορτοκάλια τὸν εὕρομεν, ἀπὸ ἕνα πολλαπλασιασμὸν ἀκεραίων, θὰ τὸν ἔχωμεν εὕρη ἢ ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν 5 πορτ. × 3 ἢ ἀπὸ τὸν 3 πορτ. × 5.

ΠΙΝΑΞ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

(Πυθαγόρειος)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

Ἐκτέλεσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. — Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι εἶναι πρᾶξις ἡ ὁποία γίνεται πάντοτε. Ἀλλὰ διὰ νὰ τὸν ἐκτελέση ὁ μαθητὴς ὀρθά, χωρὶς σφάλματα καὶ μὲ εὐκολίαν πρέπει πρῶτον **ἀπαραιτήτως** νὰ γνωρίζη ἀπὸ μνήμης τὸν πίνακα πολλαπλασιασμοῦ σελὶς 55 (Πυθαγόρειος πίναξ). Ἂν δὲ μάλιστα τὸν ἐπεκτείνῃ μέχρι τοῦ 20 ἢ ἔστω καὶ μέχρι τοῦ 15 καὶ τὸν ἀπομνημονεύσῃ, θ' ἀποκτήσῃ μεγάλην ἱκανότητα, ὄχι μόνον εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ γραπτοῦ ἢ τοῦ ἀπὸ μνήμης, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν διαφόρων ἄλλων πράξεων. Τοιοῦτον πίνακα μέχρι τοῦ 15 δίδομεν εἰς τὴν σελίδα 15. Εἰς αὐτὸν π. χ. τὸ γινόμενον 13 × 14 = 182, τὸ εὑρίσκομεν εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸν 13 (ἢ ἀπὸ τὸν 14) καὶ τῆς κατακορύφου ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸν 14 (ἢ ἀπὸ τὸν 13). Διότι 13×14 = 14×13.

Ἂν εἶναι δύσκολον ν' ἀπομνημονεύσῃ τὸν πίνακα τῆς σελ. 15, ἃς ἀπομνημονεύσῃ τὰ κατωτέρω γινόμενα τοῦ 12 καὶ τοῦ 15 ἐπὶ 2, 3, ... 12, διότι ταῦτα παρουσιάζονται εἰς τὴν πρᾶξιν συχνότερα.

12 ×	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 56.

61) **1** καὶ **2.** 945×10=9450, 10×348=3480 κ.ο.κ. (§ 64)

3. 456×8= 3648, 7602×7= 53214,
5904×9=53136, 48745×6=292470.

4. 9× 657= 5913, 8×4532=36256,
7×2069=14483, 6×2394=14364.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 57.

62) **1.** 78× 600= 46800 78× 6= 468
493×7000= 3451000 493× 7= 3451 (§ 67)
2965×8000=23720000 2965× 8=23720

2. 5000× 345= 1725000 5× 345= 1725
300×1956= 586800 3×1956= 5868
9000× 106= 954000 9× 106= 954

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 58.

63) 1. $3764 \times 75 = 282300$, $4793 \times 236 = 1\,131\,148$
$128 \times 7432 = 951296$

2. $704 \times 398 = 280192$, $2006 \times 847 = 1\,699\,082$
$8007 \times 309 = 2\,474\,163$

3. $245000 \times 3500 = 857\,500\,000$, $245 \times 35 = 8575$
$270 \times 18000 = 4\,860\,000$, $27 \times 18 = 486$
$84006 \times 9300 = 781\,255\,800$, $84006 \times 93 = 7812558$

64)
$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \alpha')\ 20 \times 3 = 60 \\ \beta')\ 5 \times 3 + 7 \times 3 + 8 \times 3 = 15 + 21 + 24 = 60 \\ \alpha')\ 26 \times 6 = 156 \\ \beta')\ 10 \times 6 + 5 \times 6 + 11 \times 6 = 60 + 30 + 66 = 156 \end{array}\right\} \S\ 60$$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ \alpha')\ 4 \times 23 = 92 \\ \beta')\ 4 \times 8 + 4 \times 9 + 4 \times 6 = 32 + 36 + 24 = 92 \\ \alpha')\ 7 \times 47 = 329 \\ \beta')\ 7 \times 25 + 7 \times 13 + 7 \times 9 = 175 + 91 + 63 = 329 \end{array}\right\} \S\ 61$$

Ἀσκήσεις (ἀπὸ μνήμης).

Σελὶς 60.

65) Μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν § 72 καὶ 73 καὶ τῶν ὁδηγιῶν (σελ. 14) τὰ ἀπὸ μνήμης ζητούμενα γινόμενα εὑρίσκονται εὐκόλως.

Προβλήματα πολλαπλασιασμοῦ — Λύσεις.

Σελίδες 61 - 63.

66) Τιμὴ τῶν 12μ. = τιμὴ τοῦ 1 μ. × τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων, ἤτοι 17500 δραχ. × 12 = 210000 δραχ.

67) Ἄθροισμα = Εἷς τῶν ἴσων προσθετέων × τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν, ἤτοι 2600 × 350 = 910000.

68) = Στροφαὶ τροχοῦ × ἀριθμὸν λεπτῶν = 45 × 60 = 2700

69) = 340 μ. × 15 = 5100 μ.

70) Ἐπλήρωσεν 12600 δραχ. × 125 + 4600 δραχ. × 245 =
= 1 575 000 δρχ. + 1 127 000 δρχ. = 2 702 000 δραχ.

71) Ὀφείλει 5425 δρ. × 145 — (2015 δρ. × 79 + 367290 δρ.) =
= 786625 δρ. — (159185 δρ. + 367290 δρ.)
= 786625 δρ. — 526475 δρ. = 260150 δρ.

72) α' Τρόπος. Πληρώνει εἰς τὸν κάθε ἐργάτην τὴν ἑβδομάδα
23000 δρ. $\times 6 = 138000$ δρ.
25000 δρ. $\times 6 = 150000$ δρ.
30000 δρ. $\times 6 = \underline{180000}$ δρ.
πληρώνει καθ' ἑβδομάδα $= 468000$ δρ.

β' Τρόπος. Πληρώνει τοὺς 3 ἐργάτας ὁμοῦ εἰς 1 ἡμέραν
23000 δρ. $+ 25000$ δρ. $+ 30000$ δρ. $= 78000$ δρ.
πληρώνει καθ' ἑβδομάδα 78000 δρ. $\times 6 = 468000$ δρ.

73) Ἐξοδεύει 18 χιλ. $\times 4 +$ 13 χιλ. $\times 12 +$ 12 χιλ. $\times (28-16) =$
$=$ 72 χιλ. $+$ 156 χιλ. $+$ 144 χιλ. $= 372000$ δραχμάς.

74) Ἀπέχει 13 μ. $\times 27 +$ 15 μ. $\times (42-27) =$ 13 μ. $\times 27 +$
$+$ 15 μ. $\times 15 =$ 351 μ. $+$ 225 μ. $=$ 576 μ.

75) Ἀπέχουν 235 χλμ. $-$ (16 χλμ. $\times 4 +$ 12 χλμ. $\times 4) =$
$=$ 235 χλμ. $-$ (64 χλμ. $+$ 48 χλμ.) $=$ 123 χλμ.
ἤ 235 χλμ. $-$ (16 χλμ. $+$ 12 χλμ.) $\times 4 =$
$=$ 235 χλμ. $-$ 28 χλμ. $\times 4 =$ 235 χλμ. $-$ 112 χλμ. $=$
$=$ 123 χλμ.

76) Γάλα καθ' ἡμέραν, 8 ὀκ. $\times 2 = 16$ ὀκ.
Γάλα τὸν μῆνα, 16 ὀκ. $\times 30 = 480$ ὀκ.
Εἴσπραξις, 3000 δρ. $\times 480 = 1\,440\,000$ δραχμάς.
Ἔξοδα, 16500 δρ. $\times 30 = 495000$ δραχμάς.
Κέρδος, $1\,440\,000$ δρ. $- 495\,000$ δρ. $= 94\,500$ δραχμάς.

77) Θὰ δώσωμεν $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

78) 1. $45 + 513 + 48 = 606$.
2. $2002 + 720 + 780 = 3502$.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.
Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελίδες 64 - 67.

79) 1. $= 2 \times 5 \times 3 = 10 \times 3 = 30$, $= 4 \times 25 \times 8 = 100 \times 8 = 800$.
2. 1728, 3780, 3600.
3. 22 624 420, 776 640, 1 435 000.

80) 1ον. $8 \times 4 \times 5 \times 12 = 1920$. 2ον. $25 \times 9 \times 4 \times 9 = 8100$.

82) Ἀξίζει 2000 δρ. $\times (5 \times 4 \times 6) = 240000$ δρχ.

83) Ἐξοικονόμησεν 12000 δρ. $\times (8 \times 80) = 7\,680\,000$ δρχ.

84) Ἔρριψαν 12 ὀβ. $\times (5 \times 15 \times 4) = 3600$ ὀβ.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁδηγίαι.— Εἰς τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην, δίδει γινόμενον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρετέου (§ 84).

Πρὸς τοῦτο θὰ μᾶς βοηθήσῃ ὁ Πυθαγόρειος πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Γενικὰ δὲ ὅσῳ περισσοτέραν ἱκανότητα ἔχομεν εἰς τὸν ἀπὸ μνήμης πολλαπλασιασμόν, τόσῳ εὐκολώτερα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Ὅταν ὁ μαθητὴς δὲν εἶναι ἠσκημένος εἰς τὴν διαίρεσιν καὶ μέχρις ὅτου ἀσκηθῇ εἰς αὐτήν, ἠμπορεῖ, πρὶν ἢ ἀρχίσῃ τὴν ἐκτέλεσιν μιᾶς διαιρέσεως, ἡ ὁποία ἰδιαίτερα ἔχει πολυψήφιον πηλίκον, νὰ σχηματίζῃ τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, 2, 3 κλπ. μέχρι τοῦ 9. Π. χ. εἰς τὴν διαίρεσιν 282543 : 372 θὰ σχηματίσῃ τὰ ἐννέα γινόμενα τοῦ 372, ἤτοι τὰ

$372\times1=\ 372$	$372\times6=2232$
$372\times2=\ 744$	$372\times7=2604$
$372\times3=1116$	$372\times8=2976$
$372\times4=1488$	$372\times9=3348$
$372\times5=1860$	

Ἔτσι βλέπομεν, ὅτι τὸ μεγαλύτερον γινόμενον τοῦ 372 τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον 2825, εἶναι τὸ $372\times7=2604$.

282543	372
2604	959
2214	
1860	
3543	
3348	
195	

Τὸ πρῶτον λοιπὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 7.

Ἔπειτα βλέπομεν, ὅτι τὸ μεγαλύτερον γινόμενον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 2214 εἶναι τὸ $372\times5=1860$. Τὸ δεύτερον λοιπὸν ψηφίον τοῦ πηλίκου εἶναι 5. Μὲ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 372 χωρεῖ εἰς τὸν 3543, ἐννέα φοράς. Ὥστε τὸ πηλίκον εἶναι 759.

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης (σελ. 70)

$$\text{Διαιρετέος}=\text{Διαιρέτης}\times\text{Πηλίκον}+\text{Ὑπόλοιπον}$$

ἤτοι ἡ ἰσότης (σελ. 71) $\Delta=(\delta\times\pi)+\upsilon$, ὅπου $\upsilon<\delta$ (1)

εἶναι σημαντική. Πρέπει πάντοτε νὰ τὴν ἐνθυμούμεθα, εἰς ζητήματα σχετικὰ μὲ τὴν διαίρεσιν, διότι ἔχει πολλὰς ἐφαρμογάς.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον υ, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα (§ 46)

$$(\Delta-\upsilon)=\delta\times\pi \qquad \text{(τελεία διαίρεσις)} \quad (2)$$

ἢ ἐὰν εἶναι $\upsilon=0$ ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\Delta=\delta\times\pi \qquad (3)$$

Ἔτσι λοιπὸν ἠμποροῦμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς πολλὰς ἐρωτήσεις σχετικὰς μὲ τὴν διαίρεσιν. Π. χ.

1) **Διατί** (§ 87, παρ. 3η) **6 : 1=6 ;** ἢ **12 : 1=12 ;**
διότι $6\times1=6$ καὶ $12\times1=12$.

2) **Διατί 7 : 7=1 ;** ἢ **8 : 8=1 ;**
διότι $1\times7=7$ καὶ $1\times8=8$.

3) **Ποῖος ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 12, δίδει γινόμενον 96 ;**

Ἀφοῦ 12× τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν =96, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι (ἰσότης 3) τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $96 : 12=8$ $(8\times12=96)$. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα λοιπὸν $\alpha=\beta\times\gamma$ προκύπτουν δύο διαιρέσεις αἱ:

$$\alpha : \beta=\gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha : \gamma=\beta$$

4) **Πῶς ἠμποροῦμεν νὰ δοκιμάσωμεν ἐὰν μία διαίρεσις ἔγινε χωρὶς λάθος ;**

Τὴν δοκιμάζομεν, βασιζόμενοι εἰς τὴν ἰσότητα (1) (§ 99) ἢ ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ ὑπόλοιπον υ (ἰσότης 2) καὶ τὴν διαφορὰν Δ—υ τὴν διαιρέσωμεν μὲ τὸ πηλίκον. Τότε δὲ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν διαιρέτην.

Ἀσκήσεις - Λύσεις.

Σελίδες 79 - 80.

85) καὶ ***87).*** Βλέπε προηγουμένην ἐρώτησιν 3.

88) Εἶναι ἐφαρμογὴ τῆς ἰσότητος (§ 85).

Διαιρετέος=διαιρέτης×πηλίκον+ὑπόλοιπον

1. Διαιρετέος= $43\times15+42=687$.

2. Διαιρετέος= $57\times143+6=8157$.

3. Διαιρετέος=$103\times103+19=10628$.

Εἰς τὴν θέσιν λοιπὸν τῶν ἐρωτηματικῶν θὰ θέσωμεν μὲ τὴν σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς 687, 8157, 10628.

89) Ἀπὸ τὸν διαιρετέον θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὴν διαφορὰν ποὺ θὰ εὕρωμεν θὰ τὴν διαιρέσωμεν μὲ τὸ πηλίκον. Τότε τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς θὰ εἶναι ὁ διαιρέτης ποὺ ζητοῦμεν. Ἔτσι ἔχομεν :

1. Διαιρέτης$=(738-18):16=45$

2. Διαιρέτης$=(1047-27):12=85$

90) **1.** $60:2=30$ καὶ $30:3=10$ ἢ διὰ μιᾶς $60:6=10$

2. $80:4=20$ καὶ $20:10=2$ ἢ διὰ μιᾶς $80:40=2$

3. $36:9=4$ καὶ $4:2=2$ ἢ διὰ μιᾶς $36:18=2$

91) **1.** α′) $120:3=40$ β′) $24:3+36:3+60:3=$
$=8+12+20=40$

2. α′) $105:6=21$ β′) $45:5+35:5+25:5=$
$=9+7+5=21$

3. α′) $225:25=9$ β′) $75:25+50:25+100:25=$
$=3+2+4=9$

4. α′) $92:4=23$ β′) $20:4+28:4+44:4=$
$=5+7+11=23$

92) **1.** α′) $6:3=2$ β′) $18:3-12:3=6-4=2$

2. α′) $28:4=7$ β′) $64:4-36:4=16-9=7$

3. α′) $8:8=1$ β′) $32:8-24:8=4-3=1$

4. α′) $144:9=16$ β′) $324:9-180:9=36-20=16$

93) **1.**$=25\times(36:9)=25\times4=100$ **2.**$=35\times7=245$ (§ 95)

3.$=21\times(14:7)\times20=21\times2\times20=840$
ἢ $(21:7)\times14\times20=3\times14\times20=840$
4.$=12\times7=84$

94) **1.** Πηλ. 237, ὑπ. 9. Ὥστε, $3564=15\times237+9$

2. Πηλ. 863, ὑπ. 44. Ὥστε, $57865=67\times863+44$

3. Πηλ. 49, ὑπ. 60. Ὥστε, $10056=204\times49+60$

4. Πηλ. 93, ὑπ. 85. Ὥστε, $47329=508\times93+85$

Σελὶς 84.

97) Ἐφαρμογὴ τῆς συντομίας τῆς § 100.

1.	375(42	42(00	**2.**	80(645	9(000	**3.**	385(00	6(00
	39 42	8		8 645	8		25	64
							1 00	

Προβλήματα διαιρέσεως. — Λύσεις.

Σελίδες 85 - 87.

98) Ἀφοῦ εἰς 30 ἡμέρας ἐξοδεύει 728 550 δραχμάς, εἰς 1 ἡμέραν θὰ ἐξοδεύει 30 φορὰς ὀλιγώτερον. Ἤτοι

728 550 δραχμὰς : 30 = 24 285 δραχμάς.

Ἐδῶ καθὼς βλέπομεν ἐχωρίσαμεν (ἐμερίσαμεν) τὰς 728550 δραχμὰς εἰς 30 ἴσα μέρη. Τὸ καθὲν δὲ μέρος (τὸ πηλίκον) εἶναι 24285 δραχμαί, ἤτοι ὁμοειδὲς μὲ τὸν διαιρετέον. Ἡ ἀνωτέρω λοιπὸν διαίρεσις εἶναι διαίρεσις μερισμοῦ καὶ ἡ δαπάνη τὴν ἡμέραν εἶναι 24285 δραχμαί.

99) Ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ 2 370 450 δραχμαὶ εἰς τὰς 7 111 350 δραχμάς, μετὰ τόσα ἔτη θὰ δυνηθῇ νὰ ἀγοράσῃ τὸ κτῆμα. Ἤτοι μετὰ

7 111 350 : 2 370 450 = 3 ἔτη.

Ἐδῶ ἡ διαίρεσις εἶναι μέτρησις καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς εἶναι ὁ ἀφῃρημένος ἀριθμὸς 3, ὅστις λαμβάνει τὴν ὀνομασίαν ἔτη διότι ἔτη ζητεῖ τὸ πρόβλημα.

100) Ταχύτης κατὰ 1'' = 21525 μ. : 15=1435 μ. (μερισμός).

101) Ταχύτης κατὰ 1'' = 8500 μ. : 25= 340 μ. (»).

102) Φθάνει εἰς 150 000 000 : 300 000 = 500'' (μέτρησις).

103) Ἀξία 1 λεμ. 1200 δρχ. : 8 = 150 δρ. (μερισμὸς)
Μὲ 3 χιλδρ. ἀγοράζομεν 3000 : 150 = 20 λεμ. (μέτρησις).

104) Ἀξία 85 ὀκ. = 692250—416000=276250 δρχ.
Ἀξία 1 ὀκ. = 276250 δρχ. : 85=3250 δρχ. (μερισμός).
Χωρεῖ τὸ βαρέλιον, 692250 : 3250 = 213 ὀκ. (μέτρησις).
ἢ ἄλλως, ὑπόλοιποι ὀκάδες, 416000 : 3250 = 128 ὀκ.
Χωρεῖ τὸ βαρέλιον 85 ὀκ. + 128 ὀκ. = 213 ὀκ.

105) Ἠγόρασε τὸ 1 μέτρον 190 χιλ. : 5 = 38 χιλ. (μερισμός).
Ἐπώλησε τὸ 1 μέτρον 495 χιλ. : 11=45 (»).
Ἐκέρδισεν εἰς 1 μέτρον 45 χιλ. — 38 χιλ.=7 χιλ.
Ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ 224 : 7 = 32 μέτρα (μέτρησις).

106) Ἠγόρασε τὸ 1 μέτρον, 526625 δρχ. : 5 = 105325 δρχ.
Ἠγόρασεν ἐν ὅλῳ 1 263 900 : 105 325 = 12 μέτρα.

107) Φόρος δι' 1 μέτρον, 4 500 000 δρχ. : 250 = 18 000 δρχ.
Ὁ πρῶτος εἰσήγαγε 3 150 000 : 18 000=175 μέτρα.
Ὁ δεύτερος » 250 μέτ.—175 μέτ.=75 μέτρα.
ἢ ἄλλως (4 500 000—3 150 000) : 18 000=75 μέτρα.

108) Ἐπώλησε τὴν 1 ὀκ. σίτου 1 776 600 δρχ. : 564=3150 δρχ.
Ἐπώλησε τὴν 1 ὀκ. κριθῆς 3150 δρ.—850 δρ.=2300 δρχ.
Ἠγόρασε κριθήν, 441600 : 2300=192 ὀκ.

109) Ἐπώλησε τὰ 19 πρόβατα ἀντὶ
94825 δρχ.×19=1 801 675 δρχ.
Ἐπώλησε τὰ 37 ἀρνιὰ ἀντὶ
3 949 340 δρχ.—1 801 675 δρχ.=2 147 665 δρχ.
Ἐπώλησε τὸ 1 ἀρνίον ἀντὶ
2 147 665 δρχ. : 37=58 045 δρχ.

110) Οἱ ἀργαλιοὶ ὑφαίνουν τὴν ἡμέραν 208 μ.×10=2080 μ.
Παράγει 52000 μ. εἰς 52000 : 2080=25 ἡμέρας.

111) Ἐπὶ (13800+71) : 97=13871 : 97=143.

112) Θὰ τὸν ἐπαναλάβωμεν 18231 : 309=59 φοράς.

113) Θὰ εὕρωμεν πάλιν πηλίκον π. Διότι ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον α καὶ τὸν διαιρέτην β ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γ. Τὸ πηλίκον λοιπὸν εἶναι τὸ ἴδιον π (§ 92, IV), (τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι 0, ἀφοῦ 0 εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως α : β).

114) (15×32+8) : 8=(480+8) : 8=488 : 8=61 ἢ
(15×32) : 8+8 : 8=15×4+1=60+1=61.

Προβλήματα ἐπὶ τῶν 4 πράξεων τῶν ἀκεραίων.— Λύσεις

Σελίδες 87 - 89.

115) Κέρδος ἐν ὅλῳ, 300 δρχ. ×265=79500 δρχ.
Θὰ πωλήσῃ τὸν σῖτον ἀντὶ 543250 δρχ.+79500 δρχ.= =622750 δρχ.

116) Κέρδος εἰς 1 πῆχυν, 405 χιλ. : 135=3 χιλ.
Θὰ πωλήσῃ τὸν 1 πῆχυν, 28 χιλ. +3 χιλ. =31 χιλ.
Θὰ εἰσπράξῃ, 31 χιλ. ×135=4185 χιλ. = 4 185 000 δρχ.

117) Ἠγόρασεν 40 μ. ×15=600 μ. καὶ ἐπώλησεν:
1) 250 μ. μὲ κέρδος 4 χιλ. τὸ 1 μ.
Ὅλον κέρδος 4 χιλ.×250=1000 χιλ.
2) 260 μ. μὲ κέρδος 6 χιλ. τὸ 1 μ.
Ὅλον κέρδος 6 χιλ.×260=1560 χιλ.
3) 90 μ. μὲ κέρδος 3 χιλ. τὸ 1 μ.
Ὅλον κέρδος 3 χιλ.× 90= 270 χιλ.
εἰς τὰ 600 μέτρα ἐκέρδισεν 2830 χιλ.

118) Ἐξοδεύει τὴν ἑβδομάδα 25 χιλ. ×7=175 χιλ.
Ἐξοικονομεῖ τὴν » 380 χιλ. — 175 χιλ.=205 χιλ,
Θὰ ἀγοράσῃ τὴν μηχανὴν μετὰ 1845 : 205=9 ἑβδομ.

119) Οἰκονομεῖ τὸν μῆνα 120000 δρχ.—60000 δρ.=60000 δρχ.
Θὰ οἰκονομήσῃ 480000 δρχ., εἰς 480000 : 60000=8 μῆν.

120) Εἰσέπραξε, 1200 δρχ. × 50 = 60000 δρχ.
Ἐξόδευσε, 4500 δρχ. × 2 + 9000 δρχ. × 2 =
= 9000 δρχ.+ 18000 δρχ.=27000 δρχ.
Τῆς ἐπερίσσευσαν, 60000 δρχ. —27000 δρχ.=33000 δρχ.

121) Εἰσέπραξε, 1800 δρχ.×2000=3 600 000 δρχ.
Ἐπερίσευσαν 3 600 000 δρ.— 2 250 000 = 1 350 000 δρ.
Ἠγόρασεν 1 350 000 : 270000=5 πρόβατα.

122) Ἔδωκεν εἰς τὰς 4 οἰκογ. 50000 δρχ. ×4=200000 δρχ.
Καθεὶς τῶν 10 ἀπόρων ἔλαβε 300000 δρχ. : 10=30000 δρ.

123) Ἀξία χόρτου 950 δρχ. ×575 = 546250 δρχ.
Ἀξία κριθῆς 1400 δρχ. ×185 = 259000 δρχ.
Ἀξία ἀγορασθέντων . . . = 805250 δρχ.

Ἀξία βουτύρ. 36500 δρχ. × 3 = 109500 δρχ.
Ἀξία τυροῦ 12250 δρχ. ×25= 306250 δρχ.
Ἔδωκεν ἀπέναντι . . . . = 415750 δρχ.

Ἔδωκεν μετρητά:
805250 δρχ.— 415750 δρχ. = 389500 δρχ.

124) Ἀξία ἀγορᾶς 48000 δρ. ×125 = 6 000 000 δρχ.
Συντήρησις . . . . . . = 310 650 δρχ.
Τὰ 125 ἀρνιὰ ἐστοίχισαν . 6 310 650 δρχ.
Εἰσέπραξεν α) 52000 δρ. ×18 = 936 000 δρχ.
» β) 53500 δρ. ×45 = 2 407 500 δρχ.
» γ) 57800 δρ. ×57 = 3 294 600 δρχ.
Εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ . . . 6 638 100 δρχ.
Ἐκέρδισεν 6 638 100 δρ. – 6 310 650 δρ. = 327 450 δρχ.

125) Ἡμερομίσθια ἐργατῶν 6×20=120
Ἡμερομίσθια ἐργατριῶν 6×12= 72
Οἱ 20 ἐργάται ἔλαβον ἐπὶ πλέον 4150 δρχ. ×120=498 000 δρχ. Ὥστε αἱ 3 032 000 δρχ.— 498 000 δρχ. = 2 534 400 δρχ. ἀντιπροσωπεύουν 120+72=192 ἡμερομίσθια ἴσα μὲ τὸ ἡμερομίσθιον μιᾶς ἐργατρίας, ἤτοι μὲ

2 534 400 δρχ. : 192 = 13200 δραχ.

Ἡμερομίσθιον λοιπὸν ἐργάτου 13200 δρ. +4150 δρ.=17350 δρ. καὶ ἡμερομίσθιον μιᾶς ἐργατρίας 13200 δρχ.

126) Ἀξ. 1 ὀκ. καφὲ ἐπὶ πλέον 19800—11600=8200 δραχ.
Αἱ ἐπὶ πλέον 24600 δρ. ἐδόθησαν διὰ 24600 : 8200=3 ὀκ.
Ἠγόρασε λοιπὸν καφὲ καὶ ζάκχαριν ἀπὸ 3 ὀκάδας
καὶ ἐπλήρωσε διὰ τὴν ζάκχαριν 11600×3=34800 δραχ.
καὶ » » τὸν καφὲν 19800×3=59400 δραχ.

127) Ἐὰν ἠγόραζεν ἀπὸ μίαν ὀκᾶν ἐξ ἑκάστου εἴδους θὰ ἐπλήρωνε 14200 δρχ.+5350 δρχ.=19550 δρχ. Ὥστε ἠγόρασεν ἐξ ἑκάστου εἴδους 136850 : 19550=7 ὀκάδας.

128) Ἐπλήρωσαν οἱ 2 ἀδελφοὶ ἐπὶ πλέον 57500 δρχ. ×2= =115000 δρχ. Ὥστε αἱ 920500 δρχ.—115000 δρχ.=805500 δρχ. χρέος ἐπληρώθησαν ὑπὸ τῶν 3 ἀδελφῶν ἐξ ἴσου. Καὶ ἐπειδὴ

805500 δρχ. : 3=268500 δρχ.

ὁ νεώτερος ἐπλήρωσεν 268500 δρχ. καὶ καθεὶς τῶν δύο ἄλλων ἐπλήρωσεν 268500 δρχ.+57500 δρχ.=326000 δρχ.

129) Τὸ 7πλάσιον τῆς ἀξίας τοῦ μόσχου εἶναι

1 732 350 δρχ.—4 350 δρχ.=1 728 000 δραχ.

Ὥστε αἱ 1 728 000 δρχ. πρέπει νὰ διαιρεθοῦν εἰς 8 ἴσα μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ 1 μέρος εἶναι ἡ ἀξία τοῦ μόσχου καὶ τὰ ἄλλα 7 μέρη σὺν 4350 δρχ. εἶναι ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδος. Ἐπειδὴ δὲ

1 728 000 δρχ. : 8=216 000 δραχ.

ὁ μόσχος ἤξιζε 216000 δραχ. καὶ ἡ ἀγελὰς 216000 δρ.×7+4350 δρχ.=1 512 000 δρ. +4350 δρ.=1 516 350 δρχ.

130) Ὁ ἀνεψιὸς ἐπῆρε 1 μερίδιον καὶ ἡ ἀνεψιὰ 8, ἤτοι ἡ ἀνεψιὰ ἐπῆρε 7 μερίδια ἐπὶ πλέον, τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν 255500 δραχ. Τὸ 1 λοιπὸν μερίδιον εἶναι

255500 δρχ. : 7 = 36500 δραχμαί.

Ὥστε ὁ ἀνεψιὸς ἔλαβε 36500 δραχ. καὶ ἡ ἀνεψιὰ 36500 δραχ.×8=292000 δραχ.

131) Ὁ καθεὶς τῶν 30 μαθητῶν ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ

216000 δραχ. : 30=7200 δραχ.

Τὸ μερίδιον ὅμως ἀνῆλθεν εἰς 7200 δρχ.+1440 δρχ.=8640 δρχ. Ἐπλήρωσαν λοιπὸν τὰ ἔξοδα 216000 : 8640=25 μαθηταί.

132) Ἂν τὸ δεύτερον τεμάχιον ἦτο 1 μέτρον, τὸ πρῶτον θὰ ἦτο 4 μ. ἡ δὲ διαφορά των θὰ ἦτο 3 μ. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἡ διαφορά των 42 μ., τὸ δεύτερον πρέπει νὰ εἶναι 42 : 3=14 μ. Ὥστε τὸ πρῶτον τεμάχιον θὰ εἶναι 14 μ.×4=56 μ.

133) Τὸ 1 μέτρον τοῦ α΄ τεμαχίου, τιμᾶται περισσότερον τοῦ 1 μέτρου τοῦ β΄ τεμαχίου κατὰ 85 χιλ.—56 χιλ.=29 χιλ. Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ 29 χιλ. ἐπὶ πλέον εἶναι δι' 1 μέτρον, τὰ 928 χιλ. ἐπὶ πλέον εἶναι διὰ 928 : 29=32 μέτρα.

134) Ἡ διαφορὰ 90—20=70 εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ ἐσκέφθην. Καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς 70 : 2, ἤτοι ὁ 35 εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἐσκέφθην.

135) Διὰ νὰ συναντηθοῦν πρέπει ὁ ποδηλάτης καὶ ὁ πεζοπόρος μαζὺ νὰ διανύσουν 105 χιλιόμετρα. Ἀλλ' εἰς μίαν ὥραν διανύουν μαζὺ 16 χλμ.+5 χλμ.=21 χλμ. Ὥστε τὰ 105 χλμ. θὰ τὰ διανύσουν εἰς 105 : 21=5 ὥρας. Θὰ συναντηθοῦν λοιπὸν τὴν 13ην ὥραν (1 μ. μ.) εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πόλεως Α ἴσην μὲ 16 χλμ.×5=80 χλμ. ἢ κατ' ἄλλον τρόπον ἴσην μὲ

105 χλμ.—5 χλμ.×5=105 χλμ.—25 χλμ.=80 χλμ.

136) Εἰς μίαν ὥραν ὁ ποδηλάτης πλησιάζει τὸν πεζὸν κατὰ 16 χλμ.—5 χλμ. = 11 χλμ. Ὥστε θὰ φθάσῃ ὁ ποδηλάτης τὸν πεζὸν ἔπειτα ἀπὸ 55 : 11 = 5 ὥρας.

137) Θὰ κάμῃ 192 : 12 = 16 ὥρας καὶ θὰ φθάσῃ εἰς Βόλον τὴν 24ην ὥραν, ἤτοι τὸ μεσονύκτιον.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τὸ ἄθροισμα $5+5+5$ τὸ γράφομεν 5×3. Ἐνῷ τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ τὸ γράφομεν 5^3. Ἡ γραφὴ λοιπὸν 5^3 εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος, διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων ἴσων μὲ 5.

Ἔτσι ἡ δύναμις 7^2 φανερώνει γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ 7, ἤτοι τὸ γινόμενον 7×7 **(καὶ ὄχι δύο φορὰς τὸ 7).**

Τὸ γινόμενον 3×4 εἶναι ἴσον μὲ τὸ 4×3, ἐνῷ ἡ δύναμις 3^4 δὲν εἶναι ἴση μὲ τὴν 4^3 διότι

$$3^4=3\times3\times3\times3=81$$

$$\text{καὶ}\quad 4^3=4\times4\times4\quad=64.$$

Αἱ δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν ἔχουν πλείστας ἐφαρμογὰς καὶ ἰδιαίτερα αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Διὰ τοῦτο ὁ μαθητὴς πρέπει νὰ τὰς κατανοήσῃ καὶ νὰ τὰς ἐφαρμόζῃ μὲ εὐχέρειαν.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 91.

138) **1.** 5^3 **2.** 2^4 **3.** 4^5
4. 3^3 **5.** α^4 **6.** β^4

139) **1.** $11^2=11\times11=121$, $12^2=12\times12=144$, $13^2=169$, $14^2=196$, $15^2=225$.

2. $10^3=1000$, $20^3=8000$, $30^3=27000$.
$1\times1\times1=1$ (§ 114), $2\times2\times2=8$, $3\times3\times3=27$.
$40^3=64000$ $50^3=125000$
$4\times4\times4=64$ $5\times5\times5=125$

3. $3^4=3\times3\times3\times3=81$
$3\times3=9$, $9\times3=27$, $27\times3=81$
ἢ $3\times3=9$, $3\times3=9$ καὶ $9\times9=81$
$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$
$2\times2=4$, $4\times2=8$, $8\times2=16$, $16\times2=32$
ἢ $2\times2\times2=8$, $2\times2=4$, $8\times4=32$

140) $2^4=16$, $3^3=27$, $3^5=243$, $1^8=1$ (§ 114, 2α)
$5^2=25$, $8^3=512$, $12^3=1728$, $24^2=576$

141) 1. $2^3+3^2+4^2+1^5=8+9+16+1=34$
2. $8^2+2^4+5^2+1^4=64+16+25+1=106$
3. $8^2\times10^2\times1^5=64\times100\times1=6400$
4. $5^2\times10^3\times2^4=25\times1000\times16=400000$

142) Ἀφοῦ κάθε σειρὰ ἔχει 6 πλάκ. σάπ.
αἱ 6 σειραί, ἤτοι 1 στρῶμα, ἔχουν 6×6 » »
καὶ τὰ 6 στρώματα ἔχουν $6\times6\times6=216$ $(=6^3)$ » »

143) Ἀφοῦ κάθε σειρὰ ἔχει . . . . 5 κυτία
αἱ 5 σειραί, ἤτοι 1 στρῶμα, ἔχουν . 5×5 »
τὰ 5 στρώματα, ἤτοι 1 κιβώτιον, ἔχουν $5\times5\times5$ »
καὶ τὰ 5 κιβώτια ἔχουν $5\times5\times5\times5=625$ $(=5^4)$ »

Ἀσκήσεις — Λύσεις

Σελὶς 94.

144) 1. $4^3\times4^2=4^{3+2}=4^5$ 2. $2^2\times2^3\times2^4=2^{2+3+4}=2^9$
3. $3^2\times3\times3^5=3^{2+1+5}=3^8$ 4. $5^3\times5^6\times5^1\times5^2=5^{12}$

145) 1. $(2\times3)^2=2^2\times3^2=4\times9=36$ ἢ $(2\times3)^2=6^2=6\times6=36$
2. $(3\times4)^2=3^2\times4^2=9\times16=144$ ἢ $12^2=12\times12=144$
3. $(2\times3\times5)^2=4\times9\times25=900$ ἢ $30^2=30\times30=900$
1. $(2\times3\times1)^3=2^3\times3^3\times1^3=8\times27\times1=216$
ἢ $6^3=6\times6\times6=216$
2. $(2\times5\times10)^3=2^3\times5^3\times10^3=8\times125\times1000=1000000$
ἢ $100^3=100\times100\times100=1000000$
3. $(5\times2\times1)^3=5^3\times2^3\times1^3=125\times8\times1=1000$
ἢ $10^3=10\times10\times10=1000$

146) 1. Ἐπειδὴ $4=2\times2=2^2$ εἶναι $4^2=(2^2)^2=2^4$
2. Ἐπειδὴ $9=3\times3=3^2$ εἶναι $9^2=(3^2)^2=3^4$

147) 1. $9\times3^2=3^2\times3^2=3^4$ 2. $2\times5\times10^2=10\times10^2=10^3$
3. $2^3\times5^3=(2\times5)^3=10^3$.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΣ

Χαρακτῆρες διαιρετότητος.

Παρατηρήσεις.— 1η. Ὁ ἀριθμὸς 5 διαιρεῖ τὸν 35. Τότε ὁ 5 λαμβάνει τρία ὀνόματα καὶ λέγεται ἢ **διαιρέτης** τοῦ 35, ἢ **ὑποπολλαπλάσιον** τοῦ 35, ἢ **παράγων** τοῦ 35.

2α. Ὁ περιττὸς ἀριθμὸς 5, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, δίδει γινόμενον $5\times2=10$ ἄρτιον ἀριθμόν.

Ὁ περιττὸς ἀριθμὸς 7, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, δίδει γινόμενον $7\times2=14$, ἄρτιον ἀριθμὸν κ. ο. κ. Ἐννοεῖται δὲ ὅτι καὶ ἄρτιος ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, θὰ δώσῃ γινόμενον ἄρτιον ἀριθμόν. Ὥστε

Κάθε ἀριθμός, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2, δίδει γινόμενον ἄρτιον ἀριθμόν.

Γενικῶς τὸν ἄρτιον ἀριθμὸν τὸν παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: 2μ (δηλαδὴ $2\times\mu$) ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

3η. **Ἐὰν εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν προσθέσωμεν τὴν μονάδα 1, λαμβάνομεν ἄθροισμα περιττὸν ἀριθμόν.**

Π.χ. $4+1=5$, $6+1=7$, $112+1=113$ κ.ο.κ.

Γενικῶς δὲ τὸν περιττὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: $2\mu+1$, ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Διότι ὁ 2μ εἶναι ἄρτιος.

Σημείωσις. Φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι τὸν περιττὸν ἀριθμὸν ἠμποροῦμεν νὰ τὸν παραστήσωμεν καὶ μὲ $2\mu-1$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι ἕνας ἀριθμὸς

εἶναι διαιρετὸς	διὰ 2,	ὅταν λήγῃ	εἰς	0, 2, 4, 6, 8
» »	διὰ 5,	» »	εἰς	0 ἢ 5
» »	διὰ 4,	» »	εἰς	00, 04, 08, ..., 96
» »	διὰ 25,	» »	εἰς	00, 25, 50, 75
» »	διὰ 8,	» »	εἰς	000, 008, 016, 024, 032, 040, ..., 992
» »	διὰ 125,	» »	εἰς	000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.

Ἀσκήσεις. — Λύσεις.

Σελὶς 97.

148) **1.** $3\times1=3$, $3\times2=6$, $3\times3=9$, $3\times4=12$, $3\times5=15$

2. $9\times1=9$, $9\times2=18$, $9\times3=27$, $9\times4=36$, $9\times5=45$

149) **1.** Διαιρέται τοῦ 24 εἶναι οἱ :

(1), 2, 3, 4, 6, 8, 12 καὶ 24

Ἐκ τῶν διαιρετῶν δὲ αὐτῶν ἐκλέγομεν τρεῖς οἱουσδήποτε.

2. Ὑποπολλαπλάσια τοῦ 36 εἶναι τά :

(1), 2, 3, 4, 6, 12, 18 καὶ 36.

Ἐξ αὐτῶν δὲ ἐκλέγομεν τέσσερα οἱαδήποτε.

3. Παράγοντες τοῦ 15 εἶναι μόνον οἱ 3 καὶ 5.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 98.

150) Διὰ 2 εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 28, 354 καὶ 1600, διότι (§ 128) 28=20+8=2 δεκάδες +8 ἁπλαῖ μονάδες, 354=350+4=35 δεκάδες+4 ἁπλαῖ μονάδες καὶ 1600=160 δεκάδες. Ἀλλὰ κάθε ἀριθμὸς δεκάδων διαιρεῖται διὰ 2. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ ἁπλαῖ μονάδες 8 καὶ 4 διαιροῦνται διὰ 2, συμπεραίνομεν ὅτι (§ 124) καθεὶς τῶν ἀριθμῶν 28, 354 καὶ 1600 διαιρεῖται διὰ 2.

Συντόμως δὲ λέγομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 28, 354 καὶ 1600 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2, διότι τὸ τελευταῖον των ψηφίον διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 2. Διὰ 5 εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 245 καὶ 1600 διότι τελειώνουν εἰς 5 καὶ 0. Ἄλλως τε εἶναι 245=24 δεκάδες+5 ἁπλαῖ μονάδες καὶ 1600=160 δεκάδες. Ἀλλὰ καὶ αἱ δεκάδες καὶ αἱ 5 ἁπλαῖ μονάδες διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 5.

151)	**ὑπόλοιπον διὰ 2,**	**ὑπόλοιπον διὰ 5**
τοῦ 375	1	0
» 248	0	3
» 3727	1	2
» 4560	0	0
» 3968	0	3

εὑρίσκομεν δὲ τὰ ἀνωτέρω ὑπόλοιπα διαιροῦντες τὸ τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου ἀριθμοῦ διὰ 2 καὶ 5.

152) Ἡ μονὰς 1.

153) Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν 0 ἢ 2, 4, 6, 8.

154) Διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι ὅλοι. Διὰ 5, 10 καὶ 100 εἶναι ὅλοι πλὴν τοῦ 17304, διὰ 1000 εἶναι ὅλοι πλὴν τοῦ 200 καὶ τοῦ 17304.

155) 1ον. Ἀθροίσματα δύο ἀρτίων ἀριθμῶν. Π. δ.
4+8=12, 26+180=206, 1532+758=2290.
2ον. Ἀθροίσματα δύο περιττῶν ἀριθμῶν. Π. δ.
3+5=8, 115+11=126, 257+829=1086.

Ὥστε: Τὸ ἄθροισμα δύο ἀρτίων ἢ δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι **πάντοτε** ἀριθμὸς ἄρτιος.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 99.

156) Διὰ 4 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοὶ 764 καὶ 2700,
διότι 64 : 4 = 16 καὶ 100 : 4 = 25 (§ 129).
Δι' 25 διαιροῦνται οἱ 3750, 2700 καὶ 7625,
διότι 50 : 25=2, 100 : 25=4 καὶ 25 : 25=1 (§ 129).

157) Δεξιὰ τοῦ 32 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἢ 0 ἢ 4, ἢ 8. Διότι ἔτσι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν 320, 324, 328 σχηματίζουν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4.

Δεξιὰ τοῦ 43 πρέπει νὰ θέσωμεν ἢ 2 ἢ 6, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 432 καὶ 436, εἶναι δὲ 32 : 4=8 καὶ 36 : 4=9.

Δεξιὰ τοῦ 65 πρέπει νὰ θέσωμεν ἢ 2 ἢ 6, δεξιὰ τοῦ 76 πρέπει νὰ θέσωμεν ἢ 0 ἢ 4 ἢ 8 καὶ δεξιὰ τοῦ 57 πρέπει νὰ θέσωμεν ἢ 2 ἢ 6. Ἔτσι θὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 652, 656, 760, 764, 768 καὶ 572, 576.

158) Ὄχι, διότι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ σχηματίζουν τὸν ἀριθμὸν 22, μὴ διαιρετὸν διὰ 4.

159) Θὰ θέσωμεν ἢ 00 ἢ 25 ἢ 50 ἢ 75.

160) Ὁ ἀριθμὸς 26 ἰσοῦται μὲ 6×4+2, ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4+ 2. Ἐὰν τώρα καὶ ὁ προσθετέος 2 γίνῃ πολλαπλάσιον τοῦ 4 θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 4.

Γίνεται δὲ ὁ 2 πολλαπλάσιος τοῦ 4, ἐὰν εἰς τὸν 2 προσθέσωμεν τὸν 2 ἢ τὸν 2+4=6 ἢ τὸν 2+4+4=10 κ.ο.κ. Ὥστε ὁ ζητούμενος μικρότερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 2. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 26+2=28 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 καὶ ὁ 328 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

161) Ὁ 15 διαιρούμενος διὰ 4 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3. Ὥστε μαθηταὶ θὰ περισσεύσουν καὶ θὰ εἶναι αὐτοὶ 3.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 100.

162) Διὰ 3 καὶ διὰ 9 εἶναι διαιρετοὶ οἱ
ἀριθμοὶ 945, διότι $9+4+5=18$, $1+8=9$
καὶ 3105, διότι $3+1+0+5=9$
διὰ 3 μόνον, εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ
219, διότι $2+1+9=12$, $1+2=3$
καὶ 1302, διότι $1+3+2=6$.

163) Διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 436, 156, 324, 564 καὶ 3024, διότι τὸ τελευταῖον ψηφίον των εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

Διὰ 3 διαιρετοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 156, 324, 564, 3024, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων των εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3, ἐπειδὴ $1+5+6=12$, $3+2+4=9$ κ.ο.κ.

Διὰ 4 διαιρετοὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 436, 156, 324, 564 καὶ 3024, διότι τὰ δύο τελευταῖα ψηφία καθενὸς ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, σχηματίζουν ἀριθμούς, τοὺς 36, 56, 24, 64, 24, διαιρετοὺς διὰ 4.

Διὰ 5 εἶναι διαιρετὸς μόνον ὁ 925, διότι τελειώνει εἰς 5. καὶ τέλος δι' 9 εἶναι διαιρετοὶ οἱ ἀριθμοὶ 324 καὶ 3024, διότι τὸ ἄθροισμα $3+2+4=9$ τῶν ψηφίων των εἶναι διαιρετὸν διὰ 9.

164) Θὰ εἶναι διαιρετοί :

α') διὰ τοῦ 2, ἐὰν θέσωμεν δεξιὰ ἑκάστου τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν τὰ ψηφία 0, 2, 4, 6, 8.

β') διὰ τοῦ 3:	δεξιὰ τοῦ	74	τὰ	ψηφία	1, 4, 7
	» »	35	»	»	1, 4, 7
	» »	87	»	»	0, 3, 6, 9
	» »	95	»	»	1, 4, 7
γ') διὰ τοῦ 4:	» »	74	»	»	0, 4, 8
	» »	35	»	»	2, 6
	» »	87	»	»	2, 6
	» »	95	»	»	2, 6

δ') διὰ τοῦ 5: δεξιὰ καὶ τῶν τεσσάρων τὰ ψηφία 0, 5

ε') διὰ τοῦ 9:	δεξιὰ τοῦ	74	τὸ	ψηφίον	7
	» »	35	»	»	1
	» »	87	»	»	3
	» »	95	»	»	4

στ') διὰ τοῦ 25: δεξιὰ τῶν 35 καὶ 95 τὸ 0 καὶ τοῦ 87 τὸ 5.

165) Διὰ 2, 4 ὄχι, διότι εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

Δι' 25 ὄχι, διότι τελειώνει εἰς 55.

Διὰ 5 μάλιστα, διότι τελειώνει εἰς 5.

Διὰ 3 εἶναι διαιρετός, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων του εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 555 ἢ ὁ 555555 κ.ο.κ. διότι $5+5+5=5\times3=15$ κ.ο.κ.

166) Διὰ 3. Ἐπειδὴ $6+1+4=11$ καὶ τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ 3 μετὰ τὸν 11 εἶναι ὁ 12, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 614 τὸν 1 ($12-11=1$). Ἑπομένως διὰ 9 πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν 7 ($18-11=7$).

Διὰ 4. Ἐπειδὴ $14=3\times4+2$ = πολλ. τοῦ $4+2$ πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὸν 2 ($4-2=2$), διότι τότε θὰ εἶναι 16 = πολλ. τοῦ 4 καὶ ἑπομένως καὶ 616 = πολλ. τοῦ 4.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 614 εἶναι ὁ 1 διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ 5 καὶ ὁ 11 διὰ νὰ εἶναι διαιρετὸς δι' 25. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 615 καὶ 625.

167) Θὰ εἶναι πάλιν διαιρετὸς διὰ 9, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του δὲν ἀλλάσσει. Π χ.
οἱ ἀριθμοὶ 21465, 65421, 51264 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 9, διότι εἶναι $2+1+4+6+5 = 6+5+4+2+1 = 5+1+2+6+4 = 18$.

168) Κατὰ δυάδας ὄχι, διότι ὁ 135 εἶναι περιττὸς ἀριθμός. Κατὰ τριάδας καὶ κατὰ πεντάδας ναί. Διότι $1+3+5=9$ καὶ διότι τελειώνει εἰς 5.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 101.

169) Διὰ 8 οἱ ἀριθμοὶ 91480 καὶ 83024, διότι οἱ 480 καὶ 024 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 8.

Δι' 125 οἱ 5375 καὶ 79250, διότι οἱ ἀριθμοὶ 375 καὶ 250 εἶναι διαιρετοὶ δι' 125.

170) Διαιρετοὶ εἶναι οἱ 3125, 5250, 204875 καὶ 605500. Ἀπὸ τοὺς ἄλλους δέ, ὅταν διαιρεθοῦν δι' 125, ὁ μὲν 62300 δίδει ὑπόλοιπον 50 καὶ ὁ 105450 δίδει ὑπόλοιπον 75.

171) Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον 2 τῆς διαιρέσεως 930 : 8 θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8 (βλέπε ἰσότητα 2 σελ. 20). Ὥστε ὁ 928 καὶ ἑπομένως ὁ 35928 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8.

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ 2 εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον, ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 35930, λαμβάνομεν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8. Ἄλλοι δὲ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἠμποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸν 35630 διὰ νὰ λάβωμεν ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ 8 εἶναι οἱ 2+8, 2+8×2, 2+8×3 κ. ο. κ. Ἐὰν ἐξ ἄλλου ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 35930 τὸ ὑπόλοιπον 55 τῆς διαιρέσεως 930 : 125 θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 35875 διαιρετὸν δι' 125. Σημειωτέον δὲ ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν 35930 τοὺς ἀριθμοὺς 55+125, 55+125×2 κ.ο.κ. θὰ λάβωμεν ἀριθμούς, τοὺς 35750, 35625 κ.ο.κ. διαιρετοὺς δι' 125.

172) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 242 : 8 εἶναι 2. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν 242, 6 μονάδας (8—2=6) ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 248 καὶ ἑπομένως ὁ 7248 εἶναι διαιρετὸς διὰ 8. Θὰ προκύψῃ δὲ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 8, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν 7242 καὶ τὸν ἀριθμὸν 6+8 ἢ τὸν 6+8×2, κ..ο.κ.

Ἐξ ἄλλου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 242 : 125 εἶναι 117. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν 242, 125—117=8 μονάδας, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 250 καὶ ἑπομένως ὁ 7250 εἶναι διαιρετὸς δι' 125. Θὰ προκύψῃ δὲ ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' 125, ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν 7242 καὶ τὸν ἀριθμὸν 8+125 ἢ τὸν 8+125×2 κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις - Λύσεις.

Σελὶς 102.

173) Οἱ 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 καὶ 99.

174) Οἱ 332211, 570911, 633402, διότι 11+22+33=66, 11+09+57=77, 02+34+63=99.

175) 473, 792, 43120, 151437, διότι τότε θὰ ἔχωμεν: 73+4=77, 92+7=99, 20+31+4=55, 37+14+15=66.

Κοινοὶ διαιρέται - Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 107.

176) **1.** 12 καὶ 48, μ. κ. δ. 12
2. 9 » 63, μ. κ. δ. 9
3. 8 » 12, μ. κ. δ. 4
4. 10 καὶ 35, μ. κ. δ. 5
5. 28 » 42, μ. κ. δ. 14
6. 18 » 63, μ. κ. δ. 9

177) **1.** 88 καὶ 156, μ. κ. δ. 4

	1	1	3	2	2
156	88	68	20	8	4
68	20	8	4	0	

2. 99 καὶ 312, μ. κ. δ. 3

	3	6	1	1	2
312	99	15	9	6	3
15	9	6	3	0	

3. 144 καὶ 594, μ. κ. δ. 18

	4	8
594	144	18
18	0	

4. 609 καὶ 270, μ. κ. δ. 3

	2	3	1	10	2
609	270	69	63	6	3
69	63	6	3	0	

5. 1986 καὶ 2226, μ. κ. δ. 6

	1	8	3	1	1	1	3
2226	1986	240	66	42	24	18	6
240	66	42	24	18	6	0	

6. 328 καὶ 1540, μ. κ. δ. 4

	4	1	2	3	1	1	3
1540	328	228	100	28	16	12	4
228	100	28	16	12	4	0	

178) **1.** 24 72 108 μ.κ.δ. 12

24	72	108
24	0	12
0	0	12

2. 42 63 72 μ.κ.δ. 3

42	63	72
42	21	30
0	21	9
0	3	9
0	3	0

3. 560 728 328 μ.κ.δ. 8

560	728	328
232	72	328
16	72	40
16	8	8
0	0	8

4. 3420 2610 7020 μ.κ.δ. 90

3420	2610	7020
810	2610	1800
810	180	180
90	180	0
90	0	0

179) Διὰ νὰ εἶναι ὁμοιόμορφες αἱ μπομπονιέρες, πρέπει ἡ κάθε μία νὰ ἔχῃ ἴσα δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ ἴσα δράμια κυανᾶ, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανένα κουφέτο. Ἀλλὰ δύο π. χ. ὁμοιόμορφες μπομπονιέρες δὲν ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ. Διότι θὰ βάλῃ εἰς τὴν κάθε μίαν ἀπὸ 150 δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ ἀπὸ 62 δράμια κυανᾶ, ἀλλὰ θὰ περισσεύσῃ ἕνα κυανοῦν κουφέτο. Ὁμοίως δὲν ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ τρεῖς ὁμοιόμορφες μπομπονιέρες, διότι πάλιν θὰ περρισσεύσῃ ἕνα κυανοῦν κουφέτο. Συμβαίνει δὲ τοῦτο διότι, οὔτε ὁ 2, οὔτε ὁ 3 διαιροῦν ἀκριβῶς καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς 300 καὶ 125, ἤτοι διότι δὲν εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ἔτσι συμπεραίνομεν, ὅτι ἐπειδὴ ὁ 5 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 300 καὶ 125, ἠμπορεῖ νὰ κάμῃ ὁμοιόμορφες μπομπονιέρες, χωρὶς νὰ περισσεύσῃ κανένα κουφέτο. Διότι τότε θὰ βάλῃ σὲ κάθε μπομπονιέρα 300 : 5 = 60 δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ 125 : 5 = 25 δράμια κυανᾶ. Ἀλλὰ τὸ πρόβλημα ζητεῖ πόσες **τὸ πολὺ** ὁμοιόμορφες μπομπονιέρες δύναται νὰ σχηματίσῃ. Ἑπομένως πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 300 καὶ 125, ὅστις εἶναι ὁ 25.

Ἡ οἰκογένεια λοιπὸν αὐτὴ θὰ σχηματίσῃ 25 τὸ πολὺ ὁμοιόμορφες μπομπονιέρες καὶ θὰ ἔχῃ κάθε μία 300 : 25 = 12 δράμια λευκὰ κουφέτα καὶ 125 : 25 = 5 δράμια κυανᾶ.

180) Ἐὰν σκεφθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω θὰ εὕρωμεν, ὅτι ὁ πιὸ μεγάλος ἀριθμὸς τῶν ὁμοίων ὁμάδων εἶναι ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 60, 120 καὶ 40. Εἶναι δὲ οὗτος ὁ 20. 20 λοιπὸν τὸ πολὺ ὁμοίας ὁμάδας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπὸ αὐτούς. Θὰ ἔχῃ δὲ κάθε μία 60 : 20 = 3 ὑψιφώνους, 120 : 20 = 6 μέσους καὶ 40 : 20 = 2 βαθυφώνους.

181) Καὶ ἐδῶ θὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 880000, 200 καὶ 80, ὅστις εἶναι 40. Ὥστε 40 τὸ πολὺ οἰκογενείας δύνανται νὰ βοηθήσουν ἐξ ἴσου μὲ τὰ εἴδη αὐτά. Κάθε δὲ οἰκογένεια θὰ λάβῃ 880000 : 40 = 22000 δραχμάς, 200 : 40=5 ζεύγη κάλτσες καὶ 80 : 40 = 2 φανέλλας.

Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις - Λύσεις.

Σελὶς 110.

182) Εἶναι,

$7\times1=7$, $7\times2=14$, $7\times3=21$, $7\times4=28$, $7\times5=30$

$8\times1=8$, $8\times2=16$, $8\times3=24$, $8\times4=32$, $8\times5=40$

183) Τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν ποὺ μᾶς δίδουν εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια αὐτῶν. Ἐὰν δὲ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἄλλους δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς θὰ εὕρωμεν ἄλλα δύο κοινὰ πολλαπλάσιά των. Ἔτσι 3 κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 7 εἶναι π. χ.

$$4\times7=28,\ 4\times7\times2=56,\ 4\times7\times3=84$$

ἢ καὶ τὰ $4\times7\times4=112$, $4\times7\times5=140$, $4\times7\times6=168$ κ.ο.κ. ἐὰν θέλωμεν νὰ τὰ πάρωμεν κατὰ σειράν. Ἄλλως ἠμποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ $4\times7=28$ π. χ. μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5, 7, 9 ἢ 8, 15, 20 κ.ο.κ.

184) **1.** Ἐπειδὴ ὁ 18 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 6, ὁ 18 εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

2. Τὸ γινόμενον $12\times1=12$ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 8. Διὰ τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 12 ἐπὶ 2, $12\times2=24$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ 24 διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ 8 $(24:8=3)$ καὶ διὰ τοῦ 12 $(24:12=2)$, ὁ 24 εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 12.

3. Ἀπὸ τὰ κατὰ σειρὰν γινόμενα $9\times1=9$, $9\times2=18$, $9\times3=27$, $9\times4=36$, $9\times5=45$, τὸ 45 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 5 $(45:5=9)$ καὶ διὰ τοῦ 9 $(45:9=5)$. Ὁ 45 λοιπὸν εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 9.

Παρατήρησις. Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐ. κ. π. 45 εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 5 καὶ 9. Διότι ὁ 9 δὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5, ἀλλ' οὔτε καὶ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5. Τὰ τέσσαρα λοιπὸν πρῶτα γινόμενα 9×1, 9×2, 9×3, 9×4 δὲν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν 5 καὶ 9. Ἔτσι τὸ πρῶτον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν, τὸ καὶ μικρότερον, εἶναι τὸ γινόμενόν των $5\times9=45$. Εἶναι δὲ οἱ 5 καὶ 9 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε **Ὅταν μᾶς ζητοῦν τὸ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, θὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.**

Π. χ. τὸ ἐ. κ. π. τῶν 4 καὶ 7 εἶναι $4\times7=28$ καὶ τῶν 8 καὶ 9 εἶναι τὸ $8\times9=72$.

4. Ἐπειδὴ $18\times1=18$, $18\times2=36$ καὶ $36:9=4$, $36:12=3$ καὶ $36:18=2$, ὁ 36 εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π.

5. Ἐπειδὴ $30\times1=30$, $30\times2=60$, $30\times3=90$, $30\times4=120$ καὶ $120:8=15$, $120:20=6$ καὶ $120:30=4$, ὁ 120 εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ.κ.π.

6. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεγαλύτερον 12 κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6 βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον $12\times6=72$ διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ τοὺς δοθέντας, ἤτοι ὅτι ὁ 72 εἶναι τὸ ἑ.κ.π. αὐτῶν.

Συντομία. Ἀπὸ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς οἱ 8 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἑπομένως τὸ γινόμενόν των $8\times9=72$ εἶναι τὸ ἑ.κ.π. αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 72 διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ μὲ τὸν 6 καὶ μὲ τὸν 12, ὁ 72 εἶναι τὸ ἑ.κ.π. ὅλων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ 72 δὲν διῃρεῖτο ἀκριβῶς μὲ τοὺς δύο ἄλλους, θὰ ἐπολλαπλασιάζαμεν τὸν 72 κατὰ σειρὰν ἐπὶ 1, 2, 3 κλπ. μέχρις ὅτου εὕρομεν γινόμενον διαιρετὸν μὲ τοὺς ἄλλους.

185) **1.**

15	18	24	42	2
15	9	12	21	3
5	3	4	7	

Ὥστε οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουν ἑ. κ. π. τὸ γινόμενον $2\times3\times5\times3\times4\times7=2520$.

2.

16	36	45	18	2
8	18	45	9	2
4	9	45	9	3
4	3	15	3	3
4	1	5	1	

Οἱ δοθέντες λοιπὸν ἀριθμοὶ ἔχουν ἑ. κ. π. τὸ γινόμενον $2^2\times3^2\times4\times5=720$.

Συντομία. Οἱ 16 καὶ 45 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἑ.κ.π. αὐτῶν $16\times45=720$. Ἐπειδὴ δὲ $720:36=20$ καὶ $720:18=40$, ὁ 720 εἶναι ἑ.κ.π. ὅλων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

3.

8	50	25	32	2
4	25	25	16	2
2	25	25	8	2
1	25	25	4	25
1	1	1	4	

Ἑ.κ.π.$=2^3\times25\times4=800$.

Ἄλλος τρόπος. — Οἱ 25 καὶ 32 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. $25\times32=800$, $800:8=100$, $800:50=16$, ἑ.κ.π.$=800$.

4.

9	12	18	32	2
9	6	9	16	2
9	3	9	8	3
3	1	3	8	3
1	1	1	8	

Ἑ.κ.π. $2^2\times3^2\times8=288$.

Ἄλλος τρόπος. — Οἱ 9 καὶ 32 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. $9\times32=288$, $288:12=24$, $288:18=16$, ἑ.κ.π.$=800$.

5.

14	21	24	48	2
7	21	12	24	2
7	21	6	12	2
7	21	3	6	3
7	7	1	2	7
1	1	1	2	

Ἑ.κ.π.$=2^3\times3\times7\times2=336$

6.

70	14	21	56	2
35	7	21	28	7
5	1	3	4	

Ἑ.κ.π.$=2\times7\times5\times3\times4=840$

186. Οἱ κώδωνες ἀρχίζουν νὰ ἠχοῦν συγχρόνως. Μετὰ 3 λεπτὰ θὰ ἀκούσωμεν μόνον τὸν πρῶτον κώδωνα, ἐνῷ μετὰ $3 \times 2 = 6$ λεπτά, ἀπὸ τὴν ἀρχήν, θὰ ἀκούσωμεν συγχρόνως τὸν πρῶτον καὶ τὸν τρίτον κώδωνα. Τὸν πρῶτον διὰ δευτέραν πάλιν φοράν, διότι $6 : 3 = 2$ καὶ τὸν τρίτον διὰ πρώτην πάλιν φοράν, διότι $6 : 6 = 1$. Καὶ μόνον, ὅταν περάσουν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν $2 \times 3 \times \times 5 = 30$ λεπτὰ θὰ ἀκούσωμεν καὶ τοὺς τρεῖς κώδωνας νὰ ἠχοῦν συγχρόνως διὰ δευτέραν φοράν. Ὁ χρόνος αὐτὸς τῶν 30 λεπτῶν, εἶναι ὁ χρόνος ποὺ ζητοῦμεν. Εἶναι δὲ ὡς βλέπομεν ὁ 30 τὸ ἐ.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 3, 5 καὶ 6.

187) Ἐὰν σκεφθῶμεν ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, θὰ εὕρωμεν ὅτι ὁ ἐλάχιστος χρόνος, διὰ νὰ φθάσουν πάλιν τὰ ὀχήματα εἰς τὴν πλατεῖαν κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν, εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν 4, 8, 12, καὶ 16 λεπτῶν, ἤτοι 48 λεπτά.

188) Καὶ τοῦτο εἶναι πρόβλημα ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐ. κ. π. τῶν 8, 12, 15 εἶναι 120, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 120 λεπτά.

Θὰ κάμῃ δὲ ὁ α′ $120 : 8 = 15$ γύρους, ὁ β′ $120 : 12 = 10$ γύρους καὶ ὁ γ′ θὰ κάμῃ $120 : 15 = 8$ γύρους.

Πρῶτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοί.

Πρῶτοι ἀριθμοί. Πῶς ἀναγνωρίζομεν, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος.— Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἔχουν σπουδαίαν θέσιν εἰς τὰ μαθηματικὰ καὶ πολλὰς ἐφαρμογάς. Καὶ πρῶτον σημειώνομεν, ὅτι **πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.** Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀναλύσωμεν ἕνα σύνθετον ἀριθμόν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν 1′) ἕνα διαιρέτην του πρῶτον ἀριθμὸν καὶ 2′) ἐὰν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ μὲ τὸν διαιρέτην αὐτὸν εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμός. Ἀλλ᾽ αὐτὰ δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολα. Διότι μᾶς δίδουν π. χ. ν᾽ ἀναλύσωμεν τὸν ἀριθμὸν 974. Αὐτὸς ἔχει δεύτερον διαιρέτην τὸν 2. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $974 : 2$ εἶναι 487. Ὥστε ἔχομεν $974 = 2 \times 487$. Ἀλλ᾽ ὁ 487 βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται οὔτε πάλιν μὲ τὸν 2, οὔτε μὲ τὸν 3, 5, 7, 11, 13. Τί ἀριθμὸς λοιπὸν εἶναι ὁ 487; πρῶτος ἢ σύνθετος; Θὰ τὸ ἴδωμεν αὐτό, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 17, 19, 23 κλπ. **μέχρις ὅτου εὕρομεν πηλίκον**

ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου ποὺ δοκιμάζομεν. Ἐὰν δὲ καμμία ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς δὲν γίνεται ἀκριβῶς, θὰ σταματήσωμεν καὶ θὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος. Ἐδῶ ἐπειδὴ αἱ διαιρέσεις 487 : 17, 487 : 19, 487 : 23 δὲν εἶναι ἀκριβεῖς, τὸ δὲ πηλίκον 21 τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 23, συμπεραίνομεν ἀσφαλῶς, ὅτι ὁ 487 εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Ὥστε:

Διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς Α εἶναι πρῶτος, τὸν διαιροῦμεν διαδοχικῶς μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς 2, 3, 5, 7, 11 κλπ. Ἐὰν μία ἀπὸ τὰς διαιρέσεις αὐτὰς γίνεται ἀκριβῶς, ὁ Α εἶναι σύνθετος. Ἐὰν ὅμως ὄχι, θὰ σταματήσωμεν τὰς διαιρέσεις, ὅταν εὕρωμεν πηλίκον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ διαιρέτου ποὺ δοκιμάζομεν καὶ θὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ Α εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Τώρα σημειώνομεν, ὅτι καλὸν εἶναι ὁ μαθητὴς νὰ γνωρίζῃ ὅλην τὴν κατωτέρω σειρὰν τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ μνήμης:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Πίνακες τῶν πρώτων ἀριθμῶν. — Ἀπὸ τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἐννοοῦμεν, ὅτι αἱ πράξεις διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, εἶναι ἐνίοτε πολλαὶ καὶ κοπιαστικαί. Τὰς ἀποφεύγομεν ὅμως, ἐὰν ἔχωμεν εἰς τὰς χεῖρας μας ἕνα πίνακα πρώτων ἀριθμῶν, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ βλέπωμεν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δίδεται, περιέχεται εἰς αὐτὸν ἢ ὄχι. Ἡμεῖς δίδομεν εἰς τὴν σελίδα 41 πίνακα πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 500, ὅστις ἐπαρκεῖ εἰς τὰς σχολικὰς ἀνάγκας.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 112.

189) Περιττὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1, εἶναι ὁ 3, ὁ 5, ὁ 7 κλπ. Ἐὰν εἰς ἕνα ἐκ τῶν περιττῶν τούτων ἀριθμῶν προσθέσωμεν 1 θὰ προκύψῃ ἄρτιος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 2, ἤτοι σύνθετος ἀριθμός. Διότι ἄρτιος καὶ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι μόνον ὁ 2, ἐνῷ ὅλοι οἱ ἄλλοι ἄρτιοι ἀριθμοί, ἐπειδὴ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2, εἶναι γινόμενα τοῦ 2 ἐπὶ ἄλλον τινὰ ἀκέραιον ἀριθμόν.

190) Εἶναι ὁ 2, διότι ὡς εἴπωμεν προηγουμένως, πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

191) Ὡς περιττὸς ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του διαιρεῖται ἀκριβῶς

ΠΙΝΑΞ ΠΡΩΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ 1 ΕΩΣ 500

1	53	131	223	311	409
2	59	137	227	313	419
3	61	139	229	317	421
5	67	149	233	331	431
7	71	151	239	337	433
11	73	157	241	347	439
13	79	163	251	349	443
17	83	167	257	353	449
19	89	173	263	359	457
23	97	179	269	367	461
29	101	181	271	373	463
31	103	191	277	379	467
37	107	193	281	383	479
41	109	197	283	389	487
43	113	199	293	397	491
47	127	211	307	401	499

διὰ 3, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 3 (§ 123), ὁ περιττὸς αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 (§ 130). Ὁ δὲ 3 εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς καὶ ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα 1 διαιρέτης τοῦ περιττοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν δεύτερος διαιρέτης εἶναι ὁ 3.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 114.

***192)* 1.**

128	2	260	2	372	2	840	
64	2	130	2	186	2	84 × 10	
32	2	65	5	93	3	84	2
16	2	13	13	31	31	42	2
8	2	1		1		21	3
4	2					7	7
2	2					1	
1						10 = 2 × 5	

$128=2^7$, $260=2^2\times5\times13$, $372=2^2\times3\times31$, $840=2^3\times5\times3\times7$

2.

$$3600 = 36\times100 \qquad 9720 = 972\times10 \qquad 3850 = 385\times10 \qquad 7260 = 726\times10$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 972 & 2 \\ 486 & 2 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 726 & 2 \\ 363 & 3 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$100=2^2\times5^2$ $\qquad$ $10=2\times5$ $\qquad$ $10=2\times5$ $\qquad$ $10=2\times5$

$$3600=2^4\times3^2\times5^2 \qquad 9720=2^3\times3^5\times5$$

$$3850=2\times5^2\times7\times11 \qquad 7260=2^2\times3\times5\times11^2$$

'Ασκήσεις - Λύσεις.

Σελὶς 115.

193) **1.**

$$\begin{array}{r} 320 = 2^6\times5 \\ 460 = 2^2\times5\times23 \\ \hline 320\times460 = 2^8\times5^2\times23 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} 378 = 2\times3^3\times7 \\ 154 = 2\times7\times11 \\ 166 = 2\times83 \\ \hline 378\times154\times166 = 2^3\times3^3\times7^2\times11\times83 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} 516 = 2^2\times3\times43 \\ 396 = 2^2\times3^2\times11 \\ 978 = 2\times3\times163 \\ \hline 516\times396\times978 = 2^5\times3^4\times11\times43\times163 \end{array}$$

'Ασκήσεις - Λύσεις.

Σελὶς 116.

194) **1.** $725=5^2\times29$

$725^2=(5^2\times29)^2=5^4\times29^2$, $\quad 725^3=(5^2\times29)^3=5^6\times29^3$

2. $312=2^3\times3\times13$

$312^2=(2^3\times3\times13)^2=2^6\times3^2\times13^2$,

$312^3=(2^3\times3\times13)^3=2^9\times3^3\times13^3$

3. $2340=2^2\times3^2\times5\times13$

$2340^2=(2^2\times3^2\times5\times13)^2=2^4\times3^4\times5^2\times13^2$

$2340^3=(2^2\times3^2\times5\times13)^3=2^6\times3^6\times5^3\times13^3$

4. $4560=2^4\times3\times5\times19$

$4560^2=(2^4\times3\times5\times19)^2=2^8\times3^2\times5^2\times19^2$

$4560^3=(2^4\times3\times5\times19)^3=2^{12}\times3^3\times5^3\times19^3$

5. $1260=2^2\times3^2\times5\times7$

$1260^2=(2^2\times3^2\times5\times7)^2=2^4\times3^4\times5^2\times7^2$

$1260^3=(2^2\times3^2\times5\times7)^3=2^6\times3^6\times5^3\times7^3$

6. $7290=2\times3^6\times5$

$7290^2=(2\times3^6\times5)^2=2^2\times3^{12}\times5^2$

$7290^3=(2\times3^6\times5)^3=2^3\times3^{18}\times5^3$

᾿Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 117.

196) Διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $2^2\times3^2\times5$, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος, διότι ὁ καθεὶς ἀπὸ αὐτοὺς ἔχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ διαιρέτου καὶ οὐδένα μὲ μικρότερον ἐκθέτην. ᾿Ενῷ ὁ πρῶτος, ὅστις δὲν περιέχει τὸν παράγοντα 3^2 τοῦ διαιρέτου, δὲν διαιρεῖται δι᾽ αὐτοῦ. Εἶναι δέ,

1) $(2^2\times3^4\times5\times7^2):(2^2\times3^2\times5\times7^0)=2^{2-2}\times3^{4-2}\times5^{1-1}\times7^{2-0}$
$=2^0\times3^2\times5^0\times7^2$
$=1\times3^2\times1\times7^2=3^2\times7^2$

ἢ ἀμέσως $(2^2\times3^4\times5\times7^2):(2^2\times3^2\times5)=3^2\times7^2$

2) $(2^5\times3^4\times5^2\times7^3):(2^2\times3^2\times5)=2^3\times3^2\times5\times7^3$

196) **1.** ᾿Επειδὴ

1) $276=2^2\times3\times23$ 2) $524=2^2\times131$

3) $780=2^2\times3\times5\times13$ 4) $2436=2^2\times3\times7\times29$

καὶ $\mathbf{12=2^2\times3}$

εἶναι διαιρετοὶ διὰ 12, ὁ 1ος, ὁ 3ος, καὶ ὁ 4ος·

εἶναι δέ, $276:12=(2^2\times3\times23):(2^2\times3)=23$

$780:12=(2^2\times3\times5\times13):(2^2\times3)=5\times13$

καὶ $2436:12=(2^2\times3\times7\times29):(2^2\times3)=7\times29$

2. Ἐπειδή, 1) $2100=2^2\times3\times5^2\times7$ 2) $2250=2\times3^2\times5^3$
3) $1120=2^5\times5\times7$ 4) $13230=2\times3^3\times5\times7^2$
εἶναι διαιρετοὶ διὰ $210=2\times3\times5\times7$
ὁ 1ος μὲ πηλίκον 2×5 καὶ ὁ 4ος μὲ πηλίκον $3^2\times7$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 119.

197) **1.** Ἐ.κ.π.$=2^3\times3^2\times5\times7$ μ.κ.δ.$=2^2\times3\times5$
2. Ἐ.κ.π.$=2\times3^2\times5\times7\times11$ μ.κ.δ.$=3\times11$
3. Ἐ.κ.π.$=2^4\times3^2\times5^2\times7\times11$ μ.κ.δ.$=2\times3\times5$

198) **1.** $144=2^4\times3^2$
$504=2^3\times3^2\times7$
ἐ.κ.π.$=2^4\times3^2\times7$
μ.κ.δ.$=2^3\times3^2$

2. $226=2\times113$
$198=2\times3^2\times11$
ἐ.κ.π.$=2\times3^2\times11\times113$
μ.κ.δ.$=2$.

3. $132=2^2\times3\times11$
$252=2^2\times3^2\times7$
$420=2^2\times3\times5\times7$
ἐ.κ.π.$=2^2\times3^2\times5\times7\times11$
μ.κ.δ.$=2^2\times3$

4. $756=2^2\times3^3\times7$
$504=2^3\times3^2\times7$
$1260=2^2\times3^2\times5\times7$
ἐ.κ.π.$=2^3\times3^3\times5\times7$
μ.κ.δ.$=2^2\times3^2\times7$

Οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Ἡ ἀνακάλυψις τῶν κλασμάτων. — Ὁ ἄνθρωπος πρῶτον εὗρε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἀλλὰ γρήγορα εἶδεν, ὅτι μὲ αὐτοὺς δὲν ἠμποροῦσε νὰ λύσῃ ὅλα τὰ προβλήματα ποὺ τοῦ ἐπαρουσιάζοντο εἰς τὴν πρακτικὴν ζωήν. Συγκεκριμένως δὲ τὰ προβλήματα ἴσης διανομῆς, δηλαδὴ τὰ προβλήματα τῆς διαιρέσεως. Ἤθελε π. χ. νὰ μοιράσῃ ἐξ ἴσου 16 ὀκάδας ἀλεῦρι εἰς 3 οἰκογενείας. Τὴν διανομὴν αὐτὴν πρακτικὰ ἠμποροῦσε νὰ τὴν κάμῃ. Νὰ χωρίσῃ δηλαδὴ τὸ ἀλεῦρι αὐτὸ εἰς τρία ἴσα μέρη. Δὲν ἠμποροῦσεν ὅμως νὰ εἴπῃ μὲ ἀριθμόν, πόσον ἦτο τὸ ἕνα μέρος. Διότι ἡ διαίρεσις 16 ὀκ. : 3 τοῦ ἔλεγεν, ὅτι κάθε μία οἰκογένεια θὰ πάρῃ ἀπὸ 5 ὀκάδας καὶ θὰ περισσεύσῃ 1 ὀκᾶ. Δηλαδὴ ἐδῶ οἱ ἀκέραιοι δηλώνουν ἀδυναμίαν νὰ κάμουν ἀκριβῆ διανομήν, διότι δὲν ἠμποροῦν νὰ κάμουν τὴν διαίρεσιν 1 ὀκ, : 3. Ὡς τόσον ὅμως τὸ ὑπόλοιπον τῆς 1 ὀκᾶς πρέπει νὰ μοιρασθῇ.

Ὁμοίως 4 ἀδελφοὶ θέλουν νὰ μοιράσουν μεταξύ των ἐξ ἴσου ἕνα χωράφι ἀπὸ 23 στρέμματα καὶ τὸ μερίδιόν των νὰ γραφῇ μὲ ἀριθμὸν εἰς τὸ κτηματολόγιον. Ἀλλὰ μὲ τοὺς ἀκεραίους μόνον ἀριθμοὺς αὐτὸ δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ. Διότι ἡ διαίρεσις 23 στρ. : 4 λέγει ὅτι καθεὶς ἀπ' αὐτοὺς θὰ πάρῃ 5 στρέμματα καὶ θὰ περισσεύσουν 3 στρέμματα. Ἀλλ' ἐδῶ δὲν νοεῖται ὑπόλοιπον. Τὸ χωράφι πρέπει νὰ μοιρασθῇ ὁλόκληρον εἰς τοὺς 4 ἀδελφοὺς καὶ κάθε ἀδελφὸς πρέπει νὰ ξεύρῃ ἀκριβῶς πόσον εἶναι τὸ μερίδιόν του.

Διὰ τοῦτο ὁ ἄνθρωπος ἐνωρὶς εὑρέθη εἰς τὴν ἀνάγκην, νὰ ἀνακαλύψῃ νέους ἀριθμούς, μὲ τοὺς ὁποίους νὰ ἠμπορῇ νὰ κάμῃ κάθε διαίρεσιν καὶ νὰ εὑρίσκῃ πάντοτε ἀκριβὲς πηλίκον.

Τοιούτους ἀριθμοὺς τοὺς εὗρεν καὶ εἶναι οἱ **κλασματικοί.** Μὲ αὐτοὺς **κάθε διαίρεσις εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία.** Εἰς **μίαν μόνον** περίπτωσιν δὲν ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν διαίρεσιν, **ὅταν** δηλαδὴ **θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ τό μηδέν.** (§ 71, παρ. 5η).

Σημείωσις. Ἀπὸ ἀρχαιολογικὰ εὑρήματα, ὑπολογίζεται ὅτι τὰ κλάσματα ἔχουν ἐμφανισθῇ 2400 χρόνια π. Χ.

Τί πρέπει νὰ προσέξωμεν διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὰ κλάσματα.—1ον) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ κλάσματα, ξεκινοῦμεν ἀπὸ τὴν παρατήρησιν, ὅτι κάθε πρᾶγμα ἠμποροῦμεν νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα θέλομεν. Π. χ. Ἕνα μῆλον νὰ τὸ διαιρέσωμεν εἰς 2, 3, 4, 5 κλπ. ἴσα μέρη. Ἔτσι καὶ **τὴν μονάδα 1 ἠμποροῦμεν νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλομεν.** Κάθε ἕνα δὲ ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη, λέγεται **κλασματικὴ μονάς.**

Ἔτσι ἔχομεν ἀπείρους κλασματικὰς μονάδας:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10} \text{ κλπ.}$$

Ἐδῶ δὲ βλέπομεν ὅτι, ὅσον προχωροῦμεν, **αἱ κλασματικαὶ αὐταὶ μονάδες γίνονται μικρότεραι.**

2ον) **Ἀπὸ κάθε κλασματικὴν μονάδα, ὅταν τὴν ἐπαναλάβωμεν, ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν μίαν σειρὰν κλασματικῶν ἀριθμῶν.** Π. χ.

τὴν σειρὰν τῶν δευτέρων : $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \frac{8}{2}$ κ.ο.κ.

» » » τρίτων : $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}$ κ.ο.κ.

» » » τετάρτων : $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}$ κ.ο.κ.

3ον. Εἰς τὰς ἀνωτέρω σειρὰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ εἶναι ἴσα μὲ τὴν ἀκεραίαν μονάδα, τὰ πρὸ αὐτῶν κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}$ κλπ. εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος 1 καὶ τὰ ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ κλπ. εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος (§ 159, 1ον, 2ον, 3ον).

4ον. Εἰς τὰς ἀνωτέρω σειράς, ὅπου εἴδομεν ὅτι $\frac{2}{2}=1$, $\frac{3}{3}=1$, $\frac{4}{4}=1$, παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{4}{2}=2$, $\frac{6}{3}=2$, $\frac{8}{4}=2$, $\frac{6}{2}=3$, $\frac{8}{2}=4$. Ἔτσι ἐπειδὴ καὶ $\frac{1}{1}=1$ ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\frac{7}{7}=\frac{8}{8}=\frac{9}{9}=\frac{10}{10} \text{ κ.ο.κ.}$$

$$2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=\frac{12}{6}=\frac{14}{7}=\frac{16}{8}=\frac{18}{9}=\frac{20}{10} \text{ κ.ο.κ.}$$

$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}=\frac{15}{5}=\frac{18}{6}=\frac{21}{7}=\frac{24}{8}=\frac{27}{9}=\frac{30}{10} \text{ κ.ο.κ.}$$

Κάθε λοιπὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἠμποροῦμεν νὰ τὸν τρέψωμεν εἰς κλάσμα μὲ ὁποιονδήποτε παρονομαστήν. Π.χ. νὰ τρέψωμεν τὸν ἀκέραιον 12 εἰς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 5 ἢ 8 ἢ 10. Τότε θὰ εἶναι :

$$12=\frac{12\times5}{5}=\frac{60}{5},\quad 12=\frac{12\times8}{8}=\frac{96}{8},\quad 12=\frac{12\times10}{10}=\frac{120}{10},$$

Ένα όμως κλάσμα ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμητής του διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν παρονομαστήν του.

Π. χ. εἶναι $\frac{15}{5}=3$, ἐνῷ $\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$, $\frac{42}{7}=6$, ἐνῷ $\frac{45}{7}=6\frac{3}{7}$.

Ἔτσι εἶναι καὶ $\frac{5}{1}=5$, $\frac{6}{1}=6$, $\frac{7}{1}=7$ κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις - Λύσεις.

Σελὶς 122.

199) ἕως ***201)*** Αἱ ἀπαντήσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι.

202) 1ον. Ἐπειδὴ 1 πήχ.=8 ρούπια, εἶναι 1ρ.$=\frac{1}{8}$ π., 2ρ.$=\frac{2}{8}$ π., 5ρ.$=\frac{5}{8}$ π.

2ον. 1 ὀκᾶ = 400 δράμια. Ὥστε 1 δρμ.$=\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς, 10 δρμ.$=\frac{10}{400}$ τῆς ὀκ., 120 δρμ.$=\frac{120}{400}$ τῆς ὀκ.

3ον. 1 ἔτος=365 ἡμ. Ὥστε 5 ἡμ. $=\frac{5}{365}$ ἔτ., 30 ἡμ. $=\frac{30}{365}$ ἔτ., 240 ἡμ.$=\frac{240}{365}$ ἔτ.

4ον. 1 ὥρα = 60 λεπτά. Ὥστε 1 λ.$=\frac{1}{60}$ ὥρ., 15 λ. $=\frac{15}{60}$ ὥρ., 20 λ.$=\frac{20}{60}$ ὥρ.

203) Ἀφοῦ αἱ 6 πλάκες σάπωνος ζυγίζουν 2 ὀκάδας, διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον ζυγίζει ἡ 1 πλάκα, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 2 ὀκ. : 6, ἡ ὁποία δίδει πηλίκον $\frac{2}{6}$ ὀκ. Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ τὰς πλάκας αὐτὰς ἔχει βάρος $\frac{2}{6}$ τῆς ὀκᾶς.

204) Εἰς 1 ἡμέραν ἐθέριζε 3 στρέμ. : 5$=\frac{3}{5}$ τοῦ στρέμματος.

205) Ὅλον τὸν οἶνον τοῦ βαρελίου αὐτοῦ τὸν θεωροῦμεν ὡς μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἔχομεν διαιρέσει εἰς 350 ἴσα μέρη (ὀκάδας). Αἱ 12 λοιπὸν ὀκάδες, ἤτοι τὰ 12 μέρη, εἶναι τὰ $\frac{12}{350}$ τοῦ οἴνου αὐτοῦ. Ὁμοίως αἱ 29 ὀκ. καὶ 105 ὀκ. εἶναι τὰ $\frac{29}{350}$ καὶ $\frac{105}{350}$ αὐτοῦ.

206) Τὸ ποσὸν τοῦ ἀλεύρου ἐμοιράσθη εἰς 15 ἴσα μέρη καὶ κάθε οἰκογένεια ἔλαβεν ἓν μέρος, ἤτοι $\frac{1}{15}$ τοῦ ἀλεύρου. Ὥστε αἱ 9 οἰκογένειαι ἔλαβον τὰ $\frac{9}{15}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ.

207) Εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{500}{1000}$, $\frac{100}{1000}$ καὶ $\frac{50}{1000}$ τοῦ χιλιοδράχμου.

208) Εἶναι κατὰ σειρὰν πηλίκα τῶν διαιρέσεων 5 : 7, 6 : 11, 25 : 30.

209) Εἶναι: **1.** $3:8=\frac{3}{8}$, $5:12=\frac{5}{12}$, $4:25=\frac{4}{25}$, $48:250=\frac{48}{250}$.

2. $37:5=\frac{37}{5}$, $43:7=\frac{43}{7}$, $126:11=\frac{126}{11}$.

210) **1η σημασία** τοῦ $\frac{7}{8}$. Ἡ μονὰς $\frac{1}{8}$, ἐλήφθη 7 φορὰς (§ 157).

2α σημασία τοῦ $\frac{7}{8}$. Παριστάνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως 7 : 8 (§ 158, 3ον).

Ὁμοίως τὰ ἄλλα κλάσματα φανερώνουν 1) ὅτι τὸ $\frac{1}{18}$ ἐλήφθη 11 φορὰς καὶ τὸ $\frac{1}{23}$ ἐλήφθη 17 φοράς, καὶ 2) τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων 11 : 18 καὶ 17 : 23.

211) $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{15}{200}$, $\frac{38}{1000}$, $\frac{103}{2371}$.

212) Διὰ τὰ $\frac{3}{8}$ γράφομεν εὐθεῖαν ἴσην μὲ τρία μέρη τῆς πρώτης καὶ διὰ τὰ $\frac{5}{8}$ γράφομεν εὐθεῖαν ἴσην μὲ πέντε μέρη.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 124.

213) **1.** Ἐπειδὴ ἐδῶ $1=\frac{6}{6}$, τὰ μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 6, εἶναι τὰ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ καὶ $\frac{5}{6}$.

2. Μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος κλάσματα μὲ παρονομαστὴν 6 εἶναι π.χ. τὰ $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$ ἢ τὰ $\frac{10}{6}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{12}{6}$, κ.ο.κ.

3. Κλάσματα μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος, μὲ ἀριθμητὴν 7, εἶναι π. χ. $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{10}$ ἢ τὰ $\frac{7}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{13}$ καὶ κλάσματα μεγαλύτερα τῆς ἀκεραίας μονάδος μὲ ἀριθμητὴν 7 εἶναι τὰ $\frac{7}{6}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{2}$.

214) Τὰ χωρίζομεν σύμφωνα μὲ τὴν § 159, 1ον, 2ον, 3ον.

215) Ὁ ἀριθμὸς α—1 εἶναι μικρότερος τοῦ α. Ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ εἶναι μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος· ἤτοι εἶναι $\frac{\alpha-1}{\alpha} < 1$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 125.

216) **1.** 6 πήχ. $=\frac{6\times8}{8}=\frac{48}{8}$ πήχ., 10 πήχ. $=\frac{10\times8}{8}=$

$=\frac{80}{8}$ πήχ., 20 πήχ. $=\frac{160}{8}$ πήχ.

2. 3 ἑβδ. $=\frac{3\times7}{7}=\frac{21}{7}$ ἑβδ., 7 ἑβδ. $=\frac{7\times7}{7}=\frac{49}{7}$ ἑβδ.

12 ἑβδ. $=\frac{84}{7}$ ἑβδ.

3. $16\ \delta\varrho\chi. = \frac{16 \times 100}{100} = \frac{1600}{100}\ \delta\varrho\chi.,\ 23\ \delta\varrho\chi. = \frac{2300}{100}\ \delta\varrho\chi.,$

$$34\ \delta\varrho\chi. = \frac{3400}{100}\ \delta\varrho\chi.$$

217) $3 = \frac{3 \times 15}{15} = \frac{45}{15},\ 5 = \frac{5 \times 20}{20} = \frac{100}{20}$

218) 1ον. $\alpha = \frac{\alpha \times 2}{2} = \frac{2.\alpha}{2},\ \alpha = \frac{\alpha \times 5}{5} = \frac{5.\alpha}{5}$

2ον. $\alpha = \frac{\alpha \times \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha}.$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 126.

219-221) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς § 162. Καθὲν κλάσμα ποὺ θὰ εὕρωμεν ἰσοῦται μέ:

$$\frac{\text{ἀκέραιον} \times \text{παρονομαστὴν} + \text{ἀριθμητὴς}}{\text{παρονομαστὴς}}$$

222) $105\ \frac{7}{8} = \frac{105 \times 8 + 7}{8} = \frac{847}{8},$

$$254\ \frac{25}{28} = \frac{254 \times 28 + 25}{28} = \frac{7137}{28}$$

$$146\ \frac{7}{11} = \frac{146 \times 11 + 7}{11} = \frac{1613}{11},$$

$$17\ \frac{80}{81} = \frac{17 \times 81 + 80}{81} = \frac{1457}{81}$$

$$95\ \frac{21}{25} = \frac{95 \times 25 + 21}{25} = \frac{2396}{25},$$

$$104\ \frac{52}{61} = \frac{104 \times 61 + 52}{61} = \frac{6396}{61}$$

’Ασκήσεις — Λύσεις

Σελὶς 127

223 - 226) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τῆς § 163. Καθεὶς μεικτὸς ποὺ θὰ εὕρωμεν θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ

$$\text{ἀκέραιον πηλίκον} + \frac{\text{ὑπόλοιπον}}{\text{παρονομαστὴν}}$$

ἐὰν ὅμως τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μηδὲν θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὸ κλάσμα ἀκέραιος ἀριθμός.

Εἰς τοὺς ἀριθμητὰς τῶν κλασμάτων τῶν ἀσκήσεων 225 καὶ 226 θὰ ἐφαρμοσθοῦν οἱ χαρακτῆρες διαιρετότητος μὲ τὸν ἀντίστοιχον παρονομαστήν. Π. χ. εἰς τὸ κλάσμα $\frac{328}{4}$ βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμητής του 328 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ 4. Ἑπομένως μετὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ἀκεραίων μονάδων του, θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐνῷ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{423}{4}$ θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς μεικτός.

Ἔτσι διακρίνομεν ἀμέσως ὅτι, ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{164}{2}$, $\frac{561}{3}$, $\frac{4374}{9}$, $\frac{650}{25}$, $\frac{1432}{4}$, $\frac{2160}{8}$ καὶ $\frac{3322}{11}$ θὰ προκύψουν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐνῷ ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα κλάσματα θὰ προκύψουν ἀριθμοὶ μεικτοί.

227) Τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 τὰ μικρότερα τοῦ 15 εἶναι τὰ $2\times1=2$, $2\times2=4$, $2\times3=6$, $2\times4=8$, $2\times5=10$, $2\times6=12$, $2\times7=14$.

Τὰ ζητούμενα λοιπὰ κλάσματα εἶναι τά:

$$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{10}{2}, \frac{12}{2} \text{ καὶ } \frac{14}{2}.$$

228) Εἶναι τά:

$$\frac{4}{4}=1,\ \frac{8}{4}=2,\ \frac{12}{4}=3,\ \frac{16}{4}=4.$$

229) **1ον.** Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ 2 καὶ 5 εἶναι οἱ 3 καὶ 4. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν κλάσματα εἶναι τά:

$$\frac{25\times3}{25}=\frac{75}{25}\ (=3) \text{ καὶ } \frac{25\times4}{25}=\frac{100}{25}\ (=4).$$

2ον. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι τά :

$$\frac{8\times 6}{8}=\frac{48}{8}(=6),\ \frac{8\times 7}{8}=\frac{56}{8}(=7),\ \frac{8\times 8}{8}=\frac{64}{8},\ \frac{72}{8},\ \frac{80}{8},\ \frac{88}{8}.$$

230) Ὁ ἀκέραιος 3 εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοὺ α (α ὁ διαιρετέος) διὰ τοῦ 4 (ὁ 4 διαιρέτης). Ὥστε εἶναι $\alpha = 4\times 3=12$ (σελὶς 20, ἰσότης 3).

231) Ἐπειδὴ 40=8 ἐπὶ χ, θὰ εἶναι $\chi=\frac{40}{8}=5$ (βλ. σ. 20).

232) Ὁ ἀριθμητὴς χ διὰ νὰ διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ τὸν 9 πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9. Ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ 4 καὶ 7 ὑπάρχουν οἱ ἀκέραιοι 5 καὶ 6, ὁ χ παριστάνει τοὺς ἀριθμοὺς $9\times 5=45$ καὶ $9\times 6=54$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 129.

233) Δηλαδὴ ἐδῶ πρέπει οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων νὰ γίνουν ὅλοι 8. Ἐπειδὴ δὲ $2\times 4=8$, $4\times 2=8$, $16:2=8$ (καὶ $2:2=1$) $24:3=8$ (καὶ $6:3=2$), ἔχομεν $\frac{1}{2}=\frac{1\times 4}{2\times 4}=\frac{4}{8}$,

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{6}{8},\ \frac{2}{16}=\frac{2:2}{16:2}=\frac{1}{8}\ \text{καὶ}\ \frac{6}{24}=\frac{6:3}{24:3}=\frac{2}{8}.$$

234) Εἶναι τὸ $\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{2}{4}$ ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$

καὶ τὸ $\frac{12:4}{16:4}=\frac{3}{4}$ ἴσον μὲ τὸ $\frac{12}{16}$

235) **1ον.** Εἶναι $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\frac{9}{18}$

2ον. Εἶναι $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{18}{24}=\frac{24}{32}=\frac{45}{60}$.

236) Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 15 τοῦ κλάσματος $\frac{9}{15}$, διὰ νὰ γίνῃ 45 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 3 ($45:15=3$), διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πρέπει καὶ ὁ ἀριθμητής του 9 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3. Ὥστε εἶναι $\alpha = 9 \times 3 = 27$, ἤτοι $\frac{9}{15} = \frac{27}{45}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ἐπειδὴ

$63 = 9 \times 7$, θὰ εἶναι $\beta = 15 \times 7 = 105$, ἤτοι $\frac{9}{15} = \frac{63}{105}$

$315 = 35 \times 9$, » » $\alpha = 19 \times 9 = 171$ » $\frac{19}{35} = \frac{171}{315}$

$108 = 36 \times 3$, » » $\gamma = 17 \times 3 = 51$ » $\frac{51}{108} = \frac{17}{36}$

$189 : 9 = 21$, » » $\delta = 900 : 9 = 100$ » $\frac{21}{100} = \frac{189}{900}$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 131.

238) (8,16 μ.κ.δ. 8) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ (12,36 μ.κ.δ. 12) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(16,40 μ.κ.δ. 8) $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ (24,32 μ.κ.δ. 8) $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

(85,120 μ.κ.δ. 5) $\frac{85}{120} = \frac{17}{24}$ (9,24 μ.κ.δ. 3) $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

(18,24 μ.κ.δ. 6) $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ (35,49 μ.κ.δ. 7) $\frac{35}{49} = \frac{5}{7}$

(16,64 μ.κ.δ. 16) $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ (27,81 μ.κ.δ. 27) $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 134.

239) **1.** $\frac{5}{6}, \frac{2}{3}$ (6,3 ἐ. κ. π. 6 6 : 6=1, 6 : 3=2 Α΄ τρόπος)

$\frac{5 \times 1}{6 \times 1}, \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$

$\frac{5}{6}$ $\frac{4}{6}$

2. $\frac{3}{4}, \frac{7}{5}$ (4 καὶ 5 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, Β΄ τρόπος)

$\frac{3 \times 5}{4 \times 5}, \frac{4 \times 7}{4 \times 5}$

$\frac{15}{20}$ $\frac{28}{20}$

3. $\frac{1}{4}, \frac{7}{18}$ (18,4 ἐ.κ.π. 36 $36:4=9$, $36:18=2$)

$\frac{1\times9}{4\times9}, \frac{7\times2}{18\times2}$

$\frac{9}{36}, \frac{14}{36}$

4. $\frac{5}{8}, \frac{9}{18}$ (ἁπλοποιοῦμεν τὸ $\frac{9}{18}$ διὰ 9)

$\frac{5}{8}, \frac{1}{2}$ (8,2 ἐ.κ.π. 8)

$\frac{5}{8}, \frac{4}{8}$ ($8:8=1, 8:2=4$)

5. $\frac{8}{12}, \frac{7}{38}$ (ἁπλοποιοῦμεν τὸ $\frac{8}{12}$ διὰ 4)

$\frac{2}{3}, \frac{7}{38}$ (38 καὶ 3 πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους)

$\frac{76}{114}, \frac{21}{114}$

6. $\frac{5}{14}, \frac{8}{21}$ (21, 14 ἐ. κ. π. 42 $42:14=3$, $42:21=2$)

$\frac{5\times3}{14\times3}, \frac{8\times2}{21\times2}$

$\frac{15}{42}, \frac{16}{42}$

240) 1. $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ (12, 6, 5 ἐ. κ. π. 60 $60:5=12$, $60:6=10$, $60:12=5$)

$\frac{2\times12}{5\times12}, \frac{5\times10}{6\times10}, \frac{7\times5}{12\times5}$ ἤτοι $\frac{24}{60}, \frac{50}{60}, \frac{35}{60}$

2. $\frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{8}{20}$ (ἁπλοποιοῦμεν τὸ $\frac{8}{20}$ διὰ 4)

$\frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{2}{5}$ (10, 5 ἐ.κ.π. 10, $10:5=2$, $10:10=1$)

$\frac{4\times2}{5\times2}, \frac{7\times1}{10\times1}, \frac{2\times2}{5\times2}$ ἤτοι $\frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{10}$

3. $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{12}{8}, \frac{24}{36}$ (ἁπλοποιοῦμεν)

$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ (3,2 ἐ.κ.π. 6, $6:3=2$, $6:2=3$)

$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}, \frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ ἤτοι $\frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{9}{6}, \frac{4}{6}$

4. $\frac{7}{10}, \frac{35}{100}, \frac{3}{5}, \frac{45}{100}$ (ἁπλοποιοῦμεν)

$\frac{7}{10}, \frac{7}{20}, \frac{3}{5}, \frac{9}{20}$ (20, 10, 5 ἐ.κ.π. 20, 20 : 10=2,20 : 5=4)

$\frac{7\times2}{10\times2}, \frac{7\times1}{20\times1}, \frac{3\times4}{5\times4}, \frac{9\times1}{20\times1}$ ἤτοι $\frac{14}{20}, \frac{7}{20}, \frac{12}{20}, \frac{9}{20}$

241) Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{6}<1$, πρέπει ὁ α νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6. Ἐπειδὴ πάλιν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{6}$ εἶναι ἀνάγωγον, οἱ ὅροι του α καὶ 6 πρέπει νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἀλλ' οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ 6 καὶ πρῶτοι πρὸς αὐτὸν εἶναι οἱ 1 καὶ 5. Ὥστε θὰ εἶναι $\alpha=1$ ἢ $\alpha=5$, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{6}=\frac{1}{6}$ ἢ $\frac{5}{6}$.

242) Ἐδῶ πρέπει τὸ χ νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 8, μεγαλύτερον τῆς μονάδος 1 καὶ πρῶτον πρὸς τὸν 8. Ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\chi=3$ ἢ 5 ἢ 7. Ὥστε $\frac{8}{\chi}=\frac{8}{3}$ ἢ $\frac{8}{5}$ ἢ $\frac{8}{7}$.

243) Εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}>1$, $\frac{\beta}{\alpha}<1$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<1$.

244) $\frac{5\times\alpha}{9\times\alpha}=\frac{5}{9}$, $\frac{\alpha}{2\times\alpha}=\frac{1}{2}$, $\frac{6\times\alpha}{8\times\alpha}=\frac{3\times2\times\alpha}{4\times2\times\alpha}=\frac{3}{4}$

$\frac{\alpha\times\alpha}{3\times\alpha}=\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\times\beta^2}{5\times\beta}=\frac{2\times\beta\times\beta}{5\times\beta}=\frac{2\times\beta}{5}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

1. Πρόσθεσις κλασμάτων.

Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων. Ἡ πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Διότι ὅπως εὑρίσκομεν 3 ρούπια + 4 ρούπια = 7 ρούπια, ἔτσι εὑρίσκομεν καὶ 3 ὄγδοα πήχ. + 4 ὄγδοα πήχ.=7 ὄγδοα πήχ., ἤτοι $\frac{3}{8}$ πήχ. + $\frac{4}{8}$ πήχ. = $\frac{3+4}{8}$ πήχ. = $\frac{7}{8}$ πήχ.

Ἐδῶ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις προσθέτομεν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα 7 ἐκφράζει ρούπια, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἐκφράζει ὄγδοα τοῦ πήχεως. **Ἔτσι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως ὁμωνύμων κλασμάτων, ὁ παρονομαστὴς δὲν ἀναμιγνύεται καθόλου. Μόνον τὸν γράφομεν ὡς παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων κλασμάτων.**

Ἐννοεῖται ὅτι ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς. Π. χ. δὲν ἠμποροῦμεν νὰ προσθέσωμεν $\frac{3}{8}$ πήχ. $+\frac{4}{7}$ ὀκ.

Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων.—Ἑτερώνυμα κλάσματα δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὰ προσθέσωμεν. Πρέπει πρῶτον νὰ τὰ κάνωμεν ὁμώνυμα. Ἐννοεῖται πάλιν ὅτι ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν, οἱ προσθετέοι πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 138.

245) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι.

246) Ἐδῶ οἱ παρονομασταὶ 13, 23 καὶ 101 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Κανεὶς λοιπὸν ἀπὸ αὐτοὺς δὲν ἔχει μὲ καθένα προσθετέον τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμητοῦ, κοινὸν διαιρέτην.. Τὸ κλάσμα λοιπὸν τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸν 13 καὶ ἀριθμητὴν 7 ἢ 9 εἶναι ἀνάγωγον. Καὶ τὸ κλάσμα τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ παρονομαστὴν 23 καὶ ἀριθμητὴν 8 ἢ 11 ἢ 17 εἶναι ἀνάγωγον κ.ο.κ. Ἔτσι γράφομεν $\frac{7+9}{13}=\frac{7}{13}+\frac{9}{13}$ κ.ο.κ.

Ἂν θέλωμεν ὅμως ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν π. χ. καὶ

$$\frac{7+9}{13}=\frac{2}{13}+\frac{5}{13}+\frac{6}{13}+\frac{3}{13}\left(=\frac{(2+5)+(6+3)}{13}=\frac{7+9}{13}\right).$$

247) $\frac{3}{4}+\frac{4}{6}+\frac{1}{12}$

$\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+\frac{1}{12}=\frac{18}{12}=$

$=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

κοινὸς παρονομαστὴς 12

$12:\ 4=3,\ \frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$

$12:\ 6=2,\ \frac{4\times2}{6\times2}=\frac{8}{12}$

$12:12=1\ \ \frac{1\times1}{12\times1}=\frac{1}{12}$

$$\frac{2}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{18}+\frac{1}{36}= \qquad \frac{2}{24}+\frac{3}{36}+\frac{5}{12}+\frac{6}{9}\ \text{ἤ}$$

$$=\frac{12}{36}+\frac{20}{36}+\frac{14}{36}+\frac{1}{36}= \qquad \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{47}{36}=1\,\frac{11}{36} \qquad \frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{15}{12}=1\,\frac{1}{4}$$

248) **1.** $17\,\frac{3}{4},\quad 10\,\frac{2}{9},\quad 15\,\frac{1}{5},\quad 16\,\frac{4}{7}.$

2. $1\,\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=1+\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=1+\left(\frac{4}{20}+\frac{15}{20}\right)=1\,\frac{19}{20}$

$$5\,\frac{18}{30}+\frac{5}{30}=5\,\frac{23}{30},\quad 10\,\frac{35}{63}+\frac{18}{63}=10\,\frac{53}{63},$$

$$16\,\frac{18}{60}+\frac{35}{60}=16\,\frac{53}{60}$$

3. $(2+4)+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\right)=6+\frac{4+15}{20}=6\,\frac{19}{20}$

$$7\,\frac{4}{8}+3\,\frac{5}{8}=10\,\frac{9}{8}=10+1\,\frac{1}{8}=11\,\frac{1}{8},$$

$$11\,\frac{3}{12}+3\,\frac{10}{12}=15\,\frac{1}{12}$$

4. $(6+3+1)+\left(\frac{3}{15}+\frac{10}{15}+\frac{3}{15}\right)=10+1\,\frac{1}{15}=11\,\frac{1}{15}$

$$(5+4+1)+\left(\frac{8}{12}+\frac{3}{12}+\frac{10}{12}\right)=10+1\,\frac{9}{12}=11\,\frac{3}{4}$$

$$(10+4+6)+\left(\frac{8}{72}+\frac{9}{72}+\frac{60}{72}\right)=20+1\,\frac{5}{72}=21\,\frac{5}{72}$$

249) Ἠγόρασεν $8+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=9\,\frac{3}{8}$ ὀκ. τὸ ὅλον.

250) Θὰ προσθέσωμεν τοὺς πήχεις ποὺ ἐπώλησε, μὲ τοὺς πήχεις ποὺ ἔμειναν. Τὸ ἄθροισμα δὲ αὐτῶν εἶναι $50\,\frac{3}{8}$ πήχεις. Τόσους λοιπὸν πήχεις εἶχε τὸ τεμάχιον τοῦτο.

251) Τὸ βαρέλιον τοῦτο εἶχε κατ᾽ ἀρχὰς τυρὸν

$$12\frac{3}{4} \text{ ὀκ.} + 8\frac{1}{8} \text{ ὀκ.} + 4 \text{ ὀκ.} + \frac{3}{4} \text{ ὀκ.} = 25\frac{5}{8} \text{ ὀκ.}$$

252) Ἐξώδευσε τὴν τριμηνίαν αὐτὴν σάπωνα

$$22\frac{1}{4} \text{ ὀκ.} + 18\frac{5}{8} \text{ ὀκ.} + 24\frac{3}{4} \text{ ὀκ.} = 65\frac{5}{8} \text{ ὀκ.}$$

253) Διήνυσεν κατὰ τὰς τρεῖς αὐτὰς ἡμέρας

$$28\frac{3}{4} \text{ χιλμ.} + 30\frac{1}{2} \text{ χιλμ.} + \left(30\frac{1}{2} \text{ χιλμ.} + 2\frac{1}{2} \text{ χιλμ.}\right) =$$

$$= 92\frac{1}{4} \text{ χιλμ.}$$

254) Τὸ βάρος τῶν τριῶν κιβωτίων εἶναι ὀκάδες

$$145\frac{2}{5} + \left(145\frac{2}{5} + 10\frac{1}{8}\right) + \left(145\frac{2}{5} + 10\frac{1}{8} + 15\frac{5}{8}\right) =$$

$$= 472\frac{3}{40}.$$

2. Ἀφαίρεσις κλασμάτων.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 140.

255) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι.

256) Θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀπὸ τὸ $\frac{7}{8}$. Ἔχει λοιπὸν νὰ σκάψῃ $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$ τῆς ἀμπέλου.

257) Εἰς μίαν ἡμέραν ὁ πατὴρ ἐκτελεῖ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ υἱὸς ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτοῦ. Ὥστε ὁ πατὴρ ἐκτελεῖ εἰς μίαν ἡμέραν $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5}{60} - \frac{3}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ μέρος τοῦ ἔργου περισσότερον.

258) Εἰς μίαν ἡμέραν ἡ πρώτη πλέκει $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ μ. καὶ ἡ δευτέρα πλέκει $\frac{18}{14}=\frac{9}{7}$ μ. Ἐὰν τρέψωμεν τὰ κλάσματα $\frac{5}{4}$ καὶ $\frac{9}{7}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{35}{28}, \frac{36}{28}$ βλέπομεν, ὅτι ἡ δευτέρα πλέκει εἰς μίαν ἡμέραν $\frac{36}{28}-\frac{35}{28}=\frac{1}{28}$ μ. περισσότερον ἀπὸ τὴν ἄλλην.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 142.

259) **1.** $1-\frac{3}{5}=\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$, $12-\frac{7}{8}=11\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=$

$=11\frac{1}{8}$ κ. ο. κ.

260) **1.** $6\frac{10}{24}-\frac{3}{24}=6\frac{7}{24}$, δοκ. $6\frac{7}{24}+\frac{3}{24}=6\frac{10}{24}=6\frac{5}{12}$,

$3\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=3\frac{2}{9}$, $25\frac{8}{20}-\frac{15}{20}=24\frac{28}{20}-\frac{15}{20}=24\frac{13}{20}$

2. $10\frac{8}{10}-5\frac{3}{10}=5\frac{1}{2}$, $15\frac{20}{35}-10\frac{14}{35}=5\frac{6}{35}$,

$40\frac{15}{18}-8\frac{10}{18}=32\frac{5}{18}$

3. $5\frac{2}{4}-3\frac{3}{4}=4\frac{6}{4}-3\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$,

$18\frac{12}{30}-10\frac{25}{30}=17\frac{42}{30}-10\frac{25}{30}=7\frac{17}{30}$,

$28\frac{32}{72}-16\frac{63}{72}=27\frac{104}{72}-16\frac{63}{72}=11\frac{41}{72}$.

261) Τὰ ; θὰ τὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντιστοίχως μὲ τὰς διαφορὰς

$\frac{45}{46}-\frac{11}{23}=\frac{23}{46}=\frac{1}{2}$, $\frac{73}{75}-\frac{19}{25}=\frac{16}{75}$, $29\frac{19}{26}-5\frac{7}{13}=24\frac{5}{26}$

$\frac{11}{23}+\frac{1}{2}=\frac{22}{46}+\frac{23}{46}=\frac{45}{46}$; $\frac{16}{75}+\frac{19}{25}=\frac{16}{75}+\frac{57}{75}=\frac{73}{25}$ κ. ο. κ.

262) Χωρεῖ

$$6\frac{3}{4}\text{ ὀκ.} - \frac{7}{8}\text{ ὀκ.} = 6\frac{6}{8}\text{ ὀκ.} - \frac{7}{8}\text{ ὀκ.} = 5\frac{14}{8}\text{ ὀκ.} - \frac{7}{8}\text{ ὀκ.} = 5\frac{7}{8}\text{ ὀκ.}$$

263) Χωρεῖ

$$12\frac{7}{8}\text{ ὀκ.} - 3\frac{5}{12}\text{ ὀκ.} = 12\frac{21}{24}\text{ ὀκ.} - 3\frac{10}{24}\text{ ὀκ.} = 9\frac{11}{24}\text{ ὀκ.}$$

264) Ἔφαγον

$$22\frac{3}{10}\text{ ὀκ.} - 12\frac{4}{5}\text{ ὀκ.} = 22\frac{6}{20}\text{ ὀκ.} - 12\frac{16}{20}\text{ ὀκ.} = 9\frac{1}{2}\text{ ὀκ.}$$

265) Ἠγόρασεν

$$40\frac{3}{4}\text{ ὀκ.} - 1\frac{2}{5}\text{ ὀκ.} = 40\frac{15}{20}\text{ ὀκ.} - 1\frac{8}{20}\text{ ὀκ.} = 39\frac{7}{20}\text{ ὀκ.}$$

266) Χρειάζεται

$$10\frac{1}{10}\text{ ὥρ.} - 8\frac{1}{3}\text{ ὥρ.} = 10\frac{3}{30}\text{ ὥρ.} - 8\frac{10}{30}\text{ ὥρ.} = 1\frac{23}{30}\text{ ὥρ.}$$

267) Ἔμειναν

$$50\text{ πήχ.} - \left(8\frac{1}{2}\text{ πήχ.} + 12\frac{3}{4}\text{ πήχ.} + 16\frac{1}{8}\text{ πήχ.}\right)$$

$$50\text{ πήχ.} - 37\frac{3}{8}\text{ πήχ.} = 12\frac{5}{8}\text{ πήχ.}$$

268) Διήνυσε τὴν β΄ ἡμέραν

$$35\frac{3}{4}\text{ χιλμ.} - 5\frac{2}{5}\text{ χιλμ.} = 30\frac{7}{20}\text{ χιλμ.}$$

Τὴν γ΄ ἡμέραν θὰ διανύσῃ

$$100\text{ χιλμ.} - \left(35\frac{3}{4}\text{ χιλμ.} + 30\frac{7}{20}\text{ χιλμ.}\right)$$

$$100\text{ χιλμ.} - 66\frac{1}{10}\text{ χιλμ.} = 33\frac{9}{10}\text{ χιλμ.}$$

269) Τὸ ἐλαφρότερον ζυγίζει

$$127\frac{5}{8}\text{ ὀκ.} - 94\frac{3}{4}\text{ ὀκ.} = 32\frac{7}{8}\text{ ὀκ.}$$

Τὸ μεσαῖον ζυγίζει

$$32\frac{7}{8}\text{ ὀκ.} + 10\frac{1}{2}\text{ ὀκ.} = 43\frac{3}{8}\text{ ὀκ.}$$

Τὸ πρῶτον ζυγίζει

$$94\frac{3}{4}\text{ ὀκ.} - 43\frac{3}{8}\text{ ὀκ.} = 51\frac{3}{8}\text{ ὀκ.}$$

Τὰ τρία ὁμοῦ ζυγίζουν

$$51\frac{3}{8}\text{ ὀκ.} + 43\frac{3}{8}\text{ ὀκ.} + 32\frac{7}{8}\text{ ὀκ.} = 127\frac{5}{8}\text{ ὀκ.}$$

270) Τὸ β΄ ἔλαβε $12\frac{3}{5}\text{ μ.} - 2\frac{2}{3}\text{ μ.} = 9\frac{14}{15}\text{ μ.}$

Τὸ γ΄ ἔλαβε $9\frac{14}{15}\text{ μ.} - 2\frac{5}{8}\text{ μ.} = 7\frac{37}{120}\text{ μ.}$

Τὸ μῆκος τοῦ ὑφ. ἦτο $12\frac{3}{5}\text{ μ.} + 9\frac{14}{15}\text{ μ.} + 7\frac{37}{120}\text{ μ.} =$

$= 29\frac{101}{120}\text{ μ.}$

271) Εἰς μίαν ὥραν ὁ α΄ κρουνὸς γεμίζει τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς δεξαμενῆς, ὁ β΄ γεμίζει τὸ $\frac{1}{12}$, ὁ δὲ γ΄ ἀδειάζει εἰς 1 ὥραν τὸ $\frac{1}{15}$ αὐτῆς. Ὥστε, ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ τρεῖς κρουνοὶ ταυτοχρόνως, θὰ γεμίσουν εἰς 1 ὥραν τά, $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{15}{120} + \frac{10}{120} - \frac{8}{120} = \frac{17}{120}$ τῆς δεξαμενῆς.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἔννοιαι τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

1. Πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον.—Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ κλάσμα $\frac{5}{9}$ ἐπὶ 3. Ἀλλ' αὐτὸ σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὸ $\frac{5}{9}$ 3 φοράς. Ἤτοι εἶναι

$$\frac{5}{9}\times 3=\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}=\frac{5+5+5}{9}=\frac{5\times 3}{9}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}.$$

῞Ωστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, εἰς τὴν ὁποίαν πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς **ἡ ἔννοια τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, μένει ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ποὺ εἴδομεν εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς** (§ 54).

῾Ο πολλαπλασιαστέος, εἴτε ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι, εἴτε κλάσμα, εἴτε μεικτός, θὰ ἐπαναλαμβάνεται τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ **ἀκέραιος** πολλαπλασιαστής. Π. χ.

$$7\times 4 = 7+7+7+7$$

$$\frac{3}{5}\times 4 = \frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$$

$$7\frac{3}{5}\times 4 = 7\frac{3}{5}+7\frac{3}{5}+7\frac{3}{5}+7\frac{3}{5}.$$

2. Πολλαπλασιασμὸς οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα. — Π. χ. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλοὶ συνηθίζουν νὰ λέγουν θὰ λάβωμεν τὸν 12, $\frac{3}{4}$ φοράς. ᾿Αλλ᾿ αὐτὸ δὲν ἔχει νόημα καὶ εἶναι ἐσφαλμένον.

῾Ο πολλαπλασιασμὸς τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ δηλαδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς $12\times\frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ **τέταρτον** τοῦ 12 **τρεῖς** φοράς.

᾿Αλλὰ τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 12 εἶναι $\frac{12}{4}$ καὶ

$$12\times\frac{3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{12}{4}+\frac{12}{4}=\frac{12}{4}\times 3\left(=\frac{12\times 3}{4}\right).$$

῾Ομοίως ὁ πολλαπλασιασμὸς $\frac{7}{8}\times\frac{4}{5}$ σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ **πέμπτον** τοῦ $\frac{7}{8}$, **τέσσαρας** φοράς.

᾿Αλλὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{7}{8}$ εἶναι $\frac{7}{8\times 5}$. ῞Ωστε

$$\frac{7}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{8\times5}+\frac{7}{8\times5}+\frac{7}{8\times5}+\frac{7}{8\times5}=\frac{7}{8\times5}\times4\left(\frac{7\times4}{8\times5}\right).$$

Ὥστε: **Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα σημαίνει νὰ ἐπαναλάβωμεν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ** (ὅστις εἶναι πολλαπλασιαστέος) **πολλὰς φοράς.** Τί δὲ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ θὰ λάβωμεν, τὸ δεικνύει ὁ **παρονομαστὴς** τοῦ κλάσματος (τοῦ πολλαπλασιαστοῦ) καὶ πόσας φορὰς θὰ ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τὸ μέρος, τὸ δεικνύει ὁ **ἀριθμητής** του.

Δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν μαζὶ διαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμόν.

Ἀλλ' ὅπως τὴν ἐπανάληψιν ὁλοκλήρου τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἐκαλέσαμεν πολλαπλασιασμόν, ἔτσι συμφωνοῦμεν νὰ καλέσωμεν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐπανάληψιν μέρους τινὸς τοῦ ἀριθμοῦ πολλὰς φοράς.

Ἔτσι τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα τοὺς ἑνώνομεν εἰς ἕνα, **τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ** κατὰ τὸν ὁποῖον: **Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν ὁλόκληρον τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἢ μέρος αὐτοῦ πολλὰς φοράς.**

Τὸ γινόμενον λοιπὸν δύο ἀριθμῶν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι **μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον** (ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα) ἢ **μικρότερον ἀπὸ αὐτὸν** (ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὴν ἀκεραίαν μονάδα). Θὰ εἶναι δὲ τὸ γινόμενον **ἴσον μὲ τὸν πολλαπλασιαστέον,** ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἴσος μὲ 1.

Οὕτω π. χ. εἶναι

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}=\frac{5\times3}{7\times2}=\frac{15}{14},\ \text{εἶναι δὲ}\ \frac{15}{14}>\frac{5}{7},\ \text{διότι}\ \frac{3}{2}>1.$$

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{8\times7}=\frac{15}{56},\ \text{εἶναι δὲ}\ \frac{15}{56}<\frac{3}{8},\ \text{διότι}\ \frac{5}{7}<1\ \text{κ. ο. κ.}$$

Ἀσκήσεις — Λύσεις

Σελὶς 146.

272 - 275) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι. Στηρίζονται αἱ περισσότεραι εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας 1) ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του, εὑρίσκομεν γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

2) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπὶ τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κλπ. τοῦ παρονομαστοῦ του, εὑρίσκομεν γινόμενον τὸ διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κλπ. τοῦ ἀριθμητοῦ του (§ 183, II, III).

Π. χ. εἰς τὸ π. δ. $\frac{3}{4} \times 12$, ἐπειδὴ ὁ 12 εἶναι τριπλάσιος τοῦ 4, τὸ γινόμενον εἶναι τριπλάσιον τοῦ 3, δηλαδὴ 9· καὶ ὅταν $\frac{\alpha}{5} \times 5 = 4$, ὁ α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν 4.

276) Εἰς ἕνα μῆνα θὰ καύσῃ $\frac{3}{8}$ ὀκ. $\times\ 30 = \frac{3 \times 30}{8} =$

$$= \frac{3 \times 15}{4} = 11\frac{1}{4} \text{ ὀκ.}$$

277) Ὑπάρχει οἶνος $\frac{3}{4}$ ὀκ. $\times\ 360$. Ἐπειδὴ δὲ $360 =$ $= 4 \times 90$, θὰ εἶναι (§ 183, III) $\frac{3}{4}$ ὀκ. $\times\ 360 = 3 \times 90 =$

$$= 270 \text{ ὀκάδες.}$$

278) Αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ἡ περίμετρος λοιπὸν αὐτοῦ εἶναι $\frac{3}{10}$ μ. $\times\ 4 = \frac{3 \times 4}{10} =$

$$= \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} \text{ μ.} = 1\frac{1}{5} \text{ μ.}$$

279) Ἤξιζον $3\frac{1}{2}$ χιλ. $\times\ 156 + 8\frac{1}{2}$ χιλ. $\times\ 156 =$ $= \frac{7}{2}$ χιλ. $\times\ 156 + \frac{17}{2}$ χιλ. $\times\ 156 = 546$ χιλ. $+\ 1326$ χιλ. $=$ $= 1872$ χιλ.

Ἄλλος τρόπος. Κάθε ἄπορος ἔλαβεν εἴδη ἀξίας $3\frac{1}{2}$ χιλ. $+$ $+\ 8\frac{1}{2}$ χιλ. $= 12$ χιλ. Ὥστε, οἱ 156 ἄποροι ἔλαβον εἴδη ἀξίας 12 χιλ. $\times\ 156 = 1872$ χιλ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 149.

280) **1.** Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{9}{15}$ ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. 15 τῶν παρονομαστῶν των. 'Επειδὴ δὲ $\frac{3}{5}\times 15=9$ καὶ $\frac{9}{15}\times 15=9$, τὰ κλάσματα $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{9}{15}$ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

2. 'Επειδὴ $\frac{7}{9}\times 36=28$ καὶ $\frac{28}{36}\times 36=28$, τὰ κλάσματα $\frac{7}{9}$ καὶ $\frac{28}{36}$ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

3. 'Ομοίως καὶ τὰ κλάσματα $\frac{8}{11}$ καὶ $\frac{32}{44}$ εἶναι μεταξύ των ἴσα, διότι $\frac{8}{11}\times 44=32$ καὶ $\frac{32}{44}\times 44=32$.

281) Εἶναι **1.** $\frac{4}{7}\times 14=\frac{\alpha}{14}\times 14$, ἤτοι $8=\alpha$ ἢ $\alpha=8$.

2. $\frac{5}{9}\times 27=\frac{\beta}{27}\times 27$, ἤτοι $\beta=15$

3. $\frac{6}{11}\times 11=\frac{24}{\gamma}\times 11$, ἤτοι $6=\frac{264}{\gamma}$,

$6\times\gamma=\frac{264}{\gamma}\times\gamma$, ἤτοι $6\times\gamma=264$ καὶ (§ 186) $\gamma=264:6=44$.

"Αλλος τρόπος. 'Επειδὴ $24=6\times 4$, πρέπει (§ 164) νὰ εἶναι καὶ $\gamma=11\times 4=44$.

4. $\frac{7}{\alpha}\times\alpha\times 20=\frac{35}{20}\times\alpha\times 20$

$7\times 20=35\times\alpha$ καὶ $\alpha=7\times 20:35=4$.

"Αλλος τρόπος. 'Επειδὴ $7=35:5$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\alpha=20:5=4$.

282) **1.** $\frac{4}{15}<\frac{7}{15}<\frac{9}{15}<\frac{12}{15}$ **2.** $\frac{5}{12}<\frac{5}{9}<\frac{5}{7}<\frac{5}{6}$

ἢ $\frac{12}{15} > \frac{9}{15} > \frac{7}{15} > \frac{5}{15}$ ἢ $\frac{5}{6} > \frac{5}{7} > \frac{5}{9} > \frac{5}{12}$

283) 1. $\left.\begin{array}{ccc} \frac{5}{8} & \frac{8}{12} & \frac{11}{24} \\ \frac{15}{24} & \frac{16}{24} & \frac{11}{24} \end{array}\right\}$ $\frac{16}{24} > \frac{15}{24} > \frac{11}{24}$, ἤτοι $\frac{8}{12} > \frac{5}{8} > \frac{11}{24}$

2. $\left.\begin{array}{cccc} \frac{4}{5} & \frac{9}{10} & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{32}{40} & \frac{36}{40} & \frac{35}{40} & \frac{30}{40} \end{array}\right\}$ $\frac{36}{40} > \frac{35}{40} > \frac{32}{40} > \frac{30}{40}$, ἤτοι $\frac{9}{10} > \frac{7}{8} > \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$

284) Ἐπειδὴ $\frac{7}{15} \times 60 = 28$ καὶ $\frac{5}{12} \times 60 = 25$, ἤτοι ἐπειδὴ $28 > 25$, εἶναι καὶ $\frac{7}{15} > \frac{5}{12}$. Ὁ υἱὸς λοιπὸν ἔλαβε τὸ περισσότερον μέρος.

285) Ἐπειδὴ $\frac{5}{9} \times 45 = 25$ καὶ $\frac{23}{45} \times 45 = 23$, εἶναι $\frac{5}{9} > \frac{23}{45}$. Ὥστε περισσότερον δρόμον διέτρεξε τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 151.

286 - 287) Αἱ ζητούμεναι ἀποκρίσεις εἶναι εὔκολοι.

288) Θὰ ἀγοράσῃ $\frac{3}{8}$ πήχ. $\times 24 = \frac{3 \times 24}{8}$ πήχ. $= 3 \times 3$ πήχ. $= 9$ πήχεις.

289) Εἰς 1 ὥραν διέτρεξε $\frac{6}{9} : 3 = \frac{6 : 3}{9} = \frac{2}{9}$ τῆς ὁδοῦ.

290) Ἔλαβεν ὁ καθεὶς $\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9}$ τοῦ ἀγροκτήματος.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 152.

291) **1.** Διπλασιάζομεν τοὺς παρονομαστάς.

2. Τριπλασιάζομεν τοὺς παρονομαστάς.

292) **1.** $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{6}{5}$

2. $\frac{5}{21}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{9}{30}$

293) Διὰ τὸ $\frac{17}{20}$, $\frac{34}{20}$, $\frac{51}{20}$, $\frac{68}{20}$ ἢ $\frac{17}{10}$, $\frac{51}{20}$, $\frac{17}{5}$

» » $\frac{35}{42}$, $\frac{70}{42}$, $\frac{105}{42}$, $\frac{140}{42}$ ἢ $\frac{35}{21}$, $\frac{35}{14}$, $\frac{140}{42}$ κ.ο.κ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 153.

294) **1.** $13\frac{1}{2}\times5=\frac{27}{2}\times5=\frac{135}{2}=67\frac{1}{2}$ ἢ

$$13\frac{1}{2}\times5=13\times5+\frac{1}{2}\times5=65+2\frac{1}{2}=67\frac{1}{2}$$

2. $27\frac{1}{4}\times8=27\times8+\frac{1}{4}\times8=216+2=218$

3. $16\frac{1}{5}\times4=16\times4+\frac{1}{5}\times4=64\frac{4}{5}$

4. $29\frac{5}{8}\times3=29\times3+\frac{5}{8}\times3=87+1\frac{7}{8}=88\frac{7}{8}$

5. $24\frac{3}{5}\times16=24\times16+\frac{3}{5}\times16=384+9\frac{3}{5}=393\frac{3}{5}$

6. $150\frac{1}{3}\times20=150\times20+\frac{1}{3}\times20=3000+6\frac{2}{3}=3006\frac{2}{3}$

295) Εἰς 1 ἔτος δαπανᾷ $6\frac{3}{4}$ ὀκ. $\times$ 12 = 6 ὀκ. $\times$ 12 + $+\frac{3}{4}$ ὀκ. $\times$ 12 = 72 ὀκ. + 9 ὀκ. = 81 ὀκ.

296) Κατὰ τοὺς 3 μῆνας καίει $265 \frac{5}{8}$ ὀκ. $\times 3 =$

$= 265$ ὀκ. $\times 3 + \frac{5}{8}$ ὀκ. $\times 3 = 795$ ὀκ. $+ 1\frac{7}{8}$ ὀκ. $= 796 \frac{7}{8}$ ὀκ.

297) Διανύει $4 \frac{3}{4}$ χλμ. $\times 8 = 4$ χλμ. $\times 8 + \frac{3}{4}$ χλμ. $\times 8 =$

$= 32$ χλμ. $+ 6$ χλμ. $= 38$ χλμ.

298) Ἔχει μῆκος $23 \frac{3}{4}$ χλμ. $\times 8 = 23$ χλμ. $\times 8 + \frac{3}{4}$ χλμ. $\times$

$\times 8 = 184$ χλμ. $+ 6$ χλμ. $= 190$ χλμ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 155.

299 - 300) Αἱ ἀποκρίσεις ἐδῶ εἶναι εὔκολοι. Καλὸν δὲ εἶναι νὰ ἀσκηθῇ ὁ μαθητὴς νὰ κάμνῃ ἁπλοποιήσεις, ὅπου ἠμποροῦν νὰ γίνουν, πρὶν ἢ κάμῃ τὸν πολλαπλασιασμόν. Π. χ. εἰς τὸ π.δ. $3 \times \frac{5}{6}$, ἀντὶ νὰ εἴπῃ $\frac{3 \times 5}{6} = \frac{15}{6} = 2 \frac{3}{6} = 2 \frac{1}{2}$, νὰ διαιρέσῃ τὸ 6 μὲ τὸ 3 καὶ νὰ εἴπῃ ἀμέσως $\frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$. Εἰς δὲ τὸ π.δ. $8 \times \frac{3}{4}$, νὰ εἴπῃ ἀμέσως $2 \times 3 = 6$ κ.ο.κ.

301) Διανύει 25 χλμ. $\times \frac{4}{5} = \frac{25 \times 4}{5} = \frac{100}{5} = 20$ χλμ.

ἢ 5 χλμ. $\times 4 = 20$ χλμ.

300) Ὀφείλει 600000 δρχ. $\times \frac{1}{4} = 150000$ δρχ.

303) Ἔχει μῆκος 24 χλμ. $\times \frac{5}{6} = 4$ χλμ. $\times 5 = 20$ χλμ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 156.

304-305) Καὶ ἐδῶ πρέπει ὁ μαθητὴς νὰ ἀσκηθῇ νὰ κάμνῃ πρῶτα ἁπλοποιήσεις, ὅπου γίνονται.

Π.χ. εἰς τὸ π.δ. $\frac{6}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6 \times 2}{7 \times 2}$ ν' ἁπλοποιήσῃ μὲ τὸ 6 καὶ νὰ εἴπῃ ἀμέσως $\frac{2}{7}$. Εἰς δὲ τὸ π.δ. $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$ νὰ εἴπῃ ἀμέσως 1.

306) Κάθε ἀδελφὸς ἔλαβεν ὡς κληρονομίαν τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀμπέλου. Ὥστε ἡ προῖκα ἦτο τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ (τοῦ ἡμίσεως) τῆς ἀμπέλου, ἤτοι $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ τῆς ἀμπέλου.

307) Κάθε ἀδελφὸς ἐκληρονόμησεν $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ. Εἰς τὸν ἀδελφὸν λοιπὸν ὁ ὁποῖος ἐπώλησεν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ, ἔμειναν τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ $\frac{1}{3}$, ἤτοι $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ τοῦ ἀγροῦ.

Ἢ ἀλλέως: Ἀφοῦ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ, ἤτοι τὰ $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ καὶ ἔλαβε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀγροῦ, τοῦ ἔμειναν τὸ $\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ τοῦ ἀγροῦ.

308) Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῆς ὀκᾶς ἦσαν $\frac{3}{4}$ ὀκ. $\times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ ὀκ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 158.

309) **1.** Ἀπ. $2\frac{1}{3}$ **2.** $4\frac{1}{3}$

310) **1.** Ἀπ. $\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, $\frac{27}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{27}{6}$,

$$\frac{31}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{31}{10}$$

2. $\left(2 + 3\frac{1}{5}\right) \times \frac{5}{7} = 5\frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{26}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$

$\left(6 + 3\frac{2}{3}\right) \times \frac{6}{8} = 9\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{29}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{29}{4} = 7\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{8}{9}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{4}=\left(\frac{40}{45}+\frac{36}{45}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{76}{45}\times\frac{3}{4}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$$

ἢ $\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\frac{19}{15}=1\frac{4}{15}$.

311) Καθαρὸν βούτυρον ἠγόρασε τὰ $\frac{7}{8}$ τῶν $8\frac{5}{8}$ ὀκ.

ἤτοι $8\frac{5}{8}\times\frac{7}{8}=8\times\frac{7}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{7}{8}=7\frac{35}{64}$ ὀκ.

ἢ ἀλλέως. Αἱ ξέναι οὐσίαι ἦσαν $8\frac{5}{8}$ ὀκ. $\times\frac{1}{8}=1\frac{5}{64}$ ὀκ. καὶ τὸ καθαρὸν βούτυρον ἦτο $8\frac{5}{8}$ ὀκ. $-1\frac{5}{64}$ ὀκ. $=7\frac{35}{64}$ ὀκ.

312) Τὰ $\frac{85}{100}$ τῶν $50\frac{5}{6}$ ὀκ. εἶναι τὸ σιτάλευρον· ἤτοι

$$50\frac{5}{6}\text{ ὀκ.}\times\frac{85}{100}=\frac{305}{6}\text{ ὀκ.}\times\frac{17}{20}=\frac{61}{6}\times\frac{17}{4}\text{ ὀκ.}=$$

$$=\frac{1037}{24}\text{ ὀκ.}=43\frac{5}{24}\text{ ὀκ.}$$

313) Ἠγόρασεν $6\frac{2}{5}$ ὀκ. $\times\frac{17}{20}=\frac{32}{5}\times\frac{17}{20}$ ὀκ. $=$

$$=\frac{8}{5}\times\frac{17}{5}\text{ ὀκ.}=5\frac{11}{25}\text{ ὀκ.}$$

314) Καθαρὸν ἄνθρακα ἠγόρασεν $4\frac{1}{2}$ ὀκ. $\times\frac{13}{15}=$

$$=\frac{9}{2}\text{ ὀκ.}\times\frac{13}{15}=\frac{3}{2}\times\frac{13}{5}\text{ ὀκ.}=3\frac{9}{10}\text{ ὀκ.}$$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 161.

315) **1.** $4\times2\frac{1}{2}=4\times\frac{5}{2}=10$ ἢ $4\times2+4\times\frac{1}{2}=$
$=8+2=10$ κ.ο.κ.

2. $\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} = 3$ κ.ο.κ.

3. $1\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{13}{4}$ κ.ο.κ.

316) **1ον.** Ἔχουν 8 ρ. $\times 10\frac{3}{4} = 8$ ρ. $\times 10 + 8$ ρ. $\times \frac{3}{4} =$
$= 80$ ρ. $+ 6$ ρ. $= 86$ ρ.

2ον. 100 λ. $\times 60\frac{2}{3}$. **3ον.** 400 δρμ. $\times 5\frac{3}{20}$.

4ον. 44 ὀκ. $\times 2\frac{1}{4} = 99$ ὀκ.

317) Ἔχει $8\frac{1}{2}$ σελ. $\times 5\frac{4}{5} = \frac{17}{2}$ σελ. $\times \frac{29}{5} =$

$= \frac{493}{10}$ σελ. $= 49\frac{3}{10}$ σελ.

318) Στοιχειοθετεῖ $3\frac{1}{2}$ σελ. $\times 5\frac{5}{12} = \frac{7}{2}$ σελ. $\times$

$\times \frac{65}{12} = \frac{455}{24}$ σελ. $= 18\frac{23}{24}$ σελ.

319) Στοιχειοθετεῖ $\frac{8}{9}$ σελ. $\times 6\frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ σελ. $\times \frac{20}{3} =$
$= 5\frac{25}{27}$ σελ.

320) Ἀπὸ $7\frac{1}{2}$ π. μ. ἕως τὴν μεσημβρίαν εἶναι 12 ὥρ. —
$- 7\frac{1}{2}$ ὥρ. $= 4\frac{1}{2}$ ὧραι. Ὥστε ὁ ἀργαλειὸς ὑφαίνει

$5\frac{3}{8}$ πήχ. $\times 4\frac{1}{2} = \frac{43}{8}$ π. $\times \frac{9}{2} = \frac{387}{16}$ πήχ. $= 24\frac{3}{16}$ πήχ.

321) Ἐργάζεται 12 ὥρ. $- 8\frac{1}{4}$ ὥρ. $= 3\frac{3}{4}$ ὥρ. καὶ $4\frac{3}{4}$
ὥρ. $- 2$ ὥρ. $= 2\frac{3}{4}$ ὥρ. Ἤτοι τὴν ἡμέραν ἐργάζεται $3\frac{3}{4}$ ὥρ. $+$
$+ 2\frac{3}{4}$ ὥρ. $= 6\frac{1}{2}$ ὥρ. καὶ πλέκει 3 ζ. $\times 6\frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$ ζ.

322) Κοστίζει 145000 δρχ. $\times 4\frac{1}{4}$ + 280000 δρχ. = = 616250 δρχ. + 280000 δρχ. = 896250 δρχ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 163.

323. Εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{17}, \frac{4}{21}$.

324. Ἐπειδὴ $5 + 2\frac{1}{4} = 7\frac{1}{4} = \frac{29}{4}$ ἀντ. αὐτοῦ εἶναι ὁ $\mathbf{\frac{4}{29}}$

» $3\frac{2}{9} - 1\frac{2}{3} = \frac{14}{9}$ ἀντ. αὐτοῦ εἶναι ὁ $\mathbf{\frac{9}{14}}$

» $5\frac{1}{6} \times 3\frac{5}{6} = \frac{31}{6} \times \frac{23}{6} = \frac{713}{36}$ ἀντίστροφος αὐτοῦ εἶναι ὁ $\frac{36}{713}$, ἢ τὸ γινόμενον τῶν ἀντιστρόφων $\frac{6}{\mathbf{31}} \times \frac{6}{23} = \frac{36}{713}$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 166.

325. Ὅταν εἷς παράγων ὑπάρχει καὶ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν θὰ τὸν παραλείπωμεν (ἤτοι ἁπλοποιοῦμεν δι᾽ αὐτοῦ, καὶ εἰς τὴν θέσιν του νοεῖται ἡ μονάς **1**). Ἔτσι εὑρίσκομεν ἀμέσως κατὰ σειράν:

1. $\frac{3}{5}, \frac{40}{8} = 5, \frac{2 \times 3 \times 3}{5} = \frac{18}{5}$ **2.** $\frac{9}{2}, 2 \times \frac{5}{7} = \frac{10}{\mathbf{7}}$

3. $\frac{7}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} \times 5 = 3, \; 8 \times \frac{11}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{\mathbf{4}}$.

326. Τὴν α΄ ἡμ. διέτρ. 92 χλμ. $\times \frac{1}{4}$

τὴν β΄ ἡμ. διέτρ. 92 χλμ. $\times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$

τὴν γ΄ ἡμ. διέτρ. $92 \text{ χλμ.} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = 92 \text{ χλμ.} \times \frac{1}{15} =$

$= 6\frac{2}{15}$ χλμ. ἢ ἄλλέως:

τὴν α΄ ἡμ. διέτρ. $92 \text{ χλμ.} \times \frac{1}{4} = \frac{92}{4} \text{ χλμ.} = 23 \text{ χλμ.}$

τὴν β΄ ἡμ. διέτρ. $23 \text{ χλμ.} \times \frac{3}{5} = \frac{69}{5} \text{ χλμ.} = 13\frac{4}{5} \text{ χλμ.}$

τὴν γ΄ ἡμ. διέτρ. $13\frac{4}{5} \text{ χλμ.} \times \frac{4}{9} = \frac{69}{5} \text{ χλμ.} \times \frac{4}{9} = 6\frac{2}{15} \text{ χλμ.}$

327) Εὑρίσκομεν ὡς ἄνω (1ος τρόπος), ὅτι τὴν γ΄ ἡμέραν διήνυσε

$$60 \text{ χλμ.} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = 60 \text{ χλμ.} \times \frac{2}{15} = 8 \text{ χλμ.}$$

ἢ ἄλλέως: τὴν α΄ ἡμ. διήνυσε $60 \text{ χλμ.} \times \frac{2}{5} = 24 \text{ χλμ.}$

» β΄ ἡμ. » $24 \text{ χλμ.} \times \frac{3}{4} = 18 \text{ χλμ.}$

» γ΄ ἡμ. » $18 \text{ χλμ.} \times \frac{4}{9} = 8 \text{ χλμ.}$

328) Ἀπὸ τὸν κάτω ὄροφον εἰσπράττει:

$$50000 \text{ δρχ.} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = 50000 \text{ δρχ.} \times \frac{3}{5} = 30000 \text{ δρχ.}$$

ἢ ἀπὸ τὸν μεσ. ὄρ. εἰσπράττει $50000 \text{ δρχ.} \times \frac{4}{5} = 40000 \text{ δρχ.}$

καὶ ἀπὸ τὸν κάτω ὄρ. » $40000 \text{ δρχ.} \times \frac{3}{4} = 30000 \text{ δρχ.}$

329) Ἐξώδευσε διὰ τὸ ὑπόγειον

$$560000 \text{ δρχ.} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{8} = 280000 \text{ δρχ.}$$

330) Θὰ λάβωμεν ἄρτον

$$75 \text{ ὀκ.} \times \frac{11}{12} \times \frac{13}{10} = 5 \times \frac{11}{4} \times \frac{13}{2} \text{ ὀκ.} = 89\frac{3}{8} \text{ ὀκ.}$$

Διαίρεσις κλασμάτων.

Ὁδηγίαι.— Εἰς τὴν διαίρεσιν **ἰδιαιτέρα** προσοχὴ πρέπει νὰ δίδεται εἰς τὸν διαιρέτην.

1ον. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, εἶναι δὲ καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, θὰ γράφωμεν τὸν διαιρέτην ὥς παρονομαστὴν κλάσματος μὲ ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον.

Π. χ. $12 : 3 = \frac{12}{3}$, $7 : 9 = \frac{7}{9}$.

Ἐννοεῖται ὅτι εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν ἀμέσως $12 : 3 = 4$.

2. Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι κλάσμα καὶ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος, θὰ τὸν γράφωμεν εἰς τὸν παρονομαστὴν ὥς παράγοντα ἢ ὥς διαιρέτην εἰς τὸν ἀριθμητήν, ἐὰν τὸν διαιρεῖ ἀκριβῶς.

Π. χ. $\frac{4}{7} : 5 = \frac{4}{7\times5} = \frac{4}{35}$, $\frac{12}{13} : 3 = \frac{12:3}{13} = \frac{4}{13}$.

3. Ἐὰν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς (ἀκέραιος, κλάσμα, μεικτός), **ὁ δὲ διαιρέτης εἶναι κλάσμα**, θὰ τὸν **ἀντιστρέψωμεν,** συγχρόνως δὲ θὰ ἀλλάξωμεν τὴν πρᾶξιν καὶ ἀπὸ **διαίρεσιν** θὰ τὴν κάμωμεν **πολλαπλασιασμόν.**

Π. χ. $3 : \frac{1}{2} = 3\times2$, $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7}\times\frac{5}{4}$, $1\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = 1\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}$.

4. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι **μεικτός, πάντοτε** θὰ τὸν τρέπωμεν εἰς κλάσμα καὶ ἔπειτα θὰ τὸν ἀντιστρέφωμεν. Ἄλλος τρόπος διαιρέσεως διὰ μεικτοῦ δὲν ὑπάρχει.

π. χ. $2 : 3\frac{1}{2} = 2 : \frac{7}{2} = 2\times\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5} : 4\frac{1}{4} = \frac{3}{5} : \frac{17}{4} = \frac{3}{5}\times\frac{4}{17}$

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσματα **ὁμώνυμα** θά διαιροῦμεν ἀμέσως τόν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου μὲ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρέτου.

Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν $\frac{}{15} : \frac{2}{15} = \frac{8}{15}\times\frac{15}{2} = \frac{8}{2} = 4$

λέγομεν ἀμέσως $\frac{8}{15} : \frac{2}{15} = \frac{8}{2} = 4$

Ὁμοίως λέγομεν ἀμέσως $\frac{3}{7} : \frac{5}{7} = \frac{3}{5}$.

Ἐὰν δὲ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἔχουν ἀριθμητὰς ἴσους, διαιροῦμεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρέτου μὲ τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου.

Π. χ. $\frac{5}{2} : \frac{5}{8} = \frac{8}{2} = 4 \left(\frac{5}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{8}{2}\right)$ ἢ $\frac{37}{9} : \frac{37}{5} = \frac{5}{9}$.

5. Τώρα παρατηροῦμεν. ὅτι ἀντιστροφὴν τοῦ διαιρέτου ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν καὶ ὅταν οὗτος εἶναι **ἀκέραιος** ἀριθμός. Φυσικὰ τότε θ' ἀλλάξωμεν καὶ τὴν πρᾶξιν καὶ θὰ τὴν κάμωμεν πολλαπλασιασμὸν (§ 213).

Π. χ. $3 : 5 = 3 \times \frac{1}{5}$, $\frac{7}{11} : 8 = \frac{7}{11} \times \frac{1}{8}$.

Ἔτσι, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν, διαιροῦμεν τὸν 3 διὰ τοῦ 5, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν, ὅτι λαμβάνομεν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 3 κ.ο.κ.

Καλὸν δὲ εἶναι ν' ἀσκηθῇ ὁ μαθητὴς νὰ ἐκφράζῃ τὴν διαίρεσιν δι' ἀριθμοῦ καὶ ὡς πολλαπλασιασμόν, προσέχων βέβαια νὰ ἀντιστρέφῃ τὸν διαιρέτην.

Ἀλλὰ καὶ **τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ ἀριθμόν,** ἠμποροῦμεν νὰ τὸν ἐκφράσωμεν **ὡς διαίρεσιν,** ὅταν **ἀντιστρέψωμεν** τὸν πολλαπλασιαστήν.

Π. χ. ἀντὶ νὰ εἴπωμεν 5×3, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν $5 : \frac{1}{3}$ διότι $5 : \frac{1}{3} = 5 \times 3$ καὶ ἀντὶ νὰ εἴπωμεν $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν $\frac{3}{8} : \frac{5}{4}$, διότι $\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$. Ἔτσι, ὅταν ἀντιστρέφωμεν τὸν διαιρέτην ἢ τὸν πολλαπλασιαστήν, ἀντιστρέφομεν συγχρόνως καὶ τὴν ἀντίστοιχον πρᾶξιν. Ἐὰν δὲ τὴν διαίρεσιν δι' ἀριθμοῦ τὴν ἀντιστρέψωμεν εἰς πολλαπλασιασμὸν ἢ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ ἀριθμὸν τὸν ἀντιστρέψωμεν εἰς διαίρεσιν πρέπει συγχρόνως ν' ἀντιστρέψωμεν τὸν διαιρέτην ἢ τὸν πολλαπλασιαστήν.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 168.

331) $\frac{2}{5} : 2 = \frac{2:2}{5} = \frac{1}{5}$. Δοκιμή: $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$ » $3 \times \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

$$\frac{12}{17}:4=\frac{12:4}{17}=\frac{3}{4}. \quad \text{Δοκιμή:} \quad 4\times\frac{3}{17}=\frac{12}{17}$$

$$\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4\times 2}=\frac{3}{8} \quad » \quad 2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{6}:3=\frac{5}{6\times 3}=\frac{5}{18} \quad » \quad 3\times\frac{5}{18}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{9}:5=\frac{7}{9\times 5}=\frac{7}{45} \quad » \quad 5\times\frac{7}{45}=\frac{7}{9}$$

332) Ἐὰν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\times 6=\frac{4}{5}$. Ὥστε (§ 184) θὰ εἶναι $\alpha=\frac{4}{5}:6=\frac{4}{5\times 6}=\frac{2}{15}$.

Πράγματι δὲ εἶναι $\frac{2}{15}\times 6=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha=\frac{5}{9}:8=\frac{5}{72}$.

Ἔτσι εἶναι $\frac{5}{72}\times 8=\frac{5}{9}$.

333) Ἐπειδὴ $\frac{8}{9}:\chi=\frac{2}{9}$ θὰ εἶναι (§ 184) $\frac{8}{9}:\frac{2}{9}=\chi$ ἤτοι $\chi=\frac{8}{2}=4$. Καὶ πραγματικὰ διότι εἶναι $\frac{8}{9}:4=\frac{8:4}{9}=\frac{2}{9}$

Ὁμοίως, ἐὰν $\frac{\alpha}{9}:3=\frac{1}{9}$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha}{9}:\frac{1}{9}=3$. Ἀλλὰ $\frac{\alpha}{9}:\frac{1}{9}=\frac{\alpha}{1}=\alpha$. Ὥστε εἶναι $\alpha=3$. Καὶ πραγματικὰ διότι

$$\frac{3}{9}:3=\frac{3:3}{9}=\frac{1}{9}.$$

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 169.

334) $2\frac{2}{5} : 2 = 2 : 2 + \frac{2:2}{5} = 1\frac{1}{5}$ κ.ο.κ.

335) $8\frac{4}{5} : 4 = 8 : 4 + \frac{4:4}{5} = 2\frac{1}{5}$

ἢ $\frac{44}{5} : 4 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

$6\frac{3}{7} : 3 = 6 : 3 + \frac{3:3}{7} = 2\frac{1}{7}$

ἢ $\frac{45}{7} : 3 = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$.

$4\frac{2}{5} : 2 = 4 : 2 + \frac{2:2}{5} = 2\frac{1}{5}$

ἢ $\frac{22}{5} : 2 = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.

336) 'Εμοιράζοντο κατὰ δελτίον

$7\frac{1}{2}$ ὀκ. : $5 = \frac{15}{2}$ ὀκ.: $5 = \frac{3}{2}$ ὀκ. $= 1\frac{1}{2}$ ὀκ.

337) 'Εξοδεύει τὸν μῆνα

$22\frac{1}{2}$ ὀκ. : $3 = \frac{45}{2}$ ὀκ. : $3 = \frac{15}{2}$ ὀκ. $= 7\frac{1}{2}$ ὀκ.

338) 'Η ἀπόδοσις κατὰ στρέμμα εἶναι

$1050\frac{1}{2}$ ὀκ. : $8 = \frac{2101}{16}$ ὀκ. $= 131\frac{5}{16}$ ὀκ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 172.

339) $6 : \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = 8$, $10 : \frac{5}{6} = 10 \times \frac{6}{5} = 12$ κ.ο.κ.

340) 'Εδῶ ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν :

χιλιόμετρα εἰς μίαν ὥραν $\times \frac{3}{4} = 18$ χιλ. Ὥστε (§ 184) χιλ. εἰς μίαν ὥραν $= 18$ χιλ. : $\frac{3}{4} = 18 \times \frac{4}{3}$ χλμ. $= 24$ χλμ.

341) Ὁμοίως εἶναι ταχύτης εἰς 1 ὥραν $= 10$ χλμ. : $\frac{5}{12} =$
$= 10 \times \frac{12}{5}$ χλμ. $= 24$ χλμ.

342) Χωρητικότης κιβωτίου εἰς ὀκάδας $\times \frac{5}{8} = 10\frac{3}{4}$ ὀκ.
Ὥστε χωρητικότης κιβωτίου εἰς ὀκάδας $=$

$$= 10\frac{3}{4} \text{ ὀκ.} : \frac{5}{8} = \frac{43}{4} \times \frac{8}{5} \text{ ὀκ.} = 17\frac{1}{5} \text{ ὀκ.}$$

Καὶ πράγματι:

$$17\frac{1}{5} \text{ ὀκ.} \times \frac{5}{8} = \frac{86}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{86}{8} \text{ ὀκ.} = 10\frac{3}{4} \text{ ὀκ.}$$

343) Αἱ $19\frac{3}{5}$ ὀκ. εἶναι τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ τυροῦ. Ὥστε ὅλος ὁ τυρὸς τοῦ βαρελίου ἦτο $19\frac{3}{5}$ ὀκ. : $\frac{7}{10} = \frac{98}{5} \times \frac{10}{7}$ ὀκ. $= 28$ ὀκ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 173.

344) **1.** $1 : 1\frac{3}{4} = 1 : \frac{7}{4} = 1 \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$, δοκ. $1\frac{3}{4} \times \frac{4}{7} =$
$= \frac{7}{4} \times \frac{4}{7} = 1$ κ.ο.κ.

2. $\frac{2}{5} : 2\frac{1}{2} = \frac{2}{5} : \frac{5}{2} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$, δοκ. $2\frac{1}{2} \times \frac{4}{25} =$
$= \frac{5}{2} \times \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$ κ.ο.κ.

3. $3\frac{1}{4} : 2\frac{3}{5} = \frac{13}{4} : \frac{13}{5} = \frac{13}{4} \times \frac{5}{13} = \frac{5}{4}$, δοκ. $2\frac{3}{5} \times$
$\times \frac{5}{4} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{4} = 3\frac{1}{4}$ κ.ο.κ.

345) Ἐπώλει τὴν ὀκᾶν, 277500 δρχ. : $27\frac{3}{4} =$
$= 277500$ δρχ. : $\frac{111}{4} = 277500 \times \frac{4}{111}$ δρχ. $= 10000$ δρχ.

346) Ἠγόρασε τὸν πῆχυν, 455000 δρχ. : $4\frac{1}{4} =$

$= 455000$ δρχ. : $\frac{17}{4} = 455000 \times \frac{4}{17} = 107058\frac{14}{17}$ δρχ.

347) Εἰς 1 ὥραν μένει ὀπίσω $\frac{7}{60}$ τῆς ὥρας : $15\frac{1}{2} = \frac{7}{60}$ τῆς ὥρας : $\frac{31}{2} = \frac{7}{60} \times \frac{2}{31} = \frac{7}{930}$ τῆς ὥρας.

348) Εἰς 1 ὥραν καθυστέρησεν $\frac{8}{9}$ τῆς ὥρας : $14\frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ τῆς ὥρας : $\frac{59}{4} = \frac{8}{9} \times \frac{4}{59}$ τῆς ὥρας $= \frac{32}{531}$ τῆς ὥρας.

349) Γίνονται $63\frac{6}{8} : 4\frac{2}{8} = \frac{510}{8} : \frac{34}{8} = \frac{510}{34} = 15$ ἐνδ.

350) Ἔκαμε παραπετάσματα διὰ

$$13\frac{1}{2} : 3\frac{3}{8} = \frac{27}{2} : \frac{27}{8} = \frac{8}{2} = 4 \text{ παράθυρα.}$$

Σύνθετα κλάσματα.

Τροπὴ συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν.—Ἕνας τρόπος τροπῆς συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν, εἶναι **νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ παρονομαστοῦ του.** Διότι τότε ὁ παρονομαστὴς τοῦ νέου κλάσματος θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα 1.

Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}$, διὰ νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς ἁπλοῦν, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ $\frac{7}{2}$, ὁπότε ἔχομεν $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$,

διότι $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$.

Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\frac{7}{8}}{3}$ πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους του ἐπὶ $\frac{1}{3}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $3\times\frac{1}{3}=1$, γράφομεν ἀμέσως $\dfrac{\frac{7}{8}}{3}=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$.

Ἐὰν δὲ ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}$, εἰς τὸ ὁποῖον καθὼς βλέπομεν οἱ ὅροι εἶναι κλάσματα ὁμώνυμα, παραλείπομεν τὸν κοινὸν παρονομαστὴν 9 καὶ γράφομεν ἀμέσως $\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 177.

351) 1. $\dfrac{\frac{5}{6}}{3}=\dfrac{\frac{5}{6}\times 6}{3\times 6}=\dfrac{5}{18}$ ἢ $\dfrac{\frac{5}{6}}{3}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{18}$

$\dfrac{\frac{3}{4}}{8}=\dfrac{\frac{3}{4}\times 4}{8\times 4}=\dfrac{3}{32}$ ἢ $\dfrac{\frac{3}{4}}{8}=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{32}$

$\dfrac{\frac{1}{5}}{12}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{60}$, $\dfrac{\frac{7}{10}}{3}=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{30}$

2. $\dfrac{3}{\frac{4}{9}}=\dfrac{3\times 9}{\frac{4}{9}\times 9}=\dfrac{27}{4}$ ἢ $\dfrac{3}{\frac{4}{9}}=3\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{27}{4}$

$\dfrac{1}{\frac{5}{6}}=\dfrac{1\times 6}{\frac{5}{6}\times 6}=\dfrac{6}{5}$ ἢ $\dfrac{1}{\frac{5}{6}}=1\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}$

$$\frac{7}{\frac{1}{2}}=7\times\frac{2}{1}=14,\qquad \frac{3}{\frac{5}{8}}=3\times\frac{8}{5}=\frac{24}{5}$$

3. $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{2}{3}\times 6}{\frac{5}{6}\times 6}=\frac{4}{5},\qquad \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{10}}=\frac{3}{8}\times\frac{10}{5}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4},\qquad \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{7}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{7}{6}$$

4. $$\frac{5}{2\frac{1}{2}}=\frac{5}{\frac{5}{2}}=5\times\frac{2}{5}=2,\qquad \frac{3\frac{1}{4}}{13}=\frac{\frac{13}{4}}{13}=\frac{13}{4}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{5}{8}}{2\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{9}{4}}=\frac{5}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{5}{18},\qquad \frac{3\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}}=\frac{\frac{16}{5}}{\frac{14}{5}}=\frac{16}{14}.$$

352) **1.** $$\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},\qquad \frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Ὥστε $$\frac{\frac{1}{3}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

2. $$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15},\qquad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4},$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{9}.$$ Ὥστε

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{15}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}=\frac{96}{180}+\frac{135}{180}+\frac{80}{180}=\frac{311}{180}$$

3. $$\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}\,,\qquad \frac{\frac{4}{5}}{2\frac{2}{5}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}}=\frac{1}{3}\,,$$

$$\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{13}{4}}=\frac{10}{13}$$

$$\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{2\frac{2}{5}}+\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}+\frac{1}{3}+\frac{10}{13}=\frac{351+52+120}{156}=$$

$$=\frac{523}{156}=3\,\frac{55}{156}$$

4. $$\frac{6}{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{3}}{4}=12-\frac{1}{6}=11\,\frac{5}{6}\,,$$

5. $$\frac{\frac{8}{9}}{2}-\frac{\frac{7}{10}}{2\frac{1}{9}}=\frac{4}{9}-\frac{63}{190}=\frac{193}{1710}$$

6. $$\frac{4\frac{1}{5}}{2\frac{3}{10}}-\frac{1\frac{2}{5}}{3\frac{3}{10}}=\frac{42}{23}-\frac{14}{33}=\frac{1064}{759}=1\,\frac{305}{759}$$

353. **1.** $$\frac{\frac{1}{4}}{5}\times\frac{6}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times 6\times\frac{4}{3}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} \times \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{12} = 2\,\frac{11}{12}$$

$$\frac{6\,\frac{1}{2}}{3\,\frac{2}{3}} \times \frac{3}{4\,\frac{1}{6}} = \frac{13}{2} \times \frac{3}{11} \times 3 \times \frac{6}{25} = \frac{351}{275} = 1\,\frac{76}{275}$$

2. $$\frac{5}{\frac{1}{8}} : \frac{\frac{3}{4}}{2\,\frac{5}{8}} = 5 \times \frac{8}{1} : \frac{3}{4} \times \frac{8}{21} = 5 \times \frac{8}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{21}{8} = 140$$

$$\frac{4\,\frac{1}{9}}{2\,\frac{1}{3}} : \frac{\frac{7}{9}}{3\,\frac{2}{3}} = \frac{37}{9} \times \frac{3}{7} : \frac{7}{9} \times \frac{3}{11} = \frac{37}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{9}{7} \times \frac{11}{3} =$$

$$= \frac{407}{49} = 8\,\frac{15}{49}$$

$$\frac{8}{3\,\frac{1}{4}} : \frac{5\,\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}} = 8 \times \frac{4}{13} : \frac{31}{6} \times \frac{6}{7} = 8 \times \frac{4}{13} \times \frac{7}{31} = \frac{224}{403}$$

354) $$\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{4} \times 36 + \frac{5}{6} \times 36}{\frac{5}{9} \times 36 - \frac{1}{3} \times 36} = \frac{3 \times 9 + 5 \times 6}{5 \times 4 - 1 \times 12} =$$

$$= \frac{57}{8} = 7\,\frac{1}{8} \left(\begin{array}{c} 36,\ \text{ἐ.κ.π. τῶν} \\ 4,\ 6,\ 9,\ 3 \end{array} \right)$$

ἢ $$\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{9}{12} + \frac{10}{12}}{\frac{5}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{19}{12}}{\frac{2}{9}} = \frac{19}{12} \times \frac{9}{2} = \frac{19}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{57}{8}$$

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{5}\times 90-\frac{5}{9}\times 90}{\frac{1}{3}\times 90+\frac{1}{2}\times 90}=\frac{3\times 18-5\times 10}{1\times 30+1\times 45}=\frac{4}{75}$$

$$\text{ἢ}\ \frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{27}{45}-\frac{25}{45}}{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}}=\frac{\frac{2}{45}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{45}\times\frac{6}{5}=$$

$$=\frac{2}{15}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{75}$$

$$\frac{7\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}\times\frac{10}{11}}=\frac{\frac{15}{2}\times\frac{4}{7}}{\frac{2}{5}\times\frac{10}{11}}=\frac{15}{1}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{2}\times\frac{11}{10}=$$

$$=\frac{165}{14}=11\frac{11}{14}$$

'Αναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 181.

355) Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 20 εἶναι 4 καὶ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ 20, εἶναι $4\times 4=16$. Τώρα, τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 20 εἶναι 5 καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 20 εἶναι $5\times 3=15$.

356) **1.** Τὰ $\frac{6}{6}$ εἶναι $\frac{2}{3}$

τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{2}{3\times 6}$

καὶ τὰ $\frac{5}{6}$ » » $\frac{2\times 5}{3\times 6}=\frac{5}{9}$.

2. Τὰ $\frac{9}{9}$ εἶναι $\frac{37}{7}$

τὸ $\frac{1}{9}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{37}{7 \times 9}$

καὶ τὰ $\frac{4}{9}$ » » $\frac{37 \times 4}{7 \times 9} = \frac{148}{63}$

Σημείωσις: Τὰ ζητήματα αὐτὰ λύονται ἀμέσως διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἤτοι τὸ 1ον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$ καὶ τὸ 2ον διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $\frac{37}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{148}{63} = 2\,\frac{22}{63}$.

Γενικῶς δέ, ὅταν ζητεῖται μέρος ἀριθμοῦ (ὅπως ἐδῶ τὰ $\frac{5}{6}$ ἢ τὰ $\frac{4}{9}$) κάμνομεν πολλαπλασιασμὸν (§ 190, Β΄). Πολὺ δὲ θὰ ὠφεληθῇ ὁ μαθητής, ὅταν ἀσκηθῇ νὰ λύῃ τοιαῦτα ζητήματα διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διότι ζητήματα ὡς αὐτά, συχνὰ παρουσιάζονται εἰς τὸν πρακτικὸν βίον. Τοῦτο βέβαια δὲν σημαίνει, ὅτι δὲν πρέπει νὰ ἀσκηθῇ πολὺ καλῶς καὶ εἰς τὸ νὰ λύῃ προβλήματα διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Διότι, ὅταν γνωρίζῃ πόσον ἀξίζει ἡ μιὰ μονὰς εὐκόλως εὑρίσκει πόσον ἀξίζουν πολλαὶ ὅμοιαι μονάδες. Π. χ. ὅταν γνωρίζῃ πόσον ἀξίζει ἡ 1 ὀκᾶ ζάχαρη, εὐκόλως εὑρίσκει πόσον ἀξίζουν αἱ 7 ὀκ., αἱ 15 ὀκ., αἱ 20 ὀκ., κλπ. ζάχαρη.

Ἐὰν δὲ γνωρίζῃ πόσον ἀξίζει τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως ἑνὸς ὑφάσματος, εὐκόλως εὑρίσκει πόσον ἀξίζουν τὰ $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ κλπ. τοῦ ἰδίου ὑφάσματος. Διὰ τοῦτο καὶ ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται **μέθοδος ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.**

357) Ἐπειδὴ ἔχει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη τὰ $\frac{2}{5}\left(\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\right)$ τῆς ὅλης ἀποστάσεως, θὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 90 χλμ.

Ἀλλὰ τὰ $\frac{5}{5}$ τῆς ὅλης ἀποστάσεως εἶναι 90 χλμ.

τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς » » εἶναι $\frac{90}{5}$ χλμ.

καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς » » εἶναι $\frac{90 \times 2}{5} = 36$ χλμ.

358) Εἰς 1 ὥραν, ἤτοι εἰς $\frac{4}{4}$ ὥρ. διανύει 36 χλμ.

εἰς $\frac{1}{4}$ ὥρ. διανύει $\frac{36}{4}$ χλμ.

καὶ εἰς $2\frac{3}{4}$ ὥρ. ἤτοι εἰς $\frac{11}{4}$ ὥρ. διανύει $\frac{36\times11}{4}$ χλμ. $=$ 99 χλμ.

359) Εἰς $\frac{6}{6}$ ὥρ. πλέκει $\frac{16}{5}$ ὀκ.

εἰς $\frac{1}{6}$ ὥρ. πλέκει $\frac{16}{5\times6}$ ὀκ.

καὶ εἰς $\frac{5}{6}$ ὥρ. πλέκει $\frac{16\times5}{5\times6}=2\frac{2}{3}$ ὀκ.

Σημείωσις. Ἐδῶ ἐτρέψαμεν τὴν 1 ὥρ. εἰς **ἓξ ἕκτα** $\left(\frac{6}{6}\right)$ ὥρ. διότι ζητοῦμεν πόσον θὰ πλέξῃ εἰς πολλὰ **ἕκτα** $\left(\frac{5}{6}\right)$.

360) Εἰς $\frac{3}{3}$ ὥρ. ὑφαίνει $\frac{9}{4}$ πήχ.

εἰς $\frac{1}{3}$ ὥρ. ὑφαίνει $\frac{9}{4\times3}$ πήχ.

καὶ εἰς $\frac{17}{3}$ ὥρ. ὑφαίνει $\frac{9\times17}{4\times3}=12\frac{3}{4}$ πήχ.

Σημείωσις. Ἐδῶ ἐτρέψαμεν τὴν ὥραν εἰς τρία **τρίτα,** διότι ζητοῦμεν πόσον ὑφαίνει εἰς πολλὰ **τρίτα** $\left(\frac{17}{3}\right)$.

361) Δι' ἕνα πῆχυν ἐπλήρωσε τὰ $\frac{88}{100}\left(=\frac{100}{100}-\frac{12}{100}\right)$ τῶν 120 χλδρ.

Ἀλλὰ τὰ $\frac{100}{100}$ αὐτῶν εἶναι 120 χλδρ.

τὸ $\frac{1}{100}$ » εἶναι $\frac{120}{100}$ χλδ.

καὶ τὰ $\frac{88}{100}$ » εἶναι $\frac{120\times88}{100}$ χλδρ. $=105\frac{6}{10}$ χλδρ.

362) Διὰ τὰ $\frac{8}{8}$ πήχ. θὰ ἐπλήρωνεν 95 χλδρ.

διὰ τὸ $\frac{1}{8}$ πήχ. θὰ ἐπλήρωνεν $\frac{95}{8}$ χλδρ,

καὶ διὰ τὰ $\frac{34}{8}$ πήχ. θὰ ἐπλήρωνεν $\frac{95\times34}{8}$ χλδρ.

Ἐπειδὴ ὅμως ἐπλήρωσε τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς ἀξίας, θὰ εἴπωμεν: ὅλη ἡ ἀξία, ἤτοι τὰ $\frac{10}{10}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{95\times34}{8}$ χλδρ.

τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{95\times34}{8\times10}$ χλδρ.

καὶ τὰ $\frac{9}{10}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{95\times34\times9}{8\times10}=363\frac{3}{8}$ χλδρ.

363) Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$.

ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{23}{20}$ ἀποτελοῦν τὸν 23

τὸ $\frac{1}{20}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{23}{23}=1$

καὶ τὰ $\frac{20}{20}$ αὐτοῦ εἶναι $1\times20=20$

καὶ πράγματι: τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ 20 εἶναι 8

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ 20 εἶναι 15

τὰ $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$ τοῦ 20 εἶναι 23.

364) Ἐπειδὴ $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{12}-\frac{2}{12}=\frac{1}{12}$ ἕπεται ὅτι ὁ 2 εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ ζητοῦμεν.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ζητουμένου εἶναι 2

τὰ $\frac{12}{12}$ ἤτοι ὁ ζητούμενος εἶναι $2\times12=24$.

Καὶ πράγματι: τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 24 εἶναι 6

τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ 24 εἶναι 4

καὶ τὸ $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ τοῦ 24 εἶναι 2

365) Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4\times5}$

καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3\times2}{4\times5}=\frac{3}{10}$

Ὥστε τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ ζητουμένου εἶναι $\frac{140}{3}\left(=46\frac{2}{3}\right)$

τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{140}{3\times3}$

καὶ τὰ $\frac{10}{10}$, ἤτοι ὁ ζητούμενος, εἶναι $\frac{140\times10}{3\times3}=\frac{1400}{9}=155\frac{5}{9}$

366) Τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς ὀκ. ἀξ. 4800 δρχ.

τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ὀκ. ἀξ. $\frac{4800}{3}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ἡ 1 ὀκ., ἀξ. $\frac{4800\times5}{3}$ δρχ. $=$ 8000 δρχ.

367) Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς φιάλης χωροῦν $\frac{3}{8}$ τῆς ὀκ.

τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς χωρεῖ $\frac{3}{8\times3}=\frac{1}{8}$ τῆς ὀκ.

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι ὅλη ἡ φιάλη, χωρεῖ $\frac{3\times4}{8\times3}=\frac{1}{2}$ τῆς ὀκ.

368) Τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ τεμαχίου εἶναι $\frac{79}{2}$ πήχ.

τὸ $\frac{1}{10}$ » » » $\frac{79}{2\times7}$ πήχ.

καὶ τὰ $\frac{10}{10}$ » » » $\frac{79\times10}{2\times7}$ πήχ. $=56\frac{3}{7}$ πήχ.

369) Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ κτήματος ἀξίζουν 3 645 000 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » ἀξίζει $\frac{3\,645\,000}{5} = 729000$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$ ἀξίζουν $729000 \times 8 = 5\,832\,000$ δρ.

370) Ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς καὶ τὸ κέρδος εἶναι

$\frac{12}{12} + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{17}{12}$ αὐτῆς εἶναι 6 324 000 δρχ.

τὸ $\frac{1}{12}$ » » $\frac{6\,324\,000}{17} = 372000$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{12}{12}$ » » 372000 δρ. $\times 12 = 4\,464\,000$ δρ.

Καὶ πράγματι τὸ κέρδος εἶναι 1 860 000 δρχ.

καὶ τὰ $\frac{5}{12}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς εἶναι $\frac{4\,464\,000 \times 5}{12} = 1\,860\,000$ δρ.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 184.

371)

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

3. $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10000}, \quad \left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{1}{1\,000\,000},$

$$\left(\frac{1}{1000}\right)^2 = \frac{1}{1\,000\,000}$$

4. $\left(4\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\left(2\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{512}{27},$

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{5}{2}\right)^4=\frac{625}{16}.$$

372) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

Ὥστε $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ἤτοι καὶ ἐδῶ ἀληθεύει ἡ I ἰδιότης (§ 115) τῶν δυνάμεων. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+3+4}=\left(\frac{1}{2}\right)^9.$$

373) Κατὰ τὴν 1ην ἀναπήδησιν ἀνυψώθη κατὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ μέτρου, ἤτοι τοῦ ὕψους ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφέθη νὰ πέσῃ.

Δηλαδὴ κατὰ τὴν 1ην ἀναπ. ἀνυψώθη $\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ μ.

ὁμοίως » » 2αν » » κατὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ μ. ἤτοι

κατὰ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ μ.

καὶ κατὰ τὴν 3ην ἀναπ. ἀνυψώθη κατὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ μ. ἤτοι

κατὰ $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ μ.

Ἤτοι τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν εἶναι $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$ τοῦ μέτρου.

Διάφορα προβλήματα πρὸς ἐπανάληψιν τῶν πράξεων τῶν κλασμάτων.

Λύσεις αὐτῶν.

374) Ἡ α' δόσις εἶναι τὰ $\frac{3}{8}$ τῆς ἀξίας, ἤτοι

3 200 000 δρχ. $\times \frac{3}{8} =$ 400 000 δρχ. $\times 3 =$ 1 200 000 δρχ.

Μετὰ μίαν τριμηνίαν ἐπλήρωσεν 1 200 000 δρχ. $\times \frac{3}{4} =$
= 900 000 δρχ.

Ἐχρεώστει ἀκόμη 3 200 000 δρχ.—(1 200 000 δρχ.+900000 δρχ.)
= 1 100 000 δρχ.

375) Εἰς ἕνα λεπτὸν τῆς ὥρας, ἤτοι εἰς $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ρέουν $\frac{3}{5}$ ὀκ., εἰς $2\frac{1}{4}$ ὥρας $= \frac{9}{4}$ ὥρας, ἤτοι εἰς $\frac{135}{60}$ τῆς ὥρας ρέουν $\frac{3 \text{ ὀκ.} \times 135}{5} = 81$ ὀκ.

Ὥστε τὰ $\frac{4}{15}$ μιᾶς ὑδαταποθήκης χωροῦν 81 ὀκ.

τὸ $\frac{1}{15}$ » » χωρεῖ $\frac{81}{4}$ ὀκ.

καὶ τὰ $\frac{15}{15}$, ἤτοι ὅλη ἡ ὑδαταποθήκη, χωρεῖ $\frac{81 \times 15}{4}$ ὀκ. =
$= 303\frac{3}{4}$ ὀκ.

376) Τὸ α' βαρέλ. ἔχει 250 ὀκ.
Τὸ β' » » 250 ὀκ. $\times \frac{4}{5} =$ 200 ὀκ.

Τὰ δύο βαρέλια ἔχουν . . 450 ὀκ.
Κόστος τοῦ οἴνου . . . 540000 δρχ.
Κέρδος , 540 000 δρχ. $\times \frac{20}{100} =$ 108000 δρχ.

Θὰ πωλήση τὰς 450 ὀκ. 648000 δρχ.
» » τὴν 1 » πρὸς 648000 δρ. : 450=1440 δρ.

377) Ἐπώλησεν 1 260 000 : 12 000 = 105 ὀκ.

Ὥστε αἱ 105 ὀκ. καταλαμβάνουν τὰ $\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ τοῦ χώρου τοῦ βαρελίου.

Ἀφοῦ λοιπὸν εἰς τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ βαρ. χωροῦν 105 ὀκ.

» τὸ $\frac{1}{10}$ » » » $\frac{105}{3}$ ὀκ.

καὶ » τὰ $\frac{10}{10}$ » » » $\frac{105 \times 10}{3} = 350$ ὀκ.

378) Αἱ $85\frac{3}{4}$ ὀκ. ἀπορροφοῦν ὕδωρ ἴσον μὲ

$$85\frac{3}{4} \text{ ὀκ.} \times \frac{55}{100} = \frac{343}{4} \times \frac{11}{20} \text{ ὀκ.} = 47\frac{13}{80} \text{ ὀκ.}$$

Ὥστε ἡ ζύμη θὰ εἶναι $85\frac{3}{4}$ ὀκ. $+ 47\frac{13}{80}$ ὀκ. $= 132\frac{73}{80}$ ὀκ.

379) Ἀπὸ 100 ὀκ. ἄλευρα ἔχομεν ζύμην

$$100 \text{ ὀκ.} + 100 \text{ ὀκ.} \times \frac{55}{100} = 100 \text{ ὀκ.} + 55 \text{ ὀκ.} = 155 \text{ ὀκ.}$$

Ἀπώλεια βάρους τῆς ζύμης 155 ὀκ. $\times \frac{1}{40} = \frac{31}{8}$ ὀκ. $= 3\frac{7}{8}$ ὀκ.

Ὥστε παράγεται ἄρτος 155 ὀκ. $- 3\frac{7}{8}$ ὀκ. $= 151\frac{1}{8}$ ὀκ.

380) Τὴν α΄ ἡμέραν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ τυροῦ

τὴν β΄ ἡμέραν ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$ τοῦ τυροῦ

τὰς δύο ἡμέρας ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{7} + \frac{9}{49} = \frac{30}{49}$ τοῦ τυροῦ

καὶ τοῦ ἀπέμειναν $\frac{49}{49} - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$ τοῦ τυροῦ.

Εἶναι δὲ τὰ $\frac{19}{49}$ τοῦ τυροῦ $10\frac{6}{7}$ ὀκ. $= \frac{76}{7}$ ὀκ.

τὸ $\frac{1}{49}$ τοῦ τυροῦ εἶναι $\frac{76}{7 \times 19}$ ὀκ.

καὶ τὰ $\frac{49}{49}$, ἤτοι ὅλος ὁ τυρός, εἶναι $\frac{76 \times 49}{7 \times 19} = 28$ ὀκ.

381) Ἀπὸ τὸ 4ον πάτ. εἰσπρ. 1 ἐνοίκιον

ἀπὸ τὸ 3ον πάτ. εἰσπρ. τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ 1 ἐνοικίου

ἀπὸ τὸ 2ον πάτ. εἰσπρ. τὰ $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ τοῦ 1 ἐνοικίου

ἀπὸ τὸ 1ον πάτ. εἰσπρ. τὰ $\frac{25}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ τοῦ 1 ἐνοικίου.

Ἀπὸ τὰ 4 πατώματα εἰσπράτει

$$1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216} = \frac{671}{216} \text{ τοῦ 1 ἐνοικίου}$$

Εἶναι δὲ τὰ $\frac{671}{216}$ τοῦ ἐνοικίου $279583\frac{1}{3}$ δρχ. $= \frac{838750}{3}$ δρχ.

Ὥστε τὸ $\frac{1}{216}$ τοῦ ἐνοικ. εἶναι $\frac{838750}{3 \times 671}$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{216}{216}$ ἤτοι τὸ 1 ἐν. εἶναι $\frac{838750 \times 216}{3 \times 671} = 90000$ δρχ.

Ἔτσι ἀπὸ τὸ 4ον πάτωμα εἰσπρ. ἐν. 90000 δρχ.

ἀπὸ τὸ 3ον πάτωμα εἰσπρ. ἐν. $\frac{90000 \times 5}{6} = 75000$ δρχ.

ἀπὸ τὸ 2ον πάτωμα εἰσπρ. ἐν. $\frac{75000 \times 5}{6} = 62500$ δρχ.

καὶ ἀπὸ τὸ 1ον πάτωμα εἰσπρ. ἐν. $\frac{62500 \times 5}{6} = 52083\frac{1}{3}$ δρχ.

ἀπὸ τὰ 4 πατώματα εἰσπρ. ἐν. $279583\frac{1}{3}$ δρχ.

382) Τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$

καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{4}{5}$ εἶναι $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.

Ἔχει λοιπὸν νὰ ἀνέλθῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὕψους τοῦ Ὀλύμπου

ἤτοι ὡς τώρα ἀνῆλθε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Ἀλλὰ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὕψους τοῦ Ὀλύμπου εἶναι $1750\,\frac{1}{5}=\frac{8751}{5}$ μ.

τὸ $\frac{1}{5}$ » » » » » $\frac{8751}{5\times3}$ μ.

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ » » $\frac{8751\times5}{5\times3}=2917$ μ.

383) Ὁ ἀρχικὸς πληθυσμὸς ἦτο $\frac{16}{16}$ καὶ μετὰ δέκα ἔτη ἔγεινε $\frac{16}{16}+\frac{5}{16}=\frac{21}{16}$.

Εἶναι δὲ τὰ $\frac{21}{16}$ τοῦ ἀρχ. πληθ. 74025 κάτ.

τὸ $\frac{1}{16}$ » » » εἶναι $\frac{74025}{21}=3525$ κάτ.

καὶ τὰ $\frac{16}{16}$ ἤτοι ὁ ἀρχ. πληθ. ἦτο $3525\times16=56400$ κάτ.

384) Τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ οἴνου του, εἶναι τὰ $\frac{6}{14}$ αὐτοῦ.

Ἀπὸ δὲ τὰ $\frac{6}{14}$ τοῦ οἴν. εἰσ. 854000 δραχ.

ἀπὸ τὸ $\frac{1}{14}$ » » » $\frac{854000}{6}$ δραχ.

καὶ ἀπὸ τὰ $\frac{9}{14}$ » » θὰ » $\frac{854000\times9}{6}=1281000$ δρχ.

385) Τοῦ ἔμειναν $\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ τοῦ ὑφάσματος.

Τὰ δὲ $\frac{3}{8}$ αὐτοῦ εἶναι 27 μ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » $\frac{27}{3}$ μ.

τὰ $\frac{5}{8}$ » » 9 μ. $\times\,5=45$ μ.

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἤτοι ὅλον τὸ ὕφ., εἶναι 9 μ. $\times\,8=72$ μ.

Ὥστε ἀπὸ τὸ πωληθὲν ὕφασμα, τὸ ὁποῖον ἦτο 45 μ. εἰσέπραξεν 68 χιλ. $\times$ 45 = 3060 χιλδρχ.

386) Α΄ δόσις 72750 δρχ.—(16500 δρχ. + 26250 δρχ.)= = 30000 δρχ.

Ὥστε τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ χρέους ἦσαν 30000 δρχ.

τὸ $\frac{1}{8}$ » » ἦτο $\frac{30000}{3}$ = 10000 δρχ.

καὶ τὰ $\frac{8}{8}$, ἤτοι ὅλον τὸ χρ., ἦτο 10000 δρ. $\times$8=80000 δρ.

387) Ὁ α΄ καὶ ὁ β΄ ἔλαβον τὰ $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}=\frac{15}{40}+\frac{16}{40}=$ $=\frac{31}{40}$ τῆς κληρονομίας, ὁ δὲ γ΄ ἔλαβεν τά, $1-\frac{31}{40}=\frac{9}{41}$ αὐτῆς.

Μερίδιον τοῦ α΄, τὰ $\frac{15}{40}$ τῆς κληρον. 876000 δρχ.

τὸ $\frac{1}{40}$ » » $\frac{876000}{15}$ =58400 δρχ.

» » β΄, τὰ $\frac{16}{40}$ » » 58400$\times$16=934400 δρχ.

» » γ΄, τὰ $\frac{9}{40}$ » » 58400$\times$ 9=525600 δρχ.

388) Ἐπλήρωσεν τὰ $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{5+6+2}{15}=\frac{13}{15}$ τοῦ χρέους, καὶ ὀφείλει ἀκόμη τὰ $\frac{15}{15}-\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$ αὐτοῦ.

Ἀλλὰ $\frac{13}{15}$ τοῦ χρέους εἶναι 78000 δρχ.

καὶ τὸ $\frac{1}{15}$ » » » $\frac{78000}{13}$ δρχ.=6000 δρχ.

ὥστε ὅλον τὸ χρέος, ἤτοι τὰ $\frac{15}{15}$ αὐτοῦ, ἦτο 6000$\times$15=90000 δρχ.

καὶ ὀφείλει ἀκόμη τὰ $\frac{2}{15}$ τοῦ χρέους ἤτοι, 6000$\times$ 2=12000 δρχ.

389) Παριστῶμεν τὴν τιμὴν ὅλων τῶν προβάτων μὲ τὴν μονάδα 1 ἢ μὲ $\frac{27}{27}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ τιμὴ τῶν βοῶν ἦτο τὰ $\frac{19}{27}$ τῆς τιμῆς ὅλων τῶν προβάτων, ἡ τιμὴ τῶν βοῶν καὶ ὅλων τῶν προβάτων, θὰ εἶναι τὰ $\frac{27}{27}+\frac{19}{27}=\frac{46}{27}$ τῆς τιμῆς τῶν προβάτων.

Ἀλλὰ

τὰ $\frac{46}{27}$ εἶναι 7 912 000 δρχ.

τὸ $\frac{1}{27}$ » $\frac{7\,912\,000}{46}$ δρχ.=172000 δρχ.

τὰ $\frac{19}{27}$ ἢ ἡ ἀξ. τῶν 2 βοῶν, εἶναι 172000×19=3 268 000 δρχ. καὶ

τὰ $\frac{27}{27}$ ἢ ἡ ἀξ. τῶν 54 προβ. » 172000×27=4 644 000 δρχ.

Ἑπομένως ἐπώλησε τὸν 1 βοῦν ἀντὶ 3 268 000 : 2=1 634 000 δρχ.
καὶ » τὸ 1 πρόβ. » 4 644 000 : 54= 86 000 δρχ.

390) Θέλει νὰ κερδίσῃ 8 256 000 δρχ. × $\frac{1}{15}$=550400 δρ.

Ὥστε πρέπει νὰ πωλήσῃ τὰ 86—6=80 πρόβατα ἀντὶ

8 256 000 δρχ.+550400 δρχ.=8 806 400 δχρ.

καὶ τὸ 1 πρόβ.ἀντὶ 8 806 400 δρχ. : 80= 110 080 δρχ.

391) Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ὑφάσματος εἶναι 120 μ. × $\frac{1}{4}$ = 30 μ.

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ » 120 μ. × $\frac{1}{5}$ = 24 μ.

καὶ τὸ ὑπόλοιπον ὕφασμα εἶναι 120 μ.=(30 μ.+24 μ.)= 66 μ.

ὥστε εἰσέπραξεν α′) 45000 δρχ.×30=1 350 000 δρχ.
β′) 54000 δρχ.×24=1 296 000 δρχ.
γ′) 48000 δρχ.×66=3 168 000 δρχ.

Εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 5 814 000 δρχ.

Ἐκέρδισεν 5 814 000 δρχ.—5 520 000 δρχ.=294000 δρχ.

392) Ὁ α′ ἐργ. εἰς 8 ἡμ. ἐκτελεῖ 1 ἔργον (ὁλόκληρον τὸ ἔργον).

» α′ » » 1 ἡμ. » τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου.

» β′ » » 5 ἡμ. » τὸ 1 ἔργον.

» β′ » » 1 ἡμ. » τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου.

Οἱ δύο ἐργάται ὁμοῦ εἰς 1 ἡμ. ἐκτελοῦν τὰ $\frac{1}{8}+\frac{1}{5}=\frac{13}{40}$ τοῦ ἔργου.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{13}{40}$ τοῦ ἔργ. τὰ ἐκτελοῦν εἰς 1 ἡμ.

τὸ $\frac{1}{40}$ » » τὸ » εἰς $\frac{1}{13}$ ἡμ.

καὶ ὅλον τὸ ἔρ. ἤτοι τὰ $\frac{40}{40}$ » » τὸ » εἰς $\frac{40}{13}$ ἡμ.$=$

$=3\frac{1}{13}$ ἡμέρας.

393) Ὁ α′ ἐργ. εἰς 9 ἡμ. ἐκτελεῖ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου.

» α′ » » 1 ἡμ. » τὰ $\frac{2}{3\times9}=\frac{2}{27}$ τοῦ ἔργου.

Ὁ β′ » » 5 ἡμ. » τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ ἔργου.

» β′ » » 1 ἡμ. » τὰ $\frac{5}{5\times8}=\frac{1}{8}$ τοῦ ἔργου.

Οἱ δύο ἐργ. εἰς 1 ἡμ. ἐκτελοῦν τὰ $\frac{2}{27}+\frac{1}{8}=\frac{43}{216}$ τοῦ ἔργου.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ $\frac{43}{216}$ τοῦ ἔργου τὰ ἐκτελοῦν εἰς 1 ἡμέραν,

τὸ $\frac{1}{216}$ » » τὸ » εἰς $\frac{1}{43}$ ἡμέρας

καὶ ὅλον τὸ ἔργ., ἤτοι τὰ $\frac{216}{216}$ αὐτοῦ, τὰ » εἰς $\frac{216}{43}$ ἡμ.$=5\frac{1}{43}$ ἡμ.

394) Τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἡλικίας κάμνουν τὰ

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{17}{12} \text{ αὐτῆς.}$$

Εἶναι δὲ τὰ $\frac{17}{12}$ τῆς ἡλικίας 68 ἔτη

τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{68}{17}=4$ ἔτη

καὶ τὰ $\frac{12}{12}$, ἤτοι ἡ ἡλικία του εἶναι 4, ἔτη$\times 12=48$ ἔτη

Καὶ πράγματι: τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 48 ἐτῶν εἶναι 32 ἔτη

τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν 48 ἐτῶν εἶναι 36 ἔτη

καὶ τὰ $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ τῶν 48 ἐτῶν εἶναι $32+36=68$ ἔτη.

395) Τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

Ὥστε μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ περιεχομένου οἴνου, τὸ βαρέλιον περιέχει οἶνον κατὰ τὸ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Ὥστε τὸ ἥμισυ $\left(\text{τὸ } \frac{1}{2}\right)$ τοῦ βαρελίου χωρεῖ 280 ὀκ.

καὶ ὁλόκληρον τὸ βαρέλιον χωρεῖ 280 ὀκ. $\times 2=560$ ὀκ.

396) Ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ $\alpha^{ου}$ ἀριθμοῦ εἶναι 362

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{362}{3}$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$ ἤτοι ὁ $\alpha^{ος}$ ἀριθ. εἶναι $\frac{362\times 5}{3}=603\frac{1}{3}$

καὶ ἀφοῦ τὰ $\frac{3}{4}$, τοῦ $\beta^{ου}$ ἀριθμ., εἶναι 248

τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{248}{3}$

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι ὁ $\beta^{ος}$ ἀριθ., εἶναι $\frac{248\times 4}{3}=330\frac{2}{3}$

Ὥστε οἱ δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα $603\frac{1}{3}+330\frac{2}{3}=934$.

397) Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν ποὺ ζητοῦμεν τὸν παραστήσωμεν μὲ 1 ἢ μὲ $\frac{5}{5}$, ὁ 720 εἶναι τὰ $\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἀλλ' ἀφοῦ τὰ $\frac{6}{5}$ αὐτοῦ εἶναι 720

τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{720}{6}=120$

καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθ., εἶναι $120\times5=600$.

398) Τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ποσοῦ εἶναι τὰ $\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}$ αὐτοῦ.

ἤτοι τὰ $\frac{17}{24}$ τοῦ ποσοῦ εἶναι 1700 δρχ.

τὸ $\frac{1}{24}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{1700}{17}=100$ δρχ.

καὶ τὰ $\frac{24}{24}$, ἤτοι ὅλον τὸ ποσόν, εἶναι 100δρ.$\times$24=2400δρχ.

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Ἔννοια τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος.— Ὡς καὶ εἰς τὰ περὶ κλασμάτων εἴπομεν (σελὶς 45) τὴν ἀκεραίαν μονάδα 1, ἠμποροῦμεν νὰ τὴν διαιρέσωμεν εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλομεν. Π. χ. εἰς 2, 3, 4 κλπ. ἴσα μέρη· ἀλλὰ καὶ εἰς 10, 100, 1000, 10000 κλπ. ἴσα μέρη.

Ἔτσι ἔχομεν τὰς κλασματικὰς μονάδας

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ κλπ.} \ldots \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \text{ κλπ.}$$

καὶ ἀπὸ αὐτάς, ὅταν τὰς ἐπαναλάβωμεν πολλὰς φοράς, λαμβάνομεν τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς ἢ ἁπλῶς τὰ κλάσματα π. χ. τὰ

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots \frac{7}{10}, \frac{8}{100}, \frac{5}{1000} \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἀλλ' ἀπὸ ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ὅσα ἔχουν παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἡ ὁποία ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα μηδενικά, **τὰ ξεχωρίζομεν εἰς ἰδιαιτέραν κατηγορίαν** καὶ τὰ ὀνομάζομεν **δεκαδικά.** Τοιαῦτα εἶναι π. χ.

$$\text{τὰ } \frac{17}{10}, \frac{35}{100}, \frac{11}{1000}, \frac{131}{10000} \text{ κ.ο.κ.}$$

Εἰς τὰ κλάσματα αὐτὰ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παρονομασταί των εἶναι δυνάμεις τοῦ 10, διότι εἶναι $10=10^1$, $100=10\times10=$ $=10^2$, $1000=10\times10\times10=10^3$ κ.ο.κ. Διὰ τὸν λόγον δὲ αὐτόν, τὰ ὡς ἄνω κλάσματα ὠνομάσθησαν δεκαδικά.

2. Διατί τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ἀποτελοῦν ἰδιαιτέραν κατηγορίαν κλασμάτων; Διότι ἠμποροῦμεν νὰ τὰ γράφωμεν ὑπὸ μορφὴν ἀκεραίων (§ 223). Ἔτσι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὅταν γράφωνται ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, γίνονται ἀκριβῶς, ὅπως αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Μόνον ποὺ πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ θέτωμεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν, σύμφωνα μὲ τοὺς κανόνας τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἁπλούστατοι. Ἡ παράστασις λοιπὸν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, εὐκολύνει ἐξαιρετικὰ τὰς πράξεις ἐπ' αὐτῶν.

Σημείωσις.— Τὴν γραφὴν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν τὴν ἐνεπνεύσθη, τὸ πρῶτον, ὁ Γάλλος μαθηματικὸς Viéte. Τὴν θεωρίαν ὅμως περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν τὴν ἐσυστηματοποίησεν ὁ Βέλγος Simon Stevin τὸ 1585.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 191.

399) 0,3 0,25 0,032 0,248 0,0045

400) $\frac{470}{1000}$, $\frac{758}{1000}$, $\frac{4285}{10000}$, $\frac{3012}{100000}$ κ. ο. κ.

401) 0,03 2,002 0,0564 4,075 κ. ο. κ.

402) $2{,}5 = 2{,}500 = 2{,}5000$
$0{,}605 = 0{,}605000$

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 193.

403) **1.** 637,5 94 3000

2. 0,8 325070 40200

404) 5 = 5,0 = 5,00 = 5,000 κ. ο. κ.

49 = 49,0 = 49,00 = 49,000 κ. ο. κ.

405) **1.** 45,7 : 10 = 4,57 125,75 : 100 = 1,2575

4706,5 : 1000 = 4,7065

2. 0,78 : 10 = 0,078 348,09 : 100 = 3,4809

0,4874 : 1000 = 0,0004874

406) Πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, διότι 35,6×10=356

407) Τὸ 1 πορτ. τιμᾶται 129 χιλ. : 1000=0,129 χιλ. (=129 δρ.)

τὰ 10 » τιμῶνται 0,129 χιλ.×10=1,29 χιλ.

καὶ τὰ 100 » » 0,129 χιλ.×100=12,9 χιλ.

408) Εἶναι 18,5 χλμ.×1000=18500 μέτρα.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 194.

410) **1.**

72,8040		72,804
0,0487		0,0487
3,2520	ἢ	3,252
356,4000		356,4
1800,0000		1800
2232,5047		2232,5047

2. = 1191,131

411) Ἔχει μῆκος 967,8 χιλιόμετρα.

412) Ἠγόρασεν 87,05 μ. Ἐπλήρωσε 2196,25 χιλδρ.

413) Διέθεσεν ἐν ὅλῳ 3590,05 χιλδρ.

Κέρδος 3590,05 χιλδ. : 10=359,005 χιλδρ.

Θὰ εἰσπράξῃ 3590,05 χιλδρ.+359,005 χιλδ.=3949,055 χιλδρ.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 196.

415) **1.**

$$\begin{array}{r} 375,00 \\ 148,90 \\ \hline 226,10 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{r} 375,0 \\ 148,9 \\ \hline 226,1 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{r} 375 \\ 148,9 \\ \hline 226,1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{δοκιμὴ} \\ 148,9+226,1=375 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1764,00 \\ 895,45 \\ \hline 868,55 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{διαφορὰ} \\ 868,55 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 7,000 \\ 6,375 \\ \hline 0,625 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{διαφορὰ} \\ 0,625 \end{array}$$

δοκ. 895,45+868,55=1764 δοκ. 6,375+0,625=7

2. (85,40+75,65)—(18,45+104,95)=

=161,05—123,40=37,65

δοκιμή, 123,40+ 37,65=161,05

216) ’Ηγόρασεν εἴδη ἀξίας 36,40 χλδ.+18,75 χλδ.=55,15 χλδ.

ἔδωσεν 20000 δρχ.×3=60000 δρχ. ἤτοι

60000 δρχ. : 1000=60 χιλιόδραχμα.

Ἔλαβεν ὑπόλοιπον 60 χιλδρ.—55,15 χιλδρ.=4,85 χιλδρ.

ἢ ἀλλέως: τὰ 55,15 χιλδρ. κάμνουν 55,15×1000=55150 δρχ.

Ἔλαβεν ὑπόλοιπον 60000 δρχ.—55150 δρχ.=4850 δρχ.

417) Ὁ Γ. ἔχει 15,60 χιλδρ.—4,75 χιλδρ.=10,85 χιλδρ.

Ὁ Π. ἔχει 3,45 χιλδρ.+8,90 χιλδρ.=12,35 χιλδρ.

Ὁ Π. ἔχει ἐπὶ πλέον 12,35 χιλδρ.—10,85=1,5 χιλδρ.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 197.

418) 354×8,2 =2902,8 4506× 0,75 =3379,50

1008×6,405=6456,24 96,007×18,208=1748,095456

1,25×4,009=5,01125 100,058× 0,94 =94,05452

419) Τιμῶνται 14,5 χιλδρ.×15,4=223,3 χιλδρ.

420) ’Επώλησε 48 ὀκ.×25=1200 ὀκ.

Θὰ λάβῃ 1,60 χιλδρ.×1200=1920 χιλδρ.

421) Θὰ λάβῃ ὑπόλ. 20 χιλδρ.—6,4 χιλδρ. $\times$ 3 = 20 χιλδρ. — —19,2 χιλδρ. = 0,8 χιλδρ. = 800 δραχ.

422) Ἡ ἀπόστασις εἶναι 25,6 χιλμ. $\times$ 5,6 = 143,36 χιλμ.

423) Θὰ πληρώσῃ ἐν ὅλῳ 24,50 χιλδρ. $\times$ 12,60 + 14,5 χιλδρ. $\times$ $\times$ 4,25 = 308,7 χιλδρ. + 61,625 χιλδρ. = 370,325 χιλδρ.

424) Εἰς 25 ἡμερ. ὑφαίνει 3,25 μ. $\times$ 25 = 81,25 μ.

Θὰ λάβῃ 8,75 χιλδρ. $\times$ 81,25 = 710,9375 χιλδρ.

425) Πληρώνει καθ' ἡμέραν

35,40χλδ. $\times$ 18 + 18,75χλδ. $\times$ 12 = 637,2 χλδ. + 225 χιλ. = 862,2χλδ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 199.

426) 520,60 : 4 = 130,15 256,06 : 39 = 6,565641..
1046,24 : 204 = 5,1286.. 2597,7 : 40 = 64,9425
(563,5 — 37,25) : 80 = 526,25 : 80 = 6,578125.

427) 1724,50 : 235 = 7,33 κατὰ προσ. 0,01 (κατ' ἔλλειψιν).

Σημείωσις.— Ἐδῶ παραλείπομεν $\frac{195}{235}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως ἑνὸς ἑκατοστοῦ. Διὰ τοῦτο ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸ 7,34 (καθ' ὑπεροχήν), ὁπότε αὐξάνομεν τὸ πηλίκον κατὰ $\frac{40}{235}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Ἐδῶ λοιπὸν τὸ καθ' ὑπεροχὴν πηλίκον πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸ ἀκριβές, ὅπερ εἶναι $7{,}33 + \frac{195}{235}$ τοῦ ἑκατοστοῦ.

749,5 : 125 = 5,99 $\left(\right.$κατ' ἔλλειψιν $\frac{75}{125}$ τοῦ 0,01$\left.\right)$

749,5 : 125 = 6 $\left(\right.$καθ' ὑπεροχὴν $\frac{50}{125}$ τοῦ 0,01$\left.\right)$

32,725 : 48 = 0,68 (κατ' ἔλλειψιν).

Σημείωσις.— Ἐδῶ, ἐφ' ὅσον ζητεῖται προσέγγισις 0,01, τὸ ψηφίον 5 χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου, δὲν μᾶς χρειάζεται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως. Ἔτσι ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν 32,72 : 48 (= 0,68).

428) 7653,27 : 354=21,619 $\left(\text{κατ' ἔλλειψιν } \frac{144}{354} \text{ τοῦ } 0{,}001\right)$

1,235 : 427=0,002 $\left(\text{κατ' ἔλλειψιν } \frac{381}{427} \text{ τοῦ } 0{,}001\right)$

1,235 : 427=0,003 $\left(\text{καθ' ὑπεροχὴν } \frac{46}{427} \text{ τοῦ } 0{,}001\right)$

45,03 : 124=0,363 $\left(\text{κατ' ἔλλειψιν } \frac{18}{124} \text{ τοῦ } 0{,}001\right)$

429) Εἰς μίαν ὥραν ρέουν 1441,40 χλγ. : 5=288,280 χλγ.

430) Αἱ 4 ὧραι ἔχουν 60×4=240 πρῶτα λεπτά. Εἰς κάθε πρῶτον λεπτὸν ρέουν 3560,40 χλγ. : 240=14,835 χλγ.

431) Ἔρριψε λίπ. κατὰ στρέμμα 212,5 χλγ. : 17=12,5 χλγ.

432) Ἔλαβε κάθε μέλος 23644,60 χλγ. : 35=675,56 χλγ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 201.

433)

675 : 0,05 = 67500 : 5=13500
345 : 0,15 = 34500 : 15= 2300
135 : 0,045=135000 : 45= 3000
2,88 : 0,9 = 28,8 : 9= 3,2
444,64 : 0,56 = 44464 : 56= 794
2400,4 : 3,4 = 24004 : 34= 706

434)

28,8 : 2,05=2880 : 205=14,04 (κατ' ἔλλειψιν)
28,8 : 2,05=2880 : 205=14,05 (καθ' ὑπεροχὴν).

Σημείωσις. Ἡ διαίρεσις 2880 : 205 δίδει πηλίκον 14,04 καὶ ὑπόλοιπον 180. Ἀλλὰ διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν αὐτήν, ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τῆς δοθείσης διαιρέσεως 28,8 : 2,05 ἐπὶ 100. Ἔτσι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς δὲν μετεβλήθη. Τὸ ὑπόλοιπόν της ὅμως ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 100 καὶ ἔγινεν 180 (§ 92 σελὶς 75). Ἐπομένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκριβὲς ὑπόλοιπον τῆς δοθείσης διαιρέσεως, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ 180 διὰ τοῦ 100, ὁπότε εὑρίσκομεν 1,80.

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως 28,8 : 2,05 εἶναι $14{,}04 + \frac{180}{205}$ τοῦ 0,01. Ἐπειδὴ δέ, ὅταν λαμβάνωμεν ὡς πηλίκον τὸ 14,04 κάμνομεν σφάλμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ, ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τὸ 14,05. Τότε δὲ τὸ σφάλμα θὰ εἶναι $\frac{25}{205}$ τοῦ 0,01, ἤτοι μικρότερον τοῦ προηγουμένου.

644,32 : 0,64=64432 : 64 =1006,75 (ἀκριβὲς)

$117,67 : 2,43 = 11767 : 243 = 48,42 \left(\text{κατ' ἔλλ. } \frac{94}{243} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

$4,742 : 3,25 = 474,2 : 325 = 1,45 \left(\text{κατ' ἔλλ. } \frac{295}{325} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

$4,742 : 3,25 = 474,2 : 325 = 1,46 \left(\text{καθ' ὑπερ. } \frac{30}{325} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

$48,76 : 8,2 = 487,6 : 82 = 5,94 \left(\text{κατ' ἔλλ. } \frac{52}{82} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

$48,76 : 8,2 = 487,6 : 82 = 5,95 \left(\text{καθ' ὑπερ. } \frac{30}{82} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

$2375,49 : 15,4 = 23754,9 : 154 = 154,25 \left(\text{κατ' ἔλλ. } \frac{40}{154} \text{ τοῦ } 0,01\right)$

435) Θὰ κάμη 68,75 : 7 2,75=6875 : 275=25 ἐνδ.

436) Χρειάζεται 21,19 : 16,3=219,9 : 163=1,3 ὥρας.

437) Ἔχει 30,72 : 0,256=30720 : 256=120 πλάκας.

438) Περνᾷ 11,52 : 2,88=1152 : 288=4 ἑβδομ.

439) Θὰ κάμη 25740 : 1,80=257400 : 18=14300 στρ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 202.

440) $12,25 \times \frac{4}{5} = \frac{12,25 \times 4}{5} = \frac{49}{5} = 9,8$

$$15,16 : \frac{2}{5} = 15,16 \times \frac{5}{2} = \frac{15,16 \times 5}{2} = \frac{75,80}{2} = 37,9$$

$$5,124 \times 3\frac{1}{4} = 5,124 \times \frac{13}{4} = \frac{5,124 \times 13}{4} = \frac{66,612}{4} = 16,653$$

$$20,85 : 2\frac{2}{3} = 20,85 : \frac{8}{3} = \frac{20,85 \times 3}{8} = \frac{62,55}{8} = 7,81875$$

441) Διανύει 24,60 χλμ. $\times \frac{3}{4} = \frac{73,80}{4} = 18,45$ χλμ.

442) Ἔμειναν τὰ $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ τοῦ τυροῦ τοῦ βαρελίου.

Εἶχε τὸ βαρέλιον κατ' ἀρχὰς τυρὸν 12,85 χλγ. : $\frac{2}{5} =$

$= 12,85 \times \frac{5}{2}$ χλγ. $= \frac{12,85 \times 5}{2}$ χλγ. $= \frac{64,25}{2} = 32,125$ χλγ.

443) Χύνονται 2,35 χλγ.$\times 5\frac{1}{4} = 2,35$ χλγ.$\times \frac{21}{4} =$

$= \frac{2,35 \times 21}{4}$ χλγ.$= \frac{49,35}{4}$χλγ.$= 12,3375$ χλγ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 204.

444) Τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ κλάσματα :

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{5}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{5}{8}, \ \frac{7}{16}, \ \frac{19}{25} \text{ καὶ } \frac{3}{2}\left(=\frac{27}{18}\right)$$

διότι ὅλα εἶναι ἀνάγωγα καὶ οἱ παρονομασταί των ἔχουν μόνον τὸν παράγοντα 2 ἢ 5.

445) $\frac{3}{5} = 0,6 \quad \frac{8}{25} = 0,32 \quad \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 0,625$

$\frac{21}{48} = \frac{7}{16} = 0,4375 \quad \frac{25}{64} = 0,390625 \quad \frac{12}{75} = \frac{4}{25} = 0,16.$

446) $\frac{3}{7} = 0,42 \quad \frac{3}{11} = 0,27 \quad \frac{7}{9} = 0,77 \quad \frac{5}{24} = 0,20$

$\frac{5}{13} = 0,38 \quad \frac{17}{60} = 0,28$

447) **1.** $\frac{3}{4} + 0,85 + 2\frac{1}{2} = 0,75 + 0,85 + 2,5 = 4,1$

2. $\frac{4}{5} - 0,724 = 0,8 - 0,724 = 0,076.$

3. $\frac{5}{8} \times 4{,}5 = 0{,}625 \times 4{,}5 = 2{,}8125$

4. $3\frac{1}{8} \times 9{,}25 = 3{,}125 \times 9{,}25 = 28{,}90625$

5. $5\frac{4}{25} - 3{,}75 = 5{,}16 - 3{,}75 = 1{,}41$

6. $1{,}04 : \frac{2}{5} = 1{,}04 : 0{,}4 = 2{,}6$

Σημείωσις. Ἀντὶ νὰ τρέψωμεν τὰ κοινὰ κλάσματα εἰς δεκαδικά, ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ κλάσματος (§ 224), νὰ κάμωμεν ἔπειτα ἁπλοποίησιν (ἐὰν γίνεται) καὶ ἔτσι νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων.

Π. χ. ἐπὶ τοῦ π. δ. 3, ἠμποροῦμεν νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{5}{8} \times 4{,}5 = \frac{5}{8} \times \frac{45}{10} = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$$

Ἀλλ' εἰς τὸ π. δ. $\frac{2}{3} \times 0{,}8$, ἐπειδὴ τὸ $\frac{2}{3}$ δὲν τρέπεται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὸν ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν ἀκριβὲς ἐξαγόμενον, ἐὰν τρέψωμεν τὸ 0,8 εἰς τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Ἐννοεῖται δέ, ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς καὶ κοινὰ κλάσματα χωρὶς νὰ κάμωμεν καμμίαν τροπήν. Ἔτσι (π. δ. 6) εὑρίσκομεν:

$1{,}04 : \frac{2}{5} = 1{,}04 \times \frac{5}{2} = 0{,}52 \times 5 = 2{,}6$ (βλέπε καὶ ἄσκησιν 440).

Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ δὲ αὐτῇ σημειοῦμεν, ὅτι καλὸν εἶναι ὁ μαθητής, νὰ γνωρίζῃ ἀπὸ μνήμης τὰς ἑξῆς τροπάς, ἐπειδὴ παρουσιάζονται συχνότερα:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\quad \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$ $\quad \frac{1}{5} = 0{,}2.$

$\frac{2}{5} = 0{,}4$ $\quad \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\quad \frac{1}{8} = 0{,}125.$

$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots$ $\quad \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots.$ $\quad \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots..$

448) **1.** $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10}} = 3 + \frac{10}{71} = 3{,}14$

$$2.\ \frac{\left(\frac{13}{7}\times\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\right)}{\left(6\times\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{13}{7}\times\frac{4}{5}\right)\times7\times5\times4-\left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\right)\times7\times5\times4}{\left(6\times\frac{5}{8}\right)\times7\times5\times4-\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\right)\times7\times5\times4}=$$

$$=\frac{13\times4\times4-2\times5\times4}{3\times5\times7\times5-2\times3\times4}=\frac{208-40}{525-24}=\frac{168}{501}=\frac{56}{167}=0{,}33.$$

᾿Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 206.

449) Ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων αὐτῶν ἀπὸ μνήμης στηρίζεται εἰς τὰς συντομίας τῆς § 239. ᾿Εξηγοῦνται δὲ αὗται ὡς ἑξῆς:

Ἡ **1.** Διότι $0{,}5=\frac{1}{2}$. Ὥστε $56\times0{,}5=56\times\frac{1}{2}=\frac{56}{2}=28$

καὶ $75:0{,}5=75:\frac{1}{2}=75\times2=150.$

Ἡ **2.** Διότι $0{,}05=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}$. Ὥστε

$$46\times0{,}05=46\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\left(46\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{10}=(46:2):10=$$

$=23:10=2{,}3$ καὶ

$$73:0{,}05=73:\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\right)=73\times2\times10=(73\times2)\times10=$$

$$=146\times10=1460.$$

Ἡ **3.** Διότι $0{,}25=\frac{1}{4}$. Ὥστε $44\times0{,}25=44\times\frac{1}{4}=$

$=44:4=11$ καὶ $15:0{,}25=15:\frac{1}{4}=15\times4=60.$

Ἡ **4.** Διότι $2{,}5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$. Ὥστε $24\times2{,}5=$

$=24\times\frac{10}{4}=\frac{24}{4}\times10=(24:4)\times10=6\times10=60$ καὶ

$19:2{,}5=19:\frac{10}{4}=19\times\frac{4}{10}=(19\times4):10=76:10=7{,}6.$

Ἡ **5.** Διότι $0,1=\frac{1}{10}$, $0,01=\frac{1}{100}$. Ὥστε $13,5\times 0,1=$

$$=13,5\times\frac{1}{10}=13,5:10=1,35 \quad \text{καὶ}$$

$$5,7:0,1=5,7:\frac{1}{10}=5,7\times 10=57 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἀσκήσεις—Λύσεις.

Σελὶς 208.

450) $0,777...=\frac{7}{9}$ $\quad 0,161616...=\frac{16}{99}$ $\quad 0,564564...=\frac{564}{999}$

$$5,6666...=\frac{56-5}{9}=\frac{51}{9} \quad 12,345345...=\frac{12345-12}{999}=\frac{12333}{999}$$

$$0,528888...=\frac{528-52}{900}=\frac{476}{900}$$

$$4,14555...=\frac{4145-414}{900}=\frac{3731}{900}$$

$$15,23147147...=\frac{1523147-1523}{99900}=\frac{1521624}{99900}$$

451) **1.** $=\frac{23}{99}+\frac{58}{99}+\frac{15}{99}=\frac{96}{99}=0,969696...$

2. $\frac{15}{11}-\frac{67}{99}=\frac{68}{99}$, $\quad 0,7272...\times 99=\frac{72}{99}\times 99=72,$

$$2,136136...\times 999=\frac{2136-2}{999}\times 999=2134.$$

452) $\frac{24}{99}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{11}=0,1818...,$ $\quad \frac{15}{99}\times\frac{11}{5}=\frac{1}{3}=0,333...$

$$\frac{307-3}{99}\times\frac{9}{2}=\frac{304}{99}\times\frac{9}{2}=\frac{152}{11}=13,8181...$$

453) Εἶναι ὁ $\frac{8}{9}:\frac{4}{9}=\frac{8}{4}=2.$

Προβλήματα ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

Λύσεις.

Σελὶς 209.

454) Ἠγόρασε τὸ 1 μ. ἀντὶ 942,5 χλδ. : 65=14,5 χλδ.
Μετεπώλησε τὸ 1 μ. » 52,50 χλδ. : 5=10,5 χλδ.
Ἐκέρδισε κατὰ μέτρον 14,5 χλδ.—10,5 χλδ.=4 χλδ.

455) Ὑπόλοιπον χρέους, ἐξοφληθὲν μὲ οἶνον
816,7 χλδ.—(145 χλδ.+217,5 χλδ.+275 χλδ.) =
= 816,7 χλδ.—637,5 χλδ.=179,2 χλδ.
Ἔδωκεν οἶνον 179,2 : 3,2=56 ὀκάδας.

456) Ἠγόρασαν τὸ 1 στρ. ἀντὶ 4632,20 χλδ. : 9,5=487,6 χλδ.
Ἐπλήρωσεν ὁ α΄ 487,6 χλδ.×5,60=2730,56 χλδ.
» ὁ β΄ 487,6 χλδ.×3,9 =1901,64 χλδ.

457) Τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο 1612,50 χλδ. : 25=64,5 χλδ.
Ἔλαβε τὸν β΄ καὶ γ΄ μῆνα 64,5 χλδ.×44=2838 χλδ.
Ἔλαβε τὴν τριμηνίαν 1612,50 χλδ.+2838 χλδ.=4450,5 χλδ.

458) Τὸ ἡμερομίσθιον ἦτο 592,5 χλδ. : 25=23,7 χλδ.
Ὁ β΄ ἔλαβε 1042,8 χλδ.—592,5 χλδ.=450,3 χλδ.
καὶ εἰργάσθη 450,3 : 23,7=19 ἡμ.

459) Ἐπλήρωσεν 20 χλδ.—1,25 χλδ.=18,75 χλδ.
Ἠγόρασε τὸ 1 αὐγὸν πρὸς 7,5 χλδ. : 10=0,75 χλδ.
Ἠγόρασε 18,75 : 0,75=25 αὐγά.

460) Τὸ ὕφασμα ἤξιζε 18 χλδ.×12,6=226,8 χλδ.
Τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του ἦσαν 226,8 χλδ.
καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι ὅλα τὰ χρήματα ἦσαν 226,8 χλδ. : $\frac{3}{4}$ =
$= 226{,}8 \times \frac{4}{3}$ χλδ. $= \frac{907{,}2}{3}$ χλδ. $= 302{,}4$ χλδ.

461) Ἀξ. ἐλαίου εἰς 1 ἑβδ. 9,8 χλδ.$\times$2=19,6 χλδ.
Χονδρικὴ τιμὴ ἐλ. 1 ὀκ. 103,75 χλδ. : 12,5=8,3 χλδ.
» » » 2 ὀκ. 8,3 χλδ.$\times$2=16,6 χλδ.
Οἰκονομία καθ' ἑβδ. 19,6 χλδ.—16,6 χλδ.=3 χλδ.

462) Ἀξ. 1 μ. α΄ ὑφάσμ. 2689,375 χλδ. : 82,75=32,5 χλδ.
Ἀξ. 1 μ. β΄ ὑφάσματος 32,5 χλδ.— 4,25 χλδ.=28,25 χλδ.
Ἐκ τοῦ β΄ » ἠγόρασεν 497,2 : 28,25=17,6 μέτρα.

463) Ἠγόρασε τὸ 1 μ. ἀντὶ 219 χλδ. : 6=36,5 χλδ
Ἐπώλησε τὸ 1 μ. ἀντὶ 364,80 χλδ. : 8=45,6 χλδ.
Ἐκέρδισε κατὰ μέτρον 45,6 χλδ.—36,5 χλδ.=9,1 χλδ.
Ἠγόρασεν ὕφασμα 318,50 : 9,1 = 35 μέτρα.

464) Ἠγόρασε τὸν σπόρον ἀντὶ 2,3 χλδ. $\times$150=345 χλδ.
Παρήγαγε σῖτον 150 ὀκ. $\times$14=2100 ὀκ.
Εἰσέπραξε 2,50 χλδ. $\times$2100=5250 χλδ.
Ἔξοδα καλλιεργείας 5250 χλδ. $\times \frac{1}{5}$ = 1050 χλδ.
Καθαρὸν κέρδος 5250 χλδ. — 1050 = 4200 χλδ.

465) Διὰ 18 πετσ. ἐχρειάζοντο 0,875 μ. $\times$18=15,75 μ.
Εἶχεν ἀγοράσει 15,75 μ. —1,25=14,5 μ.
Ἀξίζει τὸ 1 μ. 92,8 χλδ. : 14,5=6,4 χλδ.

466) Τὸ β΄ ἤξιζε πλέον τοῦ α΄ 239,2 χλδ.—161=78,2 χλδ.
Τὸ 1 μ. ἤξιζε 78,2 χλδ. : 2,125=36,8 χλδ.
Τὸ α΄ ὕφ. ἦτο 161 : 36,8=4,375 μέτρα.
Τὸ β΄ ὕφ. ἦτο 239,2 : 36,8=6,5 μέτρα.
ἢ 4,375 μ. +2,125 μ.=6,5 μ.

467) Ἀξ. νωποῦ σάπωνος 7,8 χλδ.$\times$75,5=588,90 χλδ.
Πώλησις ξηροῦ σάπωνος 588,90 χλδ.+25,2=614,10 χλδ.
Ὁ ξηρὸς σάπων ἦτο 75,50 ὀκ.—8,75 ὀκ.=66,75 ὀκ.
καὶ ἐπωλήθη τὴν 1 ὀκ. πρὸς 614,10 χλδ. : 66,75=9,2 χλδ.

468) Ἐσάπισαν 360 ὀκ. $\times \frac{1}{9}$ = 40 ὀκ.

'Εκ τῶν ὑπολοίπων εἰσέπραξε 1,4 χλδ.×320=448 χλδ.
'Αξία ὅλων τῶν γεωμήλων 448 χλδ.+34,4=482,4 χλδ.
'Ηγόρασε τὴν 1 ὀκ. πρὸς 482,4 χλδ. : 360=1,34 χλδ.

469) 'Αξ. ὑφάσματος 64,50 χλδ.×45=2902,5 χλδ.
Τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑφάσματος εἶναι 45 μ. $\times \frac{3}{5} = 27$ μ.
καὶ τὰ ἐπώλησεν ἀντὶ 75 χλδ. ×27=2025 χλδ.
Τὰ ὑπόλοιπα 45 μ. —27 μ. =18 μ. πρέπει νὰ πωλήσῃ ἀντὶ
(2902,5 χλδ. —2025 χλδ.)+369,9 χλδ. =1247,40 χλδ.
καὶ τὸ 1 μ. αὐτῶν πρὸς 1247,40 χλδ. : 18=69,3 χλδ.

470) 'Ηγόρασεν 820,8 : 2,40=342 ὀκ. σίτου.
Τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν εἶναι 342 ὀκ. $\times \frac{1}{4} = 85{,}50$ ὀκ.
'Εξ αὐτῶν εἰσέπραξεν 2,4 χλδ. × 85,5=205,2 χλδ.
Αἱ ὑπόλοιποι 342 ὀκ. — 85,5 ὀκ. = 256,5 ὀκ.
ἐπωλήθησαν πρὸς 2,40 χλδ.—0,25 χλδ.=2,15 χλδ. τὴν 1 ὀκ.
Εἰσέπραξεν ἐξ αὐτῶν 2,15 χλδ. ×256,5=551,475 χλδ.
Εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 551,475 χλδ. +205,2 χλδ.=756,675 χλδ.

472) Ἂν ἐπώλει ὅλα τὰ 69 αὐγὰ πρὸς 0,75 χλδ. τὸ καθένα, θὰ εἰσέπραττεν 0,75 χλδ. ×69=51,75 χλδ.

'Αλλ' εἰσέπραξε 55,35 χλδ.—51,75 χλδ.=3,60 χλδ. περισσότερον, διότι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἄλλα αὐγὰ τὰ ἐπώλησε 0,9 χλδ.——0,75 χλδ.=0,15 χλδ. περισσότερον. Ὥστε τὰ αὐγὰ ποὺ ἐπώλησε πρὸς 0,9 χλδ. τὸ 1 ἦσαν 3,60 : 0,15=24 καὶ τὰ αὐγὰ ποὺ ἐπώλησε πρὸς 0,75 χλδ. τὸ 1 ἦσαν 69—24=45.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν :

Ἂν ἐπώλει ὅλα τὰ 69 αὐγὰ πρὸς 0,9 χλδ. τὸ καθένα θὰ εἰσέπραττεν 0,9 χλδ.×69=62,1 χλδ.

'Αλλ' εἰσέπραξε 62,1 χλδ. — 55,35 χλδ. =6,75 χλδ. ὀλιγώτερον, διότι τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ἄλλα αὐγὰ τὸ ἐπώλησεν 0,9 χλδ.——0,75 χλδ. =0,15 χλδ. ὀλιγώτερον. Ὥστε αὐτὰ τὰ αὐγὰ ἦσαν 6,75 : 0,15=45 καὶ τὰ πρῶτα ἦσαν 69—45=24.

473) 'Εὰν παραστήσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς μὲ 1 ἢ μὲ $\frac{9}{9}$, ἡ πώλησις εἶναι τὰ $\frac{9}{9} + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς.

Ἤτοι τὰ $\frac{11}{9}$ ἀντιστοιχοῦν μὲ 990 χλδ.

τὸ $\frac{1}{9}$ ἀντιστοιχεῖ μὲ $\frac{990}{11} = 90$ χλδ.

καὶ τὰ $\frac{9}{9}$ ἀντιστοιχοῦν μὲ 90 χλδ.$\times 9 = 810$ χλδ.

Ὥστε τὸ 1 μ. ἠγοράσθη πρὸς 810 χλδ. : 67,5=12 χλδ.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΡΙΘΜΟΥ

Πίναξ τετραγώνων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν.—Κατωτέρω δίδομεν πίνακα τετραγώνων καὶ τετραγωνικῶν ριζῶν ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 20, τὸν ὁποῖον καλὸν εἶναι νὰ ἔχῃ ὁ μαθητὴς πρόχειρον εἰς τὴν μνήμην του. Σημειώνομεν δὲ ὅτι ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τετραγώνων συνάγεται ἀμέσως ὁ πίναξ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν.

$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$20^3 = 400$	$\sqrt{400} = 20$

Σημείωσις α'. Τὸν ἀνωτέρω πίνακα τῶν τετραγώνων καὶ ἑπομένως τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ἠμποροῦμεν νὰ τὸν προεκτείνωμεν ὅσον θέλομεν εὐκόλως. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ 21, ἤτοι 21^2, θὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ 20, τὸ διπλάσιον τοῦ 20 σὺν 1, ἤτοι 41. Καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ 22^2, θὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον τοῦ 21, τὸ διπλάσιον τοῦ 21 σὺν 1. Ἔτσι εὑρίσκομεν

$$21^2=20^2+20\times2+1=400+41=441$$
$$22^2=21^2+21\times2+1=441+43=484$$
$$23^2=22^2+22\times2+1=484+45=529 \text{ κ.ο.κ.}$$

Σημείωσις β'. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν ἀμέσως καὶ τὸν πίνακα :

$10^2=100$	$\sqrt{100}=10$	$180^2=32400$	$\sqrt{32400}=180$
$20^2=400$	$\sqrt{400}=20$	$190^2=36100$	$\sqrt{36100}=190$
$30^2=900$	$\sqrt{900}=30$	$200^2=40000$	$\sqrt{40000}=200$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 217.

474) $\sqrt{441}=21$ $\quad\sqrt{2704}=52$

$\sqrt{7056}=84$ $\quad\sqrt{697225}=835$

475) $\sqrt{5179}=71$, ὑπ. 138 $\quad\sqrt{5741}=75$ ὑπ. 116.

$\sqrt{57482}=239$ ὑπ. 361 $\quad\sqrt{82609}=287$ ὑπ. 240

$\sqrt{5039,47}=\sqrt{5039}=70$, ὑπ. 139 (§ 246. Σημ. 2α)

$\sqrt{437,89}=\sqrt{437}=20$ ὑπ. 37

$\sqrt{99225}=315$ $\quad\sqrt{12324}=111$ ὑπ. 3.

476) $\sqrt{5}=2,23$ $\quad\sqrt{7}=2,64$ $\quad\sqrt{11}=3,31$

$\sqrt{13}=3,60$ $\quad\sqrt{437}=20,90$ $\quad\sqrt{57,98}=7,61$

$\sqrt{457,63}=21,39$ $\quad\sqrt{69,560}=\sqrt{69,5600}=8,34$

477) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{6}{10}$

478) $\sqrt{\frac{12}{81}}=\sqrt{0,1481}=0,38$ $\quad\sqrt{\frac{24}{25}}=\sqrt{0,9600}=0,97$

$\sqrt{\frac{55}{49}}=\sqrt{1,1224}=1,05$ $\quad\sqrt{\frac{47}{100}}=\sqrt{0,4700}=0,68$

$\sqrt{\frac{912}{1849}}=\sqrt{0,4932}=0,70$ $\quad\sqrt{\frac{174}{1025}}=\sqrt{0,1697}=0,41$

Σημείωσις. Εἰς τὸ κλάσμα $\frac{12}{81}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον (τοῦ 9), δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς : $\sqrt{\frac{12}{81}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{21}}{9}$. Κατόπιν εὑρίσκομεν τὴν $\sqrt{12}$ κατὰ προσέγγισιν 0,01, τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν διὰ 9, φθάνοντες μέχρι τοῦ 0,01.

Οὕτως ἐπειδὴ $\sqrt{12}=3,46$, θὰ ἔχωμεν $\sqrt{\frac{12}{81}}=\frac{\sqrt{12}}{9}=\frac{3,46}{9}=0,38$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{4,89}{5}=0,97$ κτλ. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ εἰς τὰ ἄλλα κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ εἶναι τέλεια τετράγωνα.

ΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

Κανόνες μετατροπῆς μονάδων μήκους.

1) **Διὰ νὰ τρέψωμεν πήχεις εἰς μέτρα πολλαπλασιάζομεν τὸν 0,648 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων.**

Διότι 1 πήχ.=0,648 μ. ἄρα α πήχ.=0,648 μ.×α.

2) **Διὰ νὰ τρέψωμεν μέτρα εἰς πήχεις, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων διὰ τοῦ 0,648.**

Ἤτοι β μέτρα = (β : 0,648) πήχεις.

3) **Διὰ νὰ τρέψωμεν ὑάρδας εἰς μέτρα, πολλαπλασιάζομεν τὸν 0,914 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑαρδῶν.**

Ἤτοι γ ὑάρδαι = 0,914 μ.×γ.

4) **Διὰ νὰ τρέψωμεν μέτρα εἰς ὑάρδας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μέτρων διὰ τοῦ 0,914.**

Π. χ. δ μέτρα = (δ : 0,914) ὑάρδαι.

5) **Διὰ νὰ τρέψωμεν πήχεις εἰς ὑάρδας τρέπομεν πρῶτον τοὺς πήχεις εἰς μέτρα καὶ κατόπιν τὰ μέτρα εἰς ὑάρδας.**

Οὕτω π. χ. ἔχομεν α πήχεις = 0,648×α μέτρα = 0,648× ×α : 0,914=$\alpha\times\frac{0,648}{0,914}=\alpha\times\frac{648}{914}$ ὑάρδαι.

Ὥστε διὰ τρέψωμεν πήχεις εἰς ὑάρδας πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πήχεων ἐπὶ $\frac{648}{914}$·

6) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: **Διὰ νὰ τρέψωμεν ὑάρδας εἰς πήχεις, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑαρδῶν ἐπὶ $\frac{914}{648}$·**

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 220.

479) **1.** 1 ϱ. $=0,648$ μ.: $8=0,081$ μ.

2. 1 μ. $=1:0,081=12\frac{28}{81}$ ϱ.

480) **1.** 48 π. $=0,648$ μ. $\times 48=31,104$ μ.

2. 25,80 μ. $=25,80:0,648=39\frac{22}{27}$ π.

25,80 μ. $=25,80:0,914=28\frac{104}{457}$ ὑάϱ.

3. 58 ὑάϱ. $=0,914$ μ. $\times 58=53,012$ μ.

58 ὑάϱ. $=\frac{914\times 58}{648}=53012:648=81\frac{131}{162}$ πήχ.

481) **1.** 1 π. τιμ. 24000 δϱχ. $\times 0,648=15552$ δϱχ.
2. 1 ὑάϱ. τιμ. 24000 δϱχ. $\times 0,914=21936$ δϱχ.

482) **1.** 1 μ. τιμ. 8400 δϱχ. : $0,914=9190$ δϱχ. (πεϱίπου).
2. 1 π. τιμ. 8400 δϱχ. $\times 0,648:0,914=5955$ δϱχ.

483) **1.** 1 μ. τιμ. 7800 δϱχ. : $0,648=12037$ δϱχ. (πεϱίπου).
2. 1 ὑάϱ. τιμ. 7800 δϱχ. $\times 0,914:0,648=11002$ δϱχ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 223.

484) **1.** 350 τ.τ.π. $=\frac{9}{16}\times 350=196,875$ τ.μ.

2. 400 τ.μ. $=400:\frac{9}{16}=711\frac{1}{9}$ τ.τ.π.

485) Τιμᾶται 25000 δϱχ. $\times 420\times\frac{9}{16}=5906250$ δϱχ.

486) Τιμᾶται 42000 δϱχ. $\times 560\times\frac{16}{9}=41\,813\,333$ δϱχ.

487) Τὸ οἰκόπεδον ἦτο $14\,400\,000:36000=\frac{14400}{36}$ τ. μ. $=$

$=\frac{14400}{36}\times\frac{16}{9}$ τ. τ. π. $=400\times\frac{16}{9}$ τ. τ. π, $=711\frac{1}{9}$ τ. τ. π.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 225.

488) ’Επειδὴ 1 μετρικὸν κιλὸν$=\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου, ἡ ἀποθήκη χωρεῖ $2000 : \frac{1}{10} = 20000$ μετρικὰ κιλά.

489) ‘Η χωρητικότης του εἶναι $5700 : 2{,}85 = 2000$ τόννων.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 226.

490) **1.** 3,025 κ. μ.$=1000$ λ.$\times 3{,}025 = 3025$ λ.

2. 175,400 κ. μ. $= 175400$ κ.

3. 15 ὀκ. $= 1{,}280 \times 15 = 19{,}200$ χιλγρ.

4. 25,4 χιλγρ.$=25{,}4 : 1{,}28 = 19\frac{27}{32}$ ὀκ.

491) Τὸ 1 χιλγρ. τιμ. 14800 δρχ. : $1{,}28 = 11562{,}5$ δρχ.

492) ‘Η 1 ὀκ. τιμ. 18000 δρχ.$\times 1{,}28 = 23040$ δρχ.

493) ῎Εμειναν 74000 λ.$-$4500 λ.$=69500$ λ.
καὶ 69500 λ.$=69500 : 1{,}28 = 54297$ ὀκ. (περίπου).

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 227.

494) 1 ὥρα$=60\times 60=3600$ δευτλ.
1 ἡμ. $=3600\times 24=86400$ δευτλ.

495) $1^{\circ}=60\times 60=3600''$, 1 περιφ.$=360^{\circ}=1\,296\,000''$

496) $\frac{1}{4}$ περ. $= \frac{360^{\circ}}{4} = 90^{\circ} = \frac{400}{4} = 100\gamma$

$\frac{1}{2}$ περ. $= 180^{\circ} = 200\ \gamma$ καὶ $\frac{3}{4}$ περ.$=270^{\circ}=300\ \gamma$

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 229.

497) Νόμιμος τιμὴ χαρτίνης ἀγγλικῆς λίρας 42000 δρχ.

1 σελ. $= \frac{42000}{20} = 210$ δρχ., 1 πέννα $= \frac{42000}{240} = 175$ δρχ.

498) Νόμιμος τιμὴ δολλαρίου 15000 δραχμαί.

$$1 \text{ σέντς} = \frac{15000}{100} = 150 \text{ δρχ.}$$

499) Πρέπει νὰ δώση 42000 δρχ. × 25 = 1 050 000 δρχ.

500) Τιμὴ χαρτ. δολ.+μπὸν=5000 δρ.+4990 δρ.=9990 δρ.

Θὰ δώση 9990 δρχ. × 1400=13 986 000 δρχ.

501) Τιμὴ χαρτ. λίρ.+μπὸν = 20000 δρχ.+12100 δρχ. = =32100 δρχ. Θὰ δώση, 32100 δρχ. × 500 = 16 050 000 δρχ.

Σημείωσις. Μὲ τὴν ὑποτίμησιν τῆς δραχμῆς τὰ μπὸν ἔχουν καταργηθῆ, διότι ἔχουν ἐνσωματωθεῖ εἰς τὰς νέας νομίμους τιμὰς τῆς χαρτ. λίρας καὶ τοῦ χαρτ. δολλαρίου (βλέπε ἄσκ. 497).

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 231.

502) **1.** 10 π. 3 ρ.=8 ρ.×10+3 ρ.=80 ρ.+3 ρ.=83 ρ.

2. 5 στ. 35 ὀκ. 240 δρ.=102240 δρμ.

3. 5 ὥρ. $12^{\pi}\ 25^{\delta} = 18745^{\delta}$

4. $20^{\circ}\ 40'\ 35'' = 74435''$

5. 4 λ. 8 σ. 6 π. 2 φ.=4226 φ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 233.

503) **1.** 2 στ. 25 ὀκ. 200 δρ.=45400 δρμ.

2. 925 π. 4 ρ.=7404 ρ.

3. 2 λ. 15 σ. 10 π. 3 φ.=2683 φ.

4. 2 ὥρ. $15^{\pi}\ 50^{\delta} = 8150^{\delta}$

504) **1.** 8 π. 6 ρ.$=8\frac{6}{8}$ π.$=8\frac{3}{4}$ π.

2. 3 στ. 40 ὀκ. 250 δρ. $= 3\frac{16259}{17600}$ στ. $= 3\frac{325}{352}$ στ. =

$$= 172\frac{250}{400} \text{ ὀκ.} = 172\frac{5}{8} \text{ ὀκ.}$$

3. 3 λ. 15 σ. 8 π. 3 φ. $= 75\,\frac{35}{48}$ σελ. $= 3\,\frac{755}{960}$ λίρ.

4. $25^\circ\ 30'\ 40'' = 25^\circ\frac{1840}{3600} = 25^\circ\frac{23}{45}$

5. 2 ἡμ. 12 ὥρ. $20^\pi\ 40^\delta = 60\,\frac{1240}{3600}$ ὥρ. $= 3620\ \frac{40^\delta}{60}$

505) 1) 6 ὥρ. $12^\pi = 22320^\delta$ 2) 1 ὥρ. $25^\pi = 5100^\delta$

3) 8 ὥρ. $16^\pi\ 30^\delta = 29790^\delta$

506) 29 ἡμ. 12 ὥρ. $43^\pi = 42523^\pi$

507) 27 ἡμ. 7 ὥρ. $43^\pi = 2\,360\,580^\delta$

᾿Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 235.

508) **1.** 24 π. 2 ρ., 838 π. 1 ρ., 1310 π.

2. 14 ὀκ. 160 δρ., 2 στ. 21 ὀκ. 80 δρ., 38 στ. 23 ὀκ.

3. 1 ὥρ. $2^\pi\ 34^\delta$, 5 ὥρ. $10^\pi\ 45^\delta$, 10 ἡμ. 6 ὥρ. $33^\pi\ 10^\delta$

4. $4^\circ\ 22'\ 20''$, $20^\circ\ 42'\ 40''$, $250^\circ\ 5'$

5. 283 λ. 10 σ., 39 λ. 10 π., 3119 λ. 4 π.

509) **1.** 12 στ. 27 ὀκ. 200 δρ.. 5 στ. 16 ὀκ.,

108 στ. 12 ὀκ. 128 δρμ.

2. 68 ὑάρ. 2 π. 3 δ., 508 ὑάρ. 2 π. 7,5 δ.,

270 ὑάρ., 1 π., $8\,\frac{10}{13}$ δ.

510) 365 ἡμ. 5 ὥρ. $48^\pi\ 46{,}08^\delta$.

᾿Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 236.

511) **1.** 15 στ. 5 ὀκ. 100 δρ. **2.** 94 π. 3 ρ.

3. 3 ἡμ. 16 ὥρ. $51^\pi\ 30^\delta$ **4.** 44 λ. 6 σ. 5 π. 3 φ.

512) **1.**

3 στ. 18 ὀκ. 340 δρ.	
15 στ. 27 ὀκ. 200 δρ.	
12 στ. 17 ὀκ. 240 δρ.	
31 στ. 19 ὀκ. 380 δρ.	

2.

15 λ. 10 σ. 8 π.	
24 λ. 12 σ. 6 π.	
16 σ. 9 π.	
40 λ. 19 σ. 11 π.	

513) Ἐξώδευσεν ἐν ὅλῳ 4 στ. 22 ὀκ. 20 δρ.

514) Ὁ δεύτερος μαθητὴς εἶναι 14 ἔτ. καὶ 5 ἡμ.

515) Ὁ σύζυγος εἶναι 34 ἔτ. 9 μ. 25 ἡμ.

516) Τὸ ἄθροισμα εἶναι $134^\circ\ 37'\ 37''$.

517) Ἡ περιφέρεια ἔχει 360° καὶ τὰ $\frac{7}{25}$ αὐτῆς εἶναι $360^\circ \times \frac{7}{25} =$
$= 100^\circ\ 48'$. Τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς μοίρας εἶναι $52'\ 30''$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τόξων ἔχει μέτρον:

$$127^\circ\ 20'\ 40''.$$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 238.

518) **1.** 1 ὥρ. $44^{\pi}\ 50^{\delta}$ **2.** 4 ὥρ. $34^{\pi}\ 12^{\delta}$
3. $30^\circ\ 29'\ 2''$ **4.** 30 ὀκ. 150 δρ.

519) **1.** $8\frac{3}{5}$ στ. $=$ 8 στ. 26 ὀκ. 160 δρ. Δ$=$4 στ. 29 ὀκ. 360 δρ.
2. $8\frac{7}{8}$ λ. $=$ 8 λ. 17 σ. 6 π. Δ$=$7 λ. 6 π.

520) Ἐὰν ἡ σημερινὴ χρονολογία εἶναι π. χ. 15 Δεκεμβρίου 1949, γράφομεν

1949 ἔτ.	11 μ.	15 ἡμ.
1940 ἔτ.	9 μ.	28 ἡμ.
9 ἔτ.	1 μ.	17 ἡμ.

Σημείωσις. Διότι μετὰ τὸ 1949 ὡς τὰς 15 Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἔχουν περάσει 11 μ. καὶ 15 ἡμ., μετὰ δὲ τὸ 1940 ὡς τὰς 28 Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους ἔχουν περάσει 9 μ. καὶ 28 ἡμ. Συνήθως ὅμως δι' εὐκολίαν, ἐπειδὴ ὁ Δεκέμβριος εἶναι ὁ 12ος μὴν τοῦ ἔτους καὶ ὁ Ὀκτώβριος εἶναι ὁ 10ος μὴν γράφομεν

1949 ἔτ.	12 μ.	15 ἡμ.
1640 ἔτ.	10 μ.	28 ἡμ.
9 ἔτ.	1 μ.	17 ἡμ.

521) Ἐναπομεῖναν βάρος 14 στ. 23 ὀκ. 350 δρ.

522) Βλέπε ἄσκησιν 520.

523) Δύο τόξα λέγονται συμπληρωματικὰ ὅταν τὰ μέτρα των ἔχουν ἄθροισμα 90°. Ἐδῶ λοιπὸν τὸ ζητούμενον τόξον εἶναι

$$90^\circ - 35^\circ\, 24'\, 40'' = 89^\circ\, 59'\, 60'' - 35^\circ\, 24'\, 40'' = 54^\circ\, 35'\, 20''.$$

524) Δύο τόξα λέγονται παραπληρωματικά, ὅταν τὰ μέτρα των ἔχουν ἄθροισμα 180°. Ἐδῶ λοιπὸν ἔχομεν

$$180^\circ - 75^\circ\, 15'\, 48'' = 104^\circ\, 44'\, 12''.$$

525) Χρεωστεῖ ἀκόμη 494 λ. 4 σ. 3 π. 2 φ.

526) Εἶναι 25 λ. 14 σ. 6 π. $= \frac{174}{240}$ λ. $= 25\,\frac{29}{40}$ λ.

Τρέπομεν τὰς λίρας αὐτὰς εἰς δραχμάς, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$20000 \text{ δρχ.} \times 25\,\frac{29}{40} = 514500 \text{ δραχμάς.}$$

Χρεωστεῖ ἀκόμη 514500 δρχ.—252500 δρχ.=262000 δρχ.

527) Κατὰ τοὺς δύο μῆνας ἐξώδευσε 3 στ. 20 ὀκ. + 4 στ. 26 ὀκ. 160 δρμ.=8 στ. 2 ὀκ. 160 δρ. Τοῦ ἔμειναν δὲ

12 στ. 32 ὀκ. 240 δρ.

528) Εἶναι $\Gamma = 180^\circ - (A + B)$ ἤτοι

$$\Gamma = 180^\circ - (48^\circ\, 35'\, 40'' + 69^\circ\, 56'\, 30'')$$

$$\Gamma = 180^\circ - 118^\circ\, 32'\, 10'' = 61^\circ\, 27'\, 50''$$

529) $\frac{1}{8}$ περ. $= 360^\circ \times \frac{1}{8} = 45^\circ$ καὶ

$$60^\circ\, 35' + 58^\circ\, 45'' - 45^\circ = 73^\circ\, 35'\, 45''$$

530) Ἀπὸ τῆς 8 ὥρ. $24^{\pi.}$ τῆς πρωΐας μεταξὺ 6 ὥρ. 45 $^{\pi.}$ τῆς ἑσπέρας ἐπέρασαν (12 ὥρ.—8 ὥρ. $24^{\pi.}$)+6 ὥρ. $45^{\pi.}$=10 ὥρ. $21^{\pi.}$=37260^{δ}.

Κατὰ τὸ διάστημα αὐτὸ ἐχύθησαν 3 σταγ.×37260=111780 σταγόνες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὄγκον 111780 : 25 = 4471,200 κυβ. ἑκατ.=4,471200 λίτρας.

531) **1.** 17 ὥρας **2.** 19 ὥρ. **3.** 7 ἡμ. 16 ὥρ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 240.

532) Θὰ προμηθευθῇ (2 π. 5 ρ.)×10=26 π. 2 ρ.

533) Διατρέχει $(3^\circ\, 25'\, 30'') \times 5 = 17^\circ\, 7'\, 30''$

555) Α'. Ἐπειδὴ 2 ὀκ. 150 δρμ. $= 2\frac{3}{8}$ ὀκ. ἔδωκεν

$$8000 \text{ δρχ.} \times 2\frac{3}{8} = 19000 \text{ δραχμάς.}$$

Β'. Διὰ 2 ὀκ. 16000 δρχ.

διὰ 150 δρμ. $\begin{cases} 100 \text{ δρμ.} = \frac{1}{4} \text{ ὀκ.} & 2000 \text{ δρχ.} \\ 50 \text{ δρμ.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 100 \text{ δρμ.} & 1000 \text{ δρχ.} \end{cases}$

διὰ 2 ὀκ. 150 δρμ. 19000 δρχ.

556)

Α'. Ἐμοίρασεν (5 στ. 24 ὀκ. 250 δρ.) $\times$ 120 = 667 στ. 7 ὀκ.

Β'. Ἀπὸ 5 στ. 5 στ. $\times$ 120 = 600 στ.

ἀπὸ 24 ὀκ. $\begin{cases} 22 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{2} \text{ στ.} & \frac{1}{2} \text{ στ.} \times 120 = 60 \text{ στ.} \\ 2 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{11} \text{ τῶν } 22 \text{ ὀκ.} & 60 \text{ στ.} \times \frac{1}{11} = 5 \text{ στ. } 20 \text{ ὀκ.} \end{cases}$

ἀπὸ 250 δρ. $\begin{cases} 200 \text{ δρ.} = \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} & \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} \times 120 = 60 \text{ ὀκ.} \\ 50 \text{ δρ.} = \frac{1}{4} \text{ τῶν } 200 \text{ δρ.} & 60 \text{ ὀκ.} \times \frac{1}{4} = 15 \text{ ὀκ.} \end{cases}$

ἀπὸ 5 στ. 24 ὀκ. 250 δρμ. 667 στ. 7 ὀκ.

557)

Α'. (2 στ. 30 ὀκ. 200 δρ.) $\times 12\frac{3}{4}$ = 34 στ. 14 ὀκ. 350 δρμ.

Β'. τὰ 12 στρέμ. $\begin{cases} \text{ἀπὸ 2 στ.} & 24 \text{ στ.} \\ \text{ἀπὸ 30 ὀκ.} \begin{cases} 22 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{4} \text{ τῶν 2 στ.} & 6 \text{ στ.} \\ 8 \text{ ὀκ.} = \frac{4}{11} \text{ τῶν 22 ὀκ.} & 2 \text{ στ. } 8 \text{ ὀκ.} \end{cases} \\ \text{ἀπὸ 200 δρμ.} = \frac{1}{2} \text{ τῆς ὀκᾶς} & 6 \text{ ὀκ.} \end{cases}$

τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ στ. $\begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ στρ.} & 1 \text{ στ. } 15 \text{ ὀκ. } 100 \text{ δρμ.} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } \frac{2}{4} \text{ τοῦ στρ.} & 29 \text{ ὀκ. } 250 \text{ δρμ.} \end{cases}$

τὰ $12\frac{3}{4}$ στρ. 34 στ. 14 ὀκ. 350 δρμ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 251.

558) 'Επειδὴ ζητοῦμεν πόσον ἠγόρασε τὸν 1 πῆχυν, θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 7 π. 2 ρ. εἰς πήχεις $= 7\frac{2}{8}$ π. $= 7\frac{1}{4}$ πήχ. 'Ηγόρασε λοιπὸν τὸν 1 πῆχυν ἀντὶ 362500 δρχ. : $7\frac{1}{4} =$ $= 362500$ δρχ. $\times \frac{4}{29} = 50000$ δρχ.

559) 'Επειδὴ ζητοῦμεν πόσον ἠγόρασε τὸ 1 ρούπι θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 2 π. 3 ρ. εἰς ρούπια $=17$ ρ.

'Ηγόρασε λοιπὸν τὸ 1 ρ. ἀντὶ 11400 δρχ. : 19=600 δρχ.

560) 'Επειδὴ ζητοῦμεν τὴν ταχύτητα καθ' ὥραν θὰ τρέψωμεν τὸν συμμιγῆ 4 ὥρ. 40 π. 30^{δ} εἰς ὥρας $=4\frac{2430}{3600}$ ὥρ. $=$ $4\frac{27}{40}$ ὥρ. 'Η ταχύτης λοιπὸν καθ' ὥραν εἶναι 94,175 χλμ. : $4\frac{27}{40} =$ $= 94{,}175$ χλμ. $\times \frac{40}{187} = 20{,}144$ χλμ. $=20$ χλμ. 144 μ. (περ.).

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 252.

561) Ὅσας φορὰς χωροῦν αἱ 2 λ. 6 σ. εἰς τὰς 5 λ. 15 σ. τόσους πήχεις ἠγόρασεν. 'Εδῶ λοιπὸν ἔχομεν τὴν μέτρησιν

(5 λ. 15 σ.) : (2 λ. 6 σ.) $=115 : 46 = 2\frac{23}{46}$ π. $= 2\frac{1}{2}$ π. ἢ

(5 λ. 15 σ.) : (2 λ. 6 σ.) $= 5\frac{15}{20} : 2\frac{6}{20} = \frac{115}{20} : \frac{46}{20} = \frac{115}{46} = 2\frac{1}{2}$ π.

562) Ἔφθασε διὰ (9 π. 6 ρ.) : (3 π. 2 ρ.) $=78 : 26 = 3$ παρ.

563) Εἶχε (4 ὀκ. 150 δρ.) : 350 δρ. $=1750 : 350 = 5$ δελ.

564) Τὴν ἐπώλησεν εἰς (281 ὀκ. 350 δρ.) : (25 ὀκ. 250 δρ.) $=$ $= 281\frac{350}{400} : 25\frac{250}{400} = 281\frac{7}{8} : 25\frac{5}{8} = \frac{2255}{8} : \frac{205}{8} = 11$ ἡμ.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

565) Ἠγόρασεν ἔλαιον 2 ὀκ. 50 δρ. $= 2\frac{1}{8}$ ὀκ. πρὸς

17000 δρχ. : $2\frac{1}{8} =$ 8000 δρχ. τὴν 1 ὀκᾶν.

566) Ἂν τὸν οἶνον τοῦ α΄ βαρελίου τὸν παραστήσωμεν μὲ $1\left(=\frac{4}{4}\right)$, τότε ὁ οἶνος τῶν δύο βαρελίων ὁμοῦ θὰ παρασταθῇ μὲ $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$. Ἀφοῦ λοιπὸν

τὰ $\frac{7}{4}$ εἶναι 22 στ. 12 ὀκ. 280 δρμ.

τὸ $\frac{1}{4}$ » 3 στ. 8 ὀκ. 40 δρμ.

τὰ $\frac{3}{4}$ » 9 στ. 24 ὀκ. 120 δρμ. (β΄ βαρ.)

καὶ τὰ $\frac{4}{4}$ » 12 στ. 32 ὀκ. 160 δρμ. (α΄ βαρ.)

567) Ἐπώλησεν $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}$ τοῦ ὑφάσματος.

Ἔμειναν $\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20}$ » »

Ὥστε τὸ τεμάχιον ἦτο (39 π. 6 ρ.) : $\frac{7}{20}=$ 113 π. $4\frac{4}{7}$ ρ.

568) Διὰ τὸ α΄ ἐπλήρωσε 60000 δρχ. $\times 6\frac{1}{2}=$ 390000 δρχ.

» » β΄ » 770000 δρχ. — 390000 = 380000 δρχ.

Ἀπὸ τὸ β΄ ἠγόρασε 380000 : 80000 = 4 π. 6. ρ.

569) Ἡ αὐτοκινητάμαξα ἦτο εἰς κίνησιν ἐπὶ

6 ὥρ. 10^{π} — 3 ὥρ. 19^{π} — 8^{π} = 2 ὥρ. 43^{π}

Ἡ ταχύτης καθ᾽ ὥραν ἦτο 131 χ. : $2\frac{43}{60}=$ 48,221 χιλ. (περίπου)

570) Πωλεῖται τὸ 1 μ. πρὸς 2 λ. 8 σ. : 0,914 = 2 λ. 12 σ. 6 π. 1 φ. (περίπου).

571) Ἐπειδὴ $45^{\pi} = \frac{3}{4}$ τῆς ὥρας διέτρεξεν ἀπὸ τοῦ ἀεροδρομίου μέχρι τῶν θέσεων τοῦ ἐχθροῦ 90 χλμ. $\times \frac{3}{4} = 67{,}5$ χλμ.

Διὰ τὴν ἐπιστροφήν του ἐχρειάσθη $67{,}5 : 120 = 33^{\pi}\, 45^{\delta}$

Ἡ πτῆσις διήρκεσε $45^{\pi} + 12^{\pi} + 33^{\pi}\, 45^{\delta} = 1$ ὥρ. $30^{\pi}\, 45^{\delta}$

Ἐπέστρεψεν εἰς τὸ ἀεροδρόμιον τὴν 7 ὥρ. $45^{\pi}\, 45^{\delta}$.

572) Διήνυσε σιδηροδρομικῶς 150 χλμ. $\times \frac{2}{3} = 100$ χλμ. εἰς $100 : 40 = 2$ ὥρ. 30^{π} καὶ μὲ ἅμαξαν 50 χλμ. εἰς $50 : 10 = 5$ ὥρ.

Τὸ αὐτοκίνητον διήνυσε τὴν ἀπόστασιν τῶν 150 χλμ. εἰς $150 : 30 = 5$ ὥρ. Ἔφθασε λοιπὸν τοῦτο πρῶτον πρὸ 2 ὥρ. 30^{π}

573) Διὰ νὰ διανύσουν τὴν ἀπόστασιν τῶν 54 χλμ. χρειάζεται ὁ α′ $54 : 16 = 3$ ὥρ. $22^{\pi}\, 30^{\delta}$ καὶ ὁ β′ $54 : 36 = 1$ ὥρ. 30^{π}.

Ὁ β′ λοιπὸν πρέπει νὰ ἐκκινήσῃ μετὰ

3 ὥρ. $22^{\pi}\, 30^{\delta} - 1$ ὥρ. $30^{\pi} = 1$ ὥρ. $52^{\pi}\, 30^{\delta}$.

Λόγοι

Ἔννοια τοῦ λόγου.— Ἡ ἔννοια τοῦ λόγου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἀπὸ τὰς πλέον σπουδαίας διὰ τὴν μέτρησιν ποσῶν καὶ ἔχει πλείστας πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Π. δ. 1) **Ἔχομεν δύο ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς** π. χ. **τοὺς 12 καὶ 4 καὶ θέλομεν νὰ τοὺς συγκρίνομεν,** ἤτοι νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς εἶναι μεγαλύτερος ὁ 12 ἀπὸ τὸν 4. Ἀλλὰ τοῦτο θὰ μᾶς τὸ εἴπῃ ὁ **λόγος** τοῦ 12 πρὸς τὸν 4, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $12 : 4 = 3$. Ὥστε ὁ 12 εἶναι τριπλάσιος τοῦ 4, ἤτοι γίνεται ἀπὸ τὸν 4, ἐὰν τὸν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς.

Ἔτσι, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος ἀριθμοῦ α πρὸς ἄλλον ἀριθμὸν β εἶναι π. χ. $2\frac{3}{4}$, τοῦτο φανερώνει ὅτι ὁ α γίνεται ἀπὸ τὸν β, ἐὰν λάβωμεν τὸν β δύο φορὰς καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ, ἤτοι εἶναι $\alpha = \beta \times 2\frac{3}{4} = 2\frac{3}{4} \times \beta$.

2) **Ἓν ἀεροπλάνον καὶ ἓν αὐτοκίνητον κινοῦνται μὲ ὡρισμένην ταχύτητα καθ' ὥραν τὸ καθένα. Ποῖος εἶναι**

ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ; Δηλαδὴ ποσάκις τὸ ἀεροπλάνον εἶναι ταχύτερον τοῦ αὐτοκινήτου ;

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοῦτο, **θὰ ἐκφράσωμεν τὰς ταχύτητας αὐτῶν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως** καὶ ἔπειτα θὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν ποὺ παριστάνουν τὰς ταχύτητας αὐτάς. Ἔτσι, ἐὰν τὸ ἀεροπλάνον ἵπταται μὲ ταχύτητα 300 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ αὐτοκίνητον τρέχει μὲ ταχύτητα 50 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ λόγος τῆς ταχύτητος τοῦ ἀεροπλάνου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι $\frac{300}{50} = 6$.

Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἐκφράσωμεν τὰς ταχύτητας αὐτὰς μὲ μέτρα, πάλιν τὸν ἴδιον λόγον θὰ εὕρωμεν. Διότι εἶναι $\frac{300000}{50000} = 6$.

Τώρα εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ λόγος τῆς ταχύτητος τοῦ αὐτοκινήτου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου εἶναι $\frac{1}{6}$, δηλαδὴ **ἀντίστροφος** τοῦ λόγου 6.

Κατὰ ταῦτα λοιπόν, ἐὰν ἀπὸ δύο ὑφάσματα Α καὶ Β, τὸ μὲν Α ἔχει μῆκος 3 πήχεων τὸ δὲ Β ἔχει μῆκος 6 ρουπίων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῶν μηκῶν των ἢ πρέπει νὰ τρέψωμεν τοὺς πήχεις εἰς ρούπια, ἢ τὰ ρούπια εἰς πήχεις. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν

$\frac{\text{Α}}{\text{Β}} = 3\ \text{π.} : 6\ \text{ρ.} = 24 : 6 = 4$ ἢ $3\ \text{π.} : \frac{6}{8}\text{π.} = 3 \times \frac{8}{6} = 4$ καὶ $\frac{\text{Β}}{\text{Α}} = \frac{1}{4}$.

3) **Ἔχομεν δύο τεμάχια ὑφάσματος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸ βάρος τοῦ ἄλλου.** Ἀλλ' ἐδῶ σύγκρισις δὲν γίνεται. Λόγος δὲν ὑπάρχει.

Ὥστε: **Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον δύο ποσῶν πρέπει νὰ εἶναι ταῦτα ὁμοειδῆ. Τότε δὲ ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν ποὺ τὰ παριστάνουν, ὅταν τὰ μετρήσωμεν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.**

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 257.

574) **1.** $\chi = \frac{7 \times 12}{28} = 3$, $\chi = \frac{2 \times 16}{4} = 8$, $\chi = \frac{12 \times 16}{8} = 24$

2. $\chi = \sqrt{8 \times 2} = 4$, $\chi = \frac{15 \times 5}{25} = 3$, $\chi = \frac{27 \times 9}{8,1} = 30$

ΑΠΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 274.

578) $\chi = 25$ ὀκ. ἐλ. $\times \frac{1300}{100} = 325$ ὀκ. ἐλ. (ποσὰ ἀνάλογα)

579) $\chi = 140$ ὀκ. ἄρ. $\times \frac{35}{100} = 49$ ὀκ. ἄρ. (» »)

580) $\chi = 100^{\circ}$ K $\times \frac{35}{80} = 43\frac{3^{\circ}}{4}$ K (» »)

581) $\chi = 1{,}20$ μ. $\times \frac{15}{1{,}80} = 10$ μ. (» »)

582) Ἡ κυρία ἔλαβεν 8 μ., τὰ ὁποῖα τιμῶνται

99 000 δρχ. $\times \frac{8}{8{,}25} = 96\,000$ δρχ. Ὥστε ὑπ. 3000 δρχ.

583) $\chi = 100\,000$ μ. $\times \frac{0{,}025}{1} = 2\,500$ μ.

584) $\chi = 12$ ὥρ. $\times \frac{45}{54} = 10$ ὥρ. (ποσὰ ἀντίστροφα)

585) $\chi = 400$ στρ. $\times \frac{6}{8} = 300$ στρ. (ποσὰ ἀντίστροφα)

586) $\chi = 5\frac{3}{4}$ ὥρ. $\times \frac{4{,}6}{12{,}8} = 2\frac{17}{256}$ ὥρ. (ποσὰ ἀντίστρ.)

587) $\chi = 20$ ἡμ. $\times \frac{15}{12} = 25$ ἡμ. (ποσὰ ἀντίστροφα)

588) Εἰς 11 ἡμ. στρώνουν τὴν ὁδὸν 44 ἐρ. $\times \frac{14}{11} = 56$ ἐρ. (ποσὰ ἀντίστροφα). Θὰ προσλάβῃ λοιπὸν ἀκόμη $56 - 44 = 12$ ἐρ.

589) $\chi = 173\,600$ δρ. $\times \frac{15 \text{ π. } 3 \text{ ρ.}}{8 \text{ π.}} =$

$= 173\,600$ δρχ. $\times \frac{123}{64} = 333\,637{,}50$ δρ.

590) $\chi = 3{,}50$ μ. $\times \frac{15 \text{ λ. } 10 \text{ σ. } 8 \text{ π.}}{1 \text{ λ. } 6 \text{ σ.}} =$

$= 3{,}50$ μ. $\times \frac{3728}{312} = 41{,}82$ μ.

591) $\chi = 12\,900$ δρ. $\times \frac{66300}{3\,000} = 285\,090$ δρχ.

592) $\chi = 6$ π. $\times \frac{10}{12} = 5$ π. (ποσὰ ἀντίστροφα)

593) $\chi = 24$ μ. $\times \frac{1,50}{1,20} = 30$ μ. (ποσὰ ἀντίστροφα)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 277.

594) $\chi = 32,5$ δρχ. $\times \frac{350\,000}{100} = 113\,750$ δρχ.

595) $\chi = 2$ δρχ. $\times \frac{50\,000\,000}{1000} = 100\,000$ δρχ.

596) $\chi = 21$ κ. μ. $\times \frac{90}{100} = 18,9$ κ. μ. ὀξυγ.

597) Ποτάσσαν $= 8 \times \frac{200}{100} = 8 \times 2 = 16$ ὀκ.

Λιπ. οὐσ. $= 84$ ὀκ. Ὕδωρ $= 100$ ὀκ.

598) Ἄλευρον $= 75$ ὀκ. $\times \frac{380}{100} = 285$ ὀκ.

599) Ἐκπ. $= 18$ δρ. $\times \frac{125\,000}{100} = 22\,500$ δρχ.

Εἴσ. $= 82$ δρ. $\times \frac{125\,000}{100} = 102\,500$ δρχ.

600) Καθ. βάρος $= 97$ ὀκ. $\times \frac{240}{100} = 232,8 = 232$ ὀκ. 320 δρ.

601) α) $20 \times \frac{130199}{100} = 26039,8$ τ. χ. β) 23435,82 τ. χ.

γ) 45569,65 τ. χ. δ) 35153,73 τ. χ.

Σημείωσις. Τὸ ποσοστὸν πρὸς 50 %, τὸ εὑρίσκομεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀρχικὸν ποσὸν διὰ 2, διότι 50 % $= \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ ποσοστὸν πρὸς 25 %, 20 %, πρὸς 10 %, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἀρχικὸν ποσὸν ἀντιστοίχως διὰ 4, διὰ 5, διὰ 10· διότι 25 % $= \frac{1}{4}$ κ. ο. κ.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 278.

602) Ὤφειλεν, 100 δρχ. $\times \frac{578\,000}{34} = 1\,700\,000$ δρχ.

603) Ἐπωλήθη, 1000 δρχ. $\times \frac{75\,000}{2} = 37\,500\,000$ δρχ.

604) Τὸ ἠγόρασεν 100 δρχ. $\times \frac{105\,000}{15} = 700\,000$ δρχ.

Τὸ ἐπώλησεν 85 δρχ. $\times \frac{105\,000}{15} = 595\,000$ δρχ.

605) Θὰ στοιχίσῃ, 100 δρχ. $\times \frac{423\,000}{1{,}5} = 28\,200\,000$ δρχ.

606) 1 ὀκ. ἅλ. περιέχουν 100 ὀκ. $\times \frac{1}{2{,}5} = 40$ ὀκ. θαλ. ὕδατος

607) Τιμὴ ἀγορ. = 100 δρ. $\times \frac{910\,000}{130} = 700\,000$ δρχ.

608) Θ’ ἀγοράσωμεν 100 ὀκ. $\times \frac{39}{78} = 50$ ὀκ. καφέν.

’Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 279.

609) 10 %, 10 %, 30 %

610) 9 %, 8 %.

611) Ὁλικὸν κέρδος 3 456 000 δρχ.

Κέρδος τοῖς %. 3 456 000 δρχ. $\times \frac{100}{17\,280\,000} = 20$

612) Ὁλικὴ ἔκπτωσις 3 802 575 δρχ.

Ἔκπτωσ. τοῖς % 3 802 575 δρχ. $\times \frac{100}{36\,215\,000} = 10{,}5$

613) Ἀξ. ζαχ. καὶ σάπ. 861 600 δρχ.
Ὁλικὴ ἔκπτωσις 130 946 δρχ.

Ἔκπτωσ. τοῖς % 130946 δρχ. $\times \frac{100}{861\,600} = 15{,}18$ (περ.)

614) ἄμ. $270 \times \frac{100}{450} = 60$ %, ἄργλ. $150 \times \frac{100}{450} = 33\,{}^1/_3$ %

ἄσβ. $10 \times \frac{100}{450} = 2\,^2/_9\,\%$, γόν. ἔδ. $20 \times \frac{100}{450} = 4\,^4/_9\,\%$

$60 + 33\frac{1}{3} + 2\frac{2}{9} + 4\frac{4}{9} = 100.$

615) Ἀξ. ὕφ. 4560 δρχ. × 325 = 1 482 000 δρχ.
Κέρδη πρὸς 20 % = 296 400 δρχ.
Ὁλικὴ εἴσπραξις 1 778 400 δρχ.
Ἐπώλ. 65 μ. καὶ εἰσέπραξεν 325 000 δρχ.
Ἀπὸ 260 μ. θὰ εἰσπράξῃ 1 453 400 δρχ.
Τὸ 1 μ. θὰ πωλήσῃ πρὸς 1 453 000 δρ.: 260 = 5 590 δρχ.

616) Ἀξ. ὕφ. 3250 δρχ. × 120 = 390 000 δρχ.
Ἐπώλησε 1) 120 ὀκ. $\times \frac{1}{3} = 40$ ὀκ. μὲ κέρδος 3500 δρχ. —3250 δρχ. = 250 δρχ. τὴν 1 ὀκ. 2) 30 ὀκ. μὲ κέρδος 500 δρχ. τὴν 1 ὀκ. καὶ 3) 50 ὀκ. μὲ κέρδος 200 δρχ. τὴν ὀκᾶν.
Ὅλον κέρδος $250 \times 40 + 500 \times 30 + 200 \times 50 = 35000$ δρχ.
Κέρδος τοῖς % 35000 δρχ. $\times \frac{100}{390000} = 8{,}97$ (περ.).

617) Ἀξία 1260—63=1197 ποτ. = 1 795 500 δρχ.
Κέρδος 20 % 359 100 δρχ.
Πώλ. 1197 ποτ. = 2 154 600 δρχ.
Πώλ. 1 ποτ. = 1 800 δρχ.

618) Ἔξ. κινήσ. 12000 δρ. × 18 = 216 000 δρχ.
Προμήθ. 1 620 000 δρ. — 216 000 δρ. = 1 404 000 δρχ.
Ἀξία πωληθέντων $100 \times \frac{1\,404\,000}{2{,}5} = 56\,160\,000$ δρχ.

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 284.

619) $\chi = 67500$ δρχ. $\times \frac{1500}{300} \times \frac{25}{15} = 562\,500$ δρχ.

Βάρος καὶ μεταφορικὰ ποσὰ ἀνάλογα.
Ἀπόστασις » » » »

620) $\chi = 450$ κ.μ. $\times \frac{560}{360} \times \frac{10}{12} = 583\frac{1}{3}$ κ.μ.

Πλάτος καὶ κ. μ., μῆκος καὶ κ. μ. ποσὰ ἀνάλογα.

621) $\chi = 7\,560$ ὀκ. $\times \frac{9}{7} \times \frac{8}{12} = 6\,480$ ὀκ. ὕδατος.

Ἡμ. καὶ ὀκ., ὧραι καὶ ὀκ. ποσὰ ἀνάλογα.

622) $\chi = 6$ ὧρ. $\times \frac{5,6}{4} \times \frac{2,5}{3} \times \frac{2}{3,5} = 4$ ὧραι.

Μῆκος καὶ ὧρ., πλ. καὶ ὧρ., βάθος καὶ ὧρ., ποσὰ ἀνάλογα.

623) $\chi = 1\,200\,000$ δρχ. $\times \frac{10}{15} \times \frac{1,20}{0,8} \times \frac{3}{2} = 1\,800\,000$ δρχ.

Καθὲν τῶν ποσῶν πρὸς τὸ ζητούμενον εἶναι ἀνάλογον.

624) $\chi = 10$ ἐνδ. $\times \frac{51 \text{ πήχ.}}{42 \text{ πήχ. } 4 \text{ ρ.}} \times \frac{1,5}{1,2} =$

$= 10$ ἐνδ. $\times \frac{408}{340} \times \frac{15}{12} = 15$ ἐνδυμασίας.

Ἐνδ. καὶ μῆκος, ἐνδ. καὶ πλ. ποσὰ ἀνάλογα.

625) $\chi = 1248$ γρ. $\times \frac{1,5}{0,20} \times \frac{0,80}{0,04} \times \frac{0,01}{0,02} = 93\,600$ γραμ.

Καθὲν τῶν ποσῶν εἶναι πρὸς τὸ ζητούμενον ἀνάλογον.

626) $\chi = 2$ ἐρ. $\times \frac{5}{8} \times \frac{12}{7,5} \times \frac{3}{2} = 3$ ἐργάται.

Ἐργ. καὶ ὧρ., ἐργ. καὶ ἡμ. ποσὰ ἀντίστροφα.
Ἐργ. καὶ στρέμ. ποσὰ ἀνάλογα.

627) $\chi = 3$ ἡμ. $\times \frac{8}{6} \times \frac{180}{120} = 6$ ἡμέραι.

Ἡμ. καὶ ὧρ. ποσὰ ἀντίστροφα, ἡμ. καὶ χιλμ. ποσὰ ἀνάλογα.

628) $\chi = 25^{\pi} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \times \frac{30}{5} = 50^{\pi}$.

Ἀπόστασις καὶ χρόνος ποσὰ ἀνάλογα.
Ταχύτης καὶ χρόνος ποσὰ ἀντίστροφα.

629) Ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ διανύσῃ ἡ ἁμαξοστοιχία ἦτο 42 χλμ. $\times 9 = 378$ χλμ. Τὴν δὲ ἀπόστασιν 126 χλμ. τὴν διήνυσεν εἰς $126 : 42 = 3$ ὥρας. Τὴν ὑπόλοιπον λοιπὸν ἀπόστασιν 378 χλμ. $-$ 126 χλμ. $= 252$ χλμ. πρέπει νὰ τὴν διανύσῃ εἰς 9 ὥρ. $-$ 3 ὥρ. $- \frac{3}{4}$ ὥρ. $= 5\frac{1}{4}$ ὥρ. Ὥστε ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι $\chi = 42$ χλμ. $\times \frac{252}{126} \times \frac{3}{5,25} = 48$ χλμ. τὴν ὥραν.

630) χ δρχ.=1 στατὴρ
1 στατ.=44 ὀκ.
1 ὀκ.=1,28 χλγρ.
1 χλγρ.=3 σελ.
20 σελ.=1 λίρ.
1 λίρ.=230000 δρχ.

$$\chi = \frac{44 \times 1,28 \times 3 \times 230000}{20} \text{ δρ.}$$

$\chi = 1\,943\,040$ δρχ.

631) χ δρχ.=1 ὀκ.
1 ὀκ.=1,28 χλγρ.
1000 χλγρ.=1 τόννος
1 τόν.=35 χάρ. λίρ.
100 χαρ. λ.=112 χ. λ.
1 χαρ. λ.=20000 δρχ.

$$\chi = \frac{1,28 \times 35 \times 112 \times 20000}{1000 \times 100} \text{ δρ.}$$

$\chi = 1003,52$ δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Παρατηρήσεις.—Ἕνα ἐπιτόκιον π. χ. 5 °/₀ παριστάνει τὸν τόκον 100 μονάδων τοῦ κεφαλαίου εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, ἡ ὁποία συνήθως εἶναι τὸ ἔτος.

Ἔτσι, ὅταν τὸ κεφάλαιον εἶναι δραχμαί, τὸ ἐπιτόκιον 5 °/₀ φανερώνει ὅτι ὁ τόκος τῶν 100 δρχμῶν εἰς 1 ἔτος εἶναι 5 δρχ., ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον εἶναι λίραι ἢ δολλάρια, τὸ ἐπιτόκιον αὐτὸ φανερώνει ὅτι ὁ τόκος τῶν 100 λιρῶν ἢ τῶν 100 δολλαρίων εἰς 1 ἔτος, εἶναι 5 λίραι ἢ 5 δολλάρια κ.ο.κ.

Ἀκόμη τὸ ἐπιτόκιον 5 °/₀ ἢ 4 °/₀ κτλ. φανερώνει ὅτι ὁ τόκος τῆς 1 δρχ. εἰς ἓν ἔτος εἶναι 0,05 δρχ. ἢ 0,04 δρχ. κτλ. Ἔτσι ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἐτήσιον τόκον κεφαλαίου π. χ. 80000 δρχ. πρὸς 6 °/₀ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 80000 δρχ. ἐπὶ 0,06, ἤτοι θὰ εἶναι $T = 0,06 \times 80000 = 4800$ δρχ. ἢ καὶ $T = 800 \times 6 = 4800$ δρχ., διότι $T = \frac{80000 \times 6}{100} = 800 \times 6$.

Μέθοδος τῶν τοκαρίθμων καὶ τῶν σταθερῶν διαιρετῶν.—Τὴν μέθοδον αὐτὴν (§ 301) τὴν μεταχειριζόμεθα ἰδιαιτέρως, ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τοῦ τόκου πολλῶν κεφαλαίων, μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον εἰς διαφόρους χρόνους.

Κατωτέρω δίδομεν πίνακα ὅστις περιέχει τὰ ἐπιτόκια τὰ παρουσιαζόμενα συνηθέστερον, τοὺς ἀντιστοίχους σταθεροὺς διαιρέτας αὐτῶν καὶ τοὺς σχετικοὺς τύπους. Ἀπαραίτητον δὲ εἶναι ὁ σταθερὸς διαιρέτης ὁ ἀντίστοιχος εἰς καθένα τῶν ἐπιτοκίων αὐτῶν νὰ εἶναι γνωστὸς ἀπὸ μνήμης.

Ἐπιτόκιον	Σταθερὸς διαιρέτης	Τύπος εὑρέσεως τοῦ τόκου
3 %	12000	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{12000}$
4 %	9000	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{9000}$
4 ½ %	8000	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{8000}$
5 %	7200	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{7200}$
6 %	6000	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{6000}$
8 %	4500	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{4500}$
9 %	4000	$T = \frac{\text{κεφ.} \times \text{ἡμέρας}}{4000}$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 291.

633) **1.** 354 375 δρ. **2.** 30 000 δρ. **3.** 480 240 δρ.

634) Τὰ $\frac{9}{15}$ τοῦ Κ. εἶναι 1 460 700 δρχ. καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον $14\,607 \times 5 = 73\,035$ δρχ.

Τὸ ὑπόλοιπον, ἤτοι αἱ 973 800 δρχ., δίδουν ἐτήσιον τόκον $9\,738 \times 4{,}5 = 43\,821$ δρχ.

Σύνολον τόκου ἐτησίου $73\,035 + 43\,821 = 116\,856$ δρχ.

635) Τόκος εἰς 1 ἔτος $= 350\,000 \times 6 = 2\,100\,000$ δρχ. Αὔξ. προσόδων $= 2\,100\,000$ δρ. $- 1\,200\,000$ δρχ. $= 900\,000$ δρχ.

636) Χρόνος 38 ἡμ. $T = \frac{650\,000 \times 38}{4000} = 6\,175$ δρχ.

Ἐπλήρωσαν 650 000 δρχ. + 6 175 δρχ. = 656 175 δρχ.

637) Τ. τῶν 190 000 δρχ. πρὸς 4,5 % ἐπὶ 5 ἔτ. = 42 750 δρ.
Τ. τῶν 190 000 δρχ. πρὸς 4,75 % ἐπὶ 5 ἔτ. = 45 125 δρ.
Σύνολον τόκων 87 875 δρ.

Σημείωσις. Ὁ ἄνω τόκος εἶναι ἴσος μὲ τὸν τόκον κεφαλαίου 190 000 δρχ. ἐπὶ 5 ἔτη πρὸς $4{,}50 + 4{,}75 = 9{,}25$ %, ἤτοι εἶναι

$$1\,900 \times 9{,}25 \times 5 = 87\,875 \text{ δρχ.}$$

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 293.

639) $K = \dfrac{30\,240 \times 1\,200}{8 \times 42} = 108\,000$ δρχ.

640) $K = \dfrac{489\,000 \times 36\,000}{9 \times 1720} = 1\,137\,209$ δρχ. (περίπου)

641) 'Εδανείσθη $\dfrac{3000 \times 1200}{12 \times 15} = 20\,000$ δρχ.

642) 'Εκόστισε $\dfrac{9375 \times 1200}{5 \times 3} = 750\,000$ δρχ.

643) α΄ $K = \dfrac{950 \times 36000}{1 \times 4} = 8\,550\,000$ δρχ.

β΄ $K = \dfrac{9900 \times 1200}{3 \times 4} = 990\,000$ δρχ.

644) Κατέθ. $\dfrac{4\,050\,000 \times 100}{3 \times 5} = 27\,000\,000$ δρ. $\left(= \dfrac{3}{4} \text{ τῶν δραχ. πωλήσεως}\right)$

'Επώλησε τὴν οἰκίαν $27\,000\,000 \times \dfrac{4}{3} = 36\,000\,000$ δρχ.

645) Κατέθ. $\dfrac{382\,500 \times 100}{1 \times 4{,}5} = 8\,500\,000$ δρ. $\left(= \dfrac{1}{5} \text{ τῶν χρη-μάτων του}\right)$

Εἶχεν $8\,500\,000 \times 5 = 42\,500\,000$ δρχ.

646) Τ. α΄ Κ. 100 000 δρχ. Τ. β΄ Κ = 166 500 δρχ.

β΄ Κ. $\dfrac{166\,500 \times 100}{1 \times 4{,}5} = 3\,700\,000$ δρχ.

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 295.

648) **1.** 3 ἔτη **2.** 6 ἔτη **3.** 3 ἔτη 2 μῆνες.

649) $X = \dfrac{40\,000 \times 100}{360\,000 \times 4} = 2$ ἔτ. 9 μ. 10 ἡμ.

650) 'Εδῶ ὁ τόκος Τ εἶναι ἴσος μὲ τὸ κεφάλαιον Κ. Ὥστε

ἔχομεν $X = \dfrac{T.\,100}{T.\,E} = \dfrac{100}{E} = \dfrac{100}{8} = 12\dfrac{1}{2}$ ἔτη

651) 'Εδῶ $T = \dfrac{3}{4} \cdot K$. Ὥστε εἶναι

$$X=\frac{\frac{3}{4}.\ K.\ 100}{K.\ E}=\frac{\frac{3}{4}.\ 100}{12}=6\frac{1}{4}\ \text{ἔτη}$$

652) $X=\dfrac{34\,000\times1\,200}{850\,000\times6}=8$ μῆνες.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 296.

653) 1. $E=\dfrac{42\,570\times36\,000}{396\,000\times860}=4{,}5\ \%$

2. $E=\dfrac{42\,960\times100}{537\,000\times2}=4\ \%$

654) $E=\dfrac{7\,680\times1\,200}{256\,000\times4}=9\ \%$

655) $E=\dfrac{24\,840\times1\,200}{184\,000\times54}=3\ \%$

656) Δηλαδὴ ἐδῶ, ἂν τὸ κεφάλαιον εἶναι 16 δραχμαί, ὁ τόκος του ἐπὶ 15 μῆνας εἶναι 1 δραχμή. Ἔτσι εἶναι $E=\dfrac{1\times1200}{16\times15}=5\ \%$.

657) Ἐδῶ εἶναι K=T καὶ $E=\dfrac{T.\ 100}{T.\ 20}=\dfrac{100}{20}=5\ \%$.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Λύσεις.

658) K=2400 δρχ.×3500=8 400 000 δρχ.

T=84 000×8=672 000 δρχ.

659) $T=\dfrac{360\,000\times3\times70}{1200}=63\,000$ δρχ.

$K=\dfrac{63\,000\times100}{4\times3}=525\,000$ δρχ.

660) T=25 000 δρχ. Χρόνος = 10 μῆνες

661) α′. T=12 500 δρχ. β′. T=6 750 δρχ.

$\frac{4}{5}$ τῶν τόκων α′ καὶ β′=15 400 δρχ.

$$E=\frac{15\,400\times100}{400\,000\times1}=3{,}85\ \%$$

662) $K=\frac{157\,500\times100}{6\times1}=2\,625\,000$ δρχ.

$\frac{3}{4}$ τοῦ $K=2\,625\,000\times\frac{3}{4}=1\,968\,750$ δρχ.

Ἡγ. τὸ μέτρον, 1 968 750 δρχ. : 131,25=15 000 δρχ.

663) Ἀξία κήπου 135 000 δρχ. ×1,760=237 600 δρχ.

$$T=\frac{118\,800\times6\times4{,}5}{1200}=2\,673 \text{ δρχ.}$$

Ἐπλ. ἐν ὅλῳ 237 600+2 673=240 273 δρχ.

664) Εἴσπραξις ἐκ σίτου 1300 δρχ. ×560=728 000 δρχ.

Τόκος 946 400 δρχ. —728 000 δρχ. =218 400 δρχ.

$$X=\frac{218\,400\times1\,200}{728\,000\times9}=40 \text{ μῆν.}=3 \text{ ἔτ. } 4 \text{ μ.}$$

665) Χρημ. ποσὸν $\frac{89\,280\times100}{4\times1}=2\,232\,000$ δρχ.

Πρέπει νὰ πωλήσῃ 2 232 000 : 1860=1200 ὀκ. σίτου.

666) Ἐτήσιος τόκος 250 000×8=2 000 000 δρχ.

Ἐτήσιον ἐνοίκιον 180 000 δρχ. ×12=2 160 000 δρχ.

Ὥστε προτιμότερον εἶναι νὰ τὴν ἐνοικιάσῃ.

667) Ἀξ. οἰκοπέδου 17 500 δρχ. × 350 = 6 125 000 δρχ.

Δαπανηθὲν ποσὸν 38 625 000 δρχ.

Τόκος κατὰ μῆνα
ἢ ἐνοίκ. » » $\frac{38\,625\,000\times5\times1}{1200}=160\,937{,}5$ δρχ.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 299 - 300.

668) Τ. 100 δρχ. πρὸς 4 % ἐπὶ 8 ἔτη = 32 δρχ.

$K=100$ δρχ. $\times\frac{1\,056\,000}{132}=800\,000$ δρχ. (§ 309)

Ἔλαβε Τ=1 056 000 δρχ. — 800 000 δρχ. = 256 000 δρχ.

669) Τ. 100 δρχ. πρὸς 4 % ἐπὶ 20 ἔτη = 80 δρχ.

Θὰ καταθέση 100 δρχ. $\times \frac{4\,500\,000}{180} = 2\,500\,000$ δρχ.

670) Τ. 100 δρχ. πρὸς 6 % ἐπὶ 30 μῆν. = 15 δρχ.

Κ = 100 δρχ. $\times \frac{10\,925\,000}{115} = 9\,500\,000$ δρχ.

Ἐπώλησε τὸ τ.μ. πρὸς 9 500 000 δρχ. : 950 = 10 000 δρχ.

671) Τρέπομεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{5}$ εἰς ὁμώνυμα $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{15}$.

Ὥστε τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\frac{4}{15}$ τοῦ κεφαλαίου του. Τότε, ἐὰν ἐτόκιζε μὲ τοὺς αὐτοὺς ὅρους 1500 δραχ. θὰ ἐλάμβανε:

Ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν 1500 δρχ. $T = \frac{500 \times 2 \times 5}{100} = 50$ δρχ.

» τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 1500 δρχ. $T = \frac{600 \times 2 \times 4{,}5}{100} = 54$ δρχ.

καὶ ἀπὸ τὰ $\frac{4}{15}$ τῶν 1500 δρχ. $T = \frac{400 \times 2 \times 4}{100} = 32$ δρχ.

Ἐπειδὴ δὲ $50 + 54 + 32 = 136$

θὰ εἶναι Κ = 1500 δρχ. $\times \frac{408000}{136} = 4\,500\,000$ δρχ.

Ὥστε πρὸς 5 % κατέθεσε $4\,500\,000 \times \frac{1}{3} = 1\,500\,000$ δρχ.

πρὸς 4,5 % κατέθεσε $4\,500\,000 \times \frac{2}{5} = 1\,800\,000$ δρχ.

καὶ πρὸς 4 % κατέθεσε $4\,500\,000 \times \frac{4}{15} = 1\,200\,000$ δρχ.

672) Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἦτο 400 δραχμαί, ἀπὸ τὰς 300 δρχ., ἀπὸ τὰς 100 δρχ. καὶ ἀπὸ τὰς 400 δρχ. θὰ ἐλάμβανε τόκους $\frac{300 \times 5}{100} = 15$ δρχ., $\frac{100 \times 4{,}5}{100} = 4{,}5$ δρχ. καὶ $\frac{400 \times 5}{100} = 20$ δραχμάς. Ἤτοι ἀπὸ τὸ κεφάλαιον τῶν 400 δραχμῶν θὰ ἐλάμβανε περισσότερον τόκον 20 δρχ. — (15 δρχ. + 4,5 δρχ.) = 0,5 δρχ.

Ὥστε διὰ νὰ λάβῃ περισ. τόκον 0,5 θὰ τοκίσῃ 400 δρχ.

διὰ νὰ λάβῃ περισ. τόκον 52000 θὰ τοκίσῃ χ ;

$\chi = 400$ δρχ. $\times \frac{52000}{0{,}5} = 41\,600\,000$ δρχ.

673) Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἦτο 700 δραχμαί, ἀπὸ μὲν τὰς 500 δρχ. θὰ ἐλάμβανε τόκον $\frac{500\times3}{100}=15$ δρχ. ἀπὸ δὲ τὰς 200 δρχ. θὰ ἐλάμβανε τόκον $\frac{200\times4}{100}=8$ δρχ. Ἐπειδὴ δέ:

15 δρχ.—8 δρχ.=7 δρχ., θὰ ἔχωμεν:

$$K=700 \text{ δρχ.}\times\frac{42\,000}{7}=4\,200\,000 \text{ δρχ.}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Τύποι.

$$\text{Ἐξ. ὑφ.}=\frac{\text{Ὀν. ἀξ.}\times\text{Ἐπιτόκιον}\times\text{Χρόνον}}{100 \text{ ἢ } 1200 \text{ ἢ } 36000}$$

$$\text{Ὀν. ἀξ.}=\frac{\text{Ἐξ. ὑφ.}\times100 \text{ ἢ } 1200 \text{ ἢ } 36000}{\text{Ἐπιτόκιον}\times\text{Χρόνον}}$$

Πραγμ. ἀξία = Ὀνομ. ἀξία — Ὑφαίρεσις.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

674) $\text{Ἐξ. ὑφ.}=\frac{240\,000\times3\times9}{1200}=5400$ δρχ.

Πραγ. ἀξ.= 240 000 δρχ.—5 400 δρχ.=234 600 δρχ.

675) $\text{Ὀν. ἀξ.}=\frac{15\,000\times36\,000}{6\times50}=1\,800\,000$ δρχ.

676) Ἐξ. ὑφ. γραμματίου ὀν. ἀξ. 100 δραχ. προεξοφληθέντος 3 μῆνας πρὸς τῆς λήξεώς του πρὸς 9 %.

$=\frac{100\times3\times9}{1200}=2{,}25$ δρχ. 100—2,25=97,75.

Ζητουμένη ὀν. ἀξ. $=100 \text{ δρχ.}\times\frac{175\,950}{97{,}75}=180\,000$ δρχ.

677) $E=\frac{13\,760\times36\,000}{1\,720\,000\times36}=8\,\%$.

678) $E=\frac{10\,000\times1200}{240\,000\times5}=10\,\%$.

679) $X = \frac{27\,000 \times 100}{180\,000 \times 6} = 2\frac{1}{2}$ ἔτη.

680) Ἔληγε ἔπειτα ἀπὸ $\frac{1\,350 \times 3\,600}{120\,000 \times 5} = 81$ ἡμέρας, ἤτοι τὴν 21 Ὀκτωβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους.

681) Χρόνος προεξοφλήσεως 2 μῆνες. Ἐξ. ὑφ. γραμματίου ὀν. ἀξ. 100 δρχ. $= \frac{100 \times 2 \times 12}{1200} = 2$ δρχ. $100 - 2 = 98$.

Ζητουμένη ὀν. ἀξία $= 100 \times \frac{735\,000}{98} = 750\,000$ δρ.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ

Τύποι.

$$\text{Πραγματικὴ ἀξία} = \frac{100 \times \text{ὀνομ. ἀξία}}{100 + \text{ἐπιτόκιον} \times \text{χρόνον}} \qquad (1)$$

$$\text{Ἐσωτ. ὑφαίρεσις} = \frac{\text{ὀνομ. ἀξία} \times \text{ἐπιτόκιον} \times \text{χρόνον}}{100 + \text{ἐπιτόκιον} \times \text{χρόνον}} \qquad (2)$$

Σημείωσις. Εἰς τοὺς ἀνωτέρω δύο τύπους ἐθέσαμεν 100 διότι ὑποθέτομεν ὅτι ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς ἔτη. Ὅταν ὅμως ὁ χρόνος ἐκφράζεται εἰς μῆνας θὰ θέσωμεν 1200 ἀντὶ 100 καὶ ὅταν ἐκφράζεται εἰς ἡμέρας θὰ θέσωμεν 36000 ἀντὶ 100.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 309.

682) Ἐσ. ὑφ. $= \frac{1\,240\,000 \times 3 \times 9}{1\,200} = 27\,900$ δρχ.

Ὀν. ἀξ. $= 1\,240\,000$ δρχ. $+ 27\,900$ δρχ. $= 1\,267\,900$ δρχ.

683) Ἐσ. ὑφ. $= \frac{480\,000 \times 12 \times 85}{36\,000} = 13\,600$ δρχ.

Ὀν. ἀξ. $= 480\,000$ δρχ. $+ 13\,600$ δρχ. $= 493\,600$ δρχ.

684) Χρόνος $= \frac{14\,400 \times 1\,200}{480\,000 \times 9} = 4$ μῆνες.

685) Χρόνος $= \frac{18\,000 \times 1\,200}{1\,200\,000 \times 6} = 3$ μῆνες.

Ἡ προεξόφλησις ἔγινε τὴν 20 Μαΐου τοῦ ἰδίου ἔτους.

686) $E = \frac{13\,500 \times 1\,200}{360\,000 \times 3} = 15\,\%$.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 311.

687) Ἡ ὀν. ἀξία τοῦ δευτέρου γραμματίου τῶν 900 000 δραχμῶν θὰ παραμείνῃ ἡ αὐτή, ἐπειδὴ ἡ λῆξίς του συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴν λῆξιν. Ἑπομένως θὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων γραμματίων.

Ἐξ. ὑφ. α′) γραμ. $\frac{6\,000\,000 \times 30 \times 6}{36\,000} = 30\,000$ δρχ.

Ἐξ. ὑφ. β′) » $\frac{1\,000\,000 \times 90 \times 6}{36\,000} = 15\,000$ δρχ.

Παρ. ἀξ. νέου γραμ. $= 7\,000\,000 - 45\,000 = 6\,955\,000$ δρχ.

Ἐξ. ὑφ. γραμ. ὀν. ἀξ. 100 δρχ. $= \frac{100 \times 60 \times 6}{36000} = 1$ δρχ.

Ὀν. ἀξ. τῶν α′ καὶ γ′ γραμ. $100 \times \frac{6\,955\,000}{99} =$

$= 7\,025\,252$ δρχ. (περ.)

Ὀν. ἀξ. νέου γραμ. $7\,025\,252 + 900\,000 = 7\,925\,252$ δρχ.

688) Ἐξ. ὑφαίρεσις τῶν 4 γραμ. ὁμοῦ (διὰ τῶν τοκαρίθμων)

$$\frac{200000 \times 10 + 150000 \times 20 + 180000 \times 35 + 240000 \times 60}{6000} =$$

$$= 4\,283\,\frac{1}{3} \text{ δρχ.}$$

λῆξις μετὰ $= \frac{4\,283{,}33 \times 36000}{770\,000 \times 6} = 33{,}376$ ἡμ. $= 34$ ἡμ.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

689) Ἔκπ. $8\,600 \times 4 = 34\,400$ δρχ. Πληρ. 825 600 δρχ.

690) Ἀξ. ὑφ. $2\,460$ δρχ. $\times 165 = 405\,900$.

Ἔκπ. $\frac{405\,900 \times 15 \times 5}{1200} = 25368{,}75$ δρχ. Πλ. 380531,25 δρ.

691) Εὑρίσκομεν τὴν πραγματικὴν ἀξίαν τῶν δύο γραμματίων.

α´) Ἐξ. ὑφ. $\frac{160000\times15\times6}{1200}=12000$. Πρ. ἀξ. 148 000 δρχ.

β´) Ἐξ. ὑφ. $\frac{152\,000\times6\times6}{1200}=4560$. Πρ. ἀξ. 147 440.

Ἐχάσαμεν 148 000 δρχ.—147 440 δρχ.=560 δρχ.

692) Ἐξ. ὑφ. γραμ. ὀν. ἀξ. 100 δρχ.$=\frac{100\times4\times15}{1200}=5$ δρχ.

Ἐχρεώστει $100\times\frac{570000}{95}=600\,000$ δρχ. (§ 317, 2ον).

693) Ἔκπ. $\frac{247200\times6\times3}{1200}=3\,708$ δρ. Πλ. 243 492 δρχ.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Μερισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ N εἰς μέρη χ, ψ, φ, z, ἀνάλογα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν α, β, γ, δ.

α´ μέρος) $\chi=\frac{N.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$. **β´ μέρος)** $\psi=\frac{N.\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

γ´ μέρος) $\varphi=\frac{N.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$. **δ´ μέρος)** $z=\frac{N.\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

694) Ἔλαβον ὁ α´) $\frac{280\,000\times8}{8+12+15}=8\,000\times8=64\,000$ δρχ.

ὁ β´) $8\,000\times12=96\,000$ δρχ. καὶ ὁ γ´) $8\,000\times15=120\,000$ δρχ.

695) Θὰ πληρ. ὁ α´) $\frac{360\,000\times120}{120+110+220}=800\times120=96\,000$ δρχ.

ὁ β´) $800\times110=88\,000$ δρχ. καὶ ὁ γ´) $800\times220=176\,000$ δρχ.

696) Ἐπειδὴ $565+735+1650=2950$ καὶ $32\,450\,000:2950=$ $=11\,000$, τὰ χωρία θὰ πληρώσουν:

τὸ α´) $11\,000\times565=6\,215\,000$ δρχ.

τὸ β´) $11\,000\times735=8\,085\,000$ δρχ.

καὶ τὸ γ´) $11\,000\times1650=18\,150\,000$ δρχ.

697) Θὰ μερίσωμεν τὰς 255 000 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 1 250 000, 1 850 000 καὶ 1 150 000 ἢ ἐὰν τοὺς τρεῖς αὐτοὺς ἀριθμοὺς διαιρέσωμεν διὰ 50 000, εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν πηλίκων 25, 37, 23.

Ἐπειδὴ δὲ 25+37+23=85 καὶ 255 000 : 85=3 000, ἐκ τῶν ἀνεψιῶν θὰ δώσουν εἰς τὸν ὑπηρέτην, ὁ α΄) 3 000×25 = = 75 000 δραχμάς, ὁ β΄) 3 000×37=111 000 δραχμὰς καὶ ὁ γ΄) 3 000×23=69 000 δραχμάς.

698) Θὰ μερίσωμεν τὸν σῖτον εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 840 000, 960 000, 1 050 000 ἢ τῶν 28, 32, 35 (ἁπλοπ. διὰ 30 000). Ἐπειδὴ δὲ 28+32+35=95 καὶ 1425 : 95=15 θὰ λάβουν ὁ α΄) 15×28=420 ὀκ. ὁ β΄) 15×32=480 ὀκ. καὶ ὁ γ΄) 15×35=525 ὀκ.

699) Ὁ γ΄ ἐπλήρωσεν 5 300 000 δρχ. Ἔτσι ἡ εἴσπραξις θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 62, 35, 53. Ἐπειδὴ δὲ 62+35+53=150 καὶ 4 500 000 : 150=30000, ἐκ τῶν γεωργῶν θὰ λάβουν ὁ α΄) 30 000×62=1 860 000 δρχ., ὁ β΄) 30 000×35= =1 050 000 δρχ. καὶ ὁ γ΄) 30 000×53=1 590 000 δρχ.

700) Ἡ ἀμοιβὴ θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 25, 30, 35 ἢ τῶν 5, 6, 7. Ἐπειδὴ δὲ 5+6+7=18 καὶ 1 710 000 : 18=95 000 δραχμ. ἐκ τῶν ἐργατῶν θὰ λάβουν ὁ α΄) 95 000×5=475 000 δρχ., ὁ β΄) 95 000×6=570 000 δρχ. καὶ ὁ γ΄) 95 000×7=665 000 δρχ.

701) Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, $\frac{12}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{15}{60}$ καὶ μερίζομεν τὰ 5 268 στρέμματα εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν 12, 40, 15. Ἐπειδὴ δὲ 12+40+15=67 καὶ 5 628 : 67=84, ἐκ τῶν τριῶν κληρονόμων θὰ λάβουν ὁ α΄) 84×12=1 008 στρ., ὁ β΄) 84×40=3 360 στρ. καὶ ὁ γ΄) 84×15=1 260 στρ.

702) Τοὺς ἀριθμοὺς $\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{1}{3}$, ἤτοι τοὺς $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$ τοὺς τρέπομεν εἰς κλάσματα ὁμώνυμα $\frac{9}{12}$, $\frac{24}{12}$, $\frac{28}{12}$. Ἔλαβον λοιπὸν τὸ

Δημ. $\frac{12\,200\,000\times 9}{61} = 200\,000\times 9 = 1\,800\,000$ δραχμ. τὸ Γυμ.

$200\,000 \times 24 = 4\,800\,000$ δραχμὰς καὶ ὁ φιλ. σύλ. $200\,000 \times 28 =$ $= 5\,600\,000$ δραχμάς.

703) Θὰ μερίσωμεν τὰς 5 400 000 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}$ ἢ τῶν $\frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}$ ἢ τῶν 2, 3, 4. Ἔτσι ἔχομεν α) $\frac{5\,400\,000 \times 2}{2+3+4} = 600\,000 \times 2 = 1\,200\,000$ δρχ.
β) $600\,000 \times 3 = 1\,800\,000$ δρ. καὶ γ) $600\,000 \times 4 = 2\,400\,000$ δρ.

704) Ἐτήσιοι τόκοι $750\,000 \times 3{,}5 = 262\,500$ δρχ. Θὰ λάβουν: τὸ Δ.Σχ. $\frac{262\,500 \times 3}{3+5} = 98\,437{,}5$ καὶ τὸ Γυμ. 164 062,5 δρχ.

705) Τρέπομεν τοὺς μεικτοὺς εἰς κλάσματα ὁμώνυμα $\frac{45}{20}, \frac{148}{20}, \frac{170}{20}$ καὶ λαμβάνομεν τοὺς ἀριθμητάς των 45, 148, 170. Τὸ ὁλικὸν λοιπὸν ποσὸν ἐμερίσθη εἰς $45+148+170=363$ ἴσα μέρη καὶ ἐξ αὐτῶν ἔλαβεν τὸ α΄ πρόσωπον 45 μέρη, τὸ β΄ ἔλαβεν 148 μέρη καὶ τὸ γ΄ ἔλαβεν 170 μέρη, ἤτοι $34\,000 \times 12 =$ $= 408\,000$ δραχμάς. Τὸ 1 λοιπὸν μέρος εἶναι 408 000 δρχ. : 170 $= 2\,400$ δρχ. Ὥστε ἔλαβον τὸ α΄) πρόσωπον 2 400 δρχ. $\times 45 =$ $= 108\,000$ δρχ., τὸ β΄) 2 400 $\times$ δρχ. 148 $= 355\,200$ δρχ. καὶ τὸ διανεμηθὲν ποσὸν ἦτο 2 400 δρχ. $\times 363 = 871\,200$ δρχ.

706) Ὑποθέτομεν ὅτι καθὲν πρόβατον εἰς 1 ἡμέραν τρώγει τὸ αὐτὸ ποσὸν χόρτου, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς 1 μερίδιον. Ὁ α΄ λοιπὸν ποιμὴν θὰ πληρώσῃ ἐνοίκιον διὰ $200 \times 25 = 5000$ μερίδια, καὶ ὁ β΄ ποιμὴν θὰ πληρώσῃ ἐνοίκιον διὰ $150 \times 30 =$ $= 4500$ μερίδια. Ὥστε θὰ μερίσωμεν τὰς 1 425 000 δραχμὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 5 000 καὶ 4 500 ἢ τῶν 10 καὶ 9 (ἁπλ. διὰ 500). Θὰ πληρώσουν λοιπόν:
ὁ α΄ $\frac{1\,425\,000 \times 10}{19} = 75\,000 \times 10 = 750\,000$ δραχμὰς καὶ ὁ β΄) $75\,000 \times 9 = 675\,000$ δρχ.

707) Ἐπειδὴ $5 \times 15 = 75$, θὰ μερίσωμεν τὰς 975 000 δραχμὰς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 75 καὶ 120 ἢ τῶν 5 καὶ 8. Θὰ πληρώσουν λοιπὸν ὁ α΄) $\frac{975\,000 \times 5}{13} = 375\,000$ δραχμὰς καὶ ὁ β΄) $\frac{975\,000 \times 8}{13} = 600\,000$ δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ʼΑσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 323.

717) Ὁ α′ κατέθεσεν 675 000 δρχ. καὶ ὁ β′ 555 000 δρχ. Θὰ μερίσωμεν λοιπὸν τὸ κέρδος ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 675000 δρχ. καὶ 555 000 ἢ τῶν 45 καὶ 37 (ἁπλ. διὰ 15000). ʼΕπειδὴ δὲ $45+37=82$ καὶ $4\,305\,000 : 82 = 52\,500$, ὁ α′ ἔλαβε $52\,500 \times \times 45 = 2\,362\,500$ δρχ. καὶ ὁ β′ $52\,500 \times 37 = 1\,942\,500$ δρχ.

718) Δηλαδὴ ἐὰν ὁ β′ κατέθετεν 3 δρχ., ὁ α′ θὰ κατέθετεν $3 \times \frac{2}{3} = 2$ δρχ. Ὥστε ἐκ τοῦ κέρδους ἔλαβον ὁ α′

$\frac{7\,340\,000 \times 2}{5} = 2\,936\,000$ δρχ. καὶ ὁ β′ 4 404 000 δρχ.

719) Διὰ κατάθ. 4 160 000 δρχ. λαμβ. κέρδ. 520 000 δρχ.
» » χ » » » 640 000 δρχ.

ὁ β. κατέθ. $\chi = \frac{4\,160\,000 \times 640\,000}{520\,000} = 5\,120\,000$ δρ.

720) Θὰ μερίσωμεν τὴν κατάθεσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1 125 000 καὶ 1 875 000 ἢ τῶν 3 καὶ 5 (ἁπλ. διὰ 375000). Ὥστε κατέθεσαν

ὁ α′) $(10\,500\,000 \times 3) : 8 = 3\,937\,500$ δρ. καὶ ὁ β′) 6 562 500 δρ.

721) Θὰ πληρώσουν

ὁ α′) $\frac{2\,400\,000 \times 5{,}6}{5{,}6+7{,}4+7} = \frac{2\,400\,000 \times 5{,}6}{20} = 120\,000 \times 5{,}6 =$ $= 672\,000$ δρχ., ὁ β′) $120\,000 \times 7{,}4 = 888\,000$ δρχ. καὶ ὁ γ′) $120\,000 \times 7 = 840\,000$ δρχ.

722) Ὁ γ′ διέθεσεν 24 000 000 δρχ. Ποσὸν εἰσπραχθὲν 1800 δρχ.$\times 8600 = 15\,480\,000$ δρχ., τὸ ὁποῖον θὰ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν καταθέσεων ἢ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 17, 25, 48 (ἁπλ. διὰ 500 000). Ὥστε ἔλαβον:

ὁ α′) $\frac{15\,480\,000 \times 17}{90} = 172\,000 \times 17 = 2\,924\,000$ δρχ.

ὁ β') $172\,000 \times 25 = 4\,300\,000$ δρχ. καὶ

ὁ γ') $172\,000 \times 48 = 8\,256\,000$ δρχ.

723) Ἔλαβον

ὁ α') $\dfrac{7\,200\,000 \times 11}{11+9+5} = 288\,000 \times 11 = 3\,168\,000$ δρχ.

ὁ β') $288\,000 \times 9 = 2\,592\,000$ δρχ. καὶ

ὁ γ') $288\,000 \times 5 = 1\,440\,000$ δρχ.

724) Ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ α') ἐπὶ 2 ἔτη = 24 μῆνας, τοῦ β') ἐπὶ 24 μῆν. — 8 μῆν. = 16 μῆν. καὶ τοῦ γ') ἐπὶ 11 μῆν. Ἐζημιώθησαν λοιπὸν

ὁ α') $\dfrac{2\,550\,000 \times 24}{24+16+11} = 50000 \times 24 = 1\,200\,000$ δρχ.

ὁ β') $50\,000 \times 16 = 800\,000$ δρχ. καὶ

ὁ γ') $50\,000 \times 11 = 550\,000$ δρχ.

725) Ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ α') ἐπὶ 6 μῆν. + 12 μῆν. = 18 μῆν. καὶ τοῦ β') ἐπὶ 12 μῆνας. Ἐκέρδισεν λοιπὸν

ὁ α') $(1\,560\,000 \times 18) : 30 = 936\,000$ δρχ. καὶ ὁ β') 624 000 δρχ.

726) Ἔμειναν τὰ χρήματα τοῦ α') ἐπὶ $4+5+10=19$ μῆνας, τοῦ β') ἐπὶ $5+10=15$ μῆνας καὶ τοῦ γ') ἐπὶ 10 μῆνας.

Τὸ κέρδος λοιπὸν θὰ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν γινομένων $6\,500\,000 \times 19$, $7\,500\,000 \times 15$, $10\,000\,000 \times 10$ ἢ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 247 225 καὶ 200 (ἁπλ. διὰ 500 000). Ἐπειδὴ δὲ $247+225+200=672$ καὶ $13\,440\,000 : 672 = 20\,000$, ἔλαβον ὁ α') $20\,000 \times 247 = 4\,940\,000$ δρ. ὁ β') $20\,000 \times 225 = 4\,500\,000$ δρ. καὶ ὁ γ') $20\,000 \times 200 = 4\,000\,000$ δρχ.

727) Τὸ σύνολον τῶν κερδῶν εἶναι $3\,000\,000 + 9\,200\,000 = 12\,200\,000$ δρχ. Ἐπειδὴ δὲ

εἰς 100 δρχ. κατάθεσιν τὸ κέρδος εἶναι 40 δρχ.
χ » » » » 12 200 000 δρχ.

Σύνολον καταθέσεων $\chi = \dfrac{100 \times 12\,200\,000}{40} = 30\,500\,000$ δρχ.

Θὰ μερισθοῦν δὲ αὗται ἀναλόγως τῶν κερδῶν 3 000 000 καὶ 9 200 000 ἢ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 46 (ἁπλ. διὰ 200 000). Ὥστε κατέθεσαν:

ὁ α΄) $(30\,500\,000 \times 15) : 61 = 7\,500\,000$ δρχ.
ὁ β΄) $(30\,500\,000 \times 46) : 61 = 23\,000\,000$ δρχ.

728) Θὰ μερισθοῦν αἱ 2 400 000 δρχ. ἀναλόγως τῶν χρεῶν ἢ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 12, 13 καὶ 15. Θὰ λάβουν δὲ ἐκ τῶν πιστωτῶν ὁ α΄) $(2\,400\,000 \times 12) : 40 = 720\,000$ δρχ. ὁ β΄) $2\,400\,000 \times 13) : 40 = 780\,000$ καὶ ὁ γ΄) $(2\,400\,000 \times 15) : 40 = 900\,000$ δρχ.

Τώρα διὰ χρέος 4 000 000 δρχ. ζημία 1 600 000 δρχ.
» » 100 » » χ;

Οἱ πιστωταὶ ἐζημιώθησαν $\frac{1\,600\,000 \times 100}{4\,000\,000} = 40\,\%$.

729) Ἐὰν τὰ χρήματα τοῦ καθενὸς ἔμειναν ἐπὶ 1 μῆνα θὰ ἐκέρδιζεν ὁ α΄) $600\,000 : 6 = 100\,000$ δρ. καὶ ὁ β΄) $1\,687\,500 : 9 = 187\,500$ δρχ.

Εἰς κατάθ. 4 000 000 δρχ. κέρδος 100 000 δρχ.
» » χ » » 187 500 »

ὁ β΄ κατέθεσεν $\chi = \frac{4\,000\,000 \times 187\,500}{100\,000} = 7\,500\,000$ δρχ.

730) Τὰ ἔξοδα τῆς ἐκκαθαρίσεως εἶναι τὰ $\frac{5}{100}$ τῶν $\frac{40}{100}$ ἤτοι $\frac{5}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{2}{100}$ ἢ $2\,\%$. Οἱ δανεισταί του λοιπὸν θὰ λάβουν τὰ $\frac{40}{100} - \frac{2}{100} = \frac{38}{100}$ ἢ $38\,\%$ τῶν δανείων των.

ἤτοι ὁ α΄) θὰ λάβῃ $7\,500\,000 \times 0{,}38 = 2\,850\,000$ δρχ.
ὁ β΄) » » $5\,000\,000 \times 0{,}38 = 1\,900\,000$ δρχ.
καὶ ὁ γ΄) » » $12\,500\,000 \times 0{,}38 = 4\,750\,000$ δρχ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 325.

***731)* Ἀπ.** $\frac{85{,}4 \text{ χλμ.} + 96{,}5 \text{ χλμ.} + 84{,}7 \text{ χλμ.} + 88 \text{ χλμ.}}{4} = \frac{354{,}6}{4} \text{ χλμ.} = 88{,}650$ χλμ.

***732)* Ἀπ.** $(6^\circ{,}4 + 12^\circ{,}8) : 2 = 19^\circ{,}2 : 2 = 9^\circ{,}6$.

733) **'Απ.** (15+18+17+19+15) : 5=16,8.

734) **'Απ.** (157 000 000 χλμ. + 152 000 000 χλμ.) : 2 = 309 000 000 χλμ.: 2 = 154 500 000 χλμ.

735) **'Απ.** (75+63+105+84+60+45) : 6=72

736) **'Απ.** (2300 ὀκ.+1500 ὀκ.) : 20=190 ὀκ.

737) **'Απ.** (344 μ.+338,5 μ.+342,10 μ.+338,4 μ.) : 4= =1363 μ.: 4 = 340,75 μ.

Προβλήματα ἀναμείξεως α΄ εἴδους.

Τύπος εὑρέσεως τῆς μέσης τιμῆς Μ μιᾶς ὁμοειδοῦς μονάδος τοῦ μείγματος.

$$M = \frac{\mu \cdot \alpha + \mu' \cdot \alpha' + \mu'' \cdot \alpha'' + \ldots}{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots} \qquad (1)$$

ὅπου 1ον) **α, α΄, α΄΄... εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὁμοειδῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι ἀναμιγνύονται ἀπὸ κάθε εἶδος** καὶ

2ον) **μ, μ΄, μ΄΄, ... αἱ τιμαὶ μιᾶς μονάδος ἀπὸ κάθε εἶδος ἀντιστοίχως.**

'Ασκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 327.

738) 'Εδῶ εἶναι α=150 ὀκ., μ=2880 δρχ., α΄=180 ὀκ. καὶ μ΄=2550 δρχ. Ὥστε κατὰ τὸν ἄνω τύπον (1) ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μείγματος εἶναι

$$M = \frac{2\,880 \text{ δρ.} \times 150 + 2\,550 \text{ δρ.} \times 180}{150+180} = \frac{891\,000}{330} = 2\,700 \text{ δρχ.}$$

τιμὴ 150 ὀκ.	2 880 δρχ.×150 =	432 000 δρχ.
τιμὴ 180 ὀκ.	2 550 δρχ.× 80 =	459 000 δρχ.
τιμὴ 330 ὀκ.		891 000 δρχ.
τιμὴ 1 ὀκ.	891 000 δρχ. : 330=2 700 δρχ.	

739) 'Εδῶ εἶναι α=$\frac{3}{4}$ὀκ., μ=2 250 δρχ., α΄=$\frac{1}{4}$ ὀκ., μ΄= =1 950 καὶ

$$M = \frac{2250 \times \frac{3}{4} + 1950 \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1687{,}5 + 487{,}5}{1} = 2175 \text{ δρχ.}$$

740)

$$M = \frac{16\,000 \times 80 + 40\,000 \times 20}{80 + 20} = \frac{2\,080\,000}{100} = 20\,800 \text{ δρχ.}$$

25 % κέρδος=208×25=5 200 δρχ. Πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 20 800 δρχ.+5 200 δρχ.=26 000 δρχ.

741) $$M = \frac{16\,000 \times 50 + 12\,000 \times 25}{50 + 25} = \frac{1\,100\,000}{75} = 14666 \text{ δρχ.}$$

Κέρδος κατ' ὀκᾶν 1614 δρχ. Κέρδος τοῖς % =11 (περίπου).

742) $$M = \frac{24000 \times 5 + 20000 \times 3 + 30000 \times 2}{5 + 3 + 2} = 24000 \text{ δρ.}$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἰς μίαν ὀκᾶν ἢ εἰς 400 δράμια καβουρδισμένου καφὲ ἔχομεν ἀπώλειαν $400 \times \frac{1}{10} = 40$ δράμια, τὰ 360 δράμια καβ. καφὲ ἀξίζουν 24000 δρχ. καὶ ἑπομένως 400 δράμια ἤτοι ἡ 1 ὀκᾶ καβουρδισμένου καφὲ πρέπει νὰ πωλῆται 1ον) χωρὶς κέρδος $\frac{24\,000 \times 400}{360} = 26667$ δρχ. (περ.) καὶ 2ον) μὲ κέρδος 20 %=26 667+26 667×0,20=26 667+5333=32 000 δρχ.

Προβλήματα ἀναμείξεως β' εἴδους.

Τύποι. Ὅταν 1ον) **μ = ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἀπὸ ἓν εἶδος καὶ μ' = ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος ἀπὸ ἄλλο εἶδος.**

2ον) **Μ = ἡ τιμὴ μιᾶς μονάδος τοῦ μείγματος καὶ** $\mu > M > \mu'$.

3ον) **λ = τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τοῦ μείγματος θὰ λάβωμεν**

ἀπὸ τὸ εἶδος μὲ τιμὴν μονάδος μ $\Big\}$ $\frac{\lambda.(M-\mu')}{\mu-\mu'}$ **μονάδας** καὶ

ἀπὸ τὸ εἶδος μὲ τιμὴν μονάδος μ' $\Big\}$ $\frac{\lambda.(\mu-M)}{\mu-\mu'}$ **μονάδας**

Σημείωσις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται, ὅταν ἡ τιμὴ Μ μιᾶς μονάδος τοῦ μείγματος εἶναι μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν μ καὶ μ'.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 329.

743) Ἐδῶ εἶναι $\mu = 3680$, $\mu' = 2240$, $M = 3200$ καὶ $\lambda = 400$.

Ἐκ τοῦ α΄ εἴδους $\dfrac{400 \times (3680 - 3200)}{3680 - 2240} = \dfrac{400 \times 480}{1440} = 133\dfrac{1}{3}$ ὀκ.

Ἐκ τοῦ β΄ εἴδους $\dfrac{400 \times (3200 - 2240)}{3680 - 2240} = \dfrac{400 \times 960}{1440} = 266\dfrac{2}{3}$ ὀκ.

ἢ κατὰ τὴν κατάταξιν τοῦ βιβλίου

$$\text{400 ὀκ. μειγ.} \left\{ \begin{array}{ccccc} 2240 & \diagdown & & \diagup & 480 \\ & & 3200 & & \\ 3680 & \diagup & & \diagdown & \underline{960} \\ & & & & 1440 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ἐκ τοῦ α΄)}\ \dfrac{400 \times 480}{1440} = 133\dfrac{1}{3} \text{ ὀκ.} \\ \text{ἐκ τοῦ β΄)}\ \dfrac{400 \times 960}{1440} = \underline{266\dfrac{2}{2} \text{ ὀκ.}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 400 \text{ ὀκ.} \end{array}$$

744) Τιμὴ 1 ὀκ. μείγ. 480 000 δρχ. : 240 = 2 000 δρχ.

Θὰ λάβῃ σῖτ. $\dfrac{240 \times 2}{7} = 68\dfrac{4}{7}$ ὀκ. καὶ κριθ. $\dfrac{240 \times 5}{7} = 171\dfrac{3}{7}$ ὀκ.

745) Τρεῖς ὀκάδες λῖπος μὲ 1 ὀκᾶν βούτυρον.

746) Ἀξ. 25 ὀκάδ. ἐλαίου 14 400 δρχ. × 25 = 360 000 δρχ.
Μεῖγμα 25 ὀκ. + 35 ὀκ. = 60 ὀκ.
Ἀξ. μείγματος 12 300 δρχ. × 60 = 738 000 δρχ.
Ἀξ. 35 ὀκ. β΄ ἐλ. 738 000 δρχ. — 360 000 δρχ. = 378 000 δρ.
Ἀξ. 1 ὀκ. β΄ ἐλ. 378 000 δρχ. : 35 = 10 800 δρχ.

747) Ἀξ. 130 ὀκ. α΄ οἴνου 3 000 δρχ. × 130 = 390 000 δρ.
Ἀξ. 50 ὀκ. ὕδατος 0 δρχ.
Μεῖγμα 130 ὀκ. + 50 ὀκ. + 120 ὀκ. = 300 ὀκ.
Ἀξ. μείγματος 3 060 δρχ. × 300 = 918 000 δρχ.
Ἀξ. 120 ὀκ. β΄ οἴν. 918 000 δρ. — 390 000 δρ. = 528 000 δρ.
Ἀξ. 1 ὀκ. β΄ οἴν. 528 000 δρχ. : 120 = 4 400 δρχ.

748) Τὸ βούτυρον τὸ ἐπώλησε μὲ ζημίαν 36 000 δρχ. — 30000 δρχ. = 6000 δρχ. τὴν ὀκᾶν. Ὥστε ἐκ τῶν 100 ὀκ. βουτύρου ἐζημιώθη 6000 δρχ. × 100 = 600 000 δρχ. Ἑπομένως ἐκ τοῦ λίπους ἀνεπλήρωσε τὴν ζημίαν τῶν 600 000 δρχ. καὶ ἐκέρδισεν ἀκόμη 300 000 δρχ., ἤτοι ἐκ τοῦ λίπους ἐκέρδισεν 600 000 δρ. + 300 000 δρχ. = 900 000 δρχ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς 1 ὀκᾶν λίπους κερδίζει 30 000 δρχ. — 24 000 δρχ. = 6 000 δρχ. διὰ νὰ κερδίσῃ 900 000 δρχ. ἀνέμειξε 900 000 : 6 000 = 150 ὀκάδας λίπους.

749) Ἐπειδὴ

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 12\,000 & & & & 15 & & 5 \\ & \diagdown & & \diagup & & & \\ & & 18\,000 & & & \text{ἢ} & \\ & \diagup & & \diagdown & & & \\ 33\,000 & & & & 6 & & 2 \end{array}\right\}$$

θὰ ἀναμείξῃ 5 ὀκ. λίπους μὲ 2 ὀκ. βούτυρον

750) Ὅταν πωλῇ τὴν ὀκ. τοῦ μείγ. 125 δρ. τοῦ κοστίζει 100 δρ.
» » » » » » 5 000 δρ. » » χ δρ.

1 ὀκ. μείγματος κοστίζει $\dfrac{100 \times 5\,000}{125} = 4\,000$ δρχ.

Διὰ νὰ σχηματίσῃ λοιπὸν 1 200 ὀκ. μείγματος πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ τοῦ α΄ εἴδους $\dfrac{1 \times 1\,200}{6} = 200$ ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ β΄ εἴδους $\dfrac{5 \times 1200}{6} = 1\,000$ ὀκ.

$$\begin{array}{ccccccc} 4\,800 & & & & 160 & & 1 \\ & \diagdown & & \diagup & & & \\ & & 4\,000 & & & \text{ἢ} & \\ & \diagup & & \diagdown & & & \\ 3\,840 & & & & 800 & & 5 \end{array}$$

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελὶς 332.

751) 30 γρ. ἀργ. α΄ εἴδους περ. $0{,}850 \times 30 = 25{,}50$ γρ. καθ. ἀργ.
12 » » β΄ » » $0{,}880 \times 12 = 10{,}56$ » » »
42 » κράμ. » 36,06 » » »
1 » » » $36{,}06 : 42 = 0{,}859$ περ.

752) 1 χρ. λ. Ἀγγ. περ. $0{,}916 \times 7{,}988 = 7{,}317$ γρ. καθ. χρ.
1 ἀργ. δράχ. » $0{,}835 \times 5 = 4{,}175$ » » ἀργ.
12,988 γρ. κρόμ. περ. 11,492 » πολυτ. μετάλ.
1 » » » $11{,}492 : 12{,}988 = 0{,}885$ » » (περ.)

753) Θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ α΄ $\dfrac{50 \times 2}{3} = 33\dfrac{1}{3}$ γρ. καὶ
ἐκ τοῦ β΄ $\dfrac{50 \times 1}{3} = 16\dfrac{2}{3}$ γρ.

754) Ὅταν λαμβάνῃ 5 γρ. ἐκ τοῦ α΄ λαμβ. 3 γρ. ἐκ τοῦ β΄
» » 50 » » » » » χ » » » »

Ὥστε ἐκ τοῦ β΄ λαμβάνει $\dfrac{3 \times 50}{5} = 30$ γρ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στοιχεῖα θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς.

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 337 - 339.

1) Ἂν $\chi=\psi$ εἶναι καὶ $\alpha\chi=\alpha\psi$ (§ 351, VII)
ἂν $\alpha\chi=\alpha\psi$ εἶναι καὶ $\alpha\chi+\beta=\alpha\psi+\beta$ (§ 347, II).

2) Ἂν $\chi-3=7$, εἶναι καὶ $\chi+3-3=7+3$, ἤτοι $\chi=10$.

3) Ἂν $\chi+2=8$ εἶναι (§ 349) καὶ $\chi+2-2=8-2$, ἤτοι $\chi=6$.

4) Ἂν $\chi=\psi$, εἶναι $\mu\chi=\mu\psi$ καὶ $\mu\chi-\alpha=\mu\psi-\beta$ (§ 349).

5) Βλέπε ἄσκησιν 1 σελ. 337.

6) Ὁμοία μὲ τὴν ἄσκησιν 5, διότι $\gamma=\delta$.

7) Ἂν $\chi>\psi$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha\chi>\alpha\psi$ (§ 355, III)
ἂν $\alpha>\beta$ » » » $\alpha\psi>\beta\psi$ (§ 355, III).

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $\alpha\chi$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\alpha\psi$, θὰ εἶναι κατὰ περισσότερον λόγον μεγαλύτερον τοῦ $\beta\psi$ (ποὺ εἶναι μικρότερον τοῦ $\alpha\psi$). Ὥστε εἶναι $\alpha\chi>\beta\psi$ καὶ ἑπομένως (§ 354, II) εἶναι $\alpha\chi+\gamma>\beta\psi+\delta$.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 142.

8) Ἀρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων μιᾶς στήλης, ἠμπορεῖ νὰ δίδῃ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ ψηφία τῆς ἀμέσως πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλης. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων κάθε στήλης εἶναι μονοψήφιον, δυνάμεθα ν' ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐξ οἱασδήποτε στήλης.

9) Θὰ αὐξηθῇ κατὰ $12+8=20$ μονάδας.

10) Εἶναι $(14+19+32)+7=14+19+32+7$ (§ 360)
$14+19+32+7=14+19+30+2+7$ (§ 360)
$14+19+30+2+7=(14+19+30+7)+2=70+2$
(§ 359).

11) $45+12+21+19+23=(21+19)+(45+12+23)=$
$=40+80$ (§ 359).

12) $32+14+3+11=(32+3)+(14+11)=35+25$

13) $(13+28)+(35+22+9)+(7+3)=$
$=13+28+35+22+9+7+3$ (§ 362).
$=(13+7+35)+(28+22+9+3)=55+62$

14) Αὐξάνεται κατὰ $11+12+25+47+65=160$.

Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 347.

15) Ἡ παράστασις $(\alpha-\beta)-\gamma$, λέγει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν α τὸν ἀριθμὸν β καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὴν προκύπτουσαν διαφορὰν $\alpha-\beta$, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν γ. Ἔτσι ὅμως ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν α διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς β καὶ γ. Ἀλλ' εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν α πρῶτον β μονάδας καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὴν διαφορὰν $\alpha-\beta$ ἀφαιρέσωμεν γ μονάδας, εἴτε ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν α διὰ μιᾶς $\beta+\gamma$ μονάδας, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ εὕρωμεν. Ὥστε εἶναι $(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι: **Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀριθμὸν διαδοχικῶς δύο ἀριθμούς, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν διὰ μιᾶς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.**

Σημείωσις α'. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἄνω ἰδιότητος γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν εἰς τὸν μειωτέον $(\alpha-\beta)$ καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον γ προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν β, ἡ διαφορὰ $(\alpha-\beta)-\gamma$ δὲν μεταβάλλεται (§ 367). Ὥστε εἶναι

$$(\alpha-\beta)-\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]-(\gamma+\beta) \qquad (1)$$

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται $(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\gamma+\beta)=\alpha-(\beta+\gamma)$.

Σημείωσις β'. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἀληθεύει καὶ ὅταν ἀπὸ τὸν α ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικοὺς πολλοὺς ἀριθμούς. Π. χ. εἶναι

$$](\alpha-\beta)-\gamma]-\delta=\alpha-(\beta+\gamma+\delta)$$

16) **1.** 75—60=15 ἢ (75—40)—20= 35—20=15 (§ 365)
80—50=30 ἢ (80—35)—15= 45—15=30 »

2. 100—15=85 ἢ (100+25)—40=125—40=85 (§ 368)
74— 6=68 ἢ (74+29)—35=103—35=68 »

3. Ἡ ἀφαίρεσις 10—18 εἰς τὴν ἀριθμητικὴν δὲν γίνεται.

Ἐὰν ὅμως λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἄσκησιν, πρέπει νὰ διορθώσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν εἰς ἄθροισμα 10+18, ὁπότε ἔχομεν

57—28=29 ἢ (57—10)—18=47—18=29.

Σημείωσις. Εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς δεδομένης παραστάσεως (12+45)—(10—18)=57—(10—18), διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς § 368. Τότε δὲ ἔχομεν : 57—(10—18)=(57+18)—10=75—10=65
ἢ (57+18)—10=57+(18—10)=57+8=65.

641—202=439 ἢ (641—137)—65=504—65=439

4. 23+11=34 ἢ (58+75)—(35+64)=133—99=34(§366)
44+108=152 ἢ (127+184)—(83+76)=311—159=152

5. 21—17=4 ἢ (21+18)—35=39—35=4
85—7=78 ἢ (85+318)—325=403—325=78.

17) Εὑρίσκομεν κατὰ σειράν :

1. 12+ 9=21, 7+40=47, 65+ 11= 76
2. 12+23=35, 74+35+6=115, 148+111=259.

18) Στηριζόμεθα εἰς τὴν ἰδιότητα II τῆς § 365, διότι :

478—345=478—(300+40+5)=
[(478—300)—40]—5=(178—40)—5=138—5=133

῎Ετσι λέγομεν

300 ἀπὸ $478=178$, 40 ἀπὸ $178=138$ καὶ 5 ἀπὸ $138=133$.

19) **1.** $789-43=(789+11)-(43+11)=800-54$ (§ 367)

2. $2886-997=(2886+3)-(997+3)=2889-1000$ »

3. $3765-1001=(3765-1)-(1001-1)=3764-1000$, διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἰδιότης 367 ἀληθεύει καὶ ὅταν ἀφαιρέσωμεν, ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν, τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

20) **1.** Αὐξάνεται κατὰ μ μονάδας. Διότι ἂν $\alpha-\beta=\delta$, θὰ εἶναι (§ 43) $\alpha=\beta+\delta$ καὶ (§ 347) $\alpha+\mu=\beta+\delta+\mu$ ἢ $(\alpha+\mu)=\beta+(\delta+\mu)$ καὶ (§ 349) $(\alpha+\mu)-\beta=\delta+\mu$.

Π. δ. $20-8=12$ καὶ $(20+4)-8=12+4$.

2. Θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ μ μονάδας. Διότι, ἂν $\alpha-\beta=\delta$, θὰ εἶναι (§ 349) $\alpha-\beta-\mu=\delta-\mu$ ἢ (ἄσκ. 15) $\alpha-(\beta+\mu)=\delta-\mu$.

Π.δ. $20-8=12$, $20-(8+5)=12-5$.

3. Ἐλαττοῦται κατὰ μ μονάδας. Διότι, ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα ἰσότης $\alpha-(\beta+\mu)=\delta-\mu$, γράφεται $\alpha-(\mu+\beta)=\delta-\mu$ ἢ (§ 365) $(\alpha-\mu)-\beta=\delta-\mu$.

Π.δ. $24-6=18$, $(24-8)-6=18-8$.

4. Αὐξάνεται κατὰ μ μονάδας. Διότι, ἂν $\alpha-\beta=\delta$ θὰ εἶναι (§ 347) $\alpha-\beta+\mu=\delta+\mu$ (1). Ἀλλὰ (§ 368) $\alpha-(\beta-\mu)=\alpha+\mu-\beta$. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\alpha-(\beta-\mu)=\delta+\mu$.

Π.δ. $30-18=12$, $30-(18-7)=12+7$.

5. Τὸ ὑπόλοιπον δὲν μεταβάλλεται (ἄσκ. 19).

21) Θὰ λάβωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν. Διότι ἂν $\alpha>\beta$, θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=\alpha+\beta+\alpha-\beta=\alpha+\alpha+\beta-\beta=\alpha+\alpha=2.\alpha$.

Π.δ. $(5+3)+(5-3)=5+3+5-3=5+5+3-3=5+5=5\times2=10$.

22) Θὰ λάβωμεν τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου. Διότι, ἐὰν $\alpha>\beta$ θὰ εἶναι (§ 368) $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=\alpha+\beta+\beta-\alpha=\beta+\beta+\alpha-\alpha=\beta+\beta=2.\beta$.

Π.δ. $(5+3)-(5-3)=5+3+3-5=3+3+5-5=3+3=3\times2=6$.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 351.

23) Εἶναι (§ 369) $8\times1=1\times8$· ἀλλὰ τὸ γινόμενον 1×8 λέγει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν μονάδα 1 ὀκτὼ φοράς. Ὥστε εἶναι $1\times8=8$ καὶ ἑπομένως $8\times1=8$.

24) **1ον.** Εἶναι $25\times9=25\times(8+1)=(25\times8)+(25\times1)=(25\times8)+25$ (§ 375). Ὥστε εἶναι $(25\times9)-(25\times8)==25$. Ἑπομένως τὸ γινόμενον 25×9 ὑπερβαίνει τὸ 25×8 κατὰ 25 μονάδας.

2ον. Ὁμοίως ἔχομεν $50\times15=50\times(13+2)=(50\times\times13)+(50\times2)$. Ὥστε τὸ γινόμενον 50×15 ὑπερβαίνει τὸ 50×13 κατὰ $50\times2=100$ μονάδας.

25) **1.** $21+15+39=(7+5+13)\times3$

$14+35+42=(2+5+6)\times7$

$9+18+45=(1+2+5)\times9$

2. $(\alpha+\beta+\gamma).\lambda$, $(\varkappa+\beta+\varrho).\mu$, $(3+4+\beta).\alpha$

26) **1.** $(17-9).3$, $(45-27).2$, $(125-67).8$

2. $(\alpha-\beta).\mu$, $(\pi-\beta).\lambda$, $(\alpha-\gamma).\beta$

27) **1.** $\alpha.\mu+\beta.\mu$, $\chi.\alpha+\psi.\alpha+\omega.\alpha$,

$\alpha.3+\delta.3+\beta.3=3.\alpha+3.\delta+3.\beta$

2. $\alpha.\nu-\beta.\nu$, $\mu.\chi-\nu.\chi$, $8.3-\alpha.3=24-3.\alpha$

3. $\chi.\alpha+\chi.\beta+\chi.\gamma$, $5.\chi+5.\psi+5.\omega$,

$\alpha.3+\alpha.\beta+\alpha.\delta=3.\alpha+\alpha.\beta+\alpha.\delta$

4. $\chi.\varphi+\psi.\varphi+\chi.\omega+\psi.\omega$

$\delta.\beta+\alpha.\beta+\delta.2+\alpha.2=\delta.\beta+\alpha.\beta+2.\delta+2.\alpha$

$\alpha.3+\beta.3+\alpha.5+\beta.5=3.\alpha+3.\beta+5.\alpha+5.\beta$

28) **1.** $345\times699=345\times(700-1)=345\times700-345$· ἀλλὰ $345\times700=345\times(100+100+100+100+100+100+100)==34500+34500+34500+34500+34500+34500+34500==34500\times7$. Ὥστε:

$$345\times699=34500\times7-345.$$

2. $6039-639=(6039-39)-(639-39)=$
$=6000-600=600\times10-600\times1=(10-1)\times600=9\times600$

3. $15\times(27+35+36)=15\times(27+35+38-2)=$
$=15\times(100-2)=15\times100-15\times2=1500-30$

29) **1.** $(\chi+\psi+\omega).3,\quad(\alpha-\beta).\chi,\quad(2\alpha+3\beta).\chi$

2. $(5+6+7).\chi,\quad(15-12).\alpha,\quad(1-1).5\chi\psi=0.$

30) Ἐπειδὴ $80-8=72$, ἕπεται ὅτι ὁ μαθητὴς ἐπανέλαβε τὸν πολλαπλασιαστέον 72 φορὰς ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅ,τι ἔπρεπε. Ἡ διαφορὰ λοιπὸν 7992, μεταξὺ τοῦ πραγματικοῦ γινομένου καὶ τοῦ εὑρεθέντος, εἶναι 72 φορὰς ὁ πολλαπλασιαστέος. Ὥστε ὁ πολλαπλασιαστέος ἰσοῦται μὲ $7992:72=111$.

31) Εἶναι $4700+470+47=47\times100+47\times10+47\times1=$
$=47\times(100+10+1)=47\times111.$

32) Εἶναι $(\alpha+1).\beta=\alpha.\beta+\beta$. Αὔξησις κατὰ β μονάδας
καὶ $\alpha.(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha$. Αὔξησις κατὰ α μονάδας·
ἤτοι τὸ γινόμενον αβ αὐξάνεται κατὰ τὸν ἄλλον παράγοντα.

33) Εἶναι $(\alpha-1).\beta=\alpha\beta-\beta$. Ἐλάτ. κατὰ β μονάδας
καὶ $\alpha.(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha$. Ἐλάτ. κατὰ α μονάδας
ἤτοι τὸ γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸν ἄλλον παράγοντα.

Ἰδιότητες γινομένου πολλῶν παραγόντων.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 357.

34) $8\times9\times2=16\times9=16\times(10-1)=160-16.$

35) $7\times2\times99=14\times(100-1)=1400-14.$

36) $9\times3\times8\times111=24\times999=24\times(1000-1)=24000-24.$

37) $2\times9\times5\times111=10\times999=10\times(1000-1)=10000-10.$

38) $3\times5\times11=3\times5\times(10+1)=3\times5\times10+3\times5=$
$=(50\times3)+(5\times3).$

39) Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸν παράγοντα 3 μίαν μονάδα, θὰ ἔχωμεν $(3+1)\times5\times8=3\times5\times8+5\times8$. Ὥστε τὸ δοθὲν γινόμενον αὐξάνεται κατὰ τὸ γινόμενον $5 \times 8 = 40$. Ὁμοίως, δεικνύεται, ὅτι ἐὰν ὁ παράγων 5 αὐξηθῇ κατὰ μίαν μονάδα, τὸ γινόμενον αὐξάνεται κατὰ $3 \times 8 = 24$· ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ὁ 8 κατὰ μίαν μονάδα τὸ γινόμενον αὐξάνεται κατὰ $3 \times 5 = 15$.

Γενικῶς δὲ ἐὰν εἰς ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου $\alpha \times \beta \times \gamma$ προστεθῇ μία μονάς, τὸ γινόμενον αὐτό, αὐξάνεται κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων παραγόντων του.

40) $7 \times 5 \times (6-1) = 7 \times 5 \times 6 - 7 \times 5$. Ἐλάτ. $= 7 \times 5$
$7 \times (5-1) \times 6 = 7 \times 5 \times 6 - 7 \times 6$. Ἐλάτ. $= 7 \times 6$
$(7-1) \times 5 \times 6 = 7 \times 5 \times 6 - 5 \times 6$. Ἐλάτ. $= 5 \times 6$.

Γενικῶς δέ, ἐὰν ἀπὸ ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου $\alpha \times \beta \times \gamma$ ἀφαιρεθῇ ἡ μονὰς 1, τὸ δοθὲν γινόμενον ἐλαττοῦται κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ.

41) Ἀντικαθιστῶμεν τὸν παράγοντα $(4 \times \gamma)$ μὲ τὸ γινόμενον $4 \times \gamma = 2 \times 2 \times \gamma = (2 \times \gamma) \times 2$, ἤτοι μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $(2 \times \gamma)$ καὶ 2.

42) Τὸ δοθὲν γινόμενον ἰσοῦται μὲ

$$2 \times \alpha \times 7 \times \beta \times 5 \times \gamma = 10 \times 7 \times \alpha \times \beta \times \gamma$$

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 361.

43) Τὸ 18 ἀποτελεῖται ἀπὸ **τρεῖς** φορὰς τὸ 6 $(15 : 6 = 3)$ καὶ τὸ $18 + 6$ ἀποτελεῖται ἀπὸ **τέσσαρας** φορὰς τὸ 6. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(18+6) : 6$ εἶναι ἴσον μὲ 4

$$(18 : 6) + (6 : 6) = 3 + 1 = 4.$$

Γενικῶς δὲ ἐὰν $\alpha : \beta = \gamma$, θὰ εἶναι $(\alpha + \beta) : \beta = (\alpha : \beta) + (\beta : \beta) = \gamma + 1$. Ὥστε: **Τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, αὐξάνεται κατὰ μονάδα, ἂν εἰς τὸν διαιρετέον αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν διαιρέτην της.**

44) Τὸ 28 ἀποτελεῖται ἀπὸ **ἑπτὰ** φορὰς τὸ 4 καὶ τὸ $28-4$ ἀποτελεῖται ἀπὸ **ἓξ** φορὰς τὸ 4. Ὥστε εἶναι $(28-4) : 4 = 6$.

$$(28 : 4) - (4 : 4) = 7 - 1 = 6.$$

Γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha:\beta=\gamma$ θὰ εἶναι $(\alpha-\beta):\beta=(\alpha:\beta)-(\beta:\beta)=\gamma-1$. Ὥστε: **Ἂν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τελείας διαιρέσεως ἀφαιρέσωμεν τὸν διαιρέτην αὐτῆς, τὸ πηλίκον ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα.**

45) Ἐπειδὴ $48-3=5\times9$ (§ 349) θὰ εἶναι
$(48-3):5=9$ καὶ $(48-3):9=5$.

46) Ἔστω ὅτι ἡ διαίρεσις $\alpha:\beta$ δίδει πηλίκον π καὶ ὑπόλοιπον υ $(\upsilon<\delta)$. Τότε θὰ εἶναι $\alpha=\beta\times\pi+\upsilon$, $\alpha-\upsilon=\beta\times\pi$ (§ 349) καὶ $(\alpha-\upsilon):\beta=\pi$.

Ὥστε: **Ἐὰν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀτελοῦς διαιρέσεως ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, ἡ δὲ διαίρεσις γίνεται τελεία.**

47) Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πηλίκου 6, **ἀλλὰ** μικρότερον τοῦ διαιρέτου 8. Τὸ ὑπόλοιπον λοιπὸν εἶναι 7 καὶ ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ $8\times6+7=55$.

48) Εἶναι $15=3\times5$ καὶ $15\times6=3\times5\times6=3\times(5\times6)$. Ὥστε $(15\times6):3=5\times6=30$.

Ὁμοίως ἐὰν $\alpha:\beta=\gamma$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta\times\gamma$, $\alpha\times\delta=\beta\times\gamma\times\delta=\beta\times(\gamma\times\delta)$ καὶ $(\alpha\times\delta):\beta=\gamma\times\delta$. Ὥστε:

Ἐὰν τελείας διαιρέσεως πολλαπλασιάσωμεν μόνον τὸν διαιρετέον ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, τὸ πηλίκον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

49) Εἶναι $(13\times9\times7):7=13\times9$ (§ 387)
καὶ $(13\times9\times7):7=13\times(10-1)=130-13$.

50) Ἐπειδὴ
$5\times9\times8\times11\times4=5\times9\times4\times2\times11\times4$ (§ 381)
καὶ $5\times9\times4\times2\times11\times4=(4\times11\times9)\times(4\times10)$ (§ 380)
θὰ εἶναι $(4\times11\times9)\times(4\times10):(4\times10)=4\times11\times9=$
$=4\times99=4\times(100-1)=400-4$.

51) Εἶναι $\psi=(20\times3):5=4\times3=12$.

52) Εἶναι $\alpha=(5\times6\times3):6=5\times3=15$.

53) Εἶναι $(3\times4)\times\beta=6\times8\times2$ καὶ $\beta=(6\times8\times2):(3\times4)=(3\times4\times8):(3\times4)=8$.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 364.

54) 1. $2^{3+5+4}=2^{12}$, $12^{1+4+2}=12^{7}$, $7^{1+3+5}=7^{9}$

2. $3^{1+1+5}=3^{7}$, $5^{3+6+2}=5^{11}$, $4^{3+1+6}=4^{10}$.

55) 1. $3^2\times5^2$, $7^2\times8^2\times6^2$

2. $8^2\times7^2\times3^2$, $5^2\times2^2\times4^2\times5^2\times8^2$.

56) 1. $5^3\times6^3\times4^3$, $2^3\times3^3\times4^3\times5^3$, $\chi^3.\ \psi^3.\ \omega^3$.

2. $2^2\times3^3\times1^3$, $10^3\times5^3\times2^3$, $3^3.\ \alpha^3.\ \gamma^3$.

57) 1. Ἐπειδὴ $4=2^2$, $8=2^3$. καὶ $64=2^6$ εἶναι

$4\ .\ 8\ .\ 64=2^2.\ 2^3.\ 2^6=2^{11}$

καὶ $25\ .\ 125\ .\ 5^2=5^2.\ 5^3.\ 5^2=5^7$.

2. $3\ .\ 27\ .\ 81=3\ .\ 3^3.\ 3^4=3^8$,

$16\ .\ 2^3.\ 4^2=2^4.\ 2^3.\ (2^2)^2=2^4.\ 2^3.\ 2^4=2^{11}$.

58) 1. Ἐπειδὴ

$18=2\ .\ 9=2\ .\ 3^2$, $27=3^3$, $32=2^5$, $81=3^4$, εἶναι

$18\ .\ 27\ .\ 32\ .\ 81=2\ .\ 3^2.\ 3^3.\ 2^5.\ 3^4=2^6.\ 3^9$

$27\ .\ 64\ .\ 81\ .\ 2=3^3.\ 2^6.\ 3^4.\ 2=2^7.\ 3^7$.

2. $25\ .\ 8\ .\ 125\ .\ 32=5^2.\ 2^3.\ 5^3.\ 2^5=2^8.\ 5^5$

$9\ .\ 25\ .\ 27\ .\ 625=3^2.\ 5^2.\ 3^3.\ 5^4=3^5.\ 5^6$.

59) 1. $2\ .\ 27\ .\ 16\ .\ 9=2\ .\ 3^3.\ 2^4.\ 3^2=2^5.\ 3^5=(2\ .\ 3)^5=6^5$

$81\ .\ 16\ .\ 625=3^4.\ 2^4.\ 5^4=(3\ .\ 2\ .\ 5)^4=30^4$

2. $8\ .\ 9\ .\ 3\ .\ 125=2^3.\ 3^2.\ 3\ .\ 5^3=2^3.\ 3^3.\ 5^3=(2.\ 3.\ 5)^3=30^3$

$27\ .\ 8\ .\ 32\ .\ 243=3^3.\ 2^3.\ 2^5.\ 3^5=2^8.\ 3^8=(2\ .\ 3)^8=6^8$.

60) Ἀριθμός τις α, ὅστις λήγει εἰς 0, εἶναι γινόμενον τοῦ 10, ἐπὶ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν π. χ. τὸν β (δηλαδὴ εἶναι $\beta=\alpha:10$). Ὥστε εἶναι $\alpha=\beta\ .\ 10$ καὶ $\alpha^2=(\beta\ .\ 10)^2=\beta^2.\ 10^2=\beta^2.\ 100$. Ἀλλ' ἀριθμὸς ὅστις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 100, λήγει τοὐλάχιστον εἰς δύο μηδενικά.

61) Τετράγωνον ἀριθμοῦ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἀλλὰ μὲ τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον λήγει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του.

Π. χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 24 λήγει εἰς 6, διότι καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 4 λήγει εἰς 6.

Ἀλλ' εἷς ἀκέραιος ἀριθμός, ἐὰν δὲν λήγει εἰς 0 (περίπτωσιν ἣν ἐξετάσαμεν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν) θὰ λήγῃ εἰς

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ἐκ δὲ τῶν τετραγώνων αὐτῶν

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

οὐδὲν λήγει εἰς 2, 3, 7 ἢ 8. Ὥστε εἰς ἓν τῶν ψηφίων αὐτῶν, οὐδὲν τετράγωνον λήγει.

62) Ἔστω ἀριθμός τις α. Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι α^2 καὶ τὸ τετραπλάσιον τοῦ α^2, ἤτοι $4.\alpha^2$, γράφεται $4.\alpha^2=2^2.\alpha^2=(2.\alpha)^2$ ἤτοι τὸ $4.\alpha^2$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $2.\alpha$.

Ὁμοίως εἶναι $8.\alpha^3=2^3.\alpha^3=(2.\alpha)^3$. Ὥστε τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ κύβου τοῦ α, εἶναι κύβος τοῦ $2.\alpha$.

63) Εἶναι $2^{\nu+2}=2^\nu.2^2=2^\nu.4=4.2^\nu$
καὶ $3^{\nu+3}=3^\nu.3^3=3^\nu.27=27.3^\nu$

64) Εἶναι $5^{\nu-2}=5^\nu:5^2=5^\nu:25$
$2^{3\nu}=(2^3)^\nu=8^\nu$
$(5^3)^\nu=5^{3\nu}=5^{\nu.3}=(5^\nu)^3$.

65) Εἶναι $2.\alpha^2.3.\alpha^3.4.\alpha=2.3.4.\alpha^2.\alpha^3.\alpha=24\alpha^6$
$5.\chi^2.2.\chi^3.3.\chi^4=5.2.3.\chi^2.\chi^3.\chi^4=30\chi^9$

66) Εἶναι κατὰ σειρὰν $2\alpha^3$, $3\beta^2$, $3\alpha\beta^2$.

Λόγοι καὶ ἀναλογίαι.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 371.

67) Ἀπ. $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{3}{9}=\frac{4}{12}$, $\frac{12}{4}=\frac{9}{3}$, $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, $\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$, $\frac{4}{12}=\frac{3}{9}$, $\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$ (§ 400).

Σημείωσις. Αἱ ἄνω ὀκτὼ ἰσότητες εἶναι ἀναλογίαι, διότι εἰς ἑκάστην τούτων τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων (§ 398). Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλος τρόπος νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας ἡ δοθεῖσα ἰσότης $3\times12=4\times9$.

68) Ἐὰν χ εἶναι ὁ 4ος ὅρος, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{2}{5}=\frac{8}{\chi}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi=\frac{5\times 8}{2}=20$.

69) Ἡ ἰσότης $\gamma^2=\alpha\beta$, γράφεται $\gamma.\gamma=\alpha.\beta$· ὑπὸ μορφὴν δὲ ἀναλογίας γράφεται (§ 400) $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\gamma}{\beta}$.

70) **1.** $\chi=\frac{8\times 9}{36}=2$, $\chi=\frac{4\times 3}{6}=2$, $\chi=\frac{3\times 5,4}{8}=$

$$=\frac{81}{40}=2,025.$$

2. $\chi=\sqrt{125\times 5}=\sqrt{625}=25$ (§ 399, 3ον)

$\chi=\frac{4\times 6,3}{2,5}=\frac{252}{25}=10,08$, $\chi=\sqrt{125\times 45}=\sqrt{5\,625}=75$

71) Ἐὰν χ εἶναι ὁ τρίτος ἀνάλογος τῶν 24 καὶ 12 θὰ θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 24, 12, 12, χ, οἱ ὁποῖοι συνιστοῦν συνεχῆ ἀναλογίαν μὲ μέσον ἀνάλογον τὸν 12. Ἑπομένως ἔχομεν $\frac{\chi}{12}=\frac{12}{24}$ καὶ $\chi=\frac{12^2}{24}=6$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{3^2}{27}=\frac{1}{3}$ καὶ $\chi=\frac{12^2}{36}=4$.

72) Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου οἰκοπέδου θὰ ἔχωμεν $\frac{240 \text{ τ.μ. } 56 \text{ τ.παλ.}}{E}=\frac{5}{8}$

ἢ ἐπειδὴ δὲ 240 τ. μ. 56 τ. παλ. = 240,56 τ. μ. εὑρίσκομεν $E=\frac{240,56\times 8}{5}=384,8960$ τ. μ. = 384 τ. μ. 89 τ. π. 60 τ.δ.

Ὥστε τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν εἶναι 625 τ.μ. 45 τ.π. 60 τ.δ.

73) Ἐπειδὴ $17^\circ 21' 45''=62505''$ καὶ $11^\circ 27' 3''=41223''$ ὁ ζητούμενος λόγος ἰσοῦται μὲ $\frac{62505}{41223}=\frac{20835}{13741}$.

74) 1. Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{\beta\gamma}{\delta}$. Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ δ εὑρίσκομεν $\alpha:\delta=\frac{\beta\gamma}{\delta}:\delta=\frac{\beta\gamma}{\delta^2}$, ἤτοι $\alpha:\delta=\beta\delta:\delta^2$.

2. Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας εὑρίσκομεν $\beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma}$, ἤτοι $\frac{\beta}{1} = \frac{\alpha\delta}{\gamma}$, $\frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha\delta}$ ἢ $1 : \beta = \gamma : \alpha\delta$.

3. Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, εὑρίσκομεν

$\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$, ἤτοι $\frac{\mu\alpha}{\nu\beta} = \frac{\mu\gamma}{\nu\delta}$ ἢ $\mu\alpha : \nu\beta = \mu\gamma : \nu\delta$.

4. Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας εὑρίσκομεν $\alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta}$ καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν $\alpha - 1 = \frac{\beta\gamma}{\delta} - 1$, ἤτοι $\alpha - 1 = \frac{\beta\gamma - \delta}{\delta}$. Ἐὰν τώρα τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ **β**, εὑρίσκομεν $(\alpha - 1) : \beta = \frac{\beta\gamma - \delta}{\delta} : \beta = \frac{\beta\gamma - \delta}{\beta\delta}$, ἤτοι

$$(\alpha - 1) : \beta = (\beta\gamma - \delta) : \beta\delta.$$

75) Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας εὑρίσκομεν $\beta^2 = \alpha\gamma$ $(\beta.\beta = \alpha.\gamma)$ καὶ κατόπιν ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

1. $\gamma : \beta = \beta : \alpha$ (§ 400).

2. $\beta^2 . \gamma = \alpha . \gamma^2$, ἤτοι (§ 400) $\alpha : \gamma = \beta^2 : \gamma^2$ καὶ

3. $\beta^2 - 1 = \alpha\gamma - 1$.

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτη γράφεται $(\beta - 1) . (\beta + 1) = 1 . (\alpha\gamma - 1)$. Ἑπομένως εἶναι (§ 400) $(\alpha\gamma - 1) : (\beta - 1) = (\beta + 1) : 1$.

76) Ἐκ τῆς δοθείσης ἀναλογίας εὑρίσκομεν:

1. $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (§ 402) καὶ (§ 401, I) $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\beta}{\delta}$

2. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (§ 401, I) καὶ (§ 405) $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ ἤτοι $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}$

3. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (καὶ § 404) $\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma} = \frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$

4. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ἢ $\frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta}{\delta}$ ἤτοι $\frac{3\alpha}{4\gamma} = \frac{3\beta}{4\delta}$ καὶ τέλος εὑρίσκομεν (§ 404) $\frac{3\alpha+4\gamma}{3\alpha-4\gamma} = \frac{3\beta+4\delta}{3\beta-4\delta}$.

ΤΕΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

★

Τὸ ὡς ἄνω βοήθημα ἔχει σκοπὸν νὰ βοηθήσῃ τὸν μαθητὴν εἰς τὸ νὰ λύῃ εὐκόλως ζητήματα Πρακτικῆς Γεωμετρίας, ὡς τὰ περιεχόμενα εἰς τὸ διδακτικὸν βιβλίον του. Πρὸς τοῦτο **ἐκτὸς τῶν λύσεων ὅλων τῶν ἀσκήσεων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν ἐγκεκριμένην Πρακτικὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, περιέχει γενικὰς ὁδηγίας, πρακτικοὺς κανόνας καὶ τύπους σχετικοὺς μὲ τὰς ἀσκήσεις αἱ ὁποῖαι δίδονται πρὸς λύσιν.**

★

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1949

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ