ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Τεῦχος Πρῶτον

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Τεῦχος Πρῶτον

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΘΗΝΑΙ 1968

ʼΑπαραίτητος σύστασις

Συνιστᾶται εἰς τοὺς μαθητὰς τοὺς χρησιμοποιοῦντας τὸ παρόν, ὅπως κατʼ ἀρχὴν ἀγνοήσουν τὰς παρατιθεμένας λύσεις, ἐπιχειροῦν δὲ πάντοτε νὰ δώσουν ἰδικήν των λύσιν εἰς κάθε ἄσκησιν, συμβουλευόμενοι ἐν ἀνάγκη τὴν ἀντίστοιχον θεωρίαν καὶ παραδείγματα. ʼΑκολούθως, δὲ νὰ ἐλέγχουν τὸ ἀποτέλεσμά των.

Εἰς τὰς «λύσεις» δέον νὰ καταφύγῃ τις μόνον, ἀφοῦ προηγουμένως ἐπιχειρήσῃ ἀρκετὰς φορὰς νὰ φέρῃ εἰς πέρας τὸ πρόβλημα, διʼ ἰδίων δυνάμεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

τοῦ βιβλίου «"Αλγεβρα» Σ.Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

Α'. ΜΕΡΟΣ

1. Ἔστω E τό σύνολον τῶν 8 ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ἄς καλέσωμεν E_1 τό σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται μεταξύ τῶν 8 ἀνωτέρω ἀριθμῶν καί E_2 τό σύνολον τῶν μικροτέρων τοῦ 6, οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται μεταξύ τῶν 8 ἀνωτέρω. Τί παριστάνουν τότε τά σύνολα : $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E - E_1$, $\complement_E E_2$, $(E-E_1)\cap E_2$, $(E_1 - E_2)\cap E_1$, $E\cap E_1$, $E \cap E_2$, $(E-E_1)\cup E_2$, $E_2 - E_1$.

Λ ύ σ ι ς.– Εἶναι $E_1 = \{2,4,6,8\}$, $E_2=\{1,2,3,4,5\}$. Τότε $E_1\cup E_2 = \{1,2,3,4,5,6,8\}$, $E_1 \cap E_2 = \{2,4\}$, $E-E_1=\{1,3,5,7\}$, $\complement_E E_2 = E - E_2 = \{6,7,8\}$, $(E-E_1)\cap E_2 = \{1,3,5\}$, $(E-E_2)\cap E_1 = \{6,8\}$, $E\cap E_1 = E_1$, $E\cap E_2 = E_2$, $(E-E_1)\cup E_2 = \{1,2,3,4,5,7\}$, $E_2 - E_1 = \{1,3,5\}$.

2. Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου E εἶναι τά 6 ζεύγη τῶν ἀριθμῶν : $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$. Καλοῦμεν E_1 τό ὑποσύνολον τοῦ E, τό ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ E εἰς τά ὁποῖα, ὁ 1 ἐμφανίζεται τοὐλάχιστον ἅπαξ. Καλοῦμεν E_2 τό ὑποσύνολον τοῦ E τό ἀποτελούμενον ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ E εἰς τά ὁποῖα οἱ δύο ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα περιττόν. Προσδιορίσατε τά σύνολα : $E_1 \cap E_2$, $E_1\cup E_2$, $E_1 \cap (E-E_2)$, E_1', E_2', $E_2 - E_1$, $E_1 - E_2$.

Λ ύ σ ι ς.– Εἶναι $E_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$, $E_2 = \{(1,2),(2,1)\}$. Τότε $E_1\cap E_2 = \{(1,2),(2,1)\}$, $E_1\cup E_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),$

$(2,1)\}$, $(E_1 - E_2) = \{(1,1),(1,3)\}$, $E_1 \cap (E_1 - E_2) = \{(1,1),(1,3)\}$,
$E_1' = \underset{E}{C} E_1 = \{(2,2),(3,3)\}$, $E_2' = \underset{E}{C} E_2 = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

$E_2 - E_1 = \emptyset$.

3. *Ἂν $A \subset B$ δείξατε ὅτι τότε $A \cup B = B$.*
Λύσις. Τά δύο σύνολα $A \cup B$ καί B ταυτίζονται διότι πᾶν στοιχεῖον p τοῦ πρώτου, ἀνήκει εἰς ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν A καί B· ἤ $p \in A$ ὁπότε $p \in B$ διότι $A \subset B$, ἤ $p \in B$. Ὥστε ὁπωσδήποτε $p \in B$. Πᾶν δέ στοιχεῖον τοῦ δευτέρου ἀνήκει προφανῶς εἰς τό πρῶτον. (βλ. Α΄, § 1, 2).

4 *Δείξατε ὅτι διά δύο τυχόντα σύνολα A καί B ἰσχύει:*
i) $(A \cap B) \subset A$, ii) $(A \cap B) \cup B = B$, iii) $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$.
Λύσις.– i) Ἐάν $p \in (A \cap B) \Rightarrow p \in A$ ἄρα $A \cap B \subset A$ (βλ. Α΄, §6), ii) $(A \cap B) \subset B$ ἄρα κατά τήν ἄσκ. 3, $(A \cap B) \cup B = B$.
iii) Ἡ τομή ἑνός συνόλου (δηλ. τοῦ $A \cup B$) μέ ἕνα ὑποσύνολόν του (δηλ. $A \cap B$), εἶναι τό ὑποσύνολον (δηλ. τό $A \cap B$).

5. *Ἐάν (δ) τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας δ καί (C) τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας C, τί σημαίνει $(\delta) \cap (C) = \emptyset$;*
Λύσις.– Προφανῶς, ὅτι: οὐδέν κοινόν σημεῖον ἔχουν ἡ περιφέρεια καί ἡ εὐθεῖα.

6. *Ἐάν διά δύο σύνολα A καί B ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $A \subset B$ καί $B \subset A$ νά δειχθῆ ὅτι $A = B$.*
Λύσις.– Ἐκ τῆς $A \subset B$ ἕπεται ὅτι πᾶν στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καί τοῦ B. Ἐκ τῆς $B \subset A$ ἕπεται ὅτι πᾶν στοιχεῖον τοῦ B ἀνήκει καί εἰς τό A. Ἄρα (§ 1, ii), $A = B$.

7. *Διά τρία τυχόντα σύνολα A, B, Γ δείξατε ὅτι ἰσχύουν αἱ σχέσεις:*
$$(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma \qquad (\beta\lambda. \S 12).$$
Λύσις.– Πᾶν στοιχεῖον p τοῦ 1ου μέλους ἀνήκει ***καί*** εἰς τήν ἕνωσιν $A \cup \Gamma$ ***καί*** εἰς τήν $B \cup \Gamma$. Ὡς ἀνῆκον εἰς τό $A \cup \Gamma$ ἀνήκει ἤ εἰς τό A ἤ εἰς τό Γ καί συγχρόνως, ὡς ἀνῆκον εἰς τό $B \cup \Gamma$,

ἀνήκει ἤ εἰς τό Β ἤ εἰς τό Γ. Συνεπῶς, διά τό p ὑπάρχουν 4 περιπτώσεις:

1) $p \in A$ καί $p \in B$
2) $p \in A$ καί $p \in \Gamma$
3) $p \in \Gamma$ καί $p \in B$
4) $p \in \Gamma$.

Εἰς τήν περίπτωσιν 1) τό $p \in (A \cap B)$ ἄρα ἀνήκει καί εἰς τό 2ον μέλος. Εἰς τάς λοιπάς περιπτώσεις, τό p ὡς ἀνῆκον εἰς τό Γ, ἀνήκει καί εἰς τό 2ον μέλος.

Ἀντιστρόφως, πᾶν στοιχεῖον q τοῦ 2ου μέλους ἤ ἀνήκει εἰς τό Γ ὁπότε ἀνήκει καί εἰς τά $A \cup \Gamma$ καί $B \cup \Gamma$ ἄρα ἀνήκει εἰς τό 1ον μέλος ἤ τό $q \in (A \cap B)$ ὁπότε ὡς ἀνῆκον καί εἰς τό Α καί εἰς τό Β ἀνήκει καί εἰς τό $A \cup \Gamma$ καί εἰς τό $B \cup \Gamma$ δηλ. εἰς τό 1ον μέλος (βλ. § 12).

Ἄλλη λύσις. $(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = \{A \cap (B \cup \Gamma)\} \cup \{\Gamma \cap (B \cup \Gamma)\}$ (ἐπιμεριστικός νόμος (§ 11) $= (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap B) \cup (\Gamma \cap \Gamma)$ (πάλιν ἐπιμεριστικός νόμος) $= (A \cap B) \cup$ (ὑποσύνολον τοῦ Γ) $\cup$ (ὑποσύνολον τοῦ Γ) $\cup \Gamma = (A \cap B) \cup \Gamma$ διότι ἄν μέ τό Γ ἑνωθοῦν ὑποσύνολά του ἡ ἕνωσις εἶναι πάλιν τό Γ.

8. *Ἐάν $B \subset A$ καί $\Gamma \subset B$ δείξατε ὅτι:*

$$(A - B) \cup (B - \Gamma) = (A - \Gamma) \qquad (\text{Βλ. § 12}).$$

Λύσις.– Ἔστω p στοιχεῖον τοῦ 1ου μέλους. Ἄν τό $p \in (A - B)$ τότε τό p ἀνήκει εἰς τό Α ἀλλά δέν ἀνήκει εἰς τό Β ἄρα οὔτε εἰς τό ὑποσύνολον τοῦ Β, δηλ. τό Γ. Συνεπῶς τό p ἀνήκει εἰς τήν διαφοράν $A - \Gamma$. Ἄν τό $p \in (B - \Gamma)$ τότε τό p ἀνήκει εἰς τό Β ἄρα ἀνήκει καί εἰς τό Α διότι $B \subset A$. Ἐπίσης τό p, δέν ἀνήκει εἰς τό Γ ἄρα $p \in A - \Gamma$.

Ἀντιστρόφως ἄν $q \in (A - \Gamma)$ τότε $q \in A$ χωρίς ν' ἀνήκῃ εἰς τό Γ. Ἀφοῦ τό $q \notin \Gamma$, τό q ἤ θ' ἀνήκῃ εἰς τό Β ὅπερ περιέχει Γ ὁπότε ἀνήκει εἰς τήν $B - \Gamma$ ἤ τό q δέν ἀνήκει οὔτε εἰς τό Β, ὁπότε ἀνήκει εἰς τό $A - B$. Ἄρα τό q ἀνήκει πάντοτε εἰς τό Α' μέλος.

9. *Ἐάν $B \subset A$ καί Γ τυχόν σύνολον δείξατε ὅτι:*

$$(A - B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) - (B \cap \Gamma).$$

Λύσις.- Ἔστω p τυχόν στοιχεῖον τοῦ $1^{ου}$ μέλους. Τό $p \in \Gamma$. Ἐπίσης τό $p \in A$ ἄρα $p \in A \cap \Gamma$. Τό p δέν ἀνήκει εἰς τό B (διότι $p \in (A-B)$) ἄρα τό p δέν ἀνήκει εἰς τό $B \cap \Gamma$. Ἐπειδή τό p ἀνήκει εἰς τό $A \cap \Gamma$ χωρίς ν' ἀνήκη εἰς τό $B \cap \Gamma$, ἕπεται ὅτι ἀνήκει εἰς τήν διαφοράν των, ἤτοι εἰς τό $2^{ον}$ μέλος.

Ἀντιστρόφως.- Ἔστω q στοιχεῖον τοῦ $2^{ου}$ μέλους. Τό $q \in A \cap \Gamma$ ἄρα ἀνήκει καί εἰς τό A καί εἰς τό Γ. Τό q δέν ἀνήκει εἰς τό $B \cap \Gamma$ ἐνῶ ἀνήκει εἰς τό Γ. Ἄρα τό q δέν ἀνήκει εἰς τό B. Ὥστε τό $q \in A$, $q \notin B$, $q \in \Gamma \rightarrow q \in (A-B) \cap \Gamma$.

10. *Διά ν' ἀριθμηθοῦν αἱ σελίδες ἑνός τετραδίου, ἐχρειάσθησαν 468 ψηφία (ἀριθμητικά). Πόσας σελίδας ἔχει τό τετράδιον;*

Λύσις.- Διά τήν ἀρίθμησιν τῶν 9 πρώτων σελίδων χρειάζονται 9 ψηφία. Διά τήν ἀρίθμησιν τῶν 90 ἑπομένων (σελ 10 ἕως σελ. 99) χρειάζονται $90 \times 2 = 180$ ψηφία. Διά τάς λοιπάς σελίδας ἐχρειάσθησαν $468 - 189 = 279$ ψηφία. Ἐπειδή δι' ἑκάστην τῶν λοιπῶν χρειάζονται 3 ψηφία, τό πλῆθος τῶν ὑπολοίπων σελίδων εἶναι $279 : 3 = 93$. Σύνολον σελίδων: $9 + 90 + 93 = 192$.

11. *Ἐάν γράψωμεν τόν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου τούς 2.000 πρώτους φυσικούς ἀριθμούς, πόσας φοράς θά χρησιμοποιηθῆ τό ψηφίον 1;*

Λύσις. Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν πόσας φοράς ἐμφανίζεται τό 1 ὡς ψηφίον μονάδων, πόσας ὡς ψηφίον δεκάδων, πόσας ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων καί πόσας ὡς ψηφίον χιλιάδων. α') Ὡς ψηφίον μονάδων ἐμφανίζεται μίαν φοράν εἰς κάθε 10 διαδοχικούς ἀριθμούς: (1 - 10), (11 - 20), (21 - 30) ... (1991 - 2000). Ἄρα εἰς τούς 2000 ἀριθμούς ἐμφανίζεται ὡς ψηφίον μονάδων: $200 \times 1 = 200$ φοράς.

β') Ὡς ψηφίον δεκάδων ἐμφανίζεται 10 φοράς εἰς κάθε 100 διαδοχικούς ἀριθμούς: (1 - 100), (101 - 200) ... (1901 - 2000). Ἄρα εἰς τούς 2000 ἀριθμούς ἐμφανίζεται ὡς ψηφίον δεκάδων: $20 \times 10 = 200$ φοράς. γ') Ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων, ἐμφανίζεται 100 φοράς εἰς κάθε 1000 διαδοχικούς ἀριθμούς: (1 - 1000), (1001 - 2000). Ἄρα εἰς τούς 2000 ἀριθμούς, ἐμφανίζεται τό 1 ὡς ψηφίον ἑκατοντάδων, $2 \times 100 = 200$ φοράς. δ) ὡς ψηφίον χιλιάδων ἐμφανίζεται εἰς τούς ἀριθμούς

1000 ἕως 1999 ἤτοι 1000 φοράς. Σύνολον 200+200+200+ +1000 = 1600.

12. Ἐάν εἰς τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τήν διαφοράν των, τί παριστάνει τό ἐξαγόμενον τό ὁποῖον λαμβάνομεν;
Λύσις.– $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=\{(\alpha+\beta)-\beta\}+\alpha$ (Α' § 31, ii) $=\alpha+\alpha$ (Α', § 28, iii, γ') $=2\alpha$. Λαμβάνομεν δηλαδή, τό διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου.

13. Ἐάν ἀπό τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τήν διαφοράν των, τί παριστάνει τό ἐξαγόμενον τό ὁποῖον λαμβάνομεν;
Λύσις.– $(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=\{(\alpha+\beta)-\alpha\}+\beta$ (§ 32, ii) $=\beta+\beta=2\beta$. Δηλ. λαμβάνομεν τό διπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

14. Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 160. Τό διπλάσιον τοῦ μικροτέρου εἶναι 120. Πόση εἶναι ἡ διαφορά τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν;
Λύσις.– $\alpha+\beta=160$, $2\beta=120 \Rightarrow (\alpha+\beta)-2\beta=160-120 \Rightarrow$ $(\alpha+\beta-\beta)-\beta=40 \Rightarrow \alpha-\beta=40$.

15. Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 45215 καί ἡ διαφορά των 23949. Εὕρετε τούς δύο ἀριθμούς.
Λύσις.– $\alpha+\beta=45215$, $\alpha-\beta=23949 \Rightarrow (\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=$ $=69164 \Rightarrow 2\alpha=69164 \Rightarrow \underline{\alpha=34582}$. Ἐπειδή $\alpha+\beta=45215$ $\Rightarrow \beta=45215-\alpha=45215-34582=\underline{10633}$

16. Τό ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 123. Εὕρετε τούς τρεῖς ἀριθμούς.
Λύσις.– Ἄν εἶναι x, $x+1$, $x+2$ οἱ τρεῖς διαδοχικοί, θά ἔχωμεν $x+(x+1)+(x+2)=123 \Rightarrow x+x+x+1+2=123 \Rightarrow 3x+3=123$ $\Rightarrow 3x=123-3=120 \Rightarrow x=40$. Οἱ ζητούμενοι εἶναι 40, 41, 42.

17. Τέσσαρες διαδοχικοί ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα 290. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί αὐτοί.
Λύσις.– Θά ἔχωμεν τώρα $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=290 \Rightarrow$

$4x + 6 = 290 \Rightarrow 4x = 284 \Rightarrow x = 71$. Οἱ ζητούμενοι: 71, 72, 73, 74.

18. *Νά εὑρεθῆ διψήφιος ἀριθμός τοῦ ὁποίου ἡ διαφορά τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων μεῖον τό ψηφίου τῶν δεκάδων, νά ἰσοῦται μέ 1· ἐάν δέ προσθέσωμεν εἰς τόν ἀριθμόν αὐτόν τόν ἀριθμόν ὅστις σχηματίζεται ἀπό τά ἴδια τά ψηφία γεγραμμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν νά λαμβάνωμεν ἄθροισμα 77.*

Λύσις.- Ὁ ζητούμενος ἀριθμός ἔστω ὅτι ἔχει x δεκάδας καί y μονάδας. Οὗτος γράφεται $\overline{xy} = x.10 + y$. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν θά ἔχωμεν τάς κάτωθι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 1 \\ (x.10+y)+(y.10+x) &= 77 \end{aligned}\right\} (1)$$ Αὗται γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 1 \\ (x.10+x)+(y.10+y) &= 77 \end{aligned}\right\} (2) \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{aligned} y - x &= 1 \\ 11x + 11.y &= 7.11 \end{aligned}\right\} (3) \quad \text{ἤ}$$

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 1 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\} (4)$$ Προσθέτοντες τάς δύο ταύτας ἰσότητας κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\left.\begin{aligned} &(y-x)+(x+y) = 1+7 \\ \text{ἤ}\quad &(y+y)+(x-x) = 8 \\ \text{ἤ}\quad &2.y + 0 = 8 \\ \text{ἤ}\quad &2.y = 2.4 \rightsquigarrow \boxed{y=4} \end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (4) ἕπεται $x+y = 7 \rightsquigarrow x+4 = 7 \rightsquigarrow$ $\rightarrow x = 7-4 \rightarrow \boxed{x=3}$

Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ $\boxed{34}$.

19. *Εὕρετε ἀριθμόν τοῦ ὁποίου τό διπλάσιον ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ αὐξηθέν κατά 18.*

Λύσις.- Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός· κατά τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θά ἰσχύη ἡ σχέσις: $2x = \frac{x}{2} + 18$ (1)

Πολλ/μεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί 2 ὅτε:

$4x = x + 36 \rightsquigarrow 4x - x = 36 \rightarrow 3.x = 3.12 \rightarrow \boxed{x=12}$

20. *Ὑπολογίσατε δύο ἀριθμούς γνωρίζοντες ὅτι ἔχουν ἄθροισμα 29 καί ὅτι τό διπλάσιον τοῦ δευτέρου ὑπερβαίνει κατά 16 τόν πρῶτον.*

Λύσις.- Ἔστωσαν x καί y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί· οὗτοι σύμφωνα μέ τά ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος θά πληροῦν τάς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=29 \\ 2y-x=16 \end{array}\right\} (1)$$ Θά ἰσχύη ὅμως καί ἡ διά προσθέσεως, τῶν δύο τούτων προκύπτουσα ἰσότης:

$$\begin{cases} (x+y)+(2y-x)=29+16 \\ (x+y-x)+2y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+x-x)+2y=45 \\ y+0+2y=45 \end{cases}$$

$$3y=3.15 \rightsquigarrow \boxed{y=15}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) $\rightsquigarrow x+y=29 \rightsquigarrow x+15=29 \rightsquigarrow x=29-15$ $\rightsquigarrow \boxed{x=14}$.

Οἱ ζητούμενοι λοιπόν ἀριθμοί εἶναι οἱ <u>14</u> καί <u>15</u>.

21. *Ἐπί ποίων θεωρημάτων βασίζονται αἱ ἰσότητες:*
$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$, $(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)$
$(\alpha-\gamma)+\beta=\alpha+(\beta-\gamma)$, $(\alpha+\gamma)-\beta=\alpha-(\beta-\gamma)$
$(\alpha-\beta)+\gamma=\alpha-(\beta-\gamma)$; *Ὑποτίθεται ὅτι αἱ σημειούμεναι ἀφαιρέσεις εἶναι δυναταί.*
Λύσις.- Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος (§30), πρόσθεσις διαφορᾶς (§31, i), πρόσθεσις διαφορᾶς (§31, ii), ἀφαίρεσις διαφορᾶς (§32, i), ἀφαίρεσις διαφορᾶς (§32, ii).

22. *Ἐάν $\nu>8$ δικαιολογήσατε τάς ἰσότητας:*
$(\nu-5)+2=\nu-3$, $(\nu+1)-9=\nu-8$, $(\nu-4)-3=\nu-7$
Λύσις.- i) $(\nu-5)+2=(\nu-5)+(5-3)=\{(\nu-5)+5\}-3=\nu-3$ (§31, i), ii) $(\nu+1)-9=(\nu+1)-(1+8)=$ (§30) $=\{(\nu+1)-1\}-8=$ $=\nu-8$, iii) $(\nu-4)-3=(\nu-4)-(7-4)=\{(\nu-4)+4\}-7=\nu-7$ (§32, i).

23 *Δείξατε ὅτι ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων δέν βλάπτεται ἄν μειωτέος καί ἀφαιρετέος ἐλαττωθοῦν ἤ αὐξηθοῦν κατά τόν αὐτόν ἀριθμόν.*
Λύσις.- $(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\{(\alpha+\delta)-\delta\}-\beta=\alpha-\beta$ καθώς καί
$(\alpha-\delta)-(\beta-\delta)=\{(\alpha-\delta)+\delta\}-\beta=\alpha-\beta$

24 *Τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 550. Ἐάν ὁ ἕνας παράγων*

αὐξηθῇ κατά 5, τό γινόμενον γίνεται 675. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

Λύσις.– Ἔστωσαν x καί y οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Βάσει τῆς ἐκφωνήσεως θά ἔχωμεν τάς κάτωθι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot y=550 \\ (x+5)\cdot y=675 \end{array}\right\}(1) \qquad \left.\begin{array}{l} x\cdot y=550 \\ xy+5y=675 \end{array}\right\}(2)$$

Θά ἰσχύῃ ὅμως καί ἡ ἰσότης ἡ προκύπτουσα δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη τῶν (2), ἤτοι:

$$\left.\begin{array}{l} (xy+5y)-xy=675-550 \\ 5y=125 \\ \text{ἤ}\quad 5y=5.25 \rightsquigarrow \boxed{y=25} \end{array}\right\}$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) ἔχομεν:

$$x\cdot y=550 \rightsquigarrow x.25=22.25 \rightsquigarrow \boxed{x=22}$$

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι οἱ <u>22</u> καί <u>25</u>.

25. Ὁ ἀριθμός $2^4.3^2.7^{14}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον;

Λύσις.– Ἔχομεν: $2^4.3^2.7^{14}=(2^2)^2.3^2.(7^7)^2$ (§ 47, ἰδιότης ii) $=(2^2.3.7^7)^2$ (§ 47, ἰδιότης iii), ἄρα εἶναι τέλειον τετράγωνον.

26. Ἄν ν φυσικός ἀριθμός ἀποδείξατε ὅτι:

$$2^{2\nu}=4^\nu,\ 2^{3\nu}=8^\nu,\ 2^{\nu+1}-2^\nu=2^\nu,\ 3^{\nu+1}-2.3^\nu=3^\nu.$$

Λύσις.– Ἐφαρμόζομεν τάς ἰδιότητας τῆς ὑψώσεως δυνάμεως εἰς δύναμιν καί τοῦ γινομένου δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως ὁπότε:

$$2^{2\nu}=(2^2)^\nu=(4)^\nu=4^\nu$$
$$2^{3\nu}=(2^3)^\nu=(8)^\nu=8^\nu$$
$$2^{\nu+1}-2^\nu=2^\nu.2^1-2^\nu=2^\nu(2^1-1)=2^\nu.1=2^\nu$$
$$3^{\nu+1}-2.3^\nu=3^\nu.3^1-2.3^\nu=3^\nu(3^1-2)=3^\nu.1=3^\nu.$$

27. Λαμβάνομεν τρία ὡρισμένα ἐκ τῶν ψηφίων 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ἔστω τά ψ_1, ψ_2, ψ_3. Κατασκευάζομεν 6 διψηφίους ἀριθμούς ἕκαστος τῶν ὁποίων περιέχει δύο ἐκ τῶν τριῶν ψηφίων ψ_1, ψ_2, ψ_3. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν 6 τούτων ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ 22 φοράς τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων ψ_1, ψ_2, ψ_3.

<u>Λύσις.</u>– Οἱ 6 διψήφιοι εἶναι: $\overline{\psi_1\psi_2}$, $\overline{\psi_1\psi_3}$, $\overline{\psi_2\psi_1}$, $\overline{\psi_2\psi_3}$, $\overline{\psi_3\psi_1}$, $\overline{\psi_3\psi_2}$ καί ἔχουν ἄθροισμα: $(\psi_2+10\psi_1)+(\psi_3+10\psi_1)+$

$+(\psi_1+10\psi_2)+(\psi_3+10\psi_2)+(\psi_1+10\psi_3)+(\psi_2+10\psi_3)=10\psi_1+10\psi_1+\psi_1+\psi_1+10\psi_2+10\psi_2+\psi_2+\psi_2+10\psi_3+10\psi_3+\psi_3+\psi_3=22\psi_1+22\psi_2+22\psi_3=22(\psi_1+\psi_2+\psi_3)$.

28. *Ἔστωσαν α καί β δύο φυσικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $\alpha<\beta$. Πόσοι φυσικοί ἀριθμοί x ὑπάρχουν τέτοιοι ὥστε $\alpha\leqq x\leqq\beta$;*

Λ ύ σ ι ς. Ἀπό 1 ἕως β συμπεριλαμβανομένου, ὑπάρχουν β φυσικοί ἀριθμοί $(1, 2, 3, \ldots, \beta)$ καί ἀπό 1 ἕως $(\alpha-1)$ ὑπάρχουν $(\alpha-1)$ φυσικοί ἀριθμοί. Ἄν ἀπό τούς β πρώτους διαγράψωμεν τούς $(\alpha-1)$ δευτέρους θ' ἀπομείνουν οἱ ἀριθμοί ἀπό α μέχρι β συμπεριλαμβανομένων. Τό ζητούμενον πλῆθος: $\beta-(\alpha-1)=\beta-\alpha+1$.

29. *Πόσοι διαφορετικοί μεταξύ των πενταψήφιοι ἀριθμοί ὑπάρχουν;*

Λ ύ σ ι ς.– Προφανῶς κάθε 5-ψήφιος ἀριθμός ἔστω ὁ x, πληροῖ τήν σχέσιν $10000\leqq x\leqq 99999$. Πλῆθος αὐτῶν κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν: $99999-10000+1=90000$.

30. *Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $2\alpha^2+2\beta^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$.*

Λ ύ σ ι ς.– $2\alpha^2+2\beta^2=\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)$ (1)
Ὡς γνωστόν ὅμως $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$ καί ἡ (1) γίνεται: $(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$

31. *Ἐάν ἀκέραιος εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων δείξατε ὅτι καί τό διπλάσιόν του εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.*

Λ ύ σ ι ς.– Ἔστω k ἕνας ἀκέραιος τοιοῦτος ὥστε:
$k=\alpha^2+\beta^2$ (1),
Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη της ἐπί 2:
$2k=2(\alpha^2+\beta^2)=2\alpha^2+2\beta^2=$ δυνάμει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως (30) $=\underline{(\alpha+\beta)^2}+\underline{\underline{(\alpha-\beta)^2}}=\underline{\lambda}^2+\underline{\underline{\mu}}^2$.

32. Ν' ἀποδειχθῆ ὅτι $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) = (\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.
Λ ύ σ ι ς.- $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) = \alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2$ (§ 42) $=$
$= \{(\alpha\gamma)^2+(\beta\delta)^2+2\alpha\beta\gamma\delta\}+\{(\alpha\delta)^2+(\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma\delta\} =$
$= (\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.

33. Ἐάν ἕκαστος ἐκ δύο ἀκεραίων εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων, δείξατε ὅτι καί τό γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀκεραίων εἶναι πάλιν ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων (βλ. ἀσκ. 32).
Λ ύ σ ι ς.- Συνέπεια τῆς ἀσκ. 32.

34. Ἐάν τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 97 καί τό γινόμενόν των 1020, πόσον εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν;
Λ ύ σ ι ς.- $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = 97^2-2.1020 = 7449$.

35. Ἐάν ἡ διαφορά δύο ἀκεραίων εἶναι 1 καί τό γινόμενόν των 1020, πόσον εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο τούτων ἀκεραίων;
Λ ύ σ ι ς.- $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta = 1^2+2.1020 = 2041$.

36. Νά εὑρεθῆ τό τετράγωνον τοῦ 999, θεωρουμένου ὡς διαφορᾶς $1000-1$.
Λ ύ σ ι ς.- $999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2+1-2.1.1000 =$
$= 1.000.000 - 2.000 + 1 = 998.001$.

37. Ἐάν α καί β ἀκέραιοι, δείξατε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\alpha^4+2\alpha^2+1$, $\alpha^4-6\alpha^2+9$, $9\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta+1$ εἶναι ἕκαστος, τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου.
Λ ύ σ ι ς.- $\alpha^4+2\alpha^2+1 = (\alpha^2+1)^2 = \lambda^2$: διότι ἀφοῦ $\alpha \in A \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \alpha^2 \in A \rightsquigarrow (\alpha^2+1) = \lambda \in A$
ὅπου Α τό σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς.
$\alpha^4-6\alpha^2+9 = (\alpha^2-3)^2 = k^2$: δι' ὅμοιον ὡς ἄνω λόγον (πρέπει ὅμως ἐδῶ νά εἶναι $\alpha \geqq 2$).
$9\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta+1 = (3\alpha\beta-1)^2 = \mu^2$ (πρέπει ὅμως ἐδῶ νά εἶναι $\alpha\beta \neq 0$).

38. Ἐάν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου $\alpha.\beta$ αὐξηθοῦν κατά 7, τό γινόμενον αὐξάνεται κατά 364. Εὕρετε τούς α καί β γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\alpha-\beta=5$.

Λ ύ σ ι ς.– Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+7)(\beta+7)&=\alpha\beta+364\\ \alpha-\beta&=5\end{aligned}\right\}(1)$$

Ἡ πρώτη τῶν (1) γίνεται μετά τάς πράξεις

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\beta+7\beta+7\alpha+49=\alpha\beta+364\\ \text{ἤ}\quad&7(\alpha+\beta)=364-49\\ \text{ἤ}\quad&7(\alpha+\beta)=7.45\\ \text{ἤ}\quad&\alpha+\beta=45\qquad(2)\end{aligned}\right\}$$

Κατά τά γνωστά θά ἰσχύη καί ἡ ἰσότης ἡ προκύπτουσα διά προσθέσεως τῆς δευτέρας τῶν (1) καί τῆς (2) ἤτοι:

$$(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)=5+45$$

$$2\alpha=2.25 \rightsquigarrow \boxed{\alpha=25}$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν: $\alpha+\beta=45 \rightsquigarrow 25+\beta=45 \rightsquigarrow$ $\beta=45-25 \rightsquigarrow \boxed{\beta=20}$

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι οἱ <u>25</u> καί <u>20</u>.

39. Ἐάν $\alpha\neq\beta$, ἀποδείξατε ὅτι $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$ (βλ. § 49, iv καί § 28, ii)

Λ ύ σ ι ς.– Ἀρκεῖ νά ὑπάρχη φυσικός ἀριθμός ὅστις προστιθέμενος εἰς τόν $2\alpha\beta$ νά δίδη τόν $\alpha^2+\beta^2$. Πράγματι $2\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2=$ $=\alpha^2+\beta^2$ (ὑποτίθεται $\alpha>\beta$).

40. Ἐάν x καί y φυσικοί ἀριθμοί, δείξατε ὅτι:

$$x>y \Leftrightarrow 10^x>10^y.$$

Λ ύ σ ι ς.– $x>y \Rightarrow x=y+\theta$ ὅπου θ φυσικός ἀριθμός. Ἄρα $10^x=10^{y+\theta}=10^y.10^\theta$. Ἔχομεν: $10^\theta>1 \Rightarrow$ (§ 44) $10^y.10^\theta>10^y$ $\Rightarrow 10^{y+\theta}>10^y \Rightarrow 10^x>10^y$. Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι $10^x>10^y$. Τότε, ἀποκλείεται $x=y$. Ἐπίσης ἀποκλείεται $x<y$ διότι κατά τό προαποδειχθέν θά εἴχομεν τότε $10^x<10^y$. Ἑπομένως, μένει $x>y$.

41. Ἐάν $\beta=\pi o\lambda 3+1$ (ἤτοι ἄν ὁ β εἶναι ἄθροισμα ἑνός πολλαπλασίου τοῦ 3 καί μιᾶς μονάδος), δείξατε ὅτι θά εἶναι:

$$\beta^2=\pi o\lambda 3+1,\quad \beta^3=\pi o\lambda 3+1,\ \ldots,\ \beta^\nu=\pi o\lambda 3+1\quad (\nu \text{ φυσικός})$$

Λ ύ σ ι ς.– i) $\beta=3\rho+1 \Rightarrow \beta^2=(3\rho+1)^2=9\rho^2+6\rho+1=$ $=3\rho(3\rho+2)+1=\pi o\lambda 3+1$. ii) $\beta^3=\beta^2.\beta=(\pi o\lambda 3+1)(\pi o\lambda 3+1)=$

$= \text{πολ}3 . \text{πολ}3 + \text{πολ}3 + \text{πολ}3 + 1 = \text{πολ}3 + 1$.

iii) $\beta^4 = \beta^3 . \beta = (\text{πολ}3+1)(\text{πολ}3+1) = \text{πολ}3+1$. Βλέπομεν ὅτι ἄν μία δύναμις τοῦ β εἶναι πολ3+1 καί ἡ ἀμέσως ἑπομένη δύναμις τοῦ β εἶναι πάλιν πολ3+1. Αὐξάνοντες λοιπόν τόν ἐκθέτην τοῦ β κατά μίαν μονάδα ἑκάστοτε, δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς οἱονδήποτε ἐκθέτην θέλομεν.

42. *Ἐάν $\beta = \text{πολ}5+3$ δείξατε ὅτι:*

$$\beta^2 = \text{πολ}5+4, \quad \beta^3 = \text{πολ}5+2, \quad \beta^4 = \text{πολ}5+3.$$

Λ ύ σ ι ς.- i) $\beta = 5\rho+3 \Rightarrow \beta^2 = (5\rho+3)^2 = 25\rho^2+30\rho+9 = 25\rho^2+30\rho+5+4 = 5(5\rho^2+6\rho+1)+4 = \text{πολ}5+4$. ii) $\beta^3 = \beta^2 . \beta = (\text{πολ}5+4)(\text{πολ}5+3) = (5\kappa+4)(5\lambda+3)$ (κ, λ φυσικοί ἀριθμοί) $= 25\kappa\lambda+15\kappa+20\lambda+12 = 5(5\kappa\lambda+3\kappa+4\lambda+2)+2 = \text{πολ}5+2$.

iii) $\beta^4 = \beta^3 . \beta$ καί ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

43. *Ἐάν $\nu = \text{πολ}5+1$ δείξατε ὅτι τότε:*

$$3\nu^2+3\nu-1 = \text{πολ}5$$

Λ ύ σ ι ς.- $\nu = 5\rho+1 \Longrightarrow 3\nu^2+9\nu-1 = 3(5\rho+1)^2+3(5\rho+1)-1 = 3(25\rho^2+10\rho+1)+15\rho+3-1 = 75\rho^2+30\rho+15\rho+5 = \text{πολ}.5$.

44. *Ἐάν $\nu = \text{πολ}5+2$, δείξατε ὅτι: $2\nu+1 = \text{πολ}5$, $\nu+3 = \text{πολ}5$.*

Λ ύ σ ι ς.- Ὅπως αἱ προηγούμεναι.

45. *Ποῖα εἶναι τά πολλαπλάσια τοῦ 5 τά μή ὑπερβαίνοντα τό 30 καί ποῖα τά μή ὑπερβαίνοντα τό 34;*

Λ ύ σ ι ς.- $0\times5,\ 1\times5,\ 2\times5,\ 3\times5,\ 4\times5,\ 5\times5,\ 6\times5 \leqq 30$

$0\times5,\ 1\times5,\ 2\times5,\ 3\times5,\ 4\times5,\ 5\times5,\ 6\times5 < 34$.

46. *Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι οἱ ὁποῖοι πολλαπλασιαζόμενοι ἐπί 37 δίδουν γινόμενον ὀλιγώτερον τοῦ 427;*

Λ ύ σ ι ς.- Θεωροῦντες ὡς διαιρετέον τόν 427 καί ὡς διαιρέτην τόν 37 λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἰσότητος τῆς διαιρέσεως: $427 = 37.11+20$. Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι κάθε ἀκέραιος μή μεγαλύτερος τοῦ 11 πολλ/ζων τόν 37 τόν καθιστᾶ μικρότερον τοῦ 427. Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί εἶναι: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

47. *Ἄν ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι τό 7, ποῖα τά δυνατά ὑπόλοιπα;*

Λ ύ σ ι ς.- Ἐκ τῆς ἰσότητος τῆς διαιρέσεως λαμβάνομεν: $\alpha = 7.\pi+\upsilon$ μέ $0 \leqq \upsilon < 7$, κατά συνέπειαν τά δυνατά ὑπόλοιπα εἶναι: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

48. *Εὕρετε τούς ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διά 3 δίδουν πηλίκον διπλάσιον τοῦ ὑπολοίπου.*

Λύσις.— Ἂν μέ $\underline{x}$ παραστήσωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν καί μέ $\underline{υ}$ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά $\underline{3}$, τότε, τό πηλίκον, σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν θά εἶναι $\underline{2υ}$ ὅτε ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως δίδει:

$$x = 3.2υ + υ \rightsquigarrow x = 6υ + υ \rightsquigarrow x = 7.υ$$

ὅπου $0 \leqq υ < 3$ ἤτοι τό υ λαμβάνει μίαν τῶν τιμῶν 0, 1, 2 ὅτε $x = 0$ ἤ $x = 7 \cdot 1 = 7$ ἤ $x = 7 \cdot 2 = 14$.

49. *Εὕρετε τούς ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διά 11 δίδουν πηλίκον, ἴσον μέ τό ὑπόλοιπον.*

Λύσις.— Ἔστω $\underline{x}$ ἕνας ἐκ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, ἄν $\underline{υ}$ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά $\underline{11}$ μέ $0 \leqq υ < 11$. Τότε σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν $\underline{υ}$ θά εἶναι καί τό πηλίκον, ὅτε ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$x = 11.υ + υ \rightsquigarrow x = 12.υ$, ἀλλά εἴδαμεν ποίας τιμάς λαμβάνει τό υ. Ἑπομένως τό x θά λαμβάνῃ τάς ἀντιστοίχους: $0.12 = 0$, $1.12 = 12$, $2.12 = 24$, $3.12 = 36$, $4.12 = 48$, $5.12 = 60$, $6.12 = 72$, $7.12 = 84$, $8.12 = 96$, $9.12 = 108$, $10.12 = 120$.

50. *Ὁ διαιρετέος μιᾶς διαιρέσεως εἶναι 4227, τό πηλίκον 13 καί τό ὑπόλοιπον 171. Ποῖος εἶναι ὁ διαιρέτης;*

Λύσις.— Ἔστω x ὁ διαιρέτης· σύμφωνα μέ τά δεδομένα ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως λαμβάνει τήν μορφήν:

$$4227 = x.13 + 171 \quad (1) \rightsquigarrow 4227 - 171 = x.13 \rightsquigarrow 4.056 = x.13 \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow 13.312 = x.13 \rightsquigarrow \boxed{x = 312}$$

51. *Τό γινόμενον δύο περιττῶν δείξατε ὅτι εἶναι περιττός.*

Λύσις.— Ἂν μέ $2ρ+1$ καί $2λ+1$ παραστήσωμεν τούς δύο περιττούς θά ἔχωμεν τό γινόμενόν των

$$(2ρ+1)(2λ+1) = 2ρ.2λ + 2λ + 2ρ + 1 =$$
$$= 2\underbrace{(2ρλ + λ + ρ)}_{κ} + 1 = 2κ + 1 \rightsquigarrow \text{περιττός.}$$

52. *Εὕρετε τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά 9, τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν:*

$$175^2, \ (1827)^{22}, \ (1828)^{11}, \ (4321)^3$$

Λ ύ σ ι ς.– i) $175 = 3.58 + 1 = πολ3 + 1 \Rightarrow 175^2 = (πολ3+1)^2 = πολ3+1$ (ὑπόλ. 1). ii) $1827 = 3.609 = πολ3 \Rightarrow (1827)^{22} = (πολ3)^{22} = πολ3$ (ὑπόλ. 0). iii) $1828 = 3.609 + 1 = πολ3 + 1 \Rightarrow (1828)^{11} = (πολ3+1)^{11} = πολ3+1$ σύμφωνα πρός τήν ἄσκ. 41 (ὑπόλ. 1). iv) $4321 = 3.1440 + 1 = πολ3+1 \Rightarrow (4321)^3 = (πολ3+1)^3 = πολ3+1$ (ὑπολ. 1)

53. *Ἐάν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως α:β εἶναι υ, τότε τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως (λα):(λβ) εἶναι λ.υ ἐνῶ τό πηλίκον εἶναι τό αὐτό.*

Λ ύ σ ι ς.– $α = βπ + υ$ μέ $υ < β \Rightarrow λα = λ(βπ + υ) \Rightarrow λα = (λβ).π + λυ$. Ἡ τελευταία εἶναι ἰσότης διαιρέσεως μέ πηλίκον π καί ὑπόλοιπον $λυ < λβ$ (§ 44).

54. *Ἐάν δύο ἀκέραιοι διαιρούμενοι διά β δίδουν τό αὐτό ὑπόλοιπον, τότε οὗτοι διαφέρουν κατά πολ.β.*

Λ ύ σ ι ς.– $α = βπ + υ$ καί $γ = βπ' + υ$ τότε δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη: $α - γ = βπ + υ - (βπ' + υ) = \{(βπ + υ) - υ\} - βπ' = βπ - βπ' = β(π - π') = πολβ$.

55. *Ἐάν δύο ἀκέραιοι διαφέρουν κατά πολβ, τότε διαιρούμενοι διά β, δίδουν τό ἴδιο ὑπόλοιπον.*

Λ ύ σ ι ς.– Ἔστωσαν οἱ ἀκέραιοι α καί γ διαφέροντες κατά πολβ ἔστω Κβ. Τότε, $α = γ + κβ$. Ἔστω ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως τοῦ γ διά β: $γ = βπ + υ$ (1). Προσθέτομεν Κβ εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) καί λαμβάνομεν $γ + κβ = βπ + κβ + υ \Rightarrow α = β(π + κ) + υ$. Ἡ τελευταία δεικνύει ὅτι καί ὁ α διαιρούμενος διά β δίδει πάλιν ὑπόλοιπον υ.

56. *Δείξατε ὅτι, ἄν δύο ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα ἄρτιον, τότε ἔχουν καί διαφοράν ἀρτίαν. Ἄν ἔχουν ἄθροισμα περιττόν, ἔχουν καί διαφοράν περιττήν.*

Λ ύ σ ι ς.– $α + β = 2κ$ (Κ ἀκέραιος). Τότε $α - β = (α + β) - 2β = 2κ - 2β = 2(κ - β) =$ ἄρτιος. Ἐάν $α + β = 2κ + 1$, τότε $α - β = (α + β) - 2β = 2κ + 1 - 2β = 2(κ - β) + 1 = 2ρ + 1 =$ περιττός.

57. *Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιον καί ὅτι τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀρτίων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8.*

Λ ύ σ ι ς.– $2\kappa.(2\kappa+2)=4\kappa(\kappa+1)$. Εἷς ἐκ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων κ καί $\kappa+1$ θά εἶναι ἄρτιος ἄρα καί τό γινόμενον $\kappa(\kappa+1)$ θά εἶναι ἄρτιος, ἔστω ὁ 2ρ. Ὥστε ὅ $2\kappa(2\kappa+2)=4.2\rho=8\rho=$πολ8.

58. *Δείξατε ὅτι τό τετράγωνον ἑνός περιττοῦ ἀκεραίου εἶναι ἕνα πολ. 8 ηὐξημένου κατά 1.*

Λ ύ σ ι ς.– $(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=4\kappa(\kappa+1)+1=$πολ$8+1$, διότι κατά τήν ἄσκ.57. $\kappa(\kappa+1)=$ἄρτιος$=2\rho \Rightarrow 4\kappa(\kappa+1)=8\rho$.

59. *Ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν, εἶναι πάντοτε, πολ.8.*

Λ ύ σ ι ς.– $(2\kappa+1)^2-(2\lambda+1)^2=(4\kappa^2+4\kappa)-(4\lambda^2+4\lambda)=4\kappa(\kappa+1)\text{-}4\lambda(\lambda+1)$ = διαφορά δύο πολλαπλασίων τοῦ 8. (βλ. λύσιν ἀσκ. 58)

60. *Εὕρετε τούς διαιρέτας τοῦ 24. Δείξατε ὅτι ὁ 28 ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν διαιρετῶν του.*

Λ ύ σ ι ς.– Οὗτοι εἶναι: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Τοῦ 28 εἶναι οἱ: 1,2,4,7,14,28 καί $\dfrac{1+2+4+7+14+28}{2}=\dfrac{2.28}{2}=28$

ὅ.ἔ.δ.

61. *Ἐάν $\alpha\neq 0$ καί δ/α δείξατε ὅτι τότε $\delta\leqq\alpha$.*

Λ ύ σ ι ς.– Θά ἔχωμεν ὅτι $\alpha=\kappa\delta$ ὅπου κ ἀκέραιος. Δέν εἶναι $\kappa=0$ διότι τότε θά ἦτο καί $\alpha=0$. Ἑπομένως εἶναι $\kappa\geqq 1$. Πολ/ντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς τελευταίας ἐπί δ λαμβάνομεν $\kappa.\delta\geqq\delta$ ἤ $\alpha\geqq\delta$ ἤ $\delta\leqq\alpha$.

62. *Ἐάν δ/α καί $\delta>\alpha$ δείξατε ὅτι τότε $\alpha=0$.*

Λ ύ σ ι ς.– Θά ἔχωμεν $\alpha=\kappa\delta$ ὅπου κ ἀκέραιος. Ὁ κ δέν δύναται νά εἶναι >1, διότι $\kappa>1\Rightarrow\kappa\delta>\delta\Rightarrow\alpha>\delta$ ὅπερ ἀντίκειται εἰς τήν ὑπόθεσιν. Μένει λοιπόν νά εἶναι $\kappa=0\Rightarrow\alpha=0$ (βλ. Α΄ § 53).

63. *Ἐάν $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\nu$ ἀκέραιοι καί $\alpha\neq 0$ τότε ἄν α/β καί α/γ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha/(\beta\mu+\gamma\nu)$.*

Λύσις:– βλέπε Α΄. §50, i.

64. Νά δειχθῆ ὅτι δέν ὑπάρχει ἀκέραιος ὅστις διαιρούμενος διά 12 νά δίδη ὑπόλοιπον 5 καί συγχρόνως διαιρούμενος διά 15 νά δίδη ὑπόλοιπον 4.

Λύσις.– Ἐάν ὑπῆρχε τοιοῦτος ἀκέραιος α θά εἴχομεν: $\alpha=12\pi+5$ καί $\alpha=15\pi+4$ καί συνεπῶς, $12\pi+5=15\pi'+4$ ἤ $5-4=15\pi'-12\pi$ ἤ $1=3(5\pi'-4\pi)$. Ἡ τελευταία αὐτή ἰσότης εἶναι ἄτοπος διότι παρουσιάζει τό 1 ὡς γινόμενον τοῦ 3 ἐπί ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τόν $5\pi'-4\pi$.

65 Νά εὑρεθοῦν πάντες οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι διά δεδομένου ἀκεραίου β, δίδουν πηλίκον ἴσον πρός τό ὑπόλοιπον.

Λύσις.– Ἔστω x ἕνας ἐκ τῶν ζητουμένων. Τότε πρέπει $x=\beta\pi+\upsilon$ μέ $\pi=\upsilon<\beta \Rightarrow x=\beta\upsilon+\upsilon=(\beta+1)\upsilon$ μέ $\upsilon<\beta$. Οἱ ἀριθμοί εἶναι οἱ $\boxed{(\beta+1)\upsilon}$ διά $\upsilon=0,1,2,\ldots\beta-1$ δηλ. β ἀριθμοί.

66. Εὕρετε τόν Μ.Κ.Δ. τῶν 36 καί 48, τῶν 60 καί 90, τῶν 163 καί 34, τῶν 288 καί 158, τῶν 3456 καί 7234.

Λύσις.– Χρησιμοποιοῦντες τήν μέθοδον τοῦ Εὐκλειδίου ἀλγορίθμου λαμβάνομεν δι᾽ ἕκαστον ζεῦγος:

I) $\left.\begin{array}{l}\underline{48}=\underline{36}.1+12\\ \underline{36}=12.3+0\end{array}\right\}$ Ὅτε κατά τά γνωστά ἐκ τῆς θεωρίας θά εἶναι: $(48,36)=(36,12)=\underline{12}$.

II) $\left.\begin{array}{l}\underline{90}=\underline{60}.1+30\\ \underline{60}=\underline{30}.2+0\end{array}\right\}$ $(90,60)=(60,30)=\underline{30}$

III) $\left.\begin{array}{l}\underline{163}=\underline{34}.4+27\\ \underline{34}=\underline{27}.1+7\\ \underline{27}=\underline{7}.3+6\\ \underline{7}=\underline{6}.1+1\\ \underline{6}=\underline{1}\ 6+0\end{array}\right\}$ $(163,34)=(34,27)=(27,7)=$
$=(7,6)=(6,1)=\underline{1}$

Ἄρα εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

IV) $\left.\begin{array}{l}\underline{288}=\underline{158}.1+130\\ \underline{158}=\underline{130}.1+28\\ \underline{130}=\underline{28}.4+18\end{array}\right.$

$$\left.\begin{aligned} \underline{28} &= \underline{18}\cdot 1 + 10 \\ \underline{18} &= \underline{10}\cdot 1 + 8 \\ \underline{10} &= \underline{8}\cdot 1 + 2 \\ \underline{8} &= \underline{2}\cdot 4 + 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(288,\ 158) = (158,\ 130) = (130,28) = \\ &= (28,\ 18) = (18,\ 10) = (10,8) = \\ &= (8,\ 2) = \underline{2} \end{aligned}$$

ν)

$$\left.\begin{aligned} \underline{7234} &= \underline{3456}\cdot 2 + 322 \\ \underline{3456} &= \underline{322}\cdot 10 + 236 \\ \underline{322} &= \underline{236}\cdot 1 + 86 \\ \underline{236} &= \underline{86}\cdot 2 + 64 \\ \underline{86} &= \underline{64}\cdot 1 + 22 \\ \underline{64} &= \underline{22}\cdot 2 + 20 \\ \underline{22} &= \underline{20}\cdot 1 + 2 \\ \underline{20} &= \underline{2}\cdot 10 + 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(7234,\ 3456) = (3456,\ 322) = \\ &= (322,\ 236) = (236,\ 86) = \\ &= (86,\ 64) = (64,\ 22) = \\ &= (22,\ 20) = (20,\ 2) = \underline{2} \end{aligned}$$

7. *Νά εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 480, 1280 καί 1680 καθώς καί τῶν 144, 216 καί 256.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν καί ἀκολούθως τόν Μ.Κ.Δ. τοῦ εὑρεθέντος Μ.Κ.Δ. τῶν δύο καί τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ.

Ι)

$$\left.\begin{aligned} \underline{1280} &= \underline{480}\cdot 2 + 320 \\ \underline{480} &= 320\cdot 1 + 160 \\ 320 &= \underline{160}\cdot 2 + 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1280,\ 480) = (480,\ 320) = \\ &= (320,\ 160) = \underline{160} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{1680} &= \underline{160}\cdot 10 + 80 \\ \underline{160} &= \underline{80}\cdot 2 + 0 \end{aligned}\right\} \quad (1680,\ 160) = (160,\ 80) = \underline{80}$$ οὗτος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 480, 1280, 1680

ΙΙ)

$$\left.\begin{aligned} \underline{216} &= \underline{144}\cdot 1 + 72 \\ \underline{144} &= \underline{72}\cdot 2 + 0 \end{aligned}\right\} \quad (216,144) = (144,\ 72) = \underline{72}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{256} &= \underline{72}\cdot 3 + 40 \\ \underline{72} &= \underline{40}\cdot 1 + 32 \\ \underline{40} &= \underline{32}\cdot 1 + 12 \\ \underline{32} &= \underline{12}\cdot 2 + 8 \\ \underline{12} &= \underline{8}\cdot 1 + 4 \\ \underline{8} &= \underline{4}\cdot 2 + 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(256,72) = (72,\ 40) = (40,\ 32) = \\ &= (32,\ 12) = (12,8) = (8,4) = \underline{4} \end{aligned}$$

οὗτος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 144, 216, 256.

68. *Νά εὑρεθῇ ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος α ὅστις διαιρῶν τόν 4373 δίδει ὑπολ. 8 καί διαιρῶν τόν 826 δίδει ὑπολ. 7.*
Λύσις.- Θά πρέπη : $4373 = \alpha.\pi + 8$ καί $826 = \alpha\pi' + 7$. Ἄρα $4373 - 8 = \alpha\pi$, $826 - 7 = \alpha\pi'$, δηλ. ὁ ζητούμενος α θά εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $4373 - 8 = 4365$ καί $826 - 7 = 819$. Ἐπειδή δέ ὁ α θά εἶναι ὁ μεγαλύτερος δυνατός ἀκέραιος, ἕπεται ὅτι θά εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 4365 καί 819 ἤτοι ὁ 9.

69. *Νά εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί x καί y ἔχοντες Μ.Κ.Δ. τόν 12, ὅταν τά διαδοχικά πηλίκα τά ἀνευρισκόμενα κατά τήν ἀναζήτησιν τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι 8, 2, 7.*
Λύσις.- Ἔστω $x > y$. Ἡ πρώτη διαίρεσις δίδει: $x = 8y + \upsilon_1$ (1). Ἡ δευτέρα: $y = 2\upsilon_1 + \upsilon_2$ (2). Ἡ τρίτη $\upsilon_1 = 7\upsilon_2 + 0$ (3) ὅπου υ_2 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. δηλ. $\upsilon_2 = 12$. Ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν $\upsilon_1 = 7.12 = 84$, ἐκ τῆς (2), $y = 2.84 + 12 = 180$ καί ἐκ τῆς (1), $x = 8.180 + 84 = 1524$.

70. *Εὕρετε ὅλους τούς κ.δ. τῶν τριῶν ἀριθμῶν 375, 2325 καί 3525.*
Λύσις.- Θά εὕρωμεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἱ δέ διαιρέται τούτου δυνάμει τῆς θεωρίας θά εἶναι οἱ κοινοί διαιρέται αὐτῶν :

$$\left.\begin{aligned}
\underline{3525} &= \underline{2325}.1 + 1200\\
\underline{2325} &= \underline{1200}.1 + 1125\\
\underline{1200} &= \underline{1125}.1 + 75\\
\underline{1125} &= \underline{75}.16 + 25\\
\underline{75} &= \underline{25}.3 + 0
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&(3525\ ,\ 2325) = (2325,\ 1200) =\\
&= (1200\ ,\ 1125) = (1125\ ,\ 75) =\\
&= (75, 25) = \underline{25}
\end{aligned}$$

$$\left.\underline{375} = \underline{25}.15\ \right\}\ (375, 25) = \underline{25}$$ οὗτος εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 3525 , 2325 , 375 . Οἱ κ.δ. αὐτῶν θά εἶναι διαιρέται τοῦ Μ.Κ.Δ. = 25 ἤτοι οἱ: 1, 5, 25.

71. *Νά δειχθῇ ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β εἶναι καί Μ.Κ.Δ. τῶν $\alpha + \beta\gamma$ καί $\alpha + \beta(\gamma - 1)$.*
Λύσις.- Πᾶς κ.δ. τῶν α καί β εἶναι προφανῶς καί κ.δ. τῶν $\alpha + \beta\gamma$ καί $\alpha + \beta(\gamma - 1)$. Ἀντιστρόφως, ἔστω δ ἕνας κ.δ.

τῶν $\alpha+\beta\gamma$ καί $\alpha+\beta(\gamma-1)$. Οὗτος θά διαιρῆ καί τήν διαφοράν των $\{\alpha+\beta\cdot\gamma\}-\{\alpha+\beta(\gamma-1)\}=\beta$. Ἀφοῦ $\delta|\beta \Rightarrow \delta|\beta\gamma$. Ἀφοῦ ὁ δ διαιρῆ τό ἄθροισμα $\alpha+\beta\gamma$ καί διαιρῆ καί τόν ἕνα προσθετέον (τόν $\beta\gamma$) ἕπεται ὅτι θά διαιρῆ καί τόν ἄλλον δηλ. τόν α. Ὥστε ὁ δ θά εἶναι κ.δ. τῶν β καί α. Ἤτοι τά δύο ζεύγη α, β καί $\alpha+\beta\gamma$, $\alpha+\beta(\gamma-1)$ ἔχουν τούς ἰδίους κοινούς διαιρέτας.

72. *Νά εὑρεθῆ τό Ε.Κ.Π. τῶν 7 καί 2, τῶν 3 καί 6, τῶν 12 καί 30, τῶν 56 καί 84, τῶν 54 καί 63.*

Λύσις.- I) Λαμβάνομεν τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν καί εὑρίσκομεν τό πρῶτον πολλαπλάσιον αὐτοῦ, τό διαιρετόν διά τοῦ μικροτέρου· τοῦτο εἶναι τό ζητούμενον Ε.Κ.Π. τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ε.Κ.Π. τῶν 7,2: 0.7, 1.7, 2.7. Τό 2.7 = <u>14</u> διαιρεῖται διά 2 ἄρα εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν 7,2.

II) Ὁμοίως τῶν 3,6 εἶναι τό <u>6</u>

III) Ὁμοίως τῶν 12, 30 εἶναι τό <u>60</u> = 2.30.

IV) Ὁμοίως τῶν 56, 84 εἶναι τό <u>168</u> = 2.84

V) Ὁμοίως τῶν 54, 63 εἶναι τό <u>378</u> = 6.63

73. *Νά εὑρεθῆ τό Ε.Κ.Π. τῶν 6, 9, 12, τῶν 8, 34, 36, τῶν 6, 5, 3, 12 τῶν 12, 4, 9, 18.*

Λύσις.- I) Εὑρίσκομεν τό Ε.Κ.Π. δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν ὡς ἀνωτέρω καί ἀκολούθως τό Ε.Κ.Π τοῦ εὑρεθέντος καί τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ.

Ε.Κ.Π. τῶν 6, 12 εἶναι τό <u>12</u>
Ε.Κ.Π. τῶν 12, 9 εἶναι τό <u>36</u> = 3.12
Ὥστε τό Ε.Κ.Π. τῶν 6, 9, 12 εἶναι τό <u>36</u>

II) Ε.Κ.Π. τῶν 8, 36 εἶναι τό <u>72</u> = 2.36
Ε.Κ.Π. τῶν 72, 34 εἶναι τό <u>1224</u> = 17.72
Ε.Κ.Π. τῶν 8, 34, 36 εἶναι τό <u>1224</u>

III) Ἐπειδή ὁ 12 εἶναι πολ)σιον τῶν 6 καί 3, παραλείπομεν τούς 6 καί 3 (βλ. σελ. 40, iii)
Ε.Κ.Π. τῶν 5, 12 εἶναι τό <u>60</u> = 5×12
Ε.Κ.Π. τῶν 3, 5, 6, 12 εἶναι τό <u>60</u>

IV) Ἐπειδή τό $12 = \pi o\lambda 4$ καί τό $18 =$
$= \pi o\lambda 9$ παραλείπομεν τούς 4 καί 1.
Ε.Κ.Π. τῶν 12, 18 εἶναι τό $\underline{36} = 2 \cdot 18$

Ε.Κ.Π. τῶν 4, 8, 9, 12 εἶναι τό $\underline{36}$

74. *Νά εὑρεθῇ τό Ε.Κ.Π. τῶν 8, 3, 18, 20, 24, 12.*

Λ ύ σ ι ς.- Ὡς ἀνωτέρω ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν:

Ε.Κ.Π. τῶν 3, 12, 24 εἶναι τό $\underline{24}$
Ε.Κ.Π. τῶν 8, 20 εἶναι τό $\underline{40}$
Ε.Κ.Π. τῶν 18, 24, 40 εἶναι τό $\underline{360}$

Ε.Κ.Π. τῶν 3, 8, 12, 18, 20, 24 εἶναι τό $\underline{360}$.

75. *Δύο κινητά κινούμενα ὁμορρόπως ἐπί περιφερείας, διανύουν αὐτήν, τό μέν πρῶτον εἰς 72 ὥρας τό δέ δεύτερον εἰς 108 ὥρας. Ἐάν κατά τινα στιγμήν εὑρίσκωνται συγχρόνως εἰς ἕνα σημεῖον Α τῆς περιφερείας, μετά πόσον χρόνον θά εὑρίσκωνται πάλιν μαζί εἰς τό Α;*

Λ ύ σ ι ς.- Μετά χρόνον ὅστις θά εἶναι Κ.Π. τῶν 72 καί 108. Διά πρώτην φοράν θά συμβῇ μετά χρόνον ὅστις εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν 72 καί 108, ἤτοι μετά 216 ὥρας.

76. *Εὕρετε ἀκέραιον <400 ὅστις διαιρούμενος διά 2 ἤ 3 ἤ 4 ἤ 5 δίδει ὑπόλοιπον 1 καί διαιρούμενος διά 7 δίδει ὑπόλοιπον μηδέν.*

Λ ύ σ ι ς.- Ἔστω x ὁ ἀκέραιος μέ $x < 400$. Δυνάμει τῆς ἐκφωνήσεως θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cdot\pi_2 + 1 \\ x &= 3\cdot\pi_3 + 1 \\ x &= 4\cdot\pi_4 + 1 \\ x &= 5\cdot\pi_5 + 1 \\ x &= 7\cdot\pi_7 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Παρατηρῶ ὅτι ἄν ἀφαιρέσω ἀπό τά μέλη τῶν 4 πρώτων ἰσοτήτων ἐκ τῶν (1) τήν μονάδα θά λάβω:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= 2\cdot\pi_2 \\ x - 1 &= 3\cdot\pi_3 \\ x - 1 &= 4\cdot\pi_4 \\ x - 1 &= 5\cdot\pi_5 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ἤτοι ὁ $x-1$ εἶναι ἕν κοινόν πολλ/σιον τῶν 2, 3, 4, 5. Σύμφωνα μέ τήν θεωρίαν θά εἶναι οὗτοι πολλαπλάσιον τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν 2, 3, 4, 5 πού εἶναι τό $\underline{60}$.

Ἐπειδή ὅμως πρέπει $x < 400$ θά εἶναι καί $x-1 < 400$ ἤτοι ὁ $x-1$ θά εἶναι ἕνα ἀπό τά πολλαπλάσια τοῦ 60 τά μικρότερα τοῦ 400 ἤτοι θά λαμβάνη μίαν τῶν τιμῶν:

$x-1$: $0.60 = 0$, $1.60 = 60$, $2.60 = 120$, $3.60 = 180$, $4.60 = 240$, $5.60 = 300$, $6.60 = 360$ ὁπότε:

x: $0.60+1 = 1$, $1.60+1 = 61$, $2.60+1 = 121$, $3.60+1 = 181$, $4.60+1 = 241$, $5.60+1 = 301$, $6.60+1 = 361$.

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων δεκταί θά εἶναι ὅσαι εἶναι πολ 7.

Εὑρίσκομεν $x = \underline{301}$.

77. *Μεταξύ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι πάντοτε, πολ. 3 καί μεταξύ 5 διαδοχικῶν ἀκεραίων, ὁ εἷς εἶναι πολ. 5.*

Λ ύ σ ι ς.– I) Παριστῶμεν τούς τρεῖς διαδοχικούς ἀκεραίους μέ: $\alpha, \alpha+1, \alpha+2$. Ὁ α διαιρούμενος διά 3 θά δίδη ἕν τῶν κάτωθι ὑπολοίπων : 0 ἤ 1 ἤ 2.

Ἄν $\alpha = 3\rho$, ἰσχύει ἡ πρότασις.

Ἄν $\alpha = 3\rho+1$ τότε ὁ $\alpha+2$ εἶναι:

$\alpha+2 = (3\rho+1)+2 = 3\rho+3 = 3(\rho+1) = \text{πολ } 3$ ὅτε πάλιν ἰσχύει ἡ πρότασις.

Ἄν $\alpha = 3\rho+2$ τότε ὁ $\alpha+1$ εἶναι:

$\alpha+1 = (3\rho+2)+1 = 3\rho+3 = 3(\rho+1) = \text{πολ } 3$ ὅτε πάλιν ἰσχύει ἡ πρότασις.

II) Ὁμοίως.

78. *Τό γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 6.*

Λ ύ σ ι ς.– Θέλομεν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) = \text{πολλ } 6$.

Ὡς γνωστόν μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι ἄρτιος, συνεπῶς τό γινόμενόν των εἶναι πολλ. 2. Εἴδομεν ὅμως (ἄσκησις 77) ὅτι ἐκ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι πολλ.3. Ἄρα τό γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετόν καί διά 2 καί διά 3 ἀλλά καί διά 6.

79. *Τό γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 120.*

Λ ύ σ ι ς.– Τό ἀποδεικτέον συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) \doteq$ πολλ. 120.

"Έχομεν ἀποδείξει ὅτι μεταξύ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι πολλ.3 (ἄσκ. 77).

Ἐπίσης ἔχομεν ἀποδείξει (ἄσκησις 77) ὅτι μεταξύ πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι πολλ.5.

Ἐπίσης μεταξύ τῶν 5 διαδοχικῶν ὑπάρχουν 2 διαδοχικοί ἄρτιοι ἄρα (ἄσκ. 57) τό γινόμενον εἶναι διαιρετόν διά 8.

Ὡς ἐκ τούτου διά τό γινόμενον τῶν πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων θά ἔχωμεν ὅτι εἶναι διαιρετόν καί διά 3, διά 5 καί διά 8, δηλ. διά τριῶν ἀριθμῶν πρώτων πρός ἀλλήλους ἀνά δύο. "Άρα εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν $3.5.8=120$.

80. *Ἐάν ν ἀκέραιος, δείξατε ὅτι τό γινόμενον $\nu(\nu+2)(5\nu-1)(5\nu+1)$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 24.*

Λύσις.- Ἐάν ν ἄρτιος τότε τό γινόμενον $\nu(\nu+2)$ εἶναι διαιρετόν διά 8 (ἄσκ. 57). Ἐάν ν περιττός τότε τό $(5\nu-1)(5\nu+1)$ εἶναι γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀρτίων, ἄρα διαιρετόν διά 8. Ὥστε πάντοτε, τό δοθέν γινόμενον διαιρεῖται διά 8. Μένει νά δείξωμεν ὅτι εἶναι διαιρετόν διά 3.

Ἐάν $\nu=$ πολ3 τότε τό γινόμενον εἶναι διαιρετόν διά 3

Ἐάν $\nu=$ πολ3+1 τότε τό $\nu+2=$ πολ3+3 $=$ πολ3

Ἐάν $\nu=$ πολ3+2 τότε $5\nu-1=5($πολ3+2$)-1=$ πολ3+9 $=$ πολ3.

"Άρα πάντοτε τό γινόμενον εἶναι διαιρετόν καί διά 3.

81. *Ἐάν ν=πολ.5+3 ἤ ν=πολ.5+1 τότε $5(3\nu^2+3\nu-1)$.*

Λύσις.- βλέπε ἄσκ. 43.

82. *Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός, τότε οἱ ν καί ν+1 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.*

Λύσις.- "Εστω ὅτι οἱ ν, ν+1 δέν εἶναι πρῶτοι· τότε ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν θά εἶναι ἕνας φυσικός $k>1$ ἤτοι: $(\nu,\nu+1)=k\neq1$. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἕπεται ὅτι $k|\nu$ καί $k|\nu+1$. Τότε ὅμως ὁ k θά διαιρῇ καί τήν διαφοράν των $(\nu+1)-\nu=1$ ἤτοι $k|1$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον διότι ὑπετέθη $k>1$. Συνεπῶς ἡ ὑπόθεσίς μας ὅτι $k>1$ δέν εἶναι ὀρθή, ἄρα $k=1$ ὅτε $(\nu,\nu+1)=1$

ἤτοι εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

83. *Ἐάν ἡ διαφορά καί τό γινόμενον δύο ἀκεραίων εἶναι ἄρτια, τότε ἀμφότεροι οἱ ἀκέραιοι εἶναι ἄρτιοι.*
Λύσις.- Ἐξ ὑποθέσεως $2|(\alpha-\beta) \Rightarrow 2|\alpha(\alpha-\beta)$ ἤ $2|(\alpha^2-\alpha\beta)$. Ἐπειδή $2|\alpha\beta \Rightarrow 2|(\alpha^2-\alpha\beta)+\alpha\beta=\alpha^2$. Ἄρα ὁ α^2 εἶναι ἄρτιος. Ἐπειδή τό τετράγωνον περιττοῦ εἶναι περιττόν, (ἄσκ.51) ἕπεται ὅτι α = ἄρτιος. Ὁμοίως:
$2|(\alpha-\beta) \Rightarrow 2|\beta(\alpha-\beta) \Rightarrow 2|(\alpha\beta-\beta^2)$ καί $2|\alpha\beta$ ἄρα
$2|\alpha\beta-(\alpha\beta-\beta^2)$ ἤ $2|\beta^2$. Ὥστε β^2 = ἄρτιος $\Rightarrow \beta$ = ἄρτιος.

84. *Ἐάν ν τυχών ἀκέραιος δείξατε ὅτι:*

$$30/\ \nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1).$$

Λύσις.- α) Τό γινόμενον διαιρεῖται διά 2 διότι τό $\nu(\nu+1)$ = πολ2 (ἄσκ.57). β΄) Τό γινόμενον διαιρεῖται διά 3. Διότι: ἄν ν = πολ3 τότε καί τό γινόμενον εἶναι πολ3. Ἄν ν = πολ3+1 $\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\nu+1$ = πολ3+3 = πολ3 ἄρα καί τό γινόμενον διαιρεῖται διά 3. Ἄν ν = πολ3+2 $\Rightarrow \nu+1$ = πολ3+3 = πολ3. γ) Τό γινόμενον διαιρεῖται διά 5. Ἐξετάζομεν τάς 5 περιπτώσεις: ν = πολ5, ν = = πολ5+1, ν = πολ5+2, ν = πολ5+3, ν = πολ5+4 καί βλέπομεν ὅτι εἰς ὅλας, τό γινόμενον εἶναι πολ5 διότι πάντοτε ἕνας ἐκ τῶν 5 παραγόντων εἶναι ἑκάστοτε πολ5. Ἄρα (§56, θεωρ.2ον) διαιρεῖται καί διά $2.3.5=30$.

85 *Ἀναγνωρίσατε ἄν οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί εἶναι πρῶτοι:*

713, 1121, 1471, 4313, 4189, 2963, 4453, 4307, 4327.

Λύσις.- Δοκιμάζομεν, κατά τά γνωστά, ἄν ὁ δοθείς ἀριθμός διαιρῆται διά τινος πρώτου. Ἄν ναί εἶναι **σύνθετος**, ἄν ὄχι εἶναι πρῶτος.

I) $713 = \underline{23}.31$ ἄρα σύνθετος
II) $1121 = \underline{19}.59$ » »
III) $1471 < 1681 = 41^2$ καί δέν διαιρεῖται μέ πρῶτον <41 ἄρα εἶναι πρῶτος.
IV) $4313 = \underline{19}.227$ ἄρα σύνθετος.
V) $4189 = \underline{59}.71$ » »
VI) $2963 < 3481 = 59^2$ καί δέν διαιρεῖται μέ πρῶτον <59 ἄρα πρῶτος.

VII) $4493 < 5041 = 71^2$ καί δέν διαιρεῖται μέ πρῶτον < 71 ἄρα πρῶτος.
VIII) $4307 = 59 . 73$ ἄρα σύνθετος.
IX) $4327 < 4489 = 67^2$ καί δέν διαιρεῖται μέ πρῶτον < 67 ἄρα εἶναι πρῶτος.

86) *Εὕρετε τόν ἀκέραιον ν γνωρίζοντες ὅτι:*

$$\nu(\nu+1)(2\nu+1) = 84$$

Λύσις.- Οἱ ν, $\nu+1$, $2\nu+1$ εἶναι διαιρέται τοῦ 84. Ἀναλύομεν τόν 84 εἰς πρώτους παράγοντας: $84 = 3 . 2^2 . 7$ καί ἡ ἐξίσωσις γράφεται: $\nu(\nu+1)(2\nu+1) = 3.4.7$. Βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νά εἶναι $\nu = 3$ ὁπότε $\nu+1 = 4$, $2\nu+1 = 7$ καί ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται.

87. *Δι' ἀναλύσεως τοῦ 2025 εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων δείξατε ὅτι οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ὁμοίως διά τόν ἀριθμόν 11025.*

Λύσις.- Ἀναλύομεν τούς δοθέντας ἀριθμούς κατά τά γνωστά εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καί ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζοντες ἰδιότητας τῶν δυνάμεων ἀποδεικνύομεν τό ζητούμενον.

I)

2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

ὅτε $2025 = 3.3.3.3.5.5 = 3^4 . 5^2 = (3^2 . 5)^2 = (45)^2$

II)

11025	3
3675	3
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

ὅτε $11025 = 3.3.5.5.7.7 = 3^2 . 5^2 . 7^2 = (3.5.7)^2 = (105)^2$

88. *Ἀναλύσατε εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν: 86805, 4805, 4225, 2772.*

Λύσις.- Ἡ ἀνάλυσις γίνεται κατά τά γνωστά (σελ. 44).

I)

86805	3
28935	3
9645	3
3215	5
643	643
1	

ὅτε: $86805 = 3^3 . 5 . 643$

II)

4805	5
961	31
31	31
1	

ὅτε: $4805 = 5 . 31^2$

III)

4225	5
845	5
169	13
13	13
1	

ὅτε: $4225 = 5^2 . 13^2$

IV)

2772	2
1386	2
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

ὅτε: $2772 = 2^2 . 3^2 . 7 . 11$

89. *Εὕρετε τόν Μ.Κ.Δ. τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν:*

11088 καί 38808, 5292 καί 44100. Ἐπίσης τῶν 144, 216 καί 256.

Λύσις.- Πρός τοῦτο ἀναλύομεν τούς δοθέντας ἀριθμούς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, κατά τά γνωστά, καί σχηματίζοντες τό γινόμενον ὅλων τῶν κοινῶν εἰς τούς ἀριθμούς πρώτων παραγόντων, ὑψωμένου ἑκάστου εἰς τήν μικροτέραν δύναμιν, ἔχομεν τόν ζητούμενον Μ.Κ.Δ.

1)

11088	2	38808	2
5544	2	19404	2
2772	2	9702	2
1386	2	4851	3
693	3	1617	3
231	3	539	7
77	7	77	7
11	11	11	11
1		1	

ὅτε: $11088 = 2^4 . 3^2 . 7 . 11$. ὅτε: $38808 = 2^3 . 3^2 . 7^2 . 11$

Ἄρα:
$(11088, 38808) =$
$= 2^3 . 3^2 . 7 . 11 =$
$= \underline{5544}$

II)

5292	2	44100	2
2646	2	22050	2
1323	3	11025	3
441	3	3675	3
147	3	1225	5
49	7	245	5
7	7	49	7
1		7	7
		1	

ὅτε: $5292 = 2^2 . 3^3 . 7^2$ ὅτε: $44100 = 2^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2$.

Ἄρα:
$(5292, 4410) =$
$= 2^2 . 3^2 . 7^2 =$
$= \underline{1764}$

III)

144	2	216	2	256	2
72	2	108	2	128	2
36	2	54	2	64	2
18	2	27	3	32	2
9	3	9	3	16	2
3	3	3	3	8	2
1		1		4	2
				2	2
				1	

ὅτε: $144 = 2^4 . 3^2$ ὅτε: $216 = 2^3 . 3^3$ ὅτε: $256 = 2^8$

Ἄρα:
Μ.Κ.Δ. $= 2^3 = \underline{8}$

90. *Εὕρετε τό Ε.Κ.Π. τῶν 6, 24, 30, 18. Ὁμοίως τῶν 180, 84, 1188. Ὁμοίως τῶν 210, 100, 1290.*

Λ ύ σ ι ς.- Πρός τοῦτο ἀναλύομεν τούς δοθέντας ἀριθμούς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καί σχηματίζοντες τό γινόμενον ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων οἱ ὁποῖοι παρουσιάζονται καί μέ ἕκαστον ὑψωμένου εἰς τόν μέγιστον ἐκθέτην μέ τόν ὁποῖον συναντᾶται, ἔχομεν τό ζητούμενον Ε.Κ.Π.

I)

6	2	24	2	30	2	18	2
3	3	12	2	15	3	9	3
1		6	2	5	5	3	3
		3	3	1		1	
		1					

ὅτε: $6 = 2.3$ ὅτε: $24 = 2^3.3$ ὅτε: $30 = 2.3.5$ ὅτε: $18 = 2.3^2$

Ἄρα Ε.Κ.Π. $= 2^3 . 3^2 . 5 = \underline{360}$

II)

180	2	84	2	1188	2
90	2	42	2	594	2
45	3	21	3	297	3
15	3	7	7	99	3
5	5	1		33	3
1				11	11
				1	

ὅτε: $180 = 2^2.3^2.5$ ὅτε: $84 = 2^2.3.7$ ὅτε: $1188 = 2^2.3^3.11$

Ἄρα Ε.Κ.Π. $= 2^2 . 3^3 . 5 . 7 . 11 = \underline{41580}$

III

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1290 & 2 \\ 645 & 3 \\ 215 & 5 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

ὅτε: $210 = 2.3.5.7$ ‖ ὅτε: $100 = 2^2.5^2$ ‖ ὅτε: $1290 = 2.3.5.43$

Ἄρα $Ε.Κ.Π. = 2^2.3.5^2.7.43 = \underline{90.300}$

91. *Τρία γεγονότα ἐμφανίζονται περιοδικῶς, τό πρῶτον ἀνά 15 ἡμέρας, τό δεύτερον ἀνά 22 ἡμέρας καί τό τρίτον ἀνά 36 ἡμέρας. Ἐάν ταῦτα ἐμφανισθοῦν συγχρόνως μίαν Κυριακήν, ζητεῖται μετά πόσας ἡμέρας, θά ἐμφανισθοῦν πάλιν Κυριακήν;*

Λύσις.– Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό Ε.Κ.Π. τῶν 15, 22, 36 καί 7. Τοῦτο εἶναι $2^2.3^2.5.7.11 = 13860$ ἡμέρας.

92. *Ἐάν α φυσικός ἀριθμός > 4 δείξατε ὅτι:*

$$600 \mid (α^4-1)α^2(α^4-16)$$

Λύσις.– $Π = (α^4-1)α^2(α^4-16) = (α^2-1)(α^2+1)α^2(α^2-4)(α^2+4) =$

(§ 49, iii) $= (α+1)(α-1)(α^2+1)(α+2)(α-2)(α^2+4)α^2 =$

$= (α-2)(α-1)α(α+1)(α+2).α(α^2+1)(α^2+4).$

Τό γινόμενον τῶν 5 διαδοχικῶν $(α-2)(α-1)α(α+1)(α+2)$ διαιρεῖται διά 120 (ἄσκ. 79) ἄρα δυνάμεθα νά γράψωμεν:

(1) $Π = 120 \times Κ \times α(α^2+1)(α^2+4)$ ὅπου Κ, ἀκέραιος.

Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι $α(α^2+1)(α^2+4) = πολ5$. Ἐξετάζομεν τάς 5 περιπτώσεις:

1) $α = πολ5$, 2) $α = πολ5+1 \Rightarrow α^2+4 = πολ5+5 = πολ5$,
3) $α = πολ5+2 \Rightarrow α^2 = πολ5+4 \Rightarrow α^2+1 = πολ5$, 4) $α = πολ5+3$
$\Rightarrow α^2 = πολ5+9 \Rightarrow α^2+1 = πολ5+10 = πολ5$. 5) $α = πολ5+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow α^2 = πολ5+16 \Rightarrow α^2+4 = πολ5+20 = πολ5$ καί βλέπομεν ὅτι πάντοτε $α(α^2+1)(α^2+4) = πολ5 = 5ρ$ (ρ ἀκέραιος). Ἡ (1) γράφεται $Π = 120 \times Κ \times 5ρ = 600 \times Κρ = πολ600$ ἤ $600 \mid Π$.

93. *Προσδιορίσατε δύο ἀκεραίους ἔχοντας Μ.Κ.Δ. = 36 καί Ε.Κ.Π. = 756.*

Λύσις.– Ἔχομεν ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. $= 2^2.3^2$ καί Ε.Κ.Π. $= 2^2.3^3.7$ τῶν α καί β. Κατ' ἀρχήν οἱ α καί β θά περιέχουν τούς παράγοντας 2^x ὁ εἷς καί 2^y ὁ ἄλλος. Ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἐκθετῶν x, y πρέπει νά εἶναι ὁ 2 (διότι εἰς τόν Μ.Κ.Δ. ὑπάρχει ὁ 2^2) καί ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν x, y πρέπει νά εἶναι ὁ 2, (διότι εἰς τό Ε.Κ.Π. ὑπάρχει ὁ 2^2). Ἄρα $x=y=2$. Ἑπομένως οἱ ἀριθμοί θά εἶναι τῆς μορφῆς (1) $\{\alpha=2^2.\kappa,\ \beta=2^2.\lambda\}$. Οἱ k καί λ πρέπει νά περιέχουν τούς παράγοντας 3^x καί 3^y μέ μικρότερον ἐκθέτην τόν 2 καί μεγαλύτερον τόν 3. Ἄρα ἤ $x=2$, $y=3$, ἤ $x=3$, $y=2$. Ἑπομένως, βάσει τῆς (1), οἱ ἀριθμοί θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}\alpha=2^2.3^2.\kappa' \\ \beta=2^2.3^3.\lambda'\end{array}\right. \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{array}{l}\alpha=2^2.3^3.\kappa'' \\ \beta=2^2.3^2.\lambda''\end{array}\right\}$$

Διά νά ὑπάρχῃ καί ὁ 7 εἰς τό Ε.Κ.Π. πρέπει ἤ $\kappa'=7$ $\lambda'=1$ ἤ $\kappa'=1$, $\lambda'=7$. Ἐπίσης: ἤ $\kappa''=7$, $\lambda''=1$ ἤ $\kappa''=1$, $\lambda''=7$. Συνεπῶς ἔχομεν τέσσαρας ἀπαντήσεις:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=2^2.3^2.7 \\ \beta=2^2.3^3\end{array}\right., \quad \begin{array}{l}\alpha=2^2.3^2 \\ \beta=2^2.3^3.7\end{array}, \quad \begin{array}{l}\alpha=2^2.3^3.7 \\ \beta=2^2.3^2\end{array}, \quad \left.\begin{array}{l}\alpha=2^2.3^3 \\ \beta=2^2.3^2.7\end{array}\right\}$$

Ὑπάρχουν δύο ζεύγη ἀριθμῶν

$\{252, 108\}$ καί $\{756, 36\}$.

94. *Ποῖον ἀριθμόν παριστάνει τό $323_{<4>}$ ἤ τό $333_{<5>}$ ἤ τό $335_{<6>}$.*

Λύσις.— i) $323_{<4>}=3+2.4+3.4^2=59$

ii) $333_{<5>}=3+3.5+3.5^2=93$

iii) $335_{<6>}=5+3.6+3.6^2=131$.

95. *Πῶς παρίσταται ὁ ἀριθμός 27, ὡς πρός βάσιν 2 ἤ 3 ἤ 4 ἤ 5 ἤ 9 ἤ 12;*

Λύσις.— i)

$$\left.\begin{array}{r|l|l|l|l} 27 & 2 & & & \\ \hline 1 & 13 & 2 & & \\ \cline{3-3} & 1 & 6 & 2 & \\ \cline{4-4} & & 0 & 3 & 2 \\ \cline{5-5} & & & 1 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 27_{<10>}=11011_{<2>}$$

ii) $27=3^3 \Rightarrow 27_{<10>}=0+0.3+0.3^2+1.3^3=1000_{<3>}$

iii)

$$\left.\begin{array}{r|l|l} 27 & 4 & \\ \hline 3 & 6 & 4 \\ \cline{3-3} & 2 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 27=123_{<4>}$$

IV) $\begin{array}{r|l|l} 27 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 5 \\ & 0 & 1 \end{array} \Big\} \Rightarrow 27 = 102_{<5>}$

V) $\begin{array}{r|l} 27 & 9 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Big\} \Rightarrow 27 = 30_{<9>}$

VI) $27 = 12.2 + 3 = 23_{<12>}$ (3 μονάδες, 2 δεκάδες)

96. *Προσδιορίσατε τούς ἀκεραίους x, y, ω, φ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι πάντες <4 καί ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης:*

$$x + y.4 + \omega.4^2 + \varphi.4^3 = 210.$$

Λ ύ σ ι ς.– Ἀρκεῖ νά γράψωμεν τόν 210 εἰς τό τετραδικόν σύστημα. Τά ψηφία του (ὡς πρός βάσιν 4) εἶναι τά φ, ω, y, x.

Ἄλλη λ ύ σ ι ς.– $210 = 4(y + 4\omega + 4^2\varphi) + x$ καί ἐπειδή $x < 4$ ἕπεται ὅτι ὁ x εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 210 διά 4 ὥστε $x = 2$. Ἔχομεν λοιπόν: $2 + 4y + 16\omega + 64\varphi = 210$ ἤ $4y + 16\omega + 64\varphi = 208$, ἤ $y + 4\omega + 16\varphi = 52$ ἤ $52 = 4(\omega + 4\varphi) + y$. Ὥστε τό y εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 52 διά 4, δηλ. $\varphi = 0$ κ.ο.κ. Εὑρίσκομεν $x = 2$, $y = 0$, $\omega = 1$, $4 = 3$.

97. *Ὁ ἀριθμός $7842_{<9>}$ (τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος) νά γραφῇ εἰς τό σύστημα μέ βάσιν 7.*

Λ ύ σ ι ς.– Τρέπομεν πρῶτον τόν $7842_{<9>}$ εἰς τό δεκαδικόν σύστημα καί κατόπιν εἰς τό ἑπταδικόν. Εὑρίσκομεν $22610_{<7>}$.

98. *Εἰς πᾶν σύστημα ἀριθμήσεως, μέ βάσιν $\beta > 2$, ὁ ἀριθμός $121_{<\beta>}$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.*

Λ ύ σ ι ς.– $121_{<\beta>} = 1 + 2\beta + \beta^2 = (\beta + 1)^2$ (§ 49, i)

99. *Ἐάν α ἀκέραιος δείξατε ὅτι προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες a^2 εἰς τόν ἀριθμόν $a^4 + a^2 + 1$ καί χρησιμοποιοῦντες τάς ἰσότητας § 49, i, iii, δυνάμεθα νά μετατρέψωμεν τόν ἀριθμόν αὐτόν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.*

Λ ύ σ ι ς.– $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$.

100. Νά δειχθῆ ὅτι $111_{<\beta>} \mid 10101_{<\beta>}$ καί νά εὑρεθῆ τό πηλίκον τῆς τελείας ταύτης διαιρέσεως.

Λύσις.— $10101_{<\beta>} = 1+\beta^2+\beta^4 = (\beta^2+\beta+1)(\beta^2-\beta+1)$ (ἄσκ.99) $=$ πολ/σιον τοῦ $(1+\beta+\beta^2) =$ πολ/σιον τοῦ $111_{<\beta>}$.

100α. Ἔστω β ἡ βάσις ἀριθμήσεως. Ἐξ ὅλων τῶν ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι γράφονται μέ ν ψηφία εἰς τό σύστημα τοῦτο ἀριθμήσεως, εὕρετε ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Πόσος γίνεται οὗτος ἄν αὐξηθῆ κατά μονάδα;

Λύσις.— Ὁ ν-ψήφιος ἀκέραιος $\alpha = \psi_1+\psi_2\beta+\psi_3\beta^2+\dots+\psi_\nu\beta^{\nu-1}$ θά εἶναι προφανῶς μέγιστος ὅταν ὅλα τά ψηφία του λάβουν τήν μεγίστην δυνατήν τιμήν ἡ ὁποία εἶναι $\beta-1$. Ἑπομένως:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\varepsilon\gamma} &= (\beta-1)+(\beta-1)\beta+(\beta-1)\beta^2+\dots+(\beta-1)\beta^{\nu-1} = \\ &= (\beta-1)+(\beta^2-\beta)+(\beta^3-\beta^2)+\dots+(\beta^\nu-\beta^{\nu-1}) = \\ &= \beta^\nu-1 \end{aligned}$$

(βλ. §30, iii, Α΄ μέρος). Προφανῶς, $\alpha_{\mu\varepsilon\gamma.}+1=\beta^\nu$.

101. Ν᾿ ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

$$\frac{8\times4\times30}{21\times2\times5}, \quad \frac{3^2\times2\times5}{18\times15}, \quad \frac{2^3\times3^2\times5}{2\times3\times5^2}, \quad \frac{27\times14\times20}{49\times18\times8}$$

Λύσις.— i) $= \dfrac{8\times4\times6}{21\times2}$ (ἁπλ. διά 5) $= \dfrac{8\times2\times6}{21}$ (ἁπλ. διά 2) $= \dfrac{8\times2\times2}{7}$ (ἁπλ. διά 3) $= \dfrac{32}{7}$. Διά τ᾿ ἄλλα εὑρίσκομεν ὁμοίως ἐργαζόμενοι: $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{3}{2}$

102. Ν᾿ ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

$$\frac{88}{132}, \quad \frac{672}{288}, \quad \frac{456}{513}, \quad \frac{651}{483}, \quad \frac{759}{858}, \quad \frac{540}{420}$$

δι᾿ ἀναλύσεως τῶν ὅρων των εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Λύσις.— Ἀναλύομεν τούς ὅρους τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καί ἀκολούθως ἁπλοποιοῦμεν ταῦτα κατά τά γνωστά:

I)

$$\begin{array}{r|l} 88 & 2 \\ 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$88 = 2^3 \cdot 11 \qquad 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$$\rightsquigarrow \frac{88}{132} = \frac{2^3 \cdot 11}{2^2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{2}{3}$$

II)

$$\begin{array}{r|l} 672 & 2 \\ 336 & 2 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \qquad 288 = 2^5 \cdot 3^2$

$$\rightsquigarrow \frac{672}{288} = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 7}{2^5 \cdot 3^2} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

III)

$$\begin{array}{r|l} 456 & 2 \\ 228 & 2 \\ 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 513 & 3 \\ 171 & 3 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19 \qquad 513 = 3^3 \cdot 19$

$$\rightsquigarrow \frac{456}{513} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 19}{3^3 \cdot 19} = \frac{2^3}{3^2} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

IV)

$$\begin{array}{r|l} 651 & 3 \\ 217 & 7 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 483 & 3 \\ 161 & 7 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$651 = 3 \cdot 7 \cdot 31 \qquad 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$

$$\rightsquigarrow \frac{651}{483} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 31}{3 \cdot 7 \cdot 23} = \boxed{\frac{31}{23}}$$

V)

$$\begin{array}{r|l} 759 & 3 \\ 253 & 11 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 858 & 2 \\ 429 & 3 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$759 = 3 \cdot 11 \cdot 23$

$858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$

$$\rightsquigarrow \frac{759}{858} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 23}{2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{23}{2 \cdot 13} = \boxed{\frac{23}{26}}$$

VI)

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \qquad 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$$\rightsquigarrow \frac{540}{420} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \boxed{\frac{9}{7}}$$

103 *Νά γίνουν ἀνάγωγα τά κλάσματα:*

$$\frac{154}{182}, \quad \frac{216}{126}, \quad \frac{264}{396}, \quad \frac{240}{520}, \quad \frac{240}{312}, \quad \frac{310}{651}$$

Λύσις.- Πρός τοῦτο θά διαιρέσωμεν τούς ὅρους ἑκάστου διά τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν.

I)
$$\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 182 & 2 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$(154, 182) = 2.7$

$$\frac{154}{182} = \frac{2.7.11}{2.7.13} = \boxed{\frac{11}{13}}$$

II)
$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$(216, 126) = 2.3^2$

$$\frac{216}{126} = \frac{2^3.3^3}{2.3^2.7} = \frac{\frac{2^3.3^3}{2.3^2}}{\frac{2.3^2.7}{2.3^2}} = \frac{2^2.3}{7} = \boxed{\frac{12}{7}}$$

III)
$$\begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$(264, 396) = 2^2.3.11$

$$\frac{264}{396} = \frac{\frac{2^3.3.11}{2^2.3.11}}{\frac{2^2.3^2.11}{2^2.3.11}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

IV)
$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 520 & 2 \\ 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$(240, 520) = 2^3.5$

$$\frac{240}{520} = \frac{\frac{2^4.3.5}{2^3.5}}{\frac{2^3.5.13}{2^3.5}} = \boxed{\frac{6}{13}}$$

V)
$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 312 & 2 \\ 156 & 2 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$(240, 312) = 2^3.3$

$$\frac{240}{312} = \frac{2^4.3.5}{2^3.3.13} = \frac{\frac{2^4.3.5}{2^3.3}}{\frac{2^3.3.13}{2^3.3}} = \boxed{\frac{10}{13}}$$

VI)
$$\begin{array}{r|l} 310 & 2 \\ 155 & 5 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 651 & 3 \\ 217 & 7 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$(310, 651) = 31$

$$\frac{310}{651} = \frac{\frac{2.5.31}{31}}{\frac{3.7.31}{31}} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

104. Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{a^7}{a^3},\quad \frac{x^4}{x^9},\quad \frac{x^2y^2}{x^4y^6},\quad \frac{a^2x^5y^3}{ax^6y},\quad \frac{121a^2x^3}{55a^3x^4}$$

Λ ύ σ ι ς.– Εὑρίσκομεν a^4, $1/x^5$, $1/x^2y^4$, ay^2/x, $11/5ax$.

105. Νὰ γίνουν ἀνάγωγα τὰ κλάσματα:

$$\frac{9409}{10767},\quad \frac{11304}{30144},\quad \frac{6426}{8262}$$

Λύσις. i) Εὑρίσκομεν τὸν Μ.Κ.Δ. τῶν 9409 καὶ 10767 διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαιρέσεων (§54) καὶ ἁπλοποιοῦμεν τὸ κλάσμα διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν δύο ὅρων του, ὁπότε τὸ κλάσμα καθίσταται ἀνάγωγον (§56, 3ον). Εὑρίσκομεν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα 97/111.
ii) Διὰ τὸ 11304/30144 εὑρίσκομεν Μ.Κ.Δ. = 157 καὶ τὸ ἰσοδύναμον ἀνάγωγον 9/16. iii) Ἐνταῦθα δυνάμεθα ν' ἀναλύσωμεν εἰς πρώτους παράγοντας. Εὑρίσκομεν 7/9.

106. Ἐὰν a ἀκέραιος δείξατε ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{17a+1}{18a+1}$ καὶ $\frac{a}{15a+1}$ εἶναι ἀνάγωγα.

Λ ύ σ ι ς.– 1ον) Ἐὰν ὑπῆρχεν ἕνας Κ.Δ. τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος ἔστω ὁ δ, οὗτος ὡς διαιρῶν ἀκριβῶς τοὺς $18a+1$ καὶ $17a+1$ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν των a. Ὡς διαιρῶν δὲ τὸν $18a+1$ καὶ τὸν $18a$ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν των 1. Ἄρα $\delta=1$.
Ὥστε ὁ μόνος Κ.Δ. τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος εἶναι ὁ 1.
2ον) Ὁμοίως, ὁ Κ.Δ. τῶν δύο ὅρων ἔστω ὁ δ διαιρεῖ τὸν a ἄρα καὶ τὸ $15a$, διαιρεῖ δὲ καὶ τὸ $15a+1$, ἄρα κ.τ.λ.

106α. Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κλάσματα $\frac{\nu}{2\nu+1}$ καὶ $\frac{\nu(2\nu+1)}{\nu+1}$ εἶναι ἀνάγωγα.

Λ ύ σ ι ς.– Διὰ τὸ πρῶτον σκεπτόμεθα ὅπως εἰς τὴν ἄσκ. 106.
Διὰ τὸ δεύτερον σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:
Ἔστω ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶχον ἕνα κοινὸν πρω-

τον διαιρέτην ρ. Οὗτος ὡς διαιρῶν τό $\nu(2\nu+1)$ θά διήρῃ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων. Ἄν διήρῃ τό ν, τότε ὡς διαιρῶν καί τόν παρονομαστήν $\nu+1$, θά διήρῃ καί τήν διαφοράν των 1 ὅπερ ἄτοπον. Ἄν διήρῃ τό $2\nu+1$ τότε ὡς διαιρῶν καί τό $2(\nu+1)$ θά διήρῃ καί τήν διαφοράν των 1 ὅπερ πάλιν ἄτοπον. Ὥστε οὐδένα πρῶτον Κ.Δ. ἔχουν. Ἄρα καί οὐδένα σύνθετον.

107. Δείξατε ὅτι τά κλάσματα $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232323}{999999}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

Λύσις.– $\frac{232323}{999999}=\frac{230000+2300+23}{990000+9900+99}=\frac{23(10000+10+1)}{99(10000+100+1)}=\frac{23}{99}$

108. Ἐκτελέσατε τάς προσθέσεις:

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{1}{(\alpha-\beta)\alpha}$

Λύσις.– i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$. Ἐξαγόμενα τῶν ἄλλων:

$\frac{\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$, $\frac{1+2\alpha}{\alpha^2}$, $\frac{2}{\alpha^2-\beta^2}$.

109. Ἐκτελέσατε τάς προσθέσεις:

$\frac{4}{6}+\frac{1}{2}+\frac{15}{18}$, $\frac{10}{16}+\frac{6}{14}+\frac{17}{24}$, $\frac{19}{36}+\frac{11}{8}+\frac{7}{12}$, $\frac{165}{242}+\frac{45}{605}+\frac{315}{1089}$,

$\frac{391}{483}+\frac{551}{817}+\frac{155}{868}$

Λύσις.– Τά ἑτερώνυμα κλάσματα θά τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα καί ἀκολούθως θά τά προσθέσωμεν κατά τά γνωστά. Ἡ τροπή θά γίνῃ διά τῆς εὑρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π.

I) $\frac{4}{6}+\frac{1}{2}+\frac{15}{18}=\ldots$ Ε.Κ.Π. τῶν 6, 2, 18 εἶναι τό <u>18</u> ἑπομένως

$$=\frac{3.4}{3.6}+\frac{1.9}{2.9}+\frac{15}{18}=\frac{12}{18}+\frac{9}{18}+\frac{15}{18}=\frac{36}{18}=\frac{2.18}{18}=\boxed{2}.$$

II) $\frac{10}{16}+\frac{6}{14}+\frac{17}{24}=\ldots$ Ε.Κ.Π. τῶν 16, 14, 24 εἶναι τό 336 ἑπομένως: $\frac{21.10}{21.16}+\frac{24.6}{24.14}+\frac{14.17}{14.24}=\frac{2^4.37}{2^4.3.7}=\boxed{\frac{37}{21}}$

III) $\frac{19}{36}+\frac{11}{8}+\frac{7}{12}=\dots$ Ε.Κ.Π. τῶν 36, 8, 12 εἶναι τό <u>72</u> ἑπομένως $=\frac{2.19}{2.36}+\frac{9.11}{9.8}+\frac{6.4}{6.12}=\frac{7.23}{2^3.3^2}=\boxed{\frac{161}{72}}$

IV) $\frac{165}{242}+\frac{45}{605}+\frac{315}{1089}=\dots$ Ε.Κ.Π. τῶν 242, 605, 1089 εἶναι τό <u>10890</u> ἑπομένως $=\frac{45.165}{45.242}+\frac{18.45}{18.605}+\frac{10.315}{10.1089}=\dots$ μετάς τάς ἁπλοποιήσεις $=\frac{253}{242}=\boxed{\frac{23}{22}}$

V) $\frac{391}{483}+\frac{551}{817}+\frac{155}{868}=\dots$ Ε.Κ.Π. τῶν 483, 817, 868 εἶναι τό <u>$2^2.3.7.19.23.31.43$</u> $=\frac{17.23.2^2.19.31.43+2^3.3.7.19.23.29.31+3.5.7.19.23.41.43}{2^2.3.7.19.23.31.43}$

$=\frac{\cancel{19}.\cancel{23}.\cancel{31}.12311}{2^2.3.7.\cancel{19}.\cancel{23}.\cancel{31}.43}=\frac{12311}{2^2.3.7.43}=\boxed{\frac{12311}{3612}}$

110. Ν' ἀναχθοῦν τά κλάσματα $\frac{280}{392}$, $\frac{294}{392}$, $\frac{364}{392}$ εἰς τόν μικρότερον δυνατόν, κοινόν παρονομαστήν.

Λ ύ σ ι ς.- Θά διαιρέσωμεν τούς ὅρους ἑκάστου διά τοῦ Μ.Κ.Δ αὐτῶν.

I) $\frac{280}{392}=\dots$ $(280, 392)=2^3.7$ ὅτε: $\dots=\frac{280}{392}=\frac{\frac{2^3.5.7}{2^3.7}}{\frac{2^3.7^2}{2^3.7}}=\boxed{\frac{5}{7}}$

II) $\frac{294}{392}=\dots$ $(294, 392)=2.7^2$ ὅτε: $\dots=\frac{294}{392}=\frac{\frac{2.3.7^2}{2.7^2}}{\frac{2^3.7^2}{2.7^2}}=\boxed{\frac{3}{4}}$

III) $\frac{364}{392}=\dots$ $(364, 392)=2^2.7$ ὅτε: $\dots=\frac{364}{392}=\frac{\frac{2^2.7.13}{2^2.7}}{\frac{2^3.7^2}{2^2.7}}=\boxed{\frac{13}{14}}$

111. Εὕρετε κλάσμα ἴσον πρός $\frac{3}{5}$ ἀλλά τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νά ἔχουν

ἄθροισμα 88.

Λύσις.– Ἄν x ὁ ἀριθμητής καί y ὁ παρονομαστής τοῦ ζητουμένου κλάσματος δυνάμει τῆς ἐκφωνήσεως θά ἔχωμεν τάς σχέσεις: $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ (1) καί $x+y=88$ (2)

Ἐκ τῆς (1) παρατηροῦμεν ὅτι τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{y}$ ἰσοῦται μέ ἕν ἀνάγωγον τό $\frac{3}{5}$, ἄρα οἱ ὅροι τοῦ ζητουμένου θά εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου ἤτοι: (3) $\{x=3.k$ καί $y=5.k\}$ ὅπου $k=0,1,2,\dots$ Στήν (2) ἀντικαθιστῶμεν τά x καί y μέ τάς τιμάς των ἐκ τῶν (3) ὅτε:

$x+y=88 \Rightarrow 3k+5k=88 \Rightarrow 8k=8.11 \Rightarrow \boxed{k=11}$ (4)

Εὑρεθέντος τοῦ k εὑρίσκομεν ἐκ τῶν (3) τάς τιμάς τῶν x καί y ἤτοι $x=3.k=3.11=33$ ἤ $\boxed{x=33}$ καί $y=5.k=5.11=55$ ἤ $\boxed{y=55}$ $\Rightarrow \frac{33}{55}=\frac{3}{5}$ καί $33+55=88$.

112. *Εὕρετε τόν ἀκέραιον x, ὥστε νά εἶναι* $\frac{21}{2x}=\frac{7}{6}$.

Λύσις.– $\frac{21}{2.x}=\frac{7}{6}$. Ἐπειδή τό $\frac{21}{2.x}$ ἰσοῦται πρός τό ἀνάγωγον $\frac{7}{6}$ ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι του εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{7}{6}$ καί ἐπειδή $21=7.3 \rightsquigarrow \boxed{x=3}$

113. *Εὕρετε τόν φυσικόν ἀριθμόν ν, ἄν* $\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{35}{40}$.

Λύσις.– $\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{35}{40} \Rightarrow \frac{\nu}{\nu+1}=\frac{7}{8} \Rightarrow$ (§71) $8\nu=7(\nu+1) \Rightarrow$ $8\nu-7\nu=7 \Rightarrow \nu=7$.

114. *Εὕρετε τόν ἀκέραιον x ἄν* $\frac{9}{2x+9}=\frac{1}{11}$.

Λύσις.– $\frac{9}{2x+9}=\frac{1}{11} \Rightarrow 9.11=2x+9$ (§71) $\Rightarrow 2x+9=99 \Rightarrow 2x=$ $=90 \Rightarrow x=45$.

115. *Τά* $\frac{14}{17}$ *ἑνός ἀριθμοῦ ἰσοδυναμοῦν πρός τά* $\frac{3}{5}$ *τοῦ αὐτοῦ ἀ-*

ριθμοῦ ηὐξημένα κατά 3230 μονάδας. Ποῖος ὁ ἀριθμός;

Λύσις.- Ἀφαιροῦντες τά $\frac{3}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ x ἀπό τά $\frac{14}{17}$ αὐτοῦ θά ἔχωμεν δυνάμει τῆς ἐκφωνήσεως ἕνα κλάσμα τοῦ ἀριθμοῦ x ἴσον πρός 3230. Ἤτοι

$$\frac{14x}{17}-\frac{3x}{5}=\frac{5.14x-3.17x}{5.17}=\frac{19x}{85} \quad \text{ὅτε:} \quad \frac{19x}{85}=\frac{3230}{1} \Rightarrow 19x=3230.85$$

$$\Rightarrow 19x=3230.5.19 \Rightarrow x=5.3230=16150 \quad \text{ἤ} \quad \boxed{x=16150}$$

116. Ἐάν εἰς τά $\frac{3}{7}$ ἑνός ἀριθμοῦ προστεθοῦν τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ καί 50 μονάδες ἀκόμη, προκύπτει ὁ ἀριθμός. Νά εὑρεθῆ ὁ ἀριθμός αὐτός.

Λύσις.- Τά $\frac{3}{7}$ καί τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ x εἶναι συνολικά τά $\frac{3}{7}+\frac{1}{3}=\frac{3.3+1.7}{21}=\frac{16}{21}$ τοῦ ἀριθμοῦ. Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν θά ἔχωμεν $\frac{16}{21}x+50=x$. Δηλαδή τό ὑπόλοιπον ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος κλάσμα τοῦ x εἶναι 50 ἤτοι:

$$\frac{21}{21}-\frac{16}{21}=\frac{5}{21} \quad \text{ἤ} \quad \frac{5x}{21}=50 \rightsquigarrow 5.x=21.5.10 \rightsquigarrow x=21.10 \quad \text{ἤ} \quad \boxed{x=210}$$

117 Εἷς ἐργάτης ἐκτελεῖ ἕνα ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας καί ἄλλος ἐκτελεῖ τό ἴδιο εἰς 5 ἡμέρας. Ποῖον κλάσμα τοῦ ἔργου ἐκτελοῦν εἰς μίαν ἡμέραν ὅταν ἐργάζωνται μαζί.

Λύσις.- Ἀφοῦ εἰς τρεῖς ἡμέρας ἐκτελεῖ ὅλον τό ἔργον εἰς μίαν ἡμέραν θά ἐκτελέση τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου.

Ὁμοίως ὁ ἄλλος εἰς μίαν ἡμέραν θά ἐκτελέση τό $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἐργαζόμενοι συγχρόνως θά ἐκτελοῦν εἰς μίαν ἡμέραν τό ἄθροισμα τοῦ ἔργου ἑκάστου ἤτοι: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1.5}{3.5}+\frac{3.1}{3.5}=\frac{8}{15}$, ἤτοι τά $8/15$ τοῦ ἔργου θά ἐκτελοῦν εἰς μίαν ἡμέραν ἐργαζόμενοι ἀπό κοινοῦ.

118. Ποῖα ἡ γενική μορφή τῶν κλασμάτων τά ὁποῖα δέν μεταβάλλονται ἄν εἰς τόν ἀριθμητήν προστεθῆ ὁ 5 καί εἰς τόν παρονομαστήν ὁ 2; Τά ζητούμενα κλάσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας; (§ 68, vii).

Λύσις.- Ἔστω $\frac{x}{y}$ ἕνα ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων. Τότε θά ἔχωμεν $\dfrac{x+5}{y+2}=\dfrac{x}{y} \Leftrightarrow xy+5y=xy+2y \Leftrightarrow 5y=2x \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5} \Rightarrow x=2\rho,\ y=5\rho$ (§71, ii). Ἡ γενική μορφή εἶναι:

$\boxed{\dfrac{2\rho}{5\rho}}$. Τά ἄπειρα αὐτά κλάσματα ($\rho=1,2,3\ldots$) ὁρίζουν ἕνα καί τό αὐτό κλάσμα 2/5 ἄρα ἀποτελοῦν κλᾶσιν ἰσοδυναμίας (§ 68, VII).

119. *Δοθέντων τῶν κλασμάτων $\frac{13}{133}$ καί $\frac{8}{68}$ προσδιορίσατε κλάσμα ἰσοδύναμον πρός τό δεύτερον καί τό ὁποῖον προκύπτει ἀπό τό πρῶτον, ὅταν οἱ ὅροι αὐτοῦ αὐξηθοῦν κατά τόν αὐτόν ἀκέραιον.*

Λύσις.– Πρέπει $\dfrac{13+x}{133+x}=\dfrac{8}{68} \Leftrightarrow \dfrac{13+x}{133+x}=\dfrac{2}{17} \Leftrightarrow (13+x)17=$
$=(133+x)2 \Leftrightarrow 221+17x=266+2x \Leftrightarrow 17x-2x=266-221 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 15x=45 \Leftrightarrow x=3$. Τό ζητούμενον κλάσμα:
$\dfrac{13+3}{133+3}=\dfrac{16}{136}$

120. *Ποῖοι διψήφιοι ἀριθμοί τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως μετατρέπονται εἰς τό ἑπταδικόν σύστημα, ὅταν ἐναλλάξωμεν τά ψηφία των;*

Λύσις.– Πρέπει $\overline{xy}=yx_{<7}$ ἤ $y+10x=x+7y$ ἤ $9x=6y$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=2\rho,\ y=3\rho$. Ἐπειδή $x<7$ καί $y<7$ ἕπεται ὅτι $\rho=1$ ἤ 2. Ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί: 23 καί 46.

121. *Ποίους ἀκεραίους ἀριθμούς δυνάμεθα νά προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τούς ὅρους ἑνός κλάσματος α/β χωρίς νά μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος;*

Λύσις.– Πρέπει $\dfrac{\alpha+x}{\beta+y}=\dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow (\alpha+x)\beta=(\beta+y)\alpha \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta x=$
$=\alpha\beta+\alpha y \Leftrightarrow \beta x=\alpha y \Leftrightarrow \dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha}{\beta}$. Τρέποντες τό $\dfrac{\alpha}{\beta}$ εἰς ἀνάγωγον, ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ ὅπου διηρέσαμεν τούς

ὅρους τοῦ α/β μέ τόν Μ.Κ.Δ. (α,β) τῶν α καί β. Τότε πρέπει $\frac{x}{y}=\frac{\alpha'}{\beta'} \Leftrightarrow x=\lambda\alpha',\ y=\lambda\beta'$ (§71, ii) ἤ $x=\lambda\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$, $y=\lambda\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}$ ὅπου λ τυχών ἀκέραιος καί (α,β) ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β.

122. Θέσατε ὑπό μορφήν ἀναγώγου κλάσματος τό ἄθροισμα:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

Λύσις.- $\underbrace{2}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}}+\underbrace{\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}}+\underbrace{\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+}$

$$+\underbrace{\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}}=2+\frac{3+1}{1.2.3}+\frac{5+1}{1.2.3.4.5}+\frac{7+1}{1.2.3.4.5.6.7}=\underbrace{2+\frac{2.2}{1.2.3}}+$$

$$+\frac{2.3}{1.2.3.4.5}+\frac{2.4}{1.2.3.4.5.6.7}=\frac{2.2.3+2.2}{1.2.3}+\frac{2.3.6.7+2.4}{1.2.3.4.5.6.7}=$$

$$=\frac{2^4}{1.2.3}+\frac{2^2.5.13}{1.2.3.4.5.6.7}=\frac{2^4.4.5.6.7+2^2.5.13}{1.2.3.4.5.6.7}=\frac{2^2.5(2^2.4.6.7+13)}{1.2.3.4.5.6.7}=$$

$$=\frac{2^2.4.6.7+13}{1.2.3.6.7}=\boxed{\frac{685}{252}}$$ ὅπερ ἀνάγωγον.

123. Νά εὑρεθῆ κλάσμα ἴσον πρός $\frac{188887}{211109}$ καί τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι νά ἔχουν ἄθροισμα 108.

Λύσις.- Ἄς μετατρέψωμεν τό δοθέν κλάσμα εἰς ἀνάγωγον. Εὑρίσκομεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν δύο ὅρων του: 11111 καί ἁπλοποιοῦμεν δι' αὐτοῦ, ὁπότε φθάνομεν εἰς τό 17/19. Τό ζητούμενον κλάσμα $\frac{x}{y}$ θά ἔχῃ ὅρους ἰσοπολλαπλάσια τῶν τοῦ 17/19: $x=17\lambda,\ y=19\lambda \Rightarrow x+y=36\lambda$ καί ἐπειδή θέλομεν $x+y=108$ ἕπεται $108=36\lambda \Rightarrow \lambda=3$. Τό ζητούμενον: $\frac{51}{57}$.

124. Δείξατε ὅτι ἄν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$ τότε τό κλάσμα: $\frac{\alpha+\lambda\alpha'+\mu\alpha''}{\beta+\lambda\beta'+\mu\beta''}$ ὅπου λ,μ τυχόντες ἀκέραιοι, εἶναι ἴσον πρός τά ἀρχικά

Λύσις.- Ἔστω $\frac{\gamma}{\delta}$ τό ἀνάγωγον κλάσμα τό ἰσοδύναμον πρός τά τρία δοθέντα. Τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha=\gamma\rho$, $\beta=\delta\rho$ καί ὁμοίως $\alpha'=\gamma\rho'$, $\beta'=\delta\rho'$, $\alpha''=\gamma\rho''$, $\beta''=\delta\rho''$. Κατόπιν τούτων ἔχομεν:

$$\frac{\alpha+\lambda\alpha'+\mu\alpha''}{\beta+\lambda\beta'+\mu\beta''}=\frac{\gamma\rho+\lambda\gamma\rho'+\mu\gamma\rho''}{\delta\rho+\lambda\delta\rho'+\mu\delta\rho''}=\frac{\gamma(\rho+\lambda\rho'+\mu\rho'')}{\delta(\rho+\lambda\rho'+\mu\rho'')}=\frac{\gamma}{\delta}$$

125. Ἐκτελέσατε τούς κάτωθι πολλαπλασιασμούς:

$\frac{7}{19}\times 95$, $\frac{11}{9}\times 15$, $\frac{10}{21}\times 7$, $\frac{43}{81}\times 81$,

$\frac{4}{7}\times 35$, $12\times\frac{4}{7}$, $4\times\frac{1}{24}$, $3\times\frac{11}{75}$

Λύσις.-

I) $\frac{7}{19}\times 95=\frac{7}{1}\times 5=\boxed{35}$

II) $\frac{11}{9}\times 15=\frac{11}{3}\times 5=\boxed{\frac{55}{3}}$

III) $\frac{10}{21}\times 7=\frac{10}{3}\times 1=\boxed{\frac{10}{3}}$

IV) $\frac{43}{81}\times 81=\boxed{43}$

V) $\frac{4}{7}\times 35=4\times 5=\boxed{20}$

VI) $12\times\frac{4}{7}=\boxed{\frac{48}{7}}$

VII) $4\times\frac{1}{24}=\boxed{\frac{1}{6}}$

VIII) $3\times\frac{11}{75}=1\times\frac{11}{25}=\boxed{\frac{11}{25}}$

126. Ἐκτελέσατε τούς ἑπομένους πολλαπλασιασμούς:

$\frac{1}{8}\times 8$, $\frac{1}{8}\times 4$, $\frac{19}{13}\times\frac{4}{7}$, $\frac{5}{6}\times\frac{18}{5}$, $\frac{9}{15}\times\frac{75}{39}$

$\frac{16}{95}\times\frac{38}{48}$, $\frac{7}{18}\times 0$, $0\times\frac{3}{4}$, $\frac{124}{133}\times\frac{399}{186}$, $\frac{143}{171}\times\frac{513}{286}$

$\frac{4}{9}\times 3\alpha$, $\frac{3}{7}\times\frac{7}{3}$, $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{4x}{7}\times\frac{7}{x}$, $\frac{9\alpha}{21}\times\frac{35}{27\alpha}$

Λύσις.

I) $\frac{1}{8}\times 8=\frac{8}{8}=\boxed{1}$

II) $\frac{1}{8}\times 4=\boxed{\frac{1}{2}}$

III) $\frac{19}{13}\times\frac{4}{7}=\boxed{\frac{76}{31}}$

IV) $\frac{5}{6}\times\frac{18}{5}=\boxed{3}$

V) $\frac{9}{15}\times\frac{75}{39}=\boxed{\frac{15}{13}}$

VI) $\frac{16}{95}\times\frac{38}{48}=\frac{1}{95}\times\frac{38}{3}=\boxed{\frac{2}{15}}$

VII) $\frac{7}{18}\times 0=\boxed{0}$

VIII) $0\times\frac{3}{4}=\boxed{0}$

IX) $\frac{124}{133} \times \frac{399}{186} = \frac{124}{1} \times \frac{3}{186} = \boxed{2}$

X) $\frac{143}{171} \times \frac{513}{286} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

XI) $\frac{4}{9} \times 3\alpha = \frac{4}{3}\alpha = \boxed{\frac{4\alpha}{3}}$

XII) $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \boxed{1}$

XIII) $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \boxed{\frac{\alpha}{\gamma}}$

XIV) $\frac{4x}{7} \times \frac{7}{x} = \frac{4.7.x}{7.x} = \boxed{4}$

XV) $\frac{9\alpha}{21} \times \frac{35}{27\alpha} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{5}{9}}$

127. *Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:*

$12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$, $4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\right)$, $3\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + 1\right)$,

$\frac{65}{35} \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{26}$, $\frac{3}{25} \times \frac{253}{9} \times \frac{75}{69}$, $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} \times \frac{248}{36}\right)$

$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{248}{36}\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{9}{5} + \frac{3}{21}\right)\left(\frac{9}{12} + \frac{3}{5}\right)$

Λύσις.-

I) $12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{6} = 6 + 4 + 2 = \boxed{12}$

II) $4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\right) = 2 + 3 + 4 = \boxed{9}$

III) $3\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + 1\right) = 1 + \frac{9}{6} + 3 = \frac{6 + 9 + 18}{6} = \frac{33}{6} = \boxed{\frac{11}{2}}$

IV) $\frac{65}{35} \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{26} = \frac{65}{5} \times \frac{8}{3} \times \frac{1}{26} = \frac{13}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{13} = \boxed{\frac{4}{3}}$

V) $\frac{3}{25} \times \frac{253}{9} \times \frac{75}{69} = \frac{\cancel{3}}{1} \times \frac{253}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{3}}{69} = \boxed{\frac{253}{69}}$

VI) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} \times \frac{248}{36}\right) = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{8} \times \frac{248}{36} = \frac{1}{4} \times \frac{248}{36} = \boxed{\frac{31}{18}}$

VII) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{248}{36}\right) = \frac{6}{24} + \frac{496}{108} = \frac{1}{4} + \frac{124}{27} = \boxed{\frac{523}{108}}$

VIII) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{8} = \boxed{\frac{35}{32}}$

IX) $\left(\frac{9}{5} + \frac{3}{21}\right)\left(\frac{9}{12} + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right) = \boxed{\frac{459}{175}}$

128. Ἐκτελέσατε τὰς διαιρέσεις:

$\frac{16}{15}:8$, $\frac{9}{17}:3$, $\frac{19}{85}:19$, $\frac{31}{9}:31$, $\frac{39}{15}:13$,

$\frac{3}{7}:4$, $\frac{5}{8}:8$, $\frac{9}{16}:7$, $\frac{14}{27}:\frac{35}{81}$, $\frac{19}{7}:\frac{95}{21}$,

$2:\frac{2}{5}$, $4:\frac{8}{11}$, $19:\frac{38}{3}$, $\left(9+\frac{1}{7}\right):\frac{16}{49}$, $0:\frac{3}{4}$,

$\frac{a}{3}:\frac{a}{2}$, $\frac{5x}{3}:\frac{15x}{39}$, $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{9a}{7x}:\frac{7x}{9\alpha}$

Λύσις.–

I) $\frac{16}{15}:8=\frac{16}{15}\times\frac{1}{8}=\boxed{\frac{2}{15}}$

II) $\frac{9}{17}:3=\frac{9}{17}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{3}{17}}$

III) $\frac{19}{85}:19=\frac{19}{85}\times\frac{1}{19}=\boxed{\frac{1}{85}}$

IV) $\frac{31}{9}:31=\frac{31}{9}\times\frac{1}{31}=\boxed{\frac{1}{9}}$

V) $\frac{39}{15}:13=\frac{39}{15}\times\frac{1}{13}=\frac{3}{15}=\boxed{\frac{1}{5}}$

VI) $\frac{3}{7}:4=\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{28}}$

VII) $\frac{5}{8}:8=\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}=\boxed{\frac{5}{64}}$

VIII) $\frac{9}{16}:7=\frac{9}{16}\times\frac{1}{7}=\boxed{\frac{9}{112}}$

IX) $\frac{14}{27}:\frac{35}{81}=\frac{14}{27}\times\frac{81}{35}=$

$=\frac{14}{1}\times\frac{3}{35}=\boxed{\frac{42}{35}}$

X) $\frac{19}{7}:\frac{95}{21}=\frac{19}{7}\times\frac{21}{95}=\boxed{\frac{3}{5}}$

XI) $2:\frac{2}{5}=2\times\frac{5}{2}=\boxed{5}$

XII) $4:\frac{8}{11}=4\times\frac{11}{8}=\boxed{\frac{11}{2}}$

XIII) $19:\frac{38}{3}=19\times\frac{3}{38}=\boxed{\frac{3}{2}}$

XIV) $\left(9+\frac{1}{7}\right):\frac{16}{49}=\frac{64}{7}\times\frac{49}{16}=\frac{4}{1}\times\frac{7}{1}=\boxed{28}$

XV) $0:\frac{3}{4}=0\times\frac{4}{3}=\boxed{0}$

XVI) $\frac{a}{3}:\frac{a}{2}=\frac{a}{3}\times\frac{2}{a}=\boxed{\frac{2}{3}}$

XVII) $\frac{5x}{3}:\frac{15x}{39}=\frac{5x}{3}\times\frac{39}{15x}=\frac{1}{1}\times\frac{13}{3}=$

$=\boxed{\frac{13}{3}}$

XIIX) $\frac{a}{\beta}:\frac{\beta}{a}=\frac{a}{\beta}\times\frac{a}{\beta}=\boxed{\frac{a^2}{\beta^2}}$

XIX) $\frac{9a}{7x}:\frac{7x}{9a}=\frac{9\alpha}{7x}\times\frac{9a}{7x}=$

$=\boxed{\frac{81\alpha^2}{49x^2}}$

129. Ὑπολογίσατε τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$:

$\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{8}$, $\beta=\frac{4}{\frac{5}{8}}$, $\gamma=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$, $\delta=\frac{\frac{9}{17}}{\frac{8}{34}}$

Λύσεις.-

I) $\alpha = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{1}} = \dfrac{4}{40} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$

II) $\beta = \dfrac{4}{\frac{5}{8}} = \boxed{\dfrac{32}{5}}$

III) $\gamma = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{20}{15} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

IV) $\delta = \dfrac{\frac{9}{17}}{\frac{8}{34}} = \dfrac{9.34}{8.17} = \boxed{\dfrac{9}{4}}$

130. Ὑπολογίσατε τάς δυνάμεις:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4, \left(\dfrac{1}{3}\right)^5, \left(\dfrac{5}{8}\right)^2, \left(\dfrac{11}{13}\right)^2, \left(\dfrac{3}{5}\right)^3, \left(\dfrac{3}{5}\right)^4$

Λύσις

I) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$

II) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1}{3^5} = \boxed{\dfrac{1}{243}}$

III) $\left(\dfrac{5}{8}\right)^2 = \boxed{\dfrac{25}{64}}$

IV) $\left(\dfrac{11}{13}\right)^2 = \boxed{\dfrac{121}{169}}$

V) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \boxed{\dfrac{27}{125}}$

VI) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \boxed{\dfrac{81}{625}}$

131. Ὑπολογίσατε τάς ἐκφράσεις:

$$x^2+y+3\,, \quad x^2+y^2+5\,, \quad \frac{2x+3y+1}{3x+2y+1}$$

ὅταν $x = \dfrac{5}{6}$ καί $y = \dfrac{5}{12}$.

Λύσις.-

I) $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{6} \rightsquigarrow x^2 = \dfrac{5^2}{6^2} \\ y = \dfrac{5}{12} \end{array}\right\} \rightarrow$ $x^2+y+3 = \dfrac{25}{36} + \dfrac{15}{12} + 3 = \dfrac{25}{36} + \dfrac{3.15}{3.12} + \dfrac{3.36}{36} = \dfrac{178}{36} = \boxed{\dfrac{89}{18}}$

II) $\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{6} \rightsquigarrow x^2 = \dfrac{25}{36} \\ y = \dfrac{5}{12} \rightsquigarrow y^2 = \dfrac{25}{144} \end{array}\right\} \rightarrow$ $x^2+y^2+5 = \dfrac{25}{36} + \dfrac{25}{144} + 5 = \dfrac{4.25}{144} + \dfrac{25}{144} + \dfrac{5.144}{144} = \boxed{\dfrac{845}{144}}$

III) $A = 2x+3y+1 = 2\cdot\dfrac{5}{6} + 3\cdot\dfrac{5}{12} + 1 = \dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{4} + 1 = \dfrac{4.5}{12} + \dfrac{3.5}{12} + \dfrac{12}{12} = \dfrac{47}{12}$

$\Pi = 3x+2y+1 = 3\cdot\dfrac{5}{6} + 2\cdot\dfrac{5}{12} + 1 = \dfrac{15}{6} + \dfrac{5}{6} + \dfrac{6}{6} = \dfrac{26}{6} = \dfrac{13}{3}$

$\rightarrow \dfrac{A}{\Pi} = \dfrac{\frac{47}{12}}{\frac{13}{3}} = \dfrac{47}{12} : \dfrac{13}{3} = \dfrac{47}{12}\cdot\dfrac{3}{13} = \dfrac{47}{4}\cdot\dfrac{1}{13} = \boxed{\dfrac{47}{52}}$

132. Ὑπολογίσατε ἕκαστον τῶν κάτωθι κλασμάτων:

$$\frac{x+y}{3x+y}, \quad \frac{x^2+y^2}{3x^2+5y^2}, \quad \frac{3x^2y+3xy^2+x^3}{7x^3+8xy^2}$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ λόγος τοῦ x πρός τόν y ἰσοῦται μέ $\frac{2}{3}$.

Λύσις.- i) $\dfrac{x+y}{3x+y} = \dfrac{\frac{x+y}{y}}{\frac{3x+y}{y}} = \dfrac{\frac{x}{y}+1}{3\frac{x}{y}+1} = \dfrac{\frac{2}{3}+1}{3\cdot\frac{2}{3}+1} = \dfrac{\frac{5}{3}}{3} = \boxed{\dfrac{5}{9}}$

ii) $\dfrac{x^2+y^2}{3x^2+5y^2} = \dfrac{\frac{x^2+y^2}{y^2}}{\frac{3x^2+5y^2}{y^2}} = \dfrac{\frac{x^2}{y^2}+1}{3\frac{x^2}{y^2}+5} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}{3\left(\frac{2}{3}\right)^2+5} = \dfrac{\frac{13}{9}}{\frac{19}{3}} = \boxed{\dfrac{13}{57}}$

iii) $\dfrac{3x^2y+3xy^2+x^3}{7x^3+8xy^2} = \dfrac{\frac{3x^2y+3xy^2+x^3}{y^3}}{\frac{7x^3+8xy^2}{y^3}} = \dfrac{\frac{3x^2}{y^2}+\frac{3x}{y}+\frac{x^3}{y^3}}{7\frac{x^3}{y^3}+8\frac{x}{y}}$

$= \dfrac{3\frac{4}{9}+3\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{27}}{7\cdot\frac{8}{27}+8\cdot\frac{2}{3}} = \dfrac{\left(\frac{12}{9}+\frac{6}{3}+\frac{8}{27}\right)\times 27}{\left(\frac{56}{27}+\frac{16}{3}\right)\times 27} =$

$= \dfrac{12.3+6.9+8}{56+16.9} = \dfrac{98}{200} = \boxed{\dfrac{49}{100}}$.

133. Εὕρετε τό σύνολον (ἤ τήν γενικήν μορφήν) τῶν ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι διαιρούμενοι εἴτε διά $\frac{4}{105}$ εἴτε διά $\frac{6}{35}$ δίδουν [...] λίκον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Λύσις.– Ἔστω x ἕνας ἐκ τῶν ζητουμένων. Τότε πρέπει:

$$\begin{cases} x : \frac{4}{105} = \pi \\ x : \frac{6}{35} = \pi' \end{cases} \quad \text{ἤ} \quad \begin{cases} \frac{105x}{4} = \pi \\ \frac{35x}{6} = \pi' \end{cases} \quad (1) \begin{cases} 105x = 4\pi \\ 35x = 6\pi' \end{cases}$$ ὅπου π, π′ ἀκε[...]

Οἱ ἀκέραιοι π καί π′ θά πληροῦν τήν σχέσιν $\frac{105}{35} = \frac{4\pi}{6\pi'}$ προκύπ[...] σαν διά διαιρέσεως τῶν (1) κατά μέλη. Ἤτοι: $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{\pi'} = 3$ ἤ $\frac{\pi}{\pi'} =$ [...]

$\Rightarrow \pi = 9\lambda$ καί $\pi' = 2\lambda$. Ἑπομένως αἱ (1) γίνονται:

$$\begin{cases} 105x = 36\lambda \\ 35x = 12\lambda . \end{cases} \quad ἤ \quad (2) \quad \begin{cases} 35x = 12\lambda \\ 35x = 12\lambda \end{cases}$$

Ἑπομένως δέον ν' ἀναζητήσωμεν τούς ἀκεραίους x τοιούτους ὥστε τό $35x$ νά εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12. Ἐκ τῶν (2) ἕπεται ὅτι: ὁ 35 εἶναι διαιρέτης τοῦ λ (ἐπειδή εἶναι πρῶτος πρός τόν 12). Ἄρα ἡ μορφή τοῦ λ εἶναι: $\lambda = 35\rho$ καί ἡ (2) δίδει: $35x = 12.35\rho$, $\boxed{x = 12\rho}$. Ἡ ἐπαλήθευσις εὔκολος.

134. Εὕρετε τόν x οὕτως ὥστε νά εἶναι:

i) $\dfrac{4x-5}{3} = \dfrac{5x-6}{2}$ ii) $\dfrac{2x}{3} + 2 = 17$

iii) $7 - \dfrac{x}{2} = 3 + \dfrac{7x}{2}$ iv) $\dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3(x-1)}{10} = \dfrac{x+1}{5}$

Λύσις.- i) $\dfrac{4x-5}{3} = \dfrac{5x-6}{2} \Leftrightarrow 2(4x-5) = 3(5x-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 10 = 15x - 18 \Leftrightarrow 15x = 8x - 10 + 18 \Leftrightarrow 7x = 8 \Leftrightarrow \boxed{x = 8/7}$

ii) $\dfrac{2x}{3} = 15 \Leftrightarrow 2x = 45 \Leftrightarrow \boxed{x = 45/2}$

iii) $7 - 3 = \dfrac{7x}{2} + \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

iv) $\dfrac{2(2x-1)}{10} + \dfrac{3(x-1)}{10} = \dfrac{2(x+1)}{10} \Leftrightarrow \dfrac{4x - 2 + 3x - 3}{10} = \dfrac{2x+2}{10}$

$\Leftrightarrow 7x - 5 = 2x + 2 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x = 7/5}$.

135. Προσδιορίσατε τόν ἀριθμόν x οὕτως ὥστε οἱ λόγοι $\dfrac{8x-6}{3x}$ καί $\dfrac{8x}{3x+3}$ νά εἶναι ἴσοι.

Λύσις.- Ἔστω ὅτι ἀμφότεροι οἱ λόγοι ἰσοῦνται πρός τόν ἀριθμόν λ. Τότε $8x - 6 = 3x.\lambda$ καί $8x = (3x+3)\lambda$. Δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη: $8x - (8x-6) = (3x.\lambda + 3\lambda) - 3x.\lambda$ ἤ $6 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$. Ἐκ τῆς $8x - 6 = 3x.\lambda$ λαμβάνομεν $8x - 6 = 6x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$.

136. Νά διαταχθοῦν κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους τά κλάσματα:

$$\frac{2}{3}, \ \frac{8}{9}, \ \frac{4}{5}, \ \frac{5}{12}, \ \frac{12}{7}, \ 1, \ \frac{25}{18}.$$

Λύσις.- Συγκρίνομεν πρῶτον τά $\dfrac{2}{3} = 1 - \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{8}{9} = 1 - \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{4}{5} =$

$=1-\frac{1}{5}$. Ἐπειδή $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{4}{5}<\frac{8}{9}$. Ἐπίσης, $\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$ ἐνῷ $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ ἄρα ἔχομεν: $\frac{5}{12}<\frac{2}{3}<\frac{4}{5}<\frac{8}{9}<1$. Μένουν τά $\frac{12}{7}=$ $=1+\frac{5}{7}$ καί $\frac{25}{18}=1+\frac{7}{18}$. Προφανῶς $\frac{7}{18}<\frac{5}{7}$ διότι τό μέν πρῶτον εἶναι $<\frac{1}{2}$ τό δέ δεύτερον $>\frac{1}{2}$. Συνεπῶς $\frac{25}{18}<\frac{12}{7}$

Τελικῶς $\frac{5}{12}<\frac{2}{3}<\frac{4}{5}<\frac{8}{9}<1<\frac{25}{18}<\frac{12}{7}$.

137. Σχηματίσατε ὅλα τά ἀνάγωγα κλάσματα τά μικρότερα τῆς μονάδος καί ἔχοντα παρονομαστήν μικρότερον τοῦ 6. Ἀκολούθως θέσατέ τα κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους. Τέλος, διακρίνατε ζεύγη ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων, τοιαῦτα ὥστε τό ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων ἑκάστου ζεύγους, νά εἶναι $=1$.

Λύσις.– Ἔστω $\frac{x}{y}$ ἕνα ἐκ τῶν ζητουμένων. Πρέπει τότε οἱ φυσικοί ἀριθμοί x καί y νά πληροῦν τάς συνθήκας:

$$(1)\quad \{y<6\ ,\quad x<y\}$$

Λύσεις τῶν (1) εἶναι αἱ τιμαί

$\{y=5\ ,x<5\}$, $\{y=4\ ,x<4\}$, $\{y=3\ ,x<3\}$, $\{y=2\ ,x<2\}$

εἰς τάς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τά κλάσματα:

$$\left\{\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right\},\left\{\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}\right\},\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\},\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

ἐξ ὧν τά 9 εἶναι διακεκριμμένα μεταξύ των:

$$(2)\quad \frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\quad\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$$

Τρέποντες αὐτά εἰς ὁμώνυμα ἔχομεν ἀντιστοίχως

$$\frac{48}{60},\ \frac{36}{60},\ \frac{24}{60},\ \frac{12}{60},\ \frac{45}{60},\ \frac{15}{60},\ \frac{40}{60},\ \frac{20}{60},\ \frac{30}{60}$$

Συνάγομεν ὅτι τά ἀνάλογα κλάσματα (2) εἶναι κατά σειράν μεγέθους: $\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$.

Τά ἰσάκις ἀπέχοντα ἀπό τοῦ κέντρου: (1ον, 9ον), (2ον, 8ον)... ἔχουν ἄθροισμα 1.

138. Δείξατε ὅτι:

i) $3x+5(x-1)>11 \Leftrightarrow x>2$, ii) $3x-(1-x)>3x \Leftrightarrow x>1$,

iii) $\frac{x-1}{5}+\frac{2(x-4)}{15}<1 \Leftrightarrow x<\frac{26}{5}$.

Λύσις.- i) $3x+5x-5>11 \Rightarrow 8x-5>11 \Rightarrow 8x>16$ (προσθετ. +5 εἰς ἀμφότερα τά μέλη) $\Rightarrow x>2$ (διαιροῦμεν διά 8 ἀμφότερα τά μέλη). Εὔκολα φαίνεται ὅτι αἱ συνεπαγωγαί εἶναι ἀντιστρεπταί, δηλ $x>2 \Rightarrow 8x>16 \Rightarrow 8x-5>16-5 \Rightarrow 3x+5x-5>11$ $\Rightarrow 3x+5(x-1)>11$. Ἡ ii) καί iii) λύονται ὁμοίως.

139. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός δείξατε ὅτι:

$$\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{\nu^2}.$$

Λύσις.- Τό $\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu+1-\nu}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu(\nu+1)}<\frac{1}{\nu^2}$ διότι $\nu(\nu+1)>\nu^2$ (§75 iv).

140. Ὑπολογίσατε τούς λόγους (ἤ πηλίκα)

$$\frac{4-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{4}-1}, \quad \frac{\frac{8}{7}-\frac{1}{4}}{3+\frac{2}{21}-\frac{39}{52}}, \quad \frac{3-\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$$

Λύσις.- I) $$\frac{4-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{4}-1}=\frac{\frac{16-10+3}{4}}{\frac{14+1-4}{4}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{11}{4}}=\boxed{\frac{9}{11}}$$

II) $$\frac{\frac{8}{7}-\frac{1}{4}}{3+\frac{2}{21}-\frac{39}{52}}=\frac{\frac{32-7}{28}}{\frac{3.21.52+2.52-39.21}{21.52}}=\frac{\frac{25}{28}}{\frac{2561}{21.52}}=\frac{21.25.52}{28.2561}=$$

$$=\frac{3.\cancel{7}.5^2.\cancel{2^2}.13}{2^2.\cancel{7}.2561}=\frac{975}{2561}=\boxed{\frac{75}{197}}$$

III) $$\frac{3-\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{18-1}{6}}{\frac{30-5+3}{15}}=\frac{\frac{17}{6}}{\frac{28}{15}}=\frac{15.17}{6.28}=\frac{3.17}{2.28}=\boxed{\frac{85}{56}}$$

141. Ἐκτελέσατε τούς κάτωθι σημειουμένους ὑπολογισμούς:

i) $\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{13}+\frac{18}{5}\cdot\frac{3}{\frac{1}{5}}-\frac{1085}{651}$.

ii) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$

Λύσις.- I) $\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{4}{13}+\frac{18}{5}\cdot\frac{3}{\frac{1}{5}}-\frac{1085}{651}=$

$=\left(\frac{12+3-2}{6}\right)\frac{4}{13}+\frac{18}{5}\cdot\frac{15}{1}-\frac{1085}{651}=\frac{13}{6}\cdot\frac{4}{13}+\frac{18}{1}\cdot\frac{3}{1}-\frac{1085}{651}=$

$=\frac{2}{3}+54-\frac{1085}{651}=\boxed{\frac{160}{3}}$

II) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{6+4+3}{12}}{\frac{6-4+3}{12}}:\dfrac{\frac{6+4-3}{12}}{\frac{4+3-6}{12}}=\dfrac{\frac{13}{12}}{\frac{5}{12}}:\dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{12}}=$

$=\frac{13}{5}:\frac{7}{1}=\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{7}=\boxed{\frac{13}{35}}$

142. Ὑπολογίσατε τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα

$\frac{1521}{8649}+\frac{1872}{2018}-\frac{54}{4505}$, $\quad\left(\frac{19}{16}-1+\frac{3}{16}\right)-\left(2-\frac{7}{4}\right)$

Λύσις.- i) Τό πρῶτον κλάσμα ἁπλοποιούμενον διά 9 καθίσταται ἀνάγωγον $\frac{169}{961}$. Τό δεύτερον ἁπλοποιούμενον διά 2 καθίσταται ἀνάγωγον $\frac{936}{1009}$. Τό ζητούμενον γράφεται $\frac{169}{961}+\frac{936}{1009}-$

$-\frac{54}{4505}=\frac{13^2}{961}+\frac{8.9.13}{1009}-\frac{54}{4505}$. Τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων:

$13\left\{\frac{13}{961}+\frac{72}{1009}\right\}=13\cdot\frac{13.1009+72.961}{961.1009}=13\cdot\frac{82309}{961.1009}=$

$=\frac{1070017}{969649}$. Τέλος: $\frac{1070017}{969649}-\frac{54}{4505}=\frac{1070017\times4505-54\times969649}{969649\times4505}=$

$=\boxed{\frac{4768065539}{4367268745}}$

ii) $\left(\frac{19}{16}-1+\frac{3}{16}\right)-\left(2-\frac{7}{4}\right)=\frac{19-16+3}{16}-\frac{8-7}{4}=\frac{6}{16}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=\boxed{\frac{1}{8}}$.

143. Νά ἐλαττωθῇ τό κλάσμα $\frac{275}{289}$ κατά τά $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ διά πράξεων ἐκτελουμένων μόνον ἐπί τοῦ παρονομαστοῦ του.

Λύσις.– Ὅταν ἐλαττωθῇ τό κλάσμα κατά τά $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ θά μείνουν τά $\frac{17}{24}$ τοῦ κλάσματος. Ἤτοι τό κλάσμα πρέπει νά πολ/σθῇ ἐπί $\frac{17}{24}$. Πρός τοῦτο, ἀρκεῖ ὁ παρ/στής του νά διαιρεθῇ διά $17/24$ καί νά γίνῃ $289 : \frac{17}{24} = \frac{289.24}{17} = 408$. Τό ἐξαγόμενον εἶναι: $\frac{275}{408}$

144. Δείξατε ὅτι ἄν ρ, φυσικός ἀριθμός, τότε

$$\frac{1}{\rho(\rho+1)} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho+1}$$

Ἀκολούθως δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν κλασμάτων

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)\nu} + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$ ἰσοῦται μέ $\frac{\nu}{\nu+1}$.

Λύσις.– Τό πρῶτον μέρος εἶναι φανερόν. Βάσει αὐτοῦ λαμβάνομεν: $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$

καί $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$

$+ \dots + \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) = 1 - \frac{1}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}$ (βλ. σελ. 21, iii).

145. Τά κάτωθι δεκαδικά κλάσματα νά γραφοῦν ὑπό μορφήν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

$$\frac{23}{100}, \quad \frac{57}{10^4}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \frac{7593}{100}, \quad \frac{853}{10}, \quad \frac{3}{10^5}$$

Λύσις.– βλ §78 Α' μέρους

146. Νά γραφοῦν ὑπό μορφήν κλασμάτων οἱ κάτωθι δεκαδικοί

ἀριθμοί

$$12{,}35\ ,\ 0{,}37\ ,\ 0{,}0012\ ,\ 3{,}14\ ,\ 823{,}57$$

Λύσις.- βλ. §78 Α' μέρος.

147. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$0{,}354+\frac{2}{10}\ ,\qquad 7{,}19+\frac{13}{2}\ ,\qquad 0{,}999+0{,}001-\frac{7.19}{133}.$$

Λύσις.- i) $0{,}354+0{,}200=0{,}554$, ii) $7{,}19+6{,}50=13{,}69$
iii) $0{,}999+0{,}001-\frac{7.19}{133}=1-\frac{7}{7}=0$

148. Ἐκτελέσατε τάς πράξεις:

$$9{,}81\left((3{,}5)^2-(2{,}5)^2\right),\ \left(\frac{1}{0{,}02}\right)^2+\left(\frac{1}{0{,}05}\right)^3+\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^4,\ \frac{1{,}02}{1{,}08}\times\frac{2{,}16}{1{,}26}\times\frac{1{,}05}{1{,}70}$$

Λύσις.- i) $9{,}81\,(3{,}5+2{,}5)(3{,}5-2{,}5)=9{,}81.6.1=59{,}46$

ii) $$\left(\frac{1}{\frac{2}{10}}\right)^3+\left(\frac{1}{\frac{5}{100}}\right)^3+\left(\frac{1}{\frac{1}{10}}\right)^4=\left(\frac{10}{2}\right)^3+\left(\frac{100}{5}\right)^3+10^4=125+8000+10000$$

$=18125$. iii) $$\frac{102}{108}\times\frac{216}{126}\times\frac{105}{170}=\frac{51}{54}\times\frac{108}{63}\times\frac{21}{34}=$$

$$=\frac{3.\cancel{17}}{\cancel{54}}\cdot\frac{2.\cancel{54}}{3.21}\cdot\frac{21}{2.\cancel{17}}=1.$$

149. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς ἀριθμητικῆς παραστάσεως:

$$\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^2-\left(\frac{1}{0{,}25}\right)^3+\frac{7}{3}\cdot\frac{45}{105}.$$

Λύσις.- Ἔχομεν: $$\left(\frac{1}{\frac{125}{1000}}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{25}{100}}\right)^3+\frac{7}{3}\cdot\frac{45}{105}=\left(\frac{1000}{125}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{100}{25}\right)^3+\frac{7.3.15}{3.7.15}=8^2-4^3+1=1.$$

150 Εὕρετε τόν x οὕτως ὥστε νά εἶναι:
i) $4{,}83\,x-4{,}7=37{,}1+1{,}22x$, ii) $0{,}35x+1{,}62(x-1)=4{,}23$.

Λύσις.- i) $$\frac{483x}{100}-\frac{47}{10}=\frac{371}{10}+\frac{122x}{100}$$

$$x\left(\frac{483-122}{100}\right)=\frac{371-47}{10}\quad ἤ\quad x\cdot\frac{361}{100}=\frac{324}{10}\quad ἤ\quad x=\frac{3240}{361}$$

II) $$\frac{35x}{100} + \frac{162}{100}(x-1) = \frac{423}{100}$$

$$\left(\frac{35+162}{100}\right)x - \frac{162}{100} = \frac{423}{100} \rightsquigarrow \frac{197}{100}x = \frac{423}{100} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{423}{197}$$

151. Δείξατε ὅτι $\dfrac{4,75-0,25x}{3,60x+3,35} > 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{11}$.

Λύσις.— Ἔχομεν: $\dfrac{475-25x}{360x+335} > 1 \Leftrightarrow 475-25x > 360x+335$

$$\Rightarrow 475-335 > 360x+25x \Rightarrow 385x < 140 \Rightarrow x < \frac{140}{385} = \frac{2.70}{5.77} = \frac{2.10}{5.11} =$$

$= \dfrac{4}{11}$. Αἱ συνεπαγωγαί εἶναι ἀντιστρεπταί.

152. Ὑπολογίσατε κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ τό πηλίκον $\dfrac{9,810}{3,141}$

Λύσις.— Ἔχομεν $\dfrac{9,810}{3,141} = \dfrac{9810}{3141}$ =(δι' ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως, βλ. § 79 Α')=3,123.

153. Εὕρετε κατά προσέγγισιν ἑκατοστοῦ τά πηλίκα:

$$\frac{\dfrac{1,17}{9} + \dfrac{2,91}{3}}{12 - \dfrac{0,43}{2}} \qquad \frac{\dfrac{85,43}{1,1} + \dfrac{6,25}{1,21}}{35,42 - \dfrac{3,14}{0,12}}$$

Λύσις.— I) $$\frac{\dfrac{1,17}{9} + \dfrac{2,91}{3}}{12 - \dfrac{0,43}{2}} = \frac{\dfrac{117}{900} + \dfrac{291}{300}}{12 - \dfrac{43}{200}} = \frac{\dfrac{117+873}{900}}{\dfrac{2400-43}{200}} =$$

$$= \frac{\dfrac{990}{900}}{\dfrac{2357}{200}} = \frac{2.990}{9.2357} = \frac{1.980}{21.213} = \boxed{0,09}$$

II) $$\frac{\dfrac{85,43}{1,1} + \dfrac{6,25}{1,21}}{35,42 - \dfrac{3,14}{0,12}} = \frac{\dfrac{8543}{110} + \dfrac{625}{121}}{\dfrac{3542}{100} - \dfrac{314}{12}} = \frac{\dfrac{8543 \cdot 121 + 625 \cdot 110}{121 \cdot 110}}{\dfrac{3542 \cdot 12 - 314 \cdot 100}{12 \cdot 100}} =$$

$$= \frac{12 \cdot 100\,(8543 \cdot 121 + 625 \cdot 110)}{121 \cdot 110\,(3542 \cdot 12 - 314 \cdot 100)} = \frac{12 \cdot 100 \cdot 1102\,453}{121 \cdot 110 \cdot 11 \cdot 104} = \boxed{8,95}$$

154. *Ποίαν διαφοράν θά ἔχωμεν ὡς πρός τήν ἀκριβῆ τιμήν τῆς παραστάσεως* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}$ *ἄν ἕκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν μέ τήν κατά προσέγγισιν* $\frac{1}{100}$ *τιμήν του;*

Λ ύ σ ι ς.– Ἡ ἀκριβής τιμή τῆς παραστάσεως εἶναι $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=$ $=\frac{12}{12}=1$. Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό $1/3$ μέ $0,33$, τό $1/4$ μέ $0,25$, τό $5/12$ μέ $0,41$ θά λάβωμεν τήν κατά προσέγγισιν τιμήν τῆς παραστάσεως $0,33+0,25+0,41=0,99$. Ἡ διαφορά εἶναι $0,01$.

155. *Παραστήσατε τούς συμμέτρους* $\frac{33}{40}$, $\frac{43}{1250}$, $\frac{738933}{99900}$ *ὑπό τήν μορφήν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων.*

Λ ύ σ ι ς.– i)

$$\begin{array}{r|l} 330 & 40 \\ \cline{2-2} 100 & 0,825 \\ 200 & \end{array} \quad : \quad \frac{33}{40}=0,82500000\ldots$$

ii)

$$\begin{array}{r|l} 4300 & 1250 \\ \cline{2-2} 5500 & 0,0344 \\ 5000 & \\ 000 & \end{array} \quad : \quad \frac{43}{1250}=0,03440000\ldots$$

iii) Ἁπλοποιοῦμεν διά 3: $\frac{246311}{33300}$. Ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν

$$\begin{array}{r|l} 246311 & 33300 \\ \cline{2-2} 132110 & 7,39\underline{3}72\underline{3} \\ 312100 & \\ 124000 & \\ \hline 241000 & \\ 79000 & \\ 12400 & \end{array} \quad : \quad \frac{738933}{99900}=7,39\overline{372}\,\overline{372}\ldots$$

Τό 3ον ὑπόλοιπον 12400 ἐπανευρίσκεται εἰς τό 6ον ὑπόλοιπον. Ἐπομένως ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀπό τό 3ον δεκαδικόν ψηφίον καί ἐπαναρχίζει ἀπό τό 6ον.

156. *Παραστήσατε τά δεκαδικά περιοδικά κλάσματα:*

$0,\overline{871}871871\ldots$, $1,43\overline{27}2727\ldots$, $0,00\overline{431}431\ldots$

ὑπό τήν μορφήν κλασμάτων μ/ν, ὅπου μ, ν φυσικοί ἀριθμοί.

Λύσις.- i) $x = 0,\overline{871}\ldots = \frac{871}{999}$ (σελ. 81 Α' μέρος)

ii) $x = 1,43\overline{27}\,\overline{27}\ldots$, $100x = 143 + 0,272727\ldots$

$$100x = 143 + \frac{27}{99} = 143 + \frac{3}{11} = \frac{1573}{11}, \quad x = \frac{1573}{1100}$$

iii) $x = 0,00\overline{431}\ldots$, $100x = 0,\overline{431}431\ldots = \frac{431}{999}$, $x = \frac{431}{99900}$

157. Ἔστω τό ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{p}{q} < 1$. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό p/q τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν κλάσμα μέ μονοψηφίαν περιόδου (δηλ. τῆς μορφῆς $0,\overline{\psi}$, $\psi_1\psi_1\ldots$) εὕρετε ποίας τιμάς δύναται νά λάβῃ τό q.

Λύσις.- Θά ἔχωμεν $\frac{p}{q} = 0,\psi_1\psi_1\psi_1\psi_1\cdots = \frac{\psi_1}{9}$. Ἄρα οἱ ὅροι τοῦ $\frac{\psi_1}{9}$ εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ $\frac{p}{q}$ συνεπῶς ὁ q εἶναι διαιρέτης τοῦ 9. Ὥστε $q = 3$ ἤ 9.

158. Νά προσδιορισθῇ τό ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{p}{q} < 1$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι τέλειον τετράγωνον καί ὅτι τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν κλάσμα μέ μονοψηφίαν περίοδον.

Λύσις.- Ἔστω $\frac{p_1^2}{q_1^2}$ τό ζητούμενον κλάσμα, ὅπου p_1 καί q_1 πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Τότε $\frac{p_1^2}{q_1^2} = 0,\psi_1\psi_1\psi_1\cdots = \frac{\psi_1}{9}$. Ἄρα (βλ. ἄσκ. 157), ὁ q_1^2 πρέπει νά εἶναι διαιρέτης τοῦ 9. Συνεπῶς $q_1 = 3$. Τό ζητούμενον κλάσμα πρέπει νά εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{p_1^2}{9}$, ἀνάγωγον καί < 1. Ἄρα $p_1 = 1$ ἤ 2. Τό ζητούμενον: 1/9 ἤ 4/9.

Νά ἐξαχθῇ ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος τετραγωνική ρίζα τῶν ἀριθμῶν:

159. 527, 932, 1871, 5940.

Λύσις.- Ἐφαρμόζομεν τόν κανόνα τῆς σελ. 80 (Α' μέρος) καί εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως: 22, 30, 43, 77.

160. *20111 , 312697 , 1863407.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν : 141 , 559 , 1365.

161. *100034 , 3589800 , 58300010.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν : 316 , 1894 , 7635.

Νά ἐξαχθῆ ἡ κατά προσέγγισιν 0,001 τετραγωνική ρίζα τῶν ἀριθμῶν :

162. *39,2 , 474,9 , 8716 , 0,356.*

Λύσις.- Ἐργαζόμεθα σύμφωνα μέ τήν § 86, ii Α΄ μέρος καί εὑρίσκομεν : 6,260 21,792, 93,359 , 0,596. Παραθέτομεν, τάς πράξεις διά τόν ὑπολογισμόν τῆς ρίζης τοῦ 474,9 κατά προσέγγισιν 1/1000. Ὡς γνωστόν πολλαπλασιάζομεν τόν ἀριθμόν ἐπί 1000000 εὑρίσκομεν τήν κατά προσέγγισιν μονάδος ρίζαν τοῦ γινομένου καί τήν διαιροῦμεν διά 1000

474900000 | 21792
4
074
41
3390
2989
40100
39141
09590,0

41	428	427	4349	43582
1	8	7	9	2
41	3424	2989	39141	87164

163. *0,059 , 172,35 , 1849.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως

0,242 , 13,129 , 43,000.

164. *3,14 , 9,81 , 1,414.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν : 1,772 , 3,132 , 1,189.

165. *Νά ἐξαχθῆ ἡ κατά προσέγγισιν 0,001 τετραγωνική ρίζα τῶν ἀριθμῶν : 3,17 , 3,1416 , 10.*

Λύσις.- Εὑρίσκομεν : 1,780 , 1,772 , 3,162.

166. Νά εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαί ρίζαι τῶν κλασμάτων:

$$\frac{16}{49},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{25}{16},\quad \frac{169}{100},\quad \frac{121}{225}$$

Λύσις.– Ἔχομεν: $\sqrt{\frac{16}{49}} = \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \frac{4}{7}$. Ὁμοίως, διά τά λοιπά εὑρίσκομεν: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{11}{15}$.

167. Νά ἐξαχθῆ, κατά προσέγγισιν 0,01 ἡ τετραγωνική ρίζα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν: $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{35}{11}$, $\frac{9,81}{3,4}$

Λύσις.– Ἔχομεν $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3.5}{5.5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \simeq \frac{3,87}{5} = 0,77$,

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \sqrt{\frac{4.7}{49}} = \frac{\sqrt{28}}{7} \simeq \frac{5,29}{7} = 0,75\ldots$$

$$\sqrt{\frac{35}{11}} = \sqrt{\frac{35\cdot 11}{11^2}} = \frac{\sqrt{385}}{11} \approx \frac{19,62}{11} = 1,78.$$

Ἕνα ἄλλον τρόπον θά ἐφαρμόσωμεν διά τό τελευταῖον κλάσμα. Σύμφωνα μέ τήν θεωρίαν (§ 86) ἀρκεῖ νά εὑρεθῆ ἀκέραιος x τοιοῦτος ὥστε:

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 \leqq \frac{9,81}{3,4} < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{x^2}{10000} \leqq \frac{981}{340} < \frac{(x+1)^2}{10000}$$ ἤ διά πολ)σμοῦ ἐπί 10000:

$$x^2 < \frac{981000}{34} < (x+1)^2 \quad \text{ἤ} \quad x^2 < 28852,9 < (x+1)^2$$

Ἄρα ὁ x εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος τετραγωνική ρίζα τοῦ 28852,9 ἤ ὅπερ τό αὐτό, ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος ρίζα τοῦ 28852. Αὕτη εὑρίσκεται: x = 169. Ὥστε ἡ ζητουμένη κατά προσέγγισιν ἑκατοστοῦ ρίζα εἶναι:

$$\frac{x}{100} = \frac{169}{100} = 1,69.$$

168. Ὑπολογίσατε κατα προσέγγισιν 1/1000 τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

Λύσις.- $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{47}{60}} = \sqrt{\frac{47.60}{60^2}} = \frac{\sqrt{2820}}{60} \approx \frac{53,103}{60} =$
$= \frac{5,3103}{6} = 0,885$.

169. *Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί οἱ λήγοντες εἰς 2, 3, 7, 8 δύνανται νά εἶναι τέλεια τετράγωνα;*

Λύσις.- Τά τετράγωνα τῶν 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 λήγουν ἀντιστοίχως εἰς 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 δηλ. εἰς 0, 1, 4, 5, 6, 9. Τό τετράγωνον τυχόντος ἀκεραίου λήγει εἰς ὅ,τι καί τό τετράγωνον τοῦ τελευταίου ψηφίου του δηλ. λήγει εἰς ἕν ἐκ τῶν 0, 1, 4, 5, 6, 9 καί οὐδέποτε εἰς 2, 3, 7, 8.

170. *Ἐάν τό τετράγωνον ἀκεραίου εἶναι διαιρετόν διά πρώτου τινός ἀριθμοῦ p, τότε εἶναι διαιρετόν καί διά p^2 (βλ § 58, i).*

Λυσις.- Ἄν α ἕνας ἀκέραιος, θά ἔχωμεν δυνάμει τῆς ὑθέσεως: P/α^2 ἤ $\alpha^2 = p.K$ ἤ $\alpha.\alpha = p.K$. Σύμφωνα ὅμως μέ § 58, i ὁ p διαιρῶν τό γινόμενον $\underline{\alpha.\alpha}$ θά διαιρῇ τόν ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων, στήν προκειμένη περίπτωση ἐπειδή οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι, θά διαιρῇ ἀμφοτέρους

ἤτοι: $\left.\begin{array}{l} \alpha = p.\lambda \\ \alpha = p.\lambda \end{array}\right\}$ (1). Διά πολλ/σμοῦ κατά μέλη ἕπεται:

$$\alpha^2 = p^2.\lambda^2 \quad \text{ἤτοι} \quad p^2|\alpha^2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

171. *Νά δειχθῇ ὅτι ἵνα ἀριθμητικόν κλάσμα εἶναι τέλειον τετράγωνον πρέπει καί ἀρκεῖ τό γινόμενον τῶν ὅρων του νά εἶναι τέλειον τετράγωνον.*

Λύσις.- Ἔστω ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p^2}{q^2}$ ὅπου $(p, q) = 1$. Τότε καί $(p^2, q^2) = 1$ ἄρα: $\alpha = \lambda p^2$ καί $\beta = \lambda q^2 \Rightarrow \alpha\beta = \lambda^2 p^2 q^2 = (\lambda p q)^2$.

172. *Ἐάν ὁ φυσικός ἀριθμός ν πληροῖ τήν ἰσότητα $\nu^2+\nu = \alpha$ ἤ τήν $\nu^2 + 2\nu = \alpha$ τότε ὁ ν εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν 1 τετρ. ρίζα τοῦ α. Ἐφαρμογή: Νά προσδιορισθοῦν δύο διαδοχικοί ἀκέραιοι ἔχοντες γινόμενον 2256.*

Λύσις.- i) $\nu^2 + \nu = \alpha \Rightarrow \nu^2 < \alpha$. Ἐπίσης $(\nu+1)^2 = \nu^2 + \nu + \nu +$

$+1 = a+\nu+1 > a$. Ὥστε $\nu^2 < a < (\nu+1)^2$ ὅ.ἔ.δ. (§84).

ii) $\nu^2+2\nu = a \Rightarrow \nu^2 < a$ καί $(\nu+1)^2 > a$ ἄρα πάλιν, ὁ ν εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζα τοῦ α (§84).

iii) $\nu(\nu+1) = 2256 \Rightarrow \nu^2+\nu = 2256 \Rightarrow \nu =$ ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος τετρ. ρίζα τοῦ $2256 = 47$. Πράγματι, $47.48 = 2256$.

173. *Ἡ κατά προσέγγισιν 1/100 τετραγωνική ρίζα ἑνός ἀριθμητικοῦ κλάσματος εἶναι ὁ 0,52. Ἄν ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος εἶναι ὁ 175 εὕρετε, ποῖος δύναται νά εἶναι ὁ ἀριθμητής;*

Λύσις.- Ἔστω $\dfrac{x}{175}$ τό κλάσμα. Τότε (§86):

$$(0,52)^2 \leqq \frac{x}{175} < (0,53)^2 \quad ἤ \quad \left(\frac{52}{100}\right)^2 \leqq \frac{x}{175} < \left(\frac{53}{100}\right)^2 \quad ἤ$$

$$2704 \leqq \frac{10000x}{175} < 2809 \quad ἤ \quad \frac{2704.175}{10000} \leqq x < \frac{2809.175}{10000} \quad ἤ$$

$47,32 \leqq x < 49,1575$. Δύο μόνον ἀκέραιοι πληροῦν τόν περιορισμόν αὐτόν: $x = 48$, $x = 49$.

174. *Ἐάν $\nu^3+\nu^2+\nu = a$ τότε ὁ (φυσικός) ἀριθμός ν εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ α.*

Λύσις.- Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι $\nu^3 < a \leqq (\nu+1)^3$ (§87) πρᾶγμα, προφανές, ἀφοῦ $a = \nu^3+\nu^2+\nu+1$.

175. *Ἐάν $\nu(\nu+1)(\nu+2) = a$, τότε ὁ ἀριθμός ν εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ α.*

Λύσις.- Ἐξ ὑποθέσεως $a = (\nu^2+\nu)(\nu+2) = \nu^3+3\nu^2+2\nu$. Ἑπομένως ὁ α πληροῖ τάς σχέσεις $\nu^3 < a < (\nu+1)^3$ (§87).

176. *Ποία ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος κυβική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $(\nu+1)^3-1$ ὅπου ν δοθείς φυσικός ἀριθμός;*

Λύσις.- Ἔστω $a = (\nu+1)^3-1 \Rightarrow a = \nu^3+3\nu^2+3\nu \Rightarrow \nu^3 < a$.
Ἐπίσης ἐκ τῆς $a = (\nu+1)^3-1 \Rightarrow (\nu+1)^3 = a+1 > a$. Δηλ.
$\nu^3 < a < (\nu+1)^3$ ἄρα ἡ κατά προσεγγ. μονάδος (καί κατ' ἔλλειψιν) κυβ. ρίζα τοῦ α δηλ. τοῦ $(\nu+1)^3-1$ εἶναι ὁ ν.

177. *Δείξατε διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι οἱ ἀριθμοί $5\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt{7}$,*

$5+\sqrt{3}$; $6-\sqrt{3}$ εἶναι ἀσύμμετροι.

Λύσις.- i) Ἐάν $5\sqrt[3]{2}=\frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \sqrt[3]{2}=\frac{\mu}{5\nu} \Rightarrow \left(\frac{\mu}{5\nu}\right)^3=2$ δηλ. ὁ 2 θά ἦτο κύβος συμμέτρου. Τοῦτο εἶναι ἀδύνατον (§95,2).

ii) Ἐάν, $3\sqrt{7}=\frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \sqrt{7}=\frac{\mu}{3\nu} \Rightarrow \left(\frac{\mu}{3\nu}\right)^2=7$ ὅπερ ἀντιβαίνει πρός τό θεώρημα τῆς § 82. iii) Ἐάν $5+\sqrt{3}=\sigma$ ὅπου σ, σύμμετρος τότε $\sqrt{3}=\sigma-5=$ σύμμετρος, ὅπερ ἄτοπον. iv) Ὅπως ἡ iii.

178. Ἐάν σ εἶναι σύμμετρος $\neq 0$ καί α ἀσύμμετρος, δείξατε δι' τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι τό ἄθροισμα α+σ, τό γινόμενον σ.α καί τό πηλίκον α/σ εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.
Λύσις.- Ἐάν $\alpha+\sigma=\sigma'$ ὅπου σ' σύμμετρος, τότε $\alpha=\sigma'-\sigma$ δηλαδή ἀσύμμετρος = μέ σύμμετρον, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τό α+σ δέν εἶναι σύμμετρος καί συνεπῶς εἶναι ἀσύμμετρος. Ὁμοίως ἄν $\sigma.\alpha=\sigma'$ τότε $\alpha=\sigma'/\sigma$, πάλιν τό ἴδιον ἄτοπον και.

179. Δείξατε διά παραδειγμάτων, ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων δύναται νά εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Ὁμοίως καί τό γινόμενον καί τό πηλίκον.
Λύσις.- $(5+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=8$, $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$, $3\sqrt{2}:5\sqrt{2}=3/5$

180. Προσδιορίσατε τούς συμμέτρους ἀριθμούς α καί β, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ἀριθμός $(\alpha-\beta).\sqrt{2}-(\beta-7)$ ἰσοῦται μέ μηδέν (βλ.§95).
Λύσις.- Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς §92 ἐπειδή $(\alpha-\beta)\sqrt{2}=\beta-7$ θά εἶναι: $\alpha-\beta=0$, $\beta-7=0$, ἐξ ὧν $\alpha=\beta=7$.

181. Δείξατε ὅτι τό πηλίκον $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. (βλ.§92 παράδ. 2).
Λύσις.- Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι δέν ἰσοῦται μέ κανένα σύμμετρον. Ἔστω ὅτι ὑπῆρχε σύμμετρος μ/ν ἴσος πρός $\sqrt{3}/\sqrt{2}$, ὅπου μ,ν φυσικοί ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Τότε $\mu^2/\nu^2=3/2$ ἤ (1) $2\mu^2=3\nu^2$. Ὁ 2 διαιρεῖ τό β' μέλος καί μή διαιρῶν τόν 3 θά διαιρῇ τόν ν^2 ἄρα καί τόν ν.
Ὥστε $\nu=2\rho$ ὅπου ρ φυσικός ἀριθμός.
Ἡ (1) γίνεται τώρα $2\mu^2=3.(2\rho)^2$ ἤ $2\mu^2=3.4\rho^2$ ἤ $\mu^2=2.3.\rho^2$;

Καί πάλιν ὁ 2 διαιρῶν τό β' μέλος θά διαιρῇ καί τό πρῶτον ἄρα καί τόν μ. Ὥστε καί ὁ ν καί ὁ μ θά εἶναι ἄρτιοι ἀμφότεροι συνεπῶς τό κλάσμα μ/ν δέν θά ἦτο ἀνάγωγον ὡς ὑπετέθη. Ἡ ἰσότης λοιπόν $\sqrt{3}/\sqrt{2}=\mu/\nu$ εἶναι ἄτοπος.

182. Ἐάν β καί γ σύμμετροι, πληροῦται δέ ἡ σχέσις $\beta.\sqrt{2}=\gamma.\sqrt{3}$ δείξατε ὅτι τότε εἶναι $\beta=0$ καί $\gamma=0$.

Λύσις.- Ἡ σχέσις γράφεται $\beta(\sqrt{2}/\sqrt{3})=\gamma$ καί ἐπειδή $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ εἶναι ἀσύμμετρος (ἄσκ. 181) ἕπεται κατά τό θεώρ. τῆς § 92. ὅτι $\beta=0$ καί $\gamma=0$.

183. Ἐάν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ ἕκαστον δέ τῶν δύο ἴσων κλασμάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμός τότε καί ὁ ἀριθμός $\dfrac{\alpha\sqrt[3]{2}+\gamma}{\beta\sqrt[3]{2}+\delta}$ εἶναι ἐπίσης σύμμετρος.

Λύσις.- Ἐκ τῆς $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$ ἕπεται $\alpha=\dfrac{\beta\gamma}{\delta}$ καί συνεπῶς:

$$\frac{\alpha\sqrt[3]{2}+\gamma}{\beta\sqrt[3]{2}+\delta}=\frac{(\beta\gamma/\delta)\sqrt[3]{2}+\gamma}{\beta\sqrt[3]{2}+\delta}=\frac{\beta\gamma\sqrt[3]{2}+\gamma\delta}{\beta\delta\sqrt[3]{2}+\delta^2}=\frac{\gamma(\beta\sqrt[3]{2}+\delta)}{\delta(\beta\sqrt[3]{2}+\delta)}=\frac{\gamma}{\delta}=\text{σύμμετρος.}$$

184. Ποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\sqrt{6,6666\ldots}$ καί $\frac{5}{2}$;

Λύσις.- Εἶναι $\sqrt{6,666}=\sqrt{6+\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{60}{9}}=\dfrac{7,7459\ldots}{3}$

Μία ρητή προσέγγισις κατ' ἔλλειψιν τοῦ $\dfrac{\sqrt{60}}{3}$ εἶναι $\dfrac{7,74}{3}=\dfrac{15,48}{6}$.

Ἐπειδή $\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{6}$ ἕπεται $\dfrac{5}{2}<\dfrac{15,48}{6}<\sqrt{6,666\ldots}$ Ἄρα $\dfrac{5}{2}<\sqrt{6,666\ldots}$

(ἰδέ καί § 94).

185. Διά δύο τυχόντα σύνολα A καί B δείξατε ὅτι:

$$A\cap B=B-\{(A\cup B)-A\}$$

ἤτοι «ἡ τομή δύναται νά προκύψῃ μέ ἑνώσεις καί ἀφαιρέσεις».

Λύσις.- Τό τυχόν στοιχεῖον q τοῦ 2ου μέλους, ἀνήκει εἰς τό B, χωρίς ν' ἀνήκει εἰς τό (A∪B)-A, ἐπομένως ν' ἀνήκῃ εἰς τό (A∪B) χωρίς ν' ἀνήκῃ εἰς τήν διαφοράν (A∪B)-A, ἄρα θ' ἀνήκη εἰς τό A (§7, i).

Ἀντιστρόφως, τό τυχόν σημεῖον p τοῦ πρώτου μέλους ἀνήκει εἰς τό A, ἄρα καί εἰς τό $A\cup B$, συνεπῶς δέν ἀνήκει εἰς τήν διαφοράν $(A\cup B)-A$. Ἀφοῦ λοιπόν, δέν ἀνήκη εἰς τό $(A\cup B)-A$ ἀλλά ἀνήκει εἰς τό B, ἔπεται ὅτι θ' ἀνήκη εἰς τήν διαφοράν $B-\{(A\cup B)-A\}$.

186. *Ἐάν A καί B εἶναι τυχόντα σύνολα, δείξατε ὅτι τά σύνολα A καί $B-(A\cap B)$ εἶναι ξένα μεταξύ των.*

Λύσις.- Ἄν εἶχον κοινόν στοιχεῖον p, τό p θ' ἀνῆκε καί εἰς τό A ἀλλά καί εἰς τό B (ἀφοῦ ἀνήκη εἰς τό $B-(A\cap B)$), συνεπῶς, θ' ἀνῆκε εἰς τό $A\cap B$. Οὕτω, τό p θ' ἀνῆκε εἰς τό $B-(A\cap B)$ ἐνῶ εἶναι κοινόν στοιχεῖον τῶν B καί $(A\cap B)$, ὅπερ ἄτοπον (§7).

187. *Ἐάν X εἶναι τό μέγιστον σύνολον (§14) καί A καί B δύο ὑποσύνολα τοῦ X τοιαῦτα ὥστε $B\subset A$, δείξατε ὅτι $A-B=$ $=A\cap B'$, ὅπου B' τό συμπληρωματικόν τοῦ B.*

Λύσις.- Πᾶν στοιχεῖον τοῦ $A^{ου}$ μέλους ἀνήκει εἰς τό A καί ὄχι εἰς τό B, δηλ. ἀνήκει εἰς τό A καί εἰς τό B', συνεπῶς, ἀνήκει εἰς τό $A\cap B'$. Πᾶν στοιχεῖον τοῦ $2^{ου}$ μέλους ἀνήκει εἰς τό A καί εἰς τό B' δηλ. δέν ἀνήκει εἰς τό B, ἄρα ἀνήκει εἰς τήν διαφοράν $A-B$.

188. *i) Ἐάν A, B δύο σύνολα ἀνήκοντα εἰς τό μέγιστον σύνολον X, δείξατε ὅτι $A'\cap B'=(A\cup B)'$ καί $(A\cap B)'=A'\cup B'$ ὅπου οἱ τόνοι σημαίνουν συμπληρωματικά σύνολα.*

ii) Ἐπίσης, βάσει τῆς προηγουμένης καί τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου, (§11) εὕρετε ἁπλῆν ἔκφρασιν διά τήν παράστασιν:

$$(A\cup B)\cap(A'\cup B)\cap(A\cup B)$$

Λύσις.- i) Πᾶν στοιχεῖον τοῦ $A'\cap B'$ ἀνήκει εἰς τό "ὄχι A" καί "ὄχι B" ἄρα δέν ἀνήκει εἰς τό $A\cup B$. Συνεπῶς ἀνήκει εἰς τό συμπληρωματικόν τοῦ $A\cup B$.

Πᾶν στοιχεῖον τοῦ $B^{ου}$ μέλους δέν ἀνήκει εἰς τό $A\cup B$ (διότι ἀνήκει εἰς τό συμπληρωματικόν του). Ἀφοῦ δέν ἀνήκει εἰς τό $A\cup B$, τότε δέν ἀνήκει οὔτε εἰς τό A, οὔτε εἰς τό B. Δηλ.

ἀνήκει συγχρόνως εἰς τά A' καί B'.

ii) Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου λαμβάνομεν:
$(A'\cup B)\cap(A\cup B') = (A'\cap A)\cup(A'\cap B')\cup(B\cap A)\cup(B\cap B') =$
$= \emptyset\cup(A\cup B)'\cup(A\cap B)\cup\emptyset$ (βάσει τοῦ ἀμέσως προηγουμένου).
Ἄρα τό ἀρχικόν σύνολον γράφεται:
$(A\cup B)\cap\{(A\cup B)'\cup(A\cap B)\} = \{(A\cup B)\cap(A\cup B)'\}\cup\{(A\cup B)\cap(A\cap B)\} =$
$=\emptyset\cup A\cap B = A\cap B$ (Ἐπιμεριστικός νόμος, ἄσκ. 5, V).

189 Ἐάν $A\supset B$, $\Gamma\supset\Delta$ νά δειχθῇ ἡ ἰσότης
$$(A-B)\cap(\Gamma-\Delta)=\{(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Delta)\}-\{(B\cap\Gamma)\cup(A\cap\Delta)\}.$$
Λύσις.- Πᾶν στοιχεῖον ρ τοῦ 1ου μέλους ἀνήκει καί εἰς τό A καί εἰς τό Γ καί δέν ἀνήκει εἰς τά B καί Δ. Ἄρα ἀνήκει εἰς τό δεύτερον μέλος διότι, ἀνήκει εἰς τό μειωτέον σύνολον: $(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Delta)$ χωρίς ν' ἀνήκῃ εἰς τό ἀφαιρετέον $(B\cap\Gamma)\cup(A\cap B)$.

Ἀντιστρόφως, ἔστω φ στοιχεῖον τοῦ B' μέλους τῆς ἀποδεικτέας. Τοῦτο ἀνήκει εἰς τό $(A\cap\Gamma)\cup(B\cap\Delta)$ ἄρα ἡ ἀνήκει εἰς τό $A\cap\Gamma$ ἤ εἰς τό $B\cap\Delta$. Ἄν συμβαίνῃ τό πρῶτον, τότε τό φ ἀνήκει καί εἰς τό A καί εἰς τό Γ. Δέν ἀνήκει ὅμως εἰς τά $B\cap\Gamma$ ἤ $A\cap\Delta$. Ἄρα τό ρ δέν ἀνήκει εἰς τό B (διότι τότε θ' ἀνῆκε εἰς τό $B\cap\Gamma$), οὔτε εἰς τό Δ. Ἄρα τό φ ἀνήκει εἰς ἀμφοτέρας τάς διαφοράς $A-B$ καί $\Gamma-\Delta$.
Ἄν συμβαίνῃ τό δεύτερον, τότε $\varphi=\rho$ ἄρα $\varphi\in A$ (διότι $B\subset A$) καί $\varphi\in\Delta$ ἄρα $\varphi\in\Gamma$ (διότι $\Delta\subset\Gamma$) ἐπομένως τό $\varphi\in A\cap\Gamma$ δηλ. ἐρχόμεθα εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν.

190. Ἔστωσαν A, B, Γ ὑποσύνολα τοῦ X καί A', B', Γ' τά συμπληρωματικά των ὡς πρός X. Ἐκφράσατε δι' ἑνώσεων καί τομῶν ἐκτελουμένων μεταξύ τῶν A, B, Γ, A', B', Γ' τά ἑξῆς σύνολα ἐκ στοιχείων τοῦ X (ὑποσύνολα τοῦ X):

i) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς τό A, ἀλλά μή ἀνήκοντα οὔτε εἰς τό B οὔτε εἰς τό Γ (βλ. § 14).

ii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα καί εἰς τό A καί εἰς τό B ἀλλ' ὄχι εἰς τό Γ.

iii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα, ἑνός τοὐλάχιστον ἐκ τῶν A, B, Γ.

iv) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα τοὐλάχιστον εἰς δύο ἐκ τῶν A, B, Γ.

v) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα μόνον εἰς ἕν ἐκ τῶν τριῶν συνόλων A, B, Γ.

vi) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς δύο μόνον ἐκ τῶν τριῶν συνόλων A, B, Γ.

vii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα μή ἀνήκοντα εἰς οὐδέν ἐκ τῶν συνόλων A, B, Γ.

viii) Σύνολον ἔχον στοιχεῖα ἀνήκοντα εἰς ὄχι περισσότερα τῶν δύο ἐκ τῶν A, B, Γ.

Λύσεις.- i) Κάθε στοιχεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου ἀνήκει καί εἰς τό A καί εἰς τό B' καί εἰς τό Γ'. Ἄρα ἀνήκει εἰς τό $A\cap B'\cap \Gamma'$ ὅπερ εἶναι τό ζητούμενον. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν: ii) $A\cap B\cap \Gamma'$, iii) $A\cup B\cup \Gamma$.

iv) $(A\cap B)\cup(A\cap \Gamma)\cup(B\cap \Gamma)$

v) $(A\cap B'\cap \Gamma')\cup(B\cap A'\cap \Gamma')\cup(\Gamma\cap A'\cap B')$

vi) $(A\cap B\cap \Gamma')\cup(A\cap \Gamma\cap B')\cup(B\cap \Gamma\cap A)$

vii) $A'\cap B'\cap \Gamma'$.

viii) Εἰς ὄχι περισσότερα τῶν δύο σημαίνει ὅτι ἤ ἀνήκει εἰς κανέν ἤ εἰς ἕν ἤ εἰς δύο ἐκ τῶν τριῶν. Ἀρκεῖ πρός τοῦτο, νά μή εἶναι κοινόν στοιχεῖον καί τῶν τριῶν συνόλων, δηλαδή ν' ἀνήκη εἰς τό συμπληρωματικόν τοῦ $A\cap B\cap \Gamma$. Τό ζητούμενον σύνολον εἶναι τό $(A\cap B\cap \Gamma)'$. Ἐπίσης, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου ἐπειδή δέν θ' ἀνήκη εἰς ἕν τοὐλάχιστον τῶν A, B, Γ θ' ἀνήκη εἰς τό $A'\cup B'\cup \Gamma' = (A\cap B\cap \Gamma)'$.

191. Νά δειχθῆ ὅτι τά σύνολα $A\cap B\cap \Gamma$, $A\cap B\cap \Gamma'$, $A\cap B'\cap \Gamma$ μένουν ἀμετάβλητα ὅταν ὅπου A τεθῆ τό $A\cap(B\cup \Gamma)$. Ὁ τόνος σημαίνει τό συμπληρωματικόν σύνολον ὡς πρός κάποιο σύνολον X περιέχον τά A, B, Γ ὡς ὑποσύνολα.

Λύσις.- i) $\{A\cap(B\cup \Gamma)\}\cap B\cap \Gamma = A\cap\{(B\cup \Gamma)\cap B\}\cap \Gamma$ (προσεταιριστικός νόμος) $= A\cap\{(B\cap B)\cup(\Gamma\cap B)\}\cap \Gamma$ (ἐπιμεριστικός νόμος) $= A\cap(\{B\cup(B\cap \Gamma)\}\cap \Gamma) = A\cap\{(B\cap \Gamma)\cup(B\cap \Gamma)\}$ (ἐπιμεριστικός νόμος) $= A\cap\{B\cap \Gamma\} = A\cap B\cap \Gamma$.

ii) $(A\cap(B\cup \Gamma))\cap B\cap \Gamma' = A\cap\{(B\cup \Gamma)\cap B\}\cap \Gamma'$ (προσεταιριστικός) $= A\cap\{B\cup(\Gamma\cap B)\}\cap \Gamma' = A\cap\{(B\cap \Gamma')\cup\{(\Gamma\cap B)\cap \Gamma'\}$ (ἐπιμεριστικός) $= A\cap\{(B\cap \Gamma')\cup\emptyset\} = A\cap\{B\cap \Gamma'\} = A\cap B\cap \Gamma'$.

iii) Ἀκριβῶς ὅπως ἡ ii).

192. Ἐάν a ἕνας φυσικός ἀριθμός, ἀποδείξατε ὅτι:

$$99a = 100(a-1) + 90 + (10-a)$$

Ἐξ αὐτοῦ νά δειχθῆ ὅτι ἄν $1 < a \leqq 9$, ὁ ἀριθμός $99a$ εἶναι ἕνας τριψήφιος ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό μεσαῖον ψηφίον εἶναι 9 καί τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀκραίων ψηφίων, εἶναι πάλιν 9.

Λύσις.– i) $100(a-1) + 90 + (10-a) = 100a - 100 + 90 + 10 - a = (100a - 100) + (100 - a) = 100a - a = 99a$. ii) Ἐάν $1 < a \leqq 9$ τότε ἡ ἰσότης $99a = 100(a-1) + 9 \cdot 10 + (10-a)$ δεικνύει ὅτι ὁ $99a$ περιέχει $a-1$ ἑκατοντάδας, 9 δεκάδας καί $(10-a)$ μονάδας ἤτοι $99a = \overline{\psi_1\psi_2\psi_3}$ ὅπου $\psi_2 = 9$, $\psi_1 + \psi_3 = (a-1) + (10-a) = 9$.

193. Ἐάν δύο τριψήφιοι ἀριθμοί εἶναι σχηματισμένοι μέ τά ἴδια ψηφία ἀλλά κατ' ἀντίστροφον τάξιν, πότε ἡ διαφορά των εἶναι διψήφιος ἀριθμός καί πότε τριψήφιος; Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν νά δειχθῆ ὅτι τό μεσαῖον ψηφίον τῆς διαφορᾶς εἶναι τό 9 καί τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀκραίων εἶναι, πάλιν 9.

Λύσις.– Ἔστωσαν $\overline{\psi_1\psi_2\psi_3} = \psi_3 + 10\psi_2 + 100\psi_1$ καί $\overline{\psi_3\psi_2\psi_1} = \psi_1 + 10\psi_2 + 100\psi_3$ οἱ δύο ἀριθμοί. Ἡ διαφορά των εἶναι $d = (\psi_3 + 10\psi_2 + 100\psi_1) - (\psi_1 + 10\psi_2 + 100\psi_3)$ (ὑποθέτομεν $\psi_1 > \psi_3$). Διά ν' ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα, ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν προσθετέων (§ 30), συνεπῶς

$d = 99\psi_1 + \psi_3 - 100\psi_3 = 99\psi_1 - (100\psi_3 - \psi_3)$ (βλ. § 32)

$= 99\psi_1 - 99\psi_3 = 99(\psi_1 - \psi_3)$. i) Ἐάν $\psi_1 - \psi_3 = 1$ τότε ἡ d εἶναι ὁ διψήφιος 99. ii) Ἐάν $\psi_1 - \psi_3 = a > 1$ τότε $d = 99a$ καί τό ἀποδεικτέον προκύπτει ἀπό τήν ἄσκησιν 192.

194. Νά εὑρεθῆ διψήφιος ἀριθμός γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔχει ἄθροισμα ψηφίων τό 15 καί ὅτι ἄν ἀπό τόν ἀριθμόν αὐτόν ἀφαιρεθῆ ὁ ἀριθμός ὁ σχηματιζόμενος ἀπό τά ἴδια ψηφία γεγραμμένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν, εὑρίσκεται διαφορά ἴση μέ 27.

Λύσις.– Θέλομεν νά προσδιορίσωμεν τούς ἀκεραίους x, y τοιούτους ὥστε:

$1 \leqq x \leqq 9$, $0 \leqq y \leqq 9$, $x + y = 15$, $(10x + y) - (10y + x) = 27$.

Ἡ τελευταία δίδει: $9x-(10y-y)=9x-9y=9(x-y)=27 \Rightarrow$ $x-y=3$. Ἐξ αὐτῆς καί τῆς $x+y=15$ εὑρίσκομεν (§48): $x=9$, $y=6$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός: 96.

195. *Ἐάν ὁ Α πληροῖ τάς σχέσεις: $2^7 \leqq A < 2^8$ καί $12^\nu \leqq A < 12^{\nu+1}$, ποῖοι δύναται νά εἶναι ὁ φυσικός ἀριθμός ν;*

Λύσις.- Διά νά συμβιβάζωνται αἱ δύο σχέσεις δέν πρέπει τό 12^ν νά ὑπερβαίνῃ τό 2^8 (θά εἴχομεν τό ἄτοπον $A<2^8<12^\nu \leqq A$) οὔτε τό 2^7 νά ὑπερβαίνῃ τό $12^{\nu+1}$. Δηλαδή πρέπει νά συναληθεύουν:

$$(1)\ \left\{12^\nu < 2^8\right\} \quad \text{καί} \quad (2)\ \left\{2^7 < 12^{\nu+1}\right\}$$

Ἡ (2) δίδει $\dfrac{2^7}{12} < 12^\nu$, συνεπῶς πρέπει $\dfrac{2^7}{12} < 12^\nu < 2^8$ ἤ

$\dfrac{32}{3} < 12^\nu < 256$. Ἡ διπλῆ ἀνισότης ἀληθεύει διά $\nu=1$ καί $\nu=2$.

196. *Ἐάν τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν ὀνομάσωμεν S τότε θά ἔχωμεν:*

$$S = 1+2+3+\dots+(\nu-2)+(\nu-1)+\nu$$
$$S = \nu+(\nu-1)+(\nu-2)+\dots+3+2+1$$

i) Ἐκ τῶν δύο τούτων, νά δειχθῇ ὅτι $2S=\nu(\nu+1)$

ii) Πόσον εἶναι τό ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν;

Λύσις.- i) Λόγω τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρός τήν τάξιν τῶν προσθετέων, ἡ πρόσθεσις τῶν δύο ἰσοτήτων:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \dots + & (\nu-2) & + & (\nu-1) & + & \nu \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ S & = & \nu & + & (\nu-1) & + & (\nu-2) & + \dots + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

δύναται νά γίνῃ κατά στήλας ὁπότε ἔχομεν:

$$2S = (\nu+1)+\{(\nu-1)+2\}+\{(\nu-2)+3\}+\dots+\{(\nu-2)+3\}+\{(\nu-1)+2\}+\{\nu+1\}$$

ἤ $2S = \underbrace{(\nu+1)+(\nu+1)+(\nu+1)+\dots+(\nu+1)}_{\nu \text{ προσθετέοι}} = \nu(\nu+1)$

ii) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν τήν ἰσότητα:

$$S = 1+2+3+\dots+(\nu-1)+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Διά $\nu=100$ ἔχομεν $S=\dfrac{100.101}{2} \Rightarrow S=50.101=5050$.

197. *Ἔστω ἕνας Πυθαγόρειος πίναξ πολλαπλασιασμοῦ μέ ν στή-*

1	2	3		ν
2	4	6		2ν
3	6	9		3ν
ν	2ν	3ν		ν^2

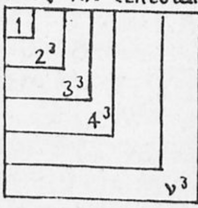
λας καί ν σειράς. Βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νά δειχθῆ ὅτι τό τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος εἶναι $\{\nu(\nu+1)\}^2$.

Λύσις.- Τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης στήλης εἶναι: $(1+2+3+\dots+\nu)$· τῆς $2^{\text{ας}}$: $2(1+2+\dots+\nu)\dots$ τῆς $\nu^{\text{ης}}$ $\nu(1+2+\dots+\nu)$. Τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος: $(1+2+3+\nu)(1+2+3+\dots+\nu)=$ $=(1+2+3+\dots+\nu)^2=S^2$ ὅπου $S=1+2+\dots+\nu$. Εἴδομεν ὅμως ὅτι $S=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (ἄσκ. 196) ἄρα τό 4-πλάσιον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος: $4S^2=\{\nu(\nu+1)\}^2$

198. *Εἰς τόν ἀνωτέρω Πυθαγόρειον πίνακα, οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τήν τελευταίαν δεξιά στήλην καί τήν τελευταίαν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἔχουν ἄθροισμα ν^3. Ἐξ αὐτοῦ νά συναχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος εἶναι:*

$$1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3$$

Λύσις.- i) Οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς τήν τελευταίαν στήλην καί γραμμήν ἔχουν ἄθροισμα



$(\nu+2\nu+3\nu+\dots+\nu^2)+(\nu+2\nu+3\nu+\dots+(\nu-1)^2)=$

$=\nu(1+2+3+\dots+\nu)+\nu(1+2+3+\dots+(\nu-1))=$

$=\nu\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu\frac{(\nu-1)\nu}{2}=\frac{\nu^2(\nu+1+\nu-1)}{2}=$

$=\frac{\nu^2.2\nu}{2}=\nu^3$ (βλ. ἄσκ. 196).

ii) Ἄν προσθέσωμεν τούς ἀριθμούς τοῦ πίνακος σύμφωνα μέ τό παραπλεύρως σχῆμα, λαμβάνομεν τό ἀποδεικτέον βάσει τοῦ προηγουμένου.

199 i) *Βάσει τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων νά δειχθῆ ὅτι:*

$$4(1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3)=\{\nu(\nu+1)\}^2.$$

ii) Νά ὑπολογισθῆ τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν 100 πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν: $1^3+2^3+3^3+\dots+100^2$.

iii) Νά εὑρεθῆ τό ἄθροισμα $82^3+83^3+84^3+\dots+324^3$.

Λ ύ σ ι ς.- i) Κατά τήν άσκ. 197, τό άθροισμα όλων τῶν ἀριθμῶν εἶναι $\dfrac{\{\nu(\nu+1)\}^2}{4}$ ἐνῶ κατά τήν ἄσκ. 198 τό ἴδιο ἄθροισμα εἶναι $1^3+2^3+\dots+\nu^3$. Συνεπῶς:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+\nu^3=\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2=(1+2+3+\dots+\nu)^2$$

ii) Ἔχομεν: $1^3+2^3+\dots+100^3=\left\{\dfrac{100.101}{2}\right\}^2=(5050)^2=25502500.$

iii) Ἔχομεν $82^3+83^3+\dots+324^3=(1^3+2^3+\dots+324^3)-(1^3+2^3+\dots+81^3)=\left\{\dfrac{324(324+1)}{2}\right\}^2-\left\{\dfrac{81(81+1)}{2}\right\}^2=(162.325)^2-(81.41)^2=$
$=(52650)^2-(3321)^2=(52650+3321)(52650-3321)=55971\times 49329=$
$=2.760.993.459.$

200. *Ἐάν $\beta>1$, δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν διαφορῶν:*

$$(\beta-1)+(\beta^2-\beta)+(\beta^3-\beta^2)+\dots+(\beta^\nu-\beta^{\nu-1}).$$

Ισοῦται μέ $\beta^\nu-1$. Ἀκολούθως δείξατε τήν ἰσότητα

$$\beta^\nu-1=(\beta-1)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{\nu-1}).$$

Λ ύ σ ι ς.- i) Ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστης διαφορᾶς ἐξαλείφεται μέ τόν 2ον τῆς ἑπομένης: $(\beta-1)+(\beta^2-\beta)=(\beta^2-\beta)+(\beta-1)=\{(\beta^2-\beta)+\beta\}-1=\beta^2-1$, $(\beta^2-1)+(\beta^3-\beta^2)=\{(\beta^3-\beta^2)+\beta^2\}-1=$
$=\beta^3-1$ κ.ο.κ. καί μένει τελικῶς $\beta^\nu-1$. ii) Κατά τό ἀποδειχθέν ἔχομεν $\beta^\nu-1=(\beta-1)+(\beta^2-\beta)+(\beta^3-\beta^2)+\dots+(\beta^\nu-\beta^{\nu-1})=$
$=(\beta-1)+\beta(\beta-1)+\beta^2(\beta-1)+\dots+\beta^{\nu-1}(\beta-1)=$
$=(\beta-1)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{\nu-1}).$

201 *Ἐάν $\nu=\pi o\lambda 5+3$ δείξατε ὅτι τότε:*

$$3\nu^2+3\nu-1=\pi o\lambda 5.$$

Λ ύ σ ι ς.- Θέτομεν $\nu=5\rho+3$ (ρ ἀκέραιος) καί ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν παράστασιν $3\nu^2+3\nu-1$ τό ν μέ $5\rho+3$. Μετά τά πράξεις, φθάνομεν εἰς πολ.5.

202. *Νά δειχθῆ ὅτι τό γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετόν διά ν (ν φυσικός ἀριθμός).*

Λ ύ σ ι ς.- Ἔστω τό γινόμενον $\Gamma=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+\nu-1)$. Ἐάν ὁ α διαιρῆται διά ν τότε καί τό Γ διαιρεῖται. Ἐάν τό α διαιρούμενον διά ν δίδει ὑπόλοιπον 1 τότε τό α+ν-1 διαιρεῖται διά ν ἄρα καί τό Γ. Ἐάν τό α δίδει ὑπόλοιπον 2 τότε τό α+ν-2 διαιρεῖται διά ν ἄρα καί τό Γ κ.ο.κ. Ἐάν τέλος τό α δίδει ὑπόλοιπον ν-1 τότε τό α+1 διαιρεῖται διά ν. Ὥστε εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τό Γ = πολν.

203. *Ἄν ὁ δ διαιρῆ ἀκριβῶς τήν διαφοράν δύο ἀκεραίων καί τόν ἕνα ἐξ αὐτῶν, τότε διαιρεῖ ἀκριβῶς καί τόν ἄλλον.*

Λύσις.- Ἔστωσαν α καί β ἀκέραιοι καί $\alpha-\beta=\kappa$. Ἐάν $\kappa=$ πολδ καί $\beta=$ πολδ τότε $\alpha=\beta+\kappa=$ πολδ + πολδ = πολδ. Ἐάν $\kappa=$ πολδ καί $\alpha=$ πολδ τότε $\alpha-\beta=\kappa \Longrightarrow \beta=\alpha-\kappa=$ πολδ − − πολδ = πολδ.

204. *Δείξατε ὅτι ἄν $(\nu-\mu)\,|\,(\nu\alpha+\mu\beta)$ τότε, $(\nu-\mu)\,|\,(\nu\beta+\mu\alpha)$ καί $(\nu-\mu)\,|\,(\alpha+\beta)(\mu+\nu)$.*

Λύσις.- Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορά τῶν $\nu\alpha+\mu\beta$ καί $\nu\beta+\mu\alpha$ εἶναι διαιρετή διά $\nu-\mu$. Διότι $\nu\alpha+\mu\beta-(\nu\beta+\mu\alpha)=$ $=\{(\nu\alpha-\nu\beta)+\mu\beta\}-\mu\alpha=(\nu\alpha-\nu\beta)-(\mu\alpha-\mu\beta)$ (ὑποθέτομεν $\alpha>\beta$) $=\nu(\alpha-\beta)-\mu(\alpha-\beta)=(\nu-\mu)(\alpha-\beta)=$ πολ $(\nu-\mu)$. Ἄρα κατά τήν ἄσκ. 203, ὁ $\nu-\mu$ θά διαιρῆ καί τόν $\nu\beta+\mu\alpha$. Ἀφοῦ, τώρα, ὁ $\nu-\mu$ διαιρεῖ τούς $\nu\alpha+\mu\beta$ καί $\nu\beta+\mu\alpha$ θά διαιρῆ καί τό ἄθροισμα αὐτῶν: $\nu\alpha+\mu\beta+\nu\beta+\mu\alpha=(\nu+\mu)\alpha+(\nu+\mu)\beta=(\nu+\mu)(\alpha+\beta)$

205. *Ἐάν ὁ $\alpha-\beta$ καί ὁ α εἶναι ἄρτιοι, νά δειχθῆ ὅτι*

$$64\,|\,(\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4).$$

Λύσις.- Ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $\alpha=2\kappa$, $\alpha-\beta=2\lambda$ (κ, λ ἀκέραιοι ὁπότε καί $\beta=\alpha-(\alpha-\beta)=2\kappa-2\lambda=2\rho$ (ρ ἀκέραιος) Ἐπίσης: $\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4=\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)=\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=$ $4\kappa^2.4\rho^2.(2\kappa+2\rho).2\lambda=64\kappa^2\rho^2(\kappa+\rho)\lambda=$ πολ 64

206. *Δείξατε ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί βγ εἶναι ἀκριβῶς διαιρετός διά τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β.*

Λύσις.- Κάθε Κ.Δ. τῶν α καί β εἶναι προφανῶς καί ΚΔ τῶν α καί βγ. Ἄρα καί ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β εἶναι Κ.Δ. τῶν α καί βγ ἄρα διαιρέτης καί τοῦ Μ.Κ.Δ τῶν α καί βγ (σελ. 8, i).

207. *Εὕρετε τόν Μ.Κ.Δ. τῶν δύο ἀριθμῶν*

$$360 \times 473 \quad \text{καί} \quad 361 \times 172$$

Λύσις.- Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μέ ποῖον ἀριθμόν διαιρούμενοι ἀμφότεροι, καθίστανται πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Εὑρίσκομεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν 473 καί 172. Οὗτος εἶναι ὁ 43. Διαιροῦμεν ἀμφοτέρους διά 43 καί φθάνομεν εἰς τούς ἀριθμούς

(1) $\{360 \times 11$ καί $361 \times 4\}$. Οἱ ἀριθμοί 360 καί 361 ὡς διαδοχικοί, εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἄρα δέν ἔχουν κανένα κοινόν παράγοντα πρῶτον. Διαιροῦμεν τούς (1) διά 4 καί φθάνομεν εἰς τούς ἀριθμούς:

(2) $\{90 \times 11$ καί $361\}$.

Οὐδείς πρῶτος παράγων τοῦ 90 εἶναι καί τοῦ 361 διότι ὡς εἴδομεν ὁ 360 καί ὁ 361 δέν ἔχουν κοινόν παράγοντα. Ἐάν καί ὁ 11 δέν εἶναι παράγων τοῦ 361 τότε οἱ (2) εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Πράγματι, τοῦτο συμβαίνει. Ἑπομένως διαιροῦντες τούς ἀρχικούς ἀριθμούς διά 43×4 τούς μετατρέπομεν εἰς σχετικῶς πρώτους. Ἄρα Μ.Κ.Δ. $= 43 \times 4 = 172$

208. *Ἐάν ν, φυσικός ἀριθμός, τότε οἱ $5\nu+1$ καί $6\nu+1$ εἶναι σχετικῶς πρῶτοι.*

Λύσις.- Ἐάν εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην $\delta \neq 1$ οὗτος θά διήρει καί τήν διαφοράν αὐτῶν $(6\nu+1)-(5\nu+1)=\nu$ συνεπῶς θά διήρει καί τό 5ν· ὡς διαιρῶν δέ καί τό $5\nu+1$ θά διήρει καί τόν $(5\nu+1)-5\nu=1$ ὅπερ ἄτοπον.

209. *Δείξατε ὅτι ἄν οἱ τρεῖς ἀκέραιοι α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των, τότε καί οἱ ἀριθμοί: $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των. (Ὑποδ: ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς τελευταῖοι δέν ἔχουν κ.δ. πρῶτον ἀριθμόν).*

Λύσις.- Ἐάν οἱ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ εἶχον κ.δ. πρῶτον τινά ἀριθμόν p, οὗτος ὡς διαιρῶν τό $\alpha\beta\gamma$ θά διαιρῇ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων (§ 58, i) ἔστω τόν α. Ὁ p, ὡς διαιρῶν τό ἄθροισμα $\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma$ καί διαιρῶν τόν ἕνα προσθετέον: $\alpha(\beta+\gamma)$, θά διαιρῇ καί τόν ἄλλον δηλ. τόν $\beta\gamma$. Ἐπειδή, ὁ πρῶτος p διαιρεῖ τό $\beta\gamma$, θά διαιρῇ ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων (τουλάχιστον) ἔστω τόν β. Ὁ ρ ὡς διαιρῶν τό ἄθροισμα $(\alpha+\beta)+\gamma$ καί ὡς διαιρῶν τόν ἕνα προσθετέον $(\alpha+\beta)$ θά διαιρῆ καί τόν ἄλλον δηλ. τόν γ. Ὥστε ὁ ρ θά εἶναι καί Κ.Δ τῶν α, β, γ. Οὗτοι ὅμως εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των ἄρα δέν δύνανται νά ἔχουν κ.δ., πρῶτον τινά. Ἑπομένως οἱ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ δέν ἔχουν Κ.Δ οὐδένα πρῶτον ἀριθμόν ἄρα καί οὐδένα σύνθετον. Συνεπῶς εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἐν τῷ συνόλῳ των.

210. *Ἐάν οἱ ἀκέραιοι α καί β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, τότε i) οἱ $\alpha+\beta$ καί $\alpha\beta$ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους· ii) οἱ $\alpha^\nu+\beta^\nu$ καί $\alpha\beta$, ἐπίσης.*

Λ ύ σ ι ς.– i) Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τήν ἄσκ. 209. ii) Ἐάν οἱ $\alpha^\nu+\beta^\nu$ καί $\alpha\beta$ εἶχον πρῶτον τινά Κ.Δ, ρ τότε ὁ ρ ὡς διαιρῶν τό $\alpha\beta$ θά διαιρῆ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν α, β. Ἔστω $\rho|\alpha$. Τότε $\Rightarrow \rho|\alpha^\nu$ καί ἐπειδή $\rho|\alpha^\nu+\beta^\nu \Rightarrow \rho|\beta^\nu \Rightarrow \rho|\beta$ (§ 58, πόρισμα). Ὥστε ὁ ρ θά ἦτο Κ.Δ. τῶν α καί β ὅπερ ἀδύνατον. Ἑπομένως οἱ $\alpha^\nu+\beta^\nu$ καί $\alpha\beta$ οὐδένα πρῶτον Κ.Δ. ἔχουν, ἄρα καί οὐδένα σύνθετον· ἤτοι εἶναι σχετικῶς πρῶτοι.

211. *Ἐάν οἱ α καί β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, δείξατε ὅτι οἱ $\alpha+\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$ δέν δύνανται νά ἔχουν ἄλλον πρῶτον κ.δ. παρά μόνον τόν 3 (Ὑπόδ.: $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$).*

Λ ύ σ ι ς.– Ἔστω δ ἕνας Κ.Δ. τῶν $\alpha+\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$. Ὁ δ, ὡς διαιρῶν τούς $\alpha+\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$ θά διαιρῆ καί τούς $(\alpha+\beta)^2$ καί $(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$ ἄρα καί τήν διαφοράν των, $3\alpha\beta$. Ὥστε ὁ δ εἶναι Κ.Δ τῶν $\alpha+\beta$ καί $3\alpha\beta$. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta$ καί $\alpha\beta$ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους κατά τήν ἄσκ. 210 δηλ. δέν ἔχουν Κ.Δ$\neq 1$. Ἑπομένως οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta$ καί $3\alpha\beta$ δέν δύνανται νά ἔχουν ἄλλον Κ.Δ. ἀπό τόν νέον παράγοντα 3, καί τοῦτον, ἄν τό $\alpha+\beta=$πολ3.

212. *Ἐάν ἀριθμός Α γράφεται μέ ν ψηφία εἰς ἕνα σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάσιν β, τότε ἰσχύει: $\beta^{\nu-1}\leq A<\beta^\nu$.*

Λύσις. – Ἔστω $A=\psi_\nu\psi_{\nu-1}\psi_{\nu-2}\ldots\psi_3\psi_2\psi_1{}_{<\beta>}=\psi_1+\psi_2\beta+$ $+\psi_3\beta^2+\ldots+\psi_\nu\beta^{\nu-1}$. Ὁ ν-ψήφιος αὐτός ἀριθμός λαμβάνει τήν μικροτέραν τιμήν των ὅταν τά ψηφία του λάβουν τάς μικροτέρας ἐπιτρεπομένας τιμάς ἤτοι $\psi_1=0$, $\psi_2=0,\ldots\psi_{\nu-1}=0$ καί $\psi_\nu=1$. Ἤτοι $A\geqq \underbrace{1000\ldots0}_{\nu\text{ ψηφία}}{}_{<\beta>}=\beta^{\nu-1}$. Ὁ Α λαμβάνει τήν μεγίστην δυνατήν τιμήν του ὅταν τά ν ψηφία του λάβουν ἕκαστον τήν μεγαλυτέραν ἐπιτρεπομένην τιμήν: $\psi_1=\beta-1$, $\psi_2=\beta-1,\ldots,\psi_\nu=\beta-1$ ἄρα $A\leqq(\beta-1)+\beta(\beta-1)+\beta^2(\beta-1)+\ldots+$ $+\beta^{\nu-1}(\beta-1)=(\beta-1)+(\beta^2-\beta)+(\beta^3-\beta^2)+\ldots+(\beta^\nu-1)=\beta^\nu-1$ (βλ. ἄσκ. 200). Συνεπῶς, $\beta^{\nu-1}\leqq A<\beta^\nu$.

213. *Ἀριθμός γράφεται εἰς τό δυαδικόν σύστημα, μέ ὀκτώ ψηφία. Πόσα ψηφία δύναται νά ἔχῃ εἰς τό δωδεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως;*

Λύσις. – Ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμός Α γράφεται εἰς τό 2-δικόν σύστημα μέ 8 ψηφία, ἕπεται κατά τήν ἄσκ. 212 ὅτι θά περιέχεται μεταξύ 2^7 καί 2^8:

$$2^7\leqq A<2^8.$$

Ἐάν ὁ Α πληροῖ τάς σχέσεις $12^{\nu-1}\leqq A<12^\nu$ τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τό 12-δικόν σύστημα, γράφεται μέ ν ψηφία (βλ. ἄσκ. 212).

Διά νά εὕρωμεν, μέ πόσα ψηφία γράφεται εἰς τό 12-δικόν ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μεταξύ ποίων διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ 12 περιέχεται. Παρατηροῦμεν ὅτι:

(1) $12^1<2^7<12^2<2^8<12^3$ (ἤ $12<64<144<256<1728$).

Ὁ Α ἐπειδή περιέχεται μεταξύ 2^7 ἕως 2^8 (μή συμπεριλαμβανομένου), δύναται νά εὑρίσκεται (ὡς δεικνύουν αἱ (1)) μεταξύ 12^1 καί 12^2 ἤ νά εὑρίσκεται μεταξύ 12^2 καί 12^3. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ Α δύναται νά γράφεται εἰς τό δωδεκαδικόν σύστημα μέ 2 ἤ 3 ψηφία.

214. *Ἐάν τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\alpha'}{\beta'}$ εἶναι ἀνάγωγα, δείξατε ὅτι τό κλάσμα $\frac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{\beta\beta'}$ εἶναι ἀνάγωγον ὅταν καί μόνον, οἱ β καί β' εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.*

Λύσις. – Ἔστω p ἕνας πρῶτος, Κ.Δ. τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{a\beta'+a'\beta}{\beta\beta'}$. Ὁ p, ὡς διαιρῶν τό $\beta\beta'$, διαιρεῖ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο παραγόντων, ἔστω τόν β. Ἀφοῦ ὁ p διαιρῆ τόν β, θά διαιρῆ καί τόν $a'\beta$ καί ὡς διαιρῶν καί τόν $a\beta'+a'\beta$ θά διαιρῆ καί τήν διαφοράν των δηλ. τόν $a\beta'$. Ὁ p δέν διαιρεῖ τόν a, (διότι τότε οἱ a καί β θά εἶχον Κ.Δ. τόν p, ἐνῶ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους), ἀλλά ὁ p διαιρεῖ τό $a\beta'$, συνεπῶς $p|\beta'$. Ὥστε πᾶς Κ.Δ. τῶν $a\beta'+a\beta$ καί $a\beta$ εἶναι καί Κ.Δ. τῶν β καί β'. Ἀντιστρόφως πᾶς Κ.Δ. τῶν β καί β' εἶναι προφανῶς καί Κ.Δ. τῶν $a\beta'+a\beta$ καί $a\beta$. Ἐπομένως, διά νά εἶναι οἱ $a\beta'+\beta a'$ καί $\beta\beta'$ πρῶτοι πρός ἀλλήλους πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ β καί β' νά εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

215. *Ἐάν τό κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον καί $\neq 1$ τότε τό ἄθροισμα $\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}$ δέν ἰσοῦται μέ ἀκέραιον ἀριθμόν. Τό αὐτό συμβαίνει καί ἄν τό κλάσμα a/β εἶναι οἱονδήποτε κλάσμα $\neq 1$.*

Λύσις. – Ἐν πρώτοις ἀφοῦ $\frac{a}{\beta}\neq 1$, δέν εἶναι $a=1$, $\beta=1$, ἄρα $a\beta>1$. Ἔχομεν: $\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}=\frac{a^2+\beta^2}{a\beta}$. Ἀφοῦ οἱ a, β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους $\Rightarrow a^2+\beta^2$ καί $a\beta$ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους (ἄσκ. 210). Ἄρα ὁ $a\beta$ δέν διαιρεῖ τό $a^2+\beta^2$ (διότι ἄν τό διήρη τότε ὁ $a\beta$ θά ἦτο ὁ ΜΚΔ τῶν $a^2+\beta^2$ καί $a\beta$ δηλ. θά ἦτο $a\beta=1$). Ἄρα τό $(a^2+\beta^2)/a\beta$ δέν εἶναι ἀκέραιος.

Ἐάν $\frac{a}{\beta}$, μή ἀνάγωγον τότε $\frac{a}{\beta}=\frac{p}{q}$ ὅπου $\frac{p}{q}$ ἀνάγωγον. Συνεπῶς $\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=$ μή ἀκέραιος (κατά τό προηγούμενον).

216. *Νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀναγώγων κλασμάτων μέ διαφορετικούς παρονομαστάς, δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Λύσις. – Ἔστωσαν $\frac{a}{\beta}$ καί $\frac{a'}{\beta'}$ δύο ἀνάγωγα κλάσματα μέ $\beta\neq\beta'$.
Ἐάν $\frac{a}{\beta}+\frac{a'}{\beta'}=$ ἀκέραιος $=\frac{a\beta'+a'\beta}{\beta\beta'}\Rightarrow a\beta'+a'\beta=$ πολ$\beta\beta'\Rightarrow a\beta'+a'\beta=$ πολβ.
Ὁ β ὡς διαιρῶν τό $a\beta'+a'\beta$ καί τό $a'\beta$ θά διαιρῆ καί τήν διαφοράν των $a\beta'$ καί ὤν πρῶτος πρός τό a θά διαιρῆ τόν β' ὥστε:

(1) $\beta|\beta'$. Ὁμοίως: $\alpha\beta'+\alpha'\beta=\pi o\lambda\beta\beta' \Rightarrow \alpha\beta'+\alpha'\beta=\pi o\lambda\beta' \Rightarrow \beta'|\alpha'\beta$ καί ὤν πρῶτος πρός τόν α', θά διαιρῆ τόν β. Ὥστε: (2) $\beta'|\beta$. Ἐκ τῶν (1) καί (2) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\beta'$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἐνάντιον τῇ ὑποθέσει. Ἄρα $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha'}{\beta'}=$ ὄχι ἀκέραιος

217. Δοθέντος τοῦ ἀναγώγου κλάσματος α/β, προσδιορίσατε τό σύνολον τῶν ἀκεραίων x τῶν ὁποίων τό γινόμενον ἐπί α/β καί τό πηλίκον διά α/β εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Λύσις.- Ὁ τυχών ἐκ τῶν ζητουμένων ἀκεραίων θά πληροῖ τάς σχέσεις: (1) $\frac{x\alpha}{\beta}=p$ (ἀκέραιος), (2) $\frac{x\beta}{\alpha}=q$ (ἀκέραιος).

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι ὁ β διαιρεῖ τόν $x\alpha$, καί ὤν πρῶτος πρός τόν α, θά διαιρῆ τόν x ἤτοι:

$$(3) \qquad x=\pi o\lambda\beta$$

Ἐκ τῆς (2) $\Rightarrow$ $\alpha|x\beta$ καί ἐπειδή ὁ α εἶναι πρῶτος πρός τόν $\beta \Rightarrow \alpha|x$ ἤτοι (4) $x=\pi o\lambda\alpha$. Ἐκ τῶν (3) καί (4) ἕπεται $x=$ κοινόν πολ)σιον τῶν α καί β = τυχόν πολ)σιον τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν α καί β (βλ. σελ. 40)

218. *Εὕρετε ἀκέραιον μεγαλύτερον ἤ μικρότερον τοῦ $\frac{31506}{214}$ ἀλλά διαφέροντα τοῦ κλάσματος τούτου, ὄχι περισσότερον ἀπό 1/2.*

Λύσις.- Ἄς ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν 31506 : 214,

$31506=214\times147+48 \Rightarrow \frac{31506}{214}=147+\frac{48}{214}$. Ἐπειδή $\frac{48}{214}<\frac{1}{2}$ συνάγομεν ὅτι $\frac{31506}{214}<147+\frac{1}{2}$ ἤ $\frac{31506}{214}-147<\frac{1}{2}$. Ὁ 147 εἶναι ὁ ζητούμενος, διότι διαφέρει τοῦ κλάσματος ὀλιγώτερον τοῦ 1/2.

Σημ. Ἐάν τό ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρέτου, τότε ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι τό πηλίκον +1

π.χ: $31596=214\times147+138 \Rightarrow \frac{31596}{214}=147+\frac{138}{214}=147+1-\frac{76}{214}=$ $=148-\frac{76}{214}$. Τότε $\frac{31596}{214}=148-\frac{76}{214}$, $148-\frac{31596}{214}=\frac{76}{214}<\frac{1}{2}$.

219. *Ὁ ἀριθμός $3,41_{<8>}$ νά γραφῆ ὡς ἀριθμητικόν κλάσμα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος (βλ. § 78, *iv).*

Λύσις.- Σύμφωνα μέ τήν § 78, *iv, δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$3,41_{<8>}=3+\frac{4}{8}+\frac{1}{8^2}=\frac{3.64+4.8+1}{64}=\frac{225}{64}.$$

220. *Οἱ ἀριθμοί $A=4+\frac{5}{8}+\frac{6}{8^2}+\frac{3}{8^3}+\frac{7}{8^4}$ καί $B=4+\frac{5}{8}+\frac{5}{8^2}+$ $+\frac{7}{8^3}+\frac{6}{8^4}$ νά γραφοῦν εἰς τό σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάσιν τό 8. Ποῖος ἐκ τῶν δύο εἶναι μεγαλύτερος;*

Λύσις.- Οὕτω γράφονται:

$$A=4,5637_{<8>} \qquad \text{καί} \qquad B=4,5576_{<8>}$$

Κατ' ἀναλογίαν πρός τούς δεκαδικούς ἀριθμούς, θά ἔχωμεν ὅτι

$$4{,}5576_{<8>} < 4{,}5637_{<8>} \quad \text{ἤτοι} \quad B < A$$

(Δυνάμεθα ἀκόμη νά διαπιστώσωμεν ὅτι:

$$4{,}5576_{<8>} < 4{,}5517_{<8>} < 4{,}5600_{<8>} < 4{,}5637_{<8>} \;)$$

221. Πόσα κλάσματα ὑπάρχουν ἴσα πρός τό $\frac{21}{35}$, ἀλλά ἔχοντα ὅρους μικροτέρους;

Λ ύ σ ι ς.— Ἐάν τρέψωμεν τό $\frac{21}{35}$ εἰς ἀνάγωγον θά ἔχωμεν:

$\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. Ὅλα τά ἴσα πρός τό $\frac{3}{5}$, εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{3\lambda}{5\lambda}$ ὅπου λ ἀκέραιος. Θέλομεν ὅμως $3\lambda < 21$, $\lambda < 7$, ἄρα τό λ δύναται νά λάβῃ 6 τιμάς: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

222. Νά καθορισθῇ κλάσμα ἴσον πρός τό $\frac{378}{630}$ καί τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ὅρων νά εἶναι 40.

Λ ύ σ ι ς.— Ἔχομεν: $\frac{378}{630} = \frac{3}{5}$. Ἐάν $\frac{x}{y}$ τό ζητούμενον κλάσμα

τότε $\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 3\lambda$, $y = 5\lambda \Rightarrow x + y = 40 \Rightarrow 8\lambda = 40 \Rightarrow \lambda = 5$

$\Rightarrow x = 15$, $y = 25$. $\frac{x}{y} = \frac{15}{25}$

223. Σχηματίζομεν ἀπέραντον δεκαδικόν ἀριθμόν, γράφοντες μετά τήν ὑποδιαστολήν, 1 ἀκολουθούμενον ἀπό 2 μηδενικά, κατόπιν 1 ἀκολουθούμενον ἀπό 3 μηδενικά κ.ο.κ.

$$A,\ 1001000100001000001000000 1\ldots$$

Νά δειχθῇ ὅτι ὁ δεκαδικός αὐτός δέν εἶναι περιοδικός.

Λ ύ σ ι ς.— Ἐάν ὑπῆρχε περίοδος, αὐτή θά περιεῖχε ἕνα ὡ ρ ι σ μ έ ν ο ν πλῆθος διαδοχικῶν μηδενικῶν, ἔστω Κ μηδενικά. Ἑπομένως ἀπό τινος καί ἔπειτα θά συναντούσαμεν μόνον Κ διαδοχικά μηδενικά (ὅσα θά εἶχεν ἡ περίοδος). Ἀλλά τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ ἀριθμοῦ, τό πλῆθος τῶν διαδοχικῶν μηδενικῶν τά ὁποῖα συναντῶμεν διατρέχοντες τά ψηφία ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά καθίσταται ὁλοέν καί μεγαλύτερον, ὑπερβαῖνον κάθε ἀριθμόν.

224. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμητής ἑνός κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής εἶναι 113 καί τοῦ ὁποίου ἡ κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ

τιμή εἶναι 3,141.

Λύσις.– Ἔστω $\frac{x}{113}$ τό ζητούμενον κλάσμα. Τότε πρέπει

(1) $\frac{3141}{1000} \leqq \frac{x}{113} < \frac{3142}{1000}$ (βλ. §79). Ἡ (1) δίδει $\frac{3141 \times 113}{1000} \leqq$ $\leqq x < \frac{3142 \times 113}{1000}$ ἤ ἀκόμη (2) $354,933 \leqq x < 355,046$.
Τήν (2) εἷς μόνος ἀκέραιος x τήν πληροῖ: $x = 355$.

225. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

Λύσις.– Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι δέν ἰσοῦται μέ κανένα σύμμετρον. Ἐάν ὑπῆρχε σύμμετρος σ τοιοῦτος ὥστε $(\sqrt{5}-\sqrt{2})/(\sqrt{7}-\sqrt{5}) = \sigma \neq 0$ τότε θά εἴχομεν κατά σειράν: $\sqrt{5}-\sqrt{2} = \sigma\sqrt{7} - \sigma\sqrt{5}$, $\sqrt{5}(1+\sigma) = \sqrt{2}+\sigma\sqrt{7}$ καί τετραγωνίζοντες: $5(1+\sigma)^2 = 2+7\sigma^2+2\sigma\sqrt{14}$ καί $5(1+\sigma)^2 - 2 - 7\sigma^2 = 2\sigma\sqrt{14}$. Ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι ἄτοπος διότι δίδει $\sqrt{14} = \frac{5(1+\sigma)^2-2-7\sigma^2}{2\sigma}$ = σύμμετρος ἐνῶ ἡ $\sqrt{14}$ = ἀσύμμετρος (§82).

226. Ἐάν ν, φυσικός ἀριθμός, δείξατε ὅτι τό κλάσμα $(\nu+1)/(\nu-1)$ δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Λύσις.– Ἔστω ὅτι ἦτο $\frac{\nu+1}{\nu-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$. Τότε θά εἴχομεν
$\nu+1 = \frac{p^2(\nu-1)}{q^2} \Rightarrow (\nu+1)(\nu-1) = \frac{p^2(\nu-1)^2}{q^2} = \left\{\frac{p(\nu-1)}{q}\right\}^2$. Ἐπειδή τό τετράγωνον τοῦ ἀριθμητικοῦ κλάσματος $\frac{p(\nu-1)}{q}$ εἶναι ἀκέραιος (ὁ $(\nu+1)(\nu-1)$) ἕπεται ὅτι καί τό κλάσμα $\frac{p(\nu-1)}{q}$ ἰσοῦται μέ ἀκέραιον Κ. Ὥστε θά εἴχομεν $(\nu+1)(\nu-1) = K^2$ ἤ $\nu^2-1 = K^2$ ἤ $\nu^2 - K^2 = 1$ ἤ $(\nu+K)(\nu-K) = 1$ δηλ. τό γινόμενον δύο διαφορετικῶν ἀκεραίων ἴσον μέ τήν μονάδα. Τοῦτο εἶναι ἄτοπον, ἄρα τό $\frac{\nu+1}{\nu-1}$ δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον συμμέτρου.

(Συμπλήρωσις. Ἔστω ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχον τετράγωνον ἴσον μέ ἀκέραιον ἀριθμόν. Τότε $\delta^2 | \gamma^2$ ἄρα ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δ^2 καί γ^2 εἶναι ὁ δ^2. Ἀλλ' ἐπειδή $(\gamma, \delta) = 1 \Rightarrow (\gamma^2, \delta^2) = 1$ (βλ. σελ. 45). Ἄρα $\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta = 1$ ἤτοι τό $\gamma/\delta =$ πρός ἀκέραιον, γ.).

227. *Ἐάν a καί β εἶναι τυχόντες φυσικοί ἀριθμοί καί $a > \beta$, τότε ὁ λόγος $(a^2+\beta^2)/(a^2-\beta^2)$ δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Λύσις.— Ἔστω ὅτι $\dfrac{a^2+\beta^2}{a^2-\beta^2} = K$ (ἀκέραιος). Τότε: $a^2+\beta^2 = K(a^2-\beta^2) \Rightarrow a^2+\beta^2 = Ka^2 - K\beta^2 \Rightarrow \beta^2 + K\beta^2 = Ka^2 - a^2 \Rightarrow \beta^2(K+1) = a^2(K-1) \Rightarrow \dfrac{K+1}{K-1} = \dfrac{a^2}{\beta^2}$ ἤτοι τό κλάσμα $\dfrac{K+1}{K-1}$ θά ἦτο τέλειον τετράγωνον συμμέτρου. Ἀλλά τοῦτο εἶναι ἀδύνατον κατά τήν ἄσκ. 226.

228. *Ἐάν $0 < \nu < 1$ ἀποδείξατε τήν διπλῆν ἀνισότητα $\nu < \sqrt{\nu} < 1$. Ἐξ αὐτοῦ ὑπολογίσατε τά 10 πρῶτα δεκαδικά ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ 0,9999999999.*

Λύσις.— Ἐπειδή $\nu < 1$, λαμβάνομεν διά πολ)σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἀνισότητος ἐπί ν:

$$(1) \qquad \nu^2 < \nu$$

Ἐάν ἦτο $\nu \geqq \sqrt{\nu}$ τότε θά ἦτο καί $\nu^2 \geqq (\sqrt{\nu})^2$ ἤτοι $\nu^2 \geqq \nu$ ὅπερ ἀντίκειται πρός τήν (1). Ἄρα εἶναι (2) $\nu < \sqrt{\nu}$. Ἐπίσης ἄν ἦτο $\sqrt{\nu} \geqq 1$ τότε θά ἦτο καί $(\sqrt{\nu})^2 \geqq 1$ ἤτοι $\nu \geqq 1$ ὅπερ ἀντίκειται πρός τήν ὑπόθεσιν, $\nu < 1$. Ἄρα εἶναι (3) $\sqrt{\nu} < 1$. Αἱ (2) καί (3) γράφονται ὁμοῦ: $\nu < \sqrt{\nu} < 1$.

Διά $\nu = 0,9999999999$ ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης γίνεται:

$$(4) \qquad 0,9999999999 < \sqrt{0,9999999999} < 1$$

τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμός $a = 0,9999999999$ εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν $\dfrac{1}{10^{10}} = 0,0000000001$, τετραγωνική ρίζα τοῦ 0,9999999999. Πράγματι: $a + \dfrac{1}{10^{10}} = 1$ καί συνεπῶς ἡ (4) γράφεται $a < \sqrt{0,9999999999} < a + \dfrac{1}{10^{10}}$, συνεπῶς, παρέχει τήν ρίζαν, μέ 10 δεκαδικά ψηφία.

229 *Νά προσδιορισθῆ ἀκέραιος τετραψήφιος, διαιρετός διά 147, λήγων εἰς 9 καί ὥστε νά εἶναι τέλειον τετράγωνον.*

Λύσις.- Ἔστω Α ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδή $147 = 3.7^2$, ὁ Α θά περιέχη ὡς παράγοντα τό 3.7^2 καί ἐπειδή ὁ Α εἶναι τέλειον τετράγωνον θά περιέχη κατ' ἀνάγκην ὡς παράγοντα, τόν ἀριθμόν $3^2.7^2 = 441$. Ὥστε ὁ Α θά διαιρῆται διά 441, ἄρα θά εἶναι τῆς μορφῆς $A = 441.\lambda$. Ἐπειδή ὁ Α εἶναι τετραψήφιος θά εἶναι $1000 \leqq 441\lambda < 10000$ ἐξ οὗ

$\frac{1000}{441} \leqq \lambda < \frac{10000}{441}$ ἤ $2,3\ldots \leqq \lambda < 23,\ldots$ Ἄρα ὁ λ θά εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν: 3, 4, 5, 6, 7, ... 23. Ἐπειδή $441.\lambda$ λήγει εἰς 9 ἕπεται ὅτι ὁ λ θά λήγη εἰς 9 ἄρα $\lambda = 9$ ἤ 19. Τέλος, ἐπειδή ὁ $444\lambda = (21)^2.\lambda^2$ δέον νά εἶναι τέλειον τετράγωνον, πρέπει καί ὁ λ νά εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἄρα $\lambda = 9$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, $A = 441.9 = 3969$.

230. *Νά εὑρεθῆ ἡ γενική μορφή τῶν ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀκριβῶς διαιρετοί διά τῆς κατά προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικῆς των ρίζης (βλ. § 84, i).*

Λύσις.- Ἔστω x εἷς ἐκ τῶν ζητουμένων ἀκεραίων καί ν ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος τετραγ. ρίζα τοῦ x. Τότε: (1) $\nu^2 \leqq x < (\nu+1)^2$. Ἐπειδή ὁ x εἶναι διαιρετός διά ν θά εἶναι τῆς μορφῆς (2): $x = \lambda\nu$ ὅπου λ, φυσικός ἀριθμός. Ἡ (1), βάσει τῆς (2) γίνεται $\nu^2 \leqq \lambda\nu < (\nu+1)^2$ ἤ $\nu \leqq \lambda < \frac{\nu^2+2\nu+1}{\nu}$ ἤ (3) $\nu \leqq \lambda < \nu+2+\frac{1}{\nu}$. Οἱ ἀκέραιοι λ οἱ πληροῦντες τήν (3) εἶναι προφανῶς, μόνον οἱ $\lambda = \nu$, $\lambda = \nu+1$ καί $\lambda = \nu+2$. Ἑπομένως ὁ x (λόγῳ τῆς (2)) θά ἔχη μίαν ἀπό τάς μορφάς: (4) ν^2 ἤ $\nu(\nu+1)$ ἤ $\nu(\nu+2)$ ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός. Ἀντιστρόφως. Οἱ ἀριθμοί τῆς μορφῆς (4) ἔχουν ὅπως φαίνεται εὔκολα (βλ. ἀσκ. 172), ὡς τετραγωνικήν ρίζαν κατά προσέγγισιν μονάδος, τό ν καί εἶναι ὅλοι διαιρετοί διά ν.

231. *Ποῖον τό σημεῖον καί ἡ ἀπόλυτος τιμή ἑκάστου τῶν ἑπομένων ἀριθμῶν;*

$-3\,,\ -9\,,\ +4\,,\ -\frac{7}{11}\,,\ +0{,}836\,,\ -1{,}01\,,\ +\sqrt{21}\,;$

232. Ἐάν $\alpha=-5{,}32$, $\beta=+0{,}32$, εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως: $|\alpha|-|\beta|$ ἤ τῆς $2|\alpha|-\frac{1}{4}|\beta|$.

Λύσις.- I) $|\alpha|-|\beta|=|-5{,}32|-|+0{,}32|=5{,}32-0{,}32=\boxed{5}$

II) $2|\alpha|-\frac{1}{4}|\beta|=2\,|-5{,}32|-\frac{1}{4}\,|+0{,}32|=2\cdot(5{,}32)-\frac{1}{4}\,(0{,}32)=$

$=10{,}64-0{,}08=\boxed{10{,}56}$

233. Ποῖοι σχετικοί ἀριθμοί x πληροῦν τήν ἰσότητα, $|x|=3$;

Λύσις.- $|x|=3$. Ἀλλά $|3|=3$ καί $|-3|=3$ ἄρα $x=3$ ἤ -3.

234. Ἐπί τῆς προσανατολισμένης εὐθείας τοῦ σχ. 24 ἀνεύρετε τά σημεῖα τά ἔχοντα ἀπομάκρυνσιν $-3{,}5$ ἤ $+3{,}5$ ἤ $-7/3$ ἀπό τοῦ O.

235. Ἐάν $|x|=|y|$ τί συμπεραίνετε διά τούς σχετικούς ἀριθμούς x καί y;

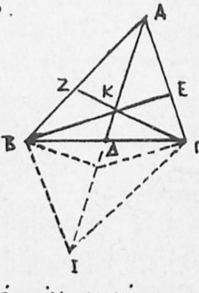
Λύσις.- Οἱ x καί y ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν. Ἄρα ἐάν ἔχουν τό αὐτό πρόσημον εἶναι ἴσοι, ἄν ἀντίθετα πρόσημα, ἀντίθετοι.

236. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τάς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἵτινες τέμνονται εἰς τό Κ. Ἀποδείξατε ὅτι:

$$\frac{2}{3}\vec{A\Delta}+\frac{1}{3}\vec{BE}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}\,,\quad \vec{AK}+2\vec{\Delta K}=\vec{O}\,,\quad \vec{AB}+\vec{A\Gamma}=2\vec{A\Delta}$$

$$\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=\vec{O}\,,\quad 2\vec{K\Delta}+2\vec{EB}+\vec{BA}=\vec{O}\,,\quad \vec{\Delta A}+\vec{EB}+\vec{Z\Gamma}=\vec{O}$$

$$\vec{A\Delta}+\frac{1}{2}\vec{\Gamma B}+3\vec{KE}+\frac{1}{2}\vec{\Gamma A}=\vec{O}.$$

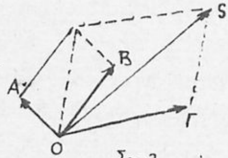


Λύσις.- i) Ἔχομεν: $\vec{AK}+\vec{KE}=\vec{AE}$

Ἀλλά, $\vec{AK}=\frac{2}{3}\vec{A\Delta}$, $\vec{KE}=\frac{1}{3}\vec{BE}$, $\vec{AE}=$ $=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$ (§104). Συνεπῶς ἡ ἀρχική γίνεται $\frac{2}{3}\vec{A\Delta}+\frac{1}{3}\vec{BE}=\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$. ii) Ἔχομεν $\vec{KA}=2\vec{\Delta K}$. Ἐπειδή δέ $\vec{AK}+\vec{KA}=0$ $\Rightarrow \vec{AK}+2\vec{\Delta K}=0$. iii) Ἄν λάβωμεν $\vec{\Delta I}=\vec{A\Delta}$, τό ΑΒΙΓ εἶναι παρ/μον καί κατά τόν κανόνα τοῦ παρ)μου ἔχομεν: $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}=\vec{AI}=2\vec{A\Delta}$ iv) $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=$ $=\vec{KA}+\{\vec{KB}+\vec{K\Gamma}\}=\vec{KA}+2\vec{K\Delta}=\vec{KA}+\vec{AK}=0$. Κατά παρεμφερεῖς τρόπους ἀποδεικνύονται καί αἱ λοιπαί διανυσματικαί ἰσότητες

237 *Δίδονται τρία διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{O\Gamma}$. Κατασκευάσατε ἕν τέταρτον διάνυσμα $\vec{O\Delta}$ τοιοῦτον ὥστε $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}=0$*

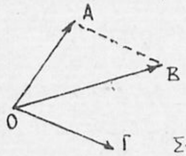
Λ ύ σ ι ς.- Διά νά εἶναι $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}=0$ ἀρκεῖ νά εἶναι $\{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}\}=-\vec{O\Delta}$ ἤ $\vec{O\Delta}=-\{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}\}$. Κατασκευάζομεν λοιπόν τό διάνυσμα $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=\vec{OS}$ (σχ. 2) καί τό ἀντίθετον τοῦ $\vec{OS}$ εἶναι τό $\vec{O\Delta}$



Σχ. 2.

238. *Δίδονται δύο διανύσματα $\vec{OA}$, $\vec{OB}$. Κατασκευάσατε ἕν τρίτον διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$ τοιοῦτον ὥστε $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB}$.*

Λ ύ σ ι ς.- $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{O\Gamma}=\vec{OB}-\vec{OA}=$ $=\vec{OB}+\vec{AO}=\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{AB}$. Τό ζητούμενον εἶναι ἴσον πρός τό $\vec{AB}$ (σχ.3).



Σχ. 3

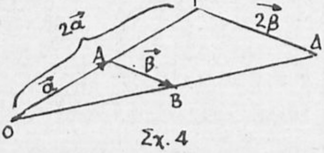
239. *Δίδονται δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$. Κατασκευάσατε τά ἀθροίσματα:*

$$a+(-\vec{\beta}),\quad (-2)\vec{\alpha}+(+3)\vec{\beta},\quad \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{\alpha}+\left(+\frac{3}{2}\right)\vec{\beta}$$

Λ ύ σ ι ς.- Βλέπε § 104 καί § 103.

240. *Ἀποδείξατε (γεωμετρικῶς) ὅτι $(+2)\{\vec{\alpha}+\vec{\beta}\}=(+2)\vec{\alpha}+(+2)\vec{\beta}$*

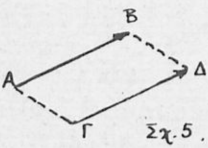
Λ ύ σ ι ς.- Εἰς τό Σχ. 4, ἄς εἶναι $\vec{OA}=\vec{\alpha}$, $\vec{AB}=\vec{\beta}$, A καί B μέσα τῶν ΟΓ καί ΟΔ. Προφανώς, $2(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=2.\vec{OB}=$ $=\vec{O\Delta}=\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}=2\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.



Σχ. 4

241. *Ἀποδείξατε ὅτι $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow \vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}$*

Λ ύ σ ι ς.- Ἐπειδή $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$, τό τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παρ)μον, συνεπῶς $\vec{A\Gamma}=\vec{B\Delta}$



Σχ. 5.

242. *Βάσει τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου ἀποδείξατε ὅτι: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(-\vec{\beta})=\vec{\alpha}$ καί κατόπιν δείξατε τήν συνεπαγωγήν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{\beta} \Rightarrow$*

$\Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

Λύσις.- i) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}+\{\vec{\beta}+(-\vec{\beta})\} = \vec{\alpha}+0=\vec{\alpha}$. ii) $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{\gamma}+\vec{\beta} \Rightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(-\vec{\beta}) = (\vec{\gamma}+\vec{\beta})+(-\vec{\beta}) \Rightarrow \vec{\alpha}=\vec{\gamma}$.

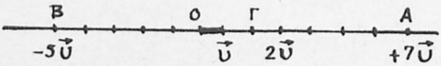
243.- Ἐπί εὐθείας (ε) ὁρίσατε μίαν ἀρχήν O καί ἕν μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{U}$. Ἀκολούθως κατασκευάσατε γεωμετρικῶς τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοί:

$$+2{,}5,\quad -3,\quad -5,\quad -\frac{11}{3},\quad +\frac{7}{4}.$$

Λύσις.- βλ. § 106 ii.

244 Κατασκευάσατε τάς διανυσματικάς εἰκόνας τῶν ἀριθμῶν -5 καί $+7$. Ποῖος ἀριθμός ἔχει διανυσματικήν εἰκόνα, τό ἄθροισμα τῶν δύο τούτων διανυσματικῶν εἰκόνων;

Λύσις.--



$(+7\vec{U})+(-5\vec{U}) = \vec{OA}+\vec{OB} = \vec{OA}+\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} = +2\vec{U}$ Ἄρα ὁ $+2$ ἔχει διανυσματικήν εἰκόνα τό ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν $+7$ καί -5.

245. Ὑπολογίσατε τά ἑπόμενα ἀθροίσματα:

$$(+2)+(+10),\quad (+2)+(-7),\quad (-5)+(-4)$$
$$(-6)+(+9),\quad (+5)+(-3),\quad (+17)+(-17)$$

Λύσις.-- βλ. σελ. 106, iii.

246. Ὑπολογίσατε τά κάτωθι ἀθροίσματα:

$$(-35)+(-8),\quad (-22)+(+13),\quad (+11)+(+7)$$
$$(+19)+0,\quad (+23)+(-23),\quad (+65)+(-65).$$

Λύσις.- βλ. σελ. 106, iii

247. Ἐκτελέσατε τάς κάτωθι προσθέσεις:

$$\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{6}{7}\right),\quad \left(-\frac{6}{11}\right)+\left(-\frac{2}{11}\right),\quad \left(-\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right),\quad \left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right),\quad \left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right).$$

Λύσις.-- βλ. σελ. 106, iii

248. Ἐκτελέσατε τάς κάτωθι προσθέσεις:

$\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)$, $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{11}{8}\right)$, $\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{11}{14}\right)$,

$\left(-3{,}75\right)+\left(+\frac{15}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{16}\right)$, $(+0{,}14)+(-3{,}14)$.

Λύσις.

1) $\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{5}{8}-\frac{7}{8}=\boxed{-\frac{1}{4}}$

II) $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{11}{8}\right)=\frac{6}{8}-\frac{11}{8}=\boxed{-\frac{5}{8}}$

III) $\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{11}{14}\right)=-\frac{4}{14}-\frac{11}{4}=\boxed{-\frac{15}{14}}$

IV) $(-3{,}75)+\left(+\frac{15}{4}\right)=-3{,}75+3{,}75=\boxed{0}$

V) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{16}\right)=-\frac{12}{16}-\frac{5}{16}=\boxed{-\frac{17}{16}}$

VI) $(+0{,}14)+(-3{,}14)=\boxed{-3}$

249. Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν x ἐκ τοῦ τύπου $x=\alpha+\beta$ γνωρίζοντες ὅτι $\alpha=-2$, $\beta=-7$ ἤ $\alpha=-\frac{3}{7}$, $\beta=\frac{+4}{14}$ ἤ $\alpha=-9{,}81$, $\beta=1{,}01$, $\alpha=12{,}35$, $\beta=-18{,}05$.

Λύσις.

1) $x=\alpha+\beta=(-2)+(-7)=\boxed{-9}$

II) $x=\alpha+\beta=\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{+4}{14}\right)=\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{2}{7}\right)=\boxed{-\frac{1}{7}}$

III) $x=\alpha+\beta=(-9{,}81)+(+1{,}01)=\boxed{-8{,}8}$

IV) $x=\alpha+\beta=(12{,}35)+(-18{,}05)=\boxed{-5{,}7}$

250. Ὑπολογίσατε ἀπό μνήμης τά κάτωθι ἀθροίσματα:

$(+5)+(+3)$, $(-5)+(+2)$, $(+5{,}5)+(3{,}5)$, $(-1{,}5)+(-2{,}5)$,
$(+3)+(-1)$, $(+15)+(-7)$, $(+57)+(-47)$, $(+153)+(-21)$.

251. Ὑπολογίσατε ἀπό μνήμης τά κάτωθι ἀθροίσματα:

$(-3)+(+13)$, $(-6)+(+4)$, $(+5)+(-7)$, $(-8)+(+14)$,
$(-9)+(-3)$ $(-1)+(+42)$, $(-25)+(+3)$, $(-95)+(+95)$.

252. Ὑπολογίσατε ἀπό μνήμης τά ἀθροίσματα:

$(-2)+\left(-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)$,

$\left(-\frac{11}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(+\frac{17}{8}\right)$, $\left(+\frac{11}{13}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)$

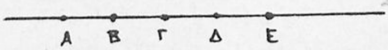
253. Ἐπ' εὐθείας κεῖνται τά σημεῖα $Α, Β, Γ, Δ, Ε$ τοιαῦτα ὥστε $ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ$. Ἐπί ποῖον σχετικόν ἀριθμόν πρέπει νά πολλαπλασιασθῆ τό διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΑ}$ διά νά δώση τό $\overrightarrow{ΓΕ}$; Ἤ τό $\overrightarrow{ΑΓ}$ διά νά δώση τό $\overrightarrow{ΕΔ}$; Ἤ τό $\overrightarrow{ΑΔ}$ διά νά δώση τό $\overrightarrow{ΕΑ}$;

Λύσις.-

$\overrightarrow{ΓΕ} = -2\left(\overrightarrow{ΒΑ}\right)$

$\overrightarrow{ΕΔ} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΑΓ}\right)$

$\overrightarrow{ΕΑ} = -\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{ΑΔ}\right)$



Σχ. 6

Ἡ λύσις γίνεται φανερά ἐκ τοῦ σχήματος 6

254. Βάσει τοῦ κανόνος τῆς (§ 107, iii) δείξατε ὅτι, ἄν $α$ καί $β$ εἶναι ὁμόσημοι σχετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει: $|α+β| = |α|+|β|$

Λύσις.- Ἐάν οἱ $α$ καί $β$ εἶναι θετικοί τότε προσθέτομεν πρῶτον τάς ἀπολύτους τιμάς των καί εὑρίσκομεν τόν ἀριθμόν $|α|+|β|$. Εἰς αὐτόν προτάσσομεν τό $+$, καί λαμβάνομεν τό ἄθροισμα $α+β = +(|α|+|β|)$. Διά νά λάβωμεν τήν ἀπόλυτον τιμήν τοῦ $α+β$, παραλείπομεν τό πρόσημον $+$, ἄρα $|α+β| = |α|+|β|$.

Ἐάν οἱ $α$ καί $β$ ἀρνητικοί τότε $α+β = -(|α|+|β|)$ σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῆς προσθέσεως δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Διά νά λάβωμεν τήν ἀπόλυτον τιμήν τοῦ $α+β$, παραλείπομεν τό πρόσημον $-$, ἄρα $|α+β| = |α|+|β|$.

255. Ὑπολογίσατε τά ἀθροίσματα:

$(+4)+(+6)+(-5)+(+3)+(+3)$, $(-4)+(+3)+(-6)+(+5)+(-5)$.

Λύσις.- I) $(+4)+(+6)+(-5)+(+3)+(+3) = \boxed{+11}$

II) $(-4)+(+3)+(-6)+(+5)+(-5) = \boxed{-7}$

256. Ὑπολογίσατε τά ἀθροίσματα:

$$\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{7}{4}\right)+(-5)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)$$

Λύσις.– I) $\left(-\frac{7}{2}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{7}{4}\right)+(-5)=-\frac{14}{4}+\frac{5}{4}-\frac{2}{4}+$ $+\frac{7}{4}-\frac{20}{4}=-\frac{36}{4}+\frac{12}{4}=-\frac{24}{4}=\boxed{-6}$

II) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{4}-\frac{6}{4}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}-\frac{10}{4}=\boxed{-\frac{15}{4}}$

157. Ἐκτελέσατε τάς προσθέσεις:

$$\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{3}{12}\right) \qquad \left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right) \qquad +\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-\frac{7}{12}$$

Λύσις.– I) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{3}{12}\right)=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}-\frac{3}{12}=\boxed{+\frac{5}{12}}$

II) $\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=-\frac{2}{6}=\boxed{-\frac{1}{3}}$

III) $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}+\frac{2}{12}=\boxed{-\frac{5}{12}}$

IV) $+\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-\frac{7}{12}=\frac{3}{24}-\frac{8}{24}-\frac{14}{24}=\boxed{-\frac{19}{24}}$

158. Ἐκτελέσατε τάς κάτωθι προσθέσεις:

$$\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right) \qquad \left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{15}{24}\right)$$

$$\left(+\frac{27}{48}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{3}{16}\right) \qquad \left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{32}\right)$$

Λύσις.– I) $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right)=-\frac{10}{6}-\frac{9}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{26}{6}=\boxed{-\frac{13}{3}}$

II) $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(+\frac{15}{24}\right)=-\frac{15}{24}-\frac{36}{24}+\frac{15}{24}=-\frac{36}{24}=\frac{12}{8}=\boxed{-\frac{3}{2}}$

III) $\left(+\frac{27}{48}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{3}{16}\right)=\frac{27}{48}-\frac{16}{48}-\frac{9}{48}=+\frac{2}{48}=\boxed{+\frac{1}{24}}$

IV) $\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{3}{16}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{32}\right)=-\frac{8}{32}-\frac{6}{32}+\frac{20}{32}-\frac{7}{32}=\boxed{-\frac{1}{32}}$

259. Ἐκτελέσατε τάς προσθέσεις:

$(+6)+\left(-\frac{13}{9}\right)+\left(-\frac{17}{18}\right)$ $\qquad$ $\left(+\frac{11}{22}\right)+(-3)+\left(-\frac{7}{8}\right)$

$(-5)+\left(-\frac{33}{39}\right)+\left(+\frac{65}{169}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{5}{15}\right)+\left(+\frac{13}{39}\right)+\left(-\frac{6}{48}\right)$

Λύσις.- I) $(+6)+\left(-\frac{13}{9}\right)+\left(-\frac{17}{18}\right)=\frac{108}{18}-\frac{26}{18}-\frac{17}{18}=+\frac{65}{18}=\boxed{+\frac{65}{18}}$

II) $\left(+\frac{11}{22}\right)+(-3)+\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{44}{88}-\frac{264}{88}-\frac{77}{88}=\boxed{-\frac{297}{88}}$

III) $(-5)+\left(-\frac{33}{39}\right)+\left(+\frac{65}{169}\right)=(-5)+\left(-\frac{11}{13}\right)+\left(+\frac{5}{13}\right)=$

$=-\frac{65}{13}-\frac{11}{13}+\frac{5}{13}=\boxed{-\frac{71}{13}}$

IV) $\left(-\frac{5}{15}\right)+\left(+\frac{13}{39}\right)+\left(-\frac{6}{48}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}=-\frac{104}{3.8.13}+\frac{24}{3.8.13}-\frac{39}{3.8.13}=$

$=-\frac{119}{312}=\boxed{-\frac{119}{312}}$

260. Εὕρετε τό ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν:

$-\frac{75}{100}$, $\frac{275}{1000}$, $-\frac{750}{2000}$, $-0{,}25$.

Λύσις.- $-\frac{75}{100}+\frac{275}{1000}-\frac{750}{2000}-\frac{25}{100}=-\frac{1500}{2000}+\frac{550}{2000}-\frac{750}{2000}-$

$-\frac{500}{2000}=-\frac{2200}{2000}=-\frac{22}{20}=\boxed{-\frac{11}{10}}$.

261. Ὑπολογίσατε τό ἑπόμενον ἄθροισμα:

$-25+15-5-6-7+4-9+6-4-1$

Λύσις.- $-25+15-5-6-7+4-9+6-4-1=\boxed{-32}$

262. Ὑπολογίσατε τά ἀθροίσματα:

$-5{,}5+4{,}5-3+1-2{,}5$ $\qquad$ $-1{,}5+4{,}75-5{,}65-3{,}2$.

Λύσις.- I) $-5{,}5+4{,}5-3+1-2{,}5=\boxed{-5{,}5}$

II) $-1,5+4.75-5,65-3,2=\boxed{-5,6}$

263. Ὑπολογίσατε τό ἄθροισμα:

$$-\frac{3}{6}+\frac{4}{5}-\frac{2}{10}-\frac{26}{52}+\frac{14}{35}$$

Λύσις.- $-\frac{3}{6}+\frac{4}{5}-\frac{2}{10}-\frac{26}{52}+\frac{14}{35}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=-1+1=\boxed{0}$.

264. Ὑπολογίσατε τό κάτωθι ἄθροισμα ἀφοῦ προηγουμένως ἐξαλείψετε τάς παρενθέσεις (βλ. § 108, ii):

$$(-4)+(+9)+(-2)+(-5)+(+6)+(-6).$$

Λύσις.- $(-4)+(+9)+(-2)+(-5)+(+6)+(-6)=-4+9-2-5+6-6=\boxed{-2}$

265. Ὑπολογίσατε τό κάτωθι ἄθροισμα ἀφοῦ προηγουμένως ἐξαλείψετε τάς παρενθέσεις (βλ. § 108, ii):

$$(-29)+(+28)+(-5)+(-7)+(+10)+(+6)+(+3).$$

Λύσις.- $(-29)+(+28)+(-5)+(-7)+(+10)+(+6)+(+3)=-29+$
$+28-5-7+10+6+3=\boxed{6}$.

266. Ὑπολογίσατε τά ἀθροίσματα:

$(-2)+(-4)+(-7)+(+2)+(+5)$, $\quad +9+\{-4+6+(-7+3+8)+5\}$,

$(-7,5+3,4-2,3)+(4,6-8,1)+(+5,8+6,2-9,6)$.

Λύσις.- I) $(-2)+(-4)+(-7)+(+2)+(+5)=\boxed{-6}$

II) $+9+\{-4+6+(-7+3+8)+5\}=\boxed{+20}$

III) $(-7,5+3,4-2,3)+(4,6-8,1)+(+5,8+6,2-9,6)=-6,4-3,5+2,4=$
$=\boxed{-7,5}$.

267. Ὑπολογίσατε τόν x ἐκ τοῦ τύπου $x=\alpha+\beta+\gamma$ ἐάν:

i) $\alpha=-2$, $\beta=+5$, $\gamma=-7$

ii) $\alpha=-\frac{4}{7}$, $\beta=\frac{9}{35}$, $\gamma=-\frac{3}{14}$

iii) $\alpha=-3,81$, $\beta=-18,09$, $\gamma=12,90$.

Λύσις.- I) $x=\alpha+\beta+\gamma=(-2)+(+5)+(-7)=\boxed{-4}$

II) $x=\alpha+\beta+\gamma=\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{9}{35}\right)+\left(-\frac{3}{14}\right)=-\frac{40}{70}+\frac{18}{70}-\frac{15}{70}=\boxed{-\frac{37}{70}}$

III) $x=\alpha+\beta+\gamma=(-3,81)+(-18,09)+(+12,90)=\boxed{-9}$

268. Ἐπαληθεύσατε τὴν ἰσότητα:

$$+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}.$$

Λύσις.- $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\stackrel{?}{=}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$

Τὸ δεύτερον μέλος γράφεται:

$$\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{6}-\frac{2}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$$

$+\frac{1}{8}$ ὅ.ἔ.δ.

269 Ἐκτελέσατε τὰς ἀφαιρέσεις:

$(+10)-(+7)$, $(-8)-(+3)$, $(-12)-(+15)$, $(-5)-(+5)$

Λύσις.- βλ. § 109.

270 Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι ἀφαιρέσεις:

$(-12)-(-11)$, $(+7)-(-10)$, $(+9)-(+9)$, $(+9)-(-9)$.

Λύσις.- βλ. § 109.

271. Ὑπολογίσατε τὰς ἑπομένας διαφοράς:

$\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{9}{8}\right)$, $(-5)-\left(+\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\right)-(-2)$, $\left(-\frac{11}{4}\right)-\left(-\frac{7}{4}\right)$.

Λύσις.- I) $\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{9}{8}\right)=-\frac{10}{8}+\frac{9}{8}=\boxed{-\frac{1}{8}}$

II) $(-5)-\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{20}{4}-\frac{1}{4}=\boxed{-\frac{21}{4}}$

III) $\left(-\frac{1}{2}\right)-(-2)=-\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\boxed{+\frac{3}{2}}$

IV) $\left(-\frac{11}{4}\right)-\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{11}{4}+\frac{7}{4}=\boxed{-1}$

272. Ὑπολογίσατε τὰς ἑπομένας διαφοράς:

$\left(-\frac{11}{44}\right)-\left(-\frac{3}{27}\right)$, $\left(-\frac{65}{13}\right)-\left(-\frac{21}{14}\right)$, $\left(+\frac{4}{7}\right)-\left(+\frac{52}{91}\right)$

Λύσις.- I) $\left(-\frac{11}{44}\right)-\left(-\frac{3}{29}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{29}=\frac{-29+12}{4\cdot 29}=\boxed{\frac{-17}{116}}$

II) $\left(-\frac{65}{13}\right)-\left(-\frac{21}{14}\right)=-5+\frac{3}{2}=\frac{-10+3}{2}=\boxed{-\frac{7}{2}}$

III) $\left(+\frac{4}{7}\right)-\left(+\frac{52}{91}\right)=\frac{4}{7}-\frac{52}{91}=\frac{23.4-52}{91}=\frac{92-52}{91}=\boxed{+\frac{40}{91}}$

273. Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν x, παρεχόμενον ὑπό τοῦ τύπου $x=\alpha-\beta$ διά:

$\alpha=-3,\ \beta=-\frac{3}{2},\ \alpha=-3{,}5,\ \beta=-\frac{5}{2},\ \alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=-\frac{3}{7},\ \alpha=\frac{7}{91},\ \beta=-\frac{42}{52}$

Λύσις.- I) $x=\alpha-\beta=(-3)-\left(-\frac{3}{2}\right)=-3+\frac{3}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$

II) $x=\alpha-\beta=(-3{,}5)-\left(-\frac{5}{2}\right)=-3{,}5+2{,}5=\boxed{-1}$

III) $x=\alpha-\beta=\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{3}{7}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{3}{7}=-\frac{7}{21}+\frac{9}{21}=\boxed{+\frac{2}{21}}$

IV) $x=\alpha-\beta=\left(+\frac{7}{91}\right)-\left(-\frac{42}{52}\right)=\frac{1}{13}+\frac{21}{26}=\frac{2}{26}+\frac{21}{26}=\boxed{+\frac{23}{26}}$

274. Ὑπολογίσατε τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα:

$$(-3)-(-7)+(+4)-(-4)+(-5).$$

Λύσις.- Τό δοθέν, γράφεται $-3+7+4+4-5=(7+4+4)-(3+5)=$ $=15-8=+7$.

275. Ποῖον εἶναι τό ἄθροισμα:

$$(-11)+(-7)-(+4)-(-5)-(-2).$$

Λύσις.- $(-11)+(-7)-(+4)-(-5)-(-2)=\boxed{-15}$

276. Ὑπολογίσατε τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα:

$$(-11{,}34)+(-2{,}65)-(+12{,}05)-(-10{,}75)-(-3{,}50).$$

Λύσις.- $(-11{,}34)+(-2{,}65)-(+12{,}05)-(-10{,}75)-(-3{,}50)=$
$=-11{,}34-2{,}65-12{,}05+10{,}75+3{,}50=\boxed{-11{,}79}$

277. Ποία ἡ τιμή τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος:

$$\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{1}{12}\right)-\left(+\frac{17}{24}\right)$$

Λύσις.- $\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{1}{12}\right)-\left(+\frac{17}{24}\right)=-\frac{3}{8}-\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-$
$-\frac{1}{12}-\frac{17}{24}=-\frac{9}{24}-\frac{32}{24}+\frac{20}{24}-\frac{2}{24}-\frac{17}{24}=-\frac{60}{24}+\frac{20}{24}=-\frac{40}{24}=\boxed{-\frac{5}{3}}$

278. Ὑπολογίσατε τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

i) $\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(-\frac{8}{14}\right)+\left(+\frac{5}{7}\right)-\left(+\frac{12}{21}\right)-\left(-\frac{20}{28}\right)$

ii) $\left(-\frac{3,5}{5}\right)+\left(+\frac{10}{15}\right)-\left(-\frac{4,8}{20}\right)-\left(-\frac{20,2}{30}\right)+\left(\frac{2,8}{150}\right)$

Λύσις.— i) $\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(-\frac{8}{14}\right)+\left(+\frac{5}{7}\right)-\left(+\frac{12}{21}\right)-\left(-\frac{20}{28}\right)=$

$=-\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}-\frac{4}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}=\boxed{+\frac{8}{7}}$

ii) Εὑρίσκομεν $=-\frac{1348}{1500}=-\frac{347}{375}$

279. Ὑπολογίσατε τόν x ἐκ τοῦ τύπου $x=\alpha-\beta+\gamma$ γνωρίζοντες ὅτι: $\alpha=-10$, $\beta=-2$, $\gamma=+3$, ἤ $\alpha=+\frac{2}{3}$, $\beta=-\frac{1}{4}$, $\gamma=-\frac{7}{6}$.

Λύσις.— I) $x=\alpha-\beta+\gamma=-10-(-2)+(+3)=-10+2+3=\boxed{-5}$

II) $x=\alpha-\beta+\gamma=+\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=-\frac{3}{12}=\boxed{-\frac{1}{4}}$

280. Ὑπολογίσατε τόν x ἐκ τοῦ τύπου $x=|\alpha-\beta-\gamma+\delta|$ γνωρίζοντες ὅτι $\alpha=-1,2$, $\beta=+\frac{3}{4}$, $\gamma=-2$, $\delta=+\frac{4}{5}$.

Λύσις.— $x=|\alpha-\beta-\gamma+\delta|=\left|-1,2-\left(+\frac{3}{4}\right)-(-2)+\left(+\frac{4}{5}\right)\right|=$

$=\left|-1,2-\frac{3}{4}+2+\frac{4}{5}\right|=\left|\frac{-24-15+40+16}{20}\right|=\frac{17}{20}$

281. Ὑπολογίσατε τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα:

$$(-12)-\{(+40)-(-5)\}+\{(-4)-(+10)-(-11)\}-(-9).$$

Λύσις.— $(-12)-\{(+40)-(-5)\}+\{(-4)-(+10)-(-11)\}-(-9)=$

$=-12-\{40+5\}+\{-4-10+11\}+9=-12-45-3+9=\boxed{-51}$

282. Ὑπολογίσατε τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα:

$$\{(-5)-(+4)-(-1)\}-\left\{(+1,25)-\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Λύσις.— $\{(-5)-(+4)-(-1)\}-\left\{(+1,25)-\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=$

$=-5-4+1-1,25-\frac{3}{4}=-9,25-\frac{3}{4}=-9,25-0,75=\boxed{-10}$

283. Γνωρίζοντες ὅτι $x=-\frac{22}{33}$, $y=-\frac{7}{14}$, $z=+\frac{5}{30}$ ὑπολογίσατε τούς

ἀριθμούς: $A = -x+y+z$, $B = x-y+z$, $\Gamma = x+y-z$, $\Delta = -x-(y+z)$. Ἀκολούθως ὑπολογίσατε τό ἄθροισμα $A+B+\Gamma+\Delta$.

Λ ύ σ ι ς.– $A = -x+y+z = -\left(-\frac{22}{33}\right)+\left(-\frac{7}{14}\right)+\left(+\frac{5}{30}\right) = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6} =$

$= \frac{4-3+1}{6} = \boxed{+\frac{1}{3}}$

$B = x-y+z = \left(-\frac{22}{33}\right)-\left(-\frac{7}{14}\right)+\left(+\frac{5}{30}\right) = -\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{-4+3+1}{6} = \frac{0}{6} = \boxed{0}$.

$\Gamma = x+y-z = -\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = -\frac{4+3+1}{6} = -\frac{8}{6} = \boxed{-\frac{4}{3}}$

$\Delta = -x-(y+z) = \frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{4+3-1}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}$.

$A+B+\Gamma+\Delta = \frac{1}{3}+0-\frac{4}{3}+1 = \frac{-3}{3}+1 = \boxed{0}$.

Ὑπολογίσατε ἀπό μνήμης τά κάτωθι ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

284. $(+5)+(+2)$, $(-5)+(+2)$, $(+2{,}5)+(+1{,}5)$, $(-1{,}21)+(+0{,}21)$, $(-10)+(-3)$, $(-10)+(-1)$, $(-11)+(+11)$, $(-2)+(+2)$.

285. Ὁμοίως τά: $(+120)+(-20)$, $(-85)+(-5)$, $(-85)+(+5)$, $(+85)+(-35)$, $(+17)+(+3)$, $(-17)+(-3)$, $(+17)+(-7)$.

286. Ὁμοίως τά: $(+1)+\left(+\frac{1}{2}\right)$, $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{7}\right)+\left(-\frac{3}{7}\right)$, $(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)$, $(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(+\frac{17}{8}\right)$, $\left(+\frac{2}{11}\right)+\left(-\frac{24}{11}\right)$.

287. Ὁμοίως τά: $(-10)-(-2)$, $(+10)-(+2)$, $(-11)-(-1)$, $(+3)+(-5)$.

288. Ὁμοίως τά: $(-3)-(-5)$, $(-12)-(-12)$, $(+3)+(-5)$, $(-9)-(+11)$.

289. Ὁμοίως τά: $-1+2-3$, $-4+6-8+6$, $10-5-2-13$.

290. Ὁμοίως: $4-(-5)$, $5-(-4)$, $-5+(+4)$, $17-(-7)$

291. Ὁμοίως: $(-4)-5$, $(-12)-8$, $(-1{,}5)-2{,}5$.

292. Ὑπολογίσατε τ' ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:

i) $(+3)-(+10)+(-4)-(-9)-(+3)+(+5)$,

ii) $+\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{16}+\frac{2}{9}-\frac{4}{3}+2\right)-\left(-\frac{5}{18}+\frac{3}{8}\right)+2-7-$
$-[+8-5+(+5-2+4)-(+6-1+3)]$.

Λύσις.- i) Εὑρίσκομεν: 0.

ii). $+\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{16}+\frac{2}{9}-\frac{4}{3}+2\right)-\left(-\frac{5}{18}+\frac{3}{8}\right)+2-7-\left[+8-5+(+5-2+4)-\right.$

$\left.-(+6-1+3)\right]=\frac{4}{16}+\frac{3}{16}-\frac{2}{9}+\frac{12}{9}-2+\frac{5}{18}-\frac{3}{8}+2-7-(3+7-8)=$

$=\frac{7}{16}+\frac{10}{9}+\frac{5}{18}-\frac{3}{8}-9=\frac{7}{16}-\frac{6}{16}+\frac{20}{18}+\frac{5}{18}-9=\frac{1}{16}+\frac{25}{18}-9=$

$=\boxed{-\frac{1087}{144}}$

293. Δείξατε ὅτι, ἄν ὑφίσταται ἰσότης μεταξύ ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων, κάθε ὅρος τοῦ ἑνός μέλους τῆς ἰσότητος δύναται νά μεταφερθῇ εἰς τό ἄλλο μέλος, ἀλλά μέ τό ἀντίθετον σημεῖον. Π.χ. ἄν $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\varepsilon$ τότε $\alpha+\gamma=\delta+\varepsilon-\beta$. Ἀκολούθως εὕρετε τόν x ἄν $x-7=+11$ ἤ $x+4=-12$ ἤ $+|x|-90=-85$.

Λύσις.- i) $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\varepsilon \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)+(-\beta)=(\delta+\varepsilon)+(-\beta) \Rightarrow$
$\alpha+\beta-\beta+\gamma=\delta+\varepsilon-\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\delta+\varepsilon-\beta$.

ii) $x-7=11 \Rightarrow x=7+11=18$, $x+4=-12 \Rightarrow x=-16$

$|x|-90=-85 \Rightarrow |x|=90-85=5 \Rightarrow x=5$ ἤ $x=-5$.

294. Ἐκτελέσατε τάς πράξεις:

i) $\alpha-\{(\beta-(\gamma-(\delta-\varepsilon-\eta))\}$.

ii) $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_5)+(\alpha_5-\alpha_6)+(\alpha_6-\alpha_7)+$
$+(\alpha_7-\alpha_8)$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$, τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί.

Λύσις.- I) $\alpha-\{\beta-(\gamma-(\delta-\varepsilon-\eta))\}=\alpha-\{\beta-\gamma+(\delta-\varepsilon-\eta)\}=$
$=\alpha-\{\beta-\gamma+\delta-\varepsilon-\eta\}=\underline{\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon+\eta}$

II) $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_5)+(\alpha_5-\alpha_6)+(\alpha_6-\alpha_7)+$
$+(\alpha_7-\alpha_8)=\alpha_1-\cancel{\alpha_2}+\cancel{\alpha_2}-\cancel{\alpha_3}+\cancel{\alpha_3}-\cancel{\alpha_4}+\cancel{\alpha_4}-\cancel{\alpha_5}+\cancel{\alpha_5}-\cancel{\alpha_6}+\cancel{\alpha_6}-\cancel{\alpha_7}+\cancel{\alpha_7}-$
$-\alpha_8=\underline{\alpha_1-\alpha_8}$.

295. Ἀφοῦ διαπιστωθοῦν αἱ ἀριθμητικαί ἰσότητες:

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ καί γενικῶς $\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$, νά ὑπολογισθῆ βάσει αὐτῶν, τό ἄθροισμα τῶν εἴκοσι κλασμάτων: $+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{20.21}$.

Λύσις.- Ἔχομεν $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{20.21}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$ $+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$.

296. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα.
$(-7)(-3)$, $(-12)(-11)$, $(+1)(+8)$, $(+4)(+3)$.
Λύσις.- βλ. § 111.

297. Ἐκτελέσατε τούς πολλαπλασιασμούς:
$(+4)(-5)$, $(+11)(-3)$, $(-8)(+7)$, $(-1)(+1)$
Λύσις.- βλ. § 111.

298. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:
$(+4)\left(-\frac{5}{2}\right)$, $(+7)\left(-\frac{3}{7}\right)$, $(-9)\left(+\frac{2}{7}\right)$, $(-3)\left(+\frac{5}{21}\right)$
Λύσις- βλ. § 111.

299 Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν x ἐκ τοῦ τύπου $x=\alpha.\beta$ γνωρίζοντες ὅτι: $\alpha=-\frac{5}{3}$, $\beta=+6$, ἤ $\alpha=+\frac{11}{33}$, $\beta=-\frac{18}{9}$.

Λύσις.- I) $x=\alpha\beta=\left(-\frac{5}{3}\right)(+6)=-\frac{5.6}{3}=\boxed{-10}$

II) $x=\alpha.\beta=\left(+\frac{11}{33}\right)\left(-\frac{18}{9}\right)=\left(+\frac{1}{3}\right)(-2)=\boxed{-\frac{2}{3}}$

300. Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν z ἐκ τοῦ τύπου $z=xy$ ἐάν $x=-\frac{4}{13}$, $y=+169$, ἤ $x=+7$, $y=-\frac{6}{42}$.

Λύσις.- I) $z=xy=\left(-\frac{4}{13}\right)(+169)=(-4)(+13)=\boxed{-52}$

II) $z=xy=(+7)\left(-\frac{6}{42}\right)=-\frac{42}{42}=\boxed{-1}$

301. Ἐκτελέσατε τούς κάτωθι πολλαπλασιασμούς:
$(-1)(+2)(-3)(+4)$, $(+2)(-5)(-6)(+3)$, $(-11)(-10)(-3)$, $(-1)(+1)(-1)(-1)$.
Λύσις.– i) $=(-2)(-3)(+4)=(+6)(+4)=+24$ ii) $=$
$=(-10)(-6)(+3)=(+60)(+3)=+180$ iii) $=(+110).(-3)=-330$
iv) $=(-1)(-1)(-1)=(+1)(-1)=-1$.

302. Ὑπολογίσατε τό x ἐκ τοῦ τύπου $x=\alpha\beta\gamma\delta$ ὅταν $\alpha=-3$, $\beta=+\frac{2}{3}$, $\gamma=-7$, $\delta=-\frac{1}{14}$.
Λύσις.– $x=(-3)\left(+\frac{2}{3}\right)(-7)\left(-\frac{1}{14}\right)=(-2)(-7)\left(-\frac{1}{14}\right)=(+14)\left(-\frac{1}{14}\right)=-1$.

303. Ὑπολογίσατε ἀπό μνήμης τά γινόμενα:
$(-3)(+1)$, $(-2)(-5)$, $(-1,5)(+2)$, $(-2,5)(+4)$,
$\left(-\frac{1}{5}\right)(+25)$, $(+12)\left(-\frac{1}{24}\right)$, $\left(+\frac{3}{4}\right)(-8)$, $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$
Λύσις.– βλ. § 111.

304. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:
$\left(-\frac{1}{3}\right)(+5)\left(-\frac{12}{5}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)$
Λύσις.– I) $\left(-\frac{1}{3}\right)(+5)\left(-\frac{12}{5}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)(-12)\left(+\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)=\boxed{+1}$
II) $\left(-\frac{3}{5}\right)\left(+\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(+\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$

305. Ἐκτελέσατε τούς κάτωθι πολλαπλασιασμούς
$\left(-\frac{7}{9}\right)\left(+\frac{18}{5}\right)\left(+\frac{5}{7}\right)(-1)$, $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$.
Λύσις. I) $\left(-\frac{7}{9}\right)\left(+\frac{18}{5}\right)\left(+\frac{5}{7}\right)(-1)=+\frac{\cancel{7}}{9}\cdot\frac{18}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}=\boxed{+2}$
II) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\cancel{5}}{6}=-\frac{4}{18}=\boxed{-\frac{2}{9}}$

306. Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν x καθοριζόμενον ὑπό τῆς ἐκφράσεως:
$$x=(-2)(-4)(-5)-(+2)(-5)-(+3)(-6)$$
Λύσις.– $x=(-2)(-4)(-5)-(+2)(-5)-(+3)(-6)=-40+10+18=\boxed{-12}$

307. Ὑπολογίσατε τόν πρός τήν παράστασιν

$$\left(-2+\frac{7}{4}-1\right)\left\{\left(+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{2}{5}-1\right)-(-3)\left(+\frac{5}{3}-\frac{9}{4}\right)\left(+2+\frac{6}{7}\right)\right\}$$

ἴσον ἀριθμόν.

Λύσις.- $\left(-2+\frac{7}{4}-1\right)\left\{\left(+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}-1\right)-(-3)\left(+\frac{5}{3}-\frac{9}{4}\right)\left(+2+\frac{6}{7}\right)\right\}=$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)\left\{\left(-\frac{1}{10}\right)-(-3)\left(-\frac{7}{12}\right)\left(+\frac{20}{7}\right)\right\}=\left(-\frac{5}{4}\right)\left\{\left(-\frac{1}{10}\right)-5\right\}=$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{51}{10}\right)=\boxed{+\frac{51}{8}}$$

308. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:

$(-2)(+4)(+3)(-7)$, $\left(+\frac{2}{3}\right)(-5)\left(-\frac{3}{8}\right)(-2)\left(+\frac{3}{4}\right)$, $(-9)\left(-\frac{5}{36}\right)(-0,6)$,

$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)$, $(-2+4-7)(-5)$, $(+3-6+8-2)(+7)$.

Λύσις.- I) $(-2)(+4)(+3)(-7)=\boxed{+168}$

II) $\left(+\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)(-5)\left(-\frac{\cancel{3}}{8}\right)(-\cancel{2})\left(+\frac{3}{4}\right)=\boxed{-\frac{15}{32}}$

III) $(-9)\left(-\frac{5}{36}\right)(-0,6)=\boxed{-\frac{3}{4}}$

IV) $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=\boxed{-\frac{1}{28}}$

V) $(-2+4-7)(-5)=(-5)(-5)=\boxed{+25}$

VI) $(+3-6+8-2)(+7)=\boxed{+21}$

309. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως $\alpha\beta-\gamma\delta$ γνωρίζοντες ὅτι

$$\alpha=-\frac{5}{7}\ ,\ \beta=+2\ ,\ \gamma=+\frac{5}{35}\ ,\ \delta=-3$$

Λύσις.- $\alpha\beta-\gamma\delta=\left(-\frac{5}{7}\right)(+2)-\left(+\frac{5}{35}\right)(-3)=-\frac{10}{7}+\frac{3}{7}=\boxed{-1}$

310. Ὑπολογίσατε τόν ἀριθμόν A τόν καθοριζόμενον ὑπό τῆς ἰσότητος $A=2(x-y+z)-5(x+1)$ ὅταν $x=-\frac{1}{5}$, $y=+\frac{3}{5}$, $z=-0,2$.

Λύσις.- $A=2(x-y+z)-5(x+1)=2\left(-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}-0,2\right)-5\left(-\frac{1}{5}+1\right)=$

$= 2\left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right) - 5\left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{5}\right) = -2 - 4 = \boxed{-6}$

311. Ἐκτελέσατε ἐπιμεριστικῶς τούς πολλαπλασιασμούς $3x(2-y)$, $(x-y)(2\alpha-3\beta)$, $-6(-3\alpha)(\beta-2)$, $(6\alpha-2\beta+4)(5-\gamma)$.
Λύσις. βλ. σελ. 118.

312. Δείξατε τήν ἰσότητα: $|xy\omega| = |3x-5x|\cdot\left|y-\frac{y}{2}\right|\cdot|10\omega-11\omega|$.
Λύσις.- Τό δεύτερον μέλος γράφεται $|-2x|\cdot\left|\frac{y}{2}\right|\cdot|-\omega| =$
$= |-2|\cdot|x|\cdot\left|\frac{1}{2}\right|\cdot|y|\cdot|-1|\cdot|\omega| = 2\,\frac{1}{2}\cdot 1|x|\cdot|y|\cdot|\omega| = |xy\omega| =$ 1ον μέλος,
§ 112, 1ον.

313. Ἐξαλείψατε παρενθέσεις καί ἐκτελέσατε ἀναγωγάς ὁμοίων ὅρων εἰς τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

i) $4\alpha - [2\alpha+\beta-(-\alpha+\beta-\gamma)+2\gamma]$,

ii) $2x-(3x-2y)-[-2x+y-(2y-x)]$,

iii) $7\alpha+[-\alpha-(-5\alpha+4x)+3x]-(6\alpha-x)$,

iv) $(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)-[(\beta-\gamma+\alpha)-(\beta+\gamma-\alpha)]$,

v) $3(x-y+8)-4(x-5y+3)+6(x-2y-1)$.

Λύσις.- I) $4\alpha-\{2\alpha+\beta-(\alpha+\beta-\gamma)+2\gamma\} = 4\alpha-\{2\alpha+\beta-\alpha-\beta+\gamma+2\gamma\} =$
$= 4\cancel{\alpha}-2\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\gamma-2\gamma = \boxed{3\alpha-3\gamma}$

II) $2x-(3x-2y)-\{-2x+y-(2y-x)\} = 2x-3x+2y-\{-2x+y-2y+x\} =$
$= \cancel{2x}-\cancel{3x}+2y+\cancel{2x}-y+2y-\cancel{x} = \boxed{+3y}$

III) $7\alpha+\{-\alpha-(-5\alpha+4x)+3x\}-(6\alpha-x) = 7\alpha+\{-\alpha+5\alpha-4x+3x\}-6\alpha+x =$
$= \underline{7\alpha}-\underline{\alpha}+\underline{5\alpha}-4x+3x-\cancel{6\alpha}+x = \boxed{+5\alpha}$

IV) $(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)-\{(\beta-\gamma+\alpha)-(\beta+\gamma-\alpha)\} = \alpha+\beta-\gamma-\alpha+\beta-\gamma-$
$-\{\beta-\gamma+\alpha-\beta-\gamma+\alpha\} = \cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{\gamma}-\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{\gamma}-\cancel{\beta}+\cancel{\gamma}-\cancel{\alpha}+\beta+\cancel{\gamma}-\cancel{\alpha} =$
$= \boxed{-2\alpha+2\beta}$

V) $3(x-y+8)-4(x-5y+3)+6(x-2y-1) = \underline{3x}-\underline{3y}+24-\underline{4x}+\underline{20y}-12+\underline{6x}-$
$-\underline{12y}-6 = \boxed{+5x+5y+6}$

314. Ἐξαγάγατε κοινούς παράγοντας καί τρέψατε εἰς γινόμενα:
i) $\alpha x-\beta x+\gamma x$, ii) $2\gamma\kappa+3\gamma-6\kappa-9$, iii) $4x-4y-\alpha x+\alpha y$

I) $\alpha x-\beta x+\gamma x = \underline{x(\alpha-\beta+\gamma)}$

II) $\underline{2\gamma\kappa}+\underline{3\gamma}-\underline{6\kappa}-\underline{9} = 2\kappa(\gamma-3)+3(\gamma-3) = \underline{(2\kappa+3)(\gamma-3)}$

III) $\underline{4x}-\underline{4y}-\underline{\alpha x}+\underline{\alpha y} = x(4-\alpha)-y(4-\alpha) = \underline{(x-y)(4-\alpha)}$

315. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις:

$$(-2)^2,\ (-2)^3,\ (-1)^7,\ (-1)^{10},\ \left(-\frac{1}{0,5}\right)^3,\ (-0,3)^3.$$

Λύσις.- I) $(-2)^2=\boxed{+4}$

II) $(-2)^3=\boxed{-8}$

III) $(-1)^7=\boxed{-1}$

IV) $(-1)^{10}=\boxed{+1}$

V) $\left(-\frac{1}{0,5}\right)^3=\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3=(-2)^3=\boxed{-8}$

VI) $(-0,3)^3=\left(-\frac{3}{10}\right)^3=-\frac{27}{1000}=\boxed{-0,027}$

316. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἑπόμεναι δυνάμεις:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(+\frac{5}{6}\right)^2,\ \left(-\frac{1}{3}\right)^4,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^5,\ \left(+\frac{2}{11}\right)^2,\ \left(-\frac{3}{7}\right)^2,$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2,\ \left(+\frac{3}{5}\right)^2,\ \left(-\frac{1}{5}\right)^2,\ \left(-\frac{1}{5}\right)^4.$$ (βλ. §73, ν).

Λύσις.- I) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\boxed{-\frac{1}{8}}$

II) $\left(+\frac{5}{6}\right)^2=\boxed{+\frac{25}{36}}$

III) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\boxed{+\frac{1}{81}}$

IV) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\boxed{-\frac{1}{32}}$

V) $\left(+\frac{2}{11}\right)^2=\boxed{+\frac{4}{121}}$

VI) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2=\boxed{+\frac{9}{49}}$

VII) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\boxed{+\frac{9}{25}}$

VIII) $\left(+\frac{3}{5}\right)^2=\boxed{+\frac{9}{25}}$

IX) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\boxed{+\frac{1}{25}}$

X) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4=\boxed{+\frac{1}{625}}$

317. Φέρατε ὑπό τήν μορφήν a^ν τάς ἑπομένας παραστάσεις:

$$(-3)^2(-3)^5(-3),\quad (-5)^3(-5)^7(-5)^2,\quad (+8)^2(-4)^3$$

Λύσις.- I) $(-3)^2(-3)^5(-3)=\boxed{(-3)^8}$

II) $(-5)^3(-5)^7(-5)^2=(-5)^{12}$

III) $(+8)^2(-4)^3=(+2^3)^2(-2^2)^3=-\left\{(+2^3)^2(+2^2)^3\right\}=-\left\{(+2^6)(+2)^6\right\}=\boxed{-2^{12}}$

318. Φέρατε ὑπό τήν μορφήν a^ν τάς ἑπομένας παραστάσεις:

$$\left(+\frac{1}{5}\right)^3\left(+\frac{1}{5}\right)^2\left(+\frac{1}{5}\right)^4;\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3,\quad \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Λύσις.- I) $\left(+\frac{1}{5}\right)^3\left(+\frac{1}{5}\right)^2\left(+\frac{1}{5}\right)^4=\left(+\frac{1}{5}\right)^9$

II) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

III) $\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)=+\frac{1}{32}=\left(+\frac{1}{2}\right)^5$

319. Ὑπολογίσατε τούς ἀριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, διδομένους ἀπό τάς:
$\alpha=\{(-2^3)\}^2, \quad \beta=\{(-3)^2\}^2, \quad \gamma=\{(-1)^5\}^3, \quad \delta=\{(-2)^2\}^3.$

Λύσις.–
$\alpha=\{(-2^3)\}^2=\{-8\}^2=\boxed{+64}$ ‖ $\gamma=\{(-1)^5\}^3=\{-1\}^3=\boxed{-1}$
$\beta=\{(-3)^2\}^2=\{+9\}^2=\boxed{+81}$ ‖ $\delta=\{(-2)^2\}^3=\{+4\}^3=\boxed{+64}$

320. Νά εὑρεθοῦν τά γινόμενα:
$x^5x^2, \; x^3x, \; (ax^2)(a^4x), \; (2a^3\beta^2\gamma)(3a^2\beta\gamma^3), \; (3a^4\beta)(-4a\beta^2\gamma),$
$\left(-\frac{1}{2}x^3yz\right)\left(\frac{1}{3}x^2yz^3\right)$

Λύσις.– I) $x^5x^2=\boxed{x^7}$

II) $x^3x=\boxed{x^4}$

III) $(2a^3\beta^2\gamma)(3a^2\beta\gamma^3)=\boxed{6a^5\beta^3\gamma^4}$

IV) $(3a^4\beta)(-4a\beta^2\gamma)=\boxed{-12a^5\beta^3\gamma}$

V) $\left(-\frac{1}{2}x^3yz\right)\left(\frac{1}{3}x^2yz^3\right)=\boxed{-\frac{1}{6}x^5y^2z^4}$

321. Νά γραφοῦν ὑπό τήν ἁπλουστάτην μορφήν τά γινόμενα:
$\left(\frac{3}{4}x^4y^2z^3\right)\left(-\frac{1}{9}x^2z\right), \quad (-4xyz^2)\left(\frac{3}{2}x^2yz\right)\left(\frac{2}{3}x^2y^3z\right)(-5xz).$

Λύσις.– I) $\left(\frac{3}{4}x^4y^2z^3\right)\left(-\frac{1}{9}x^2z\right)=\boxed{-\frac{1}{12}x^6y^2z^4}$

II) $(-4xyz^2)\left(\frac{3}{2}x^2yz\right)\left(\frac{2}{3}x^2y^3z\right)(-5xz)=\boxed{20x^6y^5z^5}$

322. Νά γίνουν αἱ ὑψώσεις εἰς δύναμιν:
$(2a^3\beta^2\gamma)^2, \quad \left(-\frac{1}{3}x^2y^3z\right)^3, \quad (a\beta^4y)^4$

Λύσις.– βλ. § 113, V, IV.

323. Νά δειχθῆ ὅτι $|\omega^\nu|=|\omega|^\nu$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

Λύσις.– Ἐπειδή ἡ ἀπόλυτος τιμή γινομένου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων θά ἔχωμεν: $|\omega^\nu|=|\underbrace{\omega.\omega.\omega\ldots\omega}_{\nu}|=|\omega|.|\omega|.|\omega|\ldots|\omega|=|\omega|^\nu.$

324) Ὑπολογίσατε τήν δύναμιν $(-1)^{2\nu+5}$ ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

Λύσις.– Ἡ δύναμις $(-1)^{2\nu+5}$ εἶναι γινόμενον $2\nu+5$ ἀρνητικῶν παραγόντων, δηλ. περιττοῦ πλήθους ἀρνητικῶν παραγόντων. Ἄρα τό πρόσημον αὐτῆς εἶναι τό – (θεωρ. 2ου, σελ. 116). Ἡ ἀπόλυτος τιμή αὐτῆς εἶναι τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων δηλ. $\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\ldots 1}_{2\nu+5 \text{ φοράς}} = 1$, συνεπῶς $(-1)^{2\nu+5} = -1$.

325. Νά ἁπλουστευθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις δι' ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων:

i) $Kx^2-3K^2x^2+6K^2x+2x-2Kx^2+8-3x$

ii) $2x^3y-3x^4+4x^2y^2-xy^3+7x^4-3x^3y+x^2y^2-5xy^3$,

iii) $12+8y-3y^2+y^4-6y-7-5y^2+y^3-3y^4$,

iv) $5a^2\varphi-\varphi^3+4a\varphi^2+2a^3+3\varphi^3-2a^2\varphi-8a^2\varphi+a^3$.

Λύσεις.-- I) $Kx^2-3K^2x^2+6K^2x+2x-2Kx^2+8-3x =$

$= \underline{-Kx^2-3K^2x^2+6K^2x-x+8}$.

II) $2x^3y-3x^4+4x^2y^2-xy^3+7x^4-3x^3y+x^2y^2-5xy^3 =$

$= \underline{-x^3y+4x^4+5x^2y^2-6xy^3}$

III) $12+8y-3y^2+y^4-6y-7-5y^2+y^3-3y^4 = \underline{5+2y-8y^2+y^3-2y^4}$

IV) $5a^2\varphi-\varphi^3+4a\varphi^2+2a^3+3\varphi^3-2a^2\varphi-8a^2\varphi+a^3 =$

$= \underline{-5a^2\varphi+2\varphi^3+4a\varphi^2+3a^3}$

326. Ἐκτελέσατε τάς κάτωθι διαιρέσεις:

$(+15):(-3)$, $(-39):(-13)$, $(4-5):(+9)$, $(+96):(+16)$

$(-625):(+25)$, $(+121):(-11)$, $(-1000):(-250)$.

Λύσις.-- Βλ. σελ. 122.

327. Ὑπολογίσατε τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$(+9,81):(-7)$, $(-1,05):(-0,5)$, $(-3,14):(+1,57)$.

Λύσις.-- βλ. σελ. 122.

328. Εὕρετε τά πηλίκα (βλ. § 74):

$\left(-\frac{22}{5}\right):(-11)$, $\left(-\frac{1}{3}\right):(+2)$, $\left(-\frac{8}{7}\right):(+2)$, $\left(-\frac{11}{2}\right):(+3)$

329. Εὕρετε τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων (βλ. § 74):

$(-50):\left(+\frac{50}{3}\right)$, $(-9):\left(-\frac{3}{5}\right)$, $(+20):\left(+\frac{5}{2}\right)$, $(+35):\left(-\frac{7}{11}\right)$

Λύσις.— I) $(-50):\left(+\frac{50}{3}\right)=(-50)\cdot\frac{3}{(+50)}=\boxed{-3}$

II) $(-9):\left(-\frac{3}{5}\right)=(-9)\cdot\frac{5}{(-3)}=\boxed{+15}$

III) $(+20):\left(+\frac{5}{2}\right)=(+20)\cdot\left(+\frac{2}{5}\right)=\boxed{+8}$

IV) $(+35):\left(-\frac{7}{11}\right)=(+35)\cdot\left(-\frac{11}{7}\right)=\boxed{-55}$

330. *Εὕρετε τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων (βλ. § 74):*

$\left(-\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{7}{6}\right)$, $\left(+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$, $\left(+\frac{33}{5}\right):\left(-\frac{10}{11}\right)$, $\left(-\frac{8}{125}\right):\left(-\frac{3}{35}\right)$

Λύσις. I) $\left(-\frac{2}{3}\right):\left(+\frac{7}{6}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(+\frac{6}{7}\right)=\boxed{-\frac{4}{7}}$

II) $\left(+\frac{1}{3}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)=\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\boxed{-\frac{8}{15}}$

III) $\left(+\frac{33}{5}\right):\left(-\frac{10}{11}\right)=\left(+\frac{33}{5}\right)\cdot\left(-\frac{11}{10}\right)=\boxed{-\frac{363}{50}}$

IV) $\left(-\frac{8}{125}\right):\left(-\frac{3}{35}\right)=\left(-\frac{8}{125}\right)\cdot\left(-\frac{35}{3}\right)=\left(-\frac{8}{25}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)=\boxed{+\frac{56}{75}}$

331. *Ὑπολογίσατε τό πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὅταν δίδεται:*

i) $\alpha=(-2)+\left(+\frac{5}{7}\right)$, $\beta=(-3)-\left(-\frac{2}{3}\right)$, ii) $\alpha=+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

Λύσις.— I) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(-2)+\left(+\frac{5}{7}\right)}{(-3)-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{-\frac{14}{7}+\frac{5}{7}}{-\frac{9}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{-\frac{9}{7}}{-\frac{7}{3}}=\boxed{+\frac{27}{49}}$

II) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}{-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}}=\boxed{-\frac{1}{5}}$

332. *Ὑπολογίσατε τά πηλίκα $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, $\frac{2\alpha-\beta}{\beta-2\alpha}$ ὅταν $\alpha=-1$, $\beta=-\frac{11}{2}$.*

Λύσις.- I) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{-1-\frac{11}{2}}{-1+\frac{11}{2}}=\dfrac{-\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}}=\boxed{-\frac{13}{9}}$

II) $\dfrac{2\alpha-\beta}{\beta-2\alpha}=\dfrac{-2+\frac{11}{2}}{-\frac{11}{2}+2}=\dfrac{+\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2}}=\boxed{-1}$

333. Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν παραστάσεων: $\dfrac{x+y}{x-y-1}$, $\dfrac{2x-y+5}{x+3y}$, $\dfrac{x-3y}{3-x-y}$ γνωρίζοντες ὅτι $x=-11/2$, $y=-7/3$.

Λύσις.- I) $\dfrac{x+y}{x-y-1}=\dfrac{-\frac{11}{2}-\frac{7}{3}}{-\frac{11}{2}+\frac{7}{3}-1}=\dfrac{\frac{-33-14}{6}}{\frac{-33+14-6}{6}}=\dfrac{-\frac{47}{6}}{-\frac{25}{6}}=\boxed{+\frac{47}{25}}$

II) $\dfrac{2x-y+5}{x+3y}=\dfrac{-11+\frac{7}{3}+5}{-\frac{11}{2}-7}=\dfrac{-6+\frac{7}{3}}{\frac{-11-14}{2}}=\dfrac{\frac{-18+7}{3}}{\frac{-25}{2}}=\dfrac{-\frac{15}{3}}{-\frac{25}{2}}=\boxed{+\frac{2}{5}}$

III) $\dfrac{x-3y}{3-x-y}=\dfrac{-\frac{11}{2}+7}{3+\frac{11}{2}+\frac{7}{3}}=\dfrac{\frac{-11+14}{2}}{\frac{18+33+14}{6}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{65}{5}}=\boxed{+\frac{3}{26}}$

334. Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν παραστάσεων: $\dfrac{\alpha xy}{3\alpha+x+y}$, $\dfrac{\alpha x^2+y^2}{\alpha^2-x^2}$, $\dfrac{x+y+\alpha}{x^2+y^2+\alpha^2}$ ὅταν $\alpha=+\frac{1}{6}$, $x=-\frac{1}{10}$, $y=-\frac{1}{15}$.

Λύσις.- I) $\dfrac{\alpha xy}{3\alpha+x+y}=\dfrac{\left(+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{15}\right)}{\frac{3}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}}=\dfrac{+\frac{1}{900}}{\frac{15}{30}-\frac{3}{30}-\frac{2}{30}}=\dfrac{+\frac{1}{900}}{+\frac{10}{30}}=$

$=\boxed{+\frac{1}{300}}$

II) $\dfrac{\alpha x^2+y^2}{\alpha^2-x^2}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{225}}{\frac{1}{36}-\frac{1}{100}}=\dfrac{\frac{1}{600}+\frac{1}{225}}{\frac{1}{36}-\frac{1}{100}}=\boxed{+\frac{11}{32}}$

III) $\dfrac{x+y+\alpha}{x^2+y^2+\alpha^2}=\dfrac{+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{225}+\frac{1}{36}}=\dfrac{\frac{5}{30}-\frac{3}{30}-\frac{2}{30}}{\frac{9}{900}+\frac{4}{900}+\frac{25}{900}}=\dfrac{0}{\frac{38}{900}}=\boxed{0}$

335. Ἐκτελέσατε ἀπό μνήμης τάς διαιρέσεις:

$(-18):(-6)$, $(+72):(-9)$, $(-100):(+25)$, $(-35):(+7)$, $(-1):(+1)$

$(+2):\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\right):\left(+\frac{1}{4}\right)$

336. Εὕρετε τόν x ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

$-3x=+33$, $8x=-40$, $\frac{x}{7}=-1$, $\frac{2x}{3}=12$.

337. Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν παραστάσεων:

$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\frac{x^4+y^4}{2xy}$, $\frac{x^5+y^5}{3x^2y^2}$ ὅταν $x=-4$ καί $y=+4$.

Λύσις.– I) $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{-64+64}{16+16}=\frac{0}{32}=\boxed{0}$

II) $\frac{x^4+y^4}{2xy}=\frac{256+256}{2.256}=\boxed{1}$

III) $\frac{x^5+y^5}{3x^2y^2}=\frac{-1024+1024}{3.16.16}=\boxed{0}$

338. Εὕρετε τούς ἀντιστρόφους καί τούς ἀντιθέτους τῶν κάτωθι ἀριθμῶν:

-1, $+5$, $-\frac{3}{8}$, $+\frac{7}{9}$, $-\frac{13}{12}$, $-0{,}125$, $+0{,}001$.

Λύσις.– Ἀντίστροφοι: -1, $1/5$, $-8/3$, $9/7$, $-12/13$, $-1/0{,}125=-1/(125:1000)=-1000/125=-8$, 1000.

339. Ποῖος ἀριθμός δέν ἔχει ἀντίστροφον;

Λύσις.– Ἡ παράστασις $1/a$ δέν ἔχει νόημα μόνον ὅταν $a=0$. Ἄρα ὁ 0 δέν ἔχει ἀντίστροφον.

340. Ποῖοι ἀριθμοί ἰσοῦνται μέ τούς ἀντιστρόφους των;

Λύσις.– Ἔστω $x=\frac{1}{x}$. Τότε, $x^2=1 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)=0 \Rightarrow$ ἤ $x+1=0$ ἤ $x-1=0 \Rightarrow x=-1$ ἤ $x=1$.

341. Εὕρετε τό ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

$$\left(\frac{-\frac{8}{3}}{+\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}+\frac{+\frac{4}{6}-2}{+\frac{7}{6}}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{7}{10}+\frac{1}{3}}{+\frac{11}{15}}-\frac{+\frac{3}{4}+1}{+\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\right)=;$$

Λύσις.– Εὑρίσκομεν $= 57/28$.

342. Ἐκτελέσατε τάς σημειουμένας πράξεις ἁπλοποιοῦντες τά τελικά ἐξαγόμενα: $\left(\frac{3x^2y^3}{2xy^4}\right)^2:(-xy^3)^3$, $(-5x^2y)^3:\left(\frac{10x^4y^2}{3xy}\right)^2$.

Λύσις.– I) $\left(\frac{3x^2y^3}{2xy^4}\right)^2:(-xy^3)^3=\frac{9x^4y^6}{4x^2y^4}\cdot\frac{-1}{x^3y^9}=-\frac{9x^4y^6}{4x^5y^{13}}=$

$=\boxed{-\frac{9}{4xy^7}}$

II) $(-5x^2y):\left(\frac{10x^4y^2}{3xy}\right)^2=(-5x^2y)\cdot\frac{9x^2y^2}{100x^8y^4}=-\frac{9x^4y^3}{20x^8y^4}=\boxed{-\frac{9}{20x^4y}}$

343. Ἐάν $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$ εἶναι ν πραγματικοί ἀριθμοί $\neq 0$, εὕρετε τό γινόμενον τῶν ν κλασμάτων

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdots\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$$

Λύσις.– Ὁ παρονομαστής ἑκάστου ἐξαλείφεται μέ τόν ἀριθμητήν τοῦ ἑπομένου καί μένει: $\frac{a_1}{a_\nu}$.

344. Ἐπαληθεύσατε ὅτι, ἄν

$$x=\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha},\quad y=\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta},\ \text{θά ἔχωμεν:}\ \frac{x+\alpha}{y+\beta}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Λύσις.– $\frac{x+\alpha}{y+\beta}=\frac{\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha}+\alpha}{\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta}+\beta}=\frac{\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2+3\alpha^2}{3\alpha}}{\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+3\beta^2}{3\beta}}=$

$=\frac{\beta(2\beta^2+\gamma^2+2\alpha^2)}{\alpha(2\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2)}=\frac{\beta}{\alpha}$ ὅ. ε.δ.

345. Ἐκτελέσατε τάς κάτωθι προσθέσεις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων τρέποντες αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί δίδοντες εἰς τό ἀποτέλεσμα τήν ἁπλουστάτην του μορφήν.

$$\frac{3\alpha-1}{7}+\frac{8-5\alpha}{14}-2\alpha,\qquad \frac{-x+2}{4}+\frac{5x-3}{8}+\frac{x}{2},$$

$$\frac{3\beta+\alpha}{\alpha}-\frac{9\beta-\alpha}{2\alpha}+\frac{8\alpha-5\beta}{4\alpha},\qquad \frac{x+2y}{xy}-\frac{4x+y}{3xy}+\frac{9x-8y}{6xy}$$

Λύσις.— I) $\frac{3\alpha-1}{7}+\frac{8-5\alpha}{14}-2\alpha=\frac{6\alpha-2+8-5\alpha-28\alpha}{14}=\boxed{\frac{6-27\alpha}{14}}$

II) $\frac{-x+2}{4}+\frac{5x-3}{8}+\frac{x}{2}=\frac{-2x+4+5x-3+4x}{8}=\boxed{\frac{7x+1}{8}}$

III) $\frac{3\beta+\alpha}{\alpha}-\frac{9\beta-\alpha}{2\alpha}+\frac{8\alpha-5\beta}{4\alpha}=\frac{12\beta+4\alpha-18\beta+2\alpha+8\alpha-5\beta}{4\alpha}=$

$=\boxed{\frac{14\alpha-11\beta}{4\alpha}}$

IV) $\frac{x+2y}{xy}-\frac{4x+y}{3xy}+\frac{9x-8y}{6xy}=\frac{6x+12y-8x-2y+9x-8y}{6xy}=\boxed{\frac{7x+2y}{6xy}}$

346. Ἐάν $x\neq 0$ δείξατε ὅτι:

$$\frac{3x+5y}{x-y}=\frac{3+5\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}},\qquad \frac{2x^2+y^2}{xy+y^2}=\frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{3xy-y^2+4x^2}{x^2+7y^2}=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2+4}{1+7\left(\frac{y}{x}\right)^2},\qquad \frac{3x^2-5xy+2y^2}{x^2+xy+4y^2}=\frac{3-5\left(\frac{y}{x}\right)+2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)+4\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{x^3-5y^3}{4x^2y}=\frac{1-5\left(\frac{y}{x}\right)^3}{4\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Λύσις.— Ἔχομεν π.χ: $\frac{3x+5y}{x-y}=\frac{\frac{3x+5y}{x}}{\frac{x-y}{x}}=\frac{\frac{3x}{x}+\frac{5y}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{y}{x}}=$

$=\frac{3+5\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$. Ἐπίσης, $\frac{3x^2-5xy+y^2}{x^2+xy+4y^2}=\frac{\frac{3x^2-5xy+y^2}{x^2}}{\frac{x^2+xy+4y^2}{x^2}}=$

$=\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5xy}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}+\frac{4y^2}{x^2}}=\frac{3-5\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}+4\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ κ.ο.κ.

347) Ἐάν $\frac{y}{x}=\frac{-2}{3}$ ὑπολογίσατε τήν ἀριθμητικήν τιμήν ἑκάστου τῶν κλασμάτων: $\frac{3x-y}{x-3y}$, $\frac{5x^2-xy+y^2}{x^2+2xy-y^2}$, $\frac{x^3-2y^3}{3x^2y}$

Λύσις.- i) $\frac{3x-y}{x-3y}=\frac{3-\frac{y}{x}}{1-3\frac{y}{x}}$ (βλ. 346) $=\frac{3+\frac{2}{3}}{1+3\cdot\frac{2}{3}}=$

$=\frac{9+2}{3+6}=\frac{11}{9}$. ii) $\frac{5x^2-xy+y^2}{x^2+2xy-y^2}=\frac{5-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}{1+2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}}$ (βλ. ἄσκ. 346) $=$

$$=\frac{5+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}}{1-2\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{9}}=\frac{\left(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)\cdot 9}{\left(1-\frac{4}{3}-\frac{4}{9}\right)9}=\frac{45+6+4}{9-12-4}=-\frac{55}{7}.$$

iii) $$\frac{x^3-2y^3}{3x^2y}=\frac{\frac{x^3-2y^3}{x^3}}{\frac{3x^2y}{x^3}}=\frac{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\frac{y}{x}}=\frac{1+2\cdot\frac{8}{27}}{-3\cdot\frac{2}{3}}=\frac{27+16}{-3.2.9}=-\frac{43}{54}.$$

348. Ἐάν $\frac{x}{y}=\frac{+5}{+7}$ εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν ἑκάστου τῶν κλασμάτων: $\frac{x}{x+y}$, $\frac{x-y}{y}$, $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x}{2y}$, $\frac{x-2y}{x+2y}$.

Λύσις.- Ἔχομεν: $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{x}{x+y}=\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12}$, $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\Rightarrow$

$\frac{x-y}{y}=\frac{5-7}{7}=-\frac{2}{7}$, $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{x+y}{x-y}=\frac{5+7}{5-7}=-6$, $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x}{2y}=\frac{5}{2.7}=\frac{5}{14}$ $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\Rightarrow\frac{x}{2y}=\frac{5}{14}\Rightarrow\frac{x-2y}{x+2y}=\frac{5+14}{5-14}=-\frac{19}{9}$.

349. Νά δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν, ἕκαστος μέσος ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διά τοῦ ἄλλου μέσου· ἕκαστος ἄκρος ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν δύο μέσων διά τοῦ ἄλλου ἄκρου. Ἐφαρμόσατε τοῦτο πρός ἄμεσον εὕρεσιν τοῦ x ἐκ τῆς $\frac{20}{x}=\frac{5}{3}$ ἤ τῆς $\frac{20}{5}=\frac{12}{x}$

Λύσις.- i) Ἔχομεν i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\beta\gamma=\alpha\delta\Rightarrow\beta=\frac{\alpha\delta}{\gamma}$.

ii) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow a\delta=\beta\gamma \Rightarrow \delta=\frac{\beta\gamma}{a}$ iii) $\frac{20}{x}=\frac{5}{3} \Rightarrow x=\frac{20.3}{5}=12.$

iv) $\frac{20}{5}=\frac{12}{x} \Rightarrow x=\frac{5.12}{20}=3$.

350. *Βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν δείξατε, ὅτι, ἄν* $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\sigma}$ *τότε θά εἶναι καί* $\frac{a-\beta}{\gamma-\sigma}=\frac{\beta}{\sigma}$, $(a+\beta)(\gamma-\delta)=(a-\beta)(\gamma+\delta)$, $\frac{a^2+\beta^2}{a^2}=\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma^2}$, $\frac{2a-4\beta}{5\beta}=\frac{2\gamma-4\delta}{5\delta}$.

Λύσις.– i) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{a-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta} \Rightarrow \frac{a-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\beta}{\delta}$

ii) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{a+\beta}{a-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta} \Rightarrow (a+\beta)(\gamma-\delta)=(a-\beta)(\gamma+\delta)$

iii) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longrightarrow \frac{a^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2} \Rightarrow \frac{a^2+\beta^2}{a^2}=\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma^2}$

iv) $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longrightarrow \frac{2a}{4\beta}=\frac{2\gamma}{4\delta} \Longrightarrow \frac{2a-4\beta}{4\beta}=\frac{2\gamma-4\delta}{4\delta} \Rightarrow$

$\frac{2a-4\beta}{\beta}=\frac{2\gamma-4\delta}{\delta} \Rightarrow \frac{2a-4\beta}{5\beta}=\frac{2\gamma-4\delta}{5\delta}$

351. *Ἐάν* $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ *νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος* $\frac{7x-4y}{3x+y}$, *καθώς καί τοῦ* $\frac{3xy-y^2}{x^2+y^2}$

Λύσις.– i) $\frac{7x-4y}{3x+y}=\frac{7\frac{x}{y}-4}{3\frac{x}{y}+1}=\frac{7\cdot\frac{3}{4}-4}{3\cdot\frac{3}{4}+1}=\frac{21-16}{9+4}=\frac{5}{13}$

ii) $\frac{3xy-y^2}{x^2+y^2}=\frac{\frac{3xy-y^2}{y^2}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{\frac{3x}{y}-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}=\frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{9}{16}+1}=\frac{4}{5}$

352. *Ἐάν* $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ *τότε θά εἶναι καί* $\frac{\pi a^2+\kappa\beta^2}{\pi a^2-\kappa\beta^2}=\frac{\pi\gamma^2+\kappa\delta^2}{\pi\gamma^2-\kappa\delta^2}$, *ὅπου* π, κ *τυχόντες καί* $(\pi a^2-\kappa\beta^2)(\pi\gamma^2-\kappa\delta^2)\neq 0$.

Λύσις.– $\frac{a^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$, $\frac{\pi a^2}{\kappa\beta^2}=\frac{\pi\gamma^2}{\kappa\delta^2}$, $\frac{\pi a^2+\kappa\beta^2}{\pi a^2-\kappa\beta^2}=\frac{\pi\gamma^2+\kappa\delta^2}{\pi\gamma^2-\kappa\delta^2}$

353. Ἐάν ὁ β εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α καί γ, δείξατε ὅτι:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}=\beta^4$$

Λύσις.– Ἐξ ὑποθέσεως, $\beta^2=\alpha\gamma$. Ἑπομένως $\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=$

$$=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{\gamma^2-\alpha\gamma+\alpha^2}{\alpha^2\gamma^2}\Rightarrow \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}=\frac{\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2}{\frac{\gamma^2-\alpha\gamma+\alpha^2}{\alpha^2\gamma^2}}=$$

$$=\alpha^2\gamma^2=\beta^4.$$

354. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, νά δειχθῆ ἡ ἰσότης $\alpha+\delta=\beta+\gamma+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha}$

Λύσις.– Τό Β′ μέλος τῆς ἀποδεικτέας γράφεται:

$$\beta+\gamma+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha}=\frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha^2-\alpha\gamma-\alpha\beta+\beta\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta\gamma}{\alpha}=$$

$=$ (ἐπειδή $\beta\gamma=\alpha\delta$) $\frac{\alpha^2+\alpha\delta}{\alpha}=\alpha+\delta=$ Α′ μέλος.

355. Δείξατε ὅτι ἄν ὁ γ εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α καί β θά ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}$$

Λύσις.– Ἐξ ὑποθέσεως $\gamma^2=\alpha\beta \Rightarrow \frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma}{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma}=$

$$=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+2\alpha\gamma}{\beta^2+\alpha\beta+2\beta\gamma}=\frac{\alpha(\alpha+\beta+2\gamma)}{\beta(\beta+\alpha+2\gamma)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

356 Χρησιμοποιοῦντες ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν, δείξατε ὅτι, ἐάν ἀληθεύη ἡ ἰσότης:

$$(2\mu\alpha+6\mu\beta+3\nu\gamma+9\nu\delta)(2\mu\alpha-6\mu\beta-3\nu\gamma+9\nu\delta)=$$
$$=(2\mu\alpha-6\mu\beta+3\nu\gamma-9\nu\delta)(2\mu\alpha+6\mu\beta-3\nu\gamma-9\nu\delta),$$

ὅπου $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$, τότε οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

Λύσις.– Ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται ὡς ἀναλογία.

$$\frac{2\mu\alpha+6\mu\beta+3\nu\gamma+9\nu\delta}{2\mu\alpha+6\mu\beta-3\nu\gamma-9\nu\delta}=\frac{2\mu\alpha-6\mu\beta+3\nu\gamma-9\nu\delta}{2\mu\alpha-6\mu\beta-3\nu\gamma+9\nu\delta}$$

Ἐφαρμόζοντες τήν ἰδιότητα V σελ. 130 λαμβάνομεν:

$$\frac{4\mu\alpha+12\mu\beta}{6\nu\gamma+18\nu\delta}=\frac{4\mu\alpha-12\mu\beta}{6\nu\gamma-18\nu\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{4\mu\alpha+12\mu\beta}{4\mu\alpha-12\mu\beta}=\frac{6\nu\gamma+18\nu\delta}{6\nu\gamma-18\nu\delta}$$

καί μέ ἐφαρμογήν τῆς ἰδίας ἰδιότητος λαμβάνομεν:

$$\frac{8\mu\alpha}{24\mu\beta}=\frac{12\nu\gamma}{36\nu\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha}{3\beta}=\frac{\gamma}{3\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

357. Ἐάν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, δείξατε ὅτι τότε:

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

Λύσις.- Θέτομεν: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\lambda \Rightarrow$ (1) $x=\alpha\lambda,\ y=\beta\lambda,\ z=\gamma\lambda$ (τύποι ἀντικαταστάσεως). Ἀντικαθιστῶμεν τά x, y, z βάσει τῶν (1) καί εἰς τό πρῶτον καί εἰς τό δεύτερον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καί (μετά τάς ἁπλοποιήσεις) εὑρίσκομεν ἴσας παραστάσεις.

358) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ δείξατε ὅτι τότε:

$$\frac{2\alpha^4\beta^2+3\alpha^2\gamma^2+5\gamma^4\delta}{2\beta^6+3\beta^2\delta^2+5\delta^5}=\frac{\alpha^4}{\beta^4}.$$

Λύσις.- Λύεται διά μεθόδου ὁμοίας πρός τήν ὑποδειχθεῖσαν εἰς τήν ἄσκ. 357 (βλ. σελ. 133 παρ)γμα 4).

359. Ἐάν ὑφίστανται αἱ ἰσότητες:

$$\frac{x}{\kappa+\rho-\pi}=\frac{y}{\rho+\pi-\kappa}=\frac{z}{\pi+\kappa-\rho}$$

ἀποδείξατε ὅτι τότε θά εἶναι: $(\kappa-\rho)x+(\rho-\pi)y+(\pi-\kappa)z=0$.

Λύσις.- Θέτομεν $\frac{x}{\kappa+\rho-\pi}=\frac{y}{\rho+\pi-\kappa}=\frac{z}{\pi+\kappa-\rho}=\lambda$ καί λαμβάνομεν τούς τύπους ἀντικαταστάσεως: $x=\lambda(\kappa+\rho-\pi)$, $y=\lambda(\rho+\pi-\kappa)$, $z=\lambda(\pi+\kappa-\rho)$ δυνάμει τῶν ὁποίων τό Α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας λαμβάνει τήν μορφήν: $\lambda(\kappa-\rho)(\kappa+\rho-\pi)+\lambda(\rho-\pi)(\rho+\pi-\kappa)+$ $+\lambda(\pi-\kappa)(\pi+\kappa-\rho)=\lambda\{\kappa^2-\rho^2-\kappa\pi+\rho\pi+\rho^2-\pi^2-\kappa\rho+\kappa\pi+\pi^2-\kappa^2-$ $-\rho\pi+\kappa\rho\}=\lambda.0=0$.

360. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, δείξατε ὅτι τότε θά ἀληθεύῃ καί ἡ:

$$\frac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\frac{(\alpha+\gamma)^3}{(\beta+\delta)^3}$$

Λύσις.- Δύναται ν' ἀποδειχθῆ διά τῆς λ-μεθόδου (παρ)γμα 4, σελ. 133 ἤ βλέπε ἄσκ. 357 ἤ 359). 'Επίσης, βάσει τῆς σχέσεως $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, ὁπότε: $\frac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\frac{\alpha\gamma(\alpha+\gamma)}{\beta\delta(\beta+\delta)}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=$
$=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

361. 'Εάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, δείξατε ὅτι τότε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta)^2$$

Καί γενικῶς, ἐάν $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=\dots=\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}=\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ ὅπου $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu$ τυχόντες ἀριθμοί $\neq 0$, τότε θά ἔχωμεν καί $(a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2)(a_2^2+a_3^2+a_4^2+\dots+a_{\nu+1}^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_\nu a_{\nu+1})^2$

Λύσις.- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{\beta^2}{\beta\gamma}=\frac{\gamma^2}{\gamma\delta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta}$ (1). 'Επίσης

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\beta}{\beta^2}=\frac{\beta\gamma}{\gamma^2}=\frac{\gamma\delta}{\delta^2}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta}{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$ (2).

'Εξισοῦντες τά (1) καί (2) ἔχομεν τό ἀποδεικτέον.
Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί μέ ν κλάσματα.

362. 'Εάν $\frac{\mu}{x}=\frac{\nu}{y}=\frac{\rho}{z}$ καί $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, δείξατε ὅτι τότε:

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}+\frac{\rho^2}{\gamma^2}=\frac{\mu^2+\nu^2+\rho^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Λύσις.- Θέτομεν $\frac{\mu}{x}=\frac{\nu}{y}=\frac{\rho}{z}=t$ ὁπότε $\mu=xt$, $\nu=yt$, $\rho=zt$ καί

$\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}+\frac{\rho^2}{\gamma^2}=\frac{x^2t^2}{\alpha^2}+\frac{y^2t^2}{\beta^2}+\frac{z^2t^2}{\gamma^2}=\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma}\right)t^2=t^2=$
$=\frac{\mu^2}{x^2}=\frac{\nu^2}{y^2}=\frac{\rho^2}{z^2}=\frac{\mu^2+\nu^2+\rho^2}{x^2+y^2+z^2}$

363. 'Εάν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, νά δειχθῆ ὅτι:

$$\frac{x^2+\alpha^2}{x+\alpha}+\frac{y^2+\beta^2}{y+\beta}+\frac{z^2+\gamma^2}{z+\gamma}=\frac{(x+y+z)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(x+y+z)+(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Λύσις.- Θέτομεν πάλιν, $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\lambda$, ὅτε $x=\alpha\lambda$, $y=\beta\lambda$, $z=\gamma\lambda$ καί ἀντικαθιστῶμεν τά x, y, z εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, ὁπότε τοῦτο γίνεται:

$$\frac{\alpha^2\lambda^2+\alpha^2}{\alpha\lambda+\alpha}+\frac{\beta^2\lambda^2+\beta^2}{\beta\lambda+\beta}+\frac{\gamma^2\lambda^2+\gamma^2}{\gamma\lambda+\gamma}=\frac{\alpha^2(\lambda^2+1)}{\alpha(\lambda+1)}+\frac{\beta^2(\lambda^2+1)}{\beta(\lambda+1)}+\frac{\gamma^2(\lambda^2+1)}{\gamma(\lambda+1)}=$$

$$=\frac{\alpha(\lambda^2+1)}{(\lambda+1)}+\frac{\beta(\lambda^2+1)}{\lambda+1}+\frac{\gamma(\lambda^2+1)}{\lambda+1}=\frac{\alpha\lambda^2+\alpha+\beta\lambda^2+\beta+\gamma\lambda^2+\gamma}{\lambda+1}=$$

$$=\frac{\lambda^2(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)}{\lambda+1}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda^2+1)}{\lambda+1}$$

Ἐξ ἄλλου, τό δεύτερον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος γίνεται κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῶν x, y, z ὑπό τῶν ἴσων των:

$$\frac{(\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\lambda\alpha+\lambda\beta+\lambda\gamma+\alpha+\beta+\gamma}=\frac{[\lambda(\alpha+\beta+\gamma)]^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\lambda(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\lambda^2(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\lambda(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2(\lambda^2+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda+1)}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\lambda^2+1)}{\lambda+1}$$

Ὥστε τό δεύτερον μέλος ἰσοῦται μέ τήν ἰδίαν ποσότητα μέ τήν ὁποίαν ἰσοῦται καί τό πρῶτον. Ὥστε ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι ἀληθής.

364. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως:

$$|0{,}14-\{|3{,}14-\sqrt{2}|+|1-\sqrt{2}|\}|=;$$

Λύσις.- Ἐπειδή $3{,}14-\sqrt{2}$ εἶναι θετικός ἕπεται ὅτι $|3{,}14-\sqrt{2}|=3{,}14-\sqrt{2}$ (σελ. 135) καί ἐπειδή $1-\sqrt{2}$ εἶναι ἀρνητικός, ἕπεται ὅτι $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$ (σελ. 135) ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται: $|0{,}14-\{3{,}14-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1\}|=|0{,}14-2{,}14|=|-2|=2.$

365. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως:

$$-\left(-\frac{1}{0{,}5}\right)^2+\left(\frac{1}{0{,}2}\right)^3-\{|5-\sqrt{80}|+|16-\sqrt{80}|\}^2.$$

Λύσις.- Ἐπειδή $5-\sqrt{80}<0$ καί $16-\sqrt{80}>0 \Rightarrow \{|5-\sqrt{80}|+|16-\sqrt{80}|\}=\{\sqrt{80}-5+16-\sqrt{80}\}=11$ καί ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται: $-(-2)^2+(5)^3-11^2=-4+125-121=0.$

366. *Ποῖοι ἀριθμοί πληροῦν τήν ἰσότητα $|x-3|=7$ καί ποῖοι τήν ἰσότητα $2|x|+x=3$;*

Λύσις.- i) Ἐάν $x-3>0 \Rightarrow |x-3|=x-3$ καί ἡ ἐξίσωσις γράφεται $x-3=7 \Rightarrow x=10$. Ἐάν $x-3<0$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται $3-x=7 \Rightarrow x=-4$. Λύσις: $x=-4,\ x=10$.

ii) Ἐάν x θετικός, τότε ἡ ἐξίσωσις γράφεται $2x+x=3$ ἤ $3x=3$ ἄρα $x=1$. Ἐάν x ἀρνητικός ἡ ἐξίσωσις γράφεται $-2x+x=3, -x=3$, $x=-3$. Ὥστε οἱ ἀριθμοί 1 καί −3 ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν.

367. *Νά δειχθῆ ὅτι i) $x^2=|x|^2$. ii) $|x|+3x^2=|x|\cdot\{1+3|x|\}$.*

Λύσις.— i) Ἐάν $x \geqq 0 \Rightarrow |x|=x$ (σελ. 135) $\Rightarrow |x|^2=x^2$. Ἐάν $x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow |x|^2=(-x)^2=x^2$. Ὥστε πάντοτε: $|x|^2=x^2$.
ii) $|x|+3x^2=|x|+3|x|^2=|x|(1+3|x|)$.

368. *Βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ν' ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα:*

$$\frac{|x|+3x^2}{3|x|+1}$$

Λύσις.— $$\frac{|x|+3x^2}{3|x|+1}=\frac{|x|+3|x|^2}{3|x|+1}=\frac{|x|\{1+3|x|\}}{3|x|+1}=|x|$$

369. *Ἐξαγάγατε κοινούς παράγοντας καί τελικῶς μετατρέψατε εἰς γινόμενον δύο παραστάσεων τήν παράστασιν:*

$$xy+|xy|-|x|y-x|y|.$$

Λύσις.— Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται $xy+|x||y|-|x|y-x|y|=xy-|x|y+|x||y|-x|y|=y(x-|x|)+|y|(|x|-x)=$ $=(x-|x|)(y-|y|)$.

370. *Νά εὑρεθῆ ὁ φυσικός ἀριθμός ν γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης:*

$$2\nu+\frac{(-3)^{2\nu+5}}{|(-3)^{2\nu+5}|}=\left|\left(\frac{5}{7-\frac{49}{5}}+\frac{7}{5-\frac{25}{7}}\right)\cdot\frac{-22}{-\frac{25}{7}+\frac{49}{5}}\right|+$$
$$+121-\{|6-\sqrt{73}|+|17-\sqrt{73}|\}^2.$$

Λύσις.— Τό κλάσμα $(-3)^{2\nu+5}/|(-3)^{2\nu+5}|=-3^{2\nu+5}/3^{2\nu+5}=-1$.
Τό 2ον μέλος τῆς δοθείσης ἰσότητος καθίσταται μετά τάς πράξεις, $=11$. (παρβλ. ἀσκ. 365) καί ἡ δοθεῖσα δίδει $2\nu-1=11 \Longrightarrow \nu=6$.

371. *Νά διαταχθοῦν κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους οἱ ἀριθμοί:*

$-1, +4, -3/2, -1/6, +20, -7, -\sqrt{2}, +\sqrt{3}.$

Λύσις.– Κατατάσσομεν πρῶτον τούς ἀρνητικούς (σελ.137, iv) $-1, -3/2, -1/6, -7, -\sqrt{2}$:

$-7 < -3/2 < -\sqrt{2} < -1 < -1/6$. Ἐν συνεχεία, τούς θετικούς: $\sqrt{3} < 4 < 20$. Τελικῶς: $-7 < -3/2 < -\sqrt{2} < -1 < -1/6 < \sqrt{3} < 4 < 20$
Σημειωτέον ὅτι $3/2 > \sqrt{2}$ διότι $\frac{9}{4} > 2$

372. *Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν: $-(2,8+\sqrt{2})$ καί $\frac{-2}{0,1+(1/2)^3}$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου.*

Λύσις.– Ἄς θέσωμεν $\alpha = -(2,8+\sqrt{2})$ καί $\beta = \frac{-2}{0,1+(1/2)^3}$ καί ἄς σχηματίσωμεν τήν διαφοράν των. Ἔχομεν:

$$\beta - \alpha = -\alpha + \beta = 2,8+\sqrt{2} - \frac{2}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}} = 2,8+\sqrt{2} - \frac{2.40}{4+5} =$$

$$= 2,8+\sqrt{2} - \frac{80}{9} = \frac{28}{10} - \frac{80}{9} + \sqrt{2} = -\frac{274}{45} + \sqrt{2} = \sqrt{2} - (5,\dots) < 0.$$

Ἑπομένως (§ 120) $\beta < \alpha$ ἤ $\alpha > \beta$.

373. *Ἐάν $\alpha < \beta$ νά δειχθῆ ὅτι: $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.*

Λύσις.– Ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} < 0$ καί $\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta < 0$.

374. *Ἐάν $\alpha < \beta < \gamma$ νά δειχθῆ ὅτι: $\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$.*

Λύσις.– Ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < 0$ καί $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$. Ταῦτα προκύπτουν εὔκολα ἐκ τῶν ὑποθέσεων.

375. *Καλεῖται μέσος ἀριθμητικός ν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu$, ὁ ἀριθμός $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_\nu}{\nu}$. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικός ν πραγματικῶν ἀριθμῶν περιέχεται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καί τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν ν δοθέντων.*

Λύσις.– Ἔστω α_1 ὁ μικρότερος ὅλων. Τότε $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_3 > \alpha_1 \dots$
$\dots \alpha_\nu > \alpha_1$ καί $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu}{\nu} - \alpha_1 = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu - \nu\alpha_1}{\nu} =$

$$= \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_\nu-a_1-a_1-a_1-\dots a_1}{\nu} = \frac{(a_2-a_1)+(a_3-a_1)+\dots+(a_\nu-a}{\nu}$$

Τό τελευταῖον κλάσμα εἶναι θετικόν διότι $a_2-a_1>0$, $a_3-a_1>0,\dots,a_\nu-a_1>0$ ἄρα ὁ μέσος ἀριθμητικός εἶναι μεγαλύτερος τοῦ a_1. Ὁμοίως δεικνύεται καί τό β΄ μέρος τῆς ἀσκήσεως.

376. *Ἐάν $a \leqq \beta$ καί συγχρόνως $a \geqq \beta$ τότε $a=\beta$.*
Λ ύ σ ι ς.- Διά δύο ἀριθμούς a, β θά ἰσχύη ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων: $a<\beta$ ἤ $a>\beta$ ἤ $a=\beta$. Ἡ πρώτη ἀποκλείεται λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ὅτι $a \geqq \beta$. Ἡ δευτέρα ἀποκλείεται λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $a \leqq \beta$. Ἄρα μένει ἡ τρίτη.

377. *Ἐάν x τυχών πραγματικός, τότε $|x| \geqq x$.*
Λ ύ σ ι ς.- Ἐάν $x>0 \Rightarrow |x|=x$. Ἐάν $x<0 \Rightarrow |x|>x$ διότι πᾶς θετικός εἶναι μεγαλύτερος παντός ἀρνητικοῦ. Ἄν $x=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow |x|=0=x$. Ὥστε π ά ν τ ο τ ε $|x| \geqq x$.

78. *Ἐάν x καί y τυχόντες πραγματικοί νά δειχθῆ ὅτι: i) πᾶς πραγματικός ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τῆς ἀπολύτου τιμῆς του ($x \leqq |x|$) καί βάσει τούτου: ii) $xy+|xy| \geqq |x|y+x|y|$.*
Λ ύ σ ι ς.- i) Τό πρῶτον μέρος εἶναι ἡ ἄσκ. 377.
ii) Ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι ἡ διαφορά τοῦ πρώτου μέλους μεῖον τό δεύτερον εἶναι $\geqq 0$. Πράγματι $xy+|xy|-|x|y-x|y| =$ $= xy+|x|\cdot|y|-|x|y-x|y| = y(x-|x|)-|y|(x-|x|) = (x-|x|)(y-|y|)$. Ἕκαστος τῶν δύο παραγόντων εἶναι $\leqq 0$ ἄρα καί τό γινόμενόν των εἶναι $\geqq 0$.

79 *Δείξατε διά παραδειγμάτων ἀριθμητικῶν ὅτι ἄν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας, δυνατόν νά προκύψη ὁμοιόστροφος ἤ ἑτερόστροφος πρός τάς δοθείσας ἀνισότης ἤ ἀκόμη καί ἰσότης. (Δέν ὑπάρχει κανών διά τήν ἀφαίρεσιν ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων κατά μέλη. Ἡ πρᾶξις αὕτη τῆς κατά μέλη ἀφαιρέσεως ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων δέν συγκαταλέγεται εἰς τάς Ἀλγεβρικάς πράξεις.*

380. Καθ' ὅμοιον τρόπον δείξατε ὅτι, ἄν διαιρέσωμεν κατά μέλη δύο ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας, λαμβάνομεν ἀνισότητα, ἄλλοτε ὁμοιόστροφον καί ἄλλοτε ἑτερόστροφον, πρός τάς δοθείσας ἤ ἀκόμη καί ἰσότητα. (Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις διά τήν ἀφαίρεσιν ἰσχύει καί διά τήν διαίρεσιν τῶν ἀνισοτήτων κατά μέλη).

381. Νά δειχθῆ ὅτι, ἄν $\alpha>\beta$ καί $\gamma<\delta$, τότε θά εἶναι $\alpha-\gamma>\beta-\delta$.
Λύσις.- Προσθέτομεν κατά μέλη τάς $\alpha>\beta$ καί $-\gamma>-\delta$.

382. Νά δειχθῆ ὅτι, ἄν $\alpha>\beta$ τότε $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$, ἐφ' ὅσον οἱ α καί β εἶναι ὁμόσημοι καί $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$, ὅταν οἱ α καί β εἶναι ἑτερόσημοι

Λύσις.- Ἐάν $\alpha\beta>0$ τότε ἐκ τῆς $\alpha>\beta$ ἕπεται $\frac{\alpha}{\alpha\beta}>\frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἤτοι $\frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha}$ ἤ $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$. Ἐάν $\alpha\beta<0$ τότε ἐκ τῆς $\alpha>\beta$ ἕπεται: $\frac{\alpha}{\alpha\beta}<\frac{\beta}{\alpha\beta}$ (διαίρεσις δι' ἀρνητικοῦ παράγοντος), ἤτοι $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$.

383. Ἐάν τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί σχετίζωνται, οὕτως ὥστε ἕκαστος νά εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τότε καί οἱ τρεῖς ἀριθμοί εἶναι θετικοί.
Λύσις.- Ἔχομεν $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$. Προσθέτοντες τάς δύο πρώτας κατά μέλη: $\alpha+\beta<\beta+\alpha+2\gamma$ ἤ $C<2\gamma$ ἤ $\gamma>0$.
Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι καί $\beta>0$, $\alpha>0$.

384. Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί ἰσχύει δέ $\alpha>\beta$, $\gamma<\delta$, τότε θά ἰσχύη καί ἡ ἀνισότης $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\delta}$.
Λύσις.- Πολλαπλασιάζομεν κατά μέλη τάς $\alpha>\beta$ καί $\frac{1}{\gamma}>\frac{1}{\delta}$.

385. Δείξατε ὅτι ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἔχων τό μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι ὁ μικρότερος.
Λύσις.- Ἔστω $\alpha<0$, $\beta<0$ καί $\alpha^2>\beta^2$. Τότε $\alpha^2-\beta^2>0$, $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)>0$. Ἐπειδή ὁ $\alpha+\beta$ εἶναι ἀρνητικός, ἕπεται ὅτι καί ὁ $\alpha-\beta$ εἶναι ἀρνητικός (ἀφοῦ ἔχουν γινόμενον θετικόν)

δηλ. $\alpha-\beta<0$ ἢ $\alpha<\beta$.

386. Δείξατε ὅτι: $\frac{-x+7}{3}+\frac{3x-8}{2}>10 \Rightarrow x>10$.

Λύσις.— $\frac{-x+7}{3}+\frac{3x-8}{2}>10 \Rightarrow$ (πολ)σμός ἐπί 6) $-2x+14+9x-24>60 \Rightarrow 7x-10>60 \Rightarrow$ (πρόσθεσις εἰς ἀμφότερα τά μέλη τό 10) $7x>70 \Rightarrow$ (διαίρεσις διά 7) $x>10$.

387 Δείξατε ὅτι: $\frac{x}{-3}+\frac{x}{+2}<\frac{1}{6} \Leftrightarrow x<1$.

Λύσις.- Ὅπως ἡ 386.

388. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός καί $\alpha>\beta>0$ τότε καί $\alpha^\nu>\beta^\nu$. Ἀντιστρόφως δείξατε διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι ἄν $\alpha^\nu>\beta^\nu$, ὅπου α,β θετικοί τότε θά ἰσχύη καί $\alpha>\beta$.
Λύσις.- Πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη τάς $\alpha>\beta$, $\alpha>\beta$ λαμβάνομεν $\alpha^2>\beta^2$. Ἐξ αὐτῆς καί τῆς $\alpha>\beta$ λαμβάνομεν $\alpha^3>\beta^3$ κ.ο.κ.
Ἀντιστρόφως.- ἐάν $\alpha^\nu>\beta^\nu$ τότε καί $\alpha>\beta$. Διότι ἄν ἦτο $\alpha<\beta$ τότε θά εἴχομεν (συμφώνως πρός τό προηγούμενον) καί $\alpha^\nu<\beta^\nu$ ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ἐάν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha^\nu=\beta^\nu$ ὅπερ πάλιν ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ὥστε μένει ὅτι $\alpha>\beta$.

389. Ἐάν α,β,γ παριστάνουν τά μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, δείξατε ὅτι τότε: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.
Λύσις.- Αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου θά πληροῦν τάς σχέσεις: $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\gamma+\alpha$, $\gamma<\alpha+\beta$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς πρώτης ἐπί α, τῆς δευτέρας ἐπί β, καί τῆς τρίτης ἐπί γ καί προσθέτομεν κατά μέλη.

390. Νά δειχθῆ ὅτι, ἄν κλάσμα μέ θετικούς ὅρους εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, προσθέσωμεν δέ εἰς ἀμφοτέρους τούς ὅρους του τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν, τότε τό κλάσμα αὐξάνει. Ἄν δέ τό κλάσμα εἶναι >1, τότε διά τῆς αὐτῆς πράξεως ἐλαττοῦται.
Λύσις.- Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}<1$ ὅπου $\alpha>0$, $\beta>0$. Ἐάν $\theta>0$ τότε τό

τό κλάσμα $\frac{\alpha+\theta}{\beta+\theta}$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ διότι ἡ διαφορά των $\frac{\alpha+\theta}{\beta+\theta}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\theta(\beta-\alpha)}{(\beta+\theta)\beta}$ εἶναι θετική (διότι $\beta>\alpha$). Ὁμοίως ἄν $\frac{\alpha}{\beta}>1$ τότε $\frac{\alpha+\theta}{\beta+\theta}<\frac{\alpha}{\beta}$.

391. *Ποῖοι ἀλγεβρικοί ἀκέραιοι x, πληροῦν τήν σχέσιν $-7<x<2$;*
Λύσις.- Προφανῶς οἱ ἑξῆς: $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

392. *Ἔστω Κ ἀλγεβρικός ἀκέραιος. i) Δείξατε ὅτι ὁ Κ δύναται νά λάβῃ μίαν ἀπό τάς τρεῖς μορφάς: 3λ, $3\lambda+1$, $3\lambda-1$ ὅπου λ ἀλγεβρικός ἀκέραιος. ii) Δείξατε ὅτι ὁ Κ δύναται νά λάβῃ μίαν ἀπό τάς 5 μορφάς: 5λ, $5\lambda\pm1$, $5\lambda\pm2$ ὅπου λ ἀκέραιος.*
Λύσις.- i) Διότι ὁ Κ διαιρούμενος διά 3 θά δίδη ὑπόλοιπον, ἤ 0 ἤ 1 ἤ 2. Εἰς τήν τρίτην περίπτωσιν $K=3\pi+2=$ $=3\pi+3-3+2=3(\pi+1)-1=3\lambda-1$ ($\lambda=\pi+1=$ ἀκέραιος). ii) Ὁ Κ διαιρούμενος διά 5 θά δίδη ὑπόλοιπον 0 ἤ 1 ἤ 2, ἤ 3, ἤ 4. Συνεπῶς $K=5\lambda$ ἤ $K=5\lambda+1$ ἤ $K=5\lambda+2$ ἤ $K=5\pi+3$ ἤ $K=5\pi'+4$. Εἰς τάς δύο τελευταίας περιπτώσεις: $K=5\pi+3=$ $=5\pi+5-5+3=5(\pi+1)-2=5\lambda-2$ καί $K=5\pi'+4=5\pi'+5-5+4=$ $=5(\pi'+1)-1=5\lambda-1$.

393. *Ἐάν ὁ Κ διατρέχῃ ὅλους τούς ἀλγεβρικούς ἀκεραίους καί καλέσωμεν E_1 τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $2K+\frac{1}{2}$, E_2 τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν $2K-\frac{1}{2}$ καί E_3 τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\frac{2K+1}{2}$ δείξατε ὅτι $E_1\cap E_2=\emptyset$, $E_1\cup E_2=E_3$.*
Λύσις.- i) Διά νά δείξωμεν ὅτι $E_1\cap E_2=\emptyset$ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τά E_1, E_2 εἶναι ξένα μεταξύ των, δηλ. δέν ἔχουν κοινόν τό στοιχεῖον (§5).
Ἔστω $2K+\frac{1}{2}$ ἀριθμός τοῦ συνόλου E_1 καί $2K'-\frac{1}{2}$ ἀριθμός τοῦ E_2. Ἐάν τά E_1 καί E_2 εἶχον κοινά στοιχεῖα, τότε θά ὑπῆρχε ἡ ἰσότης $2K+\frac{1}{2}=2K'-\frac{1}{2}$ διά τινας ἀκεραίας τιμάς τοῦ Κ καί Κ'. Αὕτη γράφεται $2(K'-K)=1$ δηλ. ὁ 2 διαιρεῖ τόν 1. Ἡ ἰσότης εἶναι ἀδύνατος· τά E_1, E_2 δέν ἔχουν κοι-

8

νόν στοιχεῖον, ἄρα εἶναι ξένα μεταξύ τους. ii) Διά νά δείξωμεν ὅτι $E_1 \cup E_2 = E_3$ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι πᾶν στοιχεῖον τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ πρώτου καί ὅτι πᾶν στοιχεῖον τοῦ πρώτου μέλους εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ δευτέρου $\{$Δηλ. $E_3 \subset E_1 \cup E_2$ καί $E_1 \cup E_2 \subset E_3\}$. Πράγματι, τό τυχόν στοιχεῖον τοῦ E_3 εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{2K+1}{2}$. Ἐάν $K=2\rho$ (ἄρτιος) τότε τό $\frac{2K+1}{2} = 2\rho + \frac{1}{2}$ ἤτοι εἶναι στοιχεῖον τοῦ E_1. Ἐάν $K=2\rho-1$ (περιττός) τότε τό $\frac{2K+1}{2} = 2\rho - \frac{1}{2}$ ἤτοι εἶναι στοιχεῖον τοῦ E_2.

Ἀντιστρόφως.- $2K + \frac{1}{2} = \frac{4K+1}{2} = \frac{2.(2K)+1}{2} = \frac{2K'+1}{2} =$ στοιχεῖον τοῦ E_3 καί $2K - \frac{1}{2} = \frac{4K-1}{2} = \frac{4(K-1)+2+1}{2} = \frac{2\{2(K-1)+1\}+1}{2} =$ $= \frac{2\rho+1}{2} =$ στοιχεῖον τοῦ E_3 δηλ. ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ E_1 καί ὅλα τοῦ E_2, ἀνήκουν εἰς τό E_3. Συνεπῶς τό E_3 εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν E_1 καί E_2.

394. *Ἐάν E_1 = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $a+2K$ ὅπου a δεδομένος πραγματικός ἀριθμός καί K διατρέχῃ ὅλας τάς ἀκεραίας τιμάς, $(0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$, E_2 = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $2K+1-a$ καί E_3 = = σύνολον τῶν ἀριθμῶν $(-1)^K \cdot a+K$ δείξατε ὅτι: $E_1 \cup E_2 = E_3$.*

Λύσις.- (βλ. καί 393 ii). Ἔστω $\sigma = a+2K$ τυχόν στοιχεῖον τοῦ E_1. Τότε $\sigma = (-1)^{2K} a + 2K = (-1)^{\rho} a + \rho$ (ρ ἀκέρ.) = στοιχεῖον τοῦ E_3. Ἔστω $\sigma_1 = (2K+1) - a$ στοιχεῖον τοῦ E_2. Τοῦτο γράφεται $\sigma_1 = -a + (2K+1) = (-1)^{2K+1} a + (2K+1) = (-1)^{\rho} a + \rho$ = στοιχεῖον τοῦ E_3. Ἑπομένως ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ $E_1 \cup E_2$ ἀνήκουν εἰς τό E_3. Ἀντιστρόφως: Ἔστω $\sigma_2 = (-1)^K a + K$ τυχόν στοιχεῖον τοῦ E_3. Ἐάν $K = 2\rho$ (ἄρτιος) τοῦτο γράφεται $\sigma_2 =$ $= a + 2\rho =$ στοιχεῖον τοῦ E_1. Ἐάν $K = 2\rho+1 \Rightarrow \sigma_2 = (-1)^{2\rho+1} a +$ $+ 2\rho+1 = -a + 2\rho + 1 = 2\rho + 1 - a =$ στοιχεῖον τοῦ E_2. Ὥστε καί πᾶν στοιχεῖον τοῦ E_3 ἀνήκει ἤ εἰς τό E_1 ἤ εἰς τό E_2 δηλ. εἰς τό $E_1 \cup E_2$.

395. *Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί a, β, γ, δ, εἶναι σύμμετροι, $\neq 0$, ὁ x, ἀσύμμετρος καί ὁ ἀριθμός $\frac{ax+\gamma}{\beta x+\delta}$ εἶναι σύμμετρος, δεί-*

ξατε ὅτι τότε οἱ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν.

Λύσις.- Ἐκ τῆς ὑποθέσεως $\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}=\sigma$ (σύμμετρος) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha x+\gamma=(\beta x+\delta)\sigma \Rightarrow (\alpha-\beta\sigma)x=\delta\sigma-\gamma$ (ἤτοι σύμμετρος x ἀσύμ. = σύμμ.). Σύμφωνα μέ τό θεωρ. τῆς § 95 $\Rightarrow \alpha-\beta\sigma=0, \delta\sigma-\gamma=$ $=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\sigma$.

396. Ἔστωσαν τά σύνολα $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B=\{1,2\}$. Σχηματίσατε τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A\times B$ καί τοῦ $B\times A$.
Λύσις.- Ὅλα τά δυνατά διατεταγμένα ζεύγη τοῦ $A\times B$ εἶναι $(\alpha,1), (\alpha,2), (\beta,1), (\beta,2), (\gamma,1), (\gamma,2)$ συνεπῶς $A\times B=\{(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,1),(\beta,2),(\gamma,1),(\gamma,2)]$. Ἐπίσης $B\times A=\{(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma),(2,\alpha),(2,\beta),(2,\gamma)\}$.

397. Ἐάν τό σύνολον A ἔχη μ στοιχεῖα καί τό B, ν στοιχεῖα, πόσα στοιχεῖα ἔχει τό σύνολον $A\times B$;
Λύσις.- Ἐπειδή ἕκαστον ἐκ τῶν μ στοιχείων τοῦ A συνδυάζεται μέ ἕκαστον τῶν ν στοιχείων τοῦ B ἕπεται ὅτι τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $A\times B$ εἶναι $\mu\times\nu$.

398. Εὕρετε μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου $E=\{1,2\}$ εἰς τό σύνολον $F=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ποῖον εἶναι τό $f(1)$ καί τό $f(2)$; Κατασκευάσατε ὅλας τάς δυνατάς ἀπεικονίσεις τοῦ E εἰς τό F (§126).
Λύσις.- $\begin{matrix}\{1, & 2\}\\ \downarrow & \downarrow\\ \gamma & \alpha\end{matrix}$: $f(1)=\gamma$, $f(2)=\alpha$. Αἱ δυναταί ἀπεικονίσεις:

$$\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \alpha & \beta\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \alpha & \gamma\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \beta & \alpha\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \beta & \gamma\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \gamma & \alpha\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ \gamma & \beta\end{matrix}\right\}$$

399. Εὕρετε τάς δυνατάς μονοσημάντους ἀπεικονίσεις τοῦ $E=\{1,2,3\}$ ἐπί τοῦ E.
Λύσις.- Ἐάν γράφωμεν τά 1, 2, 3 κατά σειράν καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους, καί ἀντιστοιχίσωμεν τό 1ον μέ τό 1

τό $2^{ον}$ μέ τό 2, τό $3^{ον}$ μέ τό 3, θά ἔχωμεν ὅλας τάς δυνατάς μονοσημάντους ἀπεικονίσεις:

$$\begin{array}{cccccc} (1,2,3) & (1,2,3) & (1,2,3) & (1,2,3) & (1,2,3) & (1,2,3) \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ (1,2,3) & (1,3,2) & (2,1,3) & (2,3,1) & (3,1,2) & (3,2,1) \end{array}$$

400. *Εὕρετε μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου E τῶν τριγώνων τά ὁποῖα ὑπάρχουν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου, ἐπί τοῦ συνόλου Θ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν (κάθε στοιχεῖον τοῦ E εἶναι ἕν τρίγωνον).*

Λύσις.- Εἰς κάθε τρίγωνον ἀντιστοιχίζομεν τό ἐμβαδόν του,(ἤ τήν περίμετρόν του κ.τ.λ.).

401. *Εἰς κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν ἄς ἀντιστοιχίσωμεν τό πλῆθος τῶν διαιρετῶν του (ἐπίσης φυσικῶν ἀριθμῶν). Δημιουργοῦμεν τότε μίαν συνάρτησιν $f(\nu)$ = πλῆθος διαιρετῶν τοῦ ν. Ὑπολογίσατε τά:*

$f(2)$, $f(3)$, $f(10)$, $f(6)\times f(4)$ καθώς καί τά $f(p)$, $f(p^2)$ ὅπου p, πρῶτος.

Ποῖον τό πεδίον ὁρισμοῦ καί ποῖον τό σύνολον τιμῶν τῆς $f(\nu)$;

Λύσις.- Σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν θά ἔχωμεν τήν ἀντιστοιχίαν : $\nu \longrightarrow f(\nu)$ διά κάθε φυσικόν ν καί τό πλῆθος $f(\nu)$ τῶν διαιρετῶν του. Ἑπομένως:

I) $f(2)$ = πλῆθος διαιρετῶν τοῦ $2=2$ (οἱ 1, 2).
II) $f(3)$ = » » » $3=2$ (οἱ 1, 3)
III) $f(10)$ = » » » $10=4$ (οἱ 1, 2, 5, 10).
IV) $f(6)\times f(4)$ = (πλῆθ. διαιρ. τοῦ 6) × (πλῆθ. διαιρ. τοῦ 4) $=4\times 3=12$.
V) $f(p)$ = πλῆθος διαιρετῶν τοῦ πρώτου $p=2$ (οἱ $1, p$)
VI) $f(p^2)$ = » » » » $p^2=3$ (οἱ $1, p, p^2$)

Πεδίον ὁρισμοῦ τῆς $f(\nu)$ εἶναι τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
Σύνολον τιμῶν τῆς $f(\nu)$ » » » » » »

402. *Εἰς κάθε ἀλγεβρικόν ἀκέραιον $\alpha \neq 0$ ἄς ἀντιστοιχίσωμεν τό πλῆθος τῶν διαιρετῶν του (§ 122). Δημιουργοῦμεν τότε μίαν συνάρτησιν $f(\alpha)$ = πλῆθος διαιρετῶν τοῦ α.*
Εὕρετε τούς ἀριθμούς $f(-4)$, $f(36)$, $f(1)$. Δείξατε ὅτι $f(\alpha)=f(-\alpha)$,

$f(p^2)=6$ ὅταν p ἀλγεβρικός ἀκέραιος, πρῶτος.

Λύσις.— Ἐργαζόμενοι ὡς προηγουμένως ἔχομεν : $\alpha \longrightarrow f(\alpha)$

I) $f(-4)$ = πλῆθ. διαιρ. τοῦ $-4 = (\pm 1, \pm 2, \pm 4) = 6$

II) $f(36)$ = » » » $36 = (\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36) = 18$.

III) $f(1)$ = » » » $1 = (\pm 1) = 2$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν διαιρετῶν ἀλγεβρικοῦ ἀκεραίου ἔχομεν ὅτι οἱ διαιρέται τοῦ α εἶναι ὅσοι καί οἱ διαιρέται τοῦ $-\alpha$, ἤτοι: ἄν $\alpha \longrightarrow f(\alpha)$ καί $-\alpha \longrightarrow f(-\alpha)$ τότε $f(\alpha)=f(-\alpha)$ ὅ.ἔ.δ.

Ἄν p = πρῶτος τότε διαιρέται τοῦ p εἶναι $(\pm 1, \pm p) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p)=4$ καί διαιρέται τοῦ p^2 εἶναι οἱ $(\pm 1, \pm p, \pm p^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p^2)=6$.

403. Ἔστω $\sigma(x)=x(7x+1)\cdot|3x-4|$ ὅπου $x\in R \longrightarrow \sigma(x)\in R$. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί $\sigma(0)$, $\sigma\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\sigma\left(\frac{4}{3}\right)$, $\sigma(2)$, $\sigma\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Λύσις.— $\sigma(0)=0$, $\sigma\left(-\frac{1}{7}\right)=0$, $\sigma\left(\frac{4}{3}\right)=0$, $\sigma(2)=60$, $\sigma\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{9}$.

404. Ἄν $f(x)=x^2$ νά εὑρεθῇ : $(f(\alpha)-f(\beta))/f(\alpha-\beta)$, $\alpha \neq \beta$.

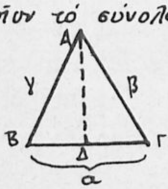
Λύσις.— $\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{f(\alpha-\beta)}=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

405. Ἐάν $\nu\in N$ καί $\varphi(\nu)=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$, $\sigma(\nu)=\dfrac{1}{\nu}$ δείξατε ὅτι $\varphi(\nu)= =\sigma(\nu)-\sigma(\nu+1)$ καί ὅτι $\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(\nu)=\sigma(1)-\sigma(\nu+1)$.

Λύσις.— $\sigma(\nu)-\sigma(\nu+1)=\dfrac{1}{\nu}-\dfrac{1}{\nu+1}=\dfrac{\nu+1-\nu}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\varphi(\nu)$

$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(\nu)=[\sigma(1)-\sigma(2)]+[\sigma(2)-\sigma(3)]+$
$+[\sigma(3)-\sigma(4)]+\cdots+[\sigma(\nu)-\sigma(\nu+1)]=\sigma(1)-\sigma(\nu+1)$.

406. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἴσαι πλευραί ἔχουν μῆκος 4 μονάδων ἑκάστη καί ἡ βάσις, x μονάδων. Νά ἐκφρασθοῦν ἡ περίμετρός του καί τό ἐμβαδόν του ὡς συναρτήσεις τοῦ x. Ποῖον τό σύνολον ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων αὐτῶν;



Λύσις.— $\alpha=x$, $\beta=\gamma=4$. Γ(= περίμετρος) $=\alpha+\beta+\gamma=x+8$.

$E=\frac{1}{2}\alpha(A\Delta)$. $(A\Delta)=\sqrt{(AB)^2-(\Delta B)^2}=$

$$=\sqrt{16-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{64-x^2}$$

$$E=\frac{1}{4}\,x\sqrt{64-x^2}$$

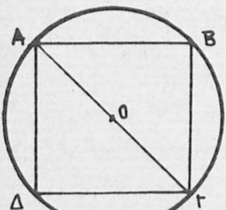
$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \quad \text{ἢ} \quad 0<x<8$$

$$\Gamma(x)=x+8 \mid 0<x<8 \quad , \quad E(x)=\frac{1}{4}\,x\sqrt{64-x^2} \mid 0<x<8.$$

407. *Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν κύκλου, ὡς συνάρτησις τοῦ μήκους x τῆς περιφερείας του.*

Λ ύ σ ι ς.- Εἶναι $x=2\pi\rho$, $E=\pi\rho^2$ καί ἐξ αὐτῶν: $E(x)=\frac{1}{4\pi}x^2$ $(x>0)$.

408. *Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτρων εἶναι ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου μία πλευρά εἶναι x μέτρα. Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν του ὡς συνάρτησις τοῦ x. Ποῖον τό σύνολον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης;*



Λ ύ σ ι ς.- $(AB)=x$, $B\Gamma=\sqrt{(A\Gamma)^2-(AB)^2}=$

$$=\sqrt{16-x^2}$$

$$E=(AB).(B\Gamma)=x.\sqrt{16-x^2}$$

Εἶναι $0<AB<A\Gamma$ ἢ $0<x<4$.

$$E(x)=x\sqrt{16-x^2} \mid 0<x<4.$$

409 *Δοθέντος ὅτι:* $F(x)=\frac{x-1}{x+1}$ *εὕρετε:* $\dfrac{F(a)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-F(a)F\left(\frac{1}{2}\right)}$, *ὅπου* $a\neq-1$ *καί* $a\neq-\frac{1}{2}$.

Λ ύ σ ι ς.- $$F(a)-F\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{a-1}{a+1}-\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{a-1}{a+1}+\frac{1}{3}=\frac{3a-3+a+1}{3(a+1)}=\frac{4a-2}{3(a+1)}$$

$$1-F(a).F\left(\tfrac{1}{2}\right)=1-\frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}=1+\frac{a-1}{3(a+1)}=\frac{4a+2}{3(a+1)}$$

$$\frac{F(a)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-F(a).F\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4a-2}{4a+2}=\frac{2a-1}{2a+1}, \quad \text{ὅπου } a\neq-1,\ -\frac{1}{2}.$$

410. Ἐάν $f(x)=x^2-2/x/+5$ καί $g(x)=2x^2+3$, ὑπολογίσατε τούς ἀριθμούς ἤ παραστάσεις: $f(-3)+g(2)$, $f(-3):g(-2)$, $2f(4)-3g(4)$, $f(a^2)-g(a^2)$, $f(a^2)+g(a)$.
Λύσις.– $f(-3)+g(2)=19$, $f(-3):g(-2)=\frac{8}{11}$, $2f(4)-3g(4)=-79$
$f(a^2)-g(a^2)=-a^4-2a^2+2$, $f(a^2)+g(a^2)=3a^4-2a^2+8$.

411. Ἐάν $\varphi(\nu)=3^\nu$ καί $\sigma(\nu)=\frac{1}{2}3^\nu$, ὅπου $\nu\in N$, δείξατε ὅτι:
$$\varphi(\nu)=\sigma(\nu+1)-\sigma(\nu)$$
καί βάσει τούτου εὕρετε τό ἄθροισμα:
$$3^1+3^2+3^3+\cdots+3^\nu$$
Λύσις.– Ἐπειδή $\sigma(\nu)=\frac{1}{2}3^\nu$ καί $\sigma(\nu+1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{\nu+1}=\frac{1}{2}\cdot 3.3^\nu=\frac{3}{2}\cdot 3^\nu$

$\rightsquigarrow$ ὅτι $\sigma(\nu+1)-\sigma(\nu)=\frac{3}{2}\cdot 3^\nu-\frac{1}{2}\cdot 3^\nu=3^\nu\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=3^\nu=\varphi(\nu)$ ὅ.ἔ.δ.

Ἡ ἀποδειχθεῖσα ἰσότης ἐφαρμοζομένη διαδοχικῶς διά $\nu=1,2,\ldots,\nu$ δίδει:
$$\varphi(1)=3^1=\sigma(2)-\sigma(1)$$
$$\varphi(2)=3^2=\sigma(3)-\sigma(2)$$
$$\varphi(3)=3^3=\sigma(4)-\sigma(3)$$
. . . .

. . . .
$$\varphi(\nu)=3^\nu=\sigma(\nu+1)-\sigma(\nu)$$
Δι' ἀθροίσεως τούτων ἀνάγονται ὅλα τά $\sigma(K)$ $(K=2,3,\ldots,\nu)$ πλήν τοῦ $\sigma(1)$ καί $\sigma(\nu+1)$ $\rightsquigarrow$
$$3^1+3^2+3^3+\ldots\ldots+3^\nu=\sigma(\nu+1)-\sigma(1)=\frac{1}{2}\cdot 3^{\nu+1}-\frac{1}{2}\cdot 3^1=\frac{3}{2}(3^\nu-1).$$

412. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f:(x,y)\in R^2\longrightarrow f(x,y)=3x-2y+4\in R$. Ὑπολογίσατε τούς ἀριθμούς ἤ παραστάσεις:
$f(0,0)$, $f(1,-1)$, $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$, $f(2a,3a)$, $f(-x,-y)$, $f(y,x)$.
Λύσις.– $f(0,0)=3.0-2.0+4=4$, $f(y,x)=3y-2x+4$, $f(-x,-y)=$
$=-3x+2y+4$ κ.τ.λ.

413. Δώσατε τούς συντελεστάς καί τούς βαθμούς τῶν κάτωθι ἀκεραίων μονωνύμων:
$$y=-5x^2,\ y=\frac{x^3}{5},\ y=-12x^4,\ y=x^5,\ y=\frac{-3x^2}{7}.$$

414. Δώσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τοῦ μονωνύμου $y=-\frac{x^3}{10}$ διά τάς ἀκολούθους τιμάς τῆς μεταβλητῆς x: $-1,\ 0,\ 2,\ -30,\ +50$.

415. Δώσατε τούς συντελεστάς καί βαθμούς τῶν κάτωθι μονωνύμων:
$-3xy\ ,\ +\frac{4}{9}x^3y^2\ ,\ -2\alpha\beta\gamma\ ,\ 2\alpha^2\beta\ ,\ -5\alpha\gamma^2\ ,\ -\frac{5}{11}x^2y^3\omega^2.$

Λύσις.-

μονώνυμα	Συντελεστής	Βαθμός
$-3xy$	-3	δευτέρου
$+\frac{4}{9}x^3y^2$	$+\frac{4}{9}$	πέμπτου
$-2\alpha\beta\gamma$	-2	τρίτου
$2\alpha^2\beta$	$+2$	τρίτου
$-5\alpha\gamma^2$	-5	τρίτου
$-5/11\ x^2y^3\omega^2$	$-5/11$	έβδόμου

416. Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τοῦ μονωνύμου $6x^2y$ διά $x=1,\ y=2$, διά $x=2,\ y=1$, διά $x=-3,\ y=-10$, διά $x=0,\ y=123$.

Λύσις.-

I) $6x^2y$ δίδει $6.1^2.2 = \boxed{12}$

II) $6x^2y$ δίδει $6.2^2.1 = \boxed{24}$

III) $6x^2y$ δίδει $6.(-3)^2(-10) = \boxed{-540}$

IV) $6x^2y$ δίδει $6.0^2.123 = \boxed{0}$

417. Διά $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-6$, $\alpha=10$, ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς ἑκάστης τῶν κάτωθι παραστάσεων:
$$\alpha xyz\ ,\quad \alpha x^3y^2z\ ,\quad -15\alpha^2x^2yz^2.$$

Λύσις.- I) αxyz : ἔχει τιμήν, $10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-6) = \boxed{-10}$

II) αx^3y^2z: ἔχει τιμήν, $10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}\cdot(-6) = 10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{-2}{3} = 10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{3} = \boxed{-\frac{5}{6}}$

III) $-15\alpha^2x^2yz^2$: ἔχει τιμήν, $-15.10^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot 36 = \boxed{-1500}$

418. Εὕρετε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι μονωνύμων εἶναι ὅμοια:
$7x^5\ ,\quad -\frac{2}{3}x^2,\ -x^5,\ -7x^2,\ \frac{2}{3}x\ ,\ +5x^2,\ -x,\ +3x$

419. Εὕρετε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι μονωνύμων εἶναι ὅμοια, καί ποῖα εἶναι ἀντίθετα: $3\alpha x^2,\ -2\alpha^2x^3,\ -\frac{1}{3}\alpha x^2,\ +\sqrt{2}\,\alpha^2x^2\ ,\ 2\alpha^2x^3,$
$\frac{1}{3}\alpha^2x^2.$

420. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:
$(12x^3y).(7x^2yz)\ ,\ (-5xyz)(8xy^2),\ (7xy^2z^3).(2x^2yz).(5x^4y^5z^2).$

421. Εὕρετε τά τετράγωνα καί τούς κύβους τῶν κάτωθι μονωνύμων:
$-2x^3$, $\frac{1}{2}xy^2$, $-\frac{1}{3}x^2yz$, $11xy^3z^2\omega$.

422. Ὑπολογίσατε τάς τετάρτας καί πέμπτας δυνάμεις τῶν κάτωθι μονωνύμων: $-xy$, $\frac{1}{2}xy^2z^3$, $-3x^5yz^2\omega$.

Λύσις.— I) $(-xy)^4 = \underline{x^4y^4}$, $(-xy)^5 = \underline{-x^5y^5}$

II) $\left(\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4 = \underline{\frac{1}{16}\cdot x^4\cdot y^8\cdot z^{12}}$, $\left(\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^5 = \underline{\frac{1}{32}\cdot x^5\cdot y^{10}\cdot z^{15}}$

III) $\left(-3x^5yz^2\omega\right)^4 = \underline{81x^{20}\cdot y^4\cdot z^8\cdot \omega^4}$, $\left(-3x^5yz^2\omega\right)^5 = \underline{-243x^{25}y^5z^{10}\omega^5}$

423. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα:
$\left(\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma\right)^4\cdot(-3\alpha^2\beta)$, $(-3x^2y)^3\cdot(-xy^3z)^5\cdot(3xyz)^2$

Λύσις.— I) $\left(\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma\right)^4(-3\alpha^2\beta) = \frac{1}{16}\alpha^4\beta^8\gamma^4(-3\alpha^2\beta) =$
$= \underline{-\frac{3}{16}\alpha^6\cdot\beta^9\cdot\gamma^4}$

II) $(-3x^2y)^3(-xy^3z)^5(3xyz)^2 = (-27x^6y^3)(-x^5y^{15}z^5)(9x^2y^2z^2) =$
$= \underline{243x^{13}y^{20}z^7}$

424. Προσθέσατε τά κάτωθι μονώνυμα:
$2x^3$, $-x^3$, $-2x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $-\frac{5}{3}x^3$, $0{,}1x^3$, $0{,}9x^3$.

Λύσις.— Ἀπάντησις : x^2

425. Προσθέσατε τά κάτωθι μονώνυμα:
$-\frac{11}{3}x^2y$, $5x^2y$, $+\frac{8}{3}x^2y$, $-7x^2y$, x^2y . $(3-\sqrt{2})x^2y$, $\sqrt{2}x^2y$

Λύσις.— Ἀπάντησις : x^2y.

426. Προσδιορίσατε τό Ε.Κ.Π. καί τόν Μ.Κ.Δ. τῶν μονωνύμων:
i) $-3x^2y\omega$, $6xy^3\omega$, $15xy^5\omega^2$
ii) $4x^3y$, $-6xy\omega$, $+14xy^3$, $8x^4y^4$.

Λύσις.— i) Ε.Κ.Π. $= 30x^2y^5\omega^2$, Μ.Κ.Δ. $= 3xy\omega$.
ii) Ε.Κ.Π. $= 168x^4y^4\omega$, Μ.Κ.Δ $= 2xy$

427. Εὕρετε τό Ε.Κ.Π. τῶν μονωνύμων :
i) $3\alpha^2\beta$, $-11\alpha\beta^5$, $22\alpha^3\beta\gamma$, $6\alpha\beta\gamma^4$
ii) α^4, $-\alpha^3\beta$, $+\alpha^2\beta^2$, $-\alpha\beta^3$, β^4.

Λύσις.– i) Ε.Κ.Π. $= 66\alpha^3\beta^5\gamma^4$
ii) Ε.Κ.Π. $= \alpha^4\beta^4$

428. Ἐκτελέσατε τάς διαιρέσεις:

$$-15x^3y^2\omega : 3xy^2\omega, \quad -7\alpha^7\beta\gamma : -\alpha^3\beta,$$
$$2\alpha^2xy : -5\alpha x, \quad 121\alpha^3\beta x : -22\alpha^2x, \quad -169\alpha^3\beta^2x : 13\alpha\beta x$$

429. Εὕρετε τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

$$-\frac{1}{3}x^2yz : \frac{11}{6}x^2z, \quad 32x^3y^4z^5 : -64xy^4z^2,$$
$$\frac{3}{11}\alpha\beta^2\gamma^5 : -6\alpha\beta\gamma^3, \quad \frac{1}{13}x^3y\omega : \frac{1}{39}xy, \quad -x^2yz : x^2yz.$$

Λύσις.– I) $-\frac{1}{3}x^2yz : \frac{11}{6}x^2z = \dfrac{-\frac{x^2yz}{3}}{\frac{11x^2z}{6}} = -\dfrac{6x^2yz}{33x^2z} = \boxed{-\frac{2}{11}y}$

II) $32x^3y^4z^5 : -64xy^4z^2 = -\frac{32}{64}\cdot\frac{x^3y^4z^5}{xy^4z^2} = \boxed{-\frac{1}{2}x^2z^3}$

III) $\frac{3}{11}\alpha\beta^2\gamma^5 : -6\alpha\beta\gamma^3 = -\frac{3}{11.6}\cdot\frac{\alpha\beta^2\gamma^5}{\alpha\beta\gamma^3} = \boxed{-\frac{1}{22}\beta\gamma^2}$

IV) $\frac{1}{13}x^3y\omega : \frac{1}{39}xy = \frac{39}{13}\cdot\frac{x^3y\omega}{xy} = \boxed{3x^2\omega}$

V) $-x^2yz : x^2yz = -\frac{x^2yz}{x^2yz} = \boxed{-1}$

430. Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς τοῦ πολυωνύμου:
$y = -x^2 + 5x + 3$ διά $x = -3$, ἤ -2 ἤ -1 ἤ 0 ἤ 1 ἤ 2 ἤ 3.

Λύσις.– I) $f(x) = -x^2+5x+3$, $f(-3) = (-3)^2+5(-3)+3 = -9-15+3 = \boxed{-21}$

II) $f(-2) = -(-2)^2+5(-2)+3 = -4-10+3 = \boxed{-11}$

III) $f(-1) = -(-1)^2+5(-1)+3 = -1-5+3 = \boxed{-3}$

IV) $f(0) = -(0)^2+5.0+3 = 3 = \boxed{3}$

V) $f(1) = -(1)^2+5.1+3 = -1+5+3 = \boxed{7}$

VI) $f(2) = -(2)^2+5.2+3 = -4+10+3 = \boxed{9}$

VII) $f(3) = -(3)^2+5.3+3 = -9+15+3 = \boxed{9}$

431 Κατασκευάσατε πίνακα τιμῶν (§ 128, iii) τοῦ πολυωνύμου $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ διά τάς τιμάς τοῦ x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

x:	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$f(x)=2x^3-3x+1$	-44	-9	$+2$	$+1$	0	$+11$	$+46$

432. Δώσατε τόν βαθμόν ἑκάστου τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

$$3x+5-x^2-2x^3, \quad 2x^2-x^5+1, \quad a^2-5a+a^7-8.$$

433. Τίνος βαθμοῦ εἶναι ἕκαστον τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

$$2xy+y^2-5y+7xy^2+1, \quad x^3+y^3-3xy^2+4x^2y, \quad xyz-2x^2-2y^2-2z^2.$$

434. Τίνος βαθμοῦ εἶναι τό πολυώνυμον:

$$3x^2yz-4xy^2+z^3+2x^2y+3z^2x-8xyz+9x-7y$$

1ον) ὡς πρός x, 2ον) ὡς πρός y, 3ον) ὡς πρός z, 4ον) ὡς πρός x καί z, 5ον) ὡς πρός x, y, z;

435. Νά γίνη ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων εἰς τά πολυώνυμα:

$$3x-4x^3+5x-2x^2+9x^3-12x+7.$$
$$2-5xy+2y^2-7x^2-6xy-2x^2-3y+12-y^2$$
$$3xy^2+8x^2y-9xy^2+2x^3-y^3-7x^2y+11.$$

Λύσις.- I) $3x-4x^3+5x-2x^2+9x^3-12x+7=\underline{-4x+5x^3-2x^2+7}$

II) $2-5xy+2y^2-7x^2-6xy-2x^2-3y+12-y^2=\underline{14-11xy+y^2-9x^2-3y}$

III) $3xy^2+8x^2y-9xy^2+2x^3-y^3-7x^2y+11=\underline{-6xy^2+x^2y+2x^3-y^3+11}$

436. Νά διαταχθοῦν κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τά πολυώνυμα:

$$ax^3+3a^2x^2-5ax^3+x^4+ax^3+a^2x^2-3a^3x+a \quad \text{καί}$$
$$x^4y^2-x^3y^5+2x^4y^4-x^5y^2-x^3y^5-y^3-2x^4y^3.$$

Λύσις.- I) $ax^3+3a^2x^2-5ax^3+x^4+ax^3+a^2x^2-3a^3x+a=$

$$=\underline{x^4-3ax^3+4a^2x^2-3a^3x+a}.$$

II) $x^4y^2-x^3y^5+2x^4y^4-x^5y^2-x^3y^5-y^3-2x^4y^3=$

$$=\underline{-x^5y^2+x^4(y^2+2y^4-2y^3)-2x^3y^5-y^3}$$

437. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι πολυωνύμων εἶναι ὁμογενῆ;

$x^5-4x^4y+2x^2y^2z+3xy^4-5z^5$, $2x^2+3xy-y^2+2y$,
$-7xy^5+x^6+x^2y^4-2x^3y^3$;

Λύσις.– Τό πρῶτο καί τό τρίτο.

438. Νά διαταχθῆ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας τό πολυώνυμον
$$2x^4y^2-x^3y^5+10x^4y^4-x^5y^2-7x^3y^5+y^3-2x^4y^3+3xy^2.$$

Λύσις.– $2x^4y^2-x^3y^5+10x^4y^4-x^5y^2-7x^3y^5+y^3-2x^4y^3+3xy^2=$
$=(10x^4y^4-8x^3y^5)-(x^5y^2+2x^4y^3)+2x^4y^2+(y^3+3xy^2)$.

439. Ἔστω ἡ συνάρτησις: $f(x,y,z)=x^3+y^3-z^3+3xyz$.
Ὑπολογίσατε τάς ἀριθμητικάς τιμάς
$$f(0,1,0),\quad f(1,0,0),\quad f(-1,-1,-1),\quad f\left(\tfrac{1}{2},2,-1\right).$$

Λύσις.– I) $f(0,1,0)=0^3+1^3-0^3+3.0.1.0=\boxed{1}$

II) $f(1,0,0)=1^3+0-0+0=\boxed{1}$

III) $f(-1,-1,-1)=-1-1+1+3(-1)(-1)(-1)=-1-3=\boxed{-4}$

IV) $f\left(\frac{1}{2},2,-1\right)=\frac{1}{8}+8+1+3\left(\frac{1}{2}.2.(-1)\right)=\frac{1}{8}+9-3=\frac{1}{8}+6=\boxed{\frac{49}{8}}$

440. Προσθέσατε τά πολυώνυμα: $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ καί $σ(x)=5x^3+7x^2-6x-2$. Εὕρετε τό $f(-1)$ καί $σ(-1)$. Ἐάν τό ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι $φ(x)$, εὕρετε τό $φ(-1)$.

Λύσις.– α) $f(x)+σ(x)=(x^3-2x^2+3x-4)+(5x^3+7x^2-6x-2)=$
$=6x^3+5x^2-3x-6=φ(x)$

β) $f(-1)=[(-1)^3-2(-1)^2+3(-1)-4]=-1-2-3-4=\boxed{-10}$

γ) $σ(-1)=[5(-1)^3+7(-1)^2-6(-1)-2]=-5+7+6-2=\boxed{+6}$

δ) $φ(-1)=[6(-1)^3+5(-1)^2-3(-1)-6]=-6+5+3-6=\boxed{-4}$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $φ(-1)=f(-1)+σ(-1)$.

441. Ἀπό τό ἄθροισμα τῶν $3x+5y-7z$ καί $4x-11y+2z$ ἀφαιρέσατε τό ἄθροισμα τῶν $8x+24y+z$ καί $2x-y+18z$.

Λύσις.– $A=(3x+5y-7z)+(4x-11y+2z)=7x-6y-5z$

$B=(8x+24y+z)+(2x-y+18z)=10x+23y+19z$

$A-B=(7x-6y-5z)-(10x+23y+19z)=\boxed{-3x-29y-24z}$

442. Δίδονται τά πολυώνυμα: $A=α^4-6α^3β+2α^2β^2-3αβ^3-β^4$,
$B=3α^4-2α^3β+4α^2β^2+5αβ^3-2β^4$, $Γ=-α^4+3α^3β-3α^2β^2+7αβ^3+5β^4$.
Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά πολυώνυμα: $A+B-Γ$, $A-B+Γ$ καί $-A+B+Γ$

καί κατόπιν νά ἐπαληθευθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα $A+B+\Gamma$ τῶν δεδομένων.

Λύσις.- I) $A+B-\Gamma=(a^4-6a^3\beta+2a^2\beta^2-3a\beta^3-\beta^4)+(3a^4-2a^3\beta+$
$+4a^2\beta^2+5a\beta^3-2\beta^4)-(a^4+3a^3\beta-3a^2\beta^2+7a\beta^3+5\beta^4)=$
$=\underline{3a^4-11a^3\beta+9a^2\beta^2-5a\beta^3-8\beta^4}$

II) $A-B+\Gamma=\underline{-a^4-a^3\beta-5a^2\beta^2-a\beta^3+6\beta^4}$

III) $-A+B+\Gamma=\underline{3a^4+7a^3\beta-a^2\beta^2+15a\beta^3+4\beta^4}$

Βλέπομεν ὅτι: $(A+B-\Gamma)+(A-B+\Gamma)+(-A+B+\Gamma)=5a^4-5a^3\beta+$
$+3a^2\beta^2+9a\beta^3+2\beta^4$

$A+B+\Gamma=5a^4-5a^3\beta+3a^2\beta^2+9a\beta^3+2\beta^4$

443. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$(5a^2-3ax+x^2)-\{4a^2+5ax-(3a^2-7ax+5x^2)\}-7x^2$$

Λύσις.- $(5a^2-3ax+x^2)-\{4a^2+5ax-(3a^2-7ax+5x^2)\}-7x^2=$
$=5a^2-3ax+x^2-4a^2-5ax+3a^2-7ax+5x^2-7x^2=\underline{4a^2-15ax-x^2}$

444. Φέρατε εἰς τήν ἁπλουστάτην δυνατήν μορφήν τάς παραστάσεις:

1ον) $3x-\{3y-(-5z+4y)\}-\{3x-(4y-5z)\}-\{4y-(3z+2x)\}$

2ον) $11x^2y-(11xy^2-y^3)-(x^3+11xy^2-y^3+7x^2y)-(2y^3-16xy^2-x^3)$

3ον) $xy-\{3yz+(3zx-2xy-(xy+2yz)+3xy-(yz+5zx)\}$

Λύσις.- 1ον) $3x-\{3y+5z-4y\}-\{3x-4y+5z\}-\{4y-3z-2x\}=$
$=3x-3y-5z+4y-3x+4y-5z-4y+3z+2x=\boxed{2x+y-7z}$

2ον) $11x^2y-11\cancel{xy^2}+\cancel{y^3}-x^3-11\cancel{xy^2}+\cancel{y^3}-7x^2y-2\cancel{y^3}+16\cancel{xy^2}+x^3=$
$=\boxed{4x^2y-6xy^2}$

3ον) $xy-\{3yz+3zx-2xy-xy-2yz+3xy-yz-5zx\}=$
$=xy-3yz-3\cancel{zx}+2xy+xy+2yz-3xy+yz+5\cancel{zx}=$
$=\boxed{xy+2zx}$

445. Εὕρετε τά γινόμενα: $(2xy-xz+5yz)\times x^3y^2z$,
$(-5a^2+3a\beta-8\beta^2)\times(-9a\beta)$, $(6x^2y^2z^2-4xy^2z^3-10x^2y)\times 5x^3y^2z$,
$-4a\beta\gamma x^2y^2\times(-5a^2\beta^2\gamma^2+3a\beta\gamma-ax-2\beta y-4\gamma z)$.

446. Εὕρετε τά γινόμενα:
$(2x-7)(x-5)$, $(3x^2-7x-9)(2x-3)$, $(3a^2-7a\beta-16\beta^2).(9a-4\beta)$.

$(2a^2+2a+3)(3a^2-3a+1)$

447. *Εὕρετε τά γινόμενα:*
$(x^2+x+1)(x-1)$, $(x^2-2xy+4y^2)(x+2y)$, $(0,2x^2+0,3x+1,5).(2,4x-3,7)$,
$(27x^3-36x^2y+48xy^2-64y^3).(3x+4y)$.

Λύσις.– I) $(x^2+x+1)(x-1) = \underline{x^3-1}$
II) $(x^2-2xy+4y^2)(x+2y) = \underline{x^3+8y^3+4y^2x-4xy^3}$
III) $(0,2x^2+0,3x+1,5)(2,4x-3,7) = \underline{0,48x^3-0,02x^2+2,49x-5,55}$
IV) $(27x^3-36x^2y+48xy^2-64y^3)(3x+4y) = \underline{81x^4-256y^4}$.

448. *Ἐκτελέσατε τούς πολλαπλασιασμούς*
$(x^3+2x^2+2x+1)(x^2-x+1)$, $(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)(\alpha-\beta)$,
$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$.

Λύσις.– I) $(x^3+2x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^5+x^4+2x^2+1$.
II) $(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)(\alpha-\beta) = \alpha^4-\beta^4$
III) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = x^3+y^3+z^3-3xyz$.
IV) $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$.

449. *Ἐάν δύο ἀκέραια πολυώνυμα εἶναι ἀντιστοίχως μ καί ν βαθμοῦ, ὅπου μ>ν, τίνος βαθμοῦ εἶναι τό ἄθροισμά των καί τίνος βαθμοῦ ἡ διαφορά των;*

Λύσις.– Ἐπειδή ὁ $\mu^{ου}$ βαθμοῦ ὅρος τοῦ πρώτου δέν ἀνάγεται μέ κανένα ὅρον τοῦ δευτέρου, διότι πάντες οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου εἶναι βαθμοῦ $\leqq \nu$ ἄρα $<\mu$ ἕπεται ὅτι ὁ ὅρος $\mu^{ου}$ βαθμοῦ παραμένει ὡς μεγιστοβάθμιος καί εἰς τό ἄθροισμα καί εἰς τήν διαφοράν.

450. *Ἐάν τό πολυώνυμον Α εἶναι μ βαθμοῦ, τό Β, ν βαθμοῦ, τό Γ, ρ βαθμοῦ, ὅπου μ>ν>ρ, τίνος βαθμοῦ εἶναι τό πολυώνυμον* $5A.B+7B.\Gamma-B-\Gamma$;

Λύσις.– Τό 5ΑΒ εἶναι μ+ν βαθμοῦ ἐνῷ τό 7ΒΓ εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ δηλ. ν+ρ βαθμοῦ. Συνεπῶς τό ἄθροισμά των θά εἶναι τοῦ ἐπικρατεστέρου βαθμοῦ μ+ν. Τά –Β καί –Γ προστιθέμενα δέν μεταβάλλουν τόν βαθμόν μ+ν.

451. *Ἐκτελέσατε τάς διαιρέσεις:*

$(6\alpha^3\beta^2-12\alpha^2\beta^3-3\alpha\beta^4):3\alpha\beta$
$(8x^8y^6z-4x^4yz^2+2x^2y^2z^2):2x^2yz$
$(4\mu^7\nu^3+8\mu^6\nu^4-12\mu^4\nu^6):(-2\mu^4\nu^3)$.

Λύσις.- I) $(6\alpha^3\beta^2-12\alpha^2\beta^3-3\alpha\beta^4):3\alpha\beta=\underline{2\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2-\beta^3}$
II) $(8x^8y^6z-4x^4yz^2+2x^2y^2z^2):2x^2yz=\underline{4x^6y^5-2x^2z+yz}$
III) $(4\mu^7\cdot\nu^3+8\mu^6\nu^4-12\mu^4\nu^6):(-2\mu^4\nu^3)=\underline{-2\mu^3-4\mu^2\nu+6\nu^3}$

52. Ἐπίσης: $\left(\frac{7}{8}x^4y^2-\frac{11}{3}x^3y^3+4xy^4\right):\left(-\frac{7}{24}xy^2\right)$
$(0,26x^3+0,09x^2-0,72x):(0,2x)$
$(1,44x^6-0,67x^4-2,97x^2):\left(-\frac{1}{3}x^2\right)$.

Λύσις.- I) $\left(\frac{7}{8}x^4y^2-\frac{11}{3}x^3y^3+4xy^4\right):\left(-\frac{7}{24}xy^2\right)=\underline{-3x^3+\frac{88}{7}x^2y-\frac{96}{7}y^2}$
II) $(0,26x^3+0,09x^2-0,72x):(0,2x)=\underline{1,3x^2+0,45x-3,6}$
III) $(1,44x^6-0,67x^4-2,97x^2):\left(-\frac{1}{3}x^2\right)=\underline{-4,32x^4+2,01x^2+8,91}$.

453. *Δείξατε ὅτι τό $3x^2+2x-21$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x+3$. Ὁμοίως τό $2x^2+13x+6$ διά τοῦ $x+6$ (βλ. §131, vi).*
Λύσις.- Ἄς ἐξετάσωμεν ἄν ὑπάρχη ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ τό ὁποῖον πολλαπλασιάζον τό $x+3$ νά δίδει τό $3x^2+2x-21$. Τό $\pi(x)$ πρέπει νά εἶναι $1^{ου}$ βαθμοῦ (σελ. 161, πόρισμα $1^{ον}$) δηλ. $\pi(x)=\alpha x+\beta$. Διά νά εἶναι $(x+3)(\alpha x+\beta)\equiv 3x^2+2x-21$ πρέπει ὁπωσδήποτε τό $\alpha=3$, διότι πρέπει ὁ ὅρος $x.\alpha x$ τοῦ πρώτου μέλους νά συμπίπτη μέ τόν $3x^2$ τοῦ δευτέρου. Ὥστε πρέπει $(x+3)(3x+\beta)\equiv 3x^2+2x-21$, ἤ $3x^2+\beta x+9x+3\beta\equiv 3x^2+2x-21$ ἤ $3x^2+(\beta+9)x+3\beta\equiv 3x^2+2x-21$. Πρέπει τότε: $3\beta=-21\Rightarrow\beta=-7$. Πράγματι, ὅταν $\beta=-7$, τό $3x^2+(\beta+9)x+3\beta$ συμπίπτει μέ τό $3x^2+2x-21$. Ὥστε ἀληθεύει ἡ ταυτότης $(x+3)(3x-7)\equiv 3x^2+2x-21$. Τό $3x-7$ εἶναι τό πηλίκον τοῦ $3x^2+2x-21$ διά τοῦ $x+3$.
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ διαίρεσις $2x^2+13x+6:x+6$ εἶναι τελεία.

454. *Εὕρετε τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $9x^2-42x+49$ διά τοῦ $3x-7$.*
Λύσις.- Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τήν 453 εὑρίσκομεν πηλίκον $\pi(x)=3x-7$.

455. Νά εὑρεθοῦν τά τετράγωνα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

x^2+3x-2 , $2x^3+5x^2+6x+4$, $x^4+x^3+x^2+x+1$

Λύσις.– Βλέπε σελ. 161, IV.

456. Τό ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 120, τό δέ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν εἶναι 4400. Πόσον εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀριθμῶν τούτων λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους;

Λύσις.– Ἐκ τῶν δεδομένων ἔχομεν τάς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=120 \\ x^2+y^2+z^2=4400 \end{array}\right\} \text{Ὅπου } x, y, z \text{ οἱ τρεῖς ἀριθμοί.}$$

Ὡς γνωστόν, ἰσχύει: (σελ. 161, IV)

$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$$

Καί ἀντικαθιστῶντες:

$$(120)^2=(4400)+2(xy+yz+zx) \rightsquigarrow$$

$$(xy+yz+zx)=\frac{(120)^2-4400}{2}=\boxed{5000}$$

Νά ἐκτελεσθοῦν βάσει τῶν ἀξιοσημειώτων πολλαπλασιασμῶν αἱ πράξεις αἱ σημειούμεναι εἰς τάς ἀσκήσεις 457 καί 458.

457. $(3ax+2\beta y)(3ax-2\beta y)$, $(3x-y+5)(3x+y-5)$, $(\alpha+2\beta-3)(\alpha+2\beta+3)$, $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^4+16\beta^4)$, $(2x+3+\mu)(2x+3-\mu)$.

Λύσις.– I) $(3ax+2\beta y)(3ax-2\beta y)=\underline{9\alpha^2x^2-4\beta^2y^2}$

II) $(3x-y+5)(3x+y-5)=\{3x-(y-5)\}\{3x+(y-5)\}=9x^2-(y-5)^2=$
$=\underline{9x^2-y^2+10y-25}$

III) $(\alpha+2\beta-3)(\alpha+2\beta+3)=(\alpha+2\beta)^2-9=\underline{\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-9}$

IV) $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^4+16\beta^4)=(\alpha^2-4\beta^2)(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^4+16\beta^4)=$
$=(\alpha^4-16\beta^4)(\alpha^4+16\beta^4)=\underline{\alpha^8-256\beta^8}$

V) $(2x+3+\mu)(2x+3-\mu)=(2x+3)^2-\mu^2=\underline{4x^2+12x+9-\mu^2}$

458. $(x^2+3x-2)^2$, $(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})$, $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$, $(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3})$,

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{2y}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2y}{5}\right),\ \left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{3\alpha}{x}\right)\left(\frac{3\alpha}{x}-\frac{\alpha^2}{\beta}\right),\ \left(\frac{y}{2\alpha}+\frac{\alpha}{y}\right)^2.$$

Λύσις.– I) $(x^2+3x-2)^2=x^4+9x^2+4+6x^3-4x^2-12x$

II) $(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})=(1+x^2)^2-(x\sqrt{2})^2=1+x^4+2x^2-2x^2=x^4+1$

III) $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2=\{(x-y)(x+y)\}^2(x^2+y^2)^2=\{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}^2=$
$=(x^4-y^4)^2=x^8+y^8-2x^4y^4.$

IV) $(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3})=(1+x^2)\{(1+x^2)^2-3x^2\}=(1+x^2)^3-$
$-3x^2(1+x^2)=1+\cancel{3x^2}+\cancel{3x^4}+x^6-\cancel{3x^2}-\cancel{3x^4}=x^6+1.$

V) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2y}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{2y}{5}\right)=\frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{25}$

VI) $\left(\frac{a^2}{\beta}+\frac{3a}{x}\right)\left(\frac{3a}{x}-\frac{a^2}{\beta}\right)=\frac{9a^2}{x}-\frac{a^4}{\beta^2}$

VII) $\left(\frac{y}{2a}+\frac{a}{y}\right)^2=\frac{y^2}{4a^2}+\frac{a^2}{y^2}+1.$

459. *Ν' ἁπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις:*

α') $(x+y-z)^2-(x-y-z)^2+(x-y+z)^2-(y+z-x)^2.$

β') $a(\beta+\gamma-a)^2+\beta(\gamma+a-\beta)^2+\gamma(a+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-a)(\gamma+a-\beta)(a+\beta-\gamma).$

Λύσις.— I) $(x+y-z)^2-(x-y-z)^2+(x-y+z)^2-(y+z-x)^2=$
$=\{(x+y-z)+(x-y-z)\}\{(x+y-z)-(x-y-z)\}+\{(x-y+z)+(y+z-x)\}\{(x-$
$-y+z)-(y+z-x)\}=4(x-z)y+4z(x-y)=4xy-4zy+4zx-4zy=$
$=4xy+4zx-8zy.$

II) $a(\beta+\gamma-a)^2+\beta(\gamma+a-\beta)^2+\gamma(a+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-a)(\gamma+a-\beta)(a+\beta-\gamma)=$
$=$ μετά τάς πράξεις $=4a\beta\gamma.$

460. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:* $(a+\beta)^3-(a-\beta)^3-2\beta^3$, $(1+x+x^2)^3$,
$(x-y)^3+(x+y)^3+3(x+y)(x-y)^2+3(x-y)(x+y)^2.$

Λύσις.— I) $(a+\beta)^3-(a-\beta)^3-2\beta^3=\cancel{a^3}+3a^2\beta+\cancel{3a\beta^2}+\beta^3-a^3+$
$+3a^2\beta-\cancel{3a\beta^2}+\beta^3-\cancel{2\beta^3}=6a^2\beta.$

II) $(1+x+x^2)^3=(1+x+x^2)^2(1+x+x^2)=(1+x^2+x^4+2x+2x^2+2x^3)(1+$
$+x+x^2)=(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)(1+x+x^2)=(1+2x+3x^2+2x^3+$
$+x^4)+(x+2x^2+3x^3+2x^4+x^5)+(x^2+2x^3+3x^4+2x^5+x^6)=$
$=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6.$

III) $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x+y)(x-y)^2+3(x-y)(x+y)^2=\{(x-y)+(x+y)\}^3=$
$=(2x)^3=8x^3.$

461. *Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης:*

$$\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(\nu-1)\nu}{2}\right]^2=\nu^3$$

καί ν' ἀποδειχθῆ κατόπιν τῇ βοηθείᾳ ταύτης, ὅτι:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$$

ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός.

Λύσις.- Ἡ ἰσότης (1) $\left\{\nu\frac{(\nu+1)}{2}\right\}^2-\left\{\nu\frac{(\nu+1)}{2}\right\}^2=\nu^3$ ἰσχύει ὡς φαίνεται κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, διά κάθε τιμήν τοῦ ν. Ἄρα θά ἰσχύῃ καί διά $\nu=1,2,3\ldots$ Λαμβάνομεν λοιπόν ἐκ τῆς (1) τάς ν ἰσότητας: $1^3=\left(\frac{1.2}{2}\right)^2-\left(\frac{1.0}{2}\right)^2$, $2^3=\left(\frac{2.3}{2}\right)^2-\left(\frac{2.1}{2}\right)^2$, $3^3=\left(\frac{3.4}{2}\right)^2-\left(\frac{3.2}{2}\right)^2\cdots$ $\nu^3=\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{\nu(\nu-1)}{2}\right\}^2$. Προσθέτοντες κατά μέλη τάς ν ταύτας ἰσότητας καί παρατηροῦντες ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστης διαφορᾶς ἐξαλείφεται μέ τόν δεύτερον τῆς ἑπομένης, λαμβάνομεν:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3=\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2$$

462. Ν' ἁπλουστευθῆ ἡ παράστασις:

$$\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}$$

καί κατόπιν νά δειχθῆ ἡ ἰσότης:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός.

Λύσις.- Κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εὑρίσκομεν τήν ἰσότητα $\nu(\nu+1)\frac{(2\nu+1)}{6}(\nu-1)\nu\frac{(2\nu-1)}{6}=\nu^2$ ἰσχύουσαν διά κάθε ν καί κατόπιν ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τήν 461.

463. Ἐάν $x>\frac{\alpha}{\rho}+\beta\rho$, ὅπου α, β, ρ θετικοί δείξατε ὅτι τότε καί $x>\sqrt{2\alpha\beta}$

Λύσις.- Τό β' μέλος τῆς ἀνισότητος εἶναι θετικόν ἄρα κατ' ἀνάγκην καί τό πρῶτον. Τετραγωνίζοντες λοιπόν λαμβάνομεν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα: $x^2>\frac{\alpha^2}{\rho^2}+\beta^2\rho^2+2\alpha\beta$. Κατά μείζονα λόγον θά εἶναι $x^2>2\alpha\beta$ καί συνεπῶς $x>\sqrt{2\alpha\beta}$.

464. Νά γραφοῦν ὡς τετράγωνα διωνύμων τά πολυώνυμα:
$x^4+2x^2y^2+y^4$, x^2-2x+1, $4x^2+4x+1$, $x^2-22xy+121y^2$

Λύσις.— I) $(x^4+2x^2y^2+y^4)=(x^2+y^2)^2$

II) $(x^2-2x+1)=(x-1)^2$

III) $(4x^2+4x+1)=(2x+1)^2$

IV) $x^2-22xy+121y^2=(x-11y)^2$

465. Ὁρίσατε ἑκάστοτε τόν ὅρον T, οὕτως ὥστε, ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων νά καθίσταται τέλειον τετράγωνον διωνύμου:
x^2+T+4y^2, $9x^2+T+1$, $25+T+y^2$, $25x^2+T+9y^2$, $81m^2+T+4n^2$,
$K^2+T+161^2$, $81x^2y^6+T+4$, $121a^2+T+9\beta^2$, $9x^4y^2-12x^2y^2+T$.

Λύσις.— I) x^2+T+4y^2 πρέπει $T=4xy \rightsquigarrow (x+2y)^2$

II) $(9x^2+T+1)$ πρέπει $T=6x \rightsquigarrow (3x+1)^2$

III) $25+T+y^2$ » $T=10y \rightsquigarrow (y+5)^2$

IV) $25x^2+T+9y^2$ » $T=30xy \rightsquigarrow (5x+3y)^2$

V) $81m^2+T+4y^2$ » $T=36mn \rightsquigarrow (9m+2n)^2$

VI) $K^2+T+161^2$ » $T=322K \rightsquigarrow (K+161)^2$

VII) $81x^2y^6+T+4$ » $T=36xy^3 \rightsquigarrow (9xy^3+2)$

VIII) $121a^2+T+9\beta^2$ » $T=66a\beta \rightsquigarrow (11a+3\beta)^2$

IX) $9x^4y^2-12x^2y^2+T$ » $T=4y^2 \rightsquigarrow (3x^2y-2y)^2$

466. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων τριωνύμων καί ποῖαι ὄχι; Ἐν τῇ πρώτῃ δέ περιπτώσει νά γραφοῦν ὡς τέλεια τετράγωνα:
$a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta-2a\gamma-2\beta\gamma$, $a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2a\gamma-2\beta\gamma$,
$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2+2y^2z^2$, $x^2+y^2+4+4x+4y-2xy$,
$x^2+y^2+9+6x-6y-2xy$

Λύσις.— (Ἴδε τύπον V σελ. 164). Ἡ 2α καί 4η δέν εἶναι, διότι τά διπλάσια γινόμενα εἶναι δύο μέ + καί ἕνα μέ −. Αἱ λοιπαί εἶναι κατά σειράν $(a+\beta-\gamma)^2$, $(-x^2+y^2+z^2)^2$, $(x-y+2)^2$.

467. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλειοι κύβοι ἀκεραίων διωνύμων;
$x^6-3x^4+3x^2-1$, $\omega^3\varphi^3+3\omega^2\varphi^2x+3\omega\varphi x^2+x^3$,
$y^3-6y^2+12y-8$, $z^3-9z^2-27z-27$.

Λύσις.— I) $x^6-3x^4+3x^2-1=(x^2-1)^3$: εἶναι

II) $\omega^3\varphi^3+3\omega^2\varphi^2x+3\omega\varphi x^2+x^3=(\omega\varphi+x)^3$: εἶναι

III) $y^3-6y^2+12y-8=(y-2)^3$: εἶναι

IV) $z^3-9z^2-27z-27$: δέν εἶναι.

468. Νά ἐκτελεσθοῦν διά συντόμου τρόπου, βάσει τῶν ἀξιοσημειώτων μετασχηματισμῶν αἱ πράξεις:

$$(x+a)(x^2-ax+a^2)-(x-a)(x^2+ax+a^2),$$
$$(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$$

Λύσις.– α) $(x^3+a^3)-(x^3-a^3)=2a^3$, β) $(x^3+a^3)(x^3-a^3)=x^6-a^6$.

469. Ἐάν $x+y=5$ καί $xy=6$, εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

α΄) x^2+y^2 , β΄) x^3+y^3 , γ΄) $(x-y)^2$, δ΄) x^2+y^2+xy.

Λύσις.– α) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=25-12=13$.

β) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=5^3-3.6.5=35$.

γ) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=1$.

δ) $x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy=19$.

470. Ἐάν $x-y=1$ καί $x^2+y^2=4$, εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως: $x^3-y^3+(x+y)^2$.

Λύσις.– $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2xy=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2xy=(3^2-2)^2-2=48$.

471. Ἐάν $x^3+y^3+z^3=3xyz$ νά δειχθῆ ὅτι τότε, ἤ $x+y+z=0$ ἤ $x=y=z$.

Λύσις.– Βάσει τῆς ταυτότητος VIII τῆς σελ. 167 δηλ. τῆς $x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$ λαμβάνομεν, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ὅτι: ἤ $x+y+z=0$ ἤ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. Ἄν ὅμως συμβαίνει τό δεύτερον θά ἔχωμεν $x=y=z$. Διότι οἱ τρεῖς προσθετέοι $(x-y)^2$, $(y-z)^2$, $(z-x)^2$ ἄν δέν ἦσαν μηδενικοί, θά ἦσαν θετικοί καί συνεπῶς θά εἶχου ἄθροισμαθετικόν, ἐνῶ ἔχουν ἄθροισμα μηδέν.

472. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y, z πληροῦν τήν σχέσιν

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

δείξατε ὅτι τότε $x=y=z$.

Λύσις.– Μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καί ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων λαμβάνομεν $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ ἥτις σύμφωνα μέ γνωστήν ταυτότητα (§ 133, ii) δίδει: $(x-y)^2+(y-z)^2+$ $+(z-x)^2=0$. Συνεπώς $x=y=z$. (βλ. άσκ. 171).

473. *Βάσει τής ταυτότητος:*

$$\frac{x^2+K^2}{2}=\left(\frac{x+K}{2}\right)^2+\left(\frac{x-K}{2}\right)^2$$

δείξατε ότι άν x καί K είναι ακέραιοι αμφότεροι άρτιοι ή αμφότεροι περιττοί, τότε ό αριθμός

$$\frac{x^2+K^2}{2}$$

ισούται πρός τό άθροισμα τών τετραγώνων δύο ακεραίων.

Λύσις.– Τό $x+K$ καί τό $x-K$ είναι άρτιοι, αφού οί x καί K είναι αμφότεροι άρτιοι ή αμφότεροι περιττοί. Συνεπώς οί $\frac{x+K}{2}$ καί $\frac{x-K}{2}$ είναι ακέραιοι.

474. *Εάν x, y ακέραιοι ό δέ αριθμός x^2+2y είναι τέλειον τετράγωνον ακεραίου τινός K δείξατε ότι τότε οί x καί K είναι αμφότεροι άρτιοι ή αμφότεροι περιττοί καί ότι ό ακέραιος x^2+y ισούται μέ τό άθροισμα δύο ακεραίων τετραγώνων.*

Λύσις.– Έξ υποθέσεως ισχύει: $x^2+2y=K^2$ άρα $2y=K^2-x^2$, $2y=(K+x)(K-x)$. Ο 2 ώς διαιρών τό πρώτον θά διαιρή καί τό δεύτερον μέλος άρα θά διαιρή ή τό $K+x$ ή τό $K-x$. Άν $K+x$ άρτιος τότε οί K καί x θά είναι αμφότεροι άρτιοι ή αμφότεροι περιττοί. Ομοίως άν $K-x=$ άρτιος. Ώστε οί K καί x είναι οποσδήποτε αμφότεροι άρτιοι ή αμφότεροι περιττοί. Κατόπιν τούτου έχομεν $x^2+2y=K^2$, $y=\frac{K^2-x^2}{2}$, $x^2+y=x^2+\frac{K^2-x^2}{2}$, ή $x^2+y=\frac{K^2+x^2}{2}$ οπότε σύμφωνα μέ τήν προηγουμένην άσκ. 473 ό αριθμός $\frac{K^2+x^2}{2}$ άρα καί ό ίσος του x^2+y θά ισούται μέ τό άθροισμα δύο ακεραίων τετραγώνων.

475. *Εάν υφίστανται αί σχέσεις $a^2+\beta^2=1$ καί $x^2+y^2=1$ τότε θά υφίσταται καί ή $ax+\beta y\leqq 1$.*

Λύσις.– Έχομεν ότι $(a-x)^2\geqq 0 \Rightarrow a^2-2ax+x^2\geqq 0 \Rightarrow a^2+x^2\geqq 2ax$

ἤ $2ax \leqq a^2+x^2$ καί ὁμοίως $2\beta y \leqq \beta^2+y^2$ ἄρα καί $2ax+2\beta y \leqq a^2+x^2+\beta^2+y^2=2$. Ὅθεν $ax+\beta y \leqq 1$.

476. Ἐάν $a^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ τότε θά εἶναι $ax+\beta y+\gamma z \leqq 1$. Γενικῶς ἐάν $a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2=1$ καί $x_1^2+x_2^2+\dots+x_\nu^2=1$, τότε θά εἶναι καί $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_\nu x_\nu \leqq 1$.

Λύσις.- Ἀρκεῖ νά δείξωμεν τήν γενικήν περίπτωσιν. Πρός τοῦτο βασιζόμεθα εἰς τήν σχέσιν $2a\beta \leqq a^2+\beta^2$ (βλ. ἀσκ. 475). Προσθέτοντες κατά μέλη τάς ν ἀνισότητας $2a_1x_1 \leqq a_1^2+x_1^2$, $2a_2x_2 \leqq a_2^2+x_2^2$, ... $2a_\nu x_\nu \leqq a_\nu^2+x_\nu^2$ λαμβάνομεν:

$2a_1x_1+2a_2x_2+\dots+2a_\nu x_\nu \leqq (a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2)+(x_1^2+x_2^2+\dots+x_\nu^2)=2.$

477. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$\frac{x^5-32y^5}{x-2y}$, $\frac{81x^4-1}{9x^2-1}$, $\frac{x^7y^7+1}{xy+1}$, $\frac{\omega^5+32x^5}{\omega+2x}$, $\frac{x^8-1}{x+1}$, $\frac{y^6-64}{y+2}$,

$\frac{243x^5+32}{3x+2}$, $\frac{81a^4-\beta^8}{3a-\beta^2}$, $\frac{x^8-16y^4}{x^2-2y}$, $\frac{x^{6\mu}-y^{12\nu}}{x^\mu-y^{2\nu}}$, $\frac{x^{3\mu}+y^{6\nu}}{x^\mu+y^{2\nu}}$

(μ, ν φυσικοί ἀριθμοί.

Λύσις.- I) $\frac{x^5-32y^5}{x-2y}=\frac{x^5-(2y)^5}{x-2y}=x^4+x^3 2y+x^2 4y^2+x 8y^3+16y^4=$

$=x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4.$

II) $\frac{81x^4-1}{9x^2-1}=\frac{(9x^2-1)(9x^2+1)}{(9x^2-1)}=9x^2+1.$

III) $\frac{x^7y^7+1}{xy+1}=\frac{(xy)^7+1^7}{xy+1}=x^6y^6-x^5y^5+x^4y^4-x^3y^3+x^2y^2-xy+1.$

IV) $\frac{\omega^5+32x^5}{\omega+2x}=\frac{\omega^5+(2x)^5}{\omega+2x}=\omega^4-\omega^3 2x+\omega^2 4x^2-\omega 8x^3+16x^4=$

$=\omega^4-2\omega^3x+4\omega^2x^2-8\omega x^3+16x^4$

V) $\frac{x^8-1}{x+1}=\frac{x^8-(-1)^8}{x-(-1)}=x^7+x^6(-1)+(x^5)(-1)^2+(x^4)(-1)^3+(x^3)(-1)^4+$
$+(x^2)(-1)^5+(x)(-1)^6+(-1)^7=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1.$

VI) $\frac{y^6-64}{y+2}=\frac{y^6-(-2)^6}{y-(-2)}=y^5+(y^4)(-2)+(y^3)(-2)^2+(y^2)(-2)^3+(y)(-2)^4+$
$+(-2)^5=y^5-2y^4+4y^3-8y^2+16y-32.$

VII) $\frac{243x^5+32}{3x+2}=\frac{(3x)^5+2^5}{3x+2}=(3x)^4-(3x)^3(2)+(3x)^2 2^2-(3x)2^3+2^4=$

$$= 81x^4 - 54x^3 + 36x^2 - 24x + 16$$

VIII) $\dfrac{81\alpha^4-\beta^8}{3\alpha-\beta^2} = \dfrac{(3\alpha)^4-\beta^8}{3\alpha-\beta^2} = \dfrac{(3\alpha^2-\beta^4)(3\alpha^2+\beta^4)}{3\alpha-\beta^2} = (3\alpha+\beta^2)(3\alpha^2+\beta^4)$

IX) $\dfrac{x^8-16y^4}{x^2-2y} = \dfrac{(x^4+4y^2)(x^4-4y^2)}{x^2-2y} = \dfrac{(x^4+4y^2)(x^2+2y)(x^2-2y)}{x^2-2y} =$

$$= (x^4+4y^2)(x^2+2y)$$

X) $\dfrac{x^{6\mu}-y^{12\nu}}{x^{\mu}-y^{2\nu}} = \dfrac{(x^{\mu})^6-(y^{2\nu})^6}{x^{\mu}-y^{2\nu}} = x^{5\mu}+x^{4\mu}y^{2\nu}+x^{3\mu}\cdot y^{4\nu}+x^{2\mu}\cdot y^{6\nu}+$

$$+ x^{\mu}\cdot y^{8\nu}+y^{10\nu}.$$

XI) $\dfrac{x^{3\mu}+y^{6\nu}}{x^{\mu}+y^{2\nu}} = \dfrac{(x^{\mu})^3+(y^{2\nu})^3}{x^{\mu}+y^{2\nu}} = x^{2\mu}-x^{\mu}y^{2\nu}+y^{4\nu}$

478. Ἐάν ν ἄρτιος δείξατε ὅτι:

$$\frac{x^{\nu}-a^{\nu}}{x+a} = x^{\nu-1}-x^{\nu-2}a+x^{\nu-3}a^2-\dots-a^{\nu-1}.$$

Λύσις.— Ἔχομεν ὅτι $\dfrac{(x^{\nu}-a^{\nu})}{(x+a)} = \dfrac{x^{\nu}-(-a)^{\nu}}{x-(-a)}$ καί ἐφαρμόζομεν τόν τύπον i) τῆς § 134.

479. Ἐπί ποίαν παράστασιν πρέπει νά πολλαπλασιασθῆ τό πολυώνυμον $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3$ διά νά γίνη διώνυμον; Ὁμοίως διά τά x^2+ax+a^2; x^2-ax+a^2, $x^3-ax^2+a^2x-a^3$.

Λύσις.— I) $(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3)(\alpha-\beta) = \alpha^5-\beta^5$

II) $(x^2+ax+a^2)(x-a) = x^3-a^3$

III) $(x^2-ax+a)(x+a) = x^3+a^3$

IV) $(x^3-ax^2+a^2x-a^3)(x+a) = x^4-a^4$.

480. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός δείξατε ὅτι ὁ ἀκέραιος $5^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετός διά 6.

Λύσις.— Ἐάν εἰς τήν ταυτότητα $(x^{2\nu+1}+1) = (x+1)(x^{2\nu}-x^{2\nu-1}+x^{2\nu-1}+x^{2\nu-2}-\dots)$ (ἴδε §134, IV) θέσωμεν $x=5$ λαμβάνομεν τήν ἰσότητα:

$5^{2\nu+1}+1 = 6(5^{2\nu}-5^{2\nu-1}+\dots) = 6$. Ἀκέραιον = πολ.6.

481. Δείξατε ὅτι ὁ ἀκέραιος $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετός διά 31 καί διά 127.

Λύσις.— $2^{35}-1 = (2^5)^7-1 = 32^7-1 = (32-1)(32^6+32^5+\dots+) =$

$= \text{πολ.}\,31$. Ἐπίσης $2^{35}-1=(2^7)^5-1=128^5-1=(128-1)(128^4+128^3+\dots)=$
$=\text{πολ.}\,127$.

482. *Ἐάν α,β,ν φυσικοί ἀριθμοί καί $\alpha>\beta$ νά δειχθῇ ἡ διπλῆ ἀνισότης:*

$$\nu\alpha^{\nu-1} > \frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta} > \nu\beta^{\nu-1}$$

Λύσις.- Ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης γράφεται:

$$\nu\alpha^{\nu-1} > \alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\dots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1} > \nu\beta^{\nu-1}$$

Ἔχομεν λοιπόν νά δείξωμεν τάς δύο ἀνισότητας:

(i) $\nu\alpha^{\nu-1} > \alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\dots+\beta^{\nu-1}$ καί

(ii) $\nu\beta^{\nu-1} < \alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\dots+\beta^{\nu-1}$

Ἡ (i) γράφεται: $\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-1}+\dots+\alpha^{\nu-1} > \alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+$ $+\dots+\beta^{\nu-1}$ ἤ $\alpha^{\nu-2}(\alpha-\beta)+\alpha^{\nu-3}(\alpha^2-\beta^2)+\alpha^{\nu-4}(\alpha^3-\beta^3)+\dots+(\alpha^{\nu-1}-$ $-\beta^{\nu-1})>0$, καί ἀληθεύει διότι πᾶσαι αἱ παρενθέσεις τοῦ πρώτου μέλους εἶναι θετικαί, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\alpha>\beta$ (ἴδε καί ἄσκ. 388). Ὁμοίως δεικνύεται καί ἡ (ii).

483. *Νά εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα: $(1-x)^6$, $(1+x^2)^7$, $(4-x^3)^8$.*

Λύσις.- I) $(1-x)^6=1^6+6.1^5(-x)+\frac{6.5}{1.2}1^4(-x)^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}1^3(-x)^3+$

$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}1^2(-x)^4+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}\cdot 1\cdot(-x)^5+(-x)^6=$$

$$=\underline{1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6}$$

II) $(1+x^2)^7=(x^2+1)^7=(x^2)^7+7(x^2)^6+21(x^2)^5+35(x^2)^4+35(x^2)^3+$

$$+21(x^2)^2+7(x^2)+1=$$

$$=\underline{x^{14}+7x^{12}+21x^{10}+35x^8+35x^6+21x^4+7x^2+1}$$

III) $(4-x^3)^8=4^8+8.4^7(-x^3)+28.4^6(-x^3)^2+56.4^5.(-x^3)^3+70.4^4.(-x^3)^4+$

$$+56.4^3.(-x^3)^5+28.4^2.(-x^3)^6+8.4(-x^3)^7+(-x^3)^8=$$

$$=\underline{65336-131072x^3+110688x^6-57344x^9+17920x^{12}-3584x^{15}+448x^{18}-32x^{21}+x^{24}}$$

484. *Νά εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα:*

$(x+1)^4-(x-1)^4$, $(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4$, $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$, $(x+\beta)^6+(x-\beta)^6$,

$(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$, $(\alpha+\beta)^7-(\alpha-\beta)^7$.

485. *Ὑπολογίσατε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῶν κάτωθι δυνάμεων τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου:*

$(100+1)^7$, $(101)^6$, $(100-1)^6$, 99^7, 98^4, 49^5.

Λύσις.– $(101)^6=(100+1)^6=100^6+6.100^5+15.100^4+20.100^3+15.100^2+6.100+1=1.000.000.000.000+60.000.000.000+1500000000+20000000+150000+600+1=1061.520150601$. Καί ἀνάλογον τρόπον ὑπολογίζονται καί αἱ λοιπαί δυνάμεις.

486. Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες:

$$(x+y)^4+x^4+y^4\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$$

$$(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+y^2+xy).$$

Λύσις.– I) $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$

$(x+y)^4+x^4+y^4=\underline{x^4}+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+\underline{\underline{y^4}}+\underline{x^4}+\underline{\underline{y^4}}=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3)=2(x^2+xy+y^2)^2$ ὅ.ἔ.δ.

II) $(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$

$(x+y)^5-x^5-y^5=\cancel{x^5}+\underline{5x^4y}+10x^3y^2+10x^2y^3+\underline{5xy^4}+\cancel{y^5}-\cancel{x^5}-\cancel{y^5}=$

$=5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)=5xy(x+y)(x^2-xy+y^2)+$

$+10x^2y^2(x+y)=5xy(x+y)\{x^2-xy+y^2+2xy\}=$

$=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ ὅ.ἔ.δ.

487. Ἐάν οἱ ἀριθμοί x καί y πληροῦν τάς σχέσεις $x+y=\alpha$ καί $x^3+y^3=\beta^3$, νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως x^5+y^5 συναρτήσει τῶν α καί β.

Λύσις.– $x+y=\alpha$, $(x+y)^5=\alpha^5$, $x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5=\alpha^5$ ἤ $(x^5+y^5)+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)=\alpha^5$ ἤ λόγῳ τῶν δεδομένων: (1) $x^5+y^5+5xy\beta^3+10(xy)^2\alpha=\alpha^5$. Συνεπῶς διά νά εὑρεθῇ τό x^5+y^5 ἀρκεῖ νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον xy. Ἔχομεν $x+y=\alpha$ $(x+y)^3=\alpha^3$ ἤ $x^3+y^3+3xy(x+y)=\alpha^3$ ἤ $\beta^3+3xy\alpha=\alpha^3$ ἤ

$xy=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}$. Θέτοντες εἰς τήν (1) ὅπου xy τό ἴσον του λαμβάνομεν:

$x^5+y^5+5\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}\beta^3+10\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}\right)^2\alpha=\alpha^5$ καί $x^5+y^5=\dfrac{3\alpha^6-5\beta^3(\alpha^3-\beta^3)}{3\alpha}-\dfrac{10(\alpha^3-\beta^3)^2}{9\alpha}$

488. Ἐάν οἱ ἀριθμοί α καί β πληροῦν τήν σχέσιν $\alpha^2+\beta^2=1$, δείξατε ὅτι θά πληροῦν καί τήν σχέσιν:

$$(\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2)^2=\frac{\alpha^8+\beta^8+1}{2}$$

Λύσις.– Ἡ ἀποδεικτέα σχέσις γράφεται: $2(\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2)^2=\alpha^8+\beta^8+1$

και μετά τάς πράξεις: $2(\alpha^8+\beta^8+\alpha^4\beta^4+2\alpha^4\beta^4+2\alpha^6\beta^2+2\beta^6\alpha^2) = \alpha^8+\beta^8+1$ ή ακόμη: $\alpha^8+\beta^8+6\alpha^4\beta^4+4\alpha^6\beta^2+4\beta^6\alpha^2=1$. Διατάσσομεν το πρώτον μέλος κατά τάς κατιούσας δυνάμεις του α οπότε έχομεν ν' αποδείξωμεν ότι (1) $\alpha^8+4\alpha^6\beta^2+6\alpha^4\beta^4+4\alpha^2\beta^6+\beta^8=1$. 'Αλλά τό πρώτον μέλος της (1) είναι τό ανάπτυγμα του διωνύμου $(\alpha^2+\beta^2)^4$ ώστε ή (1) γράφεται $(\alpha^2+\beta^2)^4=1$ και λόγῳ της υποθέσεως, αληθεύει.

489. Εις τά κάτωθι πολυώνυμα νά εξαχθῇ κοινός παράγων τό μονώνυμον του μεγίστου δυνατού βαθμού:

$$2x^3y^3-4x^2y^6+3x^3y^5-x^4y^3$$
$$\alpha^2\beta^2x^4-\frac{1}{2}\alpha^3\beta x^5+\frac{2}{3}\alpha^2\beta^3x^3-\alpha^5\beta x^3$$
$$-3x^3y^2+12x^2y^3-6x^4y+9x^3y-3x^2y$$
$$5x^3y^3z^3-20x^2y^2z^4+10xy^3z^3-5xy^4z^5+15xy^2z^5.$$

490. Νά τραπούν εις γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τά κάτωθι πολυώνυμα:

$5x+x^2-35-7x$ $\qquad$ $2\alpha x^2-3\beta x^2-6\alpha+9\beta$

$3\alpha x-2\beta x+2\beta y-3\alpha y$ $\qquad$ $7\alpha x^2-4y^2+4x^2-7\alpha y^2$

$3x+5\alpha x+3y+5\alpha y$ $\qquad$ $3x-5\beta y+\alpha x-5\beta x+\alpha y+3y$

$xy-4x-3y+12$ $\qquad$ $2\alpha^2+\alpha(2\beta-1)-\beta$

$\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta\gamma.$ $\qquad$ $\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-\beta^2).$

Λύσις.— 1) $x(5+x)-7(5+x)$, 2) $x^2(2\alpha-3\beta)-3(2\alpha-3\beta)$

3) $x(3\alpha-2\beta)-y(3\alpha-2\beta)$, 4) $7\alpha(x^2-y^2)+4(x^2-y^2)$,

5) $3(x+y)+5\alpha(x+y)$ $\qquad$ 6) $3(x+y)-5\beta(x+y)+\alpha(x+y)$

7) $x(y-4)-3(y-4)$ $\qquad$ 8) $2\alpha^2+2\alpha\beta-\alpha-\beta=2\alpha(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)$

9) $\alpha(\beta^2+\gamma^2)+\beta(\gamma^2+\alpha^2)+\gamma(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta\gamma = \alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2+\beta\alpha^2+\gamma\alpha^2+\gamma\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma)+(\alpha\gamma^2+\alpha\beta\gamma)+(\beta\gamma^2+\gamma\beta^2)+(\beta\alpha^2+\gamma\alpha^2) = \alpha\beta(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\beta+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha^2(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha^2) = (\beta+\gamma)\{\beta(\alpha+\gamma)+\alpha(\gamma+\alpha)\} = (\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta).$

10) $\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta\gamma^2-\beta\alpha^2+\gamma\alpha^2-\gamma\beta^2 = \alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)-\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha^2(\beta-\gamma) = (\beta-\gamma)\{\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha^2\} = (\beta-\gamma)\{\alpha(\gamma-\alpha)-\beta(\gamma-\alpha)\} = (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$

491. Νά ευρεθῇ τό υπόλοιπον και τό πηλίκον της διαιρέσεως του αριθμού

$2^{40}+2^{28}+2^{23}+2^{20}+2^{18}+2^{17}+2^{6}+2^{5}+2+1$ διά τοῦ $2^{23}+2+1$.

Λύσις.– Ὁ διαιρέτης γράφεται $2^{23}(2^{17}+2^{5}+1)+2(2^{17}+2^{5}+1)+(2^{17}+2^{5}+1)+2^{20}=(2^{23}+2+1)(2^{17}+2^{5}+1)+2^{20}$. Σύμφωνα λοιπόν μέ τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τό ἀκέραιον πηλίκον εἶναι τό $2^{17}+2^{5}+1$ καί τό ὑπόλοιπον τό 2^{20}

492. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)(\beta^2+\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)(\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου τῶν μεταβλητῶν α, β, γ.

Λύσις.– Ἑκάστη παρένθεσις μετατρέπεται εἰς γινόμενον: $\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\alpha(\alpha+\beta)+\gamma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$. Ὁμοίως καί ἡ δευτέρα καί τρίτη καί καταλήγομεν εἰς τό $(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2(\beta+\gamma)^2$.

493. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις:

$4x^2-y^2$, $49\alpha^2x^4-25\beta^2y^2$, $81x^2-121y^2$,

$169x^4-100\alpha^2y^2$, $28x^2-63\mu^2\nu^2$, x^3-4xy^2,

$\frac{4}{9}x^2y^2-\frac{1}{4}$, $\frac{25}{16}\alpha^3x^4-\frac{4}{9}\alpha y^2$, $\frac{9}{4}\mu^2x^2-\frac{25}{36}\nu^2y^2$.

Λύσις.– (βλ. § 139).

494. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων πολυωνύμων αἱ παραστάσεις:

$4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$, $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$,

$(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$, $2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$.

Λύσις.– I) $4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2=(2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2)=$
$=\{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2\}\{-(\beta-\gamma)^2+\alpha^2\}=(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=$

II) $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2=\{2(\alpha\beta+\gamma\delta)+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)\}\{2(\alpha\beta+\gamma\delta)-$
$-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2\}=\{(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)^2\}\{(\gamma+\delta)^2-(\alpha-\beta)^2\}=$
$=(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta-\alpha+\beta)$

III) $(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2=\{\underline{\alpha\beta}+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2+\underline{\alpha\delta}+\underline{\beta\gamma}\}\{\underline{\alpha\beta}+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2-$
$-\underline{\alpha\delta}-\underline{\beta\gamma}\}=\{\alpha(\beta+\delta)+\gamma(\beta+\delta)+(\beta-\delta)(\beta+\delta)\}\{\alpha(\beta-\delta)-\gamma(\beta-\delta)+(\beta-\delta)(\beta+\delta)\}=$
$=\underline{(\beta+\delta)(\alpha+\gamma+\beta-\delta)(\beta-\delta)(\alpha-\gamma+\beta+\delta)}$

IV) $2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=\underline{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}$

495. Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2$, x^4+324, x^4+4.

Λύσις.— 1) $(x^2+xy+y^2+xy)(x^2+xy+y^2-xy)-z^2(x^2+y^2)=$
$=(x+y)^2\underline{(x^2+y^2)}-z^2\underline{(x^2+y^2)}=(x^2+y^2)(x+y+z)(x+y-z)$
2) $x^4+18^2=x^4+18^2+2.18.x^2-2.18.x^2=(x^2+18)^2-36x^2=$
$=(x^2+18+6x)(x^2+18-6x)$. 3) $x^4+2^2=x^4+2^2+2.2x^2-$
$-2.2.x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

496. *Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις:*
$x^4-23x^2y^2+y^4$, $x^4-11x^2y^2+y^4$, x^4-14x^2+25
$16-60x^2+49x^4$, $9-55x^2+25x^4$, x^8-17x^4+16

Λύσις.— 1η) $x^4+2x^2y^2+y^4-25x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(5xy)^2$ κ.τ.λ.
2α) $x^4-2x^2y^2+y^4-9x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$ κ.τ.λ.
3η) $x^4-10x^2+25-4x^2=(x^2-5)^2-(2x)^2$ κ.τ.λ.
4η) $16-56x^2+49x^4-4x^2=(4-7x^2)^2-(2x^2)$ κ.τ.λ.
5η) $9-30x^2+25x^4-25x^2=(3-5x^2)^2-(5x)^2$ κ.τ.λ.
6η) $x^8-8x^4+16-9x^4=(x^4-4)^2-(3x^2)^2$.

497. *Ἀφοῦ γραφῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις* x^4+4y^4 *νά δειχθῆ ἀκολούθως ὅτι αὐτή δέν δύναται νά ἰσοῦται μέ ἄλλον πρῶτον ἀριθμόν εἰμή μόνον μέ τόν 5, ὅταν τά x καί y εἶναι οἱοιδήποτε ἀκέραιοι.*

Λύσις.— $x^4+4y^4=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$.
Ἵνα τό γινόμενον δύο ἀκεραίων εἶναι πρῶτος πρέπει ὁ εἷς παράγων νά εἶναι ± 1 καί ὁ ἄλλος πρῶτος. Ὥστε διά νά παριστᾷ ἡ δοθεῖσα παράστασις πρῶτον ἀριθμόν πρέπει ἤ νά εἶναι
i) $x^2+2y^2+2xy=1$ καί x^2+2y^2-2xy = πρῶτος ἤ
ii) $x^2+2y^2+2xy=-1$ καί x^2+2y^2-2xy = » ἤ
iii) $x^2+2y^2-2xy=1$ καί x^2+2y^2+2xy = » ἤ
iv) $x^2+2y^2-2xy=-1$ καί x^2+2y^2+2xy = »
Ἡ πρώτη ἰσότης τῆς περιπτώσεως i) γράφεται: $(x+y)^2+y^2=1$ καί διά νά πληροῦται μέ ἀκεραίους ἀριθμούς πρέπει ἤ $(x+y)^2=1$ καί $y^2=0$ ἤ $(x+y)^2=0$ καί $y^2=1$. Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν ὅλους τούς ἀκεραίους τούς καθιστῶντας τόν παράγοντα x^2+2y^2+2xy ἴσον μέ 1: $(y=0, x=1)$, $(y=0, x=-1)$, $(y=1, x=-1)$, $(y=-1, x=1)$. Μέ τό ζεῦγος $y=0$, $x=1$ ὁ δεύτερος παράγων x^2+2y^2-2xy γίνεται $=1$ δηλ. ὄχι πρῶτος. Ὁμοίως καί μέ τό δεύτερον. Μέ τό τρίτον γίνεται 5 δηλ. πρῶτος καί μέ τό τέταρτον ἐπίσης. Ἡ

πρώτη ἐξίσωσις τῆς περιπτώσεως (ii) εἶναι ἀδύνατος καί ὁμοίως τῆς (iv). Διά τήν (iii) ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τήν (i).

498. *Ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοί πληροῦντες τήν σχέσιν*

$$x^4+4y^4=13;$$

Λύσις.- Ἡ σχέσις γράφεται $(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=13$ ἤ $(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)=13$. Ἐπειδή ὁ 13 ἔχει ὡς μόνους διαιρέτας τό ± 1 καί ± 13 διά τοῦτο πρέπει ἤ $x^2+2y^2+2xy=\pm 1$ καί $x^2+2y^2-2xy=\pm 13$ ἤ $x^2+2y^2+2xy=\pm 13$ καί $x^2+2y^2-2xy=\pm 1$. Ὅπως εἴδομεν εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν, ὅταν $x^2+2y^2+2xy=1$ ἕπεται ὅτι $(y=0,\ x=1)$ ἤ $(y=0,\ x=-1)$ ἤ $(y=1,\ x=-1)$ ἤ $(x=1,\ y=-1)$. Αἱ τιμαί ὅμως αὗται δέν καθιστοῦν τόν δεύτερον παράγοντα ἴσον μέ ± 13. Ὁμοίως εἰς ὅλας τάς ἄλλας περιπτώσεις. Ἄρα δέν ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοί πληροῦντες τήν δοθεῖσαν.

499. *Ἀφοῦ τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις,*

$$a^4-18a^2+17$$

νά δειχθῆ ὅτι ἄν ὁ α εἶναι περιττός ἀκέραιος τότε ἡ παράστασις αὐτή ἰσοῦται μέ πολλαπλάσιον τοῦ 64.

Λύσις.- $a^4-18a^2+17=a^4-18a^2+81-64=(a^2-9)^2-8^2=$ $=(a^2-9-8)(a^2-9+8)=(a^2-17)(a^2-1)=(a+1)(a-1)(a^2-17)$. Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως εἶναι $a=2\kappa+1$ ὅπου κ ἀκέραιος καί ἡ παράστασις γράφεται $(2\kappa+2).2\kappa+(4\kappa^2+4\kappa+1-17)=4(\kappa+1)\kappa(4\kappa^2+4\kappa-16)=$ $=16\kappa(\kappa+1)[\kappa(\kappa+1)-16]$. Εἶναι ὅμως $\kappa(\kappa+1)=2\rho$ (τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε ἄρτιος) ὥστε ἔχομεν $16.2\rho(2\rho-16)=64\rho(\rho-8)=$ πολ.64.

500. *Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:*

$$27x^3-64y^3,\qquad 8a^3+\beta^3,\qquad 8\mu^3+125\nu^3,$$
$$24a^3x^3-81a^6y^3,\qquad 7x^6-448y^6,\qquad x^{12}+y^6$$
$$54x^5+16x^2y^3,\qquad (3x+y)^3-27,\qquad (x+2y)^3+8(3x-y)^3.$$

Λύσις.- I) $27x^3-64y^3=(3x)^3-(4y)^3=(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

II) $8a^3+\beta^3=(2a)^3+\beta^3=(2a+\beta)(4a^2-2a\beta+\beta^2)$

III) $8\mu^3+125\nu^3=(2\mu)^3+(5\nu)^3=(2\mu+5\nu)(4\mu^2+10\mu\nu+25\nu^2)$

IV) $24a^3x^3-81a^6y^3=3\{(2ax)^3-(3a^2y)^3\}=3(2ax-3a^2y)(4a^2x^2+6a^3xy+$ $+9a^4y^2)$

V) $7x^6-448y^6=7(x^6-64y^6)=7(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)=7(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-$ $-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

VI) $x^{12}+y^6=(x^4)^3+(y^2)^3=(x^4+y^2)(x^2-x^4y^2+y^4)$

VII) $54x^5+16x^2y^2=2x^2(27x^3+8y^3)=2x^2(3x+2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

VIII) $(3x+y)^3-27=(3x+y-3)\{(3x+y)^2+3(3x+y)+9\}$

IX) $(x+2y)^3+\{2(3x-y)\}^3=(x+2y+6x-2y)\{(x+2y)^2-2(x+2y)(3x-y)+4(3x-y)^2\}=7x\{(x+2y)(x+2y-3x+y)+(3x-y)\cdot(12x-4y-2x-4y)\}=$
$=7x\{(x+2y)(3y-2x)+(3x-y)(10x-8y)\}$.

501. *Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:*

$$x(x^2+1)-y(y^2+1),\qquad a^{2\mu+3\nu}-a^{2\mu}-a^{3\nu}+1$$
$$a^6-\beta^6\qquad (a+\beta+\gamma)^3-a^3-\beta^3-\gamma^3.$$

Λύσις.- 1) $x^3-y^3+x-y=\underline{(x-y)}(x^2+xy+y^2)+\underline{(x-y)}$

2) $a^{2\mu}.a^{3\nu}-a^{2\mu}-a^{3\nu}+1=a^{2\mu}(a^{3\nu}-1)-(a^{3\nu}-1)=(a^{3\nu}-1)(a^{2\mu}-1)=$
$=\{(a^\mu)^3-1\}\{(a^\mu)^2-1\}=(a^\mu-1)(a^{2\mu}+a^\mu+1)(a^\mu+1)(a^\mu-1)=\ldots$

3) $(a^3)^2-(\beta^3)^2=(a^3+\beta^3)(a^3-\beta^3)=(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)$

4) Εκτελοῦντες τάς πράξεις φθάνομεν εἰς τήν ἄσκ. 490, 9ην.

502. *Ἐάν οἱ διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί α, β, γ πληροῦν τάς σχέσεις:*

$$a^3+\pi a+K=0\ ,\ \beta^3+\pi\beta+K=0\ ,\ \gamma^3+\pi\gamma+K=0$$

νά δειχθῇ ὅτι τότε $a+\beta+\gamma=0$.

Λύσις.- Ἀφαιροῦντες κατά μέλη πρώτην καί δευτέραν λαμβάνομεν τήν $a^3-\beta^3+\pi(a-\beta)=0$ ἤ $(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)+\pi(a-\beta)=0$, ἤ $(a-\beta)\{a^2+a\beta+\beta^2+\pi\}=0$ ἤ, ἐπειδή $a-\beta\neq 0$ λαμβάνομεν τήν
(1) $a^2+a\beta+\beta^2+\pi=0$. Ὁμοίως ἐκ τῆς δευτέρας καί τρίτης λαμβάνομεν τήν κυκλικήν τῆς (1) δηλ. τήν (2) $\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2+\pi=0$. Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καί (2) κατά μέλη λαμβάνομεν:
$a^2-\gamma^2+a\beta-\beta\gamma=0$ ἤ $(a+\gamma)(a-\gamma)+\beta(a-\gamma)=0$ ἤ $(a-\gamma)(a+\beta+\gamma)=0$ καί ἐπειδή $a-\gamma\neq 0$, $a+\beta+\gamma=0$.

503. *Νά τραποῦν εἰς γινόμενα*

$$a^2-4a\beta+3\beta^2,\qquad (x+y)^2-4(x+y)(3x+y-1)+3(3x+y-1)^2,$$
$$4x^2-8x-5,\qquad 8x^2+10x-3,$$
$$6x^2+25x-25,\qquad 15x^2-19x+6,$$
$$x^2+3x+2,\qquad 20x^2+18xy-38y^2.$$

Λύσις.- 1ον) $a^2-4a\beta+3\beta^2=a^2-a\beta-3a\beta+3\beta^2=a(a-\beta)-3\beta(a-\beta)=$
$=(a-\beta)(a-3\beta)$

2ον) Αὐτη ἀνάγεται εἰς τήν πρώτην ἄν τεθῇ $x+y=a$, $3x+y-1=\beta$.

3ον) $4x^2+2x-10x-5=2x\underline{(2x+1)}-5\underline{(2x+1)}$

4ον) $8x^2+12x-2x-3=4x\underline{(2x+3)}-\underline{(2x+3)}=\ldots$

5ον) $6x^2+30x-5x-25=6x\underline{(x+5)}-5\underline{(x+5)}=\ldots$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον καί αἱ λοιπαί : $(5x-3)(3x+2)$, $(x+1)(x+2)$, $2(x-y)(10x+19y)$.

04 Νά τραποῦν εἰς γινόμενα

$a^4-9a^2+20,\quad x^5-5x^4y+4x^3y^2,\quad x^3+x-2\quad 2x^3-x-1.$

$3x^3-x-2\quad x^3-2x-1\quad a^2-3\beta^2+2a\beta$

Λύσις.- 1) $a^4-4a^2-5a^2+20=a^2(\underline{a^2-4})-5(\underline{a^2-4})=\dots$

2) $x^5-x^4y-4x^4y+4x^3y^2=x^4(\underline{x-y})-4x^3y(x-y)=\dots$

3) $x^3+x-1-1=(x^3-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)=(x-1)(x^2+x+2).$

4) $x^3-x+x^3-1=x(x^2-1)+(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)\{x^2+x+x^2+x+1\}=$
$=(x-1)(2x^2+2x+1)$

5) $2x^3-2+x^3-x=2(x^3-1)+x(x^2-1)=2\underline{(x-1)}(x^2+x+1)+x\underline{(x-1)}(x+1)=\dots$

6) $(2x^3-2x)+(x^3-1)=\dots$

7) $a^2-\beta^2-2\beta^2+2a\beta=(a+\beta)\underline{(a-\beta)}+2\beta\underline{(a-\beta)}=\dots$

505. Ἐάν x, y ἀκέραιοι καί τό $4x-y$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 νά δειχθῆ ὅτι τό

$$4x^2+7xy-2y^2$$

εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

Λύσις.- $4x^2+7xy-2y^2=4x^2+8xy-xy-2y^2=4x(x+2y)-y(x+2y)=$ $=(4x-y)(x+2y)$. Τό $4x-y=$ πολ. 3. Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι καί ὁ δεύτερος παράγων εἶναι πολ. 3 δηλ. ὅτι $x+2y=$ πολ 3. Πράγματι τό $x+2y$ διαφέρει τοῦ $4x-y$ κατά πολ. 3 δηλ. $(4x-y)-(x+2y)=3x-3y=$ $=$ πολ 3 ἄρα $x+2y=$ πολ. 3.

506. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:

$x^7+y^7,\quad x^6+64,\quad 243x^5+32,$

$a^{10}+1,\quad 32x^5-y^5,\quad x^{10}-y^{10}.$

Λύσις.- I) $x^7+y^7=(x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$

II) $x^6+64=x^6+2^6=(x^2)^3+(4)^3=\{(x^2)+4\}\{(x^2)^2-(x^2)4+4^2\}=$
$=(x^2+4)(x^4-4x^2+16)$

III) $243x^5+32=(3x)^5+2^5=(3x+2)\{(3x)^4-(3x)^3 2+(3x)^2\cdot 2^2-(3x)2^3+$
$+2^4\}=(3x+2)(81x^4-54x^3+36x^2-24x+16).$

IV) $a^{10}+1=(a^2)^5+1=(a^2+1)(a^8-a^6+a^4-a^2+1)$

V) $32x^5-y^5=(2x)^5-y^5=(2x-y)(16x^4+8x^3y+4x^2y^2+2xy^3+y^4)$

VI) $x^{10}-y^{10}=(x^5-y^5)(x^5+y^5)=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x+$

$+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=(x^2-y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x^4-$
$-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.

507. *Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:*

$$x^9-y^9, \qquad 16x^4-81, \qquad 64a^6-\beta^6,$$
$$x^{12}+1, \qquad x^{3\mu}+y^{6\nu} \qquad a^{4\mu}-\beta^{4\nu}.$$

Λύσις.- I) $x^9-y^9=(x-y)(x^8+x^7y+x^6y^2+x^5y^3+x^4y^4+x^3y^5+x^2y^6+$
$+xy^7+y^8)$.

II) $16x^4-81=(2x)^4-3^4=(2x-3)(8x^3+4x^2.3+2x.3^2+3^3)=$
$=(2x-3)(8x^3+12x^2+18x+9)$

III) $64a^6-\beta^6=(2a)^6-\beta^6=(2a-\beta)(32a^5+16a^4\beta+8a^3\beta^2+4a^2\beta^3+$
$+2a\beta^4+\beta^5)$.

IV) $x^{12}+1=(x^4)^3+1=(x^4+1)(x^8-x^4+1)$

V) $x^{3\mu}+y^{6\nu}=(x^\mu)^3+(y^{2\nu})^3=(x^\mu+y^{2\nu})(x^{2\mu}-x^\mu y^{2\nu}+y^{4\nu})$

VI) $a^{4\nu}-\beta^{4\nu}=(a^{2\nu}-\beta^{2\nu})(a^{2\nu}+\beta^{2\nu})=(a^\nu-\beta^\nu)(a^\nu+\beta^\nu)(a^{2\nu}+\beta^{2\nu})$

508. *Νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:*

1. $x^2+y^2+9-6x-6y+2xy$
2. $x^2+4y^2+25-4xy-10x+20y$
3. $9x^2+4y^2+16-12xy+24x-16y$
4. $25a^2+4\beta^2+9\gamma^2+20a\beta-30a\gamma-12\beta\gamma$
5. $x^2y^2+4y^2z^2+x^2z^2+4xy^2z-4xyz^2-2x^2yz$.
6. $36a^2+9\beta^2+16-36a\beta+48a-24\beta$
7. $9x^2+16y^2+z^2+24xy-6xz-8yz-9a^2$
8. $4a^2+9\beta^2+25\gamma^2-16\delta^2-12a\beta-20a\gamma+30\beta\gamma$.
9. $4x^2+9y^2+z^2+16K^2+12xy-4xz+16xK-6yz+24yK-8zK$
10. $4a^2+9\beta^2+25\gamma^2+16\delta^2-12a\beta-20a\gamma+16a\delta+30\beta\gamma-24\beta\delta-40\gamma\delta$
11. $x^2y^2-4|xy|\omega+4\omega^2$
12. $x^2+y^2+\omega^2-2x|y|-2x|\omega|+2|y\omega|$.

Λύσις.- 1) $(x+y-3)^2$ 2) $(-x+2y+5)^2$, 3) $(3x-2y+4)^2$,
4) $(5a+2\beta-3\gamma)^2$, 5) $(xy+2y-xz)^2$, 6) $(6a-3\beta+4)^2$,
7) $(3x+4y-z)^2-(3a)^2=(3x+4y-z+3a)(3x+4y-z-3a)$,
8) $(-2a+3\beta+5\gamma)^2-(4\delta)^2=\dots$ 9) $(2x+3y-z+4K)^2$,
10) $(-2a+3\beta+5\gamma-4\delta)^2$, 11) $|xy|^2-2|xy|.2\omega+(2\omega)^2=$
$=(|xy|-2\omega)^2$, 12) $\{|-x|+|y|+|\omega|\}^2$.

509. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα τά πολυώνυμα:

$$81x^4+11x^2+4, \qquad x^3-8y^3+2x^2-8xy+8y^2-6x+12y,$$

$$x^2+4xy+4y^2-16z^2-6x-12y+9, \qquad 4x^2-12xy+9y^2-25z^2+40z-16.$$

Λύσις.- 1) $81x^4+11x^2+4=(9x^2+2)^2-25x^2=(9x^2+2)^2-(5x)^2=\dots$

2) $\{x^3-(2y)^3\}+2\{x^2-4xy+4y^2\}-6(x-2y)=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)+$
$+2(x-2y)^2-6(x-2y)=(x-2y)\{x^2+2xy+4y^2+2(x-2y)-6\}=\dots$

3) $(x+2y)^2-6(x+2y)+9-16z^2=(x+2y-3)^2-(4z)^2=\dots$

4) $(2x-3y)^2-(5z-4)^2=\dots$

510. Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$$

Λύσις.- $(\alpha\beta-\gamma\delta)\{(\alpha^2-\delta^2)-(\beta^2-\gamma^2)\}+(\alpha\gamma-\beta\delta)\{(\alpha^2-\delta^2)+(\beta^2-\gamma^2)\}=$
$=(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\delta^2)-(\alpha\beta-\gamma\delta)(\beta^2-\gamma^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\beta^2-\gamma^2)=$
$=(\alpha^2-\delta^2)(\alpha\beta-\gamma\delta+\alpha\gamma-\beta\delta)-(\beta^2-\gamma^2)(\alpha\beta-\gamma\delta-\alpha\gamma+\beta\delta)=$
$=(\alpha^2-\delta^2)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)-(\beta^2-\gamma^2)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta)^2-$
$-(\beta-\gamma)^2(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)\{(\alpha-\delta)^2-(\beta-\gamma)^2\}=$
$=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma).$

511. Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις:

$$xyz(x^2y^2z^2-z^2x-x^2y-zy^2)+zx^2+xy^2+yz^2-1.$$

Λύσις.- $x^3y^3z^3-x^2yz^3-x^3y^2z-xy^3z^2+zx^2+xy^2+yz^2-1=$
$=(x^3y^3z^3-x^2yz^3)+(xy^2-1)-(x^3y^2z-zx^2)-(xy^3z^2-yz^2)=$
$=x^2yz^3(xy^2-1)+(xy^2-1)-zx^2(xy^2-1)-yz^2(xy^2-1)=$
$=(xy^2-1)(x^2yz^3+1-zx^2-yz^2)=(xy^2-1)(zx^2(yz^2-1)-(yz^2-1))=$
$=(xy^2-1)(yz^2-1)(zx^2-1).$

512. Ἐάν ὁ α εἶναι ἀκέραιος περιττός νά δειχθῆ ὅτι τότε ὁ ἀριθμός $\alpha^5-\alpha$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 240.

Λύσις. $\alpha^5-\alpha=\alpha(\alpha^4-1)=\alpha(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)=\alpha(\alpha^2+1)(\alpha-1)(\alpha+1)=$
$=(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha^2+1)$. Ἐπειδή $240=3.5.16$ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τό γινόμενον διαιρεῖται διά 3, διά 5 καί διά 16. Ὡς γνωστόν τό γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων, $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$ διαιρεῖται διά 3, ἄρα καί ὁ ἀριθμός $\alpha^5-\alpha$ διαιρεῖται διά 3. Διά νά δείξωμεν ὅτι διαιρεῖται διά 5 σκεπτό-

μεθα ὡς ἑξῆς: Ἐάν $\alpha = \pi o\lambda.5$ τό γινόμενον διαιρεῖται διά 5. Ἄν τό α δέν εἶναι πολ5 τότε $\alpha = \pi o\lambda 5 + \upsilon$ ὅπου $\upsilon = \pm 1$ ἤ ± 2. Τό γινόμενον καθίσταται: $(\pi o\lambda 5 + \upsilon - 1)(\pi o\lambda 5 + \upsilon)(\pi o\lambda 5 + \upsilon + 1)(\pi o\lambda 5 + \upsilon^2 + 1)$. Ἐάν $\upsilon = 1$ ὁ πρῶτος παράγων εἶναι πολ5. Ἐάν $\upsilon = -1$ τότε ὁ τρίτος εἶναι πολ5. Ἐάν $\upsilon = \pm 2$ τότε ὁ τέταρτος εἶναι πολ5. Ὥστε ὁπωσδήποτε εἷς παράγων εἶναι πολ5. Τέλος ἀφοῦ $\alpha =$ περιττός, οἱ $\alpha - 1$ καί $\alpha + 1$ εἶναι ἄρτιοι καί μάλιστα διαδοχικοί. Ἀλλά τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀρτίων εἶναι πολ8. Ὥστε $(\alpha-1)(\alpha+1) = 8\rho$. Τέλος ὁ $\alpha^2 + 1$ εἶναι ἄρτιος $= 2\lambda$ συνεπῶς $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1) = 16\rho\lambda = \pi o\lambda 16$.

513. *Ἐάν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:*

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

νά δειχθῇ ὅτι τότε θ' ἀληθεύῃ καί ἡ ἰσότης

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1} + \beta^{2\nu+1} + \gamma^{2\nu+1}$$

ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός.

Λύσις.- Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος προκύπτει ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 0$ ἐξ ἧς $\alpha = -\beta$ ἤ $\beta = -\gamma$ ἤ $\gamma = -\alpha$. Θέτοντες εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ὅπου $\alpha = -\beta$ καί εἰς τό δεύτερον ἐπίσης, λαμβάνομεν τό ἴδιο ἐξαγόμενον.

514. *Ἐάν $x > 0$ νά ἐξετασθῇ ποία ἐκ τῶν δύο ποσοτήτων $x^3 + 1$ καί $x^2 + x$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης;*

Λύσις.- Σχηματίζομεν τήν διαφοράν $\Delta = x^3 + 1 - (x^2 + x)$ καί ἐξετάζομεν τό σημεῖον αὐτῆς $\Delta = (x+1)(x^2 - x + 1) - x(x+1) = (x+1)(x-1)^2$. Ἐπειδή $x > 0$, θά εἶναι $x + 1 > 0$. Εἶναι καί $(x-1)^2 \geqq 0$ ὥστε $\Delta \geqq 0$ καί συνεπῶς $x^3 + 1 \geqq x^2 + x$ (Τό $=$ ἰσχύει μόνον διά $x = 1$).

515. *Ὁμοίως διά τάς x^3 καί $x^2 + x + 2$ ὅταν $x > 2$.*

Λύσις.- $\Delta = x^3 - (x^2 + x + 2) = (x^3 - 1) - (x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x - 2)$ ὅπερ εἶναι > 0 διότι $x > 2$ καί διότι $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Ἄρα $\Delta > 0$ καί $x^3 > x^2 + x + 2$.

516. *Ὁμοίως διά τάς ποσότητας $3\alpha\beta^2$ καί $\alpha^3 + 2\beta^3$ ὅταν $\alpha > 0$ καί $\beta > 0$.*

Λύσις.– $\Delta = 3\alpha\beta^2 - (\alpha^3+2\beta^3) = 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^3 - 2\beta^3 = 2\beta^2(\alpha-\beta) + \alpha(\beta^2-\alpha^2) = 2\beta^2(\alpha-\beta) - \alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = (\alpha-\beta)(2\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta) = (\alpha-\beta)\{(\beta^2-\alpha^2)+(\beta^2-\alpha\beta)\} = (\alpha-\beta)\{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)+\beta(\beta-\alpha)\} = (\alpha-\beta)(\beta-\alpha)(2\beta+\alpha) = -(\alpha-\beta)^2(2\alpha+\beta) \leqq 0$. Ὥστε $\Delta \leqq 0$ ἄρα $3\alpha\beta^2 \leqq \alpha^3+2\beta^3$. (Τό = ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha=\beta$).

517. Ἐάν $x > \alpha$ δείξατε ὅτι:

$$x^3+13\alpha^2x > 5\alpha x^2 + 9\alpha^3.$$

Λύσις.– $x^3+13\alpha^2x-5\alpha x^2-9\alpha^3 = (x^3-\alpha^3)+(5\alpha^2x-5\alpha x^2)+(8\alpha^2x-8\alpha^3) = (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)+5\alpha x(\alpha-x)+8\alpha^2(x-\alpha) = (x-\alpha)(x^2-4\alpha x+9\alpha^2) = (x-\alpha)\{(x-2\alpha)^2+5\alpha^2\} > 0 \Rightarrow x^3+13\alpha^2x > 5\alpha x^2+9\alpha^3$

518. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις:

$$(\alpha^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-\alpha\gamma)^3+(\gamma^2-\alpha\beta)^3-3(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)(\gamma^2-\alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνός ἀκεραίου πολυωνύμου.

Λύσις.– Ἐάν τεθῆ $\alpha^2-\beta\gamma=x$, $\beta^2-\alpha\gamma=y$, $\gamma^2-\alpha\beta=z$ ἡ παράστασις γράφεται $x^3+y^3+z^3-3xyz$ καί ἰσοῦται μέ

(1) $\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$. Εἶναι ὅμως $x-y = \alpha^2-\beta\gamma-\beta^2+\alpha\gamma = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\gamma(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$.

Κυκλικῶς εὑρίσκομεν $y-z=(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$ $z-x = (\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$, ἄρα $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\}$. Ἐπίσης εἶναι $x+y+z = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$ ὥστε ἡ (1) ἰσοῦται μέ

$\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)^2\{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\} = [(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)]\cdot[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)]\cdot[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2] = (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)\cdot(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma) = (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2$.

519. Ἐάν ν ἀκέραιος > 2 δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός

$$\nu^7-7\nu^5+14\nu^3-8\nu$$

εἶναι διαιρετός διά 120.

Λύσις. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός περιέχει τούς παράγοντας τοῦ 120 δηλ. ὅτι διαιρεῖται διά 3, 5 καί 8. Πρός τοῦτο τρέπομεν τήν δοθεῖσαν παράστασιν εἰς γινόμενον:

$\nu(\nu^6-7\nu^4+14\nu^2-8) = \nu\{(\nu^2)^3-1-7\nu^4+14\nu^2-7\} = \nu\{(\nu^2-1)(\nu^4+\nu^2+1)-7(\nu^2-1)^2\} = \nu(\nu^2-1)(\nu^4-6\nu^2+8) = \nu(\nu^2-1)\{\nu^4-2\nu^2-4\nu^2+8\} = \nu(\nu^2-1)\{\nu^2(\nu^2-2)-4(\nu^2-2)\} =$

$\ldots^2-1)(\nu^2-2)(\nu^2-4)=(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu^2+2)$. Ἐπειδή ...εῖς παράγοντες εἶναι διαδοχικοί ἀκέραιοι, τό γινόμενον διαιρεῖται διά 3 καί ἐπειδή 5 παράγοντες εἶναι διαδοχικοί ἀκέραιοι τό γινόμενον διαιρεῖται διά 5. Ἐπίσης, τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀρτίων διαιρεῖται διά 8, μέσα σέ εἰς τούς πέντε διαδοχικούς $\nu-2$, $\nu-1$, ν, $\nu+1$, $\nu+2$ θά ὑπάρχουν τοὐλάχιστον δύο διαδοχικοί ἄρτιοι.

520. *Ἐπαληθεύσατε ὅτι:*

i) ὁ ἀριθμός $x=-2$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3x^3-5x+14=0$

ii) » » $x=-\frac{1}{3}$ » » » » $3x^2-8x-3=0$

iii) » » $x=\frac{1}{4}$ » » » » $256x^4-512x^2-33=0$.

521) *Νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:*

$5x-15=0$, $3x+4=0$, $7x-12=2x+3$, $5x+8=2-7x$

$3(x+2)=2(x+3)$, $3(x+1)=12+4(x-1)$, $(x+1)(x+2)=x^2+3x+6$.

Λύσις.— I) $5x-15=0 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow \boxed{x=3}$

II) $3x+4=0 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow \boxed{x=-4/3}$

III) $7x-12=2x+3 \Rightarrow 7x-2x=12+3 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow \boxed{x=3}$

IV) $3(x+2)=2(x+3) \Rightarrow 3x+6=2x+6 \Rightarrow 3x-2x=6-6 \Rightarrow \boxed{x=0}$

V) $3(x+1)=12+4(x-1) \Rightarrow 3x+3=12+4x-4 \Rightarrow \boxed{x=-5}$

VI) $(x+1)(x+2)=x^2+3x+6 \Rightarrow x^2+3x+2=x^2+3x+6 \Rightarrow$ ἀδύνατος

522. $x-7(4+x)=5x-6(3-4x)$, $3(x+5)(x-3)+x=3(x+4)(x-2)-5$

$0,8x-0,3=0,2x+1,4$, $5(1,2-3,5x)=6(3,5-1,2x)$

$9x-\{8x-(6x-5)\}=7x-\{4x-9(x-2)\}$.

Λύσις.— I) $x-7(4+x)=5x-6(3-4x) \rightsquigarrow x-28-7x=5x-18+$
$+24x \rightsquigarrow x-7x-5x-24x=-18+28 \rightsquigarrow -35x=10$
$\rightsquigarrow \boxed{x=-\frac{2}{7}}$

II) $3(x+5)(x-3)+x=3(x+4)(x-2)-5 \rightsquigarrow 3x^2+6x-30+x=$
$=3x^2+6x-24-5 \rightsquigarrow \boxed{x=1}$

III) $0,8x-0,3=0,2x+1,4 \rightarrow 0,8x-0,2x=1,4+0,3 \rightarrow 0,6x=1,7$
$\rightarrow \boxed{x=\frac{17}{6}}$.

IV) $5(1,2-3,5x)=6(3,5-1,2x) \rightarrow 6-17,5x=21-7,2x \rightsquigarrow -17,5x+$

$+7{,}2x = 21-6 \rightsquigarrow -10{,}3x = 15 \rightsquigarrow x = -\frac{150}{103}$

V) $9x - \{8x-(6x-5)\} = 7x - \{4x-9(x-2)\} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 9x - \{8x-6x+5\} = 7x - \{4x-9x+18\} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 9x - 8x + 6x - 5 = 7x - 4x + 9x - 18 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \cancel{9x} - 8x + 6x - 7x + 4x - \cancel{9x} = 5 - 18 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow -5x = -13 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{13}{5}}$

523. $\frac{5x}{6} - \frac{x-1}{2} = x + \frac{1}{3} + \frac{3}{8}(x+1)$, $\quad \frac{x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}$,

$\frac{x-3}{8} + \frac{x+4}{12} = \frac{3x+7}{20} + 3$, $\quad \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8}\left\{\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5}\right\} = \frac{x-9}{9} - \frac{7}{8}$,

$\frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$.

Λύσις.- i) $\frac{5x}{6} - \frac{x-1}{2} = x + \frac{1}{3} + \frac{3}{8}(x+1) \rightsquigarrow 20x - 12(x-1) = 24 +$

$+8+9(x+1) \rightsquigarrow 20x-12x+12 = 24+8+9x+9 \rightsquigarrow -x = 29 \rightsquigarrow \boxed{x=-29}$

II) $\frac{x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2} \rightsquigarrow 2x+8-10x = 15x-25 \rightsquigarrow -23x = -33 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{33}{23}}$

III) $\frac{x-3}{8} + \frac{x+4}{12} = \frac{3x+7}{20} + 3 \rightsquigarrow 15(x-3)+10(x+4) = 6(3x+7)+3\cdot 120 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 15x - 45 + 10x + 40 = 18x + 42 + 360 \rightsquigarrow 7x = 407 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{407}{7}}$

IV) $\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8}\left\{\frac{x-4}{4} - \frac{14-2x}{5}\right\} = \frac{x-9}{9} - \frac{7}{8} \rightsquigarrow \frac{x-1}{4} - \frac{x-4}{32} + \frac{14-2x}{40} =$

$= \frac{x-9}{9} - \frac{7}{8} \rightsquigarrow 360(x-1) - 45(x-4) + 36(14-2x) = 160(x-9) - 7\cdot 180 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 360x - 360 - 45x + 180 + 504 - 72x = 160x - 1440 - 1260 \rightsquigarrow 83x =$

$= -3324 \rightsquigarrow \boxed{x = -\frac{3324}{83}}$

V) $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{2} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20} \rightsquigarrow 5x + 5 - 20x + 10 + 30x + 30 =$

$= 27x + 19 \rightsquigarrow -12x = -26 \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{13}{6}}$

524. $(3x-2)(x-3) - (4x-1)(x+7) = 5(1-x)(x+3) + 3(1-x)(3-x) + x^2$,

$2x(x-5) + 3x(x+4) = x(x+1) + (2x-3)^2$,

$\frac{3}{4}(x-2) + 2(x-1) - \frac{1}{2} = 3(3-2x) + 2x - \frac{13}{10}$

Λύσις.- I) $(3x-2)(x-3)-(4x-1)(x+7)=5(1-x)(x+3)+3(1-x)(3-x)+$
$+x^2 \rightarrow 3x^2-11x+6-\cancel{4x^2}+x-28x+7=5x-\cancel{5x^2}+15-15x+9-$
$-9x-3x+\cancel{3x^2}+x^2 \rightarrow -38x+13=-22x+24 \rightarrow -16x=11 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{x=-\frac{11}{16}}$

II) $2x(x-5)+3x(x+4)=x(x+1)+(2x-3)^2 \rightarrow \cancel{2x^2}-10x+\cancel{3x^2}+12x=$
$=x^2+x+4x^2+9-12x \rightarrow 13x=9 \rightarrow \boxed{x=\frac{9}{13}}$

III) $\frac{3}{4}(x-2)+2(x-1)-\frac{1}{2}=3(3-2x)+2x-\frac{13}{10} \rightarrow$

$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+2x-2-\frac{1}{2}=9-6x+2x-\frac{3}{10} \rightarrow$

$\frac{3}{4}x+\cancel{2x}+6x-\cancel{2x}=9-\frac{3}{10}+\frac{3}{\cancel{2}}+\cancel{2}+\frac{1}{2} \rightarrow \frac{27}{4}x=\frac{127}{10} \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{127}{10}\cdot\frac{4}{27}=\frac{254}{135}$ ή $\boxed{x=\frac{254}{135}}$

525. $\frac{1-4x}{6}+2(x+1)-\frac{1}{10}=\frac{4x+3}{2}-\frac{2x+1}{3}$,

$\frac{3x}{4}-\frac{7x+2}{20}=\frac{2(x-4)}{5}+\frac{3}{2}$, $\quad \frac{x+6}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+22}{6}$

Λύσις.- I) $\frac{1-4x}{6}+2(x+1)-\frac{1}{10}=\frac{4x+3}{2}-\frac{2x+1}{3} \rightarrow 5(1-4x)+$
$+30.2(x+1)-3=15(4x+3)-10(2x+1)$
$\rightarrow 5-\cancel{20}x+\cancel{60}x+60-3=\cancel{60}x+45-\cancel{20}x-10 \rightarrow 0.x=-27$
ἀδύνατος.

II) $\frac{3x}{4}-\frac{7x+2}{20}=\frac{2(x-4)}{5}+\frac{3}{2} \rightarrow 1\cancel{5x}-\cancel{7x}-2=\cancel{8x}-32+30 \rightarrow$
$\rightarrow 0.x=0$ ταυτότης.

III) $\frac{x+6}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+22}{6} \rightarrow \cancel{3x}+18-\cancel{2x}+4=\cancel{x}+22 \rightarrow$
$\rightarrow 0.x=0$ ταυτότης

Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

526. $(x-1)(2x+1)(x-4)=0$, $x^3-4x=0$, $(3x-1)^2-(5x+3)^2=0$.

Λύσις.- I) $(x-1)(2x+1)(x-4)=0 \rightsquigarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x+1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=4 \end{array}}$

II) $x^3-4x=0 \rightsquigarrow x(x^2-4)=0 \rightsquigarrow x(x+2)(x-2)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}}$

III) $(3x-1)^2-(5x+3)^2=0 \rightsquigarrow (3x-1+5x+3)(3x-1-5x-3)=0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow (8x+2)(-2x-4)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{4} \\ x=-2 \end{array}}$

527 $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$, $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$, $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$

Λύσις.- I) $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9) \rightsquigarrow (x^2-x)\{2x-5-x-9\}=$

$=0 \rightsquigarrow x(x-1)(x-14)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=14 \end{array}}$

II) $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16 \rightsquigarrow \{(x+2)-(x-2)\}\{(x+2)^2+$
$+(x+2)(x-2)+(x-2)\}=32x+16 \rightsquigarrow 4\{x^2+\cancel{4x}+\cancel{4}+\cancel{x^2}-\cancel{4}+\cancel{x^2}-$
$-\cancel{4x}+4\}=32x+16 \rightsquigarrow 4(3x^2+4)=32x+16 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow 12x^2-32x=0 \rightsquigarrow 4x(3x-8)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{8}{3} \end{array}}$

III) $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0 \rightsquigarrow (x-1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$
$\rightsquigarrow (x-1)^2\{1-(x-3)^2\}=0 \rightsquigarrow (x-1)^2(1-x+3)(1+x-3)=0$

$\rightsquigarrow (x-1)^2(4-x)(x-2)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}}$

528 $(4x^2-9)(3x+2)-6(2x-3)=0$, $4x^2-\frac{1}{9}=6x-1$, $(2x-3)(x+6)+(3-2x)(4x-1)=0$.

Λύσις.- I) $(4x^2-9)(3x+2)-6(2x-3)=0 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (2x+3)(2x-3)(3x+2)-6(2x-3)=0 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (2x-3)\{(2x+3)(3x+2)-6\}=0 \rightsquigarrow (2x-3)\{6x^2+9x+4x+6-6\}=$

$=0 \rightsquigarrow (2x-3)x(6x+13)=0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{13}{6} \\ x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}}$

II) $4x^2 - \frac{1}{9} = 6x - 1 \rightsquigarrow 36x^2 - 1 = 54x - 9 \rightsquigarrow 36x^2 - 54x + 8 = 0 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow 36x^2 - 54x + 8 = 36x^2 - 54x + 9 - 1 = (36x^2 - 1) - (54x - 9) =$
$= (6x-1)(6x+1) - 9(6x-1) = (6x-1)\{6x+1-9\} = (6x-1)(6x-8) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ x = \frac{4}{3} \end{array}}$

III) $(2x-3)(x+6) + (3-2x)(4x-1) = 0 \rightsquigarrow -6x^2 + 23x - 21 = 0 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \underline{-6x^2} + 14x + \underline{9x} - 21 = 0 \rightsquigarrow$
$-3x(2x-3) + 7(2x-3) = 0 = (2x-3)(7-3x) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{3} \end{array}}$

528α.– *Νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις, διά παραγοντοποιήσεως τοῦ πρώτου μέλους:*
$x^2 - 5x + 4 = 0$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = 0$, $3x^2 - 7x + 4 = 0$,
$x^2 - 16x + 42 = 0$.

Λύσις.– I) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightsquigarrow \underline{x^2} - 5x + 5 - \underline{1} = (x^2 - 1) - 5(x-1) =$
$= (x-1)(x+1) - 5(x-1) = (x-1)(x+1-5) = (x-1)(x-4) = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}}$

II) $2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightsquigarrow \underline{2x^2} - \underline{2x} - x + 1 = 2x(x-1) - (x-1) =$

$= (x-1)(2x-1) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}}$

III) $x^2 + 4x + 4 = 0 \rightsquigarrow \underline{x}^2 + 4x + 8 - \underline{4} = (x-2)(x+2) + 4(x+2) =$
$= (x+2)(x-2+4) = (x+2)^2 = 0 \rightsquigarrow \boxed{x = -2}$

IV) $3x^2 - 7x + 4 = 0 \rightsquigarrow \underline{3x^2} - \underline{3x} - 4x + 4 = 3x(x-1) - 4(x-1) =$

$= (x-1)(3x-4) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{array}}$

V) $x^2 + 13x + 42 = 0 \rightsquigarrow \underline{x}^2 + \underline{6x} + 7x + 42 = x(x+6) + 7(x+6) =$

$= (x+6)(x+7) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -7 \end{array}}$

529. *Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις* $\frac{ax-1}{2} = \frac{x+7}{3}$ *ὅπου ὁ α θεωρεῖται γνω-*

στός (παράμετρος) καί x ὁ ἄγνωστος. Δύναται ἡ ἐξίσωσις αὐτή νά εἶναι ἀδύνατος ἤ ἀόριστος;

Λύσις.— $(ax-1).3=(x+7)2 \Rightarrow 3ax-3=2x+14 \Rightarrow (3a-2)x=17$.

1ον) Ἄν $3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$, ἀδύνατος.

2ον) Ἄν $a\neq\frac{2}{3}$, ἔχει μίαν μόνην λύσιν : $x=17/(3x-2)$.

Ἀόριστος δέν δύναται νά εἶναι.

530. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$\{(a+\beta)x-\gamma\}^2=\{(a-\beta)x+\gamma\}^2$, $(x+a)^3+(x+\beta)^3+(x+\gamma)^3=$ $=3(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)$ ὅπου a,β,γ θεωροῦνται γνωστοί (παράμετροι) καί x ὁ ἄγνωστος. Εὕρετε, πότε αἱ ἐξισώσεις αὐταί δέν ἔχουν λύσιν ἤ εἶναι ἀόριστοι.

Λύσις.— i) $\{(a+\beta)x-\gamma\}^2-\{(a-\beta)x+\gamma\}^2=0 \Rightarrow$

$\{(a+\beta)x-\gamma+(a-\beta)x+\gamma\}\{(a+\beta)x-\gamma-(a-\beta)x-\gamma\}=0 \Rightarrow$

$2ax.(2\beta x-2\gamma)=0 \Rightarrow 4ax(\beta x-\gamma)=0$

1ον) Ἄν $a=0$ εἶναι ταυτότης, 2ον) Ἄν $a\neq0$ ἀνάγεται εἰς τήν $x(\beta x-\gamma)=0$ ἥτις ἀναλύεται εἰς $x=0$ καί $\beta x=\gamma$. Ἄν $\beta\neq0$, ἡ τελευταία ἔχει λύσιν $x=\gamma/\beta$. Ἄν $\beta=0$ καί $\gamma\neq0$ εἶναι ἀδύνατος καί ἄν $\beta=0$, $\gamma=0$ ἀόριστος. Συμπέρασμα:

Ἄν $a=0$ εἶναι ταυτότης

Ἄν $a\neq0$, $\beta\neq0$, δύο λύσεις: $x=0$, $x=\gamma/\beta$

Ἄν $a\neq0$, $\beta=0$, $\gamma\neq0$, μία λύσις: $x=0$

Ἄν $a\neq0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, ταυτότης.

ii) Ἐφαρμόζομεν τήν ταυτότητα $A^3+B^3+\Gamma^3-3AB\Gamma=$ $=\frac{1}{2}(A+B+\Gamma)\{(A-B)^2+(B-\Gamma)^2+(\Gamma-A)^2\}$ ὁπότε ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τήν μορφήν: $\frac{1}{2}(3x+a+\beta+\gamma)[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2]=0$.

Ἐάν a,β,γ ὄχι ὅλα ἴσα μεταξύ των, ἡ ἀγκύλη εἶναι $\neq0$ καί ἔχομεν: $x=\frac{a+\beta+\gamma}{3}$. Ἐάν $a=\beta=\gamma$ εἶναι ταυτότης.

531. Νά λυθοῦν καί διερευνηθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

i) $(1-x)(a-x)=(a-x)(1-\beta)-(1+x)(\beta-x)$

ii) $(x-a)^3(x+2\beta+a)-(x+\beta)^3(x-2a-\beta)=0$

ὅπου a,β θεωροῦνται δεδομένοι καί x ὁ ἄγνωστος.

Λύσις.— i) Γράφεται: $(1-x)(a-x)-(a-x)(1-\beta)+(1+x)(\beta-x)=0$, ἤ $(a-x)(\beta-x)+(1+x)(\beta-x)=0$ ἤ $(\beta-x)(a-x+1+x)=0$ ἤ $(\beta-x)(a+1)=0$. Ἄν $a\neq-1$ τότε $x=\beta$. Ἄν $a=-1$ εἶναι ταυτότης . ii) $(x-\alpha)^3[(x-\alpha)+2(\beta+\alpha)]-(x+\beta)^3[(x+\beta)-2(\alpha+\beta)]=0$ ἤ $(x-\alpha)^4-(x+\beta)^4+2(\alpha+\beta)[(x-\alpha)^3+(x+\beta)^3]=0$. Ἐάν θέσωμεν προσωρινῶς $x-\alpha=\omega$, $x+\beta=\varphi$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται $\omega^4-\varphi^4+2(\alpha+\beta)(\omega^3+\varphi^3)=0$ ἤ $(\omega^2+\varphi^2)(\omega+\varphi)(\omega-\varphi)+2(\alpha+\beta)(\omega+\varphi)(\omega^2-\omega\varphi+\varphi^2)=0$. Εἶναι ὅμως $\omega-\varphi=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)$ καί ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$-(\omega^2+\varphi^2)(\omega+\varphi)(\alpha+\beta)+2(\alpha+\beta)(\omega+\varphi)(\omega^2-\omega\varphi+\varphi^2)=0$ ἤ
$(\omega+\varphi)(\alpha+\beta)\{-\omega^2-\varphi^2+2\omega^2-2\omega\varphi+2\varphi^2\}=0$ ἤ $(\omega+\varphi)(\alpha+\beta)(\omega-\varphi)^2=0$
ἤ $(\omega+\varphi)(\alpha+\beta)^3=0$ ἤ $(2x-\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^3=0$. Ἐάν $\alpha+\beta\neq0$ τότε $x=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Ἐάν $\alpha+\beta=0$ τότε εἶναι ταυτότης.

532. *Ἔστω ἡ παράστασις $y=(x^2-9)^2-(x+3)^2$. Ζητεῖται: i) Ν'ἀναπτυχθῇ καί διαταχθῇ κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x. ii) Νά τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων. iii) Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῆς y διά $x=0$, διά $x=-3$ καί διά $x=2$. iv) Νά δοθοῦν αἱ τιμαί τοῦ x διά τάς ὁποίας ἡ y λαμβάνει τήν τιμήν μηδέν.*

Λύσις.- I) $y=(x^2-9)^2-(x+3)^2=\underline{x^4}-\underline{\underline{18}}x^2+81-\underline{\underline{x^2}}-6x-9=$
$x^4-19x^2-6x+72$.

II) $y=(x^2-9)^2-(x+3)^2=(x^2-9+x+3)(x^2-9-x-3)=(x^2+x-6)(x^2-x-12)$

III) α) διά $x=0 \rightsquigarrow y=(0^2-9)^2-(0+3)^2=81-9=72$ ἤ $y=72$

β) » $x=-3 \rightsquigarrow y=\{(-3)^2-9\}^2-(-3-3)^2=0$ ἤ $y=0$

γ) » $x=2 \rightsquigarrow y=(4-9)^2-(2+3)^2=25-25=0$ ἤ $y=0$

IV) Ἐκ τῆς II) λαμβάνομεν $y=(x^2+x-6)(x^2-x-12)=$
$=(\underline{x^2}-\underline{2x}+3x-6)(x^2-4x+3x-12)=\{x(x-2)+3(x-2)\}\{x(x-4)+3(x-4)\}=(x-2)(x+3)(x-4)(x+3)=(x+3)^2(x-2)(x-4)=0 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \boxed{\begin{matrix} x=-3 \\ x=2 \\ x=4 \end{matrix}}$$

533. *Δίδονται αἱ παραστάσεις $f(x)=(5-3x)(x+4)-(5-3x)(2x-3)$ καί $\sigma(x)=9x^2-25$. Διά ποίας τιμάς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης $2f(x)-3\sigma(x)=0$;*

Λύσις.- $f(x)=(5-3x)(x-4)-(5-3x)(2x-3)=(5-3x)(-x-5)=$
$=(3x-5)(x+5)$ $\sigma(x)=9x^2-25$.

$C=2f(x)-3\sigma(x)=2(3x-5)(x+5)-3(3x-5)(3x+5)=$

$$= (3x-5)\{2x+10-9x-15\} = (3x-5)(-7x-15) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = -\dfrac{15}{7} \end{array}}$$

534. Νά εὑρεθῇ τό κοινόν μέρος τῶν διαστημάτων:

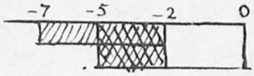
α) $-7 \leqq x \leqq -2$ καί $-5 \leqq x \leqq 0$

β) $x > 0$ καί $-1 < x < 2$

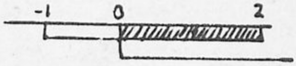
γ) $x < 0$ καί $-2 < x \leqq 0$

δ) $1 \leqq x < 10$ $7 \leqq x < 11$, $3 \leqq x < 9$.

Λύσις.— α) $-7 \leqq x \leqq -2$ καί $-5 \leqq x \leqq 0$ ἔχουν κοινόν μέρος τό διάστημα $\boxed{-5 \leqq x \leqq -2}$

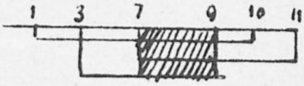


β) $x > 0$ καί $-1 < x < 2$ ἔχουν τό $\boxed{0 < x < 2}$



γ) $x < 0$ καί $-2 < x \leqq 0$ ἔχουν τό $\boxed{-2 < x < 0}$

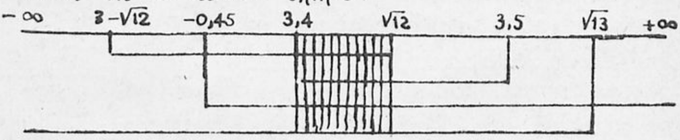
δ) $1 \leqq x < 10$, $7 \leqq x < 11$, $3 \leqq x < 9$ ἔχουν τό $\boxed{7 \leqq x < 9}$



535. Εὕρετε τό κοινόν μέρος τῶν τεσσάρων διαστημάτων:

α) $3-\sqrt{12} < x \leqq \sqrt{12}$, β) $3,4 \leqq x < 3,5$, γ) $x > -0,45$, δ) $x < \sqrt{13}$

Λύσις.— Ἐπειδή $\sqrt{12} = 3,464\ldots$, $\sqrt{13} = 3,605\ldots$, τά ἄκρα τῶν τεσσάρων διαστημάτων τίθενται κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους ὅπως είς τό κάτωθι σχῆμα:



Τό κοινόν μέρος: $3,4 \leqq x \leqq \sqrt{12}$.

536. Ἐάν $\alpha<\beta$ δείξατε ὅτι θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2}\left||\alpha-x|-|\beta-x|\right|=\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right| \quad ἤ \quad =\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

καθ' ὅσον ὁ x περιέχεται εἰς τό διάστημα $\alpha\leqq x\leqq\beta$ ἤ ὄχι.

Λύσις.- Ἔστω ὅτι $\alpha\leqq x\leqq\beta$. Τότε $\alpha-x\leqq 0$, $|\alpha-x|=x-\alpha$ καί $\beta-x\geqq 0$, $|\beta-x|=\beta-x$, συνεπῶς τό πρῶτον μέλος καθίσταται: $\frac{1}{2}|x-\alpha-\beta+x|=\frac{1}{2}|2x-\alpha-\beta|=\frac{1}{2}|\alpha+\beta-2x|=\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-x\right|$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἄν $x>\beta>\alpha$ ἤ ἄν $x<\alpha<\beta$.

537. Πόσοι φυσικοί ἀριθμοί ἀνήκουν εἰς τό διάστημα $123,6<x\leqq 1027$

Λύσις.- Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν πόσοι ἀνήκουν εἰς τό $1\leqq x\leqq 1027$ καί πόσοι εἰς τό $1\leqq x\leqq 123$ καί ἀπό τό πρῶτον πλῆθος ν'ἀφαιρέσωμεν τό δεύτερον: $1027-123=904$.

538. Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

$$i)\quad 6x+\frac{5}{7}>4x+7\,, \qquad ii)\quad \frac{8x+3}{2}<2x+25.$$

καί νά ἐξετασθῇ ἄν ὑπάρχουν τιμαί τοῦ x πληροῦσαι συγχρόνως καί τάς δύο.

Λύσις.- I) $6x+\frac{5}{7}>4x+7 \rightarrow 42x+5>28x+49 \rightarrow$
$\rightarrow 42x-28x>49-5 \rightarrow 14x>44 \rightarrow x>\frac{44}{14}$ ἤ $\boxed{x>\frac{22}{7}}$

II) $\frac{8x+3}{2}<2x+25 \rightarrow 8x+3<4x+50 \rightarrow 4x<47 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{x<\frac{47}{4}}$

539. Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

$$i)\quad 8x-5>\frac{15x-8}{2} \qquad ii)\quad 2(2x-3)>5x-\frac{3}{4}$$

καί νά ἐξετασθῇ ἄν τό διάστημα εἰς τό ὁποῖον ἀληθεύει ἡ πρώτη, ἔχει κοινόν μέρος μέ τό διάστημα εἰς τό ὁποῖον ἀληθεύει ἡ δευτέρα.

Λύσις.- I) $8x-5>\frac{15x-8}{2} \rightarrow 16x-10>15x-8 \rightarrow \boxed{x>2}$

II) $2(2x-3)>5x-\frac{3}{4} \rightarrow 16x-24>20x-3 \rightarrow$
$\rightarrow -24+3>20x-16x \rightarrow -21>4x \rightarrow \boxed{x<-\frac{21}{4}}$

540. Ἄν $a \neq 0$ δείξατε ὅτι τό διώνυμον $ax+\beta$ ἔχει τό σημεῖον τοῦ a διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x μεγαλυτέραν τῆς ρίζης του (δηλ. τῆς $-\beta/a$).

Λύσις.— Διά $x > -\frac{\beta}{a}$ εἶναι $x+\frac{\beta}{a}>0$. Ἐξ ἄλλου $ax+\beta = a\left(x+\frac{\beta}{a}\right) = a\times$ θετικόν ἀριθμόν. Τό τελευταῖον γινόμενον ἔχει τό σημεῖον τοῦ a.

541. i) Αἱ ἀνισότητες $x^2(x-3)>0$ καί $x-3>0$ εἶναι ἰσοδύναμοι;

ii) Αἱ σχέσεις $x^2(x-3)\geq 0$ καί $x-3\geq$ εἶναι ἰσοδύναμοι;

Λύσις.— i) Εἶναι ἰσοδύναμοι διότι ἡ πρώτη ἀληθεύει μόνον διά $x>3$. ii) Δέν εἶναι, διότι ἡ πρώτη ἀληθεύει καί διά $x=0$ ἐνῷ ἡ δευτέρα, διά τήν τιμήν αὐτήν δέν ἀληθεύει.

542. Νά λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

i) $(5-x)(11-x)(6x-1)(12x-5)<0$ ii) $(x-3)^2(5x+2)^3(2-x)(4-3x)>0$.

Λύσις.— i) Γράφομεν πρῶτον τήν ἀνισότητα ὑπό τήν κανονικήν μορφήν: $(x-5)(x-11)\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{5}{12}\right)<0$ καί τάς ρίζας τοῦ πρώτου μέλους κατά σειράν μεγέθους (§ 153)

$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$\frac{5}{12}$		5		11		$+\infty$
	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Ἡ ἀνισότης ἀληθεύει εἰς τά ὑπογραμμισμένα διαστήματα

$\frac{1}{6}<x<\frac{5}{12}$, $5<x<11$.

ii) Ἡ δοθεῖσα γράφεται $\{(x-3)(5x+2)\}^2\cdot(5x+2)(2-x)(4-3x)>0$ καί ἀληθεύει μόνον ὅταν

$$\{(5x+2)(2-x)(4-3x)>0 \quad \text{καί} \quad (x-3)(5x+2)\neq 0\}$$

ἤ $\left\{\left(x+\frac{2}{5}\right)(x-2)\left(x-\frac{4}{3}\right)>0 \quad \text{καί} \quad x\neq 3 \quad \text{καί} \quad x\neq -2/5\right\}$

Λύομεν τήν ἀνισότητα κατά τήν γνωστήν μέθοδον:

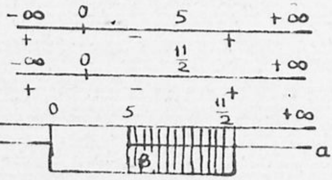
$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$		$+$	

$-\frac{2}{5}<x<\frac{4}{3}$, $x>2$. Εἰς τό διάστημα $x>2$ περιέχεται ἡ τιμή 3 ἥτις ἐξαιρεῖται.

543. Εὕρετε διά ποίας τιμάς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες:

$$x^2 - 5x > 0 \quad \text{καί} \quad 2x^2 - 11x < 0$$

Λύσις.— Ἡ πρώτη: $(x-0)(x-5) > 0$ ἀληθεύει διά (α) $x<0$, $x>5$. Ἡ δευτέρα: $(x-0)\left(x-\frac{11}{2}\right)<0$ ἀληθεύει εἰς τό (β): $0<x<\frac{11}{2}$. Ἀμφότεραι: διά $5<x<\frac{11}{2}$.

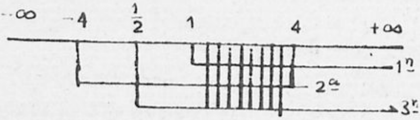


544. Εὕρετε διά ποίας τιμάς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες:

$$x^3 - x^2 > 0, \quad |x|<4, \quad x>\frac{1}{2}$$

Λύσις.— Ἡ πρώτη: $x^2(x-1)>0$ ἀληθεύει διά $x>1$. Ἡ δευτέρα: $|x|<4$, ἄν $x \geqq 0$ γίνεται $x<4$· ἄν $x<0$ γίνεται: $-x<4 \Rightarrow x>-4$. Ἄρα ἀληθεύει εἰς τά δύο διαστήματα $0 \leqq x<4$ καί $-4<x<0$ τά ὁποῖα συμπτύσσονται εἰς τό $-4<x<4$.

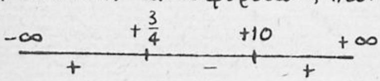
Αἱ τρεῖς, συναληθεύουν εἰς τό $1<x<4$ ὅπως φαίνεται ἀπό τό παραπλεύρως σχῆμα.



545. Εὕρετε τάς κοινάς λύσεις τῶν ἀνισοτήτων:

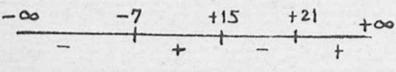
$$(4x-3)(10-x)<0, \quad (x-21)(x+7)(x-15)>0, \quad (x^2+1)(x+4)<0$$

Λύσις.— I) $(4x-3)(10-x)<0$. Διαιροῦμεν διά 4 ἀμφότερα τά μέλη καί ἀλλάζομεν τό σημεῖον τοῦ δευτέρου παράγοντος ὅτε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται, ἤτοι: $\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-10)>0$ ὅτε:



ἤ $\boxed{\begin{matrix} x>10 \\ x<\frac{3}{4} \end{matrix}}$ (1)

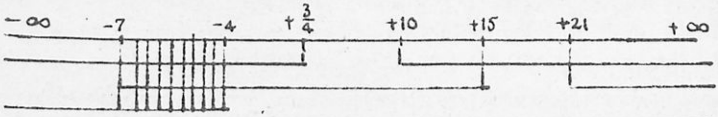
II) $(x-21)(x+7)(x-15)>0$



ἤ $\boxed{\begin{matrix} x>21 \\ -7<x<15 \end{matrix}}$ (2)

III) $(x^2+1)(x+4)<0 \sim (x+4)<0$ ἤ $\boxed{x<-4}$ (3)

Τά ἄκρα τῶν (1), (2), (3) γραφόμενα ἐπ' εὐθείας κατ' αὔξουσαν τάξιν δίδουν τά κοινά διαστήματα, ἄν ὑπάρχουν.



Ώς φαίνεται μόνη κοινή λύσις είναι τό διάστημα $\boxed{-7<x<-4}$

546. Προσδιορίσατε τό διάστημα είς τό όποῖον πρέπει νά εὑρίσκεται ὁ x ἵνα ἕκαστος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν $\alpha=\frac{x}{2}+1$, $\beta=2x-4$, $\gamma=-\frac{3x}{4}+3$ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Τούτου συμβαίνοντος, μεταξύ ποίων ὁρίων περιέχεται τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma$;

Λύσις.– Πρέπει $1^{ον}$) $\frac{x}{2}+1<2x-4-\frac{3x}{4}+3 \Rightarrow 2x+4<8x-16-$
$-3x+12 \Rightarrow -3x<-8 \Rightarrow x>\frac{8}{3}$.

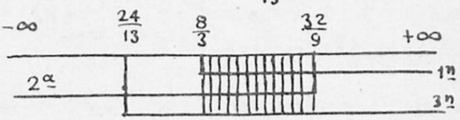
$2^{ον}$) $2x-4<\frac{x}{2}+1-\frac{3x}{4}+3 \Rightarrow 8x-16<2x+4-3x+12 \Rightarrow$

$9x<32 \Rightarrow x<\frac{32}{9}$. $3^{ον}$) $-\frac{3x}{4}+3<\frac{x}{2}+1+2x-4 \Rightarrow$

$-3x+12<2x+4+8x-16 \Rightarrow -13x<-24 \Rightarrow x>\frac{24}{13}$

Κοιναί λύσεις:

$$\frac{8}{3}<x<\frac{32}{9}$$



Τό $\alpha+\beta+\gamma=\frac{7x}{4}$. Ἐπειδή

$$\frac{8}{3}<x<\frac{32}{9} \Rightarrow \frac{8}{3}\cdot\frac{7}{4}<\frac{7x}{4}<\frac{32}{9}\cdot\frac{7}{4} \Rightarrow \frac{14}{3}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{56}{9}.$$

547. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων εἶναι ταυτότητες καί ποῖαι εἶναι ἐξισώσεις: $(x+1)^2+5=x^2+2x+6$, $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=2x^2+2y^2+2z^2+xy+yz+2zx$, $3x+y=10$.

Λύσις.– Ἡ $1^{η}$ καί ἡ $2^{α}$ εἶναι ταυτότητες. Ἡ $3^{η}$ καί $4^{η}$ ἐξισώσεις.

548. Ἀποδείξατε ὅτι

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)\equiv 0,$$
$$(\mu^4-\nu^4)+2\nu(\mu^3+\nu^3)-(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2\equiv 2\mu^2\nu(\mu+\nu),$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2\equiv 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$$

Λύσις.– 1) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)\equiv 0$.

Καλοῦμεν Α τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ταυτότητος ὅτε:

$A = \cancel{\alpha^2} + \underline{\alpha\beta} - \underline{\alpha\gamma} - \underline{\alpha\beta} - \cancel{\beta^2} + \beta\gamma + \cancel{\beta^2} + \beta\gamma - \underline{\alpha\beta} - \beta\gamma - \gamma^2 + \underline{\alpha\gamma} + \gamma^2 + \underline{\alpha\gamma} -$

$- \beta\gamma - \underline{\alpha\gamma} - \cancel{\alpha^2} + \underline{\alpha\beta} = 0$ ὅ.ἔ.δ.

II) $(\mu^4 - \nu^4) + 2\nu(\mu^3+\nu^3) - (\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2 \equiv 2\mu^2\nu(\mu+\nu)$

$A = (\mu^2-\nu^2)(\mu^2+\nu^2) + 2\nu(\mu+\nu)(\mu^2-\mu\nu+\nu^2) - (\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2 =$

$= (\mu+\nu)\{(\mu-\nu)(\mu^2+\nu^2) + 2\nu(\mu^2-\mu\nu+\nu^2) - (\mu+\nu)(\mu-\nu)^2\} =$

$= (\mu+\nu)\{\cancel{\mu^3} + \underline{\mu\nu^2} - \underline{\nu\mu^2} - \cancel{\nu^3} + \underline{2\nu\mu^2} - \underline{2\mu\nu^2} + 2\nu^3 - \mu^3 - \underline{\mu\nu^2} + \underline{2\mu^2\nu} -$

$- \underline{\nu\mu^2} - \nu^3 + \underline{2\mu\nu^2}\} = (\mu+\nu)\{2\nu\mu^2\} = 2\mu^2\nu(\mu+\nu)$ ὅ.ἔ.δ.

III) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 + (\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2 + (\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2 + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 \equiv$

$\equiv 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ταυτότητα: $K^2+\Lambda^2 \equiv (K+\Lambda)^2 - 2K\Lambda$ ἔχομεν, ἐκ τῶν δύο πρώτων προσθετέων καὶ τῶν δύο τελευταίων:

$A = (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2 - 2\{(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma)\}\{(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)\} +$

$+ (\alpha-\beta+\gamma-\delta+\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 - 2\{(\alpha-\delta)-(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)+(\beta-\gamma)\} =$

$= 4(\alpha+\delta)^2 - 2\{(\alpha+\delta)^2 - (\beta+\gamma)^2\} + 4(\alpha-\delta)^2 - 2\{(\alpha-\delta)^2 - (\beta-\gamma)^2\} =$

$= 2(\alpha+\delta)^2 + 2(\beta+\gamma)^2 + 2(\alpha-\delta)^2 + 2(\beta-\gamma)^2 =$

$= 2\{\alpha^2+\delta^2+2\alpha\delta+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\} =$

$= 4\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\}$.

549. *Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων δέν ἔχει καμμίαν πραγματικήν λύσιν*

i) $|x-3|+|x-2| = -1$, *ii)* $x^2+y^2+z^2 = -3$ *iii)* $(x-2)^2+5=0$.

iv) $|x+5| = x$ *(βλ. § 146, iii)*

Λύσις.- i) Τό πρῶτον μέλος, ὡς μονίμως θετική παράστασις δέν δύναται νά γίνη ἴσον μέ τό δεύτερον. ii) Ὁμοίως. iii) Ὁμοίως. iv) Ἐάν $x<-5$, καθίσταται $-x-5=x \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$. Ἀλλ' ἡ τιμή αὐτή ἀπορρίπτεται ὡς μή πληροῦσα τήν ὑπόθεσιν $x<-5$. Διά $x \geq -5$, καθίσταται: $x+5=x$, ἤτοι ἀδύνατος. Ὥστε οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

550. *Ἐάν α, β, γ δεδομένοι πραγματικοί ἀριθμοί δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχει μίαν μόνον πραγματικήν λύσιν*

i) $|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma| = 0$, *ii)* $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^4+(z-\gamma)^6=0$,

iii) $x^2+(y-2)^2+3(x^2+y^2-1)=0$.

Λύσις.– i) Ἔχει προφανῶς, λύσιν τὴν τριάδα $\{x=\alpha, y=\beta, z=\gamma\}$ καί οὐδεμίαν ἄλλην. Πᾶσα ἄλλη τριάς καθιστᾶ τό πρῶτον μέλος θετικόν, ii) Ὁμοίως iii) Ἡ ἐξίσωσις ταυτοποιουμένη γράφεται $4x^2+4y^2-4y+1=0$ ἤ $(2x)^2+(2y-1)^2=0$ ὁπότε ἔχει μοναδικήν λύσιν τήν $x=0$, $y=1/2$. Πᾶν ἄλλο ζεῦγος τιμῶν καθιστᾶ τό πρῶτον μέλος θετικόν.

551 Νά δειχθῆ ὅτι τό ζεῦγος $\left(\frac{12-5\alpha}{3}, \alpha\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $3x+5y=12$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ α.

Λύσις.– Ἀρκεῖ τό δοθέν ζεῦγος τιθέμενον εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως νά τό καθιστᾶ ἴσον μέ τό δεύτερον ἤτοι:

$3x+5y=3\left(\frac{12-5\alpha}{3}\right)+5\alpha=12-5\alpha+5\alpha=12$ ὅ.ἔ.δ.

552. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ τριάς $\left(\frac{7+5\alpha-\beta}{3}, \alpha, \beta\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $3x-5y+z=7$, οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀριθμῶν α, β.

Λύσις.– Ὁμοίως ἐργαζόμενοι λαμβάνομεν:

$3x-5y+z=3\left(\frac{7+5\alpha-\beta}{3}\right)-5\alpha+\beta=7+\cancel{5\alpha}-\cancel{\beta}-\cancel{5\alpha}+\cancel{\beta}=7$ ὅ.ἔ.δ.

553. Νά δειχθῆ ὅτι τό ζεῦγος $\left(3\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad \frac{6\alpha}{1+\alpha^2}\right)$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $x^2+y^2=9$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ α.

Λύσις.– Ὁμοίως ἐργαζόμενοι λαμβάνομεν:

$$x^2+y^2=\left(3\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2+\left(\frac{6\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2=9\cdot\frac{1+\alpha^4-2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}+\frac{36\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}=$$

$$=9\left\{\frac{1+\alpha^4-2\alpha^2+4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\right\}=9\left\{\frac{1+\alpha^4+2\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}\right\}=9\,\frac{(1+\alpha^2)^2}{(1+\alpha^2)^2}=9$$

ὅ.ἔ.δ.

Νά λυθοῦν τά κάτωθι συστήματα:

554. $\{3x+y=10,\ 2x-y=5\}$, $\{4x-3y=20,\ 6x+5y=-8\}$

Λύσις. I) $\left.\begin{array}{l}3x+y=10\\2x-y=5\end{array}\right\}$ Διά προσθέσεως κατά μέλη λαμβάνομεν $5x=15 \rightsquigarrow \boxed{x=3}$

Τήν τιμήν τοῦ x θέτομεν εἰς τήν $1^{\eta\nu}$ καί λαμβάνομεν: $\boxed{y=1}$

II) $\begin{array}{l|l}4x-3y=20 & -6\\6x+5y=-8 & 4\end{array}$ (1) $\rightarrow$ $\begin{array}{r}-24x+18y=-120\\24x+20y=-32\\\hline 38y=-152\end{array}$ $\boxed{y=-4}$

Θέτοντες τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τοῦ y εἰς τήν πρώτην τῶν (1) λαμβάνομεν : $4x = 20 - 12 = 8 \rightsquigarrow \boxed{x=2}$

555. $\{x-5y=10,\ 8y+9y=45\}$, $\{3x+4y-29=0,\ 9x-2y-17=0\}$.

Λύσις.- I) $\left.\begin{array}{l} x-5y=10 \\ 8x+9y=45 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} -8 \\ 1 \end{array}\right\} (1) \rightsquigarrow \begin{array}{r} -8x+40y=-80 \\ 8x+9y=45 \\ \hline 49y=-35 \end{array} \rightsquigarrow \boxed{y=-\frac{5}{7}}$

Θέτοντες τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τοῦ y εἰς τήν πρώτην τῶν (1) λαμβάνομεν : $x = 10 + 5\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{45}{7}$ ἤ $\boxed{x=\frac{45}{7}}$

II) $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=29 \\ 9x-2y=17 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} 1 \\ 2 \end{array}\right. (1) \Big\} \quad \begin{array}{r} 3x+4y=29 \\ 18x-4y=34 \\ \hline 21x=63 \end{array} \rightarrow \boxed{x=3}$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) εὑρίσκομεν διά $x=3$ $4y=29-9 \rightsquigarrow \boxed{y=5}$

556. $\{6x-11y+23=0,\ 5x+2y+8=0\}$, $\{y=3x+7,\ y=-2x+5\}$.

Λύσις.- I) $\left.\begin{array}{l} 6x-11y=-23 \\ 5x+2y=-8 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} -5 \\ 6 \end{array}\right. (1)\Big\} \rightarrow \begin{array}{r} -30x+55y=115 \\ 30x+12y=-48 \\ \hline 67y=67 \end{array} \rightsquigarrow \boxed{y=1}$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) λαμβάνομεν διά $y=1$

$5x = -10 \rightsquigarrow \boxed{x=-2}$

II) $\left.\begin{array}{l} y-3x=7 \\ y+2x=5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right. (1)\Big\} \rightarrow \begin{array}{r} -y+3x=-7 \\ y+2x=5 \\ \hline 5x=-2 \end{array} \rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{5}}$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) διά $x=-\frac{2}{5}$ λαμβάνομεν:

$y = 5 + 2\cdot\frac{2}{5} = 5 + \frac{4}{5} = \frac{29}{5} \rightsquigarrow \boxed{y=\frac{29}{5}}$

557 $\left\{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=20,\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=18\right\}$ $\left\{y=3-\frac{3}{4}x,\ x=4-\frac{4}{3}y\right\}$

Λύσις.- I) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=20 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=18 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} 1 \\ -2 \end{array}\right. (1)\Big\} \rightarrow \begin{array}{r} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=20 \\ -\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=-36 \\ \hline -\frac{1}{3}y=-16 \end{array} \rightsquigarrow \boxed{y=48}$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) διά $y=48$ λαμβάνομεν:

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\cdot 48=20 \rightsquigarrow \frac{1}{2}x=4 \rightsquigarrow \boxed{x=8}$

II) $\left.\begin{array}{l} y+\frac{3}{4}x=3 \\ \frac{4}{3}y+x=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{(1)} \left.\begin{array}{l} 4y+3x=12 \\ 4y+3x=12 \end{array}\right\} \quad y=\frac{12-3x}{4}$

Διά κάθε πραγματικήν τιμήν τοῦ x λαμβάνομεν μίαν πραγματικήν τιμήν διά τό y.

Ἄπειροι λύσεις $\left\{\begin{array}{l} x=t \text{ (αὐθαίρετος)} \\ y=\frac{12-3t}{4} \end{array}\right.$

558. $\{y=0,6(10-x),\ 3x+5y=15\}$, $\{x=\frac{2}{3}y+6,\ y=\frac{2}{3}x-4\}$

Λύσις.— I) $\left.\begin{array}{l} y+0,6x=6 \\ 5y+3x=15 \end{array}\right|\begin{array}{l} -5 \\ 1 \end{array} \xrightarrow{(1)} \begin{array}{l} -5y-3x=-30 \\ 5y+3x=15 \\ \hline 0.y+0.x=-15 \end{array}$ ἀδύνατον

II) $\left.\begin{array}{l} x-\frac{2}{3}y=6 \\ -\frac{2}{3}x+y=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x-2y=18 \\ -2x+3y=-12 \end{array}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}\right. \xrightarrow{(2)} \begin{array}{l} 6x-4y=36 \\ -4x+9y=-36 \\ \hline 5.y=0 \end{array} \rightsquigarrow \boxed{y=0}$

Διά $x=0$ ἡ πρώτη τῶν (2) γίνεται:

$3x=18 \rightarrow \boxed{x=6}$

559. $\left\{\frac{x+2}{3}-\frac{y-3}{2}=7,\ \frac{x+1}{10}-\frac{y+5}{4}=1\right\}$ $\left\{\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=-\frac{13}{2},\ \frac{x+2y}{4}-\frac{x-3y}{6}=\frac{1}{3}\right\}$

Λύσις.— I) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+2}{3}-\frac{y-3}{2}=7 \\ \frac{x+1}{10}-\frac{y+5}{4}=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x+4-3y+9=42 \\ 4x+4-10y-50=40 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x-3y=29 \\ 4x-10y=86 \end{array}\right\}\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array} (3)$

$\left.\begin{array}{l} -4x+6y=-58 \\ 4x-10y=86 \end{array}\right\}$
$\overline{-4y=28} \rightarrow \boxed{y=-7}$

Διά $y=-7$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (3) $2x=8 \rightsquigarrow \boxed{x=4}$

II) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=-\frac{13}{2} \\ \frac{x+2y}{4}-\frac{x-3y}{6}=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x+3y+2x-2y=-39 \\ 3x+6y-2x+6y=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 5x+y=-39 \\ x+12y=4 \end{array}\right|\begin{array}{l} 1 \\ -5 \end{array} (3)$

$$5x+y=-39$$
$$\underline{-5x-60y=-20}$$
$$-59y=-59 \rightsquigarrow \boxed{y=1}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (3) λαμβάνομεν διά $y=1$: $\boxed{x=-8}$

560 $\left\{\frac{6\alpha}{5}-\beta=6,\ 4\alpha-\frac{\beta}{3}=11\right\}$ (ἄγνωστοι α, β)

$$\left\{\frac{2}{2\alpha-\beta-3}=\frac{1}{2},\quad \frac{2}{6\alpha+\beta+1}=\frac{1}{3}\right\}$$

Λύσις.- I) $\left.\begin{array}{l}\frac{6\alpha}{5}-\beta=6\\ 4\alpha-\frac{\beta}{3}=11\end{array}\right\}$ (1) $\begin{array}{l}6\alpha-5\beta=30\\ 12\alpha-\beta=33\end{array}\left|\begin{array}{l}-2\\ 1\end{array}\right.$ (2) $\left\}\begin{array}{l}-12\alpha+10\beta=-60\\ \underline{12\alpha-\beta=33}\\ 9\beta=-27 \rightsquigarrow \boxed{\beta=-3}\end{array}\right.$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1) λαμβάνομεν διά $\beta=-3$

$$4\alpha=10 \rightsquigarrow \boxed{\alpha=\frac{5}{2}}$$

II) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{2\alpha-\beta-3}=\frac{1}{2}\\ \frac{2}{6\alpha+\beta+1}=\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2\alpha-\beta-3=4\\ 6\alpha+\beta+1=6\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}2\alpha-\beta=7\\ \underline{6\alpha+\beta=5}\end{array}\right\}$ (3)

$$8\alpha=12 \rightsquigarrow \boxed{\alpha=\frac{3}{2}}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (3) διά $\alpha=\frac{3}{2}$ λαμβάνομεν:

$$\beta=5-9=-4 \text{ ἤ } \boxed{\beta=-4}$$

561. $\left\{\frac{8+x}{5}-\frac{2x-y+1}{4}=3y-2,\ \frac{5y-6}{2}+\frac{4x+1}{6}=13-5x\right\}$

$$\{0{,}7x+0{,}3y=0{,}2,\quad 0{,}9x-0{,}4y=-0{,}8\}$$

Λύσις.- I) $\left.\begin{array}{l}\frac{8+x}{5}-\frac{2x-y+1}{4}=3y-2\\ \frac{5y-6}{2}+\frac{4x+1}{6}=13-5x\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}32+4x-10x+5y-5=60y-40\\ 15y-18+4x+1=78-30x\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightsquigarrow \begin{array}{l}+6x+55y=+67\\ 34x+15y=96\end{array}\left|\begin{array}{l}-34\\ 6\end{array}\right.$ (3) $\left\}\begin{array}{l}-34.\cancel{6x}-34.55y=-34.67\\ \underline{34.\cancel{6x}+15.6y=96.6}\end{array}\right.$

$$5(3.6-34.11)y=96.6-34.67$$
$$10(9-17.11)y=-1702 \rightsquigarrow y=\frac{851}{890}$$

Διά $y=\frac{851}{890}$ λαμβάνομεν $x=\frac{2565}{178}$

II) $\left.\begin{array}{l}0{,}7x+0{,}3y=0{,}2\\ 0{,}9x-0{,}4y=-0{,}8\end{array}\right\}\begin{array}{l}7x+3y=2\\ 9x-4y=-8\end{array}\left|\begin{array}{l}4\\ 3\end{array}\right.$ (2) $\left\}\begin{array}{l}28x+12y=8\\ \underline{27x-12y=-24}\\ 55x=-16 \rightsquigarrow \boxed{x=-\frac{16}{55}}\end{array}\right.$

ὅτε $\boxed{y=\frac{222}{165}}$

562. Προσδιορίσατε τούς συντελεστάς α, β οὕτως ὥστε τό σύστημα:

$$\begin{cases} (3\alpha+2\beta)x-(\alpha-1)y=4\alpha-3\beta+1 \\ (2\alpha+\beta-1)x+(\alpha+\beta-1)y=4\alpha-\beta+3 \end{cases}$$

νά δέχεται ὡς λύσιν τό ζεῦγος: $x=3$, $y=-3$.

Λύσις.- Πρέπει τό ζεῦγος $(3, -3)$ νά ἐπαληθεύη ἀμφοτέρας τάς ἐξισώσεις ἤτοι:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(3\alpha+2\beta).3-(\alpha-1).(-3)=4\alpha-3\beta+1 \\ &(2\alpha+\beta-1).3+(\alpha+\beta-1)(-3)=4\alpha-\beta+3 \end{aligned}$$

Αἱ (1) μετά τάς πράξεις καθίστανται:

$$(2) \qquad \{8\alpha+9\beta=4, \quad -\alpha+\beta=3\}$$

Ἡ δευτέρα τῶν (2) δίδει $\beta=\alpha+3$ καί δυνάμει τῆς ἀντικαταστάσεως αὐτῆς ἡ 1η γίνεται $8\alpha+9(\alpha+3)=4 \Rightarrow \alpha = -23/17$. Εὑρίσκομεν $\beta=(-23/17)+3=28/17$.

563. Ὑπολογίσατε τάς ἑπομένας ὁρίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$$

Λύσις.- I) $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 63-30=\boxed{33}$

II) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 8-24=\boxed{-16}$

III) $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 42-0=\boxed{42}$

IV) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0=\boxed{0}$

V) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -40+42=\boxed{2}$

564. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

$$\begin{cases} 5(x-y)-2x=3(x-5) \\ \dfrac{3x-6}{6}=\dfrac{4x-y-1}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4x+2}{3}+\dfrac{y-x}{4}=2x-1 \\ \dfrac{6y-2x}{3}-4y=3(x-y)+4 \end{cases}$$

Λύσις.- i) Ἀόριστον: $(x=t, y=3)$, t τυχών.
ii) ἀδύνατον.

565 Νά λυθῆ καί διερευνηθῆ κατά τάς τιμάς τοῦ λ τό σύστημα:

$$\begin{cases}(\lambda-1)x+2\lambda y+2=0\\ 2\lambda x+(\lambda-1)y-(\lambda-4)=0\end{cases}$$

Λύσις.— Ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\lambda\\ 2\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4\lambda^2=(\lambda-1+2\lambda)(\lambda-1-2\lambda)=-(3\lambda-1)(\lambda+1)$$

1) Ἐφ' ὅσον $(3\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0$, τό σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

2) Ἐάν $(3\lambda-1)(\lambda+1)=0$ τό σύστημα εἶναι ἀδύνατον ἤ ἀόριστον:

α) $\lambda=\frac{1}{3}$. Τό σύστημα καθίσταται: $\begin{cases}x-y=3\\ x-y=-5\end{cases}$ καί εἶναι προφανῶς ἀδύνατον (ἐξισώσεις ἀσυμβίβαστοι)

β) $\lambda=-1$. Το σύστημα καθίσταται: $\begin{cases}-2x-2y=-2\\ -2x-2y=-5\end{cases}$ ἤτοι πάλιν, ἀδύνατον.

66. *Νά διερευνηθῆ κατά τάς τιμάς τῆς παραμέτρου λ τό σύστημα:*
$\{(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-2(\lambda^3-1)=0,\quad (\lambda^2-1)x+(\lambda^2+1)y-2(\lambda^3-1)=0\}$

Λύσις.— Μία καί μόνον λύσις ὑπάρχει ὅταν καί μόνον ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν εἶναι $\neq 0$ ἤτοι: $(\lambda-1)(\lambda^2+1)-(\lambda+1)(\lambda^2-1)\neq$ $\neq 0$ ἤ $2\lambda-2\lambda^2\neq 0$ ἤ (1) $\lambda(1-\lambda)\neq 0$. Ὥστε αἱ μόναι τιμαί τοῦ λ δι' ἅς ὑπάρχει ἀνωμαλία, εἶναι αἱ μηδενίζουσαι τό πρῶτον μέλος τῆς (1): $\lambda=0$ καί $\lambda=1$. Διά $\lambda=0$ τό σύστημα καθίσταται: $\{-x+y=-2,\ -x+y=-2\}$ καί ἔχει προφανῶς ἀπείρους λύσεις: $\{x=k,\ y=k-2\}$ ὅπου k αὐθαίρετος. Διά $\lambda=1$ το σύστημα καθίσταται $0.x+2y=0,\ 0.x+2y=0\}$ καί πάλιν ἔχει ἀπείρους λύσεις: $\{x=k,\ y=0\}$ ὅπου k οἱοσδήποτε ἀριθμός.

67. *Νά ὁρισθοῦν τά μ καί ρ συναρτήσει τῶν α καί β οὕτως ὥστε τό σύστημα:*

$$\begin{cases}(3\mu-5\rho+\beta)x+(8\mu-3\rho-\alpha)y=1\\ (2\mu-3\rho+\beta)x+(4\mu-\rho)y=2\end{cases}$$

νά ἔχη ἀπείρους λύσεις·

Λύσις.— Διά νά ἔχωμεν ἀπείρους λύσεις ἀρκεῖ:

$\dfrac{3\mu-5\rho+\beta}{2\mu-3\rho+\beta}=\dfrac{8\mu-3\rho-\alpha}{4\mu-\rho}=\dfrac{1}{2}$ (συντελεσταί ἀνάλογοι, παρον/σταί $\neq 0$). Αἱ δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις γράφονται:

$\{4\mu-7\rho=-\beta\quad ,\ 12\mu-5\rho=2\alpha\}$. Ἀπαλείφοντες τό μ λαμβάνομεν : $\rho = \dfrac{2\alpha+3\beta}{16}$ καί δι' ἀντικαταστάσεως : $\mu = \dfrac{14\alpha-37\beta}{64}$.

568. Νά ὁρισθῇ ὁ μ οὕτως ὥστε αἱ τρεῖς ἐξισώσεις:

$(2\mu+5)x+(3\mu+1)y+3=0$, $(\mu+5)x+(2\mu+3)y-18=0$ καί $y-2x=0$,

νά ἔχουν κοινήν τινα λύσιν.

Λύσις.- Λύοντες τό σύστημα πού ἀποτελοῦν ἡ πρώτη καί ἡ τρίτη εὑρίσκομεν $\left\{x=-\dfrac{3}{8\mu+7}, \ y=-\dfrac{6}{8\mu+7}\right\}$. Ἀπαιτοῦμεν, ἡ λύσις αὐτή νά εἶναι καί λύσις τῆς δευτέρας δηλ:

$(\mu+5)\dfrac{-3}{8\mu+7}+(2\mu+3)\dfrac{-6}{8\mu+7}=18$. Ἐξ αὐτῆς ὁρίζεται τό μ.

Εὑρίσκομεν $\mu=-1$.

Νά λυθοῦν τά συστήματα:

569. $\begin{cases} 5x+y-4z=5 \\ 2x-3y-5z=2 \\ 7x+2y-6z=5 \end{cases}$

Λύσις.- Ἀπαλείφοντες τό y μεταξύ 1ης καί 2ας εὑρίσκομεν $x-z=1$. Ἀπαλείφοντες τό y μεταξύ 1ης καί 3ης εὑρίσκομεν $3x-2z=5$. Λύοντες τό σύστημα:

$\{x-z=1, \ 3x-2z=5\}$ εὑρίσκομεν $x=3$, $z=2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν πρώτην εὑρίσκομεν $y=-2$. Λύσις: $(3,-2,2)$.

570. $\begin{cases} 3x+y-4z=-1 \\ 5x+2y-4z=8 \\ 6x-7y=-23 \end{cases}$

Λύσις.— $x=2$, $y=5$, $z=3$.

571. $\begin{cases} x+y+z=16 \\ x-4y+3z=42 \\ x+6y+2z=14 \end{cases}$

Λύσις.- Ἄς λύσωμεν τό σύστημα διά τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$\left.\begin{array}{l} x=16-y-z \\ 16-y-z-4y+3z=42 \\ 16-y-z+6y+2z=14 \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} x=16-y-z \\ -5y+2z=26 \\ 5y+z=-2 \end{array}\right\} (2)$$

Διά προσθέσεως τῶν δύο τελευταίων ἐκ τῶν (2) κατά μέλη κ.τ.λ. λαμβάνομεν τήν τιμήν τοῦ z, ὅτε θέτοντες ταύτην εἰς μίαν τῶν δύο τελευταίων τῶν (2) λαμβάνομεν τό y, καί ἀκολούθως ἐκ τῆς πρώτης, τήν τιμήν τοῦ x.

$$3z = 24 \rightsquigarrow \boxed{z=8}$$
$$5y = -10 \rightsquigarrow \boxed{y=-2}$$
$$x = 16+2-8 = 10 \text{ ἤ } \boxed{x=10}$$

572. $\begin{cases} 12x+5y+2z=-1 \\ 7x+8y-3z=23 \\ 4x+3y+2z=1 \end{cases}$

Λύσις.— $x=-1$, $y=3$, $z=-2$

573 $\begin{cases} 2x+4y-z=-12 \\ 6x+5y+z=6 \\ 4x-y-z=1 \end{cases}$

Λύσις.— Μέθοδος ἀντικαταστάσεως:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-12+z-4y}{2} \\ 3\,(-12+z-4y)+5y+z &= 6 \\ 2\,(-12+z-4y)-y-z &= 1 \end{aligned}\right\}\ (1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{-12+z-4y}{2} \\ 4z-7y &= 42 \\ z-9y &= 25 \end{aligned}\right\}\ (2)$$

Τήν αὐτήν μέθοδον θά ἐφαρμόσωμεν καί εἰς τάς δύο τελευταίας τῶν (2) ὅτε:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{-12+z-4y}{2} \\ z &= 25+9y \\ 4(25+9y)-7y &= 42 \end{aligned}\right\}\ (3) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{-12+z-4y}{2} \\ z &= 25+9y \\ 29y &= -58 \end{aligned}\right\}\ (4)$$

Ἐκ τῶν (4) λαμβάνομεν διαδοχικῶς ἐκ τῆς τελευταίας πρός τήν πρώτην: $\boxed{y=-2}$ $\boxed{z=7}$ $\boxed{x=\frac{3}{2}}$

574. $\begin{cases} 2x-7y+5z=-14 \\ 9x-3y-6z=51 \\ 3x+4y+8z=-38 \end{cases}$

Λύσις.— $x=2$, $y=-1$, $z=-5$.

575 $\begin{cases} 6x+10y-13z=84 \\ 4x-2y+7z=18 \\ 9y-8z=56 \end{cases}$

Λύσις.— $x=5$, $y=8$, $z=2$.

576. $\begin{cases} 2x-3y+5z=12 \\ 3x+y+7z=-4 \\ 4x-4y+13z=16 \end{cases}$

Λύσις.— $x=0$, $y=-4$, $z=0$.

577. $\begin{cases} 12x+7y=109 \\ 5y-2z=11 \\ 3z+4x=26 \end{cases}$

Λύσις.— $\left.\begin{aligned} 12x+7y&=109 \\ 5y-2z&=11 \\ 3z+4x&=26 \end{aligned}\right\}$ (1) Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν: $x=\dfrac{109-7y}{12}$

Ἐκ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $z=\dfrac{5y-11}{2}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτην λαμβάνομεν:

$$3\left(\frac{5y-11}{2}\right)+4\left(\frac{109-7y}{12}\right)=26 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{15}{2}y-\frac{7}{3}y=26+\frac{33}{2}-\frac{109}{3} \longrightarrow \boxed{y=\frac{37}{31}}$$

$$\boxed{z=-\frac{78}{31}} \qquad \boxed{x=\frac{260}{31}}$$

578. $\begin{cases} \alpha^3+\alpha^2x+\alpha y+z=0 \\ \beta^3+\beta^2x+\beta y+z=0 \\ \gamma^3+\gamma^2x+\gamma y+z=0 \end{cases}$ ὅπου x, y, z οἱ ἄγνωστοι καὶ α, β, γ δεδομένοι ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο

Λύσις.— $\left.\begin{aligned} \alpha^2x+\alpha y+z&=-\alpha^3 \\ \beta^2x+\beta y+z&=-\beta^3 \\ \gamma^2x+\gamma y+z&=-\gamma^3 \end{aligned}\right\}$ (1) $\quad \left.\begin{aligned} \alpha^2x+\alpha y+z&=-\alpha^3 \\ \beta^2x+\beta y+z&=-\beta^3 \\ (\beta^2-\gamma^2)x+(\beta-\gamma)y&=-\beta^3+\gamma^3 \end{aligned}\right\}$ (2)

$\left.\begin{aligned} \alpha^2x+\alpha y+z&=-\alpha^3 \\ (\alpha^2-\beta^2)x+(\alpha-\beta)y&=-\alpha^3+\beta^3 \\ (\beta^2-\gamma^2)x+(\beta-\gamma)y&=-\beta^3+\gamma^3 \end{aligned}\right\}$ (3) $\quad \left.\begin{aligned} \alpha^2x+\alpha y+z&=-\alpha^3 \\ (\alpha+\beta)x+y&=-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \\ (\beta+\gamma)x+y&=-(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2) \end{aligned}\right\}$ (4)

$$\left.\begin{array}{l} a^2x+ay+z=-a^3 \\ (a+\beta)x+y=-(a^2+a\beta+\beta^2 \end{array}\right\} (5)$$

$\boxed{x=-(a+\beta+\gamma)}$

Ὥστε $\boxed{y=a\beta+\beta\gamma+\gamma a}$ καί $\boxed{z=-a\beta\gamma}$

579. $$\begin{cases} 2x+3y-970=0 \\ x-y+2z-355=0 \\ 2y-3z+t+50=0 \\ z-t-60=0 \end{cases}$$

Λύσις.- $x=125$, $y=240$, $z=235$, $t=175$.

580. $$\begin{cases} x+3y+5z+3u=34 \\ x+y+2z+u=13 \\ x+2y+5z+4u=36 \\ x+3y+8z+5u=51 \end{cases}$$

Λύσις.- $x=1$, $y=2$, $z=3$, $u=4$.

581. *Νά λυθῆ καί ἀκολούθως διερευνηθῆ κατά τάς τιμάς τῆς παραμέτρου μ τό σύστημα:*

$$\{\mu x+y+z=1, \quad x+\mu y+z=\mu, \quad x+y+\mu z=\mu^2\}$$

Λύσις.- Ἀπαλείφοντες τόν z, πρῶτον μεταξύ 1ης καί 2ας καί κατόπιν μεταξύ 1ης καί 3ης εὑρίσκομεν:

$$\{(\mu-1)x+(1-\mu)y=1-\mu, \quad (\mu^2-1)x+(\mu-1)y=\mu-\mu^2\}.$$

Τό ἀρχικόν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό

$$\begin{cases} x+\mu y+z=\mu \\ (\mu-1)x+(1-\mu)y=1-\mu \\ (\mu^2-1)x+(\mu-1)y=\mu-\mu^2 \end{cases}$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα μέ δύο ἀγνώστους. Ἄν τοῦτο ἔχη λύσιν (x_0, y_0) τότε καί τό δοθέν ἔχει λύσιν $x=x_0$, $y=y_0$, $z=\mu-x_0-\mu y_0$. Ἄν τό ἐν λόγῳ σύστημα μέ τούς δύο ἀγνώστους εἶναι ἀδύνατον ἤ ἀόριστον τότε καί τό ἀρχικόν εἶναι ἀδύνατον ἤ ἀόριστον. Ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \mu-1 & 1-\mu \\ \mu^2-1 & \mu-1 \end{vmatrix}=(\mu-1)^2+(\mu-1)(\mu^2-1)=(\mu-1)^2(\mu+2)$$

Θά ἔχωμεν λοιπόν μίαν μόνον λύσιν ὅταν $\Delta\neq 0$ ἤτοι:

$$(\mu-1)(\mu+2)\neq 0$$

'Εάν $\mu=-2$ εὑρίσκομεν ὅτι τό σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

'Εάν $\mu=1$ τό σύστημα καθίσταται:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0.x+0.y=0 \\ 0.x+0.y=0 \end{cases}$$

καί ἔχει διπλῆν ἀπειρίαν λύσεων:

$x=\xi$ (αὐθαίρετος)

$y=\eta$ (αὐθαίρετος)

$z=1-\xi-\eta$.

582. *Νά λυθῇ καί διερευνηθῇ κατά τάς τιμάς τῆς παραμέτρου μ τό σύστημα:*

$$\{x+2y+(\mu+3)z=8\ ,\ 2x+3y+(\mu+4)z=12\ ,\ 3x+(6\mu+5)y+7z=20\}.$$

Λύσις.– 'Εργαζόμενοι ὅπως εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν (τώρα ἀπαλείφομεν τό x) εὑρίσκομεν ὅτι:

'Εάν $\mu(3\mu+7)\neq 0$ τό σύστημα ἔχει μίαν καί μόνην λύσιν,

τήν $x=\dfrac{12(\mu+1)}{3\mu+7}$, $y=\dfrac{4}{3\mu+7}$, $z=\dfrac{12}{3\mu+7}$

'Εάν $\mu=-\frac{7}{3}$ τό σύστημα δέν ἔχει λύσιν.

'Εάν $\mu=0$ τό σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις μέ $z=$αὐθαίρετον, ἐνῶ οἱ δύο ἄλλοι ἄγνωστοι ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ z.

583. *Δώσατε τύπους παρέχοντας:*

i) τάς ἀπείρους λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x-y=15$

ii) τάς ἀπείρους λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{2x+2y+z=12,\ \ x-y+3z=15\}$$

Λύσις.– i) $y=t\Rightarrow x=\dfrac{15+t}{3}$. λύσεις: $\begin{cases} x=\dfrac{15+t}{3} \\ y=t \end{cases}$ $t=$αὐθαίρετος ἀριθμός.

ii) Τό σύστημα γράφεται:

$\{x+y=\dfrac{12-z}{2},\ \ x-y=15-3z\}$. Διά προσθέσεως καί δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη, λαμβάνομεν τό ἰσοδύναμον σύστημα:

$\{x=\dfrac{42-7z}{2}\ ,\ y=\dfrac{5z-18}{2}\}$. Προφανῶς δέ ἐπαληθεύεται μέ

$z=z_0$ (τυχόν), $x=\dfrac{42-7z_0}{2}$, $y=\dfrac{5z_0-18}{2}$.

584. $\left\{\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=48,\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=13\right\}$, $\left\{\frac{9}{x}+\frac{4}{y}=-3,\ \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=-\frac{1}{2}\right\}$.

Λύσις.- i) Θέτομεν : $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ καί μεταβαίνομεν εἰς τό σύστημα $\{4x'+5y'=48,\ 3x'-2y'=13\}$ ἐκ τοῦ ὁποίου $x'=7$ $y'=4$ καί $x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{1}{4}$. ii) Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν $x=-3/2$, $y=4/3$.

585. $\left\{2x+\frac{3}{y}=\frac{5}{3},\ 3x+\frac{2}{y}=\frac{5}{3}\right\}$, $\left\{\frac{6}{x}-\frac{y}{6}=1,\ \frac{10}{x}+\frac{y}{10}=2,8\right\}$

Λύσις.- i) $x=\frac{1}{3}$, $y=3$ ii) $x=4$, $y=3$.

586. $\left\{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=11,\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=5,\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}-\frac{2}{z}=7\right\}$.

Λύσις.- $\left\{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=11,\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=5,\ \frac{5}{x}-\frac{4}{y}-\frac{2}{z}=7\right\}$

Θέτομεν : $\left(\frac{1}{x}=x',\ \frac{1}{y}=y',\ \frac{1}{z}=z'\right)$ ὅτε λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{r|l} & x'+2y'+3z'=11 \\ -5 & 2x'-3y'+z'=5 \\ 2 & 5x'-4y'-2z'=7 \end{array}\ \begin{array}{l}-2\\ 1\end{array}\ (1)\quad \left.\begin{array}{r} -2x'-4y'-6z'=-22 \\ 2x'-3y'+z'=5 \\ \hline -7y'-5z'=-17 \end{array}\right\}\quad \begin{array}{r} -10x'+15y'-5z'=-25 \\ 10x'-8y'-4z'=14 \\ \hline 7y'-9z'=-15 \end{array}$$

Ὅτε ἔχομεν τό ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} x'+2y'+3z'=11 \\ -7y'-5z'=-17 \\ 7y'-9z'=-15 \end{array}\right\}(2)$$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\boxed{z'=\frac{16}{7} \rightsquigarrow z=\frac{7}{16}}$$

Ἐκ τῆς τρίτης τῶν (2) $\rightsquigarrow$ $\boxed{y'=\frac{39}{49} \rightsquigarrow y=\frac{49}{39}}$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (2) $\rightsquigarrow$ $\boxed{x'=\frac{125}{49} \rightsquigarrow x=\frac{49}{125}}$

587 $\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\ \frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-\frac{1}{6},\ \frac{2}{z}+\frac{1}{x}=1\right\}$.

Λύσις.- Θέτομεν $\left(\frac{1}{x}=x',\ \frac{1}{y}=y',\ \frac{1}{z}=z'\right)$ ὅτε ἔχομεν τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} x'-y'=\frac{1}{6} \\ y'-2z'=-\frac{1}{6} \\ 2z'+x'=1 \end{array}\right\}(1)$$

Προσθέτοντες τάς δύο πρώτας τῶν (1) λαμβάνομεν $x'-2z'=0$ (2). Προσθέτοντες τήν (2) μέ τήν τρίτην τῶν

(1) λαμβάνομεν : $x'+x'=1$ ἤ $2x'=1$ (3). Ὥστε ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) τῆς δευτέρας τῶν (1) καί τῶν (3) λαμβάνομεν τό ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left.\begin{array}{ll} x'-y'=\frac{1}{6} & \\ y'-2z'=-\frac{1}{6} & (4) \\ 2x'=1 & \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x'=\frac{1}{2} \rightsquigarrow x=2 \\ y'=\frac{1}{3} \rightsquigarrow y=3 \\ z'=\frac{1}{4} \rightsquigarrow z=4 \end{array}$$

588. $\left\{\frac{1}{4x}=\frac{1}{2y}=\frac{3}{4z}=\frac{1}{t}\ ,\quad x+y+z+t=10\right\}$.

Λύσις.- Δυνάμεθα νά γράψωμεν κατά σειράν:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{3}{4}}=\frac{t}{1}=\frac{x+y+z+t}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{9}+1}=\frac{1}{\frac{10}{4}}=\frac{2}{5} \Longrightarrow x=\frac{1}{10},\ y=\frac{1}{5},$$

$z=\frac{3}{10}$, $t=\frac{2}{5}$.

589. $\left\{\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}\ ,\quad 2x+3y-z=31\right\}$.

Λύσις-Δυνάμεθα νά θέσωμεν: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}=\lambda \Rightarrow x=3\lambda+1$, $y=4\lambda+2$, $z=5\lambda+3$ ὁπότε ἡ τελευταία γίνεται: $2(3\lambda+1)+3(4\lambda+2)-(5\lambda+3)=31 \Longrightarrow \lambda=2 \Rightarrow x=7$, $y=10$, $z=13$.

590. $\{2x+y=3xy\ ,\quad -x+3y=4xy\}$, (βλ. § 162, iii, β')

Λύσις.- Μία προφανής λύσις τοῦ συστήματος εἶναι ἡ $(x=0\ ,\ y=0)$. Βλέπομεν ὅτι λύσις μέ τόν ἕνα ἄγνωστον $=0$ καί τόν ἄλλον $\neq 0$ δέν ὑπάρχει. Μένει λοιπόν νά εὕρωμεν τάς λύσεις (x,y) μέ ἀμφοτέρους τούς ἀγνώστους $\neq 0$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη ἑκάστης τῶν δοθεισῶν διά xy μεταβαίνομεν εἰς τό σύστημα:

$\left\{\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=3\ ,\quad -\frac{1}{y}+\frac{3}{x}=4\right\}$ καί θέτοντες $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$

μεταβαίνομεν εἰς τό $\{x'+2y'=3\ ,\ 3x'-y'=4\}$ ἐξ οὗ

$x'=\frac{11}{7}$, $y'=\frac{5}{7} \Longrightarrow x=\frac{7}{11}$, $y=\frac{7}{5}$. Ὥστε ἔχομεν δύο λύσεις:

$(0,0)$ καί $\left(\frac{7}{11}\ ,\ \frac{7}{5}\right)$.

591. $\left\{\frac{y+z}{yz}=\frac{5}{18}\ ,\quad \frac{z+x}{zx}=\frac{13}{36}\ ,\quad \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12}\right\}$.

Λύσις.- Ἐάν ἕκαστον κλάσμα ἀναλυθῆ εἰς δύο λαμβάνομεν:

(2) $\frac{y+z}{yz} = \frac{y}{yz} + \frac{z}{yz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{13}{36}$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12}$

Θεωροῦμεν ὡς νέους ἀγνώστους τά $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, ἤτοι θέτομεν: $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{z} = z'$, ὁπότε τό (2) γράφεται:

(3) $z' + y' = \frac{5}{18}$, $x' + z' = \frac{13}{36}$, $x' + y' = \frac{5}{12}$.

Διά προσθέσεως τῶν (3) κατά μέλη, λαμβάνομεν

$$x' + y' + z' = \frac{19}{18}$$

καί προχωροῦμεν κατά τά γνωστά. Εὑρίσκομεν: $x = \frac{9}{7}$, $y = \frac{36}{25}$, $z = \frac{36}{23}$.

592. Δύο πόλεις Α καί Β ἀπέχουν 800 Km. Ὁ τόννος τοῦ ἄνθρακος τιμᾶται εἰς μέν τήν Α, 3700 δρχ. εἰς δέ τήν Β, 4675 δρχ., τά μεταφορικά δέ εἶναι κατά τόννον 1,80 δρχ. ἀνά Km. Νά ὁρισθῆ μεταξύ τῶν Α καί Β σημεῖον ὅπου ἡ ἀξία τοῦ ἄνθρακος νά εἶναι ἡ αὐτή εἴτε οὗτος ληφθῆ ἐκ τῆς Α εἴτε ἐκ τῆς Β.

Λύσις.- Τό ζητούμενον σημεῖον Γ ἔστω ὅτι ἀπέχει x Km ἀπό τήν Α (καί 800-x ἀπό τήν Β). Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $3700 + x \cdot 1{,}80 = 4675 + (800-x) \cdot 1{,}80$. Εὑρίσκομεν $x = \frac{24150}{36} = 670{,}8$ Km.

593. Νά εὑρεθῆ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις αὐξάνει κατά 270 ὅταν ἐναλλάξωμεν τά δύο πρῶτα ψηφία του, ἐλαττοῦται κατά 396 ὅταν ἐναλλάξωμεν τά ἀκραῖα ψηφία του, τέλος δέ ἐλαττοῦται κατά 63 ἄν ἐναλλάξωμεν τά δύο τελευταῖα ψηφία του.

Λύσις.- Ἐάν $xyz_{<10>}$ ὁ ἀριθμός θά ἔχωμεν σύμφωνα μέ τήν ἐκφώνησιν, τάς τρεῖς ἐξισώσεις: $\{100x + 10y + z + 270 = 100y + 10x + z$, $100x + 10y + z - 396 = 100z + 10y + x$, $100x + 10y + z - 63 = 100x + 10z + y\}$.

Τό ἀνωτέρω σύστημα γράφεται: (1) $\{x - y = -3,\ x - z = 4,\ y - z = 7\}$ καί ἰσοδυναμεῖ πρός σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων:

(2) $\{x - y = -3,\ x - z = 4\}$ διότι ἡ τρίτη τῶν (1) προκύπτει δι' ἀφαιρέσεως τῆς πρώτης ἀπό τῆς δευτέρας. Τό (2) ἔχει ἀπείρους λύσεις: (3) $\{y = x + 3,\ z = x - 4\}$ ὅπου x αὐθαίρετος. Ἐπειδή ὅμως τά x, y, z εἶναι ἀκέραιοι ἀπό 0 ἕως 9 εἶναι δεκταί μόνον αἱ ἑξῆς λύσεις:

$\{x=4, z=0, y=7\}$, $\{x=5, z=1, y=8\}$, $\{x=6, z=2, y=9\}$. Ἤτοι τό πρόβλημα ἔχει τρεῖς λύσεις, τούς ἀριθμούς 470, 581 καί 692.

594. *Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμός 25 διπλασιάζεται δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του;*
Λύσις.- Ἔστω x ἡ βάσις ἀριθμήσεως. Τότε $25_{\langle x\rangle}=5+2x$ καί $52_{\langle x\rangle}=2+5x$, πρέπει δέ $2+5x=2(5+2x)$. Ἄρα $x=8$.

595. *Νά εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός (τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος) ὅστις, ἄν ἀναστραφῇ παριστάνει τόν ἴδιον ἀριθμόν εἰς τό ἑπταδικόν σύστημα.*
Λύσις.- Πρέπει $xy_{\langle 10\rangle}=yx_{\langle 7\rangle}$ ἤ $y+10x=x+7y$ ἤ $9x=6y$, $3x=2y$, $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, $x=2\lambda$, $y=3\lambda$. Διά $\lambda=1$ ἔχομεν $x=2$, $y=3$ καί διά $\lambda=2$, $x=4$, $y=6$. Μεγαλυτέρας τιμάς δέν δύναται νά λάβῃ ὁ λ διότι ὑπάρχει ὁ περιορισμός $y<7$. Ὥστε ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί: 23 καί 46.

596. *Τρεῖς παῖκται Α, Β, Γ συμφωνοῦν ὅπως ὁ χάνων δίδει εἰς τούς ἄλλους, ὅσα ἔχει ἕκαστος. Κατ' ἀρχάς χάνει ὁ Α, κατόπιν ὁ Β καί τέλος ὁ Γ. Μετά ταῦτα ἕκαστος παίκτης ἔχει α δρχ. Ζητοῦνται τά ποσά πού εἶχεν ἕκαστος εἰς τήν ἀρχήν τοῦ παιγνιδίου.*
Λύσις.- Ἔστω ὅτι κατά τήν ἔναρξιν τοῦ παιγνιδίου, εἶχον ὁ Α, x δρχ., ὁ Β, y δρχ. καί ὁ Γ, z δρχ. Προφανῶς θά εἶναι $x+y+z=3\alpha$ (= ὅσα εἶχον ὅλοι μαζύ μετά τό τέλος τοῦ παιχνιδίου). Εἰς τό τέλος τοῦ πρώτου παιχνιδίου ὁ Α θά ἔχῃ $x-(y+z)=x-(3\alpha-x)=2x-3\alpha$. Εἰς τό τέλος τοῦ 2ου παιχνιδίου ὁ Α θά ἔχῃ $4x-6\alpha$ καί εἰς τό τέλος τοῦ 3ου, $8x-12\alpha$. Ἀλλά πρέπει $8x-12\alpha=\alpha$, συνεπῶς $x=\frac{13\alpha}{8}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τά y καί z.

597. *Δεξαμενή φέρει τρεῖς κρουνούς Α, Β, Γ. Ἄν καί οἱ τρεῖς χρησιμοποιηθοῦν ὡς κρουνοί παροχῆς ἡ δεξαμενή πληροῦται εἰς $2+\frac{6}{7}$ ὥρας ὅταν καί οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν. Ἐάν μόνον οἱ Α καί Γ ἀνοιχθοῦν χρειάζονται $3+\frac{3}{4}$ ὥρας διά νά πληρωθῇ ἡ*

δεξαμενή. Ἐάν οἱ Β καί Γ χρησιμοποιηθοῦν ὡς κρουνοί παροχῆς καί ὁ Α ὡς κρουνός ἀποχετεύσεως χρειάζονται $6+\frac{2}{3}$ ὧραι διά νά πληρωθῆ ἡ δεξαμενή. Νά εὑρεθῆ εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος κρουνός μόνος του πληροῖ τήν δεξαμενήν.

Λύσις.- Ἔστω ὅτι ὁ Α πληροῖ εἰς x ὥρας μόνος του τήν δεξαμενήν ἔχουσαν χωρητικότητα V κυβ. μέτρα. Τότε εἰς μίαν ὥραν θά παρέχῃ $\frac{V}{x}$ κυβ. μ. καί εἰς h ὥρας $h\frac{V}{x}$ κυβ. μ. Ὁμοίως, ἄν ὁ Β πληροῖ εἰς y ὥρας, μόνος του τήν δεξαμενήν, ἕπεται ὅτι εἰς h ὥρας θά παρέχῃ $h\frac{V}{y}$ καί ὁ Γ, ὁμοίως, $h\frac{V}{z}$. Τά τρία δεδομένα τοῦ προβλήματος παρέχουν τάς τρεῖς ἐξισώσεις:

$$\frac{20}{7}\cdot\frac{V}{x}+\frac{20}{7}\cdot\frac{V}{y}+\frac{20}{7}\cdot\frac{V}{z}=V, \quad \frac{15}{4}\cdot\frac{V}{x}+\frac{15}{4}\cdot\frac{V}{z}=V$$

$-\frac{20}{3}\cdot\frac{V}{x}+\frac{20}{3}\cdot\frac{V}{y}+\frac{20}{3}\cdot\frac{V}{z}=V$. Οὕτω λαμβάνομεν τό σύστημα:

$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{20},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{15},\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{20}\right\}$ ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν εὐκόλως τά $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ καί κατόπιν τά x, y, z. Εὑρίσκομεν $x=10$ ὥρ., $y=12$ ὥρ., $z=6$ ὥρ.

598. *Πόσα μέρη βάρους καθαροῦ ψευδαργύρου καί πόσα μέρη βάρους καθαροῦ χαλκοῦ θά πρέπῃ νά προστεθοῦν εἰς 150 μέρη βάρους μίγματος περιέχοντος 25% ψευδάργυρον καί 35% χαλκόν διά νά δώσουν μίγμα περιέχον 31⅓ % ψευδάργυρον καί 40% χαλκόν.*

Λύσις.- Τό μίγμα περιέχει $\frac{25}{100}\cdot 150=37{,}5$ μέρη καθαροῦ ψευδαργύρου καί $\frac{35}{100}\cdot 150=52{,}5$ μέρη καθαροῦ χαλκοῦ. Ἔστω τώρα ὅτι προσθέτομεν x μέρη ψευδαργύρου καί y χαλκοῦ. Τότε τό ὅλον μίγμα θά γίνῃ $150+x+y$ μέρη ἐξ ὧν τά $37{,}5+x$ θά εἶναι ψευδάργυρος καί τά $52{,}5+y$ θά εἶναι χαλκός. Ἑπομένως ἡ ἀναλογία τοῦ ψευδαργύρου ἐπί τοῖς 100 θά εἶναι $\frac{37{,}5+x}{150+x+y}\cdot 100$ καί τοῦ χαλκοῦ $\frac{52{,}5+y}{150+x+y}\cdot 100$. Σύμφωνα μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν:

$$(1)\quad \frac{37{,}5+x}{150+x+y}\cdot 100=\frac{100}{3}, \quad \frac{52{,}5+y}{150+x+y}\cdot 100=40.$$

Μένει νά λυθῆ τό πρωτοβάθμιον σύστημα (1) διά νά καθορισθοῦν οἱ ἄγνωστοι x καί y. Εὑρίσκομεν $x = y = 37,5$ μέρη.

599. Ἀλώπηξ καταδιώκει λαγόν. Ὁ λαγός ἀπέχει 50 βήματα ἀλώπεκος ἀπό τήν ἀλώπεκα. Πόσα βήματα θά κάνη ὁ λαγός μέχρις ὅτου τόν φθάση ἡ ἀλώπηξ ἐάν ὁ λαγός κάνει 5 βήματα καθ' ὅν χρόνον ἡ ἀλώπηξ κάνει 4, ἀλλά 2 βήματα ἀλώπεκος εἶναι ἰσοδύναμα μέ 3 βήματα λαγοῦ;

Λύσις.- Ἄς λάβωμεν ὡς μονάδα χρόνου τόν χρόνον καθ'ὅν ἡ ἀλώπηξ κάνει 1 βῆμα καί ὡς μονάδα μήκους, τό βῆμα τῆς ἀλώπεκος. Τότε διά νά ἐπέλθῃ συνάντησις, πρέπει ἡ διαφορά τῶν διανυθέντων διαστημάτων ἀλώπεκος καί λαγοῦ νά εἶναι 50. Ἐάν ἡ συνάντησις γίνῃ μετά χρόνον t τότε ἐπειδή εἰς χρόνον 4 ὁ λαγός κάμνει 5 βήματα, εἰς χρόνον t θά κάνη $\frac{5t}{4}$ βήματα, μήκους $\frac{2}{3}$ ἕκαστον, ἄρα θά διανύσῃ $\frac{5t}{4}\cdot\frac{2}{3}$. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $t-\frac{5t}{4}\cdot\frac{2}{3}=50$ ἐπομένως $t=300$. Ὥστε ὁ λαγός θά κάνῃ $\frac{5t}{4}=\frac{5\cdot 300}{4}=375$ βήματα.

600. Ἔχομεν ὡς δεδομένον ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρός τό τετράγωνον τοῦ βάρους του δηλ. ἡ ἀξία A εἶναι συνάρτησις τοῦ βάρους B, τῆς μορφῆς: $A = KB^2$ ὅπου K σταθερός συντελεστής. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἀδάμαντος βάρους ἑνός καρατίου ὅταν τρία χρυσᾶ δακτυλίδια ἰσοβαρῆ, φέροντα ἀδάμαντας τριῶν, τεσσάρων καί πέντε καρατίων ἀντιστοίχως στοιχίζουν α, β, γ δρχ. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐργασία διά τήν κατασκευήν των στοιχίζει τό ἴδιο καί διά τά τρία καί ὅτι ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπό καθαρόν χρυσόν καί ἕνα ἀδάμαντα.

Λύσις.- Ἔστω x δρχ. ἡ ἀξία ἀδάμαντος βάρους ἑνός καρατίου. Τότε ἀδάμας βάρους 2 καρατίων θά στοιχίζῃ 4x δρχ. καί 3 καρατίων, 9x δρχ. Ἔστω ἀκόμη y ἡ ἀξία χρυσοῦ, βάρους 1 καρατίου, B καράτια τό κοινόν βάρος τῶν τριῶν δακτυλιδίων καί A δρχ. ἡ ἀξία κατασκευῆς ἑκάστου. Τότε τό πρῶτον δακτυλίδι θά στοιχίζῃ $x+(B-1)y+A$, τό 2ον $4x+(B-2)y+A$ καί τό 3ον $9x+(B-3)y+A$. Ὥστε θά ἔχωμεν τό σύστημα $\{x+(B-1)y+A=\alpha,\ 4x+(B-2)y+A=\beta,\ 9x+(B-3)y+A=\gamma\}$

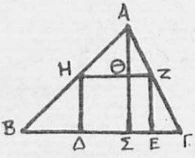
Δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη λαμβάνομεν : $\{-3x+y=α-β\ ,\ -5x+y=β-γ\}$ καί διά νέας ἀφαιρέσεως : $2x=α-2β+γ$, $x=\dfrac{α-2β+γ}{2}$.

601. Τριγώνου δίδονται αἱ πλευραί α, β καί ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐπί ταύτας ὑψῶν ἰσοῦται πρός τό τρίτον ὕψος. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρά. Ποία ἡ συνθήκη δυνατότητος;
Λύσις.- Ἐάν Ε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου, ἡ σχέσις $υ_α+υ_β=υ_γ$ γράφεται:

$$\frac{2E}{α}+\frac{2E}{β}=\frac{2E}{γ} \quad ἤ \quad \frac{1}{α}+\frac{1}{β}=\frac{1}{γ}\ ,\ \boxed{γ=\frac{αβ}{α+β}}$$

Περιορισμός $|α-β|<γ<α+β$ ἤ $|α-β|<\dfrac{αβ}{α+β}<α+β$ ἤ $\underline{|α^2-β^2|<αβ<(α+β)^2}$

602. Ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις ΒΓ=α καί τό ἐπ' αὐτήν ὕψος h. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τό τρίγωνον καί ἔχοντος περίμετρον 2τ. Ἡ μία πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου δέον νά κεῖται ἐπί τῆς ΒΓ, ὁλόκληρον δέ τό ὀρθογώνιον νά περιέχηται ἐντός τοῦ τριγώνου. Διερεύνησις.
Λύσις.- Ἔστω ΔΕΗΖ τό ζητούμενον ὀρθογώνιον ὅπου ΗΖ=x, ΕΖ=y. Κατά τό πρόβλημα θά ἔχωμεν
(1) $x+y=τ$ ἐκ δέ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΗΖ καί ΑΒΓ : $\dfrac{ΗΖ}{ΒΓ}=\dfrac{ΑΘ}{ΑΙ}$ ἤ $\dfrac{x}{α}=\dfrac{h-y}{h}$ καί (2) $x=\dfrac{α(h-y)}{h}$. Δυνάμει



τῆς (2) καί ἡ (1) γίνεται $\dfrac{α(h-y)}{h}+y=τ$ ἤ $αh-αy+hy=hτ$ ἤ $y(h-α)=h(τ-α)$. Ὑποθέτοντες $h-α\neq α$ εὑρίσκομεν $y=\dfrac{h(τ-α)}{h-α}$ καί κατόπιν $x=τ-y=τ-\dfrac{h(τ-α)}{h-α}=\dfrac{α(h-τ)}{h-α}$. Διά νά περιέχηται τό ὀρθογώνιον ἐντός τοῦ τριγώνου πρέπει καί ἀρκεῖ τό y νά εἶναι $<h$ καί θετικόν δηλ. $0<y<h$ ἤ (3) $0<\dfrac{h(h-τ)}{h-α}<h$,

ἤ $-h<-\tau<-a$ ἤ $\boxed{a<\tau<h}$. II. Ἐάν $h-a<0$ ἤ (3) δίδει, ὁμοίως $\boxed{h<\tau<a}$. Ὥστε ἐν πάσῃ περιπτώσει, διά νά ὑπάρχῃ λύσις πρέπει: «ὁ τ νά περιέχηται μεταξύ a καί h».

603. *Εἰς τήν ἄσκ. 75 νά εὑρεθῇ μετά πόσον χρόνον τά κινητά θά συναντηθοῦν διά πρώτην φοράν;*

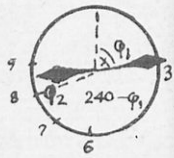
Λύσις.- Διά πρώτην φοράν θά συναντηθοῦν ὅταν ἡ διαφορά τῶν διανυθέντων διαστημάτων ἰσοῦται μέ τό μῆκος S μιᾶς περιφερείας. Ἔστω ὅτι τοῦτο θά συμβῇ μετά t ὥρας. Τό πρῶτον, εἰς t ὥρας διανύει $\frac{St}{72}$ ἐνῶ τό δεύτερον $\frac{St}{108}$. Ὥστε διά τήν πρώτην συνάντησιν πρέπει $\frac{St}{72}-\frac{St}{108}=S$ καί $t=216$ ὥρας. β) Ἐάν ἐπανήρχοντο εἰς τό Α συγχρόνως μετά χρόνον t, θά ἔπρεπε καί τά δύο νά ἔχουν διανύσῃ ἕκαστον ἀκέραιον ἀριθμόν περιφερειῶν, ἔστω K περιφερείας τό πρῶτον καί Λ τό δεύτερον ὥστε τά διανυθέντα διαστήματα $\upsilon_1 t$ καί $\upsilon_2 t$ θά εἶχον λόγον: $\upsilon_1 t/\upsilon_2 t = K/\Lambda$ ἤτοι $\upsilon_1/\upsilon_2 = K/\lambda$. Τοῦτο εἶναι ἀδύνατον διότι K/Λ = σύμμετρος καί υ_1/υ_2 = ἀσύμμετρος.

604. *Ποίαν χρονικήν στιγμήν μεταξύ 8ης καί 9ης οἱ δεῖκται ἑνός ὡρολογίου συμπίπτουν; Πότε δεικνύουν πρός ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα;*

Λύσις.- α) Εἰς τάς 8 ὥρας ἀκριβῶς, οἱ δύο δεῖκται σχηματίζουν γωνίαν 240° (Σχ.1). Ὅταν, μετά t min, συμπέσουν, ἡ διαφορά τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας θά ἔχουν διανύσῃ μετά τήν 8ην ὥραν, θά εἶναι 240° ἤτοι $\varphi_1-\varphi_2=240^\circ$. Ὁ λεπτοδείκτης διαγράφει 360° εἰς 60 min ἄρα εἰς 1 min διαγράφει 6° καί εἰς t λεπτά, $6t^\circ$, ὥστε $\varphi_1=6t^\circ$. Ὁ ὡροδείκτης εἰς 60 min διαγράφει γωνίαν 30° καί εἰς 1 λεπτόν $\frac{1}{2}^\circ$ εἰς δέ t λεπτά $\frac{t^\circ}{2}$. Ὥστε $\varphi_2=\frac{t}{2}$. Συνεπῶς ἡ $\varphi_1-\varphi_2=240^\circ$ γίνεται $6t-\frac{t}{2}=240$ καί $t=\frac{480}{11}$ λεπτά. Ὥστε ἡ σύμπτωσις θά γίνῃ εἰς τάς 8 ὥρ., 43 λεπτά καί 38,2 δευτερ.

Σχ. 1.

β) Διά διά δεικνύουν πρός ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα πρέπει μεταξύ τῶν γωνιῶν φ_1, φ_2 τάς ὁποίας θά ἔχουν δια-

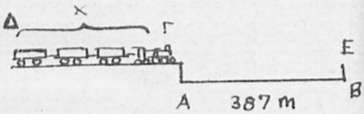


Σχ.2

γράψη νά ἰσχύῃ (ὅπως φαίνεται εἰς τό σχ.2) ἡ σχέσις $\varphi_2 + 240^\circ - \varphi_1 = 180^\circ$ ἤ $\varphi_1 - \varphi_2 = 60^\circ$, ἥτις γίνεται $6t - \frac{t}{2} = 60$ καί δίδει $t = \frac{120}{11}$ λεπτά. Ὥστε τοῦτο θά συμβῇ εἰς τάς 8 ὥρ. 10 λεπτά, 54'',5.

605. *Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καί τό μῆκος ἁμαξοστοιχίας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι χρειάζεται 7 sec διά νά διέλθῃ πρό ἀκινήτου παρατηρητοῦ καί 25 sec διά νά διασχίσῃ σταθμόν μήκους 387 m.*

Λύσις.- Ἔστω υ m/sec ἡ ταχύτης καί x μέτρα τό μῆκος τῆς ἁμαξοστοιχίας. Διά νά διέλθῃ πρό τοῦ A πρέπει τό Δ (βλ. σχῆμα) νά διανύσῃ διάστημα x καί διά νά διασχίσῃ τόν σταθμόν AB πρέπει τό Δ νά διανύσῃ διάστημα



ΔΓ + AB = x + 387. Θά ἔχωμεν λοιπόν τάς ἐξισώσεις $\{x = \upsilon . 7,\ x + 387 = \upsilon . 25\}$ ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τά x καί υ.

606. *Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τήν 8 π.μ. καί φθάνει εἰς Θεσσαλονίκην τήν 10 μ.μ. Μία ἄλλη ἀναχωρεῖ ἐκ Θεσσαλονίκης τήν 12ην μεσημβρινήν καί φθάνει εἰς Ἀθήνας τό μεσονύκτιον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν θά συναντηθοῦν ἄν ὅλη ἡ ἀπόστασις εἶναι 500 Km, ἀμφότεραι δέ αἱ ἁμαξοστοιχίαι κινοῦνται μέ σταθεράς ταχύτητας;*

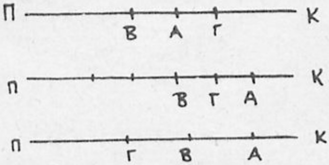
Λύσις.- Ἡ ταχύτης τῆς πρώτης ἁμαξοστοιχίας εἶναι: $\upsilon_1 = \frac{500}{14} = \frac{250}{7}$ Km/h, τῆς δέ δευτέρας $\upsilon_2 = \frac{500}{12} = \frac{125}{3}$ Km/h.

Ἐάν συνηντήθησαν t ὥρας μετά τήν ἀναχώρησιν τῆς πρώτης, τότε ἡ μέν πρώτη ἐκινήθη ἐπί t ὥρας, ἡ δέ δευτέρα ἐπί t − 4 ὥρας ἄρα διήνυσαν διαστήματα $\upsilon_1 t$ καί $\upsilon_2(t-4)$ ἔχοντα ἄθροισμα 500 Km. Ὥστε: $\upsilon_1 t + \upsilon_2(t-4) = 500$ καί $t = \frac{500 + 4\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{112}{13}$ ὥρας. Ἡ ἀπόστασις σημείου συναντήσεως ἀπό τῶν Ἀθηνῶν θά εἶναι:

$$v_1 t = \frac{250}{7}\cdot\frac{112}{13}\ Km = 30{,}7\ Km.$$

07. Δύο ποδηλάται Α καί Β διανύουν τό μεταξύ δύο πόλεων Π καί Κ διάστημα ἐκ 405 Km ἀναχωροῦντες ἀπό τήν Π ἐνῷ συγχρόνως μέ αὐτούς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Κ κατευθυνόμενος πρός τήν Π τρίτος ποδηλάτης Γ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι: 1ον) μετά 9 ὥρας ὁ Α ἰσαπέχει τῶν Β καί Γ, 2ον) μετά 10 ὥρας ὁ Γ ἰσαπέχει τῶν Α καί Β, 3ον) ὅτι ὁ Α διανύει εἰς 30΄ ὅσον ὁ Β εἰς 36΄, νά εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἰς Km/h (ὑποτιθέμεναι σταθεραί) ὡς καί μετά πόσας ὥρας (ἀπό τῆς ἐκκινήσεως) ὁ Β θά ἰσαπέχῃ τῶν Α καί Γ.

Λύσις.– Ἔστωσαν v_A, v_B, v_Γ αἱ ταχύτητες τῶν Α, Β, Γ (εἰς Km/h). Μετά 9 ὥρας θά εἶναι:



ΒΑ = ΑΓ ἤ ΠΑ − ΠΒ = ΠΓ − ΠΑ ἤ 2ΠΑ = ΠΒ + ΠΓ ἤ ἀκόμη 2ΠΑ = = ΠΒ + 405 − ΚΓ δηλ.

(1) $2\cdot v_A\cdot 9 = v_B\cdot 9 + 405 - v_\Gamma\cdot 9$.

Μετά 10 ὥρας θά εἶναι ΒΓ = ΓΑ ἤ 2ΠΓ = ΠΒ + ΠΑ ἤ 2(405 − ΚΓ) = ΠΒ + ΠΑ δηλ.

(2) $2(405 - 10v_\Gamma) = 10v_B + 10v_A$.