56

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑ ΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑ Α.Ε.

1961.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ III

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

« Γραφικαὶ Τέχναι » Ἰ. Μακρῆς, Παπαδιαμαντοπούλου 44, Ἀθῆναι

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ
Διευθυντοῦ τῆς Βαρβακείου Προτύπου Σχολῆς
τοῦ Διδασκαλείου Μέσης Ἐκπαιδεύσεως

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΑ ΤΑ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΣΠΟΥΔΑΣΤΑΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ
ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑ Α.Ε.

Ἡ ἔκδοσις τοῦ βιβλίου «Προβλήματα Φυσικῆς» ἔχει σκοπὸν νὰ ἐξυπηρετήσῃ ἐκείνους τοὺς νέους μας, οἱ ὁποῖοι, γοητευμένοι ἀπὸ τὴν ὡραιότητα τῆς Φυσικῆς καὶ τὰ θαύματα τῆς Τεχνικῆς, ἀσχολοῦνται σήμερον μὲ προβλήματα τῆς Φυσικῆς, διὰ νὰ ἀσχοληθοῦν αὔριον μὲ θέματα τῆς Ἐπιστήμης καὶ τῆς Τεχνικῆς.

Εὐχαριστοῦμεν θερμῶς τοὺς ἐκλεκτοὺς συναδέλφους ἐν τῇ Βαρβακείῳ Προτύπῳ Σχολῇ κ. κ. Ἰ. Ταμβακλῆν, Καθηγητὴν τῶν Μαθηματικῶν, καὶ Ὀ. Λαβρᾶνον, Καθηγητὴν τῶν Τεχνικῶν, οἵτινες συνέβαλον εἰς τὴν ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν τοῦ βιβλίου τούτου.

Α. Ε. ΜΑΖΗΣ

Ἀθῆναι, Ἰούλιος 1961

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΓΝΗΤΩΝ

1. Δύο βόρειοι μαγνητικοὶ πόλοι ἀπέχουν μεταξύ των 5 cm. Ἕκαστος πόλος ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 80 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἀμοιβαία ἄπωσις τῶν πόλων τούτων;

Ἡ μεταξὺ δύο μαγνητικῶν πόλων ἀσκουμένη δρᾶσις δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb:

$$F = \frac{m_1 \cdot m_2}{\alpha^2}$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὅτι εἶναι:

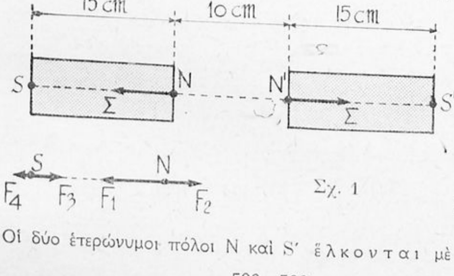
$$m_1 = m_2 = +80 \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha = 5 \text{ cm}$$

Ἡ ἀμοιβαία ἄπωσις τῶν δύο πόλων εἶναι:

$$F = \frac{80 \cdot 80}{25} \text{ dyn} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{F = 256 \text{ dyn}}$$

2. Δύο ὅμοιοι εὐθύγραμμοι μαγνῆται ἔχουν μῆκος 15 cm, ἕκαστος δὲ πόλος των ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 500 C.G.S. Οἱ δύο μαγνῆται εὑρίσκονται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατὰ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἔχουν τοὺς βορείους πόλους των ἀπέναντι ἀλλήλων. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βορείων πόλων εἶναι 10 cm. Πόση εἶναι ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑκάστου μαγνήτου;

Δίδεται ὅτι ἡ ποσότης μαγνητισμοῦ ἑκάστου πόλου τῶν δύο μαγνητῶν εἶναι $m = 500$ C.G.S. καὶ ὅτι ἡ ἀπόστασις NN′ τῶν δύο βορείων πόλων των εἶναι $NN' = 10$ cm.



Σχ. 1

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν δρᾶσιν, τὴν ὁποίαν ἀσκοῦν οἱ δύο πόλοι τοῦ μαγνήτου N′S′ ἐπὶ τῶν δύο πόλων τοῦ μαγνήτου NS (σχ. 1).

α) Δράσεις ἐπὶ τοῦ πόλου N.

Οἱ δύο ὁμώνυμοι πόλοι N καὶ N′ ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν:

$$F_1 = \frac{m \cdot m}{\alpha^2} = \frac{500 \cdot 500}{10^2} = 2500 \text{ dyn}$$

Οἱ δύο ἑτερώνυμοι πόλοι N καὶ S′ ἕλκονται μὲ δύναμιν:

$$F_2 = \frac{500 \cdot 500}{(10 + 15)^2} \text{ dyn} = \frac{500 \cdot 500}{25^2} \text{ dyn} = 400 \text{ dyn}$$

β) Δράσεις ἐπὶ τοῦ πόλου S.

Οἱ δύο ἑτερώνυμοι πόλοι S καὶ N′ ἕλκονται μὲ δύναμιν:

$$F_3 = \frac{500 \cdot 500}{(10 + 15)^2} \text{ dyn} = \frac{500 \cdot 500}{25^2} \text{ dyn} = 400 \text{ dyn}$$

Οἱ δύο ὁμώνυμοι πόλοι S καὶ S′ ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν:

$$F_4 = \frac{500 \cdot 500}{(15 + 10 + 15)^2} \text{ dyn} = \frac{500 \cdot 500}{40^2} \text{ dyn} = 156{,}25 \text{ dyn}$$

Οὕτω ἐπὶ τοῦ μαγνήτου NS ἀσκοῦνται ἐκ μέρους τοῦ μαγνήτου N′S′ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἄπωσις ἴση μέ:

$$F = F_1 + F_4 = 2500 + 156{,}25 = 2656{,}25 \text{ dyn}$$

καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ἕλξις ἴση μέ:

$$F' = F_2 + F_3 = 400 + 400 = 800 \text{ dyn}$$

Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων F καὶ F′ εἶναι ἄπωσις ἴση μέ:

$$\Sigma = F - F' = 2656{,}25 \text{ dyn} - 800 \text{ dyn} = 1856{,}25 \text{ dyn}$$

Ὥστε ἕκαστος τῶν δύο μαγνητῶν ἀπωθεῖται μὲ δύναμιν:

$$\mathbf{\Sigma = 1856{,}25 \text{ dyn}}$$

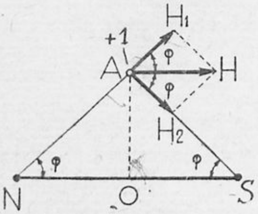
3. Βόρειος μαγνητικὸς πόλος ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 1000 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 5 cm;

Ὁ βόρειος μαγνητικὸς πόλος N ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $m = 1000$ C.G.S. Ζητεῖται ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον A, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\alpha = 5$ cm ἀπὸ τὸν πόλον N, δηλαδὴ ζητεῖται ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ ποσότητος μαγνητισμοῦ $m' = 1$ C.G.S., φερομένης εἰς τὸ σημεῖον A. Ἡ δύναμις αὐτή, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι:

$$H = \frac{m \cdot m'}{\alpha^2} = \frac{m \cdot 1}{\alpha^2} = \frac{m}{\alpha^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{1000}{25} \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 40 \text{ Gauss}}$$

4. Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μῆκος 8 cm καὶ ἕκαστος πόλος του ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 400 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον A, εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου καὶ εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπὸ τὸ O.

Ἕκαστος πόλος τοῦ μαγνήτου NS ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $m = 400$ C.G.S. Θεωροῦμεν εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 2) ἕνα βόρειον μαγνητικὸν πόλον ἔχοντα ποσότητα μαγνητισμοῦ $m' = 1$ C.G.S. Δίδεται ὅτι εἶναι:



Σχ. 2

$$NS = 8 \text{ cm}, \quad \text{ἄρα} \quad ON = OS = 4 \text{ cm}$$

$$\text{καὶ} \quad OA = 3 \text{ cm}$$

Ἐπὶ τῆς μονάδος ποσότητος μαγνητισμοῦ ἐνεργοῦν τότε αἱ δύο δυνάμεις:

ἡ ἄπωσις: $$H_1 = \frac{m \cdot 1}{(AN)^2} = \frac{m}{(AN)^2}$$

ἡ ἕλξις: $$H_2 = \frac{m \cdot 1}{(AS)^2} = \frac{m}{(AS)^2}$$

Αἱ δύο δυνάμεις H_1 καὶ H_2 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι AN = AS. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OAN εὑρίσκομεν:

$$(AN)^2 = (OA)^2 + (ON)^2 \quad \text{ἢ} \quad (AN)^2 = (3^2 + 4^2) \text{ cm}^2$$

$$\text{ἄρα} \quad (AN)^2 = 25 \text{ cm}^2 \quad \text{καὶ} \quad AN = 5 \text{ cm}$$

Ἑκάστη λοιπὸν τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον A εἶναι:

$$H_1 = H_2 = \frac{400}{25} \text{ Gauss} \quad \text{ἢ} \quad H_1 = H_2 = 16 \text{ Gauss}$$

Ἡ συνισταμένη Η τῶν δυνάμεων H_1 καὶ H_2 εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐπειδὴ εἶναι $H_1 = H_2$ συνάγεται ὅτι τὸ τετράπλευρον AH_1HH_2 εἶναι ρόμβος· ἡ διαγώνιος ΑΗ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $H_1AH_2 = 2\varphi$, ἡ ὁποία εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ANS. Εὐκόλως τώρα συνάγεται ὅτι ἡ ΑΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν NS. Ἄρα τὰ τρίγωνα H_1AH καὶ ANS εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{AH}{NS} = \frac{AH_1}{AN} \quad \text{ἢ} \quad \frac{H}{NS} = \frac{H_1}{AN}$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν σχέσιν λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἔντασιν Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α:

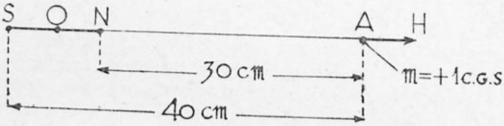
$$H = H_1 \cdot \frac{NS}{AN} \quad \text{ἤτοι} \quad H = 16 \cdot \frac{8}{5} \text{ Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{H = 25{,}6 \text{ Gauss}}$$

5. Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μῆκος 10 cm, ἕκαστος δὲ πόλος του ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 200 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου καὶ εἰς ἀπόστασιν 35 cm ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ μαγνήτου;

Ἂς θεωρήσωμεν τὸν μαγνήτην NS, τοῦ ὁποίου ἕκαστος πόλος ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $m' = 200$ C.G.S. (σχ. 3).

Εἰς τὸ σημεῖον Α, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 35 cm ἀπὸ τὸ μέσον Ο τοῦ μαγνήτου, ὑπάρχει βόρειος πόλος ἔχων ποσότητα μαγνητισμοῦ $m = 1$ C.G.S. Οὕτω τὸ σημεῖον Α ἀπέχει ἀπὸ μὲν τὸν βόρειον πόλον Ν τοῦ μαγνήτου:



Σχ. 3

$$AN = AO - NO = (35 - 5) \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

ἀπὸ δὲ τὸν νότιον πόλον S τοῦ μαγνήτου ἀπέχει:

$$AS = AO + OS = (35 + 5) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$$

Ἐπὶ τῆς ποσότητος μαγνητισμοῦ m ὁ μαγνήτης NS ἐξασκεῖ ἀφ' ἑνὸς μὲν μίαν ἄπωσιν ἴσην μέ:

$$F = \frac{m \cdot m'}{(AN)^2} = \frac{200 \cdot 1}{30^2} \text{ dyn} = \frac{2}{9} \text{ dyn}$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου μίαν ἕλξιν ἴσην μέ:

$$F' = \frac{m \cdot m'}{(AS)^2} = \frac{200 \cdot 1}{40^2} \text{ dyn} = \frac{1}{8} \text{ dyn}$$

Ἡ συνισταμένη Η τῶν δύο δυνάμεων F καὶ F' εἶναι ἄπωσις ἴση μέ:

$$H = F - F' = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{8}\right) \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = \frac{7}{72} \text{ Gauss}}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα συνισταμένη Η εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ μαγνήτου εἰς τὸ σημεῖον Α, διότι εἶναι ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται ἐπὶ βορείου μαγνητικοῦ πόλου, ἔχοντος ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην μὲ τὴν μονάδα. Ὅπως δὲ εἶναι γνωστὸν ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μετρεῖται εἰς Gauss.

* Παρατήρησις. Ἂν τὸ σημεῖον Α θεωρηθῇ εὑρισκόμενον πέραν τοῦ νοτίου πόλου S τοῦ μαγνήτου, τότε ἐπὶ τῆς μάζης m θὰ ἐνεργῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν μία ἕλξις:

$$f = \frac{m \cdot m'}{(AS)^2} = \frac{200 \cdot 1}{(35 - 5)^2} = \frac{2}{9} \text{ dyn}$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου μία ἄπωσις:

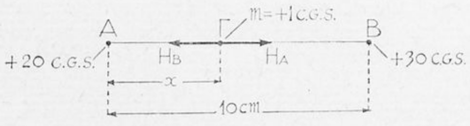
$$f' = \frac{m \cdot m'}{(AN)^2} = \frac{200 \cdot 1}{(35+5)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}\ \text{dyn}$$

Ἡ συνισταμένη H' τῶν δύο δυνάμεων f καὶ f' εἶναι ἕλξις ἴση μέ:

$$H' = f - f' = \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{8}\right) \text{Gauss} = \frac{7}{72}\ \text{Gauss}$$

6. Δύο βόρειοι μαγνητικοὶ πόλοι A καὶ B ἔχουν ἀντιστοίχως μαγνητικὰς μάζας 20 καὶ 30 μονάδων C.G.S., ἀπέχουν δὲ μεταξύ των 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἔντασις αὐτοῦ εἶναι μηδέν.

Οἱ δύο βόρειοι μαγνητικοὶ πόλοι A καὶ B (σχ. 4) ἔχουν ἀντιστοίχως ποσότητας μαγνητισμοῦ:



Σχ. 4

$$m_A = 20\ \text{C.G.S.}$$

καὶ $$m_B = 30\ \text{C.G.S.}$$

Ἕκαστος τῶν πόλων τούτων δημιουργεῖ πέριξ αὐτοῦ ἴδιον μαγνητικὸν πεδίον. Εἰς ἓν σημεῖον Γ τοῦ χώρου ἡ ἔντασις τοῦ συνισταμένου μαγνητικοῦ πεδίου θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Γ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ πόλου A εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ πόλου B. Ἡ συνθήκη ὅμως αὐτὴ ἰσχύει μόνον διὰ σημεῖον τοῦ χώρου κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας AB. Ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο πόλων A καὶ B εἶναι:

$$A\Gamma = x\ \text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad B\Gamma = (10 - x)\ \text{cm}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Γ ἡ ἔντασις ἑκάστου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

ἕνεκα τοῦ πόλου A: $$H_A = \frac{20 \cdot 1}{x^2}\ \text{Gauss} \qquad \text{ἤτοι} \qquad H_A = \frac{20}{x^2}\ \text{Gauss}$$

ἕνεκα τοῦ πόλου B: $$H_B = \frac{30 \cdot 1}{(10-x)^2}\ \text{Gauss} \qquad \text{ἤτοι} \qquad H_B = \frac{30}{(10-x)^2}\ \text{Gauss}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Γ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$H_A = H_B \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{20}{x^2} = \frac{30}{(10-x)^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{x^2}{(10-x)^2} = \frac{20}{30} \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{x}{10-x} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{x}{10-x} = \pm\, 0{,}816$$

Παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης, διότι τὸ σημεῖον Γ δὲν δύναται νὰ εὑρίσκεται πέραν ἑκατέρου τῶν πόλων A καὶ B (διότι τότε οἱ δύο βόρειοι πόλοι A καὶ B ἀσκοῦν ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς μάζης + 1 G.C.S. ὁμορρόπους ἀπώσεις). Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

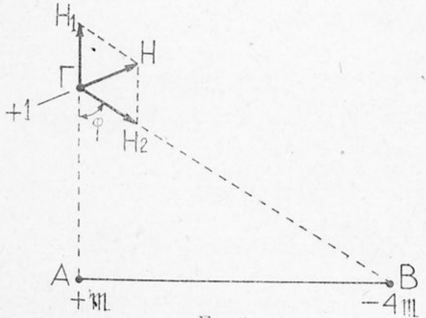
$$\frac{x}{10-x} = 0{,}816 \qquad \text{εὑρίσκομεν} \qquad x = 4{,}49\ \text{cm}$$

Ὥστε τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, αἱ δὲ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ ἕκαστον τῶν δύο βορείων μαγνητικῶν πόλων A καὶ B εἶναι:

AΓ = 4,49 cm καὶ **BΓ = 5,51 cm**

7. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρίσκονται δύο μαγνητικαὶ μᾶζαι $+m$ καὶ $-4m$. Ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ 30 cm. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἔντασις καὶ ἡ διεύθυνσις τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῶν δύο μαζῶν μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἔχει μῆκος $10\sqrt{3}$ cm.

Εἰς τὸ σημεῖον Γ (σχ. 5) φέρομεν ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην μὲ $+1$ C.G.S. Ἑκάστη ἐκ τῶν ποσοτήτων μαγνητισμοῦ, τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δημιουργεῖ ἴδιον μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἔντασιν:



Σχ. 5

τὸ μαγνητικὸν πεδίον τῆς ποσότητος μαγνητισμοῦ $+m$:

$$H_1 = \frac{(+m)\cdot(+1)}{(\text{ΑΓ})^2}\ \text{Gauss}$$

ἤτοι $$H_1 = +\frac{m}{(\text{ΑΓ})^2}\ \text{Gauss}$$

τὸ μαγνητικὸν πεδίον τῆς ποσότητος μαγνητισμοῦ $-4m$:

$$H_2 = \frac{(-4m)\cdot(+1)}{(\text{ΒΓ})^2}\ \text{Gauss}$$

ἤτοι $$H_2 = -\frac{4m}{(\text{ΒΓ})^2}\ \text{Gauss}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: ΑΒ = 30 cm καὶ ΑΓ = $10\sqrt{3}$ cm. Ἄρα εἶναι:

$$(\text{ΒΓ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΓ})^2 = (900+300)\ \text{cm}^2 = 1200\ \text{cm}^2$$

Ὥστε αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι:

$$H_1 = +\frac{m}{300}\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad H_2 = -\frac{m}{300}\ \text{Gauss}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσαι. Ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν μερικῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2 τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν $H_1ΓH_2$ τοῦ σχηματιζομένου ρόμβου. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

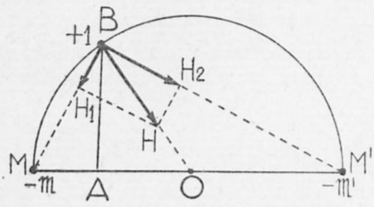
$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{30\ \text{cm}}{10\sqrt{3}\ \text{cm}} = \sqrt{3}$$

Ἄρα ἡ γωνία φ εἶναι: $\varphi = 60^0$. Συνεπῶς ἡ γωνία $H_1ΓH_2$ εἶναι ἴση μὲ 120^0. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ γωνία $HΓH_2$ εἶναι ἴση μὲ 60^0 καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον $HΓH_2$ εἶναι ἰσόπλευρον. Ὥστε ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ σχηματίζει γωνίαν 60^0 μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ ἰσοῦται μέ:

$$\mathbf{H = \frac{m}{300}\ Gauss}$$

8. Μία εὐθεῖα ΜΜ' ἔχει μῆκος 20 cm καὶ ἓν σημεῖον της Α ἀπέχει 4 cm ἀπὸ τὸ ἄκρον Μ. Ἀπὸ τὸ Α φέρεται ἡ ΑΒ κάθετος πρὸς τὴν ΜΜ'. Τὸ μῆκος τῆς ΑΒ εἶναι 8 cm. Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Μ' τοποθετηθῇ μαγνητικὴ μᾶζα $m' = -2$ C.G.S., νὰ εὑρεθῇ ποία μαγνητικὴ μᾶζα m πρέπει νὰ τοποθετηθῇ εἰς τὸ σημεῖον Μ, ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργοῦν αἱ δύο αὗται μαγνητικαὶ μᾶζαι εἰς τὸ σημεῖον Β, νὰ διευθύνεται πρὸς τὸ μέσον Ο τῆς εὐθείας ΜΜ'.

Δίδεται ὅτι εἶναι $MM' = 20$ cm, ἄρα εἶναι $OM = OM' = 10$ cm. Ἐπίσης δίδεται ὅτι εἶναι $AM = 4$ cm. Ἄρα εἶναι $OA = 6$ cm. Συνεπῶς ἡ ἀπόστασις OB (σχ. 6) προσδιορί- ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 6

$$OB = \sqrt{(OA)^2 + (AB)^2}$$

ἤτοι $$OB = \sqrt{6^2 + 8^2}\ \text{cm} = 10\ \text{cm}$$

Ὥστε τὸ σημεῖον B εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα $OM = OB = 10$ cm. Εἰς τὸ σημεῖον B φέρομεν ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην μὲ $+1$ C.G.S. Εἰς τὸ σημεῖον B ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ἡ ἀρνητικὴ μαγνητικὴ μᾶζα $-m'$, εἶναι:

$$H_2 = \frac{(-m')\cdot(+1)}{(BM')^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H_2 = -\frac{m'}{(AB)^2 + (AM')^2}$$

$$\text{ἢ} \quad H_2 = -\frac{2}{8^2 + 16^2}\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad H_2 = -\frac{2}{320}\ \text{Gauss}$$

Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον M τῆς εὐθείας MM′ φέρωμεν μίαν μαγνητικὴν μᾶζαν m, αὕτη δημιουργεῖ ἴδιον μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σημεῖον B ἔχει ἔντασιν H_1. Ἡ διεύθυνσις τῆς ἐντάσεως H_1 εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς εὐθείας MB. Ἡ συνισταμένη ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον B θὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος OB καὶ φορὰν πρὸς τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου, ἐὰν ἡ μερικὴ ἔντασις H_1 ἔχῃ φορὰν πρὸς τὸ σημεῖον M (ἤτοι εἶναι ἕλξις). Τοῦτο συμβαίνει, ἐὰν ἡ εἰς τὸ σημεῖον M φερομένη μαγνητικὴ μᾶζα m εἶναι ἀρνητική. Τότε εἰς τὸ σημεῖον B ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ἡ ἀρνητικὴ μαγνητικὴ μᾶζα $-m$, εἶναι:

$$H_1 = \frac{(-m)\cdot(+1)}{(BM)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H_1 = -\frac{m}{(AB)^2 + (AM)^2}$$

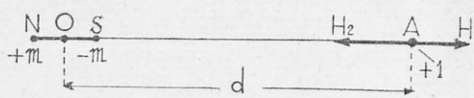
$$\text{ἢ} \quad H_1 = -\frac{m}{8^2 + 4^2}\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad H_1 = -\frac{m}{80}\ \text{Gauss}$$

Τὸ τρίγωνον OBM′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι OBM′ καὶ OM′B εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ABM′ καὶ H_2BH εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{AB}{AM'} \quad \text{ὥστε εἶναι:} \quad H_1 = H_2 \cdot \frac{AB}{AM'}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \frac{m}{80} = \frac{2}{320}\cdot\frac{8}{16} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{m = -0{,}25\ C.G.S.}$$

9. Μικρὸς εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει μαγνητικὴν ροπὴν 500 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἓν σημεῖον A, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 30 cm ἀπὸ τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου, εἰς τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις: 1) τὸ σημεῖον A εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ μαγνήτου· 2) τὸ σημεῖον A εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον O τοῦ μαγνήτου.



Σχ. 7

1) Ἔστω l τὸ μῆκος τοῦ μαγνήτου. Ἡ ἀπόστασις OA εἶναι $d = 30$ cm (σχ. 7). Ἐὰν m εἶναι ἡ ποσότης μαγνητισμοῦ ἑκάστου τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου, τότε ἡ μαγνητικὴ ροπὴ (M) τοῦ μαγνήτου εἶναι: $M = m \cdot l$

Εἰς τὸ σημεῖον A θεωροῦμεν ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην μὲ $+1$ C.G.S. Ἕκαστος πόλος τοῦ μαγνήτου δημιουργεῖ ἴδιον μαγνητικὸν πεδίον. Οὕτω ἡ ἔντασις ἑκάστου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι :

ἕνεκα τοῦ πόλου Ν (ἄπωσις) :

$$H_1 = \frac{(+m)\cdot(+1)}{(NA)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad H_1 = +\frac{m}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}$$

ἕνεκα τοῦ πόλου S (ἕλξις) :

$$H_2 = \frac{(-m)\cdot(+1)}{(SA)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad H_2 = -\frac{m}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2}$$

Ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2 ἤτοι εἶναι :

$$H = H_2 - H_1 \qquad \text{ἢ} \qquad H = \frac{m}{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{m}{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{l^2}{4}$ εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὸ d, διὰ τοῦτο δυνάμεθα κατὰ προσέγγισιν νὰ λάβωμεν :

$$H = \frac{m}{d^2 - ld} - \frac{m}{d^2 + ld}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$H = \frac{m}{d^2\left(1-\frac{l}{d}\right)} - \frac{m}{d^2\left(1+\frac{l}{d}\right)}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad H = \frac{m}{d^2}\left(1+\frac{l}{d}\right) - \frac{m}{d^2}\left(1-\frac{l}{d}\right)$$

$$\text{ἄρα} \qquad H = \frac{m}{d^2}\cdot 2\,\frac{l}{d} \qquad \text{καὶ} \qquad H = \frac{2\,ml}{d^3}$$

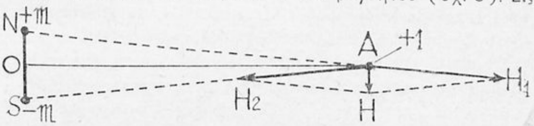
Ἐπειδὴ εἶναι $M = ml$, ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$\mathbf{H = \frac{2M}{d^3}}$$

Ἐὰν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν $M = 500$ C.G.S. καὶ $d = 30$ cm, λαμβάνομεν :

$$H = \frac{2\cdot 500}{30^3}\ \text{C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{H = 0{,}037\ Gauss}$$

2) Τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ο τοῦ μαγνήτου (σχ. 8). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο συνιστῶσαι ἐντάσεις H_1 καὶ H_2 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσαι, ἡ δὲ συνισταμένη ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν μαγνήτην. Ἐπειδὴ τὰ μήκη $ON = OS = \frac{l}{2}$ εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀπόστασιν $OA = d$, δυνάμεθα κατὰ προσέγγισιν νὰ λάβωμεν :



Σχ. 8

$$NA = SA = OA = d$$

Ἄρα ἑκάστη τῶν συνιστωσῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2 εἶναι :

$$H_1 = \frac{(+\mathrm{m})\cdot(+1)}{(\mathrm{NA})^2} \quad \text{ἢ} \quad H_1 = +\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$$

$$H_2 = \frac{(-\mathrm{m})\cdot(+1)}{(\mathrm{SA})^2} \quad \text{ἢ} \quad H_2 = -\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα H_1AH καὶ ANS εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{H}{(\mathrm{NS})} = \frac{H_1}{(\mathrm{NA})} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{H}{l} = \frac{H_1}{\mathrm{d}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$H = H_1 \cdot \frac{l}{\mathrm{d}} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}\cdot\frac{l}{\mathrm{d}} \quad \text{καὶ} \quad H = \frac{\mathrm{m}l}{\mathrm{d}^3}$$

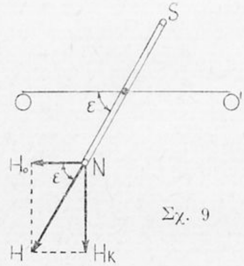
Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{d}^3}$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$H = \frac{500}{30^3}\ \mathrm{C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{H = 0{,}0185\ Gauss}$$

10. Εἰς ἕνα τόπον ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ Gauss, ἡ δὲ ἔγκλισις εἶναι θετικὴ καὶ ἴση μὲ 60^0. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦτον;



Σχ. 9

Δίδεται ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ Gauss καὶ ὅτι ἡ ἔγκλισις εἶναι $\varepsilon = 60^0$ (σχ. 9). Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον HNH_0 ἔχομεν :

$$H_0 = H \cdot \text{συν}\,\varepsilon \quad \text{ἄρα} \quad H = \frac{H_0}{\text{συν}\,\varepsilon}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις H τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦτον εἶναι :

$$H = \frac{0{,}2}{\text{συν}\,60^0}\ \mathrm{Gauss} = \frac{0{,}2}{0{,}5}\ \mathrm{Gauss} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{H = 0{,}4\ Gauss}$$

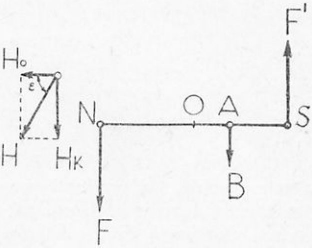
11. Μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως ἔχει μῆκος 10 cm, ἕκαστος δὲ τῶν πόλων της ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 30 C.G.S. Ἡ βελόνη αἰωρεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ Gauss, ἡ δὲ ἔγκλισις εἶναι 60^0. Διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν βελόνην ὁριζοντίαν, θέτομεν ἐπ' αὐτῆς μικρὸν ἱππέα ἔχοντα βάρος 0,050 gr*. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα τῆς βελόνης πρέπει νὰ τεθῇ ὁ ἱππεύς;

Ἔστω NS ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως (σχ. 10), ἡ ὁποία αἰωρεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ (δηλ. ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος). Ἂν H_0 καὶ $H_\varkappa$ εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ὁριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἡ $H_\varkappa$ εὑρίσκεται συναρτήσει τῆς H_0 καὶ τῆς ἐγκλίσεως ε, διότι εἶναι :

$$H_\varkappa = H_0 \cdot \text{εφ}\,\varepsilon \quad \text{ἤτοι} \quad H_\varkappa = 0{,}2\ \mathrm{Gauss}\cdot \text{εφ}\,60^0 = 0{,}2\cdot\sqrt{3}\ \mathrm{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H_\varkappa = 0{,}3464\ \mathrm{Gauss}$$

Ἕκαστος πόλος τῆς μαγνητικῆς βελόνης ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ $m = 30$ C.G.S. Ἕνεκα τῆς κατακορύφου συνιστώσης $H_\varkappa$ ἐνεργοῦν ἐπὶ τῶν δύο πόλων τῆς μαγνητικῆς βελόνης αἱ δύο κατακόρυφοι δυνάμεις F καὶ F′, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν ζεῦγος. Ἑκάστη τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἴση μέ:



Σχ. 10

$$F = m \cdot H_\varkappa = (30 \cdot 0{,}3464)\ \text{dyn} = 10{,}392\ \text{dyn}$$

Διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὴν βελόνην ὁριζοντίαν, θέτομεν ἐπ' αὐτῆς ἱππέα, ἔχοντα βάρος:

$$B = 0{,}050\ \text{gr}^* = (0{,}050 \cdot 981)\ \text{dyn} = 49{,}05\ \text{dyn}$$

Ἡ δύναμις B ἐφαρμόζεται εἰς ἓν σημεῖον A, κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων O καὶ S. Ἔστω x ἡ ζητουμένη ἀπόστασις OA. Ἡ βελόνη ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως, ὅταν ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων F καὶ F′ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ροπὴν τῆς δυνάμεως B ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς τῆς βελόνης, δηλαδὴ ὅταν εἶναι:

$$F \cdot (NS) = B \cdot (OA) \qquad \text{ἢ} \qquad F \cdot (NS) = B \cdot x$$

Ἂν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν σχέσιν θέσωμεν:

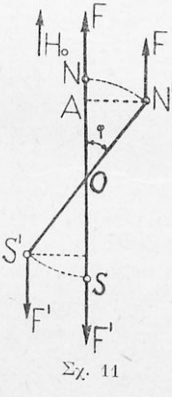
$$F = 10{,}392\ \text{dyn} \qquad NS = 10\ \text{cm} \qquad B = 49{,}05\ \text{dyn}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις x εἶναι:

$$x = \frac{F}{B} \cdot (NS) \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{10{,}392\ \text{dyn}}{49{,}05\ \text{dyn}} \cdot 10\ \text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x = 2{,}12\ cm}$$

12. Ἕκαστος τῶν πόλων μιᾶς μαγνητικῆς βελόνης ἀποκλίσεως ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ 50 C.G.S. Ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἔχει μῆκος 10 cm. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}18$ Gauss. Πόσον ἔργον δαπανῶμεν, ὅταν ἀπομακρύνωμεν τὴν βελόνην κατὰ 60° ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της;

Ὅταν ἡ μαγνητικὴ βελόνη NS ἰσορροπῇ (σχ. 11), τότε ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτῆς αἱ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις F καὶ F′, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μέ:



Σχ. 11

$$F = m \cdot H_0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = (50 \cdot 0{,}18)\ \text{dyn} = 9\ \text{dyn}$$

Διὰ νὰ ἀπομακρύνωμεν τὴν βελόνην ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας της κατὰ γωνίαν $\varphi = 60^0$, πρέπει νὰ δαπανήσωμεν ἔργον. Κατὰ τὴν μετακίνησιν αὐτὴν τῆς μαγνητικῆς βελόνης αἱ δυνάμεις F καὶ F′ μένουν πάντοτε παράλληλοι πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἕκαστος δὲ πόλος τῆς μαγνητικῆς βελόνης διαγράφει τόξον. Οὕτω ὁ πόλος N διαγράφει τὸ τόξον NN′, τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως F εἶναι NA. Τὸ δαπανώμενον ἔργον W, διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ βορείου πόλου ἀπὸ τὴν θέσιν N εἰς τὴν θέσιν N′, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τὸ διάστημα NA κατὰ τὸ ὁποῖον μετεκινήθη τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως F ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως, ἤτοι εἶναι:

$$W = F \cdot (NA)$$

Τὸ διάστημα NA ἰσοῦται μέ: $\quad NA = ON - OA$

Ἐπειδὴ ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἔχει μῆκος 10 cm, ἕπεται ὅτι εἶναι $ON = 5$ cm. Τὸ μῆκος OA εὑρίσκεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OAN′, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν:

$$OA = ON' \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad \text{ἢ} \qquad OA = 5\ \text{cm} \cdot \text{συν}\,60^0 \qquad \text{καὶ} \qquad OA = (5 \cdot 0{,}5)\ \text{cm} = 2{,}5\ \text{cm}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ διάστημα ΝΑ εἶναι : $NA = ON - OA = (5 - 2{,}5)\ cm = 2{,}5\ cm$

Συνεπῶς τὸ δαπανώμενον ἔργον διὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ πόλου Ν εἶναι :

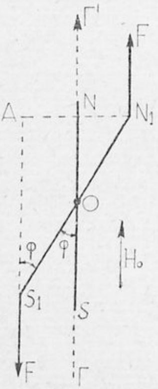
$$W = F \cdot (NA) \quad \text{ἤτοι} \quad W = 9\ dyn \cdot 2{,}5\ cm = 22{,}5\ erg$$

Τόσον ὅμως ἔργον δαπανᾶται καὶ διὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ νοτίου πόλου ἀπὸ τὴν θέσιν S εἰς τὴν θέσιν S'. Ἄρα, διὰ νὰ στρέψωμεν τὴν μαγνητικὴν βελόνην κατὰ 60^0, πρέπει νὰ δαπανήσωμεν ἔργον : $W_{ολ} = 2 \cdot 22{,}5\ erg$ καὶ $\mathbf{W_{ολ} = 45\ erg}$

13. Εὐθύγραμμος μαγνήτης δύναται νὰ στρέφεται περὶ κατακόρυφον ἄξονα εἰς τόπον, ὅπου ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}18$ Gauss. Ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου εἶναι $M = 500$ C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ μαγνήτου, ὥστε ὁ ἄξων του νὰ σχηματίζῃ γωνίαν 30^0 μὲ τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν.

Ὁ μαγνήτης ἔχει μῆκος l, ἕκαστος δὲ πόλος του ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) μὲ m. Ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ (M_M) τοῦ μαγνήτου εἶναι :

$$M_M = m \cdot l$$



Σχ. 12

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου ὁ μαγνήτης NS (σχ. 12) ἰσορροπεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ (ΓΓ'). Ὁ μαγνήτης δύναται νὰ στρέφεται ἐπὶ ἑνὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐπὶ ἑκάστου πόλου τοῦ μαγνήτου ἐνεργεῖ δύναμις F ἴση μέ :

$$F = m \cdot H_0$$

Ὅταν ὁ μαγνήτης ἀπομακρυνθῇ ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του κατὰ γωνίαν $\varphi = 30^0$, τότε αἱ εἰς τοὺς δύο πόλους του ἐφαρμοζόμεναι δύο δυνάμεις ἀποτελοῦν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸν μαγνήτην εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του. Ἡ ῥοπὴ (M_Z) τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι :

$$M_Z = F \cdot (AN_1) \quad \text{ἤτοι} \quad M_Z = F \cdot l \cdot ημ\,\varphi$$

$$\text{ἢ} \quad M_Z = m \cdot H_0 \cdot l \cdot ημ\,\varphi \quad \text{καὶ} \quad M_Z = M_M \cdot H_0 \cdot ημ\,\varphi$$

Ὥστε, διὰ νὰ διατηρηθῇ ὁ μαγνήτης εἰς τὴν θέσιν N_1S_1, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ μαγνήτου ἓν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ῥοπὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον πρὸς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ῥοπὴν M_Z. Ἄρα ἡ ζητουμένη ῥοπὴ τοῦ ζεύγους πρέπει νὰ εἶναι ἴση μέ :

$$M_Z = (500 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}5)\ C.G.S. \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{M_Z = 45\ C.G.S.}$$

14. Εὐθύγραμμος μαγνήτης NS ἔχει μῆκος 20 cm καὶ στηρίζεται κατακορύφως ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου διὰ τοῦ πόλου του Ν. Μὲ μίαν μικρὰν πυξίδα ἀποκλίσεως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς ἓν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τούτου δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τὸ σημεῖον Α ἀπέχει 15 cm ἀπὸ τὸ σημεῖον στηρίξεως Ν. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς εἶναι $H_0 = 0{,}20$ Gauss. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου.

Ὁ μαγνήτης ἔχει μῆκος $l = 20$ cm, ἕκαστος δὲ πόλος του ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ m. Ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου εἶναι : $M = m \cdot l$

Εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ΟΟ' (σχ. 13) αἱ συνιστῶσαι ἐντάσεις H_1 καὶ H_2 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἕνεκα τῶν δύο πόλων Ν καὶ S τοῦ μαγνήτου εἶναι :

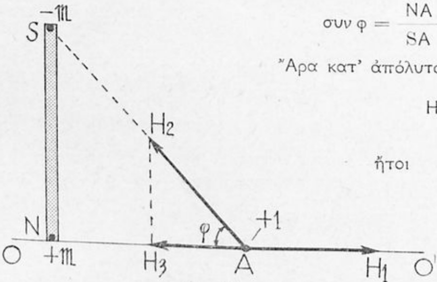
$$H_1 = \frac{(+m) \cdot (+1)}{(NA)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H_1 = +\frac{m}{15^2}\ \text{Gauss}$$

$$H_2 = \frac{(-m) \cdot (+1)}{(SA)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H_2 = -\frac{m}{20^2 + 15^2}\ \text{Gauss}$$

Ἄρα εἶναι: $H_1 = + \frac{m}{225}$ Gauss καὶ $H_2 = - \frac{m}{625}$ Gauss

Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως H_2 εἶναι: $H_3 = H_2 \cdot συν\,φ$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ANS εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:



Σχ. 13

$$συν\,φ = \frac{NA}{SA} \quad ἤτοι \quad συν\,φ = \frac{15}{\sqrt{625}} = \frac{3}{5}$$

Ἄρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ συνιστῶσα H_3 εἶναι:

$$H_3 = \frac{m}{625} \cdot \frac{3}{5} \text{ Gauss}$$

$$ἤτοι \quad H_3 = \frac{3\,m}{3125} \text{ Gauss}$$

Ἡ ὁριζοντία συνισταμένη τῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_3 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον A εἶναι: $H' = H_1 - H_3$

$$ἤτοι \quad H' = \left(\frac{m}{225} - \frac{3\,m}{3125} \right) \text{Gauss}$$

ἄρα $H' = m\left(\frac{1}{225} - \frac{3}{3135} \right)$ Gauss καὶ $H' = 0{,}003\,484$ m Gauss

Δίδεται ὅμως ὅτι εἰς τὸ σημεῖον A δὲν ὑπάρχει ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἡ ἔντασις H′ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄρα εἶναι:

$H' = H_0$ ἤτοι $0{,}003\,484\,m = 0{,}20$ ἄρα $m = 57{,}4$ C.G.S

Ἡ ζητουμένη μαγνητικὴ ῥοπὴ (M) τοῦ μαγνήτου εἶναι:

$M = (57{,}4 \cdot 20)$ C.G.S. καὶ **M = 1148 C.G.S.**

15. **Δύο ἀπολύτως ὅμοιοι εὐθύγραμμοι μαγνῆται, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει μῆκος 10 cm, εἶναι τοποθετημένοι ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης οὕτως, ὥστε οἱ νότιοι πόλοι των νὰ εὑρίσκωνται ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οἱ δὲ ἄξονες τῶν μαγνητῶν νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὁ μαγνητικὸς μεσημβρινὸς νὰ διχοτομῇ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἕκαστος πόλος ἔχει μαγνητικὴν μᾶζαν 45 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο μαγνῆται. Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}18$ Gauss.**

Ἕκαστος πόλος τῶν δύο μαγνητῶν ἔχει ποσότητα μαγνητισμοῦ m (σχ. 14). Τὸ σημεῖον A τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν οἱ δύο μαγνῆται. Εἰς τὸ σημεῖον A θεωροῦμεν ποσότητα μαγνητισμοῦ ἴσην μὲ + 1 C.G.S. Αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργοῦν εἰς τὸ σημεῖον A οἱ πόλοι τῶν δύο μαγνητῶν, εἶναι:

ἕνεκα τοῦ πόλου N_1:

$$H_1 = \frac{(+m) \cdot (+1)}{(N_1A)^2} \quad ἤτοι \quad H_1 = + \frac{m}{100} \text{ Gauss}$$

ἕνεκα τοῦ πόλου N_2:

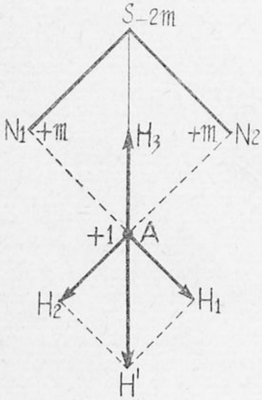
$$H_2 = \frac{(+m) \cdot (+1)}{(N_2A)^2} \quad ἤτοι \quad H_2 = + \frac{m}{100} \text{ Gauss}$$

ἕνεκα τῶν δύο πόλων S :

$$H_3 = \frac{(-2\,m)\cdot(+1)}{(SA)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H_3 = -\frac{2\,m}{10^2+10^2}\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H_3 = -\frac{m}{100}\ \text{Gauss}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τρεῖς μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσαι :



Σχ. 14

$$H_1 = H_2 = H_3 = \frac{45}{100}\ \text{Gauss} = 0{,}45\ \text{Gauss}$$

Ἡ συνισταμένη H' τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2 ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐντάσεως H_3 καὶ εἶναι ἴση μέ :

$$H' = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \quad \text{ἤτοι} \quad H' = 0{,}45\cdot\sqrt{2}\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H' = 0{,}636\ \text{Gauss}$$

Ἡ συνισταμένη H_4 τῶν δύο ἐντάσεων H' καὶ H_3 εἶναι :

$$H_4 = H' - H_3 \quad \text{ἤτοι} \quad H_4 = (0{,}636 - 0{,}45)\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H_4 = 0{,}186\ \text{Gauss}$$

Ἐὰν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα H_0 τῆς ἐντάσεως τοῦ γηΐνου μαγνητικοῦ πεδίου ἔχῃ τὴν φορὰν τῆς συνισταμένης ἐντάσεως H_4, τότε ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι :

$$H = H_4 + H_0 \quad \text{ἤτοι} \quad H = (0{,}186 + 0{,}180)\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{H = 0{,}366\ Gauss}$$

Ἐὰν ὅμως αἱ ἐντάσεις H_0 καὶ H_4 ἔχουν ἀντίθετον φοράν, τότε ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι :

$$H = H_4 - H_0 \quad \text{ἤτοι} \quad H = (0{,}186 - 0{,}180)\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{H = 0{,}006\ Gauss}$$

16. Δύο ἰσομήκεις εὐθύγραμμοι μαγνῆται Γ καὶ Δ τίθενται ὁ ἕνας ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε οἱ ὁμώνυμοι πόλοι των νὰ εὑρίσκωνται ὁ ἕνας ἄνωθεν τοῦ ἄλλου. Τὸ σύστημα τῶν μαγνητῶν ἐξαρτᾶται καταλλήλως, ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ὁριζοντίας αἰωρήσεις. Εὑρίσκεται τότε ὅτι τὸ σύστημα ἐκτελεῖ 50 αἰωρήσεις ἐντὸς 2 min 32 sec. Ὅταν ἀναστραφῇ ὁ μαγνήτης Δ, τότε τὸ σύστημα ἐκτελεῖ 50 αἰωρήσεις ἐντὸς 10 min 15 sec. Ποῖον λόγον ἔχουν αἱ μαγνητικαὶ ῥοπαὶ τῶν δύο μαγνητῶν ;

Ἄς καλέσωμεν M_Γ καὶ M_Δ τὴν μαγνητικὴν ῥοπὴν ἀντιστοίχως τῶν μαγνητῶν Γ καὶ Δ. Ὅταν οἱ ὁμώνυμοι πόλοι τῶν δύο μαγνητῶν εὑρίσκωνται ὁ ἕνας ἄνωθεν τοῦ ἄλλου, τότε ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ συστήματος τῶν δύο μαγνητῶν εἶναι $M_\Gamma + M_\Delta$ καὶ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ συστήματος εἶναι : $T_1 = \frac{152}{50}$ sec

Ὅταν ἀναστραφῇ ὁ μαγνήτης Δ, τότε οἱ ἑτερώνυμοι πόλοι τῶν δύο μαγνητῶν εὑρίσκονται ὁ ἕνας ἄνωθεν τοῦ ἄλλου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ συστήματος τῶν δύο μαγνητῶν εἶναι $M_\Gamma - M_\Delta$ καὶ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ συστήματος εἶναι :

$$T_2 = \frac{615}{50}\ \text{sec}$$

Εἰς τὰς ἀνωτέρω δύο περιπτώσεις ἡ περίοδος ταλαντώσεως τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις :

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{(M_\Gamma + M_\Delta) \cdot H}} \qquad T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{(M_\Gamma - M_\Delta) \cdot H}}$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ συστήματος καὶ Η εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ σύστημα ἐκτελεῖ τὰς ἁρμονικὰς ταλαντώσεις του. Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{M_\Gamma - M_\Delta}{M_\Gamma + M_\Delta}} \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{M_\Gamma - M_\Delta}{M_\Gamma + M_\Delta}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν T_1 καὶ T_2, λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{M_\Gamma - M_\Delta}{M_\Gamma + M_\Delta} = \left(\frac{152}{615}\right)^2 \qquad \frac{M_\Gamma - M_\Delta}{M_\Gamma + M_\Delta} = 0{,}0611$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{M_\Gamma}{M_\Delta} = \frac{1 + 0{,}0611}{1 - 0{,}0611} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\mathbf{M}_\Gamma}{\mathbf{M}_\Delta} = \mathbf{1{,}128}$$

17. Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη Β ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις ἐντὸς 25 sec, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ὄπισθεν αὐτῆς τοποθετεῖται εὐθύγραμμος μαγνήτης Α, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τότε ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις ἐντὸς 12 sec. Πόσας αἰωρήσεις θὰ ἐκτελῇ ἡ μαγνητικὴ βελόνη κατὰ λεπτόν, ἐὰν ὁ μαγνήτης ἀναστραφῇ;

Ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι H_0. Ὅταν ἡ μαγνητικὴ βελόνη Β ἐκτελῇ ἁρμονικὰς ταλαντώσεις ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι : $T_0 = \frac{25}{20}$ sec

καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_0}} \tag{1}$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς μαγνητικῆς βελόνης καὶ Μ ἡ μαγνητικὴ ροπὴ αὐτῆς. Ὅταν ὄπισθεν τῆς μαγνητικῆς βελόνης τοποθετηθῇ ὁ εὐθύγραμμος μαγνήτης Α, τότε ἡ ὁριζοντία ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται ἡ μαγνητικὴ βελόνη, γίνεται H_1 καὶ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης γίνεται : $T_1 = \frac{12}{20}$ sec καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_1}} \tag{2}$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{T_0}{T_1} = \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 = \frac{H_1}{H_0} \tag{3}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $T_0 > T_1$, ἕπεται ὅτι εἶναι $H_1 > H_0$. Ἐὰν καλέσωμεν H_A τὴν ὁριζοντίαν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ ὁ μαγνήτης Α, τότε εἶναι :

$$H_1 = H_0 + H_A$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^2 = \frac{H_0 + H_A}{H_0} \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{25}{12}\right)^2 = 1 + \frac{H_A}{H_0}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{H_A}{H_0} = \frac{625}{144} - 1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{H_A}{H_0} = \frac{481}{144} \tag{4}$$

Ἐάν ἀναστραφῇ ὁ μαγνήτης Α, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται ἡ μαγνητικὴ βελόνη Β, γίνεται $H_2 = H_A - H_0$ καὶ ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης γίνεται T_2. Τὸ ὅτι εἶναι $H_A > H_0$ καταφαίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4).

Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_2}} \tag{5}$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (5), εὑρίσκομεν:

$$\frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{H_2}{H_0}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{H_A - H_0}{H_0}}$$

Ἄρα:

$$\frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{H_A}{H_0} - 1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{481}{144} - 1}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{337}{144}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ νέα περίοδος T_2 εἶναι:

$$T_2 = T_0 \cdot \sqrt{\frac{144}{337}} \quad \text{ἤτοι} \quad T_2 = \frac{25}{20} \cdot \sqrt{\frac{144}{337}}\ \text{sec} \quad \text{καὶ} \quad T_2 = 0{,}817\ \text{sec}$$

Εἰς χρόνον $t = 1$ min $= 60$ sec ἡ μαγνητικὴ βελόνη θὰ ἐκτελέσῃ τότε Ν αἰωρήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι:

$$N = \frac{t}{T_2} \quad \text{ἤτοι} \quad N = \frac{60\ \text{sec}}{0{,}817\ \text{sec/αἰώρησιν}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{N = 73{,}4\ \textbf{αἰωρήσεις}}$$

* Σημείωσις. Ἐπειδὴ εἶναι $H_A > H_0$, ἡ μαγνητικὴ βελόνη θὰ στραφῇ κατὰ 180^0 καὶ ὁ βόρειος πόλος της θὰ διευθύνεται πρὸς Νότον

18. Μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη Β, αἰωρουμένη ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Εὐθύγραμμος μαγνήτης Α τοποθετεῖται πλησίον τῆς μαγνητικῆς βελόνης οὕτως, ὥστε ἡ περίοδος ταλαντώσεως αὐτῆς γίνεται ἀπείρως μεγάλη. Ἐὰν ὁ μαγνήτης Α ἀναστραφῇ, πόσας αἰωρήσεις θὰ ἐκτελῇ ἡ μαγνητικὴ βελόνη Β κατὰ λεπτόν;

Ἡ περίοδος ταλαντώσεως (T_0) τῆς μαγνητικῆς βελόνης ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης (H_0) τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_0}}$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς μαγνητικῆς βελόνης καὶ Μ ἡ μαγνητικὴ ροπὴ αὐτῆς. Ὅταν ἡ μαγνητικὴ βελόνη αἰωρῆται ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ μαγνήτου Α, καὶ τὸ μαγνητικὸν τοῦτο πεδίον ἔχει ἔντασιν H_1, τότε ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_1}}$$

Ὥστε ἡ συχνότης ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot H_0}{\Theta}} \tag{1}$$

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot H_1}{\Theta}} \tag{2}$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \sqrt{\frac{H_0}{H_1}}$$

Ὅταν ὁ μαγνήτης Α τοποθετηθῇ πλησίον τῆς μαγνητικῆς βελόνης, τότε ἡ περίοδος ταλαντώσεως αὐτῆς γίνεται ἀπείρως μεγάλη. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται τότε ἡ μαγνητικὴ βελόνη, εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Συνεπῶς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα H_0 τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἡ ὁριζοντία ἔντασις H_1 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ μαγνήτου Α ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδέν. Ἄρα αἱ ἐντάσεις H_0 καὶ H_1 τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ἤτοι εἶναι:

$$H_0 = H_1$$

Ἐὰν ἀναστραφῇ ὁ μαγνήτης Α, τότε αἱ ἐντάσεις H_0 καὶ H_1 ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνισταμένη ἔντασις H_2 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται ἡ μαγνητικὴ βελόνη, εἶναι:

$$H_2 = H_0 + H_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad H_2 = 2\,H_0$$

Τότε ἡ περίοδος T_2 καὶ ἡ συχνότης ν_2 τῆς ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι:

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M \cdot H_2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{M \cdot H_2}{\Theta}} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu_2}{\nu_0} = \sqrt{\frac{H_2}{H_0}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu_2}{\nu_0} = \sqrt{\frac{2\,H_0}{H_0}} = \sqrt{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu_2 = \nu_0 \cdot \sqrt{2}$$

Δίδεται ὅτι ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐκτελεῖ 20 αἰωρήσεις ἐντὸς 60 sec. Ἄρα εἶναι:

$$\nu_0 = \frac{20 \text{ αἰωρήσεις}}{60 \text{ sec}} = \frac{1}{3} \text{ αἰωρήσεις/sec}$$

Συνεπῶς ἡ συχνότης ν_2 εἶναι: $\nu_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$ αἰωρήσεις/sec

Κατὰ λεπτὸν ἡ μαγνητικὴ βελόνη θὰ ἐκτελῇ αἰωρήσεις:

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ αἰωρήσεις/sec} \cdot 60 \text{ sec} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{N = 28,3 \text{ αἰωρήσεις}}$$

19. Εὐθύγραμμος μαγνήτης ἔχει εἰς cm διαστάσεις: 10 × 1,5 × 0,5 καὶ μαγνητικὴν ῥοπὴν 1500 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις μαγνητίσεως αὐτοῦ;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἔντασις μαγνητίσεως (I) καλεῖται ἡ μαγνητικὴ ῥοπή, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα ὄγκου τοῦ μαγνήτου. Ὁ θεωρούμενος μαγνήτης ἔχει μαγνητικὴν ῥοπὴν M = 1500 C.G.S. καὶ ὄγκον:

$$V = (10 \cdot 1,5 \cdot 0,5)\ \text{cm}^3 \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = 7,5\ \text{cm}^3$$

Ἄρα ἡ ἔντασις μαγνητίσεως τοῦ μαγνήτου τούτου εἶναι:

$$I = \frac{M}{V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{1500}{7,5}\ \text{C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 200\ C.G.S.}$$

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΦΟΡΤΙΟΝ - ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

20. Δύο ἠλεκτρικὰ φορτία $Q_1 = +60$ C.G.S. καὶ $Q_2 = +80$ C.G.S. εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Ἡ μεταξὺ τῶν φορτίων τούτων ἀπόστασις εἶναι 10 cm. Πόση εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη ἄπωσις;

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο θετικῶν φορτίων ἀσκουμένη ἄπωσις δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν θέσωμεν :

$$Q_1 = 60 \text{ C.G.S.} \qquad Q_2 = 80 \text{ C.G.S.} \qquad r = 10 \text{ cm}$$

εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι : $F = \frac{60 \cdot 80}{10^2}$ dyn ἤτοι $\mathbf{F = 48}$ **dyn**

21. Δύο ἴσα ὁμώνυμα ἠλεκτρικὰ φορτία ἀπωθοῦνται μὲ δύναμιν 100 dyn, ὅταν ἡ μεταξύ των ἀπόστασις εἶναι 10 cm. Πόσον εἶναι ἕκαστον ἠλεκτρικὸν φορτίον;

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ὁμωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἀσκουμένη ἄπωσις δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb : $F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$

Ἐπειδὴ τὰ δύο φορτία εἶναι ἴσα, ἔχομεν $Q_1 = Q_2 = Q$ καὶ ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται :

$$F = \frac{Q^2}{r^2}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν : $Q^2 = F \cdot r^2$

Ἂν θέσωμεν $F = 100$ dyn καὶ $r = 10$ cm ἔχομεν :

$$Q^2 = 100 \text{ dyn} \cdot 100 \text{ cm}^2 = 10^4$$

Ἄρα ἕκαστον φορτίον εἶναι : $Q = \sqrt{10^4}$ C.G.S. ἤτοι $\mathbf{Q = 100}$ **ΗΣΜ - φορτίου**

22. Εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν μεταξύ των 15 cm, φέρονται δύο ἠλεκτρικὰ φορτία, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν θέσιν πρέπει νὰ τεθῇ ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου, ὥστε αἱ ἐπ' αὐτῆς ἀσκούμεναι δράσεις ἐκ μέρους τῶν δύο ἀνωτέρω φορτίων νὰ ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδέν. Νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν: α) τὰ δύο φορτία εἶναι ὁμώνυμα καὶ β) τὰ δύο φορτία εἶναι ἑτερώνυμα.

α) Τὰ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρισκόμενα ἠλεκτρικὰ φορτία εἶναι ὁμώνυμα (σχ. 15). Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου, πρέπει αἱ ἐπ' αὐτῆς ἐξασκούμεναι δράσεις ἐκ μέρους τῶν δύο ἠλεκτρικῶν φορτίων νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Ἄρα ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ φορτίου πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἓν σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι:

$$ΑΓ = x \quad \text{καὶ} \quad ΒΓ = 15 - x$$

Σχ. 15

Τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb ἔχομεν τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις:

$$F = \frac{(+Q)\cdot(+1)}{(ΑΓ)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = +\frac{Q}{x^2}$$

$$F = \frac{(+2Q)\cdot(+1)}{(ΒΓ)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = +\frac{2Q}{(15-x)^2}$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο δυνάμεις F εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{Q}{x^2} = \frac{2Q}{(15-x)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{15-x}{x}\right)^2 = 2$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{15-x}{x} = \pm\sqrt{2}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον Γ δὲν δύναται νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ σημείου Α ἢ πέραν τοῦ σημείου Β, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἐξασκούμεναι δυνάμεις ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει περίπτωσις ἰσορροπίας. Ὥστε παραδεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς εὑρεθείσης τετραγωνικῆς ρίζης. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{15-x}{x} = \sqrt{2} \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{15}{1+\sqrt{2}}\ \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad x = 6{,}2\ \text{cm}$$

Ἐὰν λοιπὸν τὰ δύο ἠλεκτρικὰ φορτία εἶναι ὁ μ ώ ν υ μ α, τότε τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ εὑρίσκεται μ ε τ α ξ ὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, αἱ δὲ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι:

$$\mathbf{ΑΓ = 6{,}2\ cm} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{ΒΓ = 8{,}8\ cm}$$

β) Τὰ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εὑρισκόμενα ἠλεκτρικὰ φορτία εἶναι ἑτερώνυμα (σχ. 16). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον Γ δὲν δύναται νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β, διότι τότε αἱ ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἐξασκούμεναι δράσεις ἐκ μέρους τῶν δύο ἑτερωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπίσης τὸ σημεῖον Γ δὲν δύναται νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ σημείου Β, διότι τότε ἡ μονὰς τοῦ θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου θὰ εὑρίσκετο πλησιέστερα πρὸς τὸ μεγαλύτερον ἠλεκτρικὸν φορτίον. Ὥστε τὸ σημεῖον Γ πρέπει νὰ εὑρίσκεται πέραν τοῦ σημείου Α καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτὸ ἴσην μέ:

Σχ. 16

$$ΑΓ = x \quad \text{ὁπότε εἶναι} \quad ΒΓ = 15 + x$$

Τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb ἔχομεν τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις:

$$F = \frac{(+Q)\cdot(+1)}{(ΑΓ)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = +\frac{Q}{x^2}$$

$$F = \frac{(-2Q)\cdot(+1)}{(ΒΓ)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = -\frac{2Q}{(15+x)^2}$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο δυνάμεις F εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{Q}{x^2} = \frac{2Q}{(15+x)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{15+x}{x}\right)^2 = 2$$

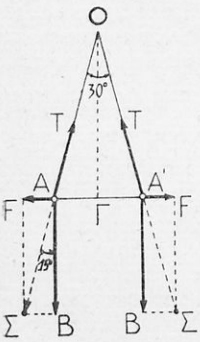
$$\text{ἄρα} \quad \frac{15+x}{x} = \sqrt{2} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{15}{\sqrt{2}-1}\ \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad x = 36{,}2\ \text{cm}$$

Ἐὰν λοιπὸν τὰ δύο ἠλεκτρικὰ φορτία εἶναι ἑ τ ε ρ ώ ν υ μ α , τότε τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ εὑρίσκεται πέραν τοῦ μικροτέρου ἠλεκτρικοῦ φορτίου, αἱ δὲ ἀποστάσεις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι :

ΑΓ = 36,2 cm καὶ **ΒΓ = 51,2 cm**

23. Δύο ὅμοιαι μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ δύο νήματα μετάξης μήκους 20 cm. Ἑκάστη σφαῖρα ἔχει βάρος 0,5 gr* καὶ φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον + Q. Ὅταν αἱ σφαῖραι ἰσορροποῦν, τὰ δύο νήματα σχηματίζουν γωνίαν 30°. Πόσον εἶναι τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας;

Ἐπὶ ἑκάστης σφαίρας ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις : τὸ βάρος Β, ἡ ἄπωσις F καὶ ἡ τάσις Τ τοῦ νήματος (σχ. 17). Αἱ τρεῖς αὐταὶ δυνάμεις ἰσορροποῦν, διότι ἡ τάσις Τ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν συνισταμένην Σ τῶν δυνάμεων Β καὶ F. Ἂς καλέσωμεν Q τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας καὶ r τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σφαιρῶν, ἤτοι ΑΑ′ = r. Τότε ἡ μεταξὺ τῶν σφαιρῶν ἀσκουμένη ἀμοιβαία ἄπωσις εἶναι :



Σχ. 17

$$F = \frac{Q \cdot Q}{r^2} = \frac{Q^2}{r^2} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) θὰ προσδιορίσωμεν τὸ φορτίον Q, ἂν εὕρωμεν προηγουμένως τὴν ἀπόστασιν r τῶν δύο σφαιρῶν καὶ τὴν ἄπωσιν F.

Δίδεται ὅτι τὸ μῆκος τοῦ νήματος εἶναι ΟΑ = 20 cm καὶ ὅτι ἡ γωνία ΑΟΑ′ εἶναι 30°. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι :

$$(\text{ΑΓ}) = (\text{ΟΑ}) \cdot \text{ημ}\, 15^0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{r}{2} = 20\ \text{cm} \cdot \text{ημ}\, 15^0$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις r τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι :

$$r = (40 \cdot \text{ημ}\, 15^0)\ \text{cm} = (40 \cdot 0{,}259)\ \text{cm} = 10{,}36\ \text{cm}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν δύναμιν F, θὰ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι αἱ τρεῖς δυνάμεις F, Β, Τ ἰσορροποῦν καὶ συνεπῶς ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων F καὶ Β ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος ΟΑ. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΣ εἶναι :

$$(\text{ΣΒ}) = (\text{ΑΒ}) \cdot \text{εφ}\, 15^0 \quad \text{ἢ} \quad F = B \cdot \text{εφ}\, 15^0$$

$$\text{καὶ} \quad F = (0{,}5 \cdot 981 \cdot 0{,}268)\ \text{dyn} = 262{,}9\ \text{dyn}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὸ φορτίον Q, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν :

$$r = 10{,}36\ \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad F = 262{,}9\ \text{dyn}$$

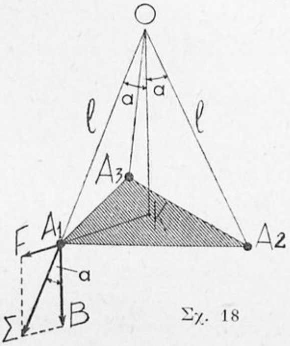
Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$Q = \sqrt{F \cdot r^2} = \sqrt{262{,}9 \cdot 10{,}36^2}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{Q = 118{,}7\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}$$

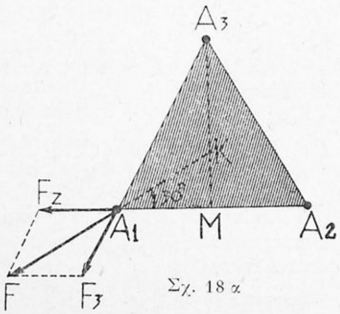
24. Τρία ἠλεκτρικὰ ἐκκρεμῆ ἀποτελοῦνται ἀπὸ μονωτικὸν νῆμα μήκους *l* καὶ ἀπὸ μεταλλικὴν σφαῖραν, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν m. Τὰ ἐκκρεμῆ εἶναι στερεωμένα εἰς τὸ

αὐτὸ σημεῖον O. Φορτίζομεν ἕκαστον τῶν τριῶν ἐκκρεμῶν μὲ τὸ αὐτὸ φορτίον Q. Τὰ ἐκκρεμῆ, ἀπωθούμενα μεταξύ των, ἰσορροποῦν εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ νῆμα ἑκάστου ἐκκρεμοῦς νὰ σχηματίζῃ τὴν αὐτὴν γωνίαν α μὲ τὴν κατακόρυφον, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου O. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τότε τὰ μεγέθη l, m, Q, καὶ εφ α.

Ἕνεκα τῆς συμμετρίας αἱ τρεῖς σφαῖραι A_1, A_2, A_3, (σχ. 18) τοποθετοῦνται εἰς τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὰ δὲ τρία νήματα OA_1, OA_2, OA_3 εἶναι αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος. Ἑκάστη σφαῖρα ἔχει βάρος $B = mg$ καὶ ἀπωθεῖται ἀπὸ τὰς ἄλλας



Σχ. 18



Σχ. 18 α

δύο σφαίρας. Οὕτω ἐπὶ τῆς σφαίρας A_1 ἐνεργοῦν ἐκ μέρους τῶν σφαιρῶν A_2 καὶ A_3 ἀντιστοίχως αἱ δυνάμεις F_2 καὶ F_3 (σχ. 18 α), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των ($F_2 = F_3$), ἑκάστη δὲ ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μέ:

$$F_2 = \frac{Q \cdot Q}{(A_1A_2)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad F_2 = \frac{Q^2}{(A_1A_2)^2} \qquad (1)$$

Ἔστω M τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς A_1A_2 τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος τέμνει τὴν βάσιν της εἰς ἓν σημεῖον K, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διαμέσου A_3M τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως. Ἐπειδὴ εἶναι:

$$(A_1A_2) = 2\,(A_1M)$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$F_2 = \frac{Q^2}{4\,(A_1M)^2} \qquad (2)$$

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον A_1MK ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(A_1M) = (A_1K) \cdot \text{συν}\, 30^0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad (A_1M) = (A_1K) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἑπομένως ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν:

$$F_2 = \frac{Q^2}{3\,(A_1K)^2} \qquad (3)$$

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OKA_1 ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(A_1K) = (OA_1) \cdot \text{ημ}\, α \qquad \text{ἤτοι} \qquad A_1K = l \cdot \text{ημ}\, α$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν:

$$F_2 = \frac{Q^2}{3l^2 \cdot \text{ημ}^2\, α}$$

Ἡ συνισταμένη F τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2 εἶναι ἴση μέ:

$$F = \sqrt{2F_1^2 + 2F_1^2 \cdot συν\,60^0} \qquad ἤτοι \qquad F = F_1\sqrt{3}$$

$$ἄρα \quad F = \frac{Q^2\sqrt{3}}{3l^2 \cdot ημ^2 α} \qquad ἤ \qquad F = \frac{Q^2}{\sqrt{3} \cdot l^2 \cdot ημ^2 α}$$

Ἡ σφαῖρα A_1 ἰσορροπεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F καὶ τοῦ βάρους της $B = mg$. Ἡ συνισταμένη Σ τῶν δυνάμεων F καὶ B εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου OKA_1 καὶ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος OA_1. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣBA_1 ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$εφ\,α = \frac{F}{B} \qquad ἤτοι \qquad εφ\,α = \frac{Q^2}{\sqrt{3} \cdot l^2 \cdot ημ^2 α \cdot mg}$$

Ἄρα:

$$εφ\,α \cdot ημ^2 α = \frac{Q^2}{\sqrt{3} \cdot l^2 \cdot mg}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$\frac{εφ^2 α}{1 + εφ^2 α} = \frac{Q^2}{mg\, l^2 \sqrt{3}}$$

25. Εἰς ἕνα σημεῖον εὑρίσκεται ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +500$ C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὑπὸ τοῦ φορτίου Q παραγομένου ἠλεκρτικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 5 cm καὶ 10 cm;

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +500$ C.G.S. δημιουργεῖ πέριξ αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἔντασις E τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον αὐτοῦ καλεῖται ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $+1$ φερομένου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τοῦ πεδίου. Οὕτω, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν $r = 5$ cm ἀπὸ τὸ φορτίον Q εἶναι:

$$E = \frac{Q \cdot 1}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \qquad ἤ \qquad E = \frac{500}{5^2}\ \text{C.G.S.} \qquad καὶ \qquad \mathbf{E = 20\ C.G.S.}$$

Καὶ εἰς ἀπόστασιν $r = 10$ cm εἶναι:

$$E = \frac{500}{10^2}\ \text{C.G.S.} \qquad ἤτοι \qquad \mathbf{E = 5\ C.G.S.}$$

26. Εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας μήκους 15 cm εὑρίσκονται δύο ἠλεκτρικὰ φορτία $+Q$ καὶ $+4Q$. Εἰς ποῖον σημεῖον ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἴση μὲ μηδέν;

Ἔστω ὅτι εἰς τὸ ἄκρον Α τῆς εὐθείας $AB = 15$ cm εὑρίσκεται τὸ φορτίον $+Q$ καὶ εἰς τὸ ἄκρον Β εὑρίσκεται τὸ φορτίον $+4Q$. Εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸ φορτίον $+1$ C.G.S., τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὑφίσταται ἐκ μέρους τῶν φορτίων $+Q$ καὶ $+4Q$ δύο ἴσας καὶ ἀντιθέτους ἀπώσεις, αἱ ὁποῖαι προφανῶς θὰ ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδέν. Ἡ συνθήκη αὐτὴ ἰσχύει, μόνον, ἂν τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μεταξὺ τῶν φορτίων $+Q$ καὶ $+4Q$. Ἂν καλέσωμεν:

$$ΑΓ = x \qquad τότε\ εἶναι: \qquad ΒΓ = 15 - x$$

Εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἕνεκα τοῦ φορτίου $+Q$, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι:

$$E = \frac{Q}{(ΑΓ)^2} = \frac{Q}{x^2}$$

καὶ ἕνεκα τοῦ φορτίου $+4Q$ εἶναι:

$$E = \frac{4Q}{(ΒΓ)^2} = \frac{4Q}{(15 - x)^2}$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ἔχομεν :

$$\frac{Q}{x^2} = \frac{4Q}{(15-x)^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(15-x)^2}$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{(15-x)^2}{x^2} = 4 \quad \text{ἄρα} \quad \frac{15-x}{x} = 2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$3x = 15 \quad \text{ἄρα} \quad x = 5 \text{ cm}$$

Οὕτω αἱ ἀποστάσεις τοῦ ζητουμένου σημείου Γ ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι :

$$\mathbf{A\Gamma = 5\ cm} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{B\Gamma = 10\ cm}$$

27. Εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 4 cm, εὑρίσκονται κατὰ σειρὰν τὰ φορτία + 100, + 100, — 100 καὶ — 100 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου;

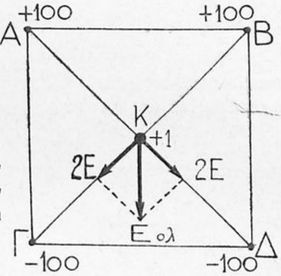
Εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ τετραγώνου θεωροῦμεν ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ + 1 C.G.S. (σχ. 19). Ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ΑΒ = 4 cm. Ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$(\mathrm{A\Delta})^2 = (\mathrm{A\Gamma})^2 + (\Gamma\Delta)^2 \quad \text{ἢ} \quad (\mathrm{A\Delta})^2 = 4^2 + 4^2$$

εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$(\mathrm{A\Delta})^2 = 2 \cdot 4^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathrm{A\Delta} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{καὶ} \quad r = \mathrm{AK} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} \quad \text{ἢ} \quad r = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$$



Σχ. 19

Τὰ δύο ἴσα ἑτερώνυμα φορτία, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΑΔ ἐξασκοῦν ἐπὶ τοῦ φορτίου + 1, τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὸ Κ, μίαν ἄπωσιν καὶ μίαν ἕλξιν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τῆς ΚΔ, εἶναι ἴσαι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἑκάστη τῶν δράσεων τούτων εἶναι :

$$E = \frac{Q}{r^2} = \frac{100}{(2 \cdot \sqrt{2})^2} = \frac{100}{8} \text{ C.G.S.}$$

Ἄρα, ἕνεκα τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΑΔ εὑρισκομένων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἡ ἔντασις Ε′ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ Κ εἶναι 2Ε, ἤτοι :

$$E' = 2E = 2 \cdot \frac{100}{8} = 25 \text{ C.G.S.}$$

Ὁμοίως, ἕνεκα τῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαγωνίου ΒΓ ἴσων καὶ ἑτερωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ Κ εἶναι :

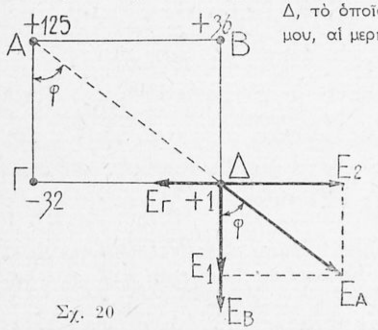
$$E' = 2E = 25 \text{ C.G.S.}$$

Ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ Κ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο ἴσων μερικῶν ἐντάσεων Ε′ = 2Ε, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$E_{ολ} = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25 \cdot \sqrt{2} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{E_{ολ} = 35{,}25\ C.G.S.}$$

28. Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β, Γ, ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἔχοντος πλευρὰς ΑΓ = 3 cm καὶ ΑΒ = 4 cm, εὑρίσκονται τρία ἠλεκτρικὰ φορτία ἴσα μέ : + 125, + 36 καὶ — 32 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ τοῦ παραλληλογράμμου. (Τὰ ἠλεκτρικὰ φορτία εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος).

Ἕνεκα τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β καὶ Γ τοῦ παραλληλογράμμου (σχ. 20) δημιουργοῦνται τρία μερικὰ ἠλεκτρικὰ πεδία. Εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου, αἱ μερικαὶ ἐντάσεις τῶν τριῶν ἠλεκτρικῶν πεδίων εἶναι :



Σχ. 20

$$E_A = \frac{(+125)\cdot(+1)}{(A\Delta)^2}$$

ἤτοι $E_A = +\dfrac{125}{4^2+3^2}$ C.G.S.

καὶ $E_A = +5$ dyn/ΗΣΜ - φορτίου

$$E_B = \frac{(+36)\cdot(+1)}{(B\Delta)^2}$$

ἤτοι $E_B = +\dfrac{36}{9}$ C.G.S.

καὶ $E_B = +4$ dyn/ΗΣΜ - φορτίου

$$E_\Gamma = \frac{(-32)\cdot(+1)}{(\Gamma\Delta)^2}$$ ἤτοι $E_\Gamma = -\dfrac{32}{16}$ C.G.S.

καὶ $E_\Gamma = -2$ dyn/ΗΣΜ - φορτίου

Ἡ ἔντασις Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν μερικῶν ἐντάσεων E_A, E_B καὶ E_Γ. Ἀναλύομεν τὴν ἔντασιν E_A εἰς τὰς δύο συνιστώσας E_1 καὶ E_2, αἱ ὁποῖαι εἶναι :

$$E_1 = E_A \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad \text{καὶ} \qquad E_2 = E_A \cdot \text{ημ}\,\varphi$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{5} \qquad \text{καὶ} \qquad \text{ημ}\,\varphi = \frac{\Gamma\Delta}{A\Delta} = \frac{4}{5}$$

Ἄρα εἶναι :

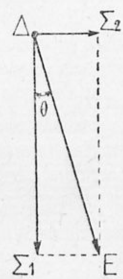
$$E_1 = 5\cdot\frac{3}{5} = 3 \text{ dyn/ΗΣΜ - φορτίου} \qquad \text{καὶ} \qquad E_2 = 5\cdot\frac{4}{5} = 4 \text{ dyn/ΗΣΜ - φορτίου}$$

Αἱ μερικαὶ ἐντάσεις E_B καὶ E_1 ἔχουν συνισταμένην :

$$\Sigma_1 = E_B + E_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Sigma_1 = (4+3) = 7 \text{ C.G.S.}$$

Αἱ δὲ μερικαὶ ἐντάσεις E_Γ καὶ E_2 ἔχουν συνισταμένην :

$$\Sigma_2 = E_2 - E_\Gamma \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Sigma_2 = (4-2) = 2 \text{ C.G.S.}$$



Σχ. 20 α

Ὥστε αἱ δύο κάθετοι πρὸς ἀλλήλας συνιστῶσαι τῆς ἐντάσεως Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι αἱ ἐντάσεις Σ_1 καὶ Σ_2 (σχ. 20 α). Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἴση μέ :

$$E = \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \sqrt{7^2+2^2} \text{ C.G.S.}$$

καὶ **Ε = 7,28 dyn/ΗΣΜ - φορτίου**

Ἡ διεύθυνσις τῆς ἐντάσεως Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς πλευρᾶς ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου γωνίαν θ, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \text{εφ}\,\theta = \frac{2}{7} = 0{,}2857 \qquad \text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\theta \approx 16^0}$$

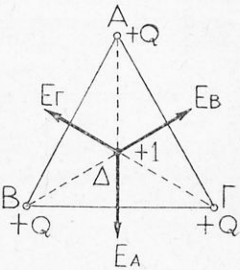
29. Εἰς τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκονται τρία ἴσα θετικὰ ἠλεκτρικὰ φορτία, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ $Q = +250\ \mu Cb$. Ἕνα σημεῖον Δ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἀπέχει 10 cm ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τριγώνου. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ;

Εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (σχ. 21) εὑρίσκεται ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = +250\ \mu Cb \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = +\frac{250}{10^6}\ Cb$$

$$\text{ἢ} \qquad Q = \left(+\frac{250}{10^6}\cdot 3\cdot 10^9\right)\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

$$\text{καὶ} \qquad Q = +75\cdot 10^4\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$



Σχ. 21

Ἕκαστον τῶν τριῶν τούτων ἠλεκτρικῶν φορτίων δημιουργεῖ ἴδιον ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 10 cm ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τριγώνου, ἡ ἔντασις ἑκάστου τῶν τριῶν ἠλεκτρικῶν πεδίων εἶναι :

$$E_A = E_B = E_\Gamma = \frac{(+Q)\cdot(+1)}{10^2}\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad E_A = E_B = E_\Gamma = +7500\ \text{dyn/ΗΣΜ - φορτίου}$$

Αἱ τρεῖς μερικαὶ ἐντάσεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 120^0. Αἱ μερικαὶ ἐντάσεις E_B καὶ E_Γ ἔχουν συνισταμένην :

$$\Sigma = \sqrt{E_B{}^2 + E_\Gamma{}^2 + 2E_B\cdot E_\Gamma\cdot \text{συν}\ 120^0} = \sqrt{2E_B{}^2 - E_B{}^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Sigma = E_B$$

Ἡ συνισταμένη Σ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς μερικῆς ἐντάσεως E_A. Ἄρα ἡ ἔντασις Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Δ εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἤτοι :

$$\mathbf{E = 0}$$

30. Μία μικρὰ ἠλεκτρισμένη μεταλλικὴ σφαῖρα φέρεται κατακορύφως ἄνωθεν ἠλεκτρικοῦ φορτίου $Q = +100$ C.G.S. καὶ εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπὸ τὸ φορτίον τοῦτο. Τὸ βάρος τῆς σφαίρας φαίνεται τότε αὐξανόμενον κατὰ 1 gr*. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σφαίρας;

Ἐπειδὴ τὸ βάρος τῆς μεταλλικῆς σφαίρας φαίνεται αὐξανόμενον, ἕπεται ὅτι μεταξὺ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου Q_Σ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κάτωθεν αὐτῆς εὑρισκομένου θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $+Q$ ἀναπτύσσεται ἕλξις. Ἄρα ἡ σφαῖρα ἔχει ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον. Ἡ ἀναπτυσσομένη μεταξὺ τῶν δύο ἑτερωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἕλξις εἶναι :

$$F = 1\ gr^* = 981\ dyn$$

Ἄρα σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$F = \frac{(-Q_\Sigma)\cdot(+Q)}{r^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_\Sigma = -\frac{F\cdot r^2}{Q}\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἢ} \qquad Q_\Sigma = -\frac{981\cdot 9}{100}\ \text{C.G.S.} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{Q_\Sigma = -88{,}29\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}$$

31. Ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ λεπτὸν ἀβαρὲς νῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 90 cm. Εἰς τὸ ἄκρον του φέρει μικρὰν σφαῖραν, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν 0,5 gr καὶ φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +50$ C.G.S. Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο αἰωρεῖται ἐντὸς κατακορύφου ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὰς διευθύνεται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἔπειτα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ διάρκεια 100 μικρῶν

ἁπλῶν αἰωρήσεων εἶναι 107 sec· εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ διάρκεια αὕτη εἶναι 86 sec. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς πτώσεως τῶν σωμάτων ἕνεκα τοῦ πεδίου βαρύτητος, ὡς καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ ὁποία παραμένει σταθερὰ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

Τὸ ἐκκρεμὲς ἔχει μῆκος $l = 90$ cm, ἡ δὲ μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα ἔχει μᾶζαν $m = 0{,}5$ gr καὶ φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +50$ C.G.S. Ἔστω Ε ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Τότε ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου Q τῆς σφαίρας ἐνεργεῖ, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, μία δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι:

$$F = Q \cdot E \quad \text{ἤτοι} \quad F = 50 \cdot E \text{ dyn}$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν m τῆς σφαίρας ἐπιτάχυνσιν γ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{50 \cdot E \text{ dyn}}{0{,}5 \text{ gr}} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 100 \text{ E cm/sec}^2$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ κατακόρυφος δύναμις F ἔχει φορὰν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Συνεπῶς ἡ κίνησις τοῦ ἐκκρεμοῦς γίνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς φαινομένης ἐπιταχύνσεως:

$$\gamma_1 = g - \gamma \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma_1 = g - 100 \text{ E } (\text{cm/sec}^2)$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ κατακόρυφος δύναμις F ἔχει φορὰν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω. Τότε ἡ φαινομένη ἐπιτάχυνσις εἶναι:

$$\gamma_2 = g + \gamma \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma_2 = g + 100 \text{ E } (\text{cm/sec}^2)$$

Ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων εἶναι ἀντιστοίχως:

$$T_1 = \frac{107}{50} \text{ sec} \quad \text{καὶ} \quad T_2 = \frac{86}{50} \text{ sec}$$

Ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma_1}} \quad \text{ἤτοι} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - 100 \text{ E}}} \qquad (1)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\gamma_2}} \quad \text{ἤτοι} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + 100 \text{ E}}} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

$$g - 100 \text{ E} = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T_1^2} \quad \text{ἤτοι} \quad g - 100 \text{ E} = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{50}{107}\right)^2 \cdot 90 \qquad (3)$$

Ἀπὸ δὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν:

$$g + 100 \text{ E} = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T_2^2} \quad \text{ἤτοι} \quad g + 100 \text{ E} = 4\pi^2 \cdot \left(\frac{50}{86}\right)^2 \cdot 90 \qquad (4)$$

Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (4) ὡς πρὸς g καὶ ὡς πρὸς Ε, εὑρίσκομεν:

$$\mathbf{g = 988{,}4 \text{ cm/sec}^2} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 2{,}13 \text{ dyn/ΗΣΜ - φορτίου}}$$

32. Μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q = + 25 C.G.S. Πόσον εἶναι τὸ δυναμικὸν εἰς ἀπόστασιν 3 cm ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας;

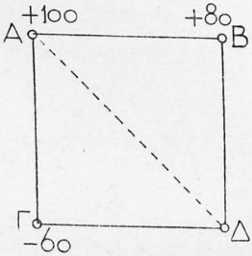
Ἡ μικρὰ μεταλλικὴ σφαῖρα φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +25$ C.G.S., τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δυναμικὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἓν σημεῖον αὐτοῦ, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $r = 3$ cm ἀπὸ τὸ σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $+Q$, εἶναι:

$$U = \frac{+Q}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad U = +\frac{25}{3} \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 8{,}3 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}}$$

* Σημείωσις. Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον $+Q$ ὑποθέτομεν ὅτι εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἀέρος, τοῦ ὁποίου ἡ διηλεκτρικὴ σταθερὰ k εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα ($k = 1$).

33. Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β, Γ ἑνὸς τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 4 cm, εὑρίσκονται ἀντιστοίχως τὰ ἠλεκτρικὰ φορτία +100, +80 καὶ −60 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν εἰς τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ τοῦ τετραγώνου.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸ σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον Q , τὸ δυναμικὸν U εἶναι ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου Q διὰ τῆς ἀποστάσεως r, ἤτοι εἶναι :



Σχ. 22

$$U = \frac{Q}{r}$$

Ἕκαστον τῶν τριῶν θεωρουμένων ἠλεκτρικῶν φορτίων (σχ. 22) δημιουργεῖ ἴδιον ἠλεκτρικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σημεῖον Δ ἔχει δυναμικόν :

πεδίον τοῦ εἰς τὴν κορυφὴν Α φορτίου :

$$U_1 = \frac{+100}{\text{ΑΔ}} \text{ C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = +\frac{100}{\sqrt{4^2+4^2}} \text{ C.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \quad U_1 = +\frac{25\sqrt{2}}{2} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

πεδίον τοῦ εἰς τὴν κορυφὴν Β φορτίου : $U_2 = \frac{+80}{\text{ΒΔ}}$ C.G.S.

$$\text{ἤτοι} \quad U_2 = +\frac{80}{4} \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad U_2 = +20 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

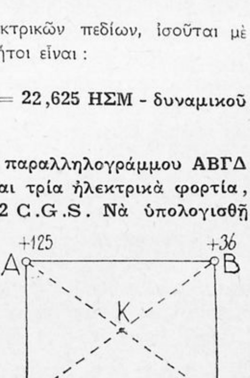
πεδίον τοῦ εἰς τὴν κορυφὴν Γ φορτίου : $U_3 = \frac{-60}{\text{ΓΔ}}$ C.G.S.

$$\text{ἤτοι} \quad U_3 = -\frac{60}{4} \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad U_3 = -15 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Τὸ δυναμικὸν U_Δ εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἕνεκα τῶν τριῶν ἠλεκτρικῶν πεδίων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν τριῶν δυναμικῶν U_1, U_2 U_3, ἤτοι εἶναι :

$$U_\Delta = \left(\frac{25\sqrt{2}}{2} + 20 - 15\right) \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_\Delta = 22{,}625 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}}$$

34. Εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς Α, Β, Γ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ἔχοντος πλευρὰς ΑΓ = 3 cm καὶ ΑΒ = 4 cm, εὑρίσκονται τρία ἠλεκτρικὰ φορτία, τὰ ὁποῖα ἀντιστοίχως εἶναι ἴσα μὲ +125, +36 καὶ −32 C.G.S. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ δαπανώμενον κατὰ τὴν μεταφορὰν φορτίου +10 C.G.S. ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὴν τομὴν Κ τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.



Σχ. 23

Ἕκαστον ἐκ τῶν εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ παραλληλογράμμου εὑρισκομένων ἠλεκτρικῶν φορτίων δημιουργεῖ ἴδιον ἠλεκτρικὸν πεδίον (σχ. 23). Εἰς τὸ σημεῖον Δ τὸ δυναμικόν, ἕνεκα ἑκάστου τῶν τριῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, εἶναι :

$$U_\Delta = \frac{+125}{\text{ΑΔ}} + \frac{+36}{\text{ΒΔ}} + \frac{-32}{\text{ΓΔ}}$$

$$\text{ἤτοι} \quad U_\Delta = \left(\frac{125}{5} + \frac{36}{3} - \frac{32}{4}\right) \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad U_\Delta = 29 \text{ C.G.S.}$$

Είς τό σημεῖον Κ τῆς τομῆς τῶν δύο διαγωνίων τὸ δυναμικὸν εἶναι :

$$U_K = \frac{+125}{AK} + \frac{+36}{BK} + \frac{-32}{ΓK}$$

ἤτοι $U_K = \left(\frac{125}{2,5} + \frac{36}{2,5} - \frac{32}{2,5} \right)$ C.G.S. καὶ $U_K = 51,6$ C.G.S.

Ὥστε μεταξὺ τῶν σημείων Κ καὶ Δ ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ :

$$U_K - U_Δ = (51,6 - 29) \text{ C.G.S.} = 22,6 \text{ C.G.S.}$$

Κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $Q = 10$ C.G.S. ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὸ σημεῖον Κ δαπανᾶται ἔργον :

$$W = Q \cdot (U_K - U_Δ) \quad \text{ἤτοι} \quad W = (10 \cdot 22,6) \text{ C.G.S.}$$

καὶ **W = 226 erg**

35. Μεταξὺ δύο ἀγωγῶν ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ ἴση μὲ 6 V. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἀγωγοῦ εἰς τὸν ἄλλον, διὰ νὰ λάβωμεν ἔργον 120 Joule;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν μεταξὺ δύο ἀγωγῶν ὑπάρχῃ διαφορὰ δυναμικοῦ U καὶ μεταφερθῇ ἐκ τοῦ ἑνὸς ἀγωγοῦ εἰς τὸν ἄλλον ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τότε παράγεται ἔργον W, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μέ :

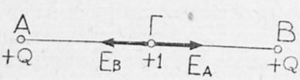
$$W = Q \cdot U \qquad (1)$$

Ὅταν τὰ μεγέθη Q καὶ U μετροῦνται εἰς πρακτικὰς μονάδας, τότε τὸ ἔργον W μετρεῖται εἰς Joule. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι :

$$Q = \frac{W}{U} \quad \text{ἄρα} \quad Q = \frac{120 \text{ Joule}}{6 \text{ Volt}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{Q = 20 \text{ Cb}}$$

36. Δύο μικραὶ μεταλλικαὶ σφαῖραι φέρουν ὁμώνυμα ἠλεκτρικὰ φορτία καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 15 cm. Τὸ φορτίον ἑκάστης σφαίρας εἶναι + 250 C.G.S. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ μέσον τῆς μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἀποστάσεως;

Ἑκάστη σφαῖρα φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +250$ C.G.S., τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς σημειῶδες. Ἔστω Γ τὸ μέσον τῆς μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ἀποστάσεως (σχ. 24). Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ ἕκαστον σημειῶδες φορτίον εἶναι $r = 7,5$ cm. Ἕκαστον ἠλεκτρικὸν φορτίον δημιουργεῖ ἴδιον ἠλεκτρικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ σημεῖον Γ ἔχει ἔντασιν :



Σχ. 24

$$E_A = \frac{(+Q) \cdot (+1)}{r^2} = + \frac{Q}{r^2}$$

καὶ

$$E_B = \frac{(+Q) \cdot (+1)}{r^2} = + \frac{Q}{r^2}$$

Αἱ μερικαὶ ἐντάσεις E_A καὶ E_B τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Συνεπῶς ἡ ἔντασις Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Γ εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἤτοι :

$$E = E_A - E_B \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{E = 0}$$

Εἰς τὸ σημεῖον Γ τὸ δυναμικὸν ἑκάστου ἐκ τῶν δύο ἠλεκτρικῶν πεδίων εἶναι :

$$U_A = U_B = \frac{+Q}{r} = + \frac{250}{7,5} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad U_A = U_B = 33,33 \text{ C.G.S.}$$

Τὸ δυναμικὸν U εἰς τὸ σημεῖον Γ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν μερικῶν δυναμικῶν U_A καὶ U_B, ἤτοι εἶναι :

$$U = U_A + U_B \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 66,66} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

37. Μικρὸς σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἠλεκτρικὸν φορτίον + 200 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἔργον δαπανᾶται, ὅταν φορτίον + 1 C.G.S. μεταφέρεται ἀπὸ ἓν σημεῖον A, ἀπέχον 50 cm ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἰς ἄλλο σημεῖον B, ἀπέχον 10 cm ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ὁ σφαιρικὸς ἀγωγὸς Σ (σχ. 25) φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = +200$ C.G.S., τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς σημειῶδες καὶ εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ ἀέρος. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸ σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον Q τὸ δυναμικὸν εἶναι : $U = \frac{Q}{r}$

Σχ. 25

Ἄρα εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B τὸ δυναμικὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἀντιστοίχως :

$$U_A = \frac{+Q}{r_A} = \frac{+200}{50} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad U_A = +4 \text{ C.G.S.}$$

$$U_B = \frac{+Q}{r_B} = \frac{+200}{10} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad U_B = +20 \text{ C.G.S.}$$

Οὕτω μεταξὺ τῶν δύο σημείων A καὶ B τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ :

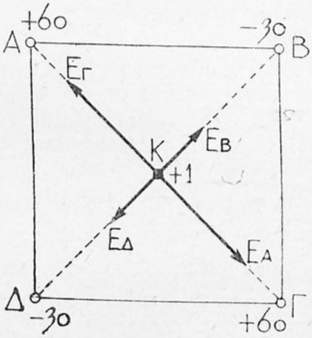
$$U_B - U_A = 16 \text{ C.G.S.}$$

Διὰ τὴν μεταφορὰν ἠλεκτρικοῦ φορτίου $Q' = +1$ C.G.S. ἀπὸ τὸ σημεῖον A εἰς τὸ σημεῖον B τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, πρέπει νὰ δαπανηθῇ ἔργον :

$$W = Q' \cdot (U_B - U_A) \quad \text{ἤτοι} \quad W = (1 \cdot 16) \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 16\ erg}$$

38. Εἰς τὰς τέσσαρας κορυφὰς ἑνὸς τετραγώνου, ἔχοντος πλευρὰν 20 cm, ὑπάρχουν κατὰ σειρὰν ἠλεκτρικὰ φορτία + 60, − 30, + 60 καὶ − 30 C.G.S. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου.

Τὰ τέσσαρα ἠλεκτρικὰ φορτία εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος (σχ 26), ἕκαστον δὲ ἠλεκτρικὸν φορτίον δημιουργεῖ ἴδιον ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἰς τὸ κέντρον K τοῦ τετραγώνου θεωροῦμεν ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ + 1 C.G.S. Ἐὰν Q εἶναι τὸ εἰς μίαν κορυφὴν τοῦ τετραγώνου ἠλεκτρικὸν φορτίον, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον K τοῦ τετραγώνου εἶναι :



Σχ. 26

$$E = \frac{Q}{(AK)^2} = \frac{Q}{200} \text{ C.G.S.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Γ εὑρισκόμενα ὁμώνυμα καὶ ἴσα ἠλεκτρικὰ φορτία δημιουργοῦν εἰς τὸ σημεῖον K ἴσας καὶ ἀντιθέτους ἐντάσεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὴν E_A καὶ τὴν E_Γ. Ὁμοίως αἱ μερικαὶ ἐντάσεις E_B καὶ E_Δ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον K εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Οὕτω αἱ τέσσαρες μερικαὶ ἐντάσεις E_A, E_Γ, E_B, E_Δ ἔχουν συνισταμένην ἴσην μὲ μηδὲν καὶ ἐπομένως ἡ ἔντασις E τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον K εἶναι :

$$\mathbf{E = O}$$

Τὸ δυναμικὸν (U) εἰς τὸ σημεῖον K ἰσοῦται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν, ἕνεκα ἑκάστου ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Οὕτω ἕνεκα ἑκάστου τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΓ, τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον K εἶναι : $U_A = U_\Gamma = \frac{+Q}{r} = \frac{+60}{10\sqrt{2}} = + \frac{60\sqrt{2}}{20}$ C.G.S.

Ἕνεκα τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, τῶν εὑρισκομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΒΔ, τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον Κ εἶναι :

$$U_B = U_\Delta = \frac{-Q}{r} = \frac{-30}{10\sqrt{2}} = -\frac{30\sqrt{2}}{20} \text{ C.G.S.}$$

Ὥστε τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖον Κ εἶναι :

$$U = (U_A + U_\Gamma) - (U_B + U_\Delta) \quad \text{ἤτοι} \quad U = \left(2 \cdot \frac{60\sqrt{2}}{20}\right) - \left(2 \cdot \frac{30\sqrt{2}}{20}\right) \text{ C.G.S.}$$

$$\text{ἤ} \quad U = 3\sqrt{2} \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 4{,}23 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}}$$

39. Δύο ἑτερωνύμως ἠλεκτρισμέναι παράλληλοι μεταλλικαὶ πλάκες ἀπέχουν μεταξύ των 5,25 mm καὶ ἡ μεταξὺ τῶν πλακῶν ὑπάρχουσα διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 1500 V. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν;

Μεταξὺ τῶν δύο ἑτερωνύμως ἠλεκτρισμένων παραλλήλων πλακῶν σχηματίζεται ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ ἔντασις Ε εἰς μονάδας C.G.S. δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$E = \frac{U}{l}$$

ὅπου $U = 1500$ Volt εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν ὑπάρχουσα τάσις καὶ $l = 0{,}525$ cm εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πλακῶν. Εἰς μονάδας C.G.S. ἡ τάσις U εἶναι :

$$U = \frac{1500 \text{ Volt}}{300 \text{ Volt/ΗΣΜ - δυναμικοῦ}} \quad \text{καὶ} \quad U = 5 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις Ε τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E = \frac{5}{0{,}525} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{E = 9{,}52 \text{ dyn/ΗΣΜ - φορτίου}}$$

40. Μεταξὺ δύο ἀγωγῶν ὑπάρχει τάσις 150 V καὶ ἀπὸ τὸν ἕνα ἀγωγὸν εἰς τὸν ἄλλον μεταφέρεται ἠλεκτρικὸν φορτίον 600 Cb. Πόσον ἔργον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μεταφοράν; Ἐὰν ἡ μεταφορὰ αὐτὴ πραγματοποιῆται ἐντὸς χρόνου 1,25 sec, πόση εἶναι ἡ χρησιμοποιουμένη ἰσχύς;

Μεταξὺ τῶν δύο ἀγωγῶν ὑπάρχει τάσις $U = 150$ V, τὸ δὲ μεταφερόμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι $Q = 600$ Cb. Τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν μεταφορὰν αὐτὴν ἔργον εἶναι :

$$W = Q \cdot U \quad \text{ἤτοι} \quad W = 600 \text{ Cb} \cdot 150 \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 90\,000 \text{ Joule}}$$

Ἡ χρησιμοποιουμένη διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἔργου τούτου ἰσχὺς P εἶναι :

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad P = \frac{90\,000 \text{ Joule}}{1{,}25 \text{ sec}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 7200 \text{ W} = 7{,}2 \text{ kW}}$$

41. Εἰς μίαν μηχανὴν τοῦ Van de Graaff ἡ σφαῖρα ἔχει δυναμικὸν 5 MV. Μὲ κατάλληλον διάταξιν ἐκρέει ἐκ τῆς σφαίρας εἰς τὴν γῆν φορτίον 2 mCb κατὰ δευτερόλεπτον. Πόση ἰσχὺς λαμβάνεται κατὰ τὴν κίνησιν αὐτοῦ τοῦ φορτίου;

Μεταξὺ τῆς σφαίρας τῆς μηχανῆς καὶ τῆς γῆς ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ :

$$U = 5 \text{ MV} = 5 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Ἀπὸ τὴν σφαῖραν ἐκρέει κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὴν γῆν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = 2 \text{ mCb/sec} = \frac{2}{10^3} \text{ Cb/sec}$$

Τὸ κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ φορτίου τούτου παραγόμενον ἔργον εἶναι :

$$W = Q \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{3}{10^3}\ \mathrm{Cb/sec} \cdot 5 \cdot 10^6\ \mathrm{V}$$

$$\text{ἄρα} \qquad W = 15 \cdot 10^3\ \mathrm{Joule/sec}$$

Ὥστε ἡ λαμβανομένη ἰσχὺς εἶναι : $\mathbf{P = 15 \cdot 10^3\ W = 15\ kW}$

42. Μεταξὺ δύο παραλλήλων μεταλλικῶν πλακῶν, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν $l = 2$ cm, ὑπάρχει ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν εἶναι 1200 V. Νὰ εὑρεθῇ πόση δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑνὸς θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου 20 C.G.S., ὅταν τοῦτο τεθῇ ἐντὸς τοῦ πεδίου.

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλακῶν ὑπάρχουσα τάσις εἶναι :

$$U = 1200\ \mathrm{V} = 4\ \mathrm{C.G.S.}$$

Ἡ ἔντασις E τοῦ ὁμογενοῦς τούτου ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E = \frac{U}{l} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{4}{2}\ \mathrm{C.G.S.} = 2\ \mathrm{C.G.S.}$$

Οὕτω ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $Q = +20$ C.G.S. ἐνεργεῖ, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, δύναμις F ἴση μέ :

$$F = Q \cdot E \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = (20 \cdot 2)\ \mathrm{C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{F = 40\ dyn}$$

ΦΥΣΙΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ

43. Πόσα ἠλεκτρόνια ὑπάρχουν ἐπὶ ἑνὸς ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος φέρει ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ $Q = -1$ C.G.S. ἢ $Q' = -1$ Cb;

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb} \qquad \text{ἢ} \qquad e = -4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ὥστε ὁ ἀγωγός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = -1$ C.G.S., φέρει ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸν ἠλεκτρονίων :

$$\nu = \frac{Q}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{-1\ \mathrm{C.G.S.}}{-4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C.G.S.}/\text{ἠλεκτρόνιον}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\nu = 2 \cdot 10^9}\ \textbf{ἠλεκτρόνια}$$

Ὅταν ὁ ἀγωγὸς ἔχῃ ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q' = -1$ Cb, τότε φέρει ἐπ' αὐτοῦ ἀριθμὸν ἠλεκτρονίων :

$$\nu' = \frac{Q'}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu' = \frac{-1\ \mathrm{Cb}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb}/\text{ἠλεκτρόνιον}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\nu' = 625 \cdot 10^{16}}\ \textbf{ἠλεκτρόνια}$$

44. Ἀγωγὸς ἔχει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = -6{,}4$ Cb. Πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλεοναζόντων ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα φέρει ὁ ἀγωγός;

Τὸ ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴσον μὲ ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον, ἤτοι εἶναι : $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Ὁ ἀγωγὸς φέρει ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = -6{,}4$ Cb, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς ὡρισμένον ἀριθμὸν ν πλεοναζόντων ἠλεκτρονίων. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\nu = \frac{Q}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{-6{,}4\ \mathrm{Cb}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb}/\text{ἠλεκτρόνιον}} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\nu = 4 \cdot 10^{19}}\ \textbf{ἠλεκτρόνια}$$

45. Ἀγωγὸς ἔχει φορτίον $Q = +3{,}2$ Cb. Πόσα ἠλεκτρόνια ἔχασεν ὁ ἀγωγός;

Ὁ ἀγωγὸς φέρει θετικὸν φορτίον $Q = 3{,}2$ Cb, διότι ὁ ἀγωγὸς ἔχασεν ὡρισμένον ἀριθμὸν ν ἠλεκτρονίων. Τὸ ἀρνητικὸν φορτίον τῶν ν ἠλεκτρονίων εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσον μὲ τὸ θετικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον φέρει τώρα ὁ ἀγωγός. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ἀγωγὸς ἔχασεν:

$$\nu = \frac{Q}{e} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3{,}2\ \text{Cb}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\nu = 2 \cdot 10^{19}}\ \textbf{ἠλεκτρόνια}$$

46. Δύο ἑτερώνυμα στοιχειώδη ἠλεκτρικὰ φορτία $+e$ καὶ $-e$ εὑρίσκονται εἰς ἀπόστασιν 1 mm. Πόση εἶναι ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀσκουμένη ἕλξις;

Ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἑτερωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἀσκουμένη ἕλξις F δίδεται (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$F = \frac{e \cdot e}{r^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{e^2}{r^2} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν F εἰς δύνας, ἂν τὰ μεγέθη e καὶ r εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς μονάδας τοῦ συστήματος C.G.S. Ὥστε εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) πρέπει νὰ θέσωμεν:

$$e = \frac{1{,}6}{10^{19}}\ \text{Cb} = \frac{1{,}6}{10^{19}} \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἤτοι} \quad e = \frac{4{,}8}{10^{10}}\ \text{C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad r = 1\ \text{mm} = 0{,}1\ \text{cm}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$F = \frac{e^2}{r^2} = \left(\frac{4{,}8}{10^{10}}\right)^2 : 0{,}1^2 = \frac{23{,}04}{10^{20} \cdot 0{,}01}\ \text{dyn} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{F = 2304 \cdot 10^{-20}\ dyn}$$

47. Μεταξὺ δύο ἀγωγῶν ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ 1 Volt. Ἕνα ἠλεκτρόνιον μεταβαίνει ἀπὸ τὸν ἕνα ἀγωγὸν εἰς τὸν ἄλλον. Πόσον ἔργον εἰς ἔργια καὶ Joule παράγεται κατ' αὐτὴν τὴν μετακίνησιν τοῦ ἠλεκτρονίου;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν Q εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον μεταβαίνει ἀπὸ τὸν ἕνα ἀγωγὸν εἰς τὸν ἄλλον, καὶ U εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀγωγῶν ὑπάρχουσα διαφορὰ δυναμικοῦ, τότε τὸ παραγόμενον ἔργον W εἶναι:

$$W = Q \cdot U \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὸ ἔργον W εἰς ἔργια, ἂν τὰ μεγέθη Q καὶ U εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς μονάδας τοῦ συστήματος C.G.S. Ὥστε εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) πρέπει νὰ θέσωμεν:

$$Q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἤτοι} \quad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad U = 1\ \text{Volt} = \frac{1}{300}\ \text{C.G.S.}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι:

$$W = e \cdot U \quad \text{ἤτοι} \quad W = \left(4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{300}\right)\ \text{C.G.S.} = \frac{4{,}8}{3} \cdot 10^{-12}\ \text{erg}$$

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{W = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ ἔργον W εἰς Joule, πρέπει τὰ μεγέθη Q καὶ U νὰ εἶναι ἐκπεφρασμένα εἰς πρακτικὰς μονάδας, ἤτοι εἰς Coulomb καὶ Volt. Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$W = e \cdot U = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot 1\ \text{V} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Joule}$$

Τὸ εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὑπολογισθὲν ἔργον ἀποτελεῖ μίαν πολὺ μικρὰν μονάδα ἔργου, ἡ ὁποία καλεῖται ἠλεκτρονιοβόλτ (eV) καὶ χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς τὴν Ἀτομικὴν καὶ Πυρηνικὴν Φυσικήν. Ὥστε:

$$1\ \text{ἠλεκτρονιοβόλτ (eV)} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Joule}$$

48. Μεταξὺ δύο ἑτερωνύμως ἠλεκτρισμένων παραλλήλων πλακῶν ὑπάρχει τάσις $U = 1200$ V. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν εἶναι 5 mm. Ἕνα πρωτόνιον φέρεται μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν. Ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου εἶναι $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ πρωτονίου, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ τοῦ γηίνου πεδίου βαρύτητος.

Τὸ πρωτόνιον φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον, ἤτοι φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$e = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb} \qquad \text{ἢ} \qquad e = +4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C.G.S.}$$

Ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν εἶναι :

$$U = 1200\ \mathrm{V} \qquad \text{ἢ} \qquad U = 4\ \mathrm{C.G.S.}$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πλακῶν εἶναι $l = 0{,}5$ cm. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ σχηματιζομένου μεταξὺ τῶν πλακῶν ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E = \frac{U}{l} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{4}{0{,}5}\ \mathrm{C.G.S.} = 8\ \mathrm{dyn/ΗΣΜ\text{ - }φορτίου}$$

Οὕτω ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τοῦ πρωτονίου ἐνεργεῖ, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ δύναμις :

$$F = E \cdot e \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 8\ \mathrm{dyn/ΗΣΜ\text{ - }φορτίου} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{ΗΣΜ\text{ - }φορτίου}$$

$$\text{ἄρα} \qquad F = 38{,}4 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{dyn}$$

Ἕνεκα τοῦ γηίνου πεδίου βαρύτητος τὸ πρωτόνιον ἔχει βάρος :

$$B = m_p \cdot g \qquad \text{ἤτοι} \qquad B = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{gr} \cdot 981\ \mathrm{cm/sec^2}$$

$$\text{ἄρα} \qquad B = 1638{,}27 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{dyn}$$

Ὥστε ἕνεκα τῶν δύο πεδίων ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ πρωτονίου αἱ δύο δυνάμεις F καὶ B, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγον :

$$\frac{F}{B} = \frac{38{,}4 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{dyn}}{1638{,}27 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{dyn}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{\frac{F}{B} = 2{,}3 \cdot 10^{12}}$$

49. Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ θέλομεν νὰ διατηρηθῇ αἰωρουμένη μία μικρὰ σταγὼν ἐλαίου, ἡ ὁποία ἔχει μᾶζαν 10^{-12} gr. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι $l = 2$ cm, ἡ δὲ σταγὼν φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ τὸ φορτίον δύο ἠλεκτρονίων. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς Volt πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ;

Φορτίον ἠλεκτρονίου : $e = -4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου $\qquad g = 980$ C.G.S.

Ἐὰν U εἶναι ἡ τάσις μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ (σχ. 27), τότε ἡ ἔντασις E τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

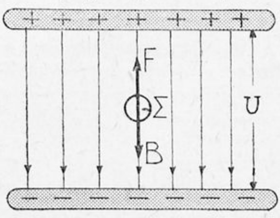
$$E = \frac{U}{l}$$

Ἡ σταγὼν Σ τοῦ ἐλαίου φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = -2\,e$$

Ἄρα ἐπὶ τῆς σταγόνος ἐνεργεῖ, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἡ δύναμις :

$$F = E \cdot Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = \frac{U}{l} \cdot Q$$



Σχ. 27

Διὰ νὰ διατηρηθῇ αἰωρουμένη ἡ σταγὼν μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, πρέπει νὰ ρυθμισθῇ καταλλήλως ἡ τάσις U, ὥστε ἡ δύναμις F νὰ ἰσορροπῇ τὸ βάρος τῆς σταγόνος: $B = m \cdot g$. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$F = B \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{U}{l} \cdot Q = m \cdot g$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις U εἶναι:

$$U = \frac{m \cdot g \cdot l}{Q} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = \frac{m \cdot g \cdot l}{2\,e} \ (\text{C.G.S.})$$

Ἐὰν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς δεδομένας τιμὰς τῶν μεγεθῶν m, l, g καὶ e, εὑρίσκομεν:

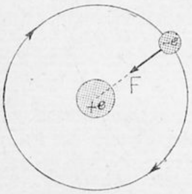
$$U = \frac{10^{-12} \cdot 980 \cdot 2}{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}} \ \text{C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = 2{,}04 \ \text{ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ἡ τάσις αὐτή, μετρημένη εἰς Volt, εἶναι:

$$U = (2{,}04 \cdot 300)\ V \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{U = 612\ V}$$

50. Εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm. Πόση εἶναι ἡ ἕλξις τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου;

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ ὑδρογόνου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πρωτόνιον (σχ. 28), τὸ ὁποῖον φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον: $+\,e$. Πέριξ τοῦ πρωτονίου καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην μὲ $r = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm περιφέρεται τὸ ἠλεκτρόνιον, τὸ ὁποῖον φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μέ: $-\,e$. Οὕτω τὸ πρωτόνιον ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἕλξιν ἴσην μέ:



Σχ. 28

$$F = \frac{(+\,e) \cdot (-\,e)}{r^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = -\,\frac{e^2}{r^2}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι:

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \qquad \text{ἢ} \qquad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις F εἶναι:

$$F = -\,\frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(5{,}3 \cdot 10^{-9})^2}\ \text{dyn} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{F = 82 \cdot 10^{-4}\ dyn}$$

51. Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr. Εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm. Κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἕλξις ἐκ μέρους τοῦ θετικοῦ πυρῆνος. Μὲ πόσην ταχύτητα κινεῖται τὸ ἠλεκτρόνιον;

Τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πρωτόνιον καὶ ἀπὸ ἕνα ἠλεκτρόνιον, τὸ ὁποῖον περιφέρεται πέριξ τοῦ πρωτονίου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $r = 5{,}3 \cdot 10^{-9}$ cm. Ἡ ἐκ μέρους τοῦ θετικοῦ πυρῆνος ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἕλξις εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσην μέ:

$$F = \frac{e^2}{r^2} \qquad (1)$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ F ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m_e τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς κεντρομόλος δύναμις. Οὕτω ἡ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐκ τῆς Μηχανικῆς ἐξίσωσιν:

$$F = \frac{m_e \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1) καὶ (2) συνάγεται ὅτι εἶναι :

$$\frac{m_e \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon^2 = \frac{e^2}{m_e \cdot r} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = \frac{e}{\sqrt{m_e \cdot r}}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ C.G.S.} \qquad m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \quad \text{καὶ} \quad r = 5{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ταχύτης εἶναι :

$$\upsilon = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-9}}} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^8 \text{ cm/sec}}$$

Ὥστε ἡ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του εἶναι :

$$\upsilon = 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ m/sec} \quad \text{ἢ} \quad \upsilon = 2200 \text{ km/sec}$$

52. Μὲ πόσην δύναμιν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ νατρίου ἀπωθεῖ ἕνα πρωτόνιον, ὅταν ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι 1 mμ ;

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ νατρίου φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ $+ 11e$, τὸ δὲ πρωτόνιον φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ $+ e$. Ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἠλεκτρικῶν φορτίων ἀπόστασις εἶναι $r = 1$ mμ. Ἐπειδὴ εἶναι :

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} = 10^4\ \mu = 10^7 \text{ m}\mu$$

ἕπεται ὅτι ἡ ἀπόστασις r εἶναι :

$$r = 1 \text{ m}\mu = 10^{-7} \text{ cm}$$

Ἡ ἄπωσις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ νατρίου ἐπὶ τοῦ πρωτονίου, εἶναι :

$$F = \frac{(+ 11e) \cdot (+ e)}{r^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{11e^2}{r^2}$$

Ἐπειδὴ τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον e εἶναι :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \quad \text{ἤτοι} \quad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

συνάγεται ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις F εἶναι :

$$F = \frac{11 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(10^{-7})^2} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{11 \cdot 23 \cdot 10^{-20}}{10^{-14}} \text{ dyn}$$

$$\text{ἄρα} \quad \boldsymbol{F = 253 \cdot 10^{-6} \text{ dyn}}$$

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΑΓΩΓΟΥ - ΠΥΚΝΩΤΑΙ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΓΩΓΟΥ

53. Ἀγωγὸς ἔχει χωρητικότητα 250 C.G.S. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ λάβῃ ὁ ἀγωγός, διὰ νὰ ἀποκτήσῃ δυναμικὸν 0,1 Volt ;

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ χωρητικότης C ἀγωγοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$C = \frac{Q}{U}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον Q εἶναι :

$$Q = C \cdot U \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι :

$$C = 250 \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad U = 0{,}1 \text{ Volt} = \frac{0{,}1}{300} \text{ C.G.S.}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$Q = \left(250 \cdot \frac{0{,}1}{300} \right) \text{C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{Q = \frac{5}{60}} \ \textbf{ΗΣΜ - φορτίου}$$

54. Ἀγωγὸς ἔχει χωρητικότητα 10 μF καὶ δυναμικὸν 4 Volt. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἀγωγοῦ ;

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τῆς χωρητικότητος ἀγωγοῦ :

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \text{λαμβάνομεν :} \qquad Q = C \cdot U \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $C = 10\ \mu F = \frac{10}{10^6}\ F$ καὶ $U = 4\ V$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι :

$$Q = \frac{10}{10^6}\ F \cdot 4\ V \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{Q = 0{,}000\,04\ Cb}$$

55. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ λάβῃ σφαιρικὸς ἀγωγός, ἀκτῖνος 5 cm, διὰ νὰ ἔχῃ δυναμικὸν 10 Volt ;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ χωρητικότης σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ εἰς ΗΣΜ - χωρητικότητος ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἀγωγοῦ, μετρηθεῖσαν εἰς ἑκατοστόμετρα. Οὕτω ὁ δοθεὶς σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἔχει χωρητικότητα : $C = 5$ C.G.S.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$C = \frac{Q}{U} \qquad \text{λαμβάνομεν :} \qquad Q = C \cdot U \qquad (1)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν :

$$C = 5 \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad U = 10 \text{ Volt} = \frac{10}{300} \text{ C.G.S.}$$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι :

$$Q = \left(5 \cdot \frac{10}{300} \right) \text{C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{Q = \frac{5}{30}} \ \textbf{ΗΣΜ - φορτίου}$$

56. Ἐκ δύο μεταλλικῶν σφαιρῶν Α καὶ Β ἡ μὲν Α ἔχει ἀκτῖνα $R_1 = 2$ cm, ἡ δὲ Β ἔχει $R_2 = 3$ cm. Αἱ δύο σφαῖραι φέρουν ἀντιστοίχως φορτία $Q_1 = +18$ C.G.S. καὶ $Q_2 = -6$ C.G.S. Αἱ δύο σφαῖραι ἔρχονται στιγμιαίως εἰς ἐπαφὴν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην, καὶ ἔπειτα ἀπομακρύνονται. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον φέρει ἑκάστη σφαῖρα μετὰ τὴν ἐπαφήν της μὲ τὴν ἄλλην σφαῖραν.

Ἡ χωρητικότης ἑκάστης σφαίρας, μετρημένη εἰς μονάδας C.G.S., ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας. Ὥστε αἱ σφαῖραι Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχως χωρητικότητα :

$$C_1 = 2 \text{ C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad C_2 = 3 \text{ C.G.S.}$$

Ἀρχικῶς αἱ δύο σφαῖραι φέρουν ὁλικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_{ολ} = (+18) + (-6) = 12 \text{ C.G.S.}$$

Ὅταν αἱ δύο σφαῖραι ἔρχωνται εἰς ἐπαφήν, τότε συμβαίνει στιγμιαία μετακίνησις ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἀπὸ τὴν μίαν σφαῖραν πρὸς τὴν ἄλλην καὶ αἱ δύο σφαῖραι ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U. Ἔστω ὅτι μετὰ τὴν ἐπαφήν των τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστης σφαίρας εἶναι ἀντιστοίχως Q_A καὶ Q_B. Τὸ ὁλικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον φέρουν αἱ δύο σφαῖραι, παρέμεινεν ἀμετάβλητον, ἄρα εἶναι :

$$Q_{ολ} = Q_A + Q_B$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δυναμικὸν ἑκάστης σφαίρας εἶναι :

$$U = \frac{Q_A}{C_1} \quad \text{καὶ} \quad U = \frac{Q_B}{C_2}$$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{Q_A}{C_1} = \frac{Q_B}{C_2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{Q_A}{C_1} = \frac{Q_B}{C_2} = \frac{Q_A + Q_B}{C_1 + C_2}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{Q_A}{C_1} = \frac{Q_{o\lambda}}{C_1 + C_2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{Q_B}{C_2} = \frac{Q_{o\lambda}}{C_1 + C_2}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστης σφαίρας, μετὰ τὴν ἐπαφήν των, εἶναι :

$$Q_A = Q_{o\lambda} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_A = \left(12 \cdot \frac{2}{5}\right) \text{C.G.S.}$$

καὶ **$Q_A = 4{,}8$ ΗΣΜ - φορτίου**

$$Q_B = Q_{o\lambda} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_B = \left(12 \cdot \frac{3}{5}\right) \text{C.G.S.}$$

καὶ **$Q_B = 7{,}2$ ΗΣΜ - φορτίου**

57. Ἀγωγὸς ἔχει χωρητικότητα 8 μF καὶ δυναμικὸν 100 Volt. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον του καὶ πόση εἶναι ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀγωγοῦ ;

Ἀγωγός, ἔχων χωρητικότητα C καὶ δυναμικὸν U, φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$Q = C \cdot U$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $C = 8\ \mu F = \frac{8}{10^6}\ F$ καὶ $U = 100\ V$

Ἄρα τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι :

$$Q = \frac{8}{10^6}\ F \cdot 100\ V = \frac{8}{10^4}\ Cb \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{Q = 0{,}0008\ Cb}$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ φορτισμένου ἀγωγοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2}\ Q \cdot U$$

ἤτοι εἶναι : $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10^4}\ Cb \cdot 100\ V$ καὶ $\mathbf{W = 0{,}04\ Joule}$

58. Σφαιρικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀκτῖνα 10 cm. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ λάβῃ ὁ ἀγωγός, διὰ νὰ ἔχῃ ἐνέργειαν 5 Joule;

Ἡ χωρητικότης τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἀγωγοῦ, ἤτοι εἶναι : $C = 10$ C.G.S. Ἂν ὁ ἀγωγὸς φέρῃ φορτίον Q, τότε ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \quad \text{ἄρα} \quad Q^2 = 2W \cdot C$$

Εἰς τὴν τελευταίαν σχέσιν θέτομεν :

$$C = 10 \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad W = 5 \text{ Joule} = 5 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$Q^2 = 2 \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 10 = 10 \cdot 10^8 \quad \text{ἄρα} \quad Q = 10^4 \cdot \sqrt{10} \text{ C.G.S.}$$

ἢ $Q = 10^4 \cdot 3{,}16$ C.G.S. καὶ **$Q = 31\,600$ ΗΣΜ - φορτίου**

59. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι A καὶ B ἔχουν ἀντιστοίχως ἀκτῖνας $R_1 = 5$ cm καὶ $R_2 = 20$ cm. Τὸ δυναμικὸν ἑκάστης σφαίρας εἶναι ἀντιστοίχως $U_1 = 100$ καὶ $U_2 = 60$ C.G.S. Διὰ μίαν στιγμὴν φέρομεν εἰς ἐπαφὴν τὰς δύο σφαίρας καὶ ἔπειτα τὰς ἀπομακρύνομεν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστης σφαίρας μετὰ τὴν ἐπαφήν της μὲ τὴν ἄλλην σφαῖραν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο σφαιρῶν πρὸ τῆς ἐπαφῆς των καὶ μετὰ τὴν ἐπαφήν των.

Αἱ δύο σφαῖραι A καὶ B ἔχουν ἀντιστοίχως χωρητικότητα $C_1 = 5$ C.G.S. καὶ $C_2 = 20$ C.G.S. Πρὸ τῆς ἐπαφῆς των αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν ἀντιστοίχως ἠλεκτρικὸν φορτίον:

ἡ σφαῖρα A: $Q_1 = C_1 \cdot U_1 = (5 \cdot 100)$ C.G.S. $= 500$ C.G.S.

ἡ σφαῖρα B: $Q_2 = C_2 \cdot U_2 = (20 \cdot 60)$ C.G.S. $= 1200$ C.G.S.

Ὅταν αἱ δύο σφαῖραι ἔλθουν εἰς ἐπαφήν, τότε ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U, διότι γίνεται κίνησις ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἀπὸ τὸ ὑψηλότερον πρὸς τὸ χαμηλότερον δυναμικόν. Ὅταν αἱ δύο σφαῖραι ἀπομακρυνθοῦν, τότε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ἠλεκτρικὸν φορτίον:

ἡ σφαῖρα A: $Q_1' = C_1 \cdot U = 5 \cdot U$ C.G.S.

ἡ σφαῖρα B: $Q_2' = C_2 \cdot U = 20 \cdot U$ C.G.S.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι σταθερόν, διότι κατὰ τὴν ἐπαφὴν τῶν σφαιρῶν συμβαίνει ἁπλῶς μετακίνησις φορτίου καὶ ὄχι ἀπώλεια φορτίου. Οὕτω ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

$$C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U$$

$$\text{ἢ} \quad 500 + 1200 = 5U + 20U \quad \text{καὶ} \quad 1700 = 25U$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι, μετὰ τὴν ἐπαφήν των, αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν τὸ κοινὸν δυναμικόν:

$$U = \frac{1700}{25} = 68 \text{ C.G.S.}$$

Ἄρα μετὰ τὴν ἐπαφήν των ἑκάστη σφαῖρα ἔχει ἠλεκτρικνὸν φορτίον:

ἡ σφαῖρα A: $Q_1' = C_1 \cdot U = (5 \cdot 68)$ C.G.S. ἤτοι $\mathbf{Q_1' = 340}$ **C.G.S.**

ἡ σφαῖρα B: $Q_2' = C_2 \cdot U = (20 \cdot 68)$ C.G.S. ἤτοι $\mathbf{Q_2' = 1360}$ **C.G.S.**

Πρὶν ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν αἱ δύο σφαῖραι, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶχεν ἐνέργειαν:

ἡ σφαῖρα A: $W_A = \frac{1}{2} C_1 \cdot U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 100^2 = 25\,000$ erg

ἡ σφαῖρα B: $W_B = \frac{1}{2} C_2 \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 60^2 = 36\,000$ erg

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι:

$$W = 25\,000 \text{ erg} + 36\,000 \text{ erg} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{W = 61\,000 \text{ erg}}$$

Ἀφοῦ ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν αἱ δύο σφαῖραι, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ἐνέργειαν:

ἡ σφαῖρα A: $W_A' = \frac{1}{2} C_1 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 68^2 = 11\,560$ erg

ἡ σφαῖρα B: $W_B' = \frac{1}{2} C_2 \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 68^2 = 46\,240$ erg

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι:

$$W' = 11\,560 \text{ erg} + 46\,240 \text{ erg} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{W = 57\,800 \text{ erg}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ τὴν ἐπαφὴν τῶν δύο σφαιρῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν των εἶναι μικρότερον κατὰ 3200 erg. Αὐτὴ ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν δύο σφαιρῶν ὑπάρχει διαφορὰ δυναμικοῦ:

$$U_1 - U_2 = 40 \text{ C.G.S.}$$

προκαλεῖται στιγμιαία κίνησις φορτίου ἀπὸ τὴν σφαῖραν A πρὸς τὴν σφαῖραν B. Κατὰ τὴν μετακίνησίν του τὸ φορτίον αὐτὸ παράγει ἔργον, τὸ ὁποῖον ἐκδηλώνεται ὡς θερμότης. Οὕτω ἐπέρχεται ἐλάττωσις τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος τῶν δύο σφαιρῶν.

60. Ἕκαστος τῶν ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ ἔχει ἐπιφάνειαν 100 cm². Μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν ὑπάρχει στρῶμα ἀέρος πάχους 1 mm. Ὁ εἷς ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ τὴν γῆν, ὁ δὲ ἄλλος μὲ πηγήν, ἔχουσαν σταθερὸν δυναμικὸν 600 Volt. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης καὶ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ;

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ χωρητικότης C πυκνωτοῦ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$C = k \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad (1)$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἀπέναντι ἀλλήλων ὁπλισμῶν του, l τὸ πάχος τοῦ διηλεκτρικοῦ καὶ k ἡ διηλεκτρικὴ σταθερά. Διὰ τὸν ἀέρα εἶναι $k = 1$ καὶ ἑπομένως διὰ πυκνωτήν, ἔχοντα ὡς διηλεκτρικὸν τὸν ἀέρα, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$C = \frac{S}{4\pi \cdot l} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) ἡ χωρητικότης C εὑρίσκεται εἰς μονάδας C.G.S., ὅταν τὰ μεγέθη S καὶ l μετροῦνται εἰς μονάδας C.G.S. Ἂν λοιπὸν εἰς τὸν τύπον (2) θέσωμεν:

$$S = 100 \text{ cm}^2 \quad \text{καὶ} \quad l = 1 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ cm}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$C = \frac{S}{4\pi \cdot l} = \frac{100}{4\pi \cdot 0{,}1} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἄρα} \quad C = 79{,}5 \text{ ΗΣΜ - χωρητικότητος}$$

Τὸ φορτίον Q τοῦ πυκνωτοῦ γνωρίζομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς χωρητικότητος C τοῦ πυκνωτοῦ ἐπὶ τὴν διαφορὰν δυναμικοῦ U, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, ἤτοι ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$Q = C \cdot U \qquad (3)$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἡ τάσις U μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι ἴση μὲ 600 V, διότι ὁ ὁπλισμὸς ὁ συνδεόμενος μὲ τὴν γῆν ἔχει δυναμικὸν 0. Ὥστε εἶναι $U = 600$ V. Ἐκ τοῦ τύπου (3) θὰ εὕρωμεν τὸ φορτίον Q εἰς μονάδας C.G.S., ἂν καὶ τὰ μεγέθη C καὶ U εἶναι εἰς μονάδας C.G.S. Οὕτω, ἂν εἰς τὸν τύπον (3) θέσωμεν:

$$C = 79{,}5 \text{ C.G.S.} \qquad U = 600 \text{ V} = \frac{600}{300} \text{ C.G.S.} = 2 \text{ C.G.S}$$

εὑρίσκομεν: $Q = C \cdot U = (79{,}5 \cdot 2)$ C.G.S. ἤτοι **Q = 159 ΗΣΜ - φορτίου**

* Ὑπενθυμίζεται ὅτι εἶναι: $1 \text{ V} = \frac{1}{300}$ C.G.S. ἄρα $300 \text{ V} = 1$ C.G.S.

61. Δύο φύλλα ἀργιλλίου, ἔχοντα διαστάσεις 15 cm × 30 cm, εἶναι ἐπικολλημένα ἐπὶ τῶν δύο ὄψεων παραφινωμένου χάρτου, ἔχοντος πάχος 0,2 mm καὶ διηλεκτρικὴν σταθερὰν 2,5. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ;

Ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστου ὁπλισμοῦ τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι $S = 15 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 450 \text{ cm}^2$. Ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$C = k \cdot \frac{S}{4\pi \cdot l}$$

ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν : $k = 2{,}5$ $S = 450 \text{ cm}^2$ $l = 0{,}2 \text{ mm} = 0{,}02 \text{ cm}$

Οὕτω εὑρίσκομεν : $C = 2{,}5 \cdot \dfrac{450}{4\pi \cdot 0{,}02}$ ΗΣΜ - χωρητικότητος

καὶ **C = 4478 ΗΣΜ - χωρητικότητος**

* Παρατήρησις: Εἰς τὸν τύπον τῶν πυκνωτῶν ὑπεισέρχεται ὁ παράγων $1/\pi$, ὁ ὁποῖος εἶναι μία σταθερά, ἔχουσα τὴν τιμήν :

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318$$

62. Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα 25 μF. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, διὰ νὰ ἀποκτήσῃ οὗτος φορτίον 0,001 Cb; Πόσην ἐνέργειαν ἔχει τότε ὁ πυκνωτής;

Τὸ φορτίον Q τοῦ πυκνωτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν :

$$Q = C \cdot U \qquad (1)$$

ὅπου C ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ U ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν του. Ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ ὅταν τὰ μεγέθη Q, C, U ἐκφράζωνται εἰς πρακτικὰς μονάδας, δηλαδὴ εἰς Coulomb, Farad, Volt. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὅτι εἶναι :

$$Q = 0{,}001 \text{ Cb} \quad \text{καὶ} \quad C = 25 \text{ μF} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις U εἶναι :

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}001 \text{ Cb}}{25 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = \frac{0{,}001 \cdot 10^6}{25} \text{ V} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{U = 40 \ V}$$

Ἡ ἐνέργεια W τοῦ πυκνωτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U \qquad (2)$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 \text{ Cb} \cdot 40 \text{ V} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 0{,}020 \ Joule}$$

* Ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει διὰ μονάδας C.G.S. καὶ διὰ πρακτικὰς μονάδας.

63. Τρεῖς πυκνωταὶ ἔχουν χωρητικότητα 1 μF, 2 μF καὶ 3 μF. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς συστοιχίας, ὅταν οἱ πυκνωταὶ συνδεθοῦν παραλλήλως ἢ κατὰ σειράν;

Οἱ τρεῖς πυκνωταὶ ἔχουν χωρητικότητα $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 2$ μF καὶ $C_3 = 3$ μF. Ὅταν οἱ πυκνωταὶ συνδεθοῦν παραλλήλως, τότε ἡ χωρητικότης $C_{ολ}$ τῆς συστοιχίας δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3 \quad \text{ἄρα} \quad C_{ολ} = (1 + 2 + 3) \text{ μF} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{C_{ολ} = 6 \ μF}$$

Ὅταν οἱ πυκνωταὶ συνδεθοῦν κατὰ σειράν, τότε ἡ χωρητικότης $C_{ολ}$ τῆς συστοιχίας εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\text{ἄρα} \quad C_{ολ} = \frac{6}{11} \text{ μF} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{C_{ολ} = 0{,}545 \ μF}$$

64. Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εἶναι 3 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι εἰς Volt ἡ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τάσις, ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου νὰ εἶναι ἴση μὲ 10 C.G.S.;

Ἡ ἔντασις E τοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ παραγομένου ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E = \frac{U}{l}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $l = 3$ cm καὶ $E = 10$ C.G.S. Ἄρα ἡ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τάσις U πρέπει νὰ εἶναι :

$$U = E \cdot l \quad \text{ἤτοι} \quad U = (10 \cdot 3) \text{ C.G.S.} = 30 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι : 1 ΗΣΜ - δυναμικοῦ = 300 V

Ἄρα ἡ ζητουμένη τάσις εἰς Volt εἶναι :

$$U = (30 \cdot 300) \text{ V} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{U = 9000 \text{ V}}$$

65. Μία ἠλεκτρισμένη σταγὼν ἐλαίου, ἔχουσα μᾶζαν $12 \cdot 10^{-12}$ gr, διατηρεῖται αἰωρουμένη μεταξὺ τῶν δύο ὁριζοντίων ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ, οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν μεταξύ των 2 cm καὶ παρουσιάζουν διαφορὰν δυναμικοῦ 3000 Volt. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σταγόνος ; (g = 980 C.G.S.)

Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον, ἔχον ἔντασιν :

$$E = \frac{U}{l}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι :

$$l = 2 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad U = 3000 \text{ V} = \frac{3000}{300} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad U = 10 \text{ C.G.S.}$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι : $E = \frac{10}{2} = 5$ C.G.S.

δηλαδὴ εἶναι :

$$E = 5 \text{ dyn/ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἔστω Q τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σταγόνος τοῦ ἐλαίου. Τότε ἐπὶ τῆς σταγόνος θὰ ἐνεργῇ, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, μία δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = Q \cdot E \quad \text{ἤτοι} \quad F = 5Q \text{ dyn}$$

Ἡ σταγὼν τοῦ ἐλαίου ἔχει μᾶζαν $m = 12 \cdot 10^{-12}$ gr καὶ βάρος $B = m \cdot g$. Ἐπειδὴ ἡ σταγὼν αἰωρεῖται μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, συνάγεται ὅτι ἡ δύναμις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἐπὶ τῆς σταγόνος, ἰσορροπεῖ τὸ βάρος B τῆς σταγόνος. Ἄρα ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$F = B \quad \text{ἢ} \quad 5Q = m \cdot g \qquad (1)$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς Q, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῆς σταγόνος τοῦ ἐλαίου εἶναι :

$$Q = \frac{m \cdot g}{5} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{12 \cdot 980}{5 \cdot 10^{12}} \text{ C.G.S.} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{Q = 2352 \cdot 10^{-12} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}}$$

66. Ἕκαστος τῶν ὁπλισμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ ἔχει ἐπιφάνειαν 1 m^2. Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ τούτου συνδέεται μὲ τὴν γῆν, ὁ δὲ ἄλλος συνδέεται μὲ πηγὴν ἔχουσαν δυναμικὸν 600 Volt. Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος, τὸ ὁποῖον ἔχει πάχος 1 mm.— 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης καὶ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ.— 2) Πόση ποσότης θερμότητος λαμβάνεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ ;

Ἡ χωρητικότης τοῦ ἐπιπέδου πυκνωτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$C = k \cdot \frac{S}{4 \pi l} \text{ (C.G.S.)}$$

Διὰ τὸν ἀέρα εἶναι $k = 1$. Ἄρα διὰ τὸν θεωρούμενον πυκνωτὴν ἔχομεν :

$$C = \frac{S}{4\pi l}$$

1) Δίδεται ὅτι εἶναι : $S = 1\ m^2 = 10^4\ cm^2$ καὶ $l = 1\ mm = 0{,}1\ cm$. Ἄρα ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = \frac{10^4}{4\pi \cdot 0{,}1}\ \text{C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad C = \frac{1}{9 \cdot 10^5} \cdot \frac{10^5}{4\pi}\ \mu F$$

$$\text{ἢ} \quad C = \frac{1}{113}\ \mu F \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{C = 0{,}0089\ \mu F}$$

Ἡ ἐνέργεια W, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ φορτισμένος οὗτος πυκνωτής, εἶναι :

$$W = \frac{1}{2}\, C \cdot U^2$$

ὅπου U εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχουσα διαφορὰ δυναμικοῦ καὶ ἡ ὁποία εἶναι $U = 600\ V$. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐνέργεια εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}0089}{10^6}\ F \cdot (600\ V)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{89 \cdot 36}{2 \cdot 10^6}\ \text{Joule}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W = 16 \cdot 10^{-4}\ Joule}$$

2) Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος ($Q_{\theta\epsilon\rho}$), ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = \frac{W}{J}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = \frac{16 \cdot 10^{-4}\ \text{Joule}}{4{,}19\ \text{Joule/cal}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{Q_{\theta\epsilon\rho} = 38 \cdot 10^{-5}\ cal}$$

67. Ἕνας πυκνωτὴς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπιπέδους πλάκας, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν μεταξύ των 1 mm. Ἑκάστη πλὰξ ἔχει ἐπιφάνειαν 100 cm², ὡς διηλεκτρικὸν δὲ εἶναι ὁ ἀήρ. Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ὁ δὲ ἄλλος ὁπλισμός του συνδέεται μὲ μεταλλικὴν σφαῖραν ἀκτῖνος 1 cm. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν σφαῖραν, ὥστε τὸ δυναμικόν της νὰ γίνῃ ἴσον μὲ 100 ΗΣΜ - δυναμικοῦ.

Ὁ πυκνωτὴς ἔχει ὡς διηλεκτρικὸν τὸν ἀέρα καὶ ἑπομένως ἡ χωρητικότης του δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$C = \frac{S}{4\pi l}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $S = 100\ cm^2$ καὶ $l = 0{,}1\ cm$, εὑρίσκομεν :

$$C = \frac{100}{4\pi \cdot 0{,}1}\ \text{C.G.S.} \quad \text{ἤτοι} \quad C = 79{,}55\ \text{ΗΣΜ - χωρητικότητος}$$

Ἡ σφαῖρα ἔχει χωρητικότητα $C_1 = 1$ C.G.S. Ὁ ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ, ὁ συνδεόμενος μὲ τὴν σφαῖραν, θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U μὲ τὴν σφαῖραν. Ἑπομένως τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον θὰ κατανεμηθῇ ἐπὶ τοῦ συστήματος : σφαῖρα - πυκνωτής. Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει χωρητικότητα :

$$C_{o\lambda} = C + C_1 \quad \text{ἤτοι} \quad C_{o\lambda} = 80{,}55\ \text{ΗΣΜ - χωρητικότητος}$$

Τὸ δυναμικὸν τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $U = 100$ C.G.S. Ἄρα τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μεταφέρωμεν ἐπὶ τῆς σφαίρας, εἶναι :

$$Q = C_{o\lambda} \cdot U \quad \text{ἤτοι} \quad Q = (80{,}55 \cdot 100)\ \text{C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{Q = 8055\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}$$

68. Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα 0,1 μF καὶ ἐκκενοῦται ἐντὸς σύρματος ἀπὸ μόλυβδον, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 0,2 mm. Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι 0° C, τὸ μέγιστον μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ τακῇ κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τοῦ πυκνωτοῦ, εἶναι 10 cm. Νὰ εὑρεθῇ πόσην τάσιν πρέπει νὰ ἀποκτήσῃ ὁ πυκνωτής, διὰ νὰ τακῇ τὸ σύρμα. Θερμότης τήξεως τοῦ μολύβδου: 5,4 cal/gr· εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου: 0,03 cal/gr/grad· πυκνότης τοῦ μολύβδου: 11,4 gr/cm³· θερμοκρασία τήξεως τοῦ μολύβδου: 325° C. J = 4,19 Joule/cal.

Τὸ σύρμα ἔχει μῆκος 10 cm, ἀκτῖνα τῆς τομῆς του 0,01 cm καὶ συνεπῶς ἔχει μᾶζαν:

$$m = (\pi \cdot 0{,}01^2 \cdot 10)\ \mathrm{cm^3} \cdot 11{,}4\ \mathrm{gr/cm^3} \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = 0{,}0358\ \mathrm{gr}$$

Τὸ σύρμα τήκεται εἰς θερμοκρασίαν 325° C. Ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ σύρματος εἶναι 0° C· Ὥστε, διὰ νὰ τακῇ τὸ σύρμα, πρέπει νὰ δαπανηθῇ ποσότης θερμότητος:

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = (0{,}0358\ \mathrm{gr} \cdot 0{,}03\ \mathrm{cal \cdot gr^{-1} \cdot grad^{-1}} \cdot 325\ \mathrm{grad}) + (0{,}0358\ \mathrm{gr} \cdot 5{,}4\ \mathrm{cal \cdot gr^{-1}})$$

$$\text{ἤτοι} \qquad Q_{\theta\varepsilon\rho} = 0{,}542\ \mathrm{cal}$$

Ἡ ἀνωτέρω ποσότης θερμότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W = J \cdot Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 4{,}19\ \mathrm{Joule/cal} \cdot 0{,}542\ \mathrm{cal}$$

$$\text{καὶ} \qquad W = 2{,}27\ \mathrm{Joule}$$

Τόσην ἑπομένως ἐνέργειαν πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ πυκνωτής, ὥστε, κατὰ τὴν ἐκκένωσίν του, νὰ τακῇ τὸ σύρμα. Ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα $C = 0{,}1 \cdot 10^{-6}$ F. Ἐὰν U εἶναι ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη τάσις εἶναι:

$$U = \sqrt{\frac{2W}{C}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}27\ \mathrm{Joule}}{0{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U = 6738\ V}$$

****69. Ἕνας πυκνωτὴς Α ἔχει χωρητικότητα 0,2 μF καὶ εἶναι φορτισμένος ὑπὸ τάσιν 100 Volt. Ἕνας δεύτερος πυκνωτὴς Β ἔχει μικρὰν χωρητικότητα καὶ φορτίζεται συνδεόμενος διὰ μίαν στιγμὴν παραλλήλως μὲ τὸν πυκνωτὴν Α. Μετὰ τὴν φόρτισίν του ὁ πυκνωτὴς Β ἐκκενοῦται καὶ ἔπειτα φορτίζεται πάλιν κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Αὐτὴ ἡ διαδοχικὴ φόρτισις καὶ ἐκκένωσις τοῦ πυκνωτοῦ Β ἐπαναλαμβάνεται εἴκοσι φορὰς καὶ τότε εὑρίσκεται ὅτι ἡ τάσις τοῦ πυκνωτοῦ Α ἔχει γίνει 35 Volt. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ Β;**

Ὁ πυκνωτὴς Α ἔχει χωρητικότητα $C_A = 0{,}2\ \mu\mathrm{F}$ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν του ὑπάρχουσα τάσις εἶναι U = 100 V. Ὁ πυκνωτὴς οὗτος φέρει τότε ἠλεκτρικὸν φορτίον Q καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$U = \frac{Q}{C_A} \qquad (1)$$

Ἔστω C_B ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ Β. Πρὸς στιγμὴν οἱ δύο πυκνωταὶ συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως. Τότε τὸ σύστημα τῶν δύο πυκνωτῶν ἔχει χωρητικότητα:

$$C_{o\lambda} = C_A + C_B$$

Κατὰ τὴν σύνδεσίν των οἱ δύο πυκνωταὶ ἀποκτοῦν τὴν αὐτὴν τάσιν U_1 καὶ ἰσχύει τότε ἡ ἐξίσωσις:

$$U_1 = \frac{Q}{C_{o\lambda}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = \frac{Q}{C_A + C_B} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{U_1}{U} = \frac{C_A}{C_A + C_B} \qquad \text{ἄρα} \qquad U_1 = U \cdot \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

Ὅταν ἀποχωρισθοῦν οἱ δύο πυκνωταί, ὁ πυκνωτὴς A φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q_1 καὶ ἰσχύει πάλιν ἡ ἐξίσωσις :

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_A} \qquad (3)$$

Κατὰ τὴν δευτέραν σύνδεσιν τῶν πυκνωτῶν ἡ κοινὴ τάσις τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι :

$$U_2 = \frac{Q_1}{C_{ολ}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_2 = \frac{Q_1}{C_A + C_B} \qquad (4)$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{C_A}{C_A + C_B} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_2 = U_1 \cdot \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$\text{καὶ} \qquad U_2 = U \cdot \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \right)^2$$

Ὥστε μετὰ τὴν εἰκοστὴν σύνδεσιν τῶν δύο πυκνωτῶν, ἡ κοινὴ τάσις τῶν δύο πυκνωτῶν, συνεπῶς καὶ ἡ τάσις τοῦ πυκνωτοῦ A, εἶναι :

$$U_{20} = U \cdot \left(\frac{C_A}{C_A + C_B} \right)^{20}$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἔχομεν :

$$35 = 100 \cdot \left(\frac{0{,}2}{0{,}2 + C_B} \right)^{20}$$

Ἂν λύσωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, λαμβάνομεν

$$\mathbf{C_B = 0{,}0108\ \mu F}$$

70. Δύο μονωμέναι μεταλλικαὶ σφαῖραι A καὶ B ἔχουν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀκτῖνα 4 cm καὶ δυναμικὸν 100 Volt. Αἱ σφαῖραι συνδέονται μὲ λεπτὸν σύρμα. Ἡ σφαῖρα B περιβάλλεται ἔπειτα ἀπὸ ἕνα κοῖλον σφαιρικὸν ἀγωγὸν Γ ἀκτῖνος 5 cm, ὁ ὁποῖος, ἀποτελούμενος ἀπὸ δύο ἡμισφαίρια, περιβάλλει συγκεντρικῶς τὸν ἀγωγὸν B. Ὁ ἀγωγὸς Γ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. 1) Νὰ εὑρεθῇ ποῖον εἶναι τελικῶς τὸ δυναμικὸν καὶ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῶν ἀγωγῶν A καὶ B. 2) Ποία μεταβολὴ ἐπῆλθεν εἰς τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος ;

Ἑκάστη σφαῖρα ἔχει χωρητικότητα : $C = 4$ C.G.S. καὶ δυναμικόν :

Σχ. 29

$$U = 100\ V \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = \frac{100}{300}\ \text{C.G.S.}$$

Ἀρχικῶς ἑκάστη σφαῖρα ἔχει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = C \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 4 \cdot \frac{100}{300} = \frac{4}{3}\ \text{C.G.S.}$$

Ἄρα αἱ δύο σφαῖραι ἔχουν ἀρχικῶς ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q_{ολ} = 2Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_{ολ} = \frac{8}{3}\ \text{C.G.S.}$$

1) Μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ ἀγωγοῦ Γ πέριξ τῆς σφαίρας B (σχ. 29), τὸ ὁλικὸν φορτίον τοῦ συστήματος εἶναι τὸ αὐτό, κατανέμεται ὅμως διαφορετικά. Τότε τὸ σύστημα τῶν ἀγωγῶν B καὶ Γ ἀποτελεῖ σφαιρικὸν πυκνωτήν, ὁ ὁποῖος ἔχει χωρητικότητα :

$$C_1 = \frac{R \cdot r}{R - r}$$

ὅπου $R = 5$ cm εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ Γ καὶ $r = 4$ cm εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ Β. Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$C_1 = \frac{5 \cdot 4}{5 - 4} \text{ C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad C_1 = 20 \text{ C.G.S.}$$

Ὁ ὁπλισμὸς Γ τοῦ σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ ἔχει δυναμικὸν ἴσον μὲ μηδέν. Μεταξὺ ὅμως τῶν δύο ὁπλισμῶν Β καὶ Γ τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει τάσις U_1, ἴση μὲ τὸ δυναμικὸν τοῦ ὁπλισμοῦ Β. Τόσον θὰ εἶναι τότε καὶ τὸ δυναμικὸν τοῦ σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ Α. Ὥστε οἱ δύο σφαιρικοὶ ἀγωγοὶ Α καὶ Β θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U_1. Ἔστω Q_A καὶ Q_B τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστου σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ. Τότε ἔχομεν τὰς ἑπομένας δύο ἐξισώσεις :

διὰ τὴν σφαῖραν Α : $$U_1 = \frac{Q_A}{C}$$

διὰ τὸν πυκνωτήν : $$U_1 = \frac{Q_B}{C_1}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν :

$$\frac{Q_A}{C} = \frac{Q_B}{C_1} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_B}{C_1} = \frac{Q_A + Q_B}{C + C_1} = \frac{Q_{ολ}}{C + C_1}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι, μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ ἀγωγοῦ Γ, ἑκάστη σφαῖρα φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q_A = Q_{ολ} \cdot \frac{C}{C + C_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_A = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{4 + 20} \text{ C.G.S.}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{Q_A = \frac{4}{9}} \textbf{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

$$Q_B = Q_{ολ} \cdot \frac{C_1}{C + C_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_B = \frac{8}{3} \cdot \frac{20}{4 + 20} \text{ C.G.S.}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{Q_B = \frac{20}{9}} \textbf{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἕνεκα τῆς προσθήκης τοῦ ἀγωγοῦ Γ πέριξ τῆς σφαίρας Β, μετεκινήθη ἀπὸ τὴν σφαῖραν Α πρὸς τὴν σφαῖραν Β ἠλεκτρικὸν φορτίον Q' ἴσον μέ :

$$Q' = Q - Q_A = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Τὸ κοινὸν δυναμικὸν U_1 τῶν σφαιρικῶν ἀγωγῶν Α καὶ Β εἶναι :

$$U_1 = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_B}{C_1} = \frac{Q_{ολ}}{C + C_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = \frac{8/3}{24} \text{ C.G.S.}$$

$$\text{ἢ} \qquad \mathbf{U_1 = \frac{1}{9}} \textbf{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_1 = 33,33 \ V}$$

2) Ἀρχικῶς τὸ σύστημα τῶν δύο σφαιρικῶν ἀγωγῶν Α καὶ Β εἶχεν ἐνέργειαν :

$$W = \frac{1}{2} Q_{ολ} \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{100}{300} \text{ erg}$$

$$\text{καὶ} \qquad W = \frac{4}{9} \text{ erg}$$

Μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ ἀγωγοῦ Γ, τὸ σύστημα σφαῖρα Α - πυκνωτὴς ἔχει ἐνέργειαν :

$$W_1 = \frac{1}{2} Q_{ολ} \cdot U_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{9} \text{ erg}$$

$$\text{καὶ} \qquad W_1 = \frac{4}{27} \text{ erg}$$

ὥστε ἡ προσθήκη τοῦ ἀγωγοῦ Γ ἐπέφερεν ἐλάττωσιν τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος κατά:

$$\Delta W = W - W_1 \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta W = \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{27} \right) \text{erg} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{\Delta W = \frac{8}{27}\ erg}$$

Ἡ ἐλάττωσις αὐτὴ τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι συνέβη μετακίνησις ἠλεκτρικοῦ φορτίου καὶ συνεπῶς παραγωγὴ ἔργου, τὸ ὁποῖον μετετράπη εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος.

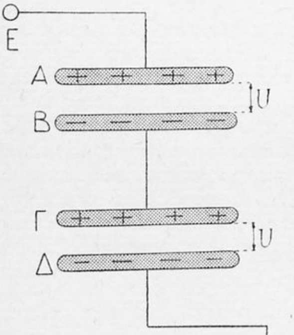
71. Δύο ἐπίπεδοι πυκνωταί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει χωρητικότητα 0,2 μF συνδέονται ὡς ἑξῆς: ὁ ὁπλισμὸς Α τοῦ πρώτου πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ ἀγωγὸν ἔχοντα σταθερὸν δυναμικὸν 100 000 Volt· ὁ ἄλλος ὁπλισμὸς Β συνδέεται μὲ τὸν ὁπλισμὸν Γ τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ὁπλισμὸς Δ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. 1) Ἂν ὁ ὁπλισμὸς Α λάβῃ φορτίον + Q Cb, νὰ σημειωθῇ ποῖα φορτία φέρουν οἱ ἄλλοι ὁπλισμοί. 2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν τῶν ὁπλισμῶν Β καὶ Γ. Πόσον εἶναι τὸ ἀνωτέρω φορτίον Q; 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία παρέχεται κατὰ τὴν ἐκκένωσιν, ἂν συνδέσωμεν τοὺς ὁπλισμοὺς Α καὶ Δ. Ἐὰν ἡ ἐκκένωσις αὐτὴ γίνῃ δι' ἑνὸς σύρματος, ἔχοντος θερμοχωρητικότητα Κ, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος, ἂν ὅλη αὐτὴ ἡ ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα.

Ἕκαστος πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα: $C = 0{,}2\ \mu F = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ F. Ὁ ὁπλισμὸς Α τοῦ πρώτου πυκνωτοῦ, ἐπειδὴ συνδέεται μὲ τὸν ἀγωγὸν Ε (σχ. 30), ἀποκτᾷ δυναμικόν:

$$U_A = 100\,000\ V$$

Ὁ ὁπλισμὸς Δ τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ, ἐπειδὴ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ἔχει δυναμικόν:

$$U_\Delta = 0$$



Σχ. 30

1) Ὅταν ὁ ὁπλισμὸς Α λάβῃ ἠλεκτρικὸν φορτίον + Q, τότε ἐπὶ τοῦ ὁπλισμοῦ Β ἀναπτύσσονται ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρικὰ φορτία + Q καὶ — Q. Ἐκ τούτων τὸ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον + Q ἐκφεύγει εἰς τὸν ὁπλισμὸν Γ τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ, ἐνῷ τὸ ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον — Q παραμένει ἐπὶ τοῦ ὁπλισμοῦ Β. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον καὶ ὁ ὁπλισμὸς Δ τοῦ δευτέρου πυκνωτοῦ ἀποκτᾷ ἠλεκτρικὸν φορτίον — Q. Ὥστε οἱ ὁπλισμοὶ τῶν δύο πυκνωτῶν φέρουν τὰ ἀκόλουθα ἠλεκτρικὰ φορτία:

ὁπλισμὸς	Α:	ἠλεκτρικὸν	φορτίον	+ Q
»	Β:	»	»	— Q
»	Γ:	»	»	+ Q
»	Δ:	»	»	— Q

2) Μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν Α καὶ Δ ὑπάρχει τάσις:

$$U_A - U_\Delta = 100\,000\ V$$

Ἐπειδὴ οἱ δύο πυκνωταὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν χωρητικότητα, ἡ ἀνωτέρω τάσις κατανέμεται ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν δύο πυκνωτῶν. Ἄρα εἶναι:

$$U = U_A - U_B = U_\Gamma - U_\Delta = 50\,000\ V$$

Οἱ ὁπλισμοὶ Α καὶ Δ ἔχουν ἀντιστοίχως δυναμικόν:

$$U_A = 100\,000\ V \quad \text{καὶ} \quad U_\Delta = 0$$

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι οἱ ὁπλισμοὶ Β καὶ Γ ἔχουν ἀντιστοίχως δυναμικόν:

$$\mathbf{U_B = 50\,000\ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_\Gamma = 50\,000\ V}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑνὸς πυκνωτοῦ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$Q = C \cdot U$$

ὅπου U εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ὑπάρχουσα τάσις. Ἄρα τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι :

$$Q = C \cdot (U_A - U_B) \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{0{,}2}{10^6}\ F \cdot 50\,000\ V \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{Q = 0{,}01\ Cb}$$

3) Ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω δύο πυκνωτῶν ἔχει ἐνέργειαν :

$$W_1 = \frac{1}{2}\ Q \cdot U$$

Ἑπομένως ἡ συστοιχία τῶν δύο ὁμοίων πυκνωτῶν περικλείει ἐνέργειαν :

$$W = 2W_1 \quad \text{ἤτοι} \quad W = Q \cdot U$$

Ἐὰν συνδέσωμεν τοὺς ὁπλισμοὺς Α καὶ Δ, τότε συμβαίνει ἐκκένωσις τῆς συστοιχίας. Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν αὐτὴν ἐλευθερώνεται ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$W = 0{,}01\ Cb \cdot 50\,000\ V \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 500\ Joule}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = \frac{W}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_{\theta\varepsilon\rho} = \frac{500\ Joule}{4{,}19\ Joule/cal} \quad \text{καὶ} \quad Q_{\theta\varepsilon\rho} = 119{,}3\ cal$$

Ἐὰν θ εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ σύρματος, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = K \cdot \theta \quad \text{ἄρα} \quad \theta = \frac{Q_{\theta\varepsilon\rho}}{K} \quad \text{ἤτοι} \quad \theta = \frac{119{,}3\ cal}{K\ cal/grad}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{119{,}3}{K}\ grad}$$

72. Πυκνωτὴς Α ἔχει χωρητικότητα 4 μF. Τρεῖς ἄλλοι πυκνωταὶ Β, Γ καὶ Δ ἔχουν ἀντιστοίχως χωρητικότητα 1 μF, 2 μF, καὶ 3 μF. Οἱ τρεῖς οὗτοι πυκνωταὶ συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως, ἡ δὲ προκύπτουσα οὕτω συστοιχία Σ συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὸν πυκνωτὴν Α. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὅλης συστοιχίας ἐφαρμόζεται τάσις 2 Volt. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον φέρει ἡ συστοιχία. 2) Νὰ εὑρεθῇ πόση τάσις ἐφαρμόζεται εἰς τοὺς δύο ὁπλισμοὺς ἑκάστου πυκνωτοῦ, ὡς καὶ τὸ φορτίον ἑκάστου πυκνωτοῦ.

Οἱ τέσσαρες πυκνωταὶ Α, Β, Γ καὶ Δ (σχ. 31) ἔχουν ἀντιστοίχως χωρητικότητα :

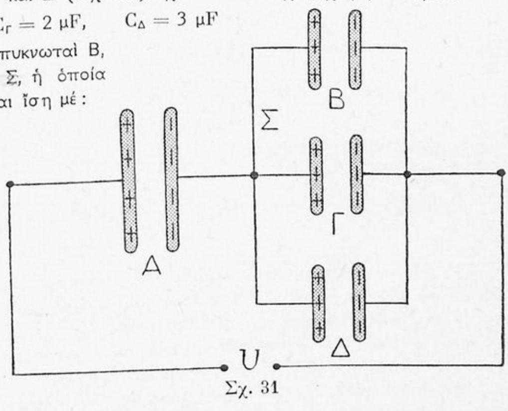
$$C_A = 4\ \mu F, \quad C_B = 1\ \mu F, \quad C_\Gamma = 2\ \mu F, \quad C_\Delta = 3\ \mu F$$

Οἱ παραλλήλως συνδεδεμένοι πυκνωταὶ Β, Γ καὶ Δ ἀποτελοῦν συστοιχίαν Σ, ἡ ὁποία ἔχει χωρητικότητα C_Σ. Αὕτη εἶναι ἴση μέ :

$$C_\Sigma = C_B + C_\Gamma + C_\Delta$$

ἤτοι $C_\Sigma = (1 + 2 + 3)\ \mu F$

ἢ $C_\Sigma = 6\ \mu F$



Σχ. 31

1) Ἡ συστοιχία αὕτη συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὸν πυκνωτὴν Α. Οὕτω ἡ ὅλη συστοιχία τῶν πυκνωτῶν ἔχει χωρητικότητα $C_{o\lambda}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_\Sigma}$$

$$\text{ἄρα} \quad C_{o\lambda} = \frac{C_A \cdot C_\Sigma}{C_A + C_\Sigma} \quad \text{ἤτοι} \quad C_{o\lambda} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6}\ \mu F \quad \text{καὶ} \quad C_{o\lambda} = 2{,}4\ \mu F$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς συστοιχίας ἐφαρμόζεται τάσις $U = 2\,V$. Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον φέρει ἡ ὅλη συστοιχία, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$Q = C_{ολ} \cdot U \qquad ἤτοι \qquad Q = \frac{2,4}{10^6}\,F \cdot 2\,V$$

$$ἄρα \qquad \mathbf{Q = 4,8 \cdot 10^{-6}\,Cb = 4,8\,\mu Cb}$$

Ὁ πυκνωτὴς Α καὶ ἡ συστοιχία τῶν τριῶν πυκνωτῶν Β, Γ, Δ συνδέονται κατὰ σειράν. Συνεπῶς ὅσον θετικὸν φορτίον φέρει ὁ ὁπλισμὸς τοῦ πυκνωτοῦ Α, τόσον θετικὸν φορτίον φέρουν καὶ οἱ θετικοὶ ὁπλισμοὶ τῆς συστοιχίας τῶν πυκνωτῶν Β, Γ, Δ. Ὥστε τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ Α, ὡς καὶ τῆς συστοιχίας τῶν τριῶν πυκνωτῶν Β, Γ, Δ, εἶναι:

$$Q = 4,8 \cdot 10^{-6}\,Cb$$

2) Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὅλης συστοιχίας ἐφαρμόζεται τάσις $U = 2\,V$. Ἂν καλέσωμεν U_A τὴν τάσιν εἰς τὸν πυκνωτὴν Α καὶ U_Σ τὴν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τῆς συστοιχίας Σ, τότε ἡ ὁλικὴ τάσις U εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν τάσεων, ἤτοι εἶναι:

$$U = U_A + U_\Sigma$$

Διὰ τὸν πυκνωτὴν Α καὶ τὴν συστοιχίαν Σ ἰσχύουν ἀντιστοίχως αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$U_A = \frac{Q}{C_A} \qquad καὶ \qquad U_\Sigma = \frac{Q}{C_\Sigma}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$U_A = \frac{4,8 \cdot 10^{-6}\,Cb}{4 \cdot 10^{-6}\,F} \qquad ἄρα \qquad \mathbf{U_A = 1,2\,V}$$

$$U_\Sigma = \frac{4,8 \cdot 10^{-6}\,Cb}{6 \cdot 10^{-6}\,F} \qquad ἄρα \qquad U_\Sigma = 0,8\,V$$

Εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν πυκνωτῶν τῆς συστοιχίας Σ ἐφαρμόζεται ἡ αὐτὴ τάσις:

$$\mathbf{U_\Sigma = 0,8\,V}$$

Ἀνωτέρω εὑρέθη ὅτι ὁ πυκνωτὴς Α φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q_A = Q \qquad ἤτοι \qquad \mathbf{Q_A = 4,8\,\mu Cb}$$

Οἱ πυκνωταὶ Β, Γ, Δ τῆς συστοιχίας Σ φέρουν ἀντιστοίχως ἠλεκτρικὰ φορτία Q_B, Q_Γ, Q_Δ τὰ ὁποῖα προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$Q_B = C_B \cdot U_\Sigma \qquad ἤτοι \qquad Q_B = \frac{1}{10^6}\,F \cdot 0,8\,V = \frac{0,8}{10^6}\,Cb \qquad ἢ \qquad \mathbf{Q_B = 0,8\,\mu Cb}$$

$$Q_\Gamma = C_\Gamma \cdot U_\Sigma \qquad ἤτοι \qquad Q_\Gamma = \frac{2}{10^6}\,F \cdot 0,8\,V = \frac{1,6}{10^6}\,Cb \qquad ἢ \qquad \mathbf{Q_\Gamma = 1,6\,\mu Cb}$$

$$Q_\Delta = C_\Delta \cdot U_\Sigma \qquad ἤτοι \qquad Q_\Delta = \frac{3}{10^6}\,F \cdot 0,8\,V = \frac{2,4}{10^6}\,Cb \qquad ἢ \qquad \mathbf{Q_\Delta = 2,4\,\mu Cb}$$

73. Ἡ χωρητικότης ἑνὸς πυκνωτοῦ Π εἶναι 0,2 μF. Ὁ ὁπλισμός του Α συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ἐνῶ ὁ ἄλλος ὁπλισμός του Β συνδέεται μὲ τὸν πόλον ἠλεκτροστατικῆς μηχανῆς, τοῦ ὁποίου τὸ δυναμικὸν εἶναι 40 000 Volt. 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ φορτίον καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ Π, ὡς καὶ ἡ ποσότης θερμότητος ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ, ἂν ἡ ἐκκένωσις γίνῃ διὰ μέσου ἑνὸς μεταλλικοῦ σύρματος. 2) Ὁ πυκνωτὴς Π εἶναι φορτισμένος ὑπὸ τάσιν 40 000 Volt. Συνδέομεν τὸν ὁπλισμόν του Β μὲ τὸν ὁπλισμὸν Α′ ἑνὸς ἄλλου πυκνωτοῦ Π′, ἔχοντος χωρητικότητα 0,8 μF, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ὁπλισμὸς Α′ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. Νὰ εὑρεθῇ

τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν ὁπλισμῶν Β καὶ Β' καὶ νὰ ὑπολογισθῇ πόσον εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ φορτίον ἑκάστου τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π'. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν φορτίων τούτων μὲ τὸ ἀρχικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ Π. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια ἑκάστου τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π' καὶ νὰ συγκριθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τούτων μὲ τὴν ἀρχικὴν ἐνέργειαν τοῦ πυκνωτοῦ Π.

1) Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ Π ἐφαρμόζεται τάσις: $U = 40\,000$ V. Ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι: $C = 0{,}2\ \mu F = 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ F. Ἄρα ὁ πυκνωτὴς Π φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q = C \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 4 \cdot 10^4\ V \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{Q = 0{,}008\ Cb}$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ πυκνωτοῦ Π εἶναι:

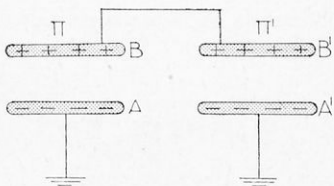
$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}2}{10^6}\ F \cdot (4 \cdot 10^4\ V)^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{W = 160\ Joule}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ W ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος:

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = \frac{W}{J} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_{\theta\epsilon\rho} = \frac{160\ \text{Joule}}{4{,}19\ \text{Joule/cal}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{Q_{\theta\epsilon\rho} = 38{,}18\ cal}$$

2) Ἀρχικῶς εἰς τὸν πυκνωτὴν Π (σχ. 32) ὑπάρχει τάσις ἴση μὲ 40 000 V. Ὁ ὁπλισμός του Α ἔχει δυναμικὸν ἴσον μὲ μηδέν, ὁ δὲ ὁπλισμός του Β ἔχει δυναμικὸν 40 000 V. Ὁ πυκνωτὴς Π' ἔχει χωρητικότητα: $C' = 0{,}8\ \mu F = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ F. Ὁ ὁπλισμός του Α' ἔχει δυναμικὸν ἴσον μὲ μηδέν. Ὅταν συνδέσωμεν τὸν ὁπλισμὸν Β τοῦ πυκνωτοῦ Π μὲ τὸν ὁπλισμὸν Β' τοῦ πυκνωτοῦ Π', συμβαίνει μετακίνησις ἠλεκτρικοῦ φορτίου καὶ οἱ δύο ὁπλισμοὶ Β καὶ Β' ἀποκτοῦν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν U_1. Τότε εἰς ἕκαστον τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π' ἐφαρμόζεται τάσις:



Σχ. 32

$$U_1 - 0 = U_1$$

Τὸ ἀρχικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον Q κατανέμεται τώρα εἰς τοὺς δύο πυκνωτὰς Π καὶ Π'. Ἕκαστος τῶν πυκνωτῶν Π καὶ Π' φέρει ἀντιστοίχως ἠλεκτρικὸν φορτίον Q_1 καὶ Q_2. Τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad Q_1 = C \cdot U_1 \qquad Q_2 = C' \cdot U_1$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν:

$$Q_1 + Q_2 = C \cdot U_1 + C' \cdot U_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = (C + C') \cdot U_1$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$U_1 = \frac{Q}{C + C'} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = \frac{0{,}008\ \text{Cb}}{(0{,}2 \cdot 10^{-6} + 0{,}8 \cdot 10^{-6})\ F}$$

$$\text{καὶ} \qquad U_1 = 8000\ V$$

Ὥστε τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν ὁπλισμῶν Β καὶ Β' εἶναι:

$$\mathbf{U_1 = 8000\ V}$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστου πυκνωτοῦ εἶναι:

τοῦ πυκνωτοῦ Π: $Q_1 = C \cdot U_1$ ἤτοι $Q_1 = \frac{0{,}2}{10^6}\ F \cdot 8000\ V$

ἢ $\mathbf{Q_1 = 0{,}0016\ Cb}$

τοῦ πυκνωτοῦ Π': $Q_2 = C' \cdot U_1$ ἤτοι $Q_2 = \frac{0{,}8}{10^6}\ F \cdot 8000\ V$

ἢ $\mathbf{Q_2 = 0{,}0064\ Cb}$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀρχικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον Q τοῦ πυκνωτοῦ Π, ἤτοι εἶναι :

$$0{,}0016\ \mathrm{Cb} + 0{,}0064\ \mathrm{Cb} = 0{,}008\ \mathrm{Cb}$$

Ἡ ἐνέργεια ἑκάστου τῶν πυκνωτῶν εἶναι :

τοῦ πυκνωτοῦ Π : $W_1 = \frac{1}{2}\, C \cdot U_1^2$ ἤτοι $W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}2}{10^6}\, \mathrm{F} \cdot (8000\ \mathrm{V})^2$

ἢ $\mathbf{W_1 = 6{,}4\ Joule}$

τοῦ πυκνωτοῦ Π′ : $W_2 = \frac{1}{2}\, C' \cdot U_1^2$ ἤτοι $W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}8}{10^6}\, \mathrm{F} \cdot (8000\ \mathrm{V})^2$

ἢ $\mathbf{W_2 = 25{,}6\ Joule}$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνεργειῶν τῶν δύο πυκνωτῶν εἶναι :

$$W_{ολ} = W_1 + W_2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_{ολ} = 32\ \mathrm{Joule}$$

Ἀρχικῶς ὁ πυκνωτὴς Π εἶχεν ἐνέργειαν : $W = 160\ \mathrm{Joule}$

Ἄρα ἡ σύνδεσις τοῦ πυκνωτοῦ Π μὲ τὸν πυκνωτὴν Π′ ἐπέφερεν ἐλάττωσιν τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος κατά :

$$\Delta W = W - W_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{\Delta W = 128\ Joule}$$

Ἡ ἐνέργεια ΔW μετετράπη εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος.

ΚΙΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ

ΑΝΤΙΣΤΑΣΙΣ ΑΓΩΓΟΥ - ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ OHM

74. Εἰς τὰ ἄκρα σύρματος, ἔχοντος ἀντίστασιν 5 Ohm, ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 50 Volt. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον διέρχεται διὰ τοῦ σύρματος ἐντὸς 30 λεπτῶν;

Ἂν U εἶναι ἡ τάσις, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος, R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος καὶ I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$I = \frac{U}{R}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{50\ \mathrm{V}}{5\ \Omega} = 10\ \mathrm{A}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ὁρισμοῦ τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος : $I = \frac{Q}{t}$

εὑρίσκομεν :

$$Q = I \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 10 \cdot 1800 \left(\frac{\mathrm{Cb}}{\mathrm{sec}} \cdot \mathrm{sec} \right) \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{Q = 18\,000\ Cb}$$

75. Σύρμα ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν 1,6 μΩ · cm καὶ διάμετρον 1 mm. Πόσον μῆκος τοῦ σύρματος τούτου ἔχει ἀντίστασιν 16 Ohm;

Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad (1)$$

ὅπου ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου, l τὸ μῆκος καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σύρματος. Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς l, λαμβάνομεν:

$$l = \frac{R \cdot S}{\rho} \qquad (2)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $R = 16\ \Omega$ καὶ $\rho = 1{,}6\ \mu\Omega \cdot cm$, ἤτοι εἶναι: $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$.
Ἡ τομὴ τοῦ σύρματος ἔχει ἀκτῖνα: $\alpha = 0{,}5$ mm ἢ $\alpha = 0{,}05$ cm· συνεπῶς εἶναι:

$$S = 3{,}14 \cdot 0{,}05^2\ cm^2$$

Θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν R, ρ καὶ S εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν:

$$l = \frac{16\ \Omega \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05^2\ cm^2}{1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot cm} \quad \text{ἤτοι} \quad l = 78\,500\ cm \quad \text{καὶ} \quad l = \mathbf{785\ m}$$

76. Σύρμα, διαμέτρου 1 mm, ἔχει ἀντίστασιν 0,4 Ohm κατὰ μέτρον. Σύρμα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου καὶ διαμέτρου 0,4 mm θέλομεν νὰ ἔχῃ ἀντίστασιν 12,5 Ohm. Πόσον μῆκος ἐκ τοῦ δευτέρου σύρματος πρέπει νὰ λάβωμεν;

Τὸ πρῶτον σύρμα ἔχει διάμετρον δ_1 καὶ συνεπῶς ἡ τομή του ἔχει ἐμβαδόν:

$$S_1 = \frac{\pi\delta_1^2}{4}$$

Ἂν ρ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου, τότε μῆκος l_1 τοῦ σύρματος ἔχει ἀντίστασιν:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} = \rho \cdot \frac{l_1}{\frac{\pi\delta_1^2}{4}} \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = \rho \cdot \frac{4l_1}{\pi\delta_1^2} \qquad (1)$$

Τὸ δεύτερον σύρμα εἶναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου καὶ ἔχει διάμετρον δ_2· συνεπῶς ἡ τομή του ἔχει ἐμβαδόν: $S_2 = \frac{\pi\delta_2^2}{4}$. Μῆκος l_2 τοῦ σύρματος τούτου ἔχει ἀντίστασιν:

$$R_2 = \rho \cdot \frac{l_2}{S_2} = \rho \cdot \frac{l_2}{\frac{\pi\delta_2^2}{4}} \quad \text{ἤτοι} \quad R_2 = \rho \cdot \frac{4l_2}{\pi\delta_2^2} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \qquad (3)$$

Διὰ τὸ πρῶτον σύρμα δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\delta_1 = 1\ mm \qquad l_1 = 1\ m \qquad \text{καὶ} \qquad R_1 = 0{,}4\ \Omega$$

Διὰ τὸ δεύτερον σύρμα δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\delta_2 = 0{,}4\ mm \qquad R_2 = 12{,}5\ \Omega$$

καὶ ζητεῖται τὸ μῆκος l_2. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς l_2 ἔχομεν:

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \qquad (4)$$

Ἂν θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς εὑρίσκομεν:

$$l_2 = 1\ m \cdot \left(\frac{0{,}4\ mm}{1\ mm}\right)^2 \cdot \frac{12{,}5\ \Omega}{0{,}4\ \Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad l_1 = \mathbf{5\ m}$$

77. Μία τηλεγραφικὴ γραμμὴ ἔχει μῆκος 480 km. Τὸ σύρμα ἔχει διάμετρον 4 mm καὶ εἰδικὴν ἀντίστασιν 1,6 μΩ · cm. Πόση διαφορὰ δυναμικοῦ πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς, ὥστε αὕτη νὰ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,2 Ampére;

Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι τὸ σύρμα ἔχει:

μῆκος: $l = 480 \text{ km} = 480 \cdot 10^5 \text{ cm}$

εἰδικὴν ἀντίστασιν: $\rho = 1{,}6 \ \mu\Omega \cdot \text{cm} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \text{cm}$

διάμετρον: $\delta = 4 \text{ mm} = 0{,}4 \text{ cm}$

καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς εἶναι:

$$S = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}4^2}{4} \text{ cm}^2 \quad \text{ἢ} \quad S = 3{,}14 \cdot 0{,}04 \text{ cm}^2$$

Ἂν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ρ, l καὶ S εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστασιν R εἰς Ohm:

$$R = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \frac{480 \cdot 10^5 \text{ cm}}{3{,}14 \cdot 0{,}04 \text{ cm}^2} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{R = 611{,}46 \ \Omega}$$

Διὰ νὰ διαρρέεται τὸ σύρμα ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I = 0,2 A, πρέπει εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος νὰ ἐφαρμόζεται τάσις U, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm, εἶναι:

$$U = I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad U = 0{,}2 \text{ A} \cdot 611{,}46 \ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 122{,}29 \text{ V}}$$

78. Τὸ σύρμα τηλεγραφικῆς γραμμῆς, μήκους l, εἶναι ἀπὸ χαλκὸν καὶ ἔχει διάμετρον 3 mm. Θέλομεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ χάλκινον σύρμα μὲ σύρμα ἀργιλλίου, ἔχοντος τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ σύρματος τούτου καὶ ποῖος εἶναι ὁ λόγος τοῦ βάρους τῆς νέας γραμμῆς πρὸς τὸ βάρος τῆς παλαιᾶς; Εἰδικαὶ ἀντιστάσεις: χαλκοῦ 1,6 μΩ · cm, ἀργιλλίου 3 μΩ · cm. Εἰδικὰ βάρη: χαλκοῦ 9 gr*/cm³, ἀργιλλίου 2,7 gr*/cm³.

α) Ἡ παλαιὰ καὶ ἡ νέα γραμμὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν R καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος l. Ἔστω S ἡ τομὴ τοῦ χαλκίνου σύρματος καὶ S′ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος ἀργιλλίου· ἐπίσης ρ καὶ ρ′ αἱ εἰδικαὶ ἀντιστάσεις ἀντιστοίχως τοῦ χαλκοῦ καὶ τοῦ ἀργιλλίου. Τότε ἔχομεν τὰς ἑπομένας δύο σχέσεις:

ἀντίστασις παλαιᾶς γραμμῆς: $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$

ἀντίστασις νέας γραμμῆς: $R = \rho' \cdot \frac{l}{S'}$

Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς σχέσεις εὑρίσκομεν:

$$\rho \cdot \frac{l}{S} = \rho' \cdot \frac{l}{S'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\rho}{S} = \frac{\rho'}{S'} \quad \text{καὶ} \quad \frac{S'}{S} = \frac{\rho'}{\rho}$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἀναλογίαν ὑπολογίζομεν τὸν λόγον S′/S, διότι δίδονται αἱ εἰδικαὶ ἀντιστάσεις τῶν δύο μετάλλων:

$$\rho = 1{,}6 \ \mu\Omega \cdot \text{cm} \quad \text{καὶ} \quad \rho' = 3 \ \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

Οὕτω λαμβάνομεν:

$$\frac{S'}{S} = \frac{3}{1{,}6} \quad \text{ἢ} \quad \frac{S'}{S} = 1{,}87 \qquad (1)$$

Ἔστω δ ἡ διάμετρος τοῦ χαλκίνου σύρματος καὶ x ἡ ζητουμένη διάμετρος τοῦ σύρματος ἀργιλλίου. Τότε ἔχομεν :

$$S = \frac{\pi\delta^2}{4} \quad \text{καὶ} \quad S' = \frac{\pi x^2}{4}$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς εὑρίσκομεν : $$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{\delta^2} \qquad (2)$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσες (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{x^2}{\delta^2} = 1,87 \quad \text{ἄρα} \quad x^2 = 1,87 \cdot \delta^2$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $\delta = 3$ mm καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη διάμετρος εἶναι :

$$x = \sqrt{1,87 \cdot 3^2}\ \text{mm} = \sqrt{16,83}\ \text{mm} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 4,1\ mm}$$

β) Θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὸν λόγον τοῦ βάρους τῆς νέας γραμμῆς πρὸς τὸ βάρος τῆς παλαιᾶς. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχομεν :

ὄγκος νέας γραμμῆς : $S' \cdot l$

ὄγκος παλαιᾶς γραμμῆς : $S \cdot l$

Τὰ βάρη συνεπῶς τῶν δύο γραμμῶν εἶναι :

βάρος νέας γραμμῆς : $B' = 2,7 \cdot S' \cdot l$

βάρος παλαιᾶς γραμμῆς : $B = 9 \cdot S \cdot l$

Ὁ λόγος τῶν βαρῶν τῶν δύο γραμμῶν εἶναι :

$$\frac{B'}{B} = \frac{2,7 \cdot S' \cdot l}{9 \cdot S \cdot l} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{B'}{B} = \frac{2,7}{9} \cdot \frac{S'}{S} \qquad (3)$$

Ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα σχέσις (1) δίδει τὸν λόγον $S'/S = 1,87$. Ἄρα ἡ σχέσις (3) γράφεται :

$$\frac{B'}{B} = \frac{2,7}{9} \cdot 1,87 \quad \text{καὶ} \quad \frac{B'}{B} = \mathbf{0,56}$$

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν λόγος τῶν βαρῶν εἶναι 0,56. Τὸ βάρος τῆς ἐξ ἀργιλλίου γραμμῆς εἶναι μόνον τὰ 0,56 τοῦ βάρους τῆς παλαιᾶς γραμμῆς.

79. Τρεῖς ἀντιστάσεις 5 Ω, 20 Ω καὶ 60 Ω συνδέονται κατὰ σειράν. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 34 Volt. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύστημα τῶν ἀντιστάσεων;

Αἱ τρεῖς ἀντιστάσεις $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ καὶ $R_3 = 60\ \Omega$ συνδέονται κατὰ σειρὰν καὶ συνεπῶς ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_2 + R_3 \quad \text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = 5 + 20 + 60 = 85\ \Omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 90$ V. Συνεπῶς τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν :

$$I = \frac{U}{R_{o\lambda}} = \frac{34\ V}{85\ \Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I = 0,4\ A}$$

80. Δύο σύρματα, ὅταν συνδέωνται κατὰ σειράν, ἔχουν ἀντίστασιν 30 Ω καὶ ὅταν συνδέωνται παραλλήλως, ἔχουν ἀντίστασιν 3 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου σύρματος;

Ἂς καλέσωμεν R_1 καὶ R_2 τὰς ἀντιστάσεις τῶν δύο συρμάτων. Ὅταν αἱ δύο ἀντιστάσεις συνδέωνται κατὰ σειράν, ἡ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι $R = 30\ \Omega$ καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$R = R_1 + R_2 \quad \text{ἢ} \quad 30 = R_1 + R_2 \qquad (1)$$

Ὅταν αἱ δύο ἀντιστάσεις συνδέωνται παραλλήλως, ἡ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι $R' = 3\ \Omega$ καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad ἢ \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν:

$$\frac{1}{3} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \quad ἄρα \quad R_1 \cdot R_2 = 3R_2 + 3R_1$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς R_2 ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν:

$$R_1 (30 - R_1) = 3 (30 - R_1) + 3R_1 \quad ἢ \quad R_1^2 - 30R_1 + 90 = 0$$

Λύοντες τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς R_1 ἔχομεν:

$$R_1 = \frac{30 \pm \sqrt{540}}{2} = \frac{30 \pm 23{,}24}{2}$$

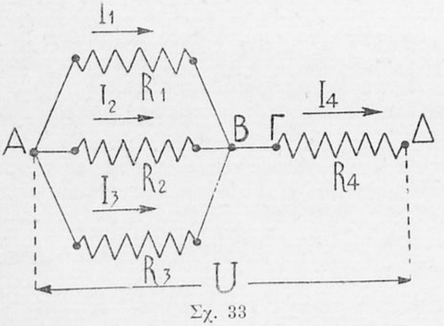
Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$\mathbf{R_1 = 26{,}62\ \Omega} \quad ὁπότε \quad \mathbf{R_2 = 3{,}38\ \Omega}$$

$$ἢ \quad \mathbf{R_1 = 3{,}38\ \Omega} \quad ὁπότε \quad \mathbf{R_2 = 26{,}62\ \Omega}$$

81. Τρεῖς ἀντιστάσεις 2 Ω, 3 Ω καὶ 4 Ω συνδέονται παραλλήλως καὶ τὸ σύστημα τοῦτο συνδέ ται κατὰ σειρὰν μὲ ἀντίστασιν 1 Ω. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὅλου συστήματος ἐφαρμόζεται διαφορὰ δυναμικοῦ 20 Volt. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἑκάστην τῶν τεσσάρων ἀντιστάσεων;

Αἱ τρεῖς ἀντιστάσεις $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$ καὶ $R_3 = 4\ \Omega$ συνδέονται παραλλήλως (σχ. 33) καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις R τοῦ συστήματος τῶν τριῶν τούτων ἀντιστάσεων δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:



Σχ. 33

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$ἢ \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$ἄρα \quad R = \frac{12}{13}\ \Omega$$

Τὸ προηγούμενον σύστημα συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ ἀντίστασιν $R_4 = 1\ \Omega$. Οὕτω τὸ ὅλον σύστημα τῶν ἀντιστάσεων ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$R_{ολ} = R + R_4$$

$$ἤτοι \quad R_{ολ} = \frac{12}{13}\ \Omega + 1\ \Omega = \frac{25}{13}\ \Omega$$

Ἐπειδὴ εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Δ τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 20$ Volt, ἕπεται ὅτι ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{U}{R_{ολ}} = \frac{20\ V}{\frac{25}{13}\ \Omega} = \frac{20 \cdot 13}{25}\ A \quad ἄρα \quad \mathbf{I = 10{,}4\ A}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R_4 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως: $\mathbf{I = 10{,}4\ A}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἐντάσεις I_1, I_2, I_3 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς τρεῖς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν τάσιν U_1 ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀντιστάσεων. Ἡ τάσις ὅμως U_1 εὑρίσκεται ἀμέσως, διότι εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἀντιστάσεων ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R = \frac{12}{13}\ \Omega$ καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10{,}4$ A. Ὥστε εἶναι:

$$U_1 = I \cdot R = 10{,}4\ \text{A} \cdot \frac{12}{13}\ \Omega = 9{,}6\ \text{V}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3, διότι εἶναι:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{9{,}6\ \text{V}}{2\ \Omega} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{I_1 = 4{,}8\ A}$$

$$I_2 = \frac{U_1}{R_2} = \frac{9{,}6\ \text{V}}{3\ \Omega} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{I_2 = 3{,}2\ A}$$

$$I_3 = \frac{U_1}{R_3} = \frac{9{,}6\ \text{V}}{4\ \Omega} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{I_3 = 2{,}4\ A}$$

82. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἑκάστην ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος τοῦ σχήματος 34, ὡς καὶ ἡ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης ἀντιστάσεως.

Αἱ δύο ἀντιστάσεις R_3 καὶ R_4 (σχ. 34) συνδέονται παραλλήλως καὶ ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$\frac{1}{R_{3,4}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

ἄρα $R_{3,4} = 2\ \Omega$

Ἡ ἀντίστασις $R_{3,4}$ συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν R_7. Αἱ δύο αὗται ἀντιστάσεις ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν:

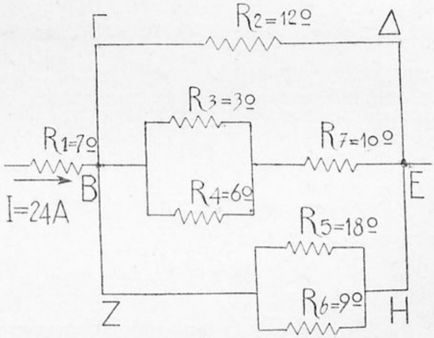
$$R_{BE} = 2\ \Omega + 10\ \Omega$$

ἄρα $R_{BE} = 12\ \Omega$

Αἱ ἀντιστάσεις R_5 καὶ R_6 συνδέονται παραλλήλως καὶ ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$\frac{1}{R_{ZH}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$$

ἄρα $R_{ZH} = 6\ \Omega$



Σχ. 34

Οἱ τρεῖς κλάδοι ΓΔ, ΒΕ καὶ ΖΗ τῶν ἀντιστάσεων συνδέονται παραλλήλως καὶ ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \quad \text{ἄρα} \quad R_{ολ} = 3\ \Omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα λοιπὸν τοῦ συστήματος τῶν ἀνωτέρω τριῶν κλάδων ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U = R_{ολ} \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad U = 3\ \Omega \cdot 24\ \text{A} \quad \text{ἄρα} \quad U = 72\ \text{V}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad U_1 = 7\ \Omega \cdot 24\ \text{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_1 = 168\ V}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2 ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U_2 = U \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{U_2 = 72\ V}$$

Συνεπῶς ἡ ἀντίστασις R_2 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{72\ V}{12\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_2 = 6\ A}$$

Τὸ σύστημα τῶν ἀντιστάσεων τοῦ κλάδου ΒΕ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I' = \frac{U}{R_{BE}} = \frac{72\ V}{12\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad I' = 6\ A$$

Οὕτω εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_7 ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_7 = R_7 \cdot I' = 10\ \Omega \cdot 6\ A \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{U_7 = 60\ V}$$

Ἡ δὲ ἀντίστασις R_7 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_7 = I' \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_7 = 6\ A}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστάσεων R_3 καὶ R_4 ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_{3,4} = U - U_7 = 72\ V - 60\ V \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{U_{3,4} = 12\ V}$$

Ἑκάστη δὲ τῶν ἀντιστάσεων τούτων διαρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_3 = \frac{U_{3,4}}{R_3} = \frac{12\ V}{3\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_3 = 4\ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{3,4}}{R_4} = \frac{12\ V}{6\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_4 = 2\ A}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀντιστάσεων R_5 καὶ R_6 ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_{5,6} = U \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{U_{5,6} = 72\ V}$$

Ἑκάστη δὲ τῶν ἀντιστάσεων τούτων διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_5 = \frac{U_{5,6}}{R_5} = \frac{72\ V}{18\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_5 = 4\ A}$$

$$I_6 = \frac{U_{5,6}}{R_6} = \frac{72\ V}{9\ \Omega} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_6 = 8\ A}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$I_2 + I' + I_5 + I_6 = (6 + 6 + 4 + 8)\ A = 24\ A$$

83. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἑκάστην ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος τοῦ σχήματος 35, ὡς καὶ ἡ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης ἀντιστάσεως.

Αἱ τρεῖς ἀντιστάσεις R_2, R_3 καὶ R_4 (σχ. 35) συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως καὶ ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{\Delta E}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{R_{\Delta E}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \qquad \text{ἄρα} \qquad R_{\Delta E} = 2\ \Omega$$

Ἡ ἀντίστασις αὐτὴ συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν R_1. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κλάδου ΓΕ εἶναι :

$$R_{\Gamma E} = 3\ \Omega + 2\ \Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{\Gamma E} = 5\ \Omega$$

Ἡ ἀντίστασις $R_{\Gamma E}$ συνδέεται παραλλήλως μὲ τὴν ἀντίστασιν R_5, ἡ δὲ ὁλική των ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ εἶναι :

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \qquad \text{ἄρα} \qquad R_{o\lambda} = 4\ \Omega$$

Ἡ τάσις μεταξὺ τῶν σημείων Ζ καὶ Β εἶναι :

$$U = R_{o\lambda} \cdot I \quad ἤτοι \quad U = 4\,\Omega \cdot 60\text{ A} \quad καὶ \quad U = 240\text{ V}$$

Ὥστε εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_5 ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_5 = U \quad ἤτοι \quad \mathbf{U_5 = 240\ V}$$

Ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_5, εἶναι :

$$I_5 = \frac{U_5}{R_5} = \frac{240\text{ V}}{20\,\Omega}$$

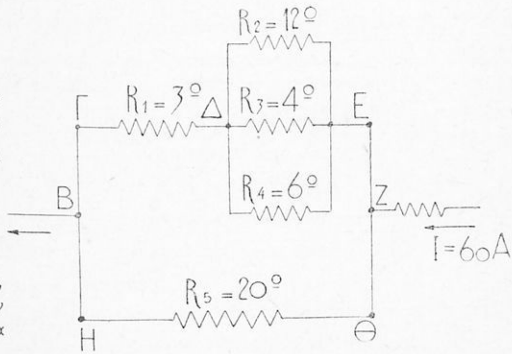
καὶ $\mathbf{I_5 = 12\ A}$

Ὁ κλάδος ΓΕ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I', ἡ ὁποία εἶναι :

$$I' = I - I_5 = 60\text{ A} - 12\text{ A} = 48\text{ A}$$

ἢ καὶ ἄλλως :

$$I' = \frac{U}{R_{\Gamma E}} = \frac{240\text{ V}}{5\,\Omega} = 48\text{ A}$$



Σχ. 35

Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_1 καὶ ἡ τάσις U_1 εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 εἶναι :

$$I_1 = I' \quad ἄρα \quad \mathbf{I_1 = 48\ A}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 3\,\Omega \cdot 48\text{ A} \quad καὶ \quad \mathbf{U_1 = 144\ V}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀντιστάσεων R_2, R_3 καὶ R_4 ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_{\Delta E} = U - U_1 = 240\text{ V} - 144\text{ V} \quad ἤτοι \quad \mathbf{U_{\Delta E} = 96\ V}$$

Ἄρα αἱ ἐντάσεις I_2, I_3 καὶ I_4 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὰς ἀντιστάσεις R_2, R_3 καὶ R_4 εἶναι :

$$I_2 = \frac{U_{\Delta E}}{R_2} = \frac{96\text{ V}}{12\,\Omega} \quad καὶ \quad \mathbf{I_2 = 8\ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{\Delta E}}{R_3} = \frac{96\text{ V}}{4\,\Omega} \quad καὶ \quad \mathbf{I_3 = 24\ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{\Delta E}}{R_4} = \frac{96\text{ V}}{6\,\Omega} \quad καὶ \quad \mathbf{I_4 = 16\ A}$$

84. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν 3 Ω εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 36, καὶ ἡ τάσις ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως 16 Ω.

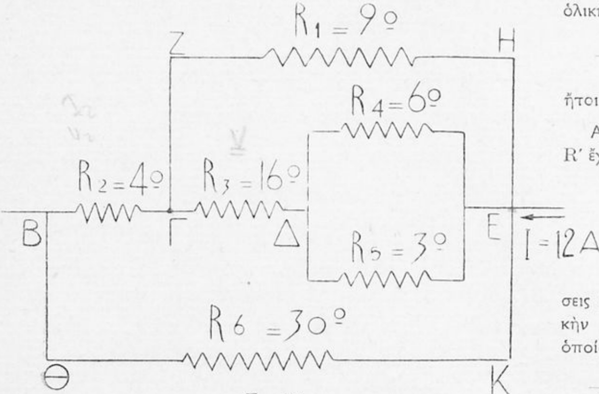
Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τῶν ἀντιστάσεων R_4 καὶ R_5 (σχ. 36) εἶναι :

$$\frac{1}{R_{\Delta E}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \quad ἄρα \quad R_{\Delta E} = 2\,\Omega$$

Ἡ δὲ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστάσεων R_3 καὶ $R_{\Delta E}$ εἶναι :

$$R_{\Gamma E} = 16\,\Omega + 2\,\Omega \quad ἤτοι \quad R_{\Gamma E} = 18\,\Omega$$

Αἱ ἀντιστάσεις τοῦ κλάδου ΓΕ καὶ ἡ ἀντίστασις R_1 συνδέονται παραλλήλως καὶ ἔχουν



Σχ. 36

ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

ἤτοι $R' = 6\,\Omega$

Αἱ ἀντιστάσεις R_2 καὶ R' ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν R'', ἡ ὁποία εἶναι:

$$R'' = 4\,\Omega + 6\,\Omega$$

ἤτοι $R'' = 10\,\Omega$

Τέλος αἱ ἀντιστάσεις R'' καὶ R_6 ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10}$$

καὶ $R_{ολ} = 7{,}5\,\Omega$

Ὥστε εἰς τὰ ἄκρα Ε καὶ Β τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστάσεων ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U = R_{ολ} \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad U = 7{,}5\,\Omega \cdot 12\,A \quad \text{καὶ} \quad U = 90\,V$$

Ἡ ἀντίστασις R_6 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_6 = \frac{U}{R_6} = \frac{90\,V}{30\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_6 = 3\,A$$

Αἱ ὑπόλοιποι ἀντιστάσεις ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν $R'' = 10\,\Omega$, ἡ ὁποία διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I'' = I - I_6 = 12\,A - 3\,A \quad \text{καὶ} \quad I'' = 9\,A$$

Ὥστε ἡ ἀντίστασις R_2 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I'' = 9\,A$ καὶ συνεπῶς ἡ πτῶσις τῆς τάσεως ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς εἶναι:

$$U_2 = R_2 \cdot I'' = 4\,\Omega \cdot 9\,A \quad \text{ἤτοι} \quad U_2 = 36\,V$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα Ε καὶ Γ τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστάσεων τοῦ κλάδου ΓΕ εἶναι:

$$U_{ΓΕ} = U - U_2 = 90\,V - 36\,V = 54\,V$$

Ὁ κλάδος ΓΕ ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ΓΕ} = 18\,\Omega$ καὶ συνεπῶς διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I', ἡ ὁποία εἶναι:

$$I' = \frac{U_{ΓΕ}}{R_{ΓΕ}} = \frac{54\,V}{18\,\Omega} \quad \text{ἄρα} \quad I' = 3\,A$$

Ὥστε ἡ ἀντίστασις $R_3 = 16\,\Omega$ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I' = 3\,A$ καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς εἶναι:

$$U_3 = R_3 \cdot I' = 16\,\Omega \cdot 3\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_3 = 48\,V}$$

Εἰς τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε τῶν ἀντιστάσεων R_4 καὶ R_5 ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U_{ΔΕ} = U_{ΓΕ} - U_3 = 54\,V - 48\,V \quad \text{ἤτοι} \quad U_{ΔΕ} = 6\,V$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_5 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν $R_5 = 3\,\Omega$, εἶναι:

$$I_5 = \frac{U_{ΔΕ}}{R_5} = \frac{6\,V}{3\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_5 = 2\,A}$$

85. Εὐθύγραμμον σύρμα AB ἔχει ἀντίστασιν 2 R. Μὲ διάμετρον τὴν AB σχηματίζομεν ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ ἀποτελουμένην ἀπὸ τὸ ἴδιον σύρμα. Ἂν O εἶναι τὸ μέσον τῆς AB, μὲ διάμετρον τὴν OB σχηματίζομεν ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν ἀποτελουμένην ἀπὸ τὸ ἴδιον πάλιν σύρμα. Εἰς τὸ σημεῖον A φθάνει ρεῦμα ἐντάσεως I. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐντάσεων τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς δύο ἡμιπεριφερείας.

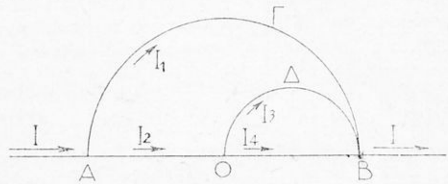
Ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν AO καὶ OB (σχ. 37) ἔχει ἀντίστασιν R. Ὁ ἀγωγὸς ΑΓΒ ἔχει ἀντίστασιν $R_1 = \pi R$, ὁ δὲ ἀγωγὸς ΟΔΒ ἔχει ἀντίστασιν $R_2 = \dfrac{\pi R}{2}$. Οἱ δύο ἀγωγοὶ OB καὶ ΟΔΒ συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις R′ τοῦ συστήματος τῶν δύο τούτων ἀγωγῶν προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}$$

ἤτοι $$R' = \frac{R \cdot R_2}{R + R_2}$$

Ἄρα εἶναι : $$R' = \frac{R \cdot (\pi R/2)}{R + (\pi R/2)}$$

ἤτοι $$R' = \frac{\pi R}{\pi + 2}$$



Σχ. 37

Διά τὸ σύστημα τῶν δύο ἀγωγῶν OB καὶ ΟΔΒ ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad \text{καὶ} \qquad I_3 \cdot R_2 = I_4 \cdot R$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_3 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΔΒ, εἶναι :

$$I_3 = I_4 \cdot \frac{R}{R_2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_3 = I_4 \cdot \frac{R}{(\pi R/2)} \qquad \text{καὶ} \qquad I_3 = \frac{2I_4}{\pi}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $I_4 = I_2 - I_3$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$I_3 = \frac{2(I_2 - I_3)}{\pi} \qquad \text{ἄρα} \qquad I_3 = \frac{2I_2}{\pi + 2} \qquad (1)$$

Ὁ ἀγωγὸς AO συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν R′. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R″ τοῦ συστήματος τούτου τῶν ἀντιστάσεων εἶναι :

$$R'' = R + R' \qquad \text{ἤτοι} \qquad R'' = R + \frac{\pi R}{\pi + 2} \qquad \text{καὶ} \qquad R'' = \frac{(2\pi + 2)\, R}{\pi + 2}$$

Διὰ τὸ σύστημα τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R″ ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R''$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΓΒ, εἶναι :

$$I_1 = I_2 \cdot \frac{R''}{R_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = I_2 \cdot \frac{\dfrac{(2\pi + 2)\, R}{\pi + 2}}{\pi R}$$

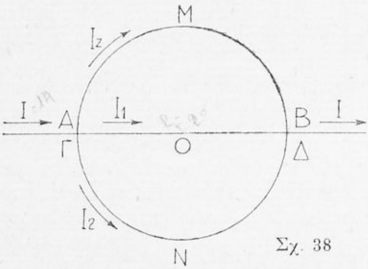
$$\text{ἄρα} \qquad I_1 = \frac{(2\pi + 2)\, I_2}{\pi(\pi + 2)} \qquad (2)$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἐντάσεων I_1 καὶ I_3 εἶναι :

$$\frac{I_1}{I_3} = \frac{2\pi + 2}{2\pi} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{I_1}{I_3} = \frac{\pi + 1}{\pi} = \frac{4{,}14}{3{,}14} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{I_1}{I_3} = \mathbf{1{,}32}$$

86. Σύρμα ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω κατὰ μέτρον καὶ ἔχει τὸ σχῆμα περιφερείας κύκλου. Ο ἀκτῖνος 1 m (σχ. 38). Δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα, ἑνώνονται μὲ εὐθύγραμμον σύρμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω κατὰ μέτρον. Ρεῦμα ἐντάσεως Ι = 1 Α φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἐκεῖ διακλαδίζεται εἰς τοὺς τρεῖς ἀγωγοὺς ΓΜΒ, ΓΟΔ καὶ ΓΝΒ 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν τριῶν ἀγωγῶν. 2) Τὸ ρεῦμα, ἔχον ἔντασιν Ι = 1 Α, φθάνει τώρα εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον σημεῖον Β, ἀλλὰ αἱ δύο διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν 45^0 (σχ. 39). Ὀνομάζομεν y τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΓ, καὶ x τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ΓΔ. α) Νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τοῦ y καὶ x αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα κυκλοφοροῦν ἐντὸς τῶν ἀγωγῶν ΑΔ, ΔΒ καὶ ΓΒ. β) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀγωγοὶ ΑΓ καὶ ΔΒ διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως καὶ ὅτι συμβαίνει τὸ ἴδιον εἰς τοὺς ἀγωγοὺς ΑΔ καὶ ΓΒ. γ) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις x τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΓΟΔ.

1) Ὁ ἀγωγὸς ΓΟΔ (σχ. 38) ἔχει μῆκος 2 m καὶ ἀντίστασιν $R_1 = 2\,\Omega$. Ἕκαστος δὲ τῶν ἀγωγῶν ΓΜΒ καὶ ΓΝΒ ἔχει μῆκος π μέτρα καὶ ἀντίστασιν $R_2 = \pi\,\Omega$. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀγωγῶν προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :



Σχ. 38

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$$

ἤτοι $$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}$$

ἄρα $$R_{ολ} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + 2R_1}$$

καὶ $$R_{ολ} = \frac{2\pi}{\pi + 4}\,\Omega$$

Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι :

$$U = I \cdot R_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad U = 1\,A \cdot \frac{2\pi}{\pi + 4}\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad U = \frac{2\pi}{\pi + 4}\,V$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν τριῶν ἀγωγῶν, εἶναι :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{2\pi/(\pi + 4)\,V}{2\,\Omega}$$

$$\text{ἢ} \quad I_1 = \frac{\pi}{\pi + 4}\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 0{,}44\ A}$$

Ἡ ἔντασις I_2 ἑκάστου ἐκ τῶν δύο ἄλλων ρευμάτων εἶναι :

$$I_2 = \frac{I - I_1}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{1 - 0{,}44}{2}\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_2 = 0{,}28\ A}$$

2) Διὰ τὰς διακλαδώσεις τοῦ ρεύματος εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ καὶ Δ τοῦ κυκλώματος (σχ. 39) ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

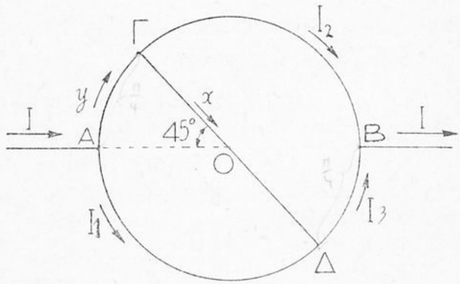
διὰ τὸ σημεῖον Α : $I = I_1 + y$ ἄρα $\mathbf{I_1 = I - y}$ (1)

διὰ τὸ σημεῖον Γ : $y = I_2 + x$ ἄρα $\mathbf{I_2 = y - x}$ (2)

διὰ τὸ σημεῖον Δ : $I_3 = I_1 + x$ ἄρα $\mathbf{I_3 = I - y + x}$ (3)

Αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) δίδουν τὰς ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τοὺς ἀγωγοὺς ΑΔ, ΓΒ καὶ ΔΒ συναρτήσει τῶν ἐντάσεων I, x καὶ y. Ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν ΑΓ καὶ ΔΒ ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ 1/8 τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, ἤτοι ἔχει μῆκος ἴσον μὲ π/4 μέτρα. Ἄρα ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν τούτων ἔχει ἀντίστασιν :

$$r_1 = \frac{\pi}{4}\ \Omega \qquad (4)$$



Σχ. 39

Ἐπίσης ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν ΑΔ καὶ ΓΒ ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὰ 3/4 τοῦ μήκους τῆς ἡμιπεριφερείας, ἤτοι ἔχει μῆκος ἴσον μὲ 3π/4 μέτρα. Ἄρα ἕκαστος τῶν ἀγωγῶν τούτων ἔχει ἀντίστασιν :

$$r_2 = \frac{3\pi}{4}\ \Omega \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$r_2 = 3r_1$$

Μεταξὺ τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῶν κυκλωμάτων ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ ὑπάρχει ἡ αὐτὴ διαφορὰ δυναμικοῦ. Ἄρα ἔχομεν :

διὰ τὸ κύκλωμα ΑΓΒ : $(U_A - U_B) = (U_A - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_B)$

διὰ τὸ κύκλωμα ΑΔΒ : $(U_A - U_B) = (U_A - U_\Delta) + (U_\Delta - U_B)$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις συνάγεται ὅτι εἶναι :

$$(U_A - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_B) = (U_A - U_\Delta) + (U_\Delta - U_B)$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(y \cdot r_1) + (I_2 \cdot r_2) = (I_1 \cdot r_2) + (I_3 \cdot r_1)$$

Ἄρα εἶναι : $r_1 \cdot (y - I_3) = r_2 \cdot (I_1 - I_2)$

ἢ $r_1 \cdot (y - I_3) = 3r_1 \cdot (I_1 - I_2)$ καὶ $(y - I_3) = 3(I_1 - I_2)$ (6)

Ἐπειδὴ εἶναι : $I = y + I_1$ καὶ $I = I_2 + I_3$

ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$y + I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{ἄρα} \quad (y - I_3) = (I_2 - I_1) \qquad (7)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$(I_2 - I_1) = 3(I_1 - I_2) \quad \text{ἄρα} \quad 4I_1 = 4I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I_1 = I_2}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$(y - I_3) = 3(I_1 - I_1) \quad \text{ἤτοι} \quad y - I_3 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{y = I_3}$$

Θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν ἔντασιν x τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΓΟΔ. Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις :

$$I = I_1 + y \quad \text{καὶ} \quad y = I_2 + x$$

εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι : $I_1 = I - y$ καὶ $I_2 = y - x$

Ἀνωτέρω εὑρέθη ὅτι εἶναι $I_2 = I_1$. Ἄρα αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις γράφονται ὡς ἑξῆς :

$$I_1 = I - y \quad \text{καὶ} \quad I_1 = y - x$$

Οὕτω εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας δύο ἐξισώσεις :

$$I - y = y - x \quad \text{ἄρα} \quad y = \frac{I + x}{2} \qquad (8)$$

$$\text{καὶ} \quad I_1 = I - \frac{I + x}{2} \quad \text{ἄρα} \quad I_1 = \frac{I - x}{2} \qquad (9)$$

Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$(U_A - U_\Gamma) + (U_\Gamma - U_\Delta) = (U_A - U_\Delta)$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$(r_1 \cdot y) + (R_1 \cdot x) = (r_2 \cdot I_1)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν y καὶ I_1 ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (8) καὶ (9), εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{I(r_2 - r_1)}{2R_1 + r_1 + r_2} \quad \text{ἤτοι} \quad x = \frac{I(3r_1 - r_1)}{2R_1 + r_1 + 3r_1}$$

$$\text{ἄρα} \quad x = \frac{I \cdot 2r_1}{2R_1 + 4r_1} \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{Ir_1}{R_1 + 2r_1}$$

Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς γνωστὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν I, r_1 καὶ R_1, εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{1\,A \cdot \frac{\pi}{4}\,\Omega}{\left(2 + \frac{2\pi}{4}\right)\Omega} = \frac{\pi}{2(4 + \pi)}\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 0{,}22\ A}$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

87. Εἰς τὰ ἄκρα σύρματος, ἀντιστάσεως 18 Ω, ἐφαρμόζεται τάσις 54 Volt. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος καὶ πόσον εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ ρεύματος ἐντὸς 30 λεπτῶν;

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = U \cdot I \ \text{Watt}$$

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι τὸ σύρμα ἔχει ἀντίστασιν $R = 18\,\Omega$ καὶ ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 54\,V$, ἕπεται ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{54\,V}{18\,\Omega} = 3\,A$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$P = U \cdot I \quad \text{ἢ} \quad P = 54\,V \cdot 3\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 162\ W}$$

Λέγοντες ὅτι τὸ ρεῦμα ἔχει ἰσχὺν 162 Watt ἐννοοῦμεν ὅτι κατὰ δευτερόλεπτον τὸ ρεῦμα παράγει ἔργον ἴσον μὲ 162 Joule, ἤτοι :

$$P = 162\ \text{Watt} = \text{Joule/sec}$$

Ἑπομένως ἐντὸς χρόνου $t = 30\ \text{min} = 1800\ \text{sec}$ τὸ ρεῦμα παράγει ἔργον W ἴσον μέ :

$$W = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W = 162 \cdot 1800\ \text{Joule} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{W = 291\,600\ Joule}$$

88. Λαμπτὴρ ἰσχύος 60 Watt λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 220 Volt. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ λαμπτῆρος;

Ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος εἶναι :

$$P = U \cdot I \text{ Watt} \qquad (1)$$

ὅπου $P = 60$ Watt καὶ $U = 220$ Volt

Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm εἶναι :

$$I = \frac{U}{R}$$

Θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ I εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$P = U \cdot \frac{U}{R} \quad \text{ἢ} \quad P = \frac{U^2}{R} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι :

$$R = \frac{U^2}{P} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{220^2}{60}\,\Omega \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{R = 806{,}67\ \Omega}$$

89. Αἴθουσα φωτίζεται ἀπὸ 6 λαμπτῆρας, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν 60 Watt. Πόσον κοστίζει ὁ φωτισμὸς τῆς αἰθούσης ἐπὶ 4,5 h, ἂν τὸ κιλοβατώριον τιμᾶται 0,8 δρχ.;

Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν 60 Watt. Ἄρα οἱ 6 λαμπτῆρες τῆς αἰθούσης ἔχουν ὁλικὴν ἰσχὺν $P = 6 \cdot 60 = 360$ Watt, ἤτοι $P = 0{,}360$ kW. Ἡ αἴθουσα φωτίζεται ἀπὸ τοὺς λαμπτῆρας ἐπὶ χρόνον $t = 4{,}5$ h. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἔργον W τοῦ ρεύματος εἰς κιλοβατώρια (kWh) θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν :

$$W = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ἔργον (kWh)} = \text{ἰσχὺς (kW)} \cdot \text{χρόνος (h)}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δαπανηθεῖσα ὑπὸ τῶν 6 λαμπτήρων ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἶναι :

$$W = 0{,}360 \text{ kW} \cdot 4{,}5 \text{ h} = 1{,}62 \text{ kWh}$$

Ἐπειδὴ τὸ 1 kWh τιμᾶται 0,8 δρχ., ἕπεται ὅτι ἡ δαπάνη φωτισμοῦ τῆς αἰθούσης ἀνέρχεται εἰς :

$$x = 1{,}62 \text{ kWh} \cdot 0{,}8 \text{ δρχ/kWh} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{x = 1{,}30\ δρχ}$$

90. Τρεῖς ἀντιστάσεις 5 Ω, 10 Ω καὶ 15 Ω συνδέονται κατὰ σειράν. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις 220 Volt. Πόση ποσότης θερμότητος ἀναπτύσσεται κατὰ λεπτὸν ἐπὶ ἑκάστης ἀντιστάσεως;

Αἱ τρεῖς ἀντιστάσεις εἶναι $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ καὶ $R_3 = 15\ \Omega$. Ἐπειδὴ αἱ ἀντιστάσεις συνδέονται κατὰ σειράν, ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + R_3 = 5 + 10 + 15 = 30\ \Omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 220$ Volt. Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohn εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{U}{R_{ολ}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{220 \text{ V}}{30\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I = \frac{22}{3} \text{ A}$$

Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Joule : $Q = 0{,}24\, I^2 \cdot R \cdot t$ εὑρίσκομεν τὴν ποσότητα θερμότητος Q (εἰς cal), ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς χρόνου $t = 1$ min $= 60$ sec ἐπὶ ἑκάστης ἀντιστάσεως. Προφανῶς ἑκάστη ἀντίστασις διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 22/3$ A. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη ποσότης θερμότητος εἶναι :

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_1 :

$$Q_1 = 0{,}24 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^2 \cdot 5 \cdot 60 \text{ cal} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{Q_1 = 3872\ cal}$$

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_2 :

$$Q_2 = 0{,}24 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^2 \cdot 10 \cdot 60 \text{ cal} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{Q_2 = 7744 \text{ cal}}$$

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_3 :

$$Q_3 = 0{,}24 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^2 \cdot 15 \cdot 60 \text{ cal} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{Q_3 = 11\,616 \text{ cal}}$$

91. Ἠλεκτρικὴ κουζίνα ἔχει ἰσχὺν 500 Watt καὶ τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 4 A. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς κουζίνας καὶ ὑπὸ ποίαν τάσιν λειτουργεῖ;

Ἔστω U ἡ τάσις ὑπὸ τὴν ὁποίαν λειτουργεῖ ἡ ἠλεκτρικὴ κουζίνα καὶ R ἡ ἀντίστασις αὐτῆς. Ἡ ἰσχὺς τῆς κουζίνας εἶναι $P = 500$ Watt καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 4$ A. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

ἰσχύς : $P = U \cdot I$ (1)

τάσις : $U = I \cdot R$ (2)

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὴν τιμὴν U ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2), εὑρίσκομεν :

$$P = I^2 \cdot R$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἀντίστασιν R τῆς κουζίνας :

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{500}{4^2} \text{ Ohm} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{R = 31{,}25\ \Omega}$$

Ἡ τάσις U εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν :

$$U = \frac{P}{I} = \frac{500}{4} \text{ Volt} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{U = 125\ V}$$

92. Μία ἠλεκτρικὴ κουζίνα, ἰσχύος 500 Watt θερμαίνει 500 gr ὕδατος ἀπὸ 20° εἰς 100° C ἐντὸς 10 λεπτῶν. Πόσον μέρος τῆς παραγομένης θερμότητος χρησιμοποιοῦμεν καὶ πόσον κοστίζει ἡ θέρμανσις τοῦ ὕδατος, ἂν τὸ κιλοβατώριον τιμᾶται 1,50 δρχ.;

Διὰ νὰ θερμανθοῦν τὰ 500 gr ὕδατος ἀπὸ 20° εἰς 100° C, ἤτοι κατὰ 80° C, πρέπει ἡ μᾶζα αὐτὴ τοῦ ὕδατος νὰ ἀπορροφήσῃ ποσότητα θερμότητος :

$$Q' = m \cdot c \cdot \Delta\theta \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q' = 500 \text{ gr} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot 80 \text{ grad} = 40\,000 \text{ cal}$$

Διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος ἡ κουζίνα λειτουργεῖ ἐπὶ χρόνον $t = 10$ min $= 600$ sec. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος τῆς κουζίνας ποσότης θερμότητος Q, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule εἶναι :

$$Q = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t \text{ cal} \qquad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ καταναλισκομένη ἐπὶ τοῦ σύρματος ἰσχὺς εἶναι :

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἢ καὶ} \qquad P = I^2 \cdot R \qquad (2)$$

διότι εἶναι $U = I \cdot R$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀντικαταστήσωμεν τὸ γινόμενον $I^2 \cdot R$ μὲ τὴν ἰσχὺν P, τότε εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$Q = 0{,}24 \cdot P \cdot t \text{ cal} \qquad (3)$$

Δίδεται ὅτι ἡ ἰσχὺς τῆς κουζίνας εἶναι $P = 500$ Watt. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὸν χρόνον t ἀναπτύσσεται ὑπὸ τοῦ ρεύματος ποσότης θερμότητος :

$$Q = 0{,}24 \cdot 500 \cdot 600 = 72\,000 \text{ cal}$$

Ἀπὸ αὐτὴν ὅμως τὴν ἀναπτυσσομένην ποσότητα θερμότητος χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος μόνον 40 000 cal, ἤτοι χρησιμοποιοῦμεν τά :

$$\frac{40\,000}{72\,000} = 0{,}55 \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{55\,\%}$$

τὰ δὲ ὑπόλοιπα 0,45 χάνονται διὰ διαφόρους λόγους (ἀγωγὴ καὶ ἀκτινοβολία τῆς θερμότητος, θέρμανσις δοχείου κλπ.).

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς δαπάνης λειτουργίας τῆς κουζίνας πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν δαπανωμένην ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς κιλοβατώρια. Ἐπειδὴ ἡ κουζίνα ἔχει ἰσχὺν $P = 0{,}500$ kW καὶ λειτουργεῖ ἐπὶ χρόνον $t = 1/6$ h, ἡ δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἶναι :

$$W = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W = 0{,}500\ \mathrm{kW} \cdot \frac{1}{6}\ \mathrm{h} = \frac{5}{60}\ \mathrm{kWh}$$

Ἕκαστον κιλοβατώριον τιμᾶται 1,50 δρχ. Ἄρα ἡ ζητουμένη δαπάνη εἶναι :

$$x = \frac{5}{60}\ \mathrm{kWh} \cdot 1{,}50\ \text{δρχ/kWh} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 0{,}125\ \text{δρχ}}$$

93. Διὰ νὰ θερμάνωμεν ἐντὸς 5 λεπτῶν ἕνα λίτρον ὕδατος ἀπὸ 20° εἰς 100° C, βυθίζομεν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἕνα σύρμα, διὰ τοῦ ὁποίου διαβιβάζομεν ρεῦμα ὑπὸ τάσιν 220 Volt. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τούτου;

Διὰ νὰ θερμάνωμεν 1 λίτρον ὕδατος, ἤτοι 1000 gr ὕδατος κατὰ 80° C, πρέπει νὰ προσδώσωμεν εἰς τὴν μᾶζαν αὐτὴν τοῦ ὕδατος ποσότητα θερμότητος :

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta = 1000\ \mathrm{gr} \cdot 1\ \mathrm{cal} \cdot \mathrm{gr}^{-1} \cdot 80\ \mathrm{grad} = 80\,000\ \mathrm{cal} \qquad (1)$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος θὰ ἀναπτυχθῆ ἀπὸ τὸ ρεῦμα ἐντὸς χρόνου $t = 5\ \mathrm{min} = 300\ \mathrm{sec}$ ἐπὶ τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ἀντίστασιν R. Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule θὰ ἔχωμεν τότε τὴν σχέσιν :

$$Q = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t\ \mathrm{cal} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t = 80\,000\ \text{cal} \qquad (3)$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 220$ Volt καὶ σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$U = I \cdot R \qquad (4)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν $I \cdot R = U$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$0{,}24 \cdot U \cdot I \cdot t = 80\,000$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν :

$$I = \frac{80\,000}{0{,}24 \cdot U \cdot t} = \frac{80\,000}{0{,}24 \cdot 220 \cdot 300}\ \mathrm{A} \quad \text{ἢ} \quad I = 5\ \mathrm{A}$$

Ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) ὅτι εἶναι :

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{220\ \mathrm{V}}{5\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 44\ \Omega}$$

94. Μία αἴθουσα φωτίζεται ἀπὸ 5 λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν 60 Watt καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 220 Volt. Ἡ αἴθουσα θερμαίνεται ἀπὸ μίαν ἠλεκτρικὴν θερμάστραν, ἡ ὁποία ἔχει ἰσχὺν 2000 Watt καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάσιν. Τὰ χρησιμοποιούμενα σύρματα διὰ τὰς συνδέσεις ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις ἑκάστου λαμπτῆρος καὶ τῆς θερμάστρας; Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ὀργάνων;

Οἱ 5 λαμπτῆρες καὶ ἡ θερμάστρα συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως καὶ οὕτω ἀποτελοῦν σύστημα 6 ἀντιστάσεων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς δύο κόμβους Α καὶ Β. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων κόμβων ὑπάρχει τάσις $U = 220$ Volt.

1) Ἂς καλέσωμεν R_λ τὴν ἀντίστασιν ἑκάστου λαμπτῆρος καὶ R_θ τὴν ἀντίστασιν τῆς θερμάστρας. Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν $P_\lambda = 60$ Watt καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_λ. Δι' ἕκαστον λαμπτῆρα ἰσχύει τότε ἡ σχέσις :

$$P_\lambda = U \cdot I_\lambda \qquad (1)$$

Ἐπίσης δι' ἕκαστον λαμπτῆρα ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm :

$$I_\lambda = \frac{U}{R_\lambda} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$P_\lambda = \frac{U^2}{R_\lambda} \quad \text{ἄρα} \quad R_\lambda = \frac{U^2}{P_\lambda} \qquad (3)$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὴν θερμάστραν λαμβάνομεν τὰς σχέσεις :

$$P_\theta = U \cdot I_\theta \quad \text{καὶ} \quad I_\theta = \frac{U}{R_\theta} \qquad (4)$$

$$\text{ἄρα} \quad P_\theta = \frac{U^2}{R_\theta} \quad \text{καὶ} \quad R_\theta = \frac{U^2}{P_\theta} \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἀντίστασιν :

$$R_\lambda = \frac{U^2}{P_\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad R_\lambda = \frac{(220\ V)^2}{60\ W} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_\lambda \approx 807\ \Omega}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις τῆς θερμάστρας εἶναι :

$$R_\theta = \frac{U^2}{P_\theta} \quad \text{ἤτοι} \quad R_\theta = \frac{(220\ V)^2}{2000\ W} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_\theta = 24,2\ \Omega}$$

Αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἕκαστον λαμπτῆρα καὶ τὴν θερμάστραν εἶναι :

$$I_\lambda = \frac{P_\lambda}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I_\lambda = \frac{60\ W}{220\ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_\lambda = \frac{3}{11}\ A}$$

$$I_\theta = \frac{P_\theta}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I_\theta = \frac{2000\ W}{220\ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_\theta = \frac{100}{11}\ A \approx 9\ A}$$

Οὕτω εἰς τοὺς κόμβους Α καὶ Β τῆς διακλαδώσεως ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = 5\,I_\lambda + I\theta \quad \text{ἤτοι} \quad I = \left(5 \cdot \frac{3}{11} + \frac{100}{11}\right) A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I \approx 10,5\ A}$$

95. Ἀπολυμαντικὸς κλίβανος χάνει κατὰ δευτερόλεπτον 6 θερμίδας καὶ διὰ κάθε ἕνα βαθμὸν κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπερέχει ἡ θερμοκρασία του ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Διὰ νὰ ἰσοφαρίσωμεν αὐτὴν τὴν ἀπώλειαν θερμότητος, θέτομεν ἐντὸς τοῦ κλιβάνου μίαν ἠλεκτρικὴν ἀντίστασιν R διαρρεομένην ἀπὸ ρεῦμα καταλλήλου ἐντάσεως εἰς τρόπον ὥστε ὁ κλίβανος νὰ ἔχῃ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἀνωτέραν κατὰ 10⁰ C ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ἐφαρμόζεται τάσις 110 Volt. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως δαπανωμένη ἰσχύς, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος.

Δίδεται ὅτι ὁ κλίβανος πρέπει νὰ ἔχῃ σταθερὰν θερμοκρασίαν ἀνωτέραν κατὰ 10^0 C ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ περιβάλλοντος. Ὥστε κατὰ δευτερόλεπτον πρέπει νὰ προσφέρεται εἰς τὸν κλίβανον ποσότης θερμότητος :

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = 6\,\frac{\text{cal}}{\text{sec . grad}} \cdot 10\ \text{grad} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_{\theta\epsilon\rho} = 60\ \text{cal/sec}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W = J \cdot Q_{\theta\epsilon\rho} \quad \text{ἤτοι} \quad W = 4{,}19\ \text{Joule/cal} \cdot 60\ \text{cal/sec}$$

$$\text{ἄρα} \quad W = 251{,}4\ \text{Joule/sec}$$

Ἄρα ἡ προσφερομένη ἀπὸ τὸ ρεῦμα ἰσχὺς εἶναι :

$$\mathbf{P = 251{,}4\ W}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ἐφαρμόζεται τάσις $U = 110$ V. Συνεπῶς ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι : $P = U \cdot I$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{P}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{251{,}4\ W}{110\ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 2{,}28\ A}$$

Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$U = I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{110\ V}{2{,}28\ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 48{,}2\ \Omega}$$

96. Ἐντὸς 5 λεπτῶν θέλομεν νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία ἑνὸς λίτρου ὕδατος ἀπὸ 10^0 εἰς 100^0 C. Πρὸς τοῦτο θὰ βυθίσωμεν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἕνα σύρμα, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ διαβιβάσωμεν ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ὑπὸ τάσιν 125 Volt. 1) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τούτου; 2) Ἐὰν ἡ διάμετρος τοῦ ἀνωτέρω σύρματος εἶναι 0,4 mm καὶ ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, διαμέτρου 1 mm, ἔχει ἀντίστασιν 0,4 Ohm κατὰ μέτρον, νὰ εὑρεθῇ πόσον μῆκος σύρματος πρέπει νὰ λάβωμεν.

1) Τὸ ἓν λίτρον ὕδατος ἔχει μᾶζαν $m = 1000$ gr. Διὰ νὰ ὑψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος τούτου κατὰ $\Delta\theta = 90^0$ C, ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος :

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad \text{ἤτοι} \quad Q_{\theta\epsilon\rho} = 1000\ \text{gr} \cdot 1\ \text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot 90\ \text{grad}$$

$$\text{ἢ} \quad Q_{\theta\epsilon\rho} = 90\,000\ \text{cal}$$

Ἡ θέρμανσις τοῦ ὕδατος θὰ γίνῃ ἐντὸς χρόνου $t = 300$ sec. Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον πρέπει νὰ προσφέρεται ἀπὸ τὸ ρεῦμα ποσότης θερμότητος :

$$Q_1 = \frac{Q_{\theta\epsilon\rho}}{t} = \frac{90\,000\ \text{cal}}{300\ \text{sec}} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_1 = 300\ \text{cal/sec}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος κατὰ δευτερόλεπτον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἰσχύν :

$$P = J \cdot Q_1 \quad \text{ἤτοι} \quad P = 4{,}19\ \text{Joule/cal} \cdot 300\ \text{cal/sec}$$

$$\text{ἢ} \quad P = 1257\ \text{Joule/sec} \quad \text{καὶ} \quad P = 1257\ W$$

Ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $P = U \cdot I$. Ἐπειδὴ δὲ σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm εἶναι : $I = U/R$, ἕπεται ὅτι εἶναι :

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Ἄρα ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος πρέπει νὰ εἶναι :

$$R = \frac{U^2}{P} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{(125\ V)^2}{1257\ W} \approx \frac{125^2}{1250}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 12{,}5\ \Omega}$$

2) Σύρμα μήκους $l = 1$ m καὶ διαμέτρου $\delta_1 = 0{,}4$ mm ἔχει ἀντίστασιν $r_1 = 0{,}4\ \Omega$. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$r_1 = \rho \cdot \frac{l}{S_1} \qquad (1)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου καὶ S_1 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σύρματος. Δίδεται ὅτι σύρμα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, μήκους $l = 1$ m καὶ διαμέτρου $\delta_2 = 1$ mm ἔχει ἀντίστασιν $r_2 = 0{,}4\ \Omega$, ἰσχύει δὲ πάλιν ἡ ἐξίσωσις :

$$r_2 = \rho \cdot \frac{l}{S_2} \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\left(\frac{\pi\delta_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi\delta_1}{2}\right)^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2$$

Ὥστε μῆκος 1 m ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου σύρματος ἔχει ἀντίστασιν :

$$r_1 = r_2 \cdot \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad r_1 = 0{,}4\ \Omega \cdot \left(\frac{1\ \text{mm}}{0{,}4\ \text{mm}}\right)^2 \quad \text{καὶ} \quad r_1 = 2{,}5\ \Omega/\text{m}$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν ἀντίστασιν $R = 12{,}5\ \Omega$, πρέπει νὰ λάβωμεν μῆκος σύρματος l', ἴσον μέ :

$$l' = \frac{R}{r_1} \quad \text{ἤτοι} \quad l' = \frac{12{,}5\ \Omega}{2{,}5\ \Omega/\text{m}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{l' = 5\ m}$$

97. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἠλεκτρικὸν βραστῆρα, ὁ ὁποῖος ἐντὸς 5 λεπτῶν νὰ θερμαίνῃ ἕνα λίτρον ὕδατος ἀπὸ 10° εἰς 100° C. Πρὸς τοῦτο βυθίζομεν μίαν ἀντίστασιν R ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ἐφαρμόζομεν εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R τάσιν 220 Volt. 1) Ἂν δεχθῶμεν ὅτι αἱ ἀπώλειαι θερμότητος εἶναι ἀσήμαντοι, νὰ εὑρεθῇ ἡ καταναλισκομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντίστασις R. 2) Διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν ἀντίστασιν R χρησιμοποιοῦμεν σύρμα, τὸ ὁποῖον ἔχει εἰδικὴν ἀντίστασιν ρ = 80 μΩ · cm καὶ τομὴν 1 mm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος, τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιήσωμεν. (Ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ δοχείου καὶ τοῦ σύρματος εἶναι ἀσήμαντος).

1) Διὰ νὰ θερμανθῇ ἡ μᾶζα $m = 1000$ gr τοῦ ὕδατος κατὰ $\Delta\theta = 90^0$ C, πρέπει νὰ προσφερθῇ εἰς τὸ ὕδωρ ποσότης θερμότητος :

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = m \cdot c \cdot \Delta\theta \quad \text{ἄρα} \quad Q_{\theta\varepsilon\rho} = 1000\ \text{gr} \cdot 1\ \text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot 90\ \text{grad}$$

$$\text{καὶ} \quad Q_{\theta\varepsilon\rho} = 90\,000\ \text{cal}$$

Κατὰ δευτερόλεπτον θὰ προσφέρεται ποσότης θερμότητος :

$$Q_1 = \frac{Q_{\theta\varepsilon\rho}}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad Q_1 = \frac{90\,000\ \text{cal}}{300\ \text{sec}} = 300\ \text{cal/sec}$$

Ἡ ἰσχὺς λοιπὸν τοῦ ρεύματος πρέπει νὰ εἶναι :

$$P = J \cdot Q_1 \quad \text{ἤτοι} \quad P = 4{,}19\ \text{Joule/cal} \cdot 300\ \text{cal/sec}$$

$$\text{ἢ} \quad P = 1257\ \text{Joule/sec} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 1257\ W}$$

Ἡ χρησιμοποιουμένη τάσις εἶναι $U = 220$ V. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = U \cdot I \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad I = \frac{P}{U}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{1257\ \text{W}}{220\ \text{V}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I = 5{,}7\ A}$$

Ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἶναι :

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{220\ \text{V}}{5{,}7\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 38{,}6\ \Omega}$$

2) Ἐὰν l εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ σύρματος, τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ὅπου $S = 1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σύρματος. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$l = \frac{R \cdot S}{\rho} \qquad \text{ἤτοι} \qquad l = \frac{38{,}6 \cdot 10^6\ \mu\Omega \cdot 0{,}01\ cm^2}{80\ \mu\Omega \cdot cm}$$

$$\text{ἢ} \qquad l = 4825\ cm \qquad \text{καὶ} \qquad l = \mathbf{48{,}25\ m}$$

98. Συσκευὴ ἀποστάξεως αἰθέρος λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 220 Volt καὶ παρέχει 900 gr αἰθέρος καθ' ὥραν. Ἡ θερμότης ἐξαερώσεως τοῦ αἰθέρος εἶναι 91 cal/gr. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐντὸς τοῦ ὀργάνου καταναλισκομένη ἰσχύς, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἀντίστασις τῆς συσκευῆς. Πόσον κοστίζει ἡ ἀπόσταξις 9 kgr αἰθέρος, ἐὰν τὸ 1 kWh τιμᾶται 0,8 δραχμῆς;

Κατὰ δευτερόλεπτον ἀποστάζεται μᾶζα αἰθέρος:

$$m = \frac{900\ gr}{3600\ sec} \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = 0{,}25\ gr/sec$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ὑγρὸς αἰθὴρ ἔχει τὴν θερμοκρασίαν βρασμοῦ, τότε διὰ τὴν ἐξαέρωσιν τῆς ἀνωτέρω μάζης m τοῦ αἰθέρος ἀπαιτεῖται ποσότης θερμότητος:

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = 0{,}25\ gr/sec \cdot 91\ cal/gr \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_{\theta\epsilon\rho} = 22{,}75\ cal/sec$$

Συνεπῶς ἡ προσφερομένη ὑπὸ τοῦ ρεύματος ἰσχὺς εἶναι:

$$P = J \cdot Q_{\theta\epsilon\rho} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 4{,}19\ Joule/cal \cdot 22{,}75\ cal/sec$$

$$\text{ἢ} \qquad P \approx 95\ Joule/sec \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P \approx 95\ W}$$

Ἡ χρησιμοποιουμένη τάσις εἶναι $U = 220\ V$. Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{P}{U} = \frac{95\ W}{220\ V} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 0{,}43\ A}$$

Ἡ ἀντίστασις R τῆς συσκευῆς εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$R = \frac{U}{I} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = \frac{220\ V}{0{,}43\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = 511{,}6\ \Omega}$$

Ἡ συσκευὴ παρέχει 900 gr αἰθέρος καθ' ὥραν. Ἄρα διὰ τὴν παρασκευὴν 9000 gr αἰθέρος, πρέπει ἡ συσκευὴ νὰ λειτουργήσῃ ἐπὶ χρόνον:

$$t = \frac{9000\ gr}{900\ gr/h} \qquad \text{ἤτοι} \qquad t = 10\ h$$

Κατὰ τὸν χρόνον t δαπανᾶται ἐνέργεια:

$$W = P \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 0{,}095\ kW \cdot 10\ h \qquad \text{καὶ} \qquad W = 0{,}95\ kWh$$

Ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι 0,8 δρχ/kWh. Ἄρα ἡ δαπάνη Δ διὰ τὴν λειτουργίαν τῆς συσκευῆς ἐπὶ 10 ὥρας εἶναι:

$$\Delta = 0{,}95\ kWh \cdot 0{,}8\ \delta\rho\chi/kWh \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{\Delta = 0{,}76\ \delta\rho\chi}$$

99. Διὰ τὴν μεταβίβασιν ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας χρησιμοποιεῖται σύρμα χάλκινον μήκους l καὶ τομῆς s. Ἡ μεταβιβαζομένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς εἶναι P καὶ ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι α %. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμ-

μῆς εἶναι U. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις συνδέει τὰ ἀναφερόμενα ἀνωτέρω μεγέθη καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ s τῆς γραμμῆς μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀναλόγως τοῦ τετραγώνου τῆς τάσεως U, ἂν ὅλα τὰ ἄλλα μεγέθη διατηροῦνται σταθερά.
Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ s τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ὅταν εἶναι:

$$\mathbf{P = 10\,kW \cdot \quad U = 200\,Volt \cdot \quad \mathit{l} = 2\,km \cdot \quad \rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot cm \cdot \quad \alpha = 5\,\%}$$

Ἡ ἀντίστασις R τῆς γραμμῆς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{s}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται, ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, ἰσχύς:

$$P_1 = R \cdot I^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_1 = \rho \frac{l}{s} \cdot I^2$$

Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$P_1 = \frac{\alpha}{100} \cdot P$$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\rho \frac{l}{s} \cdot I^2 = \frac{\alpha}{100} \cdot P \qquad (1)$$

Ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{P}{U} \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ I ἀπὸ τὴν ἐξίσωοιν (2), λαμβάνομεν:

$$\rho \frac{l}{s} \cdot \frac{P^2}{U^2} = \frac{\alpha}{100} \cdot P \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{s = \frac{100\,\rho \cdot \mathit{l} \cdot P}{\alpha \cdot U^2}}$$

Ἐφαρμογή: Ἂν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμάς, λαμβάνομεν:

$$s = \frac{100 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\,\Omega \cdot cm \cdot 2 \cdot 10^5\,cm \cdot 10^4\,W}{5 \cdot 200^2\,V^2} \qquad \text{καὶ} \qquad s = 1{,}6\,cm^2$$

100. Ἕνας δέκτης ραδιοφώνου ἀποτελεῖται ἀπὸ 5 λυχνίας, αἱ ὁποῖαι συνδέονται παραλλήλως. Ἑκάστη λυχνία λειτουργεῖ μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 0,06 A καὶ ὑπὸ τάσιν 4 V. Ὁ δέκτης θὰ τροφοδοτηθῇ μὲ ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει τάσιν 220 V. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ δέκτου καὶ πόση εἶναι ἡ δαπάνη καθ' ὥραν λειτουργίας τοῦ δέκτου; Τὸ 1 kWh τιμᾶται 0,8 δρχ.

Αἱ 5 λυχνίαι τοῦ δέκτου συνδέονται παραλλήλως. Ἄρα διὰ νὰ τροφοδοτήσωμεν τὰς 5 αὐτὰς λυχνίας, πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ συστήματος τῶν λυχνιῶν ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = 5 \cdot 0{,}06\,A \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = 0{,}3\,A$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ συστήματος τῶν λυχνιῶν πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται τάσις 4 V. Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ ροοστάτου, τὴν ὁποίαν παρεμβάλλομεν κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ δέκτου. Ἡ πτῶσις τῆς τάσεως ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R πρέπει νὰ εἶναι:

$$U = 220\,V - 4\,V \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = 216\,V$$

Ἡ ἀντίστασις R θὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}3\,A$ καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις R πρέπει νὰ εἶναι ἴση μέ:

$$R = \frac{U}{I} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = \frac{216\,V}{0{,}3\,A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = 720\,\Omega}$$

Ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς εἶναι:

$$P = 220\,V \cdot 0{,}3\,A \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 66\,W = 0{,}066\,kW$$

Εἰς 1 ὥραν καταναλίσκεται ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια :

$$W = P \cdot t = 0{,}066 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = 0{,}066 \text{ kWh}$$

Συνεπῶς ἡ δαπάνη (Δ) καθ' ὥραν λειτουργίας τοῦ δέκτου εἶναι :

$$\Delta = 0{,}066 \text{ kWh} \cdot 0{,}8 \text{ δρχ/kWh} \quad \text{ἤτοι} \quad \boldsymbol{\Delta = 0{,}05 \text{ δρχ}}$$

ΤΟ ΚΛΕΙΣΤΟΝ ΚΥΚΛΩΜΑ

101. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 12$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 10\ \Omega$. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει δύο ἀντιστάσεις κατὰ σειράν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως $R_1 = 26\ \Omega$ καὶ $R_2 = 36\ \Omega$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς δευτέρας ἀντιστάσεως R_2. Ἡ ἀντίστασις τῶν ἄλλων ἀγωγῶν τοῦ κυκλώματος εἶναι ἀσήμαντος.

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + r \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = (26 + 36 + 10)\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad R_{ολ} = 72\ \Omega$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{12 \text{ V}}{72\ \Omega} = \frac{1}{6} \text{ A}$$

Ἡ τάσις U_2, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἄκρων τῆς ἀντιστάσεως R_2 (δηλ. ἡ πτῶσις τῆς τάσεως ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_2), εἶναι :

$$U_2 = I \cdot R_2 \quad \text{ἤτοι} \quad U_2 = \frac{1}{6} \text{ A} \cdot 36\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{U_2 = 6 \text{ V}}$$

102. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 Volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 8 Ω. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει κατὰ σειρὰν ἀντίστασιν R καὶ βολτόμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R' = 300\ \Omega$. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις R, ὥστε τὸ βολτόμετρον νὰ δεικνύῃ 1,5 Volt;

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 2$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 8\ \Omega$. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = r + R + R' \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = R + 308$$

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ κλειστὸν κύκλωμα ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm :

$$E = I \cdot R_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad E = I \cdot (R + 308) \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστασιν R ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν προηγουμένως τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα. Ἡ ἔντασις I εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς : Δίδεται ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ βολτομέτρου ἐφαρμόζεται τάσις $U = 1{,}5$ V καὶ ὅτι ἡ ἀντίστασις τοῦ βολτομέτρου εἶναι $R' = 300\ \Omega$. Οὕτω ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm : $U = I \cdot R'$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ βολτόμετρον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{U'}{R'} = \frac{1{,}5 \text{ V}}{300\ \Omega} = 0{,}005 \text{ A}$$

Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι σταθερὰ εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $E = 2$ V καὶ $I = 0{,}005$ A, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R εἶναι :

$$R = \frac{E - 308 \cdot I}{I} = \frac{(2 - 1{,}54) \text{ V}}{0{,}005 \text{ A}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{R = 92\ \Omega}$$

103. Οἱ πόλοι μιᾶς γεννητρίας συνδέονται μὲ βολτόμετρον, ἔχον πολὺ μεγάλην ἀντίστασιν. Ὅταν ἡ γεννήτρια δὲν παρέχῃ ρεῦμα, τὸ βολτόμετρον δεικνύει 100 V. Ὅταν οἱ πόλοι τῆς γεννητρίας συνδεθοῦν μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν R, τὸ βολτόμετρον δεικνύει 50 V καὶ τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 25 A. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις R καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας;

Ὅταν ἡ γεννήτρια δὲν παρέχῃ ρεῦμα, τὸ βολτόμετρον δεικνύει 100 V. Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας ἰσοῦται μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν (E) αὐτῆς. Ἄρα εἶναι :

$$E = 100\ \mathrm{V}$$

Ἔστω r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας. Ὅταν οἱ πόλοι της συνδεθοῦν μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν R, τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = R + r$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 25$ A, ἡ δὲ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U = 50$ V. Τόση εἶναι καὶ ἡ πτῶσις τῆς τάσεως ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R. Ἡ ἀντίστασις αὕτη εἶναι :

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{50\ \mathrm{V}}{25\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 2\ \Omega}$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = \frac{E}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = \frac{100\ \mathrm{V}}{25\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad R_{o\lambda} = 4\ \Omega$$

Ἄρα ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$r = R_{o\lambda} - R \quad \text{ἤτοι} \quad r = (4 - 2)\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r = 2\ \Omega}$$

104. Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 6 Ω. Οἱ δύο πόλοι τῆς γεννητρίας συνδέονται μὲ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως 10 Ω. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης θερμότητος, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ λεπτὸν ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου καὶ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὡς θερμότης πρὸς τὴν ὅλην ἰσχὺν τῆς γεννητρίας.

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 120$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 6\ \Omega$, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι $R = 10\ \Omega$. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = \frac{E}{R + r} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{120\ \mathrm{V}}{(10 + 6)\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I = 7{,}5\ \mathrm{A}$$

Ἡ ποσότης θερμότητος, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R εἰς χρόνον $t = 1\ \mathrm{min} = 60$ sec, εἶναι :

$$Q_{\theta\epsilon\rho} = 0{,}24 \cdot R \cdot I^2 \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad Q_{\theta\epsilon\rho} = (0{,}24 \cdot 10 \cdot 7{,}5^2 \cdot 60)\ \mathrm{cal}$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{Q_{\theta\epsilon\rho} = 8100\ cal}$$

Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U = I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad U = 7{,}5\ \mathrm{A} \cdot 10\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad U = 75\ \mathrm{V}$$

Ὥστε ἡ ἰσχὺς ($P_{\theta\epsilon\rho}$), ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὡς θερμότης ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R, εἶναι :

$$P_{\theta\epsilon\rho} = R \cdot I^2 \quad \text{ἢ} \quad P_{\theta\epsilon\rho} = U \cdot I$$

Ἡ ἰσχὺς (P) τῆς γεννητρίας εἶναι : $P = E \cdot I$

Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος (α) εἶναι :

$$\alpha = \frac{P_{\theta\epsilon\rho}}{P} \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} = \frac{U}{E} = \frac{75\ V}{120\ V} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{5}{8}$$

105. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει μόνον ἕνα ἀμπερόμετρον ἀντιστάσεως 0,3 Ω. Ποία εἶναι ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου; Ποίαν ἀντίστασιν R πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα, ὥστε τὸ ἀμπερόμετρον νὰ σημειώνῃ ἔντασιν τοῦ ρεύματος ἴσην μὲ 5 A;

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 2$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἴσην μὲ μηδέν. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστασιν $R_A = 0{,}3\ \Omega$ τοῦ ἀμπερομέτρου. Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{E}{R_A} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{2\ V}{0{,}3\ A} \quad \text{καὶ} \quad I = \frac{20}{3}\ A$$

Ὥστε ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀμπερομέτρου θὰ εἶναι :

$$\mathbf{I = 6{,}67\ A}$$

Διὰ νὰ διαρρέεται τὸ κύκλωμα ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I' = 5$ A, πρέπει ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος νὰ εἶναι :

$$R_{o\lambda} = \frac{E}{I'} \quad \text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = \frac{2\ V}{5\ A} \quad \text{καὶ} \quad R_{o\lambda} = 0{,}4\ \Omega$$

Ἄρα εἰς τὸ κύκλωμα πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν κατὰ σειρὰν τὴν ἀντίστασιν R, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$R = R_{o\lambda} - R_A \quad \text{ἤτοι} \quad R = 0{,}4\ \Omega - 0{,}3\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 0{,}1\ \Omega}$$

106. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 40 Volt. Οἱ πόλοι της συνδέονται μὲ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R· τότε εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας ἡ τάσις εἶναι 30,8 Volt. Εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλεται κατὰ σειρὰν καὶ ἄλλη ἀντίστασις $R_1 = 5\ \Omega$· τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας γίνεται 34,8 Volt. Πόση εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις R καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r τῆς γεννητρίας;

Ὅταν τὸ κύκλωμα περιλαμβάνῃ μόνον τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν R, τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U = 30{,}8$ V καὶ τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I. Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας εἶναι $E = 40$ V. Ἡ τάσις U ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$U = I \cdot R \quad \text{ἢ} \quad 30{,}8 = I \cdot R \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ τάσις U εἶναι :

$$U = E - I \cdot r \quad \text{ἢ} \quad 30{,}8 = 40 - I \cdot r \qquad (2)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ὡς πρὸς I εὑρίσκομεν :

$$I = \frac{30{,}8}{R} \quad \text{καὶ} \quad I = \frac{40 - 30{,}8}{r} = \frac{9{,}2}{r}$$

Ἂν ἐξισώσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ I, λαμβάνομεν :

$$\frac{30{,}8}{R} = \frac{9{,}2}{r} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{r}{R} = 0{,}3 \qquad (3)$$

Ὅταν εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλεται κατὰ σειρὰν καὶ ἡ ἀντίστασις $R_1 = 5\ \Omega$, τότε ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R + 5$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας, δηλαδὴ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως, γίνεται

$U' = 34{,}8\ V$, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται I'. Ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἰσχύουν πάλιν αἱ σχέσεις :

$$U' = I' \cdot (R + 5) \quad \text{ἢ} \quad 34{,}8 = I' \cdot (R + 5) \qquad (4)$$

$$\text{καὶ} \quad U' = E - I' \cdot r \quad \text{ἢ} \quad 34{,}8 = 40 - I' \cdot r \qquad (5)$$

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) ὡς πρὸς I' εὑρίσκομεν :

$$I' = \frac{34{,}8}{R+5} \quad \text{καὶ} \quad I' = \frac{40 - 34{,}8}{r} = \frac{5{,}2}{r}$$

Ἂν ἐξισώσωμεν πάλιν τὰς δύο τιμὰς τοῦ I', λαμβάνομεν :

$$\frac{34{,}8}{R+5} = \frac{5{,}2}{r} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{r}{R+5} = 0{,}15 \qquad (6)$$

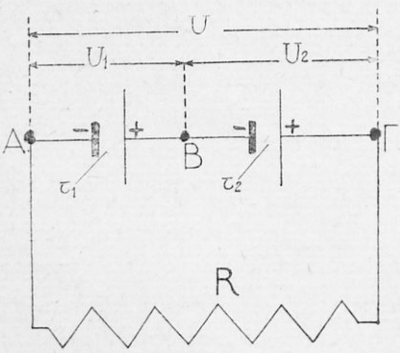
Λύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (6) ἔχομεν :

$$\frac{0{,}3\ R}{R+5} = 0{,}15 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{R = 5\ \Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad r = 0{,}3 \cdot R = 0{,}3 \cdot 5\ \Omega \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{r = 1{,}5\ \Omega}$$

107. Δύο γεννήτριαι εἶναι συνδεδεμέναι κατὰ σειράν. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1 V, ἡ μία ὅμως ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω, ἐνῶ ἡ ἄλλη ἔχει 3 Ω. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν 5 Ω. Νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα καὶ ἡ τάσις μεταξὺ τῶν πόλων ἑκάστης γεννητρίας καὶ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς συστοιχίας τῶν δύο γεννητριῶν· 2) ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστης γεννητρίας καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα· 3) ἐὰν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος τοιαύτην τιμήν, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν πόλων τῆς δευτέρας γεννητρίας νὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

1) Ἑκάστη γεννήτρια (σχ. 40) ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 1\ V$, αἱ ἐσωτερικαὶ ὅμως ἀντιστάσεις των εἶναι $r_1 = 2\ \Omega$ καὶ $r_2 = 3\ \Omega$. Ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R = 5\ \Omega$. Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :



Σχ. 40

$$R_{o\lambda} = R + r_1 + r_2$$

ἤτοι $\quad R_{o\lambda} = (5 + 2 + 3)\ \Omega = 10\ \Omega$

Ἡ δὲ ὁλικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας τῶν γεννητριῶν εἶναι :

$$E_{o\lambda} = 2E \quad \text{ἤτοι} \quad E_{o\lambda} = 2\ V$$

Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = \frac{E_{o\lambda}}{R_{o\lambda}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{2\ V}{10\ \Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I = 0{,}2\ A}$$

Μεταξὺ τῶν δύο πόλων Α καὶ Γ τῆς συστοιχίας ὑπάρχει τάσις :

$$U = I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad U = 0{,}2\ A \cdot 5\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{U = 1\ V}$$

Μεταξὺ τῶν πόλων Α καὶ Β τῆς πρώτης γεννητρίας ὑπάρχει τάσις :

$$U_1 = E - Ir_1 \quad \text{ἤτοι} \quad U_1 = 1\ V - (0{,}2\ A \cdot 2\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_1 = 0{,}6\ V}$$

Μεταξὺ δὲ τῶν πόλων Β καὶ Γ τῆς δευτέρας γεννητρίας ὑπάρχει τάσις :

$$U_2 = E - Ir_2 \quad \text{ἤτοι} \quad U_2 = 1\,V - (0{,}2\,A \cdot 3\,\Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_2 = 0{,}4\,V}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$U_1 + U_2 = U$$

2) Ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐντὸς ἑκάστης γεννητρίας καὶ ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R, εἶναι ἀντιστοίχως :

ἐντὸς τῆς πρώτης γεννητρίας :

$$P_1 = r_1 \cdot I^2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_1 = 2\,\Omega \cdot (0{,}2\,A)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_1 = 0{,}08\,W}$$

ἐντὸς τῆς δευτέρας γεννητρίας :

$$P_2 = r_2 \cdot I^2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_2 = 3\,\Omega \cdot (0{,}2\,A)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_2 = 0{,}12\,W}$$

ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R :

$$P_3 = R \cdot I^2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_3 = 5\,\Omega \cdot (0{,}2\,A)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_3 = 0{,}20\,W}$$

3) Διὰ νὰ εἶναι ἡ τάσις U_2 ἴση μὲ μηδέν, πρέπει ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ ἔχῃ τοιαύτην τιμήν, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$E - Ir_2 = 0 \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{E}{r_2} = \frac{1\,V}{3\,\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{1}{3}\,A$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν ὅμως αὐτὴν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, πρέπει ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος νὰ εἶναι :

$$R_{ολ} = \frac{E_{ολ}}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = \frac{2\,V}{1/3\,A} \quad \text{ἢ} \quad R_{ολ} = 6\,\Omega$$

Ὥστε ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις R πρέπει νὰ εἶναι :

$$R = R_{ολ} - (r_1 + r_2) \quad \text{ἤτοι} \quad R = 6\,\Omega - (2 + 3)\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 1\,\Omega}$$

108 . Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 V καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα διακόπτην καὶ ἕνα λαμπτῆρα πυρακτώσεως ἰσχύος 500 W. Τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος ἀρχικῶς ἔχει θερμοκρασίαν 0^0 C, ὅταν ὅμως κλείσωμεν τὸ κύκλωμα, ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος ἀνέρχεται εἰς 2000^0 C. Νὰ εὑρεθῇ : α) ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος, ὅταν τοῦτο ἔχῃ θερμανθῇ· β) ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος εἰς 0^0 C καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ λαμπτῆρος ἀμέσως μετὰ τὸ κλείσιμον τοῦ κυκλώματος. (Θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως : α = 0,004).

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἴσην μὲ μηδέν. Τὸ κύκλωμα ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀντίστασιν R τοῦ λαμπτῆρος. Οὗτος ἔχει ἰσχὺν P = 500 W. Ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν τῆς γεννητρίας, ἤτοι εἶναι :

$$E = U = 120\,V$$

Ὁ λαμπτὴρ κατὰ τὴν λειτουργίαν του καταναλίσκει ἰσχὺν :

$$P = U \cdot I \quad \text{ἢ} \quad P = U \cdot \frac{U}{R} \quad \text{καὶ} \quad P = \frac{U^2}{R}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ λαμπτῆρος, εἶναι :

$$R = \frac{U^2}{P} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{(120\,V)^2}{500\,W} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 28{,}8\,\Omega}$$

Εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0^0 C ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος εἶναι R_0. Ὅπως δὲ εἶναι γνωστὸν ἡ ἀντίστασις R τοῦ σύρματος εἰς τὴν θερμοκρασίαν $\theta = 2000^0$ C δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$R = R_0 \cdot (1 + \alpha\theta)$$

ὅπου $\alpha = 0{,}004$ εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως τοῦ μετάλλου. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀντίστασιν R_0, ἡ ὁποία εἶναι :

$$R_0 = \frac{R}{(1 + \alpha\theta)} \quad \text{ἤτοι} \quad R_0 = \frac{28{,}8}{(1 + 8)}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_0 = 3{,}2\ \Omega}$$

Μόλις κλείσωμεν τὸ κύκλωμα καὶ πρὶν θερμανθῇ τὸ σύρμα, τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_0 = \frac{U}{R_0} \quad \text{ἤτοι} \quad I_0 = \frac{120\ V}{3{,}2\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_0 = 37{,}5\ A}$$

Ὅταν τὸ σύρμα θερμανθῇ εἰς θερμοκρασίαν 2000^0 C, τότε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος, εἶναι :

$$I = \frac{P}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{500\ W}{120\ V} = 4{,}17\ A$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις I_0 εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἔντασιν I.

109. Μεταξὺ τῶν πόλων μιᾶς γεννητρίας παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν δύο ἀντιστάσεις $R_1 = 3\ \Omega$ καὶ $R_2 = 7\ \Omega$, αἱ ὁποῖαι διαρρέονται ὑπὸ ρευμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως ἐντάσεις $I_1 = 14$ A καὶ $I_2 = 6$ A. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι 0,9 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας;

Διὰ τὸ κλειστὸν κύκλωμα ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις :

$$E = I \cdot R_{o\lambda}$$

Αἱ δύο ἐξωτερικαὶ ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος $R_1 = 3\ \Omega$ καὶ $R_2 = 7\ \Omega$ συνδέονται παραλλήλως. Ἡ ἀντίστασις R′ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_2 εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} \quad \text{καὶ} \quad R' = 2{,}1\ \Omega$$

Δίδεται ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι $r = 0{,}9\ \Omega$. Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = r + R' = 0{,}9\ \Omega + 2{,}1\ \Omega = 3\ \Omega$$

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος ἰσοῦται ὡς γνωστὸν μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων I_1 καὶ I_2 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς δύο ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2. Ὥστε ἔχομεν :

$$I = I_1 + I_2 = (14 + 6)\ A = 20\ A$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $I = 20$ A καὶ $R_{o\lambda} = 3\ \Omega$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$E = I \cdot R_{o\lambda} = 20\ A \cdot 3\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 60\ V}$$

110. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 500 Volt καὶ παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 350 A, τὸ ὁποῖον μεταφέρεται διὰ μακροῦ σύρματος εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, ἂν θέλωμεν αἱ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀπώλειαι, ἕνεκα τῆς θερμάνσεως τοῦ ἀγωγοῦ, νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ 1/20 τῆς ἰσχύος τῆς γεννητρίας;

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 500$ V καὶ παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως $I = 350$ A. Οὕτω ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἰσχὺν P, ἴσην μέ :

$$P = E \cdot I = 500\ V \cdot 350\ A = 175\,000\ \text{Watt}$$

δηλαδὴ εἶναι :

$$P = 175\ kW$$

Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς τοῦ ρεύματος εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως. Θέλομεν ἐπὶ τῆς γραμμῆς νὰ χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς P_0 ἴση μὲ τὸ 1/20 τῆς ἰσχύος P τῆς γεννητρίας. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$P_0 = \frac{1}{20} \cdot P = \frac{175\,000}{20} = 8750 \text{ Watt}$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$P_0 = I^2 \cdot R$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R τῆς γραμμῆς πρέπει νὰ εἶναι :

$$R = \frac{P_0}{I^2} = \frac{8750 \text{ W}}{(350 \text{ A})^2} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 0{,}071\ \Omega}$$

111. Μία ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχὺν 40 ἀτμοΐππων καὶ κινεῖ γεννήτριαν ἔχουσαν ἀπόδοσιν 80 %. Τὸ ρεῦμα χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν φωτισμὸν συνοικισμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον χρησιμοποιοῦνται λαμπτῆρες ἰσχύος 75 Watt. Αἱ ἀπώλειαι κατὰ τὴν μεταφορὰν τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι 10 %. Πόσοι λαμπτῆρες εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν;

Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι :

$$P = 40 \text{ CV} = 40 \text{ CV} \cdot 736 \text{ W/CV} = 29\,440 \text{ Watt}$$

Ἡ γεννήτρια μετατρέπει εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν τὰ 80 % τῆς ἐνεργείας τῆς ὑδατοπτώσεως. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_1 τῆς παραγομένης ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας εἶναι :

$$P_1 = 0{,}80 \cdot P = 0{,}80 \cdot 29\,440 \text{ W} = 23\,552 \text{ Watt}$$

Κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ρεύματος χάνονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος τὰ 10 % τῆς ἀνωτέρω ἰσχύος P_1 καὶ συνεπῶς εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως φθάνει ἰσχὺς P_2 ἴση μέ :

$$P_2 = 0{,}90 \cdot P_1 = 0{,}90 \cdot 23\,552 \text{ W} = 21\,198 \text{ Watt}$$

Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν καταναλώσεως 75 Watt. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν, εἶναι :

$$x = \frac{21\,198}{75} = 282 \text{ λαμπτῆρες}$$

112. Γεννήτρια ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1,9 Ω. Μὲ τοὺς δύο πόλους της συνδέονται παραλλήλως δύο ἀντιστάσεις $R_1 = 3\ \Omega$ καὶ $R_2 = 7\ \Omega$, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι βυθισμένη ἐντὸς 500 gr ὕδατος. Εἰς τὸ ὕδωρ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι βυθισμένη ἡ ἀντίστασις R_1, προκαλεῖται ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας κατὰ 5° C ἐντὸς 2 min. 1) Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῶν ρευμάτων τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰς δύο ἀντιστάσεις; 2) Πόση εἶναι κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι βυθισμένη ἡ ἀντίστασις R_2; 3) Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας;

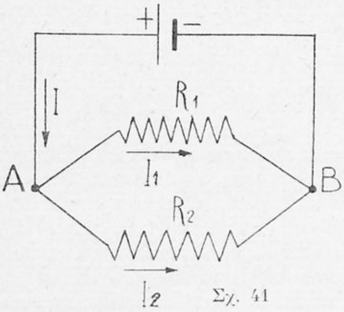
Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1{,}9\ \Omega$. Αἱ δύο ἀντιστάσεις $R_1 = 3\ \Omega$ καὶ $R_2 = 7\ \Omega$ (σχ. 41) ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν R′, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{7\ \Omega} \quad \text{ἄρα} \quad R' = 2{,}1\ \Omega$$

Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R' + r \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = (2{,}1 + 1{,}9)\ \Omega = 4\ \Omega$$

Ἡ ἀντίστασις R_1 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_1. Τὸ ὕδωρ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι βυθισμένη ἡ ἀντίστασις R_1, ἀπορροφᾷ εἰς χρόνον $t = 120$ sec ποσότητα θερμότητος:



Σχ. 41

$$Q_1 = m \cdot c \cdot \Delta\theta \qquad \text{ἤτοι}$$

$$Q_1 = 500 \text{ gr} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1} \cdot 5 \text{ grad}$$

$$\text{ἢ} \quad Q_1 = 2500 \text{ cal}$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule θὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις:

$$Q_1 = 0{,}24 \cdot R_1 \cdot I_1^2 \cdot t \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_1, εἶναι:

$$I_1 = \sqrt{\frac{Q_1}{0{,}24 \cdot R_1 \cdot t_1}} \qquad \text{ἤτοι}$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{2500}{0{,}24 \cdot 3 \cdot 120}} \text{ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 5{,}4 \text{ A}}$$

Ὥστε εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = 5{,}4 \text{ A} \cdot 3\ \Omega = 16{,}2 \text{ V}$$

Τόση εἶναι καὶ ἡ τάσις, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_2. Ἄρα ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ἀντίστασιν R_2, εἶναι:

$$I_2 = \frac{U_1}{R_2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = \frac{16{,}2 \text{ V}}{7\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_2 = 2{,}3 \text{ A}}$$

Ἡ ποσότης θερμότητος Q_2, ἡ ὁποία εἰς χρόνον $t = 120$ sec ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_2, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$Q_2 = 0{,}24 \cdot R_2 \cdot I_2^2 \cdot t \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2 \cdot I_2^2}{R_1 \cdot I_1^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{U_1 \cdot I_2}{U_1 \cdot I_1}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{I_2}{I_1} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{U_1/R_2}{U_1/R_1}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{3}{7} \qquad \text{καὶ} \qquad Q_2 = \frac{3}{7} Q_1$$

Ὥστε κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R_2 ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος:

$$Q_2 = \frac{3}{7} \cdot 2500 \text{ cal} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_2 = \frac{7500}{7} \text{ cal}$$

Ἡ ποσότης αὐτὴ τῆς θερμότητος προκαλεῖ ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος κατὰ $\Delta\theta_1$ καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$Q_2 = m \cdot c \cdot \Delta\theta_1$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὕδατος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται βυθισμένη ἡ ἀντίστασις R_2, εἶναι:

$$\Delta\theta_1 = \frac{Q_2}{m \cdot c} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta\theta_1 = \frac{7500/7 \text{ cal}}{500 \text{ gr} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{\Delta\theta_1 = 2{,}14^0 \text{ C}}$$

Ἡ ὁλικὴ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad I = (5{,}4 + 2{,}3)\ A = 7{,}7\ A$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$E = I \cdot R_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad E = 7{,}7\ A \cdot 4\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 30{,}8\ V}$$

113. Δύο γεννήτριαι Γ_1 καὶ Γ_2 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἐσωτερικὰς ἀντιστάσεις $r_1 = 1\ \Omega$ καὶ $r_2 = 2\ \Omega$. Αἱ γεννήτριαι συνδέονται κατὰ σειράν, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι x. 1) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀντίστασιν x, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας Γ_2 νὰ εἶναι μηδέν; 2) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς τὴν ἀντίστασιν x, ὥστε ἡ ἐνέργεια, ἡ παρεχομένη εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, νὰ εἶναι ἡ μεγίστη;

1) Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = x + r_1 + r_2$$

Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U_2 εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας Γ_2 εἶναι : $U_2 = E - Ir_2$

Διὰ νὰ εἶναι $U_2 = 0$, πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$E - Ir_2 = 0 \quad \text{ἄρα} \quad E = Ir_2$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας τῶν δύο γεννητριῶν εἶναι :

$$E_{ολ} = 2E \quad \text{ἤτοι} \quad E_{ολ} = 2\,Ir_2$$

Τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$E_{ολ} = I \cdot R_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad 2E = I \cdot (x + r_1 + r_2)$$

$$\text{ἢ} \quad 2Ir_2 = I(x + r_1 + r_2) \quad \text{καὶ} \quad 2r_2 = x + r_1 + r_2$$

Ὥστε ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις x πρέπει νὰ εἶναι ἴση μέ :

$$x = r_2 - r_1 = 2\,\Omega - 1\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 1\,\Omega}$$

2) Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{2E}{x + r_1 + r_2}$$

Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα παρέχεται ἰσχύς :

$$P = U \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = x \cdot I^2 \quad \text{καὶ} \quad P = 4E^2 \cdot \frac{x}{(x+3)^2}$$

Ἡ ἰσχὺς P ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ἡ παράστασις $\dfrac{x}{(x+3)^2}$ λάβῃ τὴν μεγίστην τιμὴν μ, δηλαδὴ ὅταν εἶναι :

$$\frac{x}{(x+3)^2} = \mu \quad \text{ἤτοι} \quad \mu x^2 + (6\mu - 1)x + 9\mu = 0$$

Τὸ x πρέπει νὰ ἔχῃ πραγματικὴν τιμήν. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ διακρίνουσα Δ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι :

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{ἤτοι ὅταν εἶναι} \quad (6\mu - 1)^2 - 36\mu^2 \geqslant 0$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ μ εἶναι : $\mu = \dfrac{1}{12}$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{x}{(x+3)^2} = \frac{1}{12} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{ἄρα} \quad x = 3$$

Ἡ ἰσχὺς P ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$\mathbf{x = 3\,\Omega}$$

114. Ἀνεμιστὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 110 Volt καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 0,6 A. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συσκευῆς εἶναι 110 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἀνεμιστῆρος καὶ πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει ὁ ἀνεμιστήρ;

Ὁ ἀνεμιστὴρ εἶναι ἀποδέκτης, δηλαδὴ μετατρέπει τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν. Ἂν E′ εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἀνεμιστῆρος, τότε ἡ ἰσχὺς P′ τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν, εἶναι :

$$P' = E' \cdot I \tag{1}$$

ὅπου I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀνεμιστῆρος εἶναι $R = 110\,\Omega$ καὶ εἰς τοὺς ἀκροδέκτας του ἐφαρμόζεται τάσις $U = 110$ V. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$U = E' + I \cdot R \tag{2}$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς E′, εὑρίσκομεν :

$$E' = U - I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad E' = (110 - 0{,}6 \cdot 110)\ \text{V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 44\ V}$$

Ἡ ἰσχὺς P′ τῆς παραγομένης ἀπὸ τὸν ἀνεμιστῆρα μηχανικῆς ἐνεργείας εἶναι :

$$P' = E' \cdot I = (44 \cdot 0{,}6)\ \text{Watt} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{P' = 26{,}4\ Watt}$$

* Ἡ ἰσχὺς P′ μετρημένη εἰς ἵππους (CV) εἶναι :

$$P' = \frac{26{,}4}{736} = \frac{1}{30}\ \text{CV}$$

115. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 52 Volt καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα περιλαμβάνει μίαν ἀντίστασιν R = 5 Ω καὶ ἕνα κινητῆρα. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 4 A, ἐνῶ, ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 1 A. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος;

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 52$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1\,\Omega$. Ὁ κινητὴρ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E′ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r′. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, οὗτος παρεμβάλλεται τότε εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις r καὶ ὄχι ὡς ἀποδέκτης. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = r + r' + R = (1 + r' + 5) = (6 + r')\,\Omega$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 4$ A καὶ ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm :

$$E = I \cdot R_{o\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad E = I \cdot (6 + r')$$

Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r′ τοῦ κινητῆρος :

$$r' = \frac{E - 6 \cdot I}{I} = \frac{(52 - 6 \cdot 2)\ \text{V}}{4} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r' = 7\,\Omega}$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι : $R_{o\lambda} = 6 + 7 = 13\,\Omega$

Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, οὗτος ἐνεργεῖ ὡς ἀποδέκτης. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I' = 1$ A καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$E = E' + I' \cdot R_{o\lambda}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$E' = E - (I' \cdot R_{o\lambda}) = 52\ V - (1 \cdot 13)\ V \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 39\ V}$$

116. Κινητὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 220 Volt καὶ τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 15 A. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 80 %. Πόση εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος;

1) Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος εἶναι $U = 220$ V, ἡ δὲ ἔντασις αὐτοῦ εἶναι $I = 15$ A. Συνεπῶς τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχὺν P ἴσην μέ:

$$P = U \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = 220\ V \cdot 15\ A = 3300\ \text{Watt}$$

Ἔστω P′ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, δηλαδὴ ἡ ἰσχὺς τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, τὴν ὁποίαν μᾶς παρέχει ὁ κινητήρ. Δίδεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 80 %. Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{P'}{P} = 0{,}8 \quad \text{ἢ} \quad P' = 0{,}8 \cdot P$$

Ὥστε ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι: $P' = 0{,}8 \cdot 3300\ W = 2640$ Watt

Ἡ ἰσχὺς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία χάνεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, εἶναι:

$$P_\theta = P - P' \quad \text{ἢ} \quad P_\theta = 3300\ W - 2640\ W = 660\ \text{Watt}$$

Ἔστω r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως r χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς P_θ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$P_\theta = I^2 \cdot r$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν ὑπολογίζομεν τὴν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r, διότι γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $I = 15$ A καὶ $P_\theta = 660$ Watt. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$r = \frac{P_\theta}{I^2} = \frac{660}{225}\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r = 2{,}93\ \Omega}$$

2) Ἔστω E′ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι $P' = E' \cdot I$, ἐνῶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι $P = U \cdot I$. Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 80 % ἕπεται ὅτι ἔχομεν:

$$\frac{P'}{P} = 0{,}8 \quad \text{ἢ} \quad \frac{E' \cdot I}{U \cdot I} = 0{,}8 \quad \text{ἄρα} \quad \frac{E'}{U} = 0{,}8$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$E' = 0{,}8 \cdot U = 0{,}8 \cdot 220\ V \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 176\ V}$$

* Παρατήρησις. Εἰς τὴν ἀνωτέρω λύσιν ἠκολουθήθη αὐτὴ ἡ σειρά, διότι ζητεῖται πρῶτον ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r καὶ δεύτερον ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′. Ἂν ζητῆται πρῶτον ἡ E′ καὶ δεύτερον ἡ r, ἢ ἂν δὲν τηρήσωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἐρωτημάτων, τότε εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι εἶναι $E' = 176$ V καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$U = E' + I \cdot r$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν:

$$r = \frac{U - E'}{I} = \frac{220 - 176}{15} = \mathbf{2{,}93\ \Omega}$$

+117. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Οἱ πόλοι τῆς γεννητρίας συνδέονται μὲ κινητῆρα. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 90 V, ἐνῶ ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 115 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος, ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ καὶ ἡ ἰσχύς του.

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 120$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1\ \Omega$. Ὁ κινητὴρ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν R. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, οὗτος παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U_1 = 90$ V, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι I_1. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E = U_1 + I_1 r$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_1 = \frac{E - U_1}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{120\ V - 90\ V}{1\ \Omega} = 30\ A$$

Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R τοῦ κινητῆρος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$R = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{90\ V}{30\ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 3\ \Omega}$$

+Ὁ κινητὴρ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E'. Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τότε τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_2 καὶ ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U_2 = 115$ V. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$E = U_2 + I_2 r$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_2 = \frac{E - U_2}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{120\ V - 115\ V}{1\ \Omega} = 5\ A$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R + r \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = 3\ \Omega + 1\ \Omega = 4\ \Omega$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν : $E = E' + I_2 R_{ολ}$

Ἄρα ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E' τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$E' = E - I_2 R_{ολ} \quad \text{ἤτοι} \quad E' = 120\ V - (5\ A \cdot 4\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 100\ V}$$

Ἡ μηχανικὴ ἰσχὺς (P_K) τοῦ κινητῆρος τούτου εἶναι :

$$P_K = E' \cdot I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_K = 100\ V \cdot 5\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_K = 500\ W}$$

+118. Κινητὴρ τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν 2 A καὶ τάσιν 110 V. Ὁ κινητὴρ οὗτος κινεῖ ἀντλίαν ἡ ὁποία, λειτουργοῦσα κανονικῶς, ἀνυψώνει εἰς ὕψος 8 μέτρων 120 λίτρα ὕδατος κατὰ λεπτόν. Ἡ ἀπώλεια ἰσχύος, ἕνεκα τῶν τριβῶν ἐντὸς τῆς ἀντλίας καὶ τῶν σωλήνων, εἶναι 40 W. Ἡ δὲ ἀπώλεια ἰσχύος ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ φαινόμενον τοῦ Joule. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητὴρ εἰς τὴν ἀντλίαν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις.

Ὁ κινητὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν $U = 110$ V, τὸ δὲ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τὸν κινητῆρα, ἔχει ἔντασιν $I = 2$ A. Ἡ ἀντλία ἀνυψώνει κατὰ δευτερόλεπτον εἰς ὕψος $h = 8$ m βάρος ὕδατος $B = 2$ kgr*. Διὰ τὴν ἀνύψωσιν αὐτὴν δαπανᾶται ἔργον :

$$W_1 = B \cdot h \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = 2\ \text{kgr*/sec} \cdot 8\ \text{m} = 16\ \text{kgr*m/sec}$$

$$\text{ἢ} \quad W_1 \approx 157\ \text{Joule/sec}$$

Ὥστε διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος δαπανᾶται ἰσχύς : 157 W. Ἡ ἀπώλεια ἰσχύος ἐντὸς τῆς ἀντλίας καὶ τῶν σωλήνων ἀνέρχεται εἰς 40 W. Ἑπομένως ἡ ἰσχὺς P_1, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ κινητὴρ εἰς τὴν ἀντλίαν, εἶναι :

$$P_1 = 157\ W + 40\ W \qquad ἤτοι \qquad \mathbf{P_1 = 197\ W}$$

Τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \qquad ἤτοι \qquad P = 110\ V \cdot 2\ A = 220\ W$$

Ἄρα ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$\eta = \frac{197\ W}{220\ W} = 0{,}90 \qquad ἤτοι \qquad \mathbf{\eta = 90\ \%}$$

Ἐντὸς τοῦ κινητῆρος χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_{θερ} = P - P_1 \qquad ἤτοι \qquad P_{θερ} = 220\ W - 197\ W = 23\ W$$

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν R καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$P_{θερ} = R \cdot I^2 \qquad ὥστε\ εἶναι : \qquad R = \frac{P_{θερ}}{I^2} = \frac{23\ W}{(2\ A)^2} \qquad ἤτοι \qquad \mathbf{R \approx 6\ \Omega}$$

119. Ἔχομεν 12 ὁμοίας γεννητρίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,5 Ω καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 5 V. Πῶς πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὰς γεννητρίας αὐτάς, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν ρεύματος, ἐὰν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ εἶναι R = 1,5 Ω; Πόση εἶναι ἡ ἔντασις αὕτη;

Ἔστω ὅτι συνδέομεν ν γεννητρίας κατὰ σειρὰς καὶ οὕτω σχηματίζομεν μ συστοιχίας, τὰς ὁποίας συνδέομεν μεταξύ των παραλλήλως. Τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\mu \cdot \nu = 12 \qquad (1)$$

Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστης συστοιχίας εἶναι $\nu \cdot r$, ἡ δὲ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστης συστοιχίας εἶναι : $\nu \cdot E$. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῶν μ συστοιχιῶν εἶναι $\frac{\nu \cdot r}{\mu}$. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = \frac{\nu \cdot E}{R + \dfrac{\nu \cdot r}{\mu}}$$

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, ὅταν ὁ παρονομαστὴς λάβῃ τὴν μικροτέραν τιμήν. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι :

$$R = \frac{\nu \cdot r}{\mu}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $R = 1{,}5\ \Omega$ καὶ $r = 0{,}5\ \Omega$. Ὥστε ἔχομεν :

$$1{,}5 = \frac{0{,}5 \cdot \nu}{\mu} \qquad ἄρα \qquad \frac{\nu}{\mu} = 3 \qquad καὶ \qquad \mu = \frac{\nu}{3}$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ μ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$\frac{\nu^2}{3} = 12 \qquad ἄρα \qquad \nu^2 = 36 \qquad καὶ \qquad \mathbf{\nu = 6}$$

Ἑπομένως εἶναι καί :

$$\mathbf{\mu = 2}$$

Ἄρα πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὰς 12 γεννητρίας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσωμεν 2 συστοιχίας γεννητριῶν, ἑκάστη δὲ συστοιχία νὰ περιλαμβάνη 6 γεννητρίας συνδεδεμένας κατὰ σειράν. Τότε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν της καὶ εἶναι:

$$I = \frac{6 \cdot 5}{1{,}5 + \frac{6 \cdot 0{,}5}{2}} \left(\frac{V}{\Omega}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I = 10\ A}$$

+ 120. Οἱ κινητῆρες μιᾶς ἠλεκτροκινήτου ἁμαξοστοιχίας ἔχουν ἰσχὺν 3520 CV καὶ λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν 1500 V. Τὸ βάρος τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι 1033 tn*. Ἡ μέση ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι 120 km/h. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος κατὰ τὴν κίνησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας; Πόση εἶναι ἡ ἀνθισταμένη εἰς τὴν κίνησιν δύναμις εἰς χιλιόγραμμα - βάρους κατὰ κινούμενον τόννον;

Ἡ ἰσχὺς P τῶν κινητήρων τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι:

$$P = 3520\ \text{CV} \cdot 736\ \text{W/CV} = 2\,590\,720\ \text{W}$$

Οἱ κινητῆρες λειτουργοῦν ὑπὸ τάσιν $U = 1500$ V. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι I. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P δίδεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $P = U \cdot I$

Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον τροφοδοτεῖ τοὺς κινητῆρας, εἶναι:

$$I = \frac{P}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{2\,590\,720\ \text{W}}{1500\ \text{V}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 1727\ A}$$

Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι:

$$\upsilon = 120\ \text{km/h} = \frac{120\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{sec}} = \frac{100}{3}\ \text{m/sec}$$

Ἔστω F ἡ δύναμις ἕλξεως, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσουν οἱ κινητῆρες. Ἐπειδὴ ἡ κίνησις τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι ὁμαλή, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνθισταμένη εἰς τὴν κίνησιν τῆς ἁμαξοστοιχίας δύναμις εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν δύναμιν ἕλξεως F. Εἰς χρόνον t οἱ κινητῆρες παράγουν ἔργον:

$$W = P \cdot t$$

τὸ ὁποῖον εἶναι: $W = F \cdot s$ ἢ $W = F \cdot \upsilon \cdot t$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $F \cdot \upsilon \cdot t = P \cdot t$ ἢ $F \cdot \upsilon = P$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι:

$$F = \frac{P}{\upsilon} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{3520 \cdot 75\ \text{kgr*m/sec}}{100/3\ \text{m/sec}} \quad \text{καὶ} \quad F = 7920\ \text{kgr*}$$

Ἑπομένως ἡ ἀνθισταμένη δύναμις F_A κατὰ κινούμενον τόννον - βάρους εἶναι:

$$F_A = \frac{7920\ \text{kgr*}}{1033\ \text{tn*}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{F_A = 7{,}67\ kgr^*/tn^*}$$

121. Εἰς ἕνα κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν μία γεννήτρια, ἔχουσα ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 52 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 1 Ω, ἕνας κινητὴρ καὶ μία ἀντίστασις R = 5 Ω, ἡ ὁποία εἶναι βυθισμένη ἐντὸς θερμιδομέτρου. Αἱ ἀντιστάσεις τῶν ὑπολοίπων ἀγωγῶν τοῦ κυκλώματος εἶναι ἀσήμαντοι. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, παρατηροῦμεν ὅτι ἐντὸς 5 λεπτῶν ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 5760 cal. Ὅταν δὲ ὁ κινητὴρ στρέφεται, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 360 cal. Νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις· 2) ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος· 3) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος.

1) Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, τότε οὗτος παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Ἔστω r' ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ E' ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως $R = 5\ \Omega$ ἀναπτύσσεται ἐντὸς χρόνου $t_1 = 5$ min $= 300$ sec ποσότης θερμότητος ἴση μὲ 5760 cal. Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος :

$$Q_1 = \frac{5760 \text{ cal}}{300 \text{ sec}} = 19{,}2 \text{ cal/sec}$$

Ἔστω I_1 ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαρρέει τὸ κύκλωμα. Ὥστε ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R δαπανᾶται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς P_1 ἴση μέ :

$$P_1 = J \cdot Q_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_1 = 4{,}19 \text{ Joule/cal} \cdot 19{,}2 \text{ cal/sec}$$

$$\text{ἢ} \qquad P_1 \approx 80 \text{ Joule/sec} \qquad \text{καὶ} \qquad P_1 = 80 \text{ W}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :
$$P_1 = R \cdot I_1^2$$
εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \sqrt{\frac{80 \text{ W}}{5\ \Omega}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_1 = 4\ A}$$

Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τότε τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν I_2 καὶ ἐντὸς χρόνου $t_2 = 300$ sec ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R ποσότης θερμότητος 360 cal. Ἄρα κατὰ δευτερόλεπτον ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος.

$$Q_2 = \frac{360 \text{ cal}}{300 \text{ sec}} = 1{,}2 \text{ cal/sec}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R δαπανᾶται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς P_2 ἴση μέ :

$$P_2 = J \cdot Q_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_2 = 4{,}19 \text{ Joule/cal} \cdot 1{,}2 \text{ cal/sec}$$

$$\text{ἢ} \qquad P_2 = 5 \text{ Joule/sec} \qquad \text{καὶ} \qquad P_2 = 5 \text{ W}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :
$$P_2 = R \cdot I_2^2$$
εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = \sqrt{\frac{5 \text{ W}}{5\ \Omega}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I_2 = 1\ A}$$

2) Ἔστω r' ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R + r + r' \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{ολ} = (6 + r')\ \Omega$$

Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 4$ A καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :
$$E = I_1 \cdot R_{ολ}$$
Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = \frac{E}{I_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{ολ} = \frac{52 \text{ V}}{4 \text{ A}} \qquad \text{καὶ} \qquad R_{ολ} = 13\ \Omega$$

Συνεπῶς ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r' τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$r' = (R_{ολ} - 6)\ \Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{r' = 7\ \Omega}$$

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E'. Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, τότε τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I_2 = 1$ A καὶ ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm :

$$E = E' + I_2 \cdot R_{ολ} \qquad \text{ἄρα} \qquad E' = E - I_2 \cdot R_{ολ}$$

$$\text{ἢ} \qquad E' = (52 - 1 \cdot 13) \text{ V} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E' = 39\ V}$$

3) Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ U εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$U = E' + I_2 \cdot r' \quad \text{ἤτοι} \quad U = (39 + 1 \cdot 7)\ V \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 46\ V}$$

122. Λαμπτὴρ πυρακτώσεως λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 120 V καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 0,5 A. Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος γίνεται 125 V. Πόσην ἀντίστασιν πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν εἰς τὸ κύκλωμα, διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὸν λαμπτῆρα εἰς τὴν κανονικήν του λειτουργίαν;

Ὁ λαμπτὴρ λειτουργεῖ κανονικῶς, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαρμόζεται τάσις $U = 120$ V καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 0{,}5$ A. Ὅταν ἡ τάσις τοῦ ρεύματος γίνεται $U_1 = 125$ V, τότε, διὰ νὰ διαρρέεται ὁ λαμπτὴρ ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}5$ A, πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὸν λαμπτῆρα κατὰ σειρὰν μὲ ἀντίστασιν R_1. Ἡ ἀντίστασις R_1 εἶναι τόση, ὥστε ἐπ' αὐτῆς νὰ προκαλῆται πτῶσις τῆς τάσεως:

$$U' = U_1 - U = 125\ V - 120\ V \quad \text{ἄρα} \quad U' = 5\ V$$

Ὥστε ἡ ἀντίστασις R_1 πρέπει νὰ εἶναι:

$$R_1 = \frac{U'}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = \frac{5\ V}{0{,}5\ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_1 = 10\ \Omega}$$

* Σημείωσις: Ἡ ἀντίστασις R τοῦ λαμπτῆρος εἶναι:

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{120\ V}{0{,}5\ A} = 240\ \Omega$$

Ὅταν ὁ λαμπτὴρ συνδεθῇ κατὰ σειρὰν μὲ τὴν ἀντίστασιν R_1, τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι: $R_{ολ} = R + R_1$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ εἶναι: $I = 0{,}5$ A. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ εἶναι:

$$R_{ολ} = \frac{U_1}{I} = \frac{125\ V}{0{,}5\ A} \quad \text{καὶ} \quad R_{ολ} = 250\ \Omega$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R_1 εἶναι:

$$R_1 = R_{ολ} - R \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = (250 - 240)\ \Omega = 10\ \Omega$$

123. Μία ὑδατόπτωσις τροφοδοτεῖ ἠλεκτρογεννήτριαν. Ἡ ὑδατόπτωσις ἔχει παροχὴν 418 λίτρα κατὰ δευτερόλεπτον καὶ ὕψος πτώσεως τοῦ ὕδατος 100 m. Ἡ γεννήτρια λαμβάνει τὰ 80% τῆς διαθεσίμου ἐνεργείας. 1) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας; 2) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας εἶναι ἴση μὲ τὸ 1/9 τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου. Διὰ τοῦ θερμιδομέτρου κυκλοφορεῖ ρεῦμα ὕδατος. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ παροχὴ τοῦ ρεύματος τούτου, ὥστε, ἂν τὸ ὕδωρ φθάνῃ εἰς τὸ θερμιδόμετρον μὲ θερμοκρασίαν 0° C, νὰ ἐξέρχεται ἀπὸ αὐτὸ μὲ θερμοκρασίαν 80° C;

Τὰ 418 λίτρα ὕδατος ἔχουν βάρος B = 418 kgr*. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P_{υδ} = 418\ kgr^*/sec \cdot 100\ m = 41\,800\ kgr^*m/sec$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσχύς, μετρημένη εἰς Watt, εἶναι:

$$P_{υδ} = 41\,800 \cdot 9{,}81\ W \approx 410\,000\ W \quad \text{ἢ} \quad P_{υδ} = 410\ kW$$

1) Ἐπομένως ἡ ἰσχὺς (P) τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$P = 0{,}80 \cdot P_{υδ} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{P = 328\ kW}$$

2) Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐξωτερικοῦ κυκλώματος καὶ r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας. Δίδεται ὅτι εἶναι: $r = R/9$. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{ολ} = R + r \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{ολ} = R + \frac{R}{9} = \frac{10}{9} R$$

Ἂν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἐπὶ τῶν ἀντιστάσεων R καὶ r ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἰσχύν:

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως r: $\qquad P_1 = I^2 \cdot r$

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R: $\qquad P_2 = I^2 \cdot R$

Εἶναι: $P = P_1 + P_2$. Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r}{R} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{R/9}{R} = \frac{1}{9}$$

$$\text{καὶ} \qquad \frac{P_1 + P_2}{P_2} = \frac{1+9}{9} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{P}{P_2} = \frac{10}{9}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R ἀπορροφᾷ ἰσχύν:

$$P_2 = \frac{9}{10} \cdot P \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_2 = \frac{9}{10} \cdot 328 \text{ kW} = 295{,}2 \text{ kW}$$

$$\text{ἢ} \qquad P_2 = 295\,200 \text{ W}$$

Ἡ ἰσχὺς P_2 ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος:

$$Q = \frac{295\,200 \text{ Joule/sec}}{4{,}19 \text{ Joule/cal}} = 705 \cdot 10^2 \text{ cal/sec}$$

Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ ὕδατος, ἡ ὁποία διέρχεται κατὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ τὸ θερμιδόμετρον. Τότε ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα ποσότης θερμότητος Q δαπανᾶται διὰ τὴν ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῆς μάζης m τοῦ ὕδατος κατὰ $\Delta\theta = 80^0$ C. Τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις τῆς θερμιδομετρίας:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta \qquad \text{ἄρα} \qquad m = \frac{Q}{c \cdot \Delta\theta}$$

$$\text{ἢ} \qquad m = \frac{705 \cdot 10^2 \text{ cal/sec}}{1 \text{ cal/gr/grad} \cdot 80 \text{ grad}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{m = 881{,}25 \text{ gr/sec}}$$

124. Μία ὑδατόπτωσις ἔχει παροχὴν 2 m³ κατὰ δευτερόλεπτον. Τὸ ὕδωρ πίπτει ἀπὸ ὕψος 10 m. Ἡ ὑδατόπτωσις αὐτὴ θέτει εἰς κίνησιν ὑδροστρόβιλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόδοσιν 75 % καὶ κινεῖ γεννήτριαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν 80 %. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαθέσιμος ἰσχὺς εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας. 2) Ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια θὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἕνα ἐργοστάσιον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου. Ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀνέρχεται εἰς 10 %, ἡ δὲ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 5000 V. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς.

Ὄγκος ὕδατος 2 m^3 ἔχει βάρος $B = 2000$ kgr*. Ὥστε ἡ ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχύν:

$$P_{υδ} = B \cdot h \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{υδ} = 2000 \text{ kgr*/sec} \cdot 10 \text{ m} = 2 \cdot 10^4 \text{ kgr*m/sec}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσχύς, μετρημένη εἰς Watt, εἶναι:

$$P_{υδ} = 2 \cdot 10^4 \cdot 9{,}81 \text{ W} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{υδ} = 19{,}62 \cdot 10^4 \text{ W}$$

1) Ἀπὸ τὴν ἰσχὺν αὐτὴν ὁ ὑδροστρόβιλος μετατρέπει εἰς μηχανικὴν ἰσχὺν τὰ 75 %. Ἄρα ἡ ἰσχὺς (P_Σ) τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι:

$$P_\Sigma = 0{,}75 \cdot P_{υδ} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_\Sigma = 0{,}75 \cdot 19{,}62 \cdot 10^4 \text{ W} = 14{,}715 \cdot 10^4 \text{ W}$$

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἀπόδοσιν 80 %. Ἄρα ἡ ἰσχὺς (P_Γ) τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$P_\Gamma = 0{,}80 \cdot P_\Sigma \quad \text{ἤτοι} \quad P_\Gamma = 0{,}80 \cdot 14{,}715 \cdot 10^4 \text{ W} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_\Gamma = 117\,720\ W}$$

2) Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς. Δίδεται ὅτι ἡ ἀπώλεια ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἀνέρχεται εἰς 10 %. Ἄρα ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta = 0{,}10 \cdot P_\Gamma \quad \text{ἤτοι} \quad P_\theta = 11\,772 \text{ W}$$

Ἡ τάσις εἰς τούς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U = 5000$ V, ἡ δὲ διαθέσιμος ἰσχὺς εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $P_\Gamma = 117\,720$ W. Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$P_\Gamma = U \cdot I \quad \text{ἄρα} \quad I = \frac{P_\Gamma}{U}$$

$$\text{ἤτοι} \quad I = \frac{117\,720 \text{ W}}{5000 \text{ V}} \quad \text{καὶ} \quad I = 23{,}544 \text{ A}$$

Ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία χάνεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P_\theta = I^2 \cdot R \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad R = \frac{P_\theta}{I^2}$$

$$\text{ἢ} \quad R \approx \frac{11\,772}{552}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R \approx 21{,}33\ \Omega}$$

125. Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 500 V καὶ παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 350 A, τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς ἕνα σταθμὸν ἀπέχοντα 5 χιλιόμετρα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ χαλκίνου σύρματος, τὸ ὁποῖον θὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς γραμμή, ἂν θέλωμεν ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία χάνεται, ἕνεκα τῆς θερμάνσεως τοῦ ἀγωγοῦ, νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ 1/15 τῆς ἰσχύος τῆς γεννητρίας. Εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ χαλκοῦ: $\rho = 1{,}6/10^6\ \Omega \cdot$ cm.

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 500$ V καὶ τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 350$ A. Ὥστε ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$P = E \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = 500 \text{ V} \cdot 350 \text{ A} \quad \text{καὶ} \quad P = 175\,000 \text{ W}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta = \frac{175\,000}{15} \text{ W} \quad \text{ἤτοι} \quad P_\theta = \frac{35\,000}{3} \text{ W}$$

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν :

$$P_\theta = R \cdot I^2 \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad R = \frac{P_\theta}{I^2}$$

$$\text{ἤτοι} \quad R = \frac{35\,000/3 \text{ W}}{(350 \text{ A})^2} = \frac{10}{105}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad R = \frac{2}{21}\ \Omega$$

Ὁ σταθμός, ὅπου θὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, ἀπέχει ἀπὸ τὴν γεννήτριαν 5 km. Ἄρα τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$l = 10 \text{ km} \quad \text{ἤτοι} \quad l = 10^6 \text{ cm}$$

Ἐὰν S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σύρματος, τότε ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ἀντιστάσεως ἀγωγοῦ :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad S = \frac{\rho}{R} \cdot l$$

$$\text{ἤτοι} \quad S = \frac{1{,}6/10^6\ \Omega \cdot \text{cm}}{2/21\ \Omega} \cdot 10^6 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{S = 16{,}8\ cm^2}$$

126. Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 100 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Δύο σύρματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν, συνδέουν τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας μὲ τοὺς πόλους A καὶ B ἑνὸς κινητῆρος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω. 1) Ἐμποδίζομεν τὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρος νὰ στρέφεται. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα; 2) Ὁ ἄξων τοῦ κινητῆρος ἐμποδίζεται καὶ πάλιν νὰ στρέφεται. Μεταξὺ τῶν πόλων του A καὶ B παρεμβάλλομεν κατὰ διακλάδωσιν μίαν ἀντίστασιν R = 4 Ω. Πόση εἶναι τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα καὶ πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κινητῆρος; 3) Ἀφήνομεν τώρα τὸν ἄξονα τοῦ κινητῆρος ἐλεύθερον νὰ στρέφεται. Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος εἶναι 60 V. Ποῖαι εἶναι τότε αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ κινητῆρος καὶ διὰ τῆς ἀντιστάσεως R; Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρικὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν καταναλίσκει ὁ κινητήρ;

1) Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 100 V, ὁ δὲ κινητὴρ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r = 2 Ω. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται, τότε ὁ κινητὴρ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = \frac{E}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{100\ V}{2\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 50\ A}$$

2) Ἡ γεννήτρια ἔχει ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν καὶ ἑπομένως ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι U = E = 100 V. Ὅταν ὁ κινητὴρ δὲν στρέφεται καὶ παρεμβάλλομεν μεταξὺ τῶν πόλων A καὶ B τῆς γεννητρίας κατὰ διακλάδωσιν τὴν ἀντίστασιν R = 4 Ω, τότε εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τῆς διακλαδώσεως ἐφαρμόζεται τάσις U = 100 V. Συνεπῶς διὰ τοῦ κινητῆρος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_K = \frac{U}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad I_K = \frac{100\ V}{2\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_K = 50\ A}$$

διὰ δὲ τῆς ἀντιστάσεως R διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_R = \frac{U}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I_R = \frac{100\ V}{4\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_R = 25\ A$$

Ἑπομένως ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα εἶναι:

$$I_2 = I_K + I_R \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = 50\ A + 25\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_2 = 75\ A}$$

3) Ὁ κινητὴρ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E′ = 60 V. Ὅταν ὁ κινητὴρ στρέφεται, ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους A καὶ B τῆς γεννητρίας εἶναι πάλιν U. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I′ καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$U = E' + I' \cdot r \quad \text{ἄρα} \quad I' = \frac{U - E'}{r} = \frac{100\ V - 60\ V}{2\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I' = 20\ A}$$

Ἡ δὲ ἀντίστασις R διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I'' = \frac{U}{R} = \frac{100\ V}{4\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I'' = 25\ A}$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I_3 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I_3 = I' + I'' \quad \text{ἤτοι} \quad I_3 = 20\ A + 25\ A \quad \text{καὶ} \quad I_3 = 45\ A$$

Ὁ κινητὴρ καταναλίσκει ἰσχύν:

$$P_K = U \cdot I' \quad \text{ἤτοι} \quad P_K = 100\ V \cdot 20\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_K = 2000\ W}$$

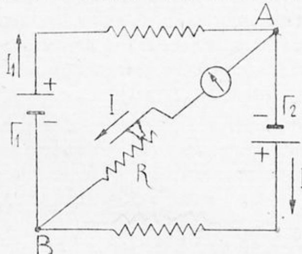
* Ἐκ τῆς ἀνωτέρω καταναλισκομένης ἰσχύος μετατρέπονται:

εἰς μηχανικὴν ἰσχύν: $P_{\mu\eta\chi} = E' \cdot I' = 60\ V \cdot 20\ A = 1200\ W$

εἰς ἰσοδύναμον θερμότητα: $P_{\theta\varepsilon\rho} = r \cdot (I')^2 = 2\ \Omega \cdot (20\ A)^2 = 800\ W$

127. Δύο γεννήτριαι Γ_1 καὶ Γ_2 ἔχουν ἀντιστοίχως ἠλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις $E_1 = 1,08$ V καὶ $E_2 = 1,4$ V. Συνδέονται κατὰ σειράν, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 42. Μία γέφυρα, ἀποτελουμένη ἀπὸ μεταβλητὴν ἀντίστασιν R συνδέει τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ τμήματος $A\Gamma_1B$ εἶναι $R_1 = 2\ \Omega$ καὶ ἡ ὅλη ἀντίστασις τοῦ τμήματος $A\Gamma_2B$ εἶναι $R_2 = 10\ \Omega$. Νὰ ἐξετασθοῦν συναρτήσει τῆς ἀντιστάσεις R αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῆς γεφύρας AB καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος.

Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 42 ὁ θετικὸς πόλος τῆς γεννητρίας Γ_1 συνδέεται μὲ τὸ σημεῖον A, καὶ ὁ θετικὸς πόλος τῆς γεννητρίας Γ_2 συνδέεται μὲ τὸ σημεῖον B. Ἔστω U ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο σημείων A καὶ B. Ἐὰν δεχθῶμεν τὴν σημειουμένην εἰς τὸ σχῆμα φορὰν τῶν ρευμάτων, τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :



Σχ. 42

$$I_1 = I + I_2 \qquad (1)$$

διὰ τὴν γέφυραν AB :

$$U = R \cdot I \qquad (2)$$

διὰ τὸ τμῆμα $A\Gamma_1B$:

$$U = E_1 - R_1 \cdot I_1 \qquad (3)$$

διὰ τὸ τμῆμα $A\Gamma_2B$:

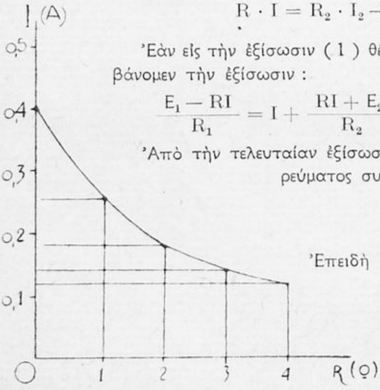
$$U = R_2 \cdot I_2 - E_2 \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$R \cdot I = E_1 - R_1 \cdot I_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad I_1 = \frac{E_1 - RI}{R_1}.$$

Ἀπὸ δὲ τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$R \cdot I = R_2 \cdot I_2 - E_2 \qquad \text{ἄρα} \qquad I_2 = \frac{RI + E_2}{R_2}$$



Σχ. 43

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν I_1 καὶ I_2, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{E_1 - RI}{R_1} = I + \frac{RI + E_2}{R_2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{1,08 - RI}{2} = I + \frac{RI + 1,4}{10}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος συναρτήσει τῆς ἀντιστάσεως R, ἤτοι :

$$I = \frac{2}{5 + 3R}$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ τοῦ R εἶναι θετική, συνάγεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ I εἶναι πάντοτε θετική. Συνεπῶς ἐντὸς τῆς γεφύρας AB θὰ κυκλοφορῇ πάντοτε ρεῦμα μὲ φορὰν ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B.

Ἐὰν εἶναι $R = 0$, τότε εἶναι :

$$I = \frac{2}{5}\ \text{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = 0,4\ \text{A}$$

Ἐὰν ἡ ἀντίστασις R αὐξάνεται ἀπὸ τὸ μηδὲν μέχρι τοῦ ἀπείρου, τότε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος ἐλαττώνεται ἀπὸ 0,4 A ἕως μηδέν. Αἱ μεταβολαὶ τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος συναρτήσει τῆς ἀντιστάσεως R παριστάνονται ἀπὸ τόξον ὑπερβολῆς (σχ. 43).

128. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E_1 καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν ἀσήμαντον· εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν AA′ μιᾶς γραμμῆς, ἀποτελουμένης ἀπὸ δύο σύρματα

ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 44). Ἡ γραμμὴ αὐτὴ τροφοδοτεῖ: εἰς τὸ ΒΒ΄ ἕνα ὄργανον (χωρὶς ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν) ἀντιστάσεως R_1· εἰς τὸ ΓΓ΄ τροφοδοτεῖ ἕνα κινητῆρα, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E_1 καὶ ἀντίστασιν ἀσήμαντον. Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ ἀποστάσεις $AB = d_1$, $B\Gamma = d_2$, ἡ διάμετρος δ καὶ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις ρ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ τμήματα ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ τοῦ κυκλώματος.

Ἐφαρμογή: $E_1 = 550\ V$ · $E_2 = 420\ V$ · $R_1 = 215\ \Omega$ · $\delta = 3\ mm$ ·

$\rho = 1{,}6/10^6\ \Omega \cdot cm$ · $d_1 = 2100\ m$ · $d_2 = 820 m$.

Τὰ δύο σύρματα ΑΒ καὶ Α΄Β΄ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος d_1 καὶ ὁλικὴν ἀντίστασιν r_1. Ὁμοίως τὰ δύο σύρματα ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος d_2 καὶ ὁλικὴν ἀντίστασιν r_2. Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα τοῦ Kirchhoff δι᾽ ἕκαστον τμῆμα τοῦ κυκλώματος. Οὕτω εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

διὰ τὸ κύκλωμα ΑΒΒ΄Α΄Α:

$$E_1 = Ir_1 + I_1R_1 \qquad (1)$$

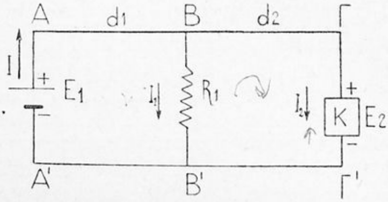
διὰ τὸ κύκλωμα ΒΓΓ΄Β΄Β:

$$I_1R_1 = I_2r_2 + E_2 \qquad (2)$$

ἐπίσης εἶναι: $I = I_1 + I_2 \qquad (3)$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ I ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3), εὑρίσκομεν:

$$E_1 = (I_1 + I_2)\, r_1 + I_1R_1 \qquad (4)$$



Σχ. 44

Ἀπὸ δὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν: $E_2 = I_1R_1 - I_2r_2 \qquad (5)$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5), λαμβάνομεν:

$$E_1 - E_2 = (I_1 + I_2)\, r_1 + I_2r_2 \quad \text{ἤτοι} \quad E_1 - E_2 = I_1r_1 + (r_1 + r_2)\, I_2 \qquad (6)$$

Ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$I_2 = \frac{R_1(E_1 - E_2) - r_1E_2}{R_1(r_1 + r_2) + r_1r_2} \qquad (7) \qquad\qquad I_1 = \frac{E_2 + I_2r_2}{R_1} \qquad (8)$$

Αἱ ἀντιστάσεις r_1 καὶ r_2 εἶναι:

$$r_1 = \rho\,\frac{2d_1}{\pi\delta^2/4} \quad \text{ἤτοι} \quad r_1 = \frac{1{,}6}{10^6}\,\Omega \cdot cm \cdot \frac{2 \cdot 21 \cdot 10^4\ cm}{\pi \cdot 0{,}09/4\ cm^2} \quad \text{καὶ} \quad r_1 = 9{,}5\ \Omega$$

$$r_2 = \rho\,\frac{2d_2}{\pi\delta^2/4} \quad \text{ἤτοι} \quad r_2 = \frac{1{,}6}{10^6}\,\Omega\ .\ cm \cdot \frac{2 \cdot 82 \cdot 10^3\ cm}{\pi \cdot 0{,}09/4\ cm^2} \quad \text{καὶ} \quad r_2 = 3{,}9\ \Omega$$

Θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν γνωστῶν μεγεθῶν εἰς τὰς ἐξισώσεις (7) καὶ (8) εὑρίσκομεν:

$$I_2 = \frac{215 \cdot (550 - 420) - (9{,}5 \cdot 420)}{215 \cdot (9{,}5 + 3{,}9) + (9{,}5 \cdot 3{,}9)} \left(\frac{\Omega \cdot V}{\Omega^2}\right) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_2 = 8{,}2\ A}$$

$$I_1 = \frac{420 + (8{,}2 \cdot 3{,}9)}{215} \left(\frac{V}{\Omega}\right) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 2{,}1\ A}$$

Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως I, ἡ ὁποία εἶναι:

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad I = 2{,}1\ A + 8{,}2\ A = 10{,}3\ A$$

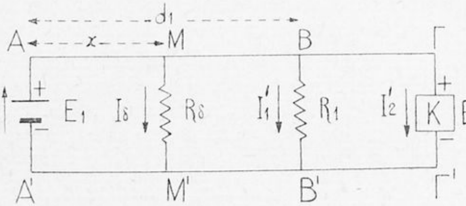
129. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 128 παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς λειτουργίας τοῦ συστήματος αἰφνιδίως αὐξάνεται ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ λαμβάνει τιμὴν $I' > I$, ἐνῶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ

τμῆμα ΒΒ′ ἐλαττώνεται καὶ λαμβάνει τιμὴν $I_1' < I_1$. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι εἰς ἕνα σημεῖον ΜΜ′ τῆς γραμμῆς, εὑρισκόμενον μεταξὺ ΑΑ′ καὶ ΒΒ′, ἔγινε τυχαία διακλάδωσις (σχ. 45). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΜ = x καὶ ἡ ἀντίστασις R_δ τοῦ τμήματος ΜΜ′. Ἐφαρμογή: $I' = 12{,}5$ A καὶ $I_1' = 2{,}02$ A.

Ἂς καλέσωμεν I_δ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διακλάδωσιν ΜΜ′ (σχ. 45) καὶ r τὴν ἀντίστασιν τῶν δύο συρμάτων ΑΜ καὶ Α′Μ′. Μεταξὺ τῶν δύο σημείων Β καὶ Β′ ὑπάρχει τάσις U. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Kirchhoff, εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

διὰ τὸ κύκλωμα ΑΜΜ′Α′: $$E_1 = I'r + I_\delta R_\delta \qquad (1)$$

διὰ τὸ κύκλωμα ΑΒΒ′Α′: $$E_1 = I'r + (I' - I_\delta)(r_1 - r) + U \qquad (2)$$



Σχ. 45

Ἐπίσης ἰσχύουν καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$U = I_1'R_1 \quad \text{καὶ} \quad U = E_2 + I_2'r_2$$

ὅπου I_2' εἶναι ἡ νέα ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ τμῆμα ΒΓΓ′Β′ τοῦ κυκλώματος. Οὕτω ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$I_1'R_1 = E_2 + I_2'r_2 \quad \text{ἄρα}$$

$$I_2' = \frac{I_1'R_1 - E_2}{r_2} \qquad (3)$$

Ἡ ὁλικὴ ἔντασις I′ τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I' = I_\delta + I_1' + I_2' \quad \text{ἄρα} \quad I' - I_\delta = I_1' + I_2' \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$r = \frac{E_1 - U - (I' - I_\delta)\, r_1}{I_\delta} \qquad (5)$$

$$R_\delta = \frac{E_1 - I'r}{I_\delta} \qquad (6)$$

Αἱ ἀντιστάσεις r καὶ r_1 εἶναι ἀνάλογοι τῶν μηκῶν 2x καὶ $2d_1$ τῶν δύο συρμάτων (ΑΜ + Α′Μ′) καὶ (ΑΒ + Α′Β′). Οὕτω ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{2x}{2d_1} \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{r}{r_1} \cdot d_1 \qquad (7)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $I' = 12{,}5$ A καὶ $I_1' = 2{,}02$ A. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ I_2', ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ἐκ τοῦ προηγουμένου προβλήματος 128 ὅτι εἶναι: $E_2 = 420$ V, $R_1 = 215\ \Omega$ καὶ $r_2 = 3{,}9\ \Omega$. Ἄρα ἔχομεν:

$$I_2' = \frac{(2{,}02 \cdot 215) - 420}{3{,}9} \left(\frac{V}{\Omega}\right) \quad \text{καὶ} \quad I_2' = 3{,}66 \text{ A}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν:

$$I' - I_\delta = 2{,}02 \text{ A} + 3{,}66 \text{ A} \quad \text{ἤτοι} \quad I' - I_\delta = 5{,}68 \text{ A}$$

καὶ συνεπῶς εἶναι:

$$I_\delta = I' - 5{,}68 \text{ A} = 12{,}5 \text{ A} - 5{,}68 \text{ A} \quad \text{ἤτοι} \quad I_\delta = 6{,}82 \text{ A}$$

Μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Β′ ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U = I_1'R_1 = 2{,}02 \text{ A} \cdot 215\ \Omega \quad \text{ἤτοι} \quad U = 434{,}3 \text{ V}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστασιν r, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι : $E_1 = 550$ V καὶ $r_1 = 9{,}5\ \Omega$. Ἄρα ἔχομεν :

$$r = \frac{550 - 434{,}3 - (5{,}68 \cdot 9{,}5)}{6{,}82} \left(\frac{V}{A}\right) \quad \text{καὶ} \quad r = 9{,}05\ \Omega$$

Ἡ ζητουμένη ἀπόστασις ΑΜ = x εὑρίσκεται τώρα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7) ὅτι εἶναι :

$$x = \frac{9{,}05\ \Omega}{9{,}5\ \Omega} \cdot 2100 \text{ m} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{x = 2000\ m}$$

Ἡ δὲ ἀντίστασις R_δ , ἡ ὁποία παρενεβλήθη μεταξὺ τῶν σημείων Μ καὶ Μ' εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7) ὅτι εἶναι :

$$R_\delta = \frac{550 - (12{,}5 \cdot 9{,}05)}{6{,}82} \left(\frac{V}{A}\right) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_\delta = 64\ \Omega}$$

130. Γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 60 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 5 Ω. Ὁ ἕνας πόλος τῆς γεννητρίας συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος, ὁ δὲ ἄλλος συνδέεται μὲ γαλβανόμετρον Δ (σχ. 46), τὸ ὁποῖον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 75 Ω. Τὸ σύρμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν γεννήτριαν μὲ τὸ γαλβανόμετρον, ἔχει μῆκος 10 km καὶ σταθερὰν τομήν. Ὡς ἀγωγὸς ἐπιστροφῆς θεωρεῖται τὸ ἔδαφος. Τότε τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια, ἔχει ἔντασιν 0,25 A. Μεταξὺ ἑνὸς σημείου Ζ τοῦ ἀγωγοῦ ΓΔ καὶ τοῦ ἐδάφους παρεμβάλλεται τυχαίως ἀγωγὸς ΖΝ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν ἴσην μὲ μηδέν. Εἰς τὸ τμῆμα ΓΖ τῆς γραμμῆς παρατηροῦμεν τότε ρεῦμα ἐντάσεως 0,50 A, ἐνῶ τὸ γαλβανόμετρον δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ζ ἀπὸ τὴν γεννήτριαν.

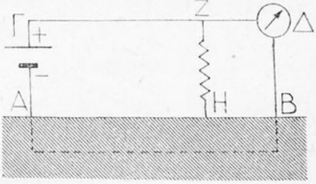
Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E = 60 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_1 = 5\ \Omega$. Τὸ γαλβανόμετρον ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_2 = 75\ \Omega$, τὸ δὲ σύρμα ΓΔ ἔχει ἀντίστασιν R_1. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R = R_1 + r_1 + r_2 \quad \text{ἤτοι} \quad R = (R_1 + 80)\ \Omega$$

Ἀρχικῶς ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_1 = 0{,}25$ A καὶ τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$E = I_1 \cdot R \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad R = \frac{E}{I_1}$$

ἤτοι $R = \dfrac{60\ V}{0{,}25\ A}$ καὶ $R = 240\ \Omega$



Σχ. 46

Ὥστε ἡ ἀντίστασις R_1 τοῦ σύρματος ΓΔ εἶναι :

$$R_1 = (240 - 80)\ \Omega \quad \text{ἤτοι} \quad R_1 = 160\ \Omega$$

Ὅταν μεταξὺ τῆς γεννητρίας Γ καὶ τοῦ γαλβανομέτρου Δ παρεμβληθῇ ὁ ἄνευ ἀντιστάσεως ἀγωγὸς ΖΗ, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ τμῆμα ΓΖ τῆς γραμμῆς εἶναι $I_2 = 0{,}50$ A. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ τμῆμα ΓΖ τοῦ σύρματος ἔχει ἀντίστασιν R_2 καὶ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R' = R_2 + r_1 \quad \text{ἤτοι} \quad R' = (R_2 + 5)\ \Omega$$

Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm : $E = I_2 \cdot R'$ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$R' = \frac{E}{I_2} \quad \text{ἤτοι} \quad R' = \frac{60\ V}{0{,}50\ A} \quad \text{καὶ} \quad R' = 120\ \Omega$$

Ἄρα ἡ ἀντίστασις R_2 τοῦ σύρματος ΓΖ εἶναι :

$$R_2 = (120 - 5)\ \Omega \quad \text{ἤτοι} \quad R_2 = 115\ \Omega$$

Αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη l_1 καὶ l_2 τῶν συρμάτων ΓΔ καὶ ΓΖ. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

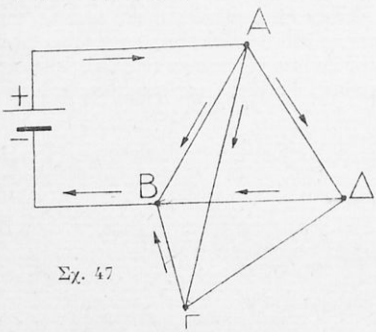
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2}{l_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad l_2 = \frac{R_2}{R_1} \cdot l_1$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $l_1 = 10$ km. Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀπόστασις l_2 τοῦ σημείου Ζ ἀπὸ τὴν γεννήτριαν Γ εἶναι :

$$l_2 = \frac{115\ \Omega}{160\ \Omega} \cdot 10\,000\ \text{m} \qquad \text{ἤτοι} \qquad l_2 = \mathbf{7187{,}5\ m}$$

131. Ἓξ ἴσα εὐθύγραμμα σύρματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω, συνδέονται οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζουν τὰς ἀκμὰς κανονικοῦ τετραέδρου. Δύο κορυφαὶ τούτου συνδέονται μὲ τοὺς πόλους γεννητρίας, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 3 V καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια ;

Ἕκαστον τῶν συρμάτων ἔχει ἀντίστασιν $R = 1\ \Omega$. Ἡ γεννήτρια (σχ. 47) ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 3$ V. Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι μεταξὺ τῶν δύο κόμβων Α καὶ Β τοῦ δικτύου παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν οἱ ἑξῆς ἀγωγοί : α) ὁ ἀγωγὸς ΑΒ ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν R· β) ὁ ἀγωγὸς ΑΓΒ ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 2R καὶ γ) ὁ ἀγωγὸς ΑΔΒ ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 2R. Ἡ πτῶσις τῆς τάσεως ἐπὶ τῶν ἀγωγῶν ΑΔ καὶ ΑΓ εἶναι ἡ αὐτή. Ἄρα τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν καὶ συνεπῶς ὁ ἀγωγὸς ΓΔ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὸν ἀγωγὸν ΓΔ ὡς μὴ ὑπάρχοντα εἰς τὸ κύκλωμα. Τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀγωγῶν ΑΒ, ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :



Σχ. 47

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad R_{ολ} = \frac{R}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad R_{ολ} = 0{,}5\ \Omega$$

Ὥστε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{3\ V}{0{,}5\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 6\ A}$$

* Σημείωσις. Μεταξὺ τῶν κόμβων Α καὶ Β ὑπάρχει τάσις $U = E = 3$ V. Ἄρα ὁ ἀγωγὸς ΑΒ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{3\ V}{1\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 = 3\ A$$

Ἕκαστος δὲ τῶν ἀγωγῶν ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_2 = \frac{U}{2R} = \frac{3\ V}{2\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_2 = 1{,}5\ A$$

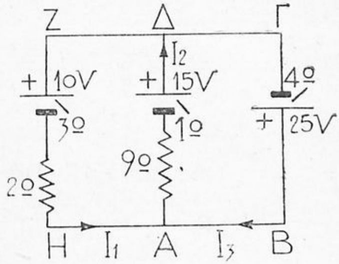
Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $I = I_1 + 2I_2 = 3\ A + 2\ (1{,}5\ A) = 6\ A$

132. Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 48 νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος.

Ὁρίζομεν αὐθαιρέτως τὴν φορὰν τῶν ρευμάτων I_1, I_2, I_3. Ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον κανόνα τοῦ Kirchhoff διὰ τὸν κόμβον Α ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \qquad (1)$$

Ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν δεύτερον κανόνα τοῦ Kirchhoff εἰς τὰ τρία κυκλώματα ΑΔΖΗΑ, ΑΔΓΒΑ καὶ ΑΗΖΔΓΒΑ, εὑρίσκομεν δὲ τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις :



Σχ. 48

κύκλωμα ΑΔΖΗΑ :

$$(I_2 \cdot 9) + (I_2 \cdot 1) + (I_1 \cdot 3) + (I_1 \cdot 2) = (15 - 10)$$

ἤτοι $\quad 10I_2 + 5I_1 = 5 \qquad (2)$

κύκλωμα ΑΔΓΒΑ :

$$(I_2 \cdot 9) + (I_2 \cdot 1) + (I_3 \cdot 4) = 15 + 25$$

ἤτοι $\quad 10I_2 + 4I_3 = 40 \qquad (3)$

κύκλωμα ΑΗΖΔΓΒΑ :

$$(-I_1' \cdot 2) + (-I_1 \cdot 3) + (I_3 \cdot 4) = 10 + 25$$

ἤτοι $\quad -5I_1 + 4I_3 = 35 \qquad (4)$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν (4). Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑπόμενον σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων :

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \qquad (1)$$

$$10I_2 + 5I_1 = 5 \qquad (2)$$

$$10I_2 + 4I_3 = 40 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν : $\quad I_1 = I_2 - I_3$

Θέτοντες αὐτὴν τὴν τιμὴν τοῦ I_1 εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν :

$$10I_2 + 5(I_2 - I_3) = 5 \quad \text{ἄρα} \quad 15I_2 - 5I_3 = 5 \qquad (5)$$

Οὕτω ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (3) καὶ (5), ἀπὸ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν :

$$30I_2 + 12I_3 = 120 \qquad (3')$$

$$30I_2 - 10I_3 = 10 \qquad (5')$$

ἄρα $\quad I_3 = 5\ \text{A} \quad$ καὶ $\quad I_2 = 2\ \text{A}$

Συνεπῶς εἶναι καὶ $\quad I_1 = -3\ \text{A}$

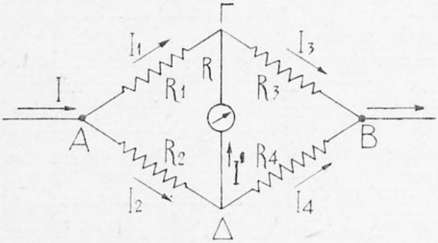
Ὥστε τὰ μὲν ρεύματα I_2 καὶ I_3 ἔχουν τὴν φοράν, ἡ ὁποία ἐσημειώθη εἰς τὸ σχῆμα αὐθαιρέτως, τὸ δὲ ρεῦμα I_1 ἔχει φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν σημειωθεῖσαν αὐθαιρέτως. Ἄρα αἱ ζητούμεναι ἐντάσεις τῶν τριῶν ρευμάτων εἶναι :

$$\mathbf{I_1 = 3\ A} \qquad \mathbf{I_2 = 2\ A} \qquad \mathbf{I_3 = 5\ A}$$

133. Μία γέφυρα τοῦ Wheatstone ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἀντιστάσεις : $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$ καὶ τὴν διαγώνιον ἀντίστασιν, ἡ ὁποία περιλαμβάνει γαλβανόμετρον καὶ ἔχει ἀντίστασιν $R = 200\ \Omega$. 1) Νὰ εὑρεθῇ πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τετάρτη ἀντίστασις R_3, ὥστε ἡ γέφυρα νὰ ἰσορροπηθῇ. Πόση εἶναι τότε ἡ ἰσοδύναμος ἀντίστασις ὁλοκλήρου τῆς γεφύρας; 2) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ γέφυρα δὲν ἰσορροπεῖται καὶ ὅτι ἡ ἀντίστασις R_3 εἶναι 50 Ω. Πόση εἶναι τότε ἡ ἰσοδύναμος ἀντί-

στασις ὅλης τῆς γεφύρας; Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διαγώνιον ἀντίστασιν R, ἐὰν ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι ἴση μὲ 1 V;

1) Ὅταν ἡ διαγώνιος ἀντίστασις ΓΔ (σχ. 49) δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ διὰ τὴν γέφυραν τοῦ Wheatstone ἐξίσωσις: $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$



Σχ. 49

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τετάρτη ἀντίστασις R_3 πρέπει νὰ εἶναι ἴση μέ:

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2}$$

ἤτοι $$R_3 = \frac{10\,\Omega \cdot 10\,\Omega}{1\,\Omega}$$

καὶ $$\mathbf{R_3 = 100\,\Omega}$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν ὁ κλάδος ΓΔ δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα καὶ ἑπομένως εἶναι ὡς νὰ μὴ ὑπάρχῃ εἰς τὸ κύκλωμα. Τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{ολ}$ τοῦ συστήματος τῶν ἀντιστάσεων εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{(R_1 + R_3)} + \frac{1}{(R_2 + R_4)}$$

ἤτοι $$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{(10 + 100)\,\Omega} + \frac{1}{(1 + 10)\,\Omega}$$

καὶ $$\mathbf{R_{ολ} = 10\,\Omega}$$

Εἰς τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσιν αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_3 διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_1, αἱ δὲ ἀντιστάσεις R_2 καὶ R_4 διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_2.

2) Ἐὰν ἡ τετάρτη ἀντίστασις R_3 εἶναι ἴση μὲ 50 Ω, τότε ἡ διαγώνιος ἀντίστασις ΓΔ θὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I' (σχ. 49). Ἔστω I ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον φθάνει εἰς τὸν κόμβον A τοῦ δικτύου τῶν ἀντιστάσεων καὶ I_1, I_2, I_3, I_4 αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὰς ἀντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4. Δίδεται ὅτι μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ἐφαρμόζεται τάσις $U = 1$ V. Ἡ νέα ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ συστήματος εἶναι $R'_{ολ}$. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τοὺς γνωστοὺς κανόνας τοῦ Kirchhoff, εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

$$I = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

$$I = I_3 + I_4 \qquad (2)$$

$$I_2 = I' + I_4 \qquad (3)$$

$$R_1I_1 - RI' - R_2I_2 = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad 10\,I_1 - 200\,I' - 1\,I_2 = 0 \qquad (4)$$

$$RI' + R_3I_3 - R_4I_4 = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad 200\,I' + 50\,I_3 - 10\,I_4 = 0 \qquad (5)$$

$$R'_{ολ} \cdot I = U \quad \text{ἤτοι} \quad R'_{ολ} \cdot I = 1 \qquad (6)$$

$$R_1I_1 + R_3I_3 = U \quad \text{ἤτοι} \quad 10\,I_1 + 50\,I_3 = 1 \qquad (7)$$

Οὕτω εὕρομεν 7 ἐξισώσεις μὲ 7 ἀγνώστους (I, I', I_1, I_2, I_3, I_4, $R'_{ολ}$). Ἀπαλείφοντες διαδοχικῶς τοὺς ἄλλους 5 ἀγνώστους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τελικῶς σύστημα 2 ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ μόνον τοὺς δύο ζητουμένους ἀγνώστους I' καὶ $R'_{ολ}$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ I_2 καὶ τὴν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸς ἐξισώσεις (1) καὶ (4). Οὕτω ἔχομεν τὸ ἀκόλουθον νέον σύστημα ἐξισώσεων :

$$I = I_1 + I' + I_4 \qquad (1')$$

$$I = I_3 + I_4 \qquad (2)$$

$$10\,I_1 - 201\,I' - I_4 = 0 \qquad (4')$$

καὶ αἱ ἐξισώσεις (5), (6), (7)

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1') καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$I_3 = I_1 + I'$$

Ἐὰν θέσωμεν τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τῶν I_3 καὶ I ἀπὸ τὴν (1') εἰς τὰς ἐξισώσεις (4'), (5), (6), (7), λαμβάνομεν :

$$10\,I_1 - 201\,I' - I_4 = 0 \qquad (4')$$

$$250\,I' + 50\,I_1 - 10\,I_4 = 0 \qquad (5')$$

$$I_1 + I' + I_4 = \frac{1}{R'_{o\lambda}} \qquad (6')$$

$$60\,I_1 + 50\,I' = 1 \qquad (7')$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4') εὑρίσκομεν :

$$I_1 = \frac{201\,I'}{10} + \frac{I_4}{10} \qquad (8)$$

Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ I_1 εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5') εὑρίσκομεν :

$$I_4 = 251\,I'$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (8) εὑρίσκομεν :

$$I_1 = \frac{201\,I'}{10} + \frac{251\,I'}{10} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{452\,I'}{10}$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις (7') γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$60 \cdot \frac{452\,I'}{10} + 50\,I' = 1 \quad \text{ἄρα} \quad I' = \frac{1}{2762}\ \mathrm{A}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I' = 0{,}000\,362\ A = 362\ \mu A}$$

Τέλος ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6') εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{452\,I'}{10} + I' + 251\,I' = \frac{1}{R'_{o\lambda}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{2972\,I'}{10} = \frac{1}{R'_{o\lambda}}$$

$$\text{ἄρα} \quad R'_{o\lambda} = \frac{10 \cdot 2762}{2972}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R'_{o\lambda} = 9{,}293\ \Omega}$$

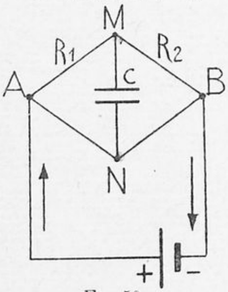
134. Δύο σύρματα ΑΝΒ καὶ ΑΜΒ ἔχουν ἀντιστοίχως ἀντιστάσεις R καὶ R'. Τὰ ἄκρα των συνδέονται μὲ τοὺς πόλους μιᾶς γεννητρίας, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν (σχ. 50). Ὁ ἕνας ὁπλισμὸς πυκνωτοῦ, χωρητικότητος C, συνδέεται μὲ τὸ μέσον N τῆς ἀντιστάσεως R, ὁ δὲ ἄλλος ὁπλισμός του συνδέεται μὲ ἕνα σημεῖον M, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὴν ἀντίστασιν R' εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη ἔχουν λόγον x. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ πυκνωτής.

Ἐφαρμογή : $C = 1\ \mu F$. $E = 40\ V$. $x = 1/4$.

Μεταξὺ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β ὑπάρχει τάσις U = E (σχ. 50). Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, διαρρέει τοὺς δύο κλάδους ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ τοῦ κυκλώματος. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἔχουν ἀντιστοίχως δυναμικὸν U_M καὶ U_N. Συνεπῶς ὁ πυκνωτὴς λαμβάνει ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q = C \cdot (U_M - U_N) \qquad (1)$$

Ὁ ἀγωγὸς ΑΜΒ ἔχει ἀντίστασιν R'. Ἂς καλέσωμεν R_1 καὶ l_1 ἀντιστοίχως τὴν ἀντίστασιν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ ΑΜ, ὡς καὶ R_2 καὶ l_2 ἀντιστοίχως τὴν ἀντίστασιν καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ ΜΒ. Τότε ἔχομεν τὰς σχέσεις:



Σχ. 50

$$R_1 + R_2 = R' \quad \text{καὶ} \quad \frac{l_1}{l_2} = x$$

Ὁ ἀγωγὸς ΑΜΒ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I' καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$I' = \frac{E}{R'}$$

Τὸ τμῆμα ΑΜ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΜΒ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I' καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$I' = \frac{(U_A - U_M)}{R_1}$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν:

$$\frac{(U_A - U_M)}{R_1} = \frac{E}{R'} \quad \text{ἤτοι} \quad (U_A - U_M) = E \cdot \frac{R_1}{R'} \qquad (2)$$

Αἱ ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 τῶν δύο τμημάτων ΑΜ καὶ ΜΒ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΜΒ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ μήκη l_1 καὶ l_2 τῶν ἀγωγῶν ΑΜ καὶ ΜΒ. Συνεπῶς ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{R_1}{R_2} = x$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{x}{1 + x} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{R_1}{R'} = \frac{x}{1 + x}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$U_A - U_M = E \cdot \frac{x}{1 + x} \qquad (3)$$

Ὁ ἀγωγὸς ΑΝΒ ἔχει ἀντίστασιν R καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I. Ἕκαστον τῶν τμημάτων ΑΝ καὶ ΝΒ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΝΒ ἔχει ἀντίστασιν $R/2$. Οὕτω διὰ τὸν ἀγωγὸν ΑΝΒ καὶ διὰ τὸ τμῆμα του ΑΝ ἰσχύουν ἀντιστοίχως αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{καὶ} \quad I = \frac{(U_A - U_N)}{R/2}$$

$$\text{ἄρα εἶναι:} \quad (U_A - U_N) = \frac{E}{2} \qquad (4)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), εὑρίσκομεν:

$$(U_M - U_N) = \frac{E}{2} - \frac{Ex}{1 + x} \quad \text{ἤτοι} \quad (U_M - U_N) = E \cdot \frac{(1 - x)}{2(1 + x)}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον Q τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$\mathbf{Q = C \cdot E \cdot \frac{(1 - x)}{2(1 + x)}}$$

Ἐφαρμογή. Δίδεται ὅτι εἶναι: $E = 40\ V \quad C = 1\ \mu F = \frac{1}{10^6}\ F \quad x = \frac{1}{4}$

Ἄρα εἶναι:
$$Q = \frac{1}{10^6}\ F \cdot 40\ V \cdot \frac{3/4}{10/4}$$
ἤτοι
$$Q = \frac{12}{10^6}\ Cb = 12\ \mu Cb$$

135. Ἕνα γαλβανόμετρον εἶναι βαθμολογημένον εἰς Ampère καὶ φέρει διαιρέσεις ἀπὸ 0 ἕως 10 A. Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν A καὶ B τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλεται βοηθητικὴ διακλάδωσις, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν $R_B = 8\ \Omega$, ὥστε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου νὰ διέρχεται τὸ 1/10 τοῦ κυρίου ρεύματος. Οἱ ἀκροδέκται A καὶ B συνδέονται μὲ τοὺς δύο πόλους γεννητρίας καὶ τότε τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει $I_1 = 4$ A. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R_1 τοῦ γαλβανομέτρου. 2) Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B καὶ πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν διακλάδωσιν τοῦ γαλβανομέτρου;

1) Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, τότε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:
$$I_1 = \frac{I}{10} = 4\ A \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I = 40\ A}$$
Ἡ βοηθητικὴ ἀντίστασις $R_B = 8\ \Omega$ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:
$$I_B = \frac{9\,I}{10} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{I_B = 36\ A}$$
Εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τῆς διακλαδώσεως ἐφαρμόζεται ἡ αὐτὴ τάσις U καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:
$$U = I_1 \cdot R_1 = I_B \cdot R_B \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_1 = \frac{I_B}{I_1} \cdot R_B$$
Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐσωτερικὴ ἀντίστασις R_1 τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι:
$$R_1 = \frac{36\ A}{4\ A} \cdot 8\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R_1 = 72\ \Omega}$$
2) Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἀντιστάσεων R_1 καὶ R_B εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:
$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_B} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{72\ \Omega} + \frac{1}{8\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R_{o\lambda} = 7{,}2\ \Omega}$$
Εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι διὰ τῆς βοηθητικῆς ἀντιστάσεως R_B διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως: $I_B = 36$ A.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

136. Ρεῦμα ἐντάσεως 10 A διαρρέει εὐθύγραμμον ἀγωγόν. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν 2 cm ἀπὸ τὸν ἀγωγόν;

Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μακροῦ εὐθυγράμμου ρεύματος εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν εἶναι:
$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\,I}{r}\ \text{Gauss} \qquad (1)$$

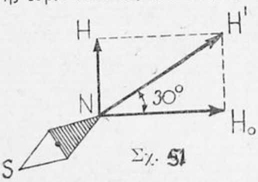
ὅπου I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς Ampère. Ἡ ἀπόστασις r μετρεῖται εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς Gauss.

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $I = 10$ A καὶ $r = 2$ cm, εὑρίσκομεν :

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2 \cdot 10}{2} \text{ Gauss} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{H = 1 \ Gauss}$$

137. Σύρμα τείνεται ὁριζοντίως ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Κάτωθεν τοῦ μέσου τοῦ σύρματος καὶ εἰς ἀπόστασιν 10 cm ἀπὸ τὸ σύρμα τοποθετεῖται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Ὅταν τὸ σύρμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 30° ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἐὰν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ Gauss.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι πέριξ τοῦ σύρματος τούτου δημιουργεῖται μαγνητικὸν πεδίον, τοῦ ὁποίου αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Τὰ ἐπίπεδα τῶν ὁμοκέντρων κύκλων εἶναι κάθετα πρὸς τὸν εὐθύγραμμον ἀγωγόν. Ὁ βόρειος πόλος τῆς μαγνητικῆς βελόνης εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $r = 10$ cm ἀπὸ τὸν ἀγωγόν. Εἰς τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἶναι :



Σχ. 51

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2I}{r} \text{ Gauss}$$

ὅπου I εἶναι ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς δυναμικῆς γραμμῆς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος καὶ συνεπῶς εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου (σχ. 51). Οὕτω ἡ μαγνητικὴ βελόνη λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης H' τῶν μερικῶν ἐντάσεων H καὶ H_0. Ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον συνάγεται ἡ σχέσις :

$$H = H_0 \cdot \text{εφ}\, 30^0 \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{10} \cdot \frac{2I}{r} = H_0 \cdot \text{εφ}\, 30^0$$

Συνεπῶς εἶναι :

$$I = 5H_0 \cdot r \cdot \text{εφ}\, 30^0$$

$$\text{ἢ} \quad I = \left(5 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 5{,}76 \ A}$$

138. Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀκτῖνα $r = 20$ cm καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 5 A. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου;

Ὁ κυκλικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀκτῖνα $r = 20$ cm καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 5$ A. Ὁ ἀγωγὸς οὗτος ἀποτελεῖ μαγνητικὸν φύλλον, ἤτοι παρουσιάζει δύο ἑτερωνύμους μαγνητικοὺς πόλους. Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ ρεύματος εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀκτῖνα r τοῦ κύκλου, εἶναι δὲ ἴση μέ :

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi I}{r} \text{ Gauss}$$

Ἄρα εἶναι :

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi \cdot 5}{20} \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 0{,}157 \ Gauss}$$

139. Κυκλικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἀκτῖνα $r = 20$ cm καὶ περιλαμβάνει 10 σπείρας. Εἰς τὸ κέντρον του τοποθετεῖται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἐγκλίσεως, ἡ ὁποία δύναται

νὰ κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ἡ γωνία ἐγκλίσεως εἶναι $\epsilon = 60^0$, ἡ δὲ ἔντασις τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τῆς Γῆς εἶναι $H_0 = 0{,}18$ Gauss. Ἐὰν διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ ἀγωγοῦ ρεῦμα, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὥστε ἡ βελόνη νὰ ἰσορροπῇ, ἔχουσα τὸν ἄξονά της ὁριζόντιον;

Τὸ κυκλικὸν πλαίσιον φέρει $\nu = 10$ σπείρας. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi I}{r} \cdot \nu$$

Διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ἡ μαγνητικὴ βελόνη εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ὁ ἄξων της νὰ εἶναι ὁριζόντιος, πρέπει ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ ρεῦμα εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου, νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν H_K τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι:

$$H = H_K \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi I}{r} \cdot \nu = H_K \tag{1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κυκλικὸν πλαίσιον εἶναι ὁριζόντιον. Εἶναι γνωστὸν ὅτι αἱ δύο κάθετοι συνιστῶσαι H_0 καὶ H_K τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως: $\quad H_K = H_0 \cdot \varepsilon\varphi\, \varepsilon$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi I}{r} \cdot \nu = H_0 \cdot \varepsilon\varphi\, \varepsilon$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{10\, H_0\, r \cdot \varepsilon\varphi\, \varepsilon}{2\, \pi\, \nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{10 \cdot 0{,}18 \cdot 20 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 0{,}99\ A}$$

140. Ἐπὶ ἑνὸς κυκλικοῦ πλαισίου, ἀκτῖνος 10 cm, τυλίσσονται 100 σπεῖραι, εἰς δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τὰ ἄκρα τοῦ σύρματος συνδέονται μὲ τοὺς πόλους γεννητρίας, ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 6 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω. Ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 45^0. Ἐὰν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0{,}2$ Gauss, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου.

Εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἶναι ὁριζοντία καὶ ἴση μέ:

$$H = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{\nu I}{r} \ (\text{Gauss})$$

ὅπου $r = 10$ cm εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου καὶ ν αἱ σπεῖραι τοῦ πλαισίου. Ἡ μαγνητικὴ βελόνη λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης H' τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H καὶ H_0, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἐπειδὴ ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 45^0 ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, ἕπεται ὅτι αἱ ἐντάσεις H καὶ H_0 σχηματίζουν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ συνεπῶς εἶναι:

$$H = H_0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{\nu I}{r} = H_0$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = \frac{10\, H_0\, r}{2\, \pi\, \nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{10 \cdot 0{,}2 \cdot 10}{2\pi \cdot 100}\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad I = \frac{1}{10\pi}\ \mathrm{A}$$

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_\Gamma = 2\,\Omega$ καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 6\,V$. Ἐὰν $R_{o\lambda}$ εἶναι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$E = I \cdot R_{o\lambda} \quad \text{ἄρα} \quad R_{o\lambda} = \frac{6\,V}{1/10\pi\,A} \quad \text{καὶ} \quad R_{o\lambda} = 60\pi\,\Omega$$

$$\text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = 188{,}40\,\Omega$$

Ἐὰν R_Σ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀντίστασις τοῦ σύρματος τοῦ πλαισίου, τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$R_{o\lambda} = R_\Gamma + R_\Sigma \quad \text{ἄρα} \quad R_\Sigma = R_{o\lambda} - R_\Gamma$$

$$\text{ἤτοι} \quad R_\Sigma = (\,188{,}40 - 2\,)\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R_\Sigma = 186{,}40\,\Omega}$$

141. Πηνίον ἔχει μῆκος 10 cm καὶ φέρει 1600 σπείρας. Διὰ τοῦ πηνίου διαβιβάζομεν ρεῦμα ἐντάσεως 15 A. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου.

Εἰς τὸ μέσον μακροῦ πηνίου, φέροντος ν σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους, τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἔχει ἔντασιν :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I \text{ Gauss} \qquad (1)$$

Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εὑρίσκεται εἰς Gauss.

Τὸ πηνίον ἔχει μῆκος $l = 10$ cm καὶ φέρει $N = 1600$ σπείρας. Ἄρα τὸ πηνίον φέρει κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους :

$$\nu = \frac{N}{l} = \frac{1600}{10} = 150 \text{ σπείρας/cm}$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ ν καὶ $I = 15$ A, εὑρίσκομεν :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot 160 \cdot 15 \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 3000\ Gauss}$$

142. Πηνίον φέρει 20 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Πόσην ἔντασιν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον θὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ πηνίου, ἐὰν θέλωμεν ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου νὰ εἶναι 500 Gauss;

Τὸ πηνίον φέρει $\nu = 20$ σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Ὅταν τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν $H = 500$ Gauss καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I \text{ Gauss} \quad \text{ἢ} \quad H = 1{,}25 \cdot \nu \cdot I \text{ Gauss}$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος (εἰς Ampère) εἶναι :

$$I = \frac{H}{1{,}25 \cdot \nu} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{500}{1{,}25 \cdot 20}\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 20\ A}$$

143. Πηνίον μήκους 30 cm, φέρει 1500 σπείρας καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 10 A. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου, ἐὰν ἐντὸς τοῦ πηνίου ὑπάρχῃ ράβδος μαλακοῦ σιδήρου ἔχουσα μαγνητικὴν διαπερατότητα $\mu = 4000$;

Τὸ πηνίον ἔχει μῆκος $l = 30$ cm καὶ φέρει $N = 1500$ σπείρας δηλαδὴ κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους φέρει :

$$\nu = \frac{N}{l} = \frac{1500}{30} = 50 \text{ σπείρας/cm}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι I = 10 A. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I = \frac{4\pi}{10} \cdot 50 \cdot 10 \text{ Gauss} = \mathbf{625\ Gauss}$$

Ἂν ἐντὸς τοῦ πηνίου εἰσαχθῇ ράβδος μαλακοῦ σιδήρου, ἔχοντος μαγνητικὴν διαπερατότητα $\mu = 4000$, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γίνεται :

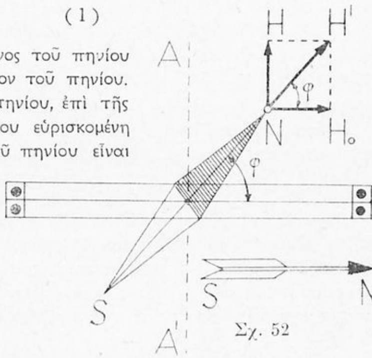
$$B = \mu \cdot H = 4000 \cdot 625 \text{ Gauss} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{B = 25 \cdot 10^5\ Gauss}$$

144. Πηνίον φέρει 20 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους καὶ ὁ ἄξων του εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ὑπάρχει μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διαβιβάσωμεν ρεῦμα, ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 30^0. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ἐὰν ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_0 = 0,2$ Gauss;

Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἔχει ἔντασιν :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I \text{ Gauss} \qquad (1)$$

Ἡ ἔντασις H ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ πηνίου καὶ φορὰν ἐκ τοῦ νοτίου πρὸς τὸν βόρειον πόλον τοῦ πηνίου. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν ὁριζοντίαν τομὴν τοῦ πηνίου, ἐπὶ τῆς ὁποίας στρέφεται καὶ ἡ εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου εὑρισκομένη μαγνητικὴ βελόνη (σχ. 52). Ὁ ἄξων AA′ τοῦ πηνίου εἶναι κάθετος πρὸς τὸν μαγνητικὸν μεσημβρινόν. Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διαβιβάσωμεν ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε ἡ ἔντασις H τοῦ παραγομένου μαγνητικοῦ πεδίου ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος AA′ τοῦ πηνίου. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης H′ τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων (H_0 καὶ H) ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἰσορροπεῖ εἰς νέαν θέσιν. Οὕτω παρατηρεῖται στροφὴ τῆς μαγνητικῆς βελόνης κατὰ γωνίαν $\varphi = 45^0$. Τὸ ὀρθογώνιον NH_0H' εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ συνεπῶς ἔχομεν :



Σχ. 52

$$H = H_0 = 0,2 \text{ Gauss}$$

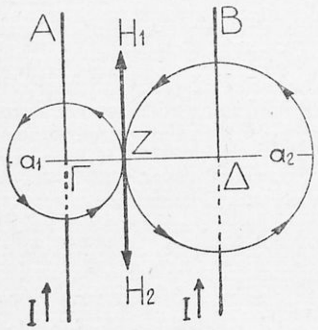
Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέτομεν : $\qquad H = 0,2$ Gauss $\qquad \nu = 20$ σπεῖραι/cm

καὶ λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς I, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$I = \frac{10 \cdot H_0}{4\pi \cdot \nu} = \frac{10 \cdot 0,2}{12,56 \cdot 20} \text{ A} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I = 0,008\ A = 8\ mA}$$

145. Δύο εὐθύγραμμα παράλληλα σύρματα ἀπέχουν μεταξύ των 6 cm καὶ διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα 30 A. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο συρμάτων καὶ ἀπέχει 2 cm ἀπὸ τὸ ἕνα σύρμα καὶ 4 cm ἀπὸ τὸ ἄλλο σύρμα, ὅταν τὰ δύο ρεύματα εἶναι ὁμόρροπα καὶ ὅταν εἶναι ἀντίρροπα;

Ἂς θεωρήσωμεν ὅτι τὰ δύο εὐθύγραμα παράλληλα σύρματα A καὶ B εἶναι κατακόρυφα καὶ τέμνουν καθέτως τὸ ἐπίπεδον τοῦ χάρτου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (σχ. 53). Τὰ ρεύματα ἔχουν φορὰν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τὸ σημεῖον Z ἀπέχει $\alpha_1 = 2$ cm ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν A καὶ $\alpha_2 = 4$ cm ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν B. Διὰ τοῦ σημείου Z διέρχονται δύο δυναμικαὶ γραμμαὶ τῶν μαγνητικῶν πεδίων τῶν δύο ρευμάτων. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κανόνος τοῦ κοχλίου εὑρίσκομεν τὴν φορὰν ἑκάστης ἐκ τῶν δύο τούτων δυναμικῶν γραμμῶν. Ἡ ἔντασις ἑκάστου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ζ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ἀντιστοίχου δυναμικῆς γραμμῆς. Ἂς καλέσωμεν ἀντιστοίχως H_1 καὶ H_2 τὰς ἐντάσεις τῶν μαγνητικῶν πεδίων, τὰ ὁποῖα δημιουργοῦν τὰ ρεύματα Α καὶ Β. Αἱ δύο δυνάμεις H_1 καὶ H_2 κεῖνται προφανῶς ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν δύο δυναμικῶν γραμμῶν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ὅπως δεικνύει ἡ φορὰ τῶν δυναμικῶν γραμμῶν, αἱ ἐντάσεις H_1 καὶ H_2 ἔχουν ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 53

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εὐθυγράμμου ρεύματος εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν εἶναι :

$$H = \frac{2}{10} \cdot \frac{I}{\alpha} \text{ Gauss}$$

Ὥστε εἰς τὸ σημεῖον Ζ αἱ ἐντάσεις τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἶναι :

$$H_1 = \frac{2}{10} \cdot \frac{30}{2} = 3 \text{ Gauss}$$

$$H_2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{30}{4} = 1{,}5 \text{ Gauss}$$

Ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ζ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H_1 καὶ H_2, ἤτοι εἶναι :

$$H = H_1 - H_2 \quad \text{ἄρα} \quad H = (3 - 1{,}5) \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 1{,}5 \text{ Gauss}}$$

Ὅταν τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸν ἀγωγὸν Β ἔχῃ φορὰν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, τότε τὰ δύο ρεύματα εἶναι ἀντίρροπα. Ἡ φορὰ τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πέριξ τοῦ ἀγωγοῦ Β ἀντιστρέφεται. Οὕτω αἱ μερικαὶ ἐντάσεις H_1 καὶ H_2 τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἰς τὸ σημεῖον Ζ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν. Συνεπῶς ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Ζ εἶναι :

$$H = H_1 + H_2 \quad \text{ἤτοι} \quad H = (3 + 1{,}5) \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 4{,}5 \text{ Gauss}}$$

146. Πέριξ μιᾶς κυλινδρικῆς ράβδου ἐκ σιδήρου, διαμέτρου 5 cm, τυλίσσονται ἀκριβῶς 100 σπεῖραι ἑνὸς μονωμένου χαλκίνου σύρματος, τὸ ὁποῖον ἔχει διάμετρον 2 mm (ὑπολογιζομένης καὶ τῆς μονώσεώς του). Θέλομεν νὰ ἔχωμεν ὁλικὴν μαγνητικὴν ροὴν 200 000 Maxwell. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ πηνίου. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητικὴ τάσις καὶ ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ σχηματιζομένου ἠλεκτρομαγνήτου. Μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου: $\mu = 2000$. Θὰ ληφθῇ: $\pi^2 = 10$.

Τὸ σύρμα ἔχει διάμετρον $\delta = 2$ mm, ἤτοι $\delta = 0{,}2$ cm, αἱ δὲ $N = 100$ σπεῖραι τοῦ πηνίου θεωροῦμεν ὅτι εὑρίσκονται εἰς ἐπαφὴν ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην. Ὥστε τὸ μῆκος l τῆς κυλινδρικῆς ράβδου εἶναι :

$$l = (100 \cdot 0{,}2) \text{ cm} \quad \text{ἤτοι} \quad l = 20 \text{ cm}$$

1) Ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{NI}{l} \text{ (Gauss)}$$

Ἔστω S τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σπείρας.

Τότε εἶναι : $S = \pi\,(5/2)^2 \text{ cm}^2$ ἤτοι $S = 25\pi/4 \text{ cm}^2$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁλικὴ μαγνητικὴ ροὴ Φ εἶναι :

$$\Phi = \mu \cdot H \cdot S \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi = \mu \cdot \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{NI}{l} \cdot S$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{10\,\Phi \cdot l}{4\pi \cdot \mu \cdot N \cdot S} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{10 \cdot 200\,000 \cdot 20}{4\pi \cdot 2000 \cdot 100 \cdot (25\pi/4)}\ A = \frac{8}{\pi^2}\ A$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{I = 0{,}8\ A}$$

2) Ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸν ἠλεκτρομαγνήτην τοῦτον μαγνητικὴ τάσις εἶναι :

$$U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{4\pi}{10} \cdot NI \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_{\mu\alpha\gamma\nu} = 1{,}25 \cdot 100 \cdot 0{,}8 \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_{\mu\alpha\gamma\nu} = 100\ C.G.S.}$$

Ἡ δὲ μαγνητικὴ ἀντίστασις εἶναι :

$$R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{l}{\mu \cdot S} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{20}{2000 \cdot (25\,\pi/4)} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R_{\mu\alpha\gamma\nu} = 0{,}0005\ C.G.S.}$$

147. Πεταλοειδὴς ἠλεκτρομαγνήτης ἔχει μέσον μῆκος 50 cm καὶ τομὴν 10 cm², τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὁμοιόμορφον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς τῶν ἀμπεροστροφῶν, ἂν θέλωμεν ἡ φέρουσα δύναμις τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου τούτου νὰ εἶναι 50 kgr*. Μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου : $\mu = 2345$.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου πόλου τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου καὶ B ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγή, τότε ἡ φέρουσα δύναμις F (εἰς dyn) τοῦ πεταλοειδοῦς ἠλεκτρομαγνήτου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$F = \frac{2S \cdot B^2}{8\pi} \tag{1}$$

Ἡ φέρουσα δύναμις τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου θέλομεν νὰ εἶναι :

$$F = 50\ \text{kgr}^* \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 50 \cdot 981 \cdot 10^3\ \text{dyn}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ B εἶναι :

$$B^2 = \frac{8\pi \cdot F}{2S} \qquad \text{ἤτοι} \qquad B^2 = \frac{8\pi \cdot 50 \cdot 981 \cdot 10^3}{2 \cdot 10}\ (\text{Gauss})^2$$

$$\text{καὶ} \qquad B = 7840\ \text{Gauss}$$

Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου εἶναι :

$$R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

ἡ δὲ μαγνητικὴ τάσις εἶναι :

$$U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{4\pi}{10} \cdot NI = 0{,}4\,\pi \cdot NI$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ Hopkinson :

$$\Phi = \frac{U_{\mu\alpha\gamma\nu}}{R_{\mu\alpha\gamma\nu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi = \frac{0{,}4\pi \cdot NI}{\dfrac{l}{\mu \cdot S}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \Phi = \frac{0{,}4\pi \cdot (NI) \cdot \mu \cdot S}{l}$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἀμπεροστροφῶν εἶναι :

$$(NI) = \frac{\Phi \cdot l}{0{,}4\pi \cdot \mu \cdot S}$$

Ἡ μαγνητικὴ ροὴ Φ εἶναι: $\Phi = B \cdot S$. Ἄρα:

$$(NI) = \frac{B \cdot S \cdot l}{0{,}4\,\pi \cdot \mu \cdot S} \qquad \text{ἤτοι} \qquad (NI) = \frac{B \cdot l}{0{,}4\,\pi \cdot \mu}$$

$$\text{ἢ} \quad (NI) = \frac{7840 \cdot 50}{1{,}25 \cdot 2345} \text{ A - στροφαὶ} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{(NI) = 134} \textbf{ ἀμπεροστροφαὶ}$$

148. Ἕνας δακτύλιος ἐκ μαλακοῦ σιδήρου ἔχει μέσην ἀκτῖνα καμπυλότητος 10 cm καὶ τομὴν 15 cm². Ἀπὸ τὸν δακτύλιον ἀφαιρεῖται τμῆμα πάχους 2 mm. Νὰ εὑρεθῇ πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμπεροστροφῶν, ὥστε, ἂν τὸ σχηματιζόμενον πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, εἰς τὸ διάκενον τοῦ δακτυλίου νὰ ὑπάρχῃ μαγνητικὴ ροὴ ἴση μὲ 120 000 Maxwell. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ μαλακοῦ σιδήρου εἶναι: $\mu = 2310$.

Ἐὰν Φ εἶναι ἡ μαγνητικὴ ροὴ καὶ S τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ δακτυλίου, τότε εἶναι:

$$\Phi = 120\,000 \text{ Mx} \qquad \text{καὶ} \qquad S = 15 \text{ cm}^2$$

Ἔστω l_σ καὶ l_α ἀντιστοίχως τὸ μῆκος τῆς δυναμικῆς γραμμῆς ἐντὸς τοῦ σιδήρου καὶ ἐντὸς τοῦ ἀέρος (διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $\mu = 1$). Τότε ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{l_\sigma}{\mu \cdot S} + \frac{l_\alpha}{S} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \left(\frac{2\pi \cdot 10}{2310 \cdot 15} + \frac{0{,}2}{15} \right) \text{C.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \qquad R_{\mu\alpha\gamma\nu} = 0{,}0151 \text{ C.G.S}$$

Ἡ μαγνητικὴ τάσις εἶναι: $U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{4\pi}{10}(NI)$ ἤτοι $U_{\mu\alpha\gamma\nu} = 0{,}4\pi\,(NI)$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ Hopkinson:

$$\Phi = \frac{U_{\mu\alpha\gamma\nu}}{R_{\mu\alpha\gamma\nu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi = \frac{0{,}4\pi\,(NI)}{R_{\mu\alpha\gamma\nu}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἀμπεροστροφῶν εἶναι:

$$(NI) = \frac{\Phi \cdot R_{\mu\alpha\gamma\nu}}{0{,}4\pi} \qquad \text{ἤτοι} \qquad (NI) = \frac{120\,000 \cdot 0{,}0151}{1{,}25} \text{ A - στροφαὶ}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{(NI) = 1450} \textbf{ ἀμπεροστροφαὶ}$$

149. Ἕνα κυκλικὸν πηνίον φέρει 1000 σπείρας, ἡ δὲ μέση περιφέρειά του ἔχει διάμετρον Δ = 30 cm. Τὸ πηνίον τυλίσσεται ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ἐκ μαλακοῦ σιδήρου πυρῆνος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβάσωμεν διὰ τοῦ πηνίου, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν μαγνητικὴν ἐπαγωγὴν B = 18 000 Gauss. Ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι: $\mu = 80$.

Τὸ μῆκος l τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς μέσης περιφερείας τοῦ πηνίου, ἤτοι εἶναι:

$$l = 2\pi \cdot \frac{\Delta}{2} = \pi \cdot \Delta \qquad \text{ἤτοι} \qquad l = 30\,\pi \text{ cm}$$

Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

ἡ δὲ μαγνητικὴ τάσις εἶναι:

$$U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{4\pi}{10} \cdot NI \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_{\mu\alpha\gamma\nu} = 0{,}4\,\pi \cdot NI$$

Ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἶναι: $\Phi = B \cdot S$

ὅπου B εἶναι ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγή. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ Hopkinson:

$$\Phi = \frac{U_{\mu\alpha\gamma\nu}}{R_{\mu\alpha\gamma\nu}} \quad \text{ἤτοι} \quad B \cdot S = \frac{0{,}4\,\pi \cdot NI}{\dfrac{l}{\mu \cdot S}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

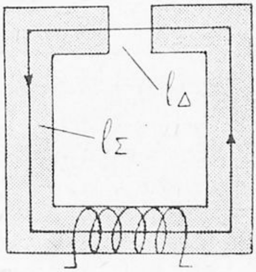
$$I = \frac{B \cdot l}{0{,}4\,\pi \cdot \mu \cdot N} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{18000 \cdot 30\,\pi}{0{,}4\,\pi \cdot 80 \cdot 1000}\,A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 16{,}875\ A}$$

150. Μαγνητικὸν κύκλωμα ἔχει σχῆμα τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη μέση πλευρὰ ἔχει μῆκος 10 cm. Ἡ τομὴ ἑκάστης πλευρᾶς εἶναι 20 cm². Εἰς τὸ μέσον τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὑπάρχει διάκενον μήκους 1 cm καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τοῦ διακένου τυλίσσονται 1000 σπεῖραι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαβιβασθῇ διὰ τοῦ πηνίου, ὥστε εἰς τὸ διάκενον νὰ ἔχωμεν μαγνητικὴν ἐπαγωγὴν ἴσην μὲ 10 000 Gauss, ἐὰν ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς τῶν δυναμικῶν γραμμῶν εἰς τὸν ἀέρα εἶναι k = 1,5, ἡ δὲ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ σιδήρου εἶναι μ = 400.

Ἡ τομὴ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἔχει ἐμβαδὸν S = 20 cm². Τὸ διάκενον (σχ 54) τοῦ πυρῆνος ἔχει μῆκος $l_\Delta = 1$ cm, ἡ δὲ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ εἰς αὐτὸ εἶναι $B_\Delta = 10\,000$ Gauss. Ἄρα εἰς τὸ διάκενον ἔχομεν μαγνητικὴν ροήν:

$$\Phi_\Delta = B_\Delta \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi_\Delta = 10^4 \cdot 20\ \text{Mx}$$

$$\text{ἢ} \quad \Phi_\Delta = 2 \cdot 10^5\ \text{Mx}$$



Σχ. 54

Εἰς τὸν πυρῆνα ἔχομεν μεγαλυτέραν μαγνητικὴν ροὴν (Φ_Σ), διότι, ὅταν αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ ἐξέρχωνται ἀπὸ τὸν πυρῆνα εἰς τὸν ἀέρα, ὑφίστανται πάντοτε διασποράν. Οὕτω ἡ μαγνητικὴ ροὴ εἰς τὸν πυρῆνα εἶναι:

$$\Phi_\Sigma = k \cdot \Phi_\Delta \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi_\Sigma = 1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^5\ \text{Mx}$$

$$\text{ἢ} \quad \Phi_\Sigma = 3 \cdot 10^5\ \text{Mx}$$

Τὸ μέσον μῆκος τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος ἐντὸς τοῦ πυρῆνος εἶναι $l_\Sigma = 39$ cm. Ἡ μαγνητικὴ ἀντίστασις ἑκάστου τμήματος τοῦ μαγνητικοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R = \frac{l_\Sigma}{\mu \cdot S} \quad \text{ἤτοι} \quad R_\Sigma = \frac{39}{400 \cdot 20} = \frac{39}{8000}\ \text{C.G.S.}$$

$$R_\Delta = \frac{l_\Delta}{S} \quad \text{ἤτοι} \quad R_\Delta = \frac{1}{20}\ \text{C.G.S.}$$

Ἡ μαγνητικὴ τάσις εἶναι:

$$U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \frac{4\pi}{10} \cdot NI \quad \text{ἤτοι} \quad U_{\mu\alpha\gamma\nu} = 0{,}4\pi \cdot NI$$

Ἐφαρμόζοντες εἰς τὸ θεωρούμενον μαγνητικὸν κύκλωμα τὸν τύπον τοῦ Hopkinson, ἔχομεν:

$$U_{\mu\alpha\gamma\nu} = \Phi_\Sigma \cdot R_\Sigma + \Phi_\Delta \cdot R_\Delta \quad \text{ἤτοι} \quad 0{,}4\pi \cdot NI = \Phi_\Sigma \cdot R_\Sigma + \Phi_\Delta \cdot R_\Delta$$

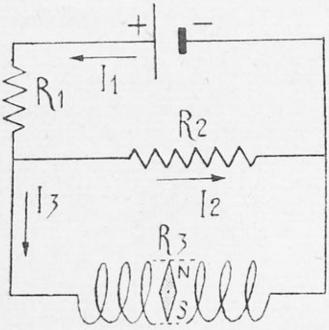
Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{\Phi_\Sigma \cdot R_\Sigma + \Phi_\Delta \cdot R_\Delta}{0{,}4\pi \cdot N} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{\left(3 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{39}{8000}\right) + \left(2 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{1}{20}\right)}{0{,}4\pi \cdot 1000}\,A$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I = 9{,}17\ A}$$

151. Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 55 ἡ γεννήτρια ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 0{,}5\ \Omega$, αἱ δὲ λοιπαὶ ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 0{,}5\ \Omega$ καὶ τοῦ πηνίου $R_3 = 49{,}5\ \Omega$. Ὁ ἄξων τοῦ πηνίου εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ, τὸ δὲ πηνίον φέρει 10 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου εὑρίσκεται μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως ἡ ὁποία, ὅταν διέρχεται τὸ ρεῦμα, ἀποκλίνει κατὰ γωνίαν α, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι εφ $\alpha = \pi/20$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας. ($H_0 = 0{,}2$ Gauss).

Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου δὲν διέρχεται ρεῦμα, τότε ὁ ἄξων τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ πηνίου, διότι ἡ μαγνητικὴ βελόνη προσανατολίζεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁριζοντίας συνιστώσης H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου (σχ. 55). Ὅταν ὅμως ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως I_1, τότε διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως I_3, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ μαγνητικὸν πεδίον, ἔχον ἔντασιν:



Σχ. 55

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I_3$$

ἤτοι $$H = \frac{4\pi}{10} \cdot 10\, I_3 \text{ Gauss}$$

καὶ $$H = 4\pi\, I_3 \text{ Gauss}$$

Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ πηνίου καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω ἡ μαγνητικὴ βελόνη λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H καὶ H_0, ἤτοι ἐκτρέπεται κατὰ γωνίαν α ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$H = H_0 \cdot \text{εφ}\, \alpha \qquad \text{ἤτοι} \qquad 4\pi\, I_3 = 0{,}2 \cdot \frac{\pi}{20}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις I_3 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, εἶναι:

$$I_3 = \frac{0{,}2}{80}\ \text{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{I_3 = \frac{1}{400}\ A}$$

Αἱ ἀντιστάσεις R_2 καὶ R_3 συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως. Ἐὰν U εἶναι ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀνωτέρω διακλαδώσεως, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

$$U = I_2 \cdot R_2 = I_3 \cdot R_3 \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad I_2 = \frac{R_3}{R_2} \cdot I_3$$

Ὥστε ἡ ἀντίστασις R_2 διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = \frac{49{,}5\ \Omega}{0{,}5\ \Omega} \cdot \frac{1}{400}\ \text{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{I_2 = \frac{99}{400}\ A}$$

Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \left(\frac{99}{400} + \frac{1}{400} \right) \text{A}$$

καὶ $$\mathbf{I_1 = 0{,}25\ A}$$

Αἱ παραλλήλως συνδεδεμέναι μεταξύ των ἀντιστάσεις R_2 καὶ R_3 ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν R', ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{0{,}5\,\Omega} + \frac{1}{49{,}5\,\Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad R' = 0{,}495\,\Omega \quad \text{ἢ} \quad R' \approx 0{,}5\,\Omega$$

Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{o\lambda} = r + R_1 + R' \quad \text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = (0{,}5 + 5 + 0{,}5)\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad R_{o\lambda} = 6\,\Omega$$

Οὕτω ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm: $E = I_1 \cdot R_{o\lambda}$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν:

$$E = 0{,}25\,A \cdot 6\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 1{,}5\,V}$$

152. Ἕνα πηνίον, πολὺ μεγάλου μήκους, ἔχει τὸν ἄξονά του κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ πηνίου ὑπάρχει μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως, ἡ ὁποία φέρει μικρὸν κοῖλον κάτοπτρον. Τὸ πηνίον ἔχει 10 σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $\frac{1}{2000}$ A. Τὸ κάτοπτρον σχηματίζει τὸ εἴδωλον τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἐπὶ βαθμολογημένου κανόνος, ὁ ὁποῖος ἀπέχει 1 m ἀπὸ τὸ κάτοπτρον. Ὅταν διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται τὸ ρεῦμα, ὁ φωτεινὸς δείκτης μετατοπίζεται ἐπὶ τοῦ κανόνος κατὰ 62,5 mm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου.

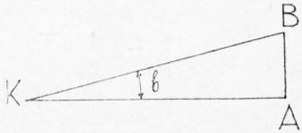
Τὸ ρεῦμα δημιουργεῖ ἐντὸς τοῦ πηνίου μαγνητικὸν πεδίον, ἔχον ἔντασιν:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad H = 1{,}25 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2000}\ \text{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H = \frac{625}{10^5}\ \text{Gauss}$$

Ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω ἡ μαγνητικὴ βελόνη λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τῶν δύο μερικῶν ἐντάσεων H καὶ H_0, δηλαδὴ ἐκτρέπεται κατὰ γωνίαν α ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$H = H_0 \cdot \varepsilon\varphi\,\alpha \quad \text{ἄρα} \quad H_0 = \frac{H}{\varepsilon\varphi\,\alpha} \qquad (1)$$



Σχ. 56

Τὸ ἐπὶ τῆς μαγνητικῆς βελόνης στερεωμένον κάτοπτρον στρέφεται καὶ αὐτὸ κατὰ γωνίαν α. Συνεπῶς ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς ἐστράφη κατὰ γωνίαν β, ἡ ὁποία εἶναι διπλασία τῆς γωνίας α, ἤτοι ἔχομεν:

$$\beta = 2\alpha \quad \text{ἄρα} \quad \alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ὁ κανὼν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κάτοπτρον KA = 1000 mm (σχ. 56). Τὸ δὲ εἴδωλον μετακινεῖται ἐπὶ τοῦ κανόνος κατὰ AB = 62,5 mm. Ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον λαμβάνομεν:

$$\varepsilon\varphi\,\beta = \frac{AB}{KA} \quad \text{ἤτοι} \quad \varepsilon\varphi\,\beta = \frac{62{,}5}{1000}$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία β εἶναι πολὺ μικρά, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν:

$$\beta = \frac{625}{10\,000}\ \text{rad} \quad \text{ἄρα} \quad \alpha = \frac{625}{20\,000}\ \text{rad}$$

Ἡ γωνία α εἶναι ἐπίσης πολὺ μικρὰ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$H_0 = \frac{H}{\alpha} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad H_0 = \frac{625/10^5}{625/20\,000}\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H_0 = 0{,}2\ Gauss}$$

153. Κυκλικὸν πλαίσιον ἔχει ἀκτῖνα 7 cm καὶ φέρει 500 σπείρας. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ καὶ εἰς τὸ κέντρον τοῦ πλαισίου ὑπάρχει μικρὰ μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως. Ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου ἐφαρμόσωμεν τάσιν 2 V, ἡ βελόνη ἀποκλίνει κατὰ 65⁰. Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου; ($H_0 = 0{,}2$ Gauss).

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ πλαισίου, τότε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{U}{R}$$

Τὸ πλαίσιον ἔχει ἀκτῖνα $r = 7$ cm καὶ φέρει $N = 500$ σπείρας. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου ἡ ἔντασις τοῦ δημιουργουμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$H = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{NI}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{N}{r} \cdot \frac{U}{R} \qquad (1)$$

Ἡ ἔντασις H εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου καὶ συνεπῶς εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ γωνίαν $\alpha = 65^0$ καὶ τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$H = H_0 \cdot \text{εφ}\ \alpha \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{2\pi}{10} \cdot \frac{N}{r} \cdot \frac{U}{R} = H_0 \cdot \text{εφ}\ \alpha$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R τοῦ πλαισίου εἶναι :

$$R = \frac{2\pi \cdot N \cdot U}{10r \cdot H_0 \cdot \text{εφ}\ \alpha} \quad \text{ἤτοι} \quad R = \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 2}{10 \cdot 7 \cdot 0{,}2 \cdot 2{,}145}\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 209\ \Omega}$$

154. Κυκλικὸν πλαίσιον φέρει εἰς τὸ κέντρον του μικρὰν μαγνητικὴν βελόνην ἀποκλίσεως. Τὸ ἐπίπεδον τοῦ πλαισίου συμπίπτει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Τὸ πλαίσιον συνδέεται κατὰ σειρὰν μὲ συστοιχίαν ἀποτελουμένην ἐκ δύο μόνον γεννητριῶν. Ὅταν αἱ δύο γεννήτριαι εἶναι συνδεδεμέναι κατὰ σειράν, ἡ βελόνη ἐκτρέπεται κατὰ 62⁰, ἐνῶ, ὅταν αἱ γεννήτριαι συνδέωνται κατ' ἀντίθεσιν, ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης γίνεται 28⁰. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν δύο γεννητριῶν.

Αἱ ἠλεκτρεγερτικαὶ δυνάμεις τῶν δύο γεννητριῶν εἶναι E_1 καὶ E_2. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $E_1 > E_2$. Εἰς τὰς δύο θεωρουμένας περιπτώσεις ἡ ὁλικὴ ἀντιστάσεις R τοῦ κυκλώματος διατηρεῖται σταθερά. Ὅταν αἱ δύο γεννήτριαι συνδέωνται κατὰ σειράν, τότε ἡ συστοιχία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_1 + E_2$ καὶ τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{E_1 + E_2}{R} \qquad (1)$$

Ὅταν αἱ δύο γεννήτριαι συνδέωνται κατ' ἀντίθεσιν, τότε ἡ συστοιχία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_1 - E_2$ καὶ τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{R} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), λαμβάνομεν :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} \qquad (3)$$

Εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου εἶναι ἀντιστοίχως :

$$H_1 = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu I_1 \quad \text{καὶ} \quad H_2 = \frac{4\pi}{10} \cdot \nu I_2 \quad \text{ἄρα} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{I_1}{I_2} \qquad (4)$$

Ἡ μαγνητικὴ βελόνη εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων ἐκτρέπεται ἀντιστοίχως κατὰ γωνίαν $\alpha_1 = 62^0$ καὶ $\alpha_2 = 28^0$. Τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

$$H_1 = H_0 \cdot \text{εφ}\,\alpha_1 \quad \text{καὶ} \quad H_2 = H_0 \cdot \text{εφ}\,\alpha_2 \quad \text{ἄρα} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{\text{εφ}\,\alpha_1}{\text{εφ}\,\alpha_2} \qquad (5)$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\text{εφ}\,\alpha_1}{\text{εφ}\,\alpha_2} \qquad (6)$$

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (6), εὑρίσκομεν :

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{\text{εφ}\,\alpha_1}{\text{εφ}\,\alpha_2}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων τῶν δύο γεννητριῶν εἶναι :

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\text{εφ}\,\alpha_1 + \text{εφ}\,\alpha_2}{\text{εφ}\,\alpha_1 - \text{εφ}\,\alpha_2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\text{εφ}\,62^0 + \text{εφ}\,28^0}{\text{εφ}\,62^0 - \text{εφ}\,28^0}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{1{,}881 + 0{,}532}{1{,}881 - 0{,}532} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{\frac{E_1}{E_2} = 1{,}79}$$

155. Μαγνητικὴ βελόνη ἀποκλίσεως δύναται νὰ αἰωρῆται ὁριζοντίως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὁριζοντίου σωληνοειδοῦς, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 25 cm καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας· ὁ ἄξων του εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ὅταν διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς δὲν διέρχεται ρεῦμα, ἡ βελόνη, ἀπομακρυνομένη ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της, αἰωρεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἐκτελεῖ 10 πλήρεις αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Διαβιβάζομεν διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς ρεῦμα ἐντάσεως 1 A καὶ φορᾶς τοιαύτης, ὥστε ὁ βόρειος πόλος τῆς βελόνης νὰ ἐκτελῇ τότε 51 πλήρεις αἰωρήσεις κατὰ λεπτόν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς τὸν τόπον τοῦ πειράματος. Πόσας αἰωρήσεις κατὰ λεπτὸν θὰ ἐκτελέσῃ ἡ βελόνη, ἐὰν ἀντιστραφῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔντασίς του;

Ἔστω H_0 ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ὅταν ἡ μαγνητικὴ βελόνη αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἀνωτέρω συνιστώσης H_0, τότε ἡ περίοδος τῶν ταλαντώσεων αὐτῆς δίδεται ἀπὸ τὸν γνωστὸν τύπον :

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot H_0}}$$

ὅπου Θ καὶ M_M εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς μαγνητικῆς βελόνης. Δίδεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι :

$$T_0 = \frac{60}{10}\ \text{sec} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{60}{10} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot H_0}} \qquad (1)$$

Ὅταν διὰ τοῦ σωληνοειδοῦς διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως $I = 1$ A τότε ἐντὸς αὐτοῦ δημιουργεῖται μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως :

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{N}{l} \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{100}{25} \cdot 1 \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad H = 5 \text{ Gauss}$$

Ἡ ἔντασις H ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ σωληνοειδοῦς καὶ συνεπῶς εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ μαγνητικοῦ μεσημβρινοῦ. Ὅταν λοιπὸν τὸ σωληνοειδὲς διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, τότε ἡ μαγνητικὴ βελόνη αἰωρεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἐντάσεων H_0 καὶ H. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς ἔχει τὴν φορὰν τῆς H_0, τότε ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης γίνεται $T_1 = \frac{60}{51}$ sec καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot (H_0 + H)}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{60}{51} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot (H_0 + H)}} \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{51}{10} = \sqrt{\frac{H_0 + H}{H_0}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{51}{10} = \sqrt{\frac{H_0 + 5}{H_0}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα H_0 τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι :

$$\mathbf{H_0 = 0{,}2 \text{ Gauss}}$$

Ἐὰν ἀντιστραφῇ ἡ φορὰ τοῦ ρεύματος, τότε ἀντιστρέφεται καὶ ἡ φορὰ τῆς ἐντάσεως H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ σωληνοειδοῦς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι :

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot (H - H_0)}} \qquad (3)$$

Ἐὰν N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν αἰωρήσεων, τὰς ὁποίας ἐκτελεῖ ἡ μαγνητικὴ βελόνη κατὰ λεπτόν, τότε ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται :

$$\frac{60}{N} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot (H - H_0)}} \qquad (4)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (4), εὑρίσκομεν :

$$\frac{N}{10} = \sqrt{\frac{H - H_0}{H_0}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{N}{10} = \sqrt{\frac{5 - 0{,}2}{0{,}2}} = \sqrt{\frac{4{,}8}{0{,}2}}$$

ἄρα **N = 49 αἰωρήσεις/min**

ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΠΙ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

156. Εὐθύγραμμον σύρμα, μήκους 12 cm, διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 4 A καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 200 Gauss. Τὸ σύρμα εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Πόση εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ σύρματος ἀναπτυσσομένη ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις;

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ δύναμις F δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Laplace :

$$F = \frac{1}{10} \cdot I \cdot H \cdot l \text{ dyn}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$$l = 12 \text{ cm} \qquad I = 4 \text{ A} \qquad \text{καὶ} \qquad H = 200 \text{ Gauss}$$

εὑρίσκομεν : $$F = \frac{1}{10} \cdot 4 \cdot 200 \cdot 12 \text{ dyn} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{F = 960\ dyn}$$

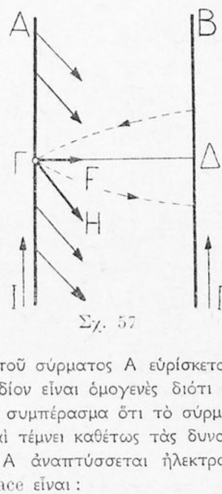
157. Δύο εὐθύγραμμα σύρματα μήκους 40 cm εἶναι παράλληλα καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 4 cm. Τὰ σύρματα διαρρέονται ἀπὸ ὁμόρροπα ρεύματα ἐντάσεως 2 A. Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑκάστου σύρματος, ἕνεκα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ἄλλου ρεύματος;

Ἔστω ὅτι τὰ δύο εὐθύγραμμα καὶ παράλληλα σύρματα εἶναι κατακόρυφα (σχ. 57). Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι ΓΔ = α = 4 cm, τὸ δὲ μῆκος των εἶναι $l = 40$ cm. Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς ἕκαστον τῶν συρμάτων εἶναι I = 2 A. Πέριξ ἑκάστου ρεύματος δημιουργεῖται μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν ἔχει ἔντασιν :

$$H = \frac{2}{10} \cdot \frac{I}{\alpha} \text{ Gauss}$$

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Γ τοῦ σύρματος Α. Τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸ σύρμα Β παράγει εἰς τὸ σημεῖον Γ μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως :

$$H = \frac{2}{10} \cdot \frac{I}{\alpha} \text{ Gauss} \qquad \text{ἢ} \qquad H = \frac{2 \cdot 2}{10 \cdot 4} = 0{,}1 \text{ Gauss}$$



Σχ. 57

Ἡ ἔντασις Η εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ δύο παράλληλα σύρματα Α καὶ Β. Ὅ,τι ἐλέχθη διὰ τὸ σημεῖον Γ ἰσχύει καὶ δι᾽ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σύρματος Α, διότι ὁλόκληρον τὸ σύρμα Α εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ τὸ σύρμα Β. Οὕτω κάθε σημεῖον τοῦ σύρματος Α εὑρίσκεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η. Τὸ μαγνητικὸν τοῦτο πεδίον εἶναι ὁμογενὲς διότι ἡ ἔντασις Η εἶναι σταθερά. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ σύρμα Α εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η καὶ τέμνει καθέτως τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄρα ἐπὶ τοῦ σύρματος Α ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Laplace εἶναι :

$$F = \frac{1}{10} \cdot I \cdot H \cdot l \text{ dyn}$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν :

$$I = 2 \text{ A} \qquad H = 0{,}1 \text{ Gauss} \qquad l = 40 \text{ cm}$$

εὑρίσκομεν : $$F = \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot 0{,}1 \cdot 40 \text{ dyn} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{F = 0{,}8\ dyn}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἐμπειρικοῦ κανόνος τῶν τριῶν δακτύλων εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΗ καὶ ἔχει φορὰν ἐκ τοῦ σύρματος Α πρὸς τὸ σύρμα Β, ἤτοι τὸ σύρμα Α ἕλκεται ἀπὸ τὸ σύρμα Β μὲ δύναμιν :

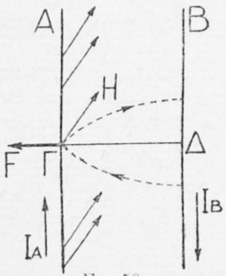
$$F = 0{,}8 \text{ dyn}$$

Τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς ἰσχύουν καὶ διὰ τὸ σύρμα Β, διότι κάθε σημεῖον τοῦ σύρματος Β εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖ τὸ ρεῦμα Α. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι καὶ τὸ σύρμα Β ἕλκεται ἀπὸ τὸ σύρμα Α μὲ δύναμιν F = 0,8 dyn. Ὥστε τὰ δύο παράλληλα καὶ ὁμόρροπα ρεύματα Α καὶ Β ἕλκονται ἀμοιβαίως μὲ δύναμιν :

$$F = 0{,}8 \text{ dyn}$$

158. Δύο εὐθύγραμμα σύρματα Α καὶ Β, μήκους 25 cm, εἶναι παράλληλα καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 4 cm. Τὰ σύρματα διαρρέονται ἀπὸ ἀντίρροπα ρεύματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως ἐντάσεις $I_A = 20$ A καὶ $I_B = 26$ A. Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ ἑκάστου σύρματος, ἕνεκα τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ἄλλου ρεύματος;

Ἔστω ὅτι τὰ δύο εὐθύγραμμα καὶ παράλληλα σύρματα εἶναι κατακόρυφα (σχ. 58). Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι ΓΔ = α = 4 cm, τὸ δὲ μῆκος των εἶναι $l = 25$ cm. Τὰ δύο σύρματα διαρρέονται ἀπὸ ἀντίρροπα ρεύματα. Πέριξ ἑκάστου ρεύματος δημιουργεῖται μαγνητικὸν πεδίον, τὸ ὁποῖον εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸν ἀγωγὸν ἔχει ἔντασιν:



Σχ. 58

$$H = \frac{2}{10} \cdot \frac{I}{\alpha} \text{ Gauss}$$

Τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸ σύρμα Β παράγει εἰς τὸ σημεῖον Γ τοῦ σύρματος Α μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως:

$$H = \frac{2}{10} \cdot \frac{I_B}{\alpha} \text{ Gauss} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{2}{10} \cdot \frac{26}{4} = 1{,}3 \text{ Gauss}$$

Ἡ ἔντασις Η εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ δύο παράλληλα σύρματα Α καὶ Β. Οὕτω κάθε σημεῖον τοῦ σύρματος Α εὑρίσκεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η, τὸ δὲ σύρμα Α τέμνει καθέτως τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ ὁμογενοῦς τούτου μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄρα ἐπὶ τοῦ σύρματος Α ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Laplace εἶναι:

$$F = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I_A \cdot l \text{ dyn} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{1}{10} \cdot 1{,}3 \cdot 20 \cdot 25 \text{ dyn} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{F = 65 \text{ dyn}}$$

Ἡ δύναμις F εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΗ καὶ ἔχει τοιαύτην φοράν, ὥστε τείνει νὰ ἀπομακρύνῃ τὸ σύρμα Α ἀπὸ τὸ σύρμα Β. Ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος Β καὶ οὕτω τὰ δύο παράλληλα καὶ ἀντίρροπα ρεύματα ἀπωθοῦνται ἀμοιβαίως μὲ δύναμιν: F = 65 dyn.

159. Σύρμα μήκους 40 cm διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 15 A. Τὸ σύρμα εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ σύρματος ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις, ὅταν τὸ σύρμα σχηματίζῃ μὲ τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γωνίας 90°, 60° καὶ 30°.

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ σύρματος ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς δυνάμεως F δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$F = \frac{1}{10} \cdot l \cdot I \cdot H \cdot \text{ημ}\,\varphi$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $l = 40$ cm, $I = 15$ A καὶ $H = 1000$ Gauss

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F εἶναι:

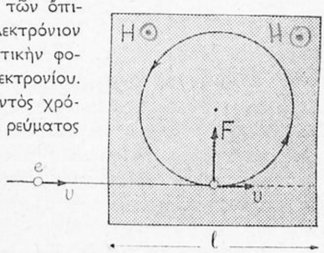
διὰ $\varphi = 90^0$: $F = \frac{1}{10} \cdot 40 \cdot 15 \cdot 1000 \cdot \text{ημ}\,90^0$ dyn καὶ **F = 60 000 dyn**

διὰ $\varphi = 60^0$: $F = \frac{1}{10} \cdot 40 \cdot 15 \cdot 1000 \cdot \text{ημ}\,60^0$ dyn καὶ **F = 51 900 dyn**

διὰ $\varphi = 30^0$: $F = \frac{1}{10} \cdot 40 \cdot 15 \cdot 1000 \cdot \text{ημ}\,30^0$ dyn καὶ **F = 30 000 dyn**

160. Ἠλεκτρόνιον κινούμενον μὲ ταχύτητα 200 000 km/sec εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τὸ φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $1,6 \cdot 10^{-19}$ Cb, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι 4000 Gauss. Πόση εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις;

Τὸ ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $H = 4 \cdot 10^3$ Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Εἰς τὸ σχῆμα 59 αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος καὶ ἔχουν φορὰν ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τοῦ σχήματος. Τὸ κινούμενον ἠλεκτρόνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει συμβατικὴν φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου. Οὕτω ἔχομεν ὅτι δι' ἑνὸς ἀγωγοῦ μήκους l διέρχεται ἐντὸς χρόνου t ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = e$. Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τούτου εἶναι:



Σχ. 59

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{e}{t} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν: $\quad l = \upsilon \cdot t \qquad (2)$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι:

$$t = \frac{e}{I} = \frac{l}{\upsilon} \quad \text{ἄρα} \quad I \cdot l = e \cdot \upsilon \qquad (3)$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Laplace ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ, δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ κινουμένου ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ ἡ σταθερὰ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις:

$$F = \frac{1}{10} \cdot l \cdot I \cdot H \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{1}{10} \cdot e \cdot \upsilon \cdot H \ (\text{dyn}) \qquad (4)$$

Ἡ δύναμις F εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ πρὸς τὴν ἔντασιν H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Συνεπῶς ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς κεντρομόλος δύναμις, ἕνεκα τῆς ὁποίας τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κυκλικὴν τροχιάν, ἔχουσαν ἀκτῖνα καμπυλότητος r. Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (5)$$

Ἡ ζητουμένη ἔντασις τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) ὅτι εἶναι:

$$F = \frac{1}{10} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (2 \cdot 10^{10}) \cdot (4 \cdot 10^3) \ \text{dyn}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{F = 12,8 \cdot 10^{-7}\ dyn}$$

161. Σύρμα μήκους 40 cm διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A καὶ μετακινεῖται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss. Ἡ ταχύτης μετακινήσεως τοῦ σύρματος εἶναι 2 m/sec. Πόσον εἶναι τὸ ἔργον τῆς ἠλεκρομαγνητικῆς δυνάμεως κατὰ δευτερόλεπτον;

Τὸ σύρμα ἔχει μῆκος $l = 40$ cm καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ A, τὸ δὲ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν $H = 1000$ Gauss. Τὸ σύρμα μετακινεῖται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 200$ cm/sec καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω κατὰ δευτερόλεπτον τὸ σύρμα διαγράφει μίαν ἐπιφάνειαν, ἔχουσαν ἐμβαδόν:

$$S = l \cdot \upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad S = 40\ \text{cm} \cdot 200\ \text{cm/sec} \quad \text{καὶ} \quad S = 8000\ \text{cm}^2/\text{sec}$$

Ἡ μετακίνησις αὐτὴ τοῦ σύρματος προκαλεῖ μεταβολὴν τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἴσην μέ:

$$\Delta\Phi = H \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\Phi = 1000 \text{ Gauss} \cdot 8000 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta\Phi = 8 \cdot 10^6 \text{ Mx/sec}$$

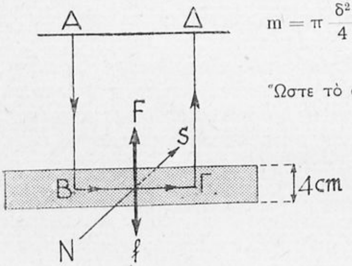
Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἔργον (W) τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως δίδεται ἀπὸ τὸν ἀκόλουθον τύπον τοῦ Maxwell:

$$W = \frac{1}{10^8} \cdot I \cdot \Delta\Phi \text{ Joule} \quad \text{ἄρα} \quad W = \frac{1}{10^8} \cdot 10 \cdot 8 \cdot 10^6 \text{ Joule/sec}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W = 0{,}8 \text{ Joule/sec}}$$

162. Ἕνα εὐθύγραμμον χάλκινον σύρμα ΒΓ, μήκους 10 cm καὶ διαμέτρου 1,5 mm, ἐξαρτᾶται μὲ δύο μετάλλινα σύρματα ΑΒ καὶ ΔΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι λίαν εὔκαμπτα καὶ ἔχουν μᾶζαν ἀσήμαντον. Διαβιβάζομεν ρεῦμα κατὰ τὴν φορὰν ΑΒΓΔ. Πεταλοειδὴς μαγνήτης δημιουργεῖ μεταξὺ τῶν δύο μακρῶν βραχιόνων του ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον ἐντάσεως 400 Gauss. Τὸ πάχος ἑκάστου βραχίονος εἶναι 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ μαγνήτης, ὥστε τὸ τμῆμα ΒΓ νὰ δύναται νὰ ἀνυψωθῇ ἀπὸ μίαν κατακόρυφον ἠλεκτρομαγνητικὴν δύναμιν. Πόση εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ παρατηρηθῇ ἡ ἀνύψωσις αὐτή; Ἡ ἐπίδρασις τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου παραλείπεται.
Πυκνότης χαλκοῦ: 8,85 gr/cm³.

Τὸ σύρμα ΒΓ ἔχει διάμετρον: $\delta = 0{,}15$ cm, μῆκος $l = 10$ cm καὶ πυκνότητα $d = 8{,}85$ gr/cm³. Ἄρα ἡ μᾶζα m τοῦ σύρματος ΒΓ εἶναι:



Σχ. 60

$$m = \pi \frac{\delta^2}{4} \cdot l \cdot d \quad \text{ἤτοι} \quad m = 3{,}14 \cdot \frac{0{,}15^2}{4} \cdot 10 \cdot 8{,}85 \text{ gr}$$

$$\text{καὶ} \quad m = 1{,}58 \text{ gr}$$

Ὥστε τὸ σύρμα ΒΓ ἔχει βάρος:

$$f = 1{,}58 \text{ gr}^*$$

$$\text{ἤτοι} \quad f = 1{,}58 \cdot 981 \approx 1550 \text{ dyn}$$

Τὸ σύρμα ΒΓ εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου. Ὅταν τὸ σύρμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε ἐπὶ τοῦ σύρματος τούτου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος καὶ πρὸς τὴν ἔντασιν H = 400 Gauss τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Διὰ νὰ εἶναι ἡ δύναμις F κατακόρυφος, πρέπει ἡ διεύθυνσις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ μὲν βόρειος πόλος (N) τοῦ μαγνήτου εἶναι ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος 60, ὁ δὲ νότιος πόλος (S) εὑρίσκεται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος. Τὸ γήινον μαγνητικὸν πεδίον παραλείπεται. Διὰ νὰ ἀνυψωθῇ τὸ σύρμα ΒΓ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς κατακορύφου δυνάμεως F πρέπει νὰ εἶναι:

$$F > f \quad \text{ἤτοι} \quad F > 1550 \text{ dyn}$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ σύρματος ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F ἔχει ἔντασιν:

$$F = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I \cdot l \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{1}{10} \cdot 400 \cdot I \cdot 10 \text{ dyn}$$

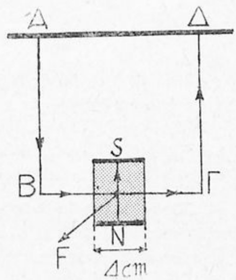
$$\text{καὶ} \quad F = 400\,I \text{ dyn}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἔντασις I τοῦ ρεύματος πρέπει νὰ εἶναι τόση, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$400\,I > 1550 \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{I > 3{,}875\ A}$$

163. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα 162 νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ τοποθετηθῇ ὁ μαγνήτης, ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ νὰ ἀπομακρυνθῇ κατὰ γωνίαν α ἀπὸ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον ΑΒΓΔ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο. Ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 0,1 A, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριζοντία μετατόπισις x τοῦ σύρματος ΒΓ. Τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν συρμάτων ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσον μὲ 1 m.

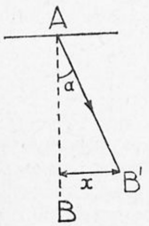
Διὰ νὰ εἶναι ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F κάθετος πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, πρέπει ἡ διεύθυνσις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου νὰ εἶναι κατακόρυφος. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν οἱ δύο βραχίονες τοῦ μαγνήτου εἶναι ὁριζόντιοι καὶ ὁ μὲν ἕνας πόλος τοῦ μαγνήτου εἶναι ἄνωθεν τοῦ σύρματος ΒΓ, ὁ δὲ ἄλλος πόλος τοῦ μαγνήτου εἶναι κάτωθεν τοῦ σύρματος (σχ. 61). Οἱ βραχίονες τοῦ μαγνήτου εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ σύρμα ΒΓ. Καθ' ὅσον δὲ τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει φορὰν πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω, ἡ ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F θὰ ἔχῃ φορὰν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν ἢ πρὸς τὰ ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτήν, ἐπειδὴ τὸ πάχος τῶν βραχιόνων τοῦ μαγνήτου εἶναι 4 cm, ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εὑρίσκεται μῆκος τοῦ σύρματος ΒΓ ἴσον μὲ $l = 4$ cm. Ἄρα ἡ ὁριζοντία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F ἔχει ἔντασιν:



Σχ. 61

$$F = \frac{1}{10}\cdot H \cdot I \cdot l \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = \frac{1}{10}\cdot 400 \cdot 0{,}1 \cdot 4\ \text{dyn}$$

$$\text{καὶ} \qquad F = 16\ \text{dyn}$$



Σχ. 61 α

Τὸ σύρμα ΒΓ εὕρομεν (βλ. προβλ. 162) ὅτι ἔχει βάρος f = 1550 dyn. Ἡ γωνία α κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτρέπεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ κυκλώματος εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\text{εφ}\,\alpha = \frac{F}{f} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{\text{εφ}\,\alpha = \frac{16}{1550}}$$

Ἡ ὁριζοντία μετατόπισις x τοῦ σύρματος ΒΓ (σχ. 61 α) προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$x = (AB')\cdot \text{ημ}\,\alpha$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία α εἶναι πολὺ μικρά, δυνάμεθα κατὰ προσέγγισιν νὰ λάβωμεν εφ α = ημ α
Ἄρα ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γράφεται:

$$x = (AB')\cdot \text{εφ}\,\alpha = 100\ \text{cm}\cdot \frac{16}{1550} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{x = 1{,}04\ cm}$$

ΟΡΓΑΝΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

164. Ἕνα γαλβανόμετρον ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρθογώνιον κινητὸν πλαίσιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 4 cm, πλάτος 2 cm καὶ φέρει 500 σπείρας. Τὸ πλαίσιον στρέφεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss. Νὰ εὑρεθῇ συναρτήσει τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ κινητοῦ πλαισίου.

Ἕκαστον κατακόρυφον σύρμα τοῦ πλαισίου ἔχει μῆκος $l = 4$ cm. Ὅταν τὸ σύρμα τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις :

$$f = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I \cdot l \quad \text{ἤτοι} \quad f = \frac{1}{10} \cdot 1000 \cdot I \cdot 4 \text{ dyn} \quad \text{καὶ} \quad f = 400\, I \text{ dyn}$$

Κάθε κατακόρυφος πλευρὰ τοῦ πλαισίου φέρει 500 σύρματα. Ἄρα ἐπὶ ἑκάστης κατακορύφου πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἐνεργεῖ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$F = 500 \cdot f \quad \text{ἤτοι} \quad F = 2 \cdot 10^5 \cdot I \text{ dyn}$$

Αἱ ἐπὶ τῶν δύο κατακορύφων πλευρῶν τοῦ πλαισίου ἐνεργοῦσαι δυνάμεις ἀποτελοῦν ζεῦγος δυνάμεων. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων δυνάμεων εἶναι $d = 2$ cm. Συνεπῶς ἡ ροπὴ (M) τοῦ ἀναπτυσσομένου ἐπὶ τοῦ πλαισίου ζεύγους εἶναι :

$$M = F \cdot d \quad \text{ἤτοι} \quad M = 2 \cdot 10^5 \cdot I \cdot 2 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{M = 4 \cdot 10^5 \cdot I \text{ dyn} \cdot \text{cm}}$$

165. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα 164 τὸ κινητὸν πλαίσιον εἶναι στερεωμένον εἰς σύρματα στρέψεως τὰ ὁποῖα, ὅταν στρέφεται τὸ πλαίσιον, ἀναπτύσσουν ἕνα ἀνταγωνιζόμενον ζεῦγος. Ἡ κατευθύνουσα ροπὴ τοῦ ζεύγους τούτου εἶναι 20 μονάδες ροπῆς C.G.S. κατὰ ἀκτίνιον. Ἐὰν τὸ πλαίσιον στραφῇ κατὰ γωνίαν $\varphi = 0{,}008$ rad, πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος;

Ὅταν τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν $\varphi = 0{,}008$ rad, τότε ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ πλαισίου ροπὴ $M = 4 \cdot 10^5 \cdot I$ C.G.S. ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὴν ροπὴν τοῦ ἐπὶ τῶν συρμάτων ἐξαρτήσεως τοῦ πλαισίου ἀναπτυσσομένου ζεύγους στρέψεως. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$M = D \cdot \varphi$$

ὅπου D εἶναι ἡ διδομένη κατευθύνουσα ροπὴ τοῦ ζεύγους στρέψεως. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$4 \cdot 10^5 \cdot I = 20 \cdot 0{,}008 \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{20 \cdot 0{,}008}{4 \cdot 10^5} \text{ A}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I = \frac{0{,}4}{10^6} \text{ A} = 0{,}4\, \mu\text{A}}$$

166. Εἰς ἕνα γαλβανόμετρον τὸ ὀρθογώνιον κινητὸν πλαίσιον ἔχει ὕψος 4,5 cm καὶ πλάτος 1,80 cm. Τὸ πλαίσιον φέρει 90 σπείρας καὶ στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 300 Gauss. Πόση εἶναι ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ πλαισίου, ὅταν τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 200 μA;

Ἕκαστον κατακόρυφον σύρμα τοῦ κινητοῦ πλαισίου ἔχει ὕψος $l = 4{,}5$ cm. Ὅταν τὸ σύρμα τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 200 \cdot 10^{-6}$ A, τότε ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ σύρματος μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις f, ἡ ὁποία εἶναι :

$$f = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I \cdot l \quad \text{ἤτοι} \quad f = \frac{1}{10} \cdot 300 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}5 \text{ dyn}$$

$$\text{καὶ} \quad f = 27 \cdot 10^{-3} \text{ dyn}$$

Ἐπειδὴ κάθε κατακόρυφος πλευρὰ τοῦ πλαισίου φέρει 90 σύρματα, ἕπεται ὅτι ἐπὶ ἑκάστης κατακορύφου πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἐνεργεῖ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι :

$$F = 90 \cdot f \quad \text{ἤτοι} \quad F = 90 \cdot 27 \cdot 10^{-3} \text{ dyn} \quad \text{καὶ} \quad F = 2{,}43 \text{ dyn}$$

Αἱ ἐπὶ τῶν δύο κατακορύφων πλευρῶν τοῦ πλαισίου ἐνεργοῦσαι δυνάμεις ἀποτελοῦν ζεῦγος. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων δυνάμεων εἶναι $d = 1{,}80$ cm. Ἄρα ἡ ροπὴ (M) τοῦ ἀναπτυσσομένου ἐπὶ τοῦ πλαισίου ζεύγους εἶναι :

$$M = F \cdot d \quad \text{ἤτοι} \quad M = 2{,}43 \text{ dyn} \cdot 1{,}80 \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{M = 4{,}37 \text{ dyn} \cdot \text{cm}}$$

167. Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει : α) μίαν γεννήτριαν, ἔχουσαν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,3 Ω· β) ἕνα γαλβανόμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 499,5 Ω. Οἱ χρησιμοποιούμενοι διὰ τὴν σύνδεσιν ἀγωγοὶ ἔχουν συνολικῶς ἀντίστασιν 0,2 Ω. Μεταξὺ τῶν ἀκροδεκτῶν τοῦ γαλβανομέτρου τοποθετεῖται διακλάδωσις, ἔχουσα ἀντίστασιν 0,5 Ω. Τὸ πλαίσιον τοῦ γαλβανομέτρου ἔχει ὕψος 6 cm, πλάτος 5 cm, φέρει 100 σπείρας καὶ στρέφεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 240 Gauss. Τὸ σύρμα, μὲ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται τὸ πλαίσιον, ἔχει κατευθύνουσαν ροπὴν 7,2 gr* · cm/rad. Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ μετατοπισθῇ ὁ φωτεινὸς δείκτης ἐπὶ μιᾶς κλίμακος εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν 1 m.

Τὸ γαλβανόμετρον καὶ ἡ διακλάδωσίς του ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν R', ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{499{,}5\,\Omega} + \frac{1}{0{,}5\,\Omega} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R' \approx 0{,}5\,\Omega$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = (0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}5)\,\Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{o\lambda} = 1\,\Omega$$

Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = \frac{E}{R_{o\lambda}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{2\,V}{1\,\Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I = 2\,A$$

Ἔστω I_Γ καὶ I_Δ ἀντιστοίχως ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ γαλβανόμετρον καὶ τὴν διακλάδωσιν. Τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις :

$$I_\Gamma \cdot 499{,}5 = I_\Delta \cdot 0{,}5 \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{I_\Gamma}{I_\Delta} = \frac{0{,}5}{499{,}5} = \frac{1}{999}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν λαμβάνομεν :

$$\frac{I_\Gamma}{I_\Delta + I_\Gamma} = \frac{1}{1000} \qquad \text{ἄρα} \qquad I_\Gamma = \frac{I_\Delta + I_\Gamma}{1000} = \frac{I}{1000}$$

$$\text{καὶ} \qquad I_\Gamma = \frac{2\,A}{1000} = 0{,}002\,A$$

Τὸ σύρμα ἑκάστης κατακορύφου πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἔχει μῆκος $l = 6$ cm καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I_\Gamma = 0{,}002$ A. Ἐπὶ τοῦ σύρματος τούτου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις :

$$f = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I_\Gamma \cdot l \qquad \text{ἤτοι} \qquad f = \frac{1}{10} \cdot 240 \cdot 0{,}002 \cdot 6\ \text{dyn} \qquad \text{καὶ} \qquad f = 0{,}288\ \text{dyn}$$

Κάθε κατακόρυφος πλευρὰ τοῦ πλαισίου φέρει 100 σύρματα. Ἑπομένως ἐπὶ ἑκάστης κατακορύφου πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἀναπτύσσεται δύναμις :

$$F = 100 \cdot f \qquad \text{ἤτοι} \qquad F = 100 \cdot 0{,}288\ \text{dyn} = 28{,}8\ \text{dyn}$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κατακορύφων πλευρῶν τοῦ πλαισίου εἶναι $d = 5$ cm. Ἄρα ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ πλαισίου, εἶναι :

$$M = F \cdot d \qquad \text{ἤτοι} \qquad M = 28{,}8\ \text{dyn} \cdot 5\ \text{cm} \qquad \text{καὶ} \qquad M = 144\ \text{dyn} \cdot \text{cm}$$

Ἡ ροπὴ αὐτὴ M προκαλεῖ στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ γωνίαν φ καὶ ἰσορροπεῖται ἀπὸ τὴν ροπὴν τοῦ ζεύγους στρέψεως τοῦ σύρματος μὲ τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται τὸ πλαίσιον. Τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$M = D \cdot \varphi$$

ὅπου D εἶναι ἡ κατευθύνουσα ροπὴ τοῦ σύρματος ἐξαρτήσεως τοῦ πλαισίου.

Δίδεται ὅτι εἶναι : $D = 7{,}2\ \text{gr}^* \cdot \text{cm/rad}$ ἤτοι $D = 7063{,}2\ \text{dyn} \cdot \text{cm/rad}$

Ἄρα τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν:

$$\varphi = \frac{M}{D} \quad \text{ἤτοι} \quad \varphi = \frac{144 \text{ dyn} \cdot \text{cm}}{7063{,}2 \text{ dyn} \cdot \text{cm/rad}} \quad \text{καὶ} \quad \varphi \approx 0{,}02 \text{ rad}$$

Ἡ φωτεινὴ ἀκτίς, ἡ ἀνακλωμένη ἐπὶ τοῦ κατόπτρου τοῦ πλαισίου, στρέφεται κατὰ διπλασίαν γωνίαν, ἤτοι στρέφεται κατὰ γωνίαν:

$$\beta = 2\varphi = 0{,}04 \text{ rad}$$

Ἐπὶ τῆς κλίμακος, τῆς εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν $\delta = 100$ cm ἀπὸ τὸ κάτοπτρον, ὁ φωτεινὸς δείκτης μετατοπίζεται κατὰ x καὶ τότε ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$x = \delta \cdot \text{εφ}\, \beta \quad \text{ἢ} \quad x = \delta \cdot \beta$$

διότι ἡ γωνία β εἶναι πολὺ μικρά. Ἄρα ἡ ζητουμένη μετατόπισις τοῦ φωτεινοῦ δείκτου εἶναι:

$$x = 100 \text{ cm} \cdot 0{,}04 \text{ rad} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{x = 4\ cm}$$

168. Ὅταν διαδιβάσωμεν ρεῦμα ἐντάσεως 0,1 A διὰ τοῦ πλαισίου μιᾶς πυξίδος τῶν ἐφαπτομένων, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μαγνητικὴ βελόνη, πρὶν ἰσσοροπήσῃ εἰς μίαν σταθερὰν ἀπόκλισιν 45°, ἐκτελεῖ 10 αἰωρήσεις ἐντὸς 12 sec. Πόση θὰ γίνῃ ἡ ἀπόκλισις καὶ ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης, ἂν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττωθῇ εἰς 0,05 A;

Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος λαμβάνει τὰς τιμὰς $I_1 = 0{,}1$ A καὶ $I_2 = 0{,}05$ A. Εἰς τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος λαμβάνει τότε τὰς ἀντιστοίχους τιμάς:

$$H_1 = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{I_1}{r} \cdot \nu \qquad (1) \qquad\qquad H_2 = \frac{2\pi}{10} \cdot \frac{I_2}{r} \cdot \nu \qquad (2)$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τὰς ὁποίας φέρει τὸ πλαίσιον. Αἱ ἐντάσεις H_1 καὶ H_2 εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν H_0 τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ μαγνητικὴ βελόνη ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας της ἀντιστοίχως κατὰ γωνίαν $\varphi_1 = 45^0$ καὶ φ_2 καὶ λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς συνισταμένης τῶν μερικῶν ἐντάσεων τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων. Τότε ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἐξισώσεις:

$$H_1 = H_0 \cdot \text{εφ}\, \varphi_1 \qquad (3) \qquad\qquad H_2 = H_0 \cdot \text{εφ}\, \varphi_2 \qquad (4)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{0{,}1 \text{ A}}{0{,}05 \text{ A}} = 2$$

Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), λαμβάνομεν:

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\text{εφ}\, \varphi_1}{\text{εφ}\, \varphi_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\text{εφ}\, \varphi_1}{\text{εφ}\, \varphi_2} = 2$$

Συνεπῶς εἶναι: $$\text{εφ}\, \varphi_2 = \frac{\text{εφ}\, 45^0}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\varphi_2 = 26^0\, 34'}$$

Εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων ἡ συνισταμένη τῶν μερικῶν ἐντάσεων τῶν δύο μαγνητικῶν πεδίων εἶναι ἀντιστοίχως Σ_1 καὶ Σ_2. Τότε ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$H_0 = \Sigma_1 \cdot \text{συν}\, \varphi_1 \quad \text{καὶ} \quad H_0 = \Sigma_2 \cdot \text{συν}\, \varphi_2$$

Ἄρα εἶναι: $$\Sigma_1 = \frac{H_0}{\text{συν}\, \varphi_1} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_2 = \frac{H_0}{\text{συν}\, \varphi_2}$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \frac{\text{συν}\,\varphi_2}{\text{συν}\,\varphi_1} \qquad (5)$$

Εἰς ἑκάστην τῶν δύο περιπτώσεων ἡ περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι ἀντιστοίχως T_1 καὶ T_2, ἰσχύουν δὲ αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot \Sigma_1}} \quad (6) \qquad\qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{M_M \cdot \Sigma_2}} \quad (7)$$

ὅπου Θ καὶ M_M εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ ἡ μαγνητικὴ ροπὴ τῆς μαγνητικῆς βελόνης. Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (6) καὶ (7), εὑρίσκομεν :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}} \quad \text{ἄρα} \quad T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}} \quad \text{καὶ} \quad T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{\text{συν}\,\varphi_2}{\text{συν}\,\varphi_1}}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $T_1 = \frac{12}{10}$ sec $= 1{,}2$ sec. Ἄρα ἡ ζητουμένη περίοδος ταλαντώσεως τῆς μαγνητικῆς βελόνης εἶναι :

$$T_2 = 1{,}2\ \text{sec} \cdot \sqrt{\frac{\text{συν}\,26^0\,34'}{\text{συν}\,45^0}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{T_2 = 1{,}35\ sec}$$

169. Ἀμπερόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον φέρει κλίμακα ἀπὸ 0 ἕως 100. Ἡ διαίρεσις 100 ἀντιστοιχεῖ εἰς στροφὴν τοῦ πλαισίου κατὰ 90⁰ καὶ σημειώνεται, ὅταν διὰ τοῦ ὀργάνου διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως 20 mA. Τὸ ὕψος τοῦ πλαισίου εἶναι 3 cm, τὸ δὲ πλάτος του 2 cm. Τὸ πλαίσιον φέρει 200 σπείρας, ἔχει ἀντίστασιν 5 Ω καὶ στρέφεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 500 Gauss. Αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου διέρχονται πάντοτε διὰ τοῦ πλαισίου, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ πλαισίου. Νὰ εὑρεθῇ : 1) ἡ ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ὄργανον τοῦτο, διὰ νὰ μετρῶμεν δι' αὐτοῦ ρεύματα ἀπὸ 0 ἕως 20 A καὶ ἡ μεγίστη ἀπόκλισις νὰ παρουσιάζεται, ὅταν τὸ κύριον ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν 20 A· 2) ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους ἐπαναφορᾶς, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται ὑπὸ τοῦ ἐλατηρίου τοῦ ὀργάνου, ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ ὀργάνου γίνῃ 90⁰.

1) Τὸ ἀμπερόμετρον ἔχει ἀντίστασιν $R_A = 5\,\Omega$, ἡ δὲ ζητουμένη ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως εἶναι R_Δ. Ὅταν τὸ κύριον ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν $I = 20$ A, τότε τὸ μὲν ἀμπερόμετρον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I_A = 20$ mA $= 0{,}020$ A, ἡ δὲ διακλάδωσις διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_\Delta = I - I_A \quad \text{ἤτοι} \quad I_\Delta = (20 - 0{,}020)\ \text{A} = 19{,}980\ \text{A}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$I_A \cdot R_A = I_\Delta \cdot R_\Delta \quad \text{ἄρα} \quad R_\Delta = R_A \cdot \frac{I_A}{I_\Delta}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R_Δ εἶναι :

$$R_\Delta = 5\,\Omega \cdot \frac{0{,}020\ \text{A}}{19{,}980\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad R_\Delta = \mathbf{0{,}005\ \Omega}$$

2) Κάθε κατακόρυφον σύρμα τοῦ πλαισίου ἔχει μῆκος $l = 3$ cm καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I_A = 0{,}020$ A, ὅταν ἡ ἀπόκλισις τοῦ πλαισίου γίνεται ἴση μὲ 90⁰. Τότε ἐπὶ ἑκάστου κατακορύφου σύρματος ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις :

$$f = \frac{1}{10} \cdot H \cdot I \cdot l \quad \text{ἤτοι} \quad f = \frac{1}{10} \cdot 500 \cdot 0{,}020 \cdot 3\ \text{dyn} \quad \text{καὶ} \quad f = 3\ \text{dyn}$$

Ἐπὶ τῶν 200 κατακορύφων συρμάτων τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πλαισίου ἀναπτύσσεται δύναμις :

$$F = 200\,f \quad \text{ἤτοι} \quad F = 600\ \text{dyn}$$

Τὸ πλάτος τοῦ πλαισίου εἶναι $d = 2$ cm. Συνεπῶς ἡ ροπὴ (M) τοῦ ἀναπτυσσομένου ἐπὶ τοῦ πλαισίου ζεύγους εἶναι :

$$M = F \cdot d \quad \text{ἤτοι} \quad M = 600 \text{ dyn} \cdot 2 \text{ cm} = 1200 \text{ dyn} \cdot \text{cm}$$

Τόση εἶναι καὶ ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους ἐπαναφορᾶς, τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσει τὸ ἐλατήριον τοῦ ὀργάνου, ἤτοι εἶναι : $\mathbf{M = 1200\ dyn \cdot cm}$

170. Ἕνα βολτόμετρον μὲ κινητὸν πλαίσιον φέρει διαιρέσεις ἀπὸ 0 ἕως 5 V. Τὸ πλαίσιον ἔχει ἀντίστασιν 500 Ω. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν ἀντίστασιν πρέπει νὰ συνδέσωμεν κατὰ σειρὰν μὲ τὸ πλαίσιον τοῦ ὀργάνου, ὥστε ἡ μεγίστη ἀπόκλισις τοῦ δείκτου νὰ παρατηρῆται, ὅταν εἰς τοὺς ἀκροδέκτας τοῦ οὕτω τροποποιηθέντος ὀργάνου ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι 30 V ἢ 150 V. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ὀργάνου εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις;

Τὸ βολτόμετρον ἔχει σταθερὰν ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 500\ \Omega$. Ὅταν τὸ βολτόμετρον δεικνύῃ τάσιν $U = 5$ V, τότε τὸ ὄργανον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{U}{r} = \frac{5 \text{ V}}{500\ \Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I = 0{,}01 \text{ A}$$

Διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τάσιν $U_1 = 30$ V καὶ $U_2 = 150$ V. Εἰς ἑκάστην τῶν δύο τούτων περιπτώσεων τὸ ὄργανον θὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}01$ A. Ἄρα αἱ ἀντιστάσεις, τὰς ὁποίας θὰ συνδέσωμεν κατὰ σειρὰν μὲ τὸ ὄργανον, εἶναι ἀντιστοίχως R_1 καὶ R_2. Εἰς ἑκάστην δὲ τῶν δύο περιπτώσεων θὰ ἰσχύῃ ἀντιστοίχως ἡ ἐξίσωσις :

$$U_1 = U + IR_1 \quad \text{καὶ} \quad U_2 = U + IR_2$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_1 εἶναι :

$$R_1 = \frac{U_1 - U}{I} = \frac{30 \text{ V} - 5 \text{ V}}{0{,}01 \text{ A}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{R_1 = 2500\ \Omega}$$

$$R_2 = \frac{U_2 - U}{I} = \frac{150 \text{ V} - 5 \text{ V}}{0{,}01 \text{ A}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{R_1 = 14\,500\ \Omega}$$

Καὶ εἰς τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ὀργάνου, εἶναι :

$$I = \frac{U}{r} = \frac{5 \text{ V}}{5\,00\ \Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I = 0{,}01\ A}$$

* Σημείωσις. Ἐφ' ὅσον τὸ ὄργανον θὰ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}01$ A, αἱ ζητούμεναι ἀντιστάσεις R_1 καὶ R_2 πρέπει νὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε νὰ προκαλῆται ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως πτῶσις τῆς τάσεως :

$$(30 - 5) \text{ V} = 25 \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad (150 - 5) \text{ V} = 145 \text{ V}$$

Ἄρα ἑκάστη ἀντίστασις πρέπει νὰ εἶναι :

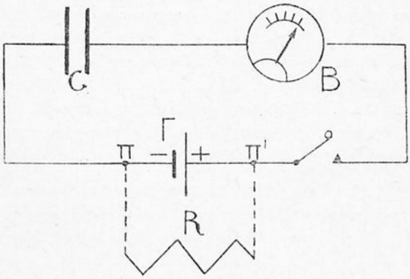
$$R_1 = \frac{25 \text{ V}}{0{,}01 \text{ A}} = 2500\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad R_2 = \frac{145 \text{ V}}{0{,}01 \text{ A}} = 14\,500\ \Omega$$

171. Συνδέομεν κατὰ σειρὰν γεννήτριαν μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος C καὶ μὲ βαλλιστικὸν γαλβανόμετρον. Κατὰ τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν κλείομεν τὸ κύκλωμα, τὸ βαλλιστικὸν γαλβανόμετρον δεικνύει μίαν ἀπόκλισιν α_1. Ὅταν ἠρεμήσῃ τὸ γαλβανόμετρον, παρεμβάλλομεν μεταξὺ τῶν πόλων τῆς γεννητρίας διακλάδωσιν ἔχουσαν ἀντίστασιν R. Τότε τὸ γαλβανόμετρον δεικνύει μίαν νέαν ἀπόκλισιν α_2 κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν προηγουμένην. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας. Αἱ λοιπαὶ ἀντιστάσεις παραλείπονται.

Ἐφαρμογή: $\alpha_1 = 150$ διαιρέσεις · $\alpha_2 = 70$ διαιρέσεις · $R = 2\ \Omega$.

Ἡ γεννήτρια Γ (σχ. 62) ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r. Ὅταν εἰς τὸ κύκλωμα δὲν ὑπάρχῃ ἡ ἀντίστασις R, καὶ κλείσωμεν τὸ κύκλωμα, τότε ἡ τάσις μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ γίνεται ἴση μὲ τὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν Ε τῆς γεννητρίας. Εἰς τὸ κύκλωμα κυκλοφορεῖ τότε ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$Q_1 = C \cdot E \text{ (Coulomb)}$$



Σχ. 62

Ἂς παραστήσωμεν μὲ k τὸν ἀριθμὸν τῶν διαιρέσεων κατὰ τὰς ὁποίας ἀποκλίνει τὸ βαλλιστικὸν γαλβανόμετρον Β, ὅταν διέρχεται δι' αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ 1 Cb. Τότε εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ἀπόκλισις α_1 τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha_1 = k \cdot Q_1$$

ἤτοι $$\alpha_1 = k \cdot C \cdot E \qquad (1)$$

Εἰς τὸ κύκλωμα παρεμβάλλομεν τώρα τὴν ἀντίστασιν R. Μεταξὺ τῶν πόλων Π καὶ Π' τῆς γεννητρίας ὑπάρχει τότε τάσις U. Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὴν ἀντίστασιν R, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$U = I \cdot R \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου διὰ τὴν γεννήτριαν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$U = E - Ir \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{E - U}{r}$$

Ἂν θέσωμεν τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ I εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), εὑρίσκομεν :

$$U = \frac{E - U}{r} \cdot R \qquad \text{ἄρα} \qquad U = \frac{E \cdot R}{R + r}$$

Μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει τάσις U, ἴση μὲ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν. Συνεπῶς τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$Q_2 = C \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_2 = \frac{C \cdot E \cdot R}{R + r}$$

Ἡ ἐλάττωσις τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta Q = C \cdot E - \frac{C \cdot E \cdot R}{R + r} \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta Q = \frac{C \cdot E \cdot r}{R + r}$$

Αὐτὸ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ΔQ διέρχεται διὰ τοῦ γαλβανομέτρου καὶ προκαλεῖ τὴν ἀπόκλισιν α_2 κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν προηγουμένην. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha_2 = k \cdot \Delta Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad \alpha_2 = k \cdot \frac{C \cdot E \cdot r}{R + r} \qquad (3)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (3), εὑρίσκομεν :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{R + r}{r} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

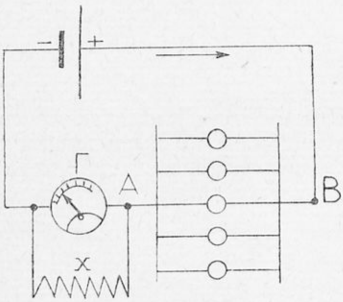
Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Διὰ $R = 2\,\Omega$, $\alpha_1 = 150$ καὶ $\alpha_2 = 70$ εὑρίσκομεν :

$$r = 2\,\Omega \cdot \frac{70}{150 - 70} \qquad \text{ἤτοι} \qquad r = 1{,}75\,\Omega$$

172. Μία συστοιχία γεννητριῶν ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν **E** καὶ τροφοδοτεῖ ν λαμπτῆρας, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀντίστασιν **r** καὶ παρεμβάλλονται κατὰ διακλάδωσιν μεταξὺ δύο σημείων **A** καὶ **B** τοῦ κυκλώματος. Εἰς τὸ κύκλωμα ὑπάρχει καὶ γαλβανόμετρον **Γ**, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν **R**. Μεταξὺ τῶν σημείων **A** καὶ **B** τοποθετεῖται κατ' ἀρχὰς μόνον ἕνας λαμπτήρ. Τότε ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου δεικνύει ἀπόκλισιν **α**. Ἔπειτα τοποθετοῦνται μεταξὺ τῶν σημείων **A** καὶ **B** οἱ ν λαμπτῆρες, καὶ μεταξὺ τῶν ἄκρων τοῦ γαλβανομέτρου παρεμβάλλεται κατὰ διακλάδωσιν μία βοηθητικὴ ἀντίστασις **x** τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀπόκλισις τῆς βελόνης τοῦ γαλβανομέτρου νὰ εἶναι πάλιν **α**. Ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀντίστασις **x**, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς ν τῶν λαμπτήρων καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων **A** καὶ **B**. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς συστοιχίας παραλείπεται.

Ἐφαρμογή: $E = 200$ V· $R = r = 100\ \Omega$· $x = 25\ \Omega$.

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Ὅταν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ὑπάρχῃ μόνον ἕνας λαμπτήρ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν r (σχ. 63), τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R + r$ καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, εἶναι:



Σχ. 63

$$I_1 = \frac{E}{R + r}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου δεικνύει ἀπόκλισιν α. Ὅταν μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B τοποθετηθοῦν οἱ ν ὅμοιοι λαμπτῆρες, τότε τὸ σύστημα τῶν παραλλήλως συνδεδεμένων λαμπτήρων ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν R_1, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\nu}{r} \qquad \text{ἄρα} \qquad R_1 = \frac{r}{\nu}$$

Τὸ γαλβανόμετρον καὶ ἡ παραλλήλως μὲ αὐτὸ συνδεδεμένη ἀντίστασις x ἔχουν ὁλικὴν ἀντίστασιν R_2, ἡ ὁποία εἶναι:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{x} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_2 = \frac{Rx}{R + x}$$

Οὕτω εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R_1 + R_2$ καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι:

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = \frac{E}{\dfrac{r}{\nu} + \dfrac{Rx}{R + x}}$$

$$\text{καὶ} \qquad I_2 = \frac{\nu E(R + x)}{\nu Rx + rR + rx}$$

Τὸ γαλβανόμετρον διαρρέεται τότε ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I_γ, ἡ δὲ ἀντίστασις x διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $(I_2 - I_\gamma)$ καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$I_\gamma R = (I_2 - I_\gamma)x \qquad \text{ἄρα} \qquad I_\gamma = \frac{x}{R + x} I_2 \qquad \text{καὶ} \qquad I_\gamma = \frac{\nu Ex}{\nu Rx + rR + rx}$$

Δίδεται ὅτι καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ βελόνη τοῦ γαλβανομέτρου δεικνύει τὴν αὐτὴν ἀπόκλισιν α. Ἄρα εἰς τὴν πρώτην καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ γαλβανόμετρον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα τῆς αὐτῆς ἐντάσεως, ἤτοι εἶναι:

$$I_\gamma = I_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\nu Ex}{\nu Rx + rR + rx} = \frac{E}{R + r}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ν τῶν λαμπτήρων εἶναι :

$$\nu = \frac{R + x}{x}$$

Ἡ τάσις μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β εἶναι :

$$U = I_2 \cdot \frac{r}{\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = \frac{rE(R+x)}{\nu Rx + rR + rx}$$

Ἐφαρμογή. Διὰ τὰς δοθείσας τιμὰς τῶν μεγεθῶν E, R, r καὶ x εὑρίσκομεν :

$\nu = 5$ λαμπτῆρες καὶ $U = 100$ V

ΕΠΑΓΩΓΗ

173. Κυκλικὸν πλαίσιον ἔχει ἐπιφάνειαν 20 cm² καὶ φέρει 5 σπείρας. Τὸ πλαίσιον εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 1000 Gauss. Ἐντὸς χρόνου 0,02 sec τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ 90° περὶ μίαν διάμετρον κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Πόση εἶναι ἡ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις;

Τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν $H = 1000$ Gauss, ἑκάστη δὲ σπεῖρα ἔχει ἐμβαδὸν $S = 20$ cm². Ὅταν τὸ πλαίσιον εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε διὰ τοῦ πλαισίου διέρχεται μαγνητικὴ ῥοή :

$$\Phi = H \cdot S \cdot \nu \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi = (1000 \cdot 20 \cdot 5)\ \text{Mx} \qquad \text{ἢ} \qquad \Phi = 10^5\ \text{Mx}$$

Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}02$ sec τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ 90°, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαισίου νὰ γίνῃ παράλληλος πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἄρα ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἡ μαγνητικὴ ῥοὴ μεταβάλλεται ἀπὸ Φ εἰς μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ῥοῆς εἶναι : $\Delta\Phi = 10^5$ Mx

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις (E) δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

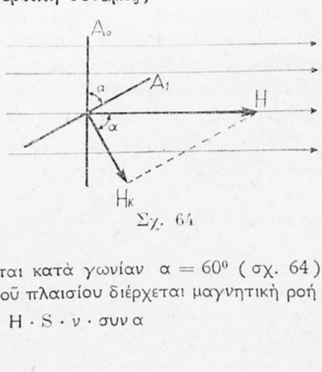
$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{10^5}{0{,}02}\ \text{Volt} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E = 0{,}05\ Volt}$$

174. Κυκλικὸν πλαίσιον ἔχει διάμετρον 20 cm καὶ φέρει 10 σπείρας. Τὸ πλαίσιον εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 16 000 Gauss. Ἐντὸς χρόνου 0,004 sec τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ 60° περὶ μίαν διάμετρον κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Πόση εἶναι ἡ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις;

Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης σπείρας τοῦ πλαισίου εἶναι :

$$S = 100\pi\ \text{cm}^2 \qquad \text{ἢ} \qquad S = 314\ \text{cm}^2$$

Ὅταν τὸ πλαίσιον εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (ἐντάσεως $H = 16\,000$ Gauss), τότε διέρχεται διὰ τοῦ πλαισίου μαγνητικὴ ῥοή :



Σχ. 64

$$\Phi_0 = H \cdot S \cdot \nu$$

ἤτοι $\Phi_0 = (16\,000 \cdot 314 \cdot 10)$ Mx

καὶ $\Phi_0 \approx 5 \cdot 10^7$ Mx

Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}004$ sec τὸ πλαίσιον στρέφεται κατὰ γωνίαν $\alpha = 60^0$ (σχ. 64). Τότε σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς μαγνητικῆς ῥοῆς διὰ τοῦ πλαισίου διέρχεται μαγνητικὴ ῥοή :

$$\Phi_1 = H_K \cdot S \cdot \nu \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi_1 = H \cdot S \cdot \nu \cdot \text{συν}\,\alpha$$

διότι εἶναι $H_K = H \cdot συν\,α$. Ἄρα ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἡ μαγνητικὴ ροὴ μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi_1 \qquad ἤτοι \qquad \Delta\Phi = HS\nu \cdot (1 - συν\,α)$$

$$ἤ \qquad \Delta\Phi = \Phi_0 \cdot (1 - συν\,α) = \Phi_0 \cdot (1 - συν\,60^0) \qquad καὶ \qquad \Delta\Phi = 2{,}5 \cdot 10^7\ Mx$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πλαισίου ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad ἤτοι \qquad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^7}{0{,}004}\ \mathrm{Volt} \qquad καὶ \qquad \mathbf{E = 6{,}25\ V}$$

175. Πηνίον φέρει 1000 σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 50 cm². Αἱ σπεῖραι τοῦ πηνίου εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 8000 Gauss. Ἐντὸς χρόνου 0,04 sec εἰσάγεται εἰς τὸ πηνίον ράβδος μαλακοῦ σιδήρου, ἔχοντος μαγνητικὴν διαπερατότητα 1240. Πόση εἶναι ἡ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις;

Τὸ πηνίον φέρει $\nu = 1000$ σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $S = 50\ cm^2$. Ὅταν αἱ σπεῖραι τοῦ πηνίου εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (ἐντάσεως $H = 8000$ Gauss), τότε διὰ τοῦ πηνίου διέρχεται μαγνητικὴ ροή:

$$\Phi_0 = H \cdot S \cdot \nu \qquad ἤτοι \qquad \Phi_0 = (8000 \cdot 50 \cdot 1000)\ Mx \qquad καὶ \qquad \Phi_0 = 4 \cdot 10^8\ Mx$$

Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}04$ sec εἰσάγεται ἐντὸς τοῦ πηνίου ράβδος μαλακοῦ σιδήρου. Ἄρα ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μεταβάλλεται ἀπὸ H εἰς:

$$B = \mu \cdot H$$

ὅπου $\mu = 1240$ εἶναι ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης τοῦ μαλακοῦ σιδήρου. Οὕτω ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt ἡ μαγνητικὴ ροὴ μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta\Phi = (B \cdot S \cdot \nu) - (H \cdot S \cdot \nu) \qquad ἤ \qquad \Delta\Phi = \mu HS\nu - HS\nu = HS\nu(\mu - 1)$$

$$καὶ \qquad \Delta\Phi = \Phi_0 \cdot (\mu - 1)$$

Κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ράβδου μαλακοῦ σιδήρου ἐντὸς τοῦ πηνίου ἀναπτύσσεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad ἤτοι \qquad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{4 \cdot 10^8 \cdot 1239}{0{,}04}\ \mathrm{Volt} \qquad καὶ \qquad \mathbf{E = 123\,900\ V}$$

176. Τὸ πηνίον τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος 175, φέρον τὸν πυρῆνα τοῦ μαλακοῦ σιδήρου, στρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἕως, ὅτου αἱ σπεῖραι τοῦ πηνίου γίνουν παράλληλοι πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐὰν ἡ στροφὴ τοῦ πηνίου γίνῃ ἐντὸς χρόνου 0,01 sec, πόση εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις;

Ὅταν τὸ πηνίον τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος 175 φέρῃ τὸν πυρῆνα μαλακοῦ σιδήρου, τότε ἡ διερχομένη διὰ τοῦ πηνίου μαγνητικὴ ροὴ εἶναι:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \nu \qquad ἤτοι \qquad \Phi = \mu H \cdot S \cdot \nu$$

$$ἤ \qquad \Phi = \mu \cdot \Phi_0 \qquad καὶ \qquad \Phi = 1240 \cdot 4 \cdot 10^8\ Mx$$

Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}01$ sec τὸ πηνίον στρέφεται κατὰ 90^0, δηλαδὴ ἡ μαγνητικὴ ροὴ μεταβάλλεται ἀπὸ Φ εἰς μηδέν. Οὕτω ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt συμβαίνει μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς κατά:

$$\Delta\Phi = 1240 \cdot 4 \cdot 10^8\ Mx$$

καὶ συνεπῶς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἀναπτύσσεται ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{1240 \cdot 4 \cdot 10^8}{0,01} \text{ Volt}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{E = 496\,000\ V}$$

177. Ἕνα πλαίσιον φέρει 100 σπείρας καὶ ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω. Ἑκάστη σπεῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν 1 m². Αἱ σπεῖραι τοῦ πλαισίου τοποθετοῦνται καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου, τὰ δὲ ἄκρα τοῦ πλαισίου συνδέονται μὲ βαλλιστικὸν γαλβανόμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίστασιν 9 Ω. Τὸ πλαίσιον στρέφεται ταχέως κατὰ 90° οὕτως, ὥστε αἱ σπεῖραι του νὰ γίνουν παράλληλοι πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τότε διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον 1/2500 Cb. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου;

Ἔστω H ἡ ἔντασις τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης σπείρας τοῦ πλαισίου εἶναι $S = 10^4\ cm^2$. Οὕτω διὰ τοῦ πλαισίου διέρχεται μαγνητικὴ ροή :

$$\Phi = \nu \cdot H \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi = 100 \cdot H \cdot 10^4\ Mx \quad \text{ἢ} \quad \Phi = 10^6 \cdot H\ Mx$$

Ἐντὸς χρόνου Δt ἡ μαγνητικὴ ροὴ γίνεται ἴση μὲ μηδέν. Ἄρα ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι $\Delta\Phi = 10^6 \cdot H$ Mx. Ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἀναπτύσσεται τότε ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ Volt} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{10^6 \cdot H}{\Delta t} \text{ V}$$

$$\text{καὶ} \quad E = \frac{H}{100 \cdot \Delta t} \text{ V}$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R = 10\,\Omega$. Ἐὰν I εἶναι ἡ μέση ἔντασις τοῦ παραγομένου ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$E = I \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{H}{100 \cdot \Delta t} = I \cdot R$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$H = 100 \cdot (I \cdot \Delta t) \cdot R \qquad (1)$$

Τὸ ἀναπτυσσόμενον ἐντὸς τοῦ κυκλώματος ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι :

$$Q = I \cdot \Delta t$$

Ἄρα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

$$H = 100 \cdot Q \cdot R \quad \text{ἤτοι} \quad H = 100 \cdot \frac{1}{2500} \cdot 10 \text{ Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 0,4\ Gauss}$$

178. Πηνίον ἔχει μῆκος 40 cm καὶ φέρει 200 σπείρας. Τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. Ἐντὸς τοῦ πηνίου καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον του ὑπάρχει κυκλικὸς ἀγωγός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐπιφάνειαν 25π cm². Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἀγωγοῦ τούτου εἶναι κάθετον πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐντὸς χρόνου 20 sec ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πηνίον αὐξάνεται ἀπὸ 10 A εἰς 15 A. Πόση εἶναι ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται εἰς τὸν κυκλικὸν ἀγωγόν;

Τὸ πηνίον φέρει $\nu = \frac{200}{40} = 5$ σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ A. Ἑπομένως ἐντὸς τοῦ πηνίου δημιουργεῖται μαγνητικὸν πεδίον, ἔχον ἔντασιν :

$$H = \frac{4\pi}{10}\,\nu I \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{4\pi}{10} \cdot 5 \cdot 10 = 20\pi \text{ Gauss}$$

Ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνῃ $I_1 = 15$ A, τότε ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ πηνίου γίνεται :

$$H_1 = \frac{4\pi}{10}\nu I_1 \quad \text{ἤτοι} \quad H_1 = \frac{4\pi}{10}\cdot 5 \cdot 15 = 30\pi \text{ Gauss}$$

Ὥστε, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται ἀπὸ 10 A εἰς 15 A, προκαλεῖται μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἴση μέ :

$$\Delta H = H_1 - H \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta H = 10\pi \text{ Gauss}$$

Ὁ ἐντὸς τοῦ πηνίου καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εὑρισκόμενος κυκλικὸς ἀγωγὸς ἔχει ἐμβαδὸν $S = 25\pi$ cm². Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 20$ sec προκαλεῖται ἑπομένως μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς ἴση μέ :

$$\Delta\Phi = \Delta H \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\Phi = 10\pi \cdot 25\pi \text{ Mx} \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Phi = 250\pi^2 \text{ Mx}$$

Ἄρα ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ κυκλικοῦ ἀγωγοῦ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = \frac{1}{10^8}\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8}\cdot\frac{250\pi^2}{20} \text{ V}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{E = \frac{125}{10^8} \text{ V} = 1{,}25\, \mu V}$$

179. Ἕνα πηνίον Α ἔχει μῆκος 50 cm καὶ φέρει 500 σπείρας. Τὸ πηνίον Α διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 Α. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου τούτου καὶ ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον του ὑπάρχει ἄλλο πηνίον Β, τὸ ὁποῖον φέρει 1000 σπείρας, διαμέτρου 4 cm καὶ συνδέεται μὲ γαλβανόμετρον. Ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου Β εἶναι 40 Ω. Οἱ ἄξονες τῶν δύο πηνίων συμπίπτουν. Ἐντὸς χρόνου 4 sec ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πηνίον Α μεταβάλλεται ἀπὸ 10 Α εἰς 0 Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα τοῦ πηνίου Β, ὡς καὶ τὸ ἀναπτυσσόμενον ἐξ ἐπαγωγῆς ἠλεκτρικὸν φορτίον.

Τὸ πηνίον Α φέρει $\nu = \frac{500}{50} = 10$ σπείρας κατὰ ἑκατοστόμετρον μήκους. Ἐπειδὴ τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ A, ἕπεται ὅτι τὸ ἐντὸς τοῦ πηνίου τούτου ἀναπτυσσόμενον μαγνητικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν :

$$H = \frac{4\pi}{10}\nu I \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{4\pi}{10}\cdot 10 \cdot 10 = 40\pi \text{ Gauss}$$

Τὸ πηνίον Β φέρει $N = 1000$ σπείρας. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑκάστης σπείρας τοῦ πηνίου Β εἶναι : $S = 4\pi$ cm². Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου Β εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ πηνίου Α. Ἑπομένως ἡ διὰ τῶν σπειρῶν τοῦ πηνίου Β διερχομένη μαγνητικὴ ροὴ εἶναι :

$$\Phi = N \cdot S \cdot H \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi = 1000 \cdot 4\pi \cdot 40\pi \text{ Mx} \quad \text{καὶ} \quad \Phi = 16 \cdot 10^5 \text{ Mx}$$

Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 4$ sec ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται ἀπὸ 10 A εἰς μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου παρατηρουμένη μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι :

$$\Delta\Phi = 16 \cdot 10^5 \text{ Mx}$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου Β ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = \frac{1}{10^8}\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8}\cdot\frac{16\cdot 10^5}{4} \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad E = \frac{4}{10^3} \text{ V}$$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου Β εἶναι $R = 40\ \Omega$. Ἑπομένως ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{0{,}004\ V}{40\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 0{,}0001\ A = 0{,}1\ mA}$$

180. Αἱ δύο παράλληλοι μεταλλικαὶ ράβδοι μιᾶς ὁριζοντίας καὶ εὐθυγράμμου σιδηροδρομικῆς γραμμῆς συνδέονται κατὰ τὸ ἕνα ἄκρον των μὲ ἄλλην μεταλλικὴν ράβδον. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ράβδων τῆς γραμμῆς εἶναι 144 cm. Ἐπὶ τῆς γραμμῆς κινεῖται ἀτμομηχανὴ σιδηροδρόμου μὲ ταχύτητα 100 km/h. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος τῶν τροχῶν τῆς ἀτμομηχανῆς. Ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_K = 0{,}5$ Gauss.

Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι :

$$\upsilon = \frac{100 \cdot 10^5\ cm}{3600\ sec} = \frac{10^5}{36}\ cm/sec$$

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ράβδων τῆς γραμμῆς εἶναι $l = 144$ cm. Ὅταν ὁ ἄξων τῶν τροχῶν μετακινῆται κατὰ διάστημα υ καθέτως πρὸς τὰς δύο ράβδους τῆς γραμμῆς, τότε διαγράφεται μία ἐπιφάνεια ἔχουσα ἐμβαδόν :

$$S = l \cdot \upsilon$$

Ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν H_K τῆς ἐντάσεως τοῦ γηίνου μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω εἰς χρόνον $\Delta t = 1$ sec, προκαλεῖται μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς :

$$\Delta\Phi = H_K \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\Phi = H_K \cdot l \cdot \upsilon$$

Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{H_K \cdot l \cdot \upsilon}{\Delta t}$$

$$\text{ἢ} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 144 \cdot 10^5}{1 \cdot 36}\ V \quad \text{καὶ} \quad E = \frac{0{,}5 \cdot 4 \cdot 10^5}{10^8}\ V$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{E = 0{,}002\ V = 2\ mV}$$

181. Εὐθύγραμμος ἠλεκτρομαγνήτης μήκους 25 cm ἔχει πυρῆνα ἀπὸ μαλακὸν σίδηρον διαμέτρου 7 cm καὶ μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 108$. Πέριξ τοῦ πυρῆνος ὑπάρχουν 800 σπεῖραι, αἱ ὁποῖαι διαρρέονται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 4 Α. Τὸ μέσον τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου περιβάλλεται ἀπὸ κυκλικὸν πλαίσιον, τὸ ὁποῖον φέρει 100 σπείρας. Ἐντὸς χρόνου 1/40 sec διακόπτεται τὸ ρεῦμα τὸ διαρρέον τὸν ἠλεκτρομαγνήτην. Πόση ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἀναπτύσσεται εἰς τὸ πλαίσιον;

Τὸ πηνίον δημιουργεῖ ἐντὸς αὐτοῦ μαγνητικὸν πεδίον, ἔχον ἔντασιν :

$$H = \frac{4\pi}{10}\nu I \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{800}{25} \cdot 4\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad H = 160\ \text{Gauss}$$

Συνεπῶς ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου εἶναι :

$$B = \mu \cdot H \quad \text{ἤτοι} \quad B = 108 \cdot 160\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad B = 17\,280\ \text{Gauss}$$

Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σπείρας τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου ἔχει ἐμβαδόν :

$$S = \pi \,.\, 3{,}5^2\ cm^2 = 38{,}5\ cm^2$$

Ἄρα ἡ διὰ τοῦ κυκλικοῦ πλαισίου διερχομένη μαγνητικὴ ροὴ εἶναι :

$$\Phi = 100 \cdot B \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi = 100 \cdot 17\,280 \cdot 38{,}5 \text{ Mx}$$

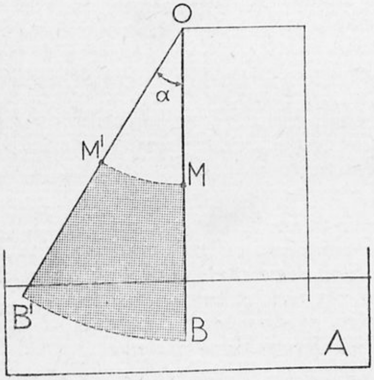
$$\text{καὶ} \quad \Phi = 66\,528 \cdot 10^3 \text{ Mx}$$

Τόση εἶναι καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς (ΔΦ) κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος. Ἡ ἐντὸς τοῦ πλαισίου ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{66\,528 \cdot 10^3}{1/40} \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 26{,}6 \ V}$$

182. Ἕνα εὐθύγραμμον χάλκινον σύρμα δύναται νὰ στρέφεται περὶ ὁριζόντιον μεταλλικὸν ἄξονα O, διερχόμενον διὰ τοῦ ἑνὸς ἄκρου του. Τὸ σύρμα ἔχει μῆκος $l = 60$ cm καὶ δύναται νὰ αἰωρῆται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, ἔχον πάντοτε τὸ ἄλλο ἄκρον του βυθισμένον ἐντὸς ὑγροῦ ἀγωγοῦ A. Ὁ ἄξων O καὶ ὁ ὑγρὸς ἀγωγὸς A συνδέονται μὲ σύρμα, ἡ δὲ ὅλη ἀντίστασις τοῦ σχηματιζομένου κυκλώματος εἶναι 1 Ω. Καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς αἰωρήσεως τοῦ σύρματος τὸ κατώτερον ἥμισυ αὐτοῦ κινεῖται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 490 Causs. Ἀπομακρύνομεν τὸ σύρμα ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν κατακόρυφον θέσιν τῆς ἰσορροπίας του κατὰ γωνίαν 30°. Ἡ ἀπομάκρυνσις αὐτὴ γίνεται μὲ κίνησιν ὁμαλήν, ἡ ὁποία διαρκεῖ 0,1 sec. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετατοπίσεως, καὶ τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον θὰ δαπανήσωμεν διὰ τὴν μετατόπισιν αὐτήν.

Ἀπομακρύνομεν τὸ σύρμα (σχ. 65) ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του κατὰ γωνίαν $\alpha = 30^0$, ἤτοι $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad. Τότε τὸ σύρμα διαγράφει τὴν ἐπιφάνειαν BOB', ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδόν :



Σχ. 65

$$S_1 = \frac{\pi l^2 \alpha}{2\pi} \quad \text{ἤτοι} \quad S_1 = \frac{l^2\alpha}{2}$$

Τὸ ἀνώτερον ἥμισυ OM τοῦ σύρματος διαγράφει τὴν ἐπιφάνειαν MOM', ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδόν :

$$S_2 = \frac{\pi l^2 \alpha}{8\pi} \quad \text{ἤτοι} \quad S_2 = \frac{l^2\alpha}{8}$$

Οὕτω τὸ κατώτερον ἥμισυ MB τοῦ σύρματος διαγράφει ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τὴν ἐπιφάνειαν BMM'B, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδόν :

$$S = S_1 - S_2$$

$$\text{ἤτοι} \quad S = \frac{l^2\alpha}{2} - \frac{l^2\alpha}{8} = \frac{3l^2\alpha}{8}$$

$$\text{ἢ} \quad S = \frac{3\pi l^2}{48}$$

Ὥστε εἰς χρόνον $\Delta t = 0{,}1$ sec προκαλεῖται μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$\Delta\Phi = H \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\Phi = H \cdot \frac{3\pi l^2}{48}$$

$$\text{καὶ} \quad \Delta\Phi = 490 \cdot \frac{3\pi \cdot 60^2}{48} \text{ Mx} \quad \text{ἢ} \quad \Delta\Phi \approx 346\,200 \text{ Mx}$$

Ἄρα ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{346\,200}{0{,}1}\ \mathrm{V}$$

$$\text{καὶ} \quad E = \frac{3462}{10^5}\ \mathrm{V}$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ σχηματιζομένου κυκλώματος εἶναι $R = 1\ \Omega$, ἔπεται ὅτι κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετατοπίσεως τοῦ σύρματος τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{3462/10^5\ \mathrm{V}}{1\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 0{,}03462\ A = 34{,}62\ mA}$$

Τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον δαπανᾶται διὰ τὴν μετακίνησιν αὐτὴν τοῦ σύρματος, μετατρέπεται εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν. Αὕτη εἶναι:

$$W = E I t \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{3462}{10^5}\ \mathrm{V} \cdot \frac{3462}{10^5}\ \mathrm{A} \cdot \frac{1}{10}\ \mathrm{sec}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W = \frac{12}{10^5}\ Joule = 1200\ erg}$$

183. Ἕνα πηνίον Α ἔχει μῆκος 1 m, ἀποτελεῖται ἀπὸ 650 σπείρας καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 3 Α. Ἄλλο πηνίον Β, ἀποτελούμενον ἀπὸ 800 σπείρας, ἔχει τομὴν 4 cm² καὶ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ πηνίου Α. Οἱ ἄξονες τῶν δύο πηνίων συμπίπτουν. Τὸ πηνίον Β συνδέεται μὲ βαλλιστικὸν γαλβανόμετρον Γ, τὸ δὲ οὕτω ἀποτελούμενον κύκλωμα ἔχει ἀντίστασιν R = 600 Ω. Ὅταν διακόψωμεν τὸ ρεῦμα εἰς τὸ πηνίον Α, τότε ὁ δείκτης τοῦ γαλβανομέτρου ἀπομακρύνεται ἀποτόμως ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του μέχρι τῆς διαιρέσεως 32,5. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν διαίρεσιν τῆς κλίμακος τοῦ γαλβανομέτρου.

Τὸ πηνίον Α ἔχει μῆκος $l = 100$ cm, φέρει $N = 650$ σπείρας καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 3$ A. Ἑπομένως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πηνίου τούτου ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{N}{l} \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{650}{100} \cdot 3\ \mathrm{Gauss}$$

$$\text{καὶ} \quad H = 24{,}375\ \mathrm{Gauss}$$

Ἑκάστη σπεῖρα τοῦ πηνίου Β ἔχει ἐμβαδὸν $S = 4\ \mathrm{cm}^2$. Ἑπομένως διὰ τῶν 800 σπειρῶν τοῦ πηνίου Β διέρχεται μαγνητικὴ ροή:

$$\Phi = 800 \cdot H \cdot S \quad \text{ἤτοι} \quad \Phi = 800 \cdot 24{,}375 \cdot 4\ \mathrm{Mx} \quad \text{καὶ} \quad \Phi = 78\,000\ \mathrm{Mx}$$

Ὅταν διακόψωμεν τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον Α, τότε προκαλεῖται εἰς τὸ πηνίον Β μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς ἴση μὲ $\Delta\Phi = 78\,000$ Mx. Ἐὰν ἡ μεταβολὴ αὕτη τῆς μαγνητικῆς ροῆς συμβαίνῃ εἰς χρόνον Δt, τότε ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ πηνίου Β ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Τὸ κύκλωμα τοῦτο ἔχει ἀντίστασιν $R = 600\ \Omega$ καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις τοῦ ἐπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R \cdot \Delta t}$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον κυκλοφορεῖ ἐντὸς τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου Β, εἶναι:

$$Q = I \cdot \Delta t \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R}$$

$$\text{ἢ} \quad Q = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{78\,000}{600}\ \mathrm{Cb} \quad \text{καὶ} \quad Q = \frac{130}{10^8}\ \mathrm{Cb}$$

Αὐτὸ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, διερχόμενον διὰ τοῦ βαλλιστικοῦ γαλβανομέτρου, προκαλεῖ ἀπόκλισιν τοῦ δείκτου του κατὰ 32,5 διαιρέσεις. Ἄρα εἰς μίαν διαίρεσιν τῆς κλίμακος τοῦ ὀργάνου ἀντιστοιχεῖ ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$q = \frac{Q}{32{,}5} \qquad \text{ἤτοι} \qquad q = \frac{4}{10^8}\ \text{Cb} = 0{,}04\ \mu\text{Cb}$$

184. Πηνίον φέρει 1000 σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 20 cm². Τὸ πηνίον ἔχει ἀντίστασιν 3 Ω καὶ συνδέεται μὲ γαλβανόμετρον ἀντιστάσεως 7 Ω. Τὸ πηνίον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πόλων ἠλεκτρομαγνήτου καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν σπειρῶν εἶναι κάθετα πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐξάγομεν ταχέως τὸ πηνίον ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ὁπότε εὑρίσκομεν ὅτι διὰ τοῦ γαλβανομέτρου διῆλθεν ἠλεκτρικὸν φορτίον 0,05 Cb. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου;

Ἔστω H ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον παράγει ὁ ἠλεκτρομαγνήτης. Ὅταν τὸ πηνίον εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν πόλων τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου οὕτως, ὥστε τὰ ἐπίπεδα τῶν σπειρῶν του νὰ εἶναι κάθετα πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε διὰ τῶν 1000 σπειρῶν τοῦ πηνίου διέρχεται μαγνητικὴ ροή:

$$\Phi = 1000 \cdot S \cdot H = 1000 \cdot 20 \cdot H = 2 \cdot 10^4\ H\ \text{Maxwell}$$

Τὸ κύκλωμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ πηνίον, ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$R_{\text{ολ}} = (3 + 7)\ \Omega = 10\ \Omega$$

Ἔστω ὅτι ἐντὸς χρόνου t ἐξάγομεν τὸ πηνίον ἐκ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τότε μεταβάλλεται ἡ διὰ τοῦ πλαισίου διερχομένη μαγνητικὴ ροὴ ἀπὸ Φ εἰς μηδέν, ἤτοι μεταβάλλεται κατὰ $\Delta\Phi = \Phi$ καὶ συνεπῶς ἀναπτύσσεται ἐπαγωγικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{t}$$

Εἰς τὸ κύκλωμα κυκλοφορεῖ τότε ρεῦμα ἐντάσεως I ἐπὶ χρόνον t, δηλαδὴ κυκλοφορεῖ ἠλεκτρικὸν φορτίον: $Q = I \cdot t$. Ἐξ ἄλλου διὰ τὸ κλειστὸν τοῦτο κύκλωμα ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις:

$$E = I \cdot R_{\text{ολ}} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$I \cdot R_{\text{ολ}} = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{t}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$I \cdot t = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R_{\text{ολ}}} \qquad \text{ἢ} \qquad Q = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{R_{\text{ολ}}} \qquad (3)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν:

$$Q = 0{,}05\ \text{Cb} \qquad \Delta\Phi = 2 \cdot 10^4\ H\ \text{Mx} \qquad R_{\text{ολ}} = 10\ \Omega$$

λαμβάνομεν:

$$0{,}05 = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{2 \cdot 10^4\ H}{10}$$

Λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς H εὑρίσκομεν εἰς Gauss τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου:

$$H = \frac{0{,}05 \cdot 10^5}{2}\ \text{Gauss} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{H = 25 \cdot 10^2\ Gauss}$$

185. Ρεῦμα ἐντάσεως 12 A διαρρέει πηνίον, ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,2 H. Ἐντὸς 0,04 sec ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐλαττώνεται εἰς 3 A. Πόση εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις;

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς E δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad (1)$$

ὅπου L ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου, ΔI ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ Δt ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου συμβαίνει ἡ μεταβολὴ αὕτη. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι :

$$L = 0{,}2\ H \qquad \Delta t = 0{,}04\ sec \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta I = 12 - 3 = 9\ A$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν : $E = 0{,}2 \cdot \frac{9}{0{,}04}\ V$ καὶ $\mathbf{E = 45\ V}$

186. Πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,05 H καὶ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως 8 A. Πόσον πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς 0,1 sec, διὰ νὰ ἀναπτυχθῇ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἴση μὲ 2 Volt;

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad (1)$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὅτι εἶναι :

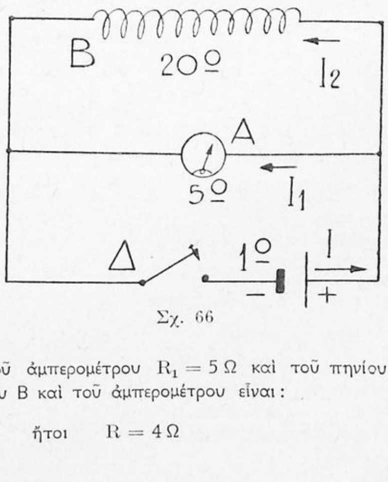
$$E = 2\ V \qquad L = 0{,}05\ H \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta t = 0{,}1\ sec$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς ΔI, εὑρίσκομεν πόσον πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ χρόνου Δt, διὰ νὰ ἀναπτυχθῇ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς E. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$\Delta I = \frac{E \cdot \Delta t}{L} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}05}\ A \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{\Delta I = 4\ A}$$

* Ἐπειδὴ τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 8 A, διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὸ ἀνωτέρω ζητούμενον ἀποτέλεσμα, πρέπει ἐντὸς 0,1 sec νὰ μεταβάλωμεν τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος κατὰ 4 A, ἤτοι ἢ νὰ τὴν αὐξήσωμεν ἀπὸ 8 A εἰς 12 A, ἢ νὰ τὴν ἐλαττώσωμεν ἀπὸ 8 A εἰς 4 A.

187. Εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 66 ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Τὸ πηνίον ἔχει μῆκος 40 cm, φέρει 10 000 σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει διάμετρον 8 cm. 1) Ποῖαι εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ ἀμπερόμετρον A καὶ τὸ πηνίον B; 2) Κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ κλείομεν τὸ κύκλωμα, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀμπερόμετρον A δεικνύει μίαν ἔντασιν I′, ἡ ὁποία ὅμως ἐλαττώνεται ταχύτατα καὶ σταθεροποιεῖται εἰς τὴν τιμὴν I_1 ἡ ὁποία εὑρέθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον. Εἰς τί ὀφείλεται τὸ φαινόμενον τοῦτο καὶ πόση εἶναι ἡ ἔντασις I′; 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.



Σχ. 66

1) Αἱ διάφοροι ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος εἶναι : τῆς γεννητρίας $r = 1\ \Omega$, τοῦ ἀμπερομέτρου $R_1 = 5\ \Omega$ καὶ τοῦ πηνίου $R_2 = 20\ \Omega$. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις R τοῦ πηνίου B καὶ τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{5\ \Omega} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = 4\ \Omega$$

Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις $R_{o\lambda}$ τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{o\lambda} = R + r \quad \text{ἤτοι} \quad R_{o\lambda} = 5\,\Omega$$

Συνεπῶς ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{E}{R_{o\lambda}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{1\,V}{5\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad I = 0{,}2\,A$$

Αἱ ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ ἀμπερόμετρον καὶ τὸ πηνίον προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις :

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{καὶ} \quad I_1R_1 = I_2R_2$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 τῶν ρευμάτων εἶναι :

$$\mathbf{I_1 = 0{,}16\ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_2 = 0{,}04\ A}$$

2) Ὅταν κλείσωμεν τὸ κύκλωμα, τότε τὸ ρεῦμα ἀποκαθίσταται ἀμέσως εἰς τὸ ἀμπερόμετρον, διότι τοῦτο στερεῖται αὐτεπαγωγῆς. Ἀντιθέτως εἰς τὸ πηνίον Β, ἕνεκα τῆς αὐτεπαγωγῆς του, ἡ ἀποκατάστασις τοῦ ρεύματος γίνεται μετὰ παρέλευσιν ὡρισμένου ἐλαχίστου χρόνου. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ πηνίον ὡς μὴ ὑπάρχον εἰς τὸ κύκλωμα, καὶ ἑπομένως ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος κατὰ τὸν θεωρούμενον ἐλάχιστον χρόνον εἶναι :

$$R' = R_1 + r \quad \text{ἤτοι} \quad R' = (5+1)\,\Omega = 6\,\Omega$$

Ὥστε ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τότε τὸ ἀμπερόμετρον, εἶναι :

$$I' = \frac{E}{R'} \quad \text{ἤτοι} \quad I' = \frac{1\,V}{6\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I' = 0{,}167\ A}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $\quad I' > I_1$

3) Τὸ πηνίον Β ἔχει μῆκος $l = 40$ cm, φέρει $N = 10^4$ σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $S = 16\pi$ cm². Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς (L) τοῦ πηνίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$L = \frac{4\pi \cdot N^2 \cdot S}{10^9 \cdot l} \text{ (Henry)}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου Β εἶναι :

$$L = \frac{4\pi \cdot (10^4)^2 \cdot 16\pi}{10^9 \cdot 40} \text{ Henry} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{L = 1{,}57\ Henry}$$

188. Πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,25 Η καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 Α. Πόση ἐνέργεια ἀποταμιεύεται ἐντὸς τοῦ πηνίου κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ ρεύματος;

Εἶναι γνωστὸν (βλ. τόμ. Γ, § 154) ὅτι ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται εἰς τὸ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ ρεύματος, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸν συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς τοῦ κυκλώματος καὶ ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, ἤτοι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = \frac{1}{2}\,L \cdot I^2$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $\quad L = 0{,}25\ H \quad$ καὶ $\quad I = 10\ A$

Ἄρα ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἀποταμιεύεται εἰς τὸ μαγνητικὸν πεδίον τοῦ πηνίου κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἀποκαταστάσεως τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 10^2 \text{ Joule} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 12{,}5\ Joule}$$

189. Πέριξ ἑνὸς πυρῆνος ἐκ μαλακοῦ σιδήρου, ἔχοντος μαγνητικὴν διαπερατότητα $\mu = 1500$ τυλίσσεται πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 20 cm, μέσην τομὴν 12,57 cm², ἀντίστασιν 3,2 Ω καὶ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2000 σπείρας. Τὸ πηνίον τοῦτο διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. Ἡ διακοπὴ τοῦ ρεύματος συντελεῖται ἐντὸς χρόνου 1/20 sec. Νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ πηνίον· 2) ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐξ αὐτεπαγωγῆς κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος, ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐξ αὐτεπαγωγῆς ἀναπτυσσομένου ρεύματος.

1) Τὸ πηνίον ἔχει ἀντίστασιν $R = 3{,}2\ \Omega$ καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ A. Ἑπομένως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου τούτου ἐφαρμόζεται τάσις:

$$U = I \cdot R \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = 10\ \text{A} \cdot 3{,}2\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U = 32\ V}$$

Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, ἔχει ἰσχύν:

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 32\ \text{V} \cdot 10\ \text{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P = 320\ W}$$

2) Τὸ πηνίον ἔχει μῆκος $l = 20$ cm καὶ φέρει $N = 2000$ σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν $S = 12{,}57\ \text{cm}^2$. Ἡ ἐντὸς τοῦ πηνίου ἀναπτυσσομένη μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ εἶναι:

$$B = \mu \cdot H \qquad \text{ἤτοι} \qquad B = \mu \cdot \frac{4\pi \cdot N \cdot I}{10 \cdot l}$$

Συνεπῶς διὰ τῶν N σπειρῶν τοῦ πηνίου διέρχεται μαγνητικὴ ροή:

$$\Phi = N \cdot B \cdot S \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Phi = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{N^2 \cdot I \cdot S \cdot \mu}{l}$$

Κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος, ἤτοι ἐντὸς χρόνου $\Delta t = \frac{1}{20}$ sec, ἡ ἀνωτέρω μαγνητικὴ ροὴ γίνεται ἴση μὲ μηδέν. Ἄρα ἡ μεταβολὴ τῆς μαγνητικῆς ροῆς εἶναι $\Delta\Phi = \Phi$. Ὥστε κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ πηνίου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτεπαγωγῆς:

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{1}{10^8} \cdot \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{2000^2 \cdot 10 \cdot 12{,}57 \cdot 1500}{20}\ \text{V}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{E = 9480\ V}$$

Τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L. Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = \frac{1}{20}$ sec ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ πηνίον, μεταβάλλεται ἀπὸ 10 A εἰς μηδέν, ἤτοι συμβαίνει μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἴση μὲ $\Delta I = 10$ A. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτεπαγωγῆς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι:

$$L = E \cdot \frac{\Delta t}{\Delta I} \qquad \text{ἤτοι} \qquad L = 9480 \cdot \frac{1/20}{10}\ \text{Henry} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{L = 47{,}4\ Henry}$$

Ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ πηνίου εἶναι ἀποταμιευμένη ἐνέργεια:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{1}{2} \cdot 47{,}4 \cdot 10^2\ \text{Joule} \qquad \text{καὶ} \qquad W = 2370\ \text{Joule}$$

Κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μετατρέπεται εἰς ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν καὶ οὕτω τὸ κύκλωμα ἐπὶ χρόνον $\Delta t = \frac{1}{20}$ sec διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐξ αὐτεπαγωγῆς, ὁμόρροπον πρὸς τὸ διακοπὲν ρεῦμα. Ἡ ἰσχὺς P′ τοῦ αὐτεπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι :

$$P' = \frac{W}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad P' = \frac{2370 \text{ Joule}}{1/20 \text{ sec}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P' = 47\,400\ W = 47{,}4\ kW}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσχὺς P′ τοῦ αὐτεπαγωγικοῦ ρεύματος εἶναι 148 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἰσχὺν P τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρρεεν ἀρχικῶς τὸ πηνίον.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑΙ ΜΗΧΑΝΑΙ

190. Εἰς μίαν γεννήτριαν συνεχοῦς ρεύματος τὸ τύμπανον τοῦ ἐπαγωγίμου φέρει 200 εὐθύγραμμα σύρματα καὶ ἐκτελεῖ 1200 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροὴ τοῦ ἠλεκτρομαγνήτου εἶναι $2 \cdot 10^6$ Mx. Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς;

Δίδεται ὅτι τὸ τύμπανον τοῦ ἐπαγωγίμου φέρει N = 200 εὐθύγραμμα σύρματα καὶ ἡ συχνότης ν τῆς περιστροφῆς του εἶναι :

$$\nu = \frac{1200 \text{ στροφαὶ}}{60 \text{ sec}} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = 20 \text{ Hz}$$

Ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἐπαγωγίμου, εἶναι $\Phi_0 = 2 \cdot 10^6$ Mx. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις (E) τῆς γεννητρίας δίδεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot \nu \cdot \Phi_0 \cdot N \text{ (Volt)}$$

Ἄρα εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἔχομεν :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 200 \text{ Volt} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 80\ V}$$

191. Μία γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 300 V, ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,5 Ω καὶ ταχύτητα περιστροφῆς 1500 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Ἡ γεννήτρια αὕτη συνδέεται μὲ ἄλλην ὁμοίαν μηχανήν, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς κινητήρ· οὗτος ἐκτελεῖ 1200 στροφὰς κατὰ λεπτόν. Οἱ ἀγωγοὶ τῆς συνδέσεως τῶν δύο μηχανῶν ἔχουν ἀντίστασιν 4 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς ἑκάστης μηχανῆς καὶ πόση ἰσχὺς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ ἐντὸς ἑκάστης μηχανῆς;

Αἱ γεννήτριαι συνεχοῦς ρεύματος εἶναι ἀντιστρεπταὶ μηχαναί, δηλ. δύνανται νὰ λειτουργήσουν ὡς γεννήτριαι καὶ ὡς κινητῆρες. Ἔστω E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς A, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς γεννήτρια καὶ E′ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς B, ἡ ὁποία λειτουργεῖ ὡς κινητήρ. Ἡ συχνότης περιστροφῆς τῶν δύο μηχανῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

τῆς γεννητρίας A : $$N = \frac{1500}{60} = 25 \text{ Hz}$$

τοῦ κινητῆρος B : $$N' = \frac{1200}{60} = 20 \text{ Hz}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας A καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος B δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$E = \frac{1}{10^8} \cdot N \cdot \nu \cdot \Phi \quad (1) \qquad E' = \frac{1}{10^8} \cdot N' \cdot \nu \cdot \Phi \quad (2)$$

ὅπου ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐθυγράμμων συρμάτων, τὰ ὁποῖα φέρει τὸ ἐπαγώγιμον καὶ Φ ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἐπαγωγίμου. 'Επειδὴ αἱ δύο μηχαναὶ Α καὶ Β εἶναι ὅμοιαι, τὰ ν καὶ Φ εἶναι τὰ αὐτὰ καὶ διὰ τὰς δύο μηχανάς. 'Από τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$\frac{E'}{E} = \frac{N'}{N} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E'}{E} = \frac{20}{25} \qquad (3)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $E = 300$ V. Οὕτω ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E' τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$E' = E \cdot \frac{20}{25} = 300\ \text{V} \cdot \frac{4}{5} = 240\ \text{V}$$

Τὸ κλειστὸν τοῦτο κύκλωμα ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν :

$$R_{\text{ολ}} = (\,0{,}5 + 0{,}5 + 4\,)\ \Omega = 5\ \Omega$$

καὶ περιλαμβάνει γεννήτριαν καὶ ἀποδέκτην. Θὰ ἰσχύῃ λοιπὸν ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις :

$$E = E' + I \cdot R_{\text{ολ}}$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος :

$$I = \frac{E - E'}{R_{\text{ολ}}} = \frac{(\,300 - 240\,)\ \text{V}}{5\ \Omega} = 12\ \text{A}$$

Τώρα εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὴν ἰσχὺν ἑκάστης μηχανῆς, διότι ἔχομεν ὅτι :

ἰσχὺς γεννητρίας Α : $P = E \cdot I = 300\ \text{V} \cdot 12\ \text{A}$ καὶ $\mathbf{P = 3600}$ **Watt**

ἰσχὺς κινητῆρος Β : $P' = E' \cdot I = 240\ \text{V} \cdot 12\ \text{A}$ καὶ $\mathbf{P = 2880}$ **Watt**

'Υπὸ μορφὴν θερμότητος χάνεται συνολικῶς ἰσχύς :

$$P - P' = 3600\ \text{W} - 2880\ \text{W} = 720\ \text{Watt}$$

Εἰδικώτερον ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta = R \cdot I^2 = 4\ \Omega \cdot (\,12\ \text{A}\,)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_\theta = 576\ Watt}$$

καὶ ἐντὸς ἑκάστης μηχανῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta' = r \cdot I^2 = 0{,}5 \cdot (\,12\ \text{A}\,)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_\theta' = 72\ Watt}$$

192. Μία γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Πόση εἶναι ἡ μεγίστη δυνατὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ προσφέρῃ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἡ γεννήτρια αὕτη; Πόση εἶναι τότε ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας;

'Η γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 120$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1\ \Omega$. Ὅταν ἡ γεννήτρια αὕτη παρέχῃ εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας ἐφαρμόζεται τάσις U, ἡ ὁποία ὡς γνωστὸν εἶναι :

$$U = E - I \cdot r \quad \text{ἤτοι} \quad U = 120 - I$$

'Από τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = 120 - U$$

Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἡ γεννήτρια παρέχει ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = U \cdot (\,120 - U\,) \quad \text{καὶ} \quad P = 120\,U - U^2$$

'Από τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$U^2 - 120\,U + P = 0 \quad \text{ἄρα} \quad U = 60 \pm \sqrt{3600 - P}$$

Ἡ τάσις U πρέπει νὰ ἔχῃ θετικὴν τιμὴν ($U > 0$). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ ἰσχὺς P εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα ἀπὸ 3600 (δηλαδή, ὅταν εἶναι : $3600 - P \geqslant 0$). Ὥστε ἡ μεγίστη δυνατὴ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν δύναται ἡ γεννήτρια αὕτη νὰ προσφέρῃ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, εἶναι :

$$\mathbf{P_{\mu\varepsilon\gamma} = 3600\ Watt}$$

Τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας θὰ εἶναι :

$$U = (60 \pm \sqrt{3600 - 3600})\ \mathrm{Volt} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 60\ V}$$

Ἡ ἀπόδοσις τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$\alpha = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \frac{60\ V}{120\ V} = 0{,}5 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{\alpha = 50\ \%}$$

193. Γεννήτρια ἔχει εἰς τοὺς πόλους της διαφορὰν δυναμικοῦ 120 V καὶ στέλλει ρεῦμα ἐντάσεως 100 A εἰς κινητῆρα εὑρισκόμενον μακρὰν τῆς γεννητρίας. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, ἂν θέλωμεν νὰ χρησιμοποιῇ ὁ κινητὴρ τὰ 0,90 τῆς ἰσχύος, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα; Πόση εἶναι τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος;

Ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U = 120\ V$ καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 100\ A$. Οὕτω ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = 120\ V \cdot 100\ A = 12\,000\ \mathrm{Watt}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς θὰ χάνωνται τὰ 0,10 τῆς ἀνωτέρω ἰσχύος καὶ οὕτω εἰς τὸν κινητῆρα θὰ χρησιμοποιοῦνται τὰ 0,90 τῆς ἰσχύος P. Ὥστε ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχύς :

$$P_\gamma = 0{,}10 \cdot P = 0{,}10 \cdot 12\,000\ W = 1200\ \mathrm{Watt}$$

Ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς P_γ μετατρέπεται ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἰς θερμότητα. Ἂν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule ἔχομεν :

$$P_\gamma = R \cdot I^2$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀντίστασις R τῆς γραμμῆς εἶναι :

$$R = \frac{P_\gamma}{I^2} = \frac{1200\ W}{(100\ A)^2} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{R = 0{,}12\ \Omega}$$

Εἰς τὸν κινητῆρα φθάνει ἰσχύς :

$$P_\varkappa = 0{,}90 \cdot P = 0{,}90 \cdot 12\,000\ W = 10\,800\ \mathrm{Watt}$$

Εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος ὑπάρχει τάσις $U_\varkappa$. Ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 100\ A$. Ἄρα ἔχομεν :

$$P_\varkappa = U_\varkappa \cdot I$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις $U_\varkappa$ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$U_\varkappa = \frac{P_\varkappa}{I} = \frac{10\,800\ W}{100\ A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_\varkappa = 108\ V}$$

Παρατήρησις: Ἡ τάσις $U_\varkappa$ δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ μὲ ἄλλον συλλογισμόν. Ἡ γραμμὴ ἔχει ἀντίστασιν $R = 0{,}12\ \Omega$ καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 100\ A$. Οὕτω ἐπὶ τῆς γραμμῆς συμβαίνει πτῶσις τῆς τάσεως U_γ, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm εἶναι :

$$U_\gamma = R \cdot I = 0{,}12\ \Omega \cdot 100\ A = 12\ V$$

Συνεπῶς ἡ τάσις $U_\varkappa$ εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$U_\varkappa = U - U_\gamma = 120\ V - 12\ V = \mathbf{108\ V}$$

194. Δύο δυναμοηλεκτρικαὶ μηχαναὶ A καὶ B ἔχουν ἀντιστάσεις 30 Ω καὶ 15 Ω, συνδέονται δὲ μεταξύ των μὲ ἀγωγούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντίστασιν 5 Ω. Ἡ A λειτουργεῖ ὡς γεννήτρια καὶ εἰς τοὺς πόλους της ἡ τάσις εἶναι 120 V, ἡ δὲ B λειτουργεῖ ὡς κινητὴρ καὶ εἰς τοὺς πόλους της ἡ τάσις εἶναι 90 V. Πόση εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς A καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς B;

Ἔστω E ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας A, ἡ ὁποία ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_A = 30\,\Omega$ καὶ τάσιν εἰς τοὺς πόλους της $U_A = 120$ V. Ἐπίσης ἔστω E′ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος B, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_B = 15\,\Omega$ καὶ τάσιν εἰς τοὺς πόλους του $U_B = 90$ V. Παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι ἐπὶ τῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰς μηχανὰς A καὶ B συμβαίνει πτῶσις τῆς τάσεως U, ἡ ὁποία εἶναι:

$$U = U_A - U_B = 120\ \text{V} - 90\ \text{V} = 30\ \text{V}$$

Ἂν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε διὰ τὴν γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστασιν $R = 5\,\Omega$, ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm:

$$U = I \cdot R \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{U}{R} = \frac{30\ \text{V}}{5\,\Omega} = 6\ \text{A}$$

Διὰ τὴν τάσιν U_A εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας A ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$U_A = E - I \cdot r_A$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας A εἶναι:

$$E = U_A + I \cdot r_A = 120\ \text{V} + (6 \cdot 30)\ \text{V} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E = 300\ V}$$

Διὰ τὴν τάσιν U_B εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος B ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$U_B = E' + I \cdot r_B$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ τοῦ κινητῆρος B εἶναι:

$$E' = U_B - I \cdot r_B = 90\ \text{V} - (6 \cdot 15)\ \text{V} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E' = 0\ V}$$

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον $E' = 0$ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ μηχανὴ B δὲν στρέφεται, δηλαδὴ δὲν λειτουργεῖ ὡς κινητήρ, ἀλλὰ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις, ἐπὶ τῆς ὁποίας συμβαίνει πτῶσις τῆς τάσεως ἴση μέ:

$$I \cdot r_B = 6\ \text{A} \cdot 15\,\Omega = 90\ \text{V}$$

ὅση δηλαδὴ δίδεται εἰς τὸ πρόβλημα ὡς τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς μηχανῆς B.

195. Μία ὑδατόπτωσις παρέχει ἰσχὺν 500 kW εἰς γεννήτριαν ἔχουσαν ἀπόδοσιν 90 %. Τὸ ρεῦμα μεταφέρεται εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως μὲ ἀγωγούς, ἔχοντας ἀντίστασιν 300 Ω. Πόση εἶναι ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως, ὅταν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας εἶναι 20 000 V καὶ ὅταν εἶναι 100 000 V;

Ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P_\delta = 500\ \text{kW} = 500\,000\ \text{Watt}$$

Ἔστω P_γ ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας. Δίδεται ὅτι ἡ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι τὰ 90 % τῆς ἰσχύος τῆς ὑδατοπτώσεως, δηλαδὴ εἶναι:

$$P_\gamma = \frac{90}{100} \cdot 500\ \text{kW} = 450\ \text{kW} \qquad \text{ἢ} \qquad P_\gamma = 450\,000\ \text{W}$$

α) Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας εἶναι $E = 20\,000$ V. Ἂν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$P_\gamma = E \cdot I$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{P_\gamma}{E} = \frac{450\,000\ \mathrm{W}}{20\,000\ \mathrm{V}} = 22{,}5\ \mathrm{A}$$

Ἡ γραμμή, διὰ τῆς ὁποίας μεταφέρεται ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως, ἔχει ἀντίστασιν $R = 300\ \Omega$. Ἄρα ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta = I^2 \cdot R = (22{,}5\ \mathrm{A})^2 \cdot 300\ \Omega = 151\,875\ \mathrm{Watt}$$

Οὕτω ἐκ τῆς ἰσχύος P_γ τῆς γεννητρίας φθάνει εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως ὡς ὠφέλιμος ἰσχὺς P_ω, ἡ διαφορὰ $P_\gamma - P_\theta$, ἤτοι :

$$P_\omega = P_\gamma - P_\theta = 450\,000\ \mathrm{W} - 151\,875\ \mathrm{W} = 298\,125\ \mathrm{Watt}$$

Βιομηχανικὴ ἀπόδοσις A τῆς ἐγκαταστάσεως καλεῖται ὁ λόγος τῆς ὠφελίμου ἰσχύος P_ω πρὸς τὴν δαπανωμένην ἰσχὺν P_δ τῆς ὑδατοπτώσεως. Οὕτω ἔχομεν :

$$A = \frac{P_\omega}{P_\delta} = \frac{298\,125\ \mathrm{W}}{500\,000\ \mathrm{W}} = \mathbf{0{,}59} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{A = 59\ \%}$$

β) Ὅταν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E τῆς γεννητρίας εἶναι $E = 100\,000\ \mathrm{V}$, τότε ἡ ἰσχὺς P_γ τῆς γεννητρίας θὰ εἶναι πάλιν $P_\gamma = 450\,000\ \mathrm{Watt}$. Ἂν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$P_\gamma = E \cdot I$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{P_\gamma}{E} = \frac{450\,000\ \mathrm{W}}{100\,000\ \mathrm{V}} = 4{,}5\ \mathrm{A}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται τώρα ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_\theta = I^2 \cdot R = (4{,}5\ \mathrm{A})^2 \cdot 300\ \Omega = 6075\ \mathrm{Watt}$$

Οὕτω εἰς τὸν τόπον καταναλώσεως φθάνει τώρα ὠφέλιμος ἰσχύς :

$$P_\omega = P_\gamma - P_\theta = 450\,000\ \mathrm{W} - 6075\ \mathrm{W} = 443\,925\ \mathrm{Watt}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ βιομηχανικὴ ἀπόδοσις A΄ τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι :

$$A' = \frac{P_\omega}{P_\delta} = \frac{443\,925\ \mathrm{W}}{500\,000\ \mathrm{W}} = \mathbf{0{,}88} \qquad \text{ἢ} \qquad \mathbf{A' = 88\ \%}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀπώλειαι ἰσχύος ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐλαττώνονται κατὰ πολύ, ὅταν τὸ ρεῦμα μεταβιβάζεται ὑπὸ ὑψηλὴν τάσιν καὶ χαμηλὴν ἔντασιν.

196. Εἰς μίαν γεννήτριαν ὁ ἐπαγωγεὺς παρεμβάλλεται κατὰ διακλάδωσιν εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ ἐπαγωγίμου. Ἡ ἀπόδοσις τῆς μηχανῆς ἀνέρχεται εἰς 94%. Αἱ ἐντὸς τῆς μηχανῆς ἀπώλειαι ἀναλύονται ὡς ἑξῆς: 3 % ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου, 2 % ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγέως καὶ 1 % ὀφείλεται εἰς ὑστέρησιν καὶ ρεύματα τοῦ Foucault. Ἡ μηχανὴ αὐτὴ παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως 80 A ὑπὸ τάσιν 200 V. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάφοροι ἀπώλειαι, αἱ ἀντιστάσεις τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ τοῦ ἐπαγωγέως ὡς καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς.

Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως $I = 80\ \mathrm{A}$ ὑπὸ τάσιν $U = 200\ \mathrm{V}$. Ἄρα ἡ μηχανὴ παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 200\ \mathrm{V} \cdot 80\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad P = 16\,000\ \mathrm{W}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσχὺς P εἶναι ἴση μὲ τὰ 0,94 τῆς ὅλης ἰσχύος $P_{\gamma\varepsilon\nu}$ τῆς γεννητρίας. Ἄρα εἶναι :

$$P = 0{,}94 \cdot P_{\gamma\varepsilon\nu} \qquad \text{ἄρα} \qquad P_{\gamma\varepsilon\nu} = \frac{P}{0{,}94} = \frac{16\,000\ \mathrm{W}}{0{,}94} \qquad \text{καὶ} \qquad P_{\gamma\varepsilon\nu} = 17\,021\ \mathrm{W}$$

Αἱ διάφοροι ἀπώλειαι ἰσχύος εἶναι :

ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου : $p_1 = 0{,}03 \cdot 17\,021$ W ἤτοι $\mathbf{p_1 = 510{,}63\ W}$

ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγέως : $p_2 = 0{,}02 \cdot 17\,021$ W ἤτοι $\mathbf{p_2 = 340{,}42\ W}$

ἐντὸς τοῦ σιδήρου : $p_3 = 0{,}01 \cdot 17\,021$ W ἤτοι $\mathbf{p_1 = 170{,}21\ W}$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι ἀντιστοίχως r_1 καὶ r_2, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον καὶ τὸν ἐπαγωγέα εἶναι ἀντιστοίχως I_1 καὶ I_2. Ἐπειδὴ ὁ ἐπαγωγεὺς καὶ τὸ ἐπαγώγιμον συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως, ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$I_1 = I + I_2$$

Διὰ τὸν ἐπαγωγέα ἰσχύει τότε ἡ ἐξίσωσις :

$$p_2 = r_2 \cdot I_2^2 \quad \text{ἢ} \quad p_2 = U \cdot I_2$$

ὅπου U = 200 V εἶναι ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$I_2 = \frac{p_2}{U} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{340{,}42\ \text{W}}{200\ \text{V}} = 1{,}70\ \text{A}$$

Ἄρα ἡ ἀντίστασις (r_2) τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι :

$$r_2 = \frac{U}{I_2} \quad \text{ἤτοι} \quad r_2 = \frac{200\ \text{V}}{1{,}70\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r_2 = 117{,}6\ \Omega}$$

Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον, εἶναι :

$$I_1 = I + I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = 80\ \text{A} + 1{,}70\ \text{A} \quad \text{καὶ} \quad I_1 = 81{,}70\ \text{A}$$

Διὰ τὸ ἐπαγώγιμον ἰσχύει ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις :

$$p_1 = r_1 \cdot I_1^2 \quad \text{ἄρα} \quad r_1 = \frac{p_1}{I_1^2}$$

$$\text{καὶ} \quad r_1 = \frac{510{,}63\ \text{W}}{(81{,}70\ \text{A})^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{r_1 = 0{,}076\ \Omega}$$

Ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις (E) τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$E = U + I_1 r_1 \quad \text{ἤτοι} \quad E = 200\ \text{V} + (81{,}70 \cdot 0{,}076)\ \text{V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 206{,}21\ V}$$

197. Μία γεννήτρια παρέχει ρεῦμα ἐντάσεως 11 A εἰς μίαν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν 10 Ω. Διπλασιάζομεν τὴν ἀντίστασιν αὐτὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται 6 A. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας. 2) Ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια χρησιμοποιεῖται ἔπειτα διὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς κινητῆρος. Ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις εἶναι 10 Ω, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι 5 A. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος. Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἡ ἰσχὺς αὕτη ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν ;

1) Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r. Ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις εἶναι $R_1 = 10\ \Omega$, τότε εἶναι $I_1 = 11$ A. Ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ ἀντίστασις γίνῃ $R_2 = 20\ \Omega$, τότε εἶναι $I_2 = 6$ A. Διὰ τὰς αὐτὰς περιπτώσεις ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

$$E = I_1 \cdot (R_1 + r) \quad \text{καὶ} \quad E = I_2 \cdot (R_2 + r)$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν :

$$I_1 \cdot (R_1 + r) = I_2 \cdot (R_2 + r) \quad \text{ἤτοι} \quad r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}$$

$$\text{ἢ} \quad r = \frac{6 \cdot 20 - 11 \cdot 10\ (\text{A} \cdot \Omega)}{11 - 6\ (\text{A})} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r = 2\ \Omega}$$

Ἡ δὲ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$E = 11\ A \cdot (10 + 2)\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E = 132\ V}$$

2) Ἔστω E′ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. Δίδεται ὅτι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος ($R_{ολ}$) τοῦ κυκλώματος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $R_{ολ} = 10\ \Omega$, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_3 = 5$ A. Τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$E = E' + I_3 \cdot R_{ολ} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E' = E - I_3 \cdot R_{ολ}$$

ἄρα εἶναι :

$$E' = 132\ V - (5 \cdot 10)\ V \qquad \text{καὶ} \qquad E' = 82\ V$$

Ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$P_K = E' \cdot I_3 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_K = 82\ V \cdot 5\ A \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P_K = 410\ W}$$

Ἔστω I ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμήν της P. Τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = E' \cdot I \qquad \text{ἄρα} \qquad E' = \frac{P}{I}$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$E = E' + I \cdot R_{ολ} \qquad \text{ἄρα} \qquad E = \frac{P}{I} + I \cdot R_{ολ}$$

$$\text{ἢ} \qquad I^2 R_{ολ} - EI + P = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad 10\,I^2 - 132\,I + P = 0$$

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ I πραγματικὴν τιμήν, πρέπει νὰ εἶναι :

$$66^2 - 10\,P \geqslant 0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P \leqslant \frac{66^2}{10} \qquad \text{καὶ} \qquad P \leqslant 435{,}6$$

Ὥστε ἡ μεγίστη ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$P_{μεγ} = 435{,}6\ W$$

Τότε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$10\,I^2 - 132\,I + 435{,}6 = 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad I = \frac{132}{2 \cdot 10}\ A \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 6{,}6\ A}$$

193. Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 110 V, ἔχει ἀπόδοσιν 80 % καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 20 A. Τὰ σύρματα, τὰ συνδέοντα τὸν κινητῆρα μὲ τὴν πηγὴν τοῦ ρεύματος, ἔχουν ἀντίστασιν 1 Ω. Αἱ ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ἀπώλειαι ὀφείλονται μόνον εἰς τὸ φαινόμενον τοῦ Joule. Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ;

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 110\ V \cdot 20\ A \qquad \text{καὶ} \qquad P = 2200\ W$$

Τὰ σύρματα, τὰ συνδέοντα τὸν κινητῆρα μὲ τὴν πηγὴν τοῦ ρεύματος, ἔχουν ἀντίστασιν $R = 1\ \Omega$ καὶ ἀπορροφοῦν ἰσχύν :

$$P_1 = I^2 \cdot R \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_1 = (20\ A)^2 \cdot 1\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad P_1 = 400\ W$$

Ἄρα ὁ κινητὴρ λαμβάνει ἰσχὺν P_2 ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν $P - P_1$, ἤτοι εἶναι :

$$P_2 = P - P_1 \qquad \text{ἢ} \qquad P_2 = (2200 - 400)\ W \qquad \text{καὶ} \qquad P_2 = 1800\ W$$

Ἀπὸ αὐτὴν τὴν ἰσχὺν P_2 ὁ κινητὴρ μετατρέπει εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν τὰ 0,80 τῆς P_2. Ἄρα ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$P_{κιν} = 0{,}80\ P_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{κιν} = 0{,}80 \cdot 1800\ W \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P_{κιν} = 1440\ W}$$

Ἔστω r ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος. Ἕνεκα τοῦ φαινομένου τοῦ Joule ἐντὸς τοῦ κινητῆρος μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος ἰσχὺς P_3 ἴση μέ:

$$P_3 = 0{,}20 \cdot P_2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_3 = 0{,}20 \cdot 1800\ \mathrm{W} \quad \text{καὶ} \quad P_3 = 360\ \mathrm{W}$$

Τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$P_3 = I^2 \cdot r \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad r = \frac{P_3}{I^2}$$

$$\text{ἤτοι} \quad r = \frac{360\ \mathrm{W}}{(20\ \mathrm{A})^2} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r = 0{,}9\ \Omega}$$

199. Εἰς μίαν γεννήτριαν συνεχοῦς ρεύματος ὁ ἐπαγωγεὺς συνδέεται ἐν παραλλήλῳ μὲ τὸ ἐπαγώγιμον. Τὸ ἐπαγώγιμον ἔχει ἀντίστασιν 0,5 Ω καὶ ὁ ἐπαγωγεὺς ἔχει ἀντίστασιν 250 Ω. Ἡ γεννήτρια συνδέεται μὲ κινητῆρα ἔχοντα ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 126 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,6 Ω. Τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι 137 V. Νὰ εὑρεθοῦν: α) αἱ ἐντάσεις τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸ ἐπαγώγιμον, τὸν ἐπαγωγέα καὶ τὸν κινητῆρα· β) ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος πρὸς τὴν ἰσχὺν τῆς γεννητρίας.

α) Τὸ ἐπαγώγιμον Α (σχ. 67) ἔχει ἀντίστασιν $R = 0{,}5\ \Omega$, ὁ δὲ ἐπαγωγεὺς Β ἔχει ἀντίστασιν $R_1 = 250\ \Omega$. Ὁ κινητὴρ Κ ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E' = 126\ \mathrm{V}$ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 0{,}6\ \Omega$. Τὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον παράγεται ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου Α, ἔχει ἔντασιν Ι. Τὸ ρεῦμα τοῦτο διαχωρίζεται εἰς δύο ρεύματα, τὰ ὁποῖα διαρρέουν τὸν ἐπαγωγέα Β καὶ τὸν κινητῆρα Κ. Τὰ δύο αὐτὰ ρεύματα ἔχουν ἀντιστοίχους ἐντάσεις I_1 καὶ I_2. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$I = I_1 + I_2$$

Δίδεται ὅτι ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους Γ καὶ Δ τῆς γεννητρίας εἶναι $U = 137\ \mathrm{V}$. Ἄρα ὁ ἐπαγωγεὺς Β διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{137\ \mathrm{V}}{250\ \Omega}$$

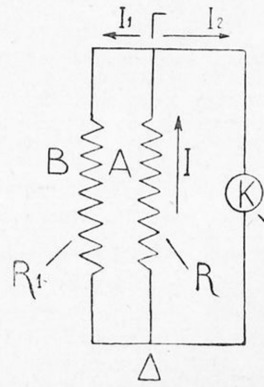
$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 0{,}548\ A}$$

Ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν κινητῆρα Κ, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U = E' + I_2 r$$

$$\text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{U - E'}{r} = \frac{(137 - 126)\ \mathrm{V}}{0{,}6\ \Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I_2 = 18{,}333\ A}$$



Σχ. 67

Ὥστε ἡ ἔντασις Ι τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον Α, εἶναι:

$$I = 0{,}548\ \mathrm{A} + 18{,}333\ \mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 18{,}88\ A}$$

β) Ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου Α ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε εἶναι:

$$E = U + IR \quad \text{ἤτοι} \quad E = 137\ \mathrm{V} + (18{,}88 \cdot 0{,}5)\ \mathrm{V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 146{,}44\ V}$$

Ἡ ἰσχὺς P_κ τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$P_\kappa = E' \cdot I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_\kappa = 126\ \mathrm{V} \cdot 18{,}333\ \mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad P_\kappa = 2310\ \mathrm{W}$$

Ἡ δὲ ἰσχὺς P_γ τῆς γεννητρίας εἶναι:

$$P_\gamma = E \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P_\gamma = 146{,}44\ \mathrm{V} \cdot 18{,}88\ \mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad P_\gamma = 2760\ \mathrm{W}$$

Συνεπῶς ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἰσχύων $P_\varkappa$ καὶ P_γ εἶναι :

$$\frac{P_\varkappa}{P_\gamma} = \frac{2310\ W}{2760\ W} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\mathbf{P_\varkappa}}{\mathbf{P_\gamma}} = \mathbf{0{,}84}$$

200. Γεννήτρια συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 120 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἰσχύς, ἡ ὁποία δύναται νὰ δαπανηθῇ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα καὶ ὁ λόγος τῆς ἰσχύος ταύτης πρὸς τὴν ἰσχὺν τῆς γεννητρίας. 2) Ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια τροφοδοτεῖ λαμπτῆρας, λειτουργοῦντας ὑπὸ τάσιν 110 V· ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει κατὰ τὴν λειτουργίαν του ἀντίστασιν 440 Ω. Πόσους λαμπτῆρας δύναται νὰ τροφοδοτήσῃ ἡ γεννήτρια; Αἱ λοιπαὶ ἀντιστάσεις τοῦ κυκλώματος παραλείπονται.

1) Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 120\ V$ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1\ \Omega$. Ἡ γεννήτρια παράγει ρεῦμα ἐντάσεως I. Ἄρα ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$U = E - Ir \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{E - U}{r}$$

$$\text{ἢ} \qquad I = \frac{(120 - U)\ V}{1\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I = (120 - U)\ A$$

Ἡ γεννήτρια παρέχει εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = U(120 - U) \qquad \text{καὶ} \qquad P = 120\,U - U^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$U^2 - 120\,U - P = 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad U = 60 \pm \sqrt{3600 - P}$$

Ἡ τάσις U ἔχει θετικὴν τιμὴν (δηλ. εἶναι $U > 0$), ἐὰν εἶναι :

$$3600 - P \geqslant 0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad 3600 \geqslant P$$

Ὥστε ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς ἰσχύος P εἶναι :

$$\mathbf{P_{\mu\varepsilon\gamma} = 3600\ W}$$

Τότε ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$U = 60 \pm \sqrt{3600 - 3600} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{U = 60\ V}$$

Ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, εἶναι : $P_{\mu\varepsilon\gamma} = UI$. Ἡ δὲ ἰσχὺς τῆς γεννητρίας εἶναι : $P_{\gamma\varepsilon\nu} = EI$. Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος τῶν δύο τούτων ἰσχύων εἶναι :

$$\frac{P_{\mu\varepsilon\gamma}}{P_{\gamma\varepsilon\nu}} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{P_{\mu\varepsilon\gamma}}{P_{\gamma\varepsilon\nu}} = \frac{60\ V}{120\ V} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\mathbf{P_{\mu\varepsilon\gamma}}}{\mathbf{P_{\gamma\varepsilon\nu}}} = \mathbf{0{,}5}$$

2) Ὅταν ἡ ἀνωτέρω γεννήτρια τροφοδοτῇ τοὺς λαμπτῆρας, τότε ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι $U_1 = 110\ V$. Ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἀντίστασιν $r_1 = 440\ \Omega$ καὶ συνεπῶς ἕκαστος λαμπὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{U_1}{r_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \frac{110\ V}{440\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 = 0{,}25\ A$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ γεννήτρια παράγει ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{E - U}{r} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{(120 - 110)\ V}{1\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I = 10\ A$$

Οἱ ν λαμπτῆρες συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = \nu \cdot I_1$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν λαμπτήρων εἶναι :

$$\nu = \frac{I}{I_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{10\ A}{0{,}25\ A/\text{λαμπτῆρα}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{\nu = 40\ \text{λαμπτῆρες}}$$

201. Μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β ἑνὸς κυκλώματος συνεχοῦς ρεύματος διατηρεῖται σταθερὰ τάσις 600 V. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β συνδέονται μὲ τὸ ἐπαγώγιμον μιᾶς γεννητρίας συνεχοῦς ρεύματος. Τὰ χρησιμοποιηθέντα διὰ τὴν σύνδεσιν σύρματα ἔχουν ἀντίστασιν 0,40 Ω, ὁ δὲ ἐπαγωγεὺς τῆς μηχανῆς διεγείρεται ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπαγωγίμου μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς πηγῆς ρεύματος, ἡ ὁποία ἔχει σταθερὰν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν. Τὸ ἐπαγώγιμον ἔχει ἀντίστασιν 0,6 Ω καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 100 Α. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὸ ἐπαγώγιμον τοῦ ἀνωτέρω κινητῆρος, ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους του καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος. 2) Ἐὰν ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ κινητῆρος γίνῃ ἴση μὲ τὰ 8/10 τῆς ταχύτητος τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀνωτέρω, πόση θὰ γίνῃ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν κινητῆρα;

1) Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τοῦ κυκλώματος ὑπάρχει τάσις $U = 600$ V, ἡ δὲ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἐπαγώγιμον τῆς μηχανῆς (δηλ. τὸ στρεφόμενον σύστημα) εἶναι $I = 100$ A. Τὰ σύρματα τὰ χρησιμοποιηθέντα διὰ τὴν σύνδεσιν τοῦ ἐπαγωγίμου μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ κυκλώματος ἔχουν ἀντίστασιν $R_1 = 0{,}40\ \Omega$. Ἄρα ἐπὶ τῶν συρμάτων παρατηρεῖται πτῶσις τῆς τάσεως U_1, ἡ ὁποία εἶναι :

$$U_1 = IR_1 \quad \text{ἤτοι} \quad U_1 = 100\ A \cdot 0{,}40\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad U_1 = 40\ V$$

Συνεπῶς εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἐπαγωγίμου ἐφαρμόζεται τάσις U_2, ἡ ὁποία εἶναι :

$$U_2 = U - U_1 \quad \text{ἤτοι} \quad U_2 = 600\ V - 40\ V \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_2 = 560\ V}$$

Ἡ ἰσχύς, ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὸ ἐπαγώγιμον, εἶναι :

$$P = U_2 \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = 560\ V \cdot 100\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 56\,000\ W}$$

Τὸ ἐπαγώγιμον ἔχει ἀντίστασιν $r = 0{,}6\ \Omega$. Μέρος τῆς ἀνωτέρω εὑρεθείσης ἰσχύος P τοῦ ρεύματος μετατρέπεται ἀπὸ τὸν κινητῆρα εἰς μηχανικὴν ἐνέργειαν. Ἐὰν E′ εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος, τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις :

$$U = E' + Ir \quad \text{ἤτοι} \quad E' = U - Ir$$

$$\text{ἢ} \quad E' = 560\ V - (100\ A \cdot 0{,}6\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 500\ V}$$

2) Ἔστω ν ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἐπαγωγίμου. Ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου στρέφεται τὸ ἐπαγώγιμον διατηρεῖται σταθερά. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις (E′) ἑνὸς κινητῆρος συνεχοῦς ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E' = \frac{1}{10^8} \cdot \nu \cdot \Phi_0 \cdot N \qquad (1)$$

ὅπου ν εἶναι ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ ἐπαγωγίμου τῆς μηχανῆς, Φ_0 ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ N τὰ εὐθύγραμμα σύρματα, τὰ ὁποῖα φέρει τὸ τύμπανον τοῦ ἐπαγωγίμου. Ὅταν ἡ συχνότης περιστροφῆς γίνῃ $\nu' = \frac{8\nu}{10}$, τότε ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E'' = \frac{1}{10^8} \cdot \nu' \cdot \Phi_0 \cdot N \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{E''}{E'} = \frac{\nu'}{\nu} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{E''}{E'} = \frac{8}{10} \quad \text{ἄρα εἶναι :} \quad E'' = \frac{8}{10}\, E' \quad \text{ἢ} \quad E'' = 400\ V$$

Ἂν I' εἶναι ἡ νέα ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$U = I'R_1 + (E'' + I'r) \quad \text{ἄρα} \quad I' = \frac{U - E''}{R_1 + r}$$

$$\text{ἢ} \quad I' = \frac{600\ V - 400\ V}{(0{,}40 + 0{,}60)\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I' = 200\ A}$$

202. Δύο δυναμοηλεκτρικαὶ μηχαναὶ Α καὶ Β ἔχουν ἀντιστοίχως ἀντιστάσεις $R_A = 20\ \Omega$ καὶ $R_B = 10\ \Omega$, συνδέονται δὲ μεταξύ των δι' ἀγωγῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀντίστασιν $R = 5\ \Omega$. Ἡ πρώτη λειτουργεῖ ὡς γεννήτρια καὶ παρουσιάζει μεταξὺ τῶν πόλων της διαφορὰν δυναμικοῦ $U_1 = 120\ V$, ἡ δὲ δευτέρα λειτουργεῖ ὡς ἀποδέκτης καὶ παρουσιάζει μεταξὺ τῶν πόλων της διαφορὰν δυναμικοῦ $U_2 = 90\ V$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε τῆς μηχανῆς Α καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε' τῆς μηχανῆς Β.

Μεταξὺ τῶν δύο μηχανῶν Α καὶ Β παρατηρεῖται πτῶσις τῆς τάσεως U, ἴση μέ:

$$U = U_1 - U_2 \quad \text{ἤτοι} \quad U = 120\ V - 90\ V \quad \text{καὶ} \quad U = 30\ V$$

Αὐτὴ ἡ πτῶσις τῆς τάσεως συμβαίνει ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως $R = 5\ \Omega$ τῶν ἀγωγῶν, οἱ ὁποῖοι συνδέουν τὰς δύο μηχανάς. Ὥστε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{30\ V}{5\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I = 6\ A$$

Ἄρα ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε τῆς γεννητρίας Α εἶναι:

$$E = U_1 + IR_A \quad \text{ἢ} \quad E = 120\ V + (6\ A \cdot 20\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 240\ V}$$

Ἡ δὲ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις Ε' τοῦ ἀποδέκτου Β εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U_2 = E' + IR_B \quad \text{ἄρα} \quad E' = U_2 - IR_B$$

$$\text{ἢ} \quad E' = 90\ V - (6\ A \cdot 10\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E' = 30\ V}$$

* Σημείωσις. Ἂν ἡ μηχανὴ Β ἔχῃ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $R_B = 15\ \Omega$, τότε ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἀποδέκτου τούτου εἶναι:

$$E' = 90\ V - (6\ A \cdot 15\ \Omega) \quad \text{ἤτοι} \quad E' = 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μηχανὴ Β δὲν στρέφεται καὶ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις, ὁπότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$U_2 = IR_B$$

203. Ὁ θάλαμος ἑνὸς ἀνελκυστῆρος, ὅταν εἶναι κενός, ἔχει βάρος 100 kgr* καὶ κινεῖται μὲ τὴν βοήθειαν κινητῆρος, τοῦ ὁποίου ὁ ἐπαγωγεὺς συνδέεται ἐν παραλλήλῳ μὲ τὸ ἐπαγώγιμον. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι 200 Ω, τοῦ δὲ ἐπαγωγίμου εἶναι 0,2 Ω. Ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι 80 % καὶ διατηρεῖται σταθερά, εἴτε ὁ θάλαμος εἶναι κενός, εἴτε φέρει φορτίον. Ἡ τάσις τοῦ ρεύματος εἶναι 100 V καὶ ὁ κενὸς θάλαμος ἀνέρχεται μὲ ταχύτητα 1 m/sec. Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ταχύτητα ἀνέρχεται ὁ θάλαμος, ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ εὑρίσκωνται 4 ἄτομα, ἔχοντα συνολικὸν βάρος 300 kgr*.

Ὁ θάλαμος τοῦ ἀνελκυστῆρος ἔχει βάρος B = 100 kgr*. Ὅταν ὁ κενὸς θάλαμος ἀνέρχεται μὲ ταχύτητα υ = 1 m/sec, τότε δαπανᾶται μηχανικὴ ἰσχύς:

$$P_M = B \cdot \upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad P_M = 100\ \text{kgr}^* \cdot 1\ \text{m/sec}$$

$$\text{καὶ} \quad P_M = 100\ \text{kgr}^*\text{m/sec}$$

Αὐτὴ ὅμως ἡ ἰσχὺς εἶναι τὰ 0,80 τῆς δαπανωμένης ἠλεκτρικῆς ἰσχύος P_H, διότι δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\frac{P_M}{P_H} = 0{,}80 \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad P_H = \frac{P_M}{0{,}80}$$

$$\text{ἢ} \quad P_H = \frac{100 \text{ kgr*m/sec}}{0{,}80} \quad \text{καὶ} \quad P_H = 125 \text{ kgr*m/sec}$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $1 \text{ kgr*m/sec} = 9{,}81 \text{ W}$, ἔπεται ὅτι εἶναι:

$$P_H = 125 \cdot 9{,}81 \text{ W} \quad \text{ἤτοι} \quad P_H = 1226 \text{ W}$$

Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἐπαγωγέως εἶναι $R_1 = 200\ \Omega$, τοῦ δὲ ἐπαγωγίμου εἶναι $R_2 = 0{,}2\ \Omega$. Ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων ἀντιστάσεων εἶναι $U = 100$ V. Αἱ ἀντιστάσεις R_1 (στάτορ) καὶ R_2 (ρότορ) διαρρέονται ἀπὸ ρεύματα ἔχοντα ἀντιστοίχως ἐντάσεις I_1 καὶ I_2. Ἂν I εἶναι ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$I = I_1 + I_2$$

Τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν:

$$P_H = U \cdot I \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad I = \frac{P_H}{U}$$

$$\text{ἤτοι} \quad I = \frac{1226 \text{ W}}{100 \text{ V}} \quad \text{καὶ} \quad I = 12{,}26 \text{ A}$$

Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἐπαγωγέα, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U = I_1 R_1 \quad \text{ἄρα} \quad I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{100 \text{ V}}{200\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_1 = 0{,}50 \text{ A}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐπαγώγιμον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_2 = I - I_1 \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = (12{,}26 - 0{,}50) \text{ A} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = 11{,}76 \text{ A}$$

Ἂν E' εἶναι ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ κινητῆρος (ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου), τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$U = E' + I_2 R_2 \quad \text{ἄρα} \quad E' = U - I_2 R_2$$

$$\text{ἤτοι} \quad E' = 100 \text{ V} - (11{,}76 \text{ A} \cdot 0{,}2\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad E' = 97{,}65 \text{ V}$$

Ὅταν ὁ θάλαμος ἀνέρχεται, μεταφέρων τὰ 4 ἄτομα, τότε τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ θαλάμου εἶναι $B_1 = 400$ kgr*. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως διατηρεῖται σταθερὰ (80 %), ἔπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δαπανωμένη ἠλεκτρικὴ ἰσχὺς P' εἶναι:

$$P' = 4\,P_H \quad \text{ἤτοι} \quad P' = 4 \cdot 1226 \text{ W}$$

Διὰ τοῦ ἐπαγωγέως (στάτορ) διέρχεται πάλιν ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 0{,}50$ A. Ἀλλὰ ἡ ἡ ὁλικὴ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται τώρα I' καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$P' = U \cdot I' \quad \text{ἄρα} \quad I' = \frac{P'}{U} = \frac{4\,P_H}{U} \quad \text{καὶ} \quad I' = 4\,I$$

Ἐπομένως διὰ τοῦ ἐπαγωγίμου διέρχεται τότε ρεῦμα ἐντάσεως I_3 καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$I' = I_1 + I_3 \quad \text{ἄρα} \quad I_3 = I' - I_1$$

$$\text{ἤτοι} \quad I_3 = 4\,I - I_1 = (4 \cdot 12{,}26) \text{ A} - 0{,}50 \text{ A} \quad \text{καὶ} \quad I_3 = 48{,}54 \text{ A}$$

Ἐπομένως ἡ νέα ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E'', ἡ ἀναπτυσσομένη ἐντὸς τοῦ ἐπαγωγίμου, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U = E'' + I_3 R_2 \quad \text{ἄρα} \quad E'' = U - I_3 R_2$$

$$\text{ἤτοι} \quad E'' = 100 \text{ V} - (48{,}54 \cdot 0{,}2\ \Omega) \quad \text{καὶ} \quad E'' = 90{,}3 \text{ V}$$

Εἰς τὰς ἀνωτέρω δύο περιπτώσεις ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις E′ καὶ E″ τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις :

$$E' = \frac{1}{10} \cdot \nu \cdot \Phi_0 \cdot N$$

$$E'' = \frac{1}{10} \cdot \nu_1 \cdot \Phi_0 \cdot N$$

ὅπου ν καὶ ν_1 εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι συχνότητες περιστροφῆς τοῦ ἐπαγωγίμου, Φ_0 ἡ μεγίστη μαγνητικὴ ροή, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ ἐπαγωγίμου καὶ N τὰ εὐθύγραμμα σύρματα, τὰ ὁποῖα φέρει τὸ τύμπανον τοῦ ἐπαγωγίμου. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν :

$$\frac{E''}{E'} = \frac{\nu_1}{\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{90{,}3\ \text{V}}{97{,}65\ \text{V}} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\nu_1}{\nu} = 0{,}92$$

Εἰς τὰς συχνότητας περιστροφῆς ν καὶ ν_1 τοῦ ἐπαγωγίμου ἀντιστοιχοῦν γραμμικαὶ ταχύτητες αὐτοῦ υ καὶ υ_1, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς συχνότητας ν καὶ ν_1. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon} = \frac{\nu_1}{\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\upsilon_1}{\upsilon} = 0{,}92$$

Ὥστε, ὅταν ὁ θάλαμος ἀνέρχεται μὲ τὸ φορτίον τῶν 4 ἀτόμων, ἡ ταχύτης τοῦ θαλάμου εἶναι :

$$\upsilon_1 = 0{,}92 \cdot \upsilon \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon_1 = 0{,}92 \cdot 1\ \text{m/sec} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon_1 = 0{,}92\ \text{m/sec}}$$

204. Εἰς τοὺς πόλους ἑνὸς κινητῆρος συνεχοῦς ρεύματος διατηρεῖται σταθερὰ τάσις 110 V. Ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 0,8 A καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λειτουργίαν ἀντλίας, ἡ ὁποία ἔχει ἀπόδοσιν 90 % καὶ ἀνυψώνει ὕδωρ ἀπὸ βάθος 7,5 m· ἡ παροχὴ τῆς ἀντλίας εἶναι 56 λίτρα ὕδατος κατὰ λεπτόν. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος, ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις αὐτοῦ ὡς καὶ ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ. 2) Πόση ποσότης θερμότητος ἀναπτύσσεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος εἰς χρόνον 5 min; Πόση γίνεται αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος, ἐὰν λόγῳ βλάβης τῆς ἀντλίας ὁ κινητὴρ παύσῃ νὰ στρέφεται;

1) Ἐντὸς χρόνου t = 60 sec ἡ ἀντλία ἀνυψώνει κατὰ h = 7,5 m ὕδωρ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος B = 56 kgr*. Οὕτω εἰς χρόνον t ἡ ἀντλία παράγει ἔργον :

$$W = B \cdot h \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 56\ \text{kgr*} \cdot 7{,}5\ \text{m} = 420\ \text{kgr*m}$$

Ἄρα ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τῆς ἀντλίας εἶναι :

$$P_A = \frac{W}{t} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_A = \frac{420\ \text{kgr*m}}{60\ \text{sec}} \qquad \text{καὶ} \qquad P_A = 7\ \text{kgr*m/sec}$$

Ὥστε εἶναι : $$P_A = (7 \cdot 9{,}81)\ \text{W} \qquad \text{καὶ} \qquad P_A = 68{,}7\ \text{W}$$

Δίδεται ὅτι ἡ ἀπόδοσις τῆς ἀντλίας εἶναι 90 %. Ἑπομένως ὁ κινητὴρ παρέχει εἰς τὴν ἀντλίαν ἰσχὺν P_K, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{P_A}{P_K} = 0{,}9 \qquad \text{ἄρα} \qquad P_K = \frac{P_A}{0{,}9} = \frac{68{,}7\ \text{W}}{0{,}9} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{P_K = 76{,}3\ \text{W}}$$

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r, ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E′ καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I = 0,8 A. Τότε ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P_K = E' \cdot I \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad E' = \frac{P_K}{I}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad E' = \frac{76{,}3\ \text{W}}{0{,}8\ \text{A}} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{E' = 95{,}4\ \text{V}}$$

Εἰς τοὺς πόλους τοῦ κινητῆρος ἐφαρμόζεται τάσις $U = 110\ V$. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$U = E' + Ir \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad r = \frac{U - E'}{I}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad r = \frac{(110 - 95{,}4)\ V}{0{,}8\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{r = 18{,}2\ \Omega}$$

2) Εἰς χρόνον $t' = 5\ min = 300\ sec$ ἐντὸς τοῦ κινητῆρος ἀναπτύσσεται ποσότης θερμότητος :

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot r \cdot t' \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q_{\theta\varepsilon\rho} = 0{,}24 \cdot 0{,}8^2 \cdot 18{,}2 \cdot 300\ cal$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{Q_{\theta\varepsilon\rho} = 836\ cal}$$

Ὅταν ὁ κινητὴρ παύσῃ νὰ στρέφεται, τότε δὲν παράγει ἔργον καὶ παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις $r = 18{,}2\ \Omega$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{U}{r} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \frac{110\ V}{18{,}2\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 \approx 6\ A$$

Ὥστε, ὅταν ὁ κινητὴρ παύσῃ νὰ στρέφεται, εἰς χρόνον $t = 300\ sec$ ἀναπτύσσεται ἐντὸς αὐτοῦ ποσότης θερμότητος :

$$Q_{\theta\varepsilon\rho} = 0{,}24 \cdot 6^2 \cdot 18{,}2 \cdot 300\ cal \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{Q_{\theta\varepsilon\rho} = 47\,170\ cal}$$

205. Κινητὴρ συνεχοῦς ρεύματος ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 110 V. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν κινητῆρα, ὅταν ὁ κινητὴρ ἔχῃ ὠφέλιμον ἰσχὺν ἴσην μὲ 900 W; Ἂν εὑρεθοῦν περισσότεραι τιμαὶ τῆς ἐντάσεως, νὰ καθορισθῇ ποία ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἀπόδοσιν τοῦ κινητῆρος. Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ὠφέλιμος ἰσχύς, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ζητήσωμεν ἀπὸ τὸν κινητῆρα;

Ὁ κινητὴρ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 2\ \Omega$ καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν $U = 110\ V$. Ὅταν ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, τότε ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι $P_K = 900\ W$. Τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν :

$$P = U \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 110\ I$$

Ἀπὸ τὴν ἰσχὺν αὐτὴν μεταβάλλεται ἐντὸς τοῦ κινητῆρος εἰς θερμότητα ἰσχὺς ἴση μὲ :

$$P_{\theta\varepsilon\rho} = P - P_K \qquad \text{ἢ} \qquad P_{\theta\varepsilon\rho} = r \cdot I^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{\theta\varepsilon\rho} = 2\ I^2$$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$2\ I^2 = 110\ I - 900 \qquad \text{καὶ} \qquad 2\ I^2 - 110\ I + 900 = 0 \qquad (1)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς I εὑρίσκομεν τὰς ἑπομένας δύο τιμάς :

$$\mathbf{I_1 = 45\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_2 = 10\ A}$$

Ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως (α) τοῦ κινητῆρος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\alpha = \frac{P_K}{P} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \alpha = \frac{P - P_{\theta\varepsilon\rho}}{P} \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha = 1 - \frac{P_{\theta\varepsilon\rho}}{P}$$

$$\text{καὶ} \qquad \alpha = 1 - \frac{2\ I^2}{110\ I} \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha = 1 - \frac{2\ I}{110}$$

Ἡ τελευταία σχέσις φανερώνει ὅτι ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι τόσον μεγαλύτερος, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος. Ἄρα διὰ $I = 10\ A$ ἔχομεν τὸν μεγαλύτερον συντελεστὴν ἀποδόσεως, ἤτοι :

$$\alpha = 1 - \frac{20}{110} \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha = \frac{9}{11} \approx 0{,}82$$

Ὥστε, ὅταν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I = 10$ A, τότε ἔχομεν τὴν μεγίστην ἀπόδοσιν τοῦ κινητῆρος :

$$\boldsymbol{\alpha \approx 82\ \%}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$2\,I^2 - 110\,I + P_K = 0$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ρίζας, ὅταν εἶναι :

$$55^2 - 2\,P_K \geqslant 0 \quad \text{ἄρα} \quad P_K \leqslant \frac{55^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad P_K \leqslant 1512{,}5$$

Ὥστε ἡ μεγίστη ὠφέλιμος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$\mathbf{P_K = 1512{,}5\ W}$$

* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κινητὴρ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = \frac{55}{2}\ \text{A} = 27{,}5\ \text{A}$$

ὁ δὲ συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος εἶναι :

$$\alpha = 1 - \frac{55}{110} = \frac{55}{110} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha = 50\ \%$$

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΝ ΡΕΥΜΑ

206. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχει πλάτος τάσεως 86 V καὶ πλάτος ἐντάσεως 32 A. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος;

Ἂν U_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς τάσεως καὶ I_0 τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος, τότε ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$ καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις $I_{\varepsilon\nu}$ τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$U_{\varepsilon\nu} = 0{,}707\ U_0 \quad \text{καὶ} \quad I_{\varepsilon\nu} = 0{,}707\ I_0$$

Δίδεται ὅτι εἶναι $U_0 = 86$ V καὶ $I_0 = 32$ A. Συνεπῶς εἶναι :

$$U_{\varepsilon\nu} = 0{,}707 \cdot 86\ \text{V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_{\varepsilon\nu} = 60{,}802\ V}$$

$$I_{\varepsilon\nu} = 0{,}707 \cdot 32\ \text{V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} = 22{,}624\ A}$$

207. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχει πλάτος ἐντάσεως 10 A. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, ὅταν ἡ φάσις αὐτοῦ (ωt) λαμβάνῃ τὰς τιμὰς 30^0 ἢ 60^0;

Ἡ στιγμιαία ἔντασις I τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = I_0 \cdot \text{ημ}\ \omega t$$

ὅπου I_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως καὶ ωt εἶναι ἡ φάσις αὐτοῦ. Δίδεται ὅτι εἶναι $I_0 = 10$ A. Ὅταν ἡ φάσις εἶναι $\omega t = 30^0$ ἢ $\omega t = 60^0$, τότε ἡ στιγμιαία ἔντασις τοῦ ρεύματος ἔχει τὰς ἀντιστοίχους τιμάς :

$$I = 10\ \text{A} \cdot \text{ημ}\ 30^0 = 10\ \text{A} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{5\ A}$$

$$I = 10\ \text{A} \cdot \text{ημ}\ 60^0 = 10\ \text{A} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{8{,}65\ A}$$

208. Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι 7,07 A. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος;

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{εν} = 7{,}07$ A. Ἐὰν I_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τότε εἶναι γνωστὸν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$I_{εν} = 0{,}707\ I_0$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον πλάτος τῆς ἐντάσεως I_0 εἶναι:

$$I_0 = \frac{I_{εν}}{0{,}707} = \frac{7{,}07}{0{,}707}\ \text{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_0 = 10\ A}$$

209. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα διαρρέει ὠμικὴν ἀντίστασιν 5 Ω καὶ εἶναι βυθισμένον ἐντὸς θερμιδομέτρου ἔχοντος θερμοχωρητικότητα 1000 cal/grad. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ θερμιδομέτρου ὑψώνεται κατὰ 10° C ἐντὸς 1 λεπτοῦ. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος;

Ἐντὸς χρόνου $t = 1$ min $= 60$ sec τὸ θερμιδόμετρον ἀπορροφᾷ ποσότητα θερμότητος:

$$Q_\theta = 1000 \cdot 10\ (\text{cal/grad} \cdot \text{grad}) = 10\,000\ \text{cal}$$

Αὐτὴ ἡ ποσότης θερμότητος ἀναπτύσσεται ὑπὸ τοῦ ρεύματος ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως $R = 5\ Ω$. Γνωρίζομεν ὅτι ἐνεργὸς ἔντασις $I_{εν}$ τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος καλεῖται ἡ ἔντασις τοῦ συνεχοῦς ρεύματος, τὸ ὁποῖον, διαρρέον τὴν ἀντίστασιν R ἐπὶ τὸν αὐτὸν χρόνον t, παράγει τὴν αὐτὴν ποσότητα θερμότητος, τὴν ὁποίαν παράγει καὶ τὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα. Ὥστε εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται ἡ ἔντασις $I_{εν}$ τοῦ συνεχοῦς ρεύματος, τὸ ὁποῖον, διαρρέον τὴν ἀντίστασιν $R = 5\ Ω$ ἐπὶ χρόνον $t = 60$ sec, παράγει ποσότητα θερμότητος $Q_\theta = 10\,000$ cal. Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Joule:

$$Q_\theta = 0{,}24 \cdot R \cdot I_{εν}^2 \cdot t \quad \text{λαμβάνομεν} \quad I_{εν} = \sqrt{\frac{Q_\theta}{0{,}24 \cdot R \cdot t}}$$

$$\text{καὶ} \quad I_{εν} = \sqrt{\frac{10^4}{0{,}24 \cdot 5 \cdot 60}}\ \text{A} = \sqrt{\frac{10^4}{72}}\ \text{A} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I_{εν} = 11{,}78\ A}$$

210. Εἰς τὸ ἕνα ἄκρον Α σύρματος ΑΒ φθάνει συνεχὲς ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως $I_σ = 3$ A καὶ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_ε = 4$ A. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ συνισταμένου ρεύματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο ρευμάτων;

Ἔστω R ἡ ἀντίστασις τοῦ σύρματος ΑΒ. Εἰς τὸ ἄκρον Α τοῦ σύρματος φθάνει ἕνα συνεχὲς ρεῦμα, ἔχον σταθερὰν ἔντασιν $I_σ = 3$ A καὶ ἕνα ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{εν} = 4$ A. Ἕκαστον τῶν ρευμάτων τούτων, ἀναπτύσσει ἐπὶ τοῦ σύρματος ποσότητα θερμότητος. Οὕτω ἐντὸς χρόνου t ἐπὶ τοῦ σύρματος ΑΒ ἀναπτύσσονται αἱ ἑξῆς ποσότητες θερμότητος:

ἕνεκα τοῦ συνεχοῦς ρεύματος: $Q_σ = 0{,}24 \cdot R \cdot I_σ^2 \cdot t$ cal

ἕνεκα τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος: $Q_{εν} = 0{,}24 \cdot R \cdot I_{εν}^2 \cdot t$ cal

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως θὰ καλέσωμεν ἐνεργὸν ἔντασιν I_{EN} τοῦ συνισταμένου ρεύματος τὴν ἔντασιν ἑνὸς συνεχοῦς ρεύματος, τὸ ὁποῖον, διαρρέον τὴν ἀντίστασιν R ἐπὶ χρόνον t, ἀναπτύσσει ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R ποσότητα θερμότητος ἴσην μὲ τὴν ποσότητα θερμότητος $Q_σ + Q_{εν}$, τὴν ὁποίαν ἀναπτύσσει τὸ σύστημα τῶν δύο ρευμάτων $I_σ$ καὶ $I_{εν}$. Οὕτω διὰ τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν I_{EN} τοῦ συνισταμένου ρεύματος θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$Q_σ + Q_{εν} = 0{,}24 \cdot R \cdot I_{EN}^2 \cdot t\ \text{cal}$$

Ἂν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $Q_σ$ καὶ $Q_{εν}$, μὲ τὰς προηγουμένως εὑρεθείσας τιμάς των καὶ ἁπλοποιήσωμεν διὰ $0{,}24 \cdot R \cdot t$ λαμβάνομεν:

$$I_{EN}^2 = I_σ^2 + I_{εν}^2$$

Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ συνισταμένου ρεύματος εἶναι :

$$I_{EN} = \sqrt{I_\sigma^2 + I_{\varepsilon\nu}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \text{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_{EN} = 5\ A}$$

211. Λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως ἔχει ἔντασιν 25 κηρίων, ἀντίστασιν 440 Ω καὶ τροφοδοτεῖται μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν τάσιν 110 V. Πόση εἶναι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν λαμπτῆρα καὶ πόση εἶναι ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς κατὰ κηρίον;

Ὁ λαμπτὴρ ἔχει ἀντίστασιν $R = 440\ \Omega$ καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι $U_{\varepsilon\nu} = 110$ V. Συνεπῶς ἡ ἐνεργὸς ἔντασις $I_{\varepsilon\nu}$ τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R} = \frac{110}{440}\ \text{A} = \frac{1}{4}\ \text{A}$$

Ἂν I_0 εἶναι ἡ μεγίστη ἔντασις τοῦ ἐναλλασσομένου ρεύματος (δηλ. τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως), τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἄρα} \qquad I_0 = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{καὶ} \qquad I_0 = \frac{1}{4} \cdot 1{,}41\ \text{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{I_0 = 0{,}352\ A}$$

Ἡ καταναλισκομένη ὑπὸ τοῦ λαμπτῆρος μέση ἰσχὺς εἶναι :

$$P = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} = 110\ \text{V} \cdot \frac{1}{4}\ \text{A} = 27{,}5\ \text{Watt}$$

Ἄρα ἡ καταναλισκομένη ἰσχὺς κατὰ κηρίον εἶναι :

$$p = \frac{27{,}5}{25} = \mathbf{1{,}1\ Watt\ κατὰ\ κηρίον}$$

212. Ἕνα πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν 10 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 2 H. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 220 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 60 Hz. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως.

Τὸ πηνίον ἔχει σύνθετον ἀντίστασιν Z, ἡ ὁποία εἶναι :

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Z = \sqrt{10^2 + (2 \cdot 2\pi \cdot 60)^2}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \qquad Z = 760\ \Omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 220$ V. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{220\ \text{V}}{760\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} \approx 0{,}29\ A}$$

Ἐὰν I_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἄρα} \qquad I_0 = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad I_0 = 0{,}29\ \text{A} \cdot 1{,}41 \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_0 = 0{,}409\ A}$$

213. Εἰς ἕνα κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν ὠμικὴ ἀντίστασις 25 Ω καὶ πυκνωτὴς χωρητικότητος 30 μF. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 220 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 60 Hz. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος.

Τὸ κύκλωμα ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_\Omega = 25\ \Omega$ καὶ χωρητικὴν ἀντίστασιν:

$$R_C = \frac{1}{C\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad R_C = \frac{1}{(30 \cdot 10^{-6}) \cdot (2\pi \cdot 60)}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \quad R_C = 88\ \Omega$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος τούτου εἶναι:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + R_C^2} \quad \text{ἤτοι} \quad Z = \sqrt{25^2 + 88^2}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \quad Z = 91\ \Omega$$

Ἡ ἐφαρμοζομένη ἐνεργὸς τάσις εἶναι $U_{εν} = 220$ V. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

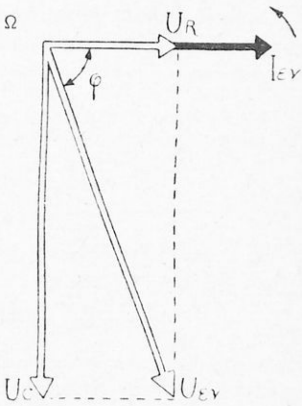
$$I_{εν} = \frac{U_{εν}}{Z} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{εν} = \frac{220\ \mathrm{V}}{91\ \Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{I_{εν} = 2{,}42\ A}$$

Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ὁ νόμος τοῦ Ohm μᾶς δίδει τὴν ἐξίσωσιν:

$$U_{εν} = I_{εν} \cdot Z \quad \text{ἤτοι} \quad U_{εν} = I_{εν} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + R_C^2}$$

$$\text{ἢ} \quad U_{εν} = \sqrt{(I_{εν}R_\Omega)^2 + (I_{εν}R_C)^2}$$



Σχ. 68

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{εν}$ εἶναι ἡ συνισταμένη δύο μερικῶν τάσεων. Αἱ δύο αὐταὶ συνιστῶσαι τάσεις εἶναι αἱ ἑξῆς:

ἡ ὠμικὴ συνιστῶσα: $U_\Omega = I_{εν}R_\Omega$

ἡ χωρητικὴ συνιστῶσα: $U_C = I_{εν}R_C$

Ἐπὶ τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R_Ω ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ τάσις ἔχουν πάντοτε τὴν αὐτὴν φάσιν. Ἐνῶ ἐπὶ τῆς χωρητικῆς ἀντιστάσεως R_C ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν 90°. Οὕτω λαμβάνομεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 68. Ἐκ τοῦ σχήματος συνάγεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος σχέσις:

$$U_C = U_R \cdot \text{εφ}\,φ \quad \text{ἤτοι} \quad I_{εν}R_C = I_{εν}R_\Omega \cdot \text{εφ}\,φ \quad \text{ἢ} \quad R_C = R_\Omega \cdot \text{εφ}\,φ$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\,φ = \frac{R_C}{R_\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{εφ}\,φ = \frac{88\ \Omega}{25\ \Omega} = 3{,}52 \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{φ = 74{,}2^0}$$

* Σημείωσις. Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς τάσεως δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως, ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\,φ = \frac{-\dfrac{1}{C\omega}}{R_\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{εφ}\,φ = \frac{-88\ \Omega}{25\ \Omega} = -3{,}52 \quad \text{ἄρα} \quad φ = -74{,}2^0$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον φανερώνει ὅτι ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν φ.

214. Εἰς ἕνα κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν ἕνα πηνίον, ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,8 H, καὶ ἕνας πυκνωτής, ἔχων χωρητικότητα 8 μF. Ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 50 Ω. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 220 V, ἡ δὲ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 60 Hz. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ χρησιμοποιουμένη ἐπὶ τοῦ κυκλώματος ἰσχύς.

Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_\Omega = 50\,\Omega$ καὶ ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν :

$$R_L = L\omega \quad \text{ἤτοι} \quad R_L = (0{,}8 \cdot 2\pi \cdot 60)\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad R_L = 300\,\Omega$$

Ὁ δὲ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικὴν ἀντίστασιν :

$$R_C = \frac{1}{C\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad R_C = \frac{1}{(8 \cdot 10^{-6}) \cdot (2\pi \cdot 60)}\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad R_C = 330\,\Omega$$

Τὸ κύκλωμα ἔχει σύνθετον ἀντίστασιν Z, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{ἤτοι} \quad Z = \sqrt{50^2 + (300 - 330)^2}\,\Omega$$

$$\text{καὶ} \quad Z = 58\,\Omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 220$ V. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{220\text{ V}}{58\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} \approx 3{,}8\ A}$$

Τὸ κύκλωμα τοῦτο δὲν περιλαμβάνει ἀποδέκτην καὶ συνεπῶς ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος μετατρέπεται εἰς θερμότητα. Συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$P = R_\Omega \cdot I_{\varepsilon\nu}^2 \quad \text{ἤτοι} \quad P = 50\,\Omega \cdot (3{,}8\text{ A})^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 722\ W}$$

* Σημείωσις. Γενικώτερον ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (1)$$

ὅπου συν φ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος. Οὗτος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_\Omega}$$

Ἐπειδὴ εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\varphi}}$$

εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{Z}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{50\,\Omega}{58\,\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{συν}\,\varphi = 0{,}86$$

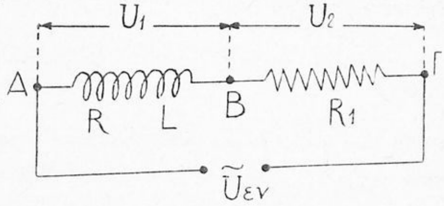
Οὕτω ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκομεν :

$$P = 220\text{ V} \cdot 3{,}8\text{ A} \cdot 0{,}86 \quad \text{ἤτοι} \quad P \approx 719\text{ W}$$

Ἡ μικρὰ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο εὑρεθεισῶν τιμῶν τῆς ἰσχύος P ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι αἱ τιμαὶ $I_{\varepsilon\nu} = 3{,}8$ A καὶ συν φ = 0,86 ἐλήφθησαν κατὰ προσέγγισιν.

215. Εἰς ἕνα κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν πηνίον καὶ ὠμικὴ ἀντίστασις $R_1 = 11\ \Omega$. Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν 5 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $\frac{1}{10\pi}$ H. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 100 V, ἡ δὲ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 60 Hz. 1) Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R_1; 2) Νὰ δειχθῇ πῶς αἱ δύο αὐταὶ τάσεις δίδουν τὴν ἐνεργὸν τάσιν 100 V.

1) Τὸ πηνίον (σχ. 69) ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R = 5\,\Omega$ καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = \frac{1}{10\pi}$ H. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 100$ V.



Σχ. 69

Ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις (R_Ω) τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_\Omega = R + R_1$$

ἤτοι $R_\Omega = (5 + 11)\,\Omega = 16\,\Omega$

Τὸ πηνίον ἔχει ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν (R_L) ἴσην μέ:

$$R_L = L\omega$$

ἤτοι $R_L = \left(\frac{1}{10\pi} \cdot 2\pi\nu\right)\Omega = \frac{\nu}{5}\,\Omega$

ἄρα $R_L = \frac{60}{5}\,\Omega$ καὶ $R_L = 12\,\Omega$

Ὥστε ἡ σύνθετος ἀντίστασις (Z) τοῦ κυκλώματος τούτου εἶναι:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2} \quad \text{ἢ} \quad Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}$$

ἤτοι $Z = \sqrt{16^2 + 12^2}\,\Omega$ καὶ $Z = 20\,\Omega$

Ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{100\text{ V}}{20\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_{\varepsilon\nu} = 5\text{ A}$$

Εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις U_1, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

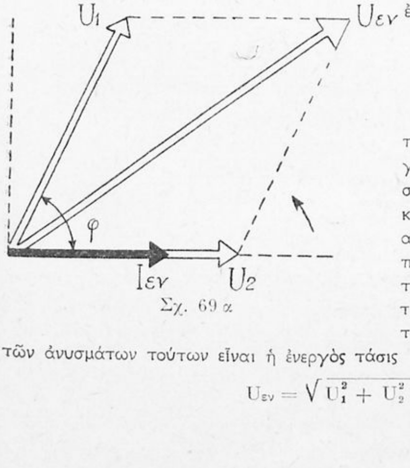
$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{ἄρα} \quad U_1 = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

ἤτοι $U_1 = 5\text{ A} \cdot (\sqrt{5^2 + 12^2})\,\Omega$ καὶ $\mathbf{U_1 = 65\ V}$

Εἰς τὰ ἄκρα B καὶ Γ τῆς ἀντιστάσεως $R_1 = 11\,\Omega$ ἐφαρμόζεται τάσις U_2, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U_2 = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_1 \quad \text{ἤτοι} \quad U_2 = 5\text{ A} \cdot 11\,\Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_2 = 55\ V}$$

2) Εἰς τὸ τμῆμα AB τοῦ κυκλώματος ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:



Σχ. 69 α

$$\varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad \varepsilon\varphi\, \varphi = \frac{12\,\Omega}{5\,\Omega} = \frac{12}{5}$$

ἄρα $\varphi = 67^0\, 23'$

Ὥστε εἰς τὸ πηνίον ὁ δείκτης τῆς τάσεως προπορεύεται τοῦ δείκτου τῆς ἐντάσεως κατὰ γωνίαν φ (σχ. 69 α). Ἐπὶ τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως ὁ δείκτης τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ ὁ δείκτης τῆς τάσεως εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος. Ἄρα τὰ δύο ἀνύσματα U_1 καὶ U_2 σχηματίζουν μεταξύ των πάντοτε γωνίαν φ. Ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων τούτων εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$ καὶ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U_{\varepsilon\nu} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2\,U_1 U_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\, \varphi}$$

Ἐπειδὴ εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{εφ}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{5^2+12^2}{5^2}}} = \frac{5}{13}$$

εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$U_{εν} = \sqrt{65^2+55^2+\left(2\cdot 65\cdot 55\cdot \frac{5}{13}\right)}\ \text{Volt} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_{εν} = \sqrt{10^4}\ \text{V}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{U_{εν} = 100\ V}$$

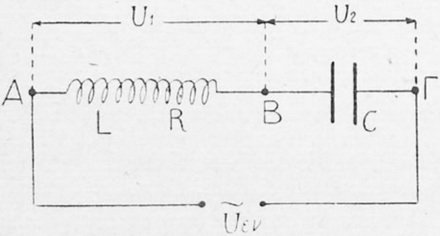
216. Εἰς ἕνα κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν πηνίον καὶ πυκνωτὴς χωρητικότητος $\frac{1}{240\pi}$ F. Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν 3 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $\frac{1}{20\pi}$ H. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 60 Hz. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 100 V. 1) Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ; Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως; 2) Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μεγίστην ἐνεργὸν ἔντασιν;

1) Δίδεται ὅτι εἰς τὸ κύκλωμα τοῦ σχήματος 70 εἶναι :

$$C = \frac{1}{240\pi}\ \text{F} \qquad R_\Omega = 3\ \Omega \qquad L = \frac{1}{20\pi}\ \text{H}$$

$$\nu = 60\ \text{Hz} \qquad U_{εν} = 100\ \text{V}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :



Σχ. 70

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ εἶναι :

$$L\omega = \frac{1}{20\pi}\cdot 2\pi\nu = \frac{\nu}{10}$$

$$\text{καὶ} \qquad L\omega = 6\ \Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = 240\pi\cdot\frac{1}{2\pi\nu} = \frac{120}{\nu}$$

$$\text{καὶ} \qquad \frac{1}{C\omega} = 2\ \Omega$$

εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$Z = \sqrt{3^2+(6-2)^2}\ \Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad Z = 5\ \Omega$$

Ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{εν} = \frac{U_{εν}}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{εν} = \frac{100\ \text{V}}{5\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_{εν} = 20\ \text{A}$$

Ἡ ἐνεργὸς τάσις U_1 εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ πηνίου εἶναι :

$$U_1 = I_{εν}\cdot\sqrt{R_\Omega^2+(L\omega)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = 20\ \text{A}\cdot\sqrt{3^2+6^2}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{U_1 = 134{,}16\ V}$$

Ἡ ἐνεργὸς τάσις U_2 εἰς τὰ ἄκρα B καὶ Γ τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$U_2 = I_{εν}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_2 = 20\ \text{A}\cdot\sqrt{2^2}\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_2 = 40\ V}$$

Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{(6-2)\,\Omega}{3\,\Omega} = \frac{4}{3} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad \boldsymbol{\varphi = 53^0}$$

2) Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :
$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{\sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

συνάγεται ὅτι ἔχομεν τὴν μεγίστην ἐνεργὸν ἔντασιν, ὅταν ἡ σύνθετος ἀντίστασις ἔχῃ τὴν μικροτέραν τιμήν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{ἤτοι ὅταν εἶναι :} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$\text{καὶ} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{20\pi} \cdot \frac{1}{240\pi}}} = \pi\sqrt{4800}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη συχνότης εἶναι :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{\pi\sqrt{4800}}{2\pi} = 20\sqrt{3}\ \text{Hz} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\nu = 24{,}64\ \text{Hz}}$$

Ἡ δὲ μεγίστη τιμὴ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R_\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{100\ \text{V}}{3\,\Omega} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{I_{\varepsilon\nu} = 33{,}3\ \text{A}}$$

217. Εἰς τὰ ἄκρα ἑνὸς πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 48 V. Τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα 50 Hz, ἡ δὲ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι 3 Ω. Τότε ἐντὸς τοῦ πηνίου κυκλοφορεῖ ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν 6 A. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_\Omega = 3\ \Omega$ καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L. Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 48$ V, τότε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{\varepsilon\nu} = 6$ A. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι $\nu = 50$ Hz. Ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} = \frac{48\ \text{V}}{6\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} = 8\ \Omega$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι :

$$L = \sqrt{\frac{8^2 - R_\Omega^2}{\omega^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad L = \sqrt{\frac{64 - 9}{4\pi^2 \cdot 2500}}\ \text{H}$$

$$\text{ἢ} \quad L = \frac{\sqrt{55}}{100\pi}\ \text{H} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{L = 0{,}0236\ \text{H}}$$

218. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος 60 Hz ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν 1/10 A καὶ διαρρέει πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν 1/40 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,002 H. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου. 2) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως ;

1) Τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα $\nu = 60$ Hz καὶ ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{\varepsilon\nu} = 0{,}1$ A. Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_\Omega = 1/40\ \Omega$ καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}002$ H. Ἑπομένως ἡ συνθετος ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}$$

Ἡ ζητουμένη ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$ εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot Z \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad U_{\varepsilon\nu} = 0{,}1\ \text{A} \cdot \sqrt{\frac{1}{1600} + (0{,}002 \cdot 2\pi \cdot 60)^2}\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_{\varepsilon\nu} = 0{,}0754\ V}$$

2) Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{L\omega}{R_\Omega} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{(0{,}002 \cdot 2\pi \cdot 60)\ \Omega}{1/40\ \Omega}$$

$$\text{ἢ} \qquad \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{96\pi}{10} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\varphi = 88^0\ 6'\ 33''}$$

219. Ἕνα πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν 10 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,25 H. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 125 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 Hz. Νὰ εὑρεθῇ: α) ἡ ἐνεργὸς ἔντασις καὶ ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ρεύματος· β) ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ συνδεθῇ κατὰ σειρὰν μὲ τὸ πηνίον, διὰ νὰ ὑπάρξῃ συντονισμὸς καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

α) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις (Z) τοῦ κυκλώματος τοῦ πηνίου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Z = \sqrt{10^2 + (0{,}25 \cdot 2\pi \cdot 50)^2}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \qquad Z = 79{,}17\ \Omega$$

Ἑπομένως ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{125\ \text{V}}{79{,}17\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} = 1{,}58\ A}$$

Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος (συν φ) τοῦ κυκλώματος τούτου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\ \varphi}} \qquad \text{ὅπου εἶναι} \qquad \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{L\omega}{R_\Omega}$$

Ἄρα ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\ \varphi = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \sigma\upsilon\nu\ \varphi = \frac{10}{79{,}17}$$

Ἡ μέση ἰσχὺς (P) τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$P = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \sigma\upsilon\nu\ \varphi \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = \left(125 \cdot 1{,}58 \cdot \frac{10}{79{,}17}\right) \text{W}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{P = 24{,}93\ W}$$

β) Ἐὰν εἰς τὸ κύκλωμα τεθῇ κατὰ σειρὰν καὶ πυκνωτής, ἔχων χωρητικότητα C, τότε ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_\Omega}$$

Συντονισμὸς ὑπάρχει, ὅταν ἡ ἀνωτέρω διαφορὰ φάσεως φ εἶναι ἴση μὲ μηδὲν ($\varphi = 0^0$). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{ἤτοι ὅταν εἶναι :} \quad L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = \frac{1}{L\omega^2} \quad \text{ἤτοι} \quad C = \frac{1}{0{,}25 \cdot (2\pi \cdot 50)^2}\ F$$

$$\text{καὶ} \quad C = \frac{1}{24\,675}\ F \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{C = 40{,}5\ \mu F}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

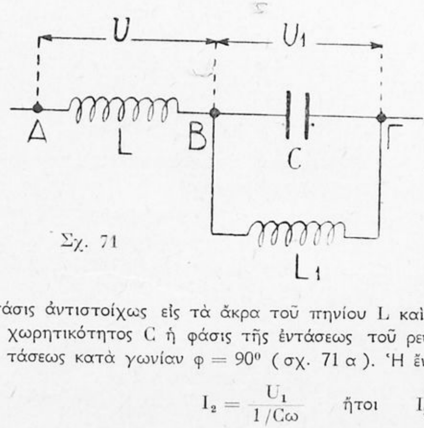
$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{ἢ} \quad Z = R_\Omega$$

Συνεπῶς ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

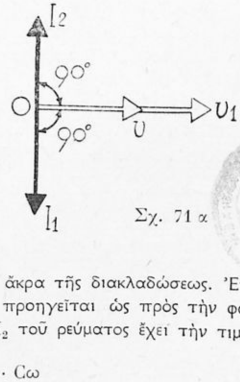
$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R_\Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{125\ V}{10\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} = 12{,}5\ A}$$

220. Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ Γ ἑνὸς κυκλώματος (σχ. 71) ὑπάρχει πηνίον, ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L, πυκνωτής, ἔχων χωρητικότητα C καὶ μία διακλάδωσις, ἀποτελουμένη ἀπὸ πηνίον, ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L_1. Αἱ ὠμικαὶ ἀντιστάσεις τῶν δύο πηνίων εἶναι ἀσήμαντοι. Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ Γ ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$. 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ πηνίον L καὶ ὁ πυκνωτὴς εὑρίσκωνται εἰς συντονισμόν, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1 εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ L_1. 2) Ἐὰν εἶναι $L = 1$ H, $U_{\varepsilon\nu} = 80$ V, $\omega = 5000$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1.

1) Ἂς καλέσωμεν I, I_1, I_2 τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἀντιστοίχως τὸ πηνίον L, τὸ πηνίον L_1 καὶ τὴν χωρητικότητα C (σχ. 71). Ἔστω U καὶ U_1



Σχ. 71



Σχ. 71 α

ἡ τάσις ἀντιστοίχως εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου L καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διακλαδώσεως. Ἐντὸς τῆς χωρητικότητος C ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi = 90^0$ (σχ. 71 α). Ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος ἔχει τὴν τιμήν :

$$I_2 = \frac{U_1}{1/C\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = U_1 \cdot C\omega$$

Ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1 ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi = 90^0$. Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου τούτου ἔχει τὴν τιμήν :

$$I_1 = \frac{U_1}{L_1\omega}$$

Ὥστε αἱ ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 ἔχουν εἰς ἑκάστην στιγμὴν ἀντίθετον φοράν. Ἐὰν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι $I_1 > I_2$, τότε ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον φθάνει εἰς τὸν κόμβον Β εἶναι :

$$I = I_1 - I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad I = U_1 \cdot \left(\frac{1}{L_1\omega} - C\omega \right) \qquad (1)$$

Ἐντὸς τοῦ πηνίου L ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi = 90^0$. Ἑπομένως ἡ μὲν φάσις τῆς ἐντάσεως συμπίπτει μὲ τὴν φάσιν τῆς ἐντάσεως ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1, ἡ δὲ τάσις U ἔχει τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν τάσιν U_1. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = \frac{U}{L\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad U = I \cdot L\omega \qquad (2)$$

Ἡ ὁλικὴ τάσις ($U_{o\lambda}$), ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ κυκλώματος, εἶναι :

$$U_{o\lambda} = U_1 + U \qquad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ I ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν :

$$U = U_1 \cdot L\omega \cdot \left(\frac{1}{L_1\omega} - C\omega \right)$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται :

$$U_{o\lambda} = U_1 + U_1 \cdot L\omega \cdot \left(\frac{1}{L_1\omega} - C\omega \right) \quad \text{ἤτοι} \quad U_{o\lambda} = U_1 \left[1 + L\omega \left(\frac{1}{L_1\omega} - C\omega \right) \right]$$

Ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1 ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_1 = \frac{U_1}{L_1\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{1}{L_1\omega} \cdot \frac{U_{o\lambda}}{\left[1 + L\omega \left(\frac{1}{L_1\omega} - C\omega \right) \right]}$$

$$\text{ἢ} \quad I_1 = \frac{U_{o\lambda}}{L_1\omega + L\omega - (\omega^2 CL \cdot L_1\omega)} \qquad (4)$$

Δίδεται ὅτι τὸ πηνίον L καὶ ὁ πυκνωτὴς C εὑρίσκονται εἰς συντονισμόν. Τότε ἰσχύει ἡ συνθήκη :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \text{καὶ} \quad \omega^2 CL = 1$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$I_1 = \frac{U_{o\lambda}}{L_1\omega + L\omega - L_1\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I_1 = \frac{U_{o\lambda}}{L\omega}}$$

Ἡ τελευταία σχέσις φανερώνει ὅτι ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1 γίνεται ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ αὐτεπαγωγῆς L_1.

2) Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $\omega^2 CL = 1$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad \text{ἤτοι} \quad C = \frac{1}{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}\ F \quad \text{καὶ} \quad C = \frac{1}{25 \cdot 10^6}\ F$$

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{C = \frac{1}{25}\ \mu F}$$

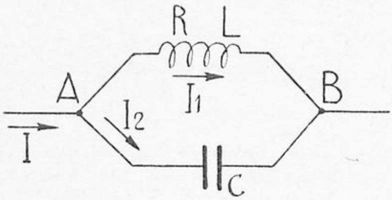
Ἐντὸς τοῦ πηνίου L_1 ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_1 = \frac{U_{o\lambda}}{L\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{80}{(1 \cdot 5000)\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 0{,}016\ A = 16\ mA}$$

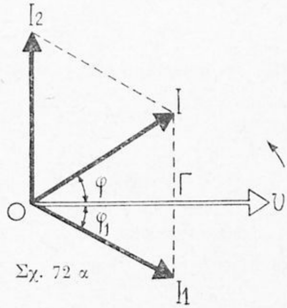
221. **Μεταξὺ δύο σημείων A καὶ B ἑνὸς κυκλώματος (σχ. 72) ὑπάρχει διακλάδωσις ἀποτελουμένη ἀπὸ ἕνα πηνίον, ἔχον ὠμικὴν ἀντίστασιν R καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L καὶ ἀπὸ ἕνα πυκνωτὴν χωρητικότητος C. Νὰ εὑρεθῇ : α) ἡ σύνθετος ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως καὶ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως· β) ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ἀντίστασις R συναρτήσει τῶν C, L καὶ ω, ὥστε ὁλόκληρος ἡ διακλάδωσις νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἁπλῆν ἀντίστασιν.**

α) Εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τῆς διακλαδώσεως ἐφαρμόζεται ἡ αὐτὴ τάσις U, τόσον διὰ τὸ πηνίον, ὅσον καὶ διὰ τὸν πυκνωτὴν (σχ. 72).

Ἐντὸς τοῦ πηνίου ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ



Σχ. 72



Σχ. 72 α

ρεύματος ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν φ_1 (σχ. 72 α), ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\varepsilon\varphi\ \varphi_1 = \frac{L\omega}{R} \qquad \text{ἄρα} \qquad \eta\mu\ \varphi_1 = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Ἡ ἔντασις I_1 τοῦ ρεύματος ἐντὸς τοῦ πηνίου ἔχει τὴν τιμήν :

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \qquad (1)$$

Ἐντὸς τῆς χωρητικότητος ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi_2 = 90^0$. Ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος ἐντὸς τῆς χωρητικότητος ἔχει τὴν τιμήν :

$$I_2 = \frac{U}{1/C\omega} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = U \cdot C\omega \qquad (2)$$

Ἡ ὁλικὴ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἐντάσεων I_1 καὶ I_2. Ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς ἐντάσεως I καὶ τῆς τάσεως U εἶναι φ. Ἡ δὲ τιμὴ τῆς ἐντάσεως I τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2\, I_1 I_2\ \sigma\upsilon\nu\ (90 + \varphi_1)} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $\sigma\upsilon\nu\ (90 + \varphi_1) = -\ \eta\mu\ \varphi_1$

ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\ (90 + \varphi_1) = -\dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν I_1 καὶ I_2 ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν τελικῶς τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = U \cdot \sqrt{\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + (L\omega)^2} \right)^2 + \left(\frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} \right)^2} \qquad (4)$$

Ἐὰν Z εἶναι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$I = \frac{U}{Z} \qquad \text{ἄρα} \qquad Z = \frac{U}{I}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκεται ὅτι ἡ ζητουμένη σύνθετος ἀντίστασις τῆς διακλαδώσεως εἶναι :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{R}^2 + (\mathbf{L}\omega)^2}{\sqrt{\mathbf{R}^2 + [\mathbf{C}\omega(\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2\omega^2) - \mathbf{L}\omega]^2}}$$

Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{(\mathrm{I\Gamma})}{(\mathrm{O\Gamma})} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{(\mathrm{II_1}) - (\mathrm{I_1\Gamma})}{(\mathrm{O\Gamma})}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{I_2 - I_1\,\eta\mu\,\varphi_1}{I_1\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_1}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{\mathrm{UC}\omega - \dfrac{\mathrm{UL}\omega}{\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}\omega)^2}}{\dfrac{\mathrm{U}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}\omega)^2}} \cdot \dfrac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\mathrm{L}\omega)^2}}} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\varepsilon\varphi\,\varphi} = \frac{\mathbf{C}\omega(\mathbf{R}^2 + \mathbf{L}^2\omega^2) - \mathbf{L}\omega}{\mathbf{R}} \qquad (5)$$

β) Ὁλόκληρος ἡ διακλάδωσις θὰ ἰσοδυναμῇ μὲ ἁπλῆν ἀντίστασιν, ἐὰν ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα διαφορὰ φάσεως φ εἶναι ἴση μὲ μηδὲν ($\varphi = 0^0$). Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) εἶναι :

$$\mathrm{C}\omega(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2\omega^2) - \mathrm{L}\omega = 0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathrm{C}\omega(\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2\omega^2) = \mathrm{L}\omega$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν συνάγεται ὅτι εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἡ ἀντίστασις R εἶναι :

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}(1 - \omega^2\mathbf{LC})}$$

222. Ἡ ἔντασις ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $I = 2 \cdot \eta\mu\, 500t$. Τὸ ρεῦμα διαρρέει κύκλωμα ἀποτελούμενον : α) ἀπὸ ὠμικὴν ἀντίστασιν $R = 10\ \Omega$ · β) ἀπὸ πηνίον ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = 1$ H καὶ ἀσήμαντον ὠμικὴν ἀντίστασιν · γ) ἀπὸ ἕνα πυκνωτὴν χωρητικότητος $C = 4\ \mu F$. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις καὶ ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος, ὡς καὶ ἡ ἰσχὺς ἡ μετατρεπομένη εἰς θερμότητα ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R, τοῦ πηνίου καὶ τοῦ πυκνωτοῦ, ὡς καὶ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος.

1) Ἡ στιγμιαία ἔντασις ἑνὸς ἐναλλασσομένου ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = I_0 \cdot \eta\mu\,\omega t$$

Δίδεται ὅτι τὸ θεωρούμενον ρεῦμα ἔχει ἐξίσωσιν :

$$I = 2 \cdot \eta\mu\, 500\, t$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις συνάγεται ὅτι εἶναι :

$$I_0 = 2\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \omega = 2\pi\nu = 500$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$\nu = \frac{500}{2\pi} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\nu = 79{,}58\ \mathrm{Hz}}$$

Ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις ($I_{\varepsilon\nu}$) τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{2}{\sqrt{2}}\ \mathrm{A} = \sqrt{2}\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} = 1{,}414\ A}$$

Ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R_Ω μετατρέπεται εἰς θερμότητα ἰσχὺς P, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$P = I_{\varepsilon\nu}^2 \cdot R_\Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = (\sqrt{2}\ \mathrm{A})^2 \cdot 10\,\Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P = 20\ W}$$

2) Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R_Ω ἡ ἐνεργὸς τάσις U_Ω εἶναι:

$$U_\Omega = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_\Omega \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_\Omega = 1{,}414\ \text{A} \cdot 10\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_\Omega = 14{,}14\ V}$$

Τὸ πηνίον δὲν ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν, ἔχει ὅμως ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν:

$$R_L = L\omega$$

Εἰς τὰ ἄκρα λοιπὸν τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις U_L, ἡ ὁποία εἶναι:

$$U_L = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_L \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_L = I_{\varepsilon\nu} \cdot L\omega$$

$$\text{ἢ} \qquad U_L = 1{,}414\ \text{A} \cdot (1 \cdot 500)\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_L = 707\ V}$$

Τέλος ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικὴν ἀντίστασιν:

$$R_C = \frac{1}{C\omega}$$

Ἄρα εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις U_C, ἡ ὁποία εἶναι:

$$U_C = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_C \qquad \text{ἄρα} \qquad U_C = I_{\varepsilon\nu} \cdot \frac{1}{C\omega}$$

$$\text{ἢ} \qquad U_C = 1{,}414\ \text{A} \cdot \frac{1}{(4 \cdot 10^{-6}) \cdot 500}\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_C = 707\ V}$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος τούτου εἶναι:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ἄρα εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot Z \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ἂν ὑπολογίσωμεν τὴν σύνθετον ἀντίστασιν Z, εὑρίσκομεν:

$$Z = \sqrt{10^2 + \left[(1 \cdot 500) - \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-6} \cdot 500}\right)\right]^2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad Z = \sqrt{10^2 + \left(500 - \frac{10^6}{2000}\right)^2} = \sqrt{10^2}\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad Z = 10\ \Omega$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

Ἄρα εἰς τὸ κύκλωμα τοῦτο ὑπάρχει συντονισμός. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$U_{\varepsilon\nu} = 1{,}414\ \text{A} \cdot 10\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U_{\varepsilon\nu} = 14{,}14\ V}$$

* Σημείωσις. Τὸ πηνίον ἔχει μόνον αὐτεπαγωγὴν L καὶ συνεπῶς ἐντὸς τοῦ πηνίου ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi = 90^0$. Ἀντιθέτως ἐντὸς τοῦ πυκνωτοῦ ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν $\varphi = 90^0$. Ὥστε οἱ δεῖκται, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὴν ἐνεργὸν τάσιν U_L καὶ U_C εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ τοῦ πυκνωτοῦ σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν $2\varphi = 180^0$, δηλαδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἀλλ' ἀντίθετον φοράν. Ἀνωτέρω εὑρέθη ὅτι αἱ δύο αὐταὶ ἐνεργοὶ τάσεις U_L καὶ U_C ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ἤτοι εἶναι:

$$U_L = U_C = 707\ \text{V}$$

Συνεπῶς ἡ συνισταμένη τῶν δύο τούτων τάσεων εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐνεργὸν τάσιν U_Ω, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R_Ω.

223. Εἰς τὰ ἄκρα ἑνὸς πηνίου ἐφαρμόζεται συνεχὴς τάσις 120 V· τότε τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 0,24 A. Τὸ αὐτὸ πηνίον τίθεται εἰς κύκλωμα ἐναλλασσομένου ρεύματος. Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 110 V, τότε τὸ ρεῦμα ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν 0,20 A. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος.

Τὸ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν R. Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου τούτου ἐφαρμόζεται συνεχὴς τάσις $U = 120$ V, τότε τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ συνεχὲς ρεῦμα, ἔχον ἔντασιν $I = 0{,}24$ A. Οὕτω ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι :

$$R_\Omega = \frac{U}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad R_\Omega = \frac{120\ \text{V}}{0{,}24\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad R_\Omega = 500\ \Omega$$

Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{εν} = 110$ V, τότε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{εν} = 0{,}20$ A. Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ πηνίου εὑρίσκεται πάλιν ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm ὅτι εἶναι :

$$Z = \frac{U_{εν}}{I_{εν}} \quad \text{ἤτοι} \quad Z = \frac{110\ \text{V}}{0{,}20\ \text{A}} \quad \text{καὶ} \quad Z = 550\ \Omega$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ πηνίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ ω εἶναι ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος. Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\text{εφ}\ \varphi = \frac{L\omega}{R_\Omega}$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος συντελεστὴς ἰσχύος (συν φ) εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\text{συν}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\ \varphi}} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{συν}\ \varphi = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ τελευταίου κλάσματος εἶναι ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ πηνίου. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\text{συν}\ \varphi = \frac{R_\Omega}{Z} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{συν}\ \varphi = \frac{500\ \Omega}{550\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{συν\ \varphi = \frac{10}{11} = 0{,}91}$$

224. Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ πυκνωτήν, χωρητικότητος C, συνδεδεμένον κατὰ σειρὰν μὲ πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν R_Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L. Καλοῦμεν $U_{εν}$ τὴν ἐνεργὸν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὅλου κυκλώματος, U_C καὶ U_L ἀντιστοίχως τὴν ἐνεργὸν τάσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ καὶ τοῦ πηνίου. 1) Νὰ σχηματισθῇ τὸ ἀνυσματικὸν διάγραμμα τῶν τάσεων $U_{εν}$, U_C καὶ U_L. Δίδεται ὅτι εἶναι : $U_{εν} = 100$ V, $R_\Omega = 10\ \Omega$, $L = 0{,}018$ H, $C = 275\ \mu$F καὶ ὅτι ἡ μὲν συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι $\nu = 50$ Hz, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{εν} = 8{,}66$ A. 2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως.

1) Ὁ πυκνωτὴς (σχ. 73) ἔχει χωρητικὴν ἀντίστασιν :

$$R_C = \frac{1}{C\omega}$$

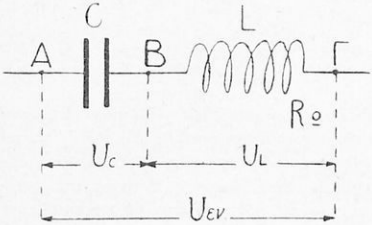
τὸ δὲ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν R_Ω καὶ ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν :

$$R_L = L\omega$$

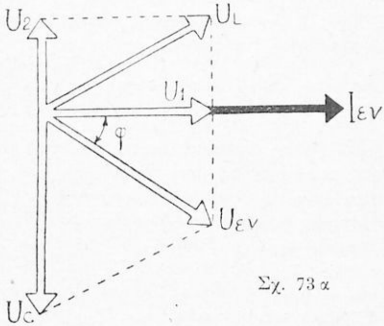
Τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{εν}$. Ὥστε εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ πυκνωτοῦ ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις U_C, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$U_C = I_{εν} \cdot R_C \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_C = \frac{I_{εν}}{C\omega} \qquad (1)$$

Ἐντὸς τοῦ πυκνωτοῦ ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φά-



Σχ. 73



Σχ. 73 α

σιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν 90° (σχ. 73 α). Τὸ πηνίον ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$R_{ολ} = \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$$

Εἰς τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργός τάσις U_L, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$U_L = I_{εν} \cdot R_{ολ} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_L = I_{εν} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$$

$$\text{καὶ} \qquad U_L = \sqrt{(I_{εν}R_\Omega)^2 + (I_{εν}R_L)^2}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις φανερώνει ὅτι ἡ τάσις U_L ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξῆς δύο ἀνυσμάτων:

$$U_1 = I_{εν}R_\Omega \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad U_2 = I_{εν}R_L \quad (3)$$

Ἡ συνιστῶσα τάσις U_1 ἔχει τὴν αὐτὴν φάσιν μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐντὸς τοῦ πηνίου, ἕνεκα τῆς αὐτεπαγωγῆς, ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν 90°. Ὥστε ἡ συνιστῶσα τάσις U_2 ἔχει ἀντίθετον φορὰν ἐν σχέσει πρὸς τὴν τάσιν U_C. Ἐὰν εἰς τὰς ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) θέσωμεν τὰς διδομένας τιμὰς τῶν ἀντιστοίχων μεγεθῶν, εὑρίσκομεν:

$$U_C = \frac{8{,}66}{(275 \cdot 10^{-6}) \cdot (2\pi \cdot 50)}\ \mathrm{V} = \frac{86\,600}{863}\ \mathrm{V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_C \approx 100\ \mathrm{V}$$

$$U_1 = (8{,}66 \cdot 10)\ \mathrm{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_1 = 86{,}6\ \mathrm{V}$$

$$U_2 = (8{,}66 \cdot 0{,}018 \cdot 2\pi \cdot 50)\ \mathrm{V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_2 = 48{,}9\ \mathrm{V}$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀριθμητικῶν τιμῶν κοτασκευάζομεν τὸ ἀνυσματικὸν διάγραμμα τοῦ σχήματος 73 α. Ἡ ἐνεργὸς τάσις U_L εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν μερικῶν τάσεων U_1 καὶ U_2. Ἡ δὲ ὁλικὴ τάσις $U_{εν}$, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ κυκλώματος εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν μερικῶν τάσεων U_C καὶ U_L.

2) Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος εὑρίσκεται εὐκόλως ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$U_{εν} = I_{εν} \cdot Z \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad Z = \frac{U_{εν}}{I_{εν}}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad Z = \frac{100\ \mathrm{V}}{8{,}66\ \mathrm{A}} \qquad \text{καὶ} \qquad Z = \frac{100}{8{,}66}\ \Omega$$

Ἀπὸ τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 73 α φαίνεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος σχέσις :

$$U_1 = U_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$I_{\varepsilon\nu} R_\Omega = I_{\varepsilon\nu} Z \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad \text{ἄρα} \qquad R_\Omega = Z \cdot \text{συν}\,\varphi$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \text{συν}\,\varphi = \frac{10 \cdot 8{,}66}{100} = 0{,}866 \qquad \text{καὶ συνεπῶς εἶναι :} \qquad \varphi = 30^0$$

225. Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ πυκνωτήν, χωρητικότητος C, συνδεδεμένον κατὰ σειρὰν μὲ πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L καὶ ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_\Omega = 10\ \Omega$. Τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα $\nu = 50$ Hz. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 100$ V, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{\varepsilon\nu} = 8{,}66$ A. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πυκνωτοῦ καὶ τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἀντιστοίχως ἐνεργὸς τάσις U_C καὶ U_L. Αἱ τιμαὶ τῶν L καὶ C ἐκλέγονται οὕτως, ὥστε αἱ ἐνεργοὶ τάσεις U_C καὶ U_L νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν. Νὰ σχηματισθῇ τὸ διάγραμμα τῶν τάσεων $U_{\varepsilon\nu}$, U_C καὶ U_L, καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν U_C, U_L, L καὶ C.

Ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικὴν ἀντίστασιν :

$$R_C = \frac{1}{C\omega}$$

τὸ δὲ πηνίον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν R_Ω καὶ ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν :

$$R_L = L\omega$$

Οὕτω τὸ πηνίον ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{o\lambda}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$R_{o\lambda} = \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$$

Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ πυκνωτοῦ (σχ. 74) ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις:

$$U_C = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_C \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_C = \frac{I_{\varepsilon\nu}}{C\omega} \tag{1}$$

Εἰς δὲ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις :

$$U_L = I_{\varepsilon\nu} \cdot R_{o\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_L = I_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{R_\Omega^2 + R_L^2}$$

$$\text{καὶ} \qquad U_L = \sqrt{(I_{\varepsilon\nu} R_\Omega)^2 + (I_{\varepsilon\nu} R_L)^2} \tag{2}$$

Εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἡ ὁλικὴ τάσις $U_{\varepsilon\nu}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἀνυσμάτων U_C καὶ U_L. Δίδεται ὅτι αἱ δύο συνιστῶσαι τάσεις U_C καὶ U_L ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ἤτοι εἶναι :

$$U_C = U_L$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$U_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} \cdot Z \qquad \text{ἄρα} \qquad Z = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}$$

$$\text{ἤτοι εἶναι :} \qquad Z = \frac{100\ \text{V}}{8{,}66\ \text{A}} \qquad \text{καὶ} \qquad Z = \frac{100}{8{,}66}\ \Omega$$

Ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς τάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R_\Omega}$$

Εἶναι ὅμως γνωστὸν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{εφ}^2\varphi}} \qquad \text{ἄρα ἔχομεν} \qquad \text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ἄρα ἡ εὑρεθεῖσα συνάρτησις τοῦ συν φ γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{Z}$$

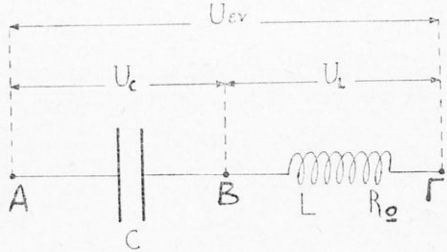
Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{10\ \Omega}{(100/8{,}66)\ \Omega} = 0{,}866 \qquad \text{ἄρα} \qquad \varphi = 30^0$$

Ἤδη κατασκευάζομεν τὸ ἀνυσματικὸν διάγραμμα, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰ ἀκόλουθα:

α) Ὅτι ἐντὸς τοῦ πυκνωτοῦ ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως προηγεῖται ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν 90^0.

β) Ὅτι ἐντὸς τοῦ πηνίου ἡ φάσις τῆς ἐντάσεως ὑστερεῖ ὡς πρὸς τὴν φάσιν τῆς τάσεως κατὰ γωνίαν 90^0 καὶ ὅτι ἡ τάσις U_L εἶναι ἡ συνισταμένη δύο καθέτων μεταξύ των συνιστωσῶν τάσεων U_1 καὶ U_2, ὅπως φαίνεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2). Οὕτω λαμβάνομεν τὸ διάγραμμα τοῦ σχήματος 74 α εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι:



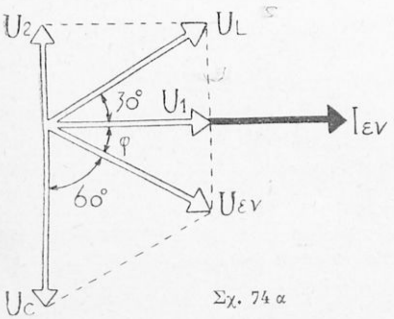
Σχ. 74

$$U_C = U_L \qquad \text{καὶ} \qquad \varphi = 30^0$$

Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς συνιστώσας τάσεις U_C καὶ U_L, εἶναι ῥόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία εἶναι ἴση μὲ 120^0. Ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι εἶναι:

$$U_C = U_L = U_{εν}$$

ἤτοι $\mathbf{U_C = U_L = 100\ V}$



Σχ. 74 α

Αἱ δύο συνιστῶσαι τάσεις U_1 καὶ U_2 τῆς τάσεως U_L δίδονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$U_1 = I_{εν} \cdot R_\Omega$$

$$\text{καὶ} \qquad U_2 = I_{εν} \cdot R_L = I_{εν} \cdot L\omega$$

Ἐκ τοῦ σχήματος συνάγεται ἡ σχέσις:

$$U_2 = U_1 \cdot \text{εφ}\,30^0$$

$$\text{ἤτοι} \qquad I_{εν} \cdot L\omega = I_{εν} \cdot R_\Omega \cdot \text{εφ}\,30^0$$

$$\text{ἄρα} \qquad L\omega = R_\Omega \cdot \text{εφ}\,30^0$$

$$\text{καὶ} \qquad L = \frac{R_\Omega \cdot \text{εφ}\,30^0}{\omega}$$

Ὥστε ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ **πηνίου** εἶναι:

$$L = \frac{10 \cdot \text{εφ}\,30^0}{2\pi \cdot 50} \qquad \text{ἤτοι} \qquad L = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{100\pi \cdot 3}\ \text{H} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{L = 0{,}018\ H}$$

Τέλος ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι :

$$C = \frac{I_{\varepsilon\nu}}{\omega \cdot U_C} \quad \text{ἤτοι} \quad C = \frac{8{,}66}{100\pi \cdot 100}\ F$$

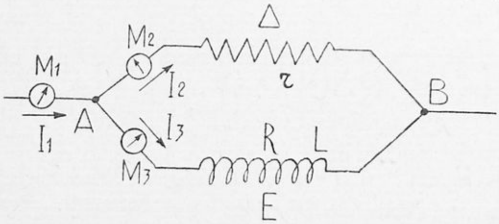
$$\text{ἢ} \quad C = \frac{275}{10^6}\ F \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{C = 275\ \mu F}$$

226. Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ἑνὸς κυκλώματος ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος 50 Hz, συνδέονται ἐν παραλλήλῳ δύο ἀγωγοὶ ΑΔΒ καὶ ΑΕΒ (σχ. 75). Ὁ ἀγωγὸς ΑΔΒ ἔχει μόνον ὠμικὴν ἀντίστασιν r = 10 Ω, ὁ δὲ ἀγωγὸς ΑΕΒ ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν R καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L. Μεταξὺ τῶν σημείων A καὶ B ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$ = 100 V, ἡ δὲ τάσις τοῦ ρεύματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $U = U_0 \cdot$ συν ωt. Εἰς ἕκαστον τμῆμα τοῦ κυκλώματος ὑπάρχει θερμικὸν ἀμπερόμετρον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_2 τὴν ὁποίαν θὰ σημειώνῃ τὸ ἀμπερόμετρον M_2 καὶ νὰ δοθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς στιγμιαίας ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν ΑΔΒ.

Ἡ κυκλικὴ συχνότης ω τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 \quad \text{ἄρα} \quad \omega = 100\pi$$

Εἰς τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 100$ V. Ἐπειδὴ ὁ ἀγωγὸς ΑΔΒ δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἔπεται ὅτι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν ἀγωγὸν τοῦτον, δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :



Σχ. 75

$$I_2 = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{r}$$

$$\text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{100\ V}{10\ \Omega}$$

$$\text{καὶ} \quad I_2 = 10\ A$$

Ὥστε τὸ ἀμπερόμετρον M_2 θὰ σημειώνῃ τὴν ἔνδειξιν :

$$\mathbf{I_2 = 10\ A}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν U_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς τάσεως, τότε ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu}$ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$U_{\varepsilon\nu} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad U_0 = U_{\varepsilon\nu} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{ἤτοι} \quad U_0 = 100\ V \cdot 1{,}41 \quad \text{καὶ} \quad U_0 = 141\ V$$

Ἡ στιγμιαία τάσις U δίδεται ἑπομένως ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$U = U_0 \cdot \text{συν}\ \omega t \quad \text{ἢ} \quad U = 141 \cdot \text{συν}\ 100\ \pi t$$

Ἐπὶ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΔΒ ἡ ἔντασις καὶ ἡ τάσις ἔχουν πάντοτε τὴν αὐτὴν φάσιν. Συνεπῶς ἡ στιγμιαία ἔντασις i_2 δίδεται εἰς ἑκάστην στιγμὴν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$i_2 = \frac{U}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad i_2 = \frac{141 \cdot \text{συν}\ 100\ \pi t}{10}$$

$$\text{ἄρα} \quad i_2 = 14{,}1 \cdot \text{συν}\ 100\ \pi t \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{i_2 = 14{,}1 \cdot \text{συν}\ 314\ t}$$

227. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 226, τὰ ἀμπερόμετρα M_2 καὶ M_3 σημειώνουν τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν, τὴν ὁποίαν εὕρομεν δι' ὑπολογισμοῦ, ἐνῷ τὸ ἀμπερόμετρον M_1 ση-

μειώνει ἐνεργὸν ἔντασιν $I_1 = 10\sqrt{3}$ A. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως I_α, I_β, I_γ τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἀμπερομέτρων M_1, M_2, M_3. 2) Νὰ ἐκφρασθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν στιγμιαίων ἐντάσεων:

$$i_1 = I_\alpha \cdot \text{συν}\,(\omega t - \theta) \qquad i_3 = I_\gamma \cdot \text{συν}\,(\omega t - \varphi)$$

τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῶν ἀμπερομέτρων M_1, M_3 καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαφοραὶ φάσεως θ καὶ φ. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις R καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ ἀγωγοῦ ΑΕΒ.

1) Δίδεται ὅτι τὰ δύο θερμικὰ ἀμπερόμετρα M_2 καὶ M_3 (σχ. 75) σημειώνουν τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν, δηλαδὴ δεικνύουν ὅτι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν ἀγωγῶν ΑΔΒ καὶ ΑΕΒ, εἶναι:

$$I_3 = I_2 = 10 \text{ A}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ἂν I_0 εἶναι τὸ πλάτος τῆς ἐντάσεως, τοῦ ρεύματος τότε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad I_0 = I_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad I_0 = 10\text{ A} \cdot \sqrt{2} \qquad \text{καὶ} \qquad I_0 = 10\sqrt{2}\text{ A}$$

Τὸ θερμικὸν ἀμπερόμετρον M_1 δεικνύει ὅτι δι' αὐτοῦ διέρχεται ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_1 = 10\sqrt{3}$ A. Συνεπῶς τὸ πλάτος I_α τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ ἀμπερομέτρου M_1, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$I_1 = \frac{I_\alpha}{\sqrt{2}} \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad I_\alpha = I_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad I_\alpha = 10\sqrt{3}\text{ A} \cdot \sqrt{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_\alpha = 10\sqrt{6}\text{ A}}$$

Τὸ δὲ ζητούμενον πλάτος τῆς ἐντάσεως I_β καὶ I_γ τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν ἀμπερομέτρων M_2 καὶ M_3, εἶναι:

$$I_\beta = I_\gamma = I_0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{I_\beta = I_\gamma = 10\sqrt{2}\text{ A}}$$

2) Ἡ στιγμιαία ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ ἀμπερόμετρον M_2, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$i_2 = I_\beta \cdot \text{συν}\,\omega t \qquad \text{ἤτοι} \qquad i_2 = 10\sqrt{2} \cdot \text{συν}\,100\pi t$$

Αἱ στιγμιαῖαι ἐντάσεις i_1 καὶ i_3 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διαρρέουν ἀντιστοίχως τὰ ἀμπερόμετρα M_1 καὶ M_3, δίδονται ἀπὸ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις:

$$i_1 = I_\alpha \cdot \text{συν}\,(\omega t - \theta) \qquad \text{ἤτοι} \qquad i_1 = 10\sqrt{6} \cdot \text{συν}\,(100\pi t - \theta)$$

$$i_3 = I_\gamma \cdot \text{συν}\,(\omega t - \varphi) \qquad \text{ἤτοι} \qquad i_3 = 10\sqrt{2} \cdot \text{συν}\,(100\pi t - \varphi)$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς διαφορὰς φάσεως θ καὶ φ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ μίαν δεδομένην χρονικὴν στιγμὴν t ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἐντάσεων i_1, i_2 καὶ i_3, εὑρίσκομεν:

$$10\sqrt{6} \cdot \text{συν}\,(100\pi t - \theta) = 10\sqrt{2} \cdot \text{συν}\,100\pi t + 10\sqrt{2} \cdot \text{συν}\,(100\pi t - \varphi)$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \sqrt{3} \cdot \text{συν}\,(100\pi t - \theta) = \text{συν}\,100\pi t + \text{συν}\,(100\pi t - \varphi) \qquad (1)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ t. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{διὰ} \qquad t = 0 \qquad \text{εἶναι} \qquad \sqrt{3} \cdot \text{συν}\,\theta = 1 + \text{συν}\,\varphi \qquad (2)$$

Ὅταν γίνῃ: $\quad 100\pi t = \dfrac{\pi}{2} \quad$ τότε εἶναι: $\quad t = \dfrac{1}{200}$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι :

διὰ $t = \frac{1}{200}$ εἶναι : $\sqrt{3} \cdot συν\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = συν\,\frac{\pi}{2} + συν\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

$$\text{ἤτοι} \quad \sqrt{3} \cdot ημ\,\theta = ημ\,\varphi \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων (2) καὶ (3) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν γωνιῶν φ καὶ θ. Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$3συν^2\theta = 1 + 2συν\,\varphi + συν^2\varphi \qquad (2')$$

$$3ημ^2\theta = ημ^2\varphi \qquad (3')$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$3(ημ^2\theta + συν^2\theta) = 1 + 2συν\,\varphi + (ημ^2\varphi + συν^2\varphi)$$

$$\text{ἄρα} \quad 3 = 1 + 2συν\,\varphi + 1$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$συν\,\varphi = \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{3}\ \mathbf{rad}}$$

Ἐὰν θέσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ συν φ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), εὑρίσκομεν :

$$\sqrt{3} \cdot συν\,\theta = 1 + \frac{1}{2} \qquad \text{ἄρα} \qquad συν\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}\ \mathbf{rad}}$$

Ὥστε αἱ ζητούμεναι στιγμιαῖαι ἐντάσεις i_1 καὶ i_3 δίδονται ἀπὸ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις :

$$\mathbf{i_1 = 10\sqrt{6} \cdot συν\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\mathbf{i_3 = 10\sqrt{2} \cdot συν\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

3) Τὸ τμῆμα ΑΕΒ τοῦ κυκλώματος ἔχει σύνθετον ἀντίστασιν Z ἴσην μέ :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \qquad (4)$$

Εἰς τὰ ἄκρα ΑΒ τοῦ ἀγωγοῦ ΑΕΒ ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_{εν} = 100$ V, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_3 = 10$ A. Οὕτω ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$I_3 = \frac{U_{εν}}{Z} \qquad \text{εὑρίσκομεν} \qquad Z = \frac{U_{εν}}{I_3}$$

$$\text{ἄρα} \quad Z = \frac{100\ V}{10\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad Z = 10\,\Omega$$

Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (4) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 10 \qquad \text{ἤτοι} \qquad R^2 + (L\omega)^2 = 100 \qquad (5)$$

Ἀνωτέρω εὑρέθη ὅτι διὰ τὸ ρεῦμα, τὸ διαρρέον τὸν ἀγωγὸν ΑΕΒ, εἶναι $\varphi = \frac{\pi}{3}$ καὶ $συν\,\varphi = \frac{1}{2}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀγωγοῦ τούτου ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις :

$$εφ\,\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $συν\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + εφ^2\varphi}}$ εὑρίσκομεν $συν\,\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$

$$\text{ἤτοι} \quad συν\,\varphi = \frac{R}{Z}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις R τοῦ ἀγωγοῦ ΑΕΒ εἶναι:

$$R = Z \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = 10\,\Omega \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = 5\,\Omega}$$

Ἤδη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5) εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ ἀγωγοῦ ΑΕΒ εἶναι:

$$L = \sqrt{\frac{100 - R^2}{\omega^2}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad L = \frac{\sqrt{100 - 25}}{\omega}$$

$$\text{ἢ} \qquad L = \frac{\sqrt{75}}{100\pi}\ \text{H} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{L = 0{,}028\ H}$$

228. Μία γραμμὴ ἔχει ἀντίστασιν R = 2 Ω καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν μεταφορὰν ἐναλλασσομένου ρεύματος, συχνότητος 50 Hz, εἰς ἕνα μετρητὴν ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μετρητοῦ ἐφαρμόζεται σταθερὰ ἐνεργὸς τάσις 120 V. 1) Μετὰ τὸν μετρητὴν τοποθετεῖται ἠλεκτρικὴ θερμάστρα, ἡ ὁποία ἔχει μόνον ὠμικὴν ἀντίστασιν. Διὰ λειτουργίαν τῆς θερμάστρας ἐπὶ 5 ὥρας, ὁ μετρητὴς δεικνύει κατανάλωσιν ἴσην μὲ 6 kWh. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν γραμμὴν καὶ ἡ ἐπ' αὐτῆς ἀπώλεια ἐνεργείας (εἰς kWh) κατὰ τὰς 5 αὐτὰς ὥρας. 2) Ἀντικαθιστῶμεν τὴν θερμάστραν μὲ ἕνα κινητῆρα ἔχοντα συντελεστὴν ἰσχύος συν φ = 0,80. Νὰ εὑρεθοῦν ὅσα στοιχεῖα ζητοῦνται εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἐὰν ἐντὸς 5 ὡρῶν ἡ κατανάλωσις ἐνεργείας εἶναι πάλιν ἴση μὲ 6 kWh.

1) Δίδεται ὅτι εἰς χρόνον $t = 5\,h$ ἡ θερμάστρα καταναλίσκει ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν $W_\theta = 6\,kWh$. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_θ τῆς θερμάστρας, μετρημένη εἰς κιλοβὰτ (kW) προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$W_\theta = P_\theta \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_\theta = \frac{W_\theta}{t} \qquad \text{ἢ} \qquad P_\theta = \frac{6\,kWh}{5\,h}$$

$$\text{καὶ} \qquad P_\theta = \frac{6}{5}\,kW = 1{,}2\,kW = 1200\,W$$

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἐνεργὸν τάσιν $U_{\varepsilon\nu} = 120\,V$. Ἡ θερμάστρα δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν. Ἐὰν ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_{\varepsilon\nu}$, τότε ἡ καταναλισκομένη ἀπὸ τὴν θερμάστραν ἰσχὺς εἶναι:

$$P_\theta = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{P_\theta}{U_{\varepsilon\nu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{1200\,W}{120\,V} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_{\varepsilon\nu} = 10\,A}$$

Ἕνεκα τοῦ φαινομένου τοῦ Joule ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς:

$$P_{\gamma\rho} = R \cdot I^2_{\varepsilon\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{\gamma\rho} = 2\,\Omega \cdot (\,10\,A\,)^2 \qquad \text{καὶ} \qquad P_{\gamma\rho} = 200\,W = 0{,}2\,kW$$

Εἰς χρόνον $t = 5\,h$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς συμβαίνει ἀπώλεια ἐνεργείας ($W_{\gamma\rho}$) ἴση μέ:

$$W_{\gamma\rho} = P_{\gamma\rho} \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_{\gamma\rho} = 0{,}2\,kW \cdot 5\,h \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{W_{\gamma\rho} = 1\,kWh}$$

2) Ἀντὶ τῆς θερμάστρας ὑπάρχει τώρα ὁ κινητήρ, ὁ ὁποῖος εἰς χρόνον $t = 5\,h$ καταναλίσκει πάλιν ἐνέργειαν $W_K = 6\,kWh$. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_K τοῦ κινητῆρος εἶναι:

$$P_K = \frac{W_K}{t} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_K = \frac{6\,kWh}{5\,h} \qquad \text{καὶ} \qquad P_K = 1{,}2\,kW = 1200\,W$$

Ἐὰν $I_{\varepsilon\nu}$ εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τότε ἡ ἰσχὺς P_K τοῦ κινητῆρος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$P_K = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐνεργὸς ἔντασ's τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I_{εν} = \frac{P_K}{U_{εν} \cdot συν\, φ} \quad ἤτοι \quad I_{εν} = \frac{1200\ W}{120\ V \cdot 0{,}80} \quad καὶ \quad \mathbf{I_{εν} = 12{,}5\ A}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχύς :

$$P_{γρ} = R \cdot I^2_{εν} \quad ἤτοι \quad P_{γρ} = 2\ Ω \cdot (\ 12{,}5\ A\ )^2$$

$$καὶ \quad P_{γρ} = 312{,}5\ W = 0{,}3125\ kW$$

Εἰς χρόνον $t = 5\ h$ ἐπὶ τῆς γραμμῆς συμβαίνει ἀπώλεια ἐνεργείας ($W_{γρ}$) ἴση μέ :

$$W_{γρ} = P_{γρ} \cdot t \quad ἤτοι \quad W_{γρ} = 0{,}3125\ kW \cdot 5\ h \quad καὶ \quad \mathbf{W_{γρ} = 1{,}562\ kWh}$$

229. Ἕνας μονοφασικὸς ἐναλλακτὴρ ἔχει 4 βορείους πόλους, οἱ ὁποῖοι ἐναλλάσσονται μὲ 4 νοτίους πόλους. Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ αὐτεπαγωγὴ τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι ἀσήμαντοι. Εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος δημιουργεῖται ἐνεργὸς τάσις 120 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 Hz. 1) Νὰ γραφῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς στιγμιαίας τάσεως καὶ νὰ εὑρεθῇ πόσας στροφὰς κατὰ λεπτὸν ἐκτελεῖ τὸ στρεφόμενον ἐπάγον τοῦ ἐναλλακτῆρος. 2) Οἱ πόλοι τοῦ ἐναλλακτῆρος συνδέονται μὲ κύκλωμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ὠμικὴν ἀντίστασιν $R_1 = 100\ Ω$ καὶ ἀπὸ ἕνα πηνίον, ἔχον ὠμικὴν ἀντίστασιν $R = 20\ Ω$ καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 50 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου. 3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἐναλλακτὴρ καὶ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὴν ἰσχύν, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ κύκλωμα ἕνα πυκνωτήν; Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ τούτου καὶ πόση θὰ εἶναι ἡ μεγίστη ἰσχύς;

1) Ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι $ω = 100π$. Εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος δημιουργεῖται ἐνεργὸς τάσις $U_{εν} = 120\ V$. Τότε τὸ πλάτος τῆς τάσεως U_0 προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$U_{εν} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad ἄρα \quad U_0 = U_{εν} \cdot \sqrt{2}$$

$$ἤτοι \quad U_0 = 120\ V \cdot \sqrt{2} \quad καὶ \quad U_0 = 120\sqrt{2}\ V \approx 170\ V$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς στιγμιαίας τάσεως εἶναι :

$$U = U_0 \cdot ημ\, ωt \quad ἄρα \quad \mathbf{U = 170 \cdot ημ\ 100\, πt}$$

Ὁ ἐναλλακτὴρ ἔχει 4 βορείους καὶ 4 νοτίους πόλους. Ἐπομένως εἰς ἑκάστην στροφὴν τοῦ ρότορος ἀντιστοιχοῦν 4 περίοδοι τοῦ ρεύματος. Ἡ περίοδος T τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$T = \frac{1}{ν} \quad ἤτοι \quad T = \frac{1}{50\ sec^{-1}} \quad καὶ \quad T = \frac{1}{50}\ sec$$

Ἄρα 1 στροφὴ τοῦ ρότορος γίνεται εἰς χρόνον :

$$t = 4\,T \quad ἤτοι \quad t = \frac{4}{50}\ sec$$

Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς N τῶν στροφῶν τοῦ ρότορος κατὰ λεπτὸν εἶναι :

$$N = \frac{60\ sec}{4/50\ sec/στροφὴν} \quad καὶ \quad \mathbf{N = 750\ στροφαί}$$

2) Ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἡ αὐτεπαγωγὴ τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι ἀσήμαντοι. Συνεπῶς εἰς κάθε στιγμὴν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι ἴση μὲ τὴν στι-

γμιαίαν τάσιν εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος. Δίδεται ὅτι ἡ ἀναπτυσσομένη εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος ἐνεργὸς τάσις εἶναι $U_{εν} = 120$ V. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως $R_1 = 100\ \Omega$ ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_1 = 50$ V. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις $I_{εν}$ τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὴν ὠμικὴν ἀντίστασιν R_1 εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$I_{εν} = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{ἤτοι} \quad I_{εν} = \frac{50\ \text{V}}{100\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_{εν} = 0{,}5\ \text{A}$$

Ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις R_1 καὶ τὸ πηνίον συνδέονται κατὰ σειράν. Συνεπῶς καὶ τὸ πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{εν} = 0{,}5$ A. Ἡ σύνθετος ἀντίστασις $Z_Π$ τοῦ πηνίου εἶναι :

$$Z_Π = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \qquad (1)$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου.

Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις U_2 καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$U_2 = I_{εν} \cdot Z_Π \qquad (2)$$

Τὸ ὅλον κύκλωμα (ὠμικὴ ἀντίστασις R_1 καὶ πηνίον) ἔχει ὁλικὴν ὠμικὴν ἀντίστασιν R_Ω ἴσην μέ :

$$R_\Omega = R_1 + R \quad \text{ἤτοι} \quad R_\Omega = (100 + 20)\ \Omega = 120\ \Omega$$

Συνεπῶς ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} \qquad (3)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις (νόμος τοῦ Ohm) :

$$U_{εν} = I_{εν} \cdot Z \quad \text{ἄρα} \quad Z = \frac{U_{εν}}{I_{εν}}$$

$$\text{ἤτοι} \quad Z = \frac{120\ \text{V}}{0{,}5\ \text{A}} \quad \text{ἄρα} \quad Z = 240\ \Omega$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} = 240 \quad \text{ἤτοι} \quad R_\Omega^2 + (L\omega)^2 = 240^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ πηνίου εἶναι :

$$L = \sqrt{\frac{240^2 - R_\Omega^2}{\omega^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad L = \sqrt{\frac{240^2 - 120^2}{(100\pi)^2}} = \frac{120\sqrt{3}}{100\pi}\ \text{H}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{L = 0{,}66\ H}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τώρα ὅτι ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ πηνίου εἶναι :

$$Z_Π = \sqrt{20^2 + \left(\frac{120\sqrt{3}}{100\pi} \cdot 100\pi\right)^2}\ \Omega \quad \text{ἤτοι} \quad Z_Π = \sqrt{20^2 + 120^2 \cdot 3}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \quad Z_Π = 208{,}8\ \Omega$$

Τέλος ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐνεργὸς τάσις U_2 εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πηνίου εἶναι :

$$U_2 = 0{,}5\ \text{A} \cdot 208{,}8\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_2 = 104{,}4\ V}$$

3) Ἡ μέση ἰσχὺς P, τὴν ὁποίαν παρέχει ὁ ἐναλλακτὴρ εἰς τὸ κύκλωμα, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = U_{εν} \cdot I_{εν} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad (4)$$

ὅπου συν φ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος. Ἐπειδὴ εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα δὲν ὑπάρχει ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις, ἕπεται ὅτι ὁλόκληρος ἡ προσφερομένη εἰς τὸ κύκλωμα ἰσχὺς δαπανᾶται μόνον ὡς θερμικὴ ἐνέργεια παραμένουσα ἐπὶ τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως $R_1 = 100\,\Omega$ καὶ τοῦ πηνίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$P = (R_1 + R)\cdot I_{\varepsilon\nu}^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = (100 + 20)\,\Omega\cdot(0{,}5\ A)^2$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{P = 30\ W}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{P}{U_{\varepsilon\nu}\cdot I_{\varepsilon\nu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \text{συν}\,\varphi = \frac{30\ W}{(120\cdot 0{,}5)\ W} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{\text{συν}\,\varphi = 0{,}50}$$

Ἐὰν εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα προσθέσωμεν κατὰ σειρὰν καὶ πυκνωτήν, ἔχοντα χωρητικότητα C, τότε ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος γίνεται:

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Τότε ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{\sqrt{R_\Omega^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad (5)$$

Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν μεγίστην τιμὴν τῆς ἰσχύος P, ἐὰν καταστήσωμεν τὸν συντελεστὴν ἰσχύος συν φ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, δηλαδὴ ὅταν γίνῃ συν φ = 1. Τότε ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ὅταν ἰσχύῃ ἡ ἀκόλουθος συνθήκη συντονισμοῦ:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ πυκνωτὴς πρέπει νὰ ἔχῃ χωρητικότητα:

$$C = \frac{1}{L\omega^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad C = \frac{1}{\left(\frac{120\sqrt{3}}{100\pi}\right)\cdot(100\pi)^2}\ F$$

$$\text{ἢ} \qquad C = \frac{1}{120\sqrt{3}\cdot 100\pi}\ F \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{C = 15{,}3\ \mu F}$$

Ὅταν εἰς τὸ κύκλωμα προστεθῇ κατὰ σειρὰν ὁ ἀνωτέρω πυκνωτής, τότε σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (5) ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R_\Omega} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{120\ V}{120\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_{\varepsilon\nu} = 1\ A$$

Τότε ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι συν φ = 1 καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (4) ἔχομεν τὴν μεγίστην ἰσχύν:

$$P_{\mu\varepsilon\gamma} = U_{\varepsilon\nu}\cdot I_{\varepsilon\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{\mu\varepsilon\gamma} = 120\ V\cdot 1\ A \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P_{\mu\varepsilon\gamma} = 120\ W}$$

230. Ἕνα τριφασικὸν ρεῦμα συχνότητος 40 Hz τροφοδοτεῖ ὑπὸ ἐνεργὸν τάσιν 110 V κινητῆρα μὲ στρεφόμενον μαγνητικὸν πεδίον. Ἕκαστον πηνίον ἔχει ἀντίστασιν 1 Ω καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,003 H, διαρρέεται δὲ ἀπὸ ρεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν 5 A. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κινητῆρος. Πόση εἶναι ἡ διαθέσιμος μηχανικὴ ἰσχύς, ἂν ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 60 %;

Ἐντὸς ἑκάστου πηνίου ἡ διαφορὰ φάσεως φ μεταξὺ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς τάσεως δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

Ὁ συντελεστὴς ἰσχύος (συν φ) ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\,\varphi}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \text{συν}\,\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $R = 1\ \Omega, \quad L = 0{,}003\ \mathrm{H},$

$$\nu = 40\ \mathrm{Hz}, \qquad \text{ἄρα} \qquad \omega = 2\pi\nu = 80\pi$$

Οὕτω ὁ ζητούμενος συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{1\ \Omega}{\sqrt{1^2 + (0{,}003 \cdot 80\pi)^2}\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\text{συν}\,\varphi = 0{,}80}$$

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἐνεργὸν τάσιν $U_{\varepsilon\nu} = 110\ \mathrm{V}$ καὶ ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{\varepsilon\nu} = 5\ \mathrm{A}$. Ἄρα εἰς κάθε πηνίον τοῦ κινητῆρος προσφέρεται ἰσχύς :

$$P_1 = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_1 = 110\ \mathrm{V} \cdot 5\ \mathrm{A} \cdot 0{,}80 \qquad \text{καὶ} \qquad P_1 = 440\ \mathrm{W}$$

Εἰς τὰ τρία πηνία τοῦ κινητῆρος προσφέρεται ἑπομένως ἰσχύς :

$$P = 3\,P_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 1320\ \mathrm{W}$$

Ἡ ἀπόδοσις τοῦ κινητῆρος εἶναι 60 %. Ἄρα ἡ διαθέσιμος μηχανικὴ ἰσχὺς $P_{\mu\eta\chi}$ εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$\frac{P_{\mu\eta\chi}}{P} = 0{,}60 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{\mu\eta\chi} = 0{,}60 \cdot P$$

$$\text{ἢ} \qquad P_{\mu\eta\chi} = 0{,}60 \cdot 1320\ \mathrm{W} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{P_{\mu\eta\chi} = 792\ \mathrm{W}}$$

231. Ἕνα κύκλωμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ὠμικὴν ἀντίστασιν $R = 100\ \Omega$ καὶ ἀπὸ ἕνα πηνίον, ἔχον ὠμικὴν ἀντίστασιν $R' = 20\ \Omega$ καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}66\ \mathrm{H}$. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 120 V. Ἡ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι 50 Hz. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἔπειτα συνεχὴς τάσις 120 V. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος καὶ ἡ ἰσχὺς αὐτοῦ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ;

Εἰς τὸ κύκλωμα συνδέονται κατὰ σειρὰν ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις $R = 100\ \Omega$ καὶ τὸ πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὠμικὴν ἀντίστασιν $R' = 20\ \Omega$. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ὠμικὴ ἀντίστασις (R_Ω) τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_\Omega = R + R' \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_\Omega = (100 + 20)\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad R_\Omega = 120\ \Omega$$

Ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \omega = 100\pi$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος τούτου εἶναι :

$$Z = \sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad Z = \sqrt{120^2 + (0{,}66 \cdot 100\pi)^2}\ \Omega$$

$$\text{καὶ} \qquad Z \approx 240\ \Omega$$

Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κυκλώματος τούτου ἐφαρμόζεται ἡ ἐνεργὸς τάσις $U_{\varepsilon\nu} = 120\ \mathrm{V}$, τότε τὸ κύκλωμα διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_{\varepsilon\nu}$ καὶ ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm :

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{Z} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_{\varepsilon\nu} = \frac{120\ \mathrm{V}}{240\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{I_{\varepsilon\nu} = 0{,}50\ \mathrm{A}}$$

Εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος μετατρέπεται εἰς θερμότητα, παραμένουσαν ἐπὶ τοῦ κυκλώματος. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$P = (R + R') \cdot I_{\varepsilon\nu}^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = (100 + 20)\ \Omega \cdot (0{,}50\ \mathrm{A})^2$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{P = 30\ \mathrm{W}}$$

Ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ θεωρουμένου κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἡ συνεχὴς τάσις $U = 120$ V, τότε ἡ παρουσία τοῦ πηνίου εἰς τὸ κύκλωμα δὲν ἔχει καμμίαν ἐπίδρασιν (ἐκτὸς ἑνὸς ἐλαχίστου χρόνου κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν καὶ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$I = \frac{U}{R + R'} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{120\ \text{V}}{120\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I = 1\ A}$$

Τότε ἡ ἰσχὺς P τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$P = U \cdot I \quad \text{ἤτοι} \quad P = 120\ \text{V} \cdot 1\ \text{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P = 120\ W}$$

* Σημείωσις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα καταφαίνεται ἡ σημαντικὴ ἐπίδρασις τοῦ πηνίου, ὅταν τὸ κύκλωμα τροφοδοτῆται μὲ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$P = U_{\varepsilon\nu} \cdot I_{\varepsilon\nu} \cdot \text{συν}\,\varphi$$

ὅπου συν φ εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰσχύος τοῦ κυκλώματος. Οὗτος προσδιορίζεται ὡς γνωστὸν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{L\omega}{R_\Omega} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\,\varphi}}$$

ἄρα εἶναι

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{\sqrt{R_\Omega^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{ἢ} \quad \text{συν}\,\varphi = \frac{R_\Omega}{Z}$$

Ἑπομένως εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ὁ συντελεστὴς ἰσχύος εἶναι:

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{120\ \Omega}{240\ \Omega} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{συν}\,\varphi = 0{,}50$$

Ἄρα ἡ μέση ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$P = 120\ \text{V} \cdot 0{,}50\ \text{A} \cdot 0{,}50 \quad \text{καὶ} \quad P = 30\ \text{W}$$

Τὴν αὐτὴν τιμὴν εὕρομεν ἀνωτέρω διὰ τὴν ἰσχὺν τοῦ ρεύματος, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος μετατρέπεται εἰς θερμότητα.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΤΑΙ

232. Θέλομεν νὰ ὑποβιβάσωμεν τὴν ἐνεργὸν τάσιν τοῦ ρεύματος ἀπὸ 220 V εἰς 5 V. Ἐὰν τὸ δευτερεῦον πηνίον τοῦ μετασχηματιστοῦ ἔχῃ 10 σπείρας, πόσας σπείρας πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πρωτεῦον πηνίον;

Ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ ρεύματος εἶναι $U_1 = 220$ V καὶ πρόκειται νὰ ὑποβιβασθῇ εἰς $U_2 = 5$ V. Τὸ πρωτεῦον πηνίον, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ διαβιβασθῇ τὸ ρεῦμα μὲ τὴν τάσιν U_1, χει N_1 σπείρας. Τὸ δὲ δευτερεῦον πηνίον, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἀναπτυχθῇ τὸ ρεῦμα μὲ τὴν τάσιν U_2, ἔχει $N_2 = 10$ σπείρας. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἐνεργοὶ τάσεις εἰς τὰ δύο πηνία τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σπειρῶν τῶν δύο πηνίων, ἤτοι:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος πηνίου εἶναι:

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{U_1}{U_2} = 10 \cdot \frac{220}{5}\ \text{σπεῖραι} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{N_2 = 440\ σπεῖραι}$$

233. Εἰς μετασχηματιστὴν τὸ πρωτεῦον πηνίον ἔχει 100 σπείρας καὶ τὸ δευτερεῦον ἔχει 2000 σπείρας. Εἰς τὸ πρωτεῦον διαβιβάζεται ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν τάσιν 110 V καὶ ἐνεργὸν ἔντασιν 100 A. Τὸ πρωτεῦον πηνίον ἔχει ἀντίστασιν 0,03 Ω. Πόση εἶναι ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ καὶ πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος, ἐὰν ἡ ἐνεργὸς τάσις αὐτοῦ εἶναι 2200 V;

Τὸ πρωτεῦον πηνίον τοῦ μετασχηματιστοῦ ἔχει $N_1 = 100$ σπείρας, τὸ δὲ δευτερεῦον πηνίον ἔχει $N_2 = 2000$ σπείρας. Εἰς τὸ πρωτεῦον πηνίον τὸ ρεῦμα ἔχει ἐνεργὸν τάσιν $U_1 = 110$ V καὶ ἐνεργὸν ἔντασιν $I_1 = 100$ A. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_1 τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = 110 \text{ V} \cdot 100 \text{ A} = 11\,000 \text{ W}$$

Ἂν δὲν ὑπῆρχον ἀπώλειαι, τότε ἡ ἰσχὺς P_2 τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος θὰ ἦτο ἴση μὲ τὴν ἰσχὺν P_1 τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος. Τότε, ἂν U_2 καὶ I_2 εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος, θὰ ἦτο:

$$P_1 = P_2 \quad \text{ἢ} \quad U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{2000}{100} = 20$$

Ἄρα, ἂν δὲν ὑπῆρχον ἀπώλειαι, τὸ δευτερεῦον ρεῦμα θὰ εἶχεν:

ἐνεργὸν τάσιν: $U_2 = 20 \cdot U_1 = 20 \cdot 110 \text{ V} = 2200 \text{ V}$

ἐνεργὸν ἔντασιν: $I_2 = \dfrac{I_1}{20} = \dfrac{100}{20} \text{ A} = 5 \text{ A}$

Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ πρωτεύοντος πηνίου εἶναι $R = 0{,}03\ \Omega$, ἕπεται ὅτι ἐπὶ τοῦ πρωτεύοντος πηνίου χάνεται ὑπὸ μορφὴν θερμότητος ἰσχὺς P_θ, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule εἶναι:

$$P_\theta = R \cdot I_1^2 \quad \text{ἤτοι} \quad P_\theta = 0{,}03\ \Omega \cdot (100 \text{ A})^2 \quad \text{καὶ} \quad P_\theta = 300 \text{ W}$$

Οὕτω, ἂν δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι ἀπώλειαι, εἰς τὸ δευτερεῦον πηνίον μεταβιβάζεται ἰσχύς:

$$P_2' = P_1 - P_\theta = 11\,000 \text{ W} - 300 \text{ W} = 10\,700 \text{ W}$$

Ἡ ἀπόδοσις λοιπὸν τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι:

$$A = \frac{10\,700}{11\,000} = 0{,}97 \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{A = 97\ \%}$$

Δίδεται ὅτι εἰς τὸ δευτερεῦον πηνίον ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι $U_2 = 2200$ V. Ἀνωτέρω εὕρομεν ὅτι εἰς τὸ δευτερεῦον μεταβιβάζεται ἰσχὺς $P_2' = 10\,700$ W. Τόση ἑπομένως θὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος. Ἂν καλέσωμεν I_2' τὴν ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος, τότε ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$P_2' = U_2 \cdot I_2'$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$I_2' = \frac{P_2'}{U_2} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2' = \frac{10\,700 \text{ W}}{2\,200 \text{ V}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_2' = 4{,}86\ A}$$

234. Μετασχηματιστὴς ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως ἔχει εἰς τὸ πρωτεῦον πηνίον 4500 σπείρας καὶ εἰς τὸ δευτερεῦον 150 σπείρας. Εἰς τὸ πρωτεῦον διαβιβάζεται ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν τάσιν 3000 V, τὸ δὲ δευτερεῦον ρεῦμα διαβιβάζεται εἰς ἀντίστασιν R καὶ δαπανᾶται διὰ τὴν παραγωγὴν θερμότητος. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R ἀναπτύσσεται θερμότης ἰσοδυναμοῦσα μὲ ἰσχὺν 9 kW· Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντα-

σις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος καὶ πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις R; Ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ 1.

Ὁ μετασχηματιστὴς ἔχει εἰς μὲν τὸ πρωτεῦον πηνίον $N_1 = 4500$ σπείρας εἰς δὲ τὸ δευτερεῦον πηνίον ἔχει $N_2 = 150$ σπείρας. Εἰς τὸ πτωτεῦον πηνίον ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι $U_1 = 3000$ V, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι I_1. Εἰς τὸ δευτερεῦον πηνίον ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι U_2 καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις εἶναι I_2. Ὁ μετασχηματιστὴς λειτουργεῖ μὲ ἀπόδοσιν 1, δηλαδὴ ὁλόκληρος ἡ ἰσχὺς $P = U_1 \cdot I_1$ τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος λαμβάνεται ὡς ἰσχὺς $P = U_2 \cdot I_2$ τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος. Ἡ ἰσχὺς αὐτὴ τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος δίδεται ὅτι εἶναι ἴση μὲ 9 kW. Ἄρα καὶ ἡ ἰσχὺς P τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι ἴση μὲ 9 kW, ἤτοι μὲ 9000 W. Οὕτω ἔχομεν:

$$P = U_1 \cdot I_1 \qquad \text{ὅπου} \qquad P = 9000 \text{ W}$$

Συνεπῶς ἡ ἐνεργὸς ἔντασις I_1 τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$I_1 = \frac{P}{U_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \frac{9000 \text{ W}}{3000 \text{ V}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_1 = 3\ A}$$

Ἡ ἀντίστασις R θὰ εὑρεθῇ ἀπὸ τὸν γνωστὸν νόμον τοῦ Joule:

$$P = R \cdot I_2^2 \qquad (1)$$

ὅπου I_2 εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος καὶ P ἡ γνωστὴ ἰσχὺς $P = 9000$ W, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ὡς θερμότης ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R. Διὰ τὸν μετασχηματιστὴν γνωρίζομεν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{150}{4500} = \frac{1}{30}$$

$$\text{ἄρα} \qquad I_2 = \frac{I_1}{1/30} = 3 \text{ A} \cdot 30 \qquad \text{καὶ} \qquad I_2 = 90 \text{ A}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀντίστασις R εἶναι:

$$R = \frac{P}{I_2^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = \frac{9000 \text{ W}}{(90 \text{ A})^2} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = \frac{10}{9}\ \Omega}$$

235. Μία ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχὺν 100 kW καὶ τροφοδοτεῖ ὑδροστρόβιλον ἔχοντα ἀπόδοσιν 80 %. Ὁ στρόβιλος ἐξασφαλίζει τὴν λειτουργίαν ἐναλλακτῆρος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόδοσιν 90 % καὶ δίδει ρεῦμα ὑπὸ ἐνεργὸν τάσιν 7200 V. Διὰ τῆς γραμμῆς, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀπώλειαν ἐνεργείας 10 %, τὸ ρεῦμα μεταφέρεται εἰς μετασχηματιστὴν ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως. Ὁ λόγος μετασχηματισμοῦ εἶναι 3000/50. Ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 95 %. Τὸ δευτερεῦον ρεῦμα τροφοδοτεῖ λαμπτῆρας, οἱ ὁποῖοι λειτουργοῦν ὑπὸ ἐνεργὸν ἔντασιν 0,75 A. Πόσους λαμπτῆρας δύναται νὰ περιλάβῃ τὸ δίκτυον;

Ἡ ἰσχὺς P_1 τῆς ὑδατοπτώσεως εἶναι:

$$P_1 = 100 \text{ kW} = 100\,000 \text{ W}$$

Ἐκ τῆς ἰσχύος αὐτῆς ὁ ὑδροστρόβιλος δεσμεύει τὰ 0,80. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_2 τοῦ ὑδροστροβίλου εἶναι:

$$P_2 = 0{,}80 \cdot P_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_2 = 0{,}80 \cdot 100\,000 \text{ W} = 80\,000 \text{ W}$$

Ὁ ἐναλλακτὴρ δεσμεύει τὰ 0,90 τῆς ἰσχύος τοῦ ὑδροστροβίλου. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_3 τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι:

$$P_3 = 0{,}90 \cdot P_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_3 = 0{,}90 \cdot 80\,000 \text{ W} = 72\,000 \text{ W}$$

Ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς τοῦ ρεύματος ἔχομεν ἀπώλειαν ἰσχύος ἴσην μὲ τὰ 0,10 τῆς μεταφερομένης ἰσχύος. Ὥστε ἐπὶ τῆς γραμμῆς χάνεται ἰσχὺς P_4 ἴση μέ:

$$P_4 = 0{,}10 \cdot P_3 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_4 = 0{,}10 \cdot 72\,000\ \mathrm{W} = 7200\ \mathrm{W}$$

Οὕτω εἰς τὸν μετασχηματιστὴν ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως φθάνει ἰσχύς:

$$P_5 = P_3 - P_4 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_5 = (72\,000 - 7200)\ \mathrm{W} = 64\,800\ \mathrm{W}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 95 %, ἕπεται ὅτι εἰς τὴν κατανάλωσιν προσφέρεται ὠφέλιμος ἰσχὺς P_6 ἴση μέ:

$$P_6 = 0{,}95 \cdot P_5 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_6 = 0{,}95 \cdot 64\,800\ \mathrm{W} = 61\,560\ \mathrm{W}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσους λαμπτῆρας δυνάμεθα νὰ τροφοδοτήσωμεν μὲ τὴν διαθέσιμον ἰσχὺν τῶν 61 560 W, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ὑπὸ ποίαν τάσιν δίδει ὁ μετασχηματιστὴς τὸ ρεῦμα εἰς τὴν κατανάλωσιν. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ πρωτεύοντος ρεύματος εἶναι $U_1 = 7200$ V. Ἂν U_2 εἶναι ἡ ἐνεργὸς τάσις τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος, τότε ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν τοῦ μετασχηματιστοῦ:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{50}{3000} = \frac{1}{60}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις U_2 τοῦ δευτερεύοντος ρεύματος εἶναι:

$$U_2 = \frac{U_1}{60} = \frac{7200\ \mathrm{V}}{60} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U_2 = 120\ \mathrm{V}$$

Ἕκαστος λοιπὸν λαμπτὴρ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν 120 V καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα, ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_2 = 0{,}75$ A. Οὕτω ἕκαστος λαμπτὴρ καταναλίσκει ἰσχύν:

$$P_\Lambda = U_2 \cdot I_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_\Lambda = 120\ \mathrm{V} \cdot 0{,}75\ \mathrm{A} \qquad \text{καὶ} \qquad P_\Lambda = 90\ \mathrm{W}$$

Ἄρα μὲ τὴν διαθέσιμον ἰσχὺν $P_6 = 61\,560$ W δυνάμεθα νὰ τροφοδοτήσωμεν:

$$x = \frac{P_6}{P_\Lambda}\ \text{λαμπτῆρας} \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{61\,560\ \mathrm{W}}{90\ \mathrm{W}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x = 684\ λαμπτῆρας}$$

236. Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἑνὸς μετασχηματιστοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας καὶ εἰς τὰ ἄκρα του ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 120 V. Ἡ κυκλικὴ συχνότης τοῦ ρεύματος εἶναι ω = 300. 1) Ὅταν τὸ δευτερεῦον κύκλωμα εἶναι ἀνοικτόν, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ πρωτεῦον κύκλωμα τὸ ρεῦμα ἔχει ἐνεργὸν ἔντασιν 6 A καὶ ὅτι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος ἡ ἐνεργὸς τάσις εἶναι 2400 V. Ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι καὶ ὅτι τὰ δύο κυκλώματα ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο κυκλωμάτων (πρωτεύοντος καὶ δευτερεύοντος) καὶ ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς. 2) Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ συνδέεται τώρα μὲ ἐξωτερικὸν κύκλωμα, τὸ ὁποῖον παρουσιάζει μόνον ὠμικὴν ἀντίστασιν ἴσην μὲ 1000 Ω. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τοῦ διαρρέοντος τὸ πρωτεῦον κύκλωμα, ὡς καὶ ἡ σύνθετος ἀντίστασις τοῦ πρωτεύοντος.

1) Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος κυκλώματος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_1 = 120$ V, ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι $I_1 = 6$ A. Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ ἔχει μόνον ἐπαγωγικὴν ἀντίστασιν:

$$R_1 = L_1 \cdot \omega$$

ὅπου L_1 εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος κυκλώματος. Οὕτω ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{R_1} \qquad \text{εὑρίσκομεν} \qquad R_1 = \frac{U_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_1 = \frac{120\ \mathrm{V}}{6\ \mathrm{A}} \qquad \text{καὶ} \qquad R_1 = 20\ \Omega$$

Ἄρα ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L_1 τοῦ πρωτεύοντος κυκλώματος εἶναι:

$$L_1 = \frac{R_1}{\omega} \quad \text{ἤτοι} \quad L_1 = \frac{20}{300}\ \mathrm{H} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{L_1 = \frac{1}{15}\ H}$$

Δίδεται ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος εἶναι $U_2 = 2400\ \mathrm{V}$. Ἐὰν N_1 καὶ N_2 εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ἀριθμὸς τῶν σπειρῶν τοῦ πρωτεύοντος καὶ τοῦ δευτερεύοντος, τότε εἶναι γνωστὸν ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{2400\ \mathrm{V}}{120\ \mathrm{V}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{N_2}{N_1} = 20$$

Ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος εἶναι L_2. Εἶναι γνωστὸν ὅτι οἱ συντελεσταὶ αὐτεπαγωγῆς τῶν δύο πηνίων τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τῶν σπειρῶν τῶν δύο πηνίων, ἤτοι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{L_2}{L_1} = 20^2$$

Ἄρα ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ δευτερεύοντος κυκλώματος εἶναι:

$$L_2 = 400 \cdot L_1 \quad \text{ἤτοι} \quad L_2 = 400 \cdot \frac{1}{15}\ \mathrm{H} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{L_2 = \frac{80}{3}\ H}$$

Ὁ συντελεστὴς ἀμοιβαίας ἐπαγωγῆς Μ τῶν δύο κυκλωμάτων εἶναι:

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad \text{ἤτοι} \quad M = \sqrt{\frac{1}{15} \cdot \frac{80}{3}}\ \mathrm{H} = \sqrt{\frac{16}{9}}\ \mathrm{H} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{M = \frac{4}{3}\ H}$$

2) Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ συνδέεται μὲ τὴν ἐξωτερικὴν ὠμικὴν ἀντίστασιν $R = 1000\ \Omega$. Εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως αὐτῆς ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις $U_2 = 2400\ \mathrm{V}$. Ἄρα ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος I_2 εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα εἶναι:

$$I_2 = \frac{U_2}{R} \quad \text{ἤτοι} \quad I_2 = \frac{2400\ \mathrm{V}}{1000\ \Omega} \quad \text{καὶ} \quad I_2 = 2{,}4\ \mathrm{A}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρωτεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως i_1 καὶ ἰσχύει ἡ γνωστὴ διὰ τὸν μετασχηματιστὴν σχέσις:

$$\frac{i_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{i_1}{I_2} = 20$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος i_1 εἶναι:

$$i_1 = 20 \cdot I_2 \quad \text{ἤτοι} \quad i_1 = 20 \cdot 2{,}4\ \mathrm{A} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{i_1 = 48\ A}$$

Ἡ σύνθετος ἀντίστασις Z_1 τοῦ πρωτεύοντος κυκλώματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$i_1 = \frac{U_1}{Z_1} \quad \text{ἄρα} \quad Z_1 = \frac{U_1}{i_1}$$

$$\text{ἤτοι} \quad Z_1 = \frac{120\ \mathrm{V}}{48\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{Z_1 = 2{,}5\ \Omega}$$

237. Εἰς ἕνα μετασχηματιστὴν τὸ πρωτεῦον ἔχει 7500 σπείρας καὶ τὸ δευτερεῦον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι δὲν ἔχει αὐτεπαγωγήν, ἀποτελεῖται ἀπὸ 250 σπείρας. Εἰς τὸ δευτερεῦον ἡ μεγίστη ἰσχὺς εἶναι 3 kW. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος, ὅταν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἐφαρμόζεται ἐνεργὸς τάσις 3600 V. 2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ χρησίμου πρωτεύοντος ρεύματος, ἂν θέλωμεν νὰ ἔχωμεν ἀπόδοσιν 95 %. 3) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἀτμοΐππους ἡ ὅλη ἰσχὺς ἡ ὁποία χάνεται κατὰ τὸν μετασχηματισμόν.

1) Τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ ἔχουν ἀντιστοίχως $N_1 = 7500$ σπείρας καὶ $N_2 = 250$ σπείρας. Εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος ἐφαρμόζεται ἀντιστοίχως ἐνεργὸς τάσις $U_1 = 3600$ V καὶ U_2.

Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν τοῦ μετασχηματιστοῦ:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad U_2 = U_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{ἤτοι} \quad U_2 = 3600\ \text{V} \cdot \frac{250}{7500} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_2 = 120\ V}$$

2) Δίδεται ὅτι εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ λαμβάνεται ἰσχύς:

$$P_2 = 3\ \text{kW} \quad \text{ἢ} \quad P_2 = 3000\ \text{W}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι 95 %, συνάγεται ὅτι εἶναι:

$$\frac{P_2}{P_1} = 0{,}95 \quad \text{ἄρα} \quad P_1 = \frac{P_2}{0{,}95} \qquad (1)$$

Εἰς τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἡ χρήσιμος ἰσχὺς P_1 δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \qquad (2)$$

ὅπου I_1 εἶναι ἡ ζητουμένη ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος. Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$U_1 \cdot I_1 = \frac{P_2}{0{,}95} \quad \text{ἄρα} \quad I_1 = \frac{P_2}{0{,}95 \cdot U_1}$$

$$\text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{3000\ \text{W}}{0{,}95 \cdot 3600\ \text{V}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I_1 = 0{,}877\ A}$$

3) Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν χάνονται, ἕνεκα διαφόρων ἀπωλειῶν, τὰ 5 % τῆς ἰσχύος P_1. Ἤτοι ἡ ἰσχὺς $P_{\alpha\pi}$, ἡ ὁποία χάνεται, εἶναι:

$$P_{\alpha\pi} = 0{,}05 \cdot P_1 \quad \text{ἢ} \quad P_{\alpha\pi} = 0{,}05 \cdot \frac{P_2}{0{,}95} = \frac{5\,P_2}{95} = \frac{P_2}{19}$$

Ἄρα εἶναι:

$$P_{\alpha\pi} = \frac{3000}{19}\ \text{W}$$

Ἡ ἰσχὺς αὕτη μετρημένη εἰς ἀτμοΐππους εἶναι:

$$P_{\alpha\pi} = \frac{3000/19\ \text{W}}{736\ \text{W/CV}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{P_{\alpha\pi} = 0{,}215\ CV}$$

238. Μία ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχὺν 16 000 CV. 1) Ἡ ἰσχὺς αὕτη χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λειτουργίαν ἑνὸς ἐναλλακτῆρος παρέχοντος ρεῦμα εἰς ἕνα μετασχηματιστήν. Ἡ ἀπόδοσις ὅλου τοῦ συστήματος εἶναι 80 %. Ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὸ δευτερεῦον εἶναι 200 000 V. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος. 2) Μεταφέρομεν τὴν ἠλεκτρικὴν ἐνέργειαν εἰς ἀπόστασιν 100 χιλιομέτρων μὲ γραμμὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο σύρματα. Δεχόμεθα νὰ χάνωμεν ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ 1/10 τῆς ἐνεργείας, ἡ ὁποία ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν μετασχηματιστήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος τῆς γραμμῆς, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι σύρμα τομῆς 1 mm² καὶ μήκους 1000 m ἔχει ἀντίστασιν 17 Ω. 3) Εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως τῆς ἐνεργείας ἡ ἐνεργὸς τάσις ὑποβιβάζεται εἰς 120 V μὲ τὴν βοήθειαν μετασχηματιστῶν τῶν ὁποίων ἡ ὅλη ἀπόδοσις εἶναι 90 %. Μὲ τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν τροφοδοτοῦμεν λαμπτῆρας διὰ πυρακτώσεως, οἱ ὁποῖοι καταναλίσκουν 3/4 W κατὰ κηρίον. Πόσον ἀριθμὸν κηρίων δυνάμεθα νὰ διαθέσωμεν εἰς τὸ ὁλικὸν δίκτυον;

1) Ἡ ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχύν:

$$P_{\upsilon\delta} = 16\,000\ \text{CV} \quad \text{ἤτοι} \quad P_{\upsilon\delta} = (16\,000 \cdot 736)\ \text{W}$$

$$\text{καὶ} \quad P_{\upsilon\delta} = 11\,776 \cdot 10^3\ \text{W}$$

Εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ ἔχομεν ἐνεργὸν τάσιν $U_2 = 200\,000$ V καὶ ἐνεργὸν ἔντασιν τοῦ ρεύματος I_2. Ἄρα εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ἡ ἰσχὺς P_2 τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$P_2 = U_2 \cdot I_2$$

Δίδεται ὅτι ἡ ὅλη ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι 80 %. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{P_2}{P_{υδ}} = 0{,}80 \qquad \text{ἄρα} \qquad P_2 = 0{,}80 \cdot P_{υδ}$$

$$\text{ἢ} \qquad P_2 = 0{,}80 \cdot 11\,776 \cdot 10^3 \text{ W} \qquad \text{καὶ} \qquad P_2 = 9\,420\,800 \text{ W}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐνεργὸς ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = \frac{9\,420\,800 \text{ W}}{200\,000 \text{ V}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_2 \approx 47\ A}$$

2) Ἡ ἐπὶ τῆς γραμμῆς μεταφορᾶς ἀπώλεια ἰσχύος ($P_{απ}$) εἶναι:

$$P_{απ} = 0{,}10 \cdot P_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{απ} = 942\,080 \text{ W}$$

Ἡ ἰσχὺς αὕτη μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον θερμότητα. Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀντίστασις τῆς γραμμῆς, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Joule ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$P_{απ} = R \cdot I_2^2 \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad R = \frac{P_{απ}}{I_2^2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad R = \frac{942\,080 \text{ W}}{(47 \text{ A})^2} \qquad \text{καὶ} \qquad R = 426{,}4\ \Omega$$

Ἡ γραμμὴ μεταφορᾶς ἔχει μῆκος $l = 200$ km. Ἔστω S τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ σύρματος. Τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \tag{1}$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ μετάλλου τοῦ σύρματος. Δίδεται ὅτι σύρμα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου, μήκους $l_1 = 1$ km καὶ μὲ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς $S_1 = 1 \text{ mm}^2$ ἔχει ἀντίστασιν $R_1 = 17\ \Omega$. Ἄρα διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$R_1 = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} \tag{2}$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{l_1}{S_1} \cdot \frac{S}{l} \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad S = S_1 \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{l}{l_1}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad S = 1 \text{ mm}^2 \cdot \frac{17\ \Omega}{426{,}4\ \Omega} \cdot \frac{200 \text{ km}}{1 \text{ km}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{S = 8\ mm^2}$$

3) Εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἐνεργείας φθάνει ἰσχὺς P′ ἴση μέ:

$$P' = 0{,}90 \cdot P_2$$

διότι τὰ 10 % τῆς ἰσχύος P_2 χάνονται ἐπὶ τῆς γραμμῆς. Δίδεται ὅτι οἱ μετασχηματισταὶ ὑποβιβασμοῦ τῆς τάσεως εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως ἔχουν ἀπόδοσιν 90 %. Ἄρα ἡ ἰσχὺς P_K, ἡ ὁποία προσφέρεται εἰς τὴν κατανάλωσιν, εἶναι:

$$P_K = 0{,}90 \cdot P' \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_K = 0{,}90^2 \cdot P_2$$

$$\text{ἢ} \qquad P_K = 0{,}81 \cdot 9\,420\,800 \text{ W} \qquad \text{καὶ} \qquad P_K \approx 7\,630\,000 \text{ W}$$

Οἱ λαμπτῆρες καταναλίσκουν 3/4 W κατὰ κηρίον. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς N τῶν κηρίων, τὰ ὁποῖα δύναται νὰ φέρῃ τὸ δίκτυον καταναλώσεως, εἶναι:

$$N = \frac{7\,630\,000 \text{ W}}{3/4 \text{ W/κηρίον}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{N \approx 10\,175\,000}\ \textit{κηρία}$$

239. Μία ὑδατόπτωσις τροφοδοτεῖ ὑδροστρόβιλον, διὰ τοῦ ὁποίου κινεῖται ἐναλλακτήρ. Ἡ ἀπόδοσις τῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι 80 %. Οἱ πόλοι τοῦ ἐναλλακτῆρος συνδέονται μὲ τὸ πρωτεῦον πηνίον ἑνὸς μετασχηματιστοῦ, τὸ ὁποῖον φέρει 3600 σπείρας. Τὸ δευτερεῦον πηνίον τοῦ μετασχηματιστοῦ φέρει 180 σπείρας. Τὸ δευτερεῦον ρεῦμα τροφοδοτεῖ, χωρὶς αἰσθητὰς ἀπωλείας, μίαν ἐγκατάστασιν ἠλεκτροφωτισμοῦ, ἡ ὁποία περιλαμβάνει 1000 λαμπτῆρας· ἕκαστος λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν 30 W καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ ἐνεργὸν ἔντασιν ρεύματος 0,25 A. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος πηνίου καὶ εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος, ὡς καὶ ἡ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ ἐναλλακτήρ. 2) Πόση εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς ὑδατοπτώσεως; Ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.

Ἕκαστος λαμπτὴρ τῆς ἐγκαταστάσεως ἔχει ἰσχὺν $P_\Lambda = 30$ W, λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν U_2 καὶ διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἔχον ἐνεργὸν ἔντασιν $I_\Lambda = 0{,}25$ A. Οὕτω δι' ἕκαστον λαμπτῆρα ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$P_\Lambda = U_2 \cdot I_\Lambda \qquad \text{ἄρα} \qquad U_2 = \frac{P_\Lambda}{I_\Lambda}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad U_2 = \frac{30\ \text{W}}{0{,}25\ \text{A}} \qquad \text{καὶ} \qquad U_2 = 120\ \text{V}$$

Οἱ 1000 λαμπτῆρες τῆς ἐγκαταστάσεως λειτουργοῦν ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάσιν (τῶν 120 V). Ἄρα ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος πηνίου τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι :

$$\mathbf{U_2 = 120\ V}$$

Ἡ ὁλικὴ ἐνεργὸς ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ δευτερεῦον κύκλωμα τοῦ μετασχηματιστοῦ, εἶναι :

$$I_2 = 1000 \cdot I_\Lambda \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_2 = 250\ \text{A}$$

διότι οἱ 1000 λαμπτῆρες συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως.

Τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον πηνίον τοῦ μετασχηματιστοῦ φέρουν ἀντιστοίχως $N_1 = 3600$ σπείρας καὶ $N_2 = 180$ σπείρας. Ἔστω U_1 ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος πηνίου τοῦ μετασχηματιστοῦ. Τότε ἰσχύει ἡ γνωστὴ σχέσις :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{ἄρα} \qquad U_1 = U_2 \cdot \frac{N_1}{N_2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad U_1 = 120\ \text{V} \cdot \frac{3600}{180} \qquad \text{καὶ} \qquad U_1 = 2400\ \text{V}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόδοσις τοῦ μετασχηματιστοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα (δηλ. δὲν συμβαίνουν ἀπώλειαι ἐνεργείας κατὰ τὸν μετασχηματισμόν), διὰ τοῦτο ἡ ἰσχὺς τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον καὶ τὸ δευτερεῦον πηνίον εἶναι ἡ αὐτή. Ἐὰν I_1 εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον πηνίον, τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 \qquad \text{ἄρα} \qquad I_1 = I_2 \cdot \frac{U_2}{U_1}$$

$$\text{ἢ} \qquad I_1 = 250\ \text{A} \cdot \frac{120\ \text{V}}{2400\ \text{V}} \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 = 12{,}5\ \text{A}$$

Ἐπειδὴ αἱ ἀπώλειαι θεωροῦνται ἀσήμαντοι, συνάγεται ὅτι ἡ ἐνεργὸς τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ ἐναλλακτῆρος εἶναι :

$$\mathbf{U_1 = 2400\ V}$$

ἡ δὲ ἐνεργὸς ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ὁ ἐναλλακτήρ, εἶναι :

$$\mathbf{I_1 = 12{,}5\ A}$$

2) Ἡ ἰσχὺς τοῦ ἐναλλακτῆρος ($P_{γεν}$) εἶναι :

$$P_{γεν} = U_1 \cdot I_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad P_{γεν} = 2400\ \text{V} \cdot 12{,}5\ \text{A} \qquad \text{καὶ} \qquad P_{γεν} = 30\,000\ \text{W}$$

Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν ἀπώλειαι, ὁλόκληρος αὐτὴ ἡ ἰσχὺς δαπανᾶται διὰ τὴν τροφοδότησιν τῶν 1000 λαμπτήρων τοῦ δικτύου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἰσχὺν 30 W. Ἄρα ἡ καταναλισκομένη εἰς τὸ δίκτυον ἰσχὺς εἶναι :

$$1000 \text{ λαμπτῆρες} \cdot 30 \text{ W/λαμπτῆρα} = 30\,000 \text{ W}$$

Ἡ ὑδατόπτωσις ἔχει ἰσχὺν $P_{υδ}$, ἡ δὲ ἀπόδοσις τῆς ὑδροηλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι 80 %. Ἄρα ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{P_{γεν}}{P_{υδ}} = 0{,}80 \qquad \text{συνεπῶς εἶναι} \qquad P_{υδ} = \frac{P_{γεν}}{0{,}80}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad P_{υδ} = \frac{30\,000 \text{ W}}{0{,}80} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{P_{υδ} = 37\,500 \text{ W}}$$

240. Ἐπαγωγικὸν πηνίον ἔχει τὰ ἑξῆς χαρακτηριστικά : Τὸ πρωτεῦον ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 5 A, ἡ δὲ διακοπὴ αὐτοῦ συμβαίνει ἐντὸς 0,001 sec. Τὸ πρωτεῦον πηνίον ἔχει 100 σπείρας καὶ συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L = 0,05 H. Τὸ δευτερεῦον πηνίον ἔχει 20 000 σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐπιφάνειαν 200 cm². Πόση εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ δευτερεύοντος πηνίου ἀναπτυσσομένη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον ;

Τὸ πρωτεῦον πηνίον ἔχει $N_1 = 100$ σπείρας, τὸ δὲ δευτερεῦον πηνίον ἔχει $N_2 = 20\,000$ σπείρας. Τὸ πρωτεῦον πηνίον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 5 A. Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}001$ sec τὸ ρεῦμα διακόπτεται, ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται κατὰ $\Delta I = 5$ A. Τότε ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος πηνίου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς (E_1), ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$E_1 = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E_1 = 0{,}05 \cdot \frac{5}{0{,}001} \text{ V} \qquad \text{καὶ} \qquad E_1 = 250 \text{ V}$$

Κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον πηνίον ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ δευτερεύοντος πηνίου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_2 καὶ ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις τοῦ μετασχηματιστοῦ :

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \text{ἄρα εἶναι} \qquad E_2 = E_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad E_2 = 250 \text{ V} \cdot \frac{20\,000}{100} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{E_2 = 50\,000 \text{ V}}$$

241. Τὸ πρωτεῦον κύκλωμα ἑνὸς ἐπαγωγικοῦ πηνίου ἀποτελεῖται ἀπὸ 200 σπείρας, ἡ δὲ μέση διάμετρος αὐτοῦ εἶναι 6 cm. Ὁ πυρὴν τοῦ πηνίου ἔχει μῆκος 30 cm, καὶ ἡ μαγνητικὴ διαπερατότης αὐτοῦ εἶναι 100. Τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ἔχει 80 000 σπείρας καὶ εἶναι ἀρκετὰ βραχύ, ὥστε νὰ περιβάλλῃ ὁλόκληρον τὸ πηνίον τοῦ πρωτεύοντος. Τὸ πρωτεῦον τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A, τὸ ὁποῖον διακόπτεται ἐντὸς 0,001 sec. Νὰ εὑρεθῇ : 1) ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος πηνίου· 2) ἡ τάσις εἰς τοὺς πόλους τοῦ πρωτεύοντος πηνίου κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς διακοπῆς τοῦ ρεύματος καὶ 3) ἡ τάσις εἰς τὰ ἄκρα τοῦ δευτερεύοντος πηνίου κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν.

1) Τὸ πρωτεῦον πηνίον ἔχει $N_1 = 200$ σπείρας, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σπείρας του εἶναι : $\qquad S = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad S = 9\pi \text{ cm}^2$

Ὁ ἐκ μαλακοῦ σιδήρου πυρὴν τοῦ πηνίου τούτου ἔχει μῆκος $l = 30$ cm καὶ μαγνητικὴν διαπερατότητα $\mu = 100$. Εἶναι γνωστὸν (βλ. Φυσικὴ τόμ. Γ', § 151) ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς ἑνὸς πηνίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$L = \mu \cdot \frac{4\pi \cdot N_1^2 \cdot S}{10^9 \cdot l} \quad (\text{Henry})$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πρωτεύοντος πηνίου εἶναι:

$$L = 100 \cdot \frac{4\pi \cdot 200 \cdot 9\pi}{10^9 \cdot 30} \text{ H} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{L = 0{,}0473\ H}$$

2) Τὸ πρωτεῦον πηνίον τροφοδοτεῖται μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. Ἐντὸς χρόνου $\Delta t = 0{,}001$ sec διακόπτεται τὸ ρεῦμα τοῦτο, ἤτοι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος μεταβάλλεται κατὰ $\Delta I = 10$ A. Τότε εἰς τὰ ἄκρα τοῦ πρωτεύοντος πηνίου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἐξ αὐτεπαγωγῆς (E_1), ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$E_1 = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \text{ἤτοι} \quad E_1 = 0{,}0473 \cdot \frac{10}{0{,}001} \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E_1 = 236{,}5\ V}$$

3) Τὸ δευτερεῦον πηνίον ἔχει $N_2 = 80\,000$ σπείρας. Κατὰ τὴν διακοπὴν τοῦ ρεύματος εἰς τὸ πρωτεῦον πηνίον ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ἐντὸς τοῦ δευτερεύοντος πηνίου ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις E_2 καὶ ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις τοῦ μετασχηματιστοῦ:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{ἄρα} \quad E_2 = E_1 \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{ἤτοι} \quad E_2 = 236{,}5 \text{ V} \cdot \frac{80\,000}{200} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E_2 \approx 95\,000\ V}$$

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

242. Διὰ βολταμέτρου περιέχοντος διάλυμα ὀξέος διέρχεται ἐπὶ 16 min 5 sec ρεῦμα ἐντάσεως 4 A. Πόσον ὄγκον ὑδρογόνου συλλέγομεν (ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας);

Ὅταν διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον $F = 96\,500$ Cb (σταθερὰ Faraday), τότε ἐπὶ τοῦ ἠλεκτροδίου ἐκλύεται μᾶζα τοῦ στοιχείου ἴση μὲ 1 γραμμοϊσοδύναμον τοῦ στοιχείου, δηλαδὴ ἐκλύεται μᾶζα ἴση μὲ A/ν γραμμάρια, ὅπου A εἶναι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ στοιχείου καὶ ν τὸ σθένος του. Ἂν τὸ ρεῦμα ἔχῃ ἔντασιν I καὶ διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐπὶ χρόνον t, τότε διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = I \cdot t$ καὶ ἐκλύεται μᾶζα m τοῦ στοιχείου (εἰς gr) ἴση μέ:

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot Q \qquad (1)$$

$$\text{ἢ} \quad m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t \qquad (2)$$

Εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὸ γινόμενον:

$$\alpha = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \left(\frac{\text{gr}}{\text{Cb}} \right)$$

ἐκφράζει τὸ ἠλεκτροχημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ στοιχείου, δηλαδὴ τὴν μᾶζαν α τοῦ στοιχείου, ἡ ὁποία ἐκλύεται, ὅταν διὰ τοῦ βολταμέτρου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ 1 Cb (ἢ καὶ ὅταν τὸ ρεῦμα ἐντάσεως 1 A διέρχεται ἐπὶ 1 sec, διότι εἶναι 1 A = 1 Cb/sec). Οὕτω αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$m = \alpha \cdot Q \quad (1') \qquad\qquad m = \alpha \cdot I \cdot t \quad (2')$$

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο δίδεται ὅτι ρεῦμα ἐντάσεως $I = 2$ A διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐπὶ χρόνον: $t = 16$ min 5 sec $= 965$ sec. Διὰ τὸ ἐκλυόμενον εἰς τὴν κάθοδον ὑδρογόνον εἶναι $A = 1$ καὶ $\nu = 1$. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν κάθοδον θὰ λάβωμεν μᾶζαν m ὑδρογόνου, ἴσην μέ:

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot 965 = 0{,}02 \text{ gr}$$

Γνωρίζομεν ὅτι μᾶζα ὑδρογόνου ἴση μὲ 2 gr, ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ἔχει ὄγκον 22,4 $dm^3 = 22\,400\ cm^3$. Συνεπῶς ἡ μᾶζα $m = 0{,}02$ gr, τὴν ὁποίαν συλλέγομεν εἰς τὸ βολτάμετρον, θὰ ἔχῃ ὄγκον V ἴσον μέ :

$$V = \frac{22\,400 \cdot 0{,}02}{2}\ cm^3 \quad ἢ \quad \mathbf{V = 224\ cm^3}$$

243. Βολτάμετρον περιέχει διάλυμα ὀξέος. Διαβιβάζομεν δι' αὐτοῦ ρεῦμα ἐντάσεως 10 A. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ διέρχεται τὸ ρεῦμα, διὰ νὰ προκληθῇ διάσπασις 72 gr ὕδατος;

Κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν τοῦ διαλύματος τοῦ ὀξέος, εἰς τὴν κάθοδον συλλέγεται ὑδρογόνον καὶ εἰς τὴν ἄνοδον συλλέγεται ὀξυγόνον. Ἀπὸ τὴν ἠλεκτρόλυσιν 1 mol ὕδατος, δηλαδὴ 18 gr ὕδατος, λαμβάνονται 2 gr ὑδρογόνου καὶ 16 gr ὀξυγόνου. Συνεπῶς ἀπὸ τὴν ἠλεκτρόλυσιν 54 gr ὕδατος θὰ λάβωμεν μᾶζαν m ὑδρογόνου ἴσην μέ :

$$m = \frac{2 \cdot 54}{18} = 6\ gr\ ὑδρογόνου$$

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 5$ A. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἠλεκτρολύσεως :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t \qquad (1)$$

εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χρόνον t. Διὰ τὸ ὑδρογόνον εἶναι $A = 1$ καὶ $\nu = 1$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς t λαμβάνομεν :

$$t = \frac{m \cdot 96\,500 \cdot \nu}{I \cdot A} = \frac{6 \cdot 96\,500 \cdot 1}{5 \cdot 1}\ sec \quad ἢ \quad \mathbf{t = 115\,800\ sec}$$

$$καὶ \quad \mathbf{t = 32\ h\ \ 10\ min}$$

244. Ρεῦμα διέρχεται ἐπὶ 5 ὥρας διὰ βολταμέτρου περιέχοντος διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Εἰς τὴν κάθοδον ἀποτίθενται τότε 16,2 gr ἀργύρου. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος; Ἀτομικὸν βάρος Ag 108, σθένος 1.

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν I καὶ διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐπὶ χρόνον $t = 5\ h = 18\,000$ sec. Τότε εἰς τὴν κάθοδον ἀποτίθεται μᾶζα ἀργύρου $m = 10{,}8$ gr. Ὁ ἄργυρος ἔχει ἀτομικὸν βάρος $A = 108$ καὶ σθένος $\nu = 1$. Οὕτω εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἠλεκτρολύσεως :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t$$

ἄγνωστος εἶναι μόνον ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος. Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς I εὑρίσκομεν :

$$I = \frac{m \cdot 96\,500 \cdot \nu}{t \cdot A} = \frac{10{,}8 \cdot 96\,500 \cdot 1}{18\,000 \cdot 108}\ A \quad ἤτοι \quad \mathbf{I = 0{,}536\ A}$$

$$ἢ \quad \mathbf{I = 536\ mA}$$

245. Ἐπὶ μιᾶς σιδηρᾶς πλακός, ἡ ὁποία ἔχει ἐπιφάνειαν 100 cm^2, θέλομεν νὰ ἀποτεθῇ ἠλεκτρολυτικῶς στρῶμα χαλκοῦ πάχους 2 mm. Τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 5 A. Πόσον χρόνον θὰ διαρκέσῃ ἡ ἠλεκτρόλυσις; Ἀτομικὸν βάρος χαλκοῦ 63,6, σθένος 2. Πυκνότης χαλκοῦ 8,8 gr/cm^3.

Ἐπὶ τῆς πλακὸς θὰ ἀποτεθῇ ἠλεκτρολυτικῶς στρῶμα χαλκοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ βάσιν $\beta = 100\ cm^2$ καὶ ὕψος $\upsilon = 2$ mm ἤτοι $\upsilon = 0{,}2$ cm. Οὕτω τὸ στρῶμα τοῦ χαλκοῦ θὰ ἔχῃ :

ὄγκον : $V = 100 \cdot 0{,}2\ (cm^2 \cdot cm) = 20\ cm^3$

μᾶζαν : $m = 20 \cdot 8{,}8\ (cm^3 \cdot gr/cm^3) = 176\ gr$

Τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 5$ A, ὁ δὲ χαλκὸς ἔχει ἀτομικὸν βάρος $A = 63{,}6$ καὶ σθένος $\nu = 2$. Οὕτω εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἠλεκτρολύσεως :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t$$

ἄγνωστος εἶναι μόνον ὁ χρόνος t κατὰ τὸν ὁποῖον θὰ διαρκέσῃ ἡ ἠλεκτρόλυσις. Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$t = \frac{m \cdot 96\,500 \cdot \nu}{I \cdot A} = \frac{176 \cdot 96\,500 \cdot 2}{5 \cdot 63{,}6}\ \text{sec} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{t = 106\,817\ sec}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{t = 29\ h\ \ 40\ min\ \ 17\ sec}$$

246. Κατὰ μίαν ἠλεκτρόλυσιν ὀξειδίου τοῦ ἀργιλλίου συλλέγονται εἰς τὴν κάθοδον 6700 gr ἀργιλλίου καθ' ὥραν. Εἰς τοὺς πόλους τοῦ βολταμέτρου ἐφαρμόζεται τάσις 5 V, ἡ δὲ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις αὐτοῦ εἶναι 2,8 V. Πόση ἰσχὺς χρησιμοποιεῖται ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου, ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ μορφὴν θερμότητος καὶ ἀφ' ἑτέρου ὑπὸ μορφὴν χημικῆς ἐνεργείας; Πόση χημικὴ ἐνέργεια ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐλευθέρωσιν 1 gr ἀργιλλίου; Ἀτομικὸν βάρος ἀργιλλίου 27, σθένος 3.

Ἐντὸς χρόνου $t = 1$ h $= 3600$ sec εἰς τὴν κάθοδον συλλέγεται μᾶζα ἀργιλλίου $m = 6700$ gr. Τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ἀργιλλίου εἶναι $A = 27$ καὶ τὸ σθένος του $\nu = 3$. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἠλεκτρολύσεως :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἔντασιν I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου :

$$I = \frac{m \cdot 96\,500 \cdot \nu}{t \cdot A} = \frac{6700 \cdot 96\,500 \cdot 3}{3600 \cdot 27}\ \text{A}$$

καὶ κατὰ προσέγγισιν $\qquad I = 20\,000$ A

Εἰς τοὺς πόλους τοῦ βολταμέτρου ἐφαρμόζεται τάσις $U = 5$ V. Ἄρα τὸ ρεῦμα παρέχει εἰς τὸ βολτάμετρον ἰσχὺν P ἴσην μέ :

$$P = U \cdot I = 5\ \text{V} \cdot 20\,000\ \text{A} \quad \text{ἤτοι} \quad P = 100\,000\ \text{W}$$

Τὸ βολτάμετρον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E' = 2{,}8$ V καὶ συνεπῶς ἡ ἰσχύς P' τοῦ βολταμέτρου, δηλαδὴ ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια, ἡ ὁποία κατὰ δευτερόλεπτον μετατρέπεται εἰς χημικὴν ἐνέργειαν ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου, εἶναι :

$$P' = E' \cdot I = 2{,}8\ \text{V} \cdot 20\,000\ \text{A} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{P = 56\,000\ W}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ τὴν ἰσχὺν τοῦ ρεύματος $P = 100\,000$ Watt χρησιμοποιεῖται ὑπὸ μορφὴν χημικῆς ἐνεργείας ἰσχὺς $P' = 56\,000$ Watt, ἡ δὲ ὑπόλοιπος ἰσχὺς $P_\theta = P - P'$ δαπανᾶται ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου ὑπὸ μορφὴν θερμότητος. Ὥστε εἶναι :

$$P_\theta = 100\,000\ \text{W} - 56\,000\ \text{W} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{P_\theta = 44\,000\ W}$$

247. Μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 3 A φορτίζομεν ἐπὶ 10 ὥρας συσσωρευτήν. Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον θὰ ἀποδώσῃ ὁ συσσωρευτὴς κατὰ τὴν ἐκκένωσίν του, ἂν ἡ ἀπόδοσις αὐτοῦ εἶναι 90 %;

Ἕνα ρεῦμα ἐντάσεως $I = 3$ A ἐντὸς χρόνου $t = 10$ h ἢ $t = 36\,000$ sec μεταφέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$Q = I \cdot t = 3 \cdot 36\,000 = 108\,000\ \text{Cb}$$

Ὥστε κατὰ τὴν φόρτισιν τοῦ συσσωρευτοῦ, διέρχεται δι' αὐτοῦ φορτίον 108 000 Cb. Κατὰ τὴν ἐκφόρτισίν του ὁ συσσωρευτὴς θὰ ἀποδώσῃ φορτίον Q', τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$Q' = 0{,}90 \cdot Q \quad \text{ἤτοι} \quad Q' = 0{,}90 \cdot 108\,000\ \text{Cb} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{Q' = 97\,200\ Cb}$$

* Παρατήρησις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὡς πρακτικὴ μονὰς ἠλεκτρικοῦ φορτίου χρησιμοποιεῖται καὶ τὸ 1 ἀμπερώριον (Ah), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ φορτίον τὸ μεταφερόμενον ἐντὸς μιᾶς ὥρας ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως 1 Ampère, ἤτοι :

$$1\ \mathrm{Ah} = 1\ \mathrm{A} \cdot 1\ \mathrm{h}$$

σύμφωνα μὲ τὴν γενικὴν σχέσιν $Q = I \cdot t$. Ἂν εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα χρησιμοποιήσωμεν ὡς μονάδα τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τὸ ἀμπερώριον, τότε εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν φόρτισιν τοῦ συσσωρευτοῦ διέρχεται δι' αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = 3\ (\mathrm{A}) \cdot 10\ (\mathrm{h}) = 30\ \mathrm{Ah}$$

καὶ κατὰ τὴν ἐκφόρτισίν του ὁ συσσωρευτὴς ἀποδίδει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q' = 0{,}90 \cdot Q = 0{,}90 \cdot 30\ \mathrm{Ah} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{Q' = 27\ Ah}$$

248. Συσσωρευτὴς ἔχει χωρητικότητα 30 ἀμπερώρια καὶ λειτουργεῖ μέχρις, ὅτου παραχωρήσῃ τὰ 2/3 τοῦ ὅλου ἠλεκτρικοῦ φορτίου, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ προσφέρῃ. Ἐπὶ πόσας ὥρας δύναται ὁ συσσωρευτὴς οὗτος νὰ τροφοδοτήσῃ λαμπτῆρα μὲ ρεῦμα ἐντάσεως 0,5 A ;

Ὁ συσσωρευτὴς δύναται νὰ ἀποδώσῃ κατὰ τὴν τελείαν ἐκφόρτισίν του ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = 30\ \mathrm{Ah}$ (βλ. προηγούμενον πρόβλημα διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀμπερωρίου). Ἀλλ' ὁ συσσωρευτὴς λειτουργεῖ μέχρις ὅτου ἀποδώσῃ φορτίον Q' ἴσον μέ :

$$Q' = \frac{2}{3} \cdot Q \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q' = \frac{2}{3} \cdot 30\ \mathrm{Ah} = 20\ \mathrm{Ah}$$

Διὰ τοῦ λαμπτῆρος διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως $I = 0{,}5$ A. Ἂν ὁ λαμπτὴρ λειτουργήσῃ ἐπὶ t ὥρας, τότε διέρχεται δι' αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q', τὸ ὁποῖον εἰς ἀμπερώρια εἶναι :

$$Q' = I \cdot t\ (\mathrm{Ah})$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐπὶ πόσον χρόνον t θὰ λειτουργήσῃ ὁ λαμπτὴρ μὲ τὸ φορτίον $Q' = 20$ Ah, τὸ ὁποῖον θὰ ἀποδώσῃ ὁ συσσωρευτής :

$$t = \frac{Q'}{I} = \frac{20\ (\mathrm{Ah})}{0{,}5\ (\mathrm{A})} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{t = 40\ h}$$

249. Τρία στοιχεῖα Leclanché συνδέονται κατὰ σειράν. Ἡ στήλη παρέχει εἰς ἕνα κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως 2 A ἐπὶ 25 ὥρας. Πόση μᾶζα ψευδαργύρου δαπανᾶται κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον; Ἀτομικὸν βάρος ψευδαργύρου 66, σθένος 2.

Ἐπειδὴ τὰ τρία στοιχεῖα συνδέονται κατὰ σειράν, συνάγεται ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 2$ A. Τὸ ρεῦμα διέρχεται δι' ἑκάστου στοιχείου ἐπὶ χρόνον :

$$t = 25\ \mathrm{h} = 25 \cdot 3600 = 90\,000\ \mathrm{sec}$$

Κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον διέρχεται δι' ἑκάστου στοιχείου ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$Q = I \cdot t = 2\ \mathrm{A} \cdot 90\,000\ \mathrm{sec} = 180\,000\ \mathrm{Cb}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅταν διὰ τοῦ στοιχείου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον 96 500 Cb, τότε ἀπὸ τὸ ἠλεκτρόδιον τοῦ ψευδαργύρου ἀποσπᾶται μᾶζα ψευδαργύρου ἴση μὲ 1 γραμμοϊσοδύναμον, δηλαδὴ ἀποσπᾶται μᾶζα ψευδαργύραυ ἴση μέ :

$$\frac{66}{2} = 33\ \mathrm{gr}$$

Ὥστε, ὅταν διὰ τοῦ στοιχείου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = 180\,000$ Cb, τότε δαπανᾶται μᾶζα m ψευδαργύρου, ἴση μέ :

$$m = \frac{33 \cdot 180\,000}{96\,500} = 61{,}5\ \mathrm{gr}$$

Ἄρα ἐντὸς τῶν 3 στοιχείων δαπανᾶται μᾶζα ψευδαργύρου:

$$m' = 3\,m = 3 \cdot 61{,}5\ \mathrm{gr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{m' = 184{,}5\ gr}$$

250. Ἔχομεν 12 ὅμοια ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,4 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,8 Ω. 1) Νὰ εὑρεθῇ πῶς πρέπει νὰ συνδέσωμεν τὰ στοιχεῖα, ὥστε ἐντὸς τοῦ ἐξωτερικοῦ ἀγωγοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν 0,6 Ω, νὰ ἔχωμεν τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν τοῦ ρεύματος. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις αὐτή; 2) Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν δύο πόλων τῆς στήλης, ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν; 3) Οἱ ἀρνητικοὶ πόλοι τῶν στοιχείων εἶναι ἀπὸ ψευδάργυρον. Πόσον βάρος ψευδαργύρου δαπανᾶται κατὰ λεπτὸν ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου; Ἀτομικὸν βάρος ψευδαργύρου 65, σθένος 2.

1) Ἕκαστον ἠλεκτρικὸν στοιχεῖον ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 1{,}4$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 0{,}8\ \Omega$. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I θὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην τιμήν, ἐὰν τὰ 12 στοιχεῖα συνδεθοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ($r_{ολ}$) τῆς συστοιχίας νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν $R = 0{,}6\ \Omega$. Ἔστω ὅτι τὰ $N = 12$ στοιχεῖα σχηματίζουν μ μερικὰς στήλας, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει ν στοιχεῖα συνδεδεμένα κατὰ σειράν. Τότε ἑκάστη μερικὴ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν νE καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν νr. Αἱ μ μερικαὶ στῆλαι, ὅταν συνδεθοῦν μεταξύ των παραλλήλως, ἔχουν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν νE καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_{ολ}$, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{r_{ολ}} = \frac{\mu}{\nu r} \qquad \text{ἄρα} \qquad r_{ολ} = \frac{\nu r}{\mu}$$

Ἔχομεν τὴν μεγίστην ἔντασιν ρεύματος, ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$r_{ολ} = R \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\nu r}{\mu} = R \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\nu}{\mu} = \frac{R}{r} \qquad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\nu \cdot \mu = N \qquad (2)$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{\nu}{N/\nu} = \frac{R}{r} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu^2 = N \cdot \frac{R}{r} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu = \sqrt{N \cdot \frac{R}{r}}$$

$$\text{ἢ} \qquad \nu = \sqrt{12\ \text{στοιχεῖα} \cdot \frac{0{,}6\ \Omega}{0{,}8\ \Omega}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\nu = 3}\ \textbf{στοιχεῖα}$$

Συνεπῶς εἶναι:

$$\boldsymbol{\mu = 4}\ \textbf{μερικαὶ στῆλαι}$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν 4 μερικὰς στήλας, ἑκάστη τῶν ὁποίων νὰ περιλαμβάνῃ 3 στοιχεῖα συνδεδεμένα κατὰ σειράν. Αἱ 4 μερικαὶ στῆλαι συνδέονται μεταξύ των παραλλήλως. Ἡ συστοιχία ἔχει ὁλικὴν ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_{ολ} = \nu E$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{ολ} = R + r_{ολ}$$

Ὅταν ἔχωμεν εἰς τὸ κύκλωμα τὴν μεγίστην ἔντασιν ρεύματος, τότε εἶναι $r_{ολ} = R$ καὶ συνεπῶς ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$R_{ολ} = 2\,R$$

Ἡ ζητουμένη μεγίστη δυνατὴ ἔντασις (I_μ) τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$I_\mu = \frac{E_{ολ}}{R_{ολ}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_\mu = \frac{3 \cdot 1{,}4\ \mathrm{V}}{2 \cdot 0{,}6\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I_\mu = 3{,}5\ A}$$

2) Ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν, ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τῆς συστοιχίας εἶναι:

$$U = I_\mu \cdot R \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = 3{,}5\ \mathrm{A} \cdot 0{,}6\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{U = 2{,}1\ V}$$

3) Ἑκάστη μερικὴ στήλη διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{I_\mu}{4} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{3{,}5}{4}\ \text{A} \quad \text{καὶ} \quad I_1 = \frac{7}{8}\ \text{A}$$

Ἄρα κατὰ λεπτὸν δι' ἑκάστου στοιχείου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = I_1 \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{7}{8}\ \text{Cb/sec} \cdot 60\ \text{sec} \quad \text{καὶ} \quad Q = \frac{105}{2}\ \text{Cb}$$

Ἡ δαπανωμένη μᾶζα m τοῦ ψευδαργύρου ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Faraday :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot Q$$

ὅπου A/ν εἶναι τὸ χημικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ψευδαργύρου καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\frac{A}{\nu} = \frac{65}{2}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τοῦ Faraday εὑρίσκομεν :

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{65}{2} \cdot \frac{105}{2}$$

Ἄρα ἐντὸς τῶν 12 στοιχείων τῆς συστοιχίας δαπανᾶται κατὰ λεπτὸν μᾶζα ψευδαργύρου :

$$M = 12\ m \quad \text{ἤτοι} \quad M = 12 \cdot \frac{32{,}5 \cdot 52{,}5}{96\,500}\ \text{gr} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{M = 0{,}2\ gr}$$

251. Ἀπὸ τὸ φαινόμενον τῆς ἠλεκτρολύσεως εὑρέθη ὅτι τὸ ἰὸν τοῦ ὑδρογόνου φέρει ἐπ' αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν φορτίον $e = 4{,}50 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου καὶ ὅτι κατὰ τὴν διέλευσιν 96 540 Cb διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐλευθερώνεται εἰς τὴν κάθοδον 1 gr ὑδρογόνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων ὑδρογόνου, τὰ ὁποῖα ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας περιέχονται εἰς 1 cm^3 ὑδρογόνου, καθὼς καὶ ἡ μέση ἀπόστασις μεταξὺ τῶν ἀτόμων τούτων. Σχετικὴ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα : $\delta = 0{,}0692 \cdot$ πυκνότης τοῦ ἀέρος ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας : $d = 1{,}293\ gr/dm^3$.

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου εἶναι :

$$d_H = \delta \cdot d \quad \text{ἤτοι} \quad d_H = 0{,}0692 \cdot 1{,}293\ \text{gr/dm}^3$$

Ὥστε ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας τὸ 1 cm^3 ὑδρογόνου ἔχει μᾶζαν :

$$m = \frac{0{,}0692 \cdot 1{,}293}{1000}\ \text{gr}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ἀτόμου ὑδρογόνου εἶναι ἴση μὲ τὴν μᾶζαν τοῦ ἰόντος ὑδρογόνου, τότε μία μᾶζα m ὑδρογόνου, ὅταν εἶναι ὑπὸ τὴν μορφὴν ἰόντων, φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ σταθερὰ τοῦ Faraday (F) ἐκφράζει τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ ἠλεκτρολύτου, διὰ νὰ ἐκλυθῇ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτροδίου μᾶζα ἴση μὲ ἕνα γραμμοϊσοδύναμον τοῦ στοιχείου, ἤτοι εἶναι :

$$F = 96\,540\ \text{Cb/γραμμοϊσοδύναμον}$$

Τὸ 1 γραμμοϊσοδύναμον ὑδρογόνου ἔχει μᾶζαν 1 gr. Ἄρα μᾶζα ἰόντων ὑδρογόνου ἴση μὲ 1 gr φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον 96 540 Cb. Συνεπῶς μᾶζα m ἰόντων ὑδρογόνου φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = m \cdot 96\,540\ \text{Cb} \quad \text{ἢ} \quad Q = m \cdot 96\,540 \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἐπειδὴ εὑρέθη ὅτι ἕκαστον ἰὸν ὑδρογόνου φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$e = 4{,}50 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

ἕπεται ὅτι εἰς τὴν μᾶζαν m περιέχεται ἀριθμὸς N ἰόντων ὑδρογόνου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μέ:

$$N = \frac{Q}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad N = \frac{0{,}0692 \cdot 1{,}293 \cdot 96\,540 \cdot 3 \cdot 10^{9}}{1000 \cdot 4{,}50 \cdot 10^{-10}} \ \text{ἰόντα}$$

$$\text{καὶ} \qquad N = 5{,}759 \cdot 10^{19} \ \text{ἰόντα}$$

Ὥστε ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας εἰς 1 cm^3 ὑδρογόνου περιέχονται:

$$\mathbf{N = 5{,}759 \cdot 10^{19}} \ \textbf{ἄτομα}$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ ἄτομα τοῦ ὑδρογόνου ὡς ὑλικὰ σημεῖα, τότε ἡ ἀπόστασις x μεταξὺ δύο ἀτόμων εἶναι:

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \ cm \qquad \text{ἤτοι} \qquad x = \frac{1}{\sqrt[3]{5{,}759 \cdot 10^{19}}} \ cm$$

$$\text{ἢ} \qquad x = \frac{2{,}5895}{10^{7}} \ cm \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x = 2{,}5895 \cdot 10^{-3}} \ \mu$$

252. Μία συστοιχία συσσωρευτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 20 συσσωρευτὰς συνδεδεμένους κατὰ σειράν. Ἕκαστος συσσωρευτὴς ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2,2 V καὶ ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν. Διὰ τὴν φόρτισιν τῆς συστοιχίας χρησιμοποιεῖται μία γεννήτρια, ἔχουσα ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 110 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω. Κατὰ τὴν φόρτισιν ἡ χωρητικότης ἑκάστου συσσωρευτοῦ εἶναι 60 ἀμπερώρια καὶ τὸ ρεῦμα ἔχει ἔντασιν 6 A. 1) Νὰ εὑρεθῇ πόση ἀντίστασις πρέπει νὰ τεθῇ κατὰ σειρὰν εἰς τὸ κύκλωμα, πόσον χρόνον διαρκεῖ ἡ φόρτισις τῆς συστοιχίας καὶ πόσον κοστίζει ἡ φόρτισις αὕτη, ἐὰν τὸ 1 kWh τιμᾶται 0,80 δραχμῆς; 2) Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τῆς συστοιχίας ἕκαστος συσσωρευτὴς ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,9 V καὶ ἡ ἀπόδοσις εἰς ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι 80 %. Πόσον κοστίζει τὸ 1 kWh, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ συστοιχία;

1) Ἡ συστοιχία τῶν 20 συσσωρευτῶν ἔχει ἀσήμαντον ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν καὶ ὁλικὴν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν:

$$E' = 20 \cdot 2{,}2 \ V \qquad \text{ἤτοι} \qquad E' = 44 \ V$$

Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 110$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 1\ \Omega$. Κατὰ τὴν φόρτισιν τῆς συστοιχίας τὸ ρεῦμα πρέπει νὰ ἔχῃ ἔντασιν $I = 6$ A καὶ τὸ κύκλωμα πρέπει νὰ ἔχῃ ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{o\lambda}$. Τότε θὰ ἰσχύῃ, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm, ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

$$E = E' + IR_{o\lambda}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι:

$$R_{o\lambda} = \frac{E - E'}{I} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{o\lambda} = \frac{110\ V - 44\ V}{6\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad R_{o\lambda} = 11\ \Omega$$

Ἄρα εἰς τὸ κύκλωμα πρέπει νὰ θέσωμεν κατὰ σειρὰν μίαν ἀντίστασιν R, ὥστε νὰ εἶναι:

$$R + r = R_{o\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad R = R_{o\lambda} - r = 11\ \Omega - 1\ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = 10\ \Omega}$$

Ἐντὸς ἑκάστου συσσωρευτοῦ πρέπει νὰ ἀποταμιευθῇ ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = 60$ Ah. Ἄρα τὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 6$ A πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ ἐπὶ χρόνον t (ὥρας), ὥστε νὰ εἶναι:

$$Q = I \cdot t \qquad \text{ἄρα} \qquad t = \frac{Q}{I} = \frac{60\ Ah}{6\ A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{t = 10\ h}$$

Ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς εἶναι:

$$P = E \cdot I \qquad \text{ἤτοι} \qquad P = 110\ V \cdot 6\ A \qquad \text{καὶ} \qquad P = 660\ W$$

Ἡ φόρτισις τῆς συστοιχίας διαρκεῖ ἐπὶ χρόνον $t = 10\ h$. Κατὰ τὴν διάρκειαν λοιπὸν τῆς φορτίσεως τῆς συστοιχίας δαπανᾶται ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια W_Δ, ἡ ὁποία εἶναι:

$$W_\Delta = P \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad W_\Delta = 660\ W \cdot 10\ h \quad \text{καὶ} \quad W_\Delta = 6600\ Wh$$

$$\text{ἢ} \quad W_\Delta = 6{,}6\ kWh$$

Ἄρα ἡ δαπάνη (x) διὰ τὴν φόρτισιν τῆς συστοιχίας εἶναι:

$$x = 0{,}8\ \text{δρχ}/kWh \cdot 6{,}6\ kWh \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 5{,}28\ \text{δρχ}}$$

2) Κατὰ τὴν ἐκκένωσιν τῆς συστοιχίας, ἀποδίδονται τὰ 80 % τῆς δαπανηθείσης ἐνεργείας διὰ τὴν φόρτισιν τῆς συστοιχίας. Συνεπῶς ἕκαστος συσσωρευτὴς ἀποδίδει ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q_1 = 0{,}80 \cdot Q \quad \text{ἢ} \quad Q_1 = 0{,}80 \cdot 60\ Ah \quad \text{καὶ} \quad Q_1 = 48\ Ah$$

Ἡ ὁλικὴ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς συστοιχίας εἶναι:

$$E_1 = 20 \cdot 1{,}9\ V \quad \text{ἤτοι} \quad E_1 = 38\ V$$

Ἡ συστοιχία παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως I_1 ἐπὶ χρόνον t_1 καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$Q_1 = I_1 \cdot t_1$$

Οὕτω ἡ συστοιχία παρέχει εἰς τὸ κύκλωμα ἐνέργειαν:

$$W_1 = E_1 \cdot I_1 \cdot t_1 \quad \text{ἢ} \quad W_1 = E_1 \cdot Q_1$$

$$\text{καὶ} \quad W_1 = 38\ V \cdot 48\ Ah \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = 1824\ Wh \quad \text{ἄρα} \quad W_1 = 1{,}824\ kWh$$

Ὥστε τὸ 1 kWh, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ συστοιχία, κοστίζει:

$$y = \frac{5{,}28\ \text{δρχ}}{1{,}824\ kWh} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{y \approx 2{,}90\ \text{δρχ}/kWh}$$

253. Μία γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 5,4 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,5 Ω. Εἰς τὸ κύκλωμα τῆς στήλης παρεμβάλλονται κατὰ σειρὰν δύο βολτάμετρα Α καὶ Β. Τὸ Α ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκόν, περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ καὶ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 0,2 Ω. Τὸ Β ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ σίδηρον, περιέχει διάλυμα καυστικοῦ καλίου καὶ ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1,2 Ω. Τὰ ἄλλα μέρη τοῦ κυκλώματος ἔχουν ἀσήμαντον ἀντίστασιν. Εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου Β συλλέγονται ἐντὸς 20 λεπτῶν 278 cm^3 ὑδρογόνου (ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ κύκλωμα, αἱ ἀντηλεκτρεγερτικαὶ δυνάμεις τῶν δύο βολταμέτρων, καὶ ἡ μᾶζα τοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία ἀποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου Α ἐντὸς τῶν 20 λεπτῶν. Ἀτομικὸν βάρος Cu 64, σθένος 2.

Εἶναι γνωστὸν μᾶζα 2 gr ὑδρογόνου ἔχει ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας ὄγκον 22 400 cm^3. Ἄρα ὄγκος ὑδρογόνου ἴσος μὲ 278 cm^3 ἔχει μᾶζαν:

$$m = 2\ gr \cdot \frac{278\ cm^3}{22\,400\ cm^3} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{278}{11\,200}\ gr$$

Ἡ ἀνωτέρω μᾶζα m τοῦ ὑδρογόνου λαμβάνεται εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου Β ἐντὸς χρόνου $t = 20\ min = 1200\ sec$. Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Faraday ἡ μᾶζα m τοῦ ἐκλυομένου εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου ὑδρογόνου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$m = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t\ (gr) \qquad (1)$$

Διὰ τὸ ὑδρογόνον εἶναι $A = 1$ καὶ $\nu = 1$. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος I εἶναι:

$$I = \frac{m \cdot 96\,500 \cdot \nu}{A \cdot t} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{278 \cdot 96\,500 \cdot 1}{11\,200 \cdot 1 \cdot 1200}\ A \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{I \approx 2\ A}$$

Τὸ βολτάμετρον A δὲν ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν, διότι κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ ρεύματος διὰ μέσου τοῦ ἠλεκτρολύτου δὲν ἐμφανίζονται ἐπὶ τῶν ἠλεκτροδίων νέα σώματα. Κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν ταύτην συμβαίνει ἁπλῶς κίνησις ἰόντων χαλκοῦ ἀπὸ τὴν ἄνοδον πρὸς τὴν κάθοδον. Οὕτω τὸ βολτάμετρον A παρεμβάλλεται εἰς τὸ κύκλωμα ὡς μία ἁπλῆ ἀντίστασις $r_A = 0{,}2\ \Omega$. 'Αντιθέτως εἰς τὸ βολτάμετρον B ἐκλύονται εἰς μὲν τὴν κάθοδον ὑδρογόνον, εἰς τὴν ἄνοδον ὀξυγόνον. Ἄρα τὸ βολτάμετρον B ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E_B καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_B = 1{,}2\ \Omega$. Ἡ γεννήτρια ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 5{,}4\ V$ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 0{,}5\ \Omega$. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις ($R_{ολ}$) τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = r + r_A + r_B \qquad ἤτοι \qquad R_{ολ} = 1{,}9\ \Omega$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$E = E_B + IR_{ολ} \qquad ἄρα \qquad E_B = E - IR_{ολ}$$

$$ἤτοι \qquad E_B = 5{,}4\ V - (2\ A \cdot 1{,}9\ \Omega) \qquad καὶ \qquad \mathbf{E_B = 1{,}6\ V}$$

Ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις (E_A) τοῦ βολταμέτρου A εἶναι :

$$\mathbf{E_A = 0}$$

Ἡ μᾶζα m_1 τοῦ χαλκοῦ, ἡ ὁποία ἐντὸς τοῦ χρόνου $t = 1200$ sec ἀποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου A εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Faraday, ἤτοι :

$$m_1 = \frac{1}{96\,500} \cdot \frac{64}{2} \cdot 2 \cdot 1200\ gr \qquad καὶ \qquad \mathbf{m_1 = 0{,}79\ gr}$$

254. Ἔχομεν 10 στοιχεῖα Leclanché, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 1 Ω καὶ ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 1,5 V. Συνδέομεν τὰ στοιχεῖα κατὰ σειράν, τοὺς δὲ πόλους τῆς σχηματιζομένης στήλης τοὺς συνδέομεν μὲ τὰ δύο ἠλεκτρόδια ἑνὸς βολταμέτρου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 2 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω. Τὸ βολτάμετρον περιέχει ἀραιὸν διάλυμα ὀξέος. Ἔπειτα συνδέομεν τὰ στοιχεῖα ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζομεν 5 στήλας, τὰς ὁποίας συνδέομεν παραλλήλως. Οἱ πόλοι τῆς σχηματιζομένης στήλης συνδέονται μὲ τὰ δύο ἠλεκτρόδια τοῦ ἰδίου βολταμέτρου. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ἑκάστην τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων : α) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸ βολτάμετρον· β) πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ νὰ λάβωμεν 1 gr ὑδρογόνου· γ) πόση μᾶζα ψευδαργύρου δαπανᾶται κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἐντὸς ὅλων τῶν στοιχείων. 'Ατομικὸν βάρος Zn 66, σθένος 2.

α) Ἕκαστον ἠλεκτρικὸν στοιχεῖον ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_1 = 1{,}5\ V$ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_1 = 1\ \Omega$. Ὅταν τὰ 10 στοιχεῖα συνδεθοῦν κατὰ σειράν, τότε ἡ σχηματιζομένη στήλη ἔχει

ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν :

$$E_{ολ} = 10 \cdot E_1 \qquad ἤτοι \qquad E_{ολ} = 10 \cdot 1{,}5\ V \qquad καὶ \qquad E_{ολ} = 15\ V$$

ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν :

$$r_{ολ} = 10 \cdot r_1 \qquad ἤτοι \qquad r_{ολ} = 10 \cdot 1\ \Omega \qquad καὶ \qquad r_{ολ} = 10\ \Omega$$

Τὸ βολτάμετρον ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E' = 2\ V$ καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r' = 2\ \Omega$. Οὕτω ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις ($R_{ολ}$) τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = r_{ολ} + r' \qquad ἤτοι \qquad R_{ολ} = (10 + 2)\ \Omega \qquad καὶ \qquad R_{ολ} = 12\ \Omega$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$I = \frac{E_{ολ} - E'}{R_{ολ}} \qquad ἤτοι \qquad I = \frac{15\ V - 2\ V}{12\ \Omega} = \frac{13}{12}\ A \qquad ἄρα \qquad \mathbf{I = 1{,}08\ A}$$

Διὰ νὰ λάβωμεν εἰς τὴν κάθοδον τοῦ βολταμέτρου 1 gr ὑδρογόνου, ἤτοι 1 γραμμοϊσοδύναμον ὑδρογόνου, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου ἠλεκτρικὸν φορτίον Q ἴσον μέ:

$$Q = F \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 96\,500\ \mathrm{Cb}$$

Ἄρα τὸ ρεῦμα πρέπει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ βολταμέτρου ἐπὶ χρόνον t, ὁ ὁποῖος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $Q = I \cdot t$

Ὥστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι:

$$t = \frac{Q}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad t = \frac{96\,500\ \mathrm{Cb}}{1{,}08\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{t = 89\,000\ sec \approx 25\ h}$$

Ἕκαστον στοιχεῖον διαρρέεται κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον t ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως $I = 1{,}08$ A. Συνεπῶς κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου t δι' ἑκάστου στοιχείου διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = F = 96\,500$ Cb καὶ κατὰ συνέπειαν ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου δαπανᾶται μᾶζα ψευδαργύρου ἴση μὲ 1 γραμμοϊσοδύναμον ψευδαργύρου, δηλαδὴ ἴση μέ:

$$\frac{66}{2}\ \mathrm{gr} = 33\ \mathrm{gr}$$

Ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἀνωτέρω ἠλεκτρολύσεως ἐντὸς τῶν 10 στοιχείων τῆς στήλης δαπανᾶται μᾶζα ψευδαργύρου:

$$m = 10 \cdot 33\ \mathrm{gr} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{m = 330\ gr}$$

β) Μὲ τὰ 10 στοιχεῖα σχηματίζομεν τώρα 5 μερικὰς στήλας, τὰς ὁποίας συνδέομεν μεταξύ των παραλλήλως. Ἑκάστη μερικὴ στήλη ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E_2 = 2 \cdot E_1$, ἤτοι $E_2 = 3$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r_2 = 2 \cdot r_1$, ἤτοι $r_2 = 2\ \Omega$. Οὕτω ἡ ὅλη συστοιχία ἔχει:

ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν: $E_{ολ} = E_2$ ἤτοι $E_{ολ} = 3$ V

ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν:

$$r_{ολ} = \frac{r_2}{5} \quad \text{ἤτοι} \quad r_{ολ} = \frac{2\ \Omega}{5} \quad \text{καὶ} \quad r_{ολ} = 0{,}4\ \Omega$$

Ὥστε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις ($R_{ολ}$) τοῦ κυκλώματος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι:

$$R_{ολ} = r_{ολ} + r' \quad \text{ἤτοι} \quad R_{ολ} = (0{,}4 + 2)\ \Omega \quad \text{καὶ} \quad R_{ολ} = 2{,}4\ \Omega$$

Ἄρα ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος I εἶναι:

$$I = \frac{E_{ολ} - E'}{R_{ολ}} \quad \text{ἤτοι} \quad I = \frac{3\ \mathrm{V} - 2\ \mathrm{V}}{2{,}4\ \Omega} = \frac{10}{24}\ \mathrm{A} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{I = 0{,}417\ A}$$

Διὰ νὰ λάβωμεν πάλιν εἰς τὴν κάθοδον 1 gr ὑδρογόνου, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ βολταμέτρου εἰς χρόνον t ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q = F = 96\,500\ \mathrm{Cb}$$

καὶ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $Q = I \cdot t$

Ἄρα εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ὁ ζητούμενος χρόνος t εἶναι:

$$t = \frac{Q}{I} \quad \text{ἤτοι} \quad t = \frac{96\,500\ \mathrm{Cb}}{0{,}417\ \mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{t = 231\,600\ sec \approx 64\ h}$$

Ἀπὸ κάθε μερικὴν στήλην τῆς συστοιχίας διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως:

$$I_1 = \frac{I}{5} \quad \text{ἤτοι} \quad I_1 = \frac{0{,}417}{5}\ \mathrm{A}$$

Συνεπῶς εἰς τὸν χρόνον t ἀπὸ κάθε στοιχεῖον διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον ἴσον μὲ $\frac{Q}{5}$, ἤτοι $\frac{96\,500}{5}$ Cb. Ἄρα ἐντὸς ἑκάστου στοιχείου δαπανᾶται μᾶζα ψευδαργύρου ἴση μὲ $\frac{33}{5}$ gr. Ὥστε κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς θεωρουμένης ἠλεκτρολύσεως ἐντὸς τῶν 10 στοιχείων τῆς συστοιχίας δαπανᾶται μᾶζα ψευδαργύρου :

$$m = 10 \cdot \frac{33}{5}\ \text{gr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{m = 66\ gr}$$

255. Ἕνα κύκλωμα περιλαμβάνει τὰ ἑξῆς : α) μίαν γεννήτριαν ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν 10 V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν 2 Ω· β) μίαν ἀντίστασιν 3 Ω· γ) μίαν διακλάδωσιν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο βολτάμετρα A καὶ B. Τὸ βολτάμετρον A ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ χαλκὸν καὶ περιέχει διάλυμα θειϊκοῦ χαλκοῦ. Τὸ δὲ βολτάμετρον B ἔχει ἠλεκτρόδια ἀπὸ ἄργυρον καὶ περιέχει διάλυμα νιτρικοῦ ἀργύρου. Ὅταν τὸ ρεῦμα διέλθῃ ἐπὶ μίαν ὥραν, ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου A ἀποτίθενται 0,750 gr χαλκοῦ, ἐνῷ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου B ἀποτίθενται 4,320 gr ἀργύρου (ἀτομικὰ βάρη Cu : 63,5 Ag : 108). Νὰ εὑρεθοῦν : 1) ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ αἱ ἀντιστάσεις τῶν δύο βολταμέτρων· 2) ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τοὺς δύο πόλους τῆς γεννητρίας, ἡ ἰσχὺς τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια καὶ ἡ ἰσχὺς ἡ ὁποία δαπανᾶται εἰς τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος.

Ἡ γεννήτρια (σχ. 76) ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν $E = 10$ V καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 2\ \Omega$. Ἡ κατὰ σειρὰν παρεμβαλλομένη ἀντίστασις εἶναι : $R = 3\ \Omega$.

1) Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον τῶν δύο βολταμέτρων A καὶ B, εἶναι ἀντιστοίχως I_A καὶ I_B. Δίδεται ὅτι εἰς χρόνον $t = 1$ h, ἤτοι $t = 3600$ sec, ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου A ἀποτίθεται μᾶζα χαλκοῦ $m_A = 0{,}750$ gr, ἐνῷ ἐπὶ τῆς καθόδου τοῦ βολταμέτρου B ἀποτίθεται μᾶζα ἀργύρου $m_B = 4{,}320$ gr. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον τοῦ Faraday :

$$m = \frac{1}{95\,600} \cdot \frac{A}{\nu} \cdot I \cdot t$$

δι' ἕκαστον τῶν δύο βολταμέτρων, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει ἕκαστον βολτάμετρον, θὰ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$I = \frac{m \cdot 96\,500}{(A/\nu) \cdot t}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

διὰ τὸ βολτάμετρον A :

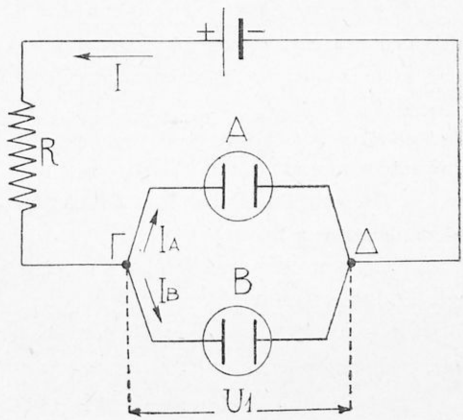
$$I_A = \frac{0{,}750 \cdot 96\,500}{(63{,}5/2) \cdot 3600}\ \text{A}$$

καὶ $I_A = 0{,}63$ A

διά τὸ βολτάμετρον B :

$$I_B = \frac{4{,}320 \cdot 96\,500}{(108/1) \cdot 3600}\ \text{A}$$

καὶ $I_B = 1{,}07$ A



Σχ. 76

Ἄρα ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$I = I_A + I_B \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = (0{,}63 + 1{,}07)\ \text{A} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 1{,}70\ A}$$

Τὰ δύο βολτάμετρα A καὶ B δὲν ἔχουν ἀντηλεκτρεγερτικὰς δυνάμεις, διότι δὲν συμβαίνει ἐντὸς αὐτῶν καμμία χημικὴ ἀντίδρασις, ἀλλ' ἁπλῶς μεταφορὰ τοῦ μετάλλου ἀπὸ τὴν ἄνοδον εἰς τὴν κάθοδον. Τὰ δύο λοιπὸν βολτάμετρα συμπεριφέρονται ὡς δύο ἁπλαῖ ἀντιστάσεις R_A καὶ R_B. Τὸ κύκλωμα ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν $R_{ολ}$, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm :

$$E = I \cdot R_{ολ} \quad ἄρα \quad R_{ολ} = \frac{E}{I}$$

$$ἤτοι \quad R_{ολ} = \frac{10\ V}{1{,}70\ A} \quad καὶ \quad R_{ολ} = \frac{100}{17}\ \Omega$$

Τὸ σύστημα τῶν ἀντιστάσεων R_A καὶ R_B τῶν δύο βολταμέτρων ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν ἀντίστασιν R'. Τότε διὰ τὴν ὁλικὴν ἀντίστασιν τοῦ κυκλώματος ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$R_{ολ} = r + R + R' \quad ἄρα\ εἶναι \quad R' = R_{ολ} - (r + R)$$

$$ἤτοι \quad R' = \frac{100}{17}\ \Omega - (2 + 3)\ \Omega \quad καὶ \quad R' = \frac{15}{17}\ \Omega$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰ ἄκρα Γ καὶ Δ τῆς διακλαδώσεως ἐφαρμόζεται τάσις :

$$U_1 = I \cdot R' \quad ἤτοι \quad U_1 = 1{,}70\ A \cdot \frac{15}{17}\ \Omega \quad καὶ \quad U_1 = 1{,}50\ V$$

Ἑπομένως ἡ ἀντίστασις ἑκάστου βολταμέτρου, εἶναι :

$$R_A = \frac{U_1}{I_A} \quad ἤτοι \quad R_A = \frac{1{,}50\ V}{0{,}63\ A} \quad καὶ \quad \mathbf{R_A = 2{,}38\ \Omega}$$

$$R_B = \frac{U_1}{I_B} \quad ἤτοι \quad R_B = \frac{1{,}50\ V}{1{,}07\ A} \quad καὶ \quad \mathbf{R_B = 1{,}40\ \Omega}$$

2) Ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τῆς γεννητρίας εἶναι :

$$U = E - Ir \quad ἤτοι \quad U = 10\ V - (1{,}70\ A \cdot 2\ \Omega) \quad καὶ \quad \mathbf{U = 6{,}60\ V}$$

Ἡ ἰσχὺς P, τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ γεννήτρια εἰς τὸ κύκλωμα, εἶναι :

$$P = E \cdot I \quad ἤτοι \quad P = 10\ V \cdot 1{,}70\ A \quad καὶ \quad \mathbf{P = 17\ W}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσχὺς δαπανᾶται εἰς τὰ διάφορα τμήματα τοῦ κυκλώματος μόνον ὑπὸ μορφὴν θερμότητος. Οὕτω ἡ δαπανωμένη ἰσχὺς κατανέμεται ὡς ἑξῆς :

ἐντὸς τῆς γεννητρίας :

$$P_Γ = r \cdot I^2 \quad ἤτοι \quad P_Γ = 2\ \Omega \cdot (1{,}70\ A)^2 \quad καὶ \quad \mathbf{P_Γ = 5{,}78\ W}$$

ἐπὶ τῆς ἀντιστάσεως R :

$$P_R = R \cdot I^2 \quad ἤτοι \quad P_R = 3\ \Omega \cdot (1{,}70)^2 \quad καὶ \quad \mathbf{P_R = 8{,}67\ W}$$

ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου Α :

$$P_A = R_A \cdot I_A^2 \quad ἤτοι \quad P_A = 2{,}38\ \Omega \cdot (0{,}63\ A)^2 \quad καὶ \quad \mathbf{P_A = 0{,}95\ W}$$

ἐντὸς τοῦ βολταμέτρου Β :

$$P_B = R_B \cdot I_B^2 \quad ἤτοι \quad P_B = 1{,}40\ \Omega \cdot (1{,}07\ A)^2 \quad καὶ \quad \mathbf{P_B = 1{,}60\ W}$$

* Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἰσχύων $P_Γ$, P_R, P_A καὶ P_B εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἰσχὺν P, ἤτοι :

$$(5{,}78 + 8{,}67 + 0{,}95 + 1{,}60)\ W = 17\ W$$

256. Εἰς τὸ κύκλωμα μιᾶς γεννητρίας Γ (σχ. 77), ἡ ὁποία ἔχει ἠλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E Volt, τίθεται συσσωρευτὴς Σ, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E' καὶ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν r. Ἡ ἀντίστασις τῆς γεννητρίας καὶ τῶν ἀγωγῶν

τῆς συνδέσεως εἶναι R Ohm. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ παραγομένου ρεύματος. 2) Μὲ τὰ ἄκρα τοῦ συσσωρευτοῦ συνδέεται κατὰ διακλάδωσιν ἀγωγὸς Α, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν R_1. Νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα ἔντασις I τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς γεννητρίας, καὶ αἱ ἐντάσεις I_1 καὶ I_2 τῶν ρευμάτων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ Α καὶ διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_1, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ, εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

Ἐφαρμογή: $\mathbf{E = 6{,}6\ V \cdot \quad R = 10\ \Omega \cdot \quad E' = 2{,}2\ V \cdot \quad r = 0}$.

1) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κύκλωμα (σχ. 77) ἔχει ὁλικὴν ἀντίστασιν:

$$R_{o\lambda} = R + r$$

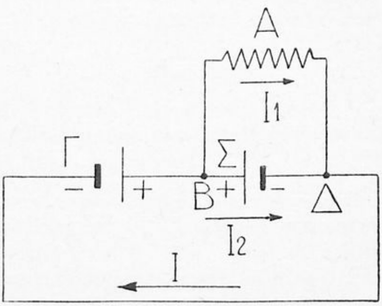
Ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Ohm:

$$I = \frac{E - E'}{R_{o\lambda}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{I = \frac{E - E'}{R + r}}$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Ἐὰν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς διδομένας τιμάς, εὑρίσκομεν:

$$I = \frac{(6{,}6 - 2{,}2)\ V}{(10 + 0)\ \Omega}$$

ἤτοι $\mathbf{I = 0{,}44\ A}$



Σχ. 77

2) Μεταξὺ τῶν σημείων Β καὶ Δ τοῦ κυκλώματος παρεμβάλλεται παραλλήλως πρὸς τὸν συσσωρευτὴν ὁ ἀγωγὸς Α, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀντίστασιν R_1. Μεταξὺ τῶν δύο σημείων Β καὶ Δ ὑπάρχει τάσις U, ἤτοι εἰς τοὺς πόλους τοῦ συσσωρευτοῦ Σ καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R_1 ὑπάρχει ἡ αὐτὴ τάσις U. Ἄρα σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Ohm ἔχομεν τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις:

$$U = I_1 R_1 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad U = E' + I_2 r \quad (2)$$

Διὰ δὲ τὸ ὅλον κύκλωμα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$E = U + IR \qquad \text{ἄρα} \qquad U = E - IR \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι ἐντάσεις I, I_1, I_2 τῶν ρευμάτων δίδονται ἀπὸ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις:

$$\mathbf{I = \frac{Er + ER_1 - E'R_1}{RR_1 + R_1 r + Rr}} \quad (4)$$

$$\mathbf{I_1 = \frac{Er + E'R}{RR_1 + R_1 r + Rr}} \quad (5)$$

$$\mathbf{I_2 = \frac{ER_1 - E'R_1 - E'R}{RR_1 + R_1 r + Rr}} \quad (6)$$

Ἐὰν ἡ ἔντασις I_2 τοῦ ρεύματος, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ συσσωρευτοῦ, εἶναι ἴση μὲ μηδέν, τότε ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{διὰ} \quad I_2 = 0 \quad \text{εἶναι} \quad ER_1 - E'R_1 - E'R = 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντίστασις R_1 τοῦ ἀγωγοῦ Α εἶναι:

$$\mathbf{R_1 = \frac{E'R}{E - E'}} \quad (7)$$

Ἐφαρμογή. Ἐὰν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν (7) θέσωμεν τὰς δεδομένας τιμάς, εὑρίσκομεν :

$$R_1 = \frac{2{,}2\ V \cdot 10\ \Omega}{6{,}6\ V - 2{,}2\ V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{R_1 = 5\ \Omega}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἐντάσεις I, I_1, I_2 τῶν ρευμάτων εἶναι :

$$\mathbf{I_2 = 0}$$

ἤτοι ὁ συσσωρευτὴς Σ εἶναι ὡς ἐὰν νὰ μὴ ὑπῆρχεν εἰς τὸ κύκλωμα. Τότε ἡ ὁλικὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι :

$$R_{ολ} = R + R_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad R_{ολ} = 10\ \Omega + 5\ \Omega = 15\ \Omega$$

Ἄρα ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος εἶναι :

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = \frac{6{,}6\ V}{15\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{I = 0{,}44\ A}$$

* Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ I εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3), εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τάσις U εἰς τοὺς πόλους τοῦ συσσωρευτοῦ εἶναι :

$$U = 6{,}6\ V - (0{,}44\ A \cdot 10\ \Omega) \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = 2{,}2\ V$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τάσις U εἶναι : $U = E'$, ἤτοι εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ἀντηλεκτρεγερτικὴν δύναμιν E' τοῦ συσσωρευτοῦ καὶ συνεπῶς ὁ συσσωρευτὴς δὲν διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ($I_2 = 0$).

Ὁ ἀγωγὸς Α διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad \text{ἤτοι} \qquad I_1 = \frac{2{,}2\ V}{5\ \Omega} \qquad \text{καὶ} \qquad I_1 = 0{,}44\ A$$

δηλαδὴ εἶναι : $I_1 = I$, διότι ὁ συσσωρευτὴς θεωρεῖται ὡς μὴ ὑπάρχων εἰς τὸ κύκλωμα.

ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ ΚΑΙ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ ΚΕΝΟΝ

257. Εἰς ἕνα καθοδικὸν σωλῆνα σχηματίζεται ρεῦμα ἐντάσεως 10 mA. Πόσα ἠλεκτρόνια φθάνουν εἰς τὴν ἄνοδον κατὰ δευτερόλεπτον; Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

Εἰς τὸν καθοδικὸν σωλῆνα σχηματίζεται ρεῦμα ἐντάσεως :

$$I = 10\ mA \qquad \text{ἤτοι} \qquad I = 0{,}010\ A = 0{,}010\ \frac{Cb}{sec}$$

Ἄρα εἰς τὴν ἄνοδον τοῦ καθοδικοῦ σωλῆνος εἰς χρόνον $t = 1$ sec φθάνει ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μέ :

$$Q = I \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 0{,}010\ \frac{Cb}{sec} \cdot 1\ sec \qquad \text{καὶ} \qquad Q = 0{,}010\ Cb$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν τοῦτο φορτίον μεταφέρεται ἀπὸ πλῆθος N ἠλεκτρονίων, τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$N = \frac{Q}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad N = \frac{0{,}010\ Cb}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb/\text{ἠλεκτρόνιον}}$$

Ἄρα εἰς τὴν ἄνοδον τοῦ καθοδικοῦ σωλῆνος φθάνουν κατὰ δευτερόλεπτον :

$$\mathbf{N = 6{,}25 \cdot 10^{16}\ \text{ἠλεκτρόνια}}$$

258. Ἓν ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ

πυκνωτοῦ εἶναι 12 V. Πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ πόσην ταχύτητα ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον; Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr. Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τὸ ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν W_K ἴσην μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$W_K = e \cdot U$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb καὶ $U = 12$ V

Ἄρα εἶναι: $W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb $\cdot$ 12 V καὶ $\mathbf{W_K = 1{,}92 \cdot 10^{-18}}$ **Joule**

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει μᾶζαν:

$$m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \quad \text{ἤτοι} \quad m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kgr}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἡ μᾶζα m μετρῆται εἰς kgr καὶ ἡ ταχύτης υ εἰς m/sec, τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_K μετρεῖται εἰς Joule (σύστημα M.K.S.A.). Ἄρα ἡ ζητουμένη ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W_K}{m}} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}92 \cdot 10^{-18} \text{ Joule}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kgr}}}$$

ἄρα $\upsilon \approx 2 \cdot 10^6$ m/sec ἢ $\mathbf{\upsilon = 2000}$ **km/sec**

259. Ἓν πρωτόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἀπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ 1000 V. Πόσην ταχύτητα καὶ πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν ἀποκτᾷ τὸ πρωτόνιον; Ἠλεκτρικὸν φορτίον πρωτονίου: $e = 1{,}6 \cdot 19^{-19}$ Cb. Μᾶζα πρωτονίου: $m = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr.

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τὸ πρωτόνιον ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν W_K ἴσην μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$W_K = e \cdot U$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb καὶ $U = 1000$ V

Ἄρα εἶναι: $W_K = 1{,}6 \cdot 19^{-19}$ Cb $\cdot$ 1000 V καὶ $\mathbf{W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-16}}$ **Joule**

Τὸ πρωτόνιον ἔχει μᾶζαν: $m = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr ἤτοι $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kgr

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου εἶναι:

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ἐφαρμόζοντες τὸ σύστημα M.K.S.A. εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὅτι τὸ πρωτόνιον ἀποκτᾷ ταχύτητα:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W_K}{m}} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-16} \text{ Joule}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kgr}}}$$

ἄρα $\upsilon = 4{,}36 \cdot 10^5$ m/sec ἢ $\mathbf{\upsilon = 436}$ **km/sec**

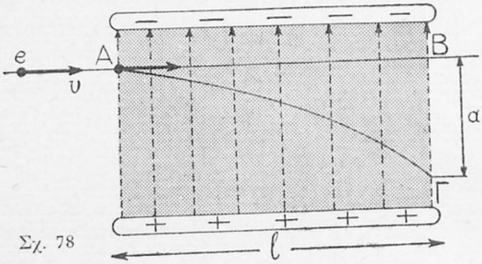
√ **260. Ἕνα ἠλεκτρόνιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα υ, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ. Οὗτοι ἔχουν μῆκος 10 cm. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν εἶναι 4 cm, ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη**

τάσις εἶναι 100 V. Τὸ ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς αὐτοῦ. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου τὸ ἠλεκτρόνιον ὑφίσταται ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του διεύθυνσιν ἴσην μὲ 2 cm. Νὰ ἑρμηνευθῇ τὸ φαινόμενον καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου. Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Οἱ ὁπλισμοὶ τοῦ πυκνωτοῦ ἔχουν μῆκος $l = 10$ cm, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ἀπόστασις εἶναι $d = 4$ cm. Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπάρχει τάσις:

$$U = 100 \text{ V} \quad \text{ἤτοι}$$

$$U = \frac{1}{3} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$



Σχ. 78

Τὸ σχηματιζόμενον μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ὁμογενὲς ἠλεκτρικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν:

$$E = \frac{U}{d}$$

Ἓν ἠλεκτρόνιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα υ, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου (σχ. 78). Τότε ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἡ σταθερὰ δύναμις:

$$F = e \cdot E$$

ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου. Οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον ἀναγκάζεται νὰ διαγράψῃ ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μίαν παραβολικὴν τροχιὰν ΑΓ καὶ ὑ φ ί σ τ α τ α ι ἐ κ τ ρ ο π ὴ ν ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του διεύθυνσιν κατά:

$$\alpha = \text{ΒΓ}$$

Ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν m τοῦ ἠλεκτρονίου σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{e}{m} \cdot E \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \qquad (1)$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων θὰ ἰσχύουν τότε αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$\text{ΑΒ} = \upsilon \cdot t \quad \text{ἢ} \quad l = \upsilon \cdot t \qquad (2)$$

$$\text{ΒΓ} = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \qquad (3)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν γ καὶ t ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐ κ τ ρ ο π ὴ α, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται τὸ ἠλεκτρόνιον, εἶναι:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{l^2}{\upsilon^2} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{e \cdot U \cdot l^2}{2m \cdot d \cdot \alpha}}$$

Δίδεται ὅτι ἡ ἐκτροπὴ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $\alpha = 2$ cm. Ἄρα εἰς μονάδας C.G.S. εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{(4,8 \cdot 10^{-10}) \cdot (1/3) \cdot (10^2)}{(2 \cdot 9 \cdot 10^{-28}) \cdot (4) \cdot (2)}} \text{ C.G.S.}$$

καὶ $\upsilon = 1,05 \cdot 10^9$ cm/sec ἢ **$\upsilon = 10\,500$ km/sec**

261. Λεπτὴ δέσμη καθοδικῶν ἀκτίνων, διαδιδομένη εὐθυγράμμως, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ. Τὰ ἠλεκτρόνια τῆς δέσμης ἔχουν ταχύτητα $2 \cdot 10^9$ cm/sec καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς δέσμης εἶναι παράλληλος πρὸς τοὺς δύο ὁπλισμούς. Οἱ ὁπλισμοὶ ἔχουν μῆκος 10 cm, ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη τάσις εἶναι 600 V. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν, ὥστε ἡ καθοδικὴ δέσμη νὰ ὑποστῇ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ πεδίου ἐκτροπὴν ἴσην μὲ 2 cm; Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα 260 ἐδείχθη ὅτι, ὅταν ἓν ἠλεκτρόνιον κινούμενον μὲ ταχύτητα υ εἰσέλθῃ ἐντὸς τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τοῦ ὑπάρχοντος μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ (σχ. 78), τότε τὸ ἠλεκτρόνιον ὑφίσταται ἐκτροπὴν α ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του διεύθυνσιν. Εὑρέθη δὲ εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 260 ὅτι ἡ ἐκτροπὴ α δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{l^2}{\upsilon^2}$$

ὅπου U εἶναι ἡ ἐφαρμοζομένη μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τάσις, d εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ καὶ l εἶναι τὸ μῆκος τῶν ὁπλισμῶν. Δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\alpha = 2 \text{ cm}, \qquad l = 10 \text{ cm}, \qquad \upsilon = 2 \cdot 10^9 \text{ cm/sec}, \qquad U = 600 \text{ V} = 2 \text{ C.G.S.}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις d τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι:

$$d = \frac{e \cdot U \cdot l^2}{2m \cdot \upsilon^2 \cdot \alpha} \qquad \text{ἤτοι} \qquad d = \frac{4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 100}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 4 \cdot 10^{18} \cdot 2} \text{ C.G.S.}$$

καὶ $\mathbf{d = 6,66 \text{ cm}}$

262. Λεπτὴ δέσμη καθοδικῶν ἀκτίνων διέρχεται μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν μῆκος 1 cm. Ἡ διεύθυνσις τῆς δέσμης εἶναι παράλληλος πρὸς τοὺς ὁπλισμούς. Ὄπισθεν τοῦ πυκνωτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν 30 cm ἀπὸ τὸν πυκνωτὴν ὑπάρχει φθορίζον ἐπίπεδον Π. Ὅταν μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν δὲν ὑπάρχῃ ἠλεκτρικὸν πεδίον, τότε ἡ δέσμη σχηματίζει φωτεινὴν κηλῖδα εἰς ἕνα σημεῖον Α τοῦ φθορίζοντος ἐπιπέδου. Ὅταν ὅμως μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ὑπάρχῃ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἐντάσεως E = 10 C.G.S., τότε ἡ φωτεινὴ κηλὶς σχηματίζεται εἰς ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 5 cm ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκρονίων τῆς δέσμης. Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Ἓν ἠλεκτρόνιον τῆς καθοδικῆς δέσμης (σχ. 79), κινούμενον μὲ ταχύτητα υ εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \qquad \text{ἢ} \qquad e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

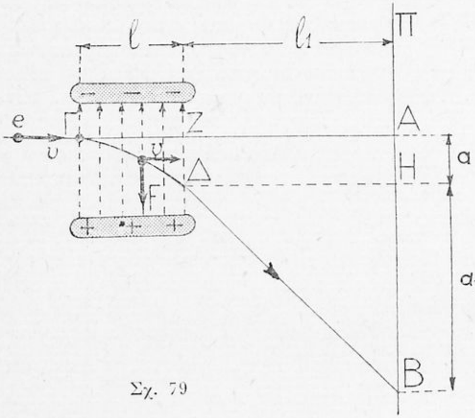
Ἡ δὲ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον εὑρεθῇ ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τότε ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἡ δύναμις: $F = e \cdot E$

ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀρχικὴν διεύθυνσιν ΓΑ τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου. Οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου μίαν παραβολικὴν τροχιὰν ΓΔ. Ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{F}{m} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \gamma = \frac{e}{m} \cdot E \qquad (1)$$

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι συνισταμένη δύο κινήσεων, μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῆς κινήσεως μὲ ταχύτητα υ καὶ μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως μὲ ἐπιτάχυνσιν γ. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν κινήσεων θὰ ἰσχύουν τότε αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :



Σχ. 79

$$ΓΖ = υ \cdot t$$

ἢ $$l = υ \cdot t \qquad (2)$$

$$ΖΔ = \frac{1}{2}\, γ \cdot t^2$$

ἢ $$α = \frac{1}{2}\, γ \cdot t^2 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἐπὶ χρόνον :

$$t = \frac{l}{υ}$$

Κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ χρόνου t τὸ ἠλεκτρόνιον ὑφίσταται ἐπιτάχυνσιν γ καὶ ἀποκτᾷ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως F ταχύτητα :

$$υ_1 = γ \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad υ_1 = γ \cdot \frac{l}{υ} \qquad (4)$$

Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον εὑρεθῇ ἐκτὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, κινεῖται κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ΔΒ, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΒ δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας κινήσεις : α) Μίαν εὐθύγραμμον ὁμαλὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα υ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας ΔΗ. Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν τὸ ἠλεκτρόνιον διανύει τὸ διάστημα ΔΗ $= l_1$ εἰς χρόνον t_1 καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$l_1 = υ \cdot t_1 \qquad \text{ἄρα} \qquad t_1 = \frac{l_1}{υ} \qquad (5)$$

β) Μίαν εὐθύγραμμον ὁμαλὴν κίνησιν μὲ ταχύτητα $υ_1$ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας ΔΗ. Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν τὸ ἠλεκτρόνιον διανύει τὸ διάστημα ΗΒ $= α_1$ εἰς χρόνον t_1 καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$α_1 = υ_1 \cdot t_1 \qquad (6)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν $υ_1$ καὶ t_1 ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5), εὑρίσκομεν :

$$α_1 = γ \cdot \frac{l}{υ} \cdot \frac{l_1}{υ} \qquad \text{ἤτοι} \qquad α_1 = γ \cdot \frac{l \cdot l_1}{υ^2} \qquad (7)$$

Ἄρα ἡ ὁλικὴ ἐκτροπὴ τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του διεύθυνσιν εἶναι :

$$ΑΒ = α + α_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad ΑΒ = \frac{1}{2}\, γ \cdot \frac{l^2}{υ^2} + γ \cdot \frac{l \cdot l_1}{υ^2}$$

καὶ $$ΑΒ = \frac{γ}{2υ^2}\,(l^2 + 2 l l_1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι ΑΒ = 5 cm, $l = 1$ cm καὶ $l_1 = 30$ cm. Οὕτω ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου τῆς καθοδικῆς δέσμης εἶναι :

$$υ = \sqrt{\frac{γ}{2\,(ΑΒ)}\,(l^2 + 2 l l_1)} \qquad \text{ἤτοι} \qquad υ = \sqrt{\frac{eE}{2m\,(ΑΒ)}\,(l^2 + 2 l l_1)}$$

Ἄρα ἡ ταχύτης ἑνὸς ἠλεκτρονίου τῆς δέσμης εἶναι :

$$υ = \sqrt{\frac{4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 10}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 5}} \cdot (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 30) \text{ C.G.S.}$$

ἤτοι $υ = 57 \cdot 10^8$ cm/sec καὶ **$υ = 57\,000$ km/sec**

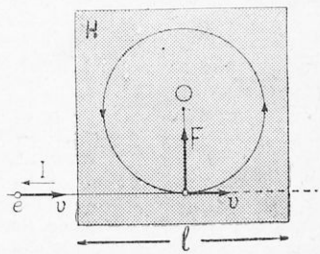
263. Ἓν ἠλεκτρόνιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα $6 \cdot 10^4$ km/sec, εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 150 Gauss. Ἡ τροχιὰ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι κάθετος πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἠλεκτρόνιον. Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι, ὅταν ἓν εὐθύγραμμον ρεῦμα ἐντάσεως I εὑρίσκεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, τότε ἐπὶ τοῦ ρεύματος τούτου ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις F, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς διευθύνσεως τοῦ ρεύματος καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως F εὑρίσκεται διὰ τοῦ γνωστοῦ κανόνος τῶν τριῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρός, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς δυνάμεως F δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$F = \frac{1}{10} \cdot l \cdot I \cdot H \cdot ημ\,φ \ (\text{dyn})$$

ὅπου l εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μῆκος τοῦ ρεύματος, H εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ φ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ρεῦμα μὲ τὴν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Ἐὰν ἡ διεύθυνσις τοῦ ρεύματος εἶναι κάθετος πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ($φ = 90^0$), τότε ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται :

$$F = \frac{1}{10} \cdot l \cdot I \cdot H \ (\text{dyn}) \qquad (1)$$



Σχ. 80

Τὸ ἠλεκτρόνιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα $υ = 6 \cdot 10^9$ cm/sec, εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς πεδίου ἐντάσεως H = 150 Gauss καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Εἰς τὸ σχῆμα 80 αἱ δυναμικαὶ γραμμαὶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι κάθετοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος καὶ ἔχουν φορὰν ἐκ τῶν ὄπισθεν πρὸς τὰ ἔμπροσθεν τοῦ σχήματος. Τὸ κινούμενον ἠλεκτρόνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, ἔχον συμβατικὴν φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου. Δι' ἑνὸς ἀγωγοῦ, ἔχοντος μῆκος l, διέρχεται ἐντὸς χρόνου t ἠλεκτρικὸν φορτίον Q = e. Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Ἐὰν I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$Q = I \cdot t \quad ἢ \quad e = I \cdot t \quad ἄρα \quad I = \frac{e}{t}$$

Τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα υ, ἄρα ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$l = υ \cdot t$$

Ἐὰν θέσωμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν μεγεθῶν I καὶ l εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$F = \frac{υ \cdot e \cdot H}{10} \qquad (2)$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ F εἶναι πάντοτε κάθετος πρὸς τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ πρὸς τὴν ἔντασιν H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Συνεπῶς ἡ δύναμις F ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς κεντρομόλος δύναμις, ὁπότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (3)$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν ἀναγκάζεται νὰ διαγράψῃ τὸ ἠλεκτρόνιον ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Οὕτω ἀπὸ τὰς δύο ἐξισώσεις (2) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{\upsilon \cdot e \cdot H}{10} \quad \text{ἢ} \quad \frac{m \cdot \upsilon}{r} = \frac{e \cdot H}{10} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$r = \frac{10 \cdot m \cdot \upsilon}{e \cdot H} \quad \text{ἤτοι} \quad r = \frac{10 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 6 \cdot 10^9}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 150} \ \text{C.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \quad r = 2{,}25 \ \text{cm}$$

264. Ἓν ἠλεκτρόνιον, κινούμενον ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 50 Gauss, διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 7,5 cm. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου; Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 263 εὕρομεν ὅτι, ἂν ἓν ἠλεκτρόνιον εἰσέλθῃ μὲ ταχύτητα υ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r καὶ ἰσχύει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις (4) τοῦ προηγουμένου προβλήματος:

$$\frac{m \cdot \upsilon}{r} = \frac{e \cdot H}{10}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι: H = 50 Gauss καὶ r = 7,5 cm. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$\upsilon = \frac{e \cdot H \cdot r}{10 \, m} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 7{,}5}{10 \cdot 9 \cdot 10^{-28}} \ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἄρα} \quad \upsilon = 6{,}6 \cdot 10^9 \ \text{cm/sec} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\upsilon = 66\,000 \ \text{km/sec}}$$

265. Ἓν ἠλεκτρόνιον, κινούμενον ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου μὲ ταχύτητα 10^5 km/sec, διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 1 cm. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου; Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Ὅταν ἓν ἠλεκτρόνιον εἰσέλθῃ μὲ ταχύτητα υ ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H καὶ καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τότε τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποδεικνύεται (βλ. πρόβλημα 263) ὅτι ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

$$\frac{m \cdot \upsilon}{r} = \frac{e \cdot H}{10}$$

Εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν δίδεται ὅτι εἶναι:

$$\upsilon = 10^{10} \ \text{cm/sec} \quad \text{καὶ} \quad r = 1 \ \text{cm}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = \frac{10 \, m \cdot \upsilon}{e \cdot r} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{10 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{10}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{H = 562{,}5 \ Gauss}$$

266. Ἓν ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ἐντὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς τάσεως 50 V καὶ ἔπειτα εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως 80 Gauss. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἠλεκτρόνιον; ᾿Ηλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν $W_K = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$ ἴσην μὲ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον, καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 = e \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot 50\ \text{V}$$

$$\text{καὶ} \qquad W_K = 8 \cdot 10^{-18}\ \text{Joule} \qquad \text{ἢ} \qquad W_K = 8 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}$$

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει ταχύτητα υ, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot W_K}{m}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \upsilon = 4{,}2 \cdot 10^8\ \text{cm/sec}$$

Μὲ αὐτὴν τὴν ταχύτητα τὸ ἠλεκτρόνιον εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως $H = 80$ Gauss, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 263) ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀναπτύσσεται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμως κινουμένου ἠλεκτρονίου μία ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις $F = \frac{\upsilon \cdot e \cdot H}{10}$, κάθετος πρὸς τὴν ταχύτητα υ τοῦ ἠλεκτρονίου. Ἡ δύναμις αὐτὴ F ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμις καὶ οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κυκλικὴν τροχιάν, ἔχουσαν ἀκτῖνα r. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{\upsilon \cdot e \cdot H}{10} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{m \cdot \upsilon}{r} = \frac{e \cdot H}{10}$$

᾿Απὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς r τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἠλεκτρόνιον, εἶναι:

$$r = \frac{10 \cdot m \cdot \upsilon}{e \cdot H} \qquad \text{ἤτοι} \qquad r = \frac{10 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 4{,}2 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 50}\ \text{G.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{r = 0{,}47\ cm}$$

267. Ἓν θετικὸν ἰόν, φέρον ἐπ' αὐτοῦ ἓν στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον, ἐπιταχύνεται ὑπὸ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ 120 V. Ἔπειτα εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως 378 Gauss, ὅπου κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος 20 cm. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ἰόντος;

Τὸ θεωρούμενον θετικὸν ἰὸν φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἴσον μέ: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Ἔστω m ἡ μᾶζα τοῦ ἰόντος. Τὸ ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου παραγόμενον ἔργον εἶναι ἴσον μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν $W_K = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἰόν. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 = e \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot 120\ \text{V}$$

$$\text{καὶ} \qquad W_K = 192 \cdot 10^{-19}\ \text{Joule} \qquad \text{ἢ} \qquad W_K = 192 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}$$

Τὸ κινούμενον θετικὸν ἰὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα. Ὅταν λοιπὸν τὸ ἰὸν εἰσέλθῃ ἐντὸς τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως $H = 378$ Gauss, τότε ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἀναπτυσσομένης ἐπὶ τοῦ ἰόντος ἠλεκτρομαγνητικῆς δυνάμεως $F = \frac{\upsilon \cdot e \cdot H}{10}$, τὸ ἰὸν διαγράφει ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r. Διότι ἡ δύναμις αὐτὴ F ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἰόντος ὡς κεντρομόλος δύναμις (βλ. πρόβλημα 263). Οὕτω εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{\upsilon \cdot e \cdot H}{10} \quad \text{ἢ} \quad \frac{m \cdot \upsilon}{r} = \frac{e \cdot H}{10} \quad \text{καὶ} \quad m \cdot \upsilon = \frac{e \cdot H \cdot r}{10} \qquad (1)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον e μετρεῖται εἰς Coulomb. Ἐπίσης ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἄρα} \quad m \cdot \upsilon^2 = 2\,W_K \qquad (2)$$

Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1), λαμβάνομεν :

$$m^2 \cdot \upsilon^2 = \frac{e^2 \cdot H^2 \cdot r^2}{100} \qquad (3)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (2), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$m = \frac{e^2 \cdot H^2 \cdot r^2}{100 \cdot 2\,W_K}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη μᾶζα m τοῦ ἰόντος εἶναι :

$$m = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot (378)^2 \cdot (20)^2}{200 \cdot (192 \cdot 10^{-12})} \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{m = 38 \cdot 10^{-24}\ gr}$$

* Σημείωσις. Ἡ μονὰς ἀτομικῆς μάζης (1 amu) ἰσοῦται μέ :

$$1 \text{ amu} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ gr}$$

Ἄρα ἡ μᾶζα m τοῦ ἀνωτέρω ἰόντος, μετρουμένη εἰς μονάδας ἀτομικῆς μάζης, εἶναι ἴση μέ :

$$m = \frac{38 \cdot 10^{-24} \text{ gr}}{1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ gr/amu}} \quad \text{ἤτοι} \quad m \approx 23 \text{ amu}$$

Ὥστε τὸ θεωρούμενον θετικὸν ἰὸν εἶναι ἓν ἰὸν νατρίου.

268. Εἰς ἕνα καθοδικὸν σωλῆνα ἐφαρμόζεται τάσις 10 000 V. Πόσην ταχύτητα ἀποκτοῦν τὰ ἠλεκτρόνια τῶν παραγομένων καθοδικῶν ἀκτίνων; Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Εἰς τὸν καθοδικὸν σωλῆνα ἐφαρμόζεται τάσις U = 10 000 V. Ἠλεκτρικὸν φορτίον Q = e μετακινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀπὸ τῆς καθόδου εἰς τὴν ἄνοδον. Τότε τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον παράγει ἔργον :

$$W = Q \cdot U \quad \text{ἤτοι} \quad W = e \cdot U$$

Ἄρα ἔχομεν :

$$W = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$\text{καὶ} \quad W = 1{,}6 \cdot 10^{-15} \text{ Joule}$$

Τὸ ἔργον τοῦτο W ἀποταμιεύεται ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ὡς κινητικὴ ἐνέργεια, ἤτοι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἓν ἠλεκτρόνιον εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W}{m}}$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰ μεγέθη W καὶ m εἰς μονάδας C.G.S, εὑρίσκομεν ;

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{7}\ (\text{erg})}{9 \cdot 10^{-28}\ (\text{gr})}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = 6 \cdot 10^{9}\ \text{cm/sec}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 60\,000\ \text{km/sec}}$$

* Παρατήρησις. Εἰς τὸ σύστημα M.K.S.A. ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$m = 9 \cdot 10^{-31}\ \text{kgr}$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν : $\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W}{m}}$ θέσωμεν τὴν ἐνέργειαν W εἰς Joule καὶ τὴν μᾶζαν m εἰς kgr, τότε εὑρίσκομεν ἀμέσως τὴν ταχύτητα υ εἰς m/sec. Οὕτω ἔχομεν :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ (\text{Joule})}{9 \cdot 10^{-31}\ (\text{kgr})}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = 6 \cdot 10^{7}\ \text{m/sec}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \upsilon = 6 \cdot 10^{4}\ \text{km/sec}$$

269. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εἶναι 4 cm, ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσα τάσις εἶναι 1200 V. Ἕνα δευτερόνιον $_1H^2$ φέρεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ. 1) Πόση δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἰόντος καὶ πόσην ἐπιτάχυνσιν ἀποκτᾷ τὸ ἰόν; 2) Πόσην κινητικὴν ἐνέργειαν ἀποκτᾷ τὸ ἰόν, ἐὰν τοῦτο διατρέξῃ ὁλόκληρον τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ὁπλισμῶν; Μᾶζα δευτερονίου: $m = 3{,}2 \cdot 10^{-24}$ gr.

Τὸ δευτερόνιον φέρει, ὡς γνωστόν, ἠλεκτρικὸν φορτίον + e, τὸ ὁποῖον κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \qquad \text{ἢ} \qquad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{C.G.S.}$$

Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι $l = 4$ cm, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ὑπάρχουσα τάσις εἶναι :

$$U = 1200\ \text{V} \qquad \text{ἤτοι} \qquad U = \frac{1200}{300}\ \text{C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad U = 4\ \text{C.G.S.}$$

1) Ἐπὶ τοῦ δευτερονίου ἐνεργεῖ ἐκ μέρους τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου μία δύναμις F, ἡ ὁποία κινεῖ τὸ ἰὸν ἐκ τοῦ θετικοῦ πρὸς τὸν ἀρνητικὸν ὁπλισμὸν τοῦ πυκνωτοῦ. Ἡ δύναμις αὐτὴ F εἶναι ἴση μέ :

$$F = e \cdot E$$

ὅπου E εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ. Ἡ ἔντασις E τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι ἴση μέ :

$$E = \frac{U}{l} \qquad \text{ἤτοι} \qquad E = \frac{4}{4}\ \text{C.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad E = 1\ \text{C.G.S.}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ σταθερὰ δύναμις F, ἡ ὁποία κινεῖ τὸ ἰόν, εἶναι :

$$F = (4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 1)\ \text{C.G.S.} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \boldsymbol{F = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{dyn}}$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F ἡ μᾶζα m τοῦ ἰόντος ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{F}{m} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \gamma = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{3{,}2 \cdot 10^{-24}}\ \text{G.G.S.} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\gamma = 1{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{cm/sec}^2}$$

2) Ἐὰν τὸ ἰὸν διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν l μὲ ἐπιτάχυνσιν γ, τότε ἀποκτᾷ ταχύτητα υ καὶ ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἐξισώσεις :

$$\upsilon = \gamma t \qquad \text{καὶ} \qquad l = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Ἀπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι : $\upsilon^2 = 2\gamma l$

Τὸ ἰὸν ἔχει τότε ἀποκτήσει κινητικὴν ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία εἶναι :

$$W = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{1}{2} m \cdot 2\gamma l \quad \text{καὶ} \quad W = m \cdot \gamma \cdot l$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι :

$$W = (3{,}2 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{14} \cdot 4) \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 19{,}2 \cdot 10^{-14} \ erg}$$

270. Πόση τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ἕνα καθοδικὸν σωλῆνα, ὥστε τὰ ἠλεκτρόνια τῶν παραγομένων καθοδικῶν ἀκτίνων νὰ ἔχουν ταχύτητα ἴσην μὲ τὰ 2/3 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός;

Μεταξὺ τῶν δύο ἠλεκτροδίων τοῦ καθοδικοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζεται τάσις U. Ἓν ἠλεκτρόνιον ἔχει μᾶζαν $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb (κατ' ἀπόλυτον τιμήν). Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$U \cdot e = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι μεταξὺ τῶν δύο ἠλεκτροδίων τοῦ καθοδικοῦ σωλῆνος πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ τάσις :

$$U = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2e}$$

Εἰς μονάδας C.G.S. εἶναι : $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ C.G.S., $\upsilon = 2 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

Ἄρα ἡ ζητουμένη τάσις U εἶναι :

$$U = \frac{9 \cdot 10^{-28} \cdot (2 \cdot 10^{10})^2}{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}} \text{ C.G.S.} \quad \text{καὶ} \quad U = 375 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : 1 ΗΣΜ - δυναμικοῦ = 300 Volt, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω τάσις U εἶναι :

$$\mathbf{U = 112\,500 \ Volt}$$

271. Πόση γίνεται ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ 0,50, 0,90, 0,999 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός; Μᾶζα ἠρεμοῦντος ἠλεκτρονίου : $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον κινῆται μὲ ταχύτητα υ, τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τῆς μεταβολῆς τῆς μάζης μετὰ τῆς ταχύτητος, ἡ μᾶζα m τοῦ ἠλεκτρονίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} \qquad (1)$$

ὅπου $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν. Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον κινῆται μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ 0,50, 0,90, 0,999 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός, τότε ἔχομεν :

$$\frac{\upsilon}{c} = 0{,}50 \qquad \frac{\upsilon}{c} = 0{,}90 \qquad \frac{\upsilon}{c} = 0{,}999$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν :

α) Διὰ $\upsilon = 0{,}50\,c$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0{,}50)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{0{,}75}} \quad \text{ἄρα} \quad m = 1{,}15\, m_0$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m = 10{,}35 \cdot 10^{-28} \ gr}$$

β) Διὰ $\upsilon = 0{,}90\ c$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(0{,}90)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{0{,}19}} \quad \text{ἄρα} \quad m = 2{,}29\ m_0$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m = 20{,}61 \cdot 10^{-28}\ gr}$$

γ) Διὰ $\upsilon = 0{,}999\ c$:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(0{,}999)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{0{,}002}} \quad \text{ἄρα} \quad m = 22{,}37\ m_0$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m = 201{,}33 \cdot 10^{-28}\ gr}$$

272. Ἐπὶ μεταλλικῆς πλακὸς προσπίπτει ἀκτινοβολία, ἔχουσα μῆκος κύματος 1 Å. Τὸ ἔργον, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον, θεωρεῖται ἀσήμαντον. Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν φωτοηλεκτρονίων; Σταθερὰ τοῦ Planck: $6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec. Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr.

Ἡ χρησιμοποιουμένη ἀκτινοβολία ἔχει μῆκος κύματος:

$$\lambda = 1\ \text{Å} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = 10^{-8}\ \text{cm}$$

Ἄρα ἡ συχνότης ν τῆς χρησιμοποιουμένης ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{10^{-8}\ \text{cm}} \quad \text{καὶ} \quad \nu = 3 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}$$

Ἕκαστον φωτόνιον τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης μεταφέρει ἐνέργειαν:

$$W = h \cdot \nu$$

ὅπου $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ Planck. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $W_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ τοῦ ἀποσπωμένου ἀπὸ τὸ ἄτομον φωτοηλεκτρονίου προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον φωτοηλεκτρικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein:

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = h\nu - W_0 \qquad (1)$$

ὅπου W_0 εἶναι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς, ἤτοι τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον. Δίδεται ὅτι εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς W_0 εἶναι ἀσήμαντον καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = h\nu \quad \text{ἤτοι} \quad W_K = h\nu$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη κινητικὴ ἐνέργεια W_K τοῦ φωτοηλεκτρονίου εἶναι:

$$W_K = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot 3 \cdot 10^{18}\ \text{sec}^{-1} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W_K = 1{,}986 \cdot 10^{-8}\ erg}$$

273. Μία φωτεινὴ ἀκτινοβολία, ἔχουσα μῆκος κύματος 4000 Å προσπίπτει ἐπὶ μιᾶς μεταλλικῆς ἐπιφανείας. Αὕτη ἐκπέμπει φωτοηλεκτρόνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν ταχύτητα $8 \cdot 10^7$ cm/sec. Πόσον εἶναι τὸ μέγιστον μῆκος κύματος, διὰ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ παρατηρηθῇ ἐκπομπὴ ἠλεκτρονίων; Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr. Σταθερὰ τοῦ Planck: $6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec.

Ἡ προσπίπτουσα ἐπὶ τοῦ μετάλλου ἀκτινοβολία ἔχει μῆκος κύματος:

$$\lambda = 4000\ \text{Å} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}$$

καὶ συνεπῶς ἡ συχνότης ν τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς εἶναι:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{4 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \quad \text{καὶ} \quad \nu = \frac{3}{4} \cdot 10^{15}\ \text{Hz}$$

Ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου προσπίπτῃ ἡ ἀνωτέρω ἀκτινοβολία, τότε τὸ ἀποσπώμενον ἐκ τοῦ μετάλλου φωτοηλεκτρόνιον ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 8 \cdot 10^7$ cm/sec καὶ συνεπῶς ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10^{28}} \text{ gr} \cdot (8 \cdot 10^7 \text{ cm/sec})^2$$

$$\text{καὶ} \quad W_K = \frac{288}{10^{14}} \text{ erg}$$

Τὸ προσπίπτον ἐπὶ τοῦ μετάλλου φωτόνιον τῆς ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν:

$$q = h\nu$$

ὅπου $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ Planck. Ἄρα ἔχομεν:

$$q = 6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1} \quad \text{καὶ} \quad q = \frac{4{,}965}{10^{12}} \text{ erg}$$

Ἐὰν W_0 εἶναι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς, ἤτοι τὸ ἔργον τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος φωτοηλεκτρικὴ ἐξίσωσις τοῦ Einstein:

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = h\nu - W_0 \quad \text{ἤτοι} \quad W_K = q - W_0$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς W_0 διὰ τὸ θεωρούμενον μέταλλον εἶναι:

$$W_0 = q - W_K \quad \text{ἤτοι} \quad W_0 = \frac{4{,}965}{10^{12}} \text{ erg} - \frac{288}{10^{14}} \text{ erg}$$

$$\text{καὶ} \quad W_0 = \frac{208{,}5}{10^{14}} \text{ erg}$$

Τὸ εὑρεθὲν ἔργον ἐξαγωγῆς W_0 εἶναι μία σταθερά, χαρακτηριστικὴ διὰ τὸ θεωρούμενον μέταλλον. Ἔστω ν_0 ἡ συχνότης μιᾶς ἀκτινοβολίας, τῆς ὁποίας τὸ φωτόνιον μεταφέρει ἐνέργειαν ἴσην μὲ τὸ ἀνωτέρω ἔργον ἐξαγωγῆς W_0. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$W_0 = h\nu_0 \tag{1}$$

Ὅταν ἓν φωτόνιον τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης προσπέσῃ ἐπὶ ἑνὸς ἀτόμου τοῦ μετάλλου, τότε προκαλεῖται ἀπόσπασις ἑνὸς ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ μέταλλον, ἀλλὰ τὸ ἀποσπασθὲν ἠλεκτρόνιον δὲν ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ὥστε ἡ ἐλαχίστη ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν φωτόνιον, διὰ νὰ προκληθῇ ἀπόσπασις ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ μέταλλον, εἶναι ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν μεταφέρει τὸ φωτόνιον μιᾶς ἀκτινοβολίας, ἐχούσης συχνότητα ν_0 καὶ μῆκος κύματος:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \tag{2}$$

Οὕτω ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μέγιστον μῆκος κύματος λ_0 εἶναι:

$$\lambda_0 = \frac{c}{W_0/h} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda_0 = \frac{c \cdot h}{W_0}$$

$$\text{ἄρα} \quad \lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec} \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}}{208{,}5 \cdot 10^{-14} \text{ erg}}$$

$$\text{ἢ} \quad \lambda_0 = 95 \cdot 10^{-6} \text{ cm} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\lambda_0 = 9500} \textbf{ Å}$$

274. Ἓν μέταλλον ἀρχίζει νὰ ἐκπέμπῃ ἠλεκτρόνια, ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου τούτου προσπίπτῃ ἡ πρασίνη ἀκτινοβολία τοῦ ὁρατοῦ φωτός, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος κύματος 5000 Å. Ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου τούτου προσπίπτῃ ἰώδης ἀκτινοβολία, ἔχουσα

μῆκος κύματος 4000 Å νὰ εὑρεθῇ: 1) ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν ἐκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων, καὶ ἡ ταχύτης τῶν φωτοηλεκτρονίων· 2) τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ φωτοηλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον τοῦ μετάλλου.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\mathbf{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Τὸ μῆκος κύματος καὶ ἡ συχνότης τῆς πρασίνης καὶ τῆς ἰώδους ἀκτινοβολίας εἶναι:

π ρ α σ ί ν η ἀ κ τ ι ν ο β ο λ ί α:

$$\lambda_1 = 5000\ \text{Å} = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu_1 = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_1 = \frac{3 \cdot 10^{15}}{5}\ \text{Hz}$$

ἰ ώ δ η ς ἀ κ τ ι ν ο β ο λ ί α:

$$\lambda_2 = 4000\ \text{Å} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{cm} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu_2 = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{4 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \frac{3 \cdot 10^{15}}{4}\ \text{Hz}$$

Ἡ πρασίνη ἀκτινοβολία ἐλευθερώνει ἀπὸ τὰ ἄτομα τοῦ μετάλλου ἠλεκτρόνια, χωρὶς ὅμως νὰ προσδίδῃ εἰς αὐτὰ κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἄρα ἡ ἐνέργεια ἑνὸς φωτονίου τῆς πρασίνης ἀκτινοβολίας εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς W_0, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀπόσπασιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὸ ἄτομον τοῦ μετάλλου, ἤτοι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$W_0 = h\nu_1$$

Τὸ φωτόνιον τῆς ἰώδους ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν:

$$q = h\nu_2$$

Ὅταν ἐπὶ τοῦ μετάλλου προσπίπτῃ ἡ ἰώδης ἀκτινοβολία, τὸ ἐλευθερούμενον ἀπὸ τὸ μέταλλον ἠλεκτρόνιον ἔχει ταχύτητα υ καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W_K = \frac{1}{2}\, m\upsilon^2$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει ἡ φωτοηλεκτρικὴ ἐξίσωσις τοῦ Einstein:

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon^2 = h\nu_2 - W_0$$

1) Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη κινητικὴ ἐνέργεια $W_K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ τῶν ἐκπεμπομένων φωτοηλεκτρονίων εἶναι:

$$W_K = h\nu_2 - h\nu_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_K = h\,(\nu_2 - \nu_1)$$

$$\text{ἢ} \qquad W_K = \frac{6{,}62}{10^{27}}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^{15}}{4} - \frac{3 \cdot 10^{15}}{5}\right) \text{sec}^{-1}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_K = 9{,}93 \cdot 10^{-13}\ erg}$$

Ἡ ταχύτης υ τῶν ἐλευθερουμένων ἠλεκτρονίων εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W_K}{m}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}93 \cdot 10^{-13}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \upsilon = 4{,}66 \cdot 10^7\ \text{cm/sec} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{\upsilon = 466\ km/sec}$$

2) Τὸ ζητούμενον ἔργον ἐξαγωγῆς W_0 εἶναι:

$$W_0 = h\nu_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_0 = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \frac{3 \cdot 10^{15}}{5}\ \text{sec}^{-1}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_0 = 3{,}972 \cdot 10^{-12}\ erg}$$

275. Τὸ νάτριον ἀρχίζει νὰ ἐκπέμπῃ φωτοηλεκτρόνια, ὅταν ἡ προσπίπτουσα ἀκτινοβολία ἔχει μῆκος κύματος 5800 Å, ἐνῶ ὁ χαλκὸς ἀρχίζει νὰ ἐκπέμπῃ φωτοηλεκτρόνια, ὅταν τὸ μῆκος κύματος εἶναι 3000 Å. Πόσον εἶναι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς εἰς τὰ δύο μέταλλα καὶ πόσην ταχύτητα ἔχουν τὰ ἀποσπώμενα φωτοηλεκτρόνια, ὅταν καὶ ἐπὶ τῶν δύο τούτων μετάλλων προσπίπτῃ ἀκτινοβολία ἔχουσα μῆκος κύματος 2500 Å;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\mathbf{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Τὸ νάτριον καὶ ὁ χαλκὸς ἀρχίζουν νὰ ἐκπέμπουν ἠλεκτρόνια, ὅταν ἡ προσπίπτουσα ἐπ' αὐτῶν ἀκτινοβολία ἔχῃ ἀντιστοίχως μῆκος κύματος καὶ συχνότητα τὰ ἑξῆς:

διὰ τὸ νάτριον:

$$\lambda_1 = 5800\ \text{Å} = 5800 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \nu_1 = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{5800 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_1 = \frac{3 \cdot 10^{16}}{58}\ \text{Hz}$$

διὰ τὸν χαλκόν:

$$\lambda_2 = 3000\ \text{Å} = 3000 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \nu_2 = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{3000 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu_2 = \frac{3 \cdot 10^{16}}{30}\ \text{Hz}$$

Σύμφωνα μὲ τὴν φωτοηλεκτρικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Einstein ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $\frac{1}{2}\, m\upsilon^2$ τοῦ παραγομένου φωτοηλεκτρονίου εἶναι:

$$\frac{1}{2}\, m\upsilon^2 = h\nu - W_0 \qquad (1)$$

ὅπου $h\nu$ εἶναι ἡ ἐνέργεια, τὴν ὁποίαν μεταφέρει τὸ φωτόνιον, καὶ W_0 εἶναι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς. Εἰς τὸ θεωρούμενον πρόβλημα δίδεται ὅτι αἱ ἀνωτέρω συχνότητες ν_1 καὶ ν_2 ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀκτινοβολίας, αἱ ὁποῖαι προκαλοῦν μὲν ἀπόσπασιν ἠλεκτρονίων ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον μέταλλον, ἀλλὰ τὰ παραγόμενα φωτοηλεκτρόνια δὲν ἀποκτοῦν κινητικὴν ἐνέργειαν. Συνεπῶς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$h\nu - W_0 = 0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_0 = h\nu \qquad (2)$$

Οὕτω ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως (2) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς δι' ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω δύο μετάλλων:

διὰ τὸ νάτριον εἶναι:

$$W_1 = h\nu_1 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_1 = \frac{6{,}62}{10^{27}}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \frac{3 \cdot 10^{16}}{58}\ \text{sec}^{-1}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_1 = 0{,}34 \cdot 10^{-11}\ erg}$$

διὰ τὸν χαλκὸν εἶναι:

$$W_2 = h\nu_2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_2 = \frac{6{,}62}{10^{27}}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \frac{3 \cdot 10^{16}}{30}\ \text{sec}^{-1}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_2 = 0{,}66 \cdot 10^{-11}\ erg}$$

Ἐπὶ τῶν δύο μετάλλων (δηλ. τοῦ νατρίου καὶ τοῦ χαλκοῦ) προσπίπτει τώρα ἀκτινοβολία ἔχουσα μῆκος κύματος:

$$\lambda = 2500\ \text{Å} = 2500 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$

Ἄρα ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς εἶναι :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{2500 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}}$$

$$\text{καὶ} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^{16}}{25}\ \text{Hz}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συχνότης ν εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὰς συχνότητας ν_1 καὶ ν_2. Συνεπῶς τὰ ἀποσπώμενα ἀπὸ τὸ μέταλλον φωτοηλεκτρόνια θὰ ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις (1). Ἕκαστον φωτόνιον τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q = h\nu \quad \text{ἤτοι} \quad q = \frac{6{,}62}{10^{27}}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot \frac{3 \cdot 10^{16}}{25}\ \text{sec}^{-1}$$

$$\text{καὶ} \quad q = 0{,}79 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}$$

Ἂς καλέσωμεν υ_1 καὶ υ_2 τὴν ταχύτητα τῶν φωτοηλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐκπέμπονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὸ νάτριον καὶ τὸν χαλκόν. Τότε, ἐφαρμόζοντες τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν :

Διὰ τὸ ν ά τ ρ ι ο ν :

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_1^2 = q - W_1 \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_1^2 = \frac{0{,}79}{10^{11}}\ \text{erg} - \frac{0{,}34}{10^{11}}\ \text{erg}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_1^2 = 0{,}45 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}$$

Συνεπῶς ἡ ταχύτης υ_1 εἶναι :

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}45 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\upsilon_1 = 10^8\ \text{cm/sec}}$$

$$\text{ἢ} \quad \boldsymbol{\upsilon_1 = 1000\ \text{km/sec}}$$

Διὰ τὸν χ α λ κ ό ν :

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_2^2 = q - W_2 \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_2^2 = \frac{0{,}79}{10^{11}}\ \text{erg} - \frac{0{,}66}{10^{11}}\ \text{erg}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_2^2 = 0{,}13 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}$$

Συνεπῶς ἡ ταχύτης υ_2 εἶναι :

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}13 \cdot 10^{-11}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\upsilon_2 = 5{,}38 \cdot 10^7\ \text{cm/sec}}$$

$$\text{ἢ} \quad \boldsymbol{\upsilon_2 = 538\ \text{km/sec}}$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης υ_2 τῶν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα ἀποσπῶνται ἀπὸ τὸν χαλκόν, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ταχύτητα υ_1, διότι τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς W_2 διὰ τὸν χαλκὸν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἔργον ἐξαγωγῆς W_1 διὰ τὸ νάτριον.

276. Εἰς ἕνα σωλῆνα παραγωγῆς ἀκτίνων Röntgen ἐφαρμόζεται τάσις 200 000 V. Ἐὰν ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου μεταβάλλεται εἰς ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας Röntgen, νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\boldsymbol{m = 9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\boldsymbol{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}}$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $W_K = \frac{1}{2} mv^2$ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ὑπάρχον ἠλεκτρικὸν πεδίον. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot U \quad ἢ \quad W_K = e \cdot U \qquad (1)$$

ἤτοι $W_K = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb \cdot 200\,000\ V = 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ Joule

καὶ $W_K = 3{,}2 \cdot 10^{-7}$ erg

Κατὰ τὴν κροῦσιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς ἀντικαθόδου ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου μετατρέπεται εἰς ἐνέργειαν ἑνὸς φωτονίου ἀκτινοβολίας Röntgen συχνότητος ν. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_K = h \cdot \nu \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει γενικώτερον ἡ ἐξίσωσις :

$$h \cdot \nu = e \cdot U \qquad (3)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς συχνότητος ν τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας Röntgen καὶ τῆς τάσεως U, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὸν καθοδικὸν σωλῆνα.
Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη συχνότης ν εἶναι :

$$\nu = \frac{W_K}{h} \quad ἤτοι \quad \nu = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-7}\ erg}{6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$$

$$ἄρα \quad \boldsymbol{\nu = 48 \cdot 10^{18}\ Hz}$$

277. Εἰς ἕνα σωλῆνα παραγωγῆς ἀκτίνων Röntgen ἐφαρμόζεται τάσις 500 000 V. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας Röntgen;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\mathbf{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα 276 εὑρέθη ὅτι εἰς τὸν σωλῆνα παραγωγῆς ἀκτίνων Röntgen, ἐὰν κατὰ τὴν κροῦσιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς ἀντικαθόδου ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου μετατρέπεται εἰς ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας Röntgen, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$h \cdot \nu = e \cdot U \qquad (1)$$

ὅπου ν εἶναι ἡ συχνότης τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας καὶ U ἡ ἐφαρμοζομένη εἰς τὸν σωλῆνα τάσις. Δίδεται ὅτι εἶναι :

$$U = 5 \cdot 10^5\ V \quad ἤτοι \quad U = \frac{5 \cdot 10^5}{300}\ ΗΣΜ - δυναμικοῦ$$

$$καὶ \quad U = \frac{5 \cdot 10^3}{3}\ ΗΣΜ - δυναμικοῦ$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb \quad ἤτοι \quad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ ΗΣΜ - φορτίου$$

Τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος λ τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας εἶναι :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = e \cdot U \qquad \text{ἤτοι εἶναι} \qquad \lambda = \frac{h \cdot c}{e \cdot U}$$

$$\text{ἢ} \quad \lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}{(4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^3/3) \text{ erg}}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\lambda = 2{,}48 \cdot 10^{-10} \text{ cm}}$$

278. Πόση τάσις πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται εἰς ἕνα σωλῆνα παραγωγῆς ἀκτίνων Röntgen, διὰ νὰ ἔχῃ ἡ παραγομένη ἀκτινοβολία μῆκος κύματος 20 Å;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\quad m = 9 \cdot 10^{-28}$ **gr**

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\quad h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ **erg · sec**

Εἰς ἕνα σωλῆνα παραγωγῆς ἀκτίνων Röntgen ἡ συχνότης ν τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας καὶ ἡ τάσις U, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὸν σωλῆνα (βλ. προβλήματα 276, 277), συνδέονται μεταξύ των μὲ τὴν ἀκόλουθον σχέσιν :

$$h \cdot \nu = e \cdot U$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = e \cdot U$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τάσις U εἶναι :

$$U = \frac{h \cdot c}{\lambda \cdot e}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $\quad \lambda = 20 \text{ Å} = 20 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$

καὶ $\quad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου

Ἄρα ἡ ζητουμένη τάσις U εἶναι :

$$U = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}{20 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}}$$

ἤτοι $\quad U = 2$ ΗΣΜ - δυναμικοῦ $\quad$ καὶ $\quad$ **U = 600 V**

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

279. Ἓν κύκλωμα ταλαντώσεων ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα πυκνωτήν, χωρητικότητος 1 μF καὶ ἀπὸ ἓν πηνίον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 1 μH. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἓν κύκλωμα, περιλαμβάνον πυκνωτὴν καὶ πηνίον (κύκλωμα Thomson), παράγονται ἠλεκτρικαὶ ταλαντώσεις κατὰ τὴν ἐκφόρτισιν τοῦ πυκνωτοῦ, ἕνεκα τῆς διαρκοῦς μετατροπῆς τῆς ἐνεργείας τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἐνέργειαν μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ δὲ περίοδος T τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson :

$$T = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$$

ὅπου C εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ καὶ L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου. Συνεπῶς ἡ συχνότης ν τῶν παραγομένων ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ἔχομεν :

$$C = 1\ \mu F = 1 \cdot 10^{-6}\ F \quad \text{καὶ} \quad H = 1\ \mu H = 1 \cdot 10^{-6}\ H$$

Ἄρα ἡ συχνότης ν τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι :

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-6}\ F \cdot 10^{-6}\ H}} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = 1{,}6 \cdot 10^5\ Hz \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\nu = 160\ kHz}$$

280. Τὸ πηνίον ἑνὸς κυκλώματος ταλαντώσεων ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,1 μH. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ κυκλώματος, διὰ νὰ εἶναι ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων ἴση μὲ 1 MHz ;

Εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ταλαντώσεων τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}1\ \mu H = 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ H$ καὶ ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα C, ἡ δὲ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι $\nu = 10^6\ Hz$. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson :

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2 \cdot L \cdot C} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot L}$$

Ἂν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν ν καὶ L, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μέ :

$$C = \frac{1}{39{,}48 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}}\ F \quad \text{ἤτοι} \quad C = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\ F$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{C = 0{,}25\ \mu F}$$

281. Ὁ πυκνωτὴς ἑνὸς κυκλώματος ταλαντώσεων ἔχει χωρητικότητα 0,2 μF. Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου τοῦ κυκλώματος, διὰ νὰ εἶναι ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων ἴση μὲ 2 MHz ;

Εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα ταλαντώσεων ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα $C = 0{,}2\ \mu F = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ F$, τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς L καὶ ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι $\nu = 2 \cdot 10^6\ Hz$. Ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson :

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου εἶναι :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot C} \quad \text{ἤτοι} \quad L = \frac{1}{39{,}86 \cdot 4 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}}\ H$$

$$\text{ἢ} \quad L = 0{,}031 \cdot 10^{-6}\ H \quad \text{καὶ} \quad L = 0{,}031\ \mu H$$

282. Εἰς ἓν κύκλωμα ταλαντώσεων τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 0,25 μH, ἡ δὲ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι 800 kHz. Πόση εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ κυκλώματος;

Ἡ συχνότης ν τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων, αἱ ὁποῖαι παράγονται εἰς ἓν κύκλωμα Thomson, δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Εἰς τὸ θεωρούμενον κύκλωμα δίδεται ὅτι εἶναι:

$$L = 0{,}25\ \mu H = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\ H \qquad \text{καὶ} \qquad \nu = 8 \cdot 10^5\ Hz$$

Ἡ ζητουμένη χωρητικότης C τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ κυκλώματος εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὅτι εἶναι:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot L} \qquad \text{ἤτοι} \qquad C = \frac{1}{39{,}86 \cdot 64 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6}}\ F$$

$$\text{ἢ} \qquad C = 0{,}16 \cdot 10^{-6}\ F \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{C = 0{,}16\ \mu F}$$

283. Ἓν κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων ἔχει συχνότητα 200 kHz. Ἐὰν ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ εἶναι 2,5 μF, πόσος εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου;

Αἱ παραγόμεναι ἐντὸς τοῦ κυκλώματος ἠλεκτρικαὶ ταλαντώσεις ἔχουν συχνότητα $\nu = 2 \cdot 10^5$ Hz, ἡ δὲ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$C = 2{,}5\ \mu F = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ F$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ συχνότης ν τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ πηνίου τοῦ κυκλώματος εἶναι:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot C} \qquad \text{ἤτοι} \qquad L = \frac{1}{39{,}86 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}}\ H$$

$$\text{ἢ} \qquad L = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\ H \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{L = 0{,}25\ \mu H}$$

284. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἰς ἓν κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα 8 μF καὶ τὸ πηνίον ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς 8 μH.

Εἰς ἓν κύκλωμα Thomson ἡ συχνότης ν τῶν παραγομένων ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Διὰ τὸ θεωρούμενον κύκλωμα εἶναι:

$$L = 8\ \mu H = 8 \cdot 10^{-6}\ H \qquad \text{καὶ} \qquad C = 8\ \mu F = 8 \cdot 10^{-6}\ F$$

Ἄρα ἡ συχνότης ν εἶναι:

$$\nu = \frac{1}{6{,}28 \cdot \sqrt{8 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} \qquad \text{καὶ} \qquad \nu = 2 \cdot 10^4\ Hz \qquad \text{ἢ} \qquad \nu = 20\ kHz$$

285. Ἓν κύκλωμα ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων περιλαμβάνει πυκνωτήν, χωρητικότητος 0,00594 μF καὶ ἓν πηνίον· τοῦτο ἔχει μῆκος 10 cm καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 10

σπείρας διαμέτρου 30 cm. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων; Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος, διὰ νὰ παύσῃ τοῦτο νὰ εἶναι κύκλωμα ταλαντώσεων;

Ἑκάστη σπεῖρα τοῦ πηνίου τοῦ κυκλώματος ἔχει ἐμβαδόν:

$$S = \pi \cdot 15^2 \text{ cm}^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad S = 225\pi \text{ cm}^2$$

Τὸ πηνίον ἔχει μῆκος $l = 10$ cm καὶ φέρει $N = 10$ σπείρας. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς L τοῦ πηνίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$L = \frac{4\pi \cdot N^2 \cdot S}{10^9 \cdot l} \text{ Henry} \qquad \text{ἤτοι} \qquad L = \frac{4\pi \cdot 10^2 \cdot 225\pi}{10^9 \cdot 10} \text{ H}$$

$$\text{καὶ} \qquad L = 888 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Ὁ πυκνωτὴς τοῦ κυκλώματος ἔχει χωρητικότητα:

$$C = 0{,}00594 \ \mu\text{F} \qquad \text{ἢ} \qquad C = 0{,}00594 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 594 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

Ἡ συχνότης ν τῶν παραγομένων ἐντὸς τοῦ κυκλώματος ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{1}{6{,}28 \cdot \sqrt{888 \cdot 10^{-7} \cdot 594 \cdot 10^{-11}}} \text{ Hz}$$

$$\text{καὶ} \qquad \nu = 219\,000 \text{ Hz} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\nu = 219 \textbf{ kHz}}$$

Ἡ περίοδος T τῶν ταλαντώσεων συναρτήσει τῆς ὠμικῆς ἀντιστάσεως R τοῦ κυκλώματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Thomson:

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L \cdot C}}{\sqrt{1 - \dfrac{R^2C}{4L}}}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν συνάγεται ὅτι, ἂν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, τότε εἰς τὸ κύκλωμα δὲν συμβαίνουν ταλαντώσεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσχύει λοιπὸν ἡ συνθήκη:

$$1 - \frac{R^2C}{4L} = 0 \qquad \text{ἄρα} \qquad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ὥστε ἡ ὠμικὴ ἀντίστασις R τοῦ κυκλώματος πρέπει νὰ εἶναι:

$$R = 2\sqrt{\frac{888 \cdot 10^{-7}}{594 \cdot 10^{-11}}} \ \Omega \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{R = 24{,}5\ \Omega}$$

286. Ἓν κύκλωμα ταλαντώσεων περιλαμβάνει ἐπίπεδον πυκνωτὴν ἀποτελούμενον ἀπὸ δύο μεταλλικὰς παραλλήλους πλάκας, μεταξὺ τῶν ὁποίων παρεμβάλλεται στρῶμα ἀέρος πάχους 2 mm· ἑκάστη πλὰξ ἔχει ἐμβαδὸν 4 dm². Τὸ κύκλωμα περιλαμβάνει ἐπὶ πλέον καὶ πηνίον, χωρὶς πυρῆνα ἐκ σιδήρου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 20 cm καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 σπείρας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει ἐμβαδὸν 1 dm². Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων τὰς ὁποίας παράγει τὸ κύκλωμα.

Ὁ πυκνωτὴς τοῦ κυκλώματος ἔχει χωρητικότητα:

$$C = \frac{400 \text{ cm}^2}{4\pi \cdot 0{,}2 \text{ cm}} \text{ ΗΣΜ - χωρητικότητος} \qquad \text{ἢ} \qquad C = \frac{100}{0{,}2\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} \text{ F}$$

$$\text{καὶ} \qquad C = \frac{1}{0{,}2\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F}$$

Τὸ πηνίον τοῦ κυκλώματος ἔχει συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς :

$$L = \frac{4\pi \cdot N^2 \cdot S}{10^9 \cdot l}$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $N = 100$ σπεῖραι, $l = 20$ cm καὶ $S = 100$ cm². Ἄρα ἔχομεν :

$$L = \frac{4\pi \cdot 100^2 \cdot 100}{10^9 \cdot 20}\ \mathrm{H} \quad \text{ἢ} \quad L = \frac{2\pi}{10^4}\ \mathrm{H}$$

Ἄρα ἡ συχνότης ν τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων εἶναι :

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{2\pi}{10^4} \cdot \dfrac{1}{0{,}2\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}}\ \mathrm{Hz}$$

$$\text{καὶ} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^6}{2\pi}\ \mathrm{Hz} = 477\,500\ \mathrm{Hz} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\nu = 477{,}5\ \mathrm{kHz}}$$

287. Ραδιοφωνικὸς σταθμὸς ἐκπέμπει εἰς μῆκος κύματος 30 m. Πόση εἶναι ἡ συχνότης τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας εἰς μεγακύκλους κατὰ δευτερόλεπτον;

Τὸ μῆκος κύματος λ, ἡ συχνότης ν καὶ ἡ ταχύτης διαδόσεως c τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$c = \nu \cdot \lambda \qquad (1)$$

Ἡ ταχύτης διαδόσεως τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $\lambda = 30$ m $= 3000$ cm, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συχνότης εἶναι :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{3000} = 10^7\ \mathrm{Hz} \quad \text{ἢ} \quad 10^7\ \mathrm{c/sec}$$

Γνωρίζομεν ὅτι εἶναι : $1\ \mathrm{Mc/sec} = 10^6\ \mathrm{c/sec}$ (ἢ 10^6 Hz)

Ἄρα ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας εἰς μεγακύκλους κατὰ δευτερόλεπτον εἶναι :

$$\boldsymbol{\nu = 10\ \mathrm{Mc/sec}}$$

288. Ραδιοφωνικὸς σταθμὸς ἐκπέμπει εἰς συχνότητα 12 μεγακύκλων κατὰ δευτερόλεπτον. Εἰς ποῖον μῆκος κύματος γίνονται αἱ ἐκπομπαί του;

Ὁ σταθμὸς ἐκπέμπει εἰς συχνότητα $\nu = 12 \cdot 10^6$ c/sec (ἢ $12 \cdot 10^6$ Hz)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $c = \nu \cdot \lambda$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος εἶναι :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{12 \cdot 10^6}\left(\frac{\mathrm{cm/sec}}{1/\mathrm{sec}}\right) \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\lambda = 2500\ \mathrm{cm}}$$

$$\text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda = 25\ \mathrm{m}}$$

289. Σταθμὸς ἐκπέμπει εἰς μῆκος κύματος 200 m. Εἰς πόσας περιόδους τὰ ἠλεκτρομαγνητικὰ κύματα διαδίδονται εἰς ἀπόστασιν 80 km;

Τὸ μῆκος κύματος $\lambda = 200$ m φανερώνει, ὡς γνωστόν, τὴν ἀπόστασιν εἰς τὴν ὁποίαν διαδίδεται ἡ ἀκτινοβολία ἐντὸς μιᾶς περιόδου. Ὥστε, διὰ νὰ διαδοθῇ ἡ ἀκτινοβολία εἰς ἀπόστασιν $s = 80$ km $= 80\,000$ m, ἀπαιτοῦνται x περίοδοι, αἱ ὁποῖαι εἶναι :

$$x = \frac{s}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad x = \frac{80\,000\ \mathrm{m}}{200\ \mathrm{m}/\text{περίοδον}}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{x = 400\ \text{περίοδοι}}$$

290. Διεγέρτης τοῦ Hertz ἀποτελεῖται ἀπὸ πηνίον, ἔχον συντελεστὴν αὐτεπαγωγῆς $L = \frac{1}{\pi \cdot 10^6}$ H καὶ ἀπὸ πυκνωτὴν χωρητικότητος $C = \frac{1}{\pi \cdot 10^{10}}$ F. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος καὶ πόση εἶναι ἡ συχνότης τῶν παραγομένων ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων;

Ἡ περίοδος T τῶν ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦ Thomson :

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$$

ὅπου L εἶναι ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τοῦ πηνίου καὶ C ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ. Ἡ ἐκπεμπομένη ἠλεκτρομαγνητικὴ ἀκτινοβολία ἔχει περίοδον προφανῶς ἴσην μὲ τὴν περίοδον τῶν ἐντὸς τοῦ κυκλώματος παραγομένων ἠλεκτρικῶν ταλαντώσεων. Οὕτω ἡ συχνότης ν τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας εἶναι :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Ἄν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν θέσωμεν :

$$L = \frac{1}{\pi \cdot 10^6}\ \mathrm{H} \qquad \text{καὶ} \qquad C = \frac{1}{\pi \cdot 10^{10}}\ \mathrm{F}$$

εὑρίσκομεν :

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{\pi \cdot 10^{10}}}} = \frac{1}{\frac{2}{10^8}} = \frac{10^8}{2}\ \mathrm{Hz}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\nu = 5 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\nu = 50\ \mathrm{MHz}}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας εἶναι :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^7}\left(\frac{\mathrm{cm/sec}}{1/\mathrm{sec}}\right) = 600\ \mathrm{cm}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\lambda = 6\ \mathrm{m}}$$

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΝ

291. Ἓν σωματίδιον ἔχει ἀκτῖνα $r = 10^{-12}$ καὶ φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον $Q = 10^{-20}$ Cb (κατ' ἀπόλυτον τιμήν). Ἐὰν τὸ σωματίδιον τοῦτο θεωρηθῇ ὡς σφαιρικὸς ἀγωγός, νὰ εὑρεθῇ ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἰς μF καὶ τὸ δυναμικόν του εἰς Volt.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ χωρητικότης C σφαιρικοῦ ἀγωγοῦ (εἰς ΗΣΜ - χωρητικότητος) ἰσοῦται ἀριθμητικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα r τοῦ ἀγωγοῦ. Ἄρα εἶναι:

$$C = r \qquad \text{ἤτοι} \qquad C = 10^{-12} \text{ ΗΣΜ - χωρητικότητος}$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $1\ F = 9 \cdot 10^{11}$ ΗΣΜ, ἕπεται ὅτι τὸ θεωρούμενον σωματίδιον ἔχει χωρητικότητα:

$$C = \frac{10^{-12} \text{ ΗΣΜ}}{9 \cdot 10^{11} \text{ ΗΣΜ}/F} \qquad \text{ἄρα} \qquad C = 1{,}11 \cdot 10^{-24}\ F$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \mathbf{C = 1{,}11 \cdot 10^{-18}\ \mu F}$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q τοῦ ἀγωγοῦ, ἡ χωρητικότης του C καὶ τὸ δυναμικόν του U συνδέονται μὲ τὴν γνωστὴν σχέσιν:

$$Q = C \cdot U \qquad \text{ἄρα} \qquad U = \frac{Q}{C}$$

Διὰ τὸ θεωρούμενον σωματίδιον εἶναι:

$$Q = 10^{-20}\ Cb \qquad \text{καὶ} \qquad C = 1{,}11 \cdot 10^{-24}\ F$$

Ἄρα τὸ δυναμικὸν τοῦ σφαιρικοῦ τούτου ἀγωγοῦ εἶναι:

$$U = \frac{10^{-20}\ Cb}{1{,}11 \cdot 10^{-24}\ F} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{U = 9000\ V}$$

292. Σύρμα διαρρέεται ἀπὸ συνεχὲς ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως $I = 1$ A. Πόσα ἠλεκτρόνια διέρχονται καθ' ὥραν ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ σύρματος καὶ πόση εἶναι ἡ μᾶζα τῶν ἠλεκτρονίων τούτων;

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν): $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἔχει ἔντασιν $I = 1$ A. Ἄρα εἰς χρόνον $t = 1\ h = 3600$ sec ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ σύρματος διέρχεται ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q = I \cdot t \qquad \text{ἤτοι} \qquad Q = 1\ Cb/sec \cdot 3600\ sec \qquad \text{καὶ} \qquad Q = 3600\ Cb$$

Τὸ ἀνωτέρω ἠλεκτρικὸν φορτίον Q μεταφέρεται ἀπὸ ἀριθμὸν ν ἠλεκτρονίων:

$$\nu = \frac{Q}{e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{3600\ Cb}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb/\text{ἠλεκτρόνιον}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{\nu = 225 \cdot 10^{20}\ \text{ἠλεκτρόνια}}$$

Τὸ πλῆθος τῶν ν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα καθ' ὥραν διέρχονται ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ σύρματος, ἔχουν μᾶζαν :

$$m = \nu \cdot m_e \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = 225 \cdot 10^{20} \cdot 9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{m = 2{,}025 \cdot 10^{-13}\ gr}$$

293. Ἓν ἠλεκτρόνιον, ὅταν τεθῇ εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως d τῶν δύο ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ, κινεῖται πρὸς τὸν θετικὸν ὁπλισμὸν τοῦ πυκνωτοῦ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς δυνάμεως $F = 2 \cdot 10^{-12}$ dyn. Μὲ πόσην ἐπιτάχυνσιν κινεῖται τὸ ἠλεκτρόνιον; Ἐὰν τὸ ἠλεκτρόνιον κινηθῇ ἐπὶ χρόνον $t = 3 \cdot 10^{-8}$ sec, πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\qquad \mathbf{m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Ἡ ἐπιτάχυνσις γ, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F, εἶναι :

$$\gamma = \frac{F}{m_e} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \gamma = \frac{2 \cdot 10^{-12}\ \text{dyn}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}} \qquad \text{καὶ} \qquad \gamma = \mathbf{0{,}222 \cdot 10^{16}\ cm/sec^2}$$

Ἐντὸς τοῦ χρόνου t τὸ ἠλεκτρόνιον διανύει διάστημα ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως d τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ. Ἄρα εἶναι :

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}222 \cdot 10^{16}\ \text{cm/sec}^2 \cdot (3 \cdot 10^{-8}\ \text{sec})^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{d = 1{,}998\ cm = 19{,}98\ mm}$$

294. Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εὑρέθη ὅτι εἶναι : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἰς ἠλεκτροστατικὰς καὶ ἠλεκτρομαγνητικὰς μονάδας φορτίου.

Εἰς τὸν ἠλεκτρισμὸν ἰσχύουν δύο συστήματα μονάδων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ σύστημα μονάδων C.G.S. Οὕτω ἔχομεν τὸ ἠλεκτροστατικὸν σύστημα μονάδων C.G.S. καὶ τὸ ἠλεκτρομαγνητικὸν σύστημα μονάδων C.G.S. Ἡ μονὰς ἠλεκτρικοῦ φορτίου 1 Cb ἀνήκει εἰς τὸ πρακτικὸν σύστημα μονάδων (M.K.S.A.), ἡ δὲ ἀντιστοιχία αὐτῆς μὲ τὰς μονάδας τῶν δύο συστημάτων C.G.S. εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$$1\ \text{Cb} = 3 \cdot 10^9\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

$$1\ \text{Cb} = \frac{1}{10}\ \text{ΗΜΜ - φορτίου}$$

Ἄρα τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

εἰς τὸ ἠλεκτροστατικὸν σύστημα μονάδων :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9\ \text{ΗΣΜ - φορτίου} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ ΗΣΜ - φορτίου}$$

εἰς τὸ ἠλεκτρομαγνητικὸν σύστημα μονάδων :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{1}{10}\ \text{ΗΜΜ - φορτίου} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}\ ΗΜΜ - φορτίου}$$

295. Ἓν ἠλεκτρόνιον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $r = 4{,}8$ mm ἀπὸ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον Q. Τὸ φορτίον τοῦτο ἕλκει τότε τὸ ἠλεκτρόνιον μὲ δύναμιν $F = 0{,}002\ gr^*$. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q; Τὰ ἠλεκτρικὰ φορτία εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ἀέρος.

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου : $\mathbf{e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἕλκεται ἀπὸ τὸ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον Q μὲ δύναμιν :

$$F = 0{,}002\ gr^* \cdot 981\ dyn/gr^* \qquad ἤτοι \qquad F = 1{,}962\ dyn$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ F προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb :

$$F = \frac{(-e)\cdot(+Q)}{r^2}$$

Ἂν θεωρήσωμεν τὰ ἠλεκτρικὰ φορτία e καὶ Q κατ' ἀπόλυτον τιμήν, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὅτι τὸ ζητούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον Q δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$Q = \frac{F \cdot r^2}{e}$$

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἠλεκτροστατικὸν σύστημα μονάδων C.G.S. Ἄρα εἶναι :

$$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$Q = \frac{1{,}962\ dyn \cdot (0{,}48\ cm)^2}{4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}} \qquad ἄρα \qquad \mathbf{Q \approx 94{,}2 \cdot 10^9\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}$$

Τὸ ἀνωτέρω ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, μετρούμενον εἰς Coulomb, εἶναι :

$$Q = 31{,}4\ Cb$$

296. Ἠλεκτρικὸς λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως ἔχει ἰσχὺν P = 100 W καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν U = 225 V. Πόσα ἠλεκτρόνια διέρχονται διὰ τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος κατὰ δευτερόλεπτον;
Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Ὁ λαμπτὴρ ἔχει ἰσχὺν $P = U \cdot I$, ὅπου I εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον διαρρέει τὸν λαμπτῆρα. Ἄρα εἶναι :

$$I = \frac{P}{U} \qquad ἤτοι \qquad I = \frac{100\ W}{225\ V} \qquad καὶ \qquad I = \frac{4}{9}\ A$$

Ὥστε κατὰ δευτερόλεπτον διέρχεται ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = \frac{4}{9}\ Cb/sec$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν τοῦτο φορτίον μεταφέρεται ἀπὸ ἀριθμὸν ν ἠλεκτρονίων, ὁ ὁποῖος εἶναι :

$$\nu = \frac{Q}{e} \qquad ἤτοι \qquad \nu = \frac{4/9\ Cb/sec}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb/\text{ἠλεκτρόνιον}}$$

$$καὶ \qquad \mathbf{\nu = 2{,}78 \cdot 10^{18}\ \text{ἠλεκτρόνια}/sec}$$

297. Ἠλεκτρικὸς λαμπτὴρ διὰ πυρακτώσεως ἔχει ἰσχὺν P = 60 W καὶ λειτουργεῖ ὑπὸ τάσιν U = 120 V. Διὰ τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος διέρχονται $N = 3 \cdot 10^{20}$ ἠλεκτρόνια. Ἐπὶ πόσον χρόνον τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα διαρρέει τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος;
Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Τὸ σύρμα τοῦ λαμπτῆρος διαρρέεται ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως

$$I = \frac{P}{U} \qquad ἤτοι \qquad I = \frac{60\ W}{120\ V} \qquad καὶ \qquad I = 0{,}5\ A$$

Ἄρα ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος διέρχεται κατὰ δευτερόλεπτον ἀριθμὸς ν ἠλεκτρονίων, ὁ ὁποῖος εἶναι :

$$\nu = \frac{0{,}5 \text{ Cb/sec}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb/ἠλεκτρόνιον}} \quad \text{καὶ} \quad \nu = 3{,}125 \cdot 10^{18} \text{ ἠλεκτρόνια/sec}$$

Συνεπῶς τὰ ἀναφερόμενα $N = 3 \cdot 10^{20}$ ἠλεκτρόνια, διέρχονται διὰ τοῦ σύρματος τοῦ λαμπτῆρος εἰς χρόνον t καὶ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$N = \nu \cdot t \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{N}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{20} \text{ ἠλεκτρόνια}}{3{,}125 \cdot 10^{18} \text{ ἠλεκτρόνια/sec}}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{t = 96 \text{ sec} = 1 \text{ min } 36 \text{ sec}}$$

298. Πόσα ἠλεκτρόνια ἔχουν μᾶζαν ἴσην μὲ $m = \frac{1}{10^{12}}$ gr; Ἐὰν τὰ ἠλεκτρόνια αὐτὰ ἐπιταχύνωνται ὑπὸ τάσιν U = 100 V, πόσην ἐνέργειαν, μετρηθεῖσαν εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, μεταφέρουν; Πόσον ἠλεκτρικὸν φορτίον μεταφέρεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἠλεκτρόνια;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Ὁ ἀριθμὸς ν τῶν ἠλεκτρονίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μᾶζαν $m = 10^{-12}$ gr, εἶναι :

$$\nu = \frac{m}{m_e} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{10^{-12} \text{ gr}}{9 \cdot 10^{-28} \text{ gr/ἠλεκτρόνιον}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \nu = \frac{10}{9} \cdot 10^{15} \text{ ἠλεκτρόνια} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{\nu = 1{,}11 \cdot 10^{15} \text{ ἠλεκτρόνια}}$$

Ἓν ἠλεκτρόνιον, ἐπιταχυνόμενον ὑπὸ τάσιν U = 100 V, ἀποκτᾷ ἐνέργειαν :

$$W_1 = e \cdot U \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = (1 \cdot 100) \text{ eV} \quad \text{καὶ} \quad W_1 = 100 \text{ eV}$$

Ἄρα τὰ ν ἠλεκτρόνια μεταφέρουν ἐνέργειαν :

$$W = \nu \cdot W_1 \quad \text{ἤτοι} \quad W = 1{,}11 \cdot 10^{15} \cdot 100 \text{ eV} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 111 \cdot 10^{15} \text{ eV}}$$

Τὰ ἀνωτέρω ν ἠλεκτρόνια μεταφέρουν ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = \nu \cdot e \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 1{,}11 \cdot 10^{15} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{Q = 1{,}776 \cdot 10^{-4} \text{ Cb} = 177{,}6\ \mu\text{Cb}}$$

299. Εἰς ἕνα σωλῆνα, κενὸν ἀπὸ ἀέρα, προσπίπτουν ἐπὶ μιᾶς μεταλλικῆς πλακὸς $N = 6 \cdot 10^{17}$ ἠλεκτρόνια, κινούμενα μὲ ταχύτητα υ = 30 000 km/sec. Ἡ μεταλλικὴ πλὰξ ἔχει μᾶζαν $m_\pi = 1{,}2$ gr καὶ εἰδικὴν θερμότητα c = 0,033 cal/gr/grad. Ἐὰν ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν ἠλεκτρονίων μεταβάλλεται εἰς θερμότητα, παραμένουσαν ἐπὶ τῆς πλακός, νὰ εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τῆς πλακός.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος : J = 4,2 Joule/cal

Ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἠλεκτρονίων ἔχει ταχύτητα $υ = 3 \cdot 10^9$ cm/sec. Ἄρα τὰ N ἠλεκτρόνια ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W = N \cdot \frac{1}{2} m_e υ^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = 6 \cdot 10^{17} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{18} \text{ erg}$$

$$\text{καὶ} \quad W = 121{,}5 \cdot 10^7 \text{ erg} \quad \text{ἢ} \quad W = 121{,}5 \text{ Joule}$$

Αὐτὴ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{121{,}5 \text{ Joule}}{4{,}2 \text{ Joule/cal}} \quad \text{ἄρα} \quad Q = 28{,}93 \text{ cal}$$

Ἡ ποσότης θερμότητος Q προκαλεῖ ὕψωσιν τῆς θερμοκρασίας τῆς πλακὸς κατὰ $\Delta\theta^0$ C καὶ ἰσχύει τότε ἡ ἐξίσωσις :

$$Q = m_\pi \cdot c \cdot \Delta\theta$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ὕψωσις τῆς θερμοκρασίας τῆς πλακὸς εἶναι :

$$\Delta\theta = \frac{Q}{m_\pi \cdot c} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta\theta = \frac{28{,}93 \text{ cal}}{1{,}2 \text{ gr} \cdot 0{,}033 \text{ cal/gr/grad}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{\Delta\theta = 730^0\ C}$$

300. Ἐντὸς σωλῆνος, μὴ περιέχοντος ἀέρα, ὑπάρχει κάθοδος Κ καὶ ἄνοδος Α. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἠλεκτροδίων ἐπικρατεῖ τάσις $U = 3 \cdot 10^4$ V. Μὲ κατάλληλον διάταξιν ἐμφανίζονται κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς καθόδου $\nu = 10^{17}$ ἠλεκτρόνια, τὰ ὁποῖα προσπίπτουν ἐπὶ τῆς ἀνόδου Α. Ἐὰν ὁλόκληρος ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν ἠλεκτρονίων μεταβάλλεται εἰς θερμότητα, παραμένουσαν ἐπὶ τῆς ἀνόδου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ποσότης θερμότητος Q, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς ἀνόδου κατὰ δευτερόλεπτον.

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος : $J = 4{,}2$ Joule/cal

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (w), τὴν ὁποίαν ἔχει ἕκαστον ἠλεκτρόνιον ὅταν φθάνῃ εἰς τὴν ἄνοδον Α, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα εἶναι :

$$w = e \cdot U$$

Ἐπὶ τῆς ἀνόδου φθάνουν κατὰ δευτερόλεπτον ν ἠλεκτρόνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν W, ἴσην μέ :

$$W = \nu \cdot w \quad \text{ἤτοι} \quad W = \nu \cdot e \cdot U$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν :

$$W = 10^{17} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \cdot 3 \cdot 10^4 \text{ V} \quad \text{ἄρα} \quad W = 480 \text{ Joule}$$

Αὐτὴ ἡ ἐνέργεια W ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος Q, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ δευτερόλεπτον ἐπὶ τῆς ἀνόδου. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$Q = \frac{W}{J} \quad \text{εὑρίσκομεν} \quad Q = \frac{480 \text{ Joule/sec}}{4{,}2 \text{ Joule/cal}} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{Q = 114{,}3\ cal/sec}$$

301. Ἓν ἠλεκτρόνιον, κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ ταχύτητα $\upsilon = 20\,000$ km/sec, εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Τὸ μῆκος τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $l = 22$ cm. Τὸ ἠλεκτρόνιον κατὰ τὴν διέλευσίν του διὰ μέσου τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὑφίσταται ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του ἴσην μὲ $\alpha = 1$ cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις τὴν ὁποίαν ἐξήσκησε τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου.

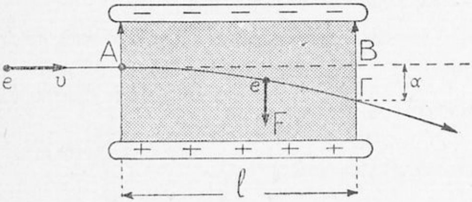
Μᾶζα ἠρεμοῦντος ἠλεκτρονίου : $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (σχ. 81) τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει τὸ τόξον παραβολῆς ΑΓ, διότι ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ τότε ἡ δύναμις :

$$F = e \cdot E$$

ὅπου e εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ Ε ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

Οὕτω τὸ ἠλεκτρόνιον ἐκτελεῖ ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου δύο συνιστώσας κινήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις : α) εὐθύγραμμος ὁμαλὴ κίνησις :



Σχ. 81

$$(AB) = \upsilon \cdot t \quad \text{ἤτοι} \quad l = \upsilon \cdot t \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{l}{\upsilon}$$

β) εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις :

$$(B\Gamma) = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

$$\text{ἤτοι} \quad \alpha = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \quad \text{ἄρα}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\gamma \cdot \left(\frac{l}{\upsilon}\right)^2 \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι εἶναι : $\alpha = 1$ cm $\quad l = 22$ cm $\quad$ καὶ $\quad \upsilon = 2 \cdot 10^9$ cm/sec

Ἄρα ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν m τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{2\alpha \cdot \upsilon^2}{l^2} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{2 \cdot 1\ \text{cm} \cdot 4 \cdot 10^{18}\ \text{cm}^2/\text{sec}^2}{484\ \text{cm}^2}$$

$$\text{ἄρα} \quad \gamma = \frac{2 \cdot 10^{18}}{121}\ \text{cm/sec}^2$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη δύναμις F εἶναι : $\quad F = m \cdot \gamma \qquad (2)$

Ἀλλὰ ἡ μᾶζα m τοῦ κινουμένου μὲ ταχύτητα υ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^9\ \text{cm/sec}}{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}\right)^2}}$$

$$\text{ἢ} \quad m = \frac{9 \cdot 10^{-28} \cdot 30}{\sqrt{900 - 4}}\ \text{gr} \quad \text{καὶ} \quad m \approx 9{,}18 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}$$

Ἄρα ἡ δύναμις F εἶναι :

$$F = 9{,}18 \cdot 10^{-28}\ \text{gr} \cdot \frac{2 \cdot 10^{18}}{121}\ \text{cm/sec}^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{F = 15 \cdot 10^{-12}\ dyn}$$

302. Οἱ δύο ὁπλισμοὶ πυκνωτοῦ ἔχουν μῆκος $l = 5$ cm. Ἓν ἠλεκτρόνιον, ἔχον κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ 30 eV, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ τότε ἐκ μέρους τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου δύναμις $F = 2 \cdot 10^{-12}$ dyn. Πόσην ἐκτροπὴν ὑφίσταται τὸ ἠλεκτρόνιον, ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεώς του;

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W = 30\ \text{eV} \quad \text{ἤτοι} \quad W = 30 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{erg} \quad \text{καὶ} \quad W = 48 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}$$

Ἡ ἀρχικὴ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = \frac{1}{2} m_e \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2W}{m_e}}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 48 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}} \quad \text{καὶ} \quad \upsilon = 3{,}27 \cdot 10^8\ \text{cm/sec}$$

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι συνισταμένη τῶν ἑξῆς δύο κινήσεων: α) μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῆς κινήσεως μὲ ταχύτητα υ, καὶ β) μιᾶς εὐθυγράμμου ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Διὰ τὴν πρώτην συνιστῶσαν κίνησιν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$l = \upsilon \cdot t \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{l}{\upsilon} \quad \text{ἤτοι} \quad t = \frac{5 \text{ cm}}{3{,}27 \cdot 10^8 \text{ cm/sec}}$$

$$\text{καὶ} \quad t = 1{,}529 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F τὸ ἠλεκτρόνιον, ἀποκτᾷ ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{F}{m_e} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{2 \cdot 10^{-12} \text{ dyn}}{9 \cdot 10^{-28} \text{ gr}} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 0{,}222 \cdot 10^{16} \text{ cm/sec}^2$$

Οὕτω ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω χρόνου t τὸ ἠλεκτρόνιον διανύει κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν δυναμικῶν γραμμῶν διάστημα:

$$\alpha = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \frac{1}{2} \gamma \cdot \left(\frac{l}{\upsilon} \right)^2$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐκτροπὴ (α) τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0{,}222 \cdot 10^{16} \text{ cm/sec}^2 \cdot (1{,}529 \cdot 10^{-8} \text{ sec})^2$$

$$\text{ἤτοι} \quad \boldsymbol{\alpha = 0{,}259 \text{ cm} = 2{,}59 \text{ mm}}$$

303. Οἱ δύο ὁπλισμοὶ ἑνὸς ἐπιπέδου πυκνωτοῦ εἶναι ὁριζόντιοι, ἔχουν μῆκος $l = 5$ cm, ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι d = 1 cm. Μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν ὑπάρχει τάσις U = 15 V. Ἓν ἠλεκτρόνιον, ἔχον κινητικὴν ἐνέργειαν W = 1000 eV, εἰσέρχεται ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις F, τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ ἡ ἐκτροπὴ τοῦ ἠλεκτρονίου ἀπὸ τὴν ἀρχικήν του διεύθυνσιν, ὅταν τὸ ἠλεκρόνιον ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\quad \mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}}$ **gr**

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν): $\quad \mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}}$ **Cb**

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι: $1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg. Ἄρα τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν:

$$W = 1000 \text{ eV} \quad \text{ἤτοι} \quad W = 1{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ erg}$$

Ἡ ἔντασις E τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἐπικρατεῖ μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ, εἶναι:

$$E = \frac{U}{d} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{15/300 \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}}{1 \text{ cm}}$$

$$\text{καὶ} \quad E = \frac{1}{20} \text{ ΗΣΜ - ἐντάσεως πεδίου}$$

Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι:

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \quad \text{ἤτοι} \quad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἄρα ἡ δύναμις F, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, εἶναι εἰς μονάδας C.G.S.:

$$F = e \cdot E \quad \text{ἤτοι} \quad F = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{20} \text{ dyn}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{F = 0{,}24 \cdot 10^{-10} \text{ dyn}}$$

Ἡ δύναμις F προσδίδει εἰς τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma = \frac{F}{m} \quad \text{ἤτοι} \quad \gamma = \frac{e \cdot E}{m} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d}$$

Ἡ κίνησις τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (σχ. 81) εἶναι συνισταμένη δύο κινήσεων, διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

α) εὐθύγραμμος ὁμαλὴ κίνησις κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας AB :

$$(AB) = \upsilon \cdot t \quad \text{ἢ} \quad l = \upsilon \cdot t \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{l}{\upsilon}$$

β) εὐθύγραμμος ὁμαλῶς μεταβαλλομένη κίνησις κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου :

$$(B\Gamma) = \frac{1}{2} \gamma \cdot t^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \alpha = \frac{1}{2} \gamma \cdot \left(\frac{l}{\upsilon} \right)^2$$

$$\text{καὶ} \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e \cdot U}{m \cdot d} \right) \cdot \left(\frac{l}{\upsilon} \right)^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$\alpha = \frac{e \cdot U \cdot l^2}{2d \cdot (m\upsilon^2)}$$

Δίδεται ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (W) τοῦ ἠλεκτρονίου :

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad m\upsilon^2 = 2W$$

Συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\alpha = \frac{e \cdot U \cdot l^2}{2d \cdot 2W}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἐκτροπὴ $B\Gamma = \alpha$ τοῦ ἠλεκτρονίου κατὰ τὴν ἔξοδόν του ἀπὸ τὸν πυκνωτὴν εἶναι (εἰς μονάδας C.G.S.) :

$$\alpha = \frac{(4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (15/300) \cdot (5^2)}{4 \cdot (1) \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-9})} \text{ C.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\alpha = 0{,}093 \text{ cm} = 0{,}93 \text{ mm}}$$

304. Ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν $U_1 = 1000$ V καὶ ἔπειτα εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H, καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Τότε τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος $r_1 = 2{,}12$ cm. Ἐὰν τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπιταχυνθῇ ὑπὸ τάσιν $U_2 = 15\,000$ V, πόση θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς r_2 τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ τὸ ἠλεκτρόνιον, εἰσερχόμενον πάλιν ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω μαγνητικοῦ πεδίου;

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

Ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν $U_1 = 1000$ V, ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἤτοι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} = e \cdot U_1 \quad \text{ἄρα} \quad m \cdot \upsilon_1^2 = 2e \cdot U_1 \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν $U_2 = 15\,000$ V, ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{m \cdot \upsilon_2^2}{2} = e \cdot U_2 \quad \text{ἄρα} \quad m \cdot \upsilon_2^2 = 2e \cdot U_2 \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2} = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$$

Ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τὸ ἠλεκτρόνιον διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν (βλ. πρόβλημα 263), διότι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις ἐνεργεῖ ὡς κεντρομόλος δύναμις. Οὕτω διὰ τὰς δύο ἀνωτέρω περιπτώσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι γνωσταὶ ἐξισώσεις :

$$\frac{m \cdot \upsilon_1^2}{r_1} = \frac{\upsilon_1 \cdot e \cdot H}{10} \quad \text{ἄρα} \quad r_1 = \frac{10\,m \cdot \upsilon_1}{e \cdot H} \qquad (3)$$

$$\frac{m \cdot \upsilon_2^2}{r_2} = \frac{\upsilon_2 \cdot e \cdot H}{10} \quad \text{ἄρα} \quad r_2 = \frac{10\,m \cdot \upsilon_2}{e \cdot H} \qquad (4)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4), λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \qquad (5)$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) φανερώνει ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ ἠλεκτρόνιον ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς τάσεως μὲ τὴν ὁποίαν ἐπιταχύνεται τὸ ἠλεκτρόνιον. Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀκτὶς r_2 εἶναι :

$$r_2 = r_1 \cdot \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \quad \text{ἤτοι} \quad r_2 = 2{,}12\ \text{cm} \cdot \sqrt{\frac{15\,000\ \text{V}}{1000\ \text{V}}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{r_2 = 8{,}20\ cm}$$

305. Ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν 100 V, 10^6 V καὶ 10^7 V. Νὰ εὑρεθῇ πόσην ταχύτητα ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

Μᾶζα ἠρεμοῦντος ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m_0 = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Τὸ ἠλεκτρόνιον φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον e (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) καὶ ὅταν ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν U ἀποκτᾷ ταχύτητα υ. Ἄρα ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν W_κ ἴσην μὲ τὸ ἔργον eU, τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$W_\kappa = eU \qquad (1)$$

Ἂν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν μεταβολὴν τῆς μάζης τοῦ ἠλεκτρονίου μετὰ τῆς ταχύτητος, τότε ἔχομεν :

$$W_\kappa = \frac{m_0 \upsilon^2}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\,W_\kappa}{m_0}} \qquad (2)$$

Τὸ ἠλεκτρόνιον, ὅταν ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν U, ἀποκτᾷ κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μέ :

$$W_\kappa = e\ \text{Cb} \cdot U\ \text{Volt} = eU\ \text{Joule}$$

Ὥστε εἰς τὰς θεωρουμένας τρεῖς περιπτώσεις τὸ ἐπιταχυνόμενον ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ ἀντιστοίχως κινητικὴν ἐνέργειαν :

τάσις $U_1 = 100$ V :

ἐνέργεια : $W_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot 100\ \text{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ Joule

ἢ $W_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-10}$ erg

τάσις $U_2 = 10^6$ V :

ἐνέργεια : $W_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot 10^6\ \text{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Joule

ἢ $W_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg

τάσις $U_3 = 10^7$ V :

ἐνέργεια : $W_3 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb $\cdot 10^7$ V $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ Joule

ἢ $W_3 = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ erg

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ τὰς ἀντιστοίχους ταχύτητας :

α) τάσις $U_1 = 100$ V :

ταχύτης : $$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2\,W_1}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}}$$

ἤτοι $\upsilon_1 = 5{,}96 \cdot 10^8$ cm/sec καὶ $\boldsymbol{\upsilon_1 = 5960}$ **km/sec**

β) τάσις $U_2 = 10^6$ V :

ταχύτης : $$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2\,W_2}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}}$$

ἤτοι $\upsilon_2 = 5{,}96 \cdot 10^{10}$ cm/sec καὶ $\boldsymbol{\upsilon_2 = 596\,000}$ **km/sec**

γ) τάσις $U_3 = 10^7$ V :

ταχύτης : $$\upsilon_3 = \sqrt{\frac{2\,W_3}{m_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}}}$$

ἤτοι $\upsilon_3 = 1{,}85 \cdot 10^{11}$ cm/sec καὶ $\boldsymbol{\upsilon_3 = 1\,850\,000}$ **km/sec**

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ τάσις εἶναι 1 000 000 V ἢ 10 000 000 V, εὑρίσκομεν ταχύτητα τοῦ ἠλεκτρονίου κατὰ πολὺ μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς c = 300 000 km/sec. Ὥστε αἱ εὑρισκόμεναι ταχύτητες τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἀπαράδεκτοι. Τὰ ἀνωτέρω ἀπαράδεκτα ἐξαγόμενα προκύπτουν, διότι δὲν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ἡ μεταβολὴ τῆς μάζης τοῦ ἠλεκτρονίου μετὰ τῆς ταχύτητος. Εἶναι γνωστὸν ὅτι σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος, ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον κινῆται μὲ ταχύτητα υ, τότε ἡ μᾶζα του εἶναι :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

καὶ συνεπῶς τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἔχομεν :

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = eU \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{m\upsilon^2}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \cdot \text{U Volt}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{m\upsilon^2}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \text{U Joule} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{m\upsilon^2}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot \text{U erg}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν εἰς μονάδας C.G.S. ὅτι εἶναι :

$$\upsilon^2 = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot U}{m} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon^2 = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{m_0} \cdot U \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$\text{ἢ} \qquad \upsilon^2 = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 10^{-28}} \cdot U \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{20}}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \upsilon^2 = 3{,}555 \cdot 10^{15} \cdot U \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{20}}}$$

Ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν :

$$\upsilon^4 = 3{,}555^2 \cdot 10^{30} \cdot U^2 \cdot \left(1 - \frac{\upsilon^2}{9 \cdot 10^{20}}\right)$$

$$\text{ἢ} \qquad \upsilon^4 + (1{,}4 \cdot 10^{10} \cdot U^2)\,\upsilon^2 - (12{,}63 \cdot 10^{30} \cdot U^2) = 0$$

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$$\upsilon^2 = y \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon^4 = y^2$$

λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν : $y^2 + (1{,}4 \cdot 10^{10} \cdot U^2)\, y - (12{,}63 \cdot 10^{30} \cdot U^2) = 0$ (1)

α) διὰ τάσιν $U = 100$ V : εὑρίσκομεν $y = 35{,}53 \cdot 10^{16}$

ἄρα $\upsilon_1 = \sqrt{y}$ καὶ $\upsilon_1 = \mathbf{5{,}96 \cdot 10^8}$ **cm/sec = 5960 km/sec**

β) διὰ τάσιν $U = 10^6$ V : εὑρίσκομεν $y = 0{,}085 \cdot 10^{22}$

ἄρα $\upsilon_2 = \sqrt{y}$ καὶ $\upsilon_2 = \mathbf{2{,}915 \cdot 10^{10}}$ **cm/sec = 291 500 km/sec**

γ) διὰ τάσιν $U = 10^7$ V : εὑρίσκομεν $y \approx 9 \cdot 10^{20}$

ἄρα $\upsilon_3 = \sqrt{y}$ καὶ $\upsilon_3 \approx \mathbf{3 \cdot 10^{10}}$ **cm/sec ≈ 300 000 km/sec**

306. Ἓν σωματίδιον μάζης M κινεῖται μὲ ταχύτητα V καὶ ὑφίσταται κεντρικὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν μὲ σωματίδιον μάζης m, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν τὸ δεύτερον σωματίδιον μετὰ τὴν κροῦσιν ἔχῃ ταχύτητα υ κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ τὴν φορὰν τῆς ταχύτητος V, τότε ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\upsilon = \frac{2M}{M + m} V$$

Μετὰ τὴν κροῦσιν τὸ μὲν σωματίδιον μάζης M ἔχει ταχύτητα V_1, τὸ δὲ σωματίδιον μάζης m ἔχει ταχύτητα υ. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$M \cdot V + m \cdot 0 = M \cdot V_1 + m \cdot \upsilon \qquad \text{ἢ} \qquad M(V - V_1) = m \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Ἐπίσης σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{2} M \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot 0 = \frac{1}{2} M \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$$

$$\text{ἢ} \qquad M(V^2 - V_1^2) = m \cdot \upsilon^2 \qquad (2)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$V + V_1 = \upsilon \qquad (3)$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) θέτομεν τὴν τιμὴν τοῦ V_1 ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3). Οὕτω εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$2MV - M\upsilon = m\upsilon \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \frac{2M}{M + m} V$$

307. Ἀποδεικνύεται ὅτι δι' ἓν σωματίδιον, εὑρισκόμενον εἰς τὸ κενὸν καὶ φέρον ἠλεκτρικὸν φορτίον e ὁμοιομόρφως κατανεμημένον ἐπὶ μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας r, ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$m = \frac{2e^2}{3r}$$

ὅπου m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σφαιρικοῦ σωματιδίου εἰς gr, r ἡ ἀκτίς του εἰς cm καὶ e τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ σωματιδίου εἰς ΗΜΜ - φορτίου. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς

ἀνωτέρω ἐξισώσεως νὰ εὑρεθῇ ἡ διάμετρος τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) :

$$\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}\ HMM\text{ - φορτίου}}$$

Ἀπὸ τὴν διδομένην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀκτὶς r τοῦ ὡς σφαιρικοῦ θεωρουμένου ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$r = \frac{2\,e^2}{3\,m_e}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη διάμετρος $\delta = 2r$ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$\delta = \frac{4\,e^2}{3\,m_e} \quad \text{ἤτοι} \quad \delta = \frac{4 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-20})^2}{3 \cdot 9 \cdot 10^{-28}}\ \text{cm}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{\delta = 3{,}8 \cdot 10^{-13}\ cm}$$

Ὁ ὄγκος V_e τοῦ ἠλεκτρονίου (θεωρουμένου ὡς σφαίρας) εἶναι :

$$V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 \quad \text{καὶ} \quad V_e = \frac{\pi \cdot \delta^3}{6}$$

Ἄρα ἡ πυκνότης d τῆς ὕλης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$d = \frac{m_e}{V_e} \quad \text{ἤτοι} \quad d = \frac{m_e}{\pi\delta^3/6}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν :

$$d = \frac{6 \cdot 9 \cdot 10^{-28}}{3{,}14 \cdot (3{,}8 \cdot 10^{-13})^3}\ \text{gr/cm}^3 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{d = 2{,}9 \cdot 10^{10}\ gr/cm^3}$$

* Σημείωσις. Ἡ πυκνότης τῆς ὕλης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι καταπληκτική, διότι εἶναι :

$$d = 2{,}9 \cdot 10^4\ \text{tn/cm}^3 \quad \text{ἤτοι} \quad d = 29\,000\ \text{tn/cm}^3$$

308. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ταχύτης ἑνὸς σωματιδίου, ἔχοντος ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\mathbf{\upsilon = \frac{J\,c}{\sqrt{J^2 + m^2 c^2}}}$$

ὅπου J εἶναι ἡ ὁρμὴ τοῦ σωματιδίου καὶ c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός.

Τὸ σωματίδιον, ὅταν κινῆται μὲ ταχύτητα υ, ἔχει μᾶζαν M, ἡ ὁποία σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σωματίδιον ἔχει ὁρμήν :

$$J = M\upsilon \quad \text{ἤτοι} \quad J = \frac{m\,\upsilon}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$J^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m^2\upsilon^2 \quad \text{ἄρα} \quad J^2c^2 - J^2\upsilon^2 = m^2c^2\upsilon^2$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{\upsilon = \frac{J\,c}{\sqrt{J^2 + m^2 c^2}}}$$

309. Σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W ἑνὸς σωματιδίου καὶ ἡ ὁλικὴ μᾶζα του m συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως :

$$\mathbf{W = mc^2} \qquad (1)$$

ὅπου c εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις δίδουσα τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_K τοῦ σωματιδίου, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα υ.

Τὸ σωματίδιον, ὅταν ἠρεμῇ, ἔχει μᾶζαν m_0. Ὅταν ὅμως κινῆται μὲ ταχύτητα υ, τότε ἡ μᾶζα του m δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (2$$

Ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων $\alpha = \frac{\upsilon}{c}$ εἶναι πολὺ μικρὸς (βλ. Φυσική, τόμ. Α', σελ. 160). Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$m = m_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^4}} \quad \text{ἢ} \quad m = m_0 \cdot \sqrt{1+\alpha^2} \qquad (3)$$

διότι τὸ α^4 εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὴν μονάδα. Ἐπειδὴ ὁ λόγος α εἶναι πολὺ μικρός, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν :

$$\sqrt{1+\alpha^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (3) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$m = m_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad \text{ἤτοι} \quad m = m_0 \cdot \left(1 + \frac{\upsilon^2}{2c^2}\right)$$

$$\text{καὶ} \quad mc^2 = m_0c^2 + \frac{m_0\upsilon^2}{2} \qquad (4)$$

Εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν (4) ἔχομεν ὅτι :

ὁ ὅρος $\frac{m_0\upsilon^2}{2}$ ἐκφράζει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_K τοῦ σωματιδίου,

ὁ ὅρος m_0c^2 ἐκφράζει τὴν ἐνέργειαν, μὲ τὴν ὁποίαν ἰσοδυναμεῖ ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα τοῦ σωματιδίου, καὶ

ὁ ὅρος mc^2 ἐκφράζει τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν W τοῦ σωματιδίου, σύμφωνα μὲ τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν (1).

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$W = m_0c^2 + W_K$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη σχέσις, ἡ ὁποία δίδει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_K τοῦ σωματιδίου, εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$$\mathbf{W_K = W - m_0c^2}$$

* Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$W_K = mc^2 - m_0c^2 \quad \text{ἄρα} \quad W_K = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

$$\text{ἢ} \quad W_K = m_0c^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right] \qquad (5)$$

Ἂν ἀναπτύξωμεν τὸ διώνυμον $\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, λαμβάνομεν :

$$\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\,\frac{\upsilon^2}{c^2}+\ldots\ldots$$

Ὅταν ἡ ταχύτης υ εἶναι πολὺ μικρὰ ἐν σχέσει μὲ τὴν ταχύτητα c, τότε δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τοὺς μετὰ τὸν δεύτερον ὅρον ὑπολοίπους ὅρους τοῦ ἀναπτύγματος, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (5) γράφεται :

$$W_K=m_0c^2\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{\upsilon^2}{c^2}-1\right] \quad \text{ἤτοι} \quad W_K=\frac{1}{2}\,m_0\upsilon^2$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις ἐκφράζει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ σωματιδίου σύμφωνα μὲ τὴν κλασσικὴν Μηχανικήν, ἡ ὁποία θεωρεῖ ὅτι ἡ μᾶζα m_0 τοῦ σωματιδίου εἶναι σταθερὰ καὶ ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ σωματιδίου.

310. Ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W ἑνὸς σωματιδίου καὶ ἡ ὁλικὴ μᾶζα m ἑνὸς κινουμένου σωματιδίου συνδέονται μεταξύ των διὰ τῆς σχέσεως :

$$\mathbf{W=mc^2} \qquad (1)$$

Νὰ εὑρεθῇ σχέσις δίδουσα τὴν ὁρμὴν J τοῦ σωματιδίου συναρτήσει τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας W.

Τὸ σωματίδιον, ὅταν ἠρεμῇ, ἔχει μᾶζαν m_0, ὅταν ὅμως κινῆται μὲ ταχύτητα υ, ἔχει μᾶζαν m, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Συνεπῶς, ὅταν τὸ σωματίδιον κινῆται μὲ ταχύτητα υ, ἡ ὁρμὴ τοῦ σωματιδίου εἶναι :

$$J=m\upsilon \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$m=\frac{W}{c^2} \quad \text{ἢ} \quad m^2=\frac{W^2}{c^4} \qquad (4)$$

Ἀπὸ δὲ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν : $$\upsilon^2=\frac{m^2c^2-m_0^2c^2}{m^2} \qquad (5)$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3), ὁπότε ἔχομεν :

$$J^2=m^2\upsilon^2$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ^2 ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (5), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$J^2=m^2\cdot\frac{m^2c^2-m_0^2c^2}{m^2} \quad \text{ἤτοι} \quad J^2=m^2c^2-m_0^2c^2 \qquad (6)$$

Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (6) ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ m^2 ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (4), λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν :

$$J^2=\frac{W^2c^2}{c^4}-m_0^2c^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{J^2=\frac{W^2}{c^2}-m_0^2c^2} \qquad (7)$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις (7) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$J^2=\frac{W^2-m_0^2c^4}{c^2} \quad \text{ἤτοι} \quad J^2=\frac{W^2-(m_0c^2)^2}{c^2}$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{J=\frac{\sqrt{W^2-(m_0c^2)^2}}{c}} \qquad (8)$$

* Σημείωσις. Ἡ ἐξίσωσις (8) εἶναι ἐνδιαφέρουσα εἰς τὴν σπουδὴν τῶν διαφόρων σωματιδίων, διότι συνδέει τὴν ὁρμὴν J τοῦ σωματιδίου μὲ τὴν ὁλικὴν ἐνέργειαν W καὶ τὴν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m_0 τοῦ σωματιδίου.

Ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις (8) εἶναι ἐνδιαφέρουσα καὶ διὰ τὸν ἑξῆς λόγον: Τὸ γινόμενον Jc ἔχει διαστάσεις ἐνεργείας. Διὰ τοῦτο ἡ ὁρμὴ τῶν σωματιδίων μεγάλης ἐνεργείας συνήθως μετρεῖται μὲ τὴν ἀκόλουθον μονάδα ὁρμῆς:

$$1 \text{ μονὰς ὁρμῆς} = \frac{1 \text{ MeV}}{c} = 1 \text{ MeV/c}$$

311. Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια ἑνὸς ἠλεκτρονίου εἶναι ἴση μὲ W = 1,5 MeV, ἐνῶ ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα του m_0 ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν 0,5 MeV. Πόση εἶναι ἡ ὁρμὴ τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου εἰς MeV/c;

Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 310 ἐξίσ. 8) ὅτι ἡ ὁρμὴ J ἑνὸς σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$J = \frac{\sqrt{W^2 - (m_0c^2)^2}}{c}$$

Διὰ τὸ θεωρούμενον ἠλεκτρόνιον εἶναι:

$$W = 1{,}5 \text{ MeV} \qquad \text{καὶ} \qquad m_0c^2 = 0{,}5 \text{ MeV}$$

Ἄρα ἡ ὁρμὴ τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου εἶναι:

$$J = \frac{\sqrt{1{,}5^2 - 0{,}5^2} \text{ MeV}}{c} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{J = 1{,}4 \text{ MeV/c}}$$

312. Σύμφωνα μὲ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W ἑνὸς σωματιδίου καὶ ἡ ὁλικὴ μᾶζα m τοῦ σωματιδίου συνδέονται μὲ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{W = mc^2} \qquad (1)$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν m_0 εἶναι ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα τοῦ σωματιδίου, ἡ ταχύτης υ τοῦ σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$\boldsymbol{\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2}}$$

Ὅταν τὸ σωματίδιον κινῆται μὲ ταχύτητα υ, τότε ἡ ὁλικὴ μᾶζα m τοῦ σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Συνεπῶς, σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W τοῦ σωματιδίου εἶναι:

$$W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν:

$$W^2 = \frac{(m_0c^2)^2}{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{(m_0c^2)^2}{W^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{\upsilon^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2}}$$

313. Σωματίδιον ἔχει ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m_0, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν $W_0 = m_0c^2$. Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W τοῦ σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = mc^2$$

ὅπου m εἶναι ἡ ὁλικὴ μᾶζα τοῦ σωματιδίου, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα υ. 1) Μὲ πόσην ταχύτητα κινεῖται ἓν σωματίδιον, ὅταν ἡ ὁλική του ἐνέργεια W εἶναι διπλασία τῆς ἐνεργείας W_0; 2) Πόση εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_κ τοῦ σωματιδίου;

1) Ἡ ὁλικὴ μᾶζα m τοῦ σωματιδίου, ὅταν τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα υ, εἶναι :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Τότε τὸ σωματίδιον ἔχει ὁλικὴν ἐνέργειαν :

$$W = mc^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν :

$$W^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = (m_0c^2)^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{(m_0c^2)^2}{W^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{\upsilon^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^2}$$

Δίδεται ὅτι τὸ σωματίδιον ἔχει τόσην ταχύτητα υ, ὥστε εἶναι : $W = 2\,W_0$. Οὕτω ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{W_0}{2\,W_0}\right)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = c\sqrt{0{,}75} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 0{,}87\ c}$$

* Δηλαδὴ τὸ σωματίδιον ἔχει ταχύτητα :

$$\upsilon = 0{,}87 \cdot 300\,000 \text{ km/sec} = 261\,000 \text{ km/sec}$$

2) Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W τοῦ σωματιδίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας του W_κ καὶ τῆς ἐνεργείας W_0 μὲ τὴν ὁποίαν ἰσοδυναμεῖ ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_0 τοῦ σωματιδίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = W_\kappa + W_0 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_\kappa = W - W_0$$

Ἐπειδὴ δίδεται ὅτι εἶναι $W = 2\,W_0$, ἔχομεν :

$$W_\kappa = 2\,W_0 - W_0 \qquad \text{ἄρα} \qquad W_\kappa = W_0 \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{W_\kappa = m_0c^2}$$

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐνέργειαν πρὸς τὴν ὁποίαν ἰσοδυναμεῖ ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_0 τοῦ σωματιδίου.

314. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐνέργεια $W_0 = m_0c^2$, ἡ ἰσοδυναμοῦσα πρὸς τὴν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m_0 ἑνὸς σωματιδίου, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_0 = \frac{J^2c^2 - W_K^2}{2\,W_K}$$

ὅπου W_K εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου καὶ J ἡ ὁρμὴ αὐτοῦ.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W ἑνὸς σωματιδίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας W_K τοῦ σωματιδίου καὶ τῆς ἐνεργείας W_0, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν m_0 τοῦ σωματιδίου, ἤτοι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$W = W_K + W_0$$

Ἐπίσης εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ὁρμὴ J τοῦ σωματιδίου (βλ. πρόβλημα 310, ἐξίσ. 8) δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$J = \frac{\sqrt{W^2 - (m_0 c^2)^2}}{c}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$J^2c^2 = W^2 - (m_0c^2)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad J^2c^2 = W^2 - W_0^2$$

Ἐπειδὴ εἶναι $W = W_K + W_0$, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$J^2c^2 = (W_K + W_0)^2 - W_0^2 \quad \text{ἄρα} \quad J^2c^2 - W_K^2 = 2\,W_K W_0$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W_0 = \frac{J^2c^2 - W_K^2}{2W_K}}$$

315. Εὑρέθη ὅτι ἓν θετικῶς φορτισμένον σωματίδιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν $W_\varkappa = 62$ MeV καὶ ὁρμὴν $J = 335$ MeV/c. 1) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ μᾶζα m_0 τοῦ σωματιδίου, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_e τοῦ ἠλεκτρονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν $W_e = 0{,}5$ MeV. 2) Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σωματιδίου;

1) Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 314) ὅτι ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_0 ἑνὸς σωματιδίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_0 = \frac{J^2c^2 - W_\varkappa^2}{2W_\varkappa}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν τοῦ σωματιδίου ἐνέργεια εἶναι :

$$W_0 = \frac{\left(335\,\frac{\text{MeV}}{c}\right)^2 \cdot c^2 - (62\ \text{MeV})^2}{2 \cdot 62\ \text{MeV}} \quad \text{ἤτοι} \quad W_0 = \frac{108\,381\ (\text{MeV})^2}{124\ \text{MeV}}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W_0 = 874\ MeV}$$

Διὰ τὸ θεωρούμενον σωματίδιον (μάζης m_0) καὶ τὸ ἠλεκτρόνιον (μάζης m_e) ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

διὰ τὸ σωματίδιον : $W_0 = m_0c^2$

διὰ τὸ ἠλεκτρόνιον : $W_e = m_ec^2$

Ἀπὸ τὰς δύο ἀνωτέρω σχέσεις εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος τῆς μάζης m_0 τοῦ σωματιδίου πρὸς τὴν μᾶζαν m_e τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$\frac{m_0}{m_e} = \frac{W_0}{W_e} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{m_0}{m_e} = \frac{874\ \text{MeV}}{0{,}5\ \text{MeV}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{m_0}{m_e} = 1748 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{m_0 = 1748\ m_e}$$

Ὥστε τὸ θεωρούμενον σωματίδιον ἔχει μᾶζαν 1748 φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου.

2) Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 313) ὅτι ἡ ταχύτης υ ἑνὸς σωματιδίου δίδεται ἀπὸ ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{W_0}{W}\right)^2}$$

ὅπου W εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$W = W_\varkappa + W_0$$

Διὰ τὸ θεωρούμενον σωματίδιον ἡ ὁλική του ἐνέργεια εἶναι :

$$W = 62 \text{ MeV} + 874 \text{ MeV} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 936 \text{ MeV}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ σωματιδίου εἶναι :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{874 \text{ MeV}}{936 \text{ MeV}}\right)^2} \qquad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = c\sqrt{0,1351} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 0,37\ c}$$

316. Σωματίδιον ἔχει ὁλικὴν ἐνέργειαν W = 135 MeV καὶ κινητικὴν ἐνέργειαν W_κ = 10 MeV. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καὶ ἡ ὁρμὴ τοῦ σωματιδίου.

Ἡ ταχύτης υ τοῦ σωματιδίου (βλ. πρόβλημα 312) συναρτήσει τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας W τοῦ σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2}$$

ὅπου m_0c^2 εἶναι ἡ ἐνέργεια ἡ ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὴν μᾶζαν m_0 τοῦ σωματιδίου. Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου εἶναι :

$$W = W_\kappa + m_0c^2$$

ἔπεται ὅτι διὰ τὸ θεωρούμενον σωματίδιον ἔχομεν :

$$m_0c^2 = W - W_\kappa \qquad \text{ἤτοι} \qquad m_0c^2 = (135 - 10) \text{ MeV}$$

$$\text{καὶ} \qquad m_0c^2 = 125 \text{ MeV}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ταχύτης τοῦ σωματιδίου εἶναι :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{125 \text{ MeV}}{135 \text{ MeV}}\right)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = c\sqrt{0,1536} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 0,39\ c}$$

Ἡ ὁρμὴ τοῦ σωματιδίου δίδεται (βλ. πρόβλημα 310, ἐξίσ. 8) ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$J = \frac{\sqrt{W^2 - (m_0c^2)^2}}{c}$$

Οὕτω διὰ τὸ θεωρούμενον σωματίδιον εὑρίσκομεν :

$$J = \frac{\sqrt{135^2 - 125^2} \text{ MeV}}{c} \qquad \text{ἤτοι} \qquad J = \sqrt{2600} \text{ MeV/c} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{J = 51\ MeV/c}$$

317. Ἓν πρωτόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν W_κ = 400 MeV. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁρμὴ καὶ ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου τούτου.
Ἠρεμοῦσα μᾶζα πρωτονίου : $m_0 = 1,6725 \cdot 10^{-24}$ gr

Ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_0 τοῦ πρωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$m_0c^2 = 1,6725 \cdot 10^{-24} \text{ gr} \cdot (3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec})^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad m_0c^2 = 15,0525 \cdot 10^{-4} \text{ erg}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : 1 MeV = $1,6 \cdot 10^{-6}$ erg συνάγεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια m_0c^2, μετρημένη εἰς MeV, εἶναι :

$$m_0c^2 = \frac{15,0525 \cdot 10^{-4} \text{ erg}}{1,6 \cdot 10^{-6} \text{ erg/MeV}} \qquad \text{καὶ} \qquad m_0c^2 = 940 \text{ MeV}$$

Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$W = W_\kappa + m_0c^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = (400 + 940) \text{ MeV}$$

$$\text{καὶ} \qquad W = 1340 \text{ MeV}$$

Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 310, ἐξίσ. 8) ὅτι ἡ ὁρμὴ J τοῦ πρωτονίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$J = \frac{\sqrt{W^2 - (m_0c^2)^2}}{c}$$

Ἄρα εἶναι : $J = \frac{\sqrt{1340^2 - 400^2} \text{ MeV}}{c}$ ἤτοι $J = \sqrt{19\,560} \text{ MeV}/c$

καὶ $\mathbf{J \approx 140 \text{ MeV}/c}$

Ἡ ταχύτης υ τοῦ θεωρουμένου πρωτονίου (βλ. πρόβλημα 312) δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{W}\right)^2}$$

Ἄρα ἔχομεν : $\upsilon = c\sqrt{1 - \left(\frac{400 \text{ MeV}}{1340 \text{ MeV}}\right)^2}$ ἤτοι $\upsilon = c\sqrt{1 - 0{,}3^2}$

ἢ $\upsilon = c\sqrt{0{,}91}$ καὶ $\mathbf{\upsilon = 0{,}95\ c}$

ΤΟ ΑΤΟΜΟΝ

318 (291). **Πόση ἄπωσις ἀναπτύσσεται μεταξὺ ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου (Z = 2) καὶ ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἀσβεστίου (Z = 20), ὅταν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων πυρήνων εἶναι ἴση μὲ $1 \cdot 10^{-12}$ cm ;**

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς Z ἑνὸς στοιχείου φανερώνει τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχειωδῶν θετικῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, τὰ ὁποῖα φέρει ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ στοιχείου. Ὥστε εἶναι :

θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον ἀτομικοῦ πυρῆνος : $Q = +Z \cdot e$

Ἑπομένως ἔχομεν :

διὰ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα ἡλίου : $Q_1 = 2e$

διὰ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα ἀσβεστίου : $Q_2 = 20e$

Ἡ δύναμις, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται μεταξὺ τῶν δύο ἀτομικῶν πυρήνων, δίδεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb :

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \qquad (1)$$

ὅπου r εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πυρήνων. Οὕτω ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξισώσεως (1) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ζητουμένην ἄπωσιν. Δίδεται ὅτι εἶναι $r = 1 \cdot 10^{-12}$ cm. Ἄρα ἡ ζητουμένη ἄπωσις μεταξὺ τῶν δύο ἀτομικῶν πυρήνων εἶναι :

$$F = \frac{2e \cdot 20e}{(10^{-12})^2} \text{ dyn} \quad \text{ἤτοι} \quad F = 10^{24} \cdot 40 \cdot e^2 \text{ dyn}$$

Δίδεται ὅτι τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι :

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb ἤτοι $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου

Ἄρα ἡ ἄπωσις F εἶναι :

$F = 10^{24} \cdot 40 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2$ dyn ἤτοι $\mathbf{F = 881{,}6 \cdot 10^4\ dyn}$

* Κατὰ προσέγγισιν ἡ δύναμις F εἶναι :

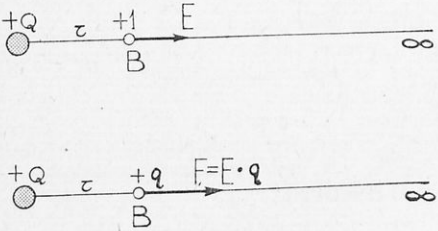
$F = 8816$ gr* ἢ $F = 8{,}816$ kgr*

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα φαίνεται πόσον μεγάλη εἶναι ἡ δύναμις Coulomb, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται μεταξὺ τῶν δύο ἀτομικῶν πυρήνων, ὅταν οὗτοι εὑρεθοῦν εἰς μικρὰν ἀπόστασιν μεταξύ των ($r = 0{,}000\,000\,000\,001$ cm).

319 (292). Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν εἰς ἓν σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm ἀπὸ ἓν πρωτόνιον, ἔχον θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb. Πόσην δυναμικὴν ἐνέργειαν ἔχει ἓν ἠλεκτρόνιον, ὅταν εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Β;

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἓν σημεῖον Β τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸ σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον $+Q$, τὸ δυναμικὸν U_B εἶναι :

$$U_B = \frac{+Q}{r}$$



Σχ. 82

ὅπου Q εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον, εἰς τὸ ὁποῖον ὀφείλεται τὸ ἠλεκτρικὸν πεδίον καὶ r εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὸ σημειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον (σχ. 82). Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πρωτονίου :

$$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb}$$

ἢ $$Q = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

παράγει πέριξ αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει $r = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm, τὸ δυναμικὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$U_B = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}}{0{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_B = 0{,}096\ \text{ΗΣΜ - δυναμικοῦ}}$$

Εἰς Volt τὸ ἀνωτέρω δυναμικὸν U_B εἶναι :

$$U_B = 0{,}096\ \text{ΗΣΜ} \cdot 300\ \text{V/ΗΣΜ} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U_B = 28{,}8\ V}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δυναμικοῦ εἰς ἓν σημεῖον Β τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ δυναμικὸν U_B ἐκφράζει τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ πεδίου κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $+1$ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β τοῦ πεδίου μέχρι τοῦ ἀπείρου. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου φέρωμεν τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον $+q$, τότε κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου $+q$, ἕνεκα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἀπὸ τὸ σημεῖον Β εἰς τὸ ἄπειρον παράγεται ἔργον E_B ἴσον μέ :

$$E_B = U_B \cdot q \qquad (1) \qquad \text{ἢ} \qquad E_B = \frac{Q \cdot q}{r} \qquad (2)$$

Τὸ ἔργον τοῦτο E_B ἐκφράζει τὴν δυναμικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον $+q$, ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν λοιπὸν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἓν ἠλεκτρόνιον, φερόμενον εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἔχει, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, δυναμικὴν ἐνέργειαν ἴσην μέ :

$$E_{\delta\upsilon\nu} = U_B \cdot e \quad \text{ἤτοι} \quad E_{\delta\upsilon\nu} = 28{,}8\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{E_{\delta\upsilon\nu} = 4{,}6 \cdot 10^{-18}\ Joule} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{E_{\delta\upsilon\nu} = 4{,}6 \cdot 10^{-11}\ erg}$$

320 (293). Νὰ εὑρεθῇ τὸ δυναμικὸν εἰς ἓν σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἀπέχει $5 \cdot 10^{-12}$ cm ἀπὸ ἕνα ἀτομικὸν πυρῆνα, ἔχοντα ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 80$. Πόσην δυναμικὴν ἐνέργειαν ἔχει ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου ($Z = 2$), ὅταν οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ πεδίου;

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Ὁ ἀτομικὸς πυρήν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 80$, φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον Q (βλ. πρόβλημα 318), ἴσον μέ:

$$Q = +Z \cdot e$$

Οὕτω πέριξ τοῦ ἀτομικοῦ τούτου πυρῆνος ὑπάρχει ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἰς τὸ σημεῖον B τοῦ πεδίου, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν $r = 5 \cdot 10^{-12}$ cm ἀπὸ τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον Q, τὸ δυναμικὸν εἶναι:

$$U_B = +\frac{Q}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad U_B = +\frac{Z \cdot e}{r}$$

Τὸ στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον εἶναι:

$$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb} \quad \text{ἢ} \quad Q = 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἄρα τὸ δυναμικὸν U_B εἶναι:

$$U_B = \frac{80 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{ΗΣΜ}}{5 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}} \quad \text{καὶ} \quad U_B = 7680\ \text{ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

$$\text{ἢ} \quad U_B = 2{,}3 \cdot 10^6\ \text{V}$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$q = +Z \cdot e \quad \text{ἤτοι} \quad q = +2e$$

Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον B τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τότε ἔχει δυναμικὴν ἐνέργειαν (βλ. ἐξίσωσιν 1, πρόβλημα 319) ἴσην μέ:

$$E_{\delta\upsilon\nu} = U_B \cdot q \quad \text{ἤτοι} \quad E_{\delta\upsilon\nu} = (2{,}3 \cdot 10^6\ \text{V}) \cdot (2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb})$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{E_{\delta\upsilon\nu} = 7{,}36 \cdot 10^{-13}\ Joule} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{E_{\delta\upsilon\nu} = 7{,}36 \cdot 10^{-6}\ erg}$$

321. Ἓν νετρόνιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα $\upsilon_1 = 10^1$ cm/sec προσπίπτει ἐπὶ ἑνὸς ἠρεμοῦντος ἠλεκτρονίου. Τὰ δύο αὐτὰ σωματίδια θεωροῦνται ὡς ἀπολύτως ἐλαστικαὶ σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται κεντρικὴν κροῦσιν. Πόσην ταχύτητα ἔχει ἕκαστον σωματίδιον μετὰ τὴν κροῦσιν:

Μᾶζα νετρονίου: $\mathbf{m_1 = 1{,}6747 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m_2 = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Πρὸ τῆς κρούσεως ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι $\upsilon_2 = 0$. Μετὰ τὴν κροῦσιν τὸ νετρόνιον καὶ τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχουν ἀντιστοίχως ταχύτητα V_1 καὶ V_2. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 \quad \text{ἢ} \quad m_1 \cdot \upsilon_1 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 \qquad (1)$$

διότι εἶναι $\upsilon_2 = 0$. Ἐπίσης σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2$$

$$\text{ἢ} \quad m_1 \cdot \upsilon_1^2 = m_1 \cdot V_1^2 + m_2 \cdot V_2^2 \qquad (2)$$

διότι εἶναι $\upsilon_2 = 0$. Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$m_1 \cdot (\upsilon_1 - V_1) = m_2 \cdot V_2 \qquad (3)$$

$$m_1 \cdot (\upsilon_1^2 - V_1^2) = m_2 \cdot V_2^2 \qquad (4)$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (3), λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2$$

Οὕτω τελικῶς ἔχομεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$m_1 \cdot (\upsilon_1 - V_1) = m_2 \cdot V_2 \qquad (5)$$

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2 \qquad (6)$$

Ἂν λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων, λαμβάνομεν :

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, \upsilon_1}{m_1 + m_2} \quad \text{καὶ} \quad V_2 = \frac{2\, m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Ὥστε μετὰ τὴν κροῦσιν ἕκαστον τῶν δύο σωματιδίων ἔχει ταχύτητα :

τὸ νετρόνιον :

$$V_1 = \frac{(16\,747 \cdot 10^{-28} - 9 \cdot 10^{-28})\ \mathrm{gr}}{(16\,747 \cdot 10^{-28} + 9 \cdot 10^{-28})\ \mathrm{gr}} \cdot 10^4\ \mathrm{cm/sec} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{V_1 = 0{,}99 \cdot 10^4\ cm/sec}$$

τὸ ἠλεκτρόνιον :

$$V_2 = \frac{2 \cdot 16\,747 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{gr}}{(16\,747 \cdot 10^{-28} + 9 \cdot 10^{-28})\ \mathrm{gr}} \cdot 10^4\ \mathrm{cm/sec} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{V_2 = 1{,}99 \cdot 10^4\ cm/sec}$$

322 (294). Μὲ πόσην ταχύτητα κινεῖται τὸ ἠλεκτρόνιον τοῦ ἀτόμου ὑδρογόνου ἐπὶ τῆς θεμελιώδους κβαντικῆς τροχιᾶς;

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Ἡ πρώτη συνθήκη τοῦ Bohr καθορίζει ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον δύναται νὰ περιφέρεται πέριξ τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος μόνον ἐπὶ ὡρισμένων κβαντικῶν τροχιῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἀκτὶς r προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον σχέσιν :

$$2\pi \cdot m\upsilon r = n \cdot h \qquad (1)$$

ὅπου h εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ Planck, m ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου, υ ἡ ταχύτης αὐτοῦ καὶ n ὁ κύριος κβαντικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 1, 2, 3 . . . . . Διὰ $n = 1$ ἀντιστοιχεῖ ἡ θεμελιώδης κβαντικὴ τροχιά, ἡ ὁποία ἔχει τὴν μικροτέραν ἀκτῖνα. Εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου τὸ ἠλεκτρόνιον συγκρατεῖται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους τροχιᾶς, ἀκτῖνος $r = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm, διότι ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἐνεργεῖ μία κεντρομόλος δύναμις :

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r}$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ F εἶναι ἡ ἕλξις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ ὁ πυρὴν τοῦ ἀτόμου ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ ἡ ὁποία, σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦ Coulomb, εἶναι (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἴση μέ :

$$F = \frac{e \cdot e}{r^2} \quad \text{ἤτοι} \quad F = \frac{e^2}{r^2}$$

Ἄρα κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ μιᾶς κβαντικῆς τροχιᾶς, ἀκτῖνος r, ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{2\pi \cdot m\upsilon r^2}{m \cdot \upsilon^2} = \frac{n \cdot h \cdot r^2}{e^2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{2\pi}{\upsilon} = \frac{n \cdot h}{e^2}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot e^2}{n \cdot h}$$

Διὰ τὴν θεμελιώδη κβαντικὴν τροχιὰν εἶναι $n = 1$. Ἄρα ἔχομεν:

$$\upsilon = \frac{2\pi \cdot e^2}{h} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \frac{2\pi \cdot (\ 4{,}8 \cdot 10^{-10}\ )^2}{6{,}62 \cdot 10^{-27}} \ \text{C.G.S.}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\upsilon = 22 \cdot 10^7 \ \mathrm{cm/sec}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\upsilon = 2200 \ \mathrm{km/sec}}$$

323. Εἰς ἓν ἄτομον ὑδρογόνου τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς ἀκτῖνος $r = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm, ἡ δὲ συχνότης τῆς κινήσεως αὐτοῦ εἶναι $\nu = 6{,}6 \cdot 10^{15}\ \mathrm{sec}^{-1}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ ρεύματος τούτου εἰς τὸ κέντρον τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου.

Ἠλεκτρικὸν φορτίον ἠλεκτρονίου (κατ' ἀπόλυτον τιμήν) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου διέρχεται κατὰ δευτερόλεπτον ἠλεκτρικὸν φορτίον:

$$Q = e \cdot \nu \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{15}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

$$\text{ἄρα} \quad Q = 1{,}056 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Cb/sec}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι:

$$\boldsymbol{I = 1{,}056 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{I = 1056\ \mathrm{mA}}$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὸ κέντρον κυκλικοῦ ἀγωγοῦ, διαρρεομένου ἀπὸ ρεῦμα ἐντάσεως I, τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχει ἔντασιν:

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi I}{r}\ \text{Gauss}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι:

$$H = \frac{1}{10} \cdot \frac{2\pi \cdot 1{,}056 \cdot 10^{-3}}{0{,}53 \cdot 10^{-8}}\ \text{Gauss} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{H = 1{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{Gauss}}$$

324. Διὰ νὰ ἰονισθῇ ἓν ἄτομον ἀπαιτεῖται ἐνέργεια ἴση μὲ $E = 21{,}5 \cdot 10^{-12}$ erg. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἐνέργεια αὕτη εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ.

Μονὰς ἐνεργείας : $1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg

Ἡ ἐνέργεια $E = 21{,}5 \cdot 10^{-12}$ erg, μετρημένη εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ (eV) εἶναι:

$$E = \frac{21{,}5 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg/eV}} \quad \text{ἤτοι} \quad E = \frac{215}{16}\ \mathrm{eV} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{E = 13{,}4375\ \mathrm{eV}}$$

325. Εἰς ἓν ἄτομον ἓν ἠλεκτρόνιον αὐτοῦ μεταπίπτει ἀπὸ μίαν ἐξωτερικὴν εἰς μίαν ἐσωτερικὴν κβαντικὴν τροχιὰν καὶ ἐκπέμπει ἓν φωτόνιον ἔχον ἐνέργειαν ἴσην μὲ 1,88 eV. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας.

Σταθερὰ τοῦ Planck : $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · sec

Τὸ ἐκπεμπόμενον φωτόνιον ἔχει ἐνέργειαν: $q = 1{,}88$ eV. Ἐπειδὴ εἶναι:

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg} \quad \text{ἕπεται ὅτι εἶναι:} \quad q = 1{,}88 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν: $q = h\nu$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συχνότης ν τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$\nu = \frac{q}{h} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{1{,}88 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}}{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}} \quad \text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\nu = 454 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}}$$

Τὸ δὲ μῆκος κύματος λ τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς εἶναι :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{454 \cdot 10^{12}\ \text{sec}^{-1}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\lambda = 6{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda = 6500\ \text{Å}}$$

326 (295). **Κατὰ τὴν διέγερσιν ἑνὸς ἀτόμου ἓν ἠλεκτρόνιον αὐτοῦ μεταπηδᾷ ἀπὸ τὴν θεμελιώδη κβαντικὴν τροχιὰν εἰς ἄλλην ἐξωτερικὴν κβαντικὴν τροχιὰν καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου αὐξάνεται κατὰ 3,3 · 10^{-12} erg. Πόση εἶναι ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας, τὴν ὁποίαν θὰ ἐκπέμψῃ τὸ ἄτομον κατὰ τὴν ἐπάνοδον τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς θεμελιώδους κβαντικῆς τροχιᾶς;**

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\quad \mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Ἡ δευτέρα συνθήκη τοῦ Bohr καθορίζει ὅτι ἓν ἠλεκτρόνιον ἐκπέμπει ἠλεκτρομαγνητικὴν ἀκτινοβολίαν μόνον, ὅταν τὸ ἠλεκτρόνιον μεταπηδᾷ ἀπὸ μίαν κβαντικὴν τροχιὰν μεγαλυτέρας ἐνεργείας εἰς ἄλλην κβαντικὴν τροχιὰν μικροτέρας ἐνεργείας. Ἡ ἐνέργεια τοῦ ἐκπεμπομένου φωτονίου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐνεργειῶν τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῶν δύο κβαντικῶν τροχιῶν. Ἄρα ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$h\nu = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} \quad \text{ἢ} \quad h\nu = \Delta E$$

ὅπου ΔΕ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ἐνεργείας τοῦ ἠλεκτρονίου, ἡ ὁποία συμβαίνει κατὰ τὴν μετάβασιν αὐτοῦ ἀπὸ μίαν κβαντικὴν τροχιὰν εἰς ἄλλην. Δίδεται ὅτι κατὰ τὴν διέγερσιν τοῦ ἀτόμου τὸ ἠλεκτρόνιον μεταπηδᾷ ἀπὸ τὴν θεμελιώδη κβαντικὴν τροχιὰν εἰς ἄλλην ἐξωτερικὴν κβαντικὴν τροχιὰν καὶ ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου αὐξάνεται κατὰ $\Delta E = 3{,}3 \cdot 10^{-12}$ erg. Ὅταν λοιπὸν τὸ ἠλεκτρόνιον θὰ μεταπέσῃ πάλιν ἐπὶ τῆς θεμελιώδους κβαντικῆς τροχιᾶς, ἡ ἐνέργειά του θὰ ἐλαττωθῇ κατὰ $\Delta E = 3{,}3 \cdot 10^{-12}$ erg, καὶ τὸ ἠλεκτρόνιον θὰ ἐκπέμψῃ ἠλεκτρομαγνητικὴν ἀκτινοβολίαν, ἔχουσαν συχνότητα :

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}}{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}} \quad \text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\nu = 5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας εἶναι :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{5 \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\lambda = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda = 6000\ \text{Å}}$$

327 (296). **Κατὰ τὴν διέγερσιν ἑνὸς ἀτόμου ἓν ἠλεκτρόνιον αὐτοῦ μεταπηδᾷ ἀπὸ τὴν θεμελιώδη εἰς ἄλλην ἐξωτερικὴν κβαντικὴν τροχιάν. Ἐὰν ἡ αὔξησις τῆς ἐνεργείας τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι ἴση μὲ 4,95 · 10^{-12} erg, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας τὴν ὁποίαν ἐκπέμπει τὸ ἄτομον κατὰ τὴν ἐπάνοδον τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ τῆς θεμελιώδους κβαντικῆς τροχιᾶς.**

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\quad \mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Κατὰ τὴν διέγερσιν τοῦ θεωρουμένου ἀτόμου ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτρονίου αὐξάνεται κατὰ $\Delta E = 4{,}95 \cdot 10^{-12}$ erg. Ὅταν ἔπειτα τὸ ἠλεκτρόνιον ἐπανέρχεται ἐπὶ τῆς θεμελιώδους κβαντικῆς τροχιᾶς (βλ. πρόβλημα 326), σύμφωνα μὲ τὴν δευτέραν συνθήκην τοῦ Bohr, ἡ ποσότης ἐνεργείας ΔΕ ἐκπέμπεται ἀπὸ τὸ ἠλεκτρόνιον ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς φωτονίου. Ἡ συχνότης ν τῆς ἐκπεμπομένης ἠλεκτρομαγνητικῆς ἀκτινοβολίας προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$h\nu = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} \quad \text{ἢ} \quad h\nu = \Delta E$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = \Delta E$$

Ὥστε τὸ μῆκος κύματος λ τῆς ἐκπεμπομένης ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec} \cdot 3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}}{4{,}95 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \boldsymbol{\lambda = 4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda = 4000\ \text{Å}}$$

328 (297), **Μία ἀκτινοβολία ἔχει μῆκος κύματος 6600 Å. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια, ἡ ἰσοδύναμος μᾶζα καὶ ἡ ὁρμὴ ἑνὸς φωτονίου τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης.**

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\boldsymbol{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}}$

Ἡ θεωρουμένη ἀκτινοβολία ἔχει μῆκος κύματος:

$$\lambda = 6000\ \text{Å} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = 6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}$$

καὶ συχνότητα:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}}{6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm}}$$

$$\text{ἄρα} \quad \nu = 5 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

Τὸ φωτόνιον τῆς ἀκτινοβολίας αὐτῆς μεταφέρει ἐνέργειαν:

$$E = h\nu \quad \text{ἤτοι} \quad E = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec} \cdot 5 \cdot 10^{14}\ \mathrm{sec^{-1}}$$

$$\text{ἄρα} \quad E = 3{,}11 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}$$

Ὅπως εἶναι γνωστόν, τὸ φαινόμενον τοῦ Compton ἀποδεικνύει ὅτι εἰς μερικὰς περιπτώσεις τὸ φωτόνιον μιᾶς ἀκτινοβολίας συμπεριφέρεται ὡς σωματίδιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐνέργειαν, μᾶζαν καὶ ὁρμὴν καθοριζομένην ἀπὸ τὴν συχνότητα ν τῆς ἀκτινοβολίας. Οὕτω σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας ἡ ἐνέργεια E τοῦ φωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν m, ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν:

$$E = mc^2$$

Ἄρα ἡ ἐνέργεια τοῦ φωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν:

$$m = \frac{E}{c^2} \quad \text{ἤτοι} \quad m = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$\text{ἄρα} \quad m = \frac{3{,}11 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}}{9 \cdot 10^{20}\ \mathrm{cm^2/sec^2}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{m = 3{,}4 \cdot 10^{-33}\ \mathrm{gr}}$$

Ἡ δὲ ὁρμὴ J τοῦ φωτονίου εἶναι:

$$J = m \cdot c \quad \text{ἤτοι} \quad J = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c \quad \text{ἄρα} \quad J = \frac{h\nu}{c}$$

Ὥστε τὸ φωτόνιον τῆς θεωρουμένης ἀκτινοβολίας ἔχει ὁρμήν:

$$J = \frac{3{,}11 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}}{3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{J = 1{,}04 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{gr} \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}}$$

329 (298). **Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος ἑνὸς ἠλεκτρονίου, τὸ ὁποῖον κινεῖται μὲ ταχύτητα ἴσην μὲ τὸ ἓν τέταρτον τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός;**

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\boldsymbol{h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}}$

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\boldsymbol{m = 9 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{gr}}$

Ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Louis de Broglie, ἓν σωματίδιον μάζης m, κινούμενον μὲ ταχύτητα υ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὑλικὸν κῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος κύματος λ, προσδιοριζόμενον ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν τοῦ Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$$

Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι : $m = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Δίδεται ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ ταχύτητα :

$$\upsilon = \frac{c}{4} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon = \frac{3 \cdot 10^{10}}{4} \text{ cm/sec}$$

Ἄρα τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἰσοδυνάμου ὑλικοῦ κύματος εἶναι :

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}}{9 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{4} \text{ cm/sec}}$$

ἤτοι $\boldsymbol{\lambda = 0{,}98 \cdot 10^{-9}}$ **cm** καὶ $\boldsymbol{\lambda = 0{,}098}$ **Å**

330 (299). **Ἓν ἠλεκτρόνιον ἐπιταχύνεται ὑπὸ τάσιν 6100 V. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ ἠλεκτρονίου;**

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\boldsymbol{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}}$ **Cb**

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\boldsymbol{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}}$ **erg · sec**

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\boldsymbol{m = 9 \cdot 10^{-28}}$ **gr**

Τὸ ἠλεκτρόνιον ἔχει (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb} \quad \text{ἤτοι} \quad e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Ἡ ἐφαρμοζομένη τάσις εἶναι :

$$U = 6100 \text{ V} \quad \text{ἤτοι} \quad U = \frac{6100 \text{ V}}{300 \text{ V/ΗΣΜ}} \quad \text{καὶ} \quad U = \frac{61}{3} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $\frac{1}{2} m\upsilon^2$, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ ἠλεκτρόνιον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον eU, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{1}{2} m\upsilon^2 = eU$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον ἀποκτᾷ ταχύτητα :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \qquad (1)$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἠλεκτρόνιον ὑλικοῦ κύματος (βλ. πρόβλημα 329) προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\,meU}}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος λ εἶναι :

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}}{\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 61/3) \text{ erg}}}$$

ἤτοι $\boldsymbol{\lambda = 0{,}157 \cdot 10^{-8}}$ **cm** καὶ $\boldsymbol{\lambda = 0{,}157}$ **Å**

331 (300). **Ἓν σωματίδιον α κινεῖται μὲ ταχύτητα 72 000 km/sec. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ σωματιδίου τούτου;**

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Μᾶζα σωματιδίου α : $\mathbf{m = 6{,}6 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Τὸ σωματίδιον α ἔχει μᾶζαν:

$$m = 6{,}6 \cdot 10^{-24}\ \text{gr}$$

καὶ κινεῖται μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = 72 \cdot 10^3\ \text{km/sec} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = 72 \cdot 10^8\ \text{cm/sec}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ σωματίδιον α ὑλικοῦ κύματος (βλ. πρόβλημα 329) δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον μῆκος κύματος εἶναι:

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}}{6{,}6 \cdot 10^{-24}\ \text{gr} \cdot 72 \cdot 10^8\ \text{cm/sec}}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \boldsymbol{\lambda = 1{,}4 \cdot 10^{-13}\ \mathbf{cm}} \qquad \text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\lambda = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathring{\mathbf{A}}}$$

332 (301). **Εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν τὰ μόρια τοῦ ἀέρος ἔχουν κατὰ προσέγγισιν ταχύτητα 500 m/sec. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος ἑνὸς μορίου ὀξυγόνου τοῦ ἀέρος;**

Μᾶζα μορίου ὀξυγόνου : $\mathbf{m = 52{,}12 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Τὸ μόριον τοῦ ὀξυγόνου ἔχει μᾶζαν:

$$m = 52{,}12 \cdot 10^{-24}\ \text{gr}$$

καὶ εἰς τὴν συνήθη θερμοκρασίαν κινεῖται μὲ ταχύτητα:

$$\upsilon = 5 \cdot 10^4\ \text{cm/sec}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ μόριον τοῦ ὀξυγόνου ὑλικοῦ κύματος εἶναι:

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}}{52{,}12 \cdot 10^{-24}\ \text{gr} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{cm/sec}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \boldsymbol{\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-9}\ \mathbf{cm}} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\lambda = 0{,}25\ \mathring{\mathbf{A}}}$$

333 (302). **Τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος ἑνὸς ἠλεκτρονίου εὑρέθη ὅτι εἶναι λ = 1,65 Å. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου;**

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Δίδεται ὅτι τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἠλεκτρόνιον ὑλικοῦ κύματος εἶναι:

$$\lambda = 1{,}65\ \mathring{A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = 1{,}65 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Broglie: $\lambda = \dfrac{h}{m\upsilon}$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου τούτου εἶναι:

$$\upsilon = \frac{h}{m\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}}{9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr} \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 4{,}4 \cdot 10^8\ \mathbf{cm/sec}} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 4400\ \mathbf{km/sec}}$$

334 (303). Νὰ ὑπολογισθῇ εἰς ἠλεκτρονιοβὸλτ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς σωματιδίου β, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα ἴσην μὲ τὰ 0,8 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός.

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Τὸ σωματίδιον β εἶναι ἓν ἠλεκτρόνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει ταχύτητα :

$$\upsilon = 0{,}8\ c \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^{10}\ cm/sec \qquad \text{καὶ} \qquad \upsilon = 2{,}4 \cdot 10^{10}\ cm/sec$$

Τὸ ἠλεκτρόνιον τοῦτο ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W = \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{1}{2}\, 9 \cdot 10^{-28}\ gr \cdot (\,2{,}4 \cdot 10^{10}\ cm/sec\,)^2$$

$$\text{ἄρα} \qquad W = 2{,}592 \cdot 10^{-9}\ erg$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι 1 ἠλεκτρονιοβὸλτ (1 eV) εἶναι ἡ ἐνέργεια τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἓν ἠλεκτρόνιον, ὅταν τοῦτο μετακινῆται μεταξὺ δύο σημείων ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαφορὰν δυναμικοῦ ἴσην μὲ 1 Volt. Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ εἶναι :

$$W' = e \cdot U \qquad \text{ἤτοι} \qquad 1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb \cdot 1\ V$$

$$\text{καὶ} \qquad 1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Joule \qquad \text{ἢ} \qquad 1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg$$

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσα κινητικὴ ἐνέργεια W τοῦ ἠλεκτρονίου, μετρηθεῖσα εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, εἶναι :

$$W = \frac{2{,}592 \cdot 10^{-9}\ erg}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg/eV} \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{W = 1{,}6 \cdot 10^3\ eV}$$

335. Ἓν πρωτόνιον κινεῖται ἔχον κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ 100 eV. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου εἰς km/sec καὶ τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ σωματιδίου τούτου;

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $\mathbf{e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Cb}$

Μᾶζα πρωτονίου : $\mathbf{m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ μονὰς ἐνεργείας ἠλεκτρονιοβὸλτ εἶναι :

$$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg$$

Ἄρα τὸ ἀνωτέρω πρωτόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν W, ἴσην μέ :

$$W = 100\ eV \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ erg$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν : $W = \frac{1}{2}\, m_p \upsilon^2$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,W}{m_p}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ erg}{1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \upsilon = 1{,}39 \cdot 10^7\ cm/sec \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{\upsilon = 139\ km/sec}$$

Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ πρωτονίου τούτου εἶναι :

$$\lambda = \frac{h}{m_p \upsilon} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}{(\,1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr\,) \cdot (\,1{,}39 \cdot 10^7\ cm/sec\,)}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{\lambda = 2{,}84 \cdot 10^{-10}\ cm}$$

336. Εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου ἡ ταχύτης (υ) τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ μιᾶς κβαντικῆς τροχιᾶς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = \frac{2\pi e^2}{nh} \qquad (1)$$

ὅπου n εἶναι ὁ κύριος κβαντικὸς ἀριθμός. Ποία σχέσις δίδει τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ ἠλεκτρονίου;

Τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ὑλικοῦ κύματος ἑνὸς σωματιδίου μάζης m δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἐξίσωσιν :

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} \qquad (2)$$

Εἰς τὸ ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου ἡ ταχύτης τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ ἑκάστης κβαντικῆς τροχιᾶς δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1). Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ ἠλεκτρονίου ἐπὶ ἑκάστης κβαντικῆς τροχιᾶς εἶναι :

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot \dfrac{2\pi e^2}{nh}} \quad \text{ἤτοι} \quad \boldsymbol{\lambda = \frac{nh^2}{2\pi\, me^2}}$$

ὅπου n εἶναι ὁ κύριος κβαντικὸς ἀριθμός, m ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ e τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον αὐτοῦ.

337. Ἓν ἠλεκτρόνιον καὶ ἓν πρωτόνιον κινοῦνται, ἔχοντα τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν. Ποῖον λόγον ἔχουν τὰ μήκη κύματος τῶν κυμάτων Broglie τῶν δύο τούτων σωματιδίων;

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\boldsymbol{m_e}$

Μᾶζα πρωτονίου : $\boldsymbol{m_p = 1847 \cdot m_e}$

Τὸ μῆκος κύματος Broglie διὰ τὸ ἠλεκτρόνιον καὶ τὸ πρωτόνιον εἶναι ἀντιστοίχως λ_e καὶ λ_p. Ἕκαστον τῶν δύο τούτων σωματιδίων ἔχει τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W. Ἄρα ἡ ταχύτης ἑκάστου σωματιδίου εἶναι :

τοῦ ἠλεκτρονίου : $$\upsilon_e = \sqrt{\frac{2W}{m_e}}$$

τοῦ πρωτονίου : $$\upsilon_p = \sqrt{\frac{2W}{m_p}}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\frac{\upsilon_e}{\upsilon_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\upsilon_e}{\upsilon_p} = \sqrt{\frac{1847 \cdot m_e}{m_e}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\upsilon_e}{\upsilon_p} = \sqrt{1847}$$

Τὸ μῆκος κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος δι' ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω σωματιδίων εἶναι :

τοῦ ἠλεκτρονίου : $$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot \upsilon_e}$$

τοῦ πρωτονίου : $$\lambda_p = \frac{h}{m_p \cdot \upsilon_p}$$

ὅπου h εἶναι ἡ σταθερὰ τοῦ Planck. Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος τῶν μηκῶν κύματος λ_e καὶ λ_p εἶναι :

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{m_p \cdot \upsilon_p}{m_e \cdot \upsilon_e} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{1847 \cdot m_e}{m_e} \cdot \frac{\upsilon_p}{\upsilon_e}$$

Ἄρα $$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{1847}{\sqrt{1847}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{1847} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = 42{,}9}$$

* Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, τὸ μῆκος κύματος λ_p τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ πρωτονίου εἶναι 43 περίπου φορὰς μικρότερον ἀπὸ τὸ μῆκος κύματος λ_e τοῦ ὑλικοῦ κύματος τοῦ ἠλεκτρονίου. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο καταφαίνεται ἡ ἐπίδρασις τῆς μάζης ἐπὶ τοῦ μήκους κύματος τοῦ ὑλικοῦ κύματος.

338. Ἀτομικὸς πυρήν, εὑρισκόμενος ἐν ἠρεμίᾳ καὶ ἔχων μᾶζαν M, ἐκπέμπει ἓν φωτόνιον τὸ ὁποῖον μεταφέρει ἐνέργειαν $q = h\nu$. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις δίδει τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος.

Ἐφαρμογή. Ἀτομικὸς πυρὴν βαρίου Ba ἐκπέμπει ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας γ, τὸ ὁποῖον μεταφέρει ἐνέργειαν $q = 0{,}66$ MeV. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος βαρίου εἰς eV.

Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος βαρίου: Ba = 136,9502 amu

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: 1 amu = $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gr

Μονὰς ἐνεργείας: 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg

Ἀπὸ τὸ φαινόμενον τοῦ Compton εὑρέθη ὅτι τὸ φωτόνιον ἔχει:

$$\text{μᾶζαν} \quad m = \frac{h\nu}{c^2} \qquad \text{καὶ ὁρμὴν} \quad J = \frac{h\nu}{c}$$

Ὁ ἠρεμῶν ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει μᾶζαν M. Ὅταν ἐκ τοῦ πυρῆνος τούτου ἐκσφενδονίζεται τὸ φωτόνιον, τότε, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἡ ὁρμὴ τοῦ φωτονίου εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος πρὸς τὴν ὁρμὴν τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος, ἤτοι ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$M \cdot \upsilon = m \cdot c$$

ὅπου υ εἶναι ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος. Ἡ ταχύτης αὐτὴ εἶναι:

$$\upsilon = \frac{m \cdot c}{M}$$

Συνεπῶς ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} M \cdot \upsilon^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot c^2}{M}$$

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὴν μᾶζαν m τοῦ φωτονίου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{(h\nu)^2}{M \cdot c^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{W = \frac{q^2}{2M \cdot c^2}} \tag{1}$$

Ἐφαρμογή. Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν βαρίου ἔχει μᾶζαν:

$$M = 136{,}9502 \text{ amu} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ gr/amu} \qquad \text{καὶ} \qquad M = 227{,}34 \cdot 10^{-24} \text{ gr}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ὁ παρονομαστὴς ἐκφράζει ἔργια, διότι εἶναι:

$$\text{gr} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2} = \left(\text{gr} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right) \cdot \text{cm} = \text{dyn} \cdot \text{cm} = \text{erg}$$

Ἂν ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον $2\,Mc^2$, εὑρίσκομεν:

$$2\,Mc^2 = 2 \cdot 227{,}34 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ erg} \qquad \text{ἤτοι} \qquad 2\,Mc^2 = 4092{,}12 \cdot 10^{-4} \text{ erg}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια εἰς eV εἶναι:

$$2\,Mc^2 = \frac{4092{,}12 \cdot 10^{-4} \text{ erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ erg/eV}} \qquad \text{ἄρα} \qquad 2\,Mc^2 = 2557{,}5 \cdot 10^8 \text{ eV}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος βαρίου εἶναι :

$$W = \frac{(0{,}66 \cdot 10^6 \text{ eV})^2}{2557{,}5 \cdot 10^8 \text{ eV}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{W = 1{,}7\ eV}$$

339. Ἀκτινοβολία Röntgen ἔχει μῆκος κύματος λ = 7 Å καὶ προσπίπτει ἐπὶ ἑνὸς ὑλικοῦ. Τότε ἀπὸ τὸ θεωρούμενον ὑλικὸν ἐκφεύγουν ἠλεκτρόνια, ἔχοντα ταχύτητα υ = 1000 km/sec, συγχρόνως δὲ παράγεται καὶ μία δευτερογενὴς ἀκτινοβολία ἔχουσα μῆκος κύματος λ', τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μῆκος κύματος λ τῆς προσπιπτούσης ἀκτινοβολίας. Νὰ ἑρμηνευθῇ τὸ φαινόμενον τοῦτο καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύματος λ'.

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Ἓν φωτόνιον τῆς προσπιπτούσης ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q = h\nu \qquad \text{ἤτοι} \qquad q = \frac{hc}{\lambda}$$

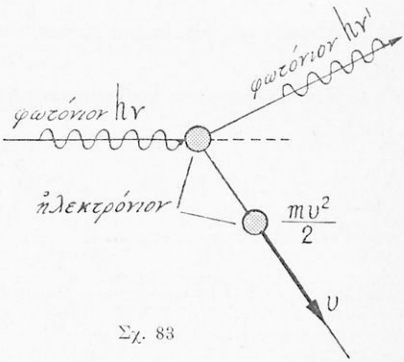
Τὸ φωτόνιον τοῦτο προσπίπτει ἐπὶ ἑνὸς ἠλεκτρονίου τοῦ θεωρουμένου ὑλικοῦ (σχ. 83). Τότε συμβαίνει ἐλαστικὴ κροῦσις τοῦ φωτονίου ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου, δηλ. λαμβάνει χώραν τὸ γνωστὸν φαινόμενον τοῦ Compton. Τὸ ἐξερχόμενον ἀπὸ τὸ σῶμα ἠλεκτρόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν $W = \frac{m\upsilon^2}{2}$, τὸ δὲ φωτόνιον τῆς δευτερογενοῦς ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q' = h\nu' \qquad \text{ἤτοι} \qquad q' = \frac{hc}{\lambda'}$$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$q = W + q'$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \frac{hc}{\lambda} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{hc}{\lambda'}$$



Σχ. 83

Τὸ προσπίπτον ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου φωτόνιον μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{ἤτοι} \qquad q = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec} \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}{7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad q = 2{,}828 \cdot 10^{-9} \text{ erg}$$

Τὸ ἐξερχόμενον ἠλεκτρόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W = \frac{m\upsilon^2}{2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = \frac{9 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \cdot 10^{16} \text{ cm}^2/\text{sec}^2}{2}$$

$$\text{καὶ} \qquad W = 4{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

Ἄρα τὸ φωτόνιον τῆς παραγομένης δευτερογενοῦς ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q' = q - W \qquad \text{ἤτοι} \qquad q' = (2{,}828 \cdot 10^{-9} \text{ erg}) - (4{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ erg})$$

$$\text{ἢ} \qquad q' = 2823{,}5 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

Ὥστε τὸ μῆκος κύματος λ′ τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου εἶναι :

$$\lambda' = \frac{hc}{q'} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda' = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec} \cdot 3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{2823{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}}$$

$$\text{καὶ} \quad \lambda' = 7{,}012 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} \quad \text{ἢ} \quad \lambda' = 7{,}012\ \text{Å}$$

340. Ἓν φωτόνιον μιᾶς ἀκτινοβολίας ἔχει μῆκος κύματος λ καὶ προσπίπτει ἐπὶ ἑνὸς σώματος. Σύμφωνα μὲ τὸ φαινόμενον Compton προκύπτει ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας ἐχούσης μῆκος κύματος λ′ καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ἐξέρχεται ἀπὸ τὸ σῶμα ἓν ἠλεκτρόνιον. Ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου σχηματίζει γωνίαν φ μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου. Νὰ εὑρεθῇ : α) τὸ μῆκος κύματος λ′ τῆς δευτερογενοῦς ἀκτινοβολίας καὶ ἡ ταχύτης υ τοῦ ἐξερχομένου ἠλεκτρονίου· β) ἡ γωνία y τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου.

Ἐφαρμογή : $\lambda = 8\ \text{Å}$ **καὶ** $\varphi = 60^0$

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck : $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}$

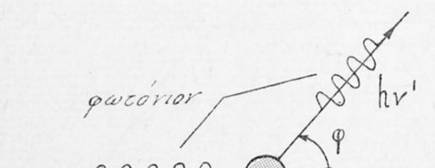
α) Τὸ φωτόνιον, τὸ ὁποῖον προσπίπτει ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου (σχ 84) μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q = h\nu$$

Τὸ δὲ φωτόνιον τῆς παραγομένης δευτερογενοῦς ἀκτινοβολίας μεταφέρει ἐνέργειαν :

$$q' = h\nu'$$

Τὸ ἐξερχόμενον ἠλεκτρόνιον ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν : $W = \frac{m_e\upsilon^2}{2}$



Σχ. 84

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$q = q' + W$$

$$\text{ἤτοι} \quad h\nu = h\nu' + \frac{m_e\upsilon^2}{2} \qquad (1)$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ φωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν. Οὕτω ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω δύο φωτονίων ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν :

τὸ προσπῖπτον φωτόνιον :

$$m = \frac{q}{c^2} \quad \text{ἢ} \quad m = \frac{h\nu}{c^2}$$

τὸ δευτερογενὲς φωτόνιον :

$$m' = \frac{q'}{c^2} \quad \text{ἢ} \quad m' = \frac{h\nu'}{c^2}$$

Τὸ φαινόμενον τοῦ Compton εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα ἐλαστικῆς κρούσεως ἑνὸς φωτονίου μὲ ἓν ἠλεκτρόνιον τοῦ σώματος. Ἄρα κατὰ τὴν τοιαύτην κροῦσιν ἰσχύει ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι εἶναι :

ἡ ὁρμὴ τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου : $J = mc$ ἤτοι $J = \frac{h\nu}{c}$

ἡ ὁρμὴ τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου : $J' = m'c$ ἤτοι $J' = \frac{h\nu'}{c}$

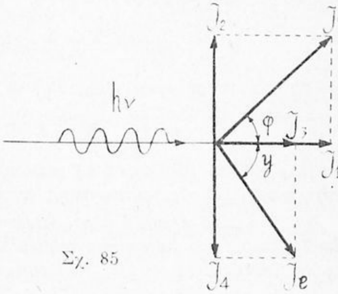
ἡ ὁρμὴ τοῦ ἠλεκτρονίου : $J_e = m_e\upsilon$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν :

α) κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου (σχ. 85) :

$J = J_1 + J_3$ ἤτοι $J = J' \cdot \text{συν}\,\varphi + J_e \cdot \text{συν}\, y$

καὶ $\dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h\nu'}{c} \cdot \text{συν}\,\varphi + m_e\upsilon \cdot \text{συν}\, y$ (2)



Σχ. 85

β) κατὰ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου :

$0 = J_2 + J_4$ ἤτοι $J_2 = -J_4$

ἢ $J' \cdot \text{ημ}\,\varphi = -J_e \cdot \text{ημ}\, y$

καὶ $\dfrac{h\nu'}{c} \cdot \text{ημ}\,\varphi = -m_e\upsilon \cdot \text{ημ}\, y$ (3)

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cdot \text{συν}\,\varphi = m_e\upsilon \cdot \text{συν}\, y$$

Ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, ὁπότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \cdot \text{συν}\,\varphi\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\right)\left(\frac{h\nu'}{c} \cdot \text{συν}\,\varphi\right) = (m_e\upsilon \cdot \text{συν}\, y)^2 \quad (4)$$

Ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (3), ἔχομεν :

$$\left(\frac{h\nu'}{c} \cdot \text{ημ}\,\varphi\right)^2 = (m_e\upsilon \cdot \text{ημ}\, y)^2 \quad (5)$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5), εὑρίσκομεν :

$$\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\,\frac{h^2\nu\nu'}{c^2}\,\text{συν}\,\varphi = (m_e\upsilon)^2$$

Ἐπειδὴ ἡ συχνότης ν′ πολὺ ὀλίγον διαφέρει ἀπὸ τὴν συχνότητα ν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς :

$$\frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - \frac{2h^2\nu^2}{c^2}\,\text{συν}\,\varphi = m_e^2 \cdot \upsilon^2$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{2h^2\nu^2}{c^2}\,(1 - \text{συν}\,\varphi) = m_e^2 \cdot \upsilon^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$\boldsymbol{\upsilon = \frac{h\nu}{m_e c}\sqrt{2\,(1 - \text{συν}\,\varphi)}} \quad (6)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$h\nu - h\nu' = \frac{m_e\upsilon^2}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad h(\nu - \nu') = \frac{m_e\upsilon^2}{2}$$

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6), εὑρίσκομεν :

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu^2}{m_e c^2}\,(1 - \text{συν}\,\varphi) \quad (7)$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ καὶ $\nu' = \dfrac{c}{\lambda'}$

ἡ ἐξίσωσις (7) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} = \frac{h\,\dfrac{c^2}{\lambda^2}}{m_e c^2}\,(1 - \text{συν}\,\varphi) \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\cdot\lambda^2 = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \text{συν}\,\varphi)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\cdot\lambda^2 = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \text{συν}\,\varphi)$$

Ἐπειδὴ κατὰ προσέγγισιν εἶναι : $\lambda\lambda' \approx \lambda^2$ ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\boldsymbol{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \text{συν}\,\varphi)} \qquad (8)$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις (8) καλεῖται σχέσις τοῦ Compton καὶ μᾶς δίδει τὸ μῆκος κύματος λ′ τῆς δευτερογενοῦς ἀκτινοβολίας.

β) Ἡ γωνία y, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως τοῦ ἠλεκτρονίου μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (3), ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν :

$$\text{ημ}\,y = -\frac{h\nu'}{m_e \upsilon c}\cdot\text{ημ}\,\varphi \qquad (9)$$

Ἡ συχνότης ν′ εἶναι γνωστή, ὅταν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (8) ἔχῃ εὑρεθῇ τὸ μῆκος κύματος λ′, διότι εἶναι : $\nu' = \dfrac{c}{\lambda'}$.

Ἐφαρμογή. Ἡ συχνότης ν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου εἶναι :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{3\cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{8\cdot 10^{-8}\ \text{cm}} \quad \text{ἄρα} \quad \nu = \frac{3\cdot 10^{18}}{8}\ \text{Hz}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης υ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

$$\upsilon = \frac{6{,}55\cdot 10^{-27}\cdot 3\cdot 10^{18}\cdot\sqrt{2\,(1 - \text{συν}\,60^0)}}{8\cdot 9\cdot 10^{-28}\cdot 3\cdot 10^{10}}\ \text{C.G.S.}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \upsilon = 9{,}1\cdot 10^7\ \text{cm/sec} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\upsilon = 910\ \text{km/sec}}$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (8) εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν κύματος τοῦ προσπίπτοντος καὶ τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου εἶναι :

$$\lambda' - \lambda = \frac{6{,}55\cdot 10^{-27}}{9\cdot 10^{-28}\cdot 3\cdot 10^{10}}\cdot(1 - \text{συν}\,60^0)$$

$$\text{ἤτοι} \quad \lambda' - \lambda = 0{,}242\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}5\ \text{cm}$$

$$\text{καὶ} \quad \lambda' - \lambda = 0{,}121\cdot 10^{-9}\ \text{cm} \quad \text{ἢ} \quad \lambda' - \lambda = 0{,}0121\ \text{Å}$$

Ἄρα τὸ μῆκος κύματος λ′ τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου εἶναι :

$$\lambda' = (\lambda + 0{,}0121)\ \text{Å} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda' = (8 + 0{,}0121)\ \text{Å}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\lambda' = 8{,}0121\ \text{Å}}$$

Τέλος ἡ γωνία y, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ τροχιὰ τοῦ ἠλεκτρονίου μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ προσπίπτοντος φωτονίου, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (9). Ἡ συχνότης ν′ τοῦ δευτερογενοῦς φωτονίου εἶναι :

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu' = \frac{3\cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}}{8{,}0121\cdot 10^{-8}\ \text{cm}} \quad \text{καὶ} \quad \nu' = 3{,}74431\cdot 10^{17}\ \text{Hz}$$

Ἄρα ἔχομεν : $\text{ημ}\,y = \dfrac{6{,}55\cdot 10^{-27}\cdot 3{,}74431\cdot 10^{17}}{9\cdot 10^{-28}\cdot 9{,}1\cdot 10^7\cdot 3\cdot 10^{10}}\cdot 0{,}866$ ἤτοι $\text{ημ}\,y = 0{,}864$

Ὥστε ἡ γωνία y εἶναι : $\boldsymbol{y \approx 59^0\,45'}$

Ο ΠΥΡΗΝ

341 (306). **Μὲ πόσην ἐνέργειαν, μετρηθεῖσαν εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, ἰσοδυναμεῖ ἡ μᾶζα : α) ἑνὸς ἠλεκτρονίου καὶ β) ἑνὸς πρωτονίου ;**

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $\mathbf{m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Μᾶζα πρωτονίου : $\mathbf{m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας μία μᾶζα m ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W = m \cdot c^2$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν διὰ τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ τοῦ πρωτονίου εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω δύο μαζῶν ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

α) Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου: $W_e = m_e \cdot c^2$

ἤτοι $W_e = 9 \cdot 10^{-28}\ gr \cdot (3 \cdot 10^{10}\ cm/sec)^2$ καὶ $W_e = 8{,}1 \cdot 10^{-7}\ erg$

β) Ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου: $W_p = m_p \cdot c^2$

ἤτοι $W_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr \cdot (3 \cdot 10^{10}\ cm/sec)^2$ καὶ $W_p = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ erg$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι : $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg$

Ἄρα αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ ἠλεκτρονίου καὶ τοῦ πρωτονίου ἐνέργειαι W_e καὶ W_p, ἐὰν μετρηθοῦν εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, εἶναι :

$$W_e = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-7}\ erg}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg/eV} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_e = 5 \cdot 10^5\ eV}$$

$$W_p = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ erg}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg/eV} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_p = 937{,}5 \cdot 10^6\ eV}$$

Ἄρα $\mathbf{W_e = 0{,}5\ MeV}$ καὶ $\mathbf{W_p = 937{,}5\ MeV}$

342 (304). **Ἓν σωματίδιον α, ἐκπεμπόμενον ἀπὸ τὸ πολώνιον, ἔχει ταχύτητα $\mathbf{1{,}60 \cdot 10^9\ cm/sec}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου τούτου εἰς ἔργια καὶ εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ.**

Μᾶζα σωματιδίου α : $\mathbf{m = 6{,}6 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Τὸ σωματίδιον α ἔχει ταχύτητα $υ = 1{,}60 \cdot 10^9\ cm/sec$ καὶ ἑπομένως ἔχει κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W = \frac{1}{2}\, m \cdot υ^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{1}{2} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-24}\ gr \cdot (1{,}60 \cdot 10^9\ cm/sec)^2$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{W = 8{,}448 \cdot 10^{-6}\ erg}$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W, μετρημένη εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, εἶναι :

$$W = \frac{8{,}448 \cdot 10^{-6}\ erg}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg/eV} \quad \text{ἄρα} \quad W = 5{,}28 \cdot 10^6\ eV$$

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{W = 5{,}28\ MeV}$$

* Σημείωσις. Ὡς γνωστὸν εἶναι : $1\ MeV = 10^6\ eV$

343 (305). **Ἓν σωματίδιον α ἐκπέμπεται ἀπὸ Ra C′ καὶ ἔχει ταχύτητα 1,92 · 10⁹ cm/sec. Πόσην ἔντασιν πρέπει νὰ ἔχῃ ἓν ὁμογενὲς μαγνητικὸν πεδίον, διὰ νὰ διαγράψῃ ἐντὸς αὐτοῦ τὸ σωματίδιον α κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος 30 cm;**

Μᾶζα σωματιδίου α : $m = 6{,}6 \cdot 10^{-24}$ gr

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Τὸ σωματίδιον α κινεῖται μὲ ταχύτητα $\upsilon = 1{,}92 \cdot 10^9$ cm/sec καὶ φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = 2e \quad \text{ἤτοι} \quad Q = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

Ἡ εὐθύγραμμος κίνησις τοῦ σωματιδίου α ἰσοδυναμεῖ μὲ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἔντασιν :

$$I = \frac{Q}{t} \qquad (1)$$

Τὸ σωματίδιον α εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος l. Ἡ κίνησις τοῦ σωματιδίου α εἶναι εὐθύγραμμος ὁμαλὴ καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$l = \upsilon \cdot t \qquad (2)$$

Εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τὸ t ἐκφράζει τὸν χρόνον τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου α ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐπὶ εὐθυγράμμου ἀγωγοῦ, μήκους l, εὑρισκομένου ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η καὶ καθέτου πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ἀναπτύσσεται ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$F = \frac{1}{10} I \cdot H \cdot l \text{ (dyn)} \qquad (3)$$

Ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἀνύσματα υ καὶ Η. Ἄρα ἡ σταθερὰ δύναμις F ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σωματιδίου α ὡς κεντρομόλος δύναμις :

$$F = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (4)$$

καὶ συνεπῶς τὸ σωματίδιον α διαγράφει ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r. Ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{I \cdot H \cdot l}{10} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \qquad (5)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (5) θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν μεγεθῶν I καὶ l ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$\frac{Q \cdot H \cdot \upsilon}{10} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{Q \cdot H}{10} = \frac{m \cdot \upsilon}{r} \qquad (6)$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι, διὰ νὰ διαγράψῃ τὸ σωματίδιον α κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r = 30 cm, πρέπει ἡ ἔντασις Η τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου νὰ εἶναι :

$$H = \frac{10m \cdot \upsilon}{Q \cdot r} \quad \text{ἤτοι} \quad H = \frac{10 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}92 \cdot 10^9}{3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 30} \text{ Gauss}$$

ἄρα **H = 13 200 Gauss**

344 (307). **Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας γ, ἡ ὁποία δημιουργεῖ ἓν ζεῦγος ἠλεκτρονίων (ἠλεκτρόνιον καὶ ποζιτρόνιον), χωρὶς κινητικὴν ἐνέργειαν;**

Μᾶζα ἠλεκτρονίου : $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ gr

Σταθερὰ τοῦ Planck : $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg · sec

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ποζιτρονίου εἶναι ἴση μὲ τὴν μᾶζαν m_e τοῦ ἠλεκτρονίου. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας ἡ μᾶζα m_e τοῦ ἠλεκτρονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν W_e, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_e = m_e \cdot c^2$$

Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν ἑνὸς ἠλεκτρονίου καὶ ἑνὸς ποζιτρονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W = 2\,W_e \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 2 \cdot m_e c^2$$

Ὅπως ἀπέδειξε τὸ πείραμα κατὰ τὴν κροῦσιν ἑνὸς φωτονίου ἀκτίνων γ, μεγάλης ἐνεργείας, ἐπὶ τῶν ἀτόμων τῆς ὕλης παράγεται ἓν ζεῦγος ἑτερωνύμων ἠλεκτρονίων, ἤτοι παράγονται ἓν ἠλεκτρόνιον καὶ ἓν ποζιτρόνιον. Διὰ νὰ προκληθῇ ἡ τοιαύτη ὑλοποίησις τῆς ἐνεργείας, πρέπει ἡ ἐνέργεια $h\nu$ τοῦ φωτονίου γ νὰ εἶναι τουλάχιστον ἴση μὲ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν ἑνὸς ἠλεκτρονίου καὶ ἑνὸς ποζιτρονίου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ παραγόμενα δύο ἑτερώνυμα ἠλεκτρόνια δὲν ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$h\nu \rightarrow e^- + e^+$$

$$\text{ἤτοι} \qquad h\nu = 2 \cdot m_e c^2 \qquad \text{καὶ} \qquad h \cdot \frac{c}{\lambda} = 2 \cdot m_e c^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος κύματος λ τῆς ἀκτινοβολίας γ πρέπει νὰ εἶναι :

$$\lambda = \frac{h}{2\,m_e c} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}}{2\,(9 \cdot 10^{-28}\ \text{gr}) \cdot (3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec})}$$

$$\text{καὶ} \qquad \boldsymbol{\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{cm}} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\lambda = 0{,}012\ \text{Å}}$$

345. Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ραδίου μεταστοιχειούμενος διαδοχικῶς δίδει τελικῶς σταθερὸν ἀτομικὸν πυρῆνα μολύβδου. Πόση μᾶζα μολύβδου προκύπτει ἀπὸ 1 gr ραδίου;

Ἀτομικὰ βάρη : **Ra = 226, Pb = 206**

Ἀπὸ 1 γραμμοάτομον ραδίου, ἤτοι ἀπὸ 226 gr ραδίου σχηματίζεται τελικῶς 1 γραμμοάτομον μολύβδου, δηλαδὴ σχηματίζονται 206 gr μολύβδου. Ἄρα ἀπὸ 1 gr ραδίου προκύπτει μᾶζα m μολύβδου ἴση μέ :

$$m = 206 \cdot \frac{1}{226}\ \text{gr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \boldsymbol{m = 0{,}9115\ \text{gr}}$$

346. Πυκνωτὴς ἔχει χωρητικότητα $C = 10^{-11}$ F. Ὁ ὁπλισμὸς Α τοῦ πυκνωτοῦ συνδέεται μὲ τὸ ἔδαφος. Ἐπὶ τοῦ ἄλλου ὁπλισμοῦ Β τοῦ πυκνωτοῦ προσπίπτουν κατὰ λεπτὸν $\nu = 4{,}584 \cdot 10^9$ σωματίδια α, ἐκπεμπόμενα ἀπὸ μίαν μᾶζαν ραδίου. Ἕκαστον σωματίδιον α φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου λεπτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῶν δύο ὁπλισμῶν τοῦ πυκνωτοῦ ἔχει δημιουργηθῆ τάσις ἴση μὲ U = 147 V. Πόσον εἶναι τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον ἑκάστου σωματιδίου α;

Ἕκαστον σωματίδιον α φέρει ἠλεκτρικὸν φορτίον q. Ἄρα τὰ ν σωματίδια α ἐντὸς τοῦ πρώτου λεπτοῦ μεταφέρουν ἐπὶ τοῦ ὁπλισμοῦ Β τοῦ πυκνωτοῦ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q = \nu \cdot q$$

Τότε ἐπὶ τοῦ ὁπλισμοῦ Α τοῦ πυκνωτοῦ ἀναπτύσσεται ἐξ ἐπαγωγῆς ἴσον ἀρνητικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον. Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν πυκνωτοῦ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$Q = C \cdot U \qquad \text{ἄρα} \qquad \nu \cdot q = C \cdot U$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$q = \frac{C \cdot U}{\nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad q = \frac{(10^{-11} \cdot 147)\ \text{Cb}}{4{,}584 \cdot 10^9\ \text{σωματίδια α}}$$

$$\text{ἄρα} \qquad \mathbf{q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ Cb/\text{σωματίδιον α}}$$

* Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ εὑρεθὲν ἠλεκτρικὸν φορτίον q εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν διπλάσιον τοῦ στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ φορτίου :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Cb}$$

347. Εὑρέθη ὅτι μᾶζα ραδίου ἴση μὲ 1 mgr ἐκπέμπει κατὰ λεπτὸν $\nu = 9{,}168 \cdot 10^9$ σωματίδια α, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου ($_2He^4$). Οὕτω ἐξ 1 mgr ραδίου συλλέγεται ἐντὸς ἑνὸς ἔτους ὄγκος ἡλίου ἴσος μὲ $V_1 = 0{,}172\ mm^3$ (εἰς 0^0 C καὶ κανονικὴν πίεσιν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς Avogadro καὶ ἡ μᾶζα ἑνὸς σωματιδίου α.

Ἀτομικὴ μᾶζα ἡλίου : He = 4

Ὄγκος 1 mol ἀερίου ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας : $V_M = 22\,400\ cm^3$

Τὸ ράδιον ἐκπέμπει ἀκτῖνας α, β καὶ γ. Αἱ ἀκτῖνες α ἢ σωματίδια α εἶναι ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου ($_2He^4$). Ἕκαστον σωματίδιον α προσλαμβάνει δύο ἠλεκτρόνια καὶ μεταβάλλεται εἰς ἄτομον ἡλίου. Οὕτω ἀπὸ τὸ 1 mgr ραδίου προκύπτουν κατὰ λεπτὸν ν ἄτομα ἡλίου. Ἐντὸς ἑνὸς ἔτους προκύπτει ἀριθμὸς ἀτόμων ἡλίου ἴσος μέ :

$$\nu_1 = \nu \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365\ \text{ἄτομα ἡλίου} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu_1 = 4{,}818 \cdot 10^{15}\ \text{ἄτομα ἡλίου}$$

Εἰς θερμοκρασίαν 0^0 C καὶ ὑπὸ πίεσιν τὴν κανονικὴν τὰ ν_1 ἄτομα τοῦ ἡλίου καταλαμβάνουν ὄγκον $V_1 = 0{,}172\ mm^3$. Τὸ μόριον τοῦ ἡλίου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν μόνον ἄτομον. Ἄρα 1 γραμμομόριον ἡλίου, ἤτοι 4 gr ἡλίου καταλαμβάνουν ὄγκον :

$$V_M = 22\,400\ cm^3/mol \qquad \text{ἤτοι} \qquad V_M = 22{,}4 \cdot 10^6\ mm^3/mol$$

Ἐντὸς τοῦ ὄγκου V_M περιέχονται τότε N_A μόρια ἡλίου. Τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος σχέσις :

$$\frac{N_A}{\nu_1} = \frac{V_M}{V_1} \qquad \text{ἄρα} \qquad N_A = \nu_1 \cdot \frac{V_M}{V_1}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς Avogadro N_A εἶναι :

$$N_A = 4{,}818 \cdot 10^{15}\ \text{μόρια} \cdot \frac{22{,}4 \cdot 10^6\ mm^3/mol}{0{,}172\ mm^3}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{N_A = 6{,}27 \cdot 10^{23}\ \text{μόρια}/mol}$$

Ἀνωτέρω εὑρέθη ὅτι εἰς ἓν γραμμομόριον ἡλίου, ἤτοι εἰς 4 gr ἡλίου, περιέχονται N_A μόρια (δηλ. ἄτομα) ἡλίου. Ἄρα ἕκαστον σωματίδιον α ἔχει μᾶζαν :

$$m_\alpha = \frac{4\ gr/mol}{6{,}27 \cdot 10^{23}\ \text{μόρια}/mol} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{m_\alpha = 6{,}3 \cdot 10^{-24}\ gr/\text{μόριον}}$$

348. Μία μᾶζα ραδίου ἴση μὲ 0,1 gr εὑρίσκεται ἐντὸς θερμιδομέτρου καὶ ἐκλύει καθ' ὥραν ποσότητα θερμότητος Q = 14 cal. Δεχόμεθα ὅτι τὰ 90/100 αὐτῆς τῆς ποσότητος θερμότητος προέρχονται ἀπὸ τὴν μετατροπὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῶν σωματιδίων α εἰς ἰσοδύναμον ποσότητα θερμότητος. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τῶν σωματιδίων α, ἐὰν εἶναι γνωστὸν ὅτι μᾶζα ραδίου ἴση μὲ 1 mgr ἐκπέμπει κατὰ λεπτὸν $\nu = 9{,}168 \cdot 10^9$ σωματίδια α.

Μᾶζα σωματιδίου α : $m_\alpha = 6{,}4 \cdot 10^{-24}$ gr

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος : J = 4,19 Joule/cal

Καθ' ὥραν τὸ θερμιδόμετρον προσλαμβάνει ποσότητα θερμότητος $Q = 14$ cal. Ἐξ' αὐτῆς τῆς ποσότητος θερμότητος τὰ 90/100 προέρχονται ἀπὸ ἰσοδύναμον κινητικὴν ἐνέργειαν W τῶν καθ' ὥραν ἐκπεμπομένων ν_1 σωματιδίων α. Ἐὰν υ εἶναι ἡ ταχύτης ἑκάστου σωματιδίου α, θὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{1}{2}\,m_\alpha \upsilon^2 \cdot \nu_1 = \frac{90}{100}\,JQ \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon^2 = \frac{2 \cdot 9}{10} \cdot \frac{JQ}{m_\alpha \cdot \nu_1} \qquad (1)$$

Δίδεται ὅτι 1 mgr ραδίου ἐκπέμπει κατὰ λεπτὸν $\nu = 9{,}168 \cdot 10^9$ σωματίδια α. Ἄρα 1 mgr ραδίου ἐκπέμπει καθ' ὥραν:

$$\nu' = 60\,\nu \text{ σωματίδια α}$$

Συνεπῶς μία μᾶζα ραδίου ἴση μὲ 0,1 gr = 100 mgr ἐκπέμπει καθ' ὥραν:

$$\nu_1 = 100\,\nu' \text{ σωματίδια α} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu_1 = 100 \cdot 60\,\nu \text{ σωματίδια α}$$

$$\text{καὶ} \qquad \nu_1 = 6000\,\nu \text{ σωματίδια α}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν:

$$\upsilon^2 = \frac{18}{10} \cdot \frac{JQ}{6000\,m_\alpha \nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon^2 = \frac{3\,JQ}{10^4 \cdot m_\alpha \nu} \qquad (2)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν τὰς δοθείσας τιμὰς εἰς μονάδας C.G.S., εὑρίσκομεν:

$$\upsilon^2 = \frac{3 \cdot 4{,}19 \cdot 10^7 \text{ erg/cal} \cdot 14 \text{ cal}}{10^4 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-24} \text{ gr} \cdot 9{,}168 \cdot 10^9} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon^2 \approx 3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2/\text{sec}^2$$

$$\text{καὶ} \qquad \upsilon = 1{,}73 \cdot 10^9 \text{ cm/sec} \qquad \text{ἢ} \qquad \boldsymbol{\upsilon = 1{,}73 \cdot 10^4 \text{ km/sec}}$$

349. Ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει ἐσωτερικὴν ἀκτῖνα r = 8 cm. Εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τοποθετοῦμεν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ m = 0,01 mgr. Ἡ ἐσωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐπικαλύπτεται μὲ λεπτὸν στρῶμα θειούχου ψευδαργύρου, τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν μὲ μικροσκόπιον. Ἐντὸς τῆς σφαίρας ὑπάρχει τέλειον κενόν. Τὸ ράδιον ἐκπέμπει σωματίδια α πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις. Ἓν σωματίδιον α, ὅταν φθάσῃ εἰς τὸ στρῶμα τοῦ θειούχου ψευδαργύρου, προκαλεῖ ἕνα σπινθηρισμόν. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἔχουσαν ἐμβαδὸν 0,01 mm², ἐμφανίζονται 19 τοιοῦτοι σπινθηρισμοὶ ἀνὰ 100 sec. Πόσα σωματίδια α ἐκπέμπει κατὰ λεπτὸν μία μᾶζα ραδίου ἴση μὲ m' = 1 mgr;

Ἕκαστον σωματίδιον α εἶναι ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου ($_2He^4$). Δίδεται ὅτι ἐντὸς χρόνου 100 sec προσπίπτουν 19 σωματίδια α ἐπὶ ἐπιφανείας 0,01 mm². Ἄρα κατὰ λεπτὸν προσπίπτει ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας ἀριθμὸς σωματιδίων α ἴσος μέ:

$$\nu = 19 \cdot \frac{60}{100} \text{ σωματίδια α} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = \frac{57}{5} \text{ σωματίδια α}$$

Ἡ σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα r = 8 cm = 80 mm καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἔχει ἐμβαδόν:

$$S = 4\pi \cdot r^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad S = 4\pi \cdot (80 \text{ mm})^2 \qquad \text{καὶ} \qquad S = 80\,384 \text{ mm}^2$$

Ὥστε ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπὸ τὴν μᾶζαν ραδίου m = 0,01 mgr προσπίπτει κατὰ λεπτὸν ἀριθμὸς σωματιδίων α ἴσος μέ:

$$N = \frac{57}{5} \cdot \frac{80\,384}{0{,}01} \text{ σωματίδια α} \qquad \text{ἤτοι} \qquad N = 9{,}16 \cdot 10^7 \text{ σωματίδια α}$$

Ἄρα ἀπὸ μᾶζαν ραδίου m' = 1 mgr ἐκπέμπεται ἀριθμὸς σωματιδίων α ἴσος μέ:

$$N' = 100\,N \qquad \text{ἤτοι} \qquad \boldsymbol{N' = 9{,}16 \cdot 10^9 \text{ σωματίδια α}}$$

350. Ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδίου ($_{88}Ra^{226}$) εἶναι 1600 ἔτη. Πόσος ὄγκος ραδονίου παράγεται κατὰ μέσον ὅρον ἡμερησίως κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 1600 ἐτῶν ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ 1 gr; Ὁ ὄγκος τοῦ ραδονίου θὰ θεωρηθῇ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.

Ἀριθμὸς Avogadro: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ **μόρια/mol**

Ἀτομικὸν βάρος ραδίου: $Ra = 226$

Κατὰ τὴν μεταστοιχείωσιν τοῦ ραδίου συμβαίνει ἡ ἀκόλουθος πυρηνικὴ ἀντίδρασις:

$$_{88}Ra^{226} \rightarrow \ _{86}Rn^{222} + \ _2He^4$$

ράδιον → ραδόνιον + σωματίδιον α

Ὥστε ἀπὸ κάθε ἕνα μεταστοιχειούμενον ἀτομικὸν πυρῆνα ραδίου προκύπτει εἷς ἀτομικὸς πυρὴν ραδονίου. Ἐπειδὴ εἰς 226 gr ραδίου περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα ραδίου, ἕπεται ὅτι εἰς 1 gr ραδίου περιέχονται ἄτομα ραδίου:

$$\nu = \frac{6 \cdot 10^{23}}{226} \text{ ἄτομα ραδίου} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu = 26{,}55 \cdot 10^{20} \text{ ἄτομα ραδίου}$$

Ἐντὸς 1600 ἐτῶν μεταστοιχειώνεται τὸ ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς μάζης ραδίου, δηλ. μεταστοιχειώνονται:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{2} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu_1 = 13{,}275 \cdot 10^{20} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου}$$

Ὥστε ἐντὸς 1600 ἐτῶν ἀπὸ τὴν μᾶζαν 1 gr ραδίου προκύπτουν ν_1 ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδονίου. Ἡμερησίως σχηματίζονται κατὰ μέσον ὅρον:

$$\nu_\text{η} = \frac{13{,}275 \cdot 10^{20}}{1600 \cdot 365} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδονίου}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu_\text{η} = 2{,}3 \cdot 10^{14} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδονίου}$$

Ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα ραδονίου ἔχουν ὄγκον $V_A = 22\,400$ cm³, ἤτοι $V_A = 224 \cdot 10^5$ mm³. Ἄρα τὸ ἡμερησίως σχηματιζόμενον ραδόνιον ἔχει ὄγκον:

$$V = V_A \cdot \frac{\nu_\text{η}}{N_A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = 224 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 10^{14} \text{ ἄτομα}}{6 \cdot 10^{23} \text{ ἄτομα}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{V = 8{,}6 \cdot 10^{-3} \ mm^3}$$

351. Ἡ σταθερὰ διασπάσεως λ ἑνὸς στοιχείου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\lambda = \frac{0{,}6932}{T}$$

ὅπου T εἶναι ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ στοιχείου. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἄτομα ραδίου μεταστοιχειώνονται κατὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ ἓν γραμμοάτομον ραδίου καὶ ἀπὸ ἓν γραμμάριον ραδίου.

Χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ ραδίου: $T = 1590$ **ἔτη**

Ἀτομικὸν βάρος ραδίου: $Ra = 226$

Ἀριθμὸς Avogadro: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ **μόρια/mol**

Ἂν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ T, εὑρίσκομεν:

$$\lambda = \frac{0{,}6932}{(1590 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ sec}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = \frac{1}{72{,}4 \cdot 10^9 \text{ sec}}$$

Τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον φανερώνει ὅτι κατὰ δευτερόλεπτον τὰ ἄτομα τοῦ οὐρανίου μεταστοιχειώνονται εἰς ἀναλογίαν:

$$1 \text{ πρὸς } 72{,}4 \cdot 10^9$$

$$\text{ἤτοι} \qquad 1 \text{ πρὸς } 72{,}4 \text{ δισεκατομμύρια}$$

Εἰς ἓν γραμμοάτομον ραδίου, ἤτοι εἰς 226 gr ραδίου, περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα. Ἄρα ἀπὸ 1 γραμμοάτομον ραδίου μεταστοιχειώνεται κατὰ δευτερόλεπτον ἀριθμὸς x ἀτόμων ραδίου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος μέ:

$$x = \frac{6 \cdot 10^{23}}{72{,}4 \cdot 10^{9}} \text{ ἄτομα ραδίου} \quad \text{ἤτοι} \quad x = 8{,}29 \cdot 10^{12} \text{ ἄτομα}$$

καὶ **x = 8,29 τρισεκατομμύρια ἄτομα**

Ὥστε κατὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ 1 gr ραδίου μεταστοιχειώνεται ἀριθμὸς y ἀτόμων ραδίου, ἴσος μέ:

$$y = \frac{8{,}29 \cdot 10^{12}}{226} \text{ ἄτομα ραδίου} \quad \text{ἤτοι} \quad y \approx 37 \cdot 10^{9} \text{ ἄτομα}$$

καὶ **y = 37 δισεκατομμύρια ἄτομα**

352. Ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδίου ($_{88}Ra^{226}$) εἶναι 1600 ἔτη. Ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ 1 gr πόσα σωματίδια α ἐκπέμπονται κατὰ μέσον ὅρον καὶ κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 1600 ἐτῶν;

Ἀριθμὸς Avogadro: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol

Εἶναι γνωστὸν ὅτι χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ στοιχείου καλεῖται ὁ χρόνος T ἐντὸς τοῦ ὁποίου μεταστοιχειώνεται τὸ ἥμισυ τῆς μάζης τοῦ στοιχείου. Διὰ τὸ ράδιον $_{88}Ra^{226}$ εἶναι T = 1600 ἔτη. Ἄρα ἀπὸ μᾶζαν ραδίου m = 1 gr, μετὰ παρέλευσιν χρόνου T = 1600 ἔτη, ἀπομένει μᾶζα ραδίου $m_1 = 0{,}5$ gr. Ἡ μεταστοιχείωσις τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ραδίου συμβαίνει κατὰ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν:

$$_{88}Ra^{226} \rightarrow {}_{86}Rn^{222} + {}_{2}He^{4}$$

ράδιον → ραδόνιον + σωματίδιον α

Εἰς 1 γραμμομόριον (1 mol) ραδίου περιέχονται N_A ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου. Ἑπομένως εἰς μᾶζαν m = 1 gr ραδίου περιέχονται ν ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου, οἱ ὁποῖοι εἶναι:

$$\nu = \frac{6 \cdot 10^{23}}{226} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου}$$

Εἰς τὴν ἀπομένουσαν μετὰ χρόνον T μᾶζαν ραδίου $m_1 = 0{,}5$ gr περιέχεται τὸ ἥμισυ τοῦ ἀνωτέρω εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ν ἀτομικῶν πυρήνων ραδίου, τὸ δὲ ἄλλο ἥμισυ τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ν ἀτομικῶν πυρήνων ραδίου ἔχει μεταστοιχειωθῆ δι' ἐκπομπῆς σωματιδίων α. Ὥστε ἐντὸς τοῦ χρόνου:

$$T = 1600 \text{ ἔτη} = (1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ sec}$$

ἐκπέμπεται ἀριθμὸς ν_α σωματιδίων α ἴσος μέ:

$$\nu_\alpha = \frac{\nu}{2} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu_\alpha = \frac{6 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 226} \text{ σωματίδια α}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ 1 gr ἐπὶ 1600 ἔτη ἐκπέμπεται κατὰ μέσον ὅρον καὶ κατὰ δευτερόλεπτον ἀριθμὸς x σωματιδίων α, ἴσος μέ:

$$x = \frac{\nu_\alpha}{T} \quad \text{ἤτοι} \quad x = \frac{6 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 226 \cdot 1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} \text{ σωματίδια α/sec}$$

καὶ **x ≈ 26 · 10⁹ σωματίδια α/sec**

353. Ἀπὸ μᾶζαν m = 1 gr ραδίου ($_{88}Ra^{226}$) μεταστοιχειώνεται κατὰ μονάδα χρόνου μία μᾶζα λ ραδίου, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T} \qquad (1)$$

ὅπου $T = 1600$ ἔτη εἶναι ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδίου. Ἐὰν διαθέτωμεν 1 gr ραδίου, νὰ εὑρεθῇ κατὰ μέσον ὅρον : α) πόσον ὄγκον ἔχει τὸ κατὰ δευτερόλεπτον σχηματιζόμενον ἥλιον καὶ β) πόσον ὄγκον ἔχει τὸ καθ' ἡμέραν σχηματιζόμενον ραδόνιον. Ὁ ὄγκος τῶν ἀνωτέρω δύο ἀερίων θὰ θεωρηθῇ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας.

Ἀριθμὸς Avogadro : $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ **μόρια/mol**

Ἀτομικὰ βάρη : $Ra = 226, \quad He = 4, \quad Rn = 222$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι κατὰ τὴν μεταστοιχείωσιν τοῦ ραδίου ($_{88}Ra^{226}$) συμβαίνει ἡ ἀκόλουθος πυρηνικὴ ἀντίδρασις:

$$_{88}Ra^{226} \rightarrow {}_{86}Rn^{222} + {}_{2}He^{4}$$

α) Σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἀπὸ μᾶζαν ραδίου $m = 1$ gr μεταστοιχειώνεται κατὰ δευτερόλεπτον μία μᾶζα λ ραδίου, ἴση μέ:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}\ \text{gr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = 1{,}37 \cdot 10^{-11}\ \text{gr}$$

Εἰς μᾶζαν 226 gr ραδίου περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα ραδίου καὶ συνεπῶς περιέχονται ἰσάριθμοι ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου. Εἰς μᾶζαν 1 gr ραδίου περιέχονται ν ἄτομα ραδίου, τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$\nu = \frac{6 \cdot 10^{23}}{226}\ \text{ἄτομα ραδίου/gr}$$

Συνεπῶς εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν μᾶζαν λ ραδίου, ἡ ὁποία μεταστοιχειώνεται κατὰ δευτερόλεπτον, περιέχονται ν_δ ἄτομα ραδίου, τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$\nu_\delta = \nu \cdot \lambda \qquad \text{ἤτοι} \qquad \nu_\delta = \frac{6 \cdot 10^{23}}{226} \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-11}\ \text{ἄτομα ραδίου}$$

$$\text{καὶ} \qquad \nu_\delta = 37 \cdot 10^{9}\ \text{ἄτομα ραδίου}$$

Ὥστε κατὰ δευτερόλεπτον μεταστοιχειώνονται ν_δ ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου καὶ οὕτω κατὰ δευτερόλεπτον σχηματίζονται :

$$\nu_\delta = 37 \cdot 10^{9}\ \text{ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου}\ ({}_{2}He^{4})$$

$$\nu_\delta = 37 \cdot 10^{9}\ \text{ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδονίου}\ ({}_{86}Rn^{222})$$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας 1 mol ἡλίου, ἤτοι $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ μόρια ἡλίου ἔχουν ὄγκον $V_A = 22\,400$ cm³ ἢ $V_A = 224 \cdot 10^5$ mm³. Ἄρα τὸ κατὰ δευτερόλεπτον σχηματιζόμενον ἥλιον ἔχει ὄγκον :

$$V = V_A \cdot \frac{\nu_\delta}{N_A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = 224 \cdot 10^5\ \text{mm}^3 \cdot \frac{37 \cdot 10^{9}\ \text{ἄτομα}}{6 \cdot 10^{23}\ \text{ἄτομα}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{V = 1{,}38 \cdot 10^{-6}\ mm^3}$$

β) Ἐὰν διαθέτωμεν 1 gr ραδίου, τότε εἰς μίαν ἡμέραν μεταστοιχειώνονται ν_n ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου, οἱ ὁποῖοι εἶναι :

$$\nu_n = 37 \cdot 10^{9}\ \text{ἀτομικοὶ πυρῆνες/sec} \cdot 86\,400\ \text{sec}$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \nu_n = 32 \cdot 10^{14}\ \text{ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδίου}$$

Οὕτω καθ' ἡμέραν παράγονται ν_n ἀτομικοὶ πυρῆνες ραδονίου. Ὥστε τὸ καθ' ἡμέραν σχηματιζόμενον ραδόνιον ἔχει ὄγκον :

$$V = V_A \cdot \frac{\nu_n}{N_A} \qquad \text{ἤτοι} \qquad V = 224 \cdot 10^5\ \text{mm}^3 \cdot \frac{32 \cdot 10^{14}\ \text{ἄτομα}}{6 \cdot 10^{23}\ \text{ἄτομα}}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{V = 0{,}1194\ mm^3}$$

354. ῾Η φυσικὴ ραδιενέργεια διέπεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον γενικὴν ἐξίσωσιν :

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

ὅπου N_0 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν κατὰ τὸν χρόνον $t = 0$, N ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν κατὰ τὸν χρόνον t, e εἶναι ἡ βάσις τῶν νεπερείων λογαρίθμων καὶ λ εἶναι ἡ σταθερὰ διασπάσεως, χαρακτηριστικὴ δι' ἕκαστον ραδιενεργὸν στοιχεῖον. Ποία σχέσις συνδέει τὴν σταθερὰν διασπάσεως λ καὶ τὸν χρόνον ὑποδιπλασιασμοῦ T ἑνὸς ραδιενεργοῦ στοιχείου;

Χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ T ἑνὸς ραδιενεργοῦ στοιχείου καλεῖται ὁ χρόνος ἐντὸς τοῦ ὁποίου μεταστοιχειώνεται τὸ ἥμισυ τῆς μάζης τοῦ στοιχείου. ᾿Εὰν λοιπὸν κατὰ τὸν χρόνον $t = 0$ ὑπάρχουν N_0 ἄτομα ἑνὸς ραδιενεργοῦ στοιχείου, μετὰ παρέλευσιν χρόνου $t = T$ θὰ ὑπάρχουν $N = \frac{N_0}{2}$ ἄτομα τοῦ στοιχείου τούτου, τὰ δὲ ἄλλα $\frac{N_0}{2}$ ἄτομα τοῦ στοιχείου θὰ ἔχουν μεταστοιχειωθῆ. ῎Αν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) θέσωμεν $N = \frac{N_0}{2}$ καὶ $t = T$, εὑρίσκομεν :

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T} \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \qquad \text{καὶ} \qquad e^{\lambda T} = 2$$

᾿Απὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\lambda T = \log 2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda T = 0{,}693$$

῞Ωστε ἡ ζητουμένη σχέσις μεταξὺ τῆς σταθερᾶς διασπάσεως λ καὶ τοῦ χρόνου ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδιενεργοῦ στοιχείου εἶναι :

$$\lambda = \frac{\mathbf{0{,}693}}{\mathbf{T}}$$

* Σημείωσις. ῾Ως γνωστὸν ὁ νεπέρειος λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ A εὑρίσκεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀκολούθου ἐξισώσεως :

$$\log A = \frac{1}{\lambda o \gamma\, e} \cdot \lambda o \gamma\, A \qquad \text{ἢ} \qquad \log A = 2{,}3026 \cdot \lambda o \gamma\, A$$

Οὕτω ὁ νεπέρειος λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 2 εἶναι :

$$\log 2 = 2{,}3026 \cdot \lambda o \gamma\, 2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \log 2 = 2{,}3026 \cdot 0{,}30103$$

$$\text{ἢ} \qquad \log 2 = 0{,}693$$

355. ῾Ο χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδίου (Ra^{226}) εἶναι T = 1600 ἔτη. ᾿Απὸ μᾶζαν ραδίου 1 gr μεταστοιχειώνεται κατὰ μονάδα χρόνου μία μᾶζα λ ραδίου εἰς gr, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\lambda = \frac{\mathbf{0{,}693}}{\mathbf{T}} \qquad (1)$$

Νὰ εὑρεθῇ : α) πόση μᾶζα ραδίου ἀπομένει μετὰ παρέλευσιν 1 ἔτους ἀπὸ μίαν ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου m = 1 gr· β) πόση μᾶζα ραδίου μεταστοιχειώνεται κατὰ δευτερόλεπτον ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ m = 1 gr.

᾿Ατομικὸν βάρος ραδίου : Ra = 226

α) Σύμφωνα μὲ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν (1) ἀπὸ μᾶζαν m = 1 gr ραδίου μεταστοιχειώνεται κατ' ἔτος μᾶζα ραδίου ἴση μέ :

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1600}\ \text{gr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \lambda = 433 \cdot 10^{-6}\ \text{gr} \qquad \text{καὶ} \qquad \lambda = 0{,}433\ \text{mgr}$$

῞Ωστε ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν ραδίου m = 1 gr = 1000 mgr, μετὰ παρέλευσιν ἑνὸς ἔτους, ἀπομένει μᾶζα ραδίου m' ἴση μέ :

$$m' = (1000 - 0{,}433)\ \text{mgr} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{m' = 999{,}567\ mgr}$$

β) Ἐὰν διαθέτωμεν μᾶζαν ραδίου ἴσην μὲ $m = 1$ gr $= 1000$ mgr, τότε ἐπὶ ἓν ἔτος μεταστοιχειώνεται κατὰ δευτερόλεπτον μᾶζα m'' ραδίου ἴση μέ:

$$m'' = \frac{0{,}433 \text{ mgr}}{(365 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ sec}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{m'' = 1{,}37 \cdot 10^{-8} \text{ mgr/sec}}$$

* Σημείωσις. Ὡς μονάδα χρόνου λαμβάνομεν τὸ 1 ἔτος. Ἀρχικῶς ὑπάρχει μᾶζα ραδίου $N_0 = 1$ gr $= 1000$ mgr. Οὕτω ἀπὸ τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς φυσικῆς ραδιενεργείας:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

εὑρίσκομεν ὅτι διὰ $t = 1$ εἶναι:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda} \quad \text{ἤτοι} \quad N = 1000 \cdot e^{-\lambda} \qquad (2)$$

ὅπου N εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ ραδίου, ἡ ὁποία ἀπομένει μετὰ παρέλευσιν 1 ἔτους καὶ λ εἶναι ἡ γνωστὴ σταθερὰ διασπάσεως τοῦ ραδίου:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{0{,}693}{1600} = 0{,}000433$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν πόση μᾶζα ραδίου ἀπομένει μετὰ παρέλευσιν 1 ἔτους ἀπὸ ἀρχικὴν μᾶζαν 1000 mgr ραδίου:

$$N = \frac{1000}{e^{\lambda}} \quad \text{ἤτοι} \quad \text{λογ}\, N = \text{λογ}\, 1000 - (0{,}4343 \cdot \lambda)$$

$$\text{ἢ} \quad \text{λογ}\, N = 3 - 0{,}000188 = 2{,}99981 \quad \text{ἄρα} \quad N = 999{,}56 \text{ mgr}$$

356 (308). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος λιθίου $_3Li^7$.

Μᾶζα πρωτονίου: $\mathbf{m_p = 1{,}008145}$ **amu**

Μᾶζα νετρονίου: $\mathbf{m_n = 1{,}008987}$ **amu**

Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος $_3Li^7$: $\mathbf{m = 7{,}01822}$ **amu**

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: **1 amu = 930 MeV**

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν λιθίου $_3Li^7$ ἔχει:

ἀτομικὸν ἀριθμόν: $Z = 3$

μαζικὸν ἀριθμόν: $A = 7$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ μαζικὸς ἀριθμὸς A ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ Z τῶν πρωτονίων καὶ τοῦ ἀριθμοῦ N τῶν νετρονίων, τὰ ὁποῖα περιέχει ὁ ἀτομικὸς πυρήν, ἤτοι:

$$\begin{array}{ccccc} A & = & Z & + & N \\ \text{νουκλεόνια} & = & \text{πρωτόνια} & + & \text{νετρόνια} \end{array}$$

Ὥστε ὁ ἀτομικὸς πυρὴν λιθίου $_3Li^7$ περιέχει:

πρωτόνια: $Z = 3$

νετρόνια: $N = A - Z$ ἤτοι $N = 4$

Ἡ ὁλικὴ μᾶζα τῶν ἀνωτέρω 3 πρωτονίων καὶ 4 νετρονίων πρὸ τῆς συνδέσεώς των εἰς ἕνα ἀτομικὸν πυρῆνα λιθίου εἶναι:

μᾶζα 3 πρωτονίων: $3 \times 1{,}008145 = 3{,}02444$ amu

μᾶζα 4 νετρονίων: $4 \times 1{,}008987 = 4{,}03595$ amu

ὁλικὴ μᾶζα 7 σωματιδίων: $m_{ολ} = 7{,}06039$ amu

Ἡ εὑρεθεῖσα μᾶζα εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν μᾶζαν m τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος λιθίου. Ἄρα τὸ ἔλλειμμα μάζης (Δm) τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος $_3Li^7$ εἶναι:

$$\Delta m = (7{,}06039 - 7{,}01822) \text{ amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 0{,}04217 \text{ amu}$$

Ἐπειδὴ 1 μονὰς ἀτομικῆς μάζης (1 amu) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν ἴσην μὲ $w = 930$ MeV, ἔπεται ὅτι τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἔλλειμμα μάζης Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W = \Delta m \cdot w \quad \text{ἤτοι} \quad W = 0{,}04217 \text{ amu} \cdot 930 \text{ MeV/amu}$$

$$\text{καὶ} \quad W = 39{,}22 \text{ MeV}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W ἠλευθερώθη κατὰ τὴν σύνδεσιν τῶν 3 πρωτονίων καὶ τῶν 4 νετρονίων πρὸς σχηματισμὸν τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος $_3Li^7$. Ὥστε ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος λιθίου $_3Li^7$ εἶναι :

$$\mathbf{W = 39{,}22 \text{ MeV}}$$

* Σημείωσις. Ἐπειδὴ εἶναι : $1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg

ἔπεται ὅτι εἶναι : $1 \text{ MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg

Ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἐνέργεια συνδέσεως W, μετρουμένη εἰς ἔργια, εἶναι :

$$W = 39{,}22 \text{ MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ erg/MeV} \quad \text{καὶ} \quad W = 62{,}752 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

δηλαδὴ ἰσοῦται κατὰ προσέγγισιν μὲ 63 ἑκατομμυριοστὰ τοῦ ἐργίου.

357 (309). **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος $_6C^{12}$.**

Μᾶζα πρωτονίου : $\quad m_p = 1{,}008145$ **amu**

Μᾶζα νετρονίου : $\quad m_n = 1{,}008987$ **amu**

Μᾶζα πυρῆνος $_6C^{12}$: $\quad m = 12{,}00384$ **amu**

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης : $\quad$ **1 amu = 930 MeV**

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἄνθρακος $_6C^{12}$ ἔχει :

ἀτομικὸν ἀριθμόν : $Z = 6$

μαζικὸν ἀριθμόν : $A = 12$

Ἑπομένως εἰς τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα ἄνθρακος $_6C^{12}$ περιέχονται :

πρωτόνια : $Z = 6$

νετρόνια : $N = A - Z$ ἤτοι $N = 6$

Ἡ ὁλικὴ μᾶζα τῶν ἀνωτέρω 12 νουκλεονίων (δηλ. 6 πρωτονίων καὶ 6 νετρονίων) πρὸ τῆς συνδέσεώς των εἰς ἕνα ἀτομικὸν πυρῆνα ἄνθρακος εἶναι :

μᾶζα 6 πρωτονίων : $6 \times 1{,}008145 = 6{,}04887$

μᾶζα 6 νετρονίων : $6 \times 1{,}008987 = 6{,}05392$

ὁλικὴ μᾶζα 12 νουκλεονίων : $m_{ολ} = 12{,}10279$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἄνθρακος ($_6C^{12}$) ἔχει μᾶζαν : $m = 12{,}00384$ amu. Ἄρα τὸ ἔλλειμμα μάζης (Δm) τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ($_6C^{12}$) εἶναι :

$$\Delta m = (12{,}10279 - 12{,}00384) \text{ amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 0{,}09895 \text{ amu}$$

Τὸ ἀνωτέρω ἔλλειμμα μάζης Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W = 0{,}09895 \text{ amu} \cdot 930 \text{ MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad W = 92{,}02 \text{ MeV}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ W ἠλευθερώθη κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ($_6C^{12}$) καὶ ἑπομένως ἡ ἐνέργεια συνδέσεως διὰ τὸν πυρῆνα τοῦτον εἶναι :

$$\mathbf{W = 92{,}02 \text{ MeV}}$$

358 (310). **Ἀτομικὸς πυρήν, ἔχων μᾶζαν m, ἐκπέμπει ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας γ, συχνότητος ν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος.**

Τὸ ἐκπεμπόμενον φωτόνιον μεταφέρει ἐνέργειαν: $q = h\nu$

Εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι ἡ ἐνέργεια τοῦ φωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν ($m_{\varphi\omega\tau}$), ἡ ὁποία προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας:

$$q = m_{\varphi\omega\tau} \cdot c^2 \quad \text{ἄρα} \quad m_{\varphi\omega\tau} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὁρμὴ (J) τοῦ φωτονίου εἶναι:

$$J = m_{\varphi\omega\tau} \cdot c \quad \text{ἄρα} \quad J = \frac{h\nu}{c}$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρήν, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐκπέμπεται τὸ φωτόνιον, ἔχει μᾶζαν m. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$m\upsilon = \frac{h\nu}{c}$$

ὅπου υ εἶναι ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκπομπῆς τοῦ φωτονίου. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ταχύτης ἀνακρούσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος εἶναι:

$$\upsilon = \frac{\mathbf{h\nu}}{\mathbf{mc}}$$

Ἡ δὲ κινητικὴ ἐνέργεια (W) τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος, ἕνεκα τῆς ταχύτητος ἀνακρούσεως, εἶναι:

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{h\nu}{mc} \right)^2 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2}}$$

359 (322). **Νὰ εὑρεθῇ μὲ πόσην ἐνέργειαν ἐκπεφρασμένην εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, Joule καὶ κιλοβατώρια ἰσοδυναμεῖ: α) ἡ μονὰς ἀτομικῆς μάζης 1 amu· β) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἠλεκτρονίου· γ) ἡ μᾶζα ἑνὸς ἀτόμου ὑδρογόνου.**

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης $\mathbf{1\ amu = 1{,}66 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Μᾶζα ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m_e = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Μᾶζα ἀτόμου ὑδρογόνου: $\mathbf{m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ gr}$

Μονὰς ἐνεργείας: $\mathbf{1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg}$

α) Ἡ μονὰς ἀτομικῆς μάζης (1 amu) εἶναι:

$$m = 1{,}66 \cdot 10^{-24}\ \text{gr}$$

καὶ ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W_1 = m \cdot c^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = (\ 1{,}66 \cdot 10^{-24}\ \text{gr}\ ) \cdot (\ 3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}\ )^2$$

$$\text{καὶ} \quad W_1 = 1{,}494 \cdot 10^{-3}\ \text{erg}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια, ἂν μετρηθῇ εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, εἶναι:

$$W_1 = \frac{,494 \cdot 10^{-3}\ \text{erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{erg/eV}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_1 = 930 \cdot 10^6\ eV}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{1\ amu = 930\ MeV}$$

Ἡ ἐνέργεια W_1, ἂν μετρηθῇ εἰς Joule, εἶναι:

$$W_1 = \frac{1{,}494 \cdot 10^{-3}\ \text{erg}}{10^7\ \text{erg/Joule}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{1\ amu = 1{,}494 \cdot 10^{-10}\ Joule}$$

Ἐὰν δὲ ἡ ἐνέργεια W_1 μετρηθῇ εἰς κιλοβατώρια, ἔχομεν:

$$W_1 = \frac{1{,}494 \cdot 10^{-10}\ \text{Joule}}{36 \cdot 10^5\ \text{Joule/kWh}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{1\ amu = 0{,}415 \cdot 10^{-16}\ kWh}$$

β) Ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου (m_e) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W_e = m_e \cdot c^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_e = (9 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{gr}) \cdot (3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec})^2$$

$$\text{καὶ} \quad W_e = 81 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg}$$

Εἰς ἠλεκτρονιοβὸλτ ἡ ἐνέργεια W_e εἶναι :

$$W_e = \frac{81 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg/eV}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_e = 0{,}5 \cdot 10^6\ eV}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{W_e = 0{,}5\ MeV}$$

Εἰς Joule ἡ ἐνέργεια W_e εἶναι :

$$W_e = \frac{81 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg}}{10^7\ \mathrm{erg/Joule}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_e = 81 \cdot 10^{-15}\ Joule}$$

Εἰς κιλοβατώρια ἡ ἐνέργεια W_e εἶναι :

$$W_e = \frac{81 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{Joule}}{36 \cdot 10^5\ \mathrm{Joule/kWh}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_e = 2{,}2 \cdot 10^{-20}\ kWh}$$

γ) Ἡ μᾶζα τοῦ ἀτόμου ὑδρογόνου (m_H) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W_H = m_H \cdot c^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_H = (1{,}67 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{gr}) \cdot (3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec})^2$$

$$\text{καὶ} \quad W_H = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{erg}$$

Εἰς ἠλεκτρονιοβὸλτ ἡ ἐνέργεια W_H εἶναι :

$$W_H = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg/eV}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_H = 937{,}5 \cdot 10^6\ eV}$$

$$\text{ἄρα} \quad \mathbf{W_H = 937{,}5\ MeV}$$

Εἰς Joule ἡ ἐνέργεια W_H εἶναι :

$$W_H = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Joule}}{10^7\ \mathrm{erg/Joule}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_H = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ Joule}$$

Εἰς κιλοβατώρια ἡ ἐνέργεια W_H εἶναι :

$$W_H = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Joule}}{36 \cdot 10^5\ \mathrm{Joule/kWh}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_H = 0{,}416\ kWh}$$

360 (311) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐκλύεται κατὰ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_1\mathrm{H}^3 + {}_1\mathrm{H}^2 \rightarrow {}_0\mathrm{n}^1 + {}_2\mathrm{He}^4$$

Μᾶζα πυρῆνος $_1H^3$:	**3,01699 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_1H^2$:	**2,01474 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$:	**4,00387 amu**
Μᾶζα νετρονίου :	**1,00897 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐκλύεται κατὰ τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν, προέρχεται ἀπὸ τὴν μετατροπὴν ἰσοδυνάμου μάζης (Δm) εἰς ἐνέργειαν (W). Τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν πρὸ τῆς ἀντιδράσεως εἶναι :

μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_1H^3$:	3,01699 amu
μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_1H^2$:	2,01474 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	5,03173 amu

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν μετὰ τὴν ἀντίδρασιν εἶναι:

μᾶζα τοῦ νετρονίου $_0n^1$: 1,00897 amu
μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_2He^4$: 4,00387 amu

ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν: 5,01284 amu

Ἄρα κατὰ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης:

$$\Delta m = (5{,}03173 - 5{,}01284)\ \text{amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta m = 0{,}01889\ \text{amu}$$

Τὸ ἀνωτέρω ἔλλειμμα μάζης Δm ἐκφράζει τὴν πυρηνικὴν μᾶζαν, ἡ ὁποία κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν μετετράπη εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν:

$$W = 0{,}01889\ \text{amu} \cdot 930\ \text{MeV/amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{W = 17{,}57\ MeV}$$

361 (312). **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐκλυομένη ἐνέργεια κατὰ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν:**

$$_2He^3 + {}_1H^2 \rightarrow {}_1H^1 + {}_2He^4$$

Μᾶζα πυρῆνος $_2He^3$: 3,01697 amu
Μᾶζα πυρῆνος $_1H^2$: 2,01474 amu
Μᾶζα πρωτονίου $_1H^1$: 1,00814 amu
Μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$: 4,00387 amu
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: 1 amu = 930 MeV

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν πρὸ τῆς ἀντιδράσεως εἶναι:

μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_2He^3$: 3,01697 amu
μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_1H^2$: 2,01474 amu

ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν: 5,03171 amu

Τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν μετὰ τὴν ἀντίδρασιν εἶναι:

μᾶζα τοῦ πρωτονίου $_1H^1$: 1,00814 amu
μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_2He^4$: 4,00387 amu

ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν: 5,01201 amu

Ὥστε κατὰ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης:

$$\Delta m = (5{,}03171 - 5{,}01201)\ \text{amu} \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta m = 0{,}01970\ \text{amu}$$

Ἡ ἀνωτέρω πυρηνικὴ μᾶζα Δm μετετράπη κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν:

$$W = 0{,}01970\ \text{amu} \cdot 930\ \text{MeV/amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{W = 18{,}32\ MeV}$$

362 (313). **Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἄνθρακος $_6C^{12}$ βομβαρδίζεται μὲ σωματίδιον α, οὗτος μεταστοιχειώνεται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς νετρονίου εἰς ἀσταθῆ πυρῆνα, ὁ ὁποῖος μεταστοιχειώνεται αὐτομάτως ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου. Νὰ γραφοῦν αἱ ἀντίστοιχοι πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις.**

Εἰς ἑκάστην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι δύο ἀρχαί:

α) Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τῶν ἀτομικῶν πυρήνων διατηρεῖται σταθερόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἀριθμῶν (Z) πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἀριθμῶν μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν.

β) Ὁ ἀριθμὸς τῶν νουκλεονίων διατηρεῖται σταθερός. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μαζικῶν ἀριθμῶν (A) πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μαζικῶν ἀριθμῶν μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δύο ἀρχῶν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ὡς ἑξῆς :

$$_{6}C^{12} + {}_{2}He^{4} \rightarrow {}_{0}n^{1} + {}_{8}\overset{*}{O}{}^{15}$$

Δίδεται ὅτι ὁ σχηματιζόμενος ἀτομικὸς πυρὴν εἶναι ἀσταθής. Ὁ πυρὴν οὗτος ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 8$, ἄρα εἶναι ἰσότοπον τοῦ ὀξυγόνου (βλ. Φυσική, τόμ. Γ', σελ. 283 πίνακα). Τὸ ἰσότοπον ὅμως τοῦτο δὲν ἀπαντᾷ εἰς τὴν Φύσιν, ἤτοι εἶναι τεχνητὸν ἰσότοπον καὶ αὐτομάτως μεταστοιχειώνεται εἰς σταθερὸν ἀτομικὸν πυρῆνα. Δίδεται ὅτι ἡ μεταστοιχείωσις συμβαίνει ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου ($e+$). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν 8 πρωτονίων τοῦ πυρῆνος ἓν πρωτόνιον ἀποβάλλει τὸ στοιχειῶδες θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον του καὶ μεταβάλλεται εἰς νετρόνιον. Οὕτω ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς τοῦ πυρῆνος γίνεται $Z = 7$ καὶ συνεπῶς ὁ νέος ἀτομικὸς πυρὴν εἶναι σταθερὸς ἀτομικὸς πυρὴν ἀζώτου $_{7}N^{15}$. Ὥστε ἡ μεταστοιχείωσις τοῦ σχηματισθέντος ἀσταθοῦς ἀτομικοῦ πυρῆνος $_{8}\overset{*}{O}{}^{15}$ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_{8}\overset{*}{O}{}^{15} \rightarrow {}_{1}e^{0} + {}_{7}N^{15}$$

* Σημείωσις. Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν $_{7}N^{15}$ εἶναι φυσικὸν ἰσότοπον τοῦ ἀζώτου. Τὸ ἰσότοπον τοῦτο συμμετέχει κατὰ 0,365 % εἰς τὸ φυσικὸν ἄζωτον.

363 (314). **Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν χλωρίου $_{17}Cl^{35}$ βομβαρδίζεται μὲ πρωτόνιον, οὗτος μεταστοιχειώνεται ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς σωματιδίου α. Νὰ γραφῇ ἡ πυρηνικὴ ἀντίδρασις.**

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς ἑκάστην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἀφ' ἑνὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἀριθμῶν (Z) καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ ἄθροισμα τῶν μαζικῶν ἀριθμῶν (A) πρὸ τῆς ἀντιδράσεως καὶ μετὰ τὴν ἀντίδρασιν διατηρεῖται σταθερὸν (βλ. καὶ πρόβλημα 362). Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δύο ἀρχῶν ἡ θεωρουμένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_{17}Cl^{35} + {}_{1}H^{1} \rightarrow {}_{2}He^{4} + {}_{16}S^{32}$$

Ὁ παραγόμενος ἀτομικὸς πυρὴν θείου $_{16}S^{32}$ εἶναι σταθερός.

364 (315). **Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἀζώτου $_{7}N^{14}$ βομβαρδίζεται μὲ νετρόνιον, οὗτος μεταστοιχειώνεται ὑπὸ ἐκπομπὴν δύο σωματιδίων α. Νὰ γραφῇ ἡ πυρηνικὴ ἀντίδρασις.**

Εἰς ἑκάστην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἀριθμῶν (Z), ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μαζικῶν ἀριθμῶν (A) πρὸ τῆς ἀντιδράσεως καὶ μετὰ τὴν ἀντίδρασιν διατηρεῖται σταθερόν. Ἄρα ἡ θεωρουμένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_{7}N^{14} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{2}He^{4} + {}_{2}He^{4} + {}_{3}Li^{7}$$

Ὁ παραγόμενος ἀτομικὸς πυρὴν λιθίου $_{3}Li^{7}$ εἶναι σταθερός.

365 (316). **Ἓν ραδιενεργὸν στοιχεῖον ἐκπέμπει σωματίδια α μὲ ταχύτητα 20 000 km/sec καὶ σωματίδια β μὲ ταχύτητα 200 000 km/sec. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα ἑνὸς σωματιδίου α καὶ ἑνὸς σωματιδίου β, ὅταν τὰ σωματίδια αὐτὰ κινοῦνται μὲ τὰς ἀνωτέρω ταχύτητας;**

Ἓν σῶμα, ὅταν ἠρεμῇ, ἔχει μᾶζαν m_0. Ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος ἀπέδειξεν ὅτι, ὅταν τὸ σῶμα τοῦτο κινῆται μὲ ταχύτητα $υ$, τότε ἡ μᾶζα του m δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{υ}{c}\right)^2}} \qquad (1)$$

ὅπου $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν.

Δίδεται ὅτι τὸ σωματίδιον α καὶ τὸ σωματίδιον β (ἠλεκτρόνιον) ἔχουν ἀντιστοίχως ταχύτητα:

$$\upsilon_\alpha = 20\,000 \text{ km/sec} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon_\alpha = 2 \cdot 10^9 \text{ cm/sec}$$

$$\upsilon_\beta = 200\,000 \text{ km/sec} \quad \text{ἤτοι} \quad \upsilon_\beta = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

Ἔστω ὅτι εἰς ἠρεμίαν τὸ μὲν σωματίδιον α ἔχει μᾶζαν m_1, τὸ δὲ σωματίδιον β ἔχει μᾶζαν m_2. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἡ μᾶζα ἑκάστου ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο σωματιδίων εἶναι:

μᾶζα σωματιδίου α:

$$m_\alpha = \frac{m_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^9 \text{ cm/sec}}{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}\right)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m_\alpha = \frac{30\ m_1}{\sqrt{896}} = \frac{30\ m_1}{29{,}93}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m_\alpha = 1{,}002\ m_1} \tag{2}$$

μᾶζα σωματιδίου β:

$$m_\beta = \frac{m_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}\right)^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad m_\beta = \frac{3\ m_2}{\sqrt{5}} = \frac{3\ m_2}{2{,}23}$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m_\beta = 1{,}34\ m_2}$$

366 (317). Ἐὰν κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς βαρέος πυρῆνος παρατηρῆται ἔλλειμμα μάζης ἴσον μὲ τὰ 0,10% τῆς μάζης τοῦ πυρῆνος, νὰ εὑρεθῇ πόση ἐνέργεια ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 kgr ἐκ τοῦ ὑλικοῦ τούτου.

Κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἰς 1000 gr ἐκ τοῦ θεωρουμένου ὑλικοῦ παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης Δm ἴσον μέ:

$$\Delta m = \frac{0{,}10}{100} \cdot 1000 \text{ gr} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 1 \text{ gr}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm μετατρέπεται κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν W σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν:

$$W = \Delta m \cdot c^2$$

Ἄρα εἶναι: $W = 1 \text{ gr} \cdot (3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec})^2$ ἤτοι $W = 9 \cdot 10^{20}$ erg

Ἐπειδὴ εἶναι: $1 \text{ kWh} = 36 \cdot 10^5 \text{ Joule} = 36 \cdot 10^{12}$ erg

ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W, μετρημένη εἰς kWh, εἶναι:

$$W = \frac{9 \cdot 10^{20} \text{ erg}}{36 \cdot 10^{12} \text{ erg/kWh}} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 25 \cdot 10^6\ kWh}$$

* Δηλαδὴ εἶναι: W = 25 ἑκατομμύρια κιλοβατώρια

367 (318). Κατὰ τὴν σύντηξιν πυρήνων ὑδρογόνου πρὸς σχηματισμὸν ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου παρατηρεῖται ὅτι τὸ ποσοστὸν τοῦ ἐλλείμματος μάζης ἀνέρχεται εἰς 0,70 %. Πόση ἐνέργεια εἰς kWh ἐλευθερώνεται ἀπὸ 1 kgr ὑδρογόνου;

Κατὰ τὴν σύντηξιν μάζης 1000 gr ὑδρογόνου παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης Δm ἴσον μέ:

$$\Delta m = \frac{0{,}70}{100} \cdot 1000 \text{ gr} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 7 \text{ gr}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm μετατρέπεται κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν W, σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσοδυναμίας μάζης καὶ ἐνεργείας, ἤτοι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$W = \Delta m \cdot c^2 \quad \text{ἢ} \quad W = 7 \text{ gr} \cdot (3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec})^2 \quad \text{καὶ} \quad W = 63 \cdot 10^{20} \text{ erg}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W μετρημένη εἰς kWh εἶναι :

$$W = \frac{63 \cdot 10^{20} \text{ erg}}{36 \cdot 10^{12} \text{ erg/kWh}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 175 \cdot 10^{6}\ kWh}$$

* Δηλαδὴ εἶναι : W = 175 ἑκατομμύρια κιλοβατώρια

368 (319). **Νὰ εὑρεθῇ εἰς χιλιοθερμίδας ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται ἀπὸ ἓν γραμμομόριον λιθίου κατὰ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :**

$$_{3}\mathbf{Li}^{7} + {}_{1}\mathbf{H}^{1} \rightarrow {}_{2}\mathbf{He}^{4} + {}_{2}\mathbf{He}^{4}$$

Πόση μᾶζα λιθάνθρακος πρέπει νὰ καῇ, διὰ νὰ παραχθῇ ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια, ἐὰν ἡ θερμότης καύσεως τοῦ λιθάνθρακος εἶναι 8 000 kcal/kgr ;

Μᾶζα πυρῆνος $_{3}Li^{7}$:	**7,01822 amu**
Μᾶζα πρωτονίου $_{1}H^{1}$:	**1,00814 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_{2}He^{4}$:	**4,00387 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**
Ἀριθμὸς Avogadro :	**$N_A = 6 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol**
Ἀτομικὸν βάρος λιθίου :	**Li = 7**
Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος :	**J = 4,19 Joule/cal**

Θὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm, τὸ ὁποῖον παρατηρεῖται κατὰ τὴν πυρηνικὴν αὐτὴν ἀντίδρασιν. Οὕτω ἔχομεν :

Πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως :

μᾶζα τοῦ πυρῆνος $_{3}Li^{7}$:	7,01822 amu
μᾶζα τοῦ πρωτονίου $_{1}H^{1}$:	1,00814 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	8,02636 amu

Μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

μᾶζα 2 πυρήνων ἡλίου $_{2}He^{4}$: 8,00774 amu

Ἄρα κατὰ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης Δm ἴσον μέ :

$$\Delta m = (8{,}02636 - 8{,}00774) \text{ amu} \quad \text{καὶ} \quad \Delta m = 0{,}01862 \text{ amu}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα μᾶζα Δm μετετράπη κατὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία εἶναι :

$$W = 0{,}01862 \text{ amu} \cdot 930 \text{ MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad W = 17{,}3 \text{ MeV}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ erg

ἕπεται ὅτι εἶναι : $1 \text{ MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg

Ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W, μετρημένη εἰς ἔργια εἶναι :

$$W = 17{,}3 \text{ MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ erg/MeV} \quad \text{καὶ} \quad W \approx 27{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ erg}$$

Εἰς ἓν γραμμομόριον (1 mol) λιθίου, ἤτοι εἰς 7 gr λιθίου περιέχονται $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα λιθίου. Ἑπομένως ἓν γραμμομόριον λιθίου, ἐὰν ὑποστῇ τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν, ἐλευθερώνει ἐνέργειαν :

$$W_1 = (27{,}7 \cdot 10^{-6}) \cdot (6 \cdot 10^{23}) \text{ erg}$$

ἤτοι $W_1 = 162{,}2 \cdot 10^{17}$ erg ἢ $W_1 = 162{,}2 \cdot 10^{10}$ Joule

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W_1 μετρημένη εἰς θερμίδας εἶναι:

$$Q = \frac{W_1}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{162{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{Joule}}{4{,}19\ \text{Joule/cal}}$$

$$\text{ἄρα} \quad Q = 38{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{cal} \quad \text{ἤ} \quad \mathbf{Q = 387 \cdot 10^6\ kcal}$$

Οὕτω εὕρομεν ὅτι ἀπὸ 7 gr λιθίου, τὰ ὁποῖα ὑφίστανται τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν, ἐλευθερώνεται ποσότης θερμότητος Q ἴση μέ:

387 ἑκατομμύρια χιλιοθερμίδας

Διὰ νὰ παραχθῇ ἡ ἀνωτέρω ποσότης θερμότητος Q ἀπὸ τὴν καῦσιν λιθάνθρακος, πρέπει νὰ καῇ μᾶζα m λιθάνθρακος ἴση μέ:

$$m = \frac{387 \cdot 10^6\ \text{kcal}}{8000\ \text{kcal/kgr}} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{m = 48\,300\ kgr}$$

369 (320). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ εἰς χιλιοθερμίδας καὶ κιλοβατώρια ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται κατὰ τὸν σχηματισμὸν 1 kgr ἡλίου ἀπὸ τὰ δύο συστατικά του (2 πρωτόνια + 2 νετρόνια κατὰ ἀτομικὸν πυρῆνα).

Μᾶζα πρωτονίου $_1H^1$: 1,00814 amu

Μᾶζα νετρονίου $_0n^1$: 1,00897 amu

Μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$: 4,00387 amu

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: 1 amu = 930 MeV

Ἀριθμὸς Avogadro: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol

Ἀτομικὸν βάρος ἡλίου: He = 4

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος: J = 4,2 Joule/cal

Ἡ πυρηνικὴ ἀντίδρασις, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$) ἀπὸ τὰ συστατικά του, ἤτοι ἀπὸ 2 πρωτόνια καὶ 2 νετρόνια, εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$_1H^1 + {}_1H^1 + {}_0n^1 + {}_0n^1 \rightarrow {}_2He^4$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐνέργειαν συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$), πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν. Οὕτω ἔχομεν:

μᾶζα 2 πρωτονίων:	2 × 1,00814 = 2,01628 amu
μᾶζα 2 νετρονίων:	2 × 1,00897 = 2,01794 amu
ἄθροισμα πυρηνικῆς μάζης:	4,03422 amu
μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$:	4,00387 amu
ἔλλειμμα μάζης	Δm = 0,03035 amu

Ἡ μᾶζα Δm μετετράπη κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος $_2He^4$ εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν ἐνέργειαν συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$. Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ εἶναι:

$$W = 0{,}03035\ \text{amu} \cdot 930\ \text{MeV/amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 28{,}22\ MeV}$$

Εἰς ἓν γραμμομόριον (1 mol) ἡλίου περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα ἡλίου. Ὅταν λοιπὸν σχηματίζεται ἓν γραμμομόριον ἡλίου, ἤτοι 4 gr ἡλίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W_1, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$W_1 = 28{,}22\ \text{MeV/ἄτομον} \cdot 6 \cdot 10^{23}\ \text{ἄτομα} \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = 169{,}32 \cdot 10^{23}\ \text{MeV}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{erg}$ ἄρα $1\ \mathrm{MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{erg}$

ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W_1, ἂν μετρηθῇ εἰς ἔργια, εἶναι·

$$W_1 = 169{,}32 \cdot 10^{23}\ \mathrm{MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{erg/MeV}$$

ἤτοι $W_1 = 270{,}9 \cdot 10^{17}\ \mathrm{erg}$ ἢ $W_1 = 270{,}9 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Joule}$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W_1 λαμβάνεται, ὅταν σχηματίζονται 4 gr ἡλίου, ἤτοι 1 mol ἡλίου. Ἄρα, ὅταν σχηματίζωνται 1000 gr ἡλίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W_2 ἴση μέ:

$$W_2 = 270{,}9 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Joule} \cdot \frac{1000\ \mathrm{gr}}{4\ \mathrm{gr}} \quad \text{ἤτοι} \quad W_2 = 67\,725 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Joule}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐνέργεια, ἂν μετρηθῇ εἰς κιλοβατώρια, εἶναι :

$$W_2 = \frac{67\,725 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Joule}}{36 \cdot 10^5\ \mathrm{Joule/kWh}} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{W_2 = 188{,}1 \cdot 10^6\ kWh}$$

Ὥστε, ὅταν σχηματίζωνται 1000 gr ἡλίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W_2 ἴση μέ :

188,1 ἑκατομμύρια κιλοβατώρια

Ἡ ἐνέργεια αὕτη W_2 ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W_2}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{67\,725 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Joule}}{4{,}2\ \mathrm{Joule/cal}}$$

ἄρα $Q = 16\,077 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cal}$ ἢ $\mathbf{Q = 16\,077 \cdot 10^7\ kcal}$

Δηλαδή, ὅταν σχηματίζωνται 1000 gr ἡλίου, ἐλευθερώνεται ἐνέργεια ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος ἴσην μέ :

160 770 ἑκατομμύρια χιλιοθερμίδας

370 (321). **Ἓν σωματίδιον α, κινούμενον μὲ μεγάλην ταχύτητα, πλησιάζει πρὸς τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα μαγγανίου (Z = 25). Πόση δύναμις ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σωματιδίου α, ὅταν τοῦτο φθάσῃ εἰς ἀπόστασιν $1 \cdot 10^{-12}$ cm ἀπὸ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα μαγγανίου; Πόση εἶναι τότε ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου α;**

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Τὸ σωματίδιον α εἶναι ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου ($_2He^4$), ὁ ὁποῖος φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον : $Q_\alpha = +2e$

Ὁ δὲ ἀτομικὸς πυρὴν μαγγανίου φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$Q_\mu = +Z \cdot e \quad \text{ἢ} \quad Q_\mu = +25e$$

Ὅταν ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων πυρήνων ἀπόστασις εἶναι ἴση μὲ $r = 1 \cdot 10^{-12}$ cm, τότε ἀναπτύσσεται μεταξὺ τῶν πυρήνων ἀμοιβαία ἄπωσις F, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν νόμον τοῦ Coulomb :

$$F = +\frac{Q_\alpha \cdot Q_\mu}{r^2} \quad \text{ἢ} \quad F = +\frac{2e \cdot 25e}{r^2} \quad \text{καὶ} \quad F = +\frac{50e^2}{r^2}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δύναμις F εἶναι :

$$F = \frac{50 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{(1 \cdot 10^{-12})^2}\ \mathrm{dyn} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{F = 11{,}52 \cdot 10^6\ dyn}$$

Ἐὰν κατὰ προσέγγισιν λάβωμεν : $1\ \mathrm{kgr^*} = 10^6\ \mathrm{dyn}$

τότε ἡ ἀναπτυσσομένη μεταξὺ τῶν δύο ἀτομικῶν πυρήνων ἄπωσις εἶναι :

$$F = 11{,}52\ \mathrm{kgr^*}$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν μαγγανίου δημιουργεῖ πέριξ αὐτοῦ ἠλεκτρικὸν πεδίον. Εἰς ἀπόστασιν $r = 1 \cdot 10^{-12}$ cm ἀπὸ τὸν πυρῆνα τοῦ μαγγανίου τὸ δυναμικὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου (βλ. πρόβλημα 319) εἶναι :

$$U = \frac{Q_\mu}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad U = + \frac{Z \cdot e}{r} \quad \text{καὶ} \quad U = + \frac{25\, e}{r}$$

Ὅταν τὸ σωματίδιον α εὑρεθῇ εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα μαγγανίου, τότε εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τὸ σωματίδιον α ἔχει (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) δυναμικὴν ἐνέργειαν :

$$E_{\delta\upsilon\nu} = U \cdot Q_\alpha \quad \text{ἤτοι} \quad E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{25\, e}{r} \cdot 2\, e \quad \text{καὶ} \quad E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{50\, e^2}{r}$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου α εἶναι :

$$E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{50 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10})^2}{1 \,.\, 10^{-12}}\ \text{erg} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{E_{\delta\upsilon\nu} = 1{,}152 \cdot 10^{-5}\ erg}$$

371 (323). Ἡ ἑπομένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις προκαλεῖται μὲ σωματίδια α, ἔχοντα κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ 7,7 MeV :

$$_2He^4 + {}_7N^{14} \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1$$

Νὰ εὑρεθῇ πόση ἐνέργεια ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν πυρηνικὴν αὐτὴν ἀντίδρασιν.

Μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$:	**4,00387 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_7N^{14}$:	**14,00755 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_8O^{17}$:	**17,00453 amu**
Μᾶζα πρωτονίου $_1H^1$:	**1,00814 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**

Εἰς κάθε πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἰσχύει ἡ ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως πρέπει νὰ συμπληρωθῇ ὡς ἑξῆς : εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ προστεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_1 τοῦ σωματιδίου α, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ προστεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια W_2 τῶν δύο παραγομένων ἀτομικῶν πυρήνων ὀξυγόνου καὶ ὑδρογόνου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$_2He^4 + {}_7N^{14} + W_1 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1 + W_2$$

Ἡ ἐνέργεια W_1 εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μᾶζαν m_1, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$m_1 = \frac{7{,}7\ \text{MeV}}{930\ \text{MeV/amu}} \quad \text{ἤτοι} \quad m_1 = 0{,}00828\ \text{amu}$$

Πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως ἔχομεν :

μᾶζα πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$:	4,00387 amu
μᾶζα πυρῆνος ἀζώτου $_7N^{14}$:	14,00755 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	18,01142 amu
ἰσοδύναμος πρὸς ἐνέργειαν W_1 μᾶζα m_1 :	0,00828 amu
σύνολον	18,01970 amu

Μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἔχομεν :

μᾶζα πυρῆνος ὀξυγόνου $_8O^{17}$:	17,00453 amu
μᾶζα πυρῆνος ὑδρογόνου $_1H^1$:	1,00814 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	18,01267 amu

Οὕτω κατὰ τὴν πυρηνικὴν αὐτὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται μία διαφορὰ μάζης Δm, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$\Delta m = (18{,}01970 - 18{,}01267)\ \mathrm{amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta m = 0{,}00703\ \mathrm{amu}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm ἐκφράζει τὴν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_2 τῶν δύο σχηματισθέντων νέων ἀτομικῶν πυρήνων ὀξυγόνου καὶ ὑδρογόνου. Ὥστε κατὰ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_2 = 0{,}00703\ \mathrm{amu} \cdot 930\ \mathrm{MeV/amu} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{W_2 = 6{,}538\ MeV}$$

372 (324). **Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν λιθίου $_3Li^7$ βομβαρδίζεται μὲ πρωτόνιον, ἔχον κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ 0,25 MeV, τότε παράγονται δύο σωματίδια α, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑκάστου σωματιδίου α.**

Μᾶζα πυρῆνος $_3Li^7$:	**7,01822 amu**
Μᾶζα πρωτονίου $_1H^1$:	**1,00814 amu**
Μᾶζα πυρῆνος $_2He^4$:	**4,00387 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**

Ἂς καλέσωμεν W_π τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ πρωτονίου, μὲ τὸ ὁποῖον βομβαρδίζεται ὁ ἀτομικὸς πυρὴν λιθίου καὶ W_α τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ἑκάστου τῶν δύο σωματιδίων α, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν. Τότε σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$_3Li^7 + {}_1H^1 + W_\pi \rightarrow {}_2He^4 + {}_2He^4 + 2\,W_\alpha$$

Ἡ ἐνέργεια $W_\pi = 0{,}25$ MeV ἰσοδυναμεῖ μὲ μᾶζαν m, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ :

$$m = \frac{0{,}25\ \mathrm{MeV}}{930\ \mathrm{MeV/amu}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad m = 0{,}00027\ \mathrm{amu}$$

Πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως ἔχομεν :

μᾶζα πυρῆνος λιθίου $_3Li^7$:	7,01822 amu
μᾶζα πρωτονίου $_1H^1$:	1,00814 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	8,02636 amu
ἰσοδύναμος πρὸς ἐνέργειαν W_π μᾶζα m :	0,00027 amu
σύνολον	8,02663 amu

Μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἔχομεν :

μᾶζα πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$:	4,00387 amu
μᾶζα πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$:	4.00387 amu
ἄθροισμα πυρηνικῶν μαζῶν :	8,00774 amu

Ὥστε κατὰ τὴν θεωρουμένην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται μία διαφορὰ μάζης Δm, ἡ ὁποία εἶναι :

$$\Delta m = (8{,}02663 - 8{,}00774)\ \mathrm{amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta m = 0{,}01889\ \mathrm{amu}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W = 0{,}01889\ \mathrm{amu} \cdot 930\ \mathrm{MeV/amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W = 17{,}568\ \mathrm{MeV}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐνέργεια W εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν παραχθέντων δύο σωματιδίων α. Ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν δύο σωματιδίων α ἔχει τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν W_α, ἔπεται ὅτι εἶναι :

$$W_\alpha = \frac{W}{2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_\alpha = \frac{17{,}568\ \mathrm{MeV}}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{W_\alpha = 8{,}784\ MeV}$$

373 (325). Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου $_{92}U^{235}$ ἐλευθερώνεται ἐνέργεια ἴση μὲ 200 MeV. α) Νὰ εὑρεθῇ εἰς κιλοβατώρια ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 kgr οὐρανίου. β) Πόση μᾶζα λιθάνθρακος πρέπει νὰ καῇ, διὰ νὰ παραχθῇ ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια, ἐὰν ἡ θερμότης καύσεως τοῦ λιθάνθρακος εἶναι 8000 kcal/kgr;

Ἀτομικὸν βάρος οὐρανίου : $U = 235$

Ἀριθμὸς Avogadro : $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ **μόρια/mol**

Μονὰς ἐνεργείας : $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg$

Μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος : $J = 4{,}2\ Joule/cal$

Ἡ μονὰς ἐνεργείας 1 MeV εἶναι ἴση μέ :

$$1\ MeV = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ erg$$

Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου $_{92}U^{235}$ ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_1 = 200\ MeV \quad \text{ἤτοι} \quad W_1 = 200\ MeV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ erg/MeV$$

$$\text{καὶ} \quad W_1 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}\ erg \quad \text{ἢ} \quad W_1 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\ Joule$$

Εἰς ἓν γραμμομόριον (1 mol) οὐρανίου, ἤτοι εἰς 235 gr οὐρανίου, περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἀτομικοὶ πυρῆνες οὐρανίου. Ὥστε, ἂν 1 mol οὐρανίου ὑποστῇ διάσπασιν, τότε ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W', ἴση μέ :

$$W' = W_1 \cdot N_A \quad \text{ἤτοι} \quad W' = (3{,}2 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{23})\ Joule$$

$$\text{καὶ} \quad W' = 19{,}2 \cdot 10^{12}\ Joule$$

α) Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι ἀπὸ 1 mol οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W'. Εἰς 1 kgr οὐρανίου ὑπάρχουν ν γραμμομόρια, τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$\nu = \frac{1000\ gr}{235\ gr/mol} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{1000}{235}\ mol$$

Ἑπομένως ἀπὸ 1 kgr οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W ἴση μέ :

$$W = \nu \cdot W' \quad \text{ἤτοι} \quad W = 19{,}2 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1000}{235}\ Joule$$

$$\text{καὶ} \quad W \approx 82 \cdot 10^{12}\ Joule$$

Εἰς κιλοβατώρια ἡ ἐνέργεια αὐτὴ W εἶναι :

$$W = \frac{82 \cdot 10^{12}\ Joule}{36 \cdot 10^5\ Joule/kWh} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 22{,}8 \cdot 10^6\ kWh}$$

β) Ἡ ἐνέργεια W ἰσοδυναμεῖ μὲ ποσότητα θερμότητος :

$$Q = \frac{W}{J} \quad \text{ἤτοι} \quad Q = \frac{82 \cdot 10^{12}\ Joule}{4{,}2\ Joule/cal}$$

$$\text{ἄρα} \quad Q = \frac{820 \cdot 10^{12}}{42}\ cal \quad \text{ἢ} \quad Q = \frac{82 \cdot 10^{10}}{42}\ kcal$$

Διὰ νὰ ληφθῇ ἡ ἀνωτέρω ποσότης θερμότητος ἀπὸ τὴν καῦσιν λιθάνθρακος, πρέπει νὰ καῇ μᾶζα m λιθάνθρακος, ἴση μέ :

$$m = \frac{82 \cdot 10^{10}/42\ kcal}{8000\ kcal/kgr} \quad \text{ἤτοι} \quad m = 244 \cdot 10^4\ kgr$$

$$\text{καὶ} \quad \mathbf{m = 2440\ tn}$$

374 (326). Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις :

α) $_1H^1 + {_3Li^7} \rightarrow {_2He^4} + \ldots\ldots$

β) $_1H^2 + {_6C^{12}} \rightarrow {_6C^{14}} + \ldots\ldots$

γ) $_1H^2 + {_4Be^9} \rightarrow {_5B^{10}} + \ldots\ldots$

δ) $_0n^1 + {_{35}Br^{79}} \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow \ldots\ldots + e$

ε) $_{15}P^{30} \rightarrow {_{14}Si^{30}} + \ldots\ldots$

Διὰ νὰ συμπληρωθῇ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων τῶν πυρηνικῶν ἀντιδράσεων πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν ἀριθμῶν Z καὶ τῶν μαζικῶν ἀριθμῶν A διατηρεῖται σταθερόν.

α) Ὁ ἐλλείπων εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 2$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 4$. Ἄρα εἶναι ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου $_2He^4$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_1H^1 + {_3Li^7} \rightarrow {_2He^4} + {_2He^4}$$

β) Ὁ διδόμενος εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 6$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 14$. Ἄρα ὁ σχηματισθεὶς νέος ἀτομικὸς πυρὴν $_6C^{14}$ περιέχει 14 νουκλεόνια, δηλ. ὅσα νουκλεόνια περιεῖχον καὶ οἱ δύο ἀντιδράσαντες ἀτομικοὶ πυρῆνες ($_1H^2$ καὶ $_6C^{12}$). Ἀλλὰ ὁ νέος πυρὴν $_6C^{14}$ περιέχει μόνον 6 πρωτόνια, ἐνῶ οἱ ἀρχικοὶ πυρῆνες περιεῖχον 7 πρωτόνια. Συνεπῶς ἓν πρωτόνιον ἀπέβαλε τὸ στοιχειῶδες θετικὸν φορτίον του ($e+$) καὶ μετετράπη εἰς νετρόνιον. Οὕτω ὁ σχηματισμὸς τοῦ νέου ἀτομικοῦ πυρῆνος $_6C^{14}$ συνοδεύεται μὲ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_1H^1 + {_6C^{12}} \rightarrow {_6\overset{*}{C}{}^{14}} + {_1e^0}$$

Ὁ σχηματισθεὶς νέος ἀτομικὸς πυρὴν $_6C^{14}$ εἶναι ἀσταθὴς (βλ. Φυσική, τόμ. Γ', σελ. 283, πίνακα).

γ) Ὁ ἐλλείπων εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 0$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 1$. Ἄρα εἶναι ἓν νετρόνιον καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_1H^2 + {_4Be^9} \rightarrow {_5B^{10}} + {_0n^1}$$

δ) Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δεικνύει ὅτι ἐνδιαμέσως σχηματίζεται ἀσταθὴς ἀτομικὸς πυρὴν ἔχων ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 35$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 80$. Ὁ νέος οὗτος ἀτομικὸς πυρὴν $_{35}\Sigma^{80}$ μεταστοιχειώνεται εἰς σταθερὸν ἀτομικὸν πυρῆνα διὰ τῆς ἐκπομπῆς ἑνὸς ἠλεκτρονίου (e^-). Ἡ ἐκπομπὴ τοῦ ἠλεκτρονίου ὀφείλεται εἰς τὴν μετατροπὴν ἑνὸς νετρονίου εἰς πρωτόνιον. Οὕτω προκύπτει νέος ἀτομικὸς πυρήν, ἔχων ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 36$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 80$, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν νουκλεονίων δὲν μετεβλήθη. Ὁ ἀτομικὸς ἀριθμὸς $Z = 35$ ἀνήκει εἰς τὸ βρώμιον (Br), ὁ δὲ ἀτομικὸς ἀριθμὸς $Z = 36$ ἀνήκει εἰς τὸ κρυπτὸν (Kr). Οὕτω ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_0n^1 + {_{35}Br^{79}} \rightarrow {_{35}\overset{*}{Br}{}^{80}} \rightarrow {_{36}Kr^{80}} + {_{-1}e^0}$$

ε) Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ δεικνύει ὅτι ὁ ἀτομικὸς πυρὴν φωσφόρου $_{15}P^{30}$ εἶναι ἀσταθὴς κα μεταστοιχειώνεται εἰς σταθερὸν ἀτομικὸν πυρῆνα πυριτίου $_{14}Si^{30}$ διὰ τῆς ἐλαττώσεως τοῦ ἀτομικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ 15 εἰς 14, χωρὶς ὅμως μεταβολὴν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν νουκλεονίων. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πρωτονίων τοῦ πυρῆνος ἐλαττώνεται κατὰ 1. Ἄρα ἓν πρωτόνιον ἀποβάλλει ἓν στοιχειῶδες θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον καὶ μεταβάλλεται εἰς νετρόνιον. Ὥστε ἡ μεταστοιχείωσις τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος $_{15}\overset{*}{P}{}^{30}$ συνοδεύεται ἀπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ποζιτρονίου ($e+$) καὶ οὕτω ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_{15}\overset{*}{P}{}^{30} \rightarrow {_{14}Si^{30}} + {_1e^0}$$

373 (327). **Ἓν πρωτόνιον, ἓν δευτερόνιον καὶ ἓν σωματίδιον α ἐπιταχύνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν τάσιν 10^6 V. Πόσην ταχύτητα ἀποκτᾷ ἕκαστον σωματίδιον;**

Μᾶζα πρωτονίου ($_1H^1$): $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ gr

Μᾶζα δευτερονίου ($_1H^2$): $3{,}34 \cdot 10^{-24}$ gr

Μᾶζα σωματιδίου α ($_2He^4$): $6{,}65 \cdot 10^{-24}$ gr

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Cb

Ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω τριῶν σωματιδίων φέρει τὸ ἑπόμενον θετικὸν φορτίον:

τὸ πρωτόνιον ($_1H^1$): $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου

τὸ δευτερόνιον ($_1H^2$): $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου

τὸ σωματίδιον α ($_2He^4$): $2e = 2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜ - φορτίου

Τὰ τρία αὐτὰ σωματίδια ἐπιταχύνονται ὑπὸ τάσιν:

$$U = 10^6 \text{ V} \quad \text{ἢ} \quad U = \frac{10^6}{300} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ} \quad \text{καὶ} \quad U = \frac{10^4}{3} \text{ ΗΣΜ - δυναμικοῦ}$$

Ἐὰν m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σωματιδίου καὶ υ ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σωματίδιον, τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $\frac{mυ^2}{2}$, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ τὸ σωματίδιον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον QU, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{mυ^2}{2} = QU$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σωματίδιον ἀποκτᾷ ταχύτητα:

$$υ = \sqrt{\frac{2QU}{m}} \qquad (1)$$

ὅπου Q καὶ m εἶναι ἀντιστοίχως τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον καὶ ἡ μᾶζα τοῦ σωματιδίου. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα υ, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἕκαστον τῶν τριῶν ἀνωτέρω σωματιδίων.

Διὰ τὸ πρωτόνιον εἶναι:

$$υ = \sqrt{\frac{2 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (10^4/3)}{1{,}67 \cdot 10^{-24}}} \text{ C.G.S.}$$

ἤτοι $υ = 1378 \cdot 10^6$ cm/sec καὶ **υ = 13 780 km/sec**

Διὰ τὸ δευτερόνιον εἶναι:

$$υ = \sqrt{\frac{2 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (10^4/3)}{3{,}34 \cdot 10^{-24}}} \text{ C.G.S.}$$

ἤτοι $υ = 980 \cdot 10^6$ cm/sec καὶ **υ = 9800 km/sec**

Διὰ τὸ σωματίδιον α εἶναι:

$$υ = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (10^4/3)}{6{,}65 \cdot 10^{-24}}} \text{ C.G.S.}$$

ἤτοι $υ = 980 \cdot 10^6$ cm/sec καὶ **υ = 9800 km/sec**

* Παρατήρησις. Ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν ἀποκτοῦν τὸ δευτερόνιον καὶ τὸ σωματίδιον α, εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡ αὐτή, διότι ὁ μὲν λόγος τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων τῶν σωματιδίων τούτων εἶναι 1 : 2, ὁ δὲ λόγος τῶν μαζῶν των εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἐπίσης 1 : 2.

376 (328). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλευθερουμένη ἐνέργεια κατὰ τὴν διάσπασιν τοῦ πυρῆνος οὐρανίου, ἡ ὁποία διέπεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν:

$$_0n^1 + {}_{92}U^{235} \rightarrow {}_{56}Ba^{14} + {}_{36}Kr^{92} + {}_0n^1 + {}_0n^1 + {}_0n^1$$

Μᾶζα πυρῆνος οὐρανίου :	**235,12517 amu**
Μᾶζα νετρονίου :	**1,00897 amu**
Μᾶζα πυρῆνος βαρίου :	**141,00113 amu**
Μᾶζα πυρῆνος κρυπτοῦ :	**91,89110 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**

Πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν εἶναι :

μᾶζα πυρῆνος οὐρανίου :	235,12517 amu
μᾶζα νετρονίου :	1,00897 amu
ἄθροισμα μαζῶν :	236,13414 amu

Μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν τὸ ἄθροισμα τῶν πυρηνικῶν μαζῶν εἶναι :

μᾶζα πυρῆνος βαρίου :	141,00113 amu
μᾶζα πυρῆνος κρυπτοῦ :	91,89110 amu
μᾶζα 3 νετρονίων :	3,02691 amu
ἄθροισμα μαζῶν :	235,91914 amu

Ὥστε κατὰ τὴν πυρηνικὴν αὐτὴν ἀντίδρασιν παρατηρεῖται διαφορὰ μάζης Δm, ἡ ὁποία εἶναι :

$$\Delta m = (236{,}13414 - 235{,}91914)\ \text{amu} \quad \text{καὶ} \quad \Delta m = 0{,}215\ \text{amu}$$

Ἡ μᾶζα Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία ἐλευθερώνεται κατὰ τὴν ἀντίδρασιν. Οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐλευθερουμένη ἐνέργεια εἶναι :

$$W = 0{,}215\ \text{amu} \cdot 930\ \text{MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W \approx 200\ MeV}$$

377. Πόση ἐνέργεια, μετρημένη εἰς ἠλεκτρονιοβόλτ, ἐλευθερώνεται, ὅταν ἓν νετρόνιον μεταβάλλεται εἰς ἓν πρωτόνιον καὶ ἓν ἠλεκτρόνιον;

Μᾶζα νετρονίου :	$m_n = 1{,}00898$ **amu**
Μᾶζα πρωτονίου :	$m_p = 1{,}00814$ **amu**
Μᾶζα ἠλεκτρονίου :	$m_e = 5{,}487 \cdot 10^{-4}$ **amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης :	**1 amu = 930 MeV**

Ἡ μεταβολὴ τοῦ νετρονίου εἰς πρωτόνιον διὰ τῆς ἐκπομπῆς ἑνὸς ἠλεκτρονίου ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$_0n^1 \rightarrow {}_1p^1 + {}_{-1}e^0$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν τοῦ πρωτονίου καὶ τοῦ ἠλεκτρονίου εἶναι :

μᾶζα πρωτονίου :	1,00814 amu
μᾶζα ἠλεκτρονίου :	0,0005487 amu
ἄθροισμα μαζῶν :	1,0086887 amu

Ὥστε κατὰ τὴν μεταβολὴν αὐτὴν παρατηρεῖται ἔλλειμμα μάζης Δm ἴσον μέ :

$$\Delta m = (1{,}00898 - 1{,}0086887)\ \text{amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 2913 \cdot 10^{-7}\ \text{amu}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν W, ἡ ὁποία εἶναι :

$$W = 2913 \cdot 10^{-7}\ \text{amu} \cdot 930\ \text{MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 0{,}27\ MeV}$$

378. Πόση ἐνέργεια ἐλευθερώνεται κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$) ἀπὸ τὴν σύντηξιν τεσσάρων πρωτονίων ($_1H^1$);

Μᾶζα πρωτονίου ($_1H^1$) : $m_p = 1{,}008145$ amu
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$) : $m_a = 4{,}003879$
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης : **1 amu = 931 MeV**

Ὁ σχηματισμὸς ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$) ἀπὸ τὴν σύντηξιν τεσσάρων πρωτονίων ($_1H^1$) καλεῖται καὶ κύκλος τοῦ Bethe. Ἡ πυρηνικὴ αὐτὴ ἀντίδρασις εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$$_1H^1 + {}_1H^1 + {}_1H^1 + {}_1H^1 \rightarrow {}_2He^4 + {}_1e^0 + {}_1e^0 + E$$

Δηλαδὴ ἡ πυρηνικὴ αὐτὴ ἀντίδρασις συνοδεύεται ἀπὸ ἐκπομπὴν δύο ποζιτρονίων καὶ ἀπὸ ἔκλυσιν ἐνεργείας Ε. Ἂν παραλείψωμεν ὡς ἀσήμαντον τὴν μᾶζαν τῶν δύο ποζιτρονίων, τότε κατὰ τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν προκύπτει ἔλλειμμα μάζης Δm, ἴσον μέ :

$$\Delta m = (4 \cdot 1{,}008145)\ \text{amu} - 4{,}003879\ \text{amu} \quad \text{καὶ} \quad \Delta m = 0{,}028701\ \text{amu}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν Ε. Ἄρα ἔχομεν :

$$E = 0{,}028701\ \text{amu} \cdot 931\ \text{MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{E = 26{,}72\ MeV}$$

379. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τῶν ἀτομικῶν πυρήνων σιδήρου $_{26}Fe^{56}$ καὶ οὐρανίου $_{92}U^{238}$.

Ἀτομικὴ μᾶζα σιδήρου (Fe) : **55,95272 amu**
Ἀτομικὴ μᾶζα οὐρανίου (U) : **238,13232 amu**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης : **1 amu = 931 MeV**
Μᾶζα πρωτονίου : $m_e = 1{,}008145$ amu
Μᾶζα νετρονίου : $m_n = 1{,}008987$ amu

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν σιδήρου $_{26}Fe^{56}$ περιέχει $Z = 26$ πρωτόνια καὶ $N = 30$ νετρόνια. Ἄρα εἶναι :

μᾶζα 26 πρωτονίων :	$26 \times 1{,}008145 = 26{,}21177$ amu
μᾶζα 30 νετρονίων :	$30 \times 1{,}008987 = 30{,}26961$ amu
σύνολον	56,48138 amu

Ὥστε τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm εἶναι :

$$\Delta m = (56{,}48138 - 55{,}95272)\ \text{amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 0{,}52866\ \text{amu}$$

Ἑπομένως διὰ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα σιδήρου $_{26}Fe^{56}$ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως εἶναι :

$$W = 0{,}52866\ \text{amu} \cdot 931\ \text{MeV/amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 492{,}18\ MeV}$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν οὐρανίου $_{92}U^{238}$ περιέχει $Z = 92$ πρωτόνια καὶ $N = 146$ νετρόνια. Ἄρα εἶναι :

μᾶζα 92 πρωτονίων :	$92 \times 1{,}008145 = 92{,}74934$ amu
μᾶζα 146 νετρονίων :	$146 \times 1{,}008987 = 147{,}31210$ amu
σύνολον	240,06144 amu

Ὥστε τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm εἶναι :

$$\Delta m = (240{,}06144 - 238{,}13232)\ \text{amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 1{,}92912\ \text{amu}$$

Ἑπομένως διὰ τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα οὐρανίου $_{92}U^{238}$ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως εἶναι :

$$W = 1{,}92912\ \text{amu} \cdot 931\ \text{MeV/amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 1796\ MeV}$$

* Σημείωσις· Κατὰ νουκλεόνιον ἡ ἐνέργεια συνδέσεως εἶναι:
εἰς τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα σιδήρου:

$$w = \frac{492 \text{ MeV}}{56 \text{ νουκλεόνια}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad w \approx 8{,}8 \text{ MeV/νουκλεόνιον}$$

εἰς τὸν ἀτομικὸν πυρῆνα οὐρανίου:

$$w = \frac{1796 \text{ MeV}}{238 \text{ νουκλεόνια}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad w \approx 7{,}5 \text{ MeV/νουκλεόνιον}$$

380. Νὰ εὑρεθῇ γενικὴ σχέσις, ἡ ὁποία νὰ δίδῃ τὴν ἐνέργειαν συνδέσεως εἰς MeV ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος $_Z\Sigma^A$, ὅταν ἡ μᾶζα (M_Π) τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος, ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου (m_p) καὶ ἡ μᾶζα τοῦ νετρονίου (m_n) δίδωνται εἰς μονάδας ἀτομικῆς μάζης (amu) καὶ εἶναι γνωστὸν ὅτι:

$$\mathbf{1 \text{ amu} = 931 \text{ MeV}.}$$

Ὁ θεωρούμενος ἀτομικὸς πυρὴν περιέχει Z πρωτόνια καὶ $N = A - Z$ νετρόνια. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν τῶν A νουκλεονίων εἶναι:

μᾶζα Z πρωτονίων:	Zm_p
μᾶζα N νετρονίων:	Nm_n
ἄθροισμα μαζῶν τῶν νουκλεονίων:	$m_{\text{ολ}} = Zm_p + Nm_n$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν $_Z\Sigma^A$ ἔχει μᾶζαν M_Π ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω εὑρεθὲν ἄθροισμα $m_{\text{ολ}}$. Ἄρα τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm εἶναι:

$$\Delta m = m_{\text{ολ}} - M_\Pi \qquad \text{ἤτοι} \qquad \Delta m = Zm_p + Nm_n - M_\Pi$$

Ἐπειδὴ τὸ εὑρεθὲν ἔλλειμμα μάζης Δm μετρεῖται εἰς μονάδας ἀτομικῆς μάζης (ἤτοι εἰς amu), ἕπεται ὅτι τὸ ἔλλειμμα μάζης Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐνέργειαν συνδέσεως:

$$W_{\text{συνδ}} = \Delta m \text{ amu} \cdot 931 \text{ MeV/amu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_{\text{συνδ}} = 931 \cdot \Delta m \text{ MeV}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_{\text{συνδ}} = 931 \cdot (Zm_p + Nm_n - M_\Pi) \text{ MeV}}$$

381. Ἐπὶ τοῦ Ἡλίου δεχόμεθα ὅτι ἕκαστος ἀτομικὸς πυρὴν ἡλίου $_2He^4$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τεσσάρων ἀτομικῶν πυρήνων ὑδρογόνου $_1H^1$ (δηλ. πρωτονίων). Πόση ἐνέργεια ἐλευθερώνεται κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς γραμμοατόμου ἡλίου;

Μᾶζα πρωτονίου ($_1H^1$):	$m_p = 1{,}008145$ **amu**
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$):	$m_\alpha = 4{,}003879$ **amu**
Ἀριθμὸς Avogadro:	$N_A = 6 \cdot 10^{23}$ **μόρια/mol**
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης:	$1 \text{ amu} = 1{,}492 \cdot 10^{-3}$ **erg**

Ὁ σχηματισμὸς ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν 4 πρωτονίων ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν:

$$4\,(_1H^1) \rightarrow {}_2He^4 + 2\,(_1e^0) + E$$

Ἡ μᾶζα τῶν ἐκπεμπομένων δύο ποζιτρονίων εἶναι σχεδὸν ἀσήμαντος ἐν σχέσει πρὸς τὰς μάζας τῶν ἄλλων σωματιδίων τῆς ἀντιδράσεως. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω πυρηνικὴν ἀντίδρασιν κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου $_2He^4$ προκύπτει ἔλλειμμα μάζης Δm ἴσον μέ:

$$\Delta m = (4 \cdot 1{,}008145) \text{ amu} - 4{,}003879 \text{ amu} \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta m = 0{,}028701 \text{ amu}$$

Ἡ μᾶζα αὐτὴ Δm μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν E, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$E = 0{,}028701 \text{ amu} \cdot 1{,}492 \cdot 10^{-3} \text{ erg/amu} \qquad \text{καὶ} \qquad E = 0{,}0428 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$$

Ὥστε κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια E. Τὸ μόριον τοῦ ἡλίου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν ἄτομον ἡλίου. Ἄρα εἰς ἓν γραμμοάτομον ἡλίου περιέχονται N_A ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου. Οὕτω κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς γραμμοατόμου ἡλίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια W, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μέ:

$$W = N_A \cdot E \quad \text{ἤτοι} \quad W = 6 \cdot 10^{23} \cdot 0{,}0428 \cdot 10^{-3}\ \text{erg} \quad \text{καὶ} \quad W = 2568 \cdot 10^{16}\ \text{erg}$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ W, μετρημένη εἰς kWh, εἶναι:

$$W = \frac{2568 \cdot 10^{16}\ \text{erg}}{36 \cdot 10^{12}\ \text{erg/kWh}} \quad \text{ἄρα} \quad W = 71{,}3 \cdot 10^4\ \text{kWh}$$

$$\text{ἤτοι} \quad \mathbf{W = 713\,000\ kWh}$$

382. Ὅταν ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἀζώτου $_7N^{14}$ βομβαρδίζεται μὲ νετρόνιον, τότε σχηματίζεται ἀτομικὸς πυρὴν ἄνθρακος $_6C^{12}$ καὶ ἀτομικὸς πυρὴν τριτίου $_1H^3$. Νὰ εὑρεθῇ πόσην ἐνέργειαν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ νετρόνιον, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ προϊόντα τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως δὲν ἔχουν κινητικὴν ἐνέργειαν.

Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἀζώτου $_7N^{14}$: 14,007550 amu
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος $_6C^{12}$: 12,003844 amu
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος τριτίου $_1H^3$: 3,016997 amu
Μᾶζα νετρονίου $_0n^1$: 1,008987 amu
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: 1 amu = 931 MeV

Ἡ θεωρουμένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_1H^3$$

Ἐὰν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν πρὸ καὶ μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν, ἔχομεν:

Πρὸ τῆς ἀντιδράσεως		Μετὰ τὴν ἀντίδρασιν	
μᾶζα $_7N^{14}$ =	14,007550 amu	μᾶζα $_6C^{12}$ =	12,003844 amu
μᾶζα $_0n^1$ =	1,008987 amu	μᾶζα $_1H^3$ =	3,016997 amu
ἄθροισμα	15,016537 amu	ἄθροισμα	15,020841 amu

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μαζῶν μετὰ τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μαζῶν πρὸ τῆς πυρηνικῆς ἀντιδράσεως κατά:

$$\Delta m = (15{,}020841 - 15{,}016537)\ \text{amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta m = 0{,}004304\ \text{amu}$$

Αὐτὸ τὸ πλεόνασμα μάζης Δm εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἐνέργειαν W τοῦ νετρονίου. Ἄρα τὸ νετρόνιον πρέπει νὰ ἔχῃ ἐνέργειαν:

$$W = 0{,}004304\ \text{amu} \cdot 931\ \text{MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{W = 4\ MeV}$$

383. Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν ἄνθρακος $_6C^{12}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι προκύπτει εἴτε ἀπὸ τὴν σύνδεσιν 6 πρωτονίων μὲ 6 νετρόνια, εἴτε ἀπὸ τὴν σύνδεσιν τριῶν ἀτομικῶν πυρήνων ἡλίου $_2He^4$. Νὰ γραφοῦν αἱ ἀντίστοιχοι πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

Μᾶζα πρωτονίου: m_p = 1,008145 amu
Μᾶζα νετρονίου: m_n = 1,008987 amu
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ($_2He^4$): 4,003879 amu
Μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ($_6C^{12}$): 12,003844 amu
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης: 1 amu = 931 MeV

Εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω δύο περιπτώσεων ὁ σχηματισμὸς τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ἐκφράζεται ἀπὸ τὰς ἀκολούθους δύο πυρηνικὰς ἀντιδράσεις :

$$6 \cdot {}_1p^1 + 6 \cdot {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{12} \qquad (1)$$

$$3 \cdot {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} \qquad (2)$$

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν :

μᾶζα 6 πρωτονίων :	$6 \times 1{,}008145$ amu $= 6{,}048870$ amu
μᾶζα 6 νετρονίων :	$6 \times 1{,}008987$ amu $= 6{,}053922$ amu
ἄθροισμα μαζῶν :	12,102792 amu
μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ${}_6C^{12}$:	12,003844 amu
ἔλλειμμα μάζης :	$\Delta m = 0{,}098948$ amu

Τὸ εὑρεθὲν ἔλλειμμα μάζης Δm ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐνέργειαν συνδέσεως :

$$W_1 = 0{,}098948 \text{ amu} \cdot 931 \text{ MeV/amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_1 = 92{,}12\ MeV}$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν :

μᾶζα 3 ἀτομικῶν πυρήνων ἡλίου ${}_2He^4$:	$3 \times 4{,}003879 = 12{,}011637$ amu
μᾶζα ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ${}_6C^{12}$:	12,003844 amu
ἔλλειμμα μάζης:	$\Delta m = 0{,}007793$ amu

Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐνέργεια συνδέσεως τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος ἄνθρακος ${}_6C^{12}$ εἶναι :

$$W_2 = 0{,}007793 \text{ amu} \cdot 931 \text{ MeV/amu} \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{W_2 = 7{,}255\ MeV}$$

384. Νὰ συμπληρωθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις :

α) $${}_{29}\mathbf{Cu}^{63} + {}_1\mathbf{H}^1 \rightarrow {}_{17}\mathbf{Cl}^{38} + {}_{13}\mathbf{Al}^{25} + \ldots\ldots$$

β) $${}_{29}\mathbf{Cu}^{63} + {}_1\mathbf{H}^1 \rightarrow {}_{17}\mathbf{Cl}^{38} + 6\,({}_2\mathbf{He}^4) + {}_0\mathbf{n}^1 + \ldots\ldots$$

Εἰς τὴν πρώτην πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ἔχομεν :

πρὸ τῆς ἀντιδράσεως :

ἄθροισμα πρωτονίων : $29 + 1 = 30$ ἄθροισμα νουκλεονίων : $63 + 1 = 64$

μετὰ τὴν ἀντίδρασιν :

ἄθροισμα πρωτονίων : $17 + 13 = 30$ ἄθροισμα νουκλεονίων : $38 + 25 = 63$

Ἄρα εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως πρέπει νὰ προστεθῇ ἓν νετρόνιον ${}_0n^1$. Οὕτω ἡ ἀντίδρασις γράφεται ὡς ἑξῆς :

α) $${}_{29}Cu^{63} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{17}Cl^{38} + {}_{13}Al^{25} + {}_0n^1$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς δευτέρας ἐξισώσεως πρέπει νὰ προστεθῇ ἓν πρωτόνιον ${}_1H^1$. Ἐπομένως ἡ ἀντίδρασις αὐτὴ γράφεται ὡς ἑξῆς :

β) $${}_{29}Cu^{63} + {}_1H^1 \rightarrow {}_{17}Cl^{38} + 6\,({}_2He^4) + {}_0n^1 + {}_1H^1$$

385. Ὁ ραδιενεργὸς ἄργυρος ${}_{47}\overset{*}{\mathbf{Ag}}{}^{106}$ δύναται νὰ μεταστοιχειωθῇ κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους : α) δι' ἐκπομπῆς ἑνὸς ποζιτρονίου, ὁπότε σχηματίζεται σταθερὸς ἀτομικὸς πυρὴν παλλαδίου $\mathbf{Pd}^{106}$ καὶ β) δι' ἐκπομπῆς ἑνὸς ἠλεκτρονίου, ὁπότε σχηματίζεται σταθερὸς ἀτομικὸς πυρὴν καδμίου $\mathbf{Cd}^{106}$. Νὰ γραφοῦν αἱ ἀντίστοιχοι πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις.

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν τοῦ ραδιενεργοῦ ἀργύρου περιέχει :

$$Z = 47 \text{ πρωτόνια} \quad \text{καὶ} \quad N = 106 - 47 = 59 \text{ νετρόνια}$$

α) Ὅταν ἐκπέμπεται ἓν ποζιτρόνιον, τότε ἓν πρωτόνιον τοῦ πυρῆνος μετατρέπεται εἰς νετρόνιον, σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$_1p^1 \rightarrow {_0n^1} + {_1e^0}$$

Οὕτω ὁ νέος ἀτομικὸς πυρὴν παλλαδίου (Pd) περιέχει :

$$Z = 46 \text{ πρωτόνια} \quad \text{καὶ} \quad N = 60 \text{ νετρόνια}$$

Ὥστε ἡ κατὰ τὸν πρῶτον τρόπον μεταστοιχείωσις τοῦ ραδιενεργοῦ ἀργύρου ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$\underline{{_{47}\overset{*}{A}g^{106}} \rightarrow {_{46}Pd^{106}} + {_1e^0}}$$

β) Ὅταν ἐκπέμπεται ἓν ἠλεκτρόνιον, τότε ἓν νετρόνιον τοῦ πυρῆνος μετατρέπεται εἰς πρωτόνιον, σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$_0n^1 \rightarrow {_1p^1} + {_{-1}e^0}$$

Οὕτω ὁ νέος ἀτομικὸς πυρὴν καδμίου (Cd) περιέχει :

$$Z = 48 \text{ πρωτόνια} \quad \text{καὶ} \quad N = 58 \text{ νετρόνια}$$

Ὥστε ἡ κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον μεταστοιχείωσις τοῦ ραδιενεργοῦ ἀργύρου ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$\underline{{_{47}\overset{*}{A}g^{106}} \rightarrow {_{48}Cd^{106}} + {_{-1}e^0}}$$

386. Κατὰ μίαν ἁλυσιδωτὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων νετρονίων τριπλασιάζεται καθ' ἕκαστον λεπτὸν τῆς ὥρας. Εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ὥρας ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτω παραγομένων νετρονίων εἶναι N. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς N καὶ νὰ εὑρεθῇ πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς ἀριθμοῦ N' νετρονίων, ὁ ὁποῖος εἶναι $N' = \frac{N}{2}$.

Ἐπειδὴ καθ' ἕκαστον λεπτὸν τῆς ὥρας ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων νετρονίων τριπλασιάζεται, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων νετρονίων κατὰ τὸ 1ον, 2ον, 3ον, 4ον . . . . . λεπτὸν εἶναι ἀντιστοίχως :

$$3,\ 9,\ 27,\ 81 \ldots\ldots \quad \text{ἤτοι} \quad 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4 \ldots\ldots$$

Ἄρα κατὰ τὸ 60ον λεπτὸν τῆς ὥρας ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγομένων νετρονίων εἶναι :

$$N = 3^{60}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν :

$$\text{λογ}\, N = 60 \cdot \text{λογ}\, 3 \quad \text{ἤτοι} \quad \text{λογ}\, N = 60 \cdot 0{,}47712$$

$$\text{ἄρα} \quad \text{λογ}\, N = 28{,}62720 \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{N = 4238 \cdot 10^{25}} \text{ \textbf{νετρόνια}}$$

Διὰ νὰ παραχθοῦν $N' = \frac{N}{2}$ νετρόνια πρέπει νὰ παρέλθῃ χρόνος t λεπτῶν καὶ τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$N' = 3^t$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν :

$$\text{λογ}\, N' = t \cdot \text{λογ}\, 3 \quad \text{ἄρα} \quad t = \frac{\text{λογ}\, N'}{\text{λογ}\, 3}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $N' = \frac{N}{2} = 2119 \cdot 10^{25}$ νετρόνια, ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν λαμβάνομεν :

$$t = \frac{20{,}32613}{0{,}47712} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{t = 59{,}3\ min}$$

387. Σφαῖρα ἔχει διάμετρον 1 m, ἡ δὲ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια αὐτῆς ἀποτελεῖ ἐπιφάνειαν ἀπολύτως μέλανος σώματος. Εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὑπάρχουν 2 kgr οὐρανίου $_{92}U^{235}$, τὰ ὁποῖα ὑφίστανται διάσπασιν. Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου $_{92}U^{235}$ ἐκλύεται ἐνέργεια ἴση μὲ $200 \cdot 10^6$ eV. Πόσην θερμοκρασίαν ἀποκτᾷ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ἂν δεχθῶμεν ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐνέργεια ἐκλύεται ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου;

Ἀτομικὸν βάρος οὐρανίου : $\quad \mathbf{U = 235}$

Ἀριθμὸς Avogadro : $\quad \mathbf{N_A = 6 \cdot 10^{23}}$ **μόρια/mol**

Σταθερὰ Stefan - Boltzmann : $\quad \boldsymbol{\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 \cdot sec \cdot grad^4}}$

Μονὰς ἐνεργείας : $\quad \mathbf{1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg}$

Εἰς 1 γραμμοάτομον οὐρανίου, ἤτοι εἰς 235 gr οὐρανίου, περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα οὐρανίου. Ἄρα εἰς 2000 gr οὐρανίου περιέχεται ἀριθμὸς N ἀτόμων οὐρανίου, ἴσος μέ :

$$N = N_A \cdot \frac{2000}{235} \text{ ἄτομα} \quad \text{ἤτοι} \quad N = 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{235} \text{ ἄτομα}$$

$$\text{καὶ} \quad N = \frac{12 \cdot 10^{26}}{235} \text{ ἄτομα}$$

Ὥστε εἰς τὸ κέντρον τῆς θεωρουμένης σφαίρας ὑφίστανται διάσπασιν N ἀτομικοὶ πυρῆνες οὐρανίου καὶ συνεπῶς ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W = (200 \cdot 10^6 \cdot N)\ eV \quad \text{ἤτοι} \quad W = 200 \cdot 10^6 \cdot \frac{12 \cdot 10^{26}}{235}\ eV$$

$$\text{καὶ} \quad W = \frac{24 \cdot 10^{34}}{235}\ eV \quad \text{ἢ} \quad W \approx 10^{33}\ eV$$

Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἐκλύεται ἐντὸς 1 sec, καὶ μετρημένη εἰς ἔργια, εἶναι :

$$W = 10^{33} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ erg/sec \quad \text{ἤτοι} \quad W = 1{,}6 \cdot 10^{22}\ erg/sec$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐνέργεια W ἀκτινοβολεῖται ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία θεωρεῖται ὡς ἀπολύτως μέλαν σῶμα. Τότε σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Stefan - Botzmann (βλ. Φυσική, τόμ. Β, σελ. 257) ἀπὸ ἓν τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (1 cm^2) τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἀπολύτως μέλανος σώματος ἀκτινοβολεῖται κατὰ δευτερόλεπτον ἐνέργεια (E), ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τετάρτην δύναμιν τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας (T) τοῦ σώματος, ἤτοι εἶναι :

$$E = \sigma \cdot T^4$$

ὅπου σ εἶνοι ἡ σταθερὰ Stefan - Boltzmann. Ἡ σφαῖρα ἔχει ἀκτῖνα $r = 50$ cm, καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδόν :

$$S = 4\pi \cdot r^2 \quad \text{ἤτοι} \quad S = 4\pi \cdot 50^2\ cm^2 \quad \text{ἢ} \quad S = 31\,400\ cm^2$$

Ὥστε ἀπὸ ὁλόκληρον τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀκτινοβολεῖται ἐντὸς ἑνὸς δευτερολέπτου ἡ εὑρεθεῖσα ἐνέργεια W καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$W = S \cdot E \quad \text{ἤτοι} \quad W = S \cdot \sigma \cdot T^4$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία (T) τοῦ θεωρουμένου ἀπολύτως μέλανος σώματος εἶναι :

$$T^4 = \frac{W}{S \cdot \sigma} \quad \text{ἄρα} \quad T^4 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{22}\ \text{erg/sec}}{5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec} \cdot \text{grad}^4} \cdot 31\,400\ \text{cm}^2}$$

$$\text{καὶ} \quad T^4 \approx 9 \cdot 10^{20}\ \text{grad}^4$$

Ὥστε ἡ ζητουμένη ἀπόλυτος θερμοκρασία T εἶναι :

$$T = \sqrt[4]{9 \cdot 10^{20}}\ \text{grad} \quad \text{ἤτοι} \quad T = 1{,}892 \cdot 10^5\ \text{grad} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{T = 189\,200^0\ K}$$

388. Κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου $_{92}U^{235}$ ἐλευθερώνεται ἐνέργεια 200 MeV. Πόση ἀπόδοσις ἐπιτυγχάνεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 gr οὐρανίου καὶ πόση ἐνέργεια εἰς κιλοβατώρια λαμβάνεται κατὰ τὴν διάσπασιν αὐτήν;

Ἀτομικὸν βάρος οὐρανίου : $\mathbf{U = 235}$

Ἀριθμὸς Avogadro : $\mathbf{N_A = 6 \cdot 10^{23}}$ **μόρια/mol**

Εἰς ἓν γραμμοάτομον οὐρανίου, ἤτοι εἰς 235 gr οὐρανίου, περιέχονται $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα οὐρανίου. Ἄρα εἰς 1 gr οὐρανίου περιέχεται ν ἀριθμὸς ἀτόμων οὐρανίου, ἴσος μέ :

$$\nu = \frac{6 \cdot 10^{23}}{235}\ \text{ἄτομα οὐρανίου}$$

Κατὰ τὴν διάσπασιν τῶν ν ἀτομικῶν πυρήνων οὐρανίου ἐλευθερώνεται ὠφέλιμος ἐνέργεια :

$$W_{\omega\varphi} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{235} \cdot 200\ \text{MeV} \quad \text{ἤτοι} \quad W_{\omega\varphi} = \frac{12 \cdot 10^{25}}{235}\ \text{MeV}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}$ ἕπεται ὅτι εἶναι $1\ \text{MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{erg}$

Ἄρα κατὰ τὴν διάσπασιν τῶν ν ἀτομικῶν πυρήνων οὐρανίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_{\omega\varphi} = \frac{12 \cdot 10^{25}}{235} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{erg} \quad \text{ἤτοι} \quad W_{\omega\varphi} = \frac{19{,}2 \cdot 10^{19}}{235}\ \text{erg}$$

Ἡ ἐλευθερουμένη ἐνέργεια $W_{\omega\varphi}$ προέρχεται ἀπὸ τὴν μετατροπὴν ὡρισμένης μάζης οὐρανίου εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν. Ἡ ἀρχικὴ μᾶζα τοῦ οὐρανίου ἦτο 1 gr, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν :

$$W_{\delta\alpha\pi} = 1\ \text{gr} \cdot (\,3 \cdot 10^{10}\ \text{cm/sec}\,)^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_{\delta\alpha\pi} = 9 \cdot 10^{20}\ \text{erg}$$

Ὥστε εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ὁ συντελεστὴς ἀποδόσεως (η) εἶναι :

$$\eta = \frac{W_{\omega\varphi}}{W_{\delta\alpha\pi}} \quad \text{ἄρα} \quad \eta = \frac{(\,19{,}2 \cdot 10^{19}/235\,)\ \text{erg}}{9 \cdot 10^{20}\ \text{erg}} \quad \text{καὶ} \quad \eta = 0{,}0009$$

Ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἀπόδοσις εἶναι : $\mathbf{\eta = 0{,}09\ \%}$

Εἶναι γνωστὸν ὅτι εἶναι : $1\ \text{kWh} = 36 \cdot 10^{12}\ \text{erg}$

Ἡ ἐνέργεια, ἡ ὁποία ἐκλύεται κατὰ τὴν διάσπασιν 1 gr οὐρανίου, μετρουμένη εἰς κιλοβατώρια, εἶναι :

$$W_{\omega\varphi} = \frac{(\,19{,}2 \cdot 10^{19}/235\,)\ \text{erg}}{36 \cdot 10^{12}\ \text{erg/kWh}} \quad \text{ἤτοι} \quad W_{\omega\varphi} = 2{,}27 \cdot 10^4\ \text{kWh}$$

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{W_{\omega\varphi} = 22\,700\ kWh}$$

389. Ἀτομικὸς πυρὴν θορίου $_{90}Th^{232}$ προσλαμβάνει ἓν νετρόνιον καὶ μεταβάλλεται εἰς τὸν ἀσταθῆ ἀτομικὸν πυρῆνα Π, ὁ ὁποῖος ἀμέσως ἐκπέμπει ἓν ἠλεκτρόνιον καὶ

μεταστοιχειώνεται εἰς τὸν ἐπίσης ἀσταθῆ ἀτομικὸν πυρῆνα Π'. Καὶ ὁ πυρὴν οὗτος ἐκπέμπει ἓν ἠλεκτρόνιον καὶ μεταστοιχειώνεται εἰς σχάσιμον ἀτομικὸν πυρῆνα. Νὰ γραφοῦν αἱ πυρηνικαὶ ἀντιδράσεις.

Z = 90 θόριον : (Th), Z = 91 : πρωτακτίνιον (Pα) Z = 92 : οὐράνιον (U)

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν θορίου $_{90}Th^{232}$, ὅταν προσλάβῃ τὸ ἓν νετρόνιον, ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 90, ἀλλὰ ὁ μαζικὸς ἀριθμός του γίνεται A = 232 + 1 = 233. Ἄρα ὁ σχηματισθεὶς ἀσταθὴς ἀτομικὸς πυρὴν Π εἶναι ἀτομικὸς πυρὴν θορίου $_{90}Th^{233}$. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_{90}Th^{232} + {_0n^1} \rightarrow {_{90}Th^{233}} \qquad (1)$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν $_{90}Th^{233}$ ἐκπέμπει ἓν ἠλεκτρόνιον ($_{-1}e^0$). Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἓν νετρόνιον τοῦ πυρῆνος μεταβάλλεται εἰς πρωτόνιον ($_1p^1$), ἤτοι συμβαίνει ἡ ἀκόλουθος μεταβολή :

$$_0n^1 \rightarrow {_1p^1} + {_{-1}e^0}$$

Οὕτω ὁ σχηματιζόμενος νέος ἀσταθὴς ἀτομικὸς πυρὴν Π' ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 90 + 1 = 91, ἀλλὰ μαζικὸν ἀριθμὸν τὸν αὐτόν, ἤτοι A = 233. Ὥστε ὁ σχηματισθεὶς ἀτομικὸς πυρὴν Π' εἶναι ἀτομικὸς πυρὴν πρωτακτινίου καὶ ἡ πυρηνικὴ αὐτὴ ἀντίδρασις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_{90}Th^{233} \rightarrow {_{91}P\alpha^{233}} + {_{-1}e^0} \qquad (2)$$

Καὶ ὁ ἀτομικὸς πυρὴν πρωτακτινίου $_{91}P\alpha^{233}$ ἐκπέμπει ἓν ἠλεκτρόνιον ($_{-1}e^0$), ἤτοι ἓν νετρόνιον τοῦ πυρῆνος του μεταβάλλεται εἰς πρωτόνιον ($_1p^1$). Συνεπῶς ὁ σχηματιζόμενος νέος ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 91 + 1 = 92 καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν τὸν αὐτόν, ἤτοι A = 233. Ὥστε τελικῶς σχηματίζεται ἀτομικὸς πυρὴν οὐρανίου $_{92}U^{233}$ καὶ ἡ τελευταία αὐτὴ πυρηνικὴ ἀντίδρασις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$_{91}P\alpha^{233} \rightarrow {_{92}U^{233}} + {_{-1}e^0} \qquad (3)$$

390. Κατὰ τὸν βομβαρδισμὸν τοῦ φυσικοῦ οὐρανίου $_{92}U^{238}$ μὲ νετρόνιον ($_0n^1$) συμβαίνει ἡ ἀκόλουθος σειρὰ μεταστοιχειώσεων :

$$_{92}U^{238} \rightarrow {_{92}U^{239}} \rightarrow {_{93}Np^{239}} \rightarrow {_{94}Pu^{239}}$$

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν πλουτωνίου $_{94}Pu^{239}$ εἶναι ἀρκετὰ σταθερός, ἀλλὰ σχάσιμος ὅπως καὶ τὰ ἰσότοπα τοῦ οὐρανίου $_{92}U^{235}$ καὶ $_{92}U^{233}$. Νὰ γραφοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πυρηνικῶν ἀντιδράσεων, αἱ ὁποῖαι συμβαίνουν κατὰ τὴν ἀνωτέρω σειρὰν μεταστοιχειώσεων.

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν οὐρανίου $_{92}U^{238}$ προσλαμβάνει τὸ νετρόνιον καὶ μεταβάλλεται εἰς ἀτομικὸν πυρῆνα ἔχοντα ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 92 καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν A = 238 + 1 = 239. Ἄρα ἔχομεν τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_{92}U^{238} + {_0n^1} \rightarrow {_{92}U^{239}} \qquad (1)$$

Ὁ σχηματισθεὶς ἀτομικὸς πυρὴν οὐρανίου $_{92}U^{239}$ μεταστοιχειώνεται εἰς ἀτομικὸν πυρῆνα νεπτουνίου, ἔχοντα ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 93 καὶ τὸν αὐτὸν μαζικὸν ἀριθμὸν A = 239. Ἄρα κατὰ τὴν μεταστοιχείωσιν αὐτὴν αὐξάνεται κατὰ 1 ὁ ἀριθμὸς τῶν πρωτονίων τοῦ πυρῆνος. Τοῦτο συμβαίνει, διότι ἓν νετρόνιον τοῦ πυρῆνος μετατρέπεται εἰς πρωτόνιον διὰ τῆς ἐκπομπῆς ἑνὸς ἠλεκτρονίου ($_{-1}e^0$). Ἄρα ἔχομεν τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_{92}U^{239} \rightarrow {_{93}Np^{239}} + {_{-1}e^0} \qquad (2)$$

Τέλος ὁ ἀτομικὸς πυρὴν νεπτουνίου $_{93}Np^{239}$ μεταστοιχειώνεται εἰς ἀτομικὸν πυρῆνα πλουτωνίου, ἔχοντα ἀτομικὸν ἀριθμὸν Z = 94 καὶ τὸν αὐτὸν μαζικὸν ἀριθμὸν A = 239. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἓν νετρόνιον τοῦ πυρῆνος μετατρέπεται εἰς πρωτόνιον ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ἠλεκτρονίου ($_{-1}e^{0}$). Οὕτω ἔχομεν τὴν πυρηνικὴν ἀντίδρασιν :

$$_{93}Np^{239} \rightarrow {}_{94}Pu^{239} + {}_{-1}e^{0} \qquad (3)$$

* Σημείωσις. Ἡ μετατροπὴ τοῦ νετρονίου εἰς πρωτόνιον ὑπὸ ἐκπομπὴν ἑνὸς ἠλεκτρονίου παρίσταται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$_{0}n^{1} \rightarrow {}_{1}p^{1} + {}_{-1}e^{0}$$

391. Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν πλουτωνίου $_{94}Pu^{241}$ μεταστοιχειώνεται εἰς ἄλλον ὑπερουράνιον ἀτομικὸν πυρῆνα διὰ τῆς ἐκπομπῆς ἑνὸς ἠλεκτρονίου. Νὰ καθορισθῇ ὁ νέος ἀτομικὸς πυρὴν καὶ νὰ γραφῇ ἡ πυρηνικὴ ἀντίδρασις.

Ὁ ἀτομικὸς πυρὴν πλουτωνίου $_{94}Pu^{241}$ ἐκπέμπει ἓν ἠλεκτρόνιον, διότι ἓν νετρόνιον ($_{0}n^{1}$) τοῦ πυρῆνος του μετετράπη εἰς πρωτόνιον σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθον ἀντίδρασιν :

$$_{0}n^{1} \rightarrow {}_{1}p^{1} + {}_{-1}e^{0}$$

Οὕτω ὁ σχηματιζόμενος νέος ἀτομικὸς πυρὴν ἔχει ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 94 + 1$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = 241$, τὸν αὐτὸν μὲ τὸν μαζικὸν ἀριθμὸν τοῦ πλουτωνίου, διότι δὲν μετεβλήθη ὁ ἀριθμὸς τῶν νουκλεονίων. Ὁ προκύπτων πυρὴν εἶναι :

ἀτομικὸς πυρὴν ἀμερικίου : $_{95}Am^{241}$

Ἡ θεωρουμένη πυρηνικὴ ἀντίδρασις εἶναι :

$$_{94}Pu^{241} \rightarrow {}_{95}Am^{241} + {}_{-1}e^{0}$$

392. Ἀπὸ τὸν βομβαρδισμὸν τοῦ ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου $_{92}U^{238}$ μὲ ἀτομικὸν πυρῆνα ἄνθρακος $_{6}C^{12}$ προκύπτει νέος ὑπερουράνιος ἀτομικὸς πυρὴν καὶ συγχρόνως ἐκπέμπονται 4 νετρόνια. Νὰ ἀναγνωρισθῇ ὁ νέος ἀτομικὸς πυρήν.

Ὁ νέος ἀτομικὸς πυρὴν $_{Z}\Sigma^{A}$ σύμφωνα μὲ τὴν δεδομένην ἀντίδρασιν :

$$_{92}U^{238} + {}_{6}C^{12} \rightarrow {}_{Z}\Sigma^{A} + 4 \cdot ({}_{0}n^{1})$$

θὰ ἔχῃ ἀτομικὸν ἀριθμὸν $Z = 92 + 6 = 98$ καὶ μαζικὸν ἀριθμὸν $A = (238 + 12) - 4 = 246$. Ἄρα ὁ σχηματιζόμενος νέος ὑπερουράνιος ἀτομικὸς πυρὴν εἶναι :

ἀτομικὸς πυρὴν καλιφορνίου : $_{98}Cf^{246}$

Ἡ δὲ πυρηνικὴ ἀντίδρασις τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ νέου τούτου ἀτομικοῦ πυρῆνος εἶναι ἡ ἀκόλουθος :

$$_{92}U^{238} + {}_{6}C^{12} \rightarrow {}_{98}Cf^{246} + 4 \cdot ({}_{0}n^{1})$$

393. Εἰς μᾶζαν ὑδρογόνου ἴσην μὲ 1 gr περιέχονται $N_H = 6 \cdot 10^{23}$ ἄτομα ὑδρογόνου, ἐνῷ εἰς μᾶζαν οὐρανίου U^{235} ἴσην μὲ 1 gr περιέχονται $N_U = 1{,}8 \cdot 10^{19}$ ἄτομα οὐρανίου. Εἶναι γνωστὸν ὅτι κατὰ τὴν σύντηξιν 4 ἀτομικῶν πυρήνων ὑδρογόνου πρὸς σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου (He^4) ἐλευθερώνεται ἐνέργεια ἴση μὲ 28 MeV. Ἐνῷ κατὰ τὴν διάσπασιν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος οὐρανίου U^{235} ἐλευθερώνεται ἐνέργεια ἴση μὲ 200 MeV. Νὰ συγκριθοῦν αἱ ἐνέργειαι, αἱ ὁποῖαι ἐκλύονται ἀπὸ ἴσην μᾶζαν ὑδρογόνου καὶ οὐρανίου κατὰ τὰς ἀντιστοίχους πυρηνικὰς ἀντιδράσεις.

Εἰς μᾶζαν 1 gr ὑδρογόνου περιέχονται $N_H = 6 \cdot 10^{23}$ ἀτομικοὶ πυρῆνες ὑδρογόνου. Ἐκ τούτων θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς N ἀτομικῶν πυρήνων ἡλίου, ἴσος μέ :

$$N = \frac{N_H}{4} \qquad \text{ἤτοι} \qquad N = \frac{6 \cdot 10^{23}}{4} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου } (He^4)$$

$$\text{καὶ} \qquad N = 15 \cdot 10^{22} \text{ ἀτομικοὶ πυρῆνες ἡλίου } (He^4)$$

Δίδεται ὅτι κατὰ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀτομικοῦ πυρῆνος ἡλίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια 28 MeV. Ἄρα κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν N ἀτομικῶν πυρήνων ἡλίου ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_H = 15 \cdot 10^{22} \cdot 28 \text{ MeV} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{W_H = 42 \cdot 10^{23} \text{ MeV}}$$

Εἰς μᾶζαν 1 gr οὐρανίου περιέχονται $N_U = 1{,}8 \cdot 10^{19}$ ἀτομικοὶ πυρῆνες οὐρανίου. Κατὰ τὴν σχάσιν τῶν πυρήνων τούτων ἐλευθερώνεται ἐνέργεια :

$$W_U = 1{,}8 \cdot 10^{19} \cdot 200 \text{ MeV} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \mathbf{W_U = 36 \cdot 10^{21} \text{ MeV}}$$

Ὥστε ἀπὸ μᾶζαν 1 gr ὑδρογόνου ἢ 1 gr οὐρανίου λαμβάνεται ἀντιστοίχως ἐνέργεια W_H καὶ W_U. Ὁ λόγος τῶν δύο τούτων ἐνεργειῶν εἶναι :

$$\frac{W_H}{W_U} = \frac{42 \cdot 10^{23} \text{ MeV}}{36 \cdot 10^{21} \text{ MeV}} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{W_H}{W_U} = 117 \qquad \text{ἄρα} \qquad \mathbf{W_H = 117 \cdot W_U}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τὴν σύντηξιν 1 gr ὑδρογόνου λαμβάνεται ἐνέργεια 117 φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἐνέργειαν ἡ ὁποία λαμβάνεται κατὰ τὴν σχάσιν 1 gr οὐρανίου U^{235}.

394. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ τελικὸν προϊὸν τῆς μεταστοιχειώσεως τοῦ οὐρανίου $_{92}U^{238}$ εἶναι ὁ μόλυβδος $_{82}Pb^{206}$, ὁ ὁποῖος εἶναι σταθερὸν στοιχεῖον. Ἡ φυσικὴ ραδιενέργεια διέπεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\mathbf{N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$$

Εἰς δύο ὀρυκτὰ Α καὶ Β εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν ὑπαρχόντων ἀτόμων τῶν δύο ἀνωτέρω στοιχείων εἶναι :

Εἰς τὸ ὀρυκτὸν Α : $$\mathbf{\frac{Pb}{U} = \frac{10}{990}}$$

Εἰς τὸ ὀρυκτὸν Β : $$\mathbf{\frac{Pb}{V} = \frac{220}{780}}$$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατὰ προσέγγισιν ἡλικία τῶν δύο τούτων ὀρυκτῶν, ἐὰν ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ οὐρανίου εἶναι $T = 4{,}5 \cdot 10^9$ ἔτη.

Εἰς τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τῆς φυσικῆς ραδιενεργείας :

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

N_0 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων τοῦ στοιχείου, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν κατὰ τὸν χρόνον $t = 0$, N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν κατὰ τὸν χρόνον t, e εἶναι ἡ βάσις τῶν νεπερείων λογαρίθμων καὶ λ ἡ σταθερὰ διασπάσεως τοῦ στοιχείου. Μετὰ παρέλευσιν χρόνου $t = T$ τὰ μὴ μεταστοιχειωθέντα ἄτομα εἶναι $N = \frac{N_0}{2}$, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ χρόνου ὑποδιπλασιασμοῦ T τοῦ στοιχείου. Ἄρα διὰ $t = T$ ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T} \qquad \text{ἄρα} \qquad e^{\lambda T} = 2$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \lambda T = \log 2 \qquad \text{ἢ} \qquad \lambda T = 0{,}693$$

Ὥστε ἡ σταθερὰ διασπάσεως λ τοῦ στοιχείου εἶναι :

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$$

Οὕτω διὰ τὸ οὐράνιον εὑρίσκομεν ὅτι ἡ σταθερὰ διασπάσεως λ εἶναι :

$$\lambda = \frac{0{,}693}{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ ἔτη}}$$

Εἰς τὸ ὀρυκτὸν Α ἐκ 1000 ἀρχικῶς ὑπαρχόντων ἀτόμων οὐρανίου ὑπάρχουν σήμερον, δηλ. μετὰ παρέλευσιν χρόνου t, μόνον 990 ἄτομα οὐρανίου. Ἄρα σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν:

$$990 = 1000 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{990}{1000} = \frac{1}{e^{\lambda t}} \quad \text{ἄρα} \quad e^{\lambda t} = \frac{1000}{990}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν:

$$\lambda t = \log \frac{1000}{990} \quad \text{ἤτοι} \quad t = \frac{\log 1000 - \log 990}{\lambda}$$

$$\text{καὶ} \quad t = \frac{(\log 1000 - \log 990) \cdot (4{,}5 \cdot 10^9)}{0{,}693} \text{ ἔτη}$$

Ἐπειδὴ εἶναι:

$$\log 1000 = 2{,}3 \cdot \lambda o\gamma\, 1000 = 2{,}3 \cdot 3 = 6{,}9$$

$$\log 990 = 2{,}3 \cdot \lambda o\gamma\, 990 = 2{,}3 \cdot 2{,}99564 = 6{,}89$$

εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἡ ἡλικία τοῦ ὀρυκτοῦ Α εἶναι:

$$t = \frac{0{,}01 \cdot 4{,}5 \cdot 10^9}{0{,}693} \text{ ἔτη} \quad \text{καὶ} \quad t = 65 \cdot 10^6 \text{ ἔτη}$$

ἤτοι **t = 65 ἑκατομμύρια ἔτη**

Εἰς τὸ ὀρυκτὸν Β ἐκ 1000 ἀρχικῶς ὑπαρχόντων ἀτόμων οὐρανίου ὑπάρχουν σήμερον μόνον 780 ἄτομα οὐρανίου. Ἄρα σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἔχομεν:

$$780 = 1000 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{ἤτοι} \quad e^{\lambda t} = \frac{1000}{780}$$

$$\text{ἢ} \quad \lambda t = \log \frac{1000}{780} \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{(\log 1000 - \log 780) \cdot (4{,}5 \cdot 10^9)}{0{,}693} \text{ ἔτη}$$

Ἐπειδὴ εἶναι:

$$\log 1000 = 2{,}3 \cdot \lambda o\gamma\, 1000 = 2{,}3 \cdot 3 = 6{,}9$$

$$\log 780 = 2{,}3 \cdot \lambda o\gamma\, 780 = 2{,}3 \cdot 2{,}89209 = 6{,}65$$

εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἡ ἡλικία τοῦ ὀρυκτοῦ Β εἶναι:

$$t = \frac{0{,}25 \cdot 4{,}5 \cdot 10^9}{0{,}693} \text{ ἔτη} \quad \text{καὶ} \quad t \approx 1{,}6 \cdot 10^9 \text{ ἔτη}$$

ἤτοι **t = 1,6 δισεκατομμύρια ἔτη**

395. Ἓν ποζιτρόνιον καὶ ἓν ἠλεκτρόνιον ἑνοῦνται καὶ δίδουν ἓν φωτόνιον ἀκτινοβολίας γ. Πόση εἶναι ἡ συχνότης καὶ τὸ μῆκος κύματος τῆς παραγομένης ἀκτινοβολία, γ:

Μᾶζα ποζιτρονίου ἢ ἠλεκτρονίου: $\mathbf{m = 9 \cdot 10^{-28}\ gr}$

Σταθερὰ τοῦ Planck: $\mathbf{h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ erg \cdot sec}$

Ἡ μᾶζα τῶν δύο σωματιδίων, ποζιτρονίου καὶ ἠλεκτρονίου, ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν:

$$W = 2 \cdot mc^2$$

Τὸ παραγόμενον φωτόνιον ἀκτινοβολίας γ ἔχει ἐνέργειαν q ἴσην μὲ τὴν ἀνωτέρω ἐνέργειαν W. Ἄρα εἶναι·

$$q = 2 \cdot mc^2 \quad \text{ἤτοι} \quad h\nu = 2 \cdot mc^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ὅτι ἡ συχνότης ν τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας γ εἶναι :

$$\nu = \frac{2\,\mathrm{mc^2}}{\mathrm{h}} \quad \text{ἤτοι} \quad \nu = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{gr} \cdot 9 \cdot 10^{20}\ \mathrm{cm^2/sec^2}}{6{,}6 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{erg \cdot sec}}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\nu = 245 \cdot 10^{18}\ \mathrm{Hz}}$$

Τὸ δὲ μῆκος κύματος λ τῆς παραγομένης ἀκτινοβολίας γ εἶναι :

$$\lambda = \frac{\mathrm{c}}{\nu} \quad \text{ἤτοι} \quad \lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}}{245 \cdot 10^{18}\ \mathrm{sec^{-1}}}$$

$$\text{καὶ} \quad \boldsymbol{\lambda = 0{,}012 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}} \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\lambda = 0{,}012\ \mathrm{\AA}}$$

396. Νὰ εὑρεθῇ πόση ἐνέργεια εἰς ἠλεκτρονιοβὸλτ καὶ Joule προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀφυλοποίησιν ἑνὸς ἀντιπρωτονίου καὶ ἑνὸς πρωτονίου.

Μᾶζα πρωτονίου ἢ ἀντιπρωτονίου : $\boldsymbol{\mathrm{m_p} = 1{,}008145\ \mathrm{amu}}$

Μονὰς ἀτομικῆς μάζης : $\boldsymbol{1\ \mathrm{amu} = 930\ \mathrm{MeV}}$

Εἰς ἕκαστον σωματίδιον ἀντιστοιχεῖ ἓν ἀντισωματίδιον (ἀντιύλη). Γενικῶς τὰ ἀντισωματίδια ἔχουν ἐλαχίστην διάρκειαν ζωῆς, διότι συνενούμενα μὲ τὸ ἀντίστοιχον σωματίδιον ἐξαφανίζονται, μετατρεπόμενα εἰς ἰσοδύναμον ἐνέργειαν. Οὕτω ἀπὸ τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἐξαΰλωσιν ἑνὸς πρωτονίου καὶ ἑνὸς ἀντιπρωτονίου προκύπτει ἰσοδύναμος ἐνέργεια W, ἴση μέ :

$$\mathrm{W} = (2 \cdot 1{,}008145)\ \mathrm{amu} \cdot 930\ \mathrm{MeV/amu} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{\mathrm{W} = 1875\ \mathrm{MeV}}$$

397 (329). **Ἓν πρωτόνιον καὶ ἓν δευτερόνιον, ἔχοντα τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, εἰσέρχονται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καθέτως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Ποῖον λόγον ἔχουν αἱ ἀκτῖνες τῶν κυκλικῶν τροχιῶν, τὰς ὁποίας διαγράφουν ἐντὸς τοῦ πεδίου τὰ δύο σωματίδια;**

Ἔστω $\mathrm{m_1}$ καὶ $\mathrm{m_2}$ ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου καὶ τοῦ δευτερονίου. Ἐπίσης ἔστω υ_1 καὶ υ_2 ἀντιστοίχως ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου καὶ τοῦ δευτερονίου, ὅταν τὰ δύο αὐτὰ σωματίδια ἔχουν τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{\mathrm{m_1} \cdot \upsilon_1^2}{2} = \frac{\mathrm{m_2} \cdot \upsilon_2^2}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \mathrm{m_1} \cdot \upsilon_1^2 = \mathrm{m_2} \cdot \upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Τὸ πρωτόνιον καὶ τὸ δευτερόνιον φέρουν τὸ αὐτὸ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον :

$$\mathrm{e} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Cb}$$

Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 263, ἐξίσ. 4) ὅτι, ὅταν ἕκαστον τῶν σωματιδίων τούτων εἰσέλθῃ ἐντὸς τοῦ ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως Η, τότε ἕκαστον σωματίδιον θὰ διαγράψῃ κυκλικὴν τροχιάν. Ἔστω $\mathrm{r_1}$ καὶ $\mathrm{r_2}$ ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν θὰ διαγράψῃ ἀντιστοίχως τὸ πρωτόνιον καὶ τὸ δευτερόνιον. Τότε δι' ἕκαστον τῶν σωματιδίων τούτων θὰ ἰσχύῃ ἡ ἐξίσωσις :

διὰ τὸ πρωτόνιον : $$\frac{\mathrm{e} \cdot \mathrm{H}}{10} = \frac{\mathrm{m_1} \cdot \upsilon_1}{\mathrm{r_1}}$$

διὰ τὸ δευτερόνιον : $$\frac{\mathrm{e} \cdot \mathrm{H}}{10} = \frac{\mathrm{m_2} \cdot \upsilon_2}{\mathrm{r_2}}$$

Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις λαμβάνομεν :

$$\frac{\mathrm{m_2} \cdot \upsilon_2}{\mathrm{r_2}} = \frac{\mathrm{m_1} \cdot \upsilon_1}{\mathrm{r_1}} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\mathrm{r_2}}{\mathrm{r_1}} = \frac{\mathrm{m_2} \cdot \upsilon_2}{\mathrm{m_1} \cdot \upsilon_1} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ κατὰ μεγάλην προσέγγισιν ἡ μᾶζα m_2 τοῦ δευτερονίου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν μᾶζαν m_1 τοῦ πρωτονίου, ἤτοι εἶναι $m_2 = 2m_1$, λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (1):

$$\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οὕτω ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ζητούμενος λόγος τῶν ἀκτίνων εἶναι:

$$\frac{r_2}{r_1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\mathbf{r_2}}{\mathbf{r_1}} = \sqrt{\mathbf{2}}$$

398 (330). Ἓν ἠλεκτρισμένον σωματίδιον, κινούμενον μὲ ταχύτητα υ, εἰσέρχεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H οὕτως, ὥστε ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητός του νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς τοῦ πεδίου. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ περίοδος τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα τοῦ σωματιδίου.

Τὸ σωματίδιον ἔχει μᾶζαν m, κινεῖται μὲ ταχύτητα υ καὶ φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον $+Q$. Ὅταν τὸ σωματίδιον εἰσέλθῃ ἐντὸς τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H, τότε διαγράφει κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r (βλ. πρόβλημα 305) καὶ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{Q \cdot H}{10} = \frac{m \cdot \upsilon}{r}$$

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{\upsilon}{r} = \frac{Q}{m} \cdot \frac{H}{10}$$

ὅπου Q/m εἶναι τὸ εἰδικὸν φορτίον τοῦ σωματιδίου. Τὸ σωματίδιον κινούμενον κυκλικῶς καὶ ὁμαλῶς ἔχει γωνιακὴν ταχύτητα:

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} \quad \text{ἤτοι} \quad \omega = \frac{Q}{m} \cdot \frac{H}{10}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ἡ τελευταία ἐξίσωσις γράφεται:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{Q}{m} \cdot \frac{H}{10} \quad \text{ἄρα} \quad \mathbf{T = \frac{2\pi \cdot 10}{(Q/m) \cdot H}}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι ἡ περίοδος T τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα υ τοῦ σωματιδίου καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ εἰδικὸν φορτίον (Q/m) τοῦ σωματιδίου καὶ ἀπὸ τὴν ἔντασιν (H) τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

399. Ἓν σωματίδιον ἔχει μᾶζαν m καὶ φέρει θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον q. Τὸ σωματίδιον διαγράφει ἐντὸς τοῦ κύκλοτρον τὴν τελικὴν κυκλικὴν τροχιάν του ἀκτῖνος r. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σωματίδιον τοῦτο δύναται νὰ ἀποκτήσῃ τὴν αὐτὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, ἐὰν ἐπιταχυνθῇ ὑπὸ τάσιν U, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{U = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot H^2 \cdot r^2}$$

ὅπου H εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἐφαρμογή. Τὸ σωματίδιον εἶναι δευτερόνιον, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\mathbf{\frac{q}{m} = 4.8 \cdot 10^7\ Cb/kgr}$$

Ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς εἶναι $r = 48$ cm καὶ ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ εἶναι $B = 1{,}8$ Weber/m².

Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ φορτισμένον σωματίδιον διαγράφει τὴν κυκλικὴν τροχιὰν μὲ ταχύτητα υ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς κεντρομόλου δυνάμεως. Ἡ δύναμις αὕτη εἶναι ἡ ἀναπτυσσομένη ἐπὶ τοῦ σωματιδίου ἠλεκτρομαγνητικὴ δύναμις καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = q \cdot \upsilon \cdot H$$

Ὥστε τὸ σωματίδιον διαγράφει τὴν τελικὴν κυκλικὴν τροχιάν του μὲ ταχύτητα :

$$\upsilon = \frac{q}{m} \cdot H \cdot r$$

Τὸ σωματίδιον, κινούμενον μὲ τὴν ταχύτητα υ, ἔχει τότε κινητικὴν ἐνέργειαν :

$$W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \quad \text{ἤτοι} \quad W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{q}{m}\right)^2 \cdot H^2 \cdot r^2$$

$$\text{ἢ} \quad W_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{m} \cdot H^2 \cdot r^2 \qquad (1)$$

Τὴν αὐτὴν ὅμως κινητικὴν ἐνέργειαν ἀποκτᾷ τὸ σωματίδιον τοῦτο καὶ ἂν ἐπιταχυνθῇ ὑπὸ τάσιν U. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις :

$$W_{\kappa\iota\nu} = q \cdot U \qquad (2)$$

δηλ. ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σωματιδίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Οὕτω, ἂν ἐξισώσωμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{m} \cdot H^2 \cdot r^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \mathbf{U = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot H^2 \cdot r^2} \qquad \mathbf{(3)}$$

Εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν τὸ πηλίκον $\frac{q}{m}$ παριστᾷ τὸ εἰδικὸν φορτίον τοῦ σωματιδίου.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Σύμφωνα μὲ τὰς διδομένας τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) ἀντὶ τῆς ἐντάσεως H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου θὰ τεθῇ ἡ μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ B, ὁπότε ἔχομεν :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \cdot B^2 \cdot r^2$$

Ἄρα εἰς τὸ σύστημα μονάδων M.K.S.A εὑρίσκομεν :

$$U = \frac{1}{2} \cdot (4{,}8 \cdot 10^7 \text{ Cb/kgr}) \cdot \left(1{,}8 \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}\right) \cdot (0{,}48 \text{ m})^2$$

$$\text{ἤτοι} \quad U = 18 \cdot 10^6 \text{ V} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{U = 18\,000\,000\ Volt}$$

400. Διὰ τὸ κύκλοτρον ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια W ἑνὸς σωματιδίου, φέροντος ἠλεκτρικὸν φορτίον e καὶ κινουμένου ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H, δίδεται εἰς ἔργια ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$\mathbf{W = \frac{H e c}{\omega}}$$

ὅπου ἡ μὲν ἔντασις H τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μετρεῖται εἰς Gauss, τὸ δὲ ἠλεκτρικὸν φορτίον e μετρεῖται εἰς ἠλεκτροστατικὰς μονάδας φορτίου. 1) Νὰ εὑρεθῇ εἰς MeV ἡ κινητικὴ ἐνέργεια ἑνὸς πρωτονίου, ἐὰν ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι H = 17 000 Gauss καὶ ἡ συχνότης τῆς κινήσεως τοῦ πρωτονίου εἶναι ν = 18 · 10⁶ Hz. 2) Νὰ εὑρεθῇ εἰς MeV/c ἡ ὁρμὴ τοῦ πρωτονίου, ἡ ταχύτης του υ ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς καὶ ἡ ἀκτὶς r αὐτῆς. Ἡ ἠρεμοῦσα μᾶζα m_0 τοῦ πρωτονίου ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐνέργειαν : m_0c^2 = 940 MeV.

1) Τὸ ἠλεκτρικὸν φορτίον τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \text{ ΗΣΜ - φορτίου}$$

Σύμφωνα μὲ τὴν διδομένην ἐξίσωσιν ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$W = \frac{H e c}{\omega}$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν :

$$H = 17\,000 \text{ Gauss}, \qquad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec} \qquad \text{καὶ} \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 18 \cdot 10^{6} \text{ Hz}$$

εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ κινουμένου πρωτονίου εἶναι :

$$W_{o\lambda} = \frac{17\,000 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 18 \cdot 10^{6}} \text{ erg} \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_{o\lambda} = 2{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ erg}$$

Ἐπειδὴ εἶναι : $1 \text{ MeV} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὁλικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$W_{o\lambda} = \frac{2{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ erg}}{1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ erg/MeV}} \qquad \text{καὶ} \qquad W_{o\lambda} = 1350 \text{ MeV}$$

Ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια $W_{o\lambda}$ τοῦ πρωτονίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας W_K τοῦ πρωτονίου καὶ τῆς ἐνεργείας m_0c^2 ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἠρεμοῦσαν μᾶζαν τοῦ πρωτονίου. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$W_{o\lambda} = W_K + m_0c^2$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$W_K = W_{o\lambda} - m_0c^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad W_K = 1350 \text{ MeV} - 940 \text{ MeV}$$

$$\text{καὶ} \qquad \mathbf{W_K = 410\ MeV}$$

2) Εἶναι γνωστὸν (βλ. πρόβλημα 310, ἐξίσ. 8) ὅτι ἡ ὁρμὴ J ἑνὸς σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν :

$$J = \frac{\sqrt{W_{o\lambda}^2 - (m_0c^2)^2}}{c}$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ὁρμὴ τοῦ θεωρουμένου πρωτονίου εἶναι :

$$J = \frac{\sqrt{1350^2 - 940^2} \text{ MeV}}{c} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{J \approx 970\ MeV/c}$$

Ἡ ταχύτης υ ἑνὸς σωματιδίου συναρτήσει τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας $W_{o\lambda}$ τοῦ σωματιδίου δίδεται ἀπὸ τὴν γνωστὴν (πρόβλημα 312) ἐξίσωσιν :

$$\upsilon = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{W_{o\lambda}}\right)^2}$$

Ἑπομένως ἡ ταχύτης τοῦ πρωτονίου ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς του εἶναι :

$$\upsilon = c \sqrt{1 - \left(\frac{940 \text{ MeV}}{1350 \text{ MeV}}\right)^2} \qquad \text{ἤτοι} \qquad \upsilon = c\sqrt{1 - 0{,}69^2} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{\upsilon = 0{,}72\,c}$$

Ἐὰν r εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ πρωτονίου, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος ἐξίσωσις :

$$\upsilon = 2\pi r \cdot \nu$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀκτὶς r τῆς τροχιᾶς τοῦ πρωτονίου εἶναι :

$$r = \frac{\upsilon}{2\pi \cdot \nu} \qquad \text{ἤτοι} \qquad r = \frac{0{,}72 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\pi \cdot 18 \cdot 10^{6}} \text{ cm} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{r = 191\ cm}$$

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΞ 1

Φυσικαὶ σταθεραὶ

Ταχύτης φωτὸς........................	$c = 2{,}997929 \cdot 10^{10}$ cm/sec
Ἐπιτάχυνσις πτώσεως (45⁰)...........	$g = 980{,}665$ cm/sec^2
Πυκνότης ὕδατος (μεγίστη)	$d = 0{,}999972$ gr/sec^3
Πυκνότης ὑδραργύρου (0⁰ C)...........	$d = 13{,}5950$ gr/cm^3
Μοριακὸς ὄγκος ἀερίων (0⁰ C, 1 atm)...	$V_0 = 22420{,}7$ cm^3/mol
Σταθερὰ τῶν ἀερίων	$R = 8{,}31436 \cdot 10^7$ erg/mol/grad
Σταθερὰ παγκοσμίου ἕλξεως............	$k = 6{,}670 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm^2/gr^2
Σταθερὰ τοῦ Planck..................	$h = 6{,}6252 \cdot 10^{-27}$ erg · sec
Σταθερὰ τοῦ Faraday	$F = 96520{,}1$ Cb/γραμμοϊσοδύναμον
Ἀριθμὸς τοῦ Avogadro................	$N_A = 6{,}02447 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol
Ἀριθμὸς τοῦ Loschmidt...............	$N_L = 2{,}687 \cdot 10^{19}$ μόρια/cm^3
Στοιχειῶδες ἠλεκτρικὸν φορτίον	$e = 1{,}60207 \cdot 10^{-19}$ Cb
Μᾶζα ἠλεκτρονίου	$m_e = 9{,}1085 \cdot 10^{-28}$ gr
» »	$m_e = 5{,}4876 \cdot 10^{-4}$ amu
Μᾶζα πρωτονίου	$m_p = 1{,}6725 \cdot 10^{-24}$ gr
» »	$m_p = 1{,}008145$ amu
Μᾶζα νετρονίου	$m_n = 1{,}6747 \cdot 10^{-24}$ gr
» »	$m_n = 1{,}008987$ amu
Μᾶζα ἀτόμου ὑδρογόνου	$m_H = 1{,}008142$ amu
Μονὰς μάζης (ἰσοδυναμία)............	1 gr $= 5{,}60999 \cdot 10^{26}$ MeV
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης................	1 amu $= 931{,}162$ MeV
Μονὰς ἀτομικῆς μάζης................	1 amu $= 1{,}6603 \cdot 10^{-24}$ gr
Μονὰς ἐνεργείας	1 eV $= 1{,}60207 \cdot 10^{-12}$ erg
Λόγος πρωτονίου πρὸς ἠλεκτρόνιον	$m_p/m_e = 1836{,}3$

ΠΙΝΑΞ 2

Διεθνὲς ἢ πρακτικὸν σύστημα μονάδων M.K.S.A.

Μέγεθος	Μονὰς	Σύμβολον	Τιμὴ τῆς μονάδος
Θεμελιώδεις μονάδες			
Μῆκος	μέτρον	m	
Μᾶζα	χιλιόγραμμον	kg	
Χρόνος	δευτερόλεπτον	s	
Θερμοκρασία	βαθμὸς Kelvin	°K	
Ἔντασις ἠλεκτρικοῦ ρεύματος	ampère	A	
Ἔντασις φωτεινῆς πηγῆς	κηρίον	cd	
Συμπληρωματικαὶ μονάδες			
Ἐπίπεδος γωνία	ἀκτίνιον	rad	
Στερεὰ γωνία	στερακτίνιον	sr	
Παράγωγοι μονάδες			
Ἐπιφάνεια	τετραγωνικὸν μέτρον	m^2	
Ὄγκος	κυβικὸν μέτρου	m^3	
Συχνότης	hertz	Hz	1/s
Πυκνότης	χιλιόγραμμον/m^3	kg/m^3	
Ταχύτης	μέτρον/s	m/s	
Ἐπιτάχυνσις	μέτρον/s^2	m/s^2	
Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις	ἀκτίνιον/s^2	rad/s^2	
Δύναμις	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Πίεσις	newton/m^2	N/m^2	
Ἔργον, ἐνέργεια, ποσότης θερμότητος	joule	J	$N \cdot m$
Ἰσχὺς	watt	W	J/s
Ἠλεκτρικὸν φορτίον	coulomb	C	$A \cdot s$
Ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις, διαφορὰ δυναμικοῦ	volt	V	W/A
Ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου	volt/m	V/m	
Ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις	ohm	Ω	V/A
Ἠλεκτρικὴ χωρητικότης	farad	F	$A \cdot s/V$
Μαγνητικὴ ροὴ	weber	Wb	$V \cdot s$
Αὐτεπαγωγὴ	henry	H	$V \cdot s/A$
Μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ	tesla	T	Wb/m^2
Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου	ampère/m	A/m	
Φωτεινὴ ροὴ	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Φωτισμὸς	lux	lx	lm/m^2

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω πίναξ ἐλήφθη ἀπὸ δημοσίευμα τοῦ H. Moreau, τοῦ Διεθνοῦς Γραφείου Μέτρων καὶ Σταθμῶν.

ΠΙΝΑΞ 3

Σχέσις τῶν μονάδων τοῦ πρακτικοῦ συστήματος μὲ τὰς μονάδας τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ καὶ τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ συστήματος.

Μέγεθος		Πρακτικὸν σύστημα		Ἠλεκτροστατικὸν σύστημα (C.G.S.)	Ἠλεκτρομαγνητικὸν σύστημα (C.G.S.)
Μῆκος	l	1 μέτρον	1 m	100 cm	100 cm
Μᾶζα	m	1 χιλιόγραμμον	1 kgr	1000 gr	1000 gr
Χρόνος	t	1 δευτερόλεπτον	1 sec	1 sec	1 sec
Δύναμις	F	1 newton	1 N	10^5 dyn	10^5 dyn
Ἐνέργεια	W	1 joule	1 J	10^7 erg	10^7 erg
Ἰσχὺς	P	1 watt	1 W	10^7 erg/sec	10^7 erg/sec
Ἠλεκτρικὸν φορτίον	Q	1 coulomb	1 Cb	$3 \cdot 10^9$ ΗΣΜ	10^{-1} ΗΜΜ
Ἔντασις ρεύματος	I, i	1 ampère	1 A	$3 \cdot 10^9$ ΗΣΜ	10^{-1} ΗΜΜ
Διαφορὰ δυναμικοῦ, ΗΕΔ	U, E	1 volt	1 V	1/300 ΗΣΜ	10^8 ΗΜΜ
Ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου	$\mathscr{E}$	1 volt/m	1 V/m	$(1/3) \cdot 10^{-4}$ ΗΣΜ/cm	10^6 ΗΜΜ/cm
Ἀντίστασις	R	1 ohm	1 Ω	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ ΗΣΜ	10^9 ΗΜΜ
Εἰδικὴ ἀντίστασις	ρ	1 ohm · m	1 Ω · m	$\frac{1}{9 \cdot 10^{9}}$ ΗΣΜ · cm	10^{11} ΗΜΜ · cm
Χωρητικότης	C	1 farad	1 F	$9 \cdot 10^{11}$ ΗΣΜ	10^{-9} ΗΜΜ
Αὐτεπαγωγή, ἀμοιβαία ἐπαγωγὴ	L, M	1 henry	1 H	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ ΗΣΜ	10^9 ΗΜΜ
Μαγνητικὴ ροὴ	Φ	1 weber (ἢ V · sec)	1 Wb		10^8 Maxwell
Μαγνητικὴ ἐπαγωγὴ	B	1 weber	1 Wb/m²		10^4 Gauss
Ἔντασις μαγνητικοῦ πεδίου	H	1 A · στροφὴ/m			$4\pi \cdot 10^{-3}$ Gauss
Ποσότης μαγνητισμοῦ	m	1 weber	1 Wb		$\frac{10^9}{4\pi}$ ΗΜΜ
Συχνότης	ν	1 hetrz	1 Hz	1 Hertz	1 Hertz

ΠΙΝΑΞ 4

Μερικαὶ τιμαὶ τοῦ π

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\pi}$	$\sqrt{\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	π^2	$4\pi^2$
3,14	1,57	1,05	0,79	0,32	1,77	0,56	9,86	39,48

ΠΙΝΑΞ 5

Κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμοὶ

Τύπος	Ἐξαγόμενον κατὰ προσέγγισιν
$(1+\varepsilon)^\nu$	$1+\nu\varepsilon$
$(1-\varepsilon)^\nu$	$1-\nu\varepsilon$
$\frac{1}{1+\varepsilon}$	$1-\varepsilon$
$\frac{1}{1-\varepsilon}$	$1+\varepsilon$
$\sqrt{1+\varepsilon}$	$1+\frac{\varepsilon}{2}$
$\sqrt{1-\varepsilon}$	$1-\frac{\varepsilon}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	$1-\frac{\varepsilon}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}$	$1+\frac{\varepsilon}{2}$
$(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)$	$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$
$(1-\varepsilon_1)\cdot(1-\varepsilon_2)\cdot(1-\varepsilon_3)$	$1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$
$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)}$	$1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3$
$\frac{1}{(1-\varepsilon_1)\cdot(1-\varepsilon_2)\cdot(1-\varepsilon_3)}$	$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

ΠΙΝΑΞ 6

Τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι, αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι, αἱ κυβικαὶ ρίζαι, τὰ ἀντίστροφα καὶ οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 1 ἕως 50

ν	ν^2	ν^3	$\sqrt{\nu}$	$\sqrt[3]{\nu}$	$\frac{1}{\nu}$	λογ ν
0	0	0	0,0000	0,0000	∞	$-\infty$
1	1	1	1,0000	1,0000	1,00000	0,0000
2	4	8	1,4142	1,2599	0,50000	0,3010
3	9	27	1,7321	1,4422	0,33333	0,4771
4	16	64	2,0000	1,5874	0,25000	0,6021
5	25	125	2,2361	1,7100	0,20000	0,6989
6	36	216	2,4495	1,8171	0,16667	0,7781
7	49	343	2,6458	1,9129	0,14286	0,8451
8	64	512	2,8284	2,0000	0,12500	0,9031
9	81	729	3,0000	2,0801	0,11111	0,9542
10	100	1000	3,1623	2,1544	0,10000	1,0000
11	121	1331	3,3166	2,2240	0,09091	1,0414
12	144	1728	3,4641	2,2894	0,08333	1,0792
13	169	2197	3,6056	2,3513	0,07692	1,1139
14	196	2744	3,7417	2,4101	0,07143	1,1461
15	225	3375	3,8730	2,4662	0,06667	1,1761
16	256	4096	4,0000	2,5198	0,06250	1,2041
17	289	4913	4,1231	2,5713	0,05882	1,2304
18	324	5832	4,2426	2,6207	0,05556	1,2553
19	361	6859	4,3589	2,6684	0,05263	1,2788
20	400	8000	4,4721	2,7144	0,05000	1,3010
21	441	9261	4,5826	2,7589	0,04762	1,3222
22	484	10648	4,6904	2,8020	0,04545	1,3424
23	529	12167	4,7958	2,8439	0,04348	1,3617
24	576	13824	4,8990	2,8845	0,04167	1,3802
25	625	15625	5,0000	2,9240	0,04000	1,3979
26	676	17576	5,0990	2,9625	0,03846	1,4149
27	729	19683	5,1962	3,0000	0,03704	1,4314
28	784	21952	5,2915	3,0366	0,03571	1,4472
29	841	24389	5,3852	3,0723	0,03448	1,4621
30	900	27000	5,4772	3,1072	0,03333	1,4771
31	961	29791	5,5678	3,1414	0,03226	1,4914
32	1024	32768	5,6569	3,1748	0,03125	1,5051
33	1089	35937	5,7446	3,2075	0,03030	1,5185
34	1156	39304	5,8310	3,2396	0,02941	1,5315
35	1225	42875	5,9161	3,2711	0,02857	1,5441
36	1296	46656	6,0000	3,3019	0,02778	1,5563
37	1369	50653	6,0828	3,3322	0,02703	1,5682
38	1444	54872	6,1644	3,3620	0,02632	1,5798
39	1521	59319	6,2450	3,3912	0,02564	1,5911
40	1600	64000	6,2246	6,4200	0,02500	1,6021
41	1681	68921	6,4031	3,4482	0,02439	1,6128
42	1764	74088	6,4807	3,4760	0,02381	1,6232
43	1849	79507	6,5574	3,5034	0,02326	1,6335
44	1936	85184	6,6332	3,5303	0,02273	1,6434
45	2025	91125	6,7082	3,5569	0,02222	1,6532
46	2116	97336	6,7823	3,5830	0,02174	1,6628
47	2209	103823	6,8557	3,6088	0,02128	1,6721
48	2304	110592	6,9282	3,6342	0,02083	1,6812
49	2401	117649	7,0000	3,6593	0,02041	1,6902
50	2500	125000	7,0711	3,6840	0,02000	1,6990

ΠΙΝΑΞ 7

Φυσικοί τριγωνομετρικοί ἀριθμοί

Γωνία	ημ	συν	εφ	Γωνία	ημ	συν	εφ	Γωνία	ημ	συν	εφ
0°	0.000	1.000	0.000	31°	0.515	0.857	0.601	61°	0.875	0.485	1.804
1	0.018	1.000	0.018	32	0.530	0.848	0.625	62	0.883	0.470	1.881
2	0.035	0.999	0.035	33	0.545	0.839	0.649	63	0.891	0.454	1.963
3	0.052	0.999	0.052	34	0.559	0.829	0.675	64	0.899	0.438	2.050
4	0.070	0.998	0.070	35	0.574	0.819	0.700	65	0.906	0.423	2.145
5	0.087	0.996	0.088								
6	0.105	0.995	0.105	36	0.588	0.809	0.727	66	0.914	0.407	2.246
7	0.122	0.993	0.123	37	0.602	0.799	0.754	67	0.921	0.391	2.356
8	0.139	0.990	0.141	38	0.616	0.788	0.781	68	0.927	0.375	2.475
9	0.156	0.988	0.158	39	0.629	0.777	0.810	69	0.934	0.358	2.605
10	0.174	0.985	0.176	40	0.643	0.766	0.839	70	0.940	0.342	2.747
11	0.191	0.982	0.194	41	0.656	0.755	0.869	71	0.946	0.326	2.904
12	0.208	0.978	0.213	42	0.669	0.743	0.900	72	0.951	0.309	3.078
13	0.225	0.974	0.231	43	0.682	0.731	0.933	73	0.956	0.292	3.271
14	0.242	0.970	0.249	44	0.695	0.719	0.966	74	0.961	0.276	3.487
15	0.259	0.966	0.268	45	0.707	0.707	1.000	75	0.966	0.259	3.732
16	0.276	0.961	0.287	46	0.719	0.695	1.036	76	0.970	0.242	4.011
17	0.292	0.956	0.306	47	0.731	0.682	1.072	77	0.974	0.225	4.331
18	0.309	0.951	0.325	48	0.743	0.669	1.111	78	0.978	0.208	4.705
19	0.326	0.946	0.344	49	0.755	0.656	1.152	79	0.982	0.191	5.145
20	0.342	0.940	0.364	50	0.766	0.643	1.192	80	0.985	0.174	5.671
21	0.358	0.934	0.384	51	0.777	0.629	1.235	81	0.988	0.156	6.314
22	0.375	0.927	0.404	52	0.788	0.616	1.280	82	0.990	0.139	7.115
23	0.391	0.921	0.425	53	0.799	0.602	1.327	83	0.993	0.122	8.144
24	0.407	0.914	0.445	54	0.809	0.588	1.376	84	0.995	0.105	9.514
25	0.423	0.906	0.466	55	0.819	0.574	1.428	85	0.996	0.087	11.43
26	0.438	0.899	0.488	56	0.829	0.559	1.483	86	0.998	0.070	14.30
27	0.454	0.891	0.510	57	0.839	0.545	1.540	87	0.999	0.052	19.08
28	0.470	0.883	0.532	58	0.848	0.530	1.600	88	0.999	0.035	28.64
29	0.485	0.875	0.554	59	0.857	0.515	1.664	89	1.000	0.018	57.29
30	0.500	0.866	0.577	60	0.866	0.500	1.732	90	1.000	0.000	∞

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΑΤΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΠΙΝΑΚΕΣ

$$\frac{8 \quad 120}{9} = \frac{160}{10} = 16$$

3 12

$$\frac{0{,}02}{9} = 10$$

8

$$\frac{1 \quad 12}{9}$$