ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῆς Ἀλγέβρας. Σημειώσεις ἐπὶ σημαντικῶν ζητημάτων. Κανόνας, τύπους, πίνακας καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς Ἀλγέβρας.

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1950

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σας
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις: Ν. ΒΑΦΕΙΑΔΑΚΗ καὶ Σία ΣΑΜΟΥ 24 — ΑΘΗΝΑΙ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἀριθμῶν

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2 3, ... ν, προῆλθον ἐκ τῆς συγκρίσεως πλήθους πραγμάτων, θεωρουμένων ὁμοίων, πρὸς ἓν τούτων. Ἐπ αὐτῶν δὲ ἐκτελοῦνται αἱ τέσσαρες πράξεις βάσει θεμελιωδῶν νόμων. Ἀλλὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς, αἱ δύο ἀντίστροφοι πράξεις ἤτοι ἡ διαίρεσις (ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ ἡ ἀφαίρεσις (ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως) δὲν εἶναι πάντοτε δυναταί. Ἡ διαίρεσις κατέστη πάντοτε δυνατὴ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ***κλασματικῶν ἀριθμῶν***, οἵτινες μετὰ τῶν ἀκεραίων ἀποτελοῦν τὸ σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ δὲ ἀφαίρεσις ἔγεινε πάντοτε δυνατὴ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ***ἀρνητικῶν ἀριθμῶν***, οἵτινες μετὰ τῶν θετικῶν, ἀποτελοῦν τὸ σύστημα τῶν ***σχετικῶν ἀριθμῶν***.

Ἀλλὰ καὶ τὸ σύστημα τοῦτο παρουσιάζεται ἐλλιπὲς διότι δὲν δίδει τὴν μυοστὴν ῥίζαν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, οἱ δὲ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς αὐτὸ δὲν ἔχουν ῥίζας ἀρτίας τάξεως. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἀδυναμία ἤρθη διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ***ἀσυμμέτρων*** ἀριθμῶν, ἡ δὲ δευτέρα διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ***φανταστικῶν*** ἀριθμῶν. Οὕτω δὲ ἔχομεν τὴν κατηγορίαν τῶν ***ῥητῶν καὶ ἀρρήτων*** (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν ὡς καὶ τὴν κατηγορίαν τῶν ***πραγματικῶν*** καὶ ***φανταστικῶν*** ἀριθμῶν.

Οἱ πραγματικοὶ καὶ οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ παράγουν τοὺς ***μιγάδας*** ἀριθμούς, $\alpha+\beta i=(\alpha,\beta)$. Οὕτω θέτοντες $\beta=0$, ἔχομεν τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\alpha=0$, ἔχομεν τὸν φανταστικὸν ἀριθμὸν βi. Ὅθεν ὁ μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι ἡ γενικωτέρα ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν διαδοχικὴν αὐτὴν ἀνάπτυξιν τῶν ἀριθμητικῶν συστημάτων καὶ τὴν κατάληξιν εἰς τὸ γενικὸν σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων, οἱ ὁποῖοι εὑρέθησαν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων, διετηρήθησαν ἀναλλοίωτοι. Οὕτω δὲ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν μὴ ὡρισμένων ἀριθμῶν, ὡς ἐπὶ γραμμάτων ἢ μεταβλητῶν ἀριθμῶν, γίνεται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν, καὶ ἡ ἄλγεβρα διεμορφώθη καὶ ἀνεπτύχθη.

Εἰς τὴν ἄλγεβραν τὰ ζητήματα λύονται κατὰ τρόπον γενικὸν διὰ τῆς παραστάσεως τῶν ἀριθμῶν διὰ γραμμάτων. Διότι ἐν τῇ γενικῇ λύσει ζητήματος τινὸς δὲν ἐνδιαφέρει ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι ἢ κλάσματα, θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κλπ. Ὅ,τι ἐνδιαφέρει εἶναι κυρίως αἱ πράξεις αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἵνα εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις μόνος ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ λύσῃ τὸ ζήτημα. Διὰ τῆς χρήσεως γραμμάτων ἀντὶ ὡρισμένων ἀριθμῶν λύομεν τὸ πρόβλημα ταχύτερον καὶ γενικώτερον καὶ λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τῆς φύσεως αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ὁρισμός τῆς ἀλγέβρας

Ἀσκήσεις.—*1. α΄)* Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τότε θὰ εἶναι $\chi = 10000$ δρχ. $\cdot \dfrac{120}{10} = 120000$ δρχ.

β΄) Ἂν α ὀκάδες ἐμπορεύματος τιμῶνται β δραχμάς, πόσον τιμῶνται γ ὀκάδες αὐτοῦ;

Τιμῶνται $\chi = \beta$ δραχ. $\cdot \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$ δραχμάς.

2. Ἀντίστροφος τοῦ 5 εἶναι ὁ $\dfrac{1}{5}$, τοῦ $\dfrac{3}{4}$ ὁ $\dfrac{4}{3}$ καὶ τοῦ 13,5 ὁ $\dfrac{10}{135} = \dfrac{2}{37}$. Ὁμοίως ἀντίστροφος τοῦ α εἶναι ὁ $\dfrac{1}{\alpha}$, τοῦ $\dfrac{1}{\beta}$ εἶναι ὁ β, τοῦ $\dfrac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ὁ $\dfrac{\delta}{\gamma}$ καὶ τοῦ $\dfrac{\tau}{10}$ εἶναι ὁ $\dfrac{10}{\tau}$.

3. Ἔστω οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ α, β, $\dfrac{\gamma}{\delta}$. Τὰ διπλάσια αὐτῶν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α.2, β.2, $\dfrac{\gamma}{\delta}\cdot 2$. Τὰ τριπλάσια εἶναι α.3, β.3, $\dfrac{\gamma}{\delta}\cdot 3$ καὶ τὰ νιπλάσια εἶναι αν, βν, $\dfrac{\gamma}{\delta}.\nu$.

4. Παριστάνονται μὲ $\dfrac{5}{8}.\alpha$, $\dfrac{\mu}{\nu}\alpha$.

5. Εἶναι $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

6. Εἶναι $K = \dfrac{T.100}{X.E}$. Ἐὰν δὲ εἶναι π. χ. X = 3 ἔτη, E = 8 % καὶ T = 48000 δραχμαί, εὑρίσκομεν $K = \dfrac{48000.100}{3.8} = 200000$ δραχ.

7. Θερμότης καὶ ψῦχος. Θερμοκρασία 5° (ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς) —5° (κάτωθεν τοῦ μηδενός).

Ἐνεργητικὸν ἐπιχειρήσεως καὶ παθητικὸν αὐτῆς 50000000 δρχ., —50000000 δρχ.

Κέρδος καὶ ζημία 800 λίραι, —800 λίραι κλπ.

Εἰσπράξεις καὶ πληρωμαί, 400000 δρχ., —400000 δρχ.

Πρὸ μεσημβρίας, μετὰ μεσημβρίαν, —8 ὧραι, 8 ὧραι (μεσημβρία 0).

Ἄνοδος καὶ κάθοδος ἀεροπλάνου, 800 μέτρα, -800 μέτρα.

8. Εἶναι οἱ -5, $-12, 3, 8, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{9}, -\frac{2}{7}, \frac{4}{9}, -6{,}15\ -7{,}45$ $-0{,}12$, $34{,}85'$.

9. ***Ὁμόσημοι***, 5, $3{,}8 \cdot \frac{7}{8}$ ἢ οἱ $-0{,}9 \cdot -7\frac{1}{8}, -15$.

Μὴ ὁμόσημοι, 9 -4, -12.

Ἀντίθετοι, $+6$ καὶ -6. Ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι αἱ $|+6| = 6$ καὶ $|-6| = 6$.

10. Εἶναι $|3| = 3$, $|-13| = 13$, $|-15| = 15$, $|28| = 28$, $|-3{,}5| = 3{,}5$, $\left|13\frac{5}{8}\right| = 13\frac{5}{8}$, $\left|-\frac{7}{9}\right| = \frac{7}{9}$ κλπ.

11. Εἶναι $|\alpha| = \alpha$, $|-\alpha| = \alpha$, $|-\beta| = \beta$ καὶ $|+\beta| = \beta$, ἐὰν οἱ α, β εἶναι θετικοί, καὶ $|\alpha| = -\alpha$, $|-\alpha| = -\alpha$, $|-\beta| = -\beta$ καὶ $|+\beta| = -\beta$ ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί.

12. Εἶναι οἱ $-\frac{4}{8} = -0{,}5 \left(= -\frac{1}{2}\right)$, $\frac{2}{10} = \frac{3}{15} \left(= \frac{1}{5}\right)$, $\frac{4}{2} = \frac{20}{10}$ $(= 2)$, $\frac{18}{3} = \frac{12}{2}$ $(= 6)$, $-\frac{15}{5} = -\frac{24}{8}$ $(= -3)$.

13. Εἶναι $6 = \frac{24}{4}$, $-2{,}5 = -2\frac{1}{2}$, $-6{,}15 = -6\frac{3}{20}$, $-3\frac{1}{4} = -3{,}25$.

14. Θὰ παρασταθοῦν μὲ τοὺς ἀντιθέτους ἀριθμοὺς -1, -2, -3, $-4, \ldots$ ἀντιστοίχως.

15. Θὰ διαιρέσωμεν τὸ θετικὸν τμῆμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον παρίσταται μὲ τὴν μονάδα 1, εἰς δύο ἴσα μέρη, ἢ εἰς 3, ἢ εἰς 5, ἢ εἰς 100 μέρη. Τότε τὸ 1 μέρος, τὰ 2 μέρη, ἢ τὰ 2 καὶ 3 ἢ τὰ 45 ἴσα μέρη, θὰ παρίστανται ἀντιστοίχως μὲ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ἐπὶ τοῦ τμήματος ΟΑ', τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ διὰ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος -1, θὰ λάβωμεν τὰ μεγέθη τὰ ὁποῖα θὰ παρίστανται μὲ τοὺς ἀριθμοὺς $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{5}$ καὶ $-0{,}45$.

16. Ὁ -5 σχηματίζεται ἐκ τῆς -1, ὅταν ἐπαναληφθῇ αὕτη 5 φοράς. Σχηματίζεται δὲ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῆς, ὁπότε θὰ γίνῃ -1 καὶ ταύτην τὴν ἐπαναλάβομεν 5 φοράς. Ὁμοίως σχηματίζονται καὶ οἱ ἄλλοι δοθέντες ἀριθμοί.

17. Θὰ λάβωμεν τὸ τέταρτον τῆς -1, τὸ ὁποῖον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς, ἢ θὰ λάβωμεν τὴν $+1$ κατόπιν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ ἀκολούθως τὸ τέταρτον αὐτῆς θὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν 3 φοράς. Ὁμοίως τὸ ὄγδοον τῆς -1 ἢ τὸ ἔνατον αὐτῆς θὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν 5 φορὰς ἢ 4 φορὰς κλπ.

18. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ δέκατον τῆς $+1$ τέσσαρας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν 0,4. Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὴν ἀντίθετον -1 καὶ τὸ δέκατον αὐτῆς τὸ ἐπαναλάβωμεν τέσσαρας φορὰς θὰ λάβωμεν τὸν ἀριθμὸν $-0{,}4$. Ὁμοίως δὲ θὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀριθμῶν. Ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1,25 παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος σχηματίζεται ἐὰν λάβωμεν τὴν μονάδα $+1$ ἅπαξ καὶ κατόπιν ἐπαναλάβωμεν τὸ ἑκατοστὸν αὐτῆς 25 φοράς.

Πρόσθεσις

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.—*19.* α΄) $5+3=8$ β΄) $+7+1{,}4=$ $=+8{,}4=8{,}4$.

γ΄) $+4+6+8=18$, δ΄) $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$ ε΄) $+7\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}=10\frac{8}{15}$.

στ΄) $+3+4\frac{1}{2}+8\frac{1}{4}=15\frac{3}{4}$ ζ΄) $-4-6=-10$ η΄) $-10-8\frac{1}{2}=$ $=-18\frac{1}{2}$ θ΄) $-4-3\frac{1}{2}-7\frac{1}{3}=-14\frac{5}{6}$ ι΄) $-\frac{2}{3}-\frac{5}{8}=-\frac{31}{24}=$ $=-1\frac{7}{24}$ ια΄) $-4{,}5-5{,}3=-9{,}8$.

ιβ΄) $-4-5+8-3\frac{1}{2}=-9+8-3\frac{1}{2}=-1-3\frac{1}{2}=-4\frac{1}{2}$.

20. α΄) $-5+3=-2$ β΄) $+5-8-7+3=-3-7+3=-10+3=-7$.

γ΄) $-3\frac{10}{20}+5\frac{5}{20}-2\frac{4}{20}=1\frac{15}{20}-2\frac{4}{20}=-\frac{9}{20}$.

δ΄) $=-8+6-7-8=-2-7-8=-17$ ε΄) $=2\frac{1}{2}-3+4-7=$ $=-\frac{1}{2}+4-7=3\frac{1}{2}-7=-3\frac{1}{2}$.

στ΄) $=-4-6+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9=-10+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9=$ $=-2\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9=-20$.

ζ΄) $=3{,}9-8{,}5+6\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-4{,}6+6{,}5-0{,}75=1{,}9-0{,}75=1{,}15$.

η΄) $=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0{,}25+3{,}7=-\frac{5}{12}+\frac{1}{5}-0{,}25+3{,}7=$ $=-\frac{13}{60}-0{,}25+3{,}7=-\frac{7}{15}+3{,}7=\frac{97}{30}$.

21. Ἔχομεν $+234000$, -216400, $+215700$, -112000 καὶ $+234000-216400+215700-112000=17600+215700-112000=$ $+233300-112000=+121300$. Ὥστε τελικῶς ἐκέρδισε 121300 δραχμάς.

22. Ἔχομεν $+128000, -312400$ καὶ $+128000-312400=-184400$. Ὥστε ἐμειώθη τὸ κεφάλαιόν του κατὰ 184400 δραχμάς.

23. Ἔχομεν $+17{,}6°, -19{,}1°, +3{,}1°$ καὶ $+17{,}6°-19{,}1°+3{,}1°=$ $=-1{,}5°+3{,}1°=+1{,}6°$. Ὥστε ἡ θερμοκρασία ηὐξήθη τελικῶς κατὰ $1{,}6°$.

24. Ἔχομεν $+250000, -174500, -136000, -19450, +34000, +14500$ καὶ $+29000$. Οὕτω γράφοντες αὐτοὺς κατὰ σειράν, λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ ἀθροίσματα $+250000-174500=+75000$ καὶ $-136000=-60500$ καὶ $-19450=-79950$ καὶ $+34000=-45950$ καὶ $+14500=-31450$ καὶ $+29000=-2450$ δραχ., αἵτινες εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Τοῦτο δὲ φανερώνει ὅτι διὰ νὰ πληρώσῃ τὰ ὀφειλόμενα, ἐκτὸς τῶν χρημάτων ποῦ ἔχει καὶ ἐκείνων ποὺ θὰ εἰσπράξῃ, θὰ τοῦ χρειασθοῦν ἀκόμη 2450 δραχμαί.

25. Εἶναι $(+180000)+(-120000)+(+74000)+(-14800)+(+39400)=$ $=+60000+74000-14800+39400=134000-14800+39400=+119200+$ $+39400=+158600$ δραχ. ὅπερ εἶναι καὶ τὸ ποσὸν ποὺ τοῦ ἔμεινε.

26. Εἶναι $+58{,}4-19{,}3+23{,}7-95{,}8=+39{,}1+23{,}7-95{,}8=+62{,}8-$ $-95{,}8=-33$ μ. Ὥστε τὸ κινητὸν εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Ο εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ αὐτοῦ 33 μ.

Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Ἀσκήσεις.—*27.* α′) $=-47+11=-36$ β′) $+74\frac{2}{5}-64\frac{1}{2}=$ $=9\frac{9}{10}$ γ′) $-28\frac{11}{20}+1\frac{2}{8}=-27\frac{3}{10}$ δ′) $=-41{,}9+17{,}18=-24{,}72$, ε′) $-33{,}15+0{,}25=-32{,}90$.

Ἀφαίρεσις

Ἀσκήσεις.—*28.* α′) $8-(-4)=8+(+4)=12$ β′) $-18-(+19)=$ $=-18+(-19)=-37$.

γ′) $=-14+(+7)=-7$ δ′) $=0{,}9+(+9{,}13)=10{,}03$ ε′) $2{,}25+(+1{,}65)=$ $=3{,}90$.

στ′) $2\frac{5}{6}+\left(+3\frac{1}{3}\right)=6\frac{1}{6}$ ζ′) $=9\frac{1}{7}+\left(+7\frac{1}{3}\right)=16\frac{10}{21}$.

η′) $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=(\alpha+\gamma)+(-\beta-\gamma)=\alpha+\gamma-\beta-\gamma=\alpha-\beta$, διότι $\gamma-\gamma=0$.

29. α′) $=120+19+18=157$ β′) $=-17+4+8=-5$ γ′) $=-5\frac{1}{2}-$ $-6\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=-11\frac{11}{20}$, δ') $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)+(-\beta+\gamma)=\alpha-\gamma-\beta+\gamma=\alpha-\beta$.

30. α') $=-5$ β') $=-2$ γ') $=-0{,}7$ δ') $=-215$ ε') $=-8{,}40$.

στ') $\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma=(\alpha-\beta)-\gamma$.

31. Ἔστω α δρχ. τὸ ἐνεργητικόν του καὶ β δρχ. τὸ παθητικόν του. Τότε ἡ περιουσία του εἶναι (α—β) δρχ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἐνεργητικόν του γίνῃ $\alpha+1564{,}20$, τὸ δὲ παθητικόν του γίνῃ $\beta-1564{,}20$, ἡ περιουσία του θὰ εἶναι $\alpha+1564{,}20-(\beta-1564{,}10)=\alpha+1564{,}20+(-\beta+1564{,}20)=$ $=\alpha+1564{,}20-\beta+1564{,}20=(\alpha-\beta)+3128{,}40$. Ὥστε ἡ περιουσία του ηὐξήθη κατὰ 3128,20 δρχ.

32. Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω ἔχομεν $\alpha-15484{,}3-(\beta+162384{,}70)=$ $=\alpha-15484{,}3+(-\beta-162384{,}70)=\alpha-\beta-15484{,}3-162384{,}70=(\alpha-\beta)-$ -177869. Ὥστε ἡ περιουσία του ἠλαττώθη κατὰ 177869 δρχ.

33. Θὰ βαδίσῃ πρὸς τὰ ἀριστερὰ $238+4846=5084$ μ.

34. Πρέπει νὰ κερδίσῃ 8958,65 δρχ.+15016,3 δρχ.=23974,95 δρχ.

35. α') $=-13$. Διὰ τὴν γεωμ. ἀπεικόνισιν θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 23, ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ ἐξαγόμενα $+2, -1, 4, -3, -9, -2, -13$.

β') $=-17{,}3$. γ') $=(-7)+(-2)=-9$ ἢ $-4+5-8+3-2-7+4=$ $=-21+12=-9$ δ') $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+5-8=-4+5-8=-7$.

ε') $3-5-6-7\frac{1}{2}-3-2+6-4+\frac{1}{2}=-5-7-2-4=-18$, ἢ

$$\left(-18\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-18\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-18.$$

στ') $-3\frac{1}{2}+4+6+7-3+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+3=13\frac{7}{8}$.

36. $+(-4-8-1)-(-3+5-7+15)$.

37. $7-7+5+\left(-6\frac{1}{2}-12-\frac{3}{4}\right)$ ἢ $7-7+5-\left(6\frac{1}{2}+12+\frac{3}{4}\right)$.

Πολλαπλασιασμὸς

Ἀσκήσεις.—*38.* α') $=-40$ β') $=-72$, γ') $=-105$ δ') $=49$ ε') $=-54{,}60$ στ') $=823{,}837$.

ζ') Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς § 27. Διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικήν, δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις των. Τὸ δὲ σημεῖον τοῦ γινομένου δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων, ἀλλ' ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων αὐτοῦ. Ὥστε εἶναι $\alpha.\beta.\gamma.\delta=\gamma.\alpha.\beta.\delta$.

Σημείωσις. Τὸν κανόνα *τῶν σημείων* πλὴν ἐπὶ πλὴν = σύν, ὁ

Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τὸν διετύπωσεν ὡς ἑξῆς: «λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν».

39. α′) $= 29{,}64$ β′) $= -33{,}11$ γ′) $= -189$ δ′) $= 96{,}9$.

40. α′) $= -504$ β′) $1041{,}6$ γ′) $= -1120$
δ′) $= -0{,}18\,(9{,}74-5{,}85) = 0{,}18 \cdot 3{,}89 = 0{,}7002$.

41. α′) $= -24{,}6+96=71{,}4$ β′) $-16{,}32-(-1075{,}2)-20=$
$= -16{,}32+1075{,}2-20=1030{,}88$.

42. α′) $= \frac{3}{32}\cdot(-1) = -\frac{3}{32}$ β′) $=(-32)\cdot\left(-\frac{17}{30}\right)-0{,}008-0{,}054 =$

$= 18{,}133-0{,}062 = 18{,}071$.

43. $= 0{,}53.(-1{,}2).(-7)+19.(-0{,}45) = 4{,}452-8{,}55 = -4{,}098$.

44. α′) $=40$ β′) $= -5\frac{3}{4}$ γ′) $= 11{,}7$ δ′) $= 0$ ε′) $= 0$.

στ′) καὶ ζ′) Αἱ ἰδιότητες αὗται προκύπτουν ἐκ τῆς ἰδιότητος ζ′ τῆς ἀσκήσεως 38 καὶ ἀποδεικνύονται ὡς εἰς τὴν ἀριθμητικήν. Οὕτως εἶναι $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon. = \alpha.\varepsilon.\beta.\gamma.\delta. = (\alpha.\varepsilon.).\beta.\gamma.\delta.$ καὶ $\alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta. = (\alpha\beta\gamma).(\delta\varepsilon\zeta)$ ἐξ οὗ ἕπεται $(\alpha\beta\gamma).(\delta\varepsilon\zeta) = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta.$

Διαίρεσις

Ἀσκήσεις.—*45.* α′) $= -\frac{2}{7}$ β′) $= -5$ γ′) -1 δ′) $= 54$.

ε)′ $= 1{,}9$ στ′) $= -193\frac{8}{9}$ ζ) $= 44{,}396$. η′) Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta} = \delta$, τότε θὰ εἶναι διαδοχικῶς:

$\alpha=\beta\delta$, $\alpha\gamma = \beta\delta.\gamma$, $\alpha\gamma=(\beta\gamma)\delta$. Ὥστε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \delta$, ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$.

46. α′) $= 3\frac{2}{3} : \left(-1\frac{4}{9}\right) = -\frac{33}{13}$ καὶ $-\frac{33}{13} : 8 = -\frac{33}{104}$

ἢ $3\frac{2}{3} : \left(-1\frac{4}{9}\right).8 = \frac{11}{3} : \left(-\frac{104}{9}\right) = -\frac{33}{104}$

β′) $=(-9{,}6):0{,}7.\,\frac{13}{3} = -\,9{,}6:4{,}55 = -2\frac{10}{91}$

γ′) $= -1:4(-3).\left(-\frac{1}{3}\right).(+2) = -\frac{1}{8}$.

47. α′) $=(-34):(-17)=2$, β′) $=-2-(-2)=0$, γ′) $=(-25):$
$(-5)(-5)(-5)=(-25):(-125) = \frac{1}{5}$.

48. α′) $\chi=160:(-40)=-4$, β′) $\chi=24:(-6)=-4$, γ′) $\chi=48{:}12=4$, δ') $\chi=(-15):(-3)=5$, ε') $\chi=-18{,}84:31{,}4=-0{,}6$, στ') $\chi=\frac{7}{12}:$

$$:\left(-\frac{36}{7}\right)=-\frac{49}{432}.$$

49. α') Κατὰ τὴν ἰδιότητα η') τῆς ἀσκήσεως 45 εἶναι:

$$\alpha:\beta=\left(\alpha.\frac{1}{\varrho}\right):\left(\beta.\frac{1}{\varrho}\right),\ \text{ἤτοι}\ \alpha:\beta=(\alpha:\varrho):(\beta:\varrho).$$

β') Εἶναι $(\alpha\beta\gamma)=\alpha\beta\gamma$, ἤτοι $(\alpha\beta\gamma)=\alpha.(\beta\gamma)$ καὶ ἑπομένως $(\alpha\beta\gamma):\alpha=\beta\gamma$.
γ') Ἐὰν $\alpha:(\beta\gamma)=\delta$, εἶναι $\alpha=(\beta\gamma)\delta$, ἤτοι $\alpha=\beta.(\gamma\delta)$ ὅθεν $\alpha:\beta=$ $=(\gamma\delta)$, ἤτοι $(\alpha:\beta)=\gamma.\delta$ καὶ κατὰ συνέπειαν $(\alpha:\beta):\gamma=\delta$. Ὅθεν:

$$\alpha:(\beta\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma.$$

Κλάσματα ἀλγεβρικὰ

Ἀσκήσεις.—*50.* $\frac{-25}{-15}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$, $\frac{-3}{48}=-\frac{3}{48}=-\frac{1}{16}$,

$\frac{-121}{-4.11}=\frac{-121}{-44}=\frac{11}{4}$, $\frac{5}{-8}.\frac{4}{-9}.\frac{1}{2}=\frac{5}{36}$, $\frac{3}{-2}.\frac{-8}{5}.\frac{2}{-11}.\frac{11}{-120}=\frac{1}{25}$.

51. α') $-\frac{16}{24},-\frac{15}{24},-\frac{12}{24}$ β') $\frac{-135}{180},\frac{-80}{180},\frac{90}{180},\frac{108}{180}$

γ') $-\frac{33}{45},-\frac{32}{45},\frac{30}{45},\frac{63}{45}$ δ') $-\frac{675}{1800},-\frac{288}{1800},\frac{400}{1800},\frac{600}{1800}$

ε') $-\frac{120}{168},\frac{32}{168},-\frac{112}{168},-\frac{105}{168},\frac{84}{168}$

στ') $-\frac{12}{24},\frac{8}{24},-\frac{20}{24},-\frac{21}{24},\frac{6}{24}$.

Δυνάμεις

Ἀσκήσεις.—*51α.* α') $=-216$ β') $=81$ γ') $=32768$ δ') $=-27$, ε') $=-16807$, στ') $=-1$.

52. π.δ. $(-4)^2=(-4)(-4)=16$, $(-4)^4=(-4)(-4)(-4)(-4)=256$
$(-4)^3=(-4)(-4)(-4)=-64$,
$(-4)^5=(-4)(-4)(-4)(-4)(-4)=-1024$ κ.ο.κ.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

Ἀσκήσεις.—*52α.* α') $=(-2)^5=-32$ ἢ $4.(-8)=-32$ β') $=(-3)^6=$ $=729$ γ') $=(-5)^5=-3125$.

δ') $(1,5)^5 = 7,59375$ ε') $= \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{1}{512}$ στ') $= (5,1)^7$

ζ') $= 0,5^{18}$.

53. α') $= (-2)^6 = 64$, β') $= (-3)^4 = 81$, γ') $= (-1)^6 = 1$,

δ') $= (-1)^9 = -1$ ε') $= \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$.

στ') $= (-10)^{30}$.

54. α') $(0,2)^8 = 0,00000256$ β') $(0,4)^4 = 0,0256$ γ') $(1,5)^6$

δ') $(0,5)^6.(-3)^8.\left(-\frac{4}{5}\right)^6$.

ε') $= (-5)^{12}$ στ') $= \left(-\frac{4}{9}\right)^{30}$.

55. α') $= (-2)^2.(-3)^2 = 4.9 = 36$ ἢ $6^2 = 36$ β') $(-5)^3.(-4)^3 = (-125).(-64) = 8000$ ἢ $20^3 = 8000$ γ') $(+1)^4.(-2)^4 = 1.16 = 16$.

δ') $(-1)^2.(-2)^2.(-3)^2 = 1.4.9 = 36$.

ε') $2^2.3^2(-4)^2.(-2)^2 = 4.9.16.4 = 2304$.

στ') $(-2)^3.(-3)^3.4^3.1^3.0,5^3 = (-8).(-27).64.1.0,125 = 1728$.

ζ') $(-1)^2.(-2)^2.(+3)^2 = 1.4.9 = 36$.

η') $\left(-\frac{5}{8}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{125}{512}\right).\frac{8}{27} = -\frac{125}{1728}$.

θ') $\left(\frac{5}{8}\right)^3.\left(-\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{125}{512}.\left(-\frac{64}{729}\right) = -\frac{125}{5832}$.

ι') $(-5)^4.(-6)^6.\left(-\frac{5}{9}\right)^2 = 4500000$.

ια') $\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{4}{9}\right)^2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}.\frac{16}{81}.\frac{1}{4} = \frac{16}{729}$.

ιβ') $2^2.\frac{4^2}{5^2}.\frac{2^2}{9^2}.(-0,1)^2 = \frac{16}{50625}$.

ιγ') $\frac{2^3}{5^3}.\frac{4^3}{9^3}.\frac{(-3)^3}{7^3}.(0,4)^3$ ιδ') $\left(\frac{3}{4}\right)^8.\left(\frac{α}{β}\right)^{12}.\left(-\frac{4}{9}\right)^{12}$.

56. α') $χ^8$ β') $ψ^7$ γ') $χ^7$ δ') $χ^8$ ε') $-β^{18}$ στ') $χ^3$.

ζ') $χ^{2ν+1}.(-χ)^{2ν} = χ^{2ν+1}.χ^{2ν} = χ^{4ν+1}$.

η') $χ^{2ν-1+1}.(-χ) = χ^{2ν}.(-χ) = -χ^{2ν+1}$.

θ') $-χ^{2ν+3}$ ι') $χ^{2ν-1+2ν}.ψ^{3μ-1+2} = χ^{4ν-1}.ψ^{3μ+1}$.

57. $4^2.α^2.β^2 = 16α^2β^2$ β') $(-3)^3.χ^3.ψ^3 = -27χ^3ψ^3$ γ') $5^2.χ^4 = 25χ^4$.

δ') $-χψω$ ε') $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 χ^4 ψ^2 = \frac{4}{9} χ^4ψ^2$ στ') $-\frac{1}{125}\cdot χ^3 ψ^6$.

ζ′) 1 , η′) 1 ϑ′) $\frac{125}{512}\cdot\chi^6\cdot\psi^3\ 1\cdot9\cdot\alpha^4\cdot\beta^6=\frac{1125}{512}\chi^6\psi^3\alpha^4\beta^6$.

58. α′) $2^{5-3}=2^2$ β′) $(-2)^{5-3}=(-2)^2$ γ′) $(-7)^{9-5}=$ $=(-7)^4$ δ′) $(-3)^3$.

ε′ $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$ στ′) $(-5{,}3)^2$ ζ′) $(-3\cdot5\cdot7)^3$ η′) $[(-1)\cdot(-3)\cdot5\cdot7]^5$

59. $\frac{1}{5^3}$, $\frac{1}{(3{,}5)^2}$, $\frac{1}{7^2}$, $\frac{1}{20^2}$, $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$, $\frac{1}{\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=$

$=\left(-\frac{8}{1}\right)^2=64$, $\frac{1}{(-1)^{2\nu}}=1$, $\frac{1}{(-1)^{2\nu+1}}=-1$.

60. $\frac{1}{(-1)^3}$, $\frac{1}{(-0{,}01)^4}$, $1:\frac{1}{2^3}=2^3$, $1:\frac{1}{5^2}=5^2$,

$1:\frac{1}{(-7)^4}=(-7)^4$

61. α′) Διὰ $\chi=1$ εἶναι $5^0+7^1+3^0=1+7+1=9$.

Διὰ $\chi=-2$ εἶναι $5^{-3}+7^{-2}+3^{-3}=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3^3}$ καὶ διὰ $\chi=-3$.

Εἶναι $\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{3^4}$.

β′) Εἶναι κατὰ σειράν :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^4=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-8}=3^6+2^7-4^8 \quad \text{καὶ}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-12}=3^8+2^{10}-4^{12}.$$

62. $2^{5+1+0-2}=2^4$, $4^{-3+3}=4^0=1$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot(0{,}1)^3$.

63. α′) $\alpha^{-2-4+0+5}=\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha}$ β′) $2^{-1}=\frac{1}{2}$ γ′) $(7^{-8+9})\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{7}{3^3}$ δ′ $\frac{1}{(2\alpha\beta)^3}$ ε′) $\chi^{\nu+2\nu-\nu}=\chi^{2\nu}$ στ′) $5^{2+4}=5^6$

ζ′) $3^{-2}\cdot\alpha^6\cdot\beta^{-2}\cdot\gamma^4:\gamma^8\cdot(-2)^2\cdot\alpha^4\cdot\beta^{-4}=3^{-2}\cdot(-2)^2\cdot\alpha^6\cdot\alpha^4\cdot$ $\cdot\beta^{-2}\cdot\beta^{-4}\cdot\gamma^4\cdot\gamma^8=\frac{1}{3^2}\cdot(-2)^2\cdot\alpha^{10}\cdot\frac{1}{\beta^6}\cdot\gamma^{12}$.

64. α′) $(5+7-9+13)\,.\,2^3-11\,.\,\frac{1}{2^3}=16\,.\,8-\frac{11}{8}=\frac{1013}{8}=126\,\frac{5}{8}$

β′) $4.6^3+5.6^3-7.6^3-9.6^3+13\,.\,6^3=(4+5-7-9+13)\,.\,6^3=6\,.\,6^3=6^4=1296$

γ′) $(5-3.2-7.2+8\,.\,2^5+11\,.\,2):2^4=(5+1\,.\,2+8\,.\,32)\,.\,2^4=263\,.\,2^4=4208$

δ′) $0{,}65\alpha^5-1\,.\,\alpha^4=(0{,}65\,.\,\alpha-1)\,.\,\alpha^4=(3{,}25-1)\,.\,5^4=2{,}25\,.\,5^4=1406{,}25$.

65. α′) $32\,.\,\frac{1}{4^3}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ ἢ $2^5\,.\,2^{-6}=2^{-1}=\frac{1}{2}$ β′) $3^4\,.\,3^{-5}=$ $=\frac{1}{3}$ γ′) $\frac{1}{2^5}:\frac{1}{4^3}=\frac{1}{2^5}:\frac{1}{2^6}=2$ ἢ $\frac{4^3}{2^5}=\frac{2^6}{2^5}=2$ ἢ $2^{-5}\,.\,4^3=$ $=2^{-5}\,.\,2^6=2$ δ′) $3^{-6}\,.\,9^3=3^{-6}\,.\,3^6=3^0=1$ ε′) $10^{-3}.10^2=10^{-1}=0{,}1$ στ′) $\frac{(-9)^2}{(-6)^2}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$ ζ′) $\frac{(-15)^2}{(-10)^4}=0{,}0225$ η′) $5\,.\,5^2+10\,.\,10^1+\frac{10^3}{10^2}-$ $-\,10^4=235-10000=-\,9765$.

Περὶ ἀνισοτήτων μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν

Ἀσκήσεις.—*66.* Τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως ἀπεδείχθη εἰς τὴν § 48. Ἤδη ἔστω ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀρνητικοί, ὅτι $\alpha>\beta$ καὶ ὁ μ ἀκέραιος θετικός. Τότε ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αβ εἶναι θετικόν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\beta}$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{\alpha\beta}>\frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$, ἤτοι $\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι (§ 42) ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ $\frac{1}{\beta}$, ἤτοι $\left|\frac{1}{\alpha}\right|>\left|\frac{1}{\beta}\right|$ καὶ κατὰ συνέπειαν :

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right|^{\mu}>\left|\frac{1}{\beta}\right|^{\mu}\ (\iota).$$

Ἀλλ᾽ ἐὰν ὁ μ εἶναι ἄρτιος, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἀνισότης (ι) αὐτὴ ὑφίσταται, ἐάν, ἀντὶ τῶν ἀπολύτων τιμῶν, λάβωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$. Ὥστε εἶναι $\frac{1}{\alpha^{\mu}}>\frac{1}{\beta^{\mu}}$, ἤτοι $\alpha^{-\mu}>\beta^{-\mu}$. Ἀλλ᾽ ἐὰν ὁ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, τὰ ἐξαγόμενα τῶν δυνάμεων $\frac{1}{\alpha^{\mu}}$, $\frac{1}{\beta^{\mu}}$, ἐὰν λάβωμεν τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$ θὰ εἶναι ἀρνητικά, καὶ ἑπομένως ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος εἶναι μικρότερος, ἤτοι εἶναι :

$$\frac{1}{\alpha^{\mu}} < \frac{1}{\beta^{\mu}},\ \text{ἤτοι}\ \alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}.$$

Ὥστε ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ ἀρνητικοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης μένει ἐὰν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀντιστρέφεται δὲ ἐὰν οὗτος εἶναι περιττός.

Π. δ. Εἶναι $-2>-3$, $(-2)^{-2}>(-3)^{-2}$, $(-2)^{-3}<(-3)^{-3}$.

$$\frac{1}{(-2)^2} > \frac{1}{(-3)^2} \qquad\qquad \frac{1}{(-2)^3} < \frac{1}{(-3)^3}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{9}. \qquad\qquad -\frac{1}{8} < -\frac{1}{27}$$

Σημείωσις. Ὅταν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἑτερόσημα καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς ἀρτίαν θετικὴν δύναμιν, τὰ ἐξαγόμενα δὲν ὑπόκεινται εἰς ὡρισμένον κανόνα. Π. χ. ἀπὸ τὰς ἀνισότητας $-4<3$, $-4<5$ καὶ $-4<4$ ἐὰν τὰς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς ἀνισότητας $16>9$, $16<25$ καὶ $16=16$.

67. α') Ἐὰν ὁ μ εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός, ὁ ἀντίθετός του μ' εἶναι ἀκέραιος θετικός. Ἑπομένως εἶναι $\alpha^{\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}$. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς $\alpha^{\mu'}$, ὡς γινόμενον μ' παραγόντων ἴσων μὲ α μεγαλυτέρου τῆς μονάδος 1, εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1. Ὥστε:

$$\frac{1}{\alpha^{\mu'}} > 1,\ \text{ἤτοι}\ \alpha^{\mu} < 1.$$

β') Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ παρονομαστὴς $\alpha^{\mu'}$ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1. Ὥστε $\frac{1}{\alpha^{\mu'}} > 1$, ἤτοι $\alpha^{\mu} > 1$.

γ') Ἐπειδὴ $\alpha>1$, εἶναι (§ 47) $\alpha^2>\alpha$, $\alpha^3>\alpha^2$. Ἑπομένως εἶναι:

$$\frac{1}{\alpha^3} < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\alpha} < 1 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3,$$

$$\text{ἤτοι}\quad \alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^0 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3$$

68. Ἐὰν $0<\alpha<1$, θὰ εἶναι (§ 47) $\alpha^2<\alpha$, $\alpha^3<\alpha^2$, $\frac{1}{\alpha^3} > \frac{1}{\alpha^2}$ κ.λ.π. ὡς ἀνωτέρω. Ὥστε $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^0 > \alpha > \alpha^2 > \alpha^3$.

69. α') $(-8):2>(-23):2$, ἤτοι $-4>-11{,}5$.

β') $(-8):\left(\frac{-1}{5}\right) < (-23):\left(\frac{-1}{5}\right)$ ἢ $40<115$.

γ') $(-8):(-0{,}58)<(-23):(-0{,}58)$ ἢ $800<2300$.

70. Εἶναι (§ 47) $\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(-5)\cdot\chi<\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 30$, ἤτοι $\chi<-6$

$$\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\chi<\frac{1}{3}\cdot 39, \text{ ἤτοι } \chi<13$$

$$\frac{1}{(-3)(-2)}\cdot(-3)(-2)\cdot\chi>\frac{1}{(-3)(-2)}\cdot(-4{,}8)(-22), \text{ ἤτοι } \chi>17{,}6.$$

71. Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω κατὰ σειράν:

$$\chi<-\frac{5}{6},\quad \chi>53\frac{1}{3},\quad \chi<40 \text{ καὶ } \chi<0{,}08.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

Ἀσκήσεις.—*72.* α') Ρητή, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων της εἶναι σημειωμένη ρίζα καὶ ἀκεραία, διότι δὲν περιέχει διαίρεσιν διὰ γράμματος.

β') Ἄρρητος, διότι εἶναι σημειωμένη ρίζα ἐπὶ τοῦ γράμματος β. $(\sqrt{\alpha^2}=\alpha)$.

γ') Ἄρρητος, διότι εἶναι σημειωμένη ρίζα ἐπὶ τῶν γραμμάτων χ καὶ ψ.

δ') Κλασματική, διότι εἶναι ρητὴ καὶ περιέχει διαίρεσιν διὰ τῶν γραμμάτων β καὶ γ.

73. Ἐπειδὴ $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}=\alpha-\beta$ καὶ $\sqrt[3]{\delta^3}=\delta$, αἱ δοθεῖσαι παραστάσεις εἶναι φαινομενικῶς ἄρρητοι, ἀλλ' εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ρηταί. Φαινομενικῶς ἄρρητοι εἶναι καὶ αἱ παραστάσεις· $\sqrt{\alpha-\beta)^2}$, $\sqrt{(\alpha+\beta-\gamma)^2}$, $\sqrt[4]{\alpha^4}$, $\sqrt[3]{(\alpha+\beta)^3}$ κλπ.

74. α') ἀκεραία, διότι $\frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha}=\frac{9}{5}\alpha\beta$.

β') Ἀκεραία, διότι ἰσοῦται μὲ $16\alpha(\alpha-\beta)$.

γ') Ἀκεραία, διότι ἰσοῦται μὲ $\frac{6\gamma}{5}$.

δ') Κλασματική.

75. α') 3 (συντελεστὴς) καὶ $\alpha^2\beta^3$ (κύριον ποσόν).

β') -5 καὶ $\alpha^4\beta^5$.

γ') -1 καὶ α.

δ') -3 καὶ $\chi\psi^3$.

ε') 2 καὶ χ^2.

στ') $-\frac{4}{5}$ καὶ χ^3.

ζ') $-\frac{1}{4}$ καὶ χ^3.

η') 0,1 καὶ χ^2.
θ') $-4{,}56$ καὶ χ^3 καὶ

ι') $-\frac{3}{4}$ καὶ α^2.

ια') $\left(-\frac{5}{8}\right).5.(-8)=25$ συντελεστὴς καὶ $\alpha^2\beta.\beta^2 =$
$=\alpha^2\beta^3$ κύριον ποσόν.

76. α') Ἀριθμ. συντ. $\frac{5}{8}$ καὶ συντ. τοῦ α, ὁ $\frac{5}{8}\beta$.

β') $-\frac{1}{3}$.

γ') Ὁ συντ. $-\frac{21}{4}$ τοῦ μονωνύμου εἶναι καὶ συντ. τοῦ χ^3.

δ') 3,4.

ε') $\frac{5}{6}$ ἀριθ. συντ. καὶ $\frac{5}{6}\alpha$ συντ. τοῦ β^2.

77. α') Συντ. τοῦ μονωνύμου καὶ τοῦ ψ ὁ -24.
β') Συντ. ὁ -150 καὶ -150α συντ. τοῦ β.

γ') $\frac{56}{3}$ ἀριθ. συντ., $\frac{56}{3}\psi$ συντ. τοῦ χ καὶ $\frac{56}{3}\chi$ συντ. τοῦ ψ.

δ') $\frac{3}{4}$ ἀριθ. συντ., $\frac{3\beta}{4\gamma}$ συντ. τοῦ α καὶ $\frac{3\alpha}{4\gamma}$ συντ. τοῦ β.

ε') ἀριθμ. συντ. ὁ -4 καὶ συντ. τοῦ χ ὁ $-\frac{4}{\psi}$.

στ') ἀριθμ. συντ. ὁ -5 καὶ συντ. τοῦ χ^2 ὁ $-\frac{5}{\psi^2}$.

ζ') ἀριθ. συντ. ὁ $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{20}$ καὶ συντ. τοῦ

χ^2 ὁ $\frac{3\psi}{20}$ καὶ τοῦ ψ ὁ $\frac{3\chi^2}{20}$.

η') ἀριθ. συντ. ὁ $\frac{2}{3}.(-4).3=-8$ καὶ συντ. τοῦ α ὁ $-8\chi^2$

καὶ τοῦ χ^2 ὁ -8α.

78. α') $2^{ου}$ πρὸς α, $1^{ου}$ πρὸς β, $2^{ου}$ πρὸς γ, $3^{ου}$ πρὸς α καὶ β, $5^{ου}$ πρὸς α, β, γ.
β') $3^{ου}$ πρὸς α, $2^{ου}$ πρὸς β, $1^{ου}$ πρὸς γ, $5^{ου}$ πρὸς α καὶ β, $6^{ου}$ πρὸς α, β, γ.
γ') $1^{ου}$ πρὸς α, $3^{ου}$ πρὸς β, $4^{ου}$ πρὸς γ, $4^{ου}$ πρὸς α καὶ β, $8^{ου}$ πρὸς α, β, γ.
δ') $3^{ου}$, $2^{ου}$, $4^{ου}$ πρὸς α, β, γ ἀντιστοίχως, $5^{ου}$ πρὸς α καὶ β, $9^{ου}$ πρὸς α, β, γ.

79. Ἀκέραια εἶναι τά:
α') -24ψ βαθμοῦ $1^{ου}$ πρὸς ψ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα
β') $-150\alpha\beta$ » $1^{ου}$ » α,β· $2^{ου}$ πρὸς αβ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.
γ') $\frac{56}{3}\chi\psi$ βαθμοῦ $1^{ου}$ » χψ· $2^{ου}$ » χψ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.
ζ') $\frac{3}{20}\chi^2\psi$ βαθμοῦ $2^{ου}$ » χ· $1^{ου}$ » ψ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.
η') $-8\alpha\chi^2$ βαθμοῦ $1^{ου}$ » α· $2^{ου}$ » χ καὶ 0 πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα.

Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων

Ἀσκήσεις.— *80.* α') 13μ β') -16μ γ') 2μ δ') -4μ ε') 18α στ') -3ϱ ζ) 6χ η') 4α θ') 11χ.

81. α') $3\chi^2$ β') $(4\alpha-4\beta-5\gamma)\chi^3$ γ') $\alpha^2\beta\chi(3\chi-2\chi^2-6)$
δ') $(4-5\chi+3\chi^2-10\chi^3)\chi\psi^3)$ ε') $\frac{1}{2}\chi^2+4\alpha\chi-3\alpha^2$.

82. $7\frac{3}{4}\chi^2\psi-0{,}25\chi^2\psi=7{,}50\chi^2\psi,\ -\chi+1{,}75\chi+5\frac{5}{12}\chi=\frac{37}{6}\chi$
$19\frac{3}{8}\varphi^2+0{,}625\varphi^2=20\varphi^2,\qquad -8\frac{3}{8}\psi-1{,}125\psi=-9{,}5\psi.$

Ἄθροισμα: $7{,}50\chi^2\psi+\frac{37}{6}\chi+20\varphi^2-9{,}5\psi$.

83. α') $3\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta+0{,}35\alpha^2\beta-0{,}5\alpha^2\beta=5{,}85\alpha^2\beta$.
$-8\chi\psi^3+32\chi\psi^3-0{,}25\chi\psi^3=23{,}75\chi\psi^3$
β') $46\chi\psi^2$ καὶ $-37{,}05\alpha^2\beta^3\gamma$ γ') $3{,}2\alpha^2\beta\gamma$.

84. α') $-9\chi+7\psi=-9.3+7.4=-27+28=1$
β') $-15\chi+(-10\psi)=-15.3+(-10)(-4)=-45+40=-5$

85. α') $2^3-6.2^2.6+6^3=8-144+216=80$
β') $\frac{(2+5)(2-3.5)}{6.2-2.5}=\frac{7.(-13)}{12-10}=\frac{-91}{2}=-45\frac{1}{2}$.

Σημείωσις: Κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐκτελοῦμεν γενικῶς πρῶτον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις. Ἐὰν περιέχῃ ὅρους κλασματικούς, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχῃ παρενθέσεις ἢ ἀγκύλας, ἐκτελοῦμεν χωριστὰ τὰς πράξεις τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἢ τῶν ἀγκυλῶν. Τέλος ἐὰν ἔχῃ ριζικά, ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις τὰς ὑπὸ τὰ ριζικά.

86. α′) $(-5+2).\left[(-5)^2-[2^2-6(-5)(-3)]\right]=(-3)[25-(4-90)]=$ $=(-3).(25+86)=(-3).111=-333.$

β′) $\sqrt{9^3-2.(-4)}-4.3-2\sqrt{4.9^2+(-4)}.(9+3)=\sqrt{737}-12-24\sqrt{320}.$

87. Εἶναι $\varphi(2)=3^2$, $\varphi(4)=3^4$ καὶ $\varphi(2).\varphi(4)=3^6=\varphi(6)$.

88. Εἶναι $\varphi(5)=4.5^2+4.5-3=100+20-3=117$ καὶ $\psi(5)=9(5+8)=9.13=117$. Ὥστε $\varphi(5)=\psi(5)$.

89. Εἶναι $\varphi(0,1,2)=(0+1+2)(0+1-2)(0-1-2)=3.(-1).(-3)=9$

$\varphi(0,-1,-2)=(0-1-2)(0-1+2).(0+1+2)=-3.1.3=-9.$

Ὅθεν $\varphi(0,1,2)+\varphi(0,-1,-2)=9+(-9)=0.$

Περὶ πολυωνύμων

Ἀσκήσεις.*—*90. Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ καὶ πρὸς α καὶ χ.

Ζητουμένη διάταξις. α′) $\chi^6-6\alpha\chi^5+3\alpha^2\chi^4-28\alpha^3\chi^3+9\alpha^4\chi^2-$ $-54\alpha^5\chi+27\alpha^6.$

β) Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ καὶ πρὸς α καὶ χ.

Ζ. διάταξις $-3\chi^6+7\alpha\chi^5-0{,}7\alpha^2\chi^4-\alpha^3\chi^3+0{,}7\alpha^4\chi^2+27\alpha^5\chi-\alpha^6.$

γ′) Ἐπειδὴ $7\alpha^6-7\alpha^6=0$, τὸ πολ. εἶναι 6ου β. πρὸς χ, 5ου πρὸς α καὶ 6ου πρὸς α καὶ χ.

Ζ. διάταξις, $16\chi^6+\frac{2}{3}\alpha\chi^5+\frac{1}{2}\alpha^2\chi^4-11\alpha^3\chi^3-7\alpha^4\chi^2+15\alpha^5\chi.$

δ′) Εἶναι 6ου βαθμοῦ πρὸς α, πρὸς χ, πρὸς α καὶ χ.

Ζ. διάταξις $-3\chi^6-\frac{5}{2}\alpha^2\chi^4+6\alpha^3\chi^3+11\alpha^5\chi+3\alpha^6.$

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων

Ἀλγεβρικὸς λογισμός. Σκοπὸς αὐτοῦ.—Ὅταν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μετασχηματίζωμεν εἰς ἄλλην ἴσην, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, ἐκτελοῦμεν ***ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.*** Τὸ σύνολον δὲ τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται ***ἀλγεβρικὸς λογισμός.***

Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός, ἤτοι αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, γίνονται ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὄχι διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, ὡς γίνεται εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀλλὰ διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς παραστάσεις εἰς ἄλλας ἴσας, ἀλλ' ἁπλουστέρας. *Ὁ μετασχηματισμὸς δέ οὗτος τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι εἷς ἐκ τῶν κυριωτέρων σκοπῶν τῆς ἀλγέβρας.*

Ἀσκήσεις.—*91.* α') $\alpha-2\beta+\gamma$ β') $\chi^2+\chi\psi+\psi^2$ γ') $\alpha\gamma+\alpha\beta\gamma$.

δ') $\frac{\chi^2}{3}-\frac{4\chi\psi}{3}+\frac{\psi^2}{2}$. ε') $\frac{3\chi^2}{8}-\frac{2\chi\psi}{5}-\frac{17\chi\psi}{40}$.

92. α') $-3\chi^2-4\chi\psi-\psi^2$. β') $6\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2$.
γ') $\alpha^2\chi^2+9\alpha\chi\psi-7\alpha\beta\psi^2-2\alpha^2$.
δ') $19\alpha^\mu-17\beta^\nu+10\delta^\lambda$ ε') $3\psi^2-6\chi\psi+8\psi-\chi+4$.

93. $0{,}5\chi^2+4\alpha\chi-\frac{5}{18}\alpha^2$.

94. $\frac{\chi^3}{4}+\frac{\chi^2}{2}-\frac{17\chi}{9}+\frac{2}{5}$

95. α') $3\chi-7\chi+5\psi=-4\chi+5\psi=-4.3+5.3=3$.
β') $17\chi-\psi=17.6-3=102-3=99$.
γ') $\mu-\nu=4\chi-7\psi+2\omega-\chi-\psi-\omega=3\chi-8\psi+\omega$.
$\vartheta-(\mu-\nu)=\chi+9\psi-6\omega-3\chi+8\psi-\omega=-2\chi+17\psi-7\omega$.
96. α') $\alpha-\alpha+[\alpha-(\alpha-1)]=\alpha-(\alpha-1)=\alpha-\alpha+1=1$.
β') $5{,}8\alpha^2-8{,}2\alpha^2-\alpha^2+0{,}4+0{,}6=-3{,}4\alpha^2+1=$
$=-3{,}4.4+1=-12{,}6$.
γ') $[-(-\chi]+(-\psi)=\chi-\psi=-1-(-1)=-1+1=0$.
δ') $-[+(-\chi)]+[+[-(-\chi]]=-(-\chi)+[-(-\chi)]=\chi+\chi=4$.
ε') $[-(\beta+\gamma-\alpha)]-[-(\alpha-\beta+\gamma]=-\beta-\gamma+\alpha+\alpha-\beta+\gamma=$
$=-2\beta+2\alpha=2$.
97. α') $2+\chi+\chi^2+6\chi^3-8\chi^4+4\chi^5$. β') $2+\chi+4\chi^3-5\chi^4$ καὶ
$-2-\chi+\chi^2-2\chi^3+2\chi^4+4\chi^5$ γ') $(\chi^2+2\chi^3-3\chi^4+4\chi^5)+$
$+(2-\chi-4\chi^2+10\chi^3-13\chi^4+2\chi^5)=2-\chi-3\chi^2+12\chi^3-16\chi^4+6\chi^5$
98. $\chi^2+(7\chi^2-3\chi-5)$, $-5\chi^4+[-(3\chi^3-8\chi^2)-6\chi+9]$,
$13\chi+(-16\chi^2+19\chi^3-14\alpha+5\gamma)$, $\chi^2-(-7\chi^2+3\chi+5)$,
$-5\chi^4-[(3\chi^3-8\chi^2)+6\chi-9]$, $13\chi-(16\chi^2-19\chi^3+14\alpha-5\gamma)$.
99. α') $30\alpha^2-18\alpha\beta+6\beta^2+3\beta^3$ β') $-2\alpha^2+8\alpha\beta-4\beta^2-3\beta^3$
γ') $6\alpha^2-4\alpha\beta-4\beta^2-3\beta^3$.
100. 1η **τάξ.** α μαθ., 2α τάξ. (α—β) μαθ., 3η τάξ. (α—2β) μαθ.
Αἱ τρεῖς τάξεις ὁμοῦ ἔχουν $\alpha+\alpha-\beta+\alpha-2\beta=3\alpha-3\beta$.
Αἱ δύο πρῶται τάξεις ἔχουν περισσοτέρους τῆς τρίτης $\alpha+\alpha-\beta-(\alpha-2\beta)=2\alpha-\beta-\alpha+2\beta=\alpha+\beta$ μαθ.

101. Ὁ Α ἔχει χ καὶ ὁ Β ἔχει (μ—χ) δρχ. Ὥστε τελικῶς ὁ Α θὰ ἔχῃ (χ—3) δρχ. καὶ ὁ Β μ—χ+3 δρχ.

102. Ὁ Α ἔχει μ δρχ., ὁ Β ἔχει 3μ δρχ. καὶ ὁ Γ ἔχει 6μ δρχ. Οἱ δὲ τρεῖς ἔχουν μ+3μ+6μ=10μ δρχ.

103. α′) $(-1).\chi^{7+3}.\psi^{6+4}=-\chi^{10}\psi^{10}$ β′) $-\chi^5.\alpha^{10}$ γ′) $\chi^4.\beta^{12}$ δ′) $\chi^{3\nu+3}$ ε′) $\chi^{5\nu+2}$ στ′) $-2\alpha^{3\chi-1}$ ζ′) $-\chi^3\psi^3\omega^3$ η′) $-28\chi^3\psi^3\omega$.

104. α′) $(-2{,}5)^2.(\alpha^2)^2.\beta^2.\chi^2=6{,}25\alpha^4\beta^2\chi^2$ β′) $-0{,}027\alpha^3\beta^3\gamma^6$, γ′) $16\alpha^4\beta^8\gamma^4\chi^8$.

105. α′) $-\alpha^{3\chi-1}$ β′) $\chi^{2\nu-2}.\psi^{2\mu-4}$. γ′) Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἐκθέτην (ἄσκ. 104). Π. χ. $(6\alpha\beta^2)^2=6^2.\alpha^2.\beta^4$, $\left(\frac{3}{4}\chi^3\psi\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3.\chi^9.\psi^3$ καὶ $(25\alpha^2\beta^2\gamma)^5=25^5.\alpha^{10}.\beta^{10}.\gamma^5$.

106. α′) $3\alpha^3\chi-12\alpha^2\chi^2+3\alpha\chi^3=3.2^3.(-1)-12.2^2.(-1)^2+3.2.(-1)^3=$ $=-24-48-6=-78$.

β′) $3\alpha^2+7\alpha\beta-9\beta^2+5\alpha\beta=3\alpha^2+12\alpha\beta-9\beta^2=12-72-81=$ $=-141$.

γ′) $3\alpha^3\beta+7\alpha\beta^3-9\alpha^3\beta+8\alpha\beta^3=-6\alpha^3\beta+15\alpha\beta^3=-12+120=108$

δ′) $9\alpha^4\beta^5+21\alpha^2\beta^4-18\alpha^5\beta^6+16\alpha^2\beta^5=-288+336+1152-512=$ $=688$.

107. Διανύουν εἰς τ ἡμέρας ὁ α′ $(\alpha+\mu).\tau=\alpha\tau+\mu\tau$ χλμ. καὶ ὁ β′ $(\alpha+\mu-2)\tau=\alpha\tau+\mu\tau-2\tau$ χλμ. Ὥστε μετὰ τ ἡμέρας θὰ ἀπέχουν:

$$\alpha\tau+\mu\tau+\alpha\tau+\mu\tau-2\tau=2\alpha\tau+2\mu\tau-2\tau=2\tau(\alpha+\mu-1) \text{ χλμ.}$$

108. Τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι $\alpha-\mu$. Ὥστε ὁ δοθεὶς διψήφιος ἔχει $10(\alpha-\mu)+\mu=10\alpha-10\mu+\mu=10\alpha-9\mu$ μονάδας.

Ἐὰν ὅμως ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων, ὁ νέος διψήφιος θὰ ἔχῃ $10\mu+\alpha-\mu=9\mu+\alpha$ μονάδας καὶ θὰ διαφέρουν οἱ δύο κατὰ $9\mu+\alpha-10\alpha+9\mu=18\mu-9\alpha=9(2\mu-\alpha)$ μονάδας.

Παρατήρησις. Ἐὰν $2\mu>\alpha$ ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9(2\mu-\alpha)$ μονάδας· θὰ ἐλαττωθῇ δὲ κατὰ τὰς μονάδας αὐτὰς ἐὰν $2\mu<\alpha$.

109. Ὁ α′ ἐβάδισε ἐπὶ τ ἡμέρας 30.τ χλμ., ὁ δὲ β′ ἐβάδισεν ἐπὶ $\tau-\mu$ ἡμέρας $\gamma(\tau-\mu)$ χλμ. Ὥστε ἀπέχουν $30\tau-\gamma(\tau-\mu)=30\tau-\gamma\tau+\gamma\mu$ χλμ.

110. α′) $-\chi^4-4\chi^3-2\chi^2+4\chi+3=-(-1)^4-4(-1)^3-2(-1)^2+4(-1)+$ $+3=-1+4-2-4+3=0$

$\chi^2+4\chi+3=(-1)^2+4(-1)+3=1-4+3=0$

$1-\chi^2=1-(-1)^2=1-1=0$ καὶ $0.0=0$.

β′) $\chi^4-3\chi^3-5\chi^2-4\chi+6=(-1)^4-3(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+$ $+6=9$, $\chi^2+2\chi+2=1-2+2=1$, $\chi^2-5\chi+3=1+5+3=9$ καὶ $9.1=9$.

γ′) $\chi^5-4\chi^4+2\chi^3+12\chi^2-16\chi-16=243-324+54+108-48-$ $-16=17$ καὶ $27-18+8=17$, $9-6-2=1$ καὶ $17.1=17$.

δ′) $-20\alpha^5-7\alpha^4-4\alpha^3-7\alpha^2+5\alpha+3$ κλπ.

111. α′) $8\alpha^{3\nu+8}-27\alpha^5=8-27=-19$ καὶ $19.(-1)=-19$.

β′) $\chi^{15}+\psi^{10}=-1+1=0$ καὶ $\chi^{12}-\chi^{9}\psi^{2}+\chi^{6}\psi^{4}-\chi^{3}\psi^{6}+\psi^{8}=1+1+$ $+1+1+1=5$, $\chi^{3}+\psi^{2}=-1+1=0$ καὶ $5.0=0$.

γ′) $\alpha^{\mu}.\chi^{2-\mu}-\beta.\alpha^{\mu+1}.\chi^{3-\mu}+\gamma.\alpha^{\mu-2}.\chi^{4-\mu}+\beta.\gamma.\alpha^{2\mu-1}.\chi^{3}$
$-\gamma^{2}.\alpha^{2\mu-2}.\chi^{4}+\beta\gamma\alpha^{-1}.\chi^{3}-\gamma.\alpha^{2\mu}.\chi^{2}-\beta^{2}\alpha^{2}\chi^{2}+\beta\alpha\chi$.

δ′) $\chi^{2\alpha(\beta-1)}-\psi^{2\beta(\alpha-1)}=\chi^{2(2-1)}-\psi^{4(1-1)}=\chi^{2}-1$

$\chi^{\alpha(\beta-1)}+\psi^{\beta(\alpha-1)}=\chi+1$, $\chi^{\alpha(\beta-1)}-\psi^{\beta(\alpha-1)}=\chi-1$ καὶ $(\chi+1)(\chi-1)=\chi^{2}-1$.

ε′) $(\chi^{4}+\chi^{3}-\chi^{2}+\chi+1)(\chi^{3}+2\chi^{2}-\chi-2)=\chi^{7}+3\chi^{6}-4\chi^{4}+2\chi^{3}+3\chi^{2}-$ $-3\chi-2$.

στ′) $-8\alpha^{3}+\beta^{3}+27\gamma^{3}-4\alpha^{2}\beta+2\alpha\beta^{2}-12\alpha^{2}\gamma+18\alpha\gamma^{2}-9\beta\gamma^{2}-3\gamma\beta^{2}-$ $-12\alpha\beta\gamma$.

112. 1) $(\alpha^{2}+\beta^{2}).(\gamma^{2}+\delta^{2})=\alpha^{2}\gamma^{2}+\alpha^{2}\delta^{2}+\beta^{2}\gamma^{2}+\beta^{2}\delta^{2}$.

2) $(\alpha\gamma+\beta\delta)^{2}+(\alpha\delta-\beta\gamma)^{2}=\alpha^{2}\gamma^{2}+2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^{2}\delta^{2}+\alpha^{2}\delta^{2}-2\alpha\beta\gamma\delta+$ $+\beta^{2}\gamma^{2}=\alpha^{2}\gamma^{2}+\alpha^{2}\delta^{2}+\beta^{2}\gamma^{2}+\beta^{2}\delta^{2}$.

3) $(\alpha\gamma-\beta\delta)^{2}+(\alpha\delta+\beta\gamma)^{2}=\alpha^{2}\gamma^{2}-2\alpha\beta\gamma\delta+\beta^{2}\delta^{2}+\alpha^{2}\delta^{2}+2\alpha\beta\gamma\delta+$ $+\beta^{2}\gamma^{2}=\alpha^{2}\gamma^{2}+\alpha^{2}\delta^{2}+\beta^{2}\gamma^{2}+\beta^{2}\delta^{2}$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὰ εὑρεθέντα ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα.

Ἄλλος τρόπος: Γράφομεν τὸ ἐξαγόμενον 1) ὡς ἑξῆς:

$(\alpha^{2}+\beta^{2})(\gamma^{2}+\delta^{2})=(\alpha^{2}\gamma^{2}-2.\alpha\gamma.\beta\delta+\beta^{2}\delta^{2})+(\alpha^{2}\delta^{2}+2.\alpha\delta.\beta\delta+\beta^{2}\gamma^{2})=$ $=(\alpha\gamma-\beta\delta)^{2}+(\alpha\delta+\beta\gamma)^{2}$.

113. Εἶναι $\chi^{3}=(2\psi+3\omega)^{3}$, ἤτοι $\chi^{3}=8\psi^{3}+3.(2\psi)^{2}.3\omega+3.2\psi.$ $.(3\omega)^{2}+(3\omega)^{3}=8\psi^{3}+36\psi^{2}\omega+54\psi\omega^{2}+27\omega^{3}=8\psi^{3}+18\psi\omega(2\psi+3\omega)+$ $+27\omega^{3}=8\psi^{3}+18\chi\psi\omega+27\omega^{3}$. Ὅθεν $\chi^{3}-8\psi^{3}-27\omega^{3}-18\chi\psi\omega=0$.

114. $\alpha^{2}-2\alpha\beta+\beta^{2}+2\beta^{2}+\beta^{2}-2\beta\gamma+\gamma^{2}=\alpha^{2}-2\beta(\alpha+\gamma)+4\beta^{2}+\gamma^{2}=$ $=\alpha^{2}-4\beta^{2}+4\beta^{2}+\gamma^{2}=\alpha^{2}+\gamma^{2}$.

115. Ἐπειδὴ $\psi=1-\chi$, ἔχομεν $\chi^{3}(2-\chi)-(1-\chi)^{3}.(1+\chi)-2\chi+1=$ $=2\chi^{3}-\chi^{4}-1+2\chi-2\chi^{3}+\chi^{4}-2\chi+1=0$.

116. Εἶναι $(-\beta)^{2}+(-\beta).(2\beta-\gamma)-\beta\gamma+\beta^{2}=\beta^{2}-2\beta^{2}+\beta\gamma-\beta\gamma+\beta^{2}=0$.

117. Εἶναι $\varphi(\chi_1+1)=3(\chi_1+1)^{2}-(\chi_1+1)+1=3\chi_1^{2}+6\chi_1+3-\chi_1-1+$ $+1=3\chi_1^{2}+5\chi_1+3$ καὶ $2\varphi(0)=2$. Ὅθεν:

$\varphi(\chi_1+1)-\varphi(\chi_1)-2\varphi(0)=3\chi_1^{2}+5\chi_1+3-3\chi_1^{2}+\chi_1-1-2=6\chi_1$.

118. $\varphi(\chi+1)-\varphi(\chi)=3(\chi+1)^{2}+7(\chi+1)-(3\chi^{2}+7\chi)=$ $=3\chi^{2}+6\chi+3+7\chi+7-3\chi^{2}-7\chi=6\chi+10=\psi(\chi)$.

119. α′) Εἶναι $\tau^{2}-2\alpha\tau+\alpha^{2}+\tau^{2}-2\beta\tau+\gamma^{2}+\tau^{2}-2\gamma\tau+\gamma^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}+$ $+\gamma^{2}+3\tau^{2}-2\tau(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}+3\tau^{2}-4\tau^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}-\tau^{2}$.

β) Ἐὰν θέσωμεν $\tau-\alpha=\chi$, $\tau-\beta=\psi$ καὶ $\tau-\gamma=z$ ἔχομεν

$(\chi+\psi+z)^{3}=\chi^{3}+\psi^{3}+z^{3}+3\chi\psi(\chi+\psi)+3(\chi+\psi).(\chi+\psi+z)z$

ἀλλὰ $3\chi\psi(\chi+\psi)+3(\chi+\psi)(\chi+\psi+z)z = 3(\chi+\psi)(\chi\psi+\chi z+\psi z+z^2) =$
$= 3(\chi+\psi)[\chi(\psi+z)+z(\psi+z) = 3(\chi+\psi)(\psi+z)(\chi+z)$.

Ἑπομένως εἶναι:

$[(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)+(\tau-\gamma]^3 = (\tau-\alpha)^3+(\tau-\beta)^3+(\tau-\gamma)^3+3(\tau-\alpha+$
$+\tau-\beta)(\tau-\beta+\tau-\gamma)(\tau-\alpha+\tau-\gamma)$.

Ἀλλὰ $\tau-\alpha+\tau-\beta+\tau-\gamma = 3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)=3\tau-2\tau=\tau$.

$-\alpha+\tau-\beta = 2\tau-(\alpha+\beta) = \gamma,\ \ \tau-\beta+\tau-\gamma = \alpha$ καὶ $\tau-\alpha+\tau-\gamma = \beta$.

Ὅθεν: $\tau^3 = (\tau-\alpha)^3+(\tau-\beta)^3+(\tau-\gamma)^3+3\alpha\beta\gamma$.

γ΄) Εἶναι $(\tau-\beta)(\tau-\gamma)[2(\tau-\alpha)+\alpha]+(\tau-\alpha)[\beta(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\beta)]$.

$= (\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\beta+\gamma)+(\tau-\alpha)[\tau(\beta+\gamma)-2\beta\gamma]$.

$= (\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\beta+\gamma)+\tau(\tau-\alpha)(\beta+\gamma)-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$= (\beta+\gamma)[(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\tau(\tau-\alpha)]-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$= (\beta+\gamma)[(2\tau^2-\tau(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma]-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$= (\beta+\gamma)(2\tau^2-2\tau^2+\beta\gamma)-2\beta\gamma(\tau-\alpha)$.

$= (\beta+\gamma)\beta\gamma-2\beta\gamma(\tau-\alpha) = \beta\gamma(\beta+\gamma-2\tau+2\alpha) = \alpha\beta\gamma$.

120. Εἶναι $(\alpha^2+\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2$. Ἑπομένως ἔχομεν:

$$\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^4+2\alpha^2\beta^2 \quad (\iota)$$

Ἀλλὰ $(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2$.

Τὸ 2ον λοιπὸν μέλος τῆς ἰσότητος (ι) γίνεται:

$(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^4+2\alpha^2\beta^2=(\alpha+\beta)^2[(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2]+2\alpha^2\beta^2=$
$=2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2$.

121. α΄) Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ 2ον μέλος εὑρίσκομεν:

$$\alpha^5+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\beta^5-\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3=\alpha^5+\beta^5.$$

β΄) Ἐὰν θέσωμεν $\psi-\omega=\alpha$, $\chi-\psi=\beta$, ἔχομεν:

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, ἤτοι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha+\beta=\psi-\omega+\chi-\psi=\chi-\omega$, τὸ α΄ μέλος τῆς δοθείσης ἰσότητος γίνεται:

$(\chi-\omega)^3-3(\psi-\omega)(\chi-\psi)(\chi-\omega)+3(\chi-\psi)(\chi-\omega)(\psi-\omega)=(\chi-\omega)^3$.

122. Ἔχομεν $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2$.

123. Θὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις.

Διαίρεσις

Ἀσκήσεις.—*123.* α΄) $-3\mu^2\psi^3$ β΄) $-11\chi^3\psi$ γ΄) $-2{,}5\chi\psi^2$

δ΄) $0{,}5\alpha^2\gamma$ ε΄) $-0{,}75\nu^4$ στ΄) $\frac{16}{\beta\gamma\delta^4}$ ζ΄) $-\frac{35\gamma^2}{36\beta}$.

124. α΄) Πηλίκον $7\chi-14\chi^2$. Ὥστε: $14\chi^3\psi^2-28\chi^4\psi^2=(7\chi-14\chi^2).2\chi^2\psi^2$

β΄) $(\alpha+\beta)$ κλπ. γ΄) $-2\alpha^2+4\alpha\beta-6\beta^2+3$ δ΄) $\chi^2+2\chi\psi-\psi^2$.

125. α΄) $(\alpha+\beta)\chi$, β΄) $7\alpha(7\beta+9)$, γ΄) $8\chi(7\psi-9\omega)$, δ΄) $7\alpha(0{,}05\beta-0{,}07\gamma)$

ε΄) $\alpha^4\beta^4(2{,}3\beta-2{,}5\alpha)$, στ΄) $\chi\psi(\alpha^3\chi^2+3\alpha^2\beta\chi+3\alpha\beta^2\psi-\psi^3)$,

$$\zeta')\ \alpha^3\beta\left(12\frac{2}{3}-14{,}25\alpha\beta^6-15\frac{5}{6}\alpha^2\beta^4+11\frac{1}{12}\alpha^3\beta^3\right).$$

126. α΄) Πηλ. $\chi^2-3\chi-5$. ὑπ. -1. *Δοκιμή*. $(\chi^2-3\chi-5)(2\chi-1)-$ $-1=2\chi^3-7\chi^2-7\chi+4$. β΄) Πηλ. $2\chi^2+2\chi+5$. ὑπ. 20. γ΄) Πηλ. χ^2- $-\chi+1$. ὑπ. 0. δ΄) Πηλ. $\chi-2$. ὑπ. 0. ε΄) Πηλ. $2\chi^3-3\chi^2-5\chi-1/5$. ὑπ. $-\frac{3\chi}{5}+\frac{8}{5}$. στ΄) Θὰ διαιρέσωμεν $(\alpha^{10}+\alpha^5+1):(\alpha^2+\alpha+1)$ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλ. $\alpha^8-\alpha^7+\alpha^5-\alpha^4+\alpha^3-\alpha+1$ καὶ ὑπ. 0. ζ΄) Πηλ. $\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2$. ὑπ. $4\alpha\beta^3-2\beta^4$. η΄) Θὰ διαιρέσωμεν $(\chi^6-6\chi^5+1):$ $(\chi^2-6\chi+1)$ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλίκον $\chi^4-4\chi^3-9\chi^2-14\chi-19$ καὶ ὑπ. $-24\chi+20$.

Σημείωσις. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν μὲ τὰ πολυώνυμα ὡς ἐδόθησαν, ἤτοι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α, θὰ ἴδωμεν ὅτι αὐτη δὲν θὰ τελειώσῃ ποτὲ καὶ θὰ εὕρωμεν πηλίκον $1-4\chi-9\chi^2-14\chi^3\ldots$, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δυνάμεις τοῦ χ βαίνουν συνεχῶς αὐξανόμεναι. Διὰ τοῦτο προτιμότερον εἶναι εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμων νὰ διατάσσωμεν ταῦτα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, διότι οὕτως ἡ ἀτελὴς διαίρεσις διακόπτεται ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (§ 75).

θ΄) Πηλ. $\chi^3-4\chi^2+11\chi-24$. ὑπ.0.

127. α΄) Πηλ. $\chi^{2\nu}-2\chi^\nu\psi^\nu+\psi^{2\nu}$. ὑπ.0. β΄) Π. $3\alpha^{2\chi}-\alpha^\chi+2$ ὑπ.0. γ΄) Π. $\chi^{3\nu}+\chi^{2\nu}\psi^\rho+\chi^\nu\psi^{2\rho}+\psi^{3\rho}$ ὑπ. 0. δ΄) Π. $\alpha^{2\mu}-2\alpha^\mu\chi^\nu+4\chi^{2\nu}$ ὑπ. 0. ε΄) Π. $\chi^\nu\psi^\nu-7\chi^{\nu-1}\psi^{2\nu}$ ὑπ. 0.

128. Ἔστω μ, ν καὶ ρ οἱ βαθμοὶ τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου ἀντιστοίχως, τελείας διαιρέσεως. Ἀλλ᾽ ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου, ὅστις εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον εἶναι (§ 67) ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Ὥστε εἶναι $\mu=\nu+\rho$ καὶ $\rho=\mu-\nu$. Ἀλλ᾽ ἀληθεύει τοῦτο καὶ εἰς τὴν ἀτελῆ διαίρεσιν διότι τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ προστίθεται εἰς τὸ ὡς ἄνω γινόμενον, δὲν μεταβάλλει τὸν βαθμὸν τούτου. Π. δ. εἰς τὴν διαίρεσιν τῆς § 75, τὸ πηλίκον εἶναι 2ου βαθμοῦ ὅστις εἶναι διαφορὰ τοῦ 4ου βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ 2ου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ὁμοίως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. α΄) τῆς ἀσκήσεως 126 εἶναι 2ου βαθμοῦ, ὁ δὲ βαθμὸς τοῦ διαιρέτου εἶναι 3 καὶ ὁ τοῦ διαιρέτου 1. Ὁμοίως τῆς ἰδίας ἀσκήσεως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως. η΄) εἶναι βαθμοῦ 4ου=6ουβ.—2ουβαθ.

128. (σελὶς 82).—α΄) $2.2^2+2-9=1$ β΄) $(-2)^2+6(-2)+7=-1$. γ΄) $(0{,}5)^4+17(0{,}5)^3-68.(0{,}5)-33=-64{,}8125$. δ΄) 1) τῆς $(27\chi^3+1):$ $:(3\chi+1)$ ὑπ. $27.\left(-\frac{1}{3}\right)^3+1=-1+1=0$. 2) τῆς $(27\chi^3+1):(3\chi-1)$, ὑπ. $27.\left(\frac{1}{3}\right)^3+1=2$ 3) τῆς $(27\chi^3-1):(3\chi+1)$ ὑπ. $27.\left(-\frac{1}{3}\right)^3-1=$

$=-2$. 4) τῆς $(27\chi^3-1):(3\chi-1)$ ὑπ. $27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3-1=0$.

129. α΄) $81\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^4-256=81\cdot\frac{256}{81}-256=0$. β΄) Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ἄσκησιν 128, δ΄) εὑρίσκομεν 1) $8\cdot\left(-\frac{\beta}{2}\right)^3-\beta^3=0$. 2) $8\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+$ $+\beta^3=2\beta^3$. 3) $8\cdot\left(-\frac{\beta}{2}\right)^3-\beta^3=-2\beta^3$ καὶ 4) $8\cdot\left(\frac{\beta}{2}\right)^3-\beta^3=0$.

γ΄) $32\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^5+343=-243+343=100$. δ΄) $64\left(-\frac{3}{2}\right)^6-$ $-1=+729-1=728$. ε΄) $(-1)^9+1=0$. στ΄) Ἐὰν θέσωμεν $\chi=\alpha^2$ καὶ $\psi=\beta^2$, ἡ δοθεῖσα διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\chi^5+\psi^5):(\chi+\psi)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\psi)^5+\psi^5=0$. ζ) Ἐδῶ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\chi^3-\psi^3):(\chi-\psi)$, τῆς ὁποίας τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\psi^3-\psi^3=0$.

η΄) Ἐὰν θέσωμεν $\varphi=\chi^3$ καὶ $\omega=\psi^3$, ἡ δοθεῖσα διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^5+\omega^5):(\varphi+\omega)$, τῆς ὁποίας τὸ ὑπόλοιπον εἶναι:

$$(-\omega)^5+\omega^5=0.$$

θ΄) Ἐὰν θέσωμεν $\chi^8=\varphi$ καὶ $\psi^2=\omega$, ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^5+\omega^5):(\varphi+\omega)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\omega)^5+\omega^5=0$.

ι΄) Ἡ διαίρεσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $(\varphi^3-\omega^3):(\varphi-\omega)$, ἧς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $\omega^3-\omega^3=0$.

130. α΄) $(1)^{\mu\nu}-1=1-1=0$. β΄) Ἐὰν θέσωμεν $\mu^2=\chi$ καὶ $\nu^3=\psi$, ἔχομεν $(\chi^4-\psi^4):(\chi-\psi)$ καὶ ὑπ. $=\psi^4-\psi^4=0$. γ΄) Εἶναι ὑπ. $=$ $=(-\beta)^{2\nu+\mu}+\beta^{2\nu+\mu}=0$ ἐὰν μ περιττὸς καὶ $2\beta^{2\nu+\mu}$ ἐὰν μ ἄρτιος. δ΄) Ἐὰν θέσωμεν $\psi^3=\chi$, ἔχομεν $(\chi^4-\omega^4):(\chi+\omega)$ καὶ ὑπ. $=(-\omega)^4-$ $-\omega^4=0$. ε΄) Εἶναι ὑπ. $=(1)^{4\pi}-1=0$.

131. α΄) Πηλ. $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. ὑπ. 0. β΄) Π. $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ ὑπ. 0. γ΄) Πηλ. $\alpha-\beta$. ὑπ. 0.

132. α΄) $(\alpha+\beta)^3:(\alpha+\beta)^2=\alpha+\beta$. ὑπ. 0. β΄) $(\alpha-\beta)^3:(\alpha-\beta)^2=$ $=\alpha-\beta$. ὑπ. 0.

133. α΄) Πηλ. $\chi^5-\chi^4\psi+\chi^3\psi^2-\chi^2\psi^3+\chi\psi^4-\psi^5$. ὑπ. $2\psi^6$.
β΄) Πηλ. $\chi^5+\chi^4\psi+\chi^3\psi^2+\chi^2\psi^3+\chi\psi^4+\psi^5$. ὑπ. 0.
γ΄) Πηλ. $\chi^2-\chi\psi+\psi^2$. ὑπ. 0. δ΄) Πηλ. $\chi^4-\chi^3\psi+\chi^2\psi^2-\chi\psi^3+\psi^4$. ὑπ. 0.
ε΄) Πηλ. $\chi^6-\chi^5+\chi^4-\chi^3+\chi^2-1$. ὑπ. 0. στ΄) Πηλ. $\chi^2+\chi\alpha+\alpha^2$. Ὑπ. $2\alpha^3$.

134. α') Τῆς $(\chi^3-\alpha^3):(\chi-\alpha)$, β') τῆς $(\chi^3+1):(\chi+1)$, γ') τῆς $(\chi^4-1):(\chi-1)$, δ') τῆς $(\alpha^4-\beta^4):(\alpha-\beta)$, ε') τῆς $(\chi^5+\alpha^5):(\chi+\alpha)$.

135. Πρὸς εὐκολίαν ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς $\nu=1$, ὁπότε ἔχομεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha^5-\beta^5):(\alpha-\beta)$, ἧς τὸ πηλίκον εἶναι:
$\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4$. Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι:

$$\alpha^{4\nu}+\alpha^{3\nu}.\beta^{\nu}+\alpha^{2\nu}.\beta^{2\nu}+\alpha^{\nu}.\beta^{3\nu}+\beta^{4\nu}.$$

136. Ὁ ρ, ὡς θετικὸς ἀριθμὸς καὶ περιττός, ἔχει τὴν μορφὴν $\rho=2\nu+1$. Ὥστε ἔχομεν τὴν διαίρεσιν: $(7^{2\nu+1}+1^{2\nu+1}):(7+1)$, ἥτις εἶναι τελεία, διότι $(-1)^{2\nu+1}+1=-1+1=0$, ἧς τὸ πηλίκον εἶναι:

$$7^{2\nu}-7^{2\nu-1}+7^{2\nu-2}-...-7.1^{2\nu-1}+1^{2\nu}.$$

Ὁμοίως ἡ διαίρεσις $(11^{\rho}+1):12$, ὅπου $\rho=2\nu+1$, γράφεται: $(11^{2\nu+1}+1):(11+1)$. Εἶναι δὲ αὕτη τελεία καὶ δίδει πηλίκον $11^{2\nu}-11^{2\nu-1}+11^{2\nu-2}-\ldots+1$.

137. Ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $(\alpha+\beta+\gamma)^{\mu}-\alpha^{\mu}-\beta^{\mu}-\gamma^{\mu}$ ἀντὶ τοῦ α θέσωμεν $-\beta$, ἔχομεν $(-\beta+\beta+\gamma)^{\mu}-(-\beta)^{\mu}-\beta^{\mu}-\gamma^{\mu}$, ἤτοι: $\gamma^{\mu}-(-\beta)^{\mu}-\beta^{\mu}-\gamma^{\mu}$. Ἀλλὰ ὅταν ὁ μ εἶναι περιττὸς καὶ θετικὸς ἀριθμός, ἤτοι ὅταν $\mu=2\nu+1$, θὰ εἶναι $(-\beta)^{2\nu+1}=-\beta^{2\nu+1}$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου δι' $\alpha=-\beta$ εἶναι $\gamma^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}-\beta^{2\nu+1}-\gamma^{2\nu+1}=0$, ἤτοι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι διαιρετὸν δι' $\alpha+\beta$. (§ 78). Ἐνῷ ἐὰν $\mu=2\nu$, ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου δι' $\alpha=-\beta$ εἶναι $-2\beta^{\nu+1}$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν μ περιττός, τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν δι' $\alpha+\gamma$ καὶ διὰ $\beta+\gamma$, διότι τοῦτο γίνεται 0, ὅταν ἀντὶ τοῦ α ἢ ἀντὶ τοῦ β θέσωμεν $-\gamma$.

138. 1) Ἔστω ὅτι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(\chi)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(\chi)$. Τότε θὰ εἶναι:

$$\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma).\pi(\chi).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\Pi(\alpha)=0$, ἕπεται ὅτι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$ (§78). Ὁμοίως ἐπειδὴ $\Pi(\beta)=0$ ἢ $\Pi(\gamma)=0$, τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$ ἢ $\chi-\gamma$.

2) Ἀντιστρόφως δέ· ἔστω ὅτι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ $\chi-\alpha$, $\chi-\beta$, $\chi-\gamma$. Ἔστω δ' ἐπίσης ὅτι $\Pi(\chi):(\chi-\alpha)=\pi(\chi)$ ὅπου $\pi(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον.

Ἀλλὰ τότε εἶναι $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha).\pi(\chi)$ (1). Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ὥστε εἶναι $\Pi(\beta)=0$, ἤτοι $(\beta-\alpha)\pi(\beta)=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\beta\neq\alpha$, ἤτοι $\beta-\alpha\neq0$, εἶναι $\pi(\beta)=0$. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι τὸ $\pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἐὰν $\pi(\chi):(\chi-\beta)=\pi_1(\chi)$, ὅπου $\pi_1(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον, ἔχομεν $\pi(\chi)=(\chi-\beta)\pi_1(\chi)$, ὁπότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta).\pi_1(\chi)$. (2). Ἀλλὰ τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $\chi-\gamma$. ..... εἶναι $\Pi(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\pi_1(\gamma)=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\gamma-\alpha\neq 0$ καὶ $\gamma-\beta\neq 0$, ἕπεται $\pi_1(\gamma)=0$. Ἑπομένως τὸ $\pi_1(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\gamma$. Ἐὰν δὲ $\pi_1(\chi):(\chi-\gamma)=\pi_2(\chi)$, ὅπου $\pi_2(\chi)$ ἀκέραιον πολυώνυμον, εἶναι $\pi_1(\chi)=(\chi-\gamma).\pi_2(\chi)$, ὁπότε ἡ ἰσότης (2) δίδει τὴν ἰσότητα $\Pi(\chi)=(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma).\pi_2(\chi)$, ὥστε: $\Pi(\chi):(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)=\pi_2(\chi)$, ἤτοι τὸ $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν πρότασις ἀπεδείχθη.

Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον

Ἀσκήσεις.—*139.* α') $2\alpha(4\alpha\beta-3\alpha^2+2\beta)$ β') $2\psi(2\alpha\chi^2-41\psi-2\chi)$
γ') $2\alpha^2\beta^2\gamma^2(4\alpha-2\beta\gamma+\gamma)$ δ') $5\alpha^3(3\chi-2\psi+\omega)$
ε') $\alpha^2\gamma\psi^2(\alpha\psi+2\gamma-\psi^2)$ στ') $\beta\gamma^2(3\beta^2\gamma+2\beta-6\gamma)$
ζ') $\chi^2\psi^2\omega(\omega-\chi\psi\omega^2+\psi)$ η') $\alpha\beta^2\gamma(\gamma-2\alpha+3\alpha\beta\gamma)$
θ') $6\alpha^2(1-2\alpha)$ ι') $\chi^2(3-7\chi^2)$ ια') $8\chi\psi(\chi\psi+2\omega-3\chi\psi\omega^2)$.

140. α') $\alpha\chi(\chi+\alpha)+(\chi+\alpha)=(\chi+\alpha)(\alpha\chi+1)$
β') $\chi^2(\chi-\omega)-\psi^2(\chi-\omega)=(\chi-\omega)(\chi^2-\psi^2)=(\chi-\omega)(\chi+\psi)(\chi-\psi)$
γ') $\alpha\beta(\chi-\psi)+\gamma\delta(\chi-\psi)=(\chi-\psi)(\alpha\beta+\gamma\delta)$
δ') $\chi^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\chi^2+1)$
ε') $\gamma(\alpha^2\pm\beta^2)+\delta(\alpha^2\pm\beta^2)=(\alpha^2\pm\beta^2)(\gamma+\delta)\left\{\begin{array}{l}(\alpha^2+\beta^2)(\gamma+\delta)\\(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)\end{array}\right.$
στ') $\gamma^2(\alpha\pm\beta)+\alpha\gamma(\alpha\pm\beta)=\gamma(\alpha\pm\beta)(\gamma+\alpha)$
ζ') $(1+\gamma)-\gamma^2\chi\psi(1+\gamma)=(1+\gamma)(1-\gamma^2\chi\psi)$
η') $3\chi^2(2\chi+3\psi)-5\psi^3(2\chi+3\psi)=(2\chi+3\psi)(3\chi^2-5\psi^3)$
θ') $2\chi(\chi-\psi)-6\alpha(\chi-\psi)=2(\chi-\psi)(\chi-3\alpha)$
ι') $(\chi^3-1)+2(\chi^2-1)=(\chi^2+\chi+1)(\chi-1)+2(\chi+1)(\chi-1)=$
$=(\chi-1)(\chi^2+\chi+1+2\chi+2)=(\chi-1)(\chi^2+3\chi+3)$
ια') $\chi(\alpha+\beta-\gamma)+\psi(\alpha+\beta-\gamma)=(\alpha+\beta-\gamma)(\chi+\psi)$
ιβ') $(\alpha^5+1)+2(\alpha^3+1)=(\alpha+1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)+2(\alpha+1)(\alpha^2+$
$+\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha^4+\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+3)$.

141. α') $(\mu\nu\pm 8\alpha^2)^2$, β') $(\alpha\beta^2\gamma^3\pm\chi^8)^2$, γ') $(\chi^3\pm 17)^2$,
δ') $[(\chi+\psi)-2\omega)]^2$, ε') $[(\alpha-\beta)-3\gamma^3]^2$,
στ') $(\varphi+\omega^2)^2+8(\varphi+\omega^2)=(\varphi+\omega^2)(\varphi+\omega^2+8)$.

142. α') $(\alpha\beta-1)(\alpha\beta+1)$ β') $(2\alpha-7\beta)(2\alpha+7\beta)$ γ') $(11\alpha-6\beta)(11\alpha+6\beta)$
δ') $(7^{14}-\psi^6)(7^{14}+\psi^6)=(7^7-\psi^3)(7^7+\psi^3)(7^{14}+\psi^6)$
ε') $(9\alpha^2\beta-\gamma^2)(9\alpha^2\beta+\gamma^2)$ στ') $\gamma(2\alpha-3\gamma)(2\alpha+3\gamma)$
ζ') $5\alpha\beta^2.(2\alpha-1)(2\alpha+1)$ η') $3\alpha^3(\alpha-2\gamma)(\alpha+2\gamma)$
θ') $(1-20\chi^2)(1+20\chi^2)$ ι') $(2\chi^8-\psi^{10})(2\chi^8+\psi^{10})$
ια') $(3\chi-\alpha^3)(3\chi+\alpha^3)$ ιβ') $\chi(4\chi^8-3\psi^8)(4\chi^8+3\psi^8)$.

143. α') $\beta^2-(\chi^2-4\alpha\chi+4\alpha^2)=\beta^2-(\chi-2\alpha)^2=(\beta+\chi-2\alpha)(\beta-\chi+2\alpha)$
β') $\alpha^2-(\chi^2+2\chi\psi+\psi^2)=\alpha^2-(\chi+\psi)^2=(\alpha+\chi+\psi)(\alpha-\chi-\psi)$
γ') $(\alpha+\beta)^2-(4\alpha\beta)^2=(\alpha+\beta-4\alpha\beta)(\alpha+\beta+4\alpha\beta)$
δ') $4\chi^2-(9\alpha^2-6\alpha+1)=4\chi^2-(3\alpha-1)^2=(2\chi+3\alpha-1)(2\chi-3\alpha+1)$
ε') $\chi^4-(\chi^2+2\chi+1)=\chi^4-(\chi+1)^2=(\chi^2+\chi+1)(\chi^2-\chi-1)$

στ') $\alpha^2-(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)=\alpha^2-(\chi-\psi)^2=(\alpha+\chi-\psi)(\alpha-\chi+\psi)$

ζ') $(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu})^2-\gamma^{2\nu}=(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}+\gamma^{\nu})(\alpha^{2\nu}+\beta^{2\nu}-\gamma^{\nu})$

η') $(\chi^{\nu}-\psi^{\nu})^2-4\omega^{2\nu}=(\chi^{\nu}-\psi^{\nu}+2\omega^{\nu})(\chi^{\nu}-\psi^{\nu}-2\omega^{\nu})$

θ') $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

ι') $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-(\chi^2+6\chi\psi+9\psi^2)=(\alpha+\beta)^2-(\chi+3\psi)^2=$ $=(\alpha+\beta+\chi+3\psi)(\alpha+\beta-\chi-3\psi)$

ια') $(\alpha-\delta)^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma)$

ιβ') $[2(\alpha\delta+\beta\gamma)+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2][2(\alpha\delta+\beta\gamma)-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2]=$ $=[(\alpha+\delta)^2-(\beta-\gamma)^2].[(\beta+\gamma)^2-(\alpha-\delta)^2]=$ $=(\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)(\alpha-\delta+\beta+\gamma)(-\alpha+\delta+\beta+\gamma)$.

144. α') $9\alpha^4+30\alpha^2\beta^2+25\beta^4-4\alpha^2\beta^2=(3\alpha^2+5\beta^2)-(2\alpha\beta)^2=$ $=(3\alpha^2+5\beta^2+2\alpha\beta)(3\alpha^2+5\beta^2-2\alpha\beta)$.

β') $4\chi^4-12\chi^2\psi^2+9\psi^4-9\chi^2\psi^2=(2\chi^2-3\psi^2)^2-(3\chi\psi)^2=$ $=(2\chi^2-3\psi^2+3\chi\psi)(2\chi^2-3\psi^2-3\chi\psi)$.

γ') $\lambda^4+2\lambda^2+1-\lambda^2=(\lambda^2+1)^2-\lambda^2=(\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$.

δ') $4\alpha^4-4\alpha^2+1-9\alpha^2=(2\alpha^2-1)^2-(3\alpha)^2=(2\alpha^2+3\alpha-1)(2\alpha^2-3\alpha-1)$.

ε') $4\chi^4-12\chi^2\psi^2+9\psi^4-25\chi^2\psi^2=(2\chi^2-3\psi^2)^2-25\chi^2\psi^2=(2\chi^2-3\psi^2+5\chi\psi)(2\chi^2-3\psi^2-5\chi\psi)$.

στ') $\alpha^8+\beta^4+2\alpha^4\beta^2-2\alpha^4\beta^2=(\alpha^4+\beta^2)^2-(\sqrt{2}\alpha^2\beta)^2=$ $=(\alpha^4+\beta^2+\alpha^2\beta\sqrt{2})(\alpha^4+\beta^2-\alpha^2\beta\sqrt{2})$.

ζ') $\alpha^4+\psi^4+2\alpha^2\psi^2-\alpha^2\psi^2=(\alpha^2+\psi^2)^2-\alpha^2\psi^2=(\alpha^2+\psi^2+\alpha\psi)$ $(\alpha^2+\psi^2-\alpha\psi)$.

η') $25\chi^4+40\chi^2\psi^2+16\psi^4-9\chi^2\psi^2=(5\chi^2+4\psi^2)^2-9\chi^2\psi^2=$ $=(5\chi^2+4\psi^2+3\chi\psi)(5\chi^2+4\psi^2-3\chi\psi)$.

θ') $\alpha^4+4\beta^4+4\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+2\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=$ $=(\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta)$.

ι') $9\alpha^8-6\alpha^4+1-9\alpha^4=(3\alpha^4-1)^2-9\alpha^4=$ $=(3\alpha^4+3\alpha^2-1)(3\alpha^4-3\alpha^2-1)$.

ια') $16\alpha^4-8\alpha^2+1-9\alpha^2=(4\alpha^2-1)^2-9\alpha^2=$ $=(4\alpha^2+3\alpha-1)(4\alpha^2-3\alpha-1)$.

ιβ') $16\lambda^4+\gamma^4+8\lambda^2\gamma^2-8\lambda^2\gamma^2=(4\lambda^2+\gamma^2)-(\lambda\gamma\sqrt{8})^2=$ $=(4\lambda^2+\gamma^2+\lambda\gamma\sqrt{8})(4\lambda^2+\gamma^2-\lambda\gamma\sqrt{8})$.

ιγ') Ἐπειδὴ $17=30+(-13)$ καὶ $-390=30.(-13)$, ἔχομεν: $\alpha^2+17\alpha-390=\alpha^2+30\alpha-13\alpha-30.13=\alpha(\alpha-13)+30(\alpha-13)=(\alpha-13)(\alpha+30)$.

ιδ') Ἐπειδὴ $-7\beta=(-5\beta)+(-2\beta)$ καὶ $10\beta^2=(-5\beta).(-2\beta)$ ἔχομεν $\alpha^2-5\alpha\beta-2\alpha\beta+(-5\alpha\beta)(-2\alpha\beta)=\alpha(\alpha-2\beta)-5\beta(\alpha-2\beta)=$ $=(\alpha-2\beta)(\alpha-5\beta)$.

145. α') Ἔχομεν $4.\left(\chi^2+\frac{13\chi}{4}+\frac{3}{4}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}=3.\frac{1}{4}$ εἶναι $\chi^2+\frac{13\chi}{4}+\frac{3}{4}=\chi^2+3\chi+\frac{\chi}{4}+$

$$+3\cdot\frac{1}{4}=\chi\left(\chi+\frac{1}{4}\right)+3\left(\chi+\frac{1}{4}\right)=(\chi+3)\left(\chi+\frac{1}{4}\right)=$$

$=\dfrac{(\chi+3)(4\chi+1)}{4}$. Ὥστε εἶναι $4\chi^2+13\chi+3=4.\dfrac{(\chi+3)(4\chi+1)}{4}=(\chi+3)(4\chi+1)$.

β΄) Ἐπειδὴ $6\chi^2+17\chi+12=6.(\chi^2+\dfrac{17}{6}\chi+2)$ καὶ $\dfrac{17}{6}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}$

καὶ $2=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}$, εἶναι $\chi^2+\dfrac{17}{6}\chi+2=\chi^2+\dfrac{3}{2}\chi+\dfrac{4}{3}\chi+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=$

$$=\chi\left(\chi+\frac{4}{3}\right)+\frac{3}{2}\left(\chi+\frac{4}{3}\right)=\left(\chi+\frac{4}{3}\right)\left(\chi+\frac{3}{2}\right)=\frac{(3\chi+4)(2\chi+3)}{6}.$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις τρέπεται εἰς τὸ γινόμενον $(3\chi+4)(2\chi+3)$.

γ΄) Εἶναι $11\left(\alpha^2-\dfrac{23}{11}\alpha\beta+\dfrac{2}{11}\beta^2\right)$ καὶ $-\dfrac{23}{11}\beta=(-2\beta)+$

$+\left(-\dfrac{1}{11}\beta\right)$, $\dfrac{1}{11}\beta^2=(-2\beta).\left(-\dfrac{1}{11}\beta\right)$. Ὅθεν:

$$11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2=11.(\alpha-2\beta).\left(\alpha-\frac{\beta}{11}\right)=(\alpha-2\beta)(11\alpha-\beta)$$

δ΄) $\chi^3+64=\chi^3+4^3$. Ἐπειδὴ δὲ $(\chi^3+4^3):(\chi+4)=\chi^2-4\chi+16$ ἕπεται ὅτι $\chi^3+64=(\chi^2-4\chi+16)(\chi+4)$

Ὁμοίως εἶναι $\chi^3-64=\chi^3-4^3=(\chi-4)(\chi^2+4\chi+16)$.

ε΄) Εἶναι $343+\chi^3=7^3+\chi^3=(7+\chi)(7^2-7\chi+\chi^2)$

καὶ $343-\chi^3=7^3-\chi^3=\alpha^3(7-\chi)(7^2+7\chi+\chi^2)$

στ΄) Εἶναι $\alpha^3\beta^3+7^3=(\alpha\beta+7)(\alpha^2\beta^2-7\alpha\beta+49)$

καὶ $\alpha^3\beta^3-7^3=(\alpha\beta-7)(\alpha^2\beta^2+7\alpha\beta+49)$

ζ΄) Εἶναι $8\alpha^3+\beta^6=(2\alpha)^3+(\beta^2)^3=(2\alpha+\beta^2)(4\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^4)$

καὶ $8\alpha^3-\beta^6=(2\alpha)^3-(\beta^2)^3=(2\alpha-\beta^2)(4\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^4)$

η΄) Εἶναι $216\mu^3+\nu^6=(6\mu)^3+(\nu^2)^3=(6\mu+\nu^2)(36\mu^2-6\mu\nu^2+\nu^4)$

καὶ $216\mu^3-\nu^6=(6\mu)^6-(\nu^2)^3=(6\mu-\nu^2)(36\mu^2+6\mu\nu^2+\nu^4)$

146. α΄) Ἐπειδὴ $(\chi+\psi)^2-1=(\chi+\psi+1)(\chi+\psi-1)$, εἶναι $(\chi+\psi+1)(\chi+\psi-1)-\chi\psi(\chi+\psi+1)=(\chi+\psi+1)(\chi+\psi-1-\chi\psi)=$
$=(\chi+\psi+1)[\chi(1-\psi)-(1-\psi)]=(\chi+\psi+1)(1-\psi)(\chi-1)$.

β΄) $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=$
$=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3$

γ΄) Ἐπειδὴ $\chi^2-4=(\chi+2)(\chi-2)$, ἔχομεν:
$(\chi+2)^2(\chi-2)^2-(3\chi-2)(\chi+2)^2=(\chi+2)^2[(\chi-2)^2-$
$-(3\chi-2)]=(\chi+2)^2(\chi^2-7\chi+6)$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $-7=(-1)+(-6)$ καὶ $6=(-1).(-6)$.

Ὥστε $\chi^2-7\chi+6=(\chi-1)(\chi-6)$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi+2)^2(\chi-1)(\chi-6)$.

δ') $\alpha^2\gamma(\gamma-1)+\beta(\gamma-1)=(\gamma-1)(\alpha^2\gamma+\beta)$.

ε') $2\chi+\chi^2-2\psi-\psi^2=(\chi-\psi)(\chi+\psi)+2(\chi-\psi)= =(\chi-\psi)(\chi+\psi+2)$.

στ') $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)= =(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta-1)=(\alpha-\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-1)= =(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-1]=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-1)$.

ζ') $(\chi^2+4\chi+4)-(4\alpha^2-4\alpha\nu+\nu^2)=(\chi+2)^2-(2\alpha-\nu)^2= =(\chi+2+2\alpha-\nu)(\chi+2-2\alpha+\nu)$.

η') $(\chi^4\psi^4-4\chi^2\psi^2+4)-(4\chi^2-4\chi\psi+\psi^2)=(\chi^2\psi^2-2)^2-(2\chi-\psi)^2= =(\chi^2\psi^2-2+2\chi-\psi)(\chi^2\psi^2-2-2\chi+\psi)$.

θ') $\psi(\chi^2-\psi^2)-3\chi(\chi^2-\psi^2)=(\chi-\psi)(\chi+\psi)(\psi-3\chi)$.

ι') $\alpha\beta\chi^2+\alpha\beta+\alpha^2\chi+\beta^2\chi=\beta\chi(\alpha\chi+\beta)+\alpha(\alpha\chi+\beta)= (\alpha\chi+\beta)(\alpha+\beta\chi)$

ια') $\pi\nu\mu^2+\pi\nu+\mu\pi^2+\mu\nu^2=\mu\pi(\nu\mu+\pi)+\nu(\mu\nu+\pi)= =(\mu\nu+\pi)(\mu\pi+\nu)$.

Μ.Κ.Δ. καὶ Ε.Κ.Π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Κανόνες τῆς ἀριθμητικῆς. 1) Ὁ μ.κ.δ. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει τοὺς κοινοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἕκαστον μὲ τὸν ἐλάχιστον ἐκθέτην. 2) Τὸ ε.κ.π. δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν (κοινοὺς καὶ μὴ κοινούς) *καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μέγιστον ἐκθέτην.*

Ἀσκήσεις.—*147.* α') $121=11^2, 168=2^3.3.7$. Ὥστε μ.κ.δ. $=\alpha^2$ β') 4χ γ') $\chi-1$ δ') 1 ε') Ἐπειδὴ $\chi^3+2\chi^2-3\chi=\chi(\chi^2+2\chi-3)= =\chi(\chi-1)(\chi+3)$ καὶ $2\chi^3+5\chi^2-3\chi=\chi(2\chi^2+5\chi-3)=\chi(2\chi-1)(\chi+3)$ εἶναι μ.κ.δ. $=\chi(\chi+3)$. στ') $1-\chi$. ζ') Ἐπειδὴ $\chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^3\chi+\alpha^4= \chi^3(\chi+\alpha)+\alpha^3(\chi+\alpha)=(\chi+\alpha)(\chi^3+\alpha^3)=(\chi+\alpha)(\chi+\alpha)(\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2)$ καὶ $\chi^4+\alpha^2\chi^2+\alpha^4=\chi^4+2\alpha^2\chi^2+\alpha^4-\alpha^2\chi^2=(\chi^2+\alpha^2)^2-\alpha^2\chi^2=(\chi^2+\alpha^2+\alpha\chi)$. $(\chi^2+\alpha^2-\alpha\chi)$ ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. εἶναι $\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2$.

148. α') $18.\chi^2\psi^2.(\alpha+2\beta)^2.(\alpha-2\beta)^2$. β') Εἶναι $3\chi^4+3\chi=3\chi(\chi^3+1)= =3\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$, $5\chi^3-5\chi=5\chi(\chi^2-1)=5\chi(\chi+1)(\chi-1)$ καὶ $10\chi^2+10\chi=2.5.\chi(\chi+1)$. Ὥστε ε.κ.π. $=30\chi(\chi+1)(\chi-1)(\chi^2-\chi+1)$. γ') Ἐπειδὴ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ καὶ $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, εἶναι ε.κ.π. $=42\alpha^4\beta^2(\alpha-\beta)^3.(\alpha+\beta).(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$. δ') Εἶναι $\mu^3\nu-\mu\nu^3= =\mu\nu(\mu-\nu)(\mu+\nu)$, $\mu^2+\mu\nu-2\nu^2=(\mu-\nu)(\mu+2\nu)$ καὶ $\mu^2-\mu\nu-2\nu^2= (\mu+\nu)(\mu-2\nu)$. Ὅθεν ε.κ.π.$=\mu\nu(\mu-\nu)(\mu+\nu)(\mu-2\nu)(\mu+2\nu)= =\mu\nu(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-4\nu^2)$. ε') Εἶναι $\chi^4-(\pi^2+1)\chi^2+\pi^2=(\chi^2-1)(\chi^2-\pi^2)$ καὶ $\chi^4-(\pi+1)^2\chi^2+2(\pi+1)\pi\chi-\pi^2=\chi^4-[(\pi+1)^2\chi^2-2(\pi+1)\pi\chi+\pi^2)]= =\chi^4-[(\pi+1)\chi-\pi]^2=[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi].[\chi^2-(\pi+1)\chi+\pi]=$

$=[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi].\ (\chi-\pi)(\chi-1)$. Ὅθεν ἐ.κ.π. $=(\chi-1)(\chi-\pi)(\chi+1)$ $(\chi+\pi)[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi]=-(\chi^2-1)(\chi^2-\pi^2)[\chi^2+(\pi+1)\chi-\pi]$.

149. α') $\frac{8\alpha}{9}$ β') 5γ, γ') $\frac{46}{39\chi\psi^3}$, δ') $\frac{2\psi(49\chi-12\psi^2)}{8\chi(3\chi-4\psi)}=\frac{\psi(49\chi-12\psi^2)}{4\chi(3\chi-4\psi)}$

ε') $\frac{(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)}{(\chi-\psi)(\chi+\psi)}=\frac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\chi+\psi}$, στ') $\frac{(\chi-\psi)(\chi+\psi)}{(\chi+\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)}=$

$=\frac{\chi-\psi}{\chi^2-\chi\psi+\psi^2}$, ζ') $\frac{\chi^4-9^4}{\chi^2-9^2}=\frac{(\chi^2-9^2)(\chi^2+9^2)}{\chi^2-9^2}=\chi^2+81$,

η') $\frac{\gamma(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)}{2\delta\varrho(\alpha\beta+9\beta-5\gamma)}=\frac{\gamma}{2\delta\varrho}$, θ') $\frac{\alpha(\chi+\psi)+\beta(\chi+\psi)}{\alpha(2\chi+\psi)+\beta(2\chi+\psi)}=$

$=\frac{(\chi+\psi)(\alpha+\beta)}{(2\chi+\psi)(\alpha+\beta)}=\frac{\chi+\psi}{2\chi+\psi}$,

ι') $\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}-\frac{\gamma\alpha(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}=$

$=\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\gamma\alpha(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}=\frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha(\alpha\beta-\beta^2-\alpha\gamma+\gamma^2)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$

ἀλλ' ὁ ἀριθμητὴς ἰσοῦται μὲ $\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha[\alpha(\beta-\gamma)-(\beta^2-\gamma^2)]=$
$=\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha.(\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)$
ὥστε τὸ δοθὲν ἰσοῦται μὲ 1.

ια') $\frac{\alpha[(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta]+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta+2\beta)+\beta(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)^2+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)}=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}=$
$=\alpha+\beta$.

ιβ') Ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+1)^3$. Ὁ ἀριθμητὴς ἐπειδὴ γίνεται 0 διὰ $\chi=-1$ διαιρεῖται διὰ $\chi+1$ καὶ δίδει πηλίκον $\chi^2+\chi+1$. Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μέ:

$$\frac{(\chi+1)(\chi^2+\chi+1)}{(\chi+1)^3}=\frac{\chi^2+\chi+1}{(\chi+1)^2}.$$

150. α') $\frac{\chi}{\chi(\chi^2-1)}$, $\frac{\chi^2-1}{\chi(\chi^2-1)}$, $\frac{\chi(\chi+1)}{\chi(\chi^2-1)}$, $\frac{\chi(\chi-1)}{\chi(\chi^2-1)}$. ἐ. κ. π. $\chi(\chi-1)(\chi+1)$.

β') $\frac{24\mu\chi^2\psi^2}{72\chi^4\psi^4}$, $\frac{9\nu\chi^3\psi}{72\chi^4\psi^4}$, $\frac{8\varrho\psi}{72\chi^4\psi^4}$, $\frac{18\chi^2}{72\chi^4\psi^4}$. ἐ.κ.π. $72\chi^4\psi^4$

γ') Ἐπειδὴ $\chi^2-4=(\chi-2)(\chi+2)$ καὶ $\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$, τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\chi-1)(\chi-2)(\chi+2)(\chi+1)(\chi-3)$. Ὅθεν:

$$\frac{\alpha^2(\chi+1)(\chi-3)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)},\ \frac{\alpha(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)},\ \frac{3(\chi^2-4)(\chi+1)}{(\chi^2-1)(\chi^2-4)(\chi-3)}.$$

Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$

Ἀσκήσεις.—*151.* α΄) Διὰ $\chi=0$, λαμβάνομεν τὴν ἀόριστον τιμὴν $\frac{0}{0}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\chi^3+2\chi^4}{\chi}=\frac{\chi^3(1+2\chi)}{\chi}=\chi^2(1+2\chi)$, ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅταν $\chi=0$ εἶναι 0.

β΄) Εἶναι $\frac{(\psi^2-\alpha^2)(\psi^2+\alpha^2)}{\psi^2-\alpha^2}=\psi^2+\alpha^2=2\alpha^2$, ὅταν $\psi=\alpha$.

γ΄) $\frac{(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)}{(\chi-\alpha)(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)}=\frac{\chi+\alpha}{\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2}=\frac{2}{3\alpha}$, ὅταν $\chi=\alpha$.

δ΄) $\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2+\beta^2=2\beta^2$, ὅταν $\alpha=\beta$.

ε΄) $\frac{(\chi+\alpha)^2(\chi-\alpha)}{(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)}=\chi+\alpha=2\alpha$, ὅταν $\chi=\alpha$.

στ΄) $\frac{(\chi^2-\alpha^2)(\chi^2+\alpha^2)}{\chi-\alpha}=(\chi+\alpha)(\chi^2+\alpha^2)=2\alpha.2\alpha^2=4\alpha^3$, ὅταν $\chi=\alpha$.

ζ΄) καὶ η΄) Εἶναι $\frac{3}{0}=\infty$ καὶ $\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{1}{0}=\infty$.

ϑ΄) (Ἡ λύσις τῆς ἀσκήσεως αὐτῆς προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν (Σελ. 162).

Οὕτω διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ εὑρίσκομεν:

$$\frac{\frac{\sqrt[3]{\alpha(\alpha-\beta)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}+1}{1+\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}$$

Ἀλλ' εἶναι $\frac{\sqrt[3]{\alpha(\alpha-\beta)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\sqrt[6]{\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta)^3}}=\sqrt[6]{\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3}}$.

Ἡ τιμὴ δὲ τοῦ ὑπορρίζου τούτου ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{\alpha^2}{0}=\infty$. Ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\alpha^2\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}}=\alpha^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$. Ἡ τιμὴ δὲ τοῦ ὑπορρίζου ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{0}{2\alpha}=0$. Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος ὅταν $\alpha=\beta$ εἶναι $\frac{\infty+1}{1}=\infty$.

Ἄλλος τρόπος. Θέτοντες εἰς τὴν παράστασιν $\alpha-\chi$ ἀντὶ β, ἔχομεν

$$\frac{\sqrt[3]{\alpha\chi}+\sqrt{(2\alpha-\chi)\chi}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)\chi}+\alpha^2\chi}=\frac{\sqrt[3]{\alpha}.\sqrt[3]{\chi}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}.\sqrt{\chi}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)}.\sqrt{\chi}+\alpha^2\sqrt{\chi}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\alpha}\,.\sqrt[6]{\chi^2}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}\,.\sqrt[6]{\chi^3}}{\sqrt{(2\alpha-\chi)}\,.\sqrt[6]{\chi^3}+\alpha^2\sqrt[6]{\chi^3}}=\frac{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{(2\alpha-\chi)}\,.\sqrt[6]{\chi}}{(\sqrt{2\alpha-\chi}\,.+\alpha^2)\,.\sqrt[6]{\chi}}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐθέσαμεν $\beta=\alpha-\chi$, ὅταν $\chi=0$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta$. Τότε ὅμως ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τελευταίου κλάσματος ἰσοῦται μὲ $\sqrt[3]{\beta}$, ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 0. Ὅθεν ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\frac{\sqrt[3]{\beta}}{0}=\infty$.

152. α΄) $$\frac{2(3\chi+17)+4(2\chi+5)-2(5\chi+12)}{(2\chi+5)(3\chi+17)}=\frac{4\chi+30}{(2\chi+5)(3\chi+17)}=\frac{38}{207}$$

καὶ $$\frac{2}{9}+\frac{4}{23}-\frac{44}{9.23}=\frac{46+36-44}{207}=\frac{38}{207}.$$

β΄) $$\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta(\beta-\gamma)+\alpha\gamma(\alpha-\gamma)+\beta\gamma(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=\frac{\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2-\alpha\gamma^2-\beta\gamma^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=\frac{19}{30}$$

καὶ $$\frac{7}{6}-\frac{2}{30}+\frac{14}{-30}=\frac{7}{6}-\frac{2}{30}-\frac{14}{30}=\frac{19}{30}$$

γ΄) $$\frac{1-2\chi}{3(\chi-1)^2}+\frac{1+\chi}{2(\chi^2+1)}+\frac{1}{6(\chi+1)}=$$

$$=\frac{2(1-2\chi)(\chi^2+1)(\chi+1)+3(1+\chi)(\chi-1)^2(\chi+1)+(\chi-1)^2(\chi^2+1)}{6(\chi-1)^2(\chi^2+1)(\chi+1)}=$$

$$=\frac{-4\chi^3-6\chi^2-4\chi+6}{6(\chi-1)(\chi^4-1)}=-\frac{58}{90}\ \text{καὶ}\ \frac{-3}{3}+\frac{3}{10}+\frac{1}{18}=-\frac{58}{90}.$$

δ΄) $$\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma(\alpha+\gamma)^2}-\frac{28}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma(\alpha-\gamma)}+\frac{\alpha-\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)}-\frac{28}{\alpha^2-\gamma^2}-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)+(\alpha-\gamma)^2-28\gamma-\alpha\gamma(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}=\frac{2\alpha^2-\alpha\gamma+\gamma^2-28\gamma^2-\alpha\gamma+\alpha\gamma^2}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}=$$

$$=\frac{2\alpha^2+\gamma(\gamma-28)-\alpha\gamma(1+\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}.$$

ε΄) $$\frac{\chi^3\psi-\chi\psi^3+\chi(\chi^3+\psi^3)-\psi(\chi^3-\psi^3)}{\chi^6-\psi^6}=\frac{\chi^4+\psi^4}{\chi^6-\psi^6}.$$

στ΄) $$\frac{\chi+2\psi-3\omega}{\chi+2\psi+3\omega}+\frac{-\chi+2\psi+3\omega}{\chi+2\psi+3\omega}+\omega-\chi=\frac{4\psi}{\chi+2\psi+3\omega}+\omega-\chi.$$

ζ') $\dfrac{\chi(\chi+\psi)(\chi^2+\psi^2)-\psi(\chi-\psi)(\chi^2+\psi^2)-\chi^2(\chi^2-\psi^2)-\psi^2(\chi^2+\psi^2)}{(\chi^2-\psi^2)(\chi^2+\psi^2)} =$

$= \dfrac{2\chi^2\psi^2}{\chi^4-\psi^4}$.

η') $\dfrac{2(\alpha^3+\beta^3)-2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^4-\beta^4)-2(\alpha^2-\beta^2)+2(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)}{2(\alpha^4-\beta^4)} =$

$= \dfrac{2\alpha^3+2\beta^3+4\alpha^2\beta^2-3\alpha^4-\beta^4}{2(\alpha^4-\beta^4)}$.

153. Εἶναι $\dfrac{[(\chi^2+4)+2\chi].[(\chi^2+4)-2\chi]}{(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4)-(\chi^2+2\chi+4)(\chi-2)} = \dfrac{(\chi^2+4)^2-4\chi^2}{(\chi^3+8)-(\chi^3-8)} =$

$= \dfrac{\chi^4+4\chi^2+16}{16}$.

154. α') $\dfrac{\alpha(\chi+\psi).\gamma(\chi^2-\psi^2)}{\gamma(\chi-\psi).\beta(\chi+\psi)} = \dfrac{\alpha(\chi+\psi)}{\beta}$

β') $\dfrac{3(\chi-\psi)^2(\chi^3+\psi^3)}{6(\chi+\psi)(\chi-\psi)} = \dfrac{3(\chi-\psi)^2.(\chi+\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)}{6(\chi+\psi)(\chi-\psi)} = \dfrac{(\chi-\psi)(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)}{2}$

γ') $\dfrac{4\chi^2\psi^2+\chi^4-2\chi^2\psi^2+\psi^4}{4\chi^2\psi^2} \cdot (\chi^2-\psi^2)^2 = \dfrac{(\chi^2+\psi^2)^2(\chi^2-\psi^2)^2}{4\chi^2\psi^2} = \dfrac{(\chi^4-\psi^4)^2}{4\chi^2\psi^2}$

δ') $\dfrac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} \cdot \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)}{(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)} = \dfrac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma-\delta)^2}$

ε') $\dfrac{\alpha(\alpha+2\beta).\beta(\alpha-2\beta)}{(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^2-4\beta^2)} = \dfrac{\alpha\beta(\alpha^2-4\beta^2)}{(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^2-4\beta^2)} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta^2}$

στ') $\dfrac{\alpha^2(\alpha^2\chi^2-1).\alpha\chi^2(\alpha+\beta)\,\alpha\chi}{\chi^2.(\alpha\chi+1)(\alpha^2-\beta^2)} = \dfrac{\alpha^4\chi(\alpha\chi-1)}{\alpha-\beta}$

ζ') Ἐπειδὴ $\left(\alpha+1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}-1\right) = \left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 1 =$

$= \dfrac{\alpha^4+\alpha^2+1}{\alpha^2}$ καὶ $\alpha^6-1=(\alpha^2-1)(\alpha^4+\alpha^2+1)$ τὸ ἐξαγόμενον ἰσοῦται μὲ 1.

η') $\left(\dfrac{3(\mu-2)}{\mu-3}\right) \cdot \left(\dfrac{9-\mu^2}{4-\mu^2}\right)\left[\dfrac{(2-\mu)}{(\mu-2)(\mu+3)}\right] - \left(\dfrac{2}{\mu+2}\right) =$

$= -\dfrac{3}{\mu+2} - \dfrac{2}{\mu+2} = -\dfrac{5}{\mu+2}$.

155. Τοῦ ἔμειναν $5\lambda - \left(\dfrac{5\lambda}{3}+\dfrac{5\lambda}{7}+\dfrac{20\lambda}{9}\right) = 5\lambda - \dfrac{290\lambda}{63} = \dfrac{25\lambda}{63}$.

156. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\dfrac{3(\beta-1)}{4}$. Ὥστε τοῦ ἔμειναν

$\beta-1-\dfrac{\beta-1}{4}-\dfrac{9(\beta-1)}{28} = \dfrac{28(\beta-1)-7(\beta-1)-9(\beta-1)}{28} =$

$= \dfrac{12(\beta-1)}{28} = \dfrac{3(\beta-1)}{7}$ δρχ.

157. Πρῶτον ὑπόλοιπον $α-90$. Ὥστε τοῦ μένουν:

$$α-90-\frac{4(α-90)}{9}=\frac{9(α-90)-4(α-90)}{9}=\frac{5(α-90)}{9}=\frac{5α}{9}-50000 \text{ δρχ.}$$

158. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\frac{5γ}{7}$. Ὥστε τοῦ ἔμειναν:

$$γ-\frac{2γ}{7}-\frac{10γ}{35}-1000=\frac{3γ}{7}-1000 \text{ δρχ.}$$

159. Ἀπὸ τὴν πρώτην βρύσιν εἰς $τ^δ$ τρέχουν $\frac{7τ}{5}$ ὀκ. καὶ ἀπὸ τὴν δευτέραν εἰς $(τ-2)^δ$ τρέχουν $\frac{9(τ-2)}{4}$ ὀκ. Ὥστε ἐκ τῶν δύο θὰ τρέξουν

$$\frac{7τ}{5}+\frac{9(τ-2)}{4}=\frac{73τ-90}{20} \text{ ὀκ.}$$

160. α') $\frac{12χψ^2}{7α^2β}\cdot\frac{25αβ^2}{8χ^2ψ}=\frac{75ψβ}{14αχ}=\frac{75.3}{14.2}=\frac{225}{28}$ καὶ

$$\frac{12}{7.2^2.3}:\frac{6}{25.2.3^2}=\frac{1}{7}:\frac{4}{25.9}=\frac{225}{28}.$$

β') $\frac{12α^2}{5β^2γ^3}\cdot\frac{10γ^2}{3αβ^2}=\frac{8α}{β^4γ}=\frac{16}{243}$ καὶ $\frac{12.2^2}{5.3^2 3^3}:\frac{3\,2.3^2}{10.3^2}=\frac{16}{405}:\frac{3}{5}=\frac{16}{243}$.

γ') $\frac{α^3}{α^2}:\frac{α}{β}=\frac{α^3}{α^2}\cdot\frac{β}{α}=β=-3$ καὶ $(-3)^3:\left((3)^2:\frac{-3}{-3}\right)=$

$$=(-3)^3:(-3)^2=-3.$$

δ') $\frac{9γ^2}{28α^3β^2}:\frac{3α^2}{7βγ^3}=\frac{9γ^2}{28α^3β^2}\cdot\frac{7βγ^3}{3α^2}=\frac{3γ^5}{4α^5β}=\frac{3(-3)^5}{4(-3)^5.(-3)}=-\frac{1}{4}$

καὶ $\frac{9(-3)^2}{28(-3)^3(-3)^2}:\frac{12(-3)^2.(-3)}{7.4(-3)^2(-3)^2(-3)}=-\frac{1}{4}$.

ε') $\frac{α}{α^3+β^3}:\frac{α^2-αβ+β^2}{β^2}=\frac{α}{α^3+β^3}\cdot\frac{β^2}{α^2-αβ+β^2}=$

$$=\frac{α}{α^3+β^3}\cdot\frac{β^2(α+β)}{α^3+β^3}=\frac{αβ^2(α+β)}{(α^3+β^3)^2}.$$

στ') $\frac{α^2-β^2}{χ^2-ψ^2}:\frac{α^4-β^4}{(χ^2-ψ^2)^2}=\frac{α^2-β^2}{χ^2-ψ^2}\cdot\frac{(χ^2-ψ^2)^2}{α^4-β^4}=\frac{χ^2-ψ^2}{α^2+β^2}$.

ζ') $\frac{(α+χ)(α+ψ)}{(α-χ)(α-ψ)}:\frac{(α-χ)(α+ψ)}{(α+χ)(α-ψ)}=\frac{(α+χ)^2}{(α-χ)^2}$.

η') $\frac{2χ^3}{χ^4-1}:\frac{-2χ}{χ^4-1}=-2χ^2$.

θ') $\frac{α^6-β^6-3(α^4+β^4)αβ+5α^3β^3}{α^3β^3}:\frac{(α^2-αβ-β^2)^2}{α^2β^2}=$

$$=\frac{α^6-β^6-3αβ(α^4+β^4)+5α^3β^3}{αβ(α^2-αβ-β^2)^2}$$

ι') $\frac{(\chi-\alpha)^3+\chi(+\alpha)^3}{(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha)^2} : \frac{(\chi-\alpha)^2-(\chi^2-\alpha^2)+(\chi+\alpha)^2}{(\chi+\alpha)^2.(\chi-\alpha)^2} =$

$$=\frac{(\chi-\alpha)^3+(\chi+\alpha)^3}{(\chi-\alpha)^2-(\chi^2-\alpha^2)+(\chi+\alpha)^2}=\frac{2\chi(\chi^2+3\alpha^2)}{\chi^2+3\alpha^2}=2\chi.$$

ια') $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} : \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2} = 1$

161. Ἐξοδεύει $\left(\alpha+\frac{\alpha}{5}\right).0,25\alpha=0,25\alpha+0,05\alpha=0,30\alpha.$

Τοῦ μένουν $\alpha+\frac{\alpha}{5}-0,30\alpha=\alpha+0,2\alpha-0,30\alpha=0,90\alpha$, τὰ ὁποῖα αὐξάνει κατὰ $0,90\alpha.0,5=0,45\alpha$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος ἔχει $0,90\alpha+0,45\alpha=1,35\alpha$.

162. Πρῶτον ὑπόλοιπον $\alpha+0,25\alpha-5000=1,25\alpha-5000$, τὸ ὁποῖον αὐξάνει κατὰ $(1,25\alpha-5000).0,25=0,3125\alpha-1250$.
Ἔχων οὕτω $1,25\alpha-5000+0,3125\alpha-1250=1,5625\alpha-6250$.
Ὥστε εἰς τὸ τέλος εἶχε $1,5625\alpha-11250$ δρχ.

163. 1) Ἐπώλησε $8\alpha+15+1$ αὐγὰ καὶ τοῦ ἔμειναν $8\alpha+14$
2) » $4\alpha+8$ » » » » $4\alpha+6$
3) » $2\alpha+4$ » » » » $2\alpha+2$
4) » $\alpha+2$ » » » » α αὐγά.

Σύνθετα κλάσματα

Ἀσκήσεις.—*164.* α') $\frac{\chi+\psi}{\mu} : \frac{\omega}{\mu}=\frac{\chi+\psi}{\omega}=\frac{4+4}{4}=2.$

β') $\frac{2\mu+\nu+\mu+\nu}{\mu+\nu} : \frac{\mu+\nu+\nu}{\mu+\nu}=\frac{3\mu+2\nu}{\mu+2\nu}=\frac{12+4}{4+4}=2;$

γ') $\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{\alpha-\beta} : \frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2\beta(\alpha+\beta)}{2\alpha(\alpha-\beta)}=\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha(\alpha-\beta)}=$

$$=\frac{1.(3+1)}{3.(3-1)}=\frac{2}{3}.$$

δ') $\frac{\chi+1}{\chi-1} : \frac{\chi^2-1}{\chi-1}=\frac{(\chi+1).\chi}{(\chi-1)(\chi^2-1)}=\frac{(\chi+1)\chi}{(\chi-1)(\chi+1)(\chi-1)}=$

$$=\frac{\chi}{(\chi-1)^2}=\frac{4}{(4-1)^2}=\frac{4}{9}.$$

ε') Ἐπειδὴ $\chi+\psi+\frac{1}{\chi-\psi}=\frac{(\chi+\psi)(\chi-\psi)+1}{\chi-\psi}=\frac{\chi^2-\psi^2+1}{\chi-\psi}$, ὁ παρονομαστὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος ἰσοῦται μὲ $\chi+\psi+\frac{\chi-\psi}{\chi^2-\psi^2+1}=$

$=\frac{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)+(\chi-\psi)}{\chi^2-\psi^2+1}$. Ἑπομένως τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται

μὲ $\frac{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)}{(\chi+\psi)(\chi^2-\psi^2+1)+(\chi-\psi)}$.

στ′) Εἶναι $\chi-\psi-\frac{4\psi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi-\psi)^2-4\psi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi-\psi+2\psi)(\chi-\psi-2\psi)}{\chi-\psi}=$

$=\frac{(\chi+\psi)(\chi-3\psi)}{\chi-\psi}$

$\chi+\psi-\frac{4\chi^2}{\chi+\psi}=\frac{(\chi+\psi)^2-4\chi^2}{\chi-\psi}=\frac{(\chi+\psi-2\chi)(\chi+\psi+2\chi)}{\chi-\psi}=$

$=\frac{(\psi-\chi)(3\chi+\psi)}{\chi-\psi}$ καὶ $3(\chi+\psi)-\frac{8\chi\psi}{\chi+\psi}=\frac{3(\chi+\psi)^2-8\chi\psi}{\chi+\psi}$.

Ὥστε τὸ δοθὲν κλάσμα ἰσοῦται μὲ

$-\frac{(\chi-3\psi)(3\chi+\psi)(\chi+\psi)}{3(\chi+\psi)^2-8\chi\psi}=-\frac{(\chi-3\psi)(3\chi+\psi)(\chi+\psi)}{3\chi^2-2\chi\psi+3\psi^2}=-\frac{-1.7.3}{3.9-8.2}=\frac{21}{11}$.

165. α′) $\frac{(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2}{(\alpha-\beta-1)(\beta-\gamma)-(\beta-\gamma-1)(\alpha-\beta)}=$

$=\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-2\beta+\gamma)}{\alpha-2\beta+\gamma}=\alpha-\gamma$.

β′) $\frac{[1-(\chi\psi-\psi\omega)^2].[(\chi\psi-\psi\omega)^2-1]}{[(\chi\psi-1)^2-\psi^2\omega^2].[(\psi\omega-1)^2-\chi^2\psi^2]}=-\frac{1-(\chi\psi-\psi\omega)^2}{(\chi\psi+\psi\omega-1)^2}$.

Εὑρίσκομεν δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἀναλύοντες τὸν δεύτερον παράγοντα τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοὺς παράγοντας τοῦ παρανομαστοῦ εἰς γινόμενα ἀθροισμάτων ἐπὶ διαφορὰς καὶ ἔπειτα ἁπλοποιοῦντες.

γ′) $\frac{(\chi+1)\psi\omega-(\psi-1)\chi\omega+(\omega+1)\chi\psi}{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}=\frac{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}{\chi\psi\omega+\psi\omega+\chi\omega+\chi\psi}=1$

166. Εἶναι $\frac{\frac{\chi-1}{\chi+1}-\frac{\psi-1}{\psi+1}}{1+\frac{(\chi-1)(\psi-1)}{(\chi+1)(\psi+1)}}=\frac{(\chi-1)(\psi+1)-(\chi+1)(\psi-1)}{(\chi+1)(\psi+1)+(\chi-1)(\psi-1)}=\frac{\chi-\psi}{\chi\psi+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

Σημείωσις.— Κατὰ τὸν IX αἰῶνα ὁ διάσημος Ἄραψ μαθηματικὸς Al-Khwarizmy ἐδημοσίευσε βιβλίον μὲ τὸν τίτλον «Al-djebr» ἢ «al-moukabalah», εἰς τὸ ὁποῖον ἔδιδε τοὺς κανόνας νέας μεθόδου πρακτικοῦ ὑπολογισμοῦ. Ἐξ αὐτῶν οἱ γενικώτεροι ἦσαν ἡ al-djebr ἤτοι (§ 103) ἡ μεταφορὰ ὅρου τινὸς ἐξισώσεως ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ πρόσημόν του καὶ ἡ al-moukabalah ἤτοι ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Οὕτως ὁ πρῶτος κανὼν τοῦ Al-Khwarizmy ἔδωσε τὸ ὄνομά του εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἥτις κατέστη ἡ βάσις τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν.

Ἀσκήσεις.—*167.* α′) $17-1=8\chi-\chi$, $16=7\chi$ καὶ $\chi=\frac{16}{7}$

β′) $5\chi+\chi=38+4$, $6\chi=42$ καὶ $\chi=7$.

168. α′) $4\chi=6$ καὶ $\chi=\frac{3}{2}$ β′) $12\chi-2\chi=60-20$, καὶ $\chi=4$.

169. $22\chi-\chi=6+165$, $21\chi=171$ καὶ $\chi=\frac{171}{21}=\frac{57}{7}$.

170. $\alpha\chi-\chi=\alpha+1$, $\chi(\alpha-1)=\alpha+1$ καὶ $\chi=\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$, ἐὰν $\alpha\neq1$.

171. α′) $4\alpha^2\chi-\chi=2\alpha+1$, $\chi(4\alpha^2-1)=2\alpha+1$ καὶ $\chi=\frac{2\alpha+1}{4\alpha^2-1}=$

$=\frac{2\alpha+1}{(2\alpha+1)(2\alpha-1)}=\frac{1}{2\alpha-1}$, ἐὰν $4\alpha^2-1\neq0$ β′) $\chi(\beta+\alpha)=1$ καὶ $\chi=$

$=\frac{1}{\alpha+\beta}$, ἐὰν $\alpha+\beta\neq0$.

172. $(3\chi-1).3.5-(2\chi+1).4.5-(4\chi-5).4.3=4.4.3.5$·
$45\chi-15-40\chi-20-48\chi+60=240$·

$45\chi-40\chi-48\chi=-60+240+15+20$, $-43\chi=215$ καὶ $\chi=-\frac{215}{43}=-5$.

173. $12.2-(7\chi-1).2=12.3\chi-(19\chi+3).3$
$24-14\chi+2=36\chi-57\chi-9$
$-14\chi-36\chi+57\chi=-24-2-9$, $7\chi=-35$ καὶ $\chi=-5$.

174. $(5\chi+1).6+(19\chi+7).2-(3\chi-1).9=(7\chi-1).3$

$30\chi+6+38\chi+14-27\chi+9=21\chi-3$, $20\chi=-32$ καὶ $\chi=-\frac{8}{5}$.

175. $11.24-(3\chi-1)6-(2\chi+1)8=10.24-(2\chi-5)8-(7\chi-1).3$
$264-18\chi+6-16\chi-8=240-16\chi+40-21\chi+3$

$5\chi=21$ καὶ $\chi=\frac{21}{5}$.

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$

Ἀσκήσεις.—*176.* α′) $3\chi-10+2\chi=\chi-10+4\chi$, $5\chi-5\chi=10-10$, $0.\chi=0$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος ρίζας.

β′) $(2\chi-5).2=\chi+7+3\chi$, $4\chi-10=4\chi+7$, $0.\chi=17$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

γ′) $3(\chi-\alpha)+2(\chi+\beta)=5\chi-6$,
$3\chi-3\alpha+2\chi+2\beta=5\chi-6$, $0.\chi=3\alpha-2\beta-6$(1). Ὥστε ἐὰν $3\alpha-2\beta-6=0$, ἡ

δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀπροσδιόριστος, ἄλλως αὕτη εἶναι ἀδύνατος.

δ′) $\beta\chi+\alpha\chi+\alpha\beta=(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$, $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha+\beta)\chi=\alpha\beta-\alpha\beta$ καὶ $0.\chi=$ $=0$ (ἀπροσδιόριστος).

ε′) $5\chi+3\chi-45=30\chi-105$, $22\chi=60$ καὶ $\chi=\frac{30}{11}$.

στ′) $2\chi+3\chi+30=5\chi+12$, $0.\chi=-18$ (ἀδύνατος).

177. $2(\alpha\chi-\beta)+3\chi=18\chi-6\alpha$, $2\alpha\chi-2\beta+3\chi=18\chi-6\alpha$
$2\alpha\chi+3\chi-18\chi=2\beta-6\alpha$, $(2\alpha-15)\chi=2(\beta-3\alpha)$.

Ὥστε, ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις 1) ἔχῃ μίαν λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $2\alpha-15\neq 0$, 2) ἔχῃ ἀπείρους τὸ πλῆθος ρίζας πρέπει νὰ εἶναι $2\alpha-15=$ $=0$, ἤτοι $\alpha=\frac{15}{2}$ καὶ $\beta-3\alpha=0$ ἤτοι, $\beta=3\cdot\frac{15}{2}=\frac{45}{2}$. 3) δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν ἐὰν $2\alpha-15=0$ καὶ $\beta-3\alpha\neq 0$.

178. $2(\alpha\chi-1)+3(\chi+1)=24$, $2\alpha\chi-2+3\chi+3=24$ καὶ $(2\alpha+3)\chi=23$. Ὥστε ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος πρέπει νὰ εἶναι $2\alpha+3=$ $=0$, ἤτοι $\alpha=-\frac{3}{2}$. Ἄλλως ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\frac{23}{2\alpha+3}$.

179. α′) $27\chi-10\chi+25=18\chi-30+10\chi-5$,
$-11\chi=-60$ καὶ $\chi=60:11$.

β′) $4.2.(3\chi-5)-25(\chi+2)=6.5.(3\chi+2)-12.71$
$24\chi-40-25\chi-50=90\chi+60-852$, $-91\chi=-702$ καὶ $\chi=702:91$.

γ′) $12\chi-6\chi+8\chi-9\chi-8\chi-10\chi=792$, $-13\chi=792$ καὶ $\chi=-(792:13)$.

δ′) $\chi^2+\frac{2\chi}{3}+\frac{1}{9}=\chi^2-\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{2}-\frac{1}{12}$. Ὥστε ὁ ὅρος χ^2 ἀπαλείφεται. Ἔχομεν δὲ $24\chi+4=-6\chi+18\chi-3$, $12\chi=-7$ καὶ $\chi=-7|12$.

ε′) $(\chi-3)(\chi-4)+(\chi-2)(\chi-4)-19(\chi-1)(\chi-2)=19(\chi-1)(\chi-3)$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις θὰ εὕρωμεν ὅρους μὲ χ^2 τοὺς $\chi^2+\chi^2-19\chi^2=$ $=19\chi^2$. Ἑπομένως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ τὰς ἀναγωγὰς θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $36\chi^2$, ἤτοι θὰ εἶναι $2^{ου}$ βαθμοῦ πρὸς χ, τὴν ὁποίαν ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν.

στ′) $(\chi-2)^2-\chi^2-4(\chi-1)+4(\chi-2)=0$
$\chi^2-4\chi+4-\chi^2-4\chi+4+4\chi-8=0$, $-4\chi=0$ καὶ $\chi=0$.

Ἡ δοθεῖσα ὅμως ἐξίσωσις διὰ $\chi=0$, δὲν ἔχει τιμὴν ὡρισμένην, διότι ὁ ὅρος $\frac{1}{\chi^2}=\frac{1}{0}=\infty$.

180. α′) Εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta+\alpha-\beta)\chi=2\alpha^2$, $2\alpha\chi=2\alpha^2$ καὶ $\chi=\alpha$, ἐὰν $\alpha\neq 0$

β′) $2\alpha\beta\chi=\alpha^3-\alpha^2-\beta^2-\beta^3$ καὶ $\chi=\frac{\alpha^3-\alpha^2-\beta^2-\beta^3}{2\alpha\beta}$, ἐὰν $\alpha\beta\neq 0$.

γ') $2\mu\chi-2\mu^2-2\nu^2+2\nu\chi=4\mu\nu$, $2(\mu+\nu)\chi=2(\mu+\nu)^2$, καὶ $\chi=\mu+\nu$, ἐὰν $\mu+\nu\neq 0$.

δ') $\chi^2+2\chi+1-5\alpha+2\alpha^2+\alpha\chi=\chi^2-4\alpha\chi+4\alpha^2+5$

$(5\alpha+2)\chi=2\alpha^2+5\alpha+4$ καὶ $\chi=\dfrac{2\alpha^2+5\alpha+4}{5\alpha+2}$, ἐὰν $5\alpha+2\neq 0$.

ε') $(\alpha+\beta)\chi+\alpha\chi=\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$.

$(2\alpha+\beta)\chi=\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)$ καὶ $\chi=\alpha(\alpha+\beta)$, ἐὰν $2\alpha+\beta\neq 0$.

στ') $3\beta(\alpha-\beta)(\beta\chi+\alpha)+2\alpha^2(\alpha-\beta)(\chi-1)=\beta(2\beta^2+5\alpha^2)$ [ἐ.κ.π. $6\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)$]

καὶ $\chi=\dfrac{2\alpha^3+6\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+2\beta^3}{2\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-3\beta^3}$, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς εἶναι $\neq 0$.

ζ') $(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)(\alpha_1\chi+\beta_1)=(\alpha_1\chi^2+\beta_1\chi+\gamma_1)(\alpha\chi+\beta)$

$\alpha\alpha_1\chi^3+(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)\chi^2+\alpha_1\gamma\chi+\beta\beta_1\chi+\beta_1\gamma=$
$=\alpha\alpha_1\chi^3+(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)\chi^2+\alpha\gamma_1\chi+\beta\beta_1\chi+\beta\gamma_1$. Ὅθεν:

$(\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1)\chi=\beta\gamma_1-\beta_1\gamma$ καὶ $\chi=\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1}$, ἐὰν $\alpha_1\gamma-\alpha\gamma_1\neq 0$. Ἄλλως εἶναι ἀδύνατος ἐὰν καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq 0$ καὶ ἀπροσδιόριστος, ἐὰν καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma=0$. η') $8\alpha(\chi-2)^2+8\beta(\chi+2)^2-(\alpha+\beta)\chi^4=-(\alpha+\beta)(\chi^2-4)^2$

$32(\alpha-\beta)\chi=48(\alpha+\beta)$ καὶ $\chi=\dfrac{3(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)}$, ἐὰν $\alpha\neq\beta$.

Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων

Παρατηρήσεις καὶ ὁδηγίαι. — Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι σκοπὸς τῆς ἀλγέβρας εἶναι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικόν· καὶ ἁπλουστεύει μὲν αὕτη τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, διότι χρησιμοποιεῖ γράμματα, τὴν γενικεύει δὲ 1ον) ***διότι εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς*** (εἴδομεν ὅτι εἰσήγαγε τοὺς ἀρνητικοὺς) καὶ 2ον) ***διότι ἀνάγει τὴν λύσιν αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων.***

Ἑπομένως διὰ νὰ λύσωμεν εἰς τὴν ἄλγεβραν ἕνα πρόβλημα πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτοῦ. Γενικοὶ κανόνες διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος δὲν ὑπάρχουν, διότι ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν εἶναι· ὅτι ὁ σχηματισμὸς ἐξισώσεως προβλήματός τινος, δὲν εἶναι παρὰ μία μετάφρασις ἐκ τῆς γραπτῆς ἢ προφορικῆς γλώσσης εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν.

Οὕτω τοῦ προβλήματος «νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19, ἡ ἐξίσωσις $2\chi+5=3\chi-19$ εἶναι ἡ μετάφρασις αὐτοῦ εἰς τὴν γλῶσσαν τῆς ἀλγέβρας. Οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι εἰς ἕνα πρόβλημα παριστάνουν ποσά, μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Οὕτως ἐὰν πρόκειται π. χ. περὶ ἀποστάσεων, θὰ μετροῦνται μὲ μέτρα, ἢ μὲ χιλιόμετρα κ.λ.π. Ἐὰν πρόκειται περὶ χρόνου, θὰ μετροῦνται μὲ ὥρας ἢ μὲ πρῶτα λεπτὰ κ.λ.π.

Ἀφοῦ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ προβῶμεν εἰς λύσιν αὐτῶν, πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.—181. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τότε δὲ θὰ εἶναι $2\chi+5=3\chi-19$ καὶ $\chi=24$. Πράγματι δὲ ἔχομεν $2.24+5=3.24-19$, ἤτοι $53=53$.

182. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $4\chi-2=3\chi+16$ καὶ $\chi=18$.

183. Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{6+\chi}{17+\chi}=\frac{1}{3}$ καὶ $\chi=-\frac{1}{2}$.

Πράγματι δὲ εἶναι $\frac{6-\frac{1}{2}}{17-\frac{1}{2}}=\frac{11}{2}:\frac{33}{2}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$.

184. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{-5+\chi}{6+\chi}=\frac{8+\chi}{\chi}$ καὶ $\chi=-\frac{48}{19}$.

185. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι $\chi-\frac{\chi}{3}-4=\frac{5\chi}{6}-8$ καὶ $\chi=24$.

186. Ἐδῶ εἶναι $\frac{29-\chi}{42-\chi}=\frac{1}{2}$ καὶ $\chi=16$.

187. Ἐδῶ εἶναι $\frac{2\chi}{3}+\frac{3\chi}{4}=170$ καὶ $\chi=120$.

188. Ἔστω ὅτι θὰ ἀναμείξῃ χ ὀκάδας τῶν 2900 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Τότε αἱ 100 ὀκάδες ἀξίζουν 1950 δρχ. $\times$ 100=195000 δρχ.
αἱ χ » » 2900 χ » καὶ ὅλον τὸ μεῖγμα ἤτοι
αἱ (100+χ) » » 2150.(100+χ) δρχ. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$195000+2900.\chi=2150(100+\chi)$$

καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=26\frac{2}{3}$ ὀκ. Ἡ λύσις δὲ αὕτη εἶναι δεκτή.

189. Ἔστω Α καὶ Β οἱ τόποι ὡς καὶ ὅτι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν χ χιλιομέτρων ἀπὸ τοῦ τόπου Α. Ὥστε τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν χ χλμ. τὸ δὲ δεύτερον θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 60—χ χλμ. Οἱ χρόνοι ὅμως καθ' οὓς θὰ διανύσουν τὰς ἀποστάσεις αὐτὰς εἶναι ἴσοι· ἀλλ' ὁ πρῶτος θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασίν του εἰς $\frac{\chi}{5}$ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος θὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασίν του εἰς $\frac{60-\chi}{5,5}$ ὥρας. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi}{5}=\frac{60-\chi}{5,5}$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=28\frac{4}{7}$ χλμ.

190. Ἔστω ὅτι θὰ ῥίψωμεν χ ὀκ. καθαροῦ ὕδατος. Τότε αἱ

206. Ἔστω ὅτι οἱ 15 ἐργάται πρέπει νὰ ἐργάζωνται χ ὥρας καθ' ἡμέραν. Τότε οὗτοι θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον μὲ ἐργασίαν $15.3.\chi=45\chi$ ὡρῶν. Ἀλλ' οἱ 16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ἔργου μὲ ἐργασίαν $4.9.16=576$ ὡρῶν καὶ ἑπομένως ὅλον τὸ ἔργον θὰ τὸ ἐξετέλουν μὲ ἐργασίαν 1440 ὡρῶν. Ὥστε εἶναι $45\chi=1440$ καὶ $\chi=32$ ὧραι. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι δεκτή.

207. Ἔστω μετὰ χ ἔτη, ὁπότε θὰ εἶναι $58+\chi=2(28+\chi)$ καὶ $\chi=2$.

208. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, ὁπότε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι 2χ. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $10\chi+2\chi=12\chi$ μονάδας. Ἀλλ' ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων, ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $2\chi.10+\chi=20\chi+\chi=21\chi$ μονάδας. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $21\chi=12\chi+36$, ὁ δὲ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος καὶ μονοψήφιος ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=4$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 48. Πράγματι δὲ εἶναι $84=48+36$.

209. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ τῶν δεκάδων θὰ εἶναι $12-\chi$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ $(12-\chi).10+\chi$ μονάδας, ὁ δὲ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων θὰ ἔχῃ $10\chi+12-\chi$ μονάδας. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $(12-\chi).10+\chi-18=10\chi+12-\chi$, καὶ ὁ χ θετικὸς ἀκέραιος καὶ μονοψήφιος ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=5$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 75. Πράγματι δὲ εἶναι $75-18=57$.

210. Ἔστω εἰς χ ἡμέρας. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος τελειώνει τὸ ἔργον εἰς α ἡμέρας, εἰς χ ἡμέρας τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{\alpha}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ δεύτερος εἰς χ ἡμέρας τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε παριστῶντες τὸ ὅλον ἔργον διὰ 1 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=1$. Ὥστε, $\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

211. Ἔστω χ μέτρα ἡ διανυθεῖσα ἀπόστασις. Τότε αἱ περιστροφαὶ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}$ τῶν ἐμπροσθίων καὶ $\frac{\chi}{\beta}$ τῶν ὀπισθίων. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}-\frac{\chi}{\beta}=\nu$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντές εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha\beta\nu}{\beta-\alpha}$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτὴ ἐὰν $\beta>\alpha$ (οἱ α καὶ β πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ὁ δὲ ν θετικὸς ἀκέραιος).

212. Ἔστω χ δραχ. τὸ εἰσόδημά του. Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\chi}{\nu}+\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}+\mu=\chi$. Πρέπει δὲ ὁ χ, ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ ν, α, β, γ, μ, νὰ εἶναι ὅλοι θετικοὶ ἀριθμοί. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\nu\alpha\beta\gamma\mu}{\nu\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma-\nu\beta\gamma-\nu\alpha\gamma-\nu\alpha\beta}$. Μερ. περίπτωσις:

$$\chi=\frac{3.4.6.8.300000}{3.4.6.8-4.6.8-3.6.8-3.4.8-4.4.6}=2400000 \text{ δραχ.}$$

213. Ἔστω ὅτι ὀφείλει νὰ διανύῃ χ χλμ. καθ' ἡμέραν. Ὁ ταξειδιώτης διανύει ἀρχικῶς $\frac{\alpha}{\eta}$ χλμ. τὴν ἡμέραν καὶ ἐπὶ β ἡμέρας διήνυσε $\frac{\alpha\beta}{\eta}$ χλμ. Ὥστε τοῦ ἀπομένουν νὰ διανύσῃ $\alpha - \frac{\alpha\beta}{\eta} = \frac{\alpha\eta - \alpha\beta}{\eta}$ χλμ. εἰς $\eta - \beta - \gamma$ ἡμέρας. Ὥστε εἰς μίαν ἡμέραν θὰ διανύῃ $\chi = \frac{\alpha\eta - \alpha\beta}{\eta} : (\eta - \beta - \gamma) = \frac{\alpha(\eta - \beta)}{\eta(\eta - \beta - \gamma)}$ χλμ.

Μερικὴ περίπτωσις: $\chi = \frac{300(18-7)}{18(18-7-3)} = \frac{300.11}{18.8} = 22\frac{11}{12}$ χλμ.

214. Ἔστω ὅτι ὁ Β ἔλαβε χ. Τότε ὁ Α ἔλαβε $\frac{\mu\chi}{\nu}$ ὁ δὲ Γ ἔλαβε $\frac{\lambda\chi}{\varrho}$. Ὥστε εἶναι $\chi + \frac{\mu\chi}{\nu} + \frac{\lambda\chi}{\varrho} = \alpha$ καὶ $\chi = \frac{\alpha\nu\varrho}{\nu\varrho + \mu\varrho + \lambda\nu}$. Ἔλαβε λοιπὸν ὁ Α $\frac{\alpha\mu\varrho}{\nu\varrho + \mu\varrho + \lambda\nu}$ καὶ ὁ Γ $\frac{\alpha\lambda\nu}{\nu\varrho + \mu\varrho + \lambda\nu}$.

215. Ἐὰν χ εἶναι τὸ πρῶτον κεφάλαιον, τὸ δεύτερον εἶναι $K - \chi$. Τότε ὁ ἐτήσιος τόκος τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{\chi\varepsilon}{100}$ καὶ ὁ τοῦ δευτέρου εἶναι $\frac{(K-\chi)\varepsilon'}{100}$. Οὕτω δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi\varepsilon}{100} + \frac{(K-\chi)\varepsilon'}{100} = \tau$ καὶ ὁ χ θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $(\varepsilon - \varepsilon')\chi = 100\tau - K\varepsilon'$ (ι), ὁπότε ἐὰν $\varepsilon \neq 0$ ἔχομεν τὴν λύσιν $\chi = \frac{100\tau - K\varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'}$. Ὥστε τὸ δεύτερον κεφάλαιον εἶναι $K - \chi = \frac{K\varepsilon - 100\tau}{\varepsilon - \varepsilon'}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν $\varepsilon > \varepsilon'$ θὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν ἐὰν $100\tau > K\varepsilon'$. Ἐὰν δὲ $\varepsilon < \varepsilon'$, πρέπει νὰ εἶναι $100\tau < K\varepsilon'$.

216. Ἔστω εἰς χ ἡμέρας. Τότε εἰς χ ἡμέρας ὁ α′ ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{\chi}{2}$ τοῦ ἔργου, ὁ β′ τὰ $\frac{\chi}{\nu}$ τοῦ ἔργου καὶ ὁ τρίτος ἐργάτης, ὅστις τελειώνει τὸ ἔργον εἰς $\mu + \frac{\nu}{2} = \frac{2\mu + \nu}{2}$ ἡμέρας, τελειώνει εἰς χ ἡμέρας τὰ $\frac{2\chi}{2\mu + \nu}$ τοῦ ἔργου. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$\frac{\chi}{2} + \frac{\chi}{\nu} + \frac{2\chi}{2\mu + \nu} = 1$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi = \frac{2\nu(2\mu + \nu)}{(2\mu + \nu)\nu + 2(2\mu + 3\nu)}$.

217. Ἔστω χ τὸ κεφάλαιον. Τότε ἡ ἐξ. ἀφαίρεσις εἶναι (Πίν. λογαρίθμων νέα ἔκδοσις Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 173) $\frac{2\chi\nu}{36000}$ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ $\frac{2\chi\nu}{36000 + 2\nu}$. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\frac{2\chi\nu}{36000} -$

$-\dfrac{2\chi\nu}{36000+2\nu}=\alpha$ καὶ ὁ χ θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\chi=\dfrac{36000\,(36000+2\nu)\alpha}{4\nu^2}$.

218. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐγῶν. Ὥστε τῆς μένουν αὐγὰ τὴν

1ην φορὰν) $\chi-\left(\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{1}{2}$.

2αν ») $\dfrac{\chi}{2}-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\chi}{4}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\chi}{4}-\dfrac{3}{4}$.

3ην ») $\dfrac{\chi}{4}-\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{\chi}{8}-\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\chi}{8}-\dfrac{7}{8}$ καὶ τὴν

4ην ») $\dfrac{\chi}{8}-\dfrac{7}{8}-\left(\dfrac{\chi}{16}-\dfrac{7}{16}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\chi}{16}-\dfrac{15}{16}$.

Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\dfrac{\chi}{16}-\dfrac{15}{16}=1$ καὶ ὁ χ ἀκέραιος θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=31$.

219. Ἔστω ὅτι εἶχε χ αὐγά. Τότε θὰ εἰσέπραττε 500χ δραχμάς. Ἀλλ' εἰσέπραξε 600(χ−3) δρχ. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $600(\chi-3)=500\chi$ καὶ ὁ χ ἀκέραιος θετικός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=18$.

220. Ἔστω εἰς χ ὥρας. Τότε εἰς τὰς ὥρας αὐτὰς πληροῦν ἡ πρώτη τὰ $\dfrac{\chi}{3}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δευτέρα τὰ $\dfrac{\chi}{4}$ καὶ ἡ τρίτη τὰ $\dfrac{\chi}{6}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\dfrac{\chi}{3}+\dfrac{\chi}{4}+\dfrac{\chi}{6}=1$ καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{12}{9}=1\dfrac{1}{3}$ ὥρας.

221. Ἔστω ὅτι ὁ δεύτερος διανύῃ χ χλμ. τὴν ἡμέραν. Ὁ πρῶτος εἰς 4 ἡμ.+8ἡμ=12 ἡμ. θὰ διανύσῃ 60.12=720 χλμ. καὶ ὁ δεύτερος εἰς 8 ἡμ. θὰ διανύσῃ 8χ χλμ. Ὥστε εἶναι $8\chi=720$ καὶ $\chi=90$.

222. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ χ ἡμέρας. Ὥστε θὰ εἶναι $50\chi+55\chi=575$ καὶ $\chi=5\dfrac{10}{21}$.

223. Ἔστω ὅτι τὸ δεύτερον θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον μετὰ χδ. ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του. Τότε τὸ πρῶτον σῶμα τὸ ὁποῖον ἐπὶ 3δ. εἶχε διανύσει $\dfrac{32.3}{4}=24$ μ. θὰ διανύσῃ ἐπὶ χδ ἄλλα $\dfrac{32\chi}{4}=8\chi$ μέτρα. Ἀλλὰ μετὰ τὰ χδ τὸ δεύτερον θὰ διανύσῃ $\dfrac{60\chi}{5}=12\chi$ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ

1ο 369 χ 14 21

τὰ διανυθέντα διαστήματα ὑπ' ἀμφοτέρων τῶν σωμάτων εἶναι ἴσα θὰ εἶναι $24+8\chi=12\chi$ καὶ $\chi=6$. Ὥστε τὸ δεύτερον σῶμα θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον μετὰ 6δ καὶ εἰς ἀπόστασιν 72 μέτρων ἀπὸ τοῦ σημείου Α.

224. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος (βλέπε πρόβλ. 223) εἶναι $30+30\chi=50\chi$ καὶ $\chi=1\frac{1}{2}$ ὥρας. Θὰ συναντηθοῦν δὲ εἰς ἀπόστασιν 75 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου Α.

225. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς προηγουμένας δύο ἀσκήσεις εὑρίσκομεν διὰ τὸ α) τὴν ἐξίσωσιν $36+12\chi=16\chi+12$ καὶ $\chi=6$ ὥρας· καὶ διὰ τὸ β) τὴν ἐξίσωσιν $36+12\chi=16\chi-50$ καὶ $\chi=21\frac{1}{2}$ ὥρας.

Ὥστε τὰ ζητούμενα εἶναι $6+3=9$ ὧραι καὶ $21\frac{1}{2}+3=24\frac{1}{2}$ ὧραι.

226. Ἔστω μετὰ χ ὥρας. Τότε ὁ πρῶτος ποδηλάτης εἰς $\chi+3$ ὥρας θὰ διανύσῃ $12(\chi+3)$ χλμ. καὶ ὁ δεύτερος εἰς 3 ὥρας θὰ διανύσῃ 16.3 χλμ. Ὥστε εἶναι $12(\chi+3)=16.3$ καὶ $\chi=1$. Ὥστε ὁ δεύτερος ποδηλάτης θ' ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ τόπου Α τὴν 11ην πρωϊνήν.

227. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ χδ. Τότε α΄) ἂν διευθύνονται ἀντιθέτως, θὰ ἔχουν διατρέξει ὁμοῦ, ὅταν θὰ συναντηθοῦν, ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν, ἤτοι 360°. Ὥστε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi+\beta\chi=360$ καὶ $\chi=\frac{360}{\alpha+\beta}$· β΄) ἂν διευθύνωνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν θὰ συναντηθοῦν, τὸ ταχύτερον κινητόν, δηλαδὴ τὸ κινητὸν τὸ διανῦον α^0 εἰς 1δ., θὰ ἔχῃ διατρέξῃ 360° ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi-\beta\chi=360$ καὶ $\chi=\frac{360}{\alpha-\beta}$, ἐὰν $\alpha\neq\beta$.

228. Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν διὰ πρώτην φορὰν μετὰ χδ. Τότε τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διατρέξῃ τὰ $\frac{\chi}{\tau_1}$ τῆς περιφερείας καὶ τὸ δεύτερον τὰ $\frac{\chi}{\tau_2}$ αὐτῆς, εἶναι δὲ $\frac{\chi}{\tau_2}>\frac{\chi}{\tau_1}$· Ἐὰν δὲ τὰ κινητὰ κινοῦνται πρὸς τὴν φορὰν ἔχομεν (ἄσκ. 227) τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\tau_2}-\frac{\chi}{\tau_1}=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$, ἐὰν δὲ ταῦτα κινοῦνται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{\tau_2}+\frac{\chi}{\tau_1}=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$·

Διὰ 2αν φορὰν θὰ συναντηθοῦν τὰ κινητὰ μετὰ $2.\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ

$2\cdot\frac{\tau\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ ἀντιστοίχως ἀπὸ τῆς πρώτης ἀναχωρήσεως καὶ διὰ 3ην φορὰν θὰ συναντηθοῦν μετὰ $3\cdot\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ $3\cdot\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ καὶ τὴν νυοστὴν φορὰν θὰ συναντηθοῦν μετὰ $\nu\cdot\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}$ καὶ $\nu\cdot\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$ δεύτερα λεπτά.

229. Ἐδῶ ἔχομεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν. Ἑπομένως ἐὰν τὸ χ παριστᾷ ὥρας, οἱ δεῖκται τῶν ὡρολογίων θὰ συμπέσουν μετὰ ὥρας $\chi=\frac{\chi_1\chi_2}{\tau_1-\tau_2}$, ὅπου $\tau_1=12\tau_2$ καὶ $\tau_2=1$ ὥρα, διότι ἡ ταχύτης τοῦ δείκτου τῶν πρώτων λεπτῶν εἶναι δωδεκαπλασία τῆς ταχύτητος τοῦ δείκτου τῶν ὡρῶν. Ὥστε εἶναι $\chi=\frac{12\tau_2.\tau_2}{12\tau_2-\tau_2}=\frac{12\tau_2}{12-1}=\frac{12}{11}$ ὥρας $=1$ ὥρ. $5\frac{5}{11}$π.

Ἄλλος τρόπος λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ὁ ἑξῆς: Εἰς 1 ὥραν ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν διατρέχει 60 διαιρέσεις τῆς πλακὸς τοῦ ὡρολογίου καὶ ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν διατρέχει 5 διαιρέσεις. Ἤδη ἔστω χ αἱ ὧραι μετὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχῃ γίνει ἡ πρώτη σύμπτωσις τῶν δεικτῶν. Ἀλλὰ τότε ὁ λεπτοδείκτης θὰ ἔχῃ διατρέξῃ 60 διαιρέσεις ἐπὶ πλέον τοῦ ὡροδείκτου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$60\chi-5\chi=60 \text{ καὶ } \chi=\frac{60}{55}=\frac{12}{11} \text{ ὥρας.}$$

230. Ὅταν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν, μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν 15 διαιρέσεις. Ἤδη ἔστω ὅτι μετὰ μεσημβρίαν ὁ ὡροδείκτης ἔκαμε χ διαιρέσεις. Τότε ὁ λεπτοδείκτης ἔκαμε 12χ διαιρέσεις. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεῖκται σχηματίζουν διὰ πρώτην φορὰν ὀρθὴν γωνίαν ἔχομεν $12\chi-\chi=15$, $11\chi=15$ καὶ $\chi=\frac{15}{11}$ καὶ $12\chi=\frac{15.12}{11}=16\frac{4}{11}$. Ἤτοι μετὰ $16\frac{4}{11}$ πρῶτα λεπτὰ σχηματίζουν οἱ δεῖκται ὀρθὴν γωνίαν διὰ πρώτην φοράν. Διὰ νὰ σχηματίσουν δὲ οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ δευτέραν φοράν, πρέπει νὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας κυρτὴν γωνίαν τριῶν ὀρθῶν. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν $12\chi-\chi=45$, $\chi=\frac{45}{11}$ καὶ $12\chi=\frac{45.12}{11}=\frac{15.12}{11}\cdot 3=$ $=16\frac{4}{11}\cdot 3=49\frac{1}{11}$, ἤτοι μετὰ $49\frac{1}{11}$ πρῶτα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας θὰ σχηματίσουν οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ δευτέραν φοράν.

Ὁμοίως διὰ νὰ σχηματίσουν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης ὀρθὴν γωνίαν διὰ τρίτην φοράν, πρέπει νὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας κυρτὴν γωνίαν πέντε ὀρθῶν. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν $12\chi-\chi=75$,

$\chi=\frac{75}{11}$ καὶ $12\chi=\frac{75.12}{11}=\frac{15.12}{11}\cdot 5=16\frac{4}{11}\cdot 5=81\frac{9}{11}\cdot$ Ὥστε μετὰ 1 ὥρ. $21\frac{9}{11}$ π. θὰ σχηματίσουν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας οἱ δεῖκται οὗτοι ὀρθὴν γωνίαν διὰ τρίτην φοράν. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω εὑρίσκομεν ὅτι διὰ νυοστὴν φορὰν θὰ σχηματίσουν ὀρθὴν γωνίαν μετὰ $16\frac{4}{11}\cdot(2\nu-1)$ πρῶτα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας.

231. Διὰ νὰ σχηματίσουν ὁ ὡροδείκτης καὶ ὁ λεπτοδείκτης γωνίαν α^0 πρέπει νὰ ὑπάρχουν μεταξὺ αὐτῶν $\frac{\alpha.60}{360}=\frac{\alpha}{6}$ διαιρέσεις.

Κατόπιν τούτων τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ προηγούμενον. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

διὰ 1ην φορὰν $12\chi-\chi=\frac{\alpha}{6}$, $\chi=\frac{\alpha}{66}$ καὶ $12\chi=\frac{\alpha.12}{66}=\frac{2\alpha}{11}$

διὰ 2αν φορὰν $12\chi-\chi=\frac{360.\alpha}{6}$, $\chi=\frac{360-\alpha}{66}$ καὶ $12\chi=\frac{(360-\alpha)12}{66}=$ $=\frac{2(360-\alpha)}{11}$.

232. Ἔστω ὅτι ὁ ὡροδείκτης διέτρεξε τὸ τόξον ΑΒ καὶ ὁ λεπτοδείκτης διέτρεξε τὸ τόξον ΑΓ. Ἐὰν δὲ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ γράψῃ ὁλόκληρον τὴν πλάκα ἤτοι 60 διαιρέσεις καὶ τὸ τόξον ΑΔ. Ἀλλ' εἶναι:

$$\widehat{A\Delta}=\widehat{AB}+\frac{\widehat{B\Gamma}}{2}=\frac{2\,.\,\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma}}{2}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma}}{2}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{A\Gamma}}{2}.$$

Ἤδη ἔστω ὅτι ὁ ὡροδείκτης ἔκαμε χ διαιρέσεις μετὰ μεσημβρίαν. Τότε ὁ λεπτοδείκτης ἔκαμε 12χ διαιρέσεις καὶ ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων ἔκαμε 720χ διαιρέσεις. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$720\chi=60+\frac{\chi+12\chi}{2}$, καὶ $\chi=\frac{120}{1427}\cdot$ Ὥστε ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θὰ διχοτομήσῃ τὴν γωνίαν μετὰ $60+\frac{13}{2}\cdot\frac{120}{1427}=60\frac{780}{1427}$ δεύτερα λεπτὰ ἀπὸ τῆς μεσημβρίας.

233. Ἔστω ὅτι μετὰ χ πηδήματα θὰ φθάσῃ ὁ κύων τὴν ἀλώπεκα. Ἀλλ' ἀφοῦ ὅταν ὁ κύων κάμνῃ 6 πηδήματα ἡ ἀλώπηξ κάμνει 9, ὅταν ὁ κύων κάμνῃ χ πηδήματα, ἡ ἀλώπηξ θὰ προχωρήσῃ κατὰ $\frac{9\chi}{6}=\frac{3\chi}{2}$ πηδήματα. Ὥστε ἡ ἀπόστασις τῶν χ πηδημάτων τοῦ κυνὸς ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν $60+\frac{3\chi}{2}$ πηδημάτων τῆς ἀλώπεκος. Ἀλλὰ 7 πηδήματα τῆς ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν μὲ 3 πηδήματα τοῦ κυνός. Ἑπομένως τὰ $60+\frac{3\chi}{2}$ πηδήματα τῆς ἀλώπεκος ἰσοδυναμοῦν μὲ $3.\left(60+\frac{3\chi}{2}\right):7=\frac{180}{7}+\frac{9\chi}{14}$ πηδήματα τοῦ κυνός. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\chi=\frac{180}{.7}+\frac{9\chi}{14} \text{ καὶ } \chi=72.$$

Περὶ συναρτήσεων

Ἀσκήσεις.—*234.* Ὁ χρόνος καθ' ὃν περατοῦται ἓν ἔργον εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν, ὅταν τὸ ποσὸν ἐργασίας ἑκάστου εἶναι σταθερόν. Ἡ ἀμοιβὴ τῆς ἐργασίας ἐργάτου, ὅστις πληρώνεται μὲ τὴν ὥραν, εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν ἐργασίας. Ἡ ἀξία ὡρισμένου ὑφάσματος εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους αὐτοῦ.

235. Ὁ χρόνος καθ' ὃν κινητόν τι διανύει ὡρισμένον διάστημα εἶναι συνάρτησις τῆς ταχύτητος αὐτοῦ.

Τὸ διάστημα ὡς καὶ ἡ ταχύτης σωμάτων πιπτόντων ἐλευθέρως ἐν τῷ κενῷ εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως.

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ τὸ ὕψος εἶναι σταθερόν, εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως αὐτοῦ. Εἶναι δὲ τοῦτο συνάρτησις τοῦ ὕψους, ὅταν ἡ βάσις του εἶναι σταθερά. Ὅταν δὲ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι μεταβλητά, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι συνάρτησις τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

236. Διὰ $\chi=1$ ἔχομεν:

α') $\psi=9$ β') $\psi=-17$ γ') $\psi=1$ δ') $\psi=-1$ κ.ο.κ.

διὰ $\chi=-2$ ἔχομεν:

α') $\psi=0$ β') $\psi=-41$ γ') $\psi=-2$ δ') $\psi=2$ κ.ο.κ.

237. Διὰ $\chi=-1$ ἔχομεν:

α') $\psi=-61\frac{1}{4}$ β') $\psi=\frac{1}{2}+3-7=-3\frac{1}{2}$ κ.ο.κ.

238. Διὰ $\chi=-\frac{1}{4}$ ἔχομεν:

α') $\psi=\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{16}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}+9=8\frac{559}{608}$.

β') $\psi=600-35.\frac{1}{16}-\frac{13}{15}\cdot\frac{1}{4}=597\frac{147}{240}$.

239. Τὰ ζεύγη θὰ εἶναι α') $\chi=0$, $\psi=2:\chi=1$, $\psi=3$ κλπ.

β') $\chi=0,\ \psi=1:\chi=1,\ \psi=\frac{1}{12}$ κλπ. Ἔπειτα δὲ θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 123.

240. $\chi=0,\ \psi=0:\chi=1,\ \psi=\frac{7}{20}:\chi=2,\ \psi=-\frac{1}{10}$ κλπ.

241. α') $\chi=0,\ \psi=0:\chi=-1,\ \psi=1\frac{1}{2}:\chi=-2,\ \psi=34$ κλπ.

242 καὶ *243.* Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 124.

244. α') Διὰ $\chi=0$ ἔχομεν $\psi=0$ καὶ διὰ $\chi=1,\ \psi=3$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς 0 καὶ διὰ τοῦ σημείου Μ (1,3).

β') Διὰ $\chi=0$ ἔχομεν $\psi=3$ καὶ διὰ $\psi=0$ ἔχομεν $\chi=-3$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας καὶ διέρχεται διὰ τῶν σημείων Μ(0,3) καὶ $M_1(-3,0)$. (εἰς τὰ ὁποῖα τοὺς τέμνει).

γ') Διὰ $\chi=0$ ἔχομεν $\psi=0$ καὶ διὰ $\chi=1$ ἔχομεν $\psi=0{,}5=\frac{1}{2}$.

Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ διὰ τοῦ σημείου $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

245. α' Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-\frac{2}{3}$ καὶ διὰ $\psi=0$ εἶναι $\chi=\frac{2}{3}$.

Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα. $M\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ καὶ $M_1\left(\frac{2}{3},0\right)$ (διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται).

β') Εἶναι $\psi=-\frac{\chi}{2}$. Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς (0,0) καὶ διὰ τοῦ σημείου $M\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

γ') Διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-\frac{1}{8}$ καὶ διὰ $\psi=0$ εἶναι $\chi=-\frac{3}{20}$.

Ὥστε ἡ ζ. εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $M\left(0,-\frac{1}{8}\right)$ καὶ $M_1\left(-\frac{3}{20},0\right)$.

246. α') Εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $\mathrm{M}\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ τοῦ ἄξονος τῶν ψ.

β') Τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $\mathrm{M}(0,5)$ καὶ $\mathrm{M}_1\left(\frac{5}{2},0\right)$.

γ') Τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $\mathrm{M}\left(0,2\frac{1}{2}\right)$ καὶ $\mathrm{M}_1(-5,0)$.

Περὶ ἀνισοτήτων α^ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

Ἀσκήσεις.—***247.*** α') $-9\chi>5$, $9\chi<-5$ καὶ $\chi<-\frac{5}{9}$.

β') $-4\chi>9$, $4\chi<-9$ καὶ $\chi<-\frac{9}{4}$.

γ') $0{,}5\chi>-5$ καὶ $\chi>-5:0{,}5$, ἤτοι $\chi>-10$.

δ') $-9\chi<18$, $9\chi>-18$ καὶ $\chi>-2$.

ε') $9\chi>-7$ καὶ $\chi>-\frac{7}{9}$.

στ') $-7\chi>48$, $7\chi<-48$ καὶ $\chi<-6\frac{6}{7}$.

ζ') $0{,}6\chi-5>0{,}25\chi-0{,}25$, $0{,}6\chi-0{,}25\chi>5-0{,}25$

$0{,}35\chi>4{,}75$ καὶ $\chi>\frac{475}{35}$, ἤτοι $\chi>13\frac{4}{7}$.

η') $\chi<3\frac{5}{9}$ θ') $-2\chi>0$ καὶ $\chi<0$.

ι') Ἵνα τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι θετικὸν πρέπει, οἱ ὅροι του νὰ εἶναι ὁμόσημοι, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι
ἢ $\chi-3>0$ καὶ $\chi-4>0$ ἢ $\chi-3<0$ καὶ $\chi-4<0$. Θὰ εἶναι δὲ οἱ ὅροι του ἀμφότεροι θετικοὶ ἐὰν $\chi>4$ καὶ ἀμφότεροι οἱ ὅροι θὰ εἶναι ἀρνητικοί, ἐὰν $\chi<3$.

ια') Ἔχομεν $2\chi+1<3\chi-5$, καὶ $\chi>6$.

248. Ἡ πρώτη ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi<\frac{1}{2}$. Ὥστε οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα αὐτὴν εἶναι οἱ -3, -2, -1, 0.

Ἡ δευτέρα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi>-3$. Ὥστε οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ ἐπαληθεύοντες τὴν ἀνισότητα αὐτὴν εἶναι οἱ -2, -1, 0, 1 κ. ο. κ. Ὡς δὲ βλέπομεν εἰς τὰς δύο ὡς ἄνω σειρὰς κοινοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ -2, -1, 0.

249. Φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ

$3\chi-3\chi<1+5$

θεώρουμεν τὴν AB καὶ τὴν ἀχθεῖσαν κάθετον ὡς ἄξονας συντεταγμένων. Οὕτως αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων A καὶ B εἶναι $A(\gamma,0)$ καὶ $B(-\gamma,0)$. Ἐὰν δὲ αἱ συντεταγμέναι τοῦ M εἶναι αἱ χ καὶ ψ, ἔχομεν $(AM)=\sqrt{(\chi-\gamma)^2+\psi^2}$ καὶ $(BM)=\sqrt{(\chi+\gamma)^2+\psi^2}$. Οὕτως ἐὰν τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον, ἤτοι ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, θὰ εἶναι $M(0,\psi)$ ὁπότε $(BM)=(AM)=\sqrt{\gamma^2+\psi^2}=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2-\gamma^2}=\alpha$. Ἐὰν δὲ τὸ M κεῖται ἐπι τῆς AB θὰ εἶναι $M(\chi,0)$. Ὥστε τότε τὸ AM θὰ λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν $\alpha-\gamma$, τὸ δὲ BM τὴν μεγίστην τιμὴν $\alpha+\gamma$.

250. Ἔστω ὅτι αἱ ταχύτητες εἶναι εἰς ὥρας καὶ ὅτι $\tau_1<\tau_1'$ καὶ $\tau_2<\tau_2'$. Ἤδη ἔστω ὅτι τὰ δύο κινητά, κινούμενα μὲ τὰς μικροτέρας ταχύτητας, συναντῶνται μετὰ χ ὥρας. Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε τὴν ἐξίσωσιν $\tau_1\chi+\tau_2\chi=\alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{\alpha}{\tau_1+\tau_2}$, ὁπότε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεώς των ἀπὸ τοῦ A θὰ εἶναι $\dfrac{\alpha\tau_1}{\tau_1+\tau_2}$. Ἤδη ἔστω ὅτι τὰ δύο κινητά, κινούμενα μὲ τὰς μεγαλυτέρας ταχύτητας, συναντῶνται μετὰ χ_1 ὥρας. Τότε θὰ ἔχωμεν $\tau_1'\chi_1+\tau_2'\chi_1=\alpha$ καὶ $\chi_1=\dfrac{\alpha}{\tau_1'+\tau_2'}$, ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεώς των ἀπὸ τοῦ A θὰ εἶναι $\dfrac{\alpha\tau_1'}{\tau_1'+\tau_2'}$. Ὥστε θὰ συναντηθοῦν μεταξὺ τῶν χρόνων $\dfrac{\alpha}{\tau_1+\tau_2}$ καὶ $\dfrac{\alpha}{\tau_1'+\tau_2'}$ καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A μεταξὺ τῶν ἄνω εὑρεθεισῶν.

251. α΄) Ἔστω ἡ ἰσότης $A=B$ καὶ ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$. Τότε ἐὰν $\alpha-\beta=\delta$, θὰ εἶναι $\alpha=\beta+\delta$. Ἐὰν δὲ τὰ μέλη τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος, τὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς $A=B$ εὑρίσκομεν $A-\alpha=B-\beta-\delta$. Ἑπομένως εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι $A-\alpha<B-\beta$.

β΄) Ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha-\beta)^2>0$, ἕπεται ὅτι $\alpha^2+\beta^2>2\alpha\beta$. Ὥστε, διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς διὰ τοῦ θετικοῦ $\alpha\beta$, ἔχομεν: $\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}>2$, ἤτοι $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}>2$.

252. Ἔστω $A=B$ καὶ $\alpha>\beta$, ὅπου α καὶ β ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον. Τότε εἶναι $\alpha=\beta+\delta$ καὶ $\dfrac{A}{\alpha}=\dfrac{B}{\beta+\delta}$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\dfrac{A}{\alpha}<\dfrac{B}{\beta}$. Π.χ. $20=20$ καὶ $5>4$· τότε εἶναι $\dfrac{20}{5}<\dfrac{20}{4}$, ἤτοι $4<5$· ἐὰν δὲ ἔχωμεν $-4>-5$, θὰ εἶναι $\dfrac{20}{-4}<\dfrac{20}{-5}$, ἤτοι $-5<-4$. Ἐνῷ ἐὰν ἔχωμεν $-5<4$, θὰ ἔχωμεν $\frac{20}{-5}<\frac{20}{4}$, ἤτοι $-4<5$.

253. Ἐπειδὴ $\beta\mu+\alpha k>0$, θὰ εἶναι α΄) $\alpha^2-\beta^2<0$ ἐὰν $(\alpha^2-\beta^2)(\beta\mu+\alpha k)<0$ καὶ β΄) $\alpha^2-\beta^2>0$ εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν.

Ὥστε ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ $\alpha^2-\beta^2$ θὰ ἔχωμεν:

α΄) $(\alpha-\beta)(\mu\chi+\nu)-(\alpha+\beta)(k\chi+\lambda)>(\alpha+\beta)(\mu\chi-\nu)+(\alpha-\beta)(k\chi-\lambda)$, ἤτοι $2(\alpha\nu-\beta\lambda)>2\chi(\beta\mu+\alpha k)$ καὶ $\chi<\frac{\alpha\nu-\beta\lambda}{\alpha k+\beta\mu}$.

β΄) Ἐὰν $\alpha^2-\beta^2>0$ θὰ εὕρωμεν $\chi>\frac{\alpha\nu-\beta\lambda}{\alpha k+\beta\mu}$.

254. α΄) Ἐπειδὴ (ἄσκ. 251,β΄) $(\alpha-\beta)^2>0$, $(\beta-\gamma)^2>0$ καὶ $(\gamma-\alpha)^2>0$, εἶναι $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha^2)>0$, ἤτοι:
$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)>0$ ἢ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\beta$.

β΄) Ἐὰν $\alpha>\beta>\gamma$ εἶναι $\alpha-\beta<\gamma$, $\beta-\gamma<\alpha$ καὶ $\alpha-\gamma<\beta$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ἤτοι:
$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ καὶ
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.—1) Διατάσσομεν τὰς ἐξισώσεις εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται ὁ εἷς κάτωθεν τοῦ ἄλλου.

2) Ἐκλέγομεν τὸν ἀπαλειπτέον ἄγνωστον.

3) Καθιστῶμεν κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ εἰς αὐτὰς καὶ πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διαιρεθέντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει.

4) Ἂν ὁ προκύπτων κοινὸς συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἔχῃ ἀντίθετα πρόσημα εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε ὁ ἄγνωστος ἀπαλείφεται· ἂν δὲ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πρόσημον εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, ἀλλάσσομεν τὰ πρόσημα πάντων τῶν ὅρων τῆς μιᾶς τῶν ἐξισώσεων καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

5) Λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἐν αὐτῇ.

6) Ἀντικαθιστῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν εἰς μίαν τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου ἀγνώστου.

7) Ἐπαληθεύομεν τὸ δοθὲν σύστημα, ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν.

Ἀσκήσεις.—255) α′) $\begin{array}{l|l} -3\chi-4\psi=-10 & 13\chi=26. \\ 16\chi+4\psi=\ \ 36 & \chi=2, \psi=1. \end{array}$

β′) $\begin{array}{l|l|l} 2\chi+\ 3\psi=72 & -4\chi-6\psi=-144 & 5\chi=60 \\ 3\chi+\ 2\psi=68 & 9\chi+6\psi=\ \ 204 & \chi=12, \psi=16. \end{array}$

γ′) $\begin{array}{l|l|l} 7\chi-13\psi=\ 0 & -42\chi+78\psi=\ \ 0 & 8\psi=56 \\ 6\chi-10\psi=\ 8 & 42\chi-70\psi=\ 56 & \psi=7, \chi=13. \end{array}$

256. Ἐργαζόμενοι μετὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{7-4\sqrt{6}}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}=\frac{(7-4\sqrt{6})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$\psi=\frac{13+6\sqrt{6}}{\sqrt{3}+5\sqrt{2}}=\frac{(13+6\sqrt{6})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+5\sqrt{2})(\sqrt{3}-5\sqrt{2})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

257. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν:

$\chi=\frac{2394}{342}=7$ καὶ $\psi=\frac{342}{342}=1.$

258. Τὸ σύστημα μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων γίνεται $4\chi+\psi=-8$, $2\chi-3\psi=-9$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν

$\chi=-\frac{33}{14}$ καὶ $\psi=\frac{10}{7}.$

259. Τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $1{,}7\chi-3{,}7\psi=3{,}9$ καὶ $2{,}7\chi-4{,}3\psi=1{,}8$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{1011}{268}$ καὶ $\psi=-\frac{747}{268}.$

260. Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4}{\alpha^2-\beta^2},\ \psi=\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}.$$

261. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $4\chi+3\psi=0$ καὶ $3\chi-7\psi=37$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=3$ καὶ $\psi=-4$.

262. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ $\frac{\chi+3}{5}=\frac{8-\psi}{4}$ καὶ $\frac{\chi+3}{5}=\frac{3(\chi+\psi)}{8}$

ἤτοι εἰς τὸ $4\chi+5\psi=28$ καὶ $7\chi+15\psi=24$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=12$ καὶ $\psi=-4$.

263. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\begin{array}{l} 4{,}2\chi+6{,}1\psi=163{,}968 \\ 19{,}5\chi+12\psi=455 \end{array}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=80788{,}4:68{,}55$ καὶ $\psi=1286{,}376:68{,}55$.

264. Εὑρίσκομεν $(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\beta^3$
$(\alpha^2-\beta^2)\chi=(\alpha+\beta)^2.(\alpha-\beta)$ καὶ $\chi=\alpha+\beta$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν: $\psi=\alpha-\beta$.

265. Λύοντες τὸ σύστημα κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{καὶ}\ \psi=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

266. Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὸ
$(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$ καὶ $(\alpha-\beta)\chi-(\alpha+\beta)\psi=0$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\alpha+\beta$ καὶ $\psi=\alpha-\beta$.

267. α΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ
$\alpha\chi-2\beta\psi=-\alpha\beta$ καὶ $\beta\chi-\beta\psi=\beta^2-\alpha\beta$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν: $\chi=\beta$ καὶ $\psi=\alpha$.

β΄) Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $\chi=\alpha$ καὶ $\psi=\beta$.

268. α΄) Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{18}{7}+\frac{5\psi}{21}$.
Ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ὁπότε ἔχομεν:

$$0{,}75.\left(\frac{18}{7}+\frac{5\psi}{21}\right)+2\psi=15, \quad 54+5\psi+56\psi=420$$

$$\psi=6 \text{ καὶ } \chi=\frac{18}{7}+\frac{30}{21}=4.$$

β΄) Ἔχομεν $\lambda.(\alpha+\psi)+\mu\psi=\nu$, $\psi=\frac{\nu-\alpha\lambda}{\lambda+\mu}$ καὶ $\chi=\alpha+\frac{\nu-\alpha\lambda}{\lambda+\mu}=$
$=\frac{\nu+\alpha\mu}{\lambda+\mu}$.

γ΄) Εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha^2-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ $\alpha.\left(\frac{\alpha^2-\beta\psi}{\alpha}\right)-\beta\psi=\beta^2$. Ὅθεν
$\psi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}$ καὶ $\chi=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$.

269. α΄) Εἶναι $\frac{2}{5}.\left(3\alpha-\frac{\chi}{2}\right)-\chi=2\beta$, $\chi=\frac{3\alpha-5\beta}{3}$ καὶ
$\psi=3\alpha-\frac{3\alpha-5\beta}{6}=\frac{15\alpha+5\beta}{6}$.

β΄) Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν
$5\psi-\chi=6\alpha$. Ὅθεν εἶναι $5\psi-(4\alpha-\psi)=6\alpha$, $\psi=\frac{5\alpha}{3}$ καὶ
$\chi=4\alpha-\frac{5\alpha}{3}=\frac{7\alpha}{3}$.

γ΄) Εἶναι $\chi=3\psi$ καὶ $2.3\psi+3\psi=5$. Ὥστε εἶναι:
$\psi=\frac{5}{9}$ καὶ $\chi=\frac{5}{3}$.

270. α΄) Εἶναι $3\chi=20-5\psi$ καὶ $3\chi=-10\psi$. Ὥστε $20-5\psi=-10\psi$,
$\psi=-4$ καὶ $3\chi=40$. Ὅθεν $\chi=\frac{40}{3}$.

β΄) Εἶναι $\frac{\chi}{\alpha}=1-\frac{\psi}{\beta}$ καὶ $\frac{\chi}{\alpha}=1+\frac{\psi}{\beta}$. Ὥστε $1-\frac{\psi}{\beta}=$

$=1+\dfrac{\psi}{\beta}$ καὶ $\psi=0$. Ὅθεν: $\dfrac{\chi}{\alpha}=1$ καὶ $\chi=\alpha$.

γ') Εἶναι $\chi=\dfrac{\beta\psi+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha}$ καὶ $\chi=\gamma-\psi$. Ὥστε:

$\dfrac{\beta\psi+\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha}=\gamma-\psi$, $\psi=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}$ καὶ $\chi=\gamma-\dfrac{\gamma\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$.

δ') Ἐκ τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$\chi=\dfrac{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)\psi}{\alpha-\beta}$ καὶ $\chi=\dfrac{(\alpha+\beta)^2.\psi}{(\alpha-\beta)^2}$. Ὥστε εἶναι:

$\dfrac{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha+\beta)\psi}{\alpha-\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2.\psi}{(\alpha-\beta)^2}$, $\psi=(\alpha-\beta)^2$ καὶ $\chi=(\alpha+\beta)^2$.

ε') Εἶναι $\chi=\alpha+\beta-\psi$ καὶ $\chi=\dfrac{2\alpha\beta-\alpha\psi}{\beta}$. Ὥστε εἶναι:

$\alpha+\beta-\psi=\dfrac{2\alpha\beta-\alpha\psi}{\beta}$, $\psi=\beta$ καὶ $\chi=\alpha$.

στ') Εὑρίσκομεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$\psi=\dfrac{\beta\chi}{\alpha}-\alpha^2\beta^2$ καὶ $\psi=-\beta^4-\dfrac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$. Ὥστε εἶναι:

$\dfrac{\beta\chi}{\alpha}-\alpha^2\beta^2=-\beta^4-\dfrac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$, $\chi=\alpha^2\beta(\alpha-\beta)$ καὶ $\psi=-\alpha\beta^3$.

271. α') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $-4\chi+13\psi=10$ καὶ $12\chi-26\psi=3$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσθέσεως $\chi={}^{23}/_{4}$ καὶ $\psi={}^{33}/_{13}$.

β') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ
$-4\chi+49\psi=143$, $12\chi+114\psi=297$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσθέσεως $\chi=-\dfrac{583}{248}$ καὶ $\psi=\dfrac{242}{87}$.

γ') Ἔχομεν $\chi=\dfrac{2\alpha\beta-(\alpha-\beta)\psi}{\alpha+\beta}$, $\chi=\dfrac{2\alpha\gamma-(\alpha-\gamma)\psi}{\alpha+\gamma}$

ὅθεν $\dfrac{2\alpha\beta-(\alpha-\beta)\psi}{\alpha+\beta}=\dfrac{2\alpha\gamma-(\alpha-\gamma)\psi}{\alpha+\gamma}$, $\psi=-\alpha$ καὶ

$$\chi=\frac{2\alpha\beta+(\alpha-\beta)\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}=\alpha.$$

δ') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ

$$(\alpha-\beta)\chi+(\alpha+\beta)\psi=2\alpha(\alpha^2-\beta^2)$$
$$(\alpha-\beta)^2\chi-(\alpha+\beta)^2\psi=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσθέσεως

$$\chi=(\alpha+\beta)^2 \text{ καὶ } \psi=(\alpha-\beta)^2.$$

ε') Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς αης ἐξισώσεως ἐπὶ $\dfrac{1}{\beta+\alpha}$ καὶ ἔπειτα προσθέτοντες εὑρίσκομεν:

$$\chi\left[\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\right]=\frac{\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}-\beta^2,\text{ ἤτοι :}$$

$$\chi=\frac{\beta(\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}.$$ Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{\beta(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^3+2\alpha^2\beta+\beta^3)}{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}.$$

στ') Ἔχομεν $\alpha\chi=\alpha^2-\beta\psi$ καὶ $\alpha\chi=\beta^2+\beta\psi$. Ὅθεν:

$\alpha^2-\beta\psi=\beta^2+\beta\psi$; $\psi=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}$ καὶ $\chi=\dfrac{\alpha^2-\beta\psi}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$.

ζ') Ἔχομεν $\chi=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ $\chi=\dfrac{\delta+\mu\psi}{\lambda}$. Ὅθεν:

$\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}=\dfrac{\delta+\mu\psi}{\lambda}$, $\psi=\dfrac{\gamma\lambda-\alpha\delta}{\alpha\mu+\beta\lambda}$ καὶ $\chi=\dfrac{\gamma\mu+\beta\delta}{\alpha\mu+\beta\lambda}$.

η') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $55\chi-85\psi=-87$ καὶ $-105\chi+101\psi=73$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{258,2}{337}$ καὶ $\psi=\dfrac{512}{337}$.

272. α') Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $-16\chi+23\psi=16$ καὶ $20\chi-42\psi=13$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=-\dfrac{971}{512}$ καὶ $\psi=-\dfrac{132}{53}$.

β') Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\psi=\dfrac{1}{\beta}$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{2\beta-\alpha}{\beta^2}$.

γ') Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $3\psi+4\chi=10$ καὶ $20\psi+9\chi=49$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=1$ καὶ $\psi=2$.

δ') Ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\chi=\alpha^2$. καὶ $\psi=-\alpha^2$.

ε') Ἔχομεν $\left.\begin{aligned}(\alpha-\beta)\chi+(\alpha+\beta)\psi&=\alpha+\beta\\(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi&=\alpha-\beta\end{aligned}\right\}$ $\chi=0$, $\psi=1$.

στ') Ἔχομεν $\left.\begin{aligned}(\alpha-\beta)\chi&=\alpha\psi-1\\\beta\chi&=(\beta-\alpha)\psi+1\end{aligned}\right\}$ $\dfrac{(\alpha-\beta)}{\beta}=\dfrac{\alpha\psi-1}{(\beta-\alpha)\psi+1}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\psi=\dfrac{\alpha}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$ καὶ κατόπιν $\chi=\dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$.

ζ') Εἶναι τὸ αὐτὸ σύστημα μὲ τὸ προηγούμενον γ'.

η') Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $55,9\chi-93,4\psi=$

$= -178{,}2$ καὶ $-48{,}85\chi+25{,}25\psi=36{,}3$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\chi=\frac{1109{,}13}{3151{,}115}$ καὶ $\psi=\frac{6675{,}90}{3151{,}115}$.

ϑ') Θέτοντος εἰς τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ χ τὴν τιμήν του ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις

$\psi=\frac{\alpha\beta(1-\alpha)+\gamma(\alpha\beta-\gamma)}{\alpha(\gamma-\alpha)}$ καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\gamma(\alpha-\gamma\beta)-\alpha\beta(1+\gamma)}{\gamma(\gamma-\alpha)}$$

Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς $\begin{cases}\alpha\chi+\beta\psi=\gamma\\ \alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1\end{cases}$

Ἀσκήσεις.— *273.* α') Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda^2-1$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν ἐὰν $\lambda\neq\pm1$. Αὕτη δὲ εἶναι ἡ

$$\chi=-\frac{1}{\lambda^2-1} \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{2\lambda^2+\lambda-2}{\lambda^2-1}$$

Ἐὰν $\lambda=1$ ἢ -1 τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον, διότι εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως τὰ συστήματα:

$$\begin{matrix}\chi+\psi=2\\ \chi+\psi=3\end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix}-\chi+\psi=2\\ \chi-\psi=-1\end{matrix} \quad \text{ἤτοι τὸ} \quad \begin{matrix}\chi-\psi=-2\\ \chi-\psi=-1\end{matrix}$$

β') Τὸ σύστημα τοῦτο δίδει τὴν λύσιν $\chi=-1$ καὶ $\psi=-\lambda$. Ὥστε εἶναι τοῦτο δυνατὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς παραμέτρου λ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda-2), \lambda=2$. Διότι αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ τῶν $\chi=-\frac{\lambda-2}{\lambda-2}$ καὶ $\psi=-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-2}$ διὰ $\lambda=2$ εἶναι $\chi=-1$ καὶ $\psi=-2$.

γ') Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1.\lambda-(-4)(3\lambda-1)=13\lambda-4$, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν λύσιν ἐὰν $\lambda\neq\frac{4}{13}$, τὴν $\chi=-\frac{(\lambda-4)(3\lambda-1)}{13\lambda-4}$, $\psi=\frac{\lambda-4}{13\lambda-4}$. Ἐὰν $\lambda=\frac{4}{13}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

δ') Ἔχομεν τὸ σύστημα $2\chi-\psi=-\lambda$ καὶ $\chi-3\psi=-(\lambda+3)$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-5$ τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν, δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς λ καὶ εἶναι αὕτη ἡ $\chi=-\frac{2\lambda-3}{5}$ $\psi=\frac{\lambda+6}{5}$.

ε') Ἐδῶ εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=1-\lambda$. Ὥστε ἐὰν $\lambda\neq1$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\frac{\lambda-1}{1-\lambda}=-1$ καὶ $\psi=\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda}=1+\lambda$. Ἐὰν $\lambda=1$ τὸ σύστημα γίνεται $\chi+\psi=1$ καὶ $\chi+\psi=1$. Ἑπομένως τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

στ′) Ἔχομεν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = -\lambda^2+3$. Ὥστε ἐὰν $\lambda \neq \sqrt{3}$ τὸ σύστημα ἔχει ἓν μόνον σύστημα λύσεων τὸ $\chi = \frac{-1}{-\lambda^2+3} = \frac{1}{\lambda^2-3}$, $\psi = \frac{\lambda^3-\lambda^2-3\lambda+1}{-\lambda^2+3}$. Ἐὰν $\lambda = \sqrt{3}$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

274. α′) Τὸ σύστημα τοῦτο, ὅπερ γράφεται $3\chi-5\psi=2$, $3\chi-5\psi=-7$ ἀμέσως φαίνεται ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

β′) Ἐπειδὴ $\frac{2}{5} \neq \frac{7}{21} = \frac{4}{12}$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=0$, $\psi=4/7$.

γ′) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $3\chi+2\psi=6$, $7\chi+2\psi=6$. Ἐπειδὴ $\frac{3}{7} \neq \frac{1}{1} = \frac{6}{6}$ τοῦτο ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=0$, $\psi=3$.

δ′) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $4\chi+3\psi=-12$ καὶ $4\chi+3\psi=30$. Εἶναι ἑπομένως τοῦτο ἀδύνατον.

ε′) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $2\alpha\chi-\beta\psi=3$, $3\alpha\chi-\beta\psi=12$. Ἐὰν δὲ $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$ εἶναι $\frac{2\alpha}{3\alpha} \neq \frac{\beta}{\beta}$, ἤτοι $\frac{2}{3} \neq 1$. Ὥστε τότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=9/\alpha$, $\psi=15/\beta$. Ἐὰν $\alpha,\beta=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον. Ὁμοίως τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον καὶ ἐὰν ὁ εἷς τῶν α καὶ β εἶναι μηδέν.

στ′) Τὸ σύστημα τοῦτο ὅπερ γράφεται $\beta\chi+\alpha\psi=\alpha\beta$, $\beta\chi+\alpha\psi=\alpha\beta$, εἶναι ἀόριστον.

275. α′) Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-4+9=5\neq0$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi = \frac{5(\alpha+\beta)}{5} = \alpha+\beta$ καὶ $\psi = \frac{5(\alpha-\beta)}{5} = \alpha-\beta$.

β′) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$ καὶ $(\alpha-\beta)\chi-(\alpha+\beta)\psi=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=-4\alpha\beta$ τὸ σύστημα τοῦτο θὰ ἔχῃ μίαν λύσιν ἐὰν $\alpha,\beta\neq0$ τὴν $\chi = \frac{-4\alpha\beta(\alpha+\beta)}{-4\alpha\beta} = \alpha+\beta$ καὶ $\psi = \frac{-4\alpha\beta(\alpha-\beta)}{-4\alpha\beta} = \alpha-\beta$. Ἐὰν $\alpha,\beta=0$ ἢ εἷς τῶν α καὶ β εἶναι 0 τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

γ′) Ἐπειδὴ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=3.3-(-1)(-1)=8$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $\psi=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$.

δ′) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\alpha\chi-(\alpha+\beta)\psi=-\beta(\alpha+\beta)$$
$$\beta\chi+(\alpha-\beta)\psi=+\alpha(\alpha+\beta)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\alpha(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)=\alpha^2+\beta^2$ θὰ ἔχῃ τοῦτο μίαν λύσιν ἐὰν $\alpha,\beta\neq 0$, ἡ ὁποία εἶναι

$$\chi=\frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta \text{ καὶ } \psi=\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)+\beta^2(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta.$$

Ἐὰν $\alpha,\beta=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

ε΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ $\beta\chi+\alpha\psi=2\alpha\beta$, $\alpha\chi+\beta\psi=2\alpha\beta$, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\beta^2-\alpha^2$. Ἐὰν λοιπὸν $\beta\neq\pm\alpha$ τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν $\chi=\dfrac{2\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+\alpha}$ καὶ $\psi=\dfrac{2\alpha\beta(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=$

$=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta+\alpha}$. Ἐὰν δὲ $\alpha,\beta=0$ ἢ $\beta=\pm\alpha$, τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

στ΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ

$$\chi+\psi=\frac{2\beta\gamma\alpha^2(\alpha-2\beta+3\gamma)}{\beta\gamma(\alpha-2\beta+3\gamma)}=2\alpha^2$$

$$\alpha\chi+\beta\psi=\alpha^3-\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\beta-\alpha$, θὰ ἔχῃ μίαν λύσιν ἐὰν $\beta\neq\alpha$.

Εἶναι δὲ αὕτη ἡ $\chi=\dfrac{(\beta^3-\beta^2\alpha+\alpha^2\beta-\alpha^3)-(\beta-\alpha)^2}{\beta-\alpha}$.

Ἐπειδὴ ὅμως $\dfrac{\beta^4-\alpha^4}{\beta+\alpha}=\beta^3-\beta^2\alpha+\alpha^2\beta-\alpha^3$, ἔχομεν:

$$\chi=\frac{(\beta^4-\alpha^4)-(\beta-\alpha)^2(\beta+\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=\frac{(\beta^4-\alpha^4)-(\beta^2-\alpha^2)(\beta-\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}=(\beta^2+\alpha^2)-$$
$$-(\beta-\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\alpha-\beta.$$

Εἶναι δὲ καὶ $\psi=\dfrac{-(\beta^3-\beta^2\alpha-\beta\alpha^2+\alpha^3)+(\alpha-\beta)^2}{\beta-\alpha}=$

$$=\frac{-(\beta^2-\alpha^2)(\beta-\alpha)+(\alpha-\beta)^2}{\beta-\alpha}=(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).$$

276–280. Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 136.

Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστων

Ἀσκήσεις.—*281.* Ἔχομεν:

$$2\psi=14-\chi-2\omega$$
$$2\psi=14-4\chi-2\omega$$
$$2\psi=13-3\chi-2\omega$$

ὅθεν εἶναι:

$$14-\chi-3\omega=14-4\chi-2\omega$$
$$14\chi-\chi-3\omega=13-3\chi-2\omega$$

Λύοντες ἤδη τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις πρὸς ω εὑρίσκωμεν $\omega=3\chi$ καὶ $\omega=1+2\chi$. Ὅθεν εἶναι $3\chi=1+2\chi$, $\chi=1$, $\omega=3.1=3$ καὶ $\psi=\dfrac{14-1-3.3}{2}=2.$

282. α΄) Ἀπαλείφοντες τὸν ἄγνωστον χ μεταξὺ α^ης^ καὶ β^ας^, ὡς καὶ μεταξὺ α^ης^ καὶ γ^ης^ ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $55\psi-61\omega=80$, $33\psi-34\omega=61$, τὸ ὁποῖον δίδει $\psi=7$ καὶ $\omega=5$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δοθέντος συστήματος $\chi=8$.

β΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὸ ἰσοδύναμον

$$\begin{aligned} -13\chi+9\psi-21\omega&=0\\ -8\chi+11\psi+36\omega&=0\\ \chi+\psi+\omega&=128 \end{aligned}$$

Ἀπαλείφοντες δὲ τὸν χ μεταξὺ α^ης^ καὶ γ^ης^, ὡς καὶ μεταξὺ β^ας^ καὶ γ^ης^ ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $11\psi-4\omega=832$, $19\psi+44\omega=1024$, ὅπερ δίδει $\psi=\frac{2544}{35}$ καὶ $\omega=-\frac{284}{35}$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{444}{7}$.

Ἐπαλήθευσις: Αἱ ἀρχικαὶ ἐξισώσεις δίδουν κατὰ σειράν:

$$\frac{7308}{9396}=\frac{7}{9},\quad \frac{6496}{7308}=\frac{8}{9} \text{ καὶ } \frac{444}{7}+\frac{2544}{35}-\frac{284}{35}=128.$$

γ΄) Ἀπαλείφοντες τὸν φ μεταξὺ α^ης^ καὶ β^ας^, α^ης^ καὶ γ^ης^, ὡς καὶ α^ης^ καὶ δ^ης^, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 7\chi-8\psi-3\omega&=-8\\ -3\chi-\psi+\omega&=-2\\ -5\chi+7\psi-9\omega&=-14 \end{aligned}\right\} (\iota)$$

Ἤδη ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ α^ης^ καὶ β^ας^, α^ης^ καὶ γ^ης^ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $2\chi+11\psi=14$, $26\chi+31\psi=10$ ὅπερ δίδει: $\chi=\frac{27}{29}$ καὶ $\psi=\frac{32}{29}$. Κατόπιν, ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων (ι) εὑρίσκομεν $\omega=\frac{55}{29}$ καὶ τέλος ἐκ μιᾶς τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\varphi=\frac{120}{29}$.

δ΄) Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\omega}{2}$, $\psi=\frac{5\omega}{8}$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἤδη γράφεται $\frac{\omega}{2}-\frac{5\omega}{8}+\omega=7$, εὑρίσκομεν $\omega=8$. Ὅθεν $\chi=\frac{\omega}{2}=4$ καὶ $\psi=5$.

ε΄) Ἀπαλείφοντες διαδοχικῶς τὸν φ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} -30\chi+66\psi+35\omega&=75\\ -6\chi+30\psi+4\omega&=15\\ -7\chi+4\psi+5\omega&=1 \end{aligned}$$

Ἀπαλείφοντες δὲ ἤδη διαδοχικῶς τὸν χ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$28\psi-5\omega=0$, $186\psi-2\omega=99$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\psi=\frac{495}{874}$, $\omega=\frac{1386}{437}$ · Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ $\chi=\frac{1069}{437}$, $\varphi=\frac{78}{437}$.

στ′) Ἀπαλείφοντες τὸν χ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $β^{ας}$ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $1{,}2\psi+\omega=-8{,}5$, ἥτις μετὰ τῆς $γ^{ης}$ ἐξισώσεως ἀποτελεῖ σύστημα, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\omega=\frac{53{,}9}{3}$ καὶ $\psi=-\frac{198{,}5}{9}$ · Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{43{,}6}{3}$.

ζ′) Τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τό:

$$2\chi+\psi=200,\ 3\psi+\omega=300,\ 4\omega+\chi=400.$$

Ἀπαλείφοντες δὲ τὸν χ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $γ^{ης}$ ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν $\psi-8\omega=-600$, ἥτις μετὰ τῆς δευτέρας ἀποτελεῖ σύστημα ὅπερ δίδει $\psi=72$ καὶ $\omega=84$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=64$.

283 α′) Ἀπαλείφοντες τὸν ψ διαδοχικῶς εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$(\alpha^2-1)\chi+(\alpha-1)\omega=\alpha^3-3\alpha^2$$
$$(\alpha-1)\chi-(\alpha-1)\omega=\alpha^2-2$$

Ἤδη προσθέτοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος τούτου κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $(\alpha^2+\alpha-2)\chi=\alpha^3-2\alpha^2-2$ καὶ

$$\chi=\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{\alpha^2+\alpha-2}=\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.$$

Κατόπιν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως

$$\frac{\alpha^3-2\alpha^2-2}{\alpha+2}-(\alpha^2-2)=(\alpha-1)\omega \text{ καὶ } \omega=\frac{-2(2\alpha+1)}{\alpha+2}$$

Τέλος δὲ ἐκ μιᾶς τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν $\psi=\frac{3\alpha^3+2\alpha^2-2}{\alpha^2+\alpha-2}$.

β′) Ἀπαλείφοντες τὸν ψ μεταξὺ $α^{ης}$ καὶ $β^{ας}$ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία μετὰ τῆς τρίτης ἀποτελεῖ τὸ σύστημα:

$$\alpha\chi+\omega=(\alpha+\beta)(\alpha+1)-\gamma$$
$$\chi+(\alpha+\beta)\omega=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)$$

ὅπερ δίδει $\chi=\frac{(\alpha+\beta)[(\alpha^2+\alpha\beta-1)-\gamma]}{\alpha^2+\alpha\beta-1}$

$$\omega=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta-1)+\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-1}$$

ἀκολούθως δὲ ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν:

$$\psi = \frac{(\alpha^2+\alpha\beta-1)(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-1}.$$

γ΄) Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται:

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma,\quad \alpha\chi=\gamma\omega \quad \text{καὶ} \quad \beta\psi=\gamma\omega$$

ὥστε ἡ πρώτη ἐξίσωσις γίνεται

$$\gamma\omega+\gamma\omega+\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma,\quad 3\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma. \text{ Ὅθεν:}$$

$$\omega=\alpha\beta,\quad \psi=\alpha\gamma \quad \text{καὶ} \quad \chi=\beta\gamma.$$

δ΄) Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\alpha\chi=\gamma\omega$ καὶ $\beta\psi=\gamma\omega$ λαμβάνομεν $\chi=\frac{\gamma\omega}{\alpha}$ καὶ $\psi=\frac{\gamma\omega}{\beta}$. Ὥστε ἡ τρίτη ἐξίσωσις γίνεται:

$$\frac{\gamma\omega}{\alpha}+\frac{\gamma\omega}{\beta}+\omega=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma},\quad \text{ἐξ ἧς,}\ \omega=\frac{1}{\gamma}.$$

$$\text{Ὅθεν:}\ \psi=\frac{1}{\beta} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{1}{\alpha}.$$

ε΄) Τὸ σύστημα τοῦτο ὅπερ γράφεται

$$\begin{aligned} \chi+\alpha\psi+\alpha\omega&=k \\ \beta\chi+\psi+\beta\omega&=\lambda \\ \gamma\chi+\gamma\psi+\omega&=\mu \end{aligned}$$

θὰ τὸ λύσωμεν διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων ἐπὶ θ καὶ ζ ἀντιστοίχως καὶ κατόπιν προσθέτομεν τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις καὶ τὴν τρίτην κατὰ μέλη. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\beta\zeta+\gamma)\chi+(\alpha\vartheta+\zeta+\gamma)\psi+(\alpha\vartheta+\beta\zeta+1)\omega=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu. \quad (1)$$

Κατόπιν ἐξισοῦντες μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τῶν ψ καὶ ω, εὑρίσκομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\beta\zeta+\gamma)\chi=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu \quad (2)$$

καὶ ἐξ ἄλλου τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha\vartheta+\zeta+\gamma&=0 \\ \alpha\vartheta+\beta\zeta+1&=0 \end{aligned}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν: $\vartheta=\frac{1-\beta\gamma}{\alpha(\beta-1)}$ καὶ $\zeta=\frac{\gamma-1}{\beta-1}$.

Ἤδη θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν θ καὶ ζ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν

$$\left(\frac{1-\beta\gamma}{\alpha(\beta-1)}+\frac{\beta(\gamma-1)}{(\beta-1)}+\gamma\right)\chi=\frac{k(1-\beta\gamma)}{\alpha(\beta-1)}+\frac{\lambda(\gamma-1)}{(\beta-1)}+\mu$$

$$\text{καὶ}\ \chi=\frac{k(1-\beta\gamma)+\alpha\lambda(\gamma-1)+\alpha\mu(\beta-1)}{(1-\beta\gamma)+\alpha\beta(\gamma-1)+\alpha\gamma(\beta-1)}$$

Κατόπιν ἐξισοῦντες μὲ 0 τοὺς συντελεστάς τῶν χ καὶ ω τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\alpha\vartheta+\zeta+\gamma)\psi=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu \qquad (3)$$

καὶ τὸ σύστημα $\vartheta+\beta\zeta+\gamma=0$

$$\alpha\vartheta+\beta\zeta+1=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{\gamma-1}{\alpha-1}$ καὶ $\zeta=\dfrac{1-\alpha\gamma}{\beta(\alpha-1)}$.

Οὕτω δὲ θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ϑ καὶ ζ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις

$$\psi=\frac{\lambda(1-\alpha\gamma)+\beta\gamma(\gamma-1)+\beta\mu(\alpha-1)}{(1-\alpha\gamma)+\alpha\beta(\gamma-1)+\beta\gamma(\alpha-1)}$$

Τέλος διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ω, ἐξισοῦμεν μὲ 0 τοὺς συντελεστὰς τῶν χ καὶ ψ τῆς ἐξισώσεως (1), ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν: $(\alpha\vartheta+\beta\zeta+1)\omega=k\vartheta+\lambda\zeta+\mu$ (4) καὶ τὸ σύστημα:

$$\vartheta+\beta\zeta+\gamma=0$$
$$\alpha\vartheta+\zeta+\gamma=0$$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\alpha\beta-1}$ καὶ $\zeta=\dfrac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha\beta-1}$.

Οὕτω δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εὑρίσκομεν:

$$\omega=\frac{\mu(1-\alpha\beta)+k\gamma(\beta-1)+\lambda\gamma(\alpha-1)}{(1-\alpha\beta)+\alpha\gamma(\beta-1)+\beta\gamma(\alpha-1)}.$$

στ') Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\vartheta+\lambda\zeta+k)\chi+(k\vartheta+\zeta+\lambda)\psi+(\lambda\vartheta+k\zeta+1)\omega=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma \quad (1)$$

κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω:

1ον) $(\vartheta+\lambda\zeta+k)\chi=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma$ (2)

καὶ ἐκ τοῦ συστήματος $k\vartheta+\zeta+\lambda=0$, $\lambda\vartheta+k\zeta+1=0$ εὑρίσκομεν $\vartheta=\dfrac{1-k\lambda}{k^2-\lambda}$, $\psi=\dfrac{\lambda^2-k}{k^2-\lambda}$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) εὑρίσκομεν: $\chi=\dfrac{\alpha(1-k\lambda)+\beta(\lambda^2-k)+\gamma(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}$.

2ον) $(k\vartheta+\zeta+\lambda)\psi=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma$ (3)

καὶ $\vartheta+\lambda\zeta+k=0$, $\lambda\vartheta+k\zeta+1=0$. Ὅθεν $\vartheta=\dfrac{k^2-\lambda}{\lambda^2-k}$, $\zeta=\dfrac{1-\lambda k}{\lambda^2-k}$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (3) εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{\beta(1-k\lambda)+\gamma(\lambda^2-k)+\alpha(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}$$

3ον) $(\lambda\vartheta+k\zeta+1)\omega=\alpha\vartheta+\beta\zeta+\gamma$ (4)

καὶ $\vartheta+\lambda\zeta+k=0$, $k\vartheta+\zeta+\lambda=0$. Ὅθεν $\vartheta=\dfrac{\lambda^2-k}{1-k\lambda}$, $\zeta=\dfrac{k^2-\lambda}{1-k\lambda}$

ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (4) εὑρίσκομεν

$$\omega=\frac{\gamma(1-k\lambda)+\alpha(\lambda^2-k)+\beta(k^2-\lambda)}{(1-k\lambda)+\lambda(\lambda^2-k)+k(k^2-\lambda)}.$$

ζ') Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν

$$[\vartheta+(\beta+\gamma)\zeta+\beta\gamma]\chi+[\vartheta+(\alpha+\gamma)\zeta+\alpha\gamma]\psi+[\vartheta+(\alpha+\beta)\zeta+\alpha\beta]\omega=1 \quad (1)$$

κατόπιν δὲ ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν

1ον $[\vartheta+(\beta+\gamma)\zeta+\beta\gamma]\chi=1$ (2) καὶ ἐκ τοῦ συστήματος $\vartheta+(\alpha+\gamma)\zeta+\alpha\gamma=0$, $\vartheta+(\alpha+\beta)\zeta+\alpha\beta=0$ εὑρίσκομεν $\zeta=-\alpha$, $\vartheta=\alpha^2$, ὁπότε ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2) εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1}{\alpha^2-\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma}=\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

2ον) Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ δύο προηγούμενα π. δ. εὑρίσκομεν

$$\psi=\frac{1}{\beta^2-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma}=\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \text{ καὶ}$$

$$\omega=\frac{1}{\gamma^2-\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

η') Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ προηγούμενα π. δ. διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Bézout εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2)\chi+(\vartheta+\beta\zeta+\beta^2)\psi+(\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2)\omega=\vartheta+k\zeta+k^2$$

Ἔπειτα δὲ εὑρίσκομεν

1) Τὴν τιμὴν τοῦ χ, θέτοντες $\vartheta+\beta\zeta+\beta^2=0$, $\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2=0$, ὁπότε ἔχομεν $\vartheta=\beta\gamma$, $\zeta=-(\beta+\gamma)$. Οὕτω δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$(\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2)\chi=\vartheta+k\zeta+k^2$ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-k(\beta+\gamma)+k^2}{\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma)+\alpha^2}=\frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

2) Ὁμοίως θέτοντες $\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2=0$ καὶ $\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2=0$ εὑρίσκομεν

$$\vartheta=\alpha\gamma,\ \zeta=-(\alpha+\gamma) \text{ καὶ } \psi=\frac{\vartheta+k\zeta+k^2}{\vartheta+\beta\zeta+\beta^2}=\frac{\alpha\gamma-k(\alpha+\gamma)+k^2}{\alpha\gamma-\beta(\alpha+\gamma)+\beta^2}=$$

$$=\frac{(k-\alpha)(k-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}.$$

3) Τέλος θέτοντες $\vartheta+\alpha\zeta+\alpha^2=0$ καὶ $\vartheta+\beta\zeta+\beta^2=0$ εὑρίσκομεν $\vartheta=\alpha\beta$, $\zeta=-(\alpha+\beta)$ καὶ

$$\omega=\frac{\vartheta+k\zeta+k^2}{\vartheta+\gamma\zeta+\gamma^2}=\frac{\alpha\beta-k(\alpha+\beta)+k^2}{\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2}=\frac{(k-\alpha)(k-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Λύσις συστημάτων διὰ τεχνασμάτων

Ἀσκήσεις.—*284.* α') Ἔχομεν $\frac{3\chi}{18}=\frac{2\psi}{6}=\frac{\omega}{18}=\frac{3\chi+2\psi+\omega}{18+6+18}=$

$= \frac{34}{42}$. Ὅθεν $\chi = \frac{34.18}{42.3} = \frac{34}{7}$, $\psi = \frac{34.6}{42.2} = \frac{17}{7}$ καὶ $\omega = \frac{34.18}{42} = \frac{102}{7}$.

β') Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $\chi, \psi \neq 0$. Κατόπιν εὑρίσκομεν $\chi+\psi=5\chi\psi$ καὶ $3\chi+2\psi=12\chi\psi$. Διαιροῦντες ἤδη τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν: $\frac{\chi+\psi}{3\chi+2\psi} = \frac{5}{12}$, ἤτοι: $12(\chi+\psi) = 5(3\chi+2\psi)$ ἢ $2\psi = 3\chi$ καὶ ἐπομένως $\chi = \frac{2\psi}{3}$. Ἀντικαθιστῶντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν $\frac{3}{2\psi} + \frac{1}{\psi} = 5$, $\frac{3}{2\psi} + \frac{2}{2\psi} = 5$, $\frac{5}{2\psi} = 5$ καὶ $\psi = \frac{1}{2}$. Ἐπομένως εἶναι καὶ $\chi = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

γ') Ἔχομεν

$$\frac{\alpha\chi}{\alpha^2} = \frac{\beta\psi}{\beta^2} = \frac{\gamma\omega}{\gamma^2} = \frac{\delta\varphi}{\delta^2} = \frac{\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega+\delta\varphi}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} = \frac{\alpha}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}.$$

Ὅθεν:

$$\chi = \frac{\alpha^2}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}, \quad \psi = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$$

$$\omega = \frac{\alpha\gamma}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}, \quad \varphi = \frac{\alpha\delta}{\beta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)}$$

δ') Προσθέτοντες τὰς τρεῖς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{\;}{\chi} + \frac{2}{\psi} + \frac{2}{\omega} = \frac{1}{5}, \text{ ἤτοι } \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{10} \quad (\iota).$$

Ἤδη ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (ι) διαδοχικῶς τὰς δοθείσας ἐξισώσεις. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$, ἤτοι $\omega = 60$, $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{20}$, ἤτοι $\chi = 20$ καὶ $\frac{1}{\psi} = \frac{1}{30}$, ἤτοι $\psi = 30$.

ε') Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις $\alpha^{\eta\nu}$ καὶ $\beta^{\alpha\nu}$, $\alpha^{\eta\nu}$ καὶ $\gamma^{\eta\nu}$, $\beta^{\alpha\nu}$ καὶ $\gamma^{\eta\nu}$ εὑρίσκομεν κατὰ σειράν:

$$\frac{2\alpha}{\chi} = \lambda+\mu, \quad \frac{2\beta}{\psi} = \lambda+\nu \quad \text{καὶ} \quad \frac{2\gamma}{\omega} = \mu+\nu.$$

Ὅθεν εἶναι: $\chi = \frac{2\alpha}{\lambda+\mu}$, $\psi = \frac{2\beta}{\lambda+\nu}$ καὶ $\omega = \frac{2\gamma}{\mu+\nu}$.

στ') Ἐπειδὴ $\mu\chi = \frac{\alpha\chi}{\frac{\alpha}{\mu}}$, $\nu\psi = \frac{\beta\psi}{\frac{\beta}{\nu}}$, καὶ $\varrho\omega = \frac{\gamma\omega}{\frac{\gamma}{\varrho}}$

ἔχομεν: $\frac{\alpha\chi}{\frac{\alpha}{\mu}} = \frac{\beta\psi}{\frac{\beta}{\nu}} = \frac{\gamma\omega}{\frac{\gamma}{\varrho}} = \frac{\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\omega}{\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}} = \frac{\delta}{\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}+\frac{\gamma}{\varrho}}$

Ὅθεν: $\chi = \dfrac{\delta}{\mu\left(\dfrac{\alpha}{\mu}+\dfrac{\beta}{\nu}+\dfrac{\gamma}{\varrho}\right)}$, $\quad \chi = \dfrac{\delta\nu\varrho}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu}$,

$\psi = \dfrac{\delta}{\nu\left(\dfrac{\alpha}{\mu}+\dfrac{\beta}{\nu}+\dfrac{\gamma}{\varrho}\right)}$, ἤτοι: $\psi = \dfrac{\delta\mu\varrho}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu}$,

$\omega = \dfrac{\delta}{\varrho\left(\dfrac{\alpha}{\mu}+\dfrac{\beta}{\nu}+\dfrac{\gamma}{\varrho}\right)}$, $\quad \omega = \dfrac{\delta\mu\nu}{\alpha\nu\varrho+\beta\mu\varrho+\gamma\mu\nu}$.

ζ΄) Διαιροῦντες τὰ μέλη καὶ τῶν τριῶν ἐξισώσεων διὰ χψω εὑρίσκομεν:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=12 \\ &\frac{3}{\chi}-\frac{4}{\psi}+\frac{5}{\omega}=15 \quad (\iota) \\ &\frac{4}{\chi}-\frac{3}{\psi}+\frac{2}{\omega}=13 \end{aligned}$$

Ἤδη προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\dfrac{4}{\chi}-\dfrac{3}{\psi}+\dfrac{6}{\omega}=27$, ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη ταύτης ἀφαιρέσωμεν τὴν τρίτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\dfrac{4}{\omega}=14$, $\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{7}{2}$ καὶ $\omega=\dfrac{2}{7}$

Κατόπιν προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν:

$$\frac{7}{\chi}-\frac{7}{\psi}+\frac{7}{\omega}=28, \text{ ἤτοι } \frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=4.$$

Ἐὰν δὲ ταύτην ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\dfrac{2}{\psi}=8$, $\dfrac{1}{\psi}=4$ καὶ $\psi=\dfrac{1}{4}$. Τέλος ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν: $\dfrac{1}{\chi}=12-4-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$, ἤτοι $\chi=\dfrac{2}{9}$.

η΄) Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\dfrac{2}{\chi+2\psi-3}=\dfrac{1}{2}$ καὶ $\dfrac{2}{3\chi-2\psi+1}=$ $=\dfrac{1}{3}$, ἤτοι εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $\chi+2\psi=7$, $3\chi-2\psi=5$, ὅπερ δίδει $\chi=3$ καὶ $\psi=2$.

θ΄) Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις καὶ ἔπειτα τὴν αην καὶ γην εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $(\alpha-\beta)\psi+(\alpha^2-\beta^2)\omega=-(\alpha^3-\beta^3)$, $(\alpha-\gamma)\psi+(\alpha^2-\gamma^2)\omega=-(\alpha^3-\gamma^3)$, ἤτοι $\psi+(\alpha+\beta)\omega=-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, $\psi+(\alpha+\gamma)\omega=-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)$.

Ἤδη ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς εὑρεθείσας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta-\alpha-\gamma)\omega=(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, ἤτοι $(\beta-\gamma)\omega=\alpha(\gamma-\beta)+(\gamma+\alpha)(\gamma-\beta)$ καὶ $\omega=-(\alpha+\beta+\gamma)$. Ὥστε εἶναι $\psi=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta)-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)$, ἤτοι $\psi=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$.

Τέλος ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$\chi=(\alpha+\beta+\gamma)\alpha^2-\alpha(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-\alpha^3, \text{ ἤτοι } \chi=-\alpha\beta\gamma.$$

ι′) Τὸ σύστημα τοῦτο γράφεται:

$$\frac{5\chi+4\psi}{\chi\psi}=\frac{1}{3} \qquad \frac{5}{\psi}+\frac{4}{\chi}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3\psi+5\omega}{\psi\omega}=\frac{1}{7}, \text{ ἤτοι } \frac{3}{\omega}+\frac{5}{\psi}=\frac{1}{7} \quad (\iota)$$

$$\frac{2\omega+3\chi}{\omega\chi}=\frac{1}{6} \qquad \frac{2}{\chi}+\frac{3}{\omega}=\frac{1}{6}$$

Οὕτως ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν δι' ἀφαιρέσεως $\frac{4}{\chi}-\frac{3}{\omega}=\frac{4}{21}$. Ἐὰν δὲ ταύτην προσθέσωμεν μὲ τὴν τρίτην εὑρίσκομεν $\chi=\frac{84}{5}$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν

$\omega=63$ καὶ $\psi=\frac{105}{2}$.

ια′) Τὸ σύστημα $3\chi+7\psi=23\chi\psi$, $3\omega+8\psi=38\psi\omega$ καὶ $5\psi-6\omega=$ $=2\psi\omega$ γράφεται: $\frac{3}{\psi}+\frac{7}{\chi}=23$, $\frac{3}{\psi}+\frac{8}{\omega}=38$ καὶ $\frac{5}{\omega}-\frac{6}{\psi}=2$.

Οὕτως ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\omega=\frac{7}{26}$ καὶ

$\psi=\frac{21}{58}$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\chi=\frac{49}{103}$.

285. α′) Ἀπαλείφοντες κατὰ τὰ γνωστὰ τὸν ψ μεταξὺ 1ης καὶ 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν, ἥτις μετὰ τῆς 3ης ἀποτελεῖ τὸ σύστημα.

$$(\mu+\nu)(\varrho+\mu)\chi-(\varrho-\mu)(\mu-\nu)\omega=2\varrho[\nu(\mu+\nu)+\mu(\varrho-\mu)$$
$$-(\nu-\varrho)\chi+(\nu+\varrho)\omega=2\mu\nu \qquad (\iota)$$

ὅπερ λυόμενον, δίδει

$$\chi=\frac{\mu^2\nu(\nu-\mu)+\varrho^2\mu(\varrho-\mu)+\nu^2\varrho(\varrho+\nu)+2\mu\nu\varrho^2}{\mu^2\nu+\varrho^2\mu+\nu^2\varrho+\mu\nu\varrho}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος τούτου ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ παρανομαστοῦ του ἐπὶ $\varrho+\nu-\mu$, ἕπεται ὅτι $\chi=\varrho+\nu-\mu$.

Θέτοντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (ι) εὑρίσκομεν $\omega = -\rho+\nu+\mu$ καὶ ἀκολούθως ἐκ τῆς 1ης τῶν ἐξισώσεων (ἢ ἐκ τῆς 2ας) τοῦ δοθέντος συστήματος, εὑρίσκομεν $\psi=\rho-\nu+\mu$.

β') Τὸ σύστημα τοῦτο ὁμοιάζει μὲ τὸ προηγούμενον, ἂν λάβωμεν ὡς ἀγνώστους τὰ μ, ν, ρ. Ἑπομένως εἶναι $\mu=\omega+\psi-\chi$, $\nu=\omega-\psi+\chi$, $\rho=-\omega+\psi+\chi$. Ἀλλ' οὕτως εἶναι $\mu+\nu=2\omega$, ἤτοι $\omega=\frac{\mu+\nu}{2}$, $\mu+\rho=$ $=2\psi$, ἤτοι $\psi=\frac{\mu+\rho}{2}$ καὶ $\nu+\rho=2\chi$, ἤτοι $\chi=\frac{\nu+\rho}{2}$.

286. Διαιροῦντες τὰ μέλη καὶ τῶν τριῶν ἐξισώσεων διὰ $\chi\psi\omega$ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα:

$$\frac{3}{\chi}+\frac{2}{\psi}-\frac{1}{\omega}=1$$
$$\frac{30}{\chi}-\frac{18}{\psi}+\frac{12}{\omega}=13$$
$$\frac{24}{\chi}-\frac{42}{\psi}+\frac{18}{\omega}=5$$

Ἐὰν δὲ ἀπαλείψωμεν τὸ $\frac{1}{\omega}$ μεταξὺ αης καὶ βας ὡς καὶ μεταξὺ αης καὶ γης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\frac{66}{\chi}+\frac{6}{\psi}=25, \quad \frac{78}{\chi}-\frac{6}{\psi}=23$$

τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{144}{\chi}=48$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=3$. Κατόπιν δὲ εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ $\omega=1$.

287. Ἐκ τῆς γης ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\frac{12}{2\chi-3\omega}=\frac{15}{5\psi-4\omega}$ (1)

Οὕτως αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{aligned}\frac{42}{2\chi+3\psi}-\frac{9}{2\chi-3\omega}&=\frac{33}{8}\\ \frac{28}{2\chi+3\psi}-\frac{12}{2\chi-3\omega}&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ συστήματος τούτου ἀπαλείψωμεν τὸ $\frac{1}{2\chi+3\psi}$ εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{2}{2\chi-3\omega}=\frac{3}{4}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $6\chi-9\omega=8$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $2\chi - 3\omega = \frac{8}{3}$, ἡ ἐξίσωσις (1) μᾶς δίδει τὴν $15\psi - 12\omega = 10$, ἡ δὲ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (2) δίδει τὴν $15\psi + 10\chi = 20$.

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν τὸ σύστημα: $6\chi - 9\omega = 8$, $15\psi - 12\omega = 10$ καὶ $15\psi + 10\chi = 20$, τὸ ὁποῖον, λυόμενον κατὰ τὰ γνωστά, δίδει τὰς τιμὰς

$$\chi = \frac{43}{27}, \quad \psi = \frac{326}{405} \quad \text{καὶ} \quad \omega = \frac{14}{81}.$$

288. Ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πρὸς δύο ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας Ε. Ὁμοίως ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πρὸς τοὺς αὐτοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha_1\chi + \beta_1\psi = \gamma_1$ κεῖνται ἐπὶ ἄλλης εὐθείας E_1. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι πᾶν ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ὅπερ ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀποτελεῖ τὰς συντεταγμένας σημείου ὅπερ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν Ε καὶ E_1.

Ἑπομένως ἐὰν ἓν μόνον τοιοῦτον ζεῦγος ὑπάρχῃ, ἤτοι ἐὰν τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν μόνην λύσιν, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἤτοι αὗται τέμνωνται.

Ἐὰν δὲ τοιαῦτα ζεύγη ὑπάρχουν ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἤτοι ἐὰν τὸ σύστημα ἔχῃ ἄπειρον πλῆθος λύσεων, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 συμπίπτουν. Ἐὰν δὲ οὐδὲν τοιοῦτον ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ὑπάρχῃ ὅπερ νὰ ἐπαληθεύῃ τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἤτοι ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ E_1 οὐδὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ἤτοι αὗται εἶναι παράλληλοι.

289. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἐὰν ἓν μόνον σύστημα τιμῶν (χ,ψ) τὰς ἐπαληθεύει.

Προβλήματα πρωτοβαθμίων συστημάτων

290. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ α^{ου} παιδίου καὶ ψ ὁ τοῦ δευτέρου. Τότε θὰ ἔχωμεν $\chi + \frac{\psi}{2} = 40$ καὶ $\psi + \frac{\chi}{2} = 35$.

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι.
Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi = 30$ καὶ $\psi = 20$.

Ἐπαλήθευσις. $30 + \frac{20}{2} = 40$ καὶ $20 + \frac{30}{2} = 35$.

291. Ἔστω χ ὁ α^{ος} καὶ ψ ὁ β^{ος} ἀριθμός. Τότε ἔχομεν $\chi = 3\psi$ καὶ $2\chi - 3\psi = 42$. Ὅθεν $\chi = 42$ καὶ $\psi = 14$.

292. Ἐδῶ εἶναι $2\chi - 3\psi = 5$ καὶ $2\chi - 25 = 15\psi$. Ὅθεν $\chi = 0$ καὶ $\psi = -\frac{5}{3}$.

293. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμαρίων τοῦ χρυσοῦ καὶ ψ ὁ τοῦ ἀργύρου. Ὥστε εἶναι $\chi+\psi=7465$ (1).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, ἕπεται ὅτι ὁ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσὸς θὰ χάσῃ εἰς τὸ ὕδωρ $0{,}052\chi$ γραμμάρια. Ὁμοίως δὲ ὁ ἄργυρος θὰ χάσῃ εἰς τὸ ὕδωρ $0{,}095\psi$ γραμμάρια. Ὥστε εἶναι $0{,}052\chi+0{,}095\psi=467$ (2). Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi=5631\frac{42}{43}$ γραμ. καὶ $\psi=$ $=1833\frac{1}{43}$ γραμ. ἢ κατὰ προσέγγισιν $\chi=5632$ καὶ $\psi=1833$.

294. Ἔστω χ αἱ ἐξ ἀρχῆς δραχμαὶ τοῦ Α καὶ ψ αἱ τοῦ Β. Ὅταν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β μ δραχμάς, ὁ Α θὰ ἔχῃ $\chi-\mu$, ὁ δὲ Β θὰ ἔχῃ $\psi+\mu$. Ἐὰν δὲ ὁ Β δώσῃ εἰς τὸν Α μ δραχμάς, θὰ ἔχῃ ὁ Α $\chi+\mu$ καὶ ὁ Β θὰ ἔχῃ $\psi-\mu$. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $\psi+\mu=\nu(\chi-\mu)$ καὶ $\chi+\mu=\nu(\psi-\mu)$, αἵτινες λυόμεναι δίδουν:

$$\chi=\frac{\mu(\nu+1)}{\nu-1} \quad \text{καὶ } \psi=\frac{\mu(\nu+1)}{\nu-1}.$$

295. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ταχυτέρου κινητοῦ καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου. Τότε εἰς t δευτερόλεπτα διέτρεξαν διαστήματα $t\chi$ καὶ $t\psi$. Ὥστε εἶναι $t\chi+t\psi=\alpha$ καὶ $t\chi=t\psi+\beta$. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\alpha+\beta}{2t}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha-\beta}{2t}$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha>\beta$.

296. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ταχυτέρου κινητοῦ καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἄλλου. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διέτρεξαν διαστήματα $\lambda_1\chi$ καὶ $\lambda_1\psi$· εἶναι δὲ $\lambda_1\chi+\lambda_1\psi=\alpha$.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν διέτρεξαν διαστήματα $\lambda_2\chi$ καὶ $\lambda_2\psi$. εἶναι δὲ $\lambda_2\chi-\lambda_2\psi=\alpha$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\chi+\psi=\frac{\alpha}{\lambda_1} \quad \text{καὶ } \chi-\psi=\frac{\alpha}{\lambda_2}$$

ὅπερ λυόμενον δίδει: $\chi=\alpha\cdot\frac{\lambda_2+\lambda_1}{2\lambda_2\lambda_1}$ καὶ $\psi=\alpha\cdot\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2\lambda_1}$.

Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν πρέπει νὰ εἶναι $\lambda_2>\lambda_1$.

297. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν καὶ ψ ὁ τῶν γυναικῶν. Ὥστε ἔχομεν ἀμέσως $\chi+\psi=\alpha$. Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν $\gamma\chi$ δραχμάς, αἱ δὲ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $\delta\psi$ δραχμάς, ἔχομεν $\gamma\chi+\delta\psi=\beta$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\gamma\chi+\delta\psi=\beta$. Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί. Λύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=\frac{\beta-\alpha\delta}{\gamma-\delta}$ καὶ $\psi=\frac{\alpha\gamma-\beta}{\gamma-\delta}$ ἐὰν $\gamma\neq\delta$.

Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν εὑρίσκομεν $\chi=2\frac{1}{2}$ καὶ $\psi=4\frac{1}{2}$.

Ἡ λύσις ὅμως αὕτη ἀπορρίπτεται.

298. Ἔστω ὅτι ἕκαστος εἶχε χ, ψ, ω δραχμάς. Ὅταν ὁ πρῶτος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος τούτων εἶχε δραχμάς: $\chi-\psi-\omega$ $\quad 2\psi \quad 2\omega$

ὅταν ὁ δεύτερος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος εἶχε: $2\chi-2\psi-2\omega \quad 2\psi-\chi+\psi+\omega-2\omega \quad 4\omega$

$=3\psi-\chi-\omega$.

Ὅταν δὲ ὁ τρίτος ἐδιπλασίασε τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος εἶχε: $4\chi-4\psi-4\omega \quad 6\psi-2\chi-2\omega \quad 4\omega-2\chi+2\psi+2\omega-3\psi+\chi+\omega$

$=7\omega-\chi-\psi$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὸ τέλος ἕκαστος εὑρέθη μὲ 160000 δραχμάς, ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{array}{l} 4\chi-4\psi-4\omega=160000 \\ 6\psi-2\chi-2\omega=160000 \\ 7\omega-\chi-\psi=160000 \end{array} \quad \text{ἢ} \quad \begin{array}{l} \chi-\psi-\omega=40000 \\ -\chi+3\psi-\omega=80000 \\ -\chi-\psi+7\omega=160000 \end{array}$$

ὅπερ λυόμενον δίδει: $\chi=260000$, $\psi=140000$, $\omega=80000$.

299. Ἔστω χ, ψ, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἰς ἑκατομμύρια. Τότε αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\chi+\frac{5\psi}{8}=64, \quad \psi+\frac{8\omega}{9}=64, \quad \omega+\frac{\chi}{2}+\frac{3\psi}{16}=64 \quad \text{ἢ}$$

$$8\chi+5\psi=512, \qquad 9\psi+8\omega=576, \qquad 16\omega+8\chi+3\psi=1024.$$

Ἤδη ἀπαλείφοντες τὸν ω μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $15\psi-8\chi=128$ ἥτις μετὰ τῆς πρώτης ἀποτελεῖ σύστημα ὅπερ δίδει $\psi=32$, $\chi=44$. Τέλος εὑρίσκομεν $\omega=36$.

300. Ἔστω ὅτι εἶχον ἡ πρώτη χ, ἡ δευτέρα ψ καὶ ἡ τρίτη ω αὐγά. Ὥστε εἶναι $\chi+\psi+\omega=360$ (1).

Κατόπιν εἰς τὴν πρώτην ἀπέμειναν $\frac{6\chi}{7}$, εἰς τὴν τρίτην $\frac{12\omega}{13}$, ἐνῷ ἡ δευτέρα εἶχε $\psi+\frac{\chi}{7}+\frac{\omega}{13}$. Ὥστε εἶναι: $\frac{6\chi}{7}=\psi+\frac{\chi}{7}+$ $+\frac{\omega}{13}$, ἤτοι $\frac{5\chi}{7}=\psi+\frac{\omega}{13}$ (2 καὶ $\frac{6\chi}{7}=\frac{12\omega}{13}$, ἤτοι $\chi=\frac{14\omega}{13}$.

Ἤδη ἐὰν τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς χ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) λαμβάνομεν $\frac{70\omega}{91}=\psi+\frac{\omega}{13}$, ἤτοι $\psi=\frac{63\omega}{91}$. Κατόπιν τούτων ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\frac{14\omega}{13}+\frac{63\omega}{91}+\omega=360$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\omega=\frac{360.91}{252}=\frac{360.13}{36}=130$. Οὕτω δὲ εἶναι $\chi=\frac{14.130}{13}=$ $=140$ καὶ $\psi=\frac{63.130}{91}=\frac{9.130}{13}=90$.

301. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Τότε δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχομεν:

$$\chi+\psi+\omega=17. \quad (1)$$
$$\chi=2\omega. \quad (2)$$
$$100\chi+10\psi+\omega-396=100\omega+10\psi+\chi, \text{ ἥτις γράφεται:}$$
$$99\chi-99\omega=396 \text{ ἢ } \chi-\omega=4, \text{ ἤτοι } \chi=4+\omega.$$

Ἑπομένως αὕτη καὶ ἡ (2) δίδουν τὴν ἐξίσωσιν: $4+\omega=2\omega$, ἤτοι $\omega=4$. Ὅθεν $\chi=4+\omega=8$ καὶ $\psi=17-\chi-\omega=17-8-4=5$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 854.

302. Ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ χ, ψ, ω, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\omega &= 190 \\ \chi+\frac{\psi+\omega}{2} &= 120 \\ \psi+\frac{\chi-\omega}{15} &= 62 \end{aligned} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{aligned} \chi+\psi+\omega &= 190 \\ 2\chi+\psi+\omega &= 240 \\ 15\psi+\chi-\omega &= 930 \end{aligned}$$

Οὕτω ἐὰν ἀπὸ τὴν $\beta^{\alpha\nu}$ ἐξίσωσιν ἀφαιρέσωμεν τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi=50$. Ἐὰν δὲ ἔπειτα προσθέσωμεν τὴν $\alpha^{\eta\nu}$ μὲ τὴν $\gamma^{\eta\nu}$ εὑρίσκομεν $2\chi+16\psi=1120$. Ὅθεν $16\psi=1120-100=1020$, ἤτοι $\psi=63\frac{3}{4}$ καὶ $\omega=190-\psi-\chi=190-63\frac{3}{4}-50=190-113\frac{3}{4}=76\frac{1}{4}$.

303. Ἔστω χ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου κεφαλαίου καὶ ψ τὸ τοῦ δευτέρου. Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \frac{5400000\chi}{100}+\frac{6500000\psi}{100} &= 384000 \\ \frac{5400000\psi}{100}+\frac{6500000\chi}{100} &= 389500 \end{aligned} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{aligned} 54\chi+65\psi &= 384 \\ 65\chi+54\psi &= 389{,}5 \end{aligned}$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=3{,}5\,\%$ καὶ $\psi=3\,\%$.

304. Ἐὰν τὰ μερίδια εἶναι χ, ψ, ω, ἔχομεν:

$$\chi+\psi+\omega=8100000, \qquad \frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\psi}{\omega}=\frac{3}{4}.$$

Ὅθεν $\chi=\frac{2\psi}{3}$, $\omega=\frac{4\psi}{3}$ καὶ $\frac{2\psi}{3}+\psi+\frac{4\psi}{3}=8100000$, ἤτοι: $3\psi=8100000$ καὶ $\psi=2700000$. Ἑπομένως εἶναι $\chi=1800000$ καὶ $\omega=3600000$.

305. Ἔστω ὅτι τὸ μέτρον τοῦ $\alpha^{ου}$ ὑφάσματος ἐτιμᾶτο χ δραχμὰς καὶ τὸ τοῦ $\beta^{ου}$ ψ δραχμάς. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν $5\chi+6\psi=122000$ καὶ $6\chi+5\psi=120000$. Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=10000$, $\psi=12000$.

306. Ἐὰν χ kg εἶναι ἡ ἔντασις τῆς μιᾶς καὶ ψ kg ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης δυνάμεως ἔχομεν $\chi+\psi=16$, ὅταν ἐνεργοῦν ὁμορρόπως (ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας) καὶ $\chi-\psi=2$, ὅταν ἐνεργοῦν ἀντιρρόπως. Λύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi=9$ καὶ $\psi=7$.

307. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ Α καὶ ψ ὁ τοῦ Β. Τότε δὲ θὰ εἶναι $\chi+10=1{,}5(\psi-10)$ καὶ $\psi+10=4(\chi-10)$. Λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=20$, $\psi=30$.

308. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κινητοῦ καὶ ψ ἡ τοῦ δευτέρου. Ἀλλὰ τὸ πρῶτον διήνυσε 900 μ. καὶ τὸ δεύτερον 600 μ. Οἱ χρόνοι δὲ καθ' οὓς διήνυσαν τὰ διαστήματα ταῦτα εἶναι ἴσοι. Ἑπομένως εἶναι: $\frac{900}{\chi}=\frac{600}{\psi}$ καὶ ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι $\frac{\chi}{\psi}=\frac{900}{600}=\frac{3}{2}$

309. Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς κινητοῦ καὶ ψ ἡ τοῦ ἄλλου. Τὸ πρῶτον εἰς χρόνον t_1 διέτρεξε διάστημα $t_1\chi$ καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον διέτρεξε διάστημα $t_1\psi$. Ὥστε εἶναι $t_1\chi+t_1\psi=\delta$ (1).

Κατόπιν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ἔγινε $\chi+\frac{\lambda\chi}{100}=\frac{(100+\lambda)\chi}{100}$,

ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἔγινε $\psi-\frac{\lambda_1\psi}{100}=\frac{(100-\lambda_1)\psi}{100}$. Ὥστε τότε ἔχομεν $\frac{(100+\lambda)t_2}{100}\cdot\chi+\frac{(100-\lambda_1)t_2}{100}\psi=\delta$ (2).

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\chi=\frac{\delta[\lambda_1 t_2+100(t_1-t_2)]}{(\lambda_1+\lambda_2)t_1t_2},\quad \psi=\frac{\delta[\lambda t_2-100(t_1-t_2)]}{(\lambda_1+\lambda_2)t_1t_2}.$$

Διερεύνησις.—Ἐὰν $t_1>t_2$ θὰ εἶναι $\chi>0$· ἵνα δὲ εἶναι καὶ $\psi>0$ πρέπει νὰ εἶναι $\lambda t_2>100(t_1-t_2)$.

Ἐὰν $t_1<t_2$ θὰ εἶναι $\psi>0$· ἵνα δὲ εἶναι καὶ $\chi>0$, πρέπει νὰ εἶναι $\lambda_1t_2>100(t_2-t_1)$, ἤτοι $\lambda_1t_2<100(t_1-t_2)$.

310. Ἔστω Α καὶ Β τὰ ἄκρα τοῦ τόξου καὶ χ, ψ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ μοιρῶν. Τὰ κινητά, ἀναχωροῦντα ἐκ τῶν ἄκρων Α καὶ Β, δύνανται νὰ κινοῦνται ἀντιθέτως καὶ νὰ διανύσουν ἢ τὸ μικρότερον τόξον τῶν 45^0 ἢ τὸ μεγαλύτερον τῶν $360^0-45^0=315^0$. Εἰς τὴν α^ην^ περίπτωσιν ἔχομεν τὸ σύστημα $3\chi+3\psi=45$ καὶ $3\chi-3\psi=45^0$. ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\chi=12^0$ καὶ $\psi=3^0$. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν τὸ σύστημα $5\chi+5\psi=315$ καὶ $5\chi-5\psi=315$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\chi=84^0$ καὶ $\psi=21^0$.

311. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων. Τότε εἶναι $\chi=\frac{2\psi}{3}$ καὶ $10\chi+\psi+18=10\psi+\chi$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi=\frac{2\psi}{3}$ καὶ $\chi-\psi=-2$, ὅπερ δίδει $\chi=4$ καὶ $\psi=6$. Ὁ ζητούμενος λοιπὸν ἀριθμὸς εἶναι ὁ 46.

312. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι 4. Ὥστε ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων, θὰ ἔχωμεν $\chi+\psi=5$ (1) καὶ $100\psi+10\chi+4=$ $=\frac{36}{47}(100.4+10\chi+\psi)$, ἥτις γίνεται $110\chi+4664\psi=14212$ (2). Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi=2$ καὶ $\psi=3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 423.

313. Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ ω τὸ τῶν μονάδων, ἔχομεν:

$\chi=\frac{\psi+\omega}{3}$, $\psi=\frac{\chi+\omega}{2}$ καὶ $100\chi+10\psi+\omega+198=100\omega+10\psi+\chi$, ἤτοι $\chi-\omega=-2$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $3\chi=\psi+\omega$, $2\psi=\chi+\omega$ καὶ $\chi=\omega-2$·

Αἱ δύο πρῶται λοιπὸν ἐξισώσεις γίνονται $\psi=2\omega-6$, $2\psi=3\omega-2$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $\omega=5$, $\psi=4$ καὶ κατόπιν $\chi=3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 345.

314. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων. Τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι $10\chi+\psi$. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν χ καὶ ψ τὸ ψηφίον 4, τοῦτο θὰ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ νέου ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν μονάδων θὰ εἶναι ψ καὶ τὸ τῶν ἑκατοντάδων θὰ εἶναι χ. Ὥστε ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ εἶναι ὁ $100\chi+$ $+40+\psi$. Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\begin{array}{lcl} 100\chi+40+\psi+10\chi+\psi=604 & & 55\chi+\psi=282 \\ & \text{ἢ} & \\ 100\chi+40+\psi=(10\chi+\psi)9+34 & & 5\chi-4\psi\overset{24}{=}-3 \end{array}$$

Λύοντες ἤδη τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν $\chi=5$ καὶ $\psi=7$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 57.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Περὶ τῶν ῥιζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

Ἀσκήσεις.—*315.* Ἐὰν ὁ δείκτης ν τῆς ῥίζης εἶναι ἄρτιος ἡ νυοστὴ ῥίζα τῆς 1 εἶναι ἡ $+1$ ἢ ἡ -1, διότι $(+1)^\nu=+1$ καὶ $(-1)^\nu=$ $=+1$. Ἐὰν ὁ δείκτης ν τῆς ῥίζης εἶναι περιττὸς ἡ νυοστὴ ῥίζα εἶναι ἡ $+1$, διότι $(+1)^\nu=+1$, ἐνῷ $(-1)^\nu=-1$. Ὡς πρὸς τὸ 0 παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 0 εἶναι 0.

316. $\sqrt{9}=\pm3$, $\sqrt{36}=\pm6$, $\sqrt{64}=\pm8$, $\sqrt{-64}$ δὲν ὑπάρχει. $\sqrt[3]{+125}=5$ καὶ $\sqrt[3]{-125}=-5$.

317. $3-\sqrt{4}=3-(\pm2)=3\mp2$, ἤτοι 1 ἢ 5 $\alpha+\sqrt{\alpha^2}=\alpha\pm\alpha$, ἤτοι 2α ἢ 0 καὶ $\alpha+\sqrt[3]{\beta^3}=\alpha+\beta$.

318. Ἡ $\sqrt{\alpha^2}$ ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους τὰς $+\alpha$ καὶ $-\alpha$. Ἦτοι εἶναι $\sqrt{\alpha^2}=\pm\alpha$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἰσότης οὔτε πλήρης εἶναι οὔτε ἀκριβής.

319. Ἐπειδὴ $(+\alpha^2)^6=\alpha^{12}$ καὶ $(-\alpha^2)^6=\alpha^{12}$, ἡ δοθεῖσα ἰσότης θὰ εἶναι τελείως ἀκριβὴς ἐὰν ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς $\sqrt[6]{(\alpha^2)^6}$ λάβωμεν μόνον τὴν θετικήν. Οὕτω δὲ κατωτέρω θὰ λαμβάνωμεν μόνον τὰς θετικὰς ρίζας ἀρτίας τάξεως.

320. α′) $+2+2-3-(-2)=3$, β′) $2+2-2=2$, γ′) $3-(-2)=5$, δ′) $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3.(\alpha\beta)^2\psi}=\alpha\beta.\sqrt[3]{(\alpha\beta)^2}$, ε′) $\sqrt[3]{(\chi\psi)^3.(\chi\psi)}=\chi\psi.\sqrt[3]{\chi\psi}$, στ′) $\sqrt[3]{2^3.7}+\sqrt{2^2.(-2)}=2\sqrt[3]{7}+2\sqrt{-2}$, ζ′) $\sqrt{(5^2).5}-\sqrt{64}=$ $=+5\sqrt{5}-8$, η′) $3^2-(\sqrt{2})^2=9-2=7$, θ′) $\sqrt[3]{\alpha^3.\dfrac{1}{\alpha}}=\alpha\sqrt[3]{\dfrac{1}{\alpha}}$

321. α′) $\sqrt[3]{\alpha^5}=\sqrt[3]{\alpha^3.\alpha^2}=\alpha\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\sqrt[3]{\alpha^6}=\alpha^2$, $\sqrt[5]{\alpha^{25}}=\alpha^5$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}}=\alpha^2$, $\sqrt{5^4}=5^2$, $\sqrt[3]{4^5}=\sqrt[3]{2^{10}}=\sqrt[3]{2^9.2}=2^3.\sqrt[3]{2}$.

β′) $\sqrt[5]{9^{10}}=9^2=3^4$, $\sqrt[11]{8^{22}}=8^2$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}}=\alpha^2$, $\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{4\nu+2}}=\alpha^2$

γ′) $\sqrt[3]{64^2}=\sqrt[3]{(8^2)^2}=\sqrt[3]{(2^6)^2}=\sqrt[3]{2^{12}}=2^4$, $\sqrt[9]{125^4}=\sqrt[9]{5^{12}}=$ $=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3.5}=5.\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{\pm 32^3}=\sqrt[5]{\pm 2^{15}}=\pm 2^3$.

δ′) $\sqrt{(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)^3}=\sqrt{(\alpha-\beta)^6}=(\alpha-\beta)^3$

$\sqrt{\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)^4}=\sqrt{(\alpha+2\beta)^8}=(\alpha+2\beta)^4$

$\sqrt{(4\alpha^2+20\alpha\beta+25\beta^2)^6}=\sqrt{(2\alpha+5\beta)^{12}}=(2\alpha+5\beta)^6$

ε′) $\sqrt[3]{(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)^2}=\sqrt[3]{(\alpha+\beta)^6}=(\alpha+\beta)^2$

$\sqrt{(8\alpha^3+12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+\beta^3)^3}=\sqrt{(2\alpha+\beta)^{3.3}}=\sqrt{(2\alpha+\beta)^9}$.

στ′) $7:\sqrt{7}=\sqrt{7^2}:\sqrt{7}=(\sqrt{7})^2:\sqrt{7}=\sqrt{7}$.

$11:\sqrt{11}=(\sqrt{11})^2:\sqrt{11}=\sqrt{11}$, $\alpha:\sqrt{\alpha}=(\sqrt{\alpha})^2:\sqrt{\alpha}=\sqrt{\alpha}$

$(\alpha+\beta):\sqrt{\alpha+\beta}=(\sqrt{\alpha+\beta})^2:\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$, $(\alpha-1):\sqrt{\alpha-1}=\sqrt{\alpha-1}$.

321. α′) $\sqrt{9.6}+3.\sqrt{4.6}-\sqrt{6}=3\sqrt{6}+6\sqrt{6}-\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

β′) $\sqrt{45\alpha^3}+\sqrt{125\alpha^3}-\sqrt{320\alpha^3}=3\alpha\sqrt{5\alpha}+5\alpha\sqrt{5\alpha}-8\alpha\sqrt{5\alpha}=0$

$$\gamma')\ \frac{11^2}{7}.\sqrt{5}+\frac{12.5.\sqrt{5}}{7.13^2.\sqrt{7}}.13^2-\frac{11.13}{5\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{11^2\sqrt{5}}{7}+\frac{12.5.\sqrt{5}.\sqrt{7}.}{7.7}-\frac{11.13.\sqrt{7}}{5.7}$$

322. α′) $\sqrt{\chi^2(\chi-1)}$, β′) $\sqrt{3^2.5}$, γ′) $\sqrt{\alpha^2.\dfrac{\beta}{\alpha}}=\sqrt{\alpha\beta}$

δ′) $\sqrt{2^2.\dfrac{6}{2}}=\sqrt{12}$ ε′) $\sqrt{7^2.\dfrac{1}{49}}=\sqrt{1}=1$.

323. α′) $\sqrt[6]{\alpha^3}$, $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\alpha}$ β′) $\sqrt[12]{\alpha^3}$, $\sqrt[12]{\beta^2}$, $\sqrt[12]{\gamma}$ γ′) $\sqrt[6]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[6]{\gamma^3}$.

324. α′) $\sqrt[4]{6^4}=6$ ′) $\sqrt[6]{48}=\sqrt[6]{2^4.3}=\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{2^3}.\sqrt[6]{6}=\sqrt{2}.\sqrt{6}$.

γ′) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2$ δ′) $\sqrt[2\mu]{\alpha^\mu} = \sqrt{\alpha}$.

325. α′) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$ β′) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

γ′) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{30} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{30^3} = \sqrt[12]{5^4 . 30^3}$

δ′) $\sqrt[4]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[5]{\alpha} = \sqrt[10]{\alpha^5} \cdot \sqrt[10]{\alpha^2} = \sqrt[10]{\alpha^7}$.

ε′) $\sqrt[3]{\chi\psi} \cdot \sqrt{\dfrac{\chi}{\psi}} = \sqrt[6]{\chi^2\psi^2} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{\chi^3}{\psi^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\chi^5}{\psi}}$

στ′) $\sqrt[3]{2\alpha} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{3\beta} = \sqrt[3]{6\alpha\beta} \cdot \sqrt[4]{5\alpha\beta} = \sqrt[12]{6^4\alpha^4\beta^4} \cdot \sqrt[12]{5^3\alpha^3\beta^3} =$
$= \sqrt[12]{6^4 . 5^3 . \alpha^7 . \beta^7}$.

ζ′) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 . 2^2} = \sqrt[6]{500}$.

326. α′) $\sqrt{24} : \sqrt{2} = \sqrt{24 : 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

β′) $\sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875} = 10 . \sqrt[3]{7} : 5 . \sqrt[3]{7} = 2$

γ′) $\sqrt[3]{\chi^4} : \sqrt[3]{\chi} = \sqrt[3]{\chi^3} = \chi$ δ′) $\sqrt[3]{6\alpha^4} : \sqrt[3]{2\alpha} = \sqrt[3]{3\alpha^3} = \alpha\sqrt[3]{3}$.

327. α′) $(\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{\gamma})^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma} - 2\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma} =$
$= \alpha + \beta + \gamma + 2(\sqrt{\alpha\beta} - \sqrt{\alpha\gamma} - \sqrt{\beta\gamma})$.

β′) $2\sqrt{\chi} . \sqrt[3]{\chi} + 8 . \sqrt[3]{\chi^2}\sqrt[3]{\chi} = 2 . \sqrt[6]{\chi^3} . \sqrt[6]{\chi^2} + 8 . \sqrt[3]{\chi^3} = 2 . \sqrt[6]{\chi^5} + 8\chi$

γ′) $\sqrt{\alpha} . \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[3]{\alpha} . \sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^3} + \sqrt[12]{\alpha^7} - \sqrt{\alpha}$.

328. α′) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} . \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, β′) $\dfrac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$

γ′) $\dfrac{\alpha . \sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta} . \sqrt[3]{\beta^2}} = \dfrac{\alpha . \sqrt[3]{\beta^2}}{\sqrt[3]{\beta^3}} = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$, δ′) $\dfrac{4\sqrt{2} . \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3} . \sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{4 . \sqrt[6]{2^7}}{3} = \dfrac{8 . \sqrt[6]{2}}{3}$

ε′) $\dfrac{(\chi - \sqrt{\chi^2-1})(\chi - \sqrt{\chi^2-1})}{(\chi + \sqrt{\chi^2-1})(\chi - \sqrt{\chi^2-1})} = \dfrac{(\chi - \sqrt{\chi^2-1})^2}{\chi^2 - (\chi^2-1)} = (\chi - \sqrt{\chi^2-1})^2$.

329. α′) $\alpha^{3\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{7}{2}} = \sqrt{\alpha^7}$, β′) $\alpha^{4\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha^9}$, γ′) $\alpha^{-\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{3}{8}}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt[8]{\alpha^3}}$, δ′) $32^{-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{12}} = 32^{-\frac{1}{16}} = \dfrac{1}{32^{\frac{1}{16}}} = \dfrac{1}{\sqrt[16]{32}} = \dfrac{1}{\sqrt[16]{2^5}}$.

330. α′) $3.3 - 3.2^{-\frac{1}{2}} - 3.2^{-\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = 9 - 3\left(2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right) +$

$+ 2^{-\frac{5}{6}} = 9 - 3.\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt[6]{2^5}} = 9 - 3.\left(\dfrac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} . \sqrt[3]{2}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt[6]{2^5}} =$

$= 9 - 3.\left(\dfrac{\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$, β') $\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\cdot\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=\alpha^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\alpha^2-\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha^2\beta-1}{\beta}$

γ') $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{2}-$

$-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

δ') $\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^2+1^2+2.2^{-\frac{1}{2}}.3^{-\frac{1}{2}}+2.2^{-\frac{1}{2}}1+2.3^{-\frac{1}{2}}1=$

$=2^{-1}+3^{-1}+1+2^{\frac{1}{2}}.3^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}+2.3^{-\frac{1}{2}}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}=1\frac{5}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}$

ε') $\alpha^{0,8+1,4-0,2}=\alpha^2$ στ') $\chi^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\chi^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=\chi^{\frac{17}{12}}=\sqrt[12]{\chi^{17}}=$

$=\chi\sqrt[12]{\chi^5}$

ζ') $\chi^{-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}=\chi^{-\frac{22}{15}}=\frac{1}{\sqrt[15]{\chi^{22}}}=\frac{1}{\chi\cdot\sqrt[15]{\chi^7}}$

η') $\alpha^{\frac{1}{4,2}+0,8}=\alpha^{\frac{5}{21}+\frac{4}{5}}=\alpha^{\frac{109}{105}}$

θ') $\alpha^{-1,4-1,2}=\alpha^{-2,6}=\alpha^{-\frac{13}{5}}$

ι') $(2^3)^{\frac{4}{5}}.(2^2)^{-\frac{1}{5}}=2^{\frac{12}{5}}.2^{-\frac{2}{5}}=2^{\frac{12}{5}-\frac{2}{5}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2.$

331. α') $\alpha^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}$ β') $\alpha^{-\frac{6}{12}}=\alpha^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

γ') $\alpha^{\frac{2}{3}}.\alpha^{-\frac{3}{4}}=\alpha^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=\alpha^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{\alpha}}$

δ') $25^{\frac{7}{2}}.16^{-\frac{13}{4}}=(5^2)^{\frac{7}{2}}.(2^4)^{-\frac{13}{4}}=5^7.2^{-13}$

ε') $(7^2)^{-\frac{5}{2}}.(3^2)^{-\frac{11}{2}}=7^{-5}.3^{-11}$

στ') $(7^2)^{-\frac{7}{2}}.5^{-\frac{13}{3}}:(2^8)^{\frac{13}{4}}.(2^8)^{-\frac{9}{2}}=7^{-7}.5^{-\frac{13}{3}}:2^{26}.2^{-36}=$

$=7^{-7}.5^{-\frac{13}{3}}:2^{-10}$

ζ') $$\frac{(6^2)^{-\frac{11}{2}}+(13^2)^{-\frac{9}{2}}}{(2^3)^{-\frac{16}{3}}+(3^3)^{-\frac{13}{3}}}=\frac{6^{-11}+13^{-9}}{2^{-16}+3^{-13}}$$

η') $$\frac{(5^3)^{-\frac{7}{3}}+(7^2)^{\frac{13}{2}}}{(12^2)^{-\frac{7}{2}}-(2^6)^{\frac{5}{2}}}=\frac{5^{-7}+7^{13}}{12^{-7}-2^{15}}$$

332. α' $$\frac{(\chi+\sqrt{\psi})(\chi+\sqrt{\psi})}{(\chi-\sqrt{\psi})(\chi+\sqrt{\psi})}=\frac{(\chi+\sqrt{\psi})^2}{\chi^2-\psi}$$

β') $$\frac{(\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha})(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$ γ') $$\frac{\chi(\sqrt{\psi}+\sqrt{\chi})}{\psi-\chi}$$

δ') $$\frac{(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})^2}{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}=\frac{(\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta})^2}{2\beta}$$

ε') $$\frac{(4\sqrt{5}-20)\left(\frac{3}{2}\sqrt{1}+5\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{9}{4}\cdot(1)-25\left(-\frac{1}{2}\right)}$$ στ') $$\frac{(5-\sqrt{-2})(1-\sqrt{-2})}{1-(-2)}$$

ζ') $$\frac{(8\sqrt{-12}-12\sqrt{-6})\sqrt{-3}}{4(\sqrt{-3})(\sqrt{-3})}=\frac{(8\sqrt{-12}-12\sqrt{-6})(\sqrt{-3})}{4\,.(-3)}.$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $\sqrt{-3}$ δὲν ὑπάρχει ἢ ἄλλως ἐπειδὴ ἡ $\sqrt{-3}$ δὲν εἶναι πραγματική, ἡ ἰδιότης τῆς § 151 δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ. Οὕτω δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-3}=\sqrt{(-3)(-3)}=$ $=\sqrt{9}=\pm 3$. Οὕτως εἶναι $(\sqrt{-2})^2=-2$ καὶ ὄχι $(\sqrt{-2})^2=\sqrt{(-2)^2}=$ $=\sqrt{4}=\pm 2$.

η') $$\frac{6(1-\sqrt{-2})}{1-(-2)}=\frac{6(1-\sqrt{-2})}{3}=2\,(1-\sqrt{-2}).$$

333. α') $8\alpha^2\gamma\beta^4$ β') $\frac{2}{3}\alpha\beta\sqrt{\gamma}$ γ') $\frac{\beta\gamma\delta^2\sqrt{\beta}.\sqrt{\gamma}.\sqrt{\delta}}{2\alpha^2}=\frac{\beta\gamma\delta^2\sqrt{\beta\gamma\delta}}{2\alpha^2}$

δ') $\frac{4\sqrt{2}\,\alpha\beta^2\gamma}{3\sqrt{5}\,\delta^2\varepsilon^3}$ ε') $\frac{5\sqrt{5}}{8}\,\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{\alpha}$ στ') $\frac{3\chi\psi^2}{8\alpha^2\beta}$ ζ') $\frac{\sqrt{3}\alpha\beta\eta^3\sqrt{\beta\gamma}}{4\varepsilon\delta\vartheta^4\sqrt{\varepsilon\delta}}$.

334. Σκεπτόμενοι ὡς εἰς τὴν § 156 συνάγομεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἀκεραίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 3. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι :

α') $\sqrt[3]{2^3\alpha^6\beta^9\gamma^9}=2\alpha^2\beta^3\gamma^3$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν ὅτι αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἄλλων μονωνύμων εἶναι :

$$\beta')\ -4\alpha^2\beta\gamma^3\quad \gamma')\ -\frac{2\alpha\beta\gamma^2.\sqrt[3]{\beta^2}}{5\delta^3\sqrt[3]{\varepsilon^2}}\quad \delta')\ \frac{2\alpha\gamma^2.\sqrt[3]{\beta}}{3\beta\varepsilon.\sqrt[3]{\beta\varepsilon}}=\frac{2\alpha\gamma^2}{3\beta\varepsilon.\sqrt[3]{\varepsilon}}.$$

Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν

335. (333). Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, ὅστις δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\lambda}{\mu}$, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος ἰσοῦται μὲ 7. Ἤτοι ἔστω ὅτι $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3=7$ ἤτοι $\frac{\lambda^3}{\mu^3}=7$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ $\lambda^3=\lambda.\lambda.\lambda.$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\mu^3=\mu.\mu.\mu.$ καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι 7. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον λ.λ.λ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου μ.μ.μ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον λ.λ.λ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ μ.μ.μ, ἤτοι τὸ λ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ μ. Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ κλάσμα $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶναι ἀνάγωγον οἱ ἀριθμοὶ λ καὶ μ οὐδένα ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ὥστε οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς ἐν γένει ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου ὁ κύβος νὰ εἶναι ἴσος μὲ 7. Ὥστε ὁ $\sqrt[3]{7}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Εὑρίσκεται δὲ κατὰ τὰ ἐν τῇ § 159 ὅτι $\sqrt[3]{7}=1,912\ldots$ Κατὰ προσέγγισιν ὅμως χιλιοστοῦ λαμβάνεται $\sqrt[3]{7}=1,913$. Βλέπε πίνακας λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 44.

336. Ἔστω α ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμὸς ὅστις δὲν ἔχει νυοστὴν ρίζαν ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἂς ἴδωμεν δὲ μήπως ἔχει τοιαύτην ρίζαν τὸ κλάσμα $\frac{\lambda}{\mu}$ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ἀνάγωγον. Ἤτοι ὑποθέτομεν ὅτι $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^\nu=\alpha$, ἤτοι $\frac{\lambda^\nu}{\mu^\nu}=\alpha$ (ι). Σκεπτόμενοι ὅμως ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὁ λ^ν δὲν θὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ μ^ν. Ὥστε ἡ ἰσότης (ι) εἶναι ἀδύνατος.

337. α') Εἶναι ὅρ(3,567999...)=ὅρ(3,567+0,000999...)=
=ὅρ3,567+ὅρ(0,000999...) (§ 158,β').

Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ 3,567 εἶναι αὐτὸς οὗτος ὁ

3,567· ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι ὅρ0,000999...=0,001 (§ 160). Ὅθεν ὅρ(3,567999...)=3,567+0,001=3,568.

Εἶναι 18,1557...>18,145291... διότι ὁ πρῶτος περιέχει τὰς μονάδας τοῦ δευτέρου καὶ ἄλλας ἀκόμη.

338. Εἶναι 3,14124+0,68456+1,72351+12,53652=18,08586. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 18,0859.

339. Εἶναι [Πίνακες λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 43) $\sqrt{19}=4,35889...$ καὶ $\sqrt{3}=1,73205...$ Ὥστε εἶναι: $\sqrt{19}+\sqrt{3}=4,359+1,732=6,091$ καὶ $\sqrt{19}-\sqrt{3}=2,627$.

340. Εἶναι $-2,8297$.

341. Εἶναι $\sqrt{5}-\sqrt{2}=2,236-1,414=0,822$

καὶ $\sqrt{2}-\sqrt{7}=1,414-2,646=-1,232$.

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

Ἀρχικῶς οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐθεωροῦντο, ὡς *«ψευδεῖς»*, *«σοφιστικοί»*, *«ἀδύνατοι»* ἀριθμοί. Ἀργότερον ὅμως διὰ τῶν ἐργασιῶν διασήμων μαθηματικῶν ἀπεδείχθη ἡ ἐξαιρετικὴ χρησιμότης αὐτῶν τόσον εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν, ὅσον καὶ εἰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν.

Κατωτέρω δίδομεν πίνακα τύπων σχετικῶν μὲ τοὺς φανταστικοὺς καὶ μιγάδας ἀριθμοὺς καὶ τὰς πράξεις ἐπ' αὐτῶν.

$$i=\sqrt{-1}, \qquad \sqrt{-\alpha}=i\sqrt{\alpha}$$

$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$ κ.ο.κ. γενικῶς δὲ

$$i^{4\nu}=+1, \quad i^{4\nu+1}=i, \quad i^{4\nu+2}=-1, \quad i^{4\nu+3}=-i$$

ὅπου ν ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

$$i^{-1}=-i, \qquad i^{-\nu}=(-i)^{\nu}, \qquad i^0=1$$

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$$

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma-\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)}{(\gamma-\delta i)(\gamma+\delta i)}=\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2}i$$

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha+\beta i)}{(\alpha-\beta i)(\alpha+\beta i)}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$$

Ἀσκήσεις.— ***342.*** Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 170.

343. **α')** $(2-0,74i)+(5+3i)=(2+5)+(3-0,74)i=7+2,26i$

$(2-0,74i)-(5+3i)=(2-5)-(-0,74-3)i=-3+3,74i$

$(2-0,74i)(5+3i)=[2.5-(-0,74).3]+[(-0,74).5+2.3]i=12,22+2,30i$

$$\frac{2-0{,}74i}{5+3i}=\frac{(2-0{,}74i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{7{,}78-9{,}70i}{5^2+3^2}=\frac{7{,}78-9{,}70i}{34}$$ κ. ο. κ.

344. α') $(5+3i).(7+3i)=(35-9)+(21+15)i=26+36i$

β') $(2+2i)^2=2^2+2.2.2i+2^2i^2=4+8i-4=8i$

γ') $(2-7i)(9-2i)=(2.9-7.2)-(7.9+2.2)i=4-67i$

δ') $(6+7i)(6-7i)=6^2+7^2=85$.

345. α') $(11+8i)(11-8i)=11^2+8^2=185$

β') $(14+15i).(14-15i)=14^2+15^2=421$

γ') $(3+i\sqrt{2})(4-3i\sqrt{2})=3.4+4i\sqrt{2}-9i\sqrt{2}-3.2.i^2=18-5i\sqrt{2}$

δ') $$\frac{8-7i\sqrt{3}}{5+4i\sqrt{3}}=\frac{(8-7i\sqrt{3})(5-4i\sqrt{3})}{(5+4i\sqrt{3})(5-4i\sqrt{3})}=\frac{(40-84)-(35\sqrt{3}+32\sqrt{3})i}{5^2+(4\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{-44-67i\sqrt{3}}{73}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ

Τύποι

1) $\alpha\chi^2+\gamma=0,\quad \varrho_1=+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}},\quad \varrho_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$

$\chi^2+\beta=0,\quad \varrho_1=+\sqrt{-\beta},\quad \varrho_2=-\sqrt{-\beta}$

2) $\alpha\chi^2+\beta\chi=0,\quad \varrho_1=0,\quad \varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$

$\chi^2+\gamma\chi=0,\quad \varrho_1=0,\quad \varrho_2=-\gamma$

3) $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,\quad \varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\quad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

$\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma=0,\quad \varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha},\quad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$

$\chi^2+\pi\chi+k=0,\quad \varrho_1=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-4k},\quad \varrho_2=-\frac{\pi}{4}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-4k}$

Ἀσκήσεις.—*346.* α') $3\chi^2=9$, $\chi^2=3$, $\chi=\pm\sqrt{3}$, ἤτοι $\varrho_1=\sqrt{3}$, $\varrho_2=-\sqrt{3}$.

β') $6\chi^2=15{,}2$, $\chi^2=\frac{7{,}6}{3}$. Ὅθεν: $\varrho_1=\sqrt{\frac{7{,}6}{3}}=\frac{\sqrt{7{,}6.3}}{3}=\frac{\sqrt{22{,}8}}{3}$, $\varrho_2=-\frac{\sqrt{22{,}8}}{3}$. γ') $9\chi^2+4(\chi-9)=4\chi$, $9\chi^2=36$. Ὅθεν $\varrho_1=2$, $\varrho_2=-2$.

347. α′) $6(\chi^2-\alpha^2)-15(\chi^2-\beta^2)=10$, $\chi^2=\dfrac{15\beta^2-6\alpha^2-10}{9}$. Ὅθεν

$$\varrho_1=\frac{\sqrt{15\beta^2-6\alpha^2-10}}{3},\quad \varrho_2=-\frac{\sqrt{15\beta^2-6\alpha^2-10}}{3}.$$

β′) $\chi^2-7^2=32$, $\chi^2=81$. Ὅθεν $\varrho_1=9$, $\varrho_2=-9$

γ′) $7(4\chi^2-25)=44$, $\chi^2=\dfrac{219}{4.7}$. Ὅθεν $\varrho_1=\dfrac{\sqrt{219}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{219.7}}{2.7}=\dfrac{\sqrt{1533}}{14}$,

$\varrho_2=-\dfrac{\sqrt{1533}}{14}$

δ′) $9\chi^2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{473}{4}$, $9\chi^2=\dfrac{237}{2}$. Ὅθεν $\varrho_1=\dfrac{\sqrt{237}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{474}}{6}$,

$\varrho_2=-\dfrac{\sqrt{474}}{6}$

ε′) $\chi^2=12+2\sqrt{11}$. Ὅθεν $\varrho_1=\sqrt{12+2\sqrt{11}}$, $\varrho_2=-\sqrt{12+2\sqrt{11}}$.

348. α′) $\dfrac{4\chi^2}{9}-\dfrac{9\chi^2}{25}=171$, $19\chi^2=171.9.25$, $\chi^2=9.9.25$ καὶ $\chi=\pm(3.3.5)=\pm 45$.

β′) $(63+2\chi-\chi^2)+(63-2\chi-\chi^2)=76$, $2\chi^2=50$ καὶ $\chi=\pm 5$.

γ′) $(1+\chi^2)^2-1=(1-\chi^2)^2$, $4\chi^2=1$ καὶ $\chi=\pm {}^1/_2$.

349. α′) $13\chi^2-12\chi=0$. Ὅθεν $\varrho_1=0$, $\varrho_2={}^{12}/_{13}$.

β′) $\dfrac{3}{4}\chi^2-2\chi=0$. Ὅθεν $\varrho_1=0$, $\varrho_2=2:\dfrac{3}{4}=\dfrac{8}{3}$.

γ′) $\dfrac{\beta-1}{\alpha\beta}\cdot\chi^2-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\cdot\chi=0$. Ὅθεν $\varrho_1=0$, $\varrho_2=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}:\dfrac{\beta-1}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-1}$

δ′) $\chi-(\alpha-\beta)\chi=(\alpha+\beta)(\chi^2-\chi)$, $(\alpha+\beta)\chi^2-(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\chi-\chi=0$ $(\alpha+\beta)\chi^2-[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)+1]\chi=0$, $(\alpha+\beta)\chi^2-(2\beta+1)\chi=0$. Ὅθεν $\varrho_1=0$, $\varrho_2=(2\beta+1)/(\alpha+\beta)$.

ε′) Τὸ β^2 τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ 2ου μέλους νὰ διορθωθῇ εἰς β^4. Τότε δὲ ἔχομεν: $\dfrac{[(\alpha-\chi)^2+(\chi-\beta)^2].[(\alpha-\chi)^2-(\chi-\beta)^2]}{(\alpha-\chi)^2-(\chi-\beta)^2}=\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$,

ἤτοι: $(\alpha-\chi)^2+(\chi-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν:

$\chi[\chi-(\alpha+\beta)]=0$, ἤτοι $\varrho_1=0$ καὶ $\varrho_2=\alpha+\beta$.

350. α′) $3{,}3\chi^2+6\chi=0$. Ὅθεν, $\varrho_1=0$, $\varrho_2=-6/3{,}3=-20/11$.

β′) $2{,}2\chi^2-8{,}4\chi=0$. Ὅθεν, $\varrho_1=0$, $\varrho_2=42/11$.

351. α′) $3\chi^2-3\chi-8=0$,

$$\chi=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.3.(-8)}}{2.3}=\frac{3\pm\sqrt{9+96}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{105}}{6}.$$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{3+\sqrt{105}}{6}$, $\varrho_2=\frac{3-\sqrt{105}}{6}$.

Ἐπαλήθευσις τῆς α΄ ρίζης ϱ_1.

$$3.\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)^2-3.\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6}\right)=3.\frac{9+6\sqrt{105}+105}{36}-\frac{3+\sqrt{105}}{2}=$$

$$=3.3.\frac{3+2\sqrt{105}+35}{36}-\frac{3+\sqrt{105}}{2}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{105}+35}{4}-\frac{6+2\sqrt{105}}{4}=\frac{38-6}{4}=8.$$

Ὁμοίως γίνεται καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ρίζης ϱ_2.

β΄) Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $9\chi^2-2\chi-75=0$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος, θὰ κάμωμεν χρῆσιν τοῦ δευτέρου τύπου 3) σελὶς 82. Ὅθεν ἔχομεν:

$$\chi=\frac{1\pm\sqrt{1^2+9.75}}{9}=\frac{1\pm\sqrt{676}}{9}=\frac{1\pm26}{9}.$$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{1+26}{9}=3$, $\varrho_2=\frac{1-26}{9}=-\frac{25}{9}$.

γ΄) Ἔχομεν $4\chi^2-15\chi-4=0$,

$$\chi=\frac{15\pm\sqrt{15^2+4.4.4}}{8}=\frac{15\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{15\pm17}{8}.$$

Ὅθεν $\varrho_1=\frac{15+17}{8}=4$, $\varrho_2=\frac{15-17}{8}=-\frac{1}{4}$.

δ΄) Ἔχομεν $\chi=\frac{1\pm\sqrt{1+4.2.}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$. Ὅθεν $\varrho_1=2$ καὶ $\varrho_2=-1$.

352. α΄) Ἔχομεν $\frac{1}{\chi^2}-\frac{12}{\chi}+27=0$, ἤτοι $27\chi^2-12\chi+1=0$ καὶ

$$\chi=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{27}=\frac{6\pm3}{27}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3} \text{ ἢ } \frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

β΄) Εἶναι $\frac{9}{\chi^2}-\frac{21}{\chi}+12=0$, $12\chi^2-21\chi+9=0$, $4\chi^2-7\chi+3=0$.

Ὅθεν $\chi=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{7\pm1}{8}=1$ ἢ $\frac{3}{4}$.

γ΄) Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 0 ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων του εἶναι 0. Ὥστε θὰ εἶναι ἢ $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ ἢ $\chi-2=0$, ἤτοι $\chi=2$.

δ') Εἶναι $\chi^2-2\sqrt{3}\chi+3=0$ καὶ $\chi=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-3}=\sqrt{3}$

ε') Εἶναι $\chi=\dfrac{-\sqrt{17}\pm\sqrt{17-4.\sqrt{3}\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{17}\pm\sqrt{17-4\sqrt{15}}}{2\sqrt{3}}$

στ') Εἶναι $\chi^2-2\chi+1-9\chi^2-48\chi-64=4\chi^2+20\chi+25$

$12\chi^2+70\chi+88=0,\quad 6\chi^2+35\chi+44=0$

$$\chi=\frac{35\pm\sqrt{35^2-4.6.44}}{12}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1056}}{12}=\frac{35\pm\sqrt{169}}{12}=$$

$=\dfrac{35\pm13}{12}$. Ὅθεν $\varrho_1=\dfrac{-35+13}{12}=\dfrac{-22}{12}=-\dfrac{11}{6}$,

$$\varrho_2=\frac{-35-13}{12}=-\frac{48}{12}=-4.$$

ζ') $36\chi^2-12\chi+1+9\chi^2+24\chi+16-(25\chi^2-4)=53$

$20\chi^2+12\chi-32=0,\ 5\chi^2+3\chi-8=0,\ \chi=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+160}}{10}=\dfrac{-3\pm\sqrt{169}}{10}$

Ὅθεν $\varrho_1=\dfrac{-3+13}{10}=1,\quad \varrho_2=\dfrac{-3-13}{10}=-\dfrac{16}{10}=-\dfrac{8}{5}$.

η') $\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\chi-1}\left(\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\chi-1}\right)=0,\ \dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\chi(\chi-1)}-\dfrac{1}{(\chi-1)^2}=0$

$(\chi-1)^2+\chi(\chi-1)-\chi^2=0,\quad \chi^2-3\chi+1=0$. Ὅθεν:

$\chi=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, ἤτοι $\varrho_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \varrho_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

θ') Εἶναι $3\chi^2+16\chi-1280=0,\quad \chi=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+3.1280}}{3}=$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{3904}}{3}=\frac{-8\pm\sqrt{64.61}}{3}=\frac{-8\pm8\sqrt{61}}{3}.$$

ι') Εἶναι $\chi^2-2(1+\sqrt{5})\chi+1=0,\ \chi=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1}=$

$=(1+\sqrt{5})\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

353. α') Εἶναι $\chi=\dfrac{-9\alpha\pm\sqrt{81\alpha^2+40\alpha^2}}{2}=\dfrac{-9\alpha\pm\sqrt{121\alpha^2}}{2}=$

$\dfrac{-9\alpha\pm11\alpha}{2}$. Ὅθεν $\varrho_1=\dfrac{-9\alpha+11\alpha}{2}=\dfrac{2\alpha}{2}=\alpha,\ \varrho_2=\dfrac{-9\alpha-11\alpha}{2}=$

$$=\frac{-20\alpha}{2}=-10\alpha.$$

β') Εἶναι $\chi=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}=\alpha\pm\sqrt{4\alpha^2}=\alpha\pm2\alpha=3\alpha$ ἢ $-\alpha$.

γ') Εἶναι $\chi^2-5\alpha\chi-50\alpha^2=0$, $\chi=\dfrac{5\alpha\pm\sqrt{25\alpha^2+200\alpha^2}}{2}=$

$=\dfrac{5\alpha\pm\sqrt{225\alpha^2}}{2}=\dfrac{5\alpha\pm15\alpha}{2}=10\alpha$ ἢ -5α.

δ') Εἶναι $\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2\beta(\beta-1)=0$, $\chi=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2\beta(\beta-1)}}{2}=$

$=\dfrac{-\alpha\pm\alpha\sqrt{1+4\beta^2-4\beta}}{2}=\dfrac{-\alpha\pm\alpha\sqrt{(2\beta-1)^2}}{2}=\dfrac{-\alpha\pm\alpha(2\beta-1)}{2}$

῞Οθεν, $\varrho_1=\dfrac{-\alpha+\alpha(2\beta-1)}{2}=\alpha(\beta-2)$, $\varrho_2=\dfrac{-\alpha-\alpha(2\beta-1)}{2}=-\alpha\beta$.

ε') Εἶναι $\chi=(\alpha+8)\pm\sqrt{(\alpha+8)^2-32\alpha}=(\alpha+8)\pm\sqrt{\alpha^2+16\alpha+64-32\alpha}=$
$=(\alpha+8)\pm\sqrt{\alpha^2-16\alpha+64}=(\alpha+8)\pm\sqrt{(\alpha-8)^2}=(\alpha+8)\pm(\alpha-8)$.
῞Οθεν $\varrho_1=\alpha+8+\alpha-8=2\alpha$, $\varrho_2=\alpha+8-\alpha+8=16$.

στ') Εἶναι $\chi=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha+\beta^2)-4\alpha\beta}=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}=$
$=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=(\alpha+\beta)\pm(\alpha-\beta)=2\alpha$ ἢ 2β.

ζ') Εἶναι $\chi^2-(\alpha+\beta+1)\chi+1=0$, $\chi=\dfrac{(\alpha+\beta+1)\pm\sqrt{(\alpha+\beta+1)^2-4}}{2}$.

η') Εἶναι $4\chi^2-6\beta\chi+\alpha\beta=0$, $\chi=(3\beta\pm\sqrt{9\beta^2-4\alpha\beta}):4$.

ϑ') Εἶναι $\dfrac{\alpha^2\chi^2}{\beta^2}-\dfrac{2\alpha}{\gamma}\cdot\chi+\dfrac{\beta^2}{\gamma^2}=0$, $\alpha^2\gamma^2\chi^2-2\alpha\beta^2\gamma\chi+\beta^4=0$.

῞Οθεν $\chi=\dfrac{\alpha\beta^2\gamma\pm\sqrt{\alpha^2\beta^4\gamma^2-\alpha^2\beta^4\gamma^2}}{\alpha^2\gamma^2}=\dfrac{\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^2\gamma^2}=\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}$

ι') Κατὰ ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν εἶναι

$\dfrac{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2+\alpha^2-\alpha\chi+\chi^2}{\alpha^2+\alpha\chi+\chi^2-\alpha^2+\alpha\chi-\chi^2}=\dfrac{\alpha^2+1+\alpha^2-1}{\alpha^2+1-\alpha^2+1}$ ἤτοι

$\dfrac{2\alpha^2+2\chi^2}{2\alpha\chi}=\dfrac{2\alpha^2}{2}$, $\dfrac{\alpha^2+\chi^2}{\alpha\chi}=\alpha^2$, $\chi^2-\alpha^3\chi+\alpha^2=0$.

῞Οθεν $\chi=\dfrac{\alpha^3\pm\sqrt{\alpha^6-4\alpha^2}}{2}=\dfrac{\alpha^3\pm\alpha\sqrt{\alpha^4-4}}{2}$.

ια') ῞Εστω ϱ_1 ἡ κοινὴ ῥίζα, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\alpha\varrho_1^2+\beta\varrho_1+\gamma=0$ καὶ $\alpha_1\varrho_1^2+\beta_1\varrho_1+\gamma_1=0$. 'Αλλ' ἂν ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὰ συστήματα πρώτου βαθμοῦ, εὑρίσκομεν:

$\varrho_1^2=\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$ καὶ $\varrho_1=\dfrac{\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$. ῞Οθεν, $\dfrac{\beta\gamma_1-\beta_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\gamma}=\dfrac{(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2}{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2}$

ἤτοι $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta).(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$.

354. α') ἔχομεν

$$4\chi^2-23\chi+\left(\frac{23}{4}\right)^2=\left(\frac{23}{4}\right)^2-30,\ \left(2\chi-\frac{23}{4}\right)^2=\frac{529-480}{16}=\frac{49}{16}$$

καὶ $2\chi-\frac{23}{4}=\pm\frac{7}{4}$, ἤτοι $\chi=\frac{23\pm7}{8}=\frac{15}{4}$ ἢ 4.

β') Καθιστῶμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ χ^2 τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ ἐργαζόμεθα ἔπειτα ὡς ἀνωτέρω. Οὕτω δὲ ἔχομεν :

$$9\chi^2-15\chi=-6,\ 9\chi^2-15\chi+\left(\frac{15}{6}\right)^2=\left(\frac{15}{6}\right)^2-6,\ \left(3\chi-\frac{15}{6}\right)^2=$$

$=\frac{225-216}{36}=\frac{9}{36}$ καὶ $3\chi-\frac{15}{6}=\pm\frac{3}{6}$. Ὅθεν $\chi=\frac{15\pm3}{18}=1$ ἢ $\frac{2}{3}$.

355. α') $\chi(\chi^2-\chi-2)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι $\chi=0$ ἢ $\chi^2-\chi-2=0$, ἤτοι $\chi=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=2$ ἢ -1.

β') $4\chi^2(\chi-1)-(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(4\chi^2-1)=0$. Ὅθεν θὰ εἶναι ἢ $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ ἢ $4\chi^2-1=0$, ἤτοι $\chi=\pm\frac{1}{2}$.

γ') Τὸ α^{ον} μέλος εἶναι ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+3)^3$. Ὅθεν $(\chi+3)^3=0$, ἤτοι $\chi+3=0$ καὶ $\chi=-3$ (ρίζα τριπλῆ).

356. α') $(\chi^3+1)+\alpha\chi(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)+\alpha\chi(\chi+1)=0$
$(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+\alpha\chi)=0$, $(\chi+1)[\chi^2-(1-\alpha)\chi+1]=0$.
Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$

καὶ $\chi^2-(1-\alpha)\chi+1=0$ ἤτοι $\chi=\frac{(1-\alpha)\pm\sqrt{(1-\alpha)^2-4}}{2}$.

β') $(\chi^3-1)-\lambda(\chi^2-2\chi+1)=0$, $(\chi^3-1)-\lambda(\chi-1)^2=0$
$(\chi-1)[(\chi^2+\chi+1)-\lambda(\chi-1)]=0$. Ὅθεν $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ καὶ $\chi^2+\chi+1-\lambda\chi+\lambda=0$, $\chi^2-(\lambda-1)\chi+(\lambda+1)=0$, ἤτοι

$$\chi=\frac{(\lambda-1)\pm\sqrt{(\lambda-1)^2-4(\lambda+1)}}{2}.$$

γ') $(\chi^3+2^3)+3(\chi-2)(\chi+2)=0$ $(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4)+3(\chi-2)(\chi+2)=0$ $(\chi+2)(\chi^2+\chi-2)=0$. Ὅθεν $\chi+2=0$, ἤτοι $\chi=-2$ καὶ $\chi^2+\chi-2=0$, ἤτοι

$$\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=-2 \text{ καὶ } 1.$$

357. α) $\chi^2(\chi+\alpha)+\alpha(\chi+\alpha)=0$, $(\chi+\alpha)(\chi^2+\alpha)=0$. Ὅθεν $\chi+\alpha=0$, ἤτοι $\chi=-\alpha$ καὶ $\chi^2+\alpha=0$, ἤτοι $\chi=\pm\sqrt{-\alpha}=\pm i\sqrt{\alpha}$.

β') $\chi(\chi^3+1)+4\chi^2(\chi+1)=0$, $\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)+4\chi^2(\chi+1)=0$
$\chi(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+4\chi)=0$. Ὅθεν $\chi=0$, $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ

$$\chi^2+3\chi+1=0, \text{ ἤτοι } \chi=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

γ') $\alpha^4[(\alpha+\chi)^4-\chi^4]=0$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha\neq 0$, ἔχομεν
$[(\alpha+\chi)^2+\chi^2].[(\alpha+\chi)^2-\chi^2]=0$, ἤτοι

$(\alpha+\chi)^2+\chi^2=0$, $2\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2=0$ καὶ $\chi=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha^2}}{2}=\dfrac{\alpha\pm\alpha i}{2}$

$(\alpha+\chi)^2-\chi^2=0$, $2\alpha\chi+\alpha^2=0$ καὶ $\chi=-\alpha/2$.

358. α') $\chi^4(\chi-1)-(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^4-1)=0$,
$(\chi-1)(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$. Ὅθεν $\chi=1$, $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=\pm i$.

β') $(\chi^6+2^6)-12\chi^2(\chi^2-4)=0$, $(\chi^2-4)(\chi^4+4\chi^2+16)-12\chi^2(\chi^2-4)=0$,
$(\chi^2-4)(\chi^4-8\chi^2+16)=0$, $(\chi^2-4)(\chi^2-4)^2=0$, $(\chi^2-4)^3=0$, καὶ
$\chi^2-4=0$, ἤτοι $\chi=\pm2$ (τριπλαῖ ρίζαι).

γ') $(\chi^3\pm1)+\alpha(\chi\pm1)=0$, $(\chi\pm1)(\chi^2\mp\chi+1)+\alpha(\chi\pm1)=0$

$(\chi\pm1)[\chi^2\mp\chi+(1+\alpha)]=0$. Ὅθεν $\chi=\mp1$ καὶ $\chi=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{1-4(1+\alpha)}}{2}$.

359. Θεωροῦντες τὸν $6\chi-1$ ὡς ἕνα ἄγνωστον, εὑρίσκομεν:
$6\chi-1=\dfrac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\dfrac{11\pm9}{2}=10$, ἢ 1. Ὅθεν $6\chi-1=10$, ἤτοι
$\chi={}^{11}/_{6}$ καὶ $6\chi-1=1$, ἤτοι $\chi={}^{1}/_{3}$.

360. $\chi-7=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$, ἤτοι $\chi=$
$=6\pm\sqrt{2}$.

361. Ἐπειδὴ $\chi^2-0{,}25=\chi^2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4\chi^2-1}{4}=\dfrac{(2\chi-1)(2\chi+1)}{4}$, ἡ
δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $(\chi+1)^2+\dfrac{2\chi+1}{2}+\dfrac{1}{2}-8{,}75=0$,

$(\chi+1)^2+(\chi+1)-8{,}75=0$ καὶ $\chi+1=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4.8{,}75}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{36}}{2}=$

$=\dfrac{-1\pm6}{2}=-\dfrac{7}{2}$ ἢ $\dfrac{5}{2}$. Ὅθεν $\chi=-1-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{9}{2}$ ἢ

$-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$.

362. $2\chi-\alpha=\dfrac{\beta\pm\sqrt{\beta^2+8\beta^2}}{2}=\dfrac{\beta\pm3\beta}{2}=2\beta$ ἢ $-\beta$. Ὅθεν:

$$\chi=\frac{2\beta+\alpha}{2} \text{ ἢ } \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

363. $3\chi-2\alpha+\beta=-\beta\pm\sqrt{\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)}=-\beta\pm\alpha$. Ὅθεν:
$3\chi-2\alpha+\beta=-\beta+\alpha$, ἤτοι $\chi=(3\alpha-2\beta)/_3$ καὶ $3\chi-2\alpha+\beta=-\beta-\alpha$, ἤτοι
$\chi=(\alpha-2\beta)/_3$.

364. $\chi^2+3=\dfrac{7\pm\sqrt{49+240}}{2}=\dfrac{7\pm17}{2}=12$ ἢ -5. Ὅθεν:

$\chi^2+3=12$, ἤτοι $\chi=\pm 3$ καὶ $\chi^2+3=-5$, ἤτοι $\chi=\pm 2i\sqrt{2}$.

365. $\chi^2+7\chi=3\pm\sqrt{9+61}=3\pm\sqrt{70}$. Ὅθεν $\chi^2+7\chi-(3+\sqrt{70})=0$

ἤτοι $\chi=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+4(3+\sqrt{70})}}{2}$, ἢ $\chi^2+7\chi-(3-\sqrt{70})=0$, ἤτοι:

$$\chi=\frac{-7\pm\sqrt{49+4(3-\sqrt{70})}}{2}.$$

366. $(\chi^2-7\chi)^2-13(\chi^2-7\chi)+36=0$, $\chi^2-7\chi=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=$

$\dfrac{13\pm 5}{2}=9$ ἢ 4. Ὅθεν $\chi^2-7\chi-9=0$, ἤτοι $\chi=\dfrac{7\pm\sqrt{49+36}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{85}}{2}$

ἢ $\chi^2-7\chi-4=0$, ἤτοι $\chi=\dfrac{7\pm\sqrt{49+16}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.

367. Ἔχομεν $\left(2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2+2\right)\left(2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2\right)-35=0$. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2=\psi$, ἔχομεν $(\psi+2).\psi-35=0$, $\psi^2+2\psi-35=0$, ἐξ ἧς $\psi=5$ ἢ -7. Ὅθεν $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2-5=0$, $2\chi^2-3\chi-3=0$, ἤτοι: $\chi=(3\pm\sqrt{33}):4$ ἢ $2\chi-\dfrac{3}{\chi}+2+7=0$, $2\chi^2+9\chi-3=0$, ἤτοι: $\chi=(-9\pm\sqrt{105}):4$.

368. Θέτοντες $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=\psi$, εὑρίσκομεν $5\psi^2-26\psi+5=0$, καὶ $\psi=$ $=5$ ἢ $\dfrac{1}{5}$. Ὅθεν $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=5$, καὶ $\chi=-\dfrac{16}{9}$ ἢ $\dfrac{\chi-1}{2\chi+3}=\dfrac{1}{5}$ καὶ $\chi=\dfrac{8}{3}$.

369. α΄) $15^2-4.16=161>0$. Ρ. πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

β΄) $4^2-68=-52<0$ ἢ ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος, $2^2-17=-13<0$. Ὥστε Ρ. μιγάδες συζυγεῖς.

γ΄) $9^2-4.1.(-7)=9^2+28>0$. Ρ. πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Ὅτι ἐδῶ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι θετικόν, προκύπτει ἐκ τοῦ ἑτεροσήμου τῶν α καὶ γ.

δ΄) α καὶ γ ἑτερόσημοι. Ρ. πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

ε΄) καὶ στ΄). Ὁμοίως ὡς ἡ δ΄.

370. α΄) Εἶναι $\alpha^2(\chi-\delta)+\beta^2(\chi-\gamma)=(\chi-\gamma)(\chi-\delta)$, $\chi^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma+\delta)\chi+(\alpha^2\delta+\beta^2\gamma+\gamma\delta)=0$. Οὕτως ἡ ὑπόρριζος ποσότης (ἡ διακρίνουσα) εἶναι $(\alpha^2+\beta^2+\gamma+\delta)^2-4(\alpha^2\delta+\beta^2\gamma+\gamma\delta)$, ἤτοι

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^2+\delta^2+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma+2\alpha^2\delta+2\beta^2\gamma+2\beta^2\delta+2\gamma\delta$$
$$-4\alpha^2\delta-4\beta^2\gamma \qquad -4\gamma\delta=$$
$$=(\alpha^4+\beta^4+\gamma^2+\delta^2-2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma-2\alpha^2\delta-2\beta^2\gamma+2\beta^2\delta-2\gamma\delta)+4\alpha^2\beta^2=$$

$=(\alpha^2-\beta^2+\gamma-\delta)^2+(2\alpha\beta)^2$. Ἀλλ' ἡ ποσότης αὕτη, ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι θετική, καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαί.

β') Ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta=(\beta\gamma)^2+4\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)>0$. Ὥστε Ρ. πργ.

γ') Ἔχομεν Ρ. πργ., διότι $\Delta=\pi^2+8\pi^2>0$.

δ') Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως προκύπτει ἡ

$\alpha(\chi-\beta)(\chi-\gamma)+\beta(\chi-\alpha)(\chi-\gamma)+\gamma(\chi-\alpha)(\chi-\beta)=0$ ἢ

$(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2-[\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\beta)]\chi+3\alpha\beta\gamma=0$, ἧς εἶναι

$\Delta=[\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\beta)]^2-12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=$

$=[2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]^2-12\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-6\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=$

$=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2$

$=(\alpha\beta-\beta\gamma)^2+(\beta\gamma-\gamma\alpha)^2+(\gamma\alpha-\alpha\beta)^2>0$. Ὥστε ρίζαι πραγματικαί.

371. Δίδεται $\beta^2-\alpha\gamma>0$. Τῆς δὲ δευτέρας ἐξισώσεως εἶναι

$\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)^2-[2\beta(\alpha+\gamma)+3\alpha\gamma]=$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-2\alpha\beta-2\beta\gamma-3\alpha\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\gamma=$

$=\alpha^2+\gamma^2+(\beta^2-\alpha\gamma)>0$. Ὥστε ρ. πραγματικαί.

372. Δίδεται $\beta^2-\alpha\gamma>0$, ἡ δὲ δευτέρα ἐξίσωσις ἥτις γράφεται $(\beta^2-\alpha\gamma)\chi^2+2\alpha\gamma\chi-1=0$, ἔχει $\Delta=\alpha^2\gamma^2+(\beta^2-\alpha\gamma)>0$. Ὅθεν ρ. πρ.

373. α') Εἶναι $\Delta=25\alpha^2-16\alpha^2=9\alpha^2$ καὶ $\sqrt{\Delta}=\pm3\alpha$. Ὥστε ρ. ρηταί.

β') $\Delta=\beta^2+24\beta^2=25\beta^2$ καὶ $\sqrt{\Delta}=\pm5\beta$. Ὥστε ρ. ρηταί.

γ') $\Delta=(\alpha^2\beta^2+\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha^2\beta^2-\gamma^2)^2$. Ὅθεν ρ. ρηταί.

374. α'). $\Delta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)=(\alpha+\beta)^2-[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2]=$ $=\gamma^2$. Ὥστε ρ. ρηταί.

β') $\Delta=4\alpha^2(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2-(4\alpha^2-9\gamma^2\delta^2)(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2=$

$=(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2.(4\alpha^2-4\alpha^2+9\gamma^2\delta^2)=(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2.(3\gamma\delta)^2$. Ὅθεν ρ. ρηταί.

375. α') $\Delta=\alpha^4+8\alpha^4=9\alpha^4=(3\alpha^2)^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

β') $\Delta=(\gamma+4)^2-16\gamma=(\gamma-4)^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

γ') Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ἥτις γράφεται $2\gamma\chi^2-(\alpha\beta+4\gamma\delta)\chi+2\alpha\beta\delta=0$ ἔχει $\Delta=(\alpha\beta+4\gamma\delta)^2-16\alpha\beta\gamma\delta=(\alpha\beta-4\gamma\delta)^2$. Ὥστε ρ. σύμμετροι.

δ') $\Delta=(3\alpha-5k)^2+60\alpha k=(3\alpha+5k)^2$. Ὥστε ρ. σύμμετροι.

376. α') $\Delta=\pi^2-4k=\pi^2-4\left(\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\lambda^2}{4}\right)=\pi^2-\pi^2+\lambda^2=\lambda^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

β') $\Delta=\pi^2-4k=\left(\lambda+\dfrac{k}{\lambda}\right)^2-4k=\lambda^2+2k+\left(\dfrac{k}{\lambda}\right)^2-4k=$

$=\left(\lambda-\dfrac{k}{\lambda}\right)^2$. Ὅθεν ρ. σύμμετροι.

377. α') $\Delta = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 = -\alpha^2\beta^2 < 0$. Ὅθεν ρ. φ.

β') $\Delta = \alpha^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = -(\beta^2+\gamma^2) < 0$. Ὅθεν ρ. φ.

γ') $\Delta = \alpha\beta - 17\alpha\beta = -16\alpha\beta < 0$, ἐπειδὴ $\alpha\beta > 0$, διότι ἄλλως ἡ πρώτη δύναμις τοῦ χ θὰ εἶχε συντελεστὴν $-2i\sqrt{\alpha\beta}$. Ὅθεν ρ. φ.

δ') $\Delta = \alpha^2 - (\alpha^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2) = -(\beta-\gamma)^2 < 0$. Ὅθεν ρ. φ.

378. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀληθεύει διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι 0 ἤτοι ἐὰν $\alpha\chi+\beta=0$ καὶ $\alpha_1\chi+\beta_1=0$, ἤτοι ἐὰν $-\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ὅταν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ ἔχει ρ. φ.

379. Δίδεται $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, ἡ δὲ 2α ἐξίσωσις ἔχει $\Delta = (\alpha+\beta)^2 - \alpha(2\beta+\gamma+\alpha) = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$. Ὅθεν ρ. φ.

380. Δίδεται $16\alpha^2(\alpha^2-\beta^2) < 0$, ἤτοι $\alpha^2 - \beta^2 < 0$, ἡ δὲ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει $\Delta = 4\beta^2(\beta^2-\alpha^2) = -4\beta^2(\alpha^2-\beta^2) > 0$. Ὅθεν αὕτη ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

381. α') Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $(5\mu+2)^2 - 8\mu(4\mu+1) = 0$, ἤτοι $7\mu^2 - 12\mu - 4 = 0$ καὶ $\mu = (6 \pm \sqrt{36+28}):7 = (6 \pm 8):7 = 2$ ἢ $-2/7$.

β') Ὁμοίως λαμβάνομεν $(2\mu-1)^2 + 2\mu(3\mu-2) = 0$, $10\mu^2 - 8\mu + 1 = 0$ καὶ $\mu = (4 \pm \sqrt{16-10}) : 10 = (4 \pm \sqrt{6}) : 10$.

γ') Ὁμοίως ἔχομεν $9(\mu-1)^2 - 4(\mu+1)(\mu-1) = 0$, $5\mu^2 - 18\mu + 13 = 0$ καὶ $\mu = (9 \pm \sqrt{81-65}) : 5 = (9 \pm 4) : 5 = 13/5$ ἢ 1.

δ') Ὁμοίως ἔχομεν $\mu^2 - 4(2\mu-3)(\mu-1) = 0$, $7\mu^2 - 20\mu + 12 = 0$ καὶ $\mu = (10 \pm \sqrt{100-84}) : 7 = (10 \pm 4) : 7 = 2$ ἢ $6/7$.

382. α') $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{4}{2} = 2$ καὶ $\rho_1\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = -\dfrac{3}{2}$

β') $\rho_1 + \rho_2 = -8:3$, $\rho_1\rho_2 = -12:3 = -4$,

γ') $\rho_1 + \rho_2 = 7:7 = 1$, $\rho_1\rho_2 = 10$.

383. α') $-2\alpha^2$ καὶ $-3\alpha^2$, β') 4α καὶ $3\alpha^2$.

384. α') $2 + \rho_2 = 5$, $\rho_2 = 3$ β') $\rho_2 = 3$ γ') $\rho_2 = \beta$.

385. α') $\rho_1 - \rho_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \dfrac{-\beta - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} =$

$= \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}$.

β') Ἔχομεν $\alpha\rho_1^2 + \beta\rho_1 + \gamma = 0$, $\alpha\rho_2^2 + \beta\rho_2 + \gamma = 0$. Ὅθεν:

$$\alpha(\rho_1^2+\rho_2^2) + \beta(\rho_1+\rho_2) + 2\gamma = 0, \quad \alpha(\rho_1^2+\rho_2^2) - \frac{\beta^2}{\alpha} + 2\gamma = 0 \ (1)$$

Ὅθεν $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \dfrac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$ (1).

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\alpha\rho_1^3+\beta\rho_1^2+\gamma\rho_1=0$, $\alpha\rho_2^3+\beta\rho_2^2+\gamma\rho_2=0$. Ὅθεν

$$\alpha(\rho_1^3+\rho_2^3)+\beta(\rho_1^2+\rho_2^2)+\gamma(\rho_1+\rho_2)=0$$

$$\alpha(\rho_1^3+\rho_2^3)+\frac{\beta^3-2\alpha\beta\gamma}{\alpha}-\frac{\beta\gamma}{\alpha}=0, \text{ καὶ } \rho_1^3+\rho_2^3=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3} \quad (2).$$

386. Ἐὰν εἰς τοὺς προηγουμένους εὑρεθέντας τύπους θέσωμεν $\alpha=1$, $\beta=\pi$ καὶ $\gamma=k$, εὑρίσκομεν:
$\rho_1+\rho_2=-\pi$. $\rho_1-\rho_2=k$, $\rho_1-\rho_2=\sqrt{\pi^2-4k}$, $\rho_1^2+\rho_2^2=\pi^2-2k$, $\rho_1^3+\rho_2^3=3k\pi-\pi^3$.

387. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω τύπους ἔχομεν:
α΄) $81-20=61$, β΄) $25+14=39$, γ΄) $(49+36):9=85:9$.

388. Θὰ εἶναι $(\lambda-2)^2+2(\lambda+3)=\mu$, ἤτοι $\lambda^2-2\lambda+10-\mu=0$ καὶ $\lambda=1\pm\sqrt{1-(10-\mu)}=1\pm\sqrt{\mu-9}$. Ὅθεν $\mu\geqslant 9$.

389. Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι $\rho_1:\rho_2=\lambda$, θὰ εἶναι $\rho_1=\lambda\rho_2$. Ἀλλ' εἶναι $\rho_1\rho_2=\gamma$ ἤτοι $\lambda\rho_2^2=\gamma$ καὶ $\rho_2^2=\gamma:\lambda$ (1) καὶ $\rho_1+\rho_2=-\beta$, ἤτοι $\lambda\rho_2+\rho_2=-\beta$, $\rho_2=-\beta:(\lambda+1)$ καὶ $\rho_2^2=\beta^2:(\lambda+1)^2$ (2). Ἐξισοῦντες ἤδη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν $\gamma:\lambda=\beta^2:(\lambda+1)^2$.

390. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\mu}{\nu}=\lambda$. Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $\gamma:\lambda=\frac{\beta^2}{\alpha}:(\lambda+1)^2$, $\gamma:\frac{\mu}{\nu}=\frac{\beta^2}{\alpha}:\frac{(\mu+\nu)^2}{\nu^2}$, ἤτοι $\alpha\gamma(\mu+\nu)^2=\beta^2\mu\nu$.

391. Εἶναι $\rho_1-\rho_2=\sqrt{\beta^2-4\gamma}$, ἤτοι $\sqrt{\beta^2-4\gamma}=4$, $\beta^2-4\gamma=16$ (1)
καὶ $\rho_1^3-\rho_2^3=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2)=4(\rho_1^2+\rho_2^2+\gamma)=$
$=4(\beta^2-2\gamma+\gamma)=4(\beta^2-\gamma)$, ἤτοι $4(\beta^2-\gamma)=208$ καὶ $\beta^2-\gamma=52$ ἢ $\beta^2=52+\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις (1) δίδει $\beta^2=4\gamma+16$, ἔχομεν $4\gamma+16=52+\gamma$ καὶ $\gamma=12$. Ὥστε $\beta^2=52+12=64$ καὶ $\beta=\pm 8$.

392. Εἶναι $\rho_1\rho_2=\frac{\nu}{\alpha-\beta}$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha-\beta}=-2(\alpha+\beta)$.

1) Ἐὰν $\rho_1=\rho_2$ ἔχομεν $\rho_1^2=\frac{\nu}{\alpha-\beta}$ καὶ $2\rho_1=-2(\alpha+\beta)$, ἤτοι $\rho_1=-(\alpha+\beta)$ καὶ $\rho_1^2=(\alpha+\beta)^2$. Ὅθεν $\nu:(\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2$ καὶ $\nu=(\alpha+\beta)^2.(\alpha-\beta)$. 2) Ἐὰν $\rho_1\rho_2=1$, θὰ εἶναι $\nu=\alpha-\beta$.

393. 1) Διὰ νὰ εἶναι αἱ ῥίζαι μιγαδικαί, πρέπει νὰ εἶναι $5^2-3\gamma<0$, ἤτοι $\gamma>25:3$ καὶ 2) Διὰ νὰ ἔχουν αὗται γινόμενον $-0{,}75$, πρέπει νὰ εἶναι $\gamma:3=-0{,}75$, ἤτοι $\gamma=-2{,}25$.

394. α΄) $\rho_1=\rho_2$. Τότε $\Delta=0$, ἤτοι $4^2-\gamma=0$ καὶ $\gamma=16$,
β΄) $\rho_1=3\rho_2$. Τότε $3\rho_2+\rho_2=8$, ἤτοι $\rho_2=2$ καὶ $3\rho_2.\rho_2=\gamma$ ἤτοι $\gamma=12$.
γ΄) $\rho_1.\rho_2=\pm 1$. Τότε $\gamma=\pm 1$.

395. α΄) $3\rho_1=4\rho_2+3$. Τότε $\frac{4\rho_2+3}{3}+\rho_2=8$, ἤτοι $\rho_2=3$ καὶ $\frac{4\rho_2+3}{3}\cdot\rho_2=\gamma$, ἤτοι $\gamma=15$.

β') $\rho_1^2+\rho_2^2=40$. Τότε $\pi^2-2k=40$, ἤτοι $64-2\gamma=40$ καὶ $\gamma=12$.

396. α') $\Delta=4^2-12>0$. ρ. πραγμ. Ἐπειδὴ δὲ $\rho_1.\rho_2=12>0$, αἱ ρ. ὁμόσημοι καὶ θετικαὶ διότι $\rho_1+\rho_2=8>0$.

β') α καὶ γ ἑτερόσημα. Ρ. πραγ. $\rho_1\rho_2=-50:6<0$. Ρ. ἑτερόσημοι. $\rho_1+\rho_2=15:6>0$. Μεγαλυτέρα ἀπολύτως ἡ θετική. γ') Ὡς ἡ β'.

397. α') $7\chi^2-5\chi=0$. $\rho_1\rho_2=0$ καὶ $\rho_1+\rho_2=5:7$. Ὥστε ἡ μία ρ. 0 καὶ ἡ ἄλλη θετική.

β') καὶ γ'), ὡς ἡ β'.) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

δ' Ὡς ἡ α') τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

ε') $\Delta=3^2-4.9=9-36<0$. ρ. μιγαδικαί. Ὥστε περὶ προσήμου τῶν ριζῶν δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος.

στ') Ὡς ἡ β') τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Περὶ τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$

Ἀσκήσεις. - *398.* α') $\chi=(9\pm\sqrt{9^2-4.18}):2=(9\pm3):2$, $\rho_1=6$ καὶ $\rho_2=3$. Ὅθεν $\chi^2-9\chi+18=(\chi-6)(\chi-3)$. β') $\chi^2+4\chi+3=(\chi+1)(\chi+3)$.

γ') $2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)(\chi+2)=2\left(\frac{2\chi-1}{2}\right)(\chi+2)=(2\chi-1)(\chi+2)$.

δ') $2(\chi+3)^2$ ε') $(\chi+1)(\chi-5)$ στ') $(\chi-2)(\chi-3)$.

399. α') $\frac{(\chi-2)(\chi-3)}{(\chi-2)(\chi-5)}=\frac{\chi-3}{\chi-5}$. β') $\frac{(\chi+1)(\chi+3)}{(\chi+1)(\chi-5)}=\frac{\chi+3}{\chi-5}$

γ') $\frac{(\chi+3)(\chi+7)}{2(\chi+3)^2}=\frac{\chi+7}{2(\chi+3)}$.

400. α') $(\chi-3)\cdot\left(\chi-\frac{1}{2}\right)=0$, $(\chi-3)(2\chi-1)=0$, $2\chi^2-7\chi+3=0$ ἤ καὶ ἄλλως. Θὰ σχηματίσωμεν ἐξίσωσιν $2^{ου}$ βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ὁ ὅρος χ^2 θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὴν μονάδα, ὁ ὅρος χ θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν μὲ ἀντίθετον σημεῖον καὶ σταθερὸν ὅρον τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν. Οὕτως ἐπειδὴ $\rho_1+\rho_2=3{,}5$ καὶ $\rho_1\cdot\rho_2=1{,}5$, θὰ ἔχωμεν $\chi^2-3.5\chi+1{,}5=0$, ἤτοι $2\chi^2-7\chi+3=0$.

β') $[\chi-(3+\sqrt{2})].[\chi-(3-\sqrt{2})]=0$, $[(\chi-3)-\sqrt{2}].[(\chi-3)+\sqrt{2}]=0$, $(\chi-3)^2-2=0$ καὶ τέλος $\chi^2-6\chi+7=0$,

ἢ ἐπειδὴ $\rho_1+\rho_2=6$ καὶ $\rho_1\cdot\rho_2=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7$, $\chi^2-6\chi+7=0$.

γ') Ἐπειδὴ $\rho_1+\rho_2=8$ καὶ $\rho_1.\rho_2=16-5=11$, ἔχομεν $\chi^2-8\chi+11=0$

δ') Ἐπειδὴ $\rho_1+\rho_2=i\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$ καὶ $\rho_1.\rho_2=-i^2.2=2$, ἔχομεν $\chi^2+2=0$.

ε') $\rho_1+\rho_2=\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ καὶ $\rho_1\rho_2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\beta^2=0$.

στ') $\rho_1+\rho_2=2\alpha$, $\rho_1.\rho_2=\alpha^2-\beta$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\beta=0$.

ζ') $\rho_1+\rho_2=2\alpha$, $\rho_1\rho_2=\alpha^2+\beta$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2+\beta=0$.

η΄) $\varrho_1+\varrho_2=2\alpha$, $\varrho_1\varrho_2=\alpha^2-\alpha$ καὶ $\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2-\alpha=0$.

401. α΄) $(2\chi-5)(\chi-15)-72\chi^2=27\chi(\chi-15)$ ἤ $97\chi^2-370\chi-75=0$. Ὅθεν $\varrho_1+\varrho_2=370:97$ καὶ $\varrho_1\varrho_2=-75:97$. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἐξίσωσις εἶναι ἡ $\chi^2-\left(\dfrac{370-75}{97}\right)\chi-\dfrac{370}{97}\cdot\dfrac{75}{97}=0$ ἢ $97^2\chi^2-295.97\chi-370.75=0$.

β΄) $\chi^2-2\sqrt{3}\chi+3=0$, $\varrho_1+\varrho_2=2\sqrt{3}$, $\varrho_1.\varrho_2=3$ καὶ $\chi^2-(2\sqrt{3}+3)\chi+6\sqrt{3}=0$.

γ΄) $\chi^2+\alpha\beta^2.\dfrac{(\chi-\alpha)}{\beta-\alpha}=2\alpha\beta\chi-2\alpha^2\beta^2$, $(\beta-\alpha)\chi^2+\alpha\beta^2\chi-\alpha^2\beta^2=$ $=2\alpha\beta(\beta-\alpha)\chi-2\alpha^2\beta^2(\beta-\alpha)$, $(\beta-\alpha)\chi^2+\alpha\beta(2\alpha-\beta)\chi+\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)=0$.

Οὕτως ἔχομεν $\varrho_1+\varrho_2=-\dfrac{\alpha\beta(2\alpha-\beta)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta}{\beta-\alpha}$ καὶ $\varrho_1\cdot\varrho_2=$ $=\dfrac{\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{\beta-\alpha}$. Ὅθεν ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-\left[\frac{\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta+\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{\beta-\alpha}\right]\chi+\frac{(\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta).\alpha^2\beta^2(2\beta-2\alpha-1)}{(\beta-\alpha)^2}=0.$$

402. Ἐπειδὴ $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=\dfrac{17-2.\sqrt{3}.\sqrt{5}}{3}$ καὶ $(\varrho_1\varrho_2^2)=$ $=(\varrho_1\varrho_2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{5}{3}$ ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$\chi^2-\dfrac{17-2\sqrt{15}}{3}\chi+\dfrac{5}{3}=0$, ἢ $3\chi^2-(17-2\sqrt{15})\chi+5=0$.

403. α) Ἔχομεν $2\chi^2-2\alpha\chi-\alpha^2=0$, καὶ (ἄσκ. 385, β΄)

$\varrho_1^3+\varrho_2^3=\dfrac{3.2.(-2\alpha)(-\alpha^2)-(-2\alpha)^3}{2^3}=\dfrac{12\alpha^3+8\alpha^3}{8}=\dfrac{5\alpha^3}{2}$ καὶ

$(\varrho_1^3.\varrho_2^3)=(\varrho_1\varrho_2)^3=\left(-\dfrac{\alpha^2}{2}\right)^3=-\dfrac{\alpha^6}{8}$, ἡ ζ. ἐξ. εἶναι

$\chi^2-\dfrac{5\alpha^3}{2}\chi-\dfrac{\alpha^6}{8}=0$ ἢ $8\chi^2-20\alpha^3-\alpha^6=0$.

β΄) Εἶναι $\varrho_1^3+\varrho_2^3=3.1.\alpha.[-\alpha^2\beta(\beta+1)]-\alpha^3=-\alpha^3(3\beta^2+3\beta+1)$ καὶ $(\varrho_1\cdot\varrho_2)^3=-\alpha^6\beta^3(\beta+1)^3$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ
$\chi^2+\alpha^3(3\beta^2+3\beta+1)\chi-\alpha^6\beta^3(\beta+1)^3=0$.

404. Ἐπειδὴ $\varrho_1+\varrho_2=14:7$ καὶ $\varrho_1=-5$, εἶναι $\varrho_2=49:7$, ἤτοι $\varrho_1\varrho_2=-245:7$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ

$\chi^2-\dfrac{14}{7}\chi-\dfrac{245}{7}=0$, ἤτοι ἡ $7\chi^2-14\chi-245=0$.

405. α΄) Εἶναι (ἄσκ. 385 καὶ 386) $\chi_1^2+\chi_2^2=(\beta^2-2\alpha\gamma):\alpha^2=\pi^2-2k$

καὶ $\chi_1^2\chi_2^2=\gamma^2:\alpha^2=k^2$. Ὅθεν $\alpha^2\chi^2-(\beta^2-2\alpha\gamma)\chi+\gamma^2=0$ καὶ $\chi^2-(\pi^2-2k)\chi+k^2=0$.

β′) Ἐπειδὴ $-\chi_1^2-\chi_2^2=-(\chi_1^2+\chi_2^2)$ καὶ $(-\chi_1^2).(-\chi_2^2)=\chi_1^2\chi_2^2$, ἔχομεν ὡς ἄνω $\alpha^2\chi^2+(\beta^2-2\alpha\gamma)\chi+\gamma^2=0$ ἢ $\chi^2+(\pi^2-2k)\chi+k^2=0$.

γ′) Εἶναι $\chi_1^2\chi_2+\chi_1\chi_2^2=\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)=\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\beta\gamma:\alpha^2=-k\pi$ καὶ $\chi_1^2\chi_2\cdot\chi_1\chi_2^2=\chi_1^3\cdot\chi_2^3=(\chi_1\chi_2)^3=\gamma^3:\alpha^3=k^3$.

Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ $\alpha^3\chi^2+\alpha\beta\gamma\chi+\gamma^3=0$ ἢ $\chi^2+k\pi\chi+k^3=0$.

δ′) $\chi_1+2\chi_2+2\chi_1+\chi_2=3(\chi_1+\chi_2)=-3\beta:\alpha=-3\pi$ καὶ $(\chi_1+2\chi_2)(2\chi_1+\chi_2)=2(\chi_1+\chi_2)+\chi_1\chi_2=2\beta^2:\alpha^2+\gamma:\alpha=(2\beta^2+\alpha\gamma):\alpha^2=$ $=2\pi^2+k$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι ἡ $\alpha\chi^2+3\alpha\beta\chi+(2\beta^2+\alpha\gamma)=0$ ἢ $\chi^2+3\pi\chi+(2\pi^2+k)=0$.

ε′) $\chi_1-2\chi_2+\chi_2-2\chi_1=-(\chi_1+\chi_2)=\beta:\alpha=\pi$ καὶ $(\chi_1-2\chi_2)(\chi_2-2\chi_1)=\chi_1\chi_2-2(\chi_1-\chi_2)^2=\gamma:\alpha-2(\beta^2-4\alpha\gamma):\alpha^2=(\alpha\gamma-2\beta^2+8\alpha\gamma):\alpha^2=$ $=(9\alpha\gamma-2\beta^3):\alpha^2=-(9k-2\pi^2)$. Ὅθεν ἡ ζ. ἐξ. εἶναι $\alpha^2\chi^2-\alpha\beta\chi+(9\alpha\gamma-2\beta^2)=0$ ἢ $\chi^2-\pi\chi+(9k-2\pi^2)=0$.

στ′) $\chi_1^2+\chi_2+\chi_1+\chi_2^2=(\chi_1+\chi_2)+(\chi_1^2)+\chi_2^2)=-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=$

$=\frac{-\beta^2-2\alpha\gamma-\alpha\beta}{\alpha^2}=\pi^2-2k-\pi$ καὶ $(\chi_1^2+\chi_2)(\chi_1+\chi_1^2)=(\chi_1^3+\chi_1^3)+$

$+\chi_1^2\chi_2^2+\chi_1\chi_2=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3}{\alpha^3}+\frac{\gamma^3}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\alpha\beta\gamma-\beta^3+\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma}{\alpha^3}=$

$=3k\pi-\pi^3+k^2+k$. Ὅθεν εἶναι

$$\alpha^3\chi^3-\alpha(\beta^2-2\alpha\gamma-\alpha\beta)\chi+(3\alpha\beta\gamma-\beta^3+\alpha\gamma^2+\alpha^2\gamma)=0 \text{ ἢ}$$
$$\chi^2-(\pi^2-2k-\pi)\chi+(3k\pi-\pi^3+k^2+k)=0.$$

ζ′) καὶ η′). Ἐδῶ προφανῶς ἐκ τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως ἡ μία εἶναι ἡ ζ′ καὶ ἡ ἄλλη ἡ η′. Ὅθεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $(\alpha+\gamma)(\chi_1^2+\chi_2^2)=(\alpha+\gamma).\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}=(1+k)(\pi^2-2k)$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $(\alpha\gamma)(\chi_1^4+\chi_2^4)+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\,\chi_1^2\chi_2^2+(\beta\gamma-$ $-\alpha\beta)\,\chi_1\chi_2(\chi_1^3-\chi_2^3)=\alpha\gamma[(\chi_1^2+\chi_1^2)-2\chi_1^2\chi_1^2]+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)(\chi_1\chi_2)^2+$

$+(\beta\gamma-\alpha\beta)\chi_1\chi_2(\chi_1+\chi_2)(\chi_1-\chi_2)=\alpha\gamma\left[\frac{(\beta^2-2\alpha\gamma)^2}{\alpha^4}-2.\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]+$

$+(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+(\beta\gamma-\alpha\beta).\frac{\gamma}{\alpha}.\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}=$

$k[(\pi^2-2k)-2k^2]+(1-\pi^2+k^2).k^2-(\pi k-\pi)k\pi\sqrt{\pi^2-4k}$. Γνωρίζοντες ἤδη τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν σχηματίζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν κατὰ τὰ γνωστά.

θ') Εἶναι $\frac{\chi_1}{\chi_2^3}+\frac{\chi_2}{\chi_1^3}=\frac{\chi_1^4+\chi_2^4}{(\chi_1\chi_2)^3}=\frac{(\chi_1^2+\chi_2^2)^2-2\chi_1^2\chi_2^2}{(\chi_1\chi_2)^3}=$

$$=\left[\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)^2-2.\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right]:\frac{\gamma^3}{\alpha^3}=\frac{(\beta^2-2\alpha\gamma^2)^2-2\alpha^2\gamma^2}{\alpha\gamma^3}=$$

$$=\frac{(\pi^2-2k)^2-2k^2}{k^3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi_1}{\chi_2^3}\cdot\frac{\chi_2}{\chi_1^3}=\frac{1}{\chi_1^2\chi_2^2}=\frac{\alpha^2}{\gamma^2}=\frac{1}{k^2}.$$

Γνωρίζοντες ἤδη τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν σχηματίζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν κατὰ τὰ γνωστά.

ι') Εἶναι $\frac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_2}+\frac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_1}=\frac{(\chi_1+\chi_2)^2}{2\chi_1\chi_2}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}:\frac{2\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{\pi^2}{2k}$

$$\text{καὶ} \left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2\chi_1}\right)\cdot\frac{(\chi_1+\chi_2)}{2\chi_2}=\frac{(\chi_1+\chi_2)^2}{4\chi_1\chi_2}=\frac{\beta^2}{4\alpha\gamma}=\frac{\pi^2}{4k}$$

Ὅθεν: $4\alpha\gamma\chi^2-2\beta^2\chi+\beta^2=0=4k\chi^2-2\pi^2\chi+k^2.$

406. α') Αὕτη γράφεται : $\alpha^2(\chi_1^2+\chi_2^2)+2\alpha\beta(\chi_1+\chi_2)+2\beta^2=$

$$=\alpha^2\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)-2\alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha}+2\beta^2=\beta^2-2\alpha\gamma.$$

β') Ἔχομεν $\beta^2(\chi_1\chi_2)^2+\beta\gamma(\chi_1^2+\chi_1^2)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^3}{\alpha^2}+\beta\gamma\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)$

$+\gamma^2=[\beta^2\gamma^2+\beta\gamma(\beta^2-2\alpha\gamma)+\alpha^2\gamma^2]:\alpha^2.$

γ') Ἔχομεν $\frac{1}{(\gamma\chi_1+\beta)^2}+\frac{1}{(\gamma\chi_2+\beta)^3}=\frac{(\gamma\chi_2+\beta)^2+(\gamma\chi_1+\beta)^2}{(\gamma\chi_1+\beta)^2.(\gamma\chi_2+\beta)^2}=$

$$=\frac{\gamma^2(\chi_1^2+\chi_2^2)+2\beta\gamma(\chi_1+\chi_2)+2\beta^2}{[\gamma^2\chi_1\chi_2+\beta\gamma(\chi_1+\chi_2)+\beta^2]^2}=$$

$$=\left\{\gamma^2\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)-2\beta\gamma.\frac{\beta}{\alpha}+2\beta^2\right\}:\left(\gamma^2.\frac{\gamma}{\alpha}-\beta\gamma.\frac{\beta}{\alpha}+\beta^2\right)^2=$$

$$=[\gamma^2(\beta^2-2\alpha\gamma)-2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\beta^2]:(\gamma^3-\beta^2\gamma+\alpha^2\beta)^2.$$

407. Εἶναι $\chi_1^3(\chi_1-\chi_2)+\chi_2(\chi_1-\chi_2)=(\chi_1-\chi_2)(\chi_1^2+\chi_2^2)=$

$$=\frac{\sqrt{12^2-4.5.1}}{5}\cdot\frac{12^2-2.5.1}{5^2}=\frac{\sqrt{144-20}\,(144-10)}{125}.$$

408. Εἶναι $-(\chi_1+\chi^2)(\chi_1-\chi^2):\chi_1\chi_2=-2\sqrt{4-144:36}=$

$=-2\sqrt{-140:36}=-2i\sqrt{35:9}.$

409. α') $2\chi^2-16\chi+24=2(\chi-2)(\chi-6).$

Θετ. διὰ $6<\chi<2$ καὶ ἀρν. διὰ $2<\chi<6.$

β') $=-2(\chi-2)(\chi-6)$. Ἀρν. διὰ $6<\chi<2$ καὶ θετ. διὰ $2<\chi<6.$

γ') $=2(\chi-4)(\chi-4)=2(\chi-4)^2$. Θ. διὰ πᾶσαν πραγ. τιμὴν τοῦ $\chi\neq4.$

$\delta') = 0{,}75\left[\chi - (4 + \frac{2\sqrt{33}}{3})\right]\cdot\left[\chi - 4 - \frac{2\sqrt{33}}{3})\right]$. Θετ. διὰ

$4 + \frac{2\sqrt{33}}{3} < \chi < 4 - \frac{2\sqrt{33}}{3}$ καὶ ἀρν. διὰ $4 - \frac{2\sqrt{33}}{3} < \chi < 4 + \frac{2\sqrt{33}}{3}$.

$\varepsilon') = \left(\chi - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\chi + \frac{\sqrt{5}+1}{5}\right)$. Θετ. διὰ $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \chi < -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

καὶ ἀρν. διὰ $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \chi < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\sigma\tau') = 2\left(\chi - \frac{3+\sqrt{15}}{2}\right)\left(\chi - \frac{3-\sqrt{15}}{2}\right)$. Θετ. διὰ $\frac{3+\sqrt{15}}{2} < \chi < \frac{3-\sqrt{15}}{2}$

καὶ ἀρν. διὰ $\frac{3-\sqrt{15}}{2} < \chi < \frac{3+\sqrt{15}}{2}$.

$\zeta') = \left(\chi - \frac{7+\sqrt{53}}{2}\right)\left(\chi - \frac{7-\sqrt{53}}{2}\right)$.

Θετ. διὰ $\frac{7+\sqrt{53}}{2} < \chi < \frac{7-\sqrt{53}}{2}$ κλπ.

410. α') $= -2(\chi+4)^2$. Ἀρν. διὰ πᾶσαν πραγμ. τιμὴν τοῦ $\chi \neq -4$.
β') $= 2[\chi-(4+2i)].[\chi-(4-2i)]$. Θετ. διὰ πᾶσαν πραγ. τιμὴν τοῦ χ.
γ') $= -2[\chi-(4+2i)].[\chi-(4-2i)]$. Ἀρν. διὰ πᾶσαν πραγ. τιμὴν τοῦ χ.

$\delta') = -1\left(\chi - \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)\left(\chi + \frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)$. Ἀρν. διὰ

$\frac{\sqrt{17}-3}{2} < \chi < -\frac{\sqrt{17}+3}{2}$ καὶ θετ. διὰ $-\frac{\sqrt{17}+3}{2} < \chi < \frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

411. α') Θέτομεν $\psi = \chi^2 + 3\chi - 4$. Ρίζαι πραγματικαὶ καὶ

1') Διὰ $\chi = 1$ εἶναι $\psi = 0$. Ὥστε τὸ 1 εἶναι ρίζα.

2') Διὰ $\chi = 7$, εἶναι $\psi = 66$, ὁμόσημον τοῦ α. Ὥστε ὁ 7 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἐπειδὴ δὲ $7 > -\frac{3}{2}$, ὁ 7 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

3') Διὰ $\chi = 5$, εἶναι $\psi = 36$ κλπ. ὡς ἀνωτέρω, διὰ $\chi = 7$.

4') Διὰ $\chi = -5$ εἶναι $\psi = 6$ » » » » $\chi = 7$.

5') Διὰ $\chi = -1$ εἶναι $\psi = -6$, ἑτερόσημον τοῦ α. Ὥστε ὁ -1 εἶναι ἐντὸς τῶν ριζῶν.

β') Θέτομεν $\psi = 2\chi^2 + 7\chi - 1$. Ρίζαι πραγματικαί, καὶ

1') Διὰ $\chi = 1$ εἶναι $\psi = 8$, ὁμόσημον τοῦ α. Ὥστε τὸ 1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἐπειδὴ δὲ $1 > -\frac{7}{4}$, τὸ 1 μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

2') Διὰ $\chi=7$, $\psi=146$ κλπ. ὡς ἄνω. 3') Διὰ $\chi=5$, $\psi=84$ κλπ. ὡς ἄνω. 4') Διὰ $\chi=-5$, $\psi=14$. Ὥστε ὁ -5 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ$<$τῆς μικροτέρας ρίζης διότι $-5<-7{:}4$.

5') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-6$. Ὥστε ὁ -1 ἐντὸς τῶν ριζῶν.

412. α') $\psi=2\chi^2-6\chi+1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-19/4$. Τὸ $\frac{3}{4}$ μεταξὺ τῶν ριζῶν 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=9$. Τὸ -1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $<$ τῆς μικροτέρας ρίζης ἐπειδὴ $-1<\frac{3}{2}$. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}5$. Τὸ 0,5 ἐκτὸς τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=2{,}625$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $<$ τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $-0{,}25<\frac{3}{2}$.

β') $\psi=-\chi^2+\chi-4$. Ρίζαι μιγάδες. Σύγκρισις μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μιγάδων δὲν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ.

γ') $\psi=7\chi^2-4\chi-1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-1/16$. Τὸ 3/4 ἐντὸς τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=10$. Τό -1 μικρότερον τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $10<2/7$. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}25$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=0{,}4375$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $<$ τῆς μικροτέρας ρίζης διότι $0{,}4375<2/7$.

δ') $\psi=\frac{\chi^2}{2}-\frac{\chi}{3}-1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-31/32$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-1/6$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-25/24$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν 4') Διὰ $\chi=-0{,}25=-1/4$, $\psi=-85/96$. Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

ε') $\psi=3\chi^2+6\chi-4$. Ρίζαι πραγματικαί. 1) Διὰ $\chi={}^3/_4$, $\psi={}^{35}/_{16}$. Τὸ ${}^3/_4$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $>$ τῆς μεγαλυτέρας ρίζης, διότι ${}^3/_4>-1$. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-7$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi=0{,}5={}^1/_2$, $\psi=-0{,}25$. Τὸ 0,5 ἐντὸς τῶν ριζῶν. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25=-{}^1/_4$, $\psi=-{}^{85}/_{16}$. Τὸ $-0{,}25$ ἐντὸς τῶν ριζῶν.

στ') $\psi=-\chi^2-7\chi-2$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi={}^3/_4$, $\psi=-125/16$, ὁμόσημον τοῦ $\alpha=-1$. Τὸ 3/4 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $>$τῆς μεγαλυτέρας ρίζης, διότι $3/4>-7/2$. 2') Διὰ $\chi=-1$, $\psi=4$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3') Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-5{,}75$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ $>$ τῆς μεγαλυτέρας ρίζης διότι $0{,}5>-7/2$. 4') Διὰ $\chi=-0{,}25=-1/4$, $\psi=-5/16$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $>$ τῆς μεγαλυτέρας ρίζης διότι $-1/4>-5/16$.

ζ') $\psi=\frac{\chi^2}{4}-\frac{\chi}{2}-1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1') Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=$

$=-79/64$, ἑτερόσημον τοῦ $\alpha=1/4$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2′) Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-1/4$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3′) Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-19/16$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4′) Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=-55/64$· Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

η′) $\psi=4\chi^2-7\chi+1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1′) Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-2$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2′) Διὰ $\chi=-1$, $\psi=12$. Τὸ -1 ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $<$ τῆς μικροτέρας ρίζης, διότι $-1<7/8$. 3′) Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-1{,}5$. Τὸ $-0{,}5$ μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4′) Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=3$. Τὸ $-0{,}25$ ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ $<$ τῆς μικροτέρας ρίζης διότι $-0{,}25<7/8$.

θ′) $\psi=0{,}5\chi^2+0{,}6\chi-1$. Ρίζαι πραγματικαί. 1′) Διὰ $\chi=3/4$, $\psi=-43/160$. Τὸ 3/4 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 2′) Διὰ $\chi=-1$, $\psi=-1{,}1$. Τὸ -1 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 3′) Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=-0{,}575$. Τὸ 0,5 μεταξὺ τῶν ριζῶν. 4′) Διὰ $\chi=-0{,}25$, $\psi=-1{,}11875$. Τὸ $-0{,}25$ μεταξὺ τῶν ριζῶν.

413. α′) Διὰ $\chi=0$, $\psi=3$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=-1$. Ὥστε ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}5$, $\psi=0{,}75$. Ὥστε ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,5 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}6$, $\psi=0{,}36$ καὶ $\chi=0{,}7$, $\psi=-0{,}01$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξυ 0,6 καὶ 0,7. Ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 4,3 καὶ 4,4.

β′) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,4 καὶ 0,5 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ 1,5 καὶ 1,6.

γ′) Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 1,3 καὶ 1,4 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ $-2{,}9$ καὶ $-2{,}8$.

δ′) Διὰ $\chi=0$, $\psi=-1$ καὶ διὰ $\chi=1$, $\psi=2$. Ὥστε μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1. Διὰ $\chi=0{,}5=1/2$, $\psi=7/8$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 0,5. Διὰ $\chi=0{,}25=1/4$, $\psi=5/64$. Ὥστε ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 0,25. Διὰ $\chi=0{,}2$, $\psi=-0{,}112$. Ὅθεν ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 0,20 καὶ 0,25. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὡς 3ου βαθμοῦ ἔχει τρεῖς ρίζας. Αἱ ἄλλαι ὅμως δύο ρίζαι αὐτῆς εἶναι φανταστικαί.

ε′) Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,6 καὶ 0,7 καὶ ἡ ἄλλη μεταξὺ $-3{,}7$ καὶ $-3{,}6$.

στ′) Ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0,5 καὶ 1 καὶ αἱ ἄλλαι δύο εἶναι φανταστικαί.

ζ′) Διὰ $\chi=1$, $\psi=-1$ καὶ διὰ $\chi=2$, $\psi=5$. Ὥστε μία τῶν ριζῶν περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 2. Διὰ $\chi=1{,}5=3/2$, $\psi=15/16$. Ὥστε ἡ ρίζα αὕτη περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ 1,5 κλπ.

η′) Διὰ $\chi=-1$, $\psi=0$. Ὥστε ἡ -1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως καὶ ἑπομένως (§ 78) τὸ πολυώνυμον τοῦ αου μέλους εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi+1$ καὶ δίδει πηλίκον $\chi^3-\chi^2-2\chi+1=\varphi$. Τοῦτο δὲ διὰ $\chi=0$, δίδει $\varphi=1$ καὶ διὰ $\chi=1$, δίδει $\varphi=-1$. Ὥστε ἡ μία τῶν ριζῶν περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 1 κλπ.

'Ασκήσεις.—*414.* α') $\psi=(\chi-1)(\chi+4)$. 'Επειδὴ δὲ $\alpha=1>0$, θὰ εἶναι $\psi>0$ διὰ $1<\chi<-4$.

β') $\psi=\left(\chi-\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}\right)\left(\chi+\dfrac{\sqrt{33}+3}{2}\right)$. Ὅθεν $\psi>0$, ὅταν: $\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}<\chi<-\dfrac{\sqrt{33}+3}{2}$.

γ') Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $2\chi^2-3\chi+8<0$. 'Αλλὰ τὸ τριώνυμον τοῦ α^{ου} μέλους ἔχει ῥίζας μιγάδας. 'Επειδὴ δὲ $\alpha=2>0$, εἶναι τοῦτο θετικὸν διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἀδύνατος.

415. α') 'Επειδὴ $\psi=\chi^2-12\chi+32=(\chi-4)(\chi-8)$, ἡ ἀνισότης $\psi>0$, ἀληθεύει διὰ $8<\chi<4$ καὶ ἐπειδὴ $\psi'=\chi^2-13\chi+22=(\chi-2)(\chi-11)$ ἡ $\psi'<0$ ἀληθεύει διὰ $2<\chi<11$. Ἑπομένως αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $2<\chi<4$ καὶ διὰ $8<\chi<11$.

β') $\psi=\chi^2-3\chi-2=\left(\chi-\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(\chi-\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. Ὥστε ἡ $\psi>0$ ἀληθεύει διὰ $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}<\chi<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, καὶ ἐπειδὴ

$\psi'=4\chi^2+5\chi+1=4(\chi+1)\left(\chi+\dfrac{1}{4}\right)$ ἡ $\psi'<0$ ἀληθεύει διὰ $-1<\chi<-1/4$.

Ὥστε αἱ δύο ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ $-1<\chi<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

416. α') Ἔχομεν $\dfrac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)}-1>0$, ἤτοι $\dfrac{2(2\chi-5)}{(\chi-3)(\chi-4)}>0$. 'Αλλ' ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἔχομεν $\psi=2(2\chi-5)(\chi-3)(\chi-4)>0$. Εἶναι δὲ $\psi>0$ διὰ $\chi>4$, διότι τότε καὶ οἱ τρεῖς παράγοντες οἱ περιέχοντες τὸ χ εἶναι θετικοί, ἢ $5/2<\chi<3$, διότι τότε οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, καὶ $2\chi-5>0$. Ἑπομένως $\psi>0$.

2) 'Εκ τῆς δοθείσης ἀνισότητος προκύπτει ἡ

$(\chi^2-3\chi+2)(\chi^2+3\chi-2)>0$, ἤτοι ἡ

$$(\chi-1)(\chi-2)\left(\chi-\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)\left(\chi+\frac{\sqrt{17}+3}{2}\right)>0, \qquad (\iota)$$

διότι αἱ ῥίζαι τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι 1, 2 καὶ αἱ τοῦ παρονομαστοῦ $\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}$ καὶ $-\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$.

'Αλλ' ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν ῥιζῶν μεγαλυτέρα εἶναι ἡ 2 καὶ μικροτέρα ἢ $-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$. Ὥστε διὰ $\chi>0$ καὶ διὰ $\chi<-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$, τὸ γινόμενον τῶν τεσσάρων παραγόντων τοῦ $\alpha^{ου}$ μέλους τῆς ἀνισότητος (ι) εἶναι θετικόν, ἤτοι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ χ, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Ἀλλ' αὕτη ἐπαληθεύεται καὶ διὰ $\frac{\sqrt{17}-3}{2}<\chi<1$, διότι οὕτως οἱ δύο πρῶτοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ οἱ δύο δεύτεροι θετικοί. γ') Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\frac{-15\chi^2+48\chi+7}{(3-\chi)(5\chi+1)}>0$ ἢ μὲ τὴν $(15\chi^2-48\chi-7)(\chi-3)(5\chi+1)>0$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι τοῦ 1ου παράγοντος εἶναι $\frac{24\pm\sqrt{681}}{15}$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi<-1/5$ καὶ διὰ $\frac{24-\sqrt{681}}{15}<\chi<3$.

417. α') Διὰ $\chi>\gamma$ ἢ $\alpha<\chi<\beta$. β') Διὰ $\chi>\delta$ ἢ $\chi<\alpha$ ἢ $\beta<\chi<\gamma$.

418. α')$=2\chi(2\chi^2-5\chi+9)<0$. Ἀληθεύει διὰ $\chi<0$, διότι αἱ ρίζαι τοῦ $2\chi^2-5\chi+9$ εἶναι μιγάδες καὶ ἑπομένως τοῦτο εἶναι πάντοτε θετικὸν (ἐπειδὴ $\alpha=2>0$).

β') $\chi(3\chi^2-5\chi+2)>0$, ἤτοι $\chi(\chi-1)(3\chi-2)>0$. Ὅθεν $\chi>1$ ἢ $0<\chi<2/3$.

γ') $\chi(\chi^2-\chi+4)>0$. Ὅθεν $\chi>0$, διότι αἱ ρίζαι τοῦ $\chi^2-\chi+4$ εἶναι μιγάδες.

419. Διὰ ρίζας πραγματικὰς πρέπει νὰ εἶναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ καὶ διὰ ρίζας μιγάδας πρέπει νὰ εἶναι $\Delta<0$. Ἀλλὰ $\Delta=(\mu-1)^2-4\mu(2\mu-8)=-7\mu^2+30\mu+1$· ἔχει δὲ τὸ τριώνυμον τοῦτο ρίζας $(15\pm\sqrt{232}):7$. Ὥστε διὰ ρίζας πραγματικὰς θὰ ἔχωμεν:

$(15-\sqrt{232}):7<\mu<(15+\sqrt{232}):7$ καὶ μιγάδας διὰ

$(15+\sqrt{232}):7<\mu<(15-\sqrt{232}):7$ (διότι $\alpha=-7$).

420. Ἔχομεν $\chi^2+(2\lambda+1)\chi-19>0$ καὶ $\alpha=1>0$. Συμβαίνει ὅθεν τὸ ζητούμενον ὅταν τὸ τριώνυμον τοῦ πρώτου μέλους ἔχει ρίζας μιγάδας, ἤτοι ὅταν $(2\lambda+1)^2+4.19<0$. Ἀλλὰ τὸ $(2\lambda+1)^2+76$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ. Ὥστε τὸ ζητούμενον εἶναι ἀδύνατον.

421. α') Ἐπειδὴ $\alpha=-1<0$, ἔχομεν μέγιστον, ὅταν $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{2(-1)}=2$ καὶ τοῦτο εἶναι $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}=-\frac{16-4(-1).3}{4.(-1)}=7$. β') Ἐπειδὴ $\alpha=19>0$, ἔχομεν ἐλάχιστον, ὅταν $\chi=7:28$ καὶ τοῦτο εἶναι $-(49-228):76=179:76$.

γ') Ἐλάχιστον τὸ $-(49+52):4=-101:4$, ὅταν $\chi=7:2$.

15
$-9+24$

δ') Ἐλάχιστον τὸ $-(1+420):60$, ὅταν $\chi=-1:30$.
ε') Μέγιστον τὸ $-(9-24):-4=-15:4$, ὅταν $\chi=3:2$.
στ') Ἐλάχιστον τὸ $-[0{,}25^2+4.9{,}5.2]:38=-76{,}0625:38$, ὅταν $\chi=0{,}25:19=1:76$.

Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καὶ $\psi=\dfrac{\alpha\chi+\beta}{\gamma\chi+\delta}$

Ἀσκήσεις. — *422.* α') Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Γίνεται δὲ τοῦτο $\psi=-3$ διὰ $\chi=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=1>0$, τοῦτο ἔχει ἐλάχιστον $-13/4$, ὅταν $\chi=1:2$. Ὥστε ἡ παριστάνουσα τὸ ψ καμπύλη εἶναι παραβολὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},0\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2},0\right)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0,-3)$.

β') Ἐδῶ εἶναι $\varrho_1=(7+\sqrt{13}):6$, $\varrho_2=(7-\sqrt{13}):6$ καὶ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=3$. Ἔχει δὲ τὸ ψ ἐλάχιστον τὸ $-13:12$ ὅταν $\chi=7:6$. Ὥστε ἡ καμπύλη εἶναι παραβολὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{6},0\right)$, $\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{6},0\right)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0,3)$.

γ') Εἶναι $\varrho_1=0$, $\varrho_2=-8$, $\psi=0$ διὰ $\chi=0$ καὶ ἐλάχιστον $-(\beta^2-4\alpha\gamma):4\alpha=-(8^2):4=-16$, ὅταν $\chi=-\beta:2\alpha=-8:2=-4$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν εἶναι παραβολὴ τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα $(0,0)$, $(-8,0)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$. Ὥστε ἡ καμπύλη αὕτη διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

δ') Τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου μέλους ἔχει ῥίζας μιγάδας. Εἶναι δὲ $\psi=-1$, ὅταν $\chi=0$ καὶ μέγιστον $-(\beta^2-4\alpha\gamma):4\alpha=$

$$=-\left(\frac{4}{25}-4\cdot\frac{3}{4}\cdot1\right):4\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{71}{25}:-3=-\frac{71}{75},\quad \text{ὅταν}$$

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2}{5}:-\frac{3}{2}=\frac{4}{15}\quad \text{κλπ. ὡς ἄνω.}$$

423. Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\chi^2$ καὶ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ^2 διὰ τοῦ ψ, ἔχομεν τὸ σύστημα $\psi=\chi^2$, $\psi-7\chi+11=0$. Ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\psi=\chi^2$, παριστᾷ παραβολὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων μὲ τοὺς κλάδους πρὸς τὰ ἄνω καὶ συμμετρικὴν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ διότι διὰ $\chi=0, \pm1, \pm2, \pm3$ κλπ. εἶναι $\psi=0,1,4,9$ κλπ. Ἡ δευτέρα $\psi-7\chi+11=0$ παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον (7/11,0) καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,—11). Αἱ δὲ συντεταγμέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς ὡς ἄνω παραβολῆς καὶ εὐθείας ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν αὐτῶν σημείων εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, τὰς ὁποίας οὕτως εὑρίσκομεν γραφικῶς, ἤτοι λύομεν γραφικῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

424. Παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα $\sqrt{25}=5$.

425. Ἡ $\psi=\chi^2$ εἴδομεν προηγουμένως (ἄσκ. 423) τί παραβολὴν παριστάνει. Ἡ δὲ $\chi=\psi^2$, διὰ $\psi=0,\pm1,\pm2,\pm3$ κλπ. δίδει $\chi=0,1,4,9$ κλπ. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ παραβολὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, μὲ τοὺς κλάδους πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ συμμετρικὴν πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ. Ὡς δὲ βλέπομεν εἰς τὰς τιμὰς χ καὶ ψ (ἄσκ. 423 καὶ ἀνωτέρω) αἱ παραβολαὶ αὗται ἔχουν κοινὰ μόνον τὰ σημεῖα (0,0), (1,1), ἤτοι αὗται ἔχουν μόνον μίαν κοινὴν χορδήν.

426. Διὰ $\chi=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$ κλπ. εἶναι

$$\frac{\chi^2}{8}=\ \psi=0,\ \frac{1}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{9}{8}$$

καὶ διὰ $\psi=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$ εἶναι

$$-\psi^2=\chi=0,\ -1,\ -4,\ -9 \text{ κλπ.}$$

Ὥστε αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις παριστάνουν παραβολὰς αἱ ὁποῖαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν τὸ (0,0), ἤτοι τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

427. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ παραβολαὶ τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, καὶ ὅτι ἡ μία περιέχεται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

428. Εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ κύκλου, μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων μὲ ἀκτῖνα $\sqrt{100}=10$ καὶ τῆς εὐθείας $\chi+\psi=5$.

429. α΄) Αὕτη παριστᾷ παραβολήν, τῆς ὁποίας οἱ κλάδοι διέρχονται διὰ τῶν σημείων :

$$\chi=1,\ 2,\ 3.... \qquad \chi=\ -1,\ -2,\ -3....$$
$$\psi=-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}.... \quad \text{καὶ} \quad \psi=\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}....$$

β΄) Ὁμοίως οἱ κλάδοι τῆς παραβολῆς $\psi=2/\chi$ διέρχονται διὰ τῶν σημείων :

$$\begin{matrix}\chi= & 1, & 2, & 3.... \\ \psi= & 2, & 1, & 2/3....\end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix}\chi= & -1, & -2, & -3.... \\ \psi= & -2, & -1, & -2/3....\end{matrix}$$

Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὰ σημεῖα διὰ τῶν ὁποίων διέρχονται οἱ κλάδοι τῶν ὑπερβολῶν γ΄), δ΄), ε΄) καὶ στ΄).

430. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

431. α') Εἶναι (§ 196) $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=1$. Ὅθεν:

$$\frac{\alpha}{\gamma}=1,\quad \frac{\delta}{\gamma}=\frac{1}{2},\quad \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}=\frac{-2-2}{4}=-1.$$ Ὥστε $\chi_1\psi_1=-1$.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη πρὸς τοὺς νέους ἄξονας $\chi_1 O \psi_1$ παριστᾷ παραβολὴν (ἄσκ. 429, α'). Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμεθα καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων διδομένων συναρτήσεων, παρατηροῦντες ὅτι ἡ συνάρτησις στ')

$\chi\psi+2\chi-3\psi+1=0$, γράφεται $\psi(\chi-3)=-2\chi-1$, ἤτοι $\psi=\dfrac{-2\chi-1}{\chi-3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς δευτεροβαθμίους

Ἀσκήσεις. — *432.* α') $9\chi^4-10\chi^2+1=0$, $\chi^2=\dfrac{5\pm\sqrt{25-9}}{9}=\dfrac{5\pm4}{9}=$

$=1$ καὶ $1/9$ καὶ $\chi=\pm1$ καὶ $\pm1/3$.

β') $\chi^4-26\chi^2+25=0$, $\chi^2=13\pm\sqrt{169-25}=13\pm12=25$ καὶ 1. Ὅθεν $\chi=\pm5$ καὶ ±1.

γ') $10\chi^4-\chi^2-21=0$, $\chi^2=(1\pm\sqrt{1+840}):20=(1\pm29):20=3/2$ καὶ $-7/5$. Ὅθεν $\chi=\pm\sqrt{3/2}$ καὶ $\chi=\pm i\sqrt{7/5}$.

δ') $\chi^4-6\chi^2-7=0$, $\chi^2=3\pm\sqrt{9+7}=7$ καὶ -1. Ὅθεν $\chi=\pm7$ καὶ $\pm i$.

ε') $\chi^2+\dfrac{9}{\chi^2}=6{,}25$, $\chi^4-6{,}25\chi^2+9=0$, $4\chi^4-25\chi^2+36=0$, $\chi^2=$

$(25\pm\sqrt{625-576}):8=(25\pm7):8=4$ καὶ $9/4$. Ὅθεν $\chi=\pm2$ καὶ $\pm3/2$.

στ') $9+\dfrac{1}{\chi^4}-\dfrac{10}{\chi^2}=0$, $9\chi^4-10\chi^2+1=0$, $\chi^2=(5\pm\sqrt{25-9}):9=$

$=(5\pm4):9=1$ καὶ $1/9$. Ὅθεν $\chi=\pm1$ καὶ $\pm1/3$.

ψ') $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{\chi}{\chi^2+2}=\dfrac{\chi}{2}$, $2(\chi^2+2)+2\chi^2=\chi^2(\chi^2+2)$, $\chi^4-2\chi^2-4=0$,

$\chi^2=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{5}}$.

η') $\chi^2(\chi^2-4)=20$, $\chi^4-4\chi^2-20=0$, $\chi^2=2\pm\sqrt{4+20}=2\pm2\sqrt{6}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{2\pm2\sqrt{6}}$.

ϑ') $2(\chi^2+1)(\chi^2+2)-5(\chi^2-1)(\chi^2-2)-30=0$, $2(\chi^4+3\chi^2+2)-$ $-5(\chi^4-3\chi^2+2)-30=0$, $\chi^4-7\chi^2+12=0$, $\chi^2=(7\pm1):2=4$ καὶ 3. Ὅθεν $\chi=\pm2$ καὶ $\pm\sqrt{3}$.

433. α') $\chi^2=\dfrac{(\alpha^2\beta^2+1)\pm\sqrt{(\alpha^2\beta^2+1)^2-4\alpha^2\beta^2)}}{2\alpha}=$

$= \frac{(\alpha^2\beta^2+1) \pm (\alpha^2\beta^2-1)}{2\alpha} = \alpha\beta^2$, καὶ $\frac{1}{\alpha}$. Ὅθεν $\chi = \pm \beta\sqrt{\alpha}$ καὶ $\pm 1/\sqrt{\alpha}$.

β') $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2-(\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2)=0$, ἢ $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=0$, $\chi^2=(\alpha^2+\beta^2) \pm \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2}$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται $(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2)= 2\alpha^2.2\beta^2 = 4\alpha^2\beta^2$. Ὅθεν: $\chi^2 = \alpha^2+\beta^2 \pm 2\alpha\beta = (\alpha \pm \beta)^2$ καὶ $\chi=\pm(\alpha+\beta)$ καὶ $\pm(\alpha-\beta)$.

γ') $4\chi^4-17\gamma^3\chi^2+4\gamma^6=0$, $\chi^2=(17\gamma^3 \pm \sqrt{289\gamma^6-64\gamma^6}) : 8 =$ $= (17\gamma^3 \pm 15\gamma^3) : 8 = 4\gamma^3$ καὶ $\gamma^3/_4$. Ὅθεν $\chi = \pm 2\gamma\sqrt{\gamma}$ καὶ $\pm \gamma\sqrt{\gamma}/2$.

δ') $\chi^4-2(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+(\alpha^4+\beta^4) = 0$, $\chi^2 = (\alpha^2+\beta^2) \pm$ $\pm \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^2 - (\alpha^4+\beta^4)} = (\alpha^2+\beta^2) \pm \alpha\beta\sqrt{2}$. Ὅθεν $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2 \pm \alpha\beta\sqrt{2}}$.

434. α') $\alpha^2 \pm \frac{\alpha^2\beta^2}{\chi^2} = \beta^2+\chi^2$, $\chi^4-(\alpha^2-\beta^2)\chi^2 \mp \alpha^2\beta^2 = 0$

$\chi^2= (\alpha^2-\beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2 \pm 4\alpha^2\beta^2}) : 2$. Ὥστε ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι 1) $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4+4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$, ὁπότε $\chi^2= [\alpha^2-\beta^2 \pm (\alpha^2+\beta^2)]:2=\alpha^2$ ἢ $-\beta^2$ καὶ $\chi = \pm\alpha$ ἢ $\pm\beta i$ καὶ 2) $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=$ $= \alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4$, ὁπότε $\chi = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2 \pm \sqrt{\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+\beta^4}} : \sqrt{2}$.

β') $\frac{1}{3\chi^4} - \frac{2\beta}{3\chi^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $3\beta^2\chi^4+2\alpha^2\beta\chi^2-\alpha^2=0$,

$\chi^2=(-\alpha^2\beta \pm \sqrt{\alpha^4\beta^2+3\alpha^2\beta^2}) : 3\beta^2$ καὶ $\chi =(\pm\sqrt{-\alpha^2 \pm \alpha\sqrt{\alpha^2+3}}) : \sqrt{3}\beta$.

γ') $\frac{59\chi^2}{\alpha^2} - \frac{2\chi^4}{\alpha^4} = 225$, $2\chi^4-59\alpha^2\chi^2+225\alpha^4 = 0$,

$\chi^2=(59\alpha^2 \pm \sqrt{59^2\alpha^4-1800\alpha^4}) : 4=(59\alpha^2 \pm 41\alpha^2) : 4=25\alpha^2$ καὶ $9\alpha^2/2$. Ὅθεν $\chi=\pm 5\alpha$ καὶ $\pm 3\alpha/\sqrt{2}$.

δ') $\chi^2 = (\mu^2\nu^2+\rho^2) \pm \sqrt{(\mu^2\nu^2+\rho^2)^2-(\mu^2\nu^2-\rho^2)^2}$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γράφεται

$(\mu^2\nu^2+\rho^2+\mu^2\nu^2-\rho^2)(\mu^2\nu^2+\rho^2-\mu^2\nu^2+\rho^2)=2\mu^2\nu^2.2\rho^2= 4\mu^2\nu^2\rho^2$. Ὅθεν: $\chi^2= \mu^2\nu^2+\rho^2 \pm 2\mu\nu\rho=(\mu\nu\pm\rho)^2$ καὶ $\chi=\pm(\mu\nu+\rho)$ καὶ $\pm(\mu\nu-\rho)$.

ε) $\chi^2=[\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma)\pm\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha+\beta\gamma)^2 - 4(\alpha\beta\gamma)^3}] : 2$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζον ποσότης γράφεται: $\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta\gamma-4\alpha\beta\gamma)=\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha-\beta\gamma)^2$. Ὅθεν $\chi^2=[\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma) \pm \alpha\beta\gamma(\alpha-\beta\gamma)] : 2 = \alpha^2\beta\gamma$ ἢ $\alpha\beta^2\gamma^2$ καὶ διὰ τοῦτο $\chi=\pm\alpha\sqrt{\beta\gamma}$ ἢ $\pm\beta\gamma\sqrt{\alpha}$.

435. α') $\chi^2=(5\pm\sqrt{25-16}) : 4 = 2$ ἢ $1/2$. Ὅθεν $4\chi^4-10\chi^2+4 =$ $= 4(\chi^2-2)\left(\chi^2 - \frac{1}{2}\right)= 4(\chi - \sqrt{2})(\chi + \sqrt{2})\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

β') $7\chi^4-35\chi^2+28=7(\chi^4-5\chi^2+4)=7(\chi^2-4)(\chi^2-1)=$ $=7(\chi-2)(\chi+2)(\chi-1)(\chi+1)$.

γ') $\psi^2=[(\alpha^4+\beta^4)\pm\sqrt{(\alpha^4+\beta^4)^2-4\alpha^4\beta^4}]:2\alpha^2\beta^2=[(\alpha^4+\beta^4)\pm$ $\pm(\alpha^4-\beta^4)]:2\alpha^2\beta^2=\alpha^2/\beta^2$ ἢ β^2/α^2 καὶ $\psi=\pm\dfrac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\pm\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ὅθεν τὸ δοθὲν τριώνυμον ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον:

$$\alpha^2\beta^2\left(\psi-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\psi+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(\psi-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\psi+\frac{\beta}{\alpha}\right)=$$
$$=(\beta\psi-\alpha)(\beta\psi+\alpha)(\alpha\psi-\beta)(\alpha\psi+\beta).$$

δ') $\psi^2=2\alpha\beta\pm\sqrt{4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}=2\alpha\beta\pm(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha+\beta)^2$ ἢ $-(\alpha-\beta)^2$ καὶ $\psi=\pm(\alpha+\beta)$ ἢ $\pm i(\alpha-\beta)$. Κατόπιν τούτων τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά.

ε') $\psi^2=[-\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)\pm\sqrt{\lambda^4(\alpha^2-\beta^2)^2+4\lambda^4\alpha^2\beta^2}]:2\lambda^4$. Ἀλλ' ἡ ὑπόρριζος ποσότης γίνεται $\lambda^4[(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]=\lambda^4.(\alpha^2+\beta^2)^2$. Ὅθεν: $\psi^2=[-\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)\pm\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)]:2\lambda^4=\beta^2/\lambda^2$ ἢ $-\alpha^2/\lambda^2$ καὶ $\psi=$ $=\pm\beta/\lambda$ ἢ $\pm\alpha i/\lambda$. κτλ.

στ') $\psi^2=[(\alpha+1)\alpha\pm\sqrt{(\alpha+1)^2.\alpha^2-4\alpha^3}]:2$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὑπόρριζος ποσότης γίνεται $\alpha^2[(\alpha+1)^2-4\alpha]=\alpha^2(\alpha-1)^2$, εἶναι $\psi^2=$ $=[(\alpha+1)\alpha\pm(\alpha-1)\alpha]=\alpha^2$ ἢ α καὶ $\psi=\pm\alpha$ ἢ $\pm\sqrt{\alpha}$ κλπ.

436. α') Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ $(\chi-3)(\chi+3)(\chi-1)(\chi+1)=$ $=(\chi^2-9)(\chi^2-1)=\chi^4-10\chi^2+9=0$.

β') Ὁμοίως ἔχομεν $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)(\chi-\sqrt{\alpha})(\chi+\sqrt{\alpha})=$ $(\chi^2-\alpha^2)(\chi^2-\alpha)==\chi^4-\alpha(\alpha+1)\chi^2+\alpha^3=0$.

γ') $[\chi^2-(0,5)^2].[\chi^2\ (4i)^2]=(\chi^2-0,25)(\chi^2+16)=\chi^4+15,75\chi^2-4=0$.

δ') $(\chi^2-9)(\chi^2+1)=\chi^4-8\chi^2-9=0$.

437. α') $(\chi^2+1)(\chi^2-4/9)=\chi^4+5/9\chi^2-4/9=9\chi^4+5\chi^2-4=0$.

β') $[\chi^2-(0,2)^2][\chi^2-(0,75)^2]=\chi^4-(0,04+0,5625)\chi^2+0,04.0,5625=$ $=\chi^4-0,6025\chi^2+0,0225=0$. γ') $\chi^4-5\alpha^2\chi^2+4\alpha^4=0$.

δ') $\chi^2-(\alpha-i)^2][\chi^2-(\alpha+i)^2]=\chi^4-[(\alpha+i)^2+(\alpha-i)^2]\chi^2+(\alpha-i)^2(\alpha+i)^2$ $=\chi^4-2(\alpha^2-1)\chi^2+(\alpha+1)^2=0$.

ε') $[\chi^2-(0,75)^2][\chi^2-(2i)^2]=(\chi^2-0,5625)(\chi^2+4)=\chi^4+3,4375\chi^2+2,25=0$.

στ') $(\chi^2-4)(\chi^2+9)=\chi^4+5\chi^2-36=0$.

438. (437). Εἶναι $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\varrho_1)(\chi-\varrho_2)(\chi-\varrho_3)(\chi-\varrho_4)$.

1') $\alpha>0$. Ἐὰν $\chi<\varrho_1$ ἢ $\chi>\varrho_2$, οἱ τέσσαρες παράγοντες μὲ τὸ χ ἔχουν γινόμενον θετικόν. Ὥστε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόσημον τοῦ α. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ ὅταν $\varrho_2<\chi<\varrho_3$, διότι οἱ δύο τελευταῖοι παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, ἐνῷ οἱ ἄλλοι εἶναι θετικοί. Ἐὰν $\varrho_1<\chi<\varrho_2$ ἢ $\varrho_3<\chi<\varrho_4$, τρεῖς τῶν παραγόντων εἶναι ἀρνητικοί. Ὅθεν τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀντίθετον τοῦ α. Ὅταν δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαὶ τὸ γινόμενον τῶν σχετικῶν μὲ αὐτὰς παραγόντων, ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι πάντοτε θετικόν. Ὥστε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου τῶν ἄλλων παραγόντων. Ἐὰν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ τριώνυμον εἶναι πάντοτε θετικόν.

2′) $\alpha<0$. Ἐὰν $\chi<\varrho_1$ ἢ $\chi>\varrho_2$ ἢ $\varrho_2<\chi<\varrho_3$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α καὶ ἀντίθετον αὐτοῦ, ἐὰν $\varrho_1<\chi<\varrho_2$ ἢ $\varrho_3<\chi<\varrho_4$. Ὅταν αἱ δύο ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου τῶν παραγόντων τῶν μὴ σχετικῶν μὲ αὐτάς. Ἐὰν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, τὸ τριώνυμον εἶναι ἀρνητικόν.

439. α′) Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι $\lambda\neq 2$, διότι ἐὰν $\lambda=2$ ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ κατήντα 2ου βαθμοῦ. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς διτετραγώνου. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi^2=\psi$, θὰ ἔχωμεν:

$$\psi=\frac{-2(\lambda+3)\pm\sqrt{4(\lambda+3)^2-(\lambda-2)(\lambda-1)}}{\lambda-2}.$$ Ἐὰν δὲ $\Delta=4(\lambda+3)^2-$ $-(\lambda-2)(\lambda-1)=0$, θὰ ἔχωμεν $\psi=\frac{-2(\lambda+3)}{\lambda-2}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\frac{-2(\lambda+3)}{\lambda-2}}$.

Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικόν, ἤτοι ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας διπλᾶς, ἐὰν $-2(\lambda+3)(\lambda-2)>0$, ἤτοι ἐὰν $-3<\lambda<2$ καὶ φανταστικὰς ἐὰν $2<\lambda<-3$.

Ἐὰν $\Delta=4(\lambda+3)^2-(\lambda-2)(\lambda-1)=3\lambda^2+27\lambda+34\neq 0$, θὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας αὐτοῦ αἱ ὁποῖαι εἶναι $\lambda=\frac{-27\pm\sqrt{321}}{6}$. Οὕτω τὸ τριώνυμον $3\lambda^2+27\lambda+34$, θὰ εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι ἡ δευτεροβάθμιος θὰ ἔχει ρίζας μιγάδας, ἐὰν $\frac{-27+\sqrt{321}}{6}>\lambda>-\frac{27+\sqrt{321}}{6}$. Ἀλλὰ τότε καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι μιγάδες. Ἐὰν ὅμως $\frac{-27+\sqrt{321}}{6}<\lambda<-\frac{27+\sqrt{321}}{6}$, τὸ ἐν λόγῳ τριώνυμον θὰ εἶναι θετικόν, ἤτοι ἡ δευτεροβάθμιος θὰ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς. Καὶ ἐὰν μὲν αἱ τιμαὶ τοῦ λ τῆς περιπτώσεως αὐτῆς καθιστοῦν τὰ $(\lambda-2)$ καὶ $(\lambda-1)$ ὁμόσημα καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι πραγματικαί, διότι ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου θὰ εἶναι θετικαί. Ἐὰν δὲ καθιστοῦν τὰ $(\lambda-2)$ καὶ $(\lambda-1)$ ἑτερόσημα, αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου θὰ εἶναι ἑτερόσημοι καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ διτετράγωνος θὰ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ δύο μιγάδας.

439 β') Ἐὰν θέσωμεν $\chi^2=\psi$, ἔχομεν:

$\psi=\dfrac{(3\lambda+4)\pm\sqrt{(3\lambda+4)^2-4(\lambda+1)^2}}{2}$. Ἐὰν δὲ $\Delta=(3\lambda+4)^2-4(\lambda+1)^2=$ $=5\lambda^2+16\lambda+12=0$, θὰ εἶναι $\psi=\dfrac{3\lambda+4}{2}$, ἤτοι $\chi=\pm\sqrt{\dfrac{3\lambda+4}{2}}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικὸν ἐὰν $\lambda>-4/3$. Ἐὰν $\Delta\neq0$, θὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τοῦ τριωνύμου $5\lambda^2+16\lambda+12$ αἱ ὁποῖαι εἶναι -2 καὶ $-\dfrac{6}{5}$.

Ὥστε τοῦτο θὰ εἶναι θετικόν, ἤτοι αἱ ῥίζαι ψ θὰ εἶναι πραγματικαὶ ἐὰν $-\dfrac{6}{5}<\lambda<-2$ καὶ μιγαδικαὶ ἐὰν $-2<\lambda<-\dfrac{6}{5}$ ὁπότε καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου, θὰ εἶναι μιγαδικαί. Ἐὰν δὲ αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τοῦ ψ εἶναι ἀμφότεραι θετικαὶ καὶ αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί, ἐνῷ ἐὰν αἱ ῥίζαι αὗται τοῦ ψ εἶναι ἑτερόσημοι, αἱ δύο μόνον ῥίζαι τῆς διτετραγώνου θὰ εἶναι πραγματικαί.

440. Πρέπει δηλαδὴ νὰ εἶναι $\sqrt{(\lambda+1)^2-8(\lambda^2+3)}:2=1$, ἤτοι $\sqrt{\lambda^4-6\lambda^2-23}=2$, $\lambda^4-6\lambda^2-23=4$ ἤτοι $\lambda^4-6\lambda^2-27=0$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\lambda^2=3\pm\sqrt{9+27}=3\pm6=9$ ἢ -3, ἤτοι $\lambda=\pm3$ ἢ $\pm i\sqrt{3}$.

441. α') Ἐδῶ εἶναι $\Gamma=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{25-24}=1$. Ὅθεν:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}+\sqrt{\frac{5-1}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

β' $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\dfrac{7+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$.

γ') $\sqrt{8+\sqrt{48}}=\sqrt{\dfrac{8+4}{2}}+\sqrt{\dfrac{8-4}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

δ') $\sqrt{\alpha^2+\beta+\sqrt{4\alpha^2\beta}}$. Ὅθεν $\Gamma=\sqrt{A^2-B}=\sqrt{(\alpha^2+\beta)^2-4\alpha^2\beta}=$ $=\sqrt{(\alpha^2-\beta)^2}=\alpha^2-\beta$. Καὶ διὰ τοῦτο εἶναι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta+\alpha^2-\beta}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta-\alpha^2+\beta}{2}}=\alpha+\sqrt{\beta}.$$

ε') $\sqrt{2\alpha+\sqrt{4(\alpha^2-\beta^2)}}=\sqrt{\dfrac{2\alpha+2\beta}{2}}+\sqrt{\dfrac{2\alpha-2\beta}{2}}=\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}$.

στ') $\sqrt{\alpha+\beta-\sqrt{4\alpha\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}}-\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}}=$ $=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$.

ζ') $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\sqrt{\frac{\gamma^2(\alpha^2-\gamma^2)}{4}}}$. Ὅθεν $A^2-B=\frac{\alpha^4}{16}-\frac{\alpha^2\gamma^2}{4}+\frac{\gamma^4}{4}=$
$=\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\gamma^2}{2}\right)^2$, ἤτοι $\Gamma=\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\gamma^2}{2}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\frac{A+\Gamma}{2}=$
$=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{4}$ καὶ $\frac{A-\Gamma}{2}=\frac{\gamma^2}{4}$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν εἶναι $\frac{\sqrt{\alpha^2\gamma^2}}{2}+\frac{\gamma}{2}$.

η') $\sqrt{\chi+\chi\psi-\sqrt{4\chi^2\psi}}=\sqrt{\frac{\chi+\chi\psi+\chi-\chi\psi}{2}}-\sqrt{\frac{\chi+\chi\psi-\chi+\chi\psi}{2}}=$
$=\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi\psi}$.

ϑ') $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3+2}{2}}+\sqrt{\frac{3-2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$.

442. Ἔχομεν $\sqrt{\chi+8}=14$, $\chi+8=14^2$, καὶ $\chi=196-8=188$. Ἡ ρίζα δὲ αὕτη ἐπαληθεύει ἢ ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν.

β') Ἔχομεν $3\chi+7=3^3=27$ καὶ $\chi=(27-7):3=20:3$. Ἡ δὲ λύσις αὕτη ἁρμόζει.

γ') $4\chi-40=10^3$ καὶ $\chi=1040:4=260$. Τὴν ἐπαληθεύει.

δ') $\chi+9=25(\chi-3)$ καὶ $\chi=7/2$. Ἐπαληθεύει.

ε') $10\chi-4=7\chi+11$ καὶ $\chi=5$. Ἐπαληθεύει.

443. α) $32+\chi=(16-\sqrt{\chi})^2$, $\sqrt{\chi}=7$ καὶ $\chi=49$. Ἐπαληθεύει.

β') $\frac{15}{4}+\chi=\left(\frac{3}{2}+\chi\right)^2$, $2\chi^2+4\chi-3=0$ καὶ $\chi=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{10}$. Αἱ ρίζαι δὲ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

γ') $(\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-5})^2=\chi+(\chi-5)+2\sqrt{\chi(\chi-5)}=5$, $\sqrt{\chi(\chi-5)}=\chi-5$ καὶ $\chi(\chi-5)=(\chi-5)^2$, ἤτοι $5\chi=25$ καὶ $\chi=5$. Τὴν ἐπαληθεύει.

δ') Ἔχομεν $(\chi+20)+(\chi-1)-2\sqrt{(\chi+20)(\chi-1)}=23^2$, $\chi-255=$
$=\sqrt{(\chi+20)(\chi-1)}$, $(\chi+20)(\chi-1)=(\chi-255)^2$ κλπ. κατὰ τὰ γνωστά.

ε') Ἔχομεν $\sqrt{\chi+15}=1-\chi$, $\chi+15=(1-\chi)^2$, $\chi^2-3\chi-14=0$ κλπ.

στ') Ἔχομεν $(\sqrt{\chi}-3)(\sqrt{\chi}-2)=(\sqrt{\chi}+1)(\sqrt{\chi}+3)$, $3=9\sqrt{\chi}$, $\sqrt{\chi}=1:3$ καὶ $\chi=1:9$. Αὕτη δὲ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν.

ζ') Εἶναι $1+\sqrt{1-\chi}=3-3\sqrt{1-\chi}$, $\sqrt{1-\chi}=1:2$, $1-\chi=1:4$ καὶ $\chi=3/4$. Τὴν ἐπαληθεύει.

444. α) Ἔχομεν $(\alpha+\sqrt{\chi})+(\alpha-\sqrt{\chi})+2\sqrt{(\alpha+\sqrt{\chi})(\alpha-\sqrt{\chi})}=\chi$, $2\sqrt{\alpha^2-\chi}=\chi-2\alpha$, $4(\alpha^2-\chi)=(\chi-2\alpha)^2$ καὶ $\chi^2-4(\alpha-1)\chi=0$. Ὅθεν $\chi=0$ καὶ $\chi=4(\alpha-1)$. Ἐκ τούτων ἡ $\chi=4(\alpha-1)$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ $\chi=0$, ἐπαληθεύει τὴν συζυγῆ $\sqrt{\alpha+\sqrt{\chi}}-\sqrt{\alpha-\sqrt{\chi}}=\sqrt{\chi}$.

β') Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ 1ου μέλους ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{(\sqrt{\chi-\alpha}+\sqrt{\chi-\beta})^2}{(\chi-\alpha)-(\chi-\beta)}=\frac{2\chi-\alpha-\beta}{2\alpha},\ \text{ἤτοι}$$

$$\frac{2\chi-(\alpha+\beta)+2\sqrt{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}}{\beta-\alpha}=\frac{2\chi-(\alpha+\beta)}{2\alpha},\ \text{ἤτοι}$$

$$\sqrt{(\chi-\alpha)(\chi-\beta)}=[2\chi-(\alpha+\beta)]\ [\beta-3\alpha]:4\alpha.$$

Ἤδη ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν της κατὰ τὰ γνωστά.

γ') $\sqrt{\chi^2+3\chi+10}=\chi+2$. $\chi^2+3\chi+10=(\chi+2)^2$, καὶ $\chi=6$.

δ') Ἔχομεν $(3\chi+4)(12\chi-23)=(6\chi-4)^2$ καὶ $\chi=4$.

ε') Ἔχομεν $(\chi+7)+(\chi+5)-2\sqrt{(\chi+7)(\chi+5)}=4$, $\sqrt{(\chi+7)(\chi+5)}=$ $=\chi+4$, $(\chi+7)(\chi+5)=(\chi+4)^2$, καὶ $\chi=-19/4$. Ἡ λύση αὕτη δὲν ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἀλλὰ τὴν συζυγῆ της $\sqrt{\chi+7}+\sqrt{\chi+5}=2$.

στ') Ἔχομεν $\sqrt{29\chi+6}=15-\sqrt{29\chi-9}$, καὶ $29\chi+6=225+29\chi-$ $-9-30\sqrt{29\chi-9}$, ἤτοι $30\sqrt{29\chi-9}=210$, $\sqrt{20\chi-9}=7$ καὶ $29\chi-9=49$. Ὅθεν $\chi=2$.

ζ') $(9\chi-2)^2=25(6\chi^2-7\chi-8)$, ἤτοι $69\chi^2-139\chi-204=0$ κλπ.

η') Ἔχομεν $8\chi+13-8\sqrt{\chi^2-11\chi+14}=81$, $2\chi-17=2\sqrt{\chi^2-11\chi+14}$, $(2\chi-17)^2=4(\chi^2-11\chi+14)$, ἤτοι $24\chi=233$ καὶ $\chi=233/24$.

θ') Ὑψοῦντες διαδοχικῶς εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{\chi}}}=3$, $\sqrt{3+\sqrt{\chi}}=2$, $\sqrt{\chi}=1$ καὶ $\chi=1$.

ι') Εὑρίσκομεν $1-\sqrt{1-\chi}+\sqrt{\chi}=1^2$, ἤτοι $\sqrt{\chi}=\sqrt{1-\chi}$, $\chi=1-\chi$ καὶ $\chi=1/2$.

ια') Ἐὰν θέσωμεν $\chi-\alpha=\omega$ καὶ $\chi+\alpha=\varphi$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\sqrt[3]{\omega\varphi}=\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{\varphi}-1$, ἤτοι $\sqrt[3]{\omega}\sqrt[3]{\varphi}-\sqrt[3]{\omega}-(\sqrt[3]{\varphi}-1)=0$. $\sqrt[3]{\omega}(\sqrt[3]{\varphi}-1)-(\sqrt[3]{\varphi}-1)=0$ καὶ τέλος $(\sqrt[3]{\varphi}-1)(\sqrt[3]{\omega}-1)=0$. Ὅθεν $\sqrt[3]{\varphi}=1$ ἤτοι $\varphi=1$ καὶ $\sqrt[3]{\omega}=1$, ἤτοι $\omega=1$. Ὥστε $\chi-\alpha=1$, ἤτοι $\chi=1+\alpha$. καὶ $\chi+\alpha=1$ ἤτοι $\chi=1-\alpha$. Ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται ἁρμόζουν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

445. α') Ἐὰν θέσωμεν $\chi+19=\omega$ καὶ $10\chi+45=\varphi$, ἔχομεν: $\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\omega}=\sqrt[3]{\varphi}$, ὁπότε ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸν κύβον ἔχομεν: $\chi+\omega+3\cdot\sqrt[3]{\chi^2}\cdot\sqrt[3]{\omega}+3\cdot\sqrt[3]{\chi}\sqrt[3]{\omega^2}=\varphi$ καὶ $3\cdot\sqrt[3]{\chi\omega}(\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\omega})=\varphi-\chi-\omega$, ἤτοι $3\cdot\sqrt[3]{\chi\omega\varphi}=\varphi-\chi-\omega$ καὶ $27\chi\omega\varphi=(\varphi-\chi-\omega)^3$, ἤτοι: $27\chi(\chi+19)(10\chi+45)=8\chi+26$ κλπ.

β') Ἐὰν γράψωμεν $\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\chi-1}=-\sqrt[3]{\chi+2}$ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἄνω, εὑρίσκομεν $3\chi\omega\varphi=(\varphi+\chi+\omega)^3$, ἤτοι $3\chi(\chi-1)(\chi+2)=(3\chi+1)^3$.

γ΄) Ἔχομεν $\frac{\sqrt{1+\beta\chi}}{\sqrt{1-\beta\chi}}=\frac{4+\alpha\chi}{1-\alpha\chi}$, $\frac{1+\beta\chi}{1-\beta\chi}=\frac{(4+\alpha\chi)^2}{(1-\alpha\chi)^2}$, $(1-2\alpha\chi+\alpha^2\chi^2)(1+\beta\chi)=(16+8\alpha\chi+\alpha^2\chi^2)(1-\beta\chi)$, ἢ $2\alpha^2\beta\chi^3+6\alpha\beta\chi^2-(10\alpha-17\beta)\chi-15=0$. Ἡ ἐξίσωσις δὲ αὕτη εἶναι, ὡς βλέπομεν, τρίτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν.

δ΄) Ἔχομεν $\sqrt{\alpha\chi}-5=0{,}5\sqrt{\alpha\chi-0{,}5}$, $(\sqrt{\alpha\chi}-5)^2=0{,}25(\alpha\chi-0{,}5)$, ἤτοι $\alpha\chi+25-10\sqrt{\alpha\chi}=0{,}25\alpha\chi-0{,}125$, ἤτοι $0{,}75\alpha\chi+25{,}125=10\sqrt{\alpha\chi}$ $(0{,}75\alpha\chi+25{,}125)^2=100\alpha\chi$ κλπ.

Ἀντίστροφοι καὶ διώνυμοι ἐξισώσεις

Ἀσκήσεις.—*446.* α΄) Ἔχομεν $\chi^2(\chi+1)+(\chi+1)=0$ καὶ $(\chi+1)\cdot(\chi^2+1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2+1=0$, ἤτοι $\chi=\pm i$.

β΄) $\chi^2(\chi+1)-(\chi+1)=0$ καὶ $(\chi^2+1)(\chi^2-1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2-1=0$, ἤτοι $\chi=\pm1$ (ἡ ῥίζα -1 διπλῆ).

γ΄) Τὸ α΄ μέλος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi+1)^3$. Ὅθεν: $(\chi+1)^3=0$, ἤτοι $\chi+1=0$ καὶ $\chi=-1$ (ῥίζα τριπλῆ).

δ΄) $(\chi^3-1)+3\chi(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+\chi+1+3\chi)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+4\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi-1=0$, ἤτοι $\chi=1$ καὶ $\chi^2+4\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-2\pm\sqrt{3}$.

ε΄) $(\chi^3+1)+2\chi(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1+2\chi)=0$, $(\chi+1)(\chi^2+\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=-1$ καὶ $\chi^2+\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=(-1\pm i\sqrt{3}):2$.

στ΄) $(\chi^3+1)-3\chi\cdot(\chi+1)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1-3\chi)=0$, $(\chi+1)(\chi^2-4\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi=-1$ καὶ $\chi=2\pm\sqrt{3}$.

ζ΄) $(\chi^3-1)-2\chi(\chi-1)=0$, $(\chi-1)(\chi^2+\chi+1-2\chi)=0$, $(\chi-1)(\chi^2-\chi+1)=0$ καὶ $\chi=1$ ἢ $\chi=(1\pm i\sqrt{3}):2$.

η΄) $3(\chi^3+1)-7\chi(\chi+1)=(\chi+1)(3\chi^2-3\chi+3-7\chi)=0$ $(\chi+1)(3\chi^2-10\chi+3)=0$ καὶ $\chi=-1$ ἢ $\chi=3$ ἢ $1/3$.

θ΄) $2(\chi^4-1)+5\chi(\chi^2-1)=(\chi^2-1)[2(\chi^2+1)+5\chi]=0$ ἢ $(\chi^2-1)(2\chi^2+5\chi+2)=0$. Ὅθεν $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=-2$ ἢ $-1/2$.

ι΄) $5(\chi^4-1)+26\chi(\chi^2-1)=0$, $(\chi^2-1)(5\chi^2+5+26\chi)=0$. Ὅθεν $\chi=\pm1$ καὶ $\chi=-5$ ἢ $-1/5$.

ια΄) $(\chi^4-1)-4\chi(\chi^2-1)=0$, $(\chi^2-1)(\chi^2+1-4\chi)=0$, $\chi=\pm1$ ἢ $\chi=2\pm\sqrt{3}$.

ιβ΄) Διαιροῦντες διὰ χ^2 εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi-4+\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}=0$, ἤτοι: $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-4=0$ (ι). Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$, ἔχομεν $\chi^2+\frac{1}{\chi^2}=\psi^2-2$. Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (ι) γίνεται $\psi^2+\psi-6=0$

ὁπότε $\psi=2$ ἢ -3. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi+\frac{1}{\chi}=2$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-3$, ἤτοι $\chi^2-2\chi+1=0$, $(\chi-1)^2=0$ καὶ $\chi=1$ καὶ $\chi^2+3\chi+1=0$, ἤτοι $\chi=$ $=(-3\pm\sqrt{5}):2$.

ιγ΄) Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $3\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-$ $-24=0$, $3(\psi^2-2)+\psi-24=0$, $3\psi^2+\psi-30=0$ καὶ $\psi=3$ καὶ $-10/3$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-\frac{10}{3}$, ἤτοι ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $3\chi^2+10\chi+3=0$.

ιδ΄) Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $2\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)-17=$ $=0$, $2(\psi^2-2)+\psi-17=0$, $2\psi^2+\psi-21=0$ καὶ $\psi=3$ ἢ $-7/2$. Ὥστε $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ καὶ $\chi+\frac{1}{\chi}=-\frac{7}{2}$, ἤτοι $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $2\chi^2+7\chi+$ $+2=0$ κλπ.

ιε΄) Ἔχομεν ὁμοίως $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-5\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+8=0$, $(\psi^2-2)-$ $-5\psi+8=0$, $\psi^2-5\psi+6=0$ καὶ $\psi=3$ ἢ 2. Ὥστε $\chi+\frac{1}{\chi}=3$ ἢ $\chi+\frac{1}{\chi}=2$, ἤτοι $\chi^2-3\chi+1=0$ καὶ $\chi^2-2\chi+1=0$ κλπ.

ιστ΄) Ἔχομεν $\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-2\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+2=0$ κλπ. ὡς ἄνω.

447. α΄) Ἔχομεν $1813(\chi^2+1)^2=25(\chi^2+\chi+1)(\chi+1)^2$

$1813\chi^4+3626\chi^2+1813=25\chi^4\ \ 75\chi^3+300\chi^2+75\chi+25$

$1788\chi^4-75\chi^3+3326\chi^2-75\chi+1788=0$

$1788\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-75\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+3326=0$

$1788(\psi^2-2)-75\psi+3326=0$ κλπ. ὡς προηγουμένως.

β΄) $\chi^5(135-78\chi)=135\chi-78$, $78\chi^6-135\chi^5+135\chi-78=0$

$78(\chi^6-1)-135\chi(\chi^4-1)=0$. Ὅθεν:

$78(\chi^2-1)(\chi^4+\chi^2+1)-135\chi(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$

$(\chi^2-1)(78\chi^4-135\chi^3+78\chi^2-135\chi+78)=0$

$(\chi^2-1)\cdot\left[78\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-135\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+78\right]=0$

$(\chi^2-1)[78(\psi^2-2)-135\psi+78]=0$ κλπ.

γ') $\chi^4(6\chi-11)=11\chi-6$, $6(\chi^5+1)-11\chi(\chi^3+1)=0$ (ι).
'Αλλ' ἐπειδὴ $\chi^5+1=(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)(\chi+1)$ καὶ $\chi^3+1=$ $=(\chi^2-\chi+1)(\chi+1)$, οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως (ι) ἔχουν κοινὸν παράγοντα τὸν $\chi+1$(1) ὅστις πολλαπλασιάζεται:
ἐπὶ $6\chi^4-6\chi^3+6\chi^2-6\chi+6-11\chi^3+11\chi^2-11\chi=$ $=6\chi^4-17\chi^3+17\chi^2-17\chi+6$ (2). 'Εὰν δὲ ἐξισώσωμεν τοὺς παράγοντας (1) καὶ (2) μὲ μηδέν, καὶ λύσωμεν ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις $\chi+1=0$, $6(\psi^2-2)-17\psi+17=0$ καὶ $\chi+\dfrac{1}{\chi}=\psi$, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ῥίζας.

δ') $15\chi^2(\chi+1)-4(\chi^2+1)(\chi^3+1)=0$

$15\chi^2(\chi+1)-4(\chi^2+1)(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)=0$

$(\chi+1)[15\chi^2-4(\chi^2+1)(\chi^2-\chi+1)]=0$

$(\chi+1)(4\chi^4-4\chi^3-7\chi^2-4\chi+4)=0$

$(\chi+1)[4\left(\chi^2+\dfrac{1}{\chi^2}\right)-4\left(\chi+\dfrac{1}{\chi}\right)-7=0$ κλπ.

ε') $13(\chi^2-\chi+1)^2=9(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi-1)$

$13(\chi^4-2\chi^3+3\chi^2-2\chi+1)=9(\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)$

$4\chi^4-17\chi^3+30\chi^2-17\chi+4=0$

$4\left(\chi^2+\dfrac{1}{\chi^2}\right)-17\left(\chi+\dfrac{1}{\chi}\right)+30=0$, $4(\psi^2-2)-17\psi+30=0$ κλπ.

448. α') $\chi^3\pm343=\chi^3\pm7^3=0$. Καὶ ἐκ μὲν τῆς $\chi^3-7^3=0$, εὑρίσκομεν $(\chi-7)(\chi^2+7\chi+7^2)=0$, ἤτοι $\chi=7$ καὶ $\chi=(-7\pm\sqrt{7^2-4.7^2}):2=(-7\pm7i\sqrt{3}):2$. 'Εκ δὲ τῆς $\chi^3+7^3=0$, εὑρίσκομεν $(\chi+7)(\chi^2-7\chi+7^2)=0$, ἤτοι $\chi=-7$ καὶ $\chi=(7\pm7i\sqrt{3}):2$

β') $8\chi^3\pm125=(2\chi)^3\pm5^3=0$. ἢ ἐὰν θέσωμεν $2\chi=\psi$, $\psi^3\pm5^3=0$. Ὥστε ἐκ τῆς $\psi^3-5^3=0$, εὑρίσκομεν $(\psi-5)(\psi^2+5\psi+5^2)=0$, ἤτοι $\psi=5$, δηλαδὴ $\chi=5/2$ καὶ $\psi=(-5\pm5i\sqrt{3}):2$ δηλαδὴ $\chi=(-5\pm5i\sqrt{3}):4$

'Εκ δὲ τῆς $\psi^3+5^3=0$, εὑρίσκομεν $(\psi+5)(\psi^2-5\psi+5^2)=0$, ἤτοι $\psi=-5$ καὶ $\psi=(5\pm5i\sqrt{3}):2$, δηλαδὴ $\chi=-5/2$ ἢ $\chi=(5\pm i\sqrt{3}):4$.

γ') 'Επειδὴ $\chi^3\pm1331=\chi^3\pm11^3=0$, εὑρίσκομεν ὡς ἀνωτέρω τὰς ἐξισώσεις $(\chi-11)(\chi^2+11\chi+11^2)=0$ καὶ $(\chi+11)(\chi^2-11\chi+11^2)=0$.

Ὥστε $\chi=11$, $\chi=(-11\pm11i\sqrt{3}):2$, $\chi=-11$, $\chi=(11\pm11\sqrt{3}):2$.

δ') $9(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)=7(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)$, $2\chi^3=16$, $\chi^3-2^3=0$ καὶ $(\chi-2)(\chi^2+2\chi+4)=0$. Ὅθεν $\chi=2$ καὶ $\chi=-1\pm i\sqrt{3}$

ε') $\dfrac{2-\chi^3+2+\chi^3}{2-\chi^3-2-\chi^3}=\dfrac{\chi^3-4\chi^2+9+\chi^3+4\chi^2+9}{\chi^3-4\chi^2+9-\chi^3-4\chi^2-9}$, $-\dfrac{2}{\chi^3}=-\dfrac{\chi^3+9}{4\chi^2}$

$\chi^3+9=8$ καὶ $\chi^3+1=0$, ἤτοι $(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi=-1$ καὶ $\chi=(1\pm i\sqrt{3}):2$.

στ') $\frac{9\chi^3+7}{2} - \chi^3 + \frac{(\chi^3-2)}{7} = 36$, $63\chi^3+49-14\chi^3+2\chi^3-4=504$

$51\chi^3-459=0$, $\chi^3-9=0$, $\chi^3-\left(\sqrt[3]{9}\right)^3=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\sqrt[3]{9}=\psi$,
$\chi^3-\psi^3=0$, $(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)=0$. Ὅθεν
$\chi=\psi$, ἤτοι $\chi=\sqrt[3]{9}$ καὶ $\chi=(-\psi\pm\psi i\sqrt{3}):2=\sqrt[3]{9}(-1\pm i\sqrt{3}):2$.

449. α') $\chi^5-(\chi^5+5\chi^3+8\chi^2+40)+4\chi^3+8\chi^2+32=0$, $\chi^3+2^3=0$,
$(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4)=0$. Ὅθεν $\chi=-2$ καὶ $\chi=1\pm i\sqrt{3}$.

β') $4(5\chi^3-4)(9\chi^3+20)=96.4(4\chi^3+12)+96\chi^3(5\chi^3-4)$
$180\chi^6+256\chi^3-320=480\chi^6+1152\chi^3+4608$, $75\chi^6+224\chi^3+1232=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi^3=\psi$, $75\psi^2+224\psi+1232=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ψ καὶ ἀκολούθως τὸν χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi=\sqrt[3]{\psi}$.

450. α') Ἐπειδὴ $\alpha^{-\gamma}=\frac{1}{\alpha^\gamma}$ καὶ $1-\alpha^{-\gamma}=\frac{\alpha^\gamma-1}{\alpha^\gamma}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\frac{1}{1-\alpha^\gamma}-\frac{\alpha^\gamma}{1-\alpha^\gamma}=\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^3$, ἤτοι $\frac{1-\alpha^\gamma}{1-\alpha^\gamma}=\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^3$,
$1=\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^3$, $1=\frac{\alpha^3}{\chi^3}$. Ὅθεν $\chi^3=\alpha^3$, $\chi^3-\alpha^3=0$ καὶ $(\chi-\alpha)(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)=0$.
Ὅθεν $\chi=\alpha$ καὶ $\chi=(-\alpha\pm\alpha i\sqrt{3}):2$.

β') $\frac{\chi^3}{1-\alpha^\gamma}+\frac{\chi^3}{1-\alpha^{-\gamma}}=1$, $\chi^3\left(\frac{1}{1-\alpha^\gamma}+\frac{1}{1-\alpha^{-\gamma}}\right)=1$, ἤτοι (προηγουμένη ἄσκ. α') $\chi^3=1$, $\chi^3-1=0$, $(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)=0$. Ὅθεν $\chi=1$ καὶ $\chi=(-1\pm i\sqrt{3}):2$.

γ') Ἐκ τῆς $\chi^4-1=0$, εὑρίσκομεν $(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$, $(\chi-1)(\chi+1)(\chi^2+1)=0$, ἤτοι $\chi=1$, $\chi=-1$ καὶ $\chi=\pm i$.

Ἐκ δὲ τῆς $\chi^4+1=0$, εὑρίσκομεν $\chi^4+2\chi^2+1-2\chi^2=0$, $(\chi^2+1)^2-2\chi^2=0$, $(\chi^2+1-\chi\sqrt{2})(\chi^2+1+\chi\sqrt{2})=0$. Ὅθεν $\chi^2-\chi\sqrt{2}+1=0$ καὶ $\chi=(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}):2$ ἢ $\chi^2+\chi\sqrt{2}+1)=0$ καὶ $\chi=(-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}):2$.

δ') $\chi^5\pm1024=\chi^5\pm4^5$. Οὕτως ἐκ τῆς $\chi^5-4^5=0$, εὑρίσκομεν $(\chi-4)(\chi^4+4\chi^3+4^2\chi^2+4^3\chi+4^4)=0$. Ὅθεν $\chi-4=0$, ἤτοι $\chi=4$ καὶ $\chi^4+4\chi^3+4^2\chi^2+4^3\chi+4^4=0$. Διαιροῦντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διὰ $4^2\chi^2$, εὑρίσκομεν $\left(\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}\right)+\left(\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}\right)+1=0$.

(ι). Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}=\psi$, εὑρίσκομεν $\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}=\psi^2-2$.

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (ι), γίνεται $\psi^2-2+\psi+1=0$, $\psi^2+\psi-1=0$ καὶ

$\psi=(-1\pm\sqrt{5}):2$. Οὕτω δὲ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi+\frac{1}{\chi}=\psi$.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^5+4^5=1$, ἔχομεν $(\chi+4)(\chi^4-4\chi^3+4^2\chi^2-4^3\chi+4^4)=0$. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν λύσιν $\chi=-4$ καὶ τὰς ἄλλας λύσεις ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-4\chi^3+4^2\chi^2-4^3\chi+4^4=0$, ἥτις γράφεται

$$\left(\frac{\chi^2}{4^2}+\frac{4^2}{\chi^2}\right)-\left(\frac{\chi}{4}+\frac{4}{\chi}\right)+1=0. \text{ κλπ. ὡς ἀνωτέρω.}$$

ε΄) Ἐὰν εἰς τὴν προηγουμένην λύσιν θέσωμεν 1 ἀντὶ 4, θὰ εὕρωμεν τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\chi^5\pm1=0$.

στ΄) $\chi^6\pm3^6=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi=3\psi$, ἔχομεν $3^6\psi^6\pm3^6=0$ ἢ $3^6.(\psi^6\pm1)=0$. Ὅθεν $\psi^6\pm1=0$. Οὕτως ἔχομεν

$\psi^6-1=(\psi^2-1).(\psi^4+\psi^2+1)=0$ καὶ $\psi=\pm1$ ἢ $\psi=\sqrt{\frac{(-1)\pm i\sqrt{3}}{2}}$, ἤτοι $\chi=\pm3$ κλπ.

Ὁμοίως δὲ ἔχομεν $\psi^6+1=(\psi^2+1)(\psi^4-\psi^2+1)=0$ κλπ.

ζ΄) $\chi^{2\nu+1}-1=(\chi-1)(\chi^{2\nu}+\chi^{2\nu-1}+\ldots+\chi+1)=0$

$\chi^{2\nu+1}+1=(\chi+1)(\chi^{2\nu}-\chi^{2\nu-1}+\chi^{2\nu-2}-\ldots+1)=0$

Οὕτως ἔχομεν $\chi=1$ κλπ. ὡς καὶ $\chi=-1$ κλπ.

η΄) $\chi^7-1=(\chi-1)(\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1)=0$

$\chi^7+1=(\chi+1)(\chi^6-\chi^5+\chi^4-\chi^3+\chi^2-\chi+1)=0$.

Ὅθεν $\chi=1$ κλπ. ὡς καὶ $\chi=-1$ κλπ.

θ΄) $\chi^{2\nu}-1=(\chi-1)(\chi^{2\nu-1}+\chi^{2\nu-2}+\ldots+1)=0$. Ὅθεν $\chi=1$ κλπ.

$\chi^{2\nu}+1=0$. Ἐδῶ ἡ δύναμις τοῦ χ, ὡς ἀρτία, οὐδέποτε δύναται νὰ δώσῃ ἐξαγόμενον -1, ὥστε νὰ ἔχωμεν $-1+1=0$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας.

ι΄) $\chi^4\pm256=\chi^4\pm4^4=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi=4\psi$ καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4\pm1=0$, τὴν ὁποίαν λύομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (ἄνω ἄσκ. γ΄).

ια΄) $\chi^5\pm3125=0=\chi^5\pm5^5=0$, ἥτις λύεται ὡς ἡ ἄνω δ΄.

ιβ΄) $\chi^{10}-1=(\chi-1)(\chi^9+\chi^8+\ldots+1)$, ἤτοι $\chi=1$ κλπ.

$\chi^{10}+1=0$. Εἶναι ὡς ἡ $\chi^{2\nu}+1=0$ τῆς ἄνω θ΄.

ιγ΄) $\chi^6\pm1=0$. Λύεται ὡς ἡ $\psi^6\pm1$ τῆς ἄνω στ΄.

ιδ΄) $\chi^4\pm14641=\chi^4\pm11^4=0$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\psi=11\psi$ καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4\pm1=0$, ὁμοίαν μὲ τὴν ἄνω γ΄.

ιε΄) $\chi^{12}-1=(\chi^6-1)(\chi^6+1)=0$. Ἡ $\chi^6+1=0$ δὲν ἔχει πραγματικὰς ῥίζας, ἡ δὲ $\chi^6-1=0$, εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ἄνω ε΄.

451. α΄) Εἶναι $|\chi|=7/3$, ἄρα $\chi_1=7/3$ καὶ $\chi_2=-7/3$ καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\chi^2=49/9$. β΄) $\chi_1=5/6$, $\chi_2=-5/6$ καὶ $\chi^2=25/36$.

γ') $|\chi| = -4/3$. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀδύνατος, διότι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $|\chi|$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν εὑρεθέντα ἀρνητικόν.

δ') $\chi = -(-3):(2+7) = 3:9 = 1:3$ ε') $|\chi| = -4$. Ἀδύνατος.

στ') $\chi = 4:2 = 2$.

452. α') $|\chi| = (5 \pm \sqrt{37}):2$. Δεκτὴ ῥίζα ἡ $|\chi| = (5+\sqrt{37}):2$. Ὥστε $\chi = \pm(5 \pm \sqrt{37}):2$ β') $|\chi| = (5 \pm 1):2 = 3$ ἢ 2. Ὅθεν $\chi = \pm 3$ καὶ $\chi = \pm 2$. γ') Δεκτὴ ῥίζα ἡ $|\chi| = (5+\sqrt{41}):8$. Ὅθεν $\chi = \pm(5+41):2$. δ') $4|\chi|^2 - 3|\chi| - 8 = 0$. Δεκτὴ ῥιζα ἡ $|\chi| = (3+\sqrt{137}):8$. Ὅθεν $\chi = \pm(3+\sqrt{137}):8$.

453. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται $\alpha|\chi| = -(\gamma+\chi)$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\alpha^2\chi^2 = (\gamma+\chi)^2$, ἤτοι $(\alpha^2-1)\chi^2 - 2\gamma\chi - \gamma^2 = 0$. Οὕτως, ἐὰν $|\alpha| \pm 1$ ἔχομεν $\chi = \dfrac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2+(\alpha^2-1)\gamma^2}}{\alpha^2-1} = \dfrac{\gamma \pm \gamma\alpha}{\alpha^2-1} = \dfrac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha^2-1}$. Ὥστε $\chi = \dfrac{\gamma}{\alpha-1}$ καὶ $\chi = -\dfrac{\gamma}{\alpha+1}$. Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν διὰ τὴν $\chi = \dfrac{\gamma}{\alpha-1}$, ὅτι ἐὰν $\chi < 0$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\alpha-1} < 0$, ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι ἡ $-\dfrac{\gamma}{\alpha-1}$. Διὰ δὲ τὴν $\chi = -\dfrac{\gamma}{\alpha+1}$ παρατηροῦμεν ἐὰν $\chi > 0$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\alpha+1} < 0$, ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι ἡ $-\dfrac{\gamma}{\alpha+1}$.

Συστήματα δευτέρου καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ.

454. α') Ἐκ τῆς β' ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi = (1+3\psi):4$, ὁπότε ἡ α' γίνεται $3(1+3\psi).\psi + 13\psi^2 = 25$, $22\psi^2 + 3\psi - 25 = 0$ καὶ $\psi = (-3 \pm \sqrt{9+2200}):44 = (-3 \pm 47):44 = 1$ ἢ $-25:22$. Ὅθεν $\chi = 1$ ἢ $-53:88$ ἀντιστοίχως.

β') Ἔχομεν $\chi = 3+2\psi$ καὶ $(3+3\psi)(6+7\psi) = 180$, ἤτοι $7\psi^2 + 13\psi - 54 = 0$. Ὅθεν $\psi = 2$ ἢ $-27:7$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi = 7$ ἢ $-33:7$.

γ') Ἔχομεν $\chi(\chi-\psi) + 4\psi^2 = \dfrac{3}{2}$ καὶ $\chi - \psi = \dfrac{5}{4}$, ἤτοι $\dfrac{5\chi}{4} + 4\psi^2 = \dfrac{3}{2}$ καὶ $\chi = \psi + \dfrac{5}{4} = \dfrac{4\psi+5}{4}$. Ἑπομένως ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος τούτου γίνεται $64\psi^2 + 20\psi + 1 = 0$. Ὅθεν $\psi = -1/4$ ἢ $-1/16$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi = 1$ ἢ $19/16$.

δ΄) Ἔχομεν $\psi=9-\chi$ καὶ $(2-\chi)(18-\chi)=91$ ἢ $\chi^2-20\chi-55=0$. Ὅθεν $\chi=10\pm\sqrt{155}$ καὶ ἀντιστοίχως $\psi=-1\mp\sqrt{155}$.

ε΄) Τὸ σύστημα τοῦτο γίνεται $(\chi+\psi)^2=48$ καὶ $\chi-\psi=1$. Οὕτως ἐκ τῆς αης εὑρίσκομεν $\chi+\psi=\pm\sqrt{48}$. Ἐπομένως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \chi+\psi=\sqrt{48} & \chi+\psi=-\sqrt{48} \\ \chi-\psi=1 & \chi-\psi=1 \\ \hline \chi=(1+\sqrt{48}):2 & \chi=(1-\sqrt{48}):2 \\ \psi=(-1+\sqrt{48}):2 & \psi=-(1+\sqrt{48}):2 \end{array}$$

στ΄) Ἔχομεν $\psi=2\chi$ καὶ $2\chi^2-7\chi+3=0$, $\chi=3$ ἢ $1/2$ καὶ ἀντιστοίχως $\psi=6$ ἢ 1.

ζ΄) Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi=5+\psi$, ὁπότε ἡ αη γίνεται $\psi^2+6\psi+9=0$. Ὅθεν $\psi=-3$ καὶ $\chi=2$ (ῥίζαι διπλαῖ).

η΄) Ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\chi=\dfrac{3\psi+2}{2}$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $31\psi^2-14\psi-96=0$. Ὅθεν $\psi=(7\pm\sqrt{49+2976}):31=(7\pm55):31=2$ ἢ $-48:31$ καὶ ἀντιστοίχως $\chi=4$ ἢ $-41:31$.

θ΄) Διαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\dfrac{(\chi+1)(\chi+10)}{(\chi-1)(\chi-10)}=-\dfrac{9}{}$, ἤτοι $\chi^2-7\chi+10=0$, $\chi=5$ ἢ 2 καὶ ἀντιστοίχως $\psi=3$ ἢ $3:2$.

455. α΄) Ἐὰν εἰς τὰ μέλη τῆς 1ης ἐξισώσεως προσθέσωμεν τὸ $2\cdot\dfrac{\chi}{\alpha}\cdot\dfrac{\psi}{\beta}$, αὕτη γίνεται $\left(\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\psi}{\beta}\right)^2=2+2\cdot\dfrac{\chi}{\alpha}\cdot\dfrac{\psi}{\beta}$ (ι).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ 2α γράφεται $\dfrac{\chi}{\alpha}+\dfrac{\psi}{\beta}=0$, ἡ (ι) γίνεται:

$0=2+2\cdot\dfrac{\chi}{\alpha}\cdot\dfrac{\psi}{\beta}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $\psi=-\dfrac{\alpha\beta}{\chi}$. Ὥστε εἶναι $\dfrac{\chi}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{\chi}=0$, $\chi^2=\alpha^2$ καὶ $\chi=\pm\alpha$, ὁπότε $\psi=\mp\beta$.

β΄ Ἡ 1η ἐξίσωσις γράφεται $\alpha\chi(\chi+\psi)+\beta\psi(\chi+\psi)=0$, ἤτοι: $(\chi+\psi)(\alpha\chi+\beta\psi)=0$, καὶ ἑπομένως $\chi+\psi=0$ ἢ $\alpha\chi+\beta\psi=0$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$1)\ \begin{array}{l}\chi+\psi=0\\ \alpha\chi-\beta\psi=2\alpha\beta\end{array} \quad \text{καὶ} \quad 2)\ \begin{array}{l}\alpha\chi+\beta\psi=0\\ \alpha\chi-\beta\psi=2\alpha\beta.\end{array}$$

Ἐκ τοῦ 1) εὑρίσκομεν $\chi=-\psi$, $-(\alpha+\beta)\psi=2\alpha\beta$ καὶ $\psi=-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Ὥστε $\chi=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ἐκ δὲ τοῦ 2) εὑρίσκομεν $\chi=\beta$ καὶ $\psi=-\alpha$.

γ') Ἔχομεν $\chi=\frac{\psi\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\psi^2\beta^2}{\alpha^4}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1,\quad \psi^2=\frac{\beta^2\alpha^4}{\alpha^4+\beta^4}$ καὶ

$$\psi=\pm\frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^4+\beta^4}}.\ \text{Ὅθεν}\quad \chi=\pm\frac{\alpha\beta^2}{\sqrt{\alpha^4+\beta^4}}.$$

δ') $\chi=2\alpha-\psi$ καὶ $(2\alpha\beta-\beta)(2\alpha-\psi)^2+(2\alpha+\beta)\psi^2=4\alpha^3$
$(\beta+1)\psi^2-2\beta(2\alpha+1)\psi+2\alpha^2(2\beta-1)=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ψ καὶ ἀκολούθως τὸν χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi=2\alpha-\psi$.

ε') Ἔχομεν $\chi=1-\alpha\psi$ καὶ $(1-\alpha\psi)^2+2\alpha\psi^2=\alpha^2+1$,

$$(\alpha+2)\psi^2-2\psi-\alpha=0,\quad \psi=(1\pm\sqrt{1+\alpha(\alpha+2)}):(\alpha+2)$$

$$\text{καὶ}\quad \chi=(2\mp\alpha\sqrt{1+\alpha(\alpha+2)}):(\alpha+2).$$

στ') Ἔχομεν $\psi=\frac{(12\alpha-13-3\chi)}{2},\quad 2\chi^2-\frac{3\chi(12\alpha-13-3\chi)}{2}=$

$$=15\alpha+10\alpha^3,\quad 13\chi^2-3(12\alpha-13)\chi-10\alpha(3+2\alpha^2)=0,$$

$$\chi=[3(12\alpha-13)\pm\sqrt{9(12\alpha-13)^2+520\alpha(3+2\alpha^2)}]:26.$$

Ὅθεν $\psi=[(12\alpha-13).17\mp\sqrt{9(12\alpha-13)^2+520\alpha(3+2\alpha^2)}]:52$.

456. α') Ἐκ τῆς 1ης ἔχομεν $(\chi+\psi+\alpha-\beta)(\chi-\psi+\alpha+\beta)=4(\alpha^2-\beta^2)$, ἤτοι $(\chi+\psi+\alpha-\beta).2(\alpha+\beta)=4(\alpha^2-\beta^2)$ ἢ $\chi+\psi+(\alpha-\beta)=2(\alpha-\beta)$ ἢ $\chi+\psi=\alpha-\beta$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi-\psi=\alpha+\beta$, εὑρίσκομεν $\chi=\alpha$, $\psi=-\beta$.

β') Ἔχομεν $\chi=\alpha+\beta-\psi$ καὶ $(2\alpha+\beta-\psi)^2+(\psi+\beta)^2=4(\alpha^2+\beta^2)$, $\psi^2-2\alpha\psi+2\alpha\beta-\beta^2$ καὶ $\psi=2\alpha-\beta$ ἢ β καὶ ἀντιστοίχως $\chi=2\beta-\alpha$ ἢ α.

457. α') Διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\chi^2-\psi^2=4\alpha\beta$ καὶ $(\chi-\psi)^2=4\beta^2$, ὁπότε ἔχομεν $(\chi-\psi)(\chi+\psi)=4\alpha\beta$ (ι) καὶ $\chi-\psi=\pm2\beta$. Οὕτως ἐκ τῆς (ι) εὑρίσκομεν $\chi+\psi=\pm2\alpha$.

Ὥστε ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ ἑξῆς συστήματα:

$\chi+\psi=2\alpha$	$\chi+\psi=-2\alpha$	$\chi+\psi=2\alpha$	$\chi+\psi=-2\alpha$
$\chi-\psi=2\beta$	$\chi-\psi=2\beta$	$\chi-\psi=-2\beta$	$\chi-\psi=-2\beta$
$\chi=\alpha+\beta$	$\chi=\beta-\alpha$	$\chi=\alpha-\beta$	$\chi=-(\beta+\alpha)$
$\psi=\alpha-\beta$	$\psi=-(\beta+\alpha)$	$\psi=\alpha+\beta$	$\psi=\beta-\alpha$

β') Ἔχομεν $\chi=(\gamma-\beta\psi):\alpha$, ὁπότε ἐκ τῆς 1ης λαμβάνομεν: $(\alpha^3+\beta^3)^2\psi^2-2\beta^2\gamma(\alpha^3+\beta^3)\psi+\beta^4\gamma^2=0$. Ὅθεν $\psi=\beta^2\gamma:(\alpha^3+\beta^3)$ καὶ $\chi=\alpha^2\gamma$.

γ') Ἡ 2α γίνεται $(\chi+1)\chi+\frac{\alpha}{2}\left(\chi-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{4}(5\alpha+4)$, ἤτοι:

$4\chi^2+2(2+\alpha)\chi-2\alpha(3\alpha+2)=0$ καὶ $\chi=\alpha$ ἢ $-(3\alpha+2):2$, ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοίχως: $\psi=\pm\alpha:2$ ἢ $\psi=\pm i\sqrt{\alpha(2\alpha+1)}:2$.

458. α') Ἔχομεν $\psi^2=-(2\alpha\chi^2-\alpha^2)$ καὶ $\chi^2-2\alpha(2\alpha\chi^2-\alpha^2)=$ $=\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$. Ὥστε $(2-8\alpha^2)\chi^2=2\alpha^2+\alpha-8\alpha^3$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν χ καὶ κατόπιν τὸν ψ.

β') Ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\psi^2=2\alpha(\lambda+1)^2\chi$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται

$2\alpha(\lambda+1)^2\chi = 2\alpha(\lambda+1)\chi+\alpha^2\lambda(\lambda+1)$ καὶ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν: $\chi=\alpha:2$, ὁπότε $\psi = \pm\alpha(\lambda+1)$.

γ΄) Ἡ πρώτη γίνεται $\frac{\alpha^2}{\chi^2}+\frac{\beta^2\gamma^2\chi}{2\beta^2\gamma^2\chi}=2$. Ὅθεν:

$$\chi=\pm\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{καὶ} \quad \psi=\pm\beta\gamma\sqrt{\pm\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}.$$

459. α΄) Ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $\left(\frac{\beta\chi}{\alpha}\right)^2=\psi^2+\beta^2$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται $\psi^2+\beta^2=2\gamma\psi+\beta^2-\gamma^2$, $\psi^2-2\gamma\psi+\gamma^2=0$ καὶ $\psi=\gamma$. Ὥστε: $\chi=\pm\alpha\sqrt{\gamma^2+\beta^2}:\beta$.

β΄) Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εἰς τὴν 1ην εὑρίσκομεν: $\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2.\psi^2+\psi^2=2\psi^2$ καὶ $\psi^2\left[\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2-1\right]=0.$

Ὥστε ἢ $\psi=0$ ἢ $\left(\frac{\psi^2}{\alpha\beta^2\gamma^2}\right)^2=1$, ἤτοι $\psi^2=\alpha\beta^2\gamma^2$ καὶ $\psi=\pm\beta\gamma\sqrt{\alpha}$.

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\chi=0$ ἢ α.

460. α΄) Ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $4\beta^2\chi=0$, $\chi=0$ καὶ $\psi=\pm\beta$.

β΄) Ἐκ τῆς 1ης λαμβάνομεν $\chi^2=\frac{\alpha(\psi^2-\beta^2)}{2\beta^2}$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται

$\frac{\psi^2-\beta^2}{\beta^2}+\frac{\psi}{2\sqrt{2}}=\frac{\alpha+\beta}{2}$, ἤτοι $2\sqrt{2}\psi^2+\beta^2\psi-\beta^2(2+\alpha+\beta)\sqrt{2}=0$ καὶ

$\psi=\frac{-\beta^2\pm\sqrt{\beta^4+16(2+\alpha+\beta)\beta^2}}{4\sqrt{2}}$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ.

γ΄) Θέτοντες εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν τοῦ ψ^2 ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\frac{\chi^2}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{\chi}{(\alpha+\beta)^2}-\chi=0$,

ἤτοι $\chi\left[\frac{\chi}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}-1\right]=0$. Ὅθεν $\chi=0$ ἢ $\chi=(\alpha+\beta)^2-1$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\psi=0$ ἢ $\psi=\pm\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-1}$.

461. α΄) Ἔχομεν $\chi=\frac{3\psi}{5}$ καὶ $\frac{9\psi^2}{25}+\psi^2=100$, ἤτοι $\psi=\pm50:\sqrt{34}$ καὶ $\chi=\pm30:\sqrt{34}$.

β') Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $χ=\frac{9ψ}{5}$, $\frac{81ψ^2}{25}-ψ^2=56$, ἤτοι $ψ=\pm5$ καὶ $χ=\pm9$.

462. α') Ἐκ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $χ=7ψ/3$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $79ψ^2=684$. Ὅθεν $ψ=\pm\sqrt{684:79}$ καὶ $χ=(\pm7\sqrt{684:79}):3$.

β') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως $(χ+ψ):(χ-ψ)=8:3$. Εὑρίσκομεν $χ=11ψ/5$, ὁπότε ἡ 1η γίνεται $ψ^2=25$. Ὅθεν $ψ=\pm5$ καὶ $χ=\pm11$.

γ') Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{χ+4}{ψ+9}=\frac{χ}{ψ}$. Ὅθεν $4ψ=9χ$ καὶ $ψ=9χ:4$. Οὕτως ἡ 1η γίνεται $(χ+4)^2=9χ^2:4$, ἤτοι $5χ^2-32χ-64=0$ καὶ $χ=8$ ἢ $-8:5$, καὶ ἀντιστοίχως $ψ=18$ ἢ $-18:5$.

δ') Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{χ+ψ}{χ-ψ}=2$, ἤτοι $χ=3ψ$. Οὕτως ἡ 2α γίνεται $ψ^3=27$. Ὅθεν $ψ=3$ καὶ $χ=9$.

ε') Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\frac{2χ-3ψ}{3χ+ψ}=\frac{1}{7}$, ἤτοι $χ=2ψ$. Οὕτως ἡ 1η γίνεται $ψ^3=64$. Ὅθεν $ψ=4$ καὶ $χ=8$.

463. α') Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $χ^2-ψ^2=24$ καὶ $(χ-ψ)^2=4$. Οὕτως ἐκ τούτων διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν $(χ+ψ):(χ-ψ)=6$, ἤτοι $χ=7ψ:5$, τότε δὲ ἡ 2α γίνεται $2ψ^2=50$. Ὅθεν $ψ=\pm5$ καὶ $χ=\pm7$.

β') Ἐκ τῆς 2ας εὑρίσκομεν $χ=\frac{ψ^2+8}{ψ}$ (ι). Οὕτω δὲ ἡ 1η γίνεται $2ψ^4-57ψ^2+64=0$ καὶ $ψ=(\pm\sqrt{57\pm\sqrt{2737}}):2$. Ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ ἐκ τῆς (ι).

γ') Ἔχομεν $ψ=\frac{236}{χ}$ καὶ $χ^2+\frac{236^2}{χ^2}=57$, ἤτοι $χ^4-57χ^2+236^2=0$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν χ καὶ κατόπιν τὸν ψ.

δ') Ἔχομεν $χ^2+ψ^2+2χψ=125+100$, $(χ+ψ)^2=15^2$.
$χ^2+ψ^2-2χψ=125-100$, $(χ-ψ)^2=5^2$. Ὅθεν:

$$\begin{array}{cccc} χ+ψ=15, & χ+ψ=-15, & χ+ψ=15, & χ+ψ=-15 \\ χ-ψ=5 & χ-ψ=-5 & χ-ψ=-5 & χ-ψ=5 \\ \hline χ=10,\ ψ=5 & χ=-10,\ ψ=-5 & χ=5,\ ψ=10 & χ=-5,\ ψ=-10 \end{array}$$

ε') Ἔχομεν ὡς ἄνω $(χ+ψ)^2=17^2$, $(χ-ψ)^2=7^2$, ἤτοι $χ+ψ=\pm17$ καὶ $χ-ψ=\pm7$. Ὅθεν $χ=12$, $ψ=5$ ἢ $χ=5$, $ψ=12$ ἢ $χ=-12$, $ψ=-5$ ἢ $χ=-5$, $ψ=-12$.

στ') Ἔχομεν $χ^2+ψ^2=\frac{25}{36}$, $2χψ=\frac{2}{3}=\frac{24}{36}$. Ὅθεν

$$(\chi+\psi)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2,\quad (\chi-\psi)=\left(\frac{1}{6}\right)^2,\quad \chi+\psi=\pm\frac{7}{6} \text{ καὶ } \chi-\psi=\pm\frac{1}{6}$$

Οὕτως δὲ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{2}{3},\quad \psi=\frac{1}{2}\cdot\quad \chi=\frac{1}{2},\quad \psi=\frac{2}{3}\cdot\quad \chi=-\frac{2}{3},\quad \psi=-\frac{1}{2},$$

$$\chi=-\frac{1}{2},\quad \psi=-\frac{2}{3}.$$

ζ') Ἀφαιροῦντες ἔχομεν $\psi-\chi=60$, ἤτοι $\psi=60+\chi$, Οὕτως ἡ 2α γίνεται $\chi^2+\chi(60+\chi)+\chi=61$, $2\chi^2+61\chi-61=0$ καὶ $\chi=(-61\pm\sqrt{61^2+264}):4$. Ὅθεν $\psi=(179\pm\sqrt{61^2+264}):4$.

η') Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες λαμβάνομεν $(\chi+\psi)^2=17^2$, ἤτοι

$\chi+\psi=\pm17$ (1) καὶ $\chi^2-\psi^2=85$, ἤτοι $(\chi+\psi)(\chi-\psi)=85$

ἢ $\pm17(\chi-\psi)=85$, ἤτοι $\chi-\psi=\pm5$ (2).

Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi=11$, $\psi=6$ καὶ $\chi=-11$, $\psi=-6$.

464. α') Ἔχομεν $(\chi-3\psi)^2=16$, $\chi^2+9\psi^2-6\chi\psi=16$, $136-6\chi\psi=16$ καὶ $\chi\psi=20$ ἤτοι $\chi=20:\psi$. Οὕτως ἡ 2α γίνεται $3\psi^2+4\psi-20=0$ καὶ $\psi=2$ ἢ $-10:3$. Ὅθεν $\chi=10$ ἢ -6.

β') Ἔχομεν $\chi+\psi=\dfrac{5\pm\sqrt{25+800}}{8}=\dfrac{5\pm5\sqrt{33}}{8}$

καὶ $\chi-\psi=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\dfrac{-3\pm8}{5}=1$ ἢ $-\dfrac{11}{5}$

Οὕτω δὲ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ κατὰ τὰ γνωστά.

γ') Διαιροῦντες εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=7$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\chi^2+\psi^2=2\chi\psi+1$. Ἑπομένως εἶναι $\chi\psi=2$, ἤτοι $\psi=\dfrac{2}{\chi}$.

Καὶ διὰ τοῦτο ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $\chi-\dfrac{2}{\chi}=1$, ἤτοι $\chi^2-\chi-2=0$.

Ὅθεν $\chi=2$ ἢ -1 καὶ $\psi=1$ ἢ -2.

δ') Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $\chi^2+\chi\psi+\psi^2=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\chi^2+\psi^2=2\chi\psi+\beta^2$. Ὥστε $3\chi\psi=\dfrac{\alpha}{\beta}-\beta^2$, ἤτοι $\psi=\dfrac{\alpha-\beta^3}{3\beta\chi}$ καὶ διὰ τοῦτο ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $3\beta\chi^2-3\beta^2\chi-(\alpha-\beta^3)=0$ καὶ

$$\chi=\frac{3\beta^2\pm\sqrt{9\beta^4+12\beta(\alpha-\beta^3)}}{6\beta}=\frac{3\beta^2\pm\sqrt{3\beta(4\alpha-\beta^3)}}{6\beta}$$

Ὅθεν $\psi=\chi-\beta=\dfrac{-3\beta^2\pm\sqrt{3\beta(4\alpha-\beta^3)}}{6\beta}$.

ε') Ἐκ τῆς 2ας λαμβάνομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=9$, ἤτοι $\chi^2+\psi^2=9-2\chi\psi$. Ἐὰν δὲ καὶ ταύτης τὰ μέλη ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^4+\psi^4+2\chi^2\psi^2=81+4\chi^2\psi^2-36\chi\psi$. Οὕτως ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν 1ην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi^2\psi^2-18\chi\psi+32=0$. Ὅθεν $\chi\psi=9\pm\sqrt{81-32}=16$ ἢ 2. Οὕτω γνωρίζοντες τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi=3$ καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi=16$ ἢ 2 εὑρίσκομεν τὸ χ καὶ ψ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\varphi^2-3\varphi+16=0$ καὶ $\varphi^2-3\varphi+2=0$. Ἐκ τῆς πρώτης τούτων εὑρίσκομεν $\varphi=\dfrac{3\pm\sqrt{9-64}}{2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{55}}{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$\varphi=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}$. Ὥστε $\chi=\dfrac{3\pm i\sqrt{55}}{2}$ (ἢ ψ) καὶ $\psi=\dfrac{3-i\sqrt{55}}{2}$ (ἢ χ) καὶ $\chi=2$ (ἢ ψ) καὶ $\psi=1$ (ἢ χ).

στ') Ἐργαζόμενοι ἀκριβῶς ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν διὰ χ, ψ

$$\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2+\sqrt{8\alpha+8\beta^4}}\,,\quad \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2+\sqrt{8\alpha+8\beta^4}} \qquad (1)$$

$$\text{ἢ}\quad \frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2-\sqrt{8\alpha+8\beta^4}}\,,\quad \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\beta^2-\sqrt{8\alpha+8\beta^4}} \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις (2) ἀποτελεῖται ἐκ μιγάδων ἀριθμῶν ἡ δὲ (1) ἀποτελεῖται ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐὰν $\sqrt{8\alpha+8\beta^4}\geqslant 3\beta^2$, ἤτοι ἂν $8\alpha+8\beta^4\geqslant 9\beta^4$ ἢ ἂν $\alpha\geqslant\beta^4:8$.

η') Ὑψοῦντες τὴν 2αν ἐξίσωσιν πρῶτον εἰς τὸν κύβον καὶ ἔπειτα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^3+\psi^3+3\chi\psi(\chi+\psi)=\beta^3$ (1) καὶ $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\beta^2$ (2). Ἐὰν δὲ αὐτὰς τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν πέμπτην δύναμιν τῆς 2ας ἐξισώσεως, ἤτοι:

$$\chi^5+\psi^5+5\chi\psi(\chi^3+\psi^3)+10\chi^2\psi^2(\chi+\psi)=\beta^5.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi^5+\psi^5$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του α, τὸ $\chi^3+\psi^3$ ἐκ τῆς (1) ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\beta^3-3\chi\psi(\chi+\psi)$, καὶ τέλος τὸ $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του β εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(\chi\psi)^2-\beta^2(\chi\psi)=\dfrac{\alpha-\beta^5}{5\beta}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\chi\psi=\frac{\beta^2}{2}-\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{20\beta}}\quad\text{ἢ}\quad\frac{\beta^2}{2}+\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{20\beta}} \qquad (3)$$

Καὶ ἂν μὲν λάβωμεν τὸ πρῶτον χψ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ $\chi+\psi=\beta$, ὡς χ καὶ ψ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\beta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\beta^2+\sqrt{\frac{4\alpha+\beta^5}{5\beta}}} \qquad (4)$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸ δεύτερον χψ, εὑρίσκομεν ὡς χ καὶ ψ, τοὺς ἀριθμοὺς (4) εἰς οὓς ὅμως τὸ σημεῖον + τοῦ ὑπορρίζου γίνεται —, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο ζεῦγος τῶν χ, ψ εἶναι μιγάδες.

465. α') Ὑψοῦντες τὴν 1ην ἐξίσωσιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=441+\chi\psi-42\sqrt{\chi\psi}$, ἤτοι $257+\chi\psi=441-42\sqrt{\chi\psi}$ ἢ $\chi\psi+42\sqrt{\chi\psi}-184=0$. Ὅθεν $\sqrt{\chi\psi}=-21\pm\sqrt{441+184}=-21\pm 25=4$ ἢ -46, ἤτοι $\chi\psi=16$ ἢ 2116. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν $\chi+\psi=17$ ἢ 57. Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi$, εὑρίσκομεν τὰ χ,ψ κατὰ τὰ γνωστά.

β') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως $3\chi^2\psi^2-2{,}5\chi\psi-275=0$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=(1{,}25\pm\sqrt{1{,}25^2+825}):3=10$ ἢ $-55:6$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $5(\chi^2+\psi^2)+14\chi\psi+1479=0$, ἤτοι $5(\chi^2+\psi^2)+140+1479=0$ ἢ $5(\chi^2+\psi^2)-14.\dfrac{55}{6}+1479=0$. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα $\chi^2+\psi^2$, ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi$, τὸ διπλασιάζομεν πρῶτον καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὰ $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=(\chi+\psi)^2$ καὶ $\chi^2+\psi^2-2\chi\psi=(\chi-\psi)^2$.

Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ $\chi+\psi$, $\chi-\psi$ καὶ ἀκολούθως τὰ χ,ψ.

γ') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὸ $\chi\psi$, ἐκ δὲ τῆς 1ης ἥτις γράφεται $(\chi+\psi-2)+\sqrt{\chi+\psi-2}-12=0$, εὑρίσκομεν τὸ $\sqrt{\chi+\psi-2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ $\chi+\psi$. Οὕτως ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $\chi+\psi$ καὶ ἐκ τοῦ γινομένου $\chi\psi$ εὑρίσκομεν τὰ χ,ψ.

467. α') Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται $(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)(\chi+\psi)=973$ καὶ $(\chi^2-\chi\psi+\psi^2)-7(\chi+\psi)-90=0$. Ὥστε ἡ 1η τούτων δίδει $\chi^2-\chi\psi+\psi^2=973:(\chi+\psi)$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται $7(\chi+\psi)^2+90(\chi+\psi)-973=0$. Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ $\chi+\psi$ καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ $\chi\psi$ ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως τοῦ συστήματος. Οὕτω δὲ προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν κατὰ τὰ γνωστά.

β') Ἡ 2α ἐξίσωσις γράφεται $\sqrt{\psi}.\sqrt{\chi^3}+\sqrt{\psi}.\sqrt{\psi^3}=364$ ἤτοι, $\sqrt{\psi}(\sqrt{\chi^3}+\sqrt{\psi^3})=364$, ὁπότε ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῆς 1ης εὑρίσκομεν $\dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\psi}}=\dfrac{273}{364}=\dfrac{273:7}{364:7}=\dfrac{39}{52}$, ἤτοι $\dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{1521}{2704}$, ἤτοι $\chi=\dfrac{1521}{2704}.\psi$. Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς χ θέσωμεν εἰς τὴν 1ην ἐξίσωσιν ἥτις γράφεται $\chi^2+\psi^2=273$ θὰ εὕρωμεν τὸν ψ καὶ κατόπιν τὸν χ.

γ') Ἐκ τῆς 3ης ἥτις γράφεται $\chi+\psi=29-\omega$. Εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=841-58\omega+\omega^2$ ἢ ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις $289-\omega^2+144=841-58\omega+\omega^2$, ἤτοι $\omega^2-29\omega+204=0$ καὶ $\omega=17$ ἢ 12. Ὅθεν ἔχομεν 1) $\chi\psi=72$ καὶ $\chi+\psi=29-17=12$ καὶ 2) $\chi\psi=72$ καὶ $\chi+\psi=29-12=17$. Καὶ διὰ μὲν τὴν περίπτωσιν 1) τὰ χ,ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-12\varphi+72=0$ αἱ ὁποῖαι εἶναι $6\pm 6i=6(1\pm i)$, διὰ δὲ τὴν 2) τὰ χ,ψ εἶναι ρίζαι τῆς $\varphi^2-17\varphi+72=0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι 8 καὶ 9.

468. α') Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 467 εὑρίσκομεν:

$$\frac{\sqrt{\chi}(\sqrt{\chi^3}-\sqrt{\psi^3})}{\sqrt{\psi}(\sqrt{\chi^3}-\sqrt{\psi^3})}=\frac{585}{234}=\frac{585:117}{234:117}=\frac{5}{2}, \text{ ἤτοι } \frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\psi}}=\frac{5}{2}, \frac{\chi}{\psi}=\frac{25}{4}.$$

Ὅθεν $\sqrt{\chi}=\frac{5\sqrt{\psi}}{2}$ καὶ $\chi=\frac{25\psi}{4}$, ὁπότε ἡ 1η ἐξίσωσις γίνεται

$$\frac{625\psi^2}{16}-\frac{5\psi^2}{2}=585,\quad \frac{585\psi^2}{16}=585 \text{ καὶ } \psi=\pm 4, \text{ ὁπότε } \chi=\pm 25.$$

β') Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=$ $=40+2\omega$, ἤτοι $(\chi+\psi)^2=40+2\omega$ ἢ $8^2=40+2\omega$ καὶ $\omega=12$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi+\psi=8$, $\chi\psi=12$, ὁπότε τὰ χ, ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi^2-8\varphi+12=0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι 6 καὶ 2.

γ') Διὰ προσθέσεως τῶν τριῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2+\omega^2-\chi\psi-\psi\omega-\omega\chi=25$· ἐὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν $\psi(\psi-\omega)=0$ (1) $\chi^2-\omega\chi-9=0$ (2) καὶ $\omega^2-\chi\psi=16$ (3). Οὕτως ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\psi=0$ καὶ $\psi=\omega$. Ἀλλ' ἂν $\psi=0$, ἡ (3) δίδει $\omega=\pm 4$, ὁπότε ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν $\chi=\pm 2\pm\sqrt{13}$. Ἐὰν δὲ $\psi=\omega$ αἱ (2) καὶ (3) γίνονται $\chi^2-\chi\psi=9$ καὶ $\psi^2-\chi\psi=16$, ὁπότε διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $(\psi-\chi)^2=25$, ἤτοι $\psi-\chi=\pm 5$ καὶ $\psi^2-\chi^2=7$, ἤτοι $(\psi-\chi)(\psi+\chi)=7$ ἢ $\psi+\chi=\pm\frac{7}{5}$. Καὶ διὰ τοῦτο εἶναι:

$$\psi=\frac{16}{5}=\omega,\ \chi=-\frac{9}{5}\quad \text{ἢ}\quad \psi=-\frac{16}{5}=\omega \text{ καὶ } \chi=\frac{9}{5}.$$

Προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ

469. Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι $\chi+\psi=\chi\psi$ καὶ $\chi\psi=\frac{\chi}{\psi}$. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γράφεται $\chi\left(\psi-\frac{1}{\psi}\right)=0$. Ὅθεν ἢ $\chi=0$, ὁπότε $\psi=0$ ἢ $\psi-\frac{1}{\psi}=0$, ἤτοι $\psi^2=1$ καὶ $\psi=\pm 1$. Ἀλλὰ διὰ $\psi=1$ ἔχομεν: $\chi+1=1$, ἤτοι $\chi=0$ καὶ διὰ $\psi=-1$ ἔχομεν $\chi-1=-\chi$, ἤτοι $\chi=\frac{1}{2}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λύσις $\chi=0$, $\psi=0$ καθιστᾷ τὸ πρόβλημα ἀπροσδιόριστον.

470. Ἐὰν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχομεν $0{,}5\chi+5=36:$ $:(0{,}3\chi-25)$, ἤτοι $0{,}15\chi^2-11\chi-161=0$ ἢ $3\chi^2-220\chi-3220=0$ κλπ.

471. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι τῆς μορφῆς $2\chi-1$ καὶ $2\chi+1$. Ὥστε $(2\chi-1)^2+(2\chi+1)^2=202$, ἤτοι $8\chi^2+2=202$, $\chi^2=25$ καὶ $\chi=\pm5$ καὶ διὰ τοῦτο οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 9 καὶ 11 ἢ οἱ -11 καὶ -9.

472. Ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\chi-1$, χ καὶ $\chi+1$ ἔχομεν $\chi(\chi-1)(\chi+1)=15\chi$, ἤτοι $\chi(\chi^2-1)-15\chi=0$ ἢ $\chi(\chi^2-16)=0$. Ὅθεν ἢ $\chi=0$. ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι $-1, 0, 1$ ἢ $\chi=\pm4$, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $3, 4, 5$ ἢ οἱ -5, -4, -3.

473. Ἐὰν τὸ ἓν μέρος εἶναι χ τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $27-\chi$. Ὥστε εἶναι $4\chi^2+5(27-\chi)^2=1620$, ἤτοι $\chi^2-30\chi+225=0$ καὶ $\chi=15$ καὶ $27-\chi=12$.

474. Ἐὰν χ,ψ αἱ διαστάσεις καὶ $\chi>\psi$ ἔχομεν $\chi^2+\psi^2=17^2=289$ καὶ $\chi\psi=120$, ἤτοι $2\chi\psi=240$. Ὅθεν $(\chi+\psi)^2=529=23^2$ καὶ $(\chi-\psi)^2=$ $=49=7^2$. Ὅθεν $\chi+\psi=23$ καὶ $\chi-\psi=7$, ἤτοι $\chi=15$ μ. καὶ $\psi=8$ μ.

475. Ἔχομεν ὡς ἄνω $\chi^2+\psi^2=25^2$ καὶ $\chi:\psi=3:4$ ἤτοι $\chi=3\psi:4$. Ὅθεν $9\psi^2+16\psi^2=10000$, $\psi=20$ καὶ $\chi=15$.

476. Ἔχομεν $\chi-\psi=14$ καὶ $\chi\psi=1632$, ἤτοι $(\psi+14)\psi=1632$. $\psi^2+14\psi-1632=0$ καὶ $\chi=48$ ἢ -34, ὁπότε εἶναι $\psi=34$ ἢ -48.

477. Ἔχομεν $\chi-5\sqrt{\chi}=500$ καὶ $\sqrt{\chi}=(5+\sqrt{25+2000}):2=25$ διότι $\sqrt{\chi}>0$. Ὅθεν $\chi=625$.

478. Ἐὰν χ ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι $\chi^2=16(\chi+12)$ ἤτοι $\chi^2-16\chi-$ $-192=0$ καὶ $\chi=24$, διότι $\chi>0$.

479. Ἐὰν ἡ μία τὴν γεμίζει εἰς χ ὥρας, ἡ ἄλλη τὴν γεμίζει εἰς $\chi+27$ ὥρας. Ὥστε εἰς 18 ὥρας, ἡ πρώτη θὰ γεμίσῃ τὰ $18:\chi$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ ἄλλη θὰ γεμίσῃ τὰ $18:(\chi+27)$ αὐτῆς. Ἑπομένως εἶναι $\dfrac{18}{\chi}+\dfrac{18}{\chi+27}=1$, ἤτοι $\chi^2-9\chi-486=0$, $\chi=27$ καὶ $\chi+27=54$ (διότι $\chi>0$).

480. Ἐὰν χ εἶναι ἡ βάσις τὸ ὕψος θὰ εἶναι $9\chi:16$. Οὕτω $9\chi^2:16=99^2$, $\chi^2=99^2.16:9$ καὶ $\chi=99.4:3=132$ μ. Ὅθεν τὸ ὕψος εἶναι $9.132:16=297:4=74{,}25$ μ.

481. Εἶναι $\chi^2+\psi^2=51^2$ καὶ $\dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{8}{15}$, ἤτοι $\chi=\dfrac{8\psi}{15}$.

$289\psi^2=15^2.51^2$, $\psi=45$ μ. καὶ $\chi=24$ μ.

482. Ἔχομεν $\dfrac{\chi}{\mu}\cdot\dfrac{\chi}{\nu}=\alpha$, $\chi^2=\alpha\mu\nu$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\alpha\mu\nu}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικόν, ἐὰν $\alpha\mu\nu>0$.

483. Ἔχομεν $\mu\chi.\nu\chi=\alpha$, $\chi^2=\dfrac{\alpha}{\mu\nu}$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu\nu}}$. Θὰ εἶναι δὲ τὸ χ πραγματικὸν ἐὰν $\dfrac{\alpha}{\mu\nu}>0$, ἤτοι $\alpha\mu\nu>0$.

484. Ἐὰν χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν, τὸ ἐπιτόκιον εἶναι $\chi-\delta$. Τότε δὲ εἶναι $\frac{\alpha.\chi.(\chi-\delta)}{100}=\tau$, ἤτοι $\alpha\chi^2-\alpha\delta\chi-100\tau=0$ (1) καὶ $\chi=\left(\alpha\delta\pm\sqrt{\alpha^2\delta^2+400\alpha\tau}\right):2\alpha$.

Διερεύνησις.—Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Εἶναι δὲ καὶ ἑτερόσημοι, διότι τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶναι ἀρνητικόν. Ἀλλ' ἐκ τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ θετική. Εἰς τὴν μερικὴν δὲ περίπτωσιν εὑρίσκομεν $\chi=6$.

485. Ἐὰν χ εἶναι τὰ ἔτη καὶ ψ τὸ ἐπιτόκιον, ἔχομεν:

$$\frac{\alpha\chi\psi}{100}=\tau \ (1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha(\chi+\mu)(\psi-\varepsilon)}{100}=\tau$$

Ὥστε $\chi\psi=(\chi+\mu)(\psi-\varepsilon)$, ἤτοι $\mu\psi-\varepsilon\chi-\varepsilon\mu=0$ καὶ $\chi=(\mu\psi-\varepsilon\mu):\varepsilon$. Ἐὰν ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) εὑρίσκομεν $\alpha\mu\psi^2-\alpha\mu\varepsilon\psi-100\varepsilon\tau=0$ (2) καὶ $\psi=\left(\alpha\mu\varepsilon\pm\sqrt{\alpha^2\mu^2\varepsilon^2+400\alpha\mu\varepsilon\tau}\right):2\alpha\mu$.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ α, μ, ε, τ εἶναι θετικὰ αἱ ῥίζαι εἶναι πραγματικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἑτερόσημοι (ἄσκ. 484), ἐκ τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ θετική. Εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν εὑρίσκομεν $\psi=5$.

486. Ἐὰν χ εἶναι τὸ πρῶτον κεφάλαιον τὸ ἄλλο θὰ εἶναι $\chi+\delta$ καὶ ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου εἶναι ψ, τὸ ἐπιτόκιον τοῦ ἄλλου εἶναι $\psi-\varepsilon$. Ὥστε ἔχομεν:

$$\frac{\chi\psi\nu_1}{100}=\tau_1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{(\chi+\delta)(\psi-\varepsilon)\nu_2}{100}=\tau_2, \quad \text{ἤτοι}:$$

$$\chi\psi=\frac{100\tau_1}{\nu_1} \ (1) \quad \text{καὶ} \quad (\chi+\delta)(\psi-\varepsilon)=\frac{100\tau_2}{\nu_2} (2)$$

Ἤδη ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν τὸ $\chi\psi$ τὸ ὁποῖον ἐξισοῦμεν μὲ τὴν τιμήν του ἐκ τῆς (1). Ἐκ τῆς νέας δὲ ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ, τὴν ὁποίαν θέτομεν εἰς τὴν (1). Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν τὸ χ καὶ κατόπιν τὸ $\chi+\delta$.

487. Ἔστω ὅτι ἠγοράσθησαν χ μ. πρὸς ψ δραχμὰς τὸ μέτρον. Τότε δὲ ἔχομεν

$$\psi\chi=\alpha \ (1) \quad \text{καὶ} \quad (\psi-\beta)(\chi+\gamma)=\alpha$$

ὅθεν $\psi\chi=(\psi-\beta)(\chi+\gamma)$ καὶ $\psi=(\beta\chi+\beta\gamma):\gamma$.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\beta\chi^2+\beta\gamma\chi-\alpha\gamma=0$, καὶ

$$\chi=\left(-\beta\gamma\pm\sqrt{\beta^2\gamma^2+4\alpha\beta\gamma}\right):2\beta, \quad \text{ὁπότε} \quad \psi=\alpha:\chi.$$

Ἡ διερεύνησις ὁμοία μὲ τὴν τῆς ἀσκήσεως 484.

488. Ἐὰν $\alpha>\beta>\gamma$ καὶ χ τὸ ζητούμενον μῆκος, θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\chi)^2=(\beta+\chi)^2+(\gamma+\chi)^2$ ἤτοι $\chi^2+2(\beta+\gamma-\alpha)\chi+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2=0$ καὶ $\chi=-(\beta+\gamma-\alpha)\pm\sqrt{(\beta+\gamma-\alpha)^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}=\alpha-(\beta+\gamma)\pm\sqrt{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$.

489. Ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ΣΣ', (ΣΣ')$=\delta$ καὶ (ΣΜ)$=\chi$. Ἐὰν τῆς εὐθείας ΣΣ' ὁρίσωμεν ὡς θετικὴν φορὰν τὴν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ὑποθέσωμεν $\delta>0$, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ Μ ἐπὶ τῆς εὐθείας, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα τοῦ Chasles (βλέπε «Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν» Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 39) τὴν σχέσιν $(ΜΣ')=δ-χ$. Ἀλλ' ἐὰν $α^2$ εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ποὺ δέχεται ἐκ τοῦ Σ τὸ σημεῖον τὸ ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν 1, καὶ διὰ τοῦ $β^2$ τὸ ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Σ', τὸ Μ δέχεται ἐκ τοῦ Σ ποσὸν φωτὸς $α^2:χ^2$ καὶ ἐκ τοῦ Σ' ποσὸν φωτὸς $β^2:(δ-χ)^2$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἴσα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $α^2:χ^2=β^2:(δ-χ)^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $α:χ=β:(δ-χ)$ ἢ $α:χ=-β:(δ-χ)$, ὁπότε $χ=αδ:(α+β)$ (1) ἢ $χ=αδ:(α-β)$ (2).

Διερεύνησις. Ἡ λύσις (1) εἶναι πάντοτε θετική. Ἐπειδὴ δὲ $α:(α+β)<1$, ἕπεται $χ<δ$. Ὥστε πάντοτε ὑπάρχει μεταξὺ Σ καὶ Σ' σημεῖόν τι Μ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν. Καὶ 1) ἂν $α=β$, τότε εἶναι $χ=δ:2$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι μέσον τῆς ΣΣ', 2) ἂν $α>β$, εἶναι $χ>δ:2$ καὶ τότε τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον τοῦ Σ'. 3) ἂν εἶναι $α<β$, εἶναι $δ<δ:2$, καὶ τότε τὸ Μ εἶναι πλησιέστερον τοῦ Σ. Ὥστε ἂν $α\neq β$, τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον σημεῖον.

Ἡ λύσις (2) ἤτοι ἡ $χ=αδ:(α-β)$ ὑπάρχει μόνον ὅταν $α\neq β$. Καὶ ἂν $α<β$ ἡ λύσις εἶναι ἀρνητική, ἤτοι ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Σ καὶ τὸ σημεῖον τοῦτο ὑπάρχει πέραν τοῦ Σ' ἂν $α>β$, διότι τότε $α:(α-β)>1$, ἤτοι $χ>δ$.

490. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τραπέζιον εἰς ὃ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ ἡμικυκλίου ἀκτῖνος ϱ, ὁπότε $(ΑΒ)=2ϱ$· εἶναι δὲ $ΑΔ=ΒΓ$, διότι αἱ παράλληλοι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὁρίζουν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἴσα τόξα. Ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΓΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι $ΑΖ=ΒΗ$ καὶ διὰ τοῦτο $2τ=ΑΒ+2.ΑΔ+ΓΔ=ΑΒ+2.ΑΔ+ΑΒ-2.ΑΖ$, ἤτοι $τ=ΑΒ+ΑΔ-ΑΖ.=2ϱ+χ-(ΑΖ)$ (ι) ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν πλευρὰν ΑΔ. Ἀλλὰ τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν $(ΑΔ)^2=(ΑΒ).(ΑΖ)$, ἤτοι $(ΑΖ)=\dfrac{χ^2}{2ϱ}$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ (ι) γίνεται $χ^2-2ϱχ+2τϱ-4ϱ^2=0$, ὁπότε $χ=ϱ\pm\sqrt{5ϱ^2-2ϱτ}$. Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει νὰ εἶναι:

$$2ϱτ\leqslant 5ϱ^2,\quad ἤτοι\ 2τ\leqslant 5ϱ.$$

491. α') Ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι ἡ $(ΜΑ)^2+(ΜΒ)^2+(ΜΓ)^2=k^2$(1). Ἀλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ Μ φέρωμεν τὰς ΜΔ καὶ ΜΕ καθέτως ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ ΜΑ εἶναι διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου ΜΔΑΕ καὶ ἑπομένως εἶναι

$$(ΜΑ)^2=(ΑΔ)^2+(ΜΔ)^2=(ΜΕ)^2+(ΜΔ)^2.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $(ΜΒ)^2=(ΜΔ)^2+(ΔΒ)^2=(ΜΔ)^2+(ΑΒ-ΜΕ)^2$ καὶ $(ΜΓ)^2=(ΜΕ)^2+(ΓΕ)^2=(ΜΕ)^2+(ΑΓ-ΜΔ)^2$. Ὥστε ἐὰν $(ΒΓ)=α$, $(ΓΑ)=β$ καὶ $(ΑΒ)=γ$, θέσωμεν δὲ $(ΜΔ)=χ$ καὶ $(ΜΕ)=ψ$, ἡ σχέσις (1) γίνεται $ψ^2+χ^2+χ^2+(γ-ψ)^2+ψ^2+(β-χ)^2=k^2$.(2). Ἀκόμη δὲ ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΔΜ καὶ ΑΒΓ λαμβάνομεν: $(ΜΔ):(ΑΓ)=(ΒΔ):(ΑΒ)$, ἤτοι $χ:β=(γ-ψ):γ$ (3). Οὕτως ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ. Τότε δὲ ἐκ τῆς κορυφῆς Α, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ, τμῆμα ΑΔ ἴσον μὲ ψ (ἢ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμῆμα ΑΕ ἴσον μὲ χ) καὶ ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἧς ἡ τομὴ μετὰ τῆς ΒΓ ὁρίζει τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ.

β΄) Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $(Μ\Delta)(ΜΕ)=\lambda^2$, ἤτοι τὴν $\chi\psi=\lambda^2$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς εὑρεθείσης ἀνωτέρω ἐξισώσεως (3), εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ.

γ΄) Ἐδῶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+\psi^2=\mu^2$· ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ.

492. Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχομεν νὰ λύσωμεν α΄) τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=\alpha^2$ καὶ $\chi+\psi=\lambda$. β΄) τὸ $\chi^2+\psi^2=\alpha^2$ καὶ $\chi\psi=\alpha\upsilon$. καὶ γ΄) ἐάν φ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα, τὸ σύστημα $\chi+\psi+\varphi=2\tau$, $\chi^2+\psi^2=\omega^2$ καὶ $\chi\psi=\omega\upsilon$.

493. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ χ καὶ $\chi+3$, ἔχομεν

$$\chi(\chi+3)=54,\ \chi^2+3\chi-54=0 \text{ καὶ } \chi=6 \text{ ἢ } -9.$$

494. Ἔχομεν $(\chi-1)^2-\chi=29$, $\chi^2-3\chi-28=0$ καὶ $\chi=7$ ἢ -4.

495. Ἔχομεν $\chi\psi=2$ καὶ $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=\frac{17}{12}$, ἤτοι $\chi\psi=2$, $12\chi+$ $+12\psi=17\chi\psi=34$. Ἐπειδὴ δὲ $\psi=2:\chi$ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $6\chi^2-17\chi+12=0$, ὁπότε $\chi=\frac{4}{3}$ ἢ $\frac{3}{2}$ καὶ ἀντιστοίχως $\psi=\frac{3}{2}$ ἢ $\frac{4}{3}$.

496. Τὸ κλάσμα εἶναι $\frac{\chi-4}{\chi}$, ἡ δὲ ἐξίσωσις εἶναι $\frac{\chi-4+7}{\chi-5}-$ $-\frac{\chi-4}{\chi}=\frac{16}{15}$, ἤτοι $4\chi^2-65\chi+75=0$ καὶ $\chi=15$ ἢ $5:4$. Οὕτω τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι 11/15. Ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς $\chi=15$, διότι ἡ ἄλλη τιμὴ τοῦ χ δίδει κλάσμα $-11/5$, ὅπερ γίνεται $-3:0$.

497. Ἐὰν τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφὲ ἐκόστισε χ δραχμάς, ἠγόρασε $\frac{160000}{\chi}$ χλγρ. καφὲν καὶ $\frac{180000}{\chi+5000}$ χλγ. τέϊον. Ὥστε εἶναι $\frac{160000}{\chi}-$ $-\frac{180000}{\chi+5000}=40$, ἤτοι $\chi^2+5500\chi-20000000=0$ καὶ δεκτὴ τιμὴ $\chi=2500$ δρχ.

498. Ἐὰν χ ἦσαν οἱ ἄνδρες, αἱ γυναῖκες ἦσαν $\chi-3$. Ἀλλὰ τότε ἕκαστος ἀνὴρ καὶ ἑκάστη γυνὴ ἐπλήρωσαν ἀντιστοίχως $\frac{175000}{\chi}$ καὶ $\frac{80000}{\chi-3}$. Οὕτω εἶναι $\frac{175000}{\chi}-\frac{80000}{\chi-3}=5000$, ἤτοι $\chi^2-22\chi+105=0$, $\chi=15$ ἢ 7 καὶ ἀντιστοίχως, $\chi-3=12$ ἢ 4.

499. Ἔστω χ οἱ ἄνδρες καὶ ψ αἱ γυναῖκες. Τότε εἶναι :

$$\chi+\psi=27 \text{ καὶ } \frac{210000}{\chi}-\frac{420000}{\psi}=15000, \text{ ἤτοι :}$$

$$15000\chi\psi+4200000\chi-210000\psi=0 \text{ ἤτοι } \chi\psi+28\chi-14\psi=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\psi=27-\chi$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $\chi^2-69\chi+378=0$, ἐξ ἧς $\chi=63$ ἢ 6. Ἀλλ' ἡ λύσις $\chi=63$ προφανῶς ἀπορρίπτεται καὶ μένει ἡ $\chi=6$. Ὥστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 6 καὶ αἱ γυναῖκες $27-6=21$.

500. Ἔχομεν $\chi+\sqrt{\chi}=272$ ἤτοι $\chi+\sqrt{\chi}-272=0$ καὶ $\sqrt{\chi}=$ $=(-1\pm\sqrt{1+1088}):2=-17$ ἢ 16. Ἀλλ' ἐκ τῶν ριζῶν τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ $\sqrt{\chi}=16$, ὁπότε $\chi=256$, διότι ἡ ἄλλη ρίζα $-\sqrt{\chi}=17$ ἐξ ἧς $\chi=289$ ἐπαληθεύει τὴν συζυγῆ $\chi-\sqrt{\chi}=272$.

501. Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων Α, Β, Γ κλπ. Τότε ἐξ ἑκάστου σημείου δυνάμεθα νὰ φέρωμεν $\chi-1$ εὐθείας καὶ ἑπομένως ἐξ ὅλων τῶν σημείων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν $\chi(\chi-1)$ εὐθείας ἐν ὅλῳ. Ἀλλ' οὕτως ὑπολογίζομεν π.χ. καὶ τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ἤχθη ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β καὶ τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι εἶναι πράγματι ἐν ὅλῳ $\chi(\chi-1):2$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\frac{\chi(\chi-1)}{2}=78$ καὶ $\chi^2-\chi-156=0$ καὶ $\chi=13$, διότι ἡ τιμὴ $\chi=-12$ δὲν εἶναι δεκτή.

502. Ἂν χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἐξ ἑκάστης τούτων ἄγονται $\chi-3$ διαγώνιοι καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι $\chi(\chi-3)=208$, $\chi^2-3\chi-208=0$ καὶ $\chi=16$ (ἡ ἄλλη ρίζα δὲν εἶναι δεκτή).

503. Ἂν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ α' πολυγώνου, ὁ τοῦ β' θὰ εἶναι $\chi-6$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαγωνίων των εἶναι ἀντιστοίχως

$$\frac{\chi(\chi-3)}{2} \text{ καὶ } \frac{(\chi-6)(\chi-6-3)}{2}.$$

Ὥστε εἶναι
$$\frac{\chi(\chi-3)}{2}=\frac{(\chi-6)(\chi-9)}{2}\cdot\frac{10}{3}$$

$$\text{ἤτοι } 7\chi^2-141\chi+540=0 \text{ καὶ } \chi=15.$$

504. Ἂν χ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἔχομεν $(\chi+3)^2=2{,}25\chi^2$ ἤτοι $1{,}25\chi^2-6\chi-9=0$ καὶ $\chi=6$.

505. Ἂν χ εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ ἄλλη εἶναι $0{,}75\chi$. Ἀλλὰ τότε εἶναι $\frac{1}{2}\cdot\chi\cdot0{,}75\chi=150$, ἤτοι $\chi^2=400$ καὶ $\chi=20$.

506. Ἂν χ εἶναι ἡ βάσις, ἕκαστον σκέλος θὰ εἶναι $\chi-19$ καὶ τὸ ὕψος $\chi-8$. Εἶναι δὲ $(\chi-8)^2=(\chi-19)^2+\chi^2:4$, ἤτοι

$$\chi^2+88\chi-1188=0 \text{ καὶ } \chi=-44+\sqrt{3124}.$$

507. Ἔχομεν $\chi(\chi-4)=192$, $\chi^2-4\chi-192=0$ καὶ $\chi=16$.

508. Αἱ διαγώνιοι ρόμβου, αἵτινες ἐδῶ εἶναι χ καὶ $\chi+14$ τέμνον—

ται δίχα καὶ καθέτως. Ὥστε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὅπερ σχηματίζουν τὰ ἡμίση τῶν διαγωνίων μετὰ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ῥόμβου λαμβάνομεν

$$\left(\frac{\chi}{2}\right)^2+\left(\frac{\chi+14}{2}\right)^2=17^2,$$

ἤτοι $\chi^2+14\chi-480=0$ καὶ $\chi=16$.

509. Τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἔχει διαγώνιον τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἥτις εἶναι 25 μ. Ὥστε ἔχομεν $\chi^2+(\chi-17)^2=25^2$, ἤτοι

$\chi^2-17\chi-168=0$ καὶ $\chi=24$.

510. Ἂν χ καὶ ψ αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων, αἱ διαγώνιοι τούτων εἶναι $\chi\sqrt{2}$ καὶ $\psi\sqrt{2}$. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=8621$ καὶ $2\chi\psi=8540$, ἤτοι $(\chi+\psi)^2=8621+8540=131^2$, ἐξ οὗ $\chi=70$, $\psi=61$.

511. Ἂν εἰς χ ὥρας γεμίζῃ ἡ 1η βρύση τὴν δεξαμενήν, εἰς 2,4 ὥρας γεμίζῃ τὰ $\frac{2,4}{\chi}$ αὐτῆς· ὁμοίως, ἐὰν ἡ 2α βρύση εἰς ψ ὥρας γεμίζῃ τὴν δεξαμενήν, εἰς 2,4 ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{2,4}{\psi}$ αὐτῆς. Οὕτως ἔχομεν τὸ σύστημα $\psi-\chi=2$ καὶ $\frac{2,4}{\chi}+\frac{2,4}{\psi}=1$, ἤτοι $\chi\psi-2,4\chi-2,4\psi=0$, ἢ ἐπειδὴ $\psi=2+\chi$, $\chi(2+\chi)-2,4\chi-2,4(2+\chi)=0$ ἢ $\chi^2-2,8\chi-4,8=0$ καὶ $\chi=4$ καὶ $-1,2$ (μὴ δεκτή). Ὥστε $\psi=4+2=6$.

512. Ἔστω χ ἡ κατάθεσις τοῦ 1ου καὶ ψ ἡ τοῦ 2ου. Εἶναι δὲ τὰ κέρδη τῶν δύο ὁμοῦ $2700000-2000000=700000$ δραχμ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ κέρδος τῆς 1 δραχμῆς εἰς 1 μῆνα ἀποτελεῖ ἓν μερίδιον, αἱ χ δραχμαὶ εἰς 2 μῆνας ἀποτελοῦν 2χ μερίδια καὶ αἱ ψ δραχμαὶ εἰς 8 μῆνας ἀποτελοῦν 8ψ μερίδια. Ὥστε αἱ 700000 δραχμαὶ κέρδους ἀποτελοῦν $2\chi+8\psi$ μερίδια καὶ ἑπομένως ὁ 1ος ἐκέρδισε $\frac{700000.2\chi}{2\chi+8\psi}$, ὁ δὲ δεύτερος ἐκέρδισε $\frac{700000.8\psi}{2\chi+8\psi}$, ἐπειδὴ δὲ οὗτος ἔλαβεν κέρδος καὶ κατάθεσιν 900000 δραχμὰς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi+\frac{700000.8\psi}{2\chi+8\psi}=900000$, ἐπειδὴ $\chi=2000000-\psi$, ἔχομεν $\psi+\frac{700000.8\psi}{4000000+6\psi}=900000$, ἐξ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν ῥίζαν $\psi=500000$. Ὅθεν $\chi=1500000$.

513. Ἔστω χ τὸ 1ον κεφάλαιον ὅπερ ἐτοκίσθη εἰς ψ μῆνας· ὥστε εἶναι $\frac{6\chi\psi}{1200}=1280000$, ἤτοι $\chi\psi=256000000$ (1). Ἀλλὰ τότε τὸ

2ον κεφάλαιον είναι 30000000$-\chi$ καὶ ἐτοκίσθη ἐπὶ $\psi-4$ μῆνας. Ὥστε εἶναι

$$\frac{6(30000000-\chi)(\psi-4)}{1200}=840000,$$

ἤτοι $(30000000-\chi)(\psi-4)=168000000$ (2).

Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἰς τὰς ὁποίας πρὸς εὐκολίαν ἐκφράζομεν τὰς δραχμὰς εἰς ἑκατομμύρια. Οὕτως ἔχομεν $\chi\psi=256$, $(30-\chi)(\psi-4)=168$. Ἐκ τῆς 2ας τούτων εὑρίσκομεν $30\psi-\chi\psi-120+4\chi=168$ ἢ ἐπειδὴ $\chi\psi=256$ (3) εὑρίσκομεν $15\psi+2\chi=272$ καὶ $\psi=\frac{272-2\chi}{15}$. Ἤδη ἐὰν τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ψ θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (3) εὑρίσκομεν

$$\chi^2-136\chi+1920=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi=68\pm\sqrt{2704}=68\pm54=122$$

ἢ 14, ἤτοι 122000000 ἢ 14000000. Ἀλλ' ἐκ τῶν λύσεων τούτων ἡ 1η προφανῶς δὲν εἶναι δεκτή. Ὥστε τὸ 1ον κεφάλαιον εἶναι 14000000 καὶ τὸ 2ον 30000000$-$14000000$=$16000000.

514. Ἂν χ καὶ ψ εἶναι ὁ 1ος καὶ ὁ 3ος ἀριθμός, ὁ 2ος καὶ ὁ 4ος εἶναι $\chi-4$ καὶ $\psi-3$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $\chi:(\chi-4)=\psi:(\psi-3)$ καὶ $\chi^2+(\chi-4)^2+\psi^2+(\psi-3)^2=62{,}5$. Ἀλλ' οὕτως ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\psi=3\chi:4$, ὁπότε ἡ 2α γίνεται $\chi^2-4\chi-12=0$ ἐξ ἧς $\chi=6$ ἢ -2 καὶ ἀντιστοίχως $\psi=3\chi:4=9/2$ ἢ $-3/2$. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 6, 2, 9/2 καὶ 3/2 ἢ οἱ -2, -6, $-3/2$ καὶ $-9/2$.

515. Ἂν χ εἶναι αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες, ὁ ἀριθμὸς εἶναι $10\chi+\psi$. Ὥστε εἶναι $(10\chi+\psi):\chi\psi=16:3$ καὶ $10\chi+\psi-9=10\psi+\chi$. Αἱ ἐξισώσεις δὲ αὗται γίνονται $16\chi\psi-30\chi-3\psi=0$ καὶ $\chi-\psi=1$, ἐξ ἧς $\chi=1+\psi$. Οὕτω δὲ ἔχομεν $16(1+\psi)\psi-30(1+\psi)-3\psi=0$, ἤτοι

$$\psi=(17\pm\sqrt{2209}):32=\psi=(17\pm47):32=2 \quad \text{ἢ} \quad -15:16.$$

Ἀλλ' ἡ 2α ρίζα προφανῶς δὲν γίνεται δεκτή. Ὥστε ἔχομεν $\psi=2$ καὶ $\chi=1+\psi=3$ ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 32.

516. Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ψ τὸ τῶν δεκάδων καὶ φ τὸ τῶν μονάδων. Οὕτως ἔχομεν:

$$\psi^2=\chi\varphi, \quad (100\chi+10\psi+\varphi):(\chi+\psi+\varphi)=124:7 \quad \text{καὶ}$$
$$100\chi+10\psi+\varphi=100\varphi+10\psi+\chi-594,$$

ἤτοι ἔχομεν τὸ σύστημα: $\psi^2=\chi\varphi$, $64\chi-6\psi-13\varphi=0$ καὶ $\chi-\varphi=-6$ ἐξ ἧς $\chi=\varphi-6$, ὁπότε ἡ 2α ἐξίσωσις γίνεται $64(\chi-6)-6\psi-13\varphi=0$, ἐξ ἧς $\psi=(17\varphi-128):2$. Οὕτω δὲ ἡ $\psi^2=\chi\varphi$ γίνεται: $(17\varphi-128)^2=4(\varphi-6)\varphi$, ἤτοι $285\varphi^2-4328\varphi+16384=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν δεκτὴν λύσιν $\varphi=8$. Ὥστε $\chi=8-6=2$ καὶ $\psi=4$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 248.

517. Εἶναι $\psi^2=\chi\varphi$, $\chi+\psi+\varphi=21$ καὶ $\chi^2+\psi^2+\varphi^2=189$. Ὥστε $(\chi+\psi+\varphi)^2=21^2$, ἤτοι $\chi^2+\psi^2+\varphi^2+2\chi\psi+2\chi\varphi+2\psi\varphi=441$ (ι). Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν 1ην καὶ 3ην ἐξίσωσιν ἡ (ι) γίνεται $\psi(\chi+\psi+\varphi)=$

$=126$, ἤτοι $21\psi=126$ καὶ $\psi=6$. Οὕτως αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις γίνονται $\chi\varphi=36$ καὶ $\chi+\varphi=15$ καὶ διὰ τοῦτο τὰ χ, φ εἶναι ρίζαι τῆς $\omega^2-15\omega+36=0$, ἤτοι εἶναι $\chi=12$ καὶ $\varphi=3$ ἢ $\chi=3$ καὶ $\varphi=12$.

518. Ἔστω ὅτι ἡ 1η βρύσις γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς χ ὥρας καὶ ἡ 2α εἰς ψ ὥρας. Ἑπομένως εἰς 6 ὥρας γεμίζουν τὰ $\frac{6}{\chi}$ καὶ $\frac{6}{\psi}$ τῆς δεξαμενῆς ἡ 1η καὶ ἡ 2α ἀντιστοίχως. Ὅθεν $\frac{6}{\chi}+\frac{6}{\psi}=1$ (1).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ μόνον ἐκ τῆς 1ης βρύσεως ἐπὶ $\frac{3\psi}{5}$ ὥρας. Κατ' αὐτὰς δὲ γεμίζει αὕτη τὰ $\frac{3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε ὑπολείπεται νὰ γεμίσῃ μόνη ἡ 2α βρύσις τὰ $1-\frac{3\psi}{5\chi}=\frac{5\chi-3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἀλλ' ἐὰν ἠνοίγοντο μαζύ, ἡ 1η θὰ ἐγέμιζε εἰς 6 ὥρας τὰ $\frac{2}{3}\cdot\frac{5\chi-3\psi}{5\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἀλλ' ὡς εἴδομεν ἐν ἀρχῇ, ἡ 1η εἰς 6 ὥρας γεμίζει τὰ $\frac{6}{\chi}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε ἔχομεν $\frac{6}{\chi}=\frac{2(5\chi-3\psi)}{15\chi}$ (2). Ἤδη εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) αἵτινες γράφονται $6\chi+6\psi=\chi\psi$ καὶ $90=10\chi-6\psi$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὰς δεκτὰς λύσεις $\chi=15$ καὶ $\psi=6$.

519. Κατὰ τοὺς τύπους τῆς Φυσικῆς «βλέπε Πίνακας Λογαρίθμων, (νέα ἔκδοσις), Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 207 — 208», ἐδῶ ἔχομεν $s=\frac{1}{2}gt^2$, ὅπου s τὸ διάστημα, $g=9{,}80$ καὶ t ὁ χρόνος εἰς δεύτερα λεπτά. Οὕτως ἔχομεν $44{,}1=9{,}8.t^2:2$, ἤτοι $t=3\delta$.

520. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $125{,}5=9{,}80.t^2:2$, ἤτοι $t=5\delta$. (διότι ὁ χρόνος τῆς ἀνόδου ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον τῆς καθόδου).

521. Ἐδῶ ἔχομεν $v_0=\sqrt{2gh}$, ὅπου v_0 ἡ ἀρχικὴ ταχύτης, καὶ h τὸ ὕψος, ἤτοι $v_0=\sqrt{2.9{,}8.122{,}5}=\sqrt{2401}=49$.

522. Ἐδῶ ἔχομεν $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$, ἤτοι $1460=185t-\frac{1}{2}\cdot 9{,}80t^2$, καὶ $4{,}9t^2-185t+1460=0$ κλπ.

523. Ἔστω χ ἡ πίεσις τῆς σφαίρας ἥτις ἐνεργεῖ καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Τὸ βάρος ὅμως τοῦ σώματος (ἡ συνισταμένη) ἔχει διεύθυνσιν κατακόρυφον, ἡ δὲ δύναμις ἣν ἰσορροπεῖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον. Οὕτως αἱ τρεῖς αὐταὶ δυνάμεις συνιστοῦν ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἑπομένως εἶναι $\chi=\sqrt{41^2-9^2}=40$.

524. Ἐδῶ ἔχομεν τὸν τύπον $s=\frac{1}{2}gt^2\eta\mu\omega$ ὅπου s εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ἐπιπέδου καὶ ω ἡ κλίσις αὐτοῦ, καὶ $\eta\mu\omega=\frac{10}{39{,}3}$.

Ὅθεν $39{,}3=\frac{1}{2}.9{,}8.\frac{10}{39{,}3}.t^2$ ἢ $t=\frac{39{,}3}{7}=5{,}61\delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

Ἀσκήσεις. *519.* Αἱ α΄) β΄) γ΄) δ΄) αὔξουσαι διότι $\omega>o$ καὶ αἱ ε΄) στ΄) φθίνουσαι, διότι $\omega<o$.

520_1. Ἔχομεν α΄) $\tau=9+9.4=45$ β΄) $\tau=-3+9.2=15$ γ΄) $\tau=\alpha+73\beta=$ $=\alpha+21\beta$.

521_1. Ἔχομεν $231=\alpha+9\omega$ καὶ $2681=\alpha+19\omega$, ἤτοι $\omega=245$ καὶ $\alpha=-1974$.

522_1. Ἐπειδὴ $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, εἶναι $\omega=\frac{\tau-\alpha}{\nu-1}=\frac{3{,}2-0{,}2}{6-1}=\frac{3}{5}$.

523_1. Εἶναι $\alpha=\tau-(\nu-1)\omega=6{,}25-9.0{,}75=-0{,}5$.

524_1. Εἶναι $\nu=(\tau-\alpha):\omega+1=(9-3):2+1=4$.

525. Εἶναι $\tau=6{,}35+19.(-0{,}25)=1{,}6$.

526. Εἶναι $\omega=(\tau-\alpha):(\nu-1)=(25-4):(8-1)=3$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὴν πρόοδον 4, 7, 10. . . . . 22, 25.

527. Ὁμοίως εἶναι $\omega=(2-1):(11-1)=1:10$ καὶ ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶναι 1· 1,1· 1,2· . . . 1.9·2.

528. Ἐκ τῶν κτυπημάτων τοῦ ὡρολογίου εἰς τὸ δωδεκάωρον ἔχομεν τὴν πρόοδον 1,2,3, . . . 11,12, ἧς οἱ ὅροι ἔχουν ἄθροισμα $(1+12).12:2=$ $=78$. Ἑπομένως τὰ κτυπήματα εἰς ἓν ἡμερονύκτιον εἶναι $78.2=156$.

529. Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$ τεθῇ κατὰ σειρὰν α=1,2,3, . . . ν καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες εὑρίσκεται ἡ ἰσότης:

$(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3\ldots+\nu)+\nu$. Ἐπειδὴ δὲ $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ἕπεται $3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)=$

$=(\nu+1)^3-\frac{3}{2}\nu(\nu+1)-(\nu+1)$ καὶ

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.2.3}=\Sigma_2$$

530. Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα $(\alpha+1)^4=\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1$ τεθῇ κατὰ σειρὰν $\alpha=1, 2, 3, \ldots \nu$ λαμβάνομεν·

$$\begin{aligned} 1^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 2^4 &= 1^4+4.1^3+6.1^2+4.1+1 \\ 3^4 &= 2^4+4.2^3+6.2^2+4.2+1 \\ 4^4 &= 3^4+4.2^3+6.3^2+4.3+1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\nu+1)^4 &= \nu^4+4.\nu^3+6.\nu^2+4.\nu+1 \end{aligned}$$

Ἤδη προσθέτομεν τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη· μετὰ δὲ τὰς ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν

$$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots \nu^3)+6(1^2+2^2+\ldots\nu^2)+4(1+2+\ldots \nu)+\nu+1 \quad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι (ἄσκ. 529)· $1+2+3+\ldots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$ καὶ

$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1\ldots3}$ ἡ ταυτότης (1) μετὰ τὰς ἀντικαταστάσεις γράφεται

$$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots+\nu^3)+\nu(\nu+1)(2\nu+1)+(2\nu+1)(\nu+1) \quad ἢ$$

$$(\nu+1)^4=4(1^3+2^3+\ldots+\nu^3)+(2\nu+1)(\nu+1)^2 \cdot \text{ ἄρα εἶναι}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\frac{(\nu+1)^4-(2\nu+1)(\nu+1)^2}{4}=\frac{(\nu+1)^2.\ \nu^2}{4} \quad ἢ$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2=(1+2+\ldots+\nu)^2.$$

531. α΄) Ἔχομεν τὴν πρόοδον 1, 2, 3 ... 24, 25. Ὥστε
$\Sigma=(1+25).25:2=325.$

β΄) Ἐδῶ γνωρίζομεν τὰ $\alpha=1$, $\omega=2$ καὶ $\nu=30$. Ὥστε
$\Sigma=[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu:2=(2.1+29.2).30:2=60.30:2=30^2=900.$

γ΄) Γνωρίζομεν τὰ $\alpha=2$, $\omega=2$, $\nu=40$. Ὅθεν
$\Sigma=[2.2+39.2].\,20=82.20=1640.$

532. Ἐπειδὴ $\alpha=-1$ καὶ $\tau=-\nu$, εἶναι $\Sigma=(-1-\nu)\nu:2=-(1+\nu)\nu:2.$

533. Εἶναι $1014=(12+144).\nu:2.$ Ὅθεν
$\nu=1014.2:(12+144)=2028:156=13.$

534. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=[2\alpha+(\nu-1)\omega]\nu:2$ εὑρίσκομεν $\omega=[(2\Sigma:\nu)-2.\alpha]:(\nu-1)=[(2.567:14)-2.8]:(14-1)=(81-16):13=65:13=5.$

535. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=(\alpha+\tau)\nu:2$ εὑρίσκομεν $\alpha=(2\Sigma:\nu)-\tau=(728.2:16)-63=91-63=28.$ Ἤδη ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ εὑρίσκομεν $\omega=(\tau-\alpha):(\nu-1)=(63-28):(16-1)=35:15=7/3.$

536. Ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ εὑρίσκομεν $\alpha=\tau-(\nu-1)\omega=15-(\nu-1)(-12)=3+12\nu$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=(\alpha+\tau)\nu:2$ λαμβάνομεν $456=(3+12\nu+15)\nu:2$, ἤτοι $12\nu^2+18\nu-912=0$ ἢ $2\nu^2+3\nu-152=0$ καὶ $\nu=8$ διότι ἡ ἄλλη λύσις $-19/2$ δὲν εἶναι δεκτή.

537. Αἱ 12 διαδοχικαὶ δόσεις εἶναι 10000, 15000, 20000 κλπ. Ὅθεν $\Sigma=[2.10000+11.5000].12:2=450000$.

538. Οἱ ὅροι 2ος, 4ος, 7ος καὶ 11ος εἶναι ἀντιστοίχως $\alpha+\omega$, $\alpha+3\omega$, $\alpha+6\omega$ καὶ $\alpha+10\omega$. Ὥστε $(\alpha+\omega)+(\alpha+6\omega)=92$ καὶ $(\alpha+3\omega)+(\alpha+10\omega)=71$, ἤτοι $2\alpha+7\omega=92$ καὶ $2\alpha+13\omega=71$. Ὥστε $13\omega-7\omega=71-92$, ἤτοι $\omega=-7/2=-3{,}5$ καὶ ἑπομένως $\alpha=58{,}25$. Οὕτως οἱ ἄνω ὅροι εἶναι κατὰ σειρὰν $\alpha+\omega=58{,}25-3{,}5=54{,}75$, $\alpha+3\omega=47{,}75$, $\alpha+6\omega=37{,}25$ καὶ $\alpha+10\omega=23{,}25$.

539. Ἡ πρόοδος εἶναι α, $\alpha+\omega$, $\alpha+2\omega, \ldots \alpha+11\omega$. Ὥστε ἔχομεν $(\alpha+4\omega)+(\alpha+5\omega)+(\alpha+6\omega)+(\alpha+7\omega)=74$, ἢ τὰ $2\alpha+11\omega=37$ (1) ὡς καὶ $\alpha(\alpha+11\omega)=70$ (2). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\alpha^2-37\alpha+70=0$ καὶ $\alpha=35$ ἢ 2. Ὥστε $\omega=3$ ἢ -3, ἤτοι ἡ ζ. πρόοδος εἶναι ἡ 35, 32, 29…2 ἢ ἡ 2, 5, 8,…35.

540. Ἐὰν χ εἶναι ὁ 3ος ὅρος οἱ πέντε ὅροι εἶναι οἱ $\chi-2\omega, \chi-\omega$, χ, $\chi+\omega$, $\chi+2\omega$. Ὥστε εἶναι·

$$\chi-2\omega+\chi-\omega+\chi+\chi+\omega+\chi+2\omega=40, \text{ ἤτοι } \chi=8 \text{ καὶ}$$

$(8-2\omega).(8-\omega).8.(8+\omega).(8+2\omega)=12320$, ἢ $(64-4\omega^2)(64-\omega^2).8=12320$, $(64-4\omega^2)(64-\omega^2)=1540$, $\omega^4-80\omega^2+639=0$. Ὅθεν $\omega^2=71$ ἢ 9, ἤτοι $\omega=\pm\sqrt{71}$ ἢ ±3. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ

$$8-6=2,\ 8-3=5,\ 8,\ 8+3=11,\ 8+6=14 \text{ ἢ}$$
$$8-2\sqrt{71},\quad 8-\sqrt{71},\quad 8,\quad 8+\sqrt{71},\quad 8+2\sqrt{71}.$$

541. Εἶναι $\omega=\dfrac{\nu-1}{\nu}-1=-\dfrac{1}{\nu}$; $\tau=1+(\nu-1).\left(-\dfrac{1}{\nu}\right)=\dfrac{1}{\nu}$ καὶ $\Sigma=\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right).\nu:2=(\nu+1):2$.

546. Ἂν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς προόδου εἶναι οἱ $\chi-3\omega$, $\chi-\omega$, $\chi+\omega$ καὶ $\chi+3\omega$, ἔχομεν $(\chi-3\omega)+(\chi-\omega)+(\chi+\omega)+(\chi+3\omega)=20$ ἤτοι $4\chi=20$ καὶ $\chi=5$. Ὅθεν εἶναι $\dfrac{1}{5-3\omega}+\dfrac{1}{5-\omega}+\dfrac{1}{5+\omega}+\dfrac{1}{5+3\omega}=\dfrac{25}{24}$, ἤτοι:

$$\frac{(25-\omega^2)(5+3\omega)+(25-9\omega^2)(5+\omega)+(25-9\omega^2)(5-\omega)+(25-\omega^2)(5-3\omega)}{(25-9\omega^2)(25-\omega^2)}=\frac{25}{24}$$

ἢ $9\omega^4-154\omega^2+145=0$. Ὅθεν $\omega^2=(77\pm68):9=\dfrac{145}{9}$ ἢ 1 καὶ

$\omega=\pm\dfrac{145}{3}$ ἢ $\pm$ 1. Ὥστε δ' $\omega=1$ ἔχομεν $5-3=2$, $5-1=4$, $5+1=6$ καὶ $5+3=8$.

543. Εἶναι (ἄσκ. 530) $\Sigma_1^2 = \left[\frac{(\nu+1)^\nu}{2}\right]^2 = \Sigma_3$.

544. Ἂν εἰς τὴν ταυτότητα $(3\alpha-2)^2=9\alpha^2-12\alpha+4$, θέσωμεν κατὰ σειρὰν $\alpha=1, 2, 3\ldots\nu$ καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $1^2+4^2+7^2+\ldots+(3\nu-2)^2=9(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)-12(1+$

$$+2+\ldots+\nu)+4\nu=9.\frac{\nu.(\nu+1)(2\nu+1)}{1.\,2.\,3}-12.\frac{\nu(\nu+1)}{2}+4\nu=$$

$$=\frac{\nu[3(\nu+1)(2\nu-3)+8]}{2}.$$

545. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εἰς τὴν ταυτότητα $(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$ εὑρίσκομεν $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2\nu-1)^2=4(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)-$

$$-4(1+2+\ldots+\nu)=4.\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.2.3}-4.\frac{\nu(+1)}{2}+\nu=$$

$$=\frac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}-2\nu(\nu+1)+\nu=2\nu(\nu+1)\left(\frac{2\nu+1}{3}-1\right)+\nu=$$

$$=\frac{4\nu(\nu^2-1)+3\nu}{\varepsilon}=\frac{\nu(4\nu^2-1)}{3}.$$

546. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εἰς τὴν ταυτότητα $\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$, εὑρίσκομεν $1.2+2.3+3.4+\ldots+\nu(\nu+1)=(1^2+2^2+\ldots\nu^2)+(1+2+\ldots+\nu)=$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{1.\,2.3}+\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{3}.$$

547, Ἐργαζόμετοι ὁμοίως εἰς τὴν ταυτότητα $(2\alpha)^2=4\alpha^2$ εὑρίσκομεν $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2\nu)^2=4(1^2+2^2+\ldots^2+\nu^2)=4.\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{1.2.3}=$

$$=\frac{2\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{3}.$$

Γεωμετρικαὶ πρόοδοι

Ἀσκήσεις.—*548.* Αἱ α′) β′) γ′) ε′) αὔξουσαι διότι $|\omega|>1$ καὶ αἱ δ′) στ′) φθίνουσαι διότι $|\omega|<1$.

549. Εἶναι $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}=2.3^{7-1}=2.3^6=2.729=1458$.

550. $\omega^{\nu-1}=\tau:\alpha$, $\omega^4=144:9=16$ καὶ $\omega=\sqrt[4]{16}=\pm2$.

551. $\omega^{\nu-1}=\tau:\alpha$, $\omega^8=256$ καὶ $\omega=\pm2$.

552. $\alpha=\tau:\omega^{\nu-1}=27{,}2:\frac{27{,}2^6}{25{,}9^6}=\frac{25{,}9^6}{27{,}2^5}$.

553. Ἐπειδὴ $\omega=12:6=2$, εἶναι $3072=6.2^{\nu-1}$, ἤτοι $512=2^{\nu-1}$ ἢ $2^9=2^{\nu-1}$. Ὥστε $9=\nu-1$ καὶ $\nu=10$.

554. Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν δὲν θὰ εὕρωμεν δυνάμεις ἴσας μὲ βάσεις ἴσας. Ὥστε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

555. Ἔχομεν $13 = \alpha\omega^3$, $117=\alpha\omega^5$ καὶ $9477 = \alpha\omega^{\nu-1}$. Ἐκ τῶν δύο πρώτων διὰ διαιρέσεως εὑρίσκομεν $\omega^2=9$, ἤτοι $\omega = \pm 3$.

Ὥστε ἡ πρώτη δίδει $\alpha = \pm 13/27$. Διὰ δὲ $\omega = 3$, ἑπομένως διὰ $\alpha=13/27$, ἡ τρίτη δίδει $3^{\nu-1}=19683=3^9$, ἤτοι $\nu-1=9$ καὶ $\nu=10$.

556. Εἶναι $12 = \alpha\omega^2$, $384 = \alpha\omega^7$. Ὥστε $\omega^5 = 384 : 12 = 32$, ἤτοι $\omega^5 = 2^5$ καὶ $\omega = 2$.

557. α΄) $\Sigma = \dfrac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega-1} = \dfrac{25[(-3)^7-1]}{-3-1} = 25.547 = 13675.$

β΄) Εἶναι $5103 = 7\omega^6$, $\omega^6 = 729$, $\omega^6 = 3^6$ καὶ $\omega = 3$. Ὅθεν:

$$\Sigma = 7(3^7-1):(3-1) = 7.1093 = 7651.$$

γ΄) Ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ εὑρίσκομεν $\alpha = 2946 : 0{,}337^{12}$ καὶ ἔπειτα ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma = (\tau\omega - \alpha):(\omega-1)$ εὑρίσκομεν:

$$\Sigma = \left(2946 \,.\, 0{,}337 - \frac{2946}{0{,}337^{12}}\right):(0{,}337-1) =$$

$$= \frac{2946.(0{,}337^{13}-1)}{0{,}337} : (-0{,}663).$$

558. α΄) Ἔχομεν $\tau=4.4^{\nu-1}$ καὶ $5460=(4\tau-4):(4-1)$. Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\tau=4096$. Ἀκολούθως δὲ ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $4^{\nu-1} = 1024$, ἤτοι $4^{\nu-1}=4^5$. Ὥστε $\nu-1=5$ καὶ $\nu=6$.

β΄) Ἐπειδὴ $\Sigma=(\tau\omega-\alpha):(\omega-1)$ ἤτοι $54155{,}8=(\tau.108-4{,}6):(108-1)$ εἶναι $\tau=(54155{,}8 \,.\, 107+4{,}6):108 = 5794675{,}2 : 108 = 53654{,}4$. Ὥστε ἐκ τοῦ τύπου $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$ εὑρίσκομεν $108^{\nu-1} = 53654{,}4 : 4{,}6 = 11664 = 108^2$. Ὅθεν $\nu-1=2$, ἤτοι $\nu=3$.

γ΄) Ἔχομεν ὡς ἄνω, $2555 = (1280.\omega-5):(\omega-1)$, ἤτοι $(2555-1280).\omega=2555-5$, δηλαδὴ $\omega=2550:1275=2$ καὶ $1280=5.2^{\nu-1}$, ἤτοι $2^{\nu-1} = 1280:5=256=2^8$. Ὅθεν $\nu-1=8$ καὶ $\nu=9$.

559. α΄) Εἶναι $\omega=1/3:1/2=2/3$ καὶ $\Sigma=1/2:(1-2/3)=3/2$.

β΄) Εἶναι $\omega=1/4$ καὶ $\Sigma=1/4:(1-1/4)=1/3$.

γ΄) Εἶναι $\omega=-4/3:2=-2/3$ καὶ $\Sigma=1/2:(1+2/3)=6/5$.

δ΄) Εἶναι $\alpha=86/100$, $\omega=1/100$ καὶ $\Sigma=86/100:99/100=86/99$.

560. Εἶναι $\omega=\sqrt[\mu+1]{\tau:\alpha} = \sqrt[18]{5279{,}5:13{,}7}$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ $\alpha=13{,}7$, $\alpha\omega=13{,}7.\sqrt[18]{5279{,}5:13{,}7}$, $\alpha\omega^2= =13{,}7\sqrt[18]{5279{,}5^2:13{,}7^2}, \ldots$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\Sigma = \left(5279{,}5 . \sqrt[18]{5279{,}5 : 13{,}7} - 13{,}7\right) :$

$: \left(\sqrt[18]{5279{,}5 : 13{,}7} - 1\right).$

561. Εἶναι $384 = \alpha . 2^7$, ἤτοι $\alpha = 384 : 2^7 = 3 . 2^7 : 2^7 = 3$ καὶ ἑπομένως $\Sigma = (384 . 2 - 3) : (2-1) = 765.$

562. α΄) Ἡ δοθεῖσα σειρὰ ἀναλύεται εἰς ἄπειρον πλῆθος προόδων ὡς αἱ κατωτέρω, ἑκάστης τῶν ὁποίων δίδεται τὸ ἄθροισμα.

$$\alpha)\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\beta)\quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\delta)\quad \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\varepsilon)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{1}{16} \text{ κ. ο. κ.}$$

Τὸ ζητούμενον λοιπὸν ἄθροισμα εἶναι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

β΄) Εἶναι $\omega = \frac{1}{2} : \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ καὶ

$$\Sigma = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} : \left(1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 4 + 3\sqrt{2}.$$

563. α΄) Εἶναι $\omega = \beta\alpha^{\nu-1} : \alpha^{\nu} = \beta : \alpha$ καὶ $\Sigma = \alpha^{\nu+1} : (\alpha - \beta)$.

β΄) Εἶναι $\omega = \beta : \alpha$ καὶ $\Sigma = \alpha^2 : (\alpha - \beta)$.

564. α΄) Ἐὰν α ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, πλευρὰ τοῦ ἑπομένου εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha}{2}$, ἡ τοῦ ἄλλου εἶναι $\frac{\alpha}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{4}$ κ. ο. κ.

Ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι κατὰ σειρὰν $\alpha^2, \frac{\alpha^2}{2}, \frac{\alpha^2}{4}, \frac{\alpha^2}{8} \cdots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι $\alpha^2 : \left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\alpha^2$.

Ἐξ ἄλλου αἱ περίμετροι τῶν τετραγώνων τούτων εἶναι κατὰ σειρὰν $4\alpha,\ 2\alpha\sqrt{2},\ 2\alpha,\ \alpha\sqrt{2} \ldots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι

$$4\alpha : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\alpha : (2-\sqrt{2}) = 4\alpha(2+\sqrt{2}).$$

β′) Ἐὰν α ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἡ τοῦ πρώτου ἐγγεγραμμένου εἶναι $\alpha{:}2$, ἡ τοῦ ἑπομένου $\alpha{:}4$, ἡ τοῦ ἄλλου $\alpha{:}8$ κ.ο.κ.

Ἔχομεν λοιπὸν τὰ ἐμβαδὰ $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}, \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{16}, \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{64} \ldots$ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι $\dfrac{\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{3}$. Ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων εἶναι $3\alpha : \left(1-\frac{1}{2}\right) = 6\alpha$.

565. Ἔστω ϱ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου· τότε ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου εἶναι $\varrho\sqrt{2}$, ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου κύκλου εἶναι $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}$, ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ δευτέρου τετραγώνου εἶναι $\frac{\varrho.\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = \varrho$· ἐπίσης ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\varrho}{2}$ καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τρίτου τετραγώνου εἶναι $\frac{\varrho\sqrt{2}}{2}$ κ. ο. κ. Τὰ ἐμβαδὰ λοιπὸν τῶν ὡς ἄνω κύκλων εἶναι $\pi\varrho^2, \frac{\pi\varrho^2}{2}, \frac{\pi\varrho^2}{4} \ldots$ καὶ ἔχουν ἄθροισμα $\pi\varrho^2 : \left(1-\frac{1}{2}\right) = 2\pi\varrho^2$.

Ἐπίσης τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων εἶναι $2\varrho^2, \varrho^2, \frac{\varrho^2}{2} \ldots$ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $2\varrho^2 : \left(1-\frac{1}{2}\right) = 4\varrho^2$.

566. Ἂν α ἡ μικροτέρα γωνία εἰς μοίρας καὶ ω ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\chi\omega^3 = 9\chi\omega$, ἤτοι $\omega^2 = 9$ ἢ $\omega = 3$. Ὅθεν:

$$\alpha + \alpha.3 + \alpha.3^2 + \alpha.3^3 = 360, \quad \text{ἤτοι} \quad 40\alpha = 360 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = 9.$$

Ὥστε αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι $9^\circ,\ 27^\circ,\ 81^\circ,\ 243^\circ$.

567. Ἂν α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ω ὁ λόγος, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2=221 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\omega^2-\alpha=136.$$

Ὥστε $\dfrac{\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2}{\alpha\omega^2-\alpha}=\dfrac{221}{136}$, ἤτοι $\dfrac{1+\omega+\omega^2}{\omega^2-1}=\dfrac{13}{8}$ ἢ $5\omega^2-8\omega-21=0$.

Ὥστε $\omega=(4\pm\sqrt{16+105}):5=(4\pm11):5=3$ ἢ $-7/5$ καὶ ἀντιστοίχως $\alpha=17$ ἢ $425/3$. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 17, 51, 153 ἢ οἱ 425/3, −595/3, 833/3.

568. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2=248$, $\alpha\omega^2-\alpha=192$, $\dfrac{1+\omega+\omega^2}{\omega^2-1}=\dfrac{31}{24}$, $7\omega^2-24\omega-55=0$, $\omega=(12\pm23):7=5$ ἢ $-11/17$ καὶ ἀντιστοίχως $\alpha=8$ ἢ $392/3$. Ὥστε ἔχομεν τοὺς ὅρους:

8, 40, 200 ἢ τοὺς 392/3, −616/3, 968/3.

569. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \mu, \kappa, \lambda, \tau$ ἐκ ν ὅρων, ἧς ὁ λόγος ω. Ἀλλὰ κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι $\beta=\alpha\omega$ καὶ $\lambda=\tau/\omega$. Ὅθεν $\alpha\tau=\beta\lambda$, ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\alpha\tau=\beta\lambda=\gamma k=\delta\mu=\dots$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $(\alpha.\beta.\gamma.\delta.\dots\mu.\kappa.\lambda.\tau.)^2=[(\alpha\tau).(\beta\lambda).(\gamma k)\dots$
$\dots(\gamma k).(\beta\lambda).(\alpha\tau)]^2=(\alpha\tau)^\nu$, διότι οἱ ἴσοι παράγοντες $(\alpha\tau)$, $(\beta\lambda)$, (γk).. εἶναι ν τὸ πλῆθος. Ἑπομένως εἶναι $(\alpha.\beta.\gamma\dots k.\lambda.\tau)=\sqrt{(\alpha\tau)^\nu}$.

570. α΄) Οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὅρων τῆς ἁρμονικῆς προόδου ἀποτελοῦν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 1, 2, 3, ... Ὥστε ἡ ζ. ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι ἡ 1, 1/2, 1/3 ... 1/20.

β΄) Ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι ἡ 2, 4, 6, ... 40 καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἁρμονικὴ εἶναι ἡ 1/2, 1/4, 1/6 ... 1/40.

γ΄) Ὁμοίως ἔχομεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 1, 3, 5, ... 39 καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἁρμονικὴν 1, 1/3, 1/5 .., 1/39.

571. Ἐδῶ ἔχομεν $\omega=\dfrac{40-4}{18+1}=\dfrac{36}{19}$, καὶ ἑπομένως τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον 4, $4\dfrac{36}{19}=\dfrac{112}{19}$, $\dfrac{148}{19}, \dots 40$ καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἁρμονικὴν 1/4, 19/112, 19/148 ... 1/40.

Λογάριθμοι

Ἀσκήσεις.—*572.* α΄) Ἐπειδὴ $15=3.5$, εἶναι $\lambda o\gamma 15=\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 5$.
β΄) Ἐπειδὴ $55=5.11$ εἶναι $\lambda o\gamma 55=\lambda o\gamma 5+\lambda o\gamma 11$.

573. α΄) Ἐπειδὴ $2\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$ εἶναι $\lambda o\gamma\left(2\dfrac{1}{3}\right)=\lambda o\gamma 7-\lambda o\gamma 3$.

β΄) Ἐπειδὴ $49=7^2$ εἶναι $\lambda o\gamma 49=\lambda o\gamma(7^2)=2\lambda o\gamma 7$.

574. α′) Ἐπειδὴ $\sqrt{20} = 2^{\frac{1}{2}}$ εἶναι $\lambda o\gamma\sqrt{20} = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 20$.

β′) Ἐπειδὴ $\sqrt{647^3} = 647^{\frac{3}{2}}$ εἶναι $\lambda o\gamma\sqrt{647^3} = \frac{3}{2}\lambda o\gamma 647$.

575, α′) Εἶναι $\lambda o\gamma 32^6 = 6\lambda o\gamma 32$.

β′) Ἐπειδὴ $140 = 5.7.4$, εἶναι $\lambda o\gamma 140 = \lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 7 + \lambda o\gamma 4$.

576. Τὰ ζητούμενα χαρακτηριστικὰ εἶναι κατὰ σειράν:

α′) 1 β′) 3 γ′) 0 δ′) $\overline{1}\cdot\overline{3}\cdot 2\cdot 3\cdot$ ε′) $\overline{3}\cdot 2\cdot 3$ στ′) $2\cdot 3\cdot 5$

ζ′) 0 $\left(\text{διότι } \frac{14}{3} = 4{,}33\ldots\right)$ η′) $\overline{2}$ $\left(\text{διότι } \frac{1}{50} = 0{,}02\right)$

ϑ′) 1 $\left(\text{διότι } 62\frac{2}{3} = 62{,}66\ldots\right)$ ι′) 0 $\left(\text{διότι } 2\frac{1}{7} = 2{,}142\ldots\right)$

Ὁμοίως εἶναι $\lambda o\gamma 0{,}045 = \overline{2},\ldots$ καὶ $\lambda o\gamma 40 = 1,\ldots$

577. Τὰ ἀκέραια ψηφία εἶναι ἀντιστοίχως: 4, 6, 8, 2, 1, 13.

578. Τὸ ζ. σημαντικὸν ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν ἔχει ἀντιστοίχως τὴν τάξιν: 1ην, 2αν, 3ην, 5ην, 9ην.

579. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 80 : 10, 80 : 100, 80 : 1000 ... τῶν 80.10, 80.100, 80.1000 ... ἔχουν ὅλοι τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος.

580. Ἐπειδὴ $0{,}70586 = \lambda o\gamma 8$, ἔπεται ὅτι $1{,}70586 = \lambda o\gamma 80$, $\overline{1}{,}70586 = \lambda o\gamma 0{,}8$, $\overline{2}{,}70586 = \lambda o\gamma 0{,}08$ καὶ $\overline{3}{,}70586 = \lambda o\gamma 0{,}008$.

581.
$$\begin{array}{r} 2{,}34987 \\ \overline{6}{,}97852 \\ 9{,}82057 \\ \hline 7{,}14896 \end{array}$$

582.
$$\begin{array}{rr} \overline{8}{,}30467, & \overline{3}{,}86564 \\ \overline{3}{,}98090, & \overline{9}{,}93726 \\ \hline \overline{6}{,}32377 & 5{,}92838 \end{array}$$

583. $\overline{9}{,}30942.3 = \overline{27}{,}92826$, $\overline{9}{,}30942 \times 7 = \overline{61}{,}16594$

$\overline{9}{,}30942.42 = -9\times 42 + 0{,}30942\times 42 = \overline{366}{,}99564$.

584. α′) $(-9+0{,}93642) : 8 = (-16+7{,}93642) : 8 = \overline{2}{,}99205$.

β′) $\overline{9}{,}93642 : 9 = \overline{1}{,}10405$.

γ′) $(-9+0{,}93642) : 12 = (-12+3{,}93642) : 12 = \overline{1}{,}03280$.

585. $\lambda o\gamma 0{,}003817 = \overline{3}{,}58172$, $\lambda o\gamma 1{,}141 = 0{,}05729$, $\lambda o\gamma 0{,}0845 = \overline{2}{,}92686$, $\lambda o\gamma 1203 = 3{,}08027$, $\lambda o\gamma 13{,}07 = 1{,}11628$, $\lambda o\gamma 0{,}0004124 = \overline{4}{,}61532$.

586. α′) $\lambda o\gamma 95348 = 4{,}97928 + 0{,}00004.0{,}8 = 4{,}97931$.

β′) $\lambda o\gamma 6{,}8372 = 0{,}83487 + 0{,}00006.0{,}2 = 0{,}83488$.

γ′) $\lambda o\gamma 0{,}98629 = \overline{1}{,}99396 + 0{,}00005.0{,}9 = \overline{1}{,}99400$.

δ′) $\lambda o\gamma 968{,}375 = 2{,}98601 + 0{,}00004.0{,}75 = 2{,}98604$.

ε') $\lambda o\gamma 0{,}0364598=\overline{2}{,}56170+0{,}00012.0{,}98=\overline{2}{,}56182$,

στ') $\lambda o\gamma 6{,}3347=0{,}80173$. ζ') $\lambda o\gamma 326{,}537=2{,}51393$.

η') $\lambda o\gamma 5278{,}37=3{,}72250$. θ') $\lambda o\gamma 15389{,}45=4{,}18723$.

587. α') $3{,}63147=\lambda o\gamma(4280+3:11)=\lambda o\gamma(4280{,}27)$. Ἑπομένως $0{,}63147=\lambda o\gamma 4{,}28027$, ἤτοι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 4,28027.

β') Ἐὰν $\lambda o\gamma\chi=1{,}72127$, εἶναι $\chi=52{,}6344$.

γ') Ἐὰν $\lambda o\gamma\chi=0{,}68708$, εἶναι $\chi=4{,}865$.

δ') $\lambda o\gamma\chi=\overline{3}{,}92836$ καὶ $\chi=0{,}00847935$.

ε') $\lambda o\gamma\chi=\overline{4}{,}38221$ καὶ $\chi=0{,}000241106$.

στ') $\lambda o\gamma\chi=\overline{3}{,}70032$ καὶ $\chi=0{,}00501555$.

588 α') Ἐὰν $\chi=0{,}4326^3$ εἶναι $\lambda o\gamma\chi=3.\ \lambda o\gamma 0{,}4326=3.\overline{1}{,}63609=\overline{2}{,}90827$ καὶ $\chi=0{,}08096$.

β') Ἐὰν $\chi=\sqrt[3]{12}$ εἶναι $\lambda o\gamma\chi=\frac{1}{3}.\lambda o\gamma\ 12=\frac{1}{3}.\ 1{,}07918=0{,}35973$ καὶ $\chi=2{,}28942$.

γ') $\lambda o\gamma\chi=(\lambda o\gamma 0{,}7776):5=\overline{1}{,}89076:5=(\overline{5}+4{,}89076):5=$
$=\overline{1}{,}97815$, καὶ $\chi=0{,}95094$.

δ') $\lambda o\gamma\chi=\lambda o\gamma 13:5=1{,}11394:5=0{,}22279$ καὶ $\chi=1{,}67027$.

ε') Ἂν θέσωμεν $\chi=875{,}6348.62{,}82407$, ἔχομεν $\lambda o\gamma\chi=2{,}94233+$ $+1{,}79813=4{,}74046$ καὶ $\chi=55012{,}5$. Ὅθεν τὸ γινόμενον εἶναι $-55012{,}5$.

στ') $\lambda o\gamma\chi=(\lambda o\gamma 25{,}3696:15)-\lambda o\gamma 0{,}0893462=(1{,}40431:15)-$
$-\overline{2}{,}95107=0{,}09362-\overline{2}{,}95107=1{,}14255$ καὶ $\chi=13{,}8852$.

589. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Gamma=2R\pi$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\Gamma=\lambda o\gamma 2{,}51073+\lambda o\gamma 3{,}1416=0{,}39980+0{,}49715=0{,}89695$ καὶ $\Gamma=7{,}88767$ δ.

590. Εἶναι $\omega=\sqrt[\nu+1]{\beta:\alpha}=\sqrt[9]{23437500:12}=\sqrt[9]{1953125}=\sqrt[9]{5^9}=5$ (Βλέπε Πίνακας λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 42.) Ὅθεν ἡ ζ. πρ. εἶναι ἡ 12, 60, 300. . . . 2347500.

591. Ἐκ τοῦ τύπου $\delta=\frac{1}{2}gt^2$ λαμβάνομεν $t=\sqrt{2\delta:g}=$
$=\sqrt{9620:9{,}8}=\sqrt{981{,}63}=31{,}3$ δεύτερα λεπτά.

Περὶ ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

592. α') Ἐπειδὴ $\alpha^{\chi+\mu}=\alpha^{2\mu}$ $(\alpha\neq 0)$ εἶναι $\chi+\mu=2\mu$ καὶ $\chi=\mu$.

β') Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\alpha^{3\chi+2}=\alpha^{\chi+4}(\alpha\neq 0)$ εἶναι $3\chi+2=\chi+4$ καὶ $\chi=1$.

γ') Εἶναι $\gamma^{2-5\chi}=\gamma^{\chi+3}$, $2-5\chi=\chi+3$ καὶ $\chi=-1/6$ $(\gamma\neq 0)$.

593. α') Εἶναι $(2\chi+1)(3\chi+4)=(3\chi+1)(2\chi+5)$, ἤτοι $-6\chi=1$ καὶ $\chi=-1/6$.

β') Εἶναι $\mu(\chi+3)=\chi+2\nu$ καὶ $\chi=(2\nu-3\mu):(\mu-1)$.

594. α') Εἶναι $\alpha^{2\chi+3}\cdot\alpha^{3\chi+1}=\alpha^{5\chi+6}$. Ὅθεν $5\chi+4=5\chi+6$, ἤτοι $0=2$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

β') Εἶναι $2^{2\chi}=2^5$, $2\chi=5$ καὶ $\chi=2{,}5$.

γ') Εἶναι $(-2)^\chi=(-2)^4$, καὶ $\chi=4$,

595. α') Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι 2ου βαθμοῦ πρὸς 5^χ. Ὅθεν $5^\chi=(-7\pm\sqrt{49+1800}):2=(-7\pm43):2=-25$ ἢ 18. Ὅθεν $5^\chi=18$ καὶ $\chi=\lambda o\gamma 18:\lambda o\gamma 5$ κλπ. Ἡ λύσις $5^\chi=-25$ δὲν εἶναι δεκτή, διότι πᾶσα δύναμις τοῦ 5 εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

β') Ἔχομεν $\alpha^{\frac{1}{\chi}}=\alpha^\chi$, $\frac{1}{\chi}=\chi$, $\chi^2=1$ καὶ $\chi=\pm1$ $(\alpha\neq0)$.

γ') Ἔχομεν $2^\chi\cdot2^3+4^\chi\cdot4-320=0$ ἤτοι $2^{2\chi}+2\cdot2^\chi-80=0$ καὶ $2^\chi=-1\pm\sqrt{81}=8$ ἢ -10. Ὅθεν $2^\chi=2^3$ καὶ $\chi=3$, διότι ἡ ἄλλη λύσις δὲν εἶναι δεκτή.

596. α') Ἔχομεν $2^{2\chi}+2^\chi-272=0$ καὶ $2^\chi=16=2^4$. Ὅθεν $\chi=4$.

β') Αὕτη γράφεται $\lambda o\gamma\chi=\lambda o\gamma(24:3)$. Ὅθεν $\chi=8$.

γ') Ἔχομεν $2^{2\chi}+2\cdot2^\chi-80=0$ καὶ $\chi=3$ (προηγ. ἄσκησις γ').

597. α') Εἶναι $\lambda o\gamma\chi^5-\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{2}\right)^3=\lambda o\gamma\left(\frac{8\chi^5}{\chi^3}\right)=\lambda o\gamma 288.$

Ὅθεν $8\chi^2=288$, $\chi^2=36$ καὶ $\chi=\pm6$.

β') Εἶναι $\lambda o\gamma\chi=\lambda o\gamma\left(\frac{192.3}{4}\right)$. Ὅθεν $\chi=\frac{192.3}{4}=144$.

598. α') Εἶναι $\alpha^{2\chi+3\psi}=\alpha^8$, ἤτοι $2\chi+3\psi=8$ καὶ $\alpha^{2\chi-3\psi}=\alpha^{-6}$ » $2\chi-3\psi=-6$ $\Big\}$ $\chi=1/2$, $\psi=7/3$

β') Εἶναι $5^{3\chi+4\psi}=5^{18}$ » $3\chi+4\psi=18$ καὶ $5^{2\chi-7\psi}=5^{-17}$ » $2\chi-7\psi=-17$ $\Big\}$ $\chi=2$, $\psi=1$

γ') Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma(\chi-\psi)=3=\lambda o\gamma 1000$, εἶναι $\chi-\psi=1000$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi+\psi=95$, εὑρίσκομεν $\chi=547{,}5$ καὶ $\psi=-452{,}5$.

599. α') Ἐκ τῆς $\lambda o\gamma(\chi\psi)=2=\lambda o\gamma 100$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=100$. Οὕτως ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=20$ καὶ $\psi=5$.

β') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)=3=\lambda o\gamma 1000$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=1000$. Αὕτη δὲ μετὰ τῆς $5\chi^2-3\psi^2=11300$ δίδει τὰς δεκτὰς λύσεις $\chi=50$ καὶ $\psi=20$.

600. α') Ἐπειδὴ $3^{11}=177147$ [Πίν. Λογαρίθμων (νέα ἔκδοσις) Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 42] εἶναι $3^\chi=3^{11}$ ἤτοι $\chi=11$.

β') Ἐνταῦθα ἔχομεν $\frac{\chi}{2}$ λογ $3=\lambda o\gamma 768$ ἤτοι $\frac{\chi}{2}=\frac{2,88536}{0,47712}$ ἢ $\chi=2,88536:0,23856=12,095$.

γ') Εἶναι $3^{\sqrt{\chi}}=3^5$. Ὅθεν $\sqrt{\chi}=5$ καὶ $\chi=25$.

601. α') Λαμβάνομεν $(3\chi-2)\lambda o\gamma 24=\lambda o\gamma 10000$ ἤτοι $3\chi-2=4:1,38021=2,898$, $3\chi=4,9881$ καὶ $\chi=1,6327$.

β') Εἶναι $5^{\chi^2-3\chi}=5^4$ Ὅθεν $\chi^2-3\chi=4$, $\chi^2-3\chi-4=0$ καὶ $\chi=4$ ἢ -1.

γ') Εἶναι $\chi^{\chi^2-7\chi+12}=1=\chi^0$. Ὅθεν $\chi^2-7\chi+12=0$ καὶ $\chi=4$ ἢ 3.

602. α') Εἶναι $6^{\chi^4-18\chi^2+86}=6^5$. Ὅθεν $\chi^4-18\chi^2+81=0$ καὶ $\chi=\pm 3$.

β') Γράφομεν $\alpha^{1+3+5+\ldots+(2\chi-1)}=\nu$. (1) Ὥστε τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $1+3+5+\ldots+(2\chi-1)$ ὁ τελευταῖος ὅρος ἰσοῦται μὲ $2\chi-1=$ $=1+(\nu-1).2$. Ὅθεν $\nu=\chi$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῆς ἰσοῦται μὲ $\Sigma=\left(\frac{1+2\chi-1}{2}\right)\chi=\chi^2$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\alpha^{\chi^2}=\nu$

$\chi^2=\lambda o\gamma\chi:\lambda o\gamma\alpha$ καὶ $\chi=\pm\sqrt{\lambda o\gamma\chi:\lambda o\gamma\alpha}$.

603. α') Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)^2=\lambda o\gamma 100$, εὑρίσκομεν $(\chi\psi)^2=100$. Ὅθεν $2\chi^2\psi^2=200$ καὶ 1) $\chi^4+2\chi^2\psi^2+\psi^4=841$ ἤτοι $(\chi^2+\psi^2)^2=29^2$ (1) καὶ 2) $\chi^4-2\chi^2\psi^2+\psi^4=441$ ἤτοι $(\chi^2-\psi^2)^2=21^2$. (2). Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2=29$ καὶ $\chi^2-\psi^2=21$ καὶ ἐκ τούτων $\chi=\pm 5$, $\psi=\pm 2$.

β') Ἔχομεν
$$\left.\begin{aligned}\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma\psi&=\frac{3}{2}\\ \lambda o\gamma\chi-\lambda o\gamma\psi&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right|\begin{aligned}&2\lambda o\gamma\chi=2,\ \ \lambda o\gamma\chi=1 \text{ καὶ } \chi=10\\ &2\lambda o\gamma\psi=1,\ \lambda o\gamma\psi=\frac{1}{2} \text{ καὶ } \psi=10^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

γ') Ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως ἥτις γράφεται $\lambda o\gamma(\chi\psi)=\lambda o\gamma 1000$, εὑρίσκομεν $\chi\psi=1000$. Αὕτη δὲ μετὰ τῆς 2ας δίδει τὰς λύσεις $\chi=50$ καὶ $\psi=20$.

604. α') Ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{5}\right):2=\frac{1}{2}$, $\lambda o\gamma\left(\frac{\chi}{5}\right)=1=\lambda o\gamma\ 10$ καὶ ἑπομένως $\frac{\chi}{5}=10$ ἤτοι $\chi=50$.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ $1,50515=\lambda o\gamma 32$, ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως ἔχομεν $\lambda o\gamma(\chi^3\psi^2)=\lambda o\gamma 32$, ἤτοι $\chi^3\psi^2=32$, $\psi^2=32:50^3=32:125000=16:62500$. Ὅθεν $\psi=4/250=0,016$.

β') Ἔχομεν ὡς ἄνω $\lambda o\gamma\frac{\chi}{5}=\lambda o\gamma 10$ καὶ $\chi=50$. Ὡς καὶ $\lambda o\gamma(\chi^3\psi^2)=\lambda o\gamma 32$ ἤτοι $\psi=0,016$.

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ

Ἀσκήσεις.—*605.* Εἶναι $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu=5600000(1,05)^{100}$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=5600000+100\lambda o\gamma 1,05=6,74819+2,11900=8,86719$. Ὅθεν $\Sigma=736533333$.

606. Εἶναι $\Sigma=750000(1,045)^{20}$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=5,87506+20.0,01912=5,87506+0,38240=6,25746$. Ὅθεν $\Sigma=1809083$.

607. Εἰς τὸ τέλος τῶν 8 ἐτῶν τὸ κεφάλαιον γίνεται $\Sigma=1000000000.(1,04)^8$. Ἐπειδὴ δὲ $(1,04)^8=1,368569$ (Π. Λογ. Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 36) εἶναι $\Sigma=1.368.569.000$. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν τὸν ἁπλοῦν τόκον τοῦ Σ πρὸς 4% διὰ 8 μῆνας, ὃν προσθέτομεν εἰς τὸ Σ. Κατόπιν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιροῦμεν τὸ 1.000.000.000.

608. Ἔχομεν $\alpha=\Sigma:(1+\tau)^\nu=3730850:(1,035)^{20}$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 3730850-20\lambda o\gamma 1,035=6,57181-20.0,01494=6,57181-0,29880=6,27301$ καὶ $\alpha=1875043$.

609. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu.(360+\tau\eta):360$, εὑρίσκομεν $\alpha=45896000.360:1,08^{15}.376,8$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha=(7,66177+2,55630)-(15.0,03342+2,57611)=10,21807-3,07741=7,14066$ καὶ $\alpha=13824840$.

610. Ἔχομεν $\alpha=\Sigma:(1+\tau)^\nu=20000000:1,02^{36}$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha=7,30103-36.0,00860=7,30103-0,30960=6,99143$ καὶ $\alpha=9804600$.

611. Ἔχομεν $(1+\tau)^\nu=\Sigma:\alpha$, ἤτοι $(1+\tau)^{15}=1166900:625000$. Ὥστε $\lambda o\gamma(1+\tau)=(\lambda o\gamma 1166900-\lambda o\gamma 625000):15=(6,06703-5,79588):15=0,27115:15=0,01808$ καὶ $1+\tau=1,0425$. Ὅθεν $\tau=0,425$ καὶ $E=4,25\%$.

612. Ὁμοίως ἔχομεν $(1+\tau)^{22}=224770:10000=22,477$. Ὅθεν $\lambda o\gamma(1+\tau)=\lambda o\gamma 22,477:22=1,35174:22=0,06144$ καὶ $1+\tau=1,152$. Ὥστε $\tau=0,152$ καὶ $E=15,2\%$.

613. Εἶναι $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$, ἤτοι $4\alpha=\alpha(1+\tau)^\nu$, ἢ $(1+\tau)^\nu=4$. Ὅθεν $(1+\tau)^{31}=4$, $\lambda o\gamma(1+\tau)=\lambda o\gamma 4:31=0,60206:31=0,01942$ καὶ $1+\tau=1,0457$. Ὥστε $\tau=0,0457$ καὶ $E=4,57\%$.

614. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$, εὑρίσκομεν

$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma\alpha+\nu\lambda o\gamma(1+\tau)$. Ὥστε $\nu=(\lambda o\gamma\Sigma-\lambda o\gamma\alpha):\lambda o\gamma(1+\tau)=(\lambda o\gamma 56000000-\lambda o\gamma 3580000):\lambda o\gamma(1,045)=(7,74819-6,55388):0,01912=1,19431:0,01912=62$ ἔτη καὶ μέρος τοῦ ἔτους. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 0,00887 εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ $1+\frac{\eta\tau}{360}$, εἶναι $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)=0,00887$. Ἐργαζόμενοι δὲ οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέρος τοῦ ἔτους εἶναι 165 ἡμέραι, Ἀλλὰ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ 0,00887 ἐπὶ 360 καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 0,01912 θὰ εὕρωμεν 164 ἡμέρας. Ἡ διαφορὰ δὲ τῆς μιᾶς ἡμέρας (ἢ ἔστω 2 καὶ 3 ἡμερῶν) εἰς ζητήματα ἀνατοκισμοῦ, ὅστις διαρκεῖ ἔτη, θεωρεῖται ἀσήμαντος. Διὰ τοῦτο εἰς ὅμοια ζητήματα, πρὸς εὐκολίαν προτιμᾶται ὁ δεύτερος τρόπος τῆς εὑρέσεως τοῦ μέρους τοῦ ἔτους.

615. Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $\nu=(\lambda o\gamma 969800-\lambda o\gamma 630000):\lambda o\gamma(1{,}04)=(5{,}98668-5{,}79934):0{,}01703=0{,}18734:0{,}01703=11$ ἔτη.

616. Ἔχομεν $2\alpha=\alpha(1+\tau)^\nu$, ἤτοι $2=(1{,}035)^\nu$ καὶ

$\nu=\lambda o\gamma 2:\lambda o\gamma 1{,}035=0{,}30103:0{,}01494=20\,\dfrac{223}{1494}$ ἔτη=20 ἔτη 53 ἡμέραι, (ἄσκ. 614). Ἐξακολουθοῦμεν δὲ ὁμοίως.

617. Μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμὸς θὰ εἶναι $\alpha+\dfrac{\alpha}{80}=\alpha\left(1+\dfrac{1}{80}\right)=$ $=\alpha(1{,}0125)$, μετὰ δύο ἔτη οὗτος θὰ εἶναι $\alpha(1{,}0125)^2$ καὶ μετὰ ν ἔτη ὁ πληθυσμὸς Σ θὰ εἶναι $\Sigma=\alpha(1{,}0125)^\nu$. Ἐὰν δὲ $\Sigma=2\alpha$, θὰ ἔχωμεν $2\alpha=\alpha(1{,}0125)^\nu$, ἤτοι $2=(1{,}0125)^\nu$ καὶ $\nu=\lambda o\gamma 2:\lambda o\gamma 1{,}0125=$ $=0{,}30103:0{,}00540=55\,\dfrac{403}{540}$ ἔτη=55 ἔτ. 269 ἡμ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν $\Sigma=3\alpha$.

618. Ἐπειδὴ $160:8000=1:50=0{,}02$, μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμὸς θὰ εἶναι τὰ $49.0{,}02=0{,}98$ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ μετὰ ν ἔτη θὰ εἶναι τὰ $(0{,}98)^\nu$ αὐτοῦ. Οὕτως ἔχομεν $5000=8000.(0{,}98)^\nu$, ἤτοι

$(0{,}98)^\nu=\dfrac{5}{8}=0{,}625$ καὶ $\nu=\lambda o\gamma 0{,}625:\lambda o\gamma 0{,}98=\bar{1}{,}79588:\bar{1}{,}99123=$

$=-0{,}20412:-0{,}00877=20412:877=23\dfrac{241}{877}$ ἔτη.

Προβλήματα ἴσων καταθέσεων καὶ χρεωλυσίας.

Ἀσκήσεις.—*619.* Κατὰ τὸν τύπον τῶν ἴσων καταθέσεων ἔχομεν $\Sigma=350000(1{,}04)(1{,}04^{20}-1):0{,}04$. Ἐπειδὴ δὲ $350000:0{,}04=8750000$ καὶ $1{,}04^{20}=2{,}191$ (Πίνακες Χρ. Μπαρμπαστάθη, νέα ἔκδοσις, σελὶς 36) ἔχομεν $\Sigma=8750000.1{,}04.1{,}191$ καὶ $\lambda o\gamma\,\Sigma=6{,}94201+0{,}01703+$ $+0{,}07591=7{,}03495$ καὶ $\Sigma=10838000$.

620. Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $13210000=1000000(1{,}05)(1{,}05^\nu-1):$ $:0{,}05$, ἤτοι $1321.0{,}05=105(1{,}05^\nu-1)$ καὶ $\lambda o\gamma(1{,}05^\nu-1)=\lambda o\gamma 1321+$ $+\lambda o\gamma 0{,}05-\lambda o\gamma 105=3{,}12090+\bar{2}{,}69897-2{,}02119=\bar{1}{,}79868$. Ὅθεν

$1,05^{\nu}-1=0,629043$, ἤτοι $1,05^{\nu}=1,629043$. Οὕτως ἔχομεν $\nu=$ $=\lambda o\gamma\, 1,629043 : \lambda o\gamma 1,05=0,21192:0,02119=10$ ἔτη.

621. Ἐδῶ ἔχομεν τὸν τύπον $\Sigma=\alpha[(1+\tau)^{\nu}-1]:\tau$. Εἶναι δὲ $(1+\tau)^{\nu}=1,035^3$ καὶ $3\lambda o\gamma 1,035=3.0,01494=0,04482$. Ὥστε $1,035^3=$ $=1,1087$. Ὅθεν $\Sigma=20000000\,.\,0,1087:0,035$ καὶ $\lambda o\gamma\Sigma=7,30103+$ $+\bar{1},03623-\bar{2},54407=7,79319$ καὶ $\Sigma=62114286$.

622. Ἐδῶ ἔχομεν $\alpha=\Sigma\tau:(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]$, ἤτοι $\alpha=250000000\,.\,0,05:1,05[1,05^{21}-1]=12500000:1,05\,.\,1,786$ (Πίνακες σελὶς 36). Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha=7,09691-(0,02119+0,25188)=6,82384$ καὶ $\alpha=6665571$.

623. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\chi=100000000000\,.\,0,04\,.\,1,04^{50}:(1,04^{50}-1)$. Ἐπειδὴ δὲ (Πίνακες σελὶς 36) $1,04^{50}=7,107$, εἶναι $\chi=4000000000\,.\,7,107:6,107=28428000000:$ $:6,107$ καὶ $\lambda o\gamma\chi=10,45375-0,78583=9,66792$. Ὅθεν $\chi=4655000000$.

624. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\alpha=318000(1,045^{30}-$ $-1):0,045.\,1,045^{30}=318000\,.\,2,745:0,045\,.\,3,745$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha=(5,50243+$ $+0,43854)-(\bar{2},65321+0,57345)=5,94097-\bar{1},22666=6,71431$ καὶ $\alpha=5179750$.

625. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $(1+\tau)^{\nu}=$ $=\chi:(\chi-\alpha\tau)=3000000:(3000000-45000000.0,05)=3000000:(3000000-$ $-2250000)=3000000:750000=4$. Ὅθεν $\nu=\lambda o\gamma 4:\lambda o\gamma 1,05=0,60206:$ $0,02119=28$ ἔτη καὶ μέρος τοῦ ἔτους. Ὥστε τὸ χρέος θὰ ἐξοφληθῇ μὲ 28 ὁλοκλήρους δόσεις καὶ ἀκόμη μὲ ἓν ποσὸν μικρότερον τοῦ χρεωλυσίου.

626. Ἐπειδὴ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι 20 ἔτη, αἱ δὲ δόσεις θὰ εἶναι 15 ἔχομεν $\alpha(1,045)^{20}=46130000(1,045^{15}-1):0,045$ (Πίνακες σελ. 36) $\alpha.\,2,412=46130000.0,935:0,045$ καὶ $\alpha=46130000.0,935:0,045.2,412$ Ὅθεν $\lambda o\gamma\alpha=(7,66398+\bar{1},97081):(\bar{2},65321+0,38238)=7,63479-$ $-\bar{1},03559=8,59920$ καὶ $\alpha=397372727$.

627. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\alpha(1,0375)^{13}=158800000.(1,00375^{10}-1):$ $:0,0375$. Ἀλλὰ $13\lambda o\gamma 1,0375=13.0,01599=0,20787$ καὶ

$$10\lambda o\gamma 1,0375=10.0,01599=0,15990.$$

Ὅθεν $1,0375^{13}=1,614$ καὶ $1,0375^{10}=1,445$. Ὥστε εἶναι

$$\alpha=158800000.0,445:0,0375.1,614 \quad \text{καὶ}$$

$\lambda o\gamma\alpha=(8,20085+\bar{1},64836)-(\bar{2},57403+0,20790)=7,84921-\bar{2},78193=$ $=9,06728$ καὶ $\alpha=1167534595$.

628. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\chi=1500000000\,.\,0,0375\,.\,1,0375^{20}:$ $:(1,0375^{15}-1)$.

Ἀλλὰ $20\lambda o\gamma 1,0375=20.0,01599=0,31980$.

καὶ $15\lambda o\gamma 1,0375=15.0,01599=0,23985$.

Ὅθεν $1,0375^{20}=2,088$ καὶ $1,0375^{15}=1,737$.

, Ὥστε $\chi=1500000000.0,0375.2,088:0,737$.

$\lambda o\gamma\chi=9,17609+\bar{2},57403+0,31973-\bar{1},86747=8,06985-\bar{1},86747=8,20238$ καὶ $\chi=159359259$.

629. Ἡ λύσις του δίδεται εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

630. Τὰ 20000000 προῆλθον ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμὸν ποσοῦ α πρὸς $4^0/_0$ ἐπὶ 6 ἔτη. Ὅθεν, $20000000=\alpha.(1,04)^6$, $\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 20000000-6\lambda o\gamma 1,04=7,30103-6.0,01703=7,30103-0,10218=7,19885$ καὶ $\alpha=15807037$. Ἀλλ' ἂν κατέθετε χ δραχμὰς ἐπὶ 5 ἔτη εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῶν πρὸς $4^0/_0$, θὰ ἐλάμβανε εἰς τὸ τέλος τοῦ $5^{ου}$ ἔτους α δραχμάς. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $15807037=\chi(1,04^5-1):0,04$, ἤτοι $\chi=15807037.0,04:0,2167$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\chi=7,19885+\bar{2},60206-\bar{1},33586=5,80091-\bar{1},33586=6,46505$ καὶ $\chi=2917737$.

631. Ἔχομεν κατὰ πρῶτον $\Sigma_1=\dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}=$

$$=\frac{1250000.1,06.(1,06^7-1)}{0,06}=\frac{1250000.1,06.0,504}{0,06}=1250000.1,06.8,4.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\Sigma_1=6,09691+0,02531+0,92428=7,04650$ καὶ $\Sigma_1=11130000$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν τοῦτο ἀνατοκίζεται πρὸς $6^0/_0$ ἐπὶ ἄλλα 5 ἔτη καὶ δίδει τὸ ποσὸν $\Sigma_2=11130000.(1,06)^5$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\Sigma_2=7,04650+5.0,02531=7,04650+0,12655=7,17305$ καὶ $\Sigma_2=14895333$.

632. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\dfrac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $10200000=\dfrac{1000000(1+\tau)[(1+\tau)^8-1]}{\tau}$, ἥτις ὡς βλέπομεν εἶναι 8ου βαθμοῦ πρὸς τ καὶ τὴν ὁποίαν ἑπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ τ διὰ προσεγγίσεων. Οὕτως ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν θέσωμεν $\tau=0,05$, τὸ 2ον μέλος αὐτῆς εὑρίσκομεν ὅτι θὰ δώσῃ $1000000.1,05.(1,05^8-1):0,05=1000000.1,05.0,477:0,05=1000000.21.0,477=10017000$, ἤτοι μικρότερον τοῦ 10200000. Ἀλλ' ἐὰν θέσωμεν $\tau=0,055$ θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ 2ον μέλος δίδει ποσὸν μεγαλύτερον τοῦ 10200000: Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐπιτόκιον κεῖται μεταξὺ $5^0/_0$ καὶ $5,5^0/_0$.

633. Ἐκ τοῦ τύπου $\Sigma=\dfrac{\alpha[(1+\tau)^\nu-1]}{\tau}$, εὑρίσκομεν $(1+\tau)^\nu-1=\Sigma\tau:\alpha$, ἤτοι $1,055^\nu-1=2457839000.0,055:1000000=2457,839.0,055$. Ὅθεν $\lambda o\gamma[1,055^\nu-1)=\lambda o\gamma 2457,839+\lambda o\gamma 0,055=3,39055+\bar{2},74036=2,13091$ καὶ $1,055^\nu-1=135,78$. Ὥστε $1,055^\nu=136,78$, $\nu=\lambda o\gamma 136,78:\lambda o\gamma 1,055=2,13603:0,02325=91\dfrac{2025}{2325}$. Ὥστε αἱ καταθέσεις θὰ εἶναι 91 καὶ ἀκόμη μία μικροτέρα τοῦ 1000000.

634. Ἐκ τοῦ ἄνω τύπου εὑρίσκομεν $\alpha=\Sigma\tau:[(1+\tau)^{\nu}-1]=$ $=10000000.0{,}05:(1{,}05^{5}-1)=500000:0{,}276=500000000:276=$ $=1811594$.

635. Ἔχομεν ὡς ἄνω $\alpha=15000000.0{,}06:(1{,}06^{8}-1)=900000:$ $:0{,}191=900000000:191=4712010$.

636. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^{\nu}=\dfrac{\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$ λαμβάνομεν

$(1+\tau)^{\nu}=\chi:(\chi-\alpha\tau)$ ἤτοι $1{,}03^{\nu}=1000000:(1000000-20000000.0{,}03)$ $=1000000:400000=5:2=2{,}5$. Ὅθεν $\nu=\lambda o\gamma 2{,}5:\lambda o\gamma 1{,}03=0{,}39794:$ $:0{,}01284=39794:1284=30$ δόσεις ἑξαμήνους καὶ ἀκόμη μίαν μικροτέραν τούτων.

637. Τὸ χρεωλύσιον ὅπερ πρέπει νὰ καταθέτῃ ἐπὶ 8 ἔτη πρὸς $7^{0}/_{0}$ διὰ νὰ ἐξοφληθῇ τὸ δάνειον τῶν 25000000 ἰσοῦται μὲ $\chi=$ $=\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}:[(1+\tau)^{\nu}-1]=25000000.0{,}07.1{,}07^{8}:(1{,}07^{8}-1)$.

Ἐπειδὴ δὲ $8\lambda o\gamma 1{,}07=8.0{,}02938=0{,}23504$ εἶναι $1{,}07^{8}=1{,}718$. Ὅθεν $\chi=25000000.0{,}07.1{,}718:0{,}718$, $\lambda o\gamma\chi=7{,}39794+\bar{2},84510+0{,}23504-\bar{1},85612=$ $=6{,}47808-\bar{1},85612=6{,}62196$ καὶ $\chi=4187545$. Ὥστε ἐπλήρωσε $4187545.5=20937725$ καὶ χρεωστεῖ $25000000-20937725=4062275$ σὺν τῷ τόκῳ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 3 μῆνας πρὸς $7^{0}/_{0}$, ὅστις τόκος ἰσοῦται μὲ $4062275.3.7:1200=71090$. Ὥστε ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι $4062275+71090=4133365$.

638. Εὑρίσκομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\chi=20008000.0{,}06.1{,}06^{20}:(1{,}06^{20}-1)=$ $=20008000.0{,}06.3{,}207:2{,}207$. $\lambda o\gamma\chi=7{,}30121+\bar{2},77815+0{,}50610-$ $-0{,}34380=6{,}58546-0{,}30380=6{,}24166$ καὶ $\chi=1744440$. Ἀλλὰ τὰ χρεωλύσια μέχρι τοῦ 1950 εἶναι 8. Ὥστε ἐπλήρωσεν $1744440.8=13955520$ καὶ χρεωστεῖ $20008000-13955520=6052480$, σὺν τῷ τόκῳ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ ἐπὶ 5 μῆνας πρὸς $6^{0}/_{0}$ (διότι ἀπὸ τῆς τελευταίας δόσεως μέχρι τῆς 1ης Ὀκτωβρίου 1950 μεσολαβοῦν 5 μῆνες). Εἶναι δὲ ὁ τόκος οὗτος ἴσος μὲ $6052480.5.6:1200=151312$. Ὥστε θὰ πληρώσῃ ἐν ὅλῳ $6052480+151312=6206792$.

639. Εἶναι (ἀσκ. 636) $1{,}07^{\nu}=10000000:(10000000-$ $-100000000.0{,}07=10000000:3000000=10:3$. Ὅθεν $\nu=(\lambda o\gamma 10-\lambda o\gamma 3):$ $:\lambda o\gamma 1{,}07=(1-0{,}47712):0{,}02938=0{,}52288:0{,}02938=52288:2938=17{,}79$. Ὥστε αἱ δόσεις θὰ εἶναι 17 καὶ ἀκόμη μία, μικροτέρα τούτων.

640. Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha(1+\tau)^{\nu}=\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]:\tau$ εὑρίσκομεν: διαδοχικῶς $\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}=\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]$.

$$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau(1+\tau)^{\nu}}\,,\quad \frac{\alpha}{\chi}=\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau(1+\tau)^{\nu}}\ \text{καὶ τέλος}$$

$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{1}{(1+\tau)^{\nu}}\right)$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{\chi}=\frac{250000000}{14553000}=17{,}18$ καὶ $\nu=15$ εἶναι $\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{1}{(1+\tau)^{15}}\right)=17{,}18$. Ἐργαζόμεθα δὲ εἰς τὴν ἄσκησιν 632.

641. Ἐκ τοῦ τύπου τῆς χρεωλυσίας εὑρίσκομεν $\alpha=\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]:$ $:\tau(1+\tau)^{\nu}=10000000.(1{,}05^{20}-1):0{,}05\,.\,1{,}05^{20}=10000000\,.\,1{,}6533:0{,}05\,.$ $2{,}6533=16533000:0{,}132665$. Ὅθεν λογα=λογ16533000—λογ0,132665= $=7{,}21835-\bar{1}{,}12275=8{,}09560$ καὶ $\alpha=124622854$.

642. Θέτομεν $210000000000=s_1$, $7{,}5:1000=0{,}0075=\alpha$ καὶ $0{,}05=\tau$. Τότε ἀφοῦ εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους εἰσπράτομεν s_1 δραχμάς, εἰς τὸ μέσον τῶν ἑπομένων ἐτῶν τῆς αης πενταετίας εἰσπράτομεν $s_1+\alpha s_1=$ $=s_1(1+\alpha)$, $s_1+2\alpha s_1=s_1(1+2\alpha)$, $s_1+3\alpha s_1=s_1(1+3\alpha)$ καὶ $s_1(1+4\alpha)$. Τὰ ποσὰ δὲ ταῦτα ἀνατοκιζόμενα πρὸς 5% δίδουν ἐν ὅλῳ εἰς τὸ τέλος τῆς αης πενταετίας τὸ ποσόν. $S_1=s_1(1+\tau)^{4,5}+s_1(1+\alpha)(1+\tau)^{3,5}+s_1(1+$ $+2\alpha)(1+\tau)^{2,5}+s_1(1+3\alpha)(1+\tau)^{1,5}+s_1(1+4\alpha)(1+\tau)^{0,5}=s_1\sqrt{1+\tau}[(1+\tau)^4+$ $+(1+\alpha)(1+\tau)^3+(1+2\alpha)(1+\tau)^2+(1+3\alpha)(1+\tau)+(1+4\alpha)]=$

$=s_1\sqrt{1+\tau}.\frac{[(1+\tau)^5-1](\alpha+\tau)-5\alpha\tau}{\tau^2}=s_1{\cdot}k$, ἐὰν διὰ τοῦ k παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι πολλαπλασιάζουν τὸ s_1. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους τῆς βας πενταετίας, εἰσπράττομεν $s_1+\frac{s_1}{3}=s_2$ δρχ., εἰς τὸ μέσον τοῦ 1ου ἔτους τῆς γης πενταετίας εἰσπράττομεν $s_1+\frac{2s_1}{3}=s_3$ δραχμάς, καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς δης πενταετίας εἰσπράττομεν $s_1+\frac{s_1}{3}=2s_1=s_4$ δραχμάς.

Ἐὰν δὲ ἐργασθῶμεν ὁμοίως ὡς ἄνω, εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τῆς βας, γης καὶ δης πενταετίας θὰ λάβωμεν ἀντιστοίχως s_2k, s_3k, s_4k. Οὕτως ὑπολογίζοντες τὴν παράστασιν k εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ζητούμενα.

Περὶ ἀκολουθιῶν ἀριθμῶν καὶ περὶ ὁρίων.

Ἀσκήσεις.—*643.* Τῆς ἀκολουθίας 1, 3, 3^2, 3^3... 3^{ν},... κατώτερος φραγμὸς εἶναι πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $\chi^{\nu}=3^{\nu}$, ἐνῷ ἀνώτερος φραγμὸς αὐτῆς δὲν ὑπάρχει. Διότι ὁ 3^{ν} αὐξάνεται ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ ν.

644. 1) Ἐὰν ἀκολουθίας, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, οἱ ὅροι ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι ὅλοι ἀρνητικοί, ταύτης ὑπάρχει ἀνώτερος φραγμός. Οὗτος δὲ εἶναι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν θετικῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας. Ἑπομένως ἐὰν ἡ ἀκολουθία αὕτη οὐδένα θετικὸν ὅρον ἔχῃ, πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἀνώτερος φραγμὸς αὐτῆς.

2) Ἐὰν ἀκολουθίας, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, οἱ ὅροι ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι ὅλοι θετικοί, ταύτης δὲν ὑπάρχει ἀνώτερος φραγμός. Διότι πάντοτε εὑρίσκεται ὅρος αὐτῆς μεγαλύτερος παντὸς δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου.

3) Ἐὰν ἀκολουθία, ἥτις τείνει πρὸς τὸ ∞, ἔχει ἄπειρον πλῆθος ὅρων θετικῶν, ὡς καὶ ἄπειρον πλῆθος ὅρων ἀρνητικῶν, ἡ δὲ ἀκολουθία τῶν πρώτων τείνει πρὸς τὸ ∞, ὡς καὶ ἡ ἀκολουθία τῶν δευτέρων, ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία πάλιν δὲν ἔχει ἀνώτερον φραγμόν, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

4) Ἡ ἀκολουθία $-1, +1, -1, +1, \dots (-1)^\nu$ εἶναι ἀπροσδιόριστος ἤτοι εἰς οὐδένα ἀριθμὸν τείνει. Διότι ἐὰν θέσωμεν $S\nu=1-1+1-$ $-1+\dots+(-1)^\nu$, εἶναι φανερὸν ὅτι $S_{2\lambda}=0$ καὶ $S_{2\lambda}+1=$ Οὕτως ἐφ' ὅσον λαμβάνομεν ὅρους ὁλοὲν περισσοτέρους εὑρίσκομεν ἀθροίσματα ἐναλλὰξ 1 καὶ 0.

645. α') Ὁ 1ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\chi_\nu = \nu^2.5^\nu$ εἶναι $\chi_1=$ $=1^1.5^1=5$ καὶ ὁ 10ς ὅρος αὐτῆς εἶναι $\chi_{10}=10^2.5^{10}$. β') Ὁ 5ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $\chi\nu = \dfrac{3^\nu}{\sqrt{\nu}-(-1)^\nu}$ εἶναι $\chi^5 = \dfrac{3^5}{\sqrt{5}+1^5}$. γ') Ὁ 7ος ὅρος τῆς $\chi\nu = \dfrac{\nu+3}{\nu^2+1}$ εἶναι $\chi_7 = \dfrac{7+3}{7^2+1} = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$.

646. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς η πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτος ὥστε ἂν $\nu>\eta$, θὰ εἶναι $1:\nu^2<0,35$, ἤτοι $\nu^2>1:0,35=100:35$ καὶ ἑπομένως $\nu>10:\sqrt{35}=10\sqrt{35}:35$. Ὥστε ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ η, μίαν τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $10\sqrt{35}:35$ π.χ. $\eta=2$, διὰ $\nu>2$ θὰ εἶναι $1:\nu^2<0,35$.

Ὁμοίως ἵνα $1:\nu^2<0,00001$, ἤτοι ἵνα $\nu^2>10^5$ ἢ $\nu>100\sqrt{10}$ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς $\eta=316$, ὁπότε διὰ $\nu>316$ θὰ εἶναι $1:\nu^2<0,00001$.

647. Ἂν $ὅρ\chi_\nu = \alpha$, θὰ εἶναι $ὅρ(\chi_\nu-\alpha)=0$ καὶ ἑπομένως ἐὰν λ σταθερὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι $ὅρ[\lambda(\chi_\nu-\alpha)=0$.

1) Ἂν $ὅρ\chi_\nu=\alpha$ καὶ $ὅρ\chi_\nu'=\beta$, θὰ εἶναι $ὅρ(\chi_\nu-\alpha)=0$, $ὅρ(\chi_\nu'-\beta)=0$ καὶ κατὰ συνέπειαν $ὅρ[\chi_\nu+\chi_\nu')-(\alpha+\beta)]=0$.

2) Ἐπειδὴ $ὅρ(\chi_\nu-\alpha)=0$ καὶ $ὅρ(\chi_\nu'-\beta)=0$, ἔπεται $ὅρ[(\chi_\nu-\alpha)$ $.(\chi_\nu'-\beta)=0$ ἤτοι $ὅρ(\chi_\nu\chi_\nu'-\alpha\chi_\nu'-\beta\chi_\nu+\alpha\beta)=ὁ\ \ \nu'-\alpha\beta-\alpha\beta+$ $+\alpha\beta)=0$ ἢ $ὅρ(\chi_\nu\chi_\nu'-\alpha\beta)=0$ δηλαδὴ $ὅρ(\chi_\nu\chi_\nu')=\alpha\beta$.

3) Βλέπε περὶ ὁρίου τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσῶν.

648. Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\left| 6+\frac{\nu}{\nu+1}-7 \right| < 0{,}0025$, εὑρίσκομεν $\left|\frac{-1}{\nu+1}\right| < 0{,}0025$ ἤτοι $\frac{1}{\nu+1} < 0{,}0025$ ἢ $\nu > \frac{1}{0{,}0025}-1 = \frac{0{,}9975}{0{,}0025}=399$. Ὥστε ἂν λάβωμεν $\eta=400$, διὰ $\nu \geqslant 400$ θὰ εἶναι $\left| 6+\frac{\nu}{\nu+1}-7 \right| < 0{,}0025$.

649. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀνισότητος $\left|6+\frac{\nu}{\nu+1}-7\right| < \varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ εὑρίσκομεν $\nu > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς η ἀριθμὸν θετικὸν μεγαλύτερον τοῦ $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, διὰ $\nu \geqslant \eta$ θὰ εἶναι $\left| 6+\frac{\nu}{\nu+1}-7 \right| < \varepsilon$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ θετικὸς ε, δύναται νὰ εἶναι ὁσονδήποτε μικρός, ἕπεται ὅτι ὅρ$\left(6+\frac{\nu}{\nu+1}-7\right)=0$ ἤτοι ὅρ$\left(6+\frac{\nu}{\nu+1}\right)=7$.

650. Ἵνα ἡ ἀκολουθία $\chi_\nu=5+\frac{1}{\nu}$ ἔχει ὅριον τὸ 5, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὅρ$(\chi_\nu-5)=$ ὅρ$\left(5+\frac{1}{\nu}-5\right)=\frac{1}{\nu}=0$ ὅπερ πράγματι συμβαίνει.

Ὁμοίως ἵνα ὅρ $\psi_\mu=$ ὅρ $\left(6-\frac{1}{\mu^2}\right)=6$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὅρ$(\psi_\mu-6)=$ $=$ ὅρ$\left(6-\frac{1}{\mu^2}-6\right)=-\frac{1}{\mu^2}=0$, ὅπερ πράγματι συμβαίνει.

651. α΄) Ἐὰν θέσωμεν $\psi=1-\frac{2}{\chi}+\frac{5}{\chi^2}$, ἔχομεν ὅρ ψ = ὅρ$1-\frac{2}{\text{ὅρ}\chi}+\frac{5}{\text{ὅρ}\chi^2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ὅρ χ=1 εἶναι ὅρ ψ=1−2+5=4.
β΄) Ὁμοίως ἔχομεν ὅρ ψ = ὅρ$1+(7:$ ὅρ $\chi^2)=1+(7:4)=11:4$. γ΄ Εἶναι ὅρ ψ = 3ὅρ χ + 6ὅρ $\chi^2=3.0+6.0=0$. *δ΄)* ὅρ ψ = ὅρ(χ^2+1) : ὅρ$(\chi+3)=$ $=($ὅρ $\chi^2+1):($ὅρ $\chi+3)=[(-2)^2+1]:[(-2)+3]=5$.

652. α΄) Εἶναι ὅρ ψ = [ὅρ $(\chi-k)^2-2k$ ὅρ $\chi^3]$: ὅρ χ .(ὅρ χ + k) = $=[(0-k)^2-2k.0^3]:0(0+k)=k^2:0=\infty$. β΄) ὅρ ψ=5 : ὅρ $(3\chi^2+5\chi)=5:$ $(3.\infty^2+5.\infty)=5:\infty=0$. γ΄) Εἶναι $\psi=\chi^2\left(\alpha+\frac{\beta}{\chi}+\frac{\gamma}{\chi^2}\right)$ καὶ ὅρ ψ= $=\infty^2(\alpha+0+0)=\alpha.\infty=\pm\infty\left(\alpha \gtrless 0\right)$. δ΄) Ὁμοίως εἶναι ὅρ ψ= ∞^5 $(-\alpha^2+0+0=-\alpha^2.\infty=-\infty$. ε΄) Εἶναι ὅρ ψ=ὅρ $(2+3:\chi)=2+3:0=$ $=2+\infty=\infty$. στ΄) Εἶναι ὅρ ψ=ὅρ $(5\chi-5)=5.\infty-5=\infty-5=\infty$.

653. α΄) Ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 5 ἐκ τιμῶν ἐλασσόνων (δηλαδὴ ἐκ τιμῶν $\chi<5$) τότε εἶναι $1:\text{ὅρ}(\chi-5)=-\infty$. β') Ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 5 ἐκ τιμῶν μειζόνων, εἶναι $1:\text{ὅρ}(\chi-5)=+\infty$.

654. 1) Δι' ὅρ $\chi=3$ εἶναι $\text{ὅρ}(3\chi^2-5)=22$. 2) Δι' ὅρ $\psi=2$ εἶναι $\text{ὅρ}\left(\frac{2}{\psi^2}+4\psi\right)=8\frac{1}{2}$. 3) Δι' ὅρ$\omega=0$, εἶναι $\text{ὅρ}(2\omega^2-4\omega-5)=-5$.

Ὥστε τὸ ζητούμενον ὅριον ἰσοῦται μὲ $22+8\frac{1}{2}-5=25\frac{1}{2}$.

655. Εἶναι $\text{ὅρ}\left(\frac{2}{\chi}-\frac{5}{\psi^2}+4\omega^2\right)=\frac{2}{\infty}-\frac{5}{2^2}+4(-3)^2=$

$=0-\frac{5}{4}+36=34^3/_4$.

656. Εἶναι ὅρ $\frac{3\chi^2-2\omega^3+4\psi}{2\chi^2-5}=\frac{75-0-12}{50-5}=\frac{63}{45}=\frac{7}{5}$.

657. α') Εἶναι $\text{ὅρ}\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi-3}=\text{ὅρ}\frac{(\chi-2)(\chi-3)}{\chi-3}=\text{ὅρ}(\chi-2)=3-2=1$.

β') ὅρ $\frac{\chi^2+\chi-1}{\chi^5-4\chi+2}=\frac{3^2+3-1}{3^5-4.3+2}=\frac{11}{233}$.

Περὶ παραγώγων.

Ἀσκήσεις.—*658.* α') Εἶναι $\psi'=(\chi^3-2\chi+5)'+(3\chi^2-8\chi-1)'=$ $=(3\chi^2-2)+(6\chi-8)=3\chi^2+6\chi-10$ β') εἶναι $\psi'=15\chi^2+4\chi-3-4\chi+4=$ $=15\chi^2+1$ γ') $\psi'=(2\alpha\chi+\beta)+(2\alpha\chi-\beta)+(2\alpha\chi)+0=6\alpha\chi$ δ') $\psi'=(\chi-3)'(\chi-4)+(\chi-3)(\chi-4)'=1.(\chi-4)+(\chi-3).1=2\chi-7$ ε') $\psi'=(\chi^2+3)'.(2\chi^2-3\chi+1)+(\chi^2+3)(2\chi^2-3\chi+1)'=2\chi.(2\chi^2-3\chi+1)+(\chi^2+3)(4\chi-3)=8\chi^3-9\chi^2+14\chi-9$ στ') $\psi'=(2\chi-1)'.(3\chi+1)(4\chi-2)+(2\chi-1).(3\chi+1)'.(4\chi-2)+(2\chi-1).(3\chi+1).(4\chi-2)'=24\chi^2-4\chi-4+24\chi^2-24\chi+6+24\chi^2-4\chi-4=72\chi^2-32\chi-2$ ζ') $\psi'=(\chi^3)'.(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)+\chi^3.(2\chi^2-5)'.(3\chi^3-1)+\chi^3(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)'=3\chi^2.(2\chi^2-5)(3\chi^3-1)+\chi^3.4\chi.(3\chi^3-1)+\chi^3.(2\chi^2-5).9\chi^2$ $=3\chi^2(6\chi^5-15\chi^3-2\chi^2+5)+12\chi^7-4\chi^4+18^7-45\chi^5$ κλπ.

η') Εἶναι $\psi'=\frac{(\chi^2-1).1'-1.(\chi^2-1)'}{(\chi^2-1)^2}=\frac{(\chi^2-1).0-1.2\chi}{(\chi^2-1)^2}=-\frac{2\chi}{(\chi^2-1}$

θ') $\psi'=\frac{(\chi+1).\chi'-\chi(\chi+1)'}{(\chi+1)^2}=\frac{(\chi+1).1-\chi.1}{(\chi+1)^2}=\frac{1}{(\chi+1)^2}$

ι') $\psi'=\frac{(4\chi-6).(3\chi-3)'-(3\chi-3)(4\chi-6)'}{(4\chi-6)^2}=\frac{(4\chi-6).3-(3\chi-3).4}{(4\chi-6)^2}=$

$=-\frac{6}{(4\chi-6)^2}$ ια') $\psi'=\frac{(3\chi-1)^2.[\chi(\chi-3)]'-\chi(\chi-3).[3\chi-1)^2\,]'}{(3\chi-1)^4}=$

$$=\frac{(3\chi-1)^2.(2\chi-3)-\chi(\chi-3)(18\chi-6)}{(3\chi-1)^4}=\frac{21\chi^2+2\chi-3}{(3\chi-1)^4}.$$

ιβ') $\psi'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\chi^2-3\chi-5)'}{\sqrt{\chi^2-3\chi-5}}=\frac{2\chi-3}{2\sqrt{\chi^2-3\chi-5}}$

ιγ') $\psi'=(3\chi)'-(4\sqrt{\chi})'=3-\frac{4}{2\sqrt{\chi}}=3-\frac{2}{\sqrt{\chi}}.$

ιδ') $\psi'=(2\chi^2-3)'+(3\sqrt{\chi^2-2\chi})'=4\chi+\frac{3(2\chi-2)'}{2\sqrt{\chi^2-2\chi}}.$

659. α') $\psi'=15\chi^2-6\chi+2$ καὶ $\psi''=30\chi-6.$

β') $\psi'=30\chi^5-21\chi^2+3$ καὶ $\psi''=150\chi^4-42\chi.$

γ') $\psi'=3(2\chi-3)^2.(2\chi-3)'=6(2\chi-3)^2$ καὶ $\psi''=12.(2\chi-3).(2\chi-3)'=$ $=24(2\chi-3).$

δ') $\psi'=\frac{(1-\chi)'}{2\sqrt{1-\chi}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-\chi}}$ καὶ $\psi''=$

$$=\frac{(2\sqrt{1-\chi}).(-1)'-(-1).(2\sqrt{1-\chi})'}{4(1-\chi)}=\left[(2\sqrt{1-\chi}).0+2.\frac{-1}{2\sqrt{1-\chi}}\right]:$$

$$:4(1-\chi)=-\frac{1}{4(1-\chi)\sqrt{1-\chi}}=-1:4(1-\chi)^{\frac{3}{2}}.$$

ε') $\psi'=\frac{(\chi+2).(\chi^2+3)'-(\chi^2+3)(\chi+2)'}{(\chi+2)^2}=\frac{(\chi+2).2\chi-(\chi^2+3)}{(\chi+2)^2}=$

$=\frac{\chi^2+4\chi-3}{(\chi+2)^2}$, $\psi''=\frac{(\chi+2)^2.(2\chi+4)-(\chi^2+4\chi-3).2(\chi+2)}{(\chi+2)^4}=\frac{14(\chi+2)}{(\chi+2)^4}=$

$=\frac{14}{(\chi+2)^3}$ στ') $\psi'=\frac{(3\chi^2+5)'}{2\sqrt{3\chi^2+5}}=\frac{6\chi}{2\sqrt{3\chi^2+5}}=\frac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2+5}}$

$$\psi''=\frac{\sqrt{3\chi^2+5}.(3\chi')-3\chi.(\sqrt{3\chi^2+5})'}{3\chi^2+5}=\left[\sqrt{3\chi^2+5}.3-3\chi\cdot\frac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2+5}}\right]:$$

$$(3\chi^2+5)=[3(3\chi^2+5)-9\chi^2]:[(3\chi^2+5)\sqrt{3\chi^2+5}]=15:(3\chi^2+5)^{\frac{3}{2}}$$

660. α') $\psi'=\alpha\sigma\upsilon\nu\chi$, $\psi''=-\alpha\eta\mu\chi$ β') $\psi'=2\sigma\upsilon\nu2\chi$, $\psi''=-4\eta\mu2\chi$, γ') $\psi'=-\eta\mu7\chi.(7\chi)'=-7\eta\mu7\chi$, $\psi''=-49\,\sigma\upsilon\nu7\chi$ δ') $\psi'=\frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}$

$$\psi''=\frac{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi).3'-3\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)'}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi).0-3.2\sigma\upsilon\nu3\chi.(-3)\eta\mu3\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=$$

$=\frac{18\eta\mu3\chi\,\sigma\upsilon\nu3\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}=\frac{18\eta\mu3\chi}{\sigma\upsilon\nu^3(3\chi)}.$ ε') $\psi'=\frac{-1.(4\chi)'}{\eta\mu^2(4\chi)}=\frac{-4}{\eta\mu^2(4\chi)}$ καὶ

$$\psi''=\frac{0-(-4)\eta\mu^2(4\chi)'}{\eta\mu^4(4\chi)}=\frac{4.2\sigma\upsilon\nu4\chi\eta\mu4\chi(4\chi)'}{\eta\mu^4(4\chi)}=\frac{32\;\sigma\upsilon\nu4\chi\eta\mu4\chi}{\eta\mu^4(4\chi}=\frac{32\;\sigma\upsilon\nu4\chi}{\eta\mu^3(4\chi)}$$

στ′) $\psi'=2\tau\epsilon\mu\chi\,(\tau\epsilon\mu\chi)'=2\tau\epsilon\mu\chi.\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)'=2.\tau\epsilon\mu\chi.\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}=2\tau\epsilon\mu^2\chi\epsilon\varphi\chi.$

$\psi''=2[\tau\epsilon\mu^2\chi(\epsilon\varphi\chi)'+\epsilon\varphi\chi.(\tau\epsilon\mu^2\chi)'=2.(\tau\epsilon\mu^2\chi.\,\tau\epsilon\mu^2\chi+\epsilon\varphi\chi.2\tau\epsilon\mu^2\chi\epsilon\varphi\chi)=$
$=2\tau\epsilon\mu^2\chi(\tau\epsilon\mu^2\chi+2\epsilon\varphi^2\chi)=2\tau\epsilon\mu^2\chi[\tau\epsilon\mu^2\chi+2(\tau\epsilon\mu^2\chi-1)]=2\tau\epsilon\mu^2\chi$
$(3\tau\epsilon\mu^2\chi-2).$ ζ′) $\psi'=2\sigma\tau\epsilon\mu\chi.(\sigma\tau\epsilon\mu\chi)'=2\sigma\tau\epsilon\mu\chi.\left(\frac{1}{\eta\mu\chi}\right)'=2\sigma\tau\epsilon\mu\chi.$
$\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}\right)=-2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi\sigma\varphi\chi.$

$\psi''=-2[\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi.(\sigma\varphi\chi)'+\sigma\varphi\chi(\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi)']=-2[\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi.(-1-\sigma\varphi^2\chi)+$
$+\sigma\varphi\chi.(-2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi\,\sigma\varphi\chi)]=2(\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi+\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi\,\sigma\varphi^2\chi+2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi\sigma\varphi^2\chi)=2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi$
$(3\sigma\varphi^2\chi+1)=2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi[3(\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi-1)+1]=2\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi(3\sigma\tau\epsilon\mu^2\chi-2).$

η′) $\psi'=2\eta\mu\chi(\eta\mu\chi)'=2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\eta\mu2\chi$ καὶ $\psi''=(2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi)'=$
$=2[\eta\mu\chi.(-\eta\mu\chi)+\sigma\upsilon\nu\chi.\sigma\upsilon\nu\chi]=2(\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi)=2\sigma\upsilon\nu2\chi.$

θ′) $\psi'=3\sigma\upsilon\nu^2\chi(\sigma\upsilon\nu\chi)'=-3\sigma\upsilon\nu^2\chi\eta\mu\chi$ καὶ $\psi''=-3[\sigma\upsilon\nu^2\chi(\eta\mu\chi)'+$
$+\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu^2\chi)']=-3(\sigma\upsilon\nu^3\chi+2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi(-\eta\mu\chi)]=-3(\sigma\upsilon\nu^3\chi-2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu\chi)=$
$=-3[\sigma\upsilon\nu^3\chi-2(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi)\sigma\upsilon\nu\chi]=-3\sigma\upsilon\nu\chi(3\sigma\upsilon\nu^2\chi-2).$

ι′) $\psi'=(\chi^3)'\eta\mu3\chi+\chi^3(\eta\mu3\chi)'=3\chi^2\eta\mu3\chi+\chi^3.3\sigma\upsilon\nu3\chi=3\chi^2(\eta\mu3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu3\chi)$
$\psi''=(3\chi^2)'.(\eta\mu3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu3\chi)+3\chi^2(\eta\mu3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu3\chi)'=6\chi(\eta\mu3\chi+\chi\sigma\upsilon\nu3\chi)+$
$+3\chi^2(3\sigma\upsilon\nu3\chi+\sigma\upsilon\nu3\chi-3\chi\eta\mu3\chi)=18\chi^2\sigma\upsilon\nu3\chi-3\chi(3\chi^2-2)\eta\mu3\chi.$

ια′) $\psi'=(\chi^2)'\sigma\upsilon\nu^2\chi+\chi^2(\sigma\upsilon\nu^2\chi)'=2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi^2\eta\mu2\chi=\chi(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu2\chi)$
$\psi''=\chi'.(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu2\chi)+\chi(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu2\chi)'=(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu2\chi)+$
$+\chi(-2\chi\eta\mu2\chi-\eta\mu2\chi-2\chi\sigma\upsilon\nu2\chi)=(2\sigma\upsilon\nu^2\chi-\chi\eta\mu2\chi)-\chi(3\eta\mu2\chi+2\chi\sigma\upsilon\nu2\chi).$

ιβ′) $\psi'=2\chi\epsilon\varphi3\chi+\frac{3\chi^2}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}$ καὶ $\psi''=2\epsilon\varphi3\chi+\frac{6\chi}{\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)}+$
$+\frac{6\chi\sigma\upsilon\nu^2(3\chi)+3\chi^2\eta\mu6\chi}{\sigma\upsilon\nu^4(3\chi)}.$

ιγ′) $\psi'=\frac{(\eta\mu\chi)'}{2\sqrt{\eta\mu\chi}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sqrt{\eta\mu\chi}}$ καὶ

$$\psi''=\left(2\sqrt{\eta\mu\chi}.(-\eta\mu\chi)-\sigma\upsilon\nu\chi.\frac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sqrt{\eta\mu\chi}}\right):4\eta\mu\chi=$$
$$=(-4\eta\mu^2\chi-2\sigma\upsilon\nu^2\chi):8\eta\mu\chi\sqrt{\eta\mu\chi}=-(2\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi):4\eta\mu\chi\sqrt{\eta\mu\chi}.$$

ιδ′) $\psi'=\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)'}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}}=\frac{-\eta\mu\chi}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}}$ καὶ

$$\psi''=\left(-2\sigma\upsilon\nu\chi\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}+\eta\mu\chi.\frac{-2\eta\mu\chi}{2\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}}\right):$$
$$:4\sigma\upsilon\nu\chi=-(2\sigma\upsilon\nu^2\chi+\eta\mu^2\chi):4\sigma\upsilon\nu\chi\sqrt{\sigma\upsilon\nu\chi}.$$

ιε') $\psi' = -\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}.(\sqrt{\chi^2+1})' = \dfrac{-2\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}}{2\sqrt{\chi^2+1}} = \dfrac{-\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}}{\sqrt{\chi^2+1}}$

$$\psi'' = \frac{-\sqrt{\chi^2+1}.(\chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1})' + \chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}.(\sqrt{\chi^2+1})'}{\chi^2+1} =$$

$$= \left[-\sqrt{\chi^2+1}.\left(\eta\mu\sqrt{\chi^2+1} + \chi.\frac{2\chi\sigma\upsilon\nu\sqrt{\chi^2+1}}{2\sqrt{\chi^2+1}}\right) + \right.$$

$$\left. + \chi\eta\mu\sqrt{\chi^2+1}.\frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2+1}}\right] : (\chi^2+1)$$

661. α') $\psi=\chi+3$. 1) Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἐπειδὴ $\psi'=1$ (σταθερὰ) καὶ θετική, ἡ ψ εἶναι σταθερῶς αὔξουσα (δηλαδὴ δὲν ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον) 3) Δι' ὅρ$\chi=+\infty$ εἶναι ὅρ$\psi=+\infty$ καὶ δι' ὅρ$\chi=-\infty$ εἶναι ὅρ$\psi=-\infty$. Ὥστε τὸ διώνυμον ψ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. 4) Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ τέμνουσα τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (0,3) καὶ (−3,0) μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως τὴν μονάδα 1. (συντελεστὴν τοῦ χ).

β') $\psi=-3\chi+1$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἐπειδὴ $\psi'=-3$ (σταθερὰ) καὶ ἀρνητική, ἡ ψ εἶναι σταθερῶς φθίνουσα. 3) Δι' ὅρ$\chi=+\infty$ εἶναι ὅρ$\psi=-\infty$ καὶ δι' ὅρ$\chi=-\infty$, ὅρ$\psi=+\infty$. Ὥστε ἡ ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ $+\infty$ ἕως τὸ $-\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ $-\infty$ ἕως τὸ $+\infty$. 4) Ἡ ψ παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα (0,1) καὶ (1/3,0) μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως −3.

γ') $\psi=\chi^3+3$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ ὅλας τὰ τιμὰς τῆς χ. 2) Ἡ $\psi'=3\chi^2$ γίνεται 0 διὰ $\chi=0$ χωρὶς νὰ ἀλλάζῃ σημεῖον διότι δι' ὅλας τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ χ εἶναι θετική. Ἑπομένως ἡ ψ εἶναι σταθερῶς αὔξουσα. 3) Διὰ χ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 0 ἡ ψ αὐξάνεται ἀπὸ τοῦ $-\infty$ ἕως 3 καὶ διὰ χ ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, ἡ ψ ἐξακολουθεῖ νὰ αὐξάνῃ ἀπὸ τοῦ 3 ἕως $+\infty$. 4) Ὥστε ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ (τρίτου βαθμοῦ διότι καὶ ἡ ψ εἶναι τρίτου βαθμοῦ) τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ ἅπαξ, εἰς τὸ σημεῖον $(-\sqrt[3]{3},0)$ ἤτοι ἡ συνάρτησις ψ ἔχει μίαν μόνον ῥίζαν πραγματικήν, καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον (0,3).

δ') $\psi=\chi^2-5\chi+6$. 1) Ἡ ψ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ. 2) Ἡ $\psi'=2\chi-5$ γίνεται 0 διὰ $\chi=5/2$, ἐνῷ ἀλλάζει σημεῖον ἀπὸ τοῦ ἀρνητικοῦ (ὅταν $\chi<5/2$) εἰς τὸ θετικὸν (ὅταν $\chi>5/2$), διότι δι' ὅρ$\chi=\pm\infty$ εἶναι ὅρ$\psi=$ ὅρ$\chi^2=+\infty$. Ὥστε διὰ $\chi=5/2$ ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $\chi^2-5\chi+6=(5/2)^2-5.(5/2)+6=-1/4$. 3) Ἡ συνάρτησῃ ψ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γνωρίζομεν ὅτι παριστᾷ παραβολὴ (καμπύλην 2ου βαθμοῦ), τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (3,0) καὶ (2,0) ἐνῷ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον (0,6).

ε′) $\psi=\chi^3-8$. Ὁμοία μὲ τὴν ἀνωτέρω γ′, διότι $\psi'=3\chi^2$. Ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὸ σημεῖον $(\sqrt[3]{8},0)$ ἤτοι εἰς τὸ σημεῖον (2,0) καὶ τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,−8).

στ′) $\psi=\chi(\chi-1)^2=\chi(\chi^2-2\chi+1)=\chi^3-2\chi^2+\chi$. 1). Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ. 2) Ἡ $\psi'=3\chi^2-4\chi+1$ γίνεται 0 διὰ $\chi=1/3$ καὶ $\chi=1$. Ἀλλ᾽ ὅταν τὸ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $1/3$ (ἤτοι ἀπὸ μικρότερον τοῦ $1/3$ γίνεται μεγαλύτερον αὐτοῦ) ἡ ψ' ἀπὸ θετικὴ γίνεται ἀρνητική, ἐνῷ ὅταν τὸ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς 1, ἡ ψ' ἀπὸ ἀρνητικὴ γίνεται θετική, διότι δι᾽ ὅρ$\chi=\pm\infty$ ἔχομεν ὅρ$\psi=\pm\infty$ ἀντιστοίχως. Ὥστε ἡ ψ ἔχει ἓν μέγιστον ἴσον μὲ $(1/3)^3-2(1/3)^2+1/3=4/27$ καὶ ἓν ἐλάχιστον ἴσον μὲ $1^3-2.1^2+1=0$. 3) Ἐπειδὴ δὲ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=0$ καὶ διὰ $\psi=0$ εἶναι $\chi=0$ καὶ $\chi=1$ ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ ψ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχει μετὰ τοῦ ἄξονος χ κοινὸν σημεῖον τὸ (1,0).

ζ′) $\psi=\chi^2+3\chi+2$. Ὁμοία μὲ τὴν ἄνω δ′. Ἡ $\psi'=2\chi+3$, γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-3/2$ μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ (διὰ $\chi<-3/2$) εἰς τὸ θετικὸν (διὰ $\chi>-3/2$). Ὥστε ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $(-3/2)^2+$ $+3(-3/2)+2=-1/4$. Ἡ παραβολὴ ἣν παριστᾷ ἡ ψ, τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (−1,0) καὶ (−2,0), τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον (0,2).

η′) $\psi=\chi^3-5\chi-4$. Ὁμοία μὲ τὴν ἄνω στ′. Ἡ $\psi'=3\chi^2-5$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-\sqrt{5/3}$ καὶ $\chi=+\sqrt{5/3}$, ἐνῷ ἡ $\psi''=6\chi$ διὰ μὲν $\chi=-\sqrt{5/3}$ γίνεται $-6\sqrt{5/3}<0$, διὰ δὲ $\chi=+\sqrt{5/3}$ γίνεται $6\sqrt{5/3}>0$. Ὥστε διὰ $\chi=$ $=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ἡ ψ ἔχει μέγιστον ἴσον μὲ $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3-5\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)-$ $-4=\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-4$ καὶ διὰ $\chi=\sqrt{\frac{5}{3}}$, ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}-4$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι $\psi=\chi^3-5\chi-4=(\chi+1)(\chi^2-\chi-4)$. Ὥστε διὰ $\psi=0$, εἶναι $\chi=-1$ καὶ $\chi=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, ἐνῷ διὰ $\chi=0$ εἶναι $\psi=-4$. Ἑπομένως ἡ καμπύλη (τρίτου βαθμοῦ) ἣν παριστᾷ ἡ ψ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα (−1,0), $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},0\right)$ καὶ $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},0\right)$ ἐνῷ τὸν ἄξονα τῶν ψ τὸν τέμνει εἰς τὸ σημεῖον (0,−4).

662. α′) $\psi=\chi^2-3\chi+2$. Ἡ $\psi'=2\chi-3$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=3/2$

μεταβαίνουσα ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ (διὰ $\chi<3/2$) εἰς τὸ θετικὸν (διὰ $\chi>3/2$). Ἑπομένως διὰ $\chi=3/2$ ἡ ψ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $(3/2)^2-3(3/2)+2=-1/4$.

β) $\psi=3\chi^3+2\chi^2$. Ἡ $\psi'=9\chi^2+4\chi$ γίνεται 0 διὰ $\chi=0$ καὶ $\chi=-4/9$. Ἀλλ' ἡ $\psi''=18\chi+4$ διὰ $\chi=0$ γίνεται $4>0$ καὶ διὰ $\chi=-4/9$ γίνεται $-4<0$. Ὥστε ἡ ψ διὰ $\chi=0$ ἔχει ἐλάχιστον ἴσον μὲ $3.0+4.0=0$ καὶ διὰ $\chi=-4/9$ ἔχει μέγιστον ἴσον μὲ $3.(-4/9)^3+2(-4/9)^2=96/729=32/243$.

γ') $\psi=\chi^3-36\chi$. Ἡ $\psi'=3\chi^2-36$ γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ καὶ $\chi=+\sqrt{12}$. Ἡ $\psi''=6\chi$ διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ γίνεται ἀρνητικὴ καὶ διὰ $\chi=+\sqrt{12}$ γίνεται θετική. Ὥστε ἡ ψ διὰ $\chi=-\sqrt{12}$ ἔχει μέγιστον καὶ διὰ $\chi=+\sqrt{12}$ ἔχει ἐλάχιστον.

663. α') Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4\chi-2}{\chi^3+7\chi^2-5\chi-3}$ διὰ $\chi=1$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\psi=\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν παραγώγων τῶν ὅρων εἶναι $\dfrac{3\chi^2-6\chi+4}{3\chi^2+14\chi-5}$. Ὥστε δι' ὅρχ=1 εἶναι ὅρψ=ὅρ $\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4\chi-2}{\chi^3+7\chi^2-5\chi-3}=$ $=$ὅρ $\dfrac{3\chi^2-6\chi+4}{3\chi^2+14\chi-5}=\dfrac{3-6+4}{3+14-5}=\dfrac{1}{12}$.

β') Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-5\chi^2+7\chi-3}{\chi^3-\chi^2-5\chi-3}$, διὰ $\chi=3$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν παραγώγων εἶναι $\dfrac{3\chi^2-10\chi+}{3\chi^2-2\chi-5}$.

Ὥστε δι' ὅρχ=3 εἶναι ὅρψ=ὅρ $\dfrac{3\chi^2-10\chi+7}{3\chi^2-2\chi-5}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

γ') Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4}{\chi^3-2\chi^2-4\chi+8}$ διὰ $\chi=2$ γίνεται $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλὰ δι, ὅρχ=2 εἶναι ὅρψ=ὅρ $\dfrac{3\chi^2-6\chi}{3\chi^2-4\chi-4}=\dfrac{0}{0}$. Ὥστε δι' ὅρχ=2 αἱ δεύτεροι παράγωγοι ἔχουν ὅρ $\dfrac{6\chi-6}{6\chi-4}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$. Ἑπομένως δι' ὅρχ=2 εἶναι ὅρψ$=\dfrac{3}{4}$.

δ') Ἡ $\psi=\dfrac{\chi^3-3\chi^2+4}{3\chi^3-18\chi^2+36\chi-24}$ διὰ $\chi=2$ γίνεται $\dfrac{0}{0}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ δι' ὅρχ=2 εἶναι ὅρ $\dfrac{3\chi^2-6\chi}{9\chi^2-36\chi+36}=\dfrac{0}{0}$, λαμβάνομεν τὸ ὅρ $\dfrac{6\chi-6}{18\chi-36}=\dfrac{6}{0}=\infty$.

Σημείωσις. Περισσότερα περὶ ἀπροσδιορίστων μορφῶν καὶ σχετικὰς ἀσκήσεις βλέπε *«Συμπλήρωμα τῆς Ἀλγέβρας»* Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 71—74.

664. *α')* $\psi=3\chi$, $\psi'=3$ καὶ $d\psi=3d\chi$. *β')* $\psi'=21\chi^2$ καὶ $d\psi=21\chi^2 d\chi$ *γ')* $\psi'=6\chi-5$ καὶ $d\psi=(6\chi-5)d\chi$. *δ')* $\psi'=\frac{(\chi+1).3-3\chi.1}{(\chi+1)^2}=\frac{3}{(\chi+1)^2}$ καὶ $d\psi=\frac{3d\chi}{(\chi+1)^2}$. *ε')* $\psi'=\frac{(\chi^2+1).2\chi-(\chi^2-3).2\chi}{(\chi^2+1)^2}=\frac{8\chi}{(\chi^2+1)^2}$ καὶ $d\psi=\frac{8\chi d\chi}{(\chi^2+1)^2}$. *στ)'* $\psi'=\frac{6\chi}{2\sqrt{3\chi^2}}=\frac{3\chi}{\sqrt{3\chi^2}}$ καὶ $d\psi=\frac{3\chi d\chi}{\sqrt{3\chi^2}}$.

ζ)'. $d\psi=\frac{(\chi-1)d\chi}{\sqrt{\chi^2-2\chi+1}}$.

665. *α')* $\int 3\chi d\chi=\frac{3\chi^{1+1}}{1+1}+c=\frac{3\chi^2}{2}+c$. *β')* $=\frac{9\chi^3}{3}+c$.

γ)' $=\frac{\chi^{-4+1}}{-4+1}+c=\frac{\chi^{-3}}{-3}+c=-\frac{1}{3\chi^3}+c$ *δ)'* $=\frac{\chi^{-4}}{-4}+c=$

$=-\frac{1}{4\chi^4}+c$. *ε')* $=\frac{1}{2\chi^2}+c$.

στ') $7\int\chi^{-5}d\chi=-7/4\chi^4+5$. *ζ')* $\int 3\chi^3 d\chi+\int 2\chi^2 d\chi-\int 5\chi d\chi+\int 6 d\chi=$ $=3\chi^4/4+2\chi^2/3-5\chi^2/2+6\chi+c$. *η')* $=6\chi^4/4-7\chi^3/3-3\chi^2/2+c$.
θ') Θέτομεν $\chi+2=\psi$, ὁπότε $d\chi=d\psi$.

Ὥστε τὸ ζητούμενον ἰσοῦται μὲ $\frac{\psi^4}{4}+c=\frac{(\chi+2)^4}{4}+c$.

ι). Ἔχομεν ὡς ἄνω $\int(\chi-1)^3 d\chi=\frac{(\chi-1)^4}{4}+c$.

ια'). $\int(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)d\chi=\int\eta\mu\chi d\chi+\int\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=-\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi+c$.

ιβ') $\int\sigma\upsilon\nu 2\chi d\chi$. Θέτομεν $2\chi=\psi$, ὁπότε $2d\chi=d\psi$. Ὥστε $\int\sigma\upsilon\nu 2\chi d\chi=$ $=\frac{1}{2}\int\sigma\upsilon\nu\psi.d\psi=\frac{1}{2}\eta\mu\psi+c=\frac{1}{2}\eta\mu 2\chi+c$. *ιγ')* Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\int\eta\mu 2\chi d\chi=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi+c$. *ιδ')* Ὁμοίως εἶναι $\int\sigma\upsilon\nu 3\chi d\chi=$ $=\frac{1}{3}\eta\mu 3\chi+c$. *ιε')* $\int\eta\mu 3\chi d\chi=-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3\chi+c$.

666. Ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2-5\chi+6$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα A(2,0) καὶ B(3,0). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τμήματος AB τοῦ ἄξονος τῶν χ καὶ τῆς καμπύλης AB ἰσοῦται μὲ $E=\int_2^3(\chi^2-5\chi+6)d\chi=\left(\frac{\chi^3}{3}-\frac{5\chi^2}{2}+6\chi+c\right)_2^3=\frac{1}{3}(3^3-2^3)-$ $-\frac{5}{2}(3^2-2^2)+6(3-2^2)=\frac{1}{3}.19-\frac{5}{2}.5+6=-\frac{1}{6}$ ἐκ τοῦ ἐξαγομένου δὲ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπύλη ΑΒ κεῖται κάτωθι τοῦ ἄξονος τῶν χ, ἤτοι τὸ ἐν λόγῳ μεικτόγραμμον χωρίον κεῖται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν χ, οὗ τὸ ἐμβαδὸν κατὰ συνθήκην θεωρεῖται ὡς ἀρνητικόν.

667. Ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2-6\chi+5$ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν χ εἰς τὰ σημεῖα Α′ (1,0) καὶ Α (5,0). τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον Β(0,5). Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου χωρίου ΟΑ′Β ἰσοῦται μὲ $E=\int_0^1(\chi^2-6\chi+6\chi+5)d\chi=\left(\frac{\chi^3}{3}-\frac{6\chi^2}{2}+5\chi+c\right)_0^1=\frac{1}{3}-\frac{6}{2}+$ $+5=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι μεικτόγραμμον χωρίον ΟΑΒ δὲν ὑπάρχει.

668. Ἐνταῦθα ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τόξου τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi=\eta\mu\chi$, ἀπὸ 0 ἕως π καὶ τοῦ τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν χ ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῶν $\chi=0$ καὶ $\chi=\pi$. Ὥστε ἔχομεν $E=\int_0^\pi \eta\mu\chi d\chi=[-\sigma\upsilon\nu\chi+c]_0^\pi=(-\sigma\upsilon\nu\pi)-(\sigma\upsilon\nu 0)=1+1=2.$

668. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\chi d\chi=[\eta\mu\chi+c]_0^{\frac{\pi}{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu 0=1-0=1.$$

ΤΕΛΟΣ