Δ 2 ΜΜΙ

Μ. Α. ΓΕΩΡΓΙΑΚΩΔΗ—Μ. Γ. ΝΙΚΗΤΑ

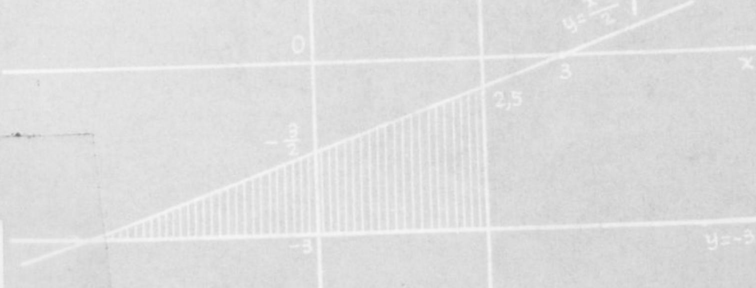
Γεωργιακώδης (Μ. Α) - Νικήτας (Μ. Γ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ἀσκήσεις μετά Λύσεων

Γ

ΣΧΟΛΙΚΟΝ ΒΟΗΘΗΜΑ



ΕΚΔΟΤΗΣ
ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5ε — ΑΘΗΝΑΙ
1968

Δ 2 ΜΜΣ

Γεωργιακώδης (Μ.Α.) - Νικήτας (Μ.Γ.)

Μ. Α. ΓΕΩΡΓΙΑΚΩΔΗ - Μ. Γ. ΝΙΚΗΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ

Ασκήσεις μαθηματικ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ ΛΥΣΕΩΝ

Σχολικόν Βοήθημα

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΠΕΤΡΟΣ Κ. ΡΑΝΟΣ
ΟΔΟΣ ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5 - ΑΘΗΝΑΙ
1968

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ ἐκδότου

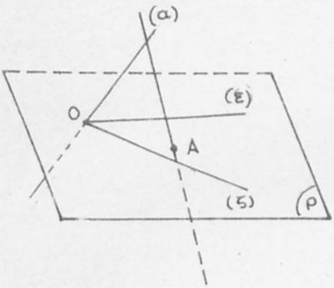
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

§ 1. Εὐθεῖαι, ἐπίπεδα καὶ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά σχεδιάσετε δύο εὐθείας ε καί ζ πού νά τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω τό Ο. Κατόπιν νά θεωρήσετε μίαν τρίτην εὐθεῖαν α ἡ ὁποία νά τέμνῃ τό ἐπίπεδον ρ τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν εἰς ἕνα σημεῖον Α. Νά ἐξετάσετε τώρα, διά τάς διαφόρους θέσεις τοῦ Α μέσα εἰς τό ρ, ποῖαι εὐθεῖαι τοῦ χώρου συναντοῦν καί τάς τρεῖς εὐθείας ε, ζ καί α.



1) Ἔστω ὅτι τό Α εὑρίσκεται ἐπί τοῦ ρ χωρίς νά ἀνήκῃ εἰς καμμίαν ἀπό τάς (ε) καί (ζ). Τότε πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διά τοῦ Α καί μή παράλληλος πρός οὐδεμίαν τῶν (ε) καί (ζ) τέμνει τάς (α), (ε) καί (ζ)

2) Ἔστω ὅτι τό Α ἀνήκει εἰς μίαν τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ἔστω εἰς τήν (ζ), πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διά τοῦ Α καί μή παράλληλος πρός τήν (ε) πληροῖ τήν ζητουμένην ἰδιότητα. Ὁμοίως ἐάν τό Α ἔκειτο ἐπί τήν (ε) τότε πᾶσα μή παράλληλος πρός τήν (ζ) θά τέμνῃ τάς (α), (ε) καί (ζ).

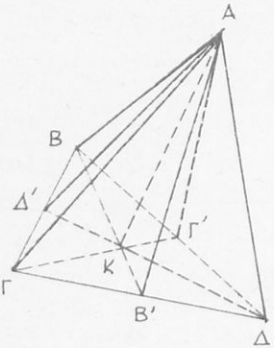
3) Ἐάν τό Α ἀνήκῃ εἰς τήν τομήν τῶν (ε) καί (ζ), δηλαδή ἐάν συμπίπτῃ μέ τό Ο τότε πᾶσα εὐθεῖα τοῦ χώρου διερχομένη διά τοῦ Ο τέμνει τάς (α), (ε), καί (ζ).

4) Ἄν τό Α εὑρίσκεται ὡς εἰς τό σχῆμα τότε πᾶσα εὐθεῖα πού διέρχεται διά τοῦ Ο καί κεῖται εἰς τό ἐπίπ. ((α), Ο) χωρίς νά εἶναι // πρός τήν (α), εἶναι ἡ ζητουμένη.

2) Νά σχεδιάσετε ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ (Βιβλ. 1, σελ. 17Α) καί τάς τρεῖς διαμέσους ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. Νά δείξετε ἔπειτα ὅτι τά ἐπίπεδα ΑΒΒ', ΑΓΓ' καί ΑΔΔ' ἔχουν μίαν κοινήν εὐθεῖαν.

Λύσις

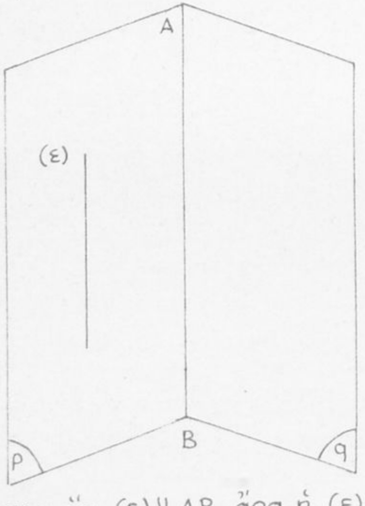
Τά ἐπίπεδα ΑΒΒ' καί ΑΓΓ' τέμνονται κατά τήν εὐθεῖαν ΑΚ, διότι ἔχουν τά σημεῖα Α καί Κ κοινά. Ὁμοίως τά ἐπίπεδα ΑΒΒ' καί ΑΔΔ' τέμνονται κατά τήν ἰδίαν εὐθεῖαν ΑΚ. Ἐπίσης δέ τά ἐπίπεδα ΑΓΓ' καί ΑΔΔ' τέμνονται κατά τήν ΑΚ. Ἄρα ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι τά τρία ἐπίπεδα ΑΒΒ', ΑΓΓ' καί ΑΔΔ' τέμνονται κατά τήν αὐτήν εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι ἡ ΑΚ. Ἔχουν μόνον αὐτήν τήν εὐθεῖαν κοινήν διότι ἐάν εἶχον καί μίαν ἄλλην θά ἐταυτίζοντο.



3) Νά σχεδιάσετε μέ τόν ὑποδειχθέντα τρόπον (§1.1) δύο ἐπίπεδα p καί q πού νά τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν ΑΒ. Εἰς τό ἕνα ἀπό αὐτά τά ἐπίπεδα νά σχεδιάσετε εὐθεῖαν ε ∥ ΑΒ (μέ στενήν σημασίαν) καί νά ἐξετάσετε ἄν ἡ εὐθεῖα αὐτή ἠμπορεῖ νά τέμνη τό ἄλλο ἐπίπεδον.

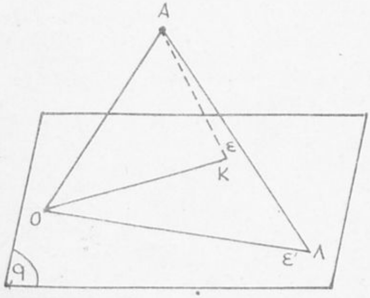
Λύσις

Ἔστω εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐπιπέδου p παράλληλος πρός τήν ΑΒ. Ἐάν ἡ εὐθεῖα αὐτή ἔτεμνε τό ἄλλο ἐπίπεδον, q τότε θά ἔτεμνε τήν εὐθεῖαν ΑΒ, τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει πρός τήν ὑπόθεσιν τοῦ προβλήματος ὅτι (ε) ∥ ΑΒ, ἄρα ἡ (ε) ∥ q



4) Νά σχεδιάσετε ἕνα ἐπίπεδον q πού νά περιέχη τάς δύο τεμνομένας εὐθείας ε καί ε' καί νά θεωρήσετε ἕνα σημεῖον $A \notin q$. Νά ἐξη-

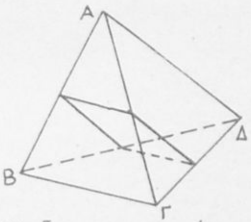
χήσετε διατί τά δύο ἐπίπεδα πού ὁρίζονται τό ἕνα ἀπό τήν εὐθεῖαν ε καί τό σημεῖον Α, τό ἄλλο ἀπό τήν ε' καί τό Α' τέμνονται καί νά προσδιορίσετε τήν εὐθεῖαν τῆς τομῆς των.



Λύσις

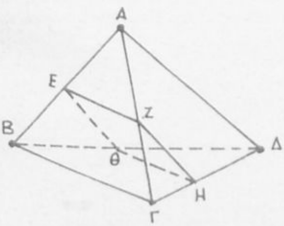
Ἔστω Ο τό σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν (ε) καί (ε') καί Α σημεῖον ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου q.
Ἐάν τά ἐπίπεδα (ε, Α) καί (ε', Α) δέν ἐτέμνοντο, θά ἦσαν παράλληλα, δηλαδή δέν θά εἶχαν κανένα κοινόν σημεῖον, αὐτά ὅμως ἔχουν τό Ο κοινόν, ὅπως καί τό Α, διότι τό Ο ἀνήκει εἰς τήν (ε) καί εἰς τήν (ε'), ὁμοίως δέ τό Α θά ἀνήκη εἰς τάς ΑΚ καί ΑΛ αἱ ὁποῖαι μαζί μέ τάς (ε) καί (ε') ὁρίζουν τά ἐπίπεδα. Ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν θά εἶναι ἡ ΟΑ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά κοινά σημεῖα Α καί Ο.

5) Τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοῦ χώρου (σχ.32) δέν ἀνήκουν εἰς τό ἴδιον ἐπίπεδον. Ἄν τά συνδέσωμεν μέ εὐθύγραμμα τμήματα ἀνά δύο σχηματίζεται ἕνα τετράεδρον. Νά δείξετε (Βάσει τῶν ὅσων ἐμάθατε εἰς τό Βιβλ. II, σελ. 196 ἄσκ. 5) ὅτι τά μέσα τῶν ἀκμῶν του ΑΒ, ΑΓ, ΔΒ, ΔΓ εἶναι κορυφαί παραλληλογράμμου.

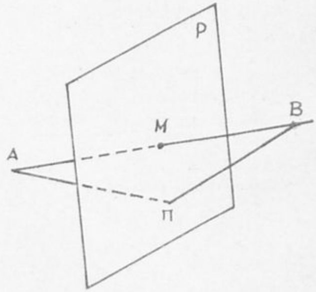


Λύσις

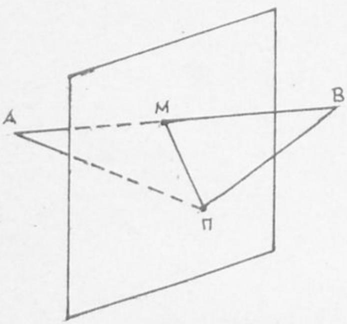
Ἔστωσαν Ε, Ζ, Η, Θ τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ τοῦ τετραέδρου ἡ ΕΖ συνδέουσα τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΒΓ καί θά ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ αὐτῆς, δηλ. $EZ = /\!/ \frac{B\Gamma}{2}$ ὁμοίως ἡ ΘΗ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΔΓ θά εἶναι $\Theta H = /\!/ \frac{B\Gamma}{2}$, ἑπομένως $EZ = /\!/ \Theta H$ ἄρα τό ΕΖΗΘ ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευράς παραλλήλους καί ἴσας θά εἶναι παραλληλόγραμμον.



6) Εἰς τό σχέδ. 33 τό ἐπίπεδον ρ εἶναι κάθετον πρός τήν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τό μέσον Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Νά συγκρίνετε τάς ἀποστάσεις ἑνός τυχόντος σημείου Π τοῦ ρ ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Ποίαν ἰδιότητα τοῦ σημειοσυνόλου ρ ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε ἀπ' αὐτήν τήν σύγκρισιν;



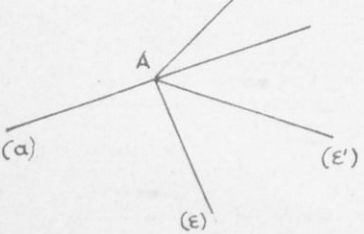
Λύσις



Φέρομεν τήν ΠΜ, ἡ ὁποία ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ρ θά εἶναι κάθετος εἰς τήν ΑΒ καί διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς ΑΒ τό Μ. Ἄρα θά εἶναι μεσοκάθετος εἰς τήν ΑΒ, ἐπομένως ΠΑ = ΠΒ.
Πᾶν δέ σημεῖον τοῦ Ρ θά ὁρίζῃ τήν μεσοκάθετον τῆς ΑΒ, ἄρα πᾶν σημεῖον τοῦ σημειοσυνόλου ρ θά πληροῖ τήν ἰδιότητα νά ἀπέχῃ ἰσάκις ἀπό τά Α καί Β.

7) Εἰς τό σημεῖον Α μιᾶς εὐθείας α ὑπάρχουν εἰς τόν χῶρον ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι κάθετοι πρός αὐτήν. Νά ἐξηγήσητε διατί αἱ κάθετοι αὐταί εὐθεῖαι ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐπίπεδον ⊥α εἰς τό σημεῖον Α.

Λύσις

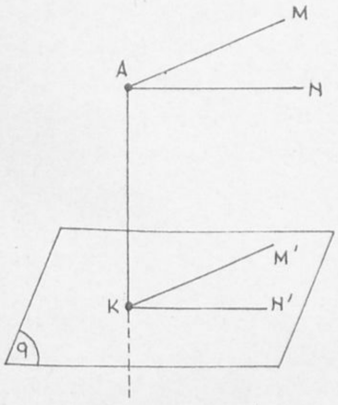


Ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐπίπεδον κάθετον εἰς τήν (α), διότι μόνον αἱ εὐθεῖαι ἐπιπέδου καθέτου πρός τήν (α) εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν. Εἶναι δέ ἕν καί μόνον διότι ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλο θά εἴχαμεν δύο ἐπίπεδα ⊥ στήν εὐθεῖα (α) εἰς τό αὐτό σημεῖον.

8) Ἀπό ἕνα σημεῖον A τοῦ χώρου διέρχονται ἀπειράριθμοι εὐθεῖαι παράλληλοι πρός δοθέν ἐπίπεδον q. Νά δείξετε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἀνήκουν εἰς ἕνα ἐπίπεδον p ∥ q.

Ὑπόδειξις Νά θεωρήσετε τήν AK ⊥ q καί νά προσέξετε ὅτι αἱ παράλληλοι πρός τό q εὐθεῖαι πού διέρχονται ἀπό τό K εἶναι ⊥ AK.

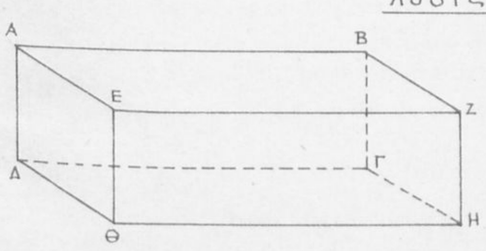
Λύσις



Θεωροῦμεν τήν εὐθεῖαν AK ⊥ q. Φέρομεν τάς AN καί AM παραλλήλους πρός τό ἐπίπεδον q. Αὗται ὡς παράλληλοι πρός τό q θά εἶναι παράλληλοι πρός δύο εὐθείας KM′ καί KN′ τοῦ q. Ἀλλά KM′ καί KN′ ὡς ἀνήκουσαι εἰς ἐπίπεδον ⊥ εἰς τήν AK θά εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν ἑπομένως καί αἱ παράλληλοι πρός αὐτάς αἱ AM καί AN θά εἶναι ⊥ εἰς τήν AK. Ἄρα θά ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον p κάθετον εἰς τήν AK, ἤτοι παράλληλον στό q

9) Νά σχεδιάσετε ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (Βιβλ.Ι, σελ. 3) καί νά ἀναφέρετε τά ζεύγη τῶν ἀκμῶν του αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας

Λύσις

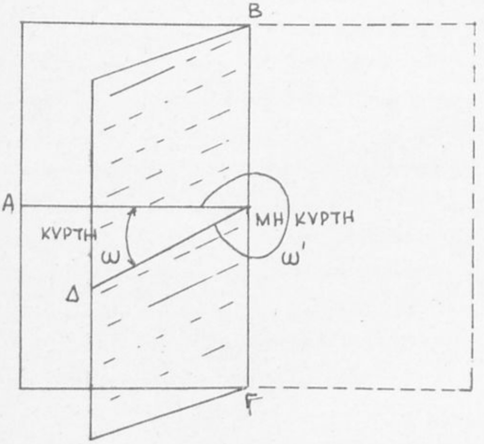


AE, ΘH	ZE, ΔΘ
AΔ, ΘH	ZE, ΓH
BΓ, ΘH	ZE, BΓ
BZ, ΘH	ZE, AΔ

Ποῖα εἶναι τά ἄλλα ζεύγη;

10) Μια μονόφυλλος θύρα εἶναι ἀνοικτή. Νά διακρίνετε τήν κυρτήν καί τήν μή κυρτήν δίεδρον γωνίαν πού τό ἡμιεπίπεδον τῆς μιᾶς ὄψεώς της σχηματίζει μέ τό ἡμιεπίπεδον τοῦ τοίχου τό ὁποῖον εἶναι προέκτασις τοῦ ἡμιεπιπέδου τῆς θεωρουμένης ὄψεως, ὅταν ἡ θύρα εἶναι κλειστή.

Λύσις



Ἡ δίεδρος ΑΒΓΔ εἰς τήν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐπίπεδος ω εἶναι ἡ κυρτή ἐνῶ ἡ δίεδρος ΔΒΓΑ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν ἐπίπεδον ω' εἶναι ἡ μή κυρτή.

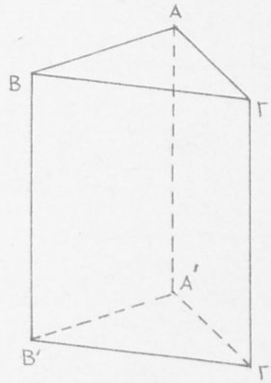
11) Νά πραγματοποιήσετε ἕνα κανονικόν τετράεδρον, ἀφοῦ ἀποκόψετε ἀπό ἕνα λεπτόν χαρτόνι τό ἀνάπτυγμά του (Βιβλ. Ι σελ. 18Α), σχεδιάζοντες τά τέσσαρα ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα τῶν ἑδρῶν του. Πῶς εἶναι δυνατόν νά αἰσθητοποιήσετε ἐπάνω εἰς τήν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ τό ὁποῖον κατασκευάσατε τάς ἐπιπέδους γωνίας τῶν ἕξ διέδρων γωνιῶν του; Μήπως ἠμπορεῖτε νά δείξετε ὕστερα ἀπό αὐτήν τήν αἰσθητοποίησιν ὅτι αἱ ἕξ αὐταί ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των; Τί ἕπεται ἀπ' αὐτό διά τάς ἕξ διέδρους τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου;

Ἡ κατασκευή θά γίνη ὑπό τοῦ μαθητοῦ

12) Εἰς ἕνα ὀρθὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (Βιβλ. Ι. σελ. 16 Α) μὲ βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ καθεμία ἀπὸ τὰς ἐννέα διέδρους του; Καὶ διατί;

Λύσις

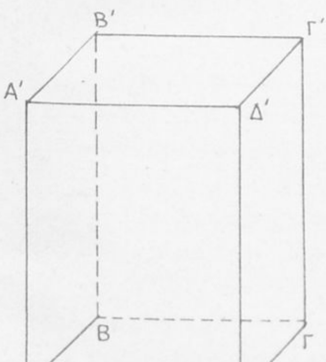
Αἱ ΓΓ′, ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι 60° ἑκάστη διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι αὐτῶν εἶναι αἱ Α, Β, Γ αἱ ὁποῖαι εἶναι 60° ἑκάστη ὡς γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου.



Αἱ δίεδροι ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ καὶ Α′Β′ Β′Γ′ καὶ ΑΓ′ εἶναι 90° ἐπειδὴ οἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι 90°. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΒΒ′, ΑΒΒ′, ΒΑΑ′ εἶναι 90° ἐπειδὴ τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰς ἄλλας τρεῖς διέδρους τῆς ἄλλης βάσεως.

13) Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία $\hat{A}$ εἶναι 70,4°. Πόσων μοιρῶν εἶναι καθεμία ἀπὸ τὰς τέσσαρας παραπλεύρους διέδρους του; Καὶ διατί;

Λύσις



Τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθὸν ἄρα αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν διέδρων ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ καὶ ΔΔ′ εἶναι αἱ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$

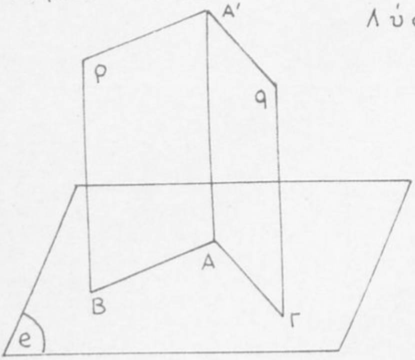
Ἐπειδὴ $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 70{,}4°$ ἔχομεν ὅτι

διεδ. ΑΑ′ = διεδ ΓΓ′ = 70,4°

Ἄρα καὶ διεδ ΒΒ′ = διεδ ΔΔ′ = = 109,6°

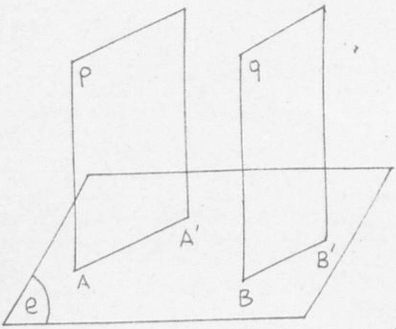
14) Νά ἐξετάσετε πότε δύο ἐπίπεδα p καί q, πού εἶναι κάθετα πρός ἕνα καί τό ἴδιον ἐπίπεδον e, εἶναι καί μεταξύ των κάθετα, πότε εἶναι παράλληλα καί πότε τεμνόμενα

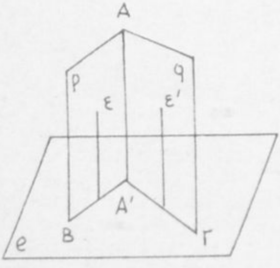
Λύσις



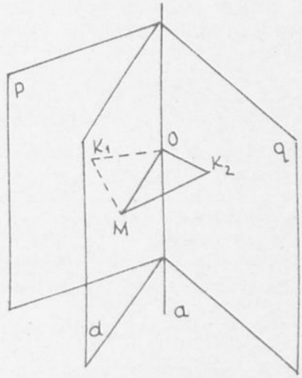
I) Τά ἐπίπεδα ρ καί q θά εἶναι μεταξύ των κάθετα, ἐάν ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου AA' ἐπίπεδος ΒΑΓ εἶναι γωνία 90° Διότι τότε ΑΓ ⊥ ΑΒ καί ΑΓ ⊥ ΑΑ', τότε ἐφ' ὅσον τό q περιέχει μίαν εὐθεῖαν, τήν ΑΓ, ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τό ρ συνεπάγεται ὅτι καί τό ἐπίπεδον πού περιέχει αὐτήν δηλ. τό q, θά εἶναι κάθετον εἰς τό ρ

II) Τά ἐπίπεδα ρ καί q θά εἶναι παράλληλα μόνον ὅταν αἱ τομαί αὐτῶν μετά τοῦ e δηλ. αἱ AA' καί BB' εἶναι παράλληλοι. Διότι ἐάν ρ//q καί AA', BB' ὄχι παράλληλοι, τότε θά ἐτέμνοντο αἱ AA' καί BB' κατά ἕνα σημεῖον, ἔστω Κ, ὁπότε αὐτό θά ἦτο καί σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων, ὅπερ ἀδύνατον, διότι τά ρ καί q ἐπετέθησαν παράλληλα. Ἐάν δέ AA'//BB' καί ρ, q ὄχι παράλληλα καί πάλιν θά ἐτέμνοντο, ὁπότε θά ἐτέμνοντο καί αἱ τομαί αὐτῶν μετά τοῦ e αἱ AA' καί BB' ὅπερ ἀδύνατον, διότι AA' // BB' ὡς ὑπετέθη.





III) Τά ρ καί q θά τέμνωνται ἐάν αἱ A'B καί A'Γ τέμνωνται, διότι ἐφ' ὅσον αἱ εὐθεῖαι αὐτῶν A'B καί A'Γ θά ἔχουν κοινόν σημεῖον καί τά ἐπίπεδα εἰς τά ὁποῖα ἀνήκουν θά ἔχουν κοινόν σημεῖον. Ἐάν δέ αἱ A'Γ καί A'B δέν ἐτέμνοντο τά ρ καί q δέ θά ἐτέμνοντο ἄρα θά ἦσαν παράλληλα, διότι ἐάν ε καί ε΄ παράλληλοι ὡς κάθετοι εἰς τό e καί Α΄Β καί Α΄Γ παράλληλοι τά p καί q ὡς ὁριζόμενα ἀπό 2 εὐθείας παραλλήλους θά ἦσαν παράλληλα.



15) Εἰς τό σχ. 34 τό ἡμιεπίπεδον d διχοτομεῖ τήν κυρτήν δίεδρον γωνίαν $\widehat{paq}$. Ἀπό τό τυχόν σημεῖον M τοῦ ἡμιεπιπέδου d φέρομεν τάς ἀποστάσεις MK_1 καί MK_2 τοῦ M ἀπό τά ἡμιεπίπεδα p καί q. Ἔστω O τό σημεῖον ὅπου τό ἐπίπεδον K_1MK_2 τέμνει τήν ἀκμήν a τῆς διέδρου. Νά δείξετε ὅτι

1ον τό ἐπίπεδον K_1MK_2 εἶναι $\perp a$,

2ον $\sphericalangle(OM, OK_1) = \sphericalangle(OM, OK_2)$

$\sphericalangle(K_2M, K_2O) = \sphericalangle(K_1M, K_1O) = 90°$ καί

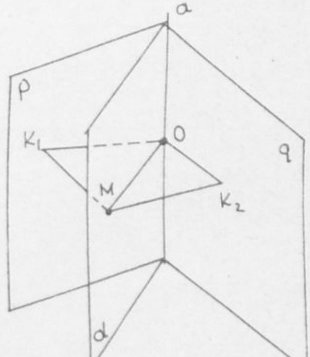
3ον ὅτι $MK_1 = MK_2$

Ποίαν ἰδιότητα τοῦ διχοτομοῦντος ἡμιεπιπέδου d συμπεραίνετε ἀπό τά ἀνωτέρω;

Λύσις

1ον. $K_1MK_2 \perp a$

Ἡ MK_1 ὡς ἀπόστασις τοῦ M ἀπό τό K_1 θά εἶναι ὀρθογώνιος εἰς κάθε εὐθεῖαν αὐτοῦ, ἐπομένως καί εἰς τήν a, ὁμοίως ἡ MK_2 ὡς ἀπόστασις τοῦ M ἀπό τό q θά εἶναι ὀρθογώνιος εἰς τήν a.



Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἐάν εὐθεῖα εἶναι ὀρθογώνιος εἰς 2 τεμνομένας εὐθείας ἑνός ἐπιπέδου θά εἶναι κάθετος εἰς τό ἐπίπεδον, ἄρα $a \perp K_1MK_2$

2ον $\sphericalangle(OM, OK_1) = \sphericalangle(OM_2 OK_2)$

Αἱ δίεδροι p a d καί d a q εἶναι ἴσαι, διότι τό d εἶναι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον ἡ $K_1\widehat{O}M = (OM, OK_1)$ εἶναι ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς daq, διότι τό ἐπίπεδον $K_1MK_2 \perp a$ γνωρίζομεν ὅμως ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι ἴσων διέδρω

$\sphericalangle (K_2M, K_2O) = \sphericalangle (K_1M, K_1O)$

ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι: $MK_1 \perp p$ καί $MK_2 \perp q$ ἄρα $MK_1 \perp OK_1$ καί $MK_2 \perp OK_2$ διότι εὐθεῖα κάθετος πρός ἐπίπεδον εἶναι κάθετος καί εἰς κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου, ἄρα $\sphericalangle (K_2M, K_2O) = 90°$ καί $\sphericalangle (K_1M, K_1O) = 90°$ ὁπότε: $\sphericalangle (K_2M, K_2O) = \sphericalangle (K_1M, K_1O) = 90°$

3ον $MK_1 = MK_2$: Συγκρίνομεν τά τρίγωνα K_1OM καί K_2OM ἔχουν α) $OM = OM$ ὡς κοινήν

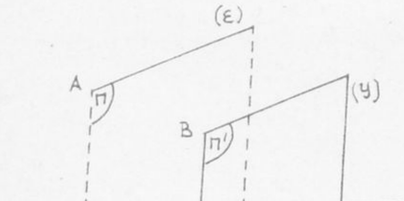
β) $K_1\hat{O}M = K_2\hat{O}M$ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω (2ον) εἶναι δέ καί ὀρθογώνια, ἄρα ἴσα:

Ἑπομένως: ἔχουν καί $MK_1 = MK_2$. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι τό δικοτομοῦν τήν δίεδρον ἐπίπεδον εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού ἀπέχουν ἰσάκις ἀπό τάς πλευράς τῆς διέδρου.

16) Νά σχεδιάσετε τάς ὀρθάς προβολάς ε΄ καί ϛ΄ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ χώρου ε καί ϛ ἐπί ἑνός προβολικοῦ ἐπιπέδου ρ. Τί ἠμποροῦμεν νά εἴπωμεν διά τήν σχετικήν θέσιν τῶν προβολῶν ε΄ καί ϛ΄;

Λύσις

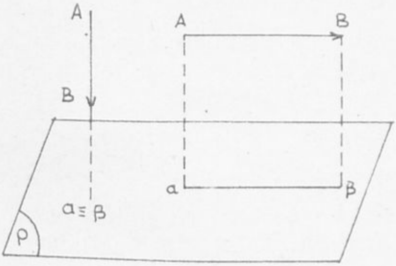
Κατά τά γνωστά κατασκευάζομεν τάς ὀρθάς προβολάς τῶν (ε) καί (ϛ) ἐπί τό ἐπίπεδον ρ. Τά σχηματιζόμενα ἐπίπεδα π καί π΄ εἶναι παράλληλα διότι ἔχουν (ε)//(ϛ) ἐξ ὑποθέσεως καί ΑΑ΄//ΒΒ΄ ὡς καθέτους ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον.



Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι αἱ τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό ἄλλου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι, ἄρα (ε΄)//(ϛ΄) ἑπομένως αἱ ὀρθαί προβολαί παραλλήλων εὐθειῶν ἐπί ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι ἐάν (ε) καί (ϛ) συμπίπτουν καί αἱ ὀρθαί προβολαί των συμπίπτουν, ἐάν δέ αἱ (ε) καί (ϛ) εἶναι κάθετοι πρός τό ρ τότε αἱ ὀρθαί προβολαί των θά εἶναι σημεῖα.

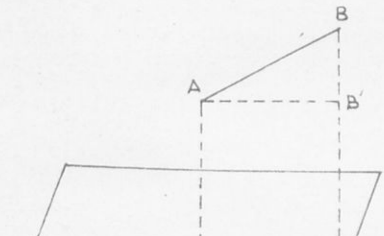
17) Νά προβάλετε ὀρθῶς ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐπάνω εἰς ἕνα προβολικόν ἐπίπεδον ρ καί νά συγκρίνετε τό μῆκος τῆς προβολῆς μέ τό μῆκος τοῦ διανύσματος εἰς τάς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις: 1η ἡ εὐθεῖα AB εἶναι // ρ, 2α ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ⊥ ρ, 3η ἡ AB δέν εἶναι οὔτε // οὔτε ⊥ ρ.

Λύσις



Ι. Σχηματίζομεν τήν προβολήν αβ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ διότι αβ τομή τοῦ ἐπιπέδου αβBA, καί τοῦ ρ, τό ὁποῖον διέρχεται διά τῆς // AB πρός τό ρ, εἶναι AB // αβ, καί Aα // Bβ ὡς κάθεται ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον. Ἄρα τό ABβα παραλληλόγραμμον, ἄρα AB=αβ

ΙΙ. AB ⊥ ρ. Αἱ προβάλουσαι τά A καί B ἔχουν φορέα τῆς AB, ἄρα θά ταυτίζωνται μέ τήν AB, δηλ. θά τέμνουν το ρ εἰς ἕνα σημεῖον, τό ὁποῖον θά εἶναι ἡ προβολή τῆς AB εἰς τό ρ.



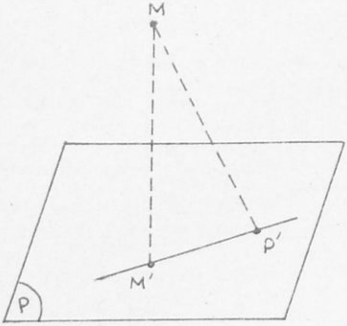
ΙΙΙ. Φέρομεν τάς προβολάς τῶν A καί B στό ρ καί σχηματίζομεν τήν αβ προβολήν τῆς AB: ἐκ τοῦ A φέρομεν παράλληλον πρός τήν αβ, ἡ ὁποία τέμνει τήν Bβ τό B'. Ἡ AB' = αβ (1) ὡς ἐδείχθη ἐν (ΙΙ). Τό τρίγωνον $B'\hat{A}B$ εἶναι ὀρθογώνιον καί πᾶσα κάθετος πλευρά εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης, ἄρα AB' < AB (2)

AB' ⊥ Bβ διότι AB' // αβ καί αβ ⊥ Bβ διότι Bβ κάθετος εἰς τό ρ καί αβ εὐθεῖα τοῦ ρ

ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν ὅτι αβ < AB

18) Ἔστω ρ ἕνα ἐπίπεδον, M' ἡ προβολή ἑνός σημείου M ∉ ρ εἰς τό ἐπίπεδον ρ καί P τυχόν σημεῖον τοῦ ρ διάφορον ἀπό τό M'. Νά δείξετε ὅτι MM' < MP.

Ἡ Μ'ρ' θά ἀνήκῃ εἰς τό ρ, διότι δύο σημεῖα αὐτῆς τά Μ'ρ' ἀνήκουν εἰς τό ρ. Ἔχομεν ΜΜ'⊥ρ ἄρα ΜΜ'⊥Μ'ρ' ὁπότε ἡ Μρ' θά εἶναι πλαγία, διότι ἐξ ἑνός σημείου ἐπί εὐθεῖαν μόνον μία κάθετος ἄγεται. Ἄρα ἀφοῦ ΜΜ'⊥Μ'ρ' θά εἶναι Μρ' πλαγία.

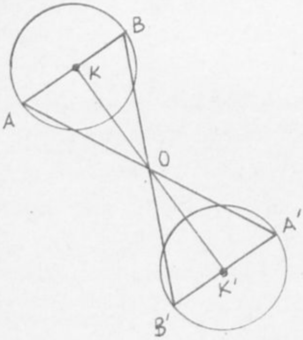


Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, μέ τήν ὁποίαν ἔχουν τά αὐτά ἄκρα. Ἄρα ΜΜ' < Μρ'.

Ἀσκήσεις σελίδος 27

1) Νά ἐξετάσετε ἄν τό συμμετρικόν σφαίρας ὡς πρός ἕνα σημεῖον ἤ ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδον εἶναι σφαῖρα καί ἐάν εἶναι σχῆμα ἐφαρμόσιμον μέ τήν ἀρχικήν σφαῖραν.

Λ ύ σ ι ς



α) Ἔστω ἡ σφαῖρα κέντρου Κ καί ἀκτῖνος ϱ καί σημεῖον Ο τοῦ χώρου. Ζητοῦμεν τό συμμετρικόν τῆς σφαίρας ὡς πρός τό κέντρον συμμετρίας τό Ο. Τό συμμετρικόν τοῦ κέντρου Κ ὡς πρός τό Ο εἶναι τό Κ' ἔστω ΚΑ τυχοῦσα ἀκτίς. Τό συμμετρικόν τοῦ Α ὡς πρός τό Ο εἶναι τό Α' Ἄρα Κ'Α' συμμετρ. ὡς πρός τό κέντρον Ο τοῦ ΑΚ Ἄρα Κ'Α' = ΚΑ = ϱ. Ὥστε τό Α' συμμετρικόν τυχόντος σημείου Α τῆς σφαίρας ἀπέχει ἐκ τοῦ σημείου Κ' σταθ. ἀπόστασιν. Ἄρα κεῖται ἐπί σφαίρας κέντρου Κ' καί ἀκτῖνος ϱ. Ἑπομένως τό συμμετρικόν τῆς (Κ, ρ) εἶναι σφαῖρα κέντρου Κ' καί ἀκτῖνος ϱ.

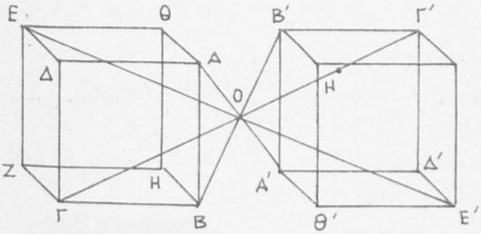
Ἐπειδή αἱ σφαῖραι εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός κέντρον Ο εἶναι ἐφαρμόσιμοι.

β) Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καί διά τό ἐπίπεδον.

2) Νά κάμετε τό ἴδιον διά τό συμμετρικόν ἑνός κύβου καί γενικώτερα διά τό συμμετρικόν ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Λύσις

Ἔστω ὁ κύβος ΑΒΓΔΕΖ καί σημεῖον Ο. Ζητοῦμεν τό συμμετρικόν τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ὡς πρός κέντρον συμμετρίας τό Ο



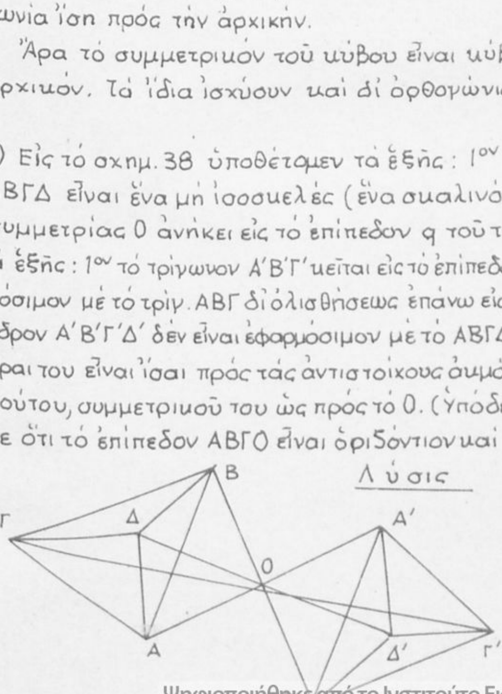
Τό συμμετρικόν ἑκάστης ἀκμῆς (ἐπειδή ἡ ἀκμή εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα) εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρός αὐτήν.

Ἐπίσης τό συμμετρικόν ἑκάστου εὐθυγράμμου σχήματος ὡς πρός κέντρον συμμετρίας εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα ἴσον πρός τό ἀρχικόν. Ἐπίσης τό συμμετρικόν ἑκάστης διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση πρός τήν ἀρχικήν.

Ἄρα τό συμμετρικόν τοῦ κύβου εἶναι κύβος ἐφαρμόσιμος πρός τόν ἀρχικόν. Τά ἴδια ἰσχύουν καί δι' ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

3) Εἰς τό σχημ. 38 ὑποθέτομεν τά ἑξῆς: 1ον ἡ βάσις ΑΒΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα μή ἰσοσκελές (ἕνα σκαλινόν) τρίγωνον. 2ον τό κέντρον συμμετρίας Ο ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον q τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νά δείξετε τότε τά ἑξῆς: 1ον τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ τριγ. ΑΒΓ καί εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό τρίγ. ΑΒΓ δι' ὀλισθήσεως ἐπάνω εἰς τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. 2ον τό τετράεδρον Α΄Β΄Γ΄Δ΄ δέν εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό ΑΒΓΔ, μολονότι αἱ ἀκμαί καί αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους ἀκμάς καί ἕδρας τοῦ τετραέδρου τούτου, συμμετρικοῦ του ὡς πρός τό Ο. (Ὑπόδειξις διά τό 2ον: Νά φαντασθῆτε ὅτι τό ἐπίπεδον ΑΒΓΟ εἶναι ὁριζόντιον καί ὅτι τό Ο κεῖται ἄνωθέν του).

Λύσις



Γνωρίζομεν ὅτι τό κέντρον συμμετρίας τοῦ ΑΒΓ δηλ. τό Ο κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Τα συμμετρικά Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν Α, Β, Γ κεῖνται ἐπί τῶν εὐθειῶν

ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα τό Α'Β'Γ' κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ ΑΒΓ.

Ἡ δίεδρος γωνία Α'Δ' = ΑΔ ἀλλά ὅταν προσπαθήσωμεν νά ἐφαρμόσωμεν τά τετράεδρα ἡ Α'Γ' θά πέση ἐπί τῆς ΓΒ. Ἀλλά ΓΒ ≠ Α'Γ' δηλ. αἱ τάσεις δέν ἐφαρμόζουν. Ἄρα τά δύο αὐτά σχήματα δέν ἐφαρμόζουν.

4) Εἰς τό σχ. 41 νά ὑποθέσετε ὅτι ἡ βάσις ΑΒΓ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα σκαλινόν τρίγωνον καί νά δείξετε ὅτι τότε τό τετράεδρον ΑΒΓΔ δέν εἶναι ἐφαρμόσιμον μέ τό ΑΒΓΔ*, μολονότι αἱ ἀκμαί καί αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀντιστοίχους ἀκμάς καί ἕδρας τούτου τοῦ ΑΒΓΔ*

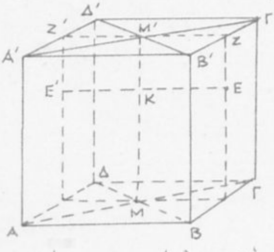
Λύσις

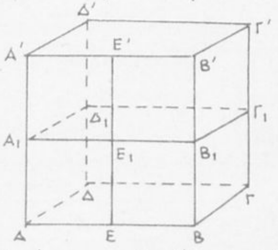
Ἔστω τό τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ἐάν περιστρέψωμεν αὐτό περί τήν ΒΓ τότε τό τετράεδρον ΑΒΓΔ θά ἔλθη εἰς τήν θέσιν ΑΒΓΔ,. Ἄρα δέν συμπίπτουν.

5) Νά ἐξηγήσετε διατί τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ἄξονας συμμετρίας τάς τρεῖς εὐθείας πού ὁρίζονται ἀντιστοίχως ἀπό τά τρία ζεύγη τῶν κέντρων δύο ἀπέναντι ἑδρῶν. Ἐπίσης, διατί ἔχει ἐπίπεδα συμμετρίας τά τρία ἐπίπεδα πού διχοτομοῦν καθέτως παραλλήλους ἀκμάς.

Λύσις

Ἀπό τό τυχόν σημεῖον Ε τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπ. φέρομεν κάθετον ἐπί τήν ΜΜ' καί τήν προεκτείνομεν ἕως ὅτου αὐτή τμήση τήν ἀπέναντι ἕδραν. Τό τετράπλευρον ΖΕΕ'Ζ' εἶναι



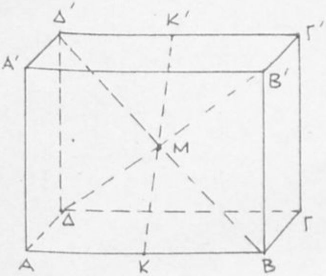


προφανῶς ὀρθογώνιον καί ἐπειδή Μ' κέντρον τῆς ἕδρας Α'Β'Γ'Δ' ἕπεται ΕΚ = Ε'Κ. Ἄρα πᾶν σημεῖον τοῦ ὀρθογωνίου παραλλ. τό συμμετρικόν του ὡς πρός ἄξονα τόν ΜΜ' ἐπί αὐτοῦ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν καί διά τάς δύο ἄλλας εὐθείας τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἔχουν συμμετρικά τῶν ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Α, Β, Γ, Δ, ἀντιστοίχως τὰ Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄. Ἀλλὰ καὶ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ἐπιφανείας ἔχει τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Α, Β, Γ, Δ, ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἤτοι τὸ σημεῖον Ε΄. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὰ ἄλλα δύο ἐπίπεδα.

6) Νὰ δείξετε ὅτι αἱ ἓξ εὐθεῖαι ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ἓξ ζεύγη τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ εἶναι ἄξονες συμμετρίας του.

Λύσις

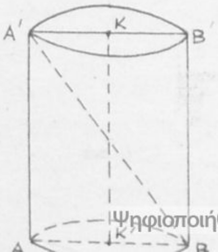
Ἔστω Κ καὶ Κ΄ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ καὶ Γ΄Δ΄. Φέρομεν τὰς ΜΚ΄, ΜΚ, ΒΔ΄. Οἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ τρίγωνα ΜΚ΄Δ΄ καὶ ΜΚΒ εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα τὰς Δ΄Κ΄ = ΚΒ Δ΄Μ = ΜΒ καὶ $\sphericalangle$ ΜΒΚ = $\sphericalangle$ Κ΄Δ΄Μ. Ἄρα $\sphericalangle$ Κ΄ΜΔ΄ = $\sphericalangle$ ΚΜΒ. Ἑπομένως ἡ Κ΄Κ εἶναι εὐθεῖα. Τὰ τρίγωνα ΑΚΜ καὶ ΜΚΒ εἶναι ἴσα ἄρα $\sphericalangle$ ΑΚΜ = $\sphericalangle$ ΜΚΒ = 1 ὀρθή. Ἄρα τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ΚΚ΄ εἶναι τὸ Β. Ὁμοίως καὶ πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου ἔχει τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν ΚΚ΄ ἐπ' αὐτοῦ. Ἄρα ἡ ΚΚ΄ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὰς πέντε ἄλλας εὐθείας.



7) Νὰ εὕρετε τὸ κέντρον συμμετρίας ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου. Ἐπίσης νὰ προσδιορίσετε τὰ ἀπειράριθμα ἐπίπεδα συμμετρίας του.

Λύσις

Ἔστω Μ τὸ μέσον τοῦ ἄξονος ΚΚ΄. Ἡ ΚΚ΄ καὶ ἡ Α΄Β κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰ τρίγωνα Α΄ΚΜ καὶ Κ΄ΒΜ ἔχουν $\sphericalangle$ ΚΑ΄Μ = $\sphericalangle$ ΜΒΚ΄, ΚΜ = ΜΚ΄, καὶ $\sphericalangle$ Α΄ΜΚ = $\sphericalangle$ ΒΜΚ΄. Ἄρα εἶναι ἴσα ἐπομένως Α΄Μ = ΜΒ. Ἤτοι τὸ ... κυλίνδρου



·οιον κεῖται ὁμοίως ἐπ' αὐτοῦ. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καί πᾶν ἄλλο σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἔχει τό συμμετρικόν του ὡς πρός Μ ἐπ' αὐτοῦ. Ἄρα τό Μ εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ κυλίνδρου. Τά ἀπειράριθμα ἐπίπεδα συμμετρίας εἶναι ὅλα τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ ΚΚ' καθώς καί τό κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν ΚΚ' είς τό μέσον Μ αὐτῆς.

θ) Ποῖοι εἶναι οἱ ἄξονες συμμετρίας καί ποῖα τά ἐπίπεδα συμμετρίας μιᾶς σφαίρας;

Λύσις

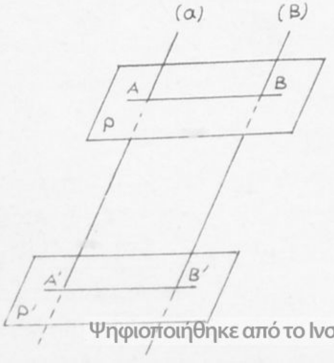
Ἄξονες συμμετρίας μιᾶς σφαίρας εἶναι πᾶσαι αἱ διάμετροι αὐτῆς. Ἐπίπεδα συμμετρίας εἶναι ὅλα τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ κέντρου αὐτῆς.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα $p \parallel p'$ καί δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $\alpha \parallel \beta$. Ἡ α τέμνει τά p καί p' εἰς τά σημεῖα Α καί Α' ἀντιστοίχως, ἡ β εἰς τά σημεῖα Β καί Β' ἀντιστοίχως.

Νά δείξετε ὅτι 1ον $AB \parallel A'B'$, 2ον $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ καί 3ον $\vec{AB} = \vec{A'B'}$.



Λύσις

I. $AB \parallel A'B'$

Γνωρίζομεν ὅτι (α) καί (β) παράλληλοι. Ἐπομένως ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο τόν ὁποῖον τέμνει τά p καί p' κατά τάς εὐθείας ΑΒ καί Α'Β'. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι παράλληλα ἐπίπεδα τεμνόμενα ὑπό ἄλλου ἐπιπέδου τέμνονται κατά εὐθείας παραλλήλους ... Ἄρα: $AB \parallel A'B'$

II. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

Τά ἄνωθι διανύσματα εὑρίσκονται ἐπί παραλλήλων φορέων (α) καί (β), ἔχουν τήν ἰδίαν φοράν καί τά αὐτά μέτρα, διότι ΑΒΒ'Α' παραλληλόγραμμον ἐφ' ὅσον ΑΒ // Α'Β' ὡς ἐδείχθη καί ΑΑ' // ΒΒ' ἐξ ὑποθέσεως, ἐπομένως εἶναι καί ΑΑ' = ΒΒ' ὡς ἀπέναντι πλευραί παραλληλογράμμου, ἄρα $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

III. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

Διά τούς ἰδίους ὡς καί εἰς τήν (II) λόγους ἔχομεν ὅτι

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

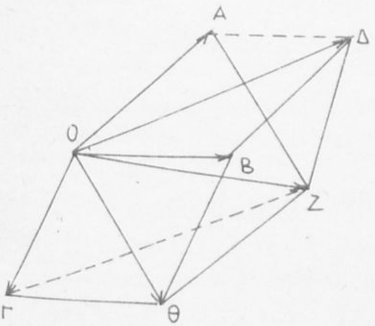
2) Νά σχεδιάσετε εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ χάρτου σας τρία ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}$ πού νά μήν εἶναι συγγραμμικά ἀνά δύο. Κατόπιν μέ τόν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου νά προσδιορίσετε τά δύο ἐφαρμοστά διανύσματα μέ ἀρχήν τό Ο τά ὁποῖα ὁρίζονται ἀπό τάς διανυσματικάς παραστάσεις :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{O\Gamma} \quad \text{καί} \quad \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$$

Θά ἐπαληθεύσετε τότε ὅτι τά δύο αὐτά διανύσματα ταυτίζονται, ἐπομένως ὅτι ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότης :

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$$

Λύσις



$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{O\Gamma}$

$\overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OZ}$

① $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}) =$

ἔχομεν $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{O\Theta}$ ②

ὁπότε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Theta} = \overrightarrow{OZ}$ ③

ἄρα ἡ ① γράφεται

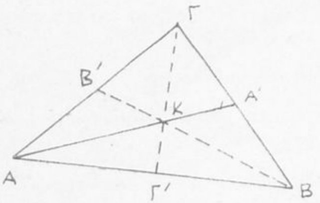
$\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}) = \overrightarrow{OZ}$

Τά εὑρεθέντα καί κατά τάς δύο περιπτώσεις ἐφαρμοστά διανύσματα ταυτίζονται. Ἄρα ἰσχύει ἡ προσεταιριστική ἰδιότης, διότι ὡς ἐπαληθεύθη $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}) = \overrightarrow{OZ}$

6) Ἐάν, μέ τά δεδομένα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, καλέσωμεν B′ τό μέσον τοῦ τμήματος ΓA καί Γ′ τό μέσον τοῦ AB, τότε νά δείξετε ὅτι

$$\vec{BK} = 2\vec{KΓ} \quad \text{καί} \quad \vec{ΓK} = 2\vec{KΓ}$$

Ἀπό αὐτά τί ἠμπορεῖτε νά συμπεράνετε διά τό σημεῖον K εἰς τήν περίπτωσιν πού τά A, B, Γ εἶναι κορυφαί τριγώνου;



Λύσις

$$\vec{BK} = 2\vec{KB'}$$

Συμφώνως πρός τήν ἄσκησιν 5

ἔχομεν $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KΓ} = 0$

ἤ $\vec{KA} + \vec{KΓ} = -\vec{KB}$

ἤ $\vec{KA} + \vec{KΓ} = \vec{BK}$ ①

ἀλλά $\vec{KA} + \vec{KΓ} = 2\,KB'$ ② τά πρῶτα μέλη τῶν ① καί ② εἶναι ἴσα, ἄρα καί τά δεύτερα, ἐπομένως

$$BK = 2KB$$

$$\vec{ΓK} = 2\vec{KΓ'}$$

Ἔχομεν $\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KΓ} = 0$

ἤ $\vec{KA} + \vec{KB} = -\vec{KΓ}$

ἤ $\vec{KA} + \vec{KB} = \vec{ΓK}$ ①

ἀλλά $\vec{KA} + \vec{KB} = 2KΓ'$ ② ἐκ τῶν ① καί ② ἔχομεν

$$\underline{\vec{ΓK} = 2\vec{KΓ'}}$$

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνωμεν ὅτι τό σημεῖον K τό ὁποῖον εἶναι σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου ἀπέχει τά $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ἀπό τήν ἀντίστοιχον κορυφήν καί τό $\frac{1}{3}$ ἀπό τήν βάσιν.

7) Ἄς εἶναι A, B, Γ τρία ὡρισμένα σημεῖα καί O ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Καλοῦμεν K τό σημεῖον πού προσδιορίζεται ὅπως εἰς τήν ἄσκησιν 5). Νά δείξετε τότε ὅτι

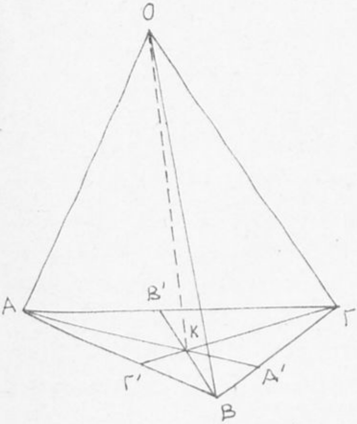
$$\frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OΓ}\right) = \vec{OK}$$

Ἀπό αὐτό κατόπιν νά συμπεράνετε ὅτι τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχήν τό O καί εἶναι ἴσον μέ τό $\frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OΓ}\right)$, περατώνεται πάντοτε εἰς τό ἴδιον σημεῖον τοῦ χώρου, ὅπως καί ἄν ἐκλέξωμεν τό σημεῖον O

Ὑπόδειξις Νά χρησιμοποιήσετε τάς σχέσεις

$\vec{OA} = \vec{OK} + \vec{KA}$, $\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB}$, $\vec{OΓ} = \vec{OK} + \vec{KΓ}$

καθώς καί τήν ἰδιότητα τοῦ Κ τήν ὁποίαν ἐδείξατε εἰς τήν ἄσκησιν 5.



Λύσις

$$\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}\right)=\vec{OK}$$

ἔχομεν

$\vec{OA}+\vec{AK}=\vec{OK}$

$\vec{OB}+\vec{BK}=\vec{OK}$

$\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma K}=\vec{OK}$

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{AK}+\vec{BK}+\vec{\Gamma K}=3\vec{OK}$ ἤ

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}-\vec{KA}-\vec{KB}-\vec{K\Gamma}=3\vec{OK}$ ἤ

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}-(\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma})=3\vec{OK}$ ἀλλά

$\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=0$ ὡς ἐδείχθη εἰς τήν ἄσκησιν 5

ἄρα $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=3\vec{OK}$ ἤ $\vec{OK}=\frac{1}{3}\left(\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}\right)$

Πράγματι τό διάνυσμα πού ἔχει ἀρχήν Ο καί εἶναι ἴσον μέ $\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}\right)$ θά περατοῦται πάντοτε εἰς τό σημεῖον Κ τό ὁποῖον εἶναι σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων, διότι μόνον δι' αὐτό ἀπεδείχθη ὅτι ἰσχύει $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}=0$ καί δι' οὐδέν ἄλλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἕνα τραῖνον ἐκινήθη εὐθυγράμμως ἀπό μίαν θέσιν Α εἰς ἄλλην Β. Πῶς ἠμποροῦμεν νά περιγράψωμεν εἰς τήν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας τήν μετατόπισίν του;

Λύσις

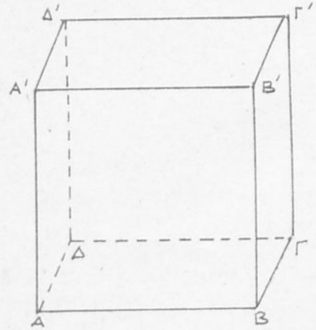
Κάθε σημεῖον τοῦ τραίνου ὑποβάλλεται εἰς παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\vec{a}$ τό ὁποῖον εὐφράζει τήν ἀπόστασιν μεταξύ τῆς θέσεως Α καί Β. Ἄρα τό τραῖνο ἐκτελεῖ παράλληλον μετατόπισιν εἰς τόν χῶρον.

2) Πῶς περιγράφεται εἰς τήν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας ἡ φαινομενική κίνησις ἑνός ἄστρου;

Λύσις

Ἡ φαινομένη κίνησις ἑνός ἄστρου δύναται νά περιγραφῆ ὡς στροφή περί ἕνα σταθερόν ἄξονα, τόν ἄξονα τοῦ κόσμου.

3) Ὑποβάλλομεν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ, μέ πλευράν ΑΒ, εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\vec{AA'}$ πού εἶναι κάθετον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ καί ἔχει μῆκος $|\vec{AA'}|$ ἴσον μέ ΑΒ. Τί στερεόν θά διαγράψῃ τό μετακινούμενον τετράγωνον;

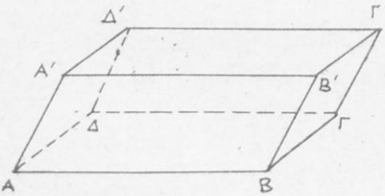


Λύσις

Ἔστω τό τετράγωνον ΑΒΓΔ καί $\vec{AA'}$ διάνυσμα ⊥ ΑΒΓ καί μέ $|\vec{AA'}| = AB$. Ὑποβάλλομεν αὐτό εἰς παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα ΑΑ'. Τότε τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ θά λάβουν τάς θέσεις Α', Β', Γ', Δ αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπό τό ἐπίπεδον ΑΒΓ ἀπόστασιν ἴσον μέ $|\vec{AA'}|$. Ἄρα τό διαγραφόμενον στερεόν εἶναι κύβος μέ ἀκμήν $|\vec{AA'}|$

4) Ὑποβάλλομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἰς μίαν παράλληλον μετατόπισιν κατά τό διάνυσμα $\vec{AA'}$ πού δέν εἶναι παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. Τί στερεόν διαγράφει τό μετακινούμενον παραλληλόγραμμον;

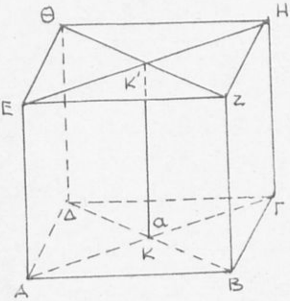
Λύσις



Κατά τήν παράλληλον μετατόπισιν κάθε σημεῖον τοῦ παραλληλογράμμου μετατοπίζεται κατά διάνυσμα ἴσον μέ $|\vec{AA'}|$. Ἐπειδή δέ τό διάνυσμα $\vec{AA'}$ δέν εἶναι κάθετον εἰς τό ἐπίπεδον ΑΒΓ τό διαγραφόμενον κατά τήν μετατόπισιν αὐτήν στερεόν εἶναι πλάγιον παραλληλεπίπεδον.

5) Σχεδιάσατε τήν εἰκόνα ἑνός κύβου καί προσδιορίσατε ἐπάνω εἰς αὐτήν τάς εἰκόνας τῶν κέντρων δύο ἀπέναντι (παραλλήλων) ἑδρῶν. Ἔστω α ἡ εὐθεῖα πού ὁρίζεται ἀπό τά δύο αὐτά κέντρα. Κατά ποίας γωνίας περί τήν εὐθεῖαν α, προσανατολισμένην, πρέπει καί ἀρκεῖ νά στρέψωμεν τόν κύβον διά νά ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μέ τόν ἑαυτόν του;

Ἔστω α ἡ εὐθεῖα πού ὁρίζουν τά κέντρα Κ καί Κ΄.



Ἐάν στρέψωμεν τό κύβον περί τήν α κατά $+90^\circ$ τότε ἐπειδή αἱ διαγώνιοι τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ τέμνονται ὀρθογωνίως τό σημεῖον Α μετατοπίζεται εἰς τό Β καί τό Γ εἰς τό Δ. Ἤτοι διά τῆς στροφῆς σ ἔχομεν:

$A \xrightarrow{\sigma} B$
$B \xrightarrow{\sigma} \Gamma$
$\Gamma \xrightarrow{\sigma} \Delta$
$\Delta \xrightarrow{\sigma} A$

ὁμοίως διά τήν παράλληλον ἕδραν ΕΖΗΘ θά ἔχωμεν:

$E \xrightarrow{\sigma} Z$
$Z \xrightarrow{\sigma} H$
$H \xrightarrow{\sigma} \Theta$
$\Theta \xrightarrow{\sigma} E$

Ὁμοίως ἐάν στρέψωμεν τόν κύβον ΑΗ κατά -90° θά ἔχωμεν διά τάς δύο ἕδρας ἀντιστοίχως:

$A \xrightarrow{\sigma} \Delta$	$E \xrightarrow{\sigma} \Theta$
$\Delta \xrightarrow{\sigma} A$	$Z \xrightarrow{\sigma} E$
$\Gamma \xrightarrow{\sigma} B$	$H \xrightarrow{\sigma} Z$
$\Delta \xrightarrow{\sigma} \Gamma$	$\Theta \xrightarrow{\sigma} H$

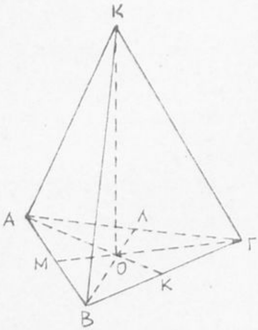
Ἄρα ἀρκεῖ νά στρέψωμεν τόν κύβον κατά γωνίας $\pm 90^\circ$ διά νά ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μέ τόν ἑαυτόν του.

6) Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, Ο τό κοινόν σημεῖον τῶν διαμέσων του καί ΟΚ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα $\perp$ πρός τό ἐπίπεδον ΑΒΓ. Κατά ποίας γωνίας περί τήν εὐθεῖαν ΟΚ, προσανατολισμένην ἐκ τοῦ Ο πρός τό Κ, πρέπει καί ἀρκεῖ νά στρέψωμεν τήν (κανονικήν τριγωνικήν) πυραμίδα ΚΑΒΓ διά νά ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μέ τόν ἑαυτόν της:

<u>Υπόδειξις</u>: Εἶναι σκόπιμον νά κατασκευάσετε διά τάς ἀσκήσεις 5 καί 6) μοντέλα μέ χαρτόνι καί ἕνα λεπτόν μεταλλικόν στέλεχος

<u>Λύσις</u>

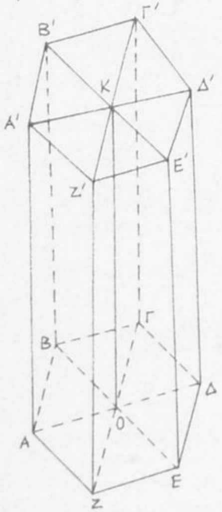
Στρέφομεν τήν κορυφήν Α κατά τήν θετικήν φοράν περί τόν ἄξονα ΟΚ κατά τήν γωνίαν ΑΟΒ. Τότε τό Α μετατοπίζεται μέ τήν στροφήν αὐτήν εἰς τό σημεῖον Β. Τό δέ σημεῖον Κ στρέφεται κατά τήν γωνίαν $K\hat{O}\Lambda = A\hat{O}B$ ὡς κατά κορυφήν καί ἐπειδὴ αἱ διάμεσοι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσαι τὸ Κ συμπίπτει μὲ τὸ Λ. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν γωνίαν ΚΟΛ παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΚΟΛΓ ἡ $\sphericalangle$ΟΚΓ $=$ $\sphericalangle$ΟΛΓ $= 90°$ καὶ ἡ $\sphericalangle$ΛΓΚ $= 60°$ ἄρα ἡ $\sphericalangle$ΚΟΛ $= 120°$. Ἐὰν στρέψωμεν τώρα τὸ στερεὸν κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἔχομεν:



$$\mathrm{B} \xrightarrow{6} \Lambda \qquad \text{καὶ} \qquad \Lambda \xrightarrow{6} \mathrm{K}$$
$$\mathrm{A} \xrightarrow{6} \Gamma \qquad\qquad \mathrm{K} \xrightarrow{6} \mathrm{M}$$
$$\Gamma \xrightarrow{6} \mathrm{B} \qquad\qquad \mathrm{M} \xrightarrow{6} \Lambda$$

Ἄρα ἀρκεῖ νὰ στρέψωμεν τὴν κανονικὴν πυραμίδα κατὰ $\pm 120°$ διὰ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ἑαυτόν της.

7) Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον, Ο τὸ κέντρον του καὶ ΟΚ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου. Θεωροῦμεν τὸ ὀρθὸν ἑξαγωνικὸν πρῖσμα (βλ. Βιβλ. Ι, σελ. 14-17Α) ποὺ ἔχει βάσιν τὸ ἑξάγωνον καὶ ὕψος τὸ τμῆμα ΟΚ. Κατὰ ποίας γωνίας περὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΚ, προσανατολισμένην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ στρέψωμεν τὸ πρῖσμα διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς σύμπτωσιν μὲ τὸν ἑαυτόν του;



Λύσις

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἰσχύει:

$\sphericalangle$ΒΟΑ $=$ $\sphericalangle$ΑΟΖ $=$ $\sphericalangle$ΖΟΕ $=$ $\sphericalangle$ΕΟΔ $=$ $\sphericalangle$ΔΟΓ $=$ $\sphericalangle$ΓΟΒ $=$
$= \frac{1}{6}\, 360° = 60°$.

Στρέφομεν λοιπὸν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν κατὰ 60° τότε ἐπειδὴ ΑΟ $=$ ΟΖ $=$ ΟΕ $=$ ΟΔ $=$ ΟΓ $=$ $=$ ΟΒ τὸ Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Ζ, τὸ Ζ μὲ τὸ Ε κ.ο.κ. τὸ Β μὲ τὸ Α. Ἀλλὰ ἐὰν στρέψωμεν τὸ ὀρθὸν πρῖσμα κατὰ $-60°$ τότε ὁμοίως τὸ Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Β μὲ τὸ Γ κ.ο.κ. τὸ Ζ μὲ τὸ Α. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ στρέψωμεν τὸ στερεὸν ΑΓ′ κατὰ $\pm 60°$ περὶ τὸν ΟΚ διὰ νὰ συμπέσῃ μὲ τὸν ἑαυτόν του.

'Ασκήσεις σελ. 48

1) Ἀπό τόν τύπον πού δίδει τό μῆκος τῆς διαγωνίου ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει τῶν διαστάσεών του, νά συμπεράνετε τόν ἀντίστοιχον τύπον διά τήν διαγώνιον ἑνός κύβου. Νά ὑπολογίσετε κατά προσέγγισιν χιλιοστομέτρου (1 mm) τό μῆκος τῆς διαγωνίου εἰς ἕνα κύβον μέ πλευράν 25 cm.

Λύσις

Ὁ τύπος διά τήν διαγώνιον τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι $(Δ'Β) = \sqrt{α^2+β^2+γ^2}$. Ἐπειδή ὅμως εἰς τόν κύβον αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι, ἤτοι $α=β=γ$ ἔχομεν $(Δ'Β) = \sqrt{3α^2} = α\sqrt{3}$

Εἰς τήν περίπτωσίν μας: $(Δ'Β) = 25\sqrt{3}\ cm = 43,2\ cm$

2) Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ; (Ὑποτίθεται φυσικά ὅτι αἱ διαστάσεις δίδονται εἰς τήν αὐτήν μονάδα μήκους) Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπον, πού θά εὕρετε ὅταν $α=3,25m$, $β=4,50m$, $γ=3,10m$

Λύσις

Αἱ ἀπέναντι ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι. Αὗται ἀνά δύο ἔχουν διαστάσεις (α, β), (β, γ), (γ, α). Ἄρα τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι $2αβ + 2βγ + 2γα = 2(αβ+βγ+γα)$

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν $α=3,25m$, $β=4,5m$, $γ=31m$

ἤτοι $E_{ολ} = 2(3,25\cdot 4,5 + 4,5\cdot 3,1 + 3,1\cdot 3,25)\ m^2 =$

$= 2(10,075 + 14,625 + 13,95)\ m^2 = 77,3\ m^2$

3) Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνός κύβου μέ πλευράν α;

Νά ἐφαρμόσετε τόν τύπον, πού θά εὕρετε ὅταν $α=3,5cm$. Πόσον εἶναι τό ἴδιον ἐμβαδόν εἰς mm^2;

Λύσις

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τό Εολ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $2(αβ+βγ+γα)$ Ἐπειδή εἰς τόν κύβον $α=β=γ$ ἔχομεν ὅτι $E_{ολ.τοῦ\ κύβου} = 2(α^2+α^2+α^2) = 2\cdot 3α^2 = 6α^2$

Ἐάν $α = 3,5\ m$ ἔχομεν $E_{ολ} = 6(3,5)^2 cm^2 = 6\cdot 12,25\ cm^2 = 73,5\ cm^2$ ἤ

$E_{ολ} = 7350\ mm$

4) Ἐαν αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου διπλασιασθοῦν, τριπλασιασθοῦν, ... τί παθαίνει τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας; Δώσατε ἕνα ἀριθμητικόν παράδειγμα

Λύσις

Ὁ τύπος πού μᾶς δίδει τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι:

$E_{o\lambda} = 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ ὅπου α, β, γ αἱ διαστάσεις του.

Ἄν αἱ διαστάσεις γίνουν 2α, 2β, 2γ τότε ὁ τύπος γίνεται

$E'_{o\lambda.} = 2(2\alpha\cdot 2\beta + 2\beta\cdot 2\gamma + 2\gamma\, 2\alpha) = 2\cdot 2^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 2^2 E_{o\lambda}$

Ἄν τριπλασιασθοῦν, ἤτοι γίνουν 3α, 3β, 3γ τότε

$E''_{o\lambda} = 2(3\alpha\, 3\beta + 3\beta\cdot 3\gamma + 3\gamma\, 3\alpha) = 2\cdot 3^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 3^2 E_{o\lambda}$

Καί συνεχίζοντες οὕτω, παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πολλαπλασιασθοῦν ἐπί ἕνα ἀριθμόν, τό ὁλικόν ἐμβαδόν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπί τό τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

5) Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κύβου εἶναι $37,50\ m^2$. Ζητεῖται νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν ἑνός ἑκατοστομέτρου (1cm) 1ον ἡ ἀκμή του, 2ον ἡ διαγώνιός του

Λύσις

1ον Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια κύβου εἶναι $E_{o\lambda} = 6\alpha^2$.
Ἀλλά ἐδῶ ἔχομεν ὅτι $E_{o\lambda} = 37,50\ m^2$ ἤτοι

$$6\alpha^2 = 37,50\ m^2 \Longrightarrow \alpha^2 = \frac{37,50}{6}\ m^2 \Longrightarrow$$

$$\alpha^2 = 6,25\ m \Longrightarrow \alpha = \sqrt{6,25}\,m \Longrightarrow \alpha = 2,50\ m$$

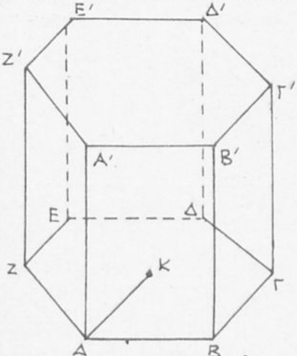
2ον Ὁ τύπος διά τήν διαγώνιον εἶναι $\delta = \alpha\sqrt{3} \Longrightarrow$

$$\delta = 2,50\sqrt{3}\ m \Longrightarrow \delta = 4,32\ m$$

6) Τό ὕψος ἑνός ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι 40 cm, τό δέ παραλληλόγραμμον τῆς μιᾶς βάσεως ἔχει πλευράν 30 cm καί ἀντίστοιχον ὕψος 15 cm. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἐλλιπής ἡ ἐκφώνησις

7) Ἕνα ὀρθόν πρῖσμα μέ βάσιν κανονικόν ἑξάγωνον ἔχει παράπλευρον ἀκμήν μήκους 18 cm. Ἡ ἀκτίς τοῦ ἑξαγώνου τῆς βάσεως εἶναι 5 cm (βλ. Βιβλ. II, σελ. 232, 235). Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.



Λύσις

$E_{ολ} = 2\,E_{ΑΒΓΔΕΖ} + 6E_{ΑΒΒ'Α}$

Ἔχομεν $ρ = ΑΚ = ΑΒ = 5\ cm$

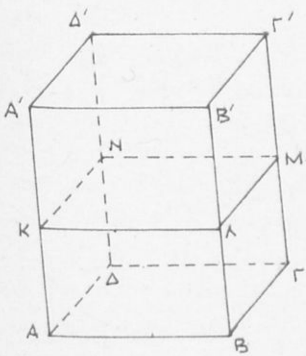
$E_{ΑΒΓΔΕΖ} = 6\,\frac{52\sqrt{2}}{4} = \frac{3\cdot 25\sqrt{3}}{2} =$

$= 37{,}5 \cdot 1{,}73\ cm^2 = 64{,}875\ cm^2$

$E_{ΑΒΒ'Α'} = 5\cdot 18\ cm^2 = 90\ cm^2$

Ἄρα $E_{ολ} = 2\cdot 64{,}875\ cm^2 + 6\cdot 90\ cm^2 = 129{,}75\ cm^2 + 540\ cm^2 = 669{,}75\ cm^2$

8) Πλάγιον τετραγωνικόν πρῖσμα ἔχει κάθετον τομήν τετράγωνον πλευρᾶς 35 m καί μῆκος παραπλεύρων ἀκμῶν 1,5 dm (δεκατόμετρα). Ποῖον εἶναι τό ἐμβαδόν εἰς cm^2 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.



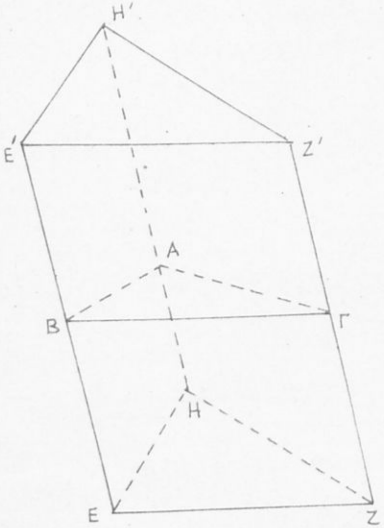
Λύσις

Ἔχομεν ὅτι ἐμβαδόν παραπλεύρου ἐπιφανείας = περίμετρος καθέτου τομῆς X παράπλευρον ἀκμήν ἤτοι $E_{παρ.ἐπιφ.} =$

$= (ΛΜ+ΜΝ+ΝΚ+ΚΛ) \times ΑΑ = 4α \times ΑΑ' =$

$= 4\cdot 35\cdot 15\ cm^2 = 2100\ cm^2$

9) Πλάγιον τριγωνικόν πρίσμα έχει κάθετον τομήν ὀρθογώνιον τρί γωνον ΑΒΓ μέ ὑποτείνουσαν ΒΓ = 1,25 m καί κάθετον πλευράν ΑΒ = = 1 m. Νά ὑπολογίσετε τήν παράπλευρον ἐπιφάνειάν του, ἐάν αἱ παρά πλευροι ἀκμαί του ἔχουν μῆκος 3 m.



Λύσις

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρα ἔχομεν:

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 \Longrightarrow A\Gamma = \sqrt{B\Gamma^2 - AB^2} =$

$= \sqrt{1{,}25^2 - 1^2}\ m = \sqrt{1{,}5625 - 1}\ m =$

$= \sqrt{0{,}5625}\ m = 0{,}75\ m$

Ἄρα $E_{\pi\alpha\rho.\,\grave{\varepsilon}\pi\iota\varphi} =$
$= (AB + B\Gamma + \Gamma A)\ EE' =$
$= (1 + 1{,}25 + 0{,}75)\ 3\ m^2 =$
$= 3.3\ m^2 = 9\ m^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελίδος 53

1) Ἕνα κανονικόν τετράεδρον (δηλαδή μία πυραμίς μέ τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα ὡς ἕδρας) ἔχει ἀκμάς μήκους 12cm. Ζητεῖται

α) τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του,

β) τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου πού λαμβάνομεν, ὅταν κόψωμεν τό ἀρχικόν τετράεδρον μέ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν καί εἰς ἀπόστασιν ἀπό αὐτήν ἴσην μέ τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἀρχικοῦ τετραέδρου.

Νά ἐξηγήσετε διατί, τό ἀποκομμένον τετράεδρον εἶναι ὁμόθετον (ἄρα καί ὅμοιον) πρός τό ἀρχικόν καί νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰδιότητα πού ἀνεπτύχθη εἰς τήν ἀνωτέρω § 6.6.

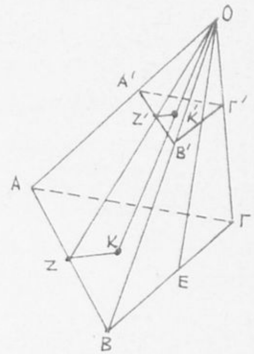
Λύσις

1) α Ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$S_{ολ} = S_π + εμβ$ βάσεως

$S_π = τυ'$ ἔνθα τ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου καί ύ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐάν θεωρήσωμεν τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΟΒΓ καί φέρωμεν τό ὕψος αὐτοῦ ΑΕ ἔχομεν ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος



$$(OE)=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4} \text{ καί } OE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

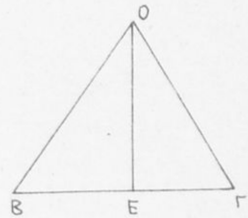
$$OE=υ'=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3} \text{ cm}$$

Ἐπειδή εἰς τό πρόβλημά μας ἔχομεν $a=12$cm

$S_π = 18\cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ cm²

εμβ βάσ $=120' = \frac{12\, 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$ cm²

$S_{ολ} = 108\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 144\sqrt{3} = 249{,}12$ cm²



β) Τό ἀποκοπέν τετράεδρον εἶναι ὁμόθετον πρός τό ἀρχικόν, διότι

$OA'=\frac{2}{3}OA$ $\quad OB'=\frac{2}{3}OB$ $\quad OΓ'=\frac{2}{3}OΓ$ Ἄρα τά Α΄, Β΄, Γ εἶναι ὁμόθετα πρός τά Α, Β, Γ. Ἄρα τό ἀρχικόν τετράεδρον εἶναι ὁμόθετον πρός τό ἀποκοπέν. Ἑπομένως ἀφοῦ τά τετράεδρα εἶναι ὁμόθετα εἶναι καί ὅμοια. Τά τρίγωνα ΟΚ΄Ζ΄ καί ΟΚΖ εἶναι ὅμοια. Ἄρα

$\frac{OZ'}{OZ} = \frac{OK'}{OK}$ (1) Ἐπίσης τά τρίγωνα ΟΑ΄Ζ΄ καί ΟΑΖ εἶναι ὅμοια.

Ἄρα ἔχομεν $\frac{O}{Z} = \frac{OA'}{OA}$ (2) $\Longrightarrow$ ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OK'}{OK}=\frac{2}{3} \quad \text{ἄρα } OA'=\frac{2}{3}OA=\frac{2\cdot 12}{3}=8 \text{ CM}$$

Ἄρα τό ἀποκοπέν τετράεδρον εἶναι κανονικόν ἀκμῆς 8CM.

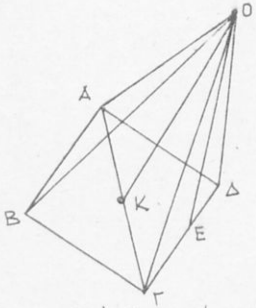
$S_{ολ} = S_π +$ εμβασ $= τυ'_1 +$ εμβαδ βάσεως.

2) Κανονική τετραγωνική πυραμίς ἔχει διαγώνιον βάσεως $10\sqrt{2}$ cm καί παράπλευρον ἀκμήν 13 cm. Ζητεῖται

α) νά εὕρετε τήν πλευράν τῆς τετραγωνικῆς βάσεως β) νά ὑπολογίσετε τό ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας,

γ) νά ὑπολογίσετε τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος καθώς καί τήν ὁλικήν ἐπιφάνειά της.

δ) νά κατασκευάσετε τήν πυραμίδα ἀπό χαρτόνι



Λύσις

α) Θεωροῦμεν τήν κανονικήν τετραγωνικήν πυραμίδα ΟΑΒΓΔ. Καλοῦμεν α τήν πλευράν τῆς βάσεως. $\alpha^2+\alpha^2=\delta^2$ (δ ἡ διαγώνιος)

$2\alpha^2=\delta^2 \Longrightarrow \alpha^2\sqrt{\frac{\delta^2}{2}}=\frac{\delta\sqrt{2}}{2}=\frac{10\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}=10$ CM.

β) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΔΕ ἔχομεν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος $(ΟΕ)^2+(ΕΔ)^2=(ΟΔ)^2 \Rightarrow (ΟΕ)^2=(ΟΔ)^2-$

$-(ΕΔ)^2 \Longrightarrow (ΟΕ)^2=13^2-5^2$ (διότι $ΕΔ=ΓΔ=\frac{\alpha}{2}=5$ CM)

$169-25=144$ καί $ΕΔ=\sqrt{144}=12$ CM

γ) $S\pi=\tau\,\upsilon'$ ἔνθα τ ἡ ἡμιπερίμετρος καί υ' τό ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας

$$S\pi=\frac{40\cdot 12}{2}=20\cdot 12=240 \text{ CM}^2$$

$S o\lambda = S\pi$ + εμβ βάσεως $= 240+100=340$ CM^2

3) Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδόν 28,26 dm^2 καί τό ὕψος εἶναι ἴσον μέ 1,10 m.

Ὑπόδειξις. Θά χρειασθῆ νά ὑπολογίσετε πρῶτα κατά προσέγγισιν τήν ἀκτῖνα R τῆς βάσεως παίρνοντες τό $\pi=3{,}14$

Λύσις

Ἐκ τοῦ τύπου δίδοντος τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἔχομεν:

$S\pi=2\pi R\upsilon$ (1) $\upsilon=1{,}10$ m. Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τήν ἀκτῖνα R.

τό ἐμβαδόν ἐπιφανείας βάσεως εἶναι $\Pi R^2 = 28,26\ dm^2$

$R^2 = \frac{28,26}{\Pi}\ dm^2 \Longrightarrow R^2 = 9 \Longrightarrow R = 3\ dm$ ἀντικαθιστῶντες τήν ἀκτῖνα R εἰς τόν τύπον (1) ἀφοῦ προηγουμένως τρέψωμεν εἰς m ἔχομεν $R = 0,3\ m$

4) Ἕνας ἐλαιοχρωματιστής ἀνέλαβε νά χρωματίσῃ 85 σιδηρᾶ κυλινδρικά βαρέλια· τό καθένα των ἔχει διάμετρον 64 cm καί ὕψος 90 cm. Πόσον θά πληρωθῇ διά τήν ἐργασίαν του πρός 8 δρχ/m^2;

Λύσις

Διά νά εὕρωμεν τά χρήματα τά ὁποῖα ἀξίζει ἡ ἐργασία τοῦ ἐλαιοχρωματισμοῦ πρέπει νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας $S_{ολ}$.

$$S_{ολ} = 2\Pi R υ + 2\Pi R^2$$

$$δ = 64\ cm \quad \text{Ἄρα } R = \frac{64}{2} = 32\ cm$$

$$S_{\Pi} = 2 \cdot 3,14 \cdot 32 \cdot 90 = 18.086,40\ cm$$

$$\text{ἐμβ βάσεων} = 2\Pi R^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 32^2 = 6430,42\ cm^2$$

$$S_{ολ} = 24517,12\ cm^2 = 2,451\ m^2$$

Ἐπειδή οὗτος ἐχρωμάτισεν 85 βαρέλια ἔχομεν

$$24514,12 \cdot 85 = 208,395\ m^2$$

Ἐπειδή ὁ τεχνίτης πληρώνεται πρός 8δρχ. τό m^2, ἔχομεν

$$208,395 \cdot 8 = 1667,16\ δρχ.$$

5) Ἕνα κυλινδρικόν δοχεῖον θέλομεν νά ἔχῃ ὁλικήν ἐπιφάνειαν $16014\ cm^2$ καί διάμετρον 60 cm. Πόσον θά πρέπῃ νά εἶναι τό ὕψος του;

Λύσις

Ἐπειδή θέλομεν ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ δοχείου νά εἶναι $16014\ cm^2$ καί ἡ διάμετρος 60cm ἔχομεν

$$S_{ολ} = 2\Pi R υ + 2\Pi R^2 \qquad (1)$$

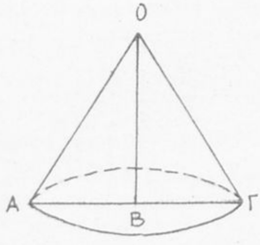
$$δ = 60\ cm \quad \text{ἄρα} \quad R = 30\ cm$$

ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν $S_{ολ} - 2\Pi R^2 = 2\Pi R υ \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow υ = \frac{S_{ολ} - 2\Pi R^2}{2\Pi R} = \frac{16.014 - 2 \cdot 3,14 \cdot 900}{2 \cdot 3,14 \cdot 30} = 55\ cm$$

6) Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν μίαν κωνικήν σκηνήν ή όποία νά ἔχη διάμετρον βάσεως 6 m καί ὕψος, δηλαδή ἀπόστασιν ἀπό τήν κορυφήν ἕως τό κέντρον της βάσεως 4 m. Πόσα m^2 ὕφασμα θά χρειασθοῦν, ἄν τά ἄχρηστα ἀποκόμματα καί αἱ διπλώσεις εἰς τάς ραφάς ὑπολογισθοῦν εἰς 1,5 m^2;

Υπόδειξις. Θά χρειασθῆ νά ὑπολογίσετε πρῶτα τήν γενέτειραν βάσει τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.



Λύσις

Διά νά εὕρωμεν τό ὕφασμα πού θά χρειασθῶμεν διά τήν σκηνήν, ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν της ἐπιφανείας.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ ἔχομεν ΟΒ = 4 m $ΒΓ = R = \frac{\delta}{2} = 3$ m

Ἄρα:

$(ΟΓ)^2 = (ΟΒ)^2 + (ΒΓ)^2 \Longrightarrow (ΟΓ)^2 = \gamma^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ καί $\gamma = 5$ m.

$S_\pi = \pi \gamma R = 3,14 \cdot 5 \cdot 3 = 47,1\ m^2$

Ἄρα χρειαζόμεθα $47,1 + 1,5 = 48,6\ m^2$

7) Ἕνας κῶνος ἔχει διάμετρον βάσεως 10 cm καί ὕψος 12 cm. Ζητεῖται

α) ή ὁλική ἐπιφάνειά του,

β) ή ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πού θά προκύψη μέ μίαν τομήν πού εἶναι παράλληλος πρός τήν βάσιν καί ἀπέχει ἀπό αὐτήν τόσον ὅσον καί ἀπό τήν κορυφήν,

γ) νά ἐξηγήσετε διατί ὁ ἀποκομμένος κῶνος καί ὁ ἀρχικός εἶναι ὁμόθετα (ἄρα καί ὅμοια) στερεά καί νά ἐπαληθεύσετε τήν ἰδιότητα πού διετυπώθη εἰς τήν § 6.6

Λύσις

α) Θά ὑπολογίσωμεν τό $S_{ολ}$

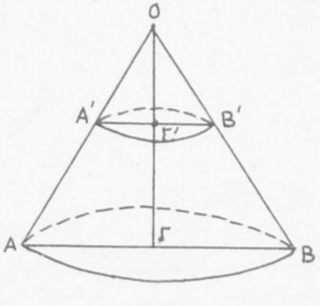
$S_{ολ} = \pi R(\gamma + R)$ ἔχομεν $R = \frac{10}{2} = 5$ cm θά εὕρωμεν τήν γ δηλ. τήν ΟΒ.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΓΒ ἔχομεν

$(ΟΓ)^2 + (ΓΒ)^2 = (ΟΒ)^2 \Longrightarrow 12^2 + 5^2 = (ΟΒ)^2 = \gamma^2 \Longrightarrow 144 + 25 = 169$ καί $ΟΒ = \gamma = 13$ cm

Ἄρα $S_{ολ} = 3,14 \cdot 5\,(13 + 5) = 3,14 \cdot 5 \cdot 18 = 282,6\ cm^2$

β) Ἀφοῦ ἡ βάσις τοῦ ἀποκοπέντος κώνου ἀπέχει ὅσον ἀπέχει καὶ ἡ κορυφή, ἔχομεν $O\Gamma' = 6$



ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $O\Gamma'B'$ καὶ $O\Gamma B$ (ὅμοια διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν των κοινήν) ἔχομεν $\frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} \Longrightarrow OB' = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma}\, OB =$

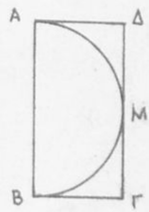
$= \frac{1}{2} \cdot 13 = 65$ cm καὶ $\frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \frac{\Gamma'B'}{\Gamma B} \Longrightarrow \Gamma'B' =$

$= \frac{O'\Gamma'}{O\Gamma}\, \Gamma B \doteq \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ cm

Ἄρα $S_{o\lambda} = 3{,}14 \cdot \frac{5}{2}\left(\frac{13+5}{2}\right) = 70{,}65$ cm^2

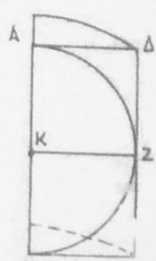
Ἔχομεν $O\Gamma' = \frac{1}{2} O\Gamma$ $OB' = \frac{1}{2} OB$ καὶ $\Gamma'B' = \frac{1}{2}\Gamma B$ τὸ ἴδιο καὶ διὰ τὰ $OA'\Gamma'$ καὶ $OA\Gamma$. τὰ σημ. $\Gamma'B'A'$ εἶναι ὁμόθετα πρὸς τὰ $A\Gamma B$
Ἄρα ὁ ἀποκομμένος καὶ ὁ ἀρχικὸς κῶνος εἶναι ὁμόθεται.

8) Εἰς τὸ σχῆμ. 74 τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΜ εἶναι "ἐγγεγραμμένον" εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{2}$ ΑΒ.



Ἐὰν περιστρέψωμεν ὀρθογώνιον καὶ ἡμικύκλιον περὶ τὴν ΑΒ, τότε τὸ μὲν ὀρθογώνιον θὰ παράγῃ ἕνα κύλινδρον, τὸ δὲ ἡμικύκλιον μίαν σφαῖραν "ἐγγεγραμμένη" εἰς τὸ κύλινδρον.
Νὰ δείξετε μὲ ὑπολογισμοὺς ὅτι
α) ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ
β) ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ $\frac{2}{3}$

<u>Λύσις</u>



α) $AB = \upsilon$ δηλ. τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου
$KZ = A\Delta = \frac{1}{2} AB = R$ $R = \frac{\upsilon}{2} \Longrightarrow \upsilon \doteq 2R$

$S_\pi = 2\pi R\upsilon = 4\pi R^2$ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κυλίνδρου
S_π σφαίρας $= 4\pi R^2$ Ἄρα $S_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho} = S_{\pi}$ κυλίνδρου

β) Ἐμβαδόν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$S_{ολ} = 2\pi R(υ + R) = 2\pi R(2R + R) = 6\pi R^2$$

Τό ἐμβαδόν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφ. τῆς σφαίρας εἶναι $4\pi R^2$ ἄρα

$$\frac{S_{ολ\ σφαίρας}}{S_{ολ\ κυλίνδρ}} = \frac{4\cancel{\pi}\cancel{R^2}}{6\cancel{\pi}\cancel{R^2}} = \frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ σελίδος 62

1) Νά ὑπολογίσετε εἰς dm^3 τόν ὄγκον ἑνός κύβου μέ ὁλικήν ἐπιφάνειαν $37{,}50\ dm^2$

Λύσις

Γνωρίζομεν ὅτι $S_{ολ}$ κύβου $6a^2$ ἔνθα a = ἀκμή τοῦ κύβου εἰς τήν περίπτωσίν μας ἔχομεν

$$6a^2 = 37{,}5 \Longrightarrow a^2 = \sqrt{6{,}25} \Longrightarrow a = 2{,}5\ dm$$

ὁπότε

$$V_{κύβου} = a^3 = 2{,}5^3\ dm = 15{,}625\ dm^3$$

2) Νά εὕρετε εἰς m^3 τόν ὄγκον ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐάν αἱ διαστάσεις του $α, β, γ$ ἔχουν ἄθροισμα 13 m καί εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 10,9,7

Λύσις

Ἔχομεν ὅτι αἱ διαστάσεις εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 10,9,7 δηλ. ἄν καλέσωμεν τάς διαστάσεις αὐτῶν $α, β, γ$ ἔχομεν

$\frac{α}{10} = \frac{β}{9} = \frac{γ}{7} = \frac{α+β+γ}{10+9+7}$ ἐκ γνωστῆς ἰδιότητος ἀναλογιῶν

Ἐπειδή $α+β+γ = 13$ ἔχομεν

$$\frac{α}{10} = \frac{13}{26} \Longrightarrow α = \frac{13}{26}\,10 = 5\ m$$

$$\frac{β}{9} = \frac{13}{26} \Longrightarrow β = \frac{13}{26}\cdot 9 = 4{,}5\ m$$

$$\frac{γ}{7} = \frac{13}{26} \Longrightarrow γ = \frac{13}{26}\cdot 7 \Longrightarrow γ = 3{,}5\ m$$

Ἄρα $V_{παραλληλεπιπέδου} = α\cdot β\cdot γ = 5\cdot 4{,}5\cdot 3{,}5 = 78{,}75\ m^3$

3) Νά εὕρετε τήν ἀξίαν μιᾶς πλακός ἀπό τσιμέντο ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις ἐπιφανείας $12{,}5\ m \times 9{,}60\ m$ καί πάχος 15 cm πρός 1270 δρχ. το κυβικόν μέτρον

1270 δρχ/m^3

Λύσις

Θά εὕρωμεν τόν ὄμκον τῆς πλακός : 15 cm = 0,15 m ἄρα

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 12{,}5 \cdot 9{,}60 \cdot 0{,}15 = 18\ m^3$$

Ἄρα ἡ ἀξία τῆς πλακός εἶναι 1270·18 = 22860 δρχ.

4) Διά τήν ξυλείαν μιᾶς οἰκοδομῆς ἐχρησιμοποιήθησαν τά παρακάτω τεμάχια μέ σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου:

α) 36 καδρόνια διαστάσεων 5 m × 0,12 m × 0,06 m.

β) 80 σανίδες διαστάσεων 5,5 m × 0,08 m × 0,025 m

Πόσου ἐστοίχισεν ἡ ξυλεία αὐτή ἄν ἡ τιμή της εἶναι 2500 δρχ/m^3;

Λύσις

Θά εὕρωμεν κατά πρῶτον τόν ὄγκον τῶν τεμαχίων

$$V_1 = 5 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}06 = 0{,}036\ m^3$$

Ὁ ὄγκος τῶν 36 καδρονίων εἶναι $36 \cdot 0{,}036 = 1{,}296\ m^3$

Ὁ ὄγκος ἑκάστης σανίδος εἶναι $V_2 = 5{,}5 \times 0{,}08 \times 0{,}025 = 0{,}011\ m^3$

Ὁ ὄγκος ὅλων τῶν σανίδων εἶναι $80 \cdot 0{,}011 = 0{,}88\ m^3$

Ἄρα $V_{ολ} = 1{,}296 + 0{,}88 = 2{,}176\ m^3$

Ἀφοῦ ἡ τιμή ἑκάστου m^3 εἶναι 2500, ἔχομεν:

$$2{,}176 \times 2500 = 5440 \text{ δρχ.}$$

5) Ἕνα φύλλον ἀπό ψευδάργυρον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις: μῆκος 1,50 m, πλάτος 1,20 m καί πάχος 1,5 mm. Πόσον εἶναι τό βάρος του εἰς κιλά (Kgp); (Εἰδικόν βάρος τοῦ ψευδαργύρου 7,2)

Λύσις

Θά εὕρωμεν κατ' ἀρχήν τόν ὄγκον τοῦ φύλλου

$$V = 1{,}50 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}0015 = 0{,}0027\ m^3$$

Ἐπειδή, ὡς γνωστόν, ἰσχύει $B = V \cdot \varepsilon \Longrightarrow$

$$B = 0{,}0024 \cdot 7{,}2 \quad (\varepsilon \text{ ψευδαργύρου εἶναι } 7{,}2)$$

$$B = 0{,}01944\ tn \quad = 19{,}44\ Kgp$$

6) Διά τήν κατασκευήν ἑνός μεσοτοίχου ἐχρησιμοποιήθησαν τοῦβλα μέ διαστάσεις 19 cm × 9 cm × 6 cm. Τό κτίσιμον ἦτο δρομικόν (δηλαδή τέτοιο ὥστε αἱ 2 ἕδραι 19 cm × 6 cm τῶν τούβλων νά σχηματίζουν τάς δύο ὄψεις τοῦ τοίχου). Πόσα τοῦβλα θά χρειασθοῦν, ἐάν τό πάχος τοῦ

ἀσβεστοκονιάματος μεταξύ δύο τούβλων' εἶναι 1cm καί ὁ τοῖχος ἔχει μῆκος 4,60 m καί ὕψος 3.50 m;

Λύσις

α) Ἔστω ὅτι κατά πρῶτον ἔχομεν τό δρομικόν κτίσιμον. Ἔχομεν 19×6×9 τάς διαστάσεις ἑκάστου τούβλου, ἐπειδή ὅμως ἔχομεν καί τό ἀσβεστοκονίαμμα 1cm μεταξύ τῶν τούβλων ὁ ὄγκος ἑκάστου τούβλου γίνεται $V' = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 1260\ cm^3$. Ἐπειδή ὁ τοῖχος ἔχει διαστάσεις $V'' = 4,60 \times 3,50 \times 0,09\ m^3 = 460 \times 350 \times 9\ cm^3 = 1.449.000\ cm^3$.

Διά νά εὕρωμεν τόν ἀριθμόν τῶν τούβλων τά ὁποῖα χρειάζονται διαιροῦμεν τόν V'' ὄγκον διά τοῦ V'

$$V'' : V' = 1.449.00 : 1260 = 1150 \text{ τοῦβλα}$$

β) Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν, εἰς τήν ὁποίαν τό κτίσιμον εἶναι μπατικόν, ἄν καλέσωμεν V_1 τόν ὄγκον ἑκάστου τούβλου μετ' ἀσβεστοκονιάματος καί V_2 τόν ὄγκον τοῦ τοίχου ἔχομεν

$$V_1 = 10 \cdot 7 \cdot 19 = 1330\ cm^3$$

$$V_2 = 4,60 \times 3,50 \times 0,019\ m^3 = 460 \times 350 \times 19 = 3.059000\ cm^3$$

$$\text{Ἄρα } V_2 : V_1 = 3059000 : 1330 = 2300 \text{ τοῦβλα}$$

7) Νά εὕρετε τήν χωρητικότητα εἰς dm^3 κλειστοῦ ξυλίνου κιβωτίου πού ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί ἐξωτερικάς διαστάσεις 72 cm × 67 cm × 44 cm.
Τό πάχος τῶν τοιχωμάτων εἶναι 1 cm.

Λύσις

Ζητεῖται ἡ χωρητικότης τοῦ κιβωτίου τοῦ ὁποίου αἱ ἐξωτερικαί διαστάσεις εἶναι 72cm × 67cm × 44 cm καί πάχος τῶν τοιχωμάτων 1cm. Ἄρα αἱ διαστάσεις τοῦ ἐσωτερικοῦ εἶναι

70 cm × 65 cm × 42 cm Ἄρα

$$V = 70 \times 65 \times 42 = 191100\ cm^3 = 191,1\ dm^3$$

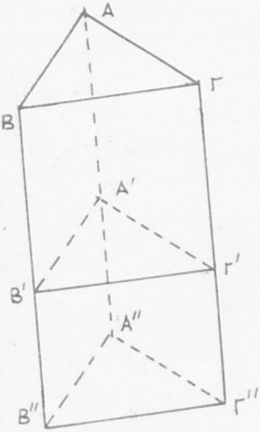
8) Πόσα πακέτα σιγαρέτα, μέ διαστάσεις 10 cm × 7cm × 5 cm τό καθένα χωροῦν εἰς τό κιβώτιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως;

Λύσις

Άρκεῖ πρός λύσιν τῆς ἀσκήσεως νά εὕρωμεν τόν ὄγκον ἑκάστου πακέτου $V\pi = 10\ cm \times 7 cm \times 5\ cm = 350\ cm = 0{,}35\ dm^3$

Ἄρα $191{,}1 : 0{,}35 = 546$ πακέτα σιγαρέτα

9) Πλάγιον τριγωνικόν πρῖσμα ἀπό ξύλον ἔχει κάθετον τομήν ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ ὑποτείνουσαν 12,5 cm καί μίαν κάθετον πλευράν 7,5 cm. Ἡ παράπλευρος ἀκμή τοῦ πρίσματος εἶναι 20 cm. Νά εὑρεθῇ τό βάρος του εἰς Kgr, ἐάν τό εἰδικόν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,65.



Λύσις

Ἐμβαδόν πλαγ. πρίσμ = ἐμβ καθέτου τομῆς x μῆκος μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς.

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ἔχομεν

$$(A'B')^2 + (A'\Gamma')^2 = (B'\Gamma')^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (A'B')^2 = (B'\Gamma')^2 - (A'\Gamma')^2 \Longrightarrow$$

$(A'B')^2 = 12{,}5^2 - 7{,}5^2 = 100\ cm^2$ καί $(A'B') = 10\ cm$. Ἄρα ἐμβαδόν καθέτου τομῆς εἶναι

$$\frac{7{,}5 \cdot 10}{2} = 37{,}5\ cm^2$$

Ἄρα $V = 37{,}5 \cdot 20 = 750\ cm^3$

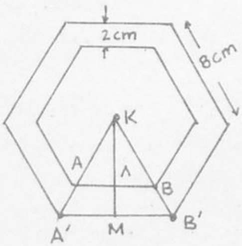
Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου $B = V\varepsilon$ ἔχομεν $B = 750 \cdot 0{,}65 = 487{,}5\ gr$

10) Ἕνας στύλος ἀπό χυτοσίδηρον, κοῖλος ἐσωτερικά ἔχει ὕψος $\upsilon = 3{,}5\ m$ καί διατομήν (δηλ. κάθετον τομήν) ἑξαγωνικήν πού εἰκονίζεται ὑπό κλίμακα εἰς τό σχ. 83.
Νά εὑρεθῇ τό βάρος του κατά προσέγγισιν ἑνός κιλοῦ. (Εἰδικόν βάρος χυτοσιδήρου 7,6).

Λύσις

Πρός εὕρεσιν τοῦ ὄγκου τοῦ στύλου ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τόν $V\varepsilon\xi$ δηλ. τόν ἐξωτερικόν ὄγκον τόν $V\varepsilon\sigma$ δηλ. τόν ἐσωτερικόν ὄγκον καί νά εὕρωμεν ἐν συνεχείᾳ τόν πραγματικόν ὄγκον τοῦ στύλου.

$$S\varepsilon\xi = 6\,(KA'B') = 6\cdot\frac{A'B'\cdot KM}{2} = 3A'B'\cdot KM$$



Ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκομεν:

$(A'M)^2+(MK)^2=(KA')^2 \Longrightarrow (KM)^2=(KA)^2-$
$-(MA')^2=8^2-4^2=64-16=48 \Longrightarrow (KM)=$
$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ cm.

Ἄρα $S\varepsilon\xi = \frac{6\cdot 8\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} = 166{,}08\ cm^2$

Ἐν συνεχείᾳ ἔχομεν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΑΛ καὶ ΚΑ'Μ

$$\frac{A\Lambda}{A'M} = \frac{K\Lambda}{KM} = \frac{KA}{KA'} \Longrightarrow A\Lambda = \frac{K\Lambda}{KM}\cdot A'M = \frac{4{,}92}{6{,}92}\cdot 4 = 2{,}85\,cm$$

Ἄρα $S\varepsilon\sigma = \frac{6\cdot 2{,}85\cdot 4{,}92}{2}\cdot 2 = 6\cdot 2{,}85\cdot 4{,}92 = 84{,}12\ cm^2$

Ἄρα $S = S\varepsilon\xi - S\varepsilon\sigma = 166{,}08 - 84{,}12 = 81{,}96\,cm^2$

$V = S\cdot u = 81{,}96\,cm^2\cdot 350 = 28686\,cm^3$

Ἄρα $B = V\cdot\varepsilon = 28686\,cm^3\cdot 7{,}6 = 217813$ gr $= 217813$ Kgρ.

11) Ἕνα μεταλλικόν κυλινδρικόν βαρέλι ἔχει διάμετρον βάσεως 60 cm καί ὕψος 85 cm. Πόσα κιλά ἐλαιόλαδον ἠμπορεῖ νά χωρέσῃ, ἄν τό εἰδικόν βάρος τοῦ ἐλαιολάδου εἶναι 0,92. (Τό πάχος τῶν μεταλλικῶν τοιχωμάτων τοῦ βαρελιοῦ δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

Λύσις

Θά εὕρωμεν τόν ὄγκον τοῦ βαρελίου.

$$V\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho\text{ου} = \pi R^2 u = 3{,}14\cdot 30^2\cdot 85 = 240210\,cm^3$$

ἐκ τοῦ τύπου $B = V\cdot\varepsilon$ ἔχομεν $B = 240210\cdot 0{,}92 =$
$= 220{,}993 \simeq 221$ Kgρ

12) Εἰς μίαν γραμμήν μεταφορᾶς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐχρησιμοποιήθησαν 125 m χάλκινον σύρμα μέ διατομήν κύκλον 4 mm. Πόσον ἦτο τό βάρος του εἰς κιλά κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τοῦ κιλοῦ; (Εἰδικόν βάρος τοῦ χαλκοῦ 8,85).

Λύσις

Ἐάν θεωρήσωμεν ὡς κύλινδρον τό σύρμα ἔχομεν $V\sigma\acute{\upsilon}\rho\mu = \pi R^2 u$

$\upsilon = 125\ m \quad R = \frac{4}{2} = 2\ mm = 0{,}002\ m$

Ἄρα $V\sigma\upsilon\rho = 3{,}14 \cdot 125 \cdot (0{,}002)^2 = 1570\ cm^3$

Βάρος $B = V \cdot \varepsilon = 1570 \cdot 8{,}85 = 13{,}89$ Kgρ.

13) Πόσον μῆκος εἰς μέτρα (m) ἔχει μία ποσότης 192 Kgρ σιδήρου εἰς ράβδους κυλινδρικοῦ σχήματος μὲ διάμετρον 1 cm, οἱ ὁποῖαι θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὸν ὁπλισμὸν τοῦ μπετὸν μιᾶς οἰκοδομῆς; (Εἰδικὸν βάρος σιδήρου 7,8)

Λύσις

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς ὅτι $B = V \cdot \varepsilon \Longrightarrow V = \frac{B}{\varepsilon} = \frac{192}{7{,}8} = 24{,}615\ dm^3$

ἐπειδὴ αἱ ράβδοι ἔχουν κυλινδρικὸν σχῆμα, ἔχομεν:

$$V = \pi R^2 \upsilon \Longrightarrow \upsilon = \frac{V}{\pi R^2} \Longrightarrow \upsilon = \frac{24{,}615}{3{,}14 \cdot (0{,}05)^2}\ dm = 313{,}5\ m$$

14) Εἰς πόσον ὕψος φθάνει μία ποσότης 85 Kgρ ἔλαιον ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου μὲ διάμετρον βάσεως 60 cm; (Εἰδ. βάρος ἐλαίου 0,92)

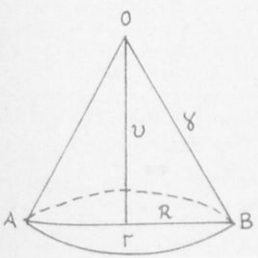
Λύσις

Ἐπίσης ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐκ τοῦ γνωστοῦ τύπου

$$B = V \cdot \varepsilon \text{ ἔχομεν} \Longrightarrow V = \frac{B}{\varepsilon} = \frac{85}{0{,}92} = 92{,}4\ dm^3$$

Ἐκ τοῦ τύπου $V = \pi R^2 \upsilon \Longrightarrow \upsilon = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{92{,}4}{3{,}14 \cdot 3^2} = 3{,}27\ dm$

15) Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει ὕψος 36 cm καὶ γενέτειραν 39 cm. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του. (Ὑπόδειξις. Θὰ χρειασθῇ νὰ ὑπολογίσετε πρῶτα τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου).



Λύσις

Ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΒ ἐξ αὐτοῦ $\longrightarrow (O\Gamma)^2 + (\Gamma B)^2 = (OB^2) \Longrightarrow (\Gamma B)^2 = (OB)^2 - (O\Gamma)^2 \Longrightarrow (\Gamma B)^2 \Longrightarrow R^2 = 39^2 = 225 \quad R = 15$

Ἐκ τοῦ τύπου, δίδοντος τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ἔχομεν:

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \upsilon = \frac{1}{3}\ 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 36 = 8478\ cm^3$

16) Μία σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνειαν 78,5 dm^2. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

Λύσις

Ἐπειδή ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας δίδεται ὑπό τοῦ τύπου

$$4\pi R^2 = S = 78,5\ dm^2 \Longrightarrow R^2 = \frac{78,5}{4 \cdot 3,14} = 6,25\ dm \Longrightarrow R = 2,5\ dm$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας $V\sigma\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}3 \cdot 14 \cdot 2,5^3 = 65,416\ dm^3$

17) Μία κοίλη ἰσοπαχής ὑαλίνη σφαῖρα ἔχει ἐξωτερικήν διάμετρον 3 cm καί ἐσωτερικήν διάμετρον 2 cm. Νά εὕρετε ἐάν βυθίζεται ὁλόκληρος εἰς καθαρόν νερόν (Εἰδ. βάρος ὑάλου 2,5)

Ὑπόδειξις. Θά ὑπολογίσετε τό βάρος τῆς σφαίρας καί θά τό συγκρίνετε μέ τό βάρος ἴσου ὄγκου καθαροῦ νεροῦ, σύμφωνα μέ τήν ὑδροστατικήν ἀρχήν τοῦ Ἀρχιμήδους.

Λύσις

Θά ὑπολογίσωμεν κατ' ἀρχάς τόν ὄγκον τῆς σφαίρας.
Ἔχομεν ἄν καλέσωμεν V' τόν ὄγκον τόν ἐξωτερικόν καί V'' τόν ἐσωτερικόν.

$$V' = \frac{4}{3}\pi . R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi . 3^3 = 14,13\ cm^3$$

$$V'' = \frac{4}{3}\pi R''^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{2}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi = 4,186\ cm^3$$

$$V = V' - V'' = 16,13 - 4,18 = 9,95\ cm^3$$

$$\text{καί } B = V \cdot \varepsilon = 9,95 \cdot 25 = 24,87\ gr^*$$

Θά εὕρωμεν τώρα τό βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος

$$B\upsilon\delta = V' \cdot E\upsilon\delta = 14,13 \cdot 1 = 14,13\ gr^*$$

Ἄρα βυθίζεται ὁλόκληρος εἰς τό ὕδωρ διότι βάρος σφαίρας > βάρους ἐκτοπιζομένου ὕδατος

18) Ἕνα δωμάτιον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καί χωρητικότητα 60 m^3. Πόση θά εἶναι ἡ χωρητικότης δωματίου μέ σχῆμα ὅμοιον, ἐάν ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ 2ου δωματίου πρός τό 1ον εἶναι $\frac{5}{3}$

Λύσις

Καλοῦμεν V τήν χωρητικότητα τοῦ β' δωματίου μέ σχῆμα ὅμοιον

$V'' = 60m^3 \cdot \frac{V'}{V''} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Longrightarrow V' = \left(\frac{5}{3}\right)^3 V'' = \frac{125}{27} \cdot 60 = \frac{7500}{27} M^3 = 277{,}7 M^3$

19) Τί θά πάθῃ ὁ ὄγκος ἑνός κυλίνδρου, ἄν διπλασιάσωμεν τήν ἀκτῖνα καί τό ὕψος του; Καί διατί;

Λύσις

Ὁ τύπος ὁ δίδων τόν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου εἶναι $V = \Pi R^2 υ$ ἐαν διπλασιάσωμεν τήν ἀκτῖνα καί διπλασιάσωμεν καί τό ὕψος ἔχομεν:

$V_1 = \Pi (2R)^2 2υ = 8 \Pi R^2 υ$ δηλ. ὀκταπλασιάζεται ὁ ὄγκος τοῦτο γίνεται, διότι ὁ ὄγκος εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος καί ἀνάλογος τοῦ ὕψους.

20) Πυραμίς ἔχει ἐμβαδόν βάσεως $9 cm^2$ καί ὕψος 6cm. Νά εὕρετε τούς ὄγκους τῶν δύο μερῶν εἰς τά ὁποῖα τήν χωρίζει ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν καί τό ὁποῖον ἀπέχει ἀπό τήν κορυφήν δύο φοράς ὅσον ἀπέχει ἀπό τήν βάσιν.

Λύσις

Ἐπειδη τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως εἶναι $9 cm^2$ καί τό ὕψος τῆς πυραμίδος 6 cm ὁ ὄγκος της εἶναι

$\frac{1}{3}$ ἐμβαδ βάσ ὕψος $= \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 6 = 36 = 18 cm^3$

Ἐπειδή τό ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρός τήν βάσιν χωρίζει τήν πυραμίδα εἰς δύο ὅμοιες. Ἡ ἀποκοπεῖσα πυραμίς πρός τήν ἀρχικήν ἔχει λόγον ὁμοιότητος $\frac{2}{3}$, ἑπομένως ἄν καλέσωμεν V' καί V'' τούς ὄγκους τῆς ἀρχικῆς καί τῆς ἀποκοπείσης

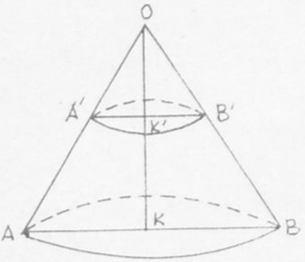
$$\frac{V''}{V'} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Longrightarrow V'' = 18 \frac{8}{27} = \frac{16}{3} cm^3 = 5{,}33 cm^3$$

ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ ἄλλου μέρους εἶναι $V''' = V' - V'' =$

$$= 18 - \frac{16}{3} = \frac{3 \cdot 18 - 16}{3} = \frac{54-16}{3} = \frac{38}{3} cm^3 = 12{,}66 CM^3$$

21) Νά εὕρετε τόν λόγον τῶν ὄγκων τῶν δύο μερῶν εἰς τά ὁποῖα ἐπίπεδον χωρίζει ἕνα κῶνον, ὅταν τό ἐπίπεδον αὐτό εἶναι || πρός τήν βάσιν καί ἀπέχει ἀπό τήν κορυφήν τόσον ὅσον καί ἀπό τήν βάσιν.

Ποῖοι εἶναι αὐτοί οἱ ὄγκοι, ἐάν ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 10 cm καί τό ὕψος τοῦ κώνου 20 cm;



Λύσις

Ἔστω ὁ κῶνος ΟΑΒ καί ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν, τό ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τήν κορυφήν καί τήν βάσιν. Ἐάν καλέσωμεν V_1 τό ἀρχικόν καί V_2 τόν ὄγκον τοῦ ἀποκοπέντος, ἔχομεν $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀρχικοῦ, ὅταν ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 10 CM καί τό ὕψος $\upsilon = 20$ CM εἶναι

$$V_1 = \frac{1}{3}\ \Pi R^2 \upsilon = \frac{1}{3}\ 3{,}14 \cdot 5^2\, 20 = 523{,}33 \text{ CM}^3$$

καί $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8}$ $\quad V_2 = \frac{V_1}{8} = \frac{523{,}33}{8} = 65{,}41 \text{ CM}^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ σελ. 66

1) Νά γράψετε ὑπό μορφήν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς τήν ἐπιφάνειαν καί τόν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ὅταν ἡ ἀκτίς της Χ ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Λύσις

Ἡ ἐπιφάνεια Ε καί ὁ ὄγκος V σφαίρας ὑπό μορφήν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς ὅταν ἡ ἀκτίς Χ ληφθῇ ἀνεξάρτητος μεταβλητή εἶναι·

$$E = 4\Pi R^2 \Longrightarrow 4\pi x^2 = y$$
$$V = \frac{4}{3}\Pi R^3 \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi x^3 = y$$

2) Νά γράψετε ὑπό μορφήν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς τῆς

ὁλικὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου, ὅταν ἡ ἀ-
τὶς X τῆς βάσεως ληφθῇ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ τὸ ὕψος
εἶναι μία σταθερὰ $υ_0$.

Λύσις

Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ὑπὸ μορφὴν συν-
αρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς γράφεται:

(ἡ ἀκτὶς X τῆς βάσεως λαμβάνεται ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλη-
τὴ καὶ τὸ ὕψος σταθερὰ $υ_0$)

$$E_{ολ} = 2\pi R\,(υ+R) \Longrightarrow 2\pi X\,(υ_0+X) = y$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ σελ. 88

1) Νὰ διακρίνετε τὸν βαθμὸν καὶ τὸν συντελεστὴν εἰς τὸ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω μονώνυμα τῆς μεταβλητῆς x ἢ y

$$3ax^3,\quad \frac{2x^3}{5},\quad \frac{a^2\beta y^3}{\gamma},\quad -\frac{2ax}{\beta},\quad y^2,\quad -y,\quad \frac{2y^4}{\gamma}$$

Λύσις

Μονώνυμον	Βαθμοῦ	Συντελεστὴς
$3ax^2$	$2^{ου}$	$3a$
$\frac{-2x^3}{5}$	$3^{ου}$	$-\frac{2}{5}$
$\frac{a^2\beta y^3}{\gamma}$	$3^{ου}$	$\frac{a^2\beta}{\gamma}$
$-\frac{x^2}{\beta}$	$2^{ου}$	$-\frac{1}{\beta}$
$-\frac{2ax}{\beta}$	$1^{ου}$	$-\frac{2a}{\beta}$
y^2	$2^{ου}$	1
$-y$	$1^{ου}$	-1
$\frac{2y^4}{\gamma}$	$4^{ου}$	$\frac{2}{\gamma}$

2) Νά χωρίσετε τά παρακάτω μονώνυμα τῶν μεταβλητῶν x ἤ y εἰς ὁμάδας ὁμοίων μονωνύμων καί νά εὕρετε τό ἄθροισμά των εἰς ἑκάστην ὁμάδα

$$3x^2,\ -2x,\ \frac{3y}{4},\ -x^2,\ -\frac{y}{2},\ \frac{3x}{4},\ 2y,\ -5x^2,\ -\frac{x}{4}$$

<u>Λύσις</u>

Τά δοθέντα μονώνυμα χωρίζονται εἰς τάς κάτωθι ὁμάδας:

1) $3x^2 - x^2 - 5x^2 = (3-1-5)x^2 = -3x^2$

2) $-2x + \frac{3x}{4} - \frac{x}{4} = \left(-2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)x = -\frac{3x}{2}$

3) $\frac{3y}{4} - \frac{y}{2} + 2y = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 2\right)y = \frac{9y}{4}$

3) Νά κάμετε τό ἴδιον εἰς τά μονώνυμα

$$\beta x^2,\ \frac{ax}{2},\ \frac{2ax}{3},\ -3ax^2,\ -\frac{ax}{2},\ \frac{ax}{3},\ ay^2,\ y,\ \beta y,\ -\beta y^2$$

<u>Λύσις</u>

Ὁμοίως ἔχομεν:

α) $\beta x^2 - 3ax^2 = (\beta - 3a)x^2$

β) $\frac{ax}{2} + \frac{2ax}{3} - \frac{ax}{2} + \frac{ax}{3} = \left(\cancel{\frac{a}{2}} + \frac{2a}{3} - \cancel{\frac{a}{2}} + \frac{a}{3}\right)x = \frac{\cancel{3}ax}{\cancel{3}} = ax$

γ) $ay^2 - \beta y^2 = (a - \beta)y^2$

δ) $y + \beta y = (1 + \beta)y$

4) Νά προσθέσετε τά κατωτέρω μονώνυμα, νά κάμετε σύμπτυξιν τῶν ὁμοίων ὅρων καί νά διατάξετε κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x ἤ y τά πολυώνυμα πού προκύπτουν.

α) $-5x^2,\ 2x,\ -7,\ 3x^2,\ 5x,\ -x^3,\ -x^2,\ 4x^3.$

β) $2y,\ -3y^2,\ -3y^3,\ -5y,\ 3y,\ -1,\ 5y^3,\ 7.$

γ) $\frac{x}{2},\ 3x^2,\ -\frac{2}{9}x^2,\ x,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{2}x,\ -\frac{5}{4},\ 2x^3$

Ποῖος εἶναι ὁ βαθμός τοῦ καθενός ἀπό τά πολυώνυμα αὐτά;

Λύσις

α) $-5x^2+2x-7+3x^2+5x-x^3-x^2+4x^3=$

$=(-x^3+4x^3)+(-5x^2+3x^2-x^2)+(2x+5x)-7=$

$=3x^3-3x^2+7x-7$ (1)

β) $2y-3y^2-3y^3-5y+3y-1+5y^3+7=$

$=(-3y^3+5y^3)+(-3y^2)+(2\cancel{y}-5\cancel{y}+3\cancel{y})+(-1+7)=$

$=2y^3-3y^2+6$ (2)

γ) $\frac{x}{2}+3x^2-\frac{2}{9}x^2+x+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+2x^3=$

$=2x^3+\left(3x^2-\frac{2}{9}x^2\right)+\left(\frac{x}{2}+x+\frac{3}{2}x\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)=$

$=2x^3+\frac{25}{9}x^2+3x-\frac{1}{2}$ (3)

Ὁ βαθμός τοῦ (α) εἶναι 3ος
Ὁ βαθμός τοῦ (β) εἶναι 3ος
Ὁ βαθμός τοῦ (γ) εἶναι 3ος

5) Νά εὕρετε τάς διαφοράς

$3x^2-\left(-\frac{2}{3}x^2\right)$, $5x^2-(2x^2)$, $7x^3-(-5x)$, $1-(-2x)$, $\frac{3}{4}x^3-\left(-\frac{1}{2}x^3\right)$,

$4y-(y^2)$, $5y^3-(-2{,}5y^3)$, $0{,}5y-(4y)$.

Λύσις

α) $3x^2-\left(-\frac{2}{3}x^2\right)=3x^2+\frac{2}{3}x^2=\frac{11}{3}x^2$

β) $5x^2-(2x^2)=5x^2-2x^2=3x^2$

γ) $7x^3-(-5x)=7x^3+5x=(7x^2+5)x$

δ) $1-(-2x)=1+2x$

ε) $\frac{3}{4}x^3-\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{2}x^3=\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{4}x^3=\frac{5}{4}x^3$

στ) $4y-(y^2)=4y-y^2=(4-y)y$

ζ) $5y^3-(-2{,}5y^3)=5y^3+2{,}5y^3=7{,}5y^3$

η) $0{,}5y-(4y)=0{,}5y-4y=-3{,}5y$.

6) Νά πολλαπλασιάσετε κάθε ένα από τά μονώνυμα

$$3x^2, \ -\frac{2}{3}x^3, \ \frac{1}{2}x$$

μέ κάθε ένα από τά

$$\frac{3}{2}x, \ -\frac{2}{3}x^2, \ 6x$$ (9 πολλαπλασιασμοί)

Λύσις

α) $3x^2 \cdot \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x^3$

β) $3x^2\left(-\frac{2}{3}x^2\right) = -\frac{6}{3}x^4 = -2x^4$

γ) $3x^2 \cdot 6x = 18x^3$

δ) $-\frac{2}{3}x^3 \cdot \frac{3}{2}x = -\frac{6}{6}x^4 = -x^4$

ε) $-\frac{2}{3}x^3\left(-\frac{2}{3}x^2\right) = \frac{4}{9}x^5$

στ) $-\frac{2}{3}x^3 \cdot 6x = -\frac{12}{3}x^4 = -4x^4$

ζ) $\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x^2$

η) $\frac{1}{2}x\left(-\frac{2}{3}x^2\right) = -\frac{2}{6}x^3 = -\frac{1}{3}x^3$

θ) $\frac{1}{2}x \cdot 6x = \frac{6}{2}x^2 = 3x^2$

7) Νά εύρετε τά πηλίκα
$12x^3:(-4x)$, $-3x^2:5x$, $ax^3:(-\beta x^2)$, $9x^2:-6x^2$

Λύσις

$$12x^3:(-4x) = -3x^2$$
$$-3x^2:5x = -\frac{3}{5}x$$
$$ax^3:(-\beta x^2) = -\frac{a}{\beta}x$$
$$9x^2:-6x^2 = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

8) Δίδονται τά πολυώνυμα

$\pi_1(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$\pi_2(x) = 4x^2 - 3x + 2$

$\pi_3(x) = 2x + 3$

καί ζητεῖται νά ὑπολογίσετε τά

1ον) $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x)$, 2ον) $\pi_1(x) - [\pi_1(x) + \pi_3(x)]$

3ον) $\pi_1(x) - [\pi_3(x) - \pi_2(x)]$, 4ον) $-\pi_1(x) + [\pi_3(x) - \pi_2(x)]$

Λύσις

1ον) $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x)$

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ 4x^2 - 3x + 2 \\ 2x + 3 \\ \hline 5x^3 + x^2 + x + 4 \end{array}$$

2ον) $\pi_1(x) - [\pi_1(x) + \pi_3(x)] = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - [5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 + 2x + 3] = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1 - 2x - 3 = -2x - 3$

3ον) $\pi_1(x) - [\pi_3(x) - \pi_2(x)] = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - [2x + 3 - (4x^2 - 3x + 2)] = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 - 2x - 3 + 4x^2 - 3x + 2 = 5x^3 + x^2 - 3x - 2$

4ον) $-\pi_1(x) + [\pi_3(x) - \pi_2(x)] = -(5x^3 - 3x^2 + 2x - 1) + [2x + 3 - (4x^2 - 3x + 2)] = -5x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 2x + 3 - 4x^2 + 3x - 2 = -5x^3 - x^2 + 3x + 2$

9) Εἰς τά δύο κατωτέρω πολυώνυμα νά ἐξαλειφθοῦν αἱ ἀγκύλαι καί αἱ παρενθέσεις καί νά ἐπακολουθήσῃ ἡ σύμπτυξις τῶν ὁμοίων ὅρων καί ἡ διάταξις τῶν πολυωνύμων κατά τάς ἀνερχομένας δυνάμεις τοῦ x:

I) $2 - [3x^3 + 1 - (2x^2 - x + 7) - (x + 5x^3)]$

II) $x^2 - [\alpha x - (3\alpha x + \beta) - (3\beta + 2x^2) - 1]$

Λύσις

I) $2 - [3x^3 + 1 - (2x^2 - x + 7) - (x + 5x^3)] = 2 - 3x^3 - 1 + (2x^2 - x + 7) + (x + 5x^3) = 2 - 3x^3 - 1 + 2x^2 - x + 7 + x + 5x^3 = 8 + 2x^2 + 2x^3$

II) $x^2 - [\alpha x - (3\alpha x + \beta) - (3\beta + 2x^2) - 1] = x^2 - \alpha x + (3\alpha x + \beta) + (3\beta + 2x^2) + 1 = x^2 - \alpha x + 3\alpha x + \beta + 3\beta + 2x^2 + 1 = (1 + 4\beta) + 2\alpha x + 3x^2$

10) Εἰς τὰ δύο κατωτέρω πολυώνυμα νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι μὲ τὸ πρόσιμον – ἐμπρὸς ἀπὸ τὴν παρένθεσιν

α) $3x^2-2x+1$

β) $4x^3+5x^2+x-3$

Λύσις

α) $3x^2-2x+1 = 3x^2-(2x-1)$

β) $4x^3+5x^2+x-3 = 4x^3+5x^2-(-x+3)$

11) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κατωτέρω διαιρέσεις καὶ αἱ δοκιμαὶ των μὲ τὸν πολλαπλασιασμόν :

α) $(12x^4-6x^3+2x^2):3x^2$ β) $(3a^2x^3-2a^2x^2+5ax):(-5ax)$

γ) $\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right):\frac{2}{3}x$.

Λύσις

α) $(12x^4-6x^3+2x^2):3x^2=\frac{12x^4}{3x^2}-\frac{6x^3}{3x^2}+\frac{2x^2}{3x^2}=$

$=4x^2-2x+\frac{2}{3}$

Δοκιμή: $3x^2\left(4x^2-2x+\frac{2}{3}\right)=12x^4-6x^3+2x^2$

β) $(3a^2x^3-2a^2x^2+5ax):(-5ax)=-\frac{3a^2x^3}{5ax}+\frac{2a^2x^2}{5ax}-\frac{5ax}{5ax}=$

$=-\frac{3}{5}ax^2+\frac{2}{5}ax-1$

Δοκιμή: $\left(\frac{3}{5}ax^2+\frac{2}{5}ax-1\right)\cdot(-5ax)=3a^2x^3-2a^2x^2+5ax$

γ) $\left(\frac{3}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right):\frac{2}{3}x=\frac{\frac{3}{4}x^3}{\frac{2}{3}x}-\frac{\frac{5}{2}x^2}{\frac{2}{3}x}+\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{3}x}=$

$=\frac{9}{8}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{3}{4}$

Δοκιμή: $\left(\frac{9}{8}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

12) Ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον $\frac{2}{3}x^4-5x^2+8x-\frac{1}{2}$ θέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{2}{3}$ ὡς κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐντὸς παρενθέσεως πολυώνυμον;

Ὅμοιον ἐρώτημα διά τό πολυώνυμον

$$\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - 6$$

ὅταν ἐντός παρενθέσεως τεθῇ ὡς κοινός παράγων ὁ ἀριθμός $\frac{3}{4}$;

Λύσις

Ἄν εἰς τό πολυώνυμον $\frac{2}{3}x^4 - 5x^2 + 8x - \frac{1}{2}$ θέσωμεν τόν ἀριθμόν $\frac{2}{3}$ ὡς κοινόν παράγοντα ἐντός παρενθέσεως, θά ἔχωμεν:

$$\frac{2}{3}x^4 - 5x^2 + 8x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(x^4 - \frac{\frac{5}{1}x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{8}{1}x}{\frac{2}{3}} \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^4 - \frac{15x^2}{2} + 12x - \frac{3}{4}\right)$$

Ὁμοίως ἔχομεν:

$$\frac{3}{4}x^5 - x^4 + 2x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - 6 = \frac{3}{4}\left(x^5 - \frac{\frac{1}{1}x^4}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{2}{1}x^3}{\frac{3}{4}} - x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}x - \frac{\frac{6}{1}}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}\left(x^5 - \frac{4x^4}{3} + \frac{8x^3}{3} - x^2 - \frac{5x}{3} - 8\right)$$

13) Νά τεθοῦν ἐντός παρενθέσεως οἱ κοινοί παράγοντες τῶν ὅρων εἰς ἕκαστον ἀπό τά πολυώνυμα:

$3x^2 - 6x$, $5ax^3 - 15a^2x^2$, $ax^2 - a^2x$

$(a+\beta)x^2 - (a+\beta)x$, $a(x-1) - \beta(x-1)$, $ax^3 + a^2x^2 + a^3x$

Λύσις

α) $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

β) $5ax^3 - 15a^2x^2 = 5ax^2(x - 3a)$

γ) $ax^2 - a^2x = ax(x-a)$

δ) $(a+\beta)x^2 - (a+\beta)x = (a+\beta)x(x-1)$

ε) $a(x-1) - \beta(x-1) = (x-1)(a-\beta)$

στ) $ax^3 + a^2x^2 + a^3x = a.x.(x^2 + ax + a^2)$

14) Δίδονται τά πολυώνυμα

$\pi_1(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 1$, $\pi_2(x) = x^2 - x + 3$

$\pi_3(x) = 3x + 5$, $\pi_4(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x + 2$

καί ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά κατωτέρω γινόμενα μέ τήν συνεπτυγμένην των μορφήν διατεταγμένα κατά τάς κατερχομένας δυνάμεις τοῦ x:

α) $\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)$, β) $\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)$, γ) $\pi_2(x)\cdot\pi_4(x)$

δ) $\pi_1(x)\cdot\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)$, ε) $\pi_2(x)\cdot\pi_3(x)\cdot\pi_4(x)$.

Λύσις

α) $\Pi_1(x) \cdot \Pi_2(x)$

$$
\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 - x + 1 \\
x^2 - x + 3 \\
\hline
+9x^3 - 15x^2 - 3x + 3 \\
-3x^4 + 5x^3 + x^2 - x \\
+3x^5 - 5x^4 - x^3 + x^2 \\
\hline
3x^5 - 8x^4 + 13x^3 - 13x^2 - 4x + 3
\end{array}
$$

β) $\Pi_2(x)\,\Pi_3(x)$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - x + 3 \\
3x + 5 \\
\hline
5x^2 - 5x + 15 \\
3x^3 - 3x^2 + 9x \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x + 15
\end{array}
$$

γ) $\Pi_2(x)\,\Pi_4(x)$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - x + 3 \\
\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x + 2 \\
\hline
+2x^2 - 2x + 6 \\
-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x \\
\frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 2x^3 \\
\hline
\frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 6
\end{array}
$$

δ) $\Pi_1(x) \cdot \Pi_2(x) \cdot \Pi_3(x)$ Ἐκ τῆς α) $\Pi_1(x)\,\Pi_2(x) = 3x^5 - 8x^4 + 13x^3 - 13x^2 -$
$-4x + 3$ ἄρα ἔχομεν

$$
\begin{array}{r}
3x^5 - 8x^4 + 13x^3 - 13x^2 - 4x + 3 \\
3x + 5 \\
\hline
15x^5 - 40x^4 + 65x^3 - 65x^2 - 20x + 15 \\
+9x^6 - 24x^5 + 39x^4 - 39x^3 - 12x^2 + 9x \\
\hline
9x^6 - 9x^5 - x^4 + 26x^3 - 77x^2 - 11x + 15
\end{array}
$$

ε) $\Pi_2(x) \cdot \Pi_3(x) \cdot \Pi_4(x)$

Ἐκ τῆς γ) ἔχομεν ὅτι $\Pi_2(x) \cdot \Pi_4(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 6$

Ἄρα θά ἔχωμεν:

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{4}x^2 - \frac{17}{4}x + 6 \\
3x + 5 \\
\hline
\frac{10}{3}x^5 - \frac{10}{3}x^4 + \frac{25}{4}x^3 + \frac{55}{4}x^2 - \frac{85}{4}x + 30 \\
\\
\frac{6}{3}x^6 - \frac{6}{3}x^5 + \frac{15}{4}x^4 + \frac{33}{4}x^3 - \frac{51}{4}x^2 + 18x \\
\hline
2x^6 + \frac{4}{3}x^5 + \frac{5}{12}x^4 + \frac{58}{4}x^3 + x^2 - \frac{13}{4}x + 30
\end{array}$$

15) Νά ἐκτελέσετε τάς διαιρέσεις:

α) $(6x^5 + 2x^4 + 16x^2 + 12x - 8) : (3x^3 - 5x^2 - 1)$

β) $(12x^3 + 7x^2 - 4x + 4) : (4x + 5)$

γ) $(4x^5 - 2x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x) : (6x^2 + \frac{3x}{2})$

δ) $(32x^5 - 1) : (16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1)$.

Νά ἐκτελέσετε καί τάς δοκιμάς τῶν διαιρέσεων 1ον πολλαπλασιάζοντες καί προσθέτοντες πολυώνυμα, 2ον ἀντικαθιστῶντες τό x μέ τό −1 εἰς τήν ταυτότητα πού προκύπτει ἀπό κάθε διαίρεσιν.

Λύσις

α) $6x^5 + 2x^4 + 16x^2 + 12x - 8 \; : \; 3x^3 - 5x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l}
6\cancel{x^5} + 2x^4 + 16x^2 + 12x - 8 & 3x^3 - 5x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
-6\cancel{x^5} + 10x^4 + 2x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + 4x + \frac{20}{3} \\
\cline{1-1}
12x^4 + 18x^2 + 12x - 8 & \\
-12x^4 + 20x^3 + 4x \qquad & \\
\cline{1-1}
20\cancel{x^3} + 18x^2 + 16x - 8 & \\
-20\cancel{x^3} + \frac{100}{3}x^2 + \frac{20}{3} \qquad & \\
\cline{1-1}
\frac{154}{3}x^2 + 16x - \frac{4}{3} &
\end{array}$$

α) Δοκιμή: Βάσει τοῦ τύπου $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ ἔχομεν

$$6x^5 + 2x^4 + 16x^2 + 12x - 8 \equiv (3x^3 - 5x^2 - 1)\left(2x^2 + 4x + \frac{20}{3}\right) + $$
$$+ \frac{154}{3}x^2 + 16x - \frac{4}{3}$$

$$
\begin{array}{r}
3x^3-5x^2-1 \\
2x^2+4x+\frac{20}{3} \\
\hline
+\cancel{20x^3}-\frac{100}{3}x^2-\frac{20}{3} \\
+12x^4-\cancel{20^3} \qquad -4x \\
+6x^5-10x^4 \quad -2x^2 \\
\hline
+6x^5+2x^4-\frac{106}{3}x^2-4x-\frac{20}{3}
\end{array}
$$

$$6x^5+2x^4-\frac{106}{3}x^2-4x-\frac{20}{3}+\frac{154}{3}x^2+16x-\frac{4}{3}=6x^5+2x^4+16x^2+12x-8$$

β) <u>Δοκιμή</u>: $6(-1)^5+2(-1)^4+16(-1)^2+12(-1)-8=$

$$=\left[3(-1)^3-5(-1)^2-1\right]\left[2(-1)^2+4(-1)+\frac{20}{3}\right]+\frac{154}{3}(-1)^2+16(-1)-\frac{4}{3}$$

$$-6+2+16-12-8=(-3-5-1)\left(2-4+\frac{20}{3}\right)+\frac{154}{3}-16-\frac{4}{3}$$

$$-8=(-9)\left(-2+\frac{20}{3}\right)+50-16$$

$$-8=18-60+50-16$$

$$-8=-8$$

β) $12x^3+7x^2-4x+4 \; : \; 4x+5$

$$
\begin{array}{rl}
12\cancel{x^3}+7x^2-4x+4 & \big|\; 4x+5 \\
\underline{-12\cancel{x^3}-15x^2} \qquad & 3x^2-2x+\frac{6}{4} \\
-8\cancel{x^2}-4x+4 & \\
\underline{+8\cancel{x^2}+10x} \qquad & \\
6\cancel{x}+4 & \\
\underline{-6\cancel{x}-\frac{30}{4}} & \\
-\frac{14}{4} &
\end{array}
$$

α) <u>Δοκιμή</u>: $12x^3+7x^2-4x+4=(4x+5)\left(3x^3-2x+\frac{6}{4}\right)-\frac{14}{4}$

$$
\begin{array}{r}
3x^2-2x+\frac{6}{4} \\
4x+5 \\
\hline
15x^2-10x+\frac{30}{4} \\
12x^3-8x^2+6x \\
\hline
12x^3+7x^2-4x+\frac{30}{4}
\end{array}
$$

$$12x^3+7x^2-4x+\frac{30}{4}-\frac{14}{4}=\underline{12x^3+7x^2-4x+4}$$

β) Δοκιμή:

$$12(-1)^3+7(-1)^2-4(-1)+4=[4(-1)+5]\,[3(-1)^2-2(-1)+\tfrac{6}{4}]-\tfrac{14}{4}$$

$$-12+7+4+4=(-4+5)\,(3+2+\tfrac{6}{4})-\tfrac{14}{4}$$

$$3=5+\tfrac{6}{4}-\tfrac{14}{4}$$

$$3=5-2 \qquad \underline{\underline{3=3}}$$

γ) $4x^5-2x^4-\frac{3}{4}x^3+6x^2+\frac{3}{2}x \;:\; 6x^2+\frac{3x}{2}$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{4x^5}-2x^4-\frac{3}{4}x^3+6x^2+\frac{3}{2}x & 6x^2+3x \\ \cline{2-2}
-\cancel{4x^5}-x^4 & \frac{4}{6}x^3-\frac{3}{6}x^2+1 \\ \cline{1-1}
-\cancel{3x^4}-\frac{3}{4}x^3+6x^2+\frac{3}{2}x & \\
\cancel{3x^4}+\frac{4}{12}x^3 & \\ \cline{1-1}
\cancel{6x^2}+\cancel{\frac{3}{2}}x & \\
-\cancel{6x^2}-\cancel{\frac{3}{2}}x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

α) Δοκιμή:

$$4x^5-2x^4-\tfrac{3}{4}x^3+6x^2+\tfrac{3}{2}x=(6x^2+\tfrac{3x}{2})(\tfrac{4}{6}x^3-\tfrac{3}{6}x^2+1)$$

$$\begin{array}{r}
\frac{4}{6}x^3-\frac{3}{6}x^2+1 \\
6x^2+\frac{3x}{2} \\ \hline
+\frac{12x^4}{12}-\frac{9x^3}{12}+\frac{3x}{2} \\
+4x^5\quad-3x^4\qquad\qquad+6x^2 \\ \hline
4x^5-2x^4-\frac{3}{4}x3+6x^2+\frac{3}{2}x
\end{array}$$

β) Δοκιμή:

$$4(-1)^5-2(-1)^4-\tfrac{3}{4}(-1)^3+6(-1)^2+\tfrac{3}{2}(-1)=[6(-1)^2+\tfrac{3(-1)}{2}][\tfrac{4}{6}(-1)^3-\tfrac{3}{6}(-1)^2+1]$$

$$-\cancel{4}-\cancel{2}+\tfrac{3}{4}+\cancel{6}-\tfrac{3}{2}=(6-\tfrac{3}{2})(-\tfrac{4}{6}-\tfrac{3}{6})+1)$$

$$-\tfrac{3}{4}=(\tfrac{9}{2})(-\tfrac{1}{6})$$

$$-\tfrac{3}{4}=-\tfrac{9}{12} \text{ ή } -\tfrac{3}{4}=-\tfrac{3}{4}$$

δ) $(32x^5-1) : (16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)$

$$\begin{array}{l|l} 32x^5 \qquad\qquad -1 & 16x^4+8x^3+4x^2+2x+1 \\ \hline -32x^5-16x^4-8x^3-4x^2-2x & 2x-1 \\ \cline{1-1} -16x^4-8x^3-4x^2-2x-1 & \\ +16x^4+8x^3+4x^2+2x+1 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

α) <u>Δοκιμή</u>: $32x^5-1 = (16x^4+8x^3+4x^2+2x+1)(2x-1)$

$$\begin{array}{r} 16x^4+8x^3+4x^2+2x+1 \\ 2x-1 \\ \hline -16x^4-8x^3-4x^2-2x-1 \\ 32x^5+16x^4+8x^3+4x^2+2x \quad \\ \hline 32x^5 \qquad\qquad\qquad -1 \end{array}$$

β) <u>Δοκιμή</u>: $32(-1)^5-1 = [16(-1)^4+8(-1)^3+4(-1)^2+2(-1)+1][2(-1)-1]$

$-32-1 = (16-8+4-2+1)(-2-1)$

$-33 = (11)(-3)$

$-33 = -33$

16) Νά ἀναλύσετε εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τά πολυώνυμα:

$25x^2-20x+4$, $16x^2+24x+9$, $36x^2-1$, $x^2-\frac{1}{25}$, $(x+8)^2-\frac{16}{9}$, x^2+5x-9, $x^2+12x+3$, $2x^2-8x+3$, $\frac{1}{2}x^2-3x-7$, $9x^2-30x+25-(2x+5)(2x-5)$, $3x^3-27x$, $2x^3-x^2-x$.

<u>Λύσις</u>

α) $25x^2+20x+4 = (5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2)$

β) $16x^2-24x+9 = (4x-3)^2 = (4x-3)(4x-3)$

γ) $36x^2-1 = (6x-1)(6x+1)$

δ) $x^2-\frac{1}{25} = \left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$

ε) $(x+8)^2-\frac{16}{9} = \left(x+8+\frac{4}{3}\right)\left(x+8-\frac{4}{3}\right) = \left(x+\frac{28}{3}\right)\left(x+\frac{20}{3}\right)$

στ) $x^2+5x-9 = x^2+5x-9+\frac{25}{4}-\frac{25}{4} = x^2+5x+\frac{25}{4}-9-\frac{25}{4} =$

$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{36+25}{4} = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{61}{4} =$

$= \left(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{61}}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{61}}{2}\right) = \left(x+\frac{5+\sqrt{61}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{61}}{2}\right)$

ζ) $2x^2-8x+3=(\sqrt{2}x)^2-2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}x+8-8=$
$=(\sqrt{2}x-2\sqrt{2})^2-8+3=(\sqrt{2}x-2\sqrt{2})^2-5=$
$=(\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-\sqrt{5})$

η) $\frac{1}{2}x^2-3x-7=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2-2\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-7=$
$=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{46}{4}=$
$=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{46}}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{46}}{2}\right)$.

θ) $x^2+12x+3=x^2+2\cdot 6x+3=x^2+2\cdot 6x+36-36+3=$
$=(x+6)^2-33=(x+6+\sqrt{33})(x+6-\sqrt{33})$

ι) $9x^2-30x+25-(2x+5)(2x-5)=$
$=(3x-5)^2-(4x^2-25)=(3x-5+\sqrt{4x^2-25})(3x-5-\sqrt{4x^2-25})$.

ια) $3x^3-27x=3x(x^2-9)=3x(x^2-3^2)=3x(x+3)(x-3)$

ιβ) $2x^3-x^2-x=x^3-x^2+x^3-x=x^2(x-1)+x(x^2-1)=$
$=x^2(x-1)+x(x+1)(x-1=x(x-1)[x+(x+1)]=$
$=x(x-1)(2x+1)$.

---

17) Νά δείξετε ὅτι τό γινόμενον $(x+3)\cdot(x+5)$ ἠμπορεῖ νά μετασχηματισθῇ εἰς διαφοράν δύο τετραγώνων.
Ὁμοίως τό $(x-3)(x+5)$ καί τό $(x-3)\cdot(x-5)$

<u>Λύσις</u>

Ἄν κάμωμεν τάς πράξεις θά ἔχωμεν:

$(x+3)\cdot(x+5)=x^2+8x+15$

Ἀλλά τό $x^2+8x+15$ μετασχηματίζεται εἰς διαφοράν τετραγώνων ὡς ἑξῆς:

$x^2+2\cdot 4x+15+1-1=x^2+8x+16-1=$
$=(x+4)^2-1^2=(x+4+1)(x+4-1)=(x+5)(x+3)$

Ὁμοίως ἔχομεν: $(x-3)(x+5)=x^2+2x-15$

$x^2+2x-15=x^2+2x+1-1-15=x^2+2x+1-16=$
$=(x+1)^2-4^2=(x+1-4)(x+1+4)=(x-3)(x+5)$

Καὶ ὁμοίως ἔχομεν: $(x-3)(x-5)=x^2-8x+15$

$x^2-8x+15=x^2-8x+15+1-1=x^2-8x+16-1=$
$=(x-4)^2-1^2=(x-4-1)(x-4+1)=(x-5)(x-3).$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 102-103

1) Δίδονται τὰ πολυώνυμα
$\pi_1(x,y)=3x-2y+1$, $\pi_2(x,y)=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-3$, $\pi_3(x,y,z)=5x+3y-2z$

καὶ ζητοῦνται τὰ ἀκόλουθα μὲ τὴν συνεπτυγμένην των μορφήν:

α) $\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)$, β) $\pi_1(x,y)-\pi_3(x,y,z)$

γ) $\pi_2(x,y)+\pi_3(x,y,z)$, δ) $\pi_3(x,y,z)-[\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)]$

Λύσις

α) $\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)$

$$\begin{array}{r} 3x-2y+1 \\ \frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-3 \\ \hline \frac{11}{3}x-\frac{1}{2}y-2 \end{array}$$

β) $\pi_1(x,y)-\pi_3(x,y,z)$

$3x-2y+1-(5x+3y-2z+1)=3x-2y+1-5x-3y+2z-1=$
$=-2x-5y+2z$

γ) $\pi_2(x,y)+\pi_3(x,y,z)$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-3 \\ +3y+1-2z \\ \hline \frac{17}{3}x+\frac{9}{2}y-2z-2 \end{array}$$

δ) $\pi_3(x,y,z)-[\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)]$ Ἐκ τῆς α) ἔχομεν τό
$\pi_1(x,y)+\pi_2(x,y)=\frac{11}{3}x-\frac{1}{2}y-2$ Ἄρα ἔχομεν
$5x+3y-2z+1-(\frac{11}{3}x-\frac{1}{2}y-2)=5x+3y-2z+1-\frac{11}{3}x+\frac{1}{2}y+2=$
$=\frac{4}{3}x+\frac{7}{2}y-2z+3$

2) Νά ἐκτελέσετε τάς ἀκολούθους πράξεις:

α) $3x + y - \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - z + 1\right)$

β) $x + \frac{1}{2}z - \left[3x + y - \left(x + \frac{3}{2} + 3\right) - (z+1)\right]$

Λ ύ σ ι ς

α) $3x + y - \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - z + 1\right) =$

$= 3x + y - \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y + z - 1 = \frac{7}{3}x - \frac{1}{2}y + z - 1$

β) $x + \frac{1}{2}z - \left[3x + y - \left(x + \frac{z}{2} + 3\right) - (z+1)\right] =$

$= x + \frac{1}{2}z - 3x - y + \left(x + \frac{z}{2} + 3\right) + (z+1) =$

$= x + \frac{z}{2} - 3x - y + x + \frac{z}{2} + 3 + z + 1 = -x - y + 2z + 4$

3) Εἰς τά ἀκόλουθα πολυώνυμα νά θέσετε ἐντός παρενθέσεως ὅλους τούς ὅρους πού ἀκολουθοῦν τόν πρῶτον, ἡ παρένθεσις νά ἔχῃ τό πρόσιμον – ἔμπρός της:

α) $2x - 3y + 2z - 1$, β) $1 + 2y - 3x$

γ) $3x + (2y-1) - z$, δ) $x - y + 3$

Λ ύ σ ι ς

α) $2x - 3y + 2z - 1 = 2x - (3y - 2z + 1)$

β) $1 + 2y - 3x = 1 - (-2y + 3x)$

γ) $3x + (2y-1) - z = 3x - \left[-(2y-1) + z\right]$

δ) $x - y + 3 = x - (y - 3)$.

4) Χρησιμοποιοῦντες χιλιοστομετρικόν τετραγωνισμένον χάρτην καί παίρνοντας ἐπάνω εἰς τούς ἄξονας Ox, Oy ὡς μονάδα μήκους τό 1cm νά παραστήσετε γραφικῶς τάς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις:

$x - y = 0$, $x + y = 0$, $2x + 6 = 0$, $3y + 9 = 0$, $3x - 5y = 0$,

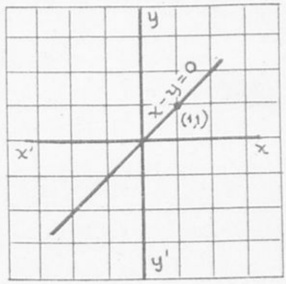
$\frac{3}{5}x - y = 0$, $x + \frac{5}{3}y = 0$, $2x - 3y - 9 = 0$, $\frac{2}{5}x + y - 2 = 0$,

$-3x + 4y - 12 = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - 1 = 0$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 1 = 0$.

Λύσις

α) $x - y = 0$

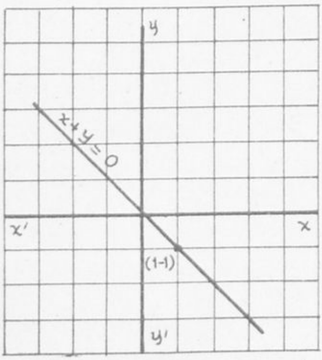
α)



Διά $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

» $x = 1 \longrightarrow y = 1$

(β)



β) $x + y = 0$

Διά $x = 0 \rightarrow y = 0$

» $x = 1 \rightarrow y = -1$

γ) $2x + 6 = 0 \Longrightarrow 2x = -6 \Longrightarrow \boxed{x = -3}$

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις αὐτη παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρός τόν ἄξονα yy' εἰς τά σημεῖα $(-3,0)$

δ) $3y + 9 = 0 \Longrightarrow 3y = -9 \Longrightarrow y = -3$

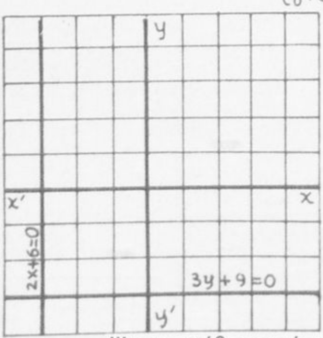
Ὁμοίως μέ τό προηγούμενον

ε) $3x - 5y = 0$

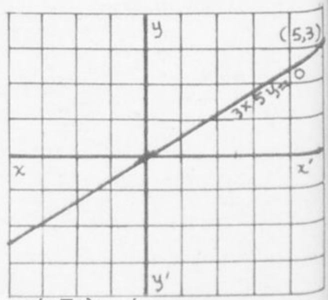
Διά $x = 0 \longrightarrow y = 0$

» $x = 5 \longrightarrow y = 3$

(γ+δ)



(ε+στ)



στ) $\frac{3}{5}x - y = 0$ Διά $x = 0 \longrightarrow y = 0$

Διά $x = 5 \longrightarrow y = 3$

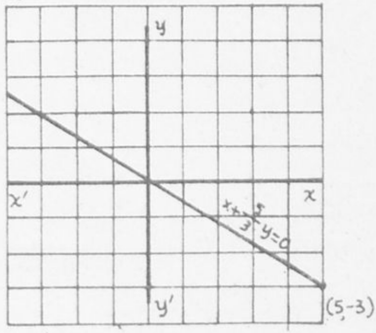
Τό σχῆμα τό αὐτό μέ τό προηγούμενον

ζ) $x + \frac{5}{3}y = 0$

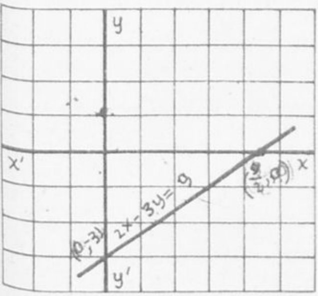
Διά $x = 0$, $y = 0$

Διά $x = 5$ $y = -3$

(ζ)



(η)



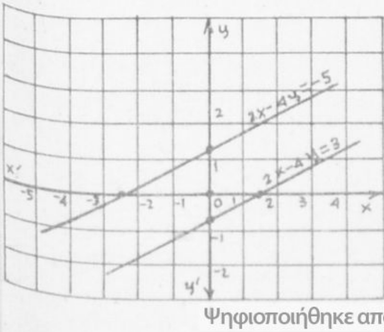
η) $2x - 3y - 9 = 0$

Διά $x = 0 \longrightarrow y = -3$

Διά $y = 0 \longrightarrow x = \frac{9}{2}$

Διά τάς ὑπολοίπους ἐργαζόμεθα ὁμοίως

5) Νά δείξετε α) ὅτι αἱ γραφικαί παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων $2x - 4y + 5 = 0$ καί $2x - 4y - 3 = 0$ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι καί β) ὅτι ἡ παραστατική εὐθεία τῆς πρώτης ἐξισώσεως προκύπτει ἀπό τήν παραστατικήν εὐθεῖαν τῆς δευτέρας, ἄν μετατοπίσωμεν τήν τελευταίαν αὐτήν εὐθεῖαν παραλλήλως πρός τόν ἄξονα Oy κατά ἕνα διάνυσμα πού ἔχει φοράν τήν θετικήν φοράν τοῦ ἄξονος καί μῆκος διπλάσιον ἀπό τήν ἐκλεγμένην μονάδα μήκους.



Διά νά παραστήσωμεν γραφικῶς τάς ἐξισώσεις ἔχομεν:

$2x - 4y + 5 = 0$ διά $x = 0 \to y = +\frac{5}{4}$

διά $y = 0 \to x = -\frac{5}{2}$

$2x - 4y - 3 = 0$ διά $y = 0 \to x = +\frac{3}{2}$

διά $x = 0 \to y = -\frac{3}{4}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 115

1) Νά ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τά συστήματα

$$\begin{cases} 2x-3y-8=0 \\ 4x-y-6=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=2 \\ 2x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=-1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x-\frac{1}{3}y-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{10}{17}x+2y-1=0 \\ 10x+34y-17=0 \end{cases}$$

Ὑπόδειξις. Νά χρησιμοποιήσετε χιλιοστομετρικόν τετραγωνισμένον χάρτην καί νά ἐκλέξετε μονάδα μήκους ἐπάνω εἰς τούς ἄξονας τό 1cm

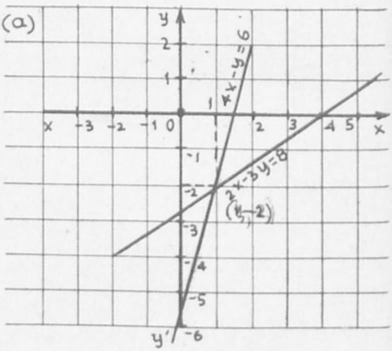
Λύσις

α) $2x-3y-8=0$ (1) Διά $x=0$ $y=-\frac{8}{3}$, Διά $y=0$ $x=4$

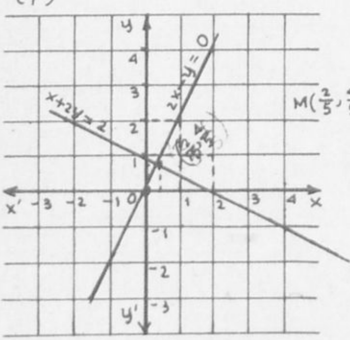
$\Longrightarrow$

$4x-y-6=0$ (2) Διά $x=0$ $y=-6$, Διά $y=0$ $x=\frac{3}{2}$

(α)



(β)



$M\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

β) $x+2y=2$ (1), $2x-y=0$ (2)

Ἡ (1) διά $x=0 \rightarrow y=1$

διά $y=0 \rightarrow x=2$

Ἡ (2) διά $x=0 \rightarrow y=0$

διά $x=1 \rightarrow y=2$

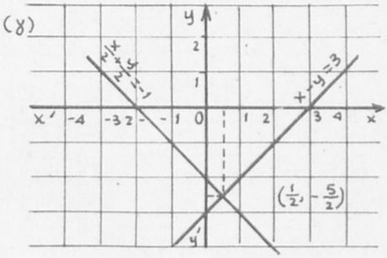
γ) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = -1 \quad (1) \\ \\ x - y = 3 \quad (2) \end{array}\right\}$

Ἡ (1) διά $x = 0 \longrightarrow y = -2$

διά $y = 0 \longrightarrow x = -2$

Ἡ (2) διά $x = 0 \longrightarrow y = -3$

διά $y = 0 \longrightarrow x = 3$



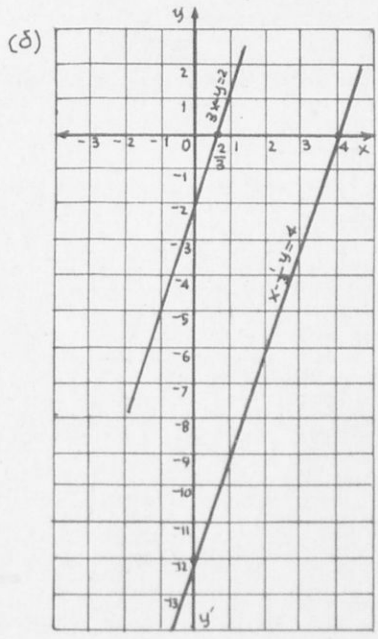
δ) $\left.\begin{array}{l} 3x - y - 2 = 0 \quad (1) \\ \\ x - \dfrac{y}{3} - 4 = 0 \quad (2) \end{array}\right\}$

Ἡ (1) διά $x = 0 \longrightarrow y = -2$

διά $y = 0 \longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Ἡ (2) διά $x = 0 \longrightarrow y = -12$

διά $y = 0 \longrightarrow x = 4$

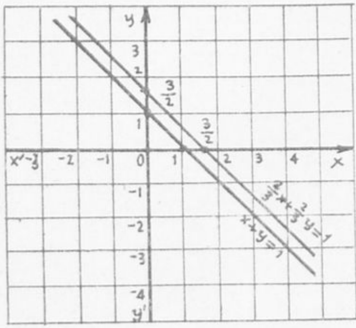


Τό σύστημα δέν ἔχει λύσιν διότι αἱ εὐθεῖαι δέν τέμνονται ε) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=1 \\ \\ x+y=1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array}$ Ἡ (1) διά $x=0,\ y=\frac{3}{2}$

διά $y=0,\ x=\frac{3}{2}$

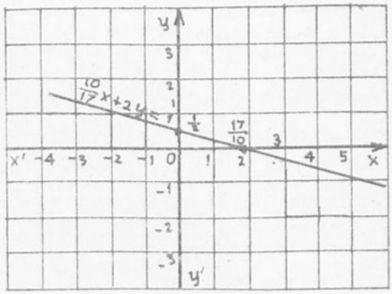
Ἡ (2) διά $x=0,\ y=1$

διά $y=0\quad x=1$



(ε)

(6τ)



6τ) $\left.\begin{array}{l} \frac{10}{17}x+2y-1=0 \\ \\ 10x+34y-17=0 \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array}$ Ἡ (1) διά $x=0,\ y=\frac{1}{2}$

διά $y=0,\ x=\frac{17}{10}$

Ἡ (2) διά $x=0,\ y=\frac{1}{2}$

διά $y=0,\ x=\frac{17}{10}$

---

2) Νά ἐπιλύσετε ἀριθμητικῶς τά συστήματα

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x-y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-y=8 \\ -4x+3y=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \frac{5}{2}x-4y+5=0 \\ -x+7y-1=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 4x+y=-\frac{4}{3} \end{cases}$

Λύσις

α) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x=+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x=+\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} +\frac{1}{2}+y=3 \\ x=+\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} y=2\frac{1}{2} \\ x=+\frac{1}{2} \end{cases}}$

β) $\begin{array}{l} 3x+2y=+1 \\ \underline{2x-y=-4} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 2x=y-4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ x=\frac{y-4}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3y-12+4y=2 \\ x=\frac{y-4}{2} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ x = \frac{y-4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{y-4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{2-4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

γ) $\begin{array}{l} 3x - y = 7 \\ \underline{x + y = 1} \\ 4x = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 1 \\ \underline{4x = 8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 1 \\ \underline{x = 2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2 + y = 1 \\ \underline{x = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

δ) (1) $2x - y = 8$

(2) $-4x + 3y = 1$

Ἡ (1) γίνεται $2x = y + 8$ $\quad x = \frac{y+8}{2}$

Ἄρα ἡ (2) γίνεται $-\cancel{4}^{2}\frac{(y+8)}{\cancel{2}} + 3y = 1 \Longrightarrow -2y - 16 + 3y = 1.$

$\Longrightarrow \boxed{y = 17}$ καὶ $x = \frac{y+8}{2} \Longrightarrow x = \frac{17+8}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{25}{2}}$

ε) $\begin{cases} \frac{5}{2}x - 4y + 5 = 0 & (1) \\ -x + 7y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν : $x = 7y - 1$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται : $\frac{5.(7y-1)}{2} - 4y + 5 = 0.$ ἤ

$35y - 5 - 8y + 10 = 0$ ἢ $+27y = -5$ καὶ $\boxed{y = -\frac{5}{27}}$

Ἄρα $x = 7y - 1$ ἢ $x = -\frac{7.5}{27} - 1$ ἢ $x = -\frac{35}{27} - \frac{27}{27}$ ἢ $\boxed{x = -\frac{62}{27}}$

στ) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 & (1) \\ 4x + y = -\frac{4}{3} & (2) \end{cases}$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν : $y = -4x - \frac{4}{3}$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται : $2x - 3\left(-4x - \frac{4}{3}\right) = -4$

ἢ $2x + 12x + 4 = -4$ ἢ $14x = -8$ ἢ $\boxed{x = -\frac{8}{14}}$

Ἄρα $y = -4x - \frac{4}{3}$ ἢ $y = +\frac{32}{14} - \frac{4}{3}$ ἢ

$y = \frac{+96 - 56}{42}$ ἢ $\quad \boxed{y = \frac{20}{21}}$

3) Νά δείξετε μέ ἀριθμητικήν ἐπίλυσιν ὅτι τά παρακάτω συστήματα ἔχουν μίαν μοναδικήν λύσιν καί νά ἐπαληθεύσετε γραφικῶς αὐτό πού ηὕρατε:

$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+y=5 \end{cases}$, $\begin{cases} -x \quad +2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-2 \\ 3x-5y+10=0. \end{cases}$

α) $\left.\begin{aligned} x+3y&=5 \\ 2x+y&=5 \end{aligned}\right\}$ (1) (2)

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $x=-3y+5$

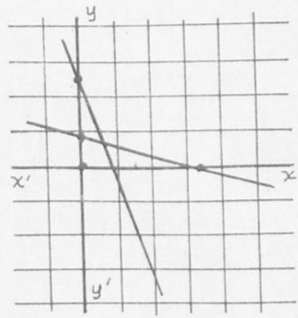
Ἄρα ἡ (2) γίνεται

$2(-3y+5)+y=5$ ἤ $-6y+10+y=5$ ἤ $-5y=-5$ ἤ $5y=5$ καί $\boxed{y=1}$

Διά $y=1$ ἔχομεν

$x=-3.1+5$ ἤ $x=-3+5$ ἤ $\boxed{x=2}$

α)



Μέ γραφικήν λύσιν ἔχομεν εἰς τήν (1) Διά $x=0$, $y=\frac{5}{3}$

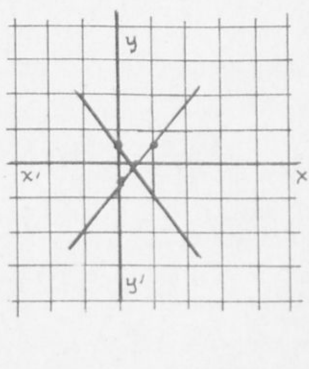
διά $y=0$, $x=5$

Εἰς τήν (2) ἔχομεν Διά $x=0$, $y=5$

διά $y=0$, $x=\frac{5}{2}$

β)

β) $\left.\begin{aligned} -x+3y&=-2 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\}$ (1) (2)



Διά προσθέσεως τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν

$2y=-1$ ἤ $\boxed{y=-\frac{1}{2}}$

Ἄρα ἡ (2) γίνεται: $x-(-\frac{1}{2})=1$ ἤ $x+\frac{1}{2}=1$ ἤ $x=1-\frac{1}{2}$

ἤ $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

Διά τήν γραφικήν λύσιν ἔχομεν ἐκ τῆς (1) Διά $x=0$, $y=-\frac{2}{3}$

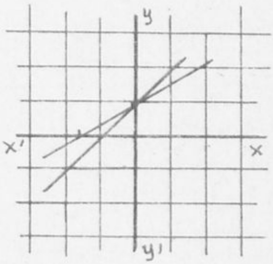
Διά $y=1$, $x=2$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν: Διά $x=0$, $y=1$

Διά $y=0$, $x=1$

γ) $\left.\begin{array}{l} x = y-2 \\ 3x-5y=-10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$

γ)



Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ x συναρτήσει τοῦ y. Ἄρα ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν (2) θὰ ἔχωμεν:

$3(y-2)-5y=-10$ ἢ $3y-6-5y=-10$

ἢ $-2y=-4$ ἢ $2y=4$ ἢ $\boxed{y=2}$

Διὰ $y=2$ ἡ (1) γίνεται:

$x=2-2$ ἢ $\boxed{x=0}$

Διὰ τὴν γραφικὴν λύσιν ἔχομεν:

Εἰς τὴν (1) Διὰ $x=0$, $y=2$

Διὰ $y=0$, $x=-2$

Εἰς τὴν (2) Διὰ $x=0$, $y=2$

Διὰ $y=0$, $x=-\frac{10}{3}$

4) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς τὰ συστήματα:

$$x\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{3y+2x}{4}=\frac{3-x}{8}\\[2ex] \frac{x-2}{3}=\frac{2x-y}{5}-\frac{1+4x}{15}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{x+1}{y+5}=\frac{1}{3}\\[2ex] \frac{y-3}{x-2}=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Ἡ (1) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς

$$\frac{\overset{4}{x}}{2}-\frac{\overset{2}{3y+2x}}{4}=\frac{\overset{1}{3-x}}{8}$$

$4x-6y-4x=3-x$

$\underline{x-6y=3}$

Ἡ (2) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς

$$\frac{\overset{5}{x-2}}{3}=\frac{\overset{3}{2x-y}}{5}-\frac{\overset{1}{1+4x}}{15}$$

$$5x-10=6x-3y-1-4x$$
$$5x-6x+4x+3y=10-1$$
$$3x+3y=9$$

Ἄρα ἔχομεν: $\begin{cases} x-6y=3 \Longrightarrow x=6y+3 \\ 3x+3y=9 \Longrightarrow 3x+3y=9 \end{cases}$

$$3(6y+3)+3y=9$$
$$18y+9+3y=9$$
$$21y=0 \Longrightarrow \boxed{y=0}$$

Ἄρα $x=6.0+3$

$$\boxed{x=3}$$

β) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+5}=\dfrac{1}{3} & (1) \\[2ex] \dfrac{y-3}{x+2}=-\dfrac{2}{3} & (2) \end{cases}$

Ἡ (1) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x+1}{y+5}=\frac{1}{3} \Longrightarrow 3(x+1)=y+5 \Longrightarrow 3x+3=y+5$$
$$3x-y=2$$

Ἡ (2) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{y-3}{x+2}=-\frac{2}{3} \Longrightarrow 3(y-3)=-2(x+2) \Longrightarrow 3y-9=-2x-4$$
$$2x+3y=5$$

Οὕτω τελικῶς ἔχομεν τὸ σύστημα:

$\begin{rcases} 3x-y=2 \\ 2x+3y=5 \end{rcases}$ τοῦτο λυόμενον εὐκόλως δίδει $\boxed{x=1}$ $\boxed{y=1}$

3) Νὰ ἐξετάσετε ποῖα ἀπὸ τὰ παρακάτω συστήματα δὲν ἔχου[ν] καμμίαν λύσιν καὶ ποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις:

$\begin{matrix} 2x-4y=4 \\ 4x-8y=6 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 8x-4y-1=0 \\ 6x-3y-\frac{3}{4}=0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} x+2y=4 \\ -2x-4y=-8 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 5x-7y=10 \\ 0,5x-0,7y=1 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 2x-5y=4 \\ x-\frac{5}{2}y=-4 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 3x-4y+6=0 \\ x-\frac{4}{3}y+2=0 \end{matrix}$

Λύσις

Διὰ νὰ εὕρωμεν ποῖα ἐκ τῶν δεδομένων συστημάτων δὲν ἔχουν καμμίαν λύσιν καὶ ποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἀναλογίας τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τῶν ἐξισώσεων τῶν συστημάτων.

Οὕτω ἔχομεν:

α) $\left.\begin{array}{l} 2x-4y=4 \\ 4x-8y=6 \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{2}{4}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{4}{6}$ τὸ σύστημά μας δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

β) $\left.\begin{array}{l} 8x-4y=1 \\ 6x-3y=\frac{3}{4} \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{8}{6}=\frac{-4}{-3}=\frac{1}{\frac{3}{4}}$ τὸ σύστημα μας ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις

γ) $\left.\begin{array}{l} x+2y=4 \\ -2x-4y=-8 \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{1}{-2}=\frac{2}{-4}=\frac{4}{-8}$ τὸ σύστημά μας ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις.

δ) $\left.\begin{array}{l} 5x-7y=10 \\ 0{,}5x-0{,}7y=1 \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{5}{0{,}5}=\frac{-7}{-0{,}7}=\frac{10}{1}$ τὸ σύστημά μας ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις

ε) $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=4 \\ x-\frac{5}{2}y=-4 \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{2}{1}=\frac{-5}{-\frac{5}{2}}\neq\frac{4}{-4}$ τὸ συστημά μας δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

στ) $\left.\begin{array}{l} 3x-4y=-6 \\ x-\frac{4}{3}=-2 \end{array}\right\}$ Ἐπειδὴ: $\frac{3}{1}=\frac{-4}{-\frac{4}{3}}=\frac{-6}{-2}$ τὸ σύστημά μας ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις.

6) Πῶς προκύπτει ἡ μία ἐξίσωσις ἀπὸ τὴν ἄλλην εἰς τὰ συστήματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις;

7) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-z=1 \\ x+2y+2z=-5 \\ -2x+y+z=8 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{5}=0 \\ 2y+z=2 \\ x+\frac{1}{6}y=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=-1 \\ y+z=1 \\ z+x=4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=3 \\ 3x-y-z=2 \\ 3y+2z=-1 \end{array}\right.$$

Λύσις

6)

Ἑκάστη προκύπτει διά πολλαπλασιασμοῦ τῆς μιᾶς ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν διάφορον τοῦ 0.

π.χ. εἰς τό γ) σύστημα τό ὁποῖον ἔχει ἀπειραρίθμους λύσεις ἡ 2α ἐξίσωσις $-2x-4y=-8$ προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσωμεν τήν 1ην ἐπί τόν -2 Δηλ.

$$-2\cdot(x+2y=4)=-2x-4y=-8$$

Λύσις

7) α)

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ x+2y+2z&=-5 \\ -2x+y+z&=8 \end{aligned}\right\rbrace \begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

Προσθέτοντες τάς (1) καί (3) προκύπτει ἡ $4y=9$

καί οὕτω $\boxed{y=\frac{9}{4}}$

Ἀντικαθιστῶντες τήν τιμήν τοῦ y εἰς τάς (1) καί (2) ἔχομεν τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x+\frac{27}{4}-z&=1 \\ x+\frac{18}{4}+2z&=-5 \end{aligned}\right\rbrace$$

Τό σύστημα αὐτό, λυόμενον εὐκόλως ὡς τά προηγούμενα, διά ἀντιθ. συντελεστῶν

δίδει: $\boxed{x=-\frac{21}{5}}$ καί $\boxed{z=-\frac{53}{20}}$

β) $$\left.\begin{aligned} 2x+\frac{1}{3}y&=-\frac{2}{5} \\ 2y+z&=2 \\ x+\frac{1}{6}y&=1 \end{aligned}\right\rbrace \begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 30x+5y&=-6 \\ 2y+z&=2 \\ 6x+y&=6 \end{aligned}\right\rbrace \begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

Κατ' ἀρχάς ἀπαλείφομεν τόν y μεταξύ τῶν (3) καί (2) καί ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} 2y+z&=2 \\ y+6x&=6 \end{aligned}\right\rbrace \begin{aligned}&-1\\&2\end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} -2y-z&=-2 \\ 2y+6x&=12 \\ \hline 6x-z&=10 \end{aligned}$$

λαμβάνομεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν (3) καί τὴν (1)

$$\left.\begin{aligned} 30x+5y&=-6 \\ 6x+y&=6 \end{aligned}\right\}$$

Εἰς τό σύστημα αὐτό οἱ συντελεσταί τῶν ἀγνώστων μᾶς δίδουν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν:

$$\frac{30}{6}=\frac{5}{1}\neq\frac{-6}{6}$$

Ἄρα τό σύστημα αὐτό δέν ἔχει καμμίαν λύσιν.

Ἑπομένως καί τό ἀρχικόν μας δέν ἔχει καμμίαν λύσιν.

γ) $$\left.\begin{aligned} x+y&=-1 \\ y+z&=1 \\ z+x&=4 \end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

Ἄν προσθέσωμεν τάς (1), (2), καί (3) κατά μέλη θά ἔχωμεν

$$2x+2y+2z=4 \quad \text{ἤ} \quad 2(x+y+z)=4 \quad \text{ἤ} \quad x+y+z=2$$

Ἀλλά $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ x+y&=-1 \end{aligned}\right\}\begin{aligned}&1\\&-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ -x-y\quad&=1 \end{aligned}$$

$$\boxed{z=3}$$

Ἡ (3) διά $z=3$ γίνεται: $3+x=4$

$$x=4-3$$

$$\boxed{x=1}$$

Καί ἡ (1) διά $x=1$ γίνεται

$$x+y=-1 \iff 1+y=-1$$

$$\boxed{y=-2}$$

δ) $$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ 3x-y-z&=2 \\ 3y+2z&=-1 \end{aligned}\right\}\begin{aligned}&(1)\\&(2)\\&(3)\end{aligned}$$

Διά προσθέσεως τῶν (1) καί (2) ἔχομεν:

$$5x=5 \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{x=1}$$

Ἄν τώρα ἀπό τάς (1) καί (3) ἀπαλείψωμεν τό z, θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \;\Big|\; 2 \\ 3y+2z&=-1 \;\Big|\; -1 \end{aligned} \iff \left.\begin{aligned} 4x+2y+2z&=6 \\ -3y-2z&=1 \end{aligned}\right\}$$

$$4x-y=7$$

Οὕτω τό ἀρχικόν μας σύστημα μετασχηματίζεται εἰς τό ἑξῆς ἰσοδύναμόν του:

$$\left.\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ 4x-y=7 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ 4.1-y=7 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ \boxed{y=-3} \\ x=1 \end{matrix}$$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται: $2.1+(-3)+z=3$

ἤ $2-3+z=3$

ἤ $z=3+3-2$

ἤ $\boxed{z=4}$

Οὕτω ἔχομεν

$$\boxed{\begin{matrix} x=1 \\ y=-3 \\ z=4 \end{matrix}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 120

1) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μέ γωνίαν $\hat{A}=80°$ ἡ γωνία $\hat{B}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Γ κατά 22°. Νά προσδιορισθοῦν μέ τήν βοήθειαν ἑνός συστήματος ἐξισώσεων αἱ γωνίαι $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$.

Λύσις

Γνωρίζομεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντός τριγώνου εἶναι 180°. Ἐάν δέ παραστήσωμεν μέ $x°$ καί $y°$ τά μέτρα τῶν γωνιῶν Γ καί Β ἔχομεν τάς ἐξισώσεις:

$x+22=y$ καί $80+y+x=180$ ἐπιλύομεν τό σύστημά των

$$\begin{cases} x+22=y \\ 80+y+x=180 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=-22 \\ x+y=100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=-22 \\ (x+y)+(x-y)=78 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=-22 \\ 2x=78 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=-22 \\ x=39 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 39-y=-22 \\ x=39 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -y=-61 \\ x=39 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=61 \\ x=39 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ γωνία Β εἶναι 61° καί ἡ Γ 39°

2) Εἰς ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνον αἱ παρά τήν βάσιν γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα κατά 16° μεγαλύτερον ἀπό τήν γωνίαν εἰς τήν ἀπέναντι κορυφήν. Νά προσδιορισθοῦν αἱ γωνίαι μέ τήν βοήθειαν ἑνός συστήματος 2 ἐξισώσεων μέ 2 ἀγνώστους

Λύσις

Ἐάν x° εἶναι ἡ μία παρά τήν βάσιν γωνία καί y° ἡ γωνία τῆς κορυφῆς θά ἔχωμεν τάς ἐξισώσεις:

$$\begin{cases} 2x+y=180 \\ 2x+16=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2x+16=180 \\ 2x+16=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x=164 \\ 2x+16=y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=41 \\ 2x+16=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=41 \\ 82+16=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=41 \\ y=92 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 98° αἱ δέ παρά τήν βάσιν 41° ἑκάστη.

3) Ἕνα τραπέζιον ἔχει ὕψος 4,8 cm καί ἐμβαδόν 32cm. Αἱ δύο βάσεις του ἔχουν λόγον $=\frac{3}{2}$. Νά προσδιορισθοῦν αἱ βάσεις.

Λύσις

Ἐάν παραστήσωμεν μέ $x$cm καί $y$cm τάς βάσεις τοῦ τραπεζίου, τότε γνωρίζομεν ὅτι τό ἐμβαδόν αὐτοῦ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $E=\frac{x+y}{2}\,υ$, ἤτοι ἔχομεν τάς ἐξισώσεις:

$$\frac{x+y}{2}\cdot 4{,}8=32 \quad \text{καί} \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$$

Ἐπιλύομεν τό σύστημά των

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}\,4{,}8=32 \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=13{,}3 \\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=13{,}3 \\ x=\frac{3}{2}\,y \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\,y+y=13{,}3 \\ x=\frac{3}{2}\,y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}\,y=13{,}3 \\ x=\frac{3}{2}\,y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=5{,}3 \\ x=\frac{3}{2}\,y \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=5{,}3 \\ x=\frac{3}{2}\,5{,}3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=5{,}3 \\ x=7{,}95 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ μικρή βάσις αὐτοῦ εἶναι 5,3 cm ἡ δέ μεγάλη 7,95 cm

4) Ἕνα κλάσμα ἔχει τιμὴν ἴσην πρὸς $\frac{3}{7}$. Ἂν ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμητὴν του κατὰ 3 καὶ αὐξήσωμεν τὸν παρονομαστὴν του κατὰ 5, τότε ἡ τιμή του γίνεται ἴση πρὸς $\frac{1}{3}$. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ποῖος ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος;

Λύσις

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{7} \\ \frac{x-3}{y+5} = \frac{1}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7}\, y \\ 3x - 9 = y + 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7}\, y \\ \frac{9}{7}\, y - y = 14 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7}\, y \\ \frac{2}{7}\, y = 14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7}\, y \\ 2y = 98 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7}\, y \\ y = 49 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7}\, 49 \\ y = 49 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 49 \end{cases}$$

Ἄρα ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ 21, ὁ δὲ παρονομαστὴς τὸ 49

5) Πόσα λίτρα οἰνόπνευμα τῶν 90% μὲ πόσα τῶν 36% πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν διὰ νὰ λάβωμεν 45 λίτρα οἰνόπνευμα τῶν 60%;

Ἐπεξήγησις. "Οἰνόπνευμα τῶν 90%" σημαίνει ὅτι εἰς 100 μέρη ὄγκου τοῦ οἰνοπνεύματος τὰ 90 εἶναι καθαρὸν ἀλκοόλ.

Λύσις

Ἐὰν x λίτρα εἶναι τὸ οἰνόπνευμα τῶν 90% καὶ y τῶν 36% τότε $x + y = 45$ καὶ $90x + 36 \cdot y = 45 \cdot 60 = 2700$ Ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν

$$\begin{cases} x + y = 45 - x \\ 90x + 36y = 2700 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ 90x + 36y = 2700 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ 90x + 36(45 - x) = 2700 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ 90x - 36x = 2700 - 1620 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ 54x = 1080 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 45 - x \\ x = 20 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 25 \\ x = 20 \end{cases}$$

Ἄρα πρέπει νὰ ἀναμείξωμεν 25 λίτρα τῶν 36% καὶ 20 λίτρα τῶν 90% διὰ νὰ ἔχωμεν 45 λίτρα τῶν 60%

6) Νά προσδιορίσετε τό μῆκος καί πλάτος ἑνός ὀρθογω-
νίου, ὅταν γνωρίζετε τά ἑξῆς: α) τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου
παραμένει ἀμετάβλητον, ἄν τό μῆκος του ἐλαττωθῇ κατά 3 m καί
τό πλάτος του αὐξηθῇ κατά 3 m, β) τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνί-
ου αὐξάνει κατά $16 m^2$, ἄν τό μῆκος του ἐλαττωθῇ κατά 3 m καί
τό πλάτος του αὐξηθῇ κατά 5 m.

<u>Λύσις</u>

Ἐάν x cm τό μῆκος καί y cm τό πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου, τότε
γνωρίζομεν ὅτι $x \cdot y = E$. Ἀλλά ἔχομεν
$(x-3)(y+3) = E = x \cdot y$ καί $(-3)(y+5) = x \cdot y + 16$
Ἐπιλύομεν τό σύστημα τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων

$$\begin{cases}(x-3)(y+3) = x \cdot y \\ (x-3)(y+5) = x \cdot y + 16\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \cdot y - 3y + 3x - 9 = x \cdot y \\ x \cdot y - 3y + 5x - 15 = x \cdot y + 16\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}3x - 3y = x \cdot y - x \cdot y + 9 \\ 5x - 3y = x \cdot y + 16 - x \cdot y + 15\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}3x - 3y = 9 \\ 5x - 3y = 31\end{cases} \Longleftrightarrow$$

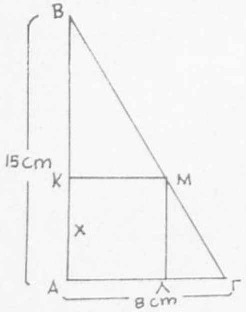
$$\begin{cases}x - y = 3 \\ 5x - 3y = 31\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 3 + y \\ 5x - 3y = 31\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 3 + y \\ 5(3+y) - 3y = 31\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}x = 3 + y \\ 15 + 5y - 3y = 31\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 3 + y \\ 2y = 16\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 3 + y \\ y = 8\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x = 11 \\ y = 8\end{cases}$$

Ἄρα τό μῆκος εἶναι 11 cm καί τό πλάτος 8 cm

7) Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90°$) μέ καθέτους
πλευράς ΑΒ = 15 cm καί ΑΓ = 8 cm. Ἄς εἶναι Μ ἕνα μεταβλητόν ση-
μεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, μεταξύ Γ καί Β. Καλοῦμεν Κ τήν (ὀρθήν)
προβολήν τοῦ Μ ἐπάνω εἰς τήν ΑΒ καί Λ τήν προβολήν του ἐπάνω εἰς
τήν ΑΓ, καί θέτομεν ΑΚ = x cm. (Τό x εἶναι μία μεταβλητή μέ πε-
δίον μεταβολῆς τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν $0 < x < 15$).
Ζητεῖται: 1ον νά ὑπολογισθῇ τό τμῆμα ΚΜ = ΑΛ = y ὡς συνάρτησις τοῦ x.
2ον νά προσδιορισθῇ τό x οὕτως ὥστε τό ὀρθογώνιον ΑΚΜΛ νά εἶναι
τετράγωνον.
3ον νά ὑπολογισθῇ ἡ ἡμιπερίμετρος p τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚΜΛ ὡς συν-

άρτησις τοῦ x καὶ νὰ προσδιορισθῆ τὸ x οὕτως ὥστε ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτὴ νὰ γίνη ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν.



Λύσις

α) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΒΚΜ καὶ ΜΛΓ καὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΛΜΚ, ἤτοι

$$\frac{y(15-x)}{2} + \frac{x(8-y)}{2} + x\cdot y = \frac{15\cdot 8}{2} \Longrightarrow$$

$$y(15-x)+x(8-y)+2x\cdot y = 15\cdot 8 \Longrightarrow$$

$$15y - y\cdot x + 8x - x\cdot y + 2x\cdot y = 15\cdot 8 \Longrightarrow 15y + 8x = 15\cdot 8 \Longrightarrow$$

$$15y = 15\cdot 8 - 8\cdot x \Longrightarrow 15y = 8(15-x) \Longrightarrow y = \frac{8(15-x)}{15}$$

β) Διὰ νὰ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον ΑΛΜΚ τετράγωνον, πρέπει

$$x = y \Longrightarrow y = \frac{8(15-y)}{15} \Longrightarrow 15y = 120 - 8y \Longrightarrow 15y + 8y = 120 \Longrightarrow$$

$$23y = 120 \Longrightarrow y = \frac{120}{23} \quad \text{ἢ} \quad y = 5{,}22$$

γ) Ἔχομεν ὅτι $p = \frac{2x+2y}{2} = x + y = x + \frac{8(15-x)}{15} = \frac{15x+120-8x}{15}$

ἤτοι $p = \frac{7x+120}{15}$

Ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν $Β Γ = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$

Ἐμεῖς θέλομεν $\frac{7x+120}{15} = 17 \Longrightarrow 7x + 120 = 255 \Longrightarrow$

$$7x = 255 - 120 \Longrightarrow 7x = 135 \Longrightarrow x = \frac{135}{7} \quad \text{ἢ} \quad x = 19{,}2$$

8) Ἕνα κρᾶμα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ ζυγίζει 83 grp. Ἐὰν βυθισθῆ εἰς καθαρὸν νερὸν (θερμοκρασίας 4° Κελσίου) χάνει ἀπὸ τὸ βάρος του 7 grp. Πόσον βάρος χρυσὸς καὶ πόσον χαλκὸς περιέχεται εἰς τὸ κρᾶμα, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,5 grp/cm^3, τοῦ χαλκοῦ 8,8 grp/cm^3 καὶ τοῦ νεροῦ 1 grp/cm^3.

Ὑπόδειξις. Θά ἐφαρμόσετε τήν ἀρχήν τοῦ Ἀρχιμήδους σύμφωνα μέ τήν ὁποίαν τό βάρος, πού χάνει τό κρᾶμα ὅταν βυθισθῆ εἰς τό νερόν, ἰσοῦται μέ τό βάρος νεροῦ ὄγκου ἴσου μέ τόν ὄγκον τοῦ κράματος. Θά ἔχετε ἀκόμη ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κράματος ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ χρυσοῦ καί τοῦ χαλκοῦ πού περιέχει καί ὅτι κάθε ὄγκος V εἶναι ἴσος πρός τό πηλίκον τοῦ βάρους B μέ τό εἰδικόν βάρος ε ($V=\frac{B}{\varepsilon}$, βλ. Βιβλ. Ι σελ. 34 Α).

Λύσις

Ἐφαρμόζομεν τήν ἀρχήν τοῦ Ἀρχιμήδους $V=\frac{B}{\varepsilon}=\frac{7}{1}\frac{grp}{\frac{grp}{cm^3}}=7\,cm^3$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κράματος.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ $X\,cm^3$ τόν ὄγκον τοῦ χαλκοῦ, τότε ὁ χρυσός κατέχει τά $7-X$ τοῦ κράματος, ἤτοι:

$$(7-x)19{,}5+8{,}8\cdot x=83 \Longrightarrow 136{,}5-19{,}5x+8{,}8x=83 \Longrightarrow$$

$$-10{,}7x=-53{,}5 \Longrightarrow 10{,}7x=53{,}5 \Longrightarrow x=\frac{53{,}5}{10{,}7} \Longrightarrow x=5$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ χαλκοῦ εἰς τό κρᾶμα εἶναι $5\,cm^3$ καί ἑπομένως τοῦ χρυσοῦ εἶναι $7-5=2\,cm^3$

Τά ἀντίστοιχα βάρη πού περιέχονται εἰς τό κρᾶμα εἶναι:

χαλκός $5\cdot 8{,}8=44$ grp καί χρυσός $2\cdot 19{,}5=39$ grp.

9) Τρεῖς ἐργάται εἰργάσθησαν ἀντιστοίχως 21, 23 καί 28 ὥρας καί ἐπληρώθησαν συνολικῶς 504 δρχ. Πόσας δρχ. θά λάβη ἕκαστος, ἐάν πληρωθοῦν ἀνάλογα μέ τάς ὥρας ἐργασίας των;

Λύσις

Ἐάν ἕκαστος ἐργάτης λαμβάνη ὡριαίως Χ δρχ., τότε, ἐπειδή πληρώνονται ἀναλόγως μέ τήν ἐργασίαν των, θά ἔχωμεν:

$$21x+23x+28x=504 \Longrightarrow 72x=504 \Longrightarrow x=\frac{504}{72} \Longrightarrow x=7$$

Ἄρα ἕκαστος ἐργάτης λαμβάνει ὡριαίως 7 δρχ. καί ἑπομένως διά τήν ὅλην ἐργασίαν ὁ πρῶτος θά λάβη $21\cdot 7=147$ δρχ. ὁ δεύτερος $23\cdot 7=161$ δρχ. καί ὁ τρίτος $28\cdot 7=196$ δρχ.

10) Εἰς μίαν αὐλήν ὑπάρχουν ὄρνιθες, χῆνες καί κουνέλια. Ὅλα αὐτά τά ζῶα ἔχουν συνολικῶς 82 κεφάλια καί 220 πόδια.

Ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν κουνελιῶν εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν χηνῶν, πόσα ζῶα ἀπὸ κάθε εἶδος ὑπάρχουν εἰς τὴν αὐλήν;

Λύσις

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ἀριθμῶν τῶν ὀρνίθων μὲ y τῶν χηνῶν καὶ μὲ z τῶν κουνελιῶν ἔχομεν: $x+y+z=82$

Αἱ ὄρνιθες ὅμως καὶ αἱ χῆνες ἔχουν δύο πόδια, τὰ δὲ κουνέλια 4, ἄρα $2x+2y+4z=220$.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν κουνελιῶν εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν χηνῶν, θὰ ἔχωμεν $z=2y$. Ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} x+y+z=82 \\ 2x+2y+4z=220 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=82-z \\ 2(x+y)+4z=220 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=82-z \\ 2(82-z)+4z=220 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=82-z \\ 164-2z+4z=220 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=82-z \\ 2z=56 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=82z \\ z=28 \\ z=2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=82-28 \\ z=28 \\ 2y=28 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=54 \\ z=28 \\ y=14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=54-14 \\ z=28 \\ y=14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ z=28 \\ y=14 \end{cases}$$

Ἄρα ὁ ἀριθμὸς τῶν κουνελιῶν εἶναι 28, τῶν ὀρνίθων 40 καὶ τῶν χηνῶν 14

11) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς διὰ τὸν ὁποῖον γνωρίζομεν ὅτι: 1ον τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 14, 2ον τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ψηφίων καὶ 3ον ἡ διαφορὰ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ μεῖον ἐκεῖνος ποὺ προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τὰ ψηφία μὲ ἀντίθετον σειράν, εἶναι 297.

Λύσις

Ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμός εἶναι ὁ xyz. Τότε θά ἔχωμεν $x+y+z=14$, $y=x+z$ καί ἀφοῦ ἐκφράσωμεν τόν ἀριθμόν εἰς μονάδας $100x+10y+z-x-10y-100z=297$. Ἐπιλύομεν τό σύστημα τῶν τριῶν αὐτῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ y=x+z \\ 99x-99z=297 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=14-y \\ y=x+z \\ x-z=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=14-y \\ y=14-y \\ 2x=17-y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=14-y \\ y=7 \\ 2x=17-y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=7 \\ y=7 \\ x=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=7 \\ x=5 \end{cases}$$

ἤτοι ὁ ἀριθμός εἶναι ὁ 572

12) Τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν ἑνός ἀνδρός καί τῆς συζύγου του εἶναι 6 πλάσιον ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν τους. Πρό 2 ἐτῶν ἦτο τό 10 πλάσιον καί μετά 6 ἔτη θά εἶναι μόνον τό τριπλάσιον. Πόσα εἶναι τά παιδιά;

Ὑπόδειξις. Νά ὀνομάσετε x τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν (εἰς ἔτη) τῶν γονέων, y τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν, z τόν ἀριθμόν τῶν παιδιῶν.

Λύσις

Ἔχομεν ὅτι $x=6y$. Πρίν δύο ἔτη τό ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τοῦ ἀνδρός καί τῆς γυναικός ἦτο μικρότερον κατά $2\cdot 2=4$ ἔτη, τῶν δέ παιδιῶν κατά $2z$ ἔτη, ἤτοι $x-4=10(y-2z)$, μετά δέ 6 ἔτη τό x θά εἶναι μεγαλύτερον κατά $2\cdot 6=12$ ἔτη, ἤτοι $x+12=3(y+6z)$. Ἐπιλύομεν τό σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων μέ ἀγνώστους τά x, y, z

$$\begin{cases} x=6y \\ x-4=10(y-2z) \\ x+12=3(y+6z) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ x-4=10y-20z \\ x+12=3y+18z \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=6y \\ 6y-10y=4-20z \\ 6y-3y=-12+18z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ -4y=4-20z \\ 3y=-12+18z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ y=5z-1 \\ y=6z-4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=6y \\ y=5z-1 \\ 5z-1=6z-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ y=5z-1 \\ -z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ y=5z-1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6y \\ y=14 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=84 \\ y=14 \\ z=3 \end{cases}$$

Ἄρα τὰ παιδιὰ εἶναι 3

13) Ἕνας διαθέτης μοιράζει εἰς τὴν διαθήκην του ἕνα ποσόν χρημάτων εἰς τρεῖς κληρονόμους Α, Β, Γ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 7, 6, 5. Κατόπιν ἀκυρώνει αὐτὴν τὴν διαθήκην καὶ μοιράζει τὸ ἴδιον ποσὸν εἰς τοὺς ἰδίους κληρονόμους ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 6, 5, 4. Ζητεῖται: 1ον Ποῖος ἀπὸ τοὺς κληρονόμους παίρνει περισσότερα μὲ τὴν 2αν διαθήκην παρὰ μὲ τὴν 1ην, ποῖος τὰ ἴδια καὶ ποῖος ὀλιγώτερα; 2ον Ἐὰν ἐκεῖνος, ποὺ παίρνει περισσότερα, λαμβάνῃ μὲ τὴν 2αν διαθήκην 2400 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας θὰ ἔπαιρνε μὲ τὴν 1ην, τότε πόσον ἦτο τὸ μοιραζόμενον χρηματικὸν ποσὸν καὶ πόσον τὸ μερίδιον τοῦ καθενὸς εἰς ἑκάστην διαθήκην.
Ὑπόδειξις. Νὰ παραστήσετε μὲ x_1, y_1, z_1 ἀντιστοίχως τὰ μερίδια τῶν Α, Β, Γ εἰς τὴν πρώτην διαθήκην καὶ μὲ x_2, y_2, z_2 τὰ μερίδιά των εἰς τὴν δευτέραν, μὲ ω δὲ τὸ μοιραζόμενον χρηματικὸν ποσόν. Κατόπιν νὰ προσδιορίσετε τὰ μερίδια αὐτὰ ὡς συναρτήσεις τοῦ ω καὶ νὰ συγκρίνετε. Τέλος νὰ προσδιορίσετε τὸ ω καθὼς καὶ τὸ καθ' ἕνα ἀπὸ τὰ μερίδια.

Λύσις

Κατὰ τὴν πρώτην διαθήκην, τὰ μερίδια εἶναι $7+6+5=18$

Ἄρα ὁ πρῶτος λαμβάνει $x_1=\frac{7}{18}\omega$, ὁ δεύτερος $y_1=\frac{6}{18}\omega$

καὶ ὁ τρίτος $z_1=\frac{5}{18}\omega$

Κατὰ τὴν δευτέραν διαθήκην ὁ πρῶτος λαμβάνει $x_2=\frac{6}{15}\omega$

ὁ δεύτερος $y_2=\frac{5}{15}\omega$ καὶ ὁ τρίτος $z_2=\frac{4}{15}\omega$ (διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ μερίδια εἶναι 15)

Καθιστῶμεν τά κλάσματα ὁμώνυμα, ὁπότε:

$$x_1 = \frac{35}{90}\,\omega \qquad y_1 = \frac{30}{90}\,\omega \qquad z_1 = \frac{25}{90}\,\omega$$

$$x_2 = \frac{36}{90}\,\omega \qquad y_2 = \frac{30}{90}\,\omega \qquad z_2 = \frac{24}{90}\,\omega$$

Ἄρα κατά τήν δευτέραν διαθήκην ὁ πρῶτος λαμβάνει περισσότερα, ὁ δεύτερος τά ἴδια καί ὁ τρίτος ὀλιγώτερα

2ον Ἐφ' ὅσον ὁ πρῶτος λαμβάνει 2400 περισσότερα, κατά τήν δευτέραν διαθήκην θά ἔχωμεν:

$$\frac{36}{90}\,\omega - \frac{35}{90}\,\omega = 2400 \Longrightarrow \frac{1}{90}\,\omega = 2400 \Longrightarrow \omega = 216\,000$$

Ἄρα τό διανεμηθέν ποσόν εἶναι 216.000 δρχ.

Ὁ Α λαμβάνει $\frac{36}{90}\,\omega = 86.400$

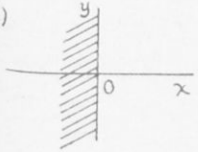
Ὁ Β » $\frac{30}{90} \cdot 216.000 = 72000$

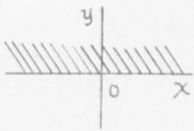
Ὁ Γ » $\frac{24}{90} \cdot 216.000 = 57.600$

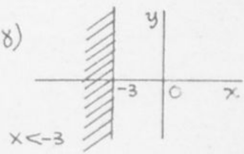
ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 126

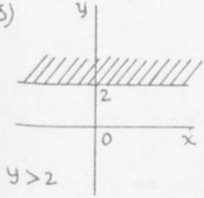
1) Νά παραστήσετε γραφικῶς τάς ἀνισώσεις

α) $x < 0$, β) $y > 0$, γ) $x + 3 < 0$, δ) $y - 2 > 0$.

α)


β)


γ)


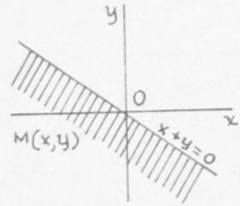
δ)


Κάθε σημεῖον τῶν γραμμοσκιασμένων χώρων πληροῖ τήν ἀντίστοιχον ἀνίσωσιν.

2) Νά παραστήσετε γραφικῶς τάς ἀνισώσεις

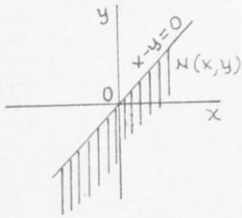
α) $x+y<0$, β) $x-y>0$, γ) $x-2y>0$, δ) $y<2x-4$, ε) $2x-y+5>0$.

α)



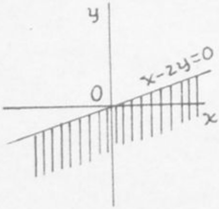
Κατασκευάζομεν κατά τά γνωστά τήν εὐθεῖαν $x+y=0$ Πᾶν σημεῖον Μ (x,y) πληροῖ τήν ἀνισότητα $x+y<0$

β)

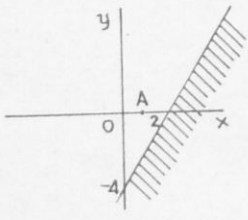


Ἐργάζομαι ὁμοίως τό τυχόν σημεῖον Ν (x,y) ὅπου x ἔστω 3 καί y ἔστω 2 πληροῖ τήν ἀνίσωσιν.

γ)

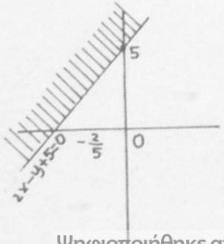


δ)



Τό τυχόν σημεῖον Α $(1,0)$ δέν πληροῖ τήν ἀνίσωσιν διότι $2\cdot1-0-4=-2<0$. Ἄρα μόνον τά σημεῖα τοῦ γραμμοσκιασμένου χώρου πληροῦν τήν ἀνίσωσιν.

ε)



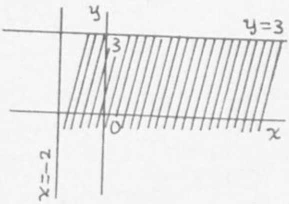
Ἐργάζομαι ὁμοίως

3) Νά προσδιορίσετε γραφικῶς τά σύνολα τῶν λύσεων τῶν ἀκολούθων συστημάτων μέ δύο μεταβλητάς x, y:

α) $\begin{cases} x > -2 \\ y < 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x > -1 \\ 2x < 3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ 4x - 2y + 6 > 0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 2x + 3y > 0 \\ x - y + 2 > 0 \end{cases}$

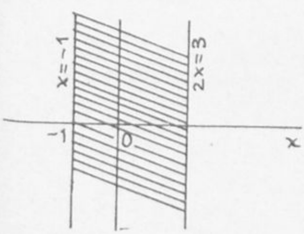
ε) $\begin{cases} -x + 2y - 4 < 0 \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$

α)



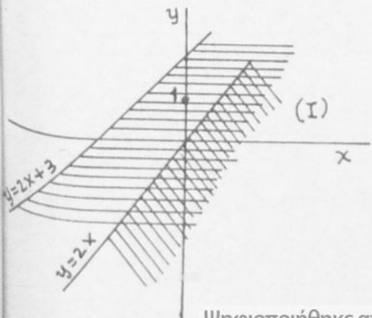
Ἡ γραμμοσκιασμένη περιοχή ἐπαληθεύει τάς ἀνισώσεις
$$\left.\begin{matrix} y < 3 \\ x > -2 \end{matrix}\right\}$$

β)



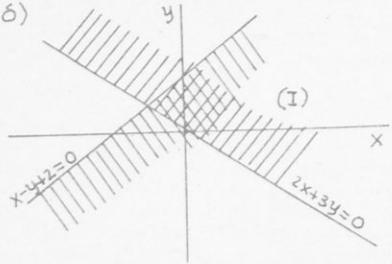
Τό σύνολον τῶν σημείων μεταξύ τῆς εὐθείας $x=-1$ καί $2x=3$ ἱκανοποιεῖ τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων $x > -1$ καί $2x < 3$.

γ) $2x - y > 0 \Longrightarrow 2x > y \Longrightarrow y < 2x$
$4x - 2y + 6 > 0 \Longrightarrow -2y > -4x - 6 \Longrightarrow y < \frac{4x+6}{2} \Longrightarrow y < 2x + 3$



Τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ δοθέντος συστήματος ἀνισώσεων εἶναι τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου (I). Τά σημεῖα μεταξύ τῶν εὐθειῶν $y = 2x + 3$ καί $y = 2x$ πληροῦν μόνον τήν πρώτην ἀνίσωσιν καί δι' αὐτό δέν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

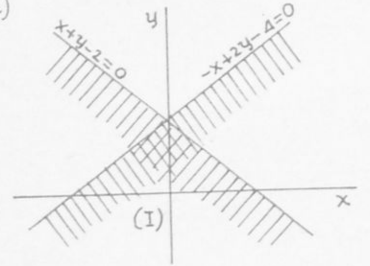
δ)



$2x+3y>0 \Rightarrow 2x>-3y \Rightarrow y<-\frac{2}{3}$

$x-y+2>0 \Rightarrow x>y-2$

ε)

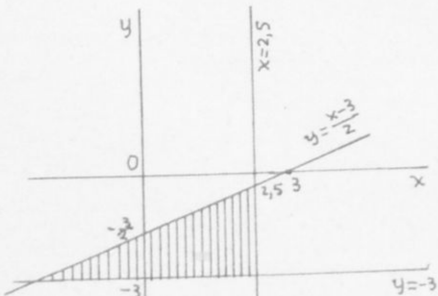


$-x+2y-4<0 \Rightarrow 2y<x+4 \Rightarrow y<\frac{x+4}{2}$

$x+y-2<0 \Rightarrow y<2-x$

4) Νά προσδιορίσετε γραφικῶς τό σύνολον τῶν λύσεων τοῦ ἀκολούθου συστήματος τριῶν ἀνισώσεων μέ τούς δύο ἀγνώστους x, y :

$$\begin{cases} x-2,5<0 \\ y+3>0 \\ x-2y-3>0 \end{cases}$$



Λύσις

$x-2,5<0 = x<2,5$

$y+3>0 = y>-3$

$x-2y-3>0 = 2y>3-x =$

$y<\frac{x-3}{2}$

Ἡ ἐξίσωσις $x=2,5$ παριστᾷ εὐθεῖαι // εἰς τόν ἄξονα y

Ἡ ἐξίσωσις $y=-3$ παριστᾷ εὐθεῖαι // εἰς τόν ἄξονα x

Κατασκευάζομεν καί τήν εὐθεῖαν $y=\frac{x-3}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 138

1) Νά ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ ἐξισώσεις

α) $x^2-49=0,\ 4x^2-9=0,\ 25x^2-36=0,\ 9x^2-2=0$

β) $x^2+x=0,\ \ 2x^2-3x=0,\ x^2-5x+6=0,\ x^2+5x+6=0$

$x^2-x-6=0,\ 4x^2+4x+1=0,\ x^2-\frac{1}{2}x-3=0,\ x^2-\sqrt{2}x-4=0$

Λύσις

α) $x^2-49=0 \Longleftrightarrow x^2=49 \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{49} \Longleftrightarrow x=\pm 7$

$4x^2-9=0 \Longleftrightarrow 4x^2=9 \Longleftrightarrow x^2=\frac{9}{4} \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}$

$25x^2-36=0 \Longleftrightarrow 25x^2=36 \Longleftrightarrow x^2=\frac{36}{25} \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{36}{25}} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{6}{5}$

$9x^2-2=0 \Longleftrightarrow 9x^2=2 \Longleftrightarrow x^2=\frac{2}{9} \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{9}} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

β) $x^2+x=0 \Longleftrightarrow x(x+1)=0$ ἤτοι ἤ $x=0$ ἤ $x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1$

$2x^2-3x=0 \Longleftrightarrow (2x-3)x=0$ ὁπότε ἤ $x=0$ ἤ $2x-3=0$

$\Longleftrightarrow 2x=3 \Longleftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$x^2-5x+6=0$ ἔχω $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}\left\langle\begin{array}{l}3\\2\end{array}\right.$

$x^2+5x+6=0$ ἔχω $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{-5\pm1}{2}\left\langle\begin{array}{l}-2\\-3\end{array}\right.$

γ) $x^2-x-6=0$ ὁπότε $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{1\pm5}{2}\left\langle\begin{array}{l}3\\-2\end{array}\right.$

$4x^2+4x+1=0$ ὁπότε $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{4}{2}=-2$

$x^2-\frac{1}{2}x-3=0 \Longleftrightarrow 2x^2-x-6=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{4}$

$=\dfrac{1\pm7}{4}\left\langle\begin{array}{l}2\\-\frac{3}{2}\end{array}\right.$

$x^2-\sqrt{2}\,x-4=0$ ὁπότε $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+16}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2.9}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\,(1\pm3)}{2}\left\langle\begin{array}{l}2\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{array}\right.$

2) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ τρεῖς ἐξισώσεις

$$4x^2-(x+3)^2=0, \quad (3x-1)^2-x^2=0, \quad (5x-1)^2-(2x+3)^2=0$$

Λύσις

$$4x^2-(x+3)^2=0 \Longleftrightarrow 4x^2-x^2-6x-9=0 \Longleftrightarrow 3x^2-6x-9=0$$

$\Longleftrightarrow x^2-2x-3=0$ ἐκ τῆς ὁποίας

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

$$(3x-1)^2-x^2=0 \Longleftrightarrow (3x-1-x)(3x-1+x)=0 \Longleftrightarrow$$

$(2x-1)(4x+1)=0 \Longrightarrow$ ἢ $2x-1=0 \Longrightarrow 2x=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$ ἢ

$$4x+1=0 \Longrightarrow 4x=-1 \Longrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$(5x-1)^2-(2x+3)^2=0 \Longrightarrow (5x-1-2x-3)(5x-1+2x+3)=0$$

$\Longrightarrow (3x-4)(7x+2)=0$ ὁπότε ἢ $3x-4=0 \Longrightarrow 3x=4 \Longrightarrow$

$x=\frac{4}{3}$ ἢ $7x+2=0 \Longrightarrow 7x=-2 \Longrightarrow x=-\frac{2}{7}$

3) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς καὶ γραφικῶς αἱ πέντε ἐξισώσεις.

$$x^2-\frac{9}{4}=0, \quad x^2+2=0, \quad x^2-2x-1=0, \quad x^2+2x-3=0, \quad x^2+x+1=0$$

Λύσις

α) $x^2-\frac{9}{4}=0 \Longleftrightarrow x^2=\frac{9}{4} \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}$

$y=x^2-\frac{9}{4}$ θέτω τιμὲς εἰς τὸ x

διά $x=0 \longrightarrow y=-\frac{9}{4}$

» $x=1 \longrightarrow y=-\frac{5}{4}$

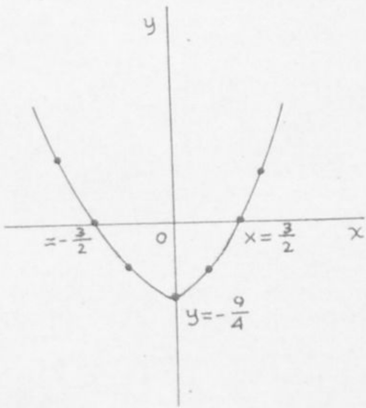
» $x=2 \longrightarrow y=-\frac{7}{4}$

» $x=\frac{3}{2} \longrightarrow y=0$

» $x=-1 \longrightarrow y=-\frac{5}{4}$

» $x=-2 \longrightarrow y=\frac{7}{4}$

» $x=-\frac{3}{2} \longrightarrow y=0$

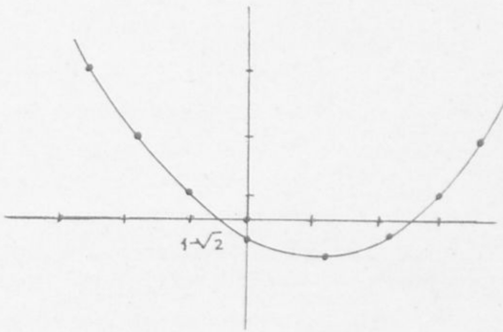


β) $x^2+2=0 \Longrightarrow x^2=-2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{-2}$ Ἀδύνατος κατασκευή.

γ) $x^2-2x-1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2-2=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2-(\sqrt{2})^2=0 \Longleftrightarrow$

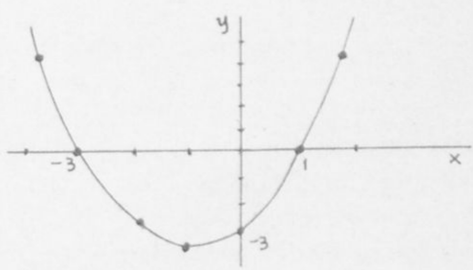
$(x-1-\sqrt{2})\,(x-1+\sqrt{2})=0 \Longleftrightarrow x=1+\sqrt{2}$ καὶ $x=1-\sqrt{2}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	14	7	2	-1	-2	-1	2	7



δ) $x^2+2x-3=0 \Longleftrightarrow (x+1)^2-4=0 \Longleftrightarrow (x+1-2)(x+1+2)=0$
$\Longleftrightarrow (x-1)=0 \Longrightarrow x=1$ ἤ $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

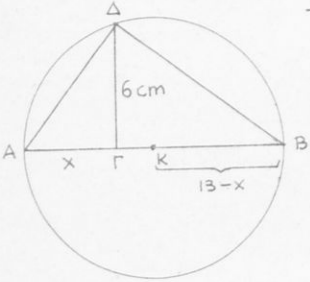
x	y
-4	5
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5



ε) $x^2+x+1=0 \longrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

Ἡ διακρίνουσα εἶναι ἀρνητική, ἄρα ἀδύνατος ἡ λύσις καὶ ἡ κατασκευή.

4) Νά ἐπιλύσετε μέ τήν βοήθειαν ἐξισώσεως, τό ἑξῆς γεωμετρικόν πρόβλημα: Ἡ διάμετρος AB πού συνδέει τά ἄκρα μιᾶς ἡμιπεριφερείας ἔχει μῆκος 13 cm. Νά προσδιορισθῆ ἐπάνω εἰς τήν διάμετρον αὐτήν ἕνα σημεῖον Γ ἔτσι ὥστε τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, πού εἶναι ⊥ AB καί ἔχει τό ἄκρον του Δ ἐπάνω εἰς τήν ἡμιπεριφέρειαν, νά ἔχη μῆκος 6 cm.
Ὑπόδειξις. Νά πάρετε ὡς ἄγνωστον x τό μῆκος τοῦ ΑΓ εἰς cm καί νά εὕρετε τήν ἐξίσωσιν διά τό x χρησιμοποιοῦντες τήν Παρατήρησιν τῆς σελ. 215 τοῦ Βιβλ. II.

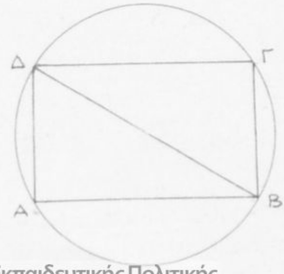


Λύσις

Γνωρίζομεν ὅτι τό τετράγωνον τοῦ ὕψους ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν τμημάτων, εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται ἡ ὑποτείνουσα ἀπό τόν πόδα αὐτοῦ.
Ἤτοι $(\Delta\Gamma)^2=(A\Gamma)(B\Gamma)$ καί ἐάν καλέσωμεν x τό ΑΓ, ὁπότε $\Gamma B = 13-x$ ἔχομεν $(B\Gamma)^2=6^2=x(13-x) \Longleftrightarrow 36=13x-x^2 \Longleftrightarrow$
$x^2-13x+36=0 \Longleftrightarrow (x-6{,}5)^2-6{,}25=0 \Longleftrightarrow (x-6{,}5)^2-(2{,}5)^2=0$
$\Longleftrightarrow (x-6{,}5-2{,}5)(x-6{,}5+2{,}5)=0 \Longleftrightarrow (x-9)(x-4)=0 \Longleftrightarrow$
$x-9=0 \Longrightarrow x=9$ καί $x-4=0 \Longrightarrow x=4$

Ἐάν $x=9$ τό σημεῖον Γ εὑρίσκεται δεξιά τοῦ K
» $x=4$ » » » » ἀριστερά » K.

5) Εἰς ἕνα κύκλον μέ διάμετρον 5 m εἶναι ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ δύο διαστάσεις ἔχουν διαφοράν ἑνός m.
Νά προσδιορισθοῦν μέ ἐπίλυσιν ἐξισώσεως αἱ διαστάσεις αὐταί.



Λύσις

Ἐάν καλέσωμεν x τό ὕψος ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου, τότε AB = = x+1, καί

Πυθαγορείου θεωρήματος έχομεν:

$(\Delta B)^2 = (A\Delta)^2 + (AB)^2 \Longrightarrow 25 = x^2 + (x+1)^2 \Longrightarrow$

$25 = x^2 + x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Longrightarrow$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0 \Longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow$

$\left(x+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right) = 0 \Longrightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Longrightarrow x = 3$ καί

$x = -4$, ή λύσις $x = -4$ απορρίπτεται. Άρα $A\Delta = 3$ καί $AB = 4$

6) Δύο πεζοπόροι αναχωρούν συγχρόνως από ένα τόπον διά νά φθάσουν είς μίαν πόλιν πού απέχει 20 Km ακολουθούντες τόν ίδιον δρόμον. Ό πρώτος διατρέχει κάθε ώραν 1 Km περισσότερον από τόν δεύτερον καί φθάνει είς τήν πόλιν μίαν ώραν ενωρίτερα από αυτόν. Νά ευρεθούν αί μέσαι ταχύτητες ανά ώραν τών δύο πεζοπόρων.

Λύσις

Γνωρίζομεν ότι διάστημα = ταχύτης επί χρόνον.
Άρα, εάν x ή ταχύτης καί t ό χρόνος διά τόν δεύτερον πεζοπόρον, ό πρώτος έχει ταχύτητα $x+1$ καί φθάνει μετά $t-1$ ώρας. Άρα $20 = (x+1)(t-1)$ ή εξίσωσις διά τόν πρώτον ενώ διά τόν δεύτερον έχομεν $20 = x \cdot t$. Επιλύομεν τό σύστημα τών δύο εξισώσεων. Έκ τής δευτέρας έχομεν $t = \frac{20}{x}$
Άρα ή πρώτη γίνεται

$$20 = (x+1)\left(\frac{20}{x} - 1\right) \Longrightarrow 20 = (x+1)\left(\frac{20-x}{x}\right) \Longrightarrow$$

$20x = (x+1)(20-x) \qquad 20x = 20x + 20 - x^2 - x$

$x^2 + x - 20 = 0 \Longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0 \Longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 0$

$\Longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right) = 0 \Longrightarrow (x-4)(x+5) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = 4$. καί $x = -5$ Ή λύσις $x = -5$ απορρίπτεται.

Άρα ή ταχύτης τού πρώτου είναι 5 Km/h ενώ τού δευτέρου 4 Km/h.

7) Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου πού ἔχει ἴσον ἐμβαδόν μέ ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 8,1 m, ἐάν αἱ διαστάσεις αὐταί εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 2 καί 4,5.

Λύσις

Ἔστωσαν x καί y αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου τότε

$x \cdot y = (8,1)^2 \qquad x \cdot y = 65,61$ Ἐπίσης ἔχομεν $\frac{x}{y} = \frac{2}{4,5}$

Ἐπιλύομεν τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\begin{cases} x \cdot y = 65{\cdot}61 \\ \frac{x}{y} = 0,44 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 65{\cdot}61 \\ x = 0,44\,y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0,44\,y^2 = 65,61 \\ x = 0,44\,y \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 149,11 \\ x = 0,44\,y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 12,2 \\ x = 0,44 \cdot 12,2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 12,2 \\ x = 5,37 \end{cases}$$

Ἄρα τό μῆκος εἶναι 12,2 cm τό δέ πλάτος 5,37 cm

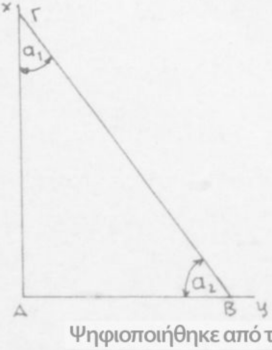
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 146

1) Νά κατασκευάσετε ὀξείας γωνίας μέ τάς ἀκολούθους ἐφαπτομένας:

$$\varepsilon\varphi a_1 = \frac{3}{4}, \quad \varepsilon\varphi a_2 = \frac{4}{3}, \quad \varepsilon\varphi \beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon\varphi \beta_2 = \frac{2}{1}$$

Κατόπιν νά μετρήσετε μέ τό μοιρογνωμόνιον τό μέγεθός των καί νά ἐλέγξετε ἄν ἰσχύουν μέ ἀρκετά καλήν προσέγγισιν αἱ σχέσεις $a_1 + a_2 = 90°$ καί $\beta_1 + \beta_2 = 90°$.

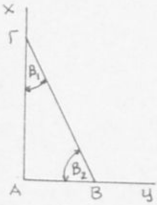


Λύσις

Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθήν γωνίαν xAy καί ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς, ἔστω τῆς Ay, λαμβάνομεν AB ἴσον μέ 3 μονάδας ἔστω 3 cm. Ὁμοίως ἐπί τῆς ἄλλης πλευρᾶς Ax λαμβάνομεν ΑΓ = 4 cm. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης ἔχομεν

$\varepsilon\varphi a_1 = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$ καί $\varepsilon\varphi a_2 = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{4}{3}$

Μετροῦντες μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εὑρίσκομεν $\alpha_1 = 36°$ $\alpha_2 = 54°$
Ἤτοι ἰσχύει: $\alpha_1 + \alpha_2 = 36° + 54° = 90°$.
Ὡς ἀνωτέρω παίρνομεν ἐπὶ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας xAy $AB = 1\,cm$ καὶ $A\Gamma = 2\,cm$



Συμφώνως τῷ ὁρισμῷ τῆς ἐφαπτομένης ἔχομεν

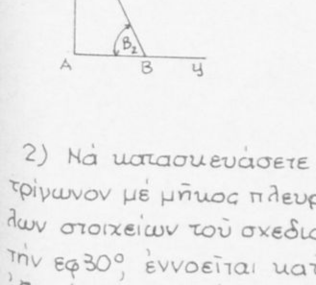
$$\varepsilon\varphi\beta_1 = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\beta_2 = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{2}{1}$$

Μετροῦντες μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εὑρίσκομεν
$\beta_1 = 27°$ $\beta_2 = 63°$ Ἤτοι ἰσχύει
$\beta_1 + \beta_2 = 27° + 63° = 90°$

2) Νὰ κατασκευάσετε μὲ κανόνα καὶ διαβήτην ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ μῆκος πλευρᾶς 40 mm. Ἔπειτα μὲ μετρήσεις καταλλήλων στοιχείων τοῦ σχεδιασμένου τριγώνου νὰ εὕρετε τὴν εφ60° καὶ τὴν εφ30°, ἐννοεῖται κατὰ προσέγγισιν. Νὰ παραβάλετε τέλος τὰ ἐξαγόμενά σας μὲ τὰς τιμὰς ποὺ παρέχει ὁ πίναξ ἐφαπτομένων διὰ τὰς εφ60° καὶ εφ30°.

Λύσις

Ἐφ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του θὰ



εἶναι ἴσαι, ἤτοι $A = B = \Gamma = 60°$. Φέρομεν τὸ ὕψος $B\Delta$ τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς $\hat{B}$.
Ἄρα $B_1 = B_2 = 30$. Ἐπομένως $\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 60$ καὶ $\varepsilon\varphi B_1 = \varepsilon\varphi 30$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς εφΑ, εφB_1 συμφώνως πρὸς τὰ δεδομένα. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὸ ὕψος ΒΔ. $(B\Delta)^2 = (AB)^2 - (A\Delta)^2$ (Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα)

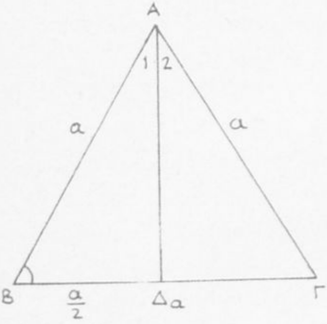
$(B\Delta)^2 = (4\,cm)^2 - (2\,cm)^2 = 16\,cm^2 - 4\,cm^2 = 12\,cm^2$.
Ἄρα $(B\Delta)^2 = 12\,cm^2 \rightarrow B\Delta = \sqrt{12}\,cm = 2\sqrt{3}\,cm$.
Οὕτω $\varepsilon\varphi A = \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ἄρα $\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 60 = \sqrt{3}$

Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi B_1 = \varepsilon\varphi 30 = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων μετὰ τοῦ πίνακος εὑρίσκομεν αὐτὰ ἀληθῆ.

3) Χρησιμοποιοῦντες τό Πυθαγόρειον θεώρημα νά δείξετε ὅτι τό ὕψος υ εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον μέ πλευράν α εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Ἐξ αὐτοῦ νά συμπεράνετε ὅτι ἡ ἀκριβής τιμή τῆς εφ60° καί τῆς εφ30° εἶναι $\sqrt{3}$ καί $1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$ ἀντιστοίχως. Τέλος ἀφοῦ ὑπολογίσετε τήν $\sqrt{3}$ μέ προσέγγισιν ἑνός χιλιοστοῦ, νά παραβάλετε τάς τιμάς πού προκύπτουν διά τήν εφ60° καί εφ30° μέ τάς ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ πίνακος ἐφαπτομένων.

Λύσις



$$(AB)^2 = \alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + (A\Delta)^2$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{4} + (A\Delta)^2 \rightarrow (A\Delta)^2 = \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$$

καί $A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

$B = 60°$

εφB = εφ60° Ἀλλά $\text{εφ}60° = \frac{A\Delta}{B\Delta}$

$$\text{εφ}\,60° = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}732$$

$$A_1 = \frac{A}{2} = \frac{60°}{2} = 30° \qquad \text{εφ}\,A_1 = \text{εφ}\,30°$$

$$\text{εφ}30° = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0{,}577$$

Αἱ τιμαί συγκρινόμεναι μετά τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος εἶναι ἀληθεῖς.

4) Νά κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικον χαρτί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διά τά ὁποῖα εἶναι $\hat{A} = 90°$ καί

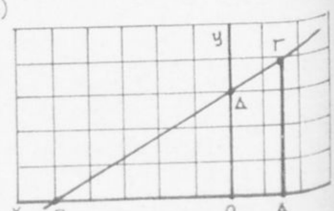
1ον $\text{εφ}\hat{B} = \frac{3}{5}$ καί [illegible] $= 75$ mm

2ον $\text{εφ}\hat{B} = \frac{5}{2}$ $A\Gamma = 39$ mm

3ον $\text{εφ}\hat{B} = 2$ καί $AB = 48$ mm

4ον $\text{εφ}\hat{B} = 0{,}5$ καί $AB = 65$ mm

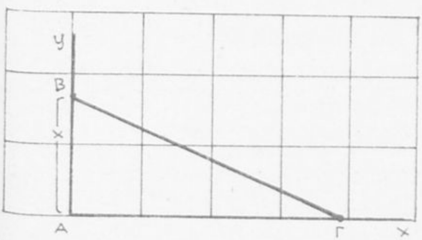
α)



Λύσις

1ον) Ἐπί μιᾶς ὀρθῆς γωνίας xoy λαμβάνομεν τμῆμα ΟΔ ἴσον μέ 3 μονάδας ἔστω 3cm ἐπί τῆς oy λαμβάνομεν OB = 4 cm. Ἡ γωνία ΔΒΟ εἶναι ἡ γωνία Β καί ἰσχύει $\varepsilon\varphi B = \frac{O\Delta}{OB} = \frac{3}{5}$. Ἐπί τῆς πλευρᾶς ΒΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον μέ 75 mm. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον εἰς τήν ΟΒ, τήν ΓΑ. Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.

2ον) Ἐπί μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΑΨ λαμβάνομεν ἐπί τῆς ΑΧ



ΑΓ = 39 mm. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι x mm εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ θά ἔχωμεν

$$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{x} = \frac{39}{x} = \frac{5}{2} \Longrightarrow 5x = 78 \Longrightarrow x = \frac{78}{5}$$

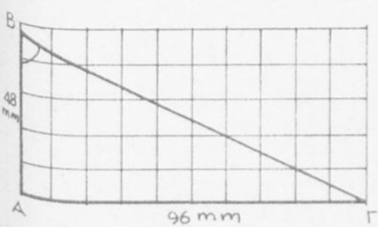
$$\Longrightarrow x = 15{,}6\,mm$$

Ἤτοι γνωρίζομεν τάς δύο καθέτους πλευράς, ἄρα κατασκευάζομεν τό ὀρθογώνιον ΑΒΓ.

3ον) $\varepsilon\varphi B = 2$ $\quad AB = 48\,mm$ θά πρέπη $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$

ἤ $\frac{A\Gamma}{AB} = 2 \rightarrow \frac{A\Gamma}{48} = 2 \longrightarrow A\Gamma = 248 = 96\,mm$

Πράγματι $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{96}{48} = 2$

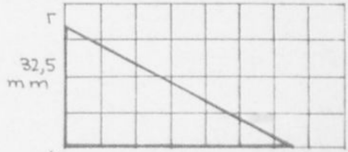


Ἤτοι γνωρίζομεν τάς δύο καθέτους πλευράς, ἄρα κατασκευάζομεν τό ὀρθογώνιον ΑΒΓ

Θά πρέπη $\frac{A\Gamma}{AB} = 0{,}5$ ἤ $\frac{A\Gamma}{65} = 0{,}5$ καί

$A\Gamma = 0{,}5 \cdot 65 = 32{,}5\,mm$

Πράγματι $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{32{,}5}{65} = 0{,}5$

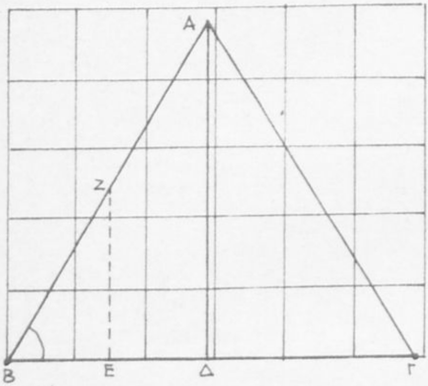


5) Νά κατασκευασθοῦν είς χιλιοστομετρικόν χαρτί ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) μέ τά ἀκόλουθα δεδομένα:

$1^{ον}$ Βάσις $ΒΓ = 58$ mm καί $εφ\hat{B} = \frac{5}{3}$

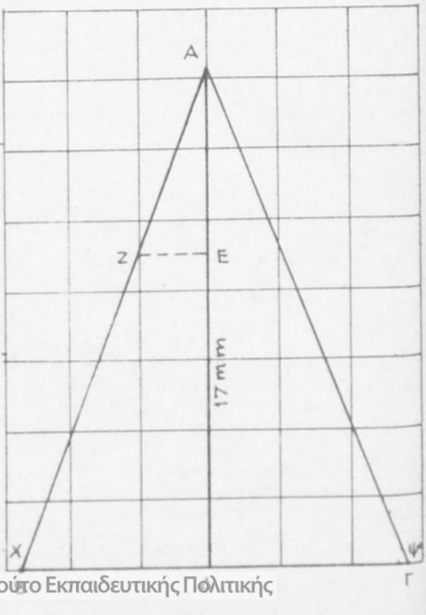
$2^{ον}$ ὕψος $ΑΔ = 71$ mm καί $εφ\frac{1}{2}\hat{A} = \frac{2}{5}$

<u>Λύσις</u>

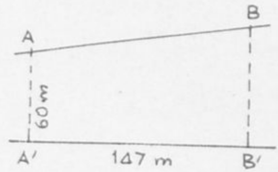


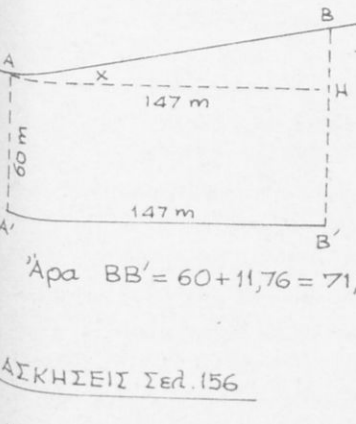
Λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον μέν 58 mm. Κατασκευάζομεν τήν γωνίαν Β μέ $εφΒ = \frac{5}{3}$ (ὡς ἐδείχθη εἰς τήν ἀνωτέρω ἄσκ. 4). Ἐν συνεχείᾳ ὑψοῦμεν εἰς τό μέσον Δ τοῦ τμήματος ΒΓ κάθετον ἥτις συναντᾶ τήν πλευράν ΒΖ τῆς γωνίας Β εἰς τό Α. Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον διότι ΒΓ=58mm καί $εφΒ = \frac{5}{3}$ ἐκ κατασκευῆς καί ΑΒ = ΑΓ διότι Α σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου.

Ἐπί ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ὑψοῦμεν κάθετον καί λαμβάνομεν τμῆμα ΔΑ = 71 mm μέ κορυφήν τό Α καί πλευράν τήν ΑΔ κατασκευάζομεν γωνίαν ΕΑΖ ὥστε $εφΕΑΖ = \frac{2}{5}$. Ἡ πλευρά τῆς γωνίας συναντᾶ τήν χψ εἰς τό Β ἐπί τῆς ΧΨ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ = ΒΔ. Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.



6) Ἡ μεσαία γραμμὴ ΑΒ (σχ.106) ἑνὸς δρόμου εἶναι εὐθεῖα· ἡ γωνία κλίσεως, ἄρα καὶ ἡ κλίσις, τοῦ δρόμου εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς αὐτῆς εἶναι τότε ἡ ἰδία (εἶναι σταθερά). Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ κλίσις αὐτὴ εἶναι 8%. 1ον Νὰ εὕρετε τότε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος τῶν ἐφαπτομένων ποία εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ δρόμου. 2ον Ἄς εἶναι Α΄ καὶ Β΄ αἱ προβολαὶ τῶν σημείων Α καὶ Β ἐπάνω εἰς ἕνα ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ τὸ ὑψόμετρον Α΄Α, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, τοῦ χαμηλοτέρου σημείου Α, 60 m. Ἐὰν ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις Α΄Β΄ εἶναι 147 m, πόσον εἶναι τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Β ὡς πρὸς τὸ θεωρούμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον;





Λύσις

Ἔχομεν εφx = 0,08 ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις τοῦ δρόμου εἶναι:

$4^\circ\, 37'$

$\text{εφ}4^\circ 37' = \dfrac{BH}{AH} \rightarrow 0{,}08 = \dfrac{BH}{147} \rightarrow$

$147 \cdot 0{,}08 = BH$ καὶ $BH = 11{,}76$ m

Ἄρα $BB' = 60 + 11{,}76 = 71{,}76$ m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Σελ. 156

1) Νὰ σχεδιάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν 43° καὶ νὰ προσδιορίσετε γραφικῶς τὸ ημ43° καὶ τὸ συν43°. Ἔπειτα νὰ παραβάλετε τὰ ἐξαγόμενά σας μὲ τὰς τιμὰς ποὺ δίδουν οἱ πίνακες ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου

Λύσις

$\text{ημ}\,43^\circ = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{28{,}3\ mm}{41\ \ mm} = 0{,}690$

$\text{συν}\,43^\circ = \dfrac{A\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{30\ mm}{41\ mm} = 0{,}731$

Συγκρίνοντες μὲ τὰς τιμὰς τῶν πινάκων βλέπομεν ὅτι αἱ τιμαὶ ... γραφικῶς.

2) Να κατασκευάσετε τέσσαρας ὀξείας γωνίας μέ τά ἀκόλουθα ἡμίτονα:

$$ημα_1 = \frac{1}{3}, \quad ημα_2 = \frac{2}{5}, \quad ημα_3 = \frac{3}{5}, \quad ημα_4 = \frac{5}{6}$$

καί τέσσαρας ὀξείας γωνίας μέ τά ἀκόλουθα συνημίτονα:

$$συνβ_1 = \frac{1}{3}, \quad συνβ_2 = \frac{2}{5}, \quad συνβ_3 = \frac{3}{5}, \quad συνβ_4 = \frac{5}{6}$$

Κατόπιν νά μετρήσετε μέ τό μοιρογνωμόνιον τά μεγέθη των καί νά ἐλέγξετε ἄν ἰσχύουν μέ ἀρκετήν προσέγγισιν αἱ σχέσεις:

$$α_1 + β_1 = 90°, \quad α_2 + β_2 = 90°, \quad α_3 + β_3 = 90°, \quad α_4 + β_4 = 90°$$

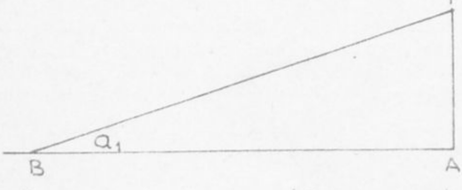
Λύσις

$$ημα_1 = \frac{1}{3} \qquad ημα_2 = \frac{2}{5} \qquad ημα_3\ \frac{3}{5} \qquad ημα_4\ \frac{5}{6}$$

Ὀνομάζομε ἡμίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου τό πηλίκον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν. Συμφώνως λοιπόν μέ τόν ὡς ἄνω ὁρισμόν, διά νά κατασκευάσωμεν τήν γωνίαν $α_1$ μέ ἡμίτονον $\frac{1}{3}$ θά πρέπει ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν νά ἰσοῦται μέ $\frac{1}{3}$

Πρός τοῦτο κατασκευάζομεν τό τρίγωνον ὡς ἑξῆς:

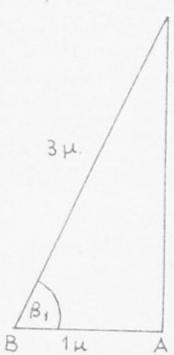
Λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΑ. Εἰς τό ἄκρον Α φέρομεν κάθετον ἐπί τοῦ ΒΑ καί ἴση μέ 1 μονάδα. Κατόπιν μέ κέντρον τό ἄκρον τῆς καθέτου καί ἀκτίνα ἴση μέ 3 μονάδας γράφομεν περιφέρεια. Ἡ τομή τῆς περιφ. μετά τῆς ΒΑ ἀποτελοῦν τήν τρίτην κορυφήν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος ἡμίτονον $ημα_1 = \frac{1}{3}$



Ὁμοίως κατασκευάζονται καί αἱ γωνίαι αἱ ἔχουσαι ἡμίτονα $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ καί $\frac{5}{6}$

Πρός κατασκευήν τῶν γωνιῶν τῶν ἐχουσῶν $συνβ_1 = \frac{1}{3}$ $συνβ_2 = \frac{2}{5}$ $συνβ_3 = \frac{3}{5}$, $συνβ_4 = \frac{5}{6}$. Ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Συνημίτονον γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου καλοῦμεν τό πηλίκον τῆς προσκειμένης καθέτου πρός τήν ὑποτείνουσαν.

Λαμβάνομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρός τόν ἀριθμητήν τοῦ κλάσματος τοῦ δεικνύοντος τό μέτρον τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ. Κατόπιν εἰς τό ἓν ἄκρον αὐτοῦ ὑψοῦμεν κάθετον καί ἀπό τό ἄλλο ἄκρον γράφομεν περιφ. ἀκτῖνος ἴσης μέ τόν παρονομαστήν τοῦ ὡς ἄνω κλάσματος. Ἡ τομή τῆς περιφ. μετά τῆς ὑψωθείσης καθέτου ἀποτελεῖ τήν τρίτην κορυφήν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος ($συνB_1$ = δοθέντα ἀριθμόν):



Ὁμοίως κατασκευάζομεν καί τάς γωνίας B_2, B_3, B_1

Ἡ μέτρησις μέ τό μοιρογνωμόνιον δίδει $α_1 = 19°$ καί $β_1 = 71°$

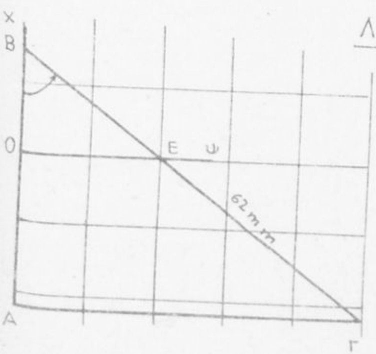
ἤτοι πράγματι $α_1 + β_1 = 19 + 71 = 90°$

3) Νά κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διά τά ὁποῖα εἶναι $\hat{A} = 90°$ καί

1ον $ημ\hat{B} = \frac{4}{5}$ καί ΒΓ = 62 mm

2ον $ημ\hat{B} = \frac{2}{5}$ καί ΑΒ = 35 mm

3ον $ημ\hat{B} = 0{,}75$ καί ΑΓ = 56 mm



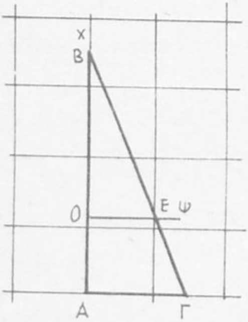
Λύσις

1ον Λαμβάνομεν γωνίαν ΧΟΨ ὀρθήν, ἐπί τῆς πλευρᾶς της ΟΨ λαμβάνομεν ΟΕ ἴσον 4 μονάδες - 2cm Μέ κέντρον τό Ε καί ἀκτῖνα ΕΒ = = 2,5 cm γράφομεν περιφέρειαν ἥτις συναντᾶ τήν ἄλλην πλευράν ΟΧ εἰς τό Β. Ἡ γωνία ΟΒΕ εἶναι ἡ Β καί ἰσχύει

$$ημB = \frac{OE}{EB} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5}$$

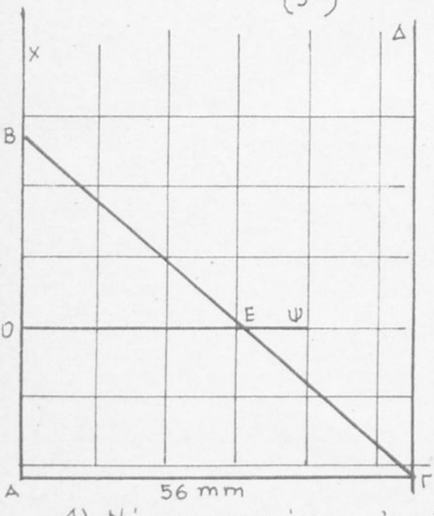
Ἐπὶ τῆς ΒΕ λαμβάνομεν ΒΓ = 62 mm. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΟ ἥτις συναντᾷ αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

(2ον)



Ἔστω ὀρθὴ γωνία xOψ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oψ λαμβάνομεν OE ἴσον μὲ 2 μονάδες = 1cm. Μὲ κέντρον τὸ E καὶ ἀκτῖνα EB = 2,5 γράφομεν περιφέρειαν ἥτις συναντᾷ τὴν Ox εἰς τὸ B. Ἡ γωνία OBE εἶναι ἡ B καὶ ἰσχύει $\eta\mu B = \frac{OE}{EB} = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5}$. Ἐπὶ τῆς BO λαμβάνομεν BA = 35 mm. Ἐκ τοῦ A ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν BA ἥτις συναντᾷ τὴν BE εἰς τὸ Γ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

(3ον)



Καθὼς γνωρίζομεν ἀπὸ ἀνωτέρω κατασκευάζομεν γωνίαν B ὥστε $\eta\mu B = 2,75 = \frac{3}{4}$. Ἐν συνεχείᾳ καὶ εἰς ἀπόστασιν 56 mm ἀπὸ τῆς OB φέρομεν ∥ πρὸς αὐτὴν ἥτις συναντᾷ τὴν BE εἰς τὸ Γ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν BO ἥτις συναντᾷ ταύτην εἰς τὸ A. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

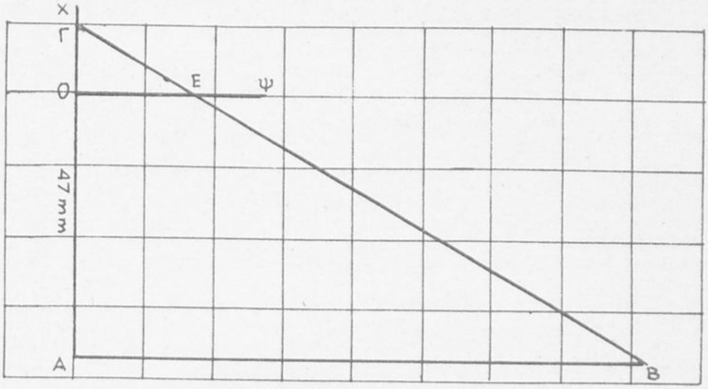
4) Νὰ κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\hat{A} = 90°$ καὶ

1ον $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 0,5$ καὶ ΑΓ = 47 mm

2ον $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 0,75$ καὶ ΑΒ = 62 mm

3ον $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{2}{5}$ καὶ ΒΓ = 49 mm

Λύσις



1ον) Ἐπὶ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας xoψ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς OX, OΓ ἴσον μὲ μίαν μονάδα = cm ἐπὶ τῆς oψ OE = 2cm. Τότε ἔχομεν ΟΓΕ = Γ μὲ συν $Γ = \frac{ΟΓ}{ΓΕ} = \frac{1}{2} = 0,5$. Ἐπὶ τῆς ΓΟ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΑ = 47 mm. Ἐκ τοῦ Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ ἥτις συναντᾷ τὴν ΓΕ εἰς τὸ Β. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὡς εὐκόλως δεικνύεται εἶναι τὸ ζητούμενον.

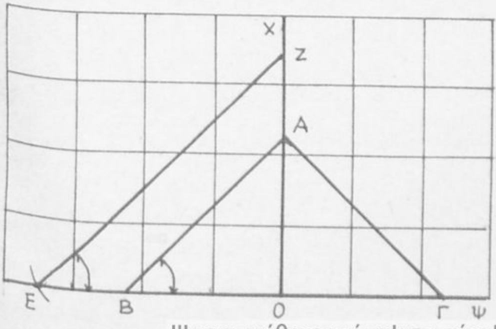
2ον) καὶ 3ον) νὰ γίνουν ὑπὸ τοῦ μαθητοῦ.

5) Νὰ κατασκευασθοῦν εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) μὲ τὰ ἑξῆς δεδομένα

1ον βάσις ΒΓ = 46 mm καὶ ημ$\hat{B}$ = 0,7

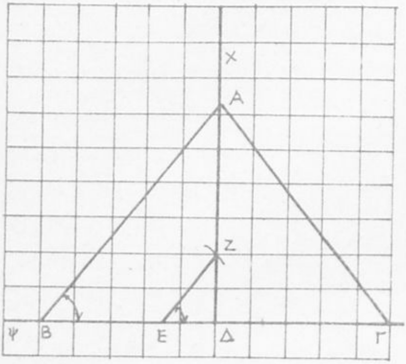
2ον ὕψος ΑΔ = 63 mm καὶ συν$\hat{B} = \frac{3}{5}$

Λύσις



Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ = 46 mm. Εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ Ο ὑψοῦμεν κάθετον OX, ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν 7 μονάδες ἔστω 3,5 cm. Μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα 5cm ἤτοι 10 μονάδες γράφομεν περιφέρειαν ἥτις συναντᾷ τὴν

ΟΒ εἰς τὸ Ε. Ἡ γωνία ΖΕΟ ἔχει ἡμίτονον ἴσον μὲ 0,7 διότι $\eta\mu E = \frac{OZ}{ZE} = \frac{3,5}{5} = \frac{7}{10} = 0,7$. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ ἥτις συναντᾷ τὴν ΟΖ εἰς τὸ Α. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ΒΓ = 46 mm ἐκ κατασκευῆς ημΒ = ημΕ = = 0,7 διότι Β = Ε ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν // ΕΖ καὶ ΒΑ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΒ, εἶναι δὲ καὶ ἰσοσκελὲς διότι ΑΟ ὕψος καὶ διάμεσος



2ον) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΨ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας λαμβάνομεν ΔΕ = 3 μονάδες = 1,5 cm. Μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα 2,5 cm γράφομεν περιφέρειαν ἥτις συναντᾷ τὴν ΔΧ εἰς τὸ Ζ. Ἡ γωνία ΖΕΔ ἔχει ἡμίτονον ἴσον μὲ $\frac{3}{5}$ ἤτοι $\eta\mu E = \frac{E\Delta}{EZ} = \frac{1,5}{2,5} = = \frac{3}{5}$

Ἐπὶ τῆς ΔΧ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΑ = 63 mm. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ ἥτις συναντᾷ τὴν ΔΨ εἰς τὸ Β. Ἐν συνεχείᾳ προεκτείνομεν τὴν ΒΔ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ ἴσον μὲ ΔΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι $\eta\mu B = = \eta\mu E = \frac{3}{5}$ ΑΔ = 63 mm ἐκ κατασκευῆς. Εἶναι δὲ καὶ ἰσοσκελὲς διότι ΑΔ καὶ ὕψος καὶ διάμεσος.

6) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ μὲ χρῆσιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος νὰ δείξετε ὅτι αἱ ἀκριβεῖς τιμαὶ τοῦ ημ45° καὶ συν 45° εἶναι

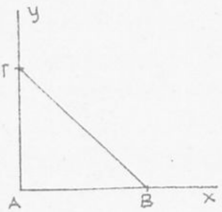
$$\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ποῖαι εἶναι αἱ τιμαὶ των κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ;

Λύσις

Λαμβάνομεν ὀρθὴν γωνίαν $x\hat{A}y$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς ὁρίζομεν τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσα μεταξύ των.

Τοιουτοτρόπως κατεσκευάσθη τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ



Ἑκάστη γωνία ἐκ τῶν Β καί Γ θά εἶναι 45° ὡς εὐκόλως συνάγεται: Ἄρα

ημ Β = ημ 45 καί συνΒ = συν45

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν:

$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \quad \kappa\alpha\acute{\iota} \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} \qquad (1)$$

Ἀλλά ΑΓ = ΑΒ διότι ΑΒΓ ἰσοσκελές ὁπότε ἐάν καλέσωμεν ΑΓ = β τότε καί ΑΒ = β

ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος δέ θά ἔχωμεν:

$$(\Gamma B)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (\Gamma B)^2 = \beta^2 + \beta^2 \Rightarrow (\Gamma B)^2 = 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma B = \sqrt{2\beta^2} = \underline{\beta\sqrt{2}}$$

ἄρα ἔχομεν $\eta\mu B = \eta\mu 45 = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

καί $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\ 45 = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ἄρα ημ Β = συν Β $\qquad \eta\mu 45 = \sigma\upsilon\nu 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

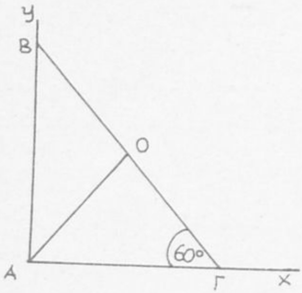
Ἐπειδή $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ θά εἶναι καί ημ 45 = συν 45 = 0,707

7) Νά κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ μέ τά δεδομένα $\hat{A} = 90°$ καί $\hat{\Gamma} = 60°$. Ἔστω Ο τό μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Νά δείξετε ὅτι ΑΟ = ΟΓ = ΓΑ καί ἑπομένως $A\Gamma = \frac{1}{2}$ ΒΓ. Κατόπιν τούτου νά δείξετε ὅτι

$$\eta\mu 30° = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 60° = \frac{1}{2}$$

Λύσις

Λαμβάνομεν ὀρθήν γωνίαν ΧΑy καί μέ πλευράν τήν ΑΧ κατασκευάζομεν γωνίαν 60° ἡ ἄλλη πλευρά τῆς γωνίας θά τέμνη τήν Αy εἰς ἕνα σημεῖον Β.



λαμβάνομεν τό μέσον O τῆς ΒΓ καί φέρομεν τήν ΑΟ

Γνωρίζομεν ὅτι: $AO = \frac{B\Gamma}{2}$ ① διότι ἡ διάμεσος ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐφ' ὅσον δέ καί O μέσον θά ἔχωμεν $\Gamma O = \frac{B\Gamma}{2}$ ② ἐκ τῶν ① καί ② λαμβάνομεν $AO = \Gamma O$ ἀλλά τότε ΓΟΑ ἰσοσκελές καί $\hat{\Gamma} = 6\hat{0}$ ὅταν ὅμως ἰσοσκελές τρίγωνον ἔχει μίαν γωνίαν 60° τότε αὐτό εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα $A\Gamma = AO = O\Gamma$ ὁπότε

$$A\Gamma = O\Gamma \ ③ \quad \text{ἀλλά} \quad O\Gamma = \frac{1}{2} B\Gamma \ ④ \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{A\Gamma = \frac{1}{2} B\Gamma}$$

Ἔχομεν $\hat{B} = 9\hat{0} - \hat{\Gamma} = 90° - 60° = 30°$

$$\text{Ἄρα} \quad \eta\mu \hat{B} = \eta\mu 30 = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \eta\mu 30 = \frac{1}{2}$$

Ὑπολογίζομεν τήν (ΑΒ) θά ἔχωμεν $(AB)^2 = (B\Gamma)^2 - (A\Gamma)^2 \Longrightarrow$

$$(AB)^2 = (B\Gamma)^2 - \left(\frac{1}{2} B\Gamma\right)^2 = (B\Gamma)^2 - \frac{(B\Gamma)^2}{4} = \frac{3(B\Gamma)^2}{4}$$

$$(AB) = \frac{(B\Gamma)\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu 30 = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\cancel{(B\Gamma)}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{B\Gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu 60 = \eta\mu \Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\cancel{B\Gamma}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{B\Gamma}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 60° = \sigma\upsilon\nu \ \Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$$

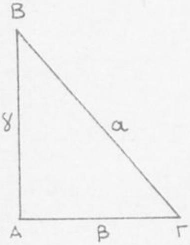
8) Νά διαπιστώσετε ἀπό τούς πίνακας τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων ὅτι $\eta\mu x° = \sigma\upsilon\nu(90° - x°)$, διά $0° < x° < 90°$

Προσπαθήσατε νά δικαιολογήσετε αὐτήν τήν ἰσότητα ἐφαρμόζοντες τόν ὁρισμόν τοῦ ἡμιτόνου εἰς τήν γωνίαν $\hat{B}$ καί τόν ὁρισμόν τοῦ συνημιτόνου εἰς τήν γωνίαν $\hat{\Gamma}$ ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ μέ $\hat{A} = 90°$ καί $\hat{B} = x°$.

Λύσις

Έχομεν τὴν σχέσιν $\eta\mu x^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x^\circ)$ ① λαμβάνομεν τυχαίαν τιμὴν $x=25$ ὁπότε ἡ ① γίνεται $\eta\mu 25 = \sigma\upsilon\nu(90-25) = \sigma\upsilon\nu 65$ τοῦτο εἶναι ἀληθές διότι ἐκ τῶν πινάκων λαμβάνομεν $\eta\mu 25 = 0{,}423$ καί $\sigma\upsilon\nu 65 = 0{,}423$. τό αὐτό παρατηροῦμεν καί διά τὴν τιμὴν $X=15^\circ$ τότε ἔχομεν $\eta\mu 15 = \sigma\upsilon\nu(90-15) = \sigma\upsilon\nu 75$ ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\eta\mu 15 = 0{,}259$

$\sigma\upsilon\nu 75 = 0{,}259$. ἄρα ἰσχύει $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(90-x)$



Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ αἱ Γ καί Β εἶναι συμπληρωματικαί δηλ. $B+\Gamma = 90^\circ \Longrightarrow \Gamma = 90 - B$ ②

Θά δείξωμεν ὅτι $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(90-B)$

ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου ἔχομεν

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad ③$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν ἐκ τῆς ②

$$\sigma\upsilon\nu(90-B) = \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu(90-B) = \frac{\beta}{\alpha} \quad ④$$

Ἐκ τῶν ③ καί ④ προκύπτει $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(90-B)$.

9) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι

$$(\eta\mu 45^\circ)^2 + (\sigma\upsilon\nu 45^\circ)^2 = 1, \quad (\eta\mu 30^\circ)^2 + (\sigma\upsilon\nu 30^\circ)^2 = 1$$

προσπαθήσατε νά δείξετε ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις

$$(\eta\mu x^\circ)^2 + (\sigma\upsilon\nu x^\circ)^2 = 1 \text{ διά } 0^\circ < x^\circ < 90^\circ$$

ἐφαρμόζοντες τούς ὁρισμούς τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου εἰς τὴν γωνίαν $\hat{B}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως καί κάμνοντες χρῆσιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.

Λύσις

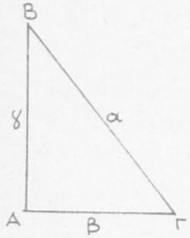
Ἔχομεν $\eta\mu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί $\sigma\upsilon\nu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ὁπότε $(\eta\mu 45)^2 + (\sigma\upsilon\nu 45)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ἔχομεν $\eta\mu 30 = \frac{1}{2}$ $\sigma\upsilon\nu 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ὁπότε $(\eta\mu 30)^2 + (\sigma\upsilon\nu 30)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Ἔχομεν ἐκ τοῦ Π.Θ. $\underline{\alpha^2=\gamma^2+\beta^2}$ ①



$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\ B = \frac{\gamma}{\alpha}$

ἄρα ἐὰν $B = x^\circ$ ἔχομεν $\eta\mu\, x = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\, x = \frac{\gamma}{\alpha}$

ὁπότε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} =$

$= \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}$ ② ἀλλά ἔχομεν ἐκ τῆς ① ὅτι

$\alpha^2=\gamma^2+\beta^2$ ὁπότε ἡ ② γράφεται: $\frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$ ἄρα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

10) Ἀφοῦ διαπιστώσετε ὅτι

$$\varepsilon\varphi 45^\circ = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ}, \quad \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ}, \quad \varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}$$

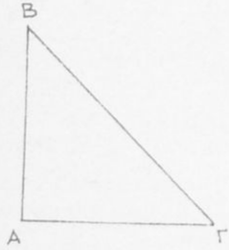
προσπαθήσατε νά δείξετε ὅτι ἰσχύει γενικῶς ἡ σχέσις

$$\varepsilon\varphi x^\circ = \frac{\eta\mu x^\circ}{\sigma\upsilon\nu x^\circ}, \quad \text{διά } 0^\circ < x^\circ < 90^\circ,$$

ἐφαρμόζοντες τούς ὁρισμούς τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου εἰς μίαν γωνίαν $\measuredangle\ (Ox, O\mu)$ μέ μέτρον x°

Λύσις

Κατασκευάζομεν ἰσοσκελές ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ



ὅπου ὡς γνωστόν $\measuredangle\ \hat{B} = 45^\circ$ καί $\measuredangle\ \hat{\Gamma} = 45^\circ$

ὁπότε θά εἶναι καί ΑΒ = ΑΓ

τότε: $\eta\mu B = \eta\mu 45 = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ καί $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu 45 = \frac{AB}{B\Gamma}$

Ἔχομεν $\varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi 45 = \frac{A\Gamma}{AB} = 1$ (Διότι ΑΒ = ΑΓ) ①

Ἐπίσης $\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu 45}{\sigma\upsilon\nu 45} = \frac{\frac{A\Gamma}{B\Gamma}}{\frac{AB}{B\Gamma}} = \frac{(A\Gamma)(B\Gamma)}{(AB)(B\Gamma)} = \frac{A\Gamma}{AB} = 1$ ②

Ἐκ τῶν ① καί ② ἔχομεν ὅτι $\varepsilon\varphi 45 = \frac{\eta\mu 45}{\sigma\upsilon\nu 45}$

Ἐάν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι $\hat{B} = 30^\circ$ $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

τότε ἔχομεν $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$

ὁπότε $εφ B = εφ 30° = \frac{AΓ}{AB}$ ①

$$\left.\begin{array}{l} ημ B = ημ 30 = \frac{AΓ}{BΓ} \\ συν B = συν 30 = \frac{AB}{BΓ} \end{array}\right\} \text{καί } \frac{ημB}{συνB} = \frac{ημ30}{συν30} = \frac{\frac{AΓ}{BΓ}}{\frac{AB}{BΓ}} = \frac{AΓ}{AB} \quad ②$$

ἐκ τῶν ① καί ② λαμβάνομεν $εφ 30 = \frac{ημ 30}{συν 30}$

Ἐκ τῆς γωνίας $Γ = 60°$ ἔχομεν

$εφ Γ = εφ 60 = \frac{AB}{AΓ}$ ① ἐπίσης $ημ Γ = ημ 60 = \frac{AB}{BΓ}$ καί

$συν Γ = συν 60 = \frac{AΓ}{BΓ}$ καί $\frac{ημΓ}{συνΓ} = \frac{ημ 60}{συν 60} = \frac{\frac{AB}{BΓ}}{\frac{AΓ}{BΓ}} = \frac{AB}{AΓ}$ ②

ἐκ τῶν ① καί ② προκύπτει ὅτι $εφ 60 = \frac{ημ 60}{συν 60}$

Γενικῶς δέ ἐάν $\angle B = x°$ ἔχομεν $ημ x° = \frac{AΓ}{BΓ}$ καί $συν x° = \frac{AB}{BΓ}$

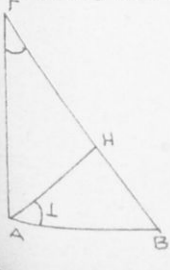
ὁπότε $\frac{ημ x°}{συν x°} = \frac{\frac{AΓ}{BΓ}}{\frac{AB}{BΓ}} = \frac{AΓ}{AB}$ ἀλλά $\frac{AΓ}{AB} = εφ B = εφ x°$

ἄρα $εφ x° = \frac{ημ x°}{συν x°}$ διά $0° < x < 90°$

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Σελίς 163)

1) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90°$) γνωρίζομεν τήν κάθετον πλευράν $AB = 8$ dm καί τό ὕψος $AH = 4,8$ dm. Νά ὑπολογίσετε κάθε μίαν χωριστά ἀπό τάς ὀξείας γωνίας του ἀπό τά ἀνωτέρω δύο στοιχεῖα καί νά ἐλέγξετε κατά πόσον τό ἄθροισμά των ἰσοῦται μέ 90°



Λύσις

Γνωρίζομεν ὅτι: $AB = 8$ dm καί $AH = 4,8$ dm

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΗΑ ὅπου $H = 1^L$ ἔχομεν

$ημ B = \frac{AH}{AB} = \frac{4,8 dm}{8 dm} = 0,6$ ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι $B = 37°$

Αἱ γωνίαι $H\hat{A}B$ καί $A\hat{\Gamma}H$ εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τάς πλευράς των καθέτους

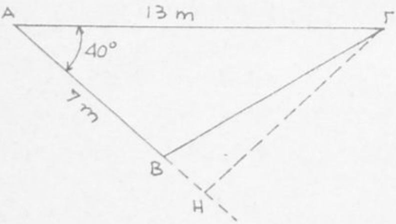
ἄρα $\sigma\upsilon\nu\,\Gamma = \sigma\upsilon\nu\,A_1 = \frac{AH}{AB} = \frac{4{,}8\ dm}{8\ dm} = 0{,}6$ ἐκ τῶν πινάκων

λαμβάνομεν $\sigma\upsilon\nu\,A_1 = \sigma\upsilon\nu\,53^\circ$ ἄρα $A_1 = 53^\circ$ ὁπότε καί $A_1 = \Gamma = 53^\circ$

ἔχομεν $\Gamma + B = 53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$

2) Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται: $AB = 7m$, $A\Gamma = 13m$, $A = 40^\circ$. Ἐάν ΓΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπό τήν κορυφήν Γ, νά ὑπολογισθοῦν κατά σειράν τά μήκη τῶν τμημάτων ΑΗ, ΓΗ, ΒΗ, ἡ γωνία Β, τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νά ὑπολογισθῇ ἐπίσης τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου.

Λύσις



Δίδονται $AB = 7m$, $A\Gamma = 13m$ κ $\hat{A} = 40^\circ$ καί ζητοῦμεν τά ΑΗ, ΓΗ, ΒΗ, $\hat{B}$ κ ΒΓ

Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu A = \frac{AH}{A\Gamma} \Rightarrow (AH) = (A\Gamma)\sigma\upsilon\nu A$

ὁπότε $AH = \sigma\upsilon\nu 40 \cdot 13 \Rightarrow AH = 0{,}766 \cdot 13m =$
$= 9{,}956\ cm$

ἄρα τό τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον καί τό ΓΗ εὑρίσκεται ἐκτός τῆς ΑΒ

$\eta\mu A = \frac{\Gamma H}{A\Gamma} \Longrightarrow (\Gamma H) = (A\Gamma)\eta\mu A \Longrightarrow (\Gamma H) = 13\,m \cdot \eta\mu 40 = 13\,m \cdot 0{,}643 = 8359\,m$

$\Gamma H = 8{,}359\ m$

$(BH) = (AH) - (AB) = 9{,}956 - 7 = 2{,}956\ m$

$\varepsilon\varphi B_1 = \frac{\Gamma H}{HB} = \frac{8{,}359}{2{,}956} = 71^\circ 10'$ ἄρα

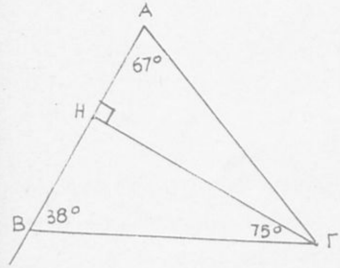
$\hat{B} = 180^\circ - (71^\circ 10^\circ) = 179^\circ 60' - (71^\circ 10') = 108^\circ\ 50'$

$\sigma\upsilon\nu\,\beta_1 = \frac{BH}{B\Gamma}$ $\quad B\Gamma = \frac{BH}{\sigma\upsilon\nu B_1} = \frac{2{,}956}{\sigma\upsilon\nu(71^\circ 10')} = \frac{2956}{0{,}323} = 9{,}1\ m$

$E = \frac{(AB)\cdot(\Gamma H)}{2} = \frac{7 \cdot 8{,}359}{2} = 29{,}2565\ m^2$

3) Δίδεται τρίγωνον μέ τά στοιχεῖα ΒΓ = 17 m, Β = 38°, Γ = 75°. Ἐάν ΓΗ εἶναι τό ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπό τήν κορυφήν Γ, νά ὑπολογισθοῦν μέ τήν κατάλληλον σειράν τά μήκη τῶν τμημάτων ΒΗ, ΓΗ, ΑΓ, ΑΒ καθώς καί ἡ γωνία Α.

Λύσις



Δίδονται: ΒΓ = 17 m Β = 38°, Γ = 75°
Ζητοῦνται: ΒΗ, ΓΗ, ΑΓ, ΑΗ, ΑΒ, Α

$συν B = \frac{BH}{B\Gamma} \Longrightarrow BH = B\Gamma \, συν\, B \Longrightarrow$

$BH = 17m \cdot συν\, 38° = 17m \cdot 0{,}788 = 13{,}396\ m$

$ημ\, B = ημ\, 38° = \frac{\Gamma H}{B\Gamma} \Longrightarrow \Gamma H = B\Gamma\, ημ\, 38 \Longrightarrow \Gamma H = 17m : 0{,}616 \Longrightarrow$

$\Gamma H = 10{,}472\ m.$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180° - (38° + 75°) = 180° - 113° = 67°$

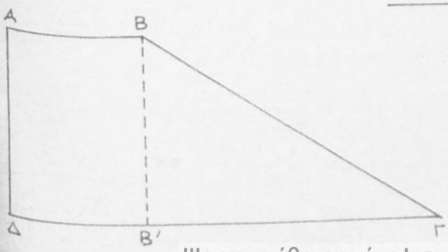
$ημ\, A = \frac{H\Gamma}{A\Gamma} \Longrightarrow A\Gamma = \frac{H\Gamma}{ημ A} = \frac{10{,}472 m}{ημ\, 67} = \frac{10{,}472}{0{,}921} = 11{,}37\ m$

$συν\, A = \frac{AH}{A\Gamma} \Longrightarrow AH = A\Gamma\, συν A = 11{,}37 m \cdot συν 67 = 11{,}37 \cdot 0391\ m = 4{,}446$

$AB = AH + HB = 4{,}446 + 13{,}396 = 17{,}842.$

4) Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι $\sphericalangle A = \sphericalangle \Delta = 90°$, $εφ\Gamma = \frac{3}{4}$, βάσις ΑΒ = 24 m, βάσις ΓΔ = 72 m. Ἐάν Β′ εἶναι ἡ προβολή τοῦ σημείου Β ἐπάνω εἰς τήν ΓΔ, νά ὑπολογίσετε τά μήκη τῶν τμημάτων ΓΒ′, ΒΒ = ΑΔ, τήν γωνίαν $\hat{\Gamma}$, τό μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΓ καθώς καί τήν γωνίαν $\hat{B}$.

Λύσις



Δίδονται
$\sphericalangle A = \sphericalangle \Delta = 90°$ $εφ\, \Gamma = \frac{3}{4}$
ΑΒ = 24 m, ΓΔ = 72 m
ζητοῦνται:
ΓΒ′, ΒΒ′ = ΑΔ $\hat{\Gamma}$, ΒΓ καί $\hat{B}$
ΓΒ′ = ΓΔ − Β′Δ ἀλλά Β′Δ = ΑΒ
ἄρα ΓΒ′ = 72 − 24 = 48 m.

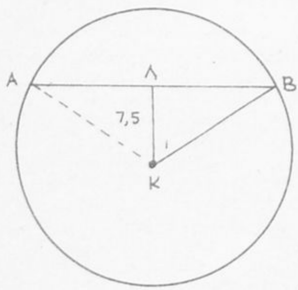
$\varepsilon\varphi\, \Gamma = \frac{3}{4} = 6,75$ ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι $\hat{\Gamma} = 36°\,50'$

$\eta\mu\, \Gamma = \frac{BB'}{B\Gamma} \Longrightarrow B\Gamma = \frac{BB'}{\eta\mu\,\Gamma} = \frac{36\,m}{0,6} = 60\,m$

$\hat{B} = 180° - \hat{\Gamma} = 180 - (36°50') = 179°\,60' - (36°50')$ $\quad \hat{B} = 143°\,10'$

5) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἕνα τόξον κύκλου, ὅταν ἡ χορδή του ἀπέχῃ 7,5 m ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου καί ἔχῃ μῆκος 280 cm;

Λύσις



Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κάθετος εἰς τό μέσον χορδῆς διχοτομεῖ αὐτήν καί τό ἀντίστοιχον τόξον

Ἄρα: $\Lambda B = \frac{AB}{2} = \frac{280cm}{2} = 140cm$

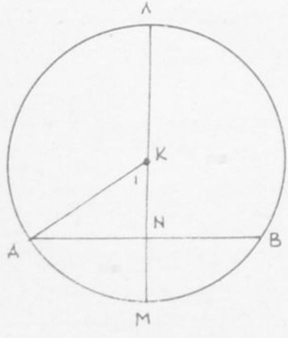
καί $K\Lambda = 7,5 \cdot 100\,cm = 750\,cm$.

$\varepsilon\varphi\, K_1 = \frac{\Lambda B}{K\Lambda} = \frac{140}{750} = \frac{14}{75} = 0,186$

ἄρα ἐκ τῶν πινάκων $K_1 = 10°\,30'$ ὁπότε $\hat{K} = 21°$ ἐπειδή ἡ ἐπίκεντρος ἔχει τό αὐτό μέτρον μέ τό ἀντίστοιχον τόξον θά εἶναι $\overset{\frown}{AB} = 21°$

6) Βέλος κυκλικοῦ τόξου λέγεται τό τμῆμα πού ἑνώνει τό μέσον τοῦ τόξου μέ τό μέσον τῆς χορδῆς του. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τοῦ βέλους ἑνός τόξου 82° εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 m.

Λύσις



Δίδονται: $KA = \rho = 4\,m$

καί $\overset{\frown}{AB} = 82°$ ὁπότε $\overset{\frown}{AM} = 41°$

ὁπότε $\hat{K}_1 = 41°$

$\hat{A} = 90° - 41° = 49°$

ὑπολογίζομεν τό KN

$$ημ A = \frac{KN}{AK} \Longrightarrow KN = ημ A \cdot AK = ημ 49° \cdot R = ημ 49° \cdot 4m$$

$$KN = 0{,}755 \cdot 4m = 3{,}02m$$

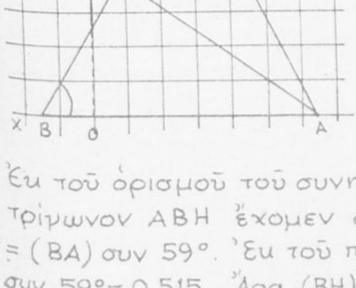
ἄρα $NM = (4 - 3{,}02)m = 0{,}98\ m$

Τοῦτο εἶναι τό βέλος τοῦ τόξου ΑΜΒ

7) Νά κατασκευασθῇ εἰς χιλιοστομετρικόν χαρτί τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τό ὁποῖον ΑΒ=78 m, $εφΒ = \frac{5}{3}$, ΒΓ = 83 mm. Ἀφοῦ χαράξετε τό ὕψος ΑΗ, νά ὑπολογίσετε τριγωνομετρικῶς τό τμῆμα ΒΗ, τό ὕψος ΑΗ, τήν γωνίαν Γ καί τήν πλευράν ΑΓ. Ἔπειτα νά παραβάλετε τά ἐξαγόμενά σας μέ τά μέτρα πού εὑρίσκετε μετροῦντες εἰς τό σχέδιόν σας τήν γωνίαν Γ καί τά τμήματα ΒΗ, ΑΗ, ΑΓ

Λύσις

Ἐπί τῆς πλευρᾶς ΟΨ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΧΟΨ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΕ = 5 μονάδες = 2,5 cm, ἐπί τῆς πλευρᾶς ΟΧ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΒ = 3 μονάδες = 1,5 cm ἑνώνομεν τά σημεῖα Β καί Ε καί σχηματίζεται ἡ γωνία Β ἥτις ἔχει $εφ Β = \frac{ΟΕ}{ΟΒ} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{5}{3}$ Προεκτείνομεν τήν ΒΟ καί λαμβάνομεν ΒΑ = 78 mm ἐπί δέ τῆς ΒΕ τμῆμα ΒΓ = 83 mm. Ἐπειδή $εφ Β = \frac{5}{3} = 1{,}666$ ἐκ τοῦ πίνακος τῶν ἐφαπτομένων ἔχομεν



$\sphericalangle Β = 59°$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου καί ἀπό τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΗ ἔχομεν $συν Β = \frac{(ΒΗ)}{(ΒΑ)} \Longrightarrow (ΒΗ) = (ΒΑ)\, συν Β = (ΒΑ)\, συν 59°$. Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν συνημιτόνων ἔχομεν $συν 59° = 0{,}515$. Ἄρα $(ΒΗ) = 78 \cdot 0{,}515 = 40{,}17\ mm$

Ὁμοίως $εφ Β = \frac{(ΑΗ)}{(ΒΗ)} \Longrightarrow (ΑΗ) = (ΒΗ)\, εφ Β = 40{,}17 \frac{5}{3} = 66{,}68$

Ἔχομεν ὅτι $εφ Γ = \frac{(ΑΗ)}{(ΓΗ)}$

$$(ΓΗ) = (ΒΓ) - (ΒΗ) = 83 - 40{,}17 = 42{,}83 \text{ mm}$$ ἤτοι

$εφ Γ = \frac{66{,}68}{42{,}83} = 1{,}55$. Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν ἐφαπτομένων εὑρίσκομεν $Γ = 57°10'$

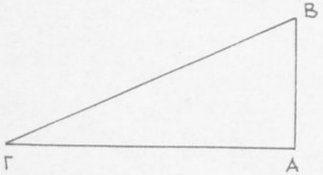
Ἐπίσης ἔχομεν $ημ Γ = \frac{(ΑΗ)}{(ΑΓ)}$ $(ΑΓ) = \frac{(ΑΗ)}{ημ Γ}$ $(ΑΓ) = \frac{66{,}68}{0{,}84}$

$(ΑΓ) = 79{,}4 \text{ mm}$

Παραβάλλοντες μέ τό σχῆμα μας εὑρίσκομεν ὅτι τά δι' ὑπολογισμῶν μεγέθη εἶναι τά αὐτά μέ καλήν προσέγγισιν.

8) Ὕψος τοῦ ἡλίου κατά τινα στιγμήν εἰς ἕνα τόπον ὀνομάζομεν τήν γωνίαν πού σχηματίζει μέ τήν προβολήν της ἐπάνω εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἡ ὀπτική ἀκτίς ἀπό τό σημεῖον τῆς παρατηρήσεως πρός τό κέντρον τοῦ ἡλιακοῦ δίσκου. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό ὕψος ἑνός κυπαρισσιοῦ πού ρίχνει ἐπάνω εἰς τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τό ὁποῖον διέρχεται ἀπό τήν βάσιν του, σκιάν μήκους 65 m τήν στιγμήν κατά τήν ὁποίαν ὁ ἥλιος ἔχει ὕψος 38°40'.

Λύσις



Ἔστω ΑΒ τό ὕψος τοῦ κυπαρισσιοῦ καί ΑΓ τό μῆκος τῆς σκιᾶς τήν ὁποίαν ρίπτει. Ἔστω δέ $Γ = 38°40'$ ἡ γωνία ἡ ἐκφράζουσα τό ὕψος:

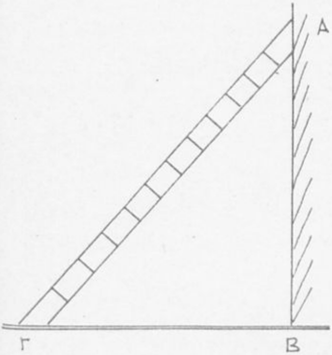
ἔχομεν: $εφ Γ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ $ΑΒ = ΑΓ\, εφΓ$

$$ΑΒ = 65 \text{ m} \cdot εφ\, 38°40' = 65 \text{ m} \cdot 0{,}8 = 52 \text{ m}$$

Ἄρα 52 m

9) Μέχρι ποίου ὕψους φθάνει ξυλίνη μετακινητή σκάλα πού ἀκουμπᾶ ἐπάνω εἰς ἕνα τοῖχον, ἐάν ἡ γωνία κλίσεώς της πρός τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι 73°20' καί ἡ ἀπόστασίς της ἀπό τήν βάσιν τοῦ τοίχου εἶναι 1,10; Πόσον εἶναι τό μῆκος τῆς σκάλας;

λύσις



Δίδονται $\hat{\Gamma} = 73^\circ\,20'$

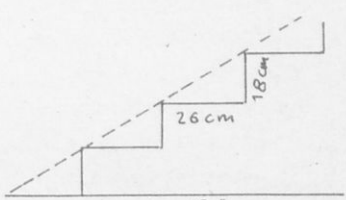
$\Gamma B = 1{,}10\,m$

Ζητεῖται: ΑΓ

$\sigma\upsilon\nu\,\Gamma = \frac{\Gamma B}{\Gamma A}$ $\qquad \Gamma A = \frac{\Gamma B}{\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}$

$$\Gamma A = \frac{1{,}10\,m}{\sigma\upsilon\nu\,73^\circ 20'} = \frac{1{,}10\,m}{0{,}287} = 3{,}8\,m$$

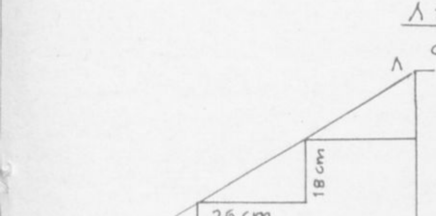
10) Μία εὐθεῖα κτιστὴ σκάλα ὁδηγεῖ ἀπὸ τὸ ἰσόγειον εἰς τὸν πρῶτον ὄροφον οἰκίας. Τὸ κάθε σκαλοπάτι της ἔχει πλάτος 26 cm καὶ ὕψος 18 cm.



Σχ. 124

α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία κλίσεως τῆς σκάλας (δηλ. ἡ δίεδρος γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ ἰδεατὸν ἐπίπεδον ποὺ περιέχει τὰς παραλλήλους ἐξωτερικὰς ἀκμὰς τῶν σκαλοπατιῶν (σχ. 124). β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἰσογείου ὀρόφου τῆς οἰκίας, ἀπὸ τὸ δάπεδόν του ἕως εἰς τὸ δάπεδον τοῦ πρώτου ὀρόφου, ἐὰν τὸ ὁριζόντιον μῆκος τῆς σκάλας εἶναι 4,42 m

Λύσις



α) $\varepsilon\varphi\,B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13} = 0{,}692$

ἄρα ἐκ τῶν πινάκων $\hat{B} = 34^\circ 40'$

β) Τὸ ὁριζόντιον μῆκος τῆς σκάλας εἶναι 4,42 m Δηλ. ΒΚ=4,42 ΚΛ;

$\varepsilon\varphi\,B = \frac{K\Lambda}{BK} = \frac{K\Lambda}{4{,}42}$ $\qquad K\Lambda = 4{,}12\,m\ \varepsilon\varphi B$

$K\Lambda = 4{,}42 \cdot 0{,}692 = 3{,}059\,m$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1) Ποῖαι αἱ τῶν κατωτέρω ἰδιοτήτων εἶναι ποιοτικαὶ καὶ ποῖαι ποσοτικαί; Ἀναφέρατε μερικὰ ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ ἑκάστης ποιοτικῆς καὶ μερικὰς ἀπὸ τὰς δυνατὰς τιμὰς ἑκάστης ποσοτικῆς. Ἀναφέρατε ἐπίσης ποῖαι ἐκ τῶν ποσοτικῶν εἶναι συνεχεῖς καὶ ποῖαι ἀσυνεχεῖς μεταβληταί.

α) Ἡλικία
β) Ἀριθμὸς διαζυγίων
γ) Ποσοστὸν ἀναλφαβήτων ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν
δ) Ἐπάγγελμα
ε) Αἰτία θανάτου
στ) Ἀριθμὸς ἀναλφαβήτων
ζ) Ἐμβαδὸν τριγώνου
η) Κοινωνικὴ τάξις
θ) Ταχύτης αὐτοκινήτου
ι) Πυκνότης πληθυσμοῦ

Ποιοτικαὶ εἶναι αἱ δ), ε) καὶ η)
Ποσοτικαὶ εἶναι αἱ α), β), γ), δ), στ), ζ), θ), ι)

Μερικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν ποιοτικῶν: δ): Τυπογράφος, ἐκδότης κ.λ.π. ε): Καρκίνος, καρδιοπάθειαι, φυματίωσις κ.λ.π. η) ἀγροτικὴ τάξις, ἐργατικὴ τάξις κ.λ.π.

Δυναταὶ τιμαὶ τῶν ποιοτικῶν α): 5 μηνῶν, 7½ ἐτῶν, 30 ἐτῶν κ.λ.π. β) 3, 8, 27 κ.λ.π. γ) 18% 17,5% 14% κ.λ.π. εἰς τὰς χώρας Α, Β καὶ Γ ἀντιστοίχως κ.λ.π. στ) 1.225.000 εἰς τὴν χώραν Α 2.550.361 εἰς τὴν χώραν Β κ.λ.π. ζ) 42 m² 52,25 m² κ.λ.π. θ) 60 Km/ℓι 85,25 Km/ℓι ι) 33,6 Κάτοικοι ἀνὰ Km², 57,1 κάτοικοι ἀνὰ Km².

Συνεχεῖς εἶναι αἱ: α) διότι δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς τιμὰς ἀπὸ τῆς γεννήσεως ἕως τοῦ θανάτου, γ) διότι δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν μεταξὺ τοῦ κατωτέρου καὶ ἀνωτέρου ποσοστοῦ τῶν ἀναλφαβήτων, ζ) διότι δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν θ) δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν μεταξὺ τῆς ἀνωτάτης καὶ κατωτάτης ταχύτητος. ὁμοίως καὶ ἡ ι)

Ἀσυνεχεῖς εἶναι αἱ : β) διότι μόνον ἀκεραίας τιμάς δύναται νά λάβη. στ) διότι ἀκεραίας μόνον τιμάς λαμβάνει.

2) Εὕρετε διάφορα παραδείγματα πληθυσμῶν καί ἀναφέρατε ἰδιότητας τῶν στοιχείων των.

Λύσις

α) Τό πλῆθος τῶν μαθητῶν ἑνός Γυμνασίου εἶναι ἕνας πληθυσμός μέ ἰδιότητας τῶν στοιχείων, τό ὕψος των, τό βάρος των, ὁ βαθμός προόδου των κ.τ.λ

β) Οἱ ἀθληταί ἑνός ἀθλητικοῦ ὁμίλου εἶναι ἕνας πληθυσμός μέ ἰδιότητας τῶν στοιχείων, τό ὕψος των, τό βάρος των, τήν ἡλικίαν των κ.λ.π.

3) Κατά ποῖον τρόπον γίνεται ἡ συγκέντρωσις στατιστικῶν δεδομένων ἀναφερομένων εἰς τάς κατωτέρω περιπτώσεις;

α) Θάνατοι κατά ἡλικίαν.
β) Ὁ πληθυσμός μιᾶς χώρας κατά γεωγραφικά διαμερίσματα
γ) Καταδικαστικαί ἀποφάσεις δικαστηρίων.
δ) Κίνησις διώρυγος Κορίνθου.
ε) Νοσοκομεῖα κατά εἰδικότητας καί ἀριθμούς κλινῶν.
στ) Γνώμη τοῦ κοινοῦ ἐπί ἑνός πολιτικοῦ θέματος.
ζ) Ἡ κατάστασις τῶν ἐργατικῶν κατοικιῶν μιᾶς πόλεως

Λύσις

α) Μέ τήν συνεχῆ ἐγγραφήν εἰς τούς Δήμους καί κοινότητας γίνονται ἐγγραφαί τῶν θανάτων εἰς τά Ληξιαρχεῖα.
β) Μέ τήν ἀπογραφήν κατά μίαν ὡρισμένην ἡμέραν.
γ) Μέ τάς ἐρεύνας. Ἐρευνοῦμεν τά ἀρχεῖα τῶν Εἰσαγγελιῶν, ὅπου κρατοῦνται κατάλογοι τῶν κατά περιόδους καταδικαστικῶν ἀποφάσεων.
δ) Μέ τήν συνεχῆ ἐγγραφήν κατά μίαν χρονικήν περίοδον.
ε) Μέ τάς ἐρεύνας.
στ) Μέ τήν δειγματοληψίαν.
ζ) Μέ τήν ἀπογραφήν.

ΣΕΛΙΣ 180

1) Συμπληρώσατε τόν πίνακα τῆς παραγρ. 2·2 μέ μίαν ἀκόμη στήλην εἰς τήν ὁποίαν νά γράφετε τούς ἀριθμούς τῶν θεραπευτηρίων κατά εἰδικότητα ὡς ποσοστά (%) ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ των. Στρογγυλεύσατε τά ἀποτελέσματα εἰς τό πρῶτον δεκαδικόν ψηφίον κατά τρόπον ὥστε τό ἄθροισμά των νά εἶναι 100.

Λύσις

ΘΕΡΑΠΕΥΤΗΡΙΑ ΚΑΤΑ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ, ΕΛΛΑΣ 1961

(Ἀλφαβητική σειρά εἰδικοτήτων)

ΕΙΔΙΚΟΤΗΣ	Ἀριθμός θεραπευτηρίων	Ποσοστόν ἐπί τοῖς %
Ἀντικαρκινικά	2	0,2
Γενικά	385	35,4
Δερματολογικά	2	0,2
Καρδιολογικά	2	0,2
Λοιμωδῶν νόσων	3	0,3
Μαιευτικά	242	22,3
Νευρολογικά	54	5
Ὀρθοπεδικά	10	0,9
Ὀφθαλμολογικά	43	4
Οὐρολογικά	8	0,7
Παθολογικά	44	4
Παιδιατρικά	24	2,2
Φυματιολογικά	26	2,4
Χειρουργικά	172	15,8
Ὠτορινολαρυγγολογικά	69	6,4
Συνολικός ἀριθμός θεραπευτηρίων	1,085	100,00

2) Δίδεται ἡ ἡλικία 60 προσώπων εἰς ἔτη:

32	24	10	5	14	19	26	38	47	42
10	15	18	20	15	23	4	20	19	3
17	21	23	12	27	28	11	26	14	18
25	11	25	17	16	31	16	37	30	22
29	28	31	31	36	13	23	8	37	34
2	16	19	24	27	26	29	48	33	24

Σχηματίσατε πίνακα κατανομῆς ἀπολύτων καί σχετικῶν συχνοτήτων. Συνήθως αἱ ἡλικίαι λαμβάνονται κατά πενταετεῖς ὁμάδας: 0-5, 5-10 κ.ο.κ. Τό ἄνω ἄκρον ἑκάστης ὁμάδος δέν συμπεριλαμβάνεται εἰς τήν ὁμάδα.
Ἑκάστη δοθεῖσα ἡλικία ἔχει στρογγυλευθῆ εἰς τόν ἀμέσως κατώτερον ἀκέραιον π.χ. ἡλικία 17 ἔτη καί 9 μῆνες γίνεται 17.
Γράψατε ἐπίσης τήν ἀθροιστικήν συχνότητα καθώς καί τήν ἀθροιστικήν σχετικήν συχνότητα.

Λύσις

ΚΑΤΑΝΟΜΗ 60 ΠΡΟΣΩΠΩΝ ΚΑΤΑ ΤΑΞΕΙΣ ΗΛΙΚΙΑΣ

Τάξεις ἡλικιῶν	Ἀριθμός προσώπων	Σχετική συχνότης %	Ἀθροιστική Συχνότης	Ἀθροιστική σχετική συχνότης
0 - 5	3	5,0	3	5
5 - 10	2	3,3	5	8,3
10 - 15	8	13,3	13	21,6
15 - 20	12	20,0	25	41,6
20 - 25	10	16,6	35	58,2
25 - 30	11	18,4	46	76,6
30 - 35	7	11,7	53	88,3
35 - 40	4	6,7	57	95,0
40 - 45	1	1,7	58	96,7
45 - 50	2	3,3	60	100
	N = 60	100		

3)

Τάξεις ἡλικιῶν	Ἀριθμός προσώπων	Σχετική Συχνότης	Ἀθροιστική συχνότης	Ἀθροιστική σχετική συχνότης
0 - 5	3	5	60	100
5 - 10	2	3,3	57	95
10 - 15	8	13,3	55	91,7
15 - 20	12	20	47	78.4
20 - 25	10	16,6	35	58.4
25 - 30	11	18,4	25	41,8
30 - 35	7	11,7	14	23,4
35 - 40	4	6,7	7	11,7
40 - 45	1	1,7	3	5
45 - 50	2	3,3	2	3,3
	N=60	100		

Ἡλικία κάτω τῶν 25 ἐτῶν ἔχουν 35 ἄτομα
Ἡλικία ἄνω τῶν 35 ἐτῶν ἔχουν 7 ἄτομα
Ἐκ τοῦ πίνακος φαίνεται ὅτι τό ποσοστόν εἶναι 58,4%

4) ΠΙΝΑΞ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΕΩΣ

ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΙΣ	ΦΥΛΟΝ		ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΩΠΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΥΛΩΝ
	ΑΡΡΕΝΕΣ	ΘΗΛΕΙΣ	
ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΙ	380	399	779
ΑΝΕΡΓΟΙ	20	1	21
ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΣΩΠ.	400	400	800

5) Ἐκ τοῦ πίνακος τῆς Ἀσκ.4) φαίνεται ὅτι μία γυναῖκα ἐκ τῶν 400 δέν ἐργάζεται. Τό ποσοστόν τῶν ἀνέργων γυναικῶν ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ των εἶναι 0,25% διότι

εἰς τάς 400 γυναίκας ἡ 1 εἶναι ἄνεργος

» » 100 » X; εἶναι ἄνεργοι

$$x = 1\,\frac{100}{400} = 0{,}25$$

Τό ποσοστόν τῶν ἀνέργων γυναικῶν ἐπί τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ εἶναι 0,125% διότι

εἰς τά 800 ἄτομα εἶναι 1 γυναῖκα ἄνεργος

» » 100 » » y » »

$$y = 1\,\frac{100}{800} = 0{,}125$$

Τό ποσοστόν τῶν ἀνέργων γυναικῶν ἐπί τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνέργων ἀτόμων εἶναι 4,76% διότι

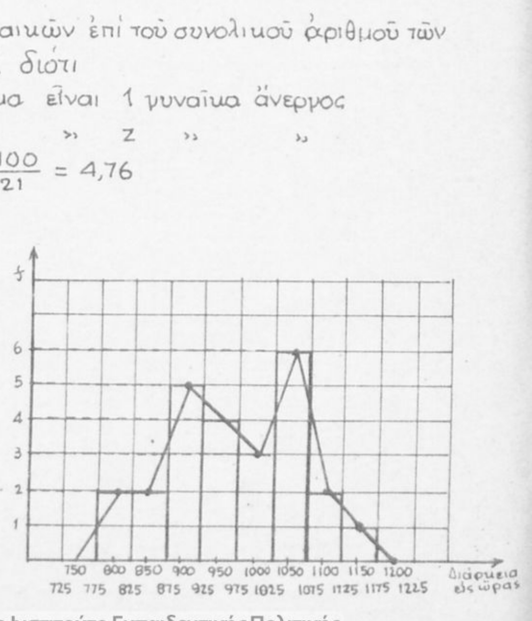
εἰς τά 21 ἄνεργα ἄτομα εἶναι 1 γυναῖκα ἄνεργος

» » 100 » » » z » »

$$z = 1\,\frac{100}{21} = 4{,}76$$

Σελίς 186

Ἀσκ. 1) Χαράσσομεν ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μέν ὁριζόντιος ἀναφέρεται εἰς τάς τιμάς τῆς μεταβλητῆς, ὁ δέ κάθετος εἰς τήν συχνότητα. Χάριν εὐκολίας εἰς τετραγωνισμένον χάρτην.



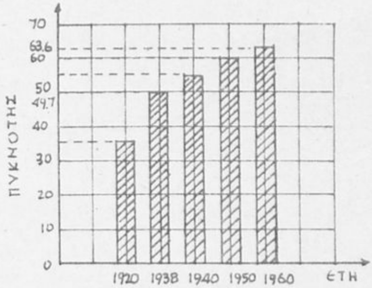
Ἀσκ. 2) Ὁ πίναξ τῆς § 2,6 εἶναι

ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΣ ΑΥΤΟΥ

1920-1960

Ἔτος	πληθυσμός	Κάτοικοι Km²
1920	5.007.500	33,6
1930	6.367.149	49.7
1940	7.318915	57.1
1950	7.566028	59.0
1960	8.327405	63.6

Τὸ ραβδόγραμμον εἶναι τὸ παραπλεύρως



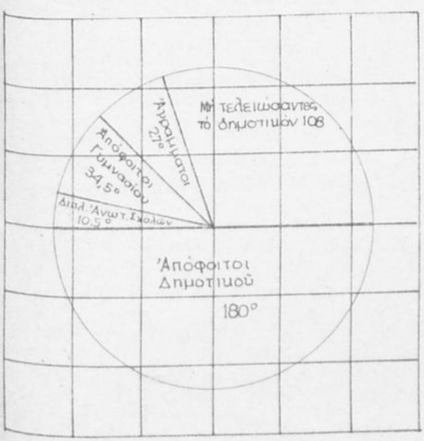
Ἀσκ. 3) Ὁ πίναξ τῆς § 2,5 διὰ τοὺς ἄρρενας μόνον εἶναι :

ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΡΡΕΝΩΝ ΠΡΟΣΩΠΩΝ ΗΛΙΚΙΑΣ 10 ΕΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΩ

ΚΑΤΑ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ, ΕΛΛΑΣ 1960

ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ	ΑΡΡΕΝΕΣ	Ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς %	Ἀριθμὸς εἰς Μοίρας
Διπλωματοῦχοι Ἀνωτάτων Σχολῶν	95.000	2.92	10,5
Ἀπόφοιτοι Γυμνασίου	311 000	9.56	34.5
Ἀπόφοιτοι Δημοτικοῦ	1.628 000	50,00	180
Μὴ τελειώσαντες τὸ δημοτικόν	974.000	30,00	108
Ἀγράμματοι	246.000	7.52	27
Συνολικὸς ἀριθμὸς Προσώπων	3.254.000	100,00	360°

Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας τυχούσης ἀκτῖνος λαμβάνομεν ἐπικέντρους γωνίας ἴσας μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν ἑκάστου ἐπιπέδου παιδεύσεως

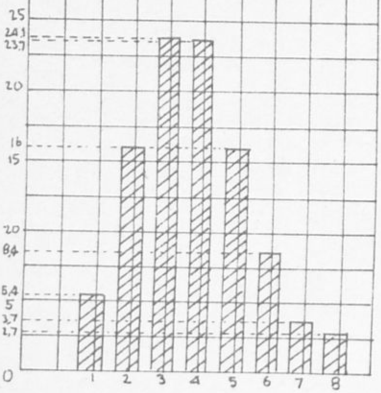


Ἀσκ. 4)

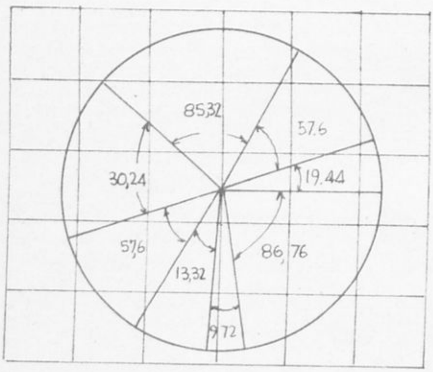
Ποσοστιαία κατανομὴ Ἀστικῶν Νοικοκυριῶν κατὰ μέγεθος νοικοκυριοῦ

Ἀριθ. μελῶν Νοικοκυριοῦ	Ἀριθμὸς νοικοκυριῶν %
1	5,4
2	16,0
3	24,1
4	23,7
5	16,0
6	8,4
7	3,7
8 ἄνω	2,7
Συνολικὸς ἀρ. Νοικοκυριῶν	100,0

Ασκ 4)



Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ πίνακος ἔχει ὡς παραπλεύρως: Ὁ ὁριζόντιος ἄξων παριστᾶ τὸν ἀριθμὸν μελῶν νοικοκυριοῦ, ἐνῶ ὁ κατακόρυφος τὸν ἀριθμὸν νοικοκυριῶν ἐπὶ τοῖς %



Ὁ πίναξ δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ εἰς κυκλικὸν διάγραμμα ὡς ἑξῆς. Ἂν θεωρήσω ὅλην τὴν περιφέρειαν 100 μέρη τότε τὰ

5,4%	ἀντιστοιχοῦν	εἰς	19,44°
16%	»	»	57,6°
24,1%	»	»	86,76°
23,7%	»	»	85,32°
16%	»	»	57,6°
8,4%	»	»	30,24°
3,7%	»	»	13,32°
2,7%	»	»	9,72°

Παίρνομεν οὕτω ἐπὶ τῆς περιφερείας γωνίας ἐπικέντρους ἴσας μὲ αὐτάς.

<u>ΣΕΛΙΣ 193</u> 1) Ἐκ τῆς ἀσκήσεως 1 § 3 ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΖΩΗΣ 25 ΗΛΕΚΤΡ. ΛΑΜΠΤΗΡΩΝ

Διάρκεια εἰς ὥρας	Μέση τιμὴ τάξεως	f
775 - 825	800	2
825 - 875	850	2
875 - 925	900	5
925 - 975	950	4
975 - 1025	1000	3
1025 - 1075	1050	6
1075 - 1125	1100	2
1125 - 1175	1150	1
		$\Sigma f = 25$

Ἔχομεν ὅτι ἀριθμητικὸς μέσος $\bar{x} = \frac{\Sigma f x}{\Sigma f}$ ἤτοι

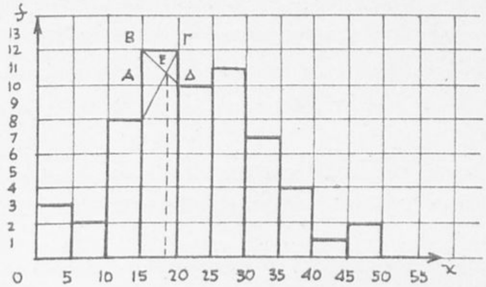
$$\bar{x} = \frac{2\cdot800 + 2\cdot850 + 5\cdot900 + 4\cdot950 + 3\cdot1000 + 6\cdot1050 + 2\cdot1100 + 1150}{25} = \frac{24250}{25}$$

ἄρα $\bar{x} = 970$

Διάμεσος εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν δύο κεντρικῶν τιμῶν, ἤτοι:

$$\text{Διάμεσος} = \frac{950+1000}{2} = 975$$

Ἄσκ. 2) Κατασκευάζομεν τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἄσκησιν 2) σελ. 180 τοῦτο ἔχει ὡς κάτωθι:



Παρατηροῦμεν ὅτι τὴν μεγαλυτέραν συχνότητα ἔχει ἡ τάξις 15-20 ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμήν, συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ ὀρθογωνίου τῆς μεγαλυτέρας συχνότητος μὲ τὰς κορυφὰς Δ καὶ Α ἀντιστοίχως, τῶν γειτονικῶν ὀρθογωνίων καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς Ε χαράσσομεν κάθετον πρὸς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα τὸ ἴχνος της ἐπάνω εἰς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα δίδει τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμήν. Ἤτοι ἐπικρατοῦσα τιμὴ = 18,3.

Ἀσκ. 3) Ἂν καλέσωμεν x τὸν ἀριθμὸν τῶν αὐγῶν τῆς ἑβδόμης ἡμέρας τότε θὰ ἔχωμεν

$$\bar{x} = \frac{347+351+358+345+350+353+x}{\Sigma f} \quad (1)$$

ὅπου $\bar{x} = 350$ ἤτοι ἡ μέση ἡμερησία παραγωγὴ $\Sigma f = 7$. Οὕτω ἡ σχέσις (1) γράφεται·

$$350 = \frac{2104+x}{7} \Longrightarrow$$ ἐπιλύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

$$\Longrightarrow 3507 = 2104 + x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2450 = 2104 + x \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x = 2450 - 2104 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x = 346$$

Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐγῶν τῆς ἑβδόμης ἡμέρας εἶναι 346

Ἄσκ. 4) Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀριθμοῦ 7 εἰς ἕνα ἕκαστον τῶν 1, 6, 8 ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 8, 13, 15. Τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ὁ μέσος εἶναι

$$\bar{x} = \frac{8+13+15}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διαφέρει τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ τῶν 1,6,8 κατά τόσας μονάδας ὅσας προσέθεσα εἰς ἕνα ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.

Ἀσκ. 5) Μετά τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀριθμῶν 1,6,8 ἐπί 7 ἔχομεν τούς ἀριθμούς 7, 42, 56. Τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ὁ μέσος εἶναι $\bar{x}=\frac{7+42+56}{3}=\frac{105}{3}=35$ παρατηροῦμεν ὅτι ἰσοῦται μέ τό μέσον ἀριθμητικόν τῶν 1,6,8 πολλαπλασιασμένον ἐπί τόν ἀριθμόν πού πολλαπλασιάζονται καί οἱ ἀριθμοί 1, 6, 8

Ἀσκ. 6) Ἐφ' ὅσον ὁ $\bar{x}$ εἶναι μέσος τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, x_3 θά εἶναι

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad (1)$$

Ἄν καλέσωμεν $\bar{y}$ τόν μέσον τῶν $\lambda x_1+\mu$, $\lambda x_2+\mu$, $\lambda x_3+\mu$ θά ἔχωμεν

$$\bar{y}=\frac{\lambda x_1+\mu+\lambda x_2+\mu+\lambda x_3+\mu}{3}=\frac{\lambda x_1+\lambda x_2+\lambda x_3+3\mu}{3}=\frac{\lambda(x_1+x_2+x_3)+3\mu}{3}=\frac{\lambda(x_1+x_2+x_3)}{3}+\frac{3\mu}{3}$$

$$=\frac{\lambda(x_1+x_2+x_3)}{3}+\mu$$ Βάσει τῆς (1) αὐτή γράφεται $\bar{y}=\lambda\bar{x}+\mu$

Ἀσκ. 7 Ἐκ τοῦ τύπου $F=\frac{9}{5}C+32$ ὑπολογίζομεν τάς θερμοκρασίας κελσίου εἰς βαθμούς Φαρενάϊτ παρατηροῦμεν ὅτι τά νέα δεδομένα εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda c_1+\mu$, $\lambda c_2+\mu$, $\lambda c_3+\mu$, $\lambda c_4+\mu$, $\lambda c_5+\mu$, $\lambda c_6+\mu$, $\lambda c_7+\mu$, $\lambda c_8+\mu$, $\lambda c_9+\mu$, $\lambda c_{10}+\mu$ ὅθεν $\lambda=\frac{9}{5}$ $\mu=32$ καί $c_1, c_2 \dots c_{10}$ αἱ θερμοκρασίαι εἰς βαθμούς Κελσίου. Ἄν καλέσωμεν $\bar{x}$ τόν μέσον τῶν βαθμῶν Κελσίου θά ἔχωμεν $\bar{x}=\frac{35+38+36+42+41+37+42+37+35+40}{10}=\frac{383}{10}=38,3$

Βάσει τῆς ἀνωτέρω ἀσκ 6) ἄν καλέσωμεν $\bar{y}$ τόν μέσον ἀριθμητικόν τῶν νέων δεδομένων θά ἔχωμεν $\bar{y}=\frac{9}{5}\,38,3+32=68,94+32=100,94$

Ἤτοι ὁ ἀριθμητικός μέσος εἰς βαθμούς Φαρενάϊτ εἶναι 100,94

ΣΕΛΙΣ 199   Ἀσκ. 1)

Εὑρίσκομεν τόν μέσον ἀριθμητικόν τῶν ἡλικιῶν, ἤτοι:

$$\bar{x}=\frac{6+7+8+9+10+11}{6}=\frac{51}{6}=8\frac{3}{6}=8,5$$

ὑπολογίζομεν τάς ἀποκλίσεις

$x-\bar{x}=6-8,5=-2,5$, $7-8,5=1,5$, $8-8,5=0,5$, $9-8,5=0,5$, $10-8,5=1,5$ $11-8,5=2,5$

Ὑπολογίζομεν τά τετράγωνα τῆς ἀποκλίσεως, ἤτοι

$(x-\bar{x})^2=(-2,5)^2=6,25$, $(-1,5)^2=2,25$, $(-0,5)^2=0,25$ $0,5^2=0,25$. $(1,5)^2=2,25$, $(2,5)^2=6,25$

Λαμβάνομεν τό ἄθροισμα $\Sigma f(x-\bar{x})^2=32\cdot 6,25+26\cdot 2,25+25\cdot 0,25+$

$$+20.0,25+20\cdot 2,25+27\,6,25=$$

$$=200+58,50+6,25+5+45+170,75=485,5$$

Ἐκ τοῦ τύπου $\sigma^2\,\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{N}$ (σ^2 = διακύμανσις $N=150$ = = Ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων) ἔχομεν:

$$\text{Διακύμανσις} = \sigma^2=\frac{485,5}{150}=3,27$$

Τυπική ἀπόκλισις $=\sqrt{\sigma^2}=\sigma=\sqrt{3,27}=1,8$.

Ἀσκ. 2. ἔχομεν $\sigma^2=6,25 \Longrightarrow \sigma=\sqrt{6,25} \Longrightarrow \sigma=2,5$ οὕτω κατά τήν § 5·3 τά 95,4% περιέχονται στό διάστημα $20-2\cdot 2,5$, $20+$

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΕΤΡΟΥ Κ. ΡΑΝΟΥ

=ΟΔΟΣ ΠΕΣΜΑΖΟΓΛΟΥ 5ε • ΤΗΛ. 225.175 • ΑΘΗΝΑΙ=

ΒΑΛΕΤΑ Γ.—**Ἀναλύσεις Λογοτεχνικῶν κειμένων.** Ὁλόκληρος ἡ ἐξεταστέα ὕλη διὰ τὴν ἀπόκτησιν τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ Ἀπολυτηρίου, μετὰ τῶν κειμένων. Ἔκδοσις 1967.

ΒΑΛΕΤΑ Γ.—**Ἐπίτομος Ἱστορία τῆς Νεοελληνικῆς Λογοτεχνίας.** Ἔκδοσις 1966.

» **Στοιχεῖα τῆς Νεοελληνικῆς Λογοτεχνίας.** Ἔκδ. 1967.

ΓΕΩΡΓΙΑΚΩΔΗ – ΝΙΚΗΤΑ : Μαθηματικὰ – Ἀσκήσεις μετὰ Λύσεων Α΄ - Γ΄.

» » ΚΑΡΑΝΑΣΤΑΣΗ : Μαθηματικὰ Β΄ ἔκδοση 1968.

ΔΑΝΤΗ ΞΕΝ.—**Ἡ Δημοτικὴ καὶ ἡ ὀρθογραφία της.** Ὅλοι οἱ ὀρθογραφικοὶ κανόνες μετὰ ὀρθογρ. γυμνασμάτων.

ΔΑΝΤΗ ΞΕΝ.—**Πρακτικὸν σύστημα Ὀρθογραφίας.** Καθαρευούσης καὶ Δημοτικῆς. 6η ἔκδοσις.

ΘΕΜΕΛΗ Γ.—**Διδασκαλία Νέων Ἑλληνικῶν.**

ΚΑΡΤΣΑΚΛΗ ΑΛ.—**Συντακτικὸν Καθαρευούσης καὶ Δημοτικῆς.** Ἔκδοσις 1967.

» **Ἐτυμολογικόν.** Ἔκδοσις 1967.

ΚΩΤΣΑΔΑΜ Ι.—**Ἀνάλυσις Ἰλιάδας τόμ. 1ος Ραψ. Α-Κ.** ἐκδ. 1967.

» » » » **2ος Ραψ. Λ-Ω.** ἐκδ. 1967.

» » **Ὀδύσσειας » 1ος Ραψ. Α-Ι.** ἐκδ. 1967.

» » » » **2ος Ραψ. Κ-Ω.** ἐκδ. 1967.

» **Ὁ Μάρτυρας τῆς Ἀλαμάνας.** Θανάσης Διάκος (θεατρ.). Ἔκδοσις 1967.

ΚΑΒΡΟΥΛΑΚΗ Ν.—**Οἱ ρίζες τῶν ριζίτικων τραγουδιῶν.** Ἔκδ. 1967.

ΝΙΚΟΛΙΤΣΑ Γ.—**Γεωδαισία.** Ἔκδοσις 1967.

ΡΑΝΟΥ Π.—**Λεξικὸν Γαλλοελληνικὸν καὶ Ἑλληνογαλλικόν.** Δεμ.

» » **Ἀγγλοελληνικὸν καὶ Ἑλληνοαγγλικόν.** Δεμ.

ΦΛΩΡΟΥ ΑΘ.—**Ὑποδειγματικὴ διδασκαλία Νέων Ἑλληνικῶν.**

ΤΙΜΗ 30