21

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ — Γ. Δ. ΜΠΙΛΛΗ — Δ. Θ. ΤΣΑΚΑΡΙΣΙΑΝΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ - ΧΗΜΙΚΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Β'

ΠΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ • 1956

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ - Γ. Δ. ΜΠΙΛΛΗ - Δ. Θ. ΤΣΑΚΑΡΙΣΙΑΝΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ - ΧΗΜΙΚΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Β΄

ΟΠΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ
ΔΙΑ ΤΑΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

*

ΑΘΗΝΑΙ
1956

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ κ. Γ. Μπίλλη.

ΟΠΤΙΚΗ

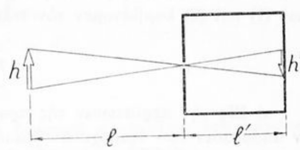
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΔΙΑΔΟΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τῆς ὀπῆς σκοτεινοῦ θαλάμου, ἔχοντος σχῆμα κύβου μὲ πλευρὰν 20 cm, τίθεται κηρίον. Ἐὰν τὸ ὕψος τῆς φλογὸς εἶναι 2 cm, ποῖον τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου αὐτῆς;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν h, h', τὰ ὕψη τῆς φλογὸς καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτῆς καὶ l, l' τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τῆς ὀπῆς τοῦ σκοτεινοῦ θαλάμου, τότε, ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τοῦ σχήματος, ἔχομεν



$$\frac{h}{h'} = \frac{l}{l'}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$h' = h \cdot \frac{l'}{l}.$$

Δίδονται: $h = 2\ cm$, $l = 50\ cm$, $l' = 20\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$h' = 0{,}8\ cm.$$

Ἄσκησις 2α. *Ἡ ἀπόστασις τῶν κατόπτρων εἰς τὴν μέθοδον Fizeau εἶναι 10 km, ὁ δὲ χρησιμοποιούμενος τροχὸς ἔχει 800 ὀδόντας. Μὲ ποίαν συχνότητα πρέπει νὰ στρέφεται ὁ τροχός, ἵνα ἡ ἐπιστρέφουσα ἀκτὶς διέρχεται διὰ τοῦ ἀμέσως ἑπομένου διακένου;*

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον τῆς παραγράφου 5, β τοῦ Β΄ τόμου ἔχομεν

$$c = 2l \cdot N \cdot n,$$

ἔνθα c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός, l ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατόπτρων, N ὁ ἀριθμὸς ὀδόντων τοῦ τροχοῦ καὶ n ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ. Λύοντες ὡς πρὸς n τὴν ἄνω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$n = \frac{c}{2l \cdot N}.$$

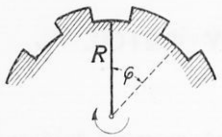
Δίδονται: $c = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$, $l = 10\ km = 10^{6}\ cm$, $N = 800$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$n = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^{6} \cdot 800}\ \frac{cm \cdot sec^{-1}}{cm} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 10^{8}}\ sec^{-1}.$$

ἢ $n = \frac{300}{16}\ sec^{-1}$ ἢ $n = 18{,}75\ sec^{-1}$.

Ἄσκησις 3η. *Τί θὰ συμβῇ κατὰ τὸ πείραμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως (2) ἐὰν α) διπλασιάσωμεν τὴν μεταξὺ τῶν κατόπτρων ἀπόστασιν, β) διπλασιάσωμεν τὴν συχνότητα περιστροφῆς τοῦ τροχοῦ καὶ γ) ὑποδιπλασιάσωμεν τὴν ἀπόστασιν ἢ τὴν συχνότητα ;*

Λύσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τὸ φῶς, ἐπιστρέφον μετὰ τὴν ἀνάκλασίν του ἐπὶ τοῦ κατόπτρου, συναντᾷ τὸ ἑπόμενον διάκενον. Ὁ πρὸς τοῦτο ἀπαιτηθεὶς χρόνος t εἶναι ἴσος πρὸς



$$t = \frac{2l}{c} \qquad (1)$$

ἔνθα l εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ τροχοῦ ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου ἡ ἀκτὶς R τοῦ τροχοῦ περιστρέφεται κατὰ γωνίαν φ, ἴσην πρὸς

$$\varphi = \omega \cdot t = 2\pi n \cdot t \qquad (2)$$

ἔνθα ω καὶ n εἶναι ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἡ συχνότης τοῦ τροχοῦ. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\varphi = \frac{4\pi n \cdot l}{c}. \qquad (3)$$

α) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἡ γωνία φ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀπόστασιν δύο διαδοχικῶν διακένων. Ἐάν, τώρα, διπλασιασθῇ ἡ ἀπόστασις l θὰ διπλασιασθῇ — κατὰ τὸν τύπον (3) — καὶ ἡ γωνία φ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ φῶς, ἐπιστρέφον, θὰ συναντήσῃ τὸ μεθεπόμενον διάκενον.

β) Ἀπὸ τὸν τύπον (3) προκύπτει ὅτι, ἐὰν διατηροῦντες τὴν ἀπόστασιν l σταθεράν, διπλασιάσωμεν τὴν συχνότητα n τοῦ τροχοῦ, ἡ γωνία φ διπλασιάζεται. Ἑπομένως τὸ φῶς, ἐπιστρέφον, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μεθεπομένου διακένου.

γ) Ἀπὸ τὸν αὐτὸν τύπον (3) προκύπτει ὅτι, ἐὰν ὑποδιπλασιασθῇ ἡ ἀπόστασις l ἢ ἡ συχνότης n, ἡ γωνία φ ὑποδιπλασιάζεται καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ φῶς, κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του, θὰ συναντήσῃ τὸν ἀμέσως ἑπόμενον ὀδόντα καί, συνεπῶς, τὸ φῶς δὲν θὰ φθάσῃ εἰς τὸν παρατηρητήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

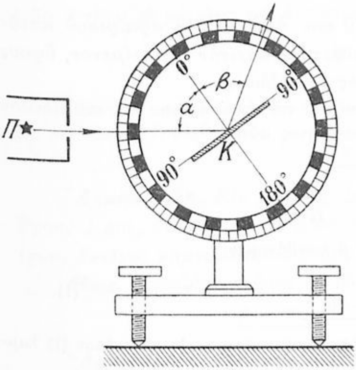
ΑΝΑΚΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Κατηγορία Α΄

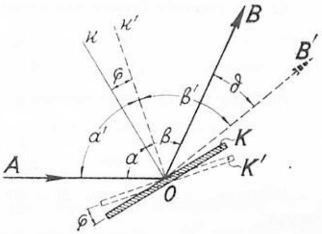
Ἄσκησις 1η. *Ἐὰν εἰς τὴν συσκευὴν τοῦ σχήματος τῆς σ. 5 τὸ κάτοπτρον K στραφῇ κατὰ γωνίαν 3^0, ποίαν γωνίαν θὰ σχηματίζῃ ἡ νέα ἀνακλωμένη ἀκτὶς μετὰ τῆς παλαιᾶς ;*

Λύσις. Ἔστω K τὸ κάτοπτρον εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν καὶ κ ἡ ἐπ' αὐτὸ κάθετος. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κατόπτρου προσπέσῃ ἡ ἀκτὶς AO, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως α, αὐτὴ θ' ἀνακλασθῇ κατὰ τὴν OB, σχηματίζουσαν τὴν γωνίαν ἀνακλάσεως β. Ἐάν, τώρα, στρέψωμεν τὸ κάτοπτρον κατὰ τὴν γωνίαν φ καὶ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν θέσιν

K', τότε καὶ ἡ κάθετος $\varkappa$ θὰ στραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ καὶ θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν $\varkappa'$, ὁπότε ἡ νέα ἀνακλωμένη ἀκτὶς OB' θὰ σχηματίζῃ μετὰ τῆς OB τὴν γωνίαν ϑ. Ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος ἡ γωνία ϑ εἶναι ἴση πρὸς



$$\vartheta = \alpha' + \beta' - (\alpha + \beta).$$



Ἐπειδή, κατὰ τὸν νόμον τῆς ἀνακλάσεως, εἶναι

$$\alpha = \beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha' = \beta'$$

ἡ ἄνω σχέσις γράφεται

$$\vartheta = 2\cdot(\alpha' - \alpha).$$

Ὅπως, ὅμως, προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος ἡ διαφορὰ $\alpha' - \alpha$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν φ, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐστράφη τὸ κάτοπτρον. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\underline{\vartheta = 2\varphi.}$$

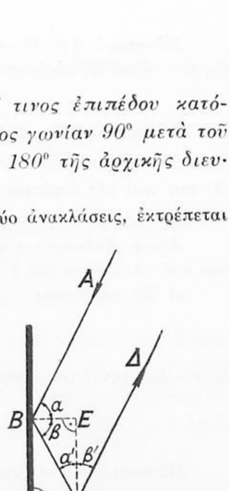
Δίδεται : $\varphi = 3^0$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\vartheta = 6^0.}$$

Ἄσκησις 2α. *Φωτεινὴ ἀκτὶς ἀνακλᾶται ἐπί τινος ἐπιπέδου κατόπτρου καί, ἐν συνεχείᾳ, ἐπὶ δευτέρου, σχηματίζοντος γωνίαν 90° μετὰ τοῦ πρώτου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς ἐκτρέπεται κατὰ 180° τῆς ἀρχικῆς διευθύνσεως.*

Λύσις. Διὰ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς AB, μετὰ τὰς δύο ἀνακλάσεις, ἐκτρέπεται κατὰ 180^0, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἀκτῖνες AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι. Πρὸς τοῦτο πρέπει ν' ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ γωνίαι $(\alpha+\beta)$ καὶ $(\alpha'+\beta')$ εἶναι παραπληρωματικαὶ (ἔχουν δηλ. ἄθροισμα 180^0). Ἤτοι

$$(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = 180^0.$$



Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ ἐκ τοῦ νόμου τῆς ἀνακλάσεως εἶναι

$$\alpha = \beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha' = \beta'$$

τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $(\alpha + \beta)$ καὶ $(\alpha' + \beta')$ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = 2\beta + 2\alpha' = 2\cdot(\beta + \alpha').$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $BE\Gamma$ προκύπτει ὅτι

$$\beta + \alpha' = 90^0,$$

ὁπότε ἔχομεν

$$(\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = 180^0.$$

Ἄσκησις 3η. *Εἰς ἀπόστασιν 120 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 60 cm, τίθεται φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 15 cm. Ζητεῖται ἡ θέσις καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου.*

Λύσις. Καλοῦμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ R τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος αὐτοῦ.

α) Ὡς γνωστὸν ἔχομεν τὸν τύπον

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot R}{2\alpha - R}}. \qquad (1)$$

Δίδονται: $\alpha = 120\ cm$, $R = 60\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = 40\ cm.}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ ὕψος τοῦ ἀντικειμένου καὶ E τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου ἔχομεν

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς E λαμβάνομεν

$$\underline{E = A \cdot \frac{\beta}{\alpha}}. \qquad (2)$$

Δίδονται: $A = 15\ cm$, $\alpha = 120\ cm$, εὕρομεν δὲ $\beta = 40\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 5\ cm.}$$

Ἄσκησις 4η. *Φλὸξ κηρίου ἔχει ὕψος 2 cm καὶ εὑρίσκεται καθέτως ἐπὶ τὸν κύριον ἄξονα κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 30 cm καὶ εἰς ἀπόστασιν 40 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς του. Ζητεῖται α) ἡ ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ β) τὸ μέγεθος αὐτοῦ.*

Λύσις. Καλοῦμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ f τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ.

α) Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

ἔχομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου:

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}}. \qquad (1)$$

Δίδονται: $\alpha = 40\ cm$, $f = 30\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = 120\ cm.}$$

β) Τὸ μέγεθος E τοῦ εἰδώλου θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha},$$

ἔνθα A εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου. Ἤτοι εἶναι

$$\underline{E = A \cdot \frac{\beta}{\alpha}}. \qquad (2)$$

Δίδονται: $A = 2\ cm$, $\alpha = 40\ cm$, εὕρομεν δὲ $\beta = 120\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 6\ cm.}$$

Ἄσκησις 5η. *Εἰς ποίαν θέσιν σχηματίζεται τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου, ὕψους 1 cm, ὅταν τεθῇ εἰς ἀπόστασιν 6 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 6 cm καὶ ποῖον τὸ μέγεθος αὐτοῦ;*

Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = 6\ cm} \quad \text{καὶ} \quad \underline{E = 1\ cm.}$$

Ἄσκησις 6η. *Πρὸ κυρτοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 15 cm, τίθεται ἀντικείμενον ὕψους 6 mm καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπ' αὐτοῦ. Εἰς ποίαν θέσιν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον τὸ μέγεθος αὐτοῦ; Θὰ εἶναι πραγματικὸν ἢ φανταστικόν;*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κυρτῶν κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου:

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}}$$

Δίδονται: $\alpha = 10\ cm$, $f = -15\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -6\ cm.}$$

β) Τὸ μέγεθος E τοῦ εἰδώλου θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς E καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{E = -0{,}36\ cm} \quad \text{ἢ} \quad \underline{E = -3{,}6\ mm.}$$

γ) Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικόν.

Ἄσκησις 7η. *Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κυρτοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ἵνα τὸ φανταστικόν του εἴδωλον ἔχῃ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ ἀντικειμένου;*

Λύσις. Δεδομένου ὅτι τὸ ὕψος E τοῦ εἰδώλου πρέπει νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους A τοῦ ἀντικειμένου, ἔχομεν

$$E = \frac{A}{2}. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Ἡ ἀπόστασις α, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f},$$

εἰς τὸν ὁποῖον τὸ β πρέπει νὰ τεθῇ ἀ ρ ν η τ ι κ ὸ ν (δηλ. $-\alpha/2$). Ἀντικαθιστῶντες τὸ β διὰ τοῦ $-\alpha/2$ εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = -f.}$$

Δίδεται: $f = -10\ cm$ (τὸ $-$ τίθεται διότι τὸ κάτοπτρον εἶναι κυρτόν), ὁπότε προκύπτει

$$\underline{\alpha = -(-10)\ cm = 10\ cm.}$$

Ἄσκησις 8η. *Ἀντικείμενον, ὕψους 8 cm, τίθεται εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 20 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος του;*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου:

$$\underline{\beta = \frac{\alpha \cdot R}{2\alpha - R}.} \qquad (1)$$

Δίδονται: $\alpha = 30\ cm$, $R = -20\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = -7{,}5\ cm.}$$

β) Τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Δίδονται: $A = 8\ cm$, $\alpha = 30\ cm$, εὕρομεν δὲ $\beta = -7{,}5\ cm$. Λύοντες ὡς πρὸς E καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{E = -2\ cm.}$$

Ἄσκησις 9η. *Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, πρὸ τοῦ ὁποίου ἂν τεθῇ ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς του, τὸ εἴδωλον σχηματίζεται εἰς τὴν αὐτήν, ἀκριβῶς, ἀπόστασιν;*

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὸν τύπον τῶν κατόπτρων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

$\beta = \alpha$, εὑρίσκομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἑστιακὴν ἀπόστασιν:

$$f = \frac{\alpha}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{f = 25\ cm.}$$

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. Κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 20 cm. Ἓν ἀντικείμενον τοποθετεῖται εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε τὸ σχηματιζόμενον πραγματικὸν εἴδωλον νὰ ἔχῃ μέγεθος ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου. Ποία ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου;

Λύσις. Ἐκ τῶν τύπων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$$

δεδομένου δὲ ὅτι δίδεται καὶ $E = A/2$, λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot R.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 30\ cm.}$$

Ἄσκησις 2α. Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος ἑνὸς κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, τὸ ὁποῖον μεγεθύνει δύο φορὰς ἀντικείμενον, τοποθετημένον εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπ' αὐτοῦ;

Λύσις. Ἐπειδὴ εἶναι

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha} = 2$$

ἔχομεν

$$\beta = 2\alpha. \tag{1}$$

Προκειμένου, τώρα, ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \tag{2}$$

πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ μεγέθυνσις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, τὸ εἴδωλον δυνατὸν νὰ εἶναι εἴτε πραγματικὸν — ὁπότε εἰς τὸν τύπον (2) τὸ β πρέπει νὰ τεθῇ θετικὸν — εἴτε φανταστικόν, ὁπότε τὸ β πρέπει νὰ τεθῇ ἀρνητικόν· Ἡ διάκρισις αὕτη πρέπει νὰ γίνῃ, καθ' ὅσον ἡ ἐκφώνησις δὲν καθορίζει τὸ εἶδος τοῦ εἰδώλου. Λαμβάνοντες, λοιπόν, πρῶτον τὸ β θετικὸν εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2)

$$\underline{R = \frac{4}{3} \cdot \alpha.}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως προκύπτει

$$\underline{R = 20\ cm.}$$

Ἐὰν λάβωμεν τὸ β ἀρνητικὸν εὑρίσκομεν

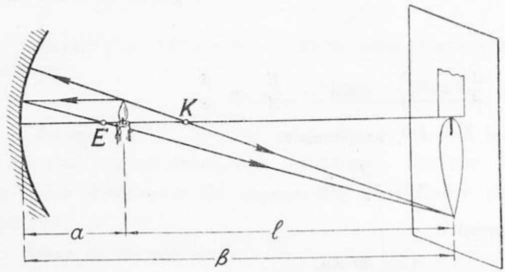
$$\underline{R = 4a,}$$

ὁπότε, δι' ἀντικαταστάσεως, προκύπτει

$$\underline{R = 60\ cm.}$$

"Ασκησις 3η. *Κηρίον, τοῦ ὁποίου ἡ φλὸξ ἔχει ὕψος 3 cm, ἔχει τοποθετηθῆ εἰς ἀπόστασιν 3 m ἀπό τινος διαφράγματος. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ διαφράγματος πρέπει νὰ τεθῇ κοῖλον κάτοπτρον ὥστε νὰ δίδῃ εἴδωλον τῆς φλογός, ὕψους 9 cm; Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος αὐτοῦ;*

Λύσις. α) 'Επειδὴ θέλομεν τὸ εἴδωλον νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου καὶ πραγματικόν, πρέπει τὸ ἀντικείμενον νὰ τοποθετηθῇ μεταξὺ τῆς κυρίας ἑστίας E καὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος K.



"Εστω β ἡ ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τεθῇ τὸ κάτοπτρον, διὰ νὰ σχηματίσῃ τὸ εἴδωλον ἐπὶ τοῦ διαφράγματος (δηλ. β εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου). Μεταξὺ τοῦ μεγέθους A τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ μεγέθους E τοῦ εἰδώλου ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{a}. \qquad (1)$$

'Αφ' ἑτέρου ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι

$$\beta = a + l. \qquad (2)$$

'Εκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\beta = \frac{l \cdot E}{E - A}.}$$

'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = 450\ cm.}$$

β) 'Απὸ τὸν τύπον

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος

$$R = \frac{2a\beta}{a + \beta}. \qquad (3)$$

Τὸ β εὑρέθη ἀνωτέρω ἴσον πρὸς *450 cm*. Τὸ a εὐκόλως εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου (2) ἴσον πρὸς *150 cm*, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου (3) λαμβάνομεν

$$\underline{R = 225\ cm.}$$

"Ασκησις 4η. *'Αντικείμενον, ὕψους 4 cm, τίθεται πρὸ κυρτοῦ κατόπ-*

τρου καὶ εἰς ἀπόστασιν 14 cm ἀπ' αὐτοῦ. 'Εὰν τὸ σχηματιζόμενον φανταστικὸν εἴδωλον ἔχῃ ὕψος 2,5 cm, ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου;

Λύσις. Ἔχομεν τοὺς τύπους:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{R} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (2) $E = -2,5\ cm$, $A = 4\ cm$ καὶ $\alpha = 14\ cm$ λαμβάνομεν τὸ β ἴσον πρὸς

$$\beta = -8,75\ cm.$$

'Ακολούθως, λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς R καὶ ἀντικαθιστῶντες, εὑρίσκομεν

$$\underline{R = -46,67\ cm.}$$

Ἄσκησις 5η. *Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, πρέπει νὰ τεθῇ ἀντικείμενον, ἵνα τὸ εἴδωλον αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀντικειμένου;*

Λύσις. Ἡ ἄσκησις αὕτη θὰ λυθῇ, ἀκριβῶς, ὅπως ἡ ἄσκησις 7η τῆς Κατηγορίας Α', ὁπότε θὰ προκύψῃ

$$\underline{\alpha = 20\ cm.}$$

Κατηγορία Γ'

1) Φωτεινὸς δίσκος τοποθετεῖται καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ κυρίας ἑστίας καὶ κέντρου καμπυλότητος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν εἰδώλου καὶ ἀντικειμένου. (Εὔκολος).

(ΑΠ: $4:1$)

2) Δύο φωτεινὰ βέλη, τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν $l = 20$ cm ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου καμπυλότητος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 1$ m. Ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο σχηματιζομένων εἰδώλων ἀπόστασις x καὶ ποῖος ὁ λόγος $E_2 : E_1$ τῶν ὑψῶν αὐτῶν; (Εὔκολος).

(ΑΠ: $x = \dfrac{2R^2 \cdot l}{R^2 - 4l^2} = 47,62\ cm$, $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{R+2l}{R-2l} = \dfrac{7}{3}$, *ἔνθα E_2 εἶναι τὸ ὕψος τοῦ εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν σχηματιζομένου εἰδώλου*)

3) Δύο φωτεινὰ βέλη, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὕψη h_1 καὶ h_2, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν $l = 25$ cm ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου καμπυλότητος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 1$ m. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος $h_1 : h_2$ τῶν δύο ὑψῶν, ἵνα τὰ σχηματιζόμενα εἴδωλα ἔχουν τὸ αὐτὸ μέγεθος; (Εὔκολος).

(ΑΠ: $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{R+2l}{R-2l} = \dfrac{3}{1}$, *ἔνθα h_2 εἶναι τὸ ὕψος τοῦ βέλους, τοῦ πλησιεστέρου πρὸς τὸ κάτοπτρον*)

4) Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται, ἀρχικῶς, ἐπὶ τοῦ κέντρου καμπυλότητος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος 60 cm. 'Εὰν μετακινήσωμεν τὸ φωτεινὸν ἀντικείμενον κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος α) κατὰ 15 cm πρὸς τὸ κάτοπτρον καὶ β) κατὰ 15 cm ἀντιθέτως, ποία θὰ εἶναι ἡ μετακίνησις τοῦ εἰδώλου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν; (Εὔκολος).

(ΑΠ: *30 cm, 10 cm*)

5) Δύο φωτεινὰ ἀντικείμενα τοῦ αὐτοῦ ὕψους τίθενται εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἑκατέρωθεν τῆς κυρίας ἑστίας κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως f. 'Εὰν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀντικειμένων εἶναι l ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ὁ λόγος $\beta_1 : \beta_2$ τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο εἰδώλων ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ β) ὁ λόγος $h_1 : h_2$ τῶν ὑψῶν τῶν δύο εἰδώλων. (Εὔκολος).

$\left(\text{ΑΠ: } \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{l-2f}{l+2f},\ \dfrac{h_1}{h_2} = -1\right)$

6) Φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου. Ἐὰν πλησιάσωμεν τὸ ἀντικείμενον κατὰ 15 cm πρὸς τὸ κάτοπτρον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εἴδωλον ἀπομακρύνεται εἰς τὸ διπλάσιον τῆς ἀρχικῆς του ἀποστάσεως. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου; Πόσαι λύσεις ὑπάρχουν; (Εὔκολος).

(ΑΠ: *36 cm, μία λύσις*)

7) Διάπυρον εὐθύγραμμον σύρμα, μήκους $l = 10$ cm, τοποθετεῖται κατὰ μῆκος τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 25$ cm. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ σύρματος ὡς πρὸς τὸ κάτοπτρον ἵνα τοῦτο καλύπτῃ, ἀκριβῶς, τὸ εἴδωλόν του; (Μετρία).

(ΑΠ: *Τὸ πλησιέστερον πρὸς τὸ κάτοπτρον ἄκρον τοῦ σύρματος θ' ἀπέχῃ αὐτοῦ κατ' ἀπόστασιν* $\alpha = \dfrac{(R-l) \pm \sqrt{R^2 + l^2}}{2} = 18{,}95$ cm)

8) Φωτεινὴ πηγὴ ἀπέχει ἀπό τινος κατακορύφου πετάσματος κατ' ἀπόστασιν 28 cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πηγῆς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον, ἵνα σχηματισθῇ ἐπὶ τοῦ πετάσματος εἴδωλον τῆς πηγῆς τριπλάσιον αὐτῆς; Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου; (Μετρία). (ΑΠ: *14 cm, 21 cm*)

9) Πρὸ κυρτοῦ σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, τοποθετεῖται φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 3 cm, καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ κατόπτρου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθος αὐτοῦ; (Εὔκολος).

(ΑΠ: *10 cm, 1,5 cm*)

10) Δύο σφαιρικὰ κάτοπτρα, τὸ ἓν κοῖλον καὶ τὸ ἄλλο κυρτόν, τοποθετοῦνται οὕτως ὥστε οἱ κύριοι ἄξονες αὐτῶν νὰ συμπίπτουν, αἱ δὲ ἀνακλαστικαί των ἐπιφάνειαι νὰ εὑρίσκωνται ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἐὰν αἱ κορυφαὶ τῶν δύο κατόπτρων ἀπέχουν μεταξύ των κατ' ἀπόστασιν $l = 160$ cm, αἱ δὲ ἀκτῖνες καμπυλότητος αὐτῶν εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς $R_1 = 60$ cm καὶ $R_2 = 40$ cm, ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἓν φωτεινὸν ἀντικείμενον ἵνα τὰ εἴδωλα, τὰ σχηματιζόμενα ὑπὸ ἑκάστου κατόπτρου, ἔχουν τὸ αὐτὸ μέγεθος; (Εὔκολος).

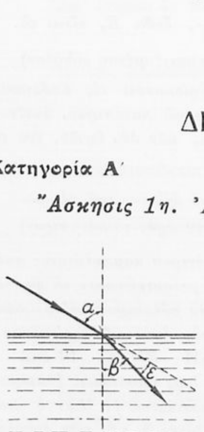
(ΑΠ: $\alpha_1 = R_1 \cdot \dfrac{l - R_2}{R_1 - R_2} = 120$ cm, *ἔνθα α_1 εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κοίλου κατόπτρου*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΔΙΑΘΛΑΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Ἀκτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου προσπίπτει, ὑπὸ γωνίαν 60°, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος. Κατὰ πόσον θὰ ἐκτραπῇ ἡ ἀκτὶς ἐντὸς τοῦ ὕδατος;*



Λύσις. Ἐκ τοῦ νόμου τῆς διαθλάσεως ἔχομεν

$$\frac{\eta\mu\, \alpha}{\eta\mu\, \beta} = n. \qquad (1)$$

Ὁ δείκτης διαθλάσεως n τοῦ ὕδατος διὰ τὸ κίτρινον φῶς τοῦ νατρίου εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν πίνακα τῆς σελίδος 21 τοῦ Β΄ τόμου ἴσος πρὸς *1,33*. Ἀφ' ἑτέρου δίδεται $\alpha = 60^{\circ}$ ($\eta\mu\, 60^{\circ} = 0{,}866$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\, \beta = 0{,}651,$$

ὁπότε λαμβάνομεν ἐκ πινάκων

$$\beta = 40{,}5^{o}.$$

Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει εὐκόλως ὅτι

$$\alpha = \beta + \varepsilon$$

ὁπότε εἶναι

$$\varepsilon = \alpha - \beta. \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν

$$\varepsilon = 60^{o} - 40{,}5^{o} = 19{,}5^{o}.$$

Ἄσκησις 2α. *Ποία ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς α) ἐντὸς τῆς ὑάλου καὶ β) ἐντὸς τοῦ ἀδάμαντος;*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως $n = c_0/c$ ἔχομεν διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς $c_{ὕαλος}$ ἐντὸς τῆς ὑάλου:

$$c_{ὕαλος} = \frac{c_0}{n_{ὕαλος}}. \qquad (1)$$

Εἶναι: $c_0 = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$, $n_{ὕαλος} = 1{,}5$ (πίναξ σ. 21 τοῦ Β' τόμου).

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$c_{ὕαλος} = 2 \cdot 10^{10}\ cm/sec.$$

β) Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἴσος πρὸς $n_{ἀδάμας} = 2{,}42$ (πίναξ σ. 21 τοῦ Β' τόμου). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἀντίστοιχον τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$c_{ἀδάμας} = 1{,}24 \cdot 10^{10}\ cm/sec.$$

Ἄσκησις 3η. *Ποῖος ὁ λόγος τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς ἐντὸς τῆς ὑάλου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως $n = c_0/c$ ἔχομεν

$$\frac{c_{ὕαλος}}{c_0} = \frac{1}{n_{ὕαλος}}.$$

Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $n_{ὕαλος} = 1{,}5$ (πίναξ σ. 21 τοῦ Β' τόμου). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\frac{c_{ὕαλος}}{c_0} = 0{,}66.$$

Ἄσκησις 4η. *Ἡ ὁρικὴ γωνία ἐντὸς τοῦ ὕδατος διὰ τὸ κίτρινον φῶς τοῦ νατρίου εἶναι 49°. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ ὕδατος;*

Λύσις. Διὰ τὴν ὁρικὴν γωνίαν β_0 ἰσχύει ἡ σχέσις

$$ημ\,\beta_0 = \frac{1}{n_{ὕδωρ}}. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως ἔχομεν

$$\frac{c_0}{c_{ὕδωρ}} = n_{ὕδωρ}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{c_{\text{ὕδωρ}} = c_0 \cdot \eta\mu\, \beta_0.} \tag{3}$$

Δίδεται: $\beta_0 = 49^0$, εἶναι δὲ $c_0 = 3 \cdot 10^{10}$ *cm/sec*. Εὑρίσκοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\eta\mu\, 49^0$ ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ δεδομένα εἰς τὸν τύπον (3) λαμβάνομεν

$$\underline{c_{\text{ὕδωρ}} = 2{,}265 \cdot 10^{10}\ cm/sec.}$$

(καὶ ὄχι $2{,}25 \cdot 10^{10}$ *cm/sec* ὅπως, ἐσφαλμένως, ἀναγράφεται εἰς τὴν σ. 37 τοῦ Β' τόμου).

Ἄσκησις 5η. *Ἀμφίκυρτος φακός, τοῦ ὁποίου αἱ ἐπιφάνειαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος, εἶναι κατεσκευασμένος ἐξ ὑλικοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι ἴσος πρὸς 1,5. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἰσοῦται πρὸς τὴν κοινὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος.*

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

προκύπτει διὰ τὴν ζητουμένην ἑστιακὴν ἀπόστασιν:

$$\underline{f = \frac{R_1 \cdot R_2}{(n-1) \cdot (R_1 + R_2)}.}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν $R_1 = R_2$ καὶ $n = 1{,}5$, λαμβάνομεν

$$\underline{f = R.}$$

Ἄσκησις 6η. *Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἀμφικύρτου φακοῦ, ἀκτίνων καμπυλότητος 25 cm καὶ 35 cm καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,6;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἑστιακὴν ἀπόστασιν:

$$\underline{f = \frac{R_1 \cdot R_2}{(n-1) \cdot (R_1 + R_2)}.}$$

Δίδονται: $R_1 = 25\ cm$, $R_2 = 35\ cm$ καὶ $n = 1{,}6$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{f = 24{,}3\ cm.}$$

Ἄσκησις 7η. *Ἐπιπεδόκυρτος φακὸς ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 30 cm καὶ δείκτην διαθλάσεως 1,5. Πόσον ἀπέχουν μεταξύ των αἱ δύο κύριαι ἑστίαι τοῦ φακοῦ;*

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ φακὸς εἶναι ἐπιπεδόκυρτος ἡ μία τῶν ἀκτίνων καμπυλότητος (π.χ. ἡ R_1) εἶναι ἴση πρὸς ἄπειρον, ὁπότε $1/R_1 = 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{R_2}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει διὰ τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν:

$$\underline{f = \frac{R_2}{(n-1)}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$f = 60\ cm.$$

Συνεπῶς αἱ δύο κύριαι ἑστίαι ἀπέχουν μεταξύ των κατ' ἀπόστασιν

$$\underline{2f = 120\ cm.}$$

Ἄσκησις 8η. *Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις μιᾶς σταγόνος ὕδατος, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος 2 mm καὶ συμπεριφέρεται ὡς λεπτὸς φακός;*

Λύσις. Ἡ σταγὼν θὰ εἶναι φακὸς μὲ ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος ($R_1 = R_2 = R$). Ἐπομένως ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτῆς θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν ἴση πρὸς

$$\underline{f = \frac{R}{2\cdot(n-1)}}.$$

Δίδεται: $R = 2\ mm$. Ἐκ τῆς σ. 21 τοῦ Β' τόμου λαμβάνομεν διὰ τὸν δείκτην διαθλάσεως τοῦ ὕδατος $n = 1,33$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{f = 3\ mm.}$$

Ἄσκησις 9η. *Συγκλίνων φακός, δείκτου διαθλάσεως 1,5, ἔχει ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος. Ἂν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις αὐτοῦ εἶναι 33 cm, ποῖαι αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος;*

Λύσις. Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι ἴσαι ($R_1 = R_2 = R$) ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν δίδει εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$\underline{R = 2\cdot(n-1)\cdot f.}$$

Ἀντικαθιστῶνες εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 33\ cm.}$$

Ἄσκησις 10η. *Ἐπιπεδόκυρτος φακὸς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 12 cm. Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ φακοῦ, ἐὰν ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι 1,5;*

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ φακὸς εἶναι ἐπιπεδόκυρτος, ἡ μία ἀκτὶς καμπυλότητος (π.χ. ἡ R_1) εἶναι ἴση πρὸς ἄπειρον ($1/R_1 = 0$), ὁπότε ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν δίδει διὰ τὴν ἄλλην ἀκτῖνα καμπυλότητος:

$$\underline{R_2 = (n-1)\cdot f.}$$

Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{R_2 = 6\ cm.}$$

Ἄσκησις 11η. *Ἡ μία ἀκτὶς καμπυλότητος ἀμφικύρτου φακοῦ εἶναι 15 cm, ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως 1,5. Ποία ἡ ἄλλη ἀκτὶς καμπυλότητος, ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις εἶναι 10 cm;*

Λύσις. Ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν δίδει διὰ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα καμπυλότητος R_2:

$$R_2 = \frac{f\cdot(n-1)\cdot R_1}{R_1 - f\cdot(n-1)}.$$

Δίδονται: $f = 10\ cm$, $n = 1,5$ καὶ $R_1 = 15\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{R_2 = 7{,}5\ cm.}$$

Ἄσκησις 12η. *Πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10 cm, τοποθετεῖται φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 2 cm καὶ εἰς ἀπόστασιν διπλασίαν τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως. Εἰς ποίαν θέσιν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποῖον τὸ μέγεθος αὐτοῦ ;*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου τῶν φακῶν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}$$

εὑρίσκομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου:

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}.$$

Δίδονται : $\alpha = 2f = 20\ cm$ καὶ $f = 10\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = 20\ cm.}$$

β) Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως

$$\frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$$

λαμβάνομεν διὰ τὸ μέγεθος E τοῦ εἰδώλου :

$$\underline{E = A \cdot \frac{\beta}{\alpha}.}$$

Δίδονται : $A = 2\ cm$, $\alpha = 20\ cm$, εὕρομεν δὲ $\beta = 20\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{E = 2\ cm.}$$

Ἄσκησις 13η. *Εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ, διπλασίαν τῆς ἑστιακῆς του ἀποστάσεως, εὑρίσκεται φωτεινὸν βέλος. Ζητεῖται τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου του.*

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῶν φακῶν τὸ α διὰ τοῦ ἴσου του $2f$ λαμβάνομεν

$$\beta = 2f.$$

Ἤδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῆς μεγεθύνσεως

$$M = \frac{E}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$$

τὸ β διὰ τοῦ ἴσου του $2f$ καὶ τὸ α διὰ τοῦ ἴσου του $2f$, λαμβάνομεν

$$\underline{E = A.}$$

Ἤτοι : τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου.

Ἄσκησις 14η. *Φλὸξ κηρίου, ὕψους 3 cm, τοποθετεῖται ἐπὶ τῆς κυρίας ἑστίας ἀποκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm. Ποία ἡ θέσις καὶ ποῖον τὸ ὕψος τοῦ σχηματιζομένου εἰδώλου ;*

Λύσις. α) Λύοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν ὡς πρὸς β λαμβάνομεν

$$\beta = \frac{\alpha \cdot f}{\alpha - f}.$$

Δίδονται: $f = -20\ cm$ καὶ $\alpha = 20\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = -10\ cm.}$$

β) Τὸ ὕψος τοῦ εἰδώλου προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου $E/A = \beta/\alpha$ ἴσον πρὸς

$$\underline{E = -1{,}5\ cm.}$$

Ἄσκησις 15η. *Συγκλίνων φακὸς σχηματίζει ἐπὶ διαφράγματος, ἀπέχοντος ἀπ' αὐτοῦ κατὰ 1,5 m, εἴδωλον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 8 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀντικειμένου. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν εὑρίσκεται τὸ ἀντικείμενον καὶ ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ.*

Λύσις. 1) Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως $M = \beta/\alpha$ λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = \frac{\beta}{M}.}$$

Δίδονται: $\beta = 1{,}5\ m = 150\ cm$ καὶ $M = 8$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = 18{,}75\ cm.}$$

2) Ἡ ἰσχὺς I τοῦ φακοῦ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{I = \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσχὺς ζητεῖται εἰς *διοπτρίας*, πρέπει τὰ α καὶ β νὰ τεθοῦν εἰς *μέτρα* - ἤτοι $\alpha = 0{,}1875\ m$, $\beta = 1{,}5\ m$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{I = 6\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I = 6\ \text{διοπτρίαι}.}$$

Ἄσκησις 16η. *Πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 6 cm ἀπ' αὐτοῦ τοποθετεῖται ἀντικείμενον, τοῦ ὁποίου τὸ εἴδωλον σχηματίζεται φανταστικὸν καὶ εἰς ἀπόστασιν 18 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ.*

Λύσις. Ἡ ἰσχὺς I τοῦ φακοῦ εἶναι ἴση πρὸς

$$I = \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

Διὰ νὰ προκύψῃ ἡ ἰσχὺς εἰς *διοπτρίας* πρέπει αἱ ἀποστάσεις α καὶ β νὰ τεθοῦν εἰς *μέτρα* - ἤτοι $\alpha = 6\ cm = 0{,}06\ m$ καὶ $\beta = -18\ cm = -0{,}18\ m$. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\underline{I = 11{,}1\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I = 11{,}1\ \text{διοπτρίαι}.}$$

Ἄσκησις 17η. *Ποία ἡ ἰσχὺς (εἰς διοπτρίας) ἑνὸς ἀποκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως —20 cm;*

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῆς ἰσχύος $I = 1/f$ ἀντὶ τοῦ f τὸ ἴσον του $-20\ m$ λαμβάνομεν

$$\underline{I = -5\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I = -5\ \text{διοπτρίαι}.}$$

Ἄσκησις 18η. *Εἰς ἀπόστασιν 55 cm ἀπὸ φακοῦ προβολῆς, ἰσχύος 2 διοπτριῶν, τίθεται λαμπτὴρ μὲ νῆμα εὐθύγραμμον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον καὶ ποία ἡ μεγέθυνσις τοῦ φακοῦ;*

Λύσις. 1) 'Εκ τοῦ τύπου τῶν φακῶν

$$I = \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ἀπόστασιν β τοῦ εἰδώλου :

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha \cdot I - 1}. \qquad (1)$$

Δίδεται : $I = 2$ *διοπτρίαι* $= 2\ m^{-1}$. 'Επειδὴ ἡ ἰσχὺς δίδεται εἰς *διοπτρίας* τὸ α πρέπει νὰ τεθῇ εἰς *μέτρα* - ἤτοι $\alpha = 55\ cm = 0{,}55\ m$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\underline{\beta = 5{,}5\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\beta = 550\ cm.}$$

2) 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῆς μεγεθύνσεως $M = \beta/\alpha$ λαμβάνομεν

$$\underline{M = 10.}$$

Ἄσκησις 19η. *Διὰ συγκλίνοντος φακοῦ σχηματίζομεν ἐπὶ πετάσματος εἴδωλον, τριπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου. Ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ φακοῦ εἶναι 80 cm, ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ ;*

Λύσις. Δεδομένου ὅτι $M = 3$, ἀπὸ τὸν τύπον τῆς μεγεθύνσεως $M = \beta/\alpha$ προκύπτει

$$\alpha = \frac{\beta}{3}.$$

Ἤδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῶν φακῶν

$$I = \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

ἀντὶ τοῦ α τὸ ἴσον του $\beta/3$, λαμβάνομεν

$$\underline{I = \frac{4}{\beta}.}$$

Δίδεται : $\beta = 8\ cm = 0{,}8\ m$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{I = 5\ m^{-1} = 5\ \text{διοπτρίαι.}}$$

Ἄσκησις 20ή. *Φακὸς ἔχει ἰσχὺν 0,5 cm⁻¹. Ποία ἡ ἰσχὺς εἰς διοπτρίας ;*

Λύσις. 'Εκ τῆς ἰσχύος $0{,}5\ cm^{-1}$ εὑρίσκομεν, πρῶτον, τὴν ἑστιακὴν ἀπόστασιν εἰς cm, ἡ ὁποία προκύπτει ἴση πρὸς

$$f = 2\ cm.$$

Διὰ νὰ προκύψῃ, τώρα, ἡ ἰσχὺς εἰς *διοπτρίας* πρέπει ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις νὰ τεθῇ εἰς *μέτρα* - ἤτοι $f = 0{,}02\ m$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῆς ἰσχύος $I = 1/f$ λαμβάνομεν

$$\underline{I = 50\ m^{-1} = 50\ \text{διοπτρίαι.}}$$

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Ἐὰν ὁ δείκτης διαθλάσεως μιᾶς ὑάλου εἶναι 1,6, ποῖος θὰ εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ;*

Λύσις. Ὁ σχετικὸς δείκτης διαθλάσεως n τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸ ὕδωρ ὁρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς εἰς τὰ δύο μέσα (βλ. § 25 τοῦ Β' τόμου). Ἤτοι

$$n = \frac{c_{\text{ὕδωρ}}}{c_{\text{ὕαλος}}}. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ ἀπόλυτος δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου καὶ τοῦ ὕδατος εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσος πρὸς

$$n_{\text{ὕαλος}} = \frac{c_0}{c_{\text{ὕαλος}}} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad n_{\text{ὕδωρ}} = \frac{c_0}{c_{\text{ὕδωρ}}}, \quad (3)$$

ἔνθα c_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν.

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$n = \frac{n_{\text{ὕαλος}}}{n_{\text{ὕδωρ}}}. \qquad (4)$$

Δίδεται: $n_{\text{ὕαλος}} = 1{,}6$, ἀπὸ δὲ τὸν πίνακα τῆς σελίδος 21 τοῦ Β′ τόμου λαμβάνομεν $n_{\text{ὕδωρ}} = 1{,}33$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 1{,}2.}$$

Ἄσκησις 2α. *Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν 45° ἐπὶ διαφανοῦς μέσου καὶ ἐκτρέπεται κατὰ 15°. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως;*

Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐκτροπὴ εἶναι ἴση πρὸς 15^0 ἡ γωνία διαθλάσεως θὰ εἶναι ἴση πρὸς $45^0 - 15^0 = 30^0$ (βλ. καὶ 1ην ἄσκησιν Κατηγορίας Α′). Ἑπομένως ὁ δείκτης διαθλάσεως n θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$n = \frac{\eta\mu\, 45^0}{\eta\mu\, 30^0}.$$

Λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων ἀπὸ πίνακας καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον, εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 1{,}414.}$$

Ἄσκησις 3η. *Στρῶμα ἐλαίου, δείκτου διαθλάσεως 1,47, εὑρίσκεται ἄνωθεν στρώματος ὕδατος, φῶς δέ, προσπῖπτον καθέτως, διαπερᾷ τὰ δύο στρώματα εἰς ἴσους χρόνους. Ποῖος ὁ λόγος τοῦ πάχους τῶν δύο στρωμάτων;*

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν d_1 καὶ d_2 τὰ πάχη τῶν στρωμάτων τοῦ ἐλαίου καὶ τοῦ ὕδατος, ἔχομεν διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἰς τὰ δύο μέσα

$$c_1 = \frac{d_1}{t} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad c_2 = \frac{d_2}{t} \qquad (2)$$

ἔνθα t εἶναι ὁ (κοινὸς) χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα τὸ φῶς διανύσῃ ἕκαστον τῶν στρωμάτων. Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (3)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως, ἔχομεν διὰ τὰ δύο μέσα

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1} \qquad \text{καὶ} \qquad n_2 = \frac{c_0}{c_2},$$

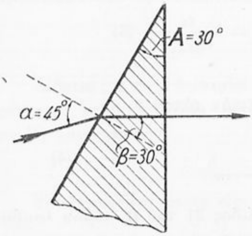
ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται

$$\underline{\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{d_1 : d_2 = 0{,}9.}$$

"Ασκησις 4η. *'Ακτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου ἐξέρχεται καθέτως ἐκ τῆς δευτέρας ἕδρας πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας 30°. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος, ἐὰν ἡ γωνία προσπτώσεως εἶναι 45° ;*



Λύσις. 'Εκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ γωνία διαθλάσεως β εἶναι ἴση πρὸς τὴν θλαστικὴν γωνίαν A τοῦ πρίσματος (καθ' ὅσον αἱ δύο αὗται γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους). 'Επομένως εἶναι

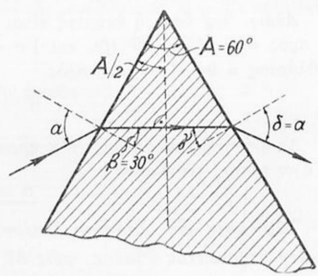
$$n = \frac{\eta\mu\, \alpha}{\eta\mu\, \beta} \quad \text{ἢ} \quad \underline{n = \frac{\eta\mu\, 45^0}{\eta\mu\, 30^0}}.$$

Εὑρίσκοντες τὰ ἡμίτονα τῶν 45^0 καὶ 30^0 ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{n = 1{,}414.}$$

"Ασκησις 5η. *'Υπὸ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ προσπέσῃ φωτεινὴ ἀκτὶς ἐπὶ πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας 60° καὶ δείκτου διαθλάσεως 1,5, ἵνα ἐξέρχεται ἐκ τοῦ πρίσματος ὑπὸ γωνίαν, ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν προσπτώσεως ;*

Λύσις. 'Εφ' ὅσον ζητεῖται ἡ γωνία ἀναδύσεως δ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν προσπτώσεως α, ἕπεται ὅτι τὸ πρῖσμα πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν τῆς ἐλαχίστης ἐκτροπῆς. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἡ ἀκτὶς ἐντὸς τοῦ πρίσματος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ διχοτομοῦν τὴν θλαστικὴν γωνίαν τοῦ πρίσματος. 'Εκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ γωνία β εἶναι ἴση πρὸς 30^0 (ὡς ἔχουσα τὰς πλευράς της καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας $A/2$). Γράφοντες τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ἔχομεν



$$n = \frac{\eta\mu\, \alpha}{\eta\mu\, \beta} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\eta\mu\, \alpha = n \cdot \eta\mu\, \beta} \qquad (1)$$

Δίδεται : $n = 1{,}5$, εὕρομεν δὲ $\beta = 30^0$. Εὑρίσκοντες τὴν τιμὴν τοῦ $\eta\mu\, 30^0$ ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$\eta\mu\, \alpha = 0{,}75$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει : $\underline{\alpha = 48{,}5^0.}$

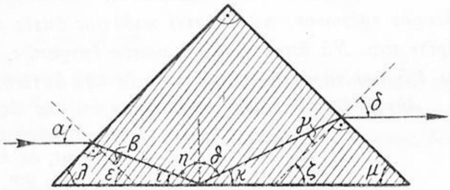
"Ασκησις 6η. *'Επὶ τῆς μιᾶς τῶν καθέτων ἑδρῶν πρίσματος, τομῆς ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου, προσπίπτει ἀκτίς, παραλλήλως πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ. 'Εν συνεχείᾳ ἡ ἀκτὶς αὕτη ἀνακλᾶται ὁλικῶς ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς, ἡ ἐξερχομένη ἐκ τῆς ἄλλης καθέτου ἕδρας, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.*

Λύσις. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἐξερχομένη ἀκτὶς θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ἀναδύσεως δ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν προσπτώσεως α: "Οπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι λ καὶ μ εἶναι ἴσαι (ὡς παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου) καὶ αἱ γωνίαι ε καὶ ζ θὰ εἶναι ἴσαι. 'Αφ' ἑτέρου ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι $\varepsilon = \beta + \iota$ καὶ $\zeta = \gamma + \varkappa$

ὁπότε εἶναι

$$\beta + \iota = \gamma + \varkappa. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι η καὶ ϑ εἶναι ἴσαι, ὡς γωνίαι προσπτώσεως καὶ ἀνακλάσεως, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ συμπληρωματικαὶ αὐτῶν γωνίαι ι καὶ $\varkappa$ θὰ εἶναι ἴσαι, ὁπότε ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) προκύπτει



$$\beta = \gamma. \qquad (2)$$

Γράφοντες τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ἔχομεν τοὺς τύπους

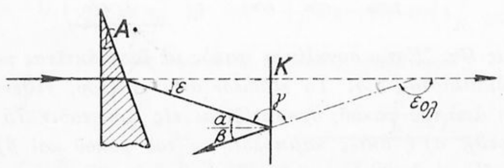
$$\frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,\beta} = n \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\eta\mu\,\delta}{\eta\mu\,\gamma} = n. \quad (4)$$

Ἐκ τῶν τύπων (2), (3) καὶ (4) προκύπτει, εὐκόλως, ὅτι

$$\underline{\alpha = \delta.}$$

Ἄσκησις 7η. *Μονοχρωματικὴ ἀκτὶς προσπίπτει καθέτως ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας ὑαλίνου πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας 4°, ἐξερχομένη δὲ αὐτοῦ προσπίπτει ἐπὶ ἐπιπέδου κατόπτρου, παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην ἕδραν τοῦ πρίσματος. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ἐπὶ τοῦ κατόπτρου γωνία προσπτώσεως καὶ β) ἡ ὁλικὴ ἐκτροπή.*

Λύσις. α) Ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, ἡ γωνία προσπτώσεως α ἐπὶ τοῦ



κατόπτρου K εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν ἐκτροπῆς ε. Ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ τὸ πρῖσμα εἶναι ὀξύ, ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{\varepsilon = (n-1)\cdot A} \qquad (1)$$

ἔνθα A εἶναι ἡ θλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος.

Δίδεται: $A = 4^0$, ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως n τῆς ὑάλου εὑρίσκεται ἐκ τῆς σελίδος 21 τοῦ Β' τόμου, ἴσος πρὸς $1{,}5$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{\varepsilon = \alpha = 2^0.}$$

β) Ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ $\varepsilon_{o\lambda}$, ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, εἶναι ἴση πρὸς

$$\varepsilon_{o\lambda} = \varepsilon + \gamma. \qquad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἡ γωνία γ εἶναι ἴση πρὸς

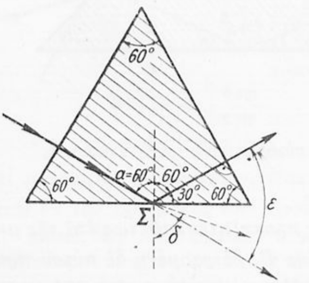
$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - 2\alpha.$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\varepsilon_{ολ} = 180^0 - \varepsilon \quad ἤ \quad \underline{\varepsilon_{ολ} = 178^0.}$$

"Ασκησις 8η. *'Επὶ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κυρία τομὴ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον, προσπίπτει καθέτως ἀκτὶς μονοχρωματικὴ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἑδρῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ἐκτροπῆς, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι 1,5 καὶ νὰ σχεδιασθῇ ἡ πορεία τῆς ἀκτῖνος.*

Λύσις. 'Επειδὴ ἡ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἕδρας τοῦ πρίσματος καθέτως, ἕπεται ὅτι εἰσέρχεται ἐντὸς αὐτοῦ χωρὶς ἐκτροπὴν καί, ὡς ἐκ τούτου, ἡ γωνία α θὰ εἶναι ἴση πρὸς 60^0. Γράφοντες τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ἔχομεν



$$\frac{\eta\mu\,\delta}{\eta\mu\,\alpha} = n,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$\underline{\eta\mu\,\delta = n \cdot \eta\mu\,\alpha.}$$

Δίδονται: $n = 1{,}5$ καὶ $\alpha = 60^0$ $(\eta\mu\, 60^0 = 0{,}866)$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν διὰ τὸ $\eta\mu\,\delta$ τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Σ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διάθλασις, συνεπῶς ἡ ἀκτὶς θὰ ὑποστῇ ὁλικὴν ἀνάκλασιν.

Ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, ἡ εἰς τὸ σημεῖον Σ ἀνακλωμένη ἀκτὶς συναντᾷ τὴν τρίτην ἕδραν τοῦ πρίσματος καθέτως, ὁπότε ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε εἶναι ἴση πρὸς

$$\varepsilon = 180^0 - (60^0 + 60^0) \quad ἤ \quad \underline{\varepsilon = 60^0.}$$

"Ασκησις 9η. *"Εστω συγκλίνων φακὸς μὲ ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος καὶ δείκτην διαθλάσεως 1,5. Τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου, τεθέντος εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 75 cm ἀπ' αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ φακοῦ καὶ β) τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου, ἐὰν τὸ ἀντικείμενον ἔχῃ ὕψος 8 cm.*

Λύσις. α) 'Επειδὴ αἱ δύο ἀκτῖνες καμπυλότητος R_1, R_2 εἶναι ἴσαι $(R_1 = R_2 = R)$ ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν δίδει

$$R = 2 \cdot (n-1) \cdot f. \qquad (1)$$

'Αφ' ἑτέρου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις f προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου τῶν φακῶν ἴση πρὸς

$$f = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}. \qquad (2)$$

'Εκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{R = 2 \cdot (n-1) \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}}. \qquad (3)$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν τὴν κοινὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος R ἴσην πρὸς

$$\underline{R = 30 \text{ cm}.}$$

β) 'Εκ τοῦ τύπου τῆς μεγεθύνσεως $E/A = \beta/\alpha$ εὑρίσκομεν τὸ μέγεθος E τοῦ εἰδώλου ἴσον πρός

$$E = A \cdot \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$E = 12\ cm.$$

Ἄσκησις 10η. *Ἀμφίκυρτος φακὸς μὲ ἀκτῖνας καμπυλότητος 7 cm καὶ 9 cm δίδει, εἰς ἀπόστασιν 9 cm, πραγματικὸν εἴδωλον ἑνὸς ἀντικειμένου, τεθέντος εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν καὶ τοῦ τύπου τῶν φακῶν προκύπτει, δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ f, ὁ τελικὸς τύπος

$$n = 1 + \frac{(\alpha+\beta)\cdot R_1 \cdot R_2}{\alpha\cdot\beta\cdot(R_1+R_2)}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$n = 1,634.$$

Ἄσκησις 11η. *Συγκλίνων φακὸς ἐξ ὑλικοῦ, δείκτου διαθλάσεως 1,52, ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν 10 cm εἰς τὸν ἀέρα. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ αὐτοῦ φακοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος;*

Λύσις. Ἐὰν n εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ τοῦ φακοῦ καὶ n' ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{f'} = (n'-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις λαμβάνομεν

$$\frac{f'}{f} = \frac{(n-1)}{(n'-1)} \quad \text{ἢ} \quad f' = f\cdot\frac{n-1}{n'-1}.$$

Δίδονται: $f = 10\ cm$, $n = 1,52$ καὶ $n' = 1,33$ (πίναξ σ. 21 τοῦ Β' τόμου).
Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$f' = 36,4\ cm.$$

Ἄσκησις 12η. *Κηρίον ἀπέχει ἀπό τινος διαφράγματος κατὰ 160 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ, ὁ ὁποῖος θὰ παρεῖχεν ἐπὶ τοῦ διαφράγματος τὸ εἴδωλον τοῦ κηρίου τρεῖς φορὰς μεγαλύτερον;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β τὰς ἀποστάσεις τοῦ κηρίου καὶ τοῦ εἰδώλου του ἀπὸ τοῦ φακοῦ καὶ l τὴν ἀπόστασιν τοῦ κηρίου ἀπὸ τοῦ διαφράγματος, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\alpha + \beta = l. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν καὶ τοὺς τύπους

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad M = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$f = \frac{M \cdot l}{M^2 + 2M + 1}.$$

Δίδονται: $M = 3$, $l = 160\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$f = 30\ cm.$$

Ἄσκησις 13η. *Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ἀντικείμενον ὥστε τὸ εἴδωλον αὐτοῦ νὰ ἔχῃ ὕψος τετραπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ ἀντικειμένου;*

Λύσις. Ἐκ τῶν τύπων

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad M = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

λαμβάνομεν

$$\alpha = \frac{f \cdot (M + 1)}{M}. \quad (3)$$

Ἐφ' ὅσον δὲν καθορίζεται τὸ εἶδος τοῦ εἰδώλου (πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν) πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἄσκησιν καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις.

1) ***Πραγματικὸν εἴδωλον.*** Ἀντικαθιστῶντες: $f = 20\ cm$ καὶ $M = 4$ εὑρίσκομεν

$$\alpha = 25\ cm.$$

2) ***Φανταστικὸν εἴδωλον.*** Ἐπειδὴ τὸ εἴδωλον εἶναι φανταστικὸν τὸ β θὰ εἶναι ἀρνητικόν, ὁπότε, κατὰ τὸν τύπον (2), τὸ M θὰ εἶναι καὶ αὐτὸ ἀρνητικόν, δηλ., $M = -4$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\alpha = 15\ cm.$$

Ἄσκησις 14η. *Τὸ εἴδωλον ἀντικειμένου, τεθέντος εἰς ἀπόστασιν 2 m ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ, σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 50 cm ἀπ' αὐτοῦ. Κατὰ πόσον θὰ μετακινηθῇ τὸ εἴδωλον, ὅταν τὸ ἀντικείμενον πλησιάσῃ κατὰ 1 m πρὸς τὸν φακόν;*

Λύσις. Ἔστωσαν α_1, α_2, αἱ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ φακοῦ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, β_1, β_2, αἱ ἀντίστοιχοι ἀποστάσεις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ φακοῦ καὶ f ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις. Γράφοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν διὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἔχομεν

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{f} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{f}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2 \cdot (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \cdot \beta_1}.$$

Ἀλλὰ εἶναι $\alpha_2 = \alpha_1 - l$ (ἔνθα l εἶναι ἡ ἀπόστασις, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἀντικείμενον ἐπλησίασεν εἰς τὸν φακόν), ὁπότε ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\beta_2 = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot (\alpha_1 - l)}{(\alpha_1 - l) \cdot (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1 \cdot \beta_1}. \quad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) λαμβάνομεν

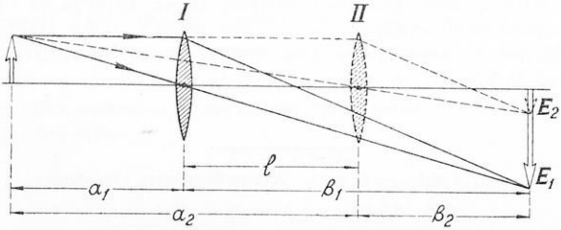
$$\beta_2 = 66{,}66\ cm \simeq 66{,}7\ cm.$$

Συνεπῶς τὸ εἴδωλον θὰ μετακινηθῇ κατ' ἀπόστασιν x ἴσην πρὸς

$$x = \beta_2 - \beta_1 = 66{,}7\ cm - 50\ cm \quad \text{ἢ} \quad \underline{x = 16{,}7\ cm.}$$

Ἄσκησις 15η. *Συγκλίνων φακὸς σχηματίζει εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον τοῦ νήματος ἑνὸς λαμπτῆρος ἐπί τινος διαφράγματος. Ἐὰν μετακινήσωμεν τὸν φακὸν κατὰ 30 cm πρὸς τὸ διάφραγμα, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζεται, ἐπίσης, σαφὲς εἴδωλον τοῦ νήματος, τοῦ ὁποίου, ὅμως, τὸ μέγεθος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $^1/_4$ τοῦ πρώτου. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ;*

Λύσις. Ἐὰν συμβολίσωμεν διὰ τῶν α_1, α_2 καὶ β_1, β_2 τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντι-



κειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ φακοῦ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{f} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

ἔνθα f εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν καλέσωμεν k τὸν λόγον τῶν μεγεθῶν E_1, E_2 τῶν δύο εἰδώλων $(E_1 : E_2 = k)$, εὑρίσκομεν, εὐκόλως, τὴν σχέσιν

$$k = \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2}. \qquad (3)$$

Ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

$$\beta_1 = \beta_2 + l \quad (4) \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + l. \quad (5)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (4) καὶ (5) προκύπτει ἡ σχέσις

$$\frac{\alpha_1 + \beta_2 + l}{\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_1 \cdot l} = \frac{\alpha_1 + \beta_2 + l}{\alpha_1 \cdot \beta_2 + \beta_2 \cdot l},$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται, εὐκόλως, ὅτι

$$\alpha_1 = \beta_2. \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3), (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(k-1) \cdot \alpha_1^2 - 2l \cdot \alpha_1 - l^2 = 0.$$

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν δύο τιμὰς διὰ τὸ α_1, μίαν $\alpha_1 = 30\ cm$ καὶ τὴν ἄλλην $\alpha_1' = -10\ cm$. Ἐξ αὐτῶν μόνον ἡ πρώτη $(\alpha_1 = 30\ cm)$ συμφωνεῖ μὲ τὴν ἐκφώνησιν.

Ἤδη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (4) καὶ (6) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{f = \alpha_1 \cdot \frac{\alpha_1 + l}{2\alpha_1 + l}}.$$

Δίδεται: $l = 30\ cm$, εὕρομεν δὲ $a_1 = 30\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{f = 20\ cm.}$$

Ἄσκησις 16η. *Πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῇ συγκλίνων φακός, ἰσχύος 8 διοπτριῶν, ἀπὸ ὑλικόν, δείκτου διαθλάσεως 1,5;*

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν

$$I = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

ἔχομεν δύο ἀγνώστους (R_1, R_2) εἰς μίαν ἐξίσωσιν (διότι τὸ I καὶ τὸ n δίδονται). Συνεπῶς ἡ ἄσκησις αὕτη ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Ἐνταῦθα θὰ λύσωμεν τὴν ἄσκησιν δι' ὡρισμένας περιπτώσεις:

1) Θεωροῦμεν ὅτι ὁ φακὸς ἔχει ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος $(R_1 = R_2 = R)$, ὁπότε ὁ τύπος (1) δίδει

$$\underline{R = \frac{2\cdot(n-1)}{I}.}$$

Δίδονται: $n = 1,5$ καὶ $I = 8\ m^{-1}$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 0,125\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{R = 12,5\ cm.}$$

2) Θεωροῦμεν ὅτι $R_1 = \infty$ (ἐπιπεδόκυρτος φακός), ὁπότε ὁ τύπος (1) δίδει

$$\underline{R_2 = \frac{n-1}{I}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{R_2 = 0,0625\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{R_2 = 6,25\ cm.}$$

3) Τυχοῦσαι ἀκτῖνες καμπυλότητος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις.

Ἄσκησις 17η. *Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις συστήματος δύο ὁμοίων φακῶν (ἐν ἐπαφῇ) τῆς αὐτῆς ἰσχύος, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως ἑνὸς ἐξ αὐτῶν.*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν I τὴν κοινὴν ἰσχὺν τῶν δύο φακῶν, ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς $I_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$I_{ολ} = I + I = 2I.$$

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσχύος, ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\frac{1}{f_{ολ}} = 2\cdot\frac{1}{f} \quad \text{ἢ} \quad \underline{f_{ολ} = \frac{f}{2}.} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἄσκησις 18η. *Ποία ἡ ἰσχὺς δύο φακῶν ἐν ἐπαφῇ, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν +30 διοπτριῶν καὶ −10 διοπτριῶν ἀντιστοίχως; Ποία ἡ ἰσοδύναμος ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν;*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν I_1 καὶ I_2 τὴν ἰσχὺν ἑκάστου φακοῦ, τότε ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς $I_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{I_{ολ} = I_1 + I_2.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{I_{o\lambda} = 20\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I_{o\lambda} = 20\ \text{διοπτρίαι}.}$$

β) Ἐπειδὴ

$$I_{o\lambda} = \frac{1}{f_{o\lambda}} \quad \text{ἔχομεν} \quad \underline{f_{o\lambda} = \frac{1}{I_{o\lambda}}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$f_{o\lambda} = \frac{1}{20\ m^{-1}} = 0{,}05\ m \quad \text{ἢ} \quad \underline{f_{o\lambda} = 5\ cm.}$$

Ἄσκησις 19η. *Φακός, ἰσχύος 5 διοπτριῶν, πρέπει νὰ συνδυασθῇ πρὸς ἕτερον φακόν, ὥστε νὰ προκύψῃ σύστημα, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 60 cm. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου φακοῦ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν I_1 καὶ I_2 τὴν ἰσχὺν ἑκάστου φακοῦ, τότε ἡ ὁλικὴ ἰσχὺς $I_{o\lambda}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$I_{o\lambda} = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου εἶναι

$$I_{o\lambda} = \frac{1}{f_{o\lambda}} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad I_2 = \frac{1}{f_2}. \tag{3}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{f_2 = \frac{f_{o\lambda}}{1 - I_1 \cdot f_{o\lambda}}.}$$

Δίδονται: $f_{o\lambda} = 60\ cm = 0{,}6\ m$ καὶ $I_1 = 5\ m^{-1}$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{f_2 = -0{,}3\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{f_2 = -30\ cm.}$$

Ἄσκησις 20ή. *Πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 15 cm ἀπ' αὐτοῦ, τίθεται ἀντικείμενον, τὸ δὲ πραγματικὸν εἴδωλον αὐτοῦ σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ὅταν ὁ φακὸς οὗτος συνδυασθῇ μὲ ἀποκλίνοντα φακόν, εὑρίσκομεν ὅτι ἀντικείμενον, τιθέμενον εἰς ἀπόστασιν 24 cm ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν δύο φακῶν, δίδει πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 72 cm ἀπὸ τοῦ συστήματος. Ποία ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ ἀποκλίνοντος φακοῦ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν α_1, β_1 τὰς ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ συγκλίνοντος φακοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις ἔστω f_1, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$f_1 = 12\ cm.$$

Ἐὰν καλέσωμεν α_2, β_2 τὰς ἀποστάσεις ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{1}{f_{o\lambda}} \tag{2}$$

ἔνθα $f_{o\lambda}$ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ συστήματος τῶν δύο φακῶν.

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$f_{o\lambda} = 18\ cm.$$

Ἤδη, ἡ ζητουμένη ἑστιακὴ ἀπόστασις f_x θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{f_{o\lambda}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_x}.$$

Λύοντες ὡς πρὸς f_x καὶ ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τῶν $f_{o\lambda}$ καὶ f_1 τὰς ἀνωτέρω εὑρεθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν

$$\underline{f_x = -36\ cm.}$$

Κατηγορία Γ΄

1) 'Ακτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου προσπίπτει ἐπὶ ὑλικοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει δείκτην διαθλάσεως 1,54. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως, ἵνα ἡ διαθλωμένη ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀνακλωμένην; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτοῦνται πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων). (Εὔκολος). (ΑΠ: 57^0)

2) Ἡ θλαστικὴ γωνία ἑνὸς πρίσματος, δείκτου διαθλάσεως 1,7, εἶναι ἴση πρὸς 60^0. Διὰ ποίας τιμὰς τῆς γωνίας προσπτώσεως α ἡ ἀκτὶς θὰ ἀνακλᾶται ὁλικῶς ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτοῦνται πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων). (Μετρία). (ΑΠ: *Διά*: $\alpha < 43{,}5^0$)

3) 'Ακτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου προσπίπτει καθέτως ἐπί τινος πετάσματος. Πρὸ αὐτοῦ, καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m, τίθεται πρῖσμα, θλαστικῆς γωνίας 30^0 καὶ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ ἀκτὶς νὰ συναντᾷ τὴν πρώτην ἕδραν καθέτως, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ πετάσματος φωτεινὴ κηλὶς μετατοπίζεται κατὰ 26,8 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος. (Ἡ ἀκτὶς προσπίπτει περὶ τὴν κορυφὴν τοῦ πρίσματος). (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτοῦνται πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων). (Μετρία). (ΑΠ: *1,414*)

4) Ὑάλινον πρῖσμα, τομῆς ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου, βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ δείκτου διαθλάσεως τοῦ πρίσματος, ἵνα κίτρινον φῶς νατρίου, προσπῖπτον καθέτως ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ὑφίσταται ὁλικὴν ἀνάκλασιν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης; (Ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος διὰ τὸ κίτρινον φῶς τοῦ νατρίου εἶναι 1,33). (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτοῦνται πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων). (Μετρία). (ΑΠ: $n_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = 1{,}88$)

5) 'Επὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας $A = 60^0$, προσπίπτει ἀκτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\alpha = 90^0$. Μετὰ τὴν διάθλασιν τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τῆς πρώτης ἕδρας, αὕτη ἐξέρχεται ἐκ τῆς δευτέρας ἕδρας ὑπὸ γωνίαν ἀναδύσεως $\delta = 30^0$. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως n τοῦ πρίσματος; (Μετρία).

$$\left(\text{ΑΠ}: \ n = \frac{\sqrt{\eta\mu^2\delta + 2\cdot\eta\mu\,\delta\cdot\sigma\upsilon\nu\,A + 1}}{\eta\mu\,A} = 1{,}524\right)$$

6) 'Ακτὶς κιτρίνου φωτὸς νατρίου προσπίπτει ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας 40^0, καὶ μετὰ τὴν διάθλασιν προσπίπτει ἐπὶ τῆς δευτέρας ἕδρας καθέτως. 'Εὰν ἡ γωνία ἐκτροπῆς εἶναι ἴση πρὸς 30^0, ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ πρίσματος; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτοῦνται πίνακες τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων). (Μετρία). (ΑΠ: *1,46*)

7) Μικρὰ φωτεινὴ πηγὴ τοποθετεῖται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 20 cm πρὸς τὸ μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας. 'Εὰν ἐπαργυρωθῇ ἡ ἐπίπεδος αὐτοῦ ἐπιφάνεια, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐκ τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀναχωροῦσαι ἀκτῖνες, *μετὰ τὴν ἀνάκλασίν των ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου κατοπτρικῆς ἐπιφανείας, ἐπιστρέφουν εἰς τὴν πηγήν. Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ ; (Δύσκολος).* (ΑΠ : *5 διοπτρίαι*)

8) Συγκλίνων φακὸς σχηματίζει τὸ εἴδωλον τοῦ Ἡλίου εἰς ἀπόστασιν 10 cm *ἀπὸ τοῦ φακοῦ. Ἐὰν εἰς τὸν φακὸν τοῦτον προσαρμόσωμεν καὶ δεύτερον οὕτως ὥστε ν' ἀποτελέσῃ σύστημα, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εἴδωλον τοῦ Ἡλίου ἀπομακρύνεται κατὰ 20* cm *τῆς ἀρχικῆς του θέσεως. Ποῖον εἶναι τὸ εἶδος καὶ ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ δευτέρου φακοῦ ; (Μετρία).* (ΑΠ : *Ἀποκλίνων, — 15* cm)

9) Ἐπιπεδόκυρτος φακός, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R_1 = 15$ cm *καὶ δείκτου διαθλάσεως* $n_1 = 1{,}53$, *συνδυάζεται πρὸς ἐπιπεδόκοιλον φακόν, δείκτου διαθλάσεως* $n_2 = 1{,}75$, *ὁπότε προκύπτει σύστημα, ἑστιακῆς ἀποστάσεως* $f_{ολ} = 80$ cm. *Ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος* R_2 *τοῦ ἐπιπεδοκοίλου φακοῦ ; (Μετρία).*

$$\left(\text{ΑΠ}: \; R_2 = R_1 \cdot \frac{f_{ολ}\cdot(n_2-1)}{f_{ολ}\cdot(n_1-1)-R_1} = 32{,}85 \text{ cm}\right)$$

10) Ὑάλινος ἐπιπεδόκυρτος φακός, δείκτου διαθλάσεως 1,5, ἔχει ἀκτῖνα καμπυλότητος ἴσην πρὸς 20 cm. *Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο κυρίων ἑστιῶν αὐτοῦ ; (Εὔκολος).* (ΑΠ : *80* cm)

11) Πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 50 cm, *τίθεται φωτεινὸν ἀντικείμενον καὶ εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε τὸ σχηματιζόμενον πραγματικὸν εἴδωλον νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινήσωμεν τὸν φακὸν διὰ νὰ σχηματισθῇ φανταστικὸν εἴδωλον, ὑπὸ τὴν αὐτὴν μεγέθυνσιν ; (Μετρία).*
(ΑΠ : *Κατὰ 50* cm *πρὸς τὸ ἀντικείμενον*)

12) Φακὸς σχηματίζει ἓν εἴδωλον ἀνεστραμμένον, τοῦ ὁποίου τὸ μέγεθος εἶναι διπλάσιον τοῦ μεγέθους τοῦ ἀντικειμένου. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ ἀντικειμένου καὶ εἰδώλου εἶναι ἴση πρὸς 36 cm. *α) Τὸ εἴδωλον εἶναι πραγματικὸν ἢ φανταστικόν ; β) Ὁ φακὸς εἶναι συγκλίνων ἢ ἀποκλίνων ; γ) Εἰς ποίαν θέσιν εὑρίσκεται ὁ φακός ; δ) Ποία εἶναι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις ; (Εὔκολος).*
(ΑΠ : *α) Πραγματικόν, β) συγκλίνων, γ) εἰς ἀπόστασιν 12* cm *ἀπὸ τοῦ ἀντικειμένου, δ) 8* cm)

13) Φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους 10 cm, *εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 60* cm *ἀπὸ συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 12* cm. *Εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 35* cm *ἀπ' αὐτοῦ τοποθετεῖται δεύτερος συγκλίνων φακός, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 10* cm. *Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ θέσις, β) τὸ εἶδος καὶ γ) τὸ μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου. (Μετρία).*
(ΑΠ : *α) Τὸ εἴδωλον θὰ σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν 20* cm *ἀπὸ τοῦ δευτέρου φακοῦ. β) Πραγματικόν. γ) 2,5* cm)

14) Ὅταν ἓν φωτεινὸν ἀντικείμενον μετακινηθῇ κατὰ 14 cm *ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος ἑνὸς συγκλίνοντος φακοῦ, τὸ πραγματικὸν εἴδωλον αὐτοῦ μετακινεῖται κατὰ 28* cm, *ἐνῷ, ταυτοχρόνως, ἡ μεγέθυνσις ἐλαττοῦται ἀπὸ 4 εἰς 0,5. Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ ; (Μετρία).* (ΑΠ : *8* cm)

15) Φακός, ἰσχύος 4 διοπτριῶν, σχηματίζει εἴδωλον, διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου, διὰ τὴν θέσιν $α_1$ *τοῦ ἀντικειμένου. Ἐὰν ὁ φακὸς ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἄλλου, ἰσχύος 0,5 διοπτριῶν, ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῆς νέας ἀποστάσεως* $α_2$ *τοῦ ἀντικειμένου πρὸς τὴν προηγουμένην* $α_1$, *ἵνα τὸ εἴδωλον παραμείνῃ διπλάσιον τοῦ ἀντικειμένου ; (Μετρία).*
(ΑΠ : $α_2 : α_1 = 8 : 1$)

16) Μία φωτιστικὴ διάταξις ἐργαστηρίου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἑξῆς, κατὰ σειράν, μέρη : 1) Ἐκ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 3,8 cm. *2) Ἐκ σημειακῆς φωτεινῆς πηγῆς, τοποθετημένης ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου καὶ 3) ἐκ* *συγκεντρωτικοῦ φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 cm, τοῦ ὁποίου ὁ κύριος ἄξων συμπίπτει μὲ τὸν κύριον ἄξονα τοῦ κατόπτρου. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ ποίαν ἀπὸ τοῦ φακοῦ εὑρίσκεται ἡ φωτεινὴ πηγή, ὅταν ἡ διάταξις ἔχει ρυθμισθῇ κατὰ τρόπον ὥστε νὰ δίδῃ δέσμην παραλλήλων ἀκτίνων; Εἰς ποίαν θέσιν σχηματίζεται τὸ εἴδωλον τῆς πηγῆς διὰ τοῦ κατόπτρου; (Δύσκολος).*

(ΑΠ : *7,6 cm, 20 cm, συμπίπτει μὲ τὴν πηγήν*)

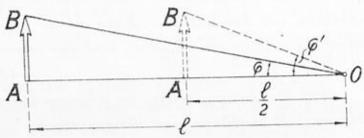
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΟΦΘΑΛΜΟΣ ΚΑΙ ΟΠΤΙΚΑ ΟΡΓΑΝΑ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ γωνία ὁράσεως ἑνὸς πολὺ μικροῦ ἀντικειμένου, ὅταν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ὑποδιπλασιάζεται;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν φ καὶ φ' τὴν γωνίαν ὁράσεως εἰς τὰς δύο θέσεις τοῦ ἀντικειμένου AB, τότε ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι



$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{AB}{l} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\,\varphi' = \frac{AB}{l/2}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἀντικείμενον εἶναι μικρὸν καὶ αἱ γωνίαι φ καὶ φ' θὰ εἶναι μικραί, ἑπομένως, ἀντὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς γωνίας. Ἤτοι εἶναι

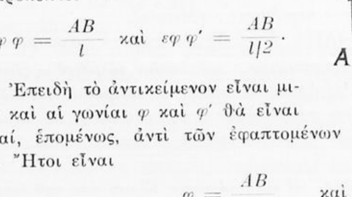
$$\varphi = \frac{AB}{l} \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi' = \frac{AB}{l/2}.$$

Διαιροῦντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\underline{\varphi' = 2\varphi.}$$

Ἄσκησις 2α. *Ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προσαρμοσθῇ ὑπερμέτρωψ ὀφθαλμὸς εἶναι 1 m. Ποίας ἰσχύος φακοὶ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν δι' ἄνετον ἀνάγνωσιν εἰς ἀπόστασιν 25 cm;*

Λύσις. Ἔστω a_0 ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προσαρμόζεται ὁ ὑπερμέτρωψ ὀφθαλμὸς - δηλ. ἡ ἀπόστασις *1 m*. Διὰ νὰ δύναται οὗτος νὰ ἀναγιγνώσκῃ ἀνέτως εἰς ἀπόστασιν a *(25 cm)* πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ φακούς, οἱ ὁποῖοι νὰ δίδουν τὸ (φανταστικὸν) εἴδωλον τῶν γραμμάτων εἰς τὴν ἀπόστασιν a_0.



Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόστασις a_0 εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν β, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ σχηματισθῇ τὸ φανταστικὸν εἴδωλον. Γράφοντες, λοιπόν, τὸν τύπον τῶν φακῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν:

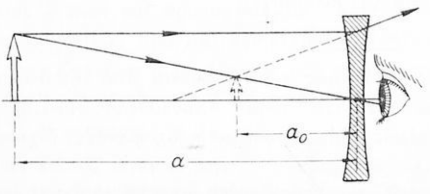
$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} = I.$$

Δίδονται: $\alpha = 25\ cm = 0{,}25\ m$, $\beta = \alpha_0 = -1\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$I = 3\ m^{-1}$ ἢ $I = 3$ *διοπτρίαι.*

Ἄσκησις 3η. *Ἡ ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως μύωπος ὀφθαλμοῦ εἶναι 15 cm. Ποίας ἰσχύος φακοὺς πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ οὗτος διὰ παρατήρησιν μεμακρυσμένων ἀντικειμένων;*

Λύσις. Ἔστω α_0 ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προσαρμόζεται ὁ μύωψ ὀφθαλμὸς - δηλ. ἡ ἀπόστασις $15\ cm$. Διὰ νὰ δύναται οὗτος νὰ παρατηρῇ μεμακρυσμένα ἀντικείμενα (εἰς ἀπόστασιν, δηλ., α) πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ ἀποκλίνοντας φακούς, οἱ ὁποῖοι νὰ δίδουν τὸ φανταστικὸν εἴδωλον εἰς τὴν ἀπόστασιν α_0.



Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι ἡ ἀπόστασις α_0 εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν β, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ σχηματισθῇ τὸ εἴδωλον. Γράφοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} = I.$$

Δίδονται: $\alpha = \infty$, $\beta = \alpha_0 = -15\ cm = -0{,}15\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$I = -6{,}7\ m^{-1}$ ἢ $I = -6{,}7$ *διοπτρίαι.*

Ἄσκησις 4η. *Μὲ τὴν βοήθειαν συγκλινόντων φακῶν, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 30 cm, ὀφθαλμὸς ἀναγιγνώσκει ἀκόπως ἔντυπον, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 25 cm. Εἰς ποίαν ἐλαχίστην ἀπόστασιν δύναται νὰ προσαρμοσθῇ ὁ ὀφθαλμὸς ἄνευ φακῶν;*

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν α τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ ἔντυπον δι' ἄκοπον ἀνάγνωσιν μὲ χρῆσιν τῶν φακῶν καὶ β τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν σχηματίζεται τὸ φανταστικὸν εἴδωλον αὐτοῦ. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἀπόστασις αὕτη β θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν α_0, εἰς τὴν ὁποίαν προσαρμόζεται ὁ ὀφθαλμὸς ἄνευ τῶν φακῶν ($\beta = \alpha_0$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῶν φακῶν εὑρίσκομεν

$\beta = 150\ cm$ ἢ $\beta = 1{,}5\ m.$

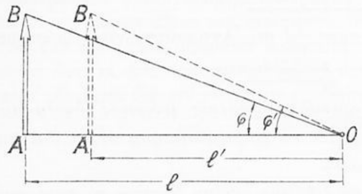
Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Κατακόρυφον ἀντικείμενον, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 1 m, φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ὁράσεως 20°. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ὁράσεως θὰ φαίνεται τὸ αὐτὸ ἀντικείμενον εἰς ἀπόστασιν 80 cm;*

Λύσις. Ἔστωσαν φ καὶ φ' αἱ γωνίαι ὁράσεως εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ l, l' αἱ ἀντίστοιχοι ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμένου AB. Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{AB}{l} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\,\varphi' = \frac{AB}{l'}.$$

Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν, εὐκόλως, τὸν τελικὸν τύπον



$$\varepsilon\varphi\, \varphi' = \varepsilon\varphi\, \varphi \cdot \frac{l}{l'}. \quad (1)$$

Δίδονται: $l = 1\ m = 100\ cm$, $l' = 80\ cm$ καὶ $\varphi = 20^0$. Ἐκ πινάκων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων εὑρίσκομεν: $\varepsilon\varphi\, \varphi = \varepsilon\varphi\, 20^0 = 0{,}364$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\varepsilon\varphi\, \varphi' = 0{,}455,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων,

$$\underline{\varphi' = 24{,}5^0.}$$

Ἄσκησις 2α. *Κανονικὸς ὀφθαλμὸς προσαρμόζεται ἀπὸ τῆς ἀποστάσεως 25 cm μέχρι τοῦ ἀπείρου. Μεταξὺ ποίων ἀποστάσεων δύναται νὰ προσαρμόζεται ὁ αὐτὸς ὀφθαλμός, ἐὰν χρησιμοποιήσῃ φακούς, ἰσχύος 5 διοπτριῶν;*

Λύσις. Ἔστω a ἡ ἀπόστασις εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ τεθῇ τὸ ἀντικείμενον πρὸ τῶν φακῶν, ἰσχύος I, ἵνα τὸ φανταστικὸν εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν β, ἴσην πρὸς τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως a_0. Γράφοντες τὸν τύπον τῶν φακῶν ἔχομεν διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{f} = I,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$\underline{a = \frac{\beta}{\beta \cdot I - 1}.} \quad (1)$$

Δίδονται: $I = 5$ *διοπτρίαι* $= 5\ m^{-1}$ καὶ $\beta = -25\ cm = -0{,}25\ m$, διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ἀποστάσεως τῶν $25\ cm$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$\underline{a = 0{,}111\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{a = 11{,}1\ cm.}$$

Ἤτοι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προσαρμόζεται ὁ ὀφθαλμὸς μὲ χρῆσιν τῶν φακῶν, εἶναι $11{,}1\ cm$ (ἀντὶ $25\ cm$ χωρὶς φακούς).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) $I = 5\ m^{-1}$, $\beta = \beta' = -\infty$ λαμβάνομεν διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν:

$$\underline{a' = 0{,}20\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{a' = 20\ cm.}$$

Ἄσκησις 3η. *Ποία ἡ ἰσχὺς μεγεθυντικοῦ φακοῦ, παρέχοντος μεγέθυνσιν 6;*

Λύσις. Ἡ μεγέθυνσις M μεγεθυντικοῦ φακοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$M = 1 + \frac{\Delta}{f}, \quad (1)$$

ἔνθα Δ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως ($\Delta = 25\ cm$) καὶ f ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ. Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσχύος I τοῦ φακοῦ, ἔχομεν

$$I = \frac{1}{f}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$I = \frac{M-1}{\Delta}. \qquad (3)$$

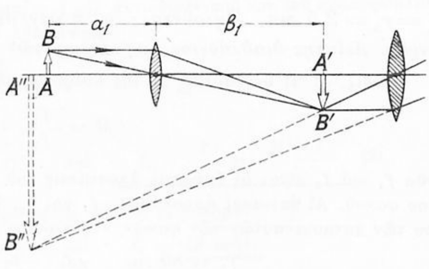
Δίδονται: $M = 6$ καὶ $\Delta = 25\ cm = 0{,}25\ m$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν

$$\underline{I = 20\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I = 20 \text{ διοπτρίαι.}}$$

Ἄσκησις 4η. *Μικροσκόπιον ἔχει ἀντικειμενικὸν φακόν, ἐστιακῆς ἀποστάσεως 2 mm καὶ προσοφθάλμιον, μεγεθύνσεως 10. Ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς σχηματίζει πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν 16 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου του. Ζητεῖται ἡ μεγέθυνσις τοῦ μικροσκοπίου.*

Λύσις. Ἡ μεγέθυνσις M τοῦ μικροσκοπίου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$M = m_1 \cdot m_2 \qquad (1)$$



ἔνθα m_1 καὶ m_2 εἶναι αἱ μεγεθύνσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ. Καὶ τὸ μὲν m_2 δίδεται, ὄχι, ὅμως, καὶ τὸ m_1. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τοῦτο λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$m_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν τὸ α_1 (τὸ β_1 δίδεται) θὰ λάβωμεν τοῦτο ἐκ τοῦ τύπου τῶν φακῶν

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad (3)$$

ὁπότε ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$M = \frac{\beta_1 - f_1}{f_1} \cdot m_2. \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{M = 790} \quad \text{ἢ} \quad \underline{M = 800 \text{ περίπου.}}$$

Ἄσκησις 5η. *Ἡ μεγέθυνσις ἑνὸς (συνθέτου) μικροσκοπίου εἶναι 720. Ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ χρησιμοποιουμένου προσοφθαλμίου φακοῦ, ἐὰν ὁ ἀντικειμενικὸς παρέχῃ μεγέθυνσιν 120;*

Λύσις. Ἡ μεγέθυνσις M τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μεγεθύνσεων m_1, m_2 τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου. Ἤτοι

$$M = m_1 \cdot m_2. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ μεγέθυνσις m_2 τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ *(μεγεθυντικὸς φακὸς)* εἶναι ἴση πρὸς

$$m_2 = 1 + \frac{\Delta}{f_2}, \qquad (2)$$

ἔνθα Δ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως ($\Delta = 25\ cm$) καὶ f_2 ἡ ἐστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ.

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$m_2 = 1 + \Delta \cdot I_2 \tag{3}$$

ἔνθα $I_2 = 1/f_2$ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ. Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{I_2 = \frac{M - m_1}{m_1 \cdot \Delta}} \tag{4}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{I_2 = 20\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I_2 = 20\ \text{διοπτρίαι.}}$$

Ἄσκησις 6η. *Ὁ προσοφθάλμιος καὶ ὁ ἀντικειμενικὸς φακὸς ἀστρονομικῆς διόπτρας εἶναι ἀμφίκυρτοι φακοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἀντικειμενικὸς ἔχει ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος $R_1 = R_2 = 80\ cm$, ὁ δὲ προσοφθάλμιος $r_1 = r_2 = 2{,}5\ cm$. Ζητοῦνται: α) ἡ μεγέθυνσις καὶ β) τὸ μῆκος τῆς διόπτρας. Δείκτης διαθλάσεως ἀμφοτέρων τῶν φακῶν 1,5.*

Λύσις. α) Ἡ μεγέθυνσις M τῆς ἀστρονομικῆς διόπτρας εἶναι ἴση πρὸς

$$M = \frac{f_1}{f_2}, \tag{1}$$

ἔνθα f_1 καὶ f_2 εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ. Αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις f_1 καὶ f_2, ὑπολογιζόμεναι τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν, εὑρίσκονται ἴσαι πρὸς

$$f_1 = 80\ cm \quad \text{καὶ} \quad f_2 = 2{,}5\ cm,$$

ὁπότε, ἐκ τοῦ τύπου (1), ἡ μεγέθυνσις M προκύπτει ἴση πρὸς

$$\underline{M = 32.}$$

β) Τὸ μῆκος L τῆς διόπτρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑστιακῶν ἀποστάσεων f_1 καὶ f_2 τῶν δύο φακῶν. Ἄρα εἶναι

$$\underline{L = 82{,}5\ cm.}$$

Ἄσκησις 7η. *Ἐκ τινος διαφανοῦς ὑλικοῦ, π.χ. ὑάλου, κατασκευάζονται δύο ἐπιπεδόκυρτοι φακοί, ἀκτίνων καμπυλότητος 2 m καὶ 5 cm καὶ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν κατασκευὴν τηλεσκοπίου. Ποία ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις;*

Λύσις. Ἡ μεγέθυνσις M τοῦ τηλεσκοπίου εἶναι ἴση πρὸς

$$M = \frac{f_1}{f_2} \tag{1}$$

ἔνθα f_1 καὶ f_2 εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου. Ὑπολογίζοντες τὸν λόγον f_1/f_2, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν, εὑρίσκομεν αὐτὸν ἴσον πρὸς

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

ἔνθα R_1 εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ ἀντικειμενικοῦ φακοῦ καὶ R_2 ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ προσοφθαλμίου. Ἑπομένως ὁ τύπος (1) γράφεται

$$M = \frac{R_1}{R_2}. \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$M = 40.$$

Σημείωσις: Ἐκ τοῦ τύπου (2) προκύπτει ὅτι, ἐφ' ὅσον οἱ δύο φακοὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ, ὁ δείκτης διαθλάσεως δὲν χρειάζεται διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως

Ἄσκησις 8η. *Ἡ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις δι' ἀστρονομικῆς διόπτρας, μήκους 2,1 m, εἶναι 20. Ποία ἡ ἰσχὺς ἑκάστου φακοῦ;*

Λύσις. Διὰ τὴν μεγέθυνσιν M καὶ τὸ μῆκος L τῆς ἀστρονομικῆς διόπτρας ἰσχύουν οἱ τύποι:

$$M = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{καὶ} \quad L = f_1 + f_2,$$

ἔνθα f_1, f_2 εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ. Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν τύπων λαμβάνομεν

$$f_1 = \frac{M \cdot L}{M+1} \quad \text{καὶ} \quad f_2 = \frac{L}{M+1},$$

ὁπότε προκύπτει

$$I_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{M+1}{M \cdot L} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad I_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{M+1}{L}. \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$I_1 = 0{,}5\ m^{-1} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = 10\ m^{-1}.$$

Ἄσκησις 9η. *Τὸ μῆκος διόπτρας τοῦ Γαλιλαίου εἶναι 14 cm, ἡ δὲ ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις 8. Ποῖαι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν;*

Λύσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἔχομεν τοὺς τύπους

$$M = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{καὶ} \quad L = f_1 - f_2,$$

ἔνθα f_1, f_2 εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ καὶ L τὸ μῆκος τῆς διόπτρας. Ἐκ τῶν ἄνω δύο τύπων λαμβάνομεν

$$f_1 = \frac{M \cdot L}{M-1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad f_2 = \frac{L}{M-1} \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$f_1 = 16\ cm \quad \text{καὶ} \quad f_2 = 2\ cm$$

(ἢ $f_2 = -2\ cm$, ἐφ' ὅσον ὁ προσοφθάλμιος εἶναι ἀποκλίνων).

Ἄσκησις 10η. *Ἐπὶ φωτογραφικῆς πλακός, ἐμβαδοῦ 12 cm², πρόκειται ν' ἀπεικονισθῇ κείμενον ἐντύπου, ἐμβαδοῦ 108 cm². Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ φακοῦ τῆς μηχανῆς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ ἔντυπον, ἐὰν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι 5 cm;*

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν S, S' τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ἐντύπου καὶ τοῦ εἰδώλου του καὶ x, y καὶ x', y' τὰς διαστάσεις τοῦ ἐντύπου καὶ τοῦ εἰδώλου, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x'}{x} \quad \text{καὶ} \quad M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y'}{y}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{x' \cdot y'}{x \cdot y} = \frac{S'}{S},$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$\beta = \alpha \cdot \sqrt{\frac{S'}{S}}. \qquad (1)$$

Ἤδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον τῶν φακῶν τὸ β διὰ τοῦ ἴσου του, τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ τύπος (1) καὶ λύοντες ὡς πρὸς α, λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\alpha = f \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{S}{S'}}\right).}$$

Δίδονται: $f = 5\ cm$, $S = 108\ cm^2$, $S' = 12\ cm^2$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\alpha = 20\ cm.}$$

Ἄσκησις 11η. *Τὸ φωτογραφηθὲν κείμενον τῆς ἄνω ἀσκήσεως 10 προβάλλεται διὰ διασκοπίου ἐπὶ ὀθόνης, ἡ δὲ προβαλλομένη εἰκὼν ἔχει ἐμβαδὸν 3 m^2. Ποία ἡ ἀπόστασις τῆς ὀθόνης ἀπὸ τοῦ φακοῦ τοῦ διασκοπίου, ἐὰν ἡ ἑστιακὴ αὐτοῦ ἀπόστασις εἶναι 25 cm ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν S_1 καὶ S_2 τὰ ἐμβαδὰ τοῦ πρὸς προβολὴν ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ καὶ β τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν καὶ σκεφθῶμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ καταλήξωμεν εἰς τὸν τύπον

$$\underline{\beta = f \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right).}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\beta = 12{,}75\ m.}$$

Ἄσκησις 12η. *Ἡ μεγέθυνσις ἀστρονομικῆς διόπτρας, ἑστιακῆς ἀποστάσεως ἀντικειμενικοῦ φακοῦ 2 m, εἶναι 100. Ζητοῦνται α) ἡ ἰσχὺς τοῦ προσοφθαλμίου καὶ β) τὸ μῆκος τῆς διόπτρας.*

Λύσις. α) Ἡ μεγέθυνσις M τῆς διόπτρας εἶναι ἴση πρὸς

$$M = \frac{f_1}{f_2}, \qquad (1)$$

ἔνθα f_1 καὶ f_2 εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν διὰ τὴν ἰσχὺν I_2 τοῦ προσοφθαλμίου

$$I_2 = \frac{1}{f_2}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{I_2 = \frac{M}{f_1}.}$$

Δίδονται: $M = 100$, $f_1 = 2\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{I_2 = 50\ m^{-1}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{I_2 = 50\ \text{διοπτρίαι.}}$$

β) Τὸ μῆκος L τῆς διόπτρας εἶναι ἴσον πρὸς

$$\underline{L = f_1 + f_2.} \qquad (3)$$

Τὸ f_1 δίδεται $(f_1 = 2\ m = 200\ cm)$. Τὸ f_2, κατὰ τὸν τύπον (1), εἶναι ἴσον πρὸς $f_2 = f_1/M = 2\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες, λοιπόν, εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{L = 202\ cm.}$$

Κατηγορία Γ'

1) Ἡ μικροτέρα γωνία ὁράσεως, ὑπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ φανῇ ἓν ἀντικείμενον ὑπό τινος παρατηρητοῦ εἶναι 1'. Ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ ἀντικειμένου δι' ἐλαχίστην ἀπόστασιν εὐκρινοῦς ὁράσεως 25 cm; (εφ 1' = 0,0003). (Εὔκολος).

(ΑΠ: $0{,}075\ mm$)

2) Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις α, εἰς τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ πλησιάσωμεν εἰς κάτοπτρον ξυρίσματος (ἀκτὶς καμπυλότητος R = 1 m), ἵνα βλέπωμεν, ἀκόμη, εὐκρινῶς τὸ πρόσωπόν μας; Ἐλαχίστη ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως Δ = 25 cm. (Μετρία).

(ΑΠ: $a = \dfrac{\Delta + R \pm \sqrt{(\Delta + R)^2 - 2\Delta R}}{2} = 11\ cm$, *τῆς ἄλλης τιμῆς ἀπορριπτομένης*)

3) Ἐκ τινος διαφανοῦς ὑλικοῦ κατασκευάζονται δύο ἐπιπεδόκυρτοι φακοί, ἀκτίνων καμπυλότητος 5 cm καὶ 80 cm ἀντιστοίχως. Οἱ φακοὶ οὗτοι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν κατασκευὴν ἀστρονομικῆς διόπτρας, μήκους 3,4 m. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ, τὸν ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς προσοφθάλμιον; (Μετρία). (ΑΠ: 5 διοπτρίαι)

★ *4) Διὰ μεταβολῆς (αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως) τοῦ μήκους ἑνὸς μικροσκοπίου, κατὰ 2,5 cm, ἡ μεγέθυνσις αὐτοῦ μεταβάλλεται κατὰ τρόπον ὥστε εἰς μίαν τῶν δύο περιπτώσεων νὰ εἶναι ἴση πρὸς 675, ἐνῷ εἰς τὴν ἄλλην ἴση πρὸς 525. α) Εἰς ποίαν περίπτωσιν ἀντιστοιχεῖ ἑκάστη τῶν ἄνω δύο τιμῶν τῆς μεγεθύνσεως; β) Ποία ἦτο ἡ ἀρχικὴ μεγέθυνσις M_0 τοῦ μικροσκοπίου; (Μετρία).*

(ΑΠ: *α) Ἡ μεγαλυτέρα μεγέθυνσις (675) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ μήκους τοῦ μικροσκοπίου.* β) $M_0 = \dfrac{M_1 + M_2}{2} = 600$)

★ *5) Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ὁράσεως φ φαίνεται ἀντικείμενον, μήκους AB = 0,05 mm, παρατηρούμενον διὰ μικροσκοπίου, μήκους L = 20 cm καὶ φακῶν, ἑστιακῶν ἀποστάσεων $f_1 = 2$ mm καὶ $f_2 = 15$ mm; (Μετρία).*

(ΑΠ: $\varphi = AB \cdot \dfrac{L}{f_1 \cdot f_2} = 0{,}33\ rad \simeq 19{,}1^0$)

★ *6) Διαθέτομεν τρεῖς φακούς, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 5 mm, 2 mm καὶ 3 mm, οἵτινες δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν, ἀνὰ εἷς, ὡς ἀντικειμενικοὶ φακοὶ μικροσκοπίου. Ἐπίσης διαθέτομεν δύο φακούς, ἑστιακῆς ἀποστάσεως 20 mm καὶ 30 mm, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν, ἀνὰ ἕνα, ὡς προσοφθαλμίους. Ἐὰν τὸ μῆκος τοῦ μικροσκοπίου εἶναι ἴσον πρὸς 20 cm ζητεῖται α) ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη ἐπιτυγχανομένη μεγέθυνσις καὶ β) ἡ ἑκάστοτε ἰσχὺς τοῦ μικροσκοπίου. (Μετρία).*

(ΑΠ: α) 1250, 330, β) $5000\ m^{-1}$, $1320\ m^{-1}$)

7) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἀντικειμενικοῦ καὶ τοῦ προσοφθαλμίου φακοῦ μιᾶς ἀστρονομικῆς διόπτρας εἶναι 2 διοπτρίαι καὶ 40 διοπτρίαι ἀντιστοίχως. Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν φακῶν μιᾶς διόπτρας τοῦ Γαλιλαίου, ἡ ὁποία νὰ παρέχῃ τὴν αὐτήν, ὡς ἡ πρώτη, μεγέθυνσιν καὶ νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ μῆκος; (Μετρία).

(ΑΠ: 55,26 cm, 2,76 cm)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΦΩΤΟΜΕΤΡΙΑ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Λαμπτὴρ πυρακτώσεως ἐκπέμπει, πρὸς ὡρισμένην διεύθυνσιν, φωτεινὴν ἰσχὺν 50 ΝΚ. Ζητεῖται ὁ φωτισμὸς ἐπιφανείας, τεθείσης καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν ταύτην καὶ εἰς ἀπόστασιν 0,5 m, 1 m καὶ 4 m;*

Λύσις. Ὡς γνωστόν, ὁ νόμος τῆς Φωτομετρίας διὰ κάθετον πρόσπτωσιν εἶναι

$$\underline{B = \frac{J}{r^2}},$$

ἔνθα B εἶναι ὁ φωτισμός, J ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς πηγῆς καὶ r ἡ (κάθετος) ἀπόστασις. Δίδονται: $J = 50$ *NK* καὶ $r = 0{,}5$ *m* (*1 m, 4 m*). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{B = 200 \text{ Lux}} \qquad \underline{(50 \text{ Lux},} \qquad \underline{3{,}125 \text{ Lux})}$$

Ἄσκησις 2α. *Φωτεινὴ πηγὴ προκαλεῖ, ἐπὶ ἐπιφανείας ἀπεχούσης αὐτῆς κατὰ 2 m, φωτισμὸν 40 Lux. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑνὸς λαμπτῆρος, ὁ ὁποῖος νὰ προκαλῇ τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἀπὸ ἀποστάσεως 3 m;*

Λύσις. Καλοῦμεν J τὴν ζητουμένην φωτεινὴν ἰσχύν, r τὴν ἀπόστασιν τῆς πηγῆς ἀπὸ τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας καὶ B τὸν φωτισμὸν τῆς ἐπιφανείας. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ φωτισμοῦ διὰ κάθετον πρόσπτωσιν $B = J/r^2$ λαμβάνομεν

$$\underline{J = B \cdot r^2.}$$

Δίδονται: $B = 40$ *Lux*, $r = 3$ *m*. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{J = 360 \text{ NK.}}$$

Σημείωσις: Ἡ πρώτη ἀπόστασις *2 m* εἰς οὐδὲν χρησιμεύει.

Ἄσκησις 3η. *Δύο φωτειναὶ πηγαί, αἱ ὁποῖαι ἔχουν φωτεινὴν ἰσχὺν 16 NK καὶ 9 NK, ἀντιστοίχως, ἀπέχουν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 140 cm. Εἰς ποῖον σημεῖον ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἑνώνει αὐτάς, πρέπει νὰ τοποθετηθῇ διάφραγμα, ἵνα αἱ δύο ὄψεις του φωτίζονται ἐξ ἴσου ὑπὸ τῶν δύο πηγῶν;*

Λύσις. Ἔστωσαν J_1, J_2 ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν καὶ r_1, r_2 αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ διαφράγματος. Κατὰ τὸν τύπον τῶν ἴσων φωτισμῶν ἔχομεν

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου ἡ ἀπόστασις l τῶν δύο πηγῶν εἶναι ἴση πρὸς

$$l = r_1 + r_2. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$(J_1 - J_2) \cdot r_1^2 - 2 \cdot l \cdot J_1 \cdot r_1 + J_1 \cdot l^2 = 0. \tag{3}$$

Ἡ ἐξίωσις (3), ὡς ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, δίδει

$$r_1 = \frac{2l \cdot J_1 \pm \sqrt{4l^2 \cdot J_1^2 - 4 \cdot (J_1 - J_2) \cdot J_1 \cdot l^2}}{2 \cdot (J_1 - J_2)} \tag{4}$$

Δίδονται: $l = 140\ cm = 1{,}4\ m$, $J_1 = 16\ NK$ καὶ $J_2 = 9\ NK$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν δύο λύσεις:

$$r_1 = 5{,}6\ m = 560\ cm \quad \text{καὶ} \quad r_1' = 0{,}8\ m = 80\ cm.$$

Ἐκ τῶν δύο λύσεων ἡ πρώτη, $r_1 = 560\ cm$, ἀπορρίπτεται, ὡς ἀντιστοιχοῦσα εἰς θέσιν τοῦ διαφράγματος, ἡ ὁποία δὲν εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν. Συνεπῶς ὡς μόνην λύσιν ἔχομεν τὴν

$r_1' = 80\ cm$ (ἀπὸ τῆς ἰσχυροτέρας πηγῆς).

Ἄσκησις 4η. *Λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 40 NK, εὑρίσκεται εἰς ὕψος 2 m ἀπὸ τραπέζης. Εἰς ποῖον ὕψος πρέπει νὰ τοποθετηθῇ λαμπτήρ, φωτεινῆς ἰσχύος 90 NK, ὥστε νὰ προκαλῇ τὸν αὐτὸν φωτισμὸν τῆς τραπέζης;*

Λύσις. Ἔστωσαν J_1, J_2 ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν καὶ r_1, r_2 αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας τῆς τραπέζης. Κατὰ τὸν τύπον τῶν ἴσων φωτισμῶν ἔχομεν

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$r_2 = r_1 \cdot \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \tag{2}$$

Δίδονται: $r_1 = 2\ m$, $J_1 = 40\ NK$ καὶ $J_2 = 90\ NK$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν

$$r_2 = 3\ m.$$

Σημείωσις: Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ $r_2' = -3\ m$ ἀπορρίπτεται.

Ἄσκησις 5η. *Εἰς τὸ κέντρον σφαίρας, ἀκτῖνος 1 m, εὑρίσκεται μικρὸς λαμπτὴρ πυρακτώσεως. Ποία εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τοῦ λαμπτῆρος, ἐὰν τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἐμβαδοῦ 50 cm², δέχεται φωτεινὴν ῥοὴν 0,01 Lumen;*

Λύσις. Καλοῦμεν J τὴν φωτεινὴν ἰσχὺν τῆς πηγῆς, B τὸν φωτισμὸν καὶ r τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἥτις εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀπὸ τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ φωτισμοῦ διὰ κάθετον πρόσπτωσιν ἔχομεν

$$B = \frac{J}{r^2}. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ φωτισμοῦ, ἔχομεν

$$B = \frac{\Phi}{S}, \tag{2}$$

ἔνθα Φ εἶναι ἡ φωτεινὴ ροὴ καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τῆς φωτιζομένης ἐπιφανείας. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$J = \frac{\Phi}{S} \cdot r^2. \qquad (3)$$

Δίδονται : $\Phi = 0{,}01$ *Lumen*, $r = 1$ *m*, $S = 50$ $cm^2 = 0{,}005$ m^2. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν

$$J = 2 \text{ NK}.$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Εἰς τὸ κέντρον σφαίρας εὑρίσκεται λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 80 NK. Ποία ἡ φωτεινὴ ροή, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ ἑνὸς ἡμισφαιρίου ;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς φωτεινῆς ἰσχύος $J = \Phi/\Omega$ ἔχομεν

$$\Phi = J \cdot \Omega, \qquad (1)$$

ἔνθα Φ εἶναι ἡ φωτεινὴ ροή, ἡ ἐκπεμπομένη ὑπὸ τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἐντὸς τῆς στερεᾶς γωνίας Ω. Ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς δίδεται. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν φωτεινὴν ροὴν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὴν στερεὰν γωνίαν Ω : Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς στερεᾶς γωνίας ἔχομεν

$$\Omega = \frac{S}{r^2}, \qquad (2)$$

ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμισφαιρίου, ἀκτῖνος r. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμισφαιρίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, θὰ ἔχωμεν

$$S = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2,$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), λαμβάνομεν

$$\Omega = 2\pi \text{ στερακτίνια}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\Phi = J \cdot 2\pi. \qquad (3)$$

Δίδεται : $J = 80$ *NK*. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν

$\Phi = 80 \cdot 2 \cdot 3{,}14$ NK·στερακτίνια $= 502{,}4$ NK·στερακτίνια ἢ $\Phi = 502{,}4$ *Lumen*.

Ἄσκησις 2α. *Δύο φωτειναὶ πηγαὶ συγκρίνονται διὰ φωτομέτρου, ὅταν δὲ ἐπιτυγχάνεται ἰσοφωτισμός, αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ φωτομέτρου εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς 15 cm καὶ 30 cm. Ἐὰν ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς μικροτέρας πηγῆς εἶναι 5 NK, ποία εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς ἄλλης ;*

Λύσις. Ἔστωσαν J_1, J_2 ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν καὶ r_1, r_2 αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ φωτομέτρου. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἴσων φωτισμῶν $J_1/J_2 = r_1^2/r_2^2$ ἔχομεν

$$J_2 = J_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}. \qquad (1)$$

Δίδονται: $J_1 = 5\ NK$, $r_1 = 15\ cm = 0{,}15\ m$, $r_2 = 30\ cm = 0{,}3\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$\underline{J_2 = 20\ NK.}$$

Ἄσκησις 3η. *Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, πρὸ τῆς πηγῆς τῆς μεγαλυτέρας φωτεινῆς ἰσχύος τοποθετεῖται ἡμιδιαφανὴς ὕαλος, ἥτις ἀπορροφᾷ τὰ 36 % τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετατοπισθῇ ἡ πηγὴ ὡς πρὸς τὸ φωτόμετρον διὰ νὰ προκαλῇ τὸν αὐτὸν ὡς καὶ πρότερον φωτισμόν;*

Λύσις. Καλοῦμεν J_1 τὴν φωτεινὴν ἰσχὺν τῆς ἀσθενεστέρας πηγῆς καὶ J_2 τὴν φωτεινὴν ἰσχὺν τῆς ἰσχυροτέρας. Διὰ τῆς παρεμβολῆς τῆς ἡμιδιαφανοῦς ὑάλου ἐπῆλθεν ἀπορρόφησις, ὁπότε ἡ φωτεινὴ πηγὴ J_2 ἰσοδυναμεῖ πρὸς πηγὴν μικροτέρας φωτεινῆς ἰσχύος J_3. Ἑπομένως, ἀφοῦ ἡ ὕαλος ἀπορροφᾷ τὰ 36 % τῆς φωτεινῆς ἐνεργείας, θὰ ἔχωμεν

$$J_3 = 0{,}64 \cdot J_2. \tag{1}$$

Γράφοντες τὸν τύπον τῶν ἴσων φωτισμῶν ἔχομεν

$$\frac{J_1}{J_3} = \frac{r_1^2}{r_3^2}, \tag{2}$$

ἔνθα r_3 εἶναι ἡ νέα ἀπόστασις τῆς ἰσχυροτέρας πηγῆς ἀπὸ τοῦ φωτομέτρου.

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$r_3 = r_1 \cdot \sqrt{0{,}64 \cdot \frac{J_2}{J_1}} \quad ἢ \quad r_3 = 0{,}8 \cdot r_1 \cdot \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \tag{3}$$

Δίδονται: $r_1 = 15\ cm = 0{,}15\ m$, $J_1 = 5\ NK$ καὶ $J_2 = 20\ NK$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν

$$r_3 = 0{,}24\ m \quad ἢ \quad r_3 = 24\ cm.$$

Ἤτοι ἡ πηγὴ τῆς μεγαλυτέρας φωτεινῆς ἰσχύος πρέπει νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὸ φωτόμετρον κατ' ἀπόστασιν

$$r_2 - r_3 = 30\ cm - 24\ cm = 6\ cm.$$

Ἄσκησις 4η. *Δύο λαμπτῆρες πυρακτώσεως ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 2,2 m, ὁ δὲ λόγος τῆς φωτεινῆς αὐτῶν ἰσχύος εἶναι ἴσος πρὸς 16 : 49. Εἰς ποίαν θέσιν μεταξὺ αὐτῶν πρέπει νὰ τεθῇ διάφραγμα, κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἑνοῦσαν τοὺς δύο λαμπτῆρας, ὥστε νὰ δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμόν;*

Λύσις. Ἔστωσαν J_1 καὶ J_2 ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν, r_1, r_2 αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἐξ ἴσου φωτιζομένου διαφράγματος καὶ l ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πηγῶν. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ἴσων φωτισμῶν ἔχομεν

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad ἢ \quad \frac{r_1^2}{r_2^2} = K, \tag{1}$$

ἔνθα K εἶναι ὁ λόγος τῆς φωτεινῆς ἰσχύος τῶν δύο πηγῶν *(16 : 49)*. Ἀφ' ἑτέρου εἶναι

$$l = r_1 + r_2. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) προκύπτει ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις

$$(1-K)\cdot r_1^2 + 2K\cdot l\cdot r_1 - K\cdot l^2 = 0.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$r_1 = \frac{-l\cdot(K \pm \sqrt{K})}{1-K}. \qquad (3)$$

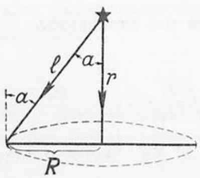
Δίδονται : $l = 2{,}2\ m$ καὶ $K = 16:49$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν δύο τιμὰς διὰ τὸ r_1 :

$$r_1 = -2{,}93\ m \quad \text{καὶ} \quad r_1' = 0{,}8\ m,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἀπορρίπτεται, καθόσον δηλοῖ ὅτι τὸ διάφραγμα δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν κατὰ $2{,}2\ m$.

Ἄσκησις 5η. *Εἰς ὕψος 1 m ὑπεράνω τοῦ κέντρου κυκλικῆς τραπέζης, ἀκτῖνος 75 cm, ἀναρτᾶται λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 40 NK. Ποῖος ὁ φωτισμὸς εἰς τὸ κέντρον καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς τραπέζης ;*

Λύσις. α) Ἔστωσαν J ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς πηγῆς καὶ r τὸ ὕψος αὐτῆς ἀπὸ τῆς τραπέζης. Γράφοντες τὸν νόμον τῆς φωτομετρίας διὰ κάθετον πρόσπτωσιν ἔχομεν διὰ τὸν φωτισμὸν B τοῦ κέντρου



$$B = \frac{J}{r^2}.$$

Δίδονται : $J = 40\ NK$ καὶ $r = 1\ m$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$B = 40\ Lux.$$

β) Ὁ φωτισμὸς B_π εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς τραπέζης εὑρίσκεται, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τοῦ συνημιτόνου, ἴσος πρὸς

$$B_\pi = B'\cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha \qquad (1)$$

ἔνθα B' εἶναι ὁ φωτισμός, τὸν ὁποῖον θὰ εἶχεν ἡ ἐπιφάνεια εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς τραπέζης ὑπὸ κ ά θ ε τ ο ν πρόσπτωσιν καὶ α ἡ γωνία προσπτώσεως. Ἂς καλέσωμεν l τὴν ἀπόστασιν τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀπό τινος σημείου τῆς περιφερείας τῆς τραπέζης. Ἐπειδὴ εἶναι

$$B' = \frac{J}{l^2},$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$B_\pi = \frac{J}{l^2}\cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha. \qquad (2)$$

Ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος ἡ ἀπόστασις l εἶναι ἴση πρὸς

$$l = \sqrt{r^2 + R^2} \quad (3), \qquad \text{τὸ δὲ} \quad \sigma\upsilon\nu\, \alpha = \frac{r}{l} = \frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}} \qquad (4)$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τραπέζης. Ἐκ τῶν τύπων (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

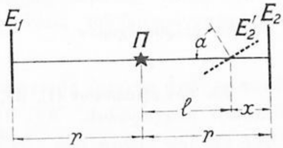
$$B_\pi = \frac{J}{r^2+R^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}. \qquad (5)$$

Δίδονται: $J = 40\ NK$, $r = 1\ m$, $R = 75\ cm = 0{,}75\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) λαμβάνομεν

$$\underline{B_\pi = 20{,}48\ Lux.}$$

Ἄσκησις 6η. *Δύο μικραὶ παράλληλοι ἐπιφάνειαι εὑρίσκονται ἀπέναντι ἀλλήλων καὶ ἀπέχουν 4 m. Εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως εὑρίσκεται λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 100 NK. Ζητοῦνται α) ὁ φωτισμὸς τῶν ἐπιφανειῶν καὶ β) ἐὰν ἡ μία ἐπιφάνεια στραφῇ, ὥστε αἱ ἀκτῖνες νὰ προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως 60°, κατὰ πόσον πρέπει νὰ πλησιάσῃ πρὸς τὴν πηγὴν διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ὁ φωτισμὸς αὐτῆς.*

Λύσις. α) Καλοῦμεν J τὴν φωτεινὴν ἰσχὺν τῆς πηγῆς καὶ r, r τὰς ἀποστάσεις ταύτης ἀπὸ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιφανειῶν E_1, E_2. Γράφοντες τὸν νόμον τῆς φωτομετρίας διὰ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων, ἔχομεν διὰ τοὺς φωτισμοὺς B_1 καὶ B_2 τῶν δύο ἐπιφανειῶν



$$B_1 = \frac{J}{r^2} \quad \text{καὶ} \quad B_2 = \frac{J}{r^2}.$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο ἐπιφάνειαι ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τῆς πηγῆς, οἱ φωτισμοὶ αὐτῶν B_1 καὶ B_2 εἶναι ἴσοι. Ἤτοι $B_1 = B_2 = B$. Ἑπομένως εἶναι

$$\underline{B = \frac{J}{r^2}.}$$

Δίδονται: $J = 100\ NK$ καὶ $r = 4/2\ m = 2\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{B = 25\ Lux.}$$

β) Ἔστω x ἡ ἀπόστασις, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πλησιάσῃ ἡ ἐπιφάνεια E_2, ἵνα μὴ μεταβληθῇ ὁ φωτισμὸς B αὐτῆς. Γράφοντες τὸν νόμον τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν

$$B = B' \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha, \tag{1}$$

ἔνθα α εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως καὶ B' ὁ φωτισμός, τὸν ὁποῖον θὰ εἶχεν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἰς τὴν νέαν θέσιν ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων καὶ ὁ ὁποῖος ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου νόμου, εἶναι ἴσος πρὸς

$$B' = \frac{J}{l^2} \tag{2}$$

ἔνθα l εἶναι ἡ νέα ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τῆς πηγῆς Π. Ἐκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι

$$l = r - x. \tag{3}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{x = r - \sqrt{\frac{J}{B} \cdot \sigma\upsilon\nu\, \alpha}.}$$

Δίδονται: $r = 2\ m$, $J = 100\ NK$, $B = 25\ Lux$, $\alpha = 60^0$ (καὶ ἐκ τριγωνομετρικῶν πινάκων $\sigma\upsilon\nu\, 60^0 = 0{,}5$). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{x = 0{,}59\ m.}$$

Ἄσκησις 7η. *Δύο λαμπτῆρες πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει* *φωτεινὴν ἰσχὺν 100 NK, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2,1 m. Εἰς ποίαν θέσιν μεταξὺ τῶν δύο λαμπτήρων πρέπει νὰ τοποθετηθῇ διάφραγμα, ὥστε ὁ φωτισμὸς τῆς μιᾶς ὄψεως αὐτοῦ νὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ φωτισμοῦ τῆς ἄλλης;*

Λύσις. Καλοῦμεν J τὴν κοινὴν φωτεινὴν ἰσχὺν ἑκάστης τῶν δύο πηγῶν, l τὴν μεταξύ των ἀπόστασιν καὶ r_1, r_2 τὰς ἀντιστοίχους ἀποστάσεις τῶν πηγῶν ἀπὸ τοῦ διαφράγματος. Οἱ φωτισμοὶ B_1 καὶ B_2 τῶν δύο ὄψεων τοῦ διαφράγματος εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῆς φωτομετρίας διὰ κάθετον πρόσπτωσιν, ἴσοι πρὸς

$$B_1 = \frac{J}{r_1^2} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad B_2 = \frac{J}{r_2^2}. \quad (2)$$

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν εἶναι
$$B_1 = 4B_2. \quad (3)$$

'Αφ' ἑτέρου ἔχομεν
$$l = r_1 + r_2. \quad (4)$$

'Εκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$3r_1^2 + 2l\cdot r_1 - l^2 = 0. \quad (5)$$

'Εκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$r_1 = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 12l^2}}{6} \quad \text{ἢ} \quad \underline{r_1 = \frac{l\cdot(-1 \pm 2)}{3}} \quad (6)$$

Δίδεται: $l = 2,1\ m$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν δύο τιμάς:

$$r_1 = -2,1\ m \qquad \text{καὶ} \qquad r_1 = 0,7\ m.$$

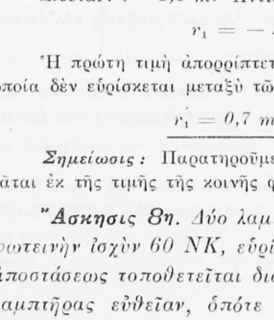
'Η πρώτη τιμὴ ἀπορρίπτεται, ὡς ἀντιστοιχοῦσα εἰς θέσιν τοῦ διαφράγματος, ἡ ὁποία δὲν εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν. Συνεπῶς, ὡς μόνην λύσιν ἔχομεν τήν:

$\underline{r_1' = 0,7\ m}$ (ἀπὸ οἱανδήποτε πηγήν).

Σημείωσις: Παρατηροῦμεν ὅτι, κατὰ τὸν τύπον (6), τὸ ἀποτέλεσμα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς κοινῆς φωτεινῆς ἰσχύος J τῶν δύο λαμπτήρων.

Ἄσκησις 8η. *Δύο λαμπτῆρες πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει φωτεινὴν ἰσχὺν 60 NK, εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 2 m. Εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως τοποθετεῖται διάφραγμα, καθέτως πρὸς τὴν ἑνοῦσαν τοὺς δύο λαμπτῆρας εὐθεῖαν, ὁπότε αἱ δύο ὄψεις τοῦ διαφράγματος δέχονται ἴσον φωτισμόν. 'Ακολούθως τὸ διάφραγμα στρέφεται κατὰ γωνίαν 30°. Ποῖος ὁ φωτισμὸς ἑκάστης ὄψεως τοῦ διαφράγματος;*

Λύσις. Ἔστωσαν J καὶ r ἡ κοινὴ φωτεινὴ ἰσχὺς καὶ ἡ κοινὴ ἀπόστασις τῶν δύο πηγῶν ἀπὸ τοῦ διαφράγματος Δ καὶ α ἡ γωνία προσπτώσεως τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων ἐπ' αὐτοῦ. Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ συνημιτόνου, οἱ φωτισμοὶ B_1, B_2 τῶν δύο ὄψεων τοῦ διαφράγματος εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσοι πρὸς



$$B_1 = B_1'\cdot \text{συν}\,\alpha \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad B_2 = B_2'\cdot\text{συν}\,\alpha, \quad (2)$$

ἔνθα B_1' καὶ B_2' εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι φωτισμοὶ τοῦ διαφράγματος διὰ κάθετον πρόσπτωσιν τῶν ἀκτίνων. 'Αφ' ἑτέρου ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$B_1' = \frac{J}{r^2} \quad \text{καὶ} \quad B_2' = \frac{J}{r^2} \quad \text{ἤτοι} \quad B_1' = B_2'. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$B_1 = B_2 = \frac{J}{r^2} \cdot \text{συν}\, \alpha. \qquad (4)$$

Δίδονται: $J = 60$ *NK*, $r = 2/2$ *m* $= 1$ *m* καὶ $\alpha = 30^\circ$ (καὶ ἐκ τριγωνομετρικῶν πινάκων: *συν* $30^\circ = 0{,}866$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) λαμβάνομεν

$$B_1 = B_2 = 51{,}96 \text{ Lux} \quad \text{ἢ} \quad \underline{B_1 = B_2 \simeq 52 \text{ Lux}}.$$

Σημείωσις: Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ στροφῆς τοῦ διαφράγματος, ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχῃ ἰσοφωτισμὸς τῶν δύο ὄψεων αὐτοῦ (μικροτέρας, βεβαίως, τιμῆς). Τοῦτο συμβαίνει διότι αἱ γωνίαι προσπτώσεως α εἰς τὰς δύο ὄψεις τοῦ διαφράγματος παραμένουν ἴσαι μεταξύ των.

Ἄσκησις 9η. *Φωτεινὴ πηγή, ἀγνώστου φωτεινῆς ἰσχύος, ἀπέχει κατὰ 180 cm ἀπὸ ἄλλην πηγήν, φωτεινῆς ἰσχύος 10 NK. Διάφραγμα, τοποθετούμενον καθέτως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ἑνοῦσαν τὰς δύο πηγὰς καὶ εἰς ἀπόστασιν 60 cm ἀπὸ τῆς δευτέρας πηγῆς, δέχεται τὸν αὐτὸν φωτισμὸν ἐπὶ τῶν δύο ὄψεων αὐτοῦ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ μετακινηθῇ τὸ διάφραγμα διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἐκ νέου ἰσοφωτισμόν, ἐὰν τοῦτο στραφῇ κατὰ 30°;*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν (σημείωσις) εὑρίσκομεν ὅτι, διὰ στροφῆς τοῦ διαφράγματος, ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχῃ ἰσοφωτισμὸς (μικροτέρας, βεβαίως, τιμῆς). Ἄρα τὸ διάφραγμα πρέπει νὰ μετακινηθῇ κατ' ἀπόστασιν ἴσην πρὸς μηδέν.

Κατηγορία Γ'

1) Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο λαμπτήρων πυρακτώσεως εἶναι ἴση πρὸς 6 m. Μεταξὺ αὐτῶν τίθεται διάφραγμα, ἀπέχον κατὰ 2 m ἀπὸ τοῦ ἑνὸς λαμπτῆρος, ὁπότε φωτίζεται ἐξ ἴσου. Ποία εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑκάστου λαμπτῆρος, ἐὰν ἡ συνολικῶς ὑπ' αὐτῶν καταναλισκομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι ἴση πρὸς 75 W, ἡ δὲ ἀπόδοσις 12,56 Lumen/W; (Εὔκολος). (ΑΠ: *15 NK, 60 NK*)

2) Διάφραγμα φέρει κυκλικὴν ὀπήν, διαμέτρου 10 cm. Ἐπὶ τῆς καθέτου, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς ὀπῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν 2 m ἐξ αὐτῆς, εὑρίσκεται φωτεινὴ πηγὴ μικρῶν διαστάσεων (ἠλεκτρικὸς λαμπτήρ). Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ἡ στερεὰ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ὀπῆς καὶ τῆς πηγῆς. β) Ἐὰν ἡ διὰ τῆς ὀπῆς διερχομένη φωτεινὴ ῥοὴ εἶναι ἴση πρὸς 0,05 Lumen, ποία θὰ εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς τῆς πηγῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὀπῆς; γ) Ποία ἡ παρεχομένη εἰς τὸν λαμπτῆρα ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, εἰς W, ἐὰν ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 20 Lumen/W; (Εὔκολος).

(ΑΠ: $1{,}96 \cdot 10^{-3}$ *στερακτίνια, 25,5 NK, 16 W*)

3) Εἰς τὰ δύο ἄκρα τραπέζης, μήκους 3 m, καὶ εἰς ὕψος 2 m ἄνωθεν αὐτῆς εὑρίσκονται ἀνὰ εἷς λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 60 NK ἕκαστος. α) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ φωτεινὴ ἰσχὺς ἑνὸς τρίτου λαμπτῆρος πυρακτώσεως, ὁ ὁποῖος, ἀναρτώμενος εἰς ὕψος 2 m ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς τραπέζης, νὰ προκαλῇ τὸν αὐτόν, ὡς καὶ πρότερον, φωτισμὸν εἰς τὰ ἄκρα τῆς τραπέζης; β) Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ, τώρα, ὁ φωτισμὸς εἰς τὸ μέσον τῆς τραπέζης; (Μετρία). (ΑΠ: *α) 137 NK. β) Θ' αὐξηθῇ κατὰ 18,9 Lux*)

4) Ὁ μέγιστος φωτισμός, τὸν ὁποῖον προκαλεῖ ὁ Ἥλιος ἐπὶ τῆς Γῆς εἶναι ἴσος πρὸς 100 000 Lux. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ μιᾶς ἐπιφανείας πρέπει νὰ τεθῇ λαμπτήρ, φωτεινῆς ἰσχύος $5\cdot 10^6$ NK (*), διὰ νὰ προκαλῇ μέγιστον φωτισμόν, ὅσον προκαλεῖ καὶ ὁ Ἥλιος; (Εὔκολος). (ΑΠ: *Εἰς 7 m περίπου*)

5) Λαμπτὴρ πυρακτώσεως εὑρίσκεται εἰς ὕψος 1 m ἀπό τινος σημείου Σ ὁριζοντίας ἐπιφανείας. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ὁ φωτισμὸς εἶναι ἴσος πρὸς 100 Lux, εἰς ποῖα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ὁ φωτισμὸς θὰ εἶναι ἴσος πρὸς 50 Lux; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτεῖται χρῆσις λογαριθμικῶν πινάκων). (Δύσκολος).

(ΑΠ: *Εἰς σημεῖα, κείμενα ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον Σ καὶ ἀκτῖνα 76,2 cm*)

6) Ἐπίπεδον κάτοπτρον τοποθετεῖται παραλλήλως πρὸς κατακόρυφον πέτασμα καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ, ἴσην πρὸς 50 cm. Ἐὰν εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ταύτης τοποθετηθῇ λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 10 NK, ποῖος θὰ εἶναι ὁ μέγιστος φωτισμὸς τοῦ πετάσματος; (Μετρία). (ΑΠ: *177,7 Lux*)

7) Πρὸς τὸ ἓν μέρος συγκλίνοντος φακοῦ, ἰσχύος 4 διοπτριῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν 25 cm ἀπ' αὐτοῦ, τίθεται μικρὸς λαμπτὴρ πυρακτώσεως, φωτεινῆς ἰσχύος 20 NK. Πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 1 m ἀπ' αὐτοῦ τίθεται μικρὰ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ. Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ὁ φωτισμὸς τῆς ἐπιφανείας, ἐὰν ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ φακοῦ διπλασιασθῇ; (Εὔκολος).

(ΑΠ: *Κατὰ μηδὲν*)

8) Ὁ φωτισμὸς B_0, τὸν ὁποῖον προκαλεῖ μία φωτεινὴ πηγὴ ἐπὶ δαπέδου ὑπὸ κάθετον πρόσπτωσιν εἶναι ἴσος πρὸς 80 Lux. Ποῖος θὰ εἶναι ὁ φωτισμὸς B_α εἰς ἄλλο σημεῖον τοῦ δαπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀκτῖνες προσπίπτουν ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\alpha = 60^0$; (Μετρία). (ΑΠ: $B_\alpha = B_0 \cdot \text{συν}^3 \alpha = 10$ Lux)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ΄

ΠΕΡΙΘΛΑΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτὸς τοῦ νατρίου ἐντὸς τοῦ κενοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 5893 Å. Ποία ἡ συχνότης; Ἐὰν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς αὐτοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς τὰ 3/4 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ κενοῦ, ποῖον τὸ μῆκος κύματος ἐντὸς τοῦ ὕδατος;*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν λ_0 τὸ μῆκος κύματος τοῦ φωτὸς τοῦ νατρίου εἰς τὸ κενόν, ν τὴν συχνότητα καὶ c_0 τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\lambda_0 \cdot \nu = c_0, \qquad (1)$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\nu = \frac{c_0}{\lambda_0}.$$

Δίδεται: $\lambda_0 = 5893$ Å $= 5893 \cdot 10^{-8}$ cm (διότι 1 Å $= 10^{-8}$ cm), εἶναι δὲ $c_0 = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\nu = 5{,}09 \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}.$$

(*) Τοιοῦτοι λαμπτῆρες, εἶναι λαμπτῆρες στιγμιαίας ἀναλαμπῆς καὶ χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, ὑπὸ τῶν φωτογράφων διὰ φωτογραφήσεις ἐντὸς κλειστῶν χώρων.

β) Γράφοντες τὸν τύπον (1) διὰ τὸ ὕδωρ λαμβάνομεν διὰ τὸ μῆκος κύματος $\lambda_{ὕδωρ}$ τοῦ φωτὸς τοῦ νατρίου ἐντὸς τοῦ ὕδατος:

$$\lambda_{ὕδωρ} = \frac{c_{ὕδωρ}}{\nu} \quad ἢ \quad \lambda_{ὕδωρ} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{3}{4} \cdot c_0 \quad ἢ \quad \underline{\lambda_{ὕδωρ} = \frac{3}{4} \cdot \lambda_0} \quad (2)$$

ἔνθα $c_{ὕδωρ}$ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς τοῦ νατρίου ἐντὸς τοῦ ὕδατος. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda_{ὕδωρ} = 4420 \ \mathring{A}.}$$

Ἄσκησις 2α. *Ἐρυθρὸν φῶς, μήκους κύματος εἰς τὸ κενὸν 6563 $\mathring{A}$, διαδίδεται ἐντὸς ὑάλου, δείκτου διαθλάσεως 1,568. Ζητοῦνται: α) ἡ συχνότης τοῦ φωτὸς καὶ β) ἡ ταχύτης καὶ τὸ μῆκος κύματος αὐτοῦ ἐντὸς τῆς ὑάλου.*

Λύσις. α) Ἡ συχνότης ν θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου $\nu = c_0/\lambda_0$, ἔνθα c_0 εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενὸν καὶ λ_0 τὸ μῆκος κύματος εἰς τὸ κενόν. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu = 4{,}57 \cdot 10^{14} \ sec^{-1}.}$$

β) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δείκτου διαθλάσεως $n = c_0/c$ λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς ἐντὸς τῆς ὑάλου

$$\underline{c_{ὕαλος} = \frac{c_0}{n_{ὕαλος}},}$$

ἔνθα $n_{ὕαλος}$ εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν ἄνω τύπον εὑρίσκομεν

$$\underline{c_{ὕαλος} = 1{,}91 \cdot 10^{10} \ cm/sec.}$$

Ἐκ τῶν τύπων

$$c_0 = \lambda_0 \cdot \nu, \quad c_{ὕαλος} = \lambda_{ὕαλος} \cdot \nu \quad καὶ \quad n_{ὕαλος} = \frac{c_0}{c_{ὕαλος}}$$

λαμβάνομεν

$$\underline{\lambda_{ὕαλος} = \frac{\lambda_0}{n_{ὕαλος}}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda_{ὕαλος} = 4185 \ \mathring{A}.}$$

Ἄσκησις 3η. *Νὰ δειχθῇ ὅτι, κατὰ τὴν διάθλασιν τοῦ φωτὸς ἐντὸς ὑλικοῦ τινος, ἰσχύει ἡ σχέσις $n = \lambda_1/\lambda_2$, ἔνθα n εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ καὶ λ_1, λ_2 τὰ μήκη κύματος τοῦ φωτὸς ἐντὸς τοῦ κενοῦ καὶ ἐντὸς τοῦ ἐν λόγῳ ὑλικοῦ.*

Λύσις. Ἐκ τῶν τύπων

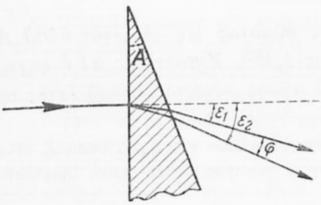
$$\lambda_1 \cdot \nu = c_1, \quad \lambda_2 \cdot \nu = c_2 \quad καὶ \quad n = c_1/c_2$$

λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Κατηγορία Β'

Άσκησις 1η. *Φῶς περιέχει δύο ἀκτινοβολίας, μίαν ἐρυθροῦ χρώματος, μήκους κύματος 6708 Å, τὴν δὲ ἄλλην κιτρίνου χρώματος, μήκους κύματος 5893 Å. Ἐὰν τὸ φῶς τοῦτο προσπέσῃ, σχεδόν, καθέτως ἐπὶ πρίσματος, θλαστικῆς γωνίας 4°, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀκτίνων σχηματιζομένη γωνία, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ δεῖκται διαθλάσεως τοῦ πρίσματος διὰ τὰ δύο χρώματα εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσοι πρὸς $n_1 = 1{,}53$ καὶ $n_2 = 1{,}58$;*



Λύσις. Εἰς τὰ ὀξέα πρίσματα ἡ γωνία ἐκτροπῆς ε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\varepsilon = (n-1)\cdot A, \quad (1)$$

ἔνθα n εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως καὶ A ἡ θλαστικὴ γωνία τοῦ πρίσματος. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (1) διὰ τὰς δύο ἀκτινοβολίας, τότε ἡ ζητουμένη γωνία φ θὰ προκύψῃ ὡς διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν ἐκτροπῆς ε_2, ε_1. Ὁ ὑπολογισμὸς θὰ μᾶς δώσῃ

$$\underline{\varphi = 0{,}2^0} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\varphi = 12'}.$$

Άσκησις 2α. *Ἀμφίκυρτος φακὸς ἔχει ἀκτῖνας καμπυλότητος ἴσας πρὸς 20 cm ἑκάστην. Πόσον θ' ἀπέχῃ ἡ κυρία ἑστία διὰ τὸ ἐρυθρὸν ἀπὸ τὴν κυρίαν ἑστίαν διὰ τὸ ἰῶδες χρῶμα, ἐὰν οἱ ἀντίστοιχοι δεῖκται διαθλάσεως εἶναι ἴσοι πρὸς 1,735 διὰ τὸ ἐρυθρὸν καὶ 1,791 διὰ τὸ ἰῶδες;*

Λύσις. Ὁ τύπος τῶν κατασκευαστῶν τῶν φακῶν δι' ἴσας ἀκτῖνας καμπυλότητος $(R_1 = R_2 = R)$ γράφεται

$$\frac{1}{f} = (n-1)\cdot\frac{2}{R}, \text{ ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει } f = \frac{R}{2\cdot(n-1)}. \quad (1)$$

Γράφοντες τὸν τύπον (1) ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὸ ἐρυθρὸν φῶς, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τὸ ἰῶδες καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν, λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{f_{\varepsilon\varrho} - f_{\iota\omega\delta} = \frac{R}{2}\cdot\frac{n_{\iota\omega\delta} - n_{\varepsilon\varrho}}{(n_{\varepsilon\varrho}-1)\cdot(n_{\iota\omega\delta}-1)}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{f_{\varepsilon\varrho} - f_{\iota\omega\delta} = 0{,}96 \text{ cm} = 9{,}6 \text{ mm}.}$$

Άσκησις 3η. *Τὸ μῆκος κύματος μιᾶς ἀκτινοβολίας ἐρυθροῦ χρώματος ἐντὸς τοῦ κενοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 6438 Å. Πόσα μήκη κύματος περιέχονται ἐντὸς 1 cm α) εἰς τὸ κενὸν καὶ β) εἰς τὸν ἀδάμαντα;*

Λύσις. α) Ὁ ἀριθμὸς τῶν μηκῶν κύματος ἐντὸς *1 cm* εἰς τὸ κενὸν θὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ μήκους *1 cm* διὰ τοῦ μήκους κύματος εἰς τὸ κενὸν (ἐκφραζομένου εἰς *cm*), τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς $6438 \text{ Å} = 6438\cdot 10^{-8}$ *cm*. Διαιροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι εἰς *1 cm* περιέχονται

$$\underline{1{,}55\cdot 10^4 \text{ μήκη κύματος.}}$$

β) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸν ἀδάμαντα εὑρίσκομεν τὸ μῆκος κύματος ἐντὸς αὐτοῦ (ἀφοῦ λάβωμεν ἀπὸ τὸν ἀντίστοιχον πίνακα τὴν τιμὴν τοῦ δείκτου διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος) καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν. Θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν

$$\underline{3{,}75\cdot 10^4.}$$

Παρατήρησις: Ἡ τιμὴ $3{,}75\cdot 10^4$ δὲν εἶναι, ἐντελῶς, ἀκριβής, διότι διὰ τὴν λύσιν ἐλήφθη ἡ τιμὴ τοῦ δείκτου διαθλάσεως διὰ τὸ κίτρινον φῶς, ἀντὶ τῆς τιμῆς αὐτοῦ διὰ τὸ ἐρυθρόν.

Ἄσκησις 4η. *Τὸ μῆκος κύματος μιᾶς ἀκτινοβολίας ἐντὸς διαφανοῦς τινος ὑλικοῦ εἶναι δύο φορὰς μικρότερον τοῦ μήκους κύματος τῆς αὐτῆς ἀκτινοβολίας ἐντὸς τοῦ κενοῦ. Ποῖος ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν λ_0 καὶ λ τὸ μῆκος κύματος εἰς τὸ κενὸν καὶ εἰς τὸ ἄλλο ὑλικὸν καὶ c_0, c τὰς ἀντιστοίχους ταχύτητας τοῦ φωτός, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\lambda_0\cdot\nu = c_0 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda\cdot\nu = c. \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ δείκτης διαθλάσεως n δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$n = \frac{c_0}{c}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{n = \frac{\lambda_0}{\lambda}.}$$

Θέτοντες εἰς τὸν ἄνω τύπον $\lambda = \lambda_0/2$ εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 2.}$$

Κατηγορία Γ΄

★★★ *Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εἰδώλων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὑπὸ τῶν κατόπτρων τῆς διατάξεως Fresnel, εἶναι 1 mm. Ἐὰν τὸ πέτασμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σχηματίζονται οἱ κροσσοὶ συμβολῆς, ἀπέχει τῶν ἄνω εἰδώλων, κατὰ 1 m, τὸ δὲ μῆκος κύματος τοῦ χρησιμοποιουμένου, κατὰ τὸ πείραμα, φωτὸς εἶναι ἴσον πρὸς 5896 Å, νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κεντρικοῦ κροσσοῦ θὰ σχηματισθῇ ὁ κροσσὸς 4ης τάξεως. (1 Å $= 10^{-8}$ cm).* (ΑΠ: *2,36 mm*)

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΔ΄

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΝ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Ποία ἡ ἄπωσις μεταξὺ δύο μικρῶν σφαιρῶν, φορτισμένων μὲ φορτίον 400 μCb ἑκάστη καὶ εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 2 m; ($1\ \mu Cb = 1\cdot 10^{-6}$ Cb).*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν q_1 καὶ q_2 τὰ φορτία τῶν δύο σφαιρῶν καὶ r τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν, τότε ἡ ἄπωσις F ὑπολογίζεται, ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}. \tag{1}$$

Λύσις εἰς τὸ Ἠλεκτροστατικὸν Σύστημα μονάδων (ΗΣΜ) : Δίδονται : $q_1 = q_2 = 400\ \mu Cb = 400 \cdot 10^{-6}\ Cb$. Ἐπειδὴ $1\ Cb = 3 \cdot 10^9$ *ΗΣΜ - φορτίου* ἔχομεν $q_1 = q_2 = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^9$ *ΗΣΜ - φορτίου* $= 12 \cdot 10^5$ *ΗΣΜ - φορτίου*. Ἡ ἀπόστασις r εἶναι ἴση πρὸς $r = 2\ m = 200\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$F = \frac{12 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^5}{200^2}\ dyn \quad \text{ἢ} \quad \underline{F = 36 \cdot 10^6\ dyn.}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\ kgr^* = 9{,}81 \cdot 10^5\ dyn$ ἔχομεν

$$\underline{F = 36{,}7\ kgr^*.}$$

Ἄσκησις 2α. *Μικρὰ φορτισμένη σφαῖρα τοποθετεῖται εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἄνωθεν φορτίου 100 ΗΣΜ - φορτίου, ὁπότε παρατηρεῖται ὅτι τὸ βάρος της φαινομενικῶς αὐξάνεται κατὰ 50 mgr*. Ποῖον τὸ φορτίον τῆς σφαίρας;*

Λύσις. Ἄς καλέσωμεν q_1 τὸ φορτίον τῆς σφαίρας καὶ q_2 τὸ ἄλλο φορτίον. Ἡ φαινομένη αὔξησις τοῦ βάρους τῆς σφαίρας ὀφείλεται εἰς τὴν ἑλκτικὴν δύναμιν F, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τοῦ φορτίου q_2 καὶ ἡ ὁποία, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

ἔνθα r εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο φορτίων. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{q_1 = \frac{F \cdot r^2}{q_2}.}$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ : Δίδονται : $F = 50\ mgr^* = 50 \cdot 10^{-3}\ gr^* = 50 \cdot 981 \cdot 10^{-3}\ dyn$, $r = 3\ cm$, $q_2 = 100$ *ΗΣΜ - φορτίου*. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{q_1 = 4{,}4\ \text{ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

Ἄσκησις 3η. *Δύο ὅμοιοι μονωμένοι σφαιρικοὶ ἀγωγοί, ἔχοντες φορτία + 30 ΗΣΜ - φορτίου καὶ — 10 ΗΣΜ - φορτίου ἀντιστοίχως, φέρονται εἰς ἐπαφὴν καί, ἀκολούθως, ἀπομακρύνονται μέχρις ὅτου τὰ κέντρα των ἀπέχουν κατὰ 5 cm. Ποία ἡ μεταξὺ των ἐξασκουμένη δύναμις;*

Λύσις. Ὅταν οἱ ἀγωγοὶ ἔλθουν εἰς ἐπαφήν, τότε *10 ΗΣΜ* ἀρνητικοῦ φορτίου θὰ ἐξουδετερώσουν *10 ΗΣΜ* θετικοῦ φορτίου, ὁπότε τὸ ἐπὶ τῶν δύο σφαιρῶν ἀπομένον φορτίον θὰ εἶναι, συνολικῶς, ἴσον πρὸς *+ 20 ΗΣΜ - φορτίου*. Ἐπειδὴ οἱ δύο σφαιρικοὶ ἀγωγοὶ εἶναι ὅμοιοι, τὸ φορτίον τοῦτο θὰ κατανεμηθῇ ἐξ ἴσου, ὁπότε οἱ ἀγωγοὶ οὗτοι, μετὰ τὸν ἀποχωρισμόν των, θὰ φέρουν ἴσα καὶ ὁμώνυμα φορτία *(+ 10 ΗΣΜ - φορτίου)*. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀγωγῶν ἐξασκουμένη ἀπωστικὴ δύναμις F θὰ εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$\underline{F = \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.}$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ : Δίδονται : $q_1 = q_2 = 10$ *ΗΣΜ - φορτίου*, $r = 5\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 4\ dyn.}$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Ποία ἡ ἄπωσις μεταξὺ δύο ἠλεκτρονίων, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 1 Å ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν e τὸ φορτίον ἑκάστου ἠλεκτρονίου καὶ r τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν, τότε ἡ ἄπωσις F μεταξὺ τῶν δύο ἠλεκτρονίων θὰ εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$F = \frac{e \cdot e}{r^2} \quad \text{ἢ} \quad \underline{F = \frac{e^2}{r^2}}.$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδεται: $r = 1\ \text{Å} = 10^{-8}\ cm$. Ἀπὸ τὴν σ. 105 τοῦ Β΄ τόμου λαμβάνομεν τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου*. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\ dyn.}$$

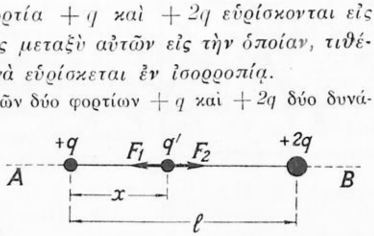
Ἄσκησις 2α. *Ποία δύναμις ἐξασκεῖται μεταξὺ ἑνὸς θετικοῦ ἰόντος Na^+ καὶ ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἰόντος χλωρίου Cl^-, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 2,8 Å ;*

Λύσις. Τὸ φορτίον τοῦ ἰόντος Na^+ εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον e, τοῦ δὲ ἰόντος Cl^- εἶναι ἀρνητικὸν καί, ἐπίσης, ἴσον πρὸς e. Ἡ δύναμις θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb καὶ εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδεται: $r = 2{,}8\ \text{Å} = 2{,}8 \cdot 10^{-8}\ cm$. Τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σ. 105 τοῦ Β΄ τόμου ἴσον πρὸς $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου*. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν νόμον τοῦ Coulomb εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 2{,}9 \cdot 10^{-4}\ dyn.}$$

Ἄσκησις 3η. *Δύο σημειακὰ φορτία $+q$ καὶ $+2q$ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 15 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις μεταξὺ αὐτῶν εἰς τὴν ὁποίαν, τιθέμενον ἓν ἄλλο σημειακὸν φορτίον q', νὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.*

Λύσις. Τὸ φορτίον q' ὑφίσταται ἐκ τῶν δύο φορτίων $+q$ καὶ $+2q$ δύο δυνάμεις F_1 καὶ F_2, αἱ ὁποῖαι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι ἴσαι πρὸς



$$F_1 = \frac{q \cdot q'}{x^2} \quad \text{καὶ} \quad F_2 = \frac{2q \cdot q'}{(l-x)^2}.$$

Διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ φορτίον q' πρέπει νὰ εἶναι:

$$F_1 = F_2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{q \cdot q'}{x^2} = \frac{2q \cdot q'}{(l-x)^2}. \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\pm x \cdot \sqrt{2} = l - x,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{x = \frac{l}{1 \pm \sqrt{2}}}. \qquad (2)$$

Δίδεται: $l = 15\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{x = 6{,}21\ cm} \quad \text{καὶ} \quad x' = -36{,}23\ cm.$$

('Εκ τῶν δύο τιμῶν, ἡ δευτέρα, $-36{,}23$ *cm*, ἀπορρίπτεται).

Ἄσκησις 4η. *Ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἴση πρὸς $5{,}28\cdot 10^{-9}$ cm. Ποία ἡ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ πυρὴν ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν r τὴν ἀκτῖνα τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ e τὸ φορτίον του, τότε ἡ δύναμις F, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ πυρῆνος ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, θὰ εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$F = \frac{e^2}{r^2}\cdot$$

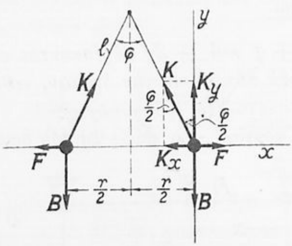
(διότι ὁ πυρὴν τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου ἔχει φορτίον ἴσον πρὸς e).

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδεται: $r = 5{,}28\cdot 10^{-9}$ *cm*. Τὸ φορτίον e εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σ. 105 τοῦ Β' τόμου ἴσον πρὸς $4{,}8\cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου*. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 8{,}26\cdot 10^{-3}\ dyn.}$$

Ἄσκησις 5η. *Δύο ἐλαφραὶ ξύλιναι σφαῖραι, ἑκάστης τῶν ὁποίων ἡ μᾶζα εἶναι ἴση πρὸς 0,5 gr, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νημάτων, μήκους 20 cm. Ἴσα ὁμώνυμα φορτία φέρονται ἐπὶ ἑκάστης τῶν σφαιρῶν, μέχρις ὅτου τὰ δύο νήματα σχηματίσουν γωνίαν 30°. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ φορτίον ἑκάστης τῶν δύο σφαιρῶν.*

Λύσις. 'Επὶ ἑκάστης σφαίρας ἐξασκοῦνται τρεῖς δυνάμεις: 1) τὸ βάρος B, 2) ἡ δύναμις K ἐκ τοῦ νήματος ἐξαρτήσεως καὶ 3) ἡ ἀπωστικὴ δύναμις F. 'Εφ' ὅσον ἑκάστη σφαῖρα ἰσορροπεῖ πρέπει αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις νὰ ἰσορροποῦν. 'Αναλύοντες τὴν δύναμιν K εἰς συνιστώσας κατὰ τοὺς ἄξονας x (ὁριζόντιον) καὶ y (κατακόρυφον) καὶ ἐκφράζοντες τὴν συνθήκην ἰσορροπίας κατὰ τοὺς δύο αὐτοὺς ἄξονας, ἔχομεν



$$K_y - B = 0 \quad \text{καὶ} \quad F - K_x = 0.$$

'Απὸ τὸ σχῆμα προκύπτει ὅτι

$$K_y = K\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2} \quad \text{καὶ} \quad K_x = K\cdot \eta\mu\frac{\varphi}{2},$$

ὁπότε ἐκ τῶν ἄνω ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$K\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2} = B \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad K\cdot \eta\mu\frac{\varphi}{2} = F. \quad (2)$$

'Αφ' ἑτέρου ἡ δύναμις F ὑπολογίζεται, διὰ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb, ἴση πρὸς

$$F = \frac{q\cdot q}{r^2},$$

ἔνθα q εἶναι τὸ κοινὸν φορτίον ἑκάστης σφαίρας καὶ r ἡ ἀπόστασις αὐτῶν. 'Εκ τοῦ σχήματος προκύπτει ὅτι $r/2 = l\cdot\eta\mu\,\varphi/2$, ὁπότε ἔχομεν

$$F = \frac{q^2}{\left(2l\cdot \eta\mu\dfrac{\varphi}{2}\right)^2}\cdot$$

Ἤδη ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$K \cdot \eta\mu \frac{\varphi}{2} = \frac{q^2}{\left(2l \cdot \eta\mu \frac{\varphi}{2}\right)^2}. \quad (3)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} = \frac{q^2}{B \cdot \left(2l \cdot \eta\mu \frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης λαμβάνομεν διὰ τὸ φορτίον q ἑκάστης σφαίρας:

$$q = 2l \cdot \eta\mu \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\varepsilon\varphi \frac{\varphi}{2} \cdot B}. \quad (4)$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $l = 20\ cm$, $\varphi = 30^0$ (ἄρα $\varphi/2 = 15^0$) καὶ $B = 0{,}5\ gr^* = 0{,}5 \cdot 981\ dyn$. Ἀπὸ πίνακας εὑρίσκομεν τὸ $\eta\mu\ 15^0$ καὶ τὴν $\varepsilon\varphi\ 15^0$, ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4), λαμβάνομεν

$$q = 118{,}6\ H\Sigma M\text{ - φορτίου}.$$

Κατηγορία Γ'

1) Δύο μικραὶ φορτισμέναι σφαῖραι ἀπωθοῦνται ἀμοιβαίως διὰ δυνάμεως F. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄπωσις F' αὐτῶν, ὅταν τριπλασιασθῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς μιᾶς σφαίρας, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἀπόστασις. (Εὔκολος).

(ΑΠ: $F' = F/3$)

2) Δύο ἠλεκτρικὰ φορτία ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως 6,25 dyn, ὅταν εὑρίσκωνται εἰς ἀπόστασιν 4 cm μεταξύ των. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ εὑρίσκωνται τὰ αὐτὰ φορτία διὰ νὰ ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως 4 dyn; (Εὔκολος). (ΑΠ: 5 cm)

3) Δύο ξύλιναι σφαῖραι, ἑκάστης τῶν ὁποίων τὸ βάρος εἶναι ἴσον πρὸς $B = 0{,}1\ gr^*$, ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου διὰ νημάτων μετάξης, μήκους $l = 30\ cm$. Ὅταν ἐπὶ τῶν σφαιρῶν φέρωμεν ἴσα ὁμώνυμα φορτία, παρατηροῦμεν ὅτι αὗται ἀπωθοῦνται τόσον ὥστε τὰ κέντρα των ν' ἀπέχουν μεταξύ των κατ' ἀπόστασιν $R = 1{,}8\ cm$. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ δύναμις F, μὲ τὴν ὁποίαν ἀπωθοῦνται αἱ σφαῖραι καὶ β) τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας. (Μετρία). (ΑΠ: $F = B \cdot \frac{R}{\sqrt{4l^2 - R^2}} = 3{,}08\ dyn$, $3{,}15\ H\Sigma M$ - φορτίου)

4) Ἐὰν δύο σώματα φέρουν φορτίον ἴσον πρὸς 96500 Cb ἕκαστον, τεθοῦν δὲ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν διάμετρον τῆς Γῆς (12714 km), ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξύ των ἐξασκουμένη δύναμις; (Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις τῆς σχέσεως μεταξὺ τῆς ΗΣΜ - φορτίου καὶ τοῦ Coulomb: $1\ Cb = 3 \cdot 10^9\ H\Sigma M$ - φορτίου. (Εὔκολος).

(ΑΠ: $53{,}4\ t^*$)

5) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ εὑρίσκωνται δύο ἠλεκτρόνια διὰ ν' ἀπωθοῦνται ἀμοιβαίως διὰ δυνάμεως μιᾶς δύνης; Τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴσον πρὸς $4{,}8 \cdot 10^{-10}\ H\Sigma M$ - φορτίου. (Εὔκολος). (ΑΠ: $4{,}8 \cdot 10^{-10}\ cm$)

6) Τρεῖς μικραὶ φορτισμέναι σφαῖραι εὑρίσκονται εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ R εἶναι ἴση πρὸς 5 cm. Ἐὰν τὸ φορτίον q ἑκάστης σφαίρας εἶναι ἴσον πρὸς 20 ΗΣΜ - φορτίου, ποία δύναμις F ἐξασκεῖται ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων; (Μετρία). (ΑΠ: $F = \frac{q^2}{R^2} \cdot \sqrt{3} = 27{,}7\ dyn$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΕ΄

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΡΕΥΜΑ

Κατηγορία Α΄

"Ασκησις 1η. *'Ηλεκτρικὸν φορτίον 540 Cb διέρχεται διά τινος ἀγωγοῦ ἐντὸς χρόνου 3 min. Ζητοῦνται: α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ β) ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ρεῦμα, ἐντάσεως 1,2 A, μεταφέρει τὸ αὐτὸ φορτίον.*

Λύσις. α) 'Η ἔντασις i τοῦ ρεύματος ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{i = \frac{q}{t},} \tag{1}$$

ἔνθα q εἶναι τὸ φορτίον, τὸ διερχόμενον διά τινος διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ ἐντὸς τοῦ χρόνου t.

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $q = 540\ Cb$, $t = 3\ min = 3 \cdot 60\ sec$. 'Αντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$i = \frac{540}{180}\ \frac{Cb}{sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{i = 3\ A.}$$

β) 'Απὸ τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν διὰ τὸν χρόνον t:

$$\underline{t = \frac{q}{i}.}$$

Δίδονται: $q = 540\ Cb$ καὶ $i = 1,2\ A$. 'Αντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{t = 450\ sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{t = 7,5\ min.}$$

"Ασκησις 2α. *Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ διερχόμενον διά τινος ἀγωγοῦ, ἀντιστάσεως 25 Ω, ἐντὸς 5 min, ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἐφαρμοσθῇ διαφορὰ δυναμικοῦ 12 V;*

Λύσις. 'Εκ τῶν τύπων ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως i τοῦ ρεύματος καὶ τοῦ νόμου τοῦ Ohm:

$$i = \frac{q}{t} \qquad \text{καὶ} \qquad i = \frac{U}{R}$$

λαμβάνομεν διὰ τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$\underline{q = t \cdot \frac{U}{R}.} \tag{1}$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $t = 5\ min = 5 \cdot 60\ sec$, $U = 12\ V$ καὶ $R = 25\ \Omega$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 144\ Cb.}$$

"Ασκησις 3η. *Λαμπτὴρ πυρακτώσεως διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 300 mA, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαρμοσθῇ τάσις 220 V. Ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος;*

Λύσις. 'Η ἀντίστασις R τοῦ λαμπῆρος θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{R = \frac{U}{i}} \tag{1}$$

ἔνθα U εἶναι ἡ τάσις τροφοδοτήσεως τοῦ λαμπτῆρος καὶ i ἡ ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτὸν ρεύματος.

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $U = 220\ V$ καὶ $i = 300\ mA = 0,3\ A$. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1) προκύπτει

$$\underline{R = 733\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 4η. *Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις σύρματος ἐκ χρωμονικελίνης, μήκους 1,6 m καὶ διαμέτρου 0,5 mm; Πόσα μέτρα ἐκ τοῦ σύρματος τούτου ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν κατασκευὴν ἀντιστάσεως 100 Ω;*

Λύσις. α) Ἡ ἀντίστασις R ἑνὸς σύρματος, μήκους l καὶ διαμέτρου δ, εἶναι ἴση πρὸς

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{S} \quad \text{ἢ} \quad R = \varrho \cdot \frac{l}{\frac{\pi\delta^2}{4}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{R = \varrho \cdot \frac{4 \cdot l}{\pi\delta^2}} \qquad (1)$$

ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς του καὶ ϱ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις.

Δίδονται: $l = 1,6\ m = 160\ cm$, $\delta = 0,5\ mm = 0,05\ cm$. Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σ. 117 τοῦ Β' τόμου εὑρίσκομεν τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τῆς χρωμονικελίνης ἴσην πρὸς $\varrho = 100 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\underline{R = 8,15\ \Omega.}$$

β) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μῆκος τοῦ σύρματος λύομεν τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς l, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\underline{l = \frac{R \cdot \pi\delta^2}{4 \cdot \varrho}.}$$

Δίδονται: $R = 100\ \Omega$, τὰ δὲ ϱ καὶ δ ὡς ἀνωτέρω. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{l = 19,6\ m.}$$

Ἄσκησις 5η. *Στήλη ὑδραργύρου, ὕψους 106,3 cm καὶ διατομῆς 1 mm², ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω εἰς θερμοκρασίαν 0° C. Ποία ἡ ἀντίστασις ἑνὸς κύβου ἐξ ὑδραργύρου, ἀκμῆς 1 cm, εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν;*

Λύσις. Ἡ ἀντίστασις R_0 τοῦ κύβου θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$R_0 = \varrho_0 \cdot \frac{l}{S}. \qquad (1)$$

Τὸ μῆκος l καὶ ἡ διατομὴ S δίδονται, ὄχι, ὅμως, καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις ϱ_0 τοῦ ὑδραργύρου εἰς $0^\circ\ C$. Αὕτη θὰ ἠδύνατο νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως ϱ_ϑ τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος $(\varrho_\vartheta = 96 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm)$ καὶ ἐκ τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀντιστάσεως α κατὰ τὸν τύπον $\varrho_\vartheta = \varrho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$. Ἐν προκειμένῳ, ὅμως, δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, κατὰ τὸν τύπον

$$\varrho_0 = \frac{R_0 \cdot S}{l}.$$

Ὑπολογίζοντες αὐτὴν τὴν εὑρίσκομεν ἴσην πρὸς $94 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$. Ἤδη ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν διὰ τὴν ἀντίστασιν R_0 τοῦ κύβου τοῦ ὑδραργύρου εἰς $0^\circ\ C$:

$$\underline{R_0 = 94 \cdot 10^{-6}\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 6η. *Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς* *θερμότητος θέτομεν ἐντὸς θερμιδομέτρου, περιέχοντος 256 gr ὕδατος, σπείραμα, ἀντιστάσεως 3,2 Ω καὶ διαβιβάζομεν δι' αὐτοῦ ῥεῦμα, ἐντάσεως 2,86 A, ἐπὶ 1,5 min. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται ἀπὸ 18° C εἰς 20,2° C; Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος;*

Λύσις. Ἠλεκτρικὸν ῥεῦμα, ἐντάσεως i, διερχόμενον ἐπὶ χρόνον t δι' ἀγωγοῦ, ἀντιστάσεως R, παρέχει εἰς αὐτὸν ἐνέργειαν A ἴσην πρὸς

$$A = i^2 \cdot R \cdot t,$$

ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἡ θερμότης αὕτη ἀνυψώνει τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος τοῦ θερμιδομέτρου ἀπὸ ϑ_1 εἰς ϑ_2. Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν τοῦ ὕδατος καὶ c τὴν εἰδικὴν θερμότητα αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν

$$c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t \qquad (1)$$

ἔνθα a εἶναι τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς a λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον:

$$\underline{a = \frac{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{i^2 \cdot R \cdot t}}. \qquad (2)$$

Δίδονται: $m = 256\ gr$, $\vartheta_2 = 20{,}2^0\ C$, $\vartheta_1 = 18^0\ C$, $i = 2{,}86\ A$, $R = 3{,}2\ \Omega$ καὶ $t = 1{,}5\ min = 1{,}5 \cdot 60\ sec$. Ἐκ πινάκων εὑρίσκομεν τὴν εἰδικὴν θερμότητα c τοῦ ὕδατος ἴσην πρὸς $1\ cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{a = 0{,}24\ cal/Joule} \quad \text{ἢ} \quad \underline{a = 4{,}2\ Joule/cal.}$$

Ἄσκησις 7η. *Ἠλεκτρικὸς θερμαντήρ, συνδεόμενος εἰς δίκτυον 220 V, διαρρέεται ὑπὸ ῥεύματος, ἐντάσεως 2,5 A. Πόσην θερμότητα ἀναπτύσσει οὗτος ἀνὰ ὥραν;*

Λύσις. Ἡ θερμότης Q, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς χρόνου t εἰς ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R, διαρρεόμενον ὑπὸ ῥεύματος ἐντάσεως i, εἶναι ἴση πρὸς

$$Q = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t \qquad (1)$$

ἔνθα a εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $R = U/i$, ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\underline{Q = a \cdot i \cdot U \cdot t.}$$

Δίδονται: $i = 2{,}5\ A$, $U = 220\ V$ καὶ $t = 1\ h = 3600\ sec$. Τὸ a εἶναι ἴσον πρὸς $0{,}24\ cal/Joule$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{Q = 471400\ cal} \quad \text{ἢ} \quad \underline{Q = 471{,}4\ kcal.}$$

Ἤτοι, ἡ ὑπὸ τοῦ θερμαντῆρος ἀνὰ ὥραν παραγομένη θερμότης εἶναι ἴση πρὸς $471{,}4\ kcal$.

Ἄσκησις 8η. *Ἠλεκτρικὴ θερμάστρα φέρει τὰς ἐνδείξεις «1 kW, 220 V». Τί δηλοῦν αὗται; Νὰ ὑπολογισθοῦν, ἐν συνεχείᾳ, τὰ ἑξῆς: α) Ἡ ἔντασις τοῦ ῥεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν θερμάστραν, β) ἡ ἀντίστασις αὐτῆς καὶ γ) ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει αὕτη ἀνὰ ὥραν.*

Λύσις. Αἱ ἐνδείξεις «1 kW, 220 V» δηλοῦν τὴν ἰσχὺν (1 kW), τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ἡ θερμάστρα, ὅταν τροφοδοτῆται μὲ τάσιν 220 V.

α) Ἡ ἔντασις i τοῦ ῥεύματος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $N = i \cdot U$, (ἔνθα N ἡ ἰσχὺς) καὶ εὑρίσκεται ἴση πρὸς

$$\underline{i = 4{,}54\ A.}$$

β) Ἡ ἀντίστασις R τῆς θερμάστρας ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου $N = U^2/R$ καὶ εὑρίσκεται ἴση πρὸς

$$R = 48{,}4\ \Omega.$$

γ) Ἡ ἀνὰ ὥραν ἐκλυομένη θερμότης ὑπολογίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην 7ην ἄσκησιν καὶ εὑρίσκεται ἴση πρὸς *857 kcal*.

Ἄσκησις 9η. *Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις ἑνὸς θερμαντικοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ λειτουργήσῃ εἰς δίκτυον 220 V διὰ νὰ θερμάνῃ ἓν λίτρον ὕδατος ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας 20° C μέχρι τῆς θερμοκρασίας 80° C ἐντὸς 15 min;*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν 6ην ἄσκησιν καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον

$$c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t,$$

ἔνθα m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ *1 λίτρου* ὕδατος. Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν νόμον τοῦ Ohm $(i = U/R)$ καὶ λύοντες ὡς πρὸς R, εὑρίσκομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$R = a \cdot \frac{U^2 \cdot t}{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}.$$

Δίδονται: $U = 220\ V$, $t = 15\ min = 15 \cdot 60\ sec$, $\vartheta_2 = 80^0\ C$, $\vartheta_1 = 20^0\ C$. Ἡ εἰδικὴ θερμότης c τοῦ ὕδατος (εὑρισκομένη ἐκ πινάκων) εἶναι ἴση πρὸς *1 cal/gr·grad*. Τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος a εἶναι ἴσον πρὸς *0,24 cal/Joule*, ἡ δὲ μᾶζα m ἑνὸς *λίτρου* ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς *1000 gr* (ἀφοῦ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι $1\ gr/cm^3$). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$R = 172{,}8\ \Omega.$$

Ἄσκησις 10η. *Ἐὰν ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια παρέχεται πρὸς 0,5 δραχμὰς τὸ κιλοβατώριον, πόσον θὰ κοστίσῃ ἡ θέρμανσις 80 λίτρων ὕδατος ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας 20° C εἰς τὴν θερμοκρασίαν 80° C;*

Λύσις. Ἡ θερμότης Q, ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν θέρμανσιν τῶν *80 λίτρων* ὕδατος (δηλ. μάζης ὕδατος *80 kgr*) ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας $\vartheta_1 = 20^0\ C$ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\vartheta_2 = 80^0\ C$, ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

ἔνθα c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

Ὑπολογίζοντες τὴν θερμότητα ταύτην τὴν εὑρίσκομεν ἴσην πρὸς

$$Q = 4800\ kcal.$$

Ἐπειδὴ $1\ cal = 4{,}2\ Joule$ καὶ $1\ kWh = 3{,}6 \cdot 10^6\ Joule$ εὑρίσκομεν

$$Q = 5{,}6\ kWh.$$

Ἤδη, ἐφ' ὅσον γνωρίζομεν τὸ κόστος τοῦ ἑνὸς κιλοβατωρίου (*0,5* δραχμαί), ὑπολογίζομεν, εὐκόλως, τὴν ἀπαιτουμένην δαπάνην εἰς *2,8* δραχμάς.

Ἄσκησις 11η. *Λαμπτὴρ πυρακτώσεως, τάσεως λειτουργίας 220 V, ἔχει ἀντίστασιν 645 Ω. Ποία ἡ ἰσχύς του;*

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες τὰ δεδομένα εἰς τὸν τύπον

$$N = \frac{U^2}{R}$$

(ἔνθα N ἡ ἰσχύς, U ἡ τάσις λειτουργίας καὶ R ἡ ἀντίστασις) εὑρίσκομεν τὴν ἰσχὺν τοῦ λαμπτῆρος ἴσην πρὸς

$$\underline{N = 75\ W.}$$

Ἄσκησις 12η. *Διὰ χαλκίνου σύρματος, μήκους 10 m καὶ διατομῆς 1 cm^2, διέρχεται ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, ἐντάσεως 5 A, ἐπὶ μίαν ὥραν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐντὸς τοῦ σύρματος ἀναπτυσσομένη θερμότης.*

Λύσις. Ἡ θερμότης Q, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται εἰς τὸ σύρμα ἐντὸς τοῦ χρόνου t, εἶναι ἴση πρὸς

$$Q = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t \qquad (1)$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος καὶ a τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $= 0{,}24\ cal/Joule$. Ὑπολογίζοντες τὴν ἀντίστασιν R τοῦ σύρματος ἐκ τοῦ μήκους, τῆς διατομῆς καὶ τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκοῦ (βλ. πίνακα σ. 117 τοῦ Β΄ τόμου) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) ὅλα τὰ δεδομένα εὑρίσκομεν

$$\underline{Q = 36{,}42\ cal.}$$

Ἄσκησις 13η. *Πρόκειται νὰ θερμάνωμεν 2 kgr ὕδατος ἀπὸ 15° C εἰς 90° C ἐντὸς 5 min, χρησιμοποιοῦντες πρὸς τοῦτο ἠλεκτρικὸν βραστῆρα. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ βραστῆρος;*

Λύσις. Διὰ νὰ θερμάνωμεν ὕδωρ, μάζης m, ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν ϑ_1 εἰς τὴν θερμοκρασίαν ϑ_2 πρέπει νὰ προσφέρωμεν εἰς αὐτὸ θερμότητα Q ἴσην πρὸς

$$Q = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

ἔνθα c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

Ἐν προκειμένῳ ἡ θερμότης αὕτη θὰ προσφερθῇ ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ βραστῆρος. Ἄν, λοιπόν, καλέσωμεν N τὴν ἰσχὺν αὐτοῦ καὶ t τὸν χρόνον θερμάνσεως, τότε θὰ ἔχωμεν

$$c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = N \cdot t.$$

Λύοντες ὡς πρὸς N λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον:

$$\underline{N = \frac{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{t}.} \qquad (1)$$

Δίδονται: $m = 2\ kgr = 2000\ gr$, $\vartheta_2 = 90^0\ C$, $\vartheta_1 = 15^0\ C$, $t = 5\ min = 5 \cdot 60\ sec$, ἡ δὲ εἰδικὴ θερμότης c τοῦ ὕδατος (εὑρισκομένη ἐκ πινάκων) εἶναι ἴση πρὸς $1\ cal/gr \cdot grad$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$N = 500\ cal/sec.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\ cal = 4{,}2\ Joule$, ἔχομεν

$$\underline{N = 2100\ Joule/sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{N = 2100\ W} \quad \text{ἢ} \quad \underline{N = 2{,}1\ kW.}$$

Ἄσκησις 14η. *Τρεῖς ἀντιστάσεις 10 Ω, 20 Ω καὶ 25 Ω συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις 110 V. Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος, β) ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ ἑκάστης τῶν ἀντιστάσεων καὶ γ) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης ἀντιστάσεως.*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν R_1, R_2, R_3 τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις, $R_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν, U τὴν ἐφαρμοζομένην τάσιν καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ἔχομεν, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm,

$$i = \frac{U}{R_{ολ}} \quad ἢ \quad i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (1)$$

(διότι: $R_{ολ} = R_1 + R_2 + R_3$, ἐφ' ὅσον αἱ ἀντιστάσεις συνδέονται ἐν σειρᾷ). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$i = 2\ A.$$

β) Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἰσχύν, τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ ἑκάστης ἀντιστάσεως, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον

$$N = i^2 \cdot R$$

ὁπότε λαμβάνομεν

$$N_1 = 40\ W, \qquad N_2 = 80\ W, \qquad N_3 = 100\ W.$$

γ) Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν νόμον τοῦ Ohm

$$U = i \cdot R$$

εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$U_1 = 20\ V, \qquad U_2 = 40\ V, \qquad U_3 = 50\ V.$$

Ἄσκησις 15η. *Τρεῖς ἀντιστάσεις 100 Ω, 200 Ω καὶ 300 Ω συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος συνδέονται πρὸς πηγὴν 220 V. Ποία ἡ ἰσχύς, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ ἑκάστης ἀντιστάσεως;*

Λύσις. Ἐφ' ὅσον αἱ τρεῖς ἀντιστάσεις ἔχουν συνδεθῆ ἐν παραλλήλῳ, εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν θὰ ἐπικρατῇ ἡ αὐτὴ τάσις U. Ἀντικαθιστῶντες, λοιπόν, εἰς τὸν τύπον

$$N = \frac{U^2}{R}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν ἰσχύν, τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ ἑκάστης τῶν τριῶν ἀντιστάσεων:

$$N_1 = 484\ W, \qquad N_2 = 242\ W, \qquad N_3 = 161{,}3\ W.$$

Ἄσκησις 16η. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ συνδεθῇ παραλλήλως πρὸς σύρμα, ἀντιστάσεως 10,5 Ω, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις νὰ εἶναι ἴση πρὸς 10 Ω.*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τοῦ σύρματος, R_x τὴν ζητουμένην ἀντίστασιν καὶ $R_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν, ἔχομεν

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x}$$

(ἐφ' ὅσον αἱ δύο ἀντιστάσεις συνδέονται ἐν παραλλήλῳ).

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς R_x καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$R_x = 210\ Ω.$$

Ἄσκησις 17η. *Δύο ἀντιστάσεις — ἡ μία τῶν 60 Ω καὶ ἡ ἄλλη τῶν 30 Ω — συνδέονται α) ἐν σειρᾷ καὶ β) ἐν παραλλήλῳ, τροφοδοτοῦνται δὲ μὲ τάσιν 220 V. Ποία ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν;*

Λύσις. α) *Σύνδεσις ἐν σειρᾷ:* Καλοῦμεν R_1, R_2 τὰς δύο ἀντιστάσεις, $R_{ολ}$ τὴν ὁλικήν των ἀντίστασιν καὶ U τὴν τροφοδοτοῦσαν τάσιν. Ἡ ζητουμένη ἰσχὺς N θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N = \frac{U^2}{R_{o\lambda}} \quad (1) \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{N = \frac{U^2}{R_1 + R_2}} \quad (2)$$

(καθόσον : $R_{o\lambda} = R_1 + R_2$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 537{,}7 \ W.}$$

β) *Σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ :* Εἰς τὴν σύνδεσιν ταύτην ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\underline{N = U^2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).} \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{N = 2420 \ W.}$$

Σημείωσις : Ταχύτερον γίνονται οἱ ὑπολογισμοί, ἐὰν ὁ τύπος (3) γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$N = U^2 \cdot \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2}.$$

Ἄσκησις 18η. *Τρεῖς ἀντιστάσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς 60 Ω, συνδέονται καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Ποία ἡ ἀντίστασις εἰς ἑκάστην περίπτωσιν;*

Λύσις. Ἂς καλέσωμεν R_1, R_2, R_3 τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις καὶ $R_{o\lambda}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν.

α) *Σύνδεσις ἐν σειρᾷ.* Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_2 + R_3 = 3R$$

(ἔνθα $R_1 = R_2 = R_3 = R$) εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{o\lambda} = 180 \ \Omega.}$$

β) *Σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ.* Λύοντες τὸν τύπον

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{R}$$

ὡς πρὸς $R_{o\lambda}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{o\lambda} = 20 \ \Omega.}$$

γ) *Μεικτὴ σύνδεσις.* Εἰς τὴν μεικτὴν σύνδεσιν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις Ι. Καλοῦντες R' τὴν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_2, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ, ἔχομεν

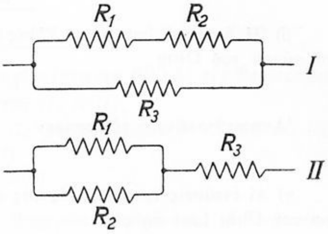
$$R' = R_1 + R_2.$$

Παρατηροῦμεν, ἤδη, ὅτι αἱ ἀντιστάσεις R' καὶ R_3 εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ. Ἔχομεν, λοιπόν, τὸν τύπον

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_3}.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $R_1 = R_2 = R_3$, λύομεν τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς $R_{ολ}$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{ολ} = 40\ \Omega.}$$



Περίπτωσις II: Καλοῦντες R'' τὴν ἰσοδύναμον ἀντίστασιν τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_2, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ, ἔχομεν

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀντιστάσεις R'' καὶ R_3 εἶναι συνδεδεμέναι ἐν σ ε ι ρ ᾷ. Ἔχομεν, λοιπόν, τὸν τύπον

$$R_{ολ} = R'' + R_3.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $R_1 = R_2 = R_3$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{ολ} = 90\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 19η. *Πέντε ὅμοιοι λαμπτῆρες πυρακτώσεως συνδέονται ἐν παραλλήλῳ. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι 300 Ω καὶ ἡ τάσις τοῦ δικτύου 220 V, ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τοὺς ἀγωγοὺς συνδέσεως πρὸς τὸ δίκτυον;*

Λύσις. Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος ὑπολογίζεται, ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm, ἴση πρὸς

$$i = \frac{U}{R_{ολ}} \qquad (1)$$

ἔνθα $R_{ολ}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν πέντε ἐν παραλλήλῳ συνδεδεμένων λαμπτήρων. Ἡ ἀντίστασις αὐτὴ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{5}{R}, \qquad (2)$$

δεδομένου ὅτι αἱ πέντε ἀντιστάσεις εἶναι ἴσαι.

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὸν τελικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος, δι' ἀντικαταστάσεως, δίδει

$$\underline{i = 3{,}66\ A.}$$

Ἄσκησις 20ή. *Ρεῦμα, ἐντάσεως 3,5 A, διαρρέει κύκλωμα, ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο ἀγωγούς, ἀντιστάσεων 6 Ω καὶ 8 Ω, συνδεδεμένους ἐν παραλλήλῳ. Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις, β) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ κοινὰ ἄκρα καὶ γ) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος ἕκαστον ἀγωγόν.*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν R_1, R_2 τὰς ἀντιστάσεις τῶν δύο ἀγωγῶν καὶ $R_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ἀφοῦ οἱ δύο ἀγωγοὶ ἔχουν συνδεθῆ ἐν παραλλήλῳ.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $R_{ολ}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{R_{ολ} = 3{,}43\ \Omega.}$$

β) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τὰ κοινὰ ἄκρα τῶν δύο ἀγωγῶν παρέχεται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm

$$\underline{U = i \cdot R_{ολ}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 12\ V.}$$

γ) Αἱ ἐντάσεις i_1 καὶ i_2 εἰς τὰς ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 εὑρίσκονται ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἴσαι πρὸς

$$\underline{i_1 = \frac{U}{R_1}} \quad \text{καὶ} \quad \underline{i_2 = \frac{U}{R_2}},$$

δεδομένου ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τῶν δύο ἀντιστάσεων ἐπικρατεῖ ἡ αὐτὴ τάσις U $(= 12\ V)$, ἐφ' ὅσον αὗται εἶναι συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἄνω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν

$$\underline{i_1 = 2\ A} \quad \text{καὶ} \quad \underline{i_2 = 1{,}5\ A.}$$

Ἄσκησις 21η. *Νὰ δειχθῇ ὅτι ἓν θερμαντικὸν σῶμα, ἰσχύος 600 W καὶ τάσεως λειτουργίας 110 V, συνδεόμενον ἐν σειρᾷ μὲ λαμπτῆρα αὐτοκινήτου 6 V, 32 W, ἐπιτρέπει εἰς τὸν τελευταῖον νὰ λειτουργήσῃ, ἐὰν συνδεθῇ εἰς δίκτυον 110 V.*

Λύσις. Διὰ νὰ μὴ καταστραφῇ ὁ λαμπτήρ, ὅταν συνδεθῇ εἰς τὰ *110 V*, πρέπει ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον θὰ διέλθῃ δι' αὐτοῦ, νὰ μὴν ὑπερβῇ τὴν ἔντασιν κανονικῆς λειτουργίας. Ἡ ἔντασις αὕτη ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἰσχύος τοῦ λαμπτῆρος καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας αὐτοῦ ἴση πρὸς

$$i = 5{,}3\ A.$$

Ὅταν, τώρα, ὁ λαμπτὴρ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ μὲ τὸ θερμαντικὸν σῶμα καὶ τὸ σύστημα τροφοδοτηθῇ μὲ τὴν τάσιν U τοῦ δικτύου $(U = 110\ V)$, ἡ ἔντασις i' τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i' = \frac{U}{R_1 + R_2} \tag{1}$$

ἔνθα R_1 καὶ R_2 εἶναι αἱ ἀντιστάσεις τοῦ θερμαντικοῦ σώματος καὶ τοῦ λαμπτῆρος. Ὑπολογίζοντες τὰς ἀντιστάσεις ταύτας ἐκ τῆς ἰσχύος καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$i' = 5{,}2\ A.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις αὕτη εἶναι, περίπου, ἴση μὲ τὴν ἔντασιν κανονικῆς λειτουργίας τοῦ λαμπτῆρος, συνεπῶς ὁ λαμπτὴρ θὰ λειτουργήσῃ κανονικῶς.

Ἄσκησις 22α. *Ἀγωγός, ἀντιστάσεως 50 Ω, παρουσιάζει αὔξησιν τῆς ἀντιστάσεως κατὰ 7,6 Ω, ὅταν ἡ θερμοκρασία του αὐξηθῇ ἀπὸ 20° C εἰς 60° C. Ποῖος ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως;*

Λύσις. Ἡ μεταβολὴ ΔR μιᾶς ἀντιστάσεως R, ἡ προκαλουμένη ἐκ μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας κατὰ $\Delta\vartheta$, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Delta R = \alpha \cdot R \cdot \Delta\vartheta \tag{1}$$

ἔνθα α εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς α καὶ ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν

$$\underline{\alpha = 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ grad^{-1}.}$$

Ἄσκησις 23η. *Σιδηροῦν σύρμα ἔχει ἀντίστασιν 600 Ω εἰς θερμοκρασίαν 50° C. Ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἰς 0° C;*

Λύσις. Ἡ ἀντίστασις R_ϑ ἑνὸς ἀγωγοῦ, εἰς θερμοκρασίαν ϑ^0 C, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$R_\vartheta = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

ἔνθα R_0 εἶναι ἡ ἀντίστασις εἰς 0^0 C καὶ α ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως. Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς R_0 καὶ ἀντικαθιστῶντες (ἀφοῦ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ α διὰ τὸν σίδηρον ἀπὸ τὸν πίνακα τῆς σ. 132 τοῦ Β' τόμου) εὑρίσκομεν

$$\underline{R_0 = 480\ \Omega.}$$

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Διά τινος ἀγωγοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. Πόσον φορτίον θὰ διέλθῃ διά τινος διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ εἰς 2 min; Πόσα ἠλεκτρόνια, θὰ διέλθουν;*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως $i = q/t$ ἔχομεν διὰ τὸ φορτίον q:

$$\underline{q = i \cdot t.}$$

Μετατρέποντες τὸν δοθέντα χρόνον *(2 min)* εἰς *sec* καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 1200\ Cb.}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν n τὸν ἀριθμὸν τῶν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα θὰ διέλθουν διὰ τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ καὶ e τὸ φορτιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ ὁλικῶς διελθὸν φορτίον q θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$q = n \cdot e.$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν n τῶν ἠλεκτρονίων

$$n = \frac{q}{e}, \qquad (1)$$

ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴσον πρὸς $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Cb* (βλ. Β' τόμον, σ. 105, ὑποσημείωσις), τὸ δὲ φορτίον q ἴσον πρὸς *1200 Cb*. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{n = 7{,}5 \cdot 10^{21}\ \text{ἠλεκτρόνια.}}$$

Ἄσκησις 2α. *Χάλκινον σύρμα, μήκους 10 m, ἔχει βάρος 20 gr*. Ἡ ἀντίστασίς του εἶναι 0,76 Ω. Ποία ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ εἶναι 8,9 gr*/cm³;*

Λύσις. Ἡ ἀντίστασις R ἑνὸς σύρματος, μήκους l καὶ διατομῆς, ἐμβαδοῦ S, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{S} \qquad (1)$$

ἔνθα ϱ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σύρματος. Ἀφ' ἑτέρου, τὸ εἰδικὸν βάρος ε ἑνὸς σώματος, βάρους B καὶ ὄγκου V, ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\varepsilon = \frac{B}{V}. \tag{2}$$

'Επειδὴ τὸ σύρμα εἶναι κυλινδρικόν, ὁ ὄγκος του V θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V = S \cdot l. \tag{3}$$

'Εκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\varrho = \frac{R \cdot B}{\varepsilon \cdot l^2}} \tag{4}$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm.}$$

Ἄσκησις 3η. *Ποία ἡ ἀντίστασις κυλινδρικῆς στήλης ὑδραργύρου, ὕψους 100 cm καὶ βάρους 1 gr*; (Εἰδικὸν βάρος ὑδραργύρου = 13,6 gr*/cm³).*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου, l τὸ ὕψος αὐτῆς, B τὸ βάρος της, ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου καὶ ϱ τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τοῦ ὑδραργύρου καὶ σκεφθῶμεν ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ καταλήξωμεν εἰς τὸν τύπον

$$\underline{R = \frac{\varrho \cdot \varepsilon \cdot l^2}{B}.}$$

'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 13\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 4η. *Χάλκινος ἀγωγός, μήκους 1 km, ἔχει βάρος 445 kgr*. Ποῖον τὸ βάρος καὶ ἡ διατομὴ ἀγωγοῦ ἐξ ἀργιλίου, ἔχοντος τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν; (Εἰδικὸν βάρος χαλκοῦ = 8,9 gr*/cm³, εἰδικὸν βάρος ἀργιλίου = 2,7 gr*/cm³).*

Λύσις. α) Ἂς καλέσωμεν l τὸ κοινὸν μῆκος τῶν δύο ἀγωγῶν, B_1, B_2 τὰ βάρη αὐτῶν, ε_1, ε_2 τὰ εἰδικὰ βάρη καὶ ϱ_1, ϱ_2 τὰς εἰδικὰς ἀντιστάσεις τοῦ χαλκοῦ καὶ τοῦ ἀργιλίου. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν 2αν ἄσκησιν εὑρίσκομεν διὰ τὰς ἀντιστάσεις R_1, R_2 τῶν δύο ἀγωγῶν τοὺς τύπους

$$R_1 = \frac{\varrho_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot l^2}{B_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad R_2 = \frac{\varrho_2 \cdot \varepsilon_2 \cdot l^2}{B_2}. \quad (2)$$

'Επειδή, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, εἶναι $R_1 = R_2$, ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{B_2 = B_1 \cdot \frac{\varrho_2 \cdot \varepsilon_2}{\varrho_1 \cdot \varepsilon_1}.}$$

Τὰ B_1, ε_1, ε_2 δίδονται, τὰ δὲ ϱ_1 καὶ ϱ_2 λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σ. 117 τοῦ Β΄ τόμου. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{B_2 = 222{,}3\ kgr^*.}$$

β) Τὸ ἐμβαδὸν S τῆς διατομῆς τοῦ ἐξ ἀργιλίου ἀγωγοῦ θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ βάρους B_2 αὐτοῦ, τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε_2 τοῦ ἀργιλίου καὶ τοῦ μήκους l, τῇ βοηθείᾳ τῶν τύπων

$$B_2 = \varepsilon_2 \cdot V \qquad \text{καὶ} \qquad V = S \cdot l$$

(ἔνθα V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀγωγοῦ)

ἴσον πρὸς

$$S = \frac{B_2}{\varepsilon_2 \cdot l_1}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$S = 0{,}82\ cm^2.$$

Ἄσκησις 5η. Πόσος πάγος, θερμοκρασίας 0° C, θὰ τακῇ ὑπὸ τῆς θερμότητος, τῆς ἀναπτυσσομένης ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 2,5 A, διαρρέοντος ἀγωγόν, ἀντιστάσεως 20 Ω, ἐπὶ χρόνον 15 min ; (Θερμότης τήξεως τοῦ πάγου = 80 cal/gr).

Λύσις. Ἡ θερμότης Q, ἡ ἀναπτυσσομένη ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως i, διαρρέοντος μίαν ἀντίστασιν R ἐπὶ χρόνον t, εἶναι ἴση πρὸς

$$Q = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t \qquad (1)$$

ἔνθα a εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Ἐὰν καλέσωμεν λ τὴν θερμότητα τήξεως τοῦ πάγου, τότε διὰ τὴν τῆξιν πάγου, μάζης m, ἀπαιτεῖται θερμότης Q' ἴση πρὸς

$$Q' = \lambda \cdot m.$$

Ἐάν, λοιπόν, προσφερθῇ εἰς τὸν πάγον ἡ ὑπὸ τοῦ ρεύματος παραγομένη θερμότης Q (ἐξίσωσις (1)) τότε θὰ εἶναι

$$Q = Q' \qquad \text{ἢ} \qquad a \cdot i^2 \cdot R \cdot t = \lambda \cdot m. \qquad (2)$$

Λύοντες τὸν τύπον (2) ὡς πρὸς m καὶ ἀντικαθιστῶντες (ἀφοῦ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ a ἐκ πινάκων) εὑρίσκομεν

$$m = 335\ gr.$$

Ἄσκησις 6η. Πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν ἠλεκτρικὸν βραστῆρα, ἰσχύος 800 W καὶ τάσεως λειτουργίας 220 V, ἐκ σύρματος χρωμονικελίνης. Ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ τὰ 12 A κατὰ mm^2, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διατομὴ καὶ ποῖον τὸ μῆκος τοῦ σύρματος;

Λύσις. α) Ἐκ τῆς ἰσχύος N τοῦ βραστῆρος καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας U εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος εἰς τὸ σύρμα θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i = 3{,}64\ A.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 12 A ἀνὰ mm^2, εὑρίσκομεν, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι ἡ διατομὴ τοῦ σύρματος πρέπει νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς

$$S = 0{,}3\ mm^2.$$

β) Τὸ ζητούμενον μῆκος l τοῦ σύρματος θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{S} \qquad (1)$$

ἔνθα ϱ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τῆς χρωμονικελίνης. Τὸ R δὲν δίδεται, προκύπτει, ὅμως, ἐκ τῆς ἰσχύος N καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας U, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου

$$N = \frac{U^2}{R}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$l = \frac{U^2 \cdot S}{\varrho \cdot N}. \qquad (3)$$

Λαμβάνοντες τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τῆς χρωμονικελίνης ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σ. 117 τοῦ Β' τόμου καὶ ἀντικαθιστῶντες ὅλα τὰ δεδομένα εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$l = 1830\ cm \quad \text{ἢ} \quad l = 18{,}3\ m.$$

Ἄσκησις 7η. *Ἠλεκτρικὸς κλίβανος λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 220 V, καταναλίσκει δὲ ἰσχὺν 6 kW. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ κλιβάνου.*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν N τὴν ἰσχὺν καὶ U τὴν τάσιν, τότε ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν κλίβανον, ὑπολογίζεται, ἐκ τοῦ τύπου $N = i \cdot U$, ἴση πρὸς

$$i = \frac{N}{U} = 27{,}3\ A.$$

β) Τὴν ἀντίστασιν R εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου $N = U^2/R$, ἴσην πρὸς

$$R = \frac{U^2}{N} = 8\ \Omega.$$

Ἄσκησις 8η. *Μία ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις εὑρίσκεται ἐντὸς δοχείου, περιέχοντος 500 cm^3 ὕδατος, διαρρεομένη δὲ ὑπὸ τοῦ ρεύματος, ἀνυψώνει τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος κατὰ 25° C ἐντὸς 6 min. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον θ' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία 800 gr ἑνὸς ἄλλου ὑγροῦ, εἰδικῆς θερμότητος 0,3 $cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}$, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ τεθῇ, ἐπὶ 8 min, ἡ ἰδία ἀντίστασις καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος τῆς αὐτῆς ἐντάσεως.*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν m_1, m_2, c_1, c_2 τὰς μάζας καὶ τὰς εἰδικὰς θερμότητας τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ δευτέρου ὑγροῦ καὶ $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$ τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας τῶν δύο ὑγρῶν, τότε αἱ ἀπαιτούμεναι, ἀντιστοίχως, θερμότητες Q_1, Q_2 θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς

$$Q_1 = c_1 \cdot m_1 \cdot \Delta\vartheta \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad Q_2 = c_2 \cdot m_2 \cdot \Delta\vartheta. \quad (2)$$

Τὰς θερμότητας ταύτας προσφέρει ἡ ἀντίστασις, διαρρεομένη ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i ἐπὶ χρόνον t_1, ὅταν εἶναι ἐμβαπτισμένη ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ἐπὶ χρόνον t_2, ὅταν εἶναι ἐμβαπτισμένη ἐντὸς τοῦ ἄλλου ὑγροῦ. Ἤτοι εἶναι

$$Q_1 = a \cdot R^2 \cdot i \cdot t_1 \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad Q_2 = a \cdot R \cdot i^2 \cdot t_2 \quad (4)$$

ἔνθα a εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\Delta\vartheta_2 = \Delta\vartheta_1 \cdot \frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{c_1 \cdot m_1}{c_2 \cdot m_2}. \qquad (5)$$

Σημείωσις: Τὴν μᾶζαν m_1 τοῦ ὕδατος θὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τοῦ ὄγκου του (500 cm^3) καὶ τῆς πυκνότητος αὐτοῦ (1 gr/cm^3).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (5) εὑρίσκομεν

$$\Delta\vartheta_2 = 69^0\ C.$$

Ἄσκησις 9η. *Ἠλεκτρικὴ θερμάστρα, συνδεομένη μὲ πηγήν, ΗΕΔ 220 V, καταναλίσκει ἰσχὺν 1 kW. Ἂν ἡ τάσις ἐλαττωθῇ κατὰ 20 %, κατὰ πόσον τοῖς ἑκατὸν θὰ ἐλαττωθῇ ἡ ἰσχύς;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν N_1 καὶ U_1 τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν κανονικὴν τάσιν λειτουργίας τῆς θερμάστρας, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$N_1 = \frac{U_1^2}{R}, \tag{1}$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς θερμάστρας. 'Εάν, τώρα, ἡ τάσις U_1 ἐλαττωθῇ κατὰ $20\,\%$ καὶ γίνῃ U_2, θὰ εἶναι

$$U_2 = \frac{80}{100} \cdot U_1 \qquad \text{ἢ} \qquad U_2 = 0{,}8 \cdot U_1,$$

ὁπότε ἡ νέα ἰσχὺς N_2 θὰ ἰσοῦται πρὸς

$$N_2 = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(0{,}8 \cdot U_1)^2}{R} = 0{,}64 \cdot \frac{U_1^2}{R}.$$

'Επειδή, κατὰ τὸν τύπον (1), εἶναι $U_1^2/R = N_1$, ἔχομεν

$$\underline{N_2 = 0{,}64 \cdot N_1.}$$

Ἤτοι ἡ ἰσχὺς θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ $1 - 0{,}64 = 0{,}36$ ἢ κατὰ $36\,\%$.

Ἄσκησις 10η. *'Ηλεκτρικὸν θερμαντικὸν σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ σύρμα χρωμονικελίνης, μήκους 50 m. Ἂν ἀφαιρεθοῦν 10 m ἐκ τοῦ σύρματος, κατὰ πόσον τοῖς ἑκατὸν θὰ μεταβληθῇ ἡ ἰσχύς;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχὺν τοῦ θερμαντικοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν R_1, ὅταν τὸ μῆκος τοῦ σύρματος εἶναι l_1 καὶ U τὴν τάσιν λειτουργίας, θὰ ἔχωμεν

$$N_1 = \frac{U^2}{R_1} \qquad \text{ἢ} \qquad N_1 = \frac{U^2}{\varrho \cdot \dfrac{l_1}{S}}, \tag{1}$$

ἔνθα ϱ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τῆς χρωμονικελίνης καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ σύρματος.

Ὅταν τὸ μῆκος l_1 τοῦ σύρματος ἐλαττωθῇ καὶ γίνῃ l_2, ἡ νέα ἰσχὺς N_2 θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N_2 = \frac{U^2}{\varrho \cdot \dfrac{l_2}{S}}. \tag{2}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (1), λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\frac{N_2}{N_1} = \frac{l_1}{l_2}.}$$

'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\frac{N_2}{N_1} = 1{,}25 \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{N_2 = 1{,}25 \cdot N_1.}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἰσχὺς θ ὰ α ὐ ξ η θ ῇ κατὰ $25\,\%$.

Ἄσκησις 11η. *Σύρμα ἔχει ἀντίστασιν 2 Ω ἀνὰ μέτρον. 'Εὰν τμῆμα αὐτοῦ, μήκους 75 cm, τεθῇ ἐντὸς θερμιδομέτρου, περιέχοντος 0,5 λίτρα ὕδατος καὶ διέλθῃ δι' αὐτοῦ ρεῦμα, ἐντάσεως 4 A ἐπὶ χρόνον 15 min, κατὰ πόσον θ' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν τοῦ τμήματος τοῦ σύρματος, i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος καὶ t τὸν χρόνον, τότε ἡ θερμότης Q, ἡ ὁποία θ' ἀναπτυχθῇ ἐντὸς τοῦ τμήματος αὐτοῦ τῆς ἀντιστάσεως θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$Q = a \cdot R \cdot i^2 \cdot t \tag{1}$$

ἔνθα a εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

'Αφ' ἑτέρου ἡ θερμότης αὕτη, προσφερομένη εἰς ὕδωρ, μάζης m, αὐξάνει τὴν θερμοκρασίαν του κατὰ $\Delta\vartheta$. 'Επομένως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta \tag{2}$$

ἔνθα c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος.

'Εκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\Delta\vartheta = \frac{a \cdot R \cdot i^2 \cdot t}{c \cdot m}. \tag{3}$$

Δίδονται: $i = 4\ A$, $t = 15\ min = 15 \cdot 60\ sec$. 'Αφ' ἑτέρου, ἐκ πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς $c = 1\ cal/gr \cdot grad$, τὸ δὲ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος ἴσον πρὸς $0{,}24\ cal/Joule$. Ἡ μᾶζα m τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς $500\ gr$, δεδομένου ὅτι ἓν *λίτρον* ὕδατος ἔχει μᾶζαν $1000\ gr$. Τέλος ἡ ἀντίστασις R εὑρίσκεται, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἴση πρὸς $1{,}5\ \Omega$.

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\Delta\vartheta = 10^{\circ}\ C\ (\textit{περίπου}).$$

Ἄσκησις 12η. *'Ηλεκτρικὸς βραστὴρ περιέχει 500 gr ὕδατος, θερμοκρασίας 20° C. 'Εὰν ἡ ἰσχὺς τοῦ βραστῆρος εἶναι 400 W, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα ἐξατμισθῇ ὅλον τὸ ὕδωρ. (Θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος = 540 cal/gr).*

Λύσις. Ὅταν προσφέρεται, συνεχῶς, θερμότης εἰς δεδομένην ποσότητα ὕδατος αὕτη, ἀρχικῶς, θερμαίνεται μέχρις $100^{\circ}\ C$ καί, ἐν συνεχείᾳ, ἀρχίζει νὰ ἐξαεροῦται.

1) Διὰ τὴν θέρμανσιν ὕδατος, μάζης m, μέχρι τῆς θερμοκρασίας βρασμοῦ ἀπαιτεῖται θερμότης Q_1 ἴση πρὸς

$$Q_1 = c \cdot m \cdot \Delta\vartheta, \tag{1}$$

ἔνθα c εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος καὶ $\Delta\vartheta$ ἡ ἀνύψωσις τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς θερμοκρασίας $(20^{\circ}\ C)$ μέχρι τῆς θερμοκρασίας βρασμοῦ $(100^{\circ}\ C)$.

2) Διὰ τὴν ἐξαέρωσιν ὕδατος, μάζης m, ἀπαιτεῖται θερμότης Q_2 ἴση πρὸς

$$Q_2 = L \cdot m, \tag{2}$$

ἔνθα L εἶναι ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος.

Ἤτοι, διὰ τὸ ἄνω πείραμα ἀπαιτεῖται, συνολικῶς, θερμότης $Q_{ολ}$ ἴση πρὸς

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2. \tag{3}$$

'Εν προκειμένῳ, τὴν θερμότητα ταύτην $(Q_{ολ})$ πρέπει νὰ παράσχῃ ὁ βραστήρ. Συνεπῶς, ἐὰν a εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος, i ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, R ἡ ἀντίστασις καὶ t ὁ χρόνος, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$Q_{ολ} = a \cdot i^2 \cdot R \cdot t \quad \text{ἢ} \quad Q_{ολ} = a \cdot N \cdot t \tag{4}$$

(διότι $i^2 \cdot R = N$).

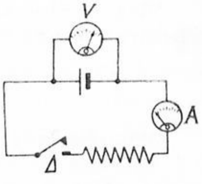
'Εκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$t = \frac{m \cdot (L + c \cdot \Delta\vartheta)}{a \cdot N} \tag{5}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (5) εὑρίσκομεν

$$t = 3255 \text{ sec} \qquad \text{ἢ} \qquad t = 54{,}2 \text{ min}.$$

Ἄσκησις 13η. *Ὅταν ὁ διακόπτης Δ εἶναι ἀνοικτός, τὸ βολτόμετρον δεικνύει 1,52 V. Ὅταν ὁ διακόπτης εἶναι κλειστός, τὸ μὲν βολτόμετρον δεικνύει 1,37 V, τὸ δὲ ἀμπερόμετρον 1,5 A. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ΗΕΔ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου.*



Λύσις. α) Ὅταν ὁ διακόπτης εἶναι ἀνοικτός, ἡ πηγὴ δὲν παρέχει ρεῦμα εἰς τὸ κύκλωμα, ὁπότε ἡ ἔνδειξις τοῦ βολτομέτρου δίδει τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E τῆς πηγῆς - ἄρα εἶναι

$$E = 1{,}52 \text{ V}.$$

(Τὸ διὰ τοῦ βολτομέτρου διερχόμενον ἀσθενὲς ρεῦμα θεωρεῖται ἀμελητέον).

β) Ὅταν κλείσωμεν τὸν διακόπτην, τὸ κύκλωμα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις i εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{E}{R + R_{\varepsilon\sigma}} \tag{1}$$

ἔνθα R εἶναι ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα καὶ $R_{\varepsilon\sigma}$ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ στοιχείου. Ἀφ' ἑτέρου τὸ ρεῦμα i, διαρρέον τὴν ἀντίστασιν R, δημιουργεῖ εἰς τὰ ἄκρα της μίαν διαφορὰν δυναμικοῦ U, ἡ ὁποία, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm, εἶναι ἴση πρὸς

$$U = i \cdot R. \tag{2}$$

Ἡ μελέτη, ὅμως, τοῦ σχήματος δεικνύει ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως ταύτης εἶναι συνδεδεμένον τὸ βολτόμετρον. Συνεπῶς τὴν τάσιν ταύτην U μετρεῖ τὸ βολτόμετρον.

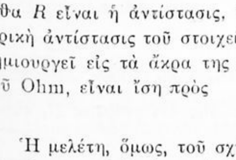
Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$R_{\varepsilon\sigma} = \frac{E - U}{i}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$R_{\varepsilon\sigma} = 0{,}1\ \Omega.$$

Ἄσκησις 14η. *Τέσσαρες ἀντιστάσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση πρὸς 3 Ω, συνδέονται ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα καὶ τροφοδοτοῦνται εἰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς διὰ συσσωρευτοῦ ΗΕΔ 2 V. Ἐὰν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ συσσωρευτοῦ εἶναι 0,5 Ω, ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου δι' αὐτοῦ;*



Λύσις. Καλοῦμεν $i_{o\lambda}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν συσσωρευτήν, R ἑκάστην τῶν τεσσάρων ἴσων ἀντιστάσεων καὶ i_1, i_2 τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τῶν διαρρεόντων τοὺς δύο κλάδους τοῦ κυκλώματος.

Ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν ἄνω ἀριστερὰ κόμβον τοῦ κυκλώματος ἔχομεν

$$i_{ολ} = i_1 + i_2. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐφαρμόζοντες τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ ἄνω καὶ κάτω κλειστὸν κύκλωμα, εὑρίσκομεν τὰς σχέσεις

$$E = i_{ολ}\cdot R_{εσ} + i_1\cdot R + i_1\cdot R \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad E = i_{ολ}\cdot R_{εσ} + i_2\cdot R + i_2\cdot R. \quad (3)$$

Ἤδη, λαμβάνοντες τὸ i_1 ἐκ τοῦ τύπου (2) καὶ τὸ i_2 ἐκ τοῦ τύπου (3) καὶ ἀντικαθιστῶντες αὐτὰ εἰς τὸν τύπον (1), εὑρίσκομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$i_{ολ} = \frac{E}{R + R_{εσ}}. \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) λαμβάνομεν

$$i_{ολ} = 0{,}57\ A.$$

Ἄσκησις 15η. *Συσσωρευτής, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω, τροφοδοτεῖ δύο ἀντιστάσεις 2 Ω καὶ 4 Ω, συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως τῶν 2 Ω ἐπικρατεῖ διαφορὰ δυναμικοῦ 8 V. Ποία εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν E καὶ $R_{εσ}$ τὴν *ΗΕΔ* καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ συσσωρευτοῦ, R_1, R_2 τὰς δύο ἐν σειρᾷ συνδεδεμένας ἀντιστάσεις *(2 Ω καὶ 4 Ω)* καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν β' κανόνα τοῦ Kirchhoff θὰ λάβωμεν τὸν τύπον

$$E = i\cdot R_{εσ} + i\cdot R_1 + i\cdot R_2 \qquad \text{ἢ} \qquad E = i\cdot(R_{εσ} + R_1 + R_2). \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἴση πρὸς

$$U = i\cdot R_1. \qquad (2)$$

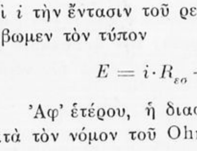
Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$E = \frac{U}{R_1}\cdot(R_{εσ} + R_1 + R_2).$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$E = 26\ V.$$

Ἄσκησις 16η. *Στοιχεῖον, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,7 Ω, τροφοδοτεῖ δύο ἀντιστάσεις 6 Ω καὶ 5 Ω, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ. Τὸ ρεῦμα διὰ τῆς ἀντιστάσεως τῶν 6 Ω ἔχει ἔντασιν 200 mA. Ποία ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου;*



Λύσις. Καλοῦμεν E καὶ $R_{εσ}$ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ στοιχείου, R_1 καὶ R_2 τὰς δύο ἐν παραλλήλῳ συνδεδεμένας ἀντιστάσεις, i_1 καὶ i_2 τὰς ἐντάσεις τῶν διαρρεόντων αὐτὰς ρευμάτων καὶ $i_{ολ}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ στοιχείου. Ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον K ἔχομεν

$$i_{ολ} = i_1 + i_2. \qquad (1)$$

Ἀκολούθως, ἐφαρμόζοντες τὸν β' κανόνα τοῦ Kirchhoff πρῶτον εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα $ΑΚΒΓΑ$ καί, κατόπιν, εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα $ΚΔΖΒΚ$, εὑρίσκομεν

$$E = i_{ολ} \cdot R_{εσ} + i_1 \cdot R_1 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad 0 = i_2 \cdot R_2 - i_1 \cdot R_1. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

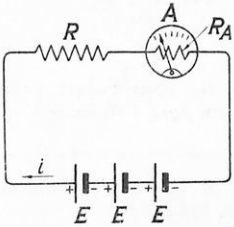
$$\underline{E = i_1 \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_{εσ} + R_2 \cdot R_{εσ}}{R_2}\right).}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 1{,}51\ V.}$$

Ἄσκησις 17η. *Συνδέομεν τρία ὅμοια ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ἐν σειρᾷ καὶ δι' αὐτῶν τροφοδοτοῦμεν μίαν ἀντίστασιν 22 Ω, παρεμβάλλοντες εἰς τὸ κύκλωμα καὶ ἀμπερόμετρον, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω. Ἂν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῶν στοιχείων εἶναι ἀμελητέα, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι 200 mA, ποία ἡ ΗΕΔ ἑκάστου στοιχείου;*

Λύσις. Καλοῦμεν E τὴν $ΗΕΔ$ ἑκάστου τῶν τριῶν ὁμοίων στοιχείων, R_A τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀμπερομέτρου, R τὴν τροφοδοτουμένην ἀντίστασιν καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος.



Γράφοντες τὸν β' κανόνα τοῦ Kirchhoff λαμβάνομεν

$$E + E + E = i \cdot R + i \cdot R_A \quad \text{ἢ} \quad 3E = i \cdot (R + R_A) \quad (1)$$

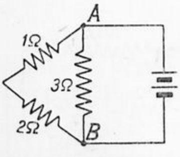
(δεδομένου ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῶν στοιχείων θεωρεῖται ἀμελητέα). Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{E = \frac{i \cdot (R + R_A)}{3}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 1{,}5\ V.}$$

Ἄσκησις 18η. *Τρεῖς ἀντιστάσεις 1 Ω, 2 Ω καὶ 3 Ω συνδέονται ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα. Εἰς τὰ σημεῖα Α, Β συνδέεται συσσωρευτής, ΗΕΔ 4 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,5 Ω. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ;*



Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν R_1, R_2, R_3 τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις $(1\ Ω,\ 2\ Ω,\ 3\ Ω)$, $R_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν, E καὶ $R_{εσ}$ τὴν $ΗΕΔ$ καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ i τὴν ζητουμένην ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν συσσωρευτήν, ἔχομεν τὸν τύπον

$$i = \frac{E}{R_{ολ} + R_{εσ}}. \qquad (1)$$

Τὸ $R_{ολ}$ ὑπολογίζεται ἐκ τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2, R_3 ἴσον πρὸς

$$R_{ολ} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

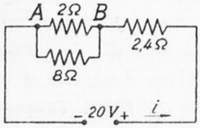
ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$i = \frac{E}{\dfrac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_{εσ}}. \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 2\ A.}$$

Ἄσκησις 19η. *Τρεῖς ἀντιστάσεις 2 Ω, 8 Ω καὶ 2,4 Ω συνδέονται ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα. α) Ποία ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, ὅταν τὸ σύστημα τροφοδοτῆται διὰ τάσεως 20 V; β) Ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β;*



Λύσις. Καλοῦμεν R_1, R_2, R_3 τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις (2 Ω, 8 Ω καὶ 2,4 Ω) καὶ U τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ τῶν 20 V, ἡ ὁποία τροφοδοτεῖ τὸ κύκλωμα.

α) Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{U}{R_{ολ}} \qquad (1)$$

ἔνθα $R_{ολ}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Αὕτη, ὑπολογιζομένη, εὑρίσκεται ἴση πρὸς 4 Ω, ὁπότε ὁ τύπος (1) δίδει, δι' ἀντικαταστάσεως,

$$\underline{i = 5\ A.}$$

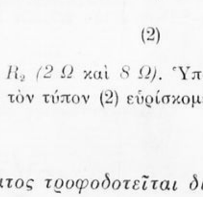
β) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ $U_{A,B}$ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἴση πρὸς

$$U_{A,B} = i \cdot R_{A,B} \qquad (2)$$

ἔνθα $R_{A,B}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2 (2 Ω καὶ 8 Ω). Ὑπολογίζοντες τὴν ἀντίστασιν ταύτην καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$\underline{U_{A,B} = 8\ V.}$$

Ἄσκησις 20ή. *Τὸ κύκλωμα τοῦ ἔναντι σχήματος τροφοδοτεῖται διὰ συσσωρευτοῦ, ΗΕΔ 6 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ποίαν ἔνδειξιν θὰ δείξῃ τὸ ἀμπερόμετρον Α; (Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου θεωρεῖται ἀμελητέα).*



Λύσις. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τόσον τοῦ συσσωρευτοῦ, ὅσον καὶ τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι μηδέν, ἡ ζητουμένη ἔντασις i τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἴση

$$i = \frac{E}{R_{ολ}} \qquad (1)$$

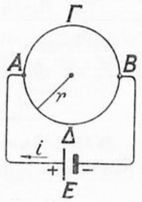
ἔνθα E εἶναι ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ $R_{ολ}$ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ὁλικῆς ἀντιστάσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὑπολογίζομεν, πρῶτον, τὴν ἀντίστασιν, τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἀντιστάσεις 3 Ω καὶ 6 Ω, συνδεδεμένας παραλλήλως, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἴσην πρὸς $2\ \Omega$. Ἀκολούθως ὑπολογίζομεν τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τῶν δύο ἐν σειρᾷ ἀντιστάσεων $8\ \Omega$ καὶ $2\ \Omega$ καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην πρὸς $10\ \Omega$. Τέλος, ἡ ἀντίστασις αὕτη μετὰ τῆς τετάρτης ἀντιστάσεως $10\ \Omega$ (σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ) δίδουν $5\ \Omega$. Ἡ ἀντίστασις αὕτη εἶναι καὶ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$i = 1{,}2\ A.$$

Σημείωσις: Ἡ ἄσκησις αὕτη δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατὰ γενικὸν τρόπον, δηλ., δι' ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τοῦ Kirchhoff.

Ἄσκησις 21η. *Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἐκ σιδήρου, τοῦ ὁποίου ἡ διατομὴ ἔχει ἐμβαδὸν $0{,}2\ mm^2$, συνδέεται εἰς δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα μὲ τοὺς πόλους ἠλεκτρικοῦ στοιχείου, ΗΕΔ $1{,}5\ V$ καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $0{,}75\ \Omega$. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι $30\ cm$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν πηγήν.*

Λύσις. Καλοῦμεν r καὶ S τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τοῦ ἀγωγοῦ, ϱ τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τοῦ σιδήρου, E καὶ $R_{εσ}$ τὴν ΗΕΔ καὶ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου καὶ i τὴν ζητουμένην ἔντασιν τοῦ ρεύματος.



Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{E}{R_{ολ} + R_{εσ}} \qquad (1)$$

ἔνθα $R_{ολ}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν δύο ἀγωγῶν $AΓB$ καὶ $AΔB$. Ὑπολογίζοντες τὰς ἀντιστάσεις $R_{AΓB}$ καὶ $R_{AΔB}$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αὗται εἶναι συνδεδεμέναι ἐν π α ρ α λ λ ή λ ῳ, εὑρίσκομεν

$$R_{ολ} = \frac{\pi \cdot r \cdot \varrho}{2S}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον:

$$i = \frac{E}{\dfrac{\pi \cdot r \cdot \varrho}{2S} + R_{εσ}}. \qquad (3)$$

Δίδονται: $E = 1{,}5\ V$, $r = 30\ cm$, $S = 0{,}2\ mm^2 = 0{,}002\ cm^2$, $R_{εσ} = 0{,}75\ \Omega$. Τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν ϱ τοῦ σιδήρου εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σ. 117 τοῦ Β' τόμου. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

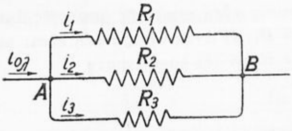
$$i = 1{,}52\ A.$$

Ἄσκησις 22α. *Ρεῦμα, ἐντάσεως $13\ A$, διακλαδίζεται εἰς τρεῖς ἀγωγούς, ἀντιστάσεων $2\ \Omega$, $10\ \Omega$ καὶ $20\ \Omega$. Νὰ εὑρεθοῦν α) αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων εἰς ἑκάστην ἀντίστασιν. β) Ἡ ἰσχύς, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ ἑκάστης ἀντιστάσεως καὶ γ) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ κοινὰ ἄκρα τῶν τριῶν ἀντιστάσεων.*

Λύσις. Καλοῦμεν R_1, R_2, R_3 τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις, i_1, i_2, i_3 τὰς ἀντιστοίχους ἐντάσεις καὶ $i_{ολ}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διακλαδίζεται εἰς τοὺς τρεῖς ἀγωγούς. Ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον A ἔχομεν

$$i_{ολ} = i_1 + i_2 + i_3. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐφαρμόζοντες τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα, τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_2, λαμβάνομεν



$$0 = i_1 \cdot R_1 - i_2 \cdot R_2. \qquad (2)$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλειστὸν κύκλωμα τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_3, εὑρίσκομεν

$$0 = i_1 \cdot R_1 - i_3 \cdot R_3. \qquad (3)$$

Ἤδη, λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν i_2 καὶ i_3 ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν διὰ τὸ i_1 τὴν τιμὴν

$$\underline{i_1 = i_{o\lambda} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}}. \qquad (4)$$

Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως, εὑρίσκομεν διὰ τὰς ἐντάσεις i_2 καὶ i_3:

$$\underline{i_2 = i_{o\lambda} \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}} \quad (5) \qquad \underline{i_3 = i_{o\lambda} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}}. \quad (6)$$

Δίδονται: $i_{o\lambda} = 13\ A$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ καὶ $R_3 = 20\ \Omega$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐξισώσεις (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν

$$\underline{i_1 = 10\ A,} \qquad \underline{i_2 = 2\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{i_3 = 1\ A.}$$

β) Ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ ἑκάστης ἀντιστάσεως ἰσχὺς N_1, N_2, N_3 εὑρίσκεται, τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων

$$\underline{N_1 = i_1^2 \cdot R_1,} \qquad \underline{N_2 = i_2^2 \cdot R_2} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{N_3 = i_3^2 \cdot R_3,}$$

ἴση πρὸς

$$\underline{N_1 = 200\ W,} \qquad \underline{N_2 = 40\ W,} \qquad \underline{N_3 = 20\ W.}$$

γ) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ $U_{A,\,B}$ εἰς τὰ κοινὰ ἄκρα A, B εὑρίσκεται, τῇ βοηθείᾳ τοῦ νόμου τοῦ Ohm

$$\underline{U_{A,\,B} = i_1 \cdot R_1 = i_2 \cdot R_2 = i_3 \cdot R_3,}$$

ἴση πρὸς

$$\underline{U_{A,\,B} = 20\ V.}$$

Ἄσκησις 23η. *Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις δύο ἀγωγῶν, συνδεομένων ἐν σειρᾷ, εἶναι ἴση πρὸς 15 Ω, ἐνῶ, συνδεομένων ἐν παραλλήλῳ, 3,6 Ω. Ποία ἡ ἀντίστασις ἑκάστου ἀγωγοῦ;*

Λύσις. Καλοῦντες R_1 καὶ R_2 τὰς ἀντιστάσεις τῶν δύο ἀγωγῶν καὶ R_σ, R_π τὴν ὁλικὴν αὐτῶν ἀντίστασιν κατὰ τὴν σύνδεσιν ἐν σειρᾷ καὶ ἐν παραλλήλῳ, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$R_\sigma = R_1 + R_2 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{R_\pi} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ὡς πρὸς R_1 λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$R_1^2 - R_\sigma \cdot R_1 + R_\sigma \cdot R_\pi = 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$R_1 = \frac{R_\sigma \pm \sqrt{R_\sigma^2 - 4R_\sigma \cdot R_\pi}}{2}. \qquad (3)$$

'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν δύο τιμὰς διὰ τὸ R_1:

$$R_1 = 9\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad R_1' = 6\ \Omega.$$

"Ηδη, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν διὰ τὸ R_2, ὁμοίως, δύο τιμάς:

$$R_2 = 6\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad R_2' = 9\ \Omega.$$

"Ητοι αἱ ζητούμεναι ἀντιστάσεις εἶναι ἴσαι πρὸς

$$R_1 = 6\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad R_2 = 9\ \Omega.$$

"Ασκησις 24η. *Ραδιόφωνον συνεχοῦς ρεύματος καὶ τάσεως λειτουργίας 110 V, ἔχει ἰσχὺν 40 W. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ ραδιόφωνον διὰ νὰ δύναται νὰ λειτουργήσῃ τοῦτο εἰς δίκτυον συνεχοῦς τάσεως 220 V;*

Λύσις. Καλοῦμεν U_Δ τὴν τάσιν τοῦ δικτύου καὶ U_P τὴν τάσιν λειτουργίας τοῦ ραδιοφώνου. Διὰ νὰ λειτουργῇ τὸ ραδιόφωνον κανονικῶς, ὅταν συνδεθῇ εἰς τὸ δίκτυον τῶν *220 V*, πρέπει ἡ ἀντίστασις R, ἡ ὁποία θὰ παρεντεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα, νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε, διαρρεομένη ὑπὸ τοῦ ρεύματος κανονικῆς λειτουργίας τοῦ ραδιοφώνου, νὰ προκαλῇ εἰς τὰ ἄκρα της πτῶσιν τάσεως ἴσην πρὸς

$$U_R = U_\Delta - U_P. \qquad (1)$$

'Εὰν i εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κανονικῆς λειτουργίας, τότε ἡ τάσις U_R εἶναι ἴση πρὸς

$$U_R = i \cdot R. \qquad (2)$$

'Η ἔντασις i ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἰσχύος N τοῦ ραδιοφώνου καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας U_P ἴση πρὸς

$$i = \frac{N}{U_P}. \qquad (3)$$

'Εκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$R = \frac{U_\Delta \cdot (U_\Delta - U_P)}{N}. \qquad (4)$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$R = 302{,}5\ \Omega.$$

"Ασκησις 25η. *Μία ἀντίστασις R_1 ἐκ σιδήρου συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς ἀντίστασιν R_2 ἐξ ἄνθρακος. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν δύο ἀντιστάσεων, ἵνα ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις μὴ μεταβάλλεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας, δεδομένου ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως τοῦ ἄνθρακος εἶναι ἀρνητικός;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν a_1 καὶ a_2 τοὺς θερμικοὺς συντελεστὰς ἀντιστάσεως τοῦ σιδήρου καὶ τοῦ ἄνθρακος καὶ ΔR_1, ΔR_2 τὰς μεταβολὰς τῶν δύο ἀντιστάσεων, τὰς προκαλουμένας διὰ μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας κατὰ $\Delta\vartheta$, ἔχομεν τὰς σχέσεις

$$\Delta R_1 = a_1 \cdot R_1 \cdot \Delta\vartheta \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta R_2 = a_2 \cdot R_2 \cdot \Delta\vartheta. \quad (2)$$

Διὰ νὰ μὴ μεταβάλλεται ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις μετὰ τῆς θερμοκρασίας, πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν μεταβολῶν ΔR_1 καὶ ΔR_2 νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδὲν - ἤτοι

N.O.

$$\Delta R_1 + \Delta R_2 = 0. \tag{3}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν ζητούμενον λόγον

$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Ἄσκησις 26η. *Δύο σύρματα, τοῦ αὐτοῦ μήκους καὶ τῆς αὐτῆς διατομῆς, εἶναι κατεσκευασμένα τὸ ἓν ἐκ χαλκοῦ καὶ τὸ ἄλλο ἐκ σιδήρου. Συνδέομεν αὐτὰ ἐν σειρᾷ, τὰ δὲ δύο ἄκρα των μὲ τοὺς πόλους ἑνὸς συσσωρευτοῦ, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σιδηροῦν σύρμα θερμαίνεται περισσότερον ἀπὸ τὸ χάλκινον. Ἀκολούθως, συνδέομεν αὐτὰ ἐν παραλλήλῳ, τὸ δὲ προκῦπτον σύστημα μὲ τοὺς πόλους τοῦ αὐτοῦ συσσωρευτοῦ. Παρατηροῦμεν ὅτι, τώρα, τὸ χάλκινον σύρμα θερμαίνεται περισσότερον ἀπὸ τὸ σιδηροῦν. Νὰ ἐξηγηθοῦν αἱ δύο αὗται περιπτώσεις.*

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὰ δύο σύρματα ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν διατομήν, ἕπεται ὅτι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις εἶναι μεγαλυτέρα, θὰ ἔχῃ καὶ μεγαλυτέραν ἀντίστασιν. Συμβουλευόμενοι τὸν πίνακα τῆς σελ. 117 τοῦ Β΄ τόμου εὑρίσκομεν ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σιδήρου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ χαλκοῦ, ὁπότε εἶναι καὶ

$$R_{\sigma\iota\delta} > R_{\chi\alpha\lambda\kappa}.$$

α) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνδέσεως ἐν σειρᾷ, τὰ δύο σύρματα διαρρέονται ὑπὸ ρεύματος τῆς αὐτῆς ἐντάσεως i, ἡ δὲ καταναλισκομένη ἰσχὺς ὑπὸ ἑκάστου σύρματος εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς

$$N_{\sigma\iota\delta} = i^2 \cdot R_{\sigma\iota\delta} \quad \text{καὶ} \quad N_{\chi\alpha\lambda\kappa} = i^2 \cdot R_{\chi\alpha\lambda\kappa}.$$

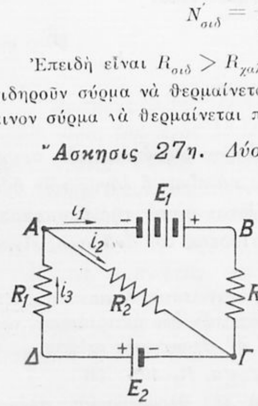
Ἐπειδὴ εἶναι $R_{\sigma\iota\delta} > R_{\chi\alpha\lambda\kappa}$, ἕπεται ὅτι $N_{\sigma\iota\delta} > N_{\chi\alpha\lambda\kappa}$, δηλ., εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην πρέπει νὰ θερμαίνεται περισσότερον τὸ σιδηροῦν σύρμα.

β) Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συνδέσεως ἐν παραλλήλῳ, τὰ δύο σύρματα εὑρίσκονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάσιν U, ὁπότε ἡ καταναλισκομένη ἰσχύς, εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς

$$N'_{\sigma\iota\delta} = \frac{U^2}{R_{\sigma\iota\delta}} \quad \text{καὶ} \quad N'_{\chi\alpha\lambda\kappa} = \frac{U^2}{R_{\chi\alpha\lambda\kappa}}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $R_{\sigma\iota\delta} > R_{\chi\alpha\lambda\kappa}$, ἕπεται ὅτι: $N'_{\sigma\iota\delta} < N'_{\chi\alpha\lambda\kappa}$, δηλ., πρέπει, τώρα, τὸ σιδηροῦν σύρμα νὰ θερμαίνεται ὀλιγώτερον τοῦ χαλκίνου, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ χάλκινον σύρμα νὰ θερμαίνεται περισσότερον ἀπὸ τὸ σιδηροῦν.

Ἄσκησις 27η. *Δύο ἠλεκτρικαὶ πηγαί, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $E_1 = 6\ V$ καὶ $E_2 = 2\ V$ καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, συνδέονται μετὰ τριῶν ἀντιστάσεων $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$ καὶ $R_3 = 4\ \Omega$ ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν R_2.*



Λύσις. Ἡ ἄσκησις αὕτη θὰ λυθῇ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν κανόνων τοῦ Kirchhoff. Πρὸς τοῦτο σημειοῦμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος διὰ βελῶν τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων i_1, i_2 καὶ i_3, τῶν διαρρεόντων τοὺς τρεῖς κλάδους τοῦ κυκλώματος.

Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δύναται νὰ εἶναι τυχαία. Οὕτω, π.χ., ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος i_2, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν R_2, ἐλήφθη ἐκ τοῦ σημείου A πρὸς τὸ σημεῖον $Γ$. Ἡ αὐθαίρετος αὕτη ἐκλογὴ τῆς φορᾶς οὐδόλως θὰ ἐπηρεάσῃ τὸ ἀποτέλεσμα, καθόσον, ἐὰν τελικῶς προκύψῃ, π.χ., $i_2 = -3\ A$, τοῦτο θὰ σημαίνῃ, ἁπλῶς, ὅτι ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος i_2 εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν ἐκλεγεῖσαν.

Ἤδη ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐφαρμόζοντες τὸν α΄ κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον A λαμβάνομεν:

$$i_3 - i_2 - i_1 = 0. \qquad (1)$$

Ἀκολούθως, ἐφαρμόζοντες τὸν β΄ κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὰ κλειστὰ κυκλώματα $ΑΒΓΑ$ καὶ $ΑΓΔΑ$, εὑρίσκομεν:

$$E_1 = i_1 \cdot R_3 - i_2 \cdot R_2 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad E_2 = i_3 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν διὰ τὴν ζητουμένην ἔντασιν i_2 τὴν ἐξίσωσιν:

$$\underline{i_2 = \frac{E_2 \cdot R_3 - E_1 \cdot R_1}{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν

$$\underline{i_2 = -0{,}2\ A.}$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος i_2 εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν ἐκλεγεῖσαν.

Κατηγορία Γ΄

1) Εἰς τὰ ἄκρα χαλκίνου σύρματος, διαμέτρου 1 mm καὶ βάρους 300 kgr, ἐφαρμόζεται τάσις 6000 V. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ σύρμα; (Αἱ ἀναγκαῖαι σταθεραὶ θὰ ληφθοῦν ἐκ πινάκων). (Εὔκολος).* (ΑΠ: *6,45 A*)

2) Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος $δ_1 : δ_2$ τῶν διαμέτρων δύο συρμάτων, τοῦ ἑνὸς ἐκ χαλκοῦ καὶ τοῦ ἄλλου ἐξ ἀργιλίου, διὰ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ μῆκος; (Αἱ ἀναγκαῖαι σταθεραὶ θὰ ληφθοῦν ἐκ πινάκων). (Εὔκολος).

(ΑΠ: $δ_1 : δ_2 = 0{,}779 : 1$)

3) Θερμόμετρον ἀντιστάσεως ἀποτελεῖται ἐκ σύρματος λευκοχρύσου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 300 Ω εἰς θερμοκρασίαν 0° C. Ὅταν τὸ θερμόμετρον τοῦτο τεθῇ ἐντὸς κλιβάνου εὑρίσκεται ὅτι ἡ ἀντίστασίς του αὐξάνεται εἰς 1020 Ω. Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ κλιβάνου; (Αἱ ἀναγκαῖαι σταθεραὶ θὰ ληφθοῦν ἐκ πινάκων). (Εὔκολος).

(ΑΠ: *800° C*)

4) Δύο λαμπτῆρες πυρακτώσεως εἶναι κατεσκευασμένοι κατὰ τρόπον ὥστε νὰ λειτουργοῦν κανονικῶς, ὅταν τροφοδοτοῦνται διὰ τάσεως 50 V ἕκαστος. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος ἕκαστον λαμπτῆρα κατὰ τὴν κανονικὴν λειτουργίαν, εἶναι ἴση πρὸς 2 A. Οἱ δύο οὗτοι λαμπτῆρες συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ πρόκειται νὰ τροφοδοτηθοῦν διὰ τάσεως 120 V. Ποία πρόσθετος ἀντίστασις πρέπει νὰ παρεμβληθῇ εἰς τὸ κύκλωμα ἵνα οἱ λαμπτῆρες λειτουργοῦν κανονικῶς; (Μετρία). (ΑΠ: *10 Ω*)

5) Ρεῦμα, ἐντάσεως 10 A, διαρρέει μίαν ἀντίστασιν 20 Ω ἐπὶ 5 min. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως, β) ἡ καταναλωθεῖσα ἐνέργεια εἰς Joule καὶ γ) ἡ ἰσχύς. (Εὔκολος). (ΑΠ: *200 V, $6 \cdot 10^5$ Joule, 2 kW*)

6) Δύο θερμαντικὰ σώματα ἀποτελοῦνται ἐκ συρμάτων διαφόρων ἀντιστάσεων, συνδεόμενα δὲ α) ἐν σειρᾷ καὶ β) ἐν παραλλήλῳ τροφοδοτοῦνται, ἑκάστοτε, διὰ τάσεως U. Εἰς ποῖον ἐκ τῶν θερμαντικῶν σωμάτων θὰ παραχθῇ μεγαλυτέρα θερμότης εἰς ἑκάστην τῶν δύο περιπτώσεων; (Μετρία).

(ΑΠ: *α) Εἰς τὸ θερμαντικὸν σῶμα μεγάλης ἀντιστάσεως. β) Εἰς τὸ θερμαντικὸν σῶμα μικρᾶς ἀντιστάσεως*)

7) Ἠλεκτρικὸς βραστὴρ καταναλίσκει ἰσχὺν 400 W, ὅταν τροφοδοτῆται διὰ τάσεως 220 V. Κατὰ πόσον τοῖς ἑκατὸν θ' αὐξηθῇ ἡ ἰσχύς, ὅταν ἡ τάσις αὐξηθῇ εἰς 230 V; (Μετρία).

(ΑΠ: Ἡ ἰσχὺς θ' αὐξηθῇ ἀπὸ 400 W εἰς 438 W, δηλ., θ' αὐξηθῇ κατὰ 9,5 %)

8) Ἠλεκτρικὸς θερμοσίφων περιέχει 80 λίτρα ὕδατος, θερμοκρασίας 15° C. Ἐὰν οὗτος τεθῇ εἰς λειτουργίαν, παρατηρεῖται ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται εἰς τοὺς 80° C ἐντὸς 2 ὡρῶν. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἰσχὺς τοῦ θερμοσίφωνος καὶ β) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἐὰν ἡ τάσις λειτουργίας τοῦ θερμοσίφωνος εἶναι ἴση πρὸς 220 V. (Εὔκολος).

(ΑΠ: 3 kW, 13,63 A)

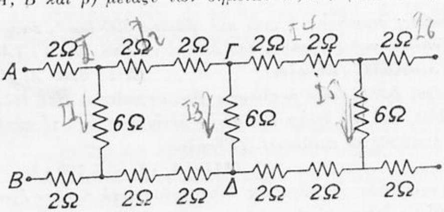
9) Συνδέομεν ἐν σειρᾷ τρεῖς λαμπτῆρας πυρακτώσεως, τάσεως λειτουργίας 30 V καὶ ἰσχύος 60 W, 45 W καὶ 30 W ἀντιστοίχως, εἰς δὲ τὰ ἄκρα τῆς ὁμάδος ἐφαρμόζομεν τάσιν 78 V. Νὰ εὑρεθῇ α) ποία τάσις ἐπικρατεῖ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου λαμπτῆρος καὶ β) ἂν οἱ τρεῖς λαμπτῆρες συνδεθοῦν ἐν παραλλήλῳ καὶ τροφοδοτηθοῦν διὰ τάσεως 50 V, ποίαν ἀντίστασιν πρέπει νὰ συνδέσωμεν ἐν σειρᾷ πρὸς ἕκαστον λαμπτῆρα ὥστε οὗτοι νὰ καταναλίσκουν τὴν κανονικήν των ἰσχύν. (~~Δύσκολος~~). $\boxed{I = \frac{V}{R}}$

(ΑΠ: 18 V, 24 V, 36 V, 10 Ω, 13,33 Ω, 20 Ω)

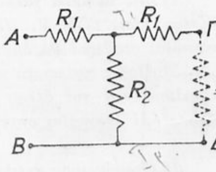
10) Σύρμα ἐκ χρωμονικελίνης συνδέεται πρὸς τάσιν 120 V. Κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συνδέσεως τὸ σύρμα τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 1,5 A, μετά τινα δὲ δευτερόλεπτα, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος λαμβάνει μίαν σταθερὰν τιμὴν 1,33 A. Ποία εἶναι ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος; (Αἱ ἀπαιτούμεναι σταθεραὶ θὰ ληφθοῦν ἐκ πινάκων). (Δύσκολος).

(ΑΠ: 319,5° C)

11) Ποία ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῆς κάτωθι συνδεσμολογίας α) μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β καὶ β) μεταξὺ τῶν σημείων Γ, Δ; (Δύσκολος). (ΑΠ: 8,02 Ω, 3,23 Ω)



Ἄσκησις 11η.

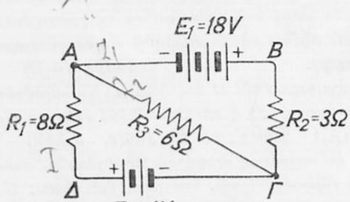


Ἄσκησις 12η.

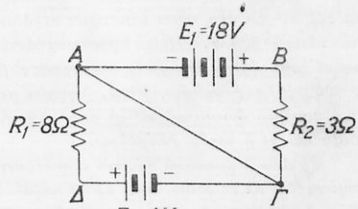
12) Ποία ἀντίστασις R, συνδεομένη εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ, δίδει ὁλικὴν ἀντίστασιν μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β ἴσην πρὸς τὸν ἑαυτόν της - δηλ., ἴσην πρὸς R; (Δύσκολος).

(ΑΠ: $R = \sqrt{R_1^2 + 2R_1 \cdot R_2}$)

13) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος α) τὴν ἀντίστασιν R_1,



Ἄσκησις 13η.

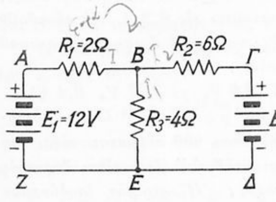


Ἄσκησις 14η.

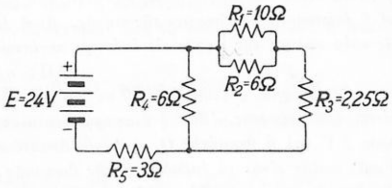
β) τὴν ἀντίστασιν R_2 καὶ γ) τὴν ἀντίστασιν R_3. (Μετρία). (ΑΠ: 1,6 A, 3,06 A, 1,46 A)

14) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος α) τὴν ἀντίστασιν R_1, β) τὴν ἀντίστασιν R_2 καὶ γ) τὸν ἀγωγὸν ΑΓ, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὅτι δὲν ἔχει ἀντίστασιν. (Μετρία). (ΑΠ: *0,5 A, 6 A, 5,5 A*)

15) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις i_3 τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν R_3. (Μετρία).
$$\left(\text{ΑΠ: } i_3 = \frac{E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2} = 2{,}09\ A\right)$$



Ἄσκησις 15η.

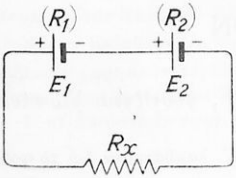


Ἄσκησις 16η.

16) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐντάσεις i_1, i_2, i_3, i_4, καὶ i_5 τῶν ρευμάτων τῶν διαρρεόντων ἑκάστην τῶν ἀντιστάσεων R_1, R_2, R_3, R_4 καὶ R_5. (Μετρία).

(ΑΠ: $i_1 = 0{,}75\ A$, $i_2 = 1{,}25\ A$, $i_3 = 2\ A$, $i_4 = 2\ A$, $i_5 = 4\ A$)

17) Δύο ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ΗΕΔ, ἴσην πρὸς 1,1 V, ἐσωτερικὰς



δὲ ἀντιστάσεις $R_1 = 11\ \Omega$ καὶ $R_2 = 6\ \Omega$. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ δύο στοιχεῖα ἐν σειρᾷ καὶ δι' αὐτῶν τροφοδοτήσωμεν μίαν ἀντίστασιν, τὸ κύκλωμα θὰ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως i, ὁπότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U_1 εἰς τοὺς πόλους τοῦ πρώτου στοιχείου θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως E_1 καὶ δὴ ἴση πρὸς $U_1 = E_1 - i \cdot R_1$. Εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν ἀντίστασιν R_x, τοιαύτην ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U_1 νὰ γίνῃ ἴση πρὸς μηδέν; (Εὔκολος). (ΑΠ: Ναί, ἴσην πρὸς $R_x = 5\ \Omega$)

18) Δύο ἀντιστάσεις 10 Ω καὶ 3 Ω συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τροφοδοτοῦνται διά τινος συσσωρευτοῦ, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν τῶν 10 Ω, εἶναι ἴση πρὸς 0,2 A. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν τῶν 3 Ω καὶ β) ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ. (Εὔκολος). (ΑΠ: *0,67 A, 2 V*)

19) Δύο συσσωρευταί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ΗΕΔ ἴσην πρὸς 2,1 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,1 Ω, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τροφοδοτοῦν μίαν ἀντίστασιν 5 Ω. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν καὶ β) ἡ καταναλισκομένη ὑπ' αὐτῆς ἰσχύς. (Εὔκολος). (ΑΠ: *0,415 A, 0,86 W*)

20) Λαμπτὴρ πυρακτώσεως, συνδεόμενος μὲ τοὺς πόλους ἑνὸς συσσωρευτοῦ, ΗΕΔ 6 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 0,12 Ω, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 2,4 A. Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ β) ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος. (Δύσκολος). (ΑΠ: *5,71 V, 2,38 Ω*)

21) Ἠλεκτρικὴ στήλη εἶναι συνδεδεμένη ἐν σειρᾷ μὲ μίαν ἀντίστασιν $R = 100\ \Omega$ καὶ ἐν γαλβανόμετρον, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $R_\Gamma = 1000\ \Omega$. Ἐάν, ἀκολούθως, συνδέσωμεν τὴν ἀντίστασιν τῶν 100 Ω εἰς τὰ ἄκρα τοῦ γαλβανομέτρου (δηλ. ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸ) καὶ τοὺς πόλους τῆς στήλης εἰς τὰ ἄκρα τοῦ γαλβανομέτρου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου εἶναι, ἀκριβῶς, ἡ αὐτή, ὅπως καὶ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $R_{\varepsilon\sigma}$ τῆς στήλης. (Μετρία). $\left(\text{ΑΠ: } R_{\varepsilon\sigma} = \dfrac{R^2}{R_\Gamma} = 10\ \Omega\right)$

22) Συσσωρευτής, ΗΕΔ 12 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, τροφοδοτεῖ

τρεῖς ἀντιστάσεις, συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ. Μία ἐκ τῶν τριῶν ἀντιστάσεων εἶναι ἄγνωστος, ἐνῶ αἱ ἄλλαι δύο εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς 3 Ω καὶ 1 Ω. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀγνώστου ἀντιστάσεως εἶναι ἴση πρὸς 6 V. Ποία ἡ ἄγνωστος ἀντίστασις; (Εὔκολος). (ΑΠ: 4 Ω).

23) Μία ἀντίστασις 9 Ω, συνδεομένη εἰς τοὺς πόλους μιᾶς ἠλεκτρικῆς πηγῆς, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 0,43 A. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις αὕτη ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἄλλης, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς 32 Ω, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττοῦται εἰς 0,2 A. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς πηγῆς, β) ἡ ΗΕΔ αὐτῆς καὶ γ) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς πηγῆς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν. (Εὔκολος).

(ΑΠ: α) 11 Ω, β) 8,6 V, γ) 3,87 V, 6,4 V)

24) Σύρμα, μήκους $l = 10\ m$ καὶ εἰδικῆς ἀντιστάσεως $\varrho = 10 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος. Ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος εἶναι ἴση πρὸς 2 V καὶ ἡ θερμότης Q, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ, ἀνὰ sec, εἶναι ἴση πρὸς 6 cal, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν S τῆς διατομῆς τοῦ σύρματος; Ἠλεκτρικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $\alpha = 0,24\ cal/Joule$. (Μετρία).

$$\left(\text{ΑΠ}: \quad S = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Q}{t} \cdot \frac{\varrho \cdot l}{U^2} = 0,0625\ cm^2 = 6,25\ mm^2 \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙϚ΄

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Πυκνωτής, χωρητικότητος 3 μF, φορτίζεται εἰς τάσιν 50 V. Ποῖον τὸ φορτίον;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος, $C = q/U$, λαμβάνομεν διὰ τὸ φορτίον:

$$\underline{q = C \cdot U.}$$

Ἡ ἄσκησις ἂς λυθῇ εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $C = 3\mu F = 3 \cdot 10^{-6}\ F$ καὶ $U = 50\ V$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{q = 150 \cdot 10^{-6}\ Cb.}$$

Ἄσκησις 2α. *Κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ τάσις εἰς τὸν πυκνωτὴν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἐὰν τὸ φορτίον ἐλαττωθῇ κατὰ $50 \cdot 10^{-6}\ Cb$;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος, $C = q/U$, λαμβάνομεν διὰ τὴν τάσιν

$$\underline{U = \frac{q}{C}.}$$

Ἂν τὸ φορτίον ἐλαττωθῇ κατὰ $50 \cdot 10^{-6}\ Cb$, δηλ., ἀπὸ $150 \cdot 10^{-6}\ Cb$ γίνῃ ἴσον πρὸς $100 \cdot 10^{-6}\ Cb$, θὰ ἐλαττωθῇ καὶ ἡ τάσις καὶ θὰ γίνῃ ἴση πρὸς

$$U = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} \frac{Cb}{F} = 33,3\ V.$$

Συνεπῶς ἡ τάσις θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ

$$\underline{\Delta U = 50\ V - 33,3\ V = 16,7\ V.}$$

Ἄσκησις 3η. *Εἰς ἀπόστασιν 5 cm ἀπ' ἀλλήλων εὑρίσκονται δύο ἐπίπεδοι καὶ παράλληλοι πλάκες ἐξ ἀργιλίου, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν*

$800\ cm^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἰς μF καὶ pF.

Λύσις. Ἡ χωρητικότης C ἑνὸς πυκνωτοῦ μὲ ἐπιπέδους καὶ παραλλήλους ὁπλισμοὺς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l}} \qquad (1)$$

ἔνθα S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ὁπλισμῶν καὶ l ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

Ἡ ἄσκησις ἂς λυθῇ εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἡ σταθερὰ ε_0 ἔχει τὴν τιμὴν

$$\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}\ Cb/V \cdot m \quad \text{(βλ. Β΄ τόμος, § 156).}$$

Δίδονται: $S = 800\ cm^2 = 8 \cdot 10^{-2}\ m^2$, $l = 5\ cm = 5 \cdot 10^{-2}\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) λαμβάνομεν

$$\underline{C = 14{,}2 \cdot 10^{-12}\ F} \quad \text{ἢ} \quad \underline{C = 14{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mu F} \quad \text{ἢ} \quad \underline{C = 14{,}2\ pF}$$

(δεδομένου ὅτι: $1\ pF = 10^{-6}\ \mu F$).

Ἄσκησις 4η. *Τρεῖς πυκνωταί, χωρητικοτήτων $1\ \mu F$, $2\ \mu F$ καὶ $3\ \mu F$, συνδέονται α) ἐν σειρᾷ καὶ β) ἐν παραλλήλῳ. 1) Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ συστήματος εἰς ἑκάστην περίπτωσιν; 2) Ποῖον φορτίον θὰ λάβῃ ἑκάστοτε τὸ σύστημα, ὅταν συνδεθῇ μὲ τάσιν $200\ V$;*

Λύσις. Καλοῦμεν C_1, C_2, C_3 τὰς χωρητικότητας τῶν τριῶν πυκνωτῶν καὶ $C_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν χωρητικότητα, ὅταν οὗτοι συνδέωνται ἐν σειρᾷ καὶ $C'_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν χωρητικότητα, ὅταν συνδέωνται ἐν παραλλήλῳ.

1. α) *Σύνδεσις ἐν σειρᾷ.* Ἡ ὁλικὴ χωρητικότης $C_{ολ}$ θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς $C_{ολ}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{C_{ολ} = 0{,}545\ \mu F.}$$

β) *Σύνδεσις ἐν παραλλήλῳ.* Ἡ ὁλικὴ χωρητικότης $C'_{ολ}$ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{C'_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3.}$$

Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{C'_{ολ} = 6\ \mu F.}$$

2. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος, $C = q/U$, λαμβάνομεν διὰ τὸ φορτίον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ τὸ σύστημα εἰς τὰς δύο περιπτώσεις:

$$\underline{q = C_{ολ} \cdot U} \quad \text{καὶ} \quad \underline{q' = C'_{ολ} \cdot U,}$$

ἔνθα U εἶναι ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 0{,}11 \cdot 10^{-3}\ Cb} \quad \text{καὶ} \quad \underline{q' = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ Cb.}$$

Ἄσκησις 5η. *Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα $3\ \mu F$. Μὲ ποίας χωρητικότητος πυκνωτὴν πρέπει νὰ συνδεθῇ οὗτος ἐν σειρᾷ, ὥστε ἡ ὁλικὴ χωρητικότης νὰ ἰσοῦται πρὸς $2\ \mu F$;*

Λύσις. Καλοῦμεν C_1 τὴν χωρητικότητα τοῦ δοθέντος πυκνωτοῦ καὶ C_2 τὴν ζητουμένην χωρητικότητα. Διὰ τὴν σύνδεσιν δύο πυκνωτῶν ἐν σειρᾷ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

ἔνθα $C_{o\lambda}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ χωρητικότης. Λύοντες τὴν ἄνω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς C_2 λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{C_2 = \frac{C_{o\lambda} \cdot C_1}{C_1 - C_{o\lambda}}}.$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $C_1 = 3\ \mu F = 3 \cdot 10^{-6}\ F$, $C_{o\lambda} = 2\ \mu F = 2 \cdot 10^{-6}\ F$. 'Αντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{C_2 = 6 \cdot 10^{-6}\ F} \quad \text{ἢ} \quad \underline{C_2 = 6\ \mu F.}$$

"Ασκησις 6η. *Δύο πυκνωταί, χωρητικότητος 1 μF καὶ 2 μF, συνδέονται ἐν σειρᾷ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις 1200 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάσις εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.*

Λύσις. Καλοῦμεν C_1, C_2 τὰς χωρητικότητας τῶν δύο πυκνωτῶν, U_1, U_2 τὰς ἀντιστοίχους τάσεις καὶ $U_{o\lambda}$ τὴν ὁλικὴν τάσιν. 'Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος ἔχομεν

$$C_1 = \frac{q}{U_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad C_2 = \frac{q}{U_2}. \quad (2)$$

'Αφ' ἑτέρου, ἐπειδὴ οἱ δύο πυκνωταὶ εἶναι συνδεδεμένοι ἐν σειρᾷ, ἔχομεν

$$U_{o\lambda} = U_1 + U_2. \qquad (3)$$

'Εκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{U_1 = U_{o\lambda} \cdot \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}. \qquad (4)$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{U_1 = 800\ V.}$$

"Ηδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3), εὑρίσκομεν τὸ U_2 ἴσον πρὸς

$$\underline{U_2 = 400\ V.}$$

"Ασκησις 7η. *Τρεῖς πυκνωταί, χωρητικοτήτων 0,1 μF, 0,2 μF καὶ 0,5 μF, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον σύστημα συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ σύστημα τριῶν ἄλλων πυκνωτῶν, χωρητικοτήτων 0,1 μF, 0,2 μF καὶ 0,5 μF, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Ποία ἡ ὁλικὴ χωρητικότης;*

Λύσις. Καλοῦμεν C_1, C_2, C_3 τὰς χωρητικότητας τῶν τριῶν πρώτων πυκνωτῶν καὶ C τὴν ὁλικὴν αὐτῶν χωρητικότητα. 'Αφ' ἑτέρου, καλοῦμεν C_4, C_5, C_6 τὰς χωρητικότητας τῶν ἄλλων τριῶν πυκνωτῶν καὶ C' τὴν ὁλικὴν αὐτῶν χωρητικότητα.

Διὰ τὴν παράλληλον σύνδεσιν τῶν τριῶν πρώτων πυκνωτῶν ἔχομεν:

$$C = C_1 + C_2 + C_3, \qquad (1)$$

διὰ δὲ τὴν ἐν σειρᾷ σύνδεσιν τῶν τριῶν ἄλλων ἔχομεν:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}. \qquad (2)$$

Ἤδη ἔχομεν δύο «πυκνωτάς», χωρητικότητος C καὶ C', συνδεδεμένους ἐν σειρᾷ. Διὰ τὴν ὁλικὴν χωρητικότητα $C_{ολ}$ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$C_{ολ} = \frac{C \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6}{C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C \cdot C_5 \cdot C_6 + C \cdot C_4 \cdot C_6 + C \cdot C_4 \cdot C_5}. \qquad (4)$$

Εὑρίσκοντες τὸ C, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (1), καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) λαμβάνομεν

$$\underline{C_{ολ} = 54{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mu F.}$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις ἑνὸς κατακορύφου ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἵνα συγκρατῇ σταγόνα ἐλαίου, μάζης $10 \cdot 10^{-6}$ gr καὶ φορτισμένην μὲ φορτίον $3 \cdot 10^{-4}$ ΗΣΜ - φορτίου;*

Λύσις. Καλοῦμεν $\mathcal{E}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, q τὸ φορτίον τῆς σταγόνος καὶ m τὴν μᾶζαν αὐτῆς. Ἐπὶ τῆς σταγόνος ἐξασκοῦνται δύο δυνάμεις: 1) ἡ δύναμις F ἐκ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ 2) τὸ βάρος B αὐτῆς. Αἱ δύο αὗται δυνάμεις εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$F = \mathcal{E} \cdot q \qquad \text{καὶ} \qquad B = m \cdot g.$$

Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ σταγὼν πρέπει νὰ εἶναι

$$F = B \qquad \text{ἢ} \qquad \mathcal{E} \cdot q = m \cdot g. \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\mathcal{E} = \frac{m \cdot g}{q}}. \qquad (2)$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $m = 10 \cdot 10^{-6}$ gr, $q = 3 \cdot 10^{-4}$ ΗΣΜ - φορτίου, εἶναι δὲ $g = 981$ cm/sec². Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) λαμβάνομεν

$$\underline{\mathcal{E} = 32{,}7 \text{ ΗΣΜ - ἐντάσεως ἠλεκτρικοῦ πεδίου.}}$$

Ἄσκησις 2α. *Ἐντὸς ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 100 ΗΣΜ - ἐντάσεως πεδίου, εὑρίσκεται α) μία σφαῖρα, μάζης 1 gr καὶ φορτισμένη μὲ φορτίον 1 ΗΣΜ - φορτίου. β) Ἓν σωμάτιον, μάζης $1 \cdot 10^{-24}$ gr καὶ φορτίου $5 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ γ) ἓν ἠλεκτρόνιον, μάζης $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ φορτίου $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.*

Λύσις. α) Ἐὰν $\mathcal{E}$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ q τὸ φορτίον τῆς σφαίρας, ἡ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκουμένη δύναμις F ἐκ τοῦ πεδίου θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \mathcal{E} \cdot q.$$

Ἑπομένως, ἐὰν m εἶναι ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας, ἡ ἐπιτάχυνσις γ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\gamma = \frac{F}{m} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{\gamma = \frac{\mathcal{E} \cdot q}{m}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ΗΣΜ λαμβάνομεν

$$\underline{\gamma = 100\ cm \cdot sec^{-2}} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\gamma = 1\ m \cdot sec^{-2}}.$$

β) Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ' τοῦ σωματίου

$$\underline{\gamma' = 5 \cdot 10^{11}\ km \cdot sec^{-2}}.$$

γ) Ὁμοίως διὰ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ'' τοῦ ἠλεκτρονίου εὑρίσκομεν

$$\underline{\gamma'' = 5{,}27 \cdot 10^{14}\ km \cdot sec^{-2}}.$$

Ἰδὲ ἤλ. Ἄσκησιν 57 σελ. 95

Ἄσκησις 3η. *Ἓν ἠλεκτρόνιον (φορτίου e καὶ μάζης m) κινεῖται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἐντάσεως $\mathcal{E}$, παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς. Ἐάν, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$, τὸ ἠλεκτρόνιον εἶχε ταχύτητα ἴσην πρὸς μηδέν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις γ, τὸ διανυθὲν διάστημα s καὶ ἡ ταχύτης v αὐτοῦ μετὰ χρόνον t.*

Λύσις. α) Ἡ δύναμις F, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \mathcal{E} \cdot e. \tag{1}$$

Ἑπομένως ἡ ἐπιτάχυνσις γ αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{\gamma = \frac{\mathcal{E} \cdot e}{m}}.$$

β) Ἐφ᾽ ὅσον ἡ δύναμις F εἶναι σταθερὰ (ἐξίσωσις (1)) τὸ ἠλεκτρόνιον θὰ ἐκτελέσῃ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ὁπότε τὸ διανυθὲν διάστημα s εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$s = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad \underline{s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{E} \cdot e}{m} \cdot t^2}.$$

γ) Ἐφ᾽ ὅσον ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι κίνησις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, ἡ ταχύτης του v εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$v = \gamma \cdot t \quad \text{ἢ} \quad \underline{v = \frac{\mathcal{E} \cdot e}{m} \cdot t}.$$

Ἄσκησις 4η. *Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τοῦ προκαλουμένου ὑπὸ σημειώδους ἠλεκτρικοῦ φορτίου Q εἰς ἀπόστασιν R, εἶναι ἴση πρὸς $\mathcal{E} = Q/R^2$.*

Λύσις. Ὡς γνωστὸν τὸ φορτίον Q δημιουργεῖ πέριξ αὐτοῦ ἓν ἠλεκτρικὸν πεδίον. Ἐὰν ἐντὸς τοῦ πεδίου τούτου καὶ εἰς ἀπόστασιν R ἀπὸ τοῦ φορτίου Q φέρωμεν ἓν ἄλλο φορτίον q, τότε θὰ ἐμφανισθῇ μεταξὺ αὐτῶν μία δύναμις F, ἡ ὁποία, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \frac{Q \cdot q}{R^2}. \tag{1}$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ πεδίου ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\mathcal{E} = \frac{F}{q}. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) προκύπτει ὁ ζητούμενος τύπος

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{R^2}.$$

Ἄσκησις 5η. *Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ δύο σημείων ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἐὰν ἀπαιτῆται ἔργον 1200 erg διὰ νὰ μετακινηθῇ ἓν φορτίον 6 ΗΣΜ - φορτίου ἀπὸ τοῦ ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἄλλο;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ $U_1 - U_2$ μεταξὺ δύο σημείων *1, 2* ἔχομεν

$$U_1 - U_2 = \frac{A_{1,2}}{q},$$

ἔνθα $A_{1,2}$ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ φορτίου q μεταξὺ τῶν σημείων *1,2*.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ΗΣΜ εὑρίσκομεν

$$U_1 - U_2 = 200 \text{ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ.}$$

Ἄσκησις 6η. *Ἐὰν ἠλεκτρικὸν φορτίον 2,5 Cb μετακινηθῇ μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 1000 V, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγεται εἰς erg καὶ Joule.*

Λύσις. Τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον παράγεται κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ φορτίου q μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ U, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$A = q \cdot U. \qquad (1)$$

α) *Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ:* Δίδονται: $q = 2{,}5$ Cb $= 2{,}5 \cdot 3 \cdot 10^9$ ΗΣΜ - φορτίου, $U = 1000$ V $= 1000/300$ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$A = 2{,}5 \cdot 10^{10} \text{ erg.}$$

β) *Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα:* Δίδονται: $q = 2{,}5$ Cb, $U = 1000$ V. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$A = 2500 \text{ Joule.}$$

Ἄσκησις 7η. *Δύο ἐπίπεδοι καὶ παράλληλοι μεταλλικαὶ πλάκες, τοποθετημέναι ὁριζοντίως καὶ εὑρισκόμεναι εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των 2 cm, παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 15 kV. Μεταξὺ αὐτῶν εὑρίσκεται μικρὰ φορτισμένη σταγὼν ἐλαίου, μάζης 5 mgr. Ἐὰν ἡ σταγὼν αἰωρῆται, ποῖον τὸ φορτίον της;*

Λύσις. Τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον μεταξὺ τῶν δύο μεταλλικῶν πλακῶν εἶναι ὁμογενές. Ὅταν ἡ σταγὼν αἰωρῆται, ἡ δύναμις $\mathcal{E} \cdot q$ ἐκ τοῦ πεδίου εἶναι ἴση (καὶ ἀντίθετος) πρὸς τὸ βάρος της $m \cdot g$. Ἤτοι

$$\mathcal{E} \cdot q = m \cdot g. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ πεδίου συνδέεται μὲ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ U καὶ τὴν ἀπόστασιν l τῶν πλακῶν διὰ τῆς σχέσεως

$$\mathcal{E} = \frac{U}{l}. \qquad (2) \qquad (\text{βλ. Β' τόμος, § 151α})$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$q = \frac{m \cdot g \cdot l}{U}. \qquad (3)$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ : Δίδονται : $m = 5\ mgr = 5\cdot 10^{-3}\ gr$, $l = 2\ cm$, $U = 15\ kV = 15000\ V = 15000/300$ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ, εἶναι δὲ $g = 981\ cm\cdot sec^{-2}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{q = 0,2\ \text{ΗΣΜ - φορτίου.}}$$

Ἄσκησις 8η. *Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ πυκνωτὴς ἐκ δύο κυκλικῶν μεταλλικῶν πλακῶν, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 1 mm καὶ τοιαύτης χωρητικότητος, ὥστε φορτιζόμενος εἰς τάσιν 100 V, ν' ἀποκτᾷ φορτίον 300 ΗΣΜ - φορτίου. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ ποία ἡ διάμετρος ἑκάστης τῶν πλακῶν;*

Λύσις. α) Ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{C = \frac{q}{U}}.$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα : Δίδονται : $q = 300$ ΗΣΜ - φορτίου $= 300/3\cdot 10^9\ Cb$ καὶ $U = 100\ V$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{C = 1\cdot 10^{-9}\ F} \quad \text{ἢ} \quad \underline{C = 1\cdot 10^{-3}\ \mu F.}$$

β) Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ, μὲ ἐπιπέδους καὶ παραλλήλους ὁπλισμούς, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{l}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ αἱ πλάκες ἔχουν τὸ σχῆμα κυκλικοῦ δίσκου, ὁ τύπος (1) γράφεται

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi\delta^2}{4l} \tag{2}$$

ἔνθα δ εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς τῶν πλακῶν καὶ l ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς δ λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\delta = \sqrt{\frac{C\cdot 4l}{\varepsilon_0\cdot\pi}}}. \tag{3}$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα : Δίδεται : $l = 1\ mm = 10^{-3}\ m$, εὕρομεν $C = 1\cdot 10^{-9}\ F$, εἶναι δὲ $\varepsilon_0 = 8{,}86\cdot 10^{-12}\ Cb/V\cdot m$ (βλ. § 156 τοῦ Β΄ τόμου). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{\delta = 0{,}38\ m} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\delta = 38\ cm.}$$

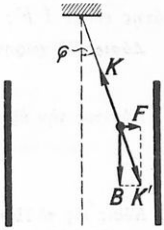
Ἄσκησις 9η. *Μεταξὺ δύο κατακορύφων μεταλλικῶν πλακῶν ἐξαρτᾶται διὰ νήματος σφαιρίδιον, μάζης 0,5 gr καὶ φορτισμένον μὲ φορτίον 50 ΗΣΜ - φορτίου. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν διαφορὰ δυναμικοῦ, ἵνα τὸ σφαιρίδιον ἐκτραπῇ τῆς θέσεως ἰσορροπίας του κατὰ 10°, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν πλακῶν εἶναι 5 cm ; Πόση θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μεταξὺ τῶν πλακῶν ἠλεκτρικοῦ πεδίου;*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν $\mathcal{E}$ τὴν ἔντασιν τοῦ ἠλεκρικοῦ πεδίου, U τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ τῶν δύο πλακῶν καὶ l τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν, τότε ἡ δύναμις F, ἡ ἐξασκουμένη ὑπὸ τοῦ πεδίου ἐπὶ τοῦ φορτισμένου σφαιριδίου (τοῦ ὁποίου τὸ φορτίον ἔστω q), θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$F = \mathcal{E}\cdot q \qquad \text{ἢ} \qquad F = \frac{U}{l}\cdot q \tag{1}$$

(διότι: $\mathcal{E} = U/l$ - βλ. 7ην ἄσκησιν).

Ἐκτὸς τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τοῦ σφαιριδίου ἐξασκοῦνται δύο, ἀκόμη, δυνάμεις - τὸ βάρος του B καὶ ἡ δύναμις K ἐκ τοῦ νήματος ἐξαρτήσεως. Ἐφ' ὅσον τὸ σφαιρίδιον ἰσορροπεῖ, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκούμεναι τρεῖς δυνάμεις, F, B καὶ K, νὰ ἰσορροποῦν. Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει ἡ συνισταμένη δύο ἐξ αὐτῶν — π.χ. ἡ συνισταμένη K' τῶν δυνάμεων F καὶ B — νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν τρίτην δύναμιν K. Βάσει τοῦ συλλογισμοῦ τούτου κατεσκευάσθη τὸ ἔναντι σχῆμα, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι



$$F = B\cdot \varepsilon\varphi\, \varphi \qquad \text{ἢ} \qquad F = m\cdot g\cdot \varepsilon\varphi\, \varphi \tag{2}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$U = \frac{m\cdot g\cdot l\cdot \varepsilon\varphi\, \varphi}{q}. \tag{3}$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $m = 0{,}5\ gr$, $l = 5\ cm$, $\varphi = 10^0$, $q = 50$ *ΗΣΜ - φορτίου*, εἶναι δὲ $g = 981\ cm\cdot sec^{-2}$. Εὑρίσκοντες τὴν ἐφαπτομένην τῶν 10^0 ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) λαμβάνομεν:

$$U = 8{,}63 \text{ ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ}.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $1\ V = 1/300$ *ΗΣΜ - διαφορᾶς δυναμικοῦ* εὑρίσκομεν

$$U = 2589\ V.$$

β) Ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\mathcal{E} = \frac{U}{l}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ΗΣΜ λαμβάνομεν

$$\mathcal{E} = 1{,}72 \text{ ΗΣΜ - ἐντάσεως ἠλεκτρικοῦ πεδίου}.$$

Ἄσκησις 10η. *Πυκνωτὴς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο φύλλα κασσιτέρου, ἔχει δὲ ὡς διηλεκτρικὸν παραφινωμένον χάρτην, διηλεκτρικῆς σταθερᾶς 2 καὶ πάχους 0,5 mm. Ζητεῖται τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ἕκαστος τῶν ὁπλισμῶν, ἵνα ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι ἴση πρὸς $15\cdot 10^3$ cm.*

Λύσις. Καλοῦντες C τὴν χωρητικότητα, S τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ὁπλισμοῦ, l τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ὁπλισμῶν καὶ ε τὴν διηλεκτρικὴν σταθερὰν τοῦ παραφινωμένου χάρτου, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$C = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{S}{l}$$ (βλ. § 159 τοῦ Β΄ τόμου)

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$S = \frac{C\cdot l}{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}.$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $C = 15\cdot 10^3\ cm = 15\cdot 10^3$ *ΗΣΜ - χωρητικότητος*,

$l = 0{,}5\ cm$, $\varepsilon = 2$ καὶ $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ (βλ. § 156 τοῦ Β΄ τόμου). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{S = 4710\ cm^2.}$$

Ἄσκησις 11η. *Ποία ἡ ἀκτὶς σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 1 F;*

Λύσις. Ἡ χωρητικότης C σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, ἀκτῖνος R, εἶναι ἴση πρὸς

$$C = \varepsilon_0 \cdot 4\pi \cdot R \qquad \text{(βλ. § 157 τοῦ Β΄ τόμου).}$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς R λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{R = \frac{C}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi}.} \qquad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδεται: $C = 1\ F$, εἶναι δὲ $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ $Cb/V \cdot m$ (βλ. Β΄ τόμος, § 156). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 9 \cdot 10^9\ m} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{R = 9 \cdot 10^6\ km.}$$

Ἄσκησις 12η. *Ποία ἡ χωρητικότης σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἐκ δύο ὁμοκέντρων σφαιρικῶν ἀγωγῶν, ἀκτίνων 15 cm καὶ 20 cm;*

Λύσις. Ἡ χωρητικότης C ἑνὸς σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ μὲ ἀκτῖνας r (ἐσωτερικὴν) καὶ R (ἐξωτερικὴν) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{C = \varepsilon_0 \cdot \frac{4\pi r}{1 - \frac{r}{R}}} \qquad \text{(βλ. § 157 τοῦ Β΄ τόμου).}$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $r = 15\ cm$, $R = 20\ cm$, εἶναι δὲ $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ (βλ. Β΄ τόμος, § 156). Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{C = 60\ cm.}$$

Ἄσκησις 13η. *Πυκνωτής, χωρητικότητος $1 \cdot 10^{-4}\ \mu F$, συνδέεται πρὸς πηγήν, τάσεως U. Ἀκολούθως διακόπτεται ἡ σύνδεσις πρὸς τὴν πηγὴν καὶ ὁ φορτισμένος πυκνωτὴς συνδέεται ἐν παραλλήλῳ πρὸς ἀφόρτιστον πυκνωτήν, ἀγνώστου χωρητικότητος, ὁπότε ἡ τάσις ἐλαττοῦται εἰς τὰ 5/8 τῆς ἀρχικῆς. Ποία ἡ χωρητικότης τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ;*

Λύσις. Καλοῦμεν C τὴν χωρητικότητα τοῦ πρώτου πυκνωτοῦ, C_x τὴν ἄγνωστον χωρητικότητα τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ, U τὴν ἀρχικὴν τάσιν καὶ U' τὴν τελικήν. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος ἔχομεν

$$C = \frac{q}{U}. \qquad (1)$$

Ὅταν οἱ δύο πυκνωταὶ συνδεθοῦν ἐν π α ρ α λ λ ή λ ῳ, τὸ φορτίον q τοῦ πρώτου κατανέμεται καὶ εἰς τοὺς δύο πυκνωτάς, ἔστω δὲ q' τὸ νέον φορτίον τοῦ πρώτου πυκνωτοῦ καὶ q_x τὸ φορτίον τοῦ δευτέρου. Εἶναι προφανὲς ὅτι

$$q = q' + q_x. \qquad (2)$$

Ὅταν ὁ φορτισμένος πυκνωτὴς συνδεθῇ ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸν δεύτερον πυκνωτὴν (ἀφόρτιστον), ἡ τάσις του ἐλαττοῦται ἀπὸ τὴν τιμὴν U εἰς τὴν τιμὴν U' -

τιμήν, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ καὶ διὰ τοὺς δύο πυκνωτάς, ἐφ' ὅσον οὗτοι εἶναι συνδεδεμένοι ἐν παραλλήλῳ. Ἑπομένως ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$q' = C \cdot U' \quad (3) \quad \text{καὶ} \quad q_x = C_x \cdot U'. \quad (4)$$

Ἀφ' ἑτέρου, δίδεται: $U' = \frac{5}{8} \cdot U.$ (5)

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4) καὶ (5) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{C_x = \frac{3}{5} \cdot C.} \quad (6)$$

Δίδεται: $C = 1 \cdot 10^{-4}\ \mu F$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (6) εὑρίσκομεν

$$\underline{C_x = 0{,}6 \cdot 10^{-4}\ \mu F.}$$

Ἄσκησις 14η. *Ποία ἡ ἐνέργεια πυκνωτοῦ, χωρητικότητος 20 μF καὶ φορτισμένου εἰς τάσιν 550 V;*

Λύσις. Ἡ ἐνέργεια E πυκνωτοῦ, χωρητικότητος C καὶ φορτισμένου εἰς τάσιν U, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\underline{E = \frac{1}{2}\ C \cdot U^2.}$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $C = 20\ \mu F = 20 \cdot 10^{-6}\ F$ καὶ $U = 550\ V$. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν:

$$\underline{E = 3\ Joule.}$$

Ἄσκησις 15η. *Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν φόρτισιν ἑνὸς σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, ἀκτῖνος 10 cm, μὲ φορτίον 200 ΗΣΜ-φορτίου;*

Λύσις. Τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν φόρτισιν τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ, θὰ ἰσοῦται, προφανῶς, μὲ τὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ οὗτος, ὅταν φορτισθῇ εἰς τὴν τάσιν U. Ἡ ἐνέργεια αὕτη εἶναι ἴση πρὸς

$$E = \frac{1}{2}\ C \cdot U^2. \quad (1) \quad \text{(βλ. προηγουμένην ἄσκησιν)}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν τοὺς τύπους: $C = \frac{q}{U}$ (2) καὶ $C = \varepsilon_0 \cdot 4\pi r$. (3).

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi r}.}$$

Λύσις εἰς τὸ ΗΣΜ: Δίδονται: $q = 200$ *ΗΣΜ-φορτίου*, $r = 10\ cm$, εἶναι δὲ $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ (βλ. § 156 τοῦ Β' τόμου). Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{E = 2 \cdot 10^3\ erg.}$$

Ἄσκησις 16η. *Ὅταν πυκνωτὴς φορτισθῇ μὲ φορτίον 1 Cb ἀποκτᾷ διαφορὰν δυναμικοῦ 250 V. Ποία ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν θὰ μᾶς δώσῃ ὁ πυκνωτὴς οὗτος, ὅταν ἐκφορτισθῇ διὰ μέσου μιᾶς ἀντιστάσεως;*

Λύσις. Ἡ θερμότης Q, τὴν ὁποίαν θὰ μᾶς δώσῃ ὁ πυκνωτής, ἐκφορτιζόμενος, εἶναι, προφανῶς, ἴση μὲ τὴν ἐνέργειαν E αὐτοῦ. Ἤτοι

$$Q = E. \quad (1)$$

Ἐὰν C εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ U ἡ τάσις, ἡ ἐνέργεια E τοῦ πυκνωτοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E = \frac{1}{2} C \cdot U^2. \tag{2}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς χωρητικότητος ἔχομεν

$$C = \frac{q}{U} \tag{3}$$

ἔνθα q εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ. Ἐκ τῶν τύπων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{Q = \frac{1}{2} q \cdot U.} \tag{4}$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $q = 1\ Cb$ καὶ $U = 250\ V$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{Q = 125\ Joule.}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\ cal = 4{,}2\ Joule$ ἔχομεν

$$\underline{Q = 29{,}7\ cal.}$$

Κατηγορία Γ'

★ 1) *Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι, ἀκτίνων 5 cm καὶ 20 cm, φέρουν ἑκάστη φορτίον 40 ΗΣΜ - φορτίου. Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μεταφορὰν ἑνὸς ἠλεκτρονίου ἀπὸ τῆς μιᾶς σφαίρας εἰς τὴν ἄλλην; Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου* $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου. (Εὔκολος).*

Σημείωσις: Αἱ δύο σφαῖραι θεωροῦνται ὡς εὑρισκόμεναι εἰς τόσον μεγάλην ἀπόστασιν, ὥστε ἡ παρουσία τῆς μιᾶς νὰ μὴ μεταβάλῃ τὸ πεδίον τῆς ἄλλης.

(ΑΠ: $2{,}88 \cdot 10^{-9}\ erg$)

★ 2) *Κοίλη μεταλλικὴ σφαῖρα, ἀπομεμακρυσμένη παντὸς ἑτέρου σώματος, φέρει φορτίον* $+200$ *ΗΣΜ - φορτίου. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 2 cm, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον θὰ καταναλωθῇ κατὰ τὴν μετακίνησιν ἑνὸς θετικοῦ φορτίου, ἴσου πρὸς 1 ΗΣΜ - φορτίου, ἀπὸ ἓν σημεῖον, ἀπέχον κατὰ 50 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εἰς ἓν ἄλλο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει κατὰ 10 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. (Εὔκολος).*

(ΑΠ: $16\ erg$)

3) *Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς διηλεκτρικὸν τὸν ἀέρα, εἶναι ἴση πρὸς 135 μμF. Ποία θὰ εἶναι ἡ χωρητικότης (εἰς F) τοῦ αὐτοῦ πυκνωτοῦ, ἐὰν ἔχῃ ὡς διηλεκτρικὸν μαρμαρυγίαν; (Διηλεκτρικὴ σταθερὰ τοῦ μαρμαρυγίου = 6,4). (Εὔκολος).*

(ΑΠ: $8{,}64 \cdot 10^{-10}\ F$)

4) *Πυκνωτής, χωρητικότητος* $C = 2{,}5\ \mu F$, *συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς δεύτερον πυκνωτήν, ἀγνώστου χωρητικότητος* C_x. *Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν δύο πυκνωτῶν ἐφαρμοσθῇ τάσις* $U_{ολ} = 1000\ V$, *ὁ πυκνωτὴς τῆς ἀγνώστου χωρητικότητος ἀποκτᾷ φορτίον* $q_x = 1500\ \mu Cb$. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγνώστου πυκνωτοῦ. (Μετρία).*

$C_{ολ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ $\quad Q_x = C_{ολ} V_{ολ}$ $\longrightarrow$ (ΑΠ: $C_x = \dfrac{C \cdot q_x}{U_{ολ} \cdot C - q_x} = 3{,}75\ \mu F$)

5) *Δύο πυκνωταί, χωρητικοτήτων* $C_1 = 2\ \mu F$ *καὶ* $C_2 = 4\ \mu F$, *συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον σύστημα συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς τρίτον πυκνωτήν, χωρητικότητος* $C_3 = 12\ \mu F$. *Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις* $U_{ολ} = 42\ V$. *Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ ὁλικὴ χωρητικότης* $C_{ολ}$ *τοῦ συστήματος. β) Τὸ φορτίον* $q_{ολ}$, *τὸ ὁποῖον πρέ-*

πει νὰ δώσῃ ἡ ἠλεκτρικὴ πηγὴ διὰ νὰ φορτίσῃ τὸ σύστημα τῶν πυκνωτῶν εἰς τὴν τάσιν 42 V. (Ἐνίοτε τὸ φορτίον τοῦτο καλεῖται «ὁλικὸν φορτίον». Ἡ ὀνομασία αὕτη εἶναι παραπλανητικὴ καὶ θὰ ἔπρεπε ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὅρου «ὁλικὸν φορτίον, χορηγηθὲν ὑπὸ τῆς ἠλεκτρικῆς πηγῆς». Δι' ὑπολογισμοῦ δεικνύεται, εὐχερῶς, ὅτι τὸ φορτίον τοῦτο εἶναι διάφορον τοῦ ἀθροίσματος τῶν φορτίων τῶν τριῶν πυκνωτῶν). γ) Τὸ φορτίον q_1, q_2, q_3 καὶ ἡ τάσις U_1, U_2, U_3 ἑκάστου πυκνωτοῦ. (Δύσκολος ἄσκησις, ἀλλὰ βασικὴ διὰ τὴν κατανόησιν τῶν σχετικῶν θεμάτων).

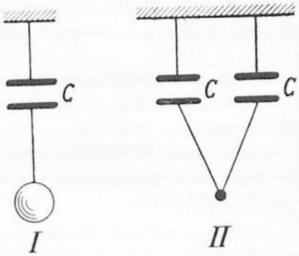
$$\Big(\text{ΑΠ: } \alpha)\ C_{o\lambda} = (C_1 + C_2)\cdot\frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 4\ \mu F. \quad \beta)\ q_{o\lambda} = U_{o\lambda}\cdot C_{o\lambda} =$$

$$= U_{o\lambda}\cdot(C_1 + C_2)\cdot\frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 168\ \mu Cb. \quad \gamma)\ q_1 = U_{o\lambda}\cdot\frac{C_3\cdot C_1}{C_1 + C_2 + C_3} =$$

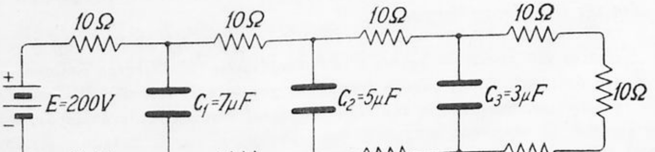
$$= 56\ \mu Cb, \quad q_2 = U_{o\lambda}\cdot\frac{C_3\cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3} = 112\ \mu Cb, \quad q_3 = U_{o\lambda}\cdot\frac{C_3\cdot(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} =$$

$$= 168\ \mu Cb, \quad U_1 = U_2 = U_{o\lambda}\cdot\frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 28\ V, \quad U_3 = U_{o\lambda}\cdot\frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C_3} = 14\ V\Big)$$

6) Μεταλλικὴ σφαῖρα, ἀκτῖνος 18 cm, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἕνα ὁπλισμὸν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ, χωρητικότητος $C = 50\ \mu\mu F$, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος ὁπλισμὸς συνδέεται πρὸς τὴν Γῆν (Ι). Πόσον φορτίον πρέπει νὰ προσφερθῇ, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς ὁπλισμοὺς τοῦ πυκνωτοῦ C νὰ αὐξηθῇ κατὰ 30 V; (Εὔκολος).



Σημείωσις: Ἡ λύσις τῆς ἀσκήσεως ταύτης δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ ἀνωτέρων μαθηματικῶν, τὸ δὲ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται, κυρίως, ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος συνδέσεως τῆς σφαίρας μετὰ τοῦ ὁπλισμοῦ τοῦ πυκνωτοῦ. Ἐὰν τὸ σύρμα ἔχῃ πολὺ μικρὸν μῆκος, ἡ παρουσία του μεταβάλλει τὰς προϋποθέσεις σφαίρας ἀπομεμακρυσμένης ἄλλων σωμάτων. Ἀφ' ἑτέρου, σύρμα μεγάλου μήκους μεταβάλλει ριζικῶς τὴν μορφὴν τῶν δυναμικῶν γραμμῶν περὶ μεμονωμένην σφαίραν, αἱ ὁποῖαι δὲν ὁμοιάζουν, πλέον, μὲ ἐκείνας, τὰς ὁποίας δεικνύει τὸ σχῆμα *195* τοῦ Β΄ τόμου. Συνεπῶς, ἀνεξαρτήτως τοῦ μήκους τοῦ σύρματος, ἡ ὕπαρξις αὐτοῦ τούτου τοῦ σύρματος ἀπαγορεύει τὴν χρησιμοποίησιν τῶν γνωστῶν διὰ σφαιρικὸν ἀγωγὸν τύπων. Ἐάν, παρὰ ταῦτα, τεθῇ πρὸς λύσιν ἓν τοιοῦτο πρόβλημα, ἐξυπακούεται ὅτι ζητεῖται ἡ λύσις συστήματος δύο χωρητικοτήτων, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ - τῆς πρώτης προερχομένης ἐκ τοῦ πυκνωτοῦ *C*, τῆς δὲ δευτέρας *C'*, ἀντιστοιχούσης εἰς σφαίραν, μεμονωμένην ἐν τῷ χώρῳ. Τὸ ἰσοδύναμον ἠλεκτρικὸν σχεδιάγραμμα δίδεται εἰς τὸ ἄνω σχῆμα δεξιὰ *(ΙΙ)*. Σημειωτέον ὅτι ἡ λύσις, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ μὲ τὴν ἄνω μέθοδον εἶναι δυνατὸν νὰ δώσῃ ἀποτέλεσμα, ἀπέχον σημαντικῶς τῆς πραγματικότητος. (ΑΠ: $2{,}1\cdot 10^{-10}\ Cb$)



7) Ἠλεκτρικὴ πηγή, ΗΕΔ 200 V καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 10 Ω, τροφοδοτεῖ ἐννέα ἴσας ἀντιστάσεις συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ. Ἐὰν ἑκάστη τῶν ἀντιστάσεων τούτων εἶναι ἴση πρὸς 10 Ω, ποῖον θὰ εἶναι τὸ φορτίον ἑκάστου τῶν τριῶν πυκνωτῶν $C_1 = 7\ \mu F$, $C_2 = 5\ \mu F$, $C_3 = 3\ \mu F$ τοῦ κυκλώματος τοῦ ἄνω σχήματος; (Μετρία).

(ΑΠ: $q_1 = 980\ \mu Cb$, $q_2 = 500\ \mu Cb$, $q_3 = 180\ \mu Cb$)

8) Πυκνωτής, χωρητικότητος 5 μF καὶ φορτισμένος εἰς τάσιν 800 V, ἐκφορτίζεται μέσῳ μιᾶς ἀντιστάσεως 10 Ω. Πόσην ἐνέργειαν θὰ δώσῃ ὁ πυκνωτής, ὅταν ἐκφορτισθῇ ἐντελῶς; (Εὔκολος). (ΑΠ: 1,6 Joule)

9) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ φορτίου, ἴσου πρὸς 6 ΗΣΜ-φορτίου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μεταξὺ δύο ἐπιπέδων καὶ παραλλήλων μεταλλικῶν πλακῶν, φορτισμένων εἰς τάσιν 100 V καὶ ἀπεχουσῶν μεταξύ των κατὰ 1 cm. ($1\ V = {}^1/_{300}$ ΗΣΜ-τάσεως) (Εὔκολος). (ΑΠ: 2 dyn)

10) Ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εἶναι ἴση πρὸς 600 V/m. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν εἶναι ἴση πρὸς 1,5 cm, ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ αὐτῶν; (Εὔκολος). (ΑΠ: 9 V)

11) Μικρὸν σωμάτιον εἶναι φορτισμένον μὲ φορτίον $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου. Τὸ σωμάτιον τοῦτο αἰωρεῖται, ὅταν τεθῇ μεταξὺ τῶν ὁριζοντίων ὁπλισμῶν ἑνὸς πυκνωτοῦ, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ 2 cm καὶ εἶναι φορτισμένοι εἰς τάσιν 3000 V. Ποία εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σωματίου; ($1\ V = {}^1/_{300}$ ΗΣΜ-τάσεως). (Μετρία).

(ΑΠ: $2{,}45 \cdot 10^{-12}$ gr)

12) Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι, ἀκτίνων 10 cm καὶ 40 cm, φορτίζονται κατὰ τρόπον ὥστε τὸ δυναμικὸν αὐτῶν νὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσον πρὸς 50 ΗΣΜ-δυναμικοῦ καὶ 30 ΗΣΜ-δυναμικοῦ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς δύο σφαίρας εἰς ἐπαφὴν καί, ἀκολούθως, τὰς απομακρύνωμεν, ποῖον θὰ εἶναι τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας; (Ἡ ἄσκησις θὰ λυθῇ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ χωρητικότης τῶν δύο σφαιρῶν δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν προσέγγισιν αὐτῶν). (Εὔκολος). (ΑΠ: 340 ΗΣΜ-φορτίου, 1360 ΗΣΜ-φορτίου)

13) Δύο μεταλλικοὶ δίσκοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει διάμετρον 20 cm, τοποθετοῦνται ὁριζοντίως καὶ εἰς ἀπόστασιν μεταξύ των 0,6 cm. Ἀκολούθως φέρεται μεταξὺ αὐτῶν ἓν σταγονίδιον ἐλαίου, διαμέτρου $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ cm καὶ πυκνότητος $0{,}86\ gr/cm^3$. Ἐὰν τὸ σταγονίδιον εἶναι ἀρνητικῶς φορτισμένον, παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ αἰωρῆται τοῦτο, πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῶν δίσκων τάσις 111,6 V καὶ κατὰ τρόπον ὥστε ὁ ἄνω δίσκος νὰ εἶναι θετικός. Πόσα στοιχειώδη ἀρνητικὰ φορτία φέρει τὸ σταγονίδιον; (Τὸ στοιχειῶδες ἀρνητικὸν φορτίον εἶναι ἴσον πρὸς $-4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ-φορτίου, τὸ δὲ 1 βὸλτ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ${}^1/_{300}$ τῆς ΗΣΜ-τάσεως). (Μετρία). (ΑΠ: 5)

14) Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν φόρτισιν μιᾶς μεταλλικῆς σφαίρας, ἀκτῖνος 0,1 m, μὲ φορτίον 200 ΗΣΜ-φορτίου; (Εὔκολος). (ΑΠ: 2000 erg)

15) Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ δύναται νὰ μεταβάλλεται συνεχῶς μεταξὺ $1 \cdot 10^{-3}\ \mu F$ καὶ $50 \cdot 10^{-6}\ \mu F$. Ὅταν ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι $1 \cdot 10^{-3}\ \mu F$, συνδέομεν τοὺς ὁπλισμούς του μὲ τάσιν 100 V, ἀφοῦ δὲ ὁ πυκνωτὴς φορτισθῇ, τὸν αποσυνδέομεν. Ἐάν, ἀκολούθως, ἐλαττώσωμεν τὴν χωρητικότητα εἰς $50 \cdot 10^{-6}\ \mu F$ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ. Εἰς τί ὀφείλεται ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς ἐνεργείας; (Μετρία).

(ΑΠ: α) Θ' αὐξηθῇ κατὰ $9{,}5 \cdot 10^{-5}$ Joule. β) Διὰ νὰ ἐλαττωθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ πρέπει ν' ἀπομακρύνωμεν τὸν κινητὸν ὁπλισμόν. Οἱ δύο ὁπλισμοί, ὅμως, φέρουν ἑτερώνυμα φορτία καί, συνεπῶς, ἕλκονται. Ἄρα ἡ χείρ μας, ὑπερνικῶσα τὴν ἕλξιν καὶ κινοῦσα τὸν κινητὸν ὁπλισμόν, παράγει ἔργον)

16) Τρεῖς πυκνωταὶ ἔχουν χωρητικότητας 1 μF, 2 μF καὶ 3 μF. Συνδέομεν τοὺς δύο πρώτους πυκνωτὰς ἐν σειρᾷ καὶ τὸ οὕτω προκῦπτον σύστημα ἐν παραλλήλῳ πρὸς τὸν τρίτον. Ποία εἶναι ἡ ὁλικὴ χωρητικότης; (Εὔκολος). (ΑΠ: 3,66 μF)

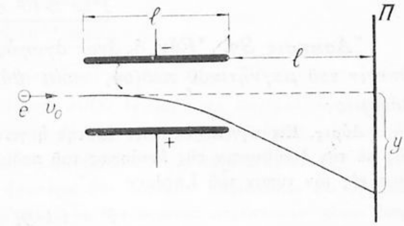
★ 17) Εἴς τι σημεῖον εὑρίσκεται ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον πρὸς 300 ΗΣΜ - φορτίου. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὑπὸ τοῦ φορτίου τούτου παραγομένου ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 10 cm καὶ 20 cm ; (Εὔκολος).

(ΑΠ : 3 ΗΣΜ - ἐντάσεως πεδίου, 0,75 ΗΣΜ - ἐντάσεως πεδίου)

18) Εἰς ἀπόστασιν 60 cm μεταξύ των εὑρίσκονται δύο θετικὰ φορτία $+q$ καὶ $+2q$. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα φορτία, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἴση πρὸς μηδέν ; (Μετρία).

(ΑΠ : Ὁ ὑπολογισμὸς δίδει διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ζητουμένου σημείου ἀπὸ τοῦ φορτίου q δύο τιμάς : 24,6 cm καὶ $-144,6$ cm. Ἡ δευτέρα τιμὴ δὲν ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ προβλήματος, καθόσον ἀφορᾷ σημεῖον, εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας, τῆς ἑνούσης τὰ δύο φορτία - δηλ., πρὸς τὰ ἔξω. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, τοῦ προερχομένου ἐκ τοῦ ἑνὸς φορτίου εἶναι, κατὰ μέτρον, ἴση πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, τοῦ προερχομένου ἐκ τοῦ ἄλλου φορτίου, τὸ ἀλγεβρικόν, ὅμως, ἄθροισμα αὐτῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν, διότι καὶ αἱ δύο ἐντάσεις εἶναι ὁμόρροποι)

19) Ἠλεκτρόνιον, κινούμενον ὁριζοντίως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0, διέρχεται διὰ μέσου δύο ὁριζοντίων καὶ ἐπιπέδων μεταλλικῶν πλακῶν, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν d μεταξύ των καὶ φορτισμένων εἰς τάσιν U. Τὸ ἠλεκτρόνιον, κατὰ τὴν διαδρομήν του ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τῶν πλακῶν, ἐκτρέπεται τῆς ἀρχικῆς του διευθύνσεως, ἐξερχόμενον δὲ συναντᾷ τὸ κατακόρυφον πέτασμα Π, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν l ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτὸ ἄκρου τῶν πλακῶν. Ἐὰν l εἶναι καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης πλακός, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόκλισις y ἐπὶ τοῦ πετάσματος. (Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= e$, μᾶζα αὐτοῦ $= m$).



$$\left(\text{ΑΠ} : \; y = \frac{3}{2} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} \right)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΖ'

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΑΙ ΕΚ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Κατηγορία Β'

(Νὰ λυθοῦν εἰς τὸ Ἠλεκτρομαγνητικὸν Σύστημα μονάδων).

Ἄσκησις 1η. *Κυκλικὸς ἀγωγός, διαμέτρου 30 cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 12 A. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ ;*

Λύσις. Ἡ ἔντασις $\mathcal{H}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον κυκλικοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα R καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi i}{R}. \qquad \text{(Βλ. Β' τόμος, § 167)}$$

Δίδονται: $i = 12\ A = 12/10\ HMM$ - ἐντάσεως ρεύματος καὶ $R = \delta/2 = 30/2\ cm = 15\ cm$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\mathcal{H} = 0{,}5\ Gauss.}$$

***Ἄσκησις 2α.** Εὐθύγραμμος ἀγωγός, μήκους 10 cm, εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 1000 Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου. 'Εὰν διέλθῃ διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ρεῦμα, ἐντάσεως 20 A, ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν F τὴν ζητουμένην δύναμιν, l τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ, $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\underline{F = i \cdot l \cdot \mathcal{H} \cdot \eta\mu\, \varphi}$$

ἔνθα φ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἀγωγὸς μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου.

Δίδονται: $i = 20\ A = 2\ HMM$ - ἐντάσεως ρεύματος, $\mathcal{H} = 1000\ Gauss$, $l = 10\ cm$ καὶ $\varphi = 90^0$. Εὑρίσκοντες τὸ $\eta\mu\, 90^0$ ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{F = 2 \cdot 10^4\ dyn}$$

***Ἄσκησις 3η.** 'Εὰν ὁ ἄνω ἀγωγὸς τεθῇ παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις;*

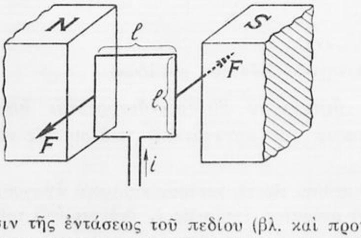
Λύσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ γωνία φ, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ ἀγωγὸς μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου, εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ὁπότε τὸ $\eta\mu\, \varphi$ εἰς τὸν τύπον τοῦ Laplace

$$F = i \cdot l \cdot \mathcal{H} \cdot \eta\mu\, \varphi,$$

εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Συνεπῶς καὶ ἡ ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ ἐξασκουμένη δύναμις F θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

***Ἄσκησις 4η.** 'Αγωγὸς εἰς σχῆμα τετραγώνου πλαισίου, πλευρᾶς 4 cm, τίθεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 2500 Gauss καὶ μὲ τὸ ἐπίπεδόν του παράλληλον πρὸς τὸ πεδίον. Ἂν διέλθῃ διὰ τοῦ πλαισίου ρεῦμα, ἐντάσεως 15 mA, ποία εἶναι ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τοῦ ἐξασκουμένου ἐπ' αὐτοῦ;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν l τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν τοῦ πλαισίου, i τὴν ἔντασιν τοῦ διαρρέοντος αὐτὸ ρεύματος καὶ $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἐπὶ ἑκάστης τῶν δύο κατακορύφων πλευρῶν τοῦ πλαισίου ἐξασκεῖται ἡ δύναμις κατὰ Laplace



$$F = i \cdot l \cdot \mathcal{H},$$

ἐνῶ ἐπὶ τῶν ὁριζοντίων πλευρῶν ἡ δύναμις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, καθόσον αὗται εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου (βλ. καὶ προηγουμένην ἄσκησιν). Συνεπῶς ἐπὶ τοῦ πλαισίου ἐξασκεῖται τὸ ζεῦγος τῶν δυνάμεων F, F, τοῦ ὁποίου ἡ ροπὴ M εἶναι ἴση πρὸς

$$M = F \cdot l \quad \eta \quad M = i \cdot l \cdot \mathcal{H} \cdot l \quad \eta \quad \underline{M = i \cdot l^2 \cdot \mathcal{H}.} \qquad (1)$$

Δίδονται: $i = 15\ mA = 15 \cdot 10^{-3}\ A = 15 \cdot 10^{-4}\ HMM$ - ἐντάσεως ρεύματος, $l = 4$ cm, $\mathcal{H} = 2500\ Gauss$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$\underline{M = 60\ dyn \cdot cm.}$$

Ἄσκησις 5η. *Ἓν ἰὸν ὑδρογόνου κινεῖται μὲ ταχύτητα $10^6\ m/sec$ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 10 000 Gauss καὶ καθέτως πρὸς αὐτό. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ ἰόντος ἐξασκουμένη δύναμις;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν q καὶ v τὸ φορτίον καὶ τὴν ταχύτητα τοῦ ἰόντος, τότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἐξασκουμένη δύναμις F εἶναι, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Laplace, ἴση πρὸς

[illegible] περί μαγνητικού πεδίου κάθετης παράλληλης

$$\underline{F = q \cdot v \cdot \mathcal{H} \cdot \eta\mu\, \varphi} \quad (1) \quad (\beta\lambda.\ B'\ \tau\acute{o}\mu o\varsigma,\ \S\ 172)$$

ἔνθα $\mathcal{H}$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ταχύτης μετὰ τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου.

Δίδονται: $v = 10^6\ m/sec = 10^8\ cm/sec$, $\mathcal{H} = 10\,000\ Gauss$, $\varphi = 90^\circ (\eta\mu\, 90^\circ = 1)$. Τὸ φορτίον q τοῦ ἰόντος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον — ἤτοι $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb = 1{,}6 \cdot 10^{-20}\ HMM$ - φορτίου (διότι $1\ HMM$ - φορτίου $= 10\ Cb$ - βλ. σ. 153, Β′ τόμου).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{F = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\ dyn.}$$

SOS

Ἄσκησις 6η. *Ἓν ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα $10^4\ cm/sec$ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 1000 Gauss α) παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου καὶ β) καθέτως πρὸς αὐτάς. Ποία ἡ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐξασκουμένη δύναμις εἰς ἑκάστην περίπτωσιν;*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν ἀνωτέρω 5ην ἄσκησιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐξασκουμένη δύναμις F εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν ἴση πρὸς

SOS

$$\underline{F = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ dyn.}$$

Κατηγορία Γ′

★ 1) *Τὸ ἠλεκτρόνιον τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου περιστρέφεται περὶ τὸν πυρῆνα μὲ συχνότητα $6{,}6 \cdot 10^{15}\ sec^{-1}$. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου εἶναι ἴση πρὸς $0{,}53 \cdot 10^{-8}\ cm$, νὰ ὑπολογισθῇ 1) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ προκαλουμένου ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου α) εἰς πρακτικὰς μονάδας καὶ β) εἰς ἠλεκτρομαγνητικὰς μονάδας καὶ 2) ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, εἰς ἠλεκτρομαγνητικὰς μονάδας. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb$, $1\ HMM$ - ἐντάσεως ρεύματος $= 10\ A$ (Δύσκολος).*

(ΑΠ: *1) Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἐνθυμούμεθα ὅτι ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου $i = q/t$, ἔνθα q εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ χρόνου t διά τινος διατομῆς διελθὸν φορτίον. Ἐν προκειμένῳ, ἐντὸς χρόνου, ἴσου πρὸς τὴν περίοδον τοῦ ἠλεκτρονίου, διέρχεται διά τινος σημείου τῆς τροχιᾶς του τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου μίαν φοράν. Βάσει τῶν συλλογισμῶν αὐτῶν ὑπολογίζεται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἴση πρὸς $1{,}056 \cdot 10^{-3}\ A$. 2) $1{,}25 \cdot 10^5$ Gauss*)

2) *Ἓν ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα $10^8\ cm/sec$ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1 Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς. α) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τροχιὰ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ πεδίου εἶναι κυκλικὴ καὶ β) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}\ gr$, φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ HMM - φορτίου. (Δύσκολος).*

Έλυσα

(ΑΠ: *α) Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον κινῆται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐξασκεῖται ἐπ' αὐτοῦ μία δύναμις κατὰ Laplace, συμφώνως πρὸς τὴν § 172 τοῦ Β' τόμου. Κατὰ τὸ σχῆμα 223 τοῦ αὐτοῦ τόμου, ἡ δύναμις αὕτη εἶναι πάντοτε κάθετος πρὸς πᾶν σημεῖον τῆς τροχιᾶς (κεντρομόλος δύναμις), ὁπότε, κατὰ τὴν Μηχανικήν, θὰ προκαλῇ κεντρομόλον, μόνον, ἐπιτάχυνσιν τοῦ ἠλεκτρονίου. Εἰς τὴν κίνησιν ταύτην τοῦ ἠλεκτρονίου τὸ μέτρον τῆς ταχύτητός του παραμένει σταθερόν, ὁπότε, κατὰ τὸν τύπον (1) τῆς § 172, καὶ ἡ δύναμις, ἡ ἐξασκουμένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι σταθερά. Ὅταν, ὅμως, ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι σταθερά, ἡ τροχιὰ εἶναι κυκλική. β) Ἡ ἀκτὶς τῆς τροχιᾶς ταύτης ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ θεμελιώδους νόμου τῆς Μηχανικῆς $F = m \cdot \gamma$, εὑρίσκεται δὲ ἴση πρὸς 5,68 cm*).

3) Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ κινηθῇ ἓν ἠλεκτρόνιον καθέτως πρὸς ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον, ἐντάσεως 100 Gauss, διὰ νὰ διαγράψῃ κυκλικὴν τροχιάν, ἀκτῖνος 1 cm; Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ *gr, φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου* $= 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ *ΗΜΜ - φορτίου. (Δύσκολος).*

(ΑΠ: *Διὰ τὴν λύσιν βλ. προηγουμένην ἄσκησιν. Ταχύτης* $= 1{,}76 \cdot 10^{9}$ *cm/sec*)

★ *4) Δύο εὐθύγραμμοι καὶ παράλληλοι ἀγωγοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος l, διαρρέονται ὑπὸ ὁμορρόπων ρευμάτων τῆς αὐτῆς ἐντάσεως i. Ἐὰν οἱ δύο ἀγωγοὶ ἀπέχουν μεταξύ των κατ' ἀπόστασιν r, νὰ δειχθῇ ὅτι οὗτοι ἕλκονται, ἀμοιβαίως, διὰ δυνάμεως F, ἴσης πρὸς* $F = \dfrac{2 \cdot i^2 \cdot l}{r}$. *(Εὔκολος).*

★ *5) Εὐθύγραμμος ἀγωγὸς διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 10 Α. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 20 cm ἀπὸ τοῦ ἀγωγοῦ; (1 ΗΜΜ - ἐντάσεως ρεύματος = 10 Α). (Εὔκολος).* (ΑΠ: *0,1 Gauss*)

★ *6) Σωληνοειδές, ἔχον 20 σπείρας ἀνὰ cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 20 Α. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικόν του; (1 ΗΜΜ - ἐντάσεως ρεύματος = 10 Α). (Εὔκολος).* (ΑΠ: *502,4 Gauss*)

★ *7) Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν σωληνοειδοῦς, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 1 m καὶ ἀριθμὸν σπειρῶν 2000, ὅταν διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 100 mA; (1 ΗΜΜ - ἐντάσεως ρεύματος = 10 Α). (Εὔκολος).*

(ΑΠ: *2,5 Gauss*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΗ΄

ΕΠΑΓΩΓΗ

(Αἱ ὑπ' ἀριθ. 5, 6, 7, 8 ἀσκήσεις νὰ λυθοῦν εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα).

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Κυκλικὸν πλαίσιον, ἀκτῖνος 15 cm, τοποθετεῖται α) καθέτως καὶ β) παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 8000 Gauss. Ποία ἡ διὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πλαισίου διερχομένη μαγνητικὴ ροὴ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν Φ τὴν μαγνητικὴν ροήν, S τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαισίου, r τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ καὶ $\mathcal{H}$ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἔχομεν, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς μαγνητικῆς ροῆς,

$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S \cdot \text{συν}\, a \qquad (1)$$

ἔνθα α εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κάθετος, ἡ φερομένη ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πλαισίου, μετὰ τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου.

α) Τὸ ἐμβαδὸν S τοῦ πλαισίου εἶναι ἴσον πρὸς $S = \pi \cdot r^2$, ἡ δὲ γωνία $\alpha = 0_0$ $(συν\,0^0 = 1)$, ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$\underline{\Phi = \mathcal{H} \cdot \pi \cdot r^2.}$$

Λύσις εἰς τὸ 'Ηλεκτρομαγνητικὸν Σύστημα μονάδων: Δίδονται: $\mathcal{H} = 8000$ *Gauss* καὶ $r = 15$ *cm*. 'Αντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

$$\underline{\Phi = 5{,}65 \cdot 10^6\ Gauss \cdot cm^2 = 5{,}65 \cdot 10^6\ Mx.}$$

β) Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ γωνία φ εἶναι ἴση πρὸς 90^0 $(συν\,90^0 = 0)$, συνεπῶς, κατὰ τὸν τύπον (1), ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν.

"Ασκησις 2α. *'Εὰν τὸ πλαίσιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως στραφῇ περὶ μίαν διάμετρον, κάθετον ἐπὶ τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου, κατὰ 30°, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἰς ἑκάστην τῶν ἄνω περιπτώσεων;*

Λύσις. "Οταν τὸ πλαίσιον στραφῇ κατὰ 30^0, τότε καὶ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὸ θὰ στραφῇ, ἐπίσης, κατὰ 30^0, ὁπότε ἡ γωνία α εἰς τὸν τύπον

$$\Phi = \mathcal{H} \cdot S \cdot συν\,\alpha$$

εἶναι ἴση πρὸς 30^0. Λαμβάνοντες τὸ $συν\,30^0$ ἐκ πινάκων καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ΗΜΜ εὑρίσκομεν διὰ τὴν νέαν μαγνητικὴν ροὴν Φ' τὴν τιμὴν

$$\Phi' = 4{,}89 \cdot 10^6\ Mx.$$

'Επομένως ἡ μεταβολὴ $\Phi' - \Phi$ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι ἴση πρὸς

$$\Phi' - \Phi = 4{,}89 \cdot 10^6\ Mx - 5{,}65 \cdot 10^6\ Mx \quad ἢ \quad \underline{\Phi' - \Phi = -\ 0{,}76 \cdot 10^6\ Mx.}$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δηλοῖ ὅτι, διὰ τῆς στροφῆς τοῦ πλαισίου, ἡ μαγνητικὴ ροὴ ἠ λ α τ τ ώ θ η.

'Ομοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν

$$\underline{\Phi' - \Phi = 2{,}82 \cdot 10^6\ Mx,}$$

δηλαδὴ ἡ μαγνητικὴ ροὴ η ὐ ξ ή θ η ἀπὸ 0 εἰς $2{,}82 \cdot 10^6\ Mx$.

"Ασκησις 3η. *Πλαίσιον, ἐμβαδοῦ 1000 cm², τοποθετεῖται καθέτως ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 5000 Gauss. Πόση θὰ εἶναι ἡ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου ἐμφανιζομένη ΗΕΔ, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐλαττωθῇ ὁμαλῶς εἰς 2000 Gauss ἐντὸς χρόνου 0,02 sec α) εἰς ἠλεκτρομαγνητικὰς μονάδας καὶ β) εἰς βόλτ; (1 V = 10⁸ ΗΜΜ-τάσεως).*

Λύσις. Κατὰ τὸν νόμον τῆς ἐπαγωγῆς ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E εἶναι ἴση πρὸς

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot n \qquad (1)$$

ἔνθα n εἶναι ὁ ἀριθμὸς σπειρῶν τοῦ πλαισίου.

'Η μεταβολὴ $\Delta\Phi$ τῆς μαγνητικῆς ροῆς ὑπολογίζεται ὡς ἡ διαφορὰ $\Phi_{τελ} - \Phi_{αρχ}$ τῆς τελικῆς καὶ τῆς ἀρχικῆς μαγνητικῆς ροῆς. "Ητοι εἶναι

$$\Delta\Phi = \Phi_{τελ} - \Phi_{αρχ} = \mathcal{H}_{τελ} \cdot S \cdot συν\,\alpha - \mathcal{H}_{αρχ} \cdot S \cdot συν\,\alpha,$$

ὁπότε ὁ τύπος (1) γράφεται

$$E = -\frac{S \cdot \text{συν}\, a \cdot (\mathcal{H}_{\tau\varepsilon\lambda} - \mathcal{H}_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t} \cdot n.$$

α) Δίδονται: $S = 1000\ cm^2$, $a = 0^0$, $\mathcal{H}_{\tau\varepsilon\lambda} = 2000\ Gauss$, $\mathcal{H}_{\alpha\rho\chi} = 5000\ Gauss$, $n = 1$ καὶ $\Delta t = 0{,}02\ sec$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$E = 1{,}5 \cdot 10^8\ \text{ΗΜΜ - τάσεως.}$$

β) 'Επειδὴ $1\ V = 10^8$ ΗΜΜ - τάσεως ἔχομεν

$$E = 1{,}5\ V.$$

"Ασκησις 4η. *'Εντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 10000 Gauss, εὑρίσκεται πηνίον, ἀποτελούμενον ἐκ 15 σπειρῶν, διαμέτρου 20 cm καὶ μὲ τὸ ἐπίπεδόν του κάθετον ἐπὶ τὴν ἔντασιν τοῦ πεδίου. 'Εὰν ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου ἐλαττωθῇ εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς ἐντὸς 0,1 sec, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐμφανιζομένη ΗΕΔ ἐξ ἐπαγωγῆς α) εἰς ἠλεκτρομαγνητικὰς μονάδας καὶ β) εἰς βόλτ (1 V = 10⁸ ΗΜΜ - τάσεως).*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν ἀνωτέρω 3ην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$$E = 2{,}35 \cdot 10^8\ \text{ΗΜΜ - τάσεως} \qquad \text{ἤ} \qquad E = 2{,}35\ V.$$

"Ασκησις 5η. *Πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 1 Η. "Αν ἡ ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτὸ ρεύματος μεταβληθῇ, ὁμαλῶς, κατὰ 20 Α ἐντὸς 1 min, ποία ἡ ἀναπτυσσομένη ΗΕΔ;*

Λύσις. 'Εὰν καλέσωμεν L τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, Δi τὴν μεταβολὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, Δt τὸν ἀντίστοιχον χρόνον καὶ E τὴν ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀναπτυσσομένην ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, ἔχομεν τὸν τύπον:

$$E = -L \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t}.$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $L = 1\ H$, $\Delta i = 20\ A$, $\Delta t = 1\ min = 60\ sec$. 'Αντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$E = -0{,}33\ V.$$

Σημείωσις: Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον στερεῖται φυσικῆς σημασίας, καθόσον οὔτε ἡ πολικότης τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἔχει ὁρισθῇ, οὔτε καθορίζεται ἐὰν ἡ μεταβολὴ Δi τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἶναι αὔξησις ἢ ἐλάττωσις.

"Ασκησις 6η. *Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς πηνίου, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ἐμφανίζεται ΗΕΔ ἐξ αὐτεπαγωγῆς 2 V, διὰ μεταβολῆς τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος κατὰ 100 Α ἀνὰ min;*

Λύσις. Λύοντες τὸν τύπον $E = -L \cdot \Delta i / \Delta t$ ὡς πρὸς L καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα λαμβάνομεν

$$L = 1{,}2\ H.$$

"Ασκησις 7η. *Πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,2 Η, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 10 Α. Ποία ἡ ἐνέργεια τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ πηνίου;*

Λύσις. 'Η ἐνέργεια E τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ πηνίου, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς L καὶ διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως i, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$E = \frac{1}{2} L \cdot i^2.$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $L = 0{,}2$ H καὶ $i = 10$ A. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$E = 10 \text{ Joule}.$$

Ἄσκησις 8η. *Κατὰ πόσον μεταβάλλεται ἡ ἐνέργεια τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἑνὸς πηνίου, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 0,4 Η, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος αὐξάνεται ἀπὸ 3 Α εἰς 15 Α;*

Λύσις. Ὑπολογίζοντες, ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, τὴν ἐνέργειαν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, εὑρίσκομεν διὰ τὴν μεταβολὴν (αὔξησιν) ΔE τῆς ἐνεργείας:

$$\Delta E = 43{,}2 \text{ Joule}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΘ΄

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Ἡ κυκλικὴ συχνότης μιᾶς ἐναλλασσομένης τάσεως εἶναι 314 sec⁻¹. Ποία εἶναι ἡ συχνότης καὶ ἡ περίοδος τῆς τάσεως ταύτης;*

Λύσις. Μεταξὺ τῆς κυκλικῆς συχνότητος ω, τῆς συχνότητος ν καὶ τῆς περιόδου T ἰσχύουν οἱ τύποι

$$\omega = 2\pi\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (\text{διότι } \nu = 1/T)$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς τύπους (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν

$$\nu = 50 \text{ sec}^{-1} \qquad \text{καὶ} \qquad T = 0{,}02 \text{ sec}.$$

Ἄσκησις 2α. *Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$, ἡ στιγμιαία τιμὴ μιᾶς ἐναλλασσομένης τάσεως εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, ἐνῷ, μετὰ 0,005 sec, λαμβάνει τὴν μεγίστην της τιμήν. Ποία εἶναι ἡ περίοδος τῆς τάσεως ταύτης;*

Λύσις. Τὸ γεγονὸς ὅτι, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$, ἡ τάσις εἶναι ἴση πρὸς μηδέν, δηλοῖ ὅτι ἡ τάσις ἀκολουθεῖ τὴν ἐξίσωσιν

$$U = U_0 \cdot \eta\mu\, \omega t, \qquad (1)$$

ἔνθα U εἶναι ἡ στιγμιαία τιμὴ τῆς τάσεως, U_0 ἡ μεγίστη της τιμὴ *(πλάτος)*, ω ἡ κυκλικὴ συχνότης καὶ t ὁ χρόνος. Ὅταν, κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = \tau$, ἡ στιγμιαία τιμὴ U γίνῃ ἴση πρὸς U_0, θὰ ἔχωμεν

$$U_0 = U_0 \cdot \eta\mu\, \omega\tau \qquad \text{ἢ} \qquad \eta\mu\, \omega\tau = 1,$$

ὁπότε προκύπτει

$$\omega\tau = 90^0 \qquad \text{ἢ} \qquad \omega\tau = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\omega = 2\pi/T$ (ἔνθα T ἡ περίοδος), ἡ σχέσις (2) δίδει τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{T = 4\tau.} \qquad (3)$$

Δίδεται : $\tau = 0{,}005\ sec$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{T = 0{,}02\ sec.}$$

Σημείωσις: Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ χρόνος τ εἶναι ἴσος πρὸς τὸ $^1/_4$ τῆς περιόδου. Τοῦτο προκύπτει καὶ ἄνευ ὑπολογισμοῦ, ἐκ τῆς μελέτης τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης, ἡ ὁποία παριστᾷ, γραφικῶς, τὴν ἐξίσωσιν (1).

Ἄσκησις 3η. *Τὸ χρονικὸν διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μηδενισμῶν τῆς ἐντάσεως ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι ἴσον πρὸς 0,01 sec. Ποία εἶναι ἡ κυκλικὴ συχνότης αὐτοῦ;*

Λύσις. Ἡ ἔντασις i ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$i = i_0 \cdot \eta\mu\ \omega t.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ i γίνεται μηδέν, ὅταν τὸ $\eta\mu\ \omega t$ λαμβάνει, ἑκάστοτε, τὴν τιμὴν μηδέν. Τοῦτο συμβαίνει, γενικῶς, ὅταν τὸ ωt λαμβάνει τὰς τιμὰς $0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$, ἤτοι ὅταν ὁ χρόνος t λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $0,\ \pi/\omega,\ 2\pi/\omega,\ 3\pi/\omega \ldots$ Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διάρκεια τ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν μηδενισμῶν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἶναι ἴση πρὸς

$$\tau = \frac{\pi}{\omega}.$$

Λύοντες τὸν ἄνω τύπον ὡς πρὸς ω λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\omega = \frac{\pi}{\tau}.} \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{\omega = 314\ sec^{-1}.}$$

Ἄσκησις 4η. *Εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς ἀντιστάσεως 100 Ω ἐμφαρμόζεται ἐναλλασσομένη τάσις, συχνότητος 50 sec⁻¹ καὶ πλάτους 310 V. Πόση θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον θὰ διαρρέῃ τὴν ἀντίστασιν καὶ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς ταύτης λαμβάνει αὕτη τὴν τιμὴν μηδέν;*

Λύσις. α) Ἐὰν ἡ ἐναλλασσομένη τάσις εἶναι τῆς μορφῆς

$$U = U_0 \cdot \eta\mu\ \omega t,$$

τότε ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν ἀντίστασιν R, εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{U_0}{R} \cdot \eta\mu\ \omega t.$$

Ἡ μεγίστη ἔντασις i_0 (πλάτος τῆς ἐντάσεως) εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{i_0 = \frac{U_0}{R}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἄνω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$\underline{i_0 = 3{,}1\ A.}$$

β) Ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ διαγράμματος, τοῦ παριστῶντος τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος συναρτήσει τοῦ χρόνου (βλ. σχ. 239, σ. 170 τοῦ Β΄ τόμου), ὁ μηδενισμὸς τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος θὰ συμβῇ μετὰ χρόνον $t = T/4$ ἀπὸ τῆς στιγμῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἔντασις εἶχε λάβει τὴν μεγίστην της τιμήν. Γνωρίζοντες τὴν συχνότητα, $\nu = 50\ sec^{-1}$, εὑρίσκομεν τὴν περίοδον $T = 1/50\ sec$, ὁπότε ὁ χρόνος t προκύπτει ἴσος πρὸς

$$\underline{t = \frac{1}{200}\ sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{t = 0{,}005\ sec.}$$

Ἄσκησις 5η. *Ἠλεκτρικὴ θερμάστρα, τροφοδοτουμένη δι' ἐναλλασσομένης τάσεως 220 V, καταναλίσκει ἰσχὺν 1 kW. Ποία ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος αὐτήν;*

Λύσις. Ἐὰν $U_{\varepsilon\nu}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις, ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τῆς θερμάστρας καὶ $i_{\varepsilon\nu}$ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ διαρρέοντος αὐτὴν ρεύματος, τότε ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος

$$N = U_{\varepsilon\nu} \cdot i_{\varepsilon\nu},$$

ὁ ὁποῖος ἰσχύει εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, λαμβάνομεν

$$\underline{i_{\varepsilon\nu} = \frac{N}{U_{\varepsilon\nu}}.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{i_{\varepsilon\nu} = 4{,}5\ A.}$$

Ἄσκησις 6η. *Ἠλεκτρικὴ κουζίνα, ἰσχύος 2,5 kW, συνδέεται εἰς ἐναλλασσόμενον δίκτυον 220 V. Ζητεῖται α) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ β) νὰ ἐκλεγῇ ἡ κατάλληλος ἀσφάλεια ἐκ τῶν ἐν τῷ ἐμπορίῳ φερομένων τύπων 6 A, 10 A, 15 A, 25 A.*

Λύσις. α) Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$$\underline{i_{\varepsilon\nu} = 11{,}36\ A.}$$

β) Ἐκ τῶν εἰς τὸ ἐμπόριον φερομένων τύπων ἀσφαλειῶν ἐκλέγομεν τὴν ἀμέσως μεγαλυτέραν, δηλ., τῶν *15 A*.

Ἄσκησις 7η. *Ἠλεκτρικὸς βραστήρ, ἀντιστάσεως 121 Ω καὶ τάσεως λειτουργίας 220 V, συνδέεται πρῶτον μὲ δίκτυον συνεχοῦς τάσεως 220 V καί, κατόπιν, μὲ δίκτυον ἐναλλασσομένης τάσεως, ἐπίσης, 220 V. Νὰ ὑπολογισθῇ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ β) ἡ ἰσχύς.*

Λύσις. α) Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν νόμον τοῦ Ohm $i = U/R$ εὑρίσκομεν διὰ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$\underline{i = 1{,}82\ A.}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\underline{i_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R},}$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν

$$\underline{i_{\varepsilon\nu} = 1{,}82\ A.}$$

β) Ἡ ἰσχὺς N τοῦ βραστῆρος διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$N = \frac{U^2}{R},$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι' ἀντικαταστάσεως, λαμβάνομεν

$$N = 400\ W.$$

Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἰσχὺς τοῦ βραστῆρος θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ *(400 W)*, δεδομένου ὅτι ὁ βραστὴρ διαρρέεται ὑπὸ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι *1,82 A*, δηλ., εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ συνεχοῦς ρεύματος τῆς πρώτης περιπτώσεως.

Ἄσκησις 8η. *Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ δευτερεῦον πηνίον ἑνὸς μετασχηματιστοῦ, εἶναι 15 A, ἡ δὲ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος πηνίου εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴση πρὸς 220 V καὶ 44 V. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ ποῖος ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος πηνίου;*

Λύσις. Ἐὰν $E_{1,εν}$ καὶ $E_{2,εν}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος πηνίου καὶ $i_{1,εν}$, $i_{2,εν}$ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$E_{1,εν} \cdot i_{1,εν} = E_{2,εν} \cdot i_{2,εν}\,.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτει:

$$i_{1,εν} = \frac{E_{2,εν}}{E_{1,εν}} \cdot i_{2,εν}\,.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$i_{1,εν} = 3\ A.$$

Ὁ λόγος $n_1 : n_2$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σπειρῶν πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{E_{1,εν}}{E_{2,εν}}\,.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$n_1 : n_2 = 5 : 1.$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Ἠλεκτρικὴ θερμάστρα, φέρουσα τὰς ἐνδείξεις «1 kW, 220 V» συνδέεται α) μὲ δίκτυον συνεχοῦς τάσεως 220 V καὶ β) μὲ δίκτυον ἐναλλασσομένης τάσεως, ἐπίσης 220 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.*

Λύσις. Αἱ ἐνδείξεις «*1 kW, 220 V*» δηλοῦν τὴν ἰσχύν *(1 kW)*, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ἡ θερμάστρα, ὅταν τροφοδοτῆται διὰ τάσεως *220 V*.

α) Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὴν θερμάστραν, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος

$$N = U \cdot i \tag{1}$$

ἴση πρὸς

$$i_{»} = 4{,}5\ A.$$

β) Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις $i_{εν}$ τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν θερμάστραν, εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου, τοῦ παρέχοντος τὴν ἰσχὺν εἰς τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα

$$N = U_{εν} \cdot i_{εν} \cdot συν\,φ \qquad (2)$$

ἔνθα $U_{εν}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις καὶ $φ$ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως. Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ διαφορὰ φάσεως εἶναι ἴση πρὸς 0^0 $(συν\,0^0 = 1)$ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εὑρίσκεται, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (2), ἴση πρὸς

$$i_{εν} = 4{,}5\ A.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἡ θερμάστρα διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος τῆς αὐτῆς ἐντάσεως.

Ἄσκησις 2α. *Ἠλεκτρικὴ συσκευή, ἰσχύος 3 kW, συνδέεται μὲ δίκτυον ἐναλλασσομένης τάσεως 220 V, ὁπότε διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐνεργοῦ ἐντάσεως 15 A. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος καὶ πόση ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως, τῆς τροφοδοτούσης τὴν συσκευὴν καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ διαρρέοντος αὐτὴν ρεύματος;*

Λύσις. Εἰς τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἡ ἰσχὺς N δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$N = U_{εν} \cdot i_{εν} \cdot συν\,φ \qquad (1)$$

ἔνθα $φ$ εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τάσεως καὶ ἐντάσεως.

α) Λύοντες τὸν τύπον (1) ὡς πρὸς τὸν συντελεστὴν ἰσχύος $(συν\,φ)$ λαμβάνομεν

$$συν\,φ = \frac{N}{U_{εν} \cdot i_{εν}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$συν\,φ = 0{,}91.$$

β) Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος $συν\,φ = 0{,}91$ εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ πινάκων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων,

$$φ = 25^0\ (περίπου).$$

Ἄσκησις 3η. *Μετασχηματιστὴς χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν ὑποβιβασμὸν τῆς τάσεως ἀπὸ 220 V εἰς 84 V. Ἡ λαμβανομένη ἰσχὺς εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι 500 W. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διατομὴ τῶν ἐκ χαλκοῦ συρμάτων πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ τὰ 2 A κατὰ mm²;*

Λύσις. Ἐκ τῶν (ἐνεργῶν) τάσεων $220\ V$ καὶ $84\ V$ καὶ τῆς ἰσχύος $500\ W$ ὑπολογίζομεν τὰς ἐνεργοὺς ἐντάσεις $i_{1,εν}$ καὶ $i_{2,εν}$ τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος πηνίου, βάσει τοῦ τύπου $N = U_{εν} \cdot i_{εν}$, εἰς

$$i_{1,\,εν} = 2{,}27\ A \qquad καὶ \qquad i_{2,\,εν} = 5{,}95\ A.$$

Ἤδη, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ διατομαὶ S_1 καὶ S_2 τῶν συρμάτων τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος θὰ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι πρὸς

$$S_1 = 1\ mm^2\ (περίπου) \qquad καὶ \qquad S_2 = 3\ mm^2\ (περίπου).$$

Κατηγορία Γ'

1) Μία ἀντίστασις 100 Ω εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὸ δευτερεῦον μετασχηματιστοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ εἶναι 1 : 2. Ποία ἀντίστασις, συνδεομένη μὲ τὸ δίκτυον, τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὸ πρωτεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ, θὰ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως ἴσης πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸ πρωτεῦον τοῦ μετασχηματιστοῦ ; (Μετρία).
(ΑΠ : *25 Ω*)

2) Ἀμπερόμετρον, συνδεόμενον ἐν σειρᾷ πρὸς κινητῆρα ἐναλλασσομένου ρεύματος, δεικνύει ἔντασιν 2,5 Α, βολτόμετρον δέ, συνδεόμενον πρὸς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ κινητῆρος, δεικνύει τάσιν 220 V. Ἐὰν ἡ μέση ἰσχύς, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητὴρ εἶναι ἴση πρὸς 500 W, ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος ; (Εὔκολος). (ΑΠ : *0,91*)

3) Θερμαντικὸν σῶμα, συνδεόμενον μὲ δίκτυον ἐναλλασσομένου ρεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι ἴση πρὸς 120 V, ἐκλύει, ἀνὰ δευτερόλεπτον, θερμότητα 70 cal. Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ θερμαντικοῦ σώματος ; (1 cal = 4,2 Joule). (Εὔκολος).
(ΑΠ : *49,4 Ω*)

4) Μετασχηματιστής, χρησιμοποιούμενος διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς τάσεως, ἔχει λόγον σπειρῶν $n_1 : n_2 = 1 : 25$*, τροφοδοτεῖται δὲ εἰς τὸ πρωτεῦον ὑπὸ ἐνεργοῦ τάσεως 220 V. Νὰ εὑρεθοῦν α) ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὸ δευτερεῦον. β) Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἰς τὸ πρωτεῦον, ὅταν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι ἴση πρὸς 2 Α καὶ γ) ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ μετασχηματιστὴς εἰς τὸ δευτερεῦον. (Εὔκολος).*
(ΑΠ : *5500 V, 50 A, 11 kW*)

5) Τὸ πρωτεῦον ἑνὸς μετασχηματιστοῦ ἀποτελεῖται ἐκ 500 σπειρῶν χαλκίνου σύρματος, ἀντιστάσεως 0,2 Ω, τὸ δὲ δευτερεῦον ἐκ 2500 σπειρῶν, ὁμοίως χαλκίνου σύρματος καὶ ἀντιστάσεως 3 Ω. Ὅταν ὁ μετασχηματιστὴς παρέχῃ εἰς τὸ δευτερεῦον ἰσχὺν 10 kW, ὑπὸ τάσιν 1200 V, αἱ ἀπώλειαι ἰσχύος ἐντὸς τοῦ σιδηροῦ πυρῆνος εἶναι 200 W. Νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ δευτερεῦον, β) αἱ ἀπώλειαι ἰσχύος ἐντὸς τῶν χαλκίνων ἀγωγῶν τοῦ δευτερεύοντος καὶ τοῦ πρωτεύοντος καὶ γ) ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ μετασχηματιστοῦ. (Δύσκολος).
(ΑΠ : *α) 8,33 A, β) 208 W, 347 W, γ) 93 %*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Κ'

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΝΤΑΣΕΩΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ, ΤΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΣ

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Ἀμπερόμετρον, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς ἀντίστασιν 10000 Ω, τὰ δὲ ἄκρα τοῦ προκύπτοντος συστήματος (βολτομέτρου) συνδέονται πρὸς τοὺς πόλους ἠλεκτρικῆς πηγῆς. Ποία θὰ εἶναι ἡ τάσις τῆς πηγῆς, ἐὰν τὸ ὄργανον δεικνύῃ 20 mA ;*

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν $R_{εσ}$ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀμπερομέτρου καὶ R τὴν ἐν σειρᾷ πρὸς αὐτὸ συνδεομένην ἀντίστασιν, τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$R_{ολ} = R_{εσ} + R. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$U = i \cdot R_{ολ} \tag{2}$$

ἔνθα U εἶναι ἡ τάσις τῆς πηγῆς. Ἐπειδὴ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι ἀμελητέα, ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$U = i \cdot R. \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν

$$U = 200\ V.$$

Ἄσκησις 2α. *Ἡ κλῖμαξ ἑνὸς βολτομέτρου, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 10000 Ω, εἶναι βαθμολογημένη ἀπὸ 0 ÷ 300 V. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος, ὅταν τὸ ὄργανον συνδεθῇ μὲ τάσιν 220 V;*

Λύσις. Ἔστωσαν $R_{εσ}$ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ βολτομέτρου καὶ U ἡ τάσις, πρὸς τὴν ὁποίαν τοῦτο ἔχει συνδεθῆ. Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἔχομεν

$$i = \frac{U}{R_{εσ}}.$$

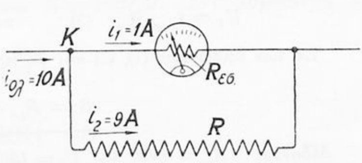
Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$i = 22 \cdot 10^{-3}\ A \quad ἢ \quad i = 22\ mA.$$

Ἄσκησις 3η. *Ἡ κλῖμαξ ἑνὸς ἀμπερομέτρου, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1 Ω, εἶναι βαθμολογημένη ἀπὸ 0 ÷ 1 A. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ ὀργάνου, ὥστε νὰ δύναται τοῦτο νὰ μετρῇ ἐντάσεις ρεύματος ἀπὸ 0 ÷ 10 A;*

Λύσις. Ἐὰν τὸ ὅλον ρεῦμα τῶν *10 A* διήρχετο διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου, τότε ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ δείκτης θὰ ἐξήρχετο τῆς κλίμακος καὶ θὰ ἐθραύετο, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὰ σύρματα τοῦ ὀργάνου θὰ ἐθερμαίνοντο πολὺ καὶ θὰ κατεστρέφοντο. Πρὸς ἀποφυγὴν τούτων συνδέομεν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ ἀμπερομέτρου (δηλ. ἐν παραλλήλῳ πρὸς αὐτὸ) μίαν ἀντίστασιν, ὁπότε τὸ ρεῦμα διακλαδίζεται καὶ μέρος, μόνον, αὐτοῦ διέρχεται διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου. Ἡ ἀντίστασις αὕτη πρέπει νὰ ἐκλεγῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε, ὅταν τὸ ὁλικὸν ρεῦμα εἶναι *10 A*, νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ὀργάνου ρεῦμα ἐντάσεως, ἀκριβῶς, *1 A*.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀντίστασιν ταύτην ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Καλοῦμεν $R_{εσ}$ τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀμπερομέτρου, R τὴν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας του συνδεομένην ἀντίστασιν (δηλ. τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν) i_1 καὶ i_2 τὰς ἀντιστοίχους ἐντάσεις ρεύματος καὶ $i_{ολ}$ τὴν πρὸς μέτρησιν ἔντασιν. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν 1ον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸν κόμβον K θὰ ἔχωμεν



$$i_{ολ} = i_1 + i_2. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα, τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς δύο ἀντιστάσεις $R_{εσ}$ καὶ R, θὰ ἔχωμεν

$$0 = i_1 \cdot R_{εσ} - i_2 \cdot R. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

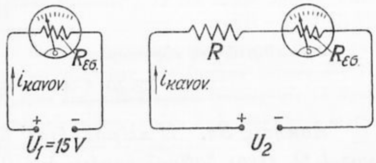
$$R = R_{εσ} \cdot \frac{i_1}{i_{ολ} - i_1}. \qquad (3)$$

Δίδονται: $i_1 = 1\ A$, $i_{ολ} = 10\ A$ καὶ $R_{εσ} = 1\ \Omega$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν

$$\underline{R = 0{,}11\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 4η. *Ἡ κλῖμαξ ἑνὸς βολτομέτρου, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 1000 Ω, εἶναι βαθμολογημένη ἀπὸ 0 ÷ 15 V. Ποία ἀντίστασις πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ ὄργανον τοῦτο, ὥστε νὰ δύναται νὰ μετρῇ τάσεις ἀπὸ 0 ÷ 150 V;*

Λύσις. Ἐφ' ὅσον τὸ βολτόμετρον εἶναι κατεσκευασμένον διὰ νὰ μετρῇ τάσιν μέχρι *15 V*, ἕπεται ὅτι, ἐὰν συνδεθῇ μὲ τάσιν *150 V*, θὰ διέλθῃ δι' αὐτοῦ τόσον ἰσχυρὸν ρεῦμα, ὥστε ὁ δείκτης θὰ ἐξέλθῃ ἔξω τῆς κλίμακος καὶ θὰ θραυσθῇ, ἐνῶ, ταυτοχρόνως, τὰ σύρματα τοῦ ὀργάνου θὰ ὑπερθερμανθοῦν. Πράγματι: Ὅταν τὸ βολτόμετρον συνδεθῇ μὲ τάσιν $U_1 = 15\ V$ (ἀριστερὸν σχῆμα), θὰ διαρρέεται ὑπὸ τοῦ κανονικοῦ ρεύματος λειτουργίας, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις $i_{καν}$ ὑπολογίζεται ἴση πρὸς $i_{καν} = U_1/R_{εσ} = 15/1000\ V/\Omega = 15\ mA$, ἐνῶ, ὅταν συνδεθῇ μὲ τάσιν $U_2 = 150\ V$, θὰ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις ὑπολογίζεται εἰς *150 mA* - δηλ. εἶναι δεκαπλασία τῆς ἐπιτρεπομένης. Πρὸς ἀποφυγήν, ἀκριβῶς, τούτου πρέπει νὰ συνδεθῇ ἐν σειρᾷ πρὸς τὸ βολτόμετρον μία ἀντίστασις R καί, μάλιστα, τοιαύτη ὥστε, ὅταν τὸ ὄργανον συνδεθῇ μὲ τὴν τάσιν U_2 (δεξιὸν σχῆμα), νὰ διέρχεται δι' αὐτοῦ ρεῦμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος κανονικῆς λειτουργίας (δηλ., ἐν προκειμένῳ, ἴση πρὸς *15 mA*).



Τὴν ἀντίστασιν ταύτην R ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν καλέσωμεν $R_{ολ}$ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν, θὰ ἔχωμεν

$$R_{ολ} = R_{εσ} + R. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις

$$U_1 = i_{καν} \cdot R_{εσ} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad U_2 = i_{καν} \cdot R_{ολ}. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{R = R_{εσ} \cdot \frac{U_2 - U_1}{U_1}.} \qquad (4)$$

Δίδονται: $R_{εσ} = 1000\ \Omega$, $U_2 = 150\ V$ καὶ $U_1 = 15\ V$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 9000\ \Omega.}$$

Ἄσκησις 5η. *Ἡ κλῖμαξ γαλβανομέτρου, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 100 Ω, εἶναι βαθμολογημένη ἀπὸ 0 ÷ 100 μA (1 μA = 1 μικροαμπὲρ = $1 \cdot 10^{-6}$ A). Ἐὰν συνδέσωμεν τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ ὀργάνου διὰ μιᾶς ἀντιστάσεως 11 Ω (ὁπότε ἔχομεν δύο ἀντιστάσεις ἐν παραλλήλῳ), ποία εἶναι ἡ (ὁλικὴ) ἔντασις τοῦ μετρουμένου ρεύματος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου φθάσῃ εἰς τὸ ἄκρον τῆς κλίμακος;*

Λύσις. Ἔστωσαν $R_{εσ}$ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ γαλβανομέτρου, R ἡ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ (παραλλήλως) συνδεομένη ἀντίστασις, i_1 καὶ i_2 αἱ ἀντίστοιχοι ἐντάσεις τῶν ρευμάτων καὶ $i_{ολ}$ ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν ἀνωτέρω 3ην ἄσκησιν εὑρίσκομεν

$$\underline{i_{ολ} = i_1 \cdot \frac{R_{εσ} + R}{R}}. \qquad (1)$$

Δίδονται: $i_1 = 100\ \mu A = 100 \cdot 10^{-6}\ A,\ R_{εσ} = 100\ \Omega,\ R = 11\ \Omega$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν

$$\underline{i_{ολ} = 1 \cdot 10^{-3}\ A} \qquad ἢ \qquad \underline{i_{ολ} = 1\ mA}.$$

Ἄσκησις 6η. *Βολτόμετρον, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως 2000 Ω, μετρεῖ μεγίστην τάσιν 30 V. Ἐὰν ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις αὐξηθῇ κατὰ 8000 Ω, ποία θὰ εἶναι ἡ μεγίστη τάσις, τὴν ὁποίαν τοῦτο δύναται νὰ μετρήσῃ;*

Λύσις. Ἔστω U ἡ μεγίστη τάσις, τὴν ὁποίαν μετρεῖ τὸ βολτόμετρον, ὅταν ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις εἶναι R καὶ $U_{ολ}$ ἡ μεγίστη τάσις, τὴν ὁποίαν μετρεῖ τοῦτο, ὅταν ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις αὐξηθῇ κατὰ R'· ὅταν δηλαδὴ γίνῃ ἴση πρὸς $R_{ολ}$, ἡ ὁποία εἶναι:

$$R_{ολ} = R + R'. \qquad (1)$$

Ἐπειδή, κατὰ τοὺς συλλογισμοὺς τῆς 4ης ἀσκήσεως, ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος παραμένει ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm, διὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν

$$U = i \cdot R, \qquad (2)$$

διὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν

$$U_{ολ} = i \cdot R_{ολ}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{U_{ολ} = U \cdot \frac{R + R'}{R}}. \qquad (4)$$

Δίδονται: $U = 30\ V,\ R = 2000\ \Omega$ καὶ $R' = 8000\ \Omega$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν

$$\underline{U_{ολ} = 150\ V.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΑ'

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

Κατηγορία Α'

(Συντελεστὴς ἀποδόσεως διὰ τὰς ἀσκήσεις τῆς Κατηγορίας Α' 100 %).

Ἄσκησις 1η. *Ἐπὶ πινακίδος, προσηρμοσμένης ἐπὶ ἠλεκτρικῆς γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος, ἀναγράφονται αἱ ἐνδείξεις «5 kW, 110 V». Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράσχῃ αὕτη χωρὶς νὰ ὑπερθερμανθῇ;*

Λύσις. Αἱ ἐνδείξεις «*5 kW, 110 V*» σημαίνουν ὅτι ἡ μεγίστη ἰσχύς, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράσχῃ ἡ γεννήτρια, χωρὶς νὰ ὑποστῇ βλάβην, εἶναι $5\ kW$, ἡ δὲ *ΗΕΔ* αὐτῆς εἶναι $110\ V$. Συνεπῶς ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος

$$N = U \cdot i$$

εὑρίσκεται ὅτι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παράσχῃ ἡ γεννήτρια, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{N}{U} = \frac{5000}{110} \frac{W}{V} \quad \text{ἢ} \quad \underline{i = 45{,}4\ A.}$$

Ἄσκησις 2α. *Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος, συνδεδεμένος πρὸς τάσιν 110 V, κινεῖ ἀλευρόμυλον. Δι' ἀμπερομέτρου εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν κινητῆρα, εἶναι 20 A. Πόσην ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν (εἰς kWh) θὰ καταναλώσῃ ὁ κινητὴρ οὗτος ἐντὸς 8 ὡρῶν;*

Λύσις. Ἡ ἐνέργεια A, τὴν ὁποίαν θὰ καταναλώσῃ ὁ κινητήρ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἰσχύος N αὐτοῦ ἐπὶ τὸν χρόνον λειτουργίας t · ἤτοι

$$A = N \cdot t \quad \text{ἢ} \quad \underline{A = U \cdot i \cdot t} \qquad (1)$$

(διότι $N = U \cdot i$).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 17{,}6\ kWh.}$$

Ἄσκησις 3η. *Διὰ τὴν ἄρδευσιν ἀγροκτήματος ἀπαιτοῦνται 15000 m³ ὕδατος μηνιαίως. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ἠλεκτροκίνητος ἀντλία, τάσεως λειτουργίας 220 V, ἡ ὁποία, λειτουργοῦσα ἐπὶ 16 ὥρας ἡμερησίως, ἀντλεῖ τὸ ὕδωρ ἐκ φρέατος, βάθους 25 m. Ζητεῖται α) ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν θὰ καταναλίσκῃ ὁ κινητὴρ (ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τόσον ὁ κινητήρ, ὅσον καὶ ἡ ἀντλία λειτουργοῦν ἄνευ ἀπωλειῶν ἐνεργείας) καὶ β) ἡ μηνιαία δαπάνη διὰ τὴν ἄρδευσιν, δεδομένου ὅτι τὸ 1 kWh τιμᾶται 1,5 δραχμάς.*

Λύσις. α) Τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος, βάρους B, εἰς ὕψος h εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = B \cdot h. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, τὸ βάρος B τοῦ ὕδατος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ ὄγκου V αὐτοῦ καὶ τοῦ εἰδικοῦ βάρους ε ἴσον πρὸς

$$B = \varepsilon \cdot V. \qquad (2)$$

Τέλος, ἡ ἰσχὺς N ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$N = \frac{A}{t}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{N = \frac{\varepsilon \cdot V \cdot h}{t}.}$$

Τὴν ἰσχὺν N ἂς τὴν ὑπολογίσωμεν, πρῶτον, εἰς τὸ σύστημα C.G.S: Δίδονται: $V = 15000\ m^3 = 15 \cdot 10^9\ cm^3$, $h = 25\ m = 2500\ cm$, $t = 30 \cdot 16$ ὧραι $= 30 \cdot 16 \cdot 3600\ sec$, εἶναι δὲ $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3 = 981\ dyn/cm^3$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$N = 2182 \cdot 10^7\ erg/sec.$$

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἰσχὺν ταύτην εἰς kW ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ εἶναι $1\ Joule = 10^7\ erg$ (βλ., π.χ., Α' τόμον, σ. 71) ἔχομεν

$$N = 2128\ Joule/sec.$$

Ἀλλά: $1\ Joule/sec = 1\ W$ (βλ., π.χ., Α' τόμον σ. 72), ὁπότε εἶναι

$$N = 2128\ W \quad \text{ἢ} \quad N = 2{,}128\ kW \quad \text{ἢ} \quad \underline{N \sim 2{,}13\ kW}.$$

β) Ἐκ τῆς ἰσχύος N καὶ τοῦ χρόνου λειτουργίας t τῆς ἀντλίας λαμβάνομεν διὰ τὴν καταναλωθεῖσαν ἐνέργειαν A:

$$\underline{A = N \cdot t.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$A = 1022{,}4\ kWh.$$

Δεδομένου ὅτι τὸ ἓν κιλοβατώριον τιμᾶται $1{,}5$ δρχ., ἡ ὁλικὴ δαπάνη θὰ εἶναι ἴση πρὸς *1535* δραχμάς.

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Ποία θὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν θὰ καταναλώσῃ ὁ κινητὴρ τῆς 3ης ἀσκήσεως τῆς Κατηγορίας Α' καὶ ποία ἡ μηνιαία δαπάνη, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι 0,9, τῆς δὲ ἀντλίας 0,6;*

Λύσις. α) Ἐὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητὴρ καὶ N_2 τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν οὗτος ἀποδίδει εἰς τὴν ἀντλίαν, θὰ ἔχωμεν

$$N_2 = \eta \cdot N_1 \qquad (1)$$

ἔνθα η εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος.

Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἀντλία λαμβάνει ἐκ τοῦ κινητῆρος τὴν ἰσχὺν N_2 καὶ ἀποδίδει τὴν ἰσχὺν N_3, τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν ἄντλησιν τοῦ ὕδατος. Ἐάν, λοιπόν, καλέσωμεν η' τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς ἀντλίας, θὰ ἔχωμεν

$$N_3 = \eta' \cdot N_2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{N_1 = \frac{N_3}{\eta \cdot \eta'}.}$$

Δίδονται: $N_3 = 2{,}13\ kW$, $\eta = 0{,}9$ καὶ $\eta' = 0{,}6$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{N_1 = 3{,}94\ kW.}$$

β) Ἡ μηνιαία δαπάνη ὑπολογίζεται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἴση πρὸς *2837* δραχμάς.

Ἄσκησις 2α. *Ἠλεκτρικὸς κινητὴρ καταναλίσκει ἠλεκτρικὴν ἰσχὺν 2,2 kW καὶ παράγει μηχανικὴν ἰσχὺν 2,2 HP. Ποῖος ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος; (1 HP = 746 W).*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητὴρ καὶ N_2 τὴν μηχανικὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν παράγει οὗτος, τότε ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως η θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$\underline{\eta = \frac{N_2}{N_1}.}$$

Δίδονται: $N_2 = 2{,}2\ HP = 2{,}2 \cdot 746\ W$ (διότι $1\ HP = 746\ W$) καὶ $N_1 = 2{,}2\ kW = 2200\ W$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\eta = 0{,}746} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\eta = 74{,}6\ \%}.$$

Ἄσκησις 3η. *Πόση μηχανικὴ ἰσχὺς πρέπει νὰ παρέχεται εἰς ἠλεκτρικὴν γεννήτριαν διὰ νὰ δίδῃ ρεῦμα, ἐντάσεως 500 A, ὑπὸ τάσιν 220 V, ὅταν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτῆς εἶναι 80 %;*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν διὰ τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως η:

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}, \tag{1}$$

ἔνθα N_2 εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ἡ γεννήτρια καὶ N_1 ἡ μηχανικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει αὕτη. Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς N_2 εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῆς τάσεως U ἐπὶ τὴν ἔντασιν i τοῦ ρεύματος. Ἤτοι

$$N_2 = U \cdot i. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) προκύπτει ὁ τελικὸς τύπος

$$\underline{N_1 = \frac{U \cdot i}{\eta}}.$$

Δίδονται: $U = 220\ V,\ i = 500\ A$ καὶ $\eta = 80\ \% = 0{,}8$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{N_1 = 137500\ W} \quad \text{ἢ} \quad \underline{N_1 = 137{,}5\ kW}.$$

Ἄσκησις 4η. *Ἐὰν ἡ γεννήτρια τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως κινῆται ὑπὸ ὑδροστροβίλου, συντελεστοῦ ἀποδόσεως 80 % καὶ ἐκμεταλλευομένου ὑδατόπτωσιν 80 m, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διὰ τοῦ ὑδροστροβίλου διερχομένη, ἀνὰ sec, ποσότης ὕδατος.*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παροχῆς Π (βλ. Α' τόμος, § 108) ἔχομεν

$$\Pi = \frac{V}{t} \tag{1}$$

ἔνθα V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ ὑδροστροβίλου καὶ t ὁ ἀντίστοιχος χρόνος. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἰσχὺς N, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ ὑδατόπτωσις εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον, εἶναι ἴση πρὸς

$$N = \frac{A}{t} = \frac{B \cdot h}{t} \quad \text{ἢ} \quad N = \frac{\varepsilon \cdot V \cdot h}{t} \tag{2}$$

ἔνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος καὶ h τὸ ὕψος τῆς ὑδατοπτώσεως. Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$N = \varepsilon \cdot \Pi \cdot h \tag{3}$$

Τέλος, ἐὰν N' εἶναι ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ὑδροστρόβιλος εἰς τὴν γεννήτριαν καὶ η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ ὑδροστροβίλου, ἔχομεν

$$\eta = \frac{N'}{N}. \tag{4}$$

Ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\Pi = \frac{N'}{\eta \cdot \varepsilon \cdot h}}. \tag{5}$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $N' = 137,5\ kW = 139975\ kgr^* \cdot m/sec$ (διότι $1\ kW = 101,93\ kgr^* \cdot m/sec$), $\eta = 0,8$, εἶναι δὲ $\varepsilon = 1000\ kgr^*/m^3$ (διότι $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$) καὶ $h = 80\ m$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (5) λαμβάνομεν

$$\underline{H = 0,219\ m^3/sec.}$$

Ἄσκησις 5η. *Κινητὴρ ἐναλλασσομένου ῥεύματος κινεῖ γεννήτριαν συνεχοῦς ῥεύματος. Ἐὰν ἡ ἀποδιδομένη ὑπὸ τῆς γεννητρίας ἰσχὺς εἶναι 1,5 kW ποία θὰ εἶναι ἡ ἰσχύς, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος; (Συντελεστὴς ἀποδόσεως ἑκάστης μηχανῆς 85 %).*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχύν, τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ τοῦ κινητῆρος, N_2 τὴν ἰσχύν, τὴν παρεχομένην ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὴν γεννήτριαν, N_3 τὴν ἰσχύν, τὴν ἀποδιδομένην ὑπὸ τῆς γεννητρίας καὶ η τὸν (κοινὸν) συντελεστὴν ἀποδόσεως ἑκάστης μηχανῆς, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\eta = \frac{N_2}{N_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \eta = \frac{N_3}{N_2}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{N_1 = \frac{N_3}{\eta^2}.}$$

Δίδονται: $N_3 = 1,5\ kW$ καὶ $\eta = 85\ \% = 0,85$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{N_1 = 2,076\ kW.}$$

Ἄσκησις 6η. *Μονοφασικὸς κινητήρ, τροφοδοτούμενος διὰ τάσεως 220 V, διαρρέεται ὑπὸ ῥεύματος, ἐνεργοῦ ἐντάσεως 4,5 A. Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος (συν φ) τοῦ κινητῆρος εἶναι 0,85, ἡ δὲ μηχανικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει οὗτος 1 HP. Ποῖος ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος; (1 HP = 746 W).*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν $U_{εν}$ τὴν ἐνεργὸν τάσιν τροφοδοτήσεως τοῦ κινητῆρος, $i_{εν}$ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ διαρρέοντος αὐτὸν ῥεύματος καὶ $συν\,\varphi$ τὸν συντελεστὴν ἰσχύος, τότε ἡ ἰσχὺς N_1, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N_1 = U_{εν} \cdot i_{εν} \cdot συν\,\varphi. \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν N_2 εἶναι ἡ μηχανικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ὁ κινητὴρ καὶ η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως αὐτοῦ, ἔχομεν

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\eta = \frac{N_2}{U_{εν} \cdot i_{εν} \cdot συν\,\varphi}.} \qquad (3)$$

Δίδονται: $N_2 = 1\ HP = 746\ W$, $U_{εν} = 220\ V$, $i_{εν} = 4,5\ A$ καὶ $συν\,\varphi = 0,85$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) λαμβάνομεν

$$\underline{\eta = 0,886} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\eta = 88,6\ \%.}$$

Ἄσκησις 7η. *Ἡ τάσις λειτουργίας κινητῆρος συνεχοῦς ῥεύματος εἶναι 110 V. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι 80 %, ποία ἡ ἔντασις τοῦ* *ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὸν κινητῆρα, ὅταν οὗτος κινῇ ἄλλην μηχανήν, ἀπαιτοῦσαν διὰ τὴν κίνησίν της ἰσχὺν 2 HP; (1 HP = 746 W).*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν U τὴν τάσιν λειτουργίας τοῦ κινητῆρος καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ διαρρέοντος αὐτὸν ρεύματος, ἡ ἰσχὺς N_1, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ κινητῆρος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N_1 = U \cdot i. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν N_2 εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς ἄλλης μηχανῆς καὶ η ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος, ἔχομεν

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{i = \frac{N_2}{\eta \cdot U}}. \tag{3}$$

Δίδονται: $N_2 = 2\ HP = 2 \cdot 746\ W$ (διότι $1\ HP = 746\ W$), $\eta = 0{,}8$ καὶ $U = 110\ V$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 16{,}9\ A} \quad ἢ \quad \underline{i \sim 17\ A.}$$

Κατηγορία Γ'

1) *Εἰς τοὺς πόλους μικρᾶς γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος εἶναι συνδεδεμένη μία ἀντίστασις 100 Ω. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως εἶναι 100 V. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις τῶν 100 Ω ἀντικατασταθῇ δι' ἄλλης, 200 Ω, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς γεννητρίας εἶναι 105 V. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας καὶ β) ἡ ΗΕΔ αὐτῆς. (Μετρία).* (ΑΠ: *10,52 Ω, 110,52 V*)

2) *Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις μιᾶς γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος εἶναι 110 V. Ὅταν αὕτη παρέχῃ ρεῦμα 100 A εἰς ἐξωτερικὸν κύκλωμα, ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους της εἶναι 105 V. α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος. β) Ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας, ὅταν αὕτη δίδῃ ρεῦμα ἐντάσεως 300 A; (Μετρία).*

(ΑΠ: *α) 0,05 Ω, 1,05 Ω, β) 95 V*)

3) *Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος, ἰσχύος 2 HP, τροφοδοτούμενος ὑπὸ τάσεως 230 V, κινεῖ μηχανήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὴν πλήρη αὐτοῦ ἰσχύν. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι 75 %, ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ δι' αὐτοῦ διερχομένου ρεύματος; (1 HP = 746 W). (Εὔκολος).* (ΑΠ: *8,65 A*)

4) *Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος κινεῖ ὑδραντλίαν, ἡ ὁποία ἀνυψώνει, εἰς ὕψος 15,5 m, 10 λίτρα ὕδατος ἀνὰ sec. Ὁ κινητὴρ τροφοδοτεῖται μὲ τάσιν 110 V καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 28,5 A. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι 82 % νὰ ὑπολογισθῇ α) ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς ὁμάδος «κινητὴρ - ἀντλία». β) Ἡ μηχανικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν προσφέρει ὁ κινητὴρ εἰς τὴν ἀντλίαν καὶ γ) ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς ἀντλίας. (1 HP = 76 kgr*·m/sec = 746 W). (Μετρία).*

(ΑΠ: *49 %, 2,57 kW, 59,2 %*)

5) *Γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,12 Ω. Ὅταν ἡ γεννήτρια λειτουργῇ ἐν κενῷ, ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους της εἶναι 124 V, ἐνῷ ὅταν λειτουργῇ ὑπὸ φορτίον, ἡ τάσις αὕτη ἐλαττοῦται εἰς 115 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια, ὅταν λειτουργῇ ὑπὸ φορτίον. (Μετρία).* (ΑΠ: *8,6 kW*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΒ΄

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Καταρράκτης, ὕψους 20,5 m, ἀποδίδει 126 m³ ὕδατος ἀνὰ λεπτόν. Ζητεῖται α) τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ὁ καταρράκτης ἐντὸς μιᾶς ὥρας καὶ β) ἡ ἰσχὺς τοῦ ὑδροστροβίλου, τὸν ὁποῖον οὗτος δύναται νὰ θέσῃ εἰς λειτουργίαν. Συντελεστὴς ἀποδόσεως 90 %. (Ἡ ἰσχὺς νὰ ἐκφρασθῇ εἰς HP καὶ kW).*

Λύσις. α) Καλοῦμεν Π τὴν παροχὴν τοῦ καταρράκτου, h τὸ ὕψος πτώσεως, V τὸν ὄγκον τοῦ ὕδατος, τὸν ἀποδιδόμενον ἐντὸς χρόνου t καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος. Τὸ ὑπὸ τοῦ ὕδατος παραγόμενον ἔργον A θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = B \cdot h = \varepsilon \cdot V \cdot h.$$

Ἐπειδὴ ἡ παροχὴ Π ὁρίζεται ἐκ τοῦ τύπου $\Pi = V/t$ ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\underline{A = \varepsilon \cdot \Pi \cdot t \cdot h.} \qquad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $\Pi = 126\ m^3/min = 126/60\ m^3/sec$, $t = 1$ ὥρα $= 3600\ sec$, $h = 20{,}5\ m$, εἶναι δὲ $\varepsilon = 1000\ kgr^*/m^3$ (διότι $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{A = 1{,}55 \cdot 10^8\ kgr^* \cdot m.}$$

β) Ἐὰν καλέσωμεν N_1 τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ καταρράκτης εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον, N_2 τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ὁ ὑδροστρόβιλος καὶ η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ ὑδροστροβίλου, ἔχομεν

$$N_1 = \frac{A}{t} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \eta = \frac{N_2}{N_1}. \quad (3)$$

Ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{N_2 = \frac{\eta \cdot A}{t}.} \qquad (4)$$

Δίδονται: $\eta = 0{,}9$, εὕρομεν δὲ ὅτι ἐντὸς χρόνου $t = 1$ ὥρα $= 3600\ sec$, παρήχθη ἔργον $A = 1{,}55 \cdot 10^8\ kgr^* \cdot m$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) εὑρίσκομεν

$$N_2 = 3{,}875 \cdot 10^4\ kgr^* \cdot m/sec.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $1\ HP = 76\ kgr^* \cdot m/sec$ καὶ $1\ HP = 746\ W$ (βλ. Α΄ τόμος, σ. 73) εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

$$\underline{N_2 = 509{,}8\ HP} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{N_2 = 380{,}3\ kW.}$$

Ἄσκησις 2α. *Ἐὰν ὁ ἄνω ὑδροστρόβιλος κινῇ γεννήτριαν, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι 90 %, ποία θὰ εἶναι ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῆς;*

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν N τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν προσφέρει ὁ ὑδροστρόβιλος εἰς τὴν γεννήτριαν, N' τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐξ αὐτῆς καὶ η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς γεννητρίας, ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\underline{N' = \eta \cdot N.}$$

Δίδεται: $\eta = 0{,}9$, εὑρέθη δὲ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὅτι $N = 380{,}3\ kW$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{N' = 342{,}3\ kW.}$$

Ἄσκησις 3η. *Γεννήτρια ἐναλλασσομένου ρεύματος παράγει ἰσχὺν 2000 kW, ἡ δὲ τάσις ἀνυψοῦται μὲ τὴν βοήθειαν μετασχηματιστοῦ α) εἰς 10 000 V καὶ β) εἰς 100 000 V. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν μεταφορᾶς εἰς ἑκάστην περίπτωσιν, ἐὰν ἡ ἀπώλεια, λόγῳ θερμάνσεως τούτων, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὰ 10 %₀ τῆς ὑπὸ τῆς γεννητρίας παρεχομένης ἰσχύος; (Συντελεστὴς ἀποδόσεως μετασχηματιστοῦ 100 %₀).*

Λύσις. Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι *100 %₀*, ἕπεται ὅτι ἡ ἰσχὺς N, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει οὗτος, εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν παραλαμβάνει ἐκ τῆς γεννητρίας - ἤτοι εἶναι $N = 2000\ kW$. Διὰ τὴν περίπτωσιν (α), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ τάσις εἶναι $U = 10000\ V$, ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος εἰς τοὺς ἀγωγοὺς μεταφορᾶς θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{N}{U}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπώλεια εἰς τὰ σύρματα μεταφορᾶς εἶναι *10 %₀* ἕπεται ὅτι, ἐκ τῆς ἰσχύος $N = 2000\ kW$, ἔχομεν ἀπώλειαν $N' = 200\ kW$.

Ἀφ' ἑτέρου, διὰ τὴν ἀπώλειαν ἰσχύος N' ἐντὸς τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς ἔχομεν

$$N' = i^2 \cdot R. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{R = N' \cdot \frac{U^2}{N^2}.} \tag{3}$$

Δίδονται: $U = 10000\ V$, $N = 2000\ kW = 2 \cdot 10^6\ W$, εὕρομεν δὲ $N' = 200\ kW = 2 \cdot 10^5\ W$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{R = 5\ \Omega.}$$

Ὑπολογίζοντες, διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (3), τὴν ἀντίστασιν R εἰς τὴν περίπτωσιν (β) λαμβάνομεν

$$\underline{R = 500\ \Omega.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅσον αὐξάνεται ἡ τάσις, τόσον ἡ ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν δύναται νὰ εἶναι μεγαλυτέρα. Ἐπειδὴ μεγαλυτέρα ἀντίστασις τῶν ἀγωγῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς σύρματα μικροτέρας διαμέτρου, ἕπεται ὅτι τὸ βάρος τῶν χρησιμοποιουμένων ἀγωγῶν καί, συνεπῶς, τὸ κόστος τῆς ἐγκαταστάσεως ἐλαττοῦται, σημαντικῶς, δι' αὐξήσεως τῆς τάσεως.

Ἄσκησις 4η. *Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ΗΕΔ 125 V καὶ ἀμελητέαν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια μεταφέρεται μὲ τὴν βοήθειαν δύο ἀγωγῶν, ὁλικῆς ἀντιστάσεως 0,2 Ω. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ 1) ποία θὰ εἶναι ἡ τάσις εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τοὺς ἀγωγοὺς εἶναι α) 0 A, β) 50 A καὶ γ) 100 A καὶ 2) ποία θὰ εἶναι ἡ πτῶσις τάσεως εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.*

Λύσις. 1) Ἐὰν καλέσωμεν E τὴν ΗΕΔ τῆς γεννητρίας, i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος εἰς τοὺς ἀγωγούς, R τὴν ἀντίστασιν αὐτῶν καὶ U τὴν τάσιν εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\underline{U = E - i \cdot R.} \qquad \text{(βλ. § 205 τοῦ Β' τόμου)}$$

Δίδονται: $E = 125\ V,\ i = 0\ A\ (50\ A,\ 100\ A)$ καὶ $R = 0{,}2\ \Omega$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{U = 125\ V\ (115\ V,\ 105\ V).}$$

2) Ἡ πτῶσις τάσεως U_R εἰς τοὺς ἀγωγοὺς θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{U_R = i \cdot R.}$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν διὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις:

$$\underline{U_R = 0\ V,\ 10\ V,\ 20\ V.}$$

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια παρέχει ἰσχὺν 5000 kW ὑπὸ τάσιν 10 000 V. Ἡ παραγομένη ἰσχὺς μεταφέρεται εἰς ἀπόστασιν 20 km, τῇ βοηθείᾳ δύο χαλκίνων συρμάτων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει διάμετρον 20 mm. Ἐὰν ἡ αὐτὴ ἰσχὺς παραχθῇ ὑπὸ τάσιν 50 000 V, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τῶν συρμάτων, ὥστε ἡ ἀπώλεια ἰσχύος ἐντὸς αὐτῶν νὰ παραμένῃ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἡ αὐτή. β) Ποία ἡ προκύπτουσα οἰκονομία εἰς χαλκόν, λόγῳ τῆς ἀλλαγῆς τῆς διαμέτρου τῶν συρμάτων καὶ 3) ποία ἡ διαφορὰ κόστους τῶν χαλκίνων συρμάτων. Δίδονται: εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ* $= 8{,}9\ gr^*/cm^3$, *εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ* $= 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$ *καὶ ἀξία τοῦ χαλκοῦ 40 δραχμαὶ/kgr*.*

Λύσις. α) Ἂν καλέσωμεν N τὴν ἰσχύν, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ U_1, U_2 τὰς τάσεις εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τότε αἱ ἀντίστοιχοι ἐντάσεις i_1, i_2 τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς

$$i_1 = \frac{N}{U_1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad i_2 = \frac{N}{U_2}. \quad (2)$$

Ἐὰν R_1, R_2 εἶναι αἱ ἀντιστάσεις τῶν ἀγωγῶν μεταφορᾶς εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ N' ἡ κοινὴ ἀπώλεια ἰσχύος, ἔχομεν

$$N' = i_1^2 \cdot R_1 \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad N' = i_2^2 \cdot R_2. \quad (4)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν καλέσωμεν ϱ τὴν εἰδικὴν ἀντίστασιν τοῦ χαλκοῦ, l τὸ κοινὸν μῆκος τῶν ἀγωγῶν καὶ δ_1, δ_2 τὰς διαμέτρους αὐτῶν, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$R_1 = \varrho \cdot \frac{4l}{\pi\delta_1^2} \quad (5) \qquad \text{καὶ} \qquad R_2 = \varrho \cdot \frac{4l}{\pi\delta_2^2}. \quad (6)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3), (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\delta_2 = \delta_1 \cdot \frac{U_1}{U_2}.} \qquad (7)$$

Δίδονται: $\delta_1 = 20\ mm = 2\ cm$, $U_1 = 10\ 000\ V$ καὶ $U_2 = 50\ 000\ V$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (7) εὑρίσκομεν

$$\delta_2 = 0{,}4\ cm = 4\ mm.$$

Σημείωσις: Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις δὲν ὑπεισέρχεται εἰς τὸν τύπον (7), συνεπῶς ἦτο δυνατὸν καὶ νὰ μὴ δοθῇ.

β) Ἐὰν καλέσωμεν B_1 καὶ B_2 τὰ βάρη τῶν χαλκίνων ἀγωγῶν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, V_1, V_2 τοὺς ὄγκους αὐτῶν καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ θὰ ἔχωμεν

$$B_1 = \varepsilon \cdot V_1 \qquad \text{καὶ} \qquad B_2 = \varepsilon \cdot V_2$$

ἢ

$$B_1 = \varepsilon \cdot \frac{\pi \cdot \delta_1^2}{4} \cdot l \qquad \text{καὶ} \qquad B_2 = \varepsilon \cdot \frac{\pi \cdot \delta_2^2}{4} \cdot l.$$

Ἡ διαφορὰ $B_1 - B_2$ τῶν βαρῶν θὰ εἶναι, λοιπόν, ἴση πρὸς

$$B_1 - B_2 = \frac{\varepsilon \cdot \pi \cdot l}{4} \cdot (\delta_1^2 - \delta_2^2). \tag{8}$$

Δίδονται: $\varepsilon = 8{,}9\ gr^*/cm^3$, $l = 2 \cdot 20\ km = 4 \cdot 10^6\ cm$, $\delta_1 = 20\ mm = 2\ cm$, εὕρομεν δὲ $\delta_2 = 0{,}4\ cm$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (8) εὑρίσκομεν

$$B_1 - B_2 = 107{,}3 \cdot 10^6\ gr^* \qquad \text{ἢ} \qquad B_1 - B_2 = 107{,}3\ \text{τόννοι}.$$

γ) Ἐφ' ὅσον τὸ *1 kgr** χαλκοῦ κοστίζει *40* δραχμάς, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ κόστους τῶν $107{,}3$ *τόννων* $= 107{,}3 \cdot 10^3\ kgr^*$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς *4292000* δραχμαί.

Ἄσκησις 2α. *Γεννήτρια ἐναλλασσομένου ρεύματος κινεῖται ὑπὸ ὑδροστροβίλου, εἰς τὸν ὁποῖον προσφέρονται 15 m^3 ὕδατος ἀνὰ λεπτὸν καὶ ἀπὸ ὕψους 200 m. Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τῆς γεννητρίας καὶ τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι 70 %, ἡ δὲ παραγομένη τάσις ἀνυψώνεται, διὰ μετασχηματιστοῦ ὑψηλῆς τάσεως, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι 95 %. Ποίαν ἰσχὺν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸ δευτερεῦον ἑνὸς ὁμοίου μετασχηματιστοῦ, τοποθετημένου εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως, ἐὰν ἡ ἀπώλεια ἰσχύος εἰς τὴν γραμμὴν μεταφορᾶς ἀνέρχεται εἰς 10 % τῆς ὑπὸ τοῦ πρώτου μετασχηματιστοῦ παρεχομένης;*

Λύσις. Ἂν καλέσωμεν Π τὴν παροχήν, τότε ὁ μὲν ὄγκος V τοῦ ὕδατος, ὁ διερχόμενος διὰ τοῦ ὑδροστροβίλου ἐντὸς τοῦ χρόνου t, θὰ εἶναι ἴσος πρὸς

$$V = \Pi \cdot t, \tag{1}$$

τὸ δὲ βάρος B αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσον πρὸς

$$B = \varepsilon \cdot V \tag{2}$$

ἔνθα ε εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος.

Τὸ ἔργον A, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ βάρους B τοῦ ὕδατος, εἶναι ἴσον πρὸς

$$A = B \cdot h \tag{3}$$

ἔνθα h εἶναι τὸ ὕψος πτώσεως.

Συνεπῶς, ἡ ἰσχὺς N_1, τὴν ὁποίαν παρέχει τὸ ὕδωρ, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N_1 = \frac{A}{t}. \tag{4}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$N_1 = \varepsilon \cdot \Pi \cdot h. \tag{5}$$

Ἐὰν καλέσωμεν η τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τῆς γεννητρίας καὶ τοῦ ὑδροστροβίλου, ἡ ἰσχὺς N_2, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὸ σύστημα γεννήτρια - ὑδροστρόβιλος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N_2 = \eta \cdot N_1. \quad (6)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐὰν καλέσωμεν η' τὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ πρώτου μετασχηματιστοῦ, ἡ ἰσχὺς N_3, τὴν ὁποίαν παρέχει οὗτος, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$N_3 = \eta' \cdot N_2. \quad (7)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπώλεια ἰσχύος εἰς τὴν γραμμὴν μεταφορᾶς εἶναι $10\,\%$, ἕπεται ὅτι ἡ προσφερομένη εἰς τὸν δεύτερον μετασχηματιστὴν ἰσχὺς N_4 θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ἰσχύος N_3 καί, μάλιστα, ἴση πρὸς

$$N_4 = N_3 - 0{,}10\ N_3 \qquad \text{ἢ} \qquad N_4 = 0{,}9\ N_3 \quad (8)$$

Τέλος, ἡ ἰσχὺς N_5, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει ὁ δεύτερος μετασχηματιστής, εἶναι ἴση πρὸς

$$N_5 = \eta' \cdot N_4, \quad (9)$$

δεδομένου ὅτι οἱ δύο μετασχηματισταὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως η'.

Ἐκ τῶν τύπων (5), (6), (7), (8) καὶ (9) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{N_5 = 0{,}9 \cdot \eta \cdot \eta'^2 \cdot \varepsilon \cdot \Pi \cdot h.} \quad (10)$$

Λύσις εἰς τὸ Τεχνικὸν Σύστημα: Δίδονται: $\eta = 0{,}7$, $\eta' = 0{,}95$, $\Pi = 15\ m^3/min = 15/60\ m^3/sec$, $h = 200\ m$, εἶναι δὲ $\varepsilon = 1000\ kgr^*/m^3$ (διότι $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$). Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (10) λαμβάνομεν

$$\underline{N_5 = 28428\ kgr^* \cdot m/sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{N_5 = 278{,}8\ kW}$$

(δεδομένου ὅτι: $1\ kW = 101{,}93\ kgr^* \cdot m/sec$).

Κατηγορία Γ'

1) Εἰς ἀπόστασιν 1000 m ἀπὸ μιᾶς ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ΗΕΔ 220 V, πρόκειται νὰ ἐγκατασταθῇ ἠλεκτρικὸς κινητήρ, τάσεως λειτουργίας 220 V. Ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον θὰ διαρρέῃ τὸν κινητῆρα, εἶναι ἴση πρὸς 40 A, ποίαν διάμετρον πρέπει νὰ ἔχουν τὰ χάλκινα σύρματα τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 92 % τῆς τάσεως κανονικῆς λειτουργίας; Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ $= 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$. *(Εὔκολος).*

(ΑΠ: *Περίπου 10 mm*)

2) Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια ἔχει ΗΕΔ 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,2 Ω, τροφοδοτεῖ δὲ δίκτυον φωτισμοῦ, ἀποτελούμενον ἐκ 50 λαμπτήρων πυρακτώσεως, συνδεδεμένων ἐν παραλλήλῳ. Οἱ λαμπτῆρες ἀπέχουν τῆς γεννητρίας κατὰ 100 m, ὡς ἀγωγοὶ δὲ χρησιμοποιοῦνται χάλκινα σύρματα, διαμέτρου 4 mm. Ἐὰν ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος εἶναι ἴση πρὸς 300 Ω ζητεῖται α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος τὰ σύρματα μεταφορᾶς. β) Αἱ ἀπώλειαι ἐντὸς τῶν συρμάτων αὐτῶν καὶ ἐντὸς τῆς γεννητρίας. γ) Ἡ ἰσχύς, ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τῶν 50 λαμπτήρων καὶ δ) ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως ὁλοκλήρου τῆς ἐγκαταστάσεως. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ $= 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$. *(Μετρία).* (ΑΠ: *α) 18,54 A, β) 93 W, 68,7 W, γ) 2062,4 W, δ) 92,8 %*)

3) Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως 240 V, καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, καταναλίσκει ἰσχὺν 18 HP, τροφοδοτεῖ δὲ ἠλεκτρικὸν κινητῆρα διὰ ρεύματος ἐντάσεως 50 A. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι 90 %, τῆς δὲ γεννητρίας 92 % καὶ ἡ γραμμὴ μεταφορᾶς παρουσιάζει ἀντίστασιν 0,4 Ω, νὰ εὑρεθῇ α) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κινητῆρος. β) Τὸ *ἐμβαδὸν τῆς διατομῆς τῶν (χαλκίνων) συρμάτων τῆς γραμμῆς, ἐὰν ἡ ἀπόστασις γεννητρίας - κινητῆρος εἶναι ἴση πρὸς 300 m καὶ γ) ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητήρ. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ* $= 1{,}7 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$, *1 HP = 746 W. (Μετρία).*

(ΑΠ: *α) 240 V, 220 V. β) 25 mm², γ) 11,35 kW*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΔ΄

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΥΓΡΩΝ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Κατὰ τὴν ἐπαργύρωσιν ἑνὸς ἀντικειμένου δι᾽ ἠλεκτρολύσεως διέρχεται διὰ τοῦ ἠλεκτρολυτικοῦ διαλύματος ἠλεκτρικὸν φορτίον 1000 Cb. Ποία ἡ μᾶζα τοῦ ἐναποτεθέντος ἀργύρου;*

Λύσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἄσκησιν εὑρίσκομεν, πρῶτον, τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ ἀργύρου. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸν Πίνακα τοῦ Περιοδικοῦ συστήματος (τόμος Β΄, σελ. 280) εὑρίσκομεν τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς *107,88*. Ἐπειδὴ τὸ σθένος τοῦ ἀργύρου εἶναι $n = 1$, ἕπεται ὅτι τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ ἀργύρου εἶναι ἴσον πρὸς *107,88 gr*. Ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐὰν διὰ τοῦ βολταμέτρου διήρχετο φορτίον ἴσον πρὸς *96500 Cb* (σταθερὰ τοῦ Faraday) θὰ ἐναπετίθετο ἐπὶ τῆς καθόδου ἄργυρος, μάζης ἴσης πρὸς *1* γραμμοϊσοδύναμον αὐτοῦ, δηλ., *107,88 gr*. Ἑπομένως τὸ φορτίον $q = 1000\ Cb$, τὸ ὁποῖον διῆλθε διὰ τοῦ βολταμέτρου, θὰ ἐναποθέσῃ μᾶζαν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

96500 Cb ἀποθέτουν *107,88 gr* ἀργύρου
1000 » *x*;

$$x = \frac{107{,}88 \cdot 1000}{96500}\ \frac{gr \cdot Cb}{Cb} = \frac{107880}{96500}\ gr$$

ἢ
$$x = 1{,}118\ gr.$$

Ἄσκησις 2α. *Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον ἀπαιτεῖται, ἵνα ἐναποτεθῇ ἐπὶ τῆς καθόδου βολταμέτρου θειϊκοῦ χαλκοῦ μᾶζα χαλκοῦ 3,2 gr;*

Λύσις. Πρῶτον εὑρίσκομεν τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι *31,77 gr* (διότι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι *63,54* — βλ. Πίνακα Περιοδικοῦ συστήματος — καὶ τὸ σθένος αὐτοῦ *2*). Ἤδη, γνωρίζοντες τὴν σταθερὰν τοῦ Faraday, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ ἐναποτεθοῦν *31,77 gr* χαλκοῦ ἀπαιτοῦνται *96500 Cb*
» » » *3,2* » *x*;

$$x = \frac{96500 \cdot 3{,}2}{31{,}77}\ \frac{Cb \cdot gr}{gr} = \frac{318450}{31{,}77}\ Cb$$

ἢ
$$x = 9720\ Cb.$$

Ἄσκησις 3η. *Ρεῦμα, ἐντάσεως 0,7 A, διέρχεται διὰ βολταμέτρου θειϊκοῦ χαλκοῦ. Πόσος χαλκὸς θὰ ἐναποτεθῇ μετὰ παρέλευσιν χρόνου 20 min;*

Λύσις. Ἐκ τῆς ἐντάσεως i τοῦ ρεύματος καὶ τοῦ χρόνου t εὑρίσκομεν τὸ φορτίον q, τὸ ὁποῖον διῆλθε διὰ τοῦ βολταμέτρου, ἴσον πρὸς

$$q = i \cdot t = 840\ Cb.$$

Ἤδη, ὑπολογίζοντες, ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ χαλκοῦ καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν ὅτι, ἐντὸς *20 min*, θὰ ἐναποτεθῇ ἐπὶ τῆς καθόδου χαλκὸς μάζης *m*, ἴσης πρὸς

$$\underline{m = 0{,}277\ gr} \quad \text{ἢ} \quad \underline{m = 277\ mgr.}$$

Ἄσκησις 4η. *Διὰ βολταμέτρου ἀργύρου (ὑδατικὸν διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου καὶ ἠλεκτρόδια ἐξ ἀργύρου) διέρχεται ρεῦμα, σταθερᾶς ἐντάσεως, ἐπὶ χρόνον 25 min. Ἡ κάθοδος, ζυγιζομένη πρὸ τῆς ἠλεκτρολύσεως, ἔχει βάρος 110,5 gr*, μετὰ δὲ τὸ τέλος τοῦ πειράματος ἔχει βάρος 110,9 gr*. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος;*

Λύσις. Ἐκ τῆς διαφορᾶς βάρους τῆς καθόδου μετὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν καὶ πρὸ τῆς ἠλεκτρολύσεως εὑρίσκομεν τὸ βάρος καί, συνεπῶς, τὴν μάζαν τοῦ ἐναποτεθέντος ἀργύρου ἴσην πρὸς *0,4 gr*. Εὑρίσκοντες, ἀκολούθως, τὸ γραμμοϊσοδύναμον τοῦ ἀργύρου (βλ. 1ην ἄσκησιν) καὶ γνωρίζοντες τὴν σταθερὰν τοῦ Faraday λαμβάνομεν, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τὸ φορτίον *q*, τὸ ὁποῖον διῆλθε διὰ τοῦ βολταμέτρου, ἴσον πρὸς

$$\underline{q = 357{,}8\ Cb.}$$

Ἤδη, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον

$$i = \frac{q}{t},$$

ἀντὶ τοῦ *q* τὸ ἴσον του *357,8 Cb* καὶ ἀντὶ τοῦ *t* τὸ ἴσον του *25·60 sec*, εὑρίσκομεν

$$\underline{i = 0{,}238\ A} \quad \text{ἢ} \quad \underline{i = 238\ mA.}$$

Ἄσκησις 5η. *Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον, διερχόμενον διὰ βολταμέτρου ἀργύρου ἐπὶ χρονικὸν διάστημα 1 sec, ἐναποθέτει ἐπὶ τῆς καθόδου 1,118 mgr ἀργύρου;*

Λύσις. Σκεπτόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, εὑρίσκομεν τὸ φορτίον *q* ἴσον πρὸς *1 Cb*, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου

$$i = \frac{q}{t}$$

προκύπτει ἡ ἔντασις *i* τοῦ ρεύματος ἴση πρὸς

$$\underline{i = 1\ A.}$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ γίνῃ μία ἠλεκτρόλυσις μὲ ρεῦμα, ἐντάσεως 5 A, διὰ νὰ λάβωμεν 1 λίτρον ὑδρογόνου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας;*

Λύσις. Δεδομένου ὅτι, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, *22,4 λίτρα* ὑδρογόνου ἔχουν μᾶζαν *2 gr*, (δηλ. μᾶζαν ἴσην πρὸς *1* γραμμομόριον ὑδρογόνου), εὑρίσκομεν, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι *1 λίτρον* ὑδρογόνου ἔχει μᾶζαν ἴσην πρὸς $89{,}28 \cdot 10^{-3}\ gr$. Ἐπειδὴ τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι *1* καὶ τὸ σθένος *1*, τὸ γραμμοϊσοδύναμον αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς *1 gr*.

Ἐκ τῆς σταθερᾶς τοῦ Faraday προκύπτει, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, τὸ φορτίον q, τὸ ὁποῖον διῆλθε διὰ τοῦ βολταμέτρου, ἴσον πρὸς

$$q = 8615{,}5\ Cb.$$

Ἤδη, ὁ χρόνος t τῆς ἠλεκτρολύσεως προκύπτει, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος $i = q/t$, ἴσος πρὸς

$$\underline{t = \frac{q}{i}}\,.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{t = 1723\ sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{t = 28{,}7\ min.}$$

Ἄσκησις 2α. *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ 1 λίτρον ὑδρογόνου θὰ παραχθῇ ὑπὸ θερμοκρασίαν 20° C.*

Λύσις. Ὑπολογίζομεν, πρῶτον, τὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ παραχθὲν ὑδρογόνον ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας: Ἐπειδὴ ἡ πίεσις διατηρεῖται σταθερὰ (ἴση πρὸς $1\ Atm$), ὁ ὄγκος V_0 θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ α΄ νόμου τοῦ Gay-Lussac

$$\underline{\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}} \qquad \text{(βλ. § 165 τοῦ Α΄ τόμου)}$$

ἔνθα $V = 1$ *λίτρον*, $T = 273^0 + 20^0 = 293^0\ K$ καὶ $T_0 = 273^0\ K$. Δι' ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν

$$V_0 = 0{,}932\ \text{λίτρα}.$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω (ἄσκησις 1η), εὑρίσκομεν

$$\underline{t = 26{,}7\ min.}$$

Ἄσκησις 3η. *Ἠλεκτρολύοντες ἐπὶ 3 min ὑδατικὸν διάλυμα θειϊκοῦ ὀξέος ἐντὸς βολταμέτρου μὲ ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου λαμβάνομεν, ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ σωλῆνος, μεῖγμα ὀξυγόνου καὶ ὑδρογόνου (κροτοῦν ἀέριον), τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, εἶναι 180 cm³. Ποία ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν;*

Σημείωσις: Ἡ ἄσκησις αὐτὴ ἔχει λυθῆ εἰς τὴν σελίδα 210 τοῦ Β΄ τόμου.

Ἄσκησις 4η. *Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέλθῃ ρεῦμα, ἐντάσεως 500 A, διὰ λουτροῦ παραγωγῆς ἠλεκτρολυτικοῦ χαλκοῦ ἵνα λάβωμεν τὸν ἀπαιτούμενον χαλκὸν πρὸς κατασκευὴν καλωδίου, μήκους 1 km καὶ διαμέτρου 1,63 mm; (Πυκνότης χαλκοῦ* $= 8{,}9\ gr\cdot cm^{-3}$*).*

Λύσις. 1) Ὑπολογίζομεν τὴν μᾶζαν τοῦ χαλκοῦ, τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ καλωδίου: Ἐὰν καλέσωμεν m τὴν μᾶζαν, V τὸν ὄγκον, l τὸ μῆκος, δ τὴν διάμετρον τοῦ καλωδίου καὶ ϱ τὴν πυκνότητα τοῦ χαλκοῦ ἔχομεν

$$m = \varrho\cdot V \qquad \text{ἢ} \qquad m = \varrho\cdot\frac{\pi\delta^2}{4}\cdot l.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως προκύπτει

$$m = 18562\ gr.$$

2) Εὑρίσκομεν τὸ *γραμμοϊσοδύναμον* τοῦ χαλκοῦ (ἐκ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ χαλκοῦ $A = 63{,}54$ καὶ τοῦ σθένους $n = 2$) ἴσον πρὸς $31{,}77\ gr$.

3) Ἐκ τῆς σταθερᾶς τοῦ Faraday καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν

τὸ φορτίον q, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν *18562 gr* χαλκοῦ, ἴσον πρὸς

$$q = 56{,}38 \cdot 10^6 \ Cb.$$

4) Ἤδη ὁ χρόνος t τῆς ἠλεκτρολύσεως προκύπτει, ἐκ τοῦ τύπου $t = q/i$, ἴσος πρὸς

$$\underline{t = 11{,}27 \cdot 10^4 \ sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{t = 31{,}3 \ \text{ὧραι}.}$$

Ἄσκησις 5η. *Ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 30 cm², πρόκειται νὰ ἐπικαλυφθῇ ἠλεκτρολυτικῶς διὰ στρώματος ἀργύρου, πάχους 0,3 mm, ἐντὸς 5 ὡρῶν. Ποία ἡ ἀπαιτουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος; (Πυκνότης ἀργύρου = 10,5 gr/cm³).*

Λύσις. 1) Ὑπολογίζομεν τὴν μᾶζαν m τοῦ ἀπαιτουμένου ἀργύρου ἐκ τοῦ ὄγκου τοῦ στρώματος τοῦ ἀργύρου καὶ τῆς πυκνότητος αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην πρὸς

$$m = 9{,}45 \ gr.$$

2) Εὑρίσκομεν τὸ *γραμμοϊσοδύναμον* τοῦ ἀργύρου (ἐκ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ ἀργύρου = *107,88* καὶ τοῦ σθένους = *1)* ἴσον πρὸς *107,88 gr*.

3) Ἐκ τῆς σταθερᾶς τοῦ Faraday καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν τὸ ἀπαιτούμενον φορτίον q ἴσον πρὸς

$$q = 8632 \ Cb.$$

4) Ἤδη, ἡ ζητουμένη ἔντασις i τοῦ ρεύματος προκύπτει, ἐκ τοῦ τύπου $i = q/t$, ἴση πρὸς

$$\underline{i = 0{,}47 \ A.}$$

Ἄσκησις 6η. *Βολτάμετρον θειϊκοῦ χαλκοῦ συνδέεται ἐν σειρᾷ μὲ συσσωρευτὴν καὶ ἀντίστασιν 2 Ω. Γίνεται ἠλεκτρόλυσις μὲ σταθερὰν ἔντασιν ρεύματος ἐπὶ χρόνον 30 min. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως εὑρίσκεται ἴση πρὸς 3,7 V. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶζα τοῦ ἐπὶ τῆς καθόδου ἐναποτεθέντος χαλκοῦ.*

Λύσις. 1) Ἐὰν καλέσωμεν U τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ δι᾽ αὐτῆς διερχομένου ρεύματος, ἔχομεν, κατὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm,

$$i \cdot R = U.$$

Ἐκ τῶν δεδομένων $R = 2 \ \Omega$ καὶ $U = 3{,}7 \ V$ εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἄνω τύπου, τὴν ἔντασιν i τοῦ ρεύματος ἴσην πρὸς

$$\underline{i = 1{,}85 \ A.}$$

2) Ἐκ τῆς εὑρεθείσης ἐντάσεως i καὶ τοῦ χρόνου t τῆς ἠλεκτρολύσεως εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου $q = i \cdot t$, τὸ φορτίον q ἴσον πρὸς

$$q = 3330 \ Cb.$$

3) Εὑρίσκομεν τὸ *γραμμοϊσοδύναμον* τοῦ χαλκοῦ (ἐκ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους καὶ τοῦ σθένους τοῦ χαλκοῦ) ἴσον πρὸς *31,77 gr*.

4) Ἤδη, ἐκ τῆς σταθερᾶς τοῦ Faraday καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν m τοῦ ἐναποτεθέντος χαλκοῦ ἴσην πρὸς

$$\underline{m = 1{,}1 \ gr.}$$

Ἄσκησις 7η. *Διὰ τὴν τροφοδότησιν λαμπτῆρος μοτοσυκλέτας, τάσεως* *λειτουργίας 4,5 V καὶ ἰσχύος 32 W, διατίθενται τρεῖς ἠλεκτρικαὶ πηγαὶ μεγάλης, σχετικῶς, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως καί, συγκεκριμένως, τρεῖς ξηραὶ στῆλαι (φανοῦ τσέπης), ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ΗΕΔ 4,5 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ λαμπτῆρος, ὅταν οὗτος τροφοδοτηθῇ α) ἀπὸ μίαν μόνον στήλην, β) ἀπὸ τὰς τρεῖς στήλας, συνδεδεμένας ἐν σειρᾷ καὶ γ) ἀπὸ τὰς τρεῖς στήλας, συνδεδεμένας ἐν παραλλήλῳ.*

Λύσις. α) Ἡ ἔντασις i τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ λαμπτῆρος, εἶναι ἴση πρὸς

$$i = \frac{E}{R + R_{\varepsilon\sigma}} \tag{1}$$

ἔνθα E εἶναι ἡ ΗΕΔ τῆς μιᾶς στήλης, R ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος καὶ $R_{\varepsilon\sigma}$ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης. Ἡ ἀντίστασις R τοῦ λαμπτῆρος δὲν δίδεται, προκύπτει, ὅμως, ἐκ τῆς ἰσχύος N τοῦ λαμπτῆρος καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας U αὐτοῦ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου $N = U^2/R$, ἴση πρὸς

$$R = \frac{U^2}{N}. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$i = \frac{E}{\dfrac{U^2}{N} + R_{\varepsilon\sigma}}. \tag{3}$$

Δίδονται: $E = 4{,}5\ V$, $U = 4{,}5\ V$, $N = 32\ W$ καὶ $R_{\varepsilon\sigma} = 1\ \Omega$.
Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν

$$\underline{i = 2{,}76\ A.}$$

β) Ὅταν αἱ τρεῖς στῆλαι συνδέωνται ἐν σειρᾷ, ἡ μὲν ὁλικὴ ΗΕΔ εἶναι $E_{o\lambda} = 3E$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda} = 3R_{\varepsilon\sigma}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ τύπος (3) γράφεται

$$i' = \frac{3E}{\dfrac{U^2}{N} + 3R_{\varepsilon\sigma}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{i' = 3{,}72\ A.}$$

γ) Ὅταν αἱ τρεῖς στῆλαι συνδεθοῦν ἐν παραλλήλῳ, ἡ μὲν ὁλικὴ ΗΕΔ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E τῆς μιᾶς στήλης ($E_{o\lambda} = E$), ἡ δὲ ὁλικὴ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ εὑρίσκεται, ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_{\varepsilon\sigma}} + \frac{1}{R_{\varepsilon\sigma}} + \frac{1}{R_{\varepsilon\sigma}},$$

ἴση πρὸς

$$R_{o\lambda} = \frac{R_{\varepsilon\sigma}}{3}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ τύπος (3) γράφεται

$$i'' = \frac{E}{\dfrac{U^2}{N} + \dfrac{R_{εσ}}{3}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν

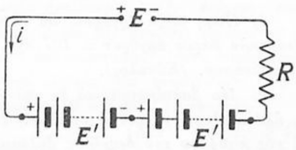
$$i'' = 4{,}66\ A.$$

Ἄσκησις 8η. *Δύο συσσωρευταί, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, ἔχουν ἕκαστος ΗΕΔ 12 V καὶ χωρητικότητα 150 Ah, πρόκειται δέ, συνδεόμενοι ἐν σειρᾷ, νὰ φορτισθοῦν ὑπὸ γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος 110 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν α) ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ παρεντεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα, ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος φορτίσεως λάβῃ τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τιμήν. β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων πυρακτώσεως, ἰσχύος 300 W καὶ τάσεως λειτουργίας 110 V, οἱ ὁποῖοι, συνδεόμενοι μεταξύ των ἐν παραλλήλῳ, δύνανται ν' ἀντικαταστήσουν τὴν ἀντίστασιν ταύτην καὶ γ) ὁ χρόνος φορτίσεως.*

Σημείωσις : *Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ κανόνος τοῦ Kirchhoff εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῶν δύο συσσωρευτῶν ἔχει ἀντίθετον φορὰν πρὸς τὴν ΗΕΔ τῆς πηγῆς φορτίσεως τῶν 110 V.*

Λύσις. α) Ἐφ' ὅσον ἡ χωρητικότης ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι *150 Ah*, ἔπεται ὅτι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος φορτίσεως θὰ εἶναι ἴση πρὸς *15 A*.

Ἄς καλέσωμεν R τὴν ἀντίστασιν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὸ κύκλωμα, E τὴν *ΗΕΔ* τῆς πηγῆς φορτίσεως, E' τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν ἑκάστου συσσωρευτοῦ καὶ i τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος φορτίσεως. Ὁ δεύτερος κανὼν τοῦ Kirchhoff, ἐφαρμοζόμενος εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμα τοῦ ἔναντι σχήματος, δίδει



$$E - E' - E' = i \cdot R.$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὡς πρὸς R λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$R = \frac{E - 2E'}{i}. \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τελικὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$R = 5{,}73\ \Omega.$$

β) Ἐκ τῆς ἰσχύος N καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας U ἑκάστου λαμπτῆρος εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου $N = U^2/R_A$, τὴν ἀντίστασιν R_A αὐτοῦ ἴσην πρὸς

$$R_A = \frac{U^2}{N}. \tag{2}$$

Ἐφ' ὅσον οἱ λαμπτῆρες πρέπει νὰ συνδεθοῦν ἐν παραλλήλῳ, ἡ ὁλικὴ αὐτῶν ἀντίστασις $R_{ολ}$ θὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_A} + \cdots = x \cdot \frac{1}{R_A} \tag{3}$$

ἔνθα x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λαμπτήρων.

Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τῶν ἐν παραλλήλῳ συνδεδεμένων λαμπτήρων ἀντικαθιστᾷ τὴν ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσαν ἀντίστασιν $R = 5{,}73\ \Omega$, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3)

$$x = \frac{U^2}{N \cdot R}. \tag{4}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (4) λαμβάνομεν

$$x = 7 \text{ λαμπτῆρες}.$$

γ) Ὁ χρόνος φορτίσεως προκύπτει, ἐκ τῆς χωρητικότητος *(150 Ah)* καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος φορτίσεως *(i = 15 A)*, ἴσος πρὸς *10* ὥρας.

Ἄσκησις 9η. *Συσσωρευτής, ΗΕΔ 6 V καὶ χωρητικότητος 80 Ah, τροφοδοτεῖ λαμπτῆρα πυρακτώσεως, ἰσχύος 32 W καὶ τάσεως λειτουργίας 6 V. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἐκφορτισθῇ ὁ συσσωρευτής;*

Λύσις. Ἐκ τῆς ἰσχύος *N* καὶ τῆς τάσεως λειτουργίας *U* τοῦ λαμπτῆρος εὑρίσκομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου $N = U \cdot i$, τὴν ἔντασιν *i* τοῦ ρεύματος, τοῦ διαρρέοντος αὐτόν, ἴσην πρὸς

$$i = 5{,}33\ A.$$

Ἤδη, ἐκ τῆς χωρητικότητος τοῦ συσσωρευτοῦ *(80 Ah)* καὶ τῆς εὑρεθείσης ἐντάσεως, προκύπτει ὁ ζητούμενος χρόνος ἴσος πρὸς *15* ὥρας.

Κατηγορία Γ΄

1) Πόση μᾶζα ἀργύρου θὰ ἐλευθερωθῇ ἠλεκτρολυτικῶς διὰ φορτίου 96500 Cb; Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου = 107,88, σθένος = 1. Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. (Εὔκολος). (ΑΠ: *107,88 gr*)

2) Δύο βολτάμετρα, τὸ ἓν χαλκοῦ καὶ τὸ ἄλλο ἀργύρου, συνδέονται ἐν σειρᾷ. Γίνεται ἠλεκτρόλυσις μὲ ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως ἐπὶ ὡρισμένον χρόνον καὶ εὑρίσκεται ὅτι ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ δευτέρου βολταμέτρου ἔχουν ἐπικαθήσει 4 gr ἀργύρου. Πόσος χαλκὸς ἐναπετέθη ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ πρώτου βολταμέτρου; Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63,54, σθένος = 2. Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου = 107,88, σθένος = 1. Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. (Εὔκολος). (ΑΠ: *1,18 gr*)

3) Βολτάμετρον ἀργύρου συνδέεται ἐν σειρᾷ πρὸς βολτάμετρον ὀξυνισμένου ὕδατος, ἔχοντος ἠλεκτρόδια ἐκ λευκοχρύσου. Ἐὰν διὰ τῶν δύο βολταμέτρων διέλθῃ ρεῦμα, ἐντάσεως 10 A, ἐπὶ 3 ὥρας, πόση μᾶζα ἀργύρου καὶ πόση ὀξυγόνου θὰ ἐλευθερωθῇ; Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου =107,88, σθένος =1. Ἀτομικὸν βάρος ὀξυγόνου = 16, σθένος = 2. Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. (Εὔκολος).

(ΑΠ: *120,7 gr, 8,95 gr*)

4) Ρεῦμα, ἐντάσεως 2 A, διέρχεται διὰ δύο βολταμέτρων, συνδεδεμένων ἐν σειρᾷ. Τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι βολτάμετρον ἀργύρου, ἐνῷ τὸ ἄλλο «ἀγνώστου» μετάλλου, ἀτομικοῦ βάρους 55. Ἐντὸς χρόνου 2 ὡρῶν ἀποτίθενται ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ δευτέρου βολταμέτρου 2,73 gr ἐκ τοῦ «ἀγνώστου» μετάλλου. Πόσος ἄργυρος ἐναπετέθη ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου εἰς τὴν κάθοδον τοῦ πρώτου βολταμέτρου καὶ ποῖον τὸ σθένος τοῦ «ἀγνώστου» μετάλλου; Ἀτομικὸν βάρος ἀργύρου = 107,87, σθένος = 1. Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. (Μετρία) (ΑΠ: *16,1 gr, 3*)

5) Διὰ βολταμέτρου χαλκοῦ διέρχεται ρεῦμα, ἐντάσεως 1 A, ἐπὶ χρόνον 1 sec. Πόσα ἄτομα χαλκοῦ θὰ ἐναποτεθοῦν ἐπὶ τῆς καθόδου; Σταθερὰ Loschmidt = $6 \cdot 10^{23}$ *ἄτομα/γραμμοάτομον. Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63,54, σθένος = 2. (Μετρία).* (ΑΠ: $3{,}125 \cdot 10^{18}$ *ἄτομα*)

6) Διὰ βολταμέτρου χαλκοῦ διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 0,7 A. Ἐὰν φορτίον 1 Cb *ἀποθέτῃ ἐπὶ τῆς καθόδου 3,3·10⁻⁴ gr χαλκοῦ, πόσος χαλκὸς θὰ ἐναποτεθῇ ἐντὸς 20 min ; (Εὔκολος).* (ΑΠ: *0,277 gr*)

7) Κατὰ τὴν ἐπιχάλκωσιν ἑνὸς ἀντικειμένου ἐναποτίθενται ἐπ' αὐτοῦ 500 gr χαλκοῦ. Ἐάν, κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν, ἐφαρμόζεται τάσις 3 V, ποῖον θὰ εἶναι τὸ κόστος τῆς ἐπιχαλκώσεως, δεδομένου ὅτι τὸ 1 κιλοβατώριον παρέχεται πρὸς 0,50 δραχμάς ; Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ = 63,54, σθένος = 2. (Μετρία). (ΑΠ: *0,63 δραχμαί*)

8) Δι' ἠλεκτρολύσεως ὀξυνισμένου ὕδατος προέκυψαν 10 cm³ ὀξυγόνου ἐντὸς 1 min, ὑπὸ θερμοκρασίαν 25° C καὶ πίεσιν 780 Torr. Ποία ἦτο ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν ; Σταθερὰ Faraday = 96500 Cb/γραμμοϊσοδύναμον. Ἀτομικὸν βάρος ὀξυγόνου = 16, σθένος = 2. (Μετρία). (ΑΠ: *2,7 A*)

9) Συσσωρευτής, συνδεόμενος ἐν σειρᾷ μὲ ἀντίστασιν 2,5 Ω, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 1 A. Ἐάν, ἐν σειρᾷ μὲ τὴν πρώτην ἀντίστασιν, συνδέσωμεν καὶ δευτέραν, 3 Ω, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττοῦται εἰς 0,5 A. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ΗΕΔ τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ β) ἡ ἐσωτερικὴ του ἀντίστασις. (Εὔκολος). (ΑΠ: *3 V, 0,5 Ω*)

10) Ἐὰν εἰς τοὺς πόλους ἑνὸς ἠλεκτρικοῦ στοιχείου συνδεθῇ ἀντίστασις 10 Ω, τοῦτο διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος, ἐντάσεως 0,1 A. Ὅταν, παραλλήλως πρὸς τὴν ἀντίστασιν ταύτην, συνδεθῇ δευτέρα ἀντίστασις 5 Ω, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος διὰ τοῦ στοιχείου γίνεται ἴση πρὸς 0,18 A. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ΗΕΔ τοῦ στοιχείου. (Μετρία). (ΑΠ: *5 Ω, 1,5 V*)

11) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑνὸς ξηροῦ ἠλεκτρικοῦ στοιχείου, ΗΕΔ 1,45 V, εἶναι ἴση πρὸς 3 Ω. Ἐὰν τὸ στοιχεῖον τοῦτο τροφοδοτῇ μίαν ἀντίστασιν 2 Ω, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους του. (Εὔκολος). (ΑΠ: *0,58 V*)

12) Συσσωρευτὴς ἔχει ΗΕΔ 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Δεύτερος συσσωρευτὴς ἔχει ΗΕΔ 2,5 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω. Εἷς ἀγωγός, ὡρισμένης ἀντιστάσεως, συνδέεται, διαδοχικῶς, μὲ ἕκαστον τῶν δύο συσσωρευτῶν, ὁπότε εὑρίσκεται ὅτι οὗτος διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος τῆς αὐτῆς ἐντάσεως καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ β) ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ. (Εὔκολος). (ΑΠ: *0,5 A, 3 Ω*)

13) Δύο συσσωρευταί, ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως, ἔχουν, ἕκαστος, ΗΕΔ 12 V καὶ χωρητικότητας 160 Ah καὶ 80 Ah, ἀντιστοίχως, πρόκειται δέ, συνδεόμενοι ἐν σειρᾷ, νὰ φορτισθοῦν ὑπὸ γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος, ΗΕΔ 110 V καὶ ἀμελητέας ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως. α) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ παρεντεθῇ εἰς τὸ κύκλωμα, ἵνα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος φορτίσεως λάβῃ τὴν μεγίστην ἐπιτρεπομένην τιμήν. (Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κανονικῆς φορτίσεως, εἰς ἀμπὲρ μετρουμένη, εἶναι, ἀριθμητικῶς, ἴση πρὸς τὸ $^{1}/_{10}$ τῆς χωρητικότητος τοῦ συσσωρευτοῦ, ἐκφραζομένης εἰς ἀμπερώρια). β) Ἐὰν οἱ δύο συσσωρευταὶ ἦσαν, ἀρχικῶς, ἀφόρτιστοι, ἐπὶ πόσον χρόνον ὁ συσσωρευτὴς τῶν 160 Ah δύναται νὰ παρέχῃ ρεῦμα, ἐντάσεως 16 A, ἀφοῦ ἐφορτίσθη ὡς ἀνωτέρω ; (Μετρία). (ΑΠ: *10,75 Ω, 5 ὧραι*)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΖ'

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κατηγορία Α'

Ἄσκησις 1η. *Νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ ἰδιοσυχνότης ἑνὸς κυκλώματος Thomson, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ πυκνωτήν, χωρητικότητος 100 pF* *καὶ πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς $7 \cdot 10^{-6}$ H καὶ β) τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξεπέμπετο ὑπ' αὐτοῦ. (1 pF = 1 πικοφαρὰντ = 10^{-12} F).*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ τύπου, τοῦ παρέχοντος τὴν ἰδιοπερίοδον T_0 ἑνὸς κυκλώματος Thomson

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

καὶ τῆς σχέσεως, τῆς συνδεούσης τὴν ἰδιοσυχνότητα ν_0 μὲ τὴν ἰδιοπερίοδον,

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}$$

λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\nu_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}.}$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $L = 7 \cdot 10^{-6}$ H, $C = 100$ pF $= 100 \cdot 10^{-12}$ F. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu_0 = 6 \cdot 10^6 \ c/sec} \quad ἢ \quad \underline{\nu_0 = 6 \cdot 10^6 \ sec^{-1}.}$$

β) Ἐκ τῆς σχέσεως

$$\lambda \cdot \nu = c,$$

ἡ ὁποία συνδέει τὸ μῆκος κύματος λ, τὴν συχνότητα ν καὶ τὴν ταχύτητα διαδόσεως c τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων, λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$\underline{\lambda = \frac{c}{\nu}.}$$

Εἶναι: $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, εὕρομεν δὲ $\nu = 6 \cdot 10^6 \ sec^{-1}$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 5000 \ cm} \quad ἢ \quad \underline{\lambda = 50 \ m.}$$

Ἄσκησις 2α. *Τὸ μῆκος κύματος τοῦ ῥαδιοφωνικοῦ σταθμοῦ Ἀθηνῶν εἶναι 412 m. Ποία ἡ συχνότης τοῦ σταθμοῦ;*

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου $\lambda \cdot \nu = c$ λαμβάνομεν

$$\underline{\nu = \frac{c}{\lambda}.}$$

Δίδεται: $\lambda = 412$ m $= 41200$ cm, εἶναι δὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Δι' ἀντικαταστάσεως προκύπτει

$$\underline{\nu = 728000 \ c/sec} \quad ἢ \quad \underline{\nu = 728 \ kc/sec.}$$

Κατηγορία Β'

Ἄσκησις 1η. *Παραλλήλως πρὸς τὸν (σταθερὸν) πυκνωτὴν ἑνὸς κυκλώματος Thomson συνδέεται ἕτερος πυκνωτής, μεταβλητῆς χωρητικότητος. Ἐὰν ρυθμίσωμεν τὴν χωρητικότητα τοῦ μεταβλητοῦ πυκνωτοῦ α) εἰς 3000 pF καὶ β) εἰς 6000 pF, ἡ ἰδιοσυχνότης τοῦ κυκλώματος λαμβάνει, ἀντιστοίχως, τὰς τιμὰς 590 c/sec καὶ 500 c/sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ σταθεροῦ πυκνωτοῦ καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.*

Λύσις. Καλοῦμεν C τὴν χωρητικότητα τοῦ σταθεροῦ πυκνωτοῦ, L τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, ν_1, ν_2 τὰς ἰδιοσυχνότητας τοῦ κυκλώματος Thomson εἰς τὰς δύο περιπτώσεις καὶ C_1, C_2 τὰς χωρητικότητας τοῦ μεταβλητοῦ πυκνωτοῦ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις. Ἐφ' ὅσον οἱ δύο πυκνωταὶ συνδέονται ἐν παραλλήλῳ θὰ ἔχωμεν

$$C_{ολ} = C + C_1 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad C'_{ολ} = C + C_2. \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου, διὰ τὰς ἰδιοσυχνότητας ν_1 καὶ ν_2 ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C_{ολ}}} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C'_{ολ}}} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν τοὺς τελικοὺς τύπους

$$\underline{C = \frac{\nu_2^2\cdot C_2 - \nu_1^2\cdot C_1}{\nu_1^2 - \nu_2^2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{L = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{4\pi^2\cdot\nu_1^2\cdot\nu_2^2\cdot(C_2 - C_1)}}.$$

Λύσις εἰς τὸ Πρακτικὸν Σύστημα: Δίδονται: $\nu_1 = 590\ sec^{-1}$, $\nu_2 = 500\ sec^{-1}$, $C_1 = 3000\ pF = 3\cdot 10^{-9}\ F$, $C_2 = 6000\ pF = 6\cdot 10^{-9}\ F$. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{C = 4645\cdot 10^{-12}\ F} \quad (\text{ἢ } \underline{C = 4645\ pF}) \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{L = 9{,}53\ H.}$$

Ἄσκησις 2α. *Τὸ κύκλωμα Thomson ἑνὸς ραδιοφώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ πηνίον, συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς 200 μH καὶ πυκνωτὴν μεταβλητῆς χωρητικότητος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς χωρητικότητος τοῦ ἐν λόγῳ πυκνωτοῦ, ἵνα τὸ κύκλωμα τοῦτο συντονίζεται εἰς ὅλην τὴν περιοχὴν τῶν μεσαίων κυμάτων (μῆκος κύματος ἀπὸ 200 m ÷ 600 m).*

Λύσις. Καλοῦμεν λ_1 καὶ λ_2 τὰ ἄκρα μήκη κύματος τῆς περιοχῆς τῶν μεσαίων κυμάτων, ν_1 καὶ ν_2 τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας, L τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ C_1, C_2 τὰς ἄκρας χωρητικότητας τοῦ μεταβλητοῦ πυκνωτοῦ. Ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\lambda_1\cdot\nu_1 = c \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda_2\cdot\nu_2 = c. \quad (2)$$

Ἀφ' ἑτέρου διὰ τὰς συχνότητας ν_1 καὶ ν_2 ἔχομεν τοὺς τύπους:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C_1}} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C_2}} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν

$$\underline{C_1 = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\cdot L\cdot c^2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \underline{C_2 = \frac{\lambda_2^2}{4\pi\cdot L\cdot c^2}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{C_1 = 56{,}3\cdot 10^{-12}\ F} \ \text{ἢ}\ \underline{C_1 = 56{,}3\ \mu\mu F} \quad \text{καὶ} \quad \underline{C_2 = 500\cdot 10^{-12}\ F} \ \text{ἢ}\ \underline{C_2 = 500\ \mu\mu F.}$$

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΚΘ΄

ΦΩΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΤΟΜΑ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Ἡ ὁρατὴ περιοχὴ τοῦ φάσματος περιορίζεται μεταξὺ τῶν 4000 Å (ἰῶδες) καὶ τῶν 7700 Å (ἐρυθρόν). Ποία ἡ ἐνέργεια τῶν ἀντιστοίχων φωτονίων; (1 Å = 10^{-8} cm).*

Λύσις. Ἡ ἐνέργεια E ἑνὸς φωτονίου εἶναι ἴση πρὸς

$$E = h \cdot \nu \quad \text{ἢ} \quad (\text{ἐπειδὴ } \lambda \cdot \nu = c) \quad \underline{E = h \cdot \frac{c}{\lambda}},$$

ἔνθα ν καὶ λ εἶναι ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας, c ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς καὶ h ἡ σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck.

Δίδονται: $\lambda = 4000$ Å $= 4000 \cdot 10^{-8}$ cm (7700 Å $= 7700 \cdot 10^{-8}$ cm), εἶναι δὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec (βλ. Β΄ τόμος, § 258). Ἀντικαθιστῶντες, λαμβάνομεν διὰ τὰς δύο περιπτώσεις:

$$\underline{E_1 = 4{,}95 \cdot 10^{-12} \text{ erg}} \quad \text{καὶ} \quad \underline{E_2 = 2{,}57 \cdot 10^{-12} \text{ erg}}.$$

Ἄσκησις 2α. *Ποία ἡ συχνότης καὶ ἡ ἐνέργεια τῶν φωτονίων τοῦ κιτρίνου φωτὸς τοῦ νατρίου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος κύματος 5893 Å; (1 Å = 10^{-8} cm).*

Λύσις. α) Ἡ συχνότης ν προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{\nu = \frac{c}{\lambda}}.$$

Δίδεται: $\lambda = 5893$ Å $= 5893 \cdot 10^{-8}$ cm, εἶναι δὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{\nu = 5{,}09 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}}.$$

β) Ἡ ἐνέργεια E τοῦ φωτονίου θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ τύπου

$$\underline{E = h \cdot \nu}.$$

Εὕρομεν: $\nu = 5{,}09 \cdot 10^{14}$ sec^{-1}, εἶναι δὲ $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{E = 3{,}36 \cdot 10^{-12} \text{ erg}}.$$

Ἄσκησις 3η. *Κατὰ τὴν διέγερσιν ἑνὸς ἀτόμου νατρίου, τὸ ἠλεκτρόνιον μεταφέρεται ἐκ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς εἰς ἄλλην τροχιάν, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐνέργεια αὐτοῦ εἶναι κατὰ $3{,}36 \cdot 10^{-12}$ erg μεγαλυτέρα τῆς ἐνερ-*

γείας, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἠλεκτρόνιον, ὅταν κινῆται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας, ἡ ὁποία θὰ ἐκπεμφθῇ, ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θεμελιώδη τροχιάν.

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν E_1 τὴν ἐνέργειαν τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τὴν τροχιάν, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο μονίμως περιφέρεται (θεμελιώδης τροχιὰ) καὶ E_2 τὴν ἐνέργειαν εἰς τὴν τροχιὰν τῆς μεγαλυτέρας ἀκτῖνος τότε, κατὰ τὴν ἐπάνοδον τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς τὴν θεμελιώδη τροχιάν, ἐκπέμπεται ἓν φωτόνιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἐνέργεια $h\nu$ θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$h \cdot \nu = E_2 - E_1. \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\lambda \cdot \nu = c. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸν τελικὸν τύπον

$$\underline{\lambda = \frac{h \cdot c}{E_2 - E_1}}. \tag{3}$$

Δίδεται: $E_2 - E_1 = 3,36 \cdot 10^{-12}$ erg, εἶναι δὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ $erg \cdot sec$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$\underline{\lambda = 5893 \cdot 10^{-8}\ cm} \quad \text{ἢ} \quad \underline{\lambda = 5893\ \mathring{A}}.$$

Ἄσκησις 4η. *Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι 63,54. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ α) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμοατόμου χαλκοῦ, β) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου χαλκοῦ καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων τοῦ χαλκοῦ, τῶν περιεχομένων εἰς 1 cm^3 χαλκοῦ. (Πυκνότης χαλκοῦ $= 8,9$ gr/cm^3, μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου $= 1,67 \cdot 10^{-24}$ gr).*

Σημείωσις: Ὁ ὁρισμὸς τοῦ *γραμμοατόμου* δίδεται, κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὅπως ὁ ὁρισμὸς τοῦ γραμμομορίου. Οὕτω καλοῦμεν ***γραμμοάτομον*** ἑνὸς στοιχείου τὴν ποσότητα ἐκείνην, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν τόσων γραμμαρίων ὅσον εἶναι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ στοιχείου.

Λύσις. α) Ἐφ' ὅσον τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ εἶναι *63,54*, ἕπεται ὅτι ἡ μᾶζα ἑνὸς *γραμμοατόμου* χαλκοῦ θὰ εἶναι ἴση πρὸς *63,54* gr.

β) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους A τοῦ χαλκοῦ

$$A = \frac{m_{\text{ἀτόμου χαλκοῦ}}}{m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}}$$

λαμβάνομεν διὰ τὴν μᾶζαν ἑνὸς ἀτόμου χαλκοῦ:

$$\underline{m_{\text{ἀτόμου χαλκοῦ}} = A \cdot m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{m_{\text{ἀτόμου χαλκοῦ}} = 106,1 \cdot 10^{-24}\ gr.}$$

γ) Ἐκ τῆς πυκνότητος τοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρὸς *8,9* gr/cm^3, προκύπτει ὅτι ἓν cm^3 χαλκοῦ ἔχει μᾶζαν *8,9* gr. Ἤδη σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ μᾶζα $106,1 \cdot 10^{-24}$ gr ἀντιστοιχεῖ εἰς *1* ἄτομον χαλκοῦ
μᾶζα *8,9* gr εἰς πόσα ἄτομα ἀντιστοιχεῖ;

Ἐκ τοῦ συλλογισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι εἰς ἓν cm^3 χαλκοῦ ὑπάρχουν $8,388 \cdot 10^{22}$ ἄτομα χαλκοῦ.

Ἄσκησις 5η. *Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου (O_2) εἶναι 16. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ α) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὀξυγόνου. β) Ἡ μᾶζα ἑνὸς μορίου ὀξυγόνου καὶ γ) ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου. (Μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr).*

Λύσις. α) Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους A τοῦ ὀξυγόνου,

$$A = \frac{m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}}}{m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}},$$

εὑρίσκομεν διὰ τὴν μᾶζαν ἑνὸς ἀτόμου ὀξυγόνου:

$$\underline{m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}} = A \cdot m_{\text{ἀτόμου ὑδρογόνου}}}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{m_{\text{ἀτόμου ὀξυγόνου}} = 26{,}72 \cdot 10^{-24} \ gr.}$$

β) Δεδομένου ὅτι τὸ μόριον τοῦ ὀξυγόνου ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀτόμων ὀξυγόνου, ἡ μᾶζα τοῦ μορίου τοῦ ὀξυγόνου θὰ εἶναι διπλασία τῆς μάζης τοῦ ἀτόμου τοῦ ὀξυγόνου - ἤτοι εἶναι

$$\underline{m_{\text{μορίου ὀξυγόνου}} = 53{,}44 \cdot 10^{-24} \ gr.}$$

γ) Ἐπειδὴ τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου εἶναι *32*, ἔπεται ὅτι ἡ μᾶζα ἑνὸς γραμμομορίου ὀξυγόνου θὰ εἶναι ἴση πρὸς *32 gr*.

Κατηγορία Β′

Ἄσκησις 1η. *Πόσα γραμμομόρια περιέχει 1 m^3 ὑδρογόνου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, δηλ., ὑπὸ θερμοκρασίαν $0°$ C καὶ πίεσιν 760 Torr;*

Λύσις. Δεδομένου ὅτι, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, *22,4 λίτρα* οἱουδήποτε ἀερίου ἔχουν μᾶζαν ἑνὸς *γραμμομορίου (1 Mol)* ἔπεται ὅτι *22,4 λίτρα* ὑδρογόνου θὰ ἔχουν μᾶζαν *2 gr*. Ἑπομένως, τὸ *1 m^3* ὑδρογόνου $=$ *1000 λίτρα* ὑδρογόνου θὰ ἔχῃ μᾶζαν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἴση πρὸς *44,64 γραμμομόρια*.

Ἄσκησις 2α. *Νὰ εὑρεθῇ α) ἡ μᾶζα 1 m^3 ὀξυγόνου (O_2) ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας. β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς αὐτοῦ περιεχομένων ἀτόμων ὀξυγόνου καὶ γ) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς αὐτοῦ περιεχομένων μορίων ὀξυγόνου. (Ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου $= 16$, μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr).*

Λύσις. α) Τὸ *γραμμομόριον* τοῦ ὀξυγόνου ἔχει μᾶζαν *32 gr* (ἀφοῦ τὸ μοριακόν του βάρος εἶναι ἴσον πρὸς *32*). Ἐπειδὴ γνωρίζομεν ὅτι *1 γραμμομόριον* ὀξυγόνου — ἤτοι *32 gr* — καταλαμβάνει, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ὄγκον *22,4 λίτρων*, εὑρίσκομεν, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ὅτι *1 m^3 (= 1000 λίτρα)* ὀξυγόνου θὰ ἔχῃ μᾶζαν *1428 gr*.

β) Ἐκ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ ὀξυγόνου καὶ τῆς μάζης τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν τοῦ ἀτόμου τοῦ ὀξυγόνου ἴσην πρὸς $26{,}72 \cdot 10^{-24}$ gr (βλ. 5ην ἄσκησιν τῆς Κατηγορίας Α′).

Ἤδη, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς *1428 gr* ὀξυγόνου περιέχονται $5{,}34 \cdot 10^{25}$ ἄτομα ὀξυγόνου.

γ) Δεδομένου ὅτι ἓν μόριον ὀξυγόνου ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀτόμων ὀξυγόνου, ἔπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μορίων θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων, δηλ., θὰ εἶναι ἴσος πρὸς $2{,}67 \cdot 10^{25}$.

Κατηγορία Γ'

1) Ποία ἡ συχνότης ἐκείνης τῆς ἀκτινοβολίας, τῆς ὁποίας τὰ φωτόνια ἔχουν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς 1 keV ; (1 keV = κιλοηλεκτρονικὸν βὸλτ = 10^3 eV = $1{,}6\cdot 10^{-9}$ erg). Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = $6{,}6\cdot 10^{-27}$ erg·sec. (Εὔκολος).

(ΑΠ: $2{,}4\cdot 10^{17}$ sec^{-1})

2) Πόσα ἄτομα ἡλίου (He) περιέχονται εἰς ἓν λίτρον ἡλίου, εὑρισκομένου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας καὶ ποία ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ἡλίου ; Τὸ ἥλιον εἶναι μονατομικὸν καὶ ἔχει ἀτομικὸν βάρος 4. Σταθερὰ Loschmidt = $6\cdot 10^{23}$ ἄτομα/γραμμοάτομον. (Μετρία).

(ΑΠ: $2{,}68\cdot 10^{22}$ ἄτομα)

3) Πόσα φωτόνια ἐρυθρᾶς ἀκτινοβολίας, μήκους κύματος 7500 Å, πρέπει ν' ἀπορροφηθοῦν ὑπὸ 1 gr ὕδατος διὰ ν' αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία του κατὰ 1° C ; Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς φωτονίων δι' ὑπεριώδη ἀκτινοβολίαν, μήκους κύματος 3000 Å. Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = $6{,}6\cdot 10^{-27}$ erg·sec. Εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος = 1 cal/gr·grad. 1 Å = 10^{-8} cm. (Εὔκολος). (ΑΠ: $1{,}59\cdot 10^{19}$ φωτόνια)

4) Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ περιστρέφεται τὸ ἠλεκτρόνιον τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου διὰ νὰ δύναται νὰ διαγράφῃ κυκλικὴν τροχιάν, ἀκτῖνος ἴσης πρὸς $5{,}29\cdot 10^{-9}$ cm ; Ποία εἶναι ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου ; Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = = $4{,}8\cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου = $9{,}1\cdot 10^{-28}$ gr. (Δύσκολος).

(ΑΠ: $2{,}19\cdot 10^{8}$ cm/sec, $6{,}59\cdot 10^{15}$ sec^{-1})

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Λ'

ΑΚΤΙΝΕΣ ROENTGEN

Παρατήρησις : **Εἰς τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις θεωροῦμεν ὅτι, κατὰ τὴν πρόσπτωσιν ἑνὸς ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς ἀνόδου, ἡ κινητική του ἐνέργεια μετατρέπεται ἐξ ὁλοκλήρου εἰς ἓν φωτόνιον ἀκτίνων Roentgen.**

1) Ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ καθόδου καὶ ἀνόδου ἑνὸς σωλῆνος ἀκτίνων Roentgen εἶναι ἴση πρὸς U, νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς συχνότητος ν τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας Roentgen καὶ τῆς τάσεως U. (Δύσκολος).

$$\left(\text{ΑΠ}:\quad \nu = \frac{e}{h}\cdot U\right)$$

2) Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἡ τάσις U εἶναι ἴση πρὸς 300 000 V, ποῖον θὰ εἶναι τὸ μῆκος κύματος τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας Roentgen ; Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = $6{,}6\cdot 10^{-27}$ erg·sec. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = $4{,}8\cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. 1 V = 1/300 ΗΣΜ - τάσεως. Ταχύτης τοῦ φωτὸς c = $3\cdot 10^{10}$ cm/sec. 1 Å = 10^{-8} cm. (Δύσκολος).

$$\left(\text{ΑΠ}:\quad \lambda = \frac{c\cdot h}{e\cdot U} = 4{,}125\cdot 10^{-2}\ \text{Å}\right)$$

3) Ἐὰν ἡ ὑψηλὴ τάσις, ἡ ἐφαρμοζομένη μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου ἑνὸς σωλῆνος ἀκτίνων Roentgen, τετραπλασιασθῇ, κατὰ πόσον θὰ μεταβληθῇ τὸ ἀντίστοιχον μῆκος κύματος τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας Roentgen ; (Δύσκολος).

(ΑΠ: Θὰ ὑποτετραπλασιασθῇ)

4) Σωλὴν ἀκτίνων Roentgen ἐργάζεται ὑπὸ ὑψηλὴν τάσιν 12,5 kV. Μὲ ποίαν ταχύτητα προσπίπτουν τὰ ἠλεκτρόνια ἐπὶ τῆς ἀνόδου ; Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου = $9{,}1\cdot 10^{-28}$ gr. Φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου = $4{,}8\cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου. 1 V = 1/300 ΗΣΜ - τάσεως. (Δύσκολος). (ΑΠ: $6{,}65\cdot 10^{9}$ cm/sec)

5) Ποίαν κινητικὴν ἐνέργειαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν ἠλεκτρόνιον, τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν *πρόσπτωσίν του ἐπὶ τῆς ἀνόδου ἑνὸς σωλῆνος ἀκτίνων Roentgen, παράγει ἀκτινοβολίαν Roentgen, μήκους κύματος 1 Å; Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = 6,6·10⁻²⁷ erg·sec. 1 Å = 10⁻⁸ cm. Ταχύτης τοῦ φωτὸς c = 3·10¹⁰ cm/sec. (Δύσκολος).*

(ΑΠ: $1,98 \cdot 10^{-8}$ *erg*)

6) *Ποία τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ καθόδου καὶ ἀνόδου ἑνὸς σωλῆνος ἀκτίνων Roentgen διὰ νὰ παραχθῇ ἀκτινοβολία, μήκους κύματος 1 Å; Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = 6,6·10⁻²⁷ erg·sec·1 V = 1/300 ΗΣΜ - τάσεως. 1 Å = 10⁻⁸ cm. (Δύσκολος).*

(ΑΠ: 12400 *V*)

7) *Ποία τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ καθόδου καὶ ἀνόδου ἑνὸς σωλῆνος ἀκτίνων Roentgen διὰ νὰ δώσῃ οὗτος φωτόνια ἐνεργείας 4,8·10⁻⁷ erg; 1 eV = 1,6·10⁻¹² erg. (Δύσκολος).*

(ΑΠ: 300 000 *V*)

ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΛΑ΄, ΛΒ΄, ΛΓ΄

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΟΣ - ΑΣΤΑΘΕΙΣ ΠΥΡΗΝΕΣ - ΤΕΧΝΗΤΗ ΔΙΑΣΠΑΣΙΣ ΤΟΥ ΠΥΡΗΝΟΣ

Κατηγορία Α΄

Ἄσκησις 1η. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν μᾶζαν 1 gr α) εἰς erg, β) εἰς kWh καὶ γ) εἰς cal.*

Λύσις. α) Κατὰ τὸν τύπον

$$\underline{E = m \cdot c^2,}$$

(ἔνθα c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς $= 3 \cdot 10^{10}$ *cm/sec*), μᾶζα m ἑνὸς γραμμαρίου ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἐνέργειαν E ἴσην πρὸς

$$E = 1 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2\ gr \cdot cm^2/sec^2 = 9 \cdot 10^{20}\ gr \cdot cm/sec^2 \cdot cm = 9 \cdot 10^{20}\ dyn \cdot cm$$

ἢ

$$\underline{E = 9 \cdot 10^{20}\ erg.}$$

β) Ἐπειδὴ εἶναι $1\ kWh = 1 \cdot 3600\ kW \cdot sec = 3{,}6 \cdot 10^6\ W \cdot sec = 3{,}6 \cdot 10^6\ Joule$ καὶ $1\ Joule = 10^7\ erg$, ἔχομεν $1\ kWh = 3{,}6 \cdot 10^{13}\ erg$. Ἑπομένως, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, προκύπτει ὅτι ἡ ἄνω ἐνέργεια εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{E = 25 \cdot 10^6\ kWh.}$$

γ) Ἐπειδὴ $1\ cal = 4{,}2\ Joule$ καὶ $1\ Joule = 10^7\ erg$ προκύπτει ὅτι

$$\underline{E = 2{,}1 \cdot 10^{13}\ cal.}$$

Ἄσκησις 2α. *Κατὰ τὴν σχάσιν ἑνὸς πυρῆνος U^{235} ἐξαφανίζεται, περίπου, $1\,^0/_{00}$ τῆς μάζης του. Ποία ἡ ἐκλυομένη ἐνέργεια εἰς erg καὶ cal; (Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ὑδρογόνου $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr).*

Λύσις. Ἐκ τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ οὐρανίου ($A = 235$) καὶ τῆς μάζης ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν ἑνὸς ἀτόμου οὐρανίου ἴσην πρὸς $392{,}45 \cdot 10^{-24}\ gr$. Τὸ χιλιοστὸν αὐτῆς — δηλ. $392{,}45 \cdot 10^{-27}\ gr$ — μετατρεπόμενον εἰς ἐνέργειαν, εἶναι, κατὰ τὸν τύπον $E = m \cdot c^2$, ἴσον πρὸς

$$\underline{E = 353{,}2 \cdot 10^{-6}\ erg.}$$

Ἐπειδὴ $1\ cal = 4{,}2\ Joule$ καὶ $1\ Joule = 10^7\ erg$, προκύπτει ὅτι

$$\underline{E = 84 \cdot 10^{-13}\ cal.}$$

Κατηγορία Β΄

Ἄσκησις 1η. *Ἡ τάσις, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται μεταξὺ ἀνόδου καὶ καθόδου μιᾶς διόδου ἠλεκτρονικῆς λυχνίας εἶναι 100 V. Ζητοῦνται: α) ποία ἡ ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν ἓν ἠλεκτρόνιον προσκρούει ἐπὶ τῆς ἀνόδου, ἐὰν κατὰ τὴν ἐξαγωγήν του ἐκ τῆς καθόδου εἶχε ταχύτητα μηδὲν καὶ β) πόσα ἠλεκτρόνια πρέπει νὰ προσπέσουν ἐπὶ τῆς ἀνόδου, ἵνα, κατὰ τὴν κροῦσιν, παραχθῇ θερμότης ἴση πρὸς 1 cal. (Μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου* $= 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ *gr, φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου* $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου).*

Λύσις. α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἓν σωμάτιον, φορτισμένον μὲ φορτίον q, ὅταν κινηθῇ μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ U, παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = q \cdot U. \qquad \text{(βλ. Β τόμος, § 287)}$$

Ὅταν τὸ κινούμενον σωμάτιον εἶναι ἠλεκτρόνιον — τοῦ ὁποίου τὸ φορτίον εἶναι ἴσον πρὸς e — ὁ ἄνω τύπος γράφεται

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot U. \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου λαμβάνομεν διὰ τὴν ταχύτητα v τοῦ ἠλεκτρονίου:

$$\underline{v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U}.}$$

Λύσις εἰς τὸ Ἠλεκτροστατικὸν Σύστημα μονάδων: Δίδονται: $U = 100\ V = 100/300$ *ΗΣΜ - τάσεως*, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου* καὶ $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ *gr*. Ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν

$$\underline{v = 5{,}93 \cdot 10^8\ cm/sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \underline{v = 5930\ km/sec.}$$

β) Τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (1) ὑπολογίζομεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἑνὸς ἠλεκτρονίου, τὸ ὁποῖον ἐκινήθη μεταξὺ τῆς καθόδου καὶ τῆς ἀνόδου, ἴσην πρὸς

$$E_{κιν} = 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ erg.$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτή, κατὰ τὴν κροῦσιν ἐπὶ τῆς ἀνόδου, μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Ἐπειδὴ $1\ cal = 4{,}2\ Joule$ καὶ $1\ Joule = 10^7\ erg$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου (ἐκφραζομένη εἰς *cal*) εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{κιν} = 38{,}09 \cdot 10^{-19}\ cal.$$

Ἤδη, διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, εὑρίσκομεν ὅτι διὰ ν' ἀναπτυχθῇ ἐπὶ τῆς ἀνόδου θερμότης ἴση πρὸς *1 cal*, πρέπει νὰ προσπέσουν ἐπ' αὐτῆς

$$\underline{2{,}6 \cdot 10^{17}\ \text{ἠλεκτρόνια.}}$$

Ἄσκησις 2α. *Σωλὴν διαυλικῶν ἀκτίνων περιέχει ὑδρογόνον, μεταξὺ δὲ ἀνόδου καὶ καθόδου ἐφαρμόζεται τάσις 2500 V. Ζητοῦνται: α) ποία ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχῃ ἓν πρωτόνιον (πυρὴν ὑδρογόνου), ὅταν διέλθῃ διὰ τῆς ὀπῆς τῆς καθόδου, ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ταχύτης αὐτοῦ πλησίον τῆς ἀνόδου ἦτο μηδὲν καὶ β) κατὰ πόσον πρέπει ν' αὐξηθῇ ἡ ἀνοδικὴ τάσις, ἵνα ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου, κατὰ τὴν δίοδον διὰ τῆς ὀπῆς τῆς καθόδου, διπλασιασθῇ. (Μᾶζα τοῦ πρωτονίου* $= 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ *gr).*

Λύσις. α) Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ φορτίον τοῦ πρωτονίου εἶναι, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἴσον πρὸς τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου εὑρίσκομεν, κατόπιν ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον

$$\underline{v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U}} \qquad (1)$$

ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου εἶναι ἴση πρὸς

$$\underline{v = 6{,}92 \cdot 10^7 \ cm/sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{v = 692 \ km/sec.}$$

β) Κατὰ τὸν τύπον (1), ἐὰν τετραπλασιάσωμεν τὴν τάσιν U, ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου θὰ διπλασιασθῇ.

Ἄσκησις 3η. *Τὸ ἠλεκτρονικὸν βόλτ (1 eV) εἶναι ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἓν ἠλεκτρόνιον, ὅταν κινηθῇ μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ 1 V. Πρὸς πόσα ἠλεκτρονικὰ βόλτ ἰσοῦται α) 1 erg καὶ β) 1 cal;*

Λύσις. α) Ἐὰν εἰς τὸν τύπον

$$A = q \cdot U,$$

ὁ ὁποῖος παρέχει τὸ ἔργον A, τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ φορτίου q μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ U, θέσωμεν, ἀντὶ τοῦ q, τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς *ΗΣΜ - φορτίου* καὶ ἀντὶ τοῦ U, τὸ $1V$ εἰς *ΗΣΜ - τάσεως*, θὰ λάβωμεν

$$1 \ eV = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 1/300 \ erg \quad \text{ἢ} \quad 1 \ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12} \ erg.$$

Διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκομεν ὅτι

$$\underline{1 \ erg = 62{,}5 \cdot 10^{10} \ eV.}$$

β) Ἐπειδὴ $1 \ cal = 4{,}2 \ Joule$ καὶ $1 \ Joule = 10^7 \ erg$ προκύπτει ὅτι

$$\underline{1 \ cal = 2{,}6 \cdot 10^{19} \ eV.}$$

Ἄσκησις 4η. *Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς σωματίου α, τὸ ὁποῖον ἐκπέμπεται ὑπό τινος ραδιενεργοῦ πυρῆνος, εἶναι ἴση πρὸς 10,5 MeV. Ποία ἡ ταχύτης τοῦ σωματίου; (1 MeV = 1 μεγαηλεκτρονικὸν βόλτ = 10^6 eV = = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Joule. Μᾶζα τοῦ ἀτόμου τοῦ ἡλίου = $6{,}7 \cdot 10^{-24}$ gr).*

Λύσις. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς κινητικῆς ἐνεργείας $E = 1/2 \cdot mv^2$ προκύπτει διὰ τὴν ταχύτητα v τοῦ σωματίου:

$$\underline{v = \sqrt{\frac{2E}{m}}} \cdot \qquad (1)$$

Λύσις εἰς τὸ σύστημα C.G.S.: Δίδονται: $E = 10{,}5 \ MeV = 10{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ $Joule = 16{,}8 \cdot 10^{-6} \ erg$ (δεδομένου ὅτι $1 \ Joule = 10^7 \ erg$) καὶ $m = 6{,}7 \cdot 10^{-24} \ gr$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$\underline{v = 22{,}4 \cdot 10^8 \ cm/sec} \quad \text{ἢ} \quad \underline{v = 22400 \ km/sec.}$$

Ἄσκησις 5η. *Πρωτόνιον, τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ διανύει ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ $1 \cdot 10^6$ V. Ποία θὰ εἶναι ἡ κι-*

νητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου (εἰς erg καὶ εἰς eV) εἰς τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς του καὶ ποία ἡ ταχύτης του;

Λύσις. α) Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{2}\, m \cdot v^2 = e \cdot U, \qquad (1)$$

δεδομένου ὅτι τὸ φορτίον τοῦ πρωτονίου εἶναι, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἴσον πρὸς τὸ φορτίον e τοῦ ἠλεκτρονίου. Δίδεται: $U = 10^6\ V = 10^6/300$ *ΗΣΜ - τάσεως* $= 0{,}33 \cdot 10^4$ *ΗΣΜ - τάσεως*, εἶναι δὲ $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου*.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$E_{\kappa\iota\nu} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ erg.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ βὸλτ προκύπτει, ἀμέσως, ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου, ἐκφραζομένη εἰς eV, θὰ εἶναι ἴση πρὸς

$$E_{\kappa\iota\nu} = 10^6\ eV.$$

β) Ἡ ταχύτης v τοῦ πρωτονίου προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (1) ἴση πρὸς

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U}. \qquad (2)$$

Δίδονται: $U = 10^6\ V = 0{,}33 \cdot 10^4$ *ΗΣΜ - τάσεως*, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ *ΗΣΜ - φορτίου* καὶ $m = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (2) εὑρίσκομεν

$$v = 13{,}8 \cdot 10^8\ cm/sec \qquad \text{ἢ} \qquad v = 13800\ km/sec.$$

Ἄσκησις 6η. *Πόση μᾶζα ἰσοδυναμεῖ πρὸς ἐνέργειαν α) 1 eV καὶ β) 1 kgr*·m;*

Λύσις. α) Κατὰ τὸν τύπον $E = m \cdot c^2$ ἡ μᾶζα m, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἐνέργειαν E, εἶναι ἴση πρὸς

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad (1)$$

ἔνθα c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μᾶζαν m εἰς gr πρέπει νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἐνέργειαν $1\ eV$ εἰς *ἔργια*. Πρὸς τοῦτο καταφεύγομεν εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ *ἠλεκτρονικοῦ βόλτ*, βάσει τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ὅτι

$$1\ eV = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 1/300\ erg = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg \quad (\text{βλ. } 3^{\eta\nu} \text{ ἄσκησιν}).$$

Λαμβάνοντες τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς εἰς τὸ σύστημα C.G.S. ($c = 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec$) καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$m = 1{,}77 \cdot 10^{-33}\ gr.$$

β) Ἐπειδὴ εἶναι $1\ kgr^* \cdot m = 981000\ dyn \cdot 100\ cm = 9{,}81 \cdot 10^7\ erg$, ὁ τύπος (1) δίδει

$$m = 1{,}09 \cdot 10^{-13}\ gr.$$

Κατηγορία Γ'

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς Z τῶν πρωτονίων καὶ ὁ ἀριθμὸς N τῶν νετρονίων τῶν ἑξῆς πυρήνων: ${}_2He^4$, ${}_8O^{16}$, ${}_{92}U^{235}$. *(Εὔκολος).*

(ΑΠ: $Z = 2,\ 8,\ 92,\quad N = 2,\ 8,\ 143$)

2) Πυρὴν ῥαδίου ($_{88}Ra^{226}$) διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου α ($_2He^4$). Ποῖος εἶναι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος; (Εὔκολος). (ΑΠ: *86, 222*)

3) Ποῖον τὸ μῆκος κύματος μιᾶς ἀκτινοβολίας γ, τῆς ὁποίας τὰ φωτόνια ἔχουν ἐνέργειαν 1 MeV; (1 MeV = 10^6 eV = $1,6 \cdot 10^{-6}$ erg). Σταθερὰ δράσεως τοῦ Planck = $= 6,6 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. (Εὔκολος). (ΑΠ: *$1,24 \cdot 10^{-11}$ cm = $1,24 \cdot 10^{-3}$ Å*)

4) Ὁ ῥαδιενεργὸς ἄνθραξ ($^*{}_6C^{14}$) διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματίου β ($_{-1}e^0$). Ποῖος εἶναι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς καὶ ποῖος ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος; (Εὔκολος). (ΑΠ: *7, 14*)

5) Ἓν νετρόνιον ($_0n^1$) ἐνσωματοῦται εἰς πυρῆνα οὐρανίου 238 ($_{92}U^{238}$). Ποῖος εἶναι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς καὶ ποῖος ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος πυρῆνος; (Εὔκολος). (ΑΠ: *92, 239*)

6) Ὁ ῥαδιενεργὸς φωσφόρος $^*{}_{15}P^{30}$ διασπᾶται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου ($_1e^0$). Ποῖος εἶναι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς τοῦ προκύπτοντος θυγατρικοῦ πυρῆνος; (Εὔκολος). (ΑΠ: *14, 30*)

$= \cancel{10} \; 1{,}6 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{4} \cdot 10^{3} \approx 1{,}6 \cdot 1$