Ε 2 ΦΣΣ

Παπαϊωάννου (Κ.Π.)

61

Κ. Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ — ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ — ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ — ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΑΙ — ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ — ΑΛΛΑΓΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ — ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΗΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΥΣΕΩΣ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΙΣ: ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΚΑΡΑΒΙΑ
ΝΑΥΑΡΙΝΟΥ 20 - ΡΟΥΖΒΕΛΤ 58
1948

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Κ. Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ — ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ — ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ — ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΑΙ — ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ. — ΑΛΛΑΓΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ — ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΗΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΥΣΕΩΣ

ΑΘΗΝΑΙ
ΤΥΠΟΙΣ: ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΚΑΡΑΒΙΑ
ΝΑΥΑΡΙΝΟΥ 20 - ΡΟΥΖΒΕΛΤ 58
1948

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΝΗΜΗΝ ΤΗΣ ΜΗΤΡΟΣ ΜΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ θερμοδυναμικὴ πραγματεύεται τὴν μηχανικὴν θεωρίαν τῆς θερμότητος· ἐρευνᾷ δηλαδὴ τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν δύο μορφῶν ἐνεργείας, θερμότητος καὶ μηχανικοῦ ἔργου, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται ἀμοιβαίως κατὰ τὴν παραγωγὴν τῶν διαφόρων φαινομένων.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς θερμοδυναμικῆς δύναται νὰ γίνῃ πρὸς δύο κατευθύνσεις· ἤτοι α΄ τὴν καθαρῶς θεωρητικὴν κατεύθυνσιν καὶ β΄ τὴν κατεύθυνσιν πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς θερμοδυναμικῆς εἰς τοὺς θερμικοὺς κινητῆρας. Ἀπὸ τῆς πρώτης ἀπόψεως θεωρουμένη ἡ θερμοδυναμικὴ εἶναι κλάδος τῆς μαθηματικῆς φυσικῆς· ἀπὸ τῆς δευτέρας ἀπόψεως εἶναι κλάδος τῶν τεχνικῶν ἐπιστημῶν καὶ ἀποτελεῖ τὴν φυσιολογίαν τῶν θερμικῶν κινητήρων.

Μέρος τοῦ προκειμένου συγγράμματος, καὶ ἰδίως ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς θερμοδυναμικῆς, διδάσκω ἀπὸ δεκαεπταετίας ὡς εἰσαγωγὴν τοῦ μαθήματος τῶν θερμικῶν κινητήρων· ἔχων ὅμως ὑπ' ὄψιν τὴν ἔλλειψιν ἐν τῇ Ἑλληνικῇ βιβλιογραφίᾳ συγγράμματος θερμοδυναμικῆς, εἰς πλεῖστα σημεῖα ἐπεξετάθην εἰς θεωρίας πέραν τοῦ πλαισίου τῆς διδασκομένης ὕλης. Εἰς τοῦτο μὲ ὤθησαν ὡρισμέναι σκέψεις, ἀπόρροια καὶ τῶν περιστάσεων, τὰς ὁποίας διερχόμεθα καὶ τῆς πίστεως, τὴν ὁποίαν ἔχομεν ὅλοι οἱ Ἕλληνες διὰ τὸ μέλλον τῆς πατρίδος μας. Ὅταν παρέλθουν τὰ δεινά, τὰ ὁποῖα ὑφίσταται σήμερον ἡ πατρίς μας καὶ ἀποκατασταθῇ ἡ εἰρήνη, θὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπέλθῃ βαθεῖα μεταβολὴ εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν διδασκαλίαν. Οἱ νέοι ἐπιστήμονες πρέπει νὰ ἀποκτήσουν τοιαύτην πνευματικὴν κατάρτισιν, ὥστε νὰ σταθοῦν εἰς τὸ ὕψος τῆς παγκοσμίου πνευματικῆς κινήσεως.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον προέβην εἰς τὴν ἐπέκτασιν, τὴν ὁποίαν ἐθεώρησα ἀναγκαίαν εἰς τὸ προκείμενον σύγγραμμα. Ἐὰν τὸ σύγγραμμα τοῦτο συντελέσῃ εἰς τὴν ἀρτιωτέραν μόρφωσιν τῶν σπουδαστῶν καὶ τῶν νεαρῶν ἐπιστημόνων καὶ ὠθήσῃ αὐτοὺς εἰς ἐρεύνας ἐπὶ θεμάτων ἑνὸς ἐκ τῶν ὡραιοτέρων καὶ φιλοσοφικωτέρων κλάδων τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, ὡς εἶναι ἡ θερμοδυναμική, τοῦτο θὰ ἀποτελέσῃ τὴν καλυτέραν ἀνταμοιβήν μου καὶ διὰ τοὺς κόπους, εἰς τοὺς ὁποίους ὑπεβλήθην καὶ διὰ τὰς δυσχερείας, τὰς ὁποίας ἀντιμετώπισα ὑπὸ τὰς σημερινὰς συνθήκας, κατὰ τὴν ἔκδοσιν τοῦ συγγράμματός μου.

Ἐν Ἀθήναις, 1948

Κ. Π. ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ CLAPEYRON

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Σελίς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΤΡΟΠΗ - ΤΡΟΠΙΚΟΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ - ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΤΟΥ CARNOT

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΑΛΛΑΓΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΠΟΣΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΛΛΑΓΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΗΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΥΣΕΩΣ

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Ἡ θερμότης ἐξετάζεται ἀπὸ δύο ἀπόψεις, ὡς ποσὸν καὶ ὡς ἐνέργεια. Ἡ πρώτη ἄποψις ἐξετάζεται ἀπὸ τὴν φυσικήν. Ἡ μελέτη πάλιν τῆς θερμότητος ὡς μορφῆς ἐνεργείας εἶναι ἀντικείμενον ἰδίου κλάδου τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, τῆς θερμοδυναμικῆς.

Ἡ θερμοδυναμικὴ θεμελιοῦται ἐπὶ τῶν δύο κλασσικῶν ἀρχῶν τοῦ Mayer καὶ τοῦ Carnot. Ἡ ἀρχὴ τοῦ Carnot διδάσκει ὅτι ἡ θερμικὴ ἐνέργεια εἶναι ἡ ὑποδεεστέρα μορφὴ τῆς ἐνεργείας, ἀλλὰ καὶ ἡ εὐσταθεστέρα· οὕτω ἅπασαι αἱ μορφαὶ ἐνεργείας τείνουν νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς θερμικὴν ἐνέργειαν. Ἡ ἀρχὴ πάλιν τοῦ Mayer καθορίζει τὰς ποσοτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων μορφῶν ἐνεργείας καὶ κυρίως τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ θερμότητος καὶ μηχανικοῦ ἔργου.

Τὰ δύο θεμελιώδη ποσὰ τῆς θερμοδυναμικῆς εἶναι ἡ θερμοκρασία καὶ τὸ ποσὸν θερμότητος. Αἱ γνώσεις τῆς θερμοκρασίας καὶ τοῦ ποσοῦ θερμότητος εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμέναι. Ἐν τούτοις, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, εἰς τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τῶν νόμων τῆς θερμοδυναμικῆς ἡ θερμοκρασία t καὶ τὸ ποσὸν θερμότητος Q λαμβάνονται ὡς δύο διακεκριμένα στοιχεῖα.

Εἰς τὰς δύο ἑπομένας παραγράφους θὰ ὑπενθυμίσωμεν ἐν συντομίᾳ τὰς γνωστὰς ἐκ τῆς φυσικῆς ἐννοίας τῆς θερμοκρασίας καὶ τοῦ ποσοῦ θερμότητος.

1. Θερμοκρασία. Λέγομεν ὅτι σῶμά τι εἶναι θερμὸν ἢ ψυχρὸν ἀναλόγως τῆς ἐντυπώσεως, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ τὸ σῶμα εἰς τὰς αἰσθήσεις μας. Ἡ διὰ τῶν ἐκφράσεων τούτων ἀποδιδομένη θερμικὴ κατάστασις τοῦ σώματος εἶναι ὑποκειμενική, ὡς ἐξαρτωμένη ἀμέσως ἐκ τῆς σχετικῆς καταστάσεως τοῦ σώματός μας. Ἐξ ἄλλου δὲν δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχήσωμεν εἰς τὰς ὑποκειμενικὰς ἐντυπώσεις ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ μετροῦν τὴν ἔντασιν τῶν ἐντυπώσεών μας. Διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν λοιπὸν ἔρευναν αἱ ἀνωτέρω ἐκφράσεις εἶναι ἀνεπαρκεῖς καὶ χωρὶς θετικὴν σημασίαν. Ἀντὶ τῶν ἐκφράσεων τούτων χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν ἐπιστημονικὴν γλῶσσαν τὸν ὅρον *θερμοκρασία*. Ἐὰν σῶμα Α εἶναι θερμότερον ἢ ψυχρότερον ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον σῶμα Β, λέγομεν ὅτι τὸ Α ἔχει μεγαλυτέραν ἢ μικροτέραν θερμοκρασίαν τοῦ Β.

Ἡ ἀντικειμενικὴ σύγκρισις τῶν θερμοκρασιῶν τῶν σωμάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἑξῆς δύο προτάσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπόρροια πειραματικῶν δεδομένων :

I. Ἐὰν δύο σώματα ἀνίσως θερμὰ τεθοῦν εἰς ἐπαφήν, γίνεται μεταξύ των τοιαύτη συναλλαγὴ θερμότητος, ὥστε τελικῶς γίνονται ἐξ ἴσου θερμά. Τότε λέγομεν ὅτι τὰ δύο σώματα εἶναι εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας, ἢ ὅτι ἔχουν τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν.

II. Ἐὰν δύο σώματα εἶναι εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας πρὸς τρίτον σῶμα, εἶναι καὶ μεταξύ των εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας.

Ἐπὶ τῶν δύο τούτων προτάσεων στηρίζεται ἡ κατασκευὴ τῶν θερμομέτρων. Διὰ τῶν θερμομέτρων ἐπιτυγχάνομεν τὴν σύγκρισιν τῶν θερμοκρασιῶν τῶν σωμάτων, ἤ, ὅταν ὁρίσωμεν τὴν θερμομετρικὴν κλίμακα, καὶ τὴν μέτρησιν τῶν θερμοκρασιῶν τῶν σωμάτων. Ὡς θεμελιώδη θερμομετρικὴν κλίμακα δεχόμεθα τὴν ἑκατονταβάθμιον ἢ κλίμακα τοῦ Celsius. Τὰ σταθερὰ σημεῖα τῆς κλίμακος ταύτης εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς τήξεως τοῦ πάγου καὶ ἡ θερμοκρασία τῆς ἀτμοποιήσεως τοῦ ὕδατος ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν. Τὰς δύο ταύτας θερμοκρασίας παριστῶμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν 0 καὶ 100. Οὕτω, ὡς ἐκτίθεται εἰς τὴν φυσικήν, ὁρίζεται ἡ ἑκατοντάβαθμιος θερμομετρικὴ κλῖμαξ, ἐπὶ τῆς ὁποίας σημειοῦνται οἱ ἀριθμοὶ ...—1, 0, 1, 2,...100,...

α. Θερμόμετρον ὀνομάζομεν ὄργανον, περιέχον σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀποκαθίσταται εὐκόλως εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας μετὰ τῶν σωμάτων μεθ' ὧν φέρεται εἰς ἐπαφὴν καὶ ὑπὸ τοιαύτας συνθήκας ὥστε αἱ μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου ἢ τῆς πιέσεως τοῦ σώματος νὰ εἶναι εὐκόλως συγκρίσιμοι. Σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην, ὀνομάζομεν θερμομετρικὸν σῶμα.

Τὸ θερμόμετρον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει χαραχθῆ ἡ ἑκατονταβάθμιος κλῖμαξ, ὀνομάζεται ἑκατονταβάθμιον θερμόμετρον.

β. Ἑκατονταβάθμιον θερμοκρασίαν ἢ θερμοκρασίαν Celsius σώματος ὀνομάζομεν τὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον ἀναγιγνώσκομεν ἐπὶ τῆς κλίμακος ἑκατονταβαθμίου θερμομέτρου, ὅταν τὸ θερμόμετρον εἶναι εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας μετὰ τοῦ σώματος.

Τὴν ἑκατονταβάθμιον θερμοκρασίαν θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος C (Celsius).

Ἐκτὸς τῆς ἑκατονταβαθμίου θερμομετρικῆς κλίμακος ἔχομεν καὶ ἄλλας θερμομετρικὰς κλίμακας, ὡς εἶναι αἱ κλίμακες τοῦ Réaumur, τοῦ Fahrenheit καὶ ἡ κλῖμαξ τοῦ λόρδου Kelvin ἢ κλῖμαξ τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν.

γ. Ὀνομάζομεν θερμοκρασίαν t_θ σώματος εἴς τινα θερμομετρικὴν κλίμακα Θ διάφορον τῆς ἑκατονταβαθμίου κλίμακος C συνάρτησίν τινα

(1) $$t_\theta = \omega(t_c),$$

ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχέσεως τῶν δύο θερμομετρικῶν κλιμάκων.

Ἡ συνάρτησις (1) διὰ τὰς θερμομετρικὰς κλίμακας τοῦ Réaumur (R), τοῦ Fahrenheit (F) καὶ τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν (T) γράφεται ὡς ἑξῆς :

(2) $$t_R = \frac{4}{5}\, t_c,$$

(3) $$t_F = 32 + \frac{9}{5} t_c.$$

(4) $$T = t_c + 273.$$

Τὴν ἀπόλυτον θερμοκρασίαν θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος K (Kelvin) ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ λόρδου Kelvin, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ κλῖμαξ τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν.

Τὰ μᾶλλον ἐν χρήσει θερμόμετρα εἶναι τὰ δι᾽ ὑδραργύρου· ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ θερμομετρικόν των σῶμα εἶναι ὑγρόν, λέγονται θερμόμετρα δι᾽ ὑγροῦ. Τὰ θερμόμετρα δι᾽ ὑδραργύρου, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ὑστεροῦν εἰς ἀκρίβειαν. Ἔχομεν καὶ θερμόμετρα δι᾽ ἀερίου ἢ ἀερικὰ θερμόμετρα, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ θερμομετρικὸν σῶμα εἶναι ἀέριον δυνάμενον νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον. Ἡ ἀρχή, ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζονται τὰ ἀερικὰ θερμόμετρα, εἶναι ἡ ἑξῆς:

Τὰ τέλεια ἀέρια ὑπακούουν ὡς γνωστὸν εἰς τοὺς νόμους τοῦ Boyle-Mariotte καὶ τοῦ Gay-Lussac. Οἱ νόμοι οὗτοι διατυποῦνται ἀναλυτικῶς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

(5) $$pV = K(1 + \alpha t),$$

ὅπου V εἶναι ὁ ὄγκος, p ἡ πίεσις καὶ $t^{\circ}C$ ἡ θερμοκρασία μάζης τινὸς τελείου ἀερίου. Ὁ συντελεστὴς α εἶναι δι᾽ ὅλα τὰ τέλεια ἀέρια ἴσος πρὸς $\frac{1}{273,2} \sim \frac{1}{273}$. Ἡ σταθερὰ K προσδιορίζεται δι᾽ ἕκαστον ἀέριον ἐκ τῆς ἐξισώσεως (5), ἐὰν θέσωμεν t = 0, ὁπότε λαμβάνομεν

(6) $$K = p_0 V_0$$

Ἡ (5) γράφεται λοιπὸν

(7) $$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t).$$

Λύοντες ὡς πρὸς t εὑρίσκομεν

(8) $$t = \frac{pV - p_0 V_0}{\alpha p_0 V_0}.$$

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (8) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰς θερμοκρασίας t διὰ τῆς μετρήσεως τῶν μεταβολῶν τοῦ γινομένου pV. Ἀντὶ νὰ μετρῶμεν συγχρόνως τὰς μεταβολὰς τοῦ ὄγκου καὶ τῆς πιέσεως, διατηροῦμεν σταθερὸν τὸν ἕνα τῶν δύο παραγόντων τοῦ γινομένου pV καὶ μεταβάλλομεν τὸν ἕτερον. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὰ δύο εἴδη ἀερικῶν θερμομέτρων, ἤτοι: α΄ τὸ ἀερικὸν θερμόμετρον ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν καὶ β΄ τὸ ἀερικὸν θερμόμετρον ὑπὸ πίεσιν σταθεράν.

Τὰ ὑγρὰ καὶ ἀέρια θερμομετρικὰ σώματα ἐγκλείονται ἐντὸς σωλῆνος συνήθως ὑαλίνου. Ἡ διαστολὴ λοιπὸν (ἢ συστολὴ) τοῦ ρευστοῦ, τὴν ὁποίαν διακρίνομεν, εἶναι ἡ φαινομενικὴ διαστολή, δηλαδὴ ἡ διαφορὰ τῆς ὁλικῆς διαστολῆς τοῦ ρευστοῦ καὶ τῆς ὁλικῆς διαστολῆς τοῦ στερεοῦ περιβλήματος. Τὸ σφάλμα ὅμως τῶν μετρήσεων ἐκ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς εἶναι ἐλάχιστον καὶ συνήθως τὸ παραλείπομεν.

Τὰ ἀέρια θερμαινόμενα δὲν ὑπόκεινται εἰς ἀλλαγὴν καταστάσεως. Ὅταν ὅμως ψύχωνται ἐπαρκῶς, ὑγροποιοῦνται. Πρέπει λοιπὸν τὰ ἀέρια θερμομετρικὰ σώματα νὰ ὑγροποιῶνται εἰς πολὺ χαμηλὴν θερμοκρασίαν. Ἀρχικῶς ὁ Regnault ἐχρησιμοποίησε διὰ τὴν κατασκευὴν ἀερικοῦ θερμομέτρου τὸν ἀέρα. Βραδύτερον οἱ φυσικοὶ ἐδέχθησαν ὡς κανονικὸν ἀέριον θερμομετρικὸν σῶμα τὸ ὑδρογόνον, τὸ ὁποῖον ὑγροποιεῖται εἰς θερμοκρασίαν — 252°,6 C.

Τὸ θερμόμετρον δι' ὑδρογόνου, ὑπὸ ὄγκον σταθερόν, ἐκλήθη κανονικὸν θερμόμετρον. Τὸ θερμόμετρον τοῦτο παρουσιάζει μειονεκτήματα διὰ μετρήσεις ὑψηλῶν θερμοκρασιῶν, ἄνω τῶν 300°C. Διὰ τοῦτο διὰ μετρήσεις ὑψηλῶν θερμοκρασιῶν ἀντικαθιστοῦν τὸ ὑδρογόνον διὰ τοῦ ἀζώτου. Τέλος διὰ πολὺ χαμηλὰς θερμοκρασίας χρησιμοποιοῦν τὸ ἥλιον, τὸ ὁποῖον ὑγροποιεῖται εἰς θερμοκρασίαν — 268,7°C.

Τὰ ἀερικὰ θερμόμετρα εἶναι πολύπλοκα καὶ ἡ χρῆσις αὐτῶν εἶναι λεπτὴ καὶ δύσκολος. Διὰ τοῦτο εἰς τὴν πρακτικὴν χρησιμοποιοῦν θερμόμετρα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν πρακτικὰ θερμόμετρα ἀκριβείας. Ἡ περιγραφὴ καὶ θεωρία τῶν θερμομέτρων τούτων ἐκτίθενται εἰς τὴν φυσικήν. Τὰ μᾶλλον ἐν χρήσει ἐκ τῶν θερμομέτρων τούτων εἶναι τὰ ἑξῆς:

1. Τὰ θερμόμετρα δι' ἠλεκτρικῆς ἀντιστάσεως. Ὡς γνωστὸν ἡ ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις μεταλλικοῦ ἀγωγοῦ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν διὰ τῆς μετρήσεως τῆς ἠλεκτρικῆς ἀντιστάσεως ἀγωγοῦ. Ὁ ἀγωγὸς εἶναι ἐν γένει ἐκ λευκοχρύσου καὶ ἀποτελεῖ τὴν μίαν τῶν τεσσάρων ἀντιστάσεων τῆς γεφύρας τοῦ Wheatstone. Τὰ θερμόμετρα ταῦτα χρησιμοποιοῦμεν συνήθως διὰ μετρήσεις θερμοκρασιῶν μεταξὺ — 193° ἕως + 630°,5 C.

2. Τὰ θερμόμετρα διὰ θερμοηλεκτρικοῦ στοιχείου. Ὡς γνωστὸν θερμοηλεκτρικὸν στοιχεῖον ὀνομάζομεν κύκλωμα ἐκ δύο ἑτερογενῶν μεταλλικῶν ἀγωγῶν, ὅταν εἰς τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀγωγῶν ἔχωμεν διαφόρους θερμοκρασίας. Ὅταν τὸ ψυχρὸν σημεῖον ἐπαφῆς διατηρεῖται εἰς τὴν θερμοκρασίαν τοῦ τηκομένου πάγου (0°C.), ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις F τοῦ στοιχείου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας t τοῦ θερμοῦ σημείου. Εἶναι δηλαδὴ

$$F = F(t). \tag{9}$$

Τὰ θερμόμετρα διὰ θερμοηλεκτρικοῦ στοιχείου χρησιμοποιοῦνται ἐν γένει διὰ μετρήσεις θερμοκρασιῶν μεταξὺ 630° ἕως 1063° C. Μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν τούτων ἡ συνάρτησις (9) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$F = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3, \tag{10}$$

ὅπου α, β, γ, δ εἶναι τέσσαρες σταθεραί, αἵτινες ὀνομάζονται σταθεραὶ τοῦ θερμομέτρου. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν σταθερῶν τούτων εἰς ἕκαστον θερμόμετρον διὰ θερμοηλεκτρικοῦ στοιχείου, ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν (10) διὰ τέσσαρας γνωστὰς θερμοκρασίας t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, ὁπότε λαμβάνομεν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων

$$F_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2 + \delta t_i^3, \qquad (i = 1,2,3,4), \tag{11}$$

διὰ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου προσδιορίζομεν τὰς σταθερὰς α, β, γ, δ. Ὡς θερμοκρασίας ti δυνάμεθα π. χ. νὰ λάβωμεν τὴν θερμοκρασίον τήξεως τοῦ ψευδαργύρου $t_1 = 419^\circ,45$ C, τὴν θερμοκρασίαν τήξεως τοῦ ἀντιμονίου $t_2 = 630^\circ,5$ C, τὴν θερμοκρασίαν τήξεως τοῦ ἀργύρου $t_3 = 960^\circ,5$ C καὶ τὴν θερμοκρασίαν τήξεως τοῦ χρυσοῦ $t_4 = 1063^\circ$C.

Εἰς τὰς συνήθεις μετρήσεις ἀντὶ τῆς μορφῆς (10) τῆς συναρτήσεως (9) λαμβάνομεν τὴν μορφὴν

(12) $$F = \alpha + \beta t + \gamma t^2.$$

Τότε διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν α, β, γ ἀρκοῦν τρεῖς θερμοκρασίαι, ὡς εἶναι αἱ θερμοκρασίαι τήξεως τοῦ ἀντιμονίου, τοῦ ἀργύρου καὶ τοῦ χρυσοῦ.

3. Τὰ πυρόμετρα δι᾽ ἀκτινοβολίας. Τὰ ὄργανα ταῦτα στηρίζονται ἐπὶ τῶν νόμων τῆς ἀκτινοβολίας καὶ χρησιμοποιοῦνται διὰ μετρήσεις θερμοκρασιῶν ἄνω τῶν 1063°C. Ὡς γνωστόν, αἱ ἰδιότητες τῆς ὕλης εἰς πολὺ ὑψηλὰς θερμοκρασίας εἶναι ἐν γένει διάφοροι τῶν ἰδιοτήτων εἰς τὰς συνήθεις θερμοκρασίας. Ἐντεῦθεν ἡ μεγάλη σημασία τῆς πυρομετρίας ἀπὸ ἐπιστημονικῆς ἀπόψεως. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως ἡ πυρομετρία ἔχει μεγάλην σημασίαν. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι ἡ ἐπιτυχία τῆς ἑψήσεως τῆς πορσελάνης ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διατηρήσεως καταλλήλου θερμοκρασίας ἐντὸς τῆς ἑστίας.

2. Ποσὸν θερμότητος. Ἡ γνῶσις τοῦ ποσοῦ θερμότητος ἀπορρέει ἐκ τῆς γνώσεως τῆς θερμοκρασίας. Δυνάμει τῆς προτάσεως I τῆς § 1, ἐὰν δύο σώματα ἀνίσως θερμὰ τεθοῦν εἰς ἐπαφήν, γίνεται τοιαύτη συναλλαγὴ θερμότητος μεταξύ των, ὥστε τελικῶς ἀποκτοῦν τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν ἀναμίξωμεν ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος θερμοκρασίας 0°C μὲ ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος θερμοκρασίας 50°C, θὰ λάβωμεν δύο χιλιόγραμμα ὕδατος θερμοκρασίας, ὡς δεικνύει τὸ πείραμα, 25°C. Ἀντιστοίχως ἐὰν ἀναμίξωμεν τὸ χιλιόγραμμον ὕδατος θερμοκρασίας 0°C μὲ ἓν χιλιόγραμμον ἀργύρου θερμοκρασίας 50°C, θὰ λάβωμεν μῖγμα θερμοκρασίας 2°,69 C. Τέλος, ἐὰν ἀναμίξωμεν τὸ χιλιόγραμμον ὕδατος θερμοκρασίας 0° μὲ ἓν χιλιόγραμμον ὑδραργύρου θερμοκρασίας 50°C, ὅταν τὸ μῖγμα τῶν δύο χιλιογράμμων ἀποκατασταθῇ εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας, ἡ θερμοκρασία του θὰ εἶναι 1°,61 C. Ἐκ τῶν πειραματικῶν τούτων δεδομένων συνάγομεν ὅτι ἴσα ποσὰ ὕδατος, ἀργύρου καὶ ὑδραργύρου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν τῶν 50°, ὡς θερμαίνοντα ἀνίσως τὸ αὐτὸ ποσὸν ὕδατος θερμοκρασίας 0°, περιέχουν διάφορα ποσὰ θερμότητος, ἢ ὡς λέγομεν, ἔχουν διάφορον θερμοχωρητικότητα. Ὁ ἄργυρος ἔχει μικροτέραν θερμοχωρητικότητα τοῦ ὕδατος καὶ μεγαλυτέραν τοῦ ὑδραργύρου. Εἰς τὴν μικρὰν θερμοχωρητικότητα τοῦ ὑδραργύρου ὀφείλεται καὶ ἡ ἰδιότης του ὡς θερμομετρικοῦ σώματος (§ 1, α.)· διότι, διὰ νὰ ἀποκατασταθῇ ὁ ὑδράργυρος εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας μὲ ἄλλα σώματα, ἀρκεῖ νὰ ἀπορροφήσῃ ἢ ἀποδώσῃ μικρὰ ποσὰ θερμότητος.

Κατὰ τὴν ἀνάμιξιν ὡς ἀνωτέρω π. χ. τοῦ χιλιογράμμου τοῦ ὑδραργύρου θερμοκρασίας 50°C μετὰ τοῦ χιλιογράμμου τοῦ ὕδατος θερμοκρασίας 0°C, ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑδραργύρου ἠλαττώθη καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ηὐξήθη· ὁ ὑδράργυρος δηλαδὴ ἀπέδωσε θερμότητα καὶ τὸ ὕδωρ ἀπερρόφησε θερμότητα. Ἡ θερμότης λοιπόν, ἡ ὁποία περιέχεται εἰς ἓν σῶμα, εἶναι μέγεθος ἐπιδεκτικὸν αὐξήσεως καὶ ἐλαττώσεως. Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος καὶ ἡ θερμοκρασία ἀποτελοῦν, ὡς ἀνεφέραμεν καὶ ἀνωτέρω, τὰ δύο θεμελιώδη ποσὰ τῆς θερμοδυναμικῆς.

Διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ποσοῦ θερμότητος στηριζόμεθα ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς:

Τὰ ποσὰ θερμότητος, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς δύο σώματα ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὑλικοῦ, ὁμογενῆ καὶ τῆς αὐτῆς θερμοκρασίας, εἶναι ἀνάλογα τῶν μαζῶν τῶν δύο σωμάτων.

Ὡς μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ποσοῦ θερμότητος λαμβάνεται ἡ *θερμίς*. Κατ᾽ ἀρχὰς ὥρισαν ὡς μονάδα τὴν θερμίδα τοῦ μηδενός, δηλαδὴ τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος ἀπὸ 0° εἰς 1°C, ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν.

Βραδύτερον, τὸ ἔτος 1900 καθωρίσθη ὑπὸ τοῦ διεθνοῦς συνεδρίου τῆς Φυσικῆς, εἰς Παρισίους, ὡς μονὰς διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ποσοῦ θερμότητος ἡ θερμὶς τῶν 15°.

Θερμὶς τῶν 15° εἶναι τὸ ποσὸν θερμότητος, τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος ἀπὸ 14°,5 εἰς 15°,5C, ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν.

Ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται παράδοξον διατί ἐξέλεξαν τὴν θερμίδα τῶν 15°. Τοῦτο ὅμως ἐξηγεῖται, διότι ἡ θερμὶς τῶν 15° συμπίπτει μὲ μεγάλην προσέγγισιν πρὸς τὴν μέσην ἢ πρακτικὴν θερμίδα, ἡ ὁποία εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τοῦ ποσοῦ θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς γραμμαρίου ὕδατος ἀπὸ 0° εἰς 100°C.

Ἡ ὡς ἄνω ὁρισθεῖσα θερμὶς τῶν 15° ὀνομάζεται καὶ ἁπλῶς θερμίς· ἡ μονὰς αὕτη εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὴν βιομηχανίαν χρησιμοποιοῦμεν τὴν μεγάλην θερμίδα ἢ θερμίδα τοῦ χιλιογράμμου, ἥτις εἶναι χιλίας φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ὡς ἄνω μικρᾶς θερμίδος ἢ θερμίδος τοῦ γραμμαρίου. Τὴν θερμίδα τοῦ γραμμαρίου θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου cal (calorie) καὶ τὴν θερμίδα τοῦ χιλιογράμμου θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου Cal (Calorie).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἐκτεθέντος πειράματος τῆς ἀναμίξεως π. χ. τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὑδραργύρου προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ μεταβάλωμεν ἀπὸ t εἰς Δt τὴν θερμοκρασίαν ἴσων μαζῶν ὕδατος καὶ ὑδραργύρου, χρειαζόμεθα διάφορα ποσὰ θερμότητος. Τὸ ποσὸν λοιπὸν τῆς θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας σώματός τινος ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἶναι ἀνάλογον τῆς μάζης τοῦ σώματος δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἀρχῆς καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ σώματος. Ἐντεῦθεν ἡ ἀνάγκη εἰς τὴν θεωρίαν τῆς θερμότητος νὰ χαρακτηρίσωμεν ἕκαστον σῶμα διά τινος εἰδικῆς σταθερᾶς. Ἡ σταθερὰ αὕτη εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σώματος.

Κατ' ἀρχὰς ὥρισαν ὡς συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος σώματος τὸν ἀριθμὸν λ_μ τῶν μικρῶν θερμίδων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς γραμμαρίου τοῦ σώματος κατὰ ἕνα βαθμὸν C. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος θὰ ἴσχυε, ἐὰν τὸ λ_μ ἦτο ἀνεξάρτητον τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $Q_{1,2}$ τὸ ποσὸν θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας ἑνὸς γραμμαρίου τοῦ σώματος ἀπὸ t_1 εἰς t_2, θὰ ἔχωμεν

(1) $$Q_{1,2} = \lambda_\mu (t_2 - t_1) \text{ cal.}$$

Ἐὰν ἀντὶ ἑνὸς γραμμαρίου εἴχομεν ἓν χιλιόγραμμον τὸ $Q_{1,2}$ θὰ ἦσαν μεγάλαι θερμίδες, δηλαδὴ ἡ (1) θὰ ἐγράφετο

(2) $$Q_{1,2} = \lambda_\mu (t_2 - t_1), \text{ Cal.}$$

Ἡ παραδοχὴ ὅμως τῆς σταθερότητος τοῦ λ_μ ἀποτελεῖ πολὺ μικρὰν προσέγγισιν. Διὰ μικρὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας $t_2 - t_1 = \Delta t$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1)

(3) $$\lambda_\mu = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ cal./gr. deg.,}$$

ὅπου ΔQ εἶναι τὸ ποσὸν θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ Δt. Τὸ λ_μ τοῦ τύπου (3) ὀνομάζομεν συντελεστὴν τῆς μέσης εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σώματος μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν t καὶ $t + \Delta t$. Τὸ δὲ ὅριον τοῦ $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, ὅταν τὸ Δt τείνῃ εἰς τὸ μηδέν, ὀνομάζομεν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Ὁ συντελεστὴς λοιπὸν τῆς εἰδικῆς θερμότητος σώματός τινος, εἴς τινα θερμοκρασίαν t εἶναι

(4) $$\lambda = \frac{dQ}{dt}.$$

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι ὁ ὑδράργυρος ἔχει μικρὰν θερμοχωρητικότητα ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄργυρον καὶ ἔτι μικροτέραν ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕδωρ. Ὁ ὁρισμὸς τῆς θερμοχωρητικότητος σώματος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Θερμοχωρητικότητα ὁμογενοῦς σώματος ὀνομάζομεν τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σώματος.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Θ τὴν θερμοχωρητικότητα σώματος μάζης m, θὰ ἔχωμεν

(5) $$\Theta = m\lambda.$$

Ἐὰν ἔχωμεν ἑτερογενὲς σύστημα, ἀποτελούμενον ἐξ ὁμογενῶν σωμάτων, τῶν ὁποίων αἱ μᾶζαι εἶναι $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ καὶ οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος εἶναι ἀντιστοίχως $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$, ἡ θερμοχωρητικότης τοῦ συστήματος θὰ εἶναι

(6) $$\Theta = m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \ldots + m_\nu \lambda_\nu .$$

Τὰς θερμικὰς μεταβολὰς τῶν σωμάτων θὰ ὀνομάζωμεν θερμικὰς μετατροπὰς ἢ καὶ ἁπλῶς μετατροπάς. Κατὰ τὴν μετατροπὴν σώματός τινος τὸ σῶμα ἐν γένει ἀπορροφᾷ ἢ ἀποδίδει θερμότητα. Ὅταν τὸ σῶμα ἀπορροφᾷ θερμότητα, τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν θερμότητος Q θὰ θεωροῦμεν θετικόν· ὅταν δὲ τὸ σῶμα ἀποδίδῃ θερμότητα, τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν Q θὰ θεωροῦμεν ἀρνητικόν. Ὁμοίως τὰς μεταβολὰς Δt τῆς θερμοκρασίας σώματος θὰ θεωροῦμεν θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, ἐφ᾿ ὅσον θὰ ἔχωμεν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τῆς θερμοκρασίας.

Ἀσκήσεις

1. Δεδομένου ὅτι ὁ συντελεστὴς δ τῆς φαινομένης διαστολῆς τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς ὑαλίνου σωλῆνος ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\delta = \alpha - \beta t + \gamma t^2$, ὅπου α, β, γ, εἶναι θετικοὶ συντελεσταί, νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $t = t(\theta)$, ἡ ὁποία δίδει τὴν κανονικὴν θερμοκρασίαν t (ἥτις δίδεται ὑπὸ κανονικοῦ ἀερικοῦ θερμομέτρου) συναρτήσει τῆς θερμοκρασίας θ, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ V_0, V_θ, V_{100} τοὺς φαινομένους ὄγκους τοῦ ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ ὑαλίνου σωλῆνος εἰς τὰς θερμοκρασίας 0°, t° καὶ 100°C, ἡ δεικνυομένη θερμοκρασία θ, ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὸν ὄγκον V_θ, δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(1) $$\frac{\theta}{100} = \frac{V_\theta - V_0}{V_{100} - V_0}$$

Ὁ ὑδράργυρος καταλαμβάνει τὸν ὄγκον V_θ ὅταν ἔχῃ πραγματικὴν θερμοκρασίαν t· ὅθεν εἶναι

(2) $$V_\theta = V_t = V_0(1 + \delta t) = V_0\,[1 + (\alpha - \beta t + \gamma t^2)t].$$

Ὁμοίως ἔχομεν

(3) $$V_{100} = V_0(1 + \delta \,.\, 100) = V_0\,[1 + (\alpha - \beta \,.\, 100 + \gamma \,.\, 100^2).100].$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2), (3), γράφεται

$$\theta = 100\,\frac{(\alpha - \beta t + \gamma t^2)t}{(\alpha - \beta \,.\, 100 + \gamma \,.\, 100^2)100}$$

ἢ

(4) $$\theta = \frac{\alpha t - \beta t^2 + \gamma t^3}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma} = \frac{t \,.\, \delta_t}{\delta_{100}}.$$

Ἐὰν ἐπιλύσωμεν τὴν (4) ὡς πρὸς t θὰ ἔχωμεν τὴν ζητουμένην συνάρτησιν $t = t(\theta)$. Ἐπειδὴ ἡ ἐπίλυσις τῆς (4) εἶναι δύσκολος, θέτομεν τὴν (4) ὑπὸ ἁπλουστέραν μορφήν, ὡς ἑξῆς:

Κάμνομεν εἰς τὴν (4) τὴν ἀντικατάστασιν

(5) $$t = \theta - \varepsilon,$$

ὁπότε λαμβάνομεν

(6) $$\theta = \frac{\alpha(\theta - \varepsilon) - \beta(\theta - \varepsilon)^2 + \gamma(\theta - \varepsilon)^3}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ε εἶναι πολὺ μικρὸν δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν εἰς τὴν (6) τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ ε^2 καὶ ε^3· οὕτω ἡ (6) γράφεται

(7) $$\theta = \frac{\alpha(\theta-\varepsilon)-\beta(\theta^2-2\theta\varepsilon)+\gamma(\theta^3-3\theta^2\varepsilon)}{\alpha-100\,\beta+100^2\gamma}.$$

Ἢ

(8) $$\theta(\alpha-100\,\beta+100^2\gamma)=\theta(\alpha-\beta\theta+\gamma\theta^2)-\varepsilon(\alpha-2\beta\theta+3\gamma\theta^2).$$

Ἢ τέλος, ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha-100\,\beta+100^2\gamma)=\delta_{100}$ καὶ $\alpha-\beta\theta+\gamma\theta^2=\delta_\theta$,

(9) $$\theta\,.\,\delta_{100}=\theta\,.\,\delta_\theta-\varepsilon(\alpha-2\beta\theta+3\gamma\theta^2).$$

Λύοντες τὴν (9) ὡς πρὸς ε λαμβάνομεν

(10) $$\varepsilon=\frac{\theta(\delta_{100}-\delta_\theta)}{-(\alpha-2\beta\theta+3\gamma\theta^2)}$$

Ἡ (5) γράφεται, δυνάμει τῆς (10)

(11) $$t=\theta-\frac{\theta(\delta_{100}-\delta_\theta)}{-(\alpha-2\beta\theta+3\gamma\theta^2)}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη συνάρτησις $t=t(\theta)$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

(12) $$\delta_{100}-\delta_\theta=\alpha-100\,\beta+100^2\gamma-\alpha+\beta\theta-\gamma\theta^2=$$

$$=-\beta(100-\theta)+\gamma(100^2-\theta^2)=(100-\theta)\,[\gamma(100+\theta)-\beta].$$

Ὅθεν ἡ (10) γράφεται

(13) $$\varepsilon=\frac{\theta(100-\theta)\,[\gamma(100+\theta)-\beta]}{-(\alpha-2\beta\theta+3\gamma\theta^2)}$$

καὶ ἀντιστοίχως ἡ (11) γράφεται

(14) $$t=\theta-\frac{\theta(100-\theta)\,[\gamma(100+\theta)-\beta]}{-(\alpha-2\beta\theta+\gamma\theta^2)}$$

Ἐκ τῆς (13) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $\theta=0$ καὶ $\theta=100$ εἶναι $\varepsilon=0$· ὅθεν ἐκ τῆς (14) λαμβάνομεν $t_0=\theta_0$ καὶ $t_{100}=\theta_{100}$. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἔπρεπε νὰ ἀναμένωμεν, διότι τὰ σημεῖα 0^0 καὶ 100^0 τῶν ἑκατονταβαθμίων κλιμάκων τοῦ κανονικοῦ ἀερικοῦ θερμομέτρου καὶ τοῦ ὑδραργυρικοῦ θερμομέτρου συμπίπτουν. Ἐπὶ πλέον ἔχομεν καὶ τρίτην τιμὴν τοῦ θ, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ ε τοῦ τύπου (13) γίνεται μηδέν· ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ θ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως

$$\gamma(100+\theta)-\beta=0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν

(15) $$\theta=\theta_1=\frac{\beta}{\gamma}-100.$$

Εἰς τὰ ὑδραργυρικὰ θερμόμετρα ὁ λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ ποικίλλει μεταξὺ 240 ἕως 250· ὅθεν $\theta_1=140^0$ ἕως 150^0C. Ἡ μελέτη τῆς συναρτήσεως $\varepsilon=\varepsilon(\theta)$ [τύπος (13)] δεικνύει ὅτι διὰ $\theta=0^0$ ἕως 100^0C εἶναι $\varepsilon>0$· ὅθεν τὸ ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον δεικνύει θερμοκρασίας θ κατά τι μεγαλυτέρας τῶν κανονικῶν θερμοκρασιῶν. Διὰ θερμοκρασίας μεγαλυτέρας τῶν $100^{\circ}C$ ἕως $\theta_1 = \frac{\beta}{\gamma} - 100$ εἶναι $\varepsilon < 0$· δηλαδὴ τὸ ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον δεικνύει θερμοκρασίας θ κατά τι μικροτέρας τῶν κανονικῶν θερμοκρασιῶν.

Ὁ τύπος (14) μᾶς δίδει τὰς κανονικὰς θερμοκρασίας t συναρτήσει τῶν δεικνυομένων θ ὑπὸ ὑδραργυρικοῦ θερμομέτρου. Ἀντιθέτως ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θερμοκρασίαν θ, τὴν ὁποίαν θὰ δεικνύῃ τὸ ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον, ὅταν ἡ κανονικὴ θερμοκρασία εἶναι t, πρέπει ἀντὶ τῆς ἀντικαταστάσεως (5) νὰ κάμωμεν εἰς τὴν (4) τὴν ἀντικατάστασιν

$$(16) \qquad \theta = t + \varepsilon.$$

Τότε ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν,

$$\varepsilon = \frac{\alpha t - \beta t^2 + \gamma t^3}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma} - t = \frac{\alpha t - \beta t^2 + \gamma t^3 - (\alpha t - 100\,\beta t + 100^2\gamma t)}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma},$$

ἢ

$$\varepsilon = \frac{t\,(\gamma t^2 - \beta t + 100\,\beta - 100^2\gamma)}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma}.$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες εἰς τὴν παρένθεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ τὸ $100\,\gamma t$, λαμβάνομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$\varepsilon = \frac{t\,(t - 100)\,[\gamma\,(t + 100) - \beta]}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma} = \frac{t\,(t - 100)\,\gamma\left(t + 100 - \frac{\beta}{\gamma}\right)}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma}.$$

Θέτοντες

$$(17) \qquad \frac{\beta}{\gamma} - 100 = t_1,$$

λαμβάνομεν τελικῶς

$$(18) \qquad \varepsilon = \frac{\gamma t\,(100 - t)\,(t_1 - t)}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma}.$$

Ἐκ τῆς (18) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $t = 0$, $t = 100$ καὶ $t = t_1$ εἶναι $\varepsilon = 0$.

2. Ὑδραργυρικὸν θερμόμετρον συμφωνεῖ ἀπολύτως μὲ τὸ κανονικὸν εἰς τὰς θερμοκρασίας $t_0 = 0^{\circ}$, $t_{100} = 100^{\circ}$ καὶ $t_{150} = 150^{\circ}C$. Ἡ μεγίστη διαφορὰ $\theta - t$ τῆς δεικνυομένης θερμοκρασίας θ ὑπὸ τοῦ ὑδραργυρικοῦ θερμομέτρου καὶ τῆς κανονικῆς θερμοκρασίας t, μεταξὺ 0° καὶ $100^{\circ}C$, εἶναι $\varepsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = 0{,}1^{\circ}C$. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ζητοῦνται: α. Ἡ θερμοκρασία t', εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ $\varepsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = 0{,}1^{\circ}$. καὶ β. Ἡ μεγίστη διαφορὰ $t - \theta = \varepsilon'_{\mu\varepsilon\gamma}$, μεταξὺ 100° καὶ $150^{\circ}C$, ὡς καὶ ἡ θερμοκρασία t'' εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ τὸ $\varepsilon'_{\mu\varepsilon\gamma}$.

Ὁ τύπος (18) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως γράφεται ἐνταῦθα δυνάμει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{\gamma t\,(100 - t)\,(150 - t)}{\alpha - 100\,\beta + 100^2\gamma}.$$

Τὸ $\varepsilon_{\mu\varepsilon\gamma}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν t', ἥτις εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως $\frac{d\varepsilon}{dt}=0$. Ἔχομεν ἐκ τῆς (1),

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\gamma(100-t)(150-t)-\gamma t(150-t)-\gamma t(100-t)=0.$$

ἢ

$$15000-100\,t-150\,t+t^2-150\,t+t^2-100\,t+t^2=0.$$

ἢ

(2) $$3\,t^2-500\,t+15000=0.$$

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι περίπου

$$t'=39^{\circ}C,\quad t''=127^{\circ},5\ C.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (1) $t'=39^{\circ}$ καὶ $\varepsilon=0,1$, λαμβάνομεν

$$0,1=\frac{\gamma}{\alpha-100\,\beta+100^2\gamma}\,(39.61.111).$$

Ὅθεν

(3) $$\frac{\gamma}{\alpha-100\,\beta+100^2\gamma}=\frac{1}{10.39.61.111}.$$

Ἡ (1) δυνάμει τῆς (3) γράφεται

(4) $$\varepsilon=\frac{t\,(100-t)(150-t)}{10.39.61.111}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (4) $t=t''=127,5$, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον $\varepsilon'_{\mu\varepsilon\gamma}$,

$$\varepsilon'_{\mu\varepsilon\gamma}=-\frac{127,5.27,5.22,5}{10.39.61.111}=\frac{-4,25.22,5}{13.4.61}=\frac{-95,625}{3172}=-0,03.$$

3. Δίδεται ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος κατὰ τὴν μετατροπὴν ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν εἶναι $c'=\alpha+\beta t$, ὅπου $\alpha=0,241$ καὶ $\beta=0,0000313$. Ζητεῖται τὸ ποσὸν Q τῶν θερμίδων, αἵτινες ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας 1 kg. ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, ἀπὸ $t_1=20^{\circ}$ εἰς $t_2=780^{\circ}C$.

Ὁ τύπος (4) τῆς § 2, ἐπειδὴ ἐνταῦθα εἶναι $\lambda=c'=\alpha+\beta t$, γράφεται

(1) $$\frac{dQ}{dt}=\alpha+\beta t.$$

Ὅθεν

(2) $$Q=\int_{t_1}^{t_2}(\alpha+\beta t)\,dt=\alpha(t_2-t_1)+\frac{\beta}{2}(t_2^2-t_1^2),$$

ἢ

(3) $$Q=\left(\alpha+\beta\,\frac{t_2+t_1}{2}\right)(t_2-t_1).$$

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{t_2 + t_1}{2} = t_\mu$, ὁ τύπος (3) γράφεται

$$Q = (\alpha + \beta t_\mu)(t_2 - t_1) = c'_\mu (t_2 - t_1),$$

ὅπου c'_μ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς μέσης εἰδικῆς θερμότητος, ὑπὸ πίεσιν σταθεράν, μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν t_1, t_2.

Ἔχομεν

$$c'_\mu = \alpha + \beta t_\mu = 0{,}241 + 0{,}0000313.\frac{780 + 20}{2} = 0{,}25352.$$

Καὶ

$$Q = c'_\mu (t_2 - t_1) = 0{,}25352\,(780 - 20) = 192{,}675 \text{ Cal.}$$

4. Ράβδον ἐκ χάλυβος βάρους 5,5 kg., τὴν ὁποίαν ἔχομεν θερμάνει εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 900°C, βυθίζομεν ἐντὸς μάζης 100 λίτρων ἐλαίου θερμοκρασίας 15°C. Ὑποθέτομεν ὅτι οὐδεμία ἀπώλεια θερμότητος γίνεται εἰς τὸ περιβάλλον, κατὰ τὴν συναλλαγὴν θερμότητος μεταξὺ τῆς ῥάβδου καὶ τῆς μάζης τοῦ ἐλαίου.

Δίδονται οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ χάλυβος $\gamma = 0{,}118$ καὶ τοῦ ἐλαίου $\gamma' = 0{,}5$. Τὸ βάρος ἑνὸς λίτρου ἐλαίου εἶναι 0,9 kg.

Ζητεῖται ἡ θερμοκρασία, τὴν ὁποίαν θὰ ἀποκτήσουν ἡ ῥάβδος καὶ ἡ μᾶζα τοῦ ἐλαίου, ὅταν εὑρεθοῦν εἰς ἰσορροπίαν θερμοκρασίας (§ 1 προτ. Ι).

Ἔστω t ἡ ζητουμένη θερμοκρασία. Ἡ ῥάβδος ἐκ χάλυβος θὰ ἀποδώσῃ εἰς τὸ ἔλαιον θερμότητα

$$Q = 5{,}5.\ \gamma.\ (900 - t) \text{ Cal.}$$

Ἡ μᾶζα τοῦ ἐλαίου θὰ ἀπορροφήσῃ θερμότητα

$$Q' = 100.0{,}9.\ \gamma'.\ (t - 15) \text{ Cal.}$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν $Q = Q'$, θὰ ἔχωμεν

$$5{,}5.0{,}118.(900 - t) = 100.0{,}9.0{,}5.\ (t - 15).$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

$$t = \frac{1259{,}1}{51{,}41} = 24^\circ{,}45 \text{ C.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ

3. Χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ὑποθέτωμεν ὅτι τὰ σώματα ὑπακούουν εἰς τὴν τριπλῆν ὁμογένειαν τῶν φυσικῶν στοιχείων ὄγκου, πιέσεως καὶ θερμοκρασίας. Θὰ δεχώμεθα δηλαδὴ ὅτι ὁ εἰδικὸς ὄγκος, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἡ μονὰς τοῦ βάρους σώματός τινος, εἶναι ὁ αὐτὸς ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τῆς μάζης τοῦ σώματος. Ἐπίσης θὰ δεχώμεθα ὅτι ἡ εἰδικὴ πίεσις p, ἤτοι ἡ πίεσις ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας, εἶναι ἡ αὐτὴ ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος, ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι στερεόν, ἢ ἐφ᾽ ὅλων τῶν σημείων τῆς μάζης τοῦ σώματος, ἐὰν τὸ σῶμα εἶναι ρευστόν. Τέλος θὰ δεχώμεθα ὅτι ἡ θερμοκρασία t εἶναι ἡ αὐτὴ ἐφ᾽ ὅλων τῶν σημείων τῆς μάζης τοῦ σώματος.

Δι᾽ ἕκαστον σῶμα πληροῦν τὰς τρεῖς ἀνωτέρω παραδοχὰς τὰ τρία στοιχεῖα, ἤτοι ὁ εἰδικὸς ὄγκος υ, ἡ εἰδικὴ πίεσις p καὶ ἡ θερμοκρασία t δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων, ἀλλὰ διὰ πᾶσαν κατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ σώματος αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ υ, p, t, ἐπαληθεύουν ἐξίσωσίν τινα

(1) $$F(\upsilon, p, t) = 0,$$

τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν χαρακτηριστικὴν ἢ καταστατικὴν ἐξίσωσιν τοῦ σώματος. Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην προσδιορίζει δι᾽ ἕκαστον σῶμα ἡ Φυσική.

Τὴν συνεχῆ μετατροπὴν τὴν ἄγουσαν ἔκ τινος καταστάσεως ἰσορροπίας $\Sigma(\upsilon, p, t)$ σώματος εἰς ἑτέραν κατάστασιν ἰσορροπίας $\Sigma'(\upsilon', p', t')$, θὰ θεωροῦμεν ὡς διαδοχικὴν σειρὰν καταστάσεων ἰσορροπίας. Ἐὰν δηλαδὴ διά τινα ἐνδιάμεσον κατάστασιν δίδωνται αἱ τιμαὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων υ, p, t ἡ τιμὴ τοῦ τρίτου στοιχείου προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν συνεχῆ μετατροπήν, καθ᾽ ἣν μεταβάλλονται κατὰ γνωστὸν νόμον τὰ δύο ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων υ, p, t, τὸ τρίτον στοιχεῖον θὰ μεταβάλλεται κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις (1).

Ἄς θεωρήσωμεν ἀπείρως μικρὰν μετατροπὴν ἄγουσαν ἐκ τῆς καταστάσεως $\Sigma(\upsilon, p, t)$ εἰς τὴν κατάστασιν $\Sigma'(\upsilon + d\upsilon, p + dp, t + dt)$. Αἱ στοιχειώδεις μεταβολαὶ dυ, dp, dt ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν

(2) $$dF = \frac{\partial F}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0,$$

τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἐὰν διαφορίσωμεν τὴν (1).

Τὰ φυσικὰ στοιχεῖα υ, p, t, τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν, ὀνομάζομεν θεμελιώδη στοιχεῖα.

4. ***Θερμοελαστικοὶ συντελεσταί.*** Ἄς γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου,

(1) $$F(\upsilon, p, t) = 0.$$

(2) $$\frac{\partial F}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial t} dt = 0.$$

Οἱ συντελεσταὶ $\frac{\partial F}{\partial \upsilon}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ τῆς (2) δὲν ἔχουν φυσικὴν σημασίαν. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τοῦτο, ἂς θεωρήσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν (1) λελυμένην π. χ. ὡς πρὸς t, ἤτοι ὑπὸ τὴν μορφὴν

(3) $$t = \varphi(\upsilon, p).$$

ἢ

(4) $$\varphi(\upsilon, p) - t = 0.$$

Διαφορίζοντες τὴν (4) εὑρίσκομεν

(5) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp - dt = 0.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐνῷ εἰς τὴν (2) ὁ συντελεστὴς τοῦ dt εἶναι $\frac{\partial F}{dt}$ εἰς τὴν (5) ὁ συντελεστὴς τοῦ dt εἶναι -1. Ὅθεν τὸ $\frac{\partial F}{\partial t}$ καὶ οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ $\frac{\partial F}{\partial \upsilon}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν φυσικὴν σημασίαν. Ὁ συνδυασμὸς ὅμως τῶν $\frac{\partial F}{\partial \upsilon}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{dt}$, ὡς κατωτέρω, μᾶς δίδει τοὺς συντελεστάς,

(6) $$\alpha = -\frac{1}{\upsilon}\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial \upsilon}}, \quad \beta = \frac{1}{\upsilon}\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial \upsilon}},$$

οἱ ὁποῖοι ἔχουν φυσικὴν σημασίαν. Διὰ νὰ ἀντιληφθῶμεν τὴν φυσικὴν σημασίαν τῶν συντελεστῶν α, β ἂς θέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὑπὸ τὴν μορφὴν

(7) $$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{1}{\upsilon}\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial \upsilon}} dt - \frac{1}{\upsilon}\frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial \upsilon}} dp.$$

Ἡ (7) δυνάμει τῶν (6) γράφεται

(8) $$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \alpha dt - \beta dp.$$

Θεωρήσωμεν μετατροπὴν ὑπὸ πίεσιν σταθεράν· κατὰ ταύτην εἶναι $dp = 0$ καὶ ἡ (8) γράφεται

(9) $$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \alpha dt.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \delta_1 \upsilon$ εἶναι ἡ διαστολὴ τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου, ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας κατὰ dt. Ὅθεν $\alpha = \frac{\delta_1 \upsilon}{dt}$ εἶναι ἡ εἰδικὴ κυβικὴ διαστολὴ κατὰ τὴν μετατροπὴν ὑπὸ πίεσιν σταθεράν.

Ἂς θεῥήσωμεν καὶ μετατροπὴν ὑπὸ θερμοκρασίαν σταθεράν· κατὰ ταύτην εἶναι $dt = 0$ καὶ ἡ (8) γράφεται

$$-\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \beta dp. \tag{10}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $-\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\delta_2\upsilon$ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς πιέσεως κατὰ dp. Καὶ $\beta = -\frac{\delta_2\upsilon}{dp}$ εἶναι ἡ εἰδικὴ κυβικὴ συστολὴ τοῦ σώματος κατὰ τὴν μετατροπὴν ὑπὸ θερμοκρασίαν σταθεράν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β ἔχουν ὡρισμένην φυσικὴν σημασίαν. Τοὺς συντελεστὰς αὐτοὺς ὀνομάζομεν θερμοελαστικοὺς συντελεστάς.

Ἂς θεωρήσωμεν καὶ μετατροπὴν ὑπὸ ὄγκον σταθερόν. Τότε εἶναι $d\upsilon = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (8) γράφεται

$$0 = \alpha dt - \beta dp \tag{11}$$

ἢ καὶ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{dp}{dt}. \tag{12}$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν θερμοελαστικῶν συντελεστῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον $\frac{dp}{dt}$ τῶν μεταβολῶν τῆς πιέσεως καὶ τῆς θερμοκρασίας κατὰ μετατροπὴν ὑπὸ ὄγκον σταθερόν.

Τὰς μετατροπὰς ὑπὸ πίεσιν σταθεράν, θὰ ὀνομάζωμεν καὶ ἰσοθλίπτους μετατροπάς. Τὰς μετατροπὰς ὑπὸ θερμοκρασίαν σταθερὰν θὰ ὀνομάζωμεν ἰσοθέρμους μετατροπάς. Καὶ τὰς μετατροπὰς ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν θὰ ὀνομάζωμεν ἰσοόγκους μετατροπάς.

Εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι, ὅταν αὐξάνωμεν τὴν θερμοκρασίαν σώματός τινος διατηροῦντες τὴν πίεσιν σταθεράν, ὁ ὄγκος τοῦ σώματος αὐξάνει καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἡ θερμοκρασία ἐλαττοῦται, ἐλαττοῦται ἀντιστοίχως καὶ ὁ ὄγκος. Ἤτοι τὰ dυ καὶ dt τοῦ τύπου (9) εἶναι ὁμόσημα· ἄρα τὸ α εἶναι θετικόν.

Ὁμοίως εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι, ὅταν ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν αὐξάνωμεν τὴν πίεσιν, ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ἐλαττοῦται· καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἡ πίεσις ἐλαττοῦται, ὁ ὄγκος αὐξάνει· ἤτοι τὰ dυ καὶ dp τοῦ τύπου (10) ἔχουν ἀντίθετον σημεῖον· ὅθεν, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου τούτου, τὸ β εἶναι θετικόν. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Οἱ θερμοελαστικοὶ συντελεσταὶ α, β εἶναι ποσότητες θετικαί.

5. *Στοιχειώδης θερμότης.* Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις $F(\upsilon, p, t) = 0$ δὲν εἶναι ἀρκετὴ διὰ νὰ χαρακτηρίσῃ πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν σώματός τινος. Χρειάζεται ἐπὶ πλέον καὶ ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους θερμότητος dQ τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς μετατροπῆς, ἥτις ἄγει ἔκ τινος καταστάσεως (υ, p, t) εἰς τὴν ἀπείρως γειτονικήν της κατάστασιν $(\upsilon + d\upsilon, p + dp, t + dt)$.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ dQ θεωροῦμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν λελυμένην ὡς πρὸς t, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$t = \varphi(\upsilon, p) \tag{1}$$

καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπιπροσθέσεως τῶν μικρῶν μεταβολῶν. Κατὰ τὴν ἀρχὴν ταύτην, ἐὰν $\delta_1 Q$ εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (Σ, Σ'') καὶ $\delta_2 Q$ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (Σ'', Σ'), τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος dQ, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (Σ, Σ') θὰ εἶναι

$$dQ = \delta_1 Q + \delta_2 Q. \tag{2}$$

Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ ταῦτα τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν $[\Sigma(\upsilon, p, t), \Sigma'(\upsilon + d\upsilon, p + dp, t + dt)]$ ὡς συνισταμένην ἐκ τῶν δύο στοιχειωδῶν μετατροπῶν $[\Sigma(\upsilon, p, t), \Sigma''(\upsilon + d\upsilon, p, t + \delta_1 t)]$ καὶ $[\Sigma''(\upsilon + d\upsilon, p, t + \delta_1 t), \Sigma'(\upsilon + d\upsilon, p + dp, t + \delta_1 t + \delta_2 t = t + dt)]$. Ἔστω $\delta_1 Q$ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν μετατροπὴν (Σ, Σ'')· ἐπειδὴ ἡ μετατροπὴ αὕτη εἶναι ἰσόθλιπτος καὶ ἡ θερμοκρασία κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην μεταβάλλεται ἀπὸ t εἰς $t + \delta_1 t$, ὁ λόγος $\frac{\delta_1 Q}{\delta_1 t}$ θὰ εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (4) τῆς § 2, ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπήν. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ c' τὸν συντελεστὴν τοῦτον, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\delta_1 Q}{\delta_1 t} = c'. \tag{3}$$

Ἔστω ἤδη $\delta_2 Q$ τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (Σ'', Σ'). Ἐπειδὴ ἡ μετατροπὴ αὕτη γίνεται ὑπὸ τὸν σταθερὸν ὄγκον $\upsilon + d\upsilon$, καὶ ἡ ἀντίστοιχος κατὰ ταύτην μεταβολὴ τῆς θερμοκρασίας εἶναι $\delta_2 t$, ὁ λόγος

$$\frac{\delta_2 Q}{\delta_2 t} = c \tag{4}$$

θὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ τὴν ἰσόογκον ταύτην μετατροπήν.

Ὁ τύπος (2) διὰ τὴν μετατροπὴν (Σ, Σ'), γράφεται, δυνάμει τῶν (3) καὶ (4)

$$dQ = c'\delta_1 t + c\delta_2 t. \tag{5}$$

Τὰς μεταβολὰς $\delta_1 t$, $\delta_2 t$ τῶν θερμοκρασιῶν κατὰ τὴν ἰσόθλιπτον καὶ τὴν ἰσόογκον μετατροπὴν προσδιορίζομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1). Διαφορίζοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἔχομεν

$$\mathrm{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}\, \mathrm{d}\upsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}\, \mathrm{dp}. \tag{6}$$

Διὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπήν, ὅπου εἶναι $\mathrm{dp} = 0$, ἔχομεν ἐκ τῆς (6),

$$\delta_1 \mathrm{t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}\, \mathrm{d}\upsilon \cdot \tag{7}$$

καὶ διὰ τὴν ἰσόογκον μετατροπήν, ὅπου εἶναι $\mathrm{d}\upsilon = 0$, ἔχομεν

$$\delta_2 \mathrm{t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}\, \mathrm{dp}. \tag{8}$$

Ἡ (5), δυνάμει τῶν (7) καὶ (8), γράφεται

$$\mathrm{dQ} = c' \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}\, \mathrm{d}\upsilon + c \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}\, \mathrm{dp}. \tag{9}$$

Ὁ τύπος οὗτος δίδει τὴν ἔκφρασιν τῆς στοιχειώδους θερμότητος εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν υ, p.

Τὰ $\frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}$ τοῦ τύπου (9) προσδιορίζονται ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ συντελεσταὶ c', c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν εἶναι ἐν γένει συναρτήσεις τῶν υ, p· ἡ γνῶσις τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ dQ.

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις σώματός τινος καὶ ἡ ἐξίσωσις (9) εἶναι αἱ δύο θεμελιώδεις ἐξισώσεις τῆς θερμοδυναμικῆς, αἵτινες ορίζουν πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν τοῦ σώματος. Διὰ νὰ γνωρίζωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς ἐξισώσεως (9) ἐκτὸς τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (1), δέον νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὰς συναρτήσεις

$$c' = c'(\upsilon, \mathrm{p}), \quad c = c(\upsilon, \mathrm{p}). \tag{10}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Διὰ νὰ γνωρίζωμεν πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν σώματός τινος, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τοῦ σώματος καὶ τὰς συναρτήσεις $c' = c'(\upsilon, p)$, $c = c(\upsilon, p)$.

Ἄς εἰσαγάγωμεν ἤδη εἰς τὸν τύπον (9) τοὺς θερμοελαστικοὺς συντελεστὰς (§ 4). Πρὸς τοῦτο θέτομεν τὴν (6) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}}\, \mathrm{dt} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}}{\upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}}\, \mathrm{dp}. \tag{11}$$

Συγκρίνοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (8) τῆς § 4 λαμβάνομεν

$$\frac{1}{\upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}} = \alpha, \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{p}}}{\upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}} = \beta. \tag{12}$$

Ἐκ τῶν (12) εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} = \frac{1}{\alpha \upsilon}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\beta}{\alpha}. \tag{13}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐκφράσεις ταύτας τῶν $\frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$ εἰς τὸν τύπον (9) λαμβάνομεν

$$dQ = \frac{c'}{\alpha \upsilon}\, d\upsilon + c\, \frac{\beta}{\alpha}\, dp, \tag{14}$$

ἤτοι εὑρίσκομεν ἔκφρασιν τοῦ dQ, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ συντελεσταὶ ἔχουν φυσικὴν σημασίαν. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὑπολογισμὸν τοῦ dQ ἐθεωρήσαμεν ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὰς υ, p. Δυνάμεθα ὅμως νὰ θεωρήσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν $F(\upsilon, p, t) = 0$ λελυμένην ὡς πρὸς p ἢ ὡς πρὸς υ, ἤτοι ἀντὶ τῆς μορφῆς (1) νὰ θεωρήσωμεν τὰς μορφὰς

$$p = \varphi_1(t, \upsilon), \quad \upsilon = \varphi_2(p, t). \tag{15}$$

Ἂς εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ dQ εἰς τὰ συστήματα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν (t, υ) καὶ (p, t). Ἂς ὑπολογίσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ dQ εἰς τὸ σύστημα (t, υ). Πρὸς τοῦτο λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (8) τῆς § 4, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \alpha\, dt - \beta\, dp \tag{16}$$

ὡς πρὸς dp, λαμβάνομεν

$$dp = \frac{\alpha}{\beta}\, dt - \frac{1}{\beta \upsilon}\, d\upsilon. \tag{17}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἔκφρασιν ταύτην τοῦ dp εἰς τὴν ἐξίσωσιν (14) λαμβάνομεν

$$dQ = \frac{c'}{\alpha \upsilon}\, d\upsilon + c\, \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta}\, dt - \frac{1}{\beta \upsilon}\, d\upsilon \right),$$

ἢ μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$dQ = c\,dt + \frac{c' - c}{\alpha \upsilon}\, d\upsilon. \tag{18}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ dQ εἰς τὸ σύστημα (t, υ).

Τέλος ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (14) τὸ $\frac{d\upsilon}{\upsilon}$ διὰ τοῦ ἴσου του ἐκ τῆς (16) λαμβάνομεν

$$dQ = \frac{c'}{\alpha} (\alpha dt - \beta dp) + c\, \frac{\beta}{\alpha}\, dp,$$

ἢ μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$dQ = c'dt - (c' - c)\, \frac{\beta}{\alpha}\, dp. \tag{19}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ dQ, εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν p, t.

6. Συντελεσταὶ c', c, λ τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ὅτι τὰ c', c εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερόν. Τοῦτο διακρίνομεν καὶ ἐκ τῶν τύπων (18), (19) τῆς § 5. Τῷ ὄντι διὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπὴν ($dp = 0$), ὁ τύπος (19) τῆς § 5 μᾶς δίδει $dQ = c'dt$· ὅθεν $c' = \frac{dQ}{dt}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθεράν. Ὁμοίως ὁ τύπος (18) τῆς § 5 διὰ $dv = 0$ γράφεται $c = \frac{dQ}{dt}$. ἤτοι c εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερόν.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὸν τύπον (18) τῆς § 5 διά τινα ἰσόθερμον μετατροπὴν ($dt = 0$)· ἔχομεν

(1) $$dQ = \frac{c' - c}{\alpha v} dv.$$

Εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι διὰ νὰ αὐξηθῇ ὁ ὄγκος σώματός τινος ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, πρέπει τὸ σῶμα νὰ ἀπορροφήσῃ θερμότητα· καὶ διὰ νὰ ἐλαττωθῇ ὁ ὄγκος, ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν, πρέπει τὸ σῶμα νὰ ἀποδώσῃ θερμότητα. Ἤτοι τὰ dQ, dv τοῦ τύπου (1) εἶναι ὁμόσημα· ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{c' - c}{\alpha v} = \frac{dQ}{dv} > 0.$$

Καὶ ἐπειδὴ α, v εἶναι ποσότητες θετικαί, θὰ εἶναι

(2) $$c' - c > 0.$$

Ἐντεῦθεν ἡ γνωστὴ ἐκ τῆς Φυσικῆς πρότασις:

Ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερόν.

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂς φαντασθῶμεν ὅτι συμπιέζομεν τὸ σῶμα χωρὶς τοῦτο νὰ ἀπορροφᾷ ἢ νὰ ἀποδίδῃ θερμότητα· τοῦτο δυνάμεθα π. χ. νὰ ἐπιτύχωμεν, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σῶμα ἀπομονωμένον ἀπὸ οἱανδήποτε θερμὴν ἢ ψυχρὰν πηγὴν καὶ συμπιέσωμεν τοῦτο ἀκαριαίως διά τινος μηχανικοῦ μέσου. Τότε εἶναι $dQ = 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (19) τῆς § 5 γράφεται

(3) $$c'dt = (c' - c)\frac{\beta}{\alpha} dp.$$

Εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι κατὰ τὴν συμπίεσιν σώματός τινος, ἐφ' ὅσον τοῦτο δὲν ἀπορροφᾷ οὔτε ἀποδίδει θερμότητα, ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος αὐξάνει. Ἤτοι τὰ dp, dt τοῦ τύπου (3) εἶναι ὁμόσημα· ὅθεν εἶναι

(4) $$\frac{c' - c}{c'} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{dt}{dp} > 0$$

καὶ ἐπειδὴ αἱ ποσότητες α, β εἶναι θετικαὶ (§ 4, προτ. β), θὰ εἶναι

$$1 - \frac{c}{c'} > 0, \quad \text{ἢ} \quad 1 > \frac{c}{c'}$$

ἄρα $c' > c$.

Τὴν μετατροπήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα δὲν ἀπορροφᾷ οὔτε ἀποδίδει θερμότητα, δηλαδὴ τὴν μετατροπὴν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $dQ = 0$, θὰ ὀνομάζωμεν ἀδιάθερμον μετατροπήν.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τυχοῦσαν μετατροπήν, καθ' ἣν μεταβάλλονται συγχρόνως τὰ υ, p, t καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ $\lambda = \frac{dQ}{dt}$ τὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην. Ἀντικαθιστῶντες τὰ dQ, dt, διὰ τῶν ἐκφράσεών των (9), (6) τῆς § 5, λαμβάνομεν

$$\lambda = \frac{dQ}{dt} = \frac{c' \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} d\upsilon + c \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp}{\frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp}. \tag{5}$$

Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ λ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\lambda = \frac{A + B \frac{dp}{d\upsilon}}{A_1 + B_1 \frac{dp}{d\upsilon}}. \tag{6}$$

Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων, διὰ νὰ εἶναι τὸ λ τοῦ τύπου (6) ἀνεξάρτητον τοῦ $\frac{dp}{d\upsilon}$ πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}.$$

Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $c' = c$, ὅπερ δυνάμει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος λ εἶναι γραμμικὴ κλασματικὴ συνάρτησις τοῦ $\frac{dp}{d\upsilon}$· καὶ ἐπειδὴ τὸ $\frac{dp}{d\upsilon}$ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$, ὁμοίως καὶ τὸ λ δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικάς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

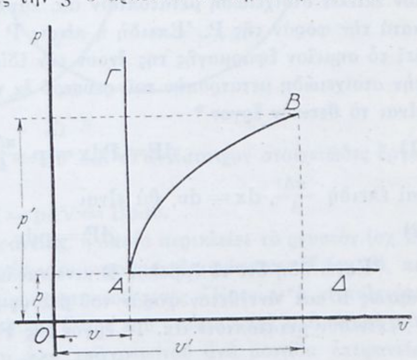
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ CLAPEYRON

7. *Διαγράμματα.* Θεωρήσωμεν γενικῶς δύο μεταβλητὰς x, y, αἵτινες ἐκφράζουν φυσικὰ μεγέθη, ὡς θερμοκρασίαν, ὄγκον, πίεσιν, ταχύτητα, ἐπιτάχυνσιν κ.τ.λ. Ἡ ἐξίσωσις $y = \sigma(x)$ εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τοῦ νόμου τῆς μεταβολῆς τοῦ μεγέθους y συναρτήσει τοῦ x. Ἡ δὲ παραστατικὴ καμπύλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων Ox, Oy ὀνομάζεται διάγραμμα*.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν $F(\upsilon, p, t) = 0$ λελυμένην ὡς πρὸς t, ἤτοι ὑπὸ τὴν μορφὴν

(1) $$t = \varphi(\upsilon, p).$$

Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 3 ἀρκεῖ ἓν σύστημα τιμῶν υ, p διὰ νὰ ὁρίσῃ μίαν κατάστασιν ἰσορροπίας. Ἡ δὲ ἀντίστοιχος εἰς τὴν κατάστασιν ταύτην τιμὴ τοῦ t προσδιορίζεται ἐκ τῆς (1). Τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας (υ, p) δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν εἰς σύστημα δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων Oυ, Op (σχ. 1), διὰ τοῦ σημείου A, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας υ, p.



Σχ. 1

Εἴδομεν εἰς τὴν § 3 ὅτι ἡ συνεχὴς μετατροπὴ (A, B) εἶναι σειρὰ διαδοχικῶν καταστάσεων ἰσορροπίας. Αἱ διαδοχικαὶ αὗται καταστάσεις παρίστανται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων Oυ, Op ὑπὸ τῶν σημείων συνεχοῦς καμπύλης AB, τὴν ὁποίαν θὰ ὀνομάζωμεν διάγραμμα τῆς μετατροπῆς (A, B).

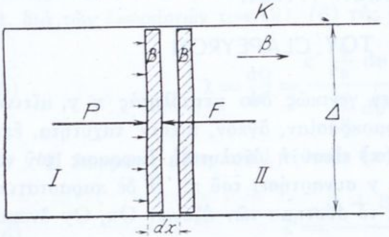
Τὸ διάγραμμα ἰσοόγκου μετατροπῆς ($d\upsilon = 0$) εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Op, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα AΓ· τὸ δὲ διάγραμμα ἰσοθλίπτου μετατροπῆς ($dp = 0$) θὰ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oυ, ὡς εἶναι ἡ εὐθεῖα AΔ.

Ἐπειδὴ τὰ υ, p λόγῳ τῆς φύσεως αὐτῶν εἶναι ποσότητες θετικαί, τὰ

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 101.

παραστατικὰ σημεῖα τῶν καταστάσεων ἰσορροπίας τῶν σωμάτων, ὡς καὶ τὰ διαγράμματα τῶν μετατροπῶν αὐτῶν θὰ κεῖνται εἰς τὴν γωνίαν τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ου, Ορ, ἤτοι εἰς τὴν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων.

8. ***Ἔργον τῶν πιέσεων.*** Ἂς θεωρήσωμεν κύλινδρον Κ, ἐντὸς τοῦ ὁποίου δύναται νὰ κινῆται εὐθυγράμμως καὶ παλινδρομικῶς τὸ ἔμβολον Β (σχ. 2) καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸν χῶρον Ι τοῦ κυλίνδρου περικλείεται ἡ μονὰς τοῦ βάρους ἑνὸς ῥευστοῦ. Ὁ ὄγκος Ι θὰ εἶναι ὁ εἰδικὸς ὄγκος υ τοῦ ῥευστοῦ. Ἔστω p ἡ εἰδικὴ πίεσις, δηλαδὴ ἡ πίεσις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ τὸ ῥευστὸν ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου. Ἐὰν Δ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ ἐμβόλου, ἡ ὁλικὴ πίεσις P ἡ ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου εἶναι $P = p\frac{\pi\Delta^2}{4}$. Ἔστω ὅτι ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς P τὸ ἔμβολον ἐκτελεῖ στοιχειώδη μετατόπισιν dx, κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, ἤτοι κατὰ τὴν φορὰν τῆς P. Ἐπειδὴ ἡ πίεσις P καὶ ὁ δρόμος, τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἔχουν τὴν ἰδίαν φοράν, τὸ ἔργον τῆς P κατὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν τοῦ ῥευστοῦ ἐκ τοῦ ὄγκου υ εἰς τὸν υ + dυ, θὰ εἶναι τὸ θετικὸν ἔργον *



Σχ. 2

(1) $$dE = Pdx = p\frac{\pi\Delta^2}{4}dx$$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{\pi\Delta^2}{4}dx = d\upsilon$, θὰ εἶναι

(2) $$dE = pd\upsilon.$$

Ἔστω ἤδη ὅτι τὸ ἔμβολον Β κινεῖται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς δυνάμεως F κατ' ἀντίθετον φορὰν τοῦ βέλους β, ἤτοι κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς F, ἐκτελοῦν μετατόπισιν dx. Τὸ ἔργον τῆς F θὰ εἶναι τὸ θετικὸν ἔργον

$$dE' = Fdx.$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν συμπίεσιν τοῦ ῥευστοῦ ὑπὸ τῆς F τοῦτο ἀσκεῖ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἀντίδρασιν P = − F, τὸ ἔργον τῆς P θὰ εἶναι

(3) $$dE' = Fdx = -Pdx = -pd\upsilon.$$

Ἀντὶ τῶν τύπων (2), (3) δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν μοναδικὸν τύπον (2), ὅπου ὅμως θὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ σημεῖον τοῦ dυ. Ἐὰν εἶναι $d\upsilon > 0$, θὰ εἶναι καὶ $dE > 0$· καὶ ἐὰν εἶναι $d\upsilon < 0$, θὰ εἶναι καὶ $dE < 0$.

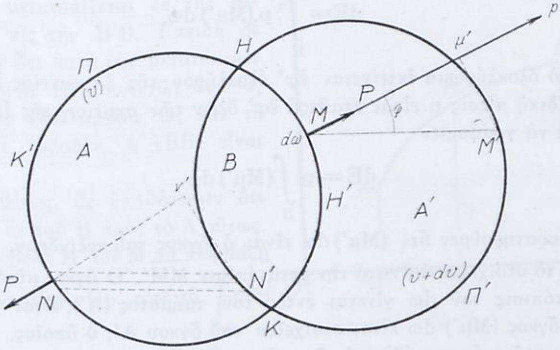
Τὸ ἔργον λοιπὸν τῶν πιέσεων τοῦ ῥευστοῦ εἶναι θετικόν, ὅταν ὁ ὄγκος

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 209.

τοῦ ρευστοῦ αὐξάνῃ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ ρευστὸν ἀποδίδει ἔργον. Ἀντιθέτως, ἐὰν ὁ ὄγκος τοῦ ρευστοῦ ἐλαττοῦται, τὸ ἔργον τῶν πιέσεων εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τότε λέγομεν ὅτι τὸ ρευστὸν ἀπορροφᾷ ἔργον. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

Ὅταν ὁ ὄγκος ρευστοῦ αὐξάνῃ, τὸ ἔργον τῶν πιέσεων τοῦ ρευστοῦ εἶναι θετικόν, ἤτοι τὸ ρευστὸν ἀποδίδει ἔργον. Ὅταν ἀντιθέτως ὁ ὄγκος τοῦ ρευστοῦ ἐλαττοῦται, τὸ ἔργον τῶν πιέσεων τοῦ ρευστοῦ εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι τὸ ρευστὸν ἀπορροφᾷ ἔργον.

Ἐὰν ἀντὶ τῆς μονάδος τοῦ βάρους τοῦ ρευστοῦ θεωρήσωμεν βάρος B,



Σχ. 3

τοῦτο θὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον $V = B\upsilon$˙ καὶ τὸ ἀντίστοιχον στοιχειῶδες ἔργον θὰ εἶναι

(4) $$dE = pdV = Bpd\upsilon.$$

Ἀντὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περικλείει τὸ ρευστὸν (σχ. 2), δυνάμεθα γενικώτερον νὰ θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν Π (σχ. 3), περικλείουσαν τὴν μονάδα τοῦ βάρους ρευστοῦ τινος. Ἔστω υ ὁ περικλειόμενος ὄγκος ὑπὸ τῆς Π, ἤτοι ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ρευστοῦ καὶ p ἡ εἰδικὴ πίεσις, ἤτοι ἡ πίεσις ἡ ἀσκουμένη ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας τῆς Π. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ρευστὸν ὑφίσταται στοιχειώδη μετατροπὴν τοιαύτην, ὥστε ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἀπὸ υ γίνεται $\upsilon + d\upsilon$˙ ἔστω Π′ ἡ περικλείουσα τὸν ὄγκον τοῦτον ἐπιφάνεια. Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, οἱ ὄγκοι (υ) καὶ $(\upsilon + d\upsilon)$ ἔχουν κοινὸν τμῆμα τὸ B καὶ εἶναι $(\upsilon + d\upsilon) = B + A'$, $(\upsilon) = B + A$, ἤτοι εἶναι

(5) $$d\upsilon = A' - A.$$

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν μετατροπὴν ἀπὸ (υ) εἰς $(\upsilon + d\upsilon)$.

Ἔστω $\overrightarrow{MM'}$ ἡ μετατόπισις σημείου τινὸς M τῆς ἐπιφανείας Π. Ἐὰν θεωρήσωμεν εἰς τὸ σημεῖον M στοιχεῖον $d\omega$ τῆς ἐπιφανείας Π, ἡ στοιχειώδης πίεσις ἐπὶ τοῦ στοιχείου τούτου εἶναι $P = pd\omega$, τὸ δὲ ἔργον ταύτης κατὰ τὴν μετατόπισιν $\overrightarrow{MM'}$ θὰ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\vec{P} \cdot \overrightarrow{MM'}$*. Τοῦτο ἰσοῦται ὡς γνωστὸν πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν $\vec{P}$, $\overrightarrow{MM'}$ καὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς γωνίας $(\vec{P}, \overrightarrow{MM'})$. Ἤτοι εἶναι

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{MM'} = P\,(MM')\,\text{συν}\,\varphi = P\,(M\mu') = p d\omega\,(M\mu'). \tag{6}$$

Τοῦτο εἶναι τὸ ἔργον τῆς $P = p d\omega$ κατὰ τὴν μετατόπισιν $\overrightarrow{MM'}$ τοῦ στοιχείου $d\omega$.

Τὸ ὁλικὸν λοιπὸν στοιχειῶδες ἔργον dE κατὰ τὴν στοιχειώδη μετατόπισιν (Π, Π') θὰ εἶναι

$$dE = \int_{\Pi} p\,(M\mu')\,d\omega, \tag{7}$$

ὅπου τὸ ὁλοκλήρωμα ἐκτείνεται ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας Π. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εἰδικὴ πίεσις p εἶναι σταθερὰ ἐφ᾽ ὅλων τῶν σημείων τῆς Π (§ 3), δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$dE = p \int_{\Pi} (M\mu')\,d\omega. \tag{8}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $(M\mu')\,d\omega$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ στοιχεῖον $d\omega$ κατὰ τὴν μετατόπισιν $\overrightarrow{MM'}$. Ὁ ὄγκος αὐτός, ἐφ᾽ ὅσον ἡ μετατόπισις τοῦ $d\omega$ γίνεται ἐντὸς τοῦ τμήματος (Α′), εἶναι θετικός· τῷ ὄντι ὁ ὄγκος $(M\mu')\,d\omega$ εἶναι στοιχεῖον τοῦ ὄγκου Α′, ὁ ὁποῖος, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος (3) καὶ τῆς σχέσεως (5), εἶναι θετικός. Ἀντιθέτως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν μετατόπισιν $\overrightarrow{NN'}$ στοιχείου $d\omega$, ἥτις γίνεται ἐντὸς τοῦ τμήματος (Α), ἐπειδὴ $\vec{P}$ καὶ $\overrightarrow{N\nu'}$ ἔχουν ἀντίθετα σημεῖα, ὁ διαγραφόμενος ὑπὸ τοῦ στοιχείου $d\omega$ ὄγκος εἶναι στοιχεῖον τοῦ ὄγκου (Α) τῆς σχέσεως (5), δηλαδὴ εἶναι ἀρνητικός.

Κατόπιν τῶν παρατηρήσεων αὐτῶν διακρίνομεν εὐκόλως ὅτι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $d\omega$, ἅτινα ἀποτελοῦν τὸ τμῆμα ΗΗ′Κ τῆς ἐπιφανείας Π, θὰ διαγράψῃ κατὰ τὴν μετατόπισιν (Π, Π′) τὸν ὄγκον (Α′) τῆς (5)· ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα ΗΚ′Κ τῆς ἐπιφανείας Π θὰ διαγράψῃ τὸν ὄγκον (Α) τῆς (5). Ὅθεν

$$\int_{\Pi} (M\mu')\,d\omega = A' - A. \tag{9}$$

Λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς (5), (8) καὶ (9) ἔχομεν

$$dE = p\,(A' - A) = p\,dv. \tag{10}$$

Οὕτω ἐπανευρίσκομεν τὸν τύπον (2).

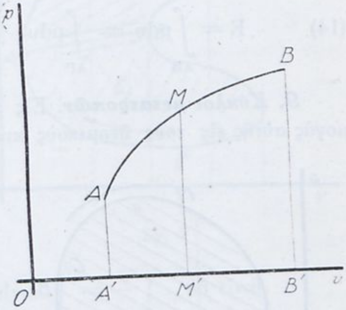
Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη πεπερασμένην μετατροπὴν (Α, Β), τῆς ὁποίας ἔστω ὅτι τὸ διάγραμμα εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων (Ov, Op) εἶναι ἡ καμπύλη ΑΒ (σχ. 4). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μετατροπὴ εἶναι τοιαύτη, ὥστε,

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 209.

ὅταν τὸ σημεῖον Μ μετατοπίζεται ἐπὶ τοῦ διαγράμματος ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἡ προβολὴ Μ′ τοῦ Μ νὰ μετατοπίζεται κατὰ τὴν φορὰν τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος Ου, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ Μ′ νὰ μετατοπίζεται ἀπομακρυνόμενον συνεχῶς τοῦ ἄξονος Ορ. Τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

$$\mathscr{E} = \int_{AB} p d\upsilon \tag{11}$$

παριστᾷ, ὡς γνωστόν, τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον διαγράφει ἡ τεταγμένη Μ′Μ ὅταν αὕτη μετατοπίζεται ἐκ τῆς θέσεως Α′Α εἰς τὴν Β′Β. Ἐπειδὴ δὲ ὑπεθέσαμεν ὅτι κατὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ σημείου Μ′ εἶναι συνεχῶς $d\upsilon > 0$, τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα, ὡς καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐμβαδὸν Α′ΑΒΒ′ εἶναι θετικά.

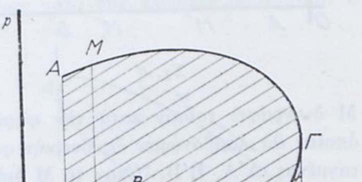


Σχ. 4

Ἀντιθέτως, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι κινούμεθα ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α οὕτως, ὥστε ἡ προβολὴ Μ′ τοῦ Μ νὰ πλησιάζῃ συνεχῶς τὸν ἄξονα Ορ· τότε τὸ $\int_{BA} p d\upsilon$ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ $\int_{AB} p d\upsilon$, ἀλλ᾽ ἀντίθετον σημεῖον· ἤτοι εἶναι

$$\int_{BA} p d\upsilon = - \int_{AB} p d\upsilon. \tag{12}$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τύπων (10) καὶ (11) προκύπτει ὅτι τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν πεπερασμένην μετατροπὴν ΑΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ Α′ΑΒΒ′, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος $\int_{AB} p d\upsilon$.



Σχ. 5

Τὸ ἔργον τοῦτο, ὡς καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐμβαδὸν Α′ΑΒΒ′ καὶ τὸ $\int_{AB} p d\upsilon$ εἶναι θετικὰ ἐφ᾽ ὅσον ἡ τεταγμένη Μ′Μ, ἥτις διαγράφει τὸ ἐμβαδὸν Α′ΑΒΒ′, ἀπομακρύνεται συνεχῶς τοῦ ἄξονος Ορ. Ἐὰν ἡ τεταγμένη πλησιάζῃ συνεχῶς τὸν ἄξονα Ορ, ἔργον, ἐμβαδὸν καὶ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀρνητικά.

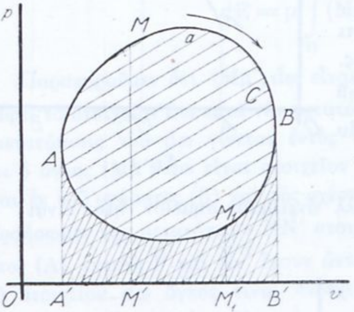
Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν μετατροπὴν (ΑΓΒ) (σχ. 5). Κατὰ τὴν διαγραφὴν τῆς καμπύλης ΑΓΒ ἡ τεταγμένη Μ′Μ ἀπομακρύνεται τοῦ ἄξονος Ορ, ἐφ᾽ ὅσον τὸ σημεῖον Μ διαγράφει τὸ τόξον ΑΓ, ἐνῷ ἡ Μ′Μ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα Ορ, ἐφ᾽ ὅσον τὸ Μ διαγράφει τὸ ὑπόλοιπον τόξον ΓΒ. Τὸ ἔργον λοιπὸν τῶν πιέσεων κατὰ τὴν μετατροπὴν (ΑΓΒ) θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν Α′ΑΓΓ′ καὶ Γ′ΓΒΒ′ = — Β′ΒΓΓ′ ἤτοι εἶναι

(13) $\quad E = \text{εμβ. } A'A\Gamma\Gamma' - \text{εμβ. } B'B\Gamma\Gamma' = \text{εμβ. } A'A\Gamma BB'.$

Ἡ (13) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(14) $$E = \int\limits_{AB} p dv = \int\limits_{A\Gamma} p dv + \int\limits_{\Gamma B} p dv = \int\limits_{A\Gamma} p dv - \int\limits_{B\Gamma} p dv.$$

9. *Κύκλοι μετατροπῶν*. Εἰς τὴν θερμοδυναμικὴν καὶ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῆς εἰς τοὺς θερμικοὺς κινητῆρας ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν αἱ κλεισταὶ μετατροπαί, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν καὶ κύκλους μετατροπῶν ἢ καὶ ἁπλῶς κύκλους. Αἱ μετατροπαὶ αὗται ἐπαναφέρουν τὸ σῶμα ἔκ τινος ἀρχικῆς καταστάσεως Α, μετὰ σειρὰν στοιχειωδῶν διαδοχικῶν μετατροπῶν, εἰς τὴν ἰδίαν ἀρχικὴν κατάστασιν Α.



Σχ. 6

Τὰ διαγράμματα τῶν κλειστῶν μετατροπῶν εἶναι κλεισταὶ καμπύλαι, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν καὶ κύκλους.

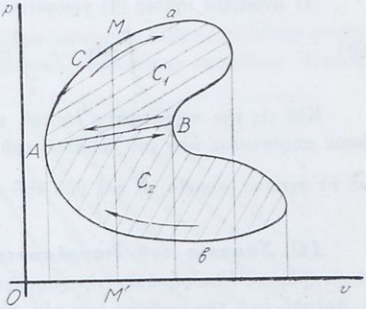
Ἂς θεωρήσωμεν τὸν κύκλον C (σχ. 6) καὶ ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Μ διαγράφει τοῦτον κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τὴν ὁποίαν θὰ λαμβάνωμεν ὡς θετικὴν φοράν. Ἂς φέρωμεν τὰς δύο ἄκρας τεταγμένας Α′Α, Β′Β. Ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὸ τόξον ΑΜΒ, τὸ ἔργον τῶν πιέσεων θὰ παρίσταται ἀπὸ τὸ θετικὸν ἐμβαδὸν Α′ΑΜΒΒ′, ὅταν δὲ τὸ Μ διαγράφῃ τὸ ὑπόλοιπον τόξον BM_1A, τὸ ἔργον τῶν πιέσεων θὰ παρίσταται ἀπὸ τὸ ἀρνητικὸν ἐμβαδὸν $B'BM_1AA'$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν $-(A'AM_1BB')$. Τὸ ὁλικὸν λοιπὸν ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν κλειστὴν μετατροπὴν θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν Α′ΑΜΒΒ′ καὶ $A'AM_1BB'$, ἤτοι θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν $AMBM_1A$, ὅπερ περικλείεται ὑπὸ τοῦ κύκλου C. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο δίδεται ὡς γνωστὸν ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος $\int\limits_{C} p dv$, λαμβανομένου κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς καμπύλης C. Οὕτω τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν κλειστὴν μετατροπὴν εἶναι

$$(1)\qquad E = \text{εμβ. } A'AMBB' - \text{εμβ. } A'AM_1BB' = \text{εμβ. } AMBM_1A,$$

ἤ,

$$(2)\qquad E = \int_C p dv = \int_{AMB} p dv + \int_{BM_1A} p dv = \int_{AMB} p dv - \int_{AM_1B} p dv.$$

Ἄς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ κύκλος ἔχει τοιοῦτον σχῆμα, ὥστε, ὅταν τὸ σημεῖον M διαγράφῃ αὐτόν, ἡ τεταγμένη M'M νὰ αἰωρῆται ἀπομακρυνομένη καὶ πλησιάζουσα πλειστάκις τὸν ἄξονα Op. Ἔστω π. χ. ὁ κύκλος C τοῦ σχήματος (7). Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν AB, ὁ κύκλος C διαιρεῖται εἰς τοὺς δύο κύκλους C_1 καὶ C_2, ἤτοι τοὺς κύκλους AαBA καὶ ABβA. Ἕκαστος ἐκ τῶν κύκλων τούτων εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ κύκλου τοῦ σχήματος (6). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\int_{BA} = -\int_{AB}$ θὰ εἶναι

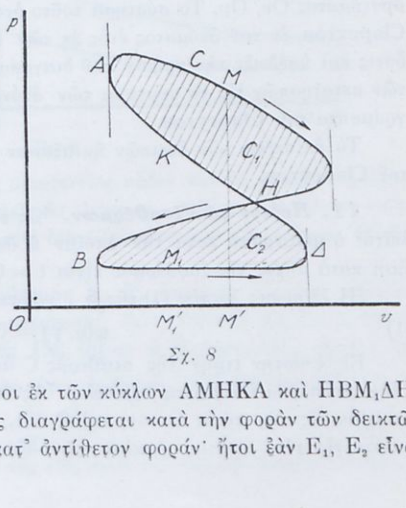


Σχ. 7

$$(3)\qquad \int_C p dv = \int_{C_1} p dv + \int_{C_2} p dv = \text{εμβ.} A\alpha BA + \text{εμβ.} AB\beta A = \text{εμβ.} A\alpha B\beta A\cdot$$

ἤτοι καὶ ἐνταῦθα τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν κλειστὴν μετατροπὴν C παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περικλειομένου ὑπὸ τῆς κλειστῆς καμπύλης C, ἢ καὶ ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος $\int_C p dv$.

Ἄς ἐξετάσωμεν τέλος τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ κύκλος C τέμνει ἑαυτόν, ὡς εἶναι ὁ κύκλος $AMHBM_1\Delta HKA$ τοῦ σχήματος (8). Δυνάμεθα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ θεωρήσωμεν τὸν κύκλον συγκείμενον ἐκ δύο κύκλων C_1, C_2 ἤτοι ἐκ τῶν κύκλων AMHKA καὶ $HBM_1\Delta H$. Ἐκ τούτων ὅμως ὁ μὲν πρῶτος διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, ὁ δὲ δεύτερος κατ' ἀντίθετον φοράν· ἤτοι ἐὰν E_1, E_2 εἶναι



Σχ. 8

αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν περικλειομένων ὑπὸ τῶν κύκλων C_1, C_2, τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τοῦ διαγράμματος C θὰ εἶναι

$$E = \pm(E_1 - E_2). \tag{4}$$

Τὸ σημεῖον + θὰ λάβωμεν ὅταν κινούμεθα κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους ὡς ἐν τῷ σχήματι καὶ τὸ σημεῖον — ὅταν κινούμεθα κατ᾿ ἀντίθετον φοράν.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις (4) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\int_C p dv = \int_{C_1} p dv + \int_{C_2} p dv. \tag{5}$$

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν τοῦ σχήματος (8) τὸ ἔργον τῶν πιέσεων παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ διαγράμματος, λαμβανομένου φυσικὰ μὲ τὰ σχετικὰ σημεῖα, ἢ καὶ ὑπὸ τοῦ $\int_C p dv$.

10. ***Σημασία τοῦ διαγράμματος Ov, Op.*** Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐθεωρήσαμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν λελυμένην ὡς πρὸς t, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν $t = \varphi(v, p)$ καὶ ἀντιστοίχως ἐξητάσαμεν τὰ διαγράμματα τῶν μετατροπῶν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων Ov, Op. Ἠδυνάμεθα ὁμοίως νὰ θεωρήσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὰς μορφὰς $v = \varphi_2(p, t)$ ἢ $p = \varphi_1(t, v)$ καὶ νὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως τὰ διαγράμματα τῶν μετατροπῶν εἰς τὰ συστήματα τῶν ἀξόνων (Op, Ot) ἢ (Ot, Ov).

Τὰ διαγράμματα ὅμως εἰς τὸ σύστημα Ov, Op ἔχουν, ὡς εἴδομεν, τὸ πλεονέκτημα ἐκτὸς τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μετατροπῶν νὰ παρέχουν δι᾿ ἐμβαδομετρήσεως καὶ τὰ ἀντίστοιχα ἔργα τῶν πιέσεων. Διὰ τοῦτο ἐκ τῶν τριῶν ὡς ἀνωτέρω συστημάτων ἀξόνων κάμνομεν ἀποκλειστικῶς χρῆσιν τοῦ συστήματος Ov, Op. Τὸ σύστημα τοῦτο ὀνομάζομεν καὶ σύστημα ἀξόνων τοῦ Clapeyron, ἐκ τοῦ ὀνόματος ἑνὸς ἐκ τῶν θεμελιωτῶν τῆς θερμοδυναμικῆς, ὅστις καὶ ὑπέδειξε τὴν χρῆσιν τοῦ διαγράμματος (v, p). Τὰ δὲ διαγράμματα τῶν μετατροπῶν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων Ov, Op, ὀνομάζομεν καὶ διαγράμματα τοῦ Clapeyron.

Τὸ ἐπίπεδον τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ov, Op ὀνομάζομεν καὶ ἐπίπεδον τοῦ Clapeyron.

11. ***Πεδίον τῶν ἰσοθέρμων.*** Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 4 ἰσόθερμος καλεῖται ἡ μετατροπὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά ἤτοι κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου εἶναι $t = C$, ἤ, $dt = 0$.

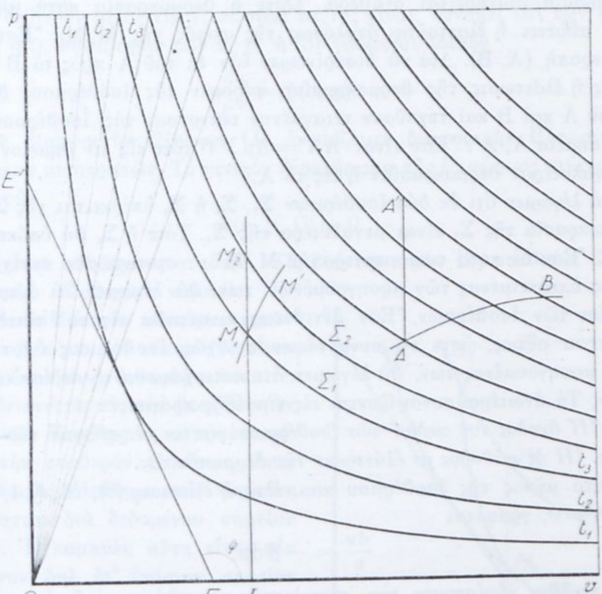
Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) τῆς § 7 γράφεται διὰ τὰς ἰσοθέρμους

$$\varphi(v, p) = C. \tag{1}$$

Εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς σταθερᾶς C ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron μία ἰσόθερμος καμπύλη. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ἰσοθέρμους ἀντιστοίχους εἰς τὰς τιμὰς $C = t_1$ καὶ $C = t_2$. Αἱ δύο αὗται καμπύλαι, τοὐλάχιστον εἰς τὴν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, ὅπου τὰ σημεῖα των ἔχουν πραγματικὴν φυσικὴν σημασίαν, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνωνται. Διότι, ἂν εἶχον κοινὸν σημεῖον $M'(\upsilon', p')$, θὰ εἴχομεν διὰ τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν (υ', p') δύο καταστάσεις ἰσορροπίας (υ', p', t_1), (υ', p', t_2), ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν § 3. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Δύο οἱαιδήποτε ἰσόθερμοι καμπύλαι τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν.

Τὸ σύνολον τῶν ἰσοθέρμων, ὡς ἐξαρτώμενον ἐκ μιᾶς αὐθαιρέτου σταθερᾶς, ἀποτελεῖ ὡς λέγομεν εἰς τὰ μαθηματικά, οἰκογένειαν καμπύλων. Ἐπειδὴ



Σχ. 9

δὲ δύο οἱαιδήποτε καμπύλαι τῆς οἰκογενείας οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν, ἡ οἰκογένεια τῶν καμπύλων ἀποτελεῖ, ὡς λέγομεν, πεδίον καμπύλων· τοῦτο εἶναι τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πεδίου εἶναι ἡ (1).

Ἔστωσαν (σχ. 9) δύο ἰσόθερμοι Σ_1, Σ_2 ἀπείρως πλησίων ἀλλήλων καὶ ἔστω IM_2 $(d\upsilon = 0)$ ἰσόογκος μετατροπή, ἥτις συναντᾶ τὰς Σ_1, Σ_2 εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2. Κατὰ μῆκος τῆς IM_2 ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις (11) τῆς § 4· καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, τὰ dp, dt θὰ εἶναι ὁμόσημα, ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\frac{dp}{dt} > 0. \tag{2}$$

Ἐὰν δηλαδὴ κινούμεθα ἐπὶ τῆς IM_2 κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος

Op, ὡς π.χ. ἐκ τοῦ M_1 πρὸς τὸ M_2, ὁπότε εἶναι $dp > 0$, θὰ εἶναι καὶ $dt > 0$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν κινούμεθα κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἤτοι ἐκ τοῦ M_2 πρὸς τὸ M_1, εἶναι $dp < 0$, καὶ ἀντιστοίχως δυνάμει τῆς (2) εἶναι καὶ $dt < 0$.

Ἂς θεωρήσωμεν γενικώτερον τυχοῦσαν μετατροπὴν συναντῶσαν τὰς ἰσοθέρμους Σ_1, Σ_2 εἰς τὰ σημεῖα M_1, M'. Ἐπειδὴ αἱ Σ_1, Σ_2 εἶναι ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν μετατροπὴν (M_1, M') ὡς συνισταμένην τῶν (M_1, M_2) καὶ (M_2, M'). Ἀλλὰ κατὰ μῆκος τῆς (M_2, M') ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται σταθερά. Ὥστε ἡ θερμοκρασία κατὰ μῆκος τῆς M_1 M' αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ἀναλόγως τῆς φορᾶς τῆς $M_1 M_2$. Ἔστω π. χ. ἡ μετατροπὴ (A, B). Διὰ νὰ διακρίνωμεν ἐὰν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B γίνεται αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς θερμοκρασίας, φέρομεν τὰς ἰσοθέρμους διὰ τῶν σημείων A καὶ B καὶ τυχοῦσαν τεταγμένην τέμνουσαν τὰς ἰσοθέρμους ἔστω εἰς τὰ σημεῖα A, A′. Ἐὰν εἶναι $AA' = \Delta p > 0$ τότε εἰς τὸ σημεῖον B ἔχομεν μεγαλυτέραν θερμοκρασίαν ἢ εἰς τὸ A.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἐκ δύο ἰσοθέρμων Σ_1, Σ_2 ἡ Σ_2 ὑπέρκειται τῆς Σ_1, ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς Σ_2 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Σ_1. Τότε ἡ Σ_1 θὰ ὑπόκειται εἰς τὴν Σ_2. Ἐὰν δὲ κατά τινα μετατροπὴν M_1 M'... συναντῶμεν συνεχῶς ἰσοθέρμους ὑπερκειμένας τῶν προηγουμένων των, θὰ λέγωμεν ὅτι ἀνερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων. Ἐὰν ἀντιθέτως κινούμεθα εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ Clapeyron οὕτως, ὥστε νὰ συναντῶμεν συνεχῶς ἰσοθέρμους ὑποκειμένας εἰς τὰς προηγουμένας των, θὰ λέγωμεν ὅτι κατερχώμεθα τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων. Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

β. Ἡ ἄνοδος τοῦ πεδίου τῶν ἰσοθέρμων γίνεται μὲ αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας. Ἡ δὲ κάθοδος μὲ ἐλάττωσιν τῆς θερμοκρασίας.

Κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου καμπύλης ἡ ἐξίσωσις (8), τῆς § 4, ἐπειδὴ εἶναι $dt = 0$, γράφεται

$$\frac{dv}{v} = -\beta\, dp. \tag{3}$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης EE′ τῆς ἰσοθέρμου,

$$\text{εφ.}\ \varphi = \frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\beta v} \tag{4}$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ β, υ εἶναι ποσότητες θετικαί, θὰ εἶναι

$$\text{εφ.}\ \varphi = \frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\beta v} < 0. \tag{5}$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει γεωμετρικῶς, ὅτι τὰ σημεῖα E, E′ καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἰσοθέρμου τέμνει τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, κεῖνται ἀμφότερα ἐπὶ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Ου, Op.

12. Πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 6 κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς δὲν πραγματοποιεῖται συναλλαγὴ θερμότητος μεταξὺ σώματος καὶ περιβάλλοντος· ἤτοι τὸ σῶμα δὲν ἀπορροφᾷ οὔτε ἀποδίδει θερμότητα. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς εἶναι

(1) $$dQ = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δυνάμει τῆς (14) τῆς § 5, γράφεται

(2) $$\frac{c'}{\alpha\upsilon}\,d\upsilon + c\,\frac{\beta}{\alpha}\,dp = 0$$

ἢ καὶ

(3) $$\frac{dp}{d\upsilon} = -\frac{c'}{c}\,\frac{1}{\beta\upsilon}.$$

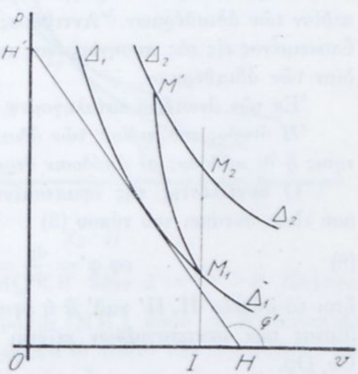
Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι, δυνάμει καὶ τῶν τύπων (10) τῆς § 5, συνάρτησις τῶν υ, p· ἡ (3) γράφεται λοιπὸν

(4) $$\frac{dp}{d\upsilon} = f(\upsilon, p).$$

Τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (4), ὀνομάζομεν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῶν ἀδιαθέρμων μετατροπῶν. Τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι τῆς μορφῆς

(5) $$\Phi(\upsilon, p, C) = 0$$

ὅπου C εἶναι αὐθαίρετος σταθερά. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς σταθερᾶς C ἀντιστοιχεῖ μία ἀδιάθερμος καμπύλη. Ἐπειδὴ δὲ δι᾽ ἕκαστον σύστημα τιμῶν (υ, p) τὰ β, c', c τοῦ τύπου (3) εἶναι τελείως ὡρισμένα, δυνάμεθα πάντοτε, ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σταθερὰν C οὕτως, ὥστε ἡ ἀντίστοιχος ὁλοκληρωτικὴ καμπύλη νὰ διέρχεται διὰ δεδομένου σημείου $M(\upsilon, p)$. Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι μία καὶ μόνον· δηλ. δι᾽ ἑκάστου σημείου τοῦ ἐπιπέδου υ, p διέρχεται μία καὶ μία μόνον ἀδιάθερμος. Ἀλλὰ τότε ἡ οἰκογένεια τῶν ἀδιαθέρμων ἀποτελεῖ, ὡς καὶ ἡ οἰκογένεια τῶν ἰσοθέρμων (§ 11), πεδίον καμπύλων. Τοῦτο εἶναι τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ πεδίου τῶν ἀδιαθέρμων εἶναι ἡ (4).



Σχ. 10

Ἂς λάβωμεν (σχ. 10) δύο ἀδιαθέρμους Δ_1, Δ_2 ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων καὶ ἔστω IM_2 ($d\upsilon = 0$) ἰσόογκος μετατροπή, ἥτις συναντᾷ τὰς Δ_1, Δ_2 εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2. Κατὰ μῆκος τῆς ἰσοόγκου IM_2 ἡ ἐξίσωσις (14) τῆς § 5 γράφεται

(6) $$dQ = c\,\frac{\beta}{\alpha}\,dp$$

καὶ ἐπειδὴ $c \frac{\beta}{\alpha} > 0$, τὰ dQ, dp εἶναι ὁμόσημα ἤτοι εἶναι

$$(7) \qquad \frac{dQ}{dp} > 0.$$

Ἐὰν δηλαδὴ κινούμεθα ἐπὶ τῆς IM_2 κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος Op, θὰ εἶναι $dp > 0$, καὶ $dQ > 0$. Ἤτοι ἡ μετατροπὴ θὰ γίνεται μὲ ἀπορρόφησιν θερμότητος (§ 2). Ἀντιστρόφως, ἐὰν κινούμεθα κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, θὰ εἶναι $dp < 0$· ὅθεν δυνάμει τῆς (7), καὶ $dQ < 0$. Ἤτοι ἡ μετατροπὴ θὰ γίνεται μὲ ἀπόδοσιν θερμότητος.

Ἄς θεωρήσωμεν γενικώτερον τυχοῦσαν μετατροπήν, συναντῶσαν τὰς Δ_1, Δ_2 εἰς τὰ σημεῖα M_1, M'. Ἐπειδὴ αἱ Δ_1, Δ_2 εἶναι ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν μετατροπὴν (M_1, M') ὡς συνισταμένην μετατροπὴν τῶν μετατροπῶν (M_1, M_2) καὶ (M_2, M'). Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὴν (M_2, M') εἶναι $dQ = 0$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν (M_1, M') ἀπορρόφησιν ἢ ἀπόδοσιν θερμότητος, ἀναλόγως τῆς φορᾶς τῆς M_1, M_2.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μεταξὺ δύο ἀδιαθέρμων Δ_1, Δ_2 ἡ Δ_2 ὑπέρκειται τῆς Δ_1, ὅταν τὸ τμῆμα $M_1 M_2 = \Delta p$ τῆς τυχούσης τεταγμένης IM_2 εἶναι θετικόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ Δ_1 θὰ ὑπόκειται εἰς τὴν Δ_2. Ὅταν δὲ κατά τινα μετατροπὴν $M_1 M' \ldots$ κινούμεθα οὕτως, ὥστε νὰ συναντῶμεν συνεχῶς ἀδιαθέρμους ὑπερκειμένας τῶν προηγουμένων των, θὰ λέγωμεν ὅτι ἀνερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων. Ἀντιθέτως, ἐὰν συναντῶμεν συνεχῶς ἀδιαθέρμους ὑποκειμένας εἰς τὰς προηγουμένας των, θὰ λέγωμεν ὅτι κατερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Ἡ ἄνοδος τοῦ πεδίου τῶν ἀδιαθέρμων γίνεται μὲ ἀπορρόφησιν θερμότητος ἡ δὲ κάθοδος μὲ ἀπόδοσιν θερμότητος.

Ὁ συντελεστὴς τῆς ἐφαπτομένης εἴς τι σημεῖον M(υ. p) τῆς ἀδιαθέρμου εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (3)

$$(8) \qquad \varepsilon\varphi\, \varphi' = \frac{dp}{d\upsilon} = -\frac{c'}{c}\,\frac{1}{\beta\upsilon} < 0,$$

ἤτοι τὰ σημεῖα H, H′ καθ' ἃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀδιαθέρμου συναντᾶ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων κεῖνται ἀμφότερα ἐπὶ τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων Oυ, Op.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τυχὸν σημεῖον M (υ, p) τοῦ διαγράμματος, τὰς δι' αὐτοῦ διερχομένας ἰσόθερμον t καὶ ἀδιάθερμον Δ καὶ τὰς ἐφαπτομένας τῶν καμπύλων τούτων εἰς τὸ M ἔστω τὴν ἐφαπτομένην EE′ τῆς ἰσοθέρμου καὶ τὴν ἐφαπτομένην HH′ τῆς ἀδιαθέρμου (σχ. 11). Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τοῦ τύπου (8) καὶ τοῦ τύπου (4) τῆς § 11, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{c'}{c} > 0$, θὰ εἶναι

$$|\varepsilon\varphi.\, \varphi'| > |\varepsilon\varphi.\, \varphi|.$$

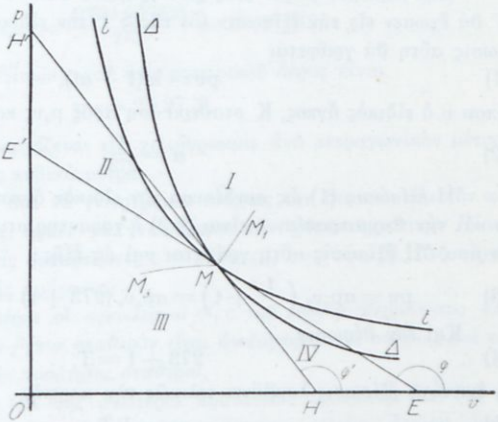
Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι φ′, φ εἶναι ἀμβλεῖαι θὰ εἶναι

$$(9) \qquad \varphi' < \varphi.$$

ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη ΗΗ′ τῆς ἀδιαθέρμου πλησιάζει περισσότερον πρὸς τὸν ἄξονα Op ἢ ἡ ἐφαπτομένη ΕΕ′ τῆς ἰσοθέρμου. Αἱ δύο αὗται ἐφαπτόμεναι ΗΗ′, ΕΕ′ χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον τοῦ Clapeyron εἰς τέσσαρας γωνίας I, II, III, IV.

Θεωρήσωμεν στοιχειώδη μετατροπὴν (MM_1), ὅπου τὸ σημεῖον M_1 κεῖται εἰς τὴν γωνίαν I. Τότε κατὰ τὴν (MM_1) ἀνερχόμεθα ἀμφότερα τὰ πεδία τῶν ἰσοθέρμων καὶ ἀδιαθέρμων· ἤτοι εἶναι $dt > 0$ καὶ $dQ > 0$. Ἀλλὰ τότε ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος λ κατὰ τὴν μετατροπὴν (MM_1) θὰ εἶναι (§ 6) $\lambda = \frac{dQ}{dt} > 0$.

Ἔστω ἤδη ἡ στοιχειώδης μετατροπὴ (MM_2), ὅπου τὸ M_2 κεῖται εἰς τὴν γωνίαν II· τότε ἀνερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων, ἤτοι εἶναι $dt > 0$ καὶ κατερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἤτοι εἶναι $dQ < 0$. Ὥστε κατὰ τὴν MM_2 εἶναι $\lambda = \frac{dQ}{dt} < 0$. Θεωρήσωμεν ἐπίσης τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (MM_3), ὅπου τὸ M_3 κεῖται εἰς τὴν γωνίαν III. Κατὰ τὴν MM_3 κατερχόμεθα ἀμφότερα τὰ πεδία ἰσοθέρμων καὶ ἀδιαθέρμων, ἤτοι εἶναι $dt < 0$ καὶ $dQ < 0$· ὅθεν $\lambda = \frac{dQ}{dt} > 0$. Παρακολουθήσωμεν καὶ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν (MM_4), ὅπου τὸ M_4 κεῖται εἰς τὴν γωνίαν IV. Κατὰ ταύτην θὰ ἀνερχώμεθα τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων καὶ θὰ κατερχώμεθα τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων, ἤτοι θὰ εἶναι $dQ > 0$ καὶ $dt < 0$· ὅθεν $\lambda = \frac{dQ}{dt} < 0$.



Σχ. 11

Ἐὰν τέλος τὸ Μ μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς δι' αὐτοῦ διερχομένης ἀδιαθέρμου, θὰ εἶναι $dQ = 0$ καὶ $\lambda = 0$· καὶ ἐὰν τὸ Μ μετατοπίζεται ἐπὶ τῆς δι' αὐτοῦ διερχομένης ἰσοθέρμου, εἶναι $dt = 0$ καὶ $\lambda = \infty$.

Ἐπανεύρομεν οὕτω τὰ συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα προέκυψαν ἐκ τῆς διερευνήσεως τοῦ τύπου (6) τῆς § 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

13. Θερμοδυναμικὴ κατάστασις τῶν τελείων ἀερίων. Τὰ τέλεια ἀέρια, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 1, ὑπακούουν εἰς τοὺς νόμους τοῦ Boyle - Mariotte καὶ τοῦ Gay - Lussac, ἤτοι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (5) τῆς § 1.

Ἐὰν λάβωμεν μᾶζαν ἑνὸς χιλιογράμμου τελείου ἀερίου, ἀντὶ τοῦ ὄγκου V θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5) τῆς § 1 τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ γράφεται

(1) $$p\upsilon = k(1 + \alpha t),$$

ὅπου υ ὁ εἰδικὸς ὄγκος, K σταθερὰ ἴση πρὸς $p_0\upsilon_0$ καὶ

(2) $$\alpha = \frac{1}{273}.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ὡς συνδέουσα τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ, τὴν εἰδικὴν πίεσιν p καὶ τὴν θερμοκρασίαν t εἶναι (§ 3) ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ τελείου ἀερίου. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(3) $$p\upsilon = \alpha p_0\upsilon_0\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = \alpha p_0\upsilon_0(273 + t) = R(273 + t).$$

Καὶ ἐὰν θέσωμεν

(4) $$273 + t = T,$$

ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις λαμβάνει τελικῶς τὴν μορφὴν

(5) $$p\upsilon = RT.$$

Τὸ T εἶναι (§ 1) ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τοῦ τελείου ἀερίου. Τὴν θερμοκρασίαν ταύτην ὀνομάζομεν καὶ θερμοδυναμικὴν θερμοκρασίαν. Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (4) διὰ $t=0$ εἶναι $T=+273$ καὶ διὰ $T=0$ εἶναι $t=-273$· ἤτοι τὸ μηδὲν τῆς ἑκατονταβάθμου θερμομετρικῆς κλίμακος ἀντιστοιχεῖ εἰς 273° τῆς θερμομετρικῆς κλίμακος τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν· καὶ τὸ μηδὲν τῆς θερμομετρικῆς κλίμακος τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς -273° τῆς ἑκατονταβάθμου κλίμακος. Ὡς ἐξεθέσαμεν καὶ εἰς τὴν § 2, τὰς ἀπολύτους θερμοκρασίας θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος K, ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ λόρδου Kelvin, εἰς τὸν ὁποῖον ὀφείλεται ἡ γνῶσις τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας. Οὕτω ἡ θερμοκρασία, εἰς τὴν ὁποίαν τήκεται ὁ πάγος ὑπὸ πίεσιν 760 χιλιοστῶν ὑδραργυρικῆς στήλης, εἶναι 0°C (Celsius) ἢ 273° K (Kelvin).

Ἡ σταθερὰ R τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (5) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ τελείου ἀερίου καὶ ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν υ, p. Ἂς λάβωμεν π. χ. ὡς μονάδα ὄγκων τὸ κυβικὸν μέτρον καὶ ὡς μονάδα πιέσεων τὸ χιλιόγραμμον ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον ἐπιφανείας καὶ ἂς ζητήσωμεν, ἐξομοιοῦντες τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα πρὸς τέλειον ἀέριον, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν σταθερὰν R διὰ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα. Τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0$ εἶναι $B_0 = 1,293$ χιλιόγραμμα. Ὅθεν ὁ ἀντίστοιχος εἰδικὸς ὄγκος, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν χιλιόγραμμον ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, εἶναι

$$\upsilon_0 = \frac{1}{1,29318} = 0,77328 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

Ἡ δὲ εἰδικὴ πίεσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἰς τὴν θερμοκρασίαν 0°C, εἶναι $p_0 = 10334$ kg. ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τῆς σταθερᾶς R εἶναι διὰ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα

$$R = \alpha p_0 \upsilon_0 = \frac{10334.0,77328}{273} = 29,27133\ldots \tag{6}$$

καὶ ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἶναι

$$p\upsilon = 29,27\ T, \tag{7}$$

ὅπου ἡ εἰδικὴ πίεσις ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ὁ εἰδικὸς ὄγκος εἰς κυβικὰ μέτρα.

Εἴδομεν (§ 5) ὅτι διὰ νὰ γνωρίζωμεν πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν σώματός τινος, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τοῦ σώματος καὶ τὰς συναρτήσεις $c' = c'(\upsilon, p)$, $c = c(\upsilon, p)$. Διὰ τὰ τέλεια ἀέρια ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις:

α. Διὰ τὰ τέλεια ἀέρια οἱ συντελεσταὶ c', c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς πιέσεως καὶ τῆς θερμοκρασίας, ἤτοι εἶναι ποσότητες σταθεραί.

Ἐκ τοῦ τύπου (5) καὶ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ὅτι, διὰ νὰ γνωρίζωμεν πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν τελείου ἀερίου, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰ R, c', c.

Ἡ παραδοχὴ τῆς σταθερότητος τῶν c', c διὰ τὰ τέλεια ἀέρια δὲν εἶναι αὐθαίρετος, ἀλλ' ἀπορρέει ἐκ τῶν ἐξαγομένων τῶν πειραμάτων τοῦ Regnault ἐπὶ ἀερίων, τὰ ὁποῖα δυσκόλως ὑγροποιοῦνται καὶ τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐξομοιωθοῦν πρὸς τέλεια ἀέρια. Διὰ τὰ ἀέρια ταῦτα ἀπεδείχθη πειραματικῶς, ὅτι ὁ συντελεστὴς c' τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς φύσεως ἑκάστου ἀερίου καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πιέσεως. Ἐξ ἄλλου ἀπεδείχθη πειραματικῶς ὅτι ὁ λόγος $\frac{c'}{c} = \gamma$, ὅπου c ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερόν, ἔχει δι' ὅλα τὰ ἀέρια, τὰ ὁποῖα εἶναι δυνατὸν μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως νὰ ἐξομοιωθοῦν πρὸς τέλεια ἀέρια, τὴν αὐτὴν περίπου σταθερὰν τιμήν. Ἑπομένως καὶ ὁ συντελεστὴς c διὰ τὰ ἀέρια ταῦτα ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀερίου καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πιέσεως. Τὰ πρῶτα πειράματα διὰ τῆς μεθόδου τῶν Lummer καὶ Pringsheim ἔδωσαν διὰ τὰ τέλεια ἀέρια $\gamma = 1{,}41$. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ γ ἐπαληθεύεται καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Laplace

$$V = \sqrt{\gamma \frac{p}{\delta}}, \tag{8}$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου ἐντὸς μάζης τελείου ἀερίου· εἰς τὸν τύπον (8) εἶναι $\gamma = \frac{c'}{c}$, p εἶναι ἡ εἰδικὴ πίεσις καὶ δ εἶναι ἡ πυκνότης τῆς μάζης. Ἐκ τοῦ τύπου (8) λαμβάνομεν

$$\gamma = \frac{\delta}{p} V^2. \tag{9}$$

Μετροῦντες τὰ δ, p, V, ὑπολογίζομεν τὸ γ. Ἀκριβέστερα πειράματα ἔδωσαν τὴν τιμὴν $\gamma = 1{,}402$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα, ὁ ὁποῖος μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διακρίνωμεν κατὰ πόσον δυνάμεθα νὰ ἐξομοιώσωμεν ἀέριον πρὸς τέλειον ἀέριον:

β. Διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ ἐξομοιώσωμεν ἀέριον πρὸς τέλειον ἀέριον πρέπει, τουλάχιστον μεταξὺ τῶν ὁρίων τῶν θερμοκρασιῶν, ἐντὸς τῶν ὁποίων ἐξετάζομεν τὰς μεταβολὰς τοῦ ἀερίου, τὰ c′, c νὰ εἶναι μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως σταθερὰ καὶ ὁ λόγος αὐτῶν $\gamma = \frac{c'}{c}$ *νὰ πλησιάζῃ πρὸς τὴν τιμὴν 1, 4.*

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δίδομεν τὰς τιμὰς τῶν c′, c, γ διά τινα ἀέρια:

Ἀέριον	c′	c	γ
Ἀήρ	0,238	0,170	1,405
Ὀξυγόνον	0,2175	0,1552	1,401
Ὑδρογόνον	3,409	2,4175	1,408
Ἄζωτον	0,2438	0,1725	1,413
Διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος t = 0°C,	0,187	0,141	1,317
» » » t = 100°C,	0,2145	0,1694	1,266
» » » t = 200°C,	0,2397	0,1946	1,231

Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι τὸν ἀέρα, τὸ ὀξυγόνον, τὸ ὑδρογόνον καὶ τὸ ἄζωτον δυνάμεθα, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κανόνος β, νὰ ἐξομοιώσωμεν πρὸς τέλεια ἀέρια. Ἀντιθέτως, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐξομοιώσωμεν πρὸς τέλειον ἀέριον τὸ διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος.

14. Στοιχειώδης θερμότης διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Ἄς γράψωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τῶν τελείων ἀερίων (§ 13) ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$T = \varphi(v, p) = \frac{pv}{R}, \tag{1}$$

ἤτοι ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς ἐξισώσεως (1) τῆς § 5. Ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{p}{R} \\ \frac{\partial T}{\partial p} &= \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{v}{R} \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Οὕτω ὁ τύπος (9) τῆς § 5 γράφεται, δυνάμει τῶν (2)

(3) $$dQ = c' \frac{p}{R} d\upsilon + c \frac{\upsilon}{R} dp.$$

Ὁ τύπος οὗτος μᾶς δίδει τὴν ἔκφρασιν τοῦ dQ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν (υ, p). Λαμβάνοντες τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς (1) εὑρίσκομεν

(4) $$dT = \frac{p}{R} d\upsilon + \frac{\upsilon}{R} dp.$$

Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν

(5) $$d\upsilon = \frac{R}{p} dT - \frac{\upsilon}{p} dp$$

(6) $$dp = \frac{R}{\upsilon} dT - \frac{p}{\upsilon} d\upsilon.$$

Ἡ (3) γράφεται, δυνάμει τῆς (5)

$$dQ = c' \frac{p}{R}\left(\frac{R}{p} dT - \frac{\upsilon}{p}\right) dp + c \frac{\upsilon}{R} dp,$$

ἢ

(7) $$dQ = c' dT - \frac{c'-c}{R} \upsilon dp.$$

Ὁμοίως ἡ (3) γράφεται, δυνάμει τῆς (6)

(8) $$dQ = c dT + \frac{c'-c}{R} p d\upsilon.$$

Οἱ τύποι (7) καὶ (8) μᾶς δίδουν τὴν ἔκφρασιν τοῦ dQ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια εἰς τὰ συστήματα τῶν μεταβλητῶν (T, p) καὶ (T, υ).

Ἂς εἰσαγάγωμεν εἰς τὰς ἐκφράσεις (3), (7) καὶ (8) τοῦ dQ τοὺς θερμοελαστικοὺς συντελεστάς. Συγκρίνοντες τοὺς ἀνωτέρω τύπους (2) πρὸς τοὺς τύπους (13) τῆς § 5, λαμβάνομεν

(9) $$\frac{1}{\alpha\upsilon} = \frac{p}{R}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\upsilon}{R}.$$

Ἐκ τῶν (9) εὑρίσκομεν τὰς ἐκφράσεις τῶν θερμοελαστικῶν συντελεστῶν διὰ τὰ τέλεια ἀέρια,

(10) $$\left|\begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{p\upsilon} = \frac{R}{RT} = \frac{1}{T}, \\ \beta &= \alpha \frac{\upsilon}{R} = \frac{\upsilon}{RT} = \frac{\upsilon}{p\upsilon} = \frac{1}{p}. \end{aligned}\right.$$

Ἐκ τῶν (10) λαμβάνομεν

(11) $$T = \frac{1}{\alpha}, \; p = \frac{1}{\beta}, \; \upsilon = \frac{RT}{p} = R \frac{\beta}{\alpha}.$$

Αἱ (3), (7) καὶ (8) γράφονται ἀντιστοίχως, δυνάμει τῶν (11),

(12) $$dQ = c' \frac{1}{R\beta} d\upsilon + c \frac{\beta}{\alpha} dp = \frac{c'}{\alpha\upsilon} d\upsilon + c \frac{\beta}{\alpha} dp.$$

(13) $$dQ = c' dT - \frac{\beta}{\alpha} (c' - c)\, dp.$$

(14) $$dQ = c dT + \frac{c'-c}{R\beta} d\upsilon = c dT + \frac{c'-c}{\alpha\upsilon} d\upsilon.$$

Τοὺς τύπους (12), (13), (14) ἠδυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ἀπ᾽ εὐθείας, διότι εἶναι οἱ ἴδιοι τύποι (14), (19) καὶ (18) τῆς § 5.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι ἐκφράσεις τοῦ dQ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια, εἴτε τῆς τριάδος τῶν ἐξισώσεων [(3), (7), (8)], εἴτε τῆς τριάδος τῶν ἐξισώσεων [(12), (13), (14)], εἶναι διώνυμοι διαφορικαὶ παραστάσεις τῆς μορφῆς

(15) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy.$$

Ἄς ὑπενθυμίσωμεν ἐκ τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως ἰδιότητάς τινας τῆς διωνύμου διαφορικῆς παραστάσεως (15).

Ἔστω ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν συνάρτησίν τινα $\Phi(x, y)$ τοιαύτην, ὥστε αἱ συναρτήσεις $X(x, y)$, $Y(x, y)$ τῆς (15) νὰ εἶναι αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῆς $\Phi(x, y)$, ὡς πρὸς x καὶ ὡς πρὸς y· ἤτοι νὰ εἶναι

(16) $$X(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Τότε ἡ (15) γράφεται

(17) $$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy = d\Phi(x, y)$$

ἤτοι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις (15), ἐὰν ἰσχύουν αἱ (16), θὰ εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $\Phi(x, y)$. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις (15) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Λαμβάνοντες τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (16) ὡς πρὸς y καὶ τῆς δευτέρας ὡς πρὸς x, ἔχομεν

(18) $$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}.$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (18) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

(19) $$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ὅταν ἰσχύουν αἱ σχέσεις (16), θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις (19). Ἡ (19) λοιπὸν εἶναι ἡ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $X(x, y)dx + Y(x, y)dy$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνθήκη (19) εἶναι καὶ ἱκανή. Ἀποδεικνύεται δηλαδὴ εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν ἡ ἑξῆς πρότασις:

α. Διὰ νὰ εἶναι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $X(x,y)dx + Y(x,y)dy$ τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$.

Ἐὰν λοιπὸν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (19), θὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν συνάρτησιν $\Phi(x, y)$, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν νὰ εἶναι ἡ (15). Ἐὰν ἀντιθέτως δὲν ἀληθεύῃ ἡ (19), δὲν θὰ ὑπάρχῃ συνάρτησις $\Phi(x, y)$, τῆς ὁποίας ἡ (15) νὰ εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικόν. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $X(x, y)dx + Y(x, y)$ δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν.

Ἄς ὑπομνήσωμεν καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος.

Θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῆς ἐπιπέδου καμπύλης, ἡ ὁποία καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει ἐνταῦθα.

Ἂς θεωρήσωμεν (σχ. 6) εἰς τὸ ἐπίπεδον υOp τὴν καμπύλην AMB, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔστω

$$p = p(\upsilon). \tag{20}$$

Ἐὰν t εἶναι παράμετρός τις, δυνάμεθα ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (20) νὰ ἔχωμεν τὰς παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης

$$\upsilon = \upsilon(t), \quad p = p(t). \tag{21}$$

Ἂς θεωρήσωμεν καὶ τὴν διώνυμον διαφορικὴν παράστασιν

$$X(\upsilon, p)d\upsilon + Y(\upsilon, p)dp, \tag{22}$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις $X(\upsilon, p)$, $Y(\upsilon, p)$ ἐντὸς τῆς περιοχῆς τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν τὴν καμπύλην AMB, καθὼς καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων τούτων ὡς πρὸς υ καὶ p εἶναι πεπερασμέναι, συνεχεῖς καὶ μονότιμοι. Ἡ παράστασις (22) κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης AMB, τῆς τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶναι αἱ (21), λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\left[X\left[\upsilon(t), p(t) \right]\frac{d\upsilon}{dt} + Y\left[\upsilon(t), p(t) \right]\frac{dp}{dt}\right] dt = \Phi(t)dt. \tag{23}$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int\limits_{AMB} X(\upsilon, p)d\upsilon + Y(\upsilon, p)dp = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi(t)dt, \tag{24}$$

ὀνομάζομεν ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης AMB. Τὰ ὅρια t_0, t_1 εἶναι προφανῶς αἱ τιμαὶ τῆς παραμέτρου t, εἰς τὰς ὁποίας, δυνάμει τῶν (21), ἀντιστοιχοῦν τὰ σημεῖα A, B. Τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (24), ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων (21) καὶ τῆς (23) ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῆς καμπύλης· δηλαδὴ εἶναι ἐν γένει (σχ. 6)

$$\int\limits_{AMB} Xd\upsilon + Ydp \neq \int\limits_{AM_1B} Xd\upsilon + Ydp. \tag{25}$$

Ἂς ἐξετάσωμεν ὅμως τὴν μερικὴν περίπτωσιν, καθ᾿ ἣν μεταξὺ τῶν συναρτήσεων $X(\upsilon, p)$, $Y(\upsilon, p)$ ἀληθεύει ἡ συνθήκη (19), ἤτοι ἡ σχέσις

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial \upsilon}. \tag{26}$$

Τότε ἡ παράστασις (22) εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν συναρτήσεώς τινος $U(\upsilon, p)$· δηλαδὴ εἶναι

$$Xd\upsilon + Ydp = dU(\upsilon, p). \tag{27}$$

Ὁλοκληροῦντες τὴν (27) λαμβάνομεν

$$\int\limits_{AMB} Xd\upsilon + Ydp = U(\upsilon_2, p_2) - U(\upsilon_1, p_1). \tag{28}$$

ὅπου (υ_1, p_1), (υ_2, p_2) εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων A, B τῆς καμπύλης. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπόν, καθ' ἣν ἡ παράστασις (22) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (24), ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (28) ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις U εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B. Μὲ ἄλλας λέξεις τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (24) λαμβάνει τὴν αὐτὴν τιμὴν δι' ὅλας τὰς καμπύλας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Ὅταν ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $X(v,p)dv + Y(v,p)dp$ *εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα* $\int\limits_{AB} Xdv + Ydp$ *εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου* AB *τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων* A *καὶ* B.

Ὅταν λοιπὸν μεταξὺ τῶν συναρτήσεων X καὶ Y τῆς διωνύμου διαφορικῆς παραστάσεως (22) ἀληθεύῃ ἡ συνθήκη

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial \upsilon}, \tag{29}$$

ἀντὶ τῆς ἀνισότητος (25), θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης

$$\int\limits_{AMB} Xd\upsilon + Ydp = \int\limits_{AM_1B} Xd\upsilon + Ydp. \tag{30}$$

Ἡ (30) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\int\limits_{AMB} Xd\upsilon + Ydp - \int\limits_{AM_1B} Xd\upsilon + Ydp = 0,$$

ἢ

$$\int\limits_{AMB} Xd\upsilon + Ydp + \int\limits_{BM_1A} Xd\upsilon + Ydp = 0,$$

ἢ τέλος

$$\int\limits_{AMBM_1A} Xd\upsilon + Ydp = 0. \tag{31}$$

Ἡ (31) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

γ. Ὅταν ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $Xdv + Ydp$ *εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα* $\int\limits_{C} Xdv + Ydp$ *κατὰ μῆκος κλειστῆς καμπύλης* C *εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν.*

Καὶ ἤδη θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

δ. Ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὴν στοιχειώδη θερμότητα dQ *διὰ τὰ τέλεια ἀέρια, δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν.*

Ἂς λάβωμεν τὴν ἔκφρασιν (3) τοῦ dQ, ἤτοι τὴν ἔκφρασιν

$$(32)\qquad dQ = \frac{c'}{R}\,p\,dv + \frac{c}{R}\,v\,dp = X\,dv + Y\,dp.$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ διώνυμος αὕτη διαφορικὴ παράστασις τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, πρέπει, δυνάμει τῆς (15), νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις,

$$(33)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c'}{R}\,p\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c}{R}\,v\right).$$

Ἡ σχέσις αὕτη, ἐπειδὴ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια τὰ c′, c, R εἶναι σταθερά, καταντᾷ εἰς τὴν σχέσιν $c' = c$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, δυνάμει τῆς σχετικῆς προτάσεως τῆς § 6. Οὕτω ἡ πρότασις ἀπεδείχθη. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις β, τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν διὰ τὰ τέλεια ἀέρια, ἰσχύει δι' ὅλα τὰ σώματα. Ἡ ἔκφρασις δηλαδὴ τοῦ dQ δι' οἱονδήποτε σῶμα, δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Κατὰ ταῦτα τὸ dQ τοῦ τύπου (9) τῆς § 5, ἤτοι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις

$$(34)\qquad dQ = c'\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv + c\,\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,dp,$$

δὲν εἶναι, ἐν οὐδεμιᾷ περιπτώσει, τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Μεταξὺ δηλαδὴ τῶν συντελεστῶν τῆς (22) ἰσχύει πάντοτε ἡ ἀνισότης

$$(35)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(c'\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \neq \frac{\partial}{\partial v}\left(c\,\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right).$$

15. Ἐσωτερικὴ θερμότης τῶν τελείων ἀερίων. Εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ὅτι τὸ dQ δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Δυνάμεθα ὅμως διὰ καταλλήλων συνδυασμῶν τῶν ἐκφράσεων τοῦ dQ νὰ εὕρωμεν διωνύμους διαφορικὰς παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι τέλεια ὁλικὰ διαφορικά. Αἱ παραστάσεις αὗται, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἐκφράζουν θεμελιώδη φυσικὰ στοιχεῖα τῆς θερμοδυναμικῆς, ὅπως εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης καὶ ἡ τροπή.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ dQ (§ 14, τύπος 8),

$$(1)\qquad dQ = c\,dT + \frac{c'-c}{R}\,p\,dv,$$

καὶ ἂς γράψωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφήν,

$$(2)\qquad c\,dT = dQ - \frac{c'-c}{R}\,p\,dv.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2), ἐπειδὴ τὸ c εἶναι σταθερόν, εἶναι τὸ διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $cT = U$. Ἀφοῦ λοιπὸν ὑπάρχει συνάρτησις U, τῆς ὁποίας τὸ διαφορικὸν εἶναι ἡ (2), ἡ διώνυμος παράστασις (2) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Ὅθεν ἔχομεν

$$(3)\qquad c\,dT = dQ - \frac{c'-c}{R}\,p\,dv = dU.$$

Ὁλοκληροῦντες λαμβάνωμεν

$$(4)\qquad U = \int dQ - \frac{c'-c}{R}\,p\,dv = cT + C,$$

ὅπου C ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ ἐκλέξωμεν τὴν σταθερὰν C οὕτως, ὥστε διὰ $T=0$ νὰ εἶναι $U=0$. Τότε θὰ εἶναι $C=0$ καὶ ἡ (4) θὰ γράφεται

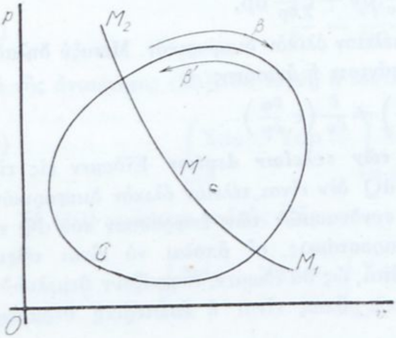
$$U = cT. \tag{5}$$

Τὴν συνάρτησιν $U = cT$ ὀνομάζομεν ἐσωτερικὴν θερμότητα τῶν τελείων ἀερίων. Ἐκ τῆς ἐκφράσεως (5) τῆς συναρτήσεως ταύτης προκύπτει ὁ ἑξῆς νόμος τοῦ Joule:

α. Ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τελείου ἀερίου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας του ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος, ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν τοῦ ἀερίου.

Ἐπειδὴ τὸ c εἶναι σταθερὸν (§ 13, α.), ὁ νόμος οὗτος ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

β. Ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τελείου ἀερίου εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀπολύτου θερμοκρασίας του.



Σχ. 12

Ἄς θεωρήσωμεν μετατροπήν τινα τελείου ἀερίου, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα εἰς τὸ σύστημα (υ, p) ἔστω ὅτι εἶναι ἡ καμπύλη $M_1M'M_2$ (σχ. 12). Ἐπειδὴ τὸ dU εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, δυνάμει τῆς προτάσεως β τῆς § 14, ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ μῆκος τῆς M_1M_2 δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ διαγράμματος M_1M_2, ἀλλὰ μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων M_1 καὶ M_2. Εἶναι δὲ δυνάμει τοῦ τύπου (28) τῆς § 14

$$\int_{M_1M_2} dU = U_2 - U_1 = cT_2 - cT_1 = c\,(T_2 - T_1) \tag{6}$$

Ἐὰν τὰ σημεῖα M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου, θὰ εἶναι $T_1 = T_2$ καὶ τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα (6) θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

γ. Κατὰ μῆκος ἰσοθέρμου μετατροπῆς τελείου ἀερίου ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ ἀερίου εἶναι μηδέν· ἤτοι τὸ ἀέριον εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου ἔχει τὴν αὐτὴν ἐσωτερικὴν θερμότητα.

Ἄς λάβωμεν κλειστὴν μετατροπὴν τελείου ἀερίου, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα ἔστω ὁ κύκλος C (σχ. 12) καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C dU$. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, ἐπειδὴ τὸ dU εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 14 ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν· ἤτοι, κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου C εἶναι

$$\int_C dU = 0. \tag{7}$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

δ. Ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τελείου ἀερίου, κατά τινα κλειστὴν μετατροπὴν αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν.

16. Ἀρχὴ τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Ἄς γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς § 15,

$$dQ = cdT + \frac{c' - c}{R} pdv. \tag{1}$$

Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 8 τὸ pdv ἐκφράζει τὸ στοιχειῶδες ἔργον dE τῶν πιέσεων. Ἐξ ἄλλου δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἶναι cdT = dU. Τέλος, ἐὰν θέσωμεν

$$\frac{c' - c}{R} = A, \tag{2}$$

ἡ (1) γράφεται

$$dQ = dU + AdE. \tag{3}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$dQ - AdE = dU. \tag{4}$$

Ὁλοκληροῦντες τὴν (4) κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς καμπύλης C (σχ. 12), λαμβάνομεν

$$\int_C dQ - A\int_C dE = \int_C dU. \tag{5}$$

Εἰς προηγουμένας παραγράφους ἔχομεν μελετήσει λεπτομερῶς τὰ τρία ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου (5). Οὕτω (§ 15) τὸ $\int_C dU$ εἶναι μηδὲν ἀνεξαρτήτως τῆς φορᾶς, καθ' ἣν διαγράφεται ὁ κύκλος C. Τὸ $\int_C dE = E$ παριστᾷ (§ 9) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου C ἢ καὶ τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν κλειστὴν μετατροπὴν C. Τὸ ἐμβαδὸν E εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος C διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, ἢ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν β'. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅπου τὸ E εἶναι θετικόν, τὸ ἀέριον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C ἀποδίδει ἔργον· εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅπου τὸ E εἶναι ἀρνητικόν, τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ ἔργον. Τέλος ὅσον ἀφορᾷ διὰ τὸ $\int_C dQ$, ἄς γράψωμεν τὴν (5) ὡς ἑξῆς:

$$\int_C dQ = Q = AE. \tag{6}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $A = \frac{c' - c}{R} > 0$, τὸ Q θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ E. Ἤτοι, ὅταν τὸ E εἶναι θετικόν, θὰ εἶναι καὶ τὸ Q θετικόν· καὶ ἀντιστρόφως ὅταν τὸ E εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι καὶ τὸ Q ἀρνητικόν. Ὡς εἴδομεν δὲ εἰς τὴν § 2, ὅταν τὸ Q εἶναι θετικόν, τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ θερμότητα· ὅταν δὲ τὸ Q εἶναι ἀρνητικόν, τὸ ἀέριον ἀποδίδει θερμότητα. Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Ὅταν τέλειον ἀέριον ἐκτελῇ κλειστὴν μετατροπὴν κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ θερμότητα καὶ ἀποδίδει ἔργον· καὶ ὅταν τέλειον ἀέριον ἐκτελῇ κλειστὴν μετατροπὴν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ ἔργον καὶ ἀποδίδει θερμότητα.

Ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{E}{Q} = \mathscr{E}, \tag{7}$$

ὅπου ἐθέσαμεν

$$\frac{1}{A} = \mathscr{E}. \tag{8}$$

Ἀποδεικνύεται πειραματικῶς ὅτι τὸ

$$\mathscr{E} = \frac{1}{A} = \frac{R}{c' - c}, \tag{9}$$

ἔχει τὴν αὐτὴν σταθερὰν τιμὴν δι' ὅλα τὰ τέλεια ἀέρια. Διάφορα πειράματα ἔδωσαν διὰ τὸ $\mathscr{E}$ τιμάς, αἱ ὁποῖαι ποικίλλουν μεταξὺ 425 καὶ 427. Ἡ τιμὴ 426, 65, ἡ ὁποία εὑρέθη ἐκ νεωτέρων πειραμάτων, φαίνεται ἡ μᾶλλον ἀκριβής. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ δεχώμεθα τὴν τιμὴν $\mathscr{E} = 427$ καὶ $A = \frac{1}{\mathscr{E}} = \frac{1}{427}$. Ὡς μονάδα τοῦ ἔργου θὰ λαμβάνωμεν τὸ χιλιογραμμόμετρον (Kgm.) καὶ ὡς μονάδα τῆς θερμότητος τὴν μεγάλην θερμίδα (Cal.).

Ἐὰν κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C ἀπορροφᾶται θερμότης $Q = 1$ Cal. δυνάμει τοῦ τύπου (7), θὰ εἶναι $E = \mathscr{E} = 427$ Kgm. Τὸ $\mathscr{E}$ ὀνομάζομεν μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

Ἔστω ἐπίσης ὅτι κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C τὸ ἀέριον ἀποδίδει ἔργον $E = 1$ Kgm. Τότε ἐκ τοῦ τύπου (6) θὰ εἶναι $Q = A = \frac{1}{427}$ Cal. Τὸ A ὀνομάζομεν θερμικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἔργου.

Ἐκ τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω δυνάμεθα συμπληροῦντες τὴν πρότασιν α, νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ἑξῆς θεμελιώδη ἀρχὴν τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὰ τέλεια ἀέρια.

β. Ὅταν τέλειον ἀέριον ἐκτελῇ κλειστὴν μετατροπήν, ὁ λόγος τῆς ἀπορροφουμένης θερμότητος πρὸς τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς φύσεως τοῦ τελείου ἀερίου, ἤτοι εἶναι σταθερός.

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου ὑποθέτομεν τὰ Q καὶ E μετὰ τῶν σημείων των. Ἐὰν δηλαδὴ τὸ Q εἶναι ἀρνητικόν, ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης εἶναι ἀρνητική, δηλαδὴ τὸ ἀέριον ἀποδίδει θερμότητα καὶ ἀπορροφᾷ ἔργον. Ἀντιθέτως ἐὰν τὸ Q εἶναι θετικόν, τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ θερμότητα καὶ ἀποδίδει ἔργον.

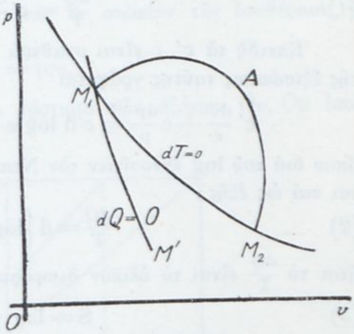
Ἂς ὁλοκληρώσωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν (3) κατὰ μῆκος τῆς ἀνοικτῆς μετατροπῆς $M_1M'M_2$ (σχ. 12). Λαμβάνομεν

(10) $$Q_{1,2} = AE_{1,2} + U_2 - U_1.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν καὶ ἐξίσωσιν τοῦ Clausius, ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἀρχήν:

γ. Ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν τυχοῦσαν ἀνοικτὴν μετατροπὴν τελείου ἀερίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα ἔργον τῶν πιέσεων σὺν τῇ μεταβολῇ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος.

Αὕτη εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὰς ἀνοικτὰς μετατροπὰς τῶν τελείων ἀερίων.



Σχ. 13

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀνοικτὴ μετατροπὴ εἶναι ἰσόθερμος μετατροπή, ἢ καὶ γενικώτερον ὅτι τὰ ἄκρα σημεῖα M_1, M_2 τῆς ἀνοικτῆς μετατροπῆς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου (σχ. 13). Τότε δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 15 εἶναι $U_1 = U_2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (10) γράφεται διὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην

(11) $$Q = AE.$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

δ. Ἐὰν τὰ ἄκρα σημεῖα τοῦ διαγράμματος ἀνοικτῆς μετατροπῆς τελείου ἀερίου εἶναι σημεῖα τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου, ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου τῶν πιέσεων.

Θεωρήσωμεν τέλος τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν M_1M' (σχ. 13). Κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην δὲν ἔχομεν ἀπορρόφησιν ἢ ἀπόδοσιν θερμότητος ἤτοι εἶναι $Q = 0$. Τότε ἡ ἐξίσωσις (10) γράφεται

(12) $$AE + U' - U_1 = 0,$$

ἢ καὶ

(13) $$AE = U_1 - U'.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν $E > 0$, εἶναι $U' < U$ καὶ ὅταν $E < 0$ εἶναι $U' > U_1$. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

ε. Ἐὰν κατά τινα ἀδιάθερμον μετατροπὴν τελείου ἀερίου ἔχωμεν ἀπόδοσιν ἔργου, ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ ἀερίου ἐλαττοῦται. Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν ἡ ἀδιάθερμος μετατροπὴ γίνεται μὲ ἀπορρόφησιν ἔργου, ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης αὐξάνει. Κατ' ἀπόλυτον δὲ τιμὴν τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος.

Ἔστω κατὰ τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν M_1M', T_1 ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία εἰς τὴν κατάστασιν M_1 καὶ T' ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία εἰς τὴν κατάστασιν M'.

Ἡ ἐξίσωσις (13) δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (6) τῆς § 15, γράφεται

$$AE = c\,(T_1 - T'), \tag{14}$$

ἢ καὶ

$$E = \frac{1}{A}\,c\,(T_1 - T'). \tag{15}$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων τελείου ἀερίου κατὰ τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν αὐτοῦ.

17. Τροπὴ τελείου ἀερίου. Ἂς γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (4) τῆς § 14 ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{dQ}{T} = c'\frac{dv}{v} + c\,\frac{dp}{p}. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ τὰ c', c εἶναι σταθερὰ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια, τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης γράφεται

$$c'\,\frac{dv}{v} + c\,\frac{dp}{p} = c'd\log v + cd\log p = d\left[\log p^{c} v^{c'}\right]$$

ὅπου διὰ τοῦ log ἐννοοῦμεν τὸν Νεπέρειον λογάριθμον. Οὕτω ἡ (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{dQ}{T} = d\left[\log p^{c} v^{c'}\right] = dS \tag{2}$$

ἤτοι τὸ $\frac{dQ}{T}$ εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως

$$S = \log p^{c} v^{c'} + C, \tag{3}$$

ὅπου C αὐθαίρετος σταθερά. Τὴν συνάρτησιν S ὀνομάζομεν τροπὴν τοῦ τελείου ἀερίου.

Ὁλοκληροῦντες τὴν (2) κατὰ μῆκος ἀνοικτῆς μετατροπῆς $M_1\,M_2$, λαμβάνομεν

$$\int_{M_1}^{M_2}\frac{dQ}{T} = \int_{M_1}^{M_2} dS = S_2 - S_1 = \log p_2^{c} v_2^{c'} - \log p_1^{c} v_1^{c'}. \tag{4}$$

Ἐὰν δὲ ὁλοκληρώσωμεν κατὰ μῆκος κλειστῆς μετατροπῆς C, θὰ ἔχωμεν

$$\int_{C}\frac{dQ}{T} = \int_{C} dS = 0. \tag{5}$$

Ἂς θεωρήσωμεν ἀδιάθερμον μετατροπὴν $(dQ = 0)$· κατὰ μῆκος αὐτῆς εἶναι $\frac{dQ}{T} = 0$· ὅθεν καὶ $dS = 0$ ἢ $S =$ σταθερόν. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Εἰς ὅλα τὰ σημεῖα ἀδιαθέρμου ἡ τροπὴ τελείου ἀερίου ἔχει τὴν ἰδίαν τιμήν.

Διὰ τοῦτο αἱ ἰσόθερμοι μετατροπαὶ τῶν τελείων ἀερίων ὀνομάζονται καὶ ἰσότροποι μετατροπαί.

Εἴδομεν εἰς τὴν § 12, ὅτι ἡ ἄνοδος τοῦ πεδίου τῶν ἀδιαθέρμων γίνεται μὲ ἀπορρόφησιν θερμότητος ($dQ > 0$)· ἡ δὲ κάθοδος μὲ ἀπόδοσιν θερμότητος ($dQ < 0$). Ἀλλά, ὅταν εἶναι $dQ > 0$, εἶναι δυνάμει τῆς (2), ἐπειδὴ τὸ T εἶναι πάντοτε θετικὸν καὶ $dS > 0$· καὶ ὅταν εἶναι $dQ < 0$, εἶναι $dS < 0$. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Ὅταν τὸ διάγραμμα μετατροπῆς τινος τελείου ἀερίου ἀνέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἡ τροπὴ τοῦ ἀερίου αὐξάνει. Ἀντιστρόφως, ὅταν τὸ διάγραμμα κατέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἡ τροπὴ ἐλαττοῦται.

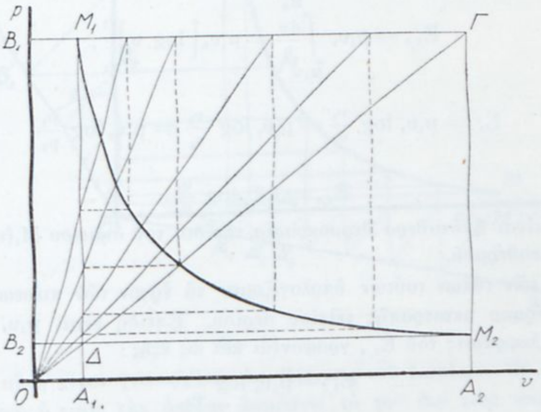
18. *Ἰσόθερμοι μετατροπαὶ τῶν τελείων ἀερίων.* Ἡ ἐξίσωσις τῶν ἰσοθέρμων μετατροπῶν τῶν τελείων ἀερίων εἶναι

(1) $$pv = RT = C,$$

ὅπου, ἐὰν $M_1(v_1, p_1, T_1 = t_1 + 273)$ εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου, ἡ σταθερὰ C θὰ ἔχῃ τὴν τιμὴν

(2) $$C = RT_1 = p_1 v_1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων Ov, Op ἰσο-



Σχ. 14

σκελῆ ὑπερβολήν. Ὅταν δίδεται ἓν σημεῖον τῆς καμπύλης, δυνάμεθα γραφικῶς νὰ προσδιορίσωμεν ὅσα σημεῖα αὐτῆς θέλομεν· ἑνοῦντες δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ συνεχοῦς καμπύλης, θὰ ἔχωμεν τὴν διὰ τοῦ M_1 διερχομένην ἰσόθερμον. Ἔστω π. χ. (σχ. 14), ὅτι δίδεται τὸ σημεῖον $M_1(v_1, p_1)$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν ἓν σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου ἔχον $v_2 = (OA_2)$. Πρὸς τοῦτο φέρομεν διὰ τῶν σημείων A_2, M_1 ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας Op, Ov· ἔστω $Γ$ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν παραλλήλων αὐτῶν. Φέρομεν τὴν $OΓ$· ἔστω δὲ $Δ$ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αὕτη συναντᾷ τὴν A_1M_1. Ἡ $(A_1\Delta) = p_2$ θὰ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ ζητουμένου σημείου· τῷ ὄντι ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$$\frac{(A_1\Delta)}{(A_2\Gamma)} = \frac{(OA_1)}{(OA_2)},$$

ἢ

$$(A_1\Delta).\upsilon_2 = p_1\upsilon_1,$$

ἤτοι εἶναι $(A_1\Delta) = p_2$ καὶ τὸ σημεῖον $M_2[\upsilon_2 = (OA_2),\ p_2 = (A_1\Delta)]$ εἶναι σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου.

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

(3) $$E_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} p d\upsilon$$

κατὰ μῆκος τοῦ τόξου M_1M_2 τῆς ἰσοθέρμου. Διὰ τὰ σημεῖα τῆς M_1M_2 ἔχομεν

(4) $$p\upsilon = p_1\upsilon_1.$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν

$$p = p_1\upsilon_1\,\frac{1}{\upsilon}.$$

Ἡ (3) ἐπειδὴ τὰ $p_1\upsilon_1$ εἶναι σταθερὰ γράφεται

(5) $$E_{1,2} = p_1\upsilon_1 \int_{M_1}^{M_2} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = p_1\upsilon_1\Big[\log\,\upsilon\Big]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2},$$

ἢ

(6) $$E_{1,2} = p_1\upsilon_1 \log\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = p_2\upsilon_2 \log\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = p_2\upsilon_2\log\frac{p_1}{p_2},$$

ἢ καὶ

(7) $$E_{1,2} = RT_1\log\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1},$$

ὅπου T_1 εἶναι ἡ σταθερὰ θερμοκρασία τῆς διὰ τοῦ σημείου $M_1(\upsilon_1, p_1)$ διερχομένης ἰσοθέρμου.

Διὰ τῶν τύπων τούτων ὑπολογίζομεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ μῆκος ἰσοθέρμου μετατροπῆς τελείου ἀερίου. Ἐπειδὴ εἶναι $p_1\upsilon_1 = p_2\upsilon_2$, αἱ ἀνωτέρω ἐκφράσεις τοῦ $E_{1,2}$ γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

(8) $$E_{1,2} = p_1\upsilon_1\log\frac{p_1}{p_2},$$

(9) $$E_{1,2} = RT_1\log\frac{p_1}{p_2}.$$

Ὅταν κατὰ τὴν ἀνοικτὴν μετατροπὴν ἀερίου ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου αὐξάνη, τὴν μετατροπὴν ὀνομάζομεν ἀποτόνωσιν· ὅταν δὲ ὁ ὄγκος ἐλαττοῦται, τὴν μετατροπὴν ὀνομάζομεν συμπίεσιν. Ἔστωσαν υ_1 καὶ υ_2 ὁ ἀρχικὸς καὶ ὁ τελικὸς ὄγκος τοῦ ἀερίου κατὰ τὴν μετατροπὴν M_1M_2. Ὁ λόγος

(10) $$\lambda = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1},$$

ἐὰν $\upsilon_2 > \upsilon_1$ ὀνομάζεται βαθμὸς ἀποτονώσεως· καὶ ἐὰν εἶναι $\upsilon_2 < \upsilon_1$ ὁ λόγος λ ὀνομάζεται βαθμὸς συμπιέσεως. Ὁ βαθμὸς λοιπὸν ἀποτονώσεως εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος καὶ ὁ βαθμὸς συμπιέσεως μικρότερος τῆς μονάδος.

19. Ἀδιάθερμοι μετατροπαὶ τῶν τελείων ἀερίων. Ἡ ἐξίσωσις (1) τῆς § 17 γράφεται κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου μετατροπῆς ($dQ = 0$)

(1) $$c\frac{dv}{v} + c'\frac{dp}{p} = 0$$

ἢ καὶ

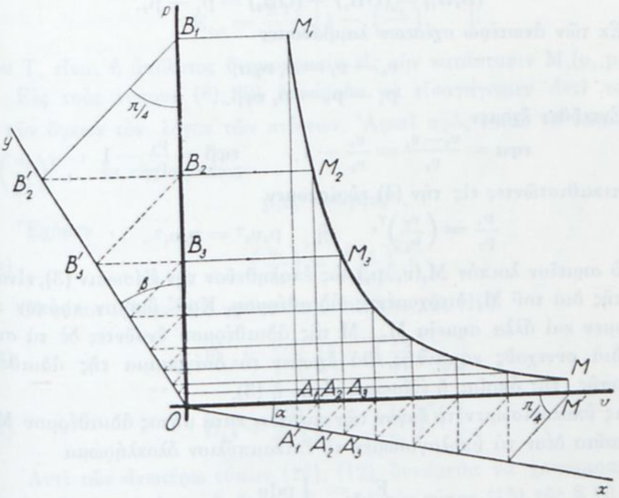
$$\frac{c'}{c}\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

θέτοντες $\frac{c'}{c} = \gamma$ καὶ ὁλοκληροῦντες, λαμβάνομεν

(2) $$pv^{\gamma} = C.$$

ὅπου C εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἡ (2) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς τῶν τελείων ἀερίων·



Σχ. 15

ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς ἐξίσωσις τοῦ Laplace. Ἡ σταθερὰ C τῆς (2) εἶναι ἡ τιμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ pv^{γ} διά τινα κατάστασιν $M_1(v_1, p_1)$· ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται λοιπὸν

(3) $$pv^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma}.$$

Ὅταν γνωρίζωμεν ἓν σημεῖον $M_1(v_1, p_1)$ τοῦ διαγράμματος τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς, δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην (2) ὡς ἑξῆς:

Φέρομεν, ὡς ἐν τῷ σχήματι (15), εὐθεῖαν Ox σχηματίζουσαν μετὰ τοῦ ἄξονος Ov τυχοῦσαν γωνίαν α καὶ προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν β ἐκ τοῦ τύπου

(4) $$1 + \varepsilon\varphi\,\beta = (1 + \varepsilon\varphi\,\alpha)^{\gamma}.$$

Φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν Oy οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι γων. $pOy = \beta$. Ἀκολούθως φέρομεν τὰς καθέτους M_1A_1 καὶ M_1B_1 ἐπὶ τοὺς ἄξονας Ov, Op καὶ προεκτείνομεν τὴν M_1A_1 μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν Οx εἴς τι σημεῖον A_1'. Ἐκ τοῦ A_1' φέρομεν τὴν $A_1'A_2$ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι γων. $A_1'A_2O = 45^\circ$ καὶ ἐκ τοῦ B_1 φέρομεν τὴν B_1B_2' οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι γων. $OB_1B_2' = 45^\circ$. Αἱ κάθετοι ἐκ τῶν σημείων B_2', A_2 ἐπὶ τοὺς ἄξονας Op, Oυ ὁρίζουν τὸ σημεῖον M_2 [$\upsilon_2 = (OA_2)$, $p_2 = (OB_2)$], τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τῆς διὰ τοῦ M_1 διερχομένης ἀδιαθέρμου. Τῷ ὄντι ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $A_1A_2A_1'$ καὶ $B_2B_1B_2'$ ἔχομεν

$$(A_1A_2) = (A_1A_1') = (OA_1)\,\text{εφ}\alpha,$$
$$(B_2B_1) = (B_2B_2') = (OB_2)\,\text{εφ}\beta.$$

Ἀλλὰ εἶναι

$$(A_1A_2) = (OA_2) - (OA_1) = \upsilon_2 - \upsilon_1$$
$$(B_2B_1) = (OB_1) - (OB_2) = p_1 - p_2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων λαμβάνομεν

$$\upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon_1\,\text{εφ}\alpha,$$
$$p_1 - p_2 = p_2\,\text{εφ}\beta.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$\text{εφ}\alpha = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} - 1, \qquad \text{εφ}\beta = \frac{p_1}{p_2} - 1$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (4) εὑρίσκομεν

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^\gamma, \qquad \text{ἢ} \qquad p_2\upsilon_2^{\gamma} = p_1\upsilon_1^{\gamma}.$$

Τὸ σημεῖον λοιπὸν $M_2(\upsilon_2, p_2)$, ὡς ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν (3), εἶναι σημεῖον τῆς διὰ τοῦ M_1 διερχομένης ἀδιαθέρμου. Καθ' ὅμοιον τρόπον προσδιορίζομεν καὶ ἄλλα σημεῖα M_3...M τῆς ἀδιαθέρμου· ἑνοῦντες δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα διὰ συνεχοῦς καμπύλης, θὰ ἔχωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἡ (3).

Ἄς ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου M_1M_2. Πρὸς τοῦτο δέον νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

(5) $$E_{1,2} = \int_{M_1M_2} p\,d\upsilon$$

κατὰ μῆκος τοῦ τόξου M_1M_2 τῆς ἀδιαθέρμου. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) ἔχομεν

$$p = p_1\upsilon_1^{\gamma}\,\frac{1}{\upsilon^\gamma}.$$

Ὅθεν ἡ (5) γράφεται

$$E_{1,2} = p_1\upsilon_1^{\gamma}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\frac{d\upsilon}{\upsilon^\gamma},$$

ὅπου υ_1, υ_2 εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων M_1, M_2.

Ὡς γνωστὸν εἶναι

(6) $$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\frac{d\upsilon}{\upsilon^\gamma} = \frac{1}{-\gamma+1}\left[\upsilon^{-\gamma+1}\right]_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{1}{-\gamma+1}\left[\frac{1}{\upsilon_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{\upsilon_1^{\gamma-1}}\right].$$

Καὶ ἐπειδὴ $\gamma = \frac{c'}{c} > 1$, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν δύο παραγόντων τοῦ δευτέρου μέλους, ὁπότε λαμβάνομεν

(7) $$E_{1,2} = \frac{p_1 \upsilon_1{}^\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{\upsilon_1{}^{\gamma-1}} - \frac{1}{\upsilon_2{}^{\gamma-1}}\right]$$

ἤ, θέτοντες $\upsilon_1{}^\gamma = \upsilon_1 \upsilon_1{}^{\gamma-1}$,

(8) $$E_{1,2} = \frac{p_1 \upsilon_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ὑπολογίζομεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς τελείου ἀερίου. Ὁ τύπος (8) λόγῳ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $p\upsilon = RT$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(9) $$E_{1,2} = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

ὅπου T_1 εἶναι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία εἰς τὴν κατάστασιν $M_1(\upsilon_1, p_1)$.

Εἰς τοὺς τύπους (8), (9) δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ τῶν ὄγκων τὸν λόγον τῶν πιέσεων. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1}$ ἐκ τῆς σχέσεως

$$p_1 \upsilon_1{}^\gamma = p_2 \upsilon_2{}^\gamma .$$

Ἔχομεν

(10) $$\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Οἱ τύποι (8) καὶ (9) γράφονται, δυνάμει τῆς (10)

(11) $$E_{1,2} = \frac{p_1 \upsilon_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

ἢ

(12) $$E_{1,2} = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω τύπων (11), (12) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔργου $E_{1,2}$ καὶ τὸν τύπον (15) τῆς § 16, ἤτοι τὸν τύπον

(13) $$E_{12} = \frac{1}{A} c (T_1 - T_2).$$

Ἂς παραστήσωμεν διὰ δ τὸ εἰδικὸν βάρος τελείου ἀερίου, ἤτοι τὸ βάρος τῆς μονάδος τοῦ ὄγκου τοῦ ἀερίου. Ἐπειδὴ τὸ υ τῶν ἀνωτέρω τύπων εἶναι (§ 13) ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ἀερίου, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει ἡ μονὰς τοῦ βάρους, θὰ ἔχωμεν

(14) $$\delta \upsilon = 1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$p = C \frac{1}{\upsilon^\gamma}$$

ἤ, δυνάμει τῆς (14),

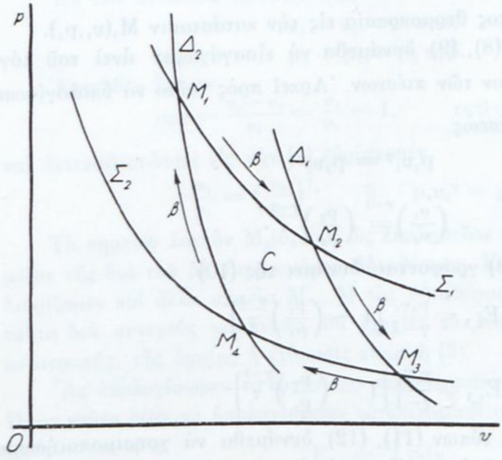
(15) $$p = C\delta^\gamma .$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου προκύπτει ἡ ἑξῆς πρότασις τῶν Laplace καὶ Poisson:

Κατὰ τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν τελείου ἀερίου αἱ πιέσεις εἶναι ἀνάλογοι τῆς γ δυνάμεως τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἀερίου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν M_1M_2 θὰ ὀνομάζωμεν, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸ τέλος τῆς § 18, ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν, ἐφ' ὅσον ὁ λόγος $\lambda = \frac{v_2}{v_1}$ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐὰν ἀντιθέτως εἶναι $\lambda = \frac{v_2}{v_1} < 1$, τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν M_1M_2 θὰ ὀνομάζωμεν ἀδιάθερμον συμπίεσιν.

20. *Κύκλος τοῦ Carnot.* Ὀνομάζομεν *κύκλον τοῦ Carnot* κλειστὴν μετατροπὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ δύο τόξα ἰσοθέρμων καὶ δύο τόξα ἀδιαθέρμων. Οὕτω, ἐὰν θεωρήσωμεν εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron (σχ. 16) δύο ἰσοθέρμους Σ_1, Σ_2 καὶ δύο ἀδιαθέρμους Δ_1, Δ_2, ὁ κύκλος $M_1M_2M_3M_4M_1$, ὁ ὁριζόμενος ἀπὸ τὰ τόξα M_1M_2, M_3M_4 τῶν ἰσοθέρμων Σ_1, Σ_2 καὶ τὰ τόξα M_2M_3, M_4M_1 τῶν ἀδιαθέρμων Δ_1, Δ_2, εἶναι κύκλος τοῦ Carnot.



Σχ. 16

Ἄς θεωρήσωμεν τέλειον ἀέριον, τὸ ὁποῖον διαγράφει τὸν κύκλον τοῦ Carnot. Ἔστωσαν T_1, T_2 αἱ ἀπόλυτοι θερμοκρασίαι τῶν ἰσοθέρμων Σ_1, Σ_2· ἐπειδὴ ἡ Σ_1 ὑπέρκειται τῆς Σ_2 θὰ εἶναι (§ 11) $T_1 > T_2$.

Ἔστωσαν ἐπίσης S_1, S_2 αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ τροπὴ τοῦ τελείου ἀερίου κατὰ μῆκος τῶν ἀδιαθέρμων Δ_1, Δ_2· ἐπειδὴ ἡ Δ_1 ὑπέρκειται τῆς Δ_2, δυνάμει τῆς προτάσεως β τῆς § 17, θὰ εἶναι $S_1 > S_2$. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἀέριον διαγράφῃ τὸν κύκλον κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, ἤτοι κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Τότε τὸ ἀέριον ἀπορροφᾷ θερμότητα Q καὶ ἀποδίδει ἔργον E.

Ἄς ὑπολογίσωμεν τὸ Q. Δυνάμεθα προφανῶς νὰ γράψωμεν

$$(1) \qquad Q = \int_C dQ = \int_{M_1M_2} dQ + \int_{M_2M_3} dQ + \int_{M_3M_4} dQ + \int_{M_4M_1} dQ.$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῶν ἀδιαθέρμων εἶναι

$$\int_{M_2M_3} dQ = 0, \quad \int_{M_4M_1} dQ = 0,$$

θὰ ἔχωμεν

$$(2) \qquad Q = \int_{M_1M_2} dQ + \int_{M_3M_4} dQ = \int_{M_1M_2} dQ - \int_{M_4M_3} dQ.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου μέλους. Δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (2) τῆς § 17 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\int_{M_1M_2} dQ = \int_{M_1M_2} TdS.$$

Κατὰ μῆκος τοῦ τόξου M_1M_2 τὸ $T = T_1$ εἶναι σταθερόν· ἐξ ἄλλου αἱ τιμαὶ τοῦ S εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2 εἶναι S_2, S_1· ὅθεν ἔχομεν

$$(3) \qquad \int_{M_1M_2} dQ = T_1 \int_{M_1M_2} dS = T_1 (S_1 - S_2).$$

Ὁμοίως εἶναι

$$(4) \qquad \int_{M_4M_3} dQ = T_2 \int_{M_4M_3} dS = T_2 (S_1 - S_2).$$

Ἡ (2) γράφεται λοιπὸν

$$(5) \qquad Q = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2).$$

Ἂς παραστήσωμεν διὰ $Q_{1,2}$ καὶ $Q_{4,3}$ τὰ ἀπορροφούμενα ποσὰ θερμότητος κατὰ μῆκος τῶν ἰσοθέρμων M_1M_2 καὶ M_4M_3. Εἶναι, δυνάμει τῶν (3), (4)

$$(6) \qquad \left| \begin{array}{l} Q_{1,2} = T_1 (S_1 - S_2), \\ Q_{4,3} = T_2 (S_1 - S_2). \end{array} \right.$$

Ὅθεν

$$(7) \qquad \frac{Q_{4,3}}{Q_{1,2}} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. *Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τόξα ἰσοθέρμων περιλαμβανόμενα μεταξὺ δύο ἀδιαθέρμων, τὰ ἀπορροφούμενα ποσὰ θερμότητος εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν τῶν ἰσοθέρμων.*

Αἱ συντεταγμέναι (v_2, p_2) καὶ (v_3, p_3) τῶν σημείων M_2, M_3 τῆς ἀδιαθέρμου Δ_1 ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς § 19· ἤτοι εἶναι

$$p_2 v_2^{\gamma} = p_3 v_3^{\gamma}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$p_2 v_2 v_2^{\gamma-1} = p_3 v_3 v_3^{\gamma-1},$$

ἤ, δυνάμει καὶ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $pv = RT$, ἐπειδὴ τὸ M_2 εἶναι σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου T_1 καὶ τὸ M_3 εἶναι σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου T_2,

$$RT_1 v_2^{\gamma-1} = RT_2 v_3^{\gamma-1}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(8) \qquad \frac{v_2}{v_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Ἐὰν γράψωμεν ἀναλόγους σχέσεις, θεωροῦντες τὰ σημεῖα M_1, M_4 τῆς ἀδιαθέρμου Δ_2, θὰ εὕρωμεν

$$(9) \qquad \frac{v_1}{v_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

ἤτοι εἶναι, δυνάμει τῶν (8) καὶ (9),

$$(10) \qquad \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_4}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

β. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τόξα ἀδιαθέρμων περιλαμβανόμενα μεταξὺ δύο ἰσοθέρμων, οἱ λόγοι τῶν ὄγκων εἰς τὰ ἄκρα σημεῖα ἑκάστου τῶν τόξων τῶν ἀδιαθέρμων εἶναι ἴσοι.

Ἡ σχέσις (10) γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(11) \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_4}.$$

Ἡ (11) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

γ. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τόξα ἰσοθέρμων περιλαμβανόμενα μεταξὺ δύο ἀδιαθέρμων, οἱ λόγοι τῶν ὄγκων εἰς τὰ ἄκρα σημεῖα ἑκάστου τῶν τόξων τῶν ἰσοθέρμων εἶναι ἴσοι.

Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

δ. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τόξον ἰσοθέρμου, ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ ἀερίου εἰς δύο σημεῖα τῆς ἰσοθέρμου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας τῆς ἰσοθέρμου καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν διὰ τῶν δύο σημείων διερχομένων ἀδιαθέρμων.

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ λόγος $\frac{v_2}{v_1}$ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἀδιαθέρμων Δ_1, Δ_2, θὰ πρέπῃ νὰ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν τιμῶν S_1, S_2, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῶν Δ_1, Δ_2. Τῷ ὄντι ἐκ τοῦ τύπου (3) τῆς § 17 λαμβάνομεν

$$S_1 - S_2 = \log \frac{p_2^{c} v_2^{c'}}{p_1^{c} v_1^{c'}} = c \log \frac{p_2 v_2^{\frac{c'}{c}}}{p_1 v_1^{\frac{c'}{c}}} = c \log \frac{p_2 v_2^{\gamma}}{p_1 v_1^{\gamma}}.$$

Θέτοντες $\quad p_2 v_2^{\gamma} = p_2 v_2 v_2^{\gamma-1}, \quad p_1 v_1^{\gamma} = p_1 v_1 v_1^{\gamma-1},$

λαμβάνομεν

$$S_1 - S_2 = c \log \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1},$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ σημεῖα M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου Σ_1, εἶναι $p_2 v_2 = p_1 v_1 = RT_1$· ὅθεν

$$S_1 - S_2 = c \log \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} = c \log \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{c'}{c}-1} =$$

$$= c \log \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\frac{c'-c}{c}} = c \frac{c'-c}{c} \log \left(\frac{v_2}{v_1}\right) = (c'-c) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Ἐντεῦθεν

(12) $$\frac{S_1 - S_2}{c' - c} = \log \frac{v_2}{v_1}$$

ἢ τέλος

(13) $$\frac{v_2}{v_1} = e^{\frac{S_1 - S_2}{c' - c}},$$

ὅπου $e = 2{,}718\dots$ εἶναι ἡ βάσις τῶν Νεπερείων λογαρίθμων.

Ὁ τύπος (13) μᾶς δίδει τὴν σταθερὰν τιμὴν τοῦ λόγου (11).

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ ἔργον E τῶν πιέσεων, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει τὸ τέλειον ἀέριον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου τοῦ Carnot. Γράφοντες, χάριν ἁπλοποιήσεως, ἀντὶ τῶν σημείων M_1, M_2,..... τοὺς δείκτας 1, 2,..... ἔχομεν

(14) $$E = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,4} + E_{4,1}$$

ἤ, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἐν τῇ § 8,

(15) $$E = E_{1,2} + E_{2,3} - E_{4,3} - E_{1,4}.$$

Τὸ ἔργον $E_{1,2}$ κατὰ μῆκος τοῦ τόξου M_1M_2 τῆς ἰσοθέρμου Σ_1 εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (7) τῆς § 18,

(16) $$E_{1,2} = RT_1 \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Ἀντιστοίχως τὸ ἔργον $E_{4,3}$ εἶναι

(17) $$E_{4,3} = RT_2 \log \frac{v_3}{v_4}.$$

Τὸ ἔργον $E_{2,3}$ κατὰ μῆκος τοῦ τόξου M_2M_3 τῆς ἀδιαθέρμου Δ_1 εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (9) τῆς § (19),

(18) $$E_{2,3} = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_3}\right)^{\gamma-1}\right]$$

καὶ ἀντιστοίχως εἶναι

(19) $$E_{1,4} = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_4}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Καὶ ἐπειδή, δυνάμει τῆς (10) εἶναι $\frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_4}$, θὰ εἶναι

(20) $$E_{2,3} = E_{1,4}.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

ε. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τόξα ἀδιαθέρμων περιλαμβανόμενα μεταξὺ δύο ἰσοθέρμων, τὰ ἔργα τῶν πιέσεων κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν τόξων τῶν ἀδιαθέρμων εἶναι ἴσα.

Ὁ τύπος (15), δυνάμει τοῦ (20), γράφεται

$$E = E_{1,2} - E_{4,3} \tag{21}$$

ἤ, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων (16) καὶ (17) τῶν $E_{1,2}$ καὶ $E_{4,3}$,

$$E = RT_1 \log \frac{v_2}{v_1} - RT_1 \log \frac{v_3}{v_4}.$$

ἢ τέλος, δυνάμει τῆς (21),

$$E = R(T_1 - T_2) \log \frac{v_2}{v_1}. \tag{22}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ὑπολογίζομεν τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει τέλειον ἀέριον διαγράφον τὸν κύκλον τοῦ Carnot.

Ἀνωτέρω ὑπεθέσαμεν ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Carnot διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ Q, E, τὰ ὁποῖα δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων (5) καὶ (22), εἶναι θετικά· ἤτοι τὸ ἀέριον διαγράφον τὸν κύκλον ἀπορροφᾷ θερμότητα καὶ ἀποδίδει ἔργον. Ἐὰν ὁ κύκλος διεγράφετο κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τὰ Q, E θὰ ἦσαν ἀρνητικά. Τότε δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 16, κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου θὰ εἴχομεν ἀπορρόφησιν ἔργου καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (6) τοῦ ἰσοδυνάμου, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

$$Q = AE \tag{23}$$

εἰς τὸν κύκλον τοῦ Carnot.

Θέτοντες εἰς τὴν (23) τὰς τιμὰς τῶν Q, E ἐκ τῶν τύπων (5) καὶ (22) λαμβάνομεν

$$(T_1 - T_2)(S_1 - S_2) = AR\,(T_1 - T_2) \log \frac{v_2}{v_1}$$

ἢ

$$S_1 - S_2 = AR \log \frac{v_2}{v_1} \tag{24}$$

καὶ ἐπειδή, δυνάμει τοῦ τύπου (2) τῆς § 16 εἶναι $AR = c' - c$, θὰ ἔχωμεν

$$S_1 - S_2 = (c' - c) \log \frac{v_2}{v_1}. \tag{25}$$

Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τὸν τύπον (12) καὶ ἔχομεν συγχρόνως ἐπαλήθευσιν τῶν ἀνωτέρω ἐξαγομένων.

21. Θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως κλειστῆς μετατροπῆς. Θεωρήσωμεν τέλειον ἀέριον διαγράφον τὸν τυχόντα κύκλον C, ἔστω κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν $M_1\alpha_1M_2\alpha_2M_1$ (σχ. 17). Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἄκρας ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα Ου, ἤτοι τὰς A_1M_1, A_2M_2, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν κύκλον ὡς συγκείμενον ἐκ τῶν δύο ἀνοικτῶν διαγραμμάτων $M_1\alpha_1M_2$ καὶ $M_2\alpha_2M_1$. Ἂς παραστήσωμεν διὰ Q_1 τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ τόξου $M_1\alpha_1M_2$ καὶ διὰ Q_2 τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ τόξου $M_2\alpha_2M_1$. Αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου (§ 16), μετασχηματίζονται εἰς τὸ ἔργον τῶν πιέσεων E, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι

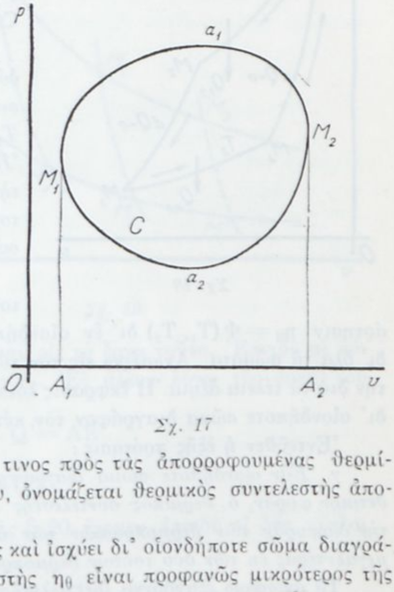
(1) $$Q = Q_1 - Q_2.$$

Τὸ ἔργον E παρίσταται, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἐν τῇ § 9, ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου C καὶ εἶναι

(2) $$E = \text{εμβ.}\ M_1\alpha_1M_2\alpha_2M_1 = \text{εμβ.}\ A_1M_1\alpha_1M_2A_2 - $$
$$- \text{εμβ.}\ A_1M_1\alpha_2M_2A_2 = E_1 - E_2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ θερμίδες Q_1 εἶναι αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἀπορροφήσῃ τὸ ἀέριον, διὰ νὰ διαγράψῃ τὸν κύκλον C, ἤτοι διὰ νὰ ἀποδώσῃ τὸ ἔργον E. Διὰ τὴν παραγωγὴν ὅμως τοῦ ἔργου E χρησιμοποιοῦνται μόνον αἱ $Q_1 - Q_2$ θερμίδες. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν κλειστῆς μετατροπῆς ὑπὸ τελείου ἀερίου μόνον μέρος τῆς ἀπορροφουμένης ὑπὸ τοῦ ἀερίου θερμότητος διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς μετασχηματίζεται εἰς ἔργον.



Σχ. 17

Ἡ πρότασις αὕτη, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἶναι γενικὴ καὶ ἰσχύει δι᾽ οἱονδήποτε σῶμα διαγράφον κλειστὴν μετατροπήν. Ὁ λόγος

(3) $$\eta_\theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

ἤτοι ὁ λόγος τῶν θερμίδων, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν κύκλου τινος πρὸς τὰς ἀπορροφουμένας θερμίδας διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, ὀνομάζεται θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου.

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶναι γενικὸς καὶ ἰσχύει δι᾽ οἱονδήποτε σῶμα διαγράφον οἱονδήποτε κύκλον. Ὁ συντελεστὴς η_θ εἶναι προφανῶς μικρότερος τῆς μονάδος· οὗτος δίδεται καὶ ὑπὸ τὴν ἑξῆς μορφὴν

(4) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

22. *Θεώρημα τοῦ Carnot*. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Ὁ τύπος (4) τῆς § 21 γράφεται διὰ τὸν κύκλον τοῦ Carnot $M_1M_2M_3M_4M_1$ (σχ. 18)

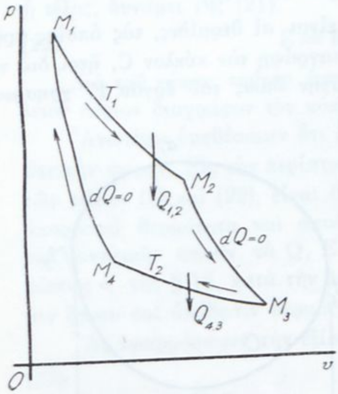
(1) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_{4,3}}{Q_{1,2}}$$

ἤ, δυνάμει τοῦ τύπου (7) τῆς § 20,

$$\eta_\theta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{2}$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ τὸν κύκλον τοῦ Carnot κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν θερμοκρασιῶν τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων διῃρημένην διὰ τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο τούτων θερμοκρασιῶν.



Σχ. 18

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι μερικὴ περίπτωσις ἰσχύουσα διὰ τὰ τέλεια ἀέρια τοῦ ἑξῆς γενικοῦ θεωρήματος τοῦ Carnot.

β. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν θερμοκρασιῶν T_1, T_2 τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων τοῦ κύκλου. Ἡ συνάρτησις αὕτη $\eta_\theta = \Phi(T_1, T_2)$, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν καὶ συνάρτησιν τοῦ Carnot, εἶναι ἡ ἰδία δι᾽ ὅλα τὰ σώματα.

Δυνάμει λοιπὸν τοῦ θεωρήματος τοῦ Carnot ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν συνάρτησιν $\eta_\theta = \Phi(T_1, T_2)$ δι᾽ ἓν οἱονδήποτε σῶμα· αὕτη θὰ εἶναι ἡ ἰδία δι᾽ ὅλα τὰ σώματα. Ἀνωτέρω εἰς τὸν τύπον (2) εὕρομεν τὴν συνάρτησιν ταύτην διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Ἡ ἔκφρασις λοιπὸν (2) τοῦ η_θ εἶναι γενικὴ καὶ ἰσχύει δι᾽ οἱονδήποτε σῶμα διαγράφον τὸν κύκλον τοῦ Carnot.

Ἐντεῦθεν ἡ ἑξῆς πρότασις:

γ. Ἐὰν οἱονδήποτε σῶμα διαγράφῃ τὸν κύκλον τοῦ Carnot κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν θερμοκρασιῶν τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων διῃρημένην διὰ τῆς μεγαλυτέρας ἐκ τῶν δύο τούτων θερμοκρασιῶν.

Τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα θὰ μελετήσωμεν λεπτομερέστερον εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον.

23. *Ἰσοδύναμοι κύκλοι τοῦ Carnot.* Θὰ λέγωμεν ὅτι δύο κύκλοι τοῦ Carnot, ὡς οἱ $M_1M_2M_3M_4M_1$ καὶ $M_1'M_2'M_3'M_4'M_1'$ (σχ. 19), εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν πληροῦν τὰς ἑξῆς δύο συνθήκας: α. Αἱ ἄκραι ἰσόθερμοι M_1M_2, M_4M_3 καὶ $M_1'M_2'$, $M_4'M_3'$ νὰ εἶναι ἀνὰ δύο τόξα τῆς ἰδίας ἰσοθέρμου· καὶ β. Τὰ ἔργα τῶν πιέσεων τῶν δύο κύκλων, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κύκλων, νὰ εἶναι ἴσα.

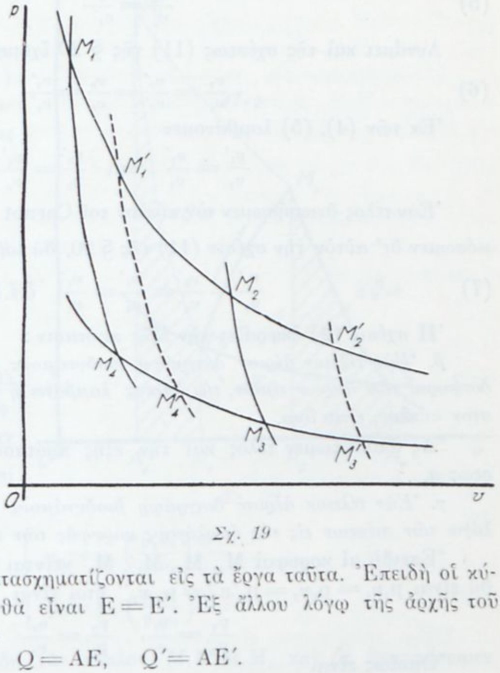
Ἐξ αἰτίας τῆς πρώτης συνθήκης προκύπτει, δυνάμει τοῦ τύπου (2) τῆς

§ 22, ὅτι οἱ θερμικοὶ συντελεσταὶ ἀποδόσεως τῶν κύκλων εἶναι ἴσοι· καὶ ἐξ αἰτίας τῆς δευτέρας συνθήκης προκύπτει ὅτι οἱ δύο κύκλοι διαγράφονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.

Τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα M_i, M_i' ($i = 1, 2, 3, 4$) τῶν ἰσοδυνάμων κύκλων τοῦ Carnot θὰ ὀνομάζωμεν ὁμόλογα σημεῖα. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ ἰσοδυνάμους κύκλους τοῦ Carnot, οἱ λόγοι τῶν ὄγκων εἰς τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν κύκλων εἶναι ἴσοι.

Θὰ ἀποδείξωμεν δηλαδὴ ὅτι εἶναι
$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{v_2'}{v_2} = \frac{v_3'}{v_3} = \frac{v_4'}{v_4}.$$



Σχ. 19

Ἔστωσαν E, E′ τὰ ἀποδιδόμενα ἔργα κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν κύκλων καὶ $Q = Q_1 - Q_2$, $Q' = Q_1' - Q_2'$ τὰ ποσὰ θερμότητος, τὰ ὁποῖα μετασχηματίζονται εἰς τὰ ἔργα ταῦτα. Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι εἶναι ἰσοδύναμοι, θὰ εἶναι $E = E'$. Ἐξ ἄλλου λόγῳ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου (§ 16), εἶναι
$$Q = AE, \quad Q' = AE'.$$

Ὅθεν

(1)
$$Q = Q'.$$

Ἀλλὰ δυνάμει τοῦ τύπου (5) τῆς § 20 ἔχομεν, ἐπειδὴ οἱ δύο κύκλοι ἔχουν τὰς αὐτὰς ἄκρας θερμοκρασίας,
$$Q = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2), \quad Q' = (T_1 - T_2)(S_1' - S_2')\cdot$$

ὅθεν, δυνάμει τῆς (1), εἶναι

(2)
$$S_1 - S_2 = S_1' - S_2'.$$

Ἂς ἐκφράσωμεν ἤδη, δυνάμει τοῦ τύπου (13) τῆς § 20 τοὺς λόγους $\frac{v_2}{v_1}$ καὶ $\frac{v_2'}{v_1'}$. Ἔχομεν

(3)
$$\frac{v_2}{v_1} = e^{\frac{S_1 - S_2}{c' - c}}, \quad \frac{v_2'}{v_1'} = e^{\frac{S_1' - S_2'}{c' - c}}.$$

Ἐκ τούτων λόγῳ τῆς (2) λαμβάνομεν

(4) $$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'}.$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν

(5) $$\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4} = \frac{\upsilon_3'}{\upsilon_4'}.$$

Δυνάμει καὶ τῆς σχέσεως (11) τῆς § 20 ἔχομεν

(6) $$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_1'} = \frac{\upsilon_3}{\upsilon_4} = \frac{\upsilon_3'}{\upsilon_4'}.$$

Ἐκ τῶν (4), (5) λαμβάνομεν

$$\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3} = \frac{\upsilon_4'}{\upsilon_4}.$$

Ἐὰν τέλος θεωρήσωμεν τὸν κύκλον τοῦ Carnot $M_1M_1'M_4'M_4M_1$ καὶ ἐφαρμόσωμεν δι' αὐτὸν τὴν σχέσιν (11) τῆς § 20, θὰ λάβωμεν $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_4'}{\upsilon_4}$· ἤτοι εἶναι

(7) $$\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2} = \frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3} = \frac{\upsilon_4'}{\upsilon_4}, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἡ σχέσις (2) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

β. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ ἰσοδυνάμους κύκλους τοῦ Carnot, αἱ διαφοραὶ τῶν ἄκρων τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ τροπὴ τοῦ ἀερίου εἰς ἕκαστον κύκλον, εἶναι ἴσαι.

Ἂς ἀποδείξωμεν τέλος καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν, ἀνάλογον τῆς προτάσεως α.

γ. Ἐὰν τέλειον ἀέριον διαγράφῃ ἰσοδυνάμους κύκλους τοῦ Carnot, οἱ λόγοι τῶν πιέσεων εἰς τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν κύκλων εἶναι ἴσοι.

Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ M_1, M_2, M_1', M_2' κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἰσοθέρμου, θὰ εἶναι $p_1\upsilon_1 = p_2\upsilon_2 = p_1'\upsilon_1' = p_2'\upsilon_2'$ ἤτοι εἶναι

$$\frac{p_1}{p_1'} = \frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1}, \quad \frac{p_2}{p_2'} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2}.$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\frac{p_4}{p_4'} = \frac{\upsilon_4'}{\upsilon_4}, \quad \frac{p_3}{p_3'} = \frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3}.$$

καὶ δυνάμει τῆς (7)

(8) $$\frac{p_1}{p_1'} = \frac{p_2}{p_2'} = \frac{p_3}{p_3'} = \frac{p_4}{p_4'}, \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

24. Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τελείου ἀερίου. Ἂς θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἀνοικτὴν μετατροπὴν M_1M_2 τελείου ἀερίου, διαγραφομένην κατὰ τὴν φορὰν ἐκ τοῦ M_1 πρὸς τὸ M_2 (σχ. 20). Φέρομεν τὴν διὰ τοῦ M_1 διερχομένην ἰσόθερμον $M_1\Sigma$ ($dT = 0$) καὶ τὴν διὰ τοῦ M_2 διερχομένην ἀδιάθερμον $M_2\Delta$ ($dQ = 0$). Αἱ δύο αὗται καμπύλαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον $M_3(\upsilon_3, p_3)$· τὰς συντεταγμένας υ_3, p_3 τοῦ σημείου τούτου ὑπολογίζομεν ἐκ τῶν σχέσεων

(1) $$\begin{cases} p_3\upsilon_3 = p_1\upsilon_1 \\ p_3\upsilon_3^{\gamma} = p_2\upsilon_2^{\gamma} \end{cases}.$$

Διαιροῦντες τὴν δευτέραν σχέσιν διὰ τῆς πρώτης λαμβάνομεν

$$\upsilon_3^{\gamma-1} = \frac{p_2 \upsilon_2^{\gamma}}{p_1 \upsilon_1} = \frac{p_2 \upsilon_2}{p_1 \upsilon_1} \upsilon_2^{\gamma-1}$$

καὶ

(2) $\upsilon_3 = \upsilon_2 \left(\frac{p_2 \upsilon_2}{p_1 \upsilon_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$

Ὁμοίως ὑψοῦντες τὴν πρώτην σχέσιν ἐκ τῶν (1) εἰς τὴν γ δύναμιν καὶ διαιροῦντες διὰ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν

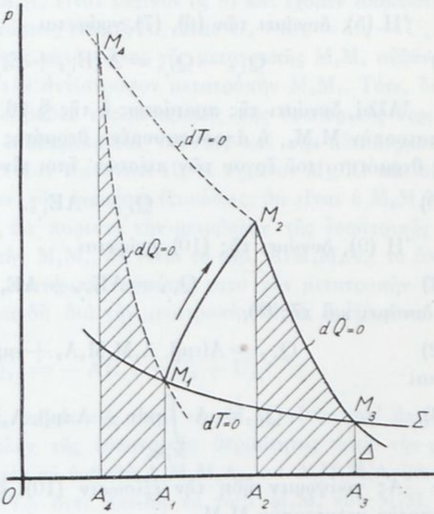
$$p_3^{\gamma-1} = \frac{p_1^{\gamma} \upsilon_1^{\gamma}}{p_2 \upsilon_2^{\gamma}} = $$

$$= p_2^{\gamma-1} \left(\frac{p_1 \upsilon_1}{p_2 \upsilon_2} \right)^{\gamma}$$

καὶ

(3) $p_3 = p_2 \left(\frac{p_1 \upsilon_1}{p_2 \upsilon_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$

Αἱ ἐκφράσεις (2), (3) τῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου M_3, ἐὰν θέσωμεν $\gamma = \frac{c'}{c}$, γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς



Σχ. 20

(4)
$$\begin{cases} \upsilon_3 = \upsilon_2 \left(\frac{p_2 \upsilon_2}{p_1 \upsilon_1} \right)^{\frac{c}{c'-c}}, \\ p_3 = p_2 \left(\frac{p_1 \upsilon_1}{p_2 \upsilon_2} \right)^{\frac{c'}{c'-c}}. \end{cases}$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὸν κύκλον $M_1M_2M_3M_1$ καὶ ἄς ἐφαρμόσωμεν δι' αὐτὸν τὴν ἐξίσωσιν (6) τῆς § 16, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

(5)
$$Q = AE.$$

Ἡ θερμότης Q, ἥτις μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, εἶναι

$$Q = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,1},$$

θέτοντες $Q_{3,1} = - Q_{1,3}$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου M_2M_3 εἶναι $Q_{2,3} = 0$, λαμβάνομεν

(6)
$$Q = Q_{1,2} - Q_{1,3}.$$

Τὸ ἔργον E τῶν πιέσεων κατὰ τὴν διγραφὴν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ἤτοι εἶναι

(7)
$$E = E_{1,2} + E_{2,3} - E_{1,3}.$$

ἤ, ὅπερ τὸ αὐτὸ

(8) $$E = \text{εμβ. } M_1M_2M_3M_1 = \text{εμβ. } A_1M_1M_2A_2 + \text{εμβ. } A_2M_2M_3A_3 - \text{εμβ. } A_1M_1M_3A_3.$$

Ἡ (5), δυνάμει τῶν (6), (7), γράφεται

(9) $$Q_{1,2} - Q_{1,3} = A\,(E_{1,2} + E_{2,3} - E_{1,3}).$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 16, διὰ τὴν ἀνοικτὴν ἰσόθερμον μετατροπὴν M_1M_3, ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου τῶν πιέσεων· ἤτοι εἶναι

(10) $$Q_{1,3} = AE_{1,3}.$$

Ἡ (9), δυνάμει τῆς (10) γράφεται

(11) $$Q_{1,2} = AE_{1,2} + AE_{2,3},$$

ἤ, δυνάμει καὶ τῆς (8),

(12) $$Q_{1,2} = A(\text{εμβ. } A_1M_1M_2A_2 + \text{εμβ. } A_2M_2M_3A_3)$$

ἢ καὶ

(13) $$Q_{1,2} = A \int_{M_1M_2} p\,dv + A \text{ εμβ. } A_2M_2M_3A_3.$$

Ἄς γράψωμεν ἤδη τὴν ἐξίσωσιν (10), § 16 τοῦ Clausius διὰ τὴν ἀνοικτὴν μετατροπὴν M_1M_2,

(14) $$Q_{1,2} = AE_{1,2} + U_2 - U_1.$$

Συγκρίνοντες τὰς ἀνωτέρω σχέσεις (14) καὶ (13), εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(15) $$U_2 - U_1 = A \text{ εμβ. } A_2M_2M_3A_3.$$

Οὕτω καταλήγομεν εἰς τὸ ἐνδιαφέρον συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου $E_{2,3}$, τὸ ὁποῖον παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $A_2M_2M_3A_3$, ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν $U_2 - U_1$ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀνοικτῆς μετατροπῆς M_1M_2 τοῦ τελείου ἀερίου.

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμει τοῦ τύπου (6) τῆς § 15 εἶναι

(16) $$U_2 - U_1 = c(T_2 - T_1),$$

ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν

(17) $$c(T_2 - T_1) = A \text{ εμβ. } A_2M_2M_3A_3.$$

Ἡ ἀνωτέρω γραφικὴ παράστασις, εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron, τῆς μεταβολῆς τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τῶν τελείων ἀερίων διὰ τοῦ ἐμβαδοῦ $A_2M_2M_3A_3$ ὀφείλεται εἰς τὸν Cazin. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν διὰ τῆς γραφικῆς ταύτης μεθόδου τὴν μεταβολὴν $U_2 - U_1$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν $A_2M_2M_3A_3$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ἐκφράζεται εἰς χιλιογραμμόμετρα (§ 16)· πολλαπλασιάζοντες τὰ χιλιογραμμόμετρα ταῦτα ἐπὶ $A = \frac{1}{427}$ εὑρίσκομεν τὰς θερμίδας $U_2 - U_1$· οὕτω εὑρίσκομεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ τελείου ἀερίου κατὰ τὴν μετατροπὴν M_1M_2.

Εἰς τὸ σχῆμα (20), ἐπειδὴ κατὰ τὴν M_2M_3 ἀπομακρυνόμεθα τοῦ ἄξονος Op, τὸ ἐμβαδὸν $A_2M_2M_3A_3$ εἶναι θετικὸν (§ 8) καὶ ἔχομεν ἀπόδοσιν ἔργου. Τότε, δυνάμει τῆς προτάσεως ε τῆς § 16, εἶναι $U_2 - U_3 = U_2 - U_1 > 0$· δηλαδὴ ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης κατὰ μῆκος τῆς μετατροπῆς M_1M_2 αὐξάνει.

Ἂς θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἀντίστροφον μετατροπὴν M_2M_1. Τότε, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ παραστατικὸν ἐμβαδὸν τῆς μεταβολῆς τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος, δέον νὰ φέρωμεν τὴν ἰσόθερμον διὰ τοῦ M_2 καὶ τὴν ἀδιάθερμον διὰ τοῦ M_1. Αἱ δύο αὗται καμπύλαι τέμνονται εἴς τι σημεῖον M_4. Ὁ κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις, θὰ εἶναι ὁ $M_2M_1M_4M_2$ καὶ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον θὰ παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_1, θὰ εἶναι τὸ εμβ. $A_1M_1M_4A_4$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀρνητικόν. Ἤτοι ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_1 ἐλαττοῦται· καὶ μάλιστα, ἐπειδὴ διὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_1 ἡ ἐξίσωσις (14) γράφεται

$$-Q_{1,2} = -AE_{1,2} - U_2 + U_1, \tag{18}$$

ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν M_2M_1 εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴση πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν M_1M_2. Πρέπει λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ $A_2M_2M_3A_3$ καὶ $A_1M_1M_4A_4$ νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὰ τόξα M_2M_3 καὶ M_4M_1 τῶν ἀδιαθέρμων περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἰσοθέρμων M_1M_3 καὶ M_4M_2, θὰ εἶναι, δυνάμει τῆς προτάσεως ε τῆς § 20,

$$E_{2,3} = E_{4,1}$$

ἢ

$$\text{εμβ. } A_2M_2M_3A_3 = \text{εμβ. } A_4M_4M_1A_1 = -\text{εμβ. } A_1M_1M_4A_4. \tag{19}$$

Ἀσκήσεις

1. Μᾶζα τελείου ἀερίου P χιλιογράμμων ἐκτελεῖ κλειστὴν μετατροπὴν $M_1M_2M_3M_1$ ἀποτελουμένην ἀπὸ τὰς ἑξῆς τρεῖς ἀνοικτὰς μετατροπάς: Τὴν ἀδιάθερμον συμπίεσιν M_1M_2· τὴν ἰσόογκον M_2M_3· καὶ τὴν ἰσόθερμον ἀποτόνωσιν M_3M_1 (σχ. 21). Δίδονται:

a. Ἡ πίεσις p_1 Kg ἀνὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστὸν (Kg/cm²) καὶ ἡ θερμοκρασία t_1°C, εἰς τὴν κορυφὴν M_1 τοῦ διαγράμματος.

b. Ὁ βαθμὸς συμπιέσεως

$$\frac{v_2}{v_1} = \lambda.$$

c. Τὸ εἰδικὸν βάρος δ_0, ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου τοῦ ἀερίου εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0$°C καὶ τὴν πίεσιν p_1· καὶ

d. Ὁ συντελεστὴς c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν καὶ ὁ λόγος $\gamma = \frac{c'}{c}$.

Ζητοῦνται:

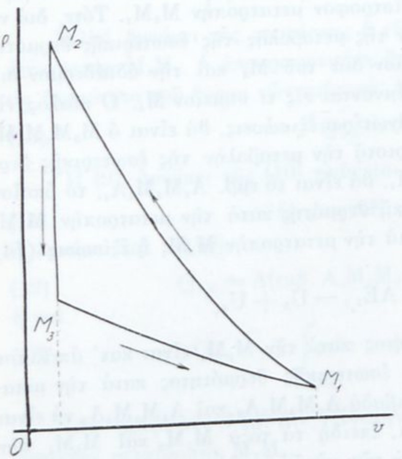
α. Αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν M_1, M_2, M_3 τοῦ διαγράμματος.

β. Τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου.

γ. Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ἢ ἀποδίδεται ὑπὸ τῆς μάζης τοῦ ἀερίου κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου.

δ. Ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τῆς μάζης τοῦ ἀερίου κατὰ τὴν ἰσόογκον μετατροπὴν M_2M_3· καὶ

ε. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ ἀνωτέρω ἀποτελέσματα διὰ μᾶζαν ἀερίου ἑνὸς γραμμαρίου, ὅταν εἶναι $p_1 = 1$, $t_1 = 15^\circ$ καὶ $\lambda = \frac{1}{32}$.



Σχ. 21

α. Ἐκ τῶν συντεταγμένων τῆς κορυφῆς M_1 δίδονται τὰ p_1, t_1. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ υ_1, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 (1 + at_1), \tag{1}$$

ὅπου υ_0 εἶναι ὁ εἰδικὸς ὄγκος εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0^\circ C$ καὶ εἰς τὴν πίεσιν p_1. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἀντὶ τοῦ υ_0 δίδεται τὸ δ_0, εἶναι $\upsilon_0 = \frac{1}{\delta_0}$· ὅθεν

$$\upsilon_1 = \frac{1}{\delta_0}(1 + at_1) = \frac{t_1 + 273}{273\,\delta_0}. \tag{2}$$

Αἱ συντεταγμέναι λοιπὸν τῆς κορυφῆς M_1 εἶναι

$$M_1 \left[\upsilon_1 = \frac{t_1 + 273}{273\,\delta_0} = \frac{T_1}{273\,\delta_0},\ p_1,\ t_1\right]. \tag{3}$$

Ἔστωσαν υ_2, p_2, t_2, αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς M_2.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \lambda$, ἔχομεν

$$\upsilon_2 = \lambda \upsilon_1 = \lambda \frac{t_1 + 273}{273\,\delta_0} = \lambda \frac{T_1}{273\,\delta_0}. \tag{4}$$

Ἐπειδὴ ἡ M_1M_2 εἶναι ἀδιάθερμος, ἔχομεν

(5) $$p_2 \upsilon_2^{\gamma} = p_1 \upsilon_1^{\gamma},$$

ὅθεν

(6) $$p_2 = p_1 \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_1}{\lambda^{\gamma}}.$$

Ἡ (5) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$p_2 \upsilon_2 \upsilon_2^{\gamma-1} = p_1 \upsilon_1 \upsilon_1^{\gamma-1},$$

ἢ

$$RT_2 \upsilon_2^{\gamma-1} = RT_1 \upsilon_1^{\gamma-1}.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

(7) $$T_2 = T_1 \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{\lambda^{\gamma-1}},$$

ἢ

(8) $$t_2 = (T_2 - 273)^{0}C.$$

Αἱ συντεταγμέναι λοιπὸν τῆς κορυφῆς M_2 εἶναι

(9) $$M_2 \left[\upsilon_2 = \lambda \frac{t_1 + 273}{273\, \delta_0},\ p_2 = \frac{p_1}{\lambda^{\gamma}},\ t_2 = \left(\frac{t_1 + 273}{\lambda^{\gamma-1}} - 273\right)^{0}C \right].$$

Τέλος διὰ τὴν κορυφὴν M_3 δίδονται ὁ ὄγκος $\upsilon_3 = \upsilon_2$ καὶ ἡ θερμοκρασία $t_3 = t_1$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πίεσιν p_3, γράφομεν, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα M_1, M_3 κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας ἰσοθέρμου,

$$p_3 \upsilon_3 = p_1 \upsilon_1$$

καὶ

(10) $$p_3 = p_1 \frac{\upsilon_1}{\upsilon_3} = p_1 \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = p_1 \frac{1}{\lambda}.$$

β. Τὸ ἔργον E τῶν πιέσεων κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $M_1M_2M_3M_1$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ κύκλος διαγράφεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τὸ ἔργον E εἶναι ἀρνητικόν. Ἤτοι τὸ ἀέριον, διὰ νὰ διαγράψῃ τὸν κύκλον, ἀπορροφᾷ ἔργον. Ἔχομεν

$$E = E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1},$$

ἤ. ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἰσοόγκου M_2M_3 εἶναι $E_{2,3} = 0$,

(11) $$E = E_{1,2} + E_{3,1}.$$

Τὸ ἔργον $E_{1,2}$ ὑπολογίζομεν διὰ τοῦ τύπου (8) τῆς § 19· δέον ὅμως νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ τύπος οὗτος δίδει τὸ ἔργον τῆς ἀδιαθέρμου διὰ 1 kg ἀερίου. Ὥστε διὰ P kg ἀερίου θὰ ἔχωμεν

$$E_{1,2} = P \frac{p_1 \upsilon_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1} \right] = - P \frac{p_1 \upsilon_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right],$$

ἢ

$$E_{1,2} = - P \frac{p_1 \upsilon_1}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1 \right].$$

Διὰ νὰ ἐκφράζεται τὸ ἔργον τοῦτο εἰς kgm πρέπει τὸ υ νὰ ἐκφράζεται εἰς κυβικὰ μέτρα καὶ τὸ p εἰς χιλιόγραμμα ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον. Καὶ τὸ μὲν υ ἐκφράζεται εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους εἰς m^3· τὸ p ὅμως ἐκφράζεται εἰς kg/cm^2. Δέον λοιπὸν εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῶν ἔργων ἀντὶ p kg/cm^2 νὰ γράψωμεν 10334 p kg/m^2. Οὕτω ἔχομεν τελικῶς

$$(12) \qquad E_{1,2} = -10334\, P\, \frac{p_1 v_1}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1\right] \text{kgm.}$$

Ἐφαρμόζοντες ἀντιστοίχως τὸν τύπον (6) τῆς § 18, εὑρίσκομεν διὰ τὸ ἔργον $E_{3,1}$ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (11),

$$(13) \qquad E_{3,1} = 10334\, P\, p_1 v_1 \log \frac{v_1}{v_3} = 10334\, P\, p_1 v_1 \log \frac{1}{\lambda}.$$

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾷ τὸ ἀέριον διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, εἶναι δυνάμει τῶν (11), (12) καὶ (13)

$$(14) \qquad E = -10334\, P\left[\frac{p_1 v_1}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1\right) - p_1 v_1 \log \frac{1}{\lambda}\right] \text{kgm.}$$

γ. Ἐπειδὴ τὸ ἀέριον, ὅταν διαγράφῃ τὸν κύκλον $M_1M_2M_3M_1$, ἀπορροφᾷ ἔργον, θὰ ἀποδίδῃ θερμότητα (§ 16). Ἤτοι δυνάμεθα νὰ προβλέψωμεν ὅτι αἱ θερμίδες

$$Q = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,1}$$

εἶναι ἀρνητικαί. Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου M_1M_2 εἶναι $Q_{1,2} = 0$, θὰ ἔχωμεν

$$(15) \qquad Q = Q_{2,3} + Q_{3,1}.$$

Διὰ τὴν ἰσόογκον μετατροπὴν M_2M_3, ἐπειδὴ διὰ τὸ τέλειον ἀέριον ἡ εἰδικὴ θερμότης c εἶναι σταθερὰ (§ 13), δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (2) τῆς § 2· ἤτοι ἔχομεν

$$Q_{2,3} = cP\,(T_3 - T_2) = cP\,(T_1 - T_2),$$

ἤ, δυνάμει τῆς ἐκφράσεως (7) τοῦ T_2

$$(16) \qquad Q_{2,3} = cPT_1\left(1 - \frac{1}{\lambda^{\gamma-1}}\right) = -cPT_1\left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1\right).$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς θερμίδας $Q_{3,1}$, τὰς ὁποίας ἀπορροφᾷ τὸ ἀέριον κατὰ τὴν ἰσόθερμον μετατροπὴν M_3M_1, στηριζόμεθα εἰς τὴν πρότασιν δ τῆς § 16. Δηλαδὴ εἶναι

$$Q_{3,1} = AE_{3,1} = \frac{1}{427} E_{3,1},$$

ἤ, δυνάμει τῆς ἐκφράσεως (13) τοῦ $E_{3,1}$,

$$(17) \qquad Q_{3,1} = \frac{10334}{427}\, P\, p_1 v_1 \log \frac{1}{\lambda}.$$

Καὶ αἱ ὁλικαὶ θερμίδες Q, τὰς ὁποίας ἀποδίδει τὸ ἀέριον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, εἶναι δυνάμει τῶν (15), (16) καὶ (17)

$$(18) \qquad Q = -P\left[cT_1\left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1\right) - \frac{10334}{427}\, p_1 v_1 \log \frac{1}{\lambda}\right] \text{Cal.}$$

Ἂς γράψωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὸν κύκλον $M_1M_2M_3M_1$, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

(19) $$Q = AE.$$

Τὴν ἐξίσωσιν ταύτην πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαὶ (18) καὶ (14) τῶν Q καὶ E. Οὕτω, προκειμένου περὶ ἀριθμητικῶν ἐφαρμογῶν, ἔχομεν καὶ μίαν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐξαγομένων.

δ. Ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_3 εἶναι ἴση καὶ μὲ ἀντίθετον σημεῖον πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν M_3M_2. Ἀλλὰ διὰ τὴν τελευταίαν ταύτην μετατροπήν, ἐπειδὴ $U_3 = U_1$, ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος εἶναι, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἐν τῇ § 16, ἴση πρὸς τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου $E_{2,1}$. Εἶναι λοιπὸν

(20) $$U_2 - U_3 = U_2 - U_1 = AE_{2,1} = \frac{10334}{427} P \frac{p_1 v_1}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1 \right) \text{Cal.}$$

Καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν M_2M_3 εἶναι

(21) $$U_3 - U_2 = -\frac{10334}{427} P \frac{p_1 v_1}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1 \right) \text{Cal.}$$

ε. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀντὶ τοῦ τυχόντος τελείου ἀερίου ἔχομεν μᾶζαν ἑνὸς γραμμαρίου ἀέρος. Τὴν ὑπόθεσιν ταύτην δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, διότι, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 13, δυνάμεθα νὰ ἐξομοιώσωμεν τὸν ἀέρα πρὸς τέλειον ἀέριον· καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν διὰ τὸν ἀέρα τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα. Εἶναι δὲ διὰ τὸν ἀέρα (§ 13),

$$\delta_0 = 1{,}293, \quad v_0 = \frac{1}{\delta_0} = \frac{1}{1{,}293} = 0{,}773 \text{ m}^3, \quad c = 0{,}17, \quad \gamma = 1{,}4.$$

Ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος εἶναι (§ 13) $p = 1{,}0334$ kg/cm². Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ὅμως λαμβάνομεν συνήθως $p_1 = 1$ kg/cm². Εἰς τὴν κατάστασιν M_1 ἔχομεν $P = \frac{1}{1000}$ kg ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος θερμοκρασίας 15°C. Ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ἀέρος εἰς τὴν κατάστασιν M_1 εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (1)

$$v_1 = 0{,}773 \, \frac{288}{273} = 0{,}815 \text{ m}^3.$$

Εἰς τὴν κορυφὴν M_2 εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (6)

$$p_2 = p_1 \frac{1}{\lambda^\gamma} = 32^\gamma = 32^{1,4}.$$

ἔχομεν

$$\log 32^{1,4} = 1{,}4 \log 32 = 1{,}4 \times 1{,}50515 = 2{,}10721$$

καὶ

$$32^{1,4} = 128.$$

Ὅθεν

$$p_2 = 128 \text{ kg/cm}^2.$$

Ὁμοίως δυνάμει τοῦ τύπου (7) ἔχομεν

$$T_2 = T_1 \frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} = T_1 \, 32^{\gamma-1} = T_1 \frac{32^\gamma}{32} = T_1 \frac{128}{32} = 4T_1,$$

ἢ

$$T_2 = 4 . 288 = 1152^\circ \text{K}$$

καὶ
$$t_2 = 1152 - 273 = 879^\circ C.$$

Ὁ εἰδικὸς ὄγκος εἰς τὴν κορυφὴν M_2 εἶναι
$$\upsilon_2 = \frac{1}{32}\upsilon_1 = \frac{0{,}815}{32} = 0{,}02548\ m^3.$$

Εἰς τὴν κορυφὴν M_3 ἔχομεν
$$t_3 = t_1 = 15^\circ C, \qquad \upsilon_3 = \upsilon_2 = 0{,}02548\ m^3$$
καὶ δυνάμει τοῦ τύπου (10)
$$p_3 = p_1 \frac{1}{\lambda} = 32\ kg/cm^2.$$

Τὸ ἔργον $E_{1,2}$ εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (12), ἐπειδὴ ἀντὶ $p = 1{,}0334$ ἐλάβομεν $p_1 = 1$,
$$E_{1,2} = -10000\frac{1}{1000}\frac{0{,}815}{0{,}4}(4-1) = -61{,}125\ kgm.$$

Τὸ ἔργον $E_{3,1}$ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (13),
$$E_{3,1} = 10000\frac{1}{1000}\,0{,}815\log 32.$$

Ἐκ τῶν πινάκων τῶν Νεπερείων λογαρίθμων εὑρίσκομεν
$$\log 32 = 3{,}46574$$
οὕτω εἶναι
$$E_{3,1} = 8{,}15 \times 3{,}46574 = 28{,}245\ kgm.$$

Καὶ τὸ ὁλικὸν ἔργον E κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου εἶναι
$$E = E_{1,2} + E_{3,1} = -61{,}125 + 28{,}245 = -32{,}880\ kgm.$$

Αἱ θερμίδες $Q_{2,3}$ ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ τύπου (16)
$$Q_{2,3} = -cPT_1\left(\frac{1}{\lambda^{\gamma-1}} - 1\right) = -0{,}17\,\frac{1}{1.000}\cdot 288\,(4-1)$$
ἤτοι εἶναι

(22) $$Q_{2,3} = -0{,}14688\ Cal.$$

καὶ αἱ θερμίδες $Q_{3,1}$ ὑπολογίζονται ἐκ τοῦ τύπου (17), ἤτοι εἶναι
$$Q_{3,1} = \frac{10.000}{427}\cdot\frac{1}{1.000}\,0{,}815.3{,}46574 = 0{,}06615\ Cal.$$

Καὶ ἡ ὁλικὴ θερμότης Q εἶναι
$$Q = Q_{2,3} + Q_{3,1} = -0{,}14688 + 0{,}06615 = -0{,}08073\ Cal.$$

Ὑπολογίζοντες τὰς θερμίδας Q ἐκ τοῦ E, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (19) εὑρίσκομεν
$$Q = AE = \frac{-32{,}880}{427} = -0{,}0770.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο προσεγγίζει ἐπαρκῶς πρὸς τὸ $-0{,}08073$. Ἡ μικρὰ διαφορὰ πρέπει νὰ ἀποδοθῇ εἰς τὸ ὅτι τὸ A δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς $\frac{1}{427}$ (§ 16), εἰς τὸ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ c δὲν εἶναι ἀκριβῶς 0,17 κ.ο.κ.

Τέλος ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τῆς θεωρουμένης μάζης ἀέρος κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_3 εἶναι, δυνάμει τῶν τύπων (20), (21),

$$U_3 - U_2 = AE_{1,2} = -\frac{61{,}125}{427} = -0{,}143 \text{ Cal}$$

ἤτοι ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τῆς θεωρουμένης μάζης τοῦ ἀέρος ἐλαττοῦται κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_3 κατὰ 143 μικρὰς θερμίδας. Ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα πτῶσις τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος $(U_3 - U_2)$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὰς θερμίδας $Q_{2,3}$ τοῦ τύπου (22), αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται κατὰ τὴν μετατροπὴν M_2M_3. Τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις (10, § 16) τοῦ Clausius κατὰ μῆκος τῆς ἰσοόγκου μετατροπῆς M_2M_3, ἐπειδὴ εἶναι $E_{2,3} = \int_{M_2M_3} p dv = 0$, γράφεται $Q_{2,3} = U_3 - U_2$. Ἡ μικρὰ διαφορὰ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν $Q_{2,3} = -0{,}14688$ καὶ $U_3 - U_2 = -0{,}143$ δέον νὰ ἀποδοθῇ καὶ εἰς τὴν κατὰ προσέγγισιν ληφθεῖσαν τιμὴν τοῦ $c = 0{,}17$ καὶ τοῦ $A = \frac{1}{427}$.

2. Μᾶζα ἀέρος 10 γραμμαρίων διαγράφει τὸν κύκλον τοῦ Carnot $M_1M_2M_3M_4M_1$ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (σχ. 22). Αἱ θερμοκρασίαι τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων εἶναι

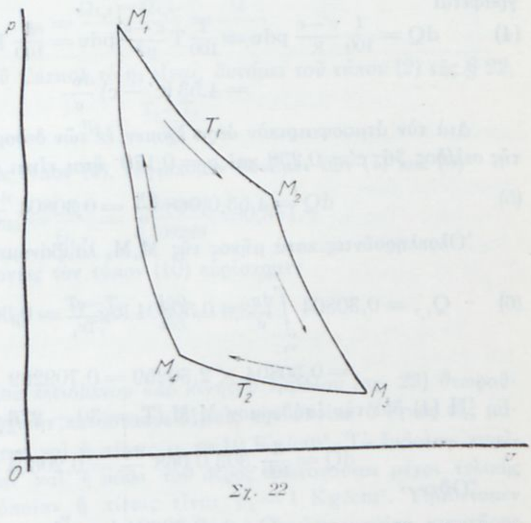
$t_1 = 180°C$,

$t_2 = 30°C$

καὶ ὁ βαθμὸς ἀποτονώσεως τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2 εἶναι $\frac{v_2}{v_1} = 10$.

Ζητεῖται τὸ ἔργον E, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου.

Ὁ ἀὴρ θὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον.



Σχ. 22

Τὸ ἔργον E ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (22) τῆς § 20. Ἐπειδὴ ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὸ ἔργον διὰ 1 kg ἀερίου, διὰ τὰ 10 gr $= \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ kg, θὰ ἔχωμεν

$$(1) \qquad E = \frac{1}{100} R (T_1 - T_2) \log \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{100} \frac{p_0 v_0}{T_0} (T_1 - T_2) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Διὰ νὰ ἐκφράζεται τὸ E εἰς χιλιογραμμόμετρα πρέπει τὸ v_0 νὰ ἐκφράζεται εἰς m^3 καὶ τὸ p_0 εἰς kg ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον. Ἔχομεν, δυνάμει τῆς (6) τῆς § 13,

$$R = \frac{p_0 v_0}{T_0} = \frac{10334.0,773}{273} = 29,27.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι

$$T_1 - T_2 = t_1 - t_2 = 150$$

καὶ

$$\log \frac{v_2}{v_1} = \log 10 = 2,30259.$$

Ἡ (1) γράφεται λοιπὸν

(2) $$E = \frac{1}{100} \times 29,27 \times 150 \times 2,30259 = 101,095 \text{ Kgm}.$$

Τὸ ἔργον E ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἐμμέσως διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν θερμίδων $Q = Q_{1,2} - Q_{4,3}$ καὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἰσοδυνάμου (§ 16)

(3) $$E = \frac{1}{A} Q = 427\, Q.$$

Τὰς θερμίδας $Q_{1,2}$ ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (8) τῆς § 14. Ὁ τύπος οὗτος διὰ τὴν ἰσόθερμον M_1M_2 ($T = T_1 = 180 + 273 = 453°K$, $dT = 0$) γράφεται

(4) $$dQ = \frac{1}{100} \frac{c'-c}{R} p dv = \frac{1}{100} T \frac{c'-c}{pv} p dv = \frac{1}{100} T_1 (c'-c) \frac{dv}{v} =$$

$$= 4,53\,(c'-c) \frac{dv}{v}.$$

Διὰ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα ἔχομεν, ἐκ τῶν δεδομένων ὑπὸ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 36, $c' = 0,238$ καὶ $c = 0,170$· ἤτοι εἶναι $c' - c = 0,068$· καὶ

(5) $$dQ = 4,53.0,068 \frac{dv}{v} = 0,30804 \frac{dv}{v}.$$

Ὁλοκληροῦντες κατὰ μῆκος τῆς M_1M_2 λαμβάνομεν

(6) $$Q_{1,2} = 0,30804 \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = 0,30804 \log \frac{v_2}{v_1} = 0,30804 \log 10 =$$

$$= 0,30804 \times 2,30259 = 0,709289 \text{ Cal}.$$

Ἡ (4) διὰ τὴν ἰσόθερμον M_4M_3 ($T_2 = 30 + 273 = 303°K$) γράφεται

$$dQ = \frac{1}{100}.303.0,068 \frac{dv}{v} = 0,20604 \frac{dv}{v}.$$

Ὅθεν

$$Q_{4,3} = 0,20604 \log \frac{v_3}{v_4}.$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς σχέσεως (11) τῆς § 20, εἶναι

$$\frac{v_3}{v_4} = \frac{v_2}{v_1} = 10\cdot$$

ὅθεν

$$Q_{4,3} = 0,20604 \log 10 = 0,20604.2,30259 = 0,474425 \text{ Cal}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν

(7) $Q = Q_{1,2} - Q_{4,3} = 0,709289 - 0,474425 = 0,234864$ Cal.

Καὶ τὸ ἔργον E εἶναι, δυνάμει τῆς (3),

(8) $E = 427\,Q = 427 \times 0,234864 = 100,287$ Kgm.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ ἐκ τῶν δύο ἐξαγομένων E=101,095 Kgm καὶ E=100,287 Kgm τῶν τύπων (2) καὶ (8) εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ οὕτω ἔχομεν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐξαγομένων. Ἡ μικρὰ διαφορὰ 101,095—100,287= 0,808 Kgm ὀφείλεται εἰς τὰς κατὰ προσέγγισιν ληφθείσας τιμὰς τῶν A, c′, c, R. Τοῦτο διακρίνομεν ἐὰν π. χ. θελήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ A ἐκ τῆς σχέσεως (2) τῆς § 16, λαμβάνοντες c′=0,238, c=0,170 καὶ R=29,27· θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1}{A} = \frac{R}{c'-c} = \frac{29,27}{0,068} = 430,4$$

ἀντὶ τῆς τιμῆς $\frac{1}{A} = 427$, τὴν ὁποίαν ἐδέχθημεν ἀνωτέρω.

Ἕτερον κριτήριον διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐξαγομένων θὰ ἔχωμεν, ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ κύκλου. Δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 21 ἔχομεν

(9) $$\eta_\theta = \frac{Q_{1,2} - Q_{4,3}}{Q_{1,2}} = \frac{Q}{Q_{1,2}}.$$

Διὰ τὸν κύκλον τοῦ Carnot τὸ η_θ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (2) τῆς § 22,

(10) $$\eta_\theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (9), εὑρίσκομεν δυνάμει τῶν (7) καὶ (6)

$$\eta_\theta = \frac{Q}{Q_{1,2}} = \frac{0,234864}{0,709289} = 0,381.$$

Ὁμοίως ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (10) εὑρίσκομεν

$$\eta_\theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{150}{453} = 0,331.$$

3. Ἐντὸς κυλίνδρου κλειομένου ὑπὸ κινητοῦ ἐμβόλου (σχ. 23) θεωροῦμεν μᾶζαν ἀέρος εἰς ἀρχικὴν κατάστασιν M_1, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ὄγκος τῆς μάζης εἶναι $V_1 = 200$ λίτρα καὶ ἡ πίεσις $p_1 = 10$ Kg/cm². Τὸ ἔμβολον κινεῖται λόγῳ τῶν πιέσεων καὶ ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος ἀποτονοῦται μέχρι τελικῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ πίεσις εἶναι $p_2 = 1$ Kg/cm². Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ἔργον τῆς ἀποτονώσεως ἀπορροφᾶται διὰ τὴν λειτουργίαν κινητῆρος ἰσχύος 2 ἵππων. Αἱ τριβαὶ τοῦ ἐμβόλου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐν γένει αἱ τριβαὶ τοῦ κινητῆρος παραλείπονται.

Ζητοῦνται:

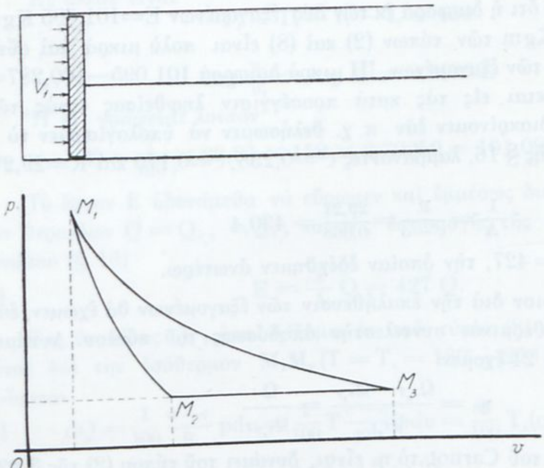
α. Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητήρ, ἐὰν ἡ ἀποτόνωσις γίνεται ἀδιαθέρμως (M_1M_2).

β. Ἐπὶ πόσον χρόνον θὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητήρ, ἐὰν ἡ ἀποτόνωσις γίνεται ἰσοθέρμως (M_1M_3).

γ. Διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ἰσοθέρμου ἀποτονώσεως πρέπει νὰ προσδώσωμεν εἰς τὴν μᾶζαν τοῦ ἀέρος θερμίδας Q. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ θερμίδες αὗται.

δ. Ἐὰν ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ τέλος τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως εἶναι $t_2 = 15°C$, ποῖος εἶναι ὁ εἰδικὸς ὄγκος υ_1 εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν M_1 καὶ ποῖον εἶναι τὸ βάρος P τῆς θεωρηθείσης μάζης ἀέρος;

ε. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς M_1M_3 καὶ κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθλίπτου μετατροπῆς M_2M_3.



Σχ. 23

α. Ἔστω M_1M_2 ἡ ἀδιάθερμος ἀποτόνωσις καὶ $E_{1,2}$ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν ταύτης καὶ τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ κινητῆρος. Ἐπειδὴ ὁ κινητὴρ εἰς 1″ ἀπορροφᾷ ἔργον $2 \times 75 = 150$ Kgm, ὁ χρόνος καθ᾽ ὃν θὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητὴρ ἀπορροφῶν ἔργον $E_{1,2}$ θὰ εἶναι

(1) $$\tau'' = \frac{E_{1,2}}{150}.$$

Τὸ ἔργον $E_{1,2}$ ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (11) τῆς 19· ὁ τύπος οὗτος διὰ βάρος P kg γράφεται

(2) $$E_{1,2} = P\,\frac{p_1\upsilon_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $P\upsilon_1 = V_1$ εἶναι ὁ ὁλικὸς ὄγκος εἰς τὴν κατάστασιν M_1, ἤτοι εἶναι $P\upsilon_1 = 200$ λίτρα $= \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$ m³. Ἐπίσης εἶναι

$$p_1 = 10 \text{ kg/cm}^2 = 10 \times 10000 \text{ kg/m}^2 \text{ καὶ } \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{10}.$$

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν διὰ τὸν ἀέρα $\gamma = 1{,}4$ (πίναξ σελίδος 36), θὰ εἶναι $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{0{,}4}{1{,}4}$. Ὁ τύπος (2) γράφεται λοιπὸν

$$E_{1,2} = \frac{100000}{0{,}4} \times \frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}}\right] \text{ kgm.}$$

Ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\ 10^{\frac{0,4}{1,4}} = \frac{0,4}{1,4} = 0,28571$$

καὶ

$$10^{\frac{0,4}{1,4}} = 1,931.$$

Ὅθεν

$$1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = 1 - \frac{1}{1,931} = 1 - 0,5178 = 0,4822.$$

Ἐντεῦθεν

(3) $$E_{1,2} = \frac{100.000}{0,4} \times \frac{1}{5} \times 0,4822 = 24110 \text{ Kgm.}$$

Ὅταν λοιπὸν ἡ ἀποτόνωσις γίνεται ἀδιαθέρμως, ὁ κινητὴρ θὰ λειτουργήσῃ ἐπὶ χρόνον τ'', ὁ ὁποῖος δυνάμει τῆς (1) εἶναι

(4) $$\tau'' = \frac{24110}{150} = 160'',7.$$

β. Ἔστω M_1M_3 ἡ ἰσόθερμος ἀποτόνωσις καὶ $E_{1,3}$ τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς. Τὸ ἔργον τοῦτο ὑπολογίζομεν ἐκ τοῦ τύπου (8) τῆς § 18· ἤτοι εἶναι

$$E_{1,3} = Pp_1v_1 \log \frac{p_1}{p_3} = p_1V_1 \log \frac{p_1}{p_3} = 100000 \times \frac{1}{5} \times \log 10 \text{ Kgm.}$$

Ἤ

$$E_{1,3} = 100000 \times \frac{1}{5} \times 2,30259 = 46051,8 \text{ Kgm.}$$

Καὶ ὁ χρόνος, καθ' ὃν θὰ λειτουργήσῃ ὁ κινητήρ, ἀπορροφῶν τὸ ἔργον τοῦτο, εἶναι

$$\tau_1'' = \frac{46051,8}{150} = 307''.$$

γ. Παραστήσωμεν διὰ $Q_{1,3}$ τὰς θερμίδας, τὰς ὁποίας θὰ ἀπορροφήσῃ ἡ μᾶζα τοῦ ἀέρος διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς M_1M_3. Τὸ $Q_{1,3}$ ὑπολογίζομεν δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 16· ἤτοι εἶναι

$$Q_{1,3} = AE_{1,3} = \frac{1}{427} \times 46051,8 = 107,850 \text{ Cal.}$$

δ. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν T_1°K, εἰς τὴν κατάστασιν M_1 Διὰ τὴν ἀδιάθερμον M_1M_2, ἔχομεν

$$p_1v_1^{\gamma} = p_2v_2^{\gamma} \cdot \quad \text{καὶ} \quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Γράφοντες

$$p_1v_1v_1^{\gamma-1} = p_2v_2v_2^{\gamma-1},$$

ἢ

$$R_1T_1v_1^{\gamma-1} = R_2T_2v_2^{\gamma-1},$$

εὑρίσκομεν

$$T_1 = T_2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} = T_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_2.10^{\frac{0,4}{1,4}}$$

Εἶναι λοιπὸν

$$T_1 = 1,931\,(15 + 273) = 1,931 \times 288 = 556°,128\text{K}.$$

Ἐπειδὴ ἤδη γνωρίζομεν τὴν εἰδικὴν πίεσιν p_1 καὶ τὴν θερμοκρασίαν T_1 εἰς τὴν κατάστασιν M_1, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ_1 ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως

$$p_1\upsilon_1 = RT_1,$$

ὅπου διὰ τὸν ἀέρα εἶναι $R = 29{,}27$· ἤτοι εἶναι

$$\upsilon_1 = \frac{RT_1}{p_1} = \frac{29{,}27 \times 556{,}128}{10 \times 10334} = 0{,}1575 \text{ m}^3.$$

Τὸ βάρος P τῆς θεωρουμένης μάζης εὑρίσκομεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$P\upsilon_1 = V_1 = \frac{200}{1000} = 0{,}2 \text{ m}^3.$$

Εἶναι λοιπὸν

(5) $$P = \frac{0{,}2}{0{,}1575} = 1{,}270 \text{ Kg}.$$

Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ P καὶ κατ᾽ ἄλλον τρόπον καὶ νὰ ἔχωμεν οὕτω ἐπαλήθευσιν τῶν ἀποτελεσμάτων.

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰς θερμοκρασίας $t_2 = 15^0C$, $t_3 = t_1 = 556 - 273 = 283^0C$, αἱ θερμίδες $Q_{2,3}$, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπὴν M_2M_3, εἶναι

(6) $$Q_{2,3} = Pc'(t_3 - t_2) = P \times 0{,}238 \times 268.$$

Ἐξ ἄλλου τὸ $Q_{2,3}$ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (10) τῆς § 16, ἤτοι τῆς ἐξισώσεως τοῦ Clausius

(7) $$Q_{2,3} = AE_{2,3} + U_3 - U_2.$$

Τὸ ἔργον $E_{2,3}$, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς M_2M_3 τὸ p_2 εἶναι σταθερόν, εἶναι

$$E_{2,3} = P\int_{M_2M_3} p d\upsilon = Pp_2(\upsilon_3 - \upsilon_2) = p_2(V_3 - V_2).$$

Τὸν ὄγκον V_3 τῆς μάζης εἰς τὴν κορυφὴν M_3 ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$p_3V_3 = p_1V_1 \quad \text{καὶ} \quad V_3 = \frac{p_1}{p_3}V_1 = 10\,V_1 = 10 \times \frac{1}{5} = 2\text{m}^3.$$

Τὸν ὄγκον V_2 εἰς τὴν κορυφὴν M_2 ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$p_2V_2^{\gamma} = p_1V_1^{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_1 10^{\frac{1}{1,4}}.$$

Ἔχομεν

$$\text{λογ}\, 10^{\frac{1}{1,4}} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}71428$$

καὶ

$$10^{\frac{1}{1,4}} = 5{,}179.$$

Ὅθεν

$$V_2 = \frac{1}{5} \times 5{,}179 = 1{,}036 \text{ m}^3.$$

Ἔχομεν λοιπόν, ἐπειδὴ $p_2 = 10334$

$$E_{2,3} = 10334\,(2 - 1{,}036) = 10334 \times 0{,}964.$$

Ἤτοι εἶναι

$$E_{2,3} = 9962 \text{ Kgm}.$$

Ἐξ ἄλλου δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 24 εἶναι

$$U_3 - U_2 = -AE_{2,1} = AE_{1,2}.$$

Οὕτω ἡ (3) γράφεται

$$Q_{2,3} = AE_{2,3} + U_3 - U_2 = AE_{2,3} + AE_{1,2} =$$

$$= \frac{1}{427}(9962 + 24110) = \frac{34072}{427} = 79.8 \text{ Cal}.$$

Καὶ δυνάμει τῆς (2)

(8) $$P = \frac{79{,}8}{0{,}238 \times 268} = \frac{79{,}8}{63{,}784} = 1{,}239 \text{ Kg}.$$

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ P καὶ τῆς εὑρεθείσης διὰ τοῦ τύπου (5) εἶναι μικρὰ καὶ ὀφείλεται εἰς τοὺς κατὰ προσέγγισιν ὑπολογισμοὺς καὶ τὰς παραδοχὰς διὰ τὰς σταθερὰς c′, c, R.

ε. Ἡ μεταβολὴ τῆ τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου M_1M_3 εἶναι (§ 17)

(9) $$S_3 - S_1 = \frac{1}{T_1}\int_{M_2M_3} dQ = \frac{Q_{2,3}}{T_1} = \frac{79{,}8}{556} = 0{,}143.$$

Ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς M_2M_3 εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 17,

$$S_3 - S_2 = \log p_3^{c} v_3^{c'} - \log p_2^{c} v_2^{c'} = \log\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{c}\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{c'}.$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $p_3 = p_2$,

$$S_3 - S_2 = \log\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{c'} = c\log\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{\frac{c'}{c}} = c\log\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{\gamma}.$$

Ἔχομεν

$$\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^{\gamma} = \left(\frac{2}{1{,}036}\right)^{1,4} = 1{,}93050^{1,4}$$

καὶ

$$\lambda o\gamma\, 1{,}93050^{1,4} = 1{,}4\ \lambda o\gamma\, 1{,}93050 = 1{,}4 \times 0{,}28569 = 0{,}399996.$$

Ἐντεῦθεν

$$1{,}93050^{1,4} = 2{,}512.$$

Ἔχομεν

$$\log 2{,}512 = \frac{\lambda o\gamma\, 2{,}512}{\lambda o\gamma\,(e = 2{,}718)} = \frac{0{,}39999}{0{,}4343} = 0{,}921.$$

Ὅθεν

(10) $$S_3 - S_2 = 0{,}921\, c = 0{,}921 \times 0{,}170 = 0{,}15657.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἔπρεπε νὰ εἶναι

$$S_3 - S_2 = S_3 - S_1,$$

καθ' ὅσον, δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 17, ἡ τροπὴ ἔχει τὴν ἰδίαν τιμὴν εἰς τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2 τῆς ἀδιαθέρμου M_1M_2· ἤτοι εἶναι $S_1 = S_2$. Ἡ μικρὰ διαφορὰ τῶν ἐξαγομένων τῶν μεταβολῶν $S_3 - S_1$ καὶ $S_3 - S_2$ ἐκ τῶν τύπων (9) καὶ (10) δέον νὰ ἀποδοθῇ καὶ εἰς τὰς κατὰ προσέγγισιν ληφθείσας τιμὰς τῶν c', A, ἐκ τῶν ὁποίων ὑπελογίσθη τὸ $Q_{2,3}$ καὶ τοῦ c, ἐκ τοῦ ὁποίου ὑπελογίσθη τὸ $S_3 - S_2$.

Τὸ ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $S_3 - S_2 = S_3 - S_1$ ἠδυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (5) τῆς § 17 κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς μετατροπῆς $M_1M_3M_2M_1$. Ἔχομεν, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου εἶναι $\int\limits_{M_1M_2} \frac{dQ}{T} = 0$,

$$\int\limits_{c} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1M_3} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_3M_2} \frac{dQ}{T} = (S_3 - S_1) + (S_2 - S_3) = 0,$$

ἤτοι εἶναι

$$S_3 - S_1 = -(S_2 - S_3) = S_3 - S_2.$$

4. Θεωροῦμεν θερμομετρικὴν κλίμακα θ, ἡ ὁποία συνδέεται μετὰ τῆς κλίμακος τῶν ἀπολύτων θερμοκρασιῶν διὰ τῆς συναρτήσεως

$$T = \lambda e^{\mu\theta}. \tag{1}$$

Δίδεται ὅτι τὰ σημεῖα $\theta_0 = 0^\circ$ καὶ $\theta_{100} = 100^\circ$ τῆς κλίμακος θ συμπίπτουν μὲ τὰ σημεῖα $t_0 = 0^\circ$ καὶ $t_{100} = 100^\circ$ τῆς ἑκατονταβάθμου κλίμακος.

Ζητοῦνται:

α. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ σταθεραὶ λ, μ τῆς συναρτήσεως (1).

β. Ἐὰν ἡ ἔκφρασις τοῦ dQ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν θ, υ εἶναι

$$dQ = a d\theta + b d\upsilon, \tag{2}$$

νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ a, b τῆς ἐξισώσεως (2).

γ. Θεωροῦμεν τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν M_0M_1 τελείου ἀερίου, ὅπου εἶναι $M_0\,[\upsilon_0,\ \theta_0 = 0^\circ]$ καὶ $M_1\,[\upsilon_1,\ \theta_1 = -100^\circ]$. Δεδομένου ὅτι εἶναι $\gamma = \frac{c'}{c} = 1{,}4$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ βαθμὸς $\lambda = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0}$ τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως M_0M_1.

α. Ἐπειδὴ διὰ $\theta = 0$ εἶναι $t = 0$ ἢ $T = 273$ καὶ διὰ $\theta = 100$ εἶναι $t = 100$ ἢ $T = 100 + 273 = 373$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1).

$$273 = \lambda e^0 = \lambda \tag{3}$$

$$373 = \lambda e^{100\mu}. \tag{4}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (4) $\lambda = 273$, λαμβάνομεν

$$273\, e^{100\mu} = 373.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

$$e^{100\mu} = \frac{373}{273}$$

$$100\,\mu\ \lambda o\gamma\ e = \lambda o\gamma\ 373 - \lambda o\gamma\ 273$$

καὶ

$$\mu = \frac{\lambda o\gamma\ 373 - \lambda o\gamma\ 273}{100\ \lambda o\gamma\ 2{,}718} = 0{,}003121.$$

Αἱ τιμαὶ λοιπὸν τῶν σταθερῶν τῆς συναρτήσεως (1) εἶναι

(5) $$\lambda = 273,\ \mu = 0{,}003121.$$

β. Ἄς γράψωμεν τὴν ἔκφρασιν (8, § 14) τοῦ dQ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια, ἤτοι τὴν ἔκφρασιν

(6) $$dQ = c dT + \frac{c'-c}{R}\, p dv.$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

(7) $$dT = \lambda\mu e^{\mu\theta}\, d\theta.$$

Παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (7) ὅτι ἡ συνθήκη $dT = 0$ συνεπάγεται καὶ τὴν $d\theta = 0$· διὰ τὰς ἰσοθέρμους λοιπὸν μετατροπὰς ($dT = 0$) ἐκ τῶν τύπων (2) καὶ (6) ἔχομεν

(8) $$dQ = b\, dv = \frac{c'-c}{R}\, p dv.$$

Ἤτοι εἶναι

(9) $$b = \frac{c'-c}{R}\, p.$$

Ἡ (2), δυνάμει τῶν (7), (9), γράφεται

(10) $$dQ = a\, \frac{1}{\lambda\mu e^{\mu\theta}}\, dT + \frac{c'-c}{R}\, p dv.$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (6) καὶ (10) λαμβάνομεν

$$a\,\frac{1}{\lambda\mu e^{\mu\theta}} = c.$$

Ὅθεν

$$a = \lambda\mu c e^{\mu\theta} = 273.0{,}003121\ c e^{0{,}003121\theta}$$

Οἱ συντελεσταὶ λοιπὸν a καὶ b τῆς (2) εἶναι

(11) $$a = 0{,}852\ c e^{0{,}003121\theta}, \qquad b = \frac{c'-c}{R}\, p.$$

γ. Διὰ τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν ($dQ = 0$) ἡ (2) γράφεται

$$a d\theta + b dv = 0.$$

Ὅθεν

(12) $$dv = -\frac{a}{b}\, d\theta = -\frac{0{,}852\ c e^{0{,}003121\theta}}{(c'-c)p}\, R d\theta.$$

Τὸν ὅρον $\frac{R}{p}$ τῆς (12) ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως τῶν τελείων ἀερίων $pv = RT$· ἔχομεν

$$\frac{R}{p} = \frac{v}{T} = \frac{v}{\lambda e^{0{,}003121\theta}}.$$

Ἡ (12) γράφεται λοιπὸν

$$d\upsilon = -\frac{0{,}852\, c e^{0{,}003121\,\theta}}{(c'-c)} \frac{\upsilon}{273\, e^{0{,}003121\,\theta}} d\theta.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$\frac{(c'-c)}{c} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{0{,}852}{273} d\theta = -0{,}003121\, d\theta,$$

ἢ

$$(\gamma - 1) \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -0{,}003121\, d\theta.$$

Ὁλοκληροῦντες κατὰ μῆκος τῆς M_0M_1, εὑρίσκομεν

$$(\gamma - 1) \log \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = -0{,}003121\,(\theta_1 - \theta_0) = 0{,}003121\,(\theta_0 - \theta_1) = 0{,}003121.100.$$

Ὅθεν

$$\log \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = \frac{0{,}003121.100}{0{,}4} = 0{,}78025.$$

Εἶναι λοιπὸν

$$\lambda = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_0} = 2{,}182.$$

5. Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μετατροπὰς τελείου ἀερίου ἀναφερόμεθα εἰς σύστημα δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων (OQ, OE)· ἐκ τούτων εἰς μὲν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων OQ λαμβάνομεν τὰ ἀπορροφούμενα ποσὰ θερμότητος Q κατὰ τὰς μετατροπάς, εἰς δὲ τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων OE λαμβάνομεν τὰ ἀντίστοιχα ἀποδιδόμενα ἔργα E. Δίδεται τὸ σημεῖον $M_0\,(Q_0, E_0)$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἴς τινα ἀρχικὴν κατάστασιν $A_0\,(\upsilon_0, p_0)$.

Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ μετατροπαὶ τοῦ τελείου ἀερίου, τῶν ὁποίων τὰ διαγράμματα εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων OQ, OE εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

Ἔστω γενικῶς εἰς τὸ σύστημα (OQ, OE)

(1) $$E = \lambda Q + \mu$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία εἶναι τὸ διάγραμμα μετατροπῆς τινὸς τελείου ἀερίου. Διαφορίζοντες λαμβάνομεν

(2) $$dE = \lambda dQ.$$

Ἄς λάβωμεν τὴν ἔκφρασιν (1, § 16) τοῦ dQ, ἤτοι τὴν ἔκφρασιν

(3) $$dQ = c dT + A p d\upsilon.$$

Ἔχομεν (§ 8),

(4) $$dE = p d\upsilon.$$

Ἡ (2), δυνάμει τῶν (3), (4), γράφεται

(5) $$p d\upsilon = \lambda (c dT + A p d\upsilon).$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $p\upsilon = RT$ ἔχομεν

(6) $$p d\upsilon + \upsilon dp = R dT.$$

Λύοντες ὡς πρὸς dT καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν

$$p d\upsilon = \lambda \left(c \frac{p d\upsilon + \upsilon dp}{R} + A p d\upsilon \right).$$

θέτοντες $A = \frac{c' - c}{R}$ (§ 16) εὑρίσκομεν

$$pdv = \frac{\lambda c}{R} pdv + \frac{\lambda c}{R} vdp + \lambda \frac{c' - c}{R} pdv.$$

Μετὰ τὰς ἀναγωγὰς λαμβάνομεν

$$\lambda cvdp + (\lambda c' - R)\, pdv = 0\text{·}$$

ἢ

$$\frac{dp}{p} + \frac{\lambda c' - R}{\lambda c} \frac{dv}{v} = 0. \tag{7}$$

Ὁλοκληροῦντες τὴν (7) εὑρίσκομεν

$$pv^{\frac{\lambda c' - R}{\lambda c}} = C. \tag{8}$$

Ἡ ἐξίσωσις (8) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς μετατροπῆς εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα εἰς τὸ σύστημα OQ, OE εἶναι ἡ εὐθεῖα (1). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (8) παριστᾷ εἰς τὸ σύστημα τοῦ Clapeyron καμπύλην ἀνάλογον πρὸς ἀδιάθερμον. Τὴν καμπύλην ταύτην δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § (19).

6. Μᾶζα ὑδρογόνου 500 γραμμαρίων ἀποτονοῦται ἰσοθέρμως ἐκ τῆς πιέσεως p_1 εἰς τὴν πίεσιν p_2 (Kg/cm²). Τὸ ὑδρογόνον θὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον. Τὸ εἰδικὸν βάρος του, ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ὑδρογόνου εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0°C$ καὶ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, εἶναι $\delta_0 = 0{,}09$ Kg.

Ζητοῦνται:

α. Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῆς μάζης τοῦ ὑδρογόνου κατὰ τὴν ἰσόθερμον ἀποτόνωσιν.

β. Ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς τῆς μάζης τοῦ ὑδρογόνου κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην.

γ. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν τὰ ἀνωτέρω ἀποτελέσματα, ὅταν εἶναι $p_1 = 10$, $p_2 = 1$ καὶ ὅταν ἡ θερμοκρασία τῆς ἰσοθέρμου ἀποτονώσεως εἶναι $t = 100°C$· καὶ

δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ σταθερὰ R τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $pv = RT$ τοῦ ὑδρογόνου.

α. Ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους θερμότητος εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν (T, p) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (7) τῆς § 14, ἤτοι τοῦ τύπου

$$dQ = c'dT - \frac{c' - c}{R} vdp. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ἡ μετατροπὴ εἶναι ἰσόθερμος, θὰ εἶναι $dT = 0$· ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὸ ὑδρογόνον ἐξομοιοῦται πρὸς τέλειον ἀέριον, ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσίς του θὰ εἶναι

$$pv = RT. \tag{2}$$

Ὅθεν

$$\frac{v}{R} = \frac{T}{p}. \tag{3}$$

Ἡ (1) γράφεται λοιπὸν

$$dQ = -(c'-c)\,T\,\frac{dp}{p}.$$

Ὁλοκληροῦντες, λαμβάνομεν

(4) $$Q'_{1,2} = -(c'-c)T\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = (c'-c)T\int_{p_2}^{p_1}\frac{dp}{p} = (c'-c)T\log\frac{p_1}{p_2}.$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸν τύπον (1) τὸ υ εἶναι ὁ εἰδικὸς ὄγκος, ὁ τύπος (4) δίδει τὰς θερμίδας, τὰς ὁποίας ἀπορροφᾷ μᾶζα ἑνὸς χιλιογράμμου ὑδρογόνου. Ὅθεν διὰ μᾶζαν 500 γραμμαρίων, ἤτοι ἡμίσεος χιλιογράμμου θὰ ἔχωμεν

(5) $$Q_{1,2} = \frac{1}{2}(c'-c)T\log\frac{p_1}{p_2}.$$

β. Ἡ στοιχειώδης τροπὴ dS δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2) τῆς § 17, ἤτοι εἶναι

(6) $$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ T εἶναι σταθερόν, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει καὶ τῆς (5),

(7) $$S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q_{1,2}}{T} = \frac{1}{2}(c'-c)\log\frac{p_1}{p_2}.$$

γ. Τὴν διαφορὰν (c′— c) εἰς τοὺς τύπους (5) καὶ (7), προσδιορίζομεν ἐκ τῶν δεδομένων διὰ τὸ ὑδρογόνον ὑπὸ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 36· ἔχομεν

(8) $$c'-c = 3{,}409 - 2{,}417 = 0{,}992.$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

(9) $$\log\frac{p_1}{p_2} = \log 10 = 2{,}30259 \quad \text{καὶ} \quad T = 100 + 273 = 373^{\circ}K.$$

Ἐκ τῶν τύπων (5) καὶ (7) λαμβάνομεν, δυνάμει τῶν (8), (9),

(10) $$Q_{1,2} = \frac{1}{2}.0{,}992.373.2{,}30259 = 426{,}045 \text{ Cal.}$$

(11) $$S_2 - S_1 = \frac{1}{2}.0{,}992.2{,}30259 = 1{,}142.$$

δ. Τὴν σταθερὰν R τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως pυ=RT τοῦ ὑδρογόνου ὑπολογίζομεν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐκτεθέντων διὰ τὸν τύπον (6) τῆς § 13· ἔχομεν

(12) $$R = \alpha p_0 v_0 = \frac{1}{273}.10334.\frac{1}{0{,}09} = 420{,}6.$$

Ὅθεν ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ ὑδρογόνου, θεωρουμένου ὡς τελείου ἀερίου, εἶναι

(13) $$p\upsilon = 420{,}6\ T,$$

ὅπου ἡ εἰδικὴ πίεσις p ἐκφράζεται εἰς χιλιόγραμμα ἀνὰ τετραγωνικὸν μέτρον καὶ ὁ εἰδικὸς ὄγκος υ εἰς κυβικὰ μέτρα.

Δυνάμει τοῦ τύπου (9) τῆς § 16 εἶναι

(14) $$\frac{c'-c}{R} = A = \frac{1}{427}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπ' εὐθείας τὴν διαφορὰν $c'-c$. Ἔχομεν

(15) $$c'-c = AR = \frac{1}{427} \cdot 420{,}6 = 0{,}985.$$

Ἡ μικρὰ διαφορὰ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὴν διαφορὰν $c'-c$ ἐκ τῶν τύπων (8) καὶ (15) ὀφείλεται εἰς τὴν κατὰ προσέγγισιν ληφθεῖσαν τιμὴν τοῦ A (§ 16) καὶ εἰς τὸ ὅτι τὸ ὑδρογόνον μόνον κατὰ προσέγγισιν ἐξομοιοῦται πρὸς τέλειον ἀέριον.

7. Ἀερόστατον χωρητικότητος 10 λίτρων περικλείει μᾶζαν 50 γραμμαρίων ἀέρος εἰς τὴν πίεσιν p_0 καὶ τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0^{\circ}C$. Ἀνοίγοντες καὶ κλείοντες ἀκαριαίως στρόφιγγα, ἐπιτυγχάνομεν νὰ γίνῃ ἀκαριαία ἀποτόνωσις τῆς μάζης τοῦ ἀέρος διὰ τῆς ἀπομακρύνσεως μικρᾶς ποσότητος ταύτης ἐκ τοῦ ἀεροστάτου. Λόγῳ τοῦ ἀκαριαίου τῆς μετατροπῆς ἡ ἀποτόνωσις θὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς ἀδιάθερμον. Ἡ πτῶσις τῆς πιέσεως κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην, μετρηθεῖσα διά τινος μανομέτρου, εὑρέθη $\Delta p = 0{,}1$ τῆς κανονικῆς ἀτμοσφαίρας. Ζητεῖται ἡ ἀντίστοιχος πτῶσις ΔT τῆς θερμοκρασίας τῆς μάζης τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ ἀεροστάτου. Ὁ ἀὴρ θὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον.

Ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους θερμότητος εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν (T, υ) δίδεται διὰ τὰ τέλεια ἀέρια ὑπὸ τοῦ τύπου (7) τῆς § 14, ἤτοι ὑπὸ τοῦ τύπου

(1) $$dQ = c'dT - \frac{c'-c}{R}\,\upsilon dp.$$

Ἐπειδὴ ἡ μετατροπὴ εἶναι ἀδιάθερμος, εἶναι $dQ = 0$· ἐξ ἄλλου εἶναι (§ 16) $\frac{c'-c}{R} = A = \frac{1}{427}$. Ὁ τύπος (1) γράφεται λοιπὸν ὡς ἑξῆς:

(2) $$c'dT = A\upsilon dp.$$

Εἰς τὸν τύπον (2) δυνάμεθα ἀντὶ τῶν ἀπειροστῶν dp, dT νὰ θεωρήσωμεν τὰς πολὺ μικρὰς μεταβολὰς Δp καὶ ΔT. Ἔχομεν, ἐπειδὴ τὸ Δp εἶναι ἐλάττωσις τῆς πιέσεως,

(3) $$\Delta p = -0{,}1 \times 10334 \text{ Kg/m}^2.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ 50 γραμμάρια ἀέρος καταλαμβάνουν ὄγκον 10 λίτρων $= \frac{1}{100}$ m^3, ὁ εἰδικὸς ὄγκος, ἤτοι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει μᾶζα ἑνὸς χιλιογράμμου, θὰ εἶναι

(4) $$\upsilon = \frac{1000}{100.50} = \frac{1}{5} \text{ m}^3.$$

Ἡ (2) δυνάμει τῶν (3), (4) γράφεται

$$c'\Delta T = -\frac{1}{427} \cdot \frac{1}{5} \cdot 0{,}1.10334.$$

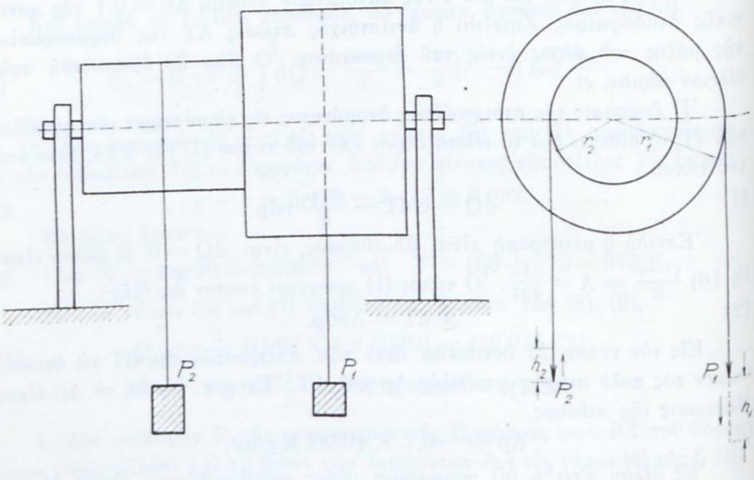
Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 36 ἔχομεν $c' = 0{,}238$· ὅθεν

$$\Delta T = -\frac{1033{,}4}{427.5.0{,}238} = -\frac{1033{,}4}{508{,}13} = -2^{\circ}{,}03.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΑΙ ΔΥΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

25. *Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου.* Ἄς θεωρήσωμεν μηχανισμόν τινα, ἔστω τὸ βαροῦλκον τοῦ σχήματος (24). Εἰς τὰ δύο κυλινδρικὰ τύμπανα τοῦ βαρούλκου διατίθενται δύο νήματα κατ' ἀντιθέτους φορὰς οὕτως, ὥστε, ὅταν κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ βαρούλκου τυλίσσεται τὸ ἓν νῆμα, νὰ ἐκτυλίσσεται τὸ ἕτερον. Εἰς τὰ ἄκρα τῶν νημάτων ἀναρτῶνται τὰ βάρη P_1, P_2. Τὸ βάρος P_2 ἀποτελεῖ τὴν ὠφέλιμον ἀντίστασιν. Τὸ βάρος P_1,



Σχ. 24

τὸ ὁποῖον ἐπὶ παραδείγματι ἀντικαθιστᾷ τὴν δύναμιν τῆς χειρός μας, διὰ τῆς ὁποίας θὰ ὑπερνικήσωμεν τὴν ἀντίστασιν P_2, ἀποτελεῖ τὴν κινητήριον δύναμιν. Ἐκτὸς τῆς ἀντιστάσεως P_2 ἔχομεν καὶ ἄλλας ἀντιστάσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑπερνικήσωμεν διὰ τῆς κινητηρίου δυνάμεως. Αἱ ἀντιστάσεις αὗται ὀφείλονται ἐν γένει εἰς τὰς τριβὰς καὶ ἀποτελοῦν μειονέκτημα, διότι διὰ τὴν ὑπερνίκησιν αὐτῶν καταναλίσκεται μέρος τῆς κινητηρίου δυνάμεως· διὰ τοῦτο τὰς ἀντιστάσεις αὐτὰς ὀνομάζομεν παθητικὰς ἀντιστάσεις, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ὠφέλιμον ἀντίστασιν, τῆς ὁποίας ἡ ὑπερνίκησις ἀποτελεῖ τὸν τελικὸν σκοπὸν τοῦ μηχανισμοῦ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸν θεωρηθέντα μηχανισμὸν τοῦ βαρούλκου αἱ τριβαὶ εἶναι ἐλάχισται οὕτως, ὥστε νὰ δυνάμεθα ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος νὰ τὰς παραλείψωμεν. Τότε ἡ συνθήκη ἰσορροπίας τοῦ συστήματος δίδεται, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τῆς σχέσεως

(1) $$P_1r_1 = P_2r_2.$$

Ὅταν ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται καὶ τὸ σύστημα ἠρεμῇ, λέγομεν εἰς τὴν στατικήν, ὅτι τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Ἂς παραστήσωμεν διὰ (Σ) κατάστασίν τινα ἰσορροπίας τοῦ συστήματος. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν κινητήριον δύναμιν P_1 κατ' ἀπείρως μικρὰν ποσότητα dP, τὸ σύστημα θὰ ὑποστῇ στοιχειώδη μετατόπισιν κατὰ τὴν φορὰν τῆς P_1 καὶ θὰ μεταβῇ ἐκ τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας (Σ) εἰς τὴν ἀπείρως γειτονικὴν κατάστασιν ἰσορροπίας (Σ'). Ἔστωσαν $d\varphi$ ἡ γωνία τῆς στοιχειώδους περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου καὶ h_1, h_2 αἱ μετατοπίσεις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων P_1 καὶ P_2. Ἔχομεν

(2) $$h_1 = r_1 d\varphi, \quad h_2 = r_2 d\varphi.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $d\varphi$, θὰ ἔχωμεν δυνάμει τῶν (2)

(3) $$P_1h_1 = P_2h_2.$$

Ἀλλὰ $P_1h_1 = E_\varkappa$ εἶναι τὸ ἔργον τῆς κινητηρίου δυνάμεως P_1· τὸ ἔργον τοῦτο προσδίδεται εἰς τὸν μηχανισμὸν διὰ τὴν λειτουργίαν του καὶ ὀνομάζεται κινητήριον ἔργον. Τὸ γινόμενον $P_2h_2 = E_\omega$ εἶναι τὸ ἔργον τῆς ὠφελίμου ἀντιστάσεως, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ὠφέλιμον ἔργον. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὰ P_1h_1, P_2h_2 διὰ τῶν ἴσων των $E_\varkappa$, E_ω, λαμβάνομεν

(4) $$E_\varkappa = E_\omega.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἀρχὴν τοῦ Γαλιλαίου:

α. *Ἐὰν ἔκ τινος καταστάσεως ἰσορροπίας οἱουδήποτε μηχανισμοῦ μεταβῶμεν εἰς ἑτέραν κατάστασιν ἰσορροπίας διὰ κινήσεων ἄνευ τριβῶν, τὸ κινητήριον ἔργον ἰσοῦται πρὸς τὸ ὠφέλιμον ἔργον.*

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μηχανισμοῦ ἐνεργοῦν πλείονες δυνάμεις κινητήριοι καὶ πλείονες ὠφέλιμοι ἀντιστάσεις, τὰ $E_\varkappa$ καὶ E_ω τοῦ τύπου (4) θὰ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα τῶν ἔργων τῶν κινητηρίων δυνάμεων καὶ τῶν ὠφελίμων ἀντιστάσεων.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ κινητήριον ἔργον $E_\varkappa$ εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον προσδίδεται εἰς τὸν μηχανισμόν, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾷ ὁ μηχανισμός, διὰ νὰ λειτουργήσῃ· τὸ ἔργον τοῦτο θὰ θεωροῦμεν θετικόν. Ἀντιθέτως τὸ ὠφέλιμον ἔργον E_ω εἶναι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει ὁ μηχανισμός· τὸ ἔργον τοῦτο θὰ θεωροῦμεν ἀρνητικόν. Δυνάμει τῆς παρατηρήσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (4) καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

(5) $$\Sigma E = 0,$$

ὅπου εἰς τὸ ἄθροισμα τὰ ἔργα θὰ λαμβάνωνται μὲ τὰ σημεῖα των, ἤτοι τὸ κινητήριον ἔργον μὲ τὸ σημεῖον (+) καὶ τὸ ὠφέλιμον ἔργον μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον. Αἱ δυνάμεις P_1, P_2 (σχ. 24) καὶ γενικῶς αἱ κινητήριοι δυνάμεις καὶ αἱ ὠφέλιμοι ἀντιστάσεις τῶν μηχανισμῶν εἶναι ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (5) δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Γαλιλαίου καὶ ὡς ἑξῆς:

β. Ἐὰν ἔκ τινος καταστάσεως ἰσορροπίας οἱουδήποτε μηχανισμοῦ μεταβῶμεν εἰς ἑτέραν κατάστασιν ἰσορροπίας διὰ κινήσεων ἄνευ τριβῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, κατὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ μηχανισμοῦ ἐκ τῆς μιᾶς καταστάσεως εἰς τὴν ἑτέραν, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν.

Ὑπὸ τὴν διατύπωσιν ταύτην ἡ ἀρχὴ τοῦ Γαλιλαίου εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου.

26. Κινητικὴ ἐνέργεια. Ἂς ὑπενθυμίσωμεν ἐκ τῆς μηχανικῆς τὸν ὁρισμὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ὡς καὶ τὸ θεώρημα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας.

Ἔστω ὑλικὸν σημεῖον Α μάζης m, τὸ ὁποῖον κατά τινα στιγμὴν t ἔχει ταχύτητα $\overrightarrow{AV}$. Ὀνομάζομεν ῥύμην τοῦ σημείου Α κατὰ τὴν στιγμὴν t τὸν θετικὸν ἀριθμὸν mv^2, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου. Τὸ ἥμισυ τῆς ῥύμης τοῦ σημείου Α ὀνομάζομεν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ σημείου. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ W τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ σημείου Α, θὰ εἶναι

$$W = \frac{1}{2}\, mv^2. \tag{1}$$

Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Α, κινούμενον ἐπὶ τυχούσης καμπυλογράμμου τροχιᾶς κέκτηται ἐπιτάχυνσιν $\overrightarrow{A\Gamma}$, τῆς ὁποίας αἱ συνιστῶσαι κατὰ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν πρώτην κάθετον τῆς τροχιᾶς ἔστωσαν αἱ $\overrightarrow{A\Gamma_\varepsilon}$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma_\varkappa}$ *. Ἡ $\overrightarrow{A\Gamma_\varepsilon}$ εἶναι ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον $\frac{dv}{dt}$ καὶ ἡ $\overrightarrow{A\Gamma_\varkappa}$ εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον $\frac{v^2}{R}$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τροχιᾶς. Ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς φυσικῆς ἡ δύναμις $\overrightarrow{AF}$, ἡ ὁποία ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α προσδίδει εἰς αὐτὸ ἐπιτάχυνσιν $\overrightarrow{A\Gamma}$, ἔχει τὸ ἴδιον στήριγμα, τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὴν $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\overrightarrow{AF} = m\overrightarrow{A\Gamma}. \tag{2}$$

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἄλλως τε ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τῆς δυναμικῆς. Αἱ προβολαὶ $\overrightarrow{AF_\varepsilon}$, $\overrightarrow{AF_\varkappa}$ τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}$ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν πρώτην κάθετον τῆς τροχιᾶς ὀνομάζονται ἀντιστοίχως ἐπιτρόχιος καὶ κεντρομόλος δύναμις. Δυνάμει τῆς (2), εἶναι

$$\overrightarrow{AF_\varepsilon} = m\overrightarrow{A\Gamma_\varepsilon}\,, \quad \overrightarrow{AF_\varkappa} = m\overrightarrow{A\Gamma_\varkappa}\,. \tag{3}$$

---

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 91.

Ἐπειδὴ τὰ μέτρα τῆς ἐπιτροχίου καὶ τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι $\frac{dυ}{dt}$, $\frac{υ^2}{R}$, τὰ μέτρα τῆς ἐπιτροχίου καὶ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως θὰ εἶναι

(4) $$F_ε = m\frac{dυ}{dt}, \quad F_κ = m\frac{υ^2}{R}.$$

Ἄς θεωρήσωμεν στοιχειώδη μετατόπισιν ds τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του καὶ ἄς παραστήσωμεν διὰ dE τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}$ κατὰ τὴν στοιχειώδη ταύτην μετατόπισιν. Ἐπειδὴ ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν $\overrightarrow{AF_ε}$, $\overrightarrow{AF_κ}$ τῆς $\overrightarrow{AF}$, ἡ $\overrightarrow{AF_κ}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιάν, τὸ ἔργον τῆς $AF_κ$ θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν· ὅθεν τὸ dE ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τῆς $\overrightarrow{AF_ε}$ κατὰ τὴν στοιχειώδη μετατόπισιν ds τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της. Ἀλλὰ ἡ $\overrightarrow{AF_ε}$ ἔχει στήριγμα τὴν ἐφαπτομένην τῆς τροχιᾶς· ὅθεν εἶναι *

(5) $$dE = F_ε\, ds = m\frac{dυ}{dt} ds = m dυ \frac{ds}{dt} = mυ dυ.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $υdυ = d\left(\frac{1}{2}υ^2\right)$, ἡ (5) γράφεται

(6) $$dE = d\left(\frac{1}{2}mυ^2\right).$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ἐνεργοῦν πλείονες δυνάμεις $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{AF_2}$,...$\overrightarrow{AF_η}$· δυνάμει τῆς διαλυτικῆς ἀρχῆς τῆς μηχανικῆς ἡ ἐπιτάχυνσις $\overrightarrow{AΓ}$, τὴν ὁποίαν θὰ ἀποκτήσῃ τὸ σημεῖον Α ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων τούτων, εἶναι καθ' ἑκάστην στιγμὴν ἴση πρὸς τὸ γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν ἐπιταχύνσεων $\overrightarrow{AΓ_1}$, $\overrightarrow{AΓ_2}$,...$\overrightarrow{AΓ_η}$, τὰς ὁποίας θὰ ἀπέκτα τὸ σημεῖον, ἐὰν εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν καὶ ἐπενήργουν ἐπ' αὐτοῦ χωριστὰ ἑκάστη τῶν δυνάμεων $\overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{AF_2}$,...$\overrightarrow{AF_η}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ dE εἶναι τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῆς συνισταμένης τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου ἐνεργουσῶν δυνάμεων. Ἡ ἐξίσωσις (6) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Κατὰ τὴν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῆς συνισταμένης τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου ἐνεργουσῶν δυνάμεων, διά τινα στοιχειώδη μετατόπισιν τοῦ σημείου, ἰσοῦται πρὸς τὴν στοιχειώδη μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σημείου, κατὰ τὴν στοιχειώδη ταύτην μετατόπισιν αὐτοῦ.

Ἄς παρακολουθήσωμεν ἤδη τὴν πεπερασμένην μετατόπισιν τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ἔκ τινος ἀρχικῆς καταστάσεως A_1, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης ἔχει μέτρον $υ_1$, εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν A_2, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης ἔχει μέτρον $υ_2$. Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν (6) μεταξὺ τῶν καταστάσεων A_1, A_2, τὸ πρῶτον μέλος θὰ εἶναι τὸ ἔργον Ε τῆς συνισταμένης τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου Α ἐνεργουσῶν δυνάμεων κατὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ σημείου Α ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του ἐκ τῆς θέσεως A_1 εἰς τὴν A_2· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

(7) $$E = \frac{1}{2}mυ_2^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2.$$

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, Ι, 1939, σελ. 210.

Ἡ ἐξίσωσις (7) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

β. Κατὰ τὴν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου τὸ ἔργον τῆς συνισταμένης τῶν ἐπὶ τοῦ σημείου ἐνεργουσῶν δυνάμεων, διά τινα μετατόπισιν τοῦ σημείου, ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σημείου κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γνωστὴ εἰς τὴν μηχανικὴν καὶ ὡς θεώρημα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας. Ἂς θεωρήσωμεν ἀντὶ ἑνὸς ὑλικοῦ σημείου στερεὸν σύστημα σημείων, δηλαδὴ σύστημα σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀμοιβαῖαι ἀποστάσεις διατηροῦνται ἀναλλοίωτοι. Τότε ἐκτὸς τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐνεργοῦν ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ συστήματος καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς τὰς ἀμοιβαίας δράσεις τῶν σημείων τοῦ συστήματος. Αἱ δυνάμεις αὗται, συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς ἰσότητος τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως, εἶναι ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Εἰς τὴν μηχανικὴν ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν τὸ σύστημα ὑλικῶν σημείων εἶναι στερεόν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος, δι' οἱανδήποτε μετατόπισιν αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Διὰ στερεὸν λοιπὸν σύστημα ὑλικῶν σημείων ἡ ἐξίσωσις (7) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\Sigma E_\xi = \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2, \tag{8}$$

ὅπου ΣE_ξ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Ἡ ἐξίσωσις (8) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

γ. Κατὰ τὴν κίνησιν στερεοῦ ὑλικοῦ συστήματος ἡ μεταβολὴ τῆς ὁλικῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος, διά τινα μετατόπισιν αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων τῶν ἐνεργουσῶν ἐπὶ τοῦ συστήματος κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην.

Ἀντιθέτως, ἐὰν τὸ σύστημα τῶν ὑλικῶν σημείων δὲν εἶναι στερεόν, ἐὰν δηλαδὴ αἱ ἀμοιβαῖαι ἀποστάσεις τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ συστήματος μεταβάλλωνται, ὅπως συμβαίνει π. χ. εἰς ῥευστὴν μᾶζαν, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (8) θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Sigma E_\xi + \Sigma E_\sigma = \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2, \tag{9}$$

ὅπου ΣE_ξ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ ΣE_σ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων. Ἡ ἐξίσωσις (9) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν :

δ. Κατὰ τὴν κίνησιν ὑλικοῦ συστήματος ἡ μεταβολὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος, διά τινα μετατόπισιν αὐτοῦ, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γενικὴ καὶ περιλαμβάνει τὴν πρότασιν γ. Τῷ ὄντι, ἐὰν τὸ σύστημα εἶναι στερεόν, θὰ εἶναι $\Sigma E_\sigma = 0$ καὶ ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (9) θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν (8).

Προκειμένου νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα εἰς τοὺς μηχανισμοὺς παρατηροῦμεν ὅτι οὗτοι, ἐν γένει, εἶναι στερεὰ ὑλικὰ συστήματα *. Τὴν λειτουργίαν λοιπὸν τῶν μηχανισμῶν διέπει ἡ ἐξίσωσις (8). Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην αἱ δυνάμεις, τῶν ὁποίων τὰ ἔργα ἐν τῷ συνόλῳ δίδουν τὸν ὅρον ΣE_ξ, ἀνήκουν εἰς τρεῖς ὁμάδας δυνάμεων, ἤτοι· α. Τὴν ὁμάδα τῶν κινητηρίων δυνάμεων, ὅπως εἶναι ἐπὶ παραδείγματι ἡ δύναμις τῆς χειρός, ἡ δύναμις τοῦ ἀνέμου, αἱ πιέσεις τοῦ ἀτμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἀτμομηχανῆς. β. Τὴν ὁμάδα τῶν ὠφελίμων ἀντιστάσεων, τῶν ὁποίων ἡ ὑπερνίκησις ἀποτελεῖ τὸν τελικὸν σκοπὸν τῆς μηχανῆς (§ 25) καὶ γ. Τὴν ὁμάδα τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων, ὅπως εἶναι αἱ τριβαί, αἱ κρούσεις κ.τ.λ. Ἡ ἐξίσωσις (8), ἐπειδὴ τὰ ἔργα τῶν κινητηρίων δυνάμεων θεωροῦμεν θετικά, ἐνῷ τὰ ἔργα τῶν ὠφελίμων καὶ παθητικῶν ἀντιστάσεων θεωροῦμεν ἀρνητικὰ (§ 25), γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(10) $$E_\varkappa - E_\omega - E_\pi = \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2,$$

ὅπου διὰ $E_\varkappa$, E_ω, E_π παριστῶμεν ἀντιστοίχως τὰ ἀθροίσματα τῶν ἔργων τῶν κινητηρίων δυνάμεων, τῶν ὠφελίμων καὶ τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸν μηχανισμὸν τοῦ σχήματος (24). Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ κινητήριος δύναμιν P_1 καὶ ἡ ὠφέλιμος ἀντίστασις P_2 ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (1) τῆς § 25, ἤτοι τὴν σχέσιν

(11) $$P_1 r_1 = P_2 r_2,$$

καὶ ὅτι τὸ σύστημα εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ (§ 25). Ἀντὶ ὅμως, ὅπως ἐκάμομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, νὰ αὐξήσωμεν τὴν κινητήριον δύναμιν P_1 κατὰ dP, ἂς αὐξήσωμεν τὴν P_1 κατὰ πεπερασμένην ποσότητα P'. Τότε ἡ κινητήριος δύναμις θὰ εἶναι $P_1' = P_1 + P'$ καὶ ἀντὶ τῆς ἰσότητος (1, § 25) θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνισότητα

(12) $$(P_1 + P')\, r_1 > P_2 r_2.$$

Τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν πλέον τῆς σταθερᾶς δυνάμεως P' θὰ κινηθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς, ἤτοι ὁ μηχανισμὸς θὰ τεθῇ εἰς λειτουργίαν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κίνησις γίνεται ἄνευ τριβῆς καὶ ἂς παρακολουθήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος, ἡ ὁποία νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς γωνίαν στροφῆς τοῦ τυμπάνου ἴσην πρὸς φ. Αἱ μετατοπίσεις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῆς κινητηρίου δυνάμεως καὶ τῆς ὠφελίμου ἀντιστάσεως θὰ εἶναι, δυνάμει τῶν τύπων (2) τῆς § 25,

(13) $$h_1 = r_1 \varphi, \quad h_2 = r_2 \varphi\cdot$$

καὶ τὰ ἔργα τῶν δυνάμεων τούτων κατὰ τὰς μετατοπίσεις h_1, h_2 τῶν σημείων ἐφαρμογῆς των θὰ εἶναι

(14) $$E_\varkappa = (P_1 + P')h_1, \quad E_\omega = P_2 h_2.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, δυνάμει τῶν (11), (13), εἶναι

(15) $$P_1 h_1 = P_2 h_2\cdot$$

---

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, Ι, 1939, σελ. 194.

ὅθεν ἔχομεν ἐκ τῶν (14)

(16) $$P_1h_1 + P'h_1 > P_2h_2,$$

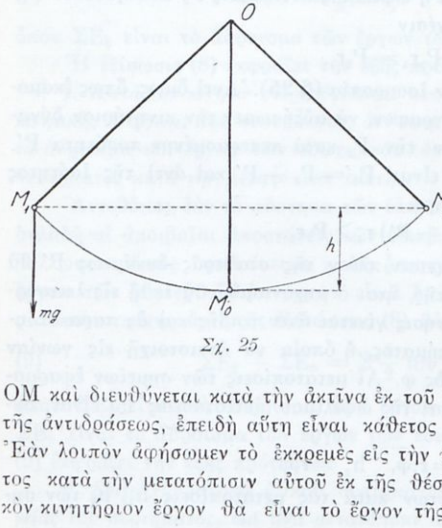
ἢ

(17) $$E_\varkappa > E_\omega .$$

Ὁ τύπος (17) μᾶς λέγει ὅτι, ἐνῷ εἰς τὸν μηχανισμὸν προσδίδομεν κινητήριον ἔργον $E_\varkappa$, ὁ μηχανισμὸς ἀποδίδει ἔργον E_ω μικρότερον τοῦ $E_\varkappa$. Ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται λοιπὸν ὅτι ἔχομεν ἀπώλειαν ἔργου. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι, ἐνῷ ὁ μηχανισμὸς εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν, πρὸ τῆς ἐπιδράσεως καὶ τῆς προσθέτου δυνάμεως P′, ἦτο ἐν ἠρεμίᾳ, δηλαδὴ εἶχε ταχύτητα μηδέν, εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν, δηλαδὴ μετὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἔργων $E_\varkappa$, E_ω ἔχει ἀποκτήσει ταχύτητά τινα, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον ἔστω υ. Δυνάμει δὲ τῆς ἐξισώσεως (10), ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ὅτι εἶναι $E_\pi = 0$ καὶ ὅτι εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν ὁ μηχανισμὸς ἦτο ἐν ἠρεμίᾳ, δηλαδὴ ἦτο $\upsilon_1 = 0$, θὰ ἔχωμεν

(18) $$E_\varkappa - E_\omega = \Sigma \frac{1}{2} m\upsilon^2 .$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ μᾶς λέγει ὅτι, ὅταν κατὰ τὴν λειτουργίαν συστήματος ἔχωμεν ἀπώλειαν ἔργου, ἔχομεν ἀντιστοίχως αὔξησιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας. Ἔργον λοιπὸν καὶ κινητικὴ ἐνέργεια εἶναι δύο μορφαὶ ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ μετασχηματίζωνται ἀμοιβαίως.



Σχ. 25

Παράδειγμα μετασχηματισμοῦ ἔργου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ τἀνάπαλιν ἔχομεν εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς (σχ. 25). Ἐπὶ τοῦ ὑλικοῦ σημείου μάζης m ἐνεργοῦν τὸ βάρος mg καὶ ἡ ἀντίδρασις τοῦ συνδέσμου, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὸ νῆμα OM καὶ διευθύνεται κατὰ τὴν ἀκτῖνα ἐκ τοῦ M πρὸς τὸ O. Τὸ ἔργον λοιπὸν τῆς ἀντιδράσεως, ἐπειδὴ αὐτὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιάν, εἶναι μηδέν. Ἐὰν λοιπὸν ἀφήσωμεν τὸ ἐκκρεμὲς εἰς τὴν θέσιν M_1 ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος κατὰ τὴν μετατόπισιν αὐτοῦ ἐκ τῆς θέσεως M_1 εἰς τὴν M_0, τὸ μὲν ὁλικὸν κινητήριον ἔργον θὰ εἶναι τὸ ἔργον τῆς βαρύτητος, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς mgh, ἡ δὲ κινητικὴ ἐνέργεια εἰς τὸ M_0 θὰ εἶναι $\frac{1}{2} m\upsilon^2$ καὶ θὰ ἔχωμεν

(19) $$mgh = \frac{1}{2} m\upsilon^2 .$$

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὴν κίνησιν M_1M_0 τοῦ ἐκκρεμοῦς μετασχηματισμὸν τοῦ ἔργου τῆς βαρύτητος εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἀντιθέτως κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς ἐκ τῆς θέσεως M_0 εἰς τὴν M_2 ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, ἡ ὁποία εἰς τὴν θέσιν M_0 εἶναι $\frac{1}{2}mv^2$, γίνεται εἰς τὴν θέσιν M_2 ἴση πρὸς μηδέν· δηλαδὴ κατὰ τὴν μετατόπισιν M_0M_2 ἔχομεν μετασχηματισμὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς τὸ ἔργον mgh, τὸ ὁποῖον εἶναι ὠφέλιμον ἔργον, διότι κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ἐκκρεμοῦς ἡ βαρύτης εἶναι δύναμις ἀντιτιθεμένη εἰς τὴν κίνησιν, δηλαδὴ εἶναι ὠφέλιμος ἀντίστασις. Ἕτερον παράδειγμα μετασχηματισμοῦ ἔργου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ τἀνάπαλιν ἔχομεν εἰς τὴν λειτουργίαν μηχανῆς. Ἂς γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (10) ὡς ἑξῆς:

$$E_\omega = E_\varkappa - E_\pi - \left(\Sigma \frac{1}{2} mv_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_1^2\right). \tag{20}$$

Κατὰ τὴν λειτουργίαν μηχανῆς διακρίνομεν τρεῖς περιόδους, ἤτοι:

I. Τὴν περίοδον ἐκκινήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης αὐξάνει ἀπὸ $v_1 = 0$ εἰς v_2. Τότε εἶναι

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 > 0 \tag{21}$$

καὶ ἑπομένως ἔχομεν ἐκ τῆς (20)

$$E_\omega < E_\varkappa - E_\pi\,, \tag{22}$$

ἢ

$$E_\varkappa > E_\omega + E_\pi\,. \tag{23}$$

Κατὰ τὴν περίοδον λοιπὸν τῆς ἐκκινήσεως μέρος μόνον τοῦ κινητηρίου ἔργου καταναλίσκεται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν ἔργων τῆς ὠφελίμου ἀντιστάσεως καὶ τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων· ἡ δὲ διαφορὰ $E_\varkappa - (E_\omega + E_\pi) > 0$ μετασχηματίζεται εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

ε. Κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐκκινήσεως μηχανῆς ἔχομεν μετασχηματισμὸν ἔργου εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν.

II. Τὴν περίοδον τῆς κανονικῆς λειτουργίας τῆς μηχανῆς, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης διατηρεῖται σταθερά. Τότε εἶναι $v_1 = v_2$· ὅθεν

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 = 0. \tag{24}$$

Ἡ (20) γράφεται δυνάμει τῆς (24)

$$E_\omega = E_\varkappa - E_\pi\,. \tag{25}$$

ἢ

$$E_\varkappa = E_\omega + E_\pi\,. \tag{26}$$

Κατὰ τὴν κανονικὴν λοιπὸν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς ὅλον τὸ κινητήριον ἔργον καταναλίσκεται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν ἔργων τῆς ὠφελίμου ἀντιστάσεως καὶ τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων. Δὲν ἔχομεν λοιπὸν ἐνταῦθα συναλλαγὴν μεταξὺ ἔργου καὶ κινητικῆς ἐνεργείας.

III. Τὴν περίοδον τῆς σταθμεύσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης ἐλαττοῦται ἀπὸ v_1 εἰς $v_2 = 0$. Τότε εἶναι

$$\Sigma \frac{1}{2} mv_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 < 0 \tag{27}$$

καὶ ἑπομένως ἔχομεν ἐκ τῆς (20)

(28) $$E_\omega > E_\varkappa - E_\pi,$$

ἢ

(29) $$E_\varkappa < E_\omega + E_\pi.$$

Κατὰ τὴν περίοδον λοιπὸν τῆς σταθμεύσεως τὸ κινητήριον ἔργον εἶναι μικρότερον τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ὑπερνίκησιν τῶν ἔργων τῆς ὠφελίμου ἀντιστάσεως καὶ τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων. Τὸ ἔργον $(E_\omega + E_\pi) - E_\varkappa$ παράγεται εἰς βάρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, διότι ἡ ταχύτης τῶν μαζῶν ἐλαττοῦται. Ἔχομεν λοιπὸν ἐνταῦθα μετασχηματισμὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς ἔργον. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

στ. *Κατὰ τὴν περίοδον τῆς σταθμεύσεως μηχανῆς ἔχομεν μετασχηματισμὸν κινητικῆς ἐνεργείας εἰς ἔργον.*

27. *Ἡ πρώτη θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς θερμοδυναμικῆς.* Εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι, ἐὰν σῶμα θερμικῶς ἀπομονωμένον ἀποδίδῃ ἔργον, τὸ σῶμα ψύχεται, δηλαδὴ ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος ἐλαττοῦται· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν σῶμα θερμικῶς ἀπομονωμένον ἀπορροφᾷ ἔργον, ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος αὐξάνει.

Ἄς λάβωμεν ἐπὶ παραδείγματι ἐντὸς κυλίνδρου κλειομένου ὑπὸ κινητοῦ ἐμβόλου μᾶζαν ἀτμοῦ, ἡ ὁποία οὔτε νὰ ἀποδίδῃ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν οὔτε νὰ ἀπορροφᾷ θερμότητα ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ, καὶ οὔτε νὰ συναλλάσσεται θερμότητα μετὰ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου. Ἐὰν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν πιέσεων τοῦ ἀτμοῦ κινῆται τὸ ἔμβολον οὕτως, ὥστε ὁ ὄγκος τῆς μάζης τοῦ ἀτμοῦ νὰ αὐξάνῃ, ἡ μᾶζα θὰ ἀποδίδῃ ἔργον· τότε ἡ θερμοκρασία τῆς μάζης τοῦ ἀτμοῦ ἐλαττοῦται. Ἔστω t_1 ἡ ἀρχικὴ καὶ $t_2{}^0C < t_1$ ἡ τελικὴ θερμοκρασία τῆς μάζης τοῦ ἀτμοῦ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ λ τὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ἀτμοῦ, ἡ μᾶζα τοῦ ἀτμοῦ κατὰ τὴν ἀπόδοσιν τοῦ ἔργου ἀποβάλλει ποσὸν θερμότητος, τὸ ὁποῖον δυνάμει τοῦ τύπου (4) τῆς § 2 εἶναι ἴσον πρὸς $\int_{t_1}^{t_2} \lambda\, dt$. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ μᾶζα τοῦ ἀτμοῦ ἀπορροφήσῃ ἔργον (§ 8), διὰ τῆς κινήσεως τοῦ ἐμβόλου κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, ἡ θερμοκρασία τῆς μάζης αὐξάνει ἀπὸ t_1 εἰς $t_2 > t_1{}^0C$ καὶ τότε ἔχομεν αὔξησιν θερμότητος τῆς μάζης τοῦ ἀτμοῦ ἴσην πρὸς $\int_{t_1}^{t_2} \lambda dt$. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν λοιπὸν ἀπώλειαν θερμότητος καὶ παραγωγὴν ἔργου καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν ἀπώλειαν ἔργου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως F (σχ. 2) καὶ παραγωγὴν θερμότητος. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν μετασχηματισμὸν θερμότητος εἰς ἔργον καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν μετασχηματισμὸν ἔργου εἰς θερμότητα. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν πρότασιν:

α. Ἡ θερμότης μετασχηματίζεται εἰς ἔργον καὶ τὸ ἔργον μετασχηματίζεται εἰς θερμότητα.

Ἡ πρότασις αὕτη διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς:

β. Ἔργον καὶ θερμότης εἶναι δύο μορφαὶ ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ μετασχηματίζωνται ἀμοιβαίως.

Ἡ πρότασις β εἶναι μερικὴ ἔκφρασις τῆς γενικῆς ἀρχῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ εἰς ἀλλήλας τῶν διαφόρων μορφῶν ἐνεργείας.

Ἂς λάβωμεν οἱονδήποτε σῶμα, τοῦ ὁποίου ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις ἔστω ἡ $F(v, p, t) = 0$. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἐξετάσωμεν τὰς μετατροπὰς τοῦ σώματος, κατὰ τὰς ὁποίας τοῦτο συναλλάσσεται μετὰ τοῦ περιβάλλοντος μόνον θερμότητα καὶ ἔργον. Τὰς μετατροπὰς ταύτας ὀνομάζομεν θερμικὰς μετατροπὰς ἢ καὶ ἁπλῶς μετατροπὰς (§ 2). Ἔστω ὅτι τὸ σῶμα ἀναχωροῦν ἔκ τινος ἀρχικῆς καταστάσεως (v, p), μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν σειρᾶς μετατροπῶν, ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικήν του κατάστασιν, ἤτοι ἔστω ὅτι τὸ σῶμα διαγράφει κλειστὴν μετατροπήν· ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κλειστὴ αὕτη μετατροπὴ γίνεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου διαγράμματος τῆς μετατροπῆς νὰ εἶναι θετικὸν (§ 9). Τότε τὸ σῶμα ἀποδίδει ἔργον Ε, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 9, παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ διαγράμματος τῆς κλειστῆς μετατροπῆς. Ἔστω Q ἡ καταναλωθεῖσα ὑπὸ τοῦ σώματος θερμότης διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς κλειστῆς μετατροπῆς. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ἰσοδυνάμου τοῦ ἔργου καὶ τῆς θερμότητος διδάσκει ὅτι ὁ λόγος

$$\frac{E}{Q} = \mathscr{E} \qquad (1)$$

εἶναι σταθερὸς δι' ὅλα τὰ σώματα καὶ δι' οἱονδήποτε κύκλον, τὸν ὁποῖον διαγράφουν ταῦτα. Ἡ ἀρχὴ αὕτη εἶναι ἡ πρώτη θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς θερμοδυναμικῆς καὶ διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

γ. Ἐὰν σῶμα χρησιμοποιούμενον διὰ τὸν μετασχηματισμὸν θερμότητος εἰς ἔργον ἢ καὶ τἀνάπαλιν ἐκτελῇ κλειστὴν μετατροπήν, ὁ λόγος τοῦ ἔργου καὶ τῆς θερμότητος, τὰ ὁποῖα συναλλάσσονται ἀμοιβαίως κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς εἶναι σταθερός, ἀνεξάρτητος τοῦ σώματος καὶ τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ σῶμα.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη ὀνομάζεται καὶ ἀρχὴ τοῦ Mayer, ἐκ τοῦ ὀνόματος ἑνὸς ἐκ τῶν θεμελιωτῶν τῆς θερμοδυναμικῆς. Ὁ Mayer εἶναι ὁ πρῶτος, ὁ ὁποῖος διετύπωσε τὴν ἀρχὴν ταύτην τὸ ἔτος 1842.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τὸ Ε ἐκφράζεται εἰς kgm καὶ τὸ Q εἰς Cal, θὰ εἶναι, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν § 16, $\mathscr{E} = 427$ kgm. Τὸ $\mathscr{E}$ εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος. Τὸ δὲ ἀντίστροφον τοῦ $\mathscr{E}$

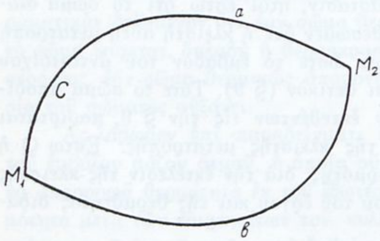
$$A = \frac{Q}{E} = \frac{1}{\mathscr{E}} = \frac{1}{427}\,\mathrm{Cal}, \qquad (2)$$

εἶναι τὸ θερμικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἔργου.

Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου, ἀναφέρομεν διὰ τὴν ἱστορίαν ὅτι ὁ Rankine ἐπρότεινεν ὡς μονάδα θερμότητος ἀντὶ τῆς θερμίδος, τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος Q, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἀντίστοιχον ἔργον E τοῦ τύπου (1) θὰ ἦτο ἴσον πρὸς 1 kgm. Ἡ μονὰς δηλαδὴ τοῦ Rankine ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{1}{427}$ τῆς μεγάλης θερμίδος ἢ πρὸς $\frac{1000}{427}=2{,}342$ μικρὰς θερμίδας.

Ἡ ἀρχὴ τοῦ ἰσοδύναμου, ὡς διετυπώθη ἀνωτέρω, ἐφαρμόζεται μόνον εἰς τὰς κλειστὰς μετατροπάς. Ἡ ἐπέκτασις τῆς ἀρχῆς ταύτης καὶ διὰ τὰς ἀνοικτὰς μετατροπάς, ὀφείλεται, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον, εἰς τὸν Clausius.

28. Ἀρχὴ τοῦ Clausius. Εἰς τὴν § 14 ἐμελετήσαμεν τὴν διώνυμον διαφορικὴν παράστασιν $Xdx+Ydy$ καὶ εἴδομεν ὅτι, ἵνα ἡ παράστασις αὕτη εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις



Σχ. 26

$$(1)\qquad \frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Ὅταν ἀληθεύῃ ἡ σχέσις (1), δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 14, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_C Xdx+Ydy$ κατὰ μῆκος κλειστῆς καμπύλης C εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν. Καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_C Xdx+Ydy$ κατὰ μῆκος κλειστῆς καμπύλης C εἶναι μηδέν, ἐὰν δηλαδὴ ἔχωμεν

$$(2)\qquad \int_C Xdx+Ydy=0,$$

ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα διώνυμος διαφορικὴ παράστασις θὰ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Τῷ ὄντι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν (2) καὶ ὡς ἑξῆς (σχ. 26):

$$\int_C Xdx+Ydy=\int_{M_1\alpha M_2} Xdx+Ydy+\int_{M_2\beta M_1} Xdx+Ydy=0\cdot$$

ἤτοι εἶναι

$$(3)\qquad \int_{M_1\alpha M_2} Xdx+Ydy=\int_{M_1\beta M_2} Xdx+Ydy.$$

Ὅταν λοιπὸν ἰσχύῃ ἡ (2), τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{M_1M_2} Xdx+Ydy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων. Ἀλλὰ τότε τὸ $Xdx + Ydy$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν (§ 14). Ἐπὶ τῆς ἁπλῆς ταύτης παρατηρήσεως ἐπὶ τῶν τελείων ὁλικῶν διαφορικῶν ἐστηρίχθη ὁ Clausius (1822—1888) διὰ νὰ ἀναπτύξῃ τὴν θεωρίαν του, διὰ τῆς ὁποίας ἐπεκτείνεται ἡ ἀρχὴ τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὰς κλειστὰς μετατροπὰς καὶ εἰς τὰς ἀνοικτὰς μετατροπάς.

Ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Q - AE = 0. \tag{4}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ C τὴν κλειστὴν μετατροπὴν κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, ἐφαρμόζομεν τὴν ἀρχὴν τοῦ ἰσοδυνάμου, ἡ (4) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\int_c dQ - AdE = 0. \tag{5}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (5) κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς καμπύλης C εἶναι μηδέν, ἡ παράστασις $dQ - AdE$ θὰ εἶναι, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα (2), τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν συναρτήσεώς τινος U, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ἐσωτερικὴν θερμότητα τοῦ σώματος Ἔχομεν λοιπὸν

$$dQ - AdE = dU. \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωσις (6), ἡ ὁποία ἀπορρέει ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τοῦ Clausius ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ (5), εἶναι οὐσιώδης καὶ γενικῆς σημασίας διὰ τὴν θερμοδυναμικήν.

Ἡ (6), ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ dQ διὰ τῆς ἐκφράσεώς του (14) τῆς § 5 καὶ τὸ dE διὰ τῆς ἐκφράσεως τοῦ (2) τῆς § 8, γράφεται

$$\frac{c'}{\alpha\upsilon} d\upsilon + c\frac{\beta}{\alpha} dp - Apd\upsilon = dU$$

ἢ

$$dQ - AdE = \left(\frac{c'}{\alpha\upsilon} - Ap\right) d\upsilon + c\frac{\beta}{\alpha} dp = dU, \tag{7}$$

ὅπου α, β εἶναι οἱ θερμοελαστικοὶ συντελεσταὶ (§ 4). Δυνάμει τῆς (7), ἡ (5) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\int_c \left(\frac{c'}{\alpha\upsilon} - Ap\right) d\upsilon + c\frac{\beta}{\alpha} dp = 0. \tag{8}$$

Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν (7) κατὰ μῆκος ἀνοικτῆς μετατροπῆς (M_1M_2), τὸ ὁλοκλήρωμα θὰ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου καὶ θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων M_1 καὶ M_2· θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$Q_{1,2} - AE_{1,2} = U_2 - U_1, \tag{9}$$

ἢ

$$Q_{1,2} = AE_{1,2} + U_2 - U_1. \tag{10}$$

Οὕτω εὑρίσκομεν εἰς ὅλην τὴν γενικότητά της τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Clausius, τὴν ὁποίαν συνηντήσαμεν εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τῶν τελείων ἀερίων (§ 16, τύπος 10). Ἡ ἐξίσωσις (10) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς ἀρχὴν τοῦ ἰσοδυνάμου διὰ τὰς ἀνοικτὰς μετατροπάς, ἡ ὁποία εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς ἀρχὴ τοῦ Clausius:

Ἐὰν σῶμα χρησιμοποιούμενον διὰ τὴν μετατροπὴν θερμότητος εἰς ἔργον ἢ καὶ τἀνάπαλιν ἐκτελῇ ἀνοικτὴν μετατροπήν, ἡ ὁλικὴ ἀπορροφουμένη θερμότης ὑπὸ τοῦ σώματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδει τὸ σῶμα, σὺν τῇ μεταβολῇ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ σώματος.

29. Μηχανικὴ ἐνέργεια. Φυσικὴ ἐνέργεια. Ἐσωτερικὴ ἐνέργεια. Ἐσωτερικὴ θερμότης. Ἄς ὑπενθυμίσωμεν ἐκ τῆς μηχανικῆς τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ δυναμικοῦ πεδίου, τῆς δυναμικῆς συναρτήσεως καὶ τοῦ δυναμικοῦ.

α. Ὀνομάζομεν περιοχήν τινα τοῦ διαστήματος δυναμικὸν πεδίον, ἐὰν εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιοχῆς ἀντιστοιχῇ κατά τινα νόμον μία δύναμις, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι τελείως ὡρισμένα, ὅταν δίδεται ἡ θέσις τοῦ σημείου.

Ἐὰν κατὰ ταῦτα ἀναφερθῶμεν εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ παραστήσωμεν διὰ (x, y, z) τὰς συντεταγμένας σημείου A τοῦ δυναμικοῦ πεδίου καὶ διὰ (X, Y, Z) τὰς προβολὰς τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}$, τὸ δυναμικὸν πεδίον θὰ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν συναρτήσεων

$$(1) \qquad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς φυσικῆς καὶ τῆς μηχανικῆς ἔχει ἡ μερικὴ περίπτωσις, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ συναρτήσεις (1) εἶναι ἀντιστοίχως αἱ μερικαὶ παράγωγοι ὡς πρὸς x, y, z συναρτήσεως $U(x, y, z)$, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ x, y, z θεωροῦνται ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $U(x, y, z)$ ὡς καὶ αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρὸς x, y, z εἶναι συνεχεῖς, μονότιμοι καὶ πεπερασμέναι ἐντὸς τοῦ δυναμικοῦ πεδίου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν λοιπὸν

$$(2) \qquad X(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

β. Ὅταν ἔν τινι δυναμικῷ πεδίῳ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν συναρτήσεων (1) ὑπάρχῃ συνάρτησις $U(x, y, z)$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἀληθεύουν αἱ σχέσεις (2), λέγομεν ὅτι τὸ δυναμικὸν πεδίον ἀπορρέει ἀπὸ δυναμικὴν συνάρτησιν, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὅτι τὸ δυναμικὸν πεδίον κέκτηται δυναμικόν. Ἡ συνάρτησις $U(x, y, z)$ ὀνομάζεται δυναμικὴ συνάρτησις· ἡ δὲ συνάρτησις

$$(3) \qquad V(x, y, z) = -U(x, y, z),$$

ἡ ὁποία διαφέρει τῆς δυναμικῆς συναρτήσεως μόνον διότι ἔχει ἀντίθετον σημεῖον, ὀνομάζεται δυναμικόν.

Ἔστω ὅτι ὑλικὸν σημεῖον A κινεῖται ἐντὸς τοῦ δυναμικοῦ πεδίου διαγράφον τυχοῦσαν καμπυλόγραμμον τροχιάν. Τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}(X, Y, Z)$, κατὰ τὴν στοιχειώδη μετατόπισιν $ds(dx, dy, dz)$ τοῦ σημείου A, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου *

$$(4) \qquad dE = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\cdot$$

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 209.

τὸ δὲ ἔργον τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}$ κατὰ τὴν μετατόπισιν A_1A_2 τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς της δίδεται ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος (§ 14),

$$(5) \qquad E = \int_{A_1A_2} Xdx + Ydy + Zdz.$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα (5), πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἐξισώσεις τῆς τροχιᾶς τοῦ σημείου A, ἤτοι τὰς ἐξισώσεις

$$(6) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Αἱ (1) δυνάμει τῶν (6) γίνονται

$$(7) \qquad X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t)$$

καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα (5), δυνάμει τῶν (6), (7) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ συνήθους ἁπλοῦ ὁλοκληρώματος

$$(8) \qquad E = \int_{t_1}^{t_2} \left[X(t)\frac{dx}{dt} + Y(t)\frac{dy}{dt} + Z(t)\frac{dz}{dt}\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)\, dt.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δυναμικὸν πεδίον, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κινεῖται τὸ σημεῖον A, κέκτηται δυναμικὸν V· τότε ἡ (4), δυνάμει τῶν σχέσεων (2) καὶ τῆς (3), γράφεται

$$(9) \qquad dE = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz = -dV.$$

Ὅταν λοιπὸν τὸ δυναμικὸν πεδίον κέκτηται δυναμικὸν V, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τριώνυμος διαφορικὴ παράστασις (4) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως $-V$. Τότε τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (5) γίνεται

$$(10) \qquad E = -\left[V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1)\right] = -(V_2 - V_1).$$

Τὸ ἔργον δηλαδὴ τῆς δυνάμεως $\overrightarrow{AF}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν δρόμον A_1A_2, ἀλλὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων A_1 καὶ A_2. Ἐὰν λοιπὸν θεωρήσωμεν τοὺς δρόμους $M_1\alpha M_2$ καὶ $M_1\beta M_2$ (σχ. 26), θὰ εἶναι

$$(11) \qquad E_{M_1\alpha M_2} = E_{M_1\beta M_2}.$$

Ὅθεν

$$(12) \qquad E_{M_1\alpha M_2} - E_{M_1\beta M_2} = E_{M_1\alpha M_2} + E_{M_2\beta M_1} = E_C = 0,$$

ὅπου C εἶναι ὁ κύκλος $M\alpha_1M_2\beta M$. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν πρότασιν:

γ. Ὅταν δυναμικὸν πεδίον κέκτηται δυναμικόν, τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως ἐν τῷ πεδίῳ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων τοῦ σημείου. Τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι μηδέν, ὅταν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως διαγράφῃ κλειστὴν καμπύλην.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι, ὅταν τὸ δυναμικὸν πεδίον κέκτηται δυναμικόν, ἡ τριώνυμος διαφορικὴ παράστασις (4) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὸ ἀντίστροφον. Τῷ ὄντι, ὅταν ἡ τριώνυμος διαφορικὴ παράστασις (4) εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν συναρτήσεως $-V$, θὰ ἔχωμεν

$$Xdx + Ydy + Zdz = -dV = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

ἤτοι θὰ εἶναι

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{13}$$

Ἀλλὰ αἱ (13) εἶναι ἀκριβῶς αἱ συνθῆκαι (2), αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ πληροῦνται, ἵνα τὸ δυναμικὸν πεδίον (1) κέκτηται δυναμικόν. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν πρότασιν:

δ. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δυναμικὸν πεδίον κέκτηται δυναμικόν, εἶναι: ἡ ἔκφρασις τοῦ στοιχειώδους ἔργου τῆς δυνάμεως τοῦ πεδίου νὰ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν.

Ἄς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὴν ἐξίσωσιν (9) τῆς § 26, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

$$\Sigma E_\xi + \Sigma E_\sigma = \Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2. \tag{14}$$

Ἀποδεικνύεται εἰς τὴν μηχανικὴν ὅτι τὸ στοιχειῶδες ἔργον τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων οἱουδήποτε συστήματος εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Ὅθεν, δυνάμει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δ, αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις κέκτηνται δυναμικὸν V. Τὸ ἔργον λοιπὸν ΣE_σ τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων θὰ εἶναι, δυνάμει τῆς (10),

$$\Sigma E_\sigma = -(V_2 - V_1) = -\Delta V, \tag{15}$$

ὅπου διὰ ΔV παριστῶμεν τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ δυναμικὸν εἰς τὰς ἄκρας θέσεις Σ_1, Σ_2 τοῦ συστήματος.

Ἄς παραστήσωμεν ἐπίσης διὰ ΔK τὴν μεταβολὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος κατὰ τὴν μετάβασιν αὐτοῦ ἐκ τῆς καταστάσεως Σ_1 εἰς τὴν Σ_2· ἄς θέσωμεν δηλαδὴ

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 = \Delta K. \tag{16}$$

Τέλος ἄς παραστήσωμεν διὰ

$$E = \Sigma E_\xi \tag{17}$$

τὸ ἄθροισμα τῶν ἔργων τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦν ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ συστήματος κατὰ τὴν μετάβασιν αὐτοῦ ἐκ τῆς θέσεως Σ_1 εἰς τὴν Σ_2. Ἡ (14) δυνάμει τῶν (15), (16), (17), γράφεται

$$E - \Delta V = \Delta K,$$

ἢ

$$\Delta K + \Delta V = E. \tag{18}$$

Ἡ (18) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\Delta(K + V) = E. \tag{19}$$

Ἡ (19), ἐὰν θέσωμεν

$$K + V = H, \tag{20}$$

γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\Delta H = E. \tag{21}$$

Ἡ συνάρτησις $K = \Sigma \frac{1}{2} mv^2$ εἶναι, ὡς εἴδομεν (§ 26), ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος. Ἐξ᾽ ἄλλου ὁ Rankine ὠνόμασε τὴν συνάρτησιν V δυναμικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος. Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι τὸ δυναμικὸν τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος. Τέλος τὴν συνάρτησιν H, ἡ ὁποία, δυνάμει τῆς (20), εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος, ὀνομάζομεν ὁλικὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος ἢ καὶ ἁπλῶς *μηχανικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος.*

Ἡ ἐξίσωσις (21) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

ε. Ἡ μεταβολὴ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας συστήματός τινος, κατὰ τὴν μετάβασιν τοῦ συστήματος ἔκ τινος καταστάσεως Σ_1 εἰς ἑτέραν κατάστασιν Σ_2, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι προφανῶς ἡ ἰδία, ἀλλὰ ὑπὸ ἄλλην διατύπωσιν, μὲ τὴν πρότασιν δ τῆς § 26.

Ἔστω ὅτι ἐπὶ τοῦ συστήματος δὲν ἐνεργοῦν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, ἤ, ἐὰν ἐνεργοῦν, ὅτι τὸ ἔργον των ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Τότε ἔχομεν ἐκ τῆς (21)

(22) $$\Delta H = 0, \quad H = \text{σταθερόν}.$$

Ἡ σχέσις $H =$ σταθερὸν εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ διατύπωσις τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας. Ἡ ἀρχὴ αὕτη μᾶς διδάσκει ὅτι, ἐὰν τὸ σύστημα δὲν συναλλάσσεται μηχανικὸν ἔργον μετὰ τοῦ περιβάλλοντος, τὸ ἄθροισμα τῆς κινητικῆς καὶ δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερόν.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (19) εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα: Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου δύο μάζας M_1, M_2, αἱ ὁποῖαι συνδέονται διά τινος ἐλατηρίου. Τὸ ἐπίπεδον ὑποθέτομεν τελείως λεῖον, ὥστε ἡ κίνησις νὰ γίνεται ἄνευ τριβῶν. Εἰς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ συστήματος (M_1M_2) δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος ἴσην πρὸς τὸ μηδέν. Ἂς ἀπομακρύνωμεν τὰς δύο μάζας ἐκτείνοντες τὸ ἐλατήριον διά τινος ἐξωτερικῆς δυνάμεως. Ἔστω $(M_1' M_2')$ ἡ νέα θέσις τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸ σύστημα κέκτηται δυναμικὴν ἐνέργειαν V ἴσην πρὸς τὸ ἔργον E, τὸ ὁποῖον κατηναλώθη διὰ τὴν μετάβασιν τοῦ συστήματος ἐκ τῆς καταστάσεως (M_1M_2) εἰς τὴν κατάστασιν $(M_1' M_2')$. Ἐὰν ἤδη ἀφήσωμεν ἐλεύθερον τὸ σύστημα εἰς τὴν κατάστασιν $(M_1' M_2)$, αἱ δύο μᾶζαι θὰ κινηθοῦν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν τάσεων τοῦ ἐλατηρίου· κατὰ τὴν κίνησιν δὲ τῶν μαζῶν, μέχρις ὅτου τὸ ἐλατήριον ἐπανακτήσῃ τὸ ἀρχικὸν μῆκος του, ἡ ταχύτης τῶν μαζῶν θὰ αὐξάνῃ· ὅθεν θὰ αὐξάνῃ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια καὶ θὰ ἐλαττοῦται ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος. Ὅταν τὸ ἐλατήριον ἐπανακτήσῃ τὸ ἀρχικὸν μῆκος του, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν, ὡς ἦτο καὶ εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν ἰσορροπίας (M_1M_2)· ἀντιθέτως ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἔργον E. Περαιτέρω, ἐξ᾽ αἰτίας τῆς κεκτημένης ταχύτητος, αἱ μᾶζαι θὰ κινηθοῦν πλησιάζουσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ κατὰ τὴν περίοδον ταύτην ἡ κινητικὴ ἐνέργεια μετασχηματίζεται εἰς δυναμικήν. Ὅταν τὸ σύστημα ἀποκτήσῃ ταχύτητα μηδέν, τὸ σύστημα θὰ κέκτηται δυναμικὴν ἐνέργειαν ἴσην πρὸς τὸ E· ἐξ' αἰτίας δὲ τῆς δυναμικῆς του ἐνεργείας τὸ σύστημα θὰ κινηθῇ ἀντιθέτως. Οὕτω τὸ σύστημα θὰ κινῆται ἐπ' ἄπειρον παλινδρομικῶς μεταξὺ τῶν ἄκρων θέσεών του, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν $K = 0$, $V = E$. Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ παθητικαὶ ἀντιστάσεις ἀπορροφοῦν ὀλίγον κατ' ὀλίγον ὑπὸ μορφὴν ἐξωτερικοῦ ἔργου τὴν μηχανικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἀπερρόφησε τὸ σύστημα ἐκ τῆς καταναλώσεως τοῦ ἔργου E. Οὕτω ὀλίγον κατ' ὀλίγον, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ συστήματος, ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια θὰ ἀπορροφηθῇ ἀπὸ τὸ ἔργον τῶν παθητικῶν ἀντιστάσεων καὶ τὸ σύστημα θὰ σταματήσῃ.

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν φαινόμενά τινα, τὰ ὁποῖα ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται ὅτι ἀντιβαίνουν πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἔργου. Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι βλῆμα, τὸ ὁποῖον ἐνῷ κέκτηται ταχύτητα υ, δηλαδὴ κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{1}{2}$ mυ², προσκρούει ἐπί τινος τοίχου. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος ἐξαφανίζεται ἀκαριαίως. Βεβαίως λόγῳ τῶν παραμορφώσεων τοῦ βλήματος καὶ τοῦ τοίχου εἰς τὴν θέσιν τῆς προσκρούσεως ἔχομεν παραγωγὴν ἔργου. Τὸ ἔργον ὅμως αὐτὸ εἶναι ἐλάχιστον ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀπολεσθεῖσαν κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ οὕτω φαίνεται ὅτι ἔχομεν ἀπώλειαν μηχανικῆς ἐνεργείας. Δυνάμεθα ὅμως εὐκόλως νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι κατὰ τὴν κροῦσιν ηὔξησεν ἡ θερμοκρασία τοῦ βλήματος. Ἔστω ὅτι ἡ θερμοκρασία τοῦ βλήματος πρὸ τῆς κρούσεως ἦτο t_1 καὶ μετὰ τὴν κροῦσιν ἔγινε t_2°C $> t_1$. Ἐὰν P εἶναι τὸ βάρος τοῦ βλήματος καὶ λ ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ βλήματος, τὸ βλῆμα διὰ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας του ἀπὸ t_1 εἰς t_2, ἀπερρόφησε θερμότητα, ἡ ὁποία εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (4) τῆς § 2,

$$(23) \qquad \Theta = P \int_{t_1}^{t_2} \lambda dt.$$

Ἐνῷ λοιπὸν ἔχομεν ἀπώλειαν κινητικῆς ἐνεργείας, ἔχομεν ἀντιστοίχως παραγωγὴν θερμότητος, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης μία μορφὴ ἐνεργείας (§ 27). Ἐκτὸς τῆς θερμότητος ἔχομεν καὶ ἄλλας μορφὰς ἐνεργείας, ὡς εἶναι ἡ ἠλεκτροστατικὴ ἐνέργεια, ἡ ἠλεκτροδυναμική, ἡ μαγνητική, ἡ χημικὴ ἐνέργεια κ.ο.κ. Ἐν ἀντιθέσει δὲ πρὸς τὰς μηχανικὰς ἐνεργείας, οἷαι εἶναι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια, τὸ ἔργον, ὀνομάζομεν τὴν θερμότητα, τὴν ἠλεκτροστατικήν, τὴν ἠλεκτροδυναμικήν, τὴν μαγνητικήν, τὴν χημικὴν ἐνέργειαν κ.τ.λ. φυσικὰς ἐνεργείας. Εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν παραγωγὴν ποσότητος φυσικῶν ἐνεργειῶν διὰ τῆς καταναλώσεως ἀναλόγων ποσοτήτων μηχανικῶν ἐνεργειῶν· καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἐξαφάνισιν φυσικῶν ἐνεργειῶν ἀντιστοιχεῖ γένεσις μηχανικῶν ἐνεργειῶν. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν κατὰ τὴν μετάβασιν συστήματός τινος ἐκ τινος καταστάσεως Σ_1 εἰς τὴν

Σ_2, ἐκτὸς τῆς συναλλαγῆς μεταξὺ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἔργου, λαμβάνουν χώραν καὶ συναλλαγαὶ φυσικῶν ἐνεργειῶν καὶ ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ΔΦ τὴν μεταβολὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν φυσικῶν ἐνεργειῶν τοῦ συστήματος, ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως (21) θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\Delta H + \Delta\Phi = E, \tag{24}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς ἰσοδυνάμου τῶν μηχανικῶν καὶ φυσικῶν ἐνεργειῶν.

Ἡ ἐξίσωσις (24), δυνάμει τῆς (20), γράφεται

$$\Delta K + \Delta V + \Delta\Phi = E \tag{25}$$

ἢ

$$\Delta K + \Delta(V + \Phi) = E. \tag{26}$$

Ἡ συνάρτησις

$$V + \Phi = W, \tag{27}$$

εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος.

Ἔχομεν λοιπὸν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας συστήματος:

στ. Ὀνομάζομεν ἐσωτερικὴν ἐνέργειαν συστήματος τὸ ἄθροισμα τῶν φυσικῶν ἐνεργειῶν καὶ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος.

Τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας συστήματος ὀνομάζομεν ἐσωτερικὴν θερμότητα τοῦ συστήματος. Ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης συστήματος εἶναι λοιπὸν

$$U = AW = A(V + \Phi), \tag{28}$$

ὅπου $A = \frac{1}{427}$ εἶναι τὸ θερμικὸν ἰσοδύναμον τοῦ ἔργου.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη μᾶζαν ἑνὸς χιλιογράμμου ἀερίου, τοῦ ὁποίου ἔστω ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι $F(\upsilon, p, t) = 0$. Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν μετατροπὴν τῆς μάζης ἔκ τινος καταστάσεως ἰσορροπίας Σ_1 εἰς ἑτέραν κατάστασιν ἰσορροπίας Σ_2 (§ 3). Ὑποθέτομεν ὅτι κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην ἡ μόνη φυσικὴ ἐνέργεια Φ, ἡ ὁποία ὑφίσταται συναλλαγὰς μετὰ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης, εἶναι ἡ θερμότης. Ἐπειδὴ αἱ καταστάσεις Σ_1, Σ_2 εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, ἡ μεταβολὴ ΔΚ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας θὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν *. Κατὰ τὴν μετατροπὴν λοιπὸν $\Sigma_1 \Sigma_2$ ἡ μεταβολὴ τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης εἶναι ΔV. Ἔστω ὅτι ἡ μᾶζα κατὰ τὴν μετατροπὴν $\Sigma_1\Sigma_2$ συναλλάσσεται μετὰ τοῦ περιβάλλοντος ποσὸν θερμότητος Q καὶ μηχανικὸν ἔργον E· ἡ ἀντίστοιχος μετατροπὴ τῆς φυσικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης θὰ εἶναι ΔΦ. Ἐὰν ἡ μᾶζα ἀπορροφᾷ θερμότητα Q καὶ ἀποδίδῃ ἔργον E, τὸ μὲν Q θὰ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ E, ἐπειδὴ ἡ μᾶζα ἀποδίδει τὸ ἔργον εἰς τὸ περιβάλλον, θὰ εἶναι ἀρνητικόν. Ἡ ἐξίσωσις (26) γράφεται λοιπὸν διὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν

$$\Delta(V + \Phi) = \mathcal{E}Q - E, \tag{29}$$

ὅπου $\mathcal{E}$ εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος.

---

* Ὅταν ἡ μετατροπὴ γίνεται βραδέως, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὴν παροδοχὴν ΔΚ = 0 καὶ διὰ δύο οἱασδήποτε καταστάσεις τοῦ συστήματος· διότι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ συστήματος εἶναι σταθερῶς πολὺ μικρὰ καὶ δυνάμεθα ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος νὰ παραλείψωμεν τὰς μεταβολάς της ΔΚ.

Ἄς πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (29) ἐπὶ $A = \frac{1}{\mathscr{E}}$ · εὑρίσκομεν

(30) $$Q = AE + \Delta A (V + \Phi).$$

Συγκρίνοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην μὲ τὴν ἐξίσωσιν (10, § 28) τοῦ Clausius, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(31) $$U_2 - U_1 = \Delta U = \Delta A (V + \Phi).$$

Ἤτοι εἶναι

(32) $$U = A (V + \Phi).$$

Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (28). Ἡ ἐξίσωσις (31) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(33) $$\Delta U = A\Delta V + A\Delta\Phi.$$

Εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τὸ $A\Delta\Phi$ εἶναι τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τῆς μεταβολῆς τῆς φυσικῆς ἐνεργείας τῆς μάζης. Ἐὰν ἡ μᾶζα εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν Σ_1 εἶχε θερμοκρασίαν t_1 καὶ εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν Σ_2 ἔχῃ θερμοκρασίαν t_2, θὰ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (23)

(34) $$A\Delta\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \lambda dt.$$

Ἡ ἐξίσωσις (33) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

ζ. Κατὰ τὴν θερμικὴν μετατροπὴν σώματος ἔκ τινος καταστάσεως ἰσορροπίας εἰς ἑτέραν κατάστασιν ἰσορροπίας ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ σώματος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἤτοι α' ἀπὸ τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τῆς μεταβολῆς τῆς φυσικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος καὶ β' ἀπὸ τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ Mayer καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ Clausius συνδέονται στενῶς μὲ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς ἐνεργείας. Βεβαίως τὰ συμπεράσματα αὐτὰ δὲν ἔχουν τὸν χαρακτῆρα τῆς μαθηματικῆς ἀκριβείας. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι εἰς τὴν ἐξίσωσιν (32) δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν τοῦ δυναμικοῦ V τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων· ἡ ὕπαρξις ὅμως τοῦ δυναμικοῦ V ἀποδεικνύεται εἰς τὴν μηχανικὴν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις ἐπαληθεύουν τὸν ὁρισμὸν τῶν κεντρικῶν δυνάμεων. Ἐξ᾽ ἄλλου δὲν ἔχει διασαφηνισθῆ εἰς τί συνίσταται γενικῶς, ἀπὸ μηχανικῆς ἀπόψεως, ἡ φυσικὴ ἐνέργεια Φ. Ἔτι δὲ ἐὰν ἐπὶ παραδείγματι ἡ συνάρτησις Φ εἶναι ἄθροισμα θερμικῆς, ἠλεκτρικῆς, χημικῆς ἐνεργείας, εἶναι ἀδύνατον ἐν γένει νὰ χωρίσωμεν τὴν Φ εἰς ὅρους, τῶν ὁποίων ἕκαστος νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς ἑκάστην τῶν ἐνεργειῶν τούτων. Ἐνῷ λοιπὸν αἱ ἐξισώσεις (1) τῆς § 27 καὶ (10) τῆς § 28, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἀναλυτικαὶ διατυπώσεις τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου, ἔχουν τὸν χαρακτῆρα τῆς μαθηματικῆς ἀκριβείας, αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις, εἰς τὰς ὁποίας εἰσέρχεται ἡ συνάρτησις Φ, παρέχουν ἁπλῶς τὴν εἰκόνα τοῦ μηχανισμοῦ τῆς παραγωγῆς τῶν φαινομένων.

Ἐν συμπεράσματι μόνον θεωρητικῶς δυνάμεθα νὰ ἐκφραζώμεθα περὶ διαφόρων μορφῶν τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας $W = V + \Phi$ συστήματος ἢ περὶ τῶν διαφόρων ὅρων τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος $U = AW = A(V + \Phi)$ τοῦ συστήματος. Τοῦτο διαφαίνεται σαφῶς ἐκ τῆς ἀρχῆς τοῦ Clausius, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης U λαμβάνεται ἐν τῷ συνόλῳ της.

30. Ἀνάγκη τῶν δύο πηγῶν θερμότητος. Ὅταν λέγωμεν ὅτι σῶμα Σ ἀπορροφᾷ θερμότητα ἐκ τοῦ περιβάλλοντος ἢ ἀποδίδει θερμότητα εἰς τὸ περιβάλλον, πρέπει νὰ φανταζώμεθα ὅτι ὑπάρχει ἕτερον σῶμα Σ′ θερμότερον ἢ ψυχρότερον τοῦ Σ, μετὰ τοῦ ὁποίου τὸ Σ φέρεται εἰς ἐπαφήν. Τὸ σῶμα Σ′ ὀνομάζομεν πηγὴν θερμότητος· καὶ ἐὰν μὲν τὸ Σ′ εἶναι θερμότερον τοῦ Σ, ὁπότε τὸ Σ ἀπορροφᾷ θερμότητα ἐκ τοῦ Σ′, θὰ ὀνομάζωμεν τὸ Σ′ θερμὴν πηγὴν (Π_θ), ἐὰν δὲ τὸ Σ′ εἶναι ψυχρότεραν τοῦ Σ, ὁπότε τὸ Σ θὰ ἀποδίδῃ θερμότητα εἰς τὸ Σ′, θὰ ὀνομάζωμεν τὸ Σ′ ψυχρὰν πηγὴν (Π_ψ).

Αἱ μᾶζαι τῶν πηγῶν θερμότητος πρέπει νὰ εἶναι ἀρκούντως μεγάλαι ἐν σχέσει πρὸς τὴν μᾶζαν τοῦ Σ οὕτως, ὥστε αἱ θερμοκρασίαι αὐτῶν, ὅταν συναλλάσσωνται θερμότητα μετὰ τοῦ Σ, νὰ διατηροῦνται σταθεραί· διότι ἄλλως, ἐὰν αἱ μᾶζαι τῶν πηγῶν θερμότητος δὲν ἦσαν ἀρκούντως μεγάλαι, κατὰ τὴν ἐπαφήν των μετὰ τοῦ Σ θὰ ἐπήρχετο, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 1, ἰσορροπία θερμοκρασίας καὶ τότε, μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας θερμοκρασίας, θὰ ἔπαυον τὰ σώματα ταῦτα νὰ εἶναι πηγαὶ θερμότητος διὰ τὸ Σ. Κατὰ ταῦτα ὁρίζομεν τὴν πηγὴν θερμότητος ὡς ἑξῆς:

α. Πηγὴ θερμότητος εἶναι σῶμα ὡρισμένης θερμοκρασίας καὶ μάζης ἀρκούντως μεγάλης τοιαύτης, ὥστε, ὅταν τὸ σῶμα φέρεται εἰς ἐπαφὴν μετ᾽ ἄλλων σωμάτων, νὰ προσδίδῃ εἰς αὐτὰ ἢ νὰ ἀπορροφᾷ ἐξ αὐτῶν θερμότητα ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν.

Ἡ ἔννοια αὕτη τῆς πηγῆς θερμότητος ὀφείλεται εἰς τὸν Carnot, ὁ ὁποῖος διετύπωσε καὶ τὸ ἑξῆς ἀξίωμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὴν βάσιν εἰς τὴν μελέτην τῶν θερμικῶν κινητήρων:

β. Ἵνα μέσῳ θερμικοῦ κινητῆρος ἐπιτυγχάνεται μετασχηματισμὸς θερμότητος εἰς μηχανικὸν ἔργον, πρέπει νὰ συνυπάρχουν δύο πηγαὶ θερμότητος, μία θερμὴ καὶ μία ψυχρά.

Τὸ ἀξίωμα τοῦτο τοῦ Carnot εἶναι ἀπόρροια τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου (§ 27, γ) καὶ τῆς ἐννοίας τῆς κλειστῆς μετατροπῆς (§ 9). Τῷ ὄντι διὰ νὰ ἔχωμεν μετασχηματισμὸν θερμότητος εἰς ἔργον εἶναι ἀπαραίτητον σῶμα Σ νὰ ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μετὰ ἑτέρου σώματος Σ′ καὶ νὰ ἀπορροφήσῃ ἐκ τοῦ Σ′ θερμίδας Q_1· διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο πρέπει ἡ θερμοκρασία τοῦ Σ′ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ Σ. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ νὰ μετασχηματισθῇ θερμότης εἰς ἔργον, εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ὕπαρξις τοὐλάχιστον μιᾶς πηγῆς, τῆς θερμῆς πηγῆς. Διὰ νὰ ἐκτελέσῃ δὲ τὸ σῶμα Σ κλειστὴν μετατροπὴν C (σχ. 6), ἡ ὁποία θὰ εἶναι ὁ κύκλος τῆς λειτουργίας τοῦ θερμικοῦ κινητῆρος, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία μὲν θερμὴ πηγή, μὲ τὴν ὁποίαν τὸ Σ θὰ εἶναι εἰς ἐπαφήν, ὅταν διαγράφῃ τὸ τμῆμα AMB τοῦ κύκλου C, ὁπότε εἶναι $dv > 0$ καὶ ἑτέρα ψυχρὰ πηγή, μὲ τὴν ὁποίαν τὸ Σ θὰ εἶναι εἰς ἐπαφήν, ὅταν διαγράφῃ τὸ τμῆμα BM_1A τοῦ κύκλου, ὁπότε εἶναι $dv < 0$.

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας μνείας ὅτι ὁ Carnot (1796 - 1832), ὁ ὁποῖος προηγήθη τοῦ Mayer (1814 - 1878), διετύπωσε τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα χωρὶς νὰ γνωρίζῃ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἰσοδυνάμου θερμότητος καὶ ἔργου.

Ἡ ἔννοια τῶν δύο πηγῶν θερμότητος καὶ ἡ συνύπαρξις αὐτῶν κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν θερμικῶν κινητήρων διασαφηνίζει καὶ τὸν ῥόλον, τὸν ὁποῖον ἐκπληροῦν τὰ διάφορα ῥευστά, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὰς θερμικὰς μετατροπὰς κατὰ τὴν λειτουργίαν τῶν κινητήρων τούτων. Ἂς λάβωμεν ὡς παράδειγμα θερμικοῦ κινητῆρος τὴν ἀτμομηχανήν. Αἱ δύο πηγαὶ θερμότητος εἶναι ὁ λέβης, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ θερμὴ πηγὴ καὶ ἡ ἐλευθέρα ἀτμόσφαιρα ἢ τὸ ψυγεῖον, ὅπου γίνεται ἡ ἐξαγωγὴ τοῦ ἀτμοῦ μετὰ τὴν λειτουργίαν του εἰς τὸν κύλινδρον· ἡ ἀτμόσφαιρα ἢ τὸ ψυγεῖον εἶναι ἡ ψυχρὰ πηγή. Μᾶζα ὕδατος εἰσάγεται εἰς τὸν λέβητα, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀπορροφᾷ θερμίδας Q_1 καὶ μετασχηματίζεται εἰς μᾶζαν ἀτμοῦ· ἡ μᾶζα αὕτη τοῦ ἀτμοῦ, συναποκομίζουσα τὰς θερμίδας Q_1 εἰσάγεται εἰς τὸν κύλινδρον τῆς ἀτμομηχανῆς, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ διὰ τῶν πιέσεών της ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου, μετατοπίζει τὸ ἔμβολον καὶ παράγει ἔργον. Ἀφοῦ ὁ ἀτμὸς ἐπενεργῶν οὕτω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου ἀποτονωθῇ ἀρκούντως, πρέπει νὰ ἀπομακρυνθῇ ἐκ τοῦ κυλίνδρου, διὰ νὰ εἰσέλθῃ περαιτέρω εἰς τὸν κύλινδρον ἐκ τοῦ λέβητος νέα μᾶζα ἀτμοῦ καὶ συνεχισθῇ ἡ λειτουργία τῆς ἀτμομηχανῆς. Ἡ ἀποδιωκομένη μᾶζα ἀτμοῦ ἐκ τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν ἀτμόσφαιραν ἢ τὸ ψυγεῖον συναποκομίζει θερμίδας $Q_2 < Q_1$. Αἱ θερμίδες $Q_1 - Q_2$ κατηναλώθησαν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ἔργου Ε τῶν πιέσεων τοῦ ἀτμοῦ. Δὲν εἶναι λοιπὸν ἡ μᾶζα τοῦ ἀτμοῦ, ἡ ὁποία παρήγαγε τὸ ἔργον Ε, ἀλλὰ μέρος τῶν θερμίδων Q_1, τὰς ὁποίας ἡ μᾶζα περέλαβεν ἐκ τοῦ λέβητος, μετεσχηματίσθη εἰς τὸ ἔργον Ε. Ἡ μᾶζα τοῦ ἀτμοῦ ἔχει κατὰ ταῦτα τὸν ῥόλον νὰ παραλαμβάνῃ θερμίδας ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς, νὰ μεταφέρῃ τὰς θερμίδας εἰς τὸν κινητῆρα, ἐντὸς τοῦ ὁποίου μέρος μόνον τούτων μετασχηματίζεται εἰς ἔργον καὶ περαιτέρω νὰ μεταφέρῃ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τὴν ψυχρὰν πηγήν. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

γ. Τὰ χρησιμοποιούμενα διὰ τὰς θερμικὰς μετατροπὰς ῥευστὰ εἰς τοὺς θερμικοὺς κινητῆρας εἶναι ἁπλοὶ φορεῖς τῆς θερμότητος, τὴν ὁποίαν μεταφέρουν ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς εἰς τὸν κινητῆρα καὶ τὴν ψυχρὰν πηγήν.

Τέλος ἐκ τῆς ἐννοίας τῆς πηγῆς θερμότητος (α) καὶ ἐκ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Carnot (β) δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

δ. Ὁ ἰδεώδης κύκλος λειτουργίας οἱουδήποτε θερμικοῦ κινητῆρος πρέπει νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο ἰσοθέρμους μετατροπὰς καὶ δύο ἀδιαθέρμους μετατροπάς. Ὁ κύκλος οὗτος ὀνομάζεται κύκλος τοῦ Carnot.

Τῷ ὄντι, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ (α) τῆς πηγῆς θερμότητος, ἡ θερμοκρασία τῆς πηγῆς εἶναι σταθερά. Ἔστωσαν λοιπὸν t_1 καὶ t_2°C αἱ σταθεραὶ θερμοκρασίαι τῆς θερμῆς καὶ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς, αἱ ὁποῖαι, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος β τοῦ Carnot, εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος. Ὅταν ἡ χρησιμοποιουμένη διὰ τὴν θερμικὴν μετατροπὴν ῥευστὴ μᾶζα εἶναι εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν θερμὴν πηγήν, θὰ ἔχωμεν μίαν ἰσόθερμον μετατροπὴν ($t = t_1{}^\circ C$)· καὶ ὅταν ἡ ρευστὴ μᾶζα εἶναι εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ψυχρὰν πηγήν, θὰ ἔχωμεν μίαν ἰσόθερμον μετατροπὴν ($t = t_2{}^\circ C$). Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι τὸ ἰδεῶδες διάγραμμα τῆς λειτουργίας θερμικοῦ κινητῆρος πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ δύο τόξα ἰσοθέρμων. Τὰ τόξα ταῦτα, δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 11, δὲν τέμνονται. Πρέπει λοιπόν, διὰ νὰ συμπληρωθῇ ὁ κύκλος τῆς λειτουργίας τοῦ κινητῆρος, νὰ συνδεθοῦν τὰ δύο τόξα ἰσοθέρμων διὰ δύο ἄλλων τόξων, ἔστω τῶν τόξων τ_1, τ_2. Ἐπειδὴ ὅμως ἐκτὸς τῶν δύο πηγῶν θερμότητος δὲν ὑπάρχει ἄλλη πηγή, ἕπεται ὅτι κατὰ τὰς μετατροπάς, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀντιστοιχοῦν τὰ τόξα τ_1, τ_2, δὲν θὰ ἔχωμεν οὔτε ἀπόδοσιν θερμότητος οὔτε ἀπορρόφησιν θερμότητος. Ἡ χρησιμοποιουμένη δηλαδὴ ρευστὴ μᾶζα θὰ ἐκτελέσῃ τὰς μετατροπὰς αὐτὰς ἀδιαθέρμως. Τὰ τόξα λοιπὸν τ_1 καὶ τ_2 εἶναι τόξα ἀδιαθέρμου· ὅ.ἔ.δ.

Οὕτω ἐπανεύρομεν τὸν κύκλον τοῦ Carnot, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τόξα ἰσοθέρμου καὶ δύο τόξα ἀδιαθέρμου, τὸν ὁποῖον ἐμελετήσαμεν εἰς τὴν § 20, ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς θεωρίας τῶν τελείων ἀερίων.

31. Ἀντιστρεπταὶ καὶ μὴ ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί. *Λέγομεν ὅτι μετατροπὴ ($\Sigma_1\Sigma_2$) εἶναι ἀντιστρεπτή, ὅταν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ κατὰ τὴν ἀντίστροφον πορείαν, δηλαδὴ κατὰ μίαν τάξιν φαινομένων, ἀκριβῶς ἀντιστρόφων τῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα λαμβάνουν χώραν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς.*

Ἂς λάβωμεν τὸ παράδειγμα τῆς μετατροπῆς ρευστῆς μάζης, ἡ ὁποία περικλείεται εἰς τὸν χῶρον Ι κυλίνδρου Κ (σχ. 2, § 8). Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 8, ἐὰν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἐπιδρᾷ ἐξωτερικὴ δύναμις F, τὸ ρευστὸν θὰ ἀναπτύσσῃ ἀντίδρασιν P, ἴσην κατ' ἀπόλυτον τιμὴν πρὸς τὴν F. Δηλαδὴ θὰ εἶναι

$$|P| = |F|. \tag{1}$$

Ἡ ἰσότης ὅμως αὕτη δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀληθεύῃ ἀπολύτως· διότι τότε τὸ ἔμβολον δὲν θὰ ἐκινεῖτο οὔτε κατὰ τὴν μίαν οὔτε κατὰ τὴν ἑτέραν φοράν. Διὰ νὰ κινηθῇ λοιπὸν τὸ ἔμβολον, ἔστω κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, πρέπει ἀντὶ τῆς ἰσότητος (1) νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης

$$|P| > |F'|. \tag{2}$$

Ἡ (2) θὰ ἀληθεύῃ, ὅσον μικρὰ καὶ ἂν εἶναι ἡ διαφορὰ $F - F' = |P| - F' = \Delta F$. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ λαμβάνωμεν τὸ ΔF πάρα πολὺ μικρόν· τότε καὶ ἡ μετατόπισις τοῦ ἐμβόλου θὰ εἶναι πάρα πολὺ μικρά. Τῷ ὄντι, ὅταν τὸ ΔF εἶναι πολὺ μικρόν, μετὰ μικρὰν μετατόπισιν τοῦ ἐμβόλου, λόγῳ τῆς ἀποτονώσεως τῆς μάζης τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸν χῶρον Ι, ἡ πίεσις P θὰ ἐλαττωθῇ κατά τι, καὶ μόλις γίνῃ ἴση πρὸς τὴν F', ἀντὶ τῆς ἀνισότητος (2) θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα (1) καὶ τὸ ἔμβολον θὰ σταματήσῃ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν μετατροπὴν $\Sigma_1\Sigma_2$ τῆς μάζης τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸν χῶρον Ι, ἔκ τινος καταστάσεως Σ_1 εἰς ἑτέραν κατάστασιν Σ_2, δι' ἀλληλοδιαδόχων μειώσεων τῆς F κατὰ ΔF καὶ ἀντιστοίχων διαδοχικῶν μικρῶν μετατοπίσεων τοῦ ἐμβόλου.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν μετατόπισιν τοῦ ἐμβόλου κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν. Τότε πρέπει νὰ εἶναι $|F_1| > |P|$ ἔστω $F_1 - |P| = F_1 - F = \Delta F$. Δυνάμεθα καὶ ἐνταῦθα, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, νὰ θεωρήσωμεν τὴν μετατόπισιν τοῦ ἐμβόλου ὡς διαδοχικὴν σειρὰν μικρῶν μετατοπίσεων πραγματοποιουμένων δι' ἀλληλοδιαδόχων μικρῶν ἐπιφορτίσεων τῆς F κατὰ ΔF. Τότε τὸ ἐντὸς τοῦ χώρου I ρευστὸν ἀκολουθεῖ συμπιεζόμενον σειρὰν διαδοχικῶν καταστάσεων, αἵ ὁποῖαι ὀλίγον διαφέρουν τῶν ἀντιστοίχων καταστάσεων, τὰς ὁποίας διῆλθε τὸ ρευστὸν ἀλληλοδιαδόχως κατὰ τὴν ἀποτόνωσιν αὐτοῦ $\Sigma_1\Sigma_2$. Ἡ διαφορὰ αὕτη τῶν ἀντιστοίχων καταστάσεων τοῦ ρευστοῦ εἶναι τόσον μικροτέρα, ὅσον ἡ ΔF εἶναι μικροτέρα. Τῷ ὄντι, ἐὰν θεωρήσωμεν πολὺ μικρὰν ἀποτόνωσιν ὀφειλομένην εἰς τὴν διαφορὰν $|P| - F' = \Delta F$ καὶ πολὺ μικρὰν συμπίεσιν ὀφειλομένην εἰς τὴν διαφορὰν $F_1 - |P| = \Delta F$, αἱ μικραὶ αὗται μετατροπαὶ θὰ πραγματοποιοῦνται κατὰ σειρὰν φαινομένων, τὰ ὁποῖα τόσον θὰ τείνουν νὰ γίνουν ἐντελῶς ἀντίστροφα, ὅσον αἱ δυνάμεις $F' = |P| - \Delta F$ καὶ $F_1 = |P| + \Delta F$ τείνουν νὰ γίνουν ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Ἐὰν μάλιστα ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τριβαὶ τοῦ ἐμβόλου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου εἶναι τόσον μικραί, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ τὰς παραλείψωμεν, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ΔF ἀπείρως μικρόν, ἤτοι, ἀντὶ νὰ λάβωμεν μικρὰν διαφορὰν ΔF, νὰ λάβωμεν ἀπείρως μικρὰν διαφορὰν dF. Τότε αἱ δύο μετατροπαὶ $\Sigma_1\Sigma_2$ καὶ $\Sigma_2\Sigma_1$ εἶναι ἐντελῶς ἀντίστροφοι καὶ ἡ μετατροπὴ $\Sigma_1\Sigma_2$ εἶναι ἀντιστρεπτὴ μετατροπή. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν ὡς τὸ κοινὸν ὅριον, ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν σημασίαν τῆς λέξεως, δύο μετατροπῶν πραγματοποιουμένων κατ' ἀντίστροφον φορὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν.

Εἴδομεν ὅτι, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ κίνησις τοῦ ἐμβόλου τοῦ σχήματος (2, § 8), πρέπει νὰ εἶναι $F_i = F \pm dF$. Τὸ ἔργον λοιπὸν τῶν πιέσεων τῆς μάζης τοῦ ρευστοῦ θὰ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 8,

$$dE = \pm (F \pm dF)\,dx = \pm F dx \pm dF dx,$$

ἀλλὰ τὸ dFdx ὡς ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως παραλείπεται ἐνώπιον τοῦ ἀπειροστοῦ πρώτης τάξεως Fdx. Ὅθεν εἶναι

$$dE = \pm F dx.$$

Οἱ τύποι λοιπὸν (2) καὶ (3) τῆς § 8 καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν ἀπορρέοντα συμπεράσματα ἰσχύουν, παρὰ τὴν θεωρηθεῖσαν διαφορὰν dF, μεταξὺ τῶν P καὶ F.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, ἀντὶ τῆς πολὺ μικρᾶς ἐπιφορτίσεως ΔF, αὐξάνομεν τὴν F ἀποτόμως οὕτως, ὥστε τὸ μέτρον της ἀπὸ F νὰ γίνῃ F'' καὶ ἡ διαφορὰ $F'' - F$ νὰ εἶναι ἀρκούντως μεγάλη. Τότε τὸ ἔμβολον θὰ ἐκτελέσῃ ταχυτάτην κίνησιν κατὰ τὴν φορὰν τῆς F'' καὶ ὁ ὄγκος V τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸν χῶρον I τοῦ κυλίνδρου θὰ ἐλαττωθῇ εἰς V'. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἀδύνατον νὰ θεωρήσωμεν τὴν μετατροπὴν ὡς σειρὰν διαδοχικῶν στοιχειωδῶν μετατροπῶν καὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ φαντασθῶμεν ἀντίστροφον μετατροπὴν πραγματοποιουμένην διὰ διαδοχικῆς ἐλαττώσεως τῆς F κατὰ ΔF οὕτως, ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν ἀντιστοιχίαν ἐντελῶς ἀντιστρόφων φαινομένων. Ἡ μετατροπὴ αὕτη λέγεται μὴ ἀντιστρεπτὴ μετατροπή.

Ἐκ τῶν ἐκτεθέντων διὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν :

α. Ἐὰν μετατροπή τις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαδοχικὴ σειρὰ καταστάσεων ἰσορροπίας, ἡ μετατροπὴ αὕτη λαμβανομένη καθ' ἑαυτήν, εἶναι ἀντιστρεπτὴ μετατροπή. Κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστροφῆς τῶν φαινομένων ἀνάγεται γεωμετρικῶς εἰς τὴν διαγραφὴν τοῦ διαγράμματος τῆς μετατροπῆς κατ' ἀντίθετον φοράν.

Αἱ ἀδιάθερμοι μετατροπαὶ εἶναι ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί. Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα τοῦ ρευστοῦ ἐντὸς τοῦ χώρου I τοῦ κυλίνδρου (σχ. 2, § 8) δὲν συναλλάσσεται θερμότητα μετὰ τοῦ περιβάλλοντος, δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἐκτεθέντα ἀνωτέρω διὰ τὴν κίνησιν τοῦ ἐμβόλου καὶ κατὰ τὴν μίαν καὶ κατὰ τὴν ἑτέραν φορὰν καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν ὡς τὸ ὅριον δύο ἀδιαθέρμων μετατροπῶν, μιᾶς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως καὶ μιᾶς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ἀδιαθέρμου καὶ πλησιάζουν συνεχῶς πρὸς αὐτήν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅμως ὅτι ἡ μετατροπὴ δὲν λαμβάνει χώραν καθ' ἑαυτήν, ἀλλὰ ἐν σχέσει πρὸς τὴν πηγὴν θερμότητος, μετὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται εἰς ἐπαφὴν τὸ ἐκτελοῦν τὴν μετατροπὴν ρευστόν. Ἔστω ὅτι ἡ πηγὴ εἶναι θερμή, ἔστω δηλαδὴ ὅτι τὸ ρευστὸν ἔχει θερμοκρασίαν T' μικροτέραν τῆς θερμοκρασίας T τῆς πηγῆς (§ 30). Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διαφορὰ $T - T' > 0$ δὲν εἶναι ἀπείρως μικρά. Τότε ἡ μετατροπὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀντιστρεπτή. Διότι, διὰ νὰ ἦτο ἡ μετατροπὴ ἀντιστρεπτή, θὰ ἔπρεπε τὸ ρευστὸν ἀντιστρόφως νὰ ἀπέδιδε θερμότητα εἰς τὴν θερμὴν πηγήν. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, ἀφοῦ εἶναι $T' < T$.

Ὁμοίως, ἐὰν τὸ ρευστὸν ἔδιδε κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς του θερμότητα εἰς τὴν πηγήν, ἐὰν δηλαδὴ ἡ πηγὴ ἦτο ψυχρά, θὰ ἦτο $T < T'$. Τότε, διὰ νὰ πραγματοποιηθῇ ἡ ἀντίστροφος μετατροπή, θὰ ἔπρεπε τὸ ρευστὸν νὰ ἀπορροφᾷ ἐκ τῆς πηγῆς θερμότητα. Ἀλλὰ τοῦτο λόγῳ τῆς ἀνισότητος $T < T'$ εἶναι ἀδύνατον. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

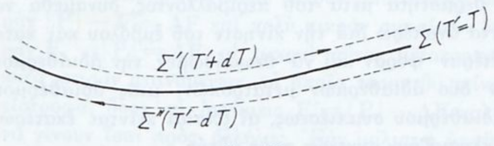
β. Αἱ θερμικαὶ μετατροπαὶ λαμβανόμεναι ἐν σχέσει πρὸς τὰς πηγὰς θερμότητος εἶναι ἐν γένει μετατροπαὶ μὴ ἀντιστρεπταί.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἔννοια τῶν μὴ ἀντιστρεπτῶν θερμικῶν μετατροπῶν ἀπορρέει ἐκ τῆς σχέσεως τῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦν τὰς μετατροπὰς μετὰ τῶν πηγῶν θερμότητος.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅμως ὅτι ἡ θερμοκρασία T' τοῦ ρευστοῦ καὶ ἡ θερμοκρασία T τῆς πηγῆς θερμότητος εἶναι ἴσαι. Τότε, διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν μετατροπήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ρευστὸν νὰ ἀπορροφᾷ θερμότητα ἐκ τῆς πηγῆς, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν τὸ $T = T'$ κατὰ dT καὶ διὰ νὰ πραγματοποιήσωμεν ἀντιθέτως μετατροπήν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ρευστὸν νὰ ἀποδίδῃ θερμότητα εἰς τὴν πηγήν, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ $T'=T$ κατὰ dT. Ἔστω Σ τὸ διάγραμμα τῆς ἰσοθέρμου $T=T'$ (σχ. 27)· ὅταν ἔχωμεν ἀπορρόφησιν θερμότητος ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ τὸ διάγραμμα τῆς μετατροπῆς θὰ εἶναι τόξον τῆς ἰσοθέρμου $\Sigma'(T'+dT)$ καὶ ὅταν ἔχωμεν ἀπόδοσιν θερμότητος ἐκ τοῦ ρευστοῦ πρὸς τὴν πηγὴν τὸ διάγραμμα θὰ εἶναι τὸ τόξον τῆς ἰσοθέρμου $\Sigma''(T'-dT)$. Ἐκ τῶν ἰσοθέρμων Σ', Σ'' ἡ μὲν Σ' ὑπέρκειται τῆς Σ ἡ δὲ Σ'' ὑπόκειται εἰς τὴν Σ (§ 11). Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν λοιπὸν ὅτι εἶναι $T=T'$, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἰσόθερμον Σ εἰς τὸ ὅριον τῶν δύο ἰσοθέρμων Σ', Σ''. Τότε ἡ ἰσόθερμος Σ εἶναι ἀντιστρεπτὴ μετατροπή, ὄχι μόνον λαμβανομένη καθ' ἑαυτήν, ἀλλὰ καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὴν πηγὴν θερμότητος.

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

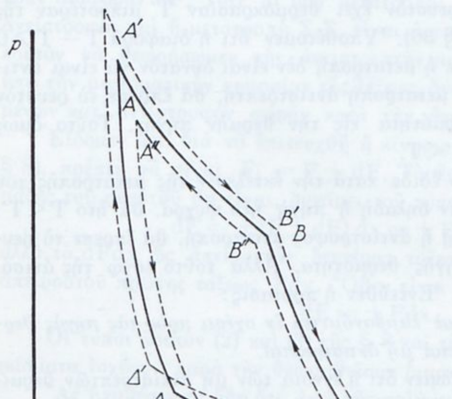
γ. Αἱ ἰσόθερμοι μετατροπαὶ εἶναι οὐχὶ μόνον καθ' ἑαυτάς, ἀλλὰ καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὰς πηγὰς θερμότητος, ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί.



Σχ. 27

Εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Carnot ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἰσοθέρμους καὶ δύο ἀδιαθέρμους μετατροπάς. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω τόσον αἱ ἰσόθερμοι ὅσον καὶ αἱ ἀδιάθερμοι μετατροπαὶ εἶναι ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί, ἔχομεν τὴν πρότασιν:

δ. Ὁ κύκλος τοῦ Carnot εἶναι κύκλος ἀντιστρεπτός, ὄχι μόνον θεωρούμενος καθ' ἑαυτόν, ἀλλὰ καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὰς δύο πηγὰς θερμότητος μεταξὺ τῶν ὁποίων διαγράφεται.



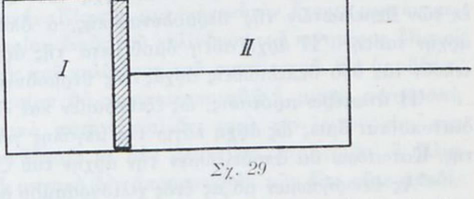
Σχ. 28

Ἔστω (σχ. 28) ὁ κύκλος ΑΒΓΔΑ τοῦ Carnot. Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸν κύκλον ΑΒΓΔΑ ὡς τὸ ὅριον τῶν δύο κύκλων Α′Β′Γ′Δ′Α′ καὶ Α″Δ″Γ″Β″Α″, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν πρῶτος διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ὁ δὲ δεύτερος κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν καὶ οἱ ὁποῖοι τείνουν νὰ πλησιάσουν πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓΔΑ.

32. Ἀξίωμα τοῦ Clausius. Καθὼς εἴδομεν εἰς τὴν § 30, ἡ λειτουργία τῶν θερμικῶν κινητήρων εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῶν δύο πηγῶν θερμότητος. Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι ἐντελῶς ἀντίστοιχον πρὸς τὴν λειτουργίαν τῶν ὑδραυλικῶν κινητήρων, ἡ ὁποία εἶναι ἀναποσπάστως συνδεδεμένη μὲ δύο στάθμας, μίαν ὑψηλοτέραν καὶ μίαν χαμηλοτέραν. Ὅπως τὸ ὕδωρ εἰς τοὺς ὑδραυλικοὺς κινητῆρας πίπτον ἐκ τῆς ὑψηλοτέρας στάθμης εἰς τὴν χαμηλοτέραν ἀποβάλλει ὕψος καὶ παράγει ἔργον, οὕτω καὶ τὸ ρευστὸν εἰς τοὺς θερμικοὺς κινητῆρας φερόμενον ἐκ τῆς θερμῆς πρὸς τὴν ψυχρὰν πηγὴν ἀποβάλλει θερμότητα καὶ παράγει ἔργον. Δὲν εἶναι δὲ οὔτε τὸ ὕδωρ, οὔτε τὸ ρευστόν, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ ἔργον· ἀλλὰ εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν τῶν ὑδραυλικῶν κινητήρων τὸ ἔργον ὀφείλεται εἰς τὴν διαφορὰν τοῦ ὕψους τῆς ὑψηλοτέρας καὶ χαμηλοτέρας στάθμης, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν τῶν θερμικῶν κινητήρων τὸ ἔργον ὀφείλεται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν θερμοκρασιῶν τῆς θερμῆς καὶ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς. Τὸ ὕδωρ εἶναι ἁπλοῦς φορεὺς τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας, ὅπως καὶ τὸ ρευστὸν εἰς τοὺς θερμικοὺς κινητῆρας εἶναι ἁπλοῦς φορεὺς τῆς θερμότητος (§ 30, γ).

Δυνάμεθα ὅμως ἀντὶ νὰ ἔχωμεν ἀπώλειαν ὕψους μάζης ὕδατος, δηλαδὴ πτῶσιν μάζης ὕδατος καὶ ἀντίστοιχον παραγωγὴν ἔργου, νὰ ἔχωμεν ἀντιθέτως ἀπώλειαν ἔργου καὶ κέρδος ὕψους, δηλαδὴ ἀντίστοιχον ἀνύψωσιν μάζης ὕδατος. Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι διὰ τῆς καταναλώσεως τοῦ ἔργου μιᾶς ἀντλίας μεταφέρομεν μᾶζαν ὕδατος ἔκ τινος στάθμης χαμηλοτέρας εἰς ἑτέραν στάθμην ὑψηλοτέραν. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἀνυψώσωμεν μᾶζαν ὕδατος χρησιμοποιοῦντες τὴν πτῶσιν ἑτέρας μάζης ὕδατος.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν μᾶζαν ρευστοῦ ἔκ τινος χαμηλοτέρας θερμοκρασίας εἰς ἑτέραν θερμοκρασίαν ὑψηλοτέραν, εἴτε καταναλίσκοντες ἔργον, εἴτε προσδίδοντες εἰς τὸ ρευστὸν θερμίδας, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἔκ τινος ἄλλου ρευστοῦ. Οὕτω κατὰ τὴν ἀδιάθερμον συμπίεσιν ρευστοῦ καταναλίσκομεν τὸ ἔργον τῆς συμπιέσεως καὶ ἀντιστοίχως μετατρέπομεν τὸ ρευστὸν ἔκ τινος καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο ἔχει θερμοκρασίαν T, εἰς ἑτέραν κατάστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχει θερμοκρασίαν $T' > T$. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν μετατροπὴν ταύτην τοῦ ρευστοῦ διὰ προσδώσεως εἰς αὐτὸ θερμίδων, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἔκ τινος ἄλλου ρευστοῦ· πρὸς τοῦτο ἂς φαντασθῶμεν ἔμβολον, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸν χῶρον κυλίνδρου τινὸς εἰς δύο χώρους I καὶ II (σχ.29) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ τοιχώματα τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ ἐμβόλου εἶναι ἀδιαπέραστα ἀπὸ τὴν θερμότητα. Ἂς εἰσαγάγωμεν εἰς τὸν χῶρον I μᾶζαν θερμοῦ ἀερίου καὶ εἰς τὸν χῶρον II μᾶζαν τοῦ ἰδίου, ἀλλὰ ψυχροῦ, ἀερίου. Τὸ θερμὸν ἀέριον ἀποτονού-



Σχ. 29

μενον χάνει θερμίδας, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς τὸ ἔργον τῆς ἀποτονώσεως τοῦ ἀερίου τούτου· τὸ ἔργον τοῦτο καταναλίσκεται εἰς ἔργον συμπιέσεως, διὰ τὴν συμπίεσιν τοῦ ψυχροῦ ἀερίου, καὶ ἀντιστοίχως διὰ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας του. Ἔχομεν δηλαδὴ ἐνταῦθα μετατροπὴν τοῦ ψυχροῦ ἀερίου ἔκ τινος χαμηλοτέρας θερμοκρασίας εἰς ἑτέραν ὑψηλοτέραν, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως θερμίδων, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τοῦ θερμοῦ ἀερίου.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ὁ Clausius διετύπωσε τὸ ἑξῆς ἀξίωμα:

Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν θερμίδας ἔκ τινος σώματος ψυχροτέρου εἰς ἕτερον σῶμα θερμότερον, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως νὰ καταναλώσωμεν μηχανικὸν ἔργον ἢ θερμότητα.

Ἐπὶ τοῦ ἀξιώματος τούτου τοῦ Clausius στηρίζεται ἡ λειτουργία τῶν ψυκτικῶν μηχανῶν. Εἰς τὰς μηχανὰς αὐτὰς καταναλίσκοντες ἔργον ἢ θερμότητα, ἐπιτυγχάνομεν νὰ ἀπορροφῶμεν συνεχῶς θερμότητα ἔκ τινος ψυχροῦ σώματος, τοῦ ὁποίου ἡ θερμοκρασία διατηρεῖται πολὺ χαμηλὴ καὶ νὰ μεταφέρωμεν τὴν θερμότητα ταύτην εἰς σῶμα θερμότερον.

33. Ἡ δευτέρα θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς θερμοδυναμικῆς. Ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς μελέτης τῶν τελείων ἀερίων, ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως κλειστῆς μετατροπῆς (§ 21) καὶ ἀπεδείξαμεν εἰς τὴν § 22 τὸ θεώρημα τοῦ Carnot, διὰ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος τοῦ Carnot διαγράφεται ὑπὸ τελείου ἀερίου. Ὡς δὲ ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παράγραφον ταύτην, τὸ θεώρημα τοῦ Carnot ἰσχύει καὶ ὅταν οἱονδήποτε σῶμα διαγράφῃ οἱονδήποτε κύκλον τοῦ Carnot. Ἔχομεν οὕτω τὴν ἑξῆς ἀρχήν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ δευτέρα θεμελιώδης ἀρχὴ τῆς θερμοδυναμικῆς:

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot δι' ὅλα τὰ σώματα, τὰ ὁποῖα διαγράφουν τὸν κύκλον καὶ δι' ὅλους τοὺς κύκλους τοῦ Carnot, οἱ ὁποῖοι περιορίζονται μεταξὺ δύο δεδομένων ἄκρων ἰσοθέρμων T_1 καὶ T_2, εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν θερμοκρασιῶν T_1, T_2. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὀνομάζεται συνάρτησις τοῦ Carnot.

Ἡ ἀρχὴ αὕτη ὀνομάζεται καὶ ἀρχὴ τοῦ Carnot, ἐκ τοῦ ὀνόματος ἑνὸς ἐκ τῶν θεμελιωτῶν τῆς θερμοδυναμικῆς, ὁ ὁποῖος διετύπωσε πρῶτος τὴν ἀρχὴν ταύτην. Ἡ ἀρχὴ αὕτη ὁμοῦ μετὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ Mayer (§ 27) ἀποτελοῦν τὰς δύο θεμελιώδεις ἀρχὰς τῆς θερμοδυναμικῆς.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις, ὡς ἐξεθέσαμεν καὶ εἰς τὴν § 22, εἶναι θεώρημα· διατυποῦται ὅμως ὡς ἀρχὴ λόγῳ τῆς μεγάλης γενικότητος καὶ τῆς σημασίας της. Κατωτέρω θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Carnot.

Ἄς θεωρήσωμεν μάζας ἑνὸς χιλιογράμμου δύο ρευστῶν Σ, Σ΄, αἱ ὁποῖαι διαγράφουν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τοὺς κύκλους $C(M_1M_2M_3M_4M_1)$ καὶ $C'(M_1'M_2'M_3'M_4'M_1')$ τοῦ Carnot· οἱ κύκλοι οὗτοι περιορίζονται μεταξὺ τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων T_1 καὶ T_2 (σχ. 30). Ἔστωσαν Q_1 αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας ἀπορροφᾷ ἡ μᾶζα τοῦ Σ ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς καὶ Q_2 αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας ἀποδίδει ἡ μᾶζα εἰς τὴν ψυχρὰν πηγήν. Δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 21 ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C εἶναι

(1) $$\eta_\theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

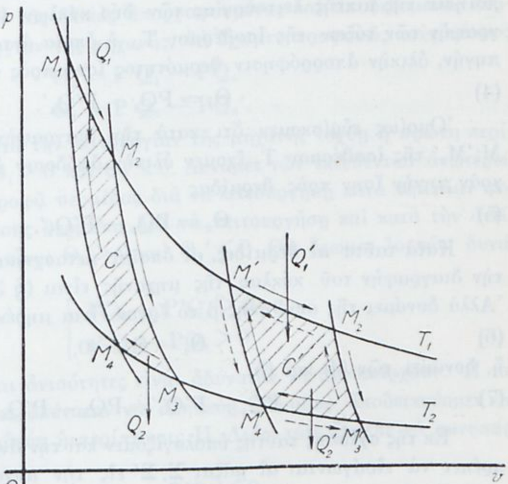
Ὁμοίως, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Q_1', Q_2' τὰς θερμίδας, τὰς ὁποίας ἀντιστοίχως ἀπορροφᾷ ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς καὶ ἀποδίδει εἰς τὴν ψυχρὰν πηγὴν ἡ μᾶζα τοῦ Σ′, ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C′ εἶναι

(2) $$\eta_\theta' = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}.$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι

(3) $$\eta_\theta = \eta_\theta'.$$

Ὑπεθέσαμεν ἀνωτέρω ὅτι αἱ μᾶζαι τῶν ρευστῶν Σ, Σ′ διαγράφουν τοὺς κύκλους C, C′ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Τοῦτο βεβαίως δὲν μᾶς ἐμποδίζει νὰ δεχθῶμεν ὅτι αἱ μᾶζαι διαγράφουν τοὺς κύκλους καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν· καὶ τοῦτο διότι, δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 31, ὁ κύκλος τοῦ Carnot εἶναι κύκλος ἀντιστρεπτός. Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης ἂς φαντασθῶμεν θερμικὴν μηχανήν, εἰς τὴν ὁποίαν πραγματοποιεῖται μικτὴ μετατροπὴ τῶν μαζῶν Σ, Σ′. Τοῦτο ἐπὶ παραδείγματι συμβαίνει ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ζεῦγος ἐξ ἑνὸς κινητῆρος Diesel καὶ ἑνὸς ἀεροσυμπιεστοῦ ὡς ἀποτελοῦν μίαν μηχανήν. Εἰς τὴν μηχανὴν αὐτὴν ἔχομεν μικτὴν μετατροπὴν ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τοῦ κινητῆρος Diesel καὶ ἀφ᾽ ἑτέρου τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τοῦ συμπιεστοῦ. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μηχανή, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ πραγματοποιηθῇ ἡ μικτὴ μετατροπὴ τῶν μαζῶν Σ, Σ′, εἶναι ἰδανικὴ μηχανὴ καὶ ὅτι κατὰ τὴν λειτουργίαν της πληροῦνται αἱ ἑξῆς τρεῖς συνθῆκαι: α. Δὲν ἀναπτύσσονται τριβαὶ ἢ ἄλλαι παθητικαὶ ἀντιστάσεις· β. Ἡ μηχανὴ δὲν ἀπορροφᾷ ἐκ τῶν ἔξω οὔτε ἀποδίδει ἔργον καὶ θερμότητα· καὶ γ. Κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς τὰ ρευστὰ Σ καὶ Σ′ διαγράφουν τοὺς κύκλους C καὶ C′ τοῦ Carnot. Εἶναι προφανὲς



Σχ. 30

ὅτι τὰ ρευστὰ Σ, Σ′ θὰ διαγράφουν τοὺς κύκλους C, C′ κατ᾽ ἀντίθετον φοράν· ἐὰν π. χ. τὸ ρευστὸν Σ διαγράφῃ τὸν κύκλον C κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, τὸ ρευστὸν Σ′ θὰ διαγράφῃ τὸν κύκλον C′ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν· τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἀνωτέρω συνθήκης β, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληροῖ ἡ μηχανή. Τῷ ὄντι ἀφοῦ ἡ μηχανὴ δὲν συναλλάσσεται μετὰ τοῦ περιβάλλοντος θερμότητα καὶ ἔργον, ἡ συναλλαγὴ μεταξὺ θερμότητος καὶ ἔργου διὰ τὴν λειτουργίαν της θὰ γίνεται προφανῶς μεταξὺ τῶν ρευστῶν Σ καὶ Σ′. Ἔστω ὅτι ἀντὶ ἑνὸς χιλιογράμμου ἔχομεν μάζας P καὶ P′ χιλιογράμμων τῶν ρευστῶν Σ καὶ Σ′. Ἡ μᾶζα Σ κατὰ τὴν ἐπαφήν της μετὰ τῆς θερμῆς πηγῆς, δηλαδὴ κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ τόξου M_1M_2 τοῦ κύκλου C, θὰ ἀπορροφᾷ θερμίδας PQ_1. Ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα Σ′, ὅταν διαγράφῃ τὸ τόξον $M_2'M_1'$, δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 31, θὰ ἀποδίδῃ εἰς τὴν θερμὴν πηγὴν θερμίδας $P'Q_1'$.

Τοιουτοτρόπως κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς καὶ τὴν πραγματοποίησιν τῆς μικτῆς λειτουργίας τῶν δύο κύκλων θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν τόξων τῆς ἰσοθέρμου T_1, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τὴν θερμὴν πηγήν, ὁλικὴν ἀπορρόφησιν θερμότητος ἴσην πρὸς θερμίδας

(4) $$\Theta_1 = PQ_1 - P'Q_1'.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν τόξων M_3M_4 καὶ $M_4'M_3'$ τῆς ἰσοθέρμου T_2 ἔχομεν ὁλικὴν ἀπόδοσιν θερμότητος εἰς τὴν ψυχρὰν πηγὴν ἴσην πρὸς θερμίδας

(5) $$\Theta_2 = PQ_2 - P'Q_2'.$$

Κατὰ ταῦτα αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου τῆς μηχανῆς εἶναι (§ 30) ἡ διαφορὰ $\Theta_1 - \Theta_2$. Ἀλλὰ δυνάμει τῆς συνθήκης β τὸ ἔργον εἶναι μηδέν· ὅθεν ἔχομεν

(6) $$\Theta_1 - \Theta_2 = 0,$$

ἤ, δυνάμει τῶν (4) καὶ (5),

(7) $$PQ_1 - P'Q_1' = PQ_2 - P'Q_2'.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ὑπολογίζομεν καὶ τὴν ἀναλογίαν, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ εἰσάγωνται αἱ μᾶζαι Σ, Σ′ εἰς τὴν μηχανήν, διὰ νὰ πληροῦται κατὰ τὴν λειτουργίαν της ἡ συνθήκη β. Πρέπει πρὸς τοῦτο νὰ εἶναι, δυνάμει τῆς (7),

(8) $$\frac{P}{P'} = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1 - Q_2}.$$

Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν νὰ συμβαίνουν σχετικῶς μὲ τὰ Θ_1 καὶ Θ_2 τῶν τύπων (4) καὶ (5)· ἤτοι: I. Νὰ εἶναι $\Theta_1 > 0$. Τότε δυνάμει τῆς (6) θὰ εἶναι $\Theta_2 < 0$. II. Νὰ εἶναι $\Theta_1 < 0$, ὁπότε θὰ εἶναι $\Theta_2 > 0$ καὶ III. Νὰ εἶναι $\Theta_1 = 0$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $\Theta_2 = 0$. Προτοῦ μελετήσωμεν ἑκάστην τῶν περιπτώσεων τούτων ἰδιαιτέρως, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λειτουργία τῆς μηχανῆς ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ τοὺς δύο ἀντιστρεπτοὺς κύκλους C καὶ C′ εἶναι ἀντιστρεπτή·

Εἶναι ἐπίσης εὔκολον νὰ διακρίνωμεν ὅτι, ἐὰν μία τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων ἰσχύῃ διὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς κατά τινα φοράν, ἡ αὐτὴ περίπτωσις, θὰ ἰσχύῃ καὶ κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς κατὰ τὴν ἀντίστροφον φοράν.

Τοῦτο ἀπορρέει ἀπὸ τὸ ἀξίωμα τοῦ Clausius (§ 32). Τῷ ὄντι, ἐὰν διὰ νὰ τεθῇ εἰς λειτουργίαν ἡ μηχανὴ κατά τινα φορὰν πρέπει νὰ ἀπορροφήσῃ θερμίδας Θ_1 ($\Theta_1 > 0$), ἡ θερμὴ πηγὴ διὰ τὴν μηχανὴν θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν ἰσόθερμον T_1 καὶ ἡ ψυχρὰ πηγὴ εἰς τὴν ἰσόθερμον T_2. Τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὴν ἀντίστροφον λειτουργίαν τῆς μηχανῆς· διότι ἄλλως θὰ ἔπρεπε νὰ μεταφέρωμεν θερμίδας ἐκ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς εἰς τὴν θερμήν. Τοῦτο ὅμως μόνον διὰ τῆς καταναλώσεως ἐξωτερικοῦ ἔργου ἢ θερμότητος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ (§ 32), πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν συνθήκην β, ἡ ὁποία, ὡς ἐδέχθημεν, ἰσχύει κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς.

Ὅταν ἡ μηχανὴ κινεῖται κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, ἀντὶ τῶν τύπων (4) καὶ (5) οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς ὁλικὰς ἀπορροφουμένας καὶ ἀποδιδομένας θερμίδας κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς, θὰ ἔχωμεν προφανῶς τοὺς τύπους

$$\Theta_1' = P'Q_1' - PQ_1 \tag{9}$$

$$\Theta_2' = P'Q_2' - PQ_2'. \tag{10}$$

Ἔστω ἤδη ὅτι κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς ἰσχύῃ ἡ πρώτη περίπτωσις· εἶναι δηλαδὴ $\Theta_1 > 0$ καὶ $\Theta_2 < 0$. Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω, ἐπειδὴ ἡ μηχανὴ ἀπορροφᾷ θερμίδας διὰ νὰ λειτουργήσῃ κατὰ τὴν μίαν φοράν, θὰ ἀπορροφᾷ ἐπίσης θερμίδας διὰ νὰ λειτουργήσῃ καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν· ὅθεν θὰ εἶναι $\Theta_1' > 0$ καὶ $\Theta_2' < 0$ Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, δυνάμει τῶν (4) καὶ (9),

$$\left\{\begin{array}{l} PQ_1 - P'Q_1' > 0 \\ P'Q_1' - PQ_1 > 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

Αἱ δύο ὅμως αὗται ἀνισότητες εἶναι ἀδύνατον νὰ συνυπάρχουν. Ἡ περίπτωσις λοιπὸν I εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύῃ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύῃ ἡ περίπτωσις II. Διότι τότε ἔπρεπε νὰ συνυπάρχουν αἱ ἀνισότητες

$$\left\{\begin{array}{l} PQ_1 - P'Q_1' < 0 \\ P'Q_1' - PQ_1 < 0, \end{array}\right. \tag{12}$$

ὅπερ ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Θὰ ἀληθεύῃ λοιπὸν κατ' ἀνάγκην ἡ τρίτη περίπτωσις· δηλαδὴ θὰ εἶναι $\Theta_1 = 0$ καὶ $\Theta_2 = 0$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι καὶ $\Theta_1' = 0$, $\Theta_2' = 0$. Ἔχομεν λοιπὸν

$$\left\{\begin{array}{l} \Theta_1 = PQ_1 - P'Q_1' = 0 \\ \Theta_2 = PQ_2 - P'Q_2' = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (13) εὑρίσκομεν

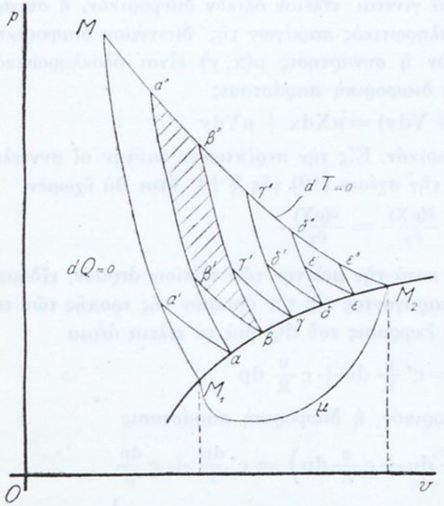
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2'}{Q_1'}, \tag{14}$$

Τὸ $\frac{dQ}{T}$, ὅπου dQ εἶναι ἡ ἀπορροφουμένη ἢ ἡ ἀποδιδομένη θερμότης κατὰ τὴν διαγραφὴν στοιχείου τυχούσης ἀλλ' ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς οἱουδήποτε σώματος καὶ T εἶναι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τοῦ σώματος εἰς τὸ στοιχεῖον τοῦτο, εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν.

Τὸ θεώρημα τοῦτο, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω διὰ τὸν ὁλοκληρωτικὸν παράγοντα, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Τὸ $\frac{1}{T}$, ὅπου T εἶναι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία εἰς στοιχεῖον τυχούσης ἀλλ' ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς οἱουδήποτε σώματος, εἶναι ὁλοκληρωτικὸς παράγων τῆς στοιχειώδους θερμότητος dQ, τὴν ὁποίαν συναλλάσσεται τὸ σῶμα μετὰ τοῦ περιβάλλοντος εἰς τὸ στοιχεῖον τοῦτο τῆς μετατροπῆς.

Κατωτέρω θὰ δώσωμεν δύο ἀποδείξεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Clausius. Αἱ ἀποδείξεις αὗται στηρίζονται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν τελείων ὁλικῶν διαφορικῶν· ἡ πρώτη ἀπόδειξις στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int\limits_{M_1M_2} Xdx + Ydy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, ὅταν τὸ $Xdx + Ydy$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν· καὶ ἡ δευτέρα ἀπόδειξις στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, νὰ εἶναι μηδὲν κατὰ μῆκος κλειστῆς καμπύλης.



Σχ. 31

Πρώτη ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Clausius.

Ἃς θεωρήσωμεν τὴν μετατροπὴν $M_1αM_2$ (σχ. 31). Ὁ μόνος περιορισμὸς εἶναι ὅτι ἡ μετατροπὴ αὐτὴ εἶναι ἀντιστρεπτή· κατὰ τὰ ἄλλα εἶναι τυχοῦσα καὶ διαγράφεται ὑπὸ οἱουδήποτε σώματος. Ὡς ἀνεφέραμεν καὶ εἰς τὴν § 3, τὸ σῶμα, τὸ ὁποῖον διαγράφει τὴν μετατροπήν, ὑπακούει εἰς τὴν τριπλῆν ὁμογένειαν τῶν φυσικῶν στοιχείων, ὄγκου, πιέσεως καὶ θερμοκρασίας. Ἃς φέρωμεν διὰ τοῦ M_1 τὴν ἀδιάθερμον M_1M καὶ διὰ τοῦ M_2 τὴν ἰσόθερμον M_2M· ἔστω M τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων τούτων. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι

$$\int\limits_{M_1αM_2}\frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1MM_2}\frac{dQ}{T}. \tag{7}$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν κατ᾿ ἀρχὰς τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (7)· ἔχομεν

$$\int\limits_{M_1MM_2}\frac{dQ}{T}=\int\limits_{M_1M}\frac{dQ}{T}+\int\limits_{MM_2}\frac{dQ}{T}=\int\limits_{MM_2}\frac{dQ}{T}, \tag{8}$$

διότι κατὰ μῆκος τῆς M_1M εἶναι $dQ=0$. Ἐξ᾿ ἄλλου, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς MM_2 τὸ $T=T_2$ εἶναι σταθερόν, θὰ εἶναι

$$\int\limits_{MM_2}\frac{dQ}{T}=\frac{1}{T_2}\int\limits_{MM_2}dQ=\frac{Q_2}{T_2}, \tag{9}$$

ὅπου διὰ Q_2 παριστῶμεν τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς MM_2.

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (7). Ἐπειδὴ ἡ μετατροπὴ $M_1αM_2$ ὑπετέθη ἀντιστρεπτή, δυνάμεθα, δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 31, νὰ θεωρήσωμεν τὴν $M_1αM_2$ ὡς ἀποτελουμένην ἀπὸ διαδοχικὴν σειρὰν στοιχειωδῶν μετατροπῶν $M_1α$, αβ, βγ,..... Ἂς λάβωμεν κατ᾿ ἀρχὰς ἀντὶ τῶν στοιχειωδῶν μετατροπῶν τὰς πολὺ μικρὰς μετατροπὰς $M_1α$, αβ, βγ, γδ, δε, εM_2 καὶ ἄς φέρωμεν διὰ τῶν σημείων α,β,γ,δ,ε τόξα ἰσοθέρμων, ὡς εἶναι τὰ τόξα αα′, ββ′, γγ′, δδ′, εε′ καὶ τόξα ἀδιαθέρμων, ὡς εἶναι τὰ τόξα αα″, ββ″, γγ″, δδ″, εε″. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ $\int\frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος τῆς μετατροπῆς, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ πολυγωνικὸν διάγραμμα $D(M_1α'αβ'βγ'γδ'δε'εε''M_2)$. Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῶν ἀδιαθέρμων $M_1α'$, αβ′, βγ′, γδ′, δε′, εε″ εἶναι $dQ=0$, θὰ ἔχωμεν

$$\int\limits_{D}\frac{dQ}{T}=\int\limits_{\alpha'\alpha}\frac{dQ}{T}+\int\limits_{\beta'\beta}\frac{dQ}{T}+\ldots\ldots+\int\limits_{\varepsilon'\varepsilon}\frac{dQ}{T}+\int\limits_{\varepsilon''M_2}\frac{dQ}{T}. \tag{10}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τόξα α′α, β′β,...., κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων θεωροῦμεν τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (10) εἶναι τόξα ἰσοθέρμων· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ $T_α$, $T_β$,..... $T_ε$, T_2 τὰς ἀπολύτους θερμοκρασίας κατὰ μῆκος τῶν τόξων τούτων, θὰ ἔχωμεν

$$\int\limits_{D}\frac{dQ}{T}=\frac{1}{T_\alpha}\int\limits_{\alpha'\alpha}dQ+\frac{1}{T_\beta}\int\limits_{\beta'\beta}dQ+\ldots\ldots+\frac{1}{T_\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon'\varepsilon}dQ+\frac{1}{T_2}\int\limits_{\varepsilon''M_2}dQ. \tag{11}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $Q_{α'α}$, $Q_{β'β}$,.....$Q_{ε'ε}$, $Q_{ε''M_2}$ τὰς ἀπορροφουμένας θερμίδας διὰ τὴν διαγραφὴν τῶν ἰσοθέρμων α′α, β′β,....., ε′ε, ε″M_2, θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (11) τὴν σχέσιν

$$\int\limits_{D}\frac{dQ}{T}=\frac{Q_{\alpha'\alpha}}{T_\alpha}+\frac{Q_{\beta'\beta}}{T_\beta}+\ldots\ldots+\frac{Q_{\varepsilon'\varepsilon}}{T_\varepsilon}+\frac{Q_{\varepsilon''M_2}}{T_2}. \tag{12}$$

Ἐπειδή, ἐκ κατασκευῆς τῶν τόξων M_1M, MM_2, αα′, αα″, ββ′, ββ″,....., οἱ κύκλοι αα′Μα″α, ββ′α″β″β,..... εἶναι κύκλοι τοῦ Carnot, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν κύκλον ἐπὶ παραδείγματι ββ΄α΄΄β΄΄β, δυνάμει τοῦ τύπου (18) τῆς § 33,

$$(13) \qquad \frac{Q_{\beta'\beta}}{T_\beta} = \frac{Q_{\alpha''\beta''}}{T_2}.$$

Ὁμοίως θὰ εἶναι

$$(14) \qquad \frac{Q_{\alpha'\alpha}}{T_\alpha} = \frac{Q_{M\alpha''}}{T_2}, \quad \frac{Q_{\gamma'\gamma}}{T_\gamma} = \frac{Q_{\beta''\gamma''}}{T_2}, \ldots\ldots, \frac{Q_{\varepsilon'\varepsilon}}{T_\varepsilon} = \frac{Q_{\delta''\varepsilon''}}{T_2}.$$

Ἡ (12), δυνάμει τῶν (13), (14), γράφεται

$$(15) \qquad \int\limits_D \frac{dQ}{T} = \frac{Q_{M\alpha''} + Q_{\alpha''\beta''} + \ldots\ldots + Q_{\delta''\varepsilon''} + Q_{\varepsilon''M_2}}{T_2} = \frac{Q_{MM_2}}{T_2}$$

ἤ, δυνάμει τῆς (9),

$$(16) \qquad \int\limits_D \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Ἔστω ἤδη ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μικρῶν μετατροπῶν $M_1\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\varepsilon, \varepsilon M_2$ αὐξάνει καὶ τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, ἐνῷ ἑκάστη ἐξ' αὐτῶν τείνει εἰς τὸ μηδέν· τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ $D(M_1\alpha'\alpha\beta'\beta\gamma'\gamma\delta'\delta\varepsilon'\varepsilon\varepsilon''M_2)$ ἔχει ὅριον τὴν καμπύλην $M_1\alpha M_2$· ὅθεν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ πρώτου μέλους τῆς (10) γίνεται $\int\limits_{M_1\alpha M_2} \frac{dQ}{T}$, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (10) παραμένει τὸ ἴδιον, ἀνεξαρτήτως τοῦ πλήθους τῶν τμημάτων $M_1\alpha, \alpha\beta \ldots\ldots$, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὴν $M_1\alpha M_2$. Ἔχομεν λοιπὸν

$$(17) \qquad \int\limits_{M_1\alpha M_2} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Τὸ $\frac{Q_2}{T_2}$, δυνάμει τῆς (9), εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου $M_1\alpha M_2$ καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ἄκρων θέσεων M_1 καὶ M_2. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ τόξου $M_1\alpha M_2$ εἴχομεν τὸ τόξον $M_1\mu M_2$, θὰ ἔπρεπε νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ M_1 τὴν ἀδιάθερμον M_1M καὶ διὰ τοῦ M_2 τὴν ἰσόθερμον M_2M, ὁπότε θὰ εἴχομεν

$$(18) \qquad \int\limits_{M_1\mu M_2} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1MM_2} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Ὅθεν εἶναι

$$(19) \qquad \int\limits_{M_1\alpha M_2} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1\mu M_2} \frac{dQ}{T}.$$

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ $\int \frac{dQ}{T}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὰς §§ 14, 28, τὸ $\frac{dQ}{T}$ θὰ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν· ὅ.ἔ.δ.

Δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τοῦ Clausius.

Ἂς ὑπολογίσωμεν κατ' ἀρχὰς τὸ $\int\limits_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ Carnot $C(M_1M_2M_3M_4M_1)$· ἔχομεν (σχ. 30),

(20) $$\int\limits_C \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1M_2} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_2M_3} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_3M_4} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_4M_1} \frac{dQ}{T}.$$

Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῶν ἀδιαθέρμων M_2M_3 καὶ M_4M_1 εἶναι $dQ = 0$, θὰ ἔχωμεν

(21) $$\int\limits_C \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1M_2} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_3M_4} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1} \int\limits_{M_1M_2} dQ - \frac{1}{T_2} \int\limits_{M_4M_3} dQ \cdot$$

ἤ, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Q_1, Q_2 τὰς ἀπορροφουμένας θερμίδας κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν ἰσοθέρμων M_1M_2, M_4M_3,

(22) $$\int\limits_C \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}.$$

Ἀλλά, δυνάμει τοῦ τύπου (18) τῆς § 33, εἶναι

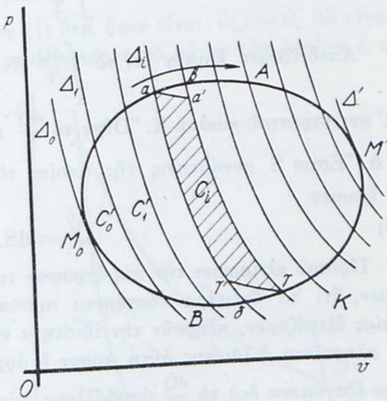
(23) $$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

ὅθεν

(24) $$\int\limits_C \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν ὅτι τὸ $\int\limits_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου τοῦ Carnot εἶναι μηδέν.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τυχόντα, ἀλλ' ἀντιστρεπτὸν κύκλον K (σχ. 32) καὶ ἔστω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.



Σχ. 32

Διαιροῦμεν τὸν κύκλον K εἰς ἀπείρους τὸ πλῆθος στοιχειώδεις κύκλους C_0', C_1',..., C_i'... διὰ σειρᾶς ἀδιαθέρμων Δ_0, Δ_1, Δ_2 ...Δ', τὰς ὁποίας λαμβάνομεν εἰς τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἀπείρως πλησίον ἀλλήλλων. Ἂς λάβωμεν ἕνα ἐκ τῶν στοιχειωδῶν τούτων κύκλων, ἔστω τὸν κύκλον C_i(αβγδα) καὶ ἂς φέρωμεν διὰ τῶν κορυφῶν του α,γ τὰς ἰσοθέρμους αα', γγ'. Οὕτω σχηματίζομεν τὸν κύκλον τοῦ Carnot C_i (αα'γγ'α)· δυνάμει τῆς (23) ἔχομεν κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου τούτου

(25) $$\frac{dQ}{T} - \frac{dQ'}{T'} = 0,$$

ὅπου dQ,T εἶναι ἡ στοιχειώδης θερμότης καὶ ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία κατὰ μῆκος τοῦ τόξου αα', καὶ dQ',T' εἶναι ἡ στοιχειώδης θερμότης καὶ ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία κατὰ μῆκος τοῦ τόξου γ΄γ. Ὁ στοιχειώδης κύκλος τοῦ Carnot C_i (αα΄γγ΄α) διαφέρει τοῦ στοιχειώδους κύκλου C_i (αβγδα) κατ᾽ ἀπειροστὸν δευτέρας τάξεως, τὸ ὁποῖον παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ἀπὸ τὰ ἐμβαδὰ (αβα΄α) καὶ (γ΄γδγ΄). Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ὁ κύκλος K ὑπετέθη ἀντιστρεπτός, τὸ στοιχειῶδες τόξον αβ αὐτοῦ, ὡς ἀντιστρεπτόν, δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τὸ στοιχειῶδες τόξον τῆς ἰσοθέρμου αα΄. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν ὅτι ἡ σχέσις (25) ἰσχύει καὶ διὰ τὸν κύκλον C_i (αβγδα) καὶ δι᾽ ὅλους τοὺς στοιχειώδεις κύκλους, εἰς τοὺς ὁποίους διῃρέσαμεν τὸν κύκλον K. Ὁλοκληροῦντες τὴν (25) κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου K εὑρίσκομεν

(26) $$\int\limits_{M_0AM'}\frac{dQ}{T}-\int\limits_{M_0BM'}\frac{dQ'}{T'}=0$$

ἢ

(27) $$\int\limits_{M_0AM'}\frac{dQ}{T}+\int\limits_{M'BM_0}\frac{dQ'}{T'}=0.$$

Ὅθεν

(28) $$\int\limits_{K}\frac{dQ}{T}=0.$$

Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν ὅτι τὸ $\int\limits_{K}\frac{dQ}{T}$ εἶναι μηδὲν κατὰ μῆκος τοῦ τυχόντος, ἀλλ᾽ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου K. Ὅθεν τὸ $\frac{dQ}{T}$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν ὅ.ἔ.δ. Ἔστω S συνάρτησις τῆς ὁποίας τὸ $\frac{dQ}{T}$ εἶναι τὸ ὁλικὸν διαφορικόν. Θὰ ἔχωμεν

(29) $$\frac{dQ}{T}=dS.$$

Πρὸτοῦ κλείσωμεν τὴν παράγραφον ταύτην εἶναι σκόπιμον νὰ ἐπαναλάβωμεν, ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα προϋποθέτουν ὅτι αἱ μετατροπαί, τὰς ὁποίας ἐξετάζομεν, πληροῦν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι ἀντιστρεπταί. Διότι, ὅταν δὲν πληροῦται ἡ ἰδιότης αὐτή, τόσον ἡ ἀρχὴ τοῦ Carnot, ὅσον καὶ τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα διὰ τὸ $\frac{dQ}{T}$ ἀποβάλλουν πᾶσαν σημασίαν.

35. Τροπή. Ἂς λάβωμεν τὴν σχέσιν (29) τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἤτοι τὴν σχέσιν

(1) $$\frac{dQ}{T}=dS.$$

Ὁλοκληροῦντες τὴν (1) λαμβάνομεν

(2) $$\int\frac{dQ}{T}=S+C,$$

ὅπου C εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως.

α. Τὴν συνάρτησιν S, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν ἰσοῦται πρὸς $\frac{dQ}{T}$, ὀνομάζομεν τροπήν.

Παρατηροῦμεν ἐκ τῆς (2) ὅτι εἰς ἑκάστην κατάστασιν ἰσορροπίας σώματος ἡ συνάρτησις S, δηλαδὴ ἡ τροπὴ τοῦ σώματος, δὲν ὁρίζεται ἀπολύτως, ἀλλὰ ὁρίζεται μὲ μίαν πρόσθετον αὐθαίρετον σταθερὰν C, ἡ ὁποία εἶναι ἡ σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως. Προκειμένου ὅμως νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατά τινα ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν M_1M_2 τοῦ σώματος, ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$\int_{M_1M_2}\frac{dQ}{T}=\int_{M_1M_2}dS=S_2-S_1. \tag{3}$$

Εἰς τὸν ὑπολογισμὸν δηλαδὴ τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_{M_1M_2}\frac{dQ}{T}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατά τινα ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν τοῦ σώματος, δὲν εἰσέρχεται ἡ σταθερὰ C. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς σώματός τινος κατὰ τυχοῦσαν ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν τοῦ σώματος εἶναι τελείως ὡρισμένη καὶ ἴση πρὸς τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα $\int_{M_1M_2}\frac{dQ}{T}$.

Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ τύπου (1) ὅτι, ὅταν εἶναι $dQ=0$, θὰ εἶναι καὶ $dS=0$, ἢ $S=$ σταθερόν. Τὰς μετατροπάς, κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων ἡ τροπὴ ἔχει σταθερὰν τιμήν, θὰ ὀνομάζωμεν ἰσοτρόπους μετατροπάς. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $dQ=0$ χαρακτηρίζει τὰς ἀδιαθέρμους μετατροπάς, ἔχομεν τὴν πρότασιν:

γ. Αἱ ἀδιάθερμοι μετατροπαὶ τῶν σωμάτων εἶναι καὶ ἰσότροποι μετατροπαί.

Σχ. 33

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γενίκευσις δι' ὅλα τὰ σώματα τῆς προτάσεως α τῆς § 17, τὴν ὁποίαν εὕρομεν κατὰ τὴν μελέτην τῶν τελείων ἀερίων. Ὁμοίως ἰσχύει δι' ὅλα τὰ σώματα καὶ ἡ πρότασις β τῆς § 17. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ εἰς τὴν σχέσιν (1) τὸ T εἶναι πάντοτε θετικόν, τὰ dQ καὶ dS εἶναι ὁμόσημα. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν πρότασιν:

δ. Ὅταν τὸ διάγραμμα ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς οἱουδήποτε σώματος ἀνέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ πεδίον τῶν ἰσοτρό-

πων, ἡ τροπὴ τοῦ σώματος αὐξάνει. Ἀντιθέτως· ἐὰν τὸ διάγραμμα κατέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀδιαθέρμων, ἡ τροπὴ ἐλαττοῦται.

Θεωρήσωμεν τέλος δύο ἀδιαθέρμους Δ_1, Δ_2 (σχ. 33) καὶ τυχοῦσαν ἰσόθερμον M_1M_2 ($T = T_1$) περιοριζομένην ὑπὸ τῶν Δ_1, Δ_2. Δυνάμει τῆς προτάσεως β, ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς Δ_1 θὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν, ἔστω S_1 καὶ ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς Δ_2 θὰ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν, ἔστω S_2. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2. Ἔχομεν

$$S_2 - S_1 = \int_{M_1M_2} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1}\int_{M_1M_2} dQ = \frac{Q_1}{T_1}, \tag{4}$$

ὅπου Q_1 εἶναι ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς M_1M_2. Ἂς θεωρήσωμεν καὶ ἑτέραν ἰσόθερμον $M_1'M_2'$ ($T = T_2$), περιοριζομένην ὑπὸ τῶν Δ_1, Δ_2 καὶ ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς $M_1'M_2'$· ἔχομεν

$$S_2 - S_1 = \int_{M_1'M_2'} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_2}\int_{M_1'M_2'} dQ = \frac{Q_2}{T_2}, \tag{5}$$

ὅπου Q_2 εἶναι ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς $M_1'M_2'$. Ἐκ τῶν τύπων (4), (5) λαμβάνομεν

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{6}$$

Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τὸν τύπον (18) τῆς § 33. Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

ε. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἰσοθέρμους μετατροπάς, τῶν ὁποίων τὰ διαγράμματα περιλαμβάνονται μεταξὺ δύο ἀδιαθέρμων, ὁ λόγος τῆς ἀπορροφουμένης θερμότητος κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἑκάστης ἰσοθέρμου μετατροπῆς πρὸς τὴν ἀντίστοιχον θερμοκρασίαν τῆς ἰσοθέρμου εἶναι σταθερός.

36. Τύπος τοῦ Clapeyron. Ἂς λάβωμεν δύο ἰσοθέρμους M_1M_2 (T) καὶ $M_1'M_2'$ ($T + dT$) ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων, περιοριζομένας μεταξὺ τῶν ἀδιαθέρμων Δ_1, Δ_2 (σχ. 34). Ἔστω ὅτι ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν διαγραφὴν τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2 εἶναι Q· τότε ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν διαγραφὴν τῆς ἰσοθέρμου $M_1'M_2'$ θὰ εἶναι $Q + dQ$. Δυνάμει δὲ τῆς προτάσεως ε τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ εἶναι

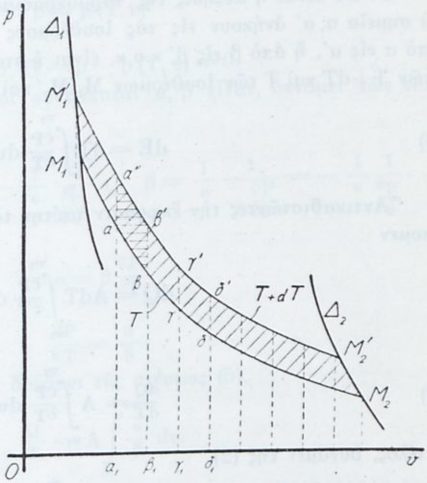
$$\frac{Q}{T} = \frac{Q + dQ}{T + dT}. \tag{1}$$

Ὁ τύπος (1), δυνάμει γνωστῆς σχέσεως ἐκ τῶν ἀναλογιῶν, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{Q}{T} = \frac{dQ}{dT}. \tag{2}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κύκλος $M_1'M_2'M_2M_1M_1'$, ὡς ἀποτελούμενος ἀπὸ δύο τόξα ἰσοθέρμων καὶ δύο τόξα ἀδιαθέρμων, εἶναι κύκλος τοῦ Carnot·

Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἤτοι τὴν φορὰν $M_1'M_2'M_2M_1M_1'$. Τότε ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου εἶναι ἡ θερμότης, ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται κατὰ τὴν ἰσόθερμον $M_1'M_2'$, δηλαδὴ εἶναι $Q+dQ$· καὶ ἡ ἀποδιδομένη θερμότης εἰς τὴν ψυχρὰν πηγὴν εἶναι ἡ θερμότης, ἡ ὁποία ἀποδίδεται κατὰ τὴν ἰσόθερμον M_2M_1, δηλαδὴ εἶναι Q. Ὅθεν ἡ θερμότης, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἔργον $dE =$ εμβ $M_1'M_2'M_2M_1M_1'$ εἶναι $(Q+dQ)-Q=dQ$. Ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς § 27 γράφεται λοιπὸν διὰ τὸν θεωρούμενον κύκλον



Σχ. 34

(3) $$dQ = AdE.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν dE τοῦ στοιχειώδους κύκλου $M_1'M_2'M_2M_1M_1'$. Πρὸς τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι ἡ M_1M_2 διαιρεῖται εἰς ἄπειρα τὸ πλῆθος στοιχειώδη τμήματα, ὡς εἶναι ἐπὶ παραδείγματι τὰ $M_1\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$,...καὶ φέρομεν τὰς τεταγμένας $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$,..., αἱ ὁποῖαι εἶναι στοιχεῖα τῶν ἰσοόγκων $\alpha_1\alpha\alpha'$, $\beta_1\beta\beta'$, $\gamma_1\gamma\gamma'$, $\delta_1\delta\delta'$,... Οὕτω διαιροῦμεν τὸν στοιχειώδη κύκλον τοῦ Carnot εἰς στοιχεῖα, ὡς εἶναι τὰ $\alpha'\beta'\beta\alpha\alpha'$, $\beta'\gamma'\gamma\beta\beta'$,... καθὼς δὲ διδάσκει ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός, τὸ ἐμβαδὸν $M_1'M_2'M_2M_1M_1'$ δίδεται ὑπὸ τοῦ ὁλοκληρώματος

(4) $$dE = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} dp d\upsilon,$$

ὅπου εἶναι $dp = \alpha\alpha'$, $d\upsilon = \alpha_1\beta_1$, καὶ υ_1, υ_2 οἱ ἀντίστοιχοι εἰδικοὶ ὄγκοι εἰς τὰς καταστάσεις M_1 καὶ M_2.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις δίδεται λελυμένη ὡς πρὸς p δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

(5) $$p = p(T, \upsilon)$$

τότε, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἰσοόγκου $\alpha\alpha'$ εἶναι $d\upsilon=0$, τὸ στοιχεῖον $\alpha\alpha'=dp$ τῆς ἰσοόγκου θὰ εἶναι, ἐκ τῆς (5)

(6) $$dp = \frac{\partial p}{\partial T} dT.$$

Ἡ (4) γράφεται, δυνάμει τῆς (6),

$$\text{(7)} \qquad dE = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, dT d\upsilon.$$

Τὸ dT εἶναι ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας ἀπὸ α εἰς α΄. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ σημεῖα α, α΄ ἀνήκουν εἰς τὰς ἰσοθέρμους M_1M_2, $M_1'M_2'$, ἡ αὔξησις dT ἀπὸ α εἰς α΄, ἢ ἀπὸ β εἰς β΄ κ.ο.κ. εἶναι ἡ σταθερὰ διαφορὰ τῶν θερμοκρασιῶν T+dT καὶ T τῶν ἰσοθέρμων $M_1'M_2'$ καὶ M_1M_2. Ἡ (7) γράφεται λοιπὸν

$$\text{(8)} \qquad dE = dT \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, d\upsilon.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἔκφρασιν ταύτην τοῦ dE εἰς τὸν τύπον (3) εὑρίσκομεν

$$dQ = A dT \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, d\upsilon,$$

ἢ

$$\text{(9)} \qquad \frac{dQ}{dT} = A \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, d\upsilon,$$

ἢ τέλος, δυνάμει τῆς (2),

$$\text{(10)} \qquad \frac{Q}{T} = A \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, d\upsilon.$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος τοῦ Clapeyron. Διὰ τοῦ τύπου αὐτοῦ δυνάμεθα, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν (5), νὰ ὑπολογίζωμεν τὰς θερμίδας Q, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ τόξου ἰσοθέρμου M_1M_2.

Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι ὁ Clapeyron (1799 - 1864) εὗρε τὸν ἀνωτέρω τύπον πολὺ πρὶν ὁ Clausius εἰσαγάγῃ εἰς τὴν ἐπιστήμην τὴν ἔννοιαν τῆς τροπῆς. Ὁ Clapeyron ἐθεώρησεν ὡς σῶμα ἐκτελοῦν τὴν ἰσόθερμον μετατροπὴν M_1M_2 μᾶζαν ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καὶ ὑπέθεσεν ὅτι ὁ τύπος (10) ἰσχύει μόνον διὰ τὸ ἀέριον τοῦτο. Προφανῶς, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς πορείας, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τύπον (10), ὁ τύπος οὗτος εἶναι γενικὸς καὶ ἐφαρμόζεται εἰς ὅλα τὰ σώματα.

37. Ὑπολογισμὸς τῆς διαφορᾶς $c'-c$. Ἂς εἰσαγάγωμεν εἰς τὸν τύπον τοῦ Clapeyron, δηλαδὴ τὸν τύπον

$$\text{(1)} \qquad \frac{Q}{T} = A \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\partial P}{\partial T}\, d\upsilon,$$

τοὺς θερμοελαστικοὺς συντελεστὰς (§ 4). Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\frac{\partial P}{\partial T}$ τοῦ τύπου (1), λαμβάνομεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν λελυμένην ὡς πρὸς p, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

(2) $$p = p\,(T, \upsilon)\cdot$$

ἤτοι εἶναι

(3) $$F\,(\upsilon, p, T) = p - p\,(T, \upsilon) = 0.$$

Ὅθεν οἱ θερμοελαστικοὶ συντελεσταὶ α, β εἶναι, δυνάμει τῶν τύπων (6) τῆς § 4

(4) $$\alpha = \frac{1}{\upsilon}\,\frac{-\frac{\partial p}{\partial T}}{-\frac{\partial p}{\partial \upsilon}} = \frac{1}{\upsilon}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial T}}{\frac{\partial p}{\partial \upsilon}}\,,\quad \beta = \frac{1}{\upsilon}\,\frac{1}{-\frac{\partial P}{\partial \upsilon}} = -\frac{1}{\upsilon}\,\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \upsilon}}\,.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$\alpha = \beta\,\frac{\partial P}{\partial T}$$

καὶ

(5) $$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται, δυνάμει τῆς σχέσεως (5),

(6) $$\frac{Q}{T} = A \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{\alpha}{\beta}\,d\upsilon.$$

Ἃς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὰς θερμίδας Q τοῦ τύπου (6), δηλαδὴ τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ τόξου ἰσοθέρμου M_1M_2. Ἐπειδὴ ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις (2) εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς p, θὰ λάβωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ dQ εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν υ, T, δηλαδὴ τὴν ἔκφρασιν (18, § 5)

(7) $$dQ = c\,dT + \frac{c'-c}{\alpha\upsilon}\,d\upsilon.$$

Ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2 εἶναι $dT = 0$, θὰ εἶναι

(8) $$Q = \int_{M_1M_2} dQ = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{c'-c}{\alpha\upsilon}\,d\upsilon.$$

Διαιροῦντες τὴν (8) διὰ τῆς σταθερᾶς ἀπολύτου θερμοκρασίας T τῆς ἰσοθέρμου M_1M_2 εὑρίσκομεν

(9) $$\frac{Q}{T} = \frac{1}{T}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{c'-c}{\alpha\upsilon}\,d\upsilon.$$

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (6) καὶ (9), λαμβάνομεν

(10) $$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{c'-c}{\alpha\upsilon T}\,d\upsilon = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} A\,\frac{\alpha}{\beta}\,d\upsilon.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύει δι' οἱονδήποτε τόξον M_1M_2 ἰσοθέρμου, ἤτοι ὅσον μικρὰ καὶ ἂν ληφθῇ ἡ διαφορὰ $\upsilon_2 - \upsilon_1$, θὰ ἔχωμεν

(11) $$\frac{c'-c}{\alpha\upsilon T} = A\,\frac{\alpha}{\beta}$$

ἤ,

(12) $$c' - c = A\,\frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta}.$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶναι οὐσιώδης, διότι μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διαφορὰν $c' - c$ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος, ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερόν, ἐκ μόνης τῆς γνώσεως τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως. Τῷ ὄντι, ὅταν δίδεται ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις, ὑπολογίζομεν διὰ τῶν τύπων (6) τῆς § 4 τοὺς θερμοελαστικοὺς συντελεστὰς α, β, ὁπότε γνωρίζομεν ἅπαντα τὰ στοιχεῖα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (12). Ἂς ὑπολογίσωμεν π. χ. τὴν διαφορὰν $c' - c$ διὰ τὰ σώματα, τῶν ὁποίων ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι

(13 $$F = p\upsilon - RT = 0,$$

δηλαδὴ διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Δυνάμει τῶν τύπων (10) τῆς § 14 εἶναι διὰ τὰ τέλεια ἀέρια

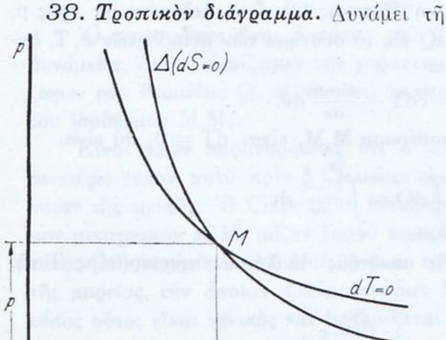
(14) $$\alpha = \frac{1}{T}, \quad \beta = \frac{1}{p}.$$

Οὕτω ὁ τύπος (12) γράφεται

(15) $$c' - c = A\,\frac{\frac{1}{T^2}\,\upsilon T}{\frac{1}{p}} = A\,\frac{p\upsilon}{T} = A\,\frac{RT}{T} = AR.$$

Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τὸν τύπον (9) τῆς § 16.

38. *Τροπικὸν διάγραμμα.* Δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 35 εἰς δεδομένην τιμὴν S τῆς τροπῆς σώματός τινος ἀντιστοιχεῖ μία ἀδιάθερμος Δ τοῦ σώματος· καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἑκάστην ἀδιάθερμον Δ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ S τῆς τροπῆς. Ἡ γνῶσις λοιπὸν τῆς τιμῆς S τῆς τροπῆς δὲν εἶναι ἀρκετή, διὰ νὰ ὁρίσῃ τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ σώματος, διότι ὅλαι αἱ καταστάσεις ἰσορροπίας τοῦ σώματος, αἱ ὁποῖαι παρίστανται εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἀδιαθέρμου ἢ ἰσοτρόπου Δ (S = σταθερὸν) ἔχουν τὴν ἰδίαν τροπὴν S. Ἐὰν ὅμως ἐκτὸς τῆς τροπῆς S γνωρίζωμεν καὶ τὴν θερμοκρασίαν T τοῦ σώματος, τότε



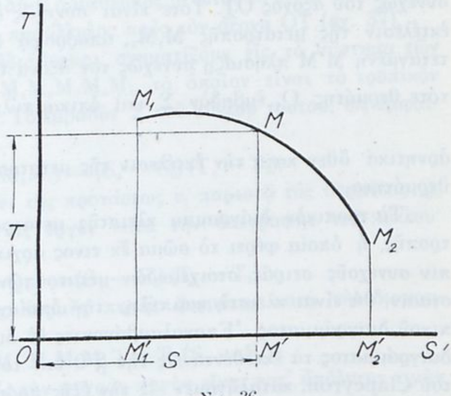
Σχ. 35

ἡ κατάστασις ἰσορροπίας αὐτοῦ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron (σχ. 35) ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς M τῆς ἰσοτρόπου S = σταθερὸν καὶ τῆς ἰσοθέρμου T = σταθερόν. Τὸ σημεῖον τοῦτο, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 11 καὶ τὴν § 12, εἶναι μοναδικὸν σημεῖον. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Ἓν σύστημα τιμῶν S, T τῆς τροπῆς καὶ τῆς θερμοκρασίας σώματός τινος ὁρίζει τελείως τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ σώματος.

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν § 7 διὰ τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron καταλήγομεν εἰς τὰς ἑξῆς προτάσεις:

β. Ἑκάστη κατάστασις ἰσορροπίας (S,T) σώματός τινος δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς σύστημα δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων OS, OT διὰ σημείου M, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας S καὶ T (σχ. 36).



Σχ. 36

γ. Ἡ συνεχὴς μετατροπὴ M_1M_2 σώματός τινος παρίσταται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων OS, OT ὑπὸ συνεχοῦς καμπύλης M_1M_2, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν τροπικὸν διάγραμμα τῆς μετατροπῆς M_1M_2 (σχ. 36).

Ὁμοίως ἐπαναλαμβάνοντες τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὸν τύπον (11) τῆς § 8 καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ $\int_{M_1M_2} TdS$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν $\Sigma(M_1'M_1M_2M_2')$ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος· δηλαδὴ εἶναι

(1) $$\Sigma = \int_{M_1M_2} TdS.$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς § 35 ἔχομεν

(2) $$dQ = TdS.$$

Ὅθεν ἡ θερμότης ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς M_1M_2 εἶναι

(3) $$Q = \int_{M_1M_2} TdS.$$

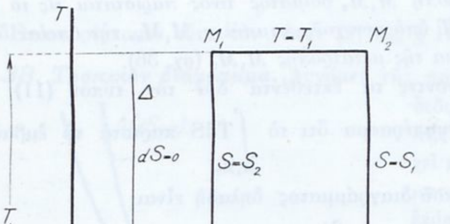
Συγκρίνοντες τοὺς τύπους (1) καὶ (3) καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

δ. Ἡ θερμότης Q ἡ ἀπαιτουμένη διὰ τὴν ἐκτέλεσιν μετατροπῆς M_1M_2 παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $\Sigma(M_1'M_1M_2M_2')$ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος *τῆς μετατροπῆς, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, καὶ ὑπὸ τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος* $\int_{M_1M_2} TdS$.

Ἡ θερμότης Q ὡς καὶ τὸ ἀντίστοιχον ἐμβαδὸν $\Sigma(M_1'M_1M_2M_2')$ εἶναι θετικά, ἐφ᾽ ὅσον ἡ τεταγμένη Μ΄Μ διαγράφει τὸ ἐμβαδὸν ἀπομακρυνομένη συνεχῶς τοῦ ἄξονος ΟΤ. Τότε εἶναι συνεχῶς $dS > 0$ καὶ τὸ σῶμα, διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς M_1M_2, ἀποῤῥοφᾷ θερμότητα. Ἐὰν ἀντιθέτως ἡ τεταγμένη Μ΄Μ πλησιάζῃ συνεχῶς τὸν ἄξονα ΟΤ, θὰ εἶναι συνεχῶς $dS < 0$· τότε θερμότης Q, ἐμβαδὸν Σ καὶ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{M_2M_1} TdS$ εἶναι ἀρνητικά· ὅθεν κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς M_2M_1, τὸ σῶμα ἀποδίδει θερμότητα.

Τὸ τροπικὸν διάγραμμα κλειστῆς μετατροπῆς σώματος, δηλαδὴ μετατροπῆς, ἡ ὁποία φέρει τὸ σῶμα ἔκ τινος ἀρχικῆς καταστάσεως (S, T), κατόπιν συνεχοῦς σειρᾶς στοιχειωδῶν μετατροπῶν, εἰς τὴν ἰδίαν ἀρχικὴν κατάστασιν, θὰ εἶναι κλειστὴ καμπύλη, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν κύκλον τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος. Ἐπαναλαμβάνοντες δὲ διὰ τοὺς κύκλους τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὴν § 9 διὰ τοὺς κύκλους τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron, καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

ε. Ὅταν ὁ κύκλος C_τ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος κλειστῆς μετατροπῆς σώματός τινος δὲν τέμνῃ ἑαυτόν, ὅταν δηλαδὴ ἐξαιρέσωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος (8, § 9), ἡ θερμότης, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται εἰς ἔργον κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς κλειστῆς μετατροπῆς τοῦ σώματος, παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου C_τ. Ἡ θερμότης αὕτη εἶναι θετική, δηλαδὴ τὸ σῶμα ἀποῤῥοφᾷ θερμότητα καὶ ἀποδίδει ἔργον, ἐφ᾽ ὅσον ὁ κύκλος C_τ διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, δηλαδὴ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Ἀντιθέτως ἐὰν ὁ κύκλος διαγράφεται κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, ἡ θερμότης εἶναι ἀρνητική· δηλαδὴ τὸ σῶμα ἀποῤῥοφᾷ ἔργον καὶ ἀποδίδει θερμότητα.



Σχ. 37

Ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ κύκλος τέμνῃ ἑαυτόν· τότε ὅμως πρέπει νὰ ληφθοῦν ὑπ᾿ ὄψιν τὰ σημεῖα τῶν δύο ἐμβαδῶν τοῦ διαγράμματος, ὡς ἐξεθέσαμεν διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος (8) τῆς § 9.

Τὸ τροπικὸν διάγραμμα ἰσοθέρμου μετατροπῆς ($dT = 0$) εἶναι εὐθεῖα AB παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα OS καὶ τὸ τροπικὸν διάγραμμα ἀδιαθέρμου μετατροπῆς ($dQ = 0$), ἐπειδὴ ἡ ἀδιάθερμος μετατροπὴ εἶναι καὶ ἰσότροπος ($dS = 0$), εἶναι εὐθεῖα ΓΔ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα OT (σχ. 37).

Δύο ἰσόθερμοι καὶ δύο ἀδιάθερμοι σχηματίζουν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων OS, OT ὀρθογώνιον $M_1M_2M_3M_4M_1$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τροπικὸν διάγραμμα κύκλου τοῦ Carnot. Τὸ ἐμβαδὸν Σ τοῦ κύκλου τούτου, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, εἶναι

(4) $$\Sigma = (M_4M_3)(M_4M_1) = (S_1 - S_2)(T_1 - T_2).$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο, δυνάμει τῆς προτάσεως ε, παριστᾷ τὰς θερμίδας Q, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου· δηλαδὴ εἶναι

(5) $$Q = Q_{1,2} - Q_{4,3} = (S_1 - S_2)(T_1 - T_2).$$

Ἡ ἀπορροφηθεῖσα ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς θερμότης κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου εἶναι

(6) $$Q_{1,2} = \text{εμβ}\,(M_1'M_1M_2M_2') = T_1(S_1 - S_2)$$

καὶ ἡ ἀποδοθεῖσα θερμότης εἰς τὴν ψυχρὰν πηγὴν εἶναι κατ᾿ ἀπόλυτον τιμὴν

(7) $$Q_{4,3} = T_2(S_1 - S_2).$$

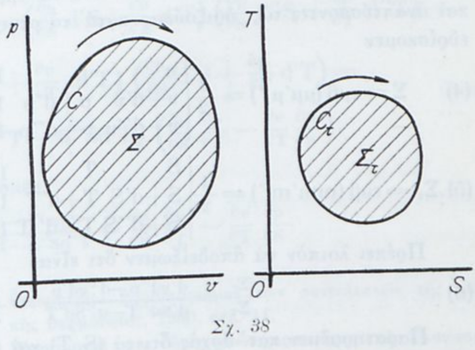
Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εἶναι (§ 33)

(8) $$\eta_\theta = \frac{Q_{1,2} - Q_{4,3}}{Q_{1,2}} = \frac{\text{εμβ}\,(M_1M_2M_3M_4M_1)}{\text{εμβ}\,(M_1'M_1M_2M_2')} = \frac{(S_1 - S_2)(T_1 - T_2)}{T_1(S_1 - S_2)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

ἢ

(9) $$\eta_\theta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

39. Σχέσις τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος καὶ τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron. Ἔστωσαν (σχ. 38) C_τ τὸ τροπικὸν διάγραμμα καὶ C τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron κλειστῆς μετατροπῆς σώματός τινος. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην ἔχομεν ἀπορρόφησιν θερμότητος Q καὶ ἀπόδοσιν ἔργου E· τότε οἱ κύκλοι C, C_τ διαγράφονται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ τὸ μὲν ἐμβαδὸν Σ τοῦ κύκλου C



Σχ. 38

παριστᾷ τὸ ἔργον E, τὸ δὲ ἐμβαδὸν Σ_τ τοῦ κύκλου C_τ παριστᾷ τὴν θερμότητα Q. Ἐπειδὴ δέ. δυνάμει τῆς ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου (§ 27), εἶναι

(1) $$\frac{E}{Q} = \frac{1}{A},$$

θὰ εἶναι καὶ

(2) $$\frac{\Sigma}{\Sigma_\tau} = \frac{1}{A}.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν πρότασιν:

α. Ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου τοῦ Clapeyron καὶ τοῦ κύκλου τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος κλειστῆς μετατροπῆς σώματός τινος εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος πρὸς $\frac{1}{A}$.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀπόρροια τῶν ἰδιοτήτων τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron (§ 10) καὶ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος (§ 38) ὡς καὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ Mayer. Ἐν τούτοις δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας τὴν πρότασιν ταύτην ὡς ἑξῆς:

Ἂς θεωρήσωμεν τρεῖς καταστάσεις ἰσορροπίας M,M′,M″ σώματός τινος ἀπείρως πλησίον ἀλλήλων καὶ ἔστωσαν $\mu(\upsilon, p)$, $\mu'(\upsilon + d'\upsilon,\, p + d'p)$, $\mu''(\upsilon + d''\upsilon,\, p + d''p)$ τὰ παραστατικὰ σημεῖα τῶν καταστάσεων εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron καὶ $m(S,T)$, $m'(S + d'S,\, T + d'T)$, $m''(S + d''S,\, T + d''T)$ τὰ ἀντίστοιχα παραστατικὰ σημεῖα εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα. Τὰ στοιχειώδη τρίγωνα $(\mu\mu'\mu'')$ καὶ $(mm'm'')$ εἶναι οἱ κύκλοι τοῦ διαγράμματος τοῦ Clapeyron καὶ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος καὶ τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν Σ, Σ_τ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (2). Τὸ ἐμβαδὸν γενικῶς τοῦ τριγώνου $M_1M_2M_3$, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, δίδεται ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας

(3) $$\text{εμβ}\,(M_1M_2M_3) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον αὐτὸν διὰ τὰ ἐμβαδὰ $(\mu\mu'\mu'')$ καὶ $(mm'm'')$ καὶ ἀναπτύσσοντες τὰς ὁριζούσας κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης των, εὑρίσκομεν

(4) $$\Sigma = \text{εμβ}\,(\mu\mu'\mu'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \upsilon & p & 1 \\ \upsilon + d'\upsilon & p + d'p & 1 \\ \upsilon + d''\upsilon & p + d''p & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(d'\upsilon d''p - d''\upsilon d'p),$$

(5) $$\Sigma_\tau = \text{εμβ}\,(mm'm'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} S & T & 1 \\ S + d'S & T + d'T & 1 \\ S + d''S & T + d''T & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(d'Sd''T - d''Sd'T).$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι

(6) $$\frac{\Sigma}{\Sigma_\tau} = \frac{d'\upsilon d''p - d''\upsilon d'p}{d'Sd''T - d''Sd'T} = \frac{1}{A}.$$

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι τὰ (S, T) καὶ (υ, p) δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀλλήλων. Τῷ ὄντι, δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 38, ἓν σύστημα τιμῶν

(S, T) ὁρίζει τελείως τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας σώματος. Ἀλλά, δυνάμει τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $F(\upsilon, p, T) = 0$, καὶ ἓν σύστημα τιμῶν (υ, p) ὁρίζει τελείως τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας τοῦ σώματος. Πρέπει λοιπὸν τὰ υ, p νὰ προσδιορίζωνται ἐκ τῶν S.T καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τῶν $\upsilon.p$ νὰ προσδιορίζωνται τὰ S,T. Μεταξὺ λοιπὸν τῶν τεσσάρων φυσικῶν στοιχείων, τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου υ, τῆς εἰδικῆς πιέσεως p, τῆς θερμοκρασίας T καὶ τῆς τροπῆς S, θὰ ἔχωμεν

$$(7)\qquad \begin{cases} \upsilon = \upsilon(S,T) \\ p = p(S,T), \end{cases}$$

ὅπου $\upsilon(S,T)$, $p(S,T)$ εἶναι συναρτήσεις τῶν S,T. Τὰς ἐξισώσεις (7), αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν γενίκευσιν τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $F(\upsilon, p, T) = 0$, ὀνομάζομεν γενικὰς χαρακτηριστικὰς ἐξισώσεις *. Προφανῶς δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ S μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (7) θὰ προκύψῃ ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις. Διαφορίζοντες τὰς (7) κατὰ μῆκος τῆς ἀπείρως μικρᾶς μετατροπῆς MM′ εὑρίσκομεν

$$(8)\qquad \begin{cases} d'\upsilon = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial S}\, d'S + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial T}\, d'T \\[2ex] d'p = \dfrac{\partial p}{\partial S}\, d'S + \dfrac{\partial p}{\partial T}\, d'T. \end{cases}$$

Ὁμοίως διαφορίζοντες τὰς (7) κατὰ μῆκος τῆς ἀπείρως μικρᾶς μετατροπῆς MM″ εὑρίσκομεν

$$(9)\qquad \begin{cases} d''\upsilon = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial S}\, d''S + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial T}\, d''T \\[2ex] d''p = \dfrac{\partial p}{\partial S}\, d''S + \dfrac{\partial p}{\partial T}\, d''T. \end{cases}$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἤδη, δυνάμει τῶν (8) καὶ (9), τὸν ἀριθμητὴν τοῦ δευτέρου κλάσματος τῆς (6)· ἔχομεν

$$(10)\qquad d'\upsilon d''p - d''\upsilon d'p = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\, d'S + \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\, d'T\right)\left(\frac{\partial p}{\partial S}\, d''S + \frac{\partial p}{\partial T}\, d''T\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\, d''S + \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\, d''T\right)\left(\frac{\partial p}{\partial S}\, d'S + \frac{\partial p}{\partial T}\, d'T\right) =$$
$$= \left(d'S d''T - d''S d'T\right)\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S}\right).$$

Ἐκ τῆς (10) λαμβάνομεν

$$(11)\qquad \frac{d'\upsilon d''p - d''\upsilon d'p}{d'S d''T - d''S d'T} = \frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S}.$$

---

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Θεωρητικοὶ προσδιορισμοὶ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος, 1930, σελ. 14.

» » Ἐφαρμογαί τινες τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν ἐξισώσεων τῆς Θερμοδυναμικῆς, Χημικὰ Χρονικά, Δεκέμβριος 1940.

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (11) καὶ (6) παρατηροῦμεν ὅτι, ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ (6), ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T}-\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S}=\frac{1}{A}. \tag{12}$$

Πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν τὴν ἔκφρασιν (14, § 5) τοῦ dQ, ἤτοι τὴν ἔκφρασιν

$$dQ=\frac{c'}{\alpha\upsilon}d\upsilon+c\frac{\beta}{\alpha}dp. \tag{13}$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι (§ 35)

$$dQ=TdS. \tag{14}$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (13), (14) ἐκφράζουν τὸ dQ, πρέπει ταῦτα νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα· ὅθεν εἶναι

$$\frac{c'}{\alpha\upsilon}d\upsilon+c\frac{\beta}{\alpha}dp=TdS. \tag{15}$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰσέρχονται καὶ τὰ τέσσαρα φυσικὰ στοιχεῖα τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν ἐξισώσεων (7)· ἔχομεν ἐκ τῶν (7)

$$\left\{\begin{aligned} d\upsilon&=\frac{\partial \upsilon}{\partial S}dS+\frac{\partial \upsilon}{\partial T}dT\\ dp&=\frac{\partial p}{\partial S}dS+\frac{\partial p}{\partial T}dT. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (15) τὰ dυ, dp διὰ τῶν ἴσων των ἐκ τῶν (16) λαμβάνομεν

$$\frac{c'}{\alpha\upsilon}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}dS+\frac{\partial \upsilon}{\partial T}dT\right)+c\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial p}{\partial S}dS+\frac{\partial p}{\partial T}dT\right)=TdS,$$

ἤ

$$\left(\frac{c'}{\alpha\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial S}+c\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial S}\right)dS+\left(\frac{c'}{\alpha\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial T}+c\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial T}\right)dT=TdS. \tag{17}$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ (17) ταυτότης, πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\left\{\begin{aligned} \frac{c'}{\alpha\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial S}+c\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial S}&=T\\ \frac{c'}{\alpha\upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial T}+c\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial p}{\partial T}&=0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (18) καθίσταται προφανὴς ἡ πορεία, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν σχέσιν (12). Ἐὰν θεωρήσωμεν εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν σύστημα (18) τὰ $\frac{c'}{\alpha\upsilon}$ καὶ $c\frac{\beta}{\alpha}$ ὡς ἀγνώστους, ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι ἀκριβῶς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (12)· ἂς γράψωμεν χάριν συντομίας

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T}-\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S}=\Omega. \tag{19}$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (18) λαμβάνομεν

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{c'}{\alpha\upsilon} = \dfrac{\begin{vmatrix} T & \dfrac{\partial p}{\partial S} \\ O & \dfrac{\partial p}{\partial T} \end{vmatrix}}{\Omega} = \dfrac{1}{\Omega} T \dfrac{\partial p}{\partial T} \\ c\,\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial S} & T \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial T} & O \end{vmatrix}}{\Omega} = -\dfrac{1}{\Omega} T \dfrac{\partial \upsilon}{\partial T}. \end{cases}$$

Λύοντες τὰς (20) ὡς πρὸς c', c, εὑρίσκομεν

$$(21)\qquad \begin{cases} c' = \dfrac{\alpha\upsilon T}{\Omega} \dfrac{\partial p}{\partial T} \\ c = -\dfrac{\alpha T}{\beta\Omega} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial T}. \end{cases}$$

Ἐκ τῶν (21) λαμβάνομεν

$$(22)\qquad c'\;c = \frac{\alpha T}{\Omega}\left(\upsilon \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right).$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παρένθεσιν τοῦ δευτέρου μέλους, ἂς λάβωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν λελυμένην ὡς πρὸς t, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$t = \varphi(\upsilon, p).$$

Ἔχομεν

$$(23)\qquad dT = \frac{\partial \varphi}{\partial \upsilon} d\upsilon + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp.$$

Ἡ (23) γράφεται, δυνάμει τῶν σχέσεων (13) τῆς § 5,

$$(24)\qquad dT = \frac{1}{\alpha\upsilon} d\upsilon + \frac{\beta}{\alpha} dp.$$

Ἐκ τῆς (24), ἐπειδὴ τὰ υ, p, δυνάμει τῶν (7), εἶναι συναρτήσεις τῶν T, S, λαμβάνομεν

$$(25)\qquad 1 = \frac{1}{\alpha\upsilon} \frac{\partial \upsilon}{\partial T} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ἡ (22) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(26)\qquad c' - c = \frac{\alpha T}{\Omega} \frac{\alpha\upsilon}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{\alpha\upsilon} \frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right).$$

Ἤ, δυνάμει τῆς (25),

$$(27)\qquad c' - c = \frac{\alpha T}{\Omega} \frac{\alpha\upsilon}{\beta} = \frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta\Omega}.$$

Συγκρίνοντες τὸν τύπον (27) μὲ τὸν τύπον (12) τῆς § 37 εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$(28)\qquad \frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta\Omega} = A\,\frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta},$$

ἢ μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις

(29) $$\Omega = \frac{1}{A},$$

ἢ τέλος, δυνάμει τῆς (19),

$$\frac{\partial v}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S} = \frac{1}{A}.$$

Οὕτω ἀπεδείξαμεν ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις (12)· ἄρα ἀληθεύει καὶ ἡ σχέσις (6). Ὅ.ἔ.δ.

Τὴν ὁρίζουσαν

(30) $$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial S} & \frac{\partial v}{\partial T} \\ \frac{\partial p}{\partial S} & \frac{\partial p}{\partial T} \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial S}\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial S}$$

ὀνομάζομεν συμβολικὴν ὁρίζουσαν τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν ἐξισώσεων (7). Ἡ σχέσις (29) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

β. Ἡ συμβολικὴ ὁρίζουσα Ω τῶν γενικῶν χαρακτηριστικῶν ἐξισώσεων $v = v(S, T)$ καὶ $p = p(S, T)$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $\frac{1}{A} = 427$.

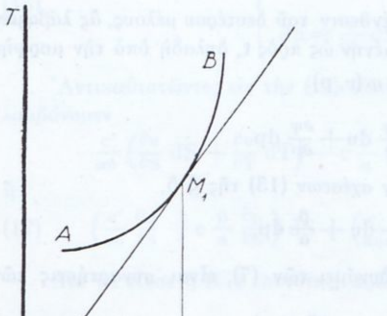
40. Γραφικὴ παράστασις τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Μετατροπαὶ ὑπὸ σταθερὸν συντελεστὴν εἰδικῆς θερμότητος. Ἂς θεωρήσωμεν τυχοῦσαν μετατροπὴν σώματος, τῆς ὁποίας τὸ τροπικὸν διάγραμμα ἔστω ἡ καμπύλη AB (σχ. 39). Ἔστω

(1) $$T = f(S),$$

ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης AB. Ὁ συντελεστὴς λ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σώματος, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 2, μεταβάλλεται ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς AB καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(2) $$\lambda = \frac{dQ}{dT}.$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) $dQ = TdS$, λαμβάνομεν



Σχ. 39

(3) $$\lambda = \frac{TdS}{dT}.$$

Παραγωγίζοντες τὴν (1) ὡς πρὸς S εὑρίσκομεν

(4) $$\frac{dT}{dS} = f'(S) \quad \text{καὶ} \quad \frac{dS}{dT} = \frac{1}{f'(S)}.$$

Ἡ (3) γράφεται, δυνάμει τῆς (4),

(5) $$\lambda = \frac{T}{f'(S)}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν τιμὴν λ_1 τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος εἴς τι σημεῖον $M_1(S_1, T_1)$ τῆς AB, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὸν τύπον (5), ἀντὶ τῶν T, S, τὰς ἀντιστοίχους τιμάς των T_1, S_1· εἶναι λοιπὸν

(6) $$\lambda_1 = \frac{T_1}{f'(S_1)}.$$

Ἄς φέρωμεν ἤδη τὴν ἐφαπτομένην τῆς AB εἰς τὸ σημεῖον $M_1(S_1, T_1)$ τῆς καμπύλης. Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης ταύτης εἶναι ὡς γνωστὸν

(7) $$T - T_1 = \frac{dT}{dS}(S - S_1) = f'(S_1)(S - S_1).$$

Ἔστω $H(S_2, O)$ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ἐφαπτομένη αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα OS. Τὴν τετμημένην S_2 τοῦ σημείου H ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (7), ἐὰν θέσωμεν $T = O$, $S = S_2$ ἤτοι ἔχομεν

$$-T_1 = f'(S_1)(S_2 - S_1),$$

ἢ

(8) $$(S_1 - S_2) = -(S_2 - S_1) = \frac{T_1}{f'(S_1)}.$$

Συγκρίνοντες τὸν τύπον (8) μὲ τὸν τύπον (6) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(9) $$\lambda_1 = S_1 - S_2.$$

Ἐκ τοῦ σχήματος βλέπομεν ὅτι εἶναι $S_1 - S_2 = (HK)$, ὅπου $\overrightarrow{HK}$ εἶναι ἡ ὑφαπτομένη τῆς καμπύλης AB εἰς τὸ σημεῖον M_1 τῆς καμπύλης. Εἶναι λοιπὸν

(10) $$\lambda_1 = (HK).$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ὑφαπτομένης εἴς τι σημεῖον τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος μετατροπῆς σώματός τινος ἰσοῦται πρὸς τὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ σώματος εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον.

Ἄς ζητήσωμεν ἤδη τὰς μετατροπὰς σώματος, κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων ὁ συντελεστὴς λ τῆς εἰδικῆς θερμότητος εἶναι σταθερός. Τὰς μετατροπὰς αὐτὰς θὰ ὀνομάζωμεν μετατροπὰς ὑπὸ σταθερὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Τὰ τροπικὰ διαγράμματα τῶν μετατροπῶν τούτων θὰ εἶναι καμπύλαι, τῶν ὁποίων αἱ ὑφαπτομέναι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα θὰ εἶναι ἴσαι. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις τῶν καμπύλων τούτων εἶναι ἡ (3), εἰς τὴν ὁποίαν τὸ λ θεωρεῖται σταθερόν. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(11) $$\frac{dT}{T} = \frac{dS}{\lambda}.$$

Ὁλοκληροῦντες εὑρίσκομεν

$$\log T = \frac{1}{\lambda}(S - S_0),$$

καὶ

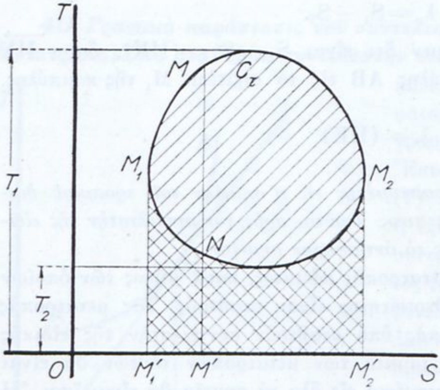
(12) $$T = e^{\frac{S - S_0}{\lambda}}.$$

Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ λ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων OS, ΟΤ μία καμπύλη, ἔχουσα ἐξίσωσιν τὴν (12)· ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι τὸ τροπικὸν διάγραμμα μετατροπῆς ὑπὸ σταθερὸν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος.

41. Θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως κλειστῆς μετατροπῆς. Εἴδομεν εἰς τὴν § 21, ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως κλειστῆς μετατροπῆς σώματός τινος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\eta_\theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \tag{1}$$

ὅπου Q_1 εἶναι αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας ἀπορροφᾷ τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν θερμὴν πηγὴν κατὰ τὴν διαγραφὴν τῆς κλειστῆς μετατροπῆς καὶ Q_2 εἶναι αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας ἀποδίδει τὸ σῶμα εἰς τὴν ψυχρὰν πηγήν. Ἡ διαφορὰ $Q_1 - Q_2$ εἶναι αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς ἔργον κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς κλειστῆς μετατροπῆς. Ἐξ ἄλλου, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 38, αἱ θερμίδες Q_1, Q_2, $Q_1 - Q_2$, παρίστανται ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα ἐμβαδὰ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος τῆς μετατροπῆς. Τὸ τροπικὸν διάγραμμα λοιπὸν C_τ κλειστῆς μετατροπῆς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν γραφικῶς τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως η_θ τῆς κλειστῆς μετατροπῆς.



Σχ. 40

Ἂς ἐξετάσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν τοῦ σχήματος (40), ὅπου ἐκτὸς τῶν δύο ἄκρων ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου, ἤτοι τῶν $M_1'M_1$ καὶ $M_2'M_2$, οἱαδήποτε ἄλλη τεταγμένη ὡς ἡ $M'M$ τέμνει τὸν κύκλον εἰς δύο σημεῖα N, M.

Ὑποθέτομεν ὅτι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς κλειστῆς μετατροπῆς ἔχομεν ἀπόδοσιν ἔργου. Τότε ὁ κύκλος C_τ διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 38, ἡ θερμότης Q_1, τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ ἐκτελοῦν τὴν κλειστὴν μετατροπὴν σῶμα ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς, θὰ εἶναι

$$Q_1 = \text{εμβ}\,(M_1'M_1MM_2M_2') \tag{2}$$

καὶ ἡ θερμότης Q_2, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὸ σῶμα εἰς τὴν ψυχρὰν πηγήν, εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν

$$Q_2 = \text{εμβ}\,(M_1'M_1NM_2M_2'). \tag{3}$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2) καὶ (3), γράφεται

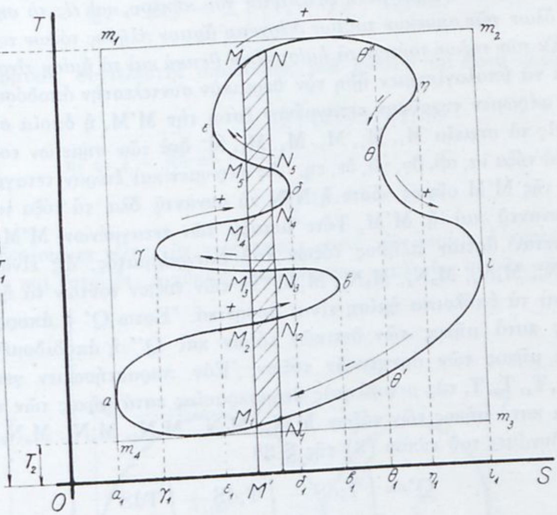
$$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\text{εμβ}\,(M_1'M_1NM_2M_2')}{\text{εμβ}\,(M_1'M_1MM_2M_2')}. \tag{4}$$

ἢ καὶ

$$\eta_\theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\varepsilon\mu\beta\,(M_1MM_2NM_1)}{\varepsilon\mu\beta\,(M_1{'}M_1MM_2M_2{'})}. \tag{5}$$

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν γενικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος ἔχει οἱονδήποτε σχῆμα, ὡς εἶναι ὁ κύκλος εηθιαβγδε τοῦ σχήματος (41). Ὁ μόνος περιορισμὸς διὰ τὸν κύκλον αὐτὸν εἶναι, ὅτι δὲν τέμνει ἑαυτόν, ὅτι δηλαδὴ δὲν ἔχομεν διπλᾶ σημεῖα.

Οἱαδήποτε τεταγμένη μὴ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, ὡς εἶναι ἡ Μ΄Μ, τέμνει τὸν κύκλον εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν σημείων M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M. Διὰ τῶν σημείων τούτων διέρχεται ἄρτιον πλῆθος τόξων, ὡς εἶναι τὰ τόξα ια, αβ, βγ,



Σχ. 41

γδ, δε, εη, τὰ ὁποῖα περιορίζονται μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων τεταγμένων τοῦ κύκλου. Ἐκ τῶν τόξων τούτων ια, αβ, βγ..., τὰ μὲν τόξα, κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων ἡ τροπὴ αὐξάνει θεωροῦμεν θετικὰ καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ (+), τὰ δὲ τόξα, κατὰ μῆκος τῶν ὁποίων ἡ τροπὴ ἐλαττοῦται θεωροῦμεν ἀρνητικὰ καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ (—). Θετικὰ δηλαδὴ εἶναι τὰ τόξα, κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν ὁποίων ἀπομακρυνόμεθα συνεχῶς τοῦ ἄξονος ΟΤ, ὁπότε ἔχομεν $dS > 0$· τοιαῦτα τόξα εἶναι εἰς τὸ σχῆμα (41) τὰ αβ, γδ, εη. Ἀρνητικὰ δὲ εἶναι τὰ τόξα, κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν ὁποίων πλησιάζομεν συνεχῶς τὸν ἄξονα ΟΤ, ὁπότε ἔχομεν $dS < 0$· τοιαῦτα εἶναι τὰ τόξα ια, βγ, δε.

Ἡ τεταγμένη, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ἢ θὰ εἶναι μία τῶν ἄκρων ἐφαπτομένων, ὅπως εἶναι ἡ $\alpha_1\alpha$, ἢ θὰ τέμνῃ τὸν κύκλον ἐκτὸς τοῦ σημείου ἐπαφῆς ϑ καὶ εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν σημείων ϑ′, ϑ″. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, τῆς ἄκρας ἐφαπτομένης, διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς α διέρχεται ἄρτιον πλῆθος τόξων, ἤτοι τὰ δύο τόξα ια καὶ αβ· ἐκ τούτων τὸ ια εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὸ αβ θετικόν. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, τῆς ἐφαπτομένης ϑ′ϑϑ″, διὰ τῶν σημείων ϑ″, ϑ, ϑ′, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη συναντᾷ τὸν κύκλον, διέρχεται ἐπίσης ἄρτιον πλῆθος τόξων, ὡς εἶναι τὰ τόξα εη, ηϑ, ϑι, ια· ἐκ τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίση εἶναι θετικά, ὡς εἶναι τὰ τόξα εη, ϑι καὶ τὰ ἄλλα ἡμίση εἶναι ἀρνητικά, ὡς εἶναι τὰ τόξα ηϑ, ια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Οἱαδήποτε τεταγμένη συναντᾷ τὸν κύκλον εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν σημείων καὶ ἐπὶ πλέον, ἐὰν ἡ τεταγμένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Δι᾿ ὅλων τῶν σημείων τούτων διέρχεται ἄρτιον πλῆθος τόξων τοῦ διαγράμματος. Ἐκ τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίση εἶναι θετικὰ καὶ τὰ ἡμίση εἶναι ἀρνητικά.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ κύκλου ἂς φέρωμεν τυχοῦσαν τεταγμένην ἔστω τὴν M′M, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M· διὰ τῶν σημείων τούτων διέρχονται τὰ τόξα ια, αβ, βγ, γδ, δε, εη. Ἂς φέρωμεν καὶ ἑτέραν τεταγμένην N_1N πλησίον τῆς M′M οὕτως, ὥστε ἡ N_1N νὰ συναντᾷ ὅλα τὰ τόξα ια, αβ..., τὰ ὁποῖα συναντᾷ καὶ ἡ M′M. Τότε μεταξὺ τῶν τεταγμένων M′M, N_1N περιλαμβάνεται ἄρτιον πλῆθος τόξων τοῦ διαγράμματος, ὡς εἶναι τὰ τόξα MN, M_5N_5, M_4N_4, M_3N_3, M_2N_2, M_1N_1· ἐκ τῶν τόξων τούτων τὰ ἡμίση εἶναι θετικὰ καὶ τὰ ὑπόλοιπα ἡμίση εἶναι ἀρνητικά. Ἔστω Q′ ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ μῆκος τῶν θετικῶν τόξων καὶ Q″ ἡ ἀποδιδομένη θερμότης κατὰ μῆκος τῶν ἀρνητικῶν τόξων. Ἐὰν παραστήσωμεν γενικῶς διὰ T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T, τὰς μεταβλητὰς θερμοκρασίας κατὰ μῆκος τῶν τόξων τούτων, ἤτοι κατὰ μῆκος τῶν τόξων M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, M_4N_4, M_5N_5, MN, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 38

$$Q' = \int_{M_2N_2} T_2 dS + \int_{M_4N_4} T_4 dS + \int_{MN} T dS \tag{6}$$

καὶ κατ᾿ ἀπόλυτον τιμὴν

$$Q'' = \int_{M_1N_1} T_1 dS + \int_{M_3N_3} T_3 dS + \int_{M_5N_5} T_5 dS. \tag{7}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τεταγμέναι M_1M, N_1N εἶναι ἰσότροποι γραμμαί· ἔστω S′ ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς M_1M καὶ S″ ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς N_1N. Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (6), (7) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$Q' = \int_{S'}^{S''} (T_2 + T_4 + T)\, dS, \tag{8}$$

$$Q'' = \int_{S'}^{S''} (T_1 + T_3 + T_5)\, dS, \tag{9}$$

Ἄς φέρωμεν ἤδη τὰς τεταγμένας $\alpha_1\alpha$, $\gamma_1\gamma$, $\varepsilon_1\varepsilon$, $M'M$, N_1N, $\delta_1\delta$, $\beta_1\beta$, $\vartheta_1\vartheta$, $\eta_1\eta$, $\iota_1\iota$ καὶ ἂς σχηματίσωμεν διὰ τὰ τόξα τοῦ διαγράμματος, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν τεταγμένων τούτων, λαμβανομένων ἀλληλοδιαδόχως ἀνὰ δύο, τὰς ἐκφράσεις (8), (9). Ἡ ὁλικὴ ἀπορροφουμένη θερμότης Q_1 κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν Q' καὶ ἡ ὁλικὴ ἀποδιδομένη θερμότης Q_2 θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν Q'' ἤτοι ἔχομεν

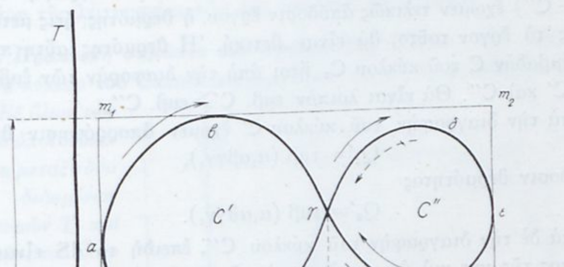
$$\text{(10)} \qquad Q_1 = \Sigma Q' = \Sigma \int_{S'}^{S''} (T_2 + T_4 + T)\, dS,$$

$$\text{(11)} \qquad Q_2 = \Sigma Q'' = \Sigma \int_{S'}^{S''} (T_1 + T_3 + T_5)\, dS.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα,

$$\text{(12)} \qquad \eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\Sigma \int_{S'}^{S''} (T_1 + T_3 + T_5)\, dS}{\Sigma \int_{S'}^{S''} (T_2 + T_4 + T)\, dS}.$$

Ἄς ἐξετάσωμεν τέλος τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος C_τ τέμνει ἑαυτὸν καὶ ἔστω ὅτι ὁ κύκλος διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν αβγδεηγθα



Σχ. 42

(σχ. 42). Τότε ὁ κύκλος C_τ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κύκλους C′, C″, οἱ ὁποῖοι διαγράφονται ἀμφότεροι κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C′ ἔχομεν ἀπορρόφησιν θερμότητος

(13) $$Q_1' = \text{εμβ}\,(\alpha_1\alpha\beta\gamma\gamma_1)$$

καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος

(14) $$Q_2' = \text{εμβ}\,(\alpha_1\alpha\vartheta\gamma\gamma_1).$$

Ἀντιστοίχως κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C″ ἔχομεν ἀπορρόφησιν θερμότητος

(15) $$Q_1'' = \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\delta\varepsilon\varepsilon_1)$$

καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος

(16) $$Q_2'' = \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\eta\varepsilon\varepsilon_1).$$

Ἡ ὁλικὴ λοιπὸν ἀπορροφουμένη θερμότης Q_1 κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C_τ (C′+C″) εἶναι

(17) $$Q_1 = Q_1' + Q_1''$$

καὶ ἡ ὁλικὴ ἀποδιδομένη θερμότης εἶναι

(18) $$Q_2 = Q_2' + Q_2''.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C_τ (C′+C″) εἶναι

(19) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2' + Q_2''}{Q_1' + Q_1''}.$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἐκ νέου τὸν κύκλον C_τ (C′+C″) καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι οὗτος διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν αβγηεδγθα (σχ. 42). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ κύκλος C′ διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν καὶ ὁ κύκλος C″ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Ἐὰν κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C_τ (C′+C″) ἔχωμεν τελικῶς ἀπόδοσιν ἔργου, ἡ θερμότης, ἥτις μετασχηματίζεται εἰς τὸ ἔργον τοῦτο, θὰ εἶναι θετική. Ἡ θερμότης αὕτη παρίσταται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν C τοῦ κύκλου C_τ ἤτοι ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων C′ καὶ C″. Θὰ εἶναι λοιπὸν εμβ. C′ > εμβ. C″.

Κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C′ ἔχομεν ἀπορρόφησιν θερμότητος

(20) $$Q_1' = \text{εμβ}\,(\alpha_1\alpha\beta\gamma\gamma_1),$$

καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος

(21) $$Q_2' = \text{εμβ}\,(\alpha_1\alpha\vartheta\gamma\gamma_1).$$

Κατὰ δὲ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C″, ἐπειδὴ τὸ dS εἶναι θετικὸν κατὰ μῆκος τῆς γηε καὶ ἀρνητικὸν κατὰ μῆκος τῆς εδγ, θὰ ἔχωμεν ἀπορρόφησιν θερμότητος, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν $(\gamma_1\gamma\eta\varepsilon\varepsilon_1)$· ἤτοι εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (16),

(22) $$Q_2'' = \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\eta\varepsilon\varepsilon_1)$$

καὶ ἀντιστοίχως ἀπόδοσιν θερμότητος, ἥτις παρίσταται κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν $(\gamma_1\gamma\delta\varepsilon\varepsilon_1)$· ἤτοι εἶναι

(23) $$Q_1'' = \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\delta\varepsilon\varepsilon_1).$$

Ἡ ὁλικὴ λοιπὸν ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C_τ (αβγηεδγθα) εἶναι

(24) $$Q_1 = Q_1' + Q_2''$$

καὶ ἡ ὁλικὴ ἀποδιδομένη θερμότης εἶναι

(25) $$Q_2 = Q_2' + Q_1''.$$

Ὁ δὲ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου θὰ εἶναι

(26)
$$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'+Q_1''}{Q_1'+Q_2''}.$$

Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ ἐμβαδὰ C' καὶ C'' εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἴσα, ἡ θερμότης $Q_1 - Q_2$, ἡ ὁποία μετασχηματίζεται εἰς ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου $C_\tau\,(C'+C'')$, θὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδέν. Τότε καὶ τὸ ἀποδιδόμενον ἔργον θὰ εἶναι μηδέν. Εἰς τὴν μερικὴν λοιπὸν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν τὰ ἐμβαδὰ C', C'' εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν

(27)
$$Q_1 - Q_2 = (Q_1'+Q_2'') - (Q_2'+Q_1'') = 0,$$

ἤτοι

(28)
$$Q_1'+Q_2'' = Q_2'+Q_1''.$$

Ἀλλὰ τότε λαμβάνομεν ἐκ τῆς (26)

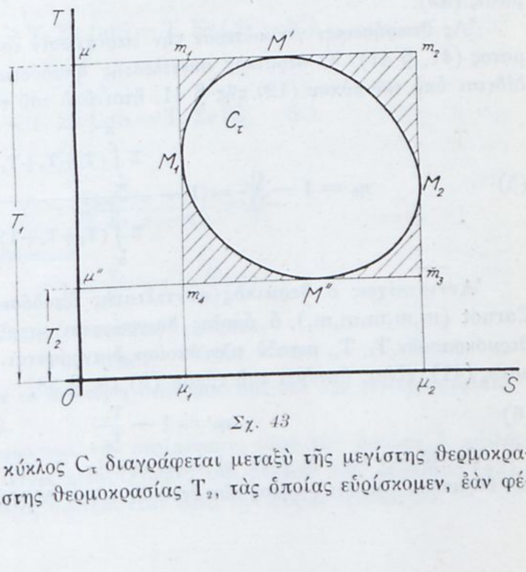
$$\eta_\theta = 0.$$

Εἰς τὴν θεωρουμένην λοιπὸν μερικὴν περίπτωσιν ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου $C_\tau\,(C'+C'')$ εἶναι μηδέν. Παράδειγμα τῆς περιπτώσεως ταύτης συνηντήσαμεν εἰς τὴν § 33, ὅπου ἐθεωρήσαμεν θερμικὴν μηχανήν, εἰς τὴν ὁποίαν πραγματοποιεῖται μικτὴ μετατροπὴ δύο ρευστῶν· κατὰ τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς ταύτης, ὡς ὑπεθέσαμεν, δὲν γίνεται ἀπορρόφησις ἐκ τῶν ἔξω ἢ ἀπόδοσις ἔργου ἢ θερμότητος. Εἶναι δηλαδὴ $Q_1 - Q_2 = 0$ καὶ $E = 0$· ὁ θερμικὸς λοιπὸν συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ μικτοῦ κύκλου τῆς λειτουργίας τῶν δύο ρευστῶν εἶναι μηδέν.

42. Πρακτικὴ σημασία τοῦ κύκλου τοῦ Carnot. Ἡ πρακτικὴ σημασία τοῦ κύκλου τοῦ Carnot καταφαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

α. Ἐξ ὅλων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διαγράφονται μεταξὺ δύο ἄκρων δεδομένων θερμοκρασιῶν T_1 καὶ T_2, ὁ κύκλος τοῦ Carnot ἔχει τὸν μέγιστον θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως.

Ἂς ἀποδείξωμεν κατ᾽ ἀρχὰς τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν τοῦ κύκλου C_τ (σχ. 43). Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος, ὁ κύκλος C_τ διαγράφεται μεταξὺ τῆς μεγίστης θερμοκρασίας T_1 καὶ τῆς ἐλαχίστης θερμοκρασίας T_2, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἐὰν φέ-



Σχ. 43

ρωμεν τὰς δύο ἐφαπτομένας $\mu'm_2$ καὶ $\mu''m_3$ τοῦ κύκλου παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα OS. Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς δύο ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα OT, θὰ σχηματίσωμεν τὸν κύκλον τοῦ Carnot $m_1m_2m_3m_4m_1$, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἰδίων ἄκρων ἰσοθέρμων T_1 καὶ T_2. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C_τ $(M_1M'M_2M''M_1)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (4) τῆς § 41

$$\eta_\theta = 1 - \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1M_1M''M_2\mu_2)}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1M_1M'M_2\mu_2)}. \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot $C'_\tau\,(m_1m_2m_3m_4m_1)$ εἶναι

$$\eta_\theta{}' = 1 - \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_4m_3\mu_2)}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_1m_2\mu_2)}. \tag{2}$$

Ἄς παραστήσωμεν διὰ Σ_1 τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπερκειμένων τοῦ κύκλου C_τ ἐμβαδῶν $(M_1m_1M'M_1)$, $(M'm_2M_2M')$ καὶ διὰ Σ_2 τὸ ἄθροισμα τῶν ὑποκειμένων εἰς τὸν κύκλον C_τ ἐμβαδῶν $(M_1M''m_4M_1)$, $(M_2m_3M''M_2)$· προφανῶς θὰ ἔχωμεν τὰς ἀνισότητας

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_4m_3\mu_2)}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_1m_2\mu_2)} < \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_4m_3\mu_2)+\Sigma_2}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_1m_2\mu_2)} < \\ &< \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_4m_3\mu_2)+\Sigma_2}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1m_1m_2\mu_2)-\Sigma_1} = \frac{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1M_1M''M_2\mu_2)}{\varepsilon\mu\beta\,(\mu_1M_1M'M_2\mu_2)}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Συγκρίνοντες τὰς (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$\eta_\theta{}' > \eta_\theta. \quad \text{Ὅ.ἔ.δ.} \tag{4}$$

Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος (43).

Ἄς θεωρήσωμεν γενικώτερον τὴν περίπτωσιν τοῦ κύκλου C_τ τοῦ σχήματος (41, § 41). Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τούτου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (12) τῆς § 41, ἤτοι ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\Sigma\displaystyle\int_{S'}^{S''}(T_5+T_3+T_1{}')\,dS}{\Sigma\displaystyle\int_{S'}^{S''}(T_2+T_4+T)\,dS}. \tag{5}$$

Ἀντιστοίχως ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot $(m_1m_2m_3m_4m_1)$, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἰδίων ἄκρων θερμοκρασιῶν T_1, T_2, μεταξὺ τῶν ὁποίων διαγράφεται ὁ κύκλος C_τ τοῦ σχήματος (41), εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (9) τῆς § 38,

$$\eta_\theta{}' = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{6}$$

Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 41, αἱ θερμοκρασίαι T_2, T_4, T εἶναι αἱ μεταβληταὶ θερμοκρασίαι κατὰ μῆκος τῶν θετικῶν τόξων M_2N_2, M_4N_4, MN. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μεγίστη θερμοκρασία τοῦ κύκλου C_τ εἶναι ἡ T_1, θὰ ἔχωμεν προφανῶς

(7) $$T_2 \leqslant T_1, \quad T_4 \leqslant T_1, \quad T \leqslant T_1.$$

Ἐὰν γενικῶς τὸ πλῆθος τῶν τόξων τοῦ κύκλου C_τ (σχ. 41), τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν δύο τεταγμένων M_1M καὶ N_1N, εἶναι $2\,\nu$, δυνάμει σχετικῆς προτάσεως τῆς § 41, τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν τόξων θὰ εἶναι ν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν τόξων θὰ εἶναι ν. Ἐκ τῆς ἀθροίσεως λοιπὸν τῶν ἀνισοτήτων (7) λαμβάνομεν

(8) $$T_2 + T_4 + T < \nu T_1.$$

Ὁμοίως αἱ θερμοκρασίαι T_5, T_3, T_1' εἶναι αἱ μεταβληταὶ θερμοκρασίαι κατὰ μῆκος τῶν ἀρνητικῶν τόξων N_5M_5, N_3M_3, N_1M_1' εἶναι δὲ

(9) $$T_5 \geqslant T_2, \quad T_3 \geqslant T_2, \quad T_1' \geqslant T_2.$$

Ἐκ τῆς ἀθροίσεως τῶν ἀνισοτήτων (9) λαμβάνομεν

(10) $$T_5 + T_3 + T_1' > T_2.$$

Ἐκ τῶν τύπων (10), (11) τῆς § 41 καὶ τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων (10) καὶ (8), ἔχομεν

(11) $$Q_2 = \Sigma \int_{S'}^{S''} (T_5 + T_3 + T_1')\, dS > \Sigma \int_{S'}^{S''} \nu T_2 dS,$$

(12) $$Q_1 = \Sigma \int_{S'}^{S''} (T_2 + T_4 + T)\, dS < \Sigma \int_{S'}^{S''} \nu T_1 dS.$$

Αἱ ἀνισότητες (11) καὶ (12), ἐπειδὴ τὰ T_1, T_2 εἶναι σταθερά, γράφονται

(13) $$Q_2 > T_2 \Sigma \nu \int_{S'}^{S''} dS = T_2 \Sigma \nu (S'' - S'),$$

(14) $$Q_1 < T_1 \Sigma \nu \int_{S'}^{S''} dS = T_1 \Sigma \nu (S'' - S').$$

Ὅθεν εἶναι

(15) $$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2 \Sigma \nu (S'' - S')}{T_1 \Sigma \nu (S'' - S')} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Ἐκ τῆς (15) λαμβάνομεν

(16) $$1 - \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Ἡ (16), δυνάμει τῶν (6) καὶ (5), γράφεται

(17) $$\eta_\theta' > \eta_\theta \,. \quad \text{Ὅ.ἔ.δ.}$$

Οὕτω ἀπεδείξαμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τοῦ σχήματος (41).

Τέλος ἂς ἐξετάσωμεν καὶ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος C_τ τέμνει ἑαυτόν, ὡς εἶναι ἡ περίπτωσις τοῦ κύκλου τοῦ σχήματος (42). Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν αβγδεηγθα.

Αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται ἐκ τῆς θερμῆς πηγῆς διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι, δυνάμει των ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 41

(18) $$Q_1 = Q_1' + Q_1''$$

καὶ αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται εἰς τὴν ψυχρὰν πηγήν, θὰ εἶναι

(19) $$Q_2 = Q_2' + Q_2''.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εἶναι

(20) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2' + Q_2''}{Q_1' + Q_1''}.$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὰς δύο προηγουμένας περιπτώσεις εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι

$$Q_2' = \text{εμβ}\,(\alpha_1\alpha\vartheta\gamma\gamma_1) > T_2\,(S_\gamma - S')$$
$$Q_2'' = \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\eta\varepsilon\varepsilon_1) > T_2\,(S'' - S_\gamma).$$

Ὅθεν

(21) $$Q_2' + Q_2'' > T_2\,(S_\gamma - S' + S'' - S_\gamma) = T_2\,(S'' - S'),$$

ὅπου S', S'' εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῶν ἰσοτρόπων $\alpha_1 m_1$, $\varepsilon_1 m_2$ (σχ. 42).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(22) $$Q_1' + Q_1'' < T_1\,(S'' - S'),$$

ὅπου T_1, T_2 εἶναι αἱ ἄκραι θερμοκρασίαι, μεταξὺ τῶν ὁποίων διαγράφεται ὁ κύκλος $C' + C''$ (σχ. 42). Ὅθεν εἶναι

(23) $$1 - \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{Q_2' + Q_2''}{Q_1' + Q_1''}.$$

ἀλλὰ $1 - \frac{T_2}{T_1}$ εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς η_θ' ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot $m_1 m_2 m_3 m_4 m_1$, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἰδίων ἄκρων θερμοκρασιῶν T_1, T_2, μεταξὺ τῶν ὁποίων διαγράφεται καὶ ὁ κύκλος $C' + C''$ (σχ. 42). Ἔχομεν λοιπὸν

(24) $$\eta_\theta' > \eta_\theta. \quad \text{Ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἔστω ἤδη ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος C_τ $(C' + C'')$ διαγράφεται κατὰ τὴν φορὰν αβγηεδγθα (σχ. 42). Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου θὰ εἶναι τότε, δυνάμει τοῦ τύπου (26) τῆς § 41,

(25) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2' + Q_1''}{Q_1' + Q_2''}.$$

Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ σχήματος (42) ὅτι εἶναι διὰ τὸν κύκλον C'' (γηεδγ),

(26) $$\text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\eta\varepsilon\varepsilon_1) < \text{εμβ}\,(\gamma_1\gamma\delta\varepsilon\varepsilon_1),$$

ἢ

(27) $$Q_2'' < Q_1''.$$

Ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητος (23), λαμβάνομεν, δυνάμει τῆς ἀνισότητος (27), τὰς ἀνισότητας

(28) $$\frac{Q_2' + Q_2''}{Q_1' + Q_1''} < \frac{Q_2' + Q_1''}{Q_1' + Q_1''} < \frac{Q_2' + Q_1''}{Q_1' + Q_2''}.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

(29) $$1 - \frac{Q_2' + Q_2''}{Q_1' + Q_1''} > 1 - \frac{Q_2' + Q_1''}{Q_1' + Q_2''},$$

ἤ, δυνάμει τῆς (25),

(30) $$1 - \frac{Q_2{}' + Q_2{}''}{Q_1{}' + Q_1{}''} > \eta_\theta$$

Συγκρίνοντες τὴν (30) μὲ τὴν (23) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(31) $$1 - \frac{T_2}{T_1} > \eta_\theta \,.$$

Ἀλλὰ $1 - \frac{T_2}{T_1}$ εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως $\eta_\theta{}'$ τοῦ κύκλου τοῦ Carnot, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἄκρων ἰσοθέρμων T_1, T_2· ἔχομεν λοιπὸν

(32) $$\eta_\theta{}' > \eta_\theta \,. \qquad \text{Ὅ.ἔ.δ.}$$

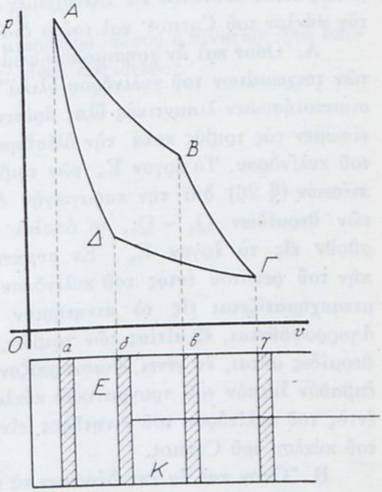
Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν εἰς ὅλην τὴν γενικότητά του τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Τὸ θεώρημα τοῦτο συμπληροῖ τὴν ἀρχὴν τοῦ Carnot (§ 33) καὶ ἔχει ὑψίστην πρακτικὴν σημασίαν, διότι ἀποτελεῖ τὴν βάσιν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν θερμικῶν κινητήρων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, τῆς πρακτικῆς σημασίας του, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ ὡς ἑξῆς:

β. Ἡ οἰκονομικωτέρα λειτουργία θερμικοῦ κινητῆρος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος τῆς θερμικῆς μετατροπῆς τοῦ χρησιμοποιουμένου διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος ῥευστοῦ εἶναι κύκλος τοῦ Carnot.

Ἡ πρότασις αὕτη καὶ ἡ πρότασις δ τῆς § 30, συνοψίζονται εἰς τὴν ἑξῆς θεμελιώδη πρότασιν:

γ. Ὁ κύκλος τοῦ Carnot εἶναι ὁ ἰδεώδης κύκλος τῆς λειτουργίας θερμικοῦ κινητῆρος, τόσον ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως, δηλαδὴ ἀναφορικῶς πρὸς τὰς δύο πηγὰς θερμότητος, ὅσον καὶ ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, δηλαδὴ ἀναφορικῶς πρὸς τὴν οἰκονομίαν.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη (σχ. 44) τὸν κύλινδρον Κ καὶ τὸ ἔμβολον Ε θερμικοῦ κινητῆρος καὶ ἂς ἐξετάσωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν τὸ ῥευστόν, τὸ ὁποῖον εἰσάγεται εἰς τὸν κύλινδρον, νὰ ἐκτελῇ κλειστὴν μετατροπὴν κατὰ τὸν κύκλον τοῦ Carnot.



Σχ. 44

Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Carnot ΑΒΓΔΑ θὰ συμπληροῦται εἰς ἑκάστην πλήρη περιστροφὴν τοῦ κινητηρίου ἄξονος τοῦ κινητῆρος, ἤτοι κατὰ μίαν μετάβασιν αγ καὶ κατὰ μίαν ἐπιστροφὴν γα τοῦ ἐμβόλου.

Διὰ νὰ συμπίπτῃ δὲ ὁ κύκλος τοῦ κινητῆρος μὲ τὸν κύκλον τοῦ Carnot, πρέπει τὸ ρευστὸν νὰ ἐκτελῇ τὰς ἑξῆς τμηματικὰς μετατροπάς:

I. Κατὰ τὴν μετάβασιν αγ τοῦ ἐμβόλου: Εἰς ἓν μὲν τμῆμα αβ τῆς διαδρομῆς τὴν ἰσόθερμον ἀποτόνωσιν ΑΒ˙ εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα βγ τῆς διαδρομῆς τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν ΒΓ. Πρὸς τοῦτο κατὰ μὲν τὴν διαδρομὴν αβ δέον τὸ ρευστὸν νὰ εἶναι εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν θερμὴν πηγήν, π.χ. μὲ τὸν λέβητα, ἐὰν πρόκειται περὶ ἀτμομηχανῆς, κατὰ δὲ τὴν διαδρομὴν βγ πρέπει τὸ ρευστὸν νὰ εἶναι τελείως ἀπομονωμένον οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἔχωμεν συναλλαγὴν θερμότητος μεταξὺ ρευστοῦ καὶ περιβάλλοντος.

II. Κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν γα τοῦ ἐμβόλου. Εἰς μὲν τὸ τμῆμα γδ τῆς διαδρομῆς νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσόθερμον συμπίεσιν ΓΔ, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα δα τῆς διαδρομῆς νὰ ἔχωμεν τὴν ἀδιάθερμον συμπίεσιν ΔΑ. Πρὸς τοῦτο εἰς μὲν τὸ τμῆμα γδ τῆς διαδρομῆς πρέπει τὸ ρευστὸν νὰ εἶναι εἰς ἐπαφὴν μετὰ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς, ἐπὶ παραδείγματι μετὰ τοῦ ψυγείου ἢ τῆς ἐλευθέρας ἀτμοσφαίρας, ἐὰν πρόκειται περὶ ἀτμομηχανῆς, εἰς δὲ τὸ τμῆμα δα τῆς διαδρομῆς πρέπει τὸ ρευστὸν νὰ εἶναι τελείως ἀπομονωμένον οὕτως, ὥστε νὰ μὴ ἔχωμεν συναλλαγὴν θερμότητος μεταξὺ ρευστοῦ καὶ περιβάλλοντος.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν κατὰ τὴν λειτουργίαν θερμοκινητῆρος τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας τμηματικὰς μετατροπὰς καὶ ἑπομένως εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν λειτουργίαν θερμοκινητῆρος κατὰ τὸν κύκλον τοῦ Carnot˙ καὶ τοῦτο διὰ τὰς ἑξῆς κυρίως τρεῖς αἰτίας:

Α. Ὅσον καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἐμβόλου καὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου ὑλικὰ ἀρίστης ποιότητος, ὅσον καὶ ἂν χρησιμοποιήσωμεν λιπαντικὰς ὕλας ἀρίστης ποιότητος, εἶναι ἀδύνατον νὰ μηδενίσωμεν τὰς τριβὰς κατὰ τὴν ὀλίσθησιν τοῦ ἐμβόλου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυλίνδρου. Τὸ ἔργον E_π τῶν τριβῶν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ ἔργον E_κ τῶν πιέσεων (§ 26)˙ διὰ τὴν παραγωγὴν δὲ τοῦ ἔργου E_π ἀπορροφᾶται μέρος τῶν θερμίδων $Q_1 - Q_2$, αἱ ὁποῖαι θεωρητικῶς ἔπρεπε νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς τὸ ἔργον E_κ. Ἐν συμπεράσματι κατὰ τὴν κυκλικὴν μετατροπὴν τοῦ ρευστοῦ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου μέρος μόνον τῶν θερμίδων $Q_1 - Q_2$ μετασχηματίζεται εἰς τὸ κινητήριον ἔργον, ἐνῷ αἱ ὑπόλοιποι θερμίδες ἀπορροφοῦνται, ἐξ αἰτίας τῶν τριβῶν, ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν ὀλισθήσεως˙ αἱ θερμίδες αὗται, ἐν γένει, διασκορπίζονται περαιτέρω εἰς τὸ περιβάλλον. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ πραγματικοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ ρευστὸν ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τοῦ κινητῆρος εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ ΑΒΓΔΑ τοῦ κύκλου τοῦ Carnot.

Β. Ὅσον καὶ ἂν ἐπενδύσωμεν τὰ τοιχώματα τοῦ κυλίνδρου διὰ δυσθερμαγωγῶν σωμάτων, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν τελείαν ἀπομόνωσιν τοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ περιβάλλοντος˙ καὶ τοῦτο, διότι ἅπαντα τὰ σώματα εἰς τὴν φύσιν εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀγωγοὶ τῆς θερμότητος. Εἶναι λοιπὸν ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν πρακτικῶς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀδιαθέρμων μετατροπῶν ΒΓ καὶ ΔΑ˙ καὶ

Γ. Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν ἐκτεθέντων διὰ τὴν πρότασιν γ τῆς § 31, ἡ ἀνωτέρα ἰσόθερμος, τὴν ὁποίαν θὰ διαγράφῃ τὸ ρευστὸν ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου, θὰ ὑπόκειται εἰς τὴν ἰσόθερμον T_1, ὅπου T_1 εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς θερμῆς πηγῆς· καὶ ἡ κατωτέρα ἰσόθερμος, τὴν ὁποίαν θὰ διαγράφῃ τὸ ρευστὸν ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου, θὰ ὑπέρκειται τῆς ἰσοθέρμου T_2, ὅπου T_2 εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς ψυχρᾶς πηγῆς. Καὶ διὰ τὸν λόγον λοιπὸν τοῦτον τὸ πραγματικὸν διάγραμμα τῆς λειτουργίας τοῦ ρευστοῦ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου ΑΒΓΔΑ τοῦ Carnot.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἐπιτύχωμεν πρακτικῶς τὴν λειτουργίαν θερμοκινητῆρος συμφώνως πρὸς τὸν κύκλον τοῦ Carnot. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐν συνεχείᾳ τῆς προτάσεως α νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν :

δ. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως οἱουδήποτε θερμικοῦ κινητῆρος εἶναι μικρότερος τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Carnot, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν T_1, T_2 τῆς θερμῆς καὶ τῆς ψυχρᾶς πηγῆς τοῦ θερμοκινητῆρος.

Ἐὰν λοιπὸν η_θ' εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος καὶ $\eta_\theta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ εἶναι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ ἀντιστοίχου κύκλου τοῦ Carnot, θὰ ἔχωμεν

(33) $$\eta_\theta' < \eta_\theta \, .$$

Ὅσον ἡ διαφορὰ $\eta_\theta - \eta_\theta'$ εἶναι μικροτέρα, τόσον ὁ κινητήρ, ἀπὸ ἀπόψεως θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως, εἶναι τελειότερος.

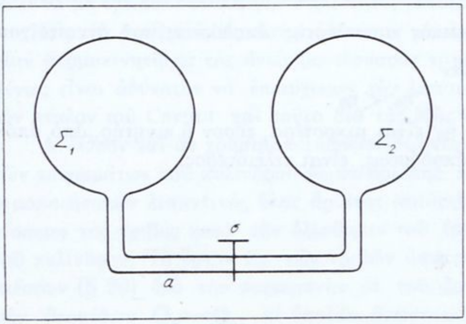
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΑΙ ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ

43. ***Μὴ ἀντιστρεπτὴ ἀποτόνωσις. Μὴ ἀντιστρεπτὴ συμπίεσις.*** Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 31, λέγομεν ὅτι μία μετατροπὴ δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή, ὅταν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ μόνον κατὰ μίαν φοράν, οὐχὶ δὲ καὶ κατὰ τὴν ἀντίστροφον.

Ἂς λάβωμεν δύο παραδείγματα μὴ ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν:

I. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας Σ_1, Σ_2, τῶν ὁποίων οἱ χῶροι συνδέονται διὰ τοῦ ἀγωγοῦ α καὶ δύνανται νὰ ἀπομονωθοῦν ἢ νὰ ἐπικοινωνήσουν μέσῳ τῆς στρόφιγγος σ (σχ. 45). Ἐντὸς τοῦ χώρου Σ_1 εἰσάγομεν ἀέρα ὑπὸ μεγάλην πίεσιν, ἐνῷ εἰς τὸν χῶρον Σ_2 σχηματίζομεν, ὅσον εἶναι τεχνητῶς δυνατόν, κενόν. Τὸ ὅλον σύστημα εἶναι ἀπομονωμένον εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μὴ ἔχωμεν συναλλαγὴν θερμότητος μεταξὺ τῶν μαζῶν τοῦ ἀέρος εἰς τοὺς χώρους Σ_1, Σ_2 καὶ τοῦ περιβάλλοντος. Ἐὰν ἀνοίξωμεν καὶ κλείσωμεν τὴν στρόφιγγα σ, ὁ ἀὴρ ὑψηλῆς πιέσεως τῆς σφαίρας Σ_1 θὰ ἀποτονωθῇ ἀδιαθέρμως. Ἡ ἀκαριαία αὕτη ἀδιάθερμος ἀποτόνωσις δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή· διότι καθ' ἑκάστην στιγμὴν ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ὑψηλῆς πιέσεως δὲν ἰσορροπεῖται ἀπὸ ἴσην κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀντίθλιψιν.



Σχ. 45

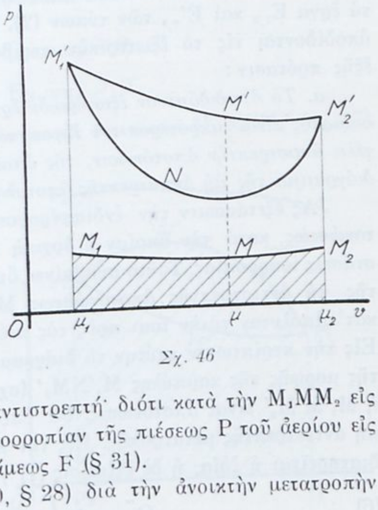
Ἀντὶ τῶν χώρων τῶν δύο σφαιρῶν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τοὺς χώρους I, II τοῦ κυλίνδρου K (σχ. 2). Ἐὰν εἰς τὸν χῶρον II σχηματίσωμεν κενόν, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 31, ἡ ἀποτόνωσις τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ χώρου I θὰ εἶναι μετατροπὴ μὴ ἀντιστρεπτή.

II. Θεωρήσωμεν τὴν μετατροπήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὴν μετάδοσιν τῆς θερμότητος ἔκ τινος θερμῆς πηγῆς θερμοκρασίας t εἰς σῶμα θερμοκρασίας t′. Ὅταν ἡ διαφορὰ $t - t' > 0$ δὲν εἶναι ἀπείρως μικρά, ἡ μετατροπή, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 31, εἶναι μὴ ἀντιστρεπτὴ μετατροπή.

Ἡ πρώτη ἀρχὴ τῆς θερμοδυναμικῆς (§ 27, γ) ἐφαρμόζεται ἐξ ἴσου εἰς τὰς ἀντιστρεπτὰς καὶ μὴ ἀντιστρεπτὰς μετατροπάς. Ἂς ἴδωμεν πῶς θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ Clausius (§ 28) εἰς ἀνοικτὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπήν.

Ἂς θεωρήσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς ἀνοικτὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν ρευστοῦ, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ὄγκος τοῦ ρευστοῦ νὰ αὐξάνῃ· τὴν μετατροπὴν ταύτην, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ τέλος τῆς § 18, ὀνομάζομεν ἀποτόνωσιν.

Λάβωμεν ἐπὶ παραδείγματι τὴν ἀποτόνωσιν ἀερίου ἐντὸς τοῦ χώρου Ι τοῦ κυλίνδρου Κ (σχ. 2), ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ ἐμβόλου ἡ ἀντίθλιψις ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου, δηλαδὴ ἡ πίεσις F τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς πιέσεως P τοῦ ἀερίου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμβόλου. Ἔστωσαν p′ ἡ εἰδικὴ πίεσις τοῦ ἀερίου καὶ $p < p'$ ἡ εἰδικὴ ἀντίθλιψις. Ἔστω ἐπίσης $M_1'M'M_2'$ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως τοῦ ἀερίου εἰς τὸ σύστημα Ου, Οp (σχ. 46). Εἶναι $(\mu M') = p'$. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῆς μΜ′ τὸ μῆκος $(\mu M) = p$, ὅπου p εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίθλιψις. Ἐὰν λάβωμεν ὅλα τὰ σημεῖα Μ δι᾽ ὅλας τὰς θέσεις τοῦ ἐμβόλου, θὰ σχηματίσωμεν τὸ διάγραμμα M_1MM_2 τῆς μεταβολῆς τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων, δηλαδὴ τῶν ἀντιθλίψεων ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου. Ἐὰν τὸ ἀέριον ἀντὶ νὰ ἐκτελέσῃ τὴν μετατροπὴν $M_1'M'M_2'$ ἐξετέλει τὴν μετατροπὴν M_1MM_2, ἡ τελευταία αὕτη μετατροπὴ θὰ ἦτο ἀντιστρεπτή· διότι κατὰ τὴν M_1MM_2 εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ ἐμβόλου ἔχομεν ἰσορροπίαν τῆς πιέσεως P τοῦ ἀερίου εἰς τὸν χῶρον Ι καὶ τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως F (§ 31).



Σχ. 46

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Clausius (10, § 28) διὰ τὴν ἀνοικτὴν μετατροπὴν M_1MM_2 γράφεται

(1) $$Q_{1,2} = A\int\limits_{M_1MM_2} p\,dv + U_2 - U_1,$$

ὅπου

(2) $$\int\limits_{M_1MM_2} p\,dv = E_{1,2} = \varepsilon\mu\beta\,(\mu_1M_1M_2\mu_2)$$

εἶναι τὸ ἀποδιδόμενον ἐξωτερικὸν ἔργον. Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ ἐμβόλου ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις γίνεται κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἴση πρὸς τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου· τότε (§ 31) τὸ ἀέριον ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου θὰ ἐκτελῇ τὴν ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν $M_1'M'M_2'$. Ἡ ἐξίσωσις (10, § 28) τοῦ Clausius, διὰ τὴν ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν $M_1'M'M_2'$ γράφεται

$$(3)\qquad Q'_{1,2} = A \int\limits_{M_1'M'M_2'} p dv + U_2' - U_1',$$

ὅπου

$$(4)\qquad \int\limits_{M_1'M'M_2'} p dv = E'_{1,2} = \varepsilon\mu\beta\,(\mu_1 M_1' M' M_2' \mu_2)$$

εἶναι τὸ ἀποδιδόμενον ἐξωτερικὸν ἔργον.

Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ σχήματος (46) ὅτι εἶναι

$$(5)\qquad E_{1,2} = \varepsilon\mu\beta\,(\mu_1 M_1 M_2 \mu_2) < E'_{1,2} = \varepsilon\mu\beta\,(\mu_1 M_1' M' M_2' \mu_2).$$

Ἐπειδὴ ἡ μὴ ἀντιστρεπτὴ μετατροπὴ $M_1'M'M_2'$ ὑπετέθη ἀποτόνωσις, τὰ ἔργα $E_{1,2}$ καὶ $E'_{1,2}$ τῶν τύπων (2), (4) εἶναι θετικά, ἤτοι τὰ ἔργα ταῦτα ἀποδίδονται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν περιβάλλον. Ἡ ἀνισότης (5) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Τὸ ἀποδιδόμενον ἐξωτερικὸν ἔργον κατὰ μὴ ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν σώματος εἶναι μικρότερον τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπέδιδε τὸ σῶμα ἐὰν ἐξετέλει ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα νὰ συνέπιπτε μὲ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως.

Ἄς ἐξετάσωμεν τὴν ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ κατάστασις εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἰς τὰς ἄκρας καταστάσεις M_1', M_2' τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως $M_1'M'M_2'$ αἱ ἐξωτερικαὶ πιέσεις εἶναι κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν ἴσαι πρὸς τὰς πιέσεις τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ διάγραμμα τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης $M_1'NM_2'$ (σχ. 46). Τὸ διάγραμμα τοῦτο, ἐφ᾽ ὅσον ἡ $M_1'M'M_2'$ εἶναι ἀποτόνωσις, θὰ ὑπόκειται πάντοτε εἰς τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ μὲν ἐξίσωσις (3) διατηρεῖται ἡ ἰδία, ἡ δὲ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$(6)\qquad Q''_{1,2} = A \int\limits_{M_1'NM_2'} p dv + U_2' - U_1'.$$

Προφανῶς καὶ εἰς τὴν μερικὴν ταύτην περίπτωσιν ἰσχύει ἡ ἀνισότης (5), ἑπομένως καὶ ἡ πρότασις α. Ἄς γράψωμεν τοὺς τύπους (3) καὶ (6) ὡς ἑξῆς:

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} Q'_{1,2} &= AE'_{1,2} + U_2' - U_1' \\ Q''_{1,2} &= AE''_{1,2} + U_2' - U_1'. \end{aligned} \right.$$

Ἐπειδή, δυνάμει τῆς (5), εἶναι

$$(8)\qquad E''_{1,2} < E'_{1,2},$$

θὰ εἶναι ἀντιστοίχως, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν (7)

$$(9)\qquad Q'_{1,2} > Q''_{1,2},$$

ὅπου $Q''_{1,2}$ εἶναι ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ ἀέριον κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως $M_1'M'M_2'$, ὁπότε ἀποδίδει ἐξωτερικὸν ἔργον $E''_{1,2} = \text{εμβ}\,(\mu_1 M_1'NM_2'\mu_2)$· καὶ $Q'_{1,2}$ εἶναι ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν θὰ ἀπερρόφα τὸ ἀέριον, διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὴν ἀντιστρεπτὴν μετατροπήν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ διάγραμμα $M_1'M'M_2'$. Ἡ ἀνισότης (9) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

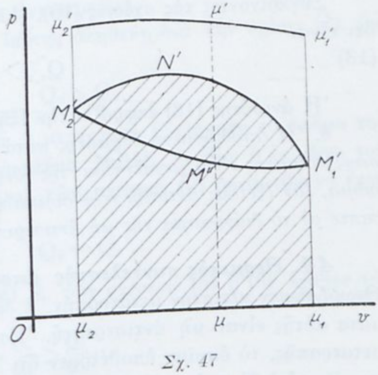
β. Ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως σώματος εἶναι μικροτέρα τῆς θερμότητος, τὴν ὁποίαν θὰ ἀπερρόφα τὸ σῶμα διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως.

Αἱ ἀνισότητες (8) καὶ (9) δύνανται νὰ γραφοῦν καὶ ἀπ' εὐθείας, ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀρχὴν τοῦ ἰσοδυνάμου εἰς τὸν κύκλον $M_1'M'M_2'NM_1'$ (σχ. 46). Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ὁ κύκλος οὗτος διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, θὰ ἔχωμεν

$$Q_{M_1'M'M_2'} - Q_{M_1'NM_2'} > 0,$$

$$E_{M_1'M'M_2'} - E_{M_1'NM_2'} > 0.$$

Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν $M_1'M''M_2'$ (σχ. 47). Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 31, πρέπει νὰ εἶναι $|F|>|P|$, δηλαδὴ ἡ ἐξωτερικὴ πίεσις νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρα τῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου. Ὅταν ἡ συμπίεσις $M_1'M''M_2'$ δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή, ἡ διαφορὰ $|F|-|P|>0$ εἶναι ἀρκούντως μεγάλη (§ 31). Τὸ διάγραμμα λοιπὸν τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων $\mu_1'\mu'\mu_2'$ θὰ ὑπέρκειται τοῦ διαγράμματος $M_1'M''M_2'$ τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐνδιαφέρουσαν περίπτωσιν τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀρχικὴ κατάστασις M_1' καὶ ἡ τελικὴ κατάστασις M_2' εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ διάγραμμα τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων θὰ εἶναι τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης $M_1'N'M_2'$. Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην.



Σχ. 47

Ἡ ἐξίσωσις (10, § 28) τοῦ Clausius διὰ τὴν ἀνοικτὴν ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν $M_1'N'M_2'$ γράφεται

$$Q'_{1,2} = A\int_{M_1'N'M_2'} p\,dv + U_2' - U_1'. \qquad (10)$$

῎Ας φαντασθῶμεν ἤδη καὶ τὴν ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ διάγραμμα $M_1'M''M_2'$ τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως. Ἡ ἐξίσωσις (10, § 28) τοῦ Clausius κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως $M_1'M''M_2'$ γράφεται

$$(11) \qquad Q''_{1,2} = A \int_{M_1'M''M_2'} p dv + U_2' - U_1'.$$

Παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ σχήματος (47) ὅτι εἶναι

$$(12) \qquad |\,\text{εμβ}\,(\mu_1 M_1'N'M_2'\mu_2)\,| > |\,\text{εμβ}\,(\mu_1 M_1'M''M_2'\mu_2)\,|.$$

Τὸ εμβ $(\mu_1 M_1'N'M_2'\mu')$ παριστᾷ τὸ ἔργον τῶν ἐξωτερικῶν πιέσεων κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως $M_1'M''M_2'$, ἤτοι παριστᾷ τὸ ἀπορροφούμενον ἐξωτερικὸν ἔργον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως $M_1'M''M_2'$. Ἡ ἀνισότης (12) ἐκφράζει λοιπὸν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

γ. Τὸ ἀπορροφούμενον ἐξωτερικὸν ἔργον διὰ τὴν ἐκτέλεσιν μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως σώματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἔργου, τὸ ὁποῖον θὰ ἀπερρόφα τὸ σῶμα διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα νὰ συνέπιπτε μὲ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως.

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (10), (11) καὶ τὴν ἀνισότητα (12) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$(13) \qquad Q'_{1,2} > Q''_{1,2}.$$

Ἡ ἀνισότης (13) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

δ. Ἡ ἀποδιδομένη θερμότης κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως σώματος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμότητος, τὴν ὁποίαν θὰ ἀπέδιδε τὸ σῶμα, ἐὰν ἐξετέλει ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα νὰ συνέπιπτε μὲ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως.

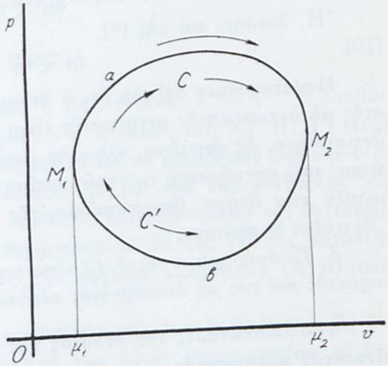
44. Θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου. Θεωρήσωμεν κλειστὴν μετατροπήν, ἡ ὁποία ἐν ὅλῳ, ἢ εἰς τμῆμα, ἢ εἰς τμήματα αὐτῆς εἶναι μὴ ἀντιστρεπτή. Ἔστω $C(M_1 \alpha M_2 \beta M_1)$ τὸ διάγραμμα τῆς μετατροπῆς, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι διαγράφεται μόνον κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, οὐχὶ δὲ καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον (σχ. 48). Ἂς φέρωμεν τὰς ἄκρας ἐφαπτομένας $\mu_1 M_1$, $\mu_2 M_2$ τοῦ κύκλου παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα Op καὶ ἔστωσαν Q_1 αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται κατὰ τὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν $M_1 \alpha M_2$ καὶ Q_2 αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται κατὰ τὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν $M_2 \beta M_1$.

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C εἶναι (§ 21)

$$(1) \qquad \eta_0 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Ἂς θεωρήσωμεν καὶ τὴν κλειστὴν ἀντιστρεπτὴν μετατροπήν, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα C′ συμπίπτει μὲ τὸ διάγραμμα C τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς. Ἔστωσαν Q_1' αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀπορροφοῦνται κατὰ τὴν ἀντιστρεπτὴν ἀποτόνωσιν $M_1 \alpha M_2$ καὶ Q_2' αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται κατὰ τὴν ἀντιστρεπτὴν συμπίεσιν $M_2 \beta M_1$. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C′ $(M_1 \alpha M_2 \beta M_1)$ εἶναι

(2) $$\eta_\theta' = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1'}.$$



Σχ. 48

Δυνάμει τῆς προτάσεως β τῆς § 43 εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν

(3) $$Q_1 \leqq Q_1'$$

καὶ δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 43 εἶναι

(4) $$Q_2 \geqq Q_2'.$$

Ἡ περίπτωσις τῆς ἰσότητος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὰς δύο ἀνωτέρω σχέσεις (3), (4), διότι τότε ἡ μετατροπὴ C θὰ ἦτο ἀντιστρεπτή.

Οὕτω ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν ἡ ἰσότης ἀληθεύῃ διὰ τὴν σχέσιν (3), θὰ ἔχωμεν

(5) $$Q_1 = Q_1', \quad Q_2 > Q_2'.$$

Αἱ σχέσεις αὗται ἐκφράζουν ὅτι ἡ μετατροπὴ C εἰς μὲν τὸ τμῆμα της $M_1 \alpha M_2$ εἶναι ἀντιστρεπτή, ἐνῷ εἰς τὸ τμῆμα $M_2 \beta M_1$, ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει τοῦ τμήματος, δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή. Ἀντὶ τῶν σχέσεων (5) δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

(6) $$Q_1 < Q_1', \quad Q_2 = Q_2'.$$

Δυνάμει τῶν ἀνισοτήτων (3), (4), ἢ τῶν σχέσεων (5) ἢ (6) ἔχομεν τὰς ἀνισότητας

(7) $$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{Q_2'}{Q_1} > \frac{Q_2'}{Q_1'}.$$

Συγκρίνοντες τὰς ἐκφράσεις (1), (2) τῶν η_θ καὶ η_θ' καὶ τὰς ἀνισότητας (7) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

(8) $$\eta_\theta < \eta_\theta'.$$

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως κλειστῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς σώματος εἶναι μικρότερος τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τῆς κλειστῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς τοῦ σώματος, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα συμπίπτει μὲ τὸ διάγραμμα τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς.

Ἔστω C″ ὁ κύκλος τοῦ Carnot, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἄκρων θερμοκρασιῶν τοῦ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C'· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ η_θ'' τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C'' τοῦ Carnot, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῆς σχέσεως (32, § 42)

(9) $$\eta_\theta' < \eta_\theta''.$$

Ἤ, δυνάμει καὶ τῆς (8),

(10) $$\eta_\theta < \eta_\theta' < \eta_\theta''.$$

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως η_θ κλειστῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς εἶναι μικρότερος τοῦ συντελεστοῦ η_θ' τῆς ἀντιστοίχου, ὡς ἀνωτέρω, κλειστῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς καὶ ἔτι μικρότερος τοῦ συντελεστοῦ η_θ'' τοῦ κύκλου τοῦ Carnot, ὁ ὁποῖος διαγράφεται μεταξὺ τῶν ἄκρων θερμοκρασιῶν τῆς κλειστῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Τὸ θεώρημα α τῆς § 42 εἶναι γενικὸν καὶ ἰσχύει ἐξ ἴσου διὰ τὰς ἀντιστρεπτὰς καὶ τὰς μὴ ἀντιστρεπτὰς κλειστὰς μετατροπὰς τῶν σωμάτων.

45. Ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τῆς τροπῆς εἰς τὰς μὴ ἀντιστρεπτὰς ἀνοικτὰς μετατροπάς. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 34, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Clausius, ὑπεθέσαμεν ὅτι τόσον ἡ ἀνοικτὴ μετατροπὴ $M_1\alpha M_2$ (σχ. 31) ὅσον καὶ ἡ κλειστὴ μετατροπὴ K (σχ. 32) εἶναι ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί. Ὡς δὲ ἐξεθέσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς § 34, ἐὰν δὲν πληροῦται ὁ ὅρος τῆς ἀντιστρεπτότητος τῆς μετατροπῆς, τὸ $\frac{dQ}{T}$ δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν· ἑπομένως ἡ ἔννοια τῆς τροπῆς (§ 35) οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει διὰ τὰς μὴ ἀντιστρεπτὰς μετατροπάς.

Ὅταν ὅμως ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ κατάστασις τῆς ἀνοικτῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς τῆς τροπῆς διὰ τὰς ἀντιστρεπτὰς μετατροπὰς καὶ κατὰ μῆκος τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς. Πρὸς τοῦτο στηριζόμεθα εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. Ὅταν ἡ ἀρχικὴ κατάστασις M_1 καὶ ἡ τελικὴ κατάστασις M_2 μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς M_1AM_2 σώματός τινος εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς καταστάσεως M_1 εἰς τὴν κατάστασιν M_2 διὰ μιᾶς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς M_1BM_2 τοῦ σώματος.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀπορρέει ἐκ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 43 διὰ τὴν μερικὴν περίπτωσιν μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς, τῆς ὁποίας αἱ ἄκραι καταστάσεις εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας.

Ἔστω, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ μὴ ἀντιστρεπτὴ ἀποτόνωσις $M_1'M'M_2'$ (σχ. 46). Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 43, ἐὰν αἱ ἄκραι καταστάσεις M_1', M_2' εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς καταστάσεως M_1' εἰς τὴν κατάστασιν M_2' διὰ τῆς ἀντιστρεπτῆς ἀποτονώσεως $M_1'NM_2'$. Ὁμοίως, ὅταν αἱ ἄκραι καταστάσεις τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως $M_1'M''M_2'$ (σχ. 47) εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, δυνάμεθα πάντοτε νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς καταστάσεως M_1' εἰς τὴν M_2' διὰ τῆς ἀντιστρεπτῆς συμπιέσεως $M_1'N'M_2'$ (§ 43).

Ἄς λάβωμεν ἓν παράδειγμα, διὰ νὰ ἴδωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν α. Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἀμφίδρομον χημικὴν ἀντίδρασιν

$$A + B \rightleftarrows \Gamma. \tag{1}$$

Ἐὰν ἡ σύνθεσις $A + B = \Gamma$ καὶ ἡ ἀποσύνθεσις $\Gamma = A + B$ λαμβάνουν χώραν εἰς τὴν ἰδίαν θερμοκρασίαν t, ἡ μετατροπὴ [(A, B), Γ] εἶναι ἀντιστρεπτὴ μετατροπή. Τῷ ὄντι, ὅπως δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ὑπὸ τὴν θερμοκρασίαν t ἐκ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως (A, B) πρὸ τῆς συνθέσεως εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν Γ μετὰ τὴν σύνθεσιν, οὕτω δυνάμεθα καὶ ἀντιστρόφως νὰ μεταβῶμεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν ἐκ τῆς τελικῆς καταστάσεως Γ πρὸ τῆς ἀποσυνθέσεως εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν (A, B) μετὰ τὴν ἀποσύνθεσιν.

Ἐὰν ὅμως ἡ σύνθεσις καὶ ἡ ἀποσύνθεσις τῆς ἀμφιδρόμου χημικῆς ἀντιδράσεως (1) δὲν λαμβάνουν χώραν ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, αἱ δύο μετατροπαὶ [(A, B), Γ] καὶ [Γ, (A, B)] δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθοῦν κατὰ μίαν τάξιν φαινομένων ἀκριβῶς ἀντιστρόφων καὶ ἑπομένως ἡ σύνθεσις

$$A + B = \Gamma,$$

ἢ ἡ ἀποσύνθεσις

$$\Gamma = A + B$$

δὲν εἶναι ἀντιστρεπταὶ μετατροπαὶ (§ 31). Ἄς λάβωμεν τὸ παράδειγμα τῆς συνθέσεως τοῦ ὀξειδίου τοῦ βαρίου καὶ τοῦ ὀξυγόνου

$$2BaO + O_2 = 2BaO_2. \tag{2}$$

Ἔστω M_1 ἡ ἀρχικὴ κατάστασις, δηλαδὴ ἡ κατάστασις τοῦ συστήματος τῶν μαζῶν ($2BaO, O_2$) πρὸ τῆς συνθέσεως καὶ M_2 ἡ τελικὴ κατάστασις ($2BaO_2$) μετὰ τὴν σύνθεσιν. Ἡ σύνθεσις (2) λαμβάνει χώραν εἰς θερμοκρασίαν 550°C, ἐνῷ ἡ ἀποσύνθεσις

$$2BaO_2 = 2BaO + O_2 \tag{3}$$

λαμβάνει χώραν εἰς 700°C. Ἡ μετατροπὴ λοιπὸν (2) δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή. Ἄς ἴδωμεν πῶς, δυνάμει τῆς προτάσεως α, δυνάμεθα νὰ συνδέσωμεν τὰς ἄκρας καταστάσεις M_1 ($2BaO, O_2, t = 550°$) καὶ M_2 ($2BaO_2, t = 550°$) τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς (2) διὰ μιᾶς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς. Πρὸς τοῦτο, χωρὶς νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν σύνθεσιν, θερμαίνομεν ἰδιαιτέρως τὰς μάζας 2BaO καὶ O_2 ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν τῶν 550° εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 700°· ἡ θέρμανσις ὑποθέτομεν ὅτι γίνεται βραδέως, ὥστε τὸ φαινόμενον νὰ εἶναι ἀντιστρεπτόν. Ἔστω N ($2BaO, O_2, t = 700°$) ἡ κατάστασις τῶν μαζῶν 2BaO καὶ O_2 εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 700°. Εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ καὶ σύνθεσις καὶ ἀποσύνθεσις τῶν δύο μαζῶν, ἤτοι ἡ ἀμφίδρομος ἀντίδρασις

$$2BaO + O_2 \rightleftarrows 2BaO_2 \tag{4}$$

εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 700° εἶναι ἀντιστρεπτή. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 700° κάμωμεν τὴν σύνθεσιν

$$2BaO + O_2 = 2BaO_2 \tag{5}$$

καὶ περαιτέρω ψύξωμεν βραδέως τὸ ὑπεροξείδιον τοῦ βαρίου ἐκ τῆς καταστάσεως $N'(2BaO_2, t' = 700^\circ)$ μέχρι τῆς καταστάσεως $M_2(2BaO_2, t = 550^\circ)$, θὰ ἔχωμεν πραγματοποιήσει τὴν ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν $M_1NN'M_2$, ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἄκρας καταστάσεις τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς συνθέσεως (M_1, M_2). Τὸ ὅτι ἡ μετατροπὴ $M_1NN'M_2$ εἶναι ἀντιστρεπτή, εἶναι προφανές· ἀρκεῖ νὰ θερμάνωμεν τὸ ὑπεροξείδιον τοῦ βαρίου βραδέως ἐκ τῆς καταστάσεως $M_2(2BaO_2, t = 550^\circ)$ μέχρι τῆς καταστάσεως $N'(2BaO_2, t' = 700^\circ)$· εἰς τὴν κατάστασιν N' πραγματοποιοῦμεν τὴν ἀποσύνθεσιν (N', N)

$$2BaO_2 = 2BaO + O_2, \tag{6}$$

ἡ ὁποία εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t' = 700^\circ$ εἶναι ἀντιστρεπτή. Περαιτέρω ψύχομεν βραδέως τὰς μάζας $2BaO$, O_2 ἐκ τῆς καταστάσεως $N(2BaO, O_2, t' = 700^\circ)$ μέχρι τῆς καταστάσεως $M_1(2BaO, O_2, t = 550^\circ)$. Οὕτω μεταβαίνομεν ἐκ τῆς τελικῆς καταστάσεως M_2 εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν M_1 ἀκριβῶς διὰ τῆς ἀντιστρόφου πορείας $M_2N'NM_1$ τῆς πορείας $M_1NN'M_2$.

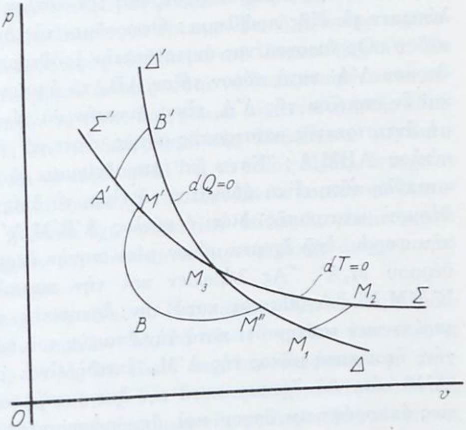
Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν $M_1'M'M_2'$ (σχ. 46)· κατὰ μῆκος τῆς μετατροπῆς ταύτης τὸ $\frac{dQ}{T}$ δὲν εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν καὶ ἑπομένως δὲν ἰσχύει ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως S (§§ 34, 35). Ἔστω ὅμως ὅτι αἱ ἄκραι καταστάσεις M_1', M_2' τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς $M_1'M'M_2'$ εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας καὶ ἔστω $M_1'NM_2'$ ἡ ἀντιστρεπτὴ μετατροπή, ἡ ὁποία συνδέει τὰς καταστάσεις M_1', M_2'. Ἐξ ὁρισμοῦ τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς M_1NM_2, δηλαδὴ τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\int_{M_1'NM_2'} \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1, \tag{7}$$

θὰ ὀνομάζωμεν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς $M_1'M'M_2$. Ἔχομεν λοιπὸν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν, διὰ τοῦ ὁποίου ἐπεκτείνομεν τὴν ἔννοιαν τῆς μεταβολῆς τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῶν ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν καὶ εἰς τὰς μὴ ἀντιστρεπτὰς μετατροπάς, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως αἱ ἄκραι καταστάσεις τῶν μὴ ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν νὰ εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας:

β. Ὀνομάζομεν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς, τῆς ὁποίας αἱ ἄκραι καταστάσεις εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας, τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἄκρας καταστάσεις τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς.

46. *Ἀδιάθερμοι μὴ ἀντιστρεπταὶ μετατροπαί.* Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἀδιάθερμον μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν M_1M_2 (σχ. 49) καὶ ἔστω ὅτι αἱ ἄκραι καταστάσεις M_1, M_2 εἶναι καταστάσεις ἰσορροπίας. Ἄς φέρωμεν τὴν διὰ τοῦ M_1 διερχομένην ἀντιστρεπτὴν ἀδιάθερμον ΔΔ′ καὶ τὴν διὰ τοῦ M_2 διερχομένην ἀντιστρεπτὴν ἰσόθερμον ΣΣ′. Ἔστω M_3 τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων τούτων. Ἡ μετατροπὴ $M_1M_3M_2$, ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ τὰ τόξα M_1M_3 τῆς ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου καὶ M_3M_2 τῆς ἀντιστρεπτῆς ἰσοθέρμου, εἶναι ἀντιστρεπτὴ μετατροπή. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν $M_1M_3M_2$, ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἄκρας καταστάσεις τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς M_1M_2 (§ 45, α). Δυνάμει δὲ τοῦ ὁρισμοῦ β τῆς § 45, ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως M_1M_2 δίδεται ὑπὸ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος



Σχ. 49

$$\text{(1)} \qquad S_2 - S_1 = \int\limits_{M_1M_3M_2} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_1M_3} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{M_3M_2} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{M_3M_2} \frac{dQ}{T} = S_2 - S_3,$$

διότι κατὰ μῆκος τοῦ τόξου ἀδιαθέρμου M_1M_3 εἶναι $\int \frac{dQ}{T} = 0.$

Ἄς θεωρήσωμεν τὸν κύκλον $M_1M_2M_3M_1$, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τόξον τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως M_1M_2, ἀπὸ τὸ τόξον ἰσοθέρμου M_2M_3 καὶ ἀπὸ τὸ τόξον ἀδιαθέρμου M_3M_1. Ὁ κύκλος οὗτος, ἐπειδὴ τὸ τόξον M_1M_2 δὲν εἶναι ἀντιστρεπτόν, δὲν εἶναι ἀντιστρεπτός· διαγράφεται δηλαδὴ μόνον κατὰ τὴν μίαν φοράν. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ τὰ τόξα M_3M_1 καὶ M_1M_2 εἶναι τόξα ἀδιαθέρμου, τὸ διαγράφον τὸν κύκλον σῶμα εἶναι εἰς ἐπαφὴν μὲ πηγὴν θερμότητος μόνον κατὰ μῆκος τοῦ τόξου ἰσοθέρμου M_2M_3. Ὁ κύκλος $M_1M_2M_3M_1$ διαγράφεται λοιπὸν μὲ μίαν πηγὴν θερμότητος. Ἀλλὰ τότε, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος τοῦ Carnot (β, § 30), δὲν εἶναι δυνατὸν διὰ τοῦ κύκλου αὐτοῦ νὰ ἔχωμεν ἀπόδοσιν μηχανικοῦ ἔργου. Ὁ κύκλος λοιπὸν $M_1M_2M_3M_1$ θὰ διαγράφεται κατ' ἀνάγκην κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν· θὰ ἐκτελῆται δηλαδὴ μὲ ἀπορρόφησιν ἔργου καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος. Θὰ εἶναι λοιπὸν

(2) $$Q_{2,3} < 0.$$

Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις διὰ τὸν κύκλον $M_1M_2M_3M_1$ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα: Θεωροῦμεν τὰς διά τινος σημείου M_3 τοῦ ἐπιπέδου υOp διερχομένας ἀντιστρεπτὴν ἰσόθερμον $\Sigma'\Sigma$ καὶ ἀντιστρεπτὴν ἀδιάθερμον $\Delta'\Delta$· κατὰ πόσον τόξον AB, τὸ ὁποῖον συνδέει ἓν σημεῖον τῆς $\Sigma'\Sigma$ καὶ ἓν σημεῖον τῆς $\Delta'\Delta$, εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι τὸ διάγραμμα ἀδιαθέρμου μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ διαγραφὴ τοῦ κύκλου ABM_3A; Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ἡ καμπύλη $A'B'$ (σχ. 49). Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι τὸ διάγραμμα μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς· διότι ὁ κύκλος $A'B'M_3A'$ διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἐνῷ ἔχομεν μόνον μίαν πηγὴν θερμότητος, κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου M_3A'. Ἄς λάβωμεν καὶ τὴν καμπύλην $B'A'$, ὁπότε ὁ κύκλος $B'A'M_3B'$ διαγράφεται κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν· παρατηροῦμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὅτι κατὰ τὴν ἐπαφὴν τοῦ σώματος μὲ τὴν μοναδικὴν πηγήν, ἤτοι κατὰ μῆκος τῆς $A'M_3$, ἐπειδὴ εἶναι $dv > 0$, θὰ εἶναι $Q_{A'M_3} > 0$. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου $B'A'M_3B'$ συγχρόνως ἀπορρόφησιν ἔργου καὶ ἀπορρόφησιν θερμότητος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 27). Οὔτε λοιπὸν ἡ καμπύλη $A'B'$, οὔτε ἡ καμπύλη $B'A'$ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαγράμματα μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς. Ἀντιθέτως ἡ καμπύλη $M'M''$ ὡς καὶ ἡ καμπύλη M_1M_2 εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διαγράμματα μὴ ἀντιστρεπτῶν ἀδιαθέρμων μετατροπῶν· διότι κατὰ τὴν διαγραφὴν τῶν κύκλων $M'M''M_3M'$ καὶ $M_1M_2M_3M_1$ ἔχομεν ἀπορρόφησιν ἔργου καὶ ἀπόδοσιν θερμότητος. Ἄς ἐπανέλθωμεν ἤδη εἰς τὸν τύπον (1), ὁ ὁποῖος δίδει τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς M_1M_2. Ἡ μεταβολὴ $S_2 - S_3$ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τοῦ τόξου ἰσοθέρμου M_3M_2 ($T =$ σταθερὸν) εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (9) τῆς § 34,

(3) $$S_2 - S_3 = \int\limits_{M_3M_2} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int\limits_{M_3M_2} dQ = \frac{Q_{3,2}}{T}.$$

Ἡ (1) γράφεται, δυνάμει τῆς (3)

(4) $$S_2 - S_1 = \frac{Q_{3,2}}{T}.$$

Καὶ ἐπειδή, δυνάμει τῆς (2), εἶναι $Q_{2,3} < 0$, θὰ εἶναι $Q_{3,2} > 0$. Ἔχομεν λοιπὸν

(5) $$S_2 - S_1 = \frac{Q_{3,2}}{T} > 0,$$

ἢ

(6) $$S_2 > S_1.$$

Ἡ ἀνισότης (6) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς, ὑψίστης σημασίας, πρότασιν τοῦ Clausius:

α. Κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς σώματος ἡ τροπὴ τοῦ σώματος αὐξάνει.

Ἡ πρότασις αὕτη, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων ἀνωτέρω, ἐκφράζει μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν παραγωγὴν ἔργου χωρὶς τὴν συνύπαρξιν δύο πηγῶν θερμότητος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω πρότασις τοῦ Clausius εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἀξίωμα τοῦ Carnot (β § 30). Ἐκ τῆς διερευνήσεως, τὴν ὁποίαν ἐκάμομεν ἀνωτέρω διὰ νὰ διακρίνωμεν κατὰ πόσον δοθὲν τόξον ΑΒ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι διάγραμμα μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς, προκύπτει ὅτι τὸ διάγραμμα τῆς ἀδιαθέρμου μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς, ὅπως εἶναι τὸ τόξον $M'M''$ ἢ τὸ τόξον M_1M_2, ἀνέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀντιστρεπτῶν ἀδιαθέρμων (§ 12). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν, ἡ ὁποία ἔχει σημασίαν καθαρῶς γεωμετρικήν.

β. Τὸ διάγραμμα ἀδιαθέρμου μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς ἀνέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀντιστρεπτῶν ἀδιαθέρμων.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν M_1M_2 (σχ. 49) εἶναι τὸ διάγραμμα ἀδιαθέρμου μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς, τὸ μὲν σημεῖον M_1 θὰ εἶναι σημεῖον ὑποκειμένης ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου, ἐνῷ τὸ M_2 θὰ εἶναι σημεῖον ὑπερκειμένης ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου. Ἔστω ἤδη καὶ τυχοῦσα ἀντιστρεπτὴ μετατροπὴ M_1M_2 συνδέουσα τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2· τὸ διάγραμμα τῆς μετατροπῆς ταύτης, ὡς συνδέον σημεῖον ὑποκειμένης μὲ σημεῖον ὑπερκειμένης ἀδιαθέρμου, θὰ ἀνέρχεται τὸ πεδίον τῶν ἀντιστρεπτῶν ἀδιαθέρμων. Ἀλλὰ τότε, δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 35, ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς M_1M_2 θὰ αὐξάνῃ· ἄρα, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ (β, § 45) καὶ ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς M_1M_2 αὐξάνει. Οὕτω ἀπεδείξαμεν ἐκ νέου τὴν πρότασιν α τοῦ Clausius, στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως β.

Ἐπειδὴ ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς σώματος εἶναι σταθερά, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν α καὶ ὡς ἑξῆς:

γ. Κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου μετατροπῆς σώματος ἡ τροπὴ τοῦ σώματος αὐξάνει ἢ διατηρεῖται σταθερά, ἐφ' ὅσον ἡ ἀδιάθερμος μετατροπὴ εἶναι μὴ ἀντιστρεπτὴ ἢ ἀντιστρεπτή. Οὐδέποτε δὲ ἡ τροπὴ σώματος κατὰ μῆκος ἀδιαθέρμου μετατροπῆς αὐτοῦ ἐλαττοῦται.

47. *Μεταβολὴ τῆς τροπῆς ἀπομονωμένου συστήματος.* Θεωρήσωμεν γενικῶς σύστημα Σ ἐκ ν σωμάτων $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\nu$, τὸ ὁποῖον ἐν τῷ συνόλῳ ὑποθέτομεν ἀπομονωμένον οὕτως, ὥστε τὸ Σ νὰ μὴ ὑφίσταται συναλλαγὴν θερμότητος ἢ ἔργου μετὰ τοῦ περιβάλλοντος. Θὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Clausius:

Ἡ τροπὴ ἀπομονωμένου συστήματος αὐξάνει.

Ἔστω

$$S' = S_1' + S_2' + \ldots\ldots + S_\nu' \tag{1}$$

ἡ τροπὴ τοῦ συστήματος εἴς τινα ἀρχικὴν κατάστασιν αὐτοῦ Σ′ καὶ

(2) $$S'' = S_1'' + S_2'' + \ldots + S_\nu''$$

ἡ τροπὴ τοῦ συστήματος εἴς τινα τελικὴν κατάστασιν Σ″. Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν μετατροπὴν (Σ′, Σ″) τὸ σῶμα $\Sigma_\varkappa$ τοῦ συστήματος ἐκτελεῖ ἀδιάθερμον μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπήν· τότε ἡ τροπὴ τοῦ σώματος $\Sigma_\varkappa$ αὐξάνει (§ 46, α). Ἀλλά, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 46, διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ἀπορρόφησιν ἔργου. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. διὰ καταναλώσεως μέρους τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος $\Sigma_\varkappa$ ἢ ἄλλων σωμάτων τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν ἡ τροπὴ $S_\varkappa$ τοῦ σώματος $\Sigma_\varkappa$ αὐξάνει, χωρὶς νὰ ἔχωμεν ἀντίστοιχον μεταβολὴν τῆς τροπῆς τῶν λοιπῶν σωμάτων τοῦ συστήματος. Ἡ μείωσις τῆς κινητικῆς ἐνεργείας καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις τῆς τροπῆς, γίνεται ἐπὶ παραδείγματι ἐξ αἰτίας τῶν τριβῶν. Αἱ τριβαὶ ἀπορροφοῦν, ὡς εἴδομεν, μέρος τοῦ κινητηρίου ἔργου, ἢ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, τὸ ὁποῖον μετασχηματίζεται εἰς θερμότητα· ἡ θερμότης αὕτη, ἐπειδὴ τὸ σύστημα Σ ὑπετέθη ἀπομονωμένον, ἀπορροφᾶται ὑπὸ σωμάτων τοῦ συστήματος, τῶν ὁποίων ἡ τροπὴ αὐξάνει. Ἡ μείωσις λοιπὸν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος ἐξ αἰτίας τῶν τριβῶν αὐξάνει τὴν τροπὴν τοῦ συστήματος. Ἄλλος τρόπος τῆς μεταβολῆς τῆς τροπῆς σώματός τινος Σ_λ τοῦ συστήματος εἶναι ἡ ἀπορρόφησις θερμότητος ὑπὸ τοῦ Σ_λ ἐξ ἄλλων σωμάτων τοῦ συστήματος ἢ ἡ ἀπόδοσις θερμότητος ἐκ τοῦ Σ_λ εἰς ἄλλα σώματα τοῦ συστήματος. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ δι᾿ ἐπαφῆς ἢ δι᾿ ἀκτινοβολίας. Ἔστωσαν δύο σώματα Σ_λ, Σ_μ τοῦ συστήματος· ἐὰν τὸ σῶμα Σ_λ δίδῃ θερμότητα εἰς τὸ Σ_μ, ἡ θερμοκρασία T_λ τοῦ Σ_λ θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμοκρασίας T_μ τοῦ σώματος Σ_μ. Διότι ἂν ἀντιθέτως ἦτο $T_\mu > T_\lambda$, διὰ νὰ μεταφέρωμεν θερμίδας ἐκ τοῦ ψυχροῦ σώματος Σ_λ εἰς τὸ θερμὸν Σ_μ, θὰ ἔπρεπε νὰ καταναλώσωμεν ἐξωτερικὸν ἔργον ἢ θερμότητα (§ 32). Ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, διότι τὸ σύστημα ὑπετέθη μεμονωμένον ἀπὸ τοῦ ἐξωτερικοῦ περιβάλλοντος. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι

(3) $$T_\lambda > T_\mu,$$

τὸ σῶμα Σ_λ θὰ δίδῃ θερμίδας εἰς τὸ Σ_μ. Ἂς θεωρήσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην στοιχειώδη μετατροπὴν τῶν δύο σωμάτων Σ_λ, Σ_μ καὶ ἔστω $-dQ$ ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν ἀποδίδει τὸ σῶμα Σ_λ καὶ $+dQ$ ἡ θερμότης, τὴν ὁποίαν ἀπορροφᾷ τὸ σῶμα Σ_μ. Ἡ στοιχειώδης μεταβολὴ τῆς τροπῆς τοῦ συστήματος τῶν δύο σωμάτων θὰ εἶναι

(4) $$dS_\lambda + dS_\mu = -\frac{dQ}{T_\lambda} + \frac{dQ}{T_\mu} = dQ\left(\frac{1}{T_\mu} - \frac{1}{T_\lambda}\right).$$

Δυνάμει ὅμως τῆς ἀνισότητος (3) εἶναι

(5) $$\frac{1}{T_\mu} - \frac{1}{T_\lambda} > 0.$$

Εἶναι λοιπὸν

6) $$dS_\lambda + dS_\mu > 0.$$

Ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν τὴν (6) μεταξὺ τῶν καταστάσεων Σ' καὶ Σ'', εὑρίσκομεν

(7) $$(S_\lambda'' - S_\lambda') + (S_\mu'' - S_\mu') > 0,$$

ἢ

(8) $$S_\lambda'' + S_\mu'' > S_\lambda' + S_\mu'.$$

Οἱαιδήποτε λοιπὸν καὶ ἂν εἶναι αἱ μετατροπαὶ τῶν σωμάτων $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots \Sigma_\nu$, αἱ ὁποῖαι ἐν τῷ συνόλῳ των ὁρίζουν τὴν μετατροπὴν τοῦ Σ, θὰ εἶναι

(9 $$S'' = S_1'' + S_2'' + \ldots + S_\nu'' > S' = S_1' + S_2' + \ldots + S_\nu.$$

Τὸ θεώρημα λοιπὸν τοῦ Clausius ἀπεδείχθη.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις τοῦ Clausius συμπληροῖ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας (§ 29). Ἡ ἐξίσωσις (24) τῆς § 29, διὰ τὸ ἀπομονωμένον σύστημα Σ, γράφεται

$$\Delta(H + \Phi) = 0$$

ἢ

(10) $$H + \Phi = \text{σταθερόν}.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἐκφράζει τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας τοῦ συστήματος Σ καὶ ἰσχύει διὰ τὰς ποσοτικὰς σχέσεις τῶν διαφόρων μορφῶν ἐνεργείας. Ἀντιθέτως ἡ ἀνωτέρω πρότασις τοῦ Clausius μᾶς διδάσκει, ὅτι κατὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ συστήματος Σ, εἰς τὰς διαφόρους συναλλαγὰς μεταξὺ τῶν διαφόρων μορφῶν ἐνεργείας τῶν σωμάτων $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_\nu$ τοῦ συστήματος ἔχομεν συνεχῶς αὔξησιν τῆς ὁλικῆς θερμότητος τοῦ συστήματος δι' ἀντιστοίχου μειώσεως ἄλλων μορφῶν ἐνεργείας τοῦ συστήματος· ἡ αὔξησις τῆς ὁλικῆς θερμότητος ἐκδηλοῦται διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς τροπῆς τοῦ συστήματος. Ἐνῷ λοιπὸν ἡ ἐνέργεια τοῦ ἀπομονωμένου συστήματος Σ ποσοτικῶς διατηρεῖται σταθερά, δὲν διατηρεῖται καὶ ποιοτικῶς ὁμοία πρὸς ἑαυτήν, ἀλλὰ ποιοτικῶς ὑποβιβάζεται. Δυνάμεθα μάλιστα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς τροπῆς χαρακτηρίζει τὸ ἀντίστροφον τῆς ποιοτικῆς ἀξίας τῆς ἐνεργείας. Ἐκ παραλλήλου λοιπὸν πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἔχομεν καὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ὑποβιβασμοῦ τῆς ἐνεργείας. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ὑποβιβασμοῦ, κατόπιν τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς τροπῆς ὑπὸ τοῦ Clausius, ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

β. Ἡ τροπὴ ἀπομονωμένου συστήματος τείνει πρὸς ἓν μέγιστον.

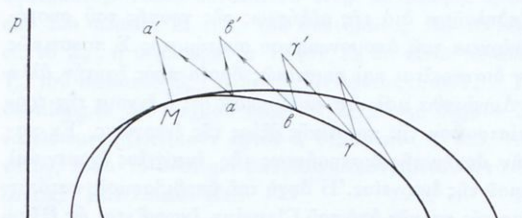
Τὸ μέγιστον τοῦτο ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἀπόλυτον ἠρεμίαν τοῦ συστήματος, ὅταν ὅλαι αἱ μορφαὶ ἐνεργείας τοῦ συστήματος θὰ ἔχουν μετατραπῆ εἰς θερμότητα καὶ ἡ θερμοκρασία τοῦ συστήματος θὰ εἶναι σταθερά. Τὸ σύστημα, ὅταν ἀποκτήσῃ τὸ μέγιστον τῆς τροπῆς του, δυνάμεθα νἀ εἴπωμεν ὅτι θὰ εἶναι νεκρόν· θὰ ἔχῃ δηλαδὴ ἐνέργειαν ὅσην εἶχε καὶ εἰς τὸ παρελθὸν ποσοτικῶς, ἀλλὰ ὑποβιβασμένην καὶ ἐκφυλισμένην *.

48. Ὑπολογισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος $\int_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου. Εἰς τὴν § 34 ἀπεδείξαμεν ὅτι διὰ τὰς ἀντιστρεπτὰς με-

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου.* Ἡ ἐπιστήμη τῆς ἐνεργείας, 1932, σελ. 23.

τατροπὰς τὸ $\frac{dQ}{T}$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν. Τότε τὸ $\frac{dQ}{T} = dS$ εἶναι ἡ στοιχειώδης τροπὴ καὶ τὸ $\int\limits_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ὡς δὲ ἐτονίσαμεν εἰς τὸ τέλος τῆς § 34, τὰ ἐξαγόμενα διὰ τὸ $\frac{dQ}{T}$, τὰ ὁποῖα ἰσχύουν διὰ τὰς ἀντιστρεπτὰς μετατροπάς, ἀποβάλλουν πᾶσαν σημασίαν εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μὴ ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν. Δυνάμεθα ὅμως, χωρὶς νὰ ἀποδίδωμεν εἰς τὸ $\frac{dQ}{T}$ τὴν ἔννοιαν τῆς στοιχειώδους τροπῆς, νὰ ζητήσωμεν διά τινα κλειστὴν μὴ ἀντιστρεπτὴν μετατροπὴν (C) νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $\int\limits_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος ταύτης.

Θὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς μετατροπῆς C τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον ἰσορροπίας (σχ. 50). Τὸ σημεῖον τοῦτο δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν τελικὴν κατάστασιν ἰσορροπίας καὶ δυνάμεθα, δυνάμει τῆς προτάσεως α τῆς § 45, νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως Μ εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν Μ δι' ἑνὸς ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C′. Δυνάμει δὲ τοῦ ὁρισμοῦ β τῆς § 45 ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τοῦ μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τοῦ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου C′· ἤτοι θὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:



Σχ. 50

α. Ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς σώματος κατὰ μῆκος μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου, ὅταν ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον τοῦ κύκλου εἶναι σημεῖον ἰσορροπίας, ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ $\int\limits_C \frac{dQ}{T}$ κατὰ μῆκος τοῦ κύκλου τούτου.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸν κύκλον C ὡς ἀποτελούμενον ἀπὸ σειρὰν μικρῶν διαδοχικῶν μετατροπῶν Μα, αβ, βγ,..., (σχ. 50). Ἀφοῦ ὁ κύκλος C ὑπετέθη μὴ ἀντιστρεπτός, μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν μικρῶν μετατροπῶν Μα, αβ, βγ.... θὰ εἶναι μὴ ἀντιστρεπτή. Ἂς φέρωμεν διὰ τῶν σημείων Μ, α, β,... τὰς ἀδιαθέρμους Μα′, αβ′, βγ′,... καὶ τὰς ἀντιστρεπτὰς ἰσοθέρμους αα′, ββ′, γγ′,... Αἱ καμπύλαι αὗται συναντῶνται ἀνὰ δύο εἰς τὰ σημεῖα α′, β′, γ′,... Αἱ ἀδιάθερμοι Μα′, αβ′, βγ′,... εἶναι ἀντιστρεπταὶ μόνον εἰς τὰ ἀντιστρεπτὰ τμήματα τοῦ κύκλου C. Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ἡ μικρὰ μετατροπὴ αβ· ἐὰν αὕτη εἶναι ἀντιστρεπτή, τότε καὶ τὸ τόξον ἀδιαθέρμου αβ′ καὶ τὸ τόξον ἰσοθέρμου β′β θὰ εἶναι ἀντιστρεπτά. Ἀντιθέτως, ἐὰν ἡ μετατροπὴ αβ δὲν εἶναι ἀντιστρεπτή, ἐπειδὴ τὸ τόξον ἰσοθέρμου ββ′ ὑπετέθη ἀντιστρεπτόν, τὸ τόξον ἀδιαθέρμου αβ′ θὰ εἶναι τόξον μὴ ἀντιστρεπτῆς ἀδιαθέρμου.

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸν μὴ ἀντιστρεπτὸν κύκλον C ὡς τὸ ὅριον τῆς κλειστῆς μὴ ἀντιστρεπτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς C″(Μα′αβ′βγ′γ...Μ), ὅταν αἱ μικραὶ διαδοχικαὶ μετατροπαὶ Μα, αβ, βγ,... τείνουν εἰς τὸ μηδὲν καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον. Ἔστωσαν ΔS_δ ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τόξου τινὸς τῶν ἀδιαθέρμων Μα′, αβ′, βγ′,... καὶ ΔS_σ ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τόξου τινὸς τῶν ἰσοθέρμων α′α, β′β, γ′γ,... Ἡ ὁλικὴ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος ὅλων τῶν τόξων ἀδιαθέρμων θὰ εἶναι $\Sigma\Delta S_\delta$ καὶ ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος ὅλων τῶν τόξων ἰσοθέρμων θὰ εἶναι $\Sigma\Delta S_\sigma$, ὅπου τὰ ἀθροίσματα ἐκτείνονται διὰ μὲν τὰ τόξα ἀδιαθέρμων ($\Sigma\Delta S_\delta$) ἐφ᾽ ὅλων τῶν τόξων Μα′, αβ′, βγ′, γδ′,..., διὰ δὲ τὰ τόξα ἰσοθέρμων ($\Sigma\Delta S_\sigma$) ἐφ᾽ ὅλων τῶν τόξων α′α, β′β, γ′γ,... Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως α εἶναι

(1) $$\Sigma\Delta S_\delta + \Sigma\Delta S_\sigma = 0.$$

Μεταξὺ τῶν τόξων ἀδιαθέρμων τοὐλάχιστον ἕν, ὡς εἴδομεν, θὰ εἶναι μὴ ἀντιστρεπτόν. Διὰ τὰ ἀντιστρεπτὰ τόξα, ἐὰν ὑπάρχουν, τὰ ΔS_δ, δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 46, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ μηδέν· διὰ δὲ τὰ μὴ ἀντιστρεπτὰ τόξα, δυνάμει τῆς ἰδίας προτάσεως, τὰ ΔS_δ θὰ εἶναι θετικά. Ἐν τῷ συνόλῳ λοιπόν, ἐπειδὴ τοὐλάχιστον ἕν τόξον ἀδιάθερμου θὰ εἶναι μὴ ἀντιστρεπτόν, θὰ ἔχωμεν

(2) $$\Sigma\Delta S_\delta > 0.$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

(3) $$\Sigma\Delta S_\sigma < 0.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ $\Sigma\Delta S_\sigma$, δηλαδὴ τὴν μεταβολὴν τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος ὅλων τῶν τόξων ἰσοθέρμων α′α, β′β, γ′γ,...ν′Μ. Ἔχομεν, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ T_α, T_β, T_γ,... τὰς σταθερὰς θερμοκρασίας κατὰ μῆκος τῶν τόξων τούτων καὶ διὰ $Q_{\alpha'\alpha}$, $Q_{\beta'\beta}$, $Q_{\gamma'\gamma}$,... τὰ ποσὰ θερμότητος τὰ ἀπαιτούμενα διὰ τὴν διαγραφὴν τῶν τόξων,

(4) $$\Sigma\Delta S_\sigma = \frac{Q_{\alpha'\alpha}}{T_\alpha} + \frac{Q_{\beta'\beta}}{T_\beta} + \frac{Q_{\gamma'\gamma}}{T_\gamma} + \ldots + \frac{Q_{\nu'M}}{T_M}.$$

Ὅταν τὰ τόξα Μα, αβ, βγ,... τείνουν εἰς τὸ μηδὲν καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ σχέσις (4), δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων καὶ διὰ τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν $M_1\alpha'\alpha\beta'\beta\gamma'$... τοῦ σχήματος (31, § 34), δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

(5)
$$\Sigma\Delta S_\sigma = \int_C \frac{dQ}{T}.$$

Εἶναι λοιπόν, δυνάμει τῆς (3),

(6)
$$\int_C \frac{dQ}{T} < 0.$$

Ἡ ἀνισότης (6) ἐκφράζει τὸ ἑξῆς θεώρημα τοῦ Clausius:

β. Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{dQ}{T}$ *κατὰ μῆκος μὴ ἀντιστρεπτοῦ κύκλου ἔχει πάντοτε ἀρνητικὴν τιμήν.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὁμοῦ μὲ τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀπεδείξαμεν εἰς τὴν § 34, συνοψίζονται εἰς τὸ ἑξῆς γενικὸν θεώρημα τοῦ Clausius:

γ. Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{dQ}{T}$ *κατὰ μῆκος κύκλου C ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδὲν ἢ ἔχει ἀρνητικὴν τιμήν, ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος εἶναι ἀντιστρεπτὸς ἢ δὲν εἶναι ἀντιστρεπτός. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο οὐδέποτε λαμβάνει θετικὴν τιμήν.*

Ἐντεῦθεν ἡ κλασσικὴ σχέσις, ἡ ὁποία διέπει τὰς κλειστὰς θερμικὰς μετατροπάς:

(7)
$$\int_C \frac{dQ}{T} \leq 0.$$

Ἀσκήσεις

1. Ἀερίου τινὸς δίδονται ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις

(1)
$$(p + \xi)(\upsilon - \eta) = RT$$

καὶ ἡ ἔκφρασις τοῦ dQ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν T, υ

(2)
$$dQ = (\lambda + \mu T)\,dT + m\,d\upsilon,$$

ὅπου ξ, η, R, λ, μ, m εἶναι σταθεραί.

Ζητοῦνται:

α. Οἱ θερμοελαστικοὶ συντελεσταὶ α καὶ β.

β. Ἡ ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ m τῆς ἐξισώσεως (2)· καὶ

γ. Οἱ συντελεσταὶ c′, c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερόν.

α. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(3)
$$F = (p + \xi)(\upsilon - \eta) - RT = 0.$$

Ἔχομεν

(4)
$$\frac{\partial F}{\partial \upsilon} = p + \xi, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \upsilon - \eta, \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -R.$$

Δυνάμει τῶν σχέσεων τούτων οἱ τύποι (6) τῆς § 4 μᾶς δίδουν

(5) $$\alpha = -\frac{1}{\upsilon}\frac{-R}{p+\xi} = \frac{R}{(p+\xi)\upsilon}, \quad \beta = \frac{1}{\upsilon}\frac{\upsilon-\eta}{p+\xi} = \frac{\upsilon-\eta}{(p+\xi)\upsilon}.$$

Αὗται εἶναι αἱ ζητούμεναι ἐκφράσεις τῶν θερμοελαστικῶν συντελεστῶν α, β.

β. Ἂς γράψωμεν τοὺς τύπους (6, § 28) καὶ (1, § 35), οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τὰς ἐκφράσεις τῆς στοιχειώδους ἐσωτερικῆς θερμότητος καὶ τῆς στοιχειώδους τροπῆς

(6) $$dU = dQ - AdE = dQ - Apd\upsilon$$

(7) $$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Οἱ τύποι οὗτοι, δυνάμει τῆς (2), γράφονται

$$dU = (\lambda + \mu T)\, dT + md\upsilon - Apd\upsilon$$

$$dS = \frac{(\lambda+\mu T)dT + md\upsilon}{T},$$

ἢ

(8) $$dU = (\lambda + \mu T)\, dT + (m - Ap)\, d\upsilon$$

(9) $$dS = \frac{\lambda+\mu T}{T}\, dT + \frac{m}{T}\, d\upsilon.$$

Ἐπειδὴ αἱ ἐκφράσεις (8), (9) εἶναι τέλεια ὁλικὰ διαφορικά, μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν δευτέρων μελῶν των θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις (1) τῆς § 28· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

(8′) $$\frac{\partial(\lambda+\mu T)}{\partial \upsilon} = \frac{\partial(m - Ap)}{\partial T}$$

(9′) $$\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\frac{\lambda+\mu T}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{m}{T}\right).$$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν (8′), (9′) εἶναι ἴσα πρὸς τὸ μηδέν. Τῷ ὄντι ταῦτα περιέχουν τὰς σταθερὰς λ, μ καὶ τὴν μεταβλητὴν T· ἐπειδὴ ὅμως τὰ T, υ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, θὰ εἶναι $\frac{\partial T}{\partial \upsilon} = 0$ καὶ $\frac{\partial \upsilon}{\partial T} = 0$. Τὰ δεύτερα λοιπὸν μέλη τῶν (8′), (9′) εἶναι ἴσα πρὸς τὸ μηδέν· ἤτοι εἶναι

(10) $$\frac{\partial(m - Ap)}{\partial T} = \frac{\partial m}{\partial T} - A\frac{\partial p}{\partial T} = 0$$

(11) $$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T^2}\left(T\frac{\partial m}{\partial T} - m\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{m}{T^2} = 0.$$

Ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

(12) $$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{\upsilon - \eta}.$$

Αἱ (10), (11) γράφονται δυνάμει καὶ τῆς (12),

(10′) $$\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{AR}{\upsilon - \eta} = 0$$

(11′) $$\frac{\partial m}{\partial T} - \frac{m}{T} = 0.$$

Ἀπαλείφοντες τὸ $\frac{\partial m}{\partial T}$ εὑρίσκομεν

$$\frac{m}{T} = \frac{AR}{\upsilon - \eta}. \tag{12}$$

Ἐντεῦθεν

$$m = \frac{ART}{\upsilon - \eta}. \tag{13}$$

Ἤ, δυνάμει τῆς (1),

$$m = A\,(p + \xi). \tag{14}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ m.

γ. Γενικῶς ἡ ἔκφρασις τοῦ dQ εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν T, υ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (18, § 5), ἤτοι ὑπὸ τοῦ τύπου

$$dQ = c\,dT + \frac{c' - c}{\alpha\upsilon}\,d\upsilon. \tag{15}$$

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (2) καὶ (15) λαμβάνομεν ἐκ ταυτότητος

$$c = \lambda + \mu T \tag{16}$$

$$\frac{c' - c}{\alpha\upsilon} = m. \tag{17}$$

Ἡ (17), δυνάμει τῆς πρώτης τῶν σχέσεων (5) καὶ τῆς (14), γράφεται

$$c' - c = m\alpha\upsilon = A\,(p + \xi)\,\frac{R}{(p+\xi)\upsilon}\,\upsilon = AR. \tag{18}$$

Ὅθεν, δυνάμει τῆς (16)

$$c' = \lambda + \mu T + AR. \tag{19}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (18) συμπίπτει μὲ τὸν τύπον $c' - c = AR$ (9, § 16), ὁ ὁποῖος ἰσχύει διὰ τὰ τέλεια ἀέρια. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν τοῦ ἀερίου, τοῦ ὁποίου ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἡ (1), οἱ συντελεσταὶ c′, c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερόν, δυνάμει τῶν ἐκφράσεών των (19), (16), μεταβάλλονται μετὰ τῆς θερμοκρασίας· ἡ διαφορά των ὅμως διατηρεῖται σταθερά *.

2. Ἀερίου τινὸς ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις εἶναι

$$\left(p + \frac{\xi}{\upsilon^2}\right)(\upsilon - \eta) = RT, \tag{1}$$

ὅπου ξ, η, R εἶναι σταθεραί.

Ζητοῦνται:

α. Ἡ ἔκφρασις τῆς διαφορᾶς $c' - c$ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν καὶ ὑπὸ ὄγκον σταθερόν, συναρτήσει τῶν θεμελιωδῶν στοιχείων υ, p, T· καὶ

β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) ὁ ὅρος $\frac{\xi}{T}$ εἶναι πολὺ μικρὸς καὶ δύναται νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τὸ μηδέν, θὰ εἶναι $c' - c = AR$.

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Θεωρητικοὶ προσδιορισμοὶ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος, 1930, σελ. 19.

α. Ἂς γράψωμεν τὴν ἔκφρασιν (18, § 5) τοῦ dQ

(2) $$dQ = cdT + \frac{c'-c}{\alpha\upsilon}d\upsilon.$$

Θέτοντες χάριν συντομίας

(3) $$\frac{c'-c}{\alpha\upsilon} = L$$

λαμβάνομεν

(4) $$dQ = cdT + Ld\upsilon.$$

Αἱ ἐκφράσεις τῆς στοιχειώδους ἐσωτερικῆς θερμότητος καὶ τῆς στοιχειώδους τροπῆς εἶναι

(5) $$dU = dQ - Apd\upsilon = cdT + (L - Ap)d\upsilon$$

(6) $$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dT + \frac{L}{T}d\upsilon.$$

Ἐπειδὴ αἱ διώνυμοι διαφορικαὶ παραστάσεις τῶν δευτέρων μελῶν τῶν (5) καὶ (6) εἶναι τέλεια ὁλικὰ διαφορικά, θὰ ἔχωμεν σχέσεις ἀναλόγους πρὸς τὰς σχέσεις (8΄), (9΄) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Ἔχομεν δηλαδὴ

(5΄) $$\frac{\partial c}{\partial \upsilon} = \frac{\partial(L - Ap)}{\partial T}$$

(6΄) $$\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\frac{c}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{L}{T}\right).$$

Ἐπειδὴ τὰ υ, T εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, θὰ εἶναι

$$\frac{\partial T}{\partial \upsilon} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial T} = 0.$$

Ἡ (5΄) γράφεται

(7) $$\frac{\partial c}{\partial \upsilon} = \frac{\partial L}{\partial T} - A\frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

(8) $$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{\upsilon - \eta}.$$

ὅθεν ἡ (7) γράφεται

(9) $$\frac{\partial c}{\partial \upsilon} = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{AR}{\upsilon - \eta}.$$

Ἡ (6΄) γράφεται

$$\frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial \upsilon} = \frac{1}{T^2}\left(T\frac{\partial L}{\partial T} - L\right) = \frac{1}{T}\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{L}{T^2},$$

ἢ

(10) $$\frac{\partial c}{\partial \upsilon} = \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{L}{T}.$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (9) καὶ (10) λαμβάνομεν

$$\frac{L}{T} = \frac{AR}{\upsilon - \eta}.$$

Ὅθεν, δυνάμει καὶ τῆς (3)

$$\frac{c'-c}{\alpha\upsilon} = \frac{ART}{\upsilon - \eta}.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

(11) $$c' - c = \frac{A\alpha RT\upsilon}{\upsilon - \eta}.$$

Ὑπολείπεται νὰ εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν (11) τὴν ἔκφρασιν τοῦ θερμοελαστικοῦ συντελεστοῦ α, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν ζητουμένην ἔκφρασιν τῆς διαφορᾶς c′ — c. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται

$$F = \left(p + \frac{\xi}{\upsilon^2}\right)(\upsilon - \eta) - RT = 0. \tag{12}$$

Ἐκ τῆς (12) λαμβάνομεν

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -R, \quad \frac{\partial F}{\partial \upsilon} = p + \frac{\xi}{\upsilon^2} - 2(\upsilon - \eta)\frac{\xi}{\upsilon^3}. \tag{13}$$

Ἡ ἔκφρασις λοιπὸν (6, § 4) τοῦ α γράφεται ἐνταῦθα

$$\alpha = \frac{1}{\upsilon}\,\frac{R}{p + \frac{\xi}{\upsilon^2} - 2(\upsilon - \eta)\frac{\xi}{\upsilon^3}} = \frac{1}{\upsilon}\,\frac{R\upsilon^3}{p\upsilon^3 + \xi\upsilon - 2\xi\upsilon + 2\xi\eta}$$

ἢ

$$\alpha = \frac{R\upsilon^2}{p\upsilon^3 - \xi\upsilon + 2\xi\eta}. \tag{14}$$

Ἡ (11) γράφεται, δυνάμει τῆς (14),

$$c' - c = AT\,\frac{R^2\upsilon^3}{(\upsilon - \eta)(p\upsilon^3 - \xi\upsilon + 2\xi\eta)}. \tag{15}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἔκφρασις τῆς διαφορᾶς c′ — c.

β. Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\left(\frac{p}{T} + \frac{\xi}{T}\,\frac{1}{\upsilon^2}\right)(\upsilon - \eta) = R. \tag{16}$$

Καὶ ἡ ἔκφρασις (15) τῆς διαφορᾶς c′ — c γράφεται

$$c' - c = \frac{AR^2\upsilon^3}{(\upsilon - \eta)\left[\frac{p\upsilon^3}{T} - \frac{\xi}{T}\,\upsilon + 2\eta\,\frac{\xi}{T}\right]}. \tag{17}$$

Ὅταν θέσωμεν $\frac{\xi}{T} = 0$, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις γίνονται

$$\frac{p}{T}(\upsilon - \eta) = R \tag{16'}$$

$$c' - c = \frac{AR^2\upsilon^3}{(\upsilon - \eta)\frac{p\upsilon^3}{T}} = \frac{AR^2}{(\upsilon - \eta)\frac{p}{T}}. \tag{17'}$$

Ἡ (17′) γράφεται δυνάμει τῆς (16′),

$$c' - c = \frac{AR^2}{R} = AR. \quad \text{Ὅ. ἔ. δ.} \tag{18}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

ΑΛΛΑΓΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

49. *Πειραματικὰ δεδομένα. Κεκορεσμένον ὑγρόν. Ξηρὸς κεκορεσμένος ἀτμός. Ὑπέρθερμος ἀτμός.* Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ὑπεθέσαμεν πάντοτε ὅτι τὰ σώματα δὲν ἀλλάσσουν κατάστασιν κατὰ τὰς διαφόρους μετατροπὰς αὐτῶν. Ἐν τούτοις, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἡ μελέτη τῆς ἀλλαγῆς καταστάσεως, ἤτοι ἡ μελέτη τῆς μετατροπῆς ἐκ τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως εἰς τὴν ἀέριον καὶ τἀνάπαλιν, ὡς καὶ ἡ μελέτη τῆς μετατροπῆς ἐκ τῆς στερεᾶς καταστάσεως εἰς τὴν ὑγρὰν καὶ τἀνάπαλιν, χάρις εἰς τὰ δεδομένα ἐκ τοῦ πειράματος, δὲν διαφεύγει τῶν νόμων τῆς θερμοδυναμικῆς.

Ἂς λάβωμεν μᾶζαν ὑγροῦ εἰς ἀρχικὴν κατάστασιν A_0, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ θερμοκρασία εἶναι $t_0{}^{\circ}C$ καὶ ἡ πίεσις p. Ἐὰν θερμάνωμεν τὴν μᾶζαν ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ μᾶζα θὰ ὑποστῇ τὰς ἑξῆς τρεῖς διαδοχικὰς τμηματικὰς μετατροπάς:

I. Ἡ θερμοκρασία τῆς ὑγρᾶς μάζης θὰ αὐξήσῃ ἀπὸ t_0 μέχρι μεγίστης τινὸς θερμοκρασίας t, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πιέσεως p. Οὕτω ἔχομεν τὴν πρώτην τμηματικὴν μετατροπὴν

$$[A_0(p, t_0),\ A(p, t)]. \tag{1}$$

II. Κατὰ τὴν περαιτέρω θέρμανσιν τῆς μάζης, ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p, θὰ διατηρῆται σταθερὰ καὶ ἡ θερμοκρασία t, ἐνῷ ἡ μᾶζα τοῦ ὑγροῦ θὰ ἀτμοποιῆται. Τὸ φαινόμενον τῆς ἀτμοποιήσεως θὰ ἐξακολουθήσῃ, ἕως ὅτου ὁλόκληρος ἡ μᾶζα τοῦ ὑγροῦ $A(p, t)$ μετατραπῇ εἰς μᾶζαν ἀτμοῦ $B(p, t)$. Ἡ δευτέρα αὕτη τμηματικὴ μετατροπὴ

$$[A(p, t),\ B(p, t)] \tag{2}$$

ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀλλαγὴν ἐκ τῆς ὑγρᾶς εἰς τὴν ἀέριον κατάστασιν.

III. Τέλος κατὰ τὴν περαιτέρω θέρμανσιν τῆς μάζης, ὑπὸ τὴν σταθερὰν πάντοτε πίεσιν p, ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀτμοῦ θὰ αὐξάνῃ. Οὕτω ἔχομεν τὴν τρίτην τμηματικὴν μετατροπὴν

$$[B(p, t),\ B'(p, t')],\quad t' > t. \tag{3}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη τμηματικὴ μετατροπὴ (1) εἶναι ἰσόθλιπτος μετατροπὴ ρευστοῦ ἐν ὑγρᾷ καταστάσει. Ὅθεν ἡ μελέτη τῆς μετατροπῆς ταύτης ὑπάγεται εἰς τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους. Ὁμοίως ἡ τρίτη τμηματικὴ μετατροπὴ (3) εἶναι ἰσόθλιπτος μετατροπὴ ἀτμοῦ, ἤτοι ρευστοῦ ἐν ἀερίῳ καταστάσει. Ἐὰν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα τοῦ ἀτμοῦ (§ 5), θὰ δυνάμεθα, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, νὰ μελετήσωμεν καὶ τὴν μετατροπὴν ταύτην.

Ἡ δευτέρα ὅμως τμηματικὴ μετατροπὴ (2) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀλλαγὴν καταστάσεως ἐκ τῆς ὑγρᾶς εἰς τὴν ἀέριον κατάστασιν. Κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην ἔχομεν συνεχῆ παραγωγὴν ἀτμοῦ οὕτως, ὥστε εἰς ἐνδιάμεσον κατάστασιν μεταξὺ τῶν καταστάσεων A(p, t) καὶ B(p, t) ἔχομεν μῖγμα ὑγροῦ καὶ ἀτμοῦ. Τὸ μῖγμα τοῦτο ὀνομάζομεν ὑγρὸν ἀτμόν. Ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς εἶναι λοιπὸν μῖγμα ὑγροῦ καὶ ἀτμοῦ. Τὸν ἀτμόν, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὸ μῖγμα, ὀνομάζομεν κεκορεσμένον ἀτμόν.

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πειράματος, εἰς ἑκάστην πίεσιν p ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη θερμοκρασία t, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ ἀτμοποίησις τοῦ ὑγροῦ, δηλαδὴ ἡ μετατροπὴ (2). Κατὰ ταῦτα ὁ κεκορεσμένος ἀτμὸς ἔχει εἰς ἑκάστην πίεσιν p ὡρισμένην θερμοκρασίαν t καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἑκάστην θερμοκρασίαν t τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη πίεσις p. Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν εἶναι λοιπὸν τῆς μορφῆς

(4) $$p = f(t).$$

Ἐὰν ἐκ τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ, δηλαδὴ τοῦ μίγματος ὑγροῦ καὶ ἀτμοῦ, ἀποχωρίσωμεν τὸν ἀτμόν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν πίεσιν καὶ τὴν θερμοκρασίαν του, θὰ ὀνομάζωμεν τὸν ἀτμὸν τοῦτον ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμόν. Οὕτω ὁ ἀτμὸς εἰς τὴν κατάστασιν B(p, t), δηλαδὴ εἰς τὸ τέλος τῆς ἀτμοποιήσεως, εἶναι ξηρὸς κεκορεσμένος· διότι εἰς τὴν κατάστασιν ταύτην, ἐπειδὴ ὁλόκληρος ἡ μᾶζα τοῦ ὑγροῦ ἔχει ἀτμοποιηθῆ, ὁ ἀτμὸς δὲν εἶναι εἰς ἐπαφὴν μὲ ὑγρὰν μᾶζαν.

Ἓν ζεῦγος τιμῶν t, p, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (4), ὀνομάζονται κεκορεσμένη θερμοκρασία καὶ κεκορεσμένη πίεσις τοῦ ὑγροῦ. Τὸ ὑγρὸν εἰς τὴν ἀντίστοιχον κατάστασιν A(p, t) ὀνομάζεται κεκορεσμένον ὑγρόν. Τὸ κεκορεσμένον ὑγρὸν εἶναι ἀσταθὴς κατάστασις. Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p ἀπορροφήσῃ τὸ κεκορεσμένον ὑγρὸν ἐλάχιστον ποσὸν θερμότητος, θὰ ἔχωμεν ἔναρξιν ἀτμοποιήσεως, ἤτοι μετατροπὴν τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ εἰς ὑγρὸν ἀτμόν. Ἀντιθέτως, ἐὰν τὸ κεκορεσμένον ὑγρὸν ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p ἀποδώσῃ ἐλάχιστον ποσὸν θερμότητος, θὰ μεταπέσῃ ἐκ τῆς κεκορεσμένης εἰς τὴν συνήθη ὑγρὰν κατάστασιν.

Ἄς ἐξετάσωμεν ἤδη τὴν τρίτην τμηματικὴν μετατροπὴν (3). Κατὰ ταύτην, ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p, προσδίδομεν θερμίδας εἰς τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν B(p, t). Τότε ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀτμοῦ αὐξάνει ἀπὸ t εἰς t′. Τὸν οὕτω λαμβανόμενον ἀτμὸν ὀνομάζομεν ὑπέρθερμον ἀτμόν. Τὴν διαφορὰν

(5) $$t' - t = \tau$$

ὀνομάζομεν βαθμὸν ὑπερθερμάνσεως τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν παραγωγὴν ὑπερθέρμου ἀτμοῦ καὶ ὑπὸ τὰς ἐξῆς συνθήκας :

Θεωροῦμεν μᾶζαν ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ B(p, t) καὶ ἐλαττοῦμεν τὴν πίεσιν ἀπὸ p εἰς p — π, διατηροῦντες σταθερὰν τὴν θερμοκρασίαν t. Τότε θὰ ἔχωμεν ἀτμόν, ὁ ὁποῖος ὑπὸ τὴν πίεσιν p — π θὰ ἔχῃ θερμοκρασίαν t μεγαλυτέραν τῆς θερμοκρασίας t_1, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ ξηρὸς κεκορεσμένος ἀτμὸς εἰς τὴν πίεσιν p — π. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ:

Ὑπέρθερμος ἀτμὸς εἶναι ὁ ἀτμός, ὁ ὁποῖος ὑπό τινα πίεσιν p ἔχει θερμοκρασίαν t' μεγαλυτέραν τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν πίεσιν p θερμοκρασίας t τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ· ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ὑπέρθερμος ἀτμὸς εἶναι ὁ ἀτμός, ὁ ὁποῖος ὑπό τινα θερμοκρασίαν t ἔχει πίεσιν p' μικροτέραν τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν θερμοκρασίαν t πιέσεως p τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

Τὰ πρῶτα ἀξιόλογα πειράματα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς συναρτήσεως (4) καὶ ἐν γένει διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν στοιχείων τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν ἐγένοντο ὑπὸ τοῦ Regnault (1810 - 1878), ὁ ὁποῖος συνέταξε πίνακας λεπτομερεῖς διὰ τοὺς κεκορεσμένους ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος, τοῦ αἰθέρος καὶ τοῦ οἰνοπνεύματος.

Εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα δίδομεν διὰ τοὺς κεκορεσμένους ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος τὰς θερμοκρασίας t, τοὺς εἰδικοὺς ὄγκους s, τὰ εἰδικὰ βάρη δ ὡς καὶ τοὺς εἰδικοὺς ὄγκους σ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς διαφόρους πιέσεις p.

Πίεσις p kg/cm^2. *Ἀπόλυτος*	*Θερμοκρασία* t^0C	*Εἰδικὸς ὄγκος s* m^3/kg	*Εἰδικὸν βάρος δ* kg/m^3	*Εἰδικὸς ὄγκος σ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ* m^3/kg
0,02	17,2	68,30	0,01462	1,0013
0,06	35,8	24,20	0,04132	1,0063
0,10	45,4	14,96	0,06685	1,0100
0,50	80,9	3,303	0,3027	1,0296
1,00	99,1	1,726	0,5793	1,0426
2,00	119,6	0,902	1,108	1,0589
3,00	132,9	0,617	1,621	1,0705
4,00	142,9	0,4708	2,124	1,0803
5,00	151,1	0,3818	2,619	1,0890
6,00	158,1	0,3214	3,111	1,0973
7,00	164,2	0,2778	3,600	1,1049
8,00	169,6	0,2448	4,086	1,1119
9,00	174,5	0,2189	4,569	1,1186
10,00	179,0	0,1980	5,051	1,1246
12,50	188,9	0,1600	6,251	1,1382
15,00	197,4	0,1342	7,451	1,1525
20,00	211,4	0,1015	9,85	1,176
25,00	222,9	0,0815	12,28	1,197
30,00	232,8	0,0679	14,73	1,216
40,00	249,2	0,0506	19,77	1,250

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ξηρὸς κεκορεσμένος ἀτμὸς εἶναι ἀσταθὴς κατάστασις, ἀκριβῶς διὰ τὸν ἴδιον λόγον, διὰ τὸν ὁποῖον, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, εἶναι ἀσταθὴς κατάστασις καὶ τὸ κεκορεσμένον ὑγρόν. Τῷ ὄντι, ἐὰν ὁ ξηρὸς κεκορεσμένος ἀτμὸς ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p ἀπορροφήσῃ ἐλάχιστον ποσὸν θερμότητος, θὰ μετατραπῇ εἰς ὑπέρθερμον ἀτμόν. Ἐὰν δὲ ὁ ξηρὸς κεκορεσμένος ἀτμὸς ἀποδώσῃ ἐλάχιστον ποσὸν θερμότητος, θὰ μετατραπῇ εἰς ὑγρὸν ἀτμόν.

50. Τίτλος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ. Εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ. Ἂς παρακολουθήσωμεν τὴν μετατροπὴν (2, § 49), κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὸ φαινόμενον τῆς ἀτμοποιήσεως τοῦ ὑγροῦ. Ἔστω ὅτι ἔχομεν μᾶζαν P χιλιογράμμων ὕδατος καὶ ἔστω M ἐνδιάμεσος κατάστασις μεταξὺ τῶν καταστάσεων A καὶ B τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ καὶ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Εἰς τὴν κατάστασιν M ἔχομεν ὑγρὸν ἀτμόν, ἤτοι μῖγμα ὑγροῦ καὶ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἔστω ὅτι εἰς τὴν κατάστασιν M ἔχει ἀτμοποιηθῆ κλάσμα x ἐκ τῶν P χιλιογράμμων τοῦ ὕδατος. Τότε τὸ μὲν βάρος τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἐν τῷ μίγματι θὰ εἶναι Px, τὸ δὲ βάρος τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι P(1—x).

Τὸν ἀριθμὸν x ὀνομάζομεν τίτλον τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ.

Προφανῶς ὁ τίτλος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ εἶναι $x'=0$ καὶ ὁ τίτλος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι $x''=1$. Κατὰ τὴν περίοδον λοιπὸν τῆς ἀτμοποιήσεως ὁ τίτλος μεταβάλλεται ἀπὸ μηδὲν ἕως ἕν.

Ἂς ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἰς τὴν κατάστασιν M (p, t, x), ὅπου x εἶναι ὁ τίτλος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ.

Ἔστωσαν σ ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ καὶ s ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἰς τὴν αὐτὴν πίεσιν p καὶ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν t. Ἐπειδὴ ζητοῦμεν τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ, ἀντὶ βάρους P χιλιογράμμων θὰ λάβωμεν μᾶζαν ὕδατος ἑνὸς χιλιογράμμου. Τὸ κλᾶσμα x ἐκ τῆς μάζης τοῦ ἑνὸς χιλιογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει μετατραπῆ εἰς κεκορεσμένον ἀτμόν, θὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον sx καὶ τὸ βάρος 1 — x τοῦ ὑγροῦ θὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον σ(1 — x). Ἑπομένως τὸ ἓν χιλιόγραμμον τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ θὰ καταλαμβάνῃ ὄγκον

(1) $$\upsilon = \sigma(1-x) + sx = \sigma + (s-\sigma)x.$$

Ἡ σχέσις (1) εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ τίτλος εἶναι x. Τὰς τιμὰς τῶν σ καὶ s εἰς τὰς διαφόρους πιέσεις λαμβάνομεν ἐκ πινάκων (πίναξ σελίδος 169). Θέτοντες εἰς τὸν τύπον (1)

(2) $$s - \sigma = u,$$

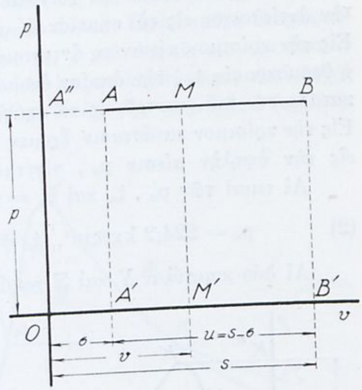
λαμβάνομεν τὸν τύπον

(3) $$\upsilon = \sigma + ux.$$

Ἐὰν ἀντὶ ἑνὸς χιλιογράμμου εἴχομεν P χιλιόγραμμα ὑγροῦ ἀτμοῦ, ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον θὰ καταλάβῃ ὁ ἀτμὸς οὗτος θὰ εἶναι

(4) $$V = P\upsilon = P(\sigma + ux).$$

51. Διάγραμμα τῶν ἀτμῶν εἰς τὸ σύστημα τοῦ Clapeyron. Ἂς παραστήσωμεν γραφικῶς εἰς τὸ σύστημα τοῦ Clapeyron (Oυ, Op) τὸ φαινόμενον τῆς ἀτμοποιήσεως. Ἔστω ὅτι ἡ ἀτμοποίησις ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ γίνεται ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν (OA′′) = p, (σχ. 51) καὶ ἔστω A(σ,p), τὸ παραστατικὸν σημεῖον τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Ἐπειδὴ ἡ ἀτμοποίησις γίνεται ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p, τὰ σημεῖα τῆς ἰσοθλίπτου AB, πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ A μέχρι τοῦ σημείου B(s, p), θὰ παριστοῦν τὰς καταστάσεις τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ. Τὸ σημεῖον B εἶναι τὸ παραστατικὸν σημεῖον τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀτμοποιήσεως κατὰ μῆκος τῆς AB, ἡ θερμοκρασία t διατηρεῖται σταθερά, ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν :



Σχ. 51

Αἱ ἰσόθλιπτοι μετατροπαὶ τῶν ὑγρῶν ἀτμῶν εἶναι καὶ ἰσόθερμοι.

Ἔστω ὅτι εἰς τὴν κατάστασιν M(υ, p) ὁ τίτλος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἶναι x. Ἐκ τοῦ σχήματος καὶ δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 50 ἔχομεν

$$\upsilon = (OM') = (OA') + (A'B')\,x\cdot$$

ἤτοι εἶναι

$$(A'B')\,x = (OM') - (OA') = (A'M').$$

Ὅθεν

(1) $$x = \frac{(A'M')}{(A'B')} = \frac{(AM)}{(AB)}.$$

Δυνάμει τοῦ τύπου τούτου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν τίτλον x, προσδιορίζομεν γραφικῶς τὸ παραστατικὸν σημεῖον M· καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ M, προσδιορίζομεν τὸν ἀντίστοιχον τίτλον x.

Ἐὰν χαράξωμεν τὸ διάγραμμα AB τῆς ἀτμοποιήσεως ὑγροῦ διὰ διαφόρους πιέσεις p, παρατηροῦμεν ὅτι ὅσον αὐξάνει ἡ πίεσις p, τὸ ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $u = s - \sigma$, ἐλαττοῦται. Ὅταν δὲ ἡ πίεσις φθάσῃ ὡρισμένην τιμὴν $p_\varkappa$, τὸ ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$ γίνεται μηδέν, δηλαδὴ εἰς τὴν πίεσιν ταύτην τὰ σημεῖα A, B συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον K.

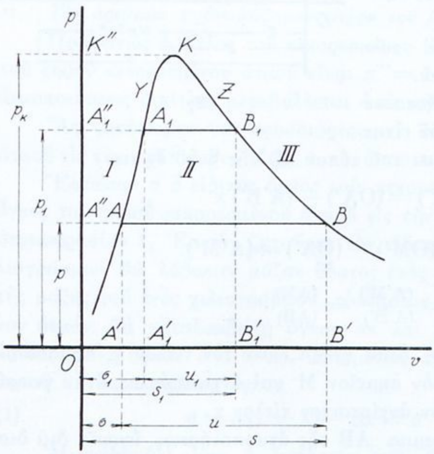
Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων A, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὴν κατάστασιν τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ εἰς τὰς διαφόρους πιέσεις, εἶναι καμπύλη, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ὁρικὴν καμπύλην τοῦ ὑγροῦ ἢ καὶ καμπύλην τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Τὴν καμπύλην ταύτην θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος Y (σχ. 52).

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν παραστατικῶν σημείων B τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἰς τὰς διαφόρους πιέσεις, εἶναι καμπύλη, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ὁρικὴν καμπύλην τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἢ καὶ καμπύλην τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Τὴν καμπύλην ταύτην θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος Ξ. Αἱ δύο καμπύλαι Υ καὶ Ξ συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν $\overrightarrow{AB} = 0$. Τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζομεν κρίσιμον σημεῖον καὶ τὴν ἀντίστοιχον εἰς τὸ σημεῖον Κ πίεσιν $p_\varkappa$ ὀνομάζομεν κρίσιμον πίεσιν. Εἰς τὴν κρίσιμον πίεσιν $p_\varkappa$ ἀντιστοιχεῖ, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (4) τῆς § 49, ἡ θερμοκρασία $t_\varkappa$, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν κρίσιμον θερμοκρασίαν. Τέλος τὴν κατάστασιν τοῦ ρευστοῦ εἰς τὸ σημεῖον Κ ὀνομάζομεν κρίσιμον κατάστασιν. Εἰς τὴν κρίσιμον κατάστασιν ἔχομεν $\sigma = s$, δηλαδὴ ἡ ἀτμοποίησις τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν ὑψηλὴν πίεσιν $p_\varkappa$, γίνεται χωρὶς ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ ὄγκου.

Αἱ τιμαὶ τῶν $p_\varkappa$, $t_\varkappa$ καὶ $\sigma_\varkappa = s_\varkappa$ εἶναι διὰ τοὺς ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος

(2) $$p_\varkappa = 224{,}2 \text{ kg/cm}^2, \quad t_\varkappa = 374^\circ\text{C}, \quad \sigma_\varkappa = s_\varkappa = 0{,}0029 \text{ m}^3.$$

Αἱ δύο καμπύλαι Υ καὶ Ξ χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον Ου, Οp εἰς τρεῖς περιοχὰς I, II, III. Ἡ περιοχὴ I, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς καμπύλης Υ, περιλαμβάνει ὅλα τὰ παραστατικὰ σημεῖα τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως. Τὴν περιοχὴν ταύτην ὀνομάζομεν περιοχὴν τοῦ ὑγροῦ. Ἡ περιοχὴ II περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν καμπύλων Υ καὶ Ξ· ἅπαντα τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς ταύτης εἶναι παραστατικὰ σημεῖα τῶν ὑγρῶν ἀτμῶν εἰς τὰς διαφόρους καταστάσεις p, t καὶ x αὐτῶν. Τὴν περιοχὴν ταύτην ὀνομάζομεν περιοχὴν τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ. Τέλος ἡ περιοχὴ III, ἡ ὁποία εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς καμπύλης Ξ, εἶναι ἡ περιοχὴ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Τὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς ταύτης ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ὑπερθέρμους καταστάσεις τῶν ἀτμῶν. Τὰ σημεῖα B (s, p) τῆς καμπύλης Ξ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος ἐπαληθεύουν μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως τὴν ἐξίσωσιν

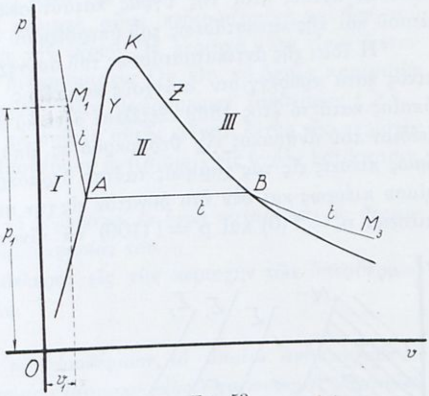


Σχ. 52

(3) $$pv^{1{,}0646} = 1{,}7617.$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος. Ἡ ἐξίσωσις (3) ἐλάχιστα διαφέρει τῆς ἐξισώσεως $pv =$ σταθερόν. Δυνάμεθα λοιπὸν μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη Ξ συμπίπτει μὲ ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν.

52. *Ἰσόθερμοι μετατροπαὶ τῶν ρευστῶν.* Ἂς χαράξωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς ρευστῆς μάζης διὰ τὸ σύνολον τῶν τριῶν καταστάσεων αὐτῆς, ἤτοι τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως, τῆς καταστάσεως τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ καὶ τῆς καταστάσεως τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Πρὸς τοῦτο ἀναχωροῦμεν ἔκ τινος ἀρχικῆς καταστάσεως $M_1 (\upsilon_1, p_1, t)$ τοῦ ὑγροῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ πίεσις ἔχει ἀρκούντως μεγάλην τιμήν. Ἂς παρακολουθήσωμεν κατ᾽ ἀρχὰς τὴν ἰσόθερμον ἀποτόνωσιν τῆς ὑγρᾶς μάζης ἐντὸς τῆς περιοχῆς I (σχ. 53). Κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην τοῦ ὑγροῦ ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου εἶναι σχεδὸν ἀνάλογος πρὸς τὴν μεταβολὴν τῶν πιέσεων οὕτως, ὥστε τὸ διάγραμμα τῆς μετατροπῆς εἶναι μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως εὐθεῖα M_1A. Ἡ εὐθεῖα αὕτη, λόγῳ τῆς μικρᾶς συμπιεστότητος τῶν ὑγρῶν, εἶναι ὀλίγον κεκλιμένη πρὸς τὸν ἄξονα Op. Εἰς τὸ σημεῖον A, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ M_1A συναντᾷ τὴν καμπύλην Y, τὸ ὑγρὸν ἔχει φθάσει εἰς τὴν κεκορεσμένην του κατάστασιν. Ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἄρχεται ἡ ἀτμοποίησις τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 49, γίνεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν p. Ἡ συνέχεια λοιπὸν τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς πέραν τοῦ σημείου A καὶ ἐντὸς τῆς περιοχῆς II θὰ παρίσταται ὑπὸ τῆς ἰσοθλίπτου AB. Εἰς τὸ σημεῖον B ἔχομεν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμόν. Καὶ ἐὰν θέλωμεν νὰ συνεχίσωμεν τὸ διάγραμμα τῆς ἰσοθέρμου πέραν τοῦ B, ἤτοι εἰς τὴν περιοχὴν III, πρέπει, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 49 διὰ τὸν ὑπέρθερμον ἀτμόν, νὰ ἐλαττοῦμεν συνεχῶς τὴν πίεσιν p ὑπὸ τὴν σταθερὰν θερμοκρασίαν t. Οὕτω ἡ συνέχεια τῆς ἰσοθέρμου εἰς τὴν περιοχὴν III παρίσταται ὑπὸ καμπύλης BM_3.

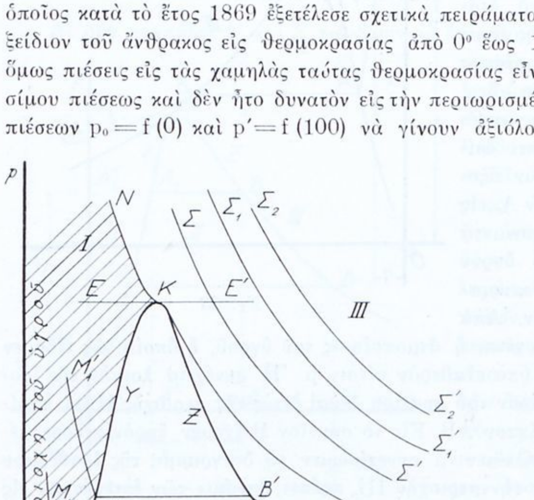


Σχ. 53

Ἐάν, ὡς κάμνομεν συνήθως εἰς τὰς βιομηχανικὰς ἐφαρμογάς, ἐξομοιώσωμεν τὸν ὑπέρθερμον ἀτμὸν πρὸς τέλειον ἀέριον, ἡ ἐξίσωσις τῆς BM_3 θὰ εἶναι $p\upsilon = RT$. Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι ἀληθὲς παρὰ μόνον κατὰ προσέγγισιν. Διὰ νὰ ἦτο ὁ ὑπέρθερμος ἀτμὸς τέλειον ἀέριον, ἔπρεπε, δυνάμει τῆς προτάσεως β τῆς § 13 μεταξὺ τῶν ἄλλων, ὁ συντελεστὴς c' τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ, ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, νὰ ἦτο ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πιέσεως. Ἀντιθέτως ὅμως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τοῦ Regnault καὶ τοῦ Zeuner, ὅτι τὸ c' εἶναι σταθερὸν διὰ τοὺς ὑπερθέρμους ἀτμούς, διεπιστώθη βραδύτερον, ὅτι τὸ c' εἶναι συνάρτησις τῆς πιέσεως καὶ τῆς θερμοκρασίας τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Μόνον λοιπὸν διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν εἶναι δυνατὸν μετὰ μεγάλης ἀκριβείας νὰ ἐξομοιώσωμεν τὸν ὑπέρθερμον ἀτμὸν πρὸς τέλειον ἀέριον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ διάγραμμα τῆς ἰσοθέρμου μετατροπῆς ἔκ τινος καταστάσεως M_1 τῆς περιοχῆς I μέχρι καταστάσεώς τινος M_3 τῆς περιοχῆς III εἶναι ἡ ἀσυνεχὴς γραμμὴ M_1ABM_3. Ἐξ αἰτίας τῆς ἀσυνεχείας τοῦ διαγράμματος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφράσωμεν δι᾽ ἑνιαίας ἐξισώσεως τὴν ἰσόθερμον μετατροπὴν ρευστοῦ διὰ τὸ σύνολον τῶν τριῶν καταστάσεων αὐτοῦ, ἤτοι τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως, τῆς καταστάσεως τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ καὶ τῆς καταστάσεως τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.

Ἡ ἰδέα τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ ἀσυνεχοῦς διαγράμματος M_1ABM_3 διά τινος κατὰ προσέγγισιν συνεχοῦς καμπύλης ὀφείλεται εἰς τὸν Andrews, ὁ ὁποῖος κατὰ τὸ ἔτος 1869 ἐξετέλεσε σχετικὰ πειράματα, χρησιμοποιήσας διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος εἰς θερμοκρασίας ἀπὸ 0° ἕως $100^\circ C$. Αἱ ἀντίστοιχοι ὅμως πιέσεις εἰς τὰς χαμηλὰς ταύτας θερμοκρασίας εἶναι πολὺ κάτω τῆς κρισίμου πιέσεως καὶ δὲν ἦτο δυνατὸν εἰς τὴν περιωρισμένην ζώνην μεταξὺ τῶν πιέσεων $p_0 = f(0)$ καὶ $p' = f(100)$ νὰ γίνουν ἀξιόλογοι παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ σχήματος τῶν ἰσοθέρμων καὶ ἰδίως ἐπὶ της μεταβολῆς τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{AB}$. Ἔπρεπε νὰ τελειοποιηθοῦν τὰ πειραματικὰ μέσα, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπέκτασις τῶν καμπύλων Υ καὶ Ξ μέχρι τοῦ κρισίμου σημείου καὶ νὰ διαπιστωθῇ οὕτω τὸ οὐσιῶδες ἐξαγόμενον, συμφώνως πρὸς τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν § 51, τὸ ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐλαττοῦται ἐφ᾽ ὅσον ἡ θερμοκρασία αὐξάνει˙ τὸ ἄνυσμα τοῦτο γίνεται μηδέν, ὅταν ἡ θερμοκρασία φθάσῃ τὴν τιμὴν $t_\varkappa$ τῆς κρισίμου θερμοκρασίας.



Σχ. 54

Ὅσον λοιπὸν ἀνερχόμεθα τὸ πεδίον τῶν ἰσοθέρμων (§ 11), ὅσον δηλαδὴ μεταβαίνομεν ἐκ τῶν κατωτέρων ἰσοθέρμων M_1ABM_3, πρὸς τὰς ἀνωτέρας $M_1'A'B'M_3'$, τόσον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB, A'B',..., εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ὀφείλεται ἡ ἀσυνέχεια τῆς ἰσοθέρμου, ἐλαττοῦται (σχ. 54). Τὸ τμῆμα τοῦτο εἰς τὸ κρίσιμον σημεῖον γίνεται μηδὲν καὶ ἡ ἰσόθερμος NKN' ($t=t_κ$) παρουσιάζει εἰς τὸ σημεῖον K σημεῖον καμπῆς· ἡ ἐφαπτομένη EE' τῆς ἰσοθέρμου ταύτης εἰς τὸ σημεῖον καμπῆς K εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ου.

Τὸ τμῆμα NK τῆς ἰσοθέρμου NKN' ($t=t_κ$), τὸ ὁποῖον κεῖται ὑπεράνω τῆς ἐφαπτομένης EE', ὁρίζει μετὰ τῆς καμπύλης Y τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ περιοχὴν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ περιοχὴ αὕτη, περιοριζομένη καὶ ὑπὸ τοῦ ἄξονος Op, ἀποτελεῖ τὴν περιοχὴν τοῦ ὑγροῦ. Ἡ περιοχὴ αὕτη εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ διαγράμματος Ου, Op, τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὰς ὑγράς καταστάσεις τοῦ ρευστοῦ. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἰσόθερμον $t > t_κ$, ὡς εἶναι ἡ ΣΣ' (σχ. 54), ἅπαντα τὰ σημεῖα αὐτῆς κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιοχῆς pOAKN· ἤτοι οὐδὲν σημεῖον τῆς ἰσοθέρμου ἀντιστοιχεῖ εἰς ὑγρὰν κατάστασιν.

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

α. Ρευστόν τι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρίσκεται ἐν ὑγρᾷ καταστάσει εἰς θερμοκρασίαν ἀνωτέραν τῆς κρισίμου θερμοκρασίας του.

Ἡ καμπύλη ΣΣ' κεῖται ὁλόκληρος εἰς τὴν περιοχὴν τῶν ὑπερθέρμων ἀτμῶν καὶ εἶναι συνεχὴς καμπύλη.

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

β. Αἱ καμπύλαι τοῦ πεδίου τῶν ἰσοθέρμων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς θερμοκρασίας μεγαλυτέρας τῆς κρισίμου θερμοκρασίας, εἶναι συνεχεῖς καμπύλαι.

Ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἀπὸ τὸ σημεῖον K, τόσον αἱ ἰσόθερμοι ΣΣ', $Σ_1Σ_1'$, $Σ_2Σ_2'$,... τείνουν νὰ συμπέσουν πρὸς τόξα ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν.

Ἐντεῦθεν ἡ πρότασις:

γ. Ὅσον ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κρισίμου θερμοκρασίας, τόσον ἡ κατάστασις τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ πλησιάζει πρὸς τὴν κατάστασιν τῶν τελείων ἀερίων.

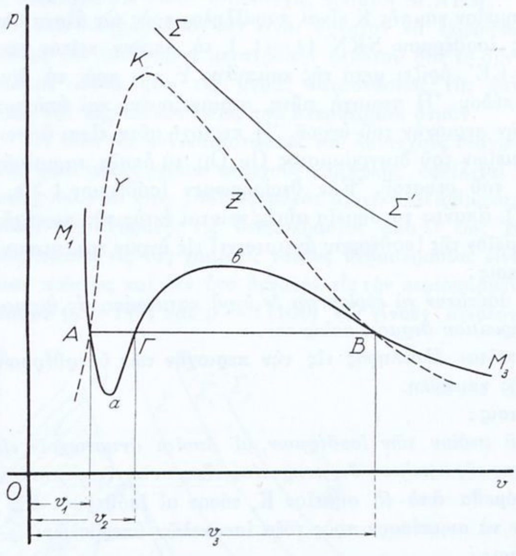
Μετὰ τὸν Andwers ὁ ἄγγλος φυσικὸς Julius Thomsen ἠσχολήθη μὲ τὸ θέμα τῆς ἀσυνεχείας τῶν ἰσοθέρμων M_1ABM_3 καὶ ἐπρότεινεν ὅπως, ἀντὶ τοῦ ἰσοθλίπτου τμήματος AB, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίοδον τῆς ἀτμοποιήσεως, λάβωμεν ὑποθετικὸν διάγραμμα AαΓβB (σχ. 55), τὸ ὁποῖον μετὰ τῶν M_1A, καὶ BM_3 ἀποτελεῖ συνεχῆ καμπύλην $M_1AαΓβBM_3$. Στηριζόμενος εἰς τὴν ὑπόδειξιν ταύτην τοῦ Thomsen ὁ Van der Waals ἐπρότεινεν ὡς χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τῶν ρευστῶν τὴν ἐξίσωσιν

$$(1) \qquad p = \frac{RT}{υ-α} - \frac{K}{υ^2},$$

ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται καὶ διὰ τὰς τρεῖς καταστάσεις τοῦ ρευστοῦ, ἤτοι τὴν ὑγρὰν κατάστασιν, τὸν ὑγρὸν ἀτμὸν καὶ τὸν ὑπέρθερμον ἀτμόν.

Τὰ R, K, α τῆς ἐξισώσεως τοῦ Van der Waals εἶναι σταθεραὶ ἐξαρτώμεναι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ρευστοῦ. Ἐκ τούτων τὴν σταθερὰν α ὀνομάζομεν καὶ ὄγκον τοῦ Van der Waals.

Ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ $T =$ σταθερὸν εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀντιστοίχου εἰς τὴν θερμοκρασίαν T ἰσοθέρμου. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς υ καὶ ἑπομένως εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ p ἀντιστοιχοῦν τρεῖς τιμαὶ τοῦ υ. Ὅταν εἶναι $T > T_\varkappa$, ὅταν δηλαδὴ ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τῆς ἰσοθέρμου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κρισίμου ἀπολύτου θερμοκρασίας, ἐκ τῶν τριῶν τιμῶν τοῦ υ αἱ δύο εἶναι φανταστικαὶ καὶ ἡ μία εἶναι πραγματική. Τότε εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ p ἀντιστοιχεῖ, δυνάμει τῆς (1), μία πραγματικὴ τιμὴ τοῦ υ καὶ ἔχομεν τὴν ἰσόθερμον τῆς μορφῆς ΣΣ′ (σχ. 54). Ὅταν ὅμως εἶναι $T < T_\varkappa$, αἱ τρεῖς ῥίζαι υ_1, υ_2, υ_3 τῆς ἐξισώσεως (1), δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ p, εἶναι πραγματικαί. Τότε τὸ διάγραμμα τῆς ἰσοθέρμου, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν τὴν (1), εἶναι τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης $M_1 A \alpha \Gamma \beta B M_3$ τοῦ σχήματος (55). Αἱ δὲ τρεῖς ῥίζαι υ_1, υ_2, υ_3 τῆς ἐξισώσεως (1), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δεδομένην τιμὴν τοῦ p, ὁρίζουν τὰ σημεῖα A, Γ, B, καθ᾽ ἃ ἡ ἰσόθλιπτος (p) τέμνει τὴν καμπύλην $M_1 \alpha \beta M_3$.



Σχ. 55

Ὁ Clausius ἐτροποποίησε τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Van der Waals καὶ ἐπρότεινεν ὡς χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν τῶν ῥευστῶν τὴν ἐξίσωσιν

$$p = \frac{RT}{\upsilon - \alpha} - \frac{K}{(\upsilon + \beta)^2}. \tag{2}$$

Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὸ α εἶναι, ὡς καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1), ὁ ὄγκος τοῦ Van der Waals, τὰ R καὶ β εἶναι σταθεραί, τὸ δὲ K δύναται νὰ εἶναι σταθερὰ ἢ καὶ συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΑΤΟΝ

ΠΟΣΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΛΛΑΓΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

53. Θερμότης τοῦ ὑγροῦ. Θερμότης ἀτμοποιήσεως. Θερμότης ὑπερθερμάνσεως. Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ ποσοῦ τῆς θερμότητος, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἀτμοποίησιν ὑγροῦ εἶναι θέμα ὑψίστης σημασίας, οὐχὶ μόνον ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ πρακτικῆς, ἰδιαίτατα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος εἰς τὰς ἀτμομηχανάς. Τῷ ὄντι, δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 30, ὁ ἀτμὸς εἶναι ἁπλοῦς φορεὺς τῆς θερμότητος· τὸ χαρακτηριστικώτερον λοιπὸν στοιχεῖον τοῦ ἀτμοῦ εἶναι τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος, τὸ ὁποῖον μεταφέρει, καθ᾽ ὅσον ἐκ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἐξαρτᾶται τὸ ἔργον τῶν πιέσεων τοῦ ἀτμοῦ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τῆς ἀτμομηχανῆς, δηλαδὴ τὸ κινητήριον ἔργον τῆς ἀτμομηχανῆς.

Ἡ παρατήρησις αὕτη διὰ τὸν ρόλον τοῦ ἀτμοῦ ὡς φορέως τῆς θερμότητος δικαιολογεῖ καὶ τὴν προτίμησίν μας εἰς τοὺς ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος διὰ τὴν λειτουργίαν τῶν ἀτμομηχανῶν. Ἠδύνατό τις, ἐπὶ παραδείγματι, νὰ φαντασθῇ ὅτι θὰ ἦτο προτιμότερον ἀντὶ τῶν ἀτμῶν τοῦ ὕδατος νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἀτμοὺς αἰθέρος, θεωρῶν ὡς πλεονέκτημα τὸ ὅτι ὁ αἰθὴρ δύναται, μὲ ἀπορρόφησιν ἐλαχίστου ποσοῦ θερμότητος νὰ φθάσῃ εἰς λίαν ὑψηλὰς θερμοκρασίας καὶ πιέσεις. Ἀλλὰ τοῦτο ἀκριβῶς εἶναι τὸ μειονέκτημα τοῦ αἰθέρος διὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτοῦ ὡς φορέως τῆς θερμότητος διὰ παραγωγὴν μηχανικοῦ ἔργου. Ἐκτὸς τῶν κινδύνων ἐκ τῶν ὑψηλῶν πιέσεων ὁ αἰθὴρ εἶναι φορεὺς ἐλαχίστου ποσοῦ θερμότητος· ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου τὸ μεγαλύτερον μέρος, λόγῳ ψύξεων, θὰ ἀποδοθῇ εὐκόλως εἰς τὸ περιβάλλον, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἔργον, θὰ εἶναι ἐλάχιστον.

Ἄς λάβωμεν μᾶζαν ὑγροῦ ἑνὸς χιλιογράμμου εἰς τὴν πίεσιν p καὶ τὴν θερμοκρασίαν $0^{\circ}C$, καὶ ἂς θερμάνωμεν τὴν μᾶζαν ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p μέχρι τῆς θερμοκρασίας t, ἡ ὁποία, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως

$$p = f(t), \tag{1}$$

ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑγρὰν κεκορεσμένην κατάστασιν τῆς μάζης. Αἱ θερμίδες q, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Regnault

$$q = at + bt^2 + ct^3. \tag{2}$$

Ἄς παρακολουθήσωμεν ἤδη τὴν περαιτέρω μετατροπὴν τῆς μάζης τοῦ ἑνὸς χιλιογράμμου ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p ἐκ τῆς ὑγρᾶς κεκορεσμένης καταστάσεως μέχρι τῆς καταστάσεως τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἡ μετατροπὴ αὕτη γίνεται, ὡς εἴδομεν, καὶ ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν t. Αἱ θερμίδες r, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην, ἤτοι διὰ τὴν ὁλικὴν ἀτμοποίησιν ἑνὸς χιλιογράμμου κεκορεσμένου ὑγροῦ, δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Regnault

$$r = A + Bt + Ct^2 + Dt^3. \tag{3}$$

Εἰς τοὺς κατωτέρω πίνακας δίδομεν τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν a, b, c τῆς (2) καὶ A, B, C, D τῆς (3) διά τινα ρευστά:

	a	b	c
Ὕδωρ	1,00000	0,00002	0,0000003
Αἰθὴρ	0,52901	0,0002959	—
Χλωροφόρμιον	0,23235	0,0000507	—
Χλωριοῦχος ἄνθραξ	0,19798	0,0000906	—
Θειοῦχος ἄνθραξ	0,23523	0,0000815	—

	A	B	C	D
Ὕδωρ	606,5	— 0,695	—0,00002	—0,0000003
Αἰθὴρ	94	—0,07901	—0,0008514	—
Χλωροφόρμιον	67	—0,09485	—0,0000507	—
Χλωριοῦχος ἄνθραξ . .	52	—0,05173	—0,0002626	—
Θειοῦχος ἄνθραξ . . .	90	—0,08922	—0,0094938	—

Ἄς παραστήσωμεν τέλος διὰ Q΄ τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ μετατρέψωμεν, ὑπὸ τὴν πίεσιν p, τὴν μᾶζαν τοῦ ἑνὸς χιλιογράμμου ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ θερμοκρασίας t εἰς ὑπέρθερμον ἀτμὸν θερμοκρασίας t΄. Ἐὰν c΄(t΄) εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, θὰ ἔχωμεν

$$Q' = \int_t^{t'} dQ' = \int_t^{t'} c'(t')dt. \tag{4}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν θερμότητος q, r, Q΄ τὸ q ὀνομάζομεν θερμότητα τοῦ ὑγροῦ. Τὸ r ὀνομάζομεν θερμότητα ἀτμοποιήσεως· καὶ τὸ Q΄ ὀνομάζομεν θερμότητα ὑπερθερμάνσεως.

Τὸ ἄθροισμα:

$$\lambda = q + r \tag{5}$$

ὀνομάζομεν ὁλικὴν θερμότητα τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

Τὸ δὲ ἄθροισμα:

$$Q = q + r + Q' = \lambda + Q' \tag{6}$$

ὀνομάζομεν ὁλικὴν θερμότητα τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.

Εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνομεν διὰ τὸ ὕδωρ μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως

(7) $$q = t.$$

Τῷ ὄντι, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ πρώτου πίνακος τῆς σελίδος (178), τὰ b, c διὰ τὸ ὕδωρ ἔχουν ἐλαχίστην τιμήν, ἐνῷ εἶναι $\alpha = 1$. Ὁ τύπος λοιπὸν (2), ὅταν παραλείψωμεν τοὺς ὅρους bt^2 καὶ ct^3, λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ τύπου (7). Ὁμοίως, ἐὰν παραλείψωμεν διὰ τοὺς ὑδρατμοὺς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους Ct^2 καὶ Dt^3 τῆς ἐξισώσεως (4) καὶ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰς τιμὰς A, B ἐκ τοῦ δευτέρου πίνακος τῆς σελίδος (178), λαμβάνομεν

(8) $$r = 606{,}5 - 0{,}695\, t.$$

Τὸν τύπον αὐτὸν χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς θερμότητος ἀτμοποιήσεως τοῦ ὕδατος.

Μεταγενέστεροι τοῦ Regnault πειραματισταὶ ἔδωσαν ἀκριβεστέρας τιμὰς διὰ τοὺς συντελεστὰς τῶν πινάκων τῆς σελίδος (178) καὶ ἤχθησαν εἰς ἐκφράσεις τῶν q καὶ r διαφόρους τῶν (2) καὶ (3). Οὕτω ἀντὶ τοῦ τύπου (7) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς θερμότητος τοῦ ὕδατος, τὸν τύπον

(9) $$q = 1{,}0024978\,.\,t - 1{,}08717\,.\,10^{-4}.\,t^2 + 0{,}93739\,.\,10^{-6}.\,t^3$$

καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ὁλικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἀντὶ τοῦ τύπου (5) τοὺς τύπους

(10) $$\begin{cases} \lambda = 597 + 0{,}431\, t, & \text{διὰ } t = 0 \text{ ἕως } 100^\circ C, \\ \lambda = 666{,}8 - \dfrac{(230{,}9 - t)^2}{634} & \text{» } t = 100^\circ \text{ ἕως } 230^\circ{,}9\, C. \end{cases}$$

Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὰ q, λ εἰς διαφόρους θερμοκρασίας διὰ τῶν τύπων τοῦ Regnault καὶ τῶν τύπων (9) καὶ (10), θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν ἐξαγομένων τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι ἐλάχισται. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐξακολουθήσωμεν, τουλάχιστον διὰ τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς, νὰ μεταχειριζώμεθα τοὺς τύπους τοῦ Regnault.

Εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνομεν ὡς μέσην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ τὴν τιμὴν $c' = 0{,}5$. Τοῦτο, ὡς ἐξεθέσαμεν εἰς τὴν § 52, δὲν εἶναι ἀληθές, παρὰ μόνον κατὰ προσέγγισιν, διότι ὁ ὑπέρθερμος ἀτμὸς δὲν εἶναι τέλειον ἀέριον καὶ ἑπομένως τὸ c′ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι σταθερόν. Ἡ ὡς ἄνω ὅμως μέση τιμὴ $c' = 0{,}5$ τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ ἀποτελεῖ ἱκανὴν προσέγγισιν διὰ τὰς ἐφαρμογάς. Τοιουτοτρόπως ἀντὶ τοῦ τύπου (4) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θερμότητα ὑπερθερμάνσεως Q′ τῶν ὑπερθέρμων ὑδρατμῶν διὰ τοῦ τύπου

(11) $$Q' = c' \int_t^{t'} dt = c'(t' - t) = 0{,}5\,(t' - t).$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παραδοχῶν ἡ ὁλικὴ θερμότης τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι, δυνάμει τῶν τύπων (5), (7) καὶ (8),

(12) $$\lambda = q + r = t + 606{,}5 - 0{,}695\, t,$$

ἤ

(13) $$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t.$$

Ἡ δὲ ὁλικὴ θερμότης τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ θὰ εἶναι, δυνάμει τῶν τύπων (6), (13) καὶ (11),

(14) $$Q = \lambda + Q' = t + 606{,}5 - 0{,}695\, t + 0{,}5\,(t' - t),$$

ἤ

(15) $$Q = 606{,}5 + 0{,}305\, t + 0{,}5\,(t' - t).$$

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι αἱ θερμίδες, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ θερμοκρασίας $0^\circ C$ καὶ πιέσεως p εἰς ὑγρὸν ἀτμὸν τῆς αὐτῆς πιέσεως p καὶ τίτλου x, θὰ εἶναι

(16) $$Q = q + rx.$$

Ὅταν $x = 0$, ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς μεταπίπτει εἰς τὴν κεκορεσμένην ὑγρὰν κατάστασιν· τότε ὁ τύπος (16) γίνεται $Q = q$. Ὅταν δὲ εἶναι $x = 1$, ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς γίνεται ξηρὸς κεκορεσμένος. Τότε ὁ τύπος (16) γίνεται

$$Q = q + r = \lambda.$$

54. ***Στοιχειώδης μετατροπὴ ὑγροῦ ἀτμοῦ.*** Ἡ κατάστασις ἰσορροπίας ὑγροῦ ἀτμοῦ ὁρίζεται τελείως, ὅταν δίδεται ἡ θερμοκρασία t καὶ ὁ τίτλος x (§ 50). Τῷ ὄντι, ὅταν δίδεται τὸ t, προσδιορίζομεν τὴν πίεσιν p ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως

(1) $$p = f(t).$$

Κατόπιν ἐκ τῶν σχετικῶν πινάκων λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν σ, $u = s - \sigma$ καὶ περαιτέρω ἐκ τοῦ τύπου (3) τῆς § 50, ἤτοι τοῦ τύπου

(2) $$\upsilon = \sigma + ux,$$

προσδιορίζομεν τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ ἀτμοῦ ἐκ τῆς καταστάσεως $M(t, x)$ εἰς τὴν κατάστασιν $M'(t + dt, x + dx)$ καὶ ἂς προσδιορίσωμεν τὴν στοιχειώδη θερμότητα dQ, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς ταύτης. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

(3) $$dQ = d_1Q + d_2Q + d_3Q,$$

ὅπου d_1Q εἶναι τὸ μέρος τῆς θερμότητος dQ, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ἀπὸ τὸ ὑγρὸν τοῦ μίγματος διὰ τὴν μετατροπὴν αὐτοῦ ἐκ τῆς καταστάσεως (t, p) εἰς τὴν κατάστασιν $(t + dt, p + dp)$· ἐπειδὴ ἐλάβομεν 1 χιλιόγραμμον ὑγροῦ ἀτμοῦ τίτλου x, τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι $(1 - x)$. Τὸ d_2Q εἶναι τὸ μέρος τοῦ dQ, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται ἀπὸ τὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν τοῦ μίγματος διὰ τὴν μετατροπὴν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς καταστάσεως (t, p) εἰς τὴν κατάστασιν $(t + dt, p + dp)$. Τὸ βάρος τοῦ ἀτμοῦ τούτου εἶναι x.

Τέλος τὸ d_3Q εἶναι τὸ μέρος τῆς θερμότητος dQ, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται διὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ ἀπὸ τοῦ τίτλου x εἰς τὸν τίτλον $x+dx$.

Ἐκ τοῦ τύπου (16) τῆς § 53 λαμβάνομεν, ἐὰν ἀντὶ τοῦ x θέσωμεν $x+dx$,

$$Q + d_3Q = q + r(x + dx) = q + rx + rdx = Q + rdx$$

ὅθεν εἶναι

(4) $$d_3Q = rdx.$$

Ἡ στοιχειώδης θερμότης, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ ἀπὸ τῆς καταστάσεως (t, p) εἰς τὴν κατάστασιν $(t+dt,\ p+dp)$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (19) τῆς § 5. Κατὰ ταῦτα τὸ d_1Q, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς $(1-x)$ kg, θὰ εἶναι

(5) $$d_1Q = (1-x)\left[c_1'dt - (c_1' - c_1)\frac{\beta}{\alpha}dp\right],$$

ὅπου c_1', c_1 εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑγροῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν καὶ σταθερὸν ὄγκον.

Ἐφαρμόζοντες ἐπίσης τὸν τύπον (19) τῆς § 5 διὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ ἀτμοῦ βάρους x ἀπὸ τῆς καταστάσεως (t, p) εἰς τὴν $(t+dt,\ p+dp)$ λαμβάνομεν

(6) $$d_2Q = x\left[c_2'dt - (c_2' - c_2)\frac{\beta}{\alpha}dp\right],$$

ὅπου c_2', c_2 εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν καὶ σταθερὸν ὄγκον.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τοὺς τύπους (5) καὶ (6)

(7) $$-(c_1' - c_1)\frac{\beta}{\alpha} = L_1,$$

(8) $$-(c_2' - c_2)\frac{\beta}{\alpha} = L_2,$$

λαμβάνομεν

(9) $$d_1Q = (1-x)(c_1'dt + L_1dp)$$

(10) $$d_2Q = x(c_2'dt + L_2dp).$$

Οὕτω ἡ σχέσις (3) γράφεται, δυνάμει τῶν (9), (10) καὶ (4),

$$dQ = (1-x)(c_1'dt + L_1dp) + x(c_2'dt + L_2dp) + rdx,$$

ἢ καὶ

(11) $$dQ = (1-x)\left(c_1' + L_1\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(c_2' + L_2\frac{dp}{dt}\right)dt + rdx.$$

Θέτοντες τέλος

(12) $$c_1' + L_1\frac{dp}{dt} = m$$

(13) $$c_2' + L_2\frac{dp}{dt} = m_1$$

λαμβάνομεν

(14) $$dQ = \left[(1-x)m + xm_1\right]dt + rdx.$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους θερμότητος dQ, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ ἀπὸ τῆς καταστάσεως (t, x) εἰς τὴν κατάστασιν $(t + dt, x + dx)$.

Διὰ νὰ ἴδωμεν τὴν σημασίαν τοῦ συντελεστοῦ m, ἂς φαντασθῶμεν τὴν ὁρικὴν περίπτωσιν, ὅπου εἶναι $x = 0$, δηλαδὴ τὴν περίπτωσιν τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Τότε ἡ μετατροπὴ γίνεται κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης Υ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Ὁ τύπος (14), διὰ $x = 0$ γράφεται

$$dQ = dq = m dt,$$

ὅπου dq εἶναι ἡ στοιχειώδης θερμότης τοῦ ὑγροῦ (§ 53).

Ἔχομεν λοιπὸν

$$m = \left[\frac{dQ}{dt}\right]_{x=0} = \frac{dq}{dt}. \tag{15}$$

Ἡ ἔκφρασις (15) τοῦ m γράφεται, δυνάμει τοῦ τύπου (2) τῆς § 53,

$$m = \frac{dq}{dt} = a + 2bt + 3ct^2. \tag{16}$$

Ὁ συντελεστὴς λοιπὸν m τῆς ἐξισώσεως (14) εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Τὸ m θὰ ὀνομάζωμεν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν θέλωμεν, κινούμενοι ἐπὶ τῆς καμπύλης Υ (σχ. 54) νὰ μεταβῶμεν ἔκ τινος σημείου Α εἰς τὸ σημεῖον Α′, ἔχομεν ἀνάγκην θερμίδων

$$Q = \int_{AA'} m dt. \tag{17}$$

Διὰ νὰ ἴδωμεν καὶ τὴν σημασίαν τοῦ συντελεστοῦ m_1, ἂς φαντασθῶμεν τὴν ὁρικὴν περίπτωσιν, ὅπου εἶναι $x = 1$. Τότε ἡ μετατροπὴ γίνεται κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης Ξ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ· ὁ τύπος (14) γράφεται διὰ $x = 1$

$$dQ = m_1 dt\cdot$$

ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$m_1 = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{x=1}. \tag{18}$$

Κατὰ ταῦτα ὁ συντελεστὴς m_1 τῆς ἐξισώσεως (14) εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης Ξ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Τὸ m_1 θὰ ὀνομάζωμεν συντελεστὴν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν, κινούμενοι ἐπὶ τῆς καμπύλης Ξ (σχ. 54), νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ σημείου Β εἰς τὸ Β′, χρειαζόμεθα ποσὸν θερμότητος

$$Q = \int_{BB'} m_1 dt. \tag{19}$$

Ἐκ τῶν συντελεστῶν m, m_1 τὸν μὲν συντελεστὴν m τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ προσδιορίζομεν ἀπ' εὐθείας διὰ τοῦ πειράματος· τὸν συντελεστὴν ὅμως m_1 τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ δὲν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἀπ' εὐθείας, ἀλλὰ προσδιορίζομεν τοῦτον ἐμμέσως διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς διαφορᾶς $m_1 - m$. Ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον, τὴν διαφορὰν $m_1 - m$, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν θεωρητικῶς.

55. *Ὑπολογισμὸς τῶν διαφορῶν $m_1 - m$ καὶ $s - \sigma = u$.* Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς διαφορᾶς $m_1 - m$ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καὶ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, ὡς καὶ τῆς διαφορᾶς $s - \sigma = u$ τῶν εἰδικῶν ὄγκων τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καὶ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ λύσωμεν τὰς ἀσκήσεις τῶν σελίδων (162) καὶ (164).

Αἱ ἐκφράσεις τῆς στοιχειώδους ἐσωτερικῆς θερμότητος καὶ τῆς στοιχειώδους τροπῆς τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ, δυνάμει τῶν τύπων (6) τῆς § 28, (1) τῆς § 35, καὶ (14) τῆς § 54 εἶναι

(1) $$dU = dQ - Apdv = \left[(1-x)\,m + xm_1\right] dt + r dx - Apdv.$$

(2) $$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{(1-x)m + xm_1}{T}\,dt + \frac{r}{T}\,dx.$$

Ἐκ τοῦ τύπου (3) τῆς § 50 λαμβάνομεν, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθέρμου ($dt = 0$), ἔχομεν $\sigma =$ σταθερὸν καὶ $u =$ σταθερόν,

$$dv = u dx\cdot$$

ὅθεν ὁ τύπος (1) γράφεται

(3) $$dU = \left[(1-x)m + xm_1\right] dt + (r - Apu)dx.$$

Ἐπειδὴ τὸ dU εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x)m + xm_1\right] = \frac{\partial}{\partial T}(r - Apu),$$

ἢ

(4) $$-m + m_1 = \frac{\partial}{\partial T}(r - Apu) = \frac{dr}{dT} - Au\frac{dp}{dT}.$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ dS εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(1-x)m + xm_1}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right),$$

ἢ

(5) $$\frac{-m + m_1}{T} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right) = \frac{T\frac{dr}{dT} - r}{T^2} = \frac{1}{T}\frac{dr}{dT} - \frac{r}{T^2},$$

ἢ τέλος

(6) $$-m + m_1 = \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}.$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τύπων (4) καὶ (6) λαμβάνομεν

(7) $$r = ATu\frac{dp}{dT}.$$

Ὁ τύπος οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν Clapeyron. Εἶναι εὔκολον νὰ διακρίνωμεν ὅτι ὁ τύπος (7) εἶναι ὁ ἴδιος τύπος (10) τῆς § 36· τῷ ὄντι, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς AB (σχ. 52), ὅπου εἶναι $t =$ σταθερόν, τὸ $\frac{dp}{dT}$ λαμβάνει, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (4, § 49), τὴν σταθερὰν τιμὴν $f'(t)$ καὶ ἐπειδὴ αἱ ἀπορροφούμεναι θερμίδες διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ μήκους AB εἶναι r, ὁ τύπος (10, § 36) γράφεται

$$(8) \qquad \frac{r}{T} = A\frac{dp}{dT}\int_{\sigma}^{s} dv = A\frac{dp}{dT}(s-\sigma) = A\frac{dp}{dT}u.$$

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους (7), (8) ἀντὶ τοῦ συμβόλου τῆς μερικῆς παραγώγου $\frac{\partial p}{\partial T}$ τοῦ τύπου (10, § 36) χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\frac{dp}{dT}$. Τοῦτο συμβαίνει, διότι εἰς τοὺς ἀτμοὺς τὸ p, ἐξ αἰτίας τῆς ἐξισώσεως (4) τῆς § 49 εἶναι συνάρτησις μόνον τοῦ t. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ σύμβολον $\frac{dr}{dT}$ τοῦ τύπου (6).

Ἡ (8) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(9) \qquad s - \sigma = u = \frac{r}{AT\frac{dp}{dT}}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν $s-\sigma$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ εἰδικὸς ὄγκος σ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ προσδιορίζεται ἐκ τοῦ πειράματος, ὑπολογίζομεν περαιτέρω τὸν εἰδικὸν ὄγκον τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἐκ τῆς σχέσεως

$$(10) \qquad s = \sigma + \frac{r}{AT\frac{dp}{dT}}.$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τύπος (6) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(11) \qquad m_1 - m = T\frac{d}{dT}\left(\frac{r}{T}\right).$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου ὑπολογίζομεν τὴν διαφορὰν $m_1 - m$. Καὶ ἐπειδή, ὡς ἀνεφέραμεν καὶ ἀνωτέρω, τὸν συντελεστὴν m τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ προσδιορίζομεν ἐκ τοῦ πειράματος, ὑπολογίζομεν περαιτέρω τὸν συντελεστὴν m_1 τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ἐκ τῆς σχέσεως

$$(12) \qquad m_1 = m + T\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{T}\right).$$

Ὑπολογίζοντες τὸ m_1 ἐκ τοῦ τύπου (12) διὰ διάφορα ρευστὰ καὶ εἰς διαφόρους θερμοκρασίας καταλήγομεν εἰς τὰ ἑξῆς τρία οὐσιώδη συμπεράσματα:

I. Εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν τὸ m_1 διά τινας ἀτμοὺς εἶναι θετικὸν καὶ δι' ἄλλους ἀτμοὺς εἶναι ἀρνητικόν.

II. Διά τινας μὲν ἀτμοὺς τὸ m_1 ἔχει σταθερὸν σημεῖον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς θερμοκρασίας t· ἤτοι τὸ m_1 εἶναι σταθερῶς θετικὸν ἢ σταθερῶς ἀρνητικὸν ἐφ' ὅλων τῶν σημείων τῆς καμπύλης Ξ· δι' ἄλλους δὲ ἀτμοὺς τὸ

m_1 εἶναι ἀρνητικὸν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ t, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεραι ὡρισμένης τινὸς θερμοκρασίας t_α, μηδενίζεται δὲ τὸ m_1 διὰ $t = t_\alpha$ καὶ γίνεται θετικὸν διὰ $t > t_\alpha$. Ἤτοι εἰς ἓν κατώτερον τμῆμα τῆς καμπύλης Ξ τὸ m_1 εἶναι ἀρνητικὸν καὶ εἰς τὸ ὑπόλοιπον ἀνώτερον τμῆμα τῆς καμπύλης Ξ τὸ m_1 εἶναι θετικόν· εἰς τὸ σημεῖον I, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὰ δύο ταῦτα τμήματα, εἶναι $m_1 = 0$. Τὸ σημεῖον I τῆς καμπύλης Ξ ὀνομάζομεν σημεῖον ἀντιστροφῆς, τὴν δὲ ἀντίστοιχον εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο θερμοκρασίαν t_α ὀνομάζομεν θερμοκρασίαν ἀντιστροφῆς· καὶ

III. Ὅταν τὸ m_1 εἶναι θετικόν, αὐξάνει μετὰ τοῦ t. Ὅταν τὸ m_1 εἶναι ἀρνητικόν, ἐλαττοῦται κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μετὰ τοῦ t. Τέλος, ὅταν τὸ m_1 ἀλλάσσῃ σημεῖον, εἰς τὰς χαμηλὰς θερμοκρασίας εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἐλαττοῦται ἀπολύτως μέχρι τοῦ μηδενός, ὅταν τὸ t αὐξάνῃ· κατόπιν τὸ m_1 γίνεται θετικὸν καὶ αὐξάνει μετὰ τοῦ t.

Ἐκ τῶν ἐξαγομένων τοῦ τρίτου συμπεράσματος καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ αὐξάνει μετὰ τῆς θερμοκρασίας.

Οὕτω διὰ τοὺς ἀτμοὺς τοῦ αἰθέρος τὸ m_1 εἶναι σταθερῶς θετικὸν καὶ ἔχει τιμάς:

διὰ	$t =$	0°C,	40	80	120
	$m_1 =$	0,116	0,120	0,128	0,133.

Διὰ τοὺς ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος τὸ m_1 εἶναι ἀρνητικὸν καὶ ἔχει τιμάς:

διὰ	$t =$	58°,21 C	92°,66	117,17	144,74
	$m_1 =$	-1,398	-1,266	-1,107	-0,807.

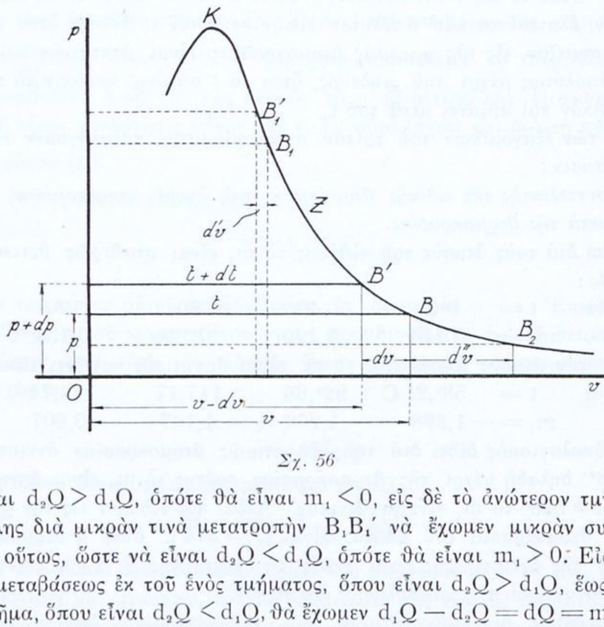
Ὁ ὑπολογισμὸς δίδει διὰ τοὺς ὑδρατμοὺς θερμοκρασίαν ἀντιστροφῆς $t_\alpha = 528^\circ$· δηλαδὴ μέχρι τῆς θερμοκρασίας ταύτης τὸ m_1 εἶναι ἀρνητικόν, ἐνῷ διὰ $t > 528^\circ$ τὸ m_1 γίνεται θετικόν. Ἀλλά, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 51, ἡ κρίσιμος θερμοκρασία τοῦ ὕδατος εἶναι $t_\varkappa = 374^\circ$C· ὅθεν ἡ θερμοκρασία $t_\alpha = 528^\circ$ τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι ἐκτὸς τῆς καμπύλης Ξ. Τὸ m_1 εἶναι λοιπὸν ἐφ᾽ ὁλοκλήρου τῆς καμπύλης Ξ ἀρνητικόν.

Ἀντιθέτως διὰ τοὺς ἀτμοὺς τοῦ χλωροφορμίου ἔχομεν περίπου $t_\alpha = 120^\circ$. Διὰ $t < 120^\circ$ εἶναι λοιπὸν διὰ τὸ χλωροφόρμιον $m_1 < 0$ καὶ διὰ $t > 120^\circ$ εἶναι $m_1 > 0$.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦ m_1, ἂς λάβωμεν τὴν καμπύλην Ξ (σχ. 56) καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ ταύτης τὴν στοιχειώδη μετατροπὴν BB′, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ἡ θερμοκρασία αὐξάνει ἀπὸ t ἕως t + dt.

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης Ξ, διὰ νὰ πραγματοποιηθῇ μετατροπὴ μάζης ἀτμοῦ κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης ταύτης, πρέπει, ἐπειδὴ κινούμεθα κατὰ μῆκος τοῦ στοιχειώδους τόξου BB′, δηλαδὴ ἀνερχόμεθα τὴν καμπύλην, ἡ μᾶζα τοῦ ἀτμοῦ ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν νὰ ἀπορροφᾷ θερμίδας d_1Q διὰ τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας της κατὰ dt, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ νὰ ἀποδίδη θερμίδας d_2Q διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς συμπιέσεως τῆς μάζης κατὰ $-dv$. Ἀναλόγως λοιπὸν τοῦ σημείου τῆς διαφορᾶς $d_1Q - d_2Q = dQ$ ἡ ὁλικὴ ἀπορροφουμένη θερμότης dQ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι θετική, μηδὲν ἢ ἀρνητική. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $dQ = m_1 dt$, τὸ m_1 θὰ ἔχη τὸ σημεῖον τοῦ dQ.

Τὸ σημεῖον λοιπὸν τοῦ συντελεστοῦ m_1 ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης Ξ. Εἶναι μάλιστα δυνατὸν ἐκ τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης ταύτης διὰ τὸν αὐτὸν ἀτμὸν νὰ ἔχωμεν εἰς μὲν τὸ κατώτερον τμῆμα τῆς καμπύλης διὰ μικράν τινα μετατατροπὴν B_2B μεγάλην συμπίεσιν $-d''v$ οὕτως, ὥστε



Σχ. 56

νὰ εἶναι $d_2Q > d_1Q$, ὁπότε θὰ εἶναι $m_1 < 0$, εἰς δὲ τὸ ἀνώτερον τμῆμα τῆς καμπύλης διὰ μικρὰν τινὰ μετατροπὴν B_1B_1' νὰ ἔχωμεν μικρὰν συμπίεσιν $-d'v$ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $d_2Q < d_1Q$, ὁπότε θὰ εἶναι $m_1 > 0$. Εἰς τὸ σημεῖον μεταβάσεως ἐκ τοῦ ἑνὸς τμήματος, ὅπου εἶναι $d_2Q > d_1Q$, ἕως τὸ ἕτερον τμῆμα, ὅπου εἶναι $d_2Q < d_1Q$, θὰ ἔχωμεν $d_1Q - d_2Q = dQ = m_1 dt = 0$ ἤτοι θὰ εἶναι $m_1 = 0$. Οὕτω ἐξηγεῖται διατὶ διὰ τὸν αὐτὸν ἀτμὸν εἶναι δυνατὸν τὸ m_1 νὰ εἶναι ἀρνητικόν, μηδὲν καὶ θετικόν.

56. *Ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ.* Ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ θερμοκρασίας t καὶ τίτλου x δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1) τῆς § 55, ἤτοι εἶναι

$$dU = \left[(1-x)m + xm_1\right]dt + r dx - A p dv. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου (3, § 50), ἤτοι τῆς ἐκφράσεως

$$v = \sigma + ux,$$

λαμβάνομεν

$$dv = \frac{d\sigma}{dt}dt + x\frac{du}{dt}dt + u dx.$$

Οὕτω ἡ (1), ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ du διὰ τοῦ ἴσου του, γράφεται μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$(2)\quad dU = (r - Apu)\,dx + \left[(1-x)\,m + x m_1 - Ap\left(\frac{d\sigma}{dt} + x\frac{du}{dt}\right)\right]dt.$$

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, ὅταν ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις

$$dZ = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, ἡ συνάρτησις $Z(x,y)$, καθὼς διδάσκει ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμός, ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου

$$(3)\quad Z = \int_{x_0}^{x} X(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y)\,dy + C.$$

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (3) διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς συναρτήσεως U, τῆς ὁποίας τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν εἶναι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις (2)· θὰ ἔχωμεν

$$(4)\quad U = \int_0^x (r - Apu)\,dx + \int_0^t \left(m - Ap\frac{d\sigma}{dt}\right)dt,$$

ὅπου εἰς τὸ δεύτερον ὁλοκλήρωμα ἐθέσαμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν τοῦ κατωτάτου ὁρίου τοῦ πρώτου ὁλοκληρώματος, δηλαδὴ $x = 0$ καὶ ὅπου ἐλάβομεν τὴν σταθερὰν $C = 0$. Ἡ (4) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(5)\quad U = (r - Apu)\int_0^x dx + \int_0^t m\,dt - Ap\int_0^t d\sigma.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\int_0^t d\sigma$ δίδει τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν ἀπὸ θερμοκρασίαν 0° ἕως t°C. Ἀλλὰ ἡ μεταβολὴ αὐτὴ τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἐλαχίστη ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ἀτμοῦ οὕτως, ὥστε δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν εἰς τὸν τύπον (5) τὸ $Ap\int_0^t d\sigma$.

Τότε ὁ τύπος (5) γράφεται

$$(6)\quad U = (r - Apu)\int_0^x dx + \int_0^t m\,dt.$$

Δυνάμει τοῦ τύπου (15) τῆς § 54 εἶναι $m\,dt = dq$· ὅθεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^t m\,dt = q$ εἶναι ἡ θερμότης τοῦ ὑγροῦ (§ 53). Ἡ (6) γράφεται λοιπὸν

$$(7)\quad U = (r - Apu)\,x + q.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ τίτλου x, θερμοκρασίας t καὶ ἀντιστοίχου πιέσεως $p = f(t)$. Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (4, § 15), ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης δὲν εἶναι ἀπόλυτον μέγεθος, ἀλλὰ προσδιορίζεται μὲ μίαν αὐθαίρετον σταθερὰν C. Διὰ νὰ ἦτο ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης ἀπόλυτον μέγεθος θὰ ἔπρεπε, δυνάμει τῶν παραδοχῶν τὰς ὁποίας ἐκάμομεν διὰ τὸν τὸν τύπον (5, § 15), νὰ δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν βιομηχανικῶς τὸ ἀπόλυτον μηδέν, ὁπότε θὰ εἴχομεν $U_0 = 0$. Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, ὑπολογίζομεν κατὰ τὰς μετατροπὰς τῶν σωμάτων τὰς μεταβολὰς τοῦ U. Οὕτω καὶ εἰς τὸν τύπον (7) τὸ U εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ θερμοκρασίας 0°C εἰς ὑγρὸν ἀτμὸν θερμοκρασίας t καὶ τίτλου x. Ὅταν λοιπὸν ὑπολογίζωμεν τὴν ἐσωτερικὴν θερμότητα τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ διὰ τοῦ τύπου (7), θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε ὅτι πρόκειται περὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως ($t_0 = 0^{\circ}C$, $x_0 = 0$). Εἰς τὸν τύπον (7) τὸ r εἶναι ἡ θερμότης τῆς ἀτμοποιήσεως, τὸ q εἶναι ἡ θερμότης τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ x εἶναι ὁ τίτλος τοῦ ἀτμοῦ. Διὰ νὰ ἴδωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου Apu, ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον τῶν πιέσεων κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀτμοποιήσεως ἑνὸς χιλιογράμμου κεκορεσμένου ὑγροῦ, ἤτοι κατὰ μῆκος τῆς ἰσοθλίπτου AB (σχ. 54). Ἔχομεν

$$E_{A,B} = \int_{AB} p\,dv = p \int_{AB} dv = p\,(s - \sigma) = pu.$$

Τὸ Apu εἶναι λοιπὸν τὸ ἰσοδύναμον εἰς θερμότητα τοῦ ἔργου τῶν πιέσεων κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἀτμοποιήσεως, ἤτοι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς AB. Τὸ Apu ὀνομάζομεν λανθάνουσαν ἐξωτερικὴν θερμότητα τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἂς θέσωμεν

$$r = Apu + \varrho \tag{8}$$

καὶ ἂς ζητήσωμεν τὴν φυσικὴν σημασίαν τοῦ ϱ. Πρὸς τοῦτο ἂς ἐφαρμόσωμεν διὰ τὴν περίοδον τῆς ἀτμοποιήσεως, ἤτοι κατὰ μῆκος τῆς μετατροπῆς AB (σχ. 54), τὴν ἐξίσωσιν (10, § 28) τοῦ Clausius. Ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀπορροφουμένη θερμότης διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς μετατροπῆς ταύτης εἶναι $Q = r$, τὸ δὲ ἔργον τῶν πιέσεων εἶναι pu, θὰ ἔχωμεν

$$r = Apu + U_B - U_A. \tag{9}$$

Συγκρίνοντες τὴν (9) μὲ τὴν (8) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$\varrho = U_B - U_A. \tag{10}$$

Ἤτοι τὸ ϱ τοῦ τύπου (8) εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος κατὰ τὴν μετατροπὴν ἐκ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ μέχρι τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Τὸ ϱ ὀνομάζομεν λανθάνουσαν ἐσωτερικὴν θερμότητα τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Κατὰ ταῦτα ὁ τύπος (8) ἐκφράζει τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Ἡ θερμότης ἀτμοποιήσεως εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς λανθανούσης ἐξωτερικῆς καὶ τῆς λανθανούσης ἐσωτερικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

Ὁ τύπος (7) γράφεται δυνάμει τοῦ τύπου (8)

(11) $$U = \varrho x + q.$$

Τὸν τύπον τοῦτον εὕρομεν διὰ τῆς ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως (2), δυνάμει τοῦ τύπου (3). Τὸν ἀνωτέρω τύπον (11) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (10, § 28) τοῦ Clausius. Τῷ ὄντι ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διὰ τὴν μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ θερμοκρασίας $t_0 = 0^0C$ εἰς ὑγρὸν ἀτμὸν τίτλου x καὶ θερμοκρασίας t. Κατὰ τὴν μετατροπὴν ταύτην ἡ ἀπορροφουμένη θερμότης εἶναι δυνάμει τοῦ τύπου (16, § 53) $Q = q + rx$, τὸ δὲ ἔργον τῶν πιέσεων εἶναι

(12) $$\int_{\upsilon_0=\sigma_0}^{\upsilon=\sigma+ux} p d\upsilon = p\int_{\sigma_0}^{\upsilon=\sigma+ux} d\upsilon = p(\sigma - \sigma_0) + pux$$

ὅπου σ_0 ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t_0 = 0$ καὶ σ ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Ἐπειδή, ὡς ἀνεφέραμεν καὶ ἀνωτέρω, ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἐλαχίστη ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου τοῦ ἀτμοῦ, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὸν ὅρον $p(\sigma - \sigma_0)$, ὁπότε τὸ ἔργον τῶν πιέσεων θὰ εἶναι pux. Τότε ἡ ἐξίσωσις (10, § 28) γράφεται

(13) $$q + rx = Apux + U - U_0.$$

Ὡς ἀνεφέραμεν καὶ ἀνωτέρω, εἰς τὴν κατάστασιν $(t_0 = 0,\ x_0 = 0)$ λαμβάνομεν $U_0 = 0$· ὅθεν ἔχομεν

$$U = q + rx - Apux = q + (r - Apu)x$$

ἢ

$$U = q + \varrho x.$$

Οὕτω ἐπανευρίσκομεν τὸν τύπον (11). Διὰ τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν εἶναι $x = 1$· ὁ τύπος λοιπὸν (11) γράφεται διὰ τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν

(14) $$U = q + \varrho.$$

Τὸ $q + \varrho$ ὀνομάζομεν ὁλικὴν ἐσωτερικὴν θερμότητα τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πειραμάτων τοῦ Regnault καὶ ἄλλων μεταγενεστέρων φυσικῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἰδιαιτέρως πρέπει νὰ ἀναφέρωμεν τὰ ὀνόματα τοῦ Zeuner καὶ τοῦ Mollier, συνετάχθησαν πίνακες ἐπὶ τῷ σκοπῷ νὰ διευκολύνουν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν γενικῶν τύπων. Οἱ πίνακες οὗτοι δίδουν διὰ τὰ διάφορα ρευστὰ καὶ τὰς διαφόρους θερμοκρασίας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν p, q, r, ρ, u κ.τ.λ.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους πίνακας διὰ τοὺς ὑδρατμούς, θὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς:

I. Ἡ ἐξωτερικὴ λανθάνουσα θερμότης Apu αὐξάνει μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Ἡ αὔξησις ὅμως αὕτη δὲν εἶναι αἰσθητή. Οὕτω ἐνῷ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t = 45^0{,}4$ C, δηλαδὴ εἰς τὴν πίεσιν $p = 0{,}1\ kg/cm^2$ εἶναι

$Apu = 34,94$ θερμίδες, εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t' = 194°C$, δηλαδὴ εἰς πίεσιν $p' = 14\ kg/cm^2$, εἶναι $Apu = 47,26$ θερμίδες. Δηλαδὴ εἰς αὔξησιν θερμοκρασίας $\Delta t = 194 - 45°,6 = 148°,4$ C ἔχομεν ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ Apu ἴσην πρὸς $47,26 - 34,94 = 12,32$ Cal· καὶ

II. Ἀντιθέτως ἡ ἐσωτερικὴ λανθάνουσα θερμότης ρ ἐλαττοῦται μετὰ τῆς θερμοκρασίας· καὶ ἡ ἐλάττωσις αὕτη εἶναι λίαν αἰσθητή. Οὕτω ἐνῷ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t = 45°,6$ C ἔχομεν $\varrho = 535,4$ θερμίδες, εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t' = 194°$ ἔχομεν $\varrho' = 425,2$ θερμίδες· δηλαδὴ εἰς αὔξησιν θερμοκρασίας $\Delta t = 194 - 45,6 = 148°,4$ C ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ ρ ἴση πρὸς $535,4 - 425,2 = 110,2$ Cal. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $r = \varrho + Apu$, ἡ μεταβολὴ τοῦ r θὰ ἀκολουθῇ προφανῶς τὴν μεταβολὴν τοῦ ρ, τὸ ὁποῖον μεταβάλλεται μᾶλλον αἰσθητῶς ἢ τὸ Apu. Ὅθεν τὸ r ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνῃ ἡ θερμοκρασία. Τοῦτο ἄλλως τε φαίνεται ἀμέσως καὶ ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Regnault $r = 606,5 - 0,695\ t$, (§ 53, τύπος 8).

Τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον δὲν σημαίνει ὅτι ὅσον μεγαλυτέρας θερμοκρασίας, ἑπομένως καὶ μεγαλυτέρας πιέσεως εἶναι ὁ ἀτμός, τὸν ὁποῖον παράγομεν, τόσον ὀλιγωτέρας θερμίδας χρειαζόμεθα. Διότι ἡ ὁλικὴ θερμότης διὰ τὴν μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ὕδατος θερμοκρασίας 0°C εἰς ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν εἶναι $\lambda = q + r$. Τὸ δὲ q αὐξάνει αἰσθητῶς μετὰ τῆς θερμοκρασίας οὕτως, ὥστε τὸ λ παρακολουθεῖ τὴν μεταβολὴν ταύτην τοῦ q. Οὕτω εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν $45°,6$ C ἔχομεν $q = 45,7$ Cal, ἐνῷ εἰς τὴν θερμοκρασίαν τῶν 194°C ἔχομεν $q = 197,3$ Cal. Εἰς αὔξησιν λοιπὸν τῆς θερμοκρασίας $\Delta t = 194 - 45,4 = 148°,6$ C ἔχομεν ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ q ἴσην πρὸς $197,3 - 45,7 = 151,6$ Cal. καὶ ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ λ ἴσην πρὸς $\Delta\lambda = (197,3 + 472,5) - (45,7 + 570,4) = 669,8 - 616,1 = 53,7$ Cal.

57. *Τροπὴ τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ.* Ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους τροπῆς τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ τίτλου x καὶ θερμοκρασίας t δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2) τῆς § 55, ἤτοι εἶναι

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{r}{T}\,dx + \frac{(1-x)m + xm_1}{T}\,dt. \tag{1}$$

Ἡ τροπὴ τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ τῆς καταστάσεως M (t, x), ὑπολογιζομένη ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως A_0 ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$) θὰ εἶναι

$$S = \int_{A_0 M} \frac{r}{T}\,dx + \frac{(1-x)m + xm_1}{T}\,dt. \tag{2}$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους, ἐπειδὴ τὸ dS εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, ὑπολογίζεται δυνάμει τοῦ τύπου (3) τῆς § 56· ἤτοι εἶναι

$$S = \int_0^x \frac{r}{T}\,dx + \int_0^t \left[\frac{(1-x)m + xm_1}{T}\right]_{x=0} dt,$$

ἤ

(3) $$S = \int_0^x \frac{r}{T}\,dx + \int_0^t \frac{m\,dt}{T}.$$

Ἔχομεν $\int_0^x \frac{r}{T}\,dx = \frac{rx}{T}$· ἐξ ἄλλου, δυνάμει τοῦ τύπου (15) τῆς § 54, εἶναι $m\,dt = dq$. Ὅθεν ὁ τύπος (3) γράφεται

(4) $$S = \frac{rx}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T}.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς τροπῆς τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ τίτλου x καὶ θερμοκρασίας t.

Παρατηροῦμεν εἰς τὸν τύπον (4) ὅτι διὰ $t_0 = 0$ καὶ $x_0 = 0$ ἔχομεν $S_0 = 0$. Ὁ μηδενισμὸς τῆς τροπῆς εἰς τὴν κατάστασιν $A_0\,(t_0 = 0,\ x_0 = 0)$ προφανῶς δὲν εἶναι κάτι τὸ ἀπόλυτον. Ὡς εἴδομεν εἰς τὰς §§ 35 καὶ 45, τόσον κατὰ μῆκος τῶν ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν, ὅσον καὶ κατὰ μῆκος τῶν μὴ ἀντιστρεπτῶν μετατροπῶν, μόνον αἱ διαφοραὶ $S - S_0$ τῆς τροπῆς εἶναι ὡρισμέναι. Ὑποθέτομεν λοιπὸν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τροπῆς τῶν ἀτμῶν, ὅτι λαμβάνομεν ὡς ἀφετηριακὴν κατάστασιν τὴν κατάστασιν $A_0(t_0 = 0,\ x_0 = 0)$, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ $S_0 = 0$. Ἀπὸ τῆς καταστάσεως ταύτης ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς εἶναι $S - S_0 = S$.

Διὰ $x_0 = 0$, $t = t$, ὁ τύπος (4) γράφεται

(5) $$S' = \int_0^t \frac{dq}{T}.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^t \frac{dq}{T}$ ὀνομάζομεν τροπὴν τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ ἢ καὶ ἁπλῶς τροπὴν τοῦ ὑγροῦ. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο ὑπολογίζομεν λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει ὅτι, δυνάμει τοῦ τύπου (15) τῆς § 54, εἶναι $dq = m\,dt$· ἔχομεν λοιπὸν

(6) $$S' = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{m\,dt}{t + 273},$$

ἤ, δυνάμει καὶ τοῦ τύπου (16) τῆς § 54

(7) $$S' = \int_0^t \frac{(a + 2bt + 3ct^2)\,dt}{t + 273}.$$

Διὰ $x = 1$, $t = t$, ὁ τύπος (4) γράφεται

(8) $$S = \frac{r}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T}.$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου ὑπολογίζομεν τὴν τροπὴν τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

Ἄς θεωρήσωμεν ἀδιάθερμον μετατροπὴν μάζης ἑνὸς χιλιογράμμου ὑγροῦ ἀτμοῦ. Κατὰ μῆκος τῆς μετατροπῆς ταύτης, δυνάμει τῆς προτάσεως γ τῆς § 35, ἡ τροπὴ εἶναι σταθερά. Ἤτοι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἶναι

$$\frac{rx}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T} = \text{σταθερόν}. \tag{9}$$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς, τῆς ὁποίας δίδεται ἓν σημεῖον $M_0(t_0, x_0)$, θὰ εἶναι

$$\frac{rx}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T} = \frac{r_0 x_0}{T_0} + \int_0^{t_0} \frac{dq}{T}\cdot \tag{10}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{rx}{T} - \frac{r_0 x_0}{T_0} = \int_t^{t_0} \frac{dq}{T}\cdot \tag{11}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὑπολογίζομεν τὴν μεταβολὴν τοῦ τίτλου τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ κατὰ τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν αὐτοῦ· ἐὰν εἶναι $m =$ σταθερὸν ($dq = m dT$), ὁ τύπος (11) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{rx}{T} - \frac{r_0 x_0}{T_0} = m \log \frac{T_0}{T}\cdot \tag{12}$$

58. Τροπικὸν διάγραμμα τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 38, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος εἶναι ἡ τροπὴ καὶ ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία. Τὰ ἐμβαδὰ τοῦ διαγράμματος τούτου παριστάνουν τὰ ποσὰ θερμότητος, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὰ διαγράμματα μετατροπῶν.

Ἄς ζητήσωμεν νὰ χαράξωμεν εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα (OS, OT) τὴν καμπύλην Y_τ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ. Ἡ τροπὴ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (5) τῆς § 57, ἤτοι εἶναι

$$S' = \int_0^t \frac{dq}{T}\cdot \tag{1}$$

Διὰ νὰ χαράξωμεν λοιπὸν τὴν καμπύλην Y_τ προσδιορίζομεν διάφορα σημεῖα αὐτῆς, ὡς εἶναι τὸ $A(S', T)$, δίδοντες εἰς τὸ T διαφόρους τιμὰς καὶ ὑπολογίζοντες ἐκ τῆς (1) τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ S' (σχ. 57). Δυνάμει τῶν παραδοχῶν τῆς § 57 ἡ τροπὴ εἰς τὸ σημεῖον A_0 ($t_0 = 0^\circ C$ ἢ $T = 273^\circ k$), εἶναι μηδέν. Ὅθεν ἡ καμπύλη Y_τ ἔχει ἀφετηριακὸν σημεῖον, τὸ σημεῖον A_0 ($0A_0 = 273$) τοῦ ἄξονος OT. Ἐὰν δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν ὅτι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὕδατος εἶναι $m = 1$, ἐκ τοῦ τύπου (15) τῆς § 54 θὰ εἶναι $q = t$· τότε ὁ τύπος (1) γράφεται

(2) $$S' = \int_0^t \frac{dT}{T} = \int_{273}^{T} \frac{dT}{T} = \log \frac{T}{273}.$$

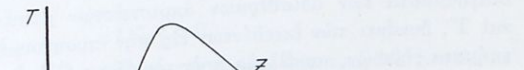
Ἐντεῦθεν ἔχομεν

(3) $$T = 273\, e^{S'}.$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν λοιπὸν ὅτι εἶναι $m = 1$, ἡ καμπύλη Y_τ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ ἔχει εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων OS, OT ἐξίσωσιν τὴν (3). Διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν καμπύλην Ξ_τ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ λαμβάνομεν τὴν ἔκφρασιν (8, § 57) τῆς τροπῆς τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ, ἤτοι τὴν ἔκφρασιν

(4) $$S = S' + \frac{r}{T}.$$

Τὸ σημεῖον λοιπὸν B τῆς καμπύλης Ξ_τ θὰ εἶναι τὸ πέρας τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὸ ὁποῖον ἔχει στήριγμα τὴν ἰσόθερμον (T), ἀρχὴν τὸ σημεῖον A τῆς καμπύλης Y_τ καὶ μέτρον ἴσον πρὸς $\frac{r}{T}$.



Σχ. 57

Ἂς θεωρήσωμεν σημεῖον M τῆς ἰσοθέρμου AB μεταξὺ τῶν σημείων A, B. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 51, ὁ τίτλος τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὸ σημεῖον M παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron ὑπὸ τοῦ πηλίκου $\frac{(AM)}{(AB)}$ (σχ. 51). Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα (σχ. 57) τὸ ἴδιον πηλίκον $\frac{(AM)}{(AB)}$ παριστᾷ ἐπίσης τὸν τίτλον εἰς τὸ σημεῖον M. Τῷ ὄντι ἡ τροπὴ τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἰς τὸ σημεῖον M δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (4) τῆς § 57, ἤτοι εἶναι

(5) $$S_M = S_A + \frac{r}{T}\, x.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$S_M - S_A = \frac{r}{T}\,x = (AB)x$$

καὶ

(6) $$x = \frac{S_M - S_A}{(AB)} = \frac{(AM)}{(AB)}\,. \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν S, T εἶναι ἡ ἐξίσωσις (9) τῆς § 57· ἤτοι εἶναι

(7) $$S' + \frac{rx}{T} = \text{σταθερόν}.$$

Τὸ τροπικὸν διάγραμμα τῆς ἀδιαθέρμου μετατροπῆς εἶναι (§ 38) εὐθεῖα γγ' παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα OT. Ἡ ἐξίσωσις (7) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ταύτης. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 57, ὁ τίτλος τοῦ ἀτμοῦ κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου γγ' μεταβάλλεται. Ἡ μεταβολὴ τοῦ τίτλου κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ σημείου M εἰς τὸ M', δηλαδὴ ἐκ τῆς ἰσοθέρμου (T) εἰς τὴν ἰσόθερμον (T'), προσδιορίζεται διὰ τοῦ τύπου (12) τῆς § 57.

59. *Χαρακτηριστικὴ ἀδιάθερμος τῶν ὑγρῶν ἀτμῶν.* Ἂς θεωρήσωμεν (σχ. 58) δύο ἄκρας δεδομένας ἰσοθέρμους AB (T) καὶ A'B' (T'). Τὰ διαγράμματα τῶν ἀδιαθέρμων ἀποτονώσεων μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν T καὶ T', δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, εἶναι τμήματα εὐθειῶν, παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα OT, ὡς εἶναι ἐπὶ παραδείγματι τὰ τμήματα AA'', PP', MM', NN', BB''. Ἐὰν ὁ τίτλος εἰς τὸ σημεῖον M τῆς ἰσοθέρμου (T) εἶναι x, ὁ τίτλος x_1 εἰς τὸ σημεῖον M' τῆς ἰσοθέρμου (T') ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου (12) τῆς § 57. Ἂς ἴδωμεν ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖον M τῆς ἰσοθέρμου AB (T), τοιοῦτον, ὥστε ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη ἀδιάθερμος νὰ συναντᾷ τὴν ἰσόθερμον A'B'(T') εἰς σημεῖον M' ἔχον τὸν ἴδιον τίτλον μετὰ τοῦ M. Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (6) τῆς § 58

(1) $$x - x_1 = \frac{(AM)}{(AB)} - \frac{(A'M')}{(A'B')} = 0$$

ἢ

(2) $$\frac{S - S_A}{S_B - S_A} - \frac{S - S_A'}{S_B' - S_A'} = 0,$$

ὅπου S εἶναι ἡ τροπὴ εἰς τὰ σημεῖα M, M'.

Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λοιπὸν τὸ ὡς ἄνω σημεῖον M ἐπὶ τῆς AB, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ S μεταξὺ τῶν τιμῶν S_A καὶ S_B, ἐπαληθεύουσα τὴν ἐξίσωσιν (2). Ἂς θέσωμεν

(3) $$x - x_1 = \frac{S - S_A}{S_B - S_A} - \frac{S - S_A'}{S_B' - S_A'} = \varphi(S).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $S = S_A$ εἶναι

$$\varphi(S_A) = -\frac{S_A - S_A'}{S_B' - S_A'} = -\frac{S_A - S_A'}{\frac{r'}{T'}}.$$

καὶ ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν ὅτι εἶναι $T' < T$, θὰ εἶναι, δυνάμει τῆς (2, § 58), $S_A' < S_A$· ὅθεν εἶναι

(4) $$\varphi(S_A) < 0.$$

Ὁμοίως διὰ $S = S_B$ ἔχομεν

$$\varphi(S_B) = 1 - \frac{S_B - S_A'}{S_B' - S_A'} = \frac{S_B' - S_A' - S_B + S_A'}{S_B' - S_A'},$$

ἢ

(4') $$\varphi(S_B) = \frac{S'_B - S_B}{\frac{r'}{T'}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $S_B' > S_B$. Τῷ ὄντι ἡ μεταβολὴ τῆς τροπῆς κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης Ξ_τ εἶναι, δυνάμει καὶ τοῦ τύπου (18, § 54),

$$S_B - S_B' = \int_{T'}^{T} \frac{dQ}{T} = \int_{T'}^{T} \frac{m_1 dT}{T}.$$

Ἀλλά, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 55, διὰ τοὺς κεκορεσμένους ἀτμοὺς τοῦ ὕδατος, ὅταν ἀνερχώμεθα ἐπὶ τῆς καμπύλης Ξ_τ εἶναι $m_1 < 0$· ὅθεν εἶναι $S_B < S_B'$ καὶ

(5) $$\varphi(S_B) > 0.$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ συνεχὴς συνάρτησις (3) γίνεται ἀρνητικὴ διὰ $S = S_A$ καὶ θετικὴ διὰ $S = S_B$, θὰ ὑπάρχῃ, ὡς διδάσκει ἡ θεωρία τῶν συναρτήσεων, μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (2) μεταξὺ τῶν τιμῶν S_A καὶ S_B. Ἤτοι ὑπάρχει μεταξὺ τῶν σημείων Α, Β τῆς ἰσοθέρμου ΑΒ (σχ. 58) ἓν σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη ἀδιάθερμος νὰ συναντᾷ τὴν ἰσόθερμον Α'Β' εἰς σημεῖον Μ' ἔχον μετὰ τοῦ Μ τὸν ἴδιον τίτλον. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἀναλυτικῶς τὸ σημεῖον τοῦτο, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ῥίζαν S τῆς ἐξισώσεως (2). Τὸ S θὰ εἶναι ἡ τροπὴ τοῦ ζητουμένου σημείου Μ. Τὸ σημεῖον λοιπὸν τοῦτο θὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, δυνάμει τῆς σχέσεως (6) τῆς § 58· ἤτοι τῆς σχέσεως

(6) $$\frac{(AM)}{(AB)} = \frac{S - S_A}{(AB)}.$$

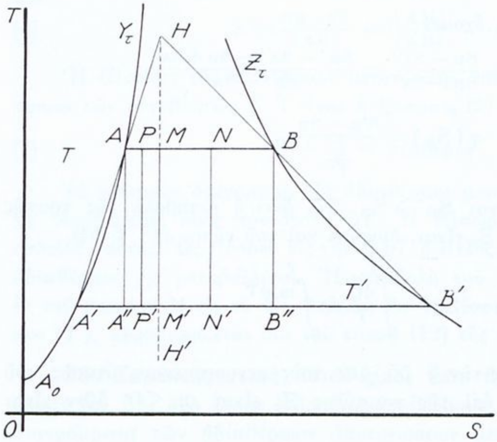
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

α. *Ἐξ ὅλων τῶν ἀδιαθέρμων, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν δύο δεδομένας ἰσοθέρμους Τ, Τ', ὑπάρχει μία ἀδιάθερμος, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο ἰσοθέρμους εἰς σημεῖα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τίτλον. Τὴν ἀδιάθερμον ταύτην ὀνομάζομεν χαρακτηριστικὴν ἀδιάθερμον τῶν ὑδρατμῶν μεταξὺ τῶν δύο ἰσοθέρμων Τ, Τ'.*

Ὁ γραφικὸς προσδιορισμὸς τῆς χαρακτηριστικῆς ἀδιαθέρμου μεταξὺ τῶν ἰσοθέρμων Τ, $T' < T$ γίνεται εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν (σχ. 58) Α, Β καὶ Α', Β' τὰ σημεῖα καθ' ἃ αἱ ἰσόθερμοι Τ, Τ' συναντοῦν τὰς καμπύλας Y_τ, καὶ Ξ_τ. Φέρομεν τὰς Α'Α, καὶ Β'Β· αἱ εὐθεῖαι αὗται προεκτεινόμεναι συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Η. Τὸ τμῆμα

MM′ τῆς διὰ τοῦ H διερχομένης ἀδιαθέρμου HH′, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ἰσοθέρμων AB, A′B′ θὰ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἀδιάθερμος μεταξὺ τῶν ἰσοθέρμων τούτων. Τῷ ὄντι ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν



Σχ. 58

$$(7)\qquad \frac{(AM)}{(AB)} = \frac{(A'M')}{(A'B')}\cdot$$

ἤτοι τὰ σημεῖα M, M′ ἔχουν τὸν αὐτὸν τίτλον. Ἄρα ἡ MM′ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἀδιάθερμος.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη μεταξὺ τῶν ἰσοθέρμων T, T′ τὴν ἀδιάθερμον NN′ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς χαρακτηριστικῆς MM′. Ἔστω x ὁ τίτλος εἰς τὸ σημεῖον N καὶ x′ ὁ τίτλος εἰς τὸ σημεῖον N′. Ἔχομεν

$$(8)\qquad x - x' = \frac{(AN)}{(AB)} - \frac{(A'N')}{(A'B')},$$

ἤ, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ S_N τὴν τροπὴν κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου NN′,

$$(9)\qquad x - x' = \frac{S_N - S_A}{S_B - S_A} - \frac{S_N - S_{A'}}{S_{B'} - S_{A'}}.$$

Ἡ (9), δυνάμει τῆς (3), γράφεται

$$(10)\qquad x - x' = \varphi\,(S_N).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις φ(S) εἰς μὲν τὸ σημεῖον M μηδενίζεται, εἰς δὲ τὸ σημεῖον B εἶναι, δυνάμει τῆς (5), θετική· ὡς δὲ διδάσκει ἡ θεωρία τῶν συναρτήσεων, ἡ συνάρτησις φ(S) εἰς ὅλα τὰ σημεῖα μεταξὺ τῶν σημείων M καὶ B εἶναι θετική· ἤτοι εἶναι

$$(11)\qquad x - x' = \varphi\,(S_N) > 0.$$

Ἄς θεωρήσωμεν καὶ τὴν ἀδιάθερμον PP′ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς χαρακτηριστικῆς ἀδιαθέρμου MM′. Ἐὰν x εἶναι ὁ τίτλος εἰς τὸ σημεῖον P, x″ ὁ τίτλος εἰς τὸ σημεῖον P′ καὶ S_P ἡ τροπὴ κατὰ μῆκος τῆς ἀδιαθέρμου PP′, θὰ ἔχωμεν

$$(12)\qquad x - x'' = \frac{(AP)}{(AB)} - \frac{(A'P')}{(A'B')} = \frac{S_P - S_A}{S_B - S_A} - \frac{S_P - S_{A'}}{S_{B'} - S_{A'}} = \varphi\,(S_P).$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις φ(S) εἰς τὸ σημεῖον M μηδενίζεται, εἰς δὲ τὸ σημεῖον A εἶναι ἀρνητική, ἡ συνάρτησις φ(S) θὰ εἶναι ἀρνητικὴ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα μεταξὺ τῶν σημείων Μ καὶ Α, ὅθεν καὶ εἰς τὸ σημεῖον P· ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$x - x'' = \varphi(S_P) < 0. \tag{13}$$

Αἱ σχέσεις (11) καὶ (13) ἐκφράζουν τὴν ἑξῆς πρότασιν:

β. Κατὰ τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν τοῦ ὑδρατμοῦ μεταξὺ δύο δεδομένων ἄκρων θερμοκρασιῶν Τ, Τ', ὁ τίτλος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ ἐλαττοῦται μὲν ἐφ' ὅσον τὸ τροπικὸν διάγραμμα τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαγράμματος τῆς χαρακτηριστικῆς ἀδιαθέρμου μεταξὺ τῶν Τ, Τ'· αὐξάνει δὲ ἀντιθέτως, ὅταν τὸ διάγραμμα τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως εἶναι πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαγράμματος τῆς χαρακτηριστικῆς ἀδιαθέρμου.

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἀδιάθερμος ΜΜ' διαιρεῖ τὸν χῶρον τοῦ τροπικοῦ διαγράμματος, τὸν περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν καμπύλων $Υ_τ$, $Ξ_τ$ καὶ τῶν ἰσοθέρμων ΑΒ, Α'Β', εἰς δύο χώρους Α'ΑΜΜ'Α' καὶ Μ'ΜΒΒ'Μ'. Ἐκ τούτων τὸν μὲν χῶρον Α'ΑΜΜ'Α' θὰ ὀνομάζωμεν προσκείμενον πρὸς τὸ κεκορεσμένον ὑγρόν· τὸν δὲ χῶρον Μ'ΜΒΒ'Μ' θὰ ὀνομάζωμεν προσκείμενον πρὸς τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμόν. Οὕτω ἡ ἀνωτέρω πρότασις β δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

γ. Κατὰ τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν τοῦ ὑδρατμοῦ μεταξὺ δύο δεδομένων ἄκρων θερμοκρασιῶν Τ, Τ' ὁ τίτλος τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ ἐλαττοῦται μέν, ὅταν ἡ ἀδιάθερμος ἀποτόνωσις γίνεται εἰς τὸν χῶρον τοῦ διαγράμματος τὸν προσκείμενον πρὸς τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμόν· αὐξάνει δέ, ὅταν ἡ ἀδιάθερμος ἀποτόνωσις γίνεται εἰς τὸν χῶρον τοῦ διαγράμματος τὸν προσκείμενον εἰς τὸ κεκορεσμένον ὑγρόν.

Μεταξὺ τῶν ἀδιαθέρμων ἀποτονώσεων εἰς τὸν προσκείμενον πρὸς τὸν ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν χῶρον ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχει ἡ ΒΒ'' (σχ. 58). Κατὰ ταύτην ὁ τίτλος ἀπὸ $x=1$ εἰς τὸ σημεῖον Β ἐλαττοῦται ἕως $x' = \frac{(A'B'')}{(A'B')}$ εἰς τὸ σημεῖον Β''. Ἐπίσης μεταξὺ τῶν ἀδιαθέρμων ἀποτονώσεων εἰς τὸν προσκείμενον πρὸς τὸν κεκορεσμένον ὑγρὸν χῶρον ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν ἡ ΑΑ''. Κατὰ ταύτην ὁ τίτλος ἀπὸ $x=0$ εἰς τὸ σημεῖον Α αὐξάνει εἰς $x'' = \frac{(A'A'')}{(A'B')}$ εἰς τὸ σημεῖον Α''.

60. Παράστασις τῶν θερμοτήτων q, r, Q' εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα. Ἂς θεωρήσωμεν εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα (σχ. 59) τὴν ἰσόθερμον Τ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς καμπύλας $Υ_τ$, $Ξ_τ$ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β. Ἡ θερμότης τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ σημεῖον Α εἶναι

$$q = \int_0^q dq,$$

ἤ, δυνάμει τοῦ τύπου (5) τῆς § 57,

(1) $$q = \int_{0}^{S'} T dS'.$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν $OA_0A\alpha$. Ἡ θερμότης λοιπὸν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν κατάστασιν A παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $OA_0A\alpha$, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν ἀξόνων OS καὶ OT, τῆς καμπύλης Y_τ καὶ τῆς τεταγμένης αA.

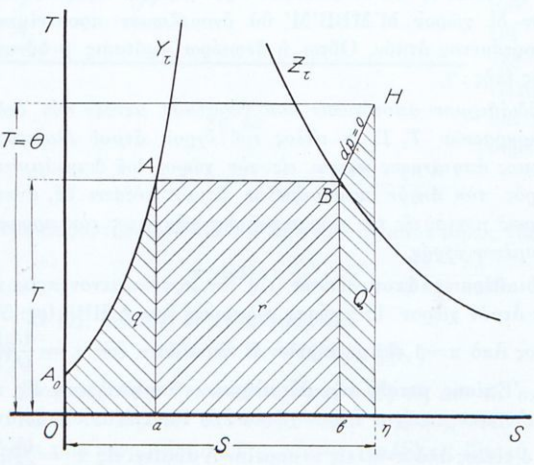
Ἐκ τοῦ τύπου (8) τῆς § 57 λαμβάνομεν

(2) $$\frac{r}{T} = S - S' = (AB)$$

ὅθεν εἶναι

(3) $$r = (AB)\,T = \varepsilon\mu\beta\,(\alpha AB\beta).$$

Ἡ θερμότης λοιπὸν ἀτμοποιήσεως r κατὰ τὴν ἰσόθερμον AB (T) παρίσταται εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου αABβ, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὴν ἰσόθερμον AB, τὸν ἄξονα OS καὶ τὰς τεταγμένας αA, βB. Ἡ δὲ ὁλικὴ θερμότης λ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ, δυνάμει τοῦ τύπου (5) τῆς § 53, παρίσταται εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $OA_0AB\beta$.



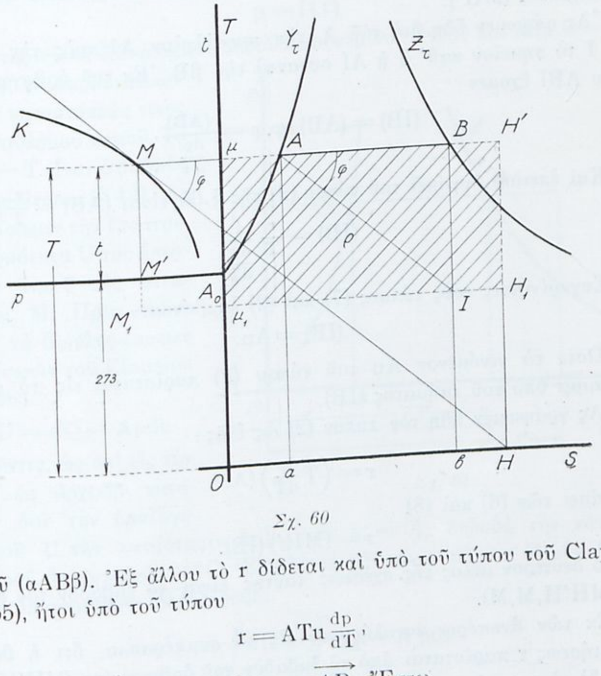
Σχ. 59

Ἄς θεωρήσωμεν τέλος εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ, δηλαδὴ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς καμπύλης Ξ_τ, τὴν ἰσόθλιπτον BH. Δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ (§ 49), ὅσον ἀπομακρυνόμεθα τοῦ B κατὰ τὴν ἰσόθλιπτον BH, τόσον ἡ θερμοκρασία αὐξάνει. Ἡ θερμότης Q′, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετατροπὴν BH, παρίσταται, δυνάμει τῆς προτάσεως δ τῆς § 38 ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ (βBHη). Ἡ δὲ ὁλικὴ θερμότης Q τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ καταστάσεως H παρίσταται, δυνάμει τοῦ τύπου (6) τῆς § 53, ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ($OA_0ABH\eta$), ὅπου τὸ σημεῖον B εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς διὰ τοῦ H διερχομένης ἰσοθλίπτου καὶ τῆς καμπύλης Ξ_τ.

61. Παράστασις τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς λανθανούσης θερμότητος εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα. Ἂς γράψωμεν τὸν τύπον (8) τῆς § 56, ἤτοι τὸν τύπον

(1) $$r = \mathrm{Apu} + \varrho,$$

ὅπου Apu εἶναι ἡ λανθάνουσα ἐξωτερικὴ θερμότης καὶ ϱ ἡ λανθάνουσα ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Τὸ r, δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, παρίσταται (σχ. 60) ὑπὸ τοῦ



Σχ. 60

ἐμβαδοῦ (αΑΒβ). Ἐξ ἄλλου τὸ r δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Clapeyron (7, § 55), ἤτοι ὑπὸ τοῦ τύπου

(2) $$r = \mathrm{ATu}\frac{dp}{dT},$$

ὅπου u εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{AB}$. Ἔστω

(3) $$p = f(t)$$

ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Ἂς λάβωμεν, ὡς ἐμφαίνεται ἐν τῷ σχήματι, τοὺς ἄξονας A_0p, A_0t καὶ ἔστω K τὸ διάγραμμα τῆς ἐξισώσεως (3) εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων τούτων. Ἡ AB προεκτεινομένη πέραν τοῦ A συναντᾷ τὴν καμπύλην K εἰς τὸ σημεῖον M(p, t). Ἂς φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην MH τῆς καμπύλης K εἰς τὸ σημεῖον M καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ φ τὴν γωνίαν HMH′· θὰ ἔχωμεν

(4) $$\text{εφ.}\varphi = \frac{(\mathrm{HH'})}{(\mathrm{MH})} = \frac{dT}{dp}.$$

Τὸ $\frac{dp}{dT}$ τοῦ τύπου (2) εἶναι λοιπὸν

(5) $$\frac{dp}{dT}=\frac{1}{\varepsilon\varphi.\varphi}.$$

Ἐκ τοῦ τύπου (4) λαμβάνομεν

(6) $$(MH')=(HH')\frac{dp}{dT}=T\frac{dp}{dT}.$$

Οὕτω τὸ γινόμενον $T\frac{dp}{dT}$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) παρίσταται ὑπὸ τοῦ τμήματος (MH').

Ἂς φέρωμεν ἤδη διὰ τοῦ A τὴν παράλληλον AI πρὸς τὴν MH καὶ ἔστω I τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ AI συναντᾷ τὴν βB. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ABI ἔχομεν

$$(IB)=(AB)\,\varepsilon\varphi.\varphi=\frac{(AB)}{\frac{dp}{dT}}.$$

Καὶ ἐπειδή, δυνάμει τοῦ τύπου (2) τῆς § 60, εἶναι $(AB)=\frac{r}{T}$, ἔχομεν

(7) $$(IB)=\frac{r}{T}\,\frac{1}{\frac{dp}{dT}}.$$

Συγκρίνοντες τοὺς τύπους (7) καὶ (2) λαμβάνομεν

(8) $$(IB)=Au.$$

Ὥστε τὸ γινόμενον Au τοῦ τύπου (2) παρίσταται εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα ὑπὸ τοῦ τμήματος (IB).

Ἂς γράψωμεν ἤδη τὸν τύπον (2) ὡς ἑξῆς:

$$r=\left(T\frac{dp}{dT}\right)(Au)$$

ἤ, δυνάμει τῶν (6) καὶ (8)

(9) $$r=(MH')(IB).$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς σχέσεως ταύτης εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $(MH'H_1M_1M)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ θερμότης ἀτμοποιήσεως r παρίσταται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $(MH'H_1M_1M)$· ἐπειδὴ δὲ τὸ r παρίσταται καὶ ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ (αABβ), θὰ εἶναι

(10) $$\text{εμβ}\,(\alpha AB\beta)=\text{εμβ}\,(MH'H_1M_1M)=r.$$

Ἂς γράψωμεν ἤδη

(11) $$r=\text{εμβ}\,(MH'H_1M_1M)=\text{εμβ}\,(M\mu\mu_1M_1M)+\text{εμβ}\,(\mu H'H_1\mu_1\mu)$$

καὶ ἂς ζητήσωμεν τὴν σημασίαν ἑκάστου τῶν ἐμβαδῶν τοῦ δευτέρου μέλους.

Τὸ ὀρθογώνιον $(M\mu\mu_1M_1M)$ ἔχει βάσιν $(\mu_1M_1)=p$ καὶ ὕψος

$$(\mu_1\mu)=(IB)=Au.$$

Ἦτοι εἶναι

(12) $$\text{εμβ}\,(M\mu\mu_1M_1M)=(\mu_1M_1)\,(IB)=pAu,$$

Ἐντεῦθεν καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν $(M\mu\mu_1 M_1 M)$ παριστᾷ τὴν ἐξωτερικὴν λανθάνουσαν θερμότητα Apu.

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (1), (11) καὶ (12) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

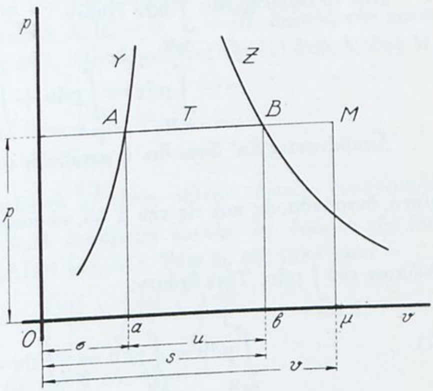
(13) $$\varepsilon\mu\beta\,(\mu H' H_1 \mu_1 \mu) = \varrho.$$

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν $(\mu H' H_1 \mu_1 \mu)$ παριστᾷ τὴν ἐσωτερικὴν λανθάνουσαν θερμότητα ϱ.

62. *Ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.* Ἔστω

(1) $$p = f(T)$$

ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καὶ $M(p, \Theta = T + \tau)$, (Σχ. 61), τὸ παραστατικὸν σημεῖον καταστάσεώς τινος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Τὸ $\tau = \Theta - T$ εἶναι ὁ βαθμὸς ὑπερθερμάνσεως (§ 49). Ἂς ὑπολογίσωμεν τὴν ἐσωτερικὴν θερμότητα U τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ τῆς καταστάσεως M. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ ὁλοκληρώσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Clausius (6, § 28)



Σχ. 61

(2) $dU = dQ - Apdv$

θεωροῦντες, ὡς καὶ εἰς τὴν § 54, ὡς ἀρχικὴν κατάστασιν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ U τὴν κατάστασιν A_0 $[t_0 = 0,\ x_0 = 0]$, δηλαδὴ τὴν κατάστασιν τοῦ ὑγροῦ θερμοκρασίας $0^{\circ}C$. Ἐπειδὴ τὸ dU εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα

(3) $$U = \int_{A_0 M} dU = \int_{A_0 M} dQ - A\,pdv$$

εἶναι, δυνάμει τῆς προτάσεως β τῆς § 14, ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου $A_0 M$ τῆς ὁλοκληρώσεως. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐκλέξωμεν διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν (3) τὸν δρόμον $A_0 ABM$. Τότε τὸ $\int_{A_0 M} dQ$ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (6) τῆς § 53, ἡ ὁλικὴ θερμότης τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ· ἤτοι εἶναι

(4) $$\int_{A_0 M} dQ = Q = q + r + Q',$$

ὅπου Q' εἶναι αἱ θερμίδες αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν μετατροπὴν BM, δηλαδὴ διὰ τὴν μετατροπὴν ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν ἑνὸς χιλιογράμμου ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καταστάσεως B εἰς ὑπέρθερμον ἀτμὸν καταστάσεως M. Δυνάμει δὲ τοῦ τύπου (4) τῆς § 53 εἶναι

(5) $$Q' = \int_T^\Theta c' d\Theta.$$

Οὕτω ὁ τύπος (3) γράφεται

(6) $$U = q + r + \int_T^\Theta c' d\Theta - A \int_{A_0M} p dv.$$

Διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{A_0M} p dv$ ἔχομεν

$$\int_{A_0M} p dv = \int_{A_0A} p dv + \int_{AM} p dv.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ ὄγκου τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἐλαχίστη, δυνάμεθα, ὡς καὶ εἰς τὴν § 56, νὰ παραλείψωμεν τὸ $\int_{A_0}^{A} p dv = p(\sigma - \sigma_0)$ ἐνώπιον τοῦ $\int_{AM} p dv$. Τότε ἔχομεν

(7) $$\int_{A_0M} p dv = \int_{AM} p dv = p \int_{AM} dv = p\,(v - \sigma),$$

ὅπου υ εἶναι ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ καταστάσεως M καὶ σ ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ καταστάσεως A. Οὕτω ἡ ἔκφρασις (6) τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος γράφεται τελικῶς

(8) $$U = q + r + \int_T^\Theta c' d\Theta - Ap\,(v - \sigma).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται συνήθως καὶ ὡς ἑξῆς :

(9) $$U + Apv = q + r + Ap\sigma + \int_T^\Theta c' d\Theta.$$

Ἐὰν ἐντὸς τῆς περιοχῆς τῶν θερμοκρασιῶν T, Θ, δυνάμεθα κατὰ προσέγγισιν νὰ θεωρήσωμεν τὸ c' σταθερόν, ἡ ἔκφρασις (8) τῆς ἐσωτερικῆς θερμότητος θὰ γράφεται

(10) $$U = q + r + c'\,(\Theta - T) - Ap\,(v - \sigma).$$

Οὕτω προκειμένου περὶ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος δυνάμεθα, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 53, νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν c' = 0,5. Ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ τοῦ ὕδατος εἶναι λοιπὸν κατὰ προσέγγισιν

$$U = q + r + 0{,}5\,\tau - Ap\,(\upsilon - \sigma), \tag{11}$$

ὅπου

$$\tau = \Theta - T \tag{12}$$

εἶναι ὁ βαθμὸς ὑπερθερμάνσεως τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.

63. Τροπὴ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Ἄς ὑπολογίσωμεν τὴν τροπὴν S τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ καταστάσεως M [p, Θ = T + τ]. Ἔχομεν γενικῶς

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{1}$$

Ὡς ἀρχικὴν κατάστασιν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τροπῆς θὰ λάβωμεν, ὡς καὶ εἰς τὴν § 57, τὴν κατάστασιν A_0 ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$), δηλαδὴ τὴν κατάστασιν τοῦ ὑγροῦ θερμοκρασίας 0°C. Ὁλοκληροῦντες τὴν (1) ἀπὸ A_0 ἕως M, λαμβάνομεν

$$S = \int\limits_{A_0M} \frac{dQ}{T}. \tag{2}$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο, ἐπειδὴ τὸ $\frac{dQ}{T}$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικόν, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου A_0M· δυνάμεθα λοιπὸν ὡς δρόμον τῆς ὁλοκληρώσεως νὰ λάβωμεν τὸν A_0ABM (σχ. 61). Τότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν

$$S = \int\limits_{A_0M} \frac{dQ}{T} = \int\limits_{A_0A} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{AB} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{BM} \frac{dQ}{T}. \tag{3}$$

Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 57, εἶναι

$$S' = \int\limits_{A_0A} \frac{dQ}{T} = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{m\,dt}{T} \tag{4}$$

καὶ

$$S - S' = \int\limits_{AB} \frac{dQ}{T} = \frac{r}{T}. \tag{5}$$

Τέλος εἶναι

$$\int\limits_{BM} \frac{dQ}{T} = \int_T^\Theta \frac{c'\,d\Theta}{\Theta}. \tag{6}$$

Οὕτω ἡ (3) γράφεται

$$S = \frac{r}{T} + \int_0^t \frac{m\,dt}{T} + \int_T^\Theta \frac{c'\,d\Theta}{\Theta}. \tag{7}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς τροπῆς τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ πιέσεως p καὶ θερμοκρασίας Θ. Ὅταν δίδεται ἡ πίεσις p, ἐκ τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (1) τοῦ ἀντιστοίχου ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι γνωστὴ ἡ θερμοκρασία T καὶ $t = T - 273$. Ἐπίσης ἐκ τῶν σχετικῶν πινάκων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν $\frac{r}{T}$ καὶ $\int_0^t \frac{m dt}{T} = \int_0^t \frac{dq}{T} = S'$. Ὑπολείπεται λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν συνάρτησιν $c' = c'(\Theta)$, διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (7) τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς τροπῆς.

Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 57 τὸ ἄθροισμα

$$\frac{r}{T} + \int_0^t \frac{m dt}{T} = S_B \tag{8}$$

εἶναι ἡ τροπὴ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ καταστάσεως B. Οὕτω ἡ (7) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$S = S_B + \int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta}. \tag{9}$$

Ἡ αὔξησις λοιπὸν τῆς τροπῆς κατὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπὴν ἑνὸς χιλιογράμμου ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ θερμοκρασίας T εἰς ὑπέρθερμον ἀτμὸν θερμοκρασίας Θ εἶναι

$$\Delta S = S - S_B = \int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta}. \tag{10}$$

Ἡ ἐξίσωσις (9) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἰσοθλίπτου μετατροπῆς τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν (S, Θ), δηλαδὴ εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα. Ἐὰν δεχθῶμεν κατὰ προσέγγισιν, ὅτι τὸ c′ εἶναι εἰς τὴν περιοχὴν μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν T καὶ Θ σταθερόν, τότε θὰ ἔχωμεν

$$\int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta} = c' \int_T^\Theta \frac{d\Theta}{T} = c' \log \frac{\Theta}{T}. \tag{11}$$

τότε ἡ ἐξίσωσις (9) γράφεται

$$S = S_B + c' \log \frac{\Theta}{T}. \tag{12}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῶν ἰσοθλίπτων μετατροπῶν τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν S, Θ, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ὁ συντελεστὴς c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ εἶναι σταθερός. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (12) δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εὐκόλως τὸ τροπικὸν διάγραμμα τῆς ἰσοθλίπτου μετατροπῆς ($dp = 0$) τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Τῷ ὄντι εἰς τὴν πίεσιν p ἀντιστοιχεῖ, δυνάμει τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ, ἡ θερμοκρασία T.

Ἐὰν δὲ φέρωμεν εἰς τὸ τροπικὸν διάγραμμα (σχ. 59) τὴν ἰσόθλιπτον ΑΒ(Τ), θὰ προσδιορίσωμεν ἐπὶ τῆς καμπύλης Ξ_τ τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον ἔχει τροπὴν S_B· τὸ σημεῖον Β θὰ εἶναι τὸ ἀφετηριακὸν σημεῖον τῆς ἰσοθλίπτου ($dp=0$) τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖα τῆς καμπύλης ταύτης, ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ Θ διαφόρους τιμάς, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν Νεπέρειον λογάριθμον $\log \frac{\Theta}{T}$ καὶ περαιτέρω τὸ $c' \log \frac{\Theta}{T}$. Ἐὰν λάβωμεν, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχῆμα (59), $(\beta\eta) = c' \log \frac{\Theta}{T}$ καὶ $(\eta H) = \Theta$, τὸ σημεῖον Η θὰ εἶναι σημεῖον τῆς ζητουμένης ἰσοθλίπτου ΒΗ.

64. *Συντελεστὴς c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.* Ὡς εἴδομεν εἰς τὰς παραγράφους 53, 62, 63, διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θερμότητα ὑπερθερμάνσεως Q', τὴν ἐσωτερικὴν θερμότητα U καὶ τὴν τροπὴν S τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ διά τινα πίεσιν p, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν συνάρτησιν $c' = c'(\Theta)$. Τὸ c' μεταβάλλεται οὐχὶ μόνον μετὰ τῆς θερμοκρασίας, ἀλλὰ καὶ μετὰ τῆς πιέσεως οὕτως, ὥστε, προκειμένου νὰ μελετήσωμεν τυχοῦσαν μετατροπὴν τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν συνάρτησιν

$$c' = c'(\Theta, p), \tag{1}$$

ὅπου c' εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p. Ἡ συνάρτησις ὅμως αὕτη δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ ἀναγκαζόμεθα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ c' νὰ καταφύγωμεν εἰς ἐμπειρικοὺς τύπους· οἱ τύποι οὗτοι εἶναι ἀποτελέσματα πειραματικῶν ἐρευνῶν.

Αἱ πειραματικαὶ μέθοδοι προσδιορισμοῦ τοῦ c' στηρίζονται ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως (4, § 53), ἤτοι τῆς ἐξισώσεως

$$dQ = c'd\Theta. \tag{2}$$

Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ συντελεστὴς c' τῆς εἰδικῆς θερμότητος διὰ πολὺ μικρὰς μεταβολὰς θερμοκρασίας $\Delta\Theta_\varkappa = \Theta_{\varkappa+1} - \Theta_\varkappa$ ἐπὶ τῆς ἰδίας ἰσοθλίπτου (p) εἶναι σταθερός, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν σειρὰν τιμῶν τοῦ c' ἐκ τῆς σχέσεως

$$c'_\varkappa = \frac{\Delta Q}{\Delta\Theta_\varkappa}. \tag{3}$$

Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν διαφόρους τιμὰς τοῦ c' ἀντιστοίχους εἰς τὰς διαφόρους θερμοκρασίας τῆς ἰδίας ἰσοθλίπτου. Πειραματιζόμενοι δὲ κατὰ μῆκος διαφόρων ἰσοθλίπτων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ c' διὰ τὰς διαφόρους θερμοκρασίας καὶ τὰς διαφόρους πιέσεις.

Τὴν μέθοδον ταύτην ἠκολούθησε πρῶτος ὁ Regnault τὸ ἔτος 1862, ὁ ὁποῖος ἐπειραματίσθη ἐπὶ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ ὕδατος. Ὁ Regnault κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι διὰ τὸν ὑπέρθερμον ὑδρατμὸν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ c' σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς 0,5 Cal. Μεταγενέστεροι τοῦ Regnault πειραματισταί, ὅπως εἶναι οἱ Jakob, Knoblauch, Raisch, Hausen καὶ ἄλλοι, ἐξετέλεσαν λεπτομερέστερα πειράματα, ἀκολουθήσαντες ὅμως πάντοτε τὴν ἰδίαν πειραματικὴν μέθοδον τοῦ Regnault.

Κατόπιν μακρᾶς σειρᾶς πειραμάτων ἐπὶ ὑπερθέρμων ἀτμῶν ὕδατος μεταξὺ θερμοκρασιῶν 194° ἕως 314°C, ἢ $\Theta = 194 + 273 = 467$ ἕως $314 + 273 = 587$°K, καὶ πιέσεων $p = 2$ ἕως 9 kg/cm² κατέληξαν εἰς τὰ ἑξῆς δύο συμπεράσματα:

α. Ὁ συντελεστὴς c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ἐλαττοῦται, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνῃ· καὶ

β. Ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν τὸ c′ αὐξάνει μετὰ τῆς πιέσεως.

Ἐπὶ τῇ βάσει τούτων κατέληξαν εἰς τὴν ἑξῆς ἐμπειρικὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως c′ διὰ τὸν ὑπέρθερμον ὑδρατμόν:

(4) $$c' = 0{,}430 + 3600000\,\frac{p}{\Theta^3}\cdot$$

Ἐπίσης ὁ Hausen ἐκ τῆς συγκριτικῆς μελέτης τῶν ἐξαγομένων τῶν πειραμάτων τῶν Knoblauch καὶ Raisch ἔδωσε τὴν ἑξῆς ἔκφρασιν τοῦ c′

(5) $$c' = f(\Theta) + \frac{\alpha}{\Theta - \varphi(p)},$$

ὅπου α εἶναι σταθερά, f(Θ) συνάρτησις μόνον τῆς θερμοκρασίας καὶ φ(p) συνάρτησις μόνον τῆς πιέσεως. Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς α καὶ ἡ ἔκφρασις τῶν συναρτήσεων f(Θ), φ(p) ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ.

Ἡ σύγχρονος βιομηχανία συνέταξε διὰ τὸν ὑπέρθερμον ὑδρατμὸν γραφικοὺς πίνακας (σχ. 62), ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους εἰς τὰς πιέσεις p καὶ θερμοκρασίας $t = \Theta - 273$, τιμὰς τοῦ c′. Κατὰ τὴν σύνταξιν τῶν πινάκων τούτων ἐλήφθησαν ὑπ᾿ ὄψει πρὸ πάντων τὰ ἐξαγόμενα τῶν πειραμάτων τοῦ Jakob. Τὰ ἀφετηριακὰ σημεῖα, ὡς εἶναι τὰ σημεῖα 1, 2, 6... τῶν καμπύλων $p =$ σταθερὸν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ὁριακὰς τιμὰς τοῦ c′ διὰ $\Theta = T$, δηλαδὴ εἰς τὴν κατάστασιν τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ. Οὕτω, ὅταν προβάλωμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα Ot τὸ ἀφετηριακὸν σημεῖον (10) τῆς καμπύλης $p = 10$ kg/cm², θὰ εὕρωμεν $t = 179$°C, δηλαδὴ τὴν ἀντίστοιχον θερμοκρασίαν τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἰς τὴν πίεσιν $p = 10$ kg/cm². Ἡ δὲ τεταγμένη τοῦ σημείου (10) δίδει ὑπὸ τὴν κλίμακα τοῦ πίνακος τὸν συντελεστὴν $c' = 0{,}61$ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ πιέσεως $p = 10$ kg/cm². Τέλος τὸ μῆκος (ν′ν) δίδει τὸν συντελεστὴν $c' = 0{,}53$ τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ πιέσεως $p = 10$ kg/cm² καὶ θερμοκρασίας $t = 250$°C, ἢ $\Theta = 250 + 273 = 523$°K.

Ἐκ τῆς μελέτης τοῦ σχήματος τῶν καμπύλων $p =$ σταθερὸν (σχ. 62) καταλήγομεν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

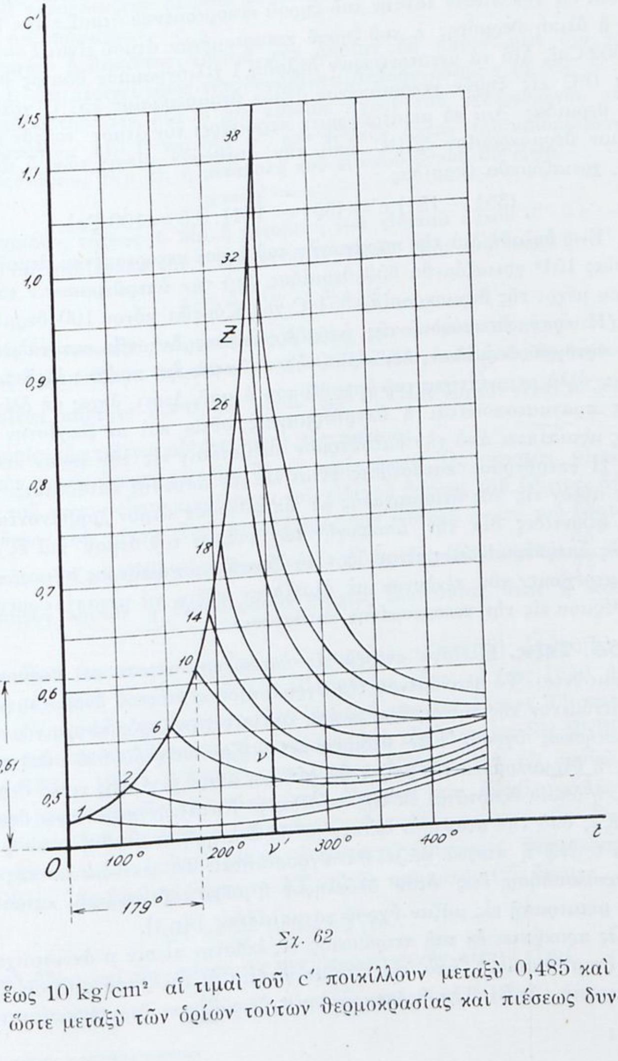
α. Ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν ὁ συντελεστὴς c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος αὐξάνει μετὰ τῆς πιέσεως· ἤτοι εἶναι $\frac{dc'}{dp} > 0$.

β. Ἡ αὔξησις Δc′ τοῦ c′, ἡ ἀντίστοιχος εἰς σταθερὰν αὔξησιν Δp τῆς πιέσεως, εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον εἴμεθα πλησιέστερον πρὸς τὴν ξηρὰν κεκορεσμένην κατάστασιν.

γ. Ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν p τὸ c′ ἐλαττοῦται κατ᾿ ἀρχάς, ἐφ᾿ ὅσον ἡ θερμοκρασία αὐξάνει μέχρι τιμῆς τινὸς t΄. Πέραν τοῦ t΄ τὸ c΄ αὐξάνει μετὰ τῆς θερμοκρασίας.

δ. Εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς ὑπερθερμάνσεως τὸ c΄ αὐξάνει ταχέως μετὰ τῆς πιέσεως· καὶ

ε. Μεταξὺ τῶν ὁρίων θερμοκρασίας $t = 250^{\circ}$ ἕως $350^{\circ}C$ καὶ πιέσεως



Σχ. 62

$p = 5$ ἕως $10\ kg/cm^2$ αἱ τιμαὶ τοῦ c΄ ποικίλλουν μεταξὺ 0,485 καὶ 0,530 οὕτως, ὥστε μεταξὺ τῶν ὁρίων τούτων θερμοκρασίας καὶ πιέσεως δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως τὴν ὑπὸ τοῦ Regnault δοθεῖσαν τιμὴν $c' = 0{,}5$ Cal.

Δυνάμει λοιπὸν τῶν ἀνωτέρω ἐξαγομένων δυνάμεθα εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς, ἐφ' ὅσον εἴμεθα ἐντὸς τῶν συνήθων ὁρίων πιέσεως καὶ θερμοκρασίας, νὰ λαμβάνωμεν διὰ τὸν ὑπέρθερμον ὑδρατμὸν $c' = 0{,}5$.

Ἂς λάβωμεν ὑδρατμὸν πιέσεως 5 ἀτμοσφαιρῶν. Ἡ ἀντίστοιχος θερμοκρασία εἰς τὴν πίεσιν ταύτην τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι $t = 151^\circ C$ καὶ ἡ ὁλικὴ θερμότης λ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἶναι $\lambda = q + r = 652$ Cal. Διὰ νὰ μετατρέψωμεν δηλαδὴ 1 χιλιόγραμμον ὕδατος θερμοκρασίας $0^\circ C$ εἰς ξηρὸν κεκορεσμένον ἀτμὸν θερμοκρασίας $151^\circ C$ χρειαζόμεθα 653 θερμίδας. Διὰ νὰ μετατρέψωμεν περαιτέρω τὸν ἀτμὸν τοῦτον εἰς ὑπέρθερμον θερμοκρασίαν $351^\circ C$, ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν τῶν 5 ἀτμοσφαιρῶν, χρειαζόμεθα θερμίδας

$$(351 - 151)\, c' = (351 - 151) \,.\, 0{,}5 = 100 \text{ Cal.}$$

Ἐνῷ δηλαδὴ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ θερμοκρασίας 151° χρειαζόμεθα 653 θερμίδας, διὰ τὴν ὑπερθέρμανσιν τοῦ ἀτμοῦ τούτου μέχρι τῆς θερμοκρασίας $351^\circ C$ χρειαζόμεθα μόνον 100 θερμίδας.

Ἡ πραγματοποίησις τῆς ὑπερθερμάνσεως διὰ τῆς καταναλώσεως μικροῦ ἀριθμοῦ θερμίδων, δὲν εἶναι, ὡς φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως, πλεονέκτημα, ἀλλὰ μειονέκτημα τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Διότι, ὅπως μὲ ὀλίγας θερμίδας πραγματοποιεῖται ἡ ὑπερθέρμανσις, οὕτω καὶ μὲ ἐλαχίστην ψῦξιν ὁ ἀτμὸς μεταπίπτει ἀπὸ τὴν ὑπέρθερμον κατάστασιν εἰς τὴν ξηρὰν κεκορεσμένην. Ἡ ὑπέρθερμος κατάστασις εἶναι λοιπὸν ἀσταθὴς κατάστασις. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν εἰς τὰς ἀτμομηχανὰς μὲ ὑπέρθερμον ἀτμὸν λαμβάνονται ἰδιαίτεραι φροντίδες διὰ τὴν ἀποφυγὴν τῶν ψύξεων τοῦ ἀτμοῦ· καὶ ἐξ ἄλλου ὁ βαθμὸς ὑπερθερμάνσεως εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλύτερος οὕτως, ὥστε νὰ μὴ διατρέχωμεν τὸν κίνδυνον μὲ ἐλαχίστην ψῦξιν νὰ μεταπίπτωμεν ἐκ τῆς ὑπερθέρμου εἰς τὴν κεκορεσμένην κατάστασιν.

65. Τῆξις. Πλεῖστα στερεὰ εἰς ὡρισμένην πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν ὑγροποιοῦνται. Τὸ φαινόμενον τῆς ὑγροποιήσεως στερεοῦ ὀνομάζομεν τῆξιν. Τὸ φαινόμενον τῆς τήξεως ἔχει πλήρη ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ φαινόμενον τῆς ἀτμοποιήσεως ὑγροῦ. Ἐὰν θερμάνωμεν μᾶζαν στερεοῦ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν p, ἡ θερμοκρασία τῆς μάζης θὰ αὐξήσῃ μέχρι μεγίστης τινὸς θερμοκρασίας t, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς πιέσεως p. Κατὰ τὴν περαιτέρω θέρμανσιν τῆς μάζης ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p θὰ διατηρῆται σταθερὰ καὶ ἡ θερμοκρασία t, ἐνῷ ἡ στερεὰ μᾶζα θὰ ὑγροποιῆται. Τὸ φαινόμενον τῆς τήξεως θὰ ἐξακολουθήσῃ, ἕως ὅτου ὁλόκληρος ἡ μᾶζα τοῦ στερεοῦ, καταστάσεως $A(p,t)$ μετατραπῇ εἰς μᾶζαν ὑγροῦ καταστάσεως $B(p,t)$.

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ πειράματος, εἰς ἑκάστην πίεσιν p ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη θερμοκρασία t, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ τῆξις τοῦ στερεοῦ, δηλαδὴ ἡ μετατροπὴ (A, B). Τὴν θερμοκρασίαν t ὀνομάζομεν θερμοκρασίαν τήξεως.

Τὴν κατάστασιν A(p, t) τοῦ στερεοῦ ὀνομάζομεν κεκορεσμένην στερεὰν κατάστασιν καὶ τὴν κατάστασιν B(p, t) τοῦ ὑγροῦ ὀνομάζομεν κεκορεσμένην ὑγρὰν κατάστασιν.

Ὀνομάζομεν θερμότητα τήξεως τὸ ποσὸν τῶν θερμίδων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν μετατροπὴν ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν μάζης ἑνὸς χιλιογράμμου σώματος ἐκ τῆς κεκορεσμένης στερεᾶς καταστάσεως εἰς τὴν ὑγρὰν κεκορεσμένην κατάστασιν τοῦ σώματος.

Κατὰ ταῦτα ἡ θερμότης τήξεως, τὴν ὁποίαν θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος r, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν θερμότητα ἀτμοποιήσεως r (§ 53).

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ υ' τὸν εἰδικὸν ὄγκον τοῦ κεκορεσμένου στερεοῦ, καταστάσεως A(p, t) καὶ διὰ υ'' τὸν εἰδικὸν ὄγκον τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, καταστάσεως B(p, t), ἡ μεταβολὴ τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου θὰ εἶναι

(1) $$u = \upsilon'' - \upsilon'.$$

Ἡ θερμότης τήξεως r καὶ ἡ μεταβολὴ τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου $\upsilon'' - \upsilon' = u$ συνδέονται διὰ τοῦ τύπου τοῦ Clapeyron (7, § 55)˙ ἤτοι τοῦ τύπου

(2) $$r = AT\,(\upsilon'' - \upsilon')\,\frac{dp}{dT}.$$

Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις ἡ τῆξις συνοδεύεται μὲ ἀντίστοιχον αὔξησιν τοῦ ὄγκου. Εἶναι δηλαδὴ $\upsilon'' - \upsilon' > 0$˙ ἐξ ἄλλου, ἐπειδή, ὡς δεικνύει τὸ πείραμα, εἶναι πάντοτε $r > 0$, θὰ εἶναι $\frac{dp}{dT} > 0$. Ὅταν λοιπὸν εἶναι $\upsilon'' > \upsilon'$, ἡ θερμοκρασία τῆς τήξεως αὐξάνει μετὰ τῆς πιέσεως.

Διὰ τὸν πάγον ἔχομεν τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν. Ὡς γνωστόν, τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πάγου εἶναι μικρότερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὕδατος˙ ὅθεν ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ πάγου εἶναι μεγαλύτερος τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου τοῦ ὕδατος. Εἶναι λοιπὸν $\upsilon'' < \upsilon'$˙ ἀλλὰ τότε, ἐπειδὴ $r > 0$, ἐκ τῆς (2) θὰ εἶναι $\frac{dp}{dT} < 0$. Εἰς τὸν πάγον λοιπὸν ἡ θερμοκρασία τήξεως ἐλαττοῦται, ὅταν ἡ πίεσις αὐξάνῃ.

Εἶναι ἄξιον παρατηρήσεως ὅτι τὸν ἀνωτέρω τύπον (2), ὁ ὁποῖος ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 36 ὀφείλεται εἰς τὸν Clapeyron εὗρε τὸ ἔτος 1849, ἀλλὰ μόνον διὰ τὴν μερικὴν περίπτωσιν τῆς τήξεως, ὁ φυσικὸς James Thomson. Ὁ ἀδελφὸς τοῦ James Thomson, ὁ μέγας φυσικὸς τῆς Ἀγγλίας Sir William Thomson (1824 - 1907), ὁ βραδύτερον λόρδος Kelvin, ἐπὶ τῷ σκοπῷ νὰ ἐπαληθεύσῃ πειραματικῶς τὸν τύπον τοῦ ἀδελφοῦ του, ἐξετέλεσεν ἀκριβέστατα πειράματα ἐπὶ τῆς τήξεως τοῦ πάγου˙ εὗρε δὲ πειραματικῶς ὅτι εἰς αὔξησιν πιέσεως $\Delta p = 1$ ἀτμόσφαιρα, ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις θερμοκρασίας $\Delta T = 0^{\circ},0075$. Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ΔT καὶ ἐκ τοῦ τύπου (2)˙ ἔχομεν

(3) $$\Delta T = \frac{AT}{r}\,(\upsilon'' - \upsilon')\,\Delta p.$$

Διὰ τὸ ὕδωρ καὶ τὸν πάγον εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἶναι

$$t_0 = 0^{\circ}C, \quad \upsilon'' = \frac{1}{1000}\,m^3, \quad \upsilon' = \frac{1,09}{1000}\,m^3, \quad r = 80\ Cal.$$

Ὅταν ὁ εἰδικὸς ὄγκος λαμβάνεται εἰς m^3, ἡ πίεσις θὰ ληφθῇ εἰς kg/m^2· ἐξ ἄλλου εἶναι $A = \frac{1}{427}$. Ὁ τύπος (3) γράφεται

$$\Delta T = \frac{273}{427.80}\,\frac{1-1{,}09}{1000}\cdot 10000 = -\,\frac{273.0{,}09}{427.8} = -\,0{,}0072.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ τύπου (2) συμφωνεῖ μετὰ μεγάλης προσεγγίσεως πρὸς τὰ δεδομένα ἐκ τοῦ πειράματος.

Ὡς εἴδομεν (§ 56, II), ἡ θερμότης ἀτμοποιήσεως r ἐλαττοῦται, ὅταν ἡ θερμοκρασία αὐξάνῃ. Ἀντιθέτως ἡ θερμότης τήξεως r αὐξάνει μετὰ τῆς θερμοκρασίας. Τὸ δεδομένον τοῦτο δεικνύει ὅτι, ἐὰν κατασκευάσωμεν διὰ τὸ φαινόμενον τῆς τήξεως καμπύλας ἀναλόγους πρὸς τὰς καμπύλας Υ καὶ Ξ (σχ. 54), αἱ καμπύλαι τοῦ κεκορεσμένου στερεοῦ καὶ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ δὲν θὰ πλησιάζουν πρὸς ἀλλήλας, διὰ νὰ ἔχουν ἓν κοινὸν κρίσιμον σημεῖον.

Τὸ ἀντίστροφον φαινόμενον τῆς τήξεως, δηλαδὴ τὸ φαινόμενον τῆς μετατροπῆς ἐκ τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως εἰς τὴν στερεάν, ὀνομάζομεν πῆξιν. Τὰ φαινόμενα τῆς τήξεως, τῆς ὑπερτήξεως, τῆς πήξεως, ὡς καὶ τῆς ἐξαερώσεως τῶν στερεῶν ἐξετάζονται λεπτομερῶς εἰς τὴν φυσικήν.

Ἀσκήσεις

1. Μᾶζα ἑνὸς χιλιογράμμου ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ ὕδατος ἀποτονοῦται ἀδιαθέρμως ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς καταστάσεως $A_1(t_1 = 200^\circ C)$ μέχρι τῆς τελικῆς καταστάσεως $A_2(t_2 = 100^\circ C)$.

Δίδονται:

Ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ $m = 1$ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ λανθάνουσα θερμότης τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ $\varrho_1 = 417{,}17$ Cal (διὰ $t_1 = 200^\circ C$), $\varrho_2 = 496{,}29$ Cal (διὰ $t_2 = 100^\circ C$).

Ζητοῦνται:

α. Ὁ τίτλος x_2 τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὴν κατάστασιν A_2· καὶ

β. Τὸ ἀποδιδόμενον κατὰ τὴν ἀποτόνωσιν A_1A_2 μηχανικὸν ἐξωτερικὸν ἔργον E_ξ.

α. Τὸν τίτλον x_2 εἰς τὸ τέλος τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως, ὑπολογίζομεν δυνάμει τοῦ τύπου (12) τῆς § 57. Ἐπειδὴ εἰς τὴν κατάστασιν A_1 ὁ ἀτμὸς εἶναι ξηρὸς κεκορεσμένος, θὰ εἶναι $x_1 = 1$. Ὁ τύπος λοιπὸν (12, § 57) γράφεται ἐνταῦθα

$$\frac{r_2 x_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1} = m \log \frac{T_1}{T_2}. \tag{1}$$

Ἔχομεν

$$T_2 = t_2 + 273 = 373^\circ K,\ T_1 = t_1 + 273 = 473^\circ K.$$

$$r_2 = 606{,}5 - 0{,}695.t_2 = 606{,}5 - 0{,}695.100 = 537 \text{ Cal}.$$

$$r_1 = 606{,}5 - 0{,}695.t_1 = 606{,}5 - 0{,}695.200 = 567{,}5 \text{ Cal}.$$

Ὁ τύπος (1) μᾶς δίδει

$$x_2 = \frac{T_2}{r_2}\left(\frac{r_1}{T_1} + m \log \frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{373}{537}\left(\frac{467,5}{473} + \log \frac{473}{373}\right).$$

Ἐκ τῶν πινάκων τῶν Νεπερείων λογαρίθμων εὑρίσκομεν

$$\log 473 = 6,15910, \quad \log 373 = 5,92158.$$

Ὅθεν

$$x_2 = \frac{373}{537}\left(\frac{467,5}{473} + 0,23752\right) = 0,851.$$

β. Ὁ ἀτμὸς εἰς τὴν κατάστασιν A_1 ἔχει ὁλικὴν θερμότητα $\lambda_1 = q_1 + r_1$ καὶ εἰς τὴν κατάστασιν A_2 ἔχει ὁλικὴν θερμότητα $\lambda_2 = q_2 + r_2x_2$ (§ 53). Αἱ θερμίδες $(q_1 + r_1) - (q_2 + r_2x_2)$ καταναλίσκονται ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου τῶν πιέσεων κατὰ τὴν αὔξησιν τοῦ ὄγκου καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ἐξωτερικοῦ ἔργου E_ξ. Ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ ἀτμοῦ εἰς τὴν κατάστασιν A_1 εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (3, § 50), $\upsilon_1 = \sigma_1 + u_1$ καὶ εἰς τὴν κατάστασιν A_2 εἶναι $\upsilon_2 = \sigma_2 + u_2x_2$. Ἡ μεταβολὴ ὅθεν τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου εἶναι, ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $\sigma_1 - \sigma_2$ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ δύναται νὰ παραλειφθῇ, $\upsilon_1 - \upsilon_2 = u_1 - u_2x_2$. Ἀντιστοίχως ἡ μεταβολὴ τῆς λανθανούσης ἐξωτερικῆς θερμότητος (§ 56) εἶναι $A(p_1u_1 - p_2u_2x_2)$. Ἡ διαφορὰ $p_1u_1 - p_2u_2x_2$ εἶναι τὸ ἔργον τῶν πιέσεων διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου ἀπὸ υ_1 εἰς υ_2. Ὅθεν, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ E_ξ τὸ ἀποδιδόμενον κατὰ τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν A_1A_2 ἐξωτερικὸν ἔργον, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1 - \lambda_2 = A\,(p_1u_1 - p_2u_2x_2) + AE_\xi .$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$E_\xi = \frac{1}{A}(\lambda_1 - \lambda_2) - (p_1u_1 - p_2u_2x_2)$$

ἢ

$$E_\xi = \frac{1}{A}(q_1 + r_1 - q_2 - r_2x_2) - (p_1u_1 - p_2u_2x_2).$$

Ἀλλὰ εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (8, § 56),

$$r_1 = Ap_1u_1 + \varrho_1, \quad r_2 = Ap_2u_2 + \varrho_2.$$

Ὅθεν

(2) $$E_\xi = \frac{1}{A}\left[(q_1 + \varrho_1) - (q_2 + \varrho_2x_2)\right].$$

Ὁ τύπος οὗτος, δυνάμει τῶν τύπων (11), (14) τῆς § 56, γράφεται

(3) $$E_\xi = \frac{1}{A}(U_1 - U_2).$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, ἐφαρμόζοντες διὰ τὴν ἀδιάθερμον μετατροπὴν A_1A_2 $(dQ = 0)$ ἀπ' εὐθείας τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Clausius (10, § 28). Ἔχομεν δυνάμει τῶν δεδομένων τῆς ἀσκήσεως

$$U_1 = q_1 + \varrho_1 = 200 + 417,17 = 617,17 \text{ Cal.}$$

$$U_2 = q_2 + \varrho_2x_2 = 100 + 496,29\ 0,851 = 521,85.$$

Εἶναι λοιπὸν

$$E_\xi = 427\,(617,17 - 521,85) = 40671,64 \text{ Kgm.}$$

2. Ἐντὸς κυλίνδρου κλειομένου ὑπὸ κινητοῦ ἐμβόλου θεωροῦμεν μᾶζαν ἑνὸς χιλιογράμμου κεκορεσμένου ὕδατος εἰς ἀρχικὴν κατάστασιν $A_1(p_1 = 1\ kg/cm^2,\ t_1 = 100^oC)$. Ἡ μᾶζα αὕτη διαγράφει κλειστὴν μετατροπὴν ἀποτελουμένην ἀπὸ τὰς ἑξῆς τέσσαρας τμηματικὰς μετατροπάς:

I. Τὴν μετάτροπὴν A_1A_2 κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης Υ τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, ὅπου εἶναι $A_2(t_2 = 200^oC)$.

II. Τὴν ἰσόθερμον μετατροπὴν A_2A_3, ὅπου εἶναι $A_3(t_3 = t_2 = 200^oC)$.

III. Τὴν ἀδιάθερμον ἀποτόνωσιν A_3A_4, ὅπου εἶναι $A_4\,(t_4 = t_1 = 100^oC,\ x_4)$· καὶ

IV. Τὴν ἰσόθερμον A_4A_1, ἡ ὁποία φέρει ἐκ τῆς καταστάσεως A_4 εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν A_1.

Ζητοῦνται:

α. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ διὰ τοῦ σημείου A_3 διερχομένη ἀδιάθερμος συναντᾷ τὴν καμπύλην Ξ τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ εἰς τὸ σημεῖον $A'(t' = 240^oC)$, νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος x_3 τοῦ ὑγροῦ ἀτμοῦ εἰς τὴν κατάστασιν A_3.

β. Ὁ τίτλος x_4 εἰς τὴν κατάστασιν A_4.

γ. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον καὶ ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀδιαθέρμου A_3A_4 εἶναι $p\upsilon^{1,14} =$ σταθερόν, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ βαθμὸς $\mu = \frac{\upsilon_4}{\upsilon_3}$ τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως A_3A_4. Τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον δυνάμεθα νὰ κάμωμεν, διότι, ὡς θὰ προκύψῃ ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων, οἱ τίτλοι x_3 καὶ x_4 διαφέρουν ὀλίγον τῆς μονάδος οὕτως, ὥστε ἡ καμπύλη A_3A_4 εἶναι πολὺ πλησίον τῆς καμπύλης τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ.

δ. Τέλος νὰ ὑπολογισθῇ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου $C(A_1A_2A_3A_4A_1)$.

α. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (12) τῆς § 57 διὰ τὴν ἀδιάθερμον A_3A', λαμβάνομεν

$$\frac{r_3x_3}{T_3} - \frac{r'}{T'} = \log\frac{T'}{T_3}. \tag{1}$$

Ἐντεῦθεν

$$x_3 = \frac{T_3}{r_3}\left[\frac{r'}{T'} + \log\frac{T'}{T_3}\right]. \tag{2}$$

Ἔχομεν

$$T_3 = 473^oK,\quad T' = 240 + 273 = 513^oK,$$
$$r_3 = 606{,}5 - 0{,}695.200 = 467{,}5\ \text{Cal.}$$
$$r' = 606{,}5 - 0{,}695.240 = 439{,}7\ \text{Cal.}$$
$$\log T' = \log 513 = 6{,}24028,\quad \log T_3 = \log 473 = 6{,}15910.$$

Ὅθεν εἶναι

$$x_3 = \frac{473}{467{,}5}\left(\frac{439{,}7}{513} + 6{,}24028 - 6{,}15910\right) = 0{,}95. \tag{3}$$

β. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀδιάθερμος A_3A_4, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ A_3

διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ σημείου Α′. Ὅθεν ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{r_4 x_4}{T_4} - \frac{r'}{T'} = \log\frac{T'}{T_4}.$$

Ἐπειδὴ ἡ A_4A_1 εἶναι ἰσόθερμος ($t_4 = t_1 = 100^\circ C$), θὰ εἶναι

$$r_4 = r_1 = 606{,}5 - 0{,}695.100 = 537 \text{ Cal}.$$

$$T_4 = T_1 = 100 + 273 = 373^\circ K., \quad \log 373 = 5{,}92158.$$

Εἶναι λοιπὸν

(4) $$x_4 = \frac{T_4}{r_4}\left(\frac{r'}{T'} + \log\frac{T'}{T_4}\right) = \frac{373}{537}\left(\frac{439{,}7}{513} + 6{,}24028 - 5{,}92158\right) = 0{,}817.$$

γ. Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς A_3A_4 εἶναι $pυ^{1,14}$ = σταθερόν, ἔχομεν

(5) $$p_4 υ_4^{1,14} = p_3 υ_3^{1,14}.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος τῆς A_3A_4 ὁ ὑγρὸς ἀτμὸς ἐξομοιοῦται πρὸς τέλειον ἀέριον, εἶναι

(6) $$p_4 υ_4 = RT_4, \quad p_3 υ_3 = RT_3.$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν

$$\mu = \frac{υ_4}{υ_3} = \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{0,14}} = \left(\frac{473}{373}\right)^{\frac{1}{0,14}}.$$

Εὑρίσκομεν

$$λογ\,\mu = \frac{1}{0{,}14}(λογ\,473 - λογ\,373) = \frac{0{,}10315}{0{,}14} = 0{,}73679,$$

(7) $$\mu = 5{,}45.$$

δ. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου C εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (1, § 41),

(8) $$\eta_\theta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ρευστὴ μᾶζα κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου C ἀπορροφᾷ θερμίδας Q_1 κατὰ τὰς μετατροπὰς A_1A_2, A_2A_3· καὶ ἀποδίδει θερμίδας Q_2 κατὰ τὴν μετατροπὴν A_4A_1. Ἔχομεν

$$Q_1 = (q_2 - q_1) + r_3 x_3 = 200 - 100 + 467{,}5.0{,}95 = 544{,}125 \text{ Cal}.$$

Καὶ κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν

$$Q_2 = r_4 x_4 = 537.0{,}817 = 438{,}730.$$

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως εἶναι

$$\eta_\theta = 1 - \frac{438{,}730}{544{,}125} = 0{,}194.$$

3. Δίδονται διὰ τὸ θειῶδες ὀξὺ (H_2SO_3) τὰ ἑξῆς θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα:

I.	Θερμοκρασία	$t^\circ =$	-5°,	0°	$+5^\circ C$
	Πίεσις	$p =$	1,29,	1,58	1,93 Kg/cm²
	Θερμότης ἀτμοποιήσεως	$r =$	92,27,	90,82	89,25 Cal.

II. Ὁ εἰδικὸς ὄγκος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t = 0^\circ C$ εἶναι $\sigma = 0{,}0007$ m³/kg· καὶ ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t=0^{\circ}C$ εἶναι $m=0,3194$.

Ζητοῦνται:

α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ εἰδικὸς ὄγκος s τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ θειώδους ὀξέως εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t=0^{\circ}C$· καὶ

β. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς m_1 τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ξηροῦ κεκορεσμένου ἀτμοῦ τοῦ θειώδους ὀξέως εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t=0^{\circ}C$.

α. Τὸ s θὰ ὑπολογίσωμεν δυνάμει τοῦ τύπου (10) τῆς § 55, ἤτοι τοῦ τύπου

(1) $$s=\sigma+\frac{r}{AT\frac{dp}{dT}}.$$

Ἐπειδὴ τὸ s ζητεῖται εἰς τὴν θερμοκρασίαν $t=0^{\circ}C$, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω δεδομένων,

(2) $$s=0,0007+\frac{90,82}{\frac{1}{427}\cdot 273\cdot\frac{dp}{dT}}.$$

Ἐπειδὴ δὲν δίδεται ἡ συνάρτησις $p=f(t)$, προσδιορίζομεν τὸ $\frac{dp}{dT}$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων (I) ὡς ἑξῆς:

Διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ -5° ἕως $0^{\circ}C$, ἔχομεν $\Delta p=1,58-1,29=0,29$ καὶ $\Delta T=5$· ὅθεν

$$\frac{\Delta p}{\Delta T}=\frac{0,29}{5}=0,058,$$

Ὁμοίως διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ 0° ἕως $+5^{\circ}$ ἔχομεν $\Delta p=1,93-1,58=0,35$ καὶ $\Delta T=5$· ὅθεν

$$\frac{\Delta p}{\Delta T}=\frac{0,35}{5}=0,07.$$

Θὰ λάβωμεν τὸ $\frac{dp}{dT}$ τοῦ τύπου (2) ἴσον πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν δύο ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ $\frac{\Delta p}{\Delta T}$. Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ εἰς τὰ δεδομένα (I) τὸ p ἐκφράζεται εἰς kg/cm^2, ἐνῷ τὰ s καὶ σ τοῦ τύπου (2) ἐκφράζονται εἰς m^3/kg, θὰ λάβωμεν

(3) $$\frac{dp}{dT}=\frac{0,058+0,07}{2}\cdot 10000=640.$$

Ὅθεν

(4) $$s=0,0007+\frac{90,82\cdot 427}{273\cdot 640}=0,2226\ m^3/kg.$$

β. Τὸ m_1 ὑπολογίζομεν δυνάμει τοῦ τύπου (12) τῆς § 55, ἤτοι τοῦ τύπου

(5) $$m_1=m+T\frac{d}{dT}\left(\frac{r}{T}\right).$$

Ἐπειδὴ τὸ m_1 ζητεῖται εἰς τὴν θερμοκρασίαν $0^{\circ}C$, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῶν δεδομένων,

(6) $$m_1=0,3194+273\frac{d}{dT}\left(\frac{r}{T}\right).$$

Ἔχομεν

(7) $$\frac{d}{dT}\left(\frac{r}{T}\right)=\frac{1}{T}\frac{dr}{dT}-\frac{r}{T^2}=\frac{1}{273}\frac{dr}{dT}-\frac{90,82}{273^2}.$$

Τὸ $\frac{dr}{dT}$ ὑπολογίζομεν ἐκ τῶν δεδομένων (I) καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς ὑπελογίσαμεν τὸ $\frac{dp}{dT}$.

Διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ -5^0 ἕως 0^0C ἔχομεν $\Delta r = 90{,}82 - 92{,}27 = -1{,}45$ καὶ $\Delta T = 5$· ὅθεν

$$\frac{\Delta r}{\Delta T} = -\frac{1{,}45}{5} = -0{,}29.$$

Ὁμοίως διὰ τὸ διάστημα ἀπὸ 0^0 ἕως $+5^0$C ἔχομεν $\Delta r = 89{,}25 - 90{,}82 = -1{,}57$ καὶ $\Delta T = 5$· ὅθεν

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{1{,}57}{5} = -0{,}314.$$

Θὰ λάβωμεν λοιπὸν

$$\frac{dr}{dT} = -\frac{0{,}29 + 0{,}314}{2} = -0{,}302. \tag{8}$$

Ὁ τύπος (6), δυνάμει τῶν (7) καὶ (8), γράφεται

$$m_1 = 0{,}3194 + 273\left(-\frac{1}{273}\,.\,0{,}302 - \frac{90{,}82}{272^2}\right) = -0{,}3153 \text{ Cal.}$$

4. Δίδονται διά τι σῶμα τὰ ἑξῆς θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα:

I. $\left\{\begin{array}{ll}\text{Πιέσεις} & p = 1, \quad 6, \quad 11 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{Ἀντίστοιχοι θερμοκρασίαι τήξεως} & t = 72^0{,}5 \quad 72^0{,}6 \quad 72^0{,}7 \text{ C.}\end{array}\right.$

II. Ἡ μεταβολὴ τοῦ εἰδικοῦ ὄγκου κατὰ τὴν τῆξιν τοῦ σώματος (§ 65) $u = \upsilon'' - \upsilon' = 0{,}00005$ m³/kg.

Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ἡ θερμότης τήξεως r τοῦ σώματος εἰς τὴν πίεσιν τῶν 6 kg/cm².

Τὸ r θὰ ὑπολογίσωμεν διὰ τοῦ τύπου τοῦ Clapeyron (2, § 65), ἤτοι τοῦ τύπου

$$r = AT(\upsilon'' - \upsilon')\frac{dp}{dT}. \tag{1}$$

Τὸ $\frac{dp}{dT}$ ὑπολογίζομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων (I) ἀκριβῶς, ὅπως ὑπελογίσαμεν καὶ τὸ $\frac{dp}{dT}$ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Εἰς τὸ διάστημα $\Delta p = 6 - 1 = 5$ ἔχομεν $\Delta T = 72{,}6 - 72{,}5 = 0{,}1$· ὅθεν $\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{5}{0{,}1} = 50$. Ὁμοίως εἰς τὸ διάστημα $\Delta p = 11 - 6 = 5$ ἔχομεν $\Delta T = 72{,}7 - 72{,}6 = 0{,}1$. Ὅθεν εἶναι ἐπίσης $\frac{\Delta p}{\Delta T} = 50$. Κατὰ ταῦτα θὰ λάβωμεν εἰς τὸν τύπον (1), ἐπειδὴ οἱ ὄγκοι ἐκφράζονται ὡς m³/kg, $\frac{dp}{dT} = 50.10000 = 500000$. Ἔχομεν λοιπὸν

$$r = \frac{1}{427}\,.\,(72{,}6 + 273).0{,}00005.500000 = 20{,}234 \text{ Cal.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

66. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις τοῦ Massieu. Ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 29, λέγομεν ὅτι δυναμικὸν πεδίον ἀπορρέει ἀπὸ δυναμικὴν συνάρτησιν U (x, y, z), ὅταν ὑπάρχῃ συνάρτησις U (x, y, z) τοιαύτη, ὥστε αἱ προβολαὶ X, Y, Z τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ τοῦ πεδίου νὰ προκύπτουν ἐκ τῆς U (x, y, z) διὰ παραγωγίσεων. Πρῶτος ὁ Massieu παρετήρησεν ὅτι, ἂν λάβωμεν ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς καταστάσεως ἰσορροπίας σώματος τὴν τροπὴν S καὶ τὸν εἰδικὸν ὄγκον υ (§ 39) καὶ ἂν γνωρίζωμεν τὴν συνάρτησιν

(1) $$U = F(S, \upsilon),$$

ὅπου U εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης τοῦ σώματος, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὰ λοιπὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα τοῦ σώματος ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεων. Τὴν συνάρτησιν (1) κατ' ἐπέκτασιν πρὸς τὴν δυναμικὴν συνάρτησιν τῆς μηχανικῆς ὀνομάζομεν θερμοδυναμικὴν συνάρτησιν ἢ καὶ χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν.

Ἔστω ὅτι δίδεται διά τι σῶμα ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις (1). Ἂς ἴδωμεν πῶς θὰ προσδιορίσωμεν τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα τοῦ σώματος. Ἂς λάβωμεν τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς (1)

(2) $$dU = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} d\upsilon.$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν (§ 28)

(3) $$dU = dQ - AdE$$

ἤ, ἐπειδὴ εἶναι $dQ = TdS$, $dE = pd\upsilon$

(4) $$dU = TdS - Apd\upsilon.$$

Συγκρίνοντες τὰς σχέσεις (2) καὶ (4) λαμβάνομεν

(5) $$T = \frac{\partial F}{\partial S}, \quad p = -\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial \upsilon}.$$

Ὅταν λοιπὸν λαμβάνωμεν ὡς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τὰ στοιχεῖα S καὶ υ καὶ ὅταν γνωρίζωμεν τὴν συνάρτησιν (1), προσδιορίζομεν τὰ στοιχεῖα T καὶ p ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεων.

Ἂς λάβωμεν καὶ τὰ ὁλικὰ διαφορικὰ τῶν (5)· ἔχομεν

(6) $$dT = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} dS + \frac{\partial^2 F}{\partial S \partial \upsilon} d\upsilon,$$

(7) $$Adp = -\frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S} dS - \frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} d\upsilon.$$

Ἡ (6) κατὰ μῆκος ἰσοόγκου μετατροπῆς, ἐὰν θέσωμεν

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

γράφεται

$$dT = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \frac{dQ}{T}. \tag{8}$$

Ἐπειδὴ ἡ (8) ἰσχύει κατὰ μῆκος ἰσοόγκου μετατροπῆς ($d\upsilon = 0$), τὸ $\frac{dQ}{dT} = c$ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερόν. Ἔχομεν λοιπὸν ἐκ τῆς (8)

$$c = \frac{dQ}{dT} = \frac{T}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial S^2}}. \tag{9}$$

Ἡ (7) κατὰ μῆκος ἰσοθλίπτου μετατροπῆς ($dp = 0$) γράφεται

$$0 = -\frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S} dS - \frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} d\upsilon$$

ἢ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S} \frac{dQ}{T} + \frac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} d\upsilon = 0. \tag{10}$$

Ἐπειδὴ ἡ (10) ἰσχύει κατὰ μῆκος ἰσοθλίπτου μετατροπῆς, τὸ $\frac{dQ}{dT}$ ἐκ τῆς (10) θὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς c' τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθεράν. Ἔχομεν ἐκ τῆς (10)

$$dQ = -\frac{T \dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} d\upsilon}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S}}. \tag{11}$$

Διαιροῦντες τὴν (11) διὰ τῆς (6) λαμβάνομεν

$$c' = \frac{dQ}{dT} = -\frac{T \dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} d\upsilon}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 S} dS + \dfrac{\partial^2 F}{\partial S \partial \upsilon} d\upsilon\right)}.$$

Ἐντεῦθεν ἔχομεν

$$c' = -\frac{T \dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S} \dfrac{\partial^2 F}{\partial S^2} \dfrac{dS}{d\upsilon} + \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S}\right)^2}. \tag{12}$$

Ἐκ τῆς (10) λαμβάνομεν

$$\frac{dS}{d\upsilon} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon \partial S}}. \tag{13}$$

Θέτοντες εἰς τὴν (12) τὴν ἔκφρασιν (13) τοῦ $\frac{dS}{d\upsilon}$ εὑρίσκομεν

$$c' = \frac{T \dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2}}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial S^2} \dfrac{\partial^2 F}{\partial \upsilon^2} - \left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \upsilon \partial S}\right)^2}. \tag{14}$$

Παρατηροῦμεν ἐκ τῶν τύπων (9) καὶ (14) ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῆς εἰδικῆς θερμότητος c, c′ προκύπτουν ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεων. Οὕτω, ὅταν διά τι σῶμα γνωρίζωμεν τὴν (1), δυνάμει σχετικῆς προτάσεως τῆς § 5, γνωρίζομεν πλήρως τὴν θερμοδυναμικὴν κατάστασιν τοῦ σώματος.

Ἐκτὸς τῆς θερμοδυναμικῆς συναρτήσεως (1), τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν καὶ συνάρτησιν τοῦ Massieu, ἔχομεν καὶ τρεῖς ἄλλας θερμοδυναμικὰς συναρτήσεις, τὰς $\Phi(S, p)$, $H(T, \upsilon)$ καὶ $H'(T, p)$, τὰς ὁποίας θὰ μελετήσωμεν εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους. Ἐκτὸς τῶν τεσσάρων συναρτήσεων $F(S, \upsilon)$, $\Phi(S, p)$, $H(T, \upsilon)$ καὶ $H'(T, p)$ δὲν ὑπάρχει ἄλλη θερμοδυναμικὴ συνάρτησις.

67. *Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις $\Phi(S, p)$.* Ἂς λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν (4) τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἤτοι τὴν ἐξίσωσιν

$$dU = TdS - Apd\upsilon. \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ $pd\upsilon$ διὰ τοῦ ἴσου του $d(p\upsilon) - \upsilon dp$, λαμβάνομεν *

$$d(U + Ap\upsilon) = TdS + A\upsilon dp. \tag{2}$$

Ἡ (2) ἐκφράζει ὅτι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $TdS + A\upsilon dp$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως

$$\Phi(S, p) = U + Ap\upsilon. \tag{3}$$

Ἡ συνάρτησις $\Phi(S, p)$ εἶναι ἡ δευτέρα θερμοδυναμικὴ συνάρτησις. Εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι ἡ τροπὴ S καὶ ἡ εἰδικὴ πίεσις p. Ἂς ἴδωμεν πῶς, ὅταν δίδεται ἡ (3), θὰ προσδιορίσωμεν τὰ λοιπὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα, ἤτοι τὰ T, υ, c καὶ c' διὰ παραγωγίσεων. Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς (3) εἶναι

$$\frac{\partial\Phi}{\partial S}dS + \frac{\partial\Phi}{\partial p}dp = TdS + A\upsilon dp. \tag{4}$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$T = \frac{\partial\Phi}{\partial S}, \quad \upsilon = \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial p}. \tag{5}$$

Οὕτω τὰ T, υ προκύπτουν ἐκ τῆς (3) διὰ παραγωγίσεων. Ἂς λάβωμεν τὰ ὁλικὰ διαφορικὰ τῶν (5)

$$dT = \frac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}dS + \frac{\partial^2\Phi}{\partial S\partial p}dp \tag{6}$$

$$d\upsilon = \frac{1}{A}\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial S}dS + \frac{1}{A}\frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}dp. \tag{7}$$

Ἡ (6) κατὰ μῆκος ἰσοθλίπτου μετατατροπῆς ($dp = 0$) γράφεται, ἐὰν θέσωμεν καὶ $dS = \frac{dQ}{T}$,

$$dT = \frac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}\frac{dQ}{T}.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$c' = \frac{dQ}{dT} = \frac{T}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}}, \tag{8}$$

---

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου,* Θεωρητικοὶ προσδιορισμοὶ τῶν συντελεστῶν τῆς εἰδικῆς θερμότητος 1930, σελ. 22.

ἤ, δυνάμει τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐκ τῶν (5)

(9) $$c' = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial S}}{\dfrac{\partial \Phi^2}{\partial S^2}}.$$

Ἡ (7) κατὰ μῆκος ἰσοόγκου μετατροπῆς ($dv = 0$) γράφεται

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial p \partial S}\frac{dQ}{T} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}dp = 0.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

(10) $$dQ = -\frac{T\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}dp}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial S}}.$$

Διαιροῦντες τὴν (10) διὰ τῆς (6) λαμβάνομεν

$$c = \frac{dQ}{dT} = -\frac{T\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}dp}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial S}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}dS + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S\partial p}dp\right)},$$

ἤ

(11) $$c = -\frac{T\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial S}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}\dfrac{dS}{dp} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S\partial p}\right)}.$$

Ἐκ τῆς (7) λαμβάνομεν διὰ $dv = 0$,

(12) $$\frac{dS}{dp} = -\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p\partial S}}.$$

Ἡ (11), δυνάμει τῆς (12) καὶ τῆς πρώτης ἐκ τῶν σχέσεων (5), γράφεται

(13) $$c = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial S}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial p^2} - \left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial S\partial p}\right)^2}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ἐκ τῶν τύπων (9) καὶ (13) ὅτι καὶ τὰ c′, c προκύπτουν ἐκ τῆς (3) διὰ παραγωγίσεων.

68. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις H(T, v). Ἄς λάβωμεν ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον τὴν ἐξίσωσιν

(1) $$dU = TdS - Apdv$$

καὶ ἂς κάμωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην τὴν ἀντικατάστασιν

(2) $$TdS = d(TS) - SdT\cdot$$

λαμβάνομεν

(3) $$d(TS - U) = SdT + Apdv.$$

Ἡ (3) ἐκφράζει ὅτι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $SdT + Apdv$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως

(4) $$H(T, v) = TS - U.$$

Ἡ συνάρτησις $H(T, v)$ εἶναι ἡ τρίτη θερμοδυναμικὴ συνάρτησις. Εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία T καὶ ὁ εἰδικὸς ὄγκος v. Ἄς ἴδωμεν πῶς ἐκ τῆς (4) θὰ προκύψουν τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα p, S, c, c' διὰ παραγωγίσεων.

Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς (4), δυνάμει τῆς (3), εἶναι

(5) $$\frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial v} dv = SdT + Apdv.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

(6) $$S = \frac{\partial H}{\partial T}, \quad p = \frac{1}{A} \frac{\partial H}{\partial v},$$

διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὰ S καὶ p.

Ἄς διαφορίσωμεν τὴν πρώτην των σχέσιν (6),

(7) $$dS = \frac{\partial^2 H}{\partial T^2} dT + \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial v} dv.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ T, λαμβάνομεν

(8) $$TdS = dQ = T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial T^2} dT + \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial v} dv\right).$$

Ἐξ ἄλλου ἡ ἔκφρασις τῆς στοιχειώδους θερμότητος εἰς τὸ σύστημα τῶν μεταβλητῶν T, v δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου (18, § 5), ἤτοι ὑπὸ τοῦ τύπου

(9) $$dQ = cdT + \frac{c' - c}{\alpha v} dv.$$

Συγκρίνοντες τὰς ἐκφράσεις (8) καὶ (9) τοῦ dQ, εὑρίσκομεν

(10) $$c = T \frac{\partial^2 H}{\partial T^2},$$

(11) $$c' = c + \alpha v T \frac{\partial^2 H}{\partial T \partial v}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις $H(T, v)$ ἀναφέρεται εἰς τὰς μεταβλητὰς T καὶ v, δηλαδὴ εἰς στοιχεῖα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως (§ 3). Ἐντεῦθεν προκύπτει καὶ ἡ σημασία τῆς συναρτήσεως H διὰ τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Οὕτω, ὅταν δίδεται ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις $H(T, v)$ ἐκτὸς τῶν στοιχείων S, p, c, c', τὰ ὁποῖα, δυνάμει τῶν (6), (10), (11), εὑρίσκομεν διὰ παραγωγίσεων, εὑρίσκομεν ὁμοίως διὰ παραγωγίσεως καὶ αὐτὴν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν. Τῷ ὄντι, ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων (6) εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις λελυμένη ὡς πρὸς p. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

(12) $$f = p - \frac{1}{A} \frac{\partial H(T, v)}{\partial v} = 0.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

$$\frac{\partial f}{\partial T}=-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 H}{\partial \upsilon \partial T},\quad \frac{\partial f}{\partial \upsilon}=-\frac{1}{A}\frac{\partial^2 H}{\partial \upsilon^2}.$$

Ὁ θερμοελαστικὸς συντελεστὴς α, δυνάμει τῶν τύπων (6) τῆς § 4, εἶναι

(13) $$\alpha=-\frac{1}{\upsilon}\frac{\dfrac{\partial^2 H}{\partial \upsilon \partial T}}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial \upsilon^2}}.$$

Ἡ (11), δυνάμει τῶν (10) καὶ (13), γράφεται τελικῶς

$$c'=\frac{T\left[\dfrac{\partial^2 H}{\partial T^2}\dfrac{\partial^2 H}{\partial \upsilon^2}-\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial T \partial \upsilon}\right)^2\right]}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial \upsilon^2}}.$$

69. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις $H'(T, p)$. Ἂς λάβωμεν, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, τὴν ἐξίσωσιν

(1) $$dU=TdS-Apd\upsilon.$$

Ἔχομεν

(2) $$TdS=d(TS)-SdT$$

(3) $$pd\upsilon=d(p\upsilon)-\upsilon dp.$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2) καὶ (3), γράφεται

$$dU=d(TS)-SdT-Ad(p\upsilon)+A\upsilon dp,$$

ἢ

(4) $$d(TS-Ap\upsilon-U)=SdT-A\upsilon dp.$$

Ἡ (4) ἐκφράζει ὅτι ἡ διώνυμος διαφορικὴ παράστασις $SdT-A\upsilon dp$ εἶναι τέλειον ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως

(5) $$H'(T, p)=TS-Ap\upsilon-U.$$

Ἡ συνάρτησις $H'(T, \upsilon)$ εἶναι ἡ τετάρτη θερμοδυναμικὴ συνάρτησις.

Εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι αἱ T, υ, δηλαδὴ στοιχεῖα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως. Δυνάμεθα λοιπόν, δυνάμει τῶν παρατηρήσεων, τὰς ὁποίας ἐκάμομεν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον διὰ τὴν συνάρτησιν $H(T, \upsilon)$, νὰ προβλέψωμεν καὶ ἐνταῦθα ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις θὰ προκύπτῃ ἐκ τῆς $H'(T, p)$ διὰ παραγωγίσεως· ἔτι δὲ ὅτι ἡ συνάρτησις $H'(T, p)$ ἔχει σημασίαν εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τῆς (5), δυνάμει τῆς (4), εἶναι

(6) $$\frac{\partial H'}{\partial T}dT+\frac{\partial H'}{\partial p}dp=SdT-A\upsilon dp.$$

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τὰς σχέσεις

(7) $$S=\frac{\partial H'}{\partial T},\quad \upsilon=-\frac{1}{A}\frac{\partial H'}{\partial p},$$

διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὰ S καὶ υ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων (7) εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις λελυμένη ὡς πρὸς υ.

Ἂς ἴδωμεν πῶς θὰ εὕρωμεν τοὺς συντελεστὰς c, c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος. Διαφορίζοντες τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (7) λαμβάνομεν

$$\text{(8)} \qquad dS = \frac{\partial^2 H'}{\partial T^2}\, dT + \frac{\partial^2 H'}{\partial T \partial p}\, dp.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (8) ἐπὶ T καὶ γράψωμεν αὐτὴν διὰ ἰσόθλιπτον μετατροπὴν ($dp = 0$), θὰ λάβωμεν

$$TdS = dQ = T\, \frac{\partial^2 H'}{\partial T^2}\, dT.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν τὸν συντελεστὴν c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν

$$\text{(9)} \qquad c' = \left[\frac{dQ}{dT}\right]_{dp=0} = T\, \frac{\partial^2 H'}{\partial T^2}.$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν συντελεστὴν c, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον (12) τῆς § 37, ἤτοι τὸν τύπον

$$\text{(10)} \qquad c' - c = A\, \frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta}.$$

Ἔχομεν

$$\text{(11)} \qquad c = c' - A\, \frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta} = T\, \frac{\partial^2 H'}{\partial T^2} - A\, \frac{\alpha^2 \upsilon T}{\beta}.$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς θερμοελαστικοὺς συντελεστὰς α, β γράφομεν τὴν χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\text{(12)} \qquad f = \upsilon + \frac{1}{A}\, \frac{\partial H'(T, p)}{\partial p} = 0.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial T} = \frac{1}{A}\, \frac{\partial^2 H'}{\partial p \partial T}, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{1}{A}\, \frac{\partial^2 H'}{\partial p^2}.$$

Οὕτω αἱ ἐκφράσεις (6, § 4) τῶν θερμοελαστικῶν συντελεστῶν γράφονται ἐνταῦθα

$$\text{(13)} \qquad \alpha = -\frac{1}{A\upsilon}\, \frac{\partial^2 H'}{\partial p \partial T}, \quad \beta = \frac{1}{A\upsilon}\, \frac{\partial^2 H'}{\partial p^2}.$$

Ἡ (11) δυνάμει τῶν (13) καὶ τῆς (12) γράφεται

$$\text{(14)} \qquad c = \frac{T\left[\dfrac{\partial^2 H'}{\partial p^2}\, \dfrac{\partial^2 H'}{\partial T^2} - \left(\dfrac{\partial^2 H'}{\partial p \partial T}\right)^2\right]}{\dfrac{\partial^2 H'}{\partial p^2}}.$$

70. Ἐφαρμογαὶ τῶν θερμοδυναμικῶν συναρτήσεων *H(T,υ)* καὶ *H′(T,p)*. Εἴδομεν εἰς τὰς παραγράφους 68, 69 ὅτι αἱ θερμοδυναμικαὶ συναρτήσεις H καὶ H′ ἔχουν πρακτικὰς ἐφαρμογάς· καὶ τοῦτο, διότι αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ τῶν συναρτήσεων αὐτῶν εἶναι στοιχεῖα τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως. Ἀντιθέτως αἱ συναρτήσεις F (S, υ) καὶ Φ (S, p) ἔχουσι πρὸ πάντων θεωρητικὴν σημασίαν.

Ὡς εἴδομεν, ὅταν δίδωνται αἱ συναρτήσεις H, H′, προσδιορίζομεν τὴν ἀντίστοιχον χαρακτηριστικὴν ἐξίσωσιν διὰ παραγωγίσεως. Οὕτω ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν συνάρτησιν H χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (12) τῆς § 68, ἤτοι εἶναι

$$(1) \qquad p = \frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial \upsilon}.$$

καὶ ἡ ἀντίστοιχος εἰς τὴν συνάρτησιν H′ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (12) τῆς § 69, ἤτοι εἶναι

$$(2) \qquad \upsilon = -\frac{1}{A}\frac{\partial H'}{\partial p}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἀντιθέτως ὅτι δίδεται ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις λελυμένη ὡς πρὸς p, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(3) \qquad p = f(T, \upsilon).$$

Τότε, δυνάμει τῆς (1), ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις H θὰ προσδιορίζεται διὰ μιᾶς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι θὰ εἶναι

$$(4) \qquad H(T, \upsilon) = A\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} f(T, \upsilon)\, d\upsilon + h(T),$$

ὅπου h (T) εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας, ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως. Ἡ συνάρτησις αὕτη θὰ ἐμφανισθῇ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ S (6, § 68), εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ c (10, § 68) καὶ ἑπομένως καὶ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ c′ (11, § 68). Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ἐνῷ, ὅταν δίδεται ἡ συνάρτησις H (T, υ), προσδιορίζονται ἅπαντα τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα καὶ ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις, ἀντιθέτως ὅταν δίδεται ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις, λόγῳ τῆς σταθερᾶς h (T) δὲν προσδιορίζονται ἅπαντα τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα. Τοῦτο ἄλλως τε προκύπτει καὶ ἐκ τῆς σχετικῆς προτάσεως τῆς § 5.

Τὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ διὰ τὴν θερμοδυναμικὴν συνάρτησιν H′(T, p). Ὅταν δίδεται ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις λελυμένη ὡς πρὸς υ, δηλαδὴ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\upsilon = \varphi(T, p),$$

δυνάμει τῆς (2), προσδιορίζομεν τὴν θερμοδυναμικὴν συνάρτησιν H′(T, p) διὰ μιᾶς ὁλοκληρώσεως· ἤτοι εἶναι

$$(5) \qquad H'(T, p) = h(T) - A\int_{p_0}^{p} \varphi(T, p)\, dp,$$

ὅπου h (T) εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας, ἡ ὁποία λαμβάνεται ὡς σταθερὰ τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰ ἐκτεθέντα διὰ τὰς συναρτήσεις H, H′ εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα:

I. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν. Εἴδομεν ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν εἶναι ἡ (4, § 49), δηλαδὴ ἡ

$$(6) \qquad p = f(t).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς p, ὅθεν ἡ θερμοδυναμνκὴ συνάρτησις H τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν θὰ εἶναι, δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (4),

$$(7) \qquad H(T, \upsilon) = A\int_0^{\upsilon} f(t)\, d\upsilon + h(f)$$

ἢ

$$(8) \qquad H(T, \upsilon) = A\, f(t)\, \upsilon + h(T).$$

Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὴν συνάρτησιν h (T), θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν ἐκ τῆς θερμοδυναμικῆς συναρτήσεως (8) ὁλόκληρον τὴν θεωρίαν τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν καὶ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα τῶν κεκορεσμένων ἀτμῶν διὰ παραγωγίσεων. Ἐὰν ὅμως ἡ αὐθαίρετος συνάρτησις h (T) τοῦ τύπου (8) εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης ὡς ἑξῆς: Δυνάμει τοῦ τύπου (10) τῆς § 68, ὁ συντελεστὴς c προσδιορίζεται ἐκ τῆς (8) διὰ τῆς σχέσεως

$$(9) \qquad c = T\left[A\upsilon\,\frac{d^2 f(t)}{dT^2} + \frac{d^2 h(T)}{dT^2}\right].$$

Ἐπειδὴ ἡ (6) εἶναι καὶ ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, ὁ τύπος (9) θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν ὁρικὴν περίπτωσιν τοῦ κεκορεσμένου ὑγροῦ, ὁπότε θὰ εἶναι c=m (§ 54). Ὡς εἴδομεν εἰς τὰς §§ 54, 55, τὸ m ὡς καὶ τὸ υ=σ προσδιορίζομεν ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ πειράματος. Διὰ νὰ συμφωνῇ ὁ θεωρητικὸς τύπος (9) πρὸς τὰ πειραματικὰ δεδομένα, καταλήγομεν εἰς τὸ ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$(10) \qquad \frac{d^2 h(T)}{dT^2} = 0$$

ἢ

$$(11) \qquad h(T) = a + bT.$$

Οὕτω ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις H τῶν ἀτμῶν εἶναι τῆς μορφῆς

$$(12) \qquad H(T, \upsilon) = Af(t)\,\upsilon + bT + a.$$

II. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν. Ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν εἶναι τῆς μορφῆς

$$(13) \qquad \upsilon = \varphi(T).$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς υ· ὅθεν, δυνάμει τῆς ἐξισώσεως (5), ἡ θερμοδυναμικὴ συνάρτησις H′ τῶν ἀσυμπιέστων ρευστῶν θὰ εἶναι

$$(14) \qquad H'(T, p) = h(T) - A\int_0^{p} \varphi(T)\, dp$$

ἢ

$$(15) \qquad H'(T, p) = h(T) - A\varphi(T)\, p.$$

Οἱ συντελεσταὶ c′, c προσδιορίζονται ἐκ τῆς (15) δυνάμει τῶν τύπων (9) καὶ (14) τῆς § 69· ἤτοι εἶναι

(16) $$c' = T\frac{\partial^2 H'}{\partial T^2} = T\left[\frac{d^2 h(T)}{dT^2} - Ap\frac{d^2\varphi(T)}{dT^2}\right],$$

$$c = \text{ἄπειρον, διότι εἶναι}$$

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial p \partial T} = A\frac{d\varphi}{dT} = 0 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 H'}{\partial p^2} = 0.$$

Τὸ ὅτι τὸ c εἶναι ἄπειρον, ἠδυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ἀπ᾽ εὐθείας καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (13)· τῷ ὄντι ἔχομεν ἐκ τῆς (13)

(17) $$dv = \frac{d\varphi}{dT}dT.$$

Διὰ τὴν ἰσόγκον μετατροπὴν ($dv = 0$), ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (17), εἶναι $dT = 0$· ὅθεν τὸ $c = \frac{dQ}{dT}$ εἶναι ἄπειρον.

Ἐξ ἄλλου εἶναι πειραματικὸν δεδομένον ὅτι ὁ συντελεστὴς c′ τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν εἶναι, διὰ τὰ ἀσυμπίεστα ῥευστά, ἀνεξάρτητος τῆς πιέσεως. Ὅθεν εἰς τὴν ἔκφρασιν (16) τοῦ c′ πρέπει ὁ ὅρος $Ap\frac{d^2\varphi(T)}{dT^2}$ νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν. Θὰ εἶναι λοιπὸν

(18) $$\frac{d^2\varphi(T)}{dT^2} = 0.$$

Ὅθεν

(19) $$\varphi(T) = v = \alpha T + b.$$

Ἡ ἐξίσωσις (19) εἶναι ἡ πραγματικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως (13) καὶ ἐκφράζει τὸν γνωστὸν νόμον τῆς διαστολῆς τῶν ἀσυμπιέστων ῥευστῶν.

Ἡ (16), δυνάμει τῆς (18), γράφεται

(20) $$c' = T\frac{d^2 h(T)}{dT^2}.$$

III. Θερμοδυναμικὴ συνάρτησις τῶν ὑπερθέρμων ἀτμῶν. Ἂς προσδιορίσωμεν τὴν θερμοδυναμικὴν συνάρτησιν $H'(T, p)$ διὰ τὸν ὑπέρθερμον ἀτμόν. Εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (5) τῆς § 69,

(21) $$H'(\Theta, p) = \Theta S - Apv - U,$$

ὅπου Θ εἶναι ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ. Ἔστω γενικῶς $c'(\Theta, p)$ ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν p. Ἡ θερμότης ὑπερθερμάνσεως θὰ δίδεται ὑπὸ τύπου ἀναλόγου πρὸς τὸν τύπον (4) τῆς § 53, ἤτοι θὰ εἶναι

(22) $$Q' = \int_T^\Theta c'(\Theta, p)d\Theta.$$

Ἡ ὁλικὴ θερμότης διὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπὴν ἐκ τῆς ὑγρᾶς καταστάσεως ($p, T_0 = 273°K$) μέχρι τῆς ὑπερθέρμου καταστάσεως (p, Θ) εἶναι

(23) $$Q = q + r + Q'.$$

Ἡ ἐσωτερικὴ θερμότης U τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (8) τῆς § 62, ἤτοι εἶναι

$$U = q + r + \int_T^\Theta c' d\Theta - Ap(v - \sigma). \tag{24}$$

Ἡ τροπὴ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (7) τῆς § 63, ἤτοι εἶναι

$$S = \frac{r}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T} + \int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta}. \tag{25}$$

Ἡ συνάρτησις (21), δυνάμει τῶν (24) καὶ (25), γράφεται

$$H'(\Theta, p) = \Theta \left[\frac{r}{T} + \int_0^t \frac{dq}{T} + \int_T^\Theta \frac{c' d\Theta}{\Theta} \right] - q - r - Ap\sigma - \int_T^\Theta c' d\Theta. \tag{26}$$

Ἐὰν ἐγνωρίζομεν τὴν συνάρτησιν $c'(\Theta, p)$, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν, δυνάμει τοῦ τύπου (26), τὴν θερμοδυναμικὴν συνάρτησιν $H'(\Theta, p)$ τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ, ὁπότε θὰ ἠδυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἅπαντα τὰ θερμοδυναμικὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπερθέρμου ἀτμοῦ διὰ παραγωγίσεων. Ἡ συνάρτησις ὅμως $c' = c'(\Theta, p)$, ὡς ἀνεφέραμεν καὶ εἰς τὴν § 63, δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ ἑπομένως τὰ ἐκτεθέντα ἀνωτέρω διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς συναρτήσεως $H'(\Theta, p)$ ἔχουσι μόνον θεωρητικὴν σημασίαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ

ΓΝΩΣΕΙΣ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΗΡΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΚΑΥΣΕΩΣ

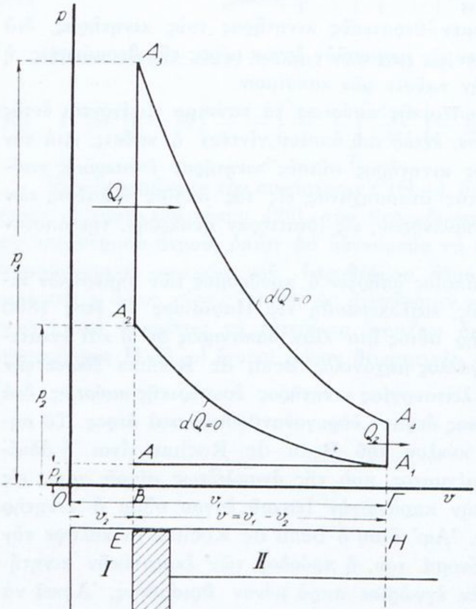
71. *Γενικά.* Ὀνομάζομεν θερμικοὺς κινητῆρας τοὺς κινητῆρας, διὰ τῶν ὁποίων μετασχηματίζομεν εἰς μηχανικὸν ἔργον μέρος τῆς θερμότητος, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν καῦσιν τῶν καυσίμων.

Εἰς τοὺς κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως τὰ καύσιμα εἰσάγονται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τῶν κινητήρων, ἐντὸς τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ καῦσις. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ὠνόμασαν τοὺς κινητῆρας αὐτοὺς *κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως* ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰς ἀτμομηχανάς, εἰς τὰς ὁποίας ἡ καῦσις τῶν καυσίμων γίνεται ἐκτὸς τοῦ κυλίνδρου, εἰς ἰδιαιτέραν συσκευήν, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν λέβητα.

Ὁ πρῶτος κινητήρ, ὁ ὁποῖος ὑπῆρξεν ὁ πρόδρομος τῶν σημερινῶν κινητήρων ἐσωτερικῆς καύσεως, κατεσκευάσθη εἰς Παρισίους τὸ ἔτος 1860 ὑπὸ τοῦ Lenoir. Ὁ κινητὴρ οὗτος ἦτο λίαν δαπανηρὸς δι' ὃ καὶ ἐγκατελείφθη. Τὸ ἔτος 1862 ὁ γάλλος μηχανικὸς Beau de Rochas ἔδωσε τὴν περιγραφὴν τοῦ κύκλου τῆς λειτουργίας κινητῆρος ἐσωτερικῆς καύσεως, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μίγματος ἀερίων ὑδρογονανθράκων καὶ ἀέρος. Τὸ σημαντικώτερον στοιχεῖον τοῦ κύκλου τοῦ Beau de Rochas εἶναι ἡ ἀδιάθερμος προσυμπίεσις τοῦ μίγματος πρὸ τῆς ἀναφλέξεως αὐτοῦ, χάρις εἰς τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνομεν τὴν παραγωγὴν ἱκανοῦ ἔργου· οὕτω ὁ κινητὴρ ἀποκτᾷ πρακτικὴν σημασίαν. Ἀφ' ὅτου ὁ Beau de Rochas ἀνεκάλυψε τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος φέρει τὸ ὄνομά του, ἡ πρόοδος τῶν ἐκρηκτικῶν κινητήρων ἐσωτερικῆς καύσεως δὲν ἐγνώρισε παρὰ μόνον θριάμβους. Ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρωμεν ὅτι οἱ κινητῆρες τῶν αὐτοκινήτων καὶ τῶν ἀεροπλάνων λειτουργοῦν συμφώνως πρὸς τὸν κύκλον τοῦ Beau de Rochas. Τὸ ἔτος 1893 ὁ γερμανὸς μηχανικὸς Diesel ἔδωσε τὴν περιγραφὴν τοῦ κύκλου λειτουργίας κινητῆρος ἐσωτερικῆς καύσεως, τοῦ ὁποίου ἡ χαρακτηριστικὴ διαφορά, ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦ Beau de Rochas, εἶναι ὅτι, ἀντὶ νὰ γίνεται προσυμπίεσις τοῦ μίγματος καυσίμου καὶ ἀέρος, γίνεται προσυμπίεσις μόνον τοῦ ἀέρος. Εἰς τοὺς κινητῆρας Diesel ὁ βαθμὸς τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως τοῦ ἀέρος εἶναι ἀρκούντως μέγας οὕτως, ὥστε ὁ ἀὴρ νὰ ἔχῃ ἀποκτήσει εἰς τὸ τέλος τῆς συμπιέσεως ὑψηλὴν θερμοκρασίαν. Τὸ καύσιμον εἰσαγόμενον εἰς τὸν κύλινδρον καίεται αὐτομάτως παρουσίᾳ τοῦ ἀέρος ὑψηλῆς θερμοκρασίας, χωρὶς νὰ παρίσταται ἀνάγκη ἀναφλέξεως, ἡ ὁποία εἰς τοὺς ἐκρηκτικοὺς κινητῆρας γίνεται ἐν γένει διὰ ἠλεκτρικοῦ σπινθῆρος. Ἡ ραγδαία ἐξάπλωσις τῶν κινητήρων Diesel εἰς τὴν βιομηχανίαν ὀφείλεται εἰς τὰ μεγάλα πλεονεκτήματα τῶν κινητήρων τούτων νὰ εἶναι οἰκονομικοί, ἀκίνδυνοι εἰς ἀναφλέξεις καὶ ἁπλοῖ εἰς τὴν λειτουργίαν των.

72. *Κύκλος τοῦ Beau de Rochas.* Ὁ κύκλος τοῦ Beau de Rochas (σχ. 63) ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας τμηματικὰς μετατροπάς, ἑκάστην τῶν ὁποίων ὀνομάζομεν φάσιν. Αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς:

I. Ἡ φάσις τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ μίγματος καυσίμου καὶ ἀέρος. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν διαδρομὴν ΕΗ τοῦ ἐμβόλου ὑπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron ὑπὸ τῆς ἰσοθλίπτου AA_1.



Σχ. 63

II. Ἡ φάσις τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως τοῦ μίγματος. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν ἑπομένην τῆς ΕΗ διαδρομὴν ΗΕ τοῦ ἐμβόλου καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως A_1A_2.

III. Ἡ φάσις τῆς ἀναφλέξεως, ἐκρήξεως καὶ ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως. Εἰς τὸ τέλος τῆς συμπιέσεως, ὅταν δηλαδὴ τὸ μῖγμα εὑρίσκεται εἰς τὴν κατάστασιν A_2, ἀναφλέγομεν τοῦτο ἐν γένει δι᾽ ἠλεκτρικοῦ σπινθῆρος. Οὕτω προκαλοῦμεν ἔκρηξιν τοῦ μίγματος, ἤτοι ἀκαριαίαν καῦσιν αὐτοῦ· ὡς συνέπειαν τῆς ἐκρήξεως ἔχομεν τὴν ἀπότομον αὔξησιν τῆς πιέσεως τοῦ μίγματος. Ἡ ἔκρηξις παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα διὰ τῆς ἰσοόγκου A_2A_3. Τὰ ἀέρια μετὰ τὴν ἔκρηξιν ἀποτονοῦνται κατὰ τὴν ἀκολουθοῦσαν διαδρομὴν ΕΗ τοῦ ἐμβόλου· τὸ διάγραμμα τῆς μετατροπῆς ταύτης εἶναι ἡ ἀδιάθερμος ἀποτόνωσις A_3A_4· καὶ

IV. Ἡ φάσις τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ἀδρανῶν ἀερίων ἐκ τοῦ κυλίνδρου εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν. Εἰς τὸ τέλος τῆς ἀποτονώσεως ἀνοίγομεν τὴν ἐκροήν, ὁπότε ἡ πίεσις πίπτει ἀκαριαίως ἀπὸ $p_4(A_4)$ εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν $p_1(A_1)$ καὶ τὰ ἀδρανῆ ἀέρια τῆς καύσεως ἀποδιώκονται εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν τετάρτην διαδρομὴν ΗΕ τοῦ ἐμβόλου καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς ἰσοθλίπτου A_1A.

Ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες ὡς ἀνωτέρω φάσεις πραγματοποιοῦνται εἰς τέσσαρας διαδρομὰς τοῦ ἐμβόλου, ἤ, ὡς λέγομεν, εἰς τέσσαρας χρόνους, ὁ κινητήρ, τοῦ ὁποίου ἡ λειτουργία γίνεται συμφώνως πρὸς τὸν κύκλον τοῦ σχήματος (63), λέγεται τετράχρονος ἐκρηκτικὸς κινητήρ.

Αἱ ἄκραι θέσεις Ε, Η τοῦ ἐμβόλου ὀνομάζονται νεκραὶ θέσεις. Εἰς τὰς θέσεις αὐτὰς ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβόλου εἶναι μηδέν *. Τὸ τμῆμα ΟΒ τοῦ ἄξονος Ου παριστᾷ εἰς τὴν κλίμακα τῶν ὄγκων τὸν ὄγκον τοῦ μίγματος εἰς τὸ τέλος τῆς συμπιέσεως, ὁπότε γίνεται ἡ ἀνάφλεξις καὶ ἡ ἔκρηξις τοῦ μίγματος. Ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χώρου Ι τοῦ κυλίνδρου. Τὸν χῶρον Ι τοῦ κυλίνδρου ὀνομάζομεν χῶρον καύσεως ἢ χῶρον συμπιέσεως. Τὸ τμῆμα ΒΓ τοῦ ἄξονος Ου παριστᾷ εἰς τὴν κλίμακα τῶν ὄγκων τὸν ὄγκον τοῦ χώρου ΙΙ τοῦ κυλίνδρου, τὸν ὁποῖον διαγράφει τὸ ἔμβολον εἰς ἑκάστην διαδρομήν του. Τὸν χῶρον ΙΙ τοῦ κυλίνδρου ὀνομάζομεν χῶρον κυλινδρώσεως ἢ καὶ ἁπλῶς κυλίνδρωσιν. Τὸ ἴδιον τμῆμα ΒΓ τοῦ ἄξονος Ου παριστᾷ εἰς τὴν κλίμακα τῶν μηκῶν τὴν διαδρομὴν s τοῦ ἐμβόλου. Τέλος τὸ τμῆμα $ΟΓ = ΟΒ + ΒΓ$ παριστᾷ εἰς τὴν κλίμακα τῶν ὄγκων τὸν ὁλικὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου.

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου τοῦ Beau de Rochas. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γραμμαὶ τοῦ διαγράμματος AA_1 καὶ A_1A τῆς εἰσαγωγῆς καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τοῦ μίγματος θεωρητικῶς συμπίπτουν· ὅθεν τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται κατὰ τὴν εἰσαγωγὴν καὶ τὸ ὁποῖον παρίσταται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $AA_1ΓΒΑ$, ἐξουδετεροῦται ἀπὸ τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον ἀπορροφᾶται κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν καὶ τὸ ὁποῖον παρίσταται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου $A_1ΑΒΓΑ_1$. Τὸ ἔργον λοιπὸν Ε, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου τοῦ Beau de Rochas, παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ $A_2A_3A_4A_1A_2$. Εἶναι λοιπὸν

(1) $$E = \text{εμβ}\,(A_2A_3A_4A_1A_2).$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Q τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι καταναλίσκονται διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν (§ 27)

(2) $$E = \frac{1}{A}\,Q.$$

Τὸ μῖγμα κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου ἀπορροφᾷ θερμίδας Q_1 κατὰ τὴν A_2A_3 καὶ ἀποδίδει θερμίδας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν Q_2 κατὰ τὴν A_4A_1. Ὅθεν εἶναι (§ 30)

(3) $$Q = Q_1 - Q_2.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ c_1, c_2 τοὺς συντελεστὰς τῆς εἰδικῆς θερμότητος

---

* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, Ι, 1939, σελ. 148.

κατὰ τὰς ἰσοόγκους μετατροπὰς A_2A_3 καὶ A_1A_4, θὰ ἔχωμεν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸν κύκλον διαγράφει μᾶζα ἑνὸς χιλιογράμμου μίγματος,

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_1 = c_1 (T_3 - T_2), \\ Q_2 = c_2 (T_4 - T_1). \end{cases}$$

Ἡ (3) δυνάμει τῶν (4) γράφεται

$$(5) \qquad Q = c_1 (T_3 - T_2) - c_2 (T_4 - T_1)$$

καὶ ἡ (2) δυνάμει τῆς (5) γράφεται

$$(6) \qquad E = \frac{1}{A} \left[c_1 (T_3 - T_2) - c_2 (T_4 - T_1) \right].$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν λοιπὸν τὸ ἀποδιδόμενον ὑπὸ τοῦ τετραχρόνου ἐκρηκτικοῦ κινητῆρος ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν ἑκάστου κύκλου λειτουργίας του, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς θερμοκρασίας εἰς τὰς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ διαγράμματος καὶ τὰ c_1, c_2. Ὡς εἴδομεν (§ 13, α) ὁ συντελεστὴς c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν μόνον διὰ τὰ τέλεια ἀέρια εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θερμοκρασίας καὶ τῆς πιέσεως. Τὸ ἀέριον ὅμως μῖγμα, ἐκ καυσίμου καὶ ἀέρος, τὸ ὁποῖον διαγράφει τὸν κύκλον τοῦ ἐκρηκτικοῦ κινητῆρος, πολὺ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ νὰ δύναται νὰ ἐξομοιωθῇ πρὸς τέλειον ἀέριον. Ἐν τούτοις, διὰ νὰ διευκολυνθῶμεν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς, δεχόμεθα ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἀερίου μίγματος ἔχει τὴν μορφὴν τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως $pv = RT$ τῶν τελείων ἀερίων. Ἐπίσης δεχόμεθα ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν ἀδιαθέρμων A_1A_2 καὶ A_3A_4 εἶναι τῆς μορφῆς $pv^\gamma =$ σταθερόν. Τέλος τὸν συντελεστὴν c τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς σχέσεως

$$(7) \qquad c = \alpha + \beta T,$$

ὅπου T εἶναι ἡ μέση ἀπόλυτος θερμοκρασία τῆς ἰσοόγκου μετατροπῆς. Κατὰ ταῦτα εἰς τὸν τύπον (5) θὰ εἶναι

$$(8) \qquad c_1 = \alpha + \beta \frac{T_2 + T_3}{2}, \quad c_2 = \alpha + \beta \frac{T_1 + T_4}{2}.$$

Διὰ τὴν βενζίνην λαμβάνομεν

$$(9) \qquad \alpha = 0{,}161 \quad \text{καὶ} \quad \beta = 0{,}000075.$$

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τοῦ διαγράμματος. Παριστῶμεν διὰ $p_1 = 1$ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ μίγματος εἰς τὸν κύλινδρον. Ἔστω ἐπίσης t_1°C ἡ θερμοκρασία τοῦ μίγματος τῆς εἰσαγωγῆς καὶ υ_1 ὁ ὁλικὸς ὄγκος τοῦ κυλίνδρου. Αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς A_1 θὰ εἶναι :

$$(10) \qquad \upsilon_1, \quad p_1 = 1, \quad t_1{}^\circ C, \quad \text{ἢ} \quad T_1 = (t_1 + 273)^\circ K.$$

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα A_2, A_1 κεῖνται ἐπὶ τῆς ἰδίας ἀδιαθέρμου, θὰ ἔχωμεν

$$(11) \qquad p_2 \upsilon_2^\gamma = p_1 \upsilon_1^\gamma .$$

Ὅθεν εἶναι

$$(12) \qquad p_2 = p_1 \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} \right)^\gamma.$$

Παριστῶντες διὰ

(13) $$\varepsilon = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$

τὸν βαθμὸν ἀποτονώσεως τῆς ἀδιαθέρμου A_3A_4, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτὸ (§ 18), τὸ ἀντίστροφον τοῦ βαθμοῦ συμπιέσεως $\upsilon_2 : \upsilon_1$ τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως A_1A_2, ἔχομεν, ἐπειδὴ $p_1 = 1$,

$$p_2 = p_1\varepsilon^\gamma = \varepsilon^\gamma .$$

Ἐκ τῆς (10) λαμβάνομεν

$$p_2\upsilon_2\upsilon_2^{\gamma-1} = p_1\upsilon_1\upsilon_1^{\gamma-1},$$

ἢ

$$RT_2\upsilon_2^{\gamma-1} = RT_1\upsilon_1^{\gamma-1}.$$

Ὅθεν

$$T_2 = T_1\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\varepsilon^{\gamma-1}.$$

Οὕτω αἱ συντεταγμέναι εἰς τὴν κορυφὴν A_2 εἶναι

(14) $$\upsilon_2, \quad p_2 = \varepsilon^\gamma, \quad T_2 = T_1\varepsilon^{\gamma-1}, \quad t_2 = (T_2 - 273)^\circ C.$$

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν θερμοκρασίαν T_3 εἰς τὸ τέλος τῆς ἐκρήξεως, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰς θερμίδας Q_1, ὁπότε ἐκ τοῦ πρώτου τῶν τύπων (4) θὰ ἔχωμεν

(15) $$T_3 = T_2 + \frac{Q_1}{c_1}.$$

Τὸ Q_1 εἶναι αἱ θερμίδες, τὰς ὁποίας ἀποδίδει κατὰ τὴν καῦσιν τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ χιλιόγραμμον τοῦ μίγματος καύσιμον. Τὸ Q_1 λοιπὸν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀναλογίας εἰς περιεκτικότητα τοῦ καυσίμου ἐν τῷ μίγματι καὶ ἐκ τῆς θερμικῆς ἱκανότητος τοῦ καυσίμου.

Ὅταν ὑπολογίσωμεν τὸ T_3, εὑρίσκομεν τὴν πίεσιν p_3 εἰς τὴν κορυφὴν A_3 ἐκ τῶν σχέσεων

(16) $$\begin{cases} p_3\upsilon_3 = RT_3 \\ p_2\upsilon_2 = RT_2. \end{cases}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\upsilon_3 = \upsilon_2$, ἔχομεν

$$p_3 = p_2\frac{T_3}{T_2} = \varepsilon^\gamma\frac{1}{T_2}\left(T_2 + \frac{Q_1}{c}\right) = \varepsilon^\gamma\left(1 + \frac{Q_1}{cT_2}\right).$$

Αἱ συντεταγμέναι λοιπὸν εἰς τὴν κορυφὴν A_3 εἶναι

(17) $$\upsilon_3 = \upsilon_2, \quad p_3 = \varepsilon^\gamma\left(1 + \frac{Q_1}{cT_2}\right), \quad T_3 = T_2 + \frac{Q_1}{c}, \quad t_3 = (T_3 - 273)^\circ C.$$

Τέλος διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τῆς κορυφῆς A_4, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα A_4 καὶ A_3 κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀδιαθέρμου· ὅθεν εἶναι

(18) $$p_4\upsilon_4^\gamma = p_3\upsilon_3^\gamma,$$

(19) $$p_4\upsilon_4\upsilon_4^{\gamma-1} = p_3\upsilon_3\upsilon_3^{\gamma-1}, \quad ἢ \quad RT_4\upsilon_4^{\gamma-1} = RT_3\upsilon_3^{\gamma-1}.$$

Ἐκ τῆς (17) εὑρίσκομεν

$$p_4 = p_3\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right)^\gamma = p_3\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^\gamma = p_3\frac{1}{\varepsilon^\gamma}.$$

Ἐκ τῆς (19) εὑρίσκομεν

$$(20) \qquad T_4 = T_3 \left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{\gamma-1} = T_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Συγχρόνως ἔχομεν

$$p_4 v_4 = RT_4, \quad p_1 v_1 = RT_1.$$

Ὅθεν

$$(21) \qquad T_4 = T_1 \frac{p_4 v_4}{p_1 v_1} = T_1 \frac{p_4}{p_1} = T_1 p_4 = T_1 p_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}}.$$

Προφανῶς πρέπει τὰ δεύτερα μέλη τῶν τύπων (20), (21) νὰ συμπίπτουν. Τῷ ὄντι ἔχομεν

$$(22) \qquad T_4 = T_1 p_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}} = T_1 \left(p_2 \frac{T_3}{T_2}\right) \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}} = T_1 \varepsilon^{\gamma} \frac{T_3}{T_1 \varepsilon^{\gamma-1}} \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}} = T_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εἶναι (§ 21)

$$(22) \qquad \eta_\theta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Τὸ ἔργον E, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ εμβ $(A_2A_3A_4A_1A_2)$, πραγματοποιεῖται εἰς τέσσαρας διαδρομὰς τοῦ ἐμβόλου, δηλαδὴ εἰς δύο στροφὰς τοῦ κινητηρίου ἄξονος. Ὅθεν, ἐὰν ὁ κινητὴρ ἐκτελῇ ν στροφὰς εἰς 1′, ἡ ἰσχὺς τῶν πιέσεων ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι *

$$(24) \qquad I_\varkappa = \frac{1}{75} \frac{E}{2} \frac{\nu}{60} \text{ ἵπποι.}$$

Τὸ $I_\varkappa$ ὀνομάζομεν κινητήριον ἰσχὺν τοῦ κινητῆρος. Ἔστω ὅτι ἡ ἰσχύς, τὴν ὁποίαν παραλαμβάνομεν ἐκ τοῦ κινητηρίου ἄξονος τοῦ κινητῆρος, εἶναι I_ω. Προφανῶς εἶναι $I_\omega < I_\varkappa$· ἡ δὲ ἀπώλεια ἰσχύος $I_\varkappa - I_\omega$ ὀφείλεται (§ 26) εἰς τὰς παθητικὰς ἀντιστάσεις καὶ κυρίως εἰς τὰς τριβὰς μεταξὺ τῶν ὀργάνων τῶν μηχανισμῶν τοῦ κινητῆρος. Ὁ συντελεστὴς

$$(25) \qquad \eta_0 = \frac{I_\omega}{I_\varkappa} < 1$$

ὀνομάζεται ὀργανικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κινητῆρος.

73. Κύκλος τοῦ κινητῆρος Diesel. Τὰ χαρακτηριστικὰ διακριτικὰ τοῦ κινητῆρος Diesel ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἐκρηκτικὸν κινητῆρα εἶναι τὰ ἑξῆς δύο: α. Ὁ χῶρος τῆς συμπιέσεως OB εἶναι πολὺ μικρὸς ἐν σχέσει πρὸς τὸν ὁλικὸν χῶρον OΓ τοῦ κυλίνδρου (σχ. 64) οὕτως, ὥστε τὸ $\varepsilon = \frac{v_1}{v_2} > 1$ νὰ εἶναι ἀριθμὸς πολὺ μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ε τοῦ τύπου (13, § 72)· καὶ β· τὸ καύσιμον εἰσάγεται εἰς κλάσμα τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου· οὕτω ἡ καῦσις εἰς τοὺς κινητῆρας Diesel, γίνεται βραδέως, ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς ἐκρηκτικοὺς κινητῆρας ὅπου ἡ καῦσις γίνεται ἀκαριαίως ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον. Ἐξ αἰτίας τῆς βραδείας καύσεως τοῦ καυσίμου ὀνομάζομεν τοὺς κινητῆρας Diesel καὶ καυσιοκινητῆρας.

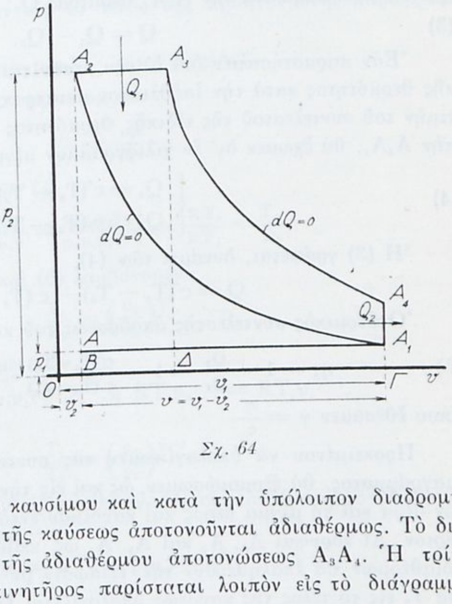
* *Κ. Π. Παπαϊωάννου*, Ἐφηρμοσμένη Κινηματική, I, 1939, σελ. 212.

Ὁ κύκλος τοῦ κινητῆρος Diesel ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσαρας φάσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἑξῆς:

I. Ἡ φάσις τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ ἐμβόλου ἐκ τῆς νεκρᾶς θέσεώς του πρὸς τὸν χῶρον τῆς συμπιέσεως μέχρι τῆς ἑτέρας νεκρᾶς θέσεώς του καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ Clapeyron ὑπὸ τῆς ἰσοθλίπτου AA_1.

II. Ἡ φάσις τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως τοῦ ἀέρος. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν ἑπομένην διαδρομὴν τοῦ ἐμβόλου καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς ἀδιαθέρμου συμπιέσεως A_1A_2.

III. Ἡ φάσις τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ καυσίμου καὶ τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως. Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ καυσίμου γίνεται ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν εἰς κλάσμα τῆς διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς ἰσοθλίπτου A_2A_3. Τὸ καύσιμον εἰσαγόμενον εἰς τὸν κύλινδρον καίεται παρουσίᾳ τοῦ ἀέρος τῆς πιέσεως p_2 καὶ τῆς ἀντιστοίχου ὑψηλῆς θερμοκρασίας T_2. Ἡ γραμμὴ λοιπὸν A_2A_3 τοῦ διαγράμματος παριστᾷ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ καυσίμου καὶ τὴν καῦσιν. Ἐν συνεχείᾳ, ὅταν τὸ ἔμβολον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Δ, διακόπτεται ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ καυσίμου καὶ κατὰ τὴν ὑπόλοιπον διαδρομὴν (ΔΓ) τοῦ ἐμβόλου τὰ ἀέρια τῆς καύσεως ἀποτονοῦνται ἀδιαθέρμως. Τὸ διάγραμμα συμπληροῦται ὑπὸ τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως A_3A_4. Ἡ τρίτη φάσις τῆς λειτουργίας τοῦ κινητῆρος παρίσταται λοιπὸν εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς γραμμῆς $A_2A_3A_4$· καὶ



Σχ. 64

IV. Ἡ φάσις τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ἀδρανῶν ἀερίων ἐκ τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν ἀτμόσφαιραν. Ἡ φάσις αὕτη γίνεται κατὰ τὴν τετάρτην διαδρομὴν ΓΑ τοῦ ἐμβόλου καὶ παρίσταται εἰς τὸ διάγραμμα ὑπὸ τῆς γραμμῆς A_4A_1A. Ἡ γραμμὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν ἰσόογκον A_4A_1, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀκαριαίαν πτῶσιν τῆς πιέσεως, ὅταν εἰς τὸ τέρμα τοῦ ἐμβόλου φέρωμεν εἰς ἐπικοινωνίαν τὰ ἀέρια ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου μετὰ τῆς ἀτμοσφαίρας καὶ ἀπὸ τὴν ἰσόθλιπτον ἐξαγωγὴν A_1A.

Ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες ὡς ἀνωτέρω φάσεις πραγματοποιοῦνται εἰς τέσσαρας χρόνους, ὁ κινητὴρ λέγεται τετράχρονος.

Ὡς ἐξεθέσαμεν καὶ διὰ τὸ σχῆμα 63, αἱ γραμμαὶ AA_1 τῆς εἰσαγωγῆς καὶ A_1A τῆς ἐξαγωγῆς συμπίπτουν. Ὅθεν τὸ ἔργον Ε, τὸ ὁποῖον ἀποδίδεται κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, εἶναι

$$E = \varepsilon\mu\beta\,(A_2A_3A_4A_1A_2). \tag{1}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Q τὰς θερμίδας, αἱ ὁποῖαι καταναλίσκονται διὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν (§ 27),

$$E = \frac{1}{A}\,Q. \tag{2}$$

Τὸ μῖγμα τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ εἰσαγομένου καυσίμου ἀπορροφᾷ κατὰ τὴν περίοδον τῆς καύσεως, ἤτοι κατὰ τὴν A_2A_3, θερμίδας Q_1 καὶ ἀποδίδει κατὰ τὴν A_4A_1 θερμίδας Q_2· ὅθεν εἶναι (§ 30)

$$Q = Q_1 - Q_2. \tag{3}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ c′ τὴν μέσην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ τὴν ἰσόθλιπτον μετατροπὴν A_2A_3 καὶ διὰ c τὴν μέσην τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ τῆς εἰδικῆς θερμότητος κατὰ τὴν ἰσόογκον μετατροπὴν A_4A_1, θὰ ἔχωμεν δι' ἓν χιλιόγραμμον μίγματος,

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= c'(T_3 - T_2) \\ Q_2 &= c\,(T_4 - T_1). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ἡ (3) γράφεται, δυνάμει τῶν (4),

$$Q = c'(T_3 - T_2) - c\,(T_4 - T_1).$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εἶναι

$$\eta_\vartheta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{c\,(T_4 - T_1)}{c'(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)}, \tag{5}$$

ὅπου ἐθέσαμεν $\gamma = \dfrac{c'}{c}$.

Προκειμένου νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν τοῦ διαγράμματος, θὰ ἐξομοιώσωμεν, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον, τὸν ἀέρα καὶ τὸ μῖγμα ἀέρος καὶ καυσίμου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου πρὸς τέλειον ἀέριον. Αἱ κορυφαὶ A_1, A_2 καὶ A_3, A_4 ὡς κείμεναι ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν ἰδίων ἀδιαθέρμων θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $pv^\gamma =$ σταθερόν. Ἡ θερμοκρασία T_3 εἰς τὸ τέλος τῆς καύσεως ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ πρώτου τύπου τῶν (4). Τὸ Q_1 ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοῦ τοῦ εἰσαγομένου καυσίμου κατὰ τὴν A_2A_3 καὶ ἐκ τῆς θερμικῆς ἱκανότητος τοῦ καυσίμου.

74. *Σχέσις μεταξὺ τῶν θερμικῶν συντελεστῶν ἀποδόσεως τῶν κύκλων τοῦ Beau de Rochas καὶ τοῦ Diesel.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τοὺς τύπους (4, § 72) εἶναι κατὰ μέσον ὅρον $c_1 = c_2 = c$· τότε ὁ τύπος (22, § 72), ὁ ὁποῖος δίδει τὸν θερμικὸν συντελεστὴν ἀποδόσεως τοῦ ἐκρηκτικοῦ κινητῆρος, γράφεται

$$\eta_\vartheta^\kappa = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}. \tag{1}$$

Ἐντεῦθεν, δυνάμει καὶ τῶν τύπων (22), (14) καὶ (20) τῆς § 72, ἔχομεν

(2) $$\eta_\theta^\varkappa = 1 - \frac{T_4\left(1-\frac{T_1}{T_4}\right)}{T_3\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως η_θ^d τοῦ κινητῆρος Diesel δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (5, § 73), ἤτοι τοῦ τύπου

(3) $$\eta_\theta^d = 1 - \frac{T_4 - T_1}{\gamma(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{\gamma T_2}\,\frac{\frac{T_4}{T_1}-1}{\frac{T_3}{T_2}-1}.$$

Δυνάμει τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸ τέλος τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν

(4) $$p_4 \upsilon_4^\gamma = p_3 \upsilon_3^\gamma, \quad p_1 \upsilon_1^\gamma = p_2 \upsilon_2^\gamma.$$

Ὅθεν, ἐπειδὴ $\upsilon_4 = \upsilon_1$, $p_3 = p_2$,

(5) $$\frac{p_4}{p_1} = \frac{\upsilon_3^\gamma}{\upsilon_2^\gamma}.$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν ἐκ τῶν (4)

(6) $$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4 \upsilon_4^\gamma}{p_1 \upsilon_1^\gamma} = \frac{p_4 \upsilon_4 \upsilon_4^{\gamma-1}}{p_1 \upsilon_1 \upsilon_1^{\gamma-1}} = \frac{RT_4}{RT_1} = \frac{T_4}{T_1}.$$

Συγκρίνοντες τὰς (5) καὶ (6) λαμβάνομεν

(7) $$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right)^\gamma.$$

Ὁμοίως ἔχομεν, δυνάμει τῶν (4),

$$p_2 \upsilon_2 \upsilon_2^{\gamma-1} = p_1 \upsilon_1 \upsilon_1^{\gamma-1}, \quad \text{ἢ } RT_2 \upsilon_2^{\gamma-1} = RT_1 \upsilon_1^{\gamma-1}.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

(8) $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^{\gamma-1}.$$

Ἐπειδὴ ἐξωμοιώσαμεν πρὸς τέλειον ἀέριον τὸ ἀέριον, τὸ ὁποῖον διαγράφει τὸν κύκλον, θὰ εἶναι

$$p_3 \upsilon_3 = RT_3, \quad p_2 \upsilon_2 = RT_2.$$

Ἐντεῦθεν εὑρίσκομεν

(9) $$\frac{T_3}{T_2} = \frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}.$$

Ὁ τύπος (3), δυνάμει τῶν (7), (8) καὶ (9), γράφεται

(10) $$\eta_\theta^d = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^{\gamma-1} \frac{\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right)^\gamma - 1}{\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right) - 1}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι $\gamma = \frac{c'}{c} > 1$ καὶ $\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} > 1$, θὰ εἶναι

(11) $$\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right)^\gamma - 1 > \frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} - 1.$$

Ὅθεν θὰ εἶναι

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right)^\gamma - 1}{\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} - 1} > 1. \tag{12}$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (13, § 72),

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Ὁ τύπος (10), δυνάμει τῶν (12), (13), γράφεται

$$\eta_\theta^d = 1 - \frac{\lambda}{\gamma \varepsilon^{\gamma-1}}. \tag{14}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ $\varepsilon = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς τύπους (2) καὶ (14), ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τύπων τούτων εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι

$$1 - \eta_\theta^d = (1 - \eta_\theta^\varkappa) \frac{\lambda}{\gamma}. \tag{15}$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι, διότι $\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} > 1$, $\gamma > 1$,

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2}\right)^\gamma - 1}{\gamma\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} - 1\right)} > 1$$

θὰ εἶναι

$$1 - \eta_\theta^d > 1 - \eta_\theta^\varkappa,$$

ἢ

$$\eta_\theta^d < \eta_\theta^\varkappa. \tag{16}$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν πάντοτε ὅτι ὁ βαθμὸς συμπιέσεως $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ διὰ τοὺς δύο κύκλους, ὅτι ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ κινητῆρος Diesel εἶναι μικρότερος τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ Beau de Rochas. Ὡς εἴδομεν ὅμως εἰς τὴν § 73, ὁ λόγος $\varepsilon = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ εἶναι πολὺ μεγαλύτερος εἰς τὸν κινητῆρα Diesel ἢ εἰς τὸν κύκλον τοῦ Beau de Rochas. Λόγῳ δὲ τῆς διαφορᾶς τῶν τιμῶν τοῦ ε τελικῶς ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ κινητῆρος Diesel εἶναι μεγαλύτερος τοῦ θερμικοῦ συντελεστοῦ ἀποδόσεως τοῦ κύκλου τοῦ ἐκρηκτικοῦ κινητῆρος.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (10) λάβωμεν $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{1}{14}$ ἕως $\frac{1}{15}$, $\frac{\upsilon_3}{\upsilon_2} = 2{,}5$ καὶ $\gamma = 1{,}4$, εὑρίσκομεν $\eta_\theta^d = 0{,}564$. Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ η_θ^d ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ θεωρητικὸν διάγραμμα τοῦ κινητῆρος, δηλαδὴ τὸν κύκλον τοῦ σχήματος (64). Ἐὰν λάβωμεν τὸ διάγραμμα τοῦ κύκλου κατὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κινητῆρος διὰ τοῦ ἐργοδείκτου τοῦ Watt, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διαγράμματος εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ θεωρητικοῦ κύκλου. Ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὸ η_θ^d ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἐμβαδοῦ τούτου, θὰ εὕρωμεν κατὰ μέσον ὅρον $\eta_\theta^d = 0,43$ ἕως 0,45.

Οἱ κινητῆρες ἐσωτερικῆς καύσεως, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἀτμομηχανάς, αἱ ὁποῖαι εἶναι διπλῆς λειτουργίας, εἶναι, ἐν γένει, ἁπλῆς λειτουργίας. Ἐνῷ δηλαδὴ εἰς τὰς ἐμβολοφόρους ἀτμομηχανὰς ὁ ἀτμὸς εἰσάγεται καὶ ἐκ τῶν δύο ἄκρων τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐνεργεῖ ἐναλλὰξ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ὄψεων τοῦ ἐμβόλου, εἰς τοὺς κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως τὸ ἀέριον εἰσάγεται, ἐν γένει, μόνον ἐκ τῆς μιᾶς ἄκρας τοῦ κυλίνδρου. Ἐν τούτοις, παρὰ τὰς τεχνικὰς δυσκολίας, οἱ μεγάλοι οἶκοι κατασκευῆς κινητήρων, κατεσκεύασαν διὰ τὴν περίπτωσιν μεγάλων ἰσχύων, κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως διπλῆς ἐνεργείας. Ἐπίσης, ἐπὶ τῷ σκοπῷ τῆς αὐξήσεως τῆς ἰσχύος, ὑπὸ τὰς αὐτὰς διαστάσεις, κατεσκεύασαν τοὺς διχρόνους κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως. Εἰς τοὺς κινητῆρας αὐτοὺς αἱ τέσσαρες φάσεις πραγματοποιοῦνται εἰς δύο διαδρομὰς τοῦ ἐμβόλου ἤτοι εἰς δύο χρόνους. Ἐκτὸς τῶν δύο κλασσικῶν τύπων τῶν κινητήρων ἐσωτερικῆς καύσεως, ἤτοι τοῦ ἐκρηκτικοῦ κινητῆρος καὶ τοῦ καυσιοκινητῆρος ἢ κινητῆρος Diesel, κατεσκεύασαν καὶ τοὺς κινητῆρας Semi-Diesel. Οἱ κινητῆρες οὗτοι, λόγῳ τῆς ἁπλότητος αὐτῶν, χρησιμοποιοῦνται ἐπιτυχῶς εἰς τὰς περιπτώσεις μικρᾶς ἰσχύος 2 ἕως 50 ἵππων.

Τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ἀποτελοῦν ἐφαρμογὴν τῶν γνώσεων τῆς θερμοδυναμικῆς εἰς τοὺς κινητῆρας ἐσωτερικῆς καύσεως καὶ οὐχὶ βεβαίως μελέτην τῶν κινητήρων τούτων. Ἡ λεπτομερὴς μελέτη τῶν κινητήρων ἐσωτερικῆς καύσεως ἐκφεύγει τοῦ πλαισίου συγγράμματος θερμοδυναμικῆς.

Ἄσκησις

Θεωροῦμεν τετράχρονον ἐκρηκτικὸν κινητῆρα, ὁ ὁποῖος λειτουργεῖ κατὰ τὸν κύκλον τοῦ Beau de Rochas (σχ. 63).

Δίδονται:

I. Αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς $A_1(p_1 = 1\ \mathrm{kg/cm^2},\ t_1 = 15^\circ\mathrm{C})$.

II. Ὁ βαθμὸς τῆς ἀδιαθέρμου ἀποτονώσεως (A_3A_4) $\frac{\upsilon_4}{\upsilon_3} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 4$.

III. Ἡ πίεσις εἰς τὸ τέλος τῆς ἐκρήξεως $p_3 = 24\ \mathrm{kg/cm^2}$.

IV. Ἡ διάμετρος τοῦ κυλίνδρου $\Delta = 90$ χιλιοστά, ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου $s = 140$ χιλιοστὰ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στροφῶν εἰς ἓν πρῶτον λεπτὸν $\nu = 1200$.

V. Ὁ συντελεστὴς τῆς εἰδικῆς θερμότητος ὑπὸ ὄγκον σταθερὸν κατὰ τὰς ἰσοόγκους μετατροπὰς (A_2A_3) καὶ (A_4A_1) $c = 0,170$ καὶ ὁ λόγος $\frac{c'}{c} = \gamma = 1,4$.

VI. Τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ἀέρος θερμοκρασίας $t_1 = 15^\circ\mathrm{C}$ καὶ πιέσεως $p_1 = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$ εἶναι $\beta = 1\ \mathrm{kg},\ 23$.

VII. Τὸ εἰσαγόμενον κατὰ τὴν φάσιν τῆς εἰσροῆς μῖγμα ἀποτελεῖται εἰς ἀναλογίαν βάρους ἀπὸ ἓν μέρος καυσίμου καὶ 20 μέρη ἀέρος. Κατὰ τὴν καῦσιν ἑνὸς χιλιογράμμου καυσίμου ἀποδίδονται 11000 Cal.

Ζητοῦνται:

α. Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου· καὶ

β. Ἡ κινητήριος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος.

α. Ἔχομεν δυνάμει τῶν τύπων τῆς § 72:

Εἰς τὴν κορυφὴν A_2

$$p_2 = \varepsilon^{\gamma} = 4^{1,4} = 6,96 \text{ kg/cm}^2,$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 \upsilon_2}{p_1 \upsilon_1} = (15 + 273).6,96 . \frac{1}{4} = 288.1,74 = 501^{\circ}K,$$

$$t_2 = T_2 - 273 = 501 - 273 = 228^{\circ}C.$$

Εἰς τὴν κορυφὴν A_3

$$p_3 = 24 \text{ kg/cm}^2,$$

$$T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2} = 501 \frac{24}{6,96} = 501.3,45 = 1728^{\circ},5 \text{ K},$$

$$t_3 = T_3 - 273 = 1728,5 - 273 = 1455^{\circ},5 \text{ C}.$$

Εἰς τὴν κορυφὴν A_4

$$p_4 = p_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}} = \frac{24}{6,96} = 3,45 \text{ kg/cm}^2,$$

$$T_4 = T_3 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1728,5 . \frac{1}{4^{0,4}} = \frac{1728,5}{1,74} = 993^{\circ},5 \text{ K},$$

$$t_4 = T_4 - 273 = 993,5 - 273 = 720^{\circ},5 \text{ C}.$$

Ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (1) τῆς § 74,

$$(1) \qquad \eta_{\theta} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{993,5 - 288}{1728,5 - 501} = 1 - 0,575 = 0,425.$$

β. Τὸ ἔργον κατὰ τὴν διαγραφὴν τοῦ κύκλου $A_1A_2A_3A_4A_1$ εἶναι

$$(2) \qquad E = E_{3,4} - E_{2,1}.$$

Τὰ ἔργα $E_{3,4}$ καὶ $E_{2,1}$ κατὰ μῆκος τῶν ἀδιαθέρμων A_3A_4 καὶ A_2A_1 θὰ ὑπολογίσωμεν, δυνάμει τοῦ τύπου (11) τῆς § 19· ἔχομεν δηλαδὴ

$$(3) \qquad E_{3,4} = \frac{p_3 V_3}{\gamma - 1}\left[-1\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right], \quad E_{2,1} = \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Ὁ ὄγκος $V = V_4 - V_3$ τῆς κυλινδρώσεως εἶναι, δυνάμει τῶν δεδομένων (IV),

$$(4) \qquad V = \frac{\pi \Delta^2}{4} s = \frac{3,14.0,09^2.0,14}{4} = 0,0009 \text{ m}^3.$$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{V_4}{V_3} = 4$, θὰ εἶναι

$$\frac{V_4}{V_3} - \frac{V_3}{V_3} = \frac{0,0009}{V_3} = 3.$$

Ὅθεν

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_3 = \dfrac{0,0009}{3} = 0,0003 \text{ m}^3, \\ V_4 = 4\ V_3 = 0,0012 \text{ m}^3. \end{array} \right.$$

Οἱ τύποι (3), δυνάμει τῶν (5), ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει ὅτι, ἐπειδὴ τὰ p εἶναι εἰς kg/cm², πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 10000, γράφονται

$$E_{3,4} = \frac{24.10000.0,0003}{0,4}\left[1-\left(\frac{1}{\varepsilon\gamma}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

ἢ

(6) $$E_{3,4} = \frac{24.10000.0,0003}{0,4}\left(1-\frac{1}{4^{0,4}}\right) = 180\left(1-\frac{1}{1,74}\right) =$$

$$= 180.0,425 = 75,5 \text{ kgm.}$$

(7) $$E_{2,1} = \frac{6,96.10000.0,0003}{0,4}\left(1-\frac{1}{6,96^{\frac{0,4}{1,4}}}\right) =$$

$$= \frac{6,96.10000.0,0003}{0,4}\left(1-\frac{1}{4^{0,4}}\right) = \frac{6,96.30}{4}.0,425 = 1,74.30.0,425 = 22,2.$$

Ὅθεν ἐκ τῆς (2) ἔχομεν

(8) $$E = 75,5 - 22,2 = 53,3 \text{ kg/m.}$$

Αἱ θερμίδες Q, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζονται εἰς τὸ ἔργον E, προσδιορίζονται ἐκ τῆς σχέσεως

(9) $$Q = AE = \frac{1}{427}.53,3 = 0,125 \text{ Cal.}$$

Ἡ κινητήριος ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος εἶναι, δυνάμει τοῦ τύπου (24) τῆς § 72,

(10) $$I_{\varkappa} = \frac{E}{2}\cdot\frac{\nu}{60.75} = \frac{53,3.1200}{2.60.75} = 7,10 \text{ ἵπποι.}$$

Ἄς ἴδωμεν ἂν τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα συμφωνοῦν πρὸς τὰ δεδομένα (VI). Ἐπειδὴ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ καυσίμου εἶναι πολὺ μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος ἐν τῷ εἰσαγομένῳ μίγματι εἶναι

(11) $$P = V\beta = 0,0009.1,23 = 0,0011 \text{ kg.}$$

Ὅθεν τὸ βάρος τοῦ καυσίμου ἐν τῷ μίγματι θὰ εἶναι

(12) $$p' = \frac{0,0011}{21} = 0,000055 \text{ kg.}$$

Αἱ θερμίδες τοῦ καυσίμου τούτου εἶναι

(13) $$0,000052.11000 = 0,572 \text{ Cal.}$$

Κατὰ τὴν φάσιν τῆς εἰσροῆς εἰσάγονται λοιπὸν εἰς τὸν κύλινδρον 0,572 Cal. Ἐξ αὐτῶν, ἐπειδὴ ὁ θερμικὸς συντελεστὴς ἀποδόσεως τοῦ κύκλου εὑρέθη ὅτι εἶναι 0,425, θὰ ἔπρεπε νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἔργον

(14) $$0,52.0,425 = 0,243 \text{ Cal.}$$

Ὡς ἐμφαίνεται ὅμως ἐκ τοῦ τύπου (9), μόνον 0,125 Cal. μετασχηματίζονται εἰς τὸ ἔργον τοῦ κύκλου. Τοῦτο ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἀτελῆ καῦσιν, λόγῳ τῆς ὁποίας δὲν ἀποδίδονται ἅπασαι αἱ θερμίδες τοῦ καυσίμου.

ΤΕΛΟΣ

B