ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν μεθόδων τῆς τριγωνομετρίας καὶ σημειώσεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῶν τριγωμετρικῶν ἀριθμῶν. Γενικοὺς τύπους καὶ πίνακας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς τριγωνομετρίας.

Ὑπὸ
ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
τ. Καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημείου Ἀθηνῶν

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΑ - 38
1950

100
110
10000
1800
2000000

181840
2
363680000000

130
6
10800
6
64800

10000
2
2000000

2000000000000 | 648

363680000000 | 648
3968 | 561234
800 | 60
1520 | 9353 | 60
2240 | 5
2960
168

212
323
234
54

648 | 168
48 | 343
144

Μπαρμπαστάθη Χρ. Α.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν μεθόδων τῆς τριγωνομετρίας καὶ σημειώσεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τῶν τριγωμετρικῶν ἀριθμῶν. Γενικοὺς τύπους καὶ πίνακας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν ζητημάτων τῆς τριγωνομετρίας.

Ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

τ. Καθηγητοῦ τῶν μαθηματικῶν

ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημείου Ἀθηνῶν

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„

ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΙΑΣ Α.Ε.

38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΑ - 38

1950

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

Τύποις : Ν. ΒΑΦΕΙΑΔΑΚΗ καὶ Σια ΣΑΜΟΥ 24 — ΑΘΗΝΑΙ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ τριγωνομετρία, ὅπως φανερώνει τὸ ὄνομά της, πρῶτον ἔργον ἔχει τὴν μέτρησιν τοῦ τριγώνου. Εἰς τὴν γεωμετρίαν λύομεν τὸ τρίγωνον διὰ κατασκευῆς. Ὅταν δηλαδὴ ἀπὸ τὰ ἓξ κύρια στοιχεῖά του (τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὰς τρεῖς γωνίας) γνωρίζωμεν τὰ τρία (ὄχι καὶ τὰ τρία γωνίαι) τὸ κατασκευάζομεν (ἐν ἀνάγκῃ ὑπὸ κλίμακα) μὲ τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτην καὶ κατόπιν ἐπὶ τοῦ σχήματος μετροῦμεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖά του. Εἰς τὴν τριγωνομετρίαν ὅμως εὑρίσκομεν τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα διὰ τοῦ λογισμοῦ.

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς προτιμῶμεν τὴν ἀριθμητικὴν ἢ λογιστικὴν μέθοδον, διότι αὕτη μᾶς δίδει ὅσην ἀκρίβειαν θέλομεν εἰς πᾶσαν περίπτωσιν· ἐνῷ ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ ὑπόκειται εἰς λάθη ἕνεκα τῆς ἀτελείας τῶν ὀργάνων μας.

Ἡ τριγωνομετρία ἡ ὁποία ἤρχισε μὲ τὴν μέτρησιν τῶν τριγώνων, ηὔρυνε κατόπιν τὴν δρᾶσιν της καὶ ἐβοήθησε σημαντικῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν θεωρητικῶν καὶ ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν. Οὕτως ἔγινεν αὕτη ἀπαραίτητος εἰς τὸν γεωδαίτην καὶ τοπογράφον, εἰς τὸν μηχανικόν, τὸν φυσικὸν καὶ τὸν ἀστρονόμον, εἰς ἐκεῖνον ποὺ θὰ γίνῃ ναυτικὸς ἢ ἀεροπόρος καὶ γενικῶς εἰς ὅσους ἀκολουθήσουν τεχνικὸν ἐπάγγελμα.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Μέτρησις εὐθυγράμμου τμήματος, τόξων καὶ γωνιῶν

Ἀσκήσεις: —*1.* Ἡ ἄσκησις αὐτή, ὡς καὶ αἱ κατωτέρω, εἶναι ἐφαρμογὴ τῶν σχέσεων $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$. Ἑπομένως τὸ μέτρον τόξου 40° ἢ τῶν 30° εἶναι:

Α' Εἰς βαθμούς: $\beta = 40 \cdot \frac{200}{180} = 44^{\gamma}\frac{4}{9}$ καὶ $\beta = 30 \cdot \frac{200}{180} = 33^{\gamma}\frac{1}{3}$.

Β' Εἰς ἀκτίνια: $\alpha = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$ καὶ $\alpha = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$.

2. Ἐπειδὴ $60° = 30° \cdot 2$ καὶ $80° = 40° \cdot 2$, εὑρίσκομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ὅτι τὸ μέτρον τόξου 60° εἰς βαθμοὺς μὲν εἶναι $66\frac{2}{3}$ καὶ εἰς ἀκτίνια $\frac{\pi}{3}$. Τὸ δὲ μέτρον τόξου 80° εἶναι εἰς βαθμοὺς $88\frac{8}{9}$ καὶ εἰς ἀκτίνια $\frac{4\pi}{9}$.

3. Τὸ μέτρον τόξου 50^{γ} εἰς μοίρας εἶναι $\mu = 50 \cdot \frac{180}{200} = 45°$ καὶ εἰς ἀκτίνια εἶναι $\alpha = 50 \cdot \frac{\pi}{200} = \frac{\pi}{4}$.

Ἐνῷ τὸ μέτρον τόξου 30^{γ} εἰς μοίρας εἶναι $\mu = 30 \cdot \frac{180}{200} = 27°$ καὶ εἰς ἀκτίνια εἶναι $\alpha = 30 \cdot \frac{\pi}{200} = \frac{3\pi}{20}$.

4. Τὸ μέτρον τόξου $\frac{3\pi}{2}$ ἀκτινίων εἶναι εἰς μοίρας $\mu = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 270°$ καὶ εἰς βαθμοὺς εἶναι $\beta = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{200}{\pi} = 300^{\gamma}$.

5. Ἐπειδὴ $40°\ 20' = 40°\frac{1}{3}$, τὸ μέτρον τοῦ τόξου τούτου εἶναι εἰς βαθμοὺς $\beta = 40\frac{1}{3} \cdot \frac{200}{180} = \frac{121}{3} \cdot \frac{200}{188} = 44^{\gamma}\frac{22}{27} = 44{,}81^{\gamma}$ **περίπου καὶ** εἰς ἀκτίνια εἶναι $\alpha = \frac{121}{3} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{121\pi}{540}$.

6. Ἐπειδὴ $1^{\circ}=3600''$ καὶ $30'\,40''=1840''$, εἶναι $50^{\circ}\,30'\,40''=$ $50^{\circ}\frac{1840}{3600}=50^{\circ}\frac{23}{45}$. Ὥστε τὸ μέτρον τοῦ τόξου τούτου εἶναι εἰς βαθμοὺς $\beta=50\frac{23}{45}\cdot\frac{200}{180}=\frac{2273}{45}\cdot\frac{10}{9}=56^{\gamma},12$ περ. καὶ εἰς ἀτίνια εἶναι $\alpha=\frac{2273}{45}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2273\pi}{8100}$.

7. Ἐπειδὴ $37^{\circ}\,58'\,20''=37^{\circ}\frac{35}{36}$ τὸ γ. π. τῶν Ἀθηνῶν εἰς βαθμοὺς εἶναι $\beta=37\frac{35}{36}\cdot\frac{10}{9}=42^{\gamma},19$ (περ.).

8. Τὸ μέτρον τόξου $\frac{5\pi}{8}$ ἀκτινίων εἶναι εἰς μοίρας $\mu=\frac{5\pi}{8}\cdot$ $\cdot\frac{180}{\pi}=112^{\circ},5=112^{\circ}30'$ καὶ εἰς βαθμοὺς εἶναι $\beta=\frac{5\pi}{8}\cdot\frac{200}{\pi}=125^{\gamma}$.

Σημείωσις. Ἡ ἀναγωγὴ μοιρῶν πρώτων καὶ δευτέρων λεπτῶν εἰς ἀκτίνια ἢ ἀκτινίων εἰς μοίρας κλπ. γίνεται εὐκόλως μὲ σχετικοὺς πίνακας ποὺ περιέχουν οἱ Πίνακες Λογαρίθμων σελ. 148 ἕως 151 (νέα ἔκδοσις) ἐπιμελείᾳ Χρ. Μπαρμπαστάθη.

Σελὶς 15.—9. Ἡ ὀρθὴ γωνία, ὅταν καταστῇ ἐπίκεντρος, βαίνει ἐπὶ τετάρτου περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ τὸ μέτρον ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας εἶναι 360° ἢ 400^{γ} ἢ 2π ἀκτινίων, ἕπεται ὅτι τὸ μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $\frac{360^{\circ}}{4}=90^{\circ}$ ἢ $\frac{400^{\gamma}}{4}=100^{\gamma}$ ἢ $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ ἀκτινίων.

10. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν τὸ μέτρον τῆς ἡμισείας ὀρθῆς εἶναι 45° ἢ 50^{γ} ἢ $\frac{\pi}{4}$ ἀκτινίων.

11. Τὸ μέτρον τοῦ $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς γωνίας εἶναι $22^{\circ}\,30'$ ἢ 25^{γ} ἢ $\frac{\pi}{8}$ ἀκτινίων.

12. Ὁ δείκτης ὡρολογίου γράφει ὁλόκληρον τὴν πλάκα ἢ γωνίαν 4 ὀρθῶν εἰς 12 ὥρας. Ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν γράφει γωνίαν $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ἤτοι (ἄσκ. 9) γωνίαν $\frac{90^{\circ}}{3}=30^{\circ}$ ἢ $\frac{100^{\gamma}}{3}=33^{\gamma}\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{\pi}{2}:3=\frac{\pi}{6}$ ἀκτινίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας καὶ χρῆσις αὐτοῦ.

Πῶς ἐπιτυγχάνει ἡ Τριγωνομετρία τοῦ σκοποῦ της. Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν εἴδομεν ὅτι σκοπὸς τῆς τριγωνομετρίας εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων στοιχείων τριγώνου διὰ τοῦ λογισμοῦ, ἂν δοθοῦν ἐπαρκῆ στοιχεῖα αὐτοῦ. Ἐπέτυχε δὲ τοῦ σκοποῦ αὐτοῦ ἡ Τριγωνομετρία διότι εὗρε μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τριγώνου ἀριθμητικὰς σχέσεις. Μὲ αὐτὰς δὲ εὑρίσκομεν ἀπὸ πλευρὰς γωνίας καὶ ἀπὸ πλευρὰς καὶ γωνίας ἄλλας πλευρὰς καὶ γωνίας. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅμως, ὅπου ἔχομεν χωριστὰς σχέσεις διὰ τὰς πλευρὰς καὶ χωριστὰς διὰ τὰς γωνίας, τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν.

Π. χ. εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α γωνία ὀρθὴ) ἂν παραστήσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ ἀντιστοίχως, ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$\mathrm{B}+\Gamma=90^\circ \quad \text{καὶ} \quad \beta^2+\gamma^2=\alpha^2.$$

Καὶ διὰ μὲν τῆς πρώτης εὑρίσκομεν μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του, ὅταν δοθῇ ἡ ἄλλη, διὰ δὲ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὅταν δοθοῦν αἱ δύο ἄλλαι πλευραί. Μὲ αὐτὰς ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διὰ τοῦ λογισμοῦ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν τοῦ τριγώνου. Ἡ Τριγωνομετρία ὅμως εὑρίσκει διὰ τοῦ λογισμοῦ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ καὶ τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Β κάθετον πλευράν. Τοῦτο δὲ προκύπτει ἀπὸ τὴν § 8. Διότι εἰς οἱονδήποτε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν Β, ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι καθέτου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι ὁ αὐτός. Τὸν λόγον δὲ τοῦτον τὸν ὀνομάζομεν ἡμίτονον τῆς ὀξείας γωνίας Β. Οὕτως ἐκ τοῦ ἡμΒ εὑρίσκομεν καὶ τὴν γωνίαν Β. Καὶ ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ὀξείας γωνίας Β εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἡμΒ.

Ἀσκήσεις.—*13.* Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α γωνία ὀρθὴ) εἰς ὃ εἶναι (ΒΓ)=5 μ. καὶ (ΑΓ)=3 μ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος εὑρίσκομεν ὅτι $(\mathrm{AB})=\sqrt{5^2-3^2}=4$ μ. Ὥστε εἶναι:

$$\text{ἡμ}\mathrm{B}=\frac{3}{5} \quad \text{καὶ} \quad \text{ἡμ}\Gamma=\frac{4}{5}.$$

14. Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι (ΑΓ)=12 μ. καὶ (ΑΒ)=9 μ. θὰ εἶναι $(\mathrm{B}\Gamma)=\sqrt{12^2+9^2}=15$ μ. Ἐπομένως εἶναι $\text{ἡμ}\mathrm{B}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ καὶ $\text{ἡμ}\Gamma=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

Σημείωσις. Ὥστε αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου τῆς ἀσκήσεως 13 ἰσοῦνται ἀντιστοίχως μὲ τὰς γωνίας Γ καὶ Β τοῦ τριγώνου τῆς ἀσκήσεως 14.

15. Ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ (ΒΓ)= $=\alpha$ καὶ ἡ δοθεῖσα κάθετος εἶναι ἡ (ΑΓ)$=\beta$ ἥτις εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ΒΓ, ἡ ἄλλη κάθετος (ΑΒ)$=\gamma$ θὰ εἶναι $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\frac{9\alpha^2}{16}}=\frac{\alpha\sqrt{7}}{4}$.

Ἐπομένως θὰ εἶναι ἡμΒ$=\frac{3\alpha}{4}:\alpha=\frac{3}{4}$ καὶ ἡμΓ$=\frac{\alpha\sqrt{7}}{4}:\alpha=$ $=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

16. Ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ (βλέπε ἄσκ. 15) καὶ ἐκ τῆς $\beta=$ $=\frac{2\gamma}{3}$ εὑρίσκομεν $8=\sqrt{\gamma^2+\frac{4\gamma^2}{9}}=\frac{\gamma\sqrt{13}}{3}$, ἤτοι $\gamma=\frac{24}{\sqrt{13}}$. Ἐπομένως εἶναι $\beta=\frac{24}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{\sqrt{13}}$. Ὥστε εἶναι ἡμΒ$=\frac{16}{\sqrt{13}}:8=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$ καὶ ἡμΓ$=\frac{24}{\sqrt{13}}:8=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

17. Ἐὰν $\beta=\frac{\alpha}{2}$, θὰ εἶναι $\gamma=\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Ἐπομένως θὰ εἶναι ἡμΒ$=\frac{\alpha}{2}:\alpha=\frac{1}{2}$ καὶ ἡμΓ$=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}:\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. Τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω θὰ τὴν καταστήσωμεν γωνίαν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι διπλασία τῆς καθέτου τῆς ἀπέναντι τῆς ω. Πρὸς τοῦτο θὰ κατασκευάσωμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΓ (σχ. 6) καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς της θὰ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΑΓ ὡς μονάδα καὶ κατόπιν μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα διπλασίαν τοῦ ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου τέμνουσαν τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Β. Τότε ἡ ζητουμένη γωνία, εἶναι ἡ Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, διότι εἶναι ἡμΒ$=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐδόθη ὅτι ἡμω$=\frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι Β$=$ω.

19. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ 5 μονάδας καὶ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ ἴσην μὲ 6 τοιαύτας μονάδας. Οὕτως ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ Β, διότι ἡμΒ$=\frac{5}{6}=$ ημφ καὶ κατὰ συνέπειαν Β$=$φ.

20. Ἐπειδὴ $0{,}25=\frac{1}{4}$, ἐδῶ θὰ λάβωμεν (βλέπε ἄσκ. 18 καὶ 19) τὸ τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ μίαν μονάδα καὶ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ ἴσην μὲ 4 τοιαύτας μονάδας. Οὕτως ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ Β διότι ἡμΒ $= \frac{1}{4} =$ ημχ.

21. Ἐπειδὴ $0{,}125 = \frac{1}{8}$, θὰ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ 1 μονάδα καὶ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ ἴσην μὲ 8 τοιαύτας μονάδας. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γωνία εἶναι ἡ Β, διότι ἡμΒ $= \frac{1}{8} =$ ημψ.

22. Θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 18, διότι εἰς αὐτήν, ἐπειδὴ ἡμω $= \frac{1}{2}$, εἶναι $\omega = 30°$.

23. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του εἶναι 45°, εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος μήκους α, πρὸς τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους $\alpha\sqrt{2}$ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἐπομένως τὸ ζητούμενον τμῆμα εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν μῆκος α. Ἐὰν δὲ τοιοῦτον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ, εἰς ὃ εἶναι (ΑΓ)=(ΑΒ)=α, θὰ εἶναι $(\text{ΒΓ})^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$ καὶ $(\text{ΒΓ}) = \alpha\sqrt{2}$.

24. Τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου ΑΒΓ θέτομεν (ΒΓ)=α' (ΑΓ)=β, ἐπειδὴ δὲ ἡμ$60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ ἡμ$60° = \frac{\beta}{\alpha}$, εἶναι $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta}{\alpha}$, ἤτοι $2\beta = \alpha\sqrt{3}$.

25. ἡμ(18° 40')=0,32006, καὶ ἡμ(42° 10')=0,67129.

26. ἡμ(54° 30')=0,81412 καὶ ἡμ(78° 40')=0,98050.

27. ἡμ50° = ἡμ(49° 60') = 0,76604 καὶ ἡμ80° = 0,98481.

28. ἡμ(27° 10')=0,45658, ἡμ(27° 20') =0,45917. Δ=0,00259, $\delta = 0{,}00259 \cdot \frac{5}{10} = 0{,}00129$. Ὥστε ἡμ(27° 15')=0,45658+0,00129=0,45787.

29. ἡμ(46° 30') = 0,72537.

30. ἡμ(20° 30') = 0,35021, ἡμ(20° 40')=0,35293. Δ = 0,00272. Ἐπειδὴ δὲ 4' 25'' $= 4\frac{5'}{12} = \frac{53'}{12}$, εἶναι $\delta = 0{,}00272 \cdot \frac{53}{12} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}00120$. Ὥστε ἡμ (20° 34' 25'') = 0,35021 + 0,00120=0,35141.

31. ἡμ (67° 40') = 0,92499. Δ =0,00110, $\delta = 0{,}00110 \cdot 5\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}00062$. Ὥστε ἡμ (67° 45' 40'') = 0,92499+0,00062 = 0,92561.

32. Τὰ $\frac{7}{10}$ ὀρθῆς ἔχουν μέτρον εἰς μοίρας $90° \cdot \frac{7}{10} = 63°$. Εἶναι δὲ ἡμ63° = 0,89101.

33. Τὰ $\frac{5}{8}$ ὀρθ. ἰσοῦνται μὲ $90^\circ . \frac{5}{8} = 56^\circ\ 15'$. Εἶναι δὲ τὸ ἡμ$(56^\circ\ 10') = 0{,}83066$. $\Delta = 0{,}00162$ καὶ $\delta = 0{,}00162 . \frac{5}{10} = 0{,}00081$. Ὥστε ἡμ $(56^\circ\ 15') = 0{,}83066 + 0{,}00081 = 0{,}83147$.

34. Εἶναι λογ ἡμ $(12^\circ\ 35') \doteq \bar{1},33818$ (Βλέπε Πίνακας Λογαρίθμων, νέα ἔκδοσις, Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 75). Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἡμ $(12^\circ\ 35') = \chi$, θὰ ἔχωμεν λογ$\chi = \bar{1},33818$. Καὶ ὡς συνάγεται ἐκ τοῦ πίνακος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εἶναι $\chi = 0{,}21786$ (Πίνακες Λογαρίθμων Χρ. Μπαρμπαστάθη, νέα ἔκδοσις, σελὶς 7). Ὥστε εἶναι ἡμ$(12^\circ\ 15') = 0{,}21786$. Ἐπαληθεύομεν δὲ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκοντες τὸ ἡμ $(12^\circ\ 15')$ ὡς εἰς τὴν § 16.

35. Λογἡμ$(58^\circ\ 40') \doteq \bar{1},93154$, ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον τοῦτον εἶναι $0{,}85416$. Ὥστε ἡμ $(58^\circ\ 40') = 0{,}85416$.

36. λογἡμ$(34^\circ\ 25') = \bar{1},75221$. $\Delta = 18$ μ. τ. δ. τ. καὶ $\chi = 18 . \frac{32}{60} = 10$ μ. τ. δ. τ. κατὰ προσέγγισιν. Ὥστε λογ (ἡμ. $34^\circ\ 25'\ 32''$) $= \bar{1},75221 + 0{,}00010 = \bar{1},75231$.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον τοῦτον εἶναι ὁ $0{,}56534$. Ὥστε ἡμ$(34^\circ\ 25'\ 32'') = 0{,}56534$.

Σημείωσις. Προκειμένου περὶ τοῦ ὡς ἄνω λογαρίθμου εὕρομεν ὅτι $\chi = 18 . \frac{32}{60} = 10$. Ἀλλ' εἰς τὸ πινακίδιον μὲ ἐπικεφαλίδα $18 = \Delta$ διὰ $2''$ εὑρίσκομεν $0{,}6$, διὰ $3''$ εὑρίσκομεν $0{,}9$. Ἑπομένως διὰ $30''$ ἔχομεν 9 καὶ διὰ $32''$ ἔχομεν $9 + 0{,}6 = 9{,}6 = 10$ κατὰ προσέγγισιν.

37. Λογ(ἡμ$67^\circ\ 20'$) $= \bar{1},96509$. $\Delta = 5$ μ.τ.δ.τ. καὶ $\chi = 5 . \frac{40}{60} = 3$ μ.τ.δ.τ. Ὥστε λογ(ἡμ$67^\circ\ 20'\ 40''$) $= \bar{1},96509$ καὶ ἡμ$(67^\circ\ 20'\ 40'') = 0{,}92276$, ὡς ἐκ τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν.

38. Λογἡμχ = λογ 3 − λογ 4 $= 0{,}47712 - 0{,}60206 = \bar{1},87506$.

39. Λογἡμω = λογ 5 − λογ7 $= 0{,}69897 - 0{,}84510 = \bar{1},85387$.

40. α') Διὰ τοῦ πίνακος Ι. Ἐπειδὴ ἡμ$\chi = 0{,}40000$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$0{,}39875 < 0{,}40000 < 0{,}40141, \text{ ἤτοι :}$$
$$23^\circ\ 30' < \chi < 23^\circ\ 40'.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\psi = 10' . \frac{125}{266} \doteq 4'\ 42''$, ἕπεται ὅτι $\chi = 23^\circ\ 34'\ 42''$.

β') Διὰ τῶν λογαρίθμων. Εἶναι λογἡμ$\chi = \bar{1},60206$ καὶ

$$\bar{1},60186 < \bar{1},60206 < \bar{1},60215, \text{ ἤτοι :}$$
$$23^\circ\ 34' < \chi < 23^\circ\ 35'.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Delta=29$ καὶ $\delta=20$, εἶναι $\psi=60''.\dfrac{20}{29}=41'',4$, ἕπεται ὅτι:

$$\chi = 23°\ 34'\ 41'',4.$$

41. α') $\eta\mu\,\omega=\dfrac{3}{5}=0{,}6$. $0{,}59949<0{,}6<0{,}60182$, ἤτοι:

$$36°\ 50' < \omega < 37°.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\psi=10'.\dfrac{51}{233}=2'11''$, εἶναι $\chi=36°\ 52'\ 11''$.

β') Λογ $\eta\mu\omega=\bar{1},77815$, $\bar{1},77812<\bar{1},77815<\bar{1},77829$, ἤτοι:

$36°\ 52' < \omega < 36°\ 53'$, $\psi=60''.\dfrac{3}{17}=10'',58=11''$. Ὅθεν:

$\omega = 36°\ 52'\ 11''$.

42. α') $\eta\mu\varphi=0{,}5$ καὶ $\varphi=30'$ (§ 14).

β') λογ $\eta\mu\varphi=\bar{1},69897$ καὶ $\varphi=30'$.

43. α') $0{,}34748<0{,}35<0{,}35021$, ἤτοι $20°\ 20'<\chi<20°\ 30'$.

Ἐπειδὴ δὲ $\psi=10'.\dfrac{252}{273}=9'\ 14''$, ἕπεται ὅτι $\chi=20°\ 29'\ 14''$.

β') Λογημχ $=\bar{1},54407$, $\bar{1},54399<\bar{1},54407<\bar{1},54433$, ἤτοι:

$20°\ 29'<\chi<20°\ 30'$. Εἶναι δὲ $\psi=60''.\dfrac{8}{34}=14'$. Ὥστε:

$$\chi = 20°\ 29'\ 14''.$$

44. α') $0{,}47971<0{,}48<0{,}48226$, ἤτοι $28°\ 40'<\psi<28°\ 50'$

καὶ $10'.\dfrac{29}{255}=1'\ 8''$. Ὥστε $\psi=28°\ 41'\ 8''$.

β) λογημψ $=\bar{1},68124$, $\bar{1},68121<\bar{1},68124<\bar{1},68144$, ἤτοι:

$28°\ 41'<\psi<28°\ 42'$ καὶ $60''.\dfrac{3}{23}=8'$. Ὥστε $\psi=28°\ 41'\ 8''$.

Δύο περιπτώσεις ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων

Τύποι: $B+\Gamma=90°$ $\eta\mu B=\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἐξ οὗ, $\beta=\alpha\eta\mu B$ καὶ $\alpha=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$

$\eta\mu\,\Gamma=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, » », $\gamma=\alpha\eta\mu\Gamma$ καὶ $\alpha=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

καὶ ὁ $E=\dfrac{1}{2}\beta\gamma$

Ἀσκήσεις.— *45.* Ἄγνωστα στοιχεῖα τὰ Γ, β, γ, Ε. Εὑρίσκομεν δὲ $\Gamma=90°-42°\ 12'=47°\ 48'$.

$\beta=\alpha\,\eta\mu\,B=20\,\eta\mu\,(42°\ 12')$, λογ $\beta=$ λογ$20\,+$ λογημ$(42°\ 12')=$ $=1{,}30103+\bar{1},82719=1{,}12822$ καὶ $\beta=13{,}43$ μ. (κατὰ προσέγγισιν).

$\gamma = \alpha \eta\mu\Gamma = 20\eta\mu(47^\circ 48')$, $\lambda o\gamma\, \gamma = \lambda o\gamma 20 + \lambda o\gamma \eta\mu(47^\circ 48') = 1{,}30103 + \bar{1}{,}86970 = 1{,}17073$ καὶ $\gamma = 14{,}81$ μ.

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\lambda o\gamma\, E = \lambda o\gamma\, \beta + \lambda o\gamma\, \gamma - \lambda o\gamma 2 = 1{,}12822 + 1{,}17073 - 0{,}30103 = 1{,}99792$ καὶ $E = 99{,}75$ τ. μ.

46. Εὑρίσκομεν, $B = 90^\circ - 54^\circ\, 20'\, 45'' = 35^\circ\, 39'\, 15''$

$\beta = \alpha\eta\mu B = 345\eta\mu(35^\circ\, 39'\, 15'')$, $\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma 345 + \lambda o\gamma\eta\mu(35^\circ\, 39'\, 15'') = 2{,}53782 + \bar{1}{,}76558 = 2{,}30340$ καὶ $\beta = 201{,}1$ μ.

$\gamma = \alpha\eta\mu\Gamma = 345\eta\mu(54^\circ\, 20'\, 45'')$, $\lambda o\gamma\gamma = 2{,}53782 + \bar{1}{,}90993 = 2{,}44775$ καὶ $\gamma = 280{,}38$ μ.

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$, $\lambda o\gamma E = 2{,}53782 + 2{,}44775 - 0{,}30103 = 4,\ 68454$ καὶ $E = 4836{,}56$ τ. μ.

47. Τρέπομεν πρῶτον τοὺς βαθμοὺς εἰς μοίρας. Εὑρίσκομεν δὲ $\Gamma = 56{,}25.\frac{180}{200} = 56{,}25.\frac{9}{10} = 50^\circ 37'\, 30''$. Ἑπομένως εἶναι $B = 39^\circ\, 22'\, 30''$,

$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma 1565 + \lambda o\gamma\eta\mu(39^\circ 22'\, 30'') = 3{,}19451 + \bar{1}{,}80236 = 2{,}99668$ καὶ $\beta = 999{,}26$ μ.

$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\ 1565 + \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (50^\circ\, 37'\, 30'') = 3{,}19451 + \bar{1}{,}88818 = 3{,}08269$ καὶ $\gamma = 1209{,}72$ μ.

$\lambda o\gamma E = 2{,}99668 + 3{,}08269 - 0{,}30103 = 5{,}77834$ καὶ $E = 600257{,}14$ τ.μ.

48. Εἶναι $B = \frac{3\pi}{8}$ ἀκτ. $= \frac{180^\circ.3}{8} = 67^\circ\, 30'$, $\Gamma = 22^\circ\, 30'$

$\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\ 475{,}50 + \lambda o\gamma\eta\mu(67^\circ\, 30') = 2{,}67715 + \bar{1}{,}96562 = 2{,}64277$ καὶ $\beta = 439{,}30$ μ.

$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma 475{,}50 + \lambda o\gamma\eta\mu(22^\circ\, 30') = 2{,}67715 + \bar{1}{,}98284 = 2{,}25999$ καὶ $\gamma = 186{,}20$ μ.

$\lambda o\gamma E = 2{,}64277 + 2{,}25999 - 0{,}30103 = 4{,}60173$ καὶ $E = 399700$ τ. μ.

49. Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ ὀρθογώνιον εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα, μὲ ὑποτείνουσαν κοινὴν καὶ καθέτους πλευρὰς τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου. Ἑπομένως τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα (ΑΓ) = 0,60 μ. καὶ ἡ γωνία $BA\Gamma = 38^\circ\, 25'$. Ἑπομένως εἶναι γων. $B\Gamma A = 51^\circ\ 35'$ $(AB) = (A\Gamma)\eta\mu B\Gamma A = 0{,}60.\eta\mu(51^\circ\ 35')$ καὶ $(B\Gamma) = (A\Gamma)\eta\mu BA\Gamma = 0{,}60.\eta\mu(38^\circ\ 25')$. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν:

$\lambda o\gamma(AB) = \lambda o\gamma 0{,}60 + \lambda o\gamma\eta\mu(51^\circ\ 35') = \bar{1}{,}77815 + \bar{1}{,}89405 = \bar{1}{,}67220$ καὶ $(AB) = 0{,}4701$ μ. $= 0{,}47$ μ. (κατὰ προσ.).

$\lambda o\gamma(B\Gamma) = \lambda o\gamma 0{,}60 + \lambda o\gamma\eta\mu(38^\circ\ 25') = \bar{1}{,}77815 + \bar{1}{,}79335 = \bar{1}{,}57150$ καὶ $(B\Gamma) = 0{,}3728$ μ. $= 0{,}37$ μ. (κατὰ προσ.)

50. Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μικροτέρα διαγώνιος εἶναι ἡ ΒΔ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως. Ὥστε ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των εἶναι τὸ Κ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΚ, γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (ΑΒ) = = 15 μ. (πλευρὰν τοῦ ρόμβου) καὶ τὴν γωνίαν ΚΒΑ $= \frac{3}{5}$ ὀρθ. = $= 90°.\frac{3}{5} = 54°$. Ἐκ τῶν δεδομένων δὲ αὐτῶν θὰ εὕρωμεν τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΚ = ἥμισυ τῆς διαγωνίου ΑΓ τοῦ ρόμβου καὶ ΒΚ = ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου ΒΔ αὐτοῦ. Οὕτως ἔχομεν (ΑΚ) = = (ΑΒ)ἡμΚΒΑ = 15ἡμ54° καὶ (ΚΒ) = (ΑΒ).ἡμΚΑΒ=15 ἡμ36°.

Ὥστε εἶναι (ΑΓ) = 30ἡμ54° καὶ (ΒΔ) = 30ἡμ36° καὶ λογ(ΑΓ) = $= 1{,}47712 + \bar{1}{,}90796 = 1{,}38508$ καὶ (ΑΓ) = 24,27 μ. λογ(ΒΔ) = $1{,}47712 + \bar{1}{,}76922 = \bar{1}{,}24634$ καὶ (ΒΔ) = 17,634 μ.

51. Ἔστω κύκλος μὲ κέντρον Κ καὶ ΑΒ χορδὴ αὐτοῦ. Τότε θὰ εἶναι (ΚΑ) = 0,65 μ. καὶ γων ΑΚΒ = 52° 35′. Ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου Κ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, αὕτη, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ μέσου Γ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ θὰ διχοτομήσῃ τὸ τόξον ΑΒ. Ἑπομένως τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΚΑ καὶ τὴν γωνίαν ΑΚΓ $= \frac{52°\ 35'}{2} =$ $= 26°\ 17'\ 30''$. Θὰ εὕρωμεν δὲ ἐκ τῶν στοιχείων τούτων τὴν ΑΓ = = ἥμισυ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τὴν ΚΓ = ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς χορδῆς. Οὕτω δὲ εἶναι (ΑΓ = (ΑΚ)ἡμΑΚΓ = 0,65. ἡμ(26° 17′30″), ἤτοι (ΑΒ) = 1,30ἡμ(26°17′30″) καὶ (ΚΓ) = (ΑΚ)ἡμΚΑΓ = = 0,65 ἡμ (63° 42′ 30″). Ἐργαζόμενοι δὲ ὡς εἰς τὰ προηγούμενα π. δ., εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΒ) = 0,5758 μ. καὶ (ΚΓ) = 0,5827 μ.

52. Τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ἀπέναντι γωνίαν τὴν κλίσιν καὶ ὑποτείνουσαν τὸ μῆκος. Ἑπομένως εἶναι υ=0,25ἡμ(26° 45′ 20″) καὶ λογυ=$\bar{1}{,}39794 +$ $+ \bar{1}{,}65352 = \bar{1}{,}05146$ καὶ υ=11,26 μ.

53. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δύναμιν Δ μὲ τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ τὴν Δ′ μὲ τὸ ΑΓ, ἡ συνισταμένη αὐτῶν εἶναι ἡ διαγώνιος ΑΕ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΓ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ προσκειμένας πλευρὰς τὰς δοθείσας δυνάμεις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΑΒΕ, εἰς ὃ εἶναι (ΑΕ)=15,6 χλγρ., ΒΑΕ=35° 20′ καὶ ἑπομένως ΒΕΑ = = 54° 40′ γωνία τῆς συνισταμένης μὲ τὴν Δ′, εὑρίσκομεν:

(ΑΒ) = Δ=(ΑΕ)ἡμ(54° 40′) καὶ (ΒΕ) = Δ′ = (ΑΕ)ἡμ(35° 20′). Ὥστε

λογΔ = $1{,}19312+\bar{1}{,}91158=1{,}10470$ καὶ Δ=12,726 χλγρ.

λογΔ′ = $1{,}19312+\bar{1}{,}76218=0{,}95530$ » Δ′= 9,023 »

Σελὶς 36.—54. Εἶναι α+β=21,4, α−β=8,6 καὶ (§ 22)

$$\lambda o\gamma \gamma = \frac{\lambda o\gamma 21{,}4 + \lambda o\gamma 8{,}6}{2} = \frac{1{,}33041 + 0{,}93450}{2} = \frac{2{,}26491}{2} =$$

$= 1{,}13245$ καὶ $\gamma = 13{,}57$ μ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\eta\mu B = \frac{6{,}4}{15}$, $\lambda o\gamma \eta\mu B = \lambda o\gamma 6{,}4 - \lambda o\gamma 15 =$ $= 0{,}80618 - 1{,}17609 = \bar{1}{,}63009$ καὶ $B = 25^\circ\, 15'\, 22''$. Ὅθεν $\Gamma = 64^\circ\, 44'38''$.

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν $\lambda o\gamma E = \lambda o\gamma \beta + \lambda o\gamma \gamma - \lambda o\gamma 2 = 0{,}80618 + 1{,}13245 - 0{,}30103 = 1{,}63760$ καὶ $E = 43{,}32$ τ. μ.

55. Εἶναι $\alpha + \beta = 239{,}9$, $\alpha - \beta = 91{,}5$ καὶ $\lambda o\gamma \gamma = \frac{\lambda o\gamma\, 239{,}9 + \lambda o\gamma 91{,}5}{2} =$

$= \frac{2{,}38003 + 1{,}96142}{2} = 2{,}17072$ καὶ $\gamma = 148{,}16$.

Διὰ τὴν γωνίαν B, εὑρίσκομεν $\eta\mu B = \frac{74{,}20}{165{,}7}$, $\lambda o\gamma \eta\mu B =$ $= 1{,}87040 - 2{,}21932 = \bar{1}{,}65108$ καὶ $B = 26^\circ\, 36'\, 9''$. Ὅθεν $\Gamma = 63^\circ\, 23'\, 51''$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\lambda o\gamma E = 1{,}87040 + 2{,}17072 - 0{,}30103 = 3{,}74009$ καὶ $E = 5496{,}50$ τ. μ.

56. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α καὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ὅθεν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (ΑΒ) = 5 μ. καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $(B\Delta) = \frac{5{,}60}{2} = 2{,}80$ μ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $5 + 2{,}80 = 7{,}80$ καὶ $5 - 2{,}80 = 2{,}20$, ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma(A\Delta) =$

$= \frac{\lambda o\gamma 7{,}80 + \lambda o\gamma 2{,}20}{2} = \frac{0{,}89209 + 0{,}34242}{2} = \frac{1{,}23451}{2} = 0{,}61725$ καὶ $(A\Delta) = 4{,}142$ μ.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν $\eta\mu BA\Delta = \eta\mu \frac{A}{2} =$

$= \frac{(B\Delta)}{(AB)} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$, $\lambda o\gamma \eta\mu \frac{A}{2} = \bar{1}{,}74819$ καὶ $\frac{A}{2} = 34^\circ\, 3'\, 22''$. Ὅθεν

$A = 68^\circ\, 6'\, 44''$ καὶ $B = \Gamma = \frac{180^\circ - 68^\circ\, 6'\, 44''}{2} = 55^\circ\, 56'\, 38''$.

57. Ἔστω ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ καὶ μικροτέρα διαγώνιος αὐτοῦ ἡ ΒΔ. Ἡ ἄλλη διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Κ, διχοτομεῖ δὲ καὶ τὴν γωνίαν Α (ὡς καὶ τὴν Γ). Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ διχοτομεῖ τὰς γωνίας Β καὶ Δ. Ὥστε τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν (ΑΔ) = 8 μ. καὶ τὴν $(K\Delta) = \frac{5{,}30}{2} = 2{,}65$ μ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $8 + 2{,}65 = 10{,}65$ καὶ $8 - 2{,}65 =$ $= 5{,}35$, ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma(AK) = \lambda o\gamma\left(\frac{A\Gamma}{2}\right) = \frac{\lambda o\gamma 10{,}65 + \lambda o\gamma 5{,}35}{2} =$

$$= \frac{1,02735+0,72835}{2} = \frac{1,75570}{2} = 0,87785 \text{ καὶ } \frac{(ΑΓ)}{2} = 7,548 \text{ μ., ἤτοι}$$

(ΑΓ) = 15,096 μ.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ εὑρίσκομεν ἡμΔΑΚ=

$$= \text{ἡμ}\frac{Α}{2} = \frac{(ΚΔ)}{(ΑΔ)} = \frac{2.65}{8}, \quad \text{λογἡμ}\frac{Α}{2} = \text{λογ}2,65 - \text{λογ}8 = 0,42325 -$$

$$-0,90309 = \bar{1},52016 \text{ καὶ } \frac{Α}{2} = 19° \ 20' \ 42''. \text{ Ὅθεν } ΚΔΑ = \frac{Δ}{2} = 90° -$$

$- 19° \ 20' \ 42'' = 70° \ 39' \ 18''$. Ὥστε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τοῦ ρόμβου εἶναι $Α = 38° \ 41' \ 24'' = Γ$ καὶ $Δ = 141° \ 18' \ 36'' = Β$.

58. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ. Τότε ὁ κύκλος Κ φαίνεται ἐκ τοῦ Α ὑπὸ τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἀλλ' ἡ ΑΚ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α. Οὕτως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ, εἰς ὃ ἡ ὑποτείνουσα ΚΑ ἰσοῦται μὲ 2ρ, ἡ δὲ κάθετος πλευρὰ ΚΒ ἰσοῦται μὲ ρ, εὑρίσκομεν:

$$\text{ἡμ}ΚΑΒ = \text{ἡμ}\frac{ΒΑΓ}{2} = \frac{(ΚΒ)}{(ΚΑ)} = \frac{ρ}{2ρ} = \frac{1}{2}. \quad \text{Ἐπομένως (§ 14)}$$

εἶναι $\frac{ΒΑΓ}{2} = 30°$ καὶ $ΒΑΓ = 60°$.

59. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν κλίσιν μὲ ω θὰ ἔχωμεν (λύσις ἀσκ. 52) $\text{ἡμ}ω = \frac{0,28}{0,75}$, $\quad \text{λογἡμ}ω = \bar{1},44716 - \bar{1},87506 = \bar{1},57210$ καὶ $ω = 21° \ 55' \ 17''$.

60. Ἐὰν ὁ κύκλος ἔχει κέντρον Κ, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ εἶναι ἡ κάθετος ΚΓ ἐπὶ τὴν χορδήν. Εἶναι δὲ τὸ Γ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ὥστε τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΓ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν (ΚΑ)=0.80 μ. καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν $(ΑΓ) = \frac{0,60}{2} = 0,30$ μ. Ἐπομένως εἶναι $(ΚΓ) = \sqrt{(0,80+0,30)(0,80-0,30)} = \sqrt{1,10.0,50}$

$$\text{Ὅθεν } \text{λογ}(ΚΓ) = \frac{\text{λογ}1,10 + \text{λογ}0,50}{2} = \frac{0,04139 + \bar{1},69897}{2} =$$

$$= \frac{\bar{1},74036}{2} = \frac{\bar{2}+1-0,74036}{2} = \frac{\bar{2}+0,15964}{2} = \bar{1},07982 \text{ καὶ}$$

(ΚΓ)=0,12 μ.

61. Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς δυνάμεις μὲ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ, εἶναι δὲ (ΑΒ) = 25 χιλγρ., ἡ συνισταμένη αὐτῶν ΑΕ (βλέπε λύσιν ἀσκ. 53) θὰ εἶναι (ΑΕ)=40 χιλγρ. Ἐπειδὴ δὲ (ΑΕ) + (ΑΒ)= =40+25=65 καὶ (ΑΕ)−(ΑΒ)=40−25=15, ἔχομεν:

$$\text{λογ}(ΒΕ) = \text{λογ}(ΑΓ) = \frac{\text{λογ}\,65 + \text{λογ}15}{2} = \frac{1,81291+1,17609}{2} = 1,49450$$

καὶ (ΑΓ)=31,225 χλγρ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἡμΒΕΑ = ἡμΕΑΓ= $\frac{25}{40}=\frac{5}{8}=0{,}625$.

Ὅθεν λογἡμΕΑΓ $=\bar{1}{,}79588$, ΕΑΓ $=38°\,40'\,56''$ καὶ ΒΑΕ $=$ $=90°-38°\,40'\,56''=51°\,19'\,4''$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας. Χρῆσις αὐτῆς

Ἀσκήσεις.—*62.* Ἐὰν (Σχ. 12) εἶναι (ΒΑ)=12 μ. καὶ (ΑΓ)=16 μ. Τότε εἶναι ἐφΒ $=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ καὶ ἐφΓ $=\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

63. Ἐὰν (Σχ. 12) εἶναι (ΒΓ)=1,5 μ. καὶ (ΒΑ)=1,2 μ., θὰ εἶναι (ΑΓ)$=\sqrt{1{,}5^2-1{,}2^2}=1{,}1$. Ὥστε εἶναι ἐφΒ $=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΑ}}=\frac{1{,}1}{1{,}2}=\frac{11}{12}$ καὶ ἐφΓ $=\frac{\text{ΒΑ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1{,}2}{1{,}1}=\frac{12}{11}$.

64. Ἐὰν (Σχ. 12) (ΑΓ) = β, θὰ εἶναι (ΒΑ) = 4β. Ὅθεν:
ἐφΒ $=\frac{\beta}{4\beta}=\frac{1}{4}$ καὶ ἐφΓ $=\frac{4\beta}{\beta}=4$.

65. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ θὰ λάβωμεν τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ τὴν μονάδα καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς θὰ λάβωμεν τμῆμα ΑΒ πενταπλάσιον τοῦ ΑΓ. Τότε δὲ ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ἐφΒ $=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}.5}=\frac{1}{5}$. Ἡ γωνία λοιπὸν Β τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη.

66. Ἤδη τὸ τμῆμα ΑΓ (τῆς ἀσκ. 65) θὰ τὸ λάβωμεν ἴσον μὲ 5 μονάδας, τὸ δὲ ΑΒ ἴσον μὲ 6 τοιαύτας μονάδας. Τότε δὲ θὰ εἶναι:

ἐφ Β$=\frac{5}{6}$. Ὥστε θὰ εἶναι Β = ω.

67. Ἐπειδὴ 1,5 $=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, θὰ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ 3 μονάδας καὶ τὸ ΑΒ ἴσον μὲ 2 τοιαύτας μονάδας (ἢ τὸ ΑΓ μὲ 15 μονάδας καὶ τὸ ΑΒ ἴσον μὲ 10 τοιαύτας μονάδας). Τότε δὲ θὰ εἶναι ἐφΒ $=\frac{3}{2}=1{,}5$ (ἢ ἐφ Β $=\frac{15}{10}=1{,}5$). Ὥστε εἶναι Β = χ.

68. Ἐπειδὴ $0{,}8=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, θὰ λάβωμεν τὸ τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ 4 μονάδες καὶ τὸ ΑΒ ἴσον μὲ 5 τοιαύτας μονάδας. Ὥστε θὰ εἶναι ἐφ Β $=\frac{4}{5}=0{,}8$ καὶ Β = ψ.

69. $\dot{\epsilon}\varphi(12^\circ\ 30') = 0{,}22169$, $\dot{\epsilon}\varphi(73^\circ 40') = 3{,}41236$.

70. $\dot{\epsilon}\varphi(42^\circ 10')$ 0,90569 $\dot{\epsilon}\varphi(67^\circ\ 50') = 2{,}45451$.

71. $\dot{\epsilon}\varphi 50^\circ = \dot{\epsilon}\varphi(49^\circ\ 60') = 1{,}19175$ $\dot{\epsilon}\varphi 80^\circ = 5{,}67128$.

72. $\dot{\epsilon}\varphi(18^\circ\ 20') = 0{,}33136$, $\dot{\epsilon}\varphi(18^\circ\ 30') = 0{,}33460$. $\Delta = 324$ μ.τ.δ.τ.

$\chi = 324 \cdot \frac{5}{10} = 162$ μ. τ. δ. τ. Ὥστε $\dot{\epsilon}\varphi(18^\circ\ 25') = 0{,}33136 + 0{,}00162 =$
$= 0{,}33298$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\dot{\epsilon}\varphi\ (53^\circ\ 40') = 1{,}35968$. $\Delta = 832$, $\chi = 832 \cdot \frac{7}{10} =$
$= 582$. Ὥστε $\dot{\epsilon}\varphi\ (53^\circ\ 47') = 1{,}35968 + 0{,}00582 = 1{,}36550$.

73. $\dot{\epsilon}\varphi\ (23^\circ\ 40') = 0{,}43828$. $\Delta = 247$, $\chi = 247 \cdot \frac{3{,}5}{10} = 86$. **Ὥστε**:
$\dot{\epsilon}\varphi\ (23^\circ\ 43'\ 30'') = 0{,}43828 + 0{,}00086 = 0{,}43914$.

74. $\dot{\epsilon}\varphi\ (48^\circ 40') = 1{,}13694$. $\Delta = 669$, $\chi = 669 \cdot 6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = 446$. **Ὥστε**
$\dot{\epsilon}\varphi\ (48^\circ\ 46'\ 40'') = 1{,}13694 + 0{,}00446 = 1{,}14140$.

75. $\frac{3}{10}$ ὀρθ. $= 90^\circ \cdot \frac{3}{10} = 27^\circ$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ 27^\circ = 0{,}50953$.

76. $\frac{5}{8}$ ὀρθ. $= 90^\circ \cdot \frac{5}{8} = 56^\circ\ 15'$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi(56^\circ 10') = 1{,}49190$. $\Delta = 943$ $\chi =$
$= 943 \cdot \frac{5}{10} = 471$. Ὥστε $\dot{\epsilon}\varphi\ (56^\circ\ 15') = 1{,}49190 + 0{,}00471 = 1{,}49661$.

77. α΄) λογ $\dot{\epsilon}\varphi\ (38^\circ 12') = \bar{1}{,}89593$. Ὁ δὲ ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἰς τοῦτον εἶναι ὁ 0,78692. Ὥστε εἶναι $\dot{\epsilon}\varphi\ (38^\circ\ 12') = 0{,}78692$.

β΄) λογ $(\dot{\epsilon}\varphi\ 38^\circ\ 42') = \bar{1}{,}90371$. $\Delta = 26$, καὶ $\chi = 26 \cdot \frac{30}{60} = 13$. Ὥστε:

λογ$\dot{\epsilon}\varphi(38^\circ 42'\ 30'') = \bar{1}{,}90371 + 0{,}00013 = \bar{1}{,}90384$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi(38^\circ\ 42'\ 30'') =$
$= 0{,}80138$.

78. α΄) λογ $\dot{\epsilon}\varphi\ (51^\circ\ 23') = 0{,}09758$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ (51^\circ\ 23') = 1{,}25194$.

β΄) λογ $\dot{\epsilon}\varphi\ (51^\circ\ 35'\ 28'') = 0{,}10081$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ (51^\circ\ 35'\ 28'') = 1{,}26126$.

79. α΄) λογ $\dot{\epsilon}\varphi\ (41^\circ\ 57'\ 35'') = \bar{1}{,}95383$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ (41^\circ\ 57'\ 35'') = 0{,}89914$.

β΄) λογ $\dot{\epsilon}\varphi\ (48^\circ\ 18'\ 52'') = 0{,}05036$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ (48^\circ\ 18'\ 52'') = 1{,}12295$.

80. $26{,}^{\gamma}40 = 26{,}40 \cdot \frac{9}{10} = 23^\circ\ 45'\ 36''$. Ὥστε λογ $\dot{\epsilon}\varphi 26{,}^{\gamma}40 =$

$=$ λογ$\dot{\epsilon}\varphi(23^\circ\ 45'\ 36'') = \bar{1}{,}64367$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi\ 26{,}^{\gamma}40 = 0{,}44022$.

81. $\frac{3\pi}{8}$ ἀκτ. $= 180^\circ \cdot \frac{3}{8} = 67^\circ\ 30'$. λογ $\dot{\epsilon}\varphi \frac{3\pi}{8} =$ λογ$\dot{\epsilon}\varphi(67^\circ 30') =$
$= 0{,}38278$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi \frac{3\pi}{8} = 2{,}41422$.

82. $\lambda o \gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma 2 - \lambda o\gamma 5 = 0{,}30103 - 0{,}69897 = \bar{1}{,}60206$

ἢ $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma \frac{2}{5} = \lambda o\gamma 0{,}4 = \bar{1}{,}60206$.

83. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \lambda o\gamma 1{,}673 = 0{,}22350$.

84. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\psi = \lambda o\gamma\, 0{,}347 = \bar{1}.54033$.

85. Ἐδῶ δίδεται $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \bar{1}{,}89801$. Ἑπομένως εἶναι $\chi = 38^\circ 20'$

86. Εὑρίσκομεν, $\omega = 51^\circ 9'$.

87. Εἶναι $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\psi = \lambda o\gamma\, 0{,}532 = \bar{1}{,}72591$. Ἐπειδὴ δέ: $\bar{1}{,}72567 < \bar{1}{,}72591 < \bar{1}{,}72598$ ἕπεται ὅτι $28^\circ < \psi < 28^\circ 1'$. Ἐπειδὴ δὲ $\Delta = 31$ καὶ $\delta = 24$ ἕπεται $\chi = 60''.\frac{24}{31} = 46''$. Ὥστε $\psi = 28^\circ 0'\, 46''$.

88. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma\, 1{,}103 = 0{,}04258$ καὶ $\chi = 47^\circ 48'\, 14''$.

89. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\vartheta = \lambda o\gamma \frac{10}{8} = \lambda o\gamma\, 10 - \lambda o\gamma\, 8 = 1 - 0{,}90309 = 0{,}09691$ καὶ $\vartheta = 51^\circ 20'\, 25''$.

90. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\omega = \lambda o\gamma\, 2{,}194 = 0{,}34124$ καὶ $\omega = 65^\circ 29' 49'' = 65\frac{1789^\circ}{3600}$

Διὰ νὰ τρέψωμεν δὲ τὰς μοίρας εἰς βαθμοὺς θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μοιρῶν ἐπὶ $\frac{10}{9}$. Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν $\omega = 72^{\gamma}, 77$.

91. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi z = \lambda o\gamma\, 0{,}923 = \bar{1}{,}96520$ καὶ $z = 42^\circ 42'\, 24'' =$

$$= 42\frac{2544^\circ}{3600} = 42\frac{53^\circ}{75} = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{3203}{75}\ \text{ἀκτ.} = \frac{3203\,\pi}{13500}\ \text{ἀκτ.}$$

92. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma\, 3{,}275 = 0{,}51521$ καὶ $\chi = 73^\circ 1'\, 13''$.

93. $\lambda o\gamma \grave{\varepsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma \frac{12}{5} = \lambda o\gamma\, 2{,}4 = 0{,}38021$ καὶ $\chi = 67^\circ 22'\, 48''$.

Δύο ἄλλαι περιπτώσεις ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων

Τύποι. $B + \Gamma = 90^\circ$, $\grave{\varepsilon}\varphi\, B = \frac{\beta}{\gamma}$, ἐξ οὗ $\beta = \gamma \grave{\varepsilon}\varphi B$ καὶ $\gamma = \frac{\beta}{\grave{\varepsilon}\varphi\, B}$

$\grave{\varepsilon}\varphi\, \Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$, » » $\gamma = \beta \grave{\varepsilon}\varphi \Gamma$ » $\beta = \frac{\gamma}{\grave{\varepsilon}\varphi\, \Gamma}$

καὶ οἱ τύποι τῆς σελίδος 11.

Ἀσκήσεις.—*94.* Ἔχομεν $\grave{\varepsilon}\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{18}{12}$. Ἑπομένως εἶναι: $\lambda o\gamma\, \grave{\varepsilon}\varphi\, B = \lambda o\gamma\, 18 - \lambda o\gamma\, 12 = 1{,}25527 - 1{,}07018 = 0{,}18509$ καὶ $B = 56^\circ\, 51'\, 20''$. Ὥστε $\Gamma = 90^\circ - 56^\circ 51'\, 20'' = 33^\circ 8'\, 40''$.

Ἤδη ἡ πλευρὰ α θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου $\alpha = \frac{\beta}{\grave{\eta}\mu\, B}$. Ἑπομένως εἶναι $\lambda o\gamma\, \alpha = \lambda o\gamma 18 - \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu(56^\circ 51'20'') = 1{,}25527 - \bar{1}{,}92288 = 1{,}33239$ καὶ $\alpha = 21{,}50$ μ.

Τέλος εἶναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\,.\,18\,.\,12 = 108$ τ. μ.

95. Ἔχομεν $\grave{\epsilon}\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{256{,}25}{348}$, $\lambda o\gamma \grave{\epsilon}\varphi B = 2{,}40866 - 2{,}54158 = \bar{1}{,}86708$ καὶ $B = 36^\circ 21'58''$ καὶ $\Gamma = 53^\circ 38'2''$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $\alpha = \frac{\beta}{\acute{\eta}\mu B}$ καὶ $\lambda o\gamma\, \alpha = 2{,}40866 - \bar{1}{,}77301 = 2{,}63565$ καὶ $\alpha = 432{,}17$ μ.

Τέλος ἔχομεν $E = \frac{1}{2}\beta\gamma$ καὶ $\lambda o\gamma\, E = 2{,}40866 + 2{,}54158 - 0{,}30103 = 4{,}65121$ καὶ $E = 44793$ τ. μ.

96. Ἔχομεν $\grave{\epsilon}\varphi B = \frac{3168{,}45}{2825{,}50}$, $\lambda o\gamma \grave{\epsilon}\varphi B = 3{,}50085 - 3{,}45109 = 0{,}04976$ καὶ $B = 48^\circ\, 16'\, 31''$ καὶ $\Gamma = 41^\circ\, 43'\, 29''$. Ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται μὲ $\alpha = \frac{\beta}{\acute{\eta}\mu B}$. Ὅθεν $\lambda o\gamma\, \alpha = 3{,}50085 - \bar{1}{,}87294 = 3{,}62791$ καὶ $\alpha = 4245{,}30$ τ. μ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\lambda o\gamma E = 3{,}50085 + 3{,}45109 - 0{,}30103 = 6{,}95194$ καὶ $E = 8952400$ τ. μ.

97. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ῥόμβου τέμνονται δίχα καὶ καθέτως καὶ διχοτομοῦν τὰς γωνίας του. Ἑπομένως διαιροῦν τὸν ῥόμβον εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα. Ὥστε ἐὰν ὁ ῥόμβος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Κ, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $(KB) = 1{,}74$ μ. καὶ $(KA) = 1{,}10$ μ. Εἶναι δὲ $A\widehat{B}K = \frac{B}{2}$. Ὥστε εἶναι: $\grave{\epsilon}\varphi \frac{B}{2} = \frac{(KA)}{(KB)} = \frac{1{,}10}{1{,}74}$, $\lambda o\gamma \grave{\epsilon}\varphi \frac{B}{2} = 0{,}04139 - 0{,}24055 = \bar{1}{,}80084$ καὶ $\frac{B}{2} = 32^\circ\, 18'$. Ὅθεν $B = 64^\circ\, 36' = \Delta$ καὶ $A = \Gamma = 180^\circ - 64^\circ\, 36' = 115^\circ\, 24'$.

Ἤδη διὰ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ ῥόμβου ἔχομεν $(AB) = \dfrac{(KA)}{\acute{\eta}\mu \frac{B}{2}}$ καὶ $\lambda o\gamma\,(AB) = 0{,}04139 - \bar{1}{,}72783 = 0{,}31356$ καὶ $(AB) = 2{,}0585$ μ. τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς ἴσην μὲ 2,06 μ.

98. Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΒΓ. Ὥστε δίδεται $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{2}{3}$ καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ ζητοῦνται αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΓΑ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒ=

(Β γων. ὀρθή) λαμβάνομεν ἐφ ΒΑΓ $= \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, ἤτοι ἐφΒΑΓ $= \frac{2}{3}$ καὶ λογ ἐφ ΒΑΓ $=$ λογ $2-$ λογ $3 = 0{,}30103 - 0{,}47712 = \bar{1}{,}82391$. Ὅθεν: ΒΑΓ $= 33^\circ\ 41'\ 24''$ καὶ ΒΓΑ $= 90^\circ - 33^\circ\ 41'\ 24'' = 56^\circ\ 18'\ 36''$.

99. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΚΓ ἡ ἀπόστασις τοῦ Κ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ. Ἑπομένως εἶναι (ΚΓ) $= 8$ μ. καὶ (ΑΓ) $= 6$ μ. Ἡ δὲ ἀκτὶς ΚΑ, ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ, ἔχει μῆκος (ΚΑ)$=\sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$ μ. Ἤδη εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ΑΚΓ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ, ἐκ τοῦ τύπου ἐφΑΚΓ $=$ ἐφ $\frac{ΑΚΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{ΚΓ} = \frac{6}{8} = 0{,}75$. Ὅθεν λογἐφ $\frac{ΑΚΒ}{2} =$ λογ $0{,}75 = \bar{1}{,}87506$, $\frac{ΑΚΒ}{2} = 36^\circ\ 52'\ 11''$ καὶ ΑΚΒ$= 73^\circ\ 44'\ 22''$.

Ἀλλὰ τὸ εὑρεθὲν μέτρον τῆς γωνίας ΑΚΒ εἶναι (§ 7) καὶ μέτρον τοῦ τόξου τοῦ μικροτέρου ἡμιπεριφερείας τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ. Ἑπομένως τὸ εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν τόξον, τὸ μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, ἔχει μέτρον $360^\circ - 73^\circ\ 44'\ 22'' = 286^\circ\ 15'\ 38''$.

100. Ἔστω ὅτι β $= 260{,}40$ μ. Τότε ἐπειδὴ Ε $= \frac{1}{2}$ βγ, θὰ εἶναι $940{,}50 = \frac{1}{2} \cdot 260{,}40 \cdot γ$, ἤτοι γ $= 7{,}22$ μ. Ἑπομένως εἶναι ἐφΒ $= \frac{260{,}40}{7{,}22}$, λογ ἐφ Β $=$ λογ $260{,}40 -$ λογ $7{,}22 = 2{,}41564 - 0{,}85854 = 1{,}55710$, Β $= 88^\circ\ 24'\ 42''$ καὶ Γ $= 1^\circ\ 35'\ 18''$. Τέλος ἔχομεν α $= \frac{β}{ἡμΒ}$, λογ α $= 2{,}41564 - \bar{1}{,}99983 = 2{,}41581$ καὶ α $= 260{,}50$ μ.

101. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν ΒΓ καὶ ὕψος ΑΔ, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α. Τότε εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι (ΒΔ) $= \frac{28{,}35}{2} = 14{,}175$ μ. καὶ (ΑΔ) $= 3{,}46$ μ. Ἑπομένως εἶναι ἐφ ΒΑΔ $=$ ἐφ $\frac{Α}{2} = \frac{ΒΔ}{ΑΔ} = \frac{14{,}175}{3{,}46}$ καὶ λογ ἐφ $\frac{Α}{2} = 1{,}15152 - 0{,}53908 = 0{,}61244$, $\frac{Α}{2} = 76^\circ\ 16'\ 58''$. Ὅθεν Α $= 152^\circ\ 33'\ 56''$ καὶ Β $=$ Γ $= 90^\circ - 76^\circ\ 16'\ 58'' = 13^\circ\ 43'\ 2''$

Ἤδη ἔχομεν (ΑΒ) $= \frac{(ΒΔ)}{ἡμ\ ΒΑΔ} = \frac{(ΒΔ)}{ἡμ\frac{Α}{2}}$ καὶ λογ (ΑΒ)$= 1{,}15152 - \bar{1}{,}98743 = 1{,}16409$ καὶ (ΑΒ) $=$ (ΑΓ) $= 14{,}59$.

102. Εἶναι Γ $= 43^\circ$ καὶ γ $=$ β εφ Γ. Ὅθεν λογ γ $=$ λογ$47 +$ λογ ἐφ $43^\circ = 1{,}67210 + \bar{1}{,}96966 = 1{,}64176$ καὶ γ $= 43{,}83$ μ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $α = \frac{β}{ἡμΒ}$ καὶ $λογ\,α = 1,67210 - \bar{1},86413 = 1,80797$ καὶ $α = 64,264$ μ. Ὡς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν $Ε = \frac{1}{2}β^2 εφΓ$ καὶ

$λογΕ = 2.1,67210 + \bar{1},96966 - 0,30103 = 3,34420 + \bar{1},96966 - 0,30103 = 3,01283$ καὶ $Ε = 1030$ τ. μ.

103. Εἶναι $Β = 66°\ 14'\ 38''$ καὶ $γ = β\,ἐφ\,Γ$, $λογ\,γ = 2,09691 + \bar{1},64359 = 1,74150$ καὶ $γ = 55,144$ μ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $α = \frac{β}{ἡμΒ}$, $λογ\,α = 2,09691 - \bar{1},96155 = 2,13536$ καὶ $α = 136,572$

Τέλος ἔχομεν $λογΕ = 2\,λογ\,β + ἐφΓ - λογ2 = 4,19382 + \bar{1},64359 - 0,30103 = 3,53638$ καὶ $Ε = 3438,58$ τ. μ.

104. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ΒΓ καὶ διαγώνιος αὐτοῦ ἡ ΑΓ, εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Β γων. ὀρθὴ) γνωρίζομεν ὅτι $(ΒΓ) = 5,60$ μ. καὶ $ΒΑΓ = 25°34'44''$. Ἑπομένως εἶναι $\widehat{ΒΓΑ} = 64°25'16''$. Ὥστε ἡ βάσις εἶναι $(ΑΒ) = (ΒΓ)\,ἐφΒΓΑ$, $λογ(ΑΒ) = 0,74819 + 0,31997 = 1,06816$ καὶ $(ΑΒ) = 11,70$ μ.

Ἤδη ἡ διαγώνιος εἶναι $(ΑΓ) = \frac{(ΒΓ)}{ἡμΒΑΓ}$, $λογ(ΑΓ) = 0,74819 - \bar{1},63524 = 1,11295$ καὶ $(ΑΓ) = 12,97$ μ.

Τέλος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι $Ε = (ΒΓ)^2\,ἐφ\,ΒΓΑ$ καὶ $λογΕ = 2λογ(ΒΓ) + λογἐφΒΓΑ = 1,49638 + 0,31997 = 1,81635$ καὶ $Ε = 65,52$ τ. μ.

105. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ΑΒ χορδὴ αὐτοῦ, ἧς εἶναι $(ΑΒ) = 1,65$ μ., καὶ ΚΓ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Κ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὁπότε τὸ Γ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς, ἡ δὲ ΚΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΑΚΒ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον ΑΒ. Τότε ἐπειδὴ $ΓΑΚ = 40°18'38''$, εἶναι $ΓΚΑ = 90° - 40°\ 18'\ 38'' = 49°\ 41'\ 22''$. Ἑπομένως εἶναι: $ΑΚΒ = 99°\ 22'\ 44''$ = μέτρον τοῦ ὡς ἄνω τόξου ΑΒ. Ὥστε τὸ μέτρον τοῦ ἄλλου τόξου, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, εἶναι:

$$360° - 99°\ 22'\ 44'' = 260°\ 37'\ 16''.$$

Τώρα ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΚ, εἰς ὃ εἶναι $(ΑΓ) = \frac{ΑΒ}{2} = 0,825$ μ., εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΚΑ εἶναι $(ΚΑ) = \frac{(ΑΓ)}{ἡμΓΚΑ}$ καὶ $λογ(ΚΑ) = λογ\,0,825 - λογ\,ἡμ\,(49°\ 41'\ 22'') = \bar{1},91645 - \bar{1},88227 = 0,03418$ καὶ $(ΚΑ) = 1,082$ μ.

Τέλος διὰ τὴν ἀπόστασιν ΚΓ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῆς χορδῆς ΑΒ ἔχομεν $(ΚΓ) = (ΑΓ)\,ἐφ\,ΓΑΚ$, $λογ(ΚΓ) = \bar{1},91645 + \bar{1},92855 = \bar{1},84500$ καὶ $(ΚΓ) = 0,6998$ μ.

106. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι $8.2-4=12$ ὀρθαὶ $=1080°$. Ἑπομένως ἡ γωνία αὐτοῦ εἶναι $\frac{1080°}{8}=135°$. Ἤδη ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, Κ τὸ κέντρον αὐτοῦ καὶ ΚΓ τὸ ἀπόστημά του. Ἀλλ' ἡ ἀκτὶς ΚΑ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α. Ὥστε τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ γνωρίζομεν ὅτι $(ΚΓ)=0{,}80$ μ. καὶ $ΓΑΚ=\frac{135°}{2}=67°\,30'$. Ὥστε εἶναι $ΓΚΑ=90°-67°\,30'=22°\,30'$ καὶ $(ΑΓ)=\frac{ΑΒ}{2}=(ΚΓ)$ ἐφ ΓΚΑ, ἤτοι $(ΑΒ)=2(ΚΓ)$ ἐφ $ΓΚΑ=1{,}60$ ἐφ $(22°\,30')$. Ὥστε εἶναι λογ$(ΑΒ)=$ $=0{,}20412+\bar{1}{,}61722=\bar{1}{,}82134$ καὶ $(ΑΒ)=0{,}6476$ μ.

107. Τὸ ζητούμενον μῆκος μ εἶναι ἴσον μὲ $μ=\frac{1{,}80}{ημ20°}$. Ὅθεν λογ $μ=0{,}25527-\bar{1}{,}53405=0{,}72122$ καὶ $μ=5{,}263$ μ.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ὀξείας γωνίας

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α γων. ὀρθὴ) τοὺς λόγους $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}, \frac{ΑΒ}{ΒΓ}, \frac{ΑΓ}{ΒΑ}$ καὶ $\frac{ΒΑ}{ΑΓ}$ ὀνομάσαμεν ἀντιστοίχως ἡμ., συν., ἐφ. καὶ σφ. τῆς ὀξείας γωνίας Β. Εἶναι δέ, ὡς εἴδομεν, οἱ λόγοι οὗτοι οἱ αὐτοὶ εἰς οἱονδήποτε ὀρθογώνιον τρίγωνον καὶ ἂν ἀνήκει ἡ γωνία Β.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΒΑ}{ΑΓ}$ εἶναι ἀντίστροφος τοῦ λόγου $\frac{ΒΑ}{ΑΓ}$. Ὁμοίως δὲ λαμβάνομεν καὶ τοὺς ἀντιστρόφους τῶν λόγων $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}, \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$, ἤτοι τοὺς $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ καὶ $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, τοὺς ὁποίους λέγομεν συντέμνουσαν καὶ τέμνουσαν τῆς γωνίας Β ἀντιστοίχως, τὰς σημειοῦμεν δὲ οὕτω συντ $Β=\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ καὶ τεμ $Β=\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$.

Ἑπομένως ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ αὐτοῦ μὲ α, β, γ ἀντιστοίχως, εἶναι:

$$ημΒ=\frac{β}{α}=\frac{\text{ἀπέν. κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}},\quad συνΒ=\frac{γ}{α}=\frac{\text{προσκ. κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}}$$

$$συντΒ=\frac{α}{β}=\frac{\text{ὑποτείνουσα}}{\text{ἀπέν. κάθετος}},\quad τεμΒ=\frac{α}{γ}=\frac{\text{ὑποτείνουσα}}{\text{προσκ. κάθετος}}$$

$$ἐφΒ=\frac{β}{γ}=\frac{\text{ἀπέν. κάθετος}}{\text{προσκ. κάθετος}},\quad σφΒ=\frac{γ}{β}=\frac{\text{προσκ. κάθετος}}{\text{ἀπέν. κάθετος}}.$$

Ἐκ τούτων δὲ προκύπτουν αἱ κάτωθι ἀντίστροφοι σχέσεις:

$$\sigma\upsilon\nu\tau B = \frac{1}{\eta\mu B} \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu B = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\tau B} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\tau B \,.\, \eta\mu B = 1$$

$$\tau\epsilon\mu B = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu B} \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{\tau\epsilon\mu B} \quad \text{ἢ} \quad \tau\epsilon\mu B \,.\, \sigma\upsilon\nu B = 1$$

$$\sigma\varphi B = \frac{1}{\epsilon\varphi B} \quad \text{ἢ} \quad \epsilon\varphi B = \frac{1}{\sigma\varphi B} \quad \text{ἢ} \quad \epsilon\varphi B \,.\, \sigma\varphi B = 1.$$

Σημείωσις. Πλείονα περὶ τούτων καὶ σχετικὰς ἀσκήσεις βλέπε: «Μεγάλη Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία» Χρ. Α. Μπαρμπαστάθη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Συνημίτονον καὶ συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας

Ἀσκήσεις.—*108.* Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς εἰς τὴν § 12 σχ. 6, εἰς ὃ ἡ κάθετος ΑΓ ἰσοῦται μὲ δύο μονάδας καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἴση μὲ 3 τοιαύτας μονάδας. Τότε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ Γ, διότι $\eta\mu B = \frac{2}{3} = \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\chi$.

109. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐδῶ ἡ ΑΓ θὰ εἶναι ἴση μὲ 45 μονάδας καὶ ἡ ΒΓ ἴση μὲ 100 τοιαύτας μονάδας.

110. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἄνω μὲ 35 καὶ 100 μονάδας.

111. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς τῆς § 26, μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ, 2 μονάδας καὶ 5 μονάδας ἀντιστοίχως. Τότε ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ Γ, διότι $\epsilon\varphi\, B = \frac{2}{5} = \sigma\varphi\, \Gamma = \sigma\varphi\, \chi$.

112. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἄνω μὲ 6 καὶ 10 μονάδας.

113. α΄) Εἶναι συν (23° 10΄) = 0,91936 καὶ συν (23° 20΄) = 0,91822. $\Delta = 114$ μ.τ.δ.τ. Ὥστε εἶναι $\psi = 114 \cdot \frac{7}{10} = 80$ μ.τ.δ.τ. καὶ συν (23° 17΄) = = 0.91936 — 0,00080 = 0,91856.

β΄) συν (49° 20΄) = 0,65166. $\Delta = 221$ καὶ $\psi = 221 \cdot \frac{3}{10} = 66$. Ὥστε συν (49° 23΄) = 0,65166 — 0,00066 = 0,65100.

114. α΄) συν (35° 10΄) = 0,81748. $\Delta = 168$ καὶ $\psi = 168.5\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = 97$. Ὥστε συν (35° 15΄ 45΄΄) = 0,81748 — 0,00097 = 0,81651.

β΄) συν (62° 10΄) = 0,46690. $\Delta = 257$. Ἐπειδὴ δὲ $2΄\,54΄΄ = 2\frac{54΄}{60} =$

$= 2\frac{9'}{10}$, ἕπεται $\psi = 257.2\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 257 \,.\, 0{,}29 = 75$. Ὅθεν :

$$\sigma\upsilon\nu\,(62^\circ\ 12'\ 54'') = 0{,}46690 - 0{,}00075 = 0{,}46615.$$

115. α΄) Εἶναι $\overset{\gamma}{43{,}6} = 43{,}6 \,.\, \frac{9}{10} = 39^\circ\ 14'\ 24''$. Ὅθεν συν $\overset{\gamma}{43{,}6} =$ $=$ συν $(39^\circ\ 14'\ 24'')$. Εἶναι δὲ συν $(39^\circ\ 10') = 0{,}77531$. $\Delta = 184$ καὶ $\psi = 184.4\frac{24}{60} \cdot \frac{1}{10} = 184 \,.\, 0{,}44 = 81$. Ὅθεν :

$$\sigma\upsilon\nu\,(39^\circ\ 14'\ 24'') = 0{,}77531 - 0{,}00081 = 0{,}77450.$$

β΄) Εἶναι $\frac{3\pi}{8}$ ἀκτ. $= 180^\circ \,.\, \frac{3}{8} = 67^\circ\ 30'$ καὶ συν $\frac{3\pi}{8} =$ συν $(67^\circ\ 30') = 0{,}92388$.

116. Εἶναι συν $37^\circ\ 20' = 0{,}79512$. $\Delta = 177$ μ.τ.δ.τ., $\delta = 12$ μ.τ.δ.τ. Ὥστε $\psi = 10' \,.\, \frac{12}{177} = 41''$. Ὅθεν $\chi = 37^\circ\ 20'\ 41''$.

117. Εἶναι συν $62^\circ = 0{,}46947$. $\Delta = 257$, $\delta = 60$. Ὅθεν : $\psi = 10' \,.\, \frac{60}{257} = 2'\ 20''$ καὶ $\omega = 62^\circ\ 2'\ 20''$.

118. Εἶναι συν $\psi = 0{,}71429$. συν $44^\circ\ 20' = 0{,}71529$. $\Delta = 204$, $\delta =$ $= 100$ καὶ $10' \,.\, \frac{100}{204} = 4'\ 54''$. Ὥστε $\psi = 44^\circ\ 24'\ 54''$.

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν λογσυν$\psi =$ λογ $5 -$ λογ $7 =$ $= 0{,}69897 - 0{,}84510 = \bar{1}{,}85387$ καὶ $\psi = 44^\circ\ 24'\ 55''$.

119. Κατὰ τὰ δεδομένα εἶναι ἡμ$\chi =$ συνψ. Ὥστε αἱ γωνίαι χ καὶ ψ εἶναι συμπληρωματικαί, ἤτοι εἶναι $\chi + \psi = 90^\circ$.

120. Ὡς ἐκ τῶν πινάκων συνάγεται εἶναι ἡμ$45^\circ = 0{,}70711 =$ $=$ συν 45°. Ἐπειδὴ δὲ $0{,}92276 > 0{,}70711 > 0{,}67321$, ἕπεται (§ 11) ὅτι $\chi > 45^\circ$ καὶ (§ 34) $\psi > 45^\circ$. Ὅθεν εἶναι $\chi + \psi > 90^\circ$.

121. α΄) σφ$(15^\circ 30') = 3{,}60588$. $\Delta = 31$ μ.τ.δ.τ. καὶ $\psi = 31.\frac{5}{10} = 15$ μ.τ.δ.τ. Ὅθεν σφ $(15^\circ 35') = 3{,}60588 - 0{,}00015 = 3{,}60573$.

β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν σφ $(62^\circ 46') = 0{,}51467$.

122. α΄) σφ$(27^\circ 30') = 1{,}92098$. $\Delta = 1357$ καὶ $\psi = 1357 \,.\, 2\frac{5}{6} \,.\, \frac{1}{10} =$ $= 384$. Ὅθεν σφ$(27^\circ 32' 50'') = 1{,}92098 - 0{,}00384 = 1{,}91714$.

β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν σφ $(70^\circ 12' 24'') = 0{,}35989$.

123. α΄) Εἶναι $\overset{\gamma}{30{,}5} = 27^\circ 27'$ καὶ σφ$(27^\circ 27') = 1{,}92510$.

β΄) Εἶναι $\frac{2\pi}{5}$ ἀκτ. $= 72^\circ$ καὶ σφ $72^\circ = 0{,}32492$.

124. Εἶναι λογσφ$\chi =$ λογ $2{,}340 = 0{,}36922$ καὶ $\chi = 23^\circ 8' 21''$.

125. Εἶναι λογσφω $= \bar{1},95036$ καὶ $\omega = 48^\circ 16' 2''$.

126. λογσφψ = λογ 15 — λογ 9 = 1,17609 — 0,95424 = 0,22185 καὶ $\psi = 30^\circ 57' 50''$.

127. Ἐπειδὴ σφ $45^\circ = 1 =$ ἐφ 45°, καὶ $1,34 < 1 < 0,658$, ἕπεται (35) $\chi < 45^\circ$ καὶ (§ 25) $\psi < 45^\circ$. Ὅθεν $\chi + \psi < 90^\circ$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε′.

Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις ὀξείας γωνίας.

Ἀσκήσεις.— *128.* Ἐκ τῆς σχέσεως (8) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ λαμβάνομεν α′) $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$ καὶ β′) $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.

129. Ἐπειδὴ (9) $\varepsilon\varphi\,\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, εἶναι $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = 1 + \dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ (σχέσις 8).

130. Ὁμοίως ἐπειδὴ (10) $\sigma\varphi\,\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ ἔχομεν $1 + \sigma\varphi^2\omega =$

$= 1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \dfrac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \dfrac{1}{\eta\mu^2\omega}$.

131. Εἶναι $\sigma\varphi^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} - \sigma\upsilon\nu^2\omega =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \dfrac{(1 - \eta\mu^2\omega)\,\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} = \dfrac{1 - \eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} \,.\, \sigma\upsilon\nu^2\,\omega =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} \,.\, \sigma\upsilon\nu^2\omega = \sigma\varphi^2\omega \,.\, \sigma\upsilon\nu^2\omega$.

132. Εἶναι $\varepsilon\varphi\,\omega + \sigma\varphi\,\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \dfrac{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\,\omega\;\sigma\upsilon\nu\,\omega} =$

$= \dfrac{1}{\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}$.

133. Αὕτη εἶναι ἐφαρμογὴ τῆς σχέσεως (11) ἐφωσφω = 1. Οὕτως εἶναι $\varepsilon\varphi\,\alpha \,.\, \varepsilon\varphi\,\beta\,(\sigma\varphi\,\alpha + \sigma\varphi\,\beta) = \varepsilon\varphi\,\alpha \,.\, \sigma\varphi\,\alpha \,.\, \varepsilon\varphi\,\beta + \varepsilon\varphi\,\alpha \,.\, \varepsilon\varphi\,\beta \,.\, \sigma\varphi\,\beta =$
$= \varepsilon\varphi\,\beta + \varepsilon\varphi\,\alpha$.

134. Ἐκ τῆς σχέσεως (11) ἐφωσφω = 1, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi\,\omega = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\,\omega}$ καὶ $\varepsilon\varphi\,\omega = \dfrac{1}{\sigma\varphi\,\omega}$. Ἑπομένως εἶναι:

$$\sigma\varphi\,\alpha + \sigma\varphi\,\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\,\alpha} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\,\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\,\beta + \varepsilon\varphi\,\alpha}{\varepsilon\varphi\,\alpha \,.\, \varepsilon\varphi\,\beta}.$$

135. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν:

$$\frac{\sigma\varphi\,\alpha+\sigma\varphi\,\beta}{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi\,\beta}=\frac{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi\,\beta}{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha\,.\,\dot{\varepsilon}\varphi\,\beta}\cdot\frac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi\,\beta}=\frac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\,\alpha\,.\,\dot{\varepsilon}\varphi\,\beta}.$$

Ἐφαρμογαὶ

Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὀξείας γωνίας συναρτήσει ἑνὸς τούτων

Τὰ ἐξαγόμενα τῶν § § 46, 47, 48 καὶ 49 τὰ συνοψίζομεν εἰς τὸν κάτωθι πίνακα:

	ἡμθ	συνθ	ἐφθ	σφθ
ἡμθ	ἡμθ	$\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}$	$\frac{\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta}{\sqrt{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\vartheta}}$
συνθ	$\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\vartheta}$	συνθ	$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta}}$	$\frac{\sigma\varphi\vartheta}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\vartheta}}$
ἐφθ	$\frac{\dot{\eta}\mu\vartheta}{\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\vartheta}}$	$\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$	ἐφθ	$\frac{1}{\sigma\varphi\vartheta}$
σφθ	$\frac{\sqrt{1-\dot{\eta}\mu^2\vartheta}}{\dot{\eta}\mu\vartheta}$	$\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}}$	$\frac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta}$	σφθ

Σημείωσις. Πληρέστερον πίνακα, ὅστις περιέχει καὶ τοὺς δύο ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς ὀξείας γωνίας, ἤτοι τὴν τέμνουσαν καὶ τὴν συντέμνουσαν, βλέπε: «Μεγάλη Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία», Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 14.

Ἀσκήσεις.—*136.* Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi\,\omega=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21},\qquad \sigma\varphi\,\omega=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

137. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\,\omega=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\dot{\varepsilon}\varphi\,\omega=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=$
$=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $\sigma\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.

138. ἡμω $= \sqrt{1-0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ἐφω $= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ καὶ σφω $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

139. ἡμω $= \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, ἐφω $= \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ καὶ σφω $= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

140. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἔχομεν: ἡμω $= \frac{\text{ἐφ}\,\omega}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, συνω $\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ σφω $= 1$.

141. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἡμω $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συνω $= \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$ καὶ σφω $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

142. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω πίνακα ἔχομεν ἡμω $= \frac{1}{\sqrt{1+\text{σφ}^2\,\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, συνω $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ ἐφω $= 1$.

143. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἡμω $= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συνω $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$ καὶ ἐφω $= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

144. Ἐπειδὴ συνω $= \frac{1}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}}$ καὶ ἡμω $= \frac{\text{ἐφω}}{\sqrt{1+\text{ἐφ}^2\omega}}$ (πίναξ σελ. 26) ἔχομεν συν$^2\omega$ − ἡμ$^2\omega$ $= \frac{1}{1+\text{ἐφ}^2\,\omega} - \frac{\text{ἐφ}^2\omega}{1+\text{ἐφ}^2\omega} = \frac{1-\text{ἐφ}^2\omega}{1+\text{ἐφ}^2\omega}$.

145. Ἐπειδὴ (ἄσκ. 144) συν$^2\alpha$ − ἡμ$^2\beta$ $= \frac{1}{1+\text{ἐφ}^2\alpha} - \frac{\text{ἐφ}^2\beta}{1+\text{ἐφ}^2\beta} = \frac{1-\text{ἐφ}^2\,\alpha\,\text{ἐφ}^2\,\beta}{(1+\text{ἐφ}^2\alpha)\,(1+\text{ἐφ}^2\beta)}$ καὶ ἡμ$^2\,\alpha$. ἡμ$^2\,\beta$ $= \frac{\text{ἐφ}^2\,\alpha}{1+\text{ἐφ}^2\beta} \cdot \frac{\text{ἐφ}^2\beta}{1+\text{ἐφ}^2\beta} =$

$$=\frac{ἐφ^2α\,.\,ἐφ^2β}{(1+ἐφ^2α)\,(1+ἐφ^2β)},\ \text{ἕπεται ὅτι}\ \frac{συν^2α-ἡμ^2β}{ἡμ^2α\,.\,ἡμ^2β}=\frac{1-ἐφ^2α\,.\,ἐφ^2β}{ἐφ^2α\,.\,ἐφ^2β}.$$

146. Εἶναι $συν\frac{ω}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ὅθεν εἶναι ἡμω=

$$=2ἡμ\frac{ω}{2}συν\frac{ω}{2}=2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{καὶ (26)}\ συνω=1-2ἡμ^2\left(\frac{ω}{2}\right)=$$

$$=1-2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

147. Εἶναι (26) $συνω=2\,συν^2\left(\frac{ω}{2}\right)-1=2.\frac{3}{4}-1=\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ $ἡμ\frac{ω}{2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, ἕπεται :

$$ἡμω=2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

148. Εἶναι (27) $ἐφω=\dfrac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ $σφ\frac{ω}{2}=$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, ἕπεται (28) $σφω=\frac{3-1}{2.\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

149. Ἐπειδὴ $ἐφ\frac{ω}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ἕπεται $ἐφω=\dfrac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$

καὶ $σφω=\frac{3-1}{2.\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις

Ἀσκήσεις.—*150.* Ἔχομεν $ἡμχ=\frac{3}{5}=0{,}6$ καὶ λογἡμχ = $=\bar{1}, 77815$. Ὅθεν $χ=36°\ 52'\ 11''$.

151. Εἶναι $ἡμχω\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$ καὶ $χ=30°$ (πίναξ Τρ. σελ. 72).

152. Εἶναι 17συνχ − 9συνχ = 2 + 2, ἤτοι $συνχ=\frac{1}{2}$ καὶ $χ=60°$.

153. Εἶναι $6\acute{\epsilon}\varphi\chi - \frac{12\,\acute{\epsilon}\varphi\chi}{5} = 1 + \frac{1}{2}$, ἤτοι $\acute{\epsilon}\varphi\chi = \frac{5}{12}$ καὶ

$\lambda o\gamma\acute{\epsilon}\varphi\chi = \lambda o\gamma 5 - \lambda o\gamma 12 = 0{,}69897 - 1{,}07018 = \bar{1}{,}62879$ καὶ $\chi = 23°2'41''$.

154. Λύοντες πρὸς ἐφχ εὑρίσκομεν $\acute{\epsilon}\varphi\chi = \frac{5}{2}$ καὶ λογἐφχ $=$

$= 0{,}69897 - 0{,}30103 = 0{,}39794$ καὶ $\chi = 68°\ 11'\ 55''$.

155. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς συνχ. Ἐπομένως ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2 + \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2}$ καὶ $\chi = 60°$

156. Ὁμοίως ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{15} = \frac{11 \pm 1}{15}$, ἤτοι

$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Ἐκ τῆς πρώτης ρίζης συνχ $= 0{,}8$ εὑρίσκομεν λογσυνχ $= \bar{1}{,}90309$ καὶ $\chi = 38°\ 39'\ 35''$

Ἐκ δὲ τῆς ρίζης $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{2}{3}$ εὑρίσκομεν λογσυνχ $=$ λογ2 $-$

$-$ λογ3 $= 0{,}30105 - 0{,}47712 = \bar{1}{,}82391$ καὶ $\chi = 33°\ 41'\ 25''$

157. Εἶναι $\sigma\varphi\chi\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{2}$, ἤτοι σφχ $= 2$, λογσφχ $=$

$= 0{,}30103$ καὶ $\chi = 26°\ 33'\ 54''$.

158. Ἔχομεν $\sigma\varphi\chi = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ καὶ λογσφχ $=$

$= 0{,}39794$. Ὅθεν $\chi = 21°\ 48'\ 5''$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ βιβλίου

159. Ἐπειδὴ $100^{\gamma} = 90°$, ἕπεται $1^{\gamma} = \frac{9°}{10}$

160. Ἐπειδὴ π ἀκτίνια $= 180°$, ἕπεται 1 ἀκ. $= \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1416} =$

$= 57°\ 17'\ 44'', 88$.

Σημείωσις. Εἰς τοιαύτας ἀναγωγὰς χρησιμοποιεῖται τὸ $\frac{1}{\pi}$, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς ἴσον μὲ 0,31831. Ἑπομένως εἶναι 1 ἀκτ. $=$

$= \frac{180°}{\pi} = 180° \cdot \frac{1}{\pi} = 180° \cdot 0{,}31831$.

161. Τὸ τεταρτημόριον περιφερείας διαιρεῖται εἰς $90° = 60' \cdot 90 =$ $= 5400'$ ἢ εἰς $100^{\gamma} = 10000$. Ὥστε τὸ πρῶτον λεπτὸν τῆς μοίρας εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πρώτου λεπτοῦ τοῦ βαθμοῦ.

162. Ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία εἶναι $64°\,40' = 64\frac{2°}{3} = 64\frac{2}{3} \times \frac{10}{9} =$
$= 71^{\gamma}\frac{23}{27}$.

163. Ἐὰν χ εἶναι ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία, αὕτη θὰ εἶναι $\frac{\chi}{3}$. Ὥστε εἶναι $\chi + \frac{\chi}{3} = 90°$, ἤτοι $\chi + \frac{\chi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ἀκ. Τότε ὅμως εἶναι $\chi = \frac{3\pi}{8}$ ἀκτ. καὶ $\frac{\chi}{3} = \frac{\pi}{8}$ ἀκτ.

164. Εἶναι $ἡμB = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{3\beta} = \frac{1}{3}$. Ἐπομένως εἶναι:
$συνB = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $ἐφB = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ καὶ $σφB = 2\sqrt{2}$.

165. Εἶναι $B = \frac{2\pi}{5} = 180°.\frac{2}{5} = 72°$, $ἡμB = 0{,}95106 = συνΓ$.
$συνB = 0{,}30902 = ἡμΓ$, $ἐφB = 3{,}07768 = σφΓ$, $σφB = 0{,}32492 = ἐφΓ$.

166. Εἶναι $B = 57^{\gamma},5 = 57{,}5 . \frac{9}{10} = 51°\,45'$, $ἡμB = 0{,}78532 = συνΓ$,
$συνB = 0{,}61909 = ἡμΓ$, $ἐφB = 1{,}26851 = σφΓ$ καὶ $σφB = 0{,}78834 = ἐφΓ$.

167. Λύοντες εὑρίσκομεν $ἡμ\chi = \frac{1}{2}$, ἤτοι $\chi = 30°$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς ὃ εἶναι $\alpha = 2\beta$. Τότε ἔχομεν $ἡμB = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2} = ἡμ\,30°$.

168. Λύοντες εὑρίσκομεν $ἐφ\omega = 2$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς ὃ εἶναι $\beta = 2\gamma$. Τότε θὰ εἶναι $ἐφB =$
$= \frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\gamma}{\gamma} = 2 = ἐφ\omega$.

169. Εὑρίσκομεν $συν\varphi = 1$ ἢ $\frac{5}{7}$. Οὕτως ἡ γωνία φ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ῥίζαν $συν\varphi = 1$, εἶναι $0°$ (§ 34).

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν γωνίαν ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ῥίζαν $συν\varphi = \frac{5}{7}$, κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ κάθετον πλευρὰν (ΑΓ) = 5 μονάδας καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ) = 7 τοιαύτας μονάδας. Τότε θὰ εἶναι $ἡμB = \frac{5}{7} = συνΓ = συν\varphi$.

170. Εἶναι συν$(90° - \chi) =$ ἡμχ. Κατασκευάζομεν λοιπὸν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 12) ὀξεῖαν γωνίαν χ, ὅταν ἡμ$\chi = 0{,}456$.

171. Κατασκευάζομεν (§ 26) ὀξεῖαν γωνίαν χ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι ἐφ$\chi = 2{,}50$. Διότι σφ$(90° - \chi) =$ ἐφχ.

172. Ἔχομεν συν$(90° - \chi) =$ ἡμ$\chi = \frac{3}{5}$. Ὅθεν:

$$\text{συν}\chi = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5},\ \text{ἐφ}\chi = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \text{ καὶ σφ}\chi = \frac{4}{3}.$$

173. Εἶναι $\frac{1}{\text{ἡμ}^2\omega} + \frac{1}{\text{συν}^2\omega} = \frac{\text{συν}^2\omega + \text{ἡμ}^2\omega}{\text{ἡμ}^2\omega\text{συν}^2\omega} = \frac{1}{\text{ἡμ}^2\omega\text{συν}^2\omega}$

174. Ἐπειδὴ $B + \Gamma = 90°$, εἶναι συν$\Gamma =$ ἡμB καὶ ἡμ$\Gamma =$ συνB. Ὅθεν εἶναι $\frac{\text{ἡμ}B + \text{συν}\Gamma}{\text{συν}B + \text{ἡμ}\Gamma} = \frac{\text{ἡμ}B + \text{ἡμ}B}{\text{συν}B + \text{συν}B} = \frac{2\text{ἡμ}B}{2\text{συν}B} = \frac{\text{ἡμ}B}{\text{συν}B} =$ ἐφB.

175. Ἐπειδὴ ἡμ$B = \frac{\beta}{\alpha}$, ἤτοι $\frac{1}{\text{ἡμ}B} = \frac{\alpha}{\beta}$ καὶ σφ$B = \frac{\gamma}{\beta}$, εἶναι:

$$\frac{1}{\text{ἡμ}B} + \text{σφ}B = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

176. Εἶναι ἡμ$\omega =$ συνφ. Ὅθεν: ἡμ$^2\omega +$ ἡμ$^2\varphi =$ συν$^2\varphi +$ ἡμ$^2\varphi = 1$.

177. Ἐπειδὴ συν$\Gamma =$ ἡμB καὶ ἡμ$B = \frac{\beta}{\alpha}$, ἔχομεν ἡμ$B +$ ἡμ$B =$

$$= 2\,\text{ἡμ}B = \frac{2\beta}{\alpha}.$$

178. Εἶναι ἡμ$B = \frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἡμ$\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ὅθεν ἡμ$^2B -$ ἡμ$^2\Gamma =$

$$= \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}.$$

179. Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι $\frac{2 \cdot 8 - 4}{8} =$

$= \frac{3}{2}$ ὀρθ. $= 135°$. Ἤδη ἐὰν AB εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, K τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ $K\Gamma$ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AK\Gamma$, γνωρίζομεν τὴν κάθετον πλευρὰν $(A\Gamma) = \frac{(AB)}{2} = 8$ μ. καὶ τὴν γωνίαν $\Gamma AK = \frac{135°}{2} = 67°30'$.

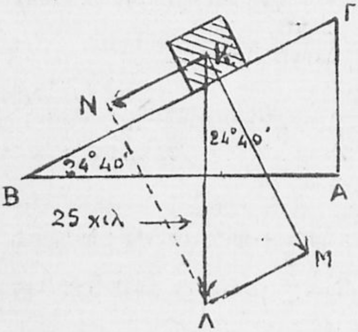
Ὅθεν ἡ ἀκτὶς KA ἰσοῦται μὲ $(KA) = \frac{(A\Gamma)}{\text{συν}\,\widehat{\Gamma AK}}$. Ὅθεν λογ$(KA) =$

$= \log 4 - \log \sigma\upsilon\nu\, 67^\circ\, 30' = 0{,}60206 - \bar{1}{,}58284 = 1{,}01922$ καὶ $(\mathrm{K}\Lambda) =$ $= 10{,}45$ μ.

180. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $(\mathrm{A}\Gamma) = (\mathrm{K}\mathrm{A})$ συν $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = 0{,}80 \,.$ συν 78°, διότι ἡ γωνία τοῦ δεκαπενταγώνου ἰσοῦται μὲ $\frac{15 \,.\, 2 - 4}{15} = \frac{26}{15}$ ὀρθ. $= 90^\circ \cdot \frac{26}{15} = 156^\circ$. Ὅθεν εἶναι $(\mathrm{A}\Gamma) \,.\, 2 = (\mathrm{AB}) =$

$= 1{,}60$ συν78° καὶ λογ$(\mathrm{AB}) =$ λογ$1{,}60 +$ λογσυν$78^\circ = 0{,}20412 +$ $+ \bar{1}{,}31788 = \bar{1}{,}52200$. Ὅθεν $(\mathrm{AB}) = 0{,}333$ μ.

181. Ἔστω ΚΛ τὸ βάρος τοῦ σώματος Κ, ὅπερ κυλίεται ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διεύθυνσις εἶναι κατακόρυφος. Ἡ δύναμις αὕτη ΚΛ ἀναλύεται εἰς τὰς δυνάμεις ΚΝ καὶ ΚΜ καθέτους μεταξύ των, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΚΜ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓ ἐξουδετεροῦται ὑπ' αὐτοῦ, ἡ δὲ ΚΝ, παράλληλος πρὸς τὸ ΒΓ, κινεῖ τὸ σῶμα. Ὥστε ἡ ΚΛ (ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων ΚΝ καὶ ΚΜ) εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου ΚΝΛΜ. Ἤδη ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία ΛΚΜ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν Β, ἤτοι μὲ τὴν κλίσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, διότι αὗται εἶναι ἀμφότεραι ὀξεῖαι καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους. Ὥστε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΛΜ λαμβάνομεν $(\mathrm{M}\Lambda) = (\mathrm{KN}) = (\mathrm{K}\Lambda)$ἡμΛΚΜ $= 25$ἡμ$24^\circ\, 40'$ καὶ $(\mathrm{KM}) = (\mathrm{K}\Lambda)$συνΛΚΜ $=$ $= 25$ συν$24^\circ\, 40'$. Ὅθεν εἶναι λογ$(\mathrm{KN}) =$ λογ$25 +$ λογημ$24^\circ\, 40' =$



Σχ. ἀσκ. 181.

$= 1{,}39794 + \bar{1}{,}62049 = 1{,}01843$ καὶ $(\mathrm{KN}) = 10{,}433$ χλγρ. Ἐξ ἄλλου εἶναι λογ$(\mathrm{KM}) =$ λογ$25 +$ λογσυν $24^\circ\, 40' = 1{,}39794 + \bar{1}{,}95844 = 1{,}35638$ καὶ $(\mathrm{KM}) =$ πίεσις τοῦ σώματος ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου $=$ $= 22{,}718$ χλγρ.

182. Ἡ δύναμις ἥτις ἐκίνησε τὸ σῶμα εἶναι ἴση μὲ 20ἡμ $(20^\circ\, 30'\, 40'')$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μετάθεσις 0,85 μ. τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς γίνεται ἐν τῇ διευθύνσει τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ ζητούμενον ἔργον Ε, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Φυσικῆς, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν μετάθεσιν. Ἑπομένως εἶναι $\mathrm{E} = 0{,}85 .$ 20ἡμ $20^\circ\, 30'\, 40'') = 17$ ἡμ$(20^\circ\, 30'\, 40'')$. Ὅθεν λογΕ $= 1{,}23045 + \bar{1}{,}54455 = 0{,}77500$ καὶ $\mathrm{E} = 5{,}957$.

Σημείωσις. Περὶ ἔργου δυνάμεως καὶ μονάδων ἔργου βλέπε Πίνακας **λογαρίθμων**, νέα ἔκδοσις, Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 206 § 14.

183. Ἔστω ΑΒ χορδὴ τόξου καὶ ΚΓ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Κ ἀπ' αὐτῆς, ἥτις ΚΓ διχοτομεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΚΒ. Τότε εἶναι $(\text{ΚΑ}) = \dfrac{(\text{ΓΑ})}{\text{ἡμΑΚΓ}} = \dfrac{0{,}34}{\text{ἡμ}28^\circ 17' 39''}$ καὶ $(\text{ΚΓ}) =$ $= (\text{ΓΑ})\text{σφΑΚΓ} = 0{,}34\text{σφ}28^\circ\ 17'\ 39''$.

Ὅθεν εἶναι $\text{λογ}(\text{ΚΑ}) = \text{λογ}\,0.34 - \text{λογἡμ}\,28^\circ\ 17'\ 39'' = \bar{1}.53148 -$ $- \bar{1},67578 = \bar{1},85570$ καὶ $(\text{ΚΑ}) = 0{,}7173$ μ.

Ὁμοίως εἶναι $\text{λογ}(\text{ΚΓ}) = \bar{1},53148 + 0.26936 = \bar{1},80084$ καὶ $(\text{ΚΓ}) =$ $= 0{,}6322$ μ.

184. Ἐὰν ἡ γωνία κλίσεως εἶναι ω, ἔχομεν $\text{ἐφω} = \dfrac{\text{ὕψος}}{\text{βάσιν}} = 2$, $\text{λογἐφω} = 0{,}30103$ καὶ $\omega = 63^\circ\ 26'\ 6''$.

185. Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω $\text{ἐφω} = \dfrac{\text{ὕψος}}{\text{βάσιν}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $\text{λογἐφω} =$ $= \bar{1},69897$ καὶ $\omega = 26^\circ\ 33'\ 54''$. Ἑπομένως ἐπειδὴ $g = 9{,}81$ μ. εἰς 1', ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις εἰς ἑκατοστόμετρα εἶναι $\varepsilon = 981\ \text{ἡμ}26^\circ 33' 54''$, $\text{λογε} = 2{,}99167 + \bar{1},65051 = 2{,}64218$ καὶ $\varepsilon = 438{,}71$.

186. Εἶναι $\text{Β} = 180^\circ \cdot \dfrac{3}{20} = 27^\circ$. Ὥστε $\Gamma = 63^\circ$, $\beta = \alpha\text{ἡμΒ}$ καὶ $\gamma = \alpha\text{συνΒ}$. Ἑπομένως εἶναι $\text{λογβ} = \text{λογ}1{,}35 + \text{λογἡμ}27^\circ = \bar{1},78738$ καὶ $\beta = 0{,}613$ μ.

Ὁμοίως εἶναι $\text{λογγ} = 0{,}13033 + \bar{1},94988 = 0{,}08021$ καὶ $\gamma = 1{,}203$ μ. Διὰ τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν $\text{Ε} = \dfrac{1}{2}\beta\gamma = \dfrac{1}{2}\cdot \alpha\text{ἡμΒ}\,.\,\alpha\text{συνΒ} = \dfrac{1}{4}\alpha^2.2\text{ἡμΒ}$ $\text{συνΒ} = \dfrac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ}2\text{Β}$ $(2\text{Β} < 90^\circ)$. Ὅθεν $\text{λογΕ} = 2\text{λογ}1{,}35 + \text{λογἡμ}54^\circ -$ $- \text{λογ}4$ κ.λ.π.

187. Ἔχομεν $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \sqrt{10{,}20.3{,}40} =$ $= \sqrt{34{,}68}$, καὶ $\text{λογγ} = \dfrac{\text{λογ}34{,}68}{2} = \dfrac{1{,}54008}{2} = 0{,}77004$ καὶ $\gamma = 5{,}889$ μ.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\text{ἡμΒ} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{3{,}40}{6{,}80} = \dfrac{1}{2}$, καὶ $\text{Β} = 30^\circ$ καὶ $\Gamma = 60^\circ$. Ἤδη τὸ ἐμβαβὸν εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά.

188. Εἶναι $\Delta = \dfrac{\text{Α}}{2\,\text{συν}\,\dfrac{\omega}{2}} = \dfrac{30\sqrt{2}}{2\text{συν}45^\circ} = \dfrac{30\sqrt{2}}{2\,.\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 30$ χλγρ.

189. Ἔστω ΑΔ ἡ κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Τότε τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΓΔ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν

ΒΓ. Ἔστω δὲ ὅτι (ΒΔ)=0,30 μ. καὶ (ΓΔ)=0,40 μ. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ λαμβάνομεν (ΑΔ)=(ΒΔ)ἡμΒ καὶ (ΑΔ)=(ΓΔ).ἐφΓ=(ΓΔ)σφΒ. Ὅθεν εἶναι (ΒΔ)ἐφΒ=(ΓΔ)σφΒ, ἤτοι:

$$\frac{\text{ἐφB}}{\text{σφB}}=\frac{(\Gamma\Delta)}{(\mathrm{B}\Delta)} \text{ ἢ ἐφ}^2\mathrm{B}=\frac{(\Gamma\Delta)}{(\mathrm{B}\Delta)}=\frac{0{,}40}{0{,}30}=\frac{4}{3}.$$

Ὅθεν 2λογἐφΒ=λογ4−λογ3=0,60206−0,47712=0,12494 Β=49° 6′ 24″ καὶ Γ=40° 53′ 36″. Ἐπειδὴ δὲ α=(ΒΓ)=0,30+0,40=0,70 μ., ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ γίνεται κατὰ τὴν περίπτωσιν Α′ τῆς § 21.

190. Εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι Α+Β+Γ=180°, ἤτοι:

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^\circ.$$

Αἱ δοθεῖσαι λοιπὸν ἰσότητες ἀληθεύουν, διότι αἱ γωνίαι $\frac{A+B}{2}$ καὶ $\frac{\Gamma}{2}$ εἶναι συμπληρωματικαί, ὡς καὶ αἱ γωνίαι $\frac{B+\Gamma}{2}$ καὶ $\frac{A}{2}$.

191. Εἶναι ἡμ(90°−ω)=συνω καὶ συν(90°−ω)=ἡμω. Ὥστε τὸ δοθὲν ἄθροισμα γίνεται συν²ω+ημ²ω καὶ ἰσοῦται μὲ 1, ἤτοι εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας ω (§ 45).

192. ἐφ(90°−ω)ἐφω=σφωἐφω=1 καὶ σφ(90°−ω)σφω=ἐφωσφω=1 (§ 45, τύπος 11).

193) Εἶναι 3ἐφχ−1=ἐφχ+1, ἤτοι ἐφχ=1 καὶ χ=45°.

194) Λύοντες εὑρίσκομεν σφ²χ−8σφχ+16=0, σφχ=4, λογσφχ=0,60206 καὶ χ=14° 2′ 10″.

195) Ἔχομεν 4συν²χ−20συνχ+9=0, συνχ $=\frac{9}{2}$ ἢ $\frac{1}{2}$.

Ἀλλ' ἡ ρίζα συνχ $=\frac{9}{2}$ ἀπορρίπτεται, διότι $\frac{9}{2}>1$. Μένει λοιπὸν ἡ ρίζα συνχ $=\frac{1}{2}$, ἥτις δίδει χ=60°.

196) Εὑρίσκομεν 2ἡμ⁴ω−3ἡμ²ω+1=0, ἡμ²ω=1 ἢ $\frac{1}{2}$ καὶ ἡμω $=\pm 1$ ἢ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἐκ τῶν ριζῶν δὲ τούτων δεκτὴ εἶναι ἡ ἡμω $=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν ω=45°.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

Ἐπίλυσις μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀμβλείας γωνίας.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ συχνὰ ἀπαντώμενοι

Γωνία		ἡμϑ	συνϑ	ἐφϑ	σφϑ
ϑ°	ϑ ἀκτινίων				
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	∞

Ἀσκήσεις.—*197.* Ἡ παραπληρωματικὴ γωνίας 120° εἶναι 60°. Ἐπειδὴ δὲ ἡμ$60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ συν$60° = \frac{1}{2}$, ἔπεται (§ 55) ὅτι ἡμ$120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ συν$120° = -\frac{1}{2}$.

198. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡμ$(180° - 45°) =$ ἡμ$45°$, ἤτοι ἡμ$135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ συν$(180° - 45°) = -$συν$45°$, ἤτοι συν$135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

199. Ἐπειδὴ $180° - 95°\ 20' = 84°\ 40'$, ἕπεται ὅτι ἡμ$(95°\ 20') =$ $=$ ἡμ$(84°\ 40') = 0{,}99567$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι συν$117°\ 30'\ 40'' = -$συν$(62°\ 29'\ 20'') =$ $= -0{,}46192$.

200. Εἶναι συν$(125°\ 40') = -$ συν$(54°\ 20') = -\ 0{,}58307$ καὶ συν$(163°\ 15'\ 40'') = -$ συν$(16°\ 44'\ 20'') = -\ 0{,}95760$.

201. Κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 12) ὀξεῖαν γωνίαν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἡμίτονον 0,55. Ἡ παραπληρωματική της εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον.

202. Κατασκευάζομεν (§ 38) ὀξεῖαν γωνίαν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ συνημίτονον $\frac{3}{5}$. Τότε ἡ παραπληρωματική της θὰ ἔχῃ συνημίτονον $-\frac{3}{5}$.

203. Εὑρίσκομεν ἡμ$\chi = \frac{1}{6}$, λογἡμ$\chi = -$ λογ$6 = -\ 0{,}77815 =$ $= \overline{1}{,}22185$, $\chi = 9°\ 35'\ 39''$ καὶ $180 - \chi = 170°\ 24'\ 21''$.

204. Εὑρίσκομεν συν$\chi = -\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι συν$60° = \frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι $\chi = 180° - 60° = 120°$.

205. Εἶναι ἐφ$(180° - 45°) = -$ ἐφ$45°$, ἤτοι ἐφ$135° = -1$ καὶ σφ$135° = -$ἐφ$45° = -1$.

206. Εἶναι ἐφ$120° = -$ἐφ$60 = -\sqrt{3}$ καὶ σφ$120° = -$ σφ$60° =$ $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

207. Εἶναι ἐφ$(135°\ 35') = -$ ἐφ$(44°\ 25') = -\ 0{,}97985$ καὶ ἐφ$(98°\ 12'\ 30'') = -$ ἐφ$81°\ 47'\ 30'' = -\ 6{,}93233$.

208. Εἶναι σφ$(154°\ 20') = -$ σφ$25°\ 40' = -\ 2{,}08094$ καὶ σφ$(162°\ 20'\ 45'') = -$ σφ$(17°\ 39'\ 15'') = -\ 3{,}14211$.

209. Κατασκευάζομεν (§ 26) ὀξεῖαν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ἐφαπτομένην 1,50. Ἡ παραπληρωματική της εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι ἔχει ἐφ. ἴσην μὲ $-1{,}50$.

210. Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς ἄνω.

211. Εὑρίσκομεν ἐφ$\chi = -\ 1$ καὶ $\chi = 135°$ (ἄσκ. 205).

212. Εὑρίσκομεν σφ$\chi = -\frac{2}{5} = -\ 0{,}4$. Ἐπομένως εἶναι: σφ$(180° - \chi) = 0{,}4$, λογσφ$(180° - \chi) = \overline{1}{,}60206$ καὶ $180° - \chi =$ $= 68°\ 11'\ 55''$. Ὅθεν $\chi = 180° - 68°\ 11'\ 55'' = 111°\ 48'\ 5''$.

213. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\chi = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\dot{\varepsilon}\varphi\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
$: -\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$ καὶ $\sigma\varphi\chi = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = -1.$

214. Εἶναι $\acute{\eta}\mu\varphi = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$, $\dot{\varepsilon}\varphi\varphi = \frac{1}{2} : -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καὶ $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$

215. Εἶναι (πίναξ σελ. 35) $\acute{\eta}\mu\vartheta = \frac{\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta}{\sqrt{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta}}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\vartheta =$
$= \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta}}$. Ἐδῶ ὅμως ἡ γωνία ψ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἑπομένως αὕτη θὰ ἔχῃ ἡμ. θετικόν, ἀλλὰ συν. καὶ σφ. ἀρνητικά. Ἑπομένως εἶναι $\acute{\eta}\mu\psi = \frac{-1}{-\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\psi = \frac{1}{-\sqrt{1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ καὶ } \sigma\varphi\psi = -1.$$

216. Ὁμοίως (πίναξ σελ. 35) εὑρίσκωμεν $\acute{\eta}\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}$ καὶ $\dot{\varepsilon}\varphi\omega = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Ἐπίλυσις μὴ ὀρθογωνίων τριγώνων

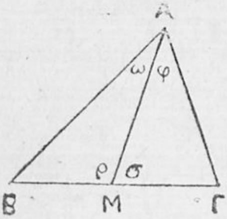
Ἀσκήσεις. — *217.* Ἐκ τοῦ τύπου $E = \frac{1}{2}\beta(B\Delta)$ (§ 60. Γ΄), εὑρίσκομεν $(B\Delta) = \frac{2E}{\beta}$ ἢ ἐπειδὴ (τύπος 26) $2E = \beta\gamma\acute{\eta}\mu A$, εὑρίσκομεν $(B\Delta) =$
$= \gamma\acute{\eta}\mu A$. Ἀλλ' εἶναι (§ 60. Α΄) $\gamma = 2R\acute{\eta}\mu\Gamma$. Ὥστε εἶναι $(B\Delta) =$
$= 2R\acute{\eta}\mu A\acute{\eta}\mu\Gamma$.

218. Εἰς τὸν τύπον $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$, ἀντικαθιστῶμεν τὰ $\beta = 2R\eta\mu B$ καὶ $\gamma = 2R\eta\mu\Gamma$. Ἑπομένως εἶναι $E = 2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$.

219. Εἶναι $\eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$, $\eta\mu B = \frac{\beta}{2R}$ καὶ $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2R}$. Ἑπομένως ἐὰν $\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma$, θὰ εἶναι $\frac{\alpha^2}{4R^2} = \frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2}$, ἤτοι θὰ εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Ἀλλ' ἡ σχέσις αὕτη μεταξὺ τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς γεωμετρίας, φανερώνει ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον (Α γωνία ὀρθή).

220. Ἐκ τῶν τύπων (25) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B}{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu A} = \frac{2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B}{2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A} =$$
$$= \varepsilon\varphi A.\sigma\varphi B = \frac{\varepsilon\varphi A}{\varepsilon\varphi B}.$$



σχ. ἀσκ. 221.

221. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΜ καὶ ΑΓΜ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\frac{(BM)}{\eta\mu\omega} = \frac{(AB)}{\eta\mu\rho} \text{ καὶ } \frac{(M\Gamma)}{\eta\mu\varphi} = \frac{(A\Gamma)}{\eta\mu\sigma}.$$ Ἤτοι:

$$(BM) = \frac{\gamma\eta\mu\omega}{\eta\mu\rho} \text{ καὶ } (M\Gamma) = \frac{\beta\eta\mu\varphi}{\eta\mu\sigma}.$$

Ἀλλὰ $(BM) = (M\Gamma)$ καὶ $\eta\mu\rho = \eta\mu\sigma$, διότι $\rho + \sigma = 180°$. Ὥστε εἶναι $\gamma\eta\mu\omega = \beta\eta\mu\varphi$, ἤτοι $\gamma\eta\mu\omega - \beta\eta\mu\varphi = 0$.

222. Εἶναι $\Gamma = 180° - (A+B)$ καὶ $\frac{\Gamma}{2} = 90° - \frac{A+B}{2}$. Θὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὴν $\frac{A+B}{2}$ ἐκ τοῦ τύπου (27) καὶ ἐξ αὐτῆς τῆς $\frac{\Gamma}{2}$. Οὕτως ἔχομεν $\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2} = \frac{50}{24}.\varepsilon\varphi\,(24°13'40'')$, $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2} =$
$= \lambda o\gamma 50 + \lambda o\gamma\varepsilon\varphi\,(24°13'40'') - \lambda o\gamma 24 = 1{,}69897 + \bar{1}{,}65322 - 1{,}38021 =$
$= \bar{1}{,}97198$ καὶ $\frac{A+B}{2} = 43°9'12''$. Ὅθεν $\frac{\Gamma}{2} = 90° - 43°9'12'' =$
$= 46°50'48''$ καὶ $\Gamma = 93°41'36''$.

223. Εἶναι $A = 180° - 58°13' = 121°47'$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $\lambda o\gamma\beta =$
$= \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu B - \lambda o\gamma\eta\mu\,(B+\Gamma) = 0{,}69897 + \bar{1}{,}63133 - \bar{1}{,}92944 = 0{,}40086$ καὶ $\beta = 2{,}517$ μ. Ὁμοίως εἶναι $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\eta\mu\Gamma - \lambda o\gamma\eta\mu(B+\Gamma) =$
$= 0{,}69897 + \bar{1}{,}73474 - \bar{1}{,}92944 = 0{,}50427$ καὶ $\gamma = 3{,}194$ μ.

Τέλος ἔχομεν $\lambda o\gamma 2E = 2\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma \dot{\eta}\mu B + \lambda o\gamma \dot{\eta}\mu \Gamma - \lambda o\gamma \dot{\eta}\mu (B+\Gamma) =$
$= 1{,}39794 + \bar{1}{,}63133 + \bar{1}{,}73474 - \bar{1}{,}92944 = 0{,}83457$. Ὅθεν $2E = 6{,}8323$ τ.μ. καὶ $E = 3{,}4161$ τ.μ.

224. Εἶναι 1) $A = 180° - 119° = 61°$.

2) $\lambda o\gamma\beta = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu B - \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu A = 2{,}42423 + \bar{1}{,}97369 - \bar{1}{,}94182 =$
$= 2{,}45610$ καὶ $\beta = 285{,}83$ μ.

3) $\lambda o\gamma\gamma = 2{,}42423 + \bar{1}{,}87609 - \bar{1}{,}94182 = 2{,}35850$ καὶ $\gamma = 228{,}29$ μ.

4) $\lambda o\gamma 2E = 4{,}84846 + \bar{1}{,}97369 + \bar{1}{,}87609 - \bar{1}{,}94182 = 4{,}75642$
$2E = 57071{,}43$ τ.μ. καὶ $E = 28535{,}71$ τ.μ.

225. Εἶναι $A + B = 78°36'15''$. Ὅθεν $\Gamma = 180° - 78°36'15'' =$
$= 101°23'45''$.

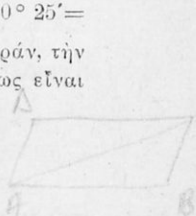
Κατόπιν τούτων ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dfrac{\alpha}{\dot{\eta}\mu A} = \dfrac{\beta}{\dot{\eta}\mu B} = \dfrac{\gamma}{\dot{\eta}\mu\Gamma}$ λαμβάνομεν
$\alpha = \dfrac{\beta\dot{\eta}\mu A}{\dot{\eta}\mu B}$ καὶ $\gamma = \dfrac{\beta\dot{\eta}\mu\Gamma}{\dot{\eta}\mu B} = \dfrac{\beta\dot{\eta}\mu(A+B)}{\dot{\eta}\mu B}$, ἐπειδὴ $\Gamma > 90°$ καὶ $\dot{\eta}\mu(A+B) = \dot{\eta}\mu\Gamma$.

Ἑπομένως εἶναι $\lambda o\gamma\alpha = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu A - \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu B =$
$= 3{,}42613 + \bar{1}{,}92964 - \bar{1}{,}54118 = 3{,}81459$ καὶ $\alpha = 6525{,}14$ μ.

Ὁμοίως εἶναι $\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu(A+B) - \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu B =$
$= 3{,}42613 + \bar{1}{,}99135 - \bar{1}{,}54118 = 3{,}87630$ καὶ $\gamma = 7521{,}40$ μ.

Τέλος ἐκ τοῦ τύπου $E = \dfrac{1}{2}\alpha\gamma\dot{\eta}\mu B$, εὑρίσκομεν $2E = \dfrac{\beta^2\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu\Gamma}{\dot{\eta}\mu B} =$
$= \dfrac{\beta^2\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu(A+B)}{\dot{\eta}\mu B}$. Ὅθεν εἶναι:
$\lambda o\gamma 2E = 2\lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu A + \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu(A+B) - \lambda o\gamma\dot{\eta}\mu B =$
$= 6{,}85226 + \bar{1}{,}92964 + \bar{1}{,}99135 - \bar{1}{,}54118 = 7{,}23207$
$2E = 17063600$ τ.μ. καὶ $E = 8531800$ τ.μ.

226. Ἔστω ὅτι $(B\widehat{A}\Gamma) = 23°\,15'$. Τότε θὰ εἶναι $(\Gamma\widehat{A}\Delta) = 50°\,25' =$
$= (A\widehat{\Gamma}B)$. Ὥστε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν μίαν πλευράν, τὴν $(A\Gamma) = 8$ μ. καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας. Ἑπομένως εἶναι $B = 180° - (23°\,15' + 50°\,25') = 180° - 73°\,40' = 106°\,20'$.



Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν:

$$\frac{(B\Gamma)}{\dot{\eta}\mu BA\Gamma} = \frac{(A\Gamma)}{\dot{\eta}\mu B} \text{ καὶ } \frac{(AB)}{\dot{\eta}\mu A\Gamma B} = \frac{(A\Gamma)}{\dot{\eta}\mu B}, \text{ ἤτοι:}$$

$$(B\Gamma) = \frac{8\dot{\eta}\mu(23°\,15')}{\dot{\eta}\mu(106°\,20')} = \frac{8\dot{\eta}\mu(23°\,15')}{\dot{\eta}\mu(73°\,40')} = (A\Delta) \text{ καὶ}$$

$$(AB) = \frac{8\dot{\eta}\mu(50°\,25')}{\dot{\eta}\mu(106°\,20')} = \frac{8\dot{\eta}\mu(50°\,25')}{\dot{\eta}\mu(73°\,40')} = (\Gamma\Delta). \text{ Ὅθεν:}$$

$\lambda o\gamma(B\Gamma) = 0{,}90309 + \bar{1}{,}59632 - \bar{1}{,}98211 = 0{,}51730$ καὶ $(B\Gamma) = 3{,}29$ μ.
$\lambda o\gamma(AB) = 0{,}90309 + \bar{1}{,}88688 - \bar{1}{,}98211 = 0{,}80786$ » $(AB) = 6{,}43$ μ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Εἶναι δὲ τοῦτο $2E = \frac{8^2 ἡμ23°\ 15'\ ἡμ50°\ 25'}{ἡμ73°\ 40'}$. Ὥστε εἶναι:

$λογ2E = 1{,}80618 + \bar{1}{,}59632 + \bar{1}{,}88688 - \bar{1}{,}98211 = 1{,}30727$ καὶ $2E = 20{,}29$ τ.μ.

227. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμεταίας, ὅτι χορδὴ ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τοῦτον. Ὥστε ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΒΚΓ εἶναι 60°. Ἀλλ' εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΚΓ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀρθαὶ καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ γωνίαι Α καὶ Κ αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαί. Ὅθεν Α=120°. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΒΓ γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι ΑΒ=ΑΓ (ἢ διότι αἱ γωνίαι αὗται σχηματίζονται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὸ αὐτὸ τόξον ΒΓ). Ἑπομένως ἑκάστη τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι 30°. Κατόπιν τούτων ἔχομεν:

$$(AB) = (AΓ) = \frac{(BΓ) ἡμ AΓB}{ἡμA} = \frac{0{,}7 ἡμ30°}{ἡμ120°} = \frac{0{,}7 ἡμ30°}{ἡμ60°} =$$

$$= 0{,}7 \cdot \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{0{,}7}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}7 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{0{,}7 \cdot 1{,}732}{3} = 0{,}4$$ (περιοριζόμενοι εἰς τὰ δέκατα). Ἤδη τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$2E = \frac{(BΓ)^2 ἡμ30° \cdot ἡμ30°}{ἡμ120°} = 0{,}7^2 \cdot \frac{1}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{0{,}49 \cdot \sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{0{,}49 \cdot 1{,}732}{6} = 0{,}1414 \text{ τ.μ. καὶ } E = 0{,}0707 \text{ τ.μ.}$$

228. Εἶναι $B + Γ = 180° - 116°\ 34'\ 46'' = 63°\ 25'\ 14''$. Ὥστε εἶναι $B = Γ = 31°\ 42'\ 37''$. Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$λογβ = λογ2{,}5 + λογἡμ(31°\ 42'\ 37'') - λογἡμ63°\ 25'\ 14'' =$$

$$= 0{,}39794 + \bar{1}{,}72067 - \bar{1}{,}95149 = 0{,}16712 \text{ καὶ } β = γ = 1{,}469 \text{ μ.}$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν:

$$E = \frac{α^2 ἡμB \cdot ἡμΓ}{2ἡμ(B+Γ)} = \frac{α^2 ἡμ^2 B}{2ἡμ2B} = \frac{α^2 ἡμ^2 B}{4ἡμBσυνB} = \left(\frac{α}{2}\right)^2 \cdot ἐφB =$$

$= 1{,}25^2\ ἐφ31°\ 42'\ 37''$ καὶ $λογE = 0{,}19382 + \bar{1}{,}79089 = \bar{1}{,}98471$ καὶ $E = 0{,}9654$ τ. μ.

229. Ἡ συνισταμένη εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι αἱ δύο συνιστῶσαι. Ἔστω δὲ ΑΒΓΔ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο, τοῦ ὁποίου διαγώνιος (ἡ συνισταμένη) εἶναι ἡ ΑΓ, αἱ δὲ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ εἶναι αἱ συνιστῶσαι. Τότε ἐπειδὴ $A = 64°\ 20'\ 40''$ καὶ $B\widehat{A}Γ = 48°\ 12'$, θὰ εἶναι $Γ\widehat{A}Δ =$ $= 64°\ 20'\ 40'' - 48°\ 12' = 16°\ 8'\ 40'' = B\widehat{Γ}A$. Ὥστε τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας.

Ἐπειδὴ δὲ $B=180^\circ-64^\circ\,20'\,40''=115^\circ\,39'\,40''$, εἶναι:

$$(AB)=\frac{(A\Gamma)\eta\mu B\Gamma A}{\eta\mu B}=\frac{45\eta\mu(16^\circ\,8'\,40'')}{\eta\mu(115^\circ\,39'\,40'')}=\frac{45\eta\mu(16^\circ 8'\,40'')}{\eta\mu(64^\circ 20'40'')}\ \text{καὶ}$$

$$(B\Gamma)=(A\Delta)=\frac{45\eta\mu(48^\circ\,12')}{\eta\mu(64^\circ\,20'\,40'')}.\ \text{Ὅθεν εἶναι:}$$

$\lambda o\gamma(AB)=1{,}65321+\bar{1}{,}44413-\bar{1}{,}95492=1{,}14242$ καὶ $(AB)=13{,}881$ χλγ.

$\lambda o\gamma(A\Delta)=1{,}65321+\bar{1}{,}87243-\bar{1}{,}95492=1{,}57072$ » $(A\Delta)=37{,}215$ χλγ.

230. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $(B\Delta)=(A\Delta)\sigma\varphi B$ καὶ $(\Delta\Gamma)=(A\Delta)\sigma\varphi\Gamma$. Ὅθεν εἶναι:

$$(B\Delta)+(\Delta\Gamma)=(A\Delta)(\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma),\ \text{ἤτοι}\ (A\Delta)=\frac{(B\Gamma)}{\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $(B\Gamma)=\alpha=0{,}85$ μ., $\sigma\varphi B=\sigma\varphi(42^\circ\,20')=1{,}09770$ καὶ $\sigma\varphi\Gamma=$

$$=\sigma\varphi(74^\circ\,10'\,30'')=0{,}28203,\ \text{εἶναι}\ (A\Delta)=\frac{0{,}85}{1{,}37973},$$

$\lambda o\gamma(A\Delta)=\bar{1}{,}92942-0{,}13979=\bar{1}{,}78963$ καὶ $(A\Delta)=0{,}616$ μ.

231. Εἶναι $A=180^\circ-158^\circ\,30'\,42''=21^\circ\,29'\,18''$. Ἐξ ἄλλου (§ 60) εἶναι $\alpha=2R\eta\mu A$, $\beta=2R\eta\mu B$ καὶ $\gamma=2R\eta\mu\Gamma$, ἤτοι:
$\alpha=4\eta\mu(21^\circ 29'\,18'')$, $\beta=4\eta\mu(56^\circ 20'\,18'')$ καὶ $\gamma=4\eta\mu(102^\circ\,10'\,24'')=$
$=4\eta\mu(77^\circ\,49'\,36'')$. Ὅθεν:

$\lambda o\gamma\alpha=0{,}60206+\bar{1}{,}56385=0{,}16591$ καὶ $\alpha=1{,}465$ μ.

$\lambda o\gamma\beta=0{,}60206+\bar{1}{,}92029=0{,}52235$ » $\beta=3{,}329$ μ.

$\lambda o\gamma\gamma=0{,}60206+\bar{1}{,}99012=0{,}59218$ » $\gamma=3{,}910$ μ.

Ἤδη τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά.

232. Εἴδομεν (§ 62) ὅτι $\dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}=\eta\mu B$. Ὥστε $\eta\mu B=1$ καὶ $B=90^\circ$.

233. Ἐκ τῆς δοθείσης ἀνισότητος προκύπτει $\dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}>1$, ἤτοι $\eta\mu B>1$, ὅπερ ἀδύνατον.

234. Ἔχομεν $\eta\mu B=\dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$, $\lambda o\gamma\eta\mu B=\lambda o\gamma 34{,}5+\lambda o\gamma\eta\mu(30^\circ\,15'\,28'')$
$-\lambda o\gamma 95{,}6=1{,}53782+\bar{1}{,}70234-1{,}98046=\bar{1}{,}25970$ καὶ $B=10^\circ 28'\,38''$, ἢ $B=180^\circ-10^\circ 28'\,38''=169^\circ 31'\,22''$. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη τιμὴ τῆς Β δὲν εἶναι δεκτὴ διότι $169^\circ 31'\,22''+30^\circ\,15'\,28''>180^\circ$.

Ἑπομένως ἔχομεν μίαν λύσιν καὶ εἶναι:
$A=30^\circ\,15'\,28''$, $B=10^\circ 28'\,38''$ καὶ $\Gamma=180^\circ-40^\circ 46'\,6''=139^\circ\,13'\,54''$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $\gamma=\dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=\dfrac{\alpha\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A}$ καὶ

$\lambda o\gamma\gamma=1{,}98046+\bar{1}{,}81491-\bar{1}{,}70234=2{,}09303$ καὶ $\gamma=123{,}89$ μ.

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν $\lambda o\gamma 2E=1{,}98046+1{,}53782+\bar{1}{,}81491=3{,}33319$, $2E=2153{,}71$ τ.μ., ἤτοι $E=1076{,}85$ τ.μ.

235. Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω, $\lambda o\gamma \acute{\eta}\mu B = \lambda o\gamma 640 + \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu(40^\circ 20' 10'') - \lambda o\gamma 500 = 2{,}80618 + \bar{1}{,}81108 - 2{,}69897 = \bar{1}{,}91829$, $B = 55^\circ 56' 40''$ καὶ $B' = 124^\circ 3' 20''$. Ἐπειδὴ δὲ $124^\circ 3' 20'' + 40^\circ 20' 10'' = 164^\circ 23' 30'' < 180^\circ$, ἕπεται ὅτι εἶναι δεκταὶ καὶ αἱ δύο αὐταὶ τῆς B. Ὥστε τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

1η λύσις. $A = 40^\circ 20' 10''$, $B = 55^\circ 56' 40''$, $\Gamma = 83^\circ 43' 10''$

$\lambda o\gamma\gamma = \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu\Gamma - \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu A$

$= 2{,}69897 + \bar{1}{,}99738 - \bar{1}{,}81108 = 2{,}88527$ καὶ $\gamma = 767{,}84$ μ.

$\lambda o\gamma 2E = 2{,}69897 + 2{,}80618 + \bar{1}{,}99738 = 5{,}50253$

$2E = 318076{,}92$ τ.μ. καὶ $E = 159038{,}46$ τ.μ.

2α λύσις. $A = 40^\circ 20' 10''$, $B' = 124^\circ 3' 20''$, $\Gamma' = 15^\circ 36' 30''$

$\lambda o\gamma\gamma' = 2{,}69897 + \bar{1}{,}42985 - \bar{1}{,}81108 = 2{,}31774$ καὶ $\gamma' = 207{,}84$ μ.

$\lambda o\gamma 2E' = 2{,}69897 + 2{,}80618 + \bar{1}{,}42985 = 4{,}93500$

$2E' = 86100$ τ.μ. καὶ $E' = 43050$ τ.μ.

236. Ἡ ΑΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέσωμεν $(A\Gamma) = \beta = 25{,}50$ μ., $(AB) = \gamma = 15{,}45$ μ $(B\Gamma) = \alpha$, ἔχομεν $\acute{\eta}\mu\Gamma = \dfrac{\gamma \acute{\eta}\mu B}{\beta} = \dfrac{\gamma \acute{\eta}\mu 112^\circ}{\beta} = \dfrac{\gamma \acute{\eta}\mu 68^\circ}{\beta}$ καὶ

$\lambda o\gamma \acute{\eta}\mu\Gamma = \lambda o\gamma 15{,}45 + \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu 68^\circ - \lambda o\gamma 25{,}50 =$

$= 1{,}18893 + \bar{1}{,}96717 - 1{,}40654 = \bar{1}{,}74956$,

$\Gamma = 34^\circ 10' 43''$ καὶ $\Gamma' = 145^\circ 49' 17''$. Ἀλλ' ἡ τιμὴ Γ' δὲν εἶναι δεκτὴ διότι $\Gamma + B > 180^\circ$.

Ἑπομένως εἶναι $A = 180^\circ - 146^\circ 10' 43'' = 33^\circ 49' 17''$

καὶ $\alpha = \dfrac{\beta \acute{\eta}\mu A}{\acute{\eta}\mu B}$. Ὥστε εἶναι:

$\lambda o\gamma\alpha = 1{,}40654 + \bar{1}{,}74554 - \bar{1}{,}96717 = 1{,}18491$ καὶ $\alpha = 15{,}31$ μ.

Ἑπομένως εἶναι $(AB) = (\Delta\Gamma) = 15{,}45$ μ. καὶ $(B\Gamma) = (A\Delta) = 15{,}31$ μ.

237. Ἡ σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\dfrac{2\pi}{9}$ ἀκτ. $= 180^\circ \cdot \dfrac{2}{9} = 40^\circ$

Ἤδη ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ ΑΓ ἡ διαγώνιος (ἡ συνισταμένη) τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, εἰς ὃ ἡ συνιστῶσα $AB = 20{,}35$, ἡ δὲ ἄλλη συνιστῶσα ΑΔ σχηματίζει γωνίαν $\Delta A\Gamma = 40^\circ = \widehat{A\Gamma\Delta}$. Ὥστε εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, γνωρίζομεν ὅτι $(A\Gamma) = \beta = 30{,}35$ χλγρ., $(AB) = \gamma = 20{,}35$ χλγ. καὶ $\Gamma = 40^\circ$. Ζητεῖται δὲ ἡ $(B\Gamma) = \alpha = (A\Delta)$, καὶ ἡ γωνία Β, διότι ἐκ ταύτης εὑρίσκεται καὶ ἡ γωνία ΒΑΔ τῶν δύο συνιστωσῶν δυνάμεων.

Ἔχομεν δὲ $\acute{\eta}\mu B = \dfrac{\beta \acute{\eta}\mu\Gamma}{\gamma}$

$\lambda o\gamma \acute{\eta}\mu B = \lambda o\gamma 30{,}35 + \lambda o\gamma \acute{\eta}\mu 40^\circ - \lambda o\gamma 20{,}35 =$

$= 1{,}48216 + \bar{1}{,}80807 - 1{,}30856 = \bar{1}{,}98167$

$B = 73° 28' 15''$ καὶ $B' = 106° 31' 45''$. Εἶναι ἡ τιμὴ B′ δεκτὴ διότι $B' + Γ < 180°$.

1η λύσις. Ἡ $\widehat{B}$ καὶ ἡ $\widehat{BAΔ}$ εἶναι παραπληρωματικαί. Ὥστε ἡ γωνία τῶν δύο δυνάμεων εἶναι $\widehat{BAΔ} = 106° 31' 45'' = \widehat{B'}$.
Ἤδη διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν $(BΓ) = α$, εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχομεν δὲ $A = 180° - 113° 28' 15'' = 66° 31' 45''$. Ἔχομεν δὲ τότε $α = \dfrac{γ ἡμA}{ἡμΓ}$ καὶ

$λογα = 1,30856 + \bar{1},96244 - \bar{1},80807 = 1,46293$ καὶ $α = 29,035$ χλγρ.

2η λύσις. Ἐὰν $B' = 106° 31' 45''$, ἡ γωνία τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἡ $B = 73° 28' 15''$.

Εἶναι δὲ καὶ $A' = 180° - 146° 31' 45'' = 33° 28' 15''$ καὶ
$λογα' = 1,30856 + \bar{1},74156 - \bar{1},80807 = 1,24205$ καὶ $α' = 17,46$ χλγρ.

238. Ἔχομεν $ἐφ\dfrac{B-Γ}{2} = \dfrac{β-γ}{β+γ}καὶσφ\dfrac{A}{2} = \dfrac{173}{427}$ σφ$34° 20'$,

$λογἐφ\dfrac{B-Γ}{2} = 2,23805 + 0,16558 - 2,63043 = \bar{1},77320$ καὶ $\dfrac{B-Γ}{2} =$
$= 30° 40' 35''$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{B+Γ}{2} = 90° - \dfrac{A}{2} = 90° - 34° 20' = 55° 40'$,
ἔπεται $\dfrac{B+Γ}{2} + \dfrac{B-Γ}{2} = B = 86° 20' 35''$ καὶ $\dfrac{B+Γ}{2} - \dfrac{B-Γ}{2} = Γ =$
$= 24° 59' 25''$.

Ἤδη εὑρίσκομεν $α = \dfrac{γἡμA}{ἡμΓ}$,
$λογα = 2,10380 + \bar{1},96917 - \bar{1},62579 = 2,44718$ καὶ $α = 280$ μ.
Διὰ τὸ ἐμβαδὸν ἔχομεν $2E = βγἡμA$,
$λογ2E = 2,47712 + 2,10380 + \bar{1},96917 = 4,55009$
$2E = 35488,46$ τ.μ. καὶ $E = 17744,23$ τ.μ.

239. Εἶναι $ἐφ\dfrac{B-A}{2} = \dfrac{β-α}{β+α}σφ\dfrac{Γ}{2} = \dfrac{122,4}{367,2}σφ(21° 21' 21'')$.

$λογἐφ\dfrac{B-A}{2} = 2,08778 + 0,40782 - 2,56490 = \bar{1},93070, \quad \dfrac{B-A}{2} =$
$= 40° 26' 53''$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{B+A}{2} = 90° - \dfrac{Γ}{2} = 68° 38' 39''$, ἔπεται
$B = 109° 5' 32''$ καὶ $A = 28° 11' 46''$. Ἤδη εἶναι $γ = \dfrac{αἡμΓ}{ἡμA}$.
$λογγ = 2,08778 + \bar{1},83143 - \bar{1},67439 = 2,24482$ καὶ $γ = 175,72$ μ.
Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $E = \dfrac{1}{2}αβἡμΓ$.

240. Εἶναι $\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\frac{4}{14}\sigma\varphi 20^\circ$ καὶ

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=0{,}60206+0{,}43893-1{,}14613=\bar{1}{,}89486$

$\frac{B-\Gamma}{2}=38^\circ\, 7'53''$. Εἶναι δὲ καὶ $\frac{B+\Gamma}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}=70^\circ$.

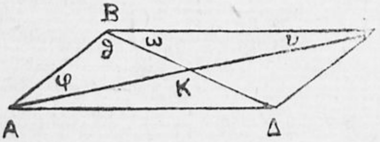
Ὥστε εἶναι $B=108^\circ\, 7'\, 53''$ καὶ $\Gamma=31^\circ\, 52'\, 7''$.

Ἤδη εἶναι $\alpha=\frac{\gamma\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma}=\frac{5\eta\mu A}{12\eta\mu\Gamma}$ καὶ

$\lambda o\gamma\alpha=0{,}69897+\bar{1}{,}80807-1{,}07018-\bar{1}{,}72261=\bar{1}{,}71425$ καὶ $\alpha=0{,}5179$ μ.

Τέλος εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τοῦ τύπου $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$.

241. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ Κ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι $(AK)=\beta=\frac{30}{2}=15$ μ., $(KB)=\alpha=\frac{15}{2}=7{,}5$ μ. καὶ $\widehat{AKB}=\widehat{K}=45^\circ\, 20'$.



Σχ. ἀσκ. 241.

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\widehat{KAB}=\varphi$ καὶ $\widehat{KBA}=\vartheta$, θὰ ἔχωμεν $\varepsilon\varphi\frac{\vartheta-\varphi}{2}=\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\sigma\varphi\frac{K}{2}=\frac{7{,}5}{22{,}5}\sigma\varphi(22^\circ\, 40')$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\vartheta-\varphi}{2}=0{,}87506+0{,}37886-1{,}35218=\bar{1}{,}90174$

$\frac{\vartheta-\varphi}{2}=38^\circ\, 34'\, 23''$. Εἶναι δὲ $\frac{\vartheta+\varphi}{2}=90^\circ-\frac{K}{2}=67^\circ 20'$.

Ὅθεν εἶναι $\vartheta=105^\circ\, 54'\, 23''$ καὶ $\varphi=28^\circ\, 45'\, 37''$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι $(AB)=\frac{(KB)\eta\mu K}{\eta\mu KAB}=\frac{\alpha\eta\mu K}{\eta\mu\varphi}$.

$\lambda o\gamma(AB)=0{,}87506+\bar{1}{,}85200-\bar{1}{,}68228=1{,}04478$ καὶ $(AB)=(\Gamma\Delta)=11{,}09$ μ.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΚΓ, εἰς ὃ εἶναι $\widehat{BK\Gamma}=134^\circ\, 40'$, εὑρίσκομεν, ἐὰν θέσωμεν $\widehat{K\Gamma B}=\upsilon$ καὶ $\widehat{KB\Gamma}=\omega$, $\varepsilon\varphi\frac{\omega-\upsilon}{2}=\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\sigma\varphi\frac{BK\Gamma}{2}=$

$=\frac{7{,}5}{22{,}5}\sigma\varphi(67^\circ\, 20')$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\frac{\omega-\upsilon}{2}=0{,}87506+\bar{1}{,}62079-1.35218=\bar{1}{,}14367$

$\frac{\omega-\upsilon}{2}=7^\circ\, 54'\, 31''$. Εἶναι δὲ καὶ $\frac{\omega+\upsilon}{2}=90^\circ-67^\circ\, 20'=22^\circ\, 40'$.

Ὅθεν $\omega = 30^\circ\, 34'\, 31''$ καὶ $\upsilon = 14^\circ\, 45'\, 29''$. Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$(\text{ΒΓ}) = \frac{(\text{ΚΒ})\text{ἡμΒΚΓ}}{\text{ἡμυ}} = \frac{7{,}5 . \text{ἡμ}(134^\circ\, 40')}{\text{ἡμ}(14^\circ\, 45'\, 29'')} = \frac{7{,}5\, \text{ἡμ}45^\circ\, 20'}{\text{ἡμ}(14^\circ 45'\, 29'')}$$

$\text{λόγ}(\text{ΒΓ}) = 0{,}87506 + \bar{1}{,}85200 - \bar{1}{,}40610 = 1{,}32096$ καὶ $(\text{ΒΓ}) = (\text{ΑΔ}) = 20{,}94$μ.

$$\begin{aligned} \text{Ἤδη εἶναι:}\quad & \varphi + \upsilon = \text{Α} = \text{Γ} = 43^\circ\, 31'\, 6'' \\ \text{καὶ}\quad & \underline{\vartheta + \omega = \text{Β} = \Delta = 136^\circ\, 28'\, 54''} . \\ & \text{Α} + \text{Β} = \text{Γ} + \Delta = 180^\circ \end{aligned}$$

Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Ἑπομένως εἶναι:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = 2(\text{ΑΒΔ}) = (\text{ΑΒ})(\text{ΑΔ})\text{ἡμΑ} = 11{,}09 . 20{,}94 . \text{ἡμ}(43^\circ\, 31'\, 6'').$$

242. Ἡ χορδὴ ΒΓ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου (ἄσκ. 227). Ἑπομένως ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι $\widehat{\text{ΒΚΓ}} = 60^\circ$. Ἐὰν δὲ τὸ τόξον ΒΑΓ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριφερείας ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΓ εἶναι 30° ἢ 150° ἐὰν τὸ τόξον ΒΑΓ εἶναι μικρότερον αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ $\text{συν}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\text{συν}150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(\text{ΒΓ})^2 = 4^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 . 3 . 2\sqrt{3} . \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \text{ καὶ } (\text{ΒΓ}) = 2\,\text{μ. ἢ}$$

$$(\text{ΒΓ})^2 = +4^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 . 4 . 2\sqrt{3} . \frac{\sqrt{3}}{2} = 52 \text{ καὶ } (\text{ΒΓ}) = \sqrt{52}\ \text{μ}.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἡ ΑΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου, ἡ γωνία Β εἶναι ὀρθή, ἡ δὲ ΑΒ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Κ.

243. Ἔστωσαν αἱ δυνάμεις $(\text{ΑΒ}) = 10$ χλγ, καὶ $(\text{ΑΓ}) = 15$ χλγρ. καὶ ΑΒΔΓ τὸ παραλληλόγραμμον μὲ προσκειμένας πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Τότε ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων εἶναι ἡ διαγώνιος ΑΔ. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν (τύπος 25): $(\text{ΑΔ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΒΔ})^2 - 2(\text{ΑΒ})(\text{ΒΔ})\text{συνΒ}$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι παραπληρωματικαὶ εἶναι $\text{συνΒ} = -\text{συνΑ} = -\text{συν}(56^\circ\, 30')$, Ὥστε εἶναι $(\text{ΑΔ})^2 = 10^2 + 15^2 + 2 . 10 . 15 . \text{συν}(56^\circ\, 30')$

$= 100 + 225 + 300 . 0{,}55194 = 490{,}5820$ καὶ $(\text{ΑΔ}) = 22{,}149$ χλγ.

Τώρα ἐκ τοῦ ἰδίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν:

$(\text{ΒΔ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΔ})^2 - 2(\text{ΑΒ})(\text{ΑΔ})\text{συνΒΑΔ}$, ἤτοι

$$\text{συνΒΑΔ} = \frac{(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΑΔ})^2 - (\text{ΒΑ})^2}{2(\text{ΑΒ})(\text{ΑΔ})} = \frac{100 + 490{,}5820 - 225}{2 . 10 . 22{,}149} = \frac{365{,}582}{442{,}98}$$

$\text{λογσυνΒΑΔ} = 2{,}56299 - 2{,}64638 = \bar{1}{,}91661$ καὶ $\text{ΒΑΔ} = 34^\circ\, 23'\, 53''$.

Ὥστε $\Delta\text{ΑΓ} = 56^\circ\, 30' - 34^\circ\, 23'\, 53'' = 22^\circ\, 6'\, 7''$.

244. Εἶναι $\text{Γ} = 180^\circ . \frac{5}{9} = 100^\circ$ καὶ $\text{ἐφ}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2} = \frac{21}{179}\,\text{σφ}50^\circ$ καὶ

$$\text{λογἐφ}\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2} = 1{,}32222 + \bar{1}{,}92381 - 2{,}25285 = \bar{2}{,}99318$$

$\frac{A-B}{2}=5°37'20''$. Εἶναι δὲ καὶ $\frac{A+B}{2}=90°-50°=40°$. Ὅθεν $A=45°37'20''$ καὶ $B=34°22'40''$.

Ἤδη ἔχομεν $\gamma=\frac{\alpha\,\dot\eta\mu\Gamma}{\dot\eta\mu A}=\frac{100\,\dot\eta\mu 100°}{\dot\eta\mu(45°37'20'')}=\frac{100\,\dot\eta\mu 80°}{\dot\eta\mu(45°37'20'')}$

$\lambda o\gamma\gamma=2+\bar{1},97335-\bar{1},85415=2,13920$ καὶ $\gamma=137,78$ μ.

Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $E=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\dot\eta\mu\Gamma$.

245. Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς δοθείσας εἶναι $0,4\,.\,1000=400$ μ. καὶ $0,88\,.\,1000=880$ μέτρα, ἡ δὲ γωνία αὐτῶν εἶναι $40°\,30'$. Ὥστε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι

$$E=\frac{1}{2}\cdot 400\,.\,880\,.\,\dot\eta\mu(40°\,30')=176000\,\dot\eta\mu(40°\,30')$$

$\lambda o\gamma E=5,24551+\bar{1},81254=5,05805$ καὶ $E=114300$ τ. μ.

246. Ἐὰν (ἄσκ. 242) $(A\Delta)=10$ χλγρ., $(AB)=6$ χλγρ., εἶναι $(B\widehat{A}\Delta)=30°$. Ἐπομένως ἐκ τοῦ τριγώνου $AB\Delta$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἄλλη συνιστῶσα $A\Gamma=B\Delta$ ἰσοῦται μὲ (τύπος 25) $(B\Delta)^2=10^2+6^2-$

$-2\,.\,10\,.\,6\,.\,\sigma\upsilon\nu 30°=100+36-120.\frac{\sqrt{3}}{2}=136-60\sqrt{3}=136-$

$-60\,.\,1,732=32,08$ καὶ $(B\Delta)=\sqrt{32,08}=2,66$ χλγρ.

247. Ἔχομεν (§ 64):

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{81+100-64}{2\,.\,9\,.\,10}=\frac{117}{180},\quad \sigma\upsilon\nu B=\frac{64+100-81}{2\,.\,8\,.\,10}=\frac{83}{160}$$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{64+81-100}{2\,.\,8\,.\,9}=\frac{45}{144}=\frac{5}{16}$

ὅθεν $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu A=2,06819-2,25527=\bar{1},81292$, $A=49°\,27'\,28''$

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B=1,91908-2,20412=\bar{1},71496$, $B=58°\,45'\,6''$

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=0,69897-1,20412=\bar{1},49485$, $\Gamma=71°\,47'\,24''$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθεισῶν γωνιῶν $A+B+\Gamma=180°$ μεῖον $2''$. Ἡ διαφορὰ δὲ αὕτη προκύπτει ἀπὸ τοὺς λογαρίθμους, οἱ ὁποῖοι εἶναι μὲ (προσέγγισιν).

Ἤδη θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐκ τοῦ τύπου $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ὅπου εἶναι $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{8+9+10}{2}=13,5$, $\tau-\alpha=5,5$, $\tau-\beta=4,5$ καὶ $\tau-\gamma=3,5$. Ὅθεν εἶναι:

$$E=\sqrt{13,5\,.\,5,5\,.\,4,5\,.\,3,5}=\sqrt{\frac{3\,.\,9\,.\,11\,.\,9\,.\,7\,.\,5^4}{10000}}=\frac{9\,.\,5^2}{100}\sqrt{3.11.7}=$$

$=2,25\sqrt{231}$.

248. Τὸ τρίγωνον ΑΒΜ ἔχει πλευρὰς $(AB)=\gamma=12$ μ., $(BM)=$ $=\frac{\alpha}{2}=8$ μ. καὶ $(AM)=20$ μ. Ὅθεν εἶναι $\sigma\upsilon\nu B=\frac{144+64-400}{2.12.8}=$ $=-\frac{192}{192}=-1$. Ὅθεν $B=180°$. Ὅθεν τρίγωνον ΑΒΓ δὲν ὑπάρχει. Ἄλλως τε τοῦτο πρoκύπτει ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΜ, εἰς ὃ εἶναι $(AM)=(AB)+(BM)$, ὅπερ ἀδύνατον.

249. Ἤτοι εἶναι: $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\lambda$, ἢ $\alpha=2\lambda$, $\beta=3\lambda$, $\gamma=4\lambda$.

Ἑπομένως εἶναι: $\sigma\upsilon\nu A=\frac{9\lambda^2+16\lambda^2-4\lambda^2}{2.3\lambda.4.\lambda}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}=0{,}875$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{4\lambda^2+16\lambda^2-9\lambda^2}{2.2\lambda.4\lambda}=\frac{11}{16}=0{,}6875$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{4\lambda^2+9\lambda^2-16\lambda^2}{2.2\lambda.3\lambda}=-\frac{3}{12}=-0{,}25.$$

Ὅθεν $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu A=\bar{1},94201$ καὶ $A=28°\ 57'\ 17''$

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B=\bar{1},83727$ » $B=46°\ 34'\ 4''$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ $\sigma\upsilon\nu\Gamma=-0{,}25$ θὰ εἶναι:

$\sigma\upsilon\nu\,(180°-\Gamma)=0{,}25$. Ὅθεν:

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(180°-\Gamma)=\bar{1},39794$, $180°-\Gamma=75°\ 31'\ 21'$. ἤτοι $\Gamma=180°-75°\ 31'\ 21''=104°\ 28'\ 39''$

Σημείωσις. Πρὸς εὐκολίαν ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Γ ἐκ τοῦ τύπου $\Gamma=180°-(A+B)=180°-75°\ 31'\ 21''$.

250. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι $(AB)=8$ μ., $(A\Delta)=6$ μ. καὶ $(B\Delta)=4$ μ. Ὅθεν εἶναι $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{64+36-16}{2.8.6.}=\frac{84}{96}=\frac{7}{8}=0{,}875$

καὶ (ἄσκ. 249) $\frac{A}{2}=28°\ 57'\ 17''$, ἤτοι $A=57°\ 54'\ 34''$

$\sigma\upsilon\nu B=\frac{64+16-36}{2.8.4.}=\frac{44}{64}=\frac{11}{16}=0{,}6875$ καὶ (ἄσκ.249) $B=46°34'4''$.

Ὅθεν $\Gamma=180°-104°\ 28'\ 38''=75°\ 31'\ 22''$.

Ἤδη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν γ καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β καὶ Γ. Ὥστε ἔχομεν (§ 61)

$$\beta=\frac{\gamma\acute{\eta}\mu B}{\acute{\eta}\mu\Gamma},\ \text{καὶ}\ \alpha=\frac{\gamma\acute{\eta}\mu A}{\acute{\eta}\mu\Gamma},\ \text{ἤτοι}$$

$\lambda o\gamma\beta=0{,}90309+\bar{1},86105-\bar{1},98598=0{,}77816$, $\beta=6$ μ.

$\lambda o\gamma\alpha=0{,}90309+\bar{1},92800-\bar{1},98598=0{,}84511$, $\alpha=7$ μ.

Τέλος τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου:

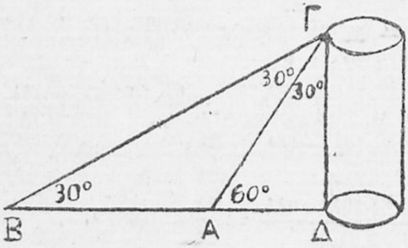
$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\acute{\eta}\mu A=24\acute{\eta}\mu A$ καὶ $\lambda o\gamma E=1{,}38021+\bar{1},92800=1{,}30821$ καὶ

$E=20{,}3333$ τ. μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

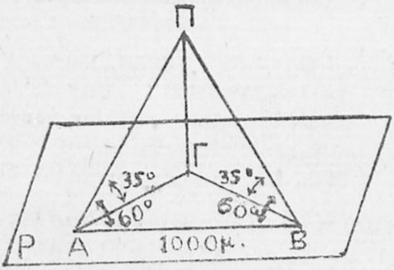
Τοπογραφικαὶ ἐφαρμογαὶ

Ἀσκήσεις.—*251.* Ἐπειδὴ $\widehat{B\Gamma\Delta}=60^\circ$ καὶ $\widehat{A\Gamma\Delta}=30^\circ$, ἕπεται $\widehat{B\Gamma A}=30^\circ$, ἤτοι $(A\Gamma)=(AB)=100$ μ. Ἤδη ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ λαμβάνομεν $(\Delta\Gamma)=(A\Gamma)$ἡμ$60^\circ=$ $=100.\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$ μ.



Σχ. ἀσκ. 251.

252. Ἔστω Ρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐφ' οὗ κεῖνται τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ΠΓ τὸ ὕψος Π ἀπὸ τοῦ Ρ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΠ ἐπειδὴ $A=B=60^\circ$ εἶναι $\Pi=60^\circ$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἑκάστη πλευρά του ἰσοῦται μὲ 1000 μ. Ἑπομένως ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΠΓΑ εὑρίσκομεν $(\Pi\Gamma)=(\Pi A)$ἡμ $35^\circ=$ $=1000.\ 0{,}57358=573{,}78$ μ.



Σχ. ἀσκ. 252.

253. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι $(A\Delta)=600$ μ. $A=40^\circ$ καὶ $\Delta=75^\circ$. Ὅθεν $\Gamma=65^\circ$ καὶ $A\Gamma=$

$$=\frac{(A\Delta)\text{ἡμ}\Delta}{\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{600\text{ἡμ}75^\circ}{\text{ἡμ}65^\circ}.$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι $(A\Delta)=600$ μ., $A=40^\circ$ καὶ $\Delta=42^\circ$. Ὅθεν $(AB)=\frac{(A\Delta)\text{ἡμ}\Delta}{\text{ἡμ}(\Delta+A)}=$

$$=\frac{600\text{ἡμ}40^\circ}{\text{ἡμ}82^\circ}.$$ Ἑπομένως εἶναι $(B\Gamma)=(A\Gamma)-(AB)$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

Γενικὴ τριγωνομετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ οἱασδήποτε γωνίας ἢ τόξου

Ἀσκήσεις.—*254.* 1) Ἔστω χ'χ, ψ'ψ τὸ δοθὲν σύστημα πρωτευόντων ἀξόνων (Σχ. 31 Τρ.). Ὁρίζομεν τὸ μέσον A_1 τοῦ πρώτου τεταρτημορίου ΑΒ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἡ νέα ἀρχὴ τῶν τόξων. Τότε στρέφομεν τὸ δοθὲν σύστημα κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν μέχρις ὅτου ἡ ἀκτὶς ΟΑ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς ἀκτῖνος OA_1, ὁπότε ἡ ἀκτὶς ΟΒ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν OB_1 τοιαύτην ὥστε τὸ τόξον A_1B_1 θὰ εἶναι τὸ πρῶτον τεταρτημόριον εἰς τὸ νέον σύστημα τῶν ἀξόνων. Οὕτω δὲ ἡ ἀκτὶς OA_1 θὰ εἶναι τὸ διευθῦνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος $\chi_1'\chi_1$ τοῦ περιέχοντος τὴν OA_1 καὶ ἡ ἀκτὶς OB_1 θὰ εἶναι τὸ διευθῦνον ἄνυσμα τοῦ ἄξονος $\psi_1'\psi_1$ τοῦ περιέχοντος τὴν OB_1.

2) Ἡ στροφὴ κατὰ -45°, θὰ γίνῃ ἐὰν ὁρίσωμεν τὸ μέσον A_2 τοῦ τετάρτου ΑΒ' καὶ στρέψωμεν τοὺς δοθέντας πρωτεύοντας ἄξονας κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἡ ἀκτὶς ΟΑ λάβῃ τὴν θέσιν OA_2.

255. Θὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ τὸ σημεῖον A_1 ὥστε τὸ τόξον AA_1 νὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τόξου ΑΒ ἢ τὸ A_2 ὥστε τὸ τόξον AA_2 νὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τόξου ΑΒ' καὶ θὰ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

256. α'. Νέα ἀρχὴ τῶν τόξων θὰ εἶναι τὸ Β· οὕτω τὸ δοθὲν σύστημα τῶν πρωτευόντων ἀξόνων θὰ στραφῇ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, μέχρις ὅτου ὁ ἄξων χ'χ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ψ'ψ, ὁπότε ὁ ἄξων ψ'ψ, θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ χχ'· οὕτω δὲ ἡ θετικὴ φορὰ θὰ εἶναι ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ Α'.

β') Νέα ἀρχὴ τῶν τόξων θὰ εἶναι τὸ Β'· οὕτω τὸ δοθὲν σύστημα θὰ στραφῇ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν μέχρις ὅτου ὁ ἄξων χ'χ λάβῃ τὴν θέσιν ψψ' κλπ.

257. Ἐδῶ νέα ἀρχὴ τῶν τόξων τὸ Β' ἢ τὸ Β κλπ.

Πίναξ τῶν σημείων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

Τεταρτημόριον εἰς ὃ περατοῦται τὸ τόξον	I	II	III	IV
ἡμίτ. καὶ συντέμν.	+	+	—	—
συνημ. καὶ τέμν.	+	—	—	+
ἐφαπτ. καὶ συνεφ.	+	—	+	—

Ἀσκήσεις.—*258.* Ἡμίτονον θετικὸν ἔχουν τὰ τόξα 35° (I), 127° (II) — 348° (I) καὶ — 205° (II) καὶ ἀρνητικὸν ἔχουν τὰ τόξα — 35° (IV), — 127° (III), 348° (IV) καὶ 205° (III).

259. Θὰ καταστήσωμεν τὰς γωνίας ἐπικέντρους εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον. Οὕτω δὲ θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡμίτονον θετικὸν ἔχουν αἱ γωνίαι 175° (II), 292° (I), 100° (II) καὶ ἀρνητικὸν ἔχουν αἱ γωνίαι — 175° (III), 292° (IV), — 100° (III).

260. Συνημίτονον θετικὸν ἔχουν τὰ τόξα $\frac{\pi}{5}$ (I), καὶ $\frac{11\pi}{3}$ (IV) καὶ ἀρνητικὸν ἔχει τὸ τόξον $-\frac{3\pi}{4}$ (III). Τὰ δὲ τόξα $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ $-\frac{7\pi}{2} = -2\pi - \frac{3\pi}{2}$ ἔχουν συνημίτονον 0.

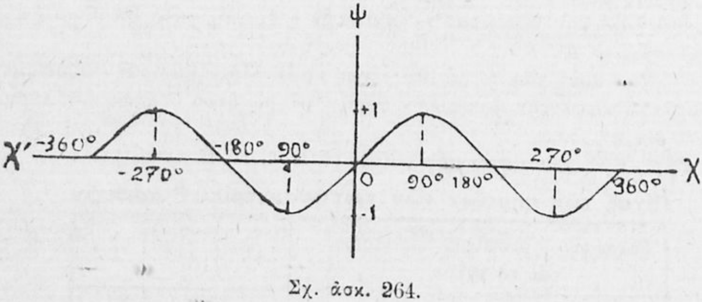
261 καὶ *262.* Βλέπε ἀνωτέρω πίνακα σημείων.

263 ἡμ405° $=$ ἡμ45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, συν405° $=$ συν45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

ἡμ750° $=$ ἡμ30° $= \frac{1}{2}$, συν750° $=$ συν30° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ἡμ510° $=$ ἡμ150° $=$ ἡμ30° $= \frac{1}{2}$, συν510° $=$ συν150° $=$ $= -$ συν30° $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

264. Ὅταν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου ΑΜ (Σχ. 32, Τρ.) εὑρίσκεται εἰς τὸ Α, ὁ πούς Ρ εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον Ο. Ὅταν τὸ Μ, ἀναχωροῦν ἀπὸ τοῦ Α καὶ κινούμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, γράφῃ



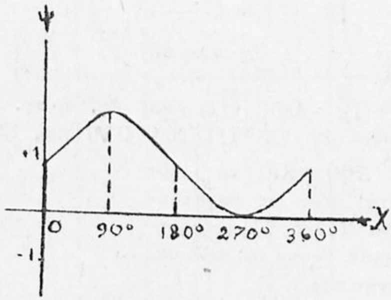
Σχ. ἀσκ. 264.

τὸ τόξον ΑΒ′ $= -90°$, ὁ πούς Ρ γράφει τὸ ἄνυσμα ΟΒ′, ἤτοι τὸ ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ -1, εἶναι δὲ ἡμ$(-90°) = -1$. Ὅταν δὲ τὸ Μ γράφῃ κατὰ σειρὰν τὰ τόξα Β′Α′, Α′Β καὶ ΒΑ, ὁ πούς Ρ γράφει ἀντιστοίχως τὸ ἄνυσμα Β'Ο, ΟΒ καὶ ΒΟ. Οὕτω συνάγομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν μεταβολῶν :

τόξχ	0	ἐλ.	$-90°$	ἐλ.	$-180°$	ἐλ.	$-270°$	ἐλ.	$-360°$
ἡμχ	0	ἐλ.	-1	αὐξ.	0	αὐξ.	$+1$	ἐλ.	0

Ἐξ ἄλλου δὲ συνάγομεν ὅτι ἐὰν ἐπεκτείνωμεν τὴν ἡμιτονοειδῆ καμπύλην πρὸς τὰ ἀριστερά, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, θὰ λάβωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν τοῦ ἡμιτόνου.

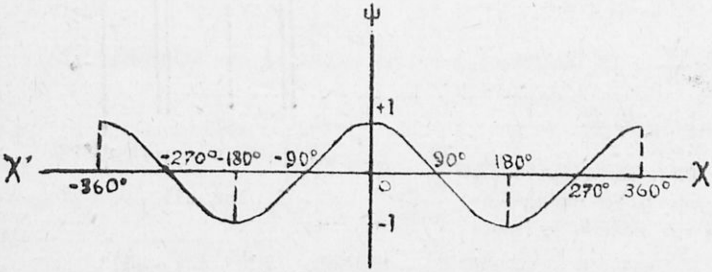
265. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ πίναξ Α' τῆς § 81 μένει ὁ αὐτός, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ ἡμχ θὰ προσθέσωμεν τὴν μονάδα 1. Οὕτω διὰ $\chi = 0°$ θὰ εἶναι $1 + \text{ἡμ}\chi = 1$, διὰ $\chi = 90°$ θὰ εἶναι : $1 + \text{ἡμ}\chi = 2$ κ. ο. κ. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ σχ. 33 τῆς Τριγ. τὰ ἀνύσματα Ομ, Ομ', Ομ'' μείνουν τὰ αὐτά, τὰ δὲ μΜ, μ'Γ, μ'' Μ'' κ.τ.λ. αὐξήσωμεν κατὰ ἄνυσμα ἴσον μὲ $+1$ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν § 82, θὰ λάβωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.



Σχ. ἀσκ. 265.

266. Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 264 καταρτίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα :

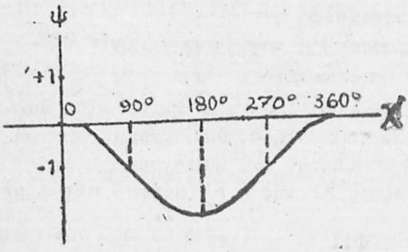
τοξ.χ	0	ἐλ	$-90°$	ἐλ.	$-180°$	ἐλ.	$-270°$	ἐλ.	$-360°$
συνχ	$+1$	»	0	ἐλ.	-1	αὐξ.	0	αὐξ.	$+1$



Σχ. ἀσκ. 266.

Ἡ δὲ συνημιτονοειδὴς ἐπεκτείνεται πρὸς τὰ ἀριστερά, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα.

267. Ὁ πίναξ Β′ τῆς § 81 μένει ὁ αὐτὸς μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὰς τιμὰς τοῦ συνχ θὰ προσθέσωμεν -1. Οὕτω διὰ $\chi = 0°$, θὰ εἶναι $-1+$συνχ$=0$, διὰ $\chi = 90°$ θὰ εἶναι $-1+$συνχ$=-1$, διὰ $\chi = 180°$ θὰ εἶναι $-1+$συνχ$=-2$ κ.ο.κ. Ἡ γραφικὴ δὲ παράστασις τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.



Σχ. ἀσκ. 267.

268. Ἐφ. ἢ σφ. θετικὴν ἔχουν τὰ τόξα: 68° (I), $-135°$ (III) καὶ ἐφ. ἢ σφ. ἀρνητικὴν ἔχουν τὰ τόξα: $-68°$ (IV) 135° (II) 300° (IV) καὶ 125° (II).

269. Καὶ τὰ τρία αὐτὰ τόξα, ὡς περατούμενα εἰς τὸ II τεταρτημόριον, ἔχουν ἐφ. καὶ σφ. ἀρνητικάς.

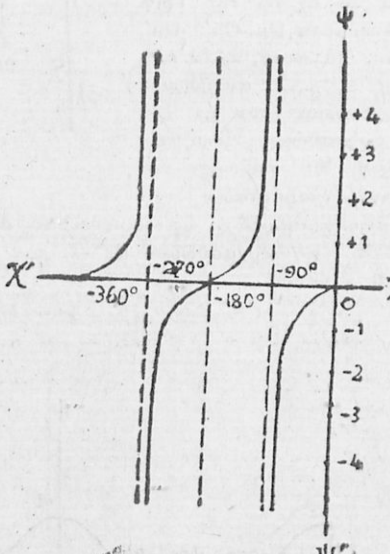
270. Βλέπε τὸν πίνακα τῶν σημείων (σελ. 49).

271. Περατοῦνται α′) εἰς τὸ I τεταρ. καὶ β′) εἰς τὸ III.

272. $ἐφ(360°k+45°) = ἐφ45° = 1$, $σφ(360°κ+30°) = σφ30° = \sqrt{3}$.

273. $ἐφ\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right) = ἐφ\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $σφ\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right) = σφ\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

274. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν § 86 καταρτίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα:



Σχ. ἀσκ. 274.

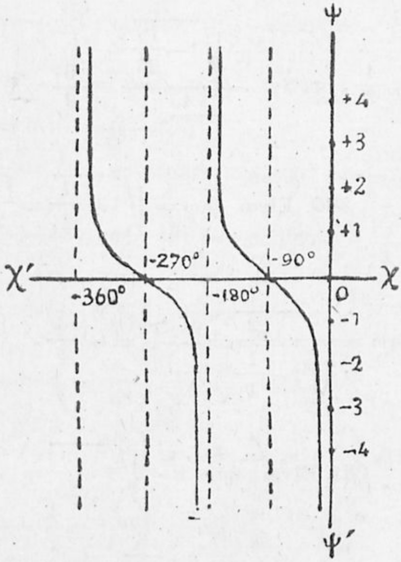
τοξχ	0	ἐλ.	$-90°$	ἐλ.	$-180°$	ἐλ.	$-270°$	ἐλ.	$-360°$
ἐφχ	0	ἐλ.	$\mp\infty$	ἐλ.	0	ἐλ.	$\mp\infty$	ἐλ.	0

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.

275. Ὁ πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ἐφαπτομένης τῆς § 86 παραμένει ὁ αὐτὸς μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὰς τιμὰς τῆς ἐφ. θὰ τὰς διαιρέσωμεν διὰ 2. Οὕτω διὰ $\chi=0$ ἢ $90°$ εἶναι $\frac{1}{2}$ ἐφ$\chi=0$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἐφ$\chi=\mp\infty$, διὰ $\chi=45°$ εἶναι $\frac{1}{2}$ ἐφ$\chi=\frac{1}{2}$, διὰ $\chi=60°$ εἶναι: $\frac{1}{2}$ ἐφ$\chi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.ο.κ.

Ἡ ζ. γραφικὴ παράστασις εἶναι ὁμοία μὲ τὴν τοῦ σχήματος 37 τῆς Τρ. μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι π. χ. ὁ κλάδος ΟΓ θὰ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῆς μΜ τῶν μετ' αὐτὴν δύο ἄλλων παραλλήλων πρὸς αὐτήν, ἀλλὰ δὲν θὰ τέμνῃ τὴν ΝΝ'.

276. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὴν § 86, καταρτίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα:



Σχ ἀσκ. 276.

τόξ.χ	0	ἐλ.	$-90°$	ἐλ.	$-180°$	ἐλ.	$-270°$	ἐλ.	$-360°$
σφχ	$\pm\infty$	αὔξ.	0	αὔξ.	$\pm\infty$	αὔξ.	0	αὔξ.	$+\infty$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.

277. Ἐργαζόμεθα ἀναλόγως μὲ τὴν ἄσκ. 275.

278. Εἶναι συν$\omega=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$, ἐφ$\omega=\frac{\frac{3}{5}}{-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}=-\frac{3}{4}$,

$$\sigma\varphi\omega=\frac{-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$$

279. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$, $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \dfrac{-\frac{4}{5}}{-\sqrt{1-\frac{16}{25}}} =$

$$= \frac{4}{3}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{-\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

280. Εἶναι $\dot{\eta}\mu\omega = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$,

$$\sigma\varphi\omega = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

281. Εἶναι $\dot{\eta}\mu\omega = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$, $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \dfrac{-\sqrt{1-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} =$

$$= -\frac{4}{3}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{-\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = -\frac{3}{4}.$$

282. Ἐπειδὴ $360^\circ + 180^\circ < \omega < 360^\circ + 270^\circ$, εἶναι:

$$\dot{\eta}\mu\omega = \frac{\frac{2}{5}}{-\sqrt{1+\frac{4}{25}}} = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{2\sqrt{29}}{29}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{4}{25}}} =$$

$$= -\frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5\sqrt{29}}{29}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{5}{2}.$$

283. Ἐπειδὴ $360^\circ . 2 + 90^\circ < \tau < 360^\circ . 2 + 180^\circ$, εἶναι:

$$\dot{\eta}\mu\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\tau = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}.$$

$\dot{\epsilon}\varphi\omega = -\sqrt{3}$.

284. 1) $ἡμ(-30°) = -ἡμ30° = -\frac{1}{2}$, $συν(-30°) = συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$ἐφ(-30°) = -ἐφ30° = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ σφ(-30°) = -σφ30° = -\sqrt{3}$$

2) $ἡμ(-45°) = -ἡμ45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} = συν(-45°)$

$$ἐφ(-45°) = -ἐφ45° = -1 = σφ(-45°)$$

3) $ἡμ(-60°) = -ἡμ60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν(-60°) = συν60° = \frac{1}{2}$,

$$ἐφ(-60°) = -ἐφ60° = -\sqrt{3},\ σφ(-60°) = -σφ60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

285. 1) $ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = ἡμ\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$$συν\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = συν\left(-\frac{\pi}{6}\right) = συν\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ἐφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = ἐφ\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ἐφ\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ κλπ.$$

2) $ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = ἡμ\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$συν\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = συν\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ἐφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -ἐφ\frac{\pi}{4} = -1 = σφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -σφ\frac{\pi}{4}$$

3) $ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = συν\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$ἐφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -ἐφ\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3},\ σφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -σφ\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

286. α′) $συν(-τ).\ συντ + ἡμ^2τ = συντ.\ συντ + ἡμ^2τ = συν^2τ + ἡμ^2τ = 1$
β′) $σφ(-τ).\ ἐφτ + 1 = -σφτ.\ ἐφτ + 1 = -1 + 1 = 0.$

287. α΄) $ἡμ(-τ)\,σφτ + συντ = -ἡμτ\,.\,\frac{συντ}{ἡμτ} = -συντ + συντ = 0$

β΄) $συντ\,.\,(-ἐφτ) + ἡμτ = -συντ\,.\,\frac{ἡμτ}{συντ} + ἡμτ = 0.$

288. $ἡμτ\,.\,ἡμ(-τ) + συν^2τ = ἡμτ\,.\,(-ἡμτ) + συν^2τ = -ἡμ^2τ + συν^2τ =$
$= -ἡμ^2τ + (1 - ἡμ^2τ) = 1 - 2ἡμ^2τ.$

289. 1) $ἡμ120° = ἡμ(180° - 60°) =$

$= ἡμ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $ἡμ(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$συν120° = -συν60° = -\frac{1}{2}$ $\quad συν(-120°) = -\frac{1}{2}$

$ἐφ120° = -ἐφ60° = -\sqrt{3}$ $\quad ἐφ(-120°) = \sqrt{3}$ κλπ.

2) $ἡμ135° = ἡμ45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad ἡμ(-135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$συν135° = -συν45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad συν(-135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$ἐφ135° = -ἐφ45° = -1$ $\quad ἐφ(-135°) = 1$ κλπ.

3) $ἡμ150° = ἡμ30° = \frac{1}{2}$ $\quad ἡμ(-150°) = -\frac{1}{2}$

$συν150° = -συν30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad συν(-150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$ἐφ150° = -ἐφ30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad ἐφ(-150°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ κλπ.

290. Ἐπειδὴ $ἡμ(180° - τ) = ἡμτ$ καὶ $συν(180° - τ) = -συντ$, ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $ἡμ^2τ + συν^2τ = 1$.

291. Ἐπειδὴ $ἐφ(π - τ) = -ἐφτ$ καὶ $σφ(π - τ) = -σφτ$, ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $-ἐφτσφτ + σφτἐφτ = -1 + 1 = 0$.

262. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τ εἶναι θετικοί. Ἐπειδὴ δὲ $ἐφ(180° - τ) = -ἐφτ$ καὶ $σφ(180° - τ) = -σφτ$, ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μὲ $-ἐφτ.συντ +$ $+ σφτἡμτ = -\frac{ἡμτ}{συντ}.συντ + \frac{συντ}{ἡμτ}.\;ἡμτ = συντ - ἡμτ =$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

293. Ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται
$-(-σφτ)ἡμτ - (-ἐφτ)συντ = σφτἡμτ + ἐφτσυντ = συντ + ἡμτ.$

294. Τὰ τόξα ω καὶ 90° − ω εἶναι συμπληρωματικὰ ($ω + 90° - ω =$ $= 90°$). Ὥστε $συν(90° - ω) = ἡμω = \frac{1}{2}$.

295. Γνωρίζομεν ὅτι $ἡμ^2Γ + συν^2Γ = 1$. Ἀλλ' ἀφοῦ $Β + Γ = 90°$, εἶναι $ἡμΓ = συνΒ$, ἤτοι $ἡμ^2Γ = συν^2Β$. Ὅθεν $ἡμ^2Γ + συν^2Γ = συν^2Β + συν^2Γ = 1$.

296. Ἀφοῦ $Α + Β + Γ = 180°$, εἶναι $\frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} = 90°$.

Ὥστε τὰ τόξα $\frac{Α+Β}{2}$ καὶ $\frac{Γ}{2}$ ἢ τὰ $\frac{Β+Γ}{2}$ καὶ $\frac{Α}{2}$ ἢ τὰ $\frac{Α+Γ}{2}$ καὶ $\frac{Β}{2}$ εἶναι συμπληρωματικά. Οὕτω δὲ ἀποδεικνύονται αἱ δοθεῖσαι ἰσότητες.

297. Εἶναι $ἐφ(90° - α).\,ἐφα = σφα.ἐφα = 1$.

$σφ(90° - α).\,σφα = ἐφα.σφα = 1$.

298. Ἐπειδὴ $ἡμ(90° - α) = συνα$ καὶ $συν(90° - α) = ἡμα$, ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $συν^2α + ἡμ^2α = 1$.

299. Ἐπειδὴ $ἐφ\left(\frac{π}{2} - τ\right) = σφτ$ καὶ $σφ\left(\frac{π}{2} - τ\right) = ἐφτ$, ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $σφτ.ἐφτ - ἐφτσφτ = 1 - 1 = 0$.

300. Ἐπειδὴ τὰ τόξα $90° + τ$ καὶ $-τ$ εἶναι συμπληρωματικὰ ἔχομεν

$$ἡμ(90° + τ) = συν(-τ) = συντ \text{ καὶ}$$
$$συν(90° + τ) = ἡμ(-τ) = -ἡμτ.$$

301. Ἔχομεν, ὡς ἀνωτέρω:

$$ἐφ(90° + τ) = σφ(-τ) = -σφτ \text{ καὶ}$$
$$σφ(90° + τ) = ἐφ(-τ) = -ἐφτ.$$

302. Κατὰ τὴν ἄσκησιν 300, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι:

$$συντἡμτ - ἡμτσυντ = 0.$$

303. Ἐπειδὴ $σφ\left(\frac{π}{2} + ω\right) = -ἐφω$ (ἄσκ. 301) καὶ $ἐφ\left(\frac{π}{2} - ω\right) = σφω$, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι:

$$-ἐφωσφω - σφωἐφω = -1 - 1 = -2.$$

304. 1) $ἡμ225° = ἡμ(180° + 45°) = -ἡμ45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$συν225° = -συν45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ κλπ.

2) $ἡμ210° = ἡμ(180° + 30°) = -ἡμ30° = -\frac{1}{2}$,

$συν210° = -συν30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κλπ.

3) $ἡμ240° = -ἡμ60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν240° = -συν60° = -\frac{1}{2}$ κλπ.

305. Εἶναι $ἡμ(-225°) = -ἡμ225° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ἄσκ. 304) κλπ.

$$ἡμ(-210°) = -ἡμ210° = \frac{1}{2} \quad » \quad »$$

$$ἡμ(-240°) = -ἡμ240° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad » \quad »$$

306. Εἶναι ἴσον μὲ $-ἡμτ.ἡμτ - συντ.συντ = -(ἡμ^2τ + συν^2τ) = -1$.

307. Εἶναι $ἐφ(π+τ).σφτ = ἐφτ.σφτ = 1$, $σφ(π+τ).ἐφτ = = σφτ.ἐφτ = 1$.

308. Ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ $1-1=0$ (ἄσκ. 307).

309. Τὸ ζητούμενον ἄθροισμά ἰσοῦται μέ:

$$(-ἡμτ).(-συντ) + (-συντ).ἡμτ = ἡμτσυντ - ἡμτσυντ = 0.$$

310. Ἡ ζητουμένη διαφορὰ ἰσοῦται μέ:

$$ἐφω.(-ἐφω) - (-ἐφω).ἐφω = -ἐφ^2ω + ἐφ^2ω = 0.$$

311. 1) Εἶναι $ἡμ300° = ἡμ(360° - 60°) = -ἡμ60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$συν300° = συν(360° - 60°) = συν60° = \frac{1}{2} \text{ κλπ.}$$

2) Εἶναι $ἡμ315° = -ἡμ45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν315° = συν45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κλπ.

3) Εἶναι $ἡμ330° = -ἡμ30° = -\frac{1}{2}$, $συν330° = συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ κλπ.

312. $ἡμ(-300°) = -ἡμ300° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $ἡμ(-315°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $ἡμ(-330°) = \frac{1}{2}$ κλπ.

313. Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα ἰσοῦται μέ:

$$(-ἡμα).(-ἡμα) + συνα.συνα = ἡμ^2α + συν^2α = 1.$$

314. Ἡ ζητουμένη διαφορὰ ἰσοῦται μέ:

$$(-ἐφα).σφα - (-σφα).(-ἐφα) = -ἐφα.σφα - σφα.ἐφα = -1-1 = -2.$$

315. Τοῦτο ἰσοῦται μέ:

$$(-ἡμτ).(-ἡμτ) + συντ.συντ = ἡμ^2τ + συν^2τ = 1.$$

316. 1) $ἡμ(132°40') = ἡμ(180° - 47°20') = ἡμ47°20' = 0{,}73531$
$συν(132°40') = -συν(47°20') = -0{,}67773$ κλπ.

2) $ἡμ(108°25') = ἡμ(71°35') = 0{,}94878$
$συν(108°25') = -συν71°35' = -0{,}31593$ κλπ.

317. 1) $ἡμ(202°20') = ἡμ(180° + 22°20') = -ἡμ(22°20') = -0{,}37999$
$συν(202°20') = -συν22°20' = -0{,}92499$ κλπ.

2) $ἡμ(228°45') = -ἡμ48°45' = -0{,}75184$
$συν(228°45') = -συν48°45' = -0{,}65935$
$σφ(228°45') = σφ48°45' = 0{,}87441$ κλπ.

318. 1) $\eta\mu(285°50') = \eta\mu(360° - 74°10') = -\eta\mu\, 74°10' = -\ 0{,}96206$

$\sigma\upsilon\nu(285°50') = \sigma\upsilon\nu 74°10' = 0{,}27284$ κλπ.

2) $\eta\mu(305°35') = -\ \eta\mu 54°25' = -\ 0{,}81327$

$\sigma\upsilon\nu(305°35') = \sigma\upsilon\nu 54°25' = 0{,}58189$

319. 1) $\eta\mu(820°40') = \eta\mu(360°.2 + 100°40') = \eta\mu(100°40') =$

$= \eta\mu(79°20') = 0{,}98272$

$\sigma\upsilon\nu(820°40') = \sigma\upsilon\nu 100°40' = -\sigma\upsilon\nu 79°20' = -0{,}18509$ κλπ.

2) $\eta\mu(1382°25') = \eta\mu(360°.3 + 302°25') = \eta\mu(302°25') =$

$= -\ \eta\mu(57°35') = -0{,}84417$

$\sigma\upsilon\nu(1382°25') = \sigma\upsilon\nu(302°25') = \sigma\upsilon\nu(57°35') = 0{,}53607$ κλπ.

320. 1) $\eta\mu(-167°20') = -\ \eta\mu 167°20' = -\ \eta\mu 12°40' = -\ 0{,}21928$

$\sigma\upsilon\nu(-167°20') = \sigma\upsilon\nu 167°20' = -\ \sigma\upsilon\nu 12°40' = -\ 0{,}97566$

$\varepsilon\varphi(-167°20') = -\ \varepsilon\varphi(167°20') = \varepsilon\varphi 12°40' = 0{,}22475$ κλπ.

2) $\eta\mu(-265°10') = -\eta\mu(265°10') = \eta\mu 85°10' = 0{,}99644$

$\sigma\upsilon\nu(-265°10') = \sigma\upsilon\nu(265°10') = -\sigma\upsilon\nu 85°10' =$

$= -0{,}08426$ κλπ.

$\varepsilon\varphi(-265°10') = -\ \varepsilon\varphi(265°10') = -\ \varepsilon\varphi 85°10' =$

$= -11{,}82617$ κλπ.

3) $\eta\mu(-298°15') = -\ \eta\mu(298°15') = \eta\mu 61°45' = 0{,}88089$

$\sigma\upsilon\nu(-298°15') = \sigma\upsilon\nu(298°15') = \sigma\upsilon\nu 61°45' = 0{,}47332$ κλπ.

321. 1) $\eta\mu(-467°50') = -\eta\mu(360° + 107°50') = -\ \eta\mu 107°50' =$

$= -\ \eta\mu 72°10' = -0{,}95195$

$\sigma\upsilon\nu(-467°50') = \sigma\upsilon\nu 467°50' = \sigma\upsilon\nu 107°50' = -\ \sigma\upsilon\nu 72°10' =$

$= -\ 0{,}30625$ κλπ.

2) $\eta\mu(-2572°35') = -\ \eta\mu(2572°35') = -\ \eta\mu(330°.7 +$

$+ 52°35') = -\ \eta\mu 52°35' = -\ 0{,}79424$

$\sigma\upsilon\nu(-2572°35') = \sigma\upsilon\nu(2572°35') = \sigma\upsilon\nu 52°35' = 0{,}60761$

3) $\eta\mu(-2724°30') = -\ \eta\mu(2724°30') = -\eta\mu(360°7 +$

$+ 204°30') = -\ \eta\mu(204°30') = \eta\mu(24°30') = 0{,}41469$

$\sigma\upsilon\nu(-2724°30') = \sigma\upsilon\nu(2724°30') = \sigma\upsilon\nu(204°30') =$

$= -\ \sigma\upsilon\nu 24°30' = -\ 0{,}90996$

322. Εἶναι $\eta\mu 95° = \eta\mu(180° - 85°) = \eta\mu 85°$

$\eta\mu 265° = \eta\mu(180° + 85°) = -\ \eta\mu 85°$

Ὅθεν $\eta\mu 95° + \eta\mu 265° = \eta\mu 85° - \eta\mu 85° = 0$

323 Εἶναι $\varepsilon\varphi 642° = \varepsilon\varphi(360° + 282°) = \varepsilon\varphi 282° = -\varepsilon\varphi 78°$

$\varepsilon\varphi 978° = \varepsilon\varphi(360°.2 + 258°) = \varepsilon\varphi 258° = \varepsilon\varphi 78°$

Ὅθεν $\varepsilon\varphi 642° + \varepsilon\varphi 978° = -\varepsilon\varphi 78° + \varepsilon\varphi 78° = 0$

324. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu 820° = \sigma\upsilon\nu(360°.\ 2 + 100°) = \sigma\upsilon\nu 100° = -\sigma\upsilon\nu\ 80°$

$\sigma\upsilon\nu 280° = \sigma\upsilon\nu(360° - 80°) = \sigma\upsilon\nu 80°$

Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu 820° + \sigma\upsilon\nu 280° = -\ \sigma\upsilon\nu 80° + \sigma\upsilon\nu 80° = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀθροίσματος τόξων

325. Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων α καὶ β εἶναι θετικοί. Ἐπομένως εἶναι συνα $= \sqrt{1-\frac{9}{25}} =$ $= \frac{4}{5}$ καὶ ἡμβ $= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Ὥστε εἶναι

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) = \text{ἡμα συνβ} + \text{συνα ἡμβ} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta) = \text{συνα συνβ} - \text{ἡμα ἡμβ} = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{25}.$$

326. Εἶναι ἡμασυνβ+συναἡμβ+ἡμασυνβ − συναἡμβ =
$= 2\text{ἡμασυνβ} = 2.\frac{3}{5}.\frac{4}{5}=\frac{24}{25}.$

327. Εἶναι συνασυνβ − ἡμαἡμβ+συνασυνβ+ἡμαἡμβ =
$=2\text{συνασυνβ} = 2\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{5}{18}.$

328. Εἶναι (ἡμασυνβ+συναἡμβ)−(ἡμασυνβ − συναἡμβ)=
$= 2\text{συναἡμβ} = 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$

329. Εἶναι (συνασυνβ+ἡμαἡμβ)−(συνασυνβ−ἡμαἡμβ) =
$= 2\text{ἡμαἡμβ}=2.0.4\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0,6.$

330 Εἶναι (τύπος 33 καὶ ἄκ. 327)

$$\frac{2(\text{ἡμασυνβ}+\text{συναἡμβ})}{2\text{συνασυνβ}}=\frac{\text{ἡμασυνβ}}{\text{συνασυνβ}}+\frac{\text{συναἡμβ}}{\text{συνασυνβ}}=\text{ἐφα}+\text{ἐφβ}$$

331. $\text{ἡμ}^2(\alpha+\beta)=\text{ἡμ}^2\text{α συν}^2\beta+\text{συν}^2\text{α ἡμ}^2\beta+2\text{ἡμασυνβσυναἡμβ}$

$\text{ἡμ}^2(\alpha-\beta)=\text{ἡμ}^2\text{α συν}^2\beta+\text{συν}^2\text{α ἡμ}^2\beta-2\text{ἡμασυνβσυναἡμβ}$

$\text{ἡμ}^2(\alpha+\beta)+\text{ἡμ}^2(\alpha-\beta)=2(\text{ἡμ}^2\text{α συν}^2\beta+\text{συν}^2\text{α ἡμ}^2\beta)$

332. 1) $\text{ἐφ}(\alpha+\beta)=\frac{2+1,5}{1-2.\,1,5}=\frac{3,5}{1-3}=-\frac{3,5}{2}=-1,75.$

2) $\text{ἐφ}(\alpha-\beta)=\frac{2-1,5}{1+2.1,5}=\frac{0,5}{1+3}=\frac{0,5}{4}=0,125.$

333. 1) $\text{ἐφ}75^\circ=\text{ἐφ}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\text{ἐφ}45^\circ+\text{ἐφ}30^\circ}{1-\text{ἐφ}45^\circ.\text{ἐφ}30^\circ}=$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}=\text{σφ}15°.$$

2) $\text{ἐφ}15° = \text{ἐφ}(45°-30°) = \dfrac{\text{ἐφ}45°-\text{ἐφ}30°}{1+\text{ἐφ}45°.\,\text{ἐφ}30°} =$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}=\text{σφ}75°.$$

334. 1) Ἐπειδὴ $(A+B)+\Gamma = 180°$, ἕπεται ὅτι:

$\text{ἐφ}(A+B) = -\text{ἐφ}\Gamma$, ἤτοι $\dfrac{\text{ἐφ}A+\text{ἐφ}B}{1-\text{ἐφ}A\text{ἐφ}B} = -\text{ἐφ}\Gamma$

$\text{ἐφ}A+\text{ἐφ}B = -\text{ἐφ}\Gamma+\text{ἐφ}A\text{ἐφ}B\text{ἐφ}\Gamma$. Ὅθεν:

$$\text{ἐφ}A+\text{ἐφ}B+\text{ἐφ}\Gamma = \text{ἐφ}A\text{ἐφ}B\text{ἐφ}\Gamma$$

2) Ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\frac{1}{\text{σφ}A}+\frac{1}{\text{σφ}B}+\frac{1}{\text{σφ}\Gamma}=\frac{1}{\text{σφ}A\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἤδη ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ σφΑσφΒσφΓ, εὑρίσκομεν $\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}A\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}A\text{σφ}B = 1$.

335. Εἶναι $\text{ἐφ}(45°-\omega) = \dfrac{\text{ἐφ}45°-\text{ἐφ}\omega}{1+\text{ἐφ}45°\text{ἐφ}\omega} =$

$$=\frac{1-\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}}{1+\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}}=\frac{\text{συν}\omega-\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega+\text{ἡμ}\omega}.$$

336. α΄) Εἶναι $\text{ἐφ}(\alpha+\beta) = \text{σφ}\gamma$, ἤτοι $\dfrac{\text{ἐφ}\alpha+\text{ἐφ}\beta}{1-\text{ἐφ}\alpha\text{ἐφ}\beta} = \dfrac{1}{\text{ἐφ}\gamma}$ ἢ

$\text{ἐφ}\alpha\text{ἐφ}\gamma+\text{ἐφ}\beta\text{ἐφ}\gamma = 1-\text{ἐφ}\alpha\text{ἐφ}\beta$. Ὅθεν:

$$\text{ἐφ}\alpha\text{ἐφ}\beta+\text{ἐφ}\beta\text{ἐφ}\gamma+\text{ἐφ}\gamma\text{ἐφ}\alpha = 1.$$

β΄) Ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\frac{1}{\text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta}+\frac{1}{\text{σφ}\beta\text{σφ}\gamma}+\frac{1}{\text{σφ}\gamma\text{σφ}\alpha}=1.$$

Πολλαπλασιάζοννες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ σφασφβσφγ, εὑρίσκομεν:

$$\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta+\text{σφ}\gamma = \text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta\text{σφ}\gamma.$$

337. 1) Ἐκ τοῦ τύπου $\text{ἐφ}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{ἐφ}\alpha+\text{ἐφ}\beta}{1-\text{ἐφ}\alpha\text{ἐφ}\beta}$ λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{\text{σφ}(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{1}{\text{σφ}\alpha}+\frac{1}{\text{σφ}\beta}}{1-\frac{1}{\text{σφ}\alpha}.\frac{1}{\text{σφ}\beta}}=\frac{\text{σφ}\beta+\text{σφ}\alpha}{\text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta-1}.$$

Ὅθεν εἶναι: $\text{σφ}(\alpha+\beta) = \dfrac{\text{σφ}\alpha\text{σφ}\beta-1}{\text{σφ}\beta+\text{σφ}\alpha}$.

2) Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν:

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}.$$

338. Ἐπειδὴ $\eta\mu\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\frac{4}{5}$, εἶναι:

1) $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=\pm2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\pm\frac{24}{25}$

2) $\sigma\upsilon\nu2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}.$

339. Εἶναι $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}}=\dfrac{15}{8}.$

340. Εἶναι $\varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)-\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)=\dfrac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha}-\dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}=$

$$=\frac{(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-(1-\varepsilon\varphi\alpha)^2}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{4\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=2\cdot\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}=2\varepsilon\varphi2\alpha.$$

341. Ἐκ τοῦ τύπου $\varepsilon\varphi2\alpha=\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$ λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{\sigma\varphi2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}}{1-\frac{1}{\sigma\varphi^2\alpha}}=\frac{2\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi^2\alpha-1}.\ \text{Ὅθεν}:\ \sigma\varphi2\alpha=\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}.$$

342. $\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}-\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}=$

$$=\frac{2(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)}{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\sigma\upsilon\nu2\alpha}{\eta\mu2\alpha}=2\sigma\varphi2\alpha.$$

343. $\eta\mu2\alpha=2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$. Διαιροῦντες δὲ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ ἡμα συνα, εὑρίσκομεν:
$\eta\mu2\alpha=\dfrac{2}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}.$

344. $$\eta\mu\omega=\frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}=\frac{30}{34}=\frac{15}{17}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\frac{1-\frac{9}{25}}{1+\frac{9}{25}}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}.$$

345. $\acute{\eta}\mu\omega=\frac{2\,.\,1{,}5}{1+1{,}5^2}=\frac{3}{1+2{,}25}=\frac{3}{3{,}25}=\frac{12}{13}$

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1-1{,}5^2}{1+1{,}5^2}=\frac{1-2{,}25}{1+2{,}25}=-\frac{1{,}25}{3{,}25}=-\frac{5}{13}.$$

346. Ἐπειδὴ $1=\dot{\varepsilon}\varphi 45^\circ=\dot{\varepsilon}\varphi 225^\circ$, τὸ τόξον $\frac{\omega}{2}$ εἶναι:

$$0<\frac{\omega}{2}<45^\circ \;\; \text{ἢ} \;\; 180^\circ<\frac{\omega}{2}<225^\circ, \text{ἤτοι:}$$

$$0<\omega<90^\circ \;\; \text{ἢ} \;\; 360^\circ<\omega<360^\circ+90^\circ.$$

Ὅθεν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega>0$.

347. 1) Ἐὰν $\acute{\eta}\mu\omega>0$, θὰ εἶναι $0<\omega<180^\circ$, ἤτοι:

$$0<\frac{\omega}{2}<90^0 \text{ καὶ κατὰ συνέπειαν } \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)>0$$

2) Ἐὰν $\acute{\eta}\mu\omega<0$, θὰ εἶναι $180^\circ<\omega<360^\circ$, ἤτοι:

$$90^\circ<\frac{\omega}{2}<180^\circ \text{ καὶ ἑπομένως } \dot{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)<0.$$

348. $1+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha\,.\,\dot{\varepsilon}\varphi 2\alpha=1+\frac{\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\acute{\eta}\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=1+\frac{\acute{\eta}\mu\alpha\,.\,2\acute{\eta}\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,.\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=$

$$=1+\frac{2\acute{\eta}\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\acute{\eta}\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{1-2\acute{\eta}\mu^2\alpha+2\acute{\eta}\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}.$$

349. Οἱ ζητούμενοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι θετικοί. Ὅθεν:

$$\acute{\eta}\mu\,\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4},\;\; \sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi\,\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5},\;\; \sigma\varphi\,\frac{\omega}{2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

350. $\acute{\eta}\mu(22^\circ 30')=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi(22^\circ 30') = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\sigma\varphi(22^\circ 30') = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1.$$

351. $\acute{\eta}\mu 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{1+\sigma\upsilon\nu 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 15^\circ = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = 2+\sqrt{3}.$$

352. $\acute{\eta}\mu 7^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} =$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\acute{\eta}\mu 7^\circ 30' = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 15^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}\,.\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\sigma\upsilon\nu 7^\circ\,30' = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \quad \eta$$

$$\sigma\upsilon\nu 7^\circ\,30' = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu 15^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$\dot{\varepsilon}\varphi 7^\circ\,30' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \quad \eta \quad \dot{\varepsilon}\varphi 7^\circ\,30' = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$$

353. $\eta\mu\frac{\omega}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \quad \kappa\lambda\pi.$$

354. $\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}5}{2}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}5\sqrt{3}$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}5}{2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Ἡ κλασσικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ

355. Εἶναι $\tau=(8+9+10):2=13{,}5$· $\tau-\alpha=5{,}5$· $\tau-\beta=4{,}5$· $\tau-\gamma=3{,}5$.
Ὅθεν (τύπος 52) $\varrho = \sqrt{\frac{5{,}5.4{,}5.3{,}5}{13{,}5}} = \sqrt{\frac{5{,}5.\,3{,}5}{3}} = \frac{\sqrt{0{,}5.11.0{,}5.7}}{\sqrt{3}} =$

$$= \frac{0{,}5\sqrt{77}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{77}}{2\sqrt{3}}.$$

356. Εἶναι $\tau = \frac{347+247+147}{2} = 370{,}5$· $\tau-\alpha=23{,}5$· $\tau-\beta=123{,}5$·
$\tau-\gamma=223{,}5$. Ὅθεν: $\varrho = \sqrt{\frac{23{,}5.123{,}5.223{,}5}{370{,}5}}$. Ἐπειδὴ δὲ

$\lambda o\gamma(\tau-\alpha)=1{,}37107$, $\lambda o\gamma(\tau-\beta)=2{,}09167$
$\lambda o\gamma(\tau-\gamma)=2{,}34928$, $\lambda o\gamma\tau \quad =2{,}56859$

εὑρίσκομεν: $\lambda o\gamma\varrho=1{,}62121$. Ἑπομένως εἶναι:

$$\lambda o\gamma\, \dot{\varepsilon}\varphi \frac{A}{2} = \lambda o\gamma\varrho - \lambda o\gamma(\tau-\alpha) = 1,62161 - 1,37107 = 0,25054$$

$$\frac{A}{2} = 60^\circ\, 40'\, 46'' \text{ καὶ } A = 121^\circ\, 21'\, 32''$$

$$\lambda o\gamma\, \dot{\varepsilon}\varphi \frac{B}{2} = \lambda o\gamma\varrho - \lambda o\gamma(\tau-\beta) = 1,62161 - 2,09167 = \bar{1},52994$$

$$\frac{B}{2} = 18^\circ\, 42'\, 59'' \text{ καὶ } B = 37^\circ\, 25'\, 58''$$

$$\lambda o\gamma\, \dot{\varepsilon}\varphi \frac{\Gamma}{2} = \lambda o\gamma\varrho - \lambda o\gamma(\tau-\gamma) = 1,62161 - 2,34928 = \bar{1},27233$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 10^\circ\, 36'\, 13'', \text{ καὶ } \Gamma = 21^\circ\, 12'\, 26''.$$

Διὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma E = \frac{1}{2} \cdot [\lambda o\gamma\tau + \lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \lambda o\gamma(\tau-\alpha)]$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2,56859 + 1,37107 + 2,09167 + 2,34928) = 4,19031.$$

καὶ $E = 15499,29$ τ. μ.

Τέλος ἔχομεν $\varrho_\alpha = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$

$$\lambda o\gamma\varrho_\alpha = \frac{1}{2} \cdot (2,56859 + 2,09167 + 2,34928 - 1,37107 = 2,81924$$

καὶ $\varrho_\alpha = 659,54$ μ.

357. Εἶναι (τύπος 53) $\varrho = (\tau-\alpha)\, \dot{\varepsilon}\varphi \frac{A}{2} = 5,5\, \dot{\varepsilon}\varphi\, (12^\circ\, 21'\, 53'')$

$\lambda o\gamma\varrho = 0,74036 + \bar{1},34088 = 0,08124$
καὶ $\varrho = 1,206$ μ.

358. Ἀφοῦ τὰ τρίγωνα ΑΚΕ καὶ ΑΚ'Θ εἶναι ὅμοια ἔχομεν

$\frac{(K'\Theta)}{(KE)} = \frac{A\Theta}{AE}$ ἤτοι $\frac{\varrho_\alpha}{\varrho} = \frac{(A\Theta)}{(AE)}$ (ι). Ἀλλ' εἶναι (§ 115)

$(A\Theta) = \tau$. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΚΕ εὑρίσκομεν $(AE) =$

$= (KE)\sigma\varphi \frac{A}{2} = \varrho\sigma\varphi \frac{A}{2}$. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (ι) γίνεται:

$$\frac{\varrho_\alpha}{\varrho} = \frac{\tau}{\varrho \sigma\varphi \frac{A}{2}},\ \varrho_\alpha = \frac{\tau}{\sigma\varphi\frac{A}{2}} = \tau \dot{\varepsilon}\varphi\,\frac{A}{2}\ (\text{τύπος } 55).$$

$$\ddot{\eta}\ (\tau.48)\ \varrho_\alpha = \tau.\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} = \sqrt{\frac{\tau^2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(-\alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}\ (\tau.\ 54).$$

359. Ἐκ τοῦ τύπου $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως $E = \tau(\tau-\alpha)$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{E}{E} = \dfrac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta(\tau-\gamma)}}{\tau(\tau-\alpha)} =$ $= \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau^2(\tau-\alpha)^2}}$. Ὅθεν εἶναι $1 = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$, ἤτοι (τ.48) $1 = \dot{\varepsilon}\varphi\,\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{A}{2} = 45^\circ$ καὶ $A = 90^\circ$.

Ἀντιστρόφως δέ· ἐὰν $A = 90^\circ$, θὰ εἶναι $\dfrac{A}{2} = 45^\circ$ καὶ ἐφ $\dfrac{A}{2} = 1$, ἤτοι $1 = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $\tau(\tau-\alpha) = (\tau-\beta)(\tau-\gamma)$. Ὥστε ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δίδει $E = \sqrt{\tau^2(\tau-\alpha)^2} = \tau(\tau-\alpha)$.

360. Ἀφοῦ $2\tau = 36$ μ. εἶναι $\tau = 18$. Ἐπειδὴ δὲ (τ. 55) $\varrho_\alpha = \tau \dot{\varepsilon}\varphi\,\dfrac{A}{2}$, εἶναι ἐφ $\dfrac{A}{2} = \dfrac{6}{5}\sqrt{15} : 18 = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

$$\lambda o\gamma \dot{\varepsilon}\varphi\,\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\,\lambda o\gamma 15 - \lambda o\gamma 15 = 0{,}58805 - 1{,}17609 = \overline{1}{,}41196$$

$$\frac{A}{2} = 14^\circ 28'\ 39''\ \text{καὶ}\ A = 28^\circ 57'\ 18''.$$

361. Θὰ τὸ εὕρωμεν ἐκ τοῦ τύπου $E = 2R^2 \eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma$. Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - 120^\circ\ 30'\ 36'' = 59^\circ\ 29'\ 24''$, ἔχομεν:

$$E = 2.8{,}125^2.\eta\mu(53^\circ\ 7'\ 48'')\eta\mu(67^\circ\ 22'\ 48'')\eta\mu(59^\circ\ 29'\ 24'')$$

$$\lambda o\gamma E = \lambda o\gamma 2 + 2\lambda o\gamma 8{,}125 + \lambda o\gamma \eta\mu(53^\circ\ 7'\ 48'') + \lambda o\gamma\eta\mu(67^\circ\ 22'\ 48'') + \lambda o\gamma\eta\mu(59^\circ\ 29'\ 24'').$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma 2 &= 0{,}30103\\
2\lambda o\gamma 8{,}125 &= 1{,}81964\\
\lambda o\gamma\eta\mu(53^\circ\ 7'\ 48'') &= \overline{1}{,}90309\\
\lambda o\gamma\eta\mu(67^\circ\ 22'\ 48'') &= \overline{1}{,}96524\\
\lambda o\gamma\eta\mu(59^\circ\ 29'\ 24'') &= \overline{1}{,}93528\\
\hline
\lambda o\gamma E &= 1{,}92428\\
\text{καὶ } E &= 84\ \tau.\ \mu.
\end{aligned}$$

362. Ἔχομεν (§ 60 Γ΄) $E=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$, ἐπειδὴ δὲ $\beta=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A}$, ὁ τύπος οὗτος γίνεται $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$. Ἐπειδὴ δὲ $B=180^\circ-$ $-112^\circ\,37'\,11''=67^\circ\,22'\,49''$, τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μέ:

$$E=\frac{13^2.\text{ἡμ}(67^\circ\,22'\,49'').\text{ἡμ}(59^\circ\,29'\,23'')}{2\,\text{ἡμ}(53^\circ\,7'\,48'')}.$$ Ὥστε:

$\text{λογ}E=2\text{λογ}13+\text{λογἡμ}(67^\circ\,22'\,49'')+\text{λογἡμ}(59^\circ\,29'\,23'')-$
$-\text{λογ}2-\text{λογἡμ}(53^\circ\,7'\,48'')$ κ.λ.π. (βλέπε λογαρίθμους ἄσκ. 361).

363. Ἔχομεν (τ. 57). $E=37.20{,}04.\text{ἡμ}(18^\circ 55'29'')\text{ἡμ}93^\circ 41'44''$, ἤτοι
$E=37.20{,}04.\text{ἡμ}(18^\circ 55'29'')\text{ἡμ}(86^\circ 18'16'')$

	λογ37	= 1,56820
	λογ20,04	= 1,30190
+	λογἡμ(18°55′29″)	= $\bar{1}$,51098
	λογἡμ(86°18′16″)	= $\bar{1}$,99909
	λογE	= 2,38017
	καὶ E	= 239,978 τ.μ.

364. Εἶναι (τ.58) $E=21.8.\text{ἐφ}(26^\circ\,33'\,51'')=168.\text{ἐφ}(26^\circ\,33'\,51'')$
$\text{λογ}E=2{,}22531+\bar{1}{,}69895=\bar{1}{,}92426$ καὶ $E=83{,}996$.

365. Εἶναι (§ 117) $E=\tau\varrho=160.11{,}28=1804{,}8$ τ. μ.

366. Εἶναι (τ. 59) $E=\sqrt{9{,}6.50.12{,}5.12{,}5}=12{,}5\sqrt{480}=12{,}5.4\sqrt{30}=$ $=50\sqrt{30}$. Ἐπειδὴ (Πίν. Λογαρίθμων, νέα ἔκδοσις, Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 43) $\sqrt{30}=5{,}477$, εἶναι $E=50.5{,}477=273{,}85$ τ. μ.

367. Ἐκ τοῦ τύπου 60 εὑρίσκομεν.

$$\tau=\sqrt{\frac{E}{\text{ἐφ}\frac{A}{2}\,\text{ἐφ}\frac{B}{2}\,\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}}}\quad\text{καὶ}$$

$$\text{λογ}\tau=\frac{1}{2}\left[\text{λογ}E-\left(\text{λογἐφ}\frac{A}{2}+\text{λογἐφ}\frac{B}{2}+\text{λογἐφ}\frac{\Gamma}{2}\right)\right]$$

$\text{λογ}E=3{,}91217$ $\quad\text{λογἐφ}\frac{A}{2}=\text{λογἐφ}(38^\circ\,39'\,35''3)=\bar{1}{,}90309$

$\text{λογἐφ}\frac{B}{2}=\text{λογἐφ}(2^\circ\;51'\;44'',65)=\bar{2}{,}69897$

$\frac{\Gamma}{2}=90^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$ $\text{λογἐφ}\frac{\Gamma}{2}=\text{λογἐφ}(48^\circ\;28'\;40'',05)=0{,}05285$

ἄθροισμα $=\bar{2}{,}65491$

$$\lambda o\gamma \tau = \frac{1}{2} \cdot (3{,}91217 - \bar{2}{,}65491) = \frac{1}{2} \cdot 5{,}25726 = 2{,}62863$$

$\tau = 425{,}236$ καὶ $2\tau = 850{,}472$ μέτρα.

368. Εἶναι $2\tau = 250$ μ., ἤτοι $\alpha + \beta + \gamma = 250$ μ. Ὅθεν $\gamma = 250 - 130 = 120$ μ.

Ὥστε (τ.62) $R = \dfrac{101.29.120}{4.1200} = \dfrac{101.29}{40} = \dfrac{2929}{40} = 73{,}225$ μ.

ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ Ε'

Χρήσιμοι μετασχηματισμοὶ εἰς τὸν λογισμὸν διὰ τῶν λογαρίθμων

369. Τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται (τ.63) μὲ $\psi = 2\eta\mu \dfrac{38^\circ\, 16' + 52^\circ\, 24'}{2}$.

$\sigma\upsilon\nu \dfrac{38^\circ\, 16' - 52^\circ\, 24'}{2} = 2\eta\mu(45^\circ\, 20').\ \sigma\upsilon\nu\,(-7^\circ\, 4') =$

$= 2\eta\mu(45^\circ\, 20')\sigma\upsilon\nu(7^\circ\, 4')$.

370. Ἔχομεν (τ.63) $\psi = 22\sigma\upsilon\nu(46^\circ\, 28'\, 14'')\eta\mu(18^\circ\, 12'\, 6'')$.

371. Ἔχομεν (τ.68) $\psi = 2\sigma\upsilon\nu(29^\circ\, 35'\, 33'')\sigma\upsilon\nu(10^\circ\, 48'\, 39'')$.

372. Ἔχομεν (τ.68) $\psi = 2\eta\mu(46^\circ\, 17'\, 40'')\eta\mu(12^\circ\, 1'\, 4'')$.

373. Ἐπειδὴ $1 = \eta\mu 90^\circ$ ἔχομεν διὰ τὸ ἄθροισμα

$$\psi = 2\eta\mu\left(\frac{90^\circ}{2} + \frac{26^\circ\, 22'\, 40''}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{90^\circ}{2} - \frac{26^\circ\, 22'\, 40''}{2}\right)$$

Ἀλλ' οὕτω βλέπομεν ὅτι τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων τόξα, ὡς ἔχοντα ἄθροισμα 90°, εἶναι συμπληρωματικὰ καὶ ἑπομένως εἶναι $\psi = 2\eta\mu^2(45^\circ + 13^\circ\, 11'\, 20'') = 2\eta\mu^2(58^\circ\, 11'\, 20'')$. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν διὰ τὴν διαφορὰν ὅτι $\psi' = 2\sigma\upsilon\nu^2(58^\circ\, 11'\, 20'')$.

374. Ἐδῶ ἔχομεν (§124) διὰ τὸ ἄθροισμα $\psi = 2\sigma\upsilon\nu^2(16^\circ\, 25'\, 17'')$ καὶ διὰ τὴν διαφορὰν $\psi' = 2\eta\mu^2(16^\circ\, 25'\, 17'')$.

375. Διὰ τὸ ἄθροισμα εἶναι $\psi = 2\eta\mu 420^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ = 2\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 70^\circ =$

$= 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sigma\upsilon\nu 70^\circ = \sqrt{3}\, \sigma\upsilon\nu 70^\circ$.

Διὰ δὲ τὴν διαφορὰν ἔχομεν $\psi' = 2\eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 420^\circ =$
$= 2\eta\mu 70^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \eta\mu 70^\circ$.

376. Εἶναι : 1) $\eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 2\eta\mu\left(\dfrac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{B-\Gamma}{2}\right) =$

$$=2\eta\mu\frac{90^\circ}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=2\eta\mu 45^\circ.\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$$

καὶ 2) $\eta\mu B-\eta\mu\Gamma=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=$

$$=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right).$$

377. Εἶναι : 1) $\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=$

$$=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) \text{ καὶ}$$

2) $\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right)=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right).$

378. Εἶναι $\psi=2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ (τ. 68).

379. Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu 3\omega=2\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu\omega$. Ὥστε τὸ α^{ον} μέλος ἰσοῦται μὲ $2\sigma\upsilon\nu 2\omega+2\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu\omega=2\sigma\upsilon\nu 2\omega.(1+\sigma\upsilon\nu\omega)=2\sigma\upsilon\nu 2\omega.2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)=$

$$=4\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

380. Εἶναι $\psi=2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ (τ. 63).

381. Εἶναι (τ.69) $\psi=\frac{\eta\mu(77^\circ\,10')}{\sigma\upsilon\nu(42^\circ 30')\sigma\upsilon\nu(34^\circ 40')}$ καὶ $\psi'=$

$$=\frac{\eta\mu 25^\circ}{\sigma\upsilon\nu(36^\circ\,45')\sigma\upsilon\nu(11^\circ 45')}.$$

382. Ἐπειδὴ $1=\varepsilon\varphi 45^\circ$ εἶναι $\psi=\frac{\eta\mu(165^\circ\,30')}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu(120^\circ\,30')}$ καὶ

$$\psi'=\frac{\eta\mu(26^\circ\,40')}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu(18^\circ\,20')}.$$

383. Εἶναι $\varepsilon\varphi 1120^\circ+\varepsilon\varphi 3635^\circ=\varepsilon\varphi(360^\circ.3+40^\circ)+$

$$+\varepsilon\varphi(360^\circ.10+35^\circ)=\varepsilon\varphi 40^\circ+\varepsilon\varphi 35^\circ=\frac{\eta\mu 75^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ.\sigma\upsilon\nu 35^\circ}.$$

384. Ἔχομεν $-\varepsilon\varphi(25^\circ\,42')+\varepsilon\varphi 45^\circ=\frac{\eta\mu(19^\circ\,18')}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ.\sigma\upsilon\nu(25^\circ 42')}.$

385. $\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{\eta\mu(B+\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}=\frac{\eta\mu 90^\circ}{\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B}=\frac{1}{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}=$

$$=\frac{2}{2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}=\frac{2}{\eta\mu 2B}.$$

386. $\dot{\epsilon}\varphi B - \dot{\epsilon}\varphi \Gamma = \dfrac{\dot{\eta}\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \dfrac{2\dot{\eta}\mu(B-\Gamma)}{2\dot{\eta}\mu B\sigma\upsilon\nu B} = \dfrac{2\dot{\eta}\mu(B-\Gamma)}{\dot{\eta}\mu 2B}.$

387. $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\dot{\eta}\mu A} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\dot{\eta}\mu B} = \dfrac{\dot{\eta}\mu B\sigma\upsilon\nu A + \dot{\eta}\mu A\sigma\upsilon\nu B}{\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu B} =$

$= \dfrac{\dot{\eta}\mu(A+B)}{\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu B}.$

388. Ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\dot{\eta}\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B} : \dfrac{\dot{\eta}\mu(A+B)}{\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu B} =$

$= \dfrac{\dot{\eta}\mu A\dot{\eta}\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B} = \dot{\epsilon}\varphi A\dot{\epsilon}\varphi B.$

389. Διὰ τὸ ἄθροισμα ἔχομεν $\psi = \dfrac{\dot{\eta}\mu\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}} =$

$$= \frac{\dot{\eta}\mu\,\frac{49\pi}{24}}{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}} = \frac{\dot{\eta}\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{24}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}} = \frac{\dot{\eta}\mu\,\frac{\pi}{24}}{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}}.$$

Ἀλλὰ $\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{180^\circ}{24} = 7^\circ\,30'$, $\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{5.180^\circ}{3} = 300^\circ$ καὶ $\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{3.180^\circ}{8} =$

$= 67^\circ\,30'$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu 300^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, ἔχομεν:

$\psi = \dfrac{2\dot{\eta}\mu(7^\circ\,30')}{\sigma\upsilon\nu(67^\circ\,30')}.$

Διὰ τὴν διαφοράν, ἐπειδὴ $\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{4.180^\circ}{3} = 240^\circ$ καὶ $\dot{\epsilon}\varphi 240^\circ =$

$= \dot{\epsilon}\varphi 60^\circ$, εὑρίσκομεν $\psi = \dfrac{-\dot{\eta}\mu 28^\circ\,12'}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ.\sigma\upsilon\nu(268^\circ 12')} = \dfrac{2\dot{\eta}\mu(28^\circ\,12')}{-\sigma\upsilon\nu(88^\circ\,12')}.$

390. Εἶναι (τ.72) $\psi = 2\dot{\eta}\mu[45^\circ + (-3^\circ\,3'\,55'')]$.
$\sigma\upsilon\nu(21^\circ\,16'\,35'' - 45^\circ) = 2\dot{\eta}\mu(41^\circ\,56'5'')\sigma\upsilon\nu(23^\circ\,43'\,25'')$.

391. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\psi = 2\dot{\eta}\mu 44^\circ\,27'\,21'.\sigma\upsilon\nu 27^\circ\,56'\,39''$.

392. Διὰ τὸ ἄθροισμα ἔχομεν $2\dot{\eta}\mu\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{16} - \dfrac{\pi}{5}\right)\sigma\upsilon\nu$

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\dot{\eta}\mu\dfrac{19\pi}{80}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{11\pi}{80} = 2\dot{\eta}\mu(42^\circ\,45')$

$\sigma\upsilon\nu(24^\circ\,45')$. Διὰ δὲ τὴν διαφορὰν ἔχομεν: $\psi = 2\dot{\eta}\mu\left(\dfrac{2\pi+\pi}{7} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi-\pi}{7} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\dot{\eta}\mu\dfrac{5\pi}{28}\sigma\upsilon\nu\dfrac{11\pi}{28}.$

393. 1) $\eta\mu 1925^\circ+\sigma\upsilon\nu 930^\circ=\eta\mu(360^\circ.5+125^\circ)+\sigma\upsilon\nu(360^\circ.2+210^\circ)=$
$=\eta\mu 125^\circ+\sigma\upsilon\nu 210^\circ=\eta\mu 55^\circ-\sigma\upsilon\nu 30^\circ=\eta\mu 55^\circ-\eta\mu 60^\circ=$
$=2\sigma\upsilon\nu 57^\circ 30'.\eta\mu(-2^\circ 30')=-2\sigma\upsilon\nu(57^\circ 30')\eta\mu(2^\circ 30').$

2) $\sigma\upsilon\nu 1128^\circ-\eta\mu 1656^\circ=\sigma\upsilon\nu(360^\circ.3+348^\circ)-\eta\mu(360^\circ.4+216^\circ)=$
$=\sigma\upsilon\nu 48^\circ-\eta\mu 216^\circ=\sigma\upsilon\nu 48^\circ+\eta\mu 36^\circ=\sigma\upsilon\nu 48^\circ+\sigma\upsilon\nu 54^\circ=$
$=2\sigma\upsilon\nu 51^\circ\sigma\upsilon\nu 3^\circ.$

394. 1) $\alpha+\beta=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$, ἐπειδὴ δὲ $\frac{\beta}{\alpha}<1$, θέτομεν $\frac{\alpha}{\beta}=$

$=\sigma\upsilon\nu\omega$. Ὥστε εἶναι $\alpha+\beta=\alpha.(1+\sigma\upsilon\nu\omega)=2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Ἀλλὰ $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\omega=\lambda o\gamma\beta-\lambda o\gamma\alpha=2,75064-3,35892=\bar{1},39172$. Ὅθεν:

$\omega=75^\circ\ 43'\ 58''$ καὶ $\frac{\omega}{2}=37^\circ\ 51'\ 59''$. Κατόπιν τούτων ἔχομεν

$\lambda o\gamma(\alpha+\beta)=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma\alpha+2\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}=0,38103+3,35892+\bar{1},79464=$

$=3,45459$ καὶ $\alpha+\beta=2848,33$.

2) $\alpha-\beta=\alpha\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\omega)=2\alpha\eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$\lambda o\gamma(\alpha-\beta)=0,30103+3,35892+\bar{1},57610=3,23605$
$\alpha-\beta=1722,08.$

395. $\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}=\frac{\chi\left(1-\frac{\psi}{\chi}\right)}{\chi\left(1+\frac{\psi}{\chi}\right)}=\frac{(1-\varepsilon\varphi\omega)}{1+\varepsilon\varphi\omega}$ (θέτοντες $\frac{\psi}{\chi}=\varepsilon\varphi\omega$)

ἤτοι $\frac{\chi-\psi}{\chi+\psi}=\frac{\varepsilon\varphi 45^\circ-\varepsilon\varphi\omega}{\varepsilon\varphi 45^\circ+\varepsilon\varphi 45^\circ\varepsilon\varphi\omega}=\varepsilon\varphi(45^\circ-\omega)$

Ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\psi}{\chi}=\varepsilon\varphi\omega$ εὑρίσκομεν τὸ τόξον ω καὶ ἑπομένως τὸ $45^\circ-\omega$ κλπ.

396. $\sqrt{2}+2\eta\mu\chi=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\eta\mu\chi\right)=2(\eta\mu 45^\circ+\eta\mu\chi)=$

$=4\eta\mu\left(\frac{\chi+45^\circ}{2}\right).\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-45^\circ}{2}\right)=4\eta\mu(46^\circ\ 37'\ 50'')$

$\sigma\upsilon\nu(1^\circ\ 37'\ 50'')$ κ.λ.π.

397. Ἔχομεν $\varepsilon\varphi\chi=\sqrt{2}\left(1+\frac{\eta\mu 20^\circ}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(1+\varepsilon\varphi^2\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

Οὕτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\text{ἐφ}^2\omega = \dfrac{\text{ἡμ}20^\circ}{\sqrt{2}}$ εὑρίσκομεν τὸ τόξον ω καὶ κατόπιν τὸ χ, ἐκ τῆς $\text{ἐφ}\chi = \dfrac{\sqrt{2}}{\text{συν}^2\omega}$.

398. Εἶναι 1) $\psi = \dfrac{1}{2}\cdot[\text{συν}(67^0 30' - 22^0 30') + \text{συν}(67^0 30' + 22^0 30')] =$

$= \dfrac{1}{2}(\text{συν}45^0 + \text{συν}90^0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\psi = \dfrac{1}{2}(\text{συν}60^\circ - \text{συν}90^\circ) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

399. Εἶναι 1) $\psi = \dfrac{1}{2}(\text{ἡμ}120^0 + \text{ἡμ}45^0) = \dfrac{1}{2}(\text{ἡμ}60^0 + \text{ἡμ}45^0) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$.

2) $\psi' = \dfrac{1}{2}(\text{ἡμ}60^0 - \text{ἡμ}45^0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$.

400. Εἶναι $\psi = \text{ἡμ}7\chi - 2\text{ἡμ}\chi\text{συν}2\chi - 2\text{ἡμ}\chi\text{συν}4\chi - 2\text{ἡμ}\chi\text{συν}6\chi$.
Ἀλλὰ $2\text{ἡμ}\chi\text{συν}2\chi = \text{ἡμ}3\chi - \text{ἡμ}\chi$, $2\text{ἡμ}\chi\text{συν}4\chi = \text{ἡμ}5\chi - \text{ἡμ}3\chi$ καὶ $2\text{ἡμ}\chi\text{συν}6\chi = \text{ἡμ}7\chi - \text{ἡμ}5\chi$. Ὥστε εἶναι:
$\psi = \text{ἡμ}7\chi - \text{ἡμ}3\chi + \text{ἡμ}\chi - \text{ἡμ}5\chi + \text{ἡμ}3\chi - \text{ἡμ}7\chi + \text{ἡμ}5\chi = \text{ἡμ}\chi$.

401. Ἔχομεν, ὡς ἀνωτέρω, $2\text{ἡμ}2\chi\text{συν}3\chi = \text{ἡμ}5\chi - \text{ἡμ}\chi$, $2\text{ἡμ}2\chi\text{συν}7\chi = \text{ἡμ}9\chi - \text{ἡμ}5\chi$, $2\text{ἡμ}2\chi\text{συν}11\chi = \text{ἡμ}13\chi - \text{ἡμ}9\chi$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται ἴση μὲ ἡμχ.

402. Εἶναι $\psi = \dfrac{1}{2}\cdot[\text{συν}(\alpha-\beta+\gamma) - \text{συν}(-\alpha+\beta+\gamma) +$
$+\text{συν}(\beta-\gamma+\alpha) - \text{συν}(\beta-\gamma+\alpha) + \text{συν}(\gamma-\alpha+\beta) - \text{συν}(\gamma+\alpha-\beta)] = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

1. *Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις*

Ἐνταῦθα ἀσχολούμεθα μὲ τὴν λύσιν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ αἱ ὁποῖαι περιέχουν μόνον τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου.

Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν τοιαύτην ἐξίσωσιν, ἐκφράζομεν ὅλους τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀγνώστου τόξου x, τοὺς περιεχομένους ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει μὲ ἕνα μόνον τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν τοῦ x ἢ πολλαπλασίου ἢ ὑποπολλαπλασίου του, π.χ. τοῦ 2x, τοῦ $\dfrac{x}{2}$

ἢ ἀκόμη τοῦ $x - \frac{\pi}{2}$, τοῦ $x - \frac{\pi}{4}$ κλπ. Μὲ τὸν τρόπον δὲ τοῦτον θὰ λάβωμεν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\varphi(y)=0$, ὅπου y εἶναι ὁ ὡς ἄνω τριγωνομετρικὸς ἀριθμός.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν y_1 εἶναι μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\varphi(y)=0$ καὶ

α) ὁ y εἶναι ἡμίτονον ἢ συνημίτονον, τότε θὰ ὑπάρχουν τόξα, ὧν τὸ ἡμίτονον ἢ συνημίτονον ἰσοῦται μὲ y_1, μόνον ἐὰν τοῦτο ἀνήκει εἰς τὸ διάστημα $(-1,+1)$.

Ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ θὰ εὕρωμεν τόξον ω, (διὰ τῶν πινάκων) ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, οὗ τὸ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον θὰ ἰσοῦται μὲ $|y_1|$ καὶ κατόπιν διὰ τῶν σχετικῶν τύπων θὰ εὕρωμεν ὅλας τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

β) Ἐὰν ὁ y εἶναι ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη, θὰ εὕρωμεν τόξον ω, ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, ἔχον ἐφαπτομένην ἢ συνεφαπτομένην ἴσην μὲ $|y_1|$, δι' ὁποιανδήποτε τιμὴν (πραγματικὴν) καὶ ἂν ἔχῃ τοῦτο. Κατόπιν δὲ θὰ εὕρωμεν ὅλας τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Περισσότερα βλέπε: «Μεγάλη Ἐπίπεδος Τριγωνομετρία», Χρ. Μπαρμπαστάθη, κεφάλαιον IX.

Ἀσκήσεις. — *403.* 1) $ημχ = ημ23^0$. Ὅθεν $χ = 360^0.k + 23^0$ ἢ $χ = 360^0.k + 180^0 - 23^0 = 360^0.k + 157^0$.

2) $συνχ = συν15^0$. Ὅθεν $χ = 360^0.k \pm 15^0$.

3) $εφχ = εφ54^0$. Ὅθεν $χ = 180^0.λ + 54^0$

4) $σφχ = σφ(37^0\,20')$. Ὅθεν $χ = 180^0.λ + 37^0\,20'$.

404. 1) $ημχ = ημ\frac{3\pi}{8}$ καὶ $χ = 2k\pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{8}\cdot(16k+3)\pi$ ἢ

$$χ = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi + \frac{5\pi}{8} = \frac{1}{8}\cdot \text{ καὶ } (16k+5)\pi$$

2) $συνχ = συν\frac{\pi}{5}$ καὶ $χ = 2k\pi \pm \frac{\pi}{5} = \frac{1}{5}(10k \pm 1)\pi$

3) $εφχ = εφ\frac{7\pi}{12}$ καὶ $χ = λ\pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{12}(12λ+7)\pi$

4) $σφχ = σφ\frac{4\pi}{9}$ καὶ $χ = λ\pi + \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{9}(9λ+4)\pi$.

405. 1) $ημχ = \frac{\sqrt{3}}{2} = ημ\frac{\pi}{3}$ καὶ $χ = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ἢ $χ = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} =$

$$= 2k\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}(3k+1)\pi$$

2) $συνχ = \frac{1}{2} = συν\frac{\pi}{3}$ καὶ $χ = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}(6k \pm 1)\pi$

3) $εφχ = -1 = εφ\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ καὶ $χ = λ\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(4λ-1)\pi$

4) $\sigma\varphi\chi=0=\sigma\varphi\frac{\pi}{2}$ καὶ $\chi=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(2\lambda+1)\pi$.

406. 1) Εἶναι $\lambda o\gamma\eta\mu\chi=\overline{1},87506=\lambda o\gamma\eta\mu(48^0\,35'\,25'')$.

Ὅθεν $\chi=360^0.k+48^0\,35'\,25''$

καὶ $\chi=360^0.k+180^0-48^0\,35'\,25''$.

2) Εἶναι $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\chi=\overline{1},91645=\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(34^0\,24'\,45'')$

Ὅθεν $\chi=360^0.k\pm34^0\,24'\,45''$.

3) Εἶναι $\lambda o\gamma\acute{\epsilon}\varphi\chi=0,05115=\lambda o\gamma\acute{\epsilon}\varphi(48^0\,21'\,57'',69)$

ὅθεν $\chi=186^0.\lambda+46^0\,21'\,57'',69$.

4) Εἶναι $\lambda o\gamma\sigma\varphi\chi=\overline{1},95182=\lambda o\gamma\sigma\varphi(48^0\,10'\,18'',46)$

Ὅθεν $\chi=180^0.\lambda+48^0\,10'\,18'',46$.

407. 1) $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi}{2}-\pi\right)$ καὶ

α′) $\chi=2k\pi+\frac{\chi}{2}-\pi$, ἤτοι $\chi=4k\pi-2\pi=2(2k-1)\pi$

β′) $\chi=2k\pi-\frac{\chi}{2}+\pi$, » $\chi=\frac{1}{3}(4k\pi+2\pi)=\frac{2}{3}(2k+1)\pi$

2) $\acute{\epsilon}\varphi\left(\frac{\chi}{3}-\frac{3\pi}{8}\right)=\acute{\epsilon}\varphi2\chi$ καὶ $\frac{\chi}{3}-\frac{3\pi}{8}=\lambda\pi+2\chi$, ἤτοι·

$\chi=-\frac{3}{40}(8\lambda+3)\pi$.

408. 1) $\sigma\varphi\left(\frac{2\chi}{5}+30^\circ\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\chi}{3}+30^\circ\right)$ καὶ $\frac{2\chi}{5}+30^\circ=$

$=180^\circ.\lambda+\frac{\chi}{3}+30^0$, ἤτοι $\chi=180^0.5\lambda$.

2) $\eta\mu(2\chi+50^0)=\eta\mu(\chi+25^0)$ καὶ α′) $2\chi+50^0=360^0.k+\chi+25^0$, ἤτοι $\chi=360^0.k-25^0$ καὶ β′) $2\chi+50^0=360^0.k+180^0-\chi-25^0$, ἤτοι: $\chi=120^0.k+35^0$.

409. 1) Εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{2}$ καὶ $\chi=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(6k\pm1)\pi$.

2) Εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}$, ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\chi=1$ καὶ ἑπομένως $\chi=2k\pi$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως $\chi=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(6k\pm1)\pi$.

410. 1) Εὑρίσκομεν $\eta\mu\chi=1$ καὶ α′) $\chi=2k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(4k+1)\pi$ καὶ β′) $\chi=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(4k+1)\pi$.

2) Εὑρίσκομεν $2\eta\mu^2\chi - 3\eta\mu\chi + 1 = 0$, καὶ $\eta\mu\chi = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$. Ὅθεν $\eta\mu\chi = 1$, ἤτοι $\chi = \frac{1}{2}(4k+1)\pi$ ἢ $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ καὶ α′) $\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ καὶ β′) $\chi = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$.

411. 1) Εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\chi = 2$, $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = 0{,}30103 = \lambda o\gamma\varepsilon\varphi(47^0\,2'\,43'', 2)$ ὅθεν $\chi = 180^0.\lambda + 47^0\,2'\,43'', 2$.

2) Εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi^2\chi - (3+\sqrt{3})\varepsilon\varphi\chi + 3\sqrt{3} = 0$, καὶ $\varepsilon\varphi\chi = \frac{(3+\sqrt{3}) \pm \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}}{2}$. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3}$, ὁπότε $\chi = 180^0\lambda + 60^0$ ἢ $\varepsilon\varphi\chi = 3$, ὁπότε $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = 0{,}47712 = \lambda o\gamma\varepsilon\varphi(71^0\,33'\,54'', 3)$ καὶ ἑπομένως $\chi = 180^0.\lambda + 71^0\,33'\,34'', 3)$.

412. 1) Εὑρίσκομεν $\sigma\varphi^2\chi - 8\sigma\varphi\chi + 16 = 0$ καὶ $\sigma\varphi\chi = 4$. Ὅθεν: $\lambda o\gamma\sigma\varphi\chi = 0{,}60206 = \lambda o\gamma\sigma\varphi(14^0\,2'\,10'')$ καὶ $\chi = 180^0.\lambda + 14^0\,2'\,10''$.

2) Εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi\chi = 2$ καὶ (ἄσκ. 411) $\chi = 180\lambda + 47^0\,2'\,43'', 2$.

413. 1) Ἔχομεν $4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 20\,\sigma\upsilon\nu\chi + 9 = 0$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{4} = \frac{10 \pm 8}{4}$ ἤτοι $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{9}{2}$ (ἀδύνατος) ἢ $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}$ ὁπότε $\chi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

2) Ἔχομεν $\eta\mu^2\chi - 2\eta\mu\chi + 1 = 0$ καὶ $\eta\mu\chi = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$, ὅθεν: $\chi = \frac{1}{2}(4k+1)\pi$ (ἄσκ. 410).

414. 1) Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\chi$ καὶ $\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} = 2k\pi \pm \chi$.

Ὅθεν $\chi = \frac{1}{3}(1-4k)\pi$ ἢ $\chi = (4k-1)\pi$.

2) Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{3}$ καὶ $\frac{\pi}{2} - \chi = 2k\pi \pm \frac{\chi}{3}$. Ὅθεν: $\chi = \frac{3}{8}(1-4k)\pi$ ἢ $\chi = \frac{3}{4}(1-4k)\pi$.

3) Εἶναι $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{4}\right)$ καὶ $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{4}$, ἤτοι $\chi = \frac{2}{5}(2\lambda+1)\pi$.

415. 1) Ἔχομεν $ἡμ^2χ = συν^2χ$, $ἐφ^2χ = 1$ καὶ $ἐφχ = \pm 1 = ἐφ\frac{\pi}{4}$ ἢ $ἐφ\frac{3\pi}{4}$. Ὅθεν $χ = λ\pi + \frac{\pi}{4}$ ἢ $χ = λ\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Ἐπειδὴ ὅμως $-1 = ἐφ\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως λαμβάνει τὴν μορφὴν $χ = λ\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $ἡμ^2χ = 1 - συν^2χ$ ἢ $συν^2χ = 1 - ἡμ^2χ$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $1 - 2συν^2χ = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $συνχ = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = συν\frac{\pi}{4}$ ἢ $συν\frac{3\pi}{4}$ ἢ $2ἡμ^2χ - 1 = 0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $ἡμχ = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = ἡμ\frac{\pi}{4}$ ἢ $ἡμ\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ κ.λ.π. Ἀλλ' ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(ἡμχ + συνχ)(ἡμχ - συνχ) = 0$. Αὕτη δὲ ἀναλύεται εἰς τὰς $ἡμχ + συνχ = 0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $ἐφχ = -1$ καὶ $ἡμχ - συνχ = 0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $ἐφχ = 1$ κ.λ.π.

2) Ἔχομεν $2συνχ - 3(1 - συν^2χ) = -2$, ἤτοι $3συν^2χ + 2συνχ - 1 = 0$, καὶ $συνχ = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3}$. Ὅθεν $συνχ = -1$, ὁπότε $χ = 2k\pi + \pi$ ἢ $συνχ = \frac{1}{3}$ κ.λ.π.

416. 1) Εἶναι $3(1 - συν^2χ) - συν^2χ = 1$, $4συν^2χ = 2$ καὶ $συνχ = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ὅθεν $συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2} = συν\frac{\pi}{4}$ καὶ $χ = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ἢ $συνχ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = συν\frac{3\pi}{4}$ καὶ $χ = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$.

2) Εἶναι $2συν^2χ - 1 - συν^2χ = 0$, $συν^2χ = 1$ καὶ $συνχ = \pm 1$. Ἐκ τῆς $συνχ = 1$ εὑρίσκομεν $χ = 2k\pi$ καὶ ἐκ τῆς $συνχ = -1$ εὑρίσκομεν $χ = 2k\pi + \pi$.

417. Ἔχομεν $3ἡμχ - συνχ = ἡμχ + συνχ$, $ἡμχ = συνχ$, ἤτοι $ἐφχ = 1$ καὶ καὶ $χ = 180^\circ.λ + \frac{\pi}{4}$.

418. Ἔχομεν $ἐφ(χ + 60^\circ) + ἐφ3χ = 0$, $ἐφ(χ + 60^\circ) = -ἐφ3χ = ἐφ(180^\circ - 3χ)$. Ὅθεν $χ + 60^\circ = 180^\circ.λ + 180^\circ - 3χ$ καὶ $χ = 45^\circ.λ + 30^\circ$.

419. Ἐπειδὴ $\sqrt{3} = \sigma\varphi 30^\circ$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται διαδοχικῶς $\sigma\varphi 30^\circ \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu\chi + \eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu 30^\circ$, $\eta\mu(\chi+30^\circ) = \eta\mu 30^\circ$. Ὅθεν: $\chi+30^\circ = 360^\circ.k + 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 360^\circ.k$
καὶ $\chi+30^\circ = 360^\circ.k + 180^\circ - 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 360^\circ.k + 120^\circ$.

420. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\eta\mu\chi - \varepsilon\varphi 45^\circ \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{2}$, $\eta\mu(\chi-45^\circ) = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ$.

Ὅθεν: $\chi-45^\circ = 360^\circ.k + 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 360^\circ.k + 75^\circ$
καὶ $\chi-45^\circ = 360^\circ.k + 180^\circ - 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 360^\circ.k + 105^\circ$.

421. Ἔχομεν ὁμοίως ὡς ἄνω $\sigma\upsilon\nu 3\chi + \varepsilon\varphi 45^\circ \eta\mu 3\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\eta\mu(3\chi + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{2}$.

Ὅθεν: $3\chi + 45^\circ = 360^\circ.k + 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 120^\circ.k - 5^\circ$
$3\chi + 45^\circ = 360^\circ.k + 180^\circ - 30^\circ$, ἤτοι $\chi = 120^\circ.k + 35^\circ$.

422. Εἶναι $\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi} - 1 = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 2$ καὶ ὡς ἀνωτέρω $\eta\mu(\chi+45^\circ) = 2.\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \sqrt{2} = 1{,}414 > 1$. Ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

423. Ἔχομεν $\eta\mu\chi + \frac{5}{4}\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{3}{2}$, ἢ ἐὰν θέσωμεν $\frac{5}{4} = \varepsilon\varphi\omega$,

$\eta\mu(\chi+\omega) = \frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\omega$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi\omega = \frac{5}{4}$, εὑρίσκομεν: $\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\omega = 0{,}69897 - 0{,}60206 = 0{,}09691$ καὶ $\omega = 51^\circ\ 20'\ 25'',4$. Ἑπομένως εἶναι:

$\lambda o\gamma\eta\mu(\chi+\omega) = 0{,}47712 + \bar{1}{,}79567 - 0{,}30103 = \bar{1}{,}97173 = \lambda o\gamma\eta\mu(69^\circ 33')$.

Κατόπιν τούτων ἔχομεν:

$\chi + 51^\circ\ 20'\ 25'',4 = 360^\circ.k + 69^\circ\ 33'$ κλπ.
$\chi + 51^\circ\ 20'\ 25'',4 = 360^\circ.k + 180^\circ - 69^\circ\ 33'$ κλπ.

2. *Τριγωνομετρικὰ συστήματα*

424. Ἡ 2α ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\eta\mu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right) =$
$= (\eta\mu 45^\circ - \eta\mu 30^\circ) : 2\sigma\upsilon\nu(37^\circ\ 30') = 2\sigma\upsilon\nu(37^\circ 30')\eta\mu(7^\circ\ 30') : 2\sigma\upsilon\nu(37^\circ\ 30') =$
$= \eta\mu(7^\circ\ 30')$.

Ὅθεν: $\frac{\chi-\psi}{2}=360^0.k+7^0\,30'$, ἤτοι $\chi-\psi=720^0.k+15^0$

$\frac{\chi-\psi}{2}=360^0.k+180^0-7^0\,30'$, ἤτοι $\chi-\psi=720^0.k+345^0$.

Ἤδη ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \chi+\psi=75^0 & \chi+\psi=75^0 \\ \chi-\psi=720^0.k+15^0 & \chi-\psi=720^0.k+345^0 \\ \hline \chi=360^0k+45^0 & \chi=360^0.k+210^0 \\ \psi=-360^0k+30^0 & \psi=-(360^0.k+135^0) \end{array}$$

425. Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν: $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right)=0$, $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu30^0=0$ καὶ ἑπομένως $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=0$, ἤτοι $\frac{\chi+\psi}{2}=180^0.k+90^0$ ἢ $\chi+\psi=360^0.k+180^0$. Οὕτως ἐκ τοῦ συστήματος $\chi+\psi=360^0.k+180^0$ καὶ $\chi-\psi=60^0$ εὑρίσκομεν $\chi=180^0k+120^0$ καὶ $\psi=180^0.k+60^0$.

426. Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εὑρισκομεν $\frac{\eta\mu\chi-\eta\mu\psi}{\eta\mu\chi+\eta\mu\psi}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, ἤτοι (ἄσκ. 333,2) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi-\psi}{2}\right):\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=\varepsilon\varphi15^0$ ἢ $\varepsilon\varphi15^0:\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=$ $=\varepsilon\varphi15^0$, ἤτοι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\chi+\psi}{2}\right)=1$ καὶ ἑπομένως $\frac{\chi+\psi}{2}=180^0.k+45^0$, ἤτοι $\chi+\psi=360^0k+90^0$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi-\psi=30^0$ εὑρίσκομεν $\chi=180^0.k+60^0$ καὶ $\psi=180^0.k+30^0$.

427. Προσθέτοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\chi=0$, ἤτοι $\chi=$ $=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ἀφαιροῦντες δὲ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\psi=\frac{1}{2}$, ἤτοι $\psi=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

428. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\psi=\left(1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right):$ $:(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$.

Οὕτως ἐκ τῆς 1ης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\eta\mu\chi=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}=$ $=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Ὥστε ἔχομεν $\psi=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ καὶ $\chi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ ἢ $\chi=$

$=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}$. Ἤδη εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῶν χ καὶ ψ, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα.

429. Τὰ συνχ καὶ συνψ, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον, εἶναι ρίζαι τῆς βου ἐξισώσεως $\lambda^2-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\lambda+\frac{\sqrt{2}}{4}=$ $=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\lambda=\frac{1+\sqrt{2}}{4}\pm\left(\frac{1-\sqrt{2}}{4}\right)$, ἤτοι $\lambda=\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ἑπομένως θὰ λάβωμεν ἢ $\text{συνχ}=\frac{1}{2}$ καὶ $\text{συνψ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $\text{συνχ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $\text{συνψ}=\frac{1}{2}$. Οὕτως εὑρίσκομεν διὰ **χ** (ἢ ψ) $=$ $=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ καὶ διὰ ψ (ἢ χ) $=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

430. Ἡ 2α ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\frac{\text{ἐφχ}-\text{ἐφψ}}{\text{ἐφχ}+\text{ἐφψ}}=\frac{3-1}{3+1}=$ $=\frac{1}{2}$, ἤτοι (τ. 69) εἰς τὴν $\frac{\text{ἡμ}(\chi-\psi)}{\text{ἡμ}(\chi+\psi)}=\frac{1}{2}$, ἢ $\frac{\text{ἡμ}(\chi-\psi)}{\text{ἡμ}90^0}=\frac{1}{2}$. Ὅθεν $\text{ἡμ}(\chi-\psi)=\frac{1}{2}=\text{ἡμ}30^0$ καὶ $\chi-\psi=360^0.k+30^0$ ἢ $\chi-\psi=$ $=360^0.k+150^0$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \chi+\psi=90^0 & \chi+\psi=90^0 \\ \underline{\chi-\psi=360^0.k+30^0} & \underline{\chi-\psi=360^0k+150^0} \\ \chi=+180^0.k+60^0 & \chi=180^0.k+120^0 \\ \psi=-180^0.k+30^0 & \psi=-(180^0.k+30^0) \end{array}$$

431. Ἡ 2α ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\text{συν}(\chi+\psi)+$ $+\text{συν}(\chi-\psi)=\frac{\sqrt{6}}{2}$, ἤτοι εἰς τὴν $\text{συν}(\chi+\psi)+\text{συν}15^0=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ (ἄσκ. 351) $\text{συν}15^0=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ καὶ $\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, εἶναι $\text{συν}(\chi+\psi)=$ $=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\text{ἡμ}15^0=\text{συν}75^0$ (ἄσκ. 351). Ὅθεν: $\chi+\psi=360^0.k\pm75^0$. Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα:

$$\begin{array}{ll} \chi+\psi=360^0.k+75^0 & \chi+\psi=360^0.k-75^0 \\ \underline{\chi-\psi=15^0} & \underline{\chi-\psi=15^0} \\ \chi=180^0.k+45^0 & \chi=180^0.k-30^0 \\ \psi=180^0.k+30^0 & \psi=180^0.k-45^0 \end{array}$$

432. Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\acute{\varepsilon}\varphi\psi = \frac{1}{\acute{\varepsilon}\varphi\chi} = \sigma\varphi\chi =$ $= \acute{\varepsilon}\varphi(90^0-\chi)$. Ὅθεν $\psi = 180^0.\lambda + 90^0 - \chi$, ἤτοι $\chi + \psi = 180^0.\lambda + 90^0$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $\chi - \psi = 30^0$ εὑρίσκομεν $\chi = 90^0\lambda + 60^0$ καὶ $\psi = 90^0.\lambda + 30^0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις

Κατὰ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἀντιστρόφων κυκλικῶν συναρτήσεων εἶναι:

$\text{τόξσυν}(-x) = \pi - \text{τόξσυν}x$, $\qquad$ $\text{συν}(\text{τόξσυν}x) = x$,

$\text{ἡμ}(\text{τόξσυν}x) = \sqrt{1-x^2}$, $\qquad$ $\text{ἐφ}(\text{τόξσυν}x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

$\text{τόξἐφ}(-x) = -\text{τόξἐφ}x$, $\qquad$ $\text{ἐφ}(\text{τόξἐφ}x) = x$,

$\text{ἡμ}(\text{τόξἐφ}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\qquad$ $\text{συν}(\text{τόξἐφ}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$\text{τόξσφ}(-x) = \pi - \text{τόξσφ}x$, $\qquad$ $\text{σφ}(\text{τόξσφ}x) = x$ κ.ο.κ.

Οὕτω π. χ. εἶναι:

$$\text{τόξημ}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{τόξημ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \text{τόξσυν}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^0,$$

$$\text{τόξσυν}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^0, \quad \text{τόξἐφ}\sqrt{3} = 60^0, \quad \text{τόξἐφ}(-1) = -45^0 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἐὰν δὲ δοθῇ π. χ. ὅτι:

$y = \text{τόξσυν}\dfrac{3}{5}$, θὰ εἶναι $y = \text{τόξημ}\dfrac{4}{5}$, $y = \text{τόξἐφ}\dfrac{4}{3} = \text{τόξσφ}\dfrac{3}{4}$.

Περισσότερα βλέπε: «Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν» Χρ. Μπαρμπαστάθη, Κεφ. VIII.

Ἀσκήσεις.—*433.* 1) Ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\text{ἡμ}\chi = 0{,}4$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ χ ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὸν περιορισμόν.

2) καὶ 3) Ὁμοίως ἔχομεν $\text{συν}\chi = 0{,}6$ καὶ $\text{ἐφ}\chi = 2$.

434. Ἐὰν $\text{τόξημ}0{,}15 = \alpha$ $\qquad$ εἶναι $\text{ἡμ}\alpha = 0{,}15$
καὶ ἐὰν $\text{τόξημ}0{,}12 = \beta$ $\qquad$ εἶναι $\text{ἡμ}\beta = 0{,}12$

Οὕτως ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\text{ἡμ}\alpha = 0{,}15$ καὶ $\text{ἡμ}\beta = 0{,}12$ εὑρίσκομεν τὰ τόξα α καὶ β τὰ μικρότερα τῶν 90° καὶ κατόπιν τὴν ζητουμένην διαφορὰν $\alpha - \beta$.

435. Ἐὰν $\text{τόξημ}\chi = \alpha$ καὶ $\text{τόξημ}\dfrac{2}{5} = \beta$, εἶναι $\text{ἡμ}\alpha = \chi$ καὶ $\text{ἡμ}\beta =$

$=\frac{2}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ τόξημ$1=\frac{\pi}{2}$, εἶναι $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$, ἤτοι ἡμ$\alpha=$συν$2\beta=$

$=1-2$ἡμ$^2\beta$ ἢ $\chi=1-2\cdot\frac{4}{25}=\frac{17}{25}$.

436. Ἐὰν τόξημ$\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}=\alpha$, εἶναι ἡμ$\alpha=\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}$

καὶ » τόξσυν$\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}=\beta$, » συν$\beta=\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$

Ὅθεν ἡμ$^2\alpha+$συν$^2\beta=\frac{(\mu^2-\nu^2)^2+4\mu^2\nu^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}=\frac{(\mu^2+\nu^2)^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}=1$

Ἐκ ταύτης καὶ ἐκ τῆς ἡμ$^2\beta+$συν$^2\beta=1$ εὑρίσκομεν ἡμ$^2\alpha=$ἡμ$^2\beta$, ἤτοι $\alpha=\beta$.

437. Ἐὰν τόξημ$\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}=\omega$, εἶναι ἡμ$\omega=\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}$

καὶ » τόξεφ$\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}=\varphi$ » εφ$\varphi=\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$

Ἀλλ' ἡμ$\varphi=\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}:\sqrt{1+\frac{\chi}{\alpha}}=\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\alpha}}:\frac{\sqrt{\chi+\alpha}}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}$.

Ὥστε εἶναι ἡμ$\omega=$ἡμφ καὶ $\omega=\varphi$.

438. Ἐὰν τοξημ$\frac{1}{4}=\alpha$, εἶναι ἡμ$\alpha=\frac{1}{4}$ καὶ συν$\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$

καὶ » τοξημ$\frac{1}{5}=\beta$ » ἡμ$\beta=\frac{1}{5}$ καὶ συν$\beta=\frac{\sqrt{24}}{5}$.

Ὥστε ἡμ$(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{24}}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{24}+\sqrt{15}}{20}$, ἤτοι :

$\alpha+\beta=$τόξημ$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{24}}{20}$.

439. Ἐὰν τόξημ$\frac{1}{3}=\alpha$, εἶναι ἡμ$\alpha=\frac{1}{3}$ καὶ συν$\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3}$

καὶ » τοξημ$\chi=\beta$ » ἡμ$\beta=\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, ἤτοι $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$ εἶναι

ἡμ$\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}(\sqrt{8}-1)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}=\chi$.

440. Ἐὰν τόξημ$\chi=\alpha$, εἶναι ἡμ$\alpha=\chi$ καὶ συν$\alpha=\sqrt{1-\chi^2}$, ἤτοι : τόξσυν$\sqrt{1-\chi^2}=\alpha$. Ὅθεν $\alpha+\alpha=0$, ἤτοι $\alpha=0$. Ὅθεν $\chi=$ἡμ$0=0$.

441. Ἐὰν τόξημ$\frac{\chi}{\sqrt{5}} = \varphi$, εἶναι ημ$\varphi = \frac{\chi}{\sqrt{5}}$

καὶ » τοξημ$\frac{\psi}{\sqrt{5}} = \omega$ » ημ$\omega = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$

Ἐπειδὴ δὲ $\varphi + \omega = \frac{\pi}{2}$, ἔπεται ημω=συνφ.

Ὅθεν: ημ²φ+ημ²ω=ημ²φ+συν²φ, ἤτοι $\frac{\chi^2+\psi^2}{5} = 1$.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

442. $A = \frac{\pi}{2}$ ἀκτ. $\Gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ ἀκτ.

443. Ἐὰν $A = 60^\gamma,54$, εἶναι $A+B+\Gamma = 200^\gamma$, $B+\Gamma = 200 - 60{,}54 = 139^\gamma,46$. Ὅθεν $B = \Gamma = 139^\gamma,46 : 2 = 69^\gamma,73$.

444. Εἶναι ημ$\frac{(4\lambda+1)\pi}{4}$ = ημ$\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ = ημ$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

ἐὰν $\lambda = 2k$ καὶ $-$ημ$\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ἐὰν $\lambda = 2k+1$, διότι $\lambda\pi + \frac{\pi}{4} =$

$= 2k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Ὁμοίως δὲ ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τοὺς λοιποὺς τριγ. ἀριθμούς.

445. Εἶναι $(-1)^\nu = 1$, ἐὰν $\nu = 2\mu$ καὶ $(-1)^\nu = -1$, ἐὰν $\nu = 2\mu+1$.

Ὥστε εἰς τὴν αην περίπτωσιν ἔχομεν ημ$\frac{4\pi}{3} = -$ημ$\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.λ.π.

καὶ » » βην » » ημ$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ = ημ$\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

446. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τριγ. ἀριθμοὶ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι θετικοί. Καὶ δεύτερον ὅτι $B+\Gamma = 90^0$ καὶ ἐφΒ=3ἐφΓ. Ἤδη ἐκ τῆς αης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν ἐφΒ = σφΓ = $\frac{1}{\text{ἐφ}\Gamma}$, ὁπότε ἡ βα ἐξίσωσις δίδει τὴν ἐφ²Γ = $\frac{1}{3}$,

ἐξ ἧς ἐφΓ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ καὶ $\Gamma = 30°$. Ὅθεν $B = 60°$.

447. Εἶναι Β = Γ. Ἐπειδὴ δὲ 2ημ2Α = $\sqrt{3}$, ἤτοι, ἐπειδὴ ημ2Α = $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ = ημ60° = ημ120°, ἔπεται 2Α=60° ἢ 120°, ἤτοι Α = 30° ἢ 60°

Ὥστε $B = \Gamma = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ ἢ $B = \Gamma = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

448. Ἐπειδὴ $B+\Gamma = 90^\circ$, ἕπεται $B+2B = 90^\circ$, $B = 30^\circ$ καὶ $\Gamma = 60^\circ$. Ὥστε (§ 14) εἶναι $\beta = \frac{\alpha}{2} = 0{,}2\mu$. καὶ $\gamma = \sqrt{0{,}4^2 - 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}12} = 0{,}2\sqrt{3}$ μ. Οὕτω δὲ εἶναι $E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 . 0{,}2 . \sqrt{3} = 0{,}02\sqrt{3}$ τ.μ.

449. Εἰς τὸ σχῆμα 32, σελὶς Τριγ. 110 εἶναι $0^0 < \widehat{AM} < 90^0$ καὶ ἡμ$(AM) = (\overline{\Pi M})$. Ἐὰν ἤδη νοήσωμεν ὅτι ἡ προέκτασις τοῦ ΜΠ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ΄, εἶναι $\Pi M = \frac{M'M}{2}$ καὶ $\widehat{M'AM} = 2.\widehat{AM}$

Ὥστε ἐὰν $\widehat{AM} = \tau$, εἶναι ἡμ$\tau = \frac{(\chi o \rho \widehat{2\tau})}{2}$.

450. Εἶναι (ἄσκ. 449) ἡμ$18^0 = \frac{(\chi o \rho.\ 36^0)}{2}$. Ἀλλὰ χορδὴ 36^0 εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου, ἥτις ἰσοῦται (Πίν. λογαρίθμων Χρ. Μπαρμπαστάθη, σελὶς 186) μὲ $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐδῶ εἶναι $R = 1$ (ἀκτὶς τριγ. κύκλου), ἕπεται ὅτι ἡμ$18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ καὶ

ἐπομένως συν$18^0 = \sqrt{1 - \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

451. Ἂν προβ. ΟΑ=Οα, τὸ τρίγωνον ΟΑα εἶναι ὀρθογώνιον. Ὅθεν $(O\alpha) = (OA)$συν$(25^0\,20') = 0{,}15$συν$(25^0\,20')$.

452. Ἔχομεν (ἄσκ. 451) συν$\omega = \frac{0{,}12}{0{,}24} = \frac{1}{2}$ καὶ $\omega = 60^0$.

453. Ἔχομεν ἐφ$\chi = 4 . \frac{1}{\text{ἐφ}\chi}$, ἤτοι ἐφ$^2\chi = 4$ καὶ ἐφ$\chi = \pm 2$. Οὕτως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων λαμβάνομεν τὰ ἀνύσματα$(\overline{AT}) = 2$ καὶ $(\overline{AT'}) = -2$ καὶ ἀπὸ τῶν ἄκρων Τ καὶ Τ΄ φέρομεν εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ κέντρου τοῦ τριγ. κύκλου. Οὕτω τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι αἱ τομαὶ τῶν εὐθειῶν τούτων μετὰ τῆς περιφερείας.

454. 1) Εἶναι ἡμ$\chi =$ συνχ, ἐφ$\chi = 1$ καὶ $\chi = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$.

2) Εἶναι ἐφ$[2k\pi + (\pi + \chi)] =$ ἐφ$(\pi + \chi) =$ ἐφχ.

Ὅθεν ἐφ$\chi = \frac{1}{\text{ἐφ}\chi}$, ἐφ$^2\chi = 1$ καὶ ἐφ$\chi = \pm 1$, ἤτοι $\chi = \lambda\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

455. Εἶναι (ἄσκ. 301) $ἐφ\left(\frac{\pi}{2}+χ\right)=-σφχ$. Ὅθεν: $-σφχ=$
$=συνχ$, $συνχ+\frac{συνχ}{ἡμχ}=0$, $συνχ\left(1+\frac{1}{ἡμχ}\right)=0$ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $συνχ=0$, ὁπότε $χ=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ἢ $1+\frac{1}{ἡμχ}=0$, ἤτοι $ἡμχ=-1=$
$=ἡμ\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, ὁπότε $χ=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

456. Εἶναι $συντ.συντ+(-ἡμτ)(-ἡμτ)=συν^2τ+ἡμ^2τ=1$.

457. Εἶναι $σφωἡμω+ἐφω.συνω=συνω+ἡμω$.

458. 1) $ἐφ(270^0-τ)=ἐφ[180^0+(90^0-τ)]=ἐφ(90^0-τ)=σφτ$.
2) $σφ(270^0-τ)=σφ[180^0+(90^0-τ)]=σφ(90^0-τ)=ἐφτ$.
3) $ἡμ(270^0+τ)=ἡμ[180^0+(90^0+τ)]=-ἡμ(90^0+τ)=$
$=-συν(-τ)=-συντ$.
4) $συν(270^0+τ)=-συν(90^0+τ)=-ἡμ(-τ)=ἡμτ$.
5) $ἡμ(270^0-τ)=-ἡμ(90^0-τ)=-συντ$.
6) $συν(270^0-τ)=-συν(90^0-τ)=-ἡμτ$.

459. Εἶναι (ἄσκ. 458) $-συνω.(-ἡμω)-ἡμω.συνω=συνωἡμω-$
$-ἡμωσυνω=0$.

460. Εἶναι (τ. 69.) $ἐφ282^0+ἐφ258^0=\frac{ἡμ(282^0+258^0)}{συν282^0.συν258^0}=$

$$=\frac{ἡμ(360^0+180^0)}{συν282^0.συν258^0}=\frac{ἡμ180^0}{συν282^0συν258^0}=0.$$

461. Εἶναι $συν\frac{5\pi}{9}+συν\frac{14\pi}{9}=συν\frac{5\pi}{9}+συν\left(\pi+\frac{5\pi}{9}\right)=$
$=συν\frac{5\pi}{9}-συν\frac{5\pi}{9}=0$.

462. 1) Εἶναι $συν(α+β)\,συν(α-β)=\frac{1}{2}[συν(α+β+α-β)+$
$+συν(α+β-α+β)]=\frac{1}{2}(συν2α+συν2β)=\frac{1}{2}(2συν^2α-1+1-2ἡμ^2β)=$
$=συν^2α-ἡμ^2β$.

2) Εἶναι $ἡμ(α+β)ἡμ(α-β)=\frac{1}{2}(συν2β-συν2α)=\frac{1}{2}(1-2ἡμ^2β-$
$-1+2ἡμ^2α)=ἡμ^2α-ἡμ^2β$.

463. Ἔχομεν $συν(α+β)=-συνγ$, ἤτοι $συνασυνβ-ἡμαἡμβ=-συνγ$. Ὅθεν $(συνασυνβ+συνγ)^2=ἡμ^2αἡμ^2β$, ἤτοι $συν^2ασυν^2β+2συνασυνβ$ $συνγ=ἡμ^2αἡμ^2β$. Ἐπειδὴ δὲ $ἡμ^2α=1-συν^2α$ καὶ $ἡμ^2β=1-συν^2β$, καταλήγομεν μετὰ τὰς πράξεις εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ἰσότητα.

464. Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{2} = \vartheta$, τὸ α^{ον} μέλος ἰσοῦται μέ:

$$\frac{1+\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta}{1-\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta} + \frac{1-\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta}{1+\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta} = \frac{(1+\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta)^2+(1-\dot{\varepsilon}\varphi\vartheta)^2}{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta} = \frac{2(1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta)}{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\vartheta} =$$

$$= \frac{2\left(1+\dfrac{\eta\mu^2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}\right)}{1-\dfrac{\eta\mu^2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-\eta\mu^2\vartheta} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 2\vartheta} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

465. Εἶναι $\dot{\varepsilon}\varphi^2(45^\circ-\alpha) = \left(\frac{1-\dot{\varepsilon}\varphi\alpha}{1+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha}\right)^2 = \frac{1-2\dot{\varepsilon}\varphi\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi^2\alpha}{1+2\dot{\varepsilon}\varphi\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi^2\alpha} =$

$$\left(1-2.\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\right) : \left(1+2\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} : \frac{1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1-\eta\mu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}.$$

466. Εἶναι $\frac{\dot{\varepsilon}\varphi 2\alpha}{1+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha\dot{\varepsilon}\varphi 2\alpha} = \frac{1}{\sigma\varphi 2\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha}$. Ἀλλὰ $\sigma\varphi 2\alpha+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha =$

$$= \frac{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\alpha}{2\dot{\varepsilon}\varphi\alpha}+\dot{\varepsilon}\varphi\alpha = \frac{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\alpha}{2\dot{\varepsilon}\varphi\alpha} = \frac{1+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{2.\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{1}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu 2\alpha}.$$

467. Ἐκ τοῦ τύπου $\dot{\varepsilon}\varphi\omega = \dfrac{2\dot{\varepsilon}\varphi\dfrac{\omega}{2}}{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\dfrac{\omega}{2}}$ εὑρίσκομεν:

$$\dot{\varepsilon}\varphi^2\frac{\omega}{2}+\frac{2}{\dot{\varepsilon}\varphi\omega}\cdot\dot{\varepsilon}\varphi\frac{\omega}{2}-1=0 \text{ καὶ } \dot{\varepsilon}\varphi\frac{\omega}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\omega}}{\dot{\varepsilon}\varphi\omega}$$

468. $\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \dfrac{2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha} =$

$$= \frac{\eta\mu 3\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1)}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha\ (2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1)} = \dot{\varepsilon}\varphi 3\alpha.$$

469. 1) $1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\tau = 1+\dfrac{\eta\mu^2\tau}{\sigma\upsilon\nu^2\tau} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\tau+\eta\mu^2\tau}{\sigma\upsilon\nu^2\tau} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\tau}.$

2) $\dfrac{\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu^2\beta}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2} =$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha}=2\acute{\eta}\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\acute{\eta}\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right):2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\grave{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\grave{\varepsilon}\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

470. $\sigma\varphi^2\alpha-\grave{\varepsilon}\varphi^2\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\acute{\eta}\mu^2\alpha}-\frac{\acute{\eta}\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\acute{\eta}\mu^4\alpha}{\acute{\eta}\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\acute{\eta}\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\acute{\eta}\mu^2\alpha)}{\acute{\eta}\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\acute{\eta}\mu^2\alpha}{\acute{\eta}\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\acute{\eta}\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}.$$

471. $(\acute{\eta}\mu A+\acute{\eta}\mu B)^2+(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B)^2=\acute{\eta}\mu^2A+\acute{\eta}\mu^2B+2\acute{\eta}\mu A\acute{\eta}\mu B+$ $+\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B=2+2(\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B+\acute{\eta}\mu A\acute{\eta}\mu B)=$

$$=2[1+\sigma\upsilon\nu(A-B)]=2.\,2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right)=4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

472. $\frac{2\acute{\eta}\mu\alpha-\acute{\eta}\mu 2\alpha}{2\acute{\eta}\mu\alpha+\acute{\eta}\mu 2\alpha}=\frac{2\acute{\eta}\mu\alpha-2\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\acute{\eta}\mu\alpha+2\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=$

$$=\grave{\varepsilon}\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).\ (\tau.\ 45).$$

473. $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{1}{\acute{\eta}\mu\alpha}=\frac{\acute{\eta}\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu(90^0-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=$

$$=\frac{2\sigma\upsilon\nu 45^0\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)}{\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)}{2\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^0-\alpha)}{\acute{\eta}\mu 2\alpha}=$$

$=\frac{2\sqrt{2}\,\acute{\eta}\mu(45^0+\alpha)}{\acute{\eta}\mu 2\alpha}$, ἐπειδὴ $45^0-\alpha+45^0+\alpha=90^0$.

474. 1) $1\pm\grave{\varepsilon}\varphi 50^0=1\pm 1{,}19175$ (πίναξ III).

2) $\frac{\grave{\varepsilon}\varphi 42^0+\grave{\varepsilon}\varphi 25^0}{\sigma\varphi 42^0+\sigma\varphi 25^0}=(\grave{\varepsilon}\varphi 42^0+\grave{\varepsilon}\varphi 25^0):\left(\frac{1}{\grave{\varepsilon}\varphi 42^0}+\frac{1}{\grave{\varepsilon}\varphi 25^0}\right)=$

$=(\grave{\varepsilon}\varphi 42^0+\grave{\varepsilon}\varphi 25^0):\frac{\grave{\varepsilon}\varphi 42^0+\grave{\varepsilon}\varphi 25^0}{\grave{\varepsilon}\varphi 42^0.\grave{\varepsilon}\varphi 25^0}=\grave{\varepsilon}\varphi 42^0.\grave{\varepsilon}\varphi 25^0$. κ.λπ.

475. 1) Βλέπε ἄσκ. 411, 1 διότι $\sigma\varphi\chi=\frac{1}{\grave{\varepsilon}\varphi\chi}$.

2) Εἶναι $\acute{\eta}\mu(180^0+\chi)=\frac{5}{6}$, $\lambda o\gamma\acute{\eta}\mu(180^0+\chi)=\lambda o\gamma 5-\lambda o\gamma 6$ κλπ.

3) Εἶναι $\sigma\upsilon\nu(180^0-\chi)=0{,}6$ καὶ $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(180^0-\chi)=\lambda o\gamma 0{,}6$ κλπ.

476. 1) $\frac{\acute{\eta}\mu(80^0\,15')-\acute{\eta}\mu(48^0\,25')}{\acute{\eta}\mu(80^0\,15')+\acute{\eta}\mu(48^0\,25')}=\frac{2\sigma\upsilon\nu(64^0\,20')\acute{\eta}\mu(15^0\,55')}{2\acute{\eta}\mu(64^0\,20')\sigma\upsilon\nu(15^0\,55')}=$

$=\grave{\varepsilon}\varphi(15^0 55')\sigma\varphi(64^0\,20')$.

$$2)\ \frac{1+ἡμ(48^0\,15'\,30'')}{1-ἡμ(48^0\,15'\,30'')}=\frac{ἡμ90^0+ἡμ(48^\circ 15'\,30'')}{ἡμ90^0-ἡμ(48^\circ 15'\,30'')}=$$

$$=\frac{2ἡμ(69^0\,7'\,45'')συν(20^0\,52'\,15'')}{2συν(69^0\,7'\,45'')ἡμ(20^0\,52'\,15'')}=ἐφ(69^0\,7'\,45'')\,.\,σφ(20^\circ 52'\,15'')=$$

$=ἐφ^2(69^\circ 7'\,45'')$ διότι $69^\circ 7'\,45''+20^\circ 52'\,15''=90^0$.

477. $$\frac{β}{α+γ}=\frac{αἡμB}{α+ασυνB}=\frac{ἡμB}{1+συνB}=\frac{2ἡμ\frac{B}{2}συν\frac{B}{2}}{2συν^2\frac{B}{2}}=ἐφ\frac{B}{2}.$$

478. $$ἐφ2B=\frac{2ἐφB}{1-ἐφ^2B}=2.\frac{β}{γ}:\left(1-\frac{β^2}{γ^2}\right)=2.\frac{β}{γ}:\left(\frac{γ^2-β^2}{γ^2}\right)=$$

$$=\frac{2βγ}{γ^2-β^2}\,.$$

479. $συν(B-Γ)=συνBσυνΓ+ἡμBἡμΓ=2συνBσυνΓ=$

$=2.\frac{γ}{α}\cdot\frac{β}{α}=\frac{2βγ}{α^2}$, ἐπειδὴ $ἡμB=συνΓ, ἡμΓ=συνB$

480. $$συν2B=2συν^2B-1=2.\frac{γ^2}{α^2}-1=\frac{2γ^2-α^2}{α^2}=$$

$$=\frac{2γ^2-(β^2+γ^2)}{α^2}=\frac{γ^2-β^2}{α^2}\,.$$

481. $$E=\frac{1}{2}βγ=\frac{1}{2}.αἡμB.ασυνB=\frac{1}{4}α^2\cdot 2ἡμBσυνB=$$

$$=\frac{1}{4}α^2ἡμ2B.$$

482. Ἡ ἁμαξοστοιχία διανύει εἰς 3πρ. λ. διάστημα $40.\frac{3}{60}$ χλμ. $=$ $=2$ χλμ. Εἶναι δὲ τὸ διάστημα τοῦτο ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ μὲ ἀπέναντι γωνίαν 20°. Ὥστε ἡ ζ. ἀπόστασις εἶναι ἴση μὲ $2ἡμ20^\circ$ χλμ.

483. Εἶναι $\frac{1}{2}γt^2=\frac{1}{2}\cdot 981.\ ἡμω.4=1962ἡμω$ δάκτυλοι. Σκεπτόμενοι δὲ ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον ὕψος υ εἶναι $υ=1962ἡμω.ἡμω=1962\,ἡμ^2\,(29^0\,25')$, ὅπερ διὰ τῶν λογαρίθμων εὐκόλως εὑρίσκεται.

484. Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, εἶναι $Γ=15^0$. Ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΔΒ εἶναι $\widehat{ΔΒΓ}=Γ+Α=45^0$. Ὥστε $(ΔΓ)=(ΔΒ)=(ΔΑ)-$ $-(ΒΑ)=(ΔΑ)-γ$. Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΑ λαμβάνομεν $(ΔΑ)=(ΓΔ)σφ30^0=(ΓΔ)\sqrt{3}$. Ὅθεν $(ΓΔ)=(ΓΔ)\sqrt{3}-γ$, ἤτοι :

$$(\Gamma\Delta)=\frac{\gamma}{\sqrt{3}-1}=\frac{\gamma(\sqrt{3}+1)}{2}=40(\sqrt{3}+1) \text{ ἑκατ.}$$

485. Ἔχομεν $A=75^0$. Ἐπειδὴ δὲ $\Gamma=45^0$, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Delta\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές. Ὅθεν $(\Delta\Gamma)=(A\Delta)=5$ μ. καὶ $(A\Gamma)=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου $A\Delta B$ ἔχομεν $(AB)=\frac{(A\Delta)}{\eta\mu B}=\frac{5}{\eta\mu 60^0}=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ καὶ ἀκόμη $(B\Delta)=(A\Delta)\sigma\varphi 60^0=$ $=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Ὥστε $(B\Gamma)=(B\Delta)+(\Delta\Gamma)=\frac{5\sqrt{3}}{3}+5=\frac{5\sqrt{3}+15}{3}$ καὶ $E=\frac{1}{2}(B\Gamma).(A\Delta)=\frac{1}{2}.\ \frac{5\sqrt{3}+15}{3}.5=\frac{25(\sqrt{3}+3)}{6}$ τ.μ.

486. Ἔστω $AB\Gamma$ ἡ τριγωνικὴ πλευρά, $B\Gamma$ ἡ ὁριζόντιος βάσις αὐτῆς, $A\Delta$ τὸ ὕψος καὶ AZ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς A ἀπὸ τοῦ ὁριζ. ἐπιπέδου M. Τότε τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $E=\frac{1}{2}.(B\Gamma)(A\Delta)=$ $=\frac{1}{2}.4{,}30.\ (A\Delta)$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον $AZ\Delta$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$. Ὥστε ἡ γωνία Δ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $ZA\Delta$ εἶναι ἡ δοθεῖσα κλίσις, ἤτοι εἶναι $\Delta=25^0$ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $(A\Delta)=\frac{(AZ)}{\eta\mu 25^0}=\frac{1{,}80}{\eta\mu 25^0}$. Ὥστε εἶναι $E=\frac{2.15.1.80}{\eta\mu 25^0}$.

487. Τὸ ζ. ὕψος εἶναι ἡ γωνία ω τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀπέναντι τῆς κατακορύφου ῥάβδου, τοῦ ὁποίου ἡ ἄλλη κάθετος εἶναι ἡ σκιά. Ὅθεν $\varepsilon\varphi\omega=\frac{2{,}15}{6{,}45}=\frac{1}{3}$ κλπ.

488. Ἔστω ΓA ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ τῆς κλίμακος ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ B. Τότε ἡ ζ. κλίσις εἶναι ἡ γωνία B τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Ὥστε εἶναι $\varepsilon\varphi B=$ $=\frac{(A\Gamma)}{(BA)}=\frac{1{,}18.10}{(BA)}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ πλάτη τῶν βαθμίδων εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν BA, ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς προβολάς των ἐπὶ τὴν BA. Ὥστε $(BA)=0{,}30.10=3\mu$ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $\varepsilon\varphi B=\frac{1{,}8}{3}=0{,}6$ κλπ.

489. Ἐὰν ἡ ΘZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς AB, $\Delta\Gamma$ καὶ ZH εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ὁριζ. ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς AB, ἡ ζ. κλίσις εἶναι (ἄσκ. 486) ἡ γωνία Θ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $Z\Theta H$.
Ὅθεν $\eta\mu\Theta=\frac{(ZH)}{(Z\Theta)}=\frac{9}{15}=0{,}6$ κλπ.

490. Εἶναι $\beta=\frac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\gamma=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$. Ὅθεν $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}=$

$$=\frac{2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\eta\mu\frac{A}{2}},\ \text{ἐπειδὴ}\ \left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)+\frac{A}{2}=$$
$=90^0$.

491. $\frac{\text{ἡμ}(A-B)}{\text{ἡμ}(A+B)}=\frac{\text{ἡμ}(A+B)\text{ἡμ}(A-B)}{\text{ἡμ}^2(A+B)}=\frac{\text{ἡμ}^2A-\text{ἡμ}^2B}{\text{ἡμ}^2\Gamma}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}$ (ἄσκ. 462, 2) καὶ διότι $\text{ἡμ}^2A=\frac{\alpha^2}{4R^2}$, $\text{ἡμ}^2B=\frac{\beta^2}{4R^2}$ καὶ $\text{ἡμ}^2\Gamma=$
$=\frac{\gamma^2}{4R^2}$.

492. $\text{ἡμ}2A+\text{ἡμ}2B+\text{ἡμ}2\Gamma=2\text{ἡμ}(A+B)\text{συν}(A-B)+2\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}\Gamma$, ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}\Gamma=\text{ἡμ}(A+B)$ καὶ $\text{συν}\Gamma=-\text{συν}(A+B)$, αὕτη ἰσοῦται μὲ $2\text{ἡμ}\Gamma[\text{συν}(A-B)-\text{συν}(A+B)]=2\text{ἡμ}\Gamma.2\text{ἡμ}A\text{ἡμ}B=4\text{ἡμ}A\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma$.

493. $\beta\text{συν}B+\gamma\text{συν}\Gamma=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}\cdot\text{ἡμ}B\text{συν}B+\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}\cdot\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}\Gamma=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}\cdot$
$(\text{ἡμ}B\text{συν}B+\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}\Gamma)=\frac{\alpha}{2\text{ἡμ}A}\cdot(2\text{ἡμ}B\text{συν}B+2\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}\Gamma)=\frac{\alpha}{2\text{ἡμ}A}\cdot$
$\cdot(\text{ἡμ}2B+\text{ἡμ}2\Gamma)=\frac{\alpha}{2\text{ἡμ}A}\cdot 2\text{ἡμ}(B+\Gamma).\text{συν}(B-\Gamma)=\frac{\alpha}{2\text{ἡμ}A}\cdot 2\text{ἡμ}A.$
$\text{συν}(B-\Gamma)=\alpha\text{συν}(B-\Gamma)$.

494. Εἶναι $\text{ἡμ}A=\text{ἡμ}(B+\Gamma)=\text{ἡμ}B\text{συν}\Gamma+\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}B$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς δοθείσης ἕπεται ὅτι $2\text{ἡμ}B\text{συν}\Gamma=\text{ἡμ}B\text{συν}\Gamma+\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}B$ ἤτοι $\text{ἡμ}B\text{συν}\Gamma-\text{ἡμ}\Gamma\text{συν}B=0$ ἢ $\text{ἡμ}(B-\Gamma)=0$ καὶ διὰ τοῦτο $B-\Gamma=180°k$. Ἀλλ' ἐδῶ τὸ k δέον νὰ εἶναι 0 διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῶν 180°. Ὅθεν $B-\Gamma=0$ ἤτοι $B=\Gamma$.

495. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον (ΑΒ=ΑΓ) καὶ (ΑΔ) τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τότε ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ λαμβάνομεν $(B\Delta)=(AB)\,\text{ἡμ}\frac{A}{2}$ (ι). Ἀλλ' ἐδόθη $(B\Gamma)=\frac{(AB)}{2}$ καὶ εἶναι $(B\Delta)=$
$=\frac{(B\Gamma)}{2}=\frac{(AB)}{4}$. Ὥστε ἡ ἰσότης (ι) γίνεται $\frac{(AB)}{4}=(AB)\text{ἡμ}\frac{A}{2}$, ἤτοι $\text{ἡμ}\frac{A}{2}=\frac{1}{4}=0{,}25$, καὶ $\text{λογημ}\frac{A}{2}=\bar{1}{,}39794$, $\frac{A}{2}=14°\ 28'\ 39''$. Ὅθεν $A=28°57'\ 18''$ καὶ $B=\Gamma=90°-14°\ 28'\ 39''=75°\ 31'\ 21''$.

496. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλ/μου ΑΒΓΔ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, ὅπερ εἶναι $\frac{1}{2}(AB)(A\Delta)\text{ἡμ}A$, ἤτοι τὸ ζ. ἐμβαδὸν εἶναι $(AB)(A\Delta)\text{ἡμ}A$.

497. Εἶναι $\alpha=2R\text{ἡμ}A=16\text{ἡμ}(35°15')$, $\beta=16\text{ἡμ}(75°\ 30')$, $\gamma=$
$=16\text{ἡμ}[180°-(35°\ 15'+75°\ 30')]$ καὶ $E=2R\text{ἡμ}A\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma$ κλπ.

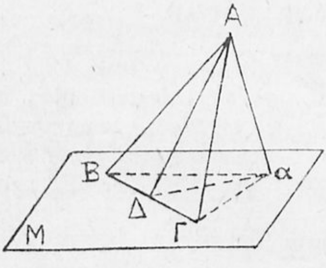
498. Τὰ μέτρα τῶν ζητουμένων διέδρων γωνιῶν εἶναι τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς καθέτου τομῆς ΑΒΓ, διότι αὗται εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων γωνιῶν. Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\alpha=20$, $\beta=16$ καὶ $\gamma=12$, τὰ ζ. μέτρα θὰ τὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν τύπων:

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}=\sqrt{\frac{8.12}{24.4}}=1.$$ Ὅθεν $\frac{A}{2}=45^{0}$ καὶ $A=$ $=90^{0}$.

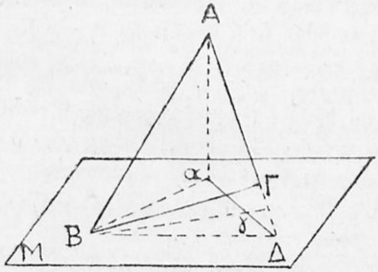
$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\beta)}}=\sqrt{\frac{4.12}{24.8}}=\frac{1}{2}$$ κλπ. καὶ

$$\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}}=\sqrt{\frac{4.8}{24.12}}=\frac{1}{3}$$ κλπ.

499. α΄. Ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν μίαν τῶν πλευρῶν του, ἔστω τὴν ΒΓ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ τῆς προβολῆς. Ἀλλ' ἐπειδὴ προφανῶς τὸ τρίγωνον τῆς προβολῆς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Μ Σχ. 499 α΄. Κατόπιν τούτων φέρομεν ἐκ τῆς προβολῆς



Σχ. ἀσκ. 499α΄.



Σχ. ἀσκ. 499β΄.

α τῆς κορυφῆς Α, τὴν αΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ὁπότε καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ θὰ εἶναι, κατὰ τὸ Θ. τῶν τριῶν καθέτων, κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι θὰ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλ' ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων αΒΓ καὶ ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αΔ, ΑΔ, ἤτοι εἶναι $\frac{(\alpha B\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\alpha\Delta}{A\Delta}=$ $=\sigma\upsilon\nu A\Delta\alpha$. Ἡ ὀξεῖα δὲ γωνία ΑΔα εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν τοῦ τριγώνου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς προβολῆς. Ὅθεν $(\alpha B\Gamma)=(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu(A\Delta\alpha)$.

β΄. Ἤδη ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ θέσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς Μ εἶναι οἱαδήποτε (Σχ. 499β΄). Ἐὰν δὲ ἡ κορυφὴ Β εἶναι πλησιεστέρα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Μ, μεταθέτομεν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, μέχρις ὅτου διέλθῃ διὰ τῆς Β. Ἤδη, ἔστω Δ τὸ σημεῖον εἰς ὃ ἡ προέκτασις τῆς πλευρᾶς ΑΓ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Μ. Ἀλλὰ τότε ἡ αγ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Μ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Δ. Ἑπομένως, ἐὰν ω εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου μετὰ τοῦ ἐπιδέδου τῆς προβολῆς, θὰ ἔχωμεν (1ον)

$(\alpha B\Delta)=(AB\Delta)\sigma\upsilon\nu\omega$, $(\gamma B\Delta)=(\Gamma B\Delta)\sigma\upsilon\nu\omega$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη $(\alpha B\gamma)=(AB\Gamma)\sigma\upsilon\nu\omega$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀληθεύει καὶ *ὅταν προβάλωμεν οἱονδήποτε ἐπίπεδον πολύγωνον.* Διότι ἀναλύομεν τοῦτο εἰς τρίγωνα. Τὸ ἐμβαδὸν δὲ τῆς προβολῆς τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προβολῶν τῶν τριγώνων.

500. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ κέντρον τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἡ ΚΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτήν, ἡ δὲ ζητουμένη γωνία εἶναι ἡ ΚΑΔ=φ. Οὕτως εἶναι $συνφ=\frac{(ΔΑ)}{(ΚΑ)}$. Ἀλλ' ἡ ΔΑ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ἤτοι εἶναι $(ΔΑ)=\frac{2}{3}\cdot\frac{α\sqrt{3}}{2}=\frac{α\sqrt{3}}{3}$. Ὅθεν $συνφ=\frac{α\sqrt{3}}{3}:α=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $λογσυνφ=\frac{1}{2}\cdot 0,47712-0,47712=\overline{1},76144$ καὶ $φ=54^0\ 44''\ 7''$.

501. $β^2=4R^2ἡμ^2Β$, $γ^2=4R^2ἡμ^2Γ$ καὶ $β^2+γ^2=4R^2(ἡμ^2Β+ἡμ^2Γ)=$ $=4R^2$ διότι ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως $Β=90^0+Γ$ ἕπεται $ἡμΒ=συνΓ$ (ἄσκ. 300), ἤτοι ἕπεται $ἡμ^2Β+ἡμ^2Γ=συν^2Γ+ἡμ^2Γ=1$.

502. Ἐκ τῆς 2ας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\frac{2}{ἐφχ}+\frac{4}{ἐφψ}=1$, ἤτοι $2ἐφψ+4ἐφχ=ἐφχἐφψ$ (ι). Ἐπειδὴ δὲ ἡ 1η δίδει $ἐφψ=4-9ἐφχ$, ἡ (ι) γίνεται $2.(4-9ἐφχ)+4ἐφχ=ἐφχ(4-9ἐφχ)$, ἤτοι $9ἐφ^2χ-18ἐφχ+8=0$ καὶ $ἐφχ=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{9}=\frac{4}{3}$ ἢ $\frac{2}{3}$. Ὥστε εἶναι $ἐφψ=-8$ ἢ -2.

Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματα $ἐφχ=\frac{4}{3}$, $ἐφψ=-8$ καὶ $ἐφχ=\frac{2}{3}$, $ἐφψ=-2$.

Ἐκ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν $λογἐφχ=0,60206-0,47712=0,12494$ καὶ $χ=53^0\ 7'\ 49''$, τοῦ ὁποίου ἡ γενικὴ τιμὴ εἶναι $χ=180^0.λ+53^0 7' 49''$. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς $ἐφψ=-8$, ἔχομεν $ἐφ(180^0-ψ)=8$ καὶ $λογἐφ(180^0-ψ)=$ $=0,90309$ καὶ $180^0-ψ=82^0\ 52'\ 29'',7$, ἤτοι $ψ=97^0\ 7'\ 30'',3$, οὗ ἡ γενικὴ τιμὴ εἶναι $180^0.λ+97^0\ 7'\ 30'',3$. Ὁμοίως ἐκ τοῦ δευτέρου συστήματος εὑρίσκομεν $λογἐφχ=0,30103-0,47712=\overline{1},82391=λογἐφ(33^0 41' 24'')$ ἤτοι $χ=180^0.λ+33^0\ 41'\ 24''$.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς $ἐφψ=-2$, ἔχομεν $ἐφ(180^0-ψ)=2$, $λογἐφ(180^0-$ $-ψ)=0,30103=λογἐφ(63^0\ 26'\ 6'')$. Ὅθεν $ψ=180^0.λ+180^0-63^0\ 26'\ 6''$.

503. Εἶναι $\frac{2ἐφχ}{1-ἐφ^2χ}=3ἐφχ$, ἤτοι $ἐφχ\left(\frac{2}{1-ἐφ^2χ}-3\right)=0$.

Ὅθεν ἢ $ἐφχ=0$, ὁπότε $χ=λπ$, ἢ $\frac{2}{1-ἐφ^2χ}-3=0$, ἤτοι $ἐφ^2χ=\frac{1}{3}$ καὶ $ἐφχ=\frac{1}{\sqrt{3}}$, ὁπότε $χ=λπ+\frac{π}{6}$ ἢ $ἐφχ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ὁπότε $χ=λπ-\frac{π}{6}$.

504. Ἐὰν ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ, ζητεῖται ἡ ἀπόστασις $(ΑΔ)=(ΟΑ)-(ΟΔ)=(ΟΑ)-(ΟΒ)συν(ΑΟΒ)$, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΒΔ. Ἐπειδὴ δὲ $ΟΑ = ΟΒ = 0{,}5$, ἕπεται

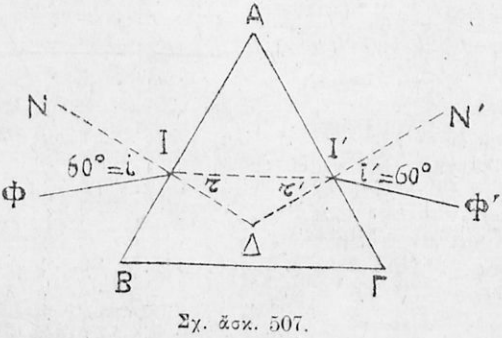
$$(ΑΔ)=(ΟΑ)\,[1-συν(ΑΟΒ)]=(ΟΑ).2ημ^2\left(\frac{ΑΟΒ}{2}\right)=0{,}5.2ημ^2(1^\circ 5')=$$

$= ημ^2(1^\circ 5')$ καὶ $λογ(ΑΔ)=2λογημ(1^\circ 5')=2.\bar{2},27661=\bar{4},55322$ καὶ $(ΑΔ)=0{,}0003574538$ μ.

505. Ἡ γωνία φ τῆς προσπτώσεως ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως, ἥτις εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας θ, τῆς ἀνακλωμένης ἀκτῖνος μετὰ τοῦ κατόπτρου. Ἀλλ' ἡ γωνία θ εἶναι γωνία τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, μὲ ἀπέναντι κάθετον τὴν ἀπόστασιν τοῦ ὀφθαλμοῦ τοῦ παρατηρητοῦ ἀπὸ τοῦ κατόπτρου καὶ προσκειμένην κάθετον τὴν ἄλλην δοθεῖσαν ἀπόστασιν. Ὅθεν εἶναι $ἐφθ=\frac{0{,}38}{0{,}15}=$ $=\frac{38}{15}$. Οὕτω δὲ προσδιορίζομεν τὴν γωνίαν θ καὶ κατόπιν τὴν $φ=90^\circ-θ$.

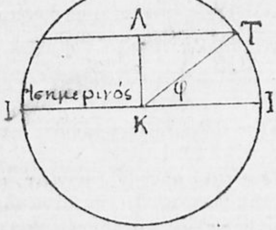
506. Γνωρίζομεν ὅτι, ἐὰν i εἶναι ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως καὶ r ἡ τῆς διαθλάσεως εἶναι $\frac{ημi}{ημr}=\frac{4}{3}$. Ὥστε εἶναι $ημr=\frac{3}{4}$. καὶ $ημi=$ $=0{,}75ημ(38^\circ 12')$, $λογημr=\bar{1},87506+\bar{1},79128=\bar{1},66634$ καὶ $r=27^\circ\,38'$.

507. Ἔστω i ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως, r ἡ τῆς διαθλάσεως, r′ ἡ γωνία τῆς προσπτώσεως τῆς εἰσδυούσης ἀκτῖνος καὶ i ἡ τῆς διαθλάσεως. Τότε, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Φυσικῆς, εἶναι $\frac{ημi}{ημr}=$ $=\frac{ημi'}{ημr'}=ν$, $Α=r+r'$ καὶ $Δ=i+i'-Α$. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν $\frac{ημi.ημr'}{ημi'.ημr}=1$, ἢ ἐπειδὴ $i=i'=60^\circ$, $\frac{ημr'}{ημr}=1$, ἤτοι $r'=r$. Ἐπειδὴ δὲ



Σχ. ἄσκ. 507.

$Α=r+r'$, ἤτοι $60^\circ=2r$, ἕπεται $r=30^\circ$. Οὕτως ἐκ τοῦ τύπου $\frac{ημi}{ημr}=ν$, λαμβάνομεν: $ν=\frac{ημ60^\circ}{ημ30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.



Σχ. ἀσκ. 508.

508. Ἡ ζητουμένη γωνία φ, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΛΤΚ, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΛΤ εἰς ὃ ΚΤ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς καὶ ΛΓ ἡ ἀκτὶς τοῦ παραλλήλου. Ὅθεν εἶναι συνΛΤΚ $= \text{συν}\varphi = \frac{(\Lambda\text{T})}{(\text{KT})} = \frac{2}{3} \cdot \text{Λογσυν}\varphi =$ $= 0{,}30103 - 0{,}47712 = \bar{1}{,}82391$ καὶ $\varphi = 48^\circ\, 11'\, 21'', 43$.

509. Ἡ ΟΠ, ὡς ἔχουσα Ν—Δ κατεύθυνσιν, σχηματίζει μετὰ τῆς γραμμῆς Βορρᾶ—Νότου γωνίαν 45°, μετὰ τῆς γραμμῆς δὲ αὐτῆς ἡ ΠΠ′ σχηματίζει ὡσαύτως γωνίαν 45°. Οὕτως ἡ γωνία ΟΠΠ′ τοῦ τριγώνου ΟΠΠ′ εἶναι ὀρθή.

Ὥστε εἶναι $(\text{ΟΠ}') = \frac{(\text{ΟΠ})}{\text{ἡμ}45^\circ} = 30\sqrt{2}$ χλμ. $= 30 \cdot 1{,}414 = 42{,}420$ χλμ. Ἐξ ἄλλου δὲ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου εἶναι $30:3 = 10$ χλμ.

510. Ἔστω ΟΓ τὸ διὰ τοῦ ὀφθαλμοῦ Ο τοῦ παρατηρητοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον, ΒΔ ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης, Α τὸ ἀεροπλάνον καὶ Α′ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ.

Ἐὰν θέσωμεν (ΑΒ)=χ (=Α′Β), ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΓ καὶ ΟΓΑ′ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως: $(\text{ΑΓ}) = \chi - \upsilon = (\text{ΟΓ})\text{ἐφ}\vartheta$, $(\text{Α}'\text{Γ}) = \chi + \upsilon = (\text{ΟΓ})\text{ἐφ}\varphi$. Ὅθεν:

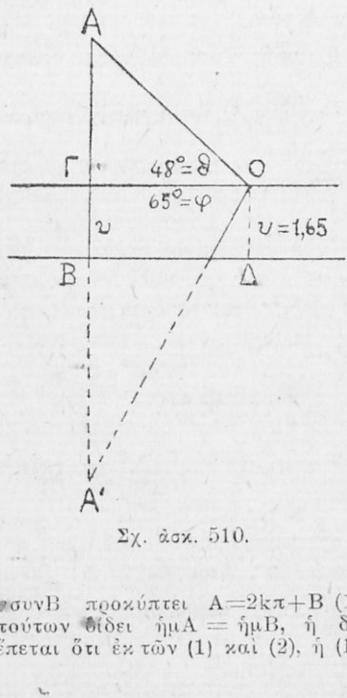
$$\frac{\chi+\upsilon}{\chi-\upsilon} = \frac{\text{ἐφ}\varphi}{\text{ἐφ}\vartheta},\quad \frac{\chi}{\upsilon} = \frac{\text{ἐφ}\varphi + \text{ἐφ}\vartheta}{\text{ἐφ}\varphi - \text{ἐφ}\vartheta} =$$

$$= \frac{\text{ἡμ}(\varphi+\vartheta)}{\text{ἡμ}(\varphi-\vartheta)}.$$ Οὕτως ἔχομεν:

$$\chi = \upsilon \cdot \frac{\text{ἡμ}(\varphi+\vartheta)}{\text{ἡμ}(\varphi-\vartheta)} = 1{,}65 \cdot \frac{\text{ἡμ}113^\circ}{\text{ἡμ}17^\circ} =$$

$$= 1{,}65 \cdot \frac{\text{ἡμ}67^\circ}{\text{ἡμ}17^\circ}.$$ καὶ λογχ=

$= 0{,}21748 + \bar{1}{,}96403 - \bar{1}{,}46594 =$ $= 0{,}71557$ καὶ $\chi = 5{,}1947$ μ., ὅπερ ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.



Σχ. ἀσκ. 510.

511. Ἂν τόξεφα = φ, εἶναι ἐφφ = α καὶ ἂν τόξεφβ = ϑ, εἶναι ἐφϑ = β. Ἀλλ' $\text{ἐφ}(\varphi+\vartheta) = \frac{\text{ἐφ}\varphi + \text{ἐφ}\vartheta}{1 - \text{ἐφ}\varphi\text{ἐφ}\vartheta} = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$. Οὕτως εἶναι $\text{τόξεφ}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \varphi + \vartheta$.

512. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως συνΑ = συνΒ προκύπτει $\text{Α} = 2\text{k}\pi + \text{Β}$ (1) ἢ $\text{Α} = 2\text{k}\pi - \text{Β}$ (2) ἀλλ' ἡ πρώτη τούτων δίδει ἡμΑ = ἡμΒ, ἡ δὲ δευτέρα δίδει ἡμΑ = −ἡμΒ. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἡ (1) ἐπαληθεύει τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $A-B=2k\pi$.

513. Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\chi}{\alpha}$, $\eta\mu\omega=\frac{\psi}{\beta}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}$,

ἤτοι $\frac{\chi^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$

514. 1) Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{\alpha^2}{\chi^2}$ καὶ $\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{\beta^2}{\psi^2}$. Ἀλλ' ἐκ τῆς 2ας αὐτῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν (τ, 16, σελ. 65) $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{\psi^2}{\psi^2+\beta^2}$

Οὕτως εἶναι $\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\psi^2}{\psi^2+\beta^2}$, ἤτοι $\alpha^2(\psi^2+\beta^2)=\chi^2\psi^2$.

2) Ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu^3\omega=\frac{\chi}{\alpha}$, $\eta\mu^3\omega=\frac{\psi}{\beta}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt[3]{\frac{\chi}{\alpha}}$, $\eta\mu\omega\sqrt[3]{\frac{\psi}{\beta}}$,

$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\sqrt[3]{\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^2}$, $\eta\mu^2\omega=\sqrt[3]{\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2}$. Ὅθεν $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=$

$=\sqrt[3]{\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2}$, ἤτοι $\sqrt[3]{\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{\psi}{\beta}\right)^2}=1.$

515. $2\,\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\ \sigma\upsilon\nu(A-B)-\sigma\upsilon\nu(A+B)\right]$

$4\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1-1+2\eta\mu^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right)+\eta\mu^2\left(\frac{A+B}{2}\right)=1.$

καὶ τέλος $\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}-\eta\mu\,\frac{A+B}{2}\right)^2=1.$

516. Εἶναι $(B\Delta):(\Delta\Gamma)=\gamma:\beta$. Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ ἕπεται $\gamma:\beta=\eta\mu\Gamma:\eta\mu B$. Ὅθεν $(B\Delta):(\Delta\Gamma)=\eta\mu\Gamma:\eta\mu B$.

517. 1) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma.\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$, διότι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

2) $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma.\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$, διότι $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

518. Εἶναι $\Gamma=90°-B$. Ἐκ δέ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως $\gamma=\frac{\upsilon}{\eta\mu B}$ καὶ $\beta=\frac{\upsilon}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\upsilon}{\sigma\upsilon\nu B}$

Οὕτω δὲ εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\upsilon}{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B}=\frac{2\upsilon}{\eta\mu 2B}$ καὶ τέλος ἔχομεν $E=\frac{1}{2}\alpha\upsilon=\frac{\upsilon^2}{\text{ἡμ}2B}$.

519. Εἶναι $\beta+\gamma=\alpha(\text{ἡμ}B+\text{ἡμ}\Gamma)=2\alpha\,\text{ἡμ}\frac{B+\Gamma}{2}\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}$, ἤτοι $12=$ $=20\text{ἡμ}45^\circ\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\text{συν}\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{5}=0{,}6\sqrt{2}$.

Οὕτω δὲ ἔχομεν $\text{λογσυν}\frac{B-\Gamma}{2}=\bar{1}{,}77815+0{,}15051=\bar{1}{,}92866$ καὶ $\frac{B-\Gamma}{2}=31^\circ\,57'$, ἤτοι $B-\Gamma=63^\circ\,54'$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ ἐκ τῆς $B+\Gamma=90^\circ$, εὑρίσκομεν $B=76^\circ\,57'$ καὶ $\Gamma=13^\circ\,3'$. Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν τὰ ἄλλα στοιχεῖα ἐκ τῶν τύπων $\beta=\alpha\text{ἡμ}B$, $\beta=\alpha\text{ἡμ}\Gamma$ καὶ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$.

520. Εἶναι $A=180^\circ-(B+\Gamma)$. Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\text{ἡμ}A}=\frac{\beta}{\text{ἡμ}B}=\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B+\text{ἡμ}\Gamma}=\frac{2\tau}{\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B+\text{ἡμ}\Gamma}$$

Ἀλλὰ $\text{ἡμ}A+\text{ἡμ}B+\text{ἡμ}\Gamma=2\text{ἡμ}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2}+2\text{ἡμ}\frac{\Gamma}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}=$

$$=2\text{συν}\frac{\Gamma}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2}+2\text{συν}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\text{συν}\frac{\Gamma}{2}\left(\text{συν}\frac{A-B}{2}+\text{συν}\frac{A+B}{2}\right)=2\text{συν}\frac{\Gamma}{2}\cdot2\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}=$$

$$=4\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὅθεν $\alpha=\dfrac{2\tau.2\text{ἡμ}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{A}{2}}{4\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}}=\dfrac{\tau\text{ἡμ}\frac{A}{2}}{\text{συν}\frac{B}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}}$,

$\beta=\dfrac{\tau\text{ἡμ}\frac{B}{2}}{\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{\Gamma}{2}}$, $\gamma=\dfrac{\tau\text{ἡμ}\frac{\Gamma}{2}}{\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}}$. Τέλος εἶναι:

$$E=\tau^2.\text{ἐφ}\frac{A}{2}\text{ἐφ}\frac{B}{2}\text{ἐφ}\frac{\Gamma}{2}.$$

521. Ἔστω Ο ἡ κορυφή, Κ τὸ κέντρον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ καὶ Ε τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ. Τότε εἶναι $(AO)=20$, $(AE)=6$, $(AK)=$ $=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ καὶ $(OK)=\sqrt{(OA)^2-(KA)^2}=\sqrt{20^2-36.2}=2\sqrt{82}$. Οὕτω διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΟΕΚ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις, ἔχομεν $\text{ἐφ}OEK=\frac{(OK)}{(EK)}=\frac{2\sqrt{82}}{6}=\frac{\sqrt{82}}{3}$ καὶ $\text{λογἐφ}OEK=$ $=0{,}95691-0{,}47712=0{,}47979$ καὶ $OEK=71^\circ\,40'\,14''$.

ΤΕΛΟΣ

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1) ΜΕΓΑΛΗ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ. Εἰσαγωγή. Τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις. Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες, ἐξισώσεις καὶ ἀνισότητες. Τριγωνομετρικὰ συστήματα. Ἀντίστροφοι κυκλικαὶ συναρτήσεις. Ἀπαλοιφή. Ἐπιλύσεις. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα. Ἀπροσδιόριστοι μορφαί. Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν Τοπογραφίαν, Φυσικήν, Ναυτιλίαν, Ἀεροπλοΐαν, Κοσμογραφίαν κ. ἄ. Ποικίλαι ἀσκήσεις μεθ' ἕκαστον κεφάλαιον. Ἀσκήσεις ἐπὶ ἀπολύτων τιμῶν.

2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΑΥΤΩΝ. Εἶναι αἱ περιεχόμεναι εἰς τὴν Μεγάλην Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν.

3) ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Ἢ ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ. Περιέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτέρας σχολάς.

4) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.

5) ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. Περιέχει ὅλας τὰς Γεωμετρικὰς μεθόδους αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς ὁδηγίας διὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῶν δίδουν εἰς τὸν μαθητὴν τὴν ἱκανότητα νὰ λύῃ μὲ εὐχέρειαν καὶ δυσκόλους ἀσκήσεις Ἐπιπεδομετρίας καὶ Στερεομετρίας.

6) ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ (νέα ἔκδοσις) τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Ἐκτὸς τούτων περιέχει τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τιμῶν καὶ τῶν ἓξ τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων καὶ 29 ἄλλους χρησίμους πίνακας καὶ μέγαν ἀριθμὸν τύπων ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλγέβρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας (ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς), Μηχανικῆς, Φυσικῆς καὶ Κοσμογραφίας. Ἀκόμη δὲ περιέχει παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συναρτήσεις.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

(Συνέχεια ἐκ τῆς προηγουμένης σελίδος)

7) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀναποδείκτων θεωρημάτων καὶ πορισμάτων αὐτῆς. Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων. Σημειώσεις ἐπὶ σημαντικῶν προβλημάτων. Πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας διὰ τὴν ταχυτέραν λύσιν γεωμετρικῶν ζητημάτων.

8) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἐννοιῶν. Κανόνας, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας ὡς ἀνωτέρω.

9) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* Ἐκτὸς τῶν λύσεων περιέχει: Παρατηρήσεις καὶ γενικεύσεις τῶν ἐννοιῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, πίνακας τύπων καὶ ὁδηγίας ὡς ἀνωτέρω.

10) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΚΟΣΜΟΓΡΑΦΙΑΣ *τοῦ Ὀργανισμοῦ Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων.* (Πρὸ ἑκάστης ὁμάδος ἀσκήσεων ἐκτίθεται κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ σύντομον καὶ μὲ τὰ νεώτερα δεδομένα ἡ ὕλη τῆς Κοσμογραφίας ἡ σχετικὴ μὲ τὰς ἀσκήσεις).

11) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ *τοῦ Ο.Ε.Σ.Β.* μὲ ἁπλουστεύσεις μαθηματικῶν ἐννοιῶν, παρατηρήσεις, ἐπεξηγήσεις, πρακτικοὺς κανόνας, τύπους, ὁδηγίας καὶ ἀριθ. πίνακας, διὰ τὴν εὐκολωτέραν καὶ ταχυτέραν λύσιν τῶν ζητημάτων.

12) ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΓΡΙΜΕΝΗΣ ΠΡΑΚΤ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *τοῦ Ο.Ε.Σ.Β.* ὁμοίως ὡς ἄνω.