

002
ΚΛΣ
ΣΤ3
44

4 2. ΜΗΛ
Μπαρτζαλάς (X)

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩΙ Π.Σ.Π.Α.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΠΡΟΣ ΑΥΤΑ ΣΧΟΛΩΝ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ",
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38-ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΑ-38
1946

002
κ02
ΣΤ3
44

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγίδα τοῦ βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

Μαργαρίτα



ΤΥΠΟΙΣ Ι. Μ. ΣΚΑΖΙΚΗ (ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΕΚΔΟΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ Α.Ε.)
ΑΘΗΝΑΙ, ΠΑΠΑΔΙΑΜΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ 44

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Πράξεις ἐπὶ τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

Ι. Πρόσθεσις.

Σελὶς 10

$$1/2. (+7) + (+10) = +17$$

$$(-13) + (-7) = -20$$

$$(+57) + (-100) = -43$$

$$(-100) + (+21) = -79$$

$$0 + (-57) = -57$$

$$\left(+\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{2}{8}\right) = +\frac{1}{8}$$

$$\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\left(-2\frac{1}{4}\right) + \left(+1\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\left(-9\frac{3}{4}\right) + \left(+7\frac{5}{12}\right) = -2\frac{4}{12}$$

$$(+3,15) + (-2,50) = +0,65$$

$$(+2,125) + (-4,625) = -2,5$$

$$(-9) + (+2,75) = -6,25$$

$$(+6,8) + (-3,975) = +2,825$$

$$\left(+6\frac{1}{2}\right) + (-4,75) = +1,75$$

Σελὶς 13

$$2/3. (+5) + (+9) + (+13) + (+8) + (+25) + (+34) = +94$$

$$(-7) + (-2) + (-10) + (-6) + (-12) + (-18) = -55$$

$$(+6) + (-23) + (-17) + (+45) + (-50) + (+55) = (+106) + (-90) = +16$$

$$(+2,6) + (-1,4) + (-3,8) + (+1,8) + (+0,8) = (+5,2) + (-5,2) = 0$$

$$\left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{11}{30}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{13}{15}\right) =$$

$$= \left(+\frac{25}{30}\right) + \left(-\frac{21}{30}\right) + \left(-\frac{11}{30}\right) + \left(+\frac{18}{30}\right) + \left(-\frac{26}{30}\right) =$$

$$= \left(+\frac{43}{30}\right) + \left(-\frac{58}{30}\right) = -\frac{15}{30}$$

3/4. Αἱ ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς παρίστανται διὰ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $+13^{\circ}$, $+8^{\circ}$, $+11\frac{1^{\circ}}{2}$, αἱ δὲ κάτωθεν αὐτοῦ διὰ τῶν ἀρνητικῶν -2° , -5° , -6° .

4/6. Ἡ ἀρχὴ τοῦ χρόνου παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 0· θὰ ἔχωμεν δὲ

16/24. α') $(-5+7) \cdot 7 = 2 \cdot 7 = 14 \quad \eta \quad = -5 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 14$
 β') $(8-17) \cdot (-6) = (-9) \cdot (-6) = 54 = 8(-6) + (-17)(-6)$
 γ') $(-2+7-3) \cdot (-5) = 2 \cdot (-5) = -10 =$
 $= (-2) \cdot (-5) + 7 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-5) = 10 - 35 + 15$
 δ') $(-2+6) \cdot (5-7) = 4 \cdot (-2) = -8 =$
 $= (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-7) + 6 \cdot 5 + 6 \cdot (-7) = -10 + 14 + 30 - 42$
 ε') $(-3, 1+8, 5) \cdot (-2, 2-5, 4) = 5, 4 \cdot (-7, 6) = -41, 04 \quad \eta$
 $= (-3, 1) \cdot (-2, 2) + (-3, 1) \cdot (-5, 4) + 8, 5 \cdot (-2, 2) + 8, 5 \cdot (-5, 4) =$
 $= 6, 82 + 16, 74 - 18, 70 - 45, 90 = -41, 04$
 ζ') $(3-4-5) \cdot 6 + (2-6+7) \cdot (-9) = -6 \cdot 6 + 3 \cdot (-9) = -63 =$
 $= 3 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 9 + 6 \cdot 9 - 7 \cdot 9 = 18 - 24 - 30 - 18 + 54 - 63$

Σελις 22

17/25. $(+3) \cdot (-5) \cdot (-8) \cdot (+2) = +(3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2) = 240$
 $(-4) \cdot (-5) \cdot 8 \cdot (-6) = -(4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 6) = -960$
 $(-10) \cdot (-2) \cdot 9 \cdot (-3) \cdot (-1) = 540$
 $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) =$
 $= -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{24}$
 $1 \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot 2 \frac{3}{4} =$
 $= +\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{11}{4}\right) = \frac{55}{32} = 1 \frac{23}{32}$
 $(-1) \cdot (-2) \cdot (-0,3) \cdot (-0,5) \cdot (-4) = -1,2$
 $(-15) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 0 \cdot (-7,25) \cdot 125 = 0$
 $(-1,5) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot 1 \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot (-0,2) =$
 $= +(1,5 \cdot 0,6 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 0,2) = 1,08$

IV. Διαίρεσις.

Σελις 23

18/27. $150 : 25 = 6$ $9 : (-1,2) = -7,5$
 $(-240) : (-15) = 16$ $(-3,4) : (-1,5) = 2 \frac{4}{15}$
 $216 : (-18) = -12$ $0,4 : (-0,15) = -2 \frac{2}{3}$
 $(-1001) : (-91) = 11$ $(-2,5) : \frac{1}{2} = -5$
 $\left(-2 \frac{1}{4}\right) : 1 \frac{1}{9} = -\frac{81}{40}$ $\left(-\frac{3}{4}\right) : (-0,5) = 1,5$

19/28.

$$2.(-6):(-12)=(-12):(-12)=1$$

$$(-30):(-3).(-5)=(-30):15=-2$$

$$5.(-7):(-0,35)=(-35):-0,35=100$$

$$(-600):2.(-3).(-5)=(-600):30=-20$$

$$2.(-3).(-5):(-600)=30:(-600)=-\frac{1}{20}$$

$$(-2)(-9):(-6).3.15=18:(-18).15=-\frac{18}{18.15}=-\frac{1}{15}$$

20/29. α') 'Ο αριθμός, με τον οποίον πρέπει να πολλαπλασιάσωμεν τὸν -25 , διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν 225 , εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 225 διὰ τοῦ -25 · διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην -25 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 225 . Ἐπειδὴ δὲ $225:(-25)=-9$, ἔπεται ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ -9 .

β') Ὅμοίως εὗρισκομεν καὶ τοὺς ἄλλους ζητούμενους ἀριθμούς, εἶναι δὲ οὗτοι οἱ:

$$(-425):(-17)=25$$

$$(-1):\frac{1}{3}=-3$$

$$(-416):32=-13$$

$$(-0,016):1,6=-0,01$$

$$5:(-75)=-\frac{1}{15}$$

$$0,12:-\frac{3}{5}=-0,2$$

21/30.

$$(36-45-18+9):9=(-18):9=-2$$

$$(56-64-80-120):(-8)=(-208):(-8)=26$$

$$(-120):(7-12+11-21)=(-120):(-15)=8$$

$$(-18):(2-0,2)=(-18):(1,8)=-10$$

22/31. Ἀφοῦ εἰς $5'$ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τοῦ Β κατὰ -1 μέτρον, εἰς ἡμίσειαν ὥραν, ἦτοι εἰς $30'$, θὰ ἀπομακρυνθῇ ἀπ' αὐτοῦ $-1.6=-6$ μ. (διότι $30':5'=6$). Ἐπομένως θὰ ἀπέχη ἀπὸ τοῦ Α 18 μ. $+(-6$ μ.) $=12$ μέτρα.

23/32. Ὅταν τὸ κινητὸν θὰ ἀπέχη ἀπὸ τοῦ Α -12 μέτρα, θὰ ἀπέχη ἀπὸ τοῦ Β $-18-12=-30$ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ εἶναι $-\frac{1}{5}$ τοῦ μέτρου εἰς $1'$, ἔπεται ὅτι τὰ -30 μέτρα θὰ τὰ διατρέξῃ εἰς $(-30):\left(-\frac{1}{5}\right)=150'$ ἤτοι εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας.

Υ. Δυνάμεις.

Σελίς 25

$$24/33. 1^2=1=(-1)^2$$

$$1^4=1=(-1)^4$$

$$2^2=4=(-2)^2$$

$$2^4=16=(-2)^4$$

$$3^2=9=(-3)^2$$

$$3^4=81=(-3)^4$$

$$4^2 = 16 = (-4)^2$$

$$4^4 = 256 = (-4)^4$$

$$5^2 = 25 = (-5)^2$$

$$5^4 = 625 = (-5)^4$$

$$(\pm 1)^3 = \pm 1$$

$$(\pm 1)^5 = \pm 1$$

$$\delta\eta\lambda\alpha\delta\eta \quad (+1)^3 = +1, (+1)^5 = +1$$

$$(\pm 2)^3 = \pm 8$$

$$(\pm 2)^5 = \pm 32$$

$$(-1)^3 = -1, (-1)^5 = -1$$

$$(\pm 3)^3 = \pm 27$$

$$(\pm 3)^5 = \pm 243$$

$$(\pm 4)^3 = \pm 64$$

$$(\pm 4)^5 = \pm 1024$$

$$(\pm 5)^3 = \pm 125$$

$$(\pm 5)^5 = \pm 3125$$

25/34.

$$(+6)^3 = 36$$

$$(-6)^3 = 36$$

$$-6^2 = -36$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^6 = -\frac{32}{243}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{64}$$

$$0,1^2 = 0,01$$

$$(-0,2)^5 = -0,00032$$

$$(-0,02)^2 = 0,0004$$

$$(-0,03)^3 = -0,000027$$

26/36.

$$(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

$$(-1)^2 - (-1)^3 + (-1)^4 - (-1)^5 = 1 - (-1) + 1 - (-1) = 4$$

$$(-1)^2 + (-2)^3 + (-3)^4 + (-4)^5 = 1 + (-8) + 81 + (-1024) = -950$$

27/37.

$$(+2)^3 + (-3)^2 = 8 + 9 = 17$$

$$(-5)^3 - (+4)^2 = -125 - 16 = -141$$

$$3^3 + (-3)^2 = 27 + (-27) = 0$$

$$3^3 - (-3)^2 = 27 - (-27) = 54$$

$$2^4 + (-2)^4 = 16 + 16 = 32$$

$$2^4 - (-2)^4 = 16 - (+16) = 0$$

28/38. α)

$$2^4 \cdot 4^2 = 16 \cdot 16 = 256$$

$$\beta) 5^2 \cdot 2^4 = 125 \cdot 16 = 2000$$

$$2^3 \cdot 5^3 = 32 \cdot 25 = 800$$

$$2^5 \cdot 10^3 = 32 \cdot 1000 = 32000$$

$$(-3)^3 \cdot (-2)^2 = 9 \cdot (-8) = -72$$

$$(-7)^2 \cdot (-1)^3 = -343 \cdot 1 = -343$$

$$\gamma) (-0,2)^2 \cdot (-3)^3 = 0,04 \cdot (-27) = -1,08$$

$$(0,1)^2 \cdot (-0,4)^3 = 0,01 \cdot (-0,064) = -0,00064$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16} = -\frac{1}{6}$$

Σελις 27

29/39. $2^4 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 = 64$ $\eta = 2^6 = 64$

$$(-3)^3 \cdot (-3)^3 = 9 \cdot (-27) = -243 \quad \eta = (-3)^6 = -243$$

$$(10^2)^3 = (100)^3 = 1000000 \quad \eta = 10^6 = 1000000$$

$$[(-2)^3]^2 = (-8)^2 = 64 \quad \eta = (-2)^6 = 64$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 30^2 = 900 \quad \eta = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$

$$[(-3) \cdot (-5)]^2 = 15^2 = 225 \quad \eta = (-3)^2 \cdot (-5)^2 = 9 \cdot 25 = 225$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81} \quad \eta = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{27}{125} \quad \tilde{\eta} = -\frac{3^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$$

$$3^6 : 3^4 = 729 : 81 = 9 \quad \tilde{\eta} = 3^{6-4} = 3^2 = 9$$

$$(-5)^4 : (-5)^2 = 625 : 25 = 25 \quad \tilde{\eta} = (-5)^2 = 25$$

$$(-2)^7 : (-2)^3 = (-128) : (-8) = 16 \quad \tilde{\eta} = (-2)^4 = 16$$

$$30/40. \text{ Έπειδὴ } 9=3^2 \text{ καὶ } 4=2^2 \text{ ἔχομεν } 9^3=(3^2)^3=3^6 \text{ καὶ } 4^4=(2^2)^4=2^8$$

$$\text{Εἶναι } 125^2=(5^3)^2=5^6 \text{ καὶ } 8^4=(2^3)^4=2^{12}.$$

$$31/42. \quad \alpha') \quad 25^1=25$$

$$\beta') \quad 48^0=1$$

$$(-15)^1=-15$$

$$(-59)^0=1$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right)^0=1$$

$$(-2)^5 : (-2)^4 = (-2)^{5-4} = (-2)^1 = -2$$

$$(-3)^4 : (-3)^4 = (-3)^{4-4} = (-3)^0 = 1$$

$$\gamma') \quad (85)^0 \cdot (-42)^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\delta') \quad 15^0 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(-5)^1 \cdot (90)^0 = (-5) \cdot 1 = -5$$

$$\left(15 \cdot \frac{3}{11}\right)^1 = 1$$

$$(7^0)^5 = 1^5 = 7^0 = 1$$

$$15^0 \cdot \frac{3^0}{11} = 1 \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{11}$$

$$(7^5)^0 = 7^0 = 1$$

$$15^0 \cdot \frac{3}{11^5} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$$

$$\epsilon') \quad (-1)^6 \cdot (-1)^0 \cdot (-8)^0 = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

$$(-9)^1 \cdot (5-7)^0 \cdot (5-7)^1 = (-9) \cdot 1 \cdot (-2) = 18$$

Σελίς 28

$$32/43. \quad \alpha') \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta') \quad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$12^{-1} = \frac{1}{12^1} = \frac{1}{12}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

$$(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5} = \frac{1}{-243} = -\frac{1}{243}$$

$$\gamma') \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$33/34. \alpha') 2^2 \cdot 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^{2-2} = 2^0$$

$$5^{-3} \cdot 5^8 = 5^{-3+3} = 5^0$$

$$3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{5-2} = 3^3$$

$$7^2 \cdot 7^{-4} = 7^{2-4} = 7^{-2}$$

$$\gamma') 2^5 : 2^7 = 2^{5-7} = 2^{-2}$$

$$2^{-5} : 2^{-7} = 2^{-5-(-7)} = 2^{-5+7} = 2^2$$

$$\beta') (3^5)^{-2} = 3^{-10}$$

$$(2^{-3})^2 = 2^{-6}$$

$$(5^{-2})^{-3} = 5^6$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-3}$$

$$2^{-5} : 2^7 = 2^{-5-7} = 2^{-12}$$

$$5^{-9} : 5^{-9} = 5^{-9-(-9)} = 5^0$$

Σελίς 31

$$34/45. \alpha') -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$$

$$\beta') -1, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, 5, 7$$

Σελίς 36

35/47. 1) Ὡς πρὸς α εἶναι κατὰ σειρὰν τοῦ 1ου, 2ου, 3ου καὶ 0 βαθμοῦ.

2) Ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα εἶναι κατὰ σειρὰν 3ου, 4ου, 9ου καὶ 6ου βαθμοῦ.

3) Οἱ συντελεσταὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 3, -5, -1 καὶ $-\frac{3}{7}$.

36/48. 1) 2ου βαθμοῦ πρὸς τὸ χ

2) 1ου > καὶ πρὸς τὸ χ καὶ πρὸς τὸ ψ

3) 4ου > πρὸς τὸ α καὶ 5ου πρὸς τὸ β

4) 3ου > πρὸς τὸ χ καὶ ψ.

Ἐκ τούτων δὲ τὸ 2ον καὶ 4ον εἶναι ὁμογενῆ.

Ἀριθμητικαὶ τιμαὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Σελίς 37

$$37/49. 1) \chi - 3\psi = 10 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

$$2) \chi + 3\psi = 10 + 3 \cdot (-4) = 10 - 12 = -2$$

$$3) \chi^2 - 9\psi = (-3)^2 - 9 \cdot (-2) = 9 + 18 = 27$$

$$4) 2\chi^2 + 3\psi^2 = 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-4)^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 16 = 2 + 48 = 50$$

$$5) \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot (-3) + (-3)^2 = 49 - 42 + 9 = 16$$

$$6) \alpha^3 + 8 = (-5)^3 + 8 = -125 + 8 = -117$$

$$7) \alpha^3 + \beta^3 = 1^3 + (-6)^3 = 1 + (-216) = -215$$

$$8) (\alpha - \beta)^3 = (-4 - 1)^3 = (-5)^3 = -125$$

$$9) \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 6^3 + 3 \cdot 6^2 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = 216 - 216 + 72 - 8 = 64$$

$$10) \alpha^4 - \beta^4 = 4^4 - (-3)^4 = 256 - (+81) = 256 - 81 = 175$$

$$11) \alpha^4 + 5\beta\gamma = 3^4 + 5 \cdot (-4) \cdot 4 = 81 - 80 = 1$$

$$12) 8\alpha^2 - 9\beta^2 - 11\gamma^2 + 6\alpha\beta\gamma = 8 \cdot 1^2 - 9 \cdot 3^2 - 11 \cdot (-5)^2 + 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-5) = \\ = 8 - 81 - 275 - 90 = -438$$

$$13) 3\chi - 8\psi = 3 \cdot 3 - 8 \cdot \frac{1}{4} = 9 - 2 = 7$$

$$14) 9\chi - 5\psi = 9 \cdot \frac{1}{5} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{9}{5} + \frac{5}{9} = \frac{106}{45}$$

$$15) (2\psi + 3\omega)^2 = \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 = \\ = \left(-\frac{2}{2} - \frac{3}{3}\right)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$16) (\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = (-9 - 5)^2 - (-9 + 5)^2 = (-14)^2 - (-4)^2 = \\ = 196 - 16 = 180$$

$$17) (\alpha + \beta - \gamma)^2 + (\beta + \gamma - \alpha)^2 = (2 - 2 - 2)^2 + (-2 + 2 - 2)^2 = \\ = (-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$$

$$18) \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha\beta}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{6} - \\ - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$$

$$19) \Delta \iota \alpha \quad \nu = -2 \quad \epsilon \iota \nu \alpha \iota \quad \frac{(-2) \cdot (-2+1) \cdot (-4+1)}{6} = \frac{(-2) \cdot (-1) \cdot (-3)}{6} = -1$$

$$> \quad \nu = -1 \quad > \quad \frac{(-1) \cdot (-1+1) \cdot (-2+1)}{6} = \frac{(-1) \cdot 0 \cdot (-1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$> \quad \nu = 0 \quad > \quad \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (0+1)}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$> \quad \nu = 1 \quad > \quad \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

$$> \quad \nu = 2 \quad > \quad \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2 \cdot 2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

$$> \quad \nu = 3 \quad > \quad \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (3 \cdot 2+1)}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$$

$$20) \Delta \iota \alpha \quad \chi = -\frac{1}{2} \quad \epsilon \iota \nu \alpha \iota \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 2 = 5$$

$$> \quad \chi = -\frac{1}{3} \quad > \quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{3} + 2 = \\ = 3 \frac{8}{9}$$

$$\text{Διὰ } \chi=0 \quad \epsilon\iota\nu\alpha\iota \quad 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$> \chi = \frac{2}{3} \quad > \quad 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 2 \cdot \frac{4}{9} - \frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{9}$$

$$> \chi = \frac{4}{5} \quad > \quad 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 5 \cdot \frac{4}{5} + 2 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 4 + 2 = -\frac{18}{25}$$

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

I. Πρόσθεσις.

Σελὶς 40

38/50. 1)
$$\begin{array}{r} +3\alpha \\ +9\alpha \\ +12\alpha \end{array} \quad \begin{array}{r} -6\beta \\ -7\beta \\ -13\beta \end{array} \quad \begin{array}{r} +8\alpha^2 \\ -\alpha^2 \\ +1\alpha^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -7\chi^2 \\ +\chi^2 \\ -6\chi^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -5\chi^3 \\ +2\chi^3 \\ -3\chi^3 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{4}\alpha \\ \frac{3}{4}\alpha \end{array} \quad \begin{array}{r} -\frac{12}{5}\beta \\ \frac{7}{10}\beta \\ -\frac{17}{10}\beta \end{array} \quad \begin{array}{r} -1\frac{1}{2}\alpha^2 \\ 2\frac{1}{4}\alpha^2 \\ \frac{3}{4}\alpha^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -\frac{2}{3}\chi^2 \\ -\frac{1}{2}\chi^2 \\ -\frac{7}{6}\chi^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -\frac{5}{6}\chi^3 \\ \frac{4}{5}\chi^3 \\ -\frac{1}{30}\chi^3 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} \alpha \\ \beta \\ \alpha+\beta \end{array} \quad \begin{array}{r} -\alpha \\ -\beta \\ -\alpha-\beta \end{array} \quad \begin{array}{r} \alpha^2 \\ -\beta^2 \\ \alpha^2-\beta^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\chi^2 \\ -3\psi^2 \\ 2\chi^2-3\psi^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} -5\chi^3 \\ 7\psi^3 \\ -5\chi^3+7\psi^3 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} \alpha^2-1 \\ \alpha^2+1 \\ 2\alpha^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \beta^2+8 \\ 2\beta^2-3 \\ 3\beta^2+5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5\mu^3-7 \\ 3-2\mu^3 \\ 3\mu^3-4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8\nu^4-9 \\ 9-8\nu^4 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\lambda^2-3 \\ 5-2\lambda^2 \\ 2 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 8\alpha^3-3\beta^2+3\gamma-4 \\ 5\alpha^3-4\beta^2-5\gamma+9 \\ 13\alpha^3-7\beta^2-2\gamma+5 \end{array} \quad \begin{array}{r} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ 2\alpha^3+6\alpha\beta^3 \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} 8\chi^3-7\chi^2+5\chi-1 \\ -5\chi^3+\chi^2-2\chi+2 \\ 3\chi^3-5\chi^2-7\chi+1 \\ -5\chi^3+4\chi^2+4\chi-7 \\ \chi^3-7\chi^2-4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6\chi-\psi+3\varphi-5\omega \\ -5\chi+3\psi-7\varphi+4\omega \\ -3\chi+4\psi-\varphi-\omega \\ 4\chi-6\psi+5\varphi+2\omega \\ 2\chi \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{3}\beta + \frac{2}{5}\gamma + \delta \\ \frac{1}{4}\alpha - \frac{5}{6}\beta - \frac{3}{5}\gamma - \frac{3}{4}\delta \\ \frac{3}{4}\alpha - \frac{9}{6}\beta - \frac{1}{5}\gamma + \frac{1}{4}\delta \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\frac{3}{4}\chi - 1\frac{1}{5}\psi - 2\frac{2}{3}\varphi + 2\frac{1}{3}\omega \\ -1\frac{1}{4}\chi + 2\frac{3}{10}\psi + \frac{8}{3}\varphi - 3\frac{1}{2}\omega \\ \frac{6}{4}\chi + \frac{11}{10}\psi - \frac{7}{6}\omega \end{array}$$

II. Ἀφαίρεσις.

Σελίς 42

39/51.	1)	$\frac{+9\chi}{+5\chi}$	$\frac{+7\chi^2}{-3\chi^3}$	$\frac{-9\alpha^2}{-10\alpha^2}$	$\frac{-5\beta^3}{+3\beta^3}$	$\frac{-11\lambda^4}{-4\lambda^4}$
ἦτοι		$\frac{9\chi-5\chi}{4\chi}$	$\frac{7\chi^2+3\chi^2}{10\chi^2}$	$\frac{-9\alpha^2+10\alpha^2}{\alpha^2}$	$\frac{-5\beta^3-3\beta^3}{-8\beta^3}$	$\frac{-11\lambda^4+4\lambda^4}{-7\lambda^4}$
2)		$\frac{2\mu}{3\nu}$	$\frac{5\mu}{-4\nu}$	$\frac{-2\mu}{-3\nu}$	$\frac{2\mu^3+1}{\mu^2}$	$\frac{3\mu^3}{\mu^2-1}$
		$\frac{2\mu-3\nu}{2\mu-3\nu}$	$\frac{5\mu+4\nu}{5\mu+4\nu}$	$\frac{-2\mu+3\nu}{-2\mu+3\nu}$	$\frac{\mu^2+1}{\mu^2+1}$	$\frac{2\mu^2+1}{2\mu^2+1}$
3)		$\frac{\chi^2-1}{\psi^2+2}$	$\frac{\chi^2-4}{4-\psi^2}$	$\frac{3\chi^3-4\psi^2}{3\psi^2-4\chi^3}$	$\frac{5\chi^3-2\psi^2}{2\psi^2+5\chi^3}$	$\frac{5\chi^3+2\psi^2}{5\psi^2+2\chi^3}$
		$\frac{\chi^2-\psi^2-3}{\chi^2+\psi^2-8}$	$\frac{\chi^2+\psi^2-8}{7\chi^3-7\psi^2}$	$\frac{-4\psi^3}{-4\psi^3}$	$\frac{3\chi^3-3\psi^2}{3\chi^3-3\psi^2}$	
4)		$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}$	$\frac{6\alpha^3-8\beta^2+5\gamma-9}{\alpha^3-5\beta^2-4\gamma+1}$	$\frac{4\alpha^3-5\beta^3+7\gamma^3-2\delta^3}{5\alpha^3+\beta^3-3\gamma^3-2\delta^3}$	$\frac{-\alpha^3-6\beta^3+10\gamma^3}{-4\alpha\beta+2\beta^2}$	
			$\frac{5\alpha^3-3\beta^2+9\gamma-10}{5\alpha^3-3\beta^2+9\gamma-10}$			

- 40/52. 1) $\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ 2) $\chi-2\psi+\chi-3\psi=2\chi-5\psi$
 3) $5\alpha-2\alpha-3\beta=3\alpha-3\beta$ 4) $10\alpha-3\alpha+5\beta=7\alpha+5\beta$
 5) $\alpha+\beta-\gamma-\alpha+\beta-\gamma=2\beta-2\gamma$ 6) $9\alpha-5\beta-3\alpha-4\beta-\alpha+7\beta=5\alpha-2\beta$

- 41/53. 1) $\chi^2-\psi^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=(\chi^2-\psi^2)-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$
 2) $\alpha^3+\beta^3+5\chi\psi-3\chi^2+7\psi^2=(\alpha^3+\beta^3)-(3\chi^2-5\chi\psi-7\psi^2)$
 3) $8\alpha^3-5-\chi^2-\chi\psi-\psi^2=(8\alpha^3-5)-(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)$

42/54. 1) Τὴν διαφορὰν $5\chi-(5\chi+2\psi)$, ἦτοι $5\chi-5\chi-2\psi$ καὶ πράγματι, διότι εἶναι $5\chi+2\psi+(-2\psi)=5\chi+2\psi-2\psi=5\chi$

3) Τὴν διαφορὰν $3\psi+5-(2\chi+3\psi-5)$, ἦτοι $3\psi+5-2\chi-3\psi+5=-2\chi+10$

III. Πολλαπλασιασμός.

Σελίς 44

$$43/57. \quad 2\alpha^3 \cdot 5\alpha^2 = 10\alpha^5 \quad -5\alpha \cdot \alpha^4 = -5\alpha^5 \quad -2\alpha^2 \cdot 6\beta^3 = -12\alpha^2\beta^3$$

$$\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{2\beta}{3} = \frac{\alpha\beta}{2}, \quad \frac{2\chi^2\psi}{5} \cdot \left(-\frac{5\psi^2}{2}\right) = -\chi^2\psi^3, \quad \frac{4\alpha^2\beta^2}{9} \cdot \left(-\frac{9\alpha\beta}{11}\right) = -\frac{4\alpha^3\beta^3}{11}$$

$$3\alpha^2\chi \cdot 4\alpha^3\chi^3\psi = 12\alpha^5\chi^2\psi \quad 0,5\chi\psi(-2\chi\psi) = -\chi^2\psi^2$$

$$-0,4\alpha\beta \cdot (-0,5\alpha\beta\gamma) = 0,2\alpha^2\beta^2\gamma$$

$$\begin{aligned}
 44/58. & (-\alpha)(-\beta)(-\gamma) = -\alpha\beta\gamma & (-\alpha)(-\beta)(-\gamma)(-\delta) = \alpha\beta\gamma\delta \\
 & 2\alpha.\beta\beta^2.(-\alpha\gamma^2) = -6\alpha^2\beta^2\gamma^2 & 6\chi^3.(-2\alpha\chi^2).(-3\alpha\chi) = 36\alpha^3\chi^6 \\
 & -\frac{2}{3}\alpha\beta^2.\left(-\frac{3}{4}\beta^2\chi\right).\left(-\frac{4}{5}\alpha\chi\right) = -\frac{2}{5}\alpha^2\beta^4\chi^2 \\
 & -10\alpha\beta.(-0,2\beta\gamma).(-0,5\gamma\delta) = -\alpha\beta^2\gamma^2\delta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45/59. & (5\alpha)^2 = 25\alpha^2 & (3\alpha\beta)^2 = 9\alpha^2\beta^2 & (-4\chi\psi)^2 = 16\chi^2\psi^2 \\
 & (-\alpha^2)^2 = \alpha^4 & (5\alpha^2\beta)^2 = 25\alpha^4\beta^2 & (-3\alpha^2\beta^2)^2 = 9\alpha^4\beta^4 \\
 & (2\alpha)^3 = 8\alpha^3 & (3\alpha\beta)^3 = 27\alpha^3\beta^3 & (-2\alpha\beta)^3 = -8\alpha^3\beta^3
 \end{aligned}$$

Σελίς 45

$$\begin{aligned}
 46/60. & (7\chi - 4).\chi = 7\chi^2 - 4\chi \\
 & (3\chi - 2\psi).5\chi\psi = 15\chi^2\psi - 10\chi\psi^2 \\
 & (\alpha^3 - \beta^3).(-2\alpha\beta) = -2\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^3 \\
 & (\alpha\chi^2 - \beta\chi + \gamma).(-2\psi) = -2\alpha\chi^2\psi + 2\beta\chi\psi - 2\gamma\psi \\
 & (\alpha^4 - 5\alpha^3\beta + 6\alpha\beta^3 - \beta^4).(-4\alpha\beta) = -4\alpha^5\beta + 20\alpha^4\beta^2 - 24\alpha^3\beta^4 + 4\alpha\beta^5 \\
 & (15\alpha^2 - 25\alpha + 10).\frac{1}{5}\alpha = 3\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2\alpha \\
 & \left(\frac{1}{3}\chi^2 - \frac{1}{2}\chi - \frac{1}{6}\right).12\chi^2\psi = 4\chi^3\psi - 6\chi^2\psi - 2\chi\psi \\
 & \left(\frac{3}{5}\chi^5 + \frac{2}{3}\chi^2 - \frac{1}{15}\chi\right).15\chi^2 = 9\chi^7 + 10\chi^4 - \chi^5 \\
 & \left(\frac{2}{3}\chi^2 - \frac{3}{5}\psi^2\right).\frac{2}{7}\chi\psi = \frac{4}{21}\chi^3\psi - \frac{6}{35}\chi\psi^3 \\
 & (15\chi^2 - 10\chi\psi + 25\psi^2).(0,2\chi\psi) = 3\chi^3\psi - 2\chi^2\psi^2 + 5\chi\psi^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 47/61. & 1) 5\chi^2 - 3\chi\psi + 3\psi^2 - 5\chi\psi = 5\chi^2 - 8\chi\psi + 3\psi^2 \\
 & 2) 9\chi^3 - 4\chi\psi - 2\psi^2 + 7\chi\psi = 9\chi^3 + 3\chi\psi - 2\psi^2 \\
 & 3) 4\alpha\gamma - 5\beta\gamma + 2\alpha\beta - 3\alpha\gamma - 7\beta\gamma + 3\alpha\beta = \alpha\gamma - 12\beta\gamma + 5\alpha\beta
 \end{aligned}$$

Σελίς 49

$$\begin{aligned}
 48/63. & (\chi^2 + \chi + 2)(\chi + 1) = \chi^3 + 2\chi^2 + 3\chi + 2 \\
 & (\psi^2 - 9\psi + 4)(-\psi + 5) = -\psi^3 + 14\psi^2 - 49\psi + 20 \\
 & (\varphi^2 + 3\varphi\omega + 9\omega^2)(\varphi - 3\omega) = \varphi^3 - 27\omega^3 \\
 & (\alpha^3 - 5\alpha - 6)(\alpha - 4) = \alpha^4 - 9\alpha^2 + 14\alpha + 24 \\
 & (1 + 2\beta - 3\beta^2)(1 - 5\beta) = 1 - 3\beta - 13\beta^2 + 15\beta^3 \\
 & (2\mu^2 + 4\mu\nu - 6\nu^2)(3\mu - 4\nu) = 6\mu^3 + 4\mu^2\nu - 34\mu\nu^2 + 24\nu^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 49/64. & (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) = \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2 \\
 & (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 2\alpha + 5) = \alpha^4 + 3\alpha^3 + 8\alpha^2 + 7\alpha + 5
 \end{aligned}$$

$$(\beta^2+2\beta+2)(\beta^2-2\beta+2)=\beta^4+4$$

$$(\chi^2+2\chi\psi+3\psi^2)(\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2)=\chi^4+2\chi^2\psi^2+9\psi^4$$

$$(\psi^2+4\psi\varphi-2\varphi^2)(2\psi^2-\psi\varphi+\varphi^2)=2\psi^4+7\psi^2\varphi-7\varphi^2\psi^2+6\psi\varphi^3-2\varphi^4$$

$$(5-\omega-\omega^2)(3+2\omega-\omega^2)=15+7\omega-10\omega^2-\omega^3+\omega^4$$

$$50/65. 1) (\chi^3+2\chi-3)(\chi^3-3\chi+7)=\chi^6-\chi^4+2\chi^3-6\chi^2+19\chi-15$$

$$2) \text{Ἐπαλήθευσις διὰ } \chi=2$$

$$\chi^3+2\chi-3=2^3+2\cdot 2-3=8+4-3=9$$

$$\chi^3-3\chi+5=2^3-3\cdot 2+5=8-6+5=7$$

$$\begin{aligned}\chi^6-\chi^4+2\chi^3-6\chi^2+19\chi-15 &= 2^6-2^4+2\cdot 2^3-6\cdot 2^2+19\cdot 2-15= \\ &= 64-16+16-24+38-15=63=9\cdot 7\end{aligned}$$

$$51/66. (\psi+\omega)^2=\psi^2+2\psi\omega+\omega^2$$

$$(4\chi+\psi)^2=16\chi^2+8\chi\psi+\psi^2$$

$$(\chi+3\psi)^2=\chi^2+6\chi\psi+9\psi^2$$

$$(1+\chi\psi)^2=1+2\chi\psi+\chi^2\psi^2$$

$$(\chi^2+\psi)^2=\chi^4+2\chi^2\psi+\psi^2$$

$$(\chi^2+\psi^2)^2=\chi^4+2\chi^2\psi^2+\psi^4$$

$$(2\varphi+3\omega)^2=4\varphi^2+12\varphi\omega+9\omega^2$$

$$\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{\chi}{2}\right)^2=\frac{\varphi^2}{9}+\frac{\varphi\chi}{3}+\frac{\chi^2}{4}$$

$$52/67. (\psi-1)^2=\psi^2-2\psi+1$$

$$(8-\varphi)^2=64-16\varphi+\varphi^2$$

$$(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$$

$$(\varphi^2-\omega^2)^2=\varphi^4-2\varphi^2\omega^2+\omega^4$$

$$(3\chi^2-\psi^2)^2=9\chi^4-6\chi^2\psi^2+\psi^4$$

$$\left(\frac{\chi}{3}-\psi\right)^2=\frac{\chi^2}{9}-\frac{2}{3}\chi\psi+\psi^2$$

$$53/68. (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

$$(\alpha+5)(\alpha-5)=\alpha^2-25$$

$$(3\beta+1)(3\beta-1)=9\beta^2-1$$

$$(4\varphi+5\omega)(5\omega-4\varphi)=25\omega^2-16\varphi^2$$

$$(\chi^2+\psi^2)(\chi^2-\psi^2)=\chi^4-\psi^4$$

$$(\chi-\psi^3)(\chi+\psi^3)=\chi^2-\psi^6$$

$$(7\alpha+3\beta)(7\alpha-3\beta)=49\alpha^2-9\beta^2 \quad \left(\frac{\psi}{2}+\frac{\chi}{3}\right)\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\chi}{3}\right)=\frac{\psi^2}{4}-\frac{\chi^2}{9}$$

$$54/69. \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$

$$\alpha^2-36=(\alpha+6)(\alpha-6)$$

$$25-\beta^2=(5-\beta)(5+\beta)$$

$$9\alpha^2-16\beta^2=(3\alpha+4\beta)(3\alpha-4\beta) \quad \frac{4\varphi^2}{25}-\frac{\omega^2}{64}=\left(\frac{2\varphi}{5}+\frac{\omega}{8}\right)\left(\frac{2\varphi}{5}-\frac{\omega}{8}\right)$$

$$\chi^4-\psi^4=(\chi^2+\psi^2)(\chi^2-\psi^2)$$

$$9\varphi^2-\omega^4=(3\varphi-\omega^2)(3\varphi+\omega^2)$$

$$\chi^2-\frac{4}{9}=\left(\chi+\frac{2}{3}\right)\left(\chi-\frac{2}{3}\right)$$

55/70. Ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, ὅστις σημειοῦται εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ εὐρίσκομεν ἑξαγόμενον ἴσον μὲ τὸ δεύτερον μέλος.

$$56/71. (\chi+\psi)^2+(\chi-\psi)^2=\chi^2+2\chi\psi+\psi^2+\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=2\chi^2+2\psi^2$$

$$(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2=\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-\chi^2+2\chi\psi-\psi^2=4\chi\psi$$

$$(5\alpha-3\beta)^2+(5\alpha+3\beta)^2=25\alpha^2-30\alpha\beta+9\beta^2+25\alpha^2+30\alpha\beta+9\beta^2=50\alpha^2+18\beta^2$$

- 57/72. 1) $(\chi+\psi)^3 = \chi^3 + 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 + \psi^3$ 5) $\chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi + 1$
 2) $(\chi-\psi)^3 = \chi^3 - 3\chi^2\psi + 3\chi\psi^2 - \psi^3$ 6) $\psi^3 - 3\psi^2 + 3\psi - 1$
 3) $\chi^3 - 7\chi + 5$ 7) $\varphi^3 + 6\varphi^2 + 12\varphi + 8$
 4) $\chi^3 - 2\chi^2 - 5\chi + 6$ 8) $27 - 27\omega + 9\omega^2 - \omega^3$
- 58/73. 1) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ 5) $25 - 10\chi + \chi^2 = (5 - \chi)^2$
 2) $\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2 = (\mu + \nu)^2$ 6) $1 - 2\mu + \mu^2 = (1 - \mu)^2$
 3) $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha + 2)^2$ 7) $4 - 12\chi + 9\chi^2 = (2 - 3\chi)^2$
 4) $\psi^2 + 4\omega^2 \pm 4\psi\omega = (\psi \pm 2\omega)^2$ 8) $9 + \chi^4 \pm 6\chi^2 = (3 \pm \chi^2)^2$

IV. Διαίρεσεις.

Σελίς 52

$$59/74. \quad 14\alpha^2\beta^2 : 7\alpha\beta = 2\alpha\beta$$

$$\frac{3}{5}\chi\psi^2 : -\frac{3}{2}\chi\psi = -\frac{2}{5}\psi$$

$$9\alpha^2 : -9 = -\alpha^2$$

$$-1\frac{2}{3}\alpha\chi^4\psi^5 : -\frac{5}{8}\alpha\psi^5 = \frac{8}{3}\chi^4$$

$$-23\alpha^4\beta^3\gamma^2 : -5\alpha\beta^3\gamma^2 = \frac{23}{5}\alpha^5$$

$$\frac{1}{3}\alpha^3\chi^2\psi^6\varphi^4 : -5\alpha^3\chi\psi\varphi^4 = -\frac{1}{15}\chi\psi^5$$

Σελίς 53

$$60/75. \quad (24\alpha^2 - 12\alpha + 4) : 4 = 6\alpha^2 - 3\alpha + 1$$

$$(25\chi^2 - 15\chi + 5) : -5 = -5\chi^2 + 3\chi - 1$$

$$(18\chi^2\psi - 36\alpha\chi^3\psi^3 + 72\beta\chi^2\psi^3 - 18\gamma\chi^4\psi^3) : 18\chi^2\psi = 1 - 2\alpha\chi\psi + 4\beta\psi^2 - \gamma\chi^2\psi^2$$

$$(54\beta^4\psi^3 - 18\beta^3\psi^4 - 12\beta^2\psi^5 + 24\beta\psi^6) : -6\beta\psi^3 = -9\beta^3 + 3\beta^2\psi + 2\beta\psi^2 - 4\psi^3$$

$$(160\alpha^3\chi^3\psi^3 - 120\alpha^2\chi^4\psi^2 - 40\alpha\chi^5\psi^2) : 20\alpha\chi^3\psi = 8\alpha^2\psi^2 - 6\alpha\chi\psi - 2\chi^2\psi$$

Σελίς 57

$$61/76. \quad (\chi^2 - \psi^2) : (\chi + \psi) = \chi - \psi$$

$$(\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2) : (\alpha - \beta) = \alpha + 2\beta$$

$$(3\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2) : (3\alpha - 2\beta) = \alpha + \beta$$

$$(5\alpha^6 + 15\alpha^5 + 5\alpha + 15) : (\alpha + 3) = 5\alpha^5 + 5$$

$$(\alpha^3 - 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + 2\beta^3) : (\alpha^2 - \beta^2) = \alpha - 2\beta$$

$$(6\alpha^5 - 4\alpha^3\beta - 3\alpha^2\beta^2 + 2\beta^4) : (2\alpha^3 - \beta^3) = 3\alpha^2 - 2\beta$$

$$62/77. \quad (\chi^3 - \chi^2 - 5\chi + 6) : (\chi^2 + \chi - 3) = \chi - 2$$

$$(4\chi^3 - 16\chi^2 + 25\chi - 25) : (2\chi^2 - 3\chi + 5) = 2\chi - 5$$

$$(21\alpha^4 - 16\alpha^3\beta + 16\alpha^2\beta^2 - 5\alpha\beta^3 + 2\beta^4) : (3\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 7\alpha^2 - 3\alpha\beta + 2\beta^2$$

63/78.

$$(\alpha^3 - \beta^3) : (\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha^3 + \beta^3) : (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha^5 + \beta^5) : (\alpha + \beta) = \alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) : (\alpha + \beta) = \alpha - \beta \text{ και υπόλοιπον } 2\beta^2$$

$$(\alpha^3 - \beta^3) : (\alpha^2 - \beta^2) = \alpha \text{ και υπόλοιπον } \alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$(\alpha^2 + 32) : (\alpha + 16) = \alpha - 16 \text{ και υπόλοιπον } 288$$

Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων.

Σελίς 58

64/79. $5\alpha + 5\beta = 5(\alpha + \beta)$

$$-5\alpha - 5\beta = -5(\alpha + \beta)$$

$$\alpha\beta - \beta = \beta(\alpha - 1)$$

$$\beta - \alpha\beta = \beta(1 - \alpha)$$

$$10\chi\psi - 8\chi\varphi = 2\chi(5\psi - 4\varphi)$$

$$\alpha\chi + \beta\chi - \gamma\chi = \chi(\alpha + \beta - \gamma)$$

$$\alpha\chi - 5\alpha\psi - 3\alpha\varphi = \alpha(\chi - 5\psi - 3\varphi)$$

$$\alpha(\chi - \psi) - \beta(\chi - \psi) = (\chi - \psi)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha - \beta)\chi - 2(\alpha - \beta)\psi = (\alpha - \beta)(\chi - 2\psi)$$

$$(\alpha - \beta)\chi - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(\chi - 1)$$

65/80. $\alpha\chi + \beta\chi + \alpha\psi + \beta\psi = \chi(\alpha + \beta) + \psi(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\chi + \psi)$

$$\alpha\chi + \beta\chi + \alpha + \beta = \chi(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\chi + 1)$$

$$\alpha\gamma - \gamma\chi + \alpha\delta - \delta\chi = \gamma(\alpha - \chi) + \delta(\alpha - \chi) = (\alpha - \chi)(\gamma + \delta)$$

$$2\alpha\chi - 2\beta\chi + 3\alpha\psi - 3\beta\psi = 2\chi(\alpha - \beta) + 3\psi(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(2\chi + 3\psi)$$

$$3\alpha\chi - 5\beta\psi - 3\beta\chi + 5\alpha\psi = 3\chi(\alpha - \beta) + 5\psi(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(3\chi + 5\psi)$$

66/81. $36\chi^2 - 25\psi^2 = (6\chi)^2 - (5\psi)^2 = (6\chi + 5\psi)(6\chi - 5\psi)$

$$1.2 - 2.a^2 = 2(1 - a^2) = 2(1 + a)(1 - a)$$

$$3 - 3a^2 = 3(1 - a^2) = 3(1 + a)(1 - a)$$

$$3a^4 - 27 = 3(a^4 - 9) = 3(a^2 + 3)(a^2 - 3)$$

$$5\chi^4 - 5\psi^2 = 5(\chi^4 - \psi^2) = 5(\chi^2 + \psi)(\chi^2 - \psi)$$

$$\alpha\chi^4 - 25\alpha = \alpha(\chi^4 - 25) = \alpha(\chi^2 + 5)(\chi^2 - 5)$$

$$(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = (\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$(\alpha - \psi)^2 - 4\chi^2 = (\alpha - \psi + 2\chi)(\alpha - \psi - 2\chi)$$

67/82. $\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2 = (\mu + \nu)^2$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2 \cdot 3\alpha + 3^2 = (\alpha + 3)^2$$

$$\chi^2 - 6\chi + 9 = \chi^2 - 2 \cdot 3\chi + 3^2 = (\chi - 3)^2$$

$$9\chi^2 - 6\chi\psi + \psi^2 = (3\chi)^2 - 2 \cdot 3\chi \cdot \psi + \psi^2 = (3\chi - \psi)^2$$

$$4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 = (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 = (2\alpha - 3\beta)^2$$

$$64\psi^2 - 32\psi\chi + 4\chi^2 = (8\psi)^2 - 2 \cdot 8\psi \cdot 2\chi + (2\chi)^2 = (8\psi - 2\chi)^2$$

Ἀλγεβρικά κλάσματα.

Σελίς 61

$$68/83. \quad \frac{\chi^2}{\chi\psi} = \frac{\chi}{\psi}$$

$$\frac{5\chi^2\psi}{10\chi\psi^2} = \frac{\chi}{2\psi}$$

$$\frac{24\alpha^2\beta\chi}{12\alpha\beta^2} = \frac{2\alpha\chi}{\beta}$$

$$\frac{-5\alpha^3\beta^4\chi}{35\alpha^2\beta^4\chi^2} = -\frac{\alpha}{7\chi}$$

$$\frac{27\chi^3\psi^4\varphi^2}{-18\chi\psi^2\varphi^4} = -\frac{3\chi^2\psi^2}{2\varphi^2}$$

$$\frac{\chi^2+\chi\psi}{\chi^2-\chi\psi} = \frac{\chi(\chi+\psi)}{\chi(\chi-\psi)} = \frac{\chi+\psi}{\chi-\psi}$$

$$\frac{\chi^2-\chi\psi}{\chi\psi-\psi^2} = \frac{\chi(\chi-\psi)}{\psi(\chi-\psi)} = \frac{\chi}{\psi}$$

$$\frac{\chi^2-\chi\psi}{\psi^2-\chi\psi} = \frac{\chi(\chi-\psi)}{\psi(\psi-\chi)} = \frac{\chi(\chi-\psi)}{-\psi(\chi-\psi)} = -\frac{\chi}{\psi}, \quad \frac{2\chi+\chi^2}{2\psi+\chi\psi} = \frac{\chi(2+\chi)}{\psi(2+\chi)} = \frac{\chi}{\psi}$$

$$\frac{3\chi\psi-3\chi}{9\psi^2-9\psi} = \frac{3\chi(\psi-1)}{9\psi(\psi-1)} = \frac{\chi}{3\psi}$$

$$69/84. \quad \frac{2\chi}{3} + \frac{\chi}{3} = \frac{3\chi}{3} = \chi$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{7\psi}{5} - \frac{2\psi}{5} = \frac{5\psi}{5} = \psi$$

$$\frac{3}{\alpha} - \frac{2}{\beta} = \frac{3\beta-2\alpha}{\alpha\beta}$$

$$\frac{5\alpha}{\chi} + \frac{3\alpha}{\chi} - \frac{2\alpha}{\chi} = \frac{6\alpha}{\chi}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{2\chi}{3} + \frac{3\psi}{5} - \frac{\varphi}{15} = \frac{10\chi+9\psi-\varphi}{15}, \quad \frac{\chi}{\psi\varphi} + \frac{\psi}{\chi\varphi} + \frac{\varphi}{\chi\psi} = \frac{\chi^2+\psi^2+\varphi^2}{\chi\psi\varphi}$$

$$\frac{\chi}{4} - \frac{\psi}{3} + \frac{\chi}{12} - \frac{\psi}{20} =$$

$$\frac{2}{\chi+1} + \frac{3}{\chi-1} = \frac{2(\chi-1)+3(\chi+1)}{(\chi+1)(\chi-1)} =$$

$$= \frac{15\chi}{60} + \frac{7\chi}{60} - \left(\frac{20\psi}{60} + \frac{3\psi}{60} \right) =$$

$$= \frac{5\chi+1}{\chi^2-1}$$

$$= \frac{20\chi-23\psi}{60}$$

$$70/85. \quad 1) \quad \frac{\alpha}{\chi} \cdot \chi = \alpha$$

$$3) \quad \frac{\alpha}{18\chi^2} \cdot 12\chi = \frac{2\alpha}{3\chi}$$

$$5) \quad -\frac{2\alpha\beta\chi}{\psi} \cdot \frac{3\varphi}{\alpha\beta\chi} = -\frac{6\varphi}{\psi}$$

$$2) \quad \frac{\beta}{\psi^2} \cdot \psi = \frac{\beta}{\psi}$$

$$4) \quad \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha\chi} = \frac{\alpha\beta}{\chi}$$

$$6) \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = 1$$

$$7) \quad \frac{\chi^2-\psi^2}{6\chi} \cdot \frac{3\psi}{\chi-\psi} = \frac{(\chi+\psi)(\chi-\psi) \cdot 3\psi}{6\chi(\chi-\psi)} = \frac{(\chi+\psi)\psi}{2\chi}$$

$$8) \quad \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi} \right) \cdot \chi\psi\varphi = \frac{\chi\psi\varphi}{\chi} + \frac{\chi\psi\varphi}{\psi} - \frac{\chi\psi\varphi}{\varphi} = \psi\varphi + \chi\varphi - \chi\psi$$

$$71/86. \quad \frac{\alpha}{\beta} : \alpha = \frac{\alpha : \alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \quad \alpha : \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \beta \quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha}{5\beta} = 5$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} : \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)} = 1$$

$$(\alpha+\beta) : \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta} = (\alpha+\beta) \cdot \frac{\alpha-\beta}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\frac{9\alpha^2\beta^2}{5\chi^2\psi} : \frac{3\alpha\beta}{20\chi^2\psi^3} = \frac{9\alpha^2\beta^2}{5\chi^2\psi} \cdot \frac{20\chi^2\psi^3}{3\alpha\beta} = 12\alpha\beta\psi^2$$

$$\frac{\chi\psi^2}{\alpha-\beta} : \frac{\chi^2\psi}{\beta-\alpha} = \frac{\chi\psi^2}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\beta-\alpha}{\chi^2\psi} = -\frac{\chi\psi^2(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)\chi^2\psi} = -\frac{\psi}{\chi}$$

$$72/87. \quad \frac{\frac{\chi}{\psi} + 1}{\frac{\chi}{\psi} - 1} = \left(\frac{\chi}{\psi} + 1\right) : \left(\frac{\chi}{\psi} - 1\right) = \frac{\chi+\psi}{\psi} : \frac{\chi-\psi}{\psi} = \frac{\chi+\psi}{\chi-\psi}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha + \frac{\gamma}{\delta}} = \alpha : \frac{\alpha\delta + \gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta}{\alpha\delta + \gamma}$$

$$\frac{\alpha + \frac{\beta}{\gamma}}{\alpha - \frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\gamma} : \frac{\alpha\gamma - \beta}{\gamma} = \frac{\alpha\gamma + \beta}{\alpha\gamma - \beta}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} : \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\alpha\gamma + \beta^2}{\beta\gamma} : \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\beta\gamma} = \frac{\alpha\gamma + \beta^2}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}}{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} : \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

Ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Σελὶς 71

$$73/88. \quad 1) \quad 10 + \chi = 18$$

$$\chi = 18 - 10 = 8$$

$$4) \quad \frac{3}{8} + \chi = \frac{7}{8}$$

$$\chi = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

2) $15 + \chi = 9$

$$\chi = 9 - 15 = -6$$

3) $25 = 18 - \chi$

$$\chi = 18 - 25 = -7$$

5) $\frac{5}{9} + \chi = \frac{3}{5}$

$$\chi = \frac{3}{5} - \frac{5}{9} = \frac{27-25}{45} = \frac{2}{45}$$

6) $7,5 = 3,5 + \chi$

$$7,5 - 3,5 = \chi = 4$$

74/89. 1) $3\chi = 12$

$$\chi = 4$$

2) $5\chi = -35$

$$\chi = -7$$

3) $-7\psi = 28$

$$\psi = -4$$

4) $5\chi = 0, \chi = \frac{0}{5} = 0$

7) $30 = 120 - 2\chi - 7\chi$

$$2\chi + 7\chi = 120 - 30$$

$$9\chi = 90, \chi = 10$$

5) $\frac{\chi}{12} = 0, \chi = 0$

6) $18 + 2\chi = 13 - 3\chi$

$$2\chi + 3\chi = 13 - 18$$

$$5\chi = -5, \chi = -1$$

8) $95 + 30 - 2\chi = 100 - 11\chi - 20$

$$11\chi - 2\chi = 100 - 20 - 95 - 30$$

$$9\chi = -45, \chi = -5$$

9) $-8 = 7 - 6\chi - 16 - 4\chi - 2\chi + 1$

$$-8 - 7 + 16 - 1 = -6\chi - 4\chi - 2\chi$$

$$0 = -12\chi, \chi = 0$$

10) $100 - 7\chi = 10 - 7\chi - 15 + 5 - 11\chi$

$$100 = -11\chi, \chi = -\frac{100}{11} = -9\frac{1}{11}$$

75,90. 1) $5\chi + (9 - \chi) = 21$

$$5\chi - \chi = 21 - 9$$

$$4\chi = 12, \text{ ήτοι } \chi = 3$$

2) $3(5 - \psi) = 9$

$$15 - 3\psi = 9$$

$$15 - 9 = 3\psi$$

$$6 = 3\psi, \text{ ήτοι } \psi = 2$$

3) $5(12 - \chi) = 15(6 - \chi)$

$$60 - 5\chi = 90 - 15\chi$$

$$10\chi = 30, \text{ ήτοι } \chi = 3$$

4) $0 = 3(4\chi - 1) + 5(7 - 4\chi)$

$$0 = 12\chi - 3 + 35 - 20\chi$$

$$20\chi - 12\chi = -3 + 35$$

$$8\chi = 32, \text{ ήτοι } \chi = 4$$

5) $3(2\chi + 1) + 5(3\chi + 5) = -14$

$$6\chi + 3 + 15\chi + 25 = -14$$

$$21\chi = -42, \text{ ήτοι } \chi = -2$$

6) $9(2\chi - 1) - 5(8\chi - 1) = -15$

$$18\chi - 9 - 40\chi + 5 = -15$$

$$-22\chi = -11, \text{ ήτοι } \chi = \frac{1}{2}$$

7) $3\chi - (7 - \chi) = 13$

$$3\chi - 7 + \chi = 13$$

$$4\chi = 20, \text{ ήτοι } \chi = 5$$

8) $\varphi - 6 = 4(\varphi - 9)$

$$\varphi - 6 = 4\varphi - 36$$

$$-3\varphi = -30, \text{ ήτοι } \varphi = 10$$

$$9) \quad 5(\chi-3)=4(2\chi-3) \\ 5\chi-15=8\chi-12 \\ -3\chi=3, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=-1$$

$$10) \quad 0=9(\chi-7)-3(2\chi-14) \\ 0=9\chi-63-6\chi+42 \\ 21=3\chi, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=7$$

$$11) \quad 5(7\chi+8)-13(3\chi+4)=4 \\ 35\chi+40-39\chi-52=4 \\ -4\chi=16, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=-4$$

$$12) \quad 8(6\chi+5)-3(1-9\chi)=-13 \\ 48\chi+40-3+27\chi=13 \\ 75\chi=-24, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=-\frac{24}{75}=-\frac{8}{25}$$

$$76/91. \quad 1) \quad \frac{\chi}{9}=5 \\ \chi=45$$

$$3) \quad \frac{\chi}{5}+9=13 \\ \chi+45=65 \\ \chi=20$$

$$5) \quad \frac{3\varphi}{5}-1=\frac{\varphi}{2} \\ 6\varphi-10=5\varphi \\ 6\varphi-5\varphi=10, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \varphi=10$$

$$7) \quad \frac{\chi}{3}-\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{6}=3 \\ 4\chi-3\chi+2\chi=36 \\ 3\chi=36, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=12$$

$$9) \quad \frac{\chi}{2}-\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{5}=46 \\ 30\chi-20\chi+15\chi-12\chi=2760 \\ 13\chi=2760, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=212\frac{4}{13}$$

$$11) \quad 2\chi=\frac{1}{3}\chi-3\frac{1}{5}\chi-2 \\ 2\chi=\frac{16}{3}\chi-\frac{16}{5}\chi-2 \\ 30\chi=80\chi-48\chi-30 \\ 30\chi+48\chi-80\chi=-30 \\ -2\chi=-30, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=15$$

$$13) \quad 0,5-0,25\chi=1$$

$$0,25\chi=1, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=\frac{1}{0,25}=4$$

$$2) \quad \frac{1}{6}\chi=-2 \\ \chi=-12$$

$$4) \quad \frac{\chi}{2}-5=13 \\ \chi-10=26 \\ \chi=36$$

$$6) \quad \frac{5\varphi}{9}-2=\frac{7\varphi}{18}+4 \\ 10\varphi-36=7\varphi+72 \\ 10\varphi-7\varphi=72+36 \\ 3\varphi=108, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \varphi=36$$

$$8) \quad \frac{2\chi}{5}+\frac{\chi}{2}-\frac{3\chi}{4}=3 \\ 8\chi+10\chi-15\chi=60 \\ 3\chi=60, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=20$$

$$10) \quad \frac{2\psi}{3}-\frac{5\psi}{6}-\frac{\psi}{9}+\frac{11\psi}{36}=0 \\ 24\psi-30\psi-4\psi+11\psi=0 \\ \psi=0$$

$$12) \quad 8\frac{1}{4}\chi-5\frac{1}{2}\chi-2\frac{1}{5}\chi=\frac{11}{20}$$

$$\frac{33}{4}\chi-\frac{11}{2}\chi-\frac{11}{5}\chi=\frac{11}{20}$$

$$165\chi-110\chi-44\chi=11$$

$$11\chi=11, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=1$$

$$14) \quad 0,3\chi-\frac{3}{4}\chi=3,6$$

$$0,3\chi-0,75\chi=3,6$$

$$-0,45\chi=3,6, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \chi=-8$$

$$77/92. \quad 1) \quad \frac{x-5}{6} = x-30$$

$$x-5=6x-180$$

$$180-5=6x-x$$

$$175=5x, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=35$$

$$3) \quad \frac{2x-3}{5} = \frac{4x-5}{7}$$

$$14x-21=20x-25$$

$$25-21=20x-14x$$

$$4=6x, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=\frac{2}{3}$$

$$5) \quad \frac{5(4-2x)}{3} = \frac{3(1-7x)}{5}$$

$$25(4-2x)=9(1-7x)$$

$$100-50x=9-63x$$

$$63x-50x=9-100$$

$$13x=-91, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=-7$$

$$7) \quad \frac{x-3}{11} - \frac{x+5}{6} = -3$$

$$6(x-3)-11(x+5)=-3 \cdot 11 \cdot 6$$

$$6x-18-11x-55=-198$$

$$6x-11x=18+55-198$$

$$-5x=-125, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=25$$

$$2) \quad 2x-7 = \frac{5x-1}{8}$$

$$16x-56=5x-1$$

$$16x-5x=56-1$$

$$11x=55, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=5$$

$$4) \quad \frac{4\psi-3}{4} = \frac{6\psi-5}{7}$$

$$28\psi-21=24\psi-20$$

$$28\psi-21\psi=21-20$$

$$4\psi=1, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad \psi=\frac{1}{4}$$

$$6) \quad \frac{4}{5}(x+8) = \frac{3}{7}(5x-7)$$

$$28(x+8)=15(5x-7)$$

$$28x+224=75x-105$$

$$224+105=75x-28x$$

$$329=47x, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=7$$

$$8) \quad \frac{2x-9}{3} - \frac{3x-7}{10} = 1$$

$$10(2x-9)-3(3x-7)=1 \cdot 3 \cdot 10$$

$$20x-90-9x+21=30$$

$$20x-9x=90-21+30$$

$$11x=99, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=9$$

$$78/93. \quad 1) \quad \frac{12}{x} = 3$$

$$12=3x, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=4$$

$$2) \quad \frac{4}{x} = 5$$

$$4=5x, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=\frac{4}{5}$$

$$3) \quad -2 = \frac{20}{x}$$

$$x=-10$$

$$4) \quad 4 = -\frac{3}{x}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$5) \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = 3 \quad 6) \quad \frac{5}{x} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x} = 12$$

$$\frac{1+2+3}{x} = 3$$

$$\frac{5-3+4}{x} = 12$$

$$\frac{6}{x} = 3, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=2$$

$$\frac{6}{x} = 12, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad x=\frac{1}{2}$$

$$7) \frac{3}{x+5} = \frac{1}{2}$$

$$6 = x+5, \text{ ἤτοι } x=1$$

$$9) -\frac{10}{x+7} = 5$$

$$-10 = 5(x+7)$$

$$-10 = 5x+35, \text{ ἤτοι } x=-9$$

$$11) \frac{x}{8+x} = \frac{1}{3}$$

$$3x = 8+x, \text{ ἤτοι } x=4$$

$$13) \frac{x+2}{x-4} = \frac{5}{11}$$

$$11x+22 = 5x-20$$

$$6x = -42, \text{ ἤτοι } x=-7$$

$$8) \frac{8}{x-2} = 4$$

$$8 = 4(x-2)$$

$$8 = 4x-8, \text{ ἤτοι } x=4$$

$$10) \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$$

$$10 = 3x+9, \text{ ἤτοι } x = \frac{1}{3}$$

$$12) \frac{x-5}{x+7} = \frac{1}{4}$$

$$4x-20 = x+7$$

$$3x = 27, \text{ ἤτοι } x=9$$

$$14) \frac{x-2}{x+2} = -\frac{5}{11}$$

$$11x-22 = -5x-10$$

$$16x = 12, \text{ ἤτοι } x = \frac{3}{4}$$

$$79/94. 1) x-a=0$$

$$x=a$$

$$3) x-a=-a$$

$$x=-a+a, \text{ ἤτοι } x=0$$

$$5) x+\beta=a$$

$$x=a-\beta$$

$$7) \alpha-\beta+\gamma=x-\alpha+\beta+\gamma$$

$$\alpha-\beta+\gamma+\alpha-\beta-\gamma=x,$$

$$\text{ἤτοι } x=2\alpha-2\beta \text{ ἢ } x=2(\alpha-\beta)$$

$$9) \alpha x+\beta x=\gamma-\delta$$

$$(\alpha+\beta)x=\gamma-\delta, \text{ ἤτοι } x=\frac{\gamma-\delta}{\alpha+\beta}$$

$$2) x+a=0$$

$$x=-a$$

$$4) \alpha-x=-a$$

$$\alpha+a=x, \text{ ἤτοι } x=2a$$

$$6) x+\beta-\alpha=\gamma$$

$$x=\alpha-\beta+\gamma$$

$$8) (\alpha+\beta)x=\delta-\gamma$$

$$x=\frac{\delta-\gamma}{\alpha+\beta}$$

$$10) \alpha x+\gamma=\beta x+\delta$$

$$\alpha x-\beta x=\delta-\gamma$$

$$(\alpha-\beta)x=\delta-\gamma, \text{ ἤτοι } x=\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\beta}$$

$$80/95. 1) \frac{x}{\alpha}=\beta, \quad x=\alpha\beta$$

$$3) \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x} = \gamma$$

$$\frac{\alpha-\beta}{x} = \gamma$$

$$x = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

$$2) \frac{\beta}{x} = \alpha, \quad x = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$4) \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\beta} = 1$$

$$\beta x + \alpha x = \alpha\beta$$

$$(\beta+\alpha)x = \alpha\beta$$

$$x = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\begin{array}{ll}
 5) \frac{\alpha}{\chi} + \beta = \frac{\beta}{\chi} + \alpha & 6) \frac{\chi}{2\alpha} - \frac{\chi}{2\beta} = 2 \\
 \frac{\alpha}{\chi} - \frac{\beta}{\chi} = \alpha - \beta & \beta\chi - \alpha\chi = 4\alpha\beta \\
 \frac{\alpha - \beta}{\chi} = \alpha - \beta, \text{ ἤτοι } \chi = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1 & (\beta - \alpha)\chi = 4\alpha\beta \\
 & \chi = \frac{4\alpha\beta}{\beta - \alpha}
 \end{array}$$

Προβλήματα λυόμενα δι' ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ ἓνα ἄγνωστον.

Σελίς 81

A'. 81/96. Ἐστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ὅποτε θὰ εἶναι $95 - \chi = 59 + \chi$, ἤτοι $95 - 59 = 2\chi$ ἢ $36 = 2\chi$ καὶ $\chi = 18$ · πράγματι δὲ ἔχομεν $95 - 18 = 59 + 18$.

82/98. Ἐάν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} + 12 = 48$. Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν διαδοχικῶς $5\chi + 4\chi + 240 = 960$, $9\chi = 720$ καὶ $\chi = 80$.

83/103. Ἐχομεν $\frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{6} = \frac{\chi}{2}$ καὶ $0 \cdot \chi = 0$, ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς λύει τὸ πρόβλημα.

84/104. Ἐχομεν $\frac{\chi}{3} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{8} = \chi + 3$ καὶ $\chi = -24$.

85/107. Ἐάν χ εἶναι τὸ ἓν μέρος τοῦ 71, τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $71 - \chi$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{5} + \frac{71 - \chi}{3} = 17$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 50$ καὶ $71 - \chi = 21$.

86/108. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{19 + \chi}{69 + \chi} = \frac{1}{2}$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 31$.

87/109. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{4 + \chi}{7 + \chi} = 1$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $4 + \chi = 7 + \chi$, ἤτοι $0 = 3$. Ὡστε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

88/110. Ἐχομεν $\frac{3 + \chi}{5 + \chi} = \frac{3}{4}$ καὶ $\chi = 3$.

89/112. Ἐάν ὁ πρῶτος εἶναι ὁ $2\chi + 1$, οἱ ἄλλοι δύο εἶναι οἱ $2\chi + 3$ καὶ $2\chi + 5$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $2\chi + 1 + 2\chi + 3 + 2\chi + 5 = 159$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi = 25$. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 51, 53, 55.

90/113. Ἐστώσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $\chi - 1$, χ , $\chi + 1$ · τότε θὰ ἔχομεν $\frac{\chi - 1}{2} + \frac{\chi + 1}{4} = \frac{2\chi}{3}$, ἐξ ἧς $\chi = 3$, ἤτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 2, 3, 4.

91/115. Ἐάν ὁ μικρότερος εἶναι ὁ χ , ὁ μεγαλύτερος θὰ εἶναι ὁ $\chi+24$.
Θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{\chi+24}{\chi} = \frac{8}{5}$, ἥτοι $\chi=40$.

B'. 92/116. Ἐάν ὁ πρῶτος ἔλαβε χ δραχμάς, ὁ δεύτερος ἔλαβε $\chi+12$ καὶ ὁ τρίτος $(\chi+12)+32$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\chi+\chi+12+\chi+12+32=300$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi=81\frac{1}{3}$. Ὡστε ὁ πρῶτος ἔλαβε $81\frac{1}{3}$ δραχμάς, ὁ δεύτερος $93\frac{1}{3}$ δραχ. καὶ ὁ τρίτος $125\frac{1}{3}$ δραχ.

93/119. Ἐάν τὸ διανεμηθὲν ποσὸν εἶναι χ δραχμαί, ὁ Α ἔλαβε $\frac{\chi}{5} + 19$, ὁ Β ἔλαβε $\frac{\chi}{4} + 17$ καὶ ὁ Γ ἔλαβε $\frac{\chi}{3} + 10$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{5} + 19 + \frac{\chi}{4} + 17 + \frac{\chi}{3} + 10 = \chi$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi = \frac{2760}{13} = 212\frac{4}{13}$. Ὡστε ὁ Α ἔλαβε $\frac{552}{13} + 19 = 61\frac{6}{13}$, ὁ Β ἔλαβε $\frac{690}{13} + 17 = 70\frac{1}{13}$ καὶ ὁ Γ ἔλαβεν $80\frac{10}{13}$.

94/123. Ἐάν τὸ διατεθὲν ποσὸν εἶναι χ δραχμαί, ἐκ τοῦ ποσοῦ τούτου διετεθήσαν δι' ἐπιδόματα ἀσθενείας $\frac{5\chi}{8} - 25000$ δραχμαί, διὰ συντάξεις $\frac{3\chi}{16} + 62500$ δραχ. καὶ δι' ἡμερομίσθια ἀτυχησάντων ἐργατῶν $\frac{3\chi}{20}$ δραχμαί.

Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{5\chi}{8} - 25000 + \frac{3\chi}{16} + 62500 + \frac{3\chi}{20} = \chi$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ καθιστᾷ τὸν $\frac{5\chi}{8} - 25000$ θετικόν. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi=1000000$. Ὡστε ἐδόθησαν δι' ἐπιδόματα ἀσθενείας 600000 δραχ., διὰ συντάξεις 250000 δραχ. καὶ δι' ἡμερομίσθια 150000 δραχ.

95/124. Ἐάν ὁ Α ἐκέρδισε χ δραχμάς, ὁ δεύτερος ἐκέρδισε $6400-\chi$ δραχ. Εἶναι δὲ $\frac{7000}{9000} = \frac{\chi}{6400-\chi}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ 6400. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi=2300$ καὶ $6400-\chi=3600$.

96/126. Ὁ τύπος προβλημάτων μεξέως τοῦ εἶδους αὐτοῦ εἶναι (πρόβλημα

8 σελ. 78) $\chi = \frac{\lambda(\gamma - \beta)}{\alpha - \beta}$. Είναι δε ένταῦθα $\alpha = 40$, $\beta = 30$, $\gamma = 36$ καὶ $\lambda = 1500$.

"Ὡστε ἔχομεν $\chi = \frac{1500(36 - 30)}{40 - 30} = \frac{1500 \cdot 6}{10} = 900$ καὶ $\lambda - \chi = 600$.

97/128. Ἐστω, ὅτι πρέπει νὰ ρίψη χ ὀκάδας ὕδατος· ἀλλ' αἱ 32 ὀκάδες οἰνοπνεύματος τῶν 85^ο περιέχουν καθαρὸν οἰνόπνευμα 0,85.32 = 27,20 ὀκάδας· αἱ δὲ 32 + χ ὀκάδες τῶν 80^ο περιέχουν τοιοῦτον $(\chi + 32) \cdot 0,80$ · ἀλλὰ τὸ καθ. οἰνόπνευμα καὶ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι τὸ αὐτό· ὥστε εἶναι $(\chi + 32) \cdot 0,80 = 27,20$ · πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμὸς. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi = 2$.

98/129. Ἐστω ὅτι πρέπει νὰ ρίψη χ ὀκάδας ὕδατος. Τὸ μείγμα λοιπὸν θὰ εἶναι 6000 + χ ὀκάδες καὶ 12^ο· ὥστε τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα θὰ εἶναι $\frac{(6000 + \chi) \cdot 12}{100}$. εἶναι δὲ τὸ ποσὸν τοῦ οἰνοπνεύματος τὸ ἴδιον μὲ τὸ ποσὸν $\frac{6000 \cdot 14}{100} = 840$ · εἶναι ἐπομένως $\frac{(6000 + \chi) \cdot 12}{100} = 840$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμὸς. Λύοντες εὐρίσκομεν $\chi = 1000$.

99/130. Ἐστω χ γραμ. β. κ. 0,880· ὁ καθαρὸς χρυσὸς τῶν 120 γραμ. εἶναι 0,880· χ , ὁ δὲ καθαρὸς χρυσὸς τῶν 120 + χ γραμ. εἶναι 0,820·(120 + χ)· πρέπει δὲ νὰ εἶναι 0,740·120 + 0,880 χ = 0,820(120 + χ)· εὐρίσκομεν δὲ ὅτι $\chi = 16$.

Ι'. 100/132. Ἐστω μετὰ χ ἔτη· ὁ τόκος τότε τοῦ α' κεφαλαίου εἶναι $\frac{12000 \cdot 9 \cdot \chi}{100} = 1080$ δραχ. καὶ ὁ τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{15000 \cdot 8 \cdot \chi}{100} = 1200\chi$ δραχ. καὶ οἱ τῶν δύο ὁμοῦ εἶναι 1080 χ + 1200 χ = 6400, ἥτοι $\chi = \frac{160}{57}$ ἔτη.

101/134. Ἐὰν τὸ ἐν μέρος εἶναι χ , τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 36000 - χ . Ἐχομεν ἐπομένως τὴν ἐξίσωσιν $\frac{5\chi}{100} + \frac{(36000 - \chi) \cdot 4}{100} = 1740$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi = 30000$ καὶ 36000 - χ = 6000.

102/136. Ἐστω, ὅτι τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον εἶναι χ · τότε τὰ $\frac{\chi}{3}$ αὐτοῦ ἀποδίδουν ἐτήσιον εἰσόδημα $\frac{\chi}{3} \cdot 8 : 100$, ἥτοι $\frac{8\chi}{300} = \frac{2\chi}{75}$ δραχ.· τὰ $\frac{\chi}{4}$ ἀποδίδουν $\frac{\chi}{4} \cdot 6,5 : 100$, ἥτοι $\frac{65\chi}{4000} = \frac{13\chi}{800}$ δραχ. καὶ ἀπὸ τὰ $\chi - \frac{\chi}{3} - \frac{\chi}{4} = \frac{5\chi}{12}$ χάνει $\frac{5\chi}{12} \cdot 1,5 : 100$, ἥτοι $\frac{75\chi}{12000} = \frac{\chi}{160}$. Εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα $\frac{2\chi}{75} + \frac{13\chi}{800} - \frac{\chi}{160} = 44000$ δραχ.· εὐρίσκομεν δὲ $\chi = 1200000$ δραχμάς.

103/138. Ἐάν τὸ μικρότερον εἶναι χ , τὸ μεγαλύτερον εἶναι $100+\chi$. Καὶ οἱ τόκοι τούτων εἰς ἓν ἔτος εἶναι τοῦ πρώτου $\frac{5\chi}{100}$ καὶ τοῦ δευτέρου $\frac{(100+\chi) \cdot 4}{100}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\chi + \frac{5\chi}{100} = 100 + \chi + \frac{(100+\chi) \cdot 4}{100}$. Λύοντες ἤδη ταύτην εὐρίσκομεν $\chi = 104000$ καὶ $100 + \chi = 105000$.

104/140. Ἐστω, ὅτι τὸ εἰσόδημα τοῦ προηγουμένου ἔτους ἦτο χ δραχ. ἡ δαπάνη ἄρα κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο ἦτο $\chi - 1500$ δραχ. ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὸ ἐπόμενον ἔτος οἰκονόμησε 4500 δραχμάς περισσοτέρας (6000—1500), ἡ αὐξησις αὕτη εἶναι ἄθροισμα τῆς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου, ἣτις ἦτο $\frac{\chi}{10}$, καὶ τῆς ἐλαττώσεως τῆς δαπάνης, ἣτις ἦτο $\frac{15(\chi - 1500)}{100}$. ἦτοι ἔχομεν $\frac{\chi}{10} + \frac{15(\chi - 1500)}{100} = 4500$, ἦτοι $\chi = 18900$.

Δ'. 105/141. Ἐστω μετὰ χ ὥρας. Τότε ὁ μὲν πρῶτος ἐβάδισε 5χ χιλίον., ὁ δεύτερος $4,5\chi$. Τὰ δὲ χιλιόμετρα, τὰ ὅποια ἐβάδισαν καὶ οἱ δύο, εἶναι 18. Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\chi + 4,5\chi = 18$, ἦτοι $\chi = 1\frac{17}{19}$ τῆς ὥρας.

106/143. Ἐάν χ χιλιόμετρα εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ενός, ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου εἶναι $\chi + 1,8$. ἔχομεν λοιπὸν $1,5\chi + 1,5(\chi + 1,8) = 52,5$ καὶ $\chi = 16,50$ ὥστε ὁ εἰς διέτρεξε 24,75 χιλιόμετρα καὶ ὁ ἄλλος 27,45 χιλιόμετρα.

107/144. Ἐστω, ὅτι ἡ τάξις ἐβάδιζε χ χιλιόμετρα τὴν ὥραν ὥστε κατὰ τὴν μίαν καὶ ἡμίσειαν ὥραν, καθ' ἣν ἐβάδισε μέχρις οὗ τὴν φθάσῃ ὁ βραδυπορήσας μαθητῆς, διήνυσεν $1,5\chi$ χιλιόμετρα. Εἶναι δὲ ταῦτα ἴσα μὲ τὰ χιλιόμετρα, τὰ ὅποια διήνυσεν ὁ μαθητῆς κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας ὥστε εἶναι $1,5\chi = 15 \cdot \frac{1}{2}$, ἦτοι $1,5\chi = 7,5$. Ὡστε $\chi = 5$.

108/145. Ἐστω ὅτι ὁ δεύτερος ἱππεὺς θὰ φθάσῃ πὺν πρῶτον μετὰ χ ὥρας. Ἀλλ' ὁ πρῶτος ἱππεὺς διανύει τὴν ὥραν $8,5$ χιλιόμετρα καὶ ὁ δεύτερος διανύει τὴν ὥραν 10 χιλίον. Ἐξ ἄλλου ὁ πρῶτος ἱππεὺς ἔτρεξεν ἐπὶ $1+\chi$ ὥρας καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ χ ὥρας. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $(1+\chi) \cdot 8,5 = 10\chi$, ἐξ ἣς εὐρίσκομεν $\chi = 5\frac{2}{3}$ ὥρας.

Ε'. 109/148. Ἐάν ὁ δεύτερος εἶναι χ ἐτῶν, ὁ τρίτος εἶναι $\chi - 3$ ἐτῶν καὶ ὁ πρῶτος εἶναι $\chi - 3 + 5 = \chi + 2$ ἐτῶν. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\chi + \chi - 3 + \chi + 2 = 53$, ἐξ ἣς εὐρίσκομεν $\chi = 18$. Ὡστε ὁ πρῶτος εἶναι 20 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 18 καὶ ὁ τρίτος 15.

110/150. Ἐὰν ἡ ἡλικία τοῦ ἄλλου εἶναι χ , ἡ τοῦ πρώτου εἶναι 2χ · ἀλλὰ πρὸ 10 ἐτῶν ὁ μὲν πρῶτος ἦτο $2\chi-10$, ὁ δὲ ἄλλος $\chi-10$. Ἦτο δὲ $2\chi-10=3(\chi-10)$. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν $\chi=20$ · καὶ $2\chi-40$ · ἐπίσης καὶ $2\chi-10=30$, $\chi-10=10$.

111/151. Ἐστω μετὰ χ ἔτη· ἀλλὰ τότε ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶναι $37+\chi$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $8+\chi$ ἐτῶν· θὰ εἶναι δὲ καὶ $37+\chi=3(8+\chi)$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi=6\frac{1}{2}$ · τότε δὲ θὰ εἶναι ὁ μὲν πατὴρ $43\frac{1}{2}$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $14\frac{1}{2}$ ἐτῶν.

112/152. Ἐστω χ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ, ὅποτε ἡ τοῦ πατρὸς εἶναι $\chi+30$ · ἀλλὰ πρὸ 8 ἐτῶν ἡ μὲν ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἦτο $\chi-8$, ἡ δὲ τοῦ πατρὸς $\chi+30-8=\chi+22$. Ἔχουν δὲ ἄθροισμα $\chi-8+\chi+22=46$ · εὐρίσκομεν δὲ $\chi=16$ καὶ $\chi+30=46$.

ΣΤ'. 113/155. Ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο χ δραχ., θὰ ἔδιδε διὰ τοὺς 10 πήχεις 10χ δραχ.· ἐὰν ὁμως ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως ἦτο $\chi-30$ δραχ., θὰ ἡγόραζε 12 πήχεις καὶ θὰ ἔδιδε $(\chi-30)\cdot 12$ δραχ. Εἶναι δὲ $10\chi=(\chi-30)\cdot 12$ καὶ $\chi=180$.

114/156. Τὰ ζῶα ἦσαν 23 καὶ ἐὰν αἱ ὄρνιθες ἦσαν χ , αἱ αἶγες ἦσαν $23-\chi$ · οἱ δὲ πόδες τῶν ὀρνίθων ἦσαν 2χ καὶ οἱ τῶν αἰγῶν $4(23-\chi)$. Ὡστε ἔχομεν $2\chi+4(23-\chi)=56$ καὶ $\chi=18$ · ὥστε εἶχεν ὄρνιθας 18 καὶ αἶγας 5.

115/158. Ἐστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν· ἐπομένως ἕκαστος τῶν 15 ἐργατῶν εἰς τρεῖς ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ 3χ ὥρας, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου· ἄρα εἰς μόνον ἐργάτης διὰ τὰ αὐτὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου θὰ χρειασθῇ δεκαπενταπλάσιον χρόνον, ἦτοι $15\cdot 3\chi$. Ἐξ ἄλλου οἱ 8 ἐργάται διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου χρειάζονται 4.9 ὥρας· ἐπομένως εἰς μόνος χρειάζεται διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου 4.9.8 ὥρας καὶ διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ χρειάζεται 4.9.8.4. Ἐξισοῦντες δὲ τὰς ὥρας, τὰς ὁποίας χρειάζεται εἰς ἐργάτης διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου, εὐρίσκομεν $15\cdot 3\chi=4.9.8.4$ · πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνει τὸν 24· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=25\frac{4}{5}$ · ἐπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται.

116/160. Οἱ ἄνδρες ἔστω ὅτι ἦσαν χ · αἱ γυναῖκες τότε ἦσαν $\frac{3\chi}{4}$, τὰ δὲ παι-

διὰ $\left(x + \frac{3x}{4}\right) \cdot \frac{1}{3}$ ἢ $\frac{7x}{12}$ ὥστε ἔχομεν $x + \frac{3x}{4} + \frac{7x}{12} = 28$ καὶ $x = 12$. Ὡστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 12, αἱ γυναῖκες 9 καὶ τὰ παιδιά 7.

117/161. Ἐστω ὅτι χωρεῖ x ὀκάδας· ἀλλ' ἀφοῦ ἡ πρώτη κρήνη ρίπτει εἰς τὴν δεξαμενὴν x ὀκάδας εἰς 7 ὥρας, εἰς 3 ὥρας ρίπτει $\frac{3x}{7}$ ὀκάδας· ὁμοίως ἡ δευτέρα κρήνη ρίπτει εἰς τὴν δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρας $\frac{3x}{9} = \frac{x}{3}$ ὀκάδας. Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3x}{7} + \frac{x}{3} = x - 120$, ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν $x = 504$ ὀκάδας.

Z'. 118/162. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος εἶναι εἰς κυβικὰς παλάμας καὶ τὸ βάρος εἰς χιλιόγραμμα, τὸ ζητούμενον εἰδικὸν βάρος x εἶναι $x = 4 : 1,95 = 2,05$ περίπου, (τὸ 195 διορθωτέον εἰς 1,95).

119/164. Ἐστω x χιλιόγραμμα τὸ βάρος τῆς σανίδος· ὥστε τὸ βάρος τοῦ ὑπ' αὐτῆς ἐκτοπιζομένου ὕδατος εἶναι $x + 10$ χιλιόγραμμα· ἀλλὰ τότε ὁ ὄγκος τῆς σανίδος εἶναι $x + 10$ κυβικαὶ παλάμαι. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $\frac{x}{0,8}$, ἔπεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{0,8} = x + 10$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $x = 40$.

120/165. Ἐστω x χιλιογρ. τὸ βάρος τῆς ζώνης· ὥστε τὸ βάρος τοῦ σώματος μετ' αὐτῆς εἶναι $56 + x$ · ἀλλὰ διὰ νὰ κρατῇται οὗτος ὀρθίος ἐντὸς τοῦ ὕδατος μὲ τὴν κεφαλὴν ἐκτὸς αὐτοῦ, πρέπει τὸ βάρος $56 + x$ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Εἶναι δὲ τὸ βάρος τούτου εἰς χιλιόγραμμα ἴσον μὲ τὸν ὄγκον του εἰς κυβικὰς παλάμας· ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ σώματος ἐκτὸς τῆς κεφαλῆς εἶναι $\frac{53}{1,02}$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ φελλοῦ εἶναι $\frac{x}{0,24}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $56 + x = \frac{53}{1,02} + \frac{x}{0,24}$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $x = 1,275$.

121/166. Ἐστω AB ἡ ράβδος, εἰς τὸ ἄκρον A τῆς ὁποίας κρέμαται τὸ βάρος τῶν 2,5 χιλιογρᾶμμων καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον B κρέμαται τὸ βάρος τῶν 0,75 χιλιογρᾶμμων. Ἐστω ἐπίσης Γ τὸ σημεῖον τῆς AB, εἰς ὃ θὰ ὑποβαστάζωμεν τὴν ράβδον, ὥς καὶ AG = x · τότε θὰ εἶναι GB = $40 - x$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ βραχίονες AG καὶ GB εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν δυνάμεων 2,5 καὶ 0,75, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x}{40 - x} = \frac{0,75}{2,5}$. Λύοντες ἤδη ταύτην εὐρίσκομεν $x = 9,23$ ἑκατοστὰ περίπου.

H'. 122/168. Ἐὰν τὸ ἐν μέρος εἶναι x , τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $3,6 - x$ · ἔχομεν ἐπομένως $\frac{x}{3,6 - x} = \frac{3}{5}$ καὶ $x = 1,35$, ὥστε $3,6 - x = 2,25$.

123/169. 'Εάν ἡ μία γωνία τῆς βάσεως εἶναι χ μοιρῶν. ἡ τῆς κορυφῆς εἶναι $\chi+30$. Αἱ τρεῖς δὲ γωνίαι αὐτοῦ ἔχουσιν ἄθροισμα 180 μοιρῶν, ἥτοι εἶναι $\chi+\chi+\chi+30=180$ καὶ $\chi=50$, ἥτοι αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ εἶναι $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$.

124/170. 'Εστω ὅτι ἡ Β εἶναι χ μοιρῶν, ἡ Γ ἐπομένως εἶναι 3χ μοιρῶν καὶ ἡ Α $\chi+5$ μοιρῶν· εἶναι δὲ $\chi+3\chi+\chi+5=180$ καὶ $\chi=35$ · ἥτοι ἔχομεν $A=40^\circ, B=35^\circ, \Gamma=1^\circ 50'$.

125/172. 'Εάν τὸ ὕψος εἶναι χ μέτρα, ἡ βάσις εἶναι 2χ · ἡ δὲ περίμετρος εἶναι $\chi+\chi+2\chi+2\chi=62$ καὶ $\chi=10\frac{1}{3}$.

126/174. Τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιμέτρου εἶναι 20 μ.· ὥστε ἐὰν ἡ βάσις εἶναι χ μ., τὸ ὕψος εἶναι $20-\chi$. 'Αλλ' ἐὰν ἡ βάσις ἦτο $2,5 \cdot (20-\chi)$, ἡ περίμετρος $2 \cdot 2,5(20-\chi)+2 \cdot (20-\chi)$ θὰ ἦτο $40+16$, ἥτοι 56 μ.· ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $2 \cdot 2,5(20-\chi)+2(20-\chi)=56$, ἣν λύοντες εὐρίσκομεν, ὅτι $\chi=12$ καὶ $20-\chi=8$.

Θ'. 127/175. Τὸ σφάλμα εἶναι ἡ διαίρεσις διὰ $\chi-\chi=0$ · διότι ἡ διὰ τοῦ μηδενὸς διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

128/176. 'Εκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $12\chi-10=15\chi-8$ εὐρίσκομεν $\chi=-\frac{2}{3}$. ὥστε ἡ παράστασις $3\chi+2$, διὰ τῆς ὁποίας διαιροῦμεν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ἰσοῦται μὲ $3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2+2=0$. 'Η δὲ διὰ τοῦ μηδενὸς διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

Ι'. 129/177. 'Εστω, ὅτι τὸ μερίδιον τοῦ δευτέρου εἶναι χ τοῦ πρώτου τότε θὰ εἶναι $\frac{\chi}{v}$. εἶναι δὲ $\chi+\frac{\chi}{v}=a$ καὶ $\chi=\frac{av}{v+1}$.

130/179. 'Εστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τότε θὰ εἶναι
$$\frac{a+\chi}{\beta+\chi}=2 \cdot \frac{a}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{a\beta}{\beta-2a}.$$

131/180. 'Εστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τότε θὰ εἶναι
$$\chi+\frac{\chi}{\mu}=\frac{\chi}{v}+\lambda \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{\mu\nu\lambda}{\mu\nu+v-\mu}.$$

132/181. 'Εὰν ὁ εἷς εἶναι χ , ὁ ἄλλος εἶναι ὁ $\gamma-\chi$ · εἶναι δὲ
$$\mu\chi+(\gamma-\chi)v=a \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{a-\gamma v}{\mu-v} \quad \text{καὶ} \quad \gamma-\chi=\frac{\gamma\mu-a}{\mu-v}.$$

133/182. Οἱ ἀριθμοὶ a, β, γ καὶ χ πρέπει νὰ εἶναι πάντες θετικοί. 'Η ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{a}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}=1$ καὶ λύοντες εὐρίσκομεν
$$\chi=\frac{a\beta\gamma}{a\beta+\beta\gamma+\gamma a}.$$
 εἶναι δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτὴ.

134/183. "Εστω μετὰ χ ἔτη· ὁπότε θὰ εἶναι ὁ μὲν πρῶτος $\alpha + \chi$, ὁ δὲ δεύτερος $\beta + \chi$ ἐτιῶν· πρέπει δὲ τότε νὰ εἶναι $\alpha + \chi = \mu(\beta + \chi)$ καὶ $\chi = \frac{\alpha - \mu\beta}{\mu - 1}$.

Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ πολλῶν ἀγνώστων.

Α'. Λύσεις ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Σελίς 91

135/185. 1) $\chi + \psi = 97$ $\chi - \psi = 73$ $2\chi = 170$ $\chi = 85, \psi = 12$	2) $\chi - 4\psi = 1$ $\chi - \psi = 76$ $3\psi = 75$ $\psi = 25, \chi = 101$	3) $5\chi - \psi = 62$ $3\chi + \psi = 122$ $8\chi = 184$ $\chi = 23, \psi = 53$
4) $3\chi + 5\psi = 39$ $7\chi - 4\psi = -50$ $12\chi + 20\psi = 156$ $35\chi - 20\psi = -250$ $47\chi = -94$ $\chi = -2, \psi = 9$	5) $21\chi + 4\psi = 10$ $3\chi - 8\psi = -5$ $42\chi + 8\psi = 20$ $3\chi - 8\psi = -5$ $45\chi = 15$ $\chi = \frac{1}{3}, \psi = \frac{3}{4}$	6) $5\chi + 3\psi + 2 = 0$ $3\chi + 2\psi + 1 = 0$ $15\chi + 9\psi = -6$ $-15\chi - 10\psi = 5$ $-\psi = -1$ $\psi = 1, \chi = -1$
7) $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\psi = 8$ $-5\omega + 3\psi = -4$ $3\omega + 2\psi = 48$ $-5\omega + 3\psi = -4$ $15\omega + 10\psi = 240$ $-15\omega + 9\psi = -12$ $19\psi = 228$ $\psi = 12, \omega = 8$	8) $\frac{2}{5}\chi + \frac{3}{4}\psi = 11$ $\frac{7}{0}\chi - \frac{3}{4}\psi = 11$ $8\chi + 15\psi = 220$ $14\chi - 15\psi = 220$ $22\chi = 440$ $\chi = 20, \psi = 4$	9) $2,5\chi - 2\psi = 15$ $1,5\chi - 3\psi = 0$ $7,5\chi - 6\psi = 45$ $-3,0\chi + 6\psi = 0$ $4,5\chi = 45$ $\chi = 10, \psi = 5$

Σελίς 93

136/186. 1) $\psi=4\chi$ $2\chi+5\psi=176$ $2\chi+5.4\chi=176$ $22\chi=176$ $\chi=8, \psi=4.8=32$	2) $2\chi=6\psi$ $5\chi-7\psi=72$ $5.3\psi-7\psi=72$ $8\psi=72$ $\psi=9, \chi=3.9=27$	3) $3\chi-9\psi=-12$ $\chi-5\psi=0$ $3.5\psi-9\psi=-12$ $6\psi=-12$ $\psi=-2, \chi=5.(-2)=-10$
4) $\chi=\frac{5}{9}\psi$ $45\chi-13\psi=-36$ $45.\frac{5}{9}\psi-13\psi=-36$ $12\psi=-36, \psi=-3,$ $\chi=\frac{5}{9}.(-3)=-\frac{5}{3}$	5) $5\psi-4\varphi=6$ $8\psi=7\varphi$ $5.\frac{7}{8}\varphi-4\varphi=6$ $3\varphi=48, \varphi=16,$ $\varphi=\frac{7}{8}.16=14$	6) $4\varphi=3\omega$ $6\varphi-5\omega=-4$ $6.\frac{3}{4}\omega-5\omega=-4$ $-2\omega=-16, \omega=8,$ $\omega=\frac{3}{4}.8=6$

Σελίς 94

137/187. 1) $\chi=10\psi-7$ $\chi=25\psi-10$ $10\psi-7=25\psi-10$ $3=15\psi, \psi=\frac{1}{5}$ $\chi=10.\frac{1}{5}-7=-5$	2) $\chi+2\psi=11$ $\chi-3\psi=1$ $11-2\psi=1+3\psi$ $10=5\psi, \psi=2$ $\chi=11-2.2=7$	3) $12\chi=12\psi+5$ $20\psi=12\chi-3$ $12\psi+5=20\psi+3$ $-8\psi=-2, \psi=\frac{1}{4}$ $\chi=12.\frac{1}{4}+5=\frac{2}{3}$
4) $9\chi-2\psi=20$ $14\chi-4\psi=24$ $9\chi-20=7\chi-12$ $2\chi=8, \chi=4$ $\psi=\frac{9.4-20}{2}=8$	5) $3\chi-2\psi=9$ $-9\chi+11\psi=-12$ $6\psi+27=11\psi+12$ $15=5\psi, \psi=3$ $\chi=\frac{9+2.3}{3}=7$	6) $3\chi+5\psi-51=0$ $6\chi-15\psi-27=0$ $102-10\psi=15\psi+27$ $75=25\psi, \psi=3$ $\chi=\frac{51-5\psi}{3}=12$

Σελίς 96

138/188. 1) Έκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\chi=\frac{9\psi+17}{2}$, ἡ δὲ δευτέρα δι-
 δει $8\psi=\frac{5(9\psi+17)}{2}+1$ καὶ $\psi=-3$, ἄρα $\chi=-5$.

$$2) \begin{array}{l|l|l} (2\chi - \psi) + (\chi - 2\psi) = 18 & 3\chi - 3\psi = 18 & \chi - \psi = 6 \quad \text{δθεν} \\ (\chi - 3\psi) - (3\chi - \psi) = -2 & -2\chi - 2\psi = -2 & \chi + \psi = 1, \quad \chi = \frac{7}{2}, \psi = -\frac{5}{2} \end{array}$$

3) Έκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $4\chi = 12\psi + 32$ καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 4 ἔχομεν $\chi = 3\psi + 8$, ἥτοι τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος ὥστε τοῦτο ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρου τοῦ πληθους.

4) Ἀντικαθιστῶντες τὸ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν διὰ τῆς τιμῆς του ἐκ τῆς πρώτης εὐρίσκομεν $9\psi = 15 + 9\psi - 15$, ἥτοι $0 = 0$. Ὡστε τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

$$5) \begin{array}{l} 4\chi = 3\psi + 1 \\ 6(\chi - \psi) = 9\psi - 4\chi \end{array}$$

Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\chi = \frac{3\psi + 1}{4}$ καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν λαμβάνομεν $6 \cdot \left(\frac{3\psi + 1}{4} - \psi \right) = 9\psi - 4 \cdot \left(\frac{3\psi + 1}{4} \right)$.

Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὐρίσκομεν

$$\psi = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ ἐκ τῆς} \quad \chi = \frac{3\psi + 1}{4} \quad \text{εὐρίσκομεν} \quad \chi = \frac{1}{2}.$$

6) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l|l} 7\psi + 9\omega = -33 & 7) \quad 49\psi + 63\omega = -231 & 130\psi = -366 \\ 9\psi - 7\omega = -15 & 9) \quad 81\psi - 63\omega = -135 & \psi = -\frac{183}{65} \end{array}$$

$$\text{ἄρα} \quad -81 \cdot \frac{183}{65} + 135 = 68\omega \quad \text{καὶ} \quad \omega = -\frac{96}{65}.$$

$$7) \begin{array}{l} 3(\psi - \chi) + 36 = 0 \\ \chi - (\chi - \psi) + 60 = 0 \end{array}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν ἀμέσως $\psi = -60$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης εὐρίσκομεν $\chi = -48$.

$$8) \begin{array}{l|l} 3\psi = 9\chi + 15 & 9\chi + 15 = 9\chi + 7, \quad \text{ἥτοι} \quad 15 = 7 \quad \text{ὥστε τὸ δοθὲν} \\ 3\psi = 9\chi + 7 & \text{σύστημα εἶναι ἀδύνατον.} \end{array}$$

139/189. 1) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l} 3) \quad 69\chi + 45\psi = 12,75 & 21\chi = -5,25 \\ -1) -48\chi - 45\psi = -18 & \chi = -0,25 = -\frac{1}{4} \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{2}{3}. \end{array}$$

2) Ἐκ τῆς αἰς ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\chi = \frac{4(2\psi + 1)}{3}$ καὶ ἐκ τῆς β' ας

$$\chi = 3\psi \quad \text{ἐπομένως εἶναι} \quad 3\psi = \frac{4(2\psi + 1)}{3} \quad \text{καὶ} \quad \psi = 4 \quad \text{ἄρα} \quad \chi = 12.$$

3) Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς βας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, ὁπότε λαμβάνομεν $\frac{\chi}{2} = \frac{8}{3}\psi - 20$. ἄρα εἶναι $\frac{\psi}{3} + 1 = \frac{8}{3}\psi - 20$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν, ὅτι εἶναι $\psi = 9$. εἶναι ἐπομένως $\frac{\chi}{2} = \frac{9}{3} + 1 = 4$, ἥτοι $\chi = 8$.

4) Τρέποντες πρῶτον τοὺς μεικτοὺς συντελεστὰς εἰς κλάσματα καὶ ἀπαλείφοντες ἀκολούθως τοὺς παρονομαστὰς λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l|l} 22\chi + 135\psi = 310 & 132\chi + 810\psi = 1860 & 1833\chi = 18330, \text{ ἥτοι} \\ 63\chi - 30\psi = 610 & 1701\chi - 810\psi = 16470 & \chi = 10 \text{ καὶ } \psi = \frac{2}{3} \end{array}$$

5) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l|l} 45\chi - 42\psi = 120 & 585\chi - 546\psi = 1560 & 66\psi = 660, \text{ ἥτοι } \psi = 10 \text{ καὶ} \\ 65\chi - 68\psi = 100 & -585\chi + 612\psi = -900 & \chi = 12. \end{array}$$

6) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l} 8) \quad 56\chi - 80\psi = 0,8 & \chi = 0,3 \text{ καὶ} \\ -5) - 55\chi + 80\psi = -0,5 & \psi = 0,2. \end{array}$$

140/190. 1) Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις κτλ. εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l|l} \chi - 3\psi = -2 & 2\chi - 6\psi = -4 & 4\chi = 28, \chi = 7 \text{ καὶ} \\ 2\chi + 6\psi = 32 & 2\chi + 6\psi = 32 & \psi = 3. \end{array}$$

2) Ὅμοιως εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l|l} 5\chi + 2\psi = -12 & 15\chi + 6\psi = -36 & 23\chi = -46 \\ 4\chi - 3\psi = -5 & 8\chi - 6\psi = -10 & \chi = -2 \text{ καὶ } \psi = -1. \end{array}$$

3) Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\psi = \frac{9\chi + 3}{4}$ καὶ δι' ἀντικατάστασεως εἰς τὴν πρώτην $\frac{\chi + 1}{3} = \frac{9\chi + 3}{16} - 1$. ἔκ τῆς τελευταίας ταύτης εὐρίσκομεν $\chi = 5$ καὶ ἐκ τῆς πρώτης κατόπιν $\psi = 12$.

4) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l} 7\chi - 11\psi = 0 & \psi = 7 \\ -7\chi + 12\psi = 7 & \chi = 11. \end{array}$$

5) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l|l|l} 10\chi + 5\psi = 7\chi + 14\psi & 3\chi - 9\psi = 0 & \chi = 3\psi & \psi = 1 \\ 42 - 7\psi = 15\chi - 10 & 15\chi + 7\psi = 52 & 45\psi + 7\psi = 52 & \chi = 3. \end{array}$$

6) Λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l|l} 3\chi - 2\psi = 13 & 9\chi - 6\psi = 39 & \chi = 11 \\ -2\chi + 3\psi = 8 & -4\chi + 6\psi = 16 & \psi = 10. \end{array}$$

141/191. Ἐκ τῶν $\frac{1}{\chi} = 6$ καὶ $\frac{1}{\psi} = 11$, εὐρίσκομεν $\chi = \frac{1}{6}$ καὶ $\psi = \frac{1}{11}$.

142/192. 1) Έχομεν

$$\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = \frac{5}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{2}{\chi} = 1 \text{ καὶ } \chi = 2 \cdot \text{ ὥστε } \frac{1}{2} + \frac{1}{\psi} = \frac{5}{6} \text{ καὶ} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\psi} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \text{ ἥτοι } \psi = 3$$

2) Θέτομεν $\frac{1}{\chi} = \omega$ καὶ $\frac{1}{\psi} = \varphi$ καὶ λαμβάνομεν

$$5\omega + 2\varphi = 13 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν } \omega = 3 \text{ καὶ } \varphi = -1. \end{array} \right.$$

$$4\omega + 7\varphi = 5 \quad \left| \begin{array}{l} \text{ἥτοι } \frac{1}{\chi} = 3 \cdot \text{ ἄρα } \chi = \frac{1}{3} \text{ καὶ } \frac{1}{\psi} = -1, \text{ ἄρα } \psi = -1. \end{array} \right.$$

3) Ὅμοιως θέτομεν $\frac{1}{\chi} = \omega$ καὶ $\frac{1}{\psi} = \varphi$ λαμβάνομεν δὲ οὕτω

$$8\omega - 7\varphi = 11 \quad \text{καὶ λύοντες εὐρίσκομεν } \omega = 4, \varphi = 3$$

$$6\omega - 2\varphi = 9 \quad \text{ἄρα } \chi = \frac{1}{4}, \psi = \frac{1}{3}.$$

4) Θέτομεν $\frac{1}{\chi} = \omega$ καὶ $\frac{1}{\psi} = \varphi$ ὁπότε ἔχομεν τὸ σύστημα

$$27\omega + 5\varphi = -1$$

$$27\omega + 5\varphi = -1$$

$$\frac{7\omega}{2} + \frac{7}{3}\varphi = -\frac{77}{90}$$

$$\text{ἔξ οὗ εὐρίσκομεν τὸ}$$

$$315\omega + 210\varphi = -77.$$

τοῦ ὁποίου αἱ λύσεις εἶναι $\omega = \frac{5}{117}, \varphi = -\frac{28}{65}$ ἄρα εἶναι

$$\chi = \frac{117}{5} \quad \text{καὶ} \quad \psi = -\frac{65}{28}.$$

5) Θέτομεν $\frac{1}{\psi} = \varphi$ καὶ λαμβάνομεν $17\chi - 0,3\varphi = 3$

$$16\chi - 0,4\varphi = 1,7.$$

Λύομεν ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο καὶ εὐρίσκομεν $\chi = 0,345$ καὶ $\varphi = 9,55$ ἥτοι

$$\frac{1}{\psi} = 9,55 \quad \text{καὶ} \quad \psi = \frac{100}{955} = \frac{20}{191}.$$

6) Θέτομεν $\frac{1}{\psi} = \varphi$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{\chi}{3} + 5\varphi = \frac{13}{3}$$

$$\chi + 15\varphi = 13$$

ἢ

$$\frac{\chi}{6} + 10\varphi = \frac{8}{3}$$

$$\chi + 60\varphi = 16.$$

Λύνοντας τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi=12$ καὶ $\varphi=\frac{1}{15}$, ἤτοι $\psi=15$.

143/193. 1) Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $2\chi=8\alpha$ καὶ $\chi=4\alpha$ ἐκ τῆς πρώτης δὲ ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $4\alpha+\psi=5\alpha$ καὶ $\psi=\alpha$.

$$\begin{array}{l|l} 2) \text{ Λαμβάνομεν} & 5) \begin{array}{l} 25\chi-5\psi=30\alpha \\ -1)-4\chi+5\psi=-9\alpha \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} 21\chi=21\alpha \text{ καὶ } \chi=\alpha, \\ \text{ἄρα } 5\alpha-6\alpha=\psi=-\alpha. \end{array}$$

3) Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $3\alpha\chi=9\beta$ καὶ $\chi=3\cdot\frac{\beta}{\alpha}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας λαμβάνομεν $\alpha\cdot\frac{3\beta}{\alpha}-2\beta=\psi=\beta$.

$$4) \quad \begin{array}{l|l|l} \alpha\chi+2\psi=-1 & -3\alpha\chi-6\psi=3 & (4-3\alpha)\chi=3+2\gamma \\ 2\chi+3\psi=\gamma & 4\chi+6\psi=2\gamma & \chi=\frac{3+2\gamma}{4-3\alpha} \end{array}$$

Ὅμοιως ἐκ τοῦ δοθέντος συστήματος λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l} -2\alpha\chi-4\psi=2 & (3\alpha-4)\psi=2+\alpha\gamma \\ 2\alpha\chi+3\alpha\psi=\alpha\gamma & \psi=\frac{2+\alpha\gamma}{3\alpha-4} \end{array}$$

5) Ἐξ αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸ

$$\begin{array}{l|l} -2\beta\chi+2\beta^2\psi=-4\beta & \psi(\alpha+2\beta^2)=-2(1+2\beta) \\ 2\beta\chi+\alpha\psi=-2 & \psi=-\frac{2(1+2\beta)}{\alpha+2\beta^2} \end{array}$$

Ὅμοιως ἐκ τοῦ δοθέντος λαμβάνομεν

$$\begin{array}{l|l} \alpha\chi-\alpha\beta\psi=2\alpha & (\alpha+2\beta^2)\chi=2(\alpha-\beta) \\ 2\beta^2\chi+\alpha\beta\psi=-2\beta & \chi=\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha+2\beta^2} \end{array}$$

6) Λύνοντας τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς χ εὐρίσκομεν $\chi=6\alpha-2\psi$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν εὐρίσκομεν $\frac{2\psi}{3}-6\alpha+2\psi=2\beta$,

$$8\psi=18\alpha+6\beta, \text{ ἤτοι } \psi=\frac{3(3\alpha+\beta)}{4}. \text{ ὥστε } \chi=6\alpha-2\cdot\frac{9\alpha+3\beta}{4}=\frac{3}{2}(\alpha-\beta).$$

**Λύσεις συστημάτων ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων α' βαθμοῦ
μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους.**

Σελίς 101

144/194. 1) Μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὡς καὶ 1ης καὶ 3ης ἀπαλείφομεν τὸν ω .

λαμβάνομεν δὲ $5\chi - \psi = 4$ | Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν
 $6\chi + 2\psi = 8$ | $\chi = 1, \psi = 1$ ὁ ὡ ἤδη εὐρίσκεται ἐκ μιᾶς τῶν
 δοθεισῶν εἶναι δὲ $\omega = 2$.

2) Μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὡς καὶ 3ης καὶ 2ας, ἀπαλείφομεν τὸν φ καὶ εὐρίσκομεν
 $-2\chi + 3\psi = 4$ | Λύοντες τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi = \frac{77}{23}, \psi = \frac{82}{23}$ καὶ κατό-
 $5\chi + 4\psi = 31$ | πιν $\varphi = \frac{66}{23}$.

3) Ἀπαλείφοντες μεταξὺ 2ας καὶ 1ης, 2ας καὶ 3ης τὸν χ εὐρίσκομεν
 $-11\psi + 15\omega = 30$ | λύοντες δὲ τοῦτο εὐρίσκομεν $\omega = 2, \psi = 0$ καὶ
 $-10\psi + 20\omega = 58$ | ἀκολούθως ἐκ μιᾶς τῶν δοθεισῶν $\chi = -1$.

4) Μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὡς καὶ 1ης καὶ 3ης, ἀπαλείφομεν τὸν χ καὶ εὐρίσκομεν
 $2\psi - 3\varphi = 0$ | $\psi = 9, \varphi = 6$ καὶ κατόπιν $\chi = 7$.
 $4\psi + \varphi = 42$ |

145/195. 1) Ἐάν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο εὐρίσκομεν $\chi = 3$,
 $\psi = -5, \varphi = -4$.

2) Ἐκ τῆς 2ας καὶ 3ης εὐρίσκομεν ἀμέσως $\chi = 9$ καὶ κατόπιν $\varphi = 6, \psi = 3$.

3) Προσθέτοντες τὰς τρεῖς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $\chi + \psi + \varphi = 25$.
 Ἐάν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης διαδοχικῶς τὰς τρεῖς δοθείσας ἐξι-
 σώσεις εὐρίσκομεν $\varphi = -3, \chi = 15, \psi = 13$.

4) Λύομεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς χ καὶ τὴν δευτέραν ὡς πρὸς ω καὶ εὐρί-
 σκομεν $\chi = 12 - 2\psi$ (1), $\omega = \frac{21 - \psi}{2}$ (2). τὰς τιμὰς δὲ ταύτας τοῦ χ καὶ
 τοῦ ω θέτομεν εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν καὶ λαμβάνομεν $\frac{21 - \psi}{2} + 2(12 - 2\psi) = 12$,
 ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\psi = 5$ κατόπιν δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὐρίσκομεν
 $\chi = 2, \omega = 8$.

5) Ἡ 2α καὶ ἡ 3η ἀποτελεῖ ἴδιον σύστημα, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποῖου εὐ-
 ρίσκομεν $\psi = -2, \varphi = -3$ καὶ κατόπιν $\chi = 5$.

6) Ὅμοίως ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων
 εὐρίσκομεν $\chi = 8, \varphi = -3$ καὶ κατόπιν $\psi = 4$.

146/196. 1) Μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὡς καὶ 2ας καὶ 3ης, ἀπαλείφομεν τὸν ψ
 καὶ εὐρίσκομεν $7\chi + 12\varphi = 156$ | $\chi = 12, \varphi = 6$ καὶ κατόπιν $\psi = 18$.
 $\chi + 2\varphi = 24$ |

2) Ἐάν μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὥς καὶ 1ης καὶ 3ης ἀπαλείψωμεν τὸ ω , εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l} 8\chi + 11\psi = -19 & \chi = 10, \psi = -9 \text{ καὶ κατόπιν } \omega = 12. \\ 33\chi - 2\psi = 348 & \end{array}$$

3) Μεταξὺ 1ης καὶ 2ας, ὥς καὶ 1ης καὶ 3ης, ἀπαλείφομεν τὸ χ καὶ εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l} 5\psi + 8\omega = 408 & \psi = 24, \omega = 36 \text{ καὶ κατόπιν } \chi = 12. \\ 12\psi + \omega = 324 & \end{array}$$

4) Λύοντες τὴν 2αν ἐξίσωσιν πρὸς ψ καὶ τὴν 3ην πρὸς χ εὐρίσκομεν

$$\psi = \frac{20 - \omega}{2}, \chi = 36 - 4\omega. \text{ Ἐάν δὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ } \psi \text{ καὶ } \chi \text{ ἀντικαταστή-}$$

σωμεν εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{36 - 4\omega}{2} + \frac{20 - \omega}{12} + \frac{\omega}{4} = 5$,

ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\omega = 8$ καὶ κατόπιν $\psi = 6, \chi = 4$.

147/197. 1) Αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται $\chi + \psi = 1, \chi + \omega = 2, \psi + \omega = 3$, τὰς ὁποίας, ὅταν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\chi + \psi + \omega = 3$ · ἐάν δὲ ἀπὸ τῆς τελευταίας ταύτης ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς τρεῖς πρώτας, εὐρίσκομεν $\chi = 0, \psi = 1, \omega = 2$.

2) Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εὐρίσκομεν τὰς $\chi - 2\psi = 1, \psi - 2\varphi = -3, \chi - 2\varphi = -1$, καὶ ἐξ αὐτῶν εὐρίσκομεν, ὅτι $\chi = 3, \psi = 1, \varphi = 2$.

3) Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη καὶ εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{\chi} + \frac{2}{\psi} + \frac{2}{\varphi} = 12, \text{ ἥτοι } \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = 6. \text{ Ἐάν δὲ ἀπὸ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐξισώσεως ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς δοθείσας ἐξισώσεις εὐρίσκομεν}$$

$$\frac{1}{\varphi} = 4, \text{ ἥτοι } \varphi = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\chi} = 2, \text{ ἥτοι } \chi = \frac{1}{2} \text{ καὶ } \frac{1}{\psi} = 0.$$

Σημείωσις. Ἵνα $\frac{1}{\psi} = 0$ δέον τὸ ψ νὰ εἶναι ἄπειρον.

4) Διὰ τῆς προσθέσεως τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\frac{2}{\chi} = 4$, ἥτοι $\chi = \frac{1}{2}$, καὶ διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς 2ας ἀπὸ τῆς 1ης εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{\psi} = 6, \text{ ἥτοι } \psi = \frac{1}{3}, \text{ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς 1ης εὐρίσκομεν } \varphi = \frac{1}{4}.$$

148/198. 1) Προσθέτοντες τὴν 2αν καὶ 3ην κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $2\varphi = 6$, ἥτοι $\varphi = 3$ · ἐάν δὲ προσθέσωμεν τὴν 3ην καὶ 4ην εὐρίσκομεν $2\omega = 8$, ἥτοι $\omega = 4$. Κατόπιν δὲ ἐκ τῶν δύο πρώτων εὐρίσκομεν $\chi = 1, \psi = 2$.

2) Προσθέτοντες τὰς δοθείσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες ἔπειτα

4) Εύρισκομεν $\chi + \psi + \varphi + \omega = 17$. ἤδη δὲ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ ταύτης διαδοχικῶς δοθείσας καὶ εὐρίσκομεν $\omega = 0$, $\chi = 6$, $\psi = 3$ καὶ $\varphi = 9$.

3) Ἐκ τῆς 4ης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν ἀμέσως $\varphi = \frac{1}{4}$, ἐκ δὲ τῆς 3ης, ἣτις ἔχει ἤδη ἓνα μόνον ἄγνωστον, τὸν ω , εὐρίσκομεν $\omega = -\frac{1}{10}$. ὁμοίως ἐκ

2ας λαμβάνομεν $\psi = \frac{1}{20}$ καὶ ἐκ τῆς 1ης $\chi = -\frac{1}{20}$.

4) Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου κατὰ τὰ γνωστὰ δίδει $\chi = 1$, $\psi = 2$, $\varphi = 3$, $\omega = 4$.

149/199. 1) Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦμεν ἔπειτα

2) εὐρίσκομεν δὲ οὕτω $\chi + \psi + \omega = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$. ἔὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰς δοθείσας, εὐρίσκομεν

$$\omega = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}, \quad \chi = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}.$$

2) Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $0 = \alpha + \beta + \gamma$. ἐπομένως ἔὰν $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον· ἀόριστον δὲ ἔὰν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ γίνεται τοῦτο, ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο ἐκ τῶν διδομένων διαφορῶν εἶναι ἀριθμὸς ἴσος τῆς ἄλλης.

3) Προσθέτοντες τὰς δεδομένας ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\chi + \psi + \omega = \alpha + \beta + \gamma,$$

αφαιροῦντες δὲ ἀπὸ ταύτης διαδοχικῶς τὰς δεδομένας εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \psi = \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \omega = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

4) Ὅμοιως προσθέτοντες τὰς δοθείσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦν-

ἔπειτα διὰ 3, λαμβάνομεν $\chi + \psi + \varphi + \omega = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{3}$, ἀφαιροῦντες δὲ

ἀπὸ ταύτης διαδοχικῶς τὰς δοθείσας εὐρίσκομεν

$$\chi = \frac{\beta + \gamma + \delta - 2\alpha}{3}, \quad \psi = \frac{\alpha + \gamma + \delta - 2\beta}{3},$$

$$\omega = \frac{\alpha + \beta + \delta - 2\gamma}{3}, \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2\delta}{3}.$$

Προβλήματα.

Σελίς 106

A'. 150/201. Λαμβάνομεν τὸ σύστημα $\chi + \psi = 225$

$\chi - \psi = 531$, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ

ὁποίου εὐρίσκομεν $\chi = 378$, $\psi = -153$.

151/204. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $\chi - \psi = 3$ καὶ $3\chi = 4\psi$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi = \frac{4}{3}\psi$, $\frac{4}{3}\psi - \psi = 3$ καὶ $\psi = 9$.

ἄρα $\chi = 12$.

152/205. Ἐχομεν $\chi + \psi = 5$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = 5$, ἥτοι $\chi = 5\psi$ ὥστε εἶναι

$5\psi + \psi = 5$, ἥτοι $6\psi = 5$ καὶ $\psi = \frac{5}{6}$. ἄρα $\chi = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$.

153/207. Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ καὶ $\chi > \psi$, ἔχομεν κατὰ πρῶτον $\chi + \psi = 425$. Ἐξ ἄλλου ὁ διαιρετέος χ ἴσουςται μὲ τὸν διαιρέτην ψ ἐπὶ τὸ πληλίκον 5 οὖν τῷ ὑπολοίπῳ 5· δηλαδὴ εἶναι $\chi = 5\psi + 5$. Ἐὰν ἤδη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν θέσωμεν ἀντὶ χ τὴν τιμὴν του ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, ἔχομεν $5\psi + 5 + \psi = 425$, ἥτοι $\psi = 70$. ἄρα καὶ $\chi = 5 \cdot 70 + 5 = 355$.

154/208. Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι χ καὶ ὁ παρονομαστὴς ψ λαμβάνομεν τὸ σύστημα $\frac{\chi - 11}{\psi} = \frac{1}{6}$

$\frac{\chi - 12}{\psi} = \frac{1}{7}$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο λαμ-

βάνομεν ἐκ τῆς πρώτης $6\chi - 66 = \psi$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $7\chi - 84 = \psi$ ἄρα εἶναι $7\chi - 84 = 6\chi - 66$ καὶ $\chi = 18$ ὥστε εἶναι $\psi = 42$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{18}{42}$.

155/209. Λαμβάνομεν τὸ σύστημα

$$\frac{\chi + 2}{\psi + 2} = \frac{1}{2}$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ

$$\frac{\chi - 2}{\psi - 2} = \frac{1}{6}$$

$$2\chi + 2 = \psi$$

$$6\chi - 10 = \psi.$$

Ὡστε εἶναι $2\chi + 2 = 6\chi - 10$ καὶ $\chi = 3$. ἄρα $\psi = 8$.

156/211. Λαμβάνομεν τὸ σύστημα $\frac{\chi}{\psi} = \frac{2}{3}$

$\frac{\chi + 4}{\psi + 4} = \frac{4}{5}$, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου

εὐρίσκομεν $\chi = 4$, $\psi = 6$.

157/214. Ἐάν x εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ τῶν μονάδων, θὰ εἶναι $x+y=11$ καὶ $10y+x-(10x+y)=27$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y νὰ εἶναι ἀκέραιοι, θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $x=4$ καὶ $y=7$. Ὡστε ὁ ζητούμενος διψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 47.

158/216. Ἐστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ τῶν μονάδων. Τότε θὰ εἶναι $x+y=10$ καὶ $4(10x+y)-(10y+x)=4$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $x=\frac{64}{45}$, ἥτοι τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

B'. 159/218. Ἐστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν καὶ y ὁ τῶν θρανίων· τότε θὰ εἶναι $x-2y=7$ καὶ $x-3y=-8$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $x=37$, $y=15$.

160/222. Ἐάν x δραχμὰς τιμᾶται ἡ 1 ὀκά ζαχάρως καὶ y ἡ τοῦ καφέ, θὰ ἔχωμεν $5x+2y=260$, καὶ $6x+3y=360$, πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y νὰ εἶναι θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο δίδει $x=20$, $y=80$.

161/223. Ἐστω ὅτι ἡ 1 ὀκά τυροῦ τιμᾶται x δραχ. καὶ ἡ 1 ὀκά βουτύρου y δραχ. Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν $5x=3y$ καὶ $5y-3x=288$. Λύοντες δὲ ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $x=54$, $y=90$.

162/225. Ἐστω, ὅτι ἀντὶ x δραχμῶν ἠγόρασε τὴν ἀγελάδα καὶ ἀντὶ y δραχ. τὸν ἵππον. Τότε ἔχομεν $x+y=5200$ δραχ. καὶ $y-2x=460$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $x=1580$, $y=3620$.

163/227. Ἐάν ὁ Α ἔχη x δραχ. καὶ ὁ Β ἔχη y , θὰ εἶναι $x-10=y+10$ καὶ $x+10=2(y-10)$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $x=70$, $y=50$.

Γ'. 164/229. Ἐστω ὅτι εἶναι σήμερον ὁ μὲν πατὴρ x ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς y ἐτῶν· τότε εἶναι $x+y=72$ καὶ $x-4=3(y-4)$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ νὰ μὴ υπερβαίνουν τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $x=52$, $y=20$.

165/231. Ἐστω x ἔτη ἡ παροῦσα ἡλικία τοῦ μεγαλύτερου ἀδελφοῦ καὶ y ἔτη ἡ τοῦ μικροτέρου· πρὸ 4 ἐτῶν ὁμοῦς ἡ ἡλικία αὐτῶν ἦτο $x-4$ καὶ $y-4$ · καὶ ἐπειδὴ ἡ τοῦ πρώτου ἦτο τριπλασία, ἔπεται ὅτι $x-4=3(y-4)$ · ὁμοίως μετὰ 8 ἔτη ἡ ἡλικία αὐτῶν θὰ εἶναι $x+8$ καὶ $y+8$, ἐπομένως θὰ εἶναι $x+8=2(y+8)$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $x=40$ καὶ $y=16$.

166/232. Ἐάν x ἔτη εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου καὶ y ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ δευτέρου, εἶναι $x-15=2(y-15)$ καὶ $x+10=\frac{11}{8}(y+10)$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $y=-66$. Ὡστε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Δ'. 167/233. "Εστωσαν χ τὰ ἀντιτραχωματικά ἱατρεία καὶ ψ οἱ παιδικοὶ σταθμοί. Τότε εἶναι $100\chi + 70\psi = 750$ καὶ $120\chi + 60\psi = 780$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi=4$, $\psi=5$.

168/234. "Εστωσαν χ τὰ ἄρρενα καὶ ψ τὰ θήλεα. "Ωστε ἔχομεν $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{4} = 1600$ καὶ $\frac{\chi}{4} + \frac{\psi}{3} = 1550$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi=3000$, $\psi=2400$.

169/236. "Εστω ὅτι διένειμε τὴν ἡμέραν αὐτὴν χ ὀκάδας γάλακτος καὶ ψ ὀκάδας σάλπωνος. Τότε εἶναι $35\chi + 8\psi = 29\frac{1}{2}$ καὶ $30\chi + 48\psi = 87$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi = \frac{1}{2}$, $\psi = 1\frac{1}{2}$.

170/237. "Εστω ὅτι ἡσφαλίσθησαν κατὰ τῆς χαλάζης χ ἀγρόται καὶ κατὰ τοῦ παγετοῦ ψ . Τότε εἶναι $\chi=5\psi$ καὶ $\frac{\chi}{4} - \frac{\psi}{2} = 1500$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi=10000$, $\psi=2000$.

Ε'. 171/239. "Εστω ὅτι ὁ πρῶτος κατέθεσε ἀρχικῶς χ δραχ. καὶ ὁ δεύτερος ψ . Τότε εἶναι $\chi=2\psi$ καὶ $\frac{\chi-5000}{\psi+5000} = \frac{3}{2}$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοί. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi=50000$, $\psi=25000$.

172/241. "Εστω χ δραχ. τὸ κεφάλαιον τὸ τοκίζόμενον πρὸς 5% καὶ ψ δραχ. τὸ τοκίζόμενον πρὸς 7%. ἄρα ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ α' κεφαλαίου ἦτο $\frac{5\chi}{100}$ καὶ ὁ τοῦ β' $\frac{7\psi}{100}$. εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα $\frac{5\chi}{100} + \frac{7\psi}{100} = 2580$. εἰάν ὅμως ἐνηλλάσσοντο τὰ ἐπιτόκια, θὰ εἴχομεν $\frac{7\chi}{100} + \frac{5\psi}{100} = 2580 + 120$. εἰάν ἤδη λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο, εὐρίσκομεν $\chi=25000$ καὶ $\psi=19000$.

173/242. "Εχομεν κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{12000.\epsilon}{100} + \frac{6000.\epsilon'}{100} = 1380 \quad \text{καὶ} \quad \frac{12000(\epsilon+1)}{100} - \frac{6000(\epsilon'-1)}{100} = 720.$$

ἥτοι $2\epsilon + \epsilon' = 23$ καὶ $2\epsilon - \epsilon' = 9$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\epsilon=8$ καὶ $\epsilon'=7$.

5'. 174/244. Ἐστω ὅτι εἰς μίαν ὥραν ὁ ταχύτερος βαδίζει χ χιλιόμετρα καὶ ὁ βραδύτερος ψ . Ὡστε εἰς 3 ὥρας ὁ μὲν πρῶτος ἐβάδισε 3χ χιλιόμετρα, ὁ δὲ δευτέρος 3ψ χιλιόμετρα. Εἶναι δὲ φανερόν ὅτι, ἀφοῦ ἐβάδιζον κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις, εἶναι $3\chi + 3\psi = 30$, ἥτοι $\chi + \psi = 10$. Ἐὰν ὁμως ἐβάδιζον πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσεν ὁ ταχύτερος, εἶναι κατὰ 30 χιλιόμετρα μεγαλύτερον τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον διήνυσεν ὁ δευτέρος. Διήνυσεν δὲ ὁ μὲν πρῶτος 15χ χιλιόμετρα, ὁ δὲ δευτέρος 15ψ χιλιόμετρα. Ὡστε εἶναι $15\chi - 15\psi = 30$, ἥτοι $\chi - \psi = 2$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα $\chi + \psi = 10$ καὶ $\chi - \psi = 2$ εὐρίσκομεν $\chi = 6$ καὶ $\psi = 4$.

175/246. Ἐστω χ χιλιόμετρα ἡ ἀπόστασις καὶ ψ χιλιόμετρα ἡ ταχύτης. Εἴναι δὲ ὁ χρόνος 4 ὥραι ἴσος μὲ $\frac{\frac{2}{3}\chi}{\psi}$, ἥτοι εἶναι $\frac{2\chi}{3\psi} = 4$. Ἐὰν ὁμως ἡ ταχύτης εἶναι $\psi - 2$ χιλιόμετρα, θὰ ἔχωμεν $\frac{\chi}{\psi - 2} = 7\frac{1}{2}$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi = 60$ καὶ $\psi = 10$.

176/247. Ἐστω χ χιλιόμετρα τὸ μῆκος τοῦ δρόμου καὶ ψ χιλιόμετρα ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ ὁδοιπόρου. Τὸ ἥμισυ τοῦ δρόμου τὸ διήνυσεν εἰς χρόνον $\frac{\chi}{2} : \psi$ καὶ τὸ ἄλλο ἥμισυ τὸ διήνυσεν εἰς χρόνον $\frac{\chi}{2} : 2\psi$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{2\psi} + \frac{\chi}{4\psi} = 10\frac{4}{5}$, ἥτοι $5\chi - 72\psi = 0$. Κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν τοῦ ἡ ταχύτης εἶναι $\psi + 1$ χιλιόμετρα καὶ ὁ χρόνος $\frac{\chi}{\psi + 1}$, ὥστε εἶναι $\frac{\chi}{\psi + 1} = 12$, ἥτοι $\chi - 12\psi = 12$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα $5\chi - 72\psi = 0$, $\chi - 12\psi = 12$ εὐρίσκομεν $\chi = 72$, $\psi = 5$.

Z'. 177/248. Ἐστω χ ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου οἶνοπνεύματος καὶ ψ ὁ τοῦ δευτέρου. Τότε τὸ καθαρὸν οἶνόπνευμα τὸ περιεχόμενον εἰς τὰ 7 χιλιόγραμμα εἶναι $\frac{7\chi}{100}$. εἰς τὰ 6 εἶναι $\frac{6\psi}{100}$ καὶ εἰς τὸ μείγμα τῶν 13 χιλιόγραμμων εἶναι $\frac{18.13}{100}$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{7\chi}{100} + \frac{6\psi}{100} = \frac{18.13}{100}$ ἢ $7\chi + 6\psi = 234$ (1). Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{9\chi}{100} + \frac{4\psi}{100} = \frac{16.13}{100}$ ἢ $9\chi + 4\psi = 208$ (2). Τὸ σύστημα ἤδη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) λυόμενον δίδει $\chi = 12^\circ$ καὶ $\psi = 25^\circ$.

178/250. Ἐστώσαν τὰ χιλιόγραμμα τοῦ χαλκοῦ χ καὶ τὰ τοῦ σιδήρου ψ . ὥστε κατὰ πρῶτον εἶναι $\chi + \psi = 108$. Ἄλλ' ἀφοῦ τὰ 9 χιλιόγραμμα χαλκοῦ χά-

νουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος 1 χιλιόγραμμα, τὰ χ χιλιόγραμμα χάνουν $\frac{\chi}{9}$. Ὁμοίως εὐρίσκομεν ὅτι τὰ ψ χιλιόγραμμα σιδήρου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος $\frac{\psi}{8}$ χιλιόγραμμα. Ὡστε εἶναι $\frac{\chi}{9} + \frac{\psi}{8} = 13$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο ἄνω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\chi = 36$, $\psi = 72$.

179/252. Ἐστω χ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ λίθου καὶ ψ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ φελλοῦ. Τότε κατὰ πρῶτον ἔχομεν $\chi + \psi = 115$. Ἐπειτα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σώματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον αἰωρεῖται ἐν τῷ ὕδατι, εἶναι 115 κυβικαὶ παλάμαι, διότι 115 χιλιόγραμμα εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ λίθου εἶναι $\frac{\chi}{3}$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ φελλοῦ εἶναι $\frac{\psi}{0,24}$. Ὡστε ἔχομεν $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{0,24} = 115$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\chi = 95$ καὶ $\psi = 20$.

180/253. Ἐστῶσαν χ τὰ γραμμάρια τοῦ χρυσοῦ καὶ ψ τὰ γραμμάρια τοῦ ἀργύρου. Ὡστε κατὰ πρῶτον εἶναι $\chi + \psi = 375$, ἀλλ' ἐπειδὴ ἐντὸς τοῦ ὕδατος χάνει τὸ κρᾶμα τοῦτο $375 - 350 = 25$ γραμμάρια, ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι 25 κυβικοὶ δάκτυλοι. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ χρυσοῦ εἶναι $\frac{\chi}{19,5}$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀργύρου εἶναι $\frac{\psi}{10,5}$, ἔπεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{19,5} + \frac{\psi}{10,5} = 25$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\chi = 312,829$, $\psi = 62,171$.

181/254. Ἐστω χ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ ἐνὸς σώματος καὶ ψ χιλιόγραμμα τὸ βάρος τοῦ ἄλλου καὶ ἔστω $\chi > \psi$. Τότε εἶναι $\chi + \psi = 42$ καὶ $\frac{\psi}{\chi} = \frac{2}{5}$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi = 30$, $\psi = 12$.

Η'. 182/255. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι

$$\chi + \psi + \varphi = 60, \quad \chi + \psi = \varphi, \quad \chi + \varphi = 2\psi$$

Θέτοντες ἤδη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἀντὶ φ τὸ ἴσον τοῦ $\chi + \psi$, εὐρίσκομεν $\chi + \psi + \chi + \psi = 60$, ἥτοι $\chi + \psi = 30$. Ἐὰν δὲ λύσωμεν τὴν τρίτην πρὸς φ εὐρίσκομεν $\varphi = 2\psi - \chi$. Ὡστε εἶναι $\chi + \psi = 2\psi - \chi$, ἥτοι $2\chi - \psi = 0$. Ἦδη ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος $\chi + \psi = 30$, $2\chi - \psi = 0$ εὐρίσκομεν $\chi = 10$, $\psi = 20$ καὶ κατόπιν $\varphi = 30$.

183/256. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$2\chi + \psi = 85, \quad 2\psi + \varphi = 65, \quad 2\varphi + \chi = 60$$

Ὡστε εἶναι $\chi = 30, \psi = 25, \varphi = 15$.

184/259. Ἐστω χ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ φ τὸ τῶν μονάδων. Τότε εἶναι $\chi + \psi + \varphi = 17$

$$\chi = 4\psi$$

$$100\chi + 10\psi + \varphi - (100\varphi + 10\psi + \chi) = 99, \quad \text{ἥτοι } \chi - \varphi = 1.$$

Ἦδη ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\psi = \frac{\chi}{4}$ καὶ ἐκ τῆς τρίτης $\varphi = \chi - 1$. Θέτοντες δὲ τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ φ εἰς τὴν πρώτην εὐρίσκομεν

$$\chi + \frac{\chi}{4} + \chi - 1 = 17, \quad \text{ἐξ ἧς εὐρίσκομεν } \chi = 8 \quad \text{καὶ κατόπιν } \psi = 2, \quad \varphi = 7$$

Ὡστε ὁ ζητούμενός ἀριθμὸς εἶναι ὁ 827.

185/262. Ἐστῶσαν χ αἱ δραχμαὶ τοῦ πρώτου, ψ αἱ δραχ. τοῦ δευτέρου καὶ φ δραχ. αἱ τοῦ τρίτου. Τότε εἶναι

$$\chi + 40 = 3(\psi + \varphi - 40), \quad \psi + 83 = 4(\varphi + \chi - 83), \quad \varphi + 43 = 5(\chi + \psi - 43)$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi = 50, \psi = 13, \varphi = 57$

186/264. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὰς ὥρας τοῦ πρώτου, διὰ τοῦ ψ τὰς τοῦ δευτέρου, διὰ τοῦ φ τὰς τοῦ τρίτου καὶ διὰ τοῦ ω τὰς ὥρας κατὰ τὰς ὁποίας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον ὅλοι ὁμοῦ καὶ σκεφθῶμεν ὡς εἰς τὸ προηγουμένον πρόβλημα εὐρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις

$$1) \quad \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} = \frac{1}{12}$$

$$2) \quad \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{20}$$

$$3) \quad \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\chi} = \frac{1}{15}$$

$$4) \quad \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\omega}$$

Ἐὰν ἤδη προσθέσωμεν τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{\chi} + \frac{2}{\psi} + \frac{2}{\varphi} = \frac{1}{5}, \quad \text{ἥτοι } \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{10}.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῆς εὐρεθείσης ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις, εὐρίσκομεν $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$, ἥτοι $\varphi = 60$, κατόπιν $\chi = 20, \psi = 30$. Τέλος δὲ ἐκ τῆς τετάρτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $\omega = 10$.

Θ'. 187/265. Ἐὰν χ, ψ καὶ φ εἶναι τὰ ζητούμενα μήκη τῶν πλευρῶν, ἔχομεν $\chi + \psi = 19, \psi + \varphi = 23, \varphi + \chi = 21$. Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τοῦ συστήματος τῶν τριῶν αὐτῶν ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\chi = 8,5\mu, \psi = 10,5\mu, \varphi = 12,5\mu$.

188/266. Τὸ ἄθροισμα $\chi + \psi$ τῶν δύο γωνιῶν εἶναι $\chi + \psi = 180 - 65 = 115$ καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι $\chi - \psi = 39$. Ὡστε εἶναι $\chi = 77$, $\psi = 38$.

189/268. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\chi + \psi + \varphi = 129 \quad \psi + \varphi + \omega = 136$$

$$\varphi + \omega + \chi = 145 \quad \chi + \psi + \omega = 154.$$

Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν

$$\chi = 52, \quad \psi = 43, \quad \varphi = 34, \quad \omega = 59.$$

190/269. Ἐὰν χ μ. εἶναι ἡ βάσις καὶ ψ μ. τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $\chi\psi$. Ἐὰν ὁμως ἔχωμεν $\chi + 2$ βάσιν καὶ $\psi - 3$ ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $(\chi + 2)(\psi - 3) = \chi\psi - 41$. Ὁμοίως δὲ εὐρίσκομεν ὅτι $(\chi + 3)(\psi - 2) = \chi\psi + 24$. καὶ $\chi = 33$, $\psi = 32$.

I'. 191/271. Αἱ ἐξισώσεις εἶναι $\chi + \psi = \alpha$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = \pi$, ἥτοι $\chi = \pi\psi$ καὶ $\pi\psi + \psi = \alpha$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $\psi = \frac{\alpha}{\pi + 1}$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς $\chi = \pi\psi$, $\chi = \frac{\alpha\pi}{\pi + 1}$.

192/273. Αἱ ἐξισώσεις εἶναι $\frac{\chi}{3} = \psi - \beta$ καὶ $\frac{\psi}{2} = \chi - \alpha$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi = \frac{3(2\alpha + \beta)}{5}$, $\psi = \frac{2(\alpha + 3\beta)}{5}$.

193/275. Ἐστῶσαν αἱ τρεῖς γωνίαι A, B, Γ. Τότε εἶναι $A + B + \Gamma = 180^\circ$ καὶ $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{\Gamma}{\gamma}$. Ὡστε εἶναι $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{A+B+\Gamma}{a+b+\gamma} = \frac{180}{a+b+\gamma}$. καὶ $A = \frac{180a}{a+b+\gamma}$, $B = \frac{180b}{a+b+\gamma}$, $\Gamma = \frac{180\gamma}{a+b+\gamma}$.

194/276. Ἐὰν a εἶναι ἡ βάσις καὶ ψ τὸ ὕψος, θὰ εἶναι $2a(\psi - 2) = a\psi$ ἢ $2a\psi - 4a = a\psi$ ἢ $a\psi = 4a$ καὶ ἐπειδὴ $a \neq 0$, ἔπεται, ὅτι $\psi = 4$.

Λύσεις ἀνισοτήτων.

Σελὶς 112

195/277. 1) $21\chi < 140\chi - 20$

$$20 < 140\chi - 21\chi$$

$$20 < 119\chi \quad \text{καὶ} \quad \chi > \frac{20}{119}$$

3) $12\chi - 90 > 2\chi - 8 - 25$

$$12\chi - 2\chi > 90 - 8 - 25$$

$$10\chi > 57 \quad \text{καὶ} \quad \chi > \frac{57}{10}$$

2) $6x+18>4x+92$

$6x-4x>92-18$

$2x>74 \text{ και } x>37$

4) $4x+8-6x+42>3x+75$

$4x-6x-3x>75-8-42$

$-5x>25 \text{ και } x<-5.$

196/279. Λύοντες την πρώτην άνισότητα εύρισκομεν $x<3$. Έκ δὲ τῆς δευτέρας εύρισκομεν $x<9$ ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 4, 5, 6, 7, 8.

197/280. Ἡ πρώτη δίδει $x<-2$ καὶ ἡ δευτέρα $x>-2$ ἥτοι οὐδεὶς ἀριθμὸς ἐπαληθεύει ἀμφοτέρως τὰς άνισότητας ταύτας.

198/282. Ἐὰν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, ἔχομεν τὰς άνισότητας $\frac{2x}{5}-7>4$ καὶ $\frac{x}{3}+1>\frac{x}{2}-4$. ἐξ αὐτῶν συνάγομεν $x>27\frac{1}{2}$ (ἐκ τῆς 1ης) καὶ $x<30$. Ἡτοι ἡ ἡλικία του κυμαίνεται μεταξὺ τῶν $27\frac{1}{2}$ καὶ 30 ἐτῶν.

Φανταστικοὶ καὶ μιγάδες ἀριθμοί.

Σελίς 122.

199/283. $\sqrt{49}=\pm 7$ $\sqrt{81}=\pm 9$

$\sqrt{(-8)^2}=\pm(-8)=\pm 8$

$\sqrt{-a^2}=\sqrt{-1.a^2}=\pm ai$

$\sqrt[3]{1}=1$ $\sqrt[6]{1}=\pm 1$

$\sqrt[3]{8^3}=8$

$\sqrt{-36}=\pm 6i$ $\sqrt{900}=\pm 30$

$\sqrt{(-a)^2}=\pm(-a)=\mp a$

$\sqrt{a^4}=\pm a^2$

$\sqrt[3]{-27}=-3$ $\sqrt[4]{81}=\pm 3$

$(\sqrt[4]{16})^4=(\pm 2)^4=16$ $\sqrt[4]{16^4}=\pm 16$

200/285. $i^3=i^2.i=1.i=i$

$i^{10}=i^8.i^2=1.(-1)=-1$

$i^{11}=i^{10}.i=-1.i=-i$

$i^{12}=i^{10}.i^2=(-1)(-1)=1$

$6i.3i^2=18i^3=-18i$

$5\sqrt{-4}=5.(\pm 2i)=\pm 10i$

$3i.5i=15i^2=15.(-1)=-15$

$8i.9i=72i^2=-72$

$-8i.4i=-32.i^2=32$

$(-2i)(-3i)=6i^2=-6$

$i\sqrt{-25}=i.(\pm 5i)=\pm 5i^2=(-1).(\pm 5)$

$3i.\sqrt{-64}=3i.(\pm 8i)=\pm 24.i^2=(-1).(\pm 24)$

201/286. $(7+8i)+(9-5i)+(-3i+4)=7+8i+9-5i-3i+4=20$

$(2+3i)+(5-4i)-(11-7i)=2+3i+5-4i-11+7i=-4+6i$

$2(4+10i)+3(6-5i)+5(1-2i)=8+20i+18-15i+5-10i=31-5i$

$9(5+3i)+(8-13i)+(15+4i)=45+27i+8-13i+15+4i=68+18i$

202/287. $(2+7i).(5+3i)=10+6i+35i+21.i^2=10+41i-21=-11+41i$

$$(2-5i)(5-9i)=10-18i-25i+45i^2=10-43i-45=-35-43i$$

$$(8-9i)(9-8i)=72-64i-81i+72i^2=72-145i-72=-145i$$

$$(10i+7)(10i-7)=100i^2-49=-100-49=-149$$

$$(11+13i)(11-13i)=11^2-13^2i^2=121+169=290$$

$$(-4+4i)(5-3i)=-20+20i+12i-12i^2=-20+32i+12=-8+32i$$

Δυνάμεις ἔχουσαι κλασματικὸν ἐκθέτην.

Σελίς 127.

$$202/288. \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \quad a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \quad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

$$\chi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\chi}} \quad \chi^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\chi^3}} \quad \chi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\chi} \quad \chi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\chi}}$$

$$203/289. \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \pm 2 \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = 9 \quad 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{9}$$

$$32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 8 \quad 100^{\frac{2}{4}} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = \pm 10$$

$$49^{\frac{4}{8}} = 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = \pm 7 \quad (-8)^{-\frac{2}{3}} = [(-2)^3]^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$204/290. \quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} \quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}} \quad \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\beta^3} = \beta^{\frac{3}{2}} \quad \sqrt[6]{\beta^3} = \beta^{\frac{3}{6}} = \beta^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[5]{\beta^2} = \beta^{\frac{2}{5}} \quad \sqrt{\beta^5} = \beta^{\frac{5}{2}}$$

Σελίς 132.

$$205/291. \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6 \cdot 6} = \sqrt[3]{6^2} = 6 \quad \sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \quad \sqrt{2\alpha} \cdot \sqrt{18\alpha} = \sqrt{36\alpha^2} = 6\alpha$$

$$\sqrt[3]{5\alpha^2} \cdot \sqrt[3]{25\alpha} = \sqrt[3]{125\alpha^3} = 5\alpha$$

$$\sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\alpha^3}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \alpha = \alpha \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{20} = 6\sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$$

$$3\sqrt{50} \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{100} = 120$$

$$\alpha\sqrt{\chi} \cdot \beta\sqrt{\chi} = \alpha\beta\sqrt{\chi^2} = \alpha\beta\chi$$

$$\alpha\sqrt{\beta} \cdot \beta\sqrt{\alpha} = \alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = 3\sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[4]{\alpha\beta} = \sqrt[4]{\alpha\alpha^2\alpha\beta} = \sqrt[4]{\alpha^4\beta} = \alpha\sqrt[4]{\beta}$$

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[4]{\alpha^5} = \sqrt[4]{\alpha^8\alpha} = \alpha^2 \cdot \sqrt[4]{\alpha}$$

$$206/293. \quad 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

$$\sqrt{700} = \sqrt{7 \cdot 100} = 10\sqrt{7}$$

$$5 \cdot \sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 8} = \sqrt{200}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$$

$$3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$$

$$\sqrt[3]{875} = \sqrt[3]{125 \cdot 7} = 5\sqrt[3]{7}$$

$$207/294. \quad \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{75}{5}} = \sqrt{15}$$

$$\frac{\sqrt[3]{520}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{520}{5}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{12}} = \sqrt[3]{\frac{20}{12}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{72}}{2} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\frac{\sqrt[4]{162}}{3} = \frac{\sqrt[4]{81 \cdot 2}}{3} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{3} = \sqrt[4]{2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{72}{8}} = \sqrt[3]{9}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{162}{3^4}} = \sqrt[4]{\frac{162}{81}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{8^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^6}{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = 2\sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[6]{25^2}}{\sqrt[6]{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^4}{5^3}} = \sqrt[6]{5}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt[12]{4^4}}{\sqrt[12]{8^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^8}{2^9}} = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\alpha^8}}{\sqrt[3]{\alpha^2}} = \frac{\sqrt[12]{\alpha^9}}{\sqrt[12]{\alpha^8}} = \sqrt[12]{\frac{\alpha^9}{\alpha^8}} = \sqrt[12]{\alpha}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\chi}}{\sqrt{\chi}} = \frac{\sqrt[10]{\chi^5}}{\sqrt[10]{\chi^2}} = \sqrt[10]{\frac{\chi^5}{\chi^2}} = \sqrt[10]{\chi^3}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\psi^6}}{\sqrt[5]{\psi^2}} = \frac{\sqrt[20]{\psi^{25}}}{\sqrt[20]{\psi^8}} = \sqrt[20]{\frac{\psi^{25}}{\psi^8}} = \sqrt[20]{\psi^{17}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{\chi}}{\sqrt{\chi}} = \frac{\sqrt[8]{\chi^2}}{\sqrt[8]{\chi}} = \sqrt[8]{\frac{\chi^2}{\chi}} = \sqrt[8]{\chi}$$

208/296.

$$\sqrt{\alpha} \cdot \alpha^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^4} \sqrt{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^5}$$

$$\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \sqrt{\beta} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[6]{\beta^2} \cdot \sqrt[6]{\beta^2} = \sqrt[6]{\beta^4}$$

$$\gamma^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[3]{\gamma^2} \cdot \sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$$

$$\sqrt[6]{\delta} \cdot \delta^{\frac{5}{6}} \cdot \delta^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{\delta} \cdot \sqrt[6]{\delta^5} \cdot \sqrt[3]{\delta} = \sqrt[6]{\delta \cdot \delta^5} \cdot \sqrt[3]{\delta} = \sqrt[6]{\delta^6} \cdot \sqrt[3]{\delta} = \delta \sqrt[3]{\delta}$$

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt[4]{\alpha^2}} = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\alpha^2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\beta}}{\beta^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\beta}} = \frac{\sqrt[6]{\beta^2}}{\sqrt[6]{\beta^2}} = \sqrt[6]{\beta}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\gamma^2}}{\gamma^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{\gamma^2}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt[6]{\gamma^4}}{\sqrt[6]{\gamma^3}} = \sqrt[6]{\gamma}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} = \frac{\sqrt[6]{\alpha^2\beta^3}}{\sqrt[6]{\frac{\alpha^3}{\beta^3}}} = \sqrt[6]{\frac{\alpha^2\beta^3}{\alpha^3}} = \sqrt[6]{\alpha\beta^3}$$

$$209/297. \quad (\sqrt[3]{\alpha})^2 = \sqrt[3]{\alpha^2} \quad (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(\sqrt{\alpha})^3 = \sqrt{\alpha^2} = \alpha\sqrt{\alpha} \quad (\alpha - \sqrt{\alpha})^2 = \alpha^2 + \alpha - 2\alpha\sqrt{\alpha}$$

$$(\sqrt[5]{\alpha^7})^3 = \sqrt[5]{\alpha^{21}} = \alpha^4 \cdot \sqrt[5]{\alpha} \quad (-\alpha + \sqrt{\beta})^2 = \alpha^2 + \beta - 2\alpha\sqrt{\beta}$$

$$210/298. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \frac{7}{\sqrt{8}} = \frac{7\sqrt{8}}{8}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2} = 2-\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}+2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-3$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})} = \frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta}{\alpha-\beta}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}+\beta}{\sqrt{\alpha}-\beta} = \frac{(\sqrt{\alpha}+\beta)^2}{\alpha-\beta^2}$$

211/299. Διότι ἂν ὑψώσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς πρώτης ἰσότητος εἰς τὴν μ.ν δύναμιν, εὐρίσκομεν τὸ α'. τὸ δὲ πρῶτον μέλος ταύτης θὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν μ δύναμιν καὶ ἔπειτα εἰς τὴν ν. Ὅμοια εἶναι ἡ ἀπόδειξις τῆς δευτέρας ἰσότητος.

212/300.

$$3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}=8\sqrt{7}-8\sqrt{7}=0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{5}+\frac{1}{4}\cdot\sqrt{5}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{5}=\frac{17}{12}\cdot\sqrt{5}$$

$$\frac{7}{8}\cdot\sqrt{11}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{11}=\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\sqrt{11}=\frac{7}{40}\cdot\sqrt{11}$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a}-2\sqrt{3\chi})-(\sqrt{3\chi}-5\sqrt{a}-3\sqrt{a}+7\sqrt{3\chi})= \\ & =\sqrt{a}-2\sqrt{3\chi}-\sqrt{3\chi}+5\sqrt{a}+3\sqrt{a}-7\sqrt{3\chi}=9\sqrt{a}-10\sqrt{3\chi} \end{aligned}$$

$$4\sqrt{2}-3\sqrt{8}+\sqrt{18}=4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}-5\sqrt{18}+6\sqrt{12}+\sqrt{8} &= 3\sqrt{3}-15\sqrt{2}+12\sqrt{3}+2\sqrt{2}= \\ &= 15\sqrt{3}-13\sqrt{2}. \end{aligned}$$

213/301. 1) $\pm 6\alpha^2\beta$	2) $\pm 12\alpha\chi^2\psi^3$	3) $\pm \frac{2\alpha^2}{7\beta}$
4) $\pm 25i\chi^2\psi^4$	5) $\pm \frac{i}{3}\alpha\beta\gamma^2$	6) $\pm \frac{3i}{7}\chi\psi^5\sqrt{\alpha}$
5) $\pm 4\sqrt{\alpha\beta\gamma}$	8) $\pm i\sqrt{5}\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\alpha\beta}$	9) $\pm \frac{2i}{3}\beta\gamma^3\sqrt{\alpha\beta\gamma}$

Ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Σελίς 138.

214/302. 1) $\chi^2=81$ $\chi=\pm 9$	2) $\chi^2=-16$ $\chi=\pm 4i$	3) $\chi^2-64=0$ $\chi^2=64$ $\chi=\pm 8$
4) $2\chi^2-162=0$ $\chi^2=81$ $\chi=\pm 9$	5) $23\chi^2-1127=0$ $\chi^2=49$ $\chi=\pm 7$	6) $\frac{5}{4}\chi^2=720$ $\chi^2=\frac{720\cdot 4}{5}=144\cdot 4$ $\chi=\pm 24$
7) $\frac{5}{3}\chi^2=\frac{243}{125}$	8) $4\chi^2-3=897$	

$$\chi^2 = \frac{243.3}{125.5} = \frac{3^6}{5^4}$$

$$\chi = \pm \frac{3^3}{5^2} = \pm \frac{27}{25}$$

$$\chi^2 = \frac{897+3}{4} = 225$$

$$\chi = \pm 15$$

$$9) \frac{\chi^2}{4} - 64 = 0$$

$$\chi^2 = 64.4$$

$$\chi = \pm 16$$

$$10) \frac{5\chi}{9} = \frac{125}{\chi}$$

$$5\chi^2 = 125.9$$

$$\chi^2 = 25.9 \quad \chi = \pm 15$$

$$11) \frac{7\chi^2}{10} - 30 = \frac{\chi^2}{4} + 15$$

$$14\chi^2 - 600 = 5\chi^2 + 300$$

$$9\chi^2 = 900, \quad \chi = \pm 10$$

$$12) (\chi-1)(\chi+1) = 35$$

$$\chi^2 - 1 = 35$$

$$\chi^2 = 36, \quad \chi = \pm 6$$

$$13) (\chi+3)(\chi-3) = 135$$

$$\chi^2 - 9 = 135$$

$$\chi^2 = 144, \quad \chi = \pm 12$$

$$14) (2\chi+5)(2\chi-5) = 11$$

$$4\chi^2 - 25 = 11$$

$$\chi^2 = 9, \quad \chi = \pm 3$$

$$15) \left(3\chi + \frac{1}{2}\right) \left(3\chi - \frac{1}{2}\right) = \frac{24}{36}$$

$$9\chi^2 - \frac{1}{4} = \frac{24}{36}$$

$$\chi^2 = \frac{33}{9.36}$$

$$\chi = \pm \frac{\sqrt{33}}{18}$$

$$16) \chi^2 = \alpha, \quad \chi = \pm \alpha.$$

$$17) \chi^2 = \alpha\beta^2, \quad \chi = \pm \beta\sqrt{\alpha}$$

$$18) \gamma\chi^2 - \beta = \alpha, \quad \chi = \pm \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma}}$$

$$215/303. \quad 1) \chi^2 - 13\chi = 0$$

$$\chi(\chi-13) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = 13$$

$$3) \frac{\chi^2}{5} + 20\chi = 25\chi$$

$$\chi^2 - 25\chi = 0$$

$$\chi(\chi-25) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = 25$$

$$2) \chi^2 + 11\chi = 0$$

$$\chi(\chi+11) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = -11$$

$$4) 5\chi^2 - \frac{\chi}{2} = \frac{\chi}{3}$$

$$30\chi^2 - 5\chi = 0$$

$$5\chi(6\chi-1) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = \frac{1}{6}$$

$$5) (\chi-7)(\chi+5) = 9\chi - 35$$

$$6) (5\chi+2)(7\chi-10) = 34\chi - 20$$

$$\chi^2 - 11\chi = 0, \chi(\chi - 11) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = 11$$

$$35\chi^2 - 36\chi - 20 = 34\chi - 20$$

$$35\chi^2 - 70\chi = 0, \quad 35\chi(\chi - 2) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = 2$$

$$7) \left(\chi + \frac{1}{4}\right)\left(\chi - \frac{1}{4}\right) = 5\chi - \frac{1}{16} \quad 8) \frac{3\chi^2 - 2\chi}{3} = \frac{3\chi^2}{4} + \frac{2\chi}{3}$$

$$\chi^2 - \frac{1}{16} = 5\chi - \frac{1}{16}$$

$$12\chi^2 - 8\chi = 9\chi^2 + 8\chi$$

$$\chi^2 - 5\chi = 0$$

$$3\chi^2 - 16\chi = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = 5$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = \frac{16}{3}$$

$$216/304. \quad 1) \alpha\chi^2 - \beta\chi = 0$$

$$2) \frac{\chi^2}{\alpha} + \beta\chi = 0$$

$$\chi(\alpha\chi - \beta) = 0$$

$$\chi^2 + \alpha\beta\chi = 0, \quad \chi(\chi + \alpha\beta) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = -\alpha\beta$$

$$3) \frac{\chi^2}{\alpha} + \frac{\chi}{\beta} = 0$$

$$4) (\chi - \alpha)(\chi + \alpha) = \beta\chi - \alpha^2$$

$$\beta\chi^2 + \alpha\chi = 0, \quad \chi(\beta\chi + \alpha) = 0$$

$$\chi^2 - \alpha^2 = \beta\chi - \alpha^2$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\chi^2 - \beta\chi = 0, \quad \chi(\chi - \beta) = 0$$

$$\chi = 0 \quad \eta \quad \chi = \beta$$

Σελ. 142.

$$217/305. \quad 1) \chi^2 - 6\chi + 8 = 0$$

$$2) \chi^2 - 8\chi + 15 = 0$$

$$3) \chi^2 + 8\chi + 15 = 0$$

$$\chi = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$\chi = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$\chi = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$\chi = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\chi = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\chi = \frac{-8 \pm 2}{2}$$

$$\chi' = 4, \quad \chi'' = 2$$

$$\chi' = 5, \quad \chi'' = 3$$

$$\chi' = -5, \quad \chi'' = -3$$

$$4) \chi^2 - 3\chi - 4 = 0$$

$$5) \chi^2 - 6\chi + 13 = 0$$

$$6) \chi^2 + 2\chi + 26 = 0$$

$$\chi = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$\chi = 3 \pm \sqrt{9 - 13}$$

$$\chi = -1 \pm \sqrt{1 - 26}$$

$$\chi = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\chi = 3 \pm \sqrt{-4}$$

$$\chi = -1 \pm \sqrt{-25}$$

$$\chi' = 4, \quad \chi'' = -1$$

$$\chi' = 3 + 2i, \quad \chi'' = 3 - 2i$$

$$\chi' = -1 + 5i, \quad \chi'' = -1 - 5i$$

$$7) \quad 6x^2 - x - 2 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}, \quad x' = -\frac{2}{3}, \quad x'' = -\frac{1}{2}$$

$$8) \quad 6x^2 + 7x - 20 = 0$$

$$9) \quad -15x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 6 \cdot 20}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15) \cdot 8}}{2 \cdot (-15)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{-7 \pm 23}{12}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{-30} = \frac{2 \pm 22}{-30}$$

$$x' = -\frac{5}{2}, \quad x'' = \frac{4}{3}$$

$$x' = -\frac{4}{5}, \quad x'' = \frac{2}{3}$$

$$10) \quad x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$11) \quad x^2 - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6}$$

$$x' = 1, \quad x'' = -\frac{1}{2}$$

$$x' = 1, \quad x'' = -\frac{2}{3}$$

$$12) \quad x^2 - \frac{x}{3} = 8$$

$$13) \quad x^2 - 2\frac{1}{2}x = -1$$

$$3x^2 - x - 24 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$$

$$x' = \frac{1+17}{6} = 3, \quad x'' = \frac{1-17}{6} = -\frac{8}{3} \quad x' = 2, \quad x'' = \frac{1}{2}$$

$$14) \quad x^2 - 1\frac{1}{3}x = 5$$

$$15) \quad x^2 + 1\frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{6}$$

$$x' = \frac{4+14}{6} = 3, \quad x'' = \frac{4-14}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x = 1, \quad x'' = -\frac{7}{3}$$

$$218/307. 1) \chi(\chi-10)+21=0$$

$$\chi^2-10\chi+21=0$$

$$\chi = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2}$$

$$\chi' = 7, \chi'' = 3$$

$$3) \chi(\chi-9)=22$$

$$\chi^2-9\chi-22=0$$

$$\chi = \frac{9 \pm \sqrt{81+88}}{2}$$

$$\chi' = 11, \chi'' = -2$$

$$5) (\chi-6)(\chi-5)=20$$

$$\chi^2-11\chi+10=0$$

$$\chi = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2}$$

$$\chi' = 10, \chi'' = 1$$

$$7) (\chi-3)(\chi-1)+(\chi+7)(\chi+2)=50$$

$$2\chi^2+5\chi-33=0$$

$$\chi = \frac{-5 \pm \sqrt{25+264}}{4}$$

$$\chi' = \frac{-5+17}{4} = 3, \chi'' = -\frac{11}{2}$$

$$9) (\chi+1)^2=\chi+7$$

$$\chi^2+\chi-6=0$$

$$\chi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\chi' = 2, \chi'' = -3$$

$$2) \chi(\chi+13)+36=0$$

$$\chi^2+13\chi+36=0$$

$$\chi = \frac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2}$$

$$\chi' = -4, \chi'' = -9$$

$$4) (\chi+5)(\chi+3)=35$$

$$\chi^2+8\chi-20=0$$

$$\chi = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{2}$$

$$\chi' = 2, \chi'' = -10$$

$$6) (\chi-10)(\chi+3)=-40$$

$$\chi^2-7\chi+10=0$$

$$\chi = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$\chi' = 5, \chi'' = 2$$

$$8) (\chi-2)(\chi-4)+(\chi-3)(\chi-5)=23$$

$$2\chi^2-14\chi=0$$

$$2\chi(\chi-7)=0$$

$$\chi' = 0, \chi'' = 7$$

$$10) (8\chi+5)^2+(5\chi+3)^2=8$$

$$17\chi^2+30\chi+13=0$$

$$\chi = \frac{-30 \pm \sqrt{900-884}}{34}$$

$$\chi' = -1, \chi'' = -\frac{13}{17}$$

$$219/308. 1) 3\chi + \frac{1}{\chi} = 4$$

$$3\chi^2-4\chi+1=0$$

$$\chi = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$$

$$2) 8\chi - \frac{3}{\chi} = -10$$

$$8\chi^2+10\chi-3=0$$

$$\chi = \frac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{16}$$

$$\chi' = 1, \quad \chi'' = \frac{1}{3}$$

$$3) \frac{9}{\chi} - \frac{\chi}{3} = -2$$

$$27 - \chi^2 = -6\chi$$

$$\chi^2 - 6\chi - 27 = 0$$

$$\chi = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2}$$

$$\chi' = 9, \quad \chi'' = -3$$

$$5) \chi - \frac{1}{\chi - 7} = 7$$

$$\chi(\chi - 7) - 1 = 7(\chi - 7)$$

$$\chi^2 - 14\chi + 48 = 0$$

$$\chi = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2}$$

$$\chi' = 8, \quad \chi'' = 6$$

$$7) \chi = \frac{\chi + 4}{\chi - 1}$$

$$\chi(\chi - 1) = \chi + 4$$

$$\chi^2 - 2\chi - 4 = 0$$

$$\chi = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\chi = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\chi' = 1 + \sqrt{5}, \quad \chi'' = 1 - \sqrt{5}$$

$$9) \frac{\chi + 2}{6} + \frac{6}{\chi + 2} = \frac{10}{3}$$

$$(\chi + 2)^2 + 36 = 20(\chi + 2)$$

$$\chi^2 - 16\chi = 0$$

$$\chi(\chi - 16) = 0$$

$$\chi = 0, \quad \chi = 16$$

$$\chi' = \frac{1}{4}, \quad \chi'' = -\frac{3}{2}$$

$$4) \chi + \frac{1}{\chi - 5} = 7$$

$$\chi(\chi - 5) + 1 = 7(\chi - 5)$$

$$\chi^2 - 12\chi + 36 = 0$$

$$\chi = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2}$$

$$\chi = 6$$

$$6) \chi + \frac{1}{\chi - 1} = \frac{7}{6}$$

$$6(\chi - 1)\chi + 6 = 7(\chi - 1)$$

$$6\chi^2 - 13\chi + 13 = 0$$

$$\chi = \frac{13 \pm i\sqrt{143}}{12}$$

$$8) \frac{\chi}{3} + \frac{3}{\chi} = \frac{5}{2}$$

$$2\chi^2 + 18 = 15\chi$$

$$2\chi^2 - 15\chi + 18 = 0$$

$$\chi = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4}$$

$$\chi = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$\chi' = 6, \quad \chi'' = \frac{3}{2}$$

$$10) \frac{1}{\chi + 1} + \frac{1}{\chi - 1} = \frac{2}{3}$$

$$3(\chi - 1) + 3(\chi + 1) = 2(\chi + 1)(\chi - 1)$$

$$\chi^2 - 3\chi - 1 = 0, \quad \chi = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\chi' = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \quad \chi'' = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$11) \frac{\chi}{\chi+1} + \frac{\chi}{\chi+4} = 1$$

$$\chi(\chi+4) + \chi(\chi+1) = (\chi+1)(\chi+4)$$

$$\chi^2 = 4, \quad \chi = \pm 2$$

$$\chi' = 2, \quad \chi'' = -2$$

$$12) \frac{2\chi+1}{\chi-1} = \frac{\chi-1}{\chi+1}$$

$$(2\chi+1)(\chi+1) = (\chi-1)^2$$

$$\chi^2 + 5\chi = 0, \quad \chi(\chi+5) = 0$$

$$\chi' = 0, \quad \chi'' = -5$$

$$220/309. \quad 1) \chi^2 - 5,2\chi + 1 = 0 \quad \text{και} \quad \chi = \frac{5,2 \pm \sqrt{5,2^2 - 4}}{2} = \frac{5,2 \pm \sqrt{27,04 - 4}}{2} =$$

$$= \frac{5,2 \pm \sqrt{23,04}}{2} = \frac{5,2 \pm 2\sqrt{5,76}}{2} = 2,6 \pm \sqrt{5,76}$$

$$\eta\tau\omega\iota \quad \chi' = 2,6 + \sqrt{5,76} = 2,6 + 2,4 = 5, \quad \chi'' = 2,6 - 2,4 = 0,2$$

$$2) 1,2\chi^2 - 7\chi + 10 = 0 \quad \text{και} \quad \chi = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2,4} = \frac{7 \pm 1}{2,4}$$

$$\eta\tau\omega\iota \quad \chi' = \frac{8}{2,4} = \frac{10}{3}, \quad \chi'' = \frac{6}{2,4} = \frac{5}{2}$$

$$3) \chi^2 - 4\chi + 4,09 = 0 \quad \text{εὐρίσκομεν}$$

$$\chi = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4,09}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-0,36}}{2} = \frac{2 \pm 0,6i}{2}$$

$$\text{"Οθεν εἶναι} \quad \chi' = 1 + 0,3i \quad \chi'' = 1 - 0,3i.$$

$$4) \chi^2 - 0,8\chi - 10,5 = 0$$

$$\text{και} \quad \chi = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,8^2 + 4 \cdot 10,5}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,64 + 42}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{42,64}}{2} =$$

$$= \frac{0,8 \pm \sqrt{10,66}}{2} = 0,4 \pm \sqrt{10,66}, \quad \eta\tau\omega\iota \quad \chi = 0,4 + \sqrt{10,66} \quad \eta \quad \chi = 0,4 - \sqrt{10,66}$$

$$5) \chi^2 - 0,8\chi + 0,15 = 0$$

$$\text{και} \quad \chi = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,8^2 - 4 \cdot 0,15}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,64 - 0,60}}{2} = \frac{0,8 \pm \sqrt{0,04}}{2} =$$

$$= \frac{0,8 \pm 0,2}{2}, \quad \eta\tau\omega\iota \quad \chi = \frac{0,8 + 0,2}{2} = 0,5 \quad \eta \quad \chi = \frac{0,8 - 0,2}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,3$$

$$6) \chi^2 + \frac{2\chi}{5} - 0,05 = 0 \quad \eta \quad \chi^2 + 0,4\chi - 0,05 = 0. \quad \text{Εὐρίσκομεν}$$

$$= \chi = \frac{-0,4 \pm \sqrt{0,16 + 0,20}}{2} = \frac{-0,4 \pm 0,6}{2}$$

$$\text{"Οθεν εἶναι} \quad \eta \quad \chi = 0,1, \quad \eta \quad \chi = -0,5.$$

$$221/310. 1) \chi^2 - 3\alpha\chi + 2\alpha^2 = 0$$

$$\chi = \frac{3\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha^2}}{2}$$

$$\chi = \frac{3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2}}{2}$$

$$\chi' = \frac{3\alpha + \alpha}{2} = 2\alpha$$

$$\chi'' = \frac{3\alpha - \alpha}{2} = \alpha$$

$$3) \chi^2 - 2\alpha\chi - 15\alpha^2 = 0$$

$$\chi = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 60\alpha^2}}{2}$$

$$\chi = \frac{2\alpha + 8\alpha}{2}, \chi' = 5\alpha, \chi'' = -3\alpha \quad \chi = \frac{7\alpha + 5\alpha}{6}, \chi' = 2\alpha, \chi'' = \frac{\alpha}{3}$$

$$5) \chi^2 - 3\alpha\beta\chi - 10\alpha^2\beta^2 = 0$$

$$\chi = \frac{3\alpha\beta \pm \sqrt{9\alpha^2\beta^2 + 40\alpha^2\beta^2}}{2}$$

$$\chi = \frac{3\alpha\beta \pm 7\alpha\beta}{2}$$

$$\chi' = 5\alpha\beta, \chi'' = -2\alpha\beta$$

$$7) \frac{\chi - \alpha}{5\alpha} = \frac{\alpha}{2\chi}$$

$$2\chi(\chi - \alpha) = 5\alpha^2 \quad \text{ώστε}$$

$$2\chi^2 - 2\alpha\chi - 5\alpha^2 = 0$$

$$\chi = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 40\alpha^2}}{4}$$

$$8) \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \chi} = \frac{\alpha + \chi}{\alpha - \beta}$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = (\alpha + \chi)(\alpha - \chi)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - \chi^2$$

$$\chi^2 = \beta^2$$

$$2) \chi^2 + 2\alpha\chi - 3\alpha^2 = 0$$

$$\chi = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 12\alpha^2}}{2}$$

$$\chi = \frac{-2\alpha + 4\alpha}{2}$$

$$\chi = \frac{-2\alpha + 4\alpha}{2} = \alpha$$

$$\chi'' = \frac{-2\alpha - 4\alpha}{2} = -3\alpha$$

$$4) 3\chi^2 - 7\alpha\chi + 2\alpha^2 = 0$$

$$\chi = \frac{7\alpha \pm \sqrt{49\alpha^2 - 24\alpha^2}}{6}$$

$$6) (\chi - \alpha)^2 = \beta^2$$

$$\chi - \alpha = \pm \beta$$

$$\chi' = \alpha + \beta, \chi'' = \alpha - \beta$$

$$\chi = \frac{2\alpha \pm \sqrt{44\alpha^2}}{4}$$

$$\chi = \frac{2\alpha \pm 2\alpha\sqrt{11}}{4}$$

$$\chi' = \frac{\alpha(1 + \sqrt{11})}{2}, \chi'' = \frac{\alpha(1 - \sqrt{11})}{2}$$

$$9) \frac{\alpha + \chi}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \chi}$$

$$(\alpha + \chi)^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\chi^2 + 2\alpha\chi + \beta^2 = 0$$

$$\chi = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\beta^2}}{2}$$

$$\chi' = \beta, \quad \chi'' = -\beta$$

$$\chi' = -(a - \sqrt{a^2 - \beta^2}),$$

$$\chi'' = -(a + \sqrt{a^2 - \beta^2})$$

222/311. Ἐκ τῆς $\chi^2 + 2\beta\chi - \gamma^2 = 0$ λαμβάνομεν

$$\chi = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 + 4\gamma^2}}{2}.$$

Παρατηροῦμεν δὲ ἤδη, ὅτι ἡ ὑπόρριζος ποσότης, οὕσα ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πάντοτε θετικὸς ἀριθμὸς. Ἐπομένως ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ὑπορρίζου αὐτῆς ποσότητος εἶναι πάντοτε πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἄρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι πραγματικάι.

223/312. Διότι ἡ ὑπόρριζος παράστασις $\pi^2 - 4\kappa$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ π^2 , ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς πάντοτε θετικὸς καὶ τοῦ -4κ , ὅπερ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς, ἀφοῦ τὸ κ εἶναι ἀρνητικόν.

224/313. Διὰ τὰ $\epsilon\chi\eta$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις μίαν μόνον ρίζαν πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης $\mu^2 - 4.16$ νὰ ἰσοῦται μὲ 0. Ἦτοι πρέπει νὰ εἶναι $\mu^2 = 64$, δηλαδὴ $\mu = \pm 8$. Καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἡ ὑπόρριζος ποσότης $9 - 4.6\mu$ πρέπει νὰ εἶναι ἰση μὲ 0, ἥτοι $9 - 36\mu = 0$ καὶ $9 = 36\mu$, ἄρα $\mu = \frac{1}{4}$.

225/316. Ἴνα ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 5\chi + \mu$ ἔχει ρίζας πραγματικάς καὶ ἀνίσους πρέπει ἡ ὑπόρριζος ποσότης $5^2 - 4\mu$ νὰ εἶναι θετικὴ, ἥτοι πρέπει νὰ εἶναι $5^2 - 4\mu > 0$, ἥτοι $25 > 4\mu$ καὶ $\mu < \frac{25}{4}$, ἥτοι $\mu < 6\frac{1}{4}$. Ἐὰν ὅμως εἶναι $5^2 - 4\mu < 0$, ἥτοι $\mu > 6\frac{1}{4}$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας φανταστικάς.

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἰάν εἶναι $9^2 - 4\mu > 0$, ἥτοι εἰάν $81 > 4\mu$, δηλαδὴ εἰάν $\mu < 20\frac{1}{4}$, ἔχει ρίζας πραγματικάς καὶ ἀνίσους, ἐνῷ εἰάν $9^2 - 4\mu < 0$, ἥτοι, εἰάν $\mu > 20\frac{1}{4}$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας φανταστικάς.

**Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν
τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$.**

Σελ. 146

226/318. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι ρίζαι τῶν ἐξισώσεων

1) $\chi^2 - 16\chi + 48 = 0$

3) $\chi^2 + 10\chi - 21 = 0$

2) $\chi^2 - 4\chi - 21 = 0$

4) $\chi^2 + 4\chi + 2 = 0$

5) $\chi^2 - 34\chi + 1 = 0$

227/319. Αἱ ζητούμεναι ἐξισώσεις εἶναι αἱ

$$1) \chi^2 - 7\chi + 10 = 0$$

$$3) \chi^2 + 13\chi + 42 = 0$$

$$2) \chi^2 + 8\chi - 20 = 0$$

$$4) \chi^2 - 1 = 0$$

$$5) \chi^2 - \left(7 + \frac{1}{3}\right)\chi + \frac{7}{3} = 0, \text{ ἥτοι } 3\chi^2 - 22\chi + 7 = 0$$

$$6) \chi^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)\chi + \frac{6}{12} = 0, \text{ ἥτοι } 12\chi^2 - 17\chi + 6 = 0$$

$$7) \chi^2 + \frac{5}{6}\chi - \frac{21}{6} = 0, \text{ ἥτοι } 6\chi^2 + 5\chi - 21 = 0$$

$$8) \chi^2 - (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$$

228/321. α') Αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι πραγματικά, ἔχομεν δὲ $\rho' \cdot \rho'' = 40$.

ἄρα αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι καὶ $\rho' + \rho'' = 14$. ἄρα αἱ ρίζαι εἶναι ἀμφότεραι θετικά.

β') Αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά· ἐπεὶ δὲ εἶναι $\rho' \cdot \rho'' = 24$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἐπεὶ δὲ εἶναι $\rho' + \rho'' = -10$, αἱ ρίζαι εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικά.

γ') Καὶ αὕτη ἔχει ρίζας πραγματικάς· εἶναι δὲ ἐτερόσημοι ἐπεὶ δὲ $\rho' \cdot \rho'' = -21$, ἀλλὰ μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀρνητικὴ ἐπεὶ δὲ εἶναι $\rho' + \rho'' = -4$.

δ') Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας πραγματικάς. Εἶναι δὲ αὗται ἐτερόσημοι ἐπεὶ δὲ $\rho' \cdot \rho'' = -15$, μεγαλύτεραν ὁμῶς ἔχει τὴν θετικὴν ἐπεὶ δὲ $\rho' + \rho'' = 2$.

ε') Ἡ $\frac{\chi^2 - 3}{\chi - 2} = -\frac{1}{4}$ γράφεται $4\chi^2 + \chi - 14 = 0$, ἐπομένως καὶ διὰ ταύτην παρατηροῦμεν ὅ,τι καὶ διὰ τὴν γ'.

ς') Ἡ $\frac{\chi^2 + \chi - 1}{\chi} = 4$ γράφεται $\chi^2 - 3\chi - 1 = 0$. παρατηροῦμεν δὲ εἰς αὐτὴν ὅ,τι παρατηρήσαμεν καὶ διὰ τὴν δ'.

$$229/322. \text{ Ἐστω ἡ ἄλλη } \rho' \text{ τότε εἶναι } 10\rho = -\frac{10}{10} = -1. \text{ ὅθεν } \rho = -\frac{1}{10}.$$

$$230/323. \text{ Ὁμοίως ἔχομεν } -\frac{2}{3} \cdot \rho = \frac{6}{15} \text{ ἢ } \frac{2}{3} \cdot \rho = -\frac{2}{5}. \text{ ὅθεν } \rho = -\frac{3}{5}.$$

$$231/325. \text{ Ἐὰν ἡ μία ρίζα εἶναι } \rho, \text{ ἡ ἄλλη θὰ εἶναι } 2\rho. \text{ ἔχομεν δὲ } \rho + 2\rho = \frac{18}{9} = 2 \text{ ἢ } 3\rho = 2 \text{ ἢ } \rho = \frac{2}{3}. \text{ Ἐξ ἄλλου ἔχομεν } 2\rho \cdot \rho = \frac{\gamma}{9}$$

$$\text{ἢ } 18 \cdot \rho^2 = \gamma \text{ ἢ } 18 \cdot \frac{4}{9} = \gamma, \text{ ἥτοι } \gamma = 8.$$

$$232/326. \text{ Ὁμοίως ἔχομεν } \rho + 3\rho = \frac{8}{4} \text{ ἢ } 4\rho = 2 \text{ ἢ } \rho = \frac{1}{2}. \text{ Ἐξ ἄλλου}$$

$$\text{ἔχομεν } 3\rho \cdot \rho = \frac{\gamma}{4} \text{ ἢ } \gamma = 12 \cdot \rho^2 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

233/327. Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $\frac{2}{\alpha}$ καὶ

τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{3\alpha}{\alpha}=3$ ὥστε εἶναι $\frac{2}{\alpha}=3$. ἤτοι $\alpha=\frac{2}{3}$.

234/328. Ἐστώσαν αἱ ἐξισώσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ $\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'=0$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας ρ' καὶ ρ'' . Τότε διὰ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εἶναι $\rho'+\rho''=-\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\rho'\rho''=\frac{\gamma}{\alpha}$. διὰ δὲ τὴν δευτέραν εἶναι $\rho'+\rho''=-\frac{\beta'}{\alpha'}$

καὶ $\rho'\rho''=\frac{\gamma'}{\alpha'}$. ὥστε εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{\beta'}{\alpha'}$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma'}{\alpha'}$ ἢ

$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$. Ἐπομένως ἔπεται, ὅτι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$. Ἀντιστρόφως δέ, ἂν εἶναι

$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\lambda \neq 0$, θὰ ἔχουν αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις τὰς αὐτὰς ρίζας· διότι

θὰ εἶναι $\alpha=\alpha'\lambda$, $\beta=\beta'\lambda$ καὶ $\gamma=\gamma'\lambda$. ὥστε ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ γίνεται $\alpha'\lambda\chi^2+\beta'\lambda\chi+\gamma'\lambda=0$ ἢ $\lambda(\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma')=0$, ἥτις, ὅπως βλέπομεν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δευτέραν. Ἀρα αἱ δύο αὐταὶ ἐξισώσεις ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

235/329. Ἐὰν ρ' καὶ ρ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχομεν $\rho'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καὶ $\rho''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

$$\begin{aligned}\alpha\rho'-\rho'' &= \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \\ &= \frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}\end{aligned}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν ἔχομεν

α') $\rho'-\rho''=\sqrt{16^2-4.63}=2$ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-16\chi+63=0$.

β') Ὅμοίως ἔχομεν $\sqrt{9^2-4.36}=i\sqrt{63}$.

γ') Ὅμοίως ἔχομεν $\frac{\sqrt{16^2-4.16.3}}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

δ') Ὅμοίως ἔχομεν $\frac{\sqrt{3^2+4.16}}{16}=\frac{\sqrt{73}}{16}$.

236/330. Ἐχομεν $\rho'^2+\rho''^2=(\rho'+\rho'')^2-2\rho'\rho''$, ἤτοι

$$\rho'^2+\rho''^2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}.$$

237/331. Είναι κατὰ τὴν προηγούμενην ἄσκησιν

$$\alpha') \varrho'^2 + \varrho''^2 = \frac{9^2 - 2 \cdot 3}{1} = 81 - 6 = 75.$$

$$\beta') \varrho'^2 + \varrho''^2 = \frac{13^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3}{4^2} = \frac{169 - 24}{16} = \frac{145}{16}.$$

238/334. Ἔχομεν $\varrho' - \varrho'' = -\frac{8}{3}$, $\varrho' + \varrho'' = -\frac{2}{3}$, $\varrho' \cdot \varrho'' = -\frac{5}{3}$ καὶ

$$\varrho'^2 + \varrho''^2 = \frac{4 + 30}{9} = \frac{34}{9}. \text{ ὥστε εἶναι}$$

$$\varrho'^2 \cdot \varrho'' - \varrho' \varrho''^2 = \varrho' \cdot \varrho'' (\varrho' - \varrho'') = -\frac{5}{3} \cdot -\frac{8}{3} = \frac{40}{9} \text{ καὶ}$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} + \frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{\varrho'^2 + \varrho''^2}{\varrho' \cdot \varrho''} = \frac{34}{9} : -\frac{5}{3} = -\frac{34}{15}.$$

239/335. Ἔχομεν $\varrho'^2 + \varrho''^2 = 41 = \frac{(\mu - 11)^2 - 2\mu}{1}$ ἢ $\mu^2 - 24\mu + 80 = 0$,

$$\text{ἥτοι } \mu = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{24 \pm 16}{2}, \text{ ἥτοι ἢ } \mu = 20 \text{ ἢ } \mu = 4.$$

240/337. Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ζητουμένης ἐξίσωσως εἶναι

$$\varrho' + \varepsilon + \varrho'' + \varepsilon = \varrho' + \varrho'' + 2\varepsilon = -\frac{\beta}{\alpha} + 2\varepsilon, \text{ τὸ δὲ γινόμενον εἶναι } (\varrho' + \varepsilon)(\varrho'' + \varepsilon) =$$

$$= \varrho' \cdot \varrho'' + (\varrho' + \varrho'')\varepsilon + \varepsilon^2 = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon + \varepsilon^2. \text{ Οὕτως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι}$$

$$\chi^2 - \left(\frac{2\varepsilon\alpha - \beta}{\alpha} \right) \chi + \frac{\varepsilon^2\alpha - \varepsilon\beta + \gamma}{\alpha} = 0, \text{ ἢ } \alpha\chi^2 - (2\varepsilon\alpha - \beta)\chi + \varepsilon^2\alpha - \varepsilon\beta + \gamma = 0.$$

Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου δευτέρου βαθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.

Σελίς 148

$$241/338. 1) \chi^2 - 9\chi + 14 = (\chi - 7)(\chi - 2)$$

$$2) 12\chi^2 + 5\chi - 3 = 12 \left(\chi - \frac{1}{3} \right) \left(\chi + \frac{3}{4} \right) = 12 \cdot \frac{(3\chi - 1)}{3} \cdot \frac{(4\chi + 3)}{3} = (3\chi - 1)(4\chi + 3)$$

$$3) \chi^2 - 4\chi - 45 = (\chi - 9)(\chi + 5)$$

$$4) 2\chi^2 + 3\chi + 2 = 2 \left[\left(\chi + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \right], \text{ ἐπειδὴ } \varrho' = -\frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4} \text{ καὶ}$$

$$\begin{aligned} \varrho'' &= -\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4} \cdot \varepsilon \text{Ιναι δὲ } 2(\chi - \varrho')(\chi - \varrho'') = 2\left(\chi + \frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{7}}{4}\right)\left(\chi + \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4}\right) = \\ &= 2\left[\left(\chi + \frac{3}{4}\right) - \frac{i\sqrt{7}}{4}\right]\left[\left(\chi + \frac{3}{4}\right) + \frac{i\sqrt{7}}{4}\right] = \\ &= 2\left[\left(\chi + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{7}}{4}\right)^2\right] = 2\left[\left(\chi + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] \end{aligned}$$

$$5) \quad 25\chi^2 + 10\chi + 1 = 25\left(\chi + \frac{1}{5}\right)^2 = 25 \cdot \left(\frac{5\chi+1}{5}\right)^2 = \frac{25(5\chi+1)^2}{25} = (5\chi+1)^2$$

$$6) \quad 35\chi^2 - 8\chi - 2 = 35 \cdot \left(\chi - \frac{2}{7}\right)\left(\chi + \frac{1}{5}\right) = 35 \cdot \frac{(7\chi-2)}{7} \cdot \frac{(5\chi+1)}{5} = (7\chi-2)(5\chi+1).$$

$$242/339. \quad 1) \quad \frac{\chi^2 - 8\chi + 15}{\chi^2 - 10\chi + 21} = \frac{(\chi-5)(\chi-3)}{(\chi-7)(\chi-3)} = \frac{\chi-5}{\chi-7}$$

$$2) \quad \frac{\chi^2 + 5\chi - 6}{\chi^2 + 4\chi - 12} = \frac{(\chi-1)(\chi+6)}{(\chi-2)(\chi+6)} = \frac{\chi-1}{\chi-2}$$

$$3) \quad \frac{15\chi^2 - 11\chi + 2}{30\chi^2 - 17\chi + 2} = \frac{(5\chi-2)(3\chi-1)}{(5\chi-2)(6\chi-1)} = \frac{3\chi-1}{6\chi-1}$$

$$4) \quad \frac{2\chi^2 - \chi - 3}{4\chi^2 - 12\chi + 9} = \frac{(2\chi-3)(\chi+1)}{(2\chi-3)^2} = \frac{\chi+1}{2\chi-3}$$

$$5) \quad \frac{15\chi^2 - 8\chi + 1}{3\chi - 1} = \frac{(3\chi-1)(5\chi-1)}{3\chi-1} = 5\chi-1$$

$$6) \quad \frac{7\chi+2}{4\chi^2+53\chi+14} = \frac{7\chi+2}{(7\chi+2)(2\chi+7)} = \frac{1}{2\chi+7}$$

Συστήματα εξισώσεων του δευτέρου βαθμού.

Σελίς 151

243/341. 1) Θέτοντες εις την πρώτην εξίσωσιν ἀντὶ χ , ψ εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2 - \psi - 2 = 0$ ὥστε εἶναι

$$\psi' = 2, \quad \text{ἄρα} \quad \chi' = 2$$

$$\psi'' = -1, \quad > \quad \chi'' = -1$$

2) Εὐρίσκομεν

$$\chi = 5 + \psi$$

$$(5 + \psi)\psi = 14, \quad \text{ἤτοι} \quad \psi^2 + 5\psi - 14 = 0$$

$$\begin{aligned}\text{ώστε } \psi' &= 2, & \text{όθεν } \chi' &= 5+2=7 \\ \psi'' &= -7, & & \chi'' = 5-7=-2\end{aligned}$$

3) Εύρίσκομεν

$$\begin{aligned}\chi &= \psi - 3 \\ (\psi - 3)\psi &= 4, \text{ ήτοι } \psi^2 - 3\psi - 4 = 0 \\ \text{ώστε } \psi' &= 4, & \text{όθεν } \chi' &= 4-3=1 \\ \psi'' &= -1, & & \chi'' = -1-3=-4\end{aligned}$$

4) Εύρίσκομεν

$$\begin{aligned}\chi &= 2\psi + 3, \text{ ήτοι } 2\psi^2 + 3\psi - 2 = 0 \\ \text{ώστε } \psi' &= \frac{1}{2}, & \text{όθεν } \chi' &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4 \\ \psi'' &= -2, & & \chi'' = 2 \cdot (-2) + 3 = -1\end{aligned}$$

5) Εύρίσκομεν

$$\begin{aligned}\chi &= \psi + \frac{5}{6} = \frac{6\psi + 5}{6} \\ \frac{6\psi + 5}{6} \cdot \psi &= 1, \text{ ήτοι } 6\psi^2 + 5\psi - 6 = 0 \\ \text{ώστε } \psi' &= \frac{2}{3}, & \text{όθεν } \chi' &= \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ \psi'' &= -\frac{3}{2}, & & \chi'' = -\frac{3}{2} + \frac{5}{6} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

6) Εύρίσκομεν

$$\begin{aligned}\psi &= 11 - \chi \\ \chi(11 - \chi) &= 24, \text{ ήτοι } \chi^2 - 11\chi + 24 = 0 \\ \text{ώστε } \chi' &= 8, & \text{όθεν } \psi' &= 11 - 8 = 3 \\ \chi'' &= 3, & & \psi'' = 11 - 3 = 8\end{aligned}$$

244/342. 1) Έκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐρίσκομεν $\chi = 8 - \psi$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν πρώτην $(8 - \psi)^2 + \psi^2 = 34$, ήτοι $\psi^2 - 8\psi + 15 = 0$

$$\begin{aligned}\text{ώστε } \psi' &= 5, & \text{όθεν } \chi' &= 8-5=3 \\ \psi'' &= 3, & & \chi'' = 8-3=5.\end{aligned}$$

*Ομοίως εὐρίσκομεν, $\chi = 1 + \psi$

$$(1 + \psi)^2 - \psi^2 = 11, \text{ ήτοι } 1 + 2\psi = 11 \text{ καὶ } \psi = 5, \text{ όθεν } \chi = 1 + 5 = 6.$$

3) Εύρίσκομεν $\chi = 5 - 3\psi$

$$\begin{aligned}(5 - 3\psi)^2 + \psi^2 &= 25, \text{ ήτοι } \psi^2 - 3\psi = 0 \\ \text{ώστε } \psi' &= 0, \psi'' = 3, & \text{όθεν } \chi' &= 5, \chi'' = -4\end{aligned}$$

4) Έχομεν $\chi=2-\psi$

$$2(2-\psi)^2-3\psi^2=23, \text{ ήτοι } \psi^2+8\psi+15=0$$

ώστε $\psi'=-3$, ὅθεν $\chi'=2+3=5$

$\psi''=-5$, $\chi''=2+5=7$

5) Έκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν τὴν $6\chi+6\psi=-\chi\psi$ (1) καὶ ἐκ τῆς δευτέρας εὐρίσκομεν ὅτι $\chi=1-\psi$, ὥστε, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὸ χ διὰ τῆς τιμῆς του $1-\psi$, εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2-\psi-6=0$.

Ὡστε εἶναι $\psi'=3$, ὅθεν $\chi'=1-3=-2$

$\psi''=-2$, $\chi''=1+2=3$.

6) Έκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν τὴν $\psi-\chi=\chi\psi$ ἐὰν δὲ εἰς ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ διὰ τῆς τιμῆς του $\chi=\psi-\frac{1}{20}=\frac{20\psi-1}{20}$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $20\psi^2-\psi-1=0$.

Ὡστε εἶναι $\psi'=\frac{1}{4}$, ἄρα $\chi'=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$

$\psi''=-\frac{1}{5}$, ἄρα $\chi'=-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=-\frac{1}{4}$.

245/343. 1) Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $2\chi^2=30$, $\chi^2=15$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{15}$, ὅθεν $\psi=\pm\sqrt{10}$.

2) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὐρίσκομεν $2\chi^2=18$, $\chi^2=9$ καὶ $\chi=\pm 3$. ὅθεν $\psi=\pm 6$.

3) Εὐρίσκομεν

$$15\chi^2+6\psi^2=66$$

$$\frac{6\chi^2-6\psi^2=14}{21\chi^2=80}, \quad \chi^2=\frac{80}{21} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\pm\sqrt{\frac{80}{21}}, \quad \text{ὅθεν} \quad \psi=\pm\sqrt{\frac{31}{21}}.$$

4) Ὅμοιως προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὐρίσκομεν $11\psi^2=11$ ἢ $\psi^2=1$ ἢ $\psi=\pm 1$. Κατόπιν ἐκ μιᾶς τῶν δοθεισῶν εὐρίσκομεν $\chi=\pm\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{l|l|l} 2\chi\psi+\chi^2=7 & 14\chi\psi+7\chi^2=49 & \chi^2=49 \\ 7\chi\psi+3\chi^2=0 & -14\chi\psi-6\chi^2=0 & \chi=\pm 7, \text{ ὅθεν } \psi=\mp 3. \end{array}$$

6) Εὐρίσκομεν

$$-6\chi\psi-2\chi^2=-84$$

$$\frac{6\chi\psi+5\chi^2=192}{3\chi^2=108}, \quad \chi^2=36 \quad \text{καὶ} \quad \chi=\pm 6, \quad \text{ὅθεν} \quad \psi=\pm\frac{1}{3}.$$

7) Προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{\chi^2} = 8 \quad \eta \quad \chi^2 = \frac{1}{4} \quad \eta \quad \chi = \pm \frac{1}{2} \quad \text{κατόπιν ὁμοίως ὡς ἄνω εὐρίσκομεν}$$

$$\psi = \pm \frac{1}{4}.$$

8) Πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ 2 καὶ προσθέτοντες τὴν προκύ-

πτουσαν μετὰ τῆς δευτέρας κατὰ μέλη, εὐρίσκομεν $\frac{15}{\chi^2} = 135 \quad \eta \quad \chi = \pm \frac{1}{3}$ καὶ

ἀκολούθως εὐρίσκομεν $\psi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$

9) Εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l} \frac{6}{\chi^2} - \frac{8}{\psi^2} = 86 & \frac{7}{\psi^2} = 92, \quad \psi^2 = \frac{7}{92}, \quad \psi = \pm \sqrt{\frac{7}{92}} \\ -\frac{6}{\chi^2} + \frac{15}{\psi^2} = 6 & \end{array}$$

Ἐὰν ἤδη ἀντικαταστήσωμεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, π.χ.

εἰς τὴν δευτέραν, τὸ ψ^2 διὰ τοῦ ἴσου τοῦ $\frac{7}{92}$, εὐρίσκομεν

$$\frac{2}{\chi^2} - \frac{5.92}{7} = -2 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2 = \frac{7}{223}, \quad \eta \text{τοι} \quad \chi = \pm \sqrt{\frac{7}{223}}$$

246/344. 1) Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2· τὴν δὲ προκύπτουσαν $2\chi\psi = 4$ προσθέτομεν μὲ τὴν πρώτην καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτῆς ἔχομεν δὲ οὕτω

$$\begin{array}{l} \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 = 9, \quad \eta \text{τοι} \quad (\chi + \psi)^2 = 9, \quad \delta \theta \text{εν} \quad \chi + \psi = \pm 3 \\ \chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2 = 1, \quad > \quad (\chi - \psi)^2 = 1, \quad > \quad \chi - \psi = \pm 1. \end{array}$$

Τέλος λύομεν τὰ συστήματα

$$\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{l} \chi + \psi = 3 \\ \chi - \psi = 1 \\ \hline \chi = 2, \quad \psi = 1 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = 3 \\ \chi - \psi = -1 \\ \hline \chi = 1, \quad \psi = 2 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = -3 \\ \chi - \psi = 1 \\ \hline \chi = -1, \quad \psi = -2 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = -3 \\ \chi - \psi = -1 \\ \hline \chi = -2, \quad \psi = -1 \end{array} \end{array}$$

2) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὐρίσκομεν

$$\begin{array}{l} \chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2 = 40 + 24, \quad \eta \text{τοι} \quad (\chi + \psi)^2 = 64, \quad \delta \theta \text{εν} \quad \chi + \psi = \pm 8 \\ \chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2 = 40 - 24, \quad > \quad (\chi - \psi)^2 = 16, \quad > \quad \chi - \psi = \pm 4. \end{array}$$

Κατόπιν τούτων λύομεν τὰ συστήματα

$$\begin{array}{l|l|l|l} \begin{array}{l} \chi + \psi = 8 \\ \chi - \psi = 4 \\ \hline \chi = 6, \quad \psi = 2 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = 8 \\ \chi - \psi = -4 \\ \hline \chi = 2, \quad \psi = 6 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = -8 \\ \chi - \psi = 4 \\ \hline \chi = -2, \quad \psi = -6 \end{array} & \begin{array}{l} \chi + \psi = -8 \\ \chi - \psi = -4 \\ \hline \chi = -6, \quad \psi = -2 \end{array} \end{array}$$

3) Ὁμοίως εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned} x^2 + 2\chi\psi + \psi^2 &= 52 + 48, \quad \text{ἥτοι} \quad (\chi + \psi)^2 = 10^2, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi + \psi = \pm 10 \\ x^2 - 2\chi\psi + \psi^2 &= 52 - 48, \quad > \quad (\chi - \psi)^2 = 2^2, \quad > \quad \chi - \psi = \pm 2. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων λύομεν τὰ συστήματα

$\chi + \psi = 10$	$\chi + \psi = 10$	$\chi + \psi = -10$	$\chi + \psi = -10$
$\chi - \psi = 2$	$\chi - \psi = -2$	$\chi - \psi = 2$	$\chi - \psi = -2$
$\chi = 6, \psi = 4$	$\chi = 4, \psi = 6$	$\chi = -4, \psi = -6$	$\chi = -6, \psi = -4$

4) Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς 2^{ας} ἐξισώσεως διὰ 2 καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὐρίσκομεν

$$\begin{aligned} x^2 + \psi^2 + 2\chi\psi &= 169 \quad \text{ἢ} \quad (\chi + \psi)^2 = 13^2 \quad \text{ἢ} \quad \chi + \psi = \pm 13 \\ x^2 + \psi^2 - 2\chi\psi &= 9 \quad \text{ἢ} \quad (\chi - \psi)^2 = 3^2 \quad \text{ἢ} \quad \chi - \psi = \pm 3. \end{aligned}$$

Ἐπειτα λύομεν τὰ συστήματα

$\chi + \psi = 13$	$\chi + \psi = 13$	$\chi + \psi = -13$	$\chi + \psi = -13$
$\chi - \psi = 3$	$\chi - \psi = -3$	$\chi - \psi = 3$	$\chi - \psi = -3$
$\chi = 8$	$\chi = 5$	$\chi = -5$	$\chi = -8$
$\psi = 5$	$\psi = 8$	$\psi = -8$	$\psi = -5$

5) Εὐρίσκομεν

$$9x^2 + \psi^2 = 52$$

$$6\chi\psi = 48$$

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6\chi\psi + \psi^2 &= 100, \quad \text{ἥτοι} \quad (3\chi + \psi)^2 = 10^2, \quad \text{ὅθεν} \quad 3\chi + \psi = \pm 10 \\ 9x^2 - 6\chi\psi + \psi^2 &= 4, \quad > \quad (3\chi - \psi)^2 = 4, \quad > \quad 3\chi - \psi = \pm 2. \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων λύομεν τὰ συστήματα

$3\chi + \psi = 10$	$3\chi + \psi = 10$	$3\chi + \psi = -10$	$3\chi + \psi = -10$
$3\chi - \psi = 2$	$3\chi - \psi = -2$	$3\chi - \psi = 2$	$3\chi - \psi = -2$
$\chi = 2, \psi = 4$	$\chi = \frac{4}{3}, \psi = 6$	$\chi = -\frac{4}{3}, \psi = -6$	$\chi = -2, \psi = -4$

6) Εὐρίσκομεν

$$x^2 + 4\psi^2 = 5$$

$$4\chi\psi = 4$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4\chi\psi + 4\psi^2 &= 9, \quad \text{ἥτοι} \quad (\chi + 2\psi)^2 = 9, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi + 2\psi = \pm 3 \\ x^2 - 4\chi\psi + 4\psi^2 &= 1, \quad > \quad (\chi - 2\psi)^2 = 1, \quad > \quad \chi - 2\psi = \pm 1. \end{aligned}$$

Κατόπιν λύομεν τὰ συστήματα

$\chi + 2\psi = 3$	$\chi + 2\psi = 3$	$\chi + 2\psi = -3$	$\chi + 2\psi = -3$
$\chi - 2\psi = 1$	$\chi - 2\psi = -1$	$\chi - 2\psi = 1$	$\chi - 2\psi = -1$
$\chi = 2, \psi = \frac{1}{2}$	$\chi = 1, \psi = 1$	$\chi = -1, \psi = -1$	$\chi = -2, \psi = -\frac{1}{2}$

Προβλήματα εξισώσεων και συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ.

Σελίς 154

A'. 247/345. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\chi}{3} \cdot \frac{\chi}{4} = 108, \quad \chi^2 = 12 \cdot 108 = 1296 \quad \text{καὶ} \quad \chi = \pm 36$$

248/347. Ἐχομεν $(\chi+1)(\chi-1)=840$, $\chi^2=841$ καὶ $\chi=\pm 29$.

249/348. Εἶναι $\chi + \frac{1}{\chi} = \frac{13}{6}$, $6\chi^2 - 13\chi + 6 = 0$ καὶ $\chi' = \frac{3}{2}$, $\chi'' = \frac{2}{3}$

250/350. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $\chi-1$, χ , $\chi+1$. ἔχομεν λοιπὸν $(\chi-1)(\chi+1)=3\chi+3$ εὐρίσκομεν δὲ ὅτι ἢ $\chi=4$ ἢ $\chi=-1$. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν εἶναι ἢ 3, 4, 5, ἢ -2, -1, 0.

251/352. Ἐχομεν $\chi^2 + (\chi+1)^2 = 85$, $\chi^2 + \chi - 42 = 0$ καὶ $\chi'=6$, $\chi''=-7$.
Ὡστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 6, 7 ἢ οἱ -7, -6.

252/354. Εἶναι $(\chi+1)^2 = (2\chi-7)^2$, $\chi^2 - 10\chi + 16 = 0$ καὶ $\chi'=8$, $\chi''=2$.

B'. 253/355. Ἐστω, ὅτι ἠγόρασε χ μέτρα. Τότε ἡ ἀξία τοῦ ἑνὸς μέτρου εἶναι $\frac{220}{\chi}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\chi = \frac{110}{\chi} - 1$, ἥτοι $\chi^2 + \chi - 110 = 0$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμὸς. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi'=10$, $\chi''=-11$. Ἀλλ' ἡ λύσις $\chi''=-11$ ἀπορρίπτεται. Ὡστε ἠγόρασε 10 μέτρα.

254/357. Ἡ μία ὁκᾶ σίτου ἐπωλήθη πρὸς $\frac{\chi}{8}$ δραχμάς. Ὡστε αἱ χ ὁκάδες θὰ ἐπωλοῦντο πρὸς $\frac{\chi}{8} \cdot \chi$ δραχμάς. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi^2}{8} = 392$, ἥτοι $\chi^2 = 3136$ καὶ $\chi = \pm 56$. Ἀλλ' ἐκ τῶν δύο τούτων λύσεων παραδεκτὴ εἶναι ἡ $\chi=56$. Ὡστε ἡ μία ὁκᾶ σίτου ἐπωλήθη πρὸς $\frac{56}{8} = 7$ δραχμάς.

255/358. Ἐστω, ὅτι οἱ πτωχοὶ ἦσαν χ . Τότε τὸ μερίδιον ἐκάστου θὰ ἦτο $\frac{600}{\chi}$ δραχμαί. Ἀλλ' αἱ 600 δραχμαὶ ἐμοιράσθησαν εἰς $\chi-4$ πτωχοὺς, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔλαβεν $\frac{600}{\chi-4}$ δραχμάς. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{600}{\chi-4} - \frac{600}{\chi} = 5$. ἥτοι $\chi^2 - 4\chi - 480 = 0$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς. Λύοντες ἤδη τὴν εὐρεθεῖσαν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi'=24$, $\chi''=-20$. Ὡστε οἱ πτωχοὶ ἦσαν 24.

256/360. Ἐὰν οἱ παρόντες μαθηταὶ ἦσαν χ , τότε ἕκαστος ἐξ αὐτῶν θὰ κατέβαλεν $\frac{900}{\chi}$ δραχμάς, ἀλλὰ τὰς 900 δραχμάς κατέβαλον $\chi+6$ μαθηταὶ καὶ ἕκαστος τούτων ἔδωκε $\frac{900}{\chi+6}$ δραχμάς. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{900}{\chi} - \frac{900}{\chi+6} = 5$, ἥτοι $\chi^2+6\chi-1080=0$. ὁθεν εἶναι $\chi'=30$, $\chi''=-36$. ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ δευτέρα λύσις ἀπορρίπτεται ἔπεται, ὅτι οἱ μαθηταὶ ἦσαν 30.

257/361. Ἐὰν χ δραχ. ἦτο ἡ μηνιαία δόσις, οἱ μῆνες καθ' οὓς θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος εἶναι $\frac{3600}{\chi}$. ὁμοίως σκεπτόμενοι εὐρίσκομεν ὅτι, ἐὰν ἡ δόσις ἦτο $\chi+60$, οἱ μῆνες θὰ ἦσαν $\frac{3600}{\chi+60}$. ἐπειδὴ δὲ οἱ τελευταῖοι μῆνες εἶναι κατὰ 5 ὀλιγώτεροι τῶν πρώτων, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3600}{\chi} - \frac{3600}{\chi+60} = 5$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν ἢ $\chi=180$ ἢ $\chi=-240$. ἀλλ' ἐξ αὐτῶν τῶν λύσεων παραδεκτὴ εἶναι ἡ πρώτη· ἀφοῦ λοιπὸν ἡ μηνιαία δόσις εἶναι 180 δραχ., τὸ χρέος θὰ ἐξοφλήσῃ εἰς μῆνας $3600:180=20$.

Ἐὰν ὥς ἄγνωστον θέσωμεν τοὺς μῆνας, θὰ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3600}{\chi-5} - \frac{3600}{\chi} = 60$.

258/365. Ἐὰν χ εἶναι οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες εἶναι $14-\chi$. ἔχομεν ἄρα κατὰ τὸ πρόβλημα $(14-\chi)\chi+\chi(14-\chi)=96$. εὐρίσκομεν δὲ $\chi=8$ ἢ 6 . ἄρα αἱ γυναῖκες ἦσαν ἢ 6 ἢ 8.

Γ'. 259/366. 1) Ὁ πρῶτος ποδηλάτης θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν 90 χιλιομέτρ. εἰς $\frac{90}{\chi}$ ὥρας καὶ ὁ δεύτερός εἰς $\frac{90}{\chi+1}$ ὥρας. 2) Ἡ τιμὴ τοῦ χ εὐρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{90}{\chi} - \frac{90}{\chi+1} = 1$ ἥτοι ἐκ τῆς $\chi^2+\chi-90=0$. Εἶναι δὲ $\chi'=9$ καὶ $\chi''=-10$. Ἀλλ' ἐκ τῶν δύο τούτων τιμῶν παραδεκτὴ εἶναι ἡ $\chi'=9$.

260/367. Ἐὰν τὸ πρῶτον αὐτοκίνητον διανύσῃ χ χιλ. εἰς μίαν ὥραν, ὁ χρόνος ποὺ διήνυσσε τὰ 150 χιλιόμετρα εἶναι $\frac{150}{\chi}$, ὁ δὲ χρόνος τοῦ ἄλλου εἶναι $\frac{150}{\chi-5}$, καὶ ἐπομένως $\frac{150}{\chi} + 1 = \frac{150}{\chi-5}$. Εὐρίσκομεν δὲ $\chi=30$ καὶ $\chi-5=25$.

261/369. Ἐὰν ἡ ἰδίᾳ ταχύτητι τοῦ πλοίου εἶναι χ χιλιόμ. τὴν ὥραν, ἡ ταχύτης του, ὅταν ἀνέρχεται τὸν ποταμὸν εἶναι $\chi-2$ καὶ ὅταν τὸν κατέρχεται

είναι $x+2$. Ὡστε ὁ χρόνος τοῦ ταξιδίου κατὰ τὴν ἀνοδὸν εἶναι $\frac{60}{x-2}$ καὶ κατὰ τὴν κάθοδον εἶναι $\frac{60}{x+2}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{60}{x-2} + \frac{60}{x+2} = 16$, ἥτοι $2x^2 - 15x - 8 = 0$, ἣτις λυομένη δίδει τὰς ρίζας $x' = 8$ καὶ $x'' = -\frac{1}{2}$. Ὡστε ἡ παραδεκτὴ λύσις εἶναι $x' = 8$, ἥτοι ἡ ἰδίᾳ ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι 8 χιλιόμετρα τὴν ὥραν.

Δ'. 262/370. Ἐστω τὸ ἀρχικὸν ἐπιτόκιον x . Τότε ὁ τόκος τῶν 10000 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος εἶναι $\frac{10000x}{100} = 100x$. Ὡστε τὸ κεφάλαιον μετὰ τὴν πρόσθεσιν τοῦ τόκου εἶναι $10000 + 100x$. Ἐπειδὴ δὲ ἤδη τὸ ἐπιτόκιον εἶναι $x+1$, ἔπεται ὅτι ὁ τόκος τοῦ νέου κεφαλαίου εἰς ἓν ἔτος εἶναι $\frac{(10000+100x)(x+1)}{100}$. Ἐχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{(10000+100x)(x+1)}{100} = 530$ ἥτοι τὴν $x^2 + 101x - 530 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει τὴν παραδεκτὴν λύσιν $x = 5$.

263/371. Ἐὰν x εἶναι τὸ ἐπιτόκιον, ὁ τόκος τῶν 5000 δραχμῶν εἰς ἓν ἔτος εἶναι $\frac{5000x}{100} = 50x$, ὁ δὲ τόκος τοῦ κεφαλαίου $5000 + 50x$ εἰς ἓν ἔτος εἶναι $\frac{(5000+50x)x}{100}$. Εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα

$$50x + \frac{(5000+50x)x}{100} = 408 \quad \text{ἢ} \quad x^2 + 200x - 816 = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λυομένη δίδει τὴν παραδεκτὴν λύσιν $x = 4$.

Ε'. 264/372. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος τοῦτου εἶναι $x - \psi = 7$, $x\psi = 30$. Λύοντες τὸ σύστημά τοῦτο εὐρίσκομεν $x' = 10$, $\psi' = 3$, ἢ $x'' = -3$, $\psi'' = -10$.

265/373. Ἐχομεν $\frac{x}{\psi} = 3$, $x^2 + \psi^2 = 90$. Ὡστε εἶναι $x' = 9$, $\psi' = 3$, ἢ $x'' = -9$, $\psi'' = -3$.

266/377. Εἶναι $x\psi = 6$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{\psi} = \frac{1}{6}$, ἢ $x\psi = 6$, $\psi - x = 1$. ἄρα $x' = 2$, $\psi' = 3$ ἢ $x'' = -3$, $\psi'' = -2$.

267/379. Ἐχομεν $x - \psi = 9$, $\frac{x}{20} = \frac{20}{\psi}$, ὥστε εἶναι $x' = 25$, $\psi' = 16$, ἢ $x'' = -16$, $\psi'' = -25$.

268/380. Ἐστω χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες, ὅποτε θὰ ἔχωμεν $\chi\psi=2(\chi+\psi)$ καὶ $10\chi+\psi=10\psi+\chi+27$ ἢ $\chi-\psi=3$ · λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi=6$, $\psi=3$ · ἤτοι ὁ ζητούμενος διψήφιος εἶναι ὁ 63· (αἱ ἀρνητικαὶ καὶ λύσεις ἀπορρίπτονται).

ΣΤ' 269/382. Ἐστω χ τὰ πρόσωπα καὶ ψ ἡ δαπάνη ἐκάστου· ἔχομεν ἑπομένως $\chi\psi=216$ καὶ $(\chi+3)(\psi-3)=225$ ἢ $\psi-\chi=6$ · λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi=12$ καὶ $\psi=18$.

270/384. Ἐστω χ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ ψ τὸ τοῦ χαλκοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ δίδει τὸν ὄγκον, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{28}{\chi} + \frac{11}{\psi} = \frac{39}{14,4}$ καὶ $\chi-\psi=10,4$ · ἀπαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς τῆς πρώτης καὶ λαμβάνοντες τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐκ τῆς δευτέρας, τὴν ὁποίαν θέτομεν εἰς τὴν πρώτην, εὐρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2-4\psi-42,24=0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\psi=8,8$ · ἄρα εἶναι $\chi=8,8+10,4=19,2$.

271/386. Ἐστω, ὅτι εἰς χ ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ ὁ πρῶτος μόνος του τὸ ἔργον καὶ εἰς ψ ὥρας ὁ δεύτερος· ὥστε ὁ πρῶτος θὰ ἐκτελέσῃ εἰς 1 ὥραν τὰ $\frac{1}{\chi}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς 3 ὥρας τὰ $\frac{3}{\chi}$ αὐτοῦ· ὁ δὲ δεύτερος εἰς 3 ὥρας θὰ ἐκτελέσῃ τὰ $\frac{3}{\psi}$ τοῦ ἔργου· ἔχομεν ἄρα $\frac{3}{\chi} + \frac{3}{\psi} = 1$ · ἐπίσης ἔχομεν καὶ $\chi+\psi=16$ · λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi'=12$ $\psi'=4$ ἢ $\chi''=4$, $\psi''=12$.

Ζ'. 272/387. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 10 μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαγώνιος χ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἔχομεν $\chi^2=10^2+10^2=2\cdot 10^2$ · ὥστε $\chi=10\sqrt{2}$.

273/390. Ἐχομεν $\chi\psi=35$ καὶ $(\chi+3)(\psi-3)=20$. Αἱ παραδεκταὶ λύσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι $\chi=7$, $\psi=5$.

274/391. Ἐχομεν $\frac{\chi}{\psi} = 3$, $\chi\psi - \frac{24\cdot 16}{2} = 192$ καὶ $\chi=24$, $\psi=8$.

275/393. Ἐάν χ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα κάθετος πλευρὰ, ἡ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι $\chi+3$ · ἔστω δὲ καὶ ψ ἡ ἄλλη κάθετος· ἔχομεν τότε $\chi+\psi=51$ καὶ $\chi^2+\psi^2=(\chi+3)^2$ · λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν, ὅτι αἱ πλευраὶ τοῦ τριγώνου εἶναι 39, 36, 15.

276/395. Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι καὶ διαγώνιος τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου. Ἐάν δὲ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι χ , ψ ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=25^2$ καὶ $\chi-\psi=5$ · αἱ παραδεκταὶ δὲ λύσεις αὐτοῦ εἶναι $\chi=20$, $\psi=15$.

277/396. Ἐὰν χ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου καὶ ψ, φ αἱ κάθετοι πλευραὶ αὐτοῦ, ἔχομεν τὸ σύστημα $\psi^2 + \varphi^2 = \chi^2$, $\chi + \psi + \varphi = 24$ καὶ $\frac{\psi\varphi}{2} = 24$.

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\psi + \varphi = 24 - \chi$ καὶ $(\psi + \varphi)^2 = (24 - \chi)^2$ ἥτοι $\psi^2 + \varphi^2 + 2\psi\varphi = 576 - 48\chi + \chi^2$ · ἐπειδὴ δὲ $\psi^2 + \varphi^2 = \chi^2$ καὶ $2\psi\varphi = 96$, ἡ τελευταία ἐξίσωσις καταντᾷ $48\chi = 480$ ἥτοι $\chi = 10$. Ἦδη λύομεν τὸ σύστημα $\psi^2 + \varphi^2 = 100$, $\psi + \varphi = 14$, καὶ εὐρίσκομεν $\varphi' = 8$, $\psi' = 6$ ἢ $\varphi'' = 6$, $\psi'' = 8$.

Ἐξισώσεις διτετράγωνοι.

Σελὶς 159.

278/397. 1) Λαμβάνομεν $\chi = \pm \sqrt{\frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{26 \pm 24}{2}}$, ἥτοι αἱ 4 ρίζαι αὐτῆς εἶναι 5, -5, 1, -1.

2) Λαμβάνομεν $\chi = \pm \sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 16}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{17 \pm 15}{2}}$, ἥτοι αἱ 4 ρίζαι αὐτῆς εἶναι $+\sqrt{\frac{17+15}{2}}=4$, $-\sqrt{\frac{17+15}{2}}=-4$, $+\sqrt{\frac{17-15}{2}}=1$, $-\sqrt{\frac{17-15}{2}}=-1$,

3) Ἐπίσης ἔχομεν $\chi = \pm \sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 36}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{-5 \pm 13}{2}}$, ἥτοι αἱ 4 ρίζαι εἶναι $+\sqrt{\frac{-5+13}{2}}=2$, $-\sqrt{\frac{-5+13}{2}}=-2$, $+\sqrt{\frac{-5-13}{2}}=3i$, $-\sqrt{\frac{-5-13}{2}}=-3i$.

4) Τὸ δὲ διορθωτέον εἰς 36. Κατόπιν τούτων

ἔχομεν $\chi = \pm \sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72}} = \pm \sqrt{\frac{13 \pm 5}{72}}$. ἥτοι αἱ 4 ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

5) Αἱ 4 ρίζαι $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{2i}{3}$, $-\frac{2i}{3}$.

6) Αὕτη γράφεται $10\chi^4 - \chi^2 - 21 = 0$, ἥς αἱ ρίζαι εἶναι

$$\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, i\sqrt{\frac{7}{5}}, -i\sqrt{\frac{7}{5}}.$$

279/398. 1) Αὕτη γράφεται $\chi^4 + 5\chi^2 - 36 = 0$ καὶ δίδει τὰς ρίζας 2, -2, $3i$, $-3i$.

2) Αυτή γράφεται $x^4 + x^2 - 20 = 0$ και αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι 2, -2, $i\sqrt{5}$, $-i\sqrt{5}$.

3) Αυτή γράφεται $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ και αἱ ρίζαι τῆς εἶναι 1, -1, 2i, -2i.

4) Αυτή γράφεται $(x^2 - 11)(x^2 - 9) + 14 = 7(x^2 - 9)$ ἢ $x^4 - 27x^2 + 176 = 0$, ἥς αἱ ρίζαι εἶναι 4, -4, $\sqrt{11}$, $-\sqrt{11}$.

5) Αυτή μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν γίνεται $x^4 - 107x^2 + 2752 = 0$ και δίδει τὰς ρίζας 8, -8, $\sqrt{43}$, $-\sqrt{43}$.

280/399. 1) Ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἣτις προκύπτει ἐκ τῆς δοθείσης, ἔχει τὰς 2 ρίζας αὐτῆς, αἵτινες εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἀμφοτέρως θετικὰς, διότι $\rho' + \rho'' = 65$ καὶ $\rho' + \rho'' = 18$, ἄρα ἡ διτετραγώνος ἔχει καὶ τὰς 4 ρίζας αὐτῆς πραγματικάς.

2) Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου (αἵτινες εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι) εἶναι ἐτερόσημοι, διότι $\rho' \rho'' = -136$, ἄρα ἡ διτετραγώνος δύο μόνον πραγματικάς ρίζας ἔχει, αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῆς θετικῆς ρίζης τῆς δευτεροβαθμίου.

3) Ἡ δευτεροβάθμιος ἔχει τὰς ρίζας αὐτῆς πραγματικάς καὶ ἄνισους· ἀλλ' ἐπειδὴ $\rho' \rho'' = \frac{2}{15}$ καὶ $\rho' + \rho'' = -\frac{13}{15}$, ἐπεταί, ὅτι ἀμφοτέραι αὗται εἶναι ἀρνητικαί· ἄρα αἱ 4 ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι φανταστικά.

4) Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου εἶναι πραγματικά, ἴσαι καὶ θετικά· ἄρα αἱ 4 ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικά.

281/400. 1) Αἱ ρίζαι τοῦ διτετραγώνου αὐτοῦ τριωνύμου εἶναι 5, -5, 4, -4· ἄρα ἔχομεν $x^4 - 41x^2 + 400 = (x-5)(x+5)(x-4)(x+4)$.

2) Ὅμοίως αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος διτετραγώνου τριωνύμου εἶναι $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{i}{5}$, $-\frac{i}{5}$. ἄρα ἔχομεν $400x^4 - 9x^2 - 1 = 400\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{i}{5}\right)$.

$$\left(x - \frac{i}{5}\right) = 400 \cdot \frac{(4x-1)}{4} \cdot \frac{(4x+1)}{4} \cdot \frac{(5x-i)}{5} \cdot \frac{(5x+i)}{5} = (4x-1)(4x+1)(5x-i)(5x+i).$$

$$3) \text{ Ἐχομεν } 36x^4 + 143x^2 - 4 = 36\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6}\right).$$

$$(x-2i)(x+2i) = 36 \cdot \frac{(6x-1)}{6} \cdot \frac{(6x+1)}{6} \cdot (x-2i)(x+2i) = (6x-1)(6x+1)(x-2i)(x+2i).$$

$$4) \text{ Ὅμοίως ἔχομεν } x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

282/401. Αὗται εἶναι αἱ

$$1) (x-5)(x+5)(x-2)(x+2) = (x^2-25)(x^2-4) = x^4 - 29x^2 + 100 = 0.$$

$$2) (x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=(x^2-1)\left(x^2-\frac{1}{16}\right)=16x^4-17x^2+1=0.$$

$$3) (x-3)(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)=(x^2-9)\left(x^2-\frac{4}{9}\right)=9x^4-85x^2+36=0.$$

$$4) \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{9}{16}\right)=$$

$$=64x^4-25x^2+9=0.$$

$$5) (x-5)(x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=(x^2-25)(x^2-2)=x^4-27x^2+50=0.$$

$$6) (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})(x-5i)(x+5i)=(x^2-7)(x^2+25)=x^4+18x^2-175=0.$$

Ἐξισώσεις ἔχουσαι ριζικὰ δευτέρας τάξεως.

Σελίς 162.

$$283/402. 1) \sqrt{x+7}=4, \quad x+7=16, \quad x=9.$$

$$2) \sqrt{8-x}=9, \quad 8-x=81, \quad x=-73.$$

$$3) \frac{1}{3} \sqrt{x+12}=13, \quad \frac{1}{9} (x+12)=169, \quad x+12=1521, \quad x=1509.$$

$$4) \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=2, \quad \sqrt{x}+1=2\sqrt{x}-2, \quad 1+2=2\sqrt{x}-\sqrt{x}, \quad 3=\sqrt{x}, \quad x=9.$$

$$5) \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=3, \quad 1+\sqrt{x}=3-3\sqrt{x}, \quad 4\sqrt{x}=2, \quad \sqrt{x}=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{1}{4}$$

$$6) \frac{2+3\sqrt{x}}{3-2\sqrt{x}}=5, \quad 2+3\sqrt{x}=15-10\sqrt{x}, \quad 13\sqrt{x}=13, \quad x=1$$

7) Ὑποϋντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{x+5}=x-1$ εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν $x+5=(x-1)^2$ ἢ $x^2-3x-4=0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $x'=4$ καὶ $x''=-1$. ἐκ τῶν ριζῶν τούτων ἡ $x'=4$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, ἐνῶ ἡ $x''=-1$ ἐπαληθεύει τὴν συζυγῇ αὐτῆς $-\sqrt{x+5}=x-1$.

8) Ὅμοιως ὑποϋντες κτλ. λαμβάνομεν $x+4=(x-2)^2$ ἢ $x^2-5x=0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $x'=0$ καὶ $x''=5$. ἐξ ὧν ἡ $x''=5$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, ἐνῶ ἡ $x'=0$ ἐπαληθεύει τὴν $-\sqrt{x+4}=x-2$.

9) Ὅμοιως ἔχομεν $11-x=(x+1)^2$ ἢ $x^2+3x-10=0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $x'=2$, $x''=-5$. ἀλλ' ἐκ τῶν ριζῶν τούτων ἡ $x'=2$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, ἐνῶ ἡ $x''=-5$ ἐπαληθεύει τὴν $-\sqrt{11-x}=x+1$.

10) Ἐχομεν $x-15=2\sqrt{x}$ καὶ $4x=(x-15)^2$ ἢ $x^2-34x+225=0$. Ρίξει

τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι αἱ $\chi' = 25$, $\chi'' = 9$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἐνῶ ἡ δευτέρα ἐπαληθεύει τὴν $\chi + 2\sqrt{\chi - 15} = 0$.

11) Ἐχομεν $\chi + 5 = 6\sqrt{\chi}$ καὶ $36\chi = (\chi + 5)^2$ ἢ $\chi^2 - 26\chi + 25 = 0$. Ὡστε εἶναι $\chi' = 25$, $\chi'' = 1$. ἀμφότεραι δὲ αἱ ρίζαι αὗται ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὥστε ἡ συζυγὴς αὐτῆς, ἥτοι ἡ $\chi + 6\sqrt{\chi} + 5 = 0$, οὐδεμίαν ἔχει ρίζαν.

12) Ἐχομεν $\chi + 10 = 7\sqrt{\chi}$ καὶ $49\chi = (\chi + 10)^2$ ἢ $\chi^2 - 29\chi + 100 = 0$. ὥστε εἶναι $\chi' = 25$, $\chi'' = 4$. ἀμφότεραι δὲ αἱ ρίζαι αὗται ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

284/404. 1) Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν $\chi + 7 = \chi + 2 + 1 + 1 + 2\sqrt{\chi + 2}$ ἢ $2 = \sqrt{\chi + 2}$. Ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν τὴν τελευταίαν ταύτην εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν $\chi = 2$ ἣτις τιμὴ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν.

2) Κατὰ πρῶτον ἔχομεν $(\sqrt{\chi - 1})^2 = (\sqrt{\chi + 6} - 1)^2$ ἢ $\sqrt{\chi + 6} = 4$. Κατόπιν δὲ ἔχομεν $\chi + 6 = 16$, ἥτοι $\chi = 10$. ἡ τιμὴ δὲ αὕτη τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

3) Ἐχομεν κατὰ πρῶτον $(\sqrt{\chi - 3} + \sqrt{\chi + 9})^2 = 36$, ἥτοι $(\chi - 3) + (\chi + 9) + 2\sqrt{\chi - 3}\sqrt{\chi + 9} = 36$ ἢ $\sqrt{(\chi - 3)(\chi + 9)} = 15 - \chi$. Κατόπιν ἔχομεν $(\chi - 3)(\chi + 9) = (15 - \chi)^2$ ἢ $36\chi = 252$, ἥτοι $\chi = 7$. Ἡ τιμὴ δὲ αὕτη τοῦ χ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

4) Κατὰ πρῶτον ἔχομεν $(\sqrt{2\chi + 2}\sqrt{\chi + 2})^2 = 4$, ἥτοι $2\chi + 4(\chi + 2) + 4\sqrt{2\chi}\sqrt{\chi + 2} = 4$ ἢ $3\chi + 2 = -2\sqrt{2\chi(\chi + 2)}$. Κατόπιν ἔχομεν $(3\chi + 2)^2 = 4 \cdot 2\chi(\chi + 2)$ ἢ $\chi^2 - 4\chi + 4 = 0$. Τῆς ἐξισώσεως ταύτης λύσεις εἶναι ἡ $\chi = 2$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἐπαληθεύει τὴν $-\sqrt{2\chi} + 2\sqrt{\chi + 2} = 2$.

5) Ὑψοῦντες κτλ. εὐρίσκομεν $\chi + 7 - \sqrt{5(\chi - 2)^2} = 9$ ἢ $\chi - 2 = \sqrt{5(\chi - 2)^2}$. Ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν $(\chi - 2)^2 = 5(\chi - 2)$ ἢ $(\chi - 2)[(\chi - 2) - 5] = 0$ ἢ $(\chi - 2)(\chi - 7) = 0$. ὁπότε ἡ $\chi = 2$ ἢ $\chi = 7$. ἀμφότεραι δὲ αὗται αἱ τιμαὶ τῆς χ ἀρμόζουν εἰς τὴν δοθεῖσαν.

6) Τὸ $3\chi - 4$ διορθωτέον εἰς $2\chi - 4$. Κατόπιν τούτων ὕψοῦντες κτλ. λαμβάνομεν $\sqrt{2\chi - 4} = 14 - \chi$. Ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν εὐρίσκομεν $2\chi - 4 = (14 - \chi)^2$ ἢ $\chi^2 - 30\chi + 200 = 0$. ἄρα $\chi' = 10$ καὶ $\chi'' = 20$. ἐξ αὐτῶν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀρμόζει ἡ $\chi' = 10$.

Πρόοδοι ἀριθμητικά.

Σελίς 165

285/406. 1) $\lambda = 11 - 3 = 19 - 11 = 27 - 19 = 8$

2) $\lambda = 89 - 100 = 78 - 89 = 67 - 78 = -11$

$$3) \lambda = 0,75 - 0,5 = 1 - 0,75 = 0,25$$

$$4) \lambda = (4\alpha - 5\beta) - (3\alpha - 2\beta) = (5\alpha - 8\beta) - (4\alpha - 5\beta) = \alpha - 3\beta.$$

286/407. Έχομεν

$$1) 3 + 14.4 = 59 \quad 2) 9 + 19(-3) = -48 \quad 3) 3 + 39.(-4) = -153$$

$$4) \frac{1}{4} + 34. \left(2 \frac{3}{4} \right) = 93 \frac{3}{4} \quad 5) 1 + (v-1).2 = 2v-1$$

$$6) \alpha + \beta + 9(\alpha - \beta) = 10\alpha - 8\beta \quad 7) (2\alpha - \beta) + 20. \beta = 2\alpha + 19\beta.$$

287/408. Έκ του τύπου $\tau = \alpha + (v-1)\lambda$ λαμβάνομεν $51 = \alpha + 14.4$, ἥτοι $\alpha = -5$.

288/409. Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ v καὶ εἶναι $\tau = 52$, $\alpha = 40$, $\lambda = 1 \frac{1}{2}$. Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $52 = 40 + (v-1) \frac{3}{2}$, ἢ ῥίξα τῆς ὁποίας εἶναι $v = 9$.

289/410. Έχομεν $-14 = \alpha + 2\lambda$ καὶ $46 = \alpha + 14\lambda$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\alpha = -24$ καὶ $\lambda = 5$.

290/413. Έχομεν $13 = \alpha + 4\lambda$, $25 = \alpha + 8\lambda$, καὶ $\tau = \alpha + 6\lambda$. Έκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\alpha = 1$ καὶ $\lambda = 3$. Έκ δὲ τῆς τρίτης εὐρίσκομεν $\tau = 1 + 6.3 = 19$.

291/414. Ἐστω μετὰ v ἔτη, ὅποτε ὁ μισθὸς του θὰ εἶναι $9000 + (v-1).600$ καὶ αἱ δαπάναι του $7500 + (v-1).750$ θὰ εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα $9000 + (v-1).600 = 7500 + (v-1).750$ ἢ $v = 11$.

Σελίς 168

292/415. Ὁ τύπος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι $K = \frac{v(\alpha + \tau)}{2}$. εἶναι δὲ $\alpha = 1$, $\tau = 300$ καὶ $v = 300$. ὥστε ἔχομεν $K = \frac{300(1 + 300)}{2} = 150.301$ καὶ γενικῶς εἶναι

$$K = \frac{v(1 + v)}{2}.$$

293/416. Έχομεν $\alpha = 1$, $\tau = 99$ καὶ $v = 50$. ὥστε εἶναι $K = \frac{50(1 + 99)}{2} = 50.50 = 50^2$ καὶ γενικῶς ἔχομεν $\alpha = 1$, $\lambda = 2$. ὥστε εἶναι $\tau = 2v - 1$. ἄρα καὶ $K = \frac{v(1 + 2v - 1)}{2} = v^2$.

$$294/417. \text{ Έχομεν } K = \frac{(42 + 198).43}{2} = 5160.$$

$$295/419. \text{ Έχομεν } 1) K = \alpha v + \frac{v(v-1)}{2} \cdot \lambda \text{ ἥτοι } K = 1.20 + \frac{20.19}{2} \cdot 3 = 590.$$

$$2) \quad K = 18.13 + \frac{13.12}{2} \cdot (-6) = -234$$

$$3) \quad K = \left(15 \frac{1}{3}\right) \cdot 25 + \frac{25.24}{2} \left(-\frac{2}{3}\right) = 950$$

296/420. Τὸ πρῶτον πολλαπλάσιον τοῦ 5 εἶναι ὁ 5 καὶ τὸ τελευταῖον ὁ 200. Εἶναι δὲ $\lambda=5$ ὥστε εἶναι $200=5+(v-1) \cdot 5$, ἥτοι $v=40$ καὶ $K=\frac{(5+200) \cdot 40}{2}=4100$.

$$297/422. \text{ Εἶναι } a=3, \tau=148 \text{ καὶ } v=30 \text{ ὥστε εἶναι } \frac{(3+148) \cdot 30}{2}=2265.$$

$$298/424. \text{ Ἐχομεν } v=12, \lambda=50 \text{ ὥστε εἶναι } \tau=500+11 \cdot 50=1050 \text{ καὶ } K=\frac{12(500+1050)}{2}=9300.$$

$$299/426. \text{ Ἐχομεν } \tau=4,9+11 \cdot 9,8=112,70 \text{ καὶ } K=\frac{12(4,9+112,7)}{2}=705,6.$$

$$300/427. \text{ Ἐχομεν } \tau=4,90+(v-1) \cdot 9,8 \text{ καὶ } 490=\frac{v(4,90+\tau)}{2}. \text{ Θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ } \tau \text{ τῆς πρώτης εἰς τὴν δευτέραν λαμβάνομεν}$$

$$490=\frac{v(4,90+4,90+9,8v-9,8)}{2} \quad \eta \quad 490=4,9v^2 \quad \eta \quad v^2=100 \text{ καὶ } v=10.$$

$$301/429. \text{ Ἐχομεν } \tau=7+11\lambda \text{ καὶ } 414=\frac{12(7+\tau)}{2}, \text{ ἥτοι}$$

$$414=\frac{12(7+7+11\lambda)}{2} \text{ καὶ } \lambda=5 \text{ ἄρα } \tau=62.$$

$$302/430. \text{ Ἐχομεν } 49=5+(v-1) \cdot \lambda \text{ καὶ } 621=\frac{v(5+49)}{2}. \text{ Ἐκ τῆς δευτέρας εὐρίσκομεν } v=23 \text{ καὶ ἐκ τῆς πρώτης κατόπιν } \lambda=2.$$

303/435. Οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι $a-\lambda, a, a+\lambda'$ ἔχομεν λοιπὸν $a-\lambda+ +a+a+\lambda=9$ ἢ $a=3$ καὶ $(a-\lambda)^2+a^2+(a+\lambda)^2=45$ ἢ $\lambda=\pm 3$ ὥστε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 0, 3, 6 ἢ 6, 3, 0.

	Δεδομένα	Ζητούμενα	Δεδομένα	Ζητούμενα
304/437. 1)	v, τ, κ	a, λ	6)	a, v, κ λ, τ
2)	λ, τ, κ	a, v	7)	a, v, τ λ, κ
3)	λ, v, κ	a, τ	8)	a, λ, κ v, τ
4)	λ, v, τ	a, κ	9)	a, λ, τ v, κ
5)	a, τ, κ	λ, v	10)	a, λ, v τ, κ

$$305/438. \text{ Ἐνταῦθα ἄγνωστος εἶναι ὁ } \lambda \text{ καὶ } a=1, \beta=33 \text{ καὶ } v=7 \text{ ὥστε εἶναι } \lambda=\frac{33-1}{7+1}=4 \text{ καὶ ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι ἡ } 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33.$$

306/439. Ἐστω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \tau$, ἥς ὁ λόγος λ . Ἐάν μεταξὺ α καὶ β , β καὶ γ , γ καὶ δ κτλ. παρεμβάλω τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ν ἀριθμητικῶν μέσων, ἐκάστη τῶν προόδων ἀπὸ α ἕως β , β ἕως γ , γ ἕως δ κτλ. θὰ ἔχη λόγον ἀντιστοίχως $\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}, \frac{\gamma-\beta}{\nu+1}, \frac{\delta-\gamma}{\nu+1}$ κτλ. ἀλλ' ἐπειδὴ $\beta-\alpha=\gamma-\beta=$
 $=\delta-\gamma=\lambda$, ἔπεται εὐκόλως, ὅτι αἱ πρόοδοι αὗται ἀποτελοῦσι μίαν πρόοδον
 συνεχῆ μὲ λόγον $= \frac{\lambda}{\nu+1}$.

307/440. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἀσκήσιν εἶναι $\lambda = \frac{1}{4}$. ὥστε ἔχο-
 μεν $1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{2}{4}, 1\frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{2}{4}, 2\frac{3}{4}, 3, 3\frac{1}{4}, 3\frac{2}{4}, 3\frac{3}{4}, 4$.

Πρόοδοι γεωμετρικαί.

Σελὶς 172.

$$308/442. 1) \lambda = \frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = 3$$

$$2) \lambda = \frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{9} : \frac{1}{3} = \frac{1}{27} : \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$3) \lambda = \frac{-3}{1} = \frac{9}{-3} = \frac{-27}{9} = -3$$

$$4) \lambda = -4 : 6 = 2\frac{2}{3} : -4 = -1\frac{7}{9} : 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$5) \lambda = \frac{\chi^4}{\chi^5} = \frac{\chi^2}{\chi^4} = \frac{\chi^2}{\chi^3} = \frac{1}{\chi}$$

$$6) \lambda = \frac{\chi^4\psi}{\chi^5} = \frac{\chi^2\psi^2}{\chi^4\psi} = \frac{\chi^2\psi^2}{\chi^3\psi^3} = \frac{\psi}{\chi}$$

$$309/443. 1) \tau = 1.3^6 = 729$$

$$2) \tau = 1.4^5 = 1024$$

$$3) \tau = \frac{1}{16} \cdot 2^8 = 16$$

$$4) \tau = 900 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{100}{27}$$

$$5) \tau = 54 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2}{81} \quad 6) \tau = \frac{1}{\chi} \cdot \left(\frac{1}{\chi^2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{\chi^{2\nu-1}}$$

310/444. Εἶναι $768 = \alpha \cdot 4^4$ καὶ $\alpha = \frac{768}{256} = 3$. Ὡστε ἡ ζητούμενη πρόοδος
 εἶναι ἡ $3, 12, 48, \dots$

311/346. Ἐνταῦθα εἶναι $\alpha = 128$ (διότι τὴν πρώτην φορὰν θὰ μείνουν 128
 ὀκτάδες) $\lambda = \frac{1}{2}$, $\nu = 8$ καὶ ζητεῖται τὸ τ εἶναι δὲ $\tau = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{128}{128} = 1$.

Σελίς 173

312/447. α') Έχομεν $\lambda = \sqrt[10]{\frac{10}{1}} = \sqrt[10]{10}$, ὥστε ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι

$$1, \sqrt[10]{10}, \sqrt[10]{10^2}, \sqrt[10]{10^3}, \sqrt[10]{10^4}, \sqrt[10]{10^5}, \sqrt[10]{10^6}, \sqrt[10]{10^7}, \sqrt[10]{10^8}, \sqrt[10]{10^9}, 10.$$

β') Έχομεν $\lambda = \sqrt[6]{54 \cdot \frac{27}{32}} = \sqrt[6]{64} = \pm 2$, ἄρα ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι

$$\frac{27}{32}, \pm \frac{27}{16}, \frac{27}{8}, \pm \frac{27}{4}, \frac{27}{2}, \pm 27, 54.$$

γ') Ὅμοίως ἔχομεν $\lambda = \sqrt[6]{21 \cdot \frac{448}{243}} = \sqrt[6]{\frac{729}{64}} = \pm \frac{3}{2}$, ὥστε ἡ ζητούμενη πρόοδος εἶναι

$$\frac{448}{243}, \pm \frac{224}{81}, \frac{112}{27}, \pm \frac{56}{9}, \frac{28}{3}, \pm 14, 21.$$

313/449. Ἐστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ἥς ὁ λόγος εἶναι λ . Ἐὰν παρεμβάλω μεταξὺ α καὶ β , β καὶ γ , γ καὶ δ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γεωμετρικῶν μέσων, οἱ λόγοι τῶν προόδων ἀπὸ α ἕως β , β ἕως γ , γ ἕως δ κλπ. θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \sqrt[\nu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}, \sqrt[\nu+1]{\frac{\delta}{\gamma}} \text{ κλπ.}$$

Ἄλλ' οἱ λόγοι οὗτοι εἶναι ἴσοι, ἐπεὶδὴ $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \lambda$, ὥστε εὐκόλως συνάγεται, ὅτι αἱ ἀνωτέρω πρόοδοι ἀποτελοῦν συνεχῇ γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\sqrt[\nu+1]{\lambda}$.

314/450. Ὁ λόγος εἶναι $\sqrt[4]{4} = \pm 2$, ὥστε ἔχομεν

$$1, \pm 2, 4, \pm 8, 16, \pm 32, 64, \pm 128, 256.$$

Σελίς 175

$$315/451. 1) K = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^6 - 1}{2} = 364$$

$$2) K = \frac{2(5^7 - 1)}{5 - 1} = \frac{5^7 - 1}{2} = 39062$$

$$3) K = \frac{120 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^6 - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{120 \left(\frac{1}{64} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{120 \left(-\frac{63}{64} \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{945}{4}$$

$$4) \quad K = \frac{3 \cdot \left[\left(\frac{1}{4} \right)^5 - 1 \right]}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3 \left(\frac{1}{1024} - 1 \right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{3 \left(-\frac{1023}{1024} \right)}{-\frac{3}{4}} = \frac{1023}{256}$$

$$5) \quad K = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^7 - 1 \right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2187}{128} - 1 \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{2059.2}{3.128} = \frac{2059}{192}$$

316/452. Ἀφοῦ ὁ πρῶτος εἶναι ὁ 36, ὁ δεύτερος εἶναι ὁ 36λ καὶ ὁ τρίτος εἶναι ὁ 36λ². ἔχομεν ἄρα 36λ² - 36 = 28 ἢ 36λ² = 64, ἥτοι $\lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι λοιπὸν οἱ 36, 48, 64.

317/454. Οἱ ζητούμενοι τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α, αλ, αλ². Ὡστε ἔχομεν α + αλ + αλ² = 91 καὶ αλ² - α = 80· ἐξ αὐτῶν δὲ εὐρίσκομεν $\frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2-1} = \frac{91}{80}$ ἢ 11λ² - 80λ - 171 = 0. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὐρίσκομεν τὴν παραδεκτὴν λύσιν λ = 9. Κατόπιν τούτου εὐρίσκομεν $\alpha = \frac{80}{\lambda^2-1} = \frac{80}{80} = 1$. ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ εἰς τοὺς ὁποίους ἐμοιράσθη ὁ 91 εἶναι οἱ 1, 9, 81.

318/455. Ἐχομεν α + αλ = 10 καὶ αλ + αλ² = 15 ἥτοι α(1+λ) = 10 καὶ αλ(1+λ) = 15· ὥστε $\frac{\alpha\lambda(1+\lambda)}{\alpha(1+\lambda)} = \frac{15}{10}$, ἥτοι $\lambda = \frac{3}{2}$ καὶ $\alpha = \frac{10}{1+\lambda} = \frac{10}{1+\frac{3}{2}} = 4$.

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 4, 6, 9.

319/457. Ἐὰν ὁ δεύτερος παρασταθῇ διὰ τοῦ α, ὁ πρῶτος εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{\lambda}$ καὶ ὁ τρίτος ὁ αλ· ἔχομεν ἐπομένως $\frac{\alpha}{\lambda} + \alpha + \alpha\lambda = 21$ καὶ $\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \alpha \cdot \alpha\lambda = 64$ ἥτοι, α³ = 64 καὶ $\alpha = \sqrt[3]{64} = 4$. ὅθεν εἶναι $\frac{4}{\lambda} + 4 + 4\lambda = 21$ ἢ 4λ² - 17λ + 4 = 0. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὐρίσκομεν λ = 4 ἢ $\lambda = \frac{1}{4}$. ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\frac{4}{4}$, 4, 4.4, ἥτοι 1, 4, 16 ἢ οἱ 16, 4, 1.

320/458. Τὸ πηλίκον τοῦ δευτέρου διὰ τοῦ πρώτου ἢ τοῦ τρίτου διὰ τοῦ δευτέρου ἀποτελεῖ τὸν λόγον τῆς προόδου· ὥστε δεόν νὰ ἔχομεν $\frac{1+\chi}{11-\chi} = \frac{35-\chi}{1+\chi}$ ἢ (1+χ)² = (11-χ)(35-χ)· εὐρίσκομεν δὲ χ = 8· καὶ πράγματι οἱ δοθέντες γίνονται οἱ 3, 9, 27.

Σελίς 178.

$$321/460. \text{ Έχουμεν } 1) K = \frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16. \quad 2) K = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = 18$$

$$3) K = \frac{16}{1-\frac{1}{8}} = \frac{128}{7} \quad 4) K = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$5) K = \frac{5}{10} + \frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{8}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{53}{90}.$$

$$6) K = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}.$$

$$322/461. \text{ Είναι } \alpha=12 \text{ και } \frac{\alpha}{1-\lambda}=18, \text{ ήτοι } \frac{12}{1-\lambda}=18. \text{ Ώστε } \lambda=\frac{1}{3}.$$

$$323/463. \text{ Έχουμεν } \alpha-\alpha\lambda=3, \text{ ήτοι } \alpha(1-\lambda)=3 \text{ και } \frac{\alpha}{1-\lambda}=27. \text{ Λύοντες} \\ \text{ἀμφοτέρως πρὸς } \alpha \text{ ἔχομεν } \alpha=\frac{3}{1-\lambda} \text{ και } \alpha=27(1-\lambda), \text{ ὥστε } \lambda=\frac{2}{3} \text{ και } \alpha=9.$$

$$324/465. \text{ Έστω } \alpha \text{ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου· τὸ ἔμβαδὸν δὲ αὐτοῦ εἶναι } \alpha^2, \text{ ἐνῶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ δευτέρου τετραγώνου εἶναι } \frac{\alpha^2}{2}, \text{ τοῦ τρίτου εἶναι } \frac{\alpha^2}{4} \\ \text{κ.ο.κ. Έχουμεν λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἔμβαδὰ } \alpha^2, \frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{4}, \frac{\alpha^2}{8} \dots, \text{ εἶναι} \\ \text{ἄρα τὸ ζητούμενον ἄθροισμα } \frac{\alpha^2}{1-\frac{1}{2}} = 2\alpha^2.$$

$$325/466. \text{ Έστω } \alpha \text{ ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· γνωρίζομεν δέ, ὅτι} \\ \text{τὸ ἔμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι } \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}. \text{ τοῦ δευτέρου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι} \\ \frac{\alpha}{2}, \text{ ὥστε τὸ ἔμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι } \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}. \text{ τοῦ τρίτου ἡ πλευρὰ εἶναι} \\ \frac{\alpha}{4} \text{ και τὸ ἔμβαδὸν } \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64} \text{ κ. ο. κ. Έχουμεν λοιπὸν νὰ προσθέσωμεν τὰ ἔμ-} \\ \text{βαδὰ } \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}, \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}, \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64} \dots \text{ Εἶναι ἐπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα}$$

$$\frac{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$$

326/468. Τὸ ἄθροισμα τῶν προόδων, εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ἡ δοθεῖσα, εἶναι

$$\alpha) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$\beta) \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma) \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\delta) \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\epsilon) \dots \dots \dots = \frac{1}{16} \text{ κ.ο.κ.}$$

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

327/469. Τὰ τρία μερίδια εἶναι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{19} = \frac{10}{19}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{19} = \frac{5}{19}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{19} = \frac{4}{19}$$

Λογάριθμοι πρὸς βάσιν 10.

Σελίς 183

$$328/470. 1) \log(3\alpha\beta\gamma) = \log 3 + \log \alpha + \log \beta + \log \gamma$$

$$2) \log(\alpha\beta^2) = \log \alpha + 2\log \beta$$

$$3) \log(\alpha\beta^2\gamma^3) = \log \alpha + 2\log \beta + 3\log \gamma$$

$$4) \log \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^4} = \log \alpha + 2\log \beta - 4\log \gamma$$

$$5) \log \sqrt{\alpha\beta} = \frac{\log\alpha + \log\beta}{2}$$

$$6) \log(\alpha\sqrt{\beta^3}) = \log\alpha + \frac{3\log\beta}{4}$$

$$7) \log \frac{5\sqrt{\alpha^3}}{\beta\gamma} = \log 5 + \frac{3\log\alpha}{2} - \log\beta - \log\gamma$$

$$8) \log \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \log\alpha - \frac{\log\beta}{2}$$

$$9) \log \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma^3}} = -\left(\log\alpha + \frac{2\log\gamma}{3}\right)$$

$$329/471. \quad 1) \log 2 + \log 5 = \log(2.5) \quad 2) \log 5 + \log 3 + \log 11 = \log(5.3.11)$$

$$3) \log 12 - \log 4 = \log \frac{12}{4} \quad 4) \log 5 + \log 7 - \log 3 = \log \frac{5.7}{3}$$

$$5) \log 24 - 3\log 2 = \log \frac{24}{2^3} \quad 6) 4\log x - \frac{1}{2} \log \psi = \log \frac{x^4}{\sqrt{\psi}}$$

$$7) \frac{1}{3} \log x + \log 5 - \frac{2}{3} \log \psi = \log \frac{5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{\psi^2}}$$

$$8) 2\log\alpha - \frac{1}{2} \log\beta - 3\log\gamma = \log \frac{\alpha^2}{\gamma^3 \cdot \sqrt{\beta}}$$

$$330/472. \quad 1) \log 210 = \log(2.3.5.7) \quad 2) \log(30.36) = \log(24.45)$$

$$3) \log \left(\frac{25}{8} \cdot \frac{2}{35} : \frac{5}{14} \right) = \log \left(\frac{25 \cdot 2 \cdot 14}{8 \cdot 35 \cdot 5} \right) = \log \left(\frac{1}{2} \right) = \\ = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

$$4) \log \left(16^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} \right) = \log(2^2 \cdot 2 \cdot 2) = \log(2^4) = 4\log 2$$

Σελίς 186.

$$331/473. \quad -1,47893 = \overline{2}52107, \quad -0,37687 = \overline{1}62313 \quad -4,68090 = \overline{5}31910$$

$$332/474. \quad 1) \log 514 = 2, \dots \quad 2) \log 1527 = 3, \dots$$

$$3) \log 15,27 = 1, \dots \quad 4) \log 0,544 = \overline{1}, \dots$$

$$5) \log 0,0035 = \overline{3}, \dots \quad 6) \log 0,053 = \overline{2}, \dots$$

$$7) \log 30007 = 4, \dots \quad 8) \log 0,00009 = \overline{5}, \dots$$

$$333/475. \quad \log 70 = 1,84510 \quad \log 700 = 2,84510$$

$$\log 0,07 = \overline{2},84510 \quad \log 0,007 = \overline{3},84510$$

$$334/477. \quad \log(5 \cdot 10^3) = \log 5 + 3\log 10 = 3,69897 \quad \log(5 \cdot 10^4) = 4,69897$$

$$\log \frac{5}{10^2} = \log 5 - 2\log 10 = \overline{2},69897 \quad \log \frac{5}{10^5} = \overline{5},69897$$

$$335/478. 1) \log 375 - \log 3,75 = \log \frac{375}{3,75} = \log 100 = 2$$

$$2) \log 15,62 - \log 1,562 = \log \frac{15,62}{1,562} = \log 10 = 1$$

$$3) \log 0,45 - \log 4,5 = \log \frac{0,45}{4,5} = \log \frac{1}{10} = -1$$

Σελίς 192.

$$336/479. \log 52 = 1,71600$$

$$\log 407 = 2,60959$$

$$\log 31,50 = 1,49831$$

$$\log 4,568 = 0,65973$$

$$\log 47245 = 4,67436$$

$$\log 483,743 = 2,68462$$

$$\log 0,46575 = \bar{1},66819$$

$$\log 0,0684555 = \bar{2},83541$$

$$337/480. 1) \log x = 3,76671$$

$$x = 5844$$

$$2) \log x = 2,93034$$

$$x = 851,8$$

$$3) \log x = 5,03941$$

$$x = 109500$$

$$4) \log x = \bar{1},97007$$

$$x = 0,9334$$

$$5) \log x = 3,94722$$

$$x = 8855,6$$

$$6) \log x = 4,47239$$

$$x = 29675$$

$$7) \log x = \bar{2},95416$$

$$x = 0,0899825$$

$$8) \log x = \bar{3},02050$$

$$x = 0,00104833$$

Σελίς 196

$$338/481. 1) \log x = \log 47,3 + \log 0,845$$

$$\log x = 1,60172$$

$$x = 39,969$$

$$2) \log x = \log 9,814 + \log 0,0625$$

$$\log x = \bar{1},78773$$

$$x = 0,613385$$

$$3) \log x = \log 898,9 + \log 0,05377$$

$$\log x = 1,68425$$

$$x = 48,333$$

$$4) \log x = \log 50,4 - \log 89,43$$

$$\log x = \bar{1},75035$$

$$x = 0,563575$$

$$5) \log x = \log 0,8948 - \log 3,155$$

$$\log x = \bar{1},45273$$

$$x = 0,283613$$

$$6) \log x = \log 0,7469 - \log 0,6743$$

$$\log x = 0,04441$$

$$x = 1,10767$$

$$7) \log x = 5 \log 12$$

$$\log x = 5,39590$$

$$x = 248829,41$$

$$8) \log x = 7 \log 0,25$$

$$\log x = \bar{5},78558$$

$$x = 0,0000610357$$

$$9) \log x = 30 \log 1,04$$

$$\log x = 0,51090$$

$$x = 3,24264$$

$$10) \log x = 4 \log 0,034$$

$$\log x = \bar{6},12592$$

$$x = 0,0000013363$$

$$11) \log x = 10(\log 17 - \log 11)$$

$$\log x = 1,89060$$

$$x = 77,73066$$

$$12) \log x = 7(\log 31 - \log 35)$$

$$\log x = \bar{1},63103$$

$$x = 0,42759$$

13) $\lambda\sigma\gamma\chi = 6(\lambda\sigma\gamma 109 - \lambda\sigma\gamma 83)$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 0,71010$$

$$\chi = 5,12978$$

14) $\lambda\sigma\gamma\chi = 9(\lambda\sigma\gamma 81 - \lambda\sigma\gamma 67)$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 0,74178$$

$$\chi = 5,518$$

15) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 719$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 1,42837$$

$$\chi = 26,814375$$

16) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{3}\lambda\sigma\gamma 14$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 0,38204$$

$$\chi = 2,41011$$

17) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,374$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = \bar{1},78644$$

$$\chi = 0,611556$$

18) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{4}\lambda\sigma\gamma 0,00478$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = \bar{1},41986$$

$$\chi = 0,262941$$

19) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{2}{3}\lambda\sigma\gamma 19$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 0,85250$$

$$\chi = 7,12033$$

20) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{3}{5}\lambda\sigma\gamma 28$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 0,86830$$

$$\chi = 7,38417$$

21) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{2}(\lambda\sigma\gamma 3 - \lambda\sigma\gamma 42,5)$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = \bar{1},42437$$

$$\chi = 0,265688$$

22) $\lambda\sigma\gamma\chi = \frac{1}{2}(\lambda\sigma\gamma 1 - \lambda\sigma\gamma 2,144)$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = \bar{1},83439$$

$$\chi = 0,68295$$

339/484. 1) $\lambda\sigma\gamma\chi = \lambda\sigma\gamma 153 + \lambda\sigma\gamma 0,5424 - \lambda\sigma\gamma 3,172$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 1,89901 - 0,50133 = 1,39768$$

$$\chi = 24,985$$

2) $\lambda\sigma\gamma\chi = \lambda\sigma\gamma 69 + 2\lambda\sigma\gamma 32,5 - \lambda\sigma\gamma 0,31$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 4,86261 - \bar{1},49136 = 5,37125$$

$$\chi = 235100$$

3) $\lambda\sigma\gamma\chi = \lambda\sigma\gamma 20 + \frac{1}{4}\lambda\sigma\gamma 15 - \lambda\sigma\gamma 0,04$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = 1,59532 - \bar{2},60206 = 2,99326$$

$$\chi = 984,6$$

4) $\lambda\sigma\gamma\chi = \lambda\sigma\gamma 9,7 + 4\lambda\sigma\gamma 0,06 - \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,09$

$$\lambda\sigma\gamma\chi = \bar{4},09937 - \bar{1},47712 = \bar{4},62225$$

$$\chi = 0,000419036$$

5) $\lambda\sigma\gamma\chi = \lambda\sigma\gamma 23 - \lambda\sigma\gamma 29 + \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,25 - \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,15 =$

$$= \lambda\sigma\gamma 23 + \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,25 - (\lambda\sigma\gamma 29 + \frac{1}{2}\lambda\sigma\gamma 0,15)$$

$$\lambda\log\chi = \log 23 - \log 29 + \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 3 =$$

$$= \log 23 + \frac{1}{2} \log 5 - (\log 29 + \frac{1}{2} \log 3)$$

$$\log \chi = 1,71121 - 1,70096 = 0,01025$$

$$\chi = 1,02388$$

$$6) \quad \log \chi = \frac{1}{3} \log 28 + \frac{3}{4} \log 5 - \log 142$$

$$\log \chi = 1,00662 - 2,15229 = -2,85433$$

$$\chi = 0,0715033$$

$$340/485. \text{ Έχουμεν } 1) \chi = \sqrt{30,45^2 - 17,48^2} = \sqrt{(30,45+17,48)(30,45-17,48)} = \\ = \sqrt{47,93 \cdot 12,97}. \text{ Ὡστε}$$

$$\log \chi = \frac{1}{2} (\log 47,93 + \log 12,97)$$

$$\log \chi = 1,39678 \text{ καὶ } \chi = 24,9333.$$

$$341/487. \text{ Έχουμεν } \chi = \frac{4}{3} \cdot 3,141,3,37^3$$

$$\log \chi = \log 4 + \log 3,141 + 3 \log 3,37 - \log 3$$

$$\eta \quad \log \chi = \log 4 + \log 1,047 + 3 \log 3,37$$

$$\log \chi = 2,20490 \text{ καὶ } \chi = 160,289$$

$$342/489. \text{ Έχουμεν } \tau = 3,5^{20} \text{ καὶ } \log \tau = \log 3 + 20 \log 5.$$

$$343/490. \text{ Έχουμεν } \tau = \left(\frac{2}{3}\right)^{24} \text{ καὶ } \log \tau = 24(\log 2 - \log 3).$$

$$344/491. \text{ Εἶναι } \tau = \frac{18,20+22,50+36,24}{2} = 38,47 \text{ καὶ } \tau - \alpha = 20,27,$$

$$\tau - \beta = 15,97, \tau - \gamma = 2,23 \text{ ὥστε εἶναι } E = \sqrt{38,47 \cdot 20,27 \cdot 15,97 \cdot 2,23}$$

$$\text{καὶ } \log E = \frac{\log 38,47 + \log 20,27 + \log 15,97 + \log 2,23}{2}$$

Ἀνατοκισμός.

Σελίς 201

$$345/492. \text{ Έχουμεν } 1) K = \alpha(1+\nu)^{\nu} = 25000(1,04)^{20} \text{ καὶ ἐπειδὴ } 1,04^{20} = \\ = 2,191123 \text{ (Dupuis σελ. 134) εἶναι } K = 25000 \cdot 2,191123 = 54778.$$

Ὁ ὑπολογισμὸς διὰ τῶν λογαριθμῶν μᾶς δίδει

$$\log K = \log 25000 + 20 \log 1,04, \text{ ἥτοι } \log K = 4,73854 \text{ καὶ } K = 54770.$$

$$2) K = 10000(1,045)^{10} = 10000 \cdot 1,552969 = 15529,69.$$

$$3) K = 7300(1,065)^{15} \text{ καὶ } \log K = \log 7300 + 15 \log 1,065 = 4,27357. \text{ Ὡστε}$$

$$K = 18774,58$$

4) $K = 100(1,042)^{18}$ και $\log K = \log 100 + 18 \log 1,042 = 2,32166$. "Ωστε $K = 209,729$.

346/493. Είναι $K = 12500(1,04)^{21} = 12500 \cdot 2,278768 = 28484,6$.

347/495. Είναι $K = 20000(1,007)^{25}$ και $\log K = \log 20000 + 25 \log 1,007 = 4,37678$. "Ωστε $K = 23812$.

348/496. Είναι $K = 50000(1,03)^{20} = 50000 \cdot 1,806111 = 90305,55$.

349/498. 1) "Εχομεν $6500 = a(1,06)^{10}$ ή $a = \frac{6500}{(1,06)^{10}} = \frac{6500}{1,790848}$ και $\log a = \log 6500 - \log 1,790848 = 3,81261 - 0,25306 = 3,55955$ και $a = 3573,25$.

2) "Εχομεν $\log a = \log 25000 - 6 \log (1,045) = 4,28322$ και $a = 19196,5$.

3) "Εχομεν $\log a = \log 37675 - 15 \log (1,04) = 4,32061$ και $a = 20922,4$.

350/499. "Εχομεν $50000 = 24850(1+\tau)^{12}$ και $\log(1+\tau) = \frac{\log 50000 - \log 24850}{12} = \frac{4,69897 - 4,39533}{12} = \frac{0,30364}{12} = 0,02530$ και $1+\tau = 1,06$ και $\tau = 0,06$, ήτοι πρὸς 6%.

351/501. Δηλαδή κεφάλαιον a νά γίνῃ $2a$ εἶναι ἄρα $2a = a(1+\tau)^{15}$ και $2 = (1+\tau)^{15}$ και $\frac{\log 2}{15} = \log(1+\tau) = \frac{0,30103}{15} = 0,02007$ και $1+\tau = 1,0473$ και $\tau = 0,0473$ και $E = 4,73\%$.

352/502. "Εχομεν $9850 = 7000(1,05)^v$ ή $(1,05)^v = \frac{9850}{7000}$ και $v \log 1,05 = \log 9850 - \log 7000$ και $v = \frac{\log 9850 - \log 7000}{\log 1,05} = \frac{3,99344 - 3,84510}{0,02119} = \frac{14834}{2119} = 7$.

353/503. "Εχομεν $v = \frac{\log 60000 - \log 35000}{\log 1,065} = \frac{4,77815 - 4,54407}{0,02735} = \frac{23408}{2735} = 8 \epsilon \tau \eta$ και τι πλέον. "Ηδη δὲ ἔχομεν $35000(1,065)^8 \left(1 + \frac{\eta \tau}{365}\right) = 60000$ και $\log \left(1 + \frac{\eta \tau}{365}\right) = \log 60000 - \log 35000 - 8 \log 1,065 = 4,77815 - 4,54407 - 0,21880 = 0,01528$ και $1 + \frac{\eta \tau}{365} = 1,03581$ και $\frac{\eta \tau}{365} = 0,03581$ και $\eta = \frac{0,03581 \cdot 365}{0,065} = 201$ ἡμέραι.

354/504. Γενικῶς κεφάλαιόν τι ἀνατοκίζόμενον γίνεται μ φορὰς μεγάλυτερον εἰς χρόνον $v = \frac{\log \mu}{\log(1+\tau)}$ διότι εἶναι $\mu = a(1+\tau)^v$ ή $\mu = (1+\tau)^v$.

355/506. Θὰ εὗρωμεν πρῶτον εἰς τί ἀνέρχεται τὸ δοθὲν κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τῶν 6 ἔτων· εὗρίσκομεν δὲ $K = 15000 \cdot 1,05^6$ και $\log K = \log 15000 + 6 \log 1,05 = 4,17609 + 6 \cdot 0,02119 = 4,30323$. "Ωστε εἶναι $K = 20101$ τὸ κεφάλαιον ὁμῶς

αὐτὸ θὰ τοκισθῇ μὲ ἀπλοῦν τόκον ἐπὶ 9 μῆνας πρὸς 5%· εἶναι λοιπὸν

$$T = \frac{20101.5.9}{1200} = \frac{20101.3}{80} = 753,80 \text{ περίπου} \cdot \text{ὥστε θὰ ἀνέλθῃ εἰς } 20101 + 753,80 =$$

$$= 20854,80 \text{ δραχ.}$$

356/511. Ἔχομεν $K = 2000000(1,005)^{100}$ καὶ $\log K = 2000000 + 100 \cdot \log 1,005 =$
 $= 6,30103 + 0,21700 = 6,51803$ · ἄρα εἶναι $K = 3296300$.

357/513. Ἔχομεν $1,5a = a(1,025)^v$, ἥτοι $1,5 = (1,025)^v$ καὶ

$$v = \frac{\log 1,5}{\log 1,025} = \frac{0,17609}{0,01072} = 16 \text{ ἔτη καὶ } 5 \text{ περίπου μῆνες.}$$

Προβλήματα ἴσων καταθέσεων—Χρεωλυσία.

Σελίς 209

358/514. Ἔχομεν $\Sigma = \frac{2000.1,05(1,05^{18} - 1)}{0,05}$ καὶ ἐπειδὴ $1,05^{18} = 2,406619$

(Dupuis σελ. 134) ἔχομεν $\Sigma = \frac{2000.1,05.1,406619}{0,05}$ καὶ $\log \Sigma = \log 2000 +$
 $+ \log 1,05 + \log 1,406619 - \log 0,05 = 3,30103 + 0,02119 + 0,14818 - \bar{2},69897 =$
 $= 4,77143$ καὶ $\Sigma = 49080$ περίπου.

359/515. Ἔχομεν $150000 = \frac{a.1,04(1,04^{30} - 1)}{0,04} = \frac{a.1,04.1,191123}{0,04}$ ἢ

$a = \frac{150000.0,04}{1,04.1,191123} = \frac{6000}{1,04.1,191123}$ καὶ $\log a = \log 6000 - (\log 1,04 + \log 1,191123) =$
 $= 3,77815 - (0,01703 + 0,07596) = 3,68516$, ἥτοι εἶναι $a = 4843,5$.

360/516. Ἔχομεν $50000 = \frac{1000.1,04(1,04^v - 1)}{0,04}$ ἢ

$1,04^v = \frac{50000.0,04 + 1000.1,04}{1000.1,04} = \frac{304}{104} = \frac{38}{13}$ καὶ $v = \frac{\log 38 - \log 13}{\log 1,04} =$
 $= \frac{0,46584}{0,01703} = 27 \text{ ἔτη καὶ τι πλεόν.}$

361/518. Ἔχομεν $\chi = \frac{3000000.1,05^{30}.0,05}{1,05^{30} - 1} = \frac{3000000.4,321942.0,05}{3,321942}$ καὶ

$\log \chi = \log 3000000 + \log 4,321942 + \log 0,05 - \log 3,321942 = 6,47712 + 0,63567 +$
 $+ 2,69897 - 0,52139 = 5,29037$ · ἄρα εἶναι $\chi = 195150$.

362/520. Εἶναι $a = \frac{5000(1,04^{30} - 1)}{0,04.1,04^{30}} = \frac{5000.1,191123}{0,04.2,191123} = \frac{125000.1,191123}{2,191123}$

καὶ $\log a = \log 125000 + \log 1,191123 - \log 2,191123 = 5,09691 + 0,07596 - 0,34066 =$
 $= 4,83221$ καὶ $a = 67953$.

363/521. Ἔχομεν $1,06^v = \frac{40000}{40000 - 250000.0,06} = \frac{40000}{15000} = \frac{8}{3}$ καὶ

$$v = \frac{\log 8 - \log 3}{\log 1,06} = \frac{0,90309 - 0,47712}{0,02531} = \frac{42597}{2531} = 16 \text{ ἔτι καὶ τι πλεόν.}$$

264/523. Τὸ δανεισθὲν ποσὸν θ' ἀνατοκίζεται ἐπὶ 15 ἔτη ἔχομεν λοιπὸν

$$3000000(1,05)^{15} = \frac{\chi(1,05^{12} - 1)}{0,05}, \text{ ἥτοι } \chi = \frac{3000000 \cdot 1,05^{15} \cdot 0,05}{1,05^{12} - 1} = \frac{150000 \cdot 1,05^{15}}{1,05^{12} - 1} =$$

$$= \frac{150000 \cdot 1,05^{15}}{0,795856} \text{ καὶ } \log \chi = \log 150000 + 15 \log 1,05 - \log 0,795856 = 5,17609 +$$

$$+ 0,31785 - 1,90083 = 5,59311 \text{ καὶ } \chi = 391842.$$

Διάφοροι ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Σελὶς 210

365/524. Π. χ. ἐπὶ ἐπιφανείας ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου καὶ εἰς ὕψος 0,76 μ. ἡ ἀτμοσφαιρική πίεσις εἶναι $a = 13,676 \cdot 10000 = 10336000$ γραμμ. = 10336 χιλιόγραμμα.

366/525. Εἶναι $\mu' = 1(1 + 0,0000122 \cdot 90) = 1,001098$ μέτρα.

367/541. 1) Ἐπειδὴ $\beta \neq 0$ λύομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ψ καὶ εὐρίσκομεν $\psi = \frac{\gamma - \alpha\chi}{\beta}$. Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ θέσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\chi = \gamma\beta' - \gamma'\beta$.

Ὡστε τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\psi = \frac{\gamma - \alpha\chi}{\beta}$$

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\chi = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁμως ὑπετέθη $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$ τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὴν μόνην ἐξίσωσιν $\psi = \frac{\gamma - \alpha\chi}{\beta}$, ἡ ὁποία ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ὡστε τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι $\alpha \neq 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, τότε λύομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὡς πρὸς χ καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸ τὸ δοθὲν

$$\chi = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$$

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma,$$

τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς τὴν μόνην ἐξίσωσιν $\chi = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ ἔχουσαν ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

2) Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\gamma\beta' - \gamma'\beta \neq 0$, τότε εἰς τὸ σύστημα (1) ἡ δευτέρα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία καταντᾷ $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$, εἶναι ἀδύνατος, ἐπομένως καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

3) Ἐὰν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος (1) λαμβάνομεν $\chi = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $\psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

Ὡστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχει μία λύσις καὶ μόνον μία.

4) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $0 = \gamma$. $0 = \gamma'$, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἢ $\gamma \neq 0$ ἢ $\gamma' \neq 0$, ἔπεται ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

5) Ἐχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην περίπτωσιν συνάγομεν ὅτι, ἐὰν $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' \neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀπροσδιόριστον.

368/542. Ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ ἔπεται ὅτι $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta}$ καὶ ἐκ τῆς $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ ἔπεται ὅτι $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma}$. Ὡστε εἶναι $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}$. Ὡστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος ἔχουν τοὺς συντελεστές των ἀναλόγους.

369/543. Ἐστω χ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ ἀεροπλάνου καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἀνέμου. Τότε τὸ ἀεροπλάνον διήνυσε τὰ 690 χιλιόμετρα μὲ ταχύτητα $\chi - \psi$. Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $690 = 3(\chi - \psi)$, ἥτοι $\chi - \psi = 230$. Ἀλλὰ τὰ ἄλλα 470 χιλιόμετρα τὰ διέτρεξε μὲ ταχύτητα $\chi + 40 - 2\psi$ ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $470 = (\chi + 40 - 2\psi)2$, ἥτοι $\chi - 2\psi = 195$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο ἄνω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν $\chi = 265$, $\psi = 35$.

370/545. Ἐστω ὅτι θὰ χρειασθοῦν χ χιλιόγραμμα φελλοῦ· τότε τὸ ὅλον σῶμα θὰ ζυγίξῃ $\chi + 10$ χιλιόγραμμα καὶ θὰ χάνει ἐντὸς τοῦ ὕδατος $\chi + 10 - 2 = \chi + 8$ χιλιόγραμμα. Ὡστε ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου σώματος εἶναι $\chi + 8$ κυβικαὶ παλάμαι· ἐπομένως εἶναι $\frac{\chi}{0,24} + \frac{10}{11,35} = \chi + 8$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν $\chi = 2,348$ περίπου.

371/546. Ἐστω ὅτι τὸ ἐν μέταλλον ζυγίζει χ χιλιόγραμμα καὶ τὸ ἄλλο ζυγίζει ψ χιλιόγραμμα. Ὡστε εἶναι κατὰ πρῶτον $\chi + \psi = \alpha$. Ἐξ ἄλλου, ἀφοῦ τὰ β χιλιόγραμμα τοῦ πρώτου μετάλλου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ν χιλιόγραμμα, τὰ χ χιλιόγραμμα αὐτοῦ χάνουν $\frac{\nu\chi}{\beta}$ χιλιόγραμμα. Ὁμοίως τὰ ψ χιλιόγραμμα τοῦ ἄλλου μετάλλου χάνουν ἐντὸς τοῦ ὕδατος $\frac{\lambda\psi}{\gamma}$ χιλιόγραμμα. Ἐχομεν λοι-

πὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\nu\chi}{\beta} + \frac{\lambda\psi}{\gamma} = \mu$. Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν δύο ἄνω ἐξι-

σώσεων εὐρίσκομεν $\chi = \frac{\beta(\alpha\lambda - \gamma\mu)}{\beta\lambda - \gamma\nu}$, $\psi = \frac{\gamma(\beta\mu - \alpha\nu)}{\beta\gamma - \gamma\nu}$ ($\beta\lambda - \gamma\nu \neq 0$).

372/547. Ἐὰν E εἶναι ἡ δύναμις εἰς ἀμπέρ, B τὸ ἡλεκτρικὸν ρεῦμα εἰς

βόλτ και ω ἡ ἀντίστασις εἰς ὃν ἔχομεν $E = \frac{B}{\omega}$, ἥτοι $\omega = \frac{B}{E} = \frac{10}{2} = 5$.

373/549. Ἐστῶσαν ω καὶ ω' αἱ ἀντιστάσεις τῶν δύο κλάδων, ρ ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ σύρματος, μ τὸ μῆκος τοῦ σύρματος εἰς ἑκατοστόμετρα καὶ σ ἡ τομὴ τοῦ σύρματος εἰς τετραγωνικά ἑκατοστόμετρα. Ἀλλὰ κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς φυσικῆς ἔχομεν

$$\omega = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10^2}{3,14 \cdot 10^{-2}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2}{3,14 \cdot 10^{-2}} = \frac{1,6}{3,14} \cdot 10^{-2} = \frac{1,6}{314} = \frac{1}{200} \quad (\text{περίπου})$$

$$\omega' = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2 \cdot 10^2}{\frac{3,14 \cdot 10^{-2}}{4}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 4}{3,14 \cdot 10^{-2}} = \frac{3,2}{3,14} \cdot 10^{-2} \cdot 4 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \quad (\text{περίπου}).$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν E εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ κυρίου ρεύματος καὶ e , e' αἱ ἐντάσεις εἰς τὰς διακλαδώσεις, ἔχομεν $E = e + e'$, $\frac{e}{e'} = \frac{\omega'}{\omega}$ ἢ $\frac{e}{e + e'} = \frac{\omega}{\omega + \omega'}$.

Ὡστε εἶναι $\frac{e}{2} = \frac{1}{200} : \frac{9}{200}$ ἢ $e = \frac{1}{9}$ ἀμπέρ καὶ $e' = 1 \frac{7}{9}$ ἀμπέρ.

374/550. Ἐστῶ α τὸ ἀστρικὸν ἔτος, τ ὁ ἀστρικός μῆν καὶ σ ὁ συνοδικός. Ἐὰν δὲ ω^0 εἶναι τὸ τόξον τὸ ὁποῖον γράφει ὁ ἥλιος κατὰ ἓνα συνοδικὸν μῆνα, τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει ἡ σελήνη κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον εἶναι $360^0 + \omega$, ὥστε ὁ χρόνος καθ' ὃν γράφει ὁ ἥλιος τὸ τόξον τοῦτο εἶναι $\frac{\omega \alpha}{360}$, ὁ δὲ χρόνος καθ' ὃν ἡ σελήνη γράφει τὸ τόξον $360^0 + \alpha$, ἥτοι ὁ συνοδικὸς μῆν, εἶναι $\tau + \frac{\omega \tau}{360}$. Ὡστε ἔχομεν $\sigma = \frac{\alpha \omega}{360} = \tau + \frac{\omega \tau}{360}$ ἥτοι $\sigma = \tau + \frac{\tau \sigma}{\alpha}$ καὶ $\sigma = \frac{\alpha \tau}{\alpha - \tau}$.

$$375/551. 1) \alpha = \frac{\beta \varepsilon}{\beta - \varepsilon} \quad (\beta - \varepsilon \neq 0) \quad 2) \beta = \frac{\alpha \varepsilon}{\alpha - \varepsilon} \quad (\alpha - \varepsilon \neq 0). \quad 3) \varepsilon = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta}.$$

376/553. Ἐχομεν $(x + x^{-1})^2 = \alpha^2$, ἥτοι $x^2 + 2x \cdot x^{-1} + x^{-2} = \alpha^2$ ἢ $x^2 + 2 + x^{-2} = \alpha^2$ ἢ $x^2 + x^{-2} = \alpha^2 - 2$.

$$377/554. \text{ Ἐχομεν } \left(\sqrt{64} + \frac{1}{\sqrt{64}} \right) : \left(\sqrt[3]{64} - \frac{1}{\sqrt[3]{64}} \right) = \left(8 + \frac{1}{8} \right) : \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{65}{30}.$$

378/561. Ἐὰν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχομεν $\frac{6+x}{8+x} = \frac{10+x}{18+x}$, ἥτοι $(6+x)(18+x) = (8+x)(10+x)$. Ὡστε $x=2$.

379/562. Ἐχομεν $\frac{8-x}{10-x} = \frac{13-x}{17-x}$, ἥτοι $(8-x)(17-x) = (10-x)(13-x)$.

Ὡστε $x=3$.

380/563. 1) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς, ὅτι τὸ διανυόμενον διάστημα ὑπὸ σώματος πίπτοντος ἐλευθέρως ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ χρόνου, ἥτοι εἶναι $v = \frac{1}{2} g t^2$. Ἐπομένως $t = \sqrt{\frac{2v}{g}}$ ἢ $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 87}{9,81}} = 4,21$ δευτερόλεπτα (ἢ ἀντίσταςις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

2) Δεδομένου, ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἡχου ἐν τῷ ἀέρι εἶναι 340 μέτρα εἰς 1 δευτερόλεπτον, ὁ χρόνος μετὰ τὸν ὁποῖον θὰ ἀκούσωμεν τὸν κρότον εἶναι $\frac{87}{340}$ τοῦ δευτερολέπτου.

381/564. Ἐστω χ μέτρα τὸ βάθος τοῦ φρέατος. Ὁ χρόνος 4 δευτερόλεπτα εἶναι ἄθροισμα τοῦ χρόνου, ὁ ὁποῖος παρῆλθεν, ἵνα φθάσῃ τὸ σῶμα εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος, ὅστις εἶναι $\sqrt{\frac{2\chi}{g}}$, καὶ τοῦ χρόνου ὁ ὁποῖος παρῆλθεν ἵνα ὁ παραχθεὶς κρότος φθάσῃ εἰς τὸ στόμιον τοῦ φρέατος καὶ ὅστις εἶναι $\frac{\chi}{340}$. Ὡστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $4 = \sqrt{\frac{2\chi}{9,8}} + \frac{\chi}{340}$ ἥτοι $\sqrt{\frac{2\chi}{9,8}} = 4 - \frac{\chi}{340}$ καὶ $\frac{2\chi}{9,8} = \left(4 - \frac{\chi}{340}\right)^2$ ἢ $4,9\chi^2 - 128928\chi + 9063040 = 0$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν $\chi = 76,35$ περίπου.

382/565. Ἐὰν τ δευτερόλεπτα εἶναι ὁ χρόνος μετὰ τὸν ὁποῖον θὰ φθάσῃ τὸ μέγιστον ὕψος τῶν 70 μέτρων καὶ a εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του, ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς φυσικῆς $70 = \frac{a^2}{2 \cdot 9,8}$, ἥτοι $a = 37$ μ. περίπου. Ὁ χρόνος τ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\tau = \frac{a}{g} = \frac{37}{9,8} = 3,77$. Εἶναι δὲ ὁ χρόνος οὗτος ὁ αὐτὸς μὲ τὸν χρόνον τῆς πτώσεως ἐκ τοῦ ὕψους τῶν 70 μέτρων εἰς τὸ ἔδαφος.

383/566. Ἡ σφαῖρα βυθίζεται εἰς βάθος 13 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Ἐὰν δὲ χ ἑκατοστά εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτίς, ἡ ἐξωτερικὴ θὰ εἶναι $\chi + 1$ ἑκατοστά καὶ ὁ ὄγκος τῆς ὕλης, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποτελεῖται, εἶναι $\frac{4}{3} \pi (\chi + 1)^3 - \frac{4}{3} \pi \chi^3$, ἥτοι $\frac{4}{3} \pi (3\chi^2 + 3\chi + 1)$. Ὡστε τὸ βάρος της εἶναι $\frac{4}{3} \pi (3\chi^2 + 3\chi + 1) \cdot 2,75$.

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς σφαίρας ἐκτοπιζόμενον ὕδωρ ἔχει σχῆμα σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν καὶ τὸ ὁποῖον τμήμα ἔχει ὕψος 13 ἑκατοστά. Ἡ ἀπόστασις λοιπὸν τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι $\chi + 1 - 13 = \chi - 12$ ἑκατοστά (ἢ $13 - \chi - 1 = 12 - \chi$) ἐπομένως ἡ ἀκτίς

τῆς βάσεως εἶναι $\sqrt{(x+1)^2 - (x-12)^2} = \sqrt{26x-143}$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος εἶναι $\frac{1}{6} \pi \cdot 13^3 + \frac{1}{2} \pi \cdot 13 \cdot (26x-143)$, οὗτος δὲ εἶναι καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Ὡστε εἶναι $\frac{4}{3} \pi (3x^2 + 3x + 1) 2,75 = \frac{1}{6} \pi \cdot 13^3 + \frac{1}{2} \pi \cdot 13 \cdot (26x-143)$, ἥτοι $11x^2 - 158x + 567 = 0$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὐρίσκομεν $x = \frac{158 \pm 4}{22}$.

384/567. Ἐστω μ τὸ μῆκος τοῦ βραχυτέρου ἐκκρεμοῦς καὶ $\mu' = \mu + 0,45$ τὸ μῆκος τοῦ μακροτέρου. Ἐὰν δὲ εἶναι καὶ x ἡ διάρκεια τῶν 5 αἰωρήσεων τοῦ πρώτου, ἡ ὁποία εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν διάρκειαν τῶν 4 αἰωρήσεων τοῦ δευτέρου, θὰ ἔχωμεν ὡς διάρκειαν τῆς μιᾶς αἰωρήσεως τοῦ πρώτου $\frac{x}{5}$ καὶ τῆς μιᾶς αἰωρήσεως τοῦ ἄλλου $\frac{x}{4}$. Θὰ εἶναι δὲ κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἐκκρεμοῦς

$$\frac{x}{5} = \pi \sqrt{\frac{\mu}{g}}$$

$$\frac{x}{4} = \pi \sqrt{\frac{\mu'}{g}}$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν διὰ διαιρέσεως $\frac{4}{5} \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} \cdot \frac{\mu}{\mu'} = \frac{16}{25}$ ἢ $25\mu = 16(\mu + 0,45)$, ἥτοι $\mu = 0,8$ καὶ $\mu' = 0,8 + 0,45 = 1,25$.

385/568. Ἐστω ω ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ ω' ἡ τοῦ εἰδώλου.

α') Ἐὰν τὸ εἶδωλον πραγματικόν, τότε εἶναι $\omega' - \omega = 64$. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{f}$, ἔχομεν $\omega' = \frac{\omega f}{\omega - f}$, ἥτοι $\frac{\omega f}{\omega - f} - \omega = 64$ ἢ

$$\omega f - \omega^2 + \omega f = 64\omega - 64f$$

$$2\omega f - \omega^2 = 64\omega - 64f$$

$$\omega^2 - 16\omega - 2560 = 0, \text{ ἐξ ἧς εὐρίσκομεν}$$

$$\omega = 59,2 \quad \omega' = 64 + 59,2$$

β') Ἐὰν τὸ εἶδωλον φανταστικόν, τότε εἶναι $\omega' + \omega = 64$. Ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν, ὅτι $\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{f}$, ἔχομεν $\omega' = \frac{\omega f}{f - \omega}$, ἥτοι $\frac{\omega f}{f - \omega} + \omega = 64$ ἢ

$$\omega f + \omega f - \omega^2 = 64f - 64\omega$$

$$\omega^2 - 144\omega + 2560 = 0, \text{ ἐξ ἧς εὐρίσκομεν}$$

$$\omega = 72 - 51,2 = 20,8 \quad \omega' = 64 - 20,8 = 43,2.$$

386/569. Εἶναι $a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^n = a^{1+2+3+4+\dots+n} = a^{\frac{(1+n)n}{2}}$.

$$387/570. \text{Εἶναι } a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \dots = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots} = a^{1 - \frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

388/571. Ἐὰν α εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι α-λ καὶ τὸ τῶν μονάδων εἶναι α+λ. Ἐχομεν δὲ τότε τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{100(a-\lambda)+10a+(a+\lambda)}{(a-\lambda)+(a+(a+\lambda))}=26 \text{ καὶ}$$

$$100(a-\lambda)+10a+(a+\lambda)+198=100(a+\lambda)+10a+(a-\lambda),$$

ἥτοι τὰς α-3λ=0 καὶ 198λ=198, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν α=3 καὶ λ=1. Ὡστε ὁ ζητούμενος τριψήφιος εἶναι ὁ 234.

389/572. Ὁ 10ος ὄρος εἶναι ὁ 1+9λ καὶ ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὄρων εἶναι $\frac{(1+1+9\lambda)10}{2} = (2+9\lambda)5$.

Ὁμοίως ὁ 5ος ὄρος εἶναι ὁ 1+4λ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 5 πρώτων ὄρων εἶναι $\frac{(1+1+4\lambda)5}{2} = (1+2\lambda)5$. Ἐπομένως εἶναι $(2+9\lambda)5 = 4(1+2\lambda)5$ καὶ λ=2.

390/573. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὄρων εἶναι $\frac{\alpha(\lambda^3-1)}{\lambda-1}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων εἶναι $\frac{\alpha}{1-\lambda}$. Ἐπομένως εἶναι $\frac{\alpha(\lambda^3-1)}{\lambda-1} : \frac{\alpha}{1-\lambda} = -\frac{7}{8}$, ἥτοι $\frac{\alpha(\lambda^3-1)}{\lambda-1} \cdot \frac{\lambda-1}{\alpha} = -\frac{7}{8}$, ἥτοι $\lambda^3-1 = -\frac{7}{8}$ καὶ $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$391/574. \text{Εἶναι } \log 0,06 + \log (0,6)^2 - \log 4 - \log 54 = \log \frac{(0,06)(0,6)^2}{4 \cdot 54} = \log \frac{0,06 \cdot 0,36}{4 \cdot 54} = \log 0,0001 = \log 10^{-4} = -4.$$

392/576. Εἶναι $240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 10$. Ὡστε $\log 240 = 3\log 2 + \log 3 + \log 10 = 3\alpha + \beta + 1$ καὶ $\log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - \alpha$.

393/577. Οἱ λογάριθμοι τῶν ὄρων εἶναι: $\log \alpha$, $\log \alpha + \log \lambda$, $\log \alpha + 2\log \lambda$ κ.ο.κ. Ἀποτελοῦν δὲ οὗτοι, ὥς βλέπομεν, ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\log \lambda$.

394/580. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τ ἡ ἡμιπερίμετρος αὐτοῦ καὶ χ, ψ, φ αἱ ἀκτίνες τῶν τριῶν περιφερειῶν, θά ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις $\chi + \psi = \alpha$, $\chi + \varphi = \beta$, $\psi + \varphi = \gamma$, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὴν $\chi + \psi + \varphi = \tau$. Ἦδη εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι $\chi = \tau - \gamma$, $\psi = \tau - \beta$, $\varphi = \tau - \alpha$.

$$395/581. \text{Ἐκ τῆς δεδομένης σχέσεως εὐρίσκομεν } \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

396/582. 1) ἔχομεν $v-2 = \frac{v}{2}(v-3)$, ἥτοι $v^2-5v+4=0$. Ὡστε $v=4$.

2) ἔχομεν $v+12 = \frac{v}{2}(v-3)$, ἥτοι $v^2-5v-24=0$. Ὡστε $v=8$.

397/583. Ἐάν $(AE)=\chi$ καὶ $(AZ)=\psi$, ἔχομεν $\chi\psi=12$ καὶ $(7-\chi)(7-\psi)=12$, ἥτοι $\chi+\psi=7$. Ὡστε οἱ χ, ψ εἶναι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\omega^2-7\omega+12=0$, ἐξ ἧς εὐρίσκομεν $\chi=3$, $\psi=4$ ἢ $\chi=4$, $\psi=3$.

398/584. Ἐάν χ εἶναι ἡ μία τῶν ἰσῶν πλευρῶν καὶ ψ ἡ ἄνισος πλευρά, ἔχομεν $2\chi+\psi=32$ καὶ $\chi^2 - \frac{\psi^2}{4} = 16$. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὐρίσκομεν $\chi=8,5$ καὶ $\psi=15$.

399/585. Ἐάν χ καὶ ψ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, ἔχομεν $\chi\psi=\mu^2$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha}{\beta}$. Λύοντες τὸ σύστημα εὐρίσκομεν $\chi = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \mu$ καὶ $\psi = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \mu$.

400/586. Ἐάν χ καὶ ψ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, ἔχομεν $\chi+\psi=\lambda$ καὶ $\chi^2+\psi^2=4\rho^2$. Ὑποϋντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\lambda^2$, ἥτοι $2\chi\psi=\lambda^2-4\rho^2$ ἢ $\chi\psi = \frac{\lambda^2-4\rho^2}{2}$. Ὡστε οἱ χ καὶ ψ εἶναι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\chi^2 - \lambda\chi + \frac{\lambda^2-4\rho^2}{2} = 0$,

ἥτις λυομένη δίδει $\chi = \frac{\lambda \pm \sqrt{8\rho^2 - \lambda^2}}{2}$. Τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν ἐάν $8\rho^2 > \lambda^2$. Ἐάν $8\rho^2 = \lambda^2$, τότε αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.

ΤΕΛΟΣ



0020637621

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

